

7.7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

279

40

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΤΕΛΟΥΣΑ

ΕΚΔΟΣΗ

Ε 2 φ.ε.τ.
ΣΑΛΤΕΡΗ Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ
ΔΡΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΜΕΤΣΟΒΙΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

Περυσανίδις (Σαλτερής Γ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

2 ————— 1
ΤΟΜΟΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ • ΘΕΡΜΟΤΗΣ • ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

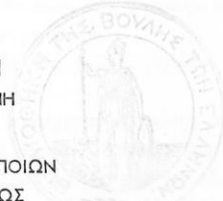
ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΝ ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ
ΑΝΑΝΕΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ 2334 ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΚ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ
526 ΛΕΛΥΜΕΝΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ
ΜΕΤΑ 300 ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΑΘΑΝ. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΟΔΟΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 — ΑΘΗΝΑΙ
===== 1963 =====



*Καταχωρήθηκε στο βιβλίο της περιγραφής
498*

002
KAE
E53
310

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ • ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ • ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ
ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΙΝΑΙ ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Απαγορεύεται ή ανατύπωση του παρόντος συγγράμματος,
έν όλω ή έν μέρει, άνευ έγγραφου άδειας του συγγραφέως.

COPYRIGHT BY S.G. PERISTERAKIS

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ "ΚΟΝΤΟΥ, ΣΩΚΡΑΤΟΥΣ 39, ΑΘΗΝΑΙ ΤΗΛ. 537-705

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβάνει μίαν νέαν πλήρη συλλογὴν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Φυσικῆς, ἀναφερομένων κυρίως εἰς θέματα τῆς στοιχειώδους Φυσικῆς, τῶν ὁποίων ἡ θεωρία ἀναγράφεται εἰς τὰ βιβλία ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς». Ὡς ἐκ τούτου, τὸ βιβλίον τοῦτο ἀνταποκρίνεται τελείως πρὸς τὰς ἐπιδιώξεις τῶν ἐπονηγίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ καθίσταται πολέμιον ἐφόδιον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου κατεβλήθη μεγάλη προσπάθεια νὰ περιληφθοῦν εἰς αὐτὸ ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὑποδειγματικά, μὲ σαφεῖ, σύντομον καὶ τελείαν διατύπωσιν, ταξινομημένα εἰς κατηγορίας, συμφώνως πρὸς τὰς κοινὰς ὁμοιότητας τὰς ὁποίας παρουσιάζουν ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον εἰς τὸ ὅποιον ἀναφέρονται καὶ ὡς πρὸ τὸν τρόπον τῆς λύσεώς των.

Τὰ προβλήματα Φυσικῆς ἀποτελοῦν οὐσιῶδες στοιχεῖον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς διδασκομένης ἔλης τῆς Φυσικῆς καὶ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα, τόσον τῆς διδασκαλίας ὅσον καὶ τῆς μελέτης τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, πρὸς τελείαν ἐκμάθησιν αὐτῆς.

Εἶναι ὄντως ἀναμφισβήτητον ὅτι, διὰ τῆς ἐπιλύσεως πολλῶν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς ὅλα ἐν γένει τὰ κεφάλαια τῆς Φυσικῆς, οἱ σπουδασταὶ εὐρίσκουν τὴν εὐκαιρίαν ὄχι μόνον νὰ ἐπαλαμβάνουν τὴν ἔλην ἐκάστον κεφαλαῖον, ἀλλὰ, πρὸς τούτοις, νὰ συνηθίζον εἰς τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῶν φυσικῶν νόμων, εἰς τὴν ὁρθὴν ἐφαρμογὴν τῶν διαφορῶν τύπων, ὡς καὶ τῶν συστημάτων μονάδων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ἡ Φυσικὴ, ἐπὶ πλέον δὲ ἐξοικειοῦνται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὁρθῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

Ἐξ ἄλλου—καὶ τοῦτο ἔχει κεφαλαιώδη σημασίαν—διὰ τῆς ἐπιλύσεως προβλημάτων Φυσικῆς οἱ σπουδασταὶ κατανοοῦν τὴν μεγίστην πρακτικὴν σημασίαν τοῦ μαθήματος τούτου καὶ εἰς αὐτὸν ἀκόμη τὸν καθ' ἡμέραν βίον, πράγμα τὸ ὅποιον, ἀναμφιβόλως, συντελεῖ σπουδαίως εἰς τὴν διέγερσιν τῆς ἀγάτης αὐτῶν πρὸς τὴν Φυσικὴν καὶ τοῦ ζήλου των πρὸς ἀπόκτησιν ὅσον τὸ δυνατόν περισσοτέρων γνώσεων.

Τὸ σύνολον τῶν προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ὑποδιαιρεῖται εἰς τέσσαρας κατηγορίας :

Ἡ πρώτη περιλαμβάνει προβλήματα, τῶν ὁποίων παρέχεται ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ὡς καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ ἐνδιατρίβῃ μετ' ἐπιμονῆς καὶ ἐπιμελείας, διὰ νὰ κατανοήσῃ καλῶς τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθῇ κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Φυσικῆς. Εἰς τὸ μέρος τοῦτο παρατίθενται καὶ ἀρκετὰ βοηθητικὰ γνώσεις, ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ὁρθὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Αἱ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων τούτων θὰ περιέχωνται εἰς τὰς νεωτέρας ἐκδόσεις τῶν βιβλίων ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς».

Ἡ δευτέρα κατηγορία περιλαμβάνει τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ τὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὅποιον πρέπει νὰ καταλήξῃ ὁ σπουδαστής, ἐὰν ἔλυσεν ὁρθῶς ταῦτα. Καὶ ἡ δευτέρα κατηγορία προβλημάτων ἔχει σπουδαιότητα σημασίαν, διότι δίδει εἰς τὸν σπουδαστὴν τὴν εὐκαιρίαν νὰ δοκιμάσῃ κατὰ πόσον κατέστη ἱκανὸς νὰ ἐπιλύῃ μόνος προβλήματα Φυσικῆς, χωρὶς οὐδεμίαν ἄλλην βοήθειαν. Ἡ διαρκὴς ἄλλως τε παρὰ-

θεσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων εἶναι καὶ ἀντιπαιδαγωγική, διότι ἀποκλείει τὴν αὐτενέργειαν τοῦ σπουδαστοῦ.

Ἡ τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει μόνον τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ ἀπευθύνεται πρὸς σπουδαστὰς ἐξοικειωθέντας ἤδη εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης καὶ δευτέρας κατηγορίας, ἐπαφίεται δὲ εἰς αὐτοὺς ὅπως, διὰ καταλλήλου βασάνου, συμπεράνουν περὶ τῆς ὁρθότητος τοῦ ἀποτελέσματος εἰς τὸ ὅποιον κατέληξαν.

Τέλος, ἡ τετάρτη κατηγορία, ἡ ὁποία παρατίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου, περιλαμβάνει προβλήματα Φυσικῆς ἀνωτέρας συνθέσεως καί, ἐπομένως, δυσκολώτερα τῶν τριῶν προηγουμένων κατηγοριῶν, ἀπευθύνεται δὲ πρὸς ἐκείνους ἐκ τῶν σπουδαστῶν, οἱ ὅποιοι θὰ ἐπεθύμουν ν' ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν λύσιν συνθετοτέρων προβλημάτων.

Ἐθεωρήθη σκόπιμος ἡ παράθεσις, κατὰ τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης, εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον χαρακτηριστικῶν τινῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ παρελθὸν ἔχουν δοθῇ ὡς θέματα εἰς τὰς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Οὕτως οἱ ὑποψήφιοι θὰ εἶναι εἰς θέσιν διὰ τῆς λύσεως τούτων νὰ ἐκτιμήσουν τὰς ἱκανότητάς των.

Τὸ βιβλίον συμπληροῦται καὶ διὰ καταλλήλου συλλογῆς πινάκων φυσικῶν σταθερῶν, εἰς τοὺς ὁποίους οἱ σπουδασταὶ δύνανται ν' ἀναζητοῦν ὠρισμένας σταθεράς, ἀπαραίτητους διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν περιέχονται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

Παρὰ τὴν συστηματικὴν ἐπαλήθευσιν τῶν εξαγομένων τῶν προβλημάτων, ὡς καὶ τὴν καταβληθεῖσαν ἐπιμέλειαν καὶ μεγάλην προσοχὴν κατὰ τὴν διόρθωσιν τῶν δοκιμῶν, εἶναι πολὺ πιθανόν, λόγῳ τῆς φύσεως τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου, νὰ παρεξέφερον ἀβλεψίαν ὡς ἐκ τούτου παρακαλοῦμεν θερμῶς τοὺς ἀναγνώστας καὶ τοὺς συναδέλφους καθηγητάς, ἐὰν τυχὸν ἤθελον παρατηρήσει τοιαύτας, ὅπως μᾶς πληροφορήσουν περὶ αὐτῶν, ἵνα τὰς ἔχωμεν ὑπ' ὄφιν, θὰ τοὺς εἴμεθα δὲ ἐξαιρετικῶς ὑπόχρεοι.

Παραδίδοντες τὸ βιβλίον τοῦτο εἰς τὴν δημοσιότητα, θέλομεν νὰ πιστεύωμεν, ὅτι θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν ἐξύψωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῶν γνώσεων Φυσικῆς τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, ἐὰν δὲ τοῦτο ἤθελεν ἐπιτευχθῇ, ὃ ἀπετέλει δι' ἡμᾶς ὑψίστην ἠθικὴν ἱκανοποίησιν.

Ὅλας τὰς ἀσκήσεις τοῦ βιβλίου τούτου ἔλυσεν ὁ Φυσικὸς κ. **Μηνᾶς Μακρόπουλος**, τὸν ὁποῖον εὐχαριστῶ θερμῶς καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἐπίσης ἐκφράζω τὰς εὐχαριστίας μου εἰς τὸν βοηθὸν τοῦ Ἑργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κ. **Χ. Μηλιαροκατερινάκην**, ὡς καὶ εἰς τοὺς φοιτητάς τοῦ Φυσικοῦ τμήματος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κυρίους **Νικ. Γαρυφάλου** καὶ **Δημ. Λεωνίδου**, οἱ ὅποιοι μὲ ἐβοήθησαν εἰς τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης.

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις τοῦ βιβλίου ἐπισφραγίζει μίαν δεκαετίαν στενῆς συνεργασίας μου μετὰ τοῦ ἐκλιπόντος καθηγητοῦ **Κ. Παλαιολόγου** εἰς τὴν συγγραφὴν βιβλίων Φυσικῆς. Ὁ ἀδόκητος θάνατος τοῦ καθηγητοῦ Κ. Παλαιολόγου μὲ στερεῖ τῆς συνεργασίας ἐνὸς ἀδιαμφισβητήτως μεγάλου κύρους ἐπιστήμονος Φυσικοῦ.

Ἀθῆναι, Σεπτέμβριος 1957.

Σ. Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ ἐντὸς βραχυτάτου χρονικοῦ διαστήματος ἐξάντλησις τοῦ πρώτου τόμου τῶν «*Ἀσκήσεων Φυσικῆς*» καὶ κατὰ τὴν τρίτην αὐτοῦ ἔκδοσιν, ἀποτελεῖ ἀναμφισβήτητον ἀπόδειξιν τῆς ἐξαιρετικῆς ὑποδοχῆς τῆς ὁποίας ἔτυχε τὸ βιβλίον τοῦτο ὑπὸ τοῦ μαθητικοῦ καὶ σπουδαστικοῦ ἀναγνωστικοῦ κοινοῦ. Τὸ γεγονός αὐτὸ ἀποτελεῖ δι' ἡμᾶς ὑψίστην ἡθικὴν ἱκανοποίησιν.

Ἡ παρούσα τετάρτη ἔκδοσις τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου διαφέρει τῆς τρίτης ἐκδόσεως κατὰ τοῦτο, ὅτι ἐνῶ ἡ προηγουμένη ἔκδοσις περιελάμβανε 2025 ἀσκήσεις, ἐξ ὧν 525 λελυμένας, εἰς τὴν παρούσαν ἔκδοσιν περιέχονται 2334 ἀσκήσεις ἐξ ὧν 526 ὑποδειγματικῶς λελυμένα. Τὸ σύνολον δὲ τῶν νέων ἀσκήσεων αἵτινες προστετήθησαν ἀνέρχεται εἰς 600, ἐξ ὧν 65 λελυμένα.

Κατὰ τὴν παρούσαν ἔκδοσιν ἡ διάκρισις τῶν ἀσκήσεων ἐγένετο εἰς τρεῖς κατηγορίας, ἐξ ὧν ἡ Α' περιλαμβάνει ὑποδειγματικῶς λελυμένας ἀσκήσεις, αἱ δὲ ἕτεραι δύο κατηγορίαι Β' καὶ Γ' ἄλλοτους ἀσκήσεις, διὰ τὰς ὁποίας ὁμοῦς ἀναγράφεται τὸ ἀποτέλεσμα. Ἐπειδιώχθη δὲ τῆς μὲν κατηγορίας Β' αἱ ἀσκήσεις νὰ εἶναι γενικῶς ἐνκόλωτεραι καὶ ἀπλοῦστεραι, τῆς δὲ κατηγορίας Γ' δυσκολώτεραι καὶ συνθετώτεραι. Ἐννόητον βεβαίως τυγχάνει τὸ γεγονός ὅτι ὁ χαρακτηρισμὸς μιᾶς ἀσκήσεως ὡς ἐνκόλου ἢ δυσκόλου δὲν εἶναι ἀπόλυτος, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν παραγόντων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐξέχουσιν θέσιν κατέχει καὶ ἡ ἐπίδοσις τοῦ μαθητοῦ.

Ὁ μέγας ἀριθμὸς τῶν ἐπιμελῶς ἐπιλεγεισῶν ἀσκήσεων, ἐξ ὧν πλεῖσται ἐδόθησαν κατὰ τὰς ἐξετάσεις ξένων Πανεπιστημίων, Πολυτεχνείων καὶ Κολλερίων, καθιστᾷ τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ποιοτικῶς ἐφάμιλλον τῶν καλλιτέρων ἀναλόγων τῆς διεθνoῦς βιβλιογραφίας.

Διὰ τὴν πληρεστέραν ἐνημέρωσιν τῶν ὑποψηφίων δι' εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις εἰς τὰς Ἀνωτάτας τοῦ Κράτους Σχολὰς περιελάβομεν εἰς τὴν παρούσαν ἔκδοσιν καὶ ὅλας σχεδὸν τὰς ἀσκήσεις αἵτινες ἐδόθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη εἰς αὐτάς, τὰς δὲ ἀντιπροσωπευτικωτέρας τούτων λελυμένας.

Εἰδικώτερον ὁμοῦς διὰ τοὺς σκοποῦντας ὅπως συμμεθεξοῦν εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τοῦ Ἑθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου, τῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης ὡς καὶ τῶν Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν τῶν δύο Πανεπιστημίων μας, ἐξεδώσαμεν καὶ τρίτον τόμον, ὑπὸ τὸν αὐτὸν τίτλον «*Ἀσκήσεις Φυσικῆς*» καὶ εἰς δύο τεύχη, Α' καὶ Β', περιέχοντα κατὰ πολὺ συνθετοτέρας ἀσκήσεις. Οὕτως ὁ τρίτος τόμος τῶν «*Ἀσκήσεων Φυσικῆς*» διὰ τῆς ὑψηλῆς στάθμης τοῦ περιεχομένου του, τῆς σχολαστικῆς καὶ ἐπιμελοῦς ἐπιλογῆς τῶν ἐμπειροχομένων ἀσκήσεων μεταξὺ μεγάλου ἀριθμοῦ, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸ ὅλον ἔργον, δημιουργεῖ τὰς καταλλήλους προϋποθέσεις διὰ μίαν γόνιμον προπαρασκευὴν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους.

Τὰς ἀσκήσεις, αἵτινες προσετέθησαν εἰς τὴν παροῦσαν τετάρτην ἔκδοσιν, ἔλυσαν ὁ Χημικὸς Μηχανικὸς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κ. Ἰωάννης Φιλίνης καὶ ὁ Φυσικὸς κ. Βασ. Σουρβίνος, εἰς δὲ τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης ἐβοήθησαν ἐπίσης οἱ Φυσικοὶ κ.κ. Χριστόφ. Μηλιαροκατερινάκης, Σωτ. Τσαντίλας καὶ Εὐάγγ. Χρύσου, τοὺς ὁποίους καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης εὐχαριστοῦμεν.

Τὴν ἐν γένει ἐπιμέλειαν τῆς ἐκδόσεως ἀνέλαβεν ὁ κ. Μιχ. Σταματελαΐτος.

Θέλομεν νὰ ἐλπίζωμεν ὅτι καὶ ἡ τετάρτη ἔκδοσις τοῦ πρώτου τόμου τῶν «*Ἀσκήσεων Φυσικῆς*» θὰ τύχῃ τῆς αὐτῆς εὐμενοῦς ὑποδοχῆς, τῆς ὁποίας ἔτυχον καὶ αἱ προγενέστεραι ἐκδόσεις μας.

Ἀθῆναι, Σεπτέμβριος 1963.

Σ. Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗΣ

Ο Δ Η Γ Ι Α Ι

ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεων Φυσικῆς ἀπαιτεῖται νὰ ἔχῃ ὁ σπουδαστὴς τελείαν γνῶσιν τῶν νόμων τῆς Φυσικῆς, ὡς καὶ τῶν βασικῶν τύπων, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται οἱ νόμοι οὗτοι· πρὸς τούτοις ὅμως πρέπει ὁ σπουδαστὴς ν' ἀκολουθήσῃ συστηματικὴν μέθοδον διὰ τὴν ἐπιτυχῆ λύσιν αὐτῶν.

Ὡς ἐκ τούτου ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ παραθέσωμεν μερικὰς ὁδηγίας, τὰς ὁποίας πρέπει ὁ σπουδαστὴς ν' ἀκολουθῇ ἀπαραιτήτως, ἵνα ἐπιτυχάνῃ τὴν ὀρθὴν καὶ ἀκριβῆ λύσιν ἀσκήσεων Φυσικῆς.

Ἡ πραγματικὴ δυσχέρεια διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεως Φυσικῆς ἔγκειται εἰς τὴν ἀκριβῆ ἐφαρμογὴν τῶν γενικῶν ἀρχῶν καὶ νόμων τῆς Φυσικῆς εἰς τὰς ἐκάστοτε παρουσιαζομένας περιπτώσεις. Πολὺ συχνά, διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεως Φυσικῆς ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις ἑνὸς μόνου τύπου, ὅτε διὰ τὴν λύσιν ἀρκεῖ ἀπλῶς νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως τὰ μεγέθη καὶ ἀκολουθῶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις.

Εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς κατηγορίας ταύτης, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ αἱ ἐπλούστεραι, πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ ἀνάγωμεν ὅλα τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων. Ἐὰν δὲν προσέχωμεν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, τότε, ἐνῶ ἐφαρμόζομεν τὸν κατάλληλον τύπον καὶ αἱ λογιστικαὶ πράξεις εἶναι ἀνευ σφάλματος, ἐν τούτοις τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι ἐσφαλμένον, διότι δὲν ἐλάβομεν τὴν πρόνοιαν νὰ ἀναγάγωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς ἓν ἑνιαῖον σύστημα μονάδων.

Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα μονάδων δὲν ὀρίζεται εἰς τὴν ἀσκῆσιν, ἡ ἐκλογὴ αὐτοῦ ἀφίεται εἰς τὴν πρωτοβουλίαν τῶν σπουδαστῶν.

Κανὼν διὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ καταλλήλου συστήματος δὲν ὑπάρχει, ὅλλὰ πρέπει νὰ ἐκλέγωμεν τοῦτο κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε δι' εὐκολωτέρων ὑπολογισμῶν νὰ φθάσωμεν ταχύτερον εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο δὲ ἀποτελεῖ ζήτημα πείρας. Τὸ κάτωθι παρατιθέμενον παράδειγμα διευκρινεῖ τὰ ἀνωτέρω ἐκτιθέμενα :

Ἐφαρμογὴ. Σῶμα ἔχει μᾶζαν 50 kgf καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα 0,5 km/h· πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐκ τῆς Φυσικῆς γνωρίζομεν, ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ($E_{κιν}$) ἐκφράζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ v ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως τὰ μεγέθη τοῦ τύπου καὶ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμούς, θὰ εὔρωμεν :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0,5^2 = 6,25 ;$$

Τὸ ἐξαγόμενον ὄχι μόνον εἶναι ἐσφαλμένον—μολονότι ἐφηρμόσαμεν τὸν κατάλληλον τύπον καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις εἶναι ὀρθαί— ὅλλὰ πρὸς τούτοις δὲν γνωρίζομεν εἰς ποῖαν μονάδα ἐκφράζεται. Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο κατελήξαμεν, διότι δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως δὲν εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων.

Προκειμένου περὶ προβλημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν Μηχανικὴν, χρησιμοποι-

οὔμεν κυρίως τρία συστήματα μονάδων, τὸ σύστημα C.G.S., τὸ σύστημα M.K.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων (Τ.Σ.).

α) Λύσις τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. Ὡς μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα τοῦτο λαμβάνεται τὸ gr, ἐπομένως: $m = 50 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4$ gr, ὡς μονὰς δὲ ταχύτητος τὸ cm/sec, ἐπομένως: $v = 0,50 \cdot 10^5 / 3600 = 14$ cm/sec, ὅθεν:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 14^2 = 4,9 \cdot 10^6 \text{ erg}$$

δεδομένου ὅτι μονὰς ἐνεργείας εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εἶναι τὸ ἐργιον (1erg).

β) Λύσις τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα M.K.S. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς μάζης ἔχομεν τὸ kgr, ἐπομένως: $m = 50$ kgr, καὶ ὡς μονὰς ταχύτητος τὸ m/sec, ἐπομένως: $v = 0,5 \cdot 10^3 / 3600 = 0,14$ m/sec, ὅθεν:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0,14^2 = 0,49 \text{ Joule}$$

δεδομένου ὅτι ὡς μονὰς ἐνεργείας εἰς τὸ σύστημα M.K.S. λαμβάνομεν τὸ 1 Joule.

γ) Λύσις τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς μάζης χρησιμοποιεῖται ἡ Τεχνικὴ μονὰς μάζης (Τ.Μ. μάζης), ἐπομένως εἶναι $m = 50/9,81 = 5,1$ Τ.Μ. μάζης, ὡς μονὰς δὲ ταχύτητος τὸ m/sec, ἐπομένως θὰ εἶναι $v = 0,5 \cdot 10^3 / 3600 = 0,14$ m/sec, ὅθεν:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 0,14^2 = 0,05 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

δεδομένου ὅτι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων ὡς μονὰς ἐνεργείας λαμβάνεται τὸ χιλιογραμμόμετρον (1 kgr·m).

Ἐκτός ὅμως τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων προβλημάτων Φυσικῆς, τὰ ὁποῖα, ὡς εἴπομεν ἤδη, εἶναι καὶ τὰ ὀπλοῦστερα, ὑπάρχει καὶ ἄλλη κατηγορία, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι τόσον ἀπλὰ ὡς τὰ τοῦ προηγούμενου τύπου, διότι διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις πολλῶν τύπων (ἐξισώσεων), διὰ συνδυασμοῦ τῶν ὁποίων προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ πρῶτον μέρος αὐτοῦ περιλαμβάνει τὸ ἄγνωστον μέγεθος καὶ εἰς τὸ δεύτερον ὅλα τὰ δεδομένα μεγέθη.

Διὰ τὴν λύσιν προβλήματος τοῦ τύπου τούτου ἀπαιτεῖται νὰ καταβάλλῃ ὁ σπουδαστὴς σοβαρὰν διανοητικὴν ἐργασίαν, πρὸς κατὰστροφῶν τοῦ τελικοῦ τύπου, καὶ ὅταν τέλος καταστρώσῃ αὐτὸν πρέπει, κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ἐξαγομένου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων, νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του ὅλα τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης κατηγορίας, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ συστήματα μονάδων.

Μεθοδικὴ λύσις ἀσκήσεως

Ἡ λύσις ἀσκήσεως συνθετωτέρας μορφῆς διέρχεται διὰ τῶν ἀκολουθῶν φάσεων:

α) Κατανόησις τῆς ἀσκήσεως. Αὕτη ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μετὰ προσοχῆς ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως τῆς ἀσκήσεως, ὥστε ὁ σπουδαστὴς νὰ συλλάβῃ τὸ περιεχόμενον αὐτῆς καὶ οὕτω νὰ κατορθώσῃ οὗτος νὰ ἐξακριβώσῃ ποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα μεγέθη καὶ ποῖα τὰ δεδομένα.

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις δίδονται ἑλλιπῆ στοιχεῖα ἢ καὶ περισσότερα τῶν ἀπαιτούμενων διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ λύσῃ τὴν ἀσκήσιν ὡς τὰ ἐλλείποντα στοιχεῖα νὰ εἶχον δοθῇ καὶ νὰ ἐξαγάγῃ τὸ ἀποτέλεσμα συναρτήσῃ καὶ τῶν ἐλλειπόντων στοιχείων, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν οὐδόλως ἐπιπρεάζεται ἡ λύσις τῆς ἀσκήσεως καὶ συνεπῶς ὁ σπουδαστὴς δὲν θὰ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του τὰ ἐπὶ πλέον ταῦτα δεδομένα.

β) Ἐκπόνησις διαγράμματος. Ἐφ' ὅσον ὑπάρχει πρὸς τοῦτο ἀνάγκη, κατασκευάζομεν σχέδιον, σημειοῦντες ἐπ' αὐτοῦ ὅλα τὰ δεδομένα καθὼς καὶ τὰ ζητούμενα μεγέθη, καθότι τὸ διάγραμμα διευκολύνει πολὺ τὴν κατανόησιν καὶ ἐπιλύσιν τῆς ἀσκήσεως.

γ) Εὐρεσις τοῦ τελικοῦ τύπου. Ἡ εὐρεσις τοῦ τελικοῦ τύπου, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ ἀγνωστον μέγεθος συναρτῆται τῶν δεδομένων μεγεθῶν, εἰς ὠρισμένα προβλήματα Φυσικῆς εἶναι ἐργασία ὄχι εὐκολος, ἐξαρτᾶται δὲ κυρίως ἀπὸ τὴν πλήρη γνώσιν τῆς θεωρίας τῆς Φυσικῆς καὶ ἀπὸ τὴν πείραν, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ὁ σπουδαστὴς σὺν τῷ χρόνῳ, ἀσχολούμενος μὲ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων.

Πρὸς κατανόησιν τοῦ τελικοῦ τύπου, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τύπους, οἱ ὅποιοι ἀπαραιτήτως δέον νὰ περιέχουν τὸ ζητούμενον μέγεθος καὶ νὰ εἶναι τύποι βασικοὶ καὶ ὄχι πολύπλοκοι.

Διὰ τὴν κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν βασικῶν τούτων τύπων ὁδηγοῦμεθα ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ ζητούμενα, προσέχοντες δὲ πάντοτε, ὥστε διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν οἱ τύποι οὗτοι νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς τὸν τελικὸν τύπον διὰ τῆς συντομωτέρας δυνατῆς ὁδοῦ.

Πρὸς κατανόησιν τῆς ἀκολουθουμένης πορείας εὐρέσεως τοῦ τελικοῦ τύπου δίδομεν κατωτέρω τὴν μεθοδικὴν λύσιν τῆς ἐξῆς ἀσκήσεως ἐκ τῆς Μηχανικῆς :

Ἐφαρμογή. Ἐκκρεμὲς ἔχει περίοδον κινήσεως $T_1 = 2,14 \text{ sec}$ εὐρισκόμενον εἰς ὕψος $h_1 = 5 \text{ km}$ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ποία ἡ περίοδος T_2 τοῦ ἰδίου ἐκκρεμοῦς εἰς ὕψος $h_2 = 32 \text{ km}$ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. (Δίδεται ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς $R = 6,3 \cdot 10^8 \text{ cm}$).

Λύσις. Ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ ζητούμενον μέγεθος T καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι βασικὸς τύπος.

Ἐπειδὴ ἡ περίοδος T καὶ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος g εἶναι μεταβλητὰ μεγέθη, ἐξαρτώμενα ἐκ τοῦ ὕψους, κάνομεν ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὰς δύο ἀναφερομένας περιπτώσεις :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} \quad (1)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}} \quad (2)$$

ὅπου T_1 , g_1 ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς ὕψος h_1 ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, καὶ T_2 , g_2 τὰ αὐτὰ μεγέθη εἰς ὕψος h_2 .

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (2) καὶ (1) ἐξαλείφονται τὰ 2π καὶ l καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad T_2 = T_1 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \quad (3)$$

Ὁ τύπος οὗτος δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος τελικὸς τύπος, διότι περιλαμβάνει τὰ ἀγνωστα μεγέθη g_1 καὶ g_2 . Ἀπὸ τὴν ἐκφώνησιν ὁμως τῆς ἀσκήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν δοθῇ τὰ ὕψη h_1 , h_2 καὶ ἡ ἀκτίς R τῆς Γῆς, ὁδηγοῦμεθα εἰς τὸ νὰ κάμωμεν χρῆσιν καὶ τοῦ τύπου τῆς παγκοσμίου ἑλξεως :

$$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Εἶναι ὁμως $F = B = m \cdot g$ καὶ ὥς ἐκ τούτου εὐρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$g = \frac{k \cdot M}{r^2} \quad (4)$$

Ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν (4) εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ ἔχομεν :

$$g_1 = \frac{k \cdot M}{r_1^2} = \frac{k \cdot M}{(R + h_1)^2} \quad (5)$$

$$g_2 = \frac{k \cdot M}{r_2^2} = \frac{k \cdot M}{(R + h_2)^2} \quad (6)$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ ἄγνωστα μεγέθη M καὶ k , διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (5) καὶ (6) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{(R + h_2)^2}{(R + h_1)^2} \quad (7)$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ g_1/g_2 θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) καὶ ἔχομεν :

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{R + h_2}{R + h_1} \quad (8)$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι προφανῶς καὶ ὁ τελικός, διότι περιέχει ὡς ἄγνωστον μέγεθος μόνον τὸ ζητούμενον T_2 .

δ) Ἐκλογὴ συστήματος μονάδων. Ἐκ τῶν δύο συνηθεστέρων εἰς τὴν Μηχανικὴν συστημάτων, ἥτοι τοῦ συστήματος μονάδων C.G.S. καὶ τοῦ Τεχνικοῦ Συστήματος (Τ.Σ.), ἃς ἐκλέξωμεν διὰ τὴν δοθεῖσαν ἀσκήσιν τὸ σύστημα C.G.S. Ἐκφράζοντες τὰ δεδομένα μεγέθη εἰς μονάδας C.G.S. ἔχομεν : $T_1 = 2,14 \text{ sec}$, $R = 6,3 \cdot 10^8 \text{ cm}$, $h_1 = 5 \text{ km} = 5 \cdot 10^5 \text{ cm}$, $h_2 = 32 \text{ km} = 32 \cdot 10^5 \text{ cm}$.

Σημείωσις. Κάμομεν ἐνταῦθα τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ πηλίκον $R + h_2/R + h_1$ εἶναι πηλίκον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν, ἥτοι μηκῶν, καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἀμφότερα μὲ οἰανδήποτε μονάδα θελήσωμεν, π.χ. km, χωρὶς νὰ δεσμευώμεθα ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ περίοδος εἶναι ἤδη ἐκπεφρασμένη εἰς sec.

ε) Ἀντικατάστασις τῶν δεδομένων μεγεθῶν. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (8) τὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἤδη ἐκφρασθῇ εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων, λαμβάνομεν :

$$T_2 = 2,14 \cdot \frac{6,3 \cdot 10^8 + 32 \cdot 10^5}{6,3 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^5} \frac{\text{sec} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

στ) Ἐκτέλεσις μετὰ προσοχῆς τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἐκτελοῦντες τὰς σημειουμένας ἀνωτέρω πράξεις εὐρίσκομεν :

$$T_2 = 2,149 \text{ sec} \quad \text{ἢ} : \quad T_2 = 2,15 \text{ sec περίπου}$$

ζ) Ἐλεγχος τοῦ ἀποτελέσματος καί, εἰ δυνατόν, ἐπαλήθευσις αὐτοῦ. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $2,15 \text{ sec}$, ὡς μεγαλύτερα τῆς δοθείσης τιμῆς $2,14 \text{ sec}$, δὲν ἀντιβαίνει εἰς τὸν νόμον τοῦ ἐκκρεμοῦς, καθότι, ὡς διδάσκει ἡ Φυσική, «ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς τιμῆς τοῦ g », ἐπομένως τὸ εὑρεθὲν ἔξαγόμενον δέον νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀρχὴν ὡς ὀρθόν.

Ἀριθμὸς διατηρουμένων δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὸ ἔξαγόμενον

Τὸ ζήτημα τοῦτο ἀπασχολεῖ πολλὰκις τοὺς σπουδαστάς, οἱ ὁποῖοι, κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ἔξαγομένου, ἐφ' ὅσον τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ ἐπακριβῶς, δὲν γνωρίζουν πόσα δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ διατηρήσῃ εἰς τὸ ἔξαγόμενον.

Ἐὰν εἰς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως δίδεται ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον του νὰ εἶναι ἀμφίβολον, π.χ. ὅταν δίδεται, ὅτι ἡ ταχύτης κινή-

του είναι $v = 35,62 \text{ cm/sec}$, τούτο δὲ δηλοῖ, ὅτι τὸ ψηφίον 2 δὲν εἶναι ἐπακριβῶς γνωστόν, ἀλλ' εἶναι ἀμφίβολον, πρέπει, εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς μας, νὰ μὴ διατηροῦμεν περισσότερα ἀπὸ δύο δεκαδικὰ ψηφία· ἔαν δὲ τὸ τρίτον δεκαδικὸν ψηφίον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ 5, παραλείπομεν αὐτὸ καὶ αὐξάνομεν τὸ δεύτερον κατὰ μίαν μονάδα, ἔαν δὲ εἶναι μικρότερον τοῦ 5, ἀπλῶς παραλείπομεν αὐτό.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διατηροῦμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀκριβεῖας μὲ τὴν ὁποίαν ἔχουν μετρηθῇ τὰ δεδομένα καὶ ἐπομένως εἰς τὴν Φυσικὴν, ὅπου εἶναι τοῦτο δυνατόν, περιορίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων καὶ ἀπλουστεύομεν οὕτω τοὺς ὑπολογισμοὺς, εἰς πολλὰς δὲ περιπτώσεις διατηροῦμεν δύο σημαντικὰ ψηφία καὶ ἔν ἀμφίβολον. Εἰς τὰς συνήθεις ἀσκήσεις τῆς Φυσικῆς, διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἐκτιθεμένους λόγους, δεχόμεθα: $\pi = 3,14$, $\sqrt{2} = 1,41$, $\sqrt{3} = 1,73$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ κ.ο.κ., μολονότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ μὲ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία.

Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἀσκήσεων Φυσικῆς τηροῦνται οἱ ἀκόλουθοι κανόνες: α) Κατὰ τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις δὲν πρέπει νὰ προωθοῦμεν τὴν πρᾶξιν πέραν στήλης περιεχοῦσης ἀμφίβολον ψηφίον. β) Κατὰ τὴν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαιρέσιν, εἰς τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸσον ἀριθμὸν σημαντικῶν ψηφίων, ὅσα ἔχει ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν σημαντικῶν ψηφίων.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων ὁ σπουδαστὴς συναντᾷ ὠρισμένους τύπους, ὅπου ὑπερέρχονται συχνὰ τριγωνομετρικαὶ ἔννοιαι, ὡς π.χ. τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη.

Πρὸς ὑποβοήθησιν τῶν ἀναγνώστων ἐκείνων, οἱ ὅποιοι δὲν ἔχουν ἀκόμη ἀποκτήσει γνώσεις Τριγωνομετρίας, ἀναπτύσσομεν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ὠρισμένας ἐκ τῶν θεμελιωδῶν γνώσεων αὐτῆς.

Α. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί. Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν χρησιμοποιοῦμεν κυρίως τέσσαρας ἀριθμούς, οἱ ὅποιοι καλοῦνται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, ἀναφέρονται δὲ πάντοτε εἰς γωνίαν τινὰ θ , ἢ τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν τόξον. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη καὶ παριστῶνται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$\eta\mu \theta$, $\sigma\upsilon\nu \theta$, $\epsilon\varphi \theta$, $\sigma\varphi \theta$.

Β. Ὅρισμοί. Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου τὰς πλευρὰς παριστῶμεν διὰ τῶν μικρῶν γραμμάτων, δηλ. διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευράν, διὰ τοῦ β τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ κειμένην (βλ. σχῆμα).

α) Ὡς ἡμίτονον τῆς γωνίας Β ὀρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθετοῦ πλευρᾶς β διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας α καὶ παριστᾶται συμβολικῶς ὡς κάτωθι:

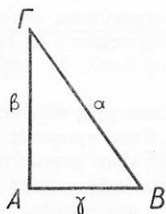
$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad (1)$$

ἤτοι:

$$\eta\mu B = \frac{\text{μήκος τῆς ἀπέναντι καθετοῦ}}{\text{μήκος τῆς ὑποτείνουσας}}$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (1')$$



β) Τὸ **συνημίτονον** τῆς γωνίας Β ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς γ διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας α καὶ παριστᾶται συμβολικῶς :

$$\text{συν } B = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2)$$

ἤτοι :

$$\text{συν } B = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτείνουσας}}$$

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\text{συν } \Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2')$$

γ) Ἡ **ἐφαπτομένη** τῆς γωνίας Β ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς β διὰ τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς γ καὶ παριστᾶται συμβολικῶς :

$$\text{εφ } B = \frac{\beta}{\gamma} \quad (3)$$

ἤτοι :

$$\text{εφ } B = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}$$

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\text{εφ } \Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \quad (3')$$

δ) Ἡ **συνεφαπτομένη** τῆς γωνίας Β ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης εἰς τὴν γωνίαν καθέτου πλευρᾶς γ διὰ τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας καθέτου πλευρᾶς β καὶ παριστᾶται συμβολικῶς :

$$\text{σφ } B = \frac{\gamma}{\beta} \quad (4)$$

ἤτοι :

$$\text{σφ } B = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}$$

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\text{σφ } \Gamma = \frac{\beta}{\gamma} \quad (4')$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων προκύπτει ὅτι :

α) Κάθε κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ὑποτείνουσας ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι πρὸς αὐτὴν ὀξείας γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ **συνημίτονον** τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας.

β) Κάθε κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν **συνεφαπτομένην** τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας προκύπτει, ὅτι οὗτοι εἶναι **καθαροὶ ἀριθμοί**. Οὕτω π.χ. ἐὰν δύναμιν Γ ἐκπερασμένην εἰς $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διὰ τινος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, θὰ λάβωμεν πάλιν δύναμιν εἰς $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ κ.ο.κ.

Ἀφοῦ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ **συνημίτονον** μιᾶς γωνίας εἶναι πηλίκον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ τῆς ὑποτείνουσας, εἶναι προφανὲς ὅτι τόσον τὸ ἡμίτονον, ὅσον καὶ τὸ **συνημίτονον** δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς μονάδος. Διὰ τὴν ἐφαπτομένην ὁμως καὶ τὴν **συνεφαπτομένην** μιᾶς γωνίας δὲν ἰσχύει τὸ αὐτό.

Αί τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἔχουν ὑπολογισθῇ διὰ τὰς διαφόρους γωνίας καὶ ἀναγράφονται εἰς εἰδικoὺς πίνακας, ὡς π.χ. ὁ παρατιθέμενος εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου. Οὕτως, ἐκ τοῦ πίνακος τούτου εὐρίσκουμεν π.χ. διὰ $B = 30^\circ$: $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,866$, $\epsilon\phi 30^\circ = 0,577$.

Ἐξ ἀπλῆς συγκρίσεως τῶν ἀνωτέρω τύπων βλέπομεν, ὅτι: $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu \Gamma$, $\sigma\upsilon\nu B = \eta\mu \Gamma$, $\epsilon\phi B = \sigma\phi \Gamma$ καὶ $\sigma\phi B = \epsilon\phi \Gamma$. Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν, ὅταν αἱ γωνίαι B καὶ Γ εἴναι $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\eta\rho\omega\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha\acute{\iota}$, δηλ. ἔχουν ἀθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, ἥτοι 90° .

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) διὰ τῆς (2), λαμβάνομεν τὴν (3), ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὴν (2) διὰ τῆς (1), λαμβάνομεν τὴν (4). Ὀμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν (1') διὰ τῆς (2'), λαμβάνομεν τὴν (3'), ἐνὼ ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν (2') διὰ τῆς (1'), λαμβάνομεν τὴν (4'). Ἐκ τούτων προκύπτουν αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \epsilon\phi B \quad (5)$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \sigma\phi B \quad (6)$$

$$\frac{\eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu \Gamma} = \epsilon\phi \Gamma \quad (7)$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu \Gamma} = \sigma\phi \Gamma \quad (8)$$

Γ. Θέμελιώδεις σχέσεις: Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$(\eta\mu B)^2 + (\sigma\upsilon\nu B)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$$

Εἶναι ὁμως, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, ἐπομένως ἡ ἀνω σχέση, ἀφαιρουμένων τῶν παρενθέσεων τοῦ πρώτου μέλους, γράφεται:

$$\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$$

τοῦ ἐκθέτου δηλ. γραφομένου ἀνωθεν τοῦ συμβόλου τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἰσότητας (1') καὶ (2'), λαμβάνομεν:

$$\eta\mu^2 \Gamma + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν: $\epsilon\phi B \cdot \sigma\phi B = 1$. Ὀμοίως, ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἰσότητας (7) καὶ (8), θὰ λάβωμεν: $\epsilon\phi \Gamma \cdot \sigma\phi \Gamma = 1$. Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι:

$$\eta\mu \theta = \sigma\upsilon\nu (90^\circ - \theta) = \eta\mu (180^\circ - \theta) \quad (9)$$

$$\sigma\upsilon\nu \theta = \eta\mu (90^\circ - \theta) = -\sigma\upsilon\nu (180^\circ - \theta) \quad (10)$$

$$\epsilon\phi \theta = \sigma\phi (90^\circ - \theta) = -\epsilon\phi (180^\circ - \theta) \quad (11)$$

Λίαν εὐχρηστοὶ εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τριγωνομετρικαὶ σχέσεις:

$$\eta\mu (\theta + \phi) = \eta\mu \theta \cdot \sigma\upsilon\nu \phi + \sigma\upsilon\nu \theta \cdot \eta\mu \phi \quad (12)$$

$$\sigma\upsilon\nu (\theta + \phi) = \sigma\upsilon\nu \theta \cdot \sigma\upsilon\nu \phi - \eta\mu \theta \cdot \eta\mu \phi \quad (13)$$

$$\eta\mu 2\theta = 2 \eta\mu \theta \cdot \sigma\upsilon\nu \theta \quad (14)$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2 \theta - \eta\mu^2 \theta \quad (15)$$

Εἰς πᾶν τρίγωνον, ὡς π.χ. εἰς τὸ $\Delta B\Gamma$ (βλ. σχῆμα), ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{B\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B} = \frac{AB}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{ἢ:} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad (16)$$

ἥτοι: «τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ. ΜΟΝΑΔΕΣ. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις διαστάσεων καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S., τὸ σύστημα M.K.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα (Τ.Σ.) τῶν μεγεθῶν $F \cdot t$ καὶ $m \cdot u$, ὅπου F δύναμις, t χρόνος, m μᾶζα καὶ u ταχύτης.

Λύσις. α) Σύστημα μονάδων C.G.S. Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot t$ ἔχομεν $F = [M L T^{-2}]$ καὶ $t = [T]$, ὅθεν $F \cdot t = [M L T^{-2}] [T] = [M L T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ εἶναι τό:

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot u$ ἔχομεν $m = [M]$ καὶ $u = [L T^{-1}]$, ὅθεν $m \cdot u = [M] [L T^{-1}] = [M L T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό:

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

β) Σύστημα μονάδων M.K.S. Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot t$ ἔχομεν $F = [M L T^{-2}]$ καὶ $t = [T]$, ὅθεν $F \cdot t = [M L T^{-2}] [T] = [M L T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ εἶναι τό:

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot u$ ἔχομεν $m = [M]$ καὶ $u = [L T^{-1}]$, ὅθεν $m \cdot u = [M L T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό:

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

γ) Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot t$ ἔχομεν $F = [F]$, $t = [T]$, ὅθεν $F \cdot t = [F T]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό:

$$1 \text{ kgr}^* \cdot \text{sec}$$

Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot u$ ἔχομεν $m = [F L^{-1} T^2]$ καὶ $u = [L T^{-1}]$, ὅθεν προκύπτει ὅτι $m \cdot u = [F L^{-1} T^2] [L T^{-1}] = [F T]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό:

$$1 \text{ kgr}^* \cdot \text{sec}$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἐξισώσεων διαστάσεων τῶν μεγεθῶν $F \cdot t$ καὶ $m \cdot u$ καὶ εἰς τὰ τρία συστήματα παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶναι ὅμοιαι, διότι τὰ δύο μεγέθη εἶναι ὅμοια, καὶ δυνάμεθα μάλιστα νὰ γράψωμεν τὴν σχέσιν $[F \cdot t] = [m \cdot u]$.

2. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις διαστάσεων ὡς καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν μεγεθῶν $1/2 \cdot m \cdot u^2$, ὅπου m μᾶζα καὶ u ταχύτης, καὶ ροπῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $F \cdot l$, ὅπου F δύναμις καὶ l μῆκος, εἰς τὰ συστήματα μονάδων C.G.S., M.K.S. καὶ Τεχνικὸν Σύστημα.

Λύσις. α) Σύστημα μονάδων C.G.S. Διὰ τὸ μέγεθος $1/2 \cdot m \cdot u^2$, ἐπεὶδὴ ὁ ἀριθμὸς $1/2$ ἀποτελεῖ ἀδιάστατον μέγεθος, δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, καὶ ἡ ἐξίσωσις διαστάσεων συμπίπτει πρὸς τὴν τοῦ μεγέθους $m \cdot u^2$, διὰ τὸ ὅποιον ἔχομεν $m = [M]$, $u = [L T^{-1}]$ καὶ $u^2 = [L^2 T^{-2}]$, ὅθεν $m \cdot u^2 = [M L^2 T^{-2}]$ καὶ μονὰς τό:

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$$

Διά το μέγεθος $F \cdot l$ έχουμε: $F = [M L T^{-2}]$ και $l = [L]$, άθεν $F \cdot l = [M L T^{-2}]$ $[L] = [M L^2 T^{-2}]$ και μονάς τό :

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$$

β) Σύστημα μονάδων Μ.Κ.Σ. Διά το μέγεθος $m \cdot v^2/2$ έχουμε: $m = [M]$ και $v^2 = [L^2 T^{-2}]$, άθεν $m \cdot v^2 = [M L^2 T^{-2}]$ και μονάς τό :

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$$

Διά το μέγεθος $F \cdot l$ έχουμε: $F = [M L T^{-2}]$, $l = [L]$, άθεν $F \cdot l = [M L^2 T^{-2}]$ και μονάς αυτού τό :

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$$

γ) Τεχνικόν Σύστημα μονάδων. Διά το μέγεθος $m \cdot v^2/2$ έχουμε: $m = [F L^{-1} T^2]$, $v^2 = [L^2 T^{-2}]$, άθεν $m \cdot v^2 = [F L^{-1} T^2] [L^2 T^{-2}] = [F L]$ και μονάς τό :

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

Διά το μέγεθος $F \cdot l$ έχουμε: $F = [F]$, $l = [L]$, άθεν $F \cdot l = [F L]$ και μονάς τό :

$$1 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

Διά συγκρίσεως των εξισώσεων διαστάσεων των μεγεθών $m \cdot v^2/2$ (κινητική ενέργεια) και της ροπής δυνάμεως $F \cdot l$ βλέπουμε, ότι αμφότερα τά μεγέθη έχουν την αυτήν εξίσωσιν διαστάσεων, εν τούτοις όμως είναι εντελώς διάφορα μεγέθη, διότι, ενώ η κινητική ενέργεια είναι αριθμητικόν μέγεθος, η ροπή είναι διανυσματικόν.

Ούτω συνάγεται και ή πρότασις, ότι δύο όμοια μεγέθη, π.χ. έργον και κινητική ενέργεια, έχουν κατ' ανάγκην την αυτήν εξίσωσιν διαστάσεων. Άλλά τό αντίστροφον δέν άληθεύει, δηλαδή δύο μεγέθη, έχοντα την αυτήν εξίσωσιν διαστάσεων, δέν έπεται ότι είναι ταυτόσημα μεγέθη. Με άλλους λόγους ή άνωτέρω συνθήκη είναι αναγκαία, άλλ' όχι και ίκανή.

3. 'Η άκτις της Γης είναι 6 370 000 m. Να έκφρασθῃ: α) είς km, β) είς dm, γ) είς cm, και δ) είς mm.

Λύσις. α) Διά νά μετατρέψωμεν την άκτίνα R της Γης από μέτρα (m) είς χιλιόμετρα (km), εφαρμόζομεν την μέθοδον των τριών, ως εξής :

$$\begin{array}{l} \text{τό} \quad 1 \text{ km} \text{ ίσούται πρὸς} \quad 10^3 \text{ m} \\ \text{(πόσα)} \quad x; \text{ km} \text{ ίσούνται πρὸς} \quad 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \end{array}$$

$$\text{και εύρισκομεν:} \quad x = \frac{1 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{10^3} \quad \frac{\text{km} \cdot \text{m}}{\text{m}} = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$$

"Αρα ή άκτις της Γης είς km είναι :

$$R = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$$

β) 'Ομοίως, έπειδή 1 m = 10 dm, εφαρμόζομεν την μέθοδον των τριών, ως εξής :

$$\begin{array}{l} 1 \text{ m} \quad \quad \quad 10 \text{ dm} \\ 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \quad \quad x; \text{ dm} \end{array}$$

$$\text{και εύρισκομεν:} \quad x = \frac{10 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{1} \quad \frac{\text{dm} \cdot \text{m}}{\text{m}} = 6,37 \cdot 10^7 \text{ dm}$$

"Αρα ή άκτις της Γης είς dm είναι :

$$R = 6,37 \cdot 10^7 \text{ dm}$$

γ) 'Ομοίως, έπειδή 1 m = 10^2 cm, εύρισκομεν, δια της αυτής μεθόδου, ότι ή άκτις της Γης είς cm είναι :

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \cdot 10^2 \text{ cm} = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

δ) 'Ομοίως, έπειδή 1 m = 10^3 mm, εύρισκομεν, δια της αυτής μεθόδου, ότι ή άκτις της Γης είς mm είναι :

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ mm} = 6,37 \cdot 10^9 \text{ mm}$$

4. Νὰ ἐκφρασθοῦν 20 m : α) εἰς km, β) εἰς ναυτικά μίλια, γ) εἰς mm, καὶ δ) εἰς μ.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, θὰ εἶναι καὶ $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$, ὁπότε, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$\underline{20 \text{ m} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ km} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ km}}$$

β) Ἐπειδὴ 1 ναυτικὸν μίλιον $= 1852 \text{ m}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{20 \text{ m} = 20/1852 \text{ ναυτ. μίλια} = 0,0108 \text{ ναυτ. μίλια}}$$

γ) Ἐπειδὴ $1 \text{ m} = 10^3 \text{ mm}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{20 \text{ m} = 20 \cdot 10^3 \text{ mm} = 2 \cdot 10^4 \text{ mm}}$$

δ) Ἐπειδὴ $1 \mu = 10^{-6} \text{ m}$ ἢ, ὅπερ τὸ αὐτό, $1 \text{ m} = 10^6 \mu$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{20 \text{ m} = 20 \cdot 10^6 \mu = 2 \cdot 10^7 \mu}$$

5. Ἡ μονὰς Ångström ("Ἀνγκστρεμ, 1 Å) ἰσοῦται πρὸς 10^{-8} cm . Ἐὰν τὸ πρᾶσινον φῶς ἔχῃ μῆκος κύματος 5900 Å , πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτός τούτου εἰς mm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ μῆκος κύματος τοῦ πρᾶσινου φωτός, ἔπειδὴ $1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$, θὰ ἔχωμεν : $\lambda = 5900 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, καὶ ἔπειδὴ $1 \text{ mm} = 10^{-1} \text{ cm}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\lambda = 5900 \cdot 10^{-8} \cdot 10^7 \text{ mm} = 590 \text{ mm}}$$

6. Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ἀκτίνια (rad) γωνία 45° .

Λύσις. Ὡς γνωστὸν γωνία 180° ἰσοῦται πρὸς γωνίαν π ἀκτινίων. Κατὰ συνέπειαν, διὰ γωνίαν φ° θὰ ἔχωμεν :

$$\varphi = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \text{ rad} \quad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα, ἦτοι $\varphi^\circ = 45^\circ$ καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\pi = 3,14$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{45^\circ = \eta\mu 7,875 \text{ rad}}$$

7. Νὰ μετατραποῦν : α) ταχύτης 72 km/h εἰς m/sec , β) ταχύτης 200 cm/sec εἰς m/min , γ) ταχύτης 1250 cm/sec εἰς km/h .

Λύσις. α) Ἐπειδὴ $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$ καὶ $1 \text{ h} = 3600 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}$$

β) Ἐπειδὴ $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ καὶ $1 \text{ sec} = 1/60 \text{ min}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{200 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = \frac{200 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1/60 \text{ min}} = 120 \frac{\text{m}}{\text{min}}}$$

γ) Ἐπειδὴ $1 \text{ cm} = 10^{-5} \text{ km}$ καὶ $1 \text{ sec} = 1/3600 \text{ h}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{1250 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = \frac{1250 \cdot 10^{-5} \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

8. Νὰ μετατραπῇ ἐπιτάχυνσις : α) 50 cm/sec^2 εἰς m/min^2 καὶ β) $1,25 \text{ m/sec}^2$ εἰς km/min^2 .

Λύσις. α) 'Επειδή $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ και $1 \text{ sec} = 1/60 \text{ min}$, εύρισκομεν :

$$50 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} = \frac{50 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{(1/60 \text{ min})^2} = 1800 \frac{\text{km}}{\text{min}^2}$$

β) 'Επειδή $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$ και $1 \text{ sec} = 1/60 \text{ min}$, εύρισκομεν :

$$1,25 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{(1/60 \text{ min})^2} = 4,5 \frac{\text{km}}{\text{min}^2}$$

9. Πόσα δευτερόλεπτα περιέχονται εις 1 έτος (365 ήμέραι).

Λύσις. 'Επειδή 1 h (1 ώρα) = 60 min και $1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$, έπεται ότι :

$$1 \text{ h} = 60 \cdot 60 \text{ sec} = 3600 \text{ sec.}$$

'Επίσης, έπειδή $1 \text{ ήμέρα} = 24 \text{ h}$, θα είναι : $1 \text{ ήμέρα} = 24 \cdot 3600 \text{ sec} = 86\,400 \text{ sec}$ και συνεπώς τó 1 έτος (= 365 ήμέραι) θα είναι :

$$1 \text{ έτος} = 365 \cdot 86\,400 \text{ sec} = 31\,536\,000 \text{ sec} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ sec}$$

10. Νά έκφρασθοῦν 100 ύάρδες εις έκατοστόμετρα (cm).

Λύσις. 'Εφ' όσον $1 \text{ ύάρδα} = 0,914 \text{ m} = 91,4 \text{ cm}$, έπεται ότι :

$$100 \text{ ύάρδες} = 100 \cdot 91,4 \text{ cm} = 9140 \text{ cm}$$

11. Κήπος, σχήματος όρθογωνίου, έχει πλευράς 0,30 km και 0,12 km. Νά εύρεθί ή έπιφάνεια του κήπου : α) εις τετραγωνικά μέτρα, β) εις στρέμματα, και γ) εις τετραγωνικούς τεκτονικούς πήχεις.

Λύσις. α) 'Εάν καλέσωμεν l_1 και l_2 τας πλευράς του όρθογωνίου, τότε τó έμβαδόν S αυτού δίδεται διά τής σχέσεως : $S = l_1 \cdot l_2$. 'Αντικαθιστώντες εις τήν σχέσιν ταύτην τά l_1 και l_2 διά τών τιμών τής άσκήσεως, λαμβάνομεν :

$$S = 0,30 \text{ km} \times 0,12 \text{ km} = 0,036 \text{ km}^2$$

ή, έπειδή $1 \text{ km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$, θα έχωμεν :

$$S = 0,036 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 36 \cdot 10^3 \text{ m}^2$$

β) 'Εφ' όσον $1 \text{ στρέμμα} = 10^3 \text{ m}^2$, θα είναι και $1 \text{ m}^2 = 10^{-3} \text{ στρέμματα}$, και έπομένως θα έχωμεν :

$$S = 36 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ στρέμ.} = 36 \text{ στρέμματα}$$

γ) 'Εφ' όσον $1 \text{ τετραγωνικός τεκτονικός πήχυς} = 9/16 \text{ m}^2$, θα είναι και $1 \text{ m}^2 = 16/9 \text{ τετραγωνικοί τεκτονικοί πήχεις}$, και συνεπώς θα έχωμεν :

$$S = 36 \cdot 10^3 \cdot 16/9 \text{ τετρ. τεκτ. πήχεις} = 64 \cdot 10^3 \text{ τετρ. τεκτ. πήχεις}$$

12. 'Η διάμετρος σύρματος έξ όρειχάλκου είναι 1,22 mm. Πόση είναι ή τομή αυτού : α) εις mm^2 και β) εις cm^2 .

Λύσις. 'Εάν καλέσωμεν δ τήν διάμετρον τής τομής του σύρματος, τότε τó έμβαδόν S τής τομής αυτού θα είναι :

$$S = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4}$$

α) Θέτοντες $\delta = 1,22 \text{ mm}$, εύρισκομεν :

$$S = 1,168 \text{ mm}^2$$

β) Ἐπειδὴ $1 \text{ cm}^2 = 10 \text{ mm}^2$, θὰ εἶναι καὶ $1 \text{ mm}^2 = 10^{-2} \text{ cm}^2$, καὶ ἐπομένως :

$$S = 1,168 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 = \underline{0,01168 \text{ cm}^2}$$

13. Πλάξ, κατὰ προσέγγισιν τετράγωνος, ἔχει διαστάσεις 12,04 cm καὶ 11,93 cm. Πόση ἡ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς εἰς mm^2 . Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ πλάξ εἶναι πράγματι τετράγωνος, πλευρᾶς 12 cm, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι 14 400 mm^2 . Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν διαφέρει ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον αἱ διαστάσεις τῆς πλακὸς εἶναι 12,04 cm = 120,4 mm καὶ 11,93 cm = 119,3 mm, τὸ ἔμβαδόν S αὐτῆς θὰ εἶναι :

$$S = 120,4 \text{ mm} \times 119,3 \text{ mm} = 14\,363,7 \text{ mm}^2$$

καὶ συνεπῶς θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν κατὰ $14\,400 \text{ mm}^2 - 14\,363,7 \text{ mm}^2 = 36,3 \text{ mm}^2$.

Διὰ νὰ εὐρωμεν πόσον τοῖς ἑκατὸν διαφέρει ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ὅταν ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια ἔχῃ ἔμβαδόν $14\,363,7 \text{ mm}^2$, τότε διαφέρει αὕτη ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν κατὰ $36,3 \text{ mm}^2$. Ἐὰν ὁμως ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια εἶχεν ἔμβαδόν 100 mm^2 , πόσον θὰ διέφερεν ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν ;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν εὐρίσκομεν ὅτι διαφέρει κατὰ 0,25 %.

14. Μετὰ ραγδαίαν βροχὴν ἡ στάθμη λίμνης ἀνῆλθε κατὰ 26 mm. Δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης εἶναι 9 km^2 , κατὰ πόσα λίτρα ἡ ἐπεριεκτικότητα τῆς λίμνης.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν S τὴν ἐπιφάνειαν τῆς λίμνης καὶ h τὴν ἀνύψωσιν τῆς στάθμης, τότε ἡ αὐξησης V τῆς περιεκτικότητος τῆς λίμνης θὰ εἶναι :

$$V = S \cdot h$$

Ἐπειδὴ ἔχει δοθῇ ὅτι : $S = 9 \text{ km}^2 = 9 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ καὶ $h = 26 \text{ mm} = 26 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, λαμβάνομεν, δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, ὅτι :

$$V = 9 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \times 26 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 234 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

Ἐπειδὴ δὲ $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ lt}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{V = 234 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ lt} = 234 \cdot 10^6 \text{ lt}}$$

15. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 16 cm, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 30 cm. Ποία ἡ περιεκτικότητα τοῦ δοχείου εἰς κυβικὰ ἑκατοστομέτρα, λίτρα καὶ κυβικὰ μέτρα.

Λύσις. Ἐὰν δ ἡ διάμετρος καὶ h τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὄγκος αὐτοῦ δίδεται, ὡς γνωστὸν, ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = S \cdot h \quad (1)$$

ὅπου S τὸ ἔμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ ἔμβαδόν S εἶναι ἔμβαδόν κύκλου, διαμέτρου δ , ἔχομεν :

$$S = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4} \quad (2)$$

ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\underline{V = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4} \cdot h} \quad (3)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα, ἡτοί :

α) $\pi = 3,14$, $\delta = 16 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{V = 6028,80 \text{ cm}^3}$$

β) $\pi = 3,14$, $\delta = 16 \text{ cm} = 1,6 \text{ dm}$, $h = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$, έχουμε :

$$V = 6,0288 \text{ lt}$$

Τούτο εύρεται και εκ της απαντήσεως α', λαμβανομένου υπ' όψιν ότι $1 \text{ lt} = 10^3 \text{ cm}^3$

γ) $\pi = 3,14$, $\delta = 16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$, $h = 0,30 \text{ m}$, λαμβάνομεν :

$$V = 0,0060288 \text{ m}^3 = 6,0288 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Τούτο εξάγεται και εκ της απαντήσεως α', λαμβανομένου υπ' όψιν ότι $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$

16. Κύβος εκ ξύλου έχει πλευράν 0,5 m και ή μάζα αυτού είναι 100 kg. Να εύρεθῇ ή πυκνότης τοῦ ξύλου.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν α τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, τότε ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι :

$$V = \alpha^3$$

Ἐπειδὴ ὁμως ἔχει δοθῇ ὅτι $\alpha = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$, ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου θὰ εἶναι :

$$V = (50 \text{ cm})^3 = 125 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

Ἡ πυκνότης ρ δίδεται, ὡς γνωστὸν, διὰ τοῦ τύπου :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ἔργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. θέτομεν : $m = 100 \cdot 10^3 \text{ gr}$, $V = 125 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\rho = 0,8 \text{ gr/cm}^3$$

17. Κυλινδρική ράβδος εκ σιδήρου έχει ὕψος 0,2 m, ή δὲ διάμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 12 mm. Ἐάν ή μάζα τῆς ράβδου εἶναι 176 gr, νὰ εύρεθῇ ή πυκνότης τοῦ σιδήρου.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι ή πυκνότης δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ἐάν ὁμως καλέσωμεν δ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τῆς κυλινδρικῆς ράβδου καὶ h τὸ ὕψος αὐτῆς, τότε θὰ εἶναι :

$$V = \frac{\pi \cdot \delta^2}{4} \cdot h$$

καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τῆς πυκνότητος γίνεταί :

$$\rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot \delta^2 \cdot h} \quad (1)$$

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν πυκνότητα εἰς gr/cm^3 , τρέπομεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν εἰς μονάδας C.G.S., ὅτε θὰ ἔχωμεν : $m = 176 \text{ gr}$, $\delta = 12 \text{ mm} = 1,2 \text{ cm}$, $h = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$, καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) λαμβάνομεν :

$$\rho = 7,8 \text{ gr/cm}^3$$

18. Δοχεῖον ἔχει διάμετρον 10,3 cm καὶ ὕψος 8,75 cm, πληροῦται δὲ μὲ μέλι. Ἐάν τὸ μέλι ἔχη βάρος 900 gr*, πόσον τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

Λύσις. Τὸ εἰδικὸν βάρος, ὡς γνωστὸν, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ πηλίκου τοῦ βάρους B τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ, ἥτοι :

$$\epsilon = \frac{B}{V} \quad (1)$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ $S = \pi \cdot \delta^2 / 4$ ἐπὶ τὸ ὕψος h καὶ ἐπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\varepsilon = \frac{B}{\pi \cdot \delta^2 \cdot h} = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot \delta^2 \cdot h} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέση (2) τὰ δεδομένα : $\delta = 10,3 \text{ cm}$, $h = 8,75 \text{ cm}$, $B = 900 \text{ gr}^*$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\varepsilon = 1,23 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$$

19. Δυναμόμετρον δι' ἐλατηρίου φέρει εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου δείκτην, ὅστις μετατοπίζεται ἔμπροσθεν κανόνος διηρημένου εἰς mm. Αἱ θέσεις τοῦ δείκτου, συναρτήσας τοῦ βάρους φορτίσεως τοῦ δυναμόμετρου, δίδονται ἀπὸ τὸν παρατιθέμενον πίνακα. Ζητοῦνται: α) Νὰ χαραχθῇ ἡ παραστατικὴ καμπύλη τῆς θέσεως τοῦ δείκτου συναρτήσας τοῦ φορτίου, διὰ χρήσεως χιλιοστομετρικοῦ χάρτου. Νὰ ὁρισθῇ ὡς κλίμαξ 1 cm διὰ 100 gr* ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox καὶ 1 cm διὰ 10 mm ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy. β) Ἡ ἐπιμήκυνσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάλογος πρὸς τὸ φορτίον; γ) Κατὰ τὴν ἐξάρτησιν ὁ δείκτης φθάνει εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 261 mm διὰ χρησιμοποίησεως τῆς καμπύλης νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος. δ) Ἐξαρτᾶται βάρος 430 gr* διὰ χρησιμοποίησεως τῆς καμπύλης νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ δείκτου.

Βάρος φορτίου εἰς gr*	Θέσις δείκτου εἰς mm
0	195
100	204
200	213
300	223
400	232
500	240
600	248
700	256
800	264
900	271
1000	279

Λύσις. α) Τὸ σχῆμα δεικνύει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς θέσεως τοῦ δείκτου συναρτήσας τοῦ φορτίου.

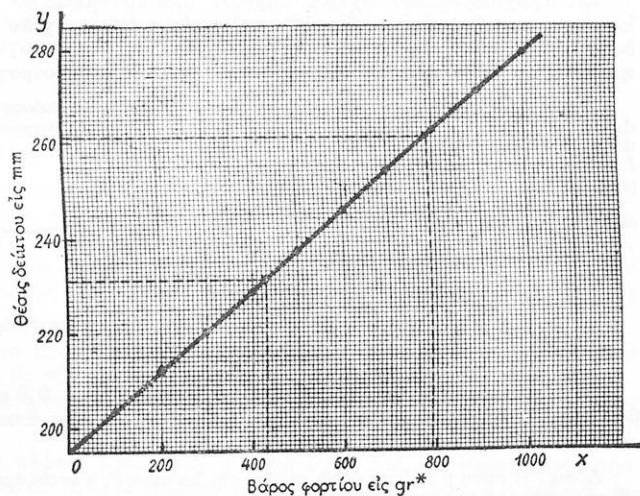
β) Ἡ ἐπιμήκυνσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάλογος πρὸς τὸ φορτίον, διότι ἡ χαραχθεῖσα καμπύλη εἶναι σχεδὸν εὐθεῖα γραμμή.

γ) Τὸ βάρος φορτίσεως, δι' ἐπιμήκυνσιν 261 mm, ὅπως δεικνύεται ἐκ τῆς καμπύλης, εἶναι :

$$\underline{790 \text{ gr}^*}$$

δ) Διὰ τὸ βάρος φορτίσεως 430 gr*, ὡς δεικνύει ἡ καμπύλη, ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι :

$$\underline{231 \text{ mm}}$$



20. Ἀσθενὴς παρουσιάζει τὰς ἀκολουθοῦσας θερμοκρασίας καθ' ὥραν, ἀπὸ τῆς 8ης π.μ. μέχρι 8ης μ.μ. : 37 °C, 37,2 °C, 37,4 °C, 37,8 °C, 38 °C, 38,4 °C, 38,8 °C, 39 °C, 38,2 °C, 38 °C, 37,6 °C, 37 °C. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς συναρτήσας τοῦ χρόνου.

Λύσις. Διὰ τὴν παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν θερμοκρασίαν συναρτήσας τοῦ χρόνου, λαμβάνομεν δύο ἄξονας (εὐθείας) τεταμένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ τοῦ ἐνὸς μὲν χαράσσομεν κατάλληλον κλίμακα χρονικῶν διαστημάτων, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄλλου κατάλληλον κλίμακα θερμοκρασιῶν.

Είς έκαστον ζεύγος τιμών θερμοκρασίας και χρόνου θα αντιστοιχίη προφανώς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἀξόνων ἓν σημεῖον. Ἐννοῦμεν ὅλα τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ μιᾶς γραμμῆς καὶ ἡ προκύπτουσα καμπύλη δεικνύει παραστατικῶς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀσθενoῦς κατὰ τὰς διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς. Ἀφίεται εἰς τὸν σπουδαστὴν ἢ χάραξιν τῆς ὡς ἄνω καμπύλης.

21. Ἀεροπλάνον ἀναπτύσσει ταχύτητα 360 km/h καὶ θέλει νὰ μετατεθῇ ἐπὶ τινος μεσημβρινοῦ, ἐκ Νότου πρὸς Βορρᾶν, ἐνῷ πνέει ΝΔ ἄνεμος ὑπὸ ταχύτητά 8 m/sec. Ποίαν πορείαν πρέπει νὰ τηρῇ τὸ ἀεροπλάνον.

Λύσις. Ἐστω u_1 ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, u_2 ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου καὶ θ ἡ ζητούμενη γωνία, ἡ ὁποία καθορίζει τὴν πορείαν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τηρῇ τὸ ἀεροπλάνον (βλ. σχῆμα). Προφανῶς αἱ δύο ταχύτητες πρέπει νὰ δίδουν συνισταμένην ταχύτητα, ἡ ὁποία νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς N — B καὶ μὲ φοράν πρὸς Βορρᾶν. Ἐκ τοῦ σχηματισμένου τριγώνου OHZ ἔχομεν :

$$\frac{u_2}{\eta\mu\theta} = \frac{u_1}{\eta\mu 45^\circ} \quad \text{καί :} \quad \eta\mu\theta = \frac{u_2 \cdot \eta\mu 45^\circ}{u_1} \quad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ δεδομένα :

$$u_1 = \frac{360 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 100 \text{ m/sec}, \quad u_2 = 8 \text{ m/sec}, \quad \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

καὶ εὑρίσκομεν :

$$\eta\mu\theta = 0,056 \quad \text{καί :} \quad \theta = 3^\circ 47'$$

22. Τροχιοδρομικὸν ὄχημα σύρεται ὑπὸ δυνάμεως 60 kg*, σχηματίζουσας γωνίαν 15° πρὸς τὴν σιδηροτροχιάν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δυνάμεις ἡ ἐπενεργοῦσα παραλλήλως πρὸς τὴν τροχιάν, ἡ ὁποία δύναται νὰ παρεμποδίσῃ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιάς.

Λύσις. Ἡ ὀριζόντιος συνιστώσα F_{op} τῆς ὑπὸ γωνίαν 15° ἐνεργοῦσης δυνάμεως F θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν Λ , ἡ ὁποία θὰ δύναται νὰ παρεμποδίσῃ τὴν κίνησιν. Ἐπομένως, ἂν εὑρωμεν τὸ μέτρον τῆς συνιστώσης ταύτης F_{op} , θὰ ἔχῃ προσδιορισθῇ καὶ τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως Λ .

Δι' ἀκριβοῦς γραφικῆς κατασκευῆς θὰ προκύψῃ τὸ μήκος τῆς F_{op} ἀντιστοιχοῦν εἰς 58 kg*. Ἦτοι :

$$\Lambda = 58 \text{ kg*}, \text{ περίπου}$$

Ἀλλὰ καὶ δι' ὑπολογισμοῦ προκύπτει ὅτι :

$$F_{op} = F \cdot \sin 15^\circ \quad \text{ἢ :} \quad F_{op} = 60 \cdot \sin 15^\circ = 58 \text{ kg*}, \quad \delta\text{ρα :} \\ \Lambda = 58 \text{ kg*}, \text{ περίπου}$$

23. Τετραγωνικὸς κίων ἐκ ξύλου εἰδικοῦ βάρους 0,8 gr*/cm³ ἔχει ἀκμὴν βάσεως 10 cm καὶ ὕψος 2 m. Ποία ἡ ὑπὸ τοῦ κίονος ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς βάσεως στηρίξεως πίεσις.

Λύσις. Ἡ πίεσις p ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως F , ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας, διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἦτοι :

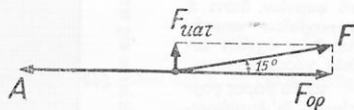
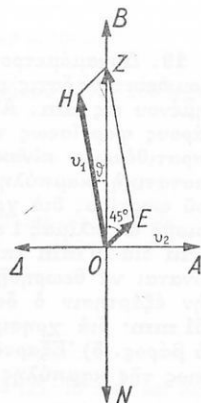
$$p = \frac{F}{S} \quad (1)$$

Ἐν προκειμένῳ ὁμως ἡ δύναμις F εἶναι τὸ βάρος τοῦ κίονος :

$$B = V \cdot \epsilon \quad (2)$$

ὅπου V ὁ ὄγκος καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$p = \frac{V \cdot \epsilon}{S} \quad (3)$$



Ἀφ' ἑτέρου ὁμως, τὸ πηλίκον $V/S = h$, ἥτοι τὸ πηλίκον τοῦ ὄγκου διὰ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κίνου. Ἀρα, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3), λαμβάνομεν :

$$p = h \cdot \varepsilon \quad (4)$$

Δίδονται : $h = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$ καὶ $\varepsilon = 0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ἄρα :

$$p = 200 \cdot 0,8 \text{ cm} \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} = 160 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

24. Νὰ μετατραπῇ ταχύτης 1 χιλιόμετρον καθ' ὥραν (1 km/h) εἰς μονάδας συστήματος C.G.S. (Ἀπ. 27,8 cm/sec.)

25. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ σύστημα C.G.S. αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν 10 kg^{*}m. καὶ 20 kg^{*}m. ($g = 980 \text{ C.G.S.}$). (Ἀπ. $980 \cdot 10^4 \text{ dyn}$, $19,6 \cdot 10^7 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$.)

26. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν εἰς σύστημα, καθοριζόμενον ἀπὸ τὰς ἀκολουθοῦντας θεμελιώδεις μονάδας : χιλιόμετρον (km), γραμμάριον μάζης (gr) καὶ ὥραν (h), αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουν εἰς τὸ σύστημα C.G.S. τὰς ἀκολουθοῦντας τιμὰς : α) ταχύτης τοῦ φωτός $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$, β) ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 981 cm/sec^2 , γ) βάρος 1 cm^3 ὕδατος ἀπεσταγμένου εἰς θερμοκρασίαν 4°C , εἰς τόπον ὅπου $g = 981 \text{ cm/sec}^2$. (Ἀπ. α' $108 \cdot 10^7$, β' $127 \cdot 138$, γ' $127 \cdot 138$.)

27. Τὸ ἄστρον α τοῦ Κενταύρου ἀπέχει ἀπὸ τῆς Γῆς $3,5$ ἔτη φωτός. Εἰς πόσον km ἀνέρχεται ἡ ἀπόστασις αὐτῆ. (1 ἔτος φωτός = $365 \cdot 86 \cdot 400 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$). (Ἀπ. $3,31 \cdot 10^{13} \text{ km}$, περίπου.)

28. Μεταλλικὴ τετραγωνικὴ πλάξ, παραγγελθεῖσα μὲ πλευρὰν μήκους 20 cm, εὑρέθη νὰ ἔχῃ μῆκος πλευρῶν 19,83 cm καὶ 20,14 cm. Πόσον τοῖς ἑκατὸν διαφέρει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπὸ τὸ τῆς παραγγελεῖσης. (Ἀπ. 0,16%.)

29. Τὸ ἐμβαδὸν ἀκανονίστου σχήματος εὐρίσκεται, ἐὰν τοῦτο σχεδιασθῇ ἐπὶ χάρτου σταθεροῦ πάχους, ἀποκοπῇ ἀκολουθῶνς τὸ σχεδιάσμα καὶ ζυγισθῇ. Ἐστω τὸ βάρος ἐνὸς τοιούτου σχεδιάσματος $B_1 = 1,573 \text{ gr}^*$. Ἀπὸ τὸν αὐτὸν χάρτην ἀπεκόπη τετράγωνον πλευρᾶς 5 cm καὶ βάρους $B_2 = 1,846 \text{ gr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀκανονίστου σχήματος εἰς cm^2 καὶ μὲ προσέγγισιν δεκάτου. (Ἀπ. $21,3 \text{ cm}^2$.)

30. Δύο ὀγκομετρικοὶ κύλινδροι, μὲ ἐσωτερικὰς διαμέτρους $d_1 = 2 \text{ cm}$ καὶ $d_2 = 6 \text{ cm}$, χρησιμοποιοῦνται πρὸς ὀγκομέτρησιν. Ποίος ὁ ὄγκος στερεοῦ σώματος, ὅταν κατὰ τὴν ἐμβαπτισιν εἰς τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται κατὰ 2,3 cm. Κατὰ πόσον θὰ ἀνῆρχετο τὸ ὕδωρ, ἐὰν τὸ σῶμα ἐνεβαπτιζέτο εἰς τὸν δεῦτερον κύλινδρον. (Ἀπ. $V = 7,2 \text{ cm}^3$, $h = 0,26 \text{ cm}$.)

31. Δωμάτιον ἔχει πλάτος 5 m, μήκος 4 m καὶ ὕψος 3 m. Ὁ περιεχόμενος αἷρ συνίσταται εἰς ὄγκον κατὰ 78% ἐξ ὀζώτου (N), 21% ἐξ ὀξυγόνου (O) καὶ 1% ἐκ λοιπῶν ἀερίων. Νὰ ὑπολογισθοῦν εἰς λίτρα οἱ ὄγκοι τῶν περιεχομένων ἀερίων ὀζώτου καὶ ὀξυγόνου. (Ἀπ. $N = 46 \cdot 800 \text{ lt}$, $O = 12 \cdot 600 \text{ lt}$.)

32. Δύο ὀγκομετρικοὶ κύλινδροι ἔχουν διαμέτρους $d_1 = 3 \text{ cm}$ καὶ $d_2 = 6 \text{ cm}$. α) Κατὰ πόσον ἀνέρχεται τὸ ὕδωρ εἰς ἕκαστον τῶν δύο κυλίνδρων, ὅταν ἐμβαπτίσωμεν στερεὸν ὄγκου 5 cm^3 . β) Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἀνυψώσεων τοῦ ὕδατος καὶ τῶν διαμέτρων τῶν κυλίνδρων. γ) Πόσον ἀπέχουν εἰς ἕκαστον κύλινδρον αἱ ὑποδιαίρεσεις διὰ κάθε 100 cm^3 ἀπ' ἀλλήλων. δ) Ποίας μονάδας (κάθε 10 cm^3 , 1 cm^3 κλπ.) δυνάμεθα εἰς ἀμφοτέρους τοῦ κυλίνδρου νὰ χαράξωμεν, ὅταν ἡ μικροτέρα ἀπὸ-

στασις δύο ένδειξεων δέν πρέπει νά είναι κατωτέρα τοῦ 1 mm. Κατά πόσας ὑποδιαιρέσεις άνέρχεται τότε τὸ ὕδωρ κατὰ τὴν ἐμβάπτισιν σώματος ὄγκου 5 cm³. ε)
Τί συνάγεται ἐκ τῶν μετρήσεων διὰ τὴν ἀκρίβειαν εἰς στενοὺς καὶ εὐρεῖς σωλῆνας.
(Ἀπ. α' $h_1 = 0,71$ cm, $h_2 = 0,18$ cm. β' $(r_1/r_2)^2 = h_2/h_1$. γ' $h_1 = 14,15$ cm, $h_2 = 3,54$ cm. δ' διὰ τὸν στενὸν ὑποδ. τοῦ 1 cm³, διὰ τὸν εὐρύν τῶν 10 cm³. ε' Ἡ ἀκρίβεια μεγαλύτερα μὲ στενὸν σωλῆνα.)

33. Νὰ ἐκφραστοῦν 17,3^ο εἰς ἀκτίνια. (Ἀπ. 0,302 rad.)

34. Τὸ ἄκρον αἰωρουμένης ράβδου, μήκους 0,2 m, ταλαντοῦται κατὰ τὸξον μήκους 0,06 m. Ποία ἡ γωνία αἰωρήσεως α) εἰς μοίρας, β) εἰς ἀκτίνια.
(Ἀπ. 17,2^ο, 0,30 rad.)

35. Νὰ μετατραπῇ γωνιακὴ ταχύτης 2 rad/sec εἰς rad/min.
(Ἀπ. 120 rad/min.)

36. Νὰ ἐκφραστῇ εἰς rad/min ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ δευτερολεπτοδείκτου, λεπτοδείκτου καὶ ὥροδείκτου ὥρολογίου.
(Ἀπ. 2π rad/min, π/30 rad/min, π/360 rad/min.)

37. Τροχὸς ἔχει γωνιακὴν ταχύτητα 50 rad/sec. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἵνα στραφῇ κατὰ γωνίαν 40 ἀκτινίων.
(Ἀπ. 0,80 sec.)

38. Μᾶζα 1 kgf ἔχει εἰς κανονικὸν τόπον (δηλ. 45^ο γεωγραφικὸν πλάτος καὶ ὕψος θαλάσσης) βάρος 1 kgf*, εἰς τὸν Ἰσημερινὸν 0,997 kgf* καὶ εἰς τοὺς πόλους 1,003 kgf*. Ἡ μᾶζα m ἔχει κατ' ἀναλογίαν βάρος εἰς τοὺς ἀνωτέρω τόπους m · 1 kgf*/kgf, m · 0,997 kgf*/kgf καὶ m · 1,003 kgf*/kgf. Ποία ἡ διαφορὰ βάρους μεταξὺ πόλων — Ἰσημεριοῦ μάζης 50 kgf.
(Ἀπ. 300 gr*.)

39. Ποία ἡ μᾶζα σώματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος: α) 15 kgf* εἰς τοὺς πόλους, β) 20 kgf* εἰς τὸν Ἰσημερινόν.
(Ἀπ. m = 14,955 kgf, m = 20,060 kgf.)

40. Ποία ἡ μᾶζα σώματος, τὸ ὁποῖον εἰς τοὺς πόλους εἶναι κατὰ 1 kgf* βαρύτερον παρὰ εἰς τὸν Ἰσημερινόν.
(Ἀπ. 166,7 kgf.)

41. Πόσον τοῖς ἑκατὸν αὐξάνει τὸ βάρος σώματος μάζης m, ὅταν μεταφερθῇ τοῦτο ἀπὸ τὸν Ἰσημερινόν εἰς τοὺς πόλους.
(Ἀπ. 0,6 %.)

42. Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ μᾶζα σώματος, διὰ νὰ παρουσιάξῃ τοῦτο διπλάσιον βάρος εἰς τοὺς πόλους παρὰ εἰς τὸν Ἰσημερινόν.

(Ἀπ. Ἀδύνατον, διότι ἡ αὐξησης τοῦ βάρους εἶναι πάντοτε 0,6 %.)

43. Ποία ἡ σχέσις τῶν μαζῶν δύο σωμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ βορείου πόλου καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τοῦ Ἰσημεριοῦ, ὅταν παρουσιάζουν τὸ αὐτὸ βάρος.
(Ἀπ. $m_{\text{β}}$ = 1,006 · $m_{\text{πολ}}$.)

44. Δοκὸς σιδηρᾶ ἔχει 8,50 m μήκος, 20 cm πλάτος καὶ 10 cm πάχος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τῆς δοκοῦ, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 gr*/cm³.
(Ἀπ. 1326 kgf*.)

45. Ἐπιφάνεια διαστάσεων 1,0 m × 2,2 m πρόκειται νὰ ἐπιβερνικωθῇ κατ' ἀμφοτέρας τὰς πλευρὰς αὐτῆς καὶ εἰς πάχος 0,08 mm. Πόσα cm³ χρώματος ἀπαιτοῦνται πρὸς τοῦτο.
(Ἀπ. 352 cm³.)

46. Ποῖον τὸ κατ' ἀμφοτέρας τὰς πλευρὰς πάχος στρώματος βερνικίου, τὸ ἀποπιθέμενον ἐπὶ ἐπιφανείας διαστάσεων 2,5 m × 8,2 m, διὰ χρήσεως 1,23 lt βερνικίου.
(Ἀπ. 0,03 mm.)

47. Ταϊνία χάρτου, πλάτους 80 cm και πάχους 0,15 mm, περιτυλίσσεται ἐπὶ ξυλίνου πυρῆνος, διαμέτρου 5 cm καὶ τοιουτοτρόπως σχηματίζεται κύλινδρος, πάχους 40 cm. Πόσα τετραγωνικά μέτρα (m^2) χάρτου περιετυλίχθησαν.

(Ἀπ. $659,7 \text{ m}^2$.)

48. Ποία ἡ διάμετρος κυλίνδρου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου περιετυλίχθησαν $17,36 \text{ m}^2$ χάρτου, πλάτους 20 cm καὶ πάχους 0,2 mm καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ξύλινος πυρὴν ἔχει διάμετρον 2 cm.

(Ἀπ. 15 cm.)

49. Χάλκινον σύρμα μήκους 50 m καὶ πάχους 1 mm ἀποκτᾷ δι' ἑλκυσμοῦ μήκος 1800 m. Ποία ἡ νέα διάμετρος αὐτοῦ.

(Ἀπ. 0,17 mm.)

50. Τριχοειδῆς σωλὴν, μήκους 12 cm, πληροῦται δι' ὕγρου. Δι' ἐμφυσήσεως ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἐξέρχεται ὀλοσχερῶς τὸ ὕγρον καὶ σχηματίζει σφαιρικὴν σταγόνα διαμέτρου 1 mm. Ποία ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος.

(Ἀπ. 0,075 mm.)

51. Κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχει ὕδωρ μέχρις ὕψους 1,20 m. Ἐντὸς αὐτοῦ τοποθετεῖται, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, κυλινδρικὸν σῶμα, διαμέτρου 30 cm, τὸ ὅποιον φθάνει μέχρι τοῦ πυθμένος, ἔνεκα δὲ τούτου ἀνέρχεται κατὰ 4 cm ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος. Πόσα λίτρα ὕδατος περιέχει τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον.

(Ἀπ. 2628,5 lt.)

52. Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὸ πλάτος αὐτοῦ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ περιεκτικότης του ἀνέρχεται εἰς 120 m^3 .

(Ἀπ. 5,35 m.)

53. Ἐὰν κλίνωμεν κατὰ γωνίαν 45° κυλινδρικὸν δοχεῖον πλήρες ὕδατος, χύνεται τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ. Ποῖος ὁ λόγος ὕψους καὶ διαμέτρου τοῦ δοχείου.

(Ἀπ. 2 : 1.)

54. Κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ κλίνωμεν τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, διὰ νὰ χυθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου του.

(Ἀπ. $63,4^\circ$.)

55. Κυλινδρικὸς κάδος, ὕψους 80 cm καὶ διαμέτρου 90 cm, πληροῦται δι' ὕγρου μέχρις ὕψους 70 cm. Κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ κλίνη οὗτος, διὰ νὰ ἀρχίσῃ νὰ χύνεται τὸ ὕγρον.

(Ἀπ. $12,5^\circ$.)

56. Δίδονται δύο ὁμοία κυλινδρικά δοχεῖα. Εἰς τὸ πρῶτον περιέχεται 1 lt βενζίνης, εἰς τὸ δεύτερον 1 lt ἐλαίου. Χύνομεν $\frac{1}{4}$ lt ἐκ τοῦ πρώτου δοχείου εἰς τὸ δεύτερον, ἀναμειγνύομεν τὰ δύο ὑγρά δι' ἀναδεύσεως καὶ ἀκολούθως χύνομεν $\frac{1}{4}$ lt ἐκ τοῦ δευτέρου δοχείου εἰς τὸ πρῶτον. Ποῖος ὁ λόγος τῆς μείξεως εἰς ἀμφοτέρᾳ τὰ δοχεῖα.

(Ἀπ. Λόγος βενζίνης - ἐλαίου εἰς τὸ πρῶτον ἴσος πρὸς τὸν λόγον ἐλαίου - βενζίνης εἰς τὸ δεύτερον καὶ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἴσος πρὸς 4 : 1.)

57. Ποία ἡ μᾶζα 100 m χαλκίνου σύρματος, διαμέτρου 2 mm. ($\rho = 8,9 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$).

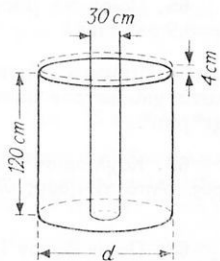
(Ἀπ. 2,796 kgr.)

58. Πόσῃν μᾶζαν εἰς kgr ἔχουν 6 m χαλυβδίνου σωλῆνος, ἐξωτερικῆς διαμέτρου 55 mm καὶ πάχους τοιχωμάτων 2 mm. ($\rho = 7,85 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$).

(Ἀπ. 15,7 kgr.)

59. Ποσότης 300 gr μολύβδου ($\rho = 11,3 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$) τοποθετεῖται ἐντὸς δοχείου πλήρους ὕδατος. Πόσον ὕδωρ ἐκρίει.

(Ἀπ. $26,55 \text{ cm}^3$.)



Ἀσκησης 51.

60. Σιδηρά πλάξ επιπικελοῦται κατ' ἀμφοτέρας τὰς πλευρὰς αὐτῆς διὰ στρώματος πάχους 12,5 μm. Πόσον νικέλιον φέρει 1 m² τῆς πλακός. ($\rho = 8,9 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$).
(Ἀπ. 222,5 gr.)
61. Ποσότης 1000 φύλλων ἐκ χρυσοῦ, ἑκαστον ἐπιφανείας 55 mm², ζυγίζει 4,4 gr*. Ποῖον τὸ πάχος ἐκάστου φύλλου. ($\epsilon = 19,3 \text{ gr}^* \cdot \text{cm}^{-3}$). (Ἀπ. 4,145 μm.)
62. Ποσότης 1 m³ ὑαλοβάμβακος ζυγίζει 100 kg*. Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ὕαλον περιέχει ὁ ὄγκος του, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὑάλου ἰσοῦται πρὸς 2,5 gr*·cm⁻³.
(Ἀπ. 4 %.)
63. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς πυκνότητος τεμαχίου ξύλου, βάρους 30 gr*, στερεοῦμεν τοῦτο μετὰ τεμαχίου μολύβδου, βάρους 400 gr* ($\rho_1 = 11,3 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$) καὶ βυθίζομεν ἐντὸς δοχείου πλήρους ὕδατος, ὁπότε ἐκρέουν 75 cm³ ὕδατος. Ποία ἡ πυκνότης ρ_2 τοῦ ξύλου.
(Ἀπ. 0,76 gr·cm⁻³.)
64. Ξυλίνη δοκὸς ($\rho = 0,6 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$) ἔχει τόσον μῆκος, ὅσον εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς εἰς kg*. Ποία ἡ τομὴ τῆς δοκοῦ.
(Ἀπ. 16,67 cm².)
65. Ποῖον τὸ βάρος 2 km χαλκίνου σύρματος, διαμέτρου $d = 1,4 \text{ mm}$. ($\epsilon_{\text{χαλ}} = 8,9 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$).
(Ἀπ. 27,4 kg*.)
66. Ἡλεκτροφόρον καλώδιον ἐκ χαλκοῦ ἔχει διάμετρον 1,5 cm. Πόσον ζυγίζει κατὰ χιλιομέτρον μήκους, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 8,92 gr*/cm³.
(Ἀπ. 1575 kg*km⁻¹.)
67. Κοχλιάριον ἔχει βάρος 55,7 gr* καὶ ὄγκον 5,3 cm³. Ποῖον τὸ εἰδικὸν του βάρος. Ἀπὸ τί εἶδους ὑλικὸν θὰ ἠδύνατο νὰ εἶναι κατασκευασμένον.
(Ἀπ. $\epsilon = 10,5 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$. Ἀπὸ ἀργυρον.)
68. Ποῖον ὄγκον ἔχουν 60 gr* μολύβδου. ($\epsilon_{\text{μολ}} = 11,3 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$).
(Ἀπ. 5,31 cm³.)
69. Δοχεῖον περιέχει 4,58 kg ἑλαίου, πυκνότητος 0,92 gr/cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐλαίου.
(Ἀπ. 4,98 dm³.)
70. Πόσον ὄγκον καταλαμβάνει εἰς 0°C 1 gr ὕδραργύρου. (Ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργόρου εἰς 0°C εἶναι 13,6 gr/cm³).
(Ἀπ. 73,5 cm³.)
71. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σιδήρου, ὅστις ἀπητῆθη διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ Πύργου τοῦ Eiffel, γνωστοῦ ὅντος ὅτι ζυγίζει 8000 τόννους καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 gr*/cm³. Πόση θὰ ἦτο ἡ τομὴ σιδηρᾶς ράβδου, ἐχούσης τὸ αὐτὸ βάρος καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (300 m) μετὰ τὸν Πύργον τοῦ Eiffel.
(Ἀπ. 1026 m³, 3,42 m².)
72. Πόσον ὄγκον εἰς λίτρα ἔχουν 16 kg* ἀλκοόλης. ($\epsilon_{\text{αλκ}} = 0,79 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$)
(Ἀπ. 20,3 lt.)
73. Τεμάχιον ξύλου ζυγίζει 1850 gr*, φέρει δὲ κοιλότητα ἐντὸς τῆς ὁποίας τοποθετεῖται σιδηρὰ πλάξ, ἥτις τὴν πληροῖ· τὸ τεμάχιον ζυγίζει 2640 gr*. Πόσος ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος. (Πυκνότης ξύλου 0,62 gr/cm³, πυκνότης σιδήρου 7,80 gr/cm³).
(Ἀπ. 110 cm³.)
74. Σωλὴν μικρᾶς διαμέτρου ὅταν εἶναι κενὸς ζυγίζει 4,5204 gr, ὅταν δὲ εἶναι πλήρης ὕδραργόρου ζυγίζει 4,6415 gr. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 78,3 mm, ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλῆνος. (Πυκνότης ὕδραργόρου: 13,6 gr/cm³).
(Ἀπ. 0,3805 mm.)

75. Ἐλατήριο ἐκ χάλυβος, τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τείνοντος βάρους, ὑφίσταται ἐπιμήκυνσιν 15 mm ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν φορτίου 120 gr*. Ζητοῦνται : α) Πόσον ἐπιμηκύνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν κάτωθι φορτίων : 175 gr*, 260 gr*, 325 gr*. β) Πόσον εἶναι τὸ φορτίον, τὸ ὁποῖον τοῦ ἐπιφέρει ἐπιμήκυνσιν 35 mm. γ) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα.

(Ἀπ. α' 22 mm, 32,5 mm, 40,6 mm. β' 280 gr*.)

76. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἑξῆς σειρὰ παρατηρήσεων χρόνου t καὶ πιέσεως p : $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ sec}$, $p = 10, 15, 20, 24, 28, 31, 34, 36, 37, 37 \text{ mmHg}$.

77. Πλοῖον τηρεῖ πορείαν πρὸς Νότον 15 μιλίων ἀνὰ ὥραν καὶ ἐκτρέπεται πρὸς Δυσμὰς ὑπὸ ρεύματος ταχύτητος 5 μιλίων ἀνὰ ὥραν. Νὰ καθορισθῇ ἡ συνισταμένη ταχύτης τοῦ πλοίου.
(Ἀπ. 15,8 mil/h, $18^\circ 25'$.)

78. Ποῖον τὸ μέτρον συνισταμένης δύο δυνάμεων 250 Nt καὶ 450 Nt, ἐνεργουσῶν ὑπὸ γωνίαν 75° μεταξύ των.
(Ἀπ. 542 Nt.)

79. Σιδηροῦν πρίσμα, βάρους 50 kg* καὶ ἐμβαδοῦ βάσεως 4 cm^2 , ἴσταται ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Ποία ἡ ὑπὸ τοῦ πρίσματος ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως πίεσις.
(Ἀπ. $p = 12,5 \text{ kg*}/\text{cm}^2$.)

80. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀσκουμένη πίεσις ὑπὸ γυναικὸς βάρους 60 kg*, στηριζομένης ἐπὶ τῶν δύο ὑποπερνίων της (τακουινῶν), ἐπιφανείας 2 cm^2 ἑκάστου.
(Ἀπ. $15 \text{ kg*}/\text{cm}^2$.)

81. Ἐπὶ βελόνης ἀσκεῖται, μὲ τὴν βοήθειαν δακτυλήθρας, ἡ δύναμις τοῦ δακτύλου ἴση πρὸς $1,5 \text{ kg*}$. Ποία ἡ πίεσις εἰς τὴν κεφαλὴν τῆς βελόνης, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἀνέρχεται εἰς $0,01 \text{ mm}^2$.
(Ἀπ. $15\,000 \text{ kg*}/\text{cm}^2$.)

82. Ἐπὶ σιδηροῦ φορέως ἐνεργεῖ δύναμις 10 tn* . Ποία ἡ ἐπιφάνεια στηρίξεως, ὅταν αὕτη ἀντέχῃ μέχρι πιέσεως $8 \text{ kg*}/\text{cm}^2$.
(Ἀπ. 1250 cm^2 .)

83. Σιδηρὰ γέφυρα ἐρείδεται ἐπὶ σιδηρῶν στύλων, οἱ ὁποῖοι ἀντέχουν μέχρι πιέσεως $5000 \text{ kg*}/\text{cm}^2$. Ποία ἡ διατομὴ τῶν στύλων, ὅταν ἕκαστος φέρῃ βάρος 80 tn* , ὃ δὲ συντελεστὴς ἀσφαλείας λαμβάνεται ἴσος πρὸς 10. (Ἀπ. 160 cm^2 .)

84. Ἄρμα μάχης, βάρους 20 tn* , κινεῖται ἐπὶ δύο ἐρπυστριῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς μετὰ τοῦ ἐδάφους $1,5 \text{ m}^2$. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀσκουμένη πίεσις.
(Ἀπ. $p = 1,33 \text{ kg*}/\text{cm}^2$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΣΤΑΤΙΚΗ

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. ΡΟΠΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

85. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 , ἐφηρμοσμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου O καὶ διατεταγμένων ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Δίδονται: $F_1 = 1 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 2 \text{ kgr}^*$, $F_3 = 3 \text{ kgr}^*$, $F_4 = 4 \text{ kgr}^*$.

Λύσις. Αἱ δυνάμεις $F_1 = 1 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_3 = 3 \text{ kgr}^*$ δίδουν συνισταμένην Σ_1 , τῆς αὐτῆς διεθύνσεως καὶ μὲ φοράν τὴν φορὰν τῆς F_3 , ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν $\Sigma_1 = 2 \text{ kgr}^*$.

Ἐπίσης, αἱ δυνάμεις $F_2 = 2 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_4 = 4 \text{ kgr}^*$ δίδουν συνισταμένην Σ_2 , τῆς αὐτῆς διεθύνσεως καὶ μὲ φοράν τὴν φορὰν τῆς F_4 , ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν $\Sigma_2 = 2 \text{ kgr}^*$.

Συνθέτομεν ἤδη τὰς δυνάμεις Σ_1 καὶ Σ_2 , συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου, ὁπότε εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου:

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}$$

ὅτι: $\Sigma = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ kgr}^* = 2,83 \text{ kgr}^*$

86. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 4 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2 = 3 \text{ kgr}^*$, ἐπενεργουσῶν ἐπὶ ἐνὸς ὕλικου σημείου ὑπὸ γωνίαν: α) 90° , β) 60° μεταξύ των.

Λύσις. Α' ΜΕΘΟΔΟΣ. ΛΟΓΙΣΤΙΚῶΣ. — α) Ὃταν ἡ μεταξύ τῶν δυνάμεων σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\theta = 90^\circ$, ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \text{ ὅτι εἶναι:}$$

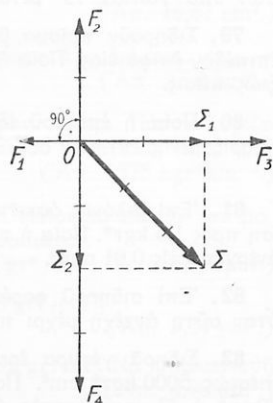
$$F = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ kgr}^* = 5 \text{ kgr}^*$$

β) Ὃταν ἡ μεταξύ τῶν δυνάμεων σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\theta = 60^\circ$, ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

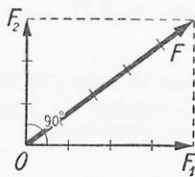
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \theta} \text{ ὅτι εἶναι: } F = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0,5} \text{ kgr}^* = 6,1 \text{ kgr}^*$$

Β' ΜΕΘΟΔΟΣ. ΓΡΑΦΙΚῶΣ. — Ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα φέρομεν ἐκ τοῦ O τὰ διανύσματα, ὥστε τὰ μήκη αὐτῶν νὰ παριστάνουν ἀντιστοίχως 4 kgr^* καὶ 3 kgr^* καὶ νὰ σχηματίζουν μεταξύ των εἰς τὴν (α) περίπτωσιν γωνίαν 90° καὶ εἰς τὴν (β) περίπτωσιν γωνίαν 60° . Κατόπιν σχηματίζομεν τὸν παραλληλόγραμμον τῶν διανυσμάτων, εἰς ἐκάστην περίπτωσιν, καὶ διὰ μετρήσεως διὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε κλίμακος τῶν διαγωνίων εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως:

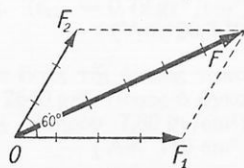
$$F = 5 \text{ kgr}^* \text{ καὶ: } F = 6,1 \text{ kgr}^*$$



* Ασκήσις 85.



(α)

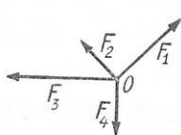


(β)

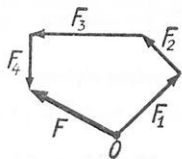
87. Τέσσαρες δυνάμεις $F_1 = 6 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 4 \text{ kgr}^*$, $F_3 = 8 \text{ kgr}^*$, $F_4 = 4 \text{ kgr}^*$, ἐπενεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον O κατὰ διεθύνσεις βορειο-ἀνατολικήν, βορειο-δυτι-

κήν, δυτικήν και νοτιάν ἀντιστοίχως (βλ. σχ. α). Νά κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῶν δυνάμεων καὶ νά εὐρεθῇ διὰ γραφικῆς μεθόδου ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων τούτων δυνάμεων.

Λύσις. Γ ρ α φ ι κ ῶ ς. — Φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Ο (σχῆμα β) τὰ διανύσματα F_1, F_2, F_3, F_4 ἀντιστοίχως, παράλληλα, ὁμόρροπα καὶ ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας δυνάμεις τοῦ σχήματος (α), παριστῶμενὰς ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα. Οὕτω κατασκευάζεται μία πολυγωνικὴ γραμμὴ (δυναμοπολύγωνον), τῆς ὁποίας ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος ὀρίζουν ἐν διάνυσμα, ἴσον κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν, διεύθυνσιν καὶ φοράν, πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δοθεισῶν δυνάμεων. Τὸ διάνυσμα τοῦτο, μετροῦμεν διὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε κλίμακος, εὐρίσκεται ἴσον πρὸς



(α)



(β)

$$F = 7 \text{ kgr*}$$

88. Δύο δυνάμεις, ἐπενεργοῦσαι κατ' ὀρθὴν γωνίαν, ἔχουν συνισταμένην 10 kgr* . Ἐάν ἡ μία τῶν δύο τούτων δυνάμεων εἶναι 6 kgr* , νά ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη δύναμις.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν F_1 τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν 6 kgr* , F_2 τὴν ἄγνωστον δύναμιν καὶ F τὴν συνισταμένην αὐτῶν, ἴσην πρὸς 10 kgr* , θὰ ἔχωμεν :

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητούμενη δύναμις θὰ ἔχη ἔντασιν :

$$F_2 = \sqrt{10^2 - 6^2} \text{ kgr*} = 8 \text{ kgr*}$$



89. Δύο ρυμουλκὰ ἐπιδιώκουν νὰ ἐλευθερώσουν προσαρά-ξαν πλοῖον. Πρὸς τοῦτο ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἐπενεργεῖ ἐπὶ καλωδίου, σχηματίζον δὲ τὰ καλώδια μεταξύ των γωνίαν 20° . Αἱ δυνάμεις, αἱ ἀσκούμεναι ὑπὸ τῶν ρυμουλκῶν, εἶναι 1000 kgr* καὶ 1500 kgr* ἀντιστοίχως. Νά εὐρεθῇ ἡ συνισταμένη δύναμις (συν $20^\circ = 0,64$).

Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \varphi}$$

εὐρίσκομεν ὅτι : $F = \sqrt{1000^2 + 1500^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 1500 \cdot 0,64} \text{ kgr*} = 2,27 \cdot 10^3 \text{ kgr*}$

90. Δύο δυνάμεις $F_1 = 2 \text{ kgr*}$ καὶ $F_2 = 5 \text{ kgr*}$ ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60° . Νά ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

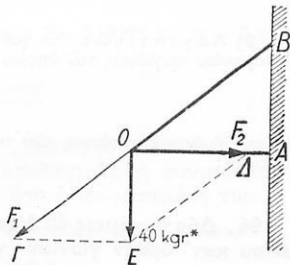
Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \varphi}$$

εὐρίσκομεν ὅτι :

$$F = \sqrt{2^2 + 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,5} \text{ kgr*} = 6,244 \text{ kgr*}$$

91. Κιβώτιον, ζυγίζον 40 kgr* , εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ ἄκρον ὀριζοντίας δοκοῦ ΑΟ μήκους 4 m καὶ σχοινίου ΟΒ προοδεδεμένου ἐπὶ τοῦ σημείου Β, ἀπέχοντος 3 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α τῆς ὑποστηρίξεως τῆς δοκοῦ ΟΑ (βλ. σχῆμα). Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ δύναμις, ἡ ὁποία τείνει τὸ σχοινίον ΟΒ καὶ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία συμπίπτει τὴν δοκὸν ΟΑ. Τὸ βάρος τῆς δοκοῦ νά θεωρηθῇ ἀμελητέον.



* Ασκήσις 91.

Λύσις. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν τῶν 40 kg* εἰς τὰς συνιστάσας δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοιχῶς διευθύνσεις τὰς BO καὶ OA.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAB εὐρίσκομεν ὅτι: $OB = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$, ἥτοι $OB = 5 \text{ m}$, Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΓΟΕ καὶ ΟΒΑ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{OG}{OB} = \frac{GE}{OA} = \frac{OE}{BA} \quad \eta' \quad \frac{F_1}{5 \text{ m}} = \frac{F_2}{4 \text{ m}} = \frac{40 \text{ kg*}}{3 \text{ m}}$$

Ἐπομένως εὐρίσκομεν ὅτι:

$$F_1 = 66,6 \text{ kg*} \quad \text{καὶ} \quad F_2 = 53,3 \text{ kg*}$$

92. Σῶμα, βάρους 50 kg*, ἐξηρητημένον ἀπὸ σχοινίου, ὠθεῖται ὀριζοντίως διὰ δυνάμεως 20 kg* (βλ. σχῆμα). Νὰ προσδιορισθοῦν τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ἡ ὀριζοντία δύναμις τῶν 20 kg* θὰ εἶναι ἴσης ἐντάσεως καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης F' τῶν δυνάμεων 50 kg* καὶ τῆς τάσεως (νήματος). Συνεπῶς ἡ διαγωνίος τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων τάσεως νήματος καὶ βάρους σώματος, θὰ κείται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς ὀριζοντίας δυνάμεως τῶν 20 kg* καὶ τὸ μήκος αὐτῆς θὰ παρῇ δυνάμιν ἴσην κατὰ μέτρον πρὸς 20 kg*. Οὕτω, βάσει τοῦ σχήματος, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Τάσις} = \sqrt{20^2 + 50^2} \text{ kg*} = 54 \text{ kg*}$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς τάσεως τοῦ νήματος ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον σχηματίζει γωνίαν θ , ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ σχήματος. Οὕτως ἔχομεν:

$$\eta\mu \theta = \frac{F}{T} = \frac{20 \text{ kg*}}{54 \text{ kg*}} = 0,37 \text{ ἔξ οὗ} : \theta = 22^\circ$$

93. Δύναμις $F_1 = 7 \text{ kg*}$ ἐπενεργεῖ ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου ὁμοῦ μετὰ ἐτέρας δυνάμεως F_2 . Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι 25 kg* καὶ ἡ δύναμις F_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν συνισταμένην, νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις F_2 .

Λύσις. α) Γραφικῶς. Σχηματίζομεν γωνίαν 90° καὶ μεταφέρομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὑπὸ κλίμακα τὴν συνιστώσαν $F_1 = 7 \text{ kg*}$ καὶ τὴν συνισταμένην $\Sigma = 25 \text{ kg*}$. Ἐν συνεχείᾳ κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ F_1 καὶ ἡ διαγωνίος θὰ εἶναι ἡ Σ . Ἡ προκύπτουσα ἐτέρα πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου θὰ μᾶς δίδῃ ὑπὸ κλίμακα τὴν δύναμιν F_2 . Διὰ μετρήσεως τοῦ μήκους αὐτῆς καὶ λαμβανομένης ὑπ' ὅψιν τῆς κλίμακας προσδιορίζεται ἡ F_2 . Δι' ἀκριβοῦς κατασκευῆς εὐρίσκομεν:

$$F_2 = 26 \text{ kg*}$$

β) Λογιστικῶς. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος προκύπτει ὅτι ἡ F_2 εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ F_1 καὶ Σ . Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως:

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + \Sigma^2}$$

ὁπότε, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $F_1 = 7 \text{ kg*}$ καὶ $\Sigma = 25 \text{ kg*}$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, θὰ λάβωμεν:

$$F_2 = 26 \text{ kg*}$$

94. Δύο δυνάμεις 48 kg* καὶ 55 kg* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου κατ' ὀρθὴν γωνίαν. νὰ υπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

Λύσις. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων $F_1 = 48 \text{ kg*}$ καὶ $F_2 = 55 \text{ kg*}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν ὡς ἀνω δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 . Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως: $\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν θὰ λάβωμεν:

$$\Sigma = \sqrt{48^2 + 55^2} \text{ kg*} \quad \eta' \quad \Sigma = 73 \text{ kg*}$$

95. 'Επί τῆς κορυφῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπενεργοῦν κατὰ τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς αἱ δυνάμεις $F_1 = 21 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2 = 18 \text{ kgr}^*$ καὶ ἐπὶ τῆς ἐτέρας αἱ δυνάμεις $F_3 = 27 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_4 = 53 \text{ kgr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων.

Λύσις. Συνθέτομεν πρῶτον ἀνὰ δύο τὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως ἐνεργοῦσας δυνάμεις, ὅποτε θὰ προκύψουν αἱ συνιστάμεναι αὐτῶν $\Sigma_1 = F_1 + F_2$ καὶ $\Sigma_2 = F_3 + F_4$. 'Εν συνεχείᾳ συνθέτομεν τὰς δυνάμεις Σ_1 καὶ Σ_2 , ὅποτε προκύπτει ἡ τελικὴ συνισταμένη :

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2 + (F_3 + F_4)^2}$$

'Αντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς $F_1 = 21 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 18 \text{ kgr}^*$, $F_3 = 27 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_4 = 53 \text{ kgr}^*$, ὅποτε λαμβάνομεν :

$$\Sigma = 89 \text{ kgr}^*$$

96. 'Επὶ τοῦ σημείου διασταυρώσεως δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων εὐθειῶν ἐπενεργοῦν τέσσαρες δυνάμεις ὡς ἐξῆς: ἡ $F_1 = 48 \text{ kgr}^*$ πρὸς τὰ δεξιὰ, ἡ $F_2 = 110 \text{ kgr}^*$ πρὸς τὰ ἄνω, ἡ $F_3 = 12 \text{ kgr}^*$ πρὸς τ' ἀριστερά καὶ ἡ $F_4 = 33 \text{ kgr}^*$ πρὸς τὰ κάτω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

Λύσις. Συνθέτομεν κατ' ἀρχὰς ἀνὰ δύο τὰς ἐπὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ἄλλ' ἀντιθέτου φορέως δυνάμεις, ὅποτε προκύπτουν αἱ μερικαὶ συνιστάμεναι: $\Sigma_1 = F_1 - F_3$ καὶ $\Sigma_2 = F_2 - F_4$. 'Εν συνεχείᾳ θὰ προκύψῃ τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ἐκ τοῦ τύπου :

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} = \sqrt{(F_1 - F_3)^2 + (F_2 - F_4)^2}$$

'Εκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, δι' ἀντικατάστασεως τῶν τιμῶν τῶν γνωστῶν μεγεθῶν, προκύπτει :

$$\Sigma = \sqrt{(48 - 12)^2 + (110 - 33)^2} \text{ kgr}^* \quad \eta: \quad \Sigma = 85 \text{ kgr}^*$$

97. Σῶμα, βάρους 159 kgr^* , εὐρισκόμενον ἐπὶ ὀριζοντίας τραπέζης, ὑπὸκειται εἰς τὴν ἐπενέργειαν δύο δυνάμεων, ἐφηρμοσμένων ἐφ' ἐνὸς σημείου αὐτοῦ, καὶ ὑπὸ γωνίαν 90° , παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς τραπέζης, εἶναι δὲ $F_1 = 28 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2 = 45 \text{ kgr}^*$. Πόση εἶναι ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ πόση ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν αὕτη μεταδίδει εἰς τὸ σῶμα. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) 'Η συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{28^2 + 45^2} \text{ kgr}^* \quad \eta: \quad \Sigma = 53 \text{ kgr}^*$$

β) 'Η ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ δύναμις Σ ἐπὶ τοῦ σώματος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{\Sigma}{m}$$

'Εργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων ἔχομεν: $\Sigma = 53 \text{ kgr}^*$ καὶ $m = B/g = 159/9,8 \text{ T.M.}$ μάζης $= 16,22 \text{ T.M.}$ μάζης. 'Επομένως :

$$\gamma = \frac{53}{16,2} \text{ m/sec}^2 \quad \eta: \quad \gamma = 3,27 \text{ m/sec}^2$$

98. Δύο δυνάμεις, $F_1 = 5 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2 = 15 \text{ kgr}^*$, ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὕλικου σημείου καὶ σχηματίζουν γωνίαν 90° . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τῶν. 'Εὰν ἡ γωνία τῶν δυνάμεων ᾗτο 45° , πόση θὰ ᾗτο ἡ συνισταμένη τῶν.

Λύσις. 'Εφ' ὅσον αἱ δυνάμεις ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 90° , ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι :

$$\underline{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{5^2 + 15^2} \text{ kgr}^* = 15,8 \text{ kgr}^*$$

'Εὰν ὁμως ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 45° , ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι :

$$\underline{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \sin 45^\circ} = \sqrt{5^2 + 15^2 + 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ kgr}^* = 18,87 \text{ kgr}^*$$

99. Πλαίσιο είναι εξηρημένον από καρφίον (βλ. σχήμα). Τò σχοινίον εξαρτήσεως θραύεται, όταν ή δύναμις (τάσις νήματος) υπερβή τα 25 kgr*. Τὰ δύο ήμισυ του σχοινίου εξαρτήσεως σχηματίζουν γωνίαν 60° μεταξύ των. Νά καθορισθῇ τὸ μέγιστον ἐπιτρεπόμενον βάρος τοῦ πλαισίου.

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ πλαίσιον ἔχει βάρος B. Τὸ βάρος τοῦτο θά ἀσκήται ἐπὶ τοῦ καρφίου O μὲς τῶν δύο νημάτων. Ἐπομένως, διὰ νὰ εὐρωμεν τὰς τάσεις τῶν νημάτων, ἀναλύομεν τὸ B εἰς δύο δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν διευθύνσεις, τὰς διευθύνσεις τῶν νημάτων καὶ σημείον ἐφαρμογῆς τὸ O. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ῥόμβος καὶ ἐπομένως αἱ τάσεις τῶν νημάτων εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἐκάστη τάσις εἶναι F, τότε θά ἔχωμεν :

$$B = \sqrt{F^2 + F^2} + 2 F \cdot F \cdot \sin 60^\circ = F \cdot \sqrt{3}$$

Ἐπειδὴ ὁμως τὸ νῆμα θραύεται ὅταν ή δύναμις F, δηλ. ή τάσις τοῦ νήματος, υπερβῇ τα 25 kgr*, ἔπεται ὅτι τὸ ἐπιτρεπόμενον βάρος τοῦ πλαισίου εἶναι :

$$B = 25 \sqrt{3} \text{ kgr}^* = 43,25 \text{ kgr}^*$$

100. Βάρος 50 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέσον σχοινίου, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο καμπτόμενον σχηματίζει γωνίαν 90°. Νά προσδιορισθῇ ή δύναμις (τάσις) ἐπὶ ἐκάστου τμήματος τοῦ σχοινίου.

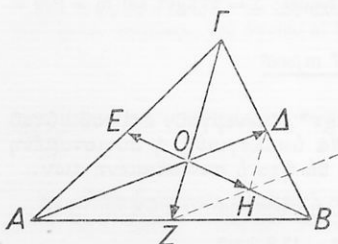
Λύσις. Ἐστω τὸ σχοινίον AOG, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι στερεωμένα εἰς τὰ σημεία A καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ μέσου O αὐτοῦ ἐξαρτᾶται βάρος B = 50 kgr*. Ἀναλύομεν τὸ βάρος B εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις AO καὶ OG τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου. Τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι τετράγωνον καὶ ἐπομένως αἱ δύο δυνάμεις εἶναι ἴσαι. Οὕτω θά ἔχωμεν :

$$2 F^2 = 50^2 \text{ kgr}^* \text{ καὶ :}$$

$$F = 35,4 \text{ kgr}^*$$

101. Αἱ διάμεσοι τριγώνου παριστοῦν τρεῖς δυνάμεις. Νά δειχθῇ ὅτι αὗται εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Λύσις. Ἐστω τὸ τρίγωνον ABΓ, αἱ διάμεσοι αὐτοῦ AD, BE, ΓΖ τῶν ὁποίων κοινὸν σημεῖον εἶναι τὸ O. Ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν αἱ τρεῖς διάμεσοι παριστοῦν δυνάμεις (μὲ φορὰν ἐκ τῆς κορυφῆς πρὸς τὸ μέσον τῆς ἐναντι πλευρᾶς), τότε αὗται θά εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.



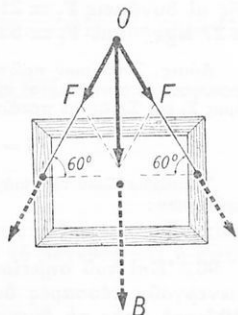
Γεωμετρίας ὅτι τὸ σημεῖον H θά πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας OB καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$(OH) = (OE)$$

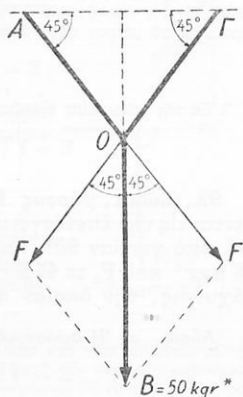
(2)

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ή ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΓΟ θά διέρχεται διὰ τοῦ σημείου H καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον OΔΗΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐφ' ὅσον ὁμως αἱ πλε-

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς



Ἀσκήσις 99.



Ἀσκήσις 100.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα OΔ, OΕ καὶ OΖ ἔχουν ἕκαστον, ὡς γνωστὸν, μήκος ἴσον πρὸς τὸ ἓν τρίτον (1/3) τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐπομένως, ὅτι ταῦτα παριστοῦν δυνάμεις, θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\begin{aligned} (AD) &= 3 (OD), (BE) = 3 (OE), (ΓΖ) = \\ &= 3 (OZ) \end{aligned} \quad (1)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ τρεῖς μικραὶ δυνάμεις OΔ, OΕ καὶ OΖ εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, τότε καὶ αἱ τρεῖς ἀρχικαὶ δυνάμεις θά εὐρίσκονται ὡσαύτως ἐν ἰσορροπίᾳ.

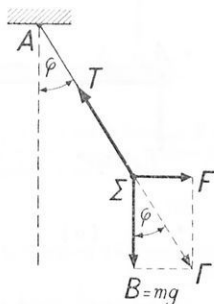
Φέρομεν ἐκ τοῦ Z εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν AO, τέμνουσαν τὴν OB εἰς τὸ σημεῖον H. Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς

ραι αυτού παριστούν τὰς δυνάμεις ΟΔ και ΟΖ, έπεται ότι ή συνισταμένη αὐτῶν θά είναι ίση πρὸς τὴν διαγώνιον ΟΗ, ήτοι ίση κατὰ μέτρον (έξίσωσις 2) και ἀντιθέτου φορὸς πρὸς τὴν ΟΕ.

*Αρα αἱ τρεῖς δυνάμεις ΟΔ, ΟΕ και ΟΖ εὐρίσκονται ἐν Ισορροπίᾳ και κατ' ἀκολουθίαν και αἱ τριπλάσια αὐτῶν δυνάμεις ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ θά εὐρίσκονται ἐν Ισορροπίᾳ.

102. Σφαῖρα Σ, μάζης **m**, κρέμεται διὰ νήματος ἐξηρητημένου ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς ὀροφῆς δωματίου, ἐνῶ ἔλκεται ἐκ παραλλήλου δι' ὀριζοντίου νήματος μετὰ δυνάμεως **F**, εἰς τρόπον ὥστε νά ἰσορροπῇ εἰς θέσιν, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἀπὸ τῆς ὀροφῆς ἐξηρητημένον νήμα σχηματίζει γωνίαν **φ** μετὰ τῆς κατακορύφου. Νά σχεδιασθοῦν αἱ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀσκούμεναι δυνάμεις και νά ὑπολογισθοῦν αὐταί, συναρτήσῃ τοῦ βάρους τῆς σφαίρας και τῆς γωνίας **φ**.

Λύσις. *Επὶ τῆς Ισορροπούσης σφαίρας ἀσκοῦνται αἱ ἀκόλουθοι τρεῖς δυνάμεις : α) Τὸ βάρος Β τῆς σφαίρας, με διευθύνσιν κατακορύφον και φορὰν πρὸς τὰ κάτω, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $B = mg$, β) ἡ ὀριζοντία δύναμις **F**, ἡ προκαλοῦσα τὴν ἀπόκλισιν τοῦ νήματος ΑΣ κατὰ γωνίαν **φ** ἀπὸ τῆς κατακορύφου, και γ) ἡ τάσις **T** τοῦ νήματος ΑΣ, λόγῳ ἀντιδράσεως, ἔχουσα τὴν διευθύνσιν τοῦ νήματος και φορὰν πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως Α. *Εφ' ὅσον ἡ σφαῖρα Σ δὲν εὐρίσκεται ἐν ἐπαφῇ πρὸς ἄλλα σώματα, οὐδεμία ἄλλη δύναμις ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτῆς. *Εφ' ὅσον δὲ ἡ σφαῖρα Ισορροπεῖ, αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι δυνάμεις Ισορροποῦν, ήτοι ἡ συνισταμένη αὐτῶν Ισοῦται πρὸς μηδέν. *Οταν ὁμως συμβαῖνῃ τοῦτο διὰ τρεῖς δυνάμεις, τότε οἰαδήποτε ἐξ αὐτῶν Ισοῦται κατὰ μέτρον πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν ἄλλων δύο και εἶναι ἀντίθετος πρὸς αὐτήν. *Η **T** ἐπομένως εἶναι ίση και ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν Β και **F**. *Ἀλλ' ἵνα τοῦτο συμβαῖνῃ, πρέπει ἡ συνισταμένη **Γ** τῶν Β και **F** νά κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΣ, ὁπότε ἡ γωνία τῶν Β και **Γ** Ισοῦται πρὸς τὴν **φ**.



*Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΣΓ ἔχομεν :

$$BG = F = B \cdot \epsilon\phi \phi = mg \cdot \epsilon\phi \phi$$

$$\Sigma \Gamma = T = \frac{B}{\sin \phi} = \frac{mg}{\sin \phi}$$

103. *Επὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ, ἀκτίνος **10 m**, ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης δύναμις **30 kgr***. Ποία ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως ταύτης ἀσκουμένη ροπή και ποία πρόσθετος ροπή πρέπει νά ἀσκηθῇ ἐπὶ τοῦ τροχοῦ, διὰ νά ἰσορροπήσῃ οὗτος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Εἰς τὸ Σύστημα Μ.Κ.Σ. *Εὰν καλέσωμεν **F** τὴν δοθεῖσαν δύναμιν, **r** τὴν ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ, ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως **F** προκαλουμένη ροπή **M** δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$M = F \cdot r \quad (1)$$

Διὰ νά ἰσορροπῇ ἐξ ἄλλου ὁ τροχός, πρέπει ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη συνολικὴ ροπή, ήτοι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ροπῶν, νά Ισοῦται πρὸς μηδέν. *Εὰν ἐπομένως καλέσωμεν **M'** τὴν ἄγνωστον ροπήν, θά εἶναι :

$$M + M' = 0 \quad (2)$$

$$\text{ή:} \quad F \cdot r + M' = 0 \quad (3)$$

$$\text{ἐξ ἧς:} \quad F \cdot r = -M' \quad (4)$$

Αντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (1) και (4) τὰ δεδομένα, ήτοι : $F = 30 \text{ kgr} = 300 \text{ Nt}$, $r = 10 \text{ m}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{M = 3000 \text{ Nt} \cdot \text{m}} \quad \text{και:} \quad \underline{M' = -3000 \text{ Nt} \cdot \text{m}}$$

β) Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. *Επειδὴ $F = 30 \text{ kgr*}$ και $r = 10 \text{ m}$, ἔχομεν ὅτι :

$$\underline{M = 300 \text{ kgr*} \cdot \text{m}} \quad \text{και:} \quad \underline{M' = -300 \text{ kgr*} \cdot \text{m}}$$

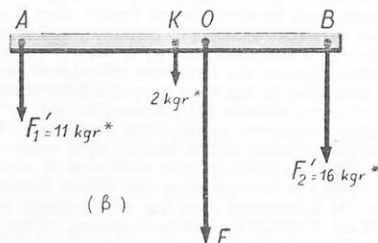
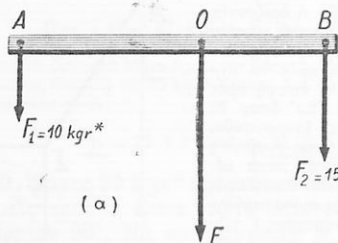
γ') Εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. Εἶναι : $F = 30 \text{ kgr}^* = 30 \cdot 10^6 \text{ dyn}$, $r = 10 \text{ m} = 10^9 \text{ cm}$, ὅρα θὰ εἶναι :

$$M = 30 \cdot 10^9 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \quad \text{καί} : \quad M' = -30 \cdot 10^9 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$$

Παρατήρησης : Ἐπειδὴ : $3000 \text{ Nt} \cdot \text{m} = 3000 \cdot 10^5 \text{ dyn} \cdot 100 \text{ cm} = 30 \cdot 10^9 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$, καί : $300 \text{ kgr}^* \cdot \text{m} = 300 \cdot 10^6 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 30 \cdot 10^9 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$, ἔπεται ὅτι τὰ εὐρεθέντα εἰς τὰ διάφορα συστήματα ἀποτελέσματα εἶναι ἰσοδύναμα.

104. Δύο κάδοι, 10 kgr^* καὶ 15 kgr^* , ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα ὁμογενούς ράβδου, μήκους 1 m . Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ ἡ ράβδος, διὰ νὰ ἰσορροπῇ αὕτη : α) ἐὰν τὸ βάρος τῆς ράβδου εἶναι ἀμελητέον, β) ἐὰν τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι 2 kgr^* .

Λύσις. Α' ΜΕΘΟΔΟΣ. Διὰ τῆς εὐρέσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.



α) Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ ράβδος, πρέπει τὸ ὑποστήριγμα νὰ τεθῇ εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς O τῆς συνισταμένης F τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (βλ. σχῆμα α). Τὸ σημεῖον τοῦτο O εὐρίσκεται ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως :

$$\frac{AO}{OB} = \frac{F_2}{F_1} \quad (1)$$

*Ἀρα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{AO}{1 \text{ m} - (AO)} = \frac{15 \text{ kgr}^*}{10 \text{ kgr}^*} \quad (2)$$

*Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$AO = 0,59 \text{ m}$$

β) Τὸ βάρος τῆς ράβδου 2 kgr^* θὰ ἔχῃ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ μέσον K αὐτῆς, διότι ἡ ράβδος θεωρεῖται ὁμογενής (βλ. σχῆμα β). Ἀναλύομεν τὸ βάρος 2 kgr^* εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεία A καὶ B, καὶ εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι ἐκάστη συνιστώσα ἔχει ἔντασιν 1 kgr^* . Ἐπομένως τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι $F_1' = 11 \text{ kgr}^*$ καὶ $F_2' = 16 \text{ kgr}^*$, μὲ σημεία ἐφαρμογῆς ἀντιστοιχῶς τὰ A καὶ B, καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{AO}{OB} = \frac{16 \text{ kgr}^*}{11 \text{ kgr}^*} \quad \eta : \quad \frac{AO}{1 \text{ m} - (AO)} = \frac{16}{11} \quad (3)$$

*Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$AO = 0,59 \text{ m}$$

Εἰς ἀμφοτέρας συνεπῶς τὰς περιπτώσεις, ἡ ράβδος πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν.

B' ΜΕΘΟΔΟΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν.

α) Ἐπὶ τῆς ράβδου (σχῆμα α) ἀσκοῦνται αἱ δυνάμεις F_1 , F_2 καὶ ἡ ἀντίδρασις F, ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος. Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις, πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν αὐτῶν ὡς πρὸς οἰονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι μηδέν.

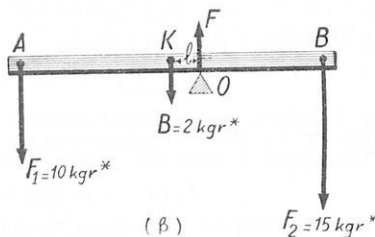
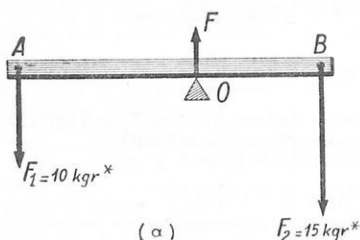
*Ἐκλέγομεν ὡς τοιοῦτον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ O καὶ ἔχωμεν :

$$F_1 \cdot (AO) + F \cdot 0 - F_2 \cdot (OB) = 0 \quad (4)$$

Θέτομεν : $F_1 = 10 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 15 \text{ kgr}^*$, $OB = 1 \text{ m}$ — (AO) και λαμβάνομεν :

$$10 \text{ kgr}^* \cdot (AO) + F \cdot 0 - 15 \text{ kgr}^* \cdot [1 \text{ m} - (AO)] = 0 \quad (5)$$

Έξ ου προκύπτει ότι : $AO = 0,59 \text{ m}$



β) 'Επί τῆς ράβδου (σχῆμα β) ἀσκοῦνται τέσσερες δυνάμεις, αἱ F_1 , F_2 , B καὶ ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος. Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τέσσερες αὐταὶ δυνάμεις, πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O νὰ εἶναι μηδέν, ἥτοι :

$$F_1 \cdot (AO) + B \cdot l + F \cdot 0 - F_2 \cdot (OB) = 0 \quad (6)$$

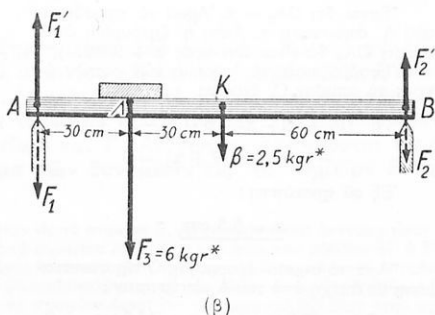
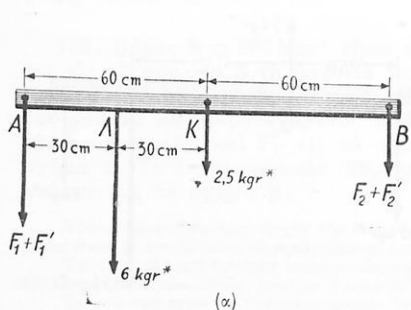
Ἐπειδὴ δέ : $l = (AO) - (AK) = (AO) - \frac{(AB)}{2}$ καὶ : $(OB) = (AB) - (AO)$, ἡ σχέσις (6) γράφεται :

$$F_1 \cdot (AO) + B \cdot \left[(AO) - \frac{(AB)}{2} \right] + F \cdot 0 - F_2 \cdot \left[(AB) - (AO) \right] = 0$$

Ἐκτελοῦντες τὰς σημειουμένας πράξεις καὶ ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$AO = 0,59 \text{ m}$$

105. Δοκὸς AB, μήκους 120 cm καὶ βάρους $2,5 \text{ kgr}^*$, στηρίζεται ἐπὶ δύο στύλων. Βάρος 6 kgr^* τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος, τὸ ὁποῖον ὑποφέρει ἕκαστος στύλος.



Λύσις. Α'. ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν 6 kgr^* εἰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2 , αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργοῦν ἀντιστοιχῶς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B τῆς δοκοῦ, ὡς ἑξῆς :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AB}{AL} \quad \eta : \quad \frac{F_1}{6 \text{ kgr}^* - F_1} = \frac{90 \text{ cm}}{30 \text{ cm}}$$

Ἄρα : $F_1 = 4,5 \text{ kgr}^*$ καὶ : $F_2 = 6 \text{ kgr}^* - 4,5 \text{ kgr}^* = 1,5 \text{ kgr}^*$

Όμοιως αναλύομεν τὴν δύναμιν $2,5 \text{ kgr}^*$ καὶ εὐρίσκομεν εὐκόλως, ἔπειδὴ αὕτη ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον $\delta\tau\iota$:

$$F'_1 = 1,25 \text{ kgr}^* \text{ καὶ } F'_2 = 1,25 \text{ kgr}^*$$

Ἐπομένως εἰς τὸ σημεῖον Α (βλ. σχῆμα α) θὰ ἐνεργῇ ἡ δύναμις :

$$F_1 + F'_1 = 4,5 \text{ kgr}^* + 1,25 \text{ kgr}^* = 5,75 \text{ kgr}^*$$

καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β θὰ ἐνεργῇ ἡ δύναμις :

$$F_2 + F'_2 = 1,5 \text{ kgr}^* + 1,25 \text{ kgr}^* = 2,75 \text{ kgr}^*$$

Β' ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἀσκοῦνται τέσσαρες δυνάμεις, ἤτοι : αἱ $F_3 = 6 \text{ kgr}^*$, $\beta = 2,5 \text{ kgr}^*$ καὶ αἱ F'_1 , F'_2 , αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῶν ὑποστηρίγματων (βλ. σχῆμα β).

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Β, ἔχομεν :

$$F_3 \cdot (AB) + \beta \cdot (KB) - F'_1 \cdot (AB) + F'_2 \cdot 0 = 0.$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δοθεισῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν :

$$6 \cdot 30 + 2,5 \cdot 90 - F'_1 \cdot 120 + 0 = 0$$

Ἐξ οὗ :

$$F'_1 = 5,75 \text{ kgr}^*$$

Ἐπειδὴ δὲ $F'_1 + F'_2 = 6 \text{ kgr}^* + 2,5 \text{ kgr}^* = 8,5 \text{ kgr}^*$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$F'_2 = 2,75 \text{ kgr}^*$$

106. Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις, ἐντάσεων 8 kgr^* , 5 kgr^* , 13 kgr^* καὶ 6 kgr^* , ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν σημείων A_1 , A_2 , A_3 καὶ A_4 μιᾶς δοκοῦ $A_1 A_4$. Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων εἶναι $A_1 A_2 = 14 \text{ cm}$, $A_2 A_3 = 21 \text{ cm}$ καὶ $A_3 A_4 = 9 \text{ cm}$. Ἡ δευτέρα τῶν δυνάμεων εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὰς ἄλλας. Πόση ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου A_1 κείται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς.

Λύσις. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων τούτων θὰ εἶναι :

$$F = (8 + 13 + 6 - 5) \text{ kgr}^* = 22 \text{ kgr}^*$$

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης δύναται νὰ εὐρεθῇ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν.

*Ἐστω ὅτι $OA_3 = x$. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις x , διότι ἡ ζητούμενη ἀπόστασις OA_4 θὰ εἶναι ἴση πρὸς $x + 9 \text{ cm}$.

*Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο, ἔχομεν :

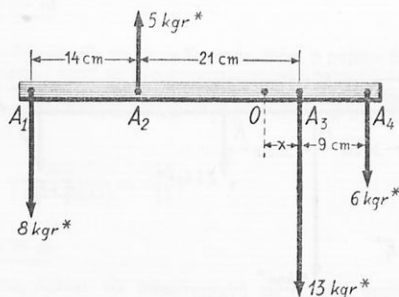
$$8 \cdot (14 + 21 - x) - 5 \cdot (21 - x) + \\ - 13x - 6 \cdot (9 + x) = 0$$

Ἐξ οὗ προκύπτει :

$$x = 5,5 \text{ cm}$$

*Ἀρα τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ A_4 ἀπόστασιν :

$$OA_4 = 5,5 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 14,5 \text{ cm}$$



107. Ὁμογενὴς δοκὸς ΑΓ, βάρους Β καὶ μήκους l , στηρίζεται, ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα, ἐπὶ ἑνὸς τοίχου καὶ τὸ ἕτερον ἄκρον Γ αὐτῆς μετὰ τὴν βοήθειαν καλωδίου, σχηματίζοντος γωνίαν 30° μετὰ τῆς δοκοῦ, συνδέεται πρὸς τὸ σημεῖον Δ τοῦ τοίχου. Νὰ υπολογισθοῦν ἡ τάσις τοῦ σχοινίου καὶ ἡ ἀντίδρασις Ε τοῦ τοίχου ἐπὶ τοῦ ἄκρου Α τῆς δοκοῦ.

Λύσις. Ὡς καλέσωμεν T τὴν τάσιν τοῦ σχοινίου καὶ E τὴν ἀντίδρασιν τοῦ τοίχου, τῆς ὁποίας ὁμως ἡ εὐθεία ἐπενεργεῖαι εἶναι ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀγνωστος.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ ὥστε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν, ὡς πρὸς οἰονδήποτε σημεῖον ὅλων τῶν δυνάμεων τῶν ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τῆς δοκοῦ, νὰ εἶναι μηδέν. Ἡ εὐθεία ἐπενεργεῖαι τοῦ βάρους B θὰ τέμνῃ τὸ σχοινίον εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ O .

Οὕτω βλέπομεν ὅτι αἱ δυνάμεις B καὶ T διέρχονται διὰ τοῦ σημείου O καὶ ἐπομένως αἱ ροπαὶ αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ ὁμως τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα B , T καὶ E πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, εἶναι φανερόν ὅτι καὶ ἡ εὐθεία ἐπενεργεῖαι τῆς ἀντιδράσεως E πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O .

Οὕτως, ἐὰν τρεῖς δυνάμεις ὁμοεπίπεδοι ἐπενεργοῦν ἐπὶ σώματος, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐπενεργεῖαι τῶν δυνάμεων νὰ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον.

Ἡδὲ, γνωρίζοντες τὴν τιμὴν τοῦ B , τὰς τιμὰς τῶν T καὶ E δυνατόμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως διὰ γραφικῆς μεθόδου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς δυνάμεις εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ διανυσματικὸν ἄθροισμα αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Οὕτως, ἐκ τοῦ σημείου ϵ (βλ. σχῆμα II) φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\epsilon\zeta$, παράλληλον πρὸς τὸ B , τοῦ ὁποῖου τὸ μήκος θεωροῦμεν ἀνάλογον πρὸς τὴν δύναμιν B . Ἐκ τοῦ σημείου ζ φέρομεν εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν δύναμιν T , καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ϵ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν δύναμιν E τὴν η καὶ κατασκευάζομεν τὸ δυναμοπολυγώνον τῶν δυνάμεων $\epsilon\zeta\eta$. Προφανῶς τὰ εὐθύγραμματα τμήματα $\zeta\eta$ καὶ $\epsilon\eta$ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοίως ἀνάλογα πρὸς τὰς δυνάμεις T καὶ E .

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς τρεῖς δυνάμεις, διὰ μετρήσεως τοῦ μήκους αὐτῶν καθορίζονται αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων T καὶ E .

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Delta$ (σχῆμα I) εἶναι ἰση πρὸς 30° καὶ τὸ μήκος $\Lambda\Gamma = l$, ἐὰν ἐκ τοῦ Λ φέρωμεν τὴν $\Lambda\Xi$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶναι ἰση πρὸς $l/2$.

Ἐὰν ἤδη ὑπολογίσωμεν τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Λ , θὰ ἔχωμεν :

$$\text{ροπή τοῦ } B = + B \cdot \frac{l}{2}, \quad \text{ροπή τοῦ } T = - T \cdot (\Lambda\Xi) = - T \cdot \frac{l}{2}, \quad \text{ροπή τοῦ } E = 0$$

$$\text{Ἐπομένως : } B \cdot \frac{l}{2} - T \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \text{ἐξ οὗ : } \underline{B = T}$$

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :

$$\underline{E = T}$$

108. Βάρος $B = 500 \text{ kgf}^*$ εἶναι ἐξηρητημένον ἀπὸ σχοινίον $B\Delta$ καὶ στηρίζεται εἰς τὸ σημεῖον B τῇ βοήθειᾳ τοῦ σχοινίου AB καὶ τῆς ράβδου $B\Gamma$, ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένην ἄρθρωτώς εἰς Γ . Ἀμελοῦντες τὸ βάρος τοῦ σχοινίου καὶ τῆς ράβδου καὶ παραδεχόμεναι μίαν ἰδανικὴν ἄρθρωσιν εἰς Γ , προσδιορίσατε τὰς δυνάμεις F_A καὶ F_Γ εἰς τὰ σημεία A καὶ Γ . Αἱ γωνίαι δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα α . Τὸ διανυσματικὸν ἄθροισμα τῶν δυνάμεων εἰς τὸ σημεῖον B δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα β .

Λύσις. Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὴν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὸ σημεῖον B . Αἱ ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι τὸ βάρος B καὶ αἱ ἀντιδράσεις, αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὸ σχοινίον AB ἢ F'_A καὶ ἀπὸ τὴν ράβδον $B\Gamma$ ἢ F'_Γ . Ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν, πρέπει ἡ συνισταμένη τούτων νὰ εἶναι μηδέν καὶ ἐπομένως τὸ πολυγώνον τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων (δυναμοπολυγώνον) νὰ εἶναι κλειστὸν (σχῆμα β).

Ἐκ τοῦ σχήματος (α) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σχοινίον ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ μαστοῦ $E\Theta$ μίαν ἰσὴν πρὸς τὴν F'_A καὶ ἀντίθετον δύναμιν F_A εἰς τὸ σημεῖον A καὶ ὅτι ἡ ράβδος ἀσκεῖ εἰς τὸ Γ μίαν ἰσὴν πρὸς τὴν F'_Γ καὶ ἀντίθετον δύναμιν τὴν F_Γ (Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως).

Ἐκ τοῦ δυναμοπολυγώνου (σχῆμα β) τὸ ὁποῖον εἶναι τρίγωνον, προσδιορίζομεν τὰς δυνάμεις F_A καὶ F_Γ ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως :

$$\frac{F'_A}{\eta\mu 35^\circ} = \frac{F'_\Gamma}{\eta\mu 115^\circ} = \frac{B}{\eta\mu 30^\circ}$$

$$\eta: \frac{F_A}{\eta \mu 35^\circ} = \frac{F_r}{\eta \mu 115^\circ} = \frac{B}{\eta \mu 30^\circ}$$

καθότι, ως ἐλέχθη, $F'_A = F_A$ και $F'_r = F_r$

Ούτως εὑρίσκομεν :

$$F_A = \frac{\eta \mu 35^\circ \cdot B}{\eta \mu 30^\circ} = \frac{0,574 \cdot 500 \text{ kgr}^*}{0,5} = 574 \text{ kgr}^*$$

$$F_r = \frac{\eta \mu 115^\circ \cdot B}{\eta \mu 30^\circ} = \frac{0,906 \cdot 500 \text{ kgr}^*}{0,5} = 906 \text{ kgr}^*$$

109. Προσδιορίσατε την ὀριζοντίαν δύναμιν F , την ἐφαρμοζομένην εἰς τὸ κέντρον K ἐνὸς κυλίνδρου βάρους $B = 2 \text{ tn}^*$ και ἀκτίνος $\alpha = 50 \text{ cm}$, την ἀναγκαίαν διὰ νὰ ὠθήσῃ τὸν κύλινδρον ὑπεράνω τοῦ ἐμποδίου Δ . Ὑψος ἐμποδίου $h = 10 \text{ cm}$.

Λύσις. Ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις F εἶναι μόλις ἱκανὴ νὰ προκαλέσῃ κίνησιν τοῦ κυλίνδρου, δὲν θὰ ὑπάρχῃ δύναμις μεταξύ κυλίνδρου και ὀριζοντίου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Z . Τότε ὁ κύλινδρος θὰ εὑρίσκειται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τριῶν μόνον δυνάμεων, τῶν F , B και τῆς ἀντιδράσεως F'_Δ , ὡς δεῖκνύεται εἰς τὸ σχῆμα.

Ἐφ' ὅσον αἱ δυνάμεις F και B διέρχονται ἐκ τοῦ κέντρου K , και ἡ F'_Δ ὀφείλει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Τὸ τρίγωνον τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔKE , ἐπειδὴ δέ :

$$F^2 = (\Delta E)^2 = (\Delta K)^2 - (KE)^2 = \alpha^2 - (\alpha - h)^2 \quad \text{και} : B = (KZ) + (EZ) = \alpha - h, \text{ λαμβάνομεν} :$$

$$\frac{F}{B} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha - h)^2}}{\alpha - h}$$

$$\eta: F = \frac{B \cdot \sqrt{\alpha^2 - (\alpha - h)^2}}{\alpha - h}$$

Θέτοντες : $B = 2 \text{ tn}^*$, $\alpha = 50 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, εὑρίσκομεν :

$$F = 1,5 \text{ tn}^*$$

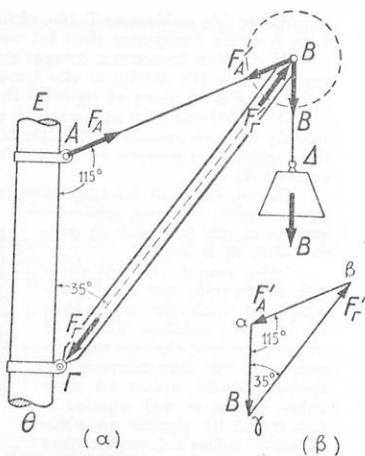
110. Νὰ γίνῃ ἡ σύνθεσις τοῦ ζεύγους $M_1 = +20 \text{ kgr}^* \text{ m}$ μετὰ τοῦ ζεύγους $M_2 = 50 \text{ kgr}^* \text{ m}$, ἀμφοτέρων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὰ δύο ζεύγη κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θὰ παριστῶνται ὑπὸ δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων, καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. Τὰ διανύσματα αὐτά, ὡς ἐλεύθερα, δύνανται νὰ μεταφερθοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως και νὰ ἀποκτήσουν οὕτω κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ φορέως και τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπομένως τὸ ὅλον πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν σύνθεσιν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἀλλ' ἀντιθέτου φορῶς. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς διὰ τὸ συνιστάμενον ζεύγος ὅτι :

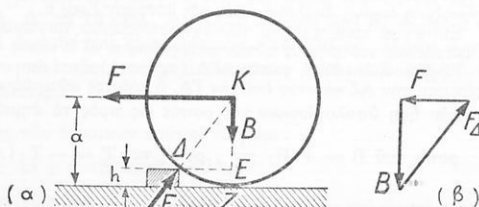
$$M = M_1 + M_2$$

Και δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $M_1 = +20 \text{ kgr}^* \text{ m}$ και $M_2 = -50 \text{ kgr}^* \text{ m}$ προκύπτει :

$$M = -30 \text{ kgr}^* \text{ m}$$



*Ασκήσις 108.



*Ασκήσις 109.

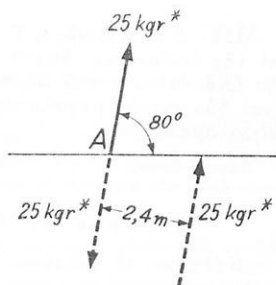
111. Νά συνδυασθῇ δύναμις 25 kgr* ὑπὸ γωνίαν 80°, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, μὲ ζεύγος δυνάμεων + 60 kgr*m, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Λύσις. Ζεύγη δυνάμεων, εὐρίσκόμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ τῶν, ἀσχετῶς τοῦ μέτρου ἐκάστης δυνάμεως τῶν ζευγῶν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι αἱ ροπαὶ τῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μέτρον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὸ ζεύγος ὡς συγκείμενον ἐκ δύο ἀντιθέτων δυνάμεων, ἐκάστης ἴσης πρὸς 25 kgr*, τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν l οὕσης ἴσης πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ ζεύγους καὶ μῆς τῶν δυνάμεων. Δηλαδή:

$$l = \frac{M}{F}$$

Τιθεμένης τῆς δυνάμεως $F = 25 \text{ kgr*}$ καὶ δεδομένης τῆς $M = 60 \text{ kgr* m}$, εὐρίσκομεν:

$$l = 2,4 \text{ m}$$



Τὸ ζεύγος τοῦτο τοποθετοῦμεν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε ἡ μία τῶν δυνάμεων αὐτοῦ νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως μετὰ τῆς δεδομένης δυνάμεως F' , εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς ἀλλὰ μὲ ἀντίθετον φοράν (βλ. σχῆμα). Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο Α ἐπενεργούν τώρα δύο δυνάμεις ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ἀλληλεξουδετερούμεναι, ὁπότε ἀπομένει μόνον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ ἡ μία δύναμις τοῦ ζεύγους $F' = 25 \text{ kgr*}$, ὑπὸ διεύθυνσιν 80° καὶ εἰς ἀπόστασιν 2,4 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

Σημείωσις. Δὲν δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς σύνθεσιν ἀπ' εὐθείας τῶν διανυσμάτων δυνάμεως καὶ ροπῆς, διότι πρόκειται περὶ ἐντελῶς διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν, διὰ τοῦτο καὶ ἠκολουθήσαμεν τὴν ἀνωτέρω μέθοδον πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος.

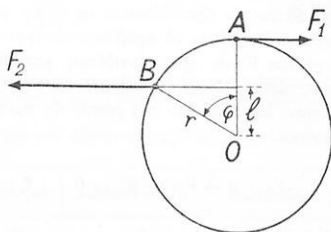
112. Ἐπὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ, κέντρου Ο καὶ ἀκτίνος 5 m, ἐνεργούν δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἡ F_1 , ἥτις ἔχει ἔντασιν 10 kgr*, ἐφάπτεται τοῦ τροχοῦ, ἡ δὲ γωνία AOB ἰσοῦται πρὸς 60°. Ἐὰν ὁ τροχὸς ἰσορροπῇ, ποία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F_2 .

Λύσις. α) Εἰς τὸ Σύστημα C.G.S. Ἐφ' ὅσον ὁ τροχὸς ἰσορροπεῖ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη συνισταμένη ροπή τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 , ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ ὡς τοιοῦτον ἐκλέγομεν ἐν προκειμένῳ τὸ κέντρο Ο τοῦ τροχοῦ, ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Ἐὰν καλέσωμεν r τὴν ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ, l τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὸν φορέα τῆς F_2 καὶ φ τὴν γωνίαν AOB, θὰ ἔχωμεν:

$$F_1 \cdot r - F_2 \cdot l = 0 \quad (1)$$

$$\text{ἢ:} \quad F_1 \cdot r - F_2 \cdot r \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\text{ἐξ ἧς:} \quad F_2 = \frac{F_1}{\sin \varphi} \quad (3)$$



Ἐκ τοῦ τύπου (3) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ F_2 εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτίνος τοῦ τροχοῦ, ἐξαρτωμένη μόνον ἐκ τῆς γωνίας φ , ἐφ' ὅσον ἡ F_1 εἶναι δεδομένη.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα, ἦτοι: $F_1 = 10 \text{ kgr*} = 10 \cdot 10^6 \text{ dyn}$, $\varphi = 60^\circ$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, εὐρίσκομεν:

$$F_2 = 20 \cdot 10^6 \text{ dyn}$$

β) Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Ἐκ τοῦ τύπου (3) καὶ διὰ $F_1 = 10 \text{ kgr*}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ εὐρίσκομεν:

$$F_2 = 20 \text{ kgr*}$$

γ) Είς τὸ Σύστημα Μ.Κ.Σ. Εἶναι $F_1 = 30 \text{ kg}^* = 300 \text{ Nt}$, ἄρα :

$$F_2 = 600 \text{ Nt}$$

113. Δύο κύλινδροι Γ καὶ Δ προκαλοῦν κατακόρυφους δυνάμεις Ρ καὶ Κ ἐπὶ τῆς ὀριζοντίας δοκοῦ ΑΒ, ὡς δεῖκνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Προσδιορίσατε τὴν ἀπόστασιν x τοῦ βάρους Ρ ἀπὸ τὸ ὑποστήριγμα Α, ἐὰν ἡ ἀντίδρασις F_A εἶναι δύο φορές μεγαλύτερα τῆς ἀντιδράσεως F_B . Τὸ βάρος τῆς δοκοῦ θεωρεῖται ἀμελητέον.

Λύσις. Θεωροῦντες τὴν δοκὸν ὡς ἐλεύθερον σῶμα καὶ ἐξισοῦντες πρὸς μηδὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὧν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, λαμβάνομεν :

$$F_B \cdot l - K(x + \gamma) - P \cdot x = 0 \quad (1)$$

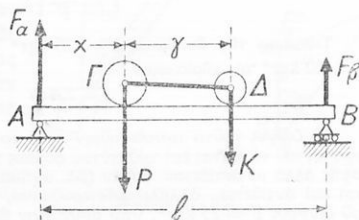
$$K(l - \gamma - x) + P(l - x) - F_A \cdot l = 0 \quad (2)$$

Δίδεται ὁμως ὅτι :

$$F_A = 2 F_B \quad (3)$$

καὶ ἐκ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει :

$$x = \frac{l}{3} - \frac{K \cdot \gamma}{P + K}$$



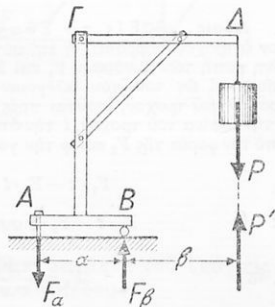
114. Ἡ βάσις γερανοῦ ΑΒΓΔ στηρίζεται τῇ βοηθείᾳ κυλίνδρου εἰς τὸ Β, καὶ διὰ κοχλίου εἰς τὸ Α. Εὑρατε τὰς ἀντιδράσεις F_A καὶ F_B , παραγομένας ἀπὸ τὴν δράσιν τοῦ βάρους Ρ, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται εἰς τὸ Δ. Τὸ βάρος τοῦ γερανοῦ θεωρεῖται ἀμελητέον.

Λύσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ γερανὸς δύναται νὰ ἰσορροπῇ μόνον ἐὰν ἡ συνισταμένη τῶν ἀντιδράσεων F_A καὶ F_B εἶναι μία δύναμις Ρ' ἰσὴ καὶ ἀντίθετος τῆς Ρ. Ἡ ἀντίδρασις F_B πρέπει νὰ δράῃ εἰς κατακόρυφον διεύθυνσιν ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφάπτεται ὁ κύλινδρος. Εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ ἡ ἀντίδρασις F_A εἶναι ἐπίσης κατακόρυφος δύναμις, ἐφ' ὅσον μόνον ὑπ' αὐτὸν τὸν ὅρον δύναται νὰ δώσῃ μίαν κατακόρυφον συνιστώσαν Ρ'. Οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς δυνάμεως Ρ' εἰς δύο ἀντιθέτους κατευθυνόμενους παραλλήλους συνιστώσας, ἐφαρμοζομένας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Θὰ ἔχωμεν, λοιπὸν, ἐὰν λάβωμεν τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ Α :

$$F_B \cdot \alpha - P(\alpha + \beta) = 0 \quad \eta : \quad F_B = P \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

καὶ :

$$F_A = F_B - P \quad \eta : \quad F_A = P \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$



ΒΟΗΘΗΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Συνθήκη ἰσορροπίας ὁμοεπιπέδων δυνάμεων

α) Αἱ δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὕλικου σημείου. Ἡ διανυσματικὴ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι :

$$\sum \vec{F}_n = 0 \quad (1)$$

Εάν εκ του κοινού σημείου εφαρμογής των δυνάμεων φαντασθώμεν δύο άξονας, τόν Οχ οριζόντιον και τόν Ογ κατακόρυφον, και αναλύσωμεν εκάστην των δυνάμεων εις δύο όρθογωνίους συνιστώσας F_x και F_y , ή διανυσματική εξίσωσις (1) διασπάται εις δύο άλγεβρικές :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2)$$

β) Δυνάμεις έφρημοσμένοι επί διαφόρων σημείων στερεού σώματος. Καί εις την περίπτωσιν αυτήν ισχύουν αι σχέσεις (1) και (2).

Δέν άρκουν όμως αι δύο άνωτέρω συνθήκαι, προκειμένου περί στερεού σώματος, άλλ' απαιτείται και έτέρα, ή όποια εύρίσκεται, έάν γράψωμεν ότι τó άλγεβρικών άθροισμα των ροπών Μ όλων των δυνάμεων ως πρòς οιονδήποτε άξονα πρέπει νά είναι μηδέν. Η συνθήκη αύτη εκφράζεται διανυσματικώς υπό της σχέσεως :

$$\sum \mathcal{M} = 0 \quad (3)$$

Διά των σχέσεων (1) και (3) ή των αντίστοιχων αναλυτικών εκφράσεων αύτών, διά προβολής επί καταλλήλους άξονας, επιλύονται όλα τα προβλήματα, τα αναγόμενα εις την Στατικήν, ή, άλλως, εις τας συνθήκας ισορροπίας στερεού σώματος υπό την επενέργειαν όμοεπιπέδων δυνάμεων.

115. Σχοινίον χρησιμεύει διά την συγκράτησιν οριζοντίας δοκού ΟΓ, βάρους 90 kgr*, όμογενοῦς, και μήκους 6 m. Τó σχοινίον προσδένεται εις τó έν άκρον της δοκού, εις τó όποίον επενεργεί φορτίον 1 τόννου, ενώ τó έτερον άκρον του σχοινίου εξαρτάται από του τοίχου, επί του όποίου προσαρμόζεται και τó άλλο άκρον της οριζοντίας δοκού. Τó σχοινίον σχηματίζει μετά της οριζοντίας δοκού γωνίαν 30°. Ζητούνται ή τάσις του σχοινίου και ή δύναμις της αντίδράσεως του τοίχου επί της δοκού.

Λύσις. Τó διάγραμμα του προβλήματος δεικνύεται υπό του σχήματος, όπου $B = 1$ τόννος (1 tn*) παριστά τó φορτίον, F τó βάρος της δοκού, επενεργούν εις τó μέσον αυτής (κέντρον βάρους), T ή ζητούμενη τάσις του σχοινίου και A ή δύναμις αντίδράσεως του τοίχου επί της δοκού, ή όποια γενικώς έχει και οριζόντιαν και κατακόρυφον συνιστώσαν.

Η άκριβής διεύθυνσις και τó μέγεθος της δυνάμεως A δέν είναι γνωστά εκ των προτέρων. Έπειδή αι άνωτέρω δυνάμεις είναι όμοεπίπεδοι και επενεργούν επί της δοκού, θεωρούμεν αύτην ως τó έν ισορροπία σώμα. Πρòς εύρεσιν της T , εφαρμόζομεν την συνθήκην (3), λαμβάνοντες άξονα διερχόμενον διά του O , όπου εφαρμόζεται ή δύναμις A , και κάθετον επί τó επίπεδον του σχήματος, ότε ή ροπή της δυνάμεως A μηδενίζεται, διότι τó σημείον εφαρμογής της κείται επί του άξονος.

Ούτως, αι ροπαί των δυνάμεων B , F και T είναι ως πρòς τόν άξονα διά του O , αι ακόλουθοι :

$$\text{Ροπή } B = 1000 \cdot 6 = 6000 \text{ kgr* m}$$

$$\text{Ροπή } F = 90 \cdot 3 = 270 \text{ kgr* m}$$

$$\text{Ροπή } T = -T \cdot 6 \eta \mu 30^\circ = -3 T \text{ kgr* m}$$

$$\text{όθεν : } \sum M = 6000 + 270 - 3 T = 0$$

$$\text{και : } T = 6270/3 \text{ kgr*} = 2090 \text{ kgr*}$$

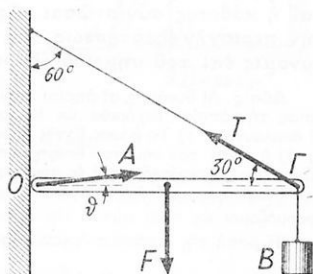
$$\eta : T = 2,09 \text{ τόννοι}$$

Ούτω βλέπομεν, ότι δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν την τάσιν T , χωρίς νά γνωρίζωμεν την δύναμιν A .

Διά την εύρεσιν της άγνωστου δυνάμεως A εφαρμόζομεν τας σχέσεις :

$$\sum F_x = 0 \quad \text{και :} \quad \sum F_y = 0$$

Πρòς τούτο αναλύομεν τας δυνάμεις εις δύο συνιστώσας ως πρòς οριζόντιον και κατακόρυφον άξονα. Αι δυνάμεις F και B , ως κατακόρυφοι, έχουν οριζοντίας συνιστώσας F_x και F_y μηδενικάς και κατα-



Δύναμις	Συνιστώσα x	Συνιστώσα y
B	0 kgr*	- 1000 kgr*
F	0 »	- 90 »
T	+ 1810 »	+ 1045 »
A	- A_x »	+ A_y »

κορυφούς $F_y = F$ και $B_y = B$. 'Αφ' ετέρου έχουμε : $T_x = T \cdot \sin 30^\circ = 1810 \text{ kgf}^*$ είναι δὲ καὶ $T_y = T \cdot \sin 60^\circ = 1045 \text{ kgf}^*$. Οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἐξ οὗ προκύπτει :

$$\sum F_x = 1810 - A_x = 0 \quad \text{καὶ} : \quad \sum F_y = 1045 - 1000 - 90 + A_y = 0$$

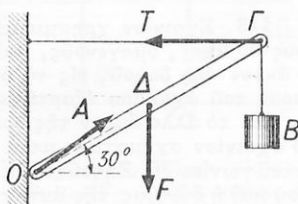
$$A_x = 1810 \text{ gr}^*$$

$$A_y = 45 \text{ kgf}^*$$

$$A = \sqrt{1810^2 + 45^2} \text{ kgf}^* = 1830 \text{ kgf}^*$$

$$\text{εφ } \theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{45}{1810} = 0,025 \quad \text{καὶ} : \quad \theta = 120' = 2''$$

116. Κεραία ΟΓ γερανοῦ, μήκους 9 m καὶ βάρους 90 kgf*, τὸ ὁποῖον δε-
χόμεθα ὅτι ἐπενεργεῖ εἰς σημείον ἀπέχον 4,5 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεώς
της, ἐξαρτᾶται διὰ τοῦ κατωτάτου ἄκρου αὐτῆς ἀπὸ κατακορύφου ἱστοῦ καὶ
σχηματίζει γωνίαν 30° ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὀριζοντίαν. Ἡ κεραία διατηρεῖται εἰς
τὴν θέσιν της διὰ μέσου ὀριζοντίου σχοινίου,
τὸ ὁποῖον προσδένεται εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον
αὐτῆς, ἐνῶ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ σχοινίου συν-
δέεται μονίμως πρὸς τὸν ἱστόν. Εἰς τὸ ἀνώ-
τατον σημείον της ἡ κεραία φορτίζεται ὑπὸ
φορτίου $B = 480 \text{ kgf}^*$ (βλ. σχῆμα). Ζητοῦν-
ται : α) ἡ τάσις T τοῦ σχοινίου, β) ἡ ὀριζοντία
καὶ ἡ κάθετος συνιστώσαι τῆς δυνάμεως εἰς
τὴν περιοχὴν ἐξαρτήσεως, καὶ γ) ἡ συνολικὴ
δύναμις ἐπὶ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως.



Λύσις. Αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῆς κε-
ραίας, τὴν ὁποῖαν δεχόμεθα ὡς ἰσορροποῦν σῶμα, εἶναι
αἱ ἀκόλουθοι : 1) Τὸ βάρος F τῆς κεραίας, ἐφηρμοσμένον εἰς Δ , 2) τὸ φορτίον B , ἐφηρμοσμένον εἰς
 Γ , 3) ἡ τάσις τοῦ νήματος T , ἐφηρμοσμένη εἰς Γ , καὶ 4) ἡ δύναμις A , ἐφηρμοσμένη εἰς O . Αἱ δυνάμεις
αὗται εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ ἐκ τούτων ἄγνωστοι εἶναι αἱ T καὶ A .

Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὰς ἀξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος, διερχόμενον διὰ τοῦ O καὶ
ἐφαρμόζομεν ὡς πρὸς αὐτόν τὴν ἐξίσωσιν (3) $\sum M = 0$.

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως A εἶναι προδήλως μηδέν, ἐνῶ τῶν ἄλλων δυνάμεων εἶναι :

$$-F \cdot 4,5 \cdot \sin 30^\circ, \quad -B \cdot 9 \cdot \sin 30^\circ, \quad + T \cdot 9 \cdot \eta \mu 30^\circ$$

Ὅθεν ἡ σχετικὴ ἐξίσωσις εἶναι :

$$T \cdot 9 \cdot 0,5 = 90 \cdot 4,5 \cdot 0,866 + 480 \cdot 9 \cdot 0,866 = 0$$

Ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως εὐρίσκομεν :

$$T = 830 \text{ kgf}^*$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν συνιστωσῶν τῆς A , χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἐξισώσεις (2), ὅτε θὰ ἔχωμεν τὸν
παραπλεύρωσιν πίνακα, ἐξ οὗ προκύπτει :

$$\sum F_x = A_x - 830 = 0$$

καὶ :

$$\sum F_y = A_y - 570 = 0$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων εὐρίσκομεν :

$$A_x = 830 \text{ kgf}^* \quad \text{καὶ} : \quad A_y = 570 \text{ kgf}^*$$

Ἐπομένως :

$$A = \sqrt{830^2 + 570^2} \text{ kgf}^* = 1006 \text{ kgf}^*$$

$$\text{καὶ} : \quad \text{εφ } \theta = A_y / A_x = 570 / 830 = 0,689 \quad \text{καὶ} : \quad \theta = 34^\circ 30'$$

Δύναμις	Συνιστώσα x	Συνιστώσα y
F	0 kgf*	- 90 kgf*
B	0 »	- 480 »
T	- 830 »	0 »
A	A_x »	A_y »

117. Κλίμαξ, μήκους 15 m και βάρους 60 kgr*, στηρίζεται κατά το κάτω άκρον Α αυτής επί τραχέος εδάφους κατά δε το άνω άκρον Β αυτής επί λείου κατακορύφου τοίχου. Το άκρον Α απέχει 6 m από το κατακορύφου τοίχου, το δε άκρον Β 12 m από το εδάφους. Το κέντρον βάρους της κλίμακος απέχει 5 m από το άκρον Α στηρίζεως αυτής. Να υπολογισθούν αι αντιδράσεις του τοίχου και του εδάφους.

Λύσις. Α' ΜΕΘΟΔΟΣ. 'Επί της κλίμακος έπενεργούν τρεις δυνάμεις : α) Το βάρος αυτής Β κατακορύφως προς τα κάτω και εφαρμολζόμενον επί του κέντρου βάρους αυτής Κ, εις απόστασιν 5 m από του σημείου Α. β) 'Η αντίδρασις Δ του λείου τοίχου, ή όποία έπενεργεί καθέτως επ' αυτού. γ) 'Η αντίδρασις Ν του τραχέος εδάφους εις το σημείον Α.

'Επειδή αι τρεις άνωτέρω μη παράλληλοι δυνάμεις εύρίσκονται έν Ισορροπία, αι εύθείαι έπενεργείας αυτών πρέπει νά κείνται επί του αυτού επιπέδου και νά συναντώνται εις το αυτό σημείον. 'Η εύθεια έπενεργείας της δυνάμεως Β συναντᾷ την εύθειαν έπενεργείας της δυνάμεως Δ εις το σημείον Ο.

'Επομένως ή αντίδρασις Ν πρέπει νά διέρχεται διά του σημείου Ο. 'Εκ του σχήματος εξαγεται εύκόλως ότι :

$$ΑΓ = \sqrt{15^2 - 12^2} \text{ m} = 9 \text{ m}, \quad ΑΡ = ΑΓ/3 = 3 \text{ m}$$

'Επειδή αι τρεις δυνάμεις εύρίσκονται έν Ισορροπία, το άλγεβρικόν άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς οιονδήποτε σημείον πρέπει νά είναι μηδέν. Λαμβάνομεν ροπάς των Β, Δ και Ν ως προς το σημείον Α, ότε :

$$\Delta \cdot 12 - 60 \cdot 3 + N \cdot 0 = 0, \quad \text{έξ ου} : \Delta = 15 \text{ kgr*}$$

'Η Ν είναι ίση και αντίθετος προς την συνισταμένην των Δ και Β, των όποιων αι εύθείαι έπενεργείας είναι κάθετες, ότε :

$$N = \sqrt{\Delta^2 + B^2} = \sqrt{15^2 + 60^2} \text{ kgr*} = 62 \text{ kgr*}$$

Β' ΜΕΘΟΔΟΣ. Αί εύθείαι έπενεργείας των δυνάμεων Β, Δ και Ν είναι παράλληλοι προς τας πλευράς του τριγώνου ΟΡΑ. 'Ως εκ τούτου, και έπειδή αι δυνάμεις Ισορροπούν, θα είναι ανάλογοι προς τας πλευράς αυτού.

$$ΟΡ = 12 \text{ m}, \quad ΡΑ = 3 \text{ m}, \quad ΑΟ = \sqrt{3^2 + 12^2} \text{ m} = 12,4 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta}{3 \text{ m}} = \frac{N}{12,4 \text{ m}} = \frac{60 \text{ kgr*}}{12 \text{ m}} = 5 \frac{\text{kgr*}}{\text{m}}$$

$$\text{'Επιλύοντες εύρίσκομεν : } \Delta = 15 \text{ kgr*}, N = 62 \text{ kgr*}$$

Γ' ΜΕΘΟΔΟΣ. Το σύστημα εύρίσκεται έν Ισορροπία. 'Εφαρμολζομεν τας συνθήκας Ισορροπίας, (ή αντίδρασις του εδάφους Ν αναλυεται εις την όριζοντίαν συνιστώσαν Ε και την κατακορύφω συνιστώσαν Ζ, του παρακειμένου σχήματος) και ως εκ τούτου έχομεν :

1. Το άλγεβρικόν άθροισμα των όριζοντίων συνιστωσών των δυνάμεων είναι μηδέν, ήτοι :

$$E - \Delta = 0 \quad (1)$$

2. Το άλγεβρικόν άθροισμα των κατακορύφων συνιστωσών είναι μηδέν, ήτοι :

$$Z - B = 0 \quad (2)$$

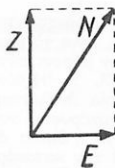
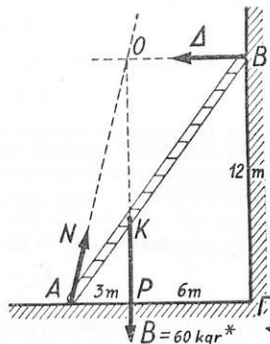
3. Το άλγεβρικόν άθροισμα των ροπών ως προς οιονδήποτε σημείον είναι μηδέν. Είναι προτιμότερον νά λάβωμεν ως τοιούτον σημείον το Α, διότι αι ροπαι των Ζ και Ε ως προς Α είναι μηδέν. Ούτως έχομεν :

$$\Delta \cdot 12 - 60 \cdot 3 = 0, \quad \text{έξ ου } \Delta = 15 \text{ kgr*}$$

$$\text{'Εκ της (1) έχομεν : } E = \Delta = 15 \text{ kgr*}$$

$$\text{'Εκ της (2) έχομεν : } Z = B = 60 \text{ kgr*}$$

$$\text{'Οτε προκύπτει : } N = \sqrt{15^2 + 60^2} \text{ kgr*} = 62 \text{ kgr*}$$



118. Αι άρθρώσεις Α και Γ θύρας βάρους 80 kgf* απέχουν 3 m απ' άλλήλων, ενώ το εύρος της θύρας είναι 1,2 m. Το βάρος της θύρας υποβαστάζεται υπό της άνω άρθρώσεως. Ποιαί αι δυνάμεις, αι όποιαί ασκούνται επί των άρθρώσεων της θύρας.

Λύσις. Αι κατακόρυφως έπενεργούσαι επί της θύρας δυνάμεις είναι το βάρος Β αυτής, διευθυνόμενον κατακόρυφος προς τα κάτω και έφηρμοσμένον εις το κέντρον βάρους αυτής Κ, και η κατακόρυφος δύναμις προς τα άνω F_3 , η όποία είναι ίση και αντίθετος προς την Β, διότι το βάρος της θύρας υποβαστάζεται από το άνω άκρον. Αι όριζόντιαι δυνάμεις αι έπενεργούσαι επί της θύρας είναι αι F_1 και F_2 .

Το σύστημα εύρίσκεται εν ίσορροπία και ως έκ τούτου έχομεν :

α) Το άλγεβρικόν άθροισμα των όριζοντίων δυνάμεων είναι μηδέν, ήτοι :

$$F_2 - F_1 = 0 \quad (1)$$

β) Το άλγεβρικόν άθροισμα των κατακόρυφων δυνάμεων είναι μηδέν, ήτοι :

$$F_3 - B = 0 \quad (2)$$

γ) Το άλγεβρικόν άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς οιονδήποτε σημείον του επιπέδου των δυνάμεων είναι μηδέν. Λαμβάνομεν το άλγεβρικόν άθροισμα των ροπών ως προς Α (αι ροπαι των F_1 και F_3 είναι μηδέν), ότε έχομεν :

$$F_2 \cdot (ΑΓ) - B \cdot (ΓΔ) = 0 \quad (3)$$

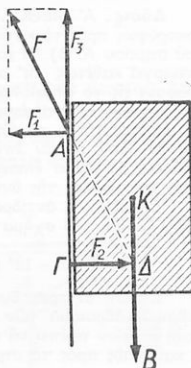
Έκ των άνωτέρω τριών εξισώσεων εύρίσκομεν :

$$F_3 = B = 80 \text{ kgf}^*$$

$$\text{και : } F_1 = F_2 = B \cdot \frac{\Gamma Δ}{ΑΓ} = 80 \text{ kgf}^* \cdot \frac{0,6 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 16 \text{ kgf}^*$$

Έάν καλέσωμεν F την συνισταμένην δύναμιν εις την άνω άρθρώσιν Α, θα έχομεν :

$$F = \sqrt{F_3^2 + F_1^2} = \sqrt{80^2 + 16^2} \text{ kgf}^* = 81,5 \text{ kgf}^*$$



*Ασκήσις 118.

119. Όμογενής δοκός ΑΒ, μήκους 12 m και βάρους 100 kgf*, έξαρτάται από το κάτω σημείον Α κατακόρυφου ίστού. Το έτερον άκρον Β της δοκού συνδέεται με σχοινίον προς τον ιστόν από σημείου Γ, απέχοντος 12 m από του Α. Η δοκός σχηματίζει γωνίαν 60° προς την κατακόρυφον, βάρος δέ 400 kgf* έξαρτάται από το άκρον Β της δοκού. Νά υπολογισθούν η αντίδρασις Σ εις το σημείον Α της δοκού και η τάσις Τ του σχοινίου.

Λύσις. Α) 1. Αι δυνάμεις, αι έπενεργούσαι επί της δοκού, είναι το βάρος αυτής 100 kgf*, έφηρμοσμένον εις το κέντρον βάρους αυτής. 2. Το φορτίον 400 kgf*, έφηρμοσμένον εις Β. 3. Η δύναμις Τ, η έπενεργούσα επί του σχοινίου, η όποία αναλύεται εις την όριζόντιαν συνιστώσαν Α και την κατακόρυφον συνιστώσαν Κ, ως επίσης και η αντίδρασις Σ εις Α, η όποία αναλύεται εις την όριζόντιαν συνιστώσαν λ και την κατακόρυφον συνιστώσαν κ (βλ. σχήμα).

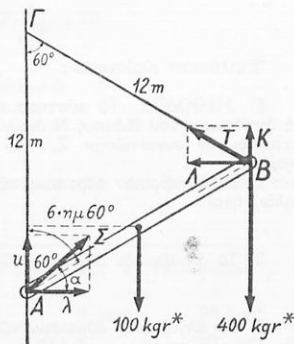
Β) Το σύστημα εύρίσκεται εν ίσορροπία, όθεν : 1. Το άλγεβρικόν άθροισμα των όριζοντίων συνιστωσών είναι μηδέν, ήτοι :

$$\lambda - Α = 0 \quad (1)$$

2. Το άλγεβρικόν άθροισμα των κατακόρυφων συνιστωσών είναι μηδέν, ήτοι :

$$\kappa + Κ - 100 - 400 = 0 \quad (2)$$

3. Το άλγεβρικόν άθροισμα των ροπών ως προς οιονδήποτε σημείον είναι μηδέν. Είναι πλεονέκτημα να ληφθώ ως τοιούτον σημείον το Γ, διότι αι ροπαι των δυνάμεων Τ και κ ως προς Γ είναι μηδέν.



$$\delta\theta_{\text{εν}} : 12\lambda - 100 \cdot 6 \cdot \eta\mu 60^\circ - 400 \cdot 12 \cdot \eta\mu 60^\circ = 0$$

$$\eta : 12\lambda - 100 \cdot 6 \cdot 0,866 - 400 \cdot 12 \cdot 0,866 = 0$$

$$^{\circ}\text{Οθεν} : \lambda = 390 \text{ kgr}^*. \text{ Έκ της (1) εύρισκομεν} : \Lambda = \lambda = 390 \text{ kgr}^*$$

$$\Gamma) \quad T = \frac{\Lambda}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{390}{0,866} = 450 \text{ kgr}^*$$

$$\Delta) \quad K = \Lambda \cdot \epsilon\varphi 30^\circ = 390 \cdot 0,577 = 225 \text{ kgr}^*$$

$$^{\circ}\text{Έκ της σχέσεως (2) έχομεν} : \kappa + 225 - 100 - 400 = 0. \text{ Ήτοι} : \kappa = 275 \text{ kgr}^*$$

Ή αντίδρασις Σ εις τὸ σημεῖον Α τῆς δοκοῦ εἶναι :

$$\Sigma = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} = \sqrt{390^2 + 275^2} \text{ kgr}^* = 477 \text{ kgr}^*$$

καὶ σχηματίζει γωνίαν, ἥ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\epsilon\varphi \alpha = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{275 \text{ kgr}^*}{390 \text{ kgr}^*} = 0,705, \quad \text{ἤτοι} : \alpha = 35,2^\circ$$

120. Ὁμογενὴς ράβδος ΑΒ, μήκους 16 m καὶ ζυγίζουσα 12 kgr*, ὑποβαστάζεται ὀριζοντίως μὲ σχοινία προσηρμοσμένα εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Τὸ σχοινίον εἰς Β σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακόρυφου. Βάρος 40 kgr* ἐξαρτάται ἀπὸ σημεῖον τῆς ράβδου, ἀπέχον 4 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ τάσις τοῦ σχοινίου τοῦ προσδεδεμένου εἰς Α καὶ ἡ γωνία α, τὴν ὁποίαν σχηματίζει πρὸς τὴν κατακόρυφον.

Λύσις. Ἐστωσαν λ καὶ κ ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστώσαι τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου εἰς Α, καὶ Λ καὶ Κ ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστώσαι τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου εἰς Β. Τὸ σύστημα εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

1) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακόρυφων συνιστωσῶν τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἤτοι :

$$40 + 12 - \kappa - K = 0 \quad (1)$$

2) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὀριζοντιῶν συνιστωσῶν εἶναι μηδέν, ἤτοι :

$$\lambda - \Lambda = 0 \quad (2)$$

3) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς οἰονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν. Λαμβάνομεν τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α καὶ ἔχομεν :

$$K \cdot 16 - 12 \cdot 8 - 40 \cdot 4 = 0, \quad \text{ἐξ οὗ} : K = 16 \text{ kgr}^*$$

$$\text{καὶ} : \Lambda = K \cdot \epsilon\varphi 30^\circ = 16 \cdot 0,577 = 9,24 \text{ kgr}^*$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\kappa = 40 + 12 - 16 = 36 \text{ kgr}^*$$

καὶ ἐκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$\lambda = \Lambda = 9,24 \text{ kgr}^*$$

Ἡ τάσις τοῦ σχοινίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι :

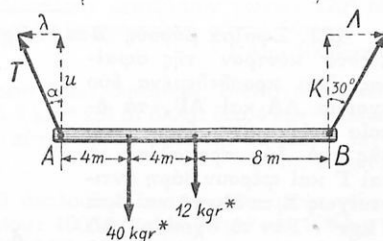
$$T = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} = \sqrt{(9,24)^2 + 36^2} = 37,2 \text{ kgr}^*$$

Τέλος, ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\epsilon\varphi \alpha = \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{9,24 \text{ kgr}^*}{36 \text{ kgr}^*} = 0,257$$

εύρισκομεν ὅτι :

$$\alpha = 14,4^\circ$$



121. Δύο λεῖαι σφαῖραι, ἐκάστη ἀκτίνος r καὶ βάρους B, ἰσορροποῦν ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους καὶ μεταξὺ δύο κατακόρυφων τοίχων, ἡ ἀπόστασις τῶν ὁποίων εἶναι β. Προσδιορίσατε τὰς δυνάμεις, τὰς ἀσκουμένας ὑπὸ τῶν τοίχων καὶ τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς ἐπαφὰς Α, Γ καὶ Δ (F_A , F_Γ

F_{Δ}). 'Αριθμητικά δεδομένα δίδονται τὰ ἐξῆς: $r = 10 \text{ cm}$, $\beta = 36 \text{ cm}$, $B = 1000 \text{ gr}^*$. 'Η τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα.

Λύσις. 'Εφ' ὅσον τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν κατὰ τοὺς ἀξόνες x καὶ y καὶ εὐρίσκομεν:

α) Κατὰ τὸν ἀξόνα x :

$$F_r - F_2 \cdot \sin \alpha + F_1 \cdot \sin \alpha - F_A = 0 \quad (1)$$

β) Κατὰ τὸν ἀξόνα y :

$$F_{\Delta} - B - F_2 \cdot \eta \mu \alpha + F_1 \cdot \eta \mu \alpha + B = 0 \quad (2)$$

'Εκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει:

$$F_r = F_A \quad (3)$$

διότι $F_1 = F_2$. 'Εκ τῆς σχέσεως (2) προκύπτει:

$$F_{\Delta} = 2B = 2 \cdot 1000 \text{ gr}^*$$

ἥ:

$$F_{\Delta} = 2000 \text{ gr}^*$$

Θεωροῦμεν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὴν σφαῖραν K . Τὸ σχηματιζόμενον δυναμοπολύγωνον (σχῆμα β) θὰ εἶναι κλειστόν καὶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἔχομεν:

$$\frac{F_A}{\eta \mu 90^\circ} = \frac{F_1}{\eta \mu 90^\circ} = \frac{B}{\eta \mu \alpha} \quad (4)$$

'Η γωνία α ὑπολογίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$\beta = \Gamma O + O\theta + KA \quad \text{ἥ:} \quad \beta = r + 2r \cdot \sin \alpha + r = 2r + 2r \cdot \sin \alpha$$

$$\text{ἐξ οὗ:} \quad \sin \alpha = \frac{\beta}{2r} - 1 = \frac{36 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} - 1 = 0,8 \quad \text{καί:} \quad \alpha = 37^\circ$$

'Εκ τῆς σχέσεως (4) θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

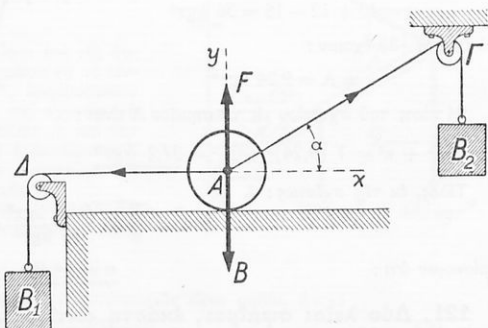
$$F_A = \frac{B \cdot \eta \mu \theta}{\eta \mu \alpha} = \frac{B \cdot \sin \alpha}{\eta \mu \alpha} = \frac{B \cdot \sin 37^\circ}{\eta \mu 37^\circ} = 1330 \text{ gr}^*$$

Τελικῶς δέ, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (3), θὰ εἶναι:

$$F_r = F_A = 1330 \text{ gr}^*$$

122. Σφαῖρα βάρους $B = 18 \text{ kgr}^*$ κεῖται ἐπὶ λείου ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

Εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι προσδεδεμένα δύο σχοινία AD καὶ AG , τὰ ὁποῖα διέρχονται ἄνευ τριβῆς ἀπὸ δύο τροχαλίας Δ καὶ Γ καὶ φέρουν βάρη ἀντιστοίχως $B_1 = 3 \text{ kgr}^*$ καὶ $B_2 = 5 \text{ kgr}^*$. 'Εάν τὸ σχοινίον AD εἶναι ὀριζόντιον, νὰ εὐρεθῇ ἡ γωνία α , τὴν ὁποίαν τὸ σχοινίον AG σχηματίζει μετὰ τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, ὅταν ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ. 'Επίσης νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀντίδρασις F , τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς σφαίρας εἰς τὴν ἰσορροπία.



*Άσκησης 122.

Λύσις. Τὸ βάρος B_2 δρᾷ μέσῳ τοῦ σχοινίου AG καὶ τὸ B_1 μέσῳ τοῦ σχοινίου AD . 'Επομένως συνο-

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Λικώς ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπενεργοῦν αἱ δυνάμεις B_1 , B_2 , B καὶ ἡ ἀντίδρασις F , ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ ἐπιπέδου.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν θὰ ἔχωμεν :

α) Κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x :

$$B_1 - B_2 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

διότι τὸ μὲν νῆμα AD εἶναι ὀριζόντιον καὶ συνεπῶς δι' αὐτοῦ ἐπενεργεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας ὀριζόντια δύναμις ἴση πρὸς B_1 , τὸ δὲ AG κεκλιμένον κατὰ γωνίαν α , ὥς πρὸς τὴν ὀριζόντιαν καὶ συνεπῶς ἡ τάσις τοῦ νήματος, σχηματίζουσα γωνίαν α , ὥς πρὸς τὴν ὀριζόντιαν καὶ ἴση πρὸς B_2 , δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κατακόρυφον, ἴσην πρὸς $B_2 \cdot \eta\mu \alpha$, καὶ μίαν ὀριζόντιαν, ἴσην πρὸς $B_2 \cdot \sigma\upsilon\nu \alpha$.

Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$\sin \alpha = \frac{B_1}{B_2} \quad (2)$$

β) Κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y :

$$F - B + B_2 \cdot \eta\mu \alpha = 0 \quad (3)$$

ἢ :

$$F - B + B_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0 \quad (4)$$

καί :

$$F - B + B^2 \sqrt{1 - \frac{B_1^2}{B_2^2}} = 0 \quad (5)$$

Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$F = B - \sqrt{B_2^2 - B_1^2} \quad (6)$$

Εἰκόμην : $B = 18 \text{ kgr}^*$, $B_2 = 5 \text{ kgr}^*$, $B_1 = 3 \text{ kgr}^*$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 18 - \sqrt{5^2 - 3^2} \text{ kgr}^* = 14 \text{ kgr}^*$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

123. Δύο δυνάμεις, 8 kgr^* καὶ 10 kgr^* , ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60° . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης.
(Ἀπ. $15,6 \text{ kgr}^*$.)

124. Δύο δυνάμεις, ἐκάστη 100 kgr^* , σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120° . Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης καὶ ἡ ἰσορροποῦσα αὐτὴν δύναμις.
(Ἀπ. 100 kgr^* .)

125. Νὰ εὐρεθῇ ἡ συνισταμένη τριῶν ὁμοεπιπέδων δυνάμεων, ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 3 kgr^* καὶ αἱ ἄλλαι δύο 4 kgr^* ἐκάστη, σχηματίζουσαι γωνίας 30° καὶ 150° , κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν πρὸς τὴν δύναμιν 3 kgr^* .
(Ἀπ. 5 kgr^* .)

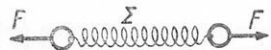
126. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ ἀκολουθοῦστος συστήματος ὁμοεπιπέδων δυνάμεων, ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου : 100 kgr^* , $141,4 \text{ kgr}^*$ καὶ 100 kgr^* , σχηματίζουσας γωνίας ἀντιστοίχως 30° , 45° , 240° πρὸς τὴν ὀριζόντιαν.
(Ἀπ. Κατακόρυφος συνιστώσα $63,4 \text{ kgr}^*$, ὀριζόντια συνιστώσα 137 kgr^* , συνισταμένη 151 kgr^* .)

127. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων 32 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 20° καὶ 64 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 190° , ὥς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . (Ἀπ. 33 kgr^* , $\theta = 180^\circ$.)

128. Εἰς ἓν σημεῖον ἐνεργοῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις : $F_1 = 10 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 20 \text{ kgr}^*$, $F_3 = 12 \text{ kgr}^*$, $F_4 = 18 \text{ kgr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη δύναμις εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις : α) Ἀπασαί αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις ἐνεργοῦν, κείμεναι ἐπὶ τοῦ

αυτού φορέως και κατά την αυτήν φοράν. β) Αί πρώται δύο δυνάμεις ενεργοῦν κατὰ τινά φοράν, αἱ δύο ἄλλαι δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον. (᾿Απ. α' 60 kg^* . β' 0 kg^* .)

129. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου Σ ἀσκοῦνται δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις (F, F), ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ἐὰν ἐκάστη δυνάμις ἔχῃ ἔντασιν 20 kg^* , μὲ πόσῃν δυνάμειν τείνεται τὸ ἐλατήριον καὶ διατῖ.



(᾿Απ. Τὸ ἐλατήριον τείνεται ὑπὸ δυνάμεως F , τῆς ἐτέρας τῶν δύο ἴσων δυνάμεων δυνάμενης νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀντιδράσεως.)

130. Νὰ εὐρεθῇ ἡ συνισταμένη δυνάμεως 120 kg^* ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ δυνάμεως -100 kg^* ὑπὸ γωνίαν 90° , διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου.

(᾿Απ. $F = 111 \text{ kg}^*$, $\theta = 339^\circ$.)

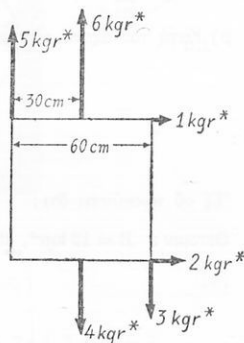
131. Νὰ ἀναλυθῇ δυνάμις 10 kg^* εἰς δύο ὀρθογωνίους συνιστώσας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τῆς μιᾶς συνιστώσας σχηματίζει γωνίαν 45° πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως 10 kg^* . Τὸ πρόβλημα νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ δι' ὑπολογισμοῦ.

(᾿Απ. Ἐκάστη συνιστώσα εἶναι 7,07 kg^* .)

132. Νὰ ἀναλυθῇ δυνάμις 100 kg^* εἰς δύο συνιστώσας ὀρθογωνίους, τῆς μιᾶς συνιστώσας σχηματίζουσας γωνίαν 30° πρὸς τὴν δυνάμειν 100 kg^* . Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ δι' ὑπολογισμοῦ.

(᾿Απ. 50 kg^* , 86,6 kg^* .)

133. Δυνάμεις 1 kg^* , 2 kg^* , 3 kg^* , 4 kg^* , 5 kg^* , 6 kg^* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τετραγώνου, πλευρᾶς 60 cm, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων τούτων, ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου.



* Ἀσκήσις 133.

(᾿Απ. 210 $\text{kg}^* \cdot \text{cm}$ ἢ 2,10 $\text{kg}^* \cdot \text{m}$.)

134. Νὰ ἀφαιρεθῇ δυνάμις 130 kg^* ὑπὸ γωνίαν 60° ἀπὸ ἐτέραν δυνάμειν 280 kg^* ὑπὸ γωνίαν 320° . (Αἱ γωνίαι ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x).

(᾿Απ. 330 kg^* , $\theta = 297^\circ$.)

135. Δυνάμις 25 Nt ἐνεργεῖ ὑπὸ γωνίαν 22° μετὰ τῆς ὀριζοντίου κατευθύνσεως. Ποία εἶναι ἡ ὀριζόντιος καὶ ἡ κάθετος συνιστώσα τῆς δυνάμεως ταύτης. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ πρόβλημα γραφικῶς.

(᾿Απ. Ὁριζόντιος 23 Nt, κάθετος 9,5 Nt.)

136. Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων εἶναι 800 kg^* ὑπὸ γωνίαν 60° , ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . Μία τῶν δυνάμεων εἶναι 160 kg^* ὑπὸ γωνίαν 30° , ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐτέρα δυνάμις, γραφικῶς καὶ λογιστικῶς.

(᾿Απ. 667 kg^* , $\theta = 67^\circ$.)

137. Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων εἶναι 18 gr^* ὑπὸ γωνίαν 30° , ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . Ἐὰν ἡ μία τῶν δυνάμεων εἶναι 28 gr^* ὑπὸ γωνίαν 0° , ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα, νὰ εὐρεθῇ ἡ ἄλλη δυνάμις.

(᾿Απ. 15,3 gr^* , $\theta = 144^\circ$.)

138. Νὰ ἀναλυθῇ δυνάμις 20 kg^* ὑπὸ γωνίαν 60° , ὡς πρὸς τὸν ὀρίζοντα, εἰς δύο συνιστώσας, ἐξ ὧν ἡ μία νὰ ἰσορροπῇ τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐπενεργοῦσαν ὀριζοντίαν δυνάμειν 10 kg^* .

(᾿Απ. 26,5 kg^* , $\theta = 41^\circ$.)

139. Δυνάμις 35 kg^* σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν 140° . Νὰ ὑπο-

λογισθούν αἱ συνιστώσας τῆς, κατὰ μήκος τῶν εὐθειῶν, αἵτινες σχηματίζουν μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x γωνίας 30° καὶ 240° . (Ἀπ. — $68,9 \text{ kg}^*$, — $65,8 \text{ kg}^*$.)

140. Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων εἶναι 36 dyn ὑπὸ γωνίαν 45° . Ἐὰν μία τῶν δυνάμεων εἶναι 24 dyn ὑπὸ γωνίαν 0° , νὰ εὐρεθῇ ἡ ἄλλη δύναμις. (Αἱ γωνίαι ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x .) (Ἀπ. $25,5 \text{ dyn}$, $\theta = 87^\circ$.)

141. Δύναμις 8 kg^* ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας ἐκ 5 kg^* ἑκάστη. Εἶναι δυνατόν νὰ ἀναλυθῇ ἡ ἴδια δύναμις εἰς δύο συνιστώσας ἐκ 10 kg^* , 15 kg^* , 20 kg^* κλπ. ἡ ἄκομῃ 100 kg^* ἑκάστη; (Ἀπ. Ναί, ὅταν δὲν δίδεται ἡ διεύθυνσις τῶν συνιστωσῶν.)

142. Εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B εὐθείας, μήκους $AB = 48 \text{ cm}$ ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς $F = 2 \text{ kg}^*$ καὶ $F' = 6 \text{ kg}^*$. Νὰ εὐρεθούν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ καὶ ἡ ἔντασις Σ τῆς συνισταμένης τῶν. (Ἀπ. $\Sigma = 8 \text{ kg}^*$, $GA = 36 \text{ cm}$, $GB = 12 \text{ cm}$.)

143. Ράβδος ἀμελητέου βάρους φέρει εἰς τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς φορτία 30 kg^* καὶ 50 kg^* . Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φορτίων εἶναι 1 m , νὰ υπολογισθοῦν: α) εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ράβδος, ἵνα μείνῃ ὀριζοντία, καὶ β) πόση ἡ ἐπὶ τοῦ στηρίγματος ἀσκουμένη δύναμις. (Ἀπ. α' $62,5 \text{ cm}$ ἀπὸ τὴν δύναμιν 30 kg^* ἢ $37,5 \text{ cm}$ ἀπὸ τὴν δύναμιν 50 kg^* , β' 80 kg^* .)

144. Κανὼν, μήκους 1 m , εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς μαχαίριδιον, τοποθετημένον εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 49 cm , ὅταν δὲν φέρῃ βάρος, καὶ εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 60 cm , ὅταν βάρος 22 gr^* ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν 100 cm . Ποῖον τὸ βάρος τοῦ κανόνος. (Ἀπ. 80 gr^* .)

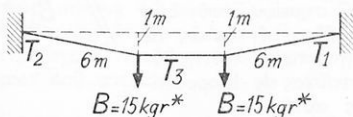
145. Ἀπὸ ἐλαφρᾶς ράβδου, μήκους 1 m , ἐξαρτῶνται βάρη 40 gr^* , 35 gr^* , 25 gr^* καὶ 100 gr^* ἐπὶ τῶν ὑποδιαίρεσεων 5 cm , 20 cm , 60 cm καὶ 80 cm ἀντιστοίχως. Εἰς ποῖον σημεῖον θὰ ἰσορροπῇ αὕτη καὶ ποῖα θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξις ζυγοῦ δι' ἐλατηρίου, φέροντος ταύτην εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. (Ἀπ. 52 cm , 200 gr^* .)

146. Ὁ δήμαρχος τοῦ Μαγδεμβούργου, πρὸς ἀποχωρισμὸν τῶν εἰς κοίλῃν σφαῖραν, ἄνευ ἀέρος, συνηνωμένων ἡμισφαιρίων, ἐχρησιμοποίησε τὴν δύναμιν 16 ἵππων , οἵτινες, εἰς δύο ὁμάδας ἐξ ὁκτῶ ἑκάστη, εἴλκον κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις. Εἶναι δυνατόν νὰ ἐπιτευχθῇ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καὶ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως ὀλιγωτέρων ἵππων; (Ἀπ. Ἀρκοῦν 8 ἵπποι ἔλκοντες ἐκ τῆς μιᾶς πλευρᾶς.)

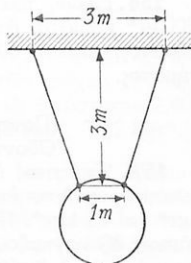
147. Τροχός, βάρους 85 kg^* κρέμαται, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, διὰ δύο σχοινίων. Ποῖαι αἱ τάσεις δύο σχοινίων. (Ἀπ. $44,8 \text{ kg}^*$.)

148. Κατὰ τὴν μεταφορὰν λέβητος, βάρους 3 tn^* , διαμέτρου $1,2 \text{ m}$, προσκρούει οὗτος ἐπὶ ἐμποδίου ὕψους 5 cm . Ποῖα ἡ ὀριζοντία δύναμις, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἀνυψώσῃ τὸν λέβητα. (Ἀπ. $1,31 \text{ tn}^*$.)

149. Ἀμφότεροι οἱ ἐναέριοι ἀγωγοὶ ἡλεκτροκινήτου λεωφορείου κρέμονται, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, στηριζόμενοι ἐπὶ καθέτως ὑπεράνω τῆς ὁδοῦ τεταμένου σχοινίου, διὰ βάρους 15 kg^* . Ποῖαι αἱ τάσεις T_1 , T_2 καὶ T_3 τοῦ σχοινίου.



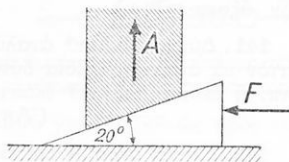
Ἀσκήσις 149.



Ἀσκήσις 147.

(Ἀπ. $T_1 = T_2 = 90 \text{ kg}^*$, $T_3 = 88,7 \text{ kg}^*$.)

150. Δύο άνθρωποι έπιθυμούν να καταρρίψουν δένδρον διὰ σχοινίου, τὸ ὁποῖον προσδένεται πλησίον τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. Ἐάν ὁμως χρησιμοποιοῦσιν πρὸς τοῦτο ἓν σχοινίον, τὸ δένδρον θὰ καταπέσει ἐπ' αὐτῶν. Δι' αὐτὸ προσδένουν δύο σχοινία, μήκους 10 m ἑκάστον, εἰς τι σημεῖον ἐγγὺς τῆς κορυφῆς καὶ ἴστανται ἔλκοντες ἐπὶ τοῦ ἑδάφους, εἰς ἀπόστασιν 10 m ἀπ' ἀλλήλων. Ἐάν ἑκάστος ἔλκη μετὰ δυνάμεως 300 Nt, ποῖα ἢ ἐπὶ τοῦ σημείου προσδέσεως τῶν σχοινίων ἀσκουμένη δύναμις. (Ἀπ. 520 Nt.)

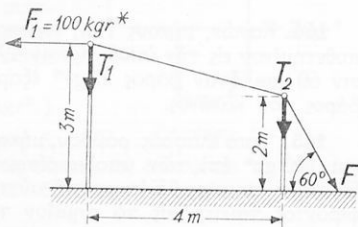


* Ἀσκήσις 151.

151. Ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ σφηνὸς τοῦ σχήματος ἐνεργεῖ, ὁριζοντίως, ἡ δύναμις $F = 60 \text{ kg}^*$. Ποῖα ἢ πρὸς τὰ ἄνω ὠθοῦσα τὸ κινητὸν στέλεχος δυνάμεις A. (Ἀπ. 164,8 kg^* .)

152. Σφαῖρα, βάρους 4 tn^* καὶ ἀκτίνος 1 m, ἡρεμεῖ στηριζομένη ἐπὶ δύο τοίχων, ἀπέχοντων κατὰ 1,6 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις, αἱ ἀσκούμεναι ὑπὸ τῆς σφαίρας εἰς τὰ σημεῖα στηρίξεως αὐτῆς ἐπὶ τῶν τοίχων. Αἱ τριβαὶ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. (Ἀπ. 3,33 tn^* .)

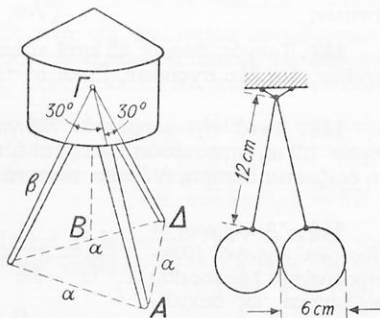
153. Ποῖα δύναμις F ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ κάτω δεξιοῦ τμήματος τοῦ σχοινίου τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον τείνεται, ὀλισθαίνον ἐπὶ τῶν τροχαλίων, τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰς κορυφὰς τῶν κατακορύφων στύλων, δι' ὁριζοντίας δυνάμεως, ἐξ ἀριστερῶν, ἐντάσεως $F_1 = 100 \text{ kg}^*$, τοῦ ὅλου συστήματος εὑρισκομένου οὕτως ἐν ἰσορροπίᾳ. Ποῖαι αἱ ἐπὶ τῶν στύλων τάσεις T_1 καὶ T_2 . (Ἀπ. 200 kg^* , 25 kg^* , 148,2 kg^* .)



* Ἀσκήσις 153.

154. Ποῖαι αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων, τῶν ἀσκουμένων ἐπὶ τῶν τριῶν πλαγίων ποδῶν τῆς τραπέζης τοῦ σχήματος, ὑποβαρσταζομένης βάρους 60 tn^* , ὅταν οἱ πόδες σχηματίζουν ἀνά δύο γωνίαν 30°. (Ἀπ. 20,96 tn^* .)

155. Δύο σφαῖραι, ἑκάστη βάρους 1 kg^* , κρέμονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νημάτων, ὡς ἐν τῷ σχήματι. Ποῖα ἢ τάσις τῶν νημάτων καὶ ποῖα ἢ δύναμις μετὰ τῆς ὁποίας πέζονται αἱ σφαῖραι. (Ἀπ. 1,02 kg^* , 0,20 kg^* .)



* Ἀσκήσις 154.

* Ἀσκήσις 155.

156. Εἰκὼν, πλευρᾶς 30 cm καὶ βάρους 500 gr^* , κρέματα ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς διὰ νήματος, μήκους 60 cm. Ποῖα ἢ τάσις τοῦ νήματος. (Ἀπ. $T = 283 \text{ gr}^*$.)

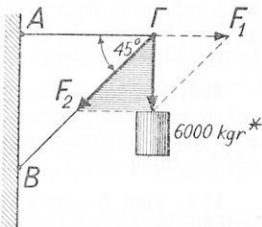
(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ὀδοντιατρικὴ Σχολή, 1962).

157. Ἐπὶ τινος ὑλικοῦ σημείου δροῦν δύο δυνάμεις, κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐντάσεως 12 kg^* καὶ 15 kg^* . Ποῖα ἢ ἐντάσις τρίτης δυνάμεως, ἐξαναγκάζουσης ταύτας εἰς ἰσορροπίαν καὶ ποῖα ἢ διεύθυνσις αὐτῆς. (Ἀπ. 19,2 kg^* .)

158. Εἰς τὴν γωνίαν ἑνὸς κύβου δροῦν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν τριῶν ἀκμῶν δυνάμεις ἐντάσεων 12 kg^* , 16 kg^* καὶ 21 kg^* . Νὰ ὑπολογισθῇ, γραφικῶς καὶ λογιστικῶς, ἡ συνισταμένη αὐτῶν. (Ἀπ. 29 kg^* .)

159. Ὑπὲρ τὸ μέσον ὁδοῦ κρέμαται εἰς ὕψος 12,5 m λαμπτήρ, ὁ ὁποῖος συγκρατεῖται διὰ δύο καλωδίων, στηριζομένων κατὰ τὰ ἑτερα ἄκρα αὐτῶν ἐπὶ τῶν τοίχων δύο οἰκῶν, εἰς σημεῖα ἀπέχοντα 15 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ 20 m ἀπ' ἀλλήλων. Ὁ λαμπτήρ ἔχει βάρος 20 kgf^* . Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ λογιστικῶς ἡ ἐπὶ ἐκάστων καλωδίου ἀσκουμένη δύναμις.
(Ἀπ. 41,23 kgf^* .)

160. Ἡ εἰς τὸ σχῆμα παριστωμένη ἀνυψωτικὴ διάταξις ὑφίσταται εἰς τὸ σημεῖον Γ, δι' ἀνυψώσεως βάρους, τὴν ἐπενεργίαν δυνάμεως 6000 kgf^* . Ἡ γωνία ΑΓΒ ἰσοῦται πρὸς 45°. Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ λογιστικῶς τὸ μέγεθος τῶν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐπενεργουσῶν δυνάμεων, τῶν βαρῶν τοῦ στελέχους ΑΓ καὶ τοῦ καλωδίου ΒΓ θεωρουμένων ὡς ἀμελητέων.
(Ἀπ. 6000 kgf^* , 8485 kgf^* .)



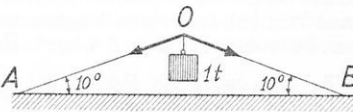
* Ἀσκήσις 160.

161. Ἐπὶ τινος καθέτως ἰσταμένης δοκοῦ καὶ ἐπὶ τῆς ἰδίας πλευρᾶς αὐτῆς τοποθετοῦνται τρία καρφία, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, μὲ γωνίαν κορυφῆς 120° καὶ τὴν βάσιν ὀριζοντίαν. Διὰ τῶν καρφίων διέρχεται νῆμα, ἀμελητέου βάρους, εἰς δὲ τὰ ἄκρα αὐτοῦ προσδένονται δύο βάρη ἴσα πρὸς 10 kgf^* ἕκαστον. Νὰ ὑπολογισθοῦν γραφικῶς αἱ ἐντάσεις τῶν εἰς τὰ τρία καρφία ἀσκουμένων δυνάμεων.
(Ἀπ. 10 kgf^* .)

162. Ἡ μηχανὴ σιδηροδρομικοῦ συρμοῦ σύρει τρία ὀχήματα τοῦ αὐτοῦ βάρους, συνδεδεμένα πρὸς ἀλλήλα διὰ καλωδίων, προσδεδεμένων ἐπὶ ἀγκίστρων. Ἐὰν διατίθενται 6 καλώδια τῆς αὐτῆς ἀνθεκτικότητος, πῶς πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταῦτα, κατὰ τὸν καλλίτερον δυνατὸν τρόπον.

(Ἀπ. 3 καλώδια συνδέουν τὸ πρῶτον ὄχημα μετὰ τῆς μηχανῆς, 2 καλώδια τὸ πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου καὶ 1 τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου.)

163. Δύο πάσσαλοι ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι στερεωμένοι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ σχηματίζουν ἕκαστος γωνίαν 10° ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζουν ἀντηρίδα (βλ. σχῆμα). Εἰς τὸ σημεῖον συναντήσεως αὐτῶν Ο ἐξαρτᾶται βάρος Β = 1 τόννου = 1000 kgf^* . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἕκαστος πάσσαλος τῆς ἀντηρίδος. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ λυθῇ γραφικῶς.
(Ἀπ. F = 2,88 τόννοι.)



164. Ὅριζοντία δοκὸς ἀμελητέου βάρους, μήκους 5,40 m, στηρίζεται κατὰ τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς ἐπὶ δύο τοίχων. Νὰ καθορισθοῦν αἱ ἀντιδράσεις τῶν τοίχων ἐπὶ τῆς δοκοῦ, ὅταν ἄνθρωπος, βάρους 68 kgf^* , εὔρεται ἐπ' αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν 2,40 m ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τῆς.
(Ἀπ. 37,8 kgf^* , 30,2 kgf^* .)

165. Στύλος τηλεγραφικός, μήκους 4,2 m καὶ βάρους 26 kgf^* , ἰσορροπεῖ ὀριζοντίως, ὅταν ὑποστηρίζεται εἰς σημεῖον ἀπέχον 1,8 m ἀπὸ τοῦ παχύτερου ἄκρου αὐτοῦ. Ἐὰν ὁ αὐτὸς στύλος ὑπεστηρίζετο εἰς τὰ δύο του ἄκρα, πόση ἡ ἀντίδρασις τῶν υποστηρικτῶν ἐπὶ τῶν ἄκρων τοῦ στύλου.
(Ἀπ. 11,1 kgf^* , 14,9 kgf^* .)

166. Ἐπὶ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραγώνου, πλευρᾶς 50 cm, ἐπενεργοῦν τέσσαρες δυνάμεις ὁμοπαράλληλοι: 33 kgf^* , 11 kgf^* , 44 kgf^* καὶ 12 kgf^* . Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης διὰ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.
(Ἀπ. x = 27,5 cm, y = 28 cm.)

167. Δύναμις $F = 180 \text{ kg}^*$ επενεργεί εις τὸ σημεῖον Α στερεοῦ σώματος. Ζητεῖται ν' ἀναλυθῇ ἡ δύναμις αὕτη εις δύο ὁμοπαράλληλους συνιστώσας, ἐφαρμοσμέναις εις τὰ ἄκρα A_1 καὶ A_2 τῆς εὐθείας $A_1 A A_2$, εις τρόπον ὥστε αἱ δύο συνιστώσαι νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον 2 : 7. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν δύο συνιστωσῶν.

(Ἀπ. $F_1 = 40 \text{ kg}^*$, $F_2 = 140 \text{ kg}^*$.)

168. Ἐργάτης μεταφέρει φορτίον 230 kg^* τῇ βοηθείᾳ μονοτροχοῦ ὅμαξιου, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τοῦ βάρους ἀπέχει κατὰ $1/3 \text{ m}$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ καὶ κατὰ $1,2 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς εὐθείας, τῆς ἐνούσης τὰς δύο χεῖρας τοῦ ἐργάτου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ ἄξων τοῦ τροχοῦ καὶ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ ἐργάτης.

(Ἀπ. 180 kg^* , 25 kg^* .)

169. Ράβδος ὁμογενῆς, μήκους 90 cm , φέρει εις τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς βάρους 1 kg^* καὶ εις τὸ ἕτερον βάρους $0,5 \text{ kg}^*$. Ἐὰν εις τὸ μέσον αὐτῆς τοποθετηθῇ ἄξων περιστροφῆς, εις ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ βάρους $1,5 \text{ kg}^*$, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ.

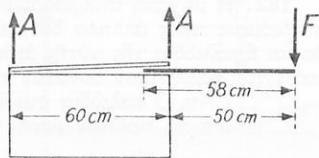
(Ἀπ. $x = 15 \text{ cm}$, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἄξονος.)

170. Τρεῖς δυνάμεις, F_1 , F_2 , F_3 , επενεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου ἰσορροποῦν. Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120° . Ἡ δύναμις F_3 ἔχει ἔντασιν 500 kg^* , αἱ δὲ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ἔχουν ἴσα μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 ὥς καὶ αἱ γωνίαι τῆς F_3 μετ' αὐτῶν.

(Ἀπ. $F_1 = F_2 = F_3 = 500 \text{ kg}^*$, 120° .)

171. Διὰ νὰ ἀνοίξωμεν κιβώτιον, καρφωμένον μόνον κατὰ τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ σκεπάστρου αὐτοῦ, εἰσάγωμεν λοστὸν μήκους 58 cm κατὰ 8 cm κάτωθεν τοῦ σκεπάστρου καὶ πιέζομεν τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτοῦ διὰ δυνάμεως 22 kg^* . Ἐὰν αἱ δύο σειραὶ καρφίδων ἐπὶ τοῦ σκεπάστρου τοῦ κιβωτίου ἀπέχουν 60 cm ἀπ' ἀλλήλων, μὲ ποίαν δύναμιν ἀποσπᾶται ἑκάστη ἐξ αὐτῶν.

(Ἀπ. $119,2 \text{ kg}^*$.)



* Ασκήσις 171.

172. Ὅριζοντία ράβδος στηρίζεται διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς ἐπὶ ἀκλονήτου σημείου καὶ διὰ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τοῦ ἀγκίστρου δυναμομέτρου, δεικνύοντος ἔντασιν $6,4 \text{ kg}^*$. Ποῖον τὸ βάρους τῆς ράβδου. (Ἀπ. $12,8 \text{ kg}^*$.)

173. Ἐπὶ ὁμογενοῦς ἐλάσματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις : 5 kg^* εἰς ἀπόστασιν 60 cm καθέτως καὶ πρὸς τὰ κάτω καὶ 2 kg^* εἰς ἀπόστασιν 40 cm , ὑπὸ γωνίαν 60° ὡς πρὸς τὴν κάθετον. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς καὶ εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος, καθέτως καὶ πρὸς τὰ κάτω, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἰσορροπία.

(Ἀπ. $4,25 \text{ kg}^*$.)

174. Δοκός, μήκους 8 m καὶ βάρους 15 kg^* ἀνὰ μέτρον, φέρει στηρίγματα εις τὰ πέρατα αὐτῆς. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀριστεροῦ στηρίγματος δέον νὰ τοποθετηθῇ βάρους 100 kg^* , ὥστε ἡ ἀριστερὰ ἀντίδρασις νὰ εἶναι 85 kg^* .

(Ἀπ. 6 m .)

175. Δύο ἐργάται φέρουν ἐπὶ τῶν ὤμων των δοκὸν μήκους 12 m καὶ βάρους 60 kg^* . Ἡ δοκὸς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐνὸς ἐργάτου κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς, ἐνῶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου εἰς σημεῖον ἀπέχον τοῦ ἑτέρου ἄκρου 1 m . Ποῖον φορτίον ὑποβαστάζει ἕκαστος ἐργάτης.

(Ἀπ. $F_1 = 27,3 \text{ kg}^*$, $F_2 = 32,7 \text{ kg}^*$.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1959).

176. Χαλυβδίνη ράβδος, μήκους $1,2 \text{ m}$, ὑφίσταται δυνάμεις 25 Nt καὶ 15 Nt ἐνεργοῦσας καθέτως πρὸς τὰ ἄνω, εις τὰ ἀντίθετα πέρατα αὐτῆς. Ἐὰν ἡ ράβδος ἔχῃ μᾶ-

ζαν 1 kgr, εις ποῖον σημείον δέον νὰ τοποθετηθῇ τὸ ὑπομόχλιον, ἵνα ἐπέλθῃ ἰσορροπία. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. 0,40 m ἀπὸ τῆς δυνάμεως 25 Nt.)

177. Ὅμογενὴς ράβδος, μήκους 2,5 m, ὑποβαστάζεται δι' ὑπομόχλιον τοποθετημένου εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ ἐνὸς πέρατος. Ἐὰν εἰς τὸ πέρας τοῦτο τεθῇ μᾶζα 15 kgr, ποῖα μᾶζα πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς τὸ ἕτερον πέρας, ἵνα διατηρηθῇ ἰσορροπία, θεωρουμένης τῆς μάζης τῆς ράβδου ἀμελητέας. (Ἄπ. 10 kgr.)

178. Κανὼν, μήκους 1 m, ὅστις ἰσορροπεῖ εἰς τὸ σημεῖον τοῦ κέντρου του, φέρει βάρη A, B καὶ Γ, ἐξαρτώμενα ἀπὸ τὰς ὑποδιαίρεσεις 6 cm, 60 cm καὶ 80 cm, ἀντιστοίχως. α) Ἐὰν τὰ βάρη B καὶ Γ εἶναι 250 gr* καὶ 100 gr* ἀντιστοίχως, ποῖον θὰ εἶναι τὸ A. β) Ἐὰν τὰ βάρη A καὶ Γ εἶναι 25 gr* καὶ 10 gr* ἀντιστοίχως, ποῖον θὰ εἶναι τὸ B. (Ἄπ. 125 gr*, 80 gr*.)

179. Ράβδος, ἀμελητέου βάρους, φέρει εἰς τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς φορτία 30 kgr* καὶ 50 kgr*. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἄκρων εἶναι 1 m, νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ράβδος, ἵνα μείνῃ ὀριζοντία. β) Ἡ δύναμις, ἥτις ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ σημείου στηρίξεως.

(Ἄπ. α' $x = 37,5 \text{ cm}$. β' 80 kgr*.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, Μηχανολόγων—Ἠλεκτρολόγων—Ἀλλοδαποί—1959).

180. Δυναμόμετρον κρέμαται ὀκλονήτως ἀπὸ ἄγκιστρον καὶ τείνεται ὑπὸ βάρους 10 kgr*. α) Ποία δύναμις πρέπει νὰ καταβληθῇ διὰ νὰ μὴ ἐπιμηκυνθῇ τὸ ἐλατήριο. β) Τί θὰ δεικνύῃ τὸ δυναμόμετρον, ἐὰν ἀντὶ τοῦ βάρους τῶν 10 kgr* τείνεται τοῦτο διὰ τῆς χειρὸς ἀτόμου τινός, ἡ δὲ οὕτως ἀσκουμένη δύναμις ἀνέρχεται εἰς 10 kgr*. (Τὸ βάρος τοῦ δυναμομέτρου δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Ἄπ. α' 10 kgr*. β' 10 kgr*.)

181. Ἀπὸ τίνος σχοινίου κρέμονται τὰ βάρη $B_1 = 10 \text{ kgr*}$ καὶ $B_2 = 5 \text{ kgr*}$, ὅπου τὸ B_1 εὐρίσκεται χαμηλότερον τοῦ B_2 . Ποία ἡ τάσις τοῦ σχοινίου: α) ὑπεράνω τοῦ B_1 , β) ὑπεράνω τοῦ B_2 . (Ἄπ. α' 10 kgr*, β' 15 kgr*.)

182. Ὅμογενὲς πρίσμα, ὕψους 5 m καὶ βάρους $B = 3 \text{ tn*}$, ἴσταται ἐπὶ σταθεροῦ ὑποβάθρου καὶ φορτίζεται μὲ βάρος $B_1 = 4 \text{ tn*}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ὀλικὴ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ πρίσματος ἐπὶ τοῦ ὑποβάθρου καὶ αἱ συμπιέζουσαι δυνάμεις εἰς τὰς ἀκολουθούσας διατομὰς, ἀπεχούσας: α) ἀπόστασιν $l_1 = 0,5 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας πλευρᾶς, β) ἀπόστασιν $l_2 = 0,5 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς βάσεως.

(Ἄπ. Ὀλικὴ δύναμις ἐπὶ τοῦ δαπέδου 7 tn*. α' 4,3 tn*, β' 6,7 tn*.)

183. Ρυμουλκὸν πλοῖον σύρει τρεῖς φορτηγίδας διαφορετικῶν μεγεθῶν, αἵτινες προσδένονται εἰς τὸ ρυμουλκὸν ἢ μίᾳ κατόπιν τῆς ἄλλης. Ἡ προωστικὴ δύναμις τῆς ἑλικῆς τοῦ ρυμουλκοῦ ἔχει κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν ἔντασιν 1800 kgr*. Ἡ κατὰ τὴν κίνησιν ἀναπτυσσομένη ἀντίστασις τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 600 kgr* διὰ τὸ ρυμουλκόν, εἰς 600 kgr* διὰ τὴν πρώτην φορτηγίδα, εἰς 400 kgr* διὰ τὴν δευτέραν καὶ εἰς 200 kgr* διὰ τὴν τρίτην. Τὸ διατιθέμενον σχοινίον ἀντέχει μέχρι τᾶσσεως 200 kgr*. Πόσα σχοινία χρειάζονται διὰ τὴν πρόσδεσιν τῆς πρώτης φορτηγίδος εἰς τὸ ρυμουλκόν, πόσα διὰ τὴν πρόσδεσιν τῆς δευτέρας εἰς τὴν πρώτην φορτηγίδα καὶ πόσα διὰ τὴν πρόσδεσιν τῆς τρίτης εἰς τὴν δευτέραν.

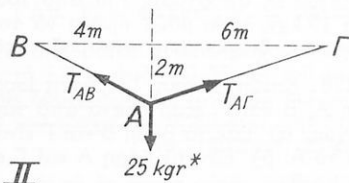
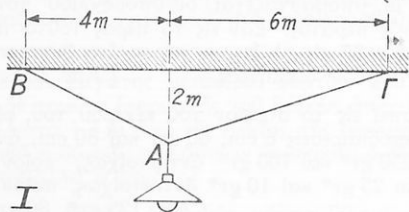
(Ἄπ. 6, 3 καὶ 1 σχοινία, ἀντιστοίχως.)

184. Βαρὺ ἀντικείμενον ἐξαρτάται ἐκ δύο συρμάτων, ἑκάστου σχηματίζοντος γωνίαν μετὰ τῆς ὀριζοντίου 20° . Ἐὰν ἡ μέγιστη δύναμις, τὴν ὁποίαν ἑκάστου σύρμα δύναται νὰ ἀνθέξῃ, εἶναι 500 kgr*, ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγιστον βάρος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συγκρατηθῇ ὑπ' αὐτῶν. (Ἄπ. 342 kgr*.)

185. Πλαίσιον, βάρους 5 kgr*, κρέμαται ἐπὶ τοίχου διὰ δύο συρμάτων, σχηματίζόντων γωνίαν 130° . Ποία ἡ τάσις τῶν συρμάτων. (Ἄπ. 5,9 kgr*.)

186. Τὸ σχῆμα δεικνύει φανὸν βάρους 25 kg^* ἐξηρτημένον διὰ δύο καλωδίων AB καὶ ΑΓ. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τάσις ἐκάστου καλωδίου.

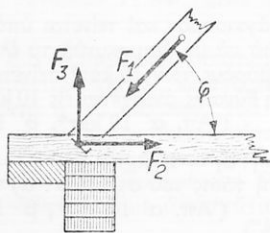
(Ἀπ. $T_{AB} = 33,6 \text{ kg}^*$, $T_{AG} = 31,7 \text{ kg}^*$.)



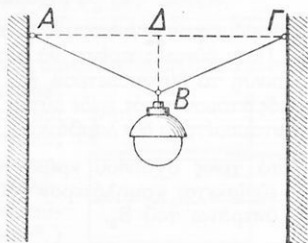
*Ασκήσις 186.

187. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν δοκοῦ ὁροφῆς, σχηματίζουσας γωνίαν $\varphi = 45^\circ$, ἐνεργεῖ ἡ δύναμις $F_1 = 250 \text{ kg}^*$. Ποία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F_2 , ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς ὀριζοντίου δοκοῦ, καὶ ποία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F_3 , ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ τοίχου καὶ κατὰ κάθετον διεύθυνσιν.

(Ἀπ. $F_2 = F_3 = 177 \text{ kg}^*$.)



*Ασκήσις 187.



*Ασκήσις 188.

188. Ἡλεκτρικὸς φανὸς ὁδοῦ κρέμαται ἀπὸ τοῦ σημείου B εἰς τὸ μέσον τοῦ σχοινίου ABΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι σταθερῶς προσδεδεμένον εἰς τὰ ἀγκίστρα A καὶ Γ. Νὰ υπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἰς τὰ τμήματα AB καὶ ΒΓ τοῦ σχοινίου, ὅταν τὸ βάρος τοῦ φανοῦ ἀνέρχεται εἰς 15 kg^* . Τὸ ὅλον μήκος τοῦ σχοινίου ABΓ εἶναι 20 m. Ἡ διαφορά ΒΔ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως B ἀπὸ τῆς ὀριζοντίας ΑΓ εἶναι 0,1 m. Τὸ βάρος τοῦ σχοινίου θεωρεῖται ἀμελητέον.

(Ἀπ. $F_1 = F_2 = 750 \text{ kg}^*$.)

189. Σχοινίον, μήκους 70 cm, στηρίζεται ἐπὶ δύο ἀγκίστρων, ἀπεχόντων 50 cm ἀπὸ ὀριζοντίου ὁροφῆς. Εἰς τὸ σχοινίον προσαρμολόμενον βάρος 100 kg^* , εἰς τρόπον ὥστε τὰ τμήματα τοῦ σχοινίου νὰ ἔχουν μήκος 30 cm καὶ 40 cm ἀντιστοίχως. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις ἐκάστου τμήματος τοῦ σχοινίου.

(Ἀπ. 80 kg^* , 60 kg^* .)

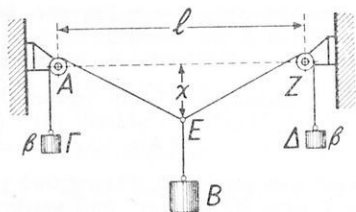
190. Δύο καλώδια, ἀμελητέου βάρους, συνδεδεμένα εἰς δύο σημεῖα ὁροφῆς ἀπέχοντα 1 m, κρατοῦν βάρος 800 kg^* . Γνωστοῦν ὅτι τὰ μήκη τῶν καλωδίων εἶναι ἀντιστοίχως 0,50 m καὶ 0,75 m, νὰ ὑπολογισθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς αἱ τάσεις τῶν καλωδίων.

(Ἀπ. $F_1 = 723 \text{ kg}^*$, $F_2 = 568 \text{ kg}^*$.)

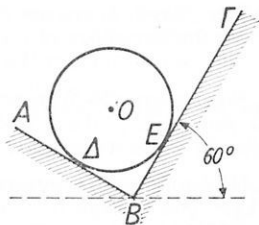
191. Διὰ τῶν αὐλάκων δύο πολὺ μικρῶν ἀκινήτων (βλ. σχῆμα) τροχαλίων A καὶ Z, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου εὐθείας AZ = l, διέρχεται ἄβαρὲς νῆμα ΓΑΕΖΔ. Εἰς ἀμφότερα τὰ πέρατα Γ καὶ Δ τοῦ νήματος προσδένεται βάρος β καὶ εἰς τὸ σημεῖον E βάρος B. Μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς τριβῆς, νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις x τοῦ σημείου E ἀπὸ τῆς εὐθείας AZ κατὰ τὴν θέσιν ἰσορροπίας τοῦ συστήματος.

(Ἀπ. $x = \frac{B \cdot l}{2 \sqrt{4\beta^2 - B^2}}$.)

192. 'Επὶ δύο, καθέτως πρὸς ἀλλήλα κειμένων, λείων ἐπιπέδων AB καὶ ΒΓ εἶναι τοποθετημένη σφαῖρα Ο βάρους 6 kgr*. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὑπὸ τῆς σφαίρας ἀσκούμεναι ἐπὶ τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων δυνάμεις. Τὸ ἐπίπεδον ΒΓ σχηματίζει μετὰ τοῦ ὀριζοντίου γωνίαν 60° .
(Ἀπ. $F_E = 3 \text{ kgr}^*$, $F_\Delta = 5,2 \text{ kgr}^*$.)



"Άσκησης 191.



"Άσκησης 192.

193. Ἴππος σύρει ἄμαξαν διὰ δυνάμεως $F = 60 \text{ kgr}^*$, σχηματίζουσας γωνίαν 30° μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς ὁδοῦ. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ὀφέλιμος συνιστώσα, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ὁδόν, καὶ β) ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τῆς ἐμάξης καθέτως πρὸς τὴν ὁδόν.
(Ἀπ. α' $30 \sqrt{3} \text{ kgr}^* = 52 \text{ kgr}^*$ περίπου, β' 30 kgr^* .)

194. Ἐλκηθρον σύρεται διὰ δυνάμεως 25 kgr^* , ἐπενεργοῦσης ἐπὶ σχοινίου σχηματίζοντος μετὰ τῆς ὀριζοντίας γωνίαν 30° . Ποία εἶναι ἡ κινήτηριος συνιστώσα τῆς δυνάμεως, ἥτις σύρει τὸ ἔλκηθρον. Ποία εἶναι ἡ συνιστώσα, ἥτις τείνει νὰ ἀνυψώσῃ καθέτως τὸ ἔλκηθρον.
(Ἀπ. $21,7 \text{ kgr}^*$, $12,5 \text{ kgr}^*$.)

195. Πλοῖον ρυμουλκεῖται ἐντὸς διώρυγος τῇ βοηθείᾳ καλωδίου, τὸ ὅποῖον σχηματίζει μετὰ τῆς ἀκτῆς γωνίαν 10° . Ἐὰν ἡ ἔλξις τοῦ καλωδίου εἶναι 200 kgr^* , νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις, ἥτις κινεῖ τὸ πλοῖον κατὰ μῆκος τῆς διώρυγος.
(Ἀπ. 197 kgr^* .)

196. Δύο παιδία ὥθουν θεριστικὰς μηχανὰς χόρτου. Τὸ ἓν ὥθει μὲ δύναμιν 30 kgr^* ὑπὸ γωνίαν μετὰ τῆς ὀριζοντίας 30° , ἐνῶ τὸ ἕτερον ὥθει μὲ δύναμιν 40 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 50° . Ποῖον ἐκ τῶν δύο παράγει μεγαλύτεραν ὀριζοντίαν δύναμιν. Πόσον μεγαλύτερα εἶναι αὕτη.
(Ἀπ. Τὸ πρῶτον. $0,3 \text{ kgr}^*$.)

197. Ζεῦγος $M_1 = -30 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$ ἐνεργεῖ ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ζεῦγος $M_2 = 60 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$ ἐνεργεῖ ἐπὶ ἐπιπέδου ὑπὸ γωνίαν 45° . Νὰ καθορισθῇ γραφικῶς ἡ συνισταμένη των.
(Ἀπ. $44,1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$, $\theta = 74^\circ$.)

198. Νὰ προστεθοῦν τὰ ζεύγη $M_1 = -20 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$ καὶ $M_2 = -48 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$ ἐνεργοῦντα ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀπεχόντων 6 cm.
(Ἀπ. $-68 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$.)

199. Νὰ συνδεθοῦν τὰ ζεύγη $M_1 = +20 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$, $M_2 = -80 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$, $M_3 = -18 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$, ἐνεργοῦντα ἅπαντα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.
(Ἀπ. $M = -78 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

200. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ κάτωθι συστήματος δυνάμεων: 26 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 10° , 39 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 114° , 63 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 183° , 57 kgr^* ὑπὸ γωνίαν 261° . (Αἱ γωνίαι ὅλαι ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x). (Ἀπ. $F = 65 \text{ kgr}^*$, $\theta = 197^\circ$.)

201. Ποία ή συνισταμένη των εξής δυνάμεων: 15 kgr*, 25 kgr*, 18 kgr* και 22 kgr* υπό γωνίας: 35°, 110°, 200° και 310° αντιστοίχως μετά της οριζοντίας διευθύνσεως.
(Απ. 10,4 kgr*, $\theta = 60^\circ$.)

202. Αί άκμαι X, Ψ, Z όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι αντιστοίχως 4 m, 3 m και 2 m. Έάν ή διαγώνιος από την άρχήν των άξόνων είναι ίση προς δύναμι 50 kgr*, νά υπολογισθούν αί συνιστώσαι X, Ψ και Z τής δυνάμεως.

(Απ. $F_x = 37,2 \text{ kgr}^*$, $F_y = 27,9 \text{ kgr}^*$ $F_z = 18,6 \text{ kgr}^*$.)

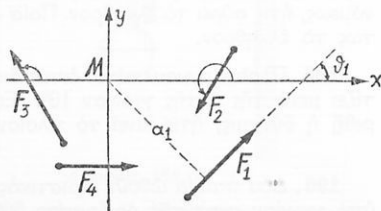
203. Νά υπολογισθῇ ή συνισταμένη των δυνάμεων: 6 gr* υπό γωνίαν 38°, 12 gr* υπό γωνίαν 73°, 18 gr* υπό γωνίαν 67° και 24 gr* υπό γωνίαν 131°. ("Ολαι αί γωνίαι ώς προς τόν άξονα των x).
(Απ. 50 gr*, $\theta = 91^\circ$.)

204. Νά υπολογισθῇ ή συνισταμένη 20 kgr* υπό γωνίαν 0°, 20 kgr* υπό γωνίαν 30°, 20 kgr* υπό γωνίαν 60°, 20 kgr* υπό γωνίαν 90°, 20 kgr* υπό γωνίαν 120° και 20 kgr* υπό γωνίαν 150°. ("Ολαι αί γωνίαι ώς προς τόν άξονα των x).
(Απ. 77,2 kgr*, $\theta = 75^\circ$.)

205. Νά εύρεθῇ ή συνισταμένη δύναμις, ήτις αντικαθιστᾷ τās έπομένās: 150 dyn υπό γωνίαν 78°, 320 dyn υπό γωνίαν 143°, 485 dyn υπό γωνίαν 249°, 98 dyn υπό γωνίαν 305° και 251 dyn υπό γωνίαν 84°. ("Ολαι αί γωνίαι ώς προς τόν άξονα των x).
(Απ. 321 dyn, 171°.)

206. Τέσσαρες όμοεπίπεδοι δυνάμεις έπενεργοῦν επί στερεοῦ σώματος (βλ. σχήμα). Αί τιμαί των δυνάμεων (F_n), αί άποστάσεις (α_n) εκ τυχόντος σημείου M του έπιπέδου και αί γωνίαι των φορέων αυτών (θ_n) μετά του θετικού άξονος των x είναι:

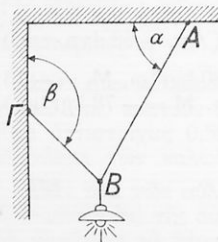
$F_1 = 40 \text{ kgr}^*$	$\alpha_1 = 30 \text{ cm}$	$\theta_1 = 45^\circ$
$F_2 = 28 \text{ kgr}^*$	$\alpha_2 = 20 \text{ cm}$	$\theta_2 = 240^\circ$
$F_3 = 45 \text{ kgr}^*$	$\alpha_3 = 15 \text{ cm}$	$\theta_3 = 120^\circ$
$F_4 = 30 \text{ kgr}^*$	$\alpha_4 = 18 \text{ cm}$	$\theta_4 = 0^\circ$



Νά εύρεθούν ή συνισταμένη των δυνάμεων τούτων, ή γωνία του φορέως αυτής μετά του άξονος των x και ή άπόστασίς της εκ του M.

(Απ. $\Sigma x = 21,8 \text{ kgr}^*$, $\Sigma y = 43 \text{ kgr}^*$, $\Sigma = \sqrt{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}$,
 $\Sigma = 48,2 \text{ kgr}^*$, $\epsilon\phi \theta = \Sigma x / \Sigma y$, $\theta = 63^\circ 9'$, $\alpha = 10,5 \text{ cm}$.)

207. Ήλεκτρικός λαμπτήρ, βάρους 2 kgr*, κρέμαται διά δύο τεταμένων καλωδίων, τὸ έν των οποίων στηρίζεται επί της όροφής και τὸ άλλο επί του τοίχου ενὸς δωματίου, ώς δεικνύεται εις τὸ σχήμα. Νά υπολογισθούν αί τάσεις των καλωδίων εάν είναι $\alpha = 60^\circ$ και $\beta = 135^\circ$, αί γωνίαι, τās οποίās σχηματίζουν τὰ καλώδια AB και ΓB μετά της όροφής και του τοίχου αντιστοίχως. Τὸ βάρος των καλωδίων δέν λαμβάνεται υπ' όψιν.
(Απ. 1,46 kgr*, 1,04 kgr*.)



Άσκησις 207.

208. Βάρος $P = 25 \text{ kgr}^*$ ίσορροπεί συγκρατούμενον διά δύο σχοινίων, τὰ όποία διέρχονται διά των λαϊμών δύο σταθερών τροχαλίων και τείνονται υπό δύο βαρών προσδεδεμένων εις τὰ άκρα των σχοινίων. Τὸ έν των δύο τούτων βαρών ίσοῦται προς 20 kgr*, τὸ δε ήμίτονον τής γωνίας, τής σχηματιζόμενης υπό του τείνοντος αυτό σχοινίου και του προσκειμένου προς αυτό τμήματος του μεταξύ των δύο τροχαλίων σχοινίου, είναι 0,6.

Παραλειπομένων τῶν τριβῶν, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ βάρος τὸ τεῖνον τὸ ἄκρον τοῦ ἑτέρου σχοινίου, καὶ ἡ γωνία ἣν σχηματίζει τὸ σχοινίον αὐτὸ μὲ τὸ προσκείμενον πρὸς αὐτὸ τμήμα τοῦ μεταξὺ τῶν δύο τροχαλιῶν σχοινίου.

(Ἀπ. 53° 10', 15 kgr*.)

209. Δίδεται ὁμογενὴς κυκλικὸς δίσκος, τὸν ὁποῖον ἀναρτῶμεν διὰ σχοινίου ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο, ὅποτε παραμένει ὀριζόντιος. Νὰ τοποθετηθοῦν τρία βάρη 50 kgr*, 50 kgr* καὶ 40 kgr* ἐπὶ τοῦ δίσκου καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου, εἰς τρόπον ὥστε ὁ δίσκος νὰ ἐξακολουθήσῃ παραμένων ὀριζόντιος.

(Ἀπ. Τὸ βάρος 50 kgr* εἰς σημεῖον Α, τὸ βάρος 50 kgr* εἰς σημεῖον Β

οὕτως, ὥστε $AB = \frac{2\sqrt{21}}{5} \cdot R$, καὶ τὸ βάρος τῶν 40 kgr* εἰς σημεῖον Γ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ ΜΟ, ὅπου Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.)

210. Κατακόρυφος κύκλος ἔχει ὀριζοντίαν διάμετρον $AB = 2R$. Εἰς τὸ σημεῖον Α προσδένεται νῆμα μήκους R, ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦ ὁποῖου κρέματα σφαῖρα βάρους 30 kgr* στηριζομένη ἐπὶ τοῦ κύκλου. Εὗρατε τὴν τάσιν τοῦ νήματος καὶ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ κύκλου.

(Ἀπ. $T = A = 17,3 \text{ kgr*}$.)

211. Ἐπὶ τῆς περιφερείας κατακορύφου κύκλου ὀλισθαίνει ἄνευ τριβῆς ὕλικὸν σημεῖον Μ μάζης m. Τὸ σημεῖον Μ ἔλκεται ὑπὸ τοῦ σημείου Α, εὐρισκομένου εἰς τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς ὀριζοντίας διαμέτρου τοῦ κύκλου, κατὰ τὸν νόμον $F = \alpha \cdot (AM)$, ἥτοι ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίας θέσεις ἰσορροπεῖ τὸ σημεῖον Α.

(Ἀπ. Εἰς τὰς θέσεις Μ καὶ Μ', εὐρισκομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΜΜ', ἥτις τέμνει τὴν διὰ τοῦ Α διερχομένην εφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Ζ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $AZ = \frac{mg}{\alpha}$. Τί συμβαίνει ἐὰν ἡ δύναμις εἶναι ἀπωστική;)

212. Δύο ἑλκυστήρες, εὐρισκόμενοι εἰς τὰς δύο ὄχθας εὐθείας διώρυγος, κινοῦνται εὐθυγράμως καὶ ἰσοταχῶς κατὰ μήκος τῆς διώρυγος, ἔλκοντες μίαν λέμβον, προσδεμένην εἰς τὸ ἄκρον σχοινίων. Αἱ τάσεις τῶν σχοινίων ἀφέρχονται εἰς 80 kgr* καὶ 96 kgr*, ἡ δὲ γωνία τῶν σχοινίων εἰς 60°. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀντίστασις F τοῦ ὕδατος κατὰ τὸν πλοῦν τῆς λέμβου καὶ αἱ γωνίαι α καὶ β, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ σχοινία μὲ τὰς ὄχθας τῆς διώρυγος, ὅταν ἡ λέμβος πλεῖ παραλλήλως πρὸς τὰς ὄχθας.

(Ἀπ. $F = 153 \text{ kgr*}$, $\alpha = 33^\circ$, $\beta = 27^\circ$.)

213. Βάρος 2 kgr* ἐξαρτᾶται διὰ σύρματος ΑΓΒ, στερεωμένου κατὰ τὸ Α. Τῇ βοηθείᾳ σύρματος ὀριζοντίου ΓΔ φέρεται τὸ σύρμα ΑΓ εἰς 45° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Ζητοῦνται αἱ τάσεις τῶν συρμάτων ΓΒ, ΓΔ καὶ ΓΑ.

(Ἀπ. $\Gamma B = 2 \text{ kgr*}$, $\Gamma \Delta = 2 \text{ kgr*}$, $\Gamma A = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ kgr*}$.)

214. Εἰς κατακόρυφον νῆμα ΟΑ, στερεωμένον εἰς τὸ Ο, εἶναι ἐξηρητημένον ἀπὸ τὸ Α βάρος $P = 5 \text{ kgr*}$. Εἰς σημεῖον Β τῆς ΟΑ ἀσκέεται ὀριζοντία δύναμις F, εἰς τρόπον ὥστε τὸ νῆμα ΟΒ νὰ σχηματίζει γωνίαν α μὲ τὴν κατακόρυφον. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ δύναμις ἑλξέως F' καὶ ἡ τάσις T τοῦ νήματος ΟΒ, διὰ τιμὰς τῆς γωνίας α ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς 30°, 45° καὶ 60°.

(Ἀπ. $F = P \cdot \epsilon\phi\alpha$, $T = \frac{P}{\sin \alpha}$, $\alpha = 30^\circ$: $F = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2,89 \text{ kgr*}$,

$T = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5,77 \text{ kgr*}$, $\alpha = 45^\circ$: $F = 5 \text{ kgr*}$, $T = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ kgr*}$, $\alpha = 60^\circ$: $F = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ kgr*}$, $T = 10 \text{ kgr*}$.)

215. Βάρος 100 kgr* ἐξαρτᾶται διὰ σχοινίου ἐξ ὀροφῆς. Τὸ βάρος ὠθεῖται ὑπὸ

οριζοντίας δυνάμεως, μέχρις ότου σχηματίσει τὸ σχοινίον γωνίαν 70° μετὰ τῆς ὁροφῆς. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ὀριζοντία δύναμις καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινοῦ.

(Ἄπ. $F = 36,4 \text{ kgr}^*$, $T = 106 \text{ kgr}^*$.)

216. Δύο ἐργάται μεταφέρουν φορτίον βάρους 60 kgr^* . Αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἀσκοῦν, σχηματίζουν μετὰ τῶν γωνιῶν 60° καὶ ἔχουν ἴσας κλίσεις μετὰ τῆς κατακόρυφου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀσκούμένη δύναμις ὑπὸ ἐκάστου τῶν ἐργατῶν.

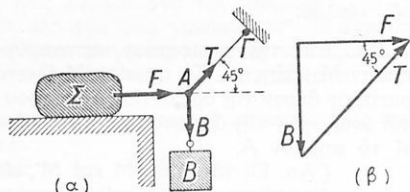
(Ἄπ. $20\sqrt{3} = 34,6 \text{ kgr}^*$.)

217. Καλῶδιον ἀμελητέου βάρους καὶ συνδεδεμένον εἰς σταθερὸν σημεῖον Α ὑποβαστάζει σῶμα ἀγνώστου βάρους. Εἰς ἀπόστασιν $0,50 \text{ m}$ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως ἀσκεῖται, δι' ἐνδιαμέσου καλωδίου διερχομένου τὴν αὐλακα τροχαλίας, καταλλήλως διατιθεμένης, δύναμις ὀριζοντία 25 kgr^* , ἥτις ἀπομακρύνει τὸ σημεῖον συνδέσεως τῶν δύο καλωδίων κατὰ 40 cm ἐκ τῆς κατακόρυφου. Ποῖον τὸ βῆρος τοῦ σώματος.

(Ἄπ. $18,75 \text{ kgr}^*$.)

218. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν ὀριζοντίαν δύναμιν $F = 8 \text{ kgr}^*$ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ μέσῳ ἐνὸς ἐξηρητημένου βάρους B , χρησιμοποιοῦμεν τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος. Προσδιορίσατε τὸ ἀπαιτούμενον βῆρος B καὶ τὴν τείνουσαν δύναμιν T εἰς τὸ σχοινίον ΑΓ.

(Ἄπ. $B = 8 \text{ kgr}^*$, $T = 8\sqrt{2} = 11,28 \text{ kgr}^*$.)



(α)

(β)

*Άσκησης 218.

219. Βῆρος 100 kgr^* ὑποβαστάζεται ὑπὸ δύο σχοινίων. Τὸ ἓν σχοινίον ἔχει ὀριζοντίαν διεύθυνσιν καὶ τὸ ἄλλο διεύθυνσιν 30° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις ἐκάστου σχοινοῦ.

(Ἄπ. $57,7 \text{ kgr}^*$, 115 kgr^* .)

220. Τηλεγραφικὸς στῦλος συγκρατεῖται ἀπὸ καλῶδιον, τὸ ὁποῖον ἀσκεῖ τάσιν 200 kgr^* εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ στύλου. Ἐὰν ἡ γωνία μετὰ τοῦ καλωδίου καὶ τοῦ στύλου εἶναι 50° , ποῖα εἶναι ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κάθετος συνιστώσαι τῆς τάσεως ἐπὶ τοῦ στύλου.

(Ἄπ. 153 kgr^* , 129 kgr^* .)

221. Αὐτοκίνητον, βάρους 2 τόννων, εὐρίσκεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως 8° . Τὸ αὐτοκίνητον συγκρατεῖται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ δύο σχοινίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν πρὸς τὴν κατακόρυφον τομὴν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30° καὶ 40° . Ζητεῖται πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τάσις τῶν σχοινίων, ἵνα τὸ αὐτοκίνητον ἰσορροπῇ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

(Ἄπ. $0,152 \text{ tn}^*$, $0,196 \text{ tn}^*$.)

222. Βῆρος 100 kgr^* εἶναι ἐφηρμοσμένον ἐπὶ τοῦ σημείου συνδέσεως δύο δοκῶν, σχηματίζουσιν γωνίαν 90° . Ἡ μία δοκὸς σχηματίζει γωνίαν 60° μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται αὕτη. Τὰ κάτω ἄκρα τῶν δοκῶν συνδέονται δι' ὀριζοντίας ράβδου. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ θλίψις ἐκάστης δοκοῦ ἡ τάσις ἐπὶ τῆς δοκοῦ συνδέσεως καὶ ἡ κατακόρυφος πρὸς τὰ κάτω δυνάμεις ἐπὶ τῆς βάσεως. (Βῆρος δοκῶν ἀμελητέον).

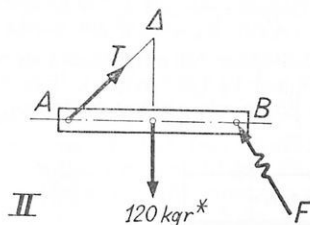
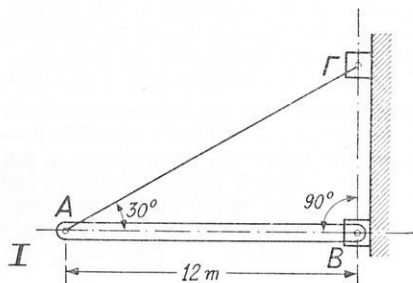
(Ἄπ. 50 kgr^* εἰς τὴν μακροτέραν, $86,6 \text{ kgr}^*$ εἰς τὴν βραχυτέραν, $43,3 \text{ kgr}^*$, 25 kgr^* καὶ 75 kgr^* .)

223. Εἰς τὸ μέσον ἐκάστης πλευρᾶς τριγώνου, καὶ καθέτως πρὸς τὴν πλευράν, ἐφαρμόζεται δύναμις διευθυνομένη πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ μήκος τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς. Νὰ δεიχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

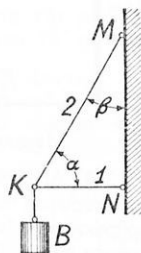
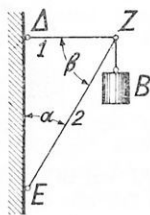
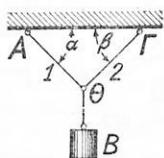
(Ἄπ. Συνισταμένη μηδέν.)

224. Ράβδος AB, βάρους 10 kg^* ανά μέτρον, στηρίζεται υπό καλωδίου ΑΓ και καρφίδος εις τὸ Β (βλ. σχῆμα). Νὰ εὐρεθοῦν ἡ ἀντίδρασις εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ ἡ τάσις τοῦ καλωδίου διὰ γραφικῆς μεθόδου.

(Ἀπ. $F = 120 \text{ kg}^*$, $T = 120 \text{ kg}^*$, F σχηματίζει 30° πρὸς AB.)



225. Τὰ σχήματα (I), (II), (III), δεικνύουν τρεῖς ἀρθρωτὰς συνδέσεις ράβδων μεταξύ των, καθὼς ἐπίσης μετὰ τῆς ὀροφῆς καὶ τῶν τοίχων. Εἰς τὰς περόνας τῶν ἀρθρώσεων Θ, Ζ καὶ Κ προσδένεται βάρος $B = 1000 \text{ kg}^*$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις τῶν ράβδων διὰ τὰς ἀκολουθούσους γωνίας: 1) $\alpha = \beta = 45^\circ$, 2) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, 3) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Ὡς δυνάμις ράβδου ἐννοεῖται ἡ ἐσωτερικὴ δύναμις, ἡ ὁποία δρᾷ κατὰ μήκος αὐτῆς, δηλαδὴ ἑλκυσσα ἢ ἀπωθοῦσα. Πρὸς διάκρισιν ἐκφράζεται ἡ ἀπωθοῦσα δύναμις δι' ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.



I

II

III

(Ἀπ. 1. $F_1 = F_2 = 707 \text{ kg}^*$. 2. $F_1 = 577 \text{ kg}^*$, $F_2 = -1154 \text{ kg}^*$. 3. $F_1 = -577 \text{ kg}^*$, $F_2 = 1154 \text{ kg}^*$.)

226. Ἀβαρὴς ράβδος, μήκους $1,60 \text{ m}$, ὑποστηρίζεται δι' ἄξονος, ἀπέχοντος κατὰ 40 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α αὐτῆς. Εἰς τὸ Α ἐπενεργεῖ δύναμις 6 kg^* καθέτως ἐπὶ τῆς ράβδου, ἐνῶ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον, εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν πλευράν, ἄλλη δύναμις, σχηματίζουσα μετὰ τὴν ράβδον γωνίαν 45° . Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως αὐτῆς, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ.

(Ἀπ. $2,83 \text{ kg}^*$.)

227. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ράβδου AB, μήκους 8 cm , ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπίπεδου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν πλευράν αἱ δυνάμεις 6 kg^* καὶ 10 kg^* , σχηματίζουσαι μετὰ τῆς ράβδου γωνίας ἀντιστοίχως 120° καὶ 90° . Νὰ εὐρεθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς: α) Ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης. β) Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει αὕτη μετὰ τῆς ράβδου. γ) Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἐπὶ τῆς AB.

(Ἀπ. α' $15,5 \text{ kg}^*$. β' $78^\circ 50'$. γ' $5,26 \text{ cm}$ ἐκ τοῦ Α.)

228. Σιδηρογωνία (βλ. σχῆμα) εἶναι στρεπτή περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, αἱ δὲ ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι $F_1 = 1 \text{ kg}^*$, $F_2 = 3,5 \text{ kg}^*$ καὶ $F_3 = 6 \text{ kg}^*$. Νὰ εὐρεθοῦν γραφικῶς καὶ λο-

γιστικῶς ἡ τιμὴ, ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ροπή αὐτῆς.

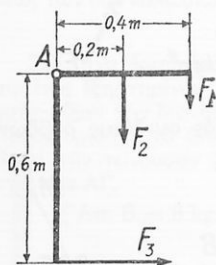
$$(\text{Ἀπ. } \Sigma = \sqrt{(F_1 + F_2)^2 + F_3^2} = 7,5 \text{ kgr*}, 2,5 \text{ kgr*m.})$$

229. Πρισματικὴ ράβδος ΑΔ, βάρους $B = 2 \text{ tn*}$, στηρίζεται δι' ἀρθρώσεως εἰς κατακόρυφον τοῖχον εἰς τὸ Α καὶ διὰ σχοινίου ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Γ τοῦ τοίχου. Νὰ προσδιορισθῶν τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιδράσεως F_A εἰς τὴν ἀρθρώσιν Α καὶ ἡ τείνουσα δύναμις Τ τοῦ σχοινίου ΔΓ. Αἱ γωνίαι δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα.

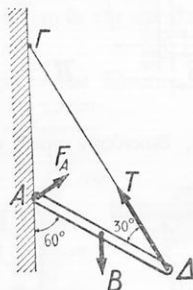
(Ἀπ. $F_A = 1 \text{ tn*}$ καὶ γωνία 60° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον, $T = 1,73 \text{ tn*}$.)

230. Ράβδος ΑΒ, στηριζομένη εἰς τὸ Γ, εὐρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (βλ. σχῆμα). Ἐὰν $F_1 = 40 \text{ kgr*}$, $F_2 = 100 \text{ kgr*}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$ καὶ τὸ βάρος τῆς ράβδου ἀμελητέον, εὑρατε τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων α_1 καὶ α_2 ,

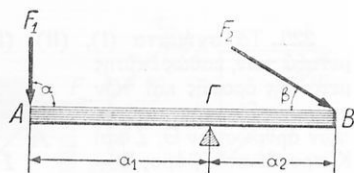
ὥστε ἡ ράβδος νὰ εἶναι εἰς ὀριζοντίαν θέσιν. (Ἡ κατακόρυφος διάστασις τῆς ράβδου θεωρεῖται ἀμελητέα). (Ἀπ. $\alpha_1/\alpha_2 = 5/4$.)



Ἀσκήσις 228.



Ἀσκήσις 229.



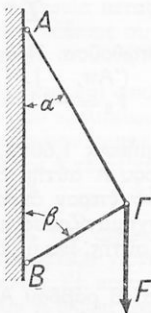
Ἀσκήσις 230.

231. Αἱ ράβδοι ΑΓ καὶ ΒΓ συνδέονται μεταξύ των εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ πρὸς τὸν κατακόρυφον τοῖχον διὰ τῶν ἀρθρώσεων Α καὶ Β (βλ. σχῆμα). Ἐπὶ τῆς περόνης τῆς ἀρθρώσεως Γ ἐνεργεῖ κατακόρυφος δύναμις $F = 1000 \text{ kgr*}$. Νὰ ὑπολογισθῶν αἱ ἀντιδράσεις τῶν ράβδων ἐπὶ τῆς περόνης Γ, ὅταν αἱ γωνίαι τῶν ράβδων μετὰ τοῦ τοίχου εἶναι $\alpha = 30^\circ$ καὶ $\beta = 60^\circ$.

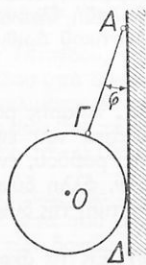
(Ἀπ. Ἀντίδρασις ΒΓ = 500 kgr* , ΑΓ = 866 kgr* .)

232. Εἰς τὸ σημεῖον Α λείου κατακόρυφου τοίχου ΑΔ προσδένεται σχοινίον καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ Γ σφαῖρα, ἀκουμβῶσα ἐπὶ τοῦ τοίχου (βλ. σχῆμα). Τὸ σχοινίον σχηματίζει μετὰ τοῦ τοίχου γωνίαν ϕ , τὸ δὲ βάρος τῆς σφαίρας εἶναι Β. Νὰ ὑπολογισθῶν ἡ τάσις τοῦ σχοινίου καὶ ἡ ὑπὸ τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ τοίχου ἀσκουμένη δύναμις.

(Ἀπ. $T = \frac{B}{\sin \phi}$, $F = B \cdot \epsilon \phi \phi$.)



Ἀσκήσις 231.



Ἀσκήσις 232.

233. Εἰς τὰς τέσσαρας κορυφὰς τραπέζιου ΑΒΓΔ ἐφαρμόζονται δυνάμεις ἴσαι, παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης. (Ἀπ. Εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἣτις συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων.)

234. Εἰς τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β εὐθείας, μήκους $AB = 120 \text{ cm}$, εἶναι ἐφηρμοσμένα δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς $F_1 = 2 \text{ kgr*}$ καὶ $F_2 = 10 \text{ kgr*}$. Εἰς

σημείον Γ, εύρισκόμενον μεταξύ Α και Β και εις απόστασιν 40 cm από τοῦ Α, ἀσκειται δύναμις $F_3 = 4 \text{ kg}^*$, παράλληλος πρὸς τὰς προηγουμένας, ἀλλὰ ἀντιθέτου φορᾶς. Νὰ εύρεθῇ τὸ σημείον ἐφαρμογῆς Ο καὶ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης Σ.
(Ἀπ. $OA = 130 \text{ cm}$, $OB = 10 \text{ cm}$, $\Sigma = 8 \text{ kg}^*$.)

235. Τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου μὲ ὀριζοντίαν βάσιν τὴν ΒΓ = 10 cm. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ ἔχουν μήκη $AB = 8 \text{ cm}$ καὶ $AG = 6 \text{ cm}$. Εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ ἐπενεργοῦν καθέτως καὶ πρὸς τὰ κάτω δύο παράλληλοι δυνάμεις, ἴσαι πρὸς 5 kg^* καὶ 7 kg^* ἀντιστοίχως, ἐνῶ εἰς τὸ Α δύναμις 4 kg^* καθέτως πρὸς τὰ ἄνω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἐπενεργείας αὐτῆς ἐκ τοῦ Γ.
(Ἀπ. 8 kg^* , $4,45 \text{ cm}$.)

236. Πέντε ὁμοπαράλληλοι δυνάμεις, ἐντάσεων 4 kg^* , 8 kg^* , 5 kg^* , 3 kg^* καὶ 2 kg^* ἐπενεργοῦν ἐπὶ πέντε σημείων εὐθείας, ἀπεχόντων ἐξ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἀποστάσεις ἀντιστοίχως 3 dm, 4 dm, 5 dm, 7 dm καὶ 10 dm. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται τὸ σημείον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης καὶ ποῖα ἡ τιμὴ αὐτῆς.
(Ἀπ. 5 dm, 22 kg^* .)

237. Ράβδος ὁμογενῆς, μήκους 2 m καὶ βάρους $1,4 \text{ kg}^*$, φέρει εἰς τὸ ἐν ἄκρον αὐτῆς βάρος 14 kg^* καὶ εἰς τὸ ἕτερον βάρος 22 kg^* . Εἰς ποῖον σημείον τῆς ράβδου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἄξων περιστροφῆς, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ.
(Ἀπ. Μεταξὺ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως καὶ τοῦ μέσου, $21,4 \text{ cm}$ ἀπ' αὐτοῦ.)

238. Δοκὸς ΑΒ, μήκους 10 m καὶ βάρους 200 kg^* , στηρίζεται ὀριζοντίως ἐπὶ δύο σημείων Γ καὶ Δ. Τὸ ἄκρον Α ἀπέχει 2 m τοῦ Γ, τὸ δὲ Β 3 m τοῦ Δ. Εἰς τὸ ἄκρον Α προσδένεται σχοινίον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ λαμποῦ παγίας τροχαλίας καὶ φέρει εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ βάρος, $\beta = 300 \text{ kg}^*$, ἐνῶ διὰ τοῦ σημείου Ε, ἀπέχοντος 3 m ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α, κρέμαται ἐκ τῆς δοκοῦ βάρος $P = 800 \text{ kg}^*$. Νὰ προσδιορισθῇ αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων.
(Ἀπ. 300 kg^* , 400 kg^* .)

239. Δύο ἐργάται διαθέτουν ράβδον μήκους 1,20 m διὰ νὰ μεταφέρουν βάρος 75 kg^* . Εἰς ποῖον σημείον ἐπὶ τῆς ράβδου πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ τὸ βάρος, ἵνα ὁ ἀσθενέστερος ἐργάτης φέρῃ βάρος 30 kg^* .
(Ἀπ. $0,72 \text{ m}$.)

240. Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις $F_1 = 7 \text{ kg}^*$, $F_2 = 8 \text{ kg}^*$, $F_3 = 9 \text{ kg}^*$ καὶ $F_4 = 10 \text{ kg}^*$ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεία A_1 , A_2 , A_3 καὶ A_4 μιᾶς σταθερᾶς εὐθείας $A_1 A_4$. Αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς ἀποστάσεις εἶναι $A_1 A_2 = 12 \text{ cm}$, $A_2 A_3 = 17 \text{ cm}$ καὶ $A_3 A_4 = 15 \text{ cm}$. Ἡ δύναμις F_2 εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εύρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν Σ καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς.
(Ἀπ. $\Sigma = 18 \text{ kg}^*$, $A_1 G = 33,6 \text{ cm}$.)

241. Ἀξων, μήκους 2 m, φέρει εἰς τὸ ἐν τῶν ἄκρων του τροχαλίαν βάρους 60 kg^* καὶ στηρίζεται ἐπὶ δύο ἐδράνων, εύρισκομένων τὸ μὲν ἐν εἰς ἀπόστασιν 0,50 m ἀπὸ τῆς τροχαλίας, τὸ δὲ ἕτερον εἰς τὸ ἀντίθετον τῆς τροχαλίας ἄκρον. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἄξων εἶναι ἀπὸ σιδήρον (εἰδ. βάρος σιδήρου $7,85 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) καὶ ἔχει διάμετρον 40 mm, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπὸ ἐκάστου ἐδράνου ὑποβαραζόμενον φορτίον.
(Ἀπ. $93,3 \text{ kg}^*$, $13,3 \text{ kg}^*$.)

242. Ράβδος, μήκους 1 m, στερεοῦται κατὰ τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Β. Εἰς δύο οἰαδήποτε σημεία Γ καὶ Δ τῆς ράβδου ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις κάθετοι ἐπὶ τὴν ράβδον, ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι 50 kg^* καὶ ὅτι $GD = 20 \text{ cm}$, νὰ ὑπολογισθῇ αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἡ ράβδος ἀσκεῖ εἰς τὰ σημεία Α καὶ Β.
(Ἀπ. Αὗται σχηματίζουν ζεύγος ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεύγος τὸ ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ σημεία Γ καὶ Δ μὲ μέτρον ἐκάστης δυνάμεως τοῦ ζεύγους 10 kg^* .)

243. Έξαρτάται βάρος 50 kgr^* εκ του άκρου ράβδου έσφηνωμένης επί τοίχου. Νά υπολογισθούν αϊ δυνάμεις, τας οποίας ο τοίχος άσκει επί τής ράβδου, γνωστού όντος ότι ή ράβδος έχει μήκος 20 cm και ότι αύτη είναι βυθισμένη έντός του τοίχου κατά 5 cm .
(Άπ. 150 kgr^* , 200 kgr^* .)

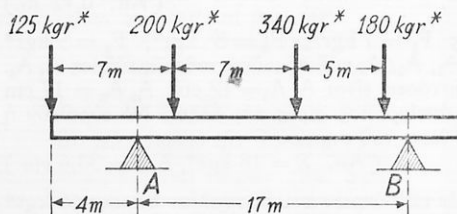
244. Είς τας τρείς κορυφάς τριγώνου $AB\Gamma$ εφαρμόζονται τρείς ίσαι, παράλληλοι και τής αΐτης διευθύνσεως δυνάμεις. Νά εύρεθούν ή έντασις και τó σημείον εφαρμογής τής συνισταμένης των.
(Άπ. $\Sigma = 3 F$. Σημείον εφαρμογής είναι τó σημείον τομής τών διαμέσων του τριγώνου.)

245. Ράβδος άβαρής AB , μήκους 100 cm , ύφίσταται τήν επενέργειαν δυνάμεων διευθυνομένων πρòς τά άνω, 8 kgr^* , 2 kgr^* και 2 kgr^* , εφαρμοζομένων αντίστοιχως είς τó σημείον A , 60 cm και 100 cm άπό του A , και δυνάμεως 4 kgr^* , διευθυνομένης πρòς τά κάτω είς άπόστασιν 20 cm άπό του A . Νά υπολογισθούν ή τιμή και ή θέσις του σημείου εφαρμογής τής ίσορροπούσης δυνάμεως. (Άπ. 8 kgr^* , 30 cm άπό A .)

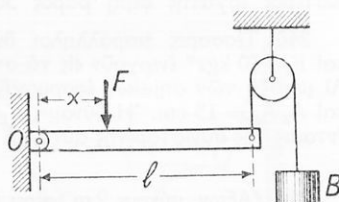
246. Όμογενής ράβδος AB μήκους 100 cm και βάρους 5 kgr^* ύφίσταται τήν επενέργειαν τών ακόλουθων δυνάμεων: Μιάς δυνάμεως 2 kgr^* , διευθυνομένης πρòς τά κάτω και εφαρμοζομένης είς σημείον 20 cm άπό του A , και δυνάμεων διευθυνομένων πρòς τά άνω 5 kgr^* , 3 kgr^* και 8 kgr^* , επενεργουσών είς τó άκρον A , 60 cm και 100 cm άπό του A αντίστοιχως. Τί άπαιτείται διά νά ύφίσταται ίσορροπία.
(Άπ. 9 kgr^* , $76,6 \text{ cm}$ άπό A .)

247. Τρείς άνθρωποι ύποβαστάζουν όμοιόμορφον δοκόν. Ό είς ύποστηρίζει τó έν άκρον και οί δύο άλλοι ύποστηρίζουν αύτήν μέσω έγκαρσίας ράβδου, τοποθετημένης ύπό τήν δοκόν. Είς ποίον σημείον τής δοκού πρέπει νά τοποθετηθή ή ράβδος, ώστε έκαστος τών ανθρώπων νά ύποβαστάξη τó έν τρίτον του βάρους τής δοκού.
(Άπ. $1/4$ άπό έλεύθερον άκρον.)

248. Δοκός ύποτιθεμένη άνευ βάρους φέρει συγκεντρωμένα φορτία ως έν τῷ σχήματι. Νά εύρεθή ή αντίδρασις είς τά σημεία A και B .
(Άπ. Άντίδρασις $B = 365 \text{ kgr}^*$ και αντίδρασις $A = 480 \text{ kgr}^*$.)



Άσκησης 248.



Άσκησης 249.

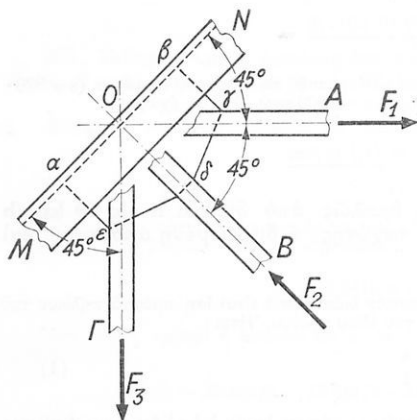
249. Είς ποίαν άπόστασιν επί τής δοκού πρέπει νά εφαρμοσθή ή δύναμις F , ώστε νά συγκρατηθή τήν δοκόν είς όριζόντιον επίπεδον, ως είς τó σχήμα.

$$(\text{Άπ. } x = \frac{B}{F} \cdot l.)$$

250. Έκ του άκλονήτου κέντρου κανονικού έξαγώνου ένεργούν, διευθυνομένοι πρòς τας κορυφάς αυτού, δυνάμεις έντάσεων 1 kgr^* , 3 kgr^* , 5 kgr^* , 7 kgr^* , 9 kgr^* και 11 kgr^* . Νά υπολογισθούν ή έντασις και ή διευθύνσις τής συνισταμένης δυνάμεως και τής αντίδράσεως αΐτης.

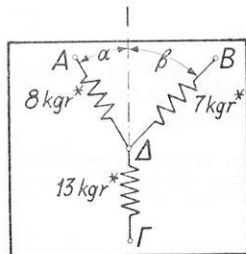
(Άπ. Η συνισταμένη έχει έντασιν 12 kgr^* , και έχει τήν φοράν τής δυνάμεως τών 9 kgr^* . Η αντίδρασίς της έχει τήν αντίθετον φοράν.)

251. Νά υπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἀσκείται ὑπὸ τοῦ λευκοσιδηροῦ κόμβου α β γ δ ἐπὶ τῆς δοκοῦ MN. Αἱ δυνάμεις δρῶν κατὰ τὰς διευθύνσεις OA, OB, OG καὶ εἶναι $F_1 = F_3 = 141 \text{ kgr}^*$, $F_2 = 100 \text{ kgr}^*$. Αἱ διευθύνσεις τῶν δυνάμεων καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ἐμφαίνονται εἰς τὸ σχῆμα.



*Ασκήσις 251.

(*Απ. Ἡ συνισταμένη δύναμις ἐντάσεως 100 kgr^* ἐνεργεῖ κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον πρὸς τὴν F_2 , ἐπὶ τῆς εὐθείας OB.)



*Ασκήσις 252.

252. Οἱ κρίκοι A, B, καὶ Γ τριῶν δυναμομέτρων σταθεροποιῦνται ἐπὶ μιᾷ ὀριζοντίας πλακῶς. Εἰς τὸ σημεῖον Δ συνάπτονται τὰ τρία τεταμένα δυναμόμετρα καὶ δεικνύουν 8 kgr^* , 7 kgr^* , καὶ 13 kgr^* . Νά υπολογισθοῦν αἱ γωνίαι α καὶ β , συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα. (*Απ. $\alpha = 27,8^\circ$, $\beta = 32,2^\circ$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

253. Ἀεροπλάνον ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 13ην ὥραν καὶ 45 λεπτά ($13 \text{ h } 45 \text{ min}$) καὶ προσγειοῦται εἰς Θεσσαλονίκην, ἀπέχουσαν 320 km , τὴν 15ην ὥραν. Ζητεῖται ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου εἰς μίλια καθ' ὥραν καὶ εἰς m/sec . (Δίδεται ὅτι $1 \text{ μίλιον} = 1609 \text{ m}$.)

Λύσις. Ἐὰν τὸ διανυθὲν διάστημα συμβολισθῇ διὰ τοῦ s καὶ ὁ χρόνος διὰ τοῦ t , τότε ἡ μέση ταχύτης $\bar{v}$ τοῦ ἀεροπλάνου δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Διά να εύρωμεν τὴν ταχύτητα εἰς μίλια/h, τρέπομεν τὸ διάστημα εἰς μίλια ($s = 320\,000/1609$ μίλια) καὶ τὸν χρόνον εἰς ὥρας ($t = 15\text{ h} - 13\text{ h } 45\text{ min} = 1\text{ h } 15\text{ min} = 1,25\text{ h}$) καὶ τὰς τιμὰς αὐτὰς θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1), ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{v} = \frac{320\,000}{1609 \cdot 1,25} = \underline{159,10 \text{ μίλια/h}}$$

Διά να εύρωμεν τὴν ταχύτητα εἰς m/sec, πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάστημα εἰς μέτρα ($s = 320 \cdot 10^3\text{ m}$) καὶ ὁ χρόνος εἰς δευτερόλεπτα ($t = 75 \cdot 60\text{ sec} = 4500\text{ sec}$), ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{v} = \frac{320 \cdot 10^3\text{ m}}{4,5 \cdot 10^3\text{ sec}} = \underline{71,1 \text{ m/sec}}$$

254. Ἡ ταχύτης κινητοῦ αὐξάνεται ὁμαλῶς ἀπὸ 30 km/h εἰς 60 km/h ἐντὸς 5 min. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ μέση ταχύτης, ἡ διανυομένη ἀπόστασις καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις.

Λύσις. Ἡ μέση ταχύτης $\bar{v}$ ἐνὸς κινητοῦ εἰς χρονικὸν διάστημα t εἶναι ἴση πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ εἰς τὸν χρόνον τοῦτον διανυθέντος διαστήματος διὰ τοῦ ἰδίου χρόνου. Ἦτοι :

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ὁμως πρόκειται περὶ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ἰσχύει διὰ τὸ διάστημα ὁ τύπος :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Καὶ ἐπομένως, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), προκύπτει :

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2} \gamma \cdot t \quad (3)$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι :

$$\gamma \cdot t = v - v_0 \quad (4)$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (5)$$

Ἐὰν ἀκολουθῶς ἀντικαταστήσωμεν τὰ v_0 καὶ v διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν :

$$\bar{v} = \frac{30 + 60}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{45 \text{ km/h}}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t} \quad (6)$$

Ἐπειδὴ δὲ $v - v_0 = 30\text{ km/h} = 30\,000/3600\text{ m/sec}$ καὶ $t = 5\text{ min} = 300\text{ sec}$, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (6) εὐρίσκομεν :

$$\gamma = \frac{30\,000}{3600 \cdot 300} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = \underline{0,028 \text{ m/sec}^2} \quad \text{ἢ} : \underline{2,8 \text{ cm/sec}^2}$$

Τὸ διάστημα s εὐρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (7)$$

ὁ ὁποῖος, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως, μᾶς δίδει :

$$\underline{s} = 30\,000 \cdot 300 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \text{sec} + \frac{1}{2} \cdot 0,028 \cdot 300^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec}^2 = \underline{3760 \text{ m}}$$

255. Σιδηρόδρομος, ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενος, μεταβάλλει τὴν ταχύτητά του ἐντὸς 2 min ἀπὸ 12 km/h εἰς 30 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσίς του.

Λύσις. Ἡ ἐπιτάχυνσις δίδεται, ὡς γνωστὸν, ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t} \quad (1)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως : $v_0 = 12 \text{ km/h} = 10/3 \text{ m/sec}$, $v = 30 \text{ km/h} = 25/3 \text{ m/sec}$ καὶ $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$\underline{\gamma = 0,0416 \text{ m/sec}^2 = 4,16 \text{ cm/sec}^2}$$

Κατ' ἄλλον τρόπον ἡ ἀσκῆσις λύεται ὡς ἀκολουθῶς : Ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος τοῦ σιδηροδρόμου εἶναι :

$$v - v_0 = 30 \text{ km/h} - 12 \text{ km/h} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18\,000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 5 \text{ m/sec}$$

Καὶ ὁ χρόνος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου συντελεῖται ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς ταχύτητος, εἶναι : $t = 2 \cdot 60 = 120 \text{ sec}$. Συνεπῶς ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σιδηροδρόμου θὰ εἶναι :

$$\underline{\gamma = \frac{v - v_0}{t} = \frac{5}{120} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 0,0416 \text{ m/sec}^2 = 4,16 \text{ cm/sec}^2}$$

256. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας μὲ ἐπιτάχυνσιν 20 cm/sec^2 . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 70 cm/sec .

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας, ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι : $v = \gamma \cdot t$. Ἐὰν δὲ λύσωμεν ὡς πρὸς t , ὁ ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι :

$$t = \frac{v}{\gamma} \quad (1)$$

Δι' ἀντικατάστασεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως εὐρίσκομεν :

$$\underline{t = \frac{70}{20} \frac{\text{cm/sec}}{\text{cm/sec}^2} = 3,5 \text{ sec}}$$

257. Κινητὸν, κινούμενον ἐπὶ 20 sec, διανύει διάστημα 12 000 m μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ δευτερολέπτου.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ὁ τύπος τοῦ διαστήματος, ὅταν $v_0 = 0$, εἶναι : $s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$. Ἐπειδὴ δὲ $v = \gamma \cdot t$, ὁ τύπος τοῦ διαστήματος γίνεταί :

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t \quad (1)$$

καὶ ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς v , εὐρίσκομεν :

$$v = \frac{2s}{t} \quad (2)$$

Επειδή δέ: $s = 12\,000\text{ m}$ και $t = 20\text{ sec}$, αντικαθιστώντας εύρισκουμε ότι:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 12\,000}{20} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 1200\text{ m/sec}$$

258. Αυτοκινητάμαξα έχει αρχικήν ταχύτητα 12 m/sec . Διανύει δέ εν συνεχεία 300 m εντός 10 sec . Να εύρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσίς της.

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ διαστήματος $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$ λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{2s - 2v_0 \cdot t}{t^2}$$

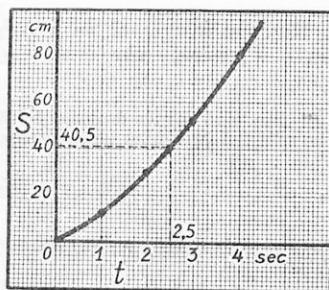
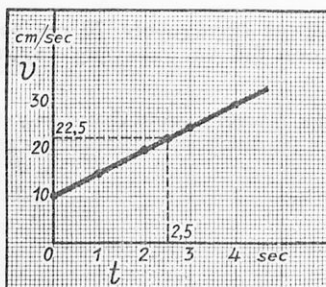
Καὶ ἐὰν αντικαταστήσωμεν τὰ μεγέθη s , v_0 καὶ t διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $s = 300\text{ m}$, $v_0 = 12\text{ m/sec}$, $t = 10\text{ sec}$, ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{2 \cdot 300 - 2 \cdot 12 \cdot 10}{10^2} = 3,6\text{ m/sec}^2$$

259. Ἡ ταχύτης ἐνὸς σώματος, κινουμένου ἐπ' εὐθείας, μεταβάλλεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον νόμον:

χρόνος	0 sec	1 sec	2 sec	3 sec	4 sec
ταχύτης	10 cm/sec	15 cm/sec	20 cm/sec	25 cm/sec	30 cm/sec

Νὰ καθορισθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ταχύτης καὶ τὸ διάστημα μετὰ παρέλευσιν $2,5\text{ sec}$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος καὶ τοῦ διαστήματος καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ τοῦ διαγράμματος τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη ἐντὸς τοῦ χρόνου τῶν $2,5\text{ sec}$.



Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης αὐξάνεται ἀναλόγως τοῦ χρόνου, ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλὴ ἐπιταχυνομένη, με ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t} = \frac{30\text{ cm/sec} - 10\text{ cm/sec}}{4\text{ sec}} = 5\text{ cm/sec}^2$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν τοῦ χρόνου καὶ τοῦ διαστήματος κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ εὐρίσκουμεν ὅτι εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 10 cm/sec .

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῆς ἐπιταχυνομένης κινήσεως $s = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$, ἐὰν θέσωμεν $v_0 = 10\text{ cm/sec}$, δίδοντες εἰς τὸν χρόνον t τὰς τιμὰς: 0 sec, 1 sec, 2 sec, 3 sec, 4 sec, εὐρίσκουμεν διὰ τὸ διάστημα ἀντίστοιχας τὰς τιμὰς: 12,5 cm, 30 cm, 52,5 cm, 80 cm.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμα τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου, τὸ ὁποῖον εἶναι καμπύλη γραμμὴ μετὰ τὸ κοῖλον αὐτῆς ἐστραμμένον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων (παραβολή) (βλ. σχῆμα). Πρὸς εὐρεσιν τῆς ταχύτητος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $2,5\text{ sec}$, ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ταχυτήτων — χρόνων φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων, καὶ εἰς σημείον αὐτοῦ ἀντι-

στοιχούν εις την υποδιαίρεσιν 2,5 sec, κάθετον και την προεκτείνωμεν μέχρις ότου αυτή συναντήσῃ τὴν εὐθείαν, ἣτις παριστᾷ γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος μετὰ τοῦ χρόνου. Ἦδη ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χρόνων καθετοῦ μετὰ τῆς εὐθείας φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ταχυτήτων. Ἡ υποδιαίρεσις εις τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ τομὴ τῆς καθετοῦ ταύτης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν ταχυτήτων, ἐκφράζει τὴν ταχύτητα, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εις χρόνον 2,5 sec.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι εἰς τὸ διάγραμμα διαστημάτων — χρόνων εὐρίσκομεν τὸ ἀντιστοιχοῦν εις τὴν χρονικὴν στιγμὴν 2,5 sec διάστημα.

Οὕτως εὐρίσκομεν :

$$v = 22,5 \text{ cm/sec} \quad \text{καί:} \quad s = 40,5 \text{ cm}$$

260. Ὁ χρόνος ἀντιδράσεως ὁδηγοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 0,7 sec. Ἐὰν ἡ ἐπιβράδυνσις εἶναι 10 m/sec^2 , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνολικῶς διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ αὐτοκινήτου ἀπὸ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὁδηγὸς ἀντιλαμβάνεται τὸν κίνδυνον μέχρις ότου σταματήσῃ: α) ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 40 km/h , καὶ β) ὅταν εἶναι 80 km/h .

(Σχολή Ἰκάρων, 1958).

Λύσις. Ἐστω Ο ἡ θέσις τοῦ αὐτοκινήτου, ὅταν ὁ ὁδηγὸς ἀντιλήφῃ τὸν κίνδυνον, Α ἡ θέσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσε τὰς τροχοπέδας (ἐπιβράδυνσις) καὶ Β τὸ σημεῖον ὅπου τὸ αὐτοκίνητον ἔστα μάλιστα. Τὸ ζητούμενον συνολικὸν διάστημα s εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα ΟΒ. Ἐὰν καλέσωμεν s_1 καὶ s_2 τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ καὶ ΑΒ, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν :

$$s = s_1 + s_2 \quad (1)$$

Τὸ διάστημα s_1 διανύεται ὑπὸ τοῦ αὐτοκινήτου ἐντὸς χρόνου t_1 καὶ ὑπὸ τὴν ἀρχικὴν σταθερὰν ταχύτητα v_0 , ἥτις :

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 \quad (2)$$

Τὸ διάστημα s_2 εἶναι τὸ μέγιστον διάστημα ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2\gamma} \quad (3)$$

ὁ ὁποῖος προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξύ τῶν βασικῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως $v = v_0 - \gamma t$ καὶ $s = v_0 t - 1/2 \gamma t^2$, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ τελικὴ ταχύτης $v = 0$.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον τῆς ἀσκήσεως :

$$s = v_0 \cdot t_1 + \frac{v_0^2}{2\gamma} \quad (4)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων :

$$(α) \quad v_0 = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{40\,000 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 11,1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad t_1 = 0,7 \text{ sec} \quad \text{καί} \quad \gamma = 10 \text{ m/sec}^2, \quad \text{εὐρίσκομεν:}$$

$$s = 13,95 \text{ m}$$

$$(β) \quad v_0 = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/sec}, \quad t_1 = 0,7 \text{ sec} \quad \text{καί} \quad \gamma = 10 \text{ m/sec}^2, \quad \text{εὐρίσκομεν:}$$

$$s = 40,25 \text{ m}$$

261. Ἡ ταχύτης αὐτοκινήτου ἐλαττοῦται ἀπὸ 35 m/sec εἰς 15 m/sec , ἀφοῦ διανύσῃ τοῦτο διάστημα 500 m . Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ἐπιβράδυνσις, β) ποῖον διάστημα θὰ διανυθῇ, μέχρις ότου τὸ αὐτοκίνητον ἡρεμήσῃ.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνόμενη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = v_0 - \gamma \cdot t \quad (1) \quad s = v_0 \cdot t - 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον t μεταξύ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{v_0^2 - v^2}{2s} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντες εις την σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως εὐρίσκομεν :

$$\gamma = \frac{35^2 - 15^2}{2 \cdot 500} \frac{\text{m}^2/\text{sec}^2}{\text{m}} = 1 \text{ m/sec}^2$$

β) Ὃταν τὸ αὐτοκίνητον ἡρεμήσῃ, ἡ τελικὴ ταχύτης αὐτοῦ υἰ θὰ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχῃ δὲ διανύσει ἐν μέγιστον διάστημα $s_{\text{μεγ}}$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (3) θὰ γίνῃ :

$$\gamma = \frac{v_0^2}{2 s_{\text{μεγ}}} \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad s_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2 \gamma} \quad (4)$$

Θέτοντες τὰς δοθείσας τιμὰς εἰς την σχέσιν (4) εὐρίσκομεν ὅτι :

$$s_{\text{μεγ}} = \frac{35^2}{2 \cdot 1} \frac{\text{m}^2/\text{sec}^2}{\text{m/sec}^2} = 612,5 \text{ m}$$

262. Αὐτοκίνητον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα **25 km/h** καὶ ἡρεμεῖ, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα **6 m**. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιβράδυνσις (ὑποτιθεμένη σταθερά) καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, μέχρις ὅτου τὸ κινητὸν ἡρεμήσῃ. Ἐὰν ἡ ταχύτης ἐδιπλασιαζέτο, πόσῃν ἀπόστασιν θὰ ἔπρεπε νὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ ἡρεμήσῃ, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιτάχυνσις διετηρεῖτο σταθερά.

Λύσις. Ἡ κίνησις θὰ εἶναι ὁμαλῶς επιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = v_0 - \gamma \cdot t \quad (1)$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμως, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον ἡρεμήσῃ, ἡ τελικὴ ταχύτης υἰ αὐτοῦ θὰ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν :

$$0 = v_0 - \gamma \cdot t \quad (3)$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (4)$$

Ἐὰν ἀκολουθῶς λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς t καὶ τὴν τιμὴν ταύτην θέσωμεν εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν :

$$s = \frac{v_0^2}{2\gamma} \quad (5) \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad \gamma = \frac{v_0^2}{2s} \quad (6)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰς τιμὰς τῶν v_0 καὶ s , ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψωμεν τὴν ταχύτητα v_0 εἰς m/sec ($v_0 = 25\,000/3600 = 7 \text{ m/sec}$), καὶ εὐρίσκομεν :

$$\gamma = 4 \text{ m/sec}^2$$

Ὑπολογίζομεν τὸν χρόνον ἐκ τοῦ τύπου (3) θέτοντες : $v_0 = 7 \text{ m/sec}$ καὶ $\gamma = 4 \text{ m/sec}^2$, ὅτε εὐρίσκομεν :

$$t = \frac{v_0}{\gamma} = \frac{7}{4} \frac{\text{cm/sec}}{\text{cm/sec}^2} = 1,75 \text{ sec}$$

Ἐὰν ἡ ταχύτης ἐδιπλασιαζέτο, θὰ ἦτο $v'_0 = 2 v_0$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (5) δύναται νὰ γραφῇ :

$$s' = -\frac{(2v_0)^2}{2\gamma} = 4 \cdot \left(\frac{v_0^2}{2\gamma} \right)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{v_0^2}{2\gamma} = 6 \text{ m}$, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ κινητὸν θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν διὰ νὰ σταματήσει :

$$s' = 4 \cdot 6 \text{ m} = 24 \text{ m}$$

263. Συρμὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας με κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα **100 cm/sec**, ὅταν διανύσῃ ἀπόστασιν **1 km**. Πόσῃ ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ.

Λύσις. 'Η ταχύτης $υ$, ή επιτάχυνσις γ και τὸ διάστημα s συνδέονται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$υ = \sqrt{2\gamma \cdot s}$$

ή :

$$\gamma = \frac{υ^2}{2s} \quad (1)$$

Δίδονται : $υ = 100 \text{ cm/sec}$ και $s = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$. Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὸν τύπον (1) θὰ ἔχωμεν :

$$\gamma = 0,05 \text{ cm/sec}^2$$

264. Σῶμα κινεῖται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 cm/sec καὶ ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 2 cm/sec^2 . Ζητοῦνται : α) πόση εἶναι ἡ κτηθεῖσα ταχύτης ἐντὸς 1 min , β) πόση θὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ ταχύτης μετὰ 1 min , γ) πόση ἡ μέση ταχύτης, δ) πόση ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις εἰς 1 min .

Λύσις. α) Τὸ κινητὸν εἰς $1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$ ἀποκτᾷ ταχύτητα (δηλ. μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος $υ_0$) :

$$\underline{υ'} = \gamma \cdot t = 2 \text{ cm/sec}^2 \times 60 \text{ sec} = 120 \text{ cm/sec}$$

β) 'Η ὁλικὴ ταχύτης, δηλ. ἡ ταχύτης τὴν ὁποῖαν θὰ ἔχη πράγματι μετὰ χρόνον t , θὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ $υ_0$ συν τὴν ταχύτητα $\gamma \cdot t$. Ἦτοι :

$$\underline{υ} = υ_0 + \gamma \cdot t = 10 + 120 \text{ cm/sec} = 130 \text{ cm/sec}$$

γ) 'Η μέση ταχύτης αὐτοῦ (βλ. ἄσκησιν 254) θὰ εἶναι :

$$\underline{\bar{υ}} = \frac{υ_0 + υ}{2} = 70 \text{ cm/sec}$$

δ) 'Η ἀπόστασις, τὴν ὁποῖαν θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον $t = 60 \text{ sec}$, θὰ εἶναι :

$$\underline{s} = \bar{υ} \cdot t = 70 \text{ cm/sec} \times 60 \text{ sec} = 4200 \text{ cm}$$

265. Σῶμα, ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 10 cm/sec , ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, μετὰ τὴν ὁποῖαν διανύει ἀπόστασιν 4200 cm εἰς 1 min . Ζητοῦνται : α) πόση ἡ μέση ταχύτης, β) πόση ἡ τελικὴ ταχύτης, γ) πόση ἡ ταχύτης, ἡ κτηθεῖσα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, δ) πόση ἡ ἐπιτάχυνσις.

Λύσις. α) Προφανῶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ κίνησις διεξάγεται μὲ σταθεράν ταχύτητα, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μέσην ταχύτητα $\bar{υ}$ τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\underline{\bar{υ}} = \frac{s}{t} = \frac{4200 \text{ cm}}{60 \text{ sec}} = 70 \text{ cm/sec}$$

β) 'Η τελικὴ ταχύτης εὑρίσκεται βάσει τοῦ τύπου $υ = \frac{υ_0 + \bar{υ}}{2}$ καὶ ἐπειδὴ $\bar{υ} = 70 \text{ cm/sec}$, $υ_0 = 10 \text{ cm/sec}$, θὰ εἶναι :

$$\underline{υ} = 130 \text{ cm/sec}$$

γ) 'Η κτηθεῖσα ταχύτης κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 1 min θὰ εἶναι :

$$\underline{υ - υ_0} = 130 \text{ cm/sec} - 10 \text{ cm/sec} = 120 \text{ cm/sec}$$

δ) 'Η ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\underline{\gamma} = \frac{υ - υ_0}{t} = \frac{120}{60} \frac{\text{cm/sec}}{\text{sec}} = 2 \text{ cm/sec}^2$$

266. Σιδηροδρομικὸς συρμός, ὅστις ἄρχεται κινούμενος ἐκ τῆς ἡρεμίας ἐπ' εὐθείας καὶ ὑπὸ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν, ἀποκτᾷ τὴν κανονικὴν ταχύτητα αὐτοῦ, ἥτοι

80 km καθ' ώραν, μετά πάροδον πέντε λεπτών. Ζητείται ποία ή επιτάχυνσις και ποϊον τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυθὲν διάστημα ἀπὸ τῆς θέσεως ἐκκινήσεως μέχρι τοῦ σημείου, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀποκτᾷ τὴν κανονικὴν του ταχύτητα.

Λύσις. α) Ἡ επιτάχυνσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$v = \gamma \cdot t \quad \eta : \quad \gamma = \frac{v}{t} \quad (1)$$

*Εργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἔχομεν : $v = 80 \text{ km/h} = 80 \cdot 1000/3600 \text{ m/sec} = 22,22 \text{ m/sec}$ καὶ $t = 5 \text{ min} = 300 \text{ sec}$, ἐπομένως, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1), λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{22,22 \text{ m/sec}}{300 \text{ sec}} = 0,074 \text{ m/sec}^2$$

β) Τὸ διάστημα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s = \frac{v^2}{2\gamma} \quad (2)$$

ἐκ τοῦ ὁποῖου, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν γνωστῶν μεγεθῶν $v = 22,22 \text{ m/sec}$ καὶ $\gamma = 0,074 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν :

$$s = 3335 \text{ m}$$

267. Ὑλικὸν σημεῖον ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐξ ὕψους 100 m ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τοῦ βάρους του ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). Μετὰ πάροδον 3 sec ἀπὸ τῆς ἀφέσεως τοῦ πρώτου σώματος, δευτέρον σῶμα βάλλεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω. Ζητεῖται ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου σώματος, ἵνα ἀμφοτέρα φθάσουν ταυτοχρόνως εἰς τὸ ἔδαφος.

Λύσις. Ἐστώσαν t_1 ὁ χρόνος πτώσεως τοῦ πρώτου σώματος, t_2 ὁ χρόνος πτώσεως καὶ v_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ δευτέρου σώματος. Ἐὰν καλέσωμεν τὸ κοινὸν ὕψος πτώσεως s , θὰ ἔχωμεν :

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (1) \quad \text{καί :} \quad s = v_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) λαμβάνομεν :

$$v_0 = \frac{2s - g \cdot t_2^2}{2t_2} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (1), δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $s = 100 \text{ m}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ $t_1 = \sqrt{20} \text{ sec}$, καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $t_2 = (\sqrt{20} - 3) \text{ sec}$.

*Αντικαθιστώντες τὰς γνωστὰς τιμὰς εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$v_0 = \frac{2 \cdot 100 - 10(\sqrt{20} - 3)^2}{2(\sqrt{20} - 3)} \text{ m/sec} \quad \eta : \quad v_0 = 60,7 \text{ m/sec}$$

268. Βλήμα τι ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 50 m/sec. Μετὰ πάροδον 2 sec, ἕτερον βλήμα ρίπτεται, ἐπίσης κατακορύφως, πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 80 m/sec. Ζητοῦνται : α) πότε καὶ εἰς ποῖον ὕψος θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο βλήματα, καὶ β) ἡ ταχύτης ἐκάστου βλήματος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἐστω ὅτι τὰ δύο σώματα συναντῶνται εἰς ὕψος h καὶ μετὰ χρόνον t_1 ἀπὸ τῆς ἐκτοξεύσεως τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν καλέσωμεν v_1 καὶ v_2 τὰς ἀρχικὰς ταχύτητας τῶν σωμάτων καὶ t_2 τὸν χρόνον κινήσεως τοῦ δευτέρου σώματος μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$h = v_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (1) \quad \text{καί :} \quad h = v_2 \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (2)$$

Αφαιρούντες κατά μέλη αὐτὰς λαμβάνομεν :

$$-\frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2) + u_2 \cdot t_2 - u_1 \cdot t_1 = 0 \quad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν $t_2 = t_1 - 2 \text{ sec}$, ἡ (3) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆςωσιν :

$$\frac{1}{2}g[t_1^2 - (t_1^2 - 4t_1 + 4)] + u_2(t_1 - 2) - u_1 \cdot t_1 = 0$$

$$\eta : \quad t_1 = \frac{2u_2 + 2g}{u_2 - u_1 + 2g} \quad (4)$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων : $u_1 = 50 \text{ m/sec}$, $u_2 = 80 \text{ m/sec}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ προκύπτει :

$$t_1 = 3,6 \text{ sec}$$

Ἀντικαθιστώντες τὴν τιμὴν ταύτην ὡς καὶ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν u_1 καὶ g εἰς τὴν (1) προκύπτει :

$$h = (50 \cdot 3,6 - 1/2 \cdot 10 \cdot 3,6^2) \text{ m} = 115,2 \text{ m}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν u'_1 καὶ u'_2 τὰς ταχύτητας τῶν σωμάτων κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$u'_1 = u_1 - g \cdot t_1 \quad (5) \quad \text{καὶ} : \quad u'_2 = u_2 - g \cdot t_2 \quad (6)$$

ἐκ τῶν ὁποίων, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων, προκύπτει :

$$u'_1 = 14 \text{ m/sec} \quad \text{καὶ} : \quad u'_2 = 64 \text{ m/sec}$$

269. Ἡ Σελήνη κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ περιφερείᾳ κύκλου, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ Σελήνη, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς τροχιάς τῆς εἶναι $R = 384\,415,5 \text{ km}$ καὶ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως αὐτῆς 27 ἡμέραι 7 ὥραι 43 λεπτὰ 12 δευτερόλεπτα. Τὸ ἐξαγόμενον νὰ δοθῇ εἰς μονάδας C.G.S.

$$\text{Λύσις.} \quad \text{Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : } \gamma = \frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

Τὰ δεδομένα εἰς μονάδας C.G.S. εἶναι : $R = 384\,415,5 \text{ km} = 3,84 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, $T = (27 \cdot 86\,400 + 7 \cdot 3600 + 43 \cdot 60 + 12) \text{ sec} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ sec}$. Δι' ἀντικαταστάσεως προκύπτει :

$$\gamma = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 3,84 \cdot 10^{10}}{2,36 \cdot 10^{12}} \text{ cm/sec}^2 \quad \eta : \quad \gamma = 0,27 \text{ cm/sec}^2$$

270. Σιδηρόδρομος ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν καὶ φθάνει εἰς Λεβάδειαν μετὰ 4 ὥρας. Καθ' ὁδὸν κάμνει δύο σταθμεύσεις, εἰς Τανάγραν καὶ εἰς Θήβας, διαρκείας ἡμισείας ὥρας ἑκάστη. Ἀποδώσατε γραφικῶς : α) τὸ διανυθὲν διάστημα συναρτήσει τοῦ χρόνου (μετὰ τῆς σχετικῆς δικαιολογίας), καὶ β) τὴν ταχύτητα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φυσικόν, 1956).

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ σιδηρόδρομος ἔχει τὰς ἐξῆς κινήσεις : α) Ὅταν ἐκκινή, ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. β) Μετὰ πάροδον χρόνου πινὸς ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλήν. γ) Ὅταν πρόκει-
ται νὰ σταθμεύσῃ, κινεῖται μὲν κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην.

Εἰς τὴν περίπτωσιν (α) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} : \quad v = \gamma \cdot t \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) δεικνύει ὅτι τὸ διάστημα s εἶναι δευτεροβάθμιος συνάρτησις τοῦ χρόνου t , ἐπο-
μένως ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτοῦ, εἰς σύστημα ἀξόνων $t-s$, θὰ ἀποτελῇ καμπύλην. Τὸ κοῖλον τῆς
καμπύλης αὐτῆς, ὡς ἀποδεικνύεται, θὰ εὐρίσκεται πρὸς τὰ ἄνω :

Τμήματα καμπύλης περιεχόμενα μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $0 \rightarrow t_1$, $t_1 \rightarrow t_2$, $t_2 \rightarrow t_3$ (σχῆμα I).

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, παρουσιάζουσα κλίσην ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t : Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξύ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $0 \rightarrow t_1$ κλπ. (σχῆμα II).

Εἰς τὴν περίπτωσιν (β) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = v_0 \cdot t \quad (3) \quad \text{καί:} \quad v = v_0 = \text{σταθ.} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, παρουσιάζουσα κλίσην ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t : Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $t_1 \rightarrow t_2$, $t_5 \rightarrow t_6$, $t_9 \rightarrow t_{10}$ (σχῆμα I).

Ἐκ τῆς σχέσεως (4), ἐπειδὴ ἡ ταχύτης εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου, δηλ. σταθερά, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t : Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξύ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $t_1 \rightarrow t_2 \dots$ (σχῆμα II).

Εἰς τὴν περίπτωσιν (γ) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (5)$$

$$\text{καί:} \quad v = v_0 - \gamma \cdot t \quad (6)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος θὰ εἶναι καμπύλη γραμμὴ, ἔχουσα τὸ κοῖλον αὐτῆς ἐστραμμένον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων: Τμήματα καμπύλης περιεχόμενα μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $t_2 \rightarrow t_3$, $t_6 \rightarrow t_7$, $t_{10} \rightarrow t_{11}$ (σχῆμα I).

Ἐκ τῆς σχέσεως (6) προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, παρουσιάζουσα κλίσην ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t : Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξύ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $t_2 \rightarrow t_3 \dots$ (σχῆμα II).

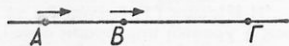
Τέλος, κατὰ τὰ χρονικά διαστήματα $t_3 \rightarrow t_4$, $t_7 \rightarrow t_8$, ὁπότε ὁ σιδηρόδρομος εὕρσκετο ἐν ἡρεμίᾳ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = \text{σταθ.} \quad (7) \quad \text{καί:} \quad v = 0 \quad (8)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (7) προκύπτουν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t (σχῆμα I) καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (8) προκύπτουν τὰ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα τοῦ ἄξονος t (σχῆμα II).

271. Δύο ἀτμομηχαναὶ σιδηροδρόμων κινουμένων κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη, κινουμένη μὲ ταχύτητα 48 km/h , προπορεύεται, ἡ δὲ δευτέρα ἔπεται καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα 72 km/h . Ὃταν αἱ ἀτμομηχαναὶ εὕρισκωνται εἰς ἀπόστασιν x , τότε οἱ μηχανοδηγοὶ ἀντιλαμβάνονται ἀλλήλους καὶ εὐθὺς ἀμέσως ὁ μὲν προπορευόμενος ὁδηγὸς ἐπιταχύνει τὴν κίνησιν τῆς ἀτμομηχανῆς του κατὰ 1 m/sec^2 , ὁ δὲ ἕτερος ἐπιβραδύνει τὴν ἰδικήν του κατὰ $1,2 \text{ m/sec}^2$. Οὕτω κατωρθώθη ἡ σύγκρουσις. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν ἡ ἀπόστασις x ὡς καὶ ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν ἀτμομηχανῶν, ὅταν ἦλθον αὐταὶ εἰς ἐπαφὴν.

Λύσις. Ὡς καλέσωμεν v_A καὶ v_B τὰς ταχύτητας τῶν ἀτμομηχανῶν, ὅταν αὐταὶ εὕρισκοντο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὁπότε ἀντελήφθησαν ἀλλήλους οἱ μηχανοδηγοί. Ἐπίσης γ_A καὶ γ_B τὰς ἐπιταχύνσεις ἀντιστοίχως αὐτῶν, t τὸν μεσολαβήσαντα χρόνον καὶ u τὴν κοινὴν ταχύ



τητα εις τὸ σημείον Γ, εις τὸ ὁποῖον κατωρθώθη ν' ἀπορευχθῇ ἡ σύγκρουσις καὶ ἦλθον ἀπλῶς εἰς ἐπαφὴν αἱ ἀτμομηχαναί. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$v = v_A - \gamma_A \cdot t \quad (1) \quad v = v_B + \gamma_B \cdot t \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν χρόνον t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν :

$$v = v_B + \gamma_B \cdot \frac{v_A - v}{\gamma_A}$$

$$\eta : \quad v \cdot \gamma_A = v_B \cdot \gamma_A + v_A \cdot \gamma_B - v \cdot \gamma_B$$

$$\text{καί :} \quad v = \frac{v_B \cdot \gamma_A + v_A \cdot \gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} \quad (3)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα εἰς τὴν σχέσιν (3), ἥτοι :

$$v_B = \frac{48 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 13,3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad v_A = \frac{72 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad \gamma_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad \gamma_A = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

καὶ εὐρίσκομεν :

$$v = \frac{13,3 \cdot 1,2 + 20 \cdot 1}{1,2 + 1} = 16,4 \text{ m/sec}$$

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς ἀποστάσεως $x = AB$ γράφομεν τὸν τύπον τοῦ διαστήματος διὰ τὰς δύο ἀμαξοστοιχίας ἀντιστοίχως :

$$AG = v_A \cdot t - \frac{1}{2} \gamma_A \cdot t^2 \quad (4)$$

$$BG = v_B \cdot t + \frac{1}{2} \gamma_B \cdot t^2 \quad (5)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (4) καὶ (5) καὶ εὐρίσκομεν :

$$x = (v_A - v_B) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot (\gamma_A + \gamma_B) \cdot t^2 \quad (6)$$

Λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου t ἀπὸ τὴν (1) καὶ τὴν θέτομεν εἰς τὴν (6), ὅποτε ἔχομεν :

$$x = (v_A - v_B) \cdot \frac{v_A - v}{\gamma_A} - \frac{1}{2} \cdot (\gamma_A + \gamma_B) \cdot \left(\frac{v_A - v}{\gamma_A} \right)^2 \quad (7)$$

Θέτομεν τὰς δοθεῖσας τιμὰς καθὼς καὶ τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ v εἰς τὴν (7) καὶ εὐρίσκομεν :

$$x = (20 - 13,3) \cdot \frac{20 - 16,4}{1,2} - \frac{1}{2} \cdot (1 + 1,2) \cdot \left(\frac{20 - 16,4}{1,2} \right)^2$$

$$\text{ἐξ οὗ :} \quad x = 10,2 \text{ m}$$

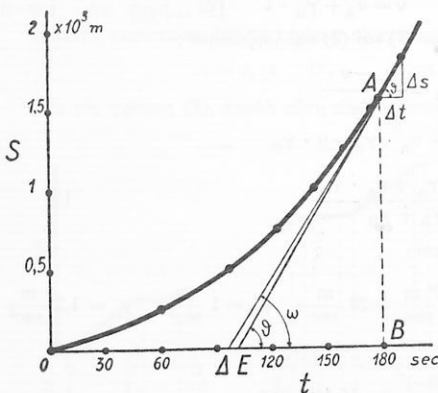
272. Συρμός ἐκινεῖ ἐκ τινος πόλεως τὴν μεσημβρίαν (12 ὥραν) καὶ διέρχεται διὰ τῶν ἀκολουθῶν θέσεων :

1/4 km τὴν 12 h 1 min 3 sec	1 km τὴν 12 h 2 min 25 sec
1/2 » » 12 h 1 min 43 sec	1 1/4 » » 12 h 2 min 43 sec
3/4 » » 12 h 2 min 6 sec	1 1/2 » » 12 h 2 min 58 sec

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων νὰ σχηματισθῇ τὸ διάγραμμα τῆς κινήσεως καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διαγράμματος νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ συρμού μετὰ 3 min ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως.

Λύσις. Ἄς καλέσωμεν τὴν χρονικὴν στιγμὴν 12 h, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀναχωρεῖ ὁ σιδηρόδρομος, χρονικὴν στιγμὴν μηδέν. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμὴν τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι καὶ αὐτὸ μηδέν, ἡ καμπύλη πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων 0. Τοῦτου δο-

θέντος χαράσσομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τῶν διαστημάτων μετὰ τῶν ἀντιστοιχούντων χρόνων τὸ διάγραμμα τῆς μεταβολῆς τοῦ διαστήματος μετὰ τοῦ χρόνου.



Ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὁ σιδηρόδρομος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν 3 min = 180 sec (σημείον Α καμπύλης), εἶναι προφανῶς ἡ στιγμιαία ταχύτης αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ὅταν } \Delta t \rightarrow 0$$

Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι τὸ $\Delta s / \Delta t$ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ , τὸ δὲ ὄριον τοῦ $\Delta s / \Delta t$ εἶναι τὸ ὄριον τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας θ , δηλ. ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ω , τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη ΔΑ, ἡ ἀγόμενη ἐπὶ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α μετὰ τὸν ἀξόνα τῶν χρόνων t.

Ἦτοι :

$$\epsilon\phi \omega = \frac{AB}{\Delta B}$$

Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος, συνάγεται ὅτι εἶναι $BA = 1,55 \cdot 10^3$ m καὶ $\Delta B = 85$ sec. Οὕτως εὐρίσκομεν :

$$v = \frac{1,55 \cdot 10^3 \text{ m}}{85 \text{ sec}} = 18,2 \text{ m/sec}$$

273. Ἐὰν ἡ συχνότης περιστροφῆς εἶναι 1200 στρ/min, πόση θὰ εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰς rad/sec.

Λύσις. Αἱ 1200 στρ/min ἰσοδυναμοῦν πρὸς συχνότητα $v = 1200/60$ στρ/sec = 20 στρ/sec. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω , ὡς γνωστὸν, εἶναι $\omega = 2\pi \cdot v$, θὰ ἔχωμεν :

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 20 = 125,6 \text{ rad/sec}$$

274. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης 40 μοιρῶν/sec: α) εἰς στρ/sec β) εἰς στρ/min.

Λύσις. α) Αἱ 40 μοίραι ἰσοδυναμοῦν πρὸς $\frac{40 \cdot \pi}{180}$ rad καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$\omega = 40 \text{ μοίραι/sec} = \frac{4 \pi}{18} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῆς γωνιακῆς ταχύτητος συναρτήσει τῆς συχνότητος v ($\omega = 2\pi \cdot v$), ἔχομεν :

$$\frac{4 \pi}{18} = 2 \pi \cdot v \quad \text{καί :} \quad v = 0,11 \text{ στρ/sec}$$

β) Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν συχνότητα ἀπὸ στρ/sec εἰς στρ/min, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 60. Οὕτω προκύπτει :

$$v = 0,11 \cdot 60 \text{ στρ/min} = 6,6 \text{ στρ/min}$$

275. Ἀκονιστικὸς τροχὸς ἐκτελεῖ 900 στρ/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακὴ του ταχύτης ω εἰς rad/sec.

Λύσις. Αἱ 900 στρ/min ἀντιστοιχοῦν πρὸς συχνότητα $v = \frac{900}{60} \frac{\text{στρ}}{\text{sec}}$, ἐπειδὴ δὲ $\omega = 2\pi \cdot v$, θὰ ἔχωμεν :

$$\omega = 6,28 \cdot \frac{90}{6} \text{ rad/sec} = 94,25 \text{ rad/sec}$$

276. Σφόνδυλος μηχανῆς ἐκτελεῖ 300 στρ/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γραμμικὴ ταχύτης σημείου τοῦ σφονδύλου, εὐρισκομένου εἰς ἀπόστασιν : α) 150 cm

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

από του κέντρου, β) 60 cm από του κέντρου. γ) Να προσδιορισθῇ ἡ γωνιακή ταχύτης του σφονδύλου.

Λύσις. Αἱ 300 στρ/min ἀντιστοιχοῦν πρὸς συχνότητα $\nu = \frac{300 \text{ στρ}}{60 \text{ sec}} = 5 \text{ στρ/sec}$. Ἡ γραμμική ταχύτης συνδέεται πρὸς τὴν γωνιακὴν ταχύτητα διὰ τῆς γνωστῆς σχέσεως $v = \omega \cdot r$ καὶ ἐπειδὴ $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ἔχομεν $v = 2\pi \cdot \nu \cdot r$

Οὕτως εὐρίσκομεν :

$$\alpha) \underline{v} = 6,28 \cdot 5 \cdot 150 \text{ cm/sec} = \underline{4710 \text{ cm/sec}}$$

$$\beta) \underline{v} = 6,28 \cdot 5 \cdot 60 \text{ cm/sec} = \underline{1884 \text{ cm/sec}}$$

$$\gamma) \underline{\omega} = 6,28 \cdot 5 \text{ rad/sec} = \underline{31,4 \text{ rad/sec}}$$

277. Ὁ λεπτοδείκτης ὥρολογίου ἔχει μῆκος 10 cm. Νὰ εὐρεθοῦν ἡ γωνιακή ταχύτης τοῦ λεπτοδείκτη καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἄκρου αὐτοῦ.

Λύσις. Ὁ λεπτοδείκτης ἐκτελεῖ μίαν στροφὴν ἐντὸς 3600 sec καὶ συνεπῶς ἡ συχνότης περιστροφῆς αὐτοῦ θὰ εἶναι $\nu = \frac{1}{3600} \text{ στρ/sec}$. Ἀρα ἡ γωνιακή ταχύτης τοῦ λεπτοδείκτη θὰ εἶναι :

$$\underline{\omega} = 2\pi \cdot \nu = 6,28 \cdot \frac{1}{3600} \text{ rad/sec} = \underline{1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec}}$$

καὶ ἡ γραμμική ταχύτης του :

$$\underline{v} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm/sec}$$

278. Σφόνδυλος διαμέτρου 1 m στρέφεται ὑπὸ συχνότητα 80 στρ/min. Νὰ υπολογισθοῦν : α) ἡ γωνιακή ταχύτης, β) ἡ γραμμική ταχύτης, γ) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ἑνὸς σημείου, εὐρισκομένου ἐπὶ τῆς περιφερείας του.

Λύσις. Ἡ συχνότης τοῦ σφονδύλου θὰ εἶναι : $\nu = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \text{ στρ/sec}$, ἐπομένως :

α) Ἡ γωνιακή ταχύτης αὐτοῦ θὰ εἶναι :

$$\underline{\omega} = 2\pi \cdot \nu = 6,28 \cdot \frac{4}{3} \text{ rad/sec} = \underline{8,37 \text{ rad/sec}}$$

β) Ἡ γραμμική ταχύτης :

$$\underline{v} = \omega \cdot r = 8,37 \cdot 0,5 \text{ m/sec} = \underline{4,18 \text{ m/sec}}$$

γ) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις :

$$\underline{Y} = \frac{v^2}{r} = \frac{4,18^2}{0,5} \frac{\text{m}^2/\text{sec}^2}{\text{m}} = \underline{17,47 \text{ m/sec}^2}$$

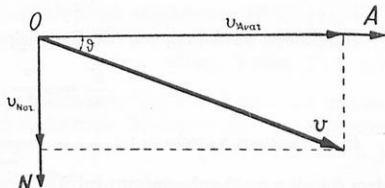
279. Ἀεροπλάνο κινεῖται πρὸς Ἀνατολὰς ὑπὸ ταχύτητα 160 km/h, ἐνῶ ταυτοχρόνως πνέει ἄνεμος βόρειος ὑπὸ ταχύτητα 35 km/h. Νὰ εὐρεθοῦν ἡ συνισταμένη ταχύτης καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς, γραφικῶς καὶ λογιστικῶς.

Λύσις. Ἡ ταχύτης v τοῦ ἀεροπλάνου θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων :

$$v_{\text{αεροπλ}} = 160 \text{ km/h} \quad \text{καὶ} : \quad v_{\text{ἀνέμ}} = 35 \text{ km/h}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ συνιστώσες ταχύτητες σχηματίζουν μετὰξὺ τῶν γωνίαν 90° , ἡ ταχύτης v θὰ εἶναι :

$$\underline{v} = \sqrt{160^2 + 35^2} \text{ km/h} = \underline{163,8 \text{ km/h}}$$



Ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος $υ$ καθορίζεται, όταν εὑρεθῇ ἡ γωνία θ . Εἶναι δέ :

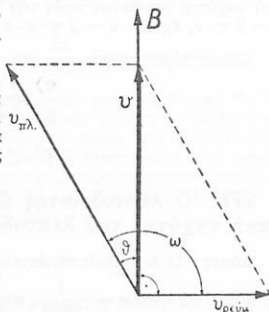
$$\epsilon\phi \theta = 35/160 = 0,21875 \text{ καὶ συνεπῶς : } \theta = 12^\circ 20'$$

280. Πλοῖον ἀναπτύσσει ταχύτητα 8 μιλίων καθ' ὥραν ἐπὶ ἡρεμοῦντος ὕδατος. Πρὸς ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ τηρῇται ἡ πρῶρα τοῦ πλοίου, ἐὰν πρόκειται νὰ φθάσῃ κατ' εὐθείαν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην ποταμοῦ, ὅταν τὸ ρεῖμα ἔχῃ ταχύτητα 4 μιλίων καθ' ὥραν.

Λύσις. Ἐστω $υ_{\pi\lambda}$ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ $υ_{\rho\epsilon\upsilon\mu\eta}$ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πλοῖον κατ' εὐθείαν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην, πρέπει ἡ συνισταμένη $υ$ τῶν δύο ταχυτήτων ($υ_{\pi\lambda}$, $υ_{\rho\epsilon\upsilon\mu\eta}$) νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ρεύματος. Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu \theta = \frac{υ_{\rho\epsilon\upsilon\mu\eta}}{υ_{\pi\lambda}} = \frac{4}{8} \frac{\text{m/sec}}{\text{m/sec}} = \frac{1}{2} \text{ καὶ : } \theta = 30^\circ$$

Ἡτοι ἡ πρῶρα τοῦ πλοίου πρέπει νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $\omega = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ ὡς πρὸς τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος.



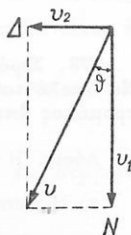
281. Πλοῖον τηρεῖ διεύθυνσιν πρὸς Νότον ὑπὸ ταχύτητα 12 μιλίων καθ' ὥραν, ἀλλὰ παρεκκλίνει πρὸς Δυσμᾶς, λόγῳ θαλασσίου ρεύματος, 5 μιλία καθ' ὥραν. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης ταχύτητος τοῦ πλοίου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $υ_1$ τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου πρὸς Νότον (N) καὶ $υ_2$ τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου πρὸς Δυσμᾶς (Δ), τότε ἡ συνισταμένη ταχύτης, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, θὰ εἶναι :

$$υ = \sqrt{υ_1^2 + υ_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} \text{ mil/h} = 13 \text{ mil/h}$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης ταχύτητος προσδιορίζεται, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ γωνία (βλ. σχῆμα). Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν :

$$\epsilon\phi \theta = \frac{5}{12} = 0,416 \quad \alpha\rho\alpha : \quad \theta = 22^\circ 34'$$



282. Ἐὰν εἰς τὴν εὐθύγραμμον ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τριπλασιάσωμεν τὸ διανυθὲν διάστημα, ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ὁ χρόνος.

Λύσις. Τὸ διάστημα εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1)$$

Ἄν τριπλασιασθῇ τὸ διάστημα, ἤτοι ἐὰν ἔχωμεν $s' = 3s$, τότε ὁ ἀντίστοιχος χρόνος t' θὰ συνδέεται μετὰ τοῦ διαστήματος καὶ διὰ τοῦ τύπου :

$$s' = \frac{1}{2} \gamma \cdot t'^2 \quad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις λαμβάνομεν :

$$\frac{s'}{s} = \frac{t'^2}{t^2} \quad \eta : \quad 3 = \frac{t'^2}{t^2} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει :

$$t' = t \sqrt{3}$$

Ἡτοι ὁ χρόνος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\sqrt{3}$

Παράτηρις : Ὡς ἀφετηρίαν λύσεως τῆς ἀσκῆσεως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν νόμον τῆς

ομαλῶς επιταχυνομένης κινήσεως, κατὰ τὸν ὁποῖον τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἦτοι:

$$\frac{s'}{s} = \frac{t'^2}{t^2} \quad (4)$$

καὶ ἐφ' ὅσον δίδεται $s'/s = 3$, προκύπτει πάλιν:

$$t' = t\sqrt{3}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

283. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ βάθους μιᾶς θαλάσσης δι' ἠχοβολήσεως μετ' ὑπερήχους, ἐκπέμπεται βραχὺ σῆμα, ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὸ ὁποῖον ἐπιστρέφει εἰς τὴν ἀφετηρίαν του μετὰ πάροδον χρόνου 1,4 sec. Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης. (Ταχύτης ἤχου εἰς θαλάσσιον ὕδωρ 6°C , $v = 1475 \text{ m/sec}$).
(Ἀπ. 1032,5 m.)

284. Πόσον χρόνον χρειάζεται θρῖξ ἀνθρώπου διὰ νὰ ἐπιμηκυνθῇ κατὰ 1 cm. (Ταχύτης ἐπιμηκύνσεως τριχὸς $v = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m/sec}$). (Ἀπ. $t = 38,58$ ἡμέραι.)

285. Πόσον χρόνον χρειάζεται τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γῆν. Ἀπόστασις Γῆς—Ἡλίου $= 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ καὶ ταχύτης διαδόσεως φωτὸς $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$.
(Ἀπ. $t = 8\frac{1}{3} \text{ min.}$)

286. Αὐτοκίνητον, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς πόλεως Α, φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β, μετὰ στάσιν δὲ 20 min ἀναχωρεῖ διὰ τὴν πόλιν Γ, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει 3 ὥρας καὶ 30 min μετὰ τὴν ἀναχώρησιν ἐκ τῆς πόλεως Α. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου, ἀν τοῦτο διέτρεξε συνολικῶς 148 km.
(Ἀπ. 46,7 km/h.)

287. Κινητόν, κινούμενον ὑπὸ ταχύτητα 24 km/h, ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου Α διευθυνόμενον πρὸς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον κατὰ 3000 m ἀπὸ τοῦ Α. Μὲ πόσῃν ταχύτητα πρέπει νὰ κινήθῃ κινητὸν ἐκ τοῦ σημείου Β, διευθυνόμενον πρὸς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον 2000 m ἐκ τοῦ Β, ἵνα τὰ δύο κινήτὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον Γ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ δεύτερον κινητὸν ἐγκατέλειπε τὸ σημεῖον Β μετὰ 1 min καὶ 30 sec, ἀφ' ἧς στιγμῆς τὸ πρῶτον κινητὸν ἐγκατέλειπε τὸ σημεῖον Α.
(Ἀπ. 20 km/h.)

288. Ποδηλάτης διανύει τὸ διάστημα μεταξύ δύο πόλεων Α καὶ Β, ἀπεχουσῶν κατὰ 120 μίλια, εἰς χρόνον 3 h, διευθυνόμενος ἀπὸ Α εἰς Β καὶ εἰς χρόνον 4 h, διευθυνόμενος ἀπὸ Β εἰς Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης διαδρομῆς του: α) ἀπὸ Α εἰς Β, β) ἀπὸ Β εἰς Α, καὶ γ) καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν του.
(Ἀπ. 40 mil/h, 30 mil/h, 34,3 mil/h.)

289. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς, μήκους 300 m, κινεῖται μετὰ ταχύτητα 60 km/h ὑπὲρ ῥάνω γεφύρας, μήκους 200 m. Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ κινούνται τμήματα τοῦ συρμοῦ ἐπὶ τῆς γεφύρας.
(Ἀπ. 30 sec.)

290. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς, μήκους 250 m, κινεῖται μετὰ ταχύτητα 10 m/sec, διὰ μέσου σήραγγος, μήκους 1200 m. Πόσον χρόνον χρειάζεται ὁ συρμὸς διὰ νὰ διασχίσῃ τὴν σήραγγα.
(Ἀπ. 2 min 25 sec.)

291. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α τὴν 7 h 5 min καὶ φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β ἀνευ ἐνδιαμέσων στάσεων τὴν 8 h 43 min. Ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν πόλεων εἶναι 129,5 km. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ συρμοῦ.
(Ἀπ. 79,3 km/h.)

292. Δύο κινήτὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου Α καὶ κινούμενα ὁμαλῶς φθάνουν εἰς τὸν τόπον Β, τὸ μὲν πρῶτον τὴν 5 ὥραν 35 λεπτά καὶ 27 δευτερόλεπτα, τὸ δὲ δεύ-

τερον τὴν 5 ὥραν 36 λεπτά καὶ 29 δευτερόλεπτα. Ἐὰν ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ πρώτου κινητοῦ εἶναι 6 χλμ. κατὰ δευτερόλεπτον καὶ τοῦ δευτέρου 3,5 χλμ. κατὰ δευτερόλεπτον, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων Α καὶ Β. (Ἀπ. 520,8 km.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ὁδοντιατρικὴ Σχολή, 1961).

293. Ποδηλάτης, κινούμενος με σταθερὰν ταχύτητα 18 km/h, διασχίζει ἄνευ ἐνδιαμέσου σταθμοῦ τὴν ἀπόστασιν δύο πόλεων, ἀνερχομένην εἰς 30 km. Ταυτοχρόνως μὲ τὸν ποδηλάτην ἐκκινεῖ καὶ εἰς μοτοσυκλετιστής, κινούμενος με σταθερὰν ταχύτητα 30 km/h, ὁ ὁποῖος ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 20 m σταματᾷ. Ζητοῦνται : α) Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως ἐκτελεῖ στάσιν ὁ μοτοσυκλετιστής. β) Μετὰ πόσον χρόνον ὁ ποδηλάτης συναντᾷ τὸν σταθμεύοντα μοτοσυκλετιστήν. γ) Ἐπὶ πόσον χρόνον δύναται νὰ σταματήσῃ ὁ μοτοσυκλετιστής οὕτως, ὥστε νὰ φθάσῃ ὁμοῦ με τὸν ποδηλάτην εἰς τὴν πόλιν. (Ἀπ. α' 40 min, β' 66,6 min, γ' 13,4 min.)

294. Αὐτοκίνητον φθάνει εἰς τὴν ἀρχὴν κατηφορικῆς ὁδοῦ, μήκους 400 m, ἔχον ταχύτητα 30 km/h, ἀρχεται δὲ κατερχόμενον ἐνῶ ὁ ὁδηγὸς διακόπτει τὴν παροχὴν βενζίνης εἰς τὸν κινητήρα καὶ δὲν ἐνεργεῖ ἐπὶ τῶν πεδῶν. Τοιοῦτοτρόπως τὸ ὄχημα ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν 1,1 m/sec². Ζητοῦνται : α) Ἡ ταχύτης εἰς τὸ πέρασ τῆς καταχωρείας. β) Ὁ χρόνος διαδρομῆς αὐτῆς. (Ἀπ. α' 111 km/h, β' 20,5 sec.)

295. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν παλμῶν τοῦ ραντάρ, οἱ ὁποῖοι διαδίδονται με τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός, ἥτοι 300 000 km/sec, σκοπεύεται στόχος, τοῦ ὁποῖου ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀπόστασιν. Οἱ ἀνακλῶμενοι παλμοὶ ἐπιστρέφουν μετὰ χρόνον 200 msec. Ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ στόχου. (Ἀπ. 30 km.)

296. Δύο φορτηγὰ ὀχήματα Α καὶ Β κινοῦνται ἰσοταχῶς ἐπὶ ἀνωφερικῆς ὁδοῦ με ταχύτητας 30 km/h καὶ 35 km/h ἀντιστοίχως. Κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὀχημάτων ἀνέρχεται εἰς 30 m. Τὴν στιγμὴν ἀκριβῶς αὐτὴν ὁ ὁδηγὸς τοῦ ὀχήματος Β, τὸ ὁποῖον ἔπεται, ἀρχεται ἐκτελών τοὺς καταλλήλους χειρισμοὺς διὰ νὰ προσπεράσῃ τὸ προπορευόμενον αὐτοῦ ὄχημα Α. Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὀχημάτων θὰ καταστή καὶ πάλιν 30 m, προπορευομένου ἤδη τοῦ ὀχήματος Β. (Ἀπ. 72 sec.)

297. Ἀνελκυστήρ, πλήρης φορτίου, ἀνέρχεται εἰς τὸν ἀνώτερον ὄροφον ἔργοστασίου με ταχύτητα σταθερὰν 20 m/min καὶ παραμένει ἐκεῖ διὰ τὴν ἐκφόρτωσιν ἐπὶ 3 min, ὅποτε πάλιν κατέρχεται μετὰ ταχύτητος σταθερᾶς καὶ ἴσης πρὸς 30 m/min. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρήλθε διὰ τὴν ἀνοδὸν, ἐκφόρτωσιν καὶ κάθοδον τοῦ ἀνελκυστήρος, εἶναι 5 min. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ὁ ὄροφος οὗτος. (Ἀπ. 24 m.)

298. Βενζινοπλοῖον διανύει, διὰ μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς, τὴν ἀπόστασιν 6 km, ἡ ὁποία χωρίζει τὰς πόλεις Α καὶ Β ἐπὶ ποταμοῦ, ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ὁποῖου εἶναι 30 m/min. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ βενζινοπλοίου ὡς πρὸς τὸ ἥρεμον ὕδωρ εἶναι 90 m/min, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ διαπλοῦ χρόνος. (Ἀπ. 2 h 30 min.)

299. Ἀεροπλάνον, ἀφοῦ κινήθῃ ἐπὶ τοῦ διαδρόμου τοῦ ἀεροδρομίου ἐπὶ 22 sec, ἀπογειοῦται με ταχύτητα 116 km/h. Πόση ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως καὶ πόσον διάστημα διήνυσεν ἐπὶ τοῦ διαδρόμου. (Ἀπ. γ = 1,46 m/sec², s = 354 m.)

300. Ποταμόπλοιοι, διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα μεταξὺ δύο σταθμῶν ἀπεχόντων κατὰ 8,4 km, χρειάζεται 43 min, ὅταν κινῆται κατὰ διευθύνσιν ἀντίθετον πρὸς τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ, καὶ 31 min, ὅταν διανύῃ τὸ αὐτὸ διάστημα κατὰ τὴν διευθύνσιν τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. Πόση ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ πόση ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. (Ἀπ. 14 km/h, 3,89 m/sec, 2,3 km/h, 0,63 m/sec.)

301. Μοτοσυκλετιστής έχει να διανύση απόστασιν 200 km. Πόσον χρόνον εξοικονομεί, εάν την μέσην ταχύτητά του τῶν 80 km/h αὐξήσῃ εἰς 90 km/h.
(Ἀπ. $\Delta t = 16 \text{ min } 40 \text{ sec.}$)

302. Ἐπὶ ὁχήματος, κινουμένου μετὰ ταχύτητα $v_1 = 15 \text{ m/sec}$, εὐρίσκεται σωλὴν. Ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ οὗτος μετὰ τῆς κατακορύφου, ὥστε σταγὼν βροχῆς, πίπτουσα κατακορύφως μετὰ ὁριακὴν ταχύτητα $v_2 = 18 \text{ m/sec}$, νὰ διαγράφῃ τὸν ἀξῶνα τοῦ κυλίνδρου.
(Ἀπ. $\varphi = 39^\circ 48'$.)

303. Ἀεροσκάφος ἵπταται 80 μίλια πρὸς Δυσμὰς, 75 μίλια πρὸς βορειοδυτικὴν κατευθύνσιν, 100 μίλια πρὸς νοτιοδυτικὴν, 90 μίλια πρὸς νοτιοανατολικὴν καὶ τελικῶς 40 μίλια πρὸς Βορρᾶν. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν κατευθύνσεως πρέπει νὰ ἵπταται ὁ πιλότος, διὰ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως. Νὰ ἐπιλυθῇ γραφικῶς.
(Ἀπ. 73° ἀνατ. τοῦ Βορρᾶ.)

304. Ἀεροπλάνον, ἵπτάμενον μετὰ ταχύτητα 300 mil/h ἐντὸς ἡμεροῦντος ἀέρος, κατευθύνει τὴν πτήσιν του πρὸς 17° ἀνατολικῶς τοῦ Βορρᾶ. Ἐὰν συναντήσῃ θύελλαν ἐκ Δυσμῶν 63 mil/h, νὰ καθορισθῇ γραφικῶς ἡ προκύπτουσα ταχύτης του ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς.
(Ἀπ. 324 mil/h, $62^\circ 18'$ B $\rightarrow$ A.)

305. Ἀτμόπλοιοι, ἀναπτύσσον ταχύτητα 7,5 κόμβων, συναντᾷ ρεῦμα καθεῖπου διευθύνσεως καὶ ταχύτητος 4,5 κόμβων. Ποία ἡ ταχύτης μετατοπίσεως τοῦ πλοίου κατὰ ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διευθύνσιν (1 κόμβος = 1 ναυτικὸν μίλιον τὴν ὥραν, καὶ 1 ναυτικὸν μίλιον = 1852 m). Ποία ἡ ταχύτης μετατοπίσεως τοῦ πλοίου, ὅταν τὸ ρεῦμα εἶναι : α) τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, καὶ β) ἀντιθέτου διευθύνσεως πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου.
(Ἀπ. 8,8 κόμβοι, $\theta = 32^\circ$. α' 12 κόμβοι, β' 3 κόμβοι.)

306. Κινητόν, κινούμενον μετὰ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 cm/sec, ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν 20 cm/sec². Νὰ εὐρεθῇ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον θὰ διανύσῃ εἰς 8 sec. (Ἀπ. 720 cm.)
(Σχολή Ἐμποροπλοιαρχῶν, 1959).

307. Σφαῖρα ὅπλου ἐξέρχεται τῆς κάννης μετὰ ταχύτητα 750 m/sec. Τὸ μῆκος τῆς κάννης εἶναι 80 cm. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά, εὑρατε τὴν τιμὴν τῆς εἰς cm/sec². Ἐπίσης εὑρατε τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον, ἵνα ἡ σφαῖρα διανύσῃ τὴν κάννην.
(Ἀπ. 352 000 cm/sec², 0,002 sec.)

308. Αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ ἐντὸς 20 sec ἀποκτᾷ ταχύτητα 70 km/h. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του.
(Ἀπ. 0,97 m/sec².)

309. Κινητόν ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μετὰ ἐπιτάχυνσιν 120 cm/sec². Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 840 cm/sec καὶ πόσον τὸ διανυθέν διάστημα μέχρι τῆς στιγμῆς ταύτης. Μετὰ πόσον ἐπὶ πλέον χρόνον θὰ διανύσῃ διάστημα ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ διανυθέντος ἤδη καὶ πόσην ταχύτητα θὰ ἔχῃ τότε τὸ κίνητόν.
(Ἀπ. 7 sec, 29,40 m, 7 sec, 60 480 m/h.)

310. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἀτμομηχανή, ἐκκινουσα ἐκ τῆς ἡρεμίας μετὰ κίνησιν εὐθύγραμμον καὶ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι 0,6 m/sec², διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 80 km/h. Τί διάστημα θὰ ἔχῃ διανύσει κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην.
(Ἀπ. α' $t = 37 \text{ sec}$ περίπου. β' $s = 411 \text{ m}$ περίπου.)

311. Σῶμα ἡρεμοῦν ἀποκτᾷ κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν ἐπιτάχυνσιν 0,08 m/sec². Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ διάστημα 100 m.
(Ἀπ. $t = 50 \text{ sec.}$)

312. Σῶμα ἔχει κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν ταχύτητα 10 m/sec, προσλαμβάνει δὲ τότε σταθεράν ἐπιτάχυνσιν 0,5 m/sec². Μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ἡ ταχύτης του. Τί διάστημα θὰ ἔχῃ διανύσει τότε. (Ἀπ. α' $t = 20 \text{ sec}$. β' $s = 300 \text{ m.}$)

313. Σιδηροδρομικός συρμός μεταβάλλει την ταχύτητά του εντός 2 min από 12 km/h εις 30 km/h. Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συρμοῦ.

(Ἀπ. $4,16 \text{ cm/sec}^2$.)

314. Ὁ ὁδηγὸς αὐτοκινήτου παρατηρεῖ ὅτι διέρχεται ἀπὸ διαδοχικά ὁρόσημα μιλίων κατὰ διαστήματα 2 min, 2 min 2 sec, 2 min 11 sec, 1 min 48 sec καὶ 1 min 59 sec. Ποία ἡ μέση ταχύτης του. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, ἵνα διανύσῃ 20 μίλια μὲ την ταχύτητα ταύτην. (1 ἀγγλικὸν μίλιον = 1609 m.)

(Ἀπ. $13,6 \text{ m/sec}$. 40 min.)

315. Κατὰ την διὰ καταπέλτου ἀπογείωσιν ἀεροπλάνου χρησιμοποιεῖται διάδρομος μήκους 25 m, τὸν ὁποῖον διατρέχει τὸ ἀεροπλάνον εἰς χρόνον 1 sec. Ποῖαι ἡ τιμὴ τῆς μέσης ἐπιταχύνσεως τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ἡ ταχύτης του καθ' ἣν στιγμὴν ἐγκαταλείπει τὸν καταπέλτην.

(Ἀπ. $\alpha' \gamma = 50 \text{ m/sec}^2$. $\beta' v = 180 \text{ km/h}$.)

316. Αἱ πέδαι αὐτοκινήτου, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα 30 km/h, θέτουν αὐτὸ ἐν ἡρεμίᾳ, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον διανύσῃ διάστημα 10 m. Νά υπολογισθοῦν : α) ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, καὶ β) ἡ ὑπείσρχομένη ἐπιτάχυνσις.

(Ἀπ. $t = 2,4 \text{ sec}$, $\gamma = 3,5 \text{ m/sec}^2$.)

317. Ἀμαξοστοιχία κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 90 km/h, σταματᾷ δὲ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 1250 m. Πρὸ πόσου χρόνου ὁ μηχανοδηγὸς ἔπρεπε νὰ ἐνεργήσῃ πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῶν τροχοπέδων καὶ νὰ διακόψῃ τὴν παροχὴν ἀτμοῦ. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς ἀμαξοστοιχίας.

(Ἀπ. $1 \text{ min } 40 \text{ sec}$, $\gamma = -25 \text{ cm/sec}^2$.)

318. Αὐτοκίνητον, κινούμενον ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h, εἰσέρχεται αἰφνιδίως ἐντὸς ἀνωμάλου δρόμου καὶ ἀφοῦ διανύσῃ ἐν αὐτῷ διάστημα 30 m, τέλος ἡρεμεῖ. Πόση ἡ μέση ἐπιβράδυνσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ αὐτοκίνητον καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐκινήθη ἐπὶ τοῦ ἀνωμάλου δρόμου.

(Ἀπ. $\gamma = 6,67 \text{ m/sec}^2$, $t = 3 \text{ sec}$.)

319. Αὐτοκίνητον, κινούμενον μὲ ταχύτητα $1,5 \text{ m/sec}$, ἀκίνητεν μετὰ διαδρομὴν 4 m. Νά εὐρεθοῦν : α) ἡ ἐπιβράδυνσις, καὶ β) ὁ διαρρησθῆς χρόνος, μέχρις ὅτου σταματήσῃ.

(Ἀπ. $\gamma = -0,28 \text{ m/sec}^2$, $t = 5,4 \text{ sec}$.)

320. Ἡ ταχύτης σώματος μειοῦται ἀπὸ $4,5 \text{ m/sec}$ εἰς $2,2 \text{ m/sec}$ μετὰ διαδρομὴν 4 m. Ὑποτιθεμένης ὁμοιομόρφου τῆς ἐπιβραδύνσεως, ποῖον διάστημα θὰ διατρέξῃ τὸ σῶμα μέχρις ὅτου σταματήσῃ.

(Ἀπ. $s = 5,25 \text{ m}$.)

321. Σῶμα, κινούμενον μὲ ταχύτητα 5 km/sec , ἀκίνητεν μετὰ πάροδον χρόνου 4,5 sec. Ποία ἡ ἐπιβράδυνσις του. Ποῖαν ἀπόστασιν διανύει, μέχρις ὅτου σταματήσῃ τὸ σῶμα.

(Ἀπ. $-1,11 \text{ km/sec}^2$. $11,2 \text{ km}$.)

322. Εἰς ταχεῖαν ἀμαξοστοιχίαν, κινουμένην μὲ ταχύτητα 120 km/h, σύρεται τὸ σῆμα κινδύνου κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν καὶ αὐτομάτως ἐνεργοῦν αἱ πέδαι. Οὕτω διανύει ἀκόμη ἡ ἀμαξοστοιχία διάστημα 500 m. α) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἡρεμήσῃ. β) Ποία ἡ μέση ἐπιβράδυνσις.

(Ἀπ. $\alpha' t = 30 \text{ sec}$. $\beta' \gamma = 1,11 \text{ m/sec}^2$.)

323. Εἰς ἀμαξοστοιχίαν, κινουμένην μὲ ταχύτητα 90 km/h, ἐνεργοῦν κατὰ τινα στιγμὴν αἱ πέδαι, προσδίδουσαι ἐπιβράδυνσιν $0,75 \text{ m/sec}^2$. α) Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ταχύτης θὰ μειωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ. β) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἡρεμήσῃ ὁ συρμός. γ) Ποῖον τὸ διανυθὲν διάστημα ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐνεργείας τῶν τροχοπέδων, μέχρις ὅτου ἡ ἀμαξοστοιχία ἡρεμήσῃ.

(Ἀπ. $\alpha' t_1 = 16,66 \text{ sec}$. $\beta' t_2 = 33,3 \text{ sec}$. $\gamma' s = 416,66 \text{ m}$.)

324. Μοτοσυκλέτα κινεῖται μὲ ταχύτητα 80 km/h. Αἰφνιδίως ὑφίσταται τροχοπέδῃσιν καὶ ἀποκτᾷ οὕτως ἐπιβράδυνσιν 3 m/sec^2 . Ποῖον τὸ διανυθὲν διάστημα ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐνηργηθῇ ἡ τροχοπέδησις, μέχρις ὅτου ἡ μοτοσυκλέτα ἡρεμήσῃ.

(Ἀπ. $s = 82,3 \text{ m}$.)

325. Σώμα, κινούμενον με ταχύτητα 20 m/sec ύφίσταται επιβράδυνση 0,6 m/sec². Τί διάστημα διανύει μέχρις ότου ή ταχύτης : α) μειωθή εις τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς, β) μηδενισθῇ. γ) Κατὰ ποίους χρόνους ἐπιτυγχάνονται τὰ ἀνωτέρω.

(‘Απ. α’ $s_1 = 250$ m, β’ $s_2 = 333,3$ m. γ’ $t_1 = 16,6$ sec, $t_2 = 33,3$ sec.)

326. Ὁ ὁδηγὸς αὐτοκινήτου, κινουμένου με ταχύτητα 80 km/h, ἐνεργεῖ κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν ἐπὶ τῆς πέδης. Ἀφ’ ἧς στιγμῆς ἀντιληφθῇ τὸν κίνδυνον μέχρις ότου ἐνεργήσῃ ἐπὶ τῆς πέδης παρέρχεται χρόνος 1 sec, μετὰ δὲ 2,5 sec ἀπὸ τῆς τροχοπεδήσεως τὸ αὐτοκίνητον ἡρεμεῖ. α) Ποία ἡ μέση ἐπιβράδυνσις κατὰ τὴν πέδησιν. β) Ποῖον διάστημα διανύεται ὑπὸ τοῦ αὐτοκινήτου, ἀφ’ ότου ἐγένετο ἀντιληπτὸς ὁ κίνδυνος μέχρι τῆς ἀκινήσεως αὐτοῦ.

(‘Απ. α’ 8,88 m/sec², β’ 50 m.)

327. Κινητὸν κινεῖται κυκλικῶς, ἐκτελοῦν μίαν στροφὴν εἰς 4 sec περίρξ ἄξονος, ἀπὸ τοῦ όποίου ἀπέχει 10 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) ἡ συχνότης, β) ἡ γραμμικὴ ταχύτης, καὶ γ) ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ.

(‘Απ. α’ 0,25 sec⁻¹, β’ 1570,8 cm/sec, γ’ 1,5708 rad/sec ἢ 90°/sec.)

328. Ὑλικὸν σημεῖον διαγράφει με κίνησιν ὁμαλὴν περιφέρειαν ἀκτίνος 25 m. Πόση ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, ὅταν τοῦτο ἀποκτᾷ κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν 1 m/sec².

(‘Απ. 5 m/sec, 0,2 rad/sec.)

329. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κινητοῦ μέρους στροφέως ἐνὸς ἀτμοστροβίλου, ὅταν δίδεται ὅτι ἡ ἀκτίς αὐτοῦ $r = 0,70$ m καὶ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν 3000 ἀνὰ λεπτόν.

(‘Απ. $6,9 \cdot 10^4$ m/sec², ἥτοι περίπου 7000 g.)

330. Νὰ εὔρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς κορυφῆς ἐνὸς πτερυγίου τῆς ἑλικὸς ἀεροπλάνου, ἐχούσης μήκος 2 m, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν εἶναι 1400 στρ/sec.

(‘Απ. 293 m/sec.)

331. Κινητὸν ἐκτελεῖ κίνησιν κυκλικὴν ὁμαλὴν ἐπὶ περιφερείᾳ διαμέτρου 20 cm καὶ κάμνει 2 στρ/sec. α) Πόση εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ. β) Πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς ἑμίσειαν ὥραν. γ) Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

(‘Απ. α’ 125,6 cm/sec, 12,56 rad · sec⁻¹. β’ 2262 m. γ’ 1580 cm/sec².)

332. Ὑλικὸν σημεῖον πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ἐπιτάχυνσιν $5 \cdot 10^5$ g εἰς φυγοκεντρικὴν μηχανήν. Ἡ ἀκτίς τῆς τροχιάς του εἶναι 5 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ sec.

(‘Απ. $\nu = 1,58 \cdot 10^3$ sec⁻¹.)

333. Τροχὸς αὐτοκινήτου διανύει κυλιόμενος, τοῦ αὐτοκινήτου κινουμένου ἱσοταχῶς, διάστημα 3600 m ἐντὸς χρόνου 4 min, ἐκτελῶν πρὸς τοῦτο 1750 στροφάς. Ζητοῦνται : α) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἐνὸς σημείου τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ, β) ἡ διάμετρος αὐτοῦ, καὶ γ) ἡ γωνιώδης ταχύτης.

(‘Απ. α’ 54 km/h, β’ 65,5 cm, γ’ 45,8 sec⁻¹.)

334. Σώμα, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας, ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενον, διανύει ἐντὸς 1 sec διάστημα 10 cm. Ποῖον τὸ ἐντὸς 2 λεπτῶν διανυόμενον διάστημα.

(‘Απ. 1,44 km.)

335. Σώμα, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας, ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενον, με ἐπιτάχυνσιν 5 cm/sec², ἐντὸς πόσου χρόνου θὰ διανύσῃ διάστημα 10 m.

(‘Απ. 20 sec.)

336. Βλήμα πυροβόλου ἐγκαταλείπει τὸν σωλῆνα τοῦ όπλου, μήκους 10 m, με ταχύτητα 500 m/sec. Ποίαν μέσην ἐπιτάχυνσιν ἀπέκτησε τὸ βλήμα ἐκ τῶν ἀερίων τῆς πυρίτιδος.

(‘Απ. 12 500 m/sec².)

337. Με ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα ἐκτινάσσονται λίθοι ἐκ τοῦ κρατῆρος ἡφαιστείου, κατὰ τινα ἐκρηξιν, ἐάν οὔτοι ἀνέρχωνται μέχρις ὕψους 500 m.

(‘Απ. 100 m/sec.)

338. Ἀεροπλάνον ἵπταται ἐπὶ βορειοανατολίας διευθύνσεως, διανύον διάστημα 60 km καὶ ἐπιστρέφον κινούμενον μὲ ταχύτητα, ἡ ὁποία, ἡρεμούσης τῆς ἀτμοσφαιρας, ἀνέρχεται εἰς 400 km/h, ὡς πρὸς τὴν Γῆν. Πόσον χρόνον δαπανᾷ διὰ τὴν διανύσιν τὸ διάστημα τῶν 60 km καὶ ἐπιστρέφει εἰς τὴν ἀφετηρίαν του: α) ἡρεμούσης τῆς ἀτμοσφαιρας, β) μὲ σταθερὸν βόρειον ἄνεμον 50 km/h, γ) μὲ σταθερὸν δυτικὸν ἄνεμον 50 km/h. (Ἀπ. α' 18 min, β' 18,3 min, γ' 18,1 min.)

339. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ ρεύματος ποταμοῦ, πλάτους 40 m, ἐὰν πλοιάριον, διασχίζον καθέτως τὸν ποταμὸν μὲ ταχύτητα 0,5 m/sec, ἀποκλίνει κατὰ 8 m ἀπὸ τοῦ ἐνὸς σημείου τῆς μιᾶς ὁχθῆς εἰς τὴν ἑτέραν. (Ἀπ. 0,1 m/sec.)

340. Σῶμα, κινούμενον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, διανύει ἀπὸ τινος ὀρισμένης χρονικῆς στιγμῆς $t_0 = 0$ καὶ κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς 1 sec, 2 sec, 3 sec, 4 sec, 5 sec διαστήματα 5 m, 20 m, 45 m, 80 m, 125 m. α) Νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα διάστημα - χρόνος. β) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτοῦ τὰ ἐντὸς χρόνου 1 sec διανυθέντα διαστήματα. γ) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ εἰς τὰ χρονικὰ διαστήματα 1 sec μέσαι ταχύτητες, νὰ χαραχθῇ δὲ καὶ τὸ διάγραμμα ταχύτης - χρόνος. δ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος ἀνὰ δευτερόλεπτον, δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις, καὶ νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα ἐπιτάχυνσις - χρόνος.

341. Ποῖαι αἱ γωνιακαὶ ταχύτητες τῆς Γῆς κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτῆς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ περὶ τὸν ἥλιον.

342. Ποία ἡ ταχύτης σημείου τῆς περιφερείας δίσκου γραμμοφώνου, διαμέτρου 20 cm, ἐκτελοῦντος 78, 45 ἢ 33 στροφὰς ἀνὰ λεπτόν. (Ἀπ. 81,6 cm/sec, 47,10 cm/sec, 34,5 cm/sec.)

343. Κατὰ τινὰ νύκτα παρατηρητῆς ἀντιλαμβάνεται μετεωρόλιθον διαγράφοντα εἰς τὸν οὐρανὸν φωτεινὸν τόξον γωνίας φ ἐντὸς χρόνου t . Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ μετεωρολίθου ἀπὸ τοῦ παρατηρητοῦ ἐξετιμῇται εἰς r , ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ, θεωρουμένη ὡς σταθερά. (Ἀπ. $v = r \cdot \varphi / t$.)

344. Ἀκονιστικὸς τροχὸς ἔχει διάμετρον 20 cm, ἐκτελεῖ δὲ 1200 περιστροφὰς ἀνὰ λεπτόν. Ποία ἡ ταχύτης σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ. (Ἀπ. 12,57 m/sec.)

345. Ὁ δευτερολεπτοδείκτης ὥρολογίου τσέπης ἔχει μῆκος 0,5 cm. Εἰς πόσον χρόνον τὸ ἄκρον αὐτοῦ διαγράφει εὐθεῖαν μήκους 1 km. (Ἀπ. 22 ἡμέρας.)

346. Ποία ἡ μέση ταχύτης τῆς Γῆς κατὰ τὴν κίνησιν της περὶ τὸν ἥλιον, ἐὰν ἡ τροχιά θεωρηθῇ ὡς περιφέρεια κύκλου, ἀκτίνος $15 \cdot 10^7$ km, ἡ δὲ περίοδος ἴση πρὸς $365 \frac{1}{4}$ μέσας ἡλιακὰς ἡμέρας. (Ἀπ. 30 km/sec.)

347. Ἡ ταχύτης βλήματος πυροβόλου ὅπλου δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ δύο δίσκους, στρεφομένους ταχέως περὶ κοινὸν ἄξονα, οἵτινες βάλλονται διὰ τοῦ ὅπλου. Ἐὰν οἱ δίσκοι οὗτοι ἀπέχουν 1 m καὶ στρέφονται μὲ συχνότητα 50 sec^{-1} , ποία ἡ ταχύτης βλήματος, ὅταν ἡ ὀπή τοῦ δευτέρου δίσκου, ἡ προκληθεῖσα ὑπὸ τοῦ βλήματος, εἶναι μετατοπισμένη κατὰ 40° ὡς πρὸς τὴν πρώτην. (Ἀπ. 450 m/sec.)

348. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας πρὸς συνάντησιν μὲ ταχύτητας u_1 καὶ u_2 . Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον συναντήσεως. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1957).

$$\left(\text{Ἀπ. } x = \frac{s \cdot u_1}{u_2 + u_1} \right)$$

349. Ἀεροπλάνον, διαγράφον κυκλικὴν τροχίαν, δέον νὰ μὴ ὑφίσταται κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν μεγαλυτέραν ἀπὸ 7 g. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀκτίς τροχιάς, ὅταν κινῆται ὑπὸ ταχύτητα 500 km/h. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 276 m.)

350. Ποία ή γωνιακή ταχύτης τοῦ δευτερολεπτοδείκτου, τοῦ λεπτοδείκτου καὶ τοῦ ὥροδείκτου ἐνὸς ὥρολογίου. Ποίαν ἐπίδρασιν ἔχει τὸ μέγεθος τῶν δεικτῶν καὶ τοῦ ὥρολογίου ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος.

(Ἀπ. $\omega_1 = 0,1047 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$, $\omega_2 = 0,001745 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$, $\omega_3 = 0,0001454 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$. Οὐδεμίαν.)

351. Ποία ή γωνιακή ταχύτης ἑλικος ἐκτελούσης 1800 περιστροφὰς ἀνὰ λεπτόν. (Ἀπ. $\omega = 188,5 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$.)

352. Φυγόκεντρος μηχανή ἐκτελεῖ 3600 στρ/min. Ποία ή γωνιακή ταχύτης της εἰς στρ/sec (συχνότης) καὶ εἰς rad/sec. (Ἀπ. 60 στρ/sec, 120 π rad/sec.)

353. Περιστρεφόμενος στρόβος στρέφεται ὑπὸ ταχύτητα 100 rad/sec. Ποία ή συχνότης του εἰς στρ/min. (Ἀπ. 95,5 στρ/min.)

354. Ποία ή επιτάχυνσις συρμού, κινουμένου με ταχύτητα 2 m/sec, καθ' ὃν χρόνον διέρχεται καμπύλην γραμμήν, ἀκτῖνος 160 m. (Ἀπ. $0,025 \text{ m/sec}^2$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

355. Ποδηλάτης ἀφίνει τὸν τόπον Α τὴν 14ην ὥραν καὶ κατευθύνεται πρὸς τὸν τόπον Β, κινούμενος ὑπὸ ταχύτητα 15 km/h. Εἰς δεδομένην στιγμήν συναντᾶται με φορτηγὸν αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον διήλθε ἐκ τοῦ τόπου Α τὴν 14ην ὥραν καὶ 45 min καὶ τὸ ὁποῖον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h. Ὁ ποδηλάτης ἀνέρχεται ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου καὶ φθάνει εἰς τὸν τόπον Β 45 min ἐνωρίτερον ἀπὸ ὅ,τι θὰ ἔφθανε ἀν ἐξηκολούθει νὰ κινῆται με τὴν ταχύτητά του. Πόση ή ἀπόστασις τῶν δύο τόπων καὶ ποίαν ὥραν ὁ ποδηλάτης συνηντήθη μετὰ τοῦ αὐτοκινήτου. (Ἀπ. 30 km, 15ην ὥραν.)

356. Ἀμαξοστοιχία ἐκκινεῖ ἀπὸ τὸν σιδηροδρομικὸν σταθμὸν Α τὴν 15ην ὥραν καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Β, ἀπέχοντα ἐκ τοῦ Α κατὰ 30 km, με μέσην ταχύτητα 60 km/h. Σταθμεύει εἰς τὸν σταθμὸν Β ἐπὶ 2 min καὶ ἀκολούθως διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Γ, ἀπέχοντα ἐκ τοῦ Β κατὰ 120 km, με μέσην ταχύτητα 72 km/h. Ἐτέρα ταχεῖα ἡμαξοστοιχία κινεῖται ἐκ τοῦ σταθμοῦ Γ τὴν 14ην ὥραν καὶ 30 min, διευθυνομένη πρὸς τὸν σταθμὸν Β με μέσην ταχύτητα 90 km/h, ὅπου σταθμεύει ἐπὶ 5 min, καὶ τέλος κινεῖται πρὸς τὸν σταθμὸν Α με μέσην ταχύτητα 120 km/h. Ζητοῦνται : α) Ποίαι αἱ ὥραι ἀφίξεως τῶν ἡμαξοστοιχιῶν εἰς τὰ τέρματά των ἀντιστοίχως, β) εἰς ποίαν ὥραν αἱ δύο ἡμαξοστοιχίαι συναντῶνται καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ Α πραγματοποιεῖται ή συνάντησις. (Ἀπ. α' 17 h 12 min, 16 h 10 min, β' 15 h 42 min, 42 km.)

357. Λέμβος, ἔχουσα ταχύτητα 50 m/min, διέρχεται καθέτως πρὸς τὴν ροὴν ποταμοῦ, πλάτους 300 m. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ή ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι 15 m/min, νὰ ὑπολογισθῇ ή μετατόπισις τοῦ πλοίου. (Ἀπ. 90 m.)

358. Πλοῖον κατευθύνεται πρὸς Ἀνατολὰς με ταχύτητα 10 mil/h. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ή ταχύτης δευτέρου πλοίου, διευθυνομένου ΒΑ με ἀπόκλισιν 30° πρὸς Βορρᾶν, διὰ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε πρὸς Βορρᾶν τοῦ πρώτου πλοίου. (Ἀπ. 20 mil/h.)

359. Κινητόν, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας, με κίνησιν εὐθύγραμμον καὶ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν γ, διέρχεται διὰ δύο τόπων Α καὶ Β κατὰ χρονικὰς στιγμὰς διαφερούσας ἀλλήλων κατὰ t. Τὸ κινητόν, διερχόμενον διὰ τοῦ Β ἔχει ταχύτητα

u_B . Ἐὰν $(AB) = l$, ζητοῦνται: α) ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως, β) ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς τὸν τόπον Α. $\left(\text{Ἀπ. } \alpha' \gamma = \frac{2(u_B \cdot t - l)}{t^2}, \beta' u_A = \frac{2l - t \cdot u_B}{t} \right)$

360. Ἐκ τοῦ πυθμένος μεταλλευτικοῦ φρέατος, βάθους h , ἀνέρχεται, κινούμενος μετὰ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν $0,05 \text{ g}$, ὁ θάλαμος ἀνελκυστήρος. Μετὰ πάροδον χρόνου t , ἡ κίνησις τοῦ ἀνελκυστήρος γίνεται ἐπιδραδυνομένη, μετὰ ἐπιβράδυνσιν ἴσην κατ' ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς ἐπιταχύνσεως. Ζητοῦνται: α) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ t ὁ θάλαμος φθάσει ἀνευ ταχύτητος εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τοῦ φρέατος. β) Πόσος ὁ χρόνος ἀνόδου. γ) Ποῖα τὰ κατὰ τὰς δύο φάσεις τῆς κινήσεως διανυόμενα διαστήματα. δ) Ποία ἡ μεγίστη ταχύτης τοῦ θαλάμου.

$$\left(\text{Ἀπ. } \alpha' t = \sqrt{\frac{80 h}{3 g}}, \beta' t_{\text{ολ}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{80 h}{3 g}}, \gamma' s_1 = \frac{2}{3} h, s_2 = \frac{1}{3} h, \delta' v_t = \sqrt{\frac{h g}{15}} \right)$$

361. Σῶμα κινεῖται περίπου ἰσοταχῶς. Ἀπὸ τινος ὠρισμένης χρονικῆς στιγμῆς $t_0 = 0$ μετροῦνται ἀνὰ 2 sec τὰ ὑπὸ τοῦ σώματος διανυόμενα διαστήματα καὶ εὐρίσκεται ὅτι κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \text{ sec}$ διηνύθησαν ἀντιστοίχως διαστήματα $0, 25, 48, 75, 103, 124, 150, 177, 196 \text{ cm}$. α) Νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα διάστημα-χρόνος, τοῦ ἄξονος τῶν x χρησιμοποιουμένου ὡς ἄξονος τῶν χρόνων, τοῦ δὲ y ὡς ἄξονος τῶν διαστημάτων. Νὰ συνδεθοῦν τὰ διάφορα σημεῖα δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἀκολουθῶς νὰ χαραχθῇ εὐθεία, εἰς τὴν ὥστε τὰ διάφορα σημεῖα νὰ κεῖνται ἐπ' αὐτῆς ἢ συμμετρικῶς ἑκατέρωθεν αὐτῆς. β) Διατί ὠρισμένα τμήματα τῆς τεθλασμένης, τῆς συνδεούσης τὰ σημεῖα, εἶναι περισσότερο ἢ ὀλιγώτερον κεκλιμένα ὡς πρὸς τὴν μέσην εὐθεῖαν. γ) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες διὰ τὰ διάφορα τμήματα τῆς τεθλασμένης. Πῶς εἶναι δυνατόν νὰ ἐξαχθοῦν αὗται ἐκ τοῦ διαγράμματος. δ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῆς μέσης εὐθείας ἡ μέση ταχύτης καὶ νὰ συγκριθῇ αὕτη μετὰ τὰς τιμὰς τοῦ πίνακος. ε) Νὰ χαραχθῇ τὸ διάγραμμα ταχύτης-χρόνος καὶ νὰ ληφθῇ ὁ ἄξων τῶν x ὡς ἄξων τῶν χρόνων, ὁ δὲ y ὡς ἄξων τῶν ταχυτήτων. Νὰ συνδεθοῦν τὰ διάφορα σημεῖα διὰ τεθλασμένης. Τί ἐξάγεται ἐκ τῶν περισσότερων ἢ ὀλιγώτερον κεκλιμένων τμημάτων τῆς τεθλασμένης. στ) Νὰ εὐρεθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς ταχύτητος διὰ τὰ διάφορα χρονικὰ διαστήματα τῶν 2 sec καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτοῦ αἱ ἐπιταχύνσεις. ζ) Νὰ χαραχθῇ εἰς τὸ διάγραμμα ταχύτης-χρόνος εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὰ διάφορα σημεῖα νὰ κεῖνται ἐπ' αὐτῆς ἢ νὰ ἀπέχουν συμμετρικῶς ἀπ' αὐτῆς. Διατί ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι σχεδὸν παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . Τί ἐκφράζει ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ταύτης ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x .

362. Πρὸ σιδηροδρομικοῦ συρμοῦ, κινουμένου μετὰ ταχύτητος 120 km/h , διέρχεται κινούμενος ἀντιθέτως ἕτερος συρμός, μήκους 200 m , μετὰ ταχύτητος 60 km/h . Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ διέρχεται ἔμπροσθεν παρατηρητοῦ, εὐρισκομένου ἐπὶ τοῦ πρώτου συρμοῦ, ὁ δεύτερος συρμός. (Ἀπ. 4 sec .)

363. Ποταμόπλοιοι κινεῖται, σχετικῶς ὡς πρὸς τὴν ὄχθην, ἀντιθέτως πρὸς τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ μετὰ ταχύτητος 30 km/h καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ ταχύτητος 40 km/h . Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος, ὡς πρὸς τὴν ὄχθην καὶ τοῦ ποταμοπλοίου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ. (Ἀπ. $\alpha' 5 \text{ km/h}$, $\beta' 35 \text{ km/h}$.)

364. Σῶμα ὑφίσταται ταυτοχρόνως κρούσεις πρὸς δύο διευθύνσεις, αἵτινες σχηματίζουν γωνίαν 80° , προσδίδουν δὲ εἰς αὐτὸ ταχύτητας 10 m/sec καὶ 12 m/sec . Ποία ἡ συνισταμένη ταχύτης καὶ ποίας γωνίας σχηματίζει αὕτη μετὰ τῶν διευθύνσεων τῶν δύο κρούσεων. (Ἀπ. 17 m/sec , $44^\circ 22'$, $35^\circ 38'$.)

365. Πλοίαριον, ἔχον ταχύτητα 7 km/h διασχίζει ἑγκαρσίως ποταμόν, τοῦ ὁποῖου τὸ εὖρος εἶναι 84 m . Διὰ τὴν φθάσιν τὸ πλοῖον εἰς τὴν ἀντίπεραν ὄχθην, ὑφίσταται λόγῳ τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ ἑκτροπὴν κατὰ 18 m . Πόση ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. (Ἀπ. $1,5 \text{ km/h}$.)

366. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἀεροπλάνον, ἀναπτύσσον ταχύτητα 180 km/h , ἵνα διανύσῃ διάστημα $AB = 350 \text{ km}$ κατὰ διεύθυνσιν ἐξ Ἀνατολῶν πρὸς Δυσμᾶς, ὅταν πνέῃ ἄνεμος νοτιοανατολικὸς ταχύτητος 12 m/sec . (Ἀπ. $6060 \text{ sec} = 1 \text{ h } 41 \text{ min}$.)

367. Ἄνθρωπος, τρέχων μὲ ταχύτητα 7 km/h πρὸς Δυσμᾶς, ἀντιλαμβάνεται τὸν ἄνεμον πνέοντα ἐκ βορειοδυτικῆς πλευρᾶς, ὅταν ὁμως περιπατῇ μὲ 3 km/h πρὸς Δυσμᾶς, ἀντιλαμβάνεται τὸν ἄνεμον πνέοντα ἐκ τοῦ Βορρᾶ. Ποία ἡ πραγματικὴ κατεύθυνσις τοῦ ἀνέμου καὶ ἡ ταχύτης του. (Ἀπ. 5 km/h , διεύθυνσις 53° βορείως ὡς πρὸς Ἀνατολήν.)

368. Ἀλεξιπτωτιστής, ὁ ὁποῖος κατέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα $4,8 \text{ m/sec}$, ἀφίγει, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπέχει ἐκ τοῦ ἐδάφους $57,6 \text{ m}$, ἀντικείμενον νὰ πέσῃ. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον, ἀφ' ἧς στιγμῆς τὸ σῶμα ἔχει φθάσει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, φθάνει εἰς αὐτὸ καὶ ὁ ἀλεξιπτωτιστής. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. Μετὰ 9 sec .)

369. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον μήκους $l_1 = 12 \text{ m}$ καὶ ταχύτητος $v_1 = 60 \text{ km/h}$ προσπερνᾷ ἀπὸ ἐπιβατικὸν αὐτοκίνητον μήκους $l_2 = 3 \text{ m}$ καὶ ταχύτητος $v_2 = 80 \text{ km/h}$. Ἡ παρέκκλισις τοῦ ἐπιβατικοῦ ἀρχίζει ἀπὸ ἀποστάσεως $\alpha = 50 \text{ m}$, μετὰ τὴν δὺν ὀχημάτων, καὶ λήγει εἰς ἀπόστασιν $\beta = 60 \text{ m}$ ἀπ' αὐτῶν. α) Πόσος χρόνος ἀπτήθη διὰ τὴν προσπεράσιν τὸ ἐν ὄχημα τὸ ἄλλο, δηλ. ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς παρεκκλίσεως μέχρι λήξεως αὐτῆς. β) Τί διάστημα διέτρεξαν τὰ δύο ὀχήματα εἰς τὸν χρόνον αὐτόν. (Ἀπ. α' $t = 22,5 \text{ sec}$. β' $s_1 = 375 \text{ m}$, $s_2 = 500 \text{ m}$.)

370. Πλοῖον, πλάτους $\alpha = 12 \text{ m}$, πλέον μὲ ταχύτητα $v_0 = 36 \text{ km/h}$, πλήσσει ἀπὸ βλήματος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ πλευρικά του τοιχώματα νὰ διαπερῶνται καθέτως. Ἡ ἐπὶ τοῦ δευτέρου τοιχώματος προκαλούμένη ὀπτὴ παρουσιάζει, ὡς πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ πρώτου, ἀπόκλινιν $\beta = 20^\circ$. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος ἀφοῦ τοῦτο διαπεράσῃ τὸ πρῶτον τοίχωμα. (Ἀπ. $v = 600 \text{ m/sec}$.)

371. Πυροβόλον ὅπλον βάλλει διὰ βλήματος ἐναντίον στόχου, εὐρίσκομένου εἰς ἀπόστασιν 1500 m ἀπ' αὐτοῦ. Παρατηρητής, ἰστάμενος ἐπὶ τῆς εὐθείας πυροβόλου - στόχου, εἰς ἀπόστασιν 1000 m ἀπὸ τοῦ πυροβόλου καὶ ὅπισθεν αὐτοῦ, ἀκούει τὸν κρότον τῆς ἐκπυροκροτήσεως τοῦ ὅπλου τὴν αὐτὴν στιγμὴν, καθ' ἣν παρατηρεῖ τὸ βλήμα προσκροθὲν ἐπὶ τοῦ στόχου. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ὑποτεθῇ ἴση πρὸς $1/3 \text{ km/sec}$ καὶ ἡ τροχιά τοῦ βλήματος θεωρηθῇ εὐθύγραμμος, ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. (Ἀπ. 500 m/sec .)

372. Δρομεὺς καὶ μοτοσυκλετιστὴς διανύουν δρόμον 2700 m . Ὁ δρομεὺς κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα $4,5 \text{ m/sec}$, ἐνῶ ὁ μοτοσυκλετιστής, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διανύσει τὸ ἥμισυ τοῦ δρόμου, κινεῖται κατ' ἀρχὰς μὲ κίνησιν ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν $0,5 \text{ m/sec}^2$ καὶ φθάνει τὴν ταχύτητα 36 km/h μετὰ 20 sec . Κινεῖται ἐν συνεχείᾳ μὲ τὴν σταθερὰν αὐτὴν ταχύτητα καὶ τέλος ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν $0,25 \text{ m/sec}^2$ κατὰ τὰ 40 τελευταῖα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ταξιδιώτας φθάνει πρῶτος καὶ πόση ἡ ταχύτης τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεώς του εἰς τὸ τέρμα. (Ἀπ. Φθάνουν συγχρόνως. Ταχύτης μοτοσυκλετιστοῦ μηδέν.)

373. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νὰ διανύσουν διάστημα 120 m . Ὁ εἰς κινεῖται μὲ ὁμαλὴν κίνησιν καὶ σταθερὰν ταχύτητα 4 m/sec , ἐνῶ ὁ ἕτερος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύ-

τητα 1 m/sec και επιτάχυνσιν $0,1 \text{ m/sec}^2$. Ποίος από τους δύο θα φθάση πρώτος εις τὸ τέρμα. Μετὰ πόσον χρόνον ὁ δεύτερος θα φθάση βραδύτερον τοῦ πρώτου. Ὑπὸ ποίους ὁρους ὁ δεύτερος θὰ δυνηθῇ νὰ φθάση συγχρόνως μετὸν πρώτον.

(Ἄπ. Ὁ κινούμενος ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα φθάσει 10 sec ἐνωρίτερον τοῦ κινουμένου μετὰ επιτάχυνσιν $0,2 \text{ m/sec}^2$.)

374. Δρομεὺς διανύει διάστημα 5000 m μετὰ σταθερὰν ταχύτητα 4 m/sec . Ποδηλάτης, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διανύσει 2000 m καὶ ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 5 m/sec , ἀποκτᾷ εἰς 20 sec τὴν ταχύτητα 36 km/h , μετὴν ὁποίαν καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται, ἵνα, τέλος, ἐντὸς 20 sec ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητά του, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα μετὰ ταχύτητα μηδέν. Ζητοῦνται: α) Ποίαις ἐπιταχύνσεις λαμβάνει ὁ ποδηλάτης, β) ποίος ἐκ τῶν δύο ταξιδιωτῶν φθάσει εἰς τὸ τέρμα πρώτος, καὶ γ) εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ τέρματος γίνεται ἡ συνάντησις αὐτῶν.

(Ἄπ. α' $0,25 \text{ m/sec}^2$, $0,50 \text{ m/sec}^2$, β' Ὁ ποδηλάτης, γ' 940 m .)

375. Ἀεροπλάνον, συνολικοῦ βάρους 12 τόννων, διαθέτει κινητηρίου μηχανὰς ἱκανὰς ὥστε ἐντὸς 20 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως νὰ προσδώσουν εἰς αὐτὸ ταχύτητα $v = 50 \text{ m/sec}$, ἐπαρκῇ ἵνα ἐπιτύχῃ τὴν ἀπογειώσιν του. Ζητοῦνται: α) ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως, καὶ β) τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος τοῦ διαδρόμου ἀπογειώσεως.

(Σχολή Ἰκάρων, 1954). (Ἄπ. $2,5 \text{ m/sec}^2$, 500 m .)

376. Δρομεὺς καὶ μοτοσυκλετιστὴς ὀφείλου νὰ διανύσουν τὸν αὐτὸν δρόμον τῶν 2000 m . Ὁ δρομεὺς κινεῖται μετὰ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ ταχύτητα 5 m/sec . Ὁ μοτοσυκλετιστὴς, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διατρέξει τὸ ἡμιοσ τοῦ δρόμου, κινεῖται μετὰ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα συγχρόνως μετὸν δρομέα. Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ ὁ μοτοσυκλετιστὴς κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεως.

(Ἄπ. $0,1 \text{ m/sec}^2$, 72 km/h .)

377. Βλήμα ἐγκαταλείπει τὸ στόμιον τηλεβόλου, τοῦ ὁποίου ὁ σωλὴν ἔχει μῆκος 15 m , μετὰ ταχύτητα 900 m/sec . Ἐπὶ πόσον χρόνον ἐκινήθῃ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἐὰν ἀπέκτιναι σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.

(Ἄπ. $t = 1/30 \text{ sec}$.)

378. Τὸ παράκτιον τηλεβόλον Κρούπ τῶν 42 cm εἶχε σωλῆνα μῆκους $11,7 \text{ m}$. Ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος κατὰ τὴν ἐξόδον του ἐκ τοῦ στομίου τοῦ σωλῆνος ἦτο 600 m/sec . Ποίαν μέσην ἐπιτάχυνσιν ἀπέκτα τὸ βλήμα ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐκινεῖτο ἐντὸς αὐτοῦ. (Ἄπ. α' $\gamma = 15\,385 \text{ m/sec}^2$, β' $t = 1/25 \text{ sec}$.)

379. Αὐτοκίνητον ἐπιτυγχάνει μετὰ κανονικὴν τροφοδότησιν καυσίμου ἀερίουμειγματος: α) ἐκκινεῖται ἐκ τῆς ἡρεμίας, ταχύτητα 80 km/h , ἐντὸς χρόνου 13 sec , β) αὐξήσει τὴν ταχύτητά του ἀπὸ 100 km/h εἰς 120 km/h , ἐντὸς χρόνου 10 sec , γ) αὐξήσει τὴν ταχύτητά του ἀπὸ 120 km/h εἰς 140 km/h , ἐντὸς χρόνου 18 sec . Ποίαν τιμὴν ἔχει εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ἡ μέση ἐπιτάχυνσις εἰς m/sec^2 .

(Ἄπ. α' $\gamma = 1,71 \text{ m/sec}^2$, β' $\gamma = 0,56 \text{ m/sec}^2$, γ' $\gamma = 0,31 \text{ m/sec}^2$.)

380. Ἀεροπλάνον, κινούμενον ἐπ' εὐθείας, μετὰ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, αὐξάνει τὴν ταχύτητα αὐτοῦ ἀπὸ 100 km καθ' ὥραν εἰς 160 km καθ' ὥραν ἐντὸς 3 λεπτῶν. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ποῖον τὸ ὑπ' αὐτοῦ διανυθὲν διάστημα μέχρις ἀποκτίσεως τῆς τελικῆς ταχύτητος εἰς μονάδας C.G.S.

(Ἄπ. $\gamma = 9,22 \text{ cm/sec}^2$, $s = 64,5 \cdot 10^4 \text{ cm}$.)

381. Σημεῖον, κινούμενον μετὰ ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τρίτου δευτερολέπτου τῆς κινήσεως του 31 cm καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πέμπτου δευτερολέπτου τῆς κινήσεως του διάστημα 65 cm . Ζητοῦνται ἡ ἀρχικὴ

ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως. (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον — Ἄλλοδαποὶ — 1958).
(Ἄπ. $u_0 = -11,5 \text{ cm/sec}$, $\gamma = 17 \text{ cm/sec}^2$.)

382. Ἀπὸ στομίου φρέατος ἀφίνομεν νὰ πύση ἐλευθέρως λίθος. Μετὰ πάροδον $t = 4 \text{ sec}$ ἀκούομεν τὸν κρότον τοῦ λίθου. Πόσον τὸ βάθος h τοῦ φρέατος, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $u = 340 \text{ m/sec}$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. $h = 71,4 \text{ m}$.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολή Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1958).

383. Σῶμα ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ ἀποδοθοῦν γραφικῶς : α) ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος συναρτῆσαι τοῦ χρόνου, β) ἡ μεταβολὴ τοῦ διαστήματος συναρτῆσαι τοῦ χρόνου, γ) ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος συναρτῆσαι τοῦ διαστήματος, δ) ἡ μεταβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτῆσαι τοῦ χρόνου, ε) ἡ μεταβολὴ τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτῆσαι τοῦ διαστήματος.

384. Τὸ διάγραμμα τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον διανύει ὕλικὸν σημεῖον, συναρτῆσαι τοῦ χρόνου εἶναι τραπέζιον. Νὰ σχεδιασθοῦν κάτωθεν αὐτοῦ τὰ ἀντίστοιχα διαγράμματα: α) τῆς ταχύτητος, καὶ β) τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτῆσαι τοῦ χρόνου.

385. Τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος κινουμένου σώματος συναρτῆσαι τοῦ χρόνου εἶναι τραπέζιον. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ ἀντίστοιχον διάγραμμα τοῦ διαστήματος συναρτῆσαι τοῦ χρόνου.

386. Ἡ ταχύτης κινήτου ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $u = \alpha \cdot t$, ὅπου $\alpha = 2 \text{ cm/sec}^2$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος.

387. Ἡ ταχύτης κινήτου ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $u = \alpha - \beta \cdot t$, ὅπου $\alpha = 3 \text{ cm/sec}$ καὶ $\beta = 2 \text{ cm/sec}^2$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος.

388. Κινητὸν μετέχει δύο ταχυτήτων, μῆς 5 cm/sec καὶ ἑτέρας 3 cm/sec , αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μεταξὺ των γωνίαν 30° . Νὰ υπολογισθῇ γραφικῶς τὸ ὄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διεύθυνσιν, καθοριζομένην ἐν σχέσει πρὸς τὴν ταχύτητα 3 cm/sec . (Ἄπ. $7,4 \text{ cm/sec}$, $\theta = 17^\circ$ περίπου.)

389. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα ταχύτητος — χρόνου διὰ σῶμα ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι 10 m/sec καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις $0,4 \text{ m/sec}^2$. Νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τοῦ διαγράμματος τὸ κατὰ τὰ 5 πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεως διανυθὲν διάστημα.

390. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα διαστήματος — χρόνου διὰ τὴν κίνησιν τῆς ἀσκήσεως 389. Ποῖα σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν διαγραμμάτων ταχύτητος — χρόνου καὶ διαστήματος — χρόνου τῆς αὐτῆς κινήσεως.

391. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα ταχύτητος — χρόνου, διὰ σῶμα ὁμαλῶς ἐπιβραδυνόμενον, ἀρχικῆς ταχύτητος 10 m/sec καὶ ἐπιβραδύνσεως $0,5 \text{ m/sec}^2$. Νὰ προσδιορισθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαγράμματος τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως μέχρι τῆς καταστάσεως ἡρεμίας διανυθὲν διάστημα.

392. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα διαστήματος — χρόνου τῆς κινήσεως τῆς ἀσκήσεως 391. Πῶς εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ διαγράμματος τούτου τὴν χρονικὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ἡ ταχύτης.

393. Σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εὐρίσκεται εἰς γεωγραφικὸν πλάτος $\varphi = 49^\circ 27'$. Πόση ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἔχει λόγῳ περιστροφῆς τῆς Γῆς. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6370 \text{ km}$. Περίοδος τῆς Γῆς $T = 86\,164 \text{ sec}$.) (Ἄπ. 302 m/sec .)

394. Ποῖα εἶναι ὁ ἀριθμὸς στροφῶν εἰς 1 sec καὶ ἡ κυκλικὴ συχνότης τροχοῦ αὐτοκινήτου διαμέτρου 72 cm , ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 63 km/h . (Ἄπ. 464 sec^{-1} , $\omega = 48,6 \text{ sec}^{-1}$.)

395. Δίσκος διαμέτρου 13 cm περιστρέφεται υπό συχνότητα 5400 στρ/min. Με ποίαν ταχύτητα εκσφενδονίζεται ύδωρ, προσπίπτον κατά σταγόνας ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ δίσκου. (Ἀπ. 36,8 m/sec = 132 km/h.)

396. Δύο δρομεῖς διατρέχουν κυκλικὸν στίβον ὑπὸ ταχύτητας v_1 καὶ v_2 . Ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ δύο σημεία Α καὶ Β ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα καὶ διευθυνομένοι ἀντιθέτως συναντῶνται διὰ πρώτην φοράν εἰς ἓν σημεῖον Κ τοῦ στίβου, εὐρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 120 m ἐκ τοῦ Β καὶ ἀκολούθως διὰ δευτέραν φοράν εἰς ἓν σημεῖον Λ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 60 m ἀπὸ τοῦ Α. Ἐάν μεταξὺ τῶν δύο συναντήσεων μεσολαβῇ χρονικὸν διάστημα 60 sec, νὰ εὐρεθοῦν τὸ μῆκος τοῦ στίβου καὶ αἱ ταχύτητες τῶν δύο δρομέων. (Ἀπ. Γ = 600 m, $v_1 = 3$ m/sec, $v_2 = 2$ m/sec.)

397. Ἐπίπεδος δίσκος στρέφεται περὶ ὀριζόντιον ἄξονα ὑπὸ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα. Ἐπὶ τοῦ δίσκου τούτου βάλλομεν διὰ πυροβόλου 180 βλήματα ἀνὰ sec. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι δύο διαδοχικὰ βλήματα κτυποῦν τὸν δίσκον εἰς δύο σημεία Α καὶ Β τοιαῦτα, ὥστε $\angle AOB = 36^\circ$. α) Ποία εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ δίσκου. β) Ποίαι ἡ περίοδος καὶ ἡ συχνότης περιστροφῆς αὐτοῦ. (Ἀπ. α' $\omega = 1,884$ rad/sec. β' $\nu = 0,3$ sec⁻¹, $T = 3,33$ sec.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ. ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΚΑΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

398. Σῶμα ἔχει μᾶζαν 4000 gr. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ: α) εἰς τὸ Σύστημα C.G.S., β) εἰς τὸ Σύστημα M.K.S. καὶ γ) εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. ($g = 9,81$ m/sec²).

Λύσις. Καλέσωμεν Β τὸ βάρος τοῦ σώματος, m τὴν μᾶζαν αὐτοῦ καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, προκύπτει ἡ σχέση:

$$B = m \cdot g \quad (1)$$

α) Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ βάρος Β τοῦ σώματος εἰς τὸ Σύστημα C.G.S., θέτομεν: $m = 4000$ gr, $g = 981$ cm/sec² καὶ εὐρίσκομεν:

$$B = 4000 \cdot 981 \text{ gr} \cdot \text{cm/sec}^2 = 3\,924\,000 \text{ dyn}$$

β) Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ βάρος Β τοῦ σώματος εἰς τὸ Σύστημα M.K.S., θέτομεν: $m = 4000$ gr = 4 kgr, $g = 9,81$ m/sec², ὅτε τὸ βάρος θὰ δίδεται εἰς μονάδας Νιούτον (Nt), ἥτοι:

$$B = 4 \cdot 9,81 \text{ kgr m/sec}^2 = 39,24 \text{ Nt}$$

γ) Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (1) θέτομεν: $m = 4000$ gr = 4 kgr = 4/9,81 T.M. μάζης, $g = 9,81$ m/sec² καὶ εὐρίσκομεν:

$$B = 4 \text{ kgr}^*$$

399. Μᾶζα 2 kgr ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν 0,1 m/sec². Ποία δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπ' αὐτῆς, εἰς μονάδας τῶν συστημάτων C.G.S., καὶ M.K.S.

Λύσις. "Αν καλέσωμεν γ την επιβράδυνσιν τοῦ σώματος καὶ m τὴν μάζαν αὐτοῦ, τότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργούσα δύναμις F θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἴση πρὸς :

$$F = m \cdot \gamma$$

α) Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. θέτομεν : $m = 2000 \text{ gr}$, $\gamma = 0,1 \text{ m/sec}^2 = 10 \text{ cm/sec}^2$, καὶ ἐπομένως ἔχομεν :

$$F = 2 \cdot 10^4 \text{ dyn}$$

β) Εἰς τὸ Σύστημα M. K. S. θὰ ἔχομεν : $m = 2 \text{ kg}$, $\gamma = 0,1 \text{ m/sec}^2$, καὶ ἐπομένως προκύπτει :

$$F = 0,2 \text{ Nt}$$

400. Μάζα 12 kg ὑπὸ τὴν ἐπενεργεῖαν δυνάμεως τινος ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 4 cm/sec². Πόση εἶναι ἡ δύναμις εἰς kg*^{*}. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Διὰ νὰ εὑρωμεν τὴν δύναμιν εἰς kg*, ὡς ζητεῖται, ἐνδείκνυται νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Ἡ δύναμις αὕτη διδεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς :

$$F = m \cdot \gamma$$

Θέτοντες : $m = 12/9,81 \text{ T.M.}$ μάζης καὶ $\gamma = 0,04 \text{ m/sec}^2$ εὐρίσκομεν :

$$F = 0,049 \text{ kg*}$$

401. Πόσῃ ἐπιτάχυνσιν εἰς m/sec² ὑφίσταται σῶμα βάρους 2 kg* ὑπὸ τὴν ἐπενεργεῖαν δυνάμεως 1 kg*^{*}.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς m/sec², εἶναι προτιμότερον νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων.

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, λύοντες ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον μέγεθος γ , εὐρίσκομεν :

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad (1)$$

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εἶναι ἡ δύναμις $F = 1 \text{ kg*}$, ἡ μάζα $m = 2/9,81 \text{ T.M.}$ μάζης, ὅτε ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει :

$$\gamma = 4,905 \text{ m/sec}^2$$

402. Ἐπὶ ἡρεμώσεως μάζης 10 gr ἐπενεργεῖ δύναμις 2000 dyn ἐπὶ 4 sec. α) Πόσον διάστημα διανύει ἡ μάζα εἰς 6 sec, καὶ β) πόσον διάστημα διανύει ἐντὸς τοῦ 10ου δευτερολέπτου.

Λύσις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$ εὐρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ τῆς μάζης τοῦ σώματος, ἡ ὁποία εἶναι :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{2000 \text{ dyn}}{10 \text{ gr}} = 200 \text{ cm/sec}^2$$

α) Ἐστὼ t_1 ὁ χρόνος κινήσεως μετὰ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ t_2 ὁ χρόνος μετὰ ὁμαλὴν κίνησιν, ὡς καὶ s_1 καὶ s_2 τὰ ἀντίστοιχα διανυόμενα διαστήματα. Ἐπίσης ἔστω $s_{0\lambda}$ τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον εἰς χρόνον $t_1 + t_2$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$s_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 \quad (1)$$

$$s_2 = v \cdot t_2 \quad (2)$$

$$\text{ὅτε : } s_{0\lambda} = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 + v \cdot t_2 \quad (3)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ ταχύτης $v = \gamma \cdot t_1$, ὅτε ἡ ἀνωτέρω σχέσηις (3) γράφεται :

$$s_{0\lambda} = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 + \gamma \cdot t_1 \cdot t_2 \quad (4)$$

Έκ τῶν δεδομένων τῆς άσκήσεως ἔχομεν : $t_1 = 4 \text{ sec}$, $t_2 = 6 - 4 = 2 \text{ sec}$ καὶ $\gamma = 200 \text{ m/sec}^2$ ὅτε εὐρίσκομεν :

$$s_{0\lambda} = 3200 \text{ cm}$$

ὅπου $s_{0\lambda}$ παριστᾷ τὸ διάστημα, τὸ διανυθὲν εἰς 6 sec.

β) Ἡ κίνησις μετὰ τὴν πάροδον τοῦ 4ου δευτερολέπτου εἶναι ὁμαλὴ καὶ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ τὴν σταθερὰν ταχύτητα $v = \gamma \cdot t_1$.

Ἐάν καλέσωμεν s_{10} τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύεται ἐντὸς τοῦ 10ου δευτερολέπτου, δηλ. εἰς χρόνον $t = 1 \text{ sec}$, ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω σταθερὰν ταχύτητα, θὰ ἔχωμεν :

$$s_{10} = \gamma \cdot t_1 \cdot t \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) : $\gamma = 200 \text{ cm/sec}^2$, $t_1 = 4 \text{ sec}$, $t = 1 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$s_{10} = 800 \text{ cm}$$

403. Ἐκ πυροβόλου, ἔχοντος σωλῆνα μήκους 3 m, βάλλεται βλήμα μάζης 1 kgf, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ σωλῆνος ἔχει ταχύτητα 850 m/sec. Ζητοῦνται : α) ἡ ἐπιτάχυνσις, καὶ β) ἡ δύναμις, ἡ δρῶσα ἐπὶ τοῦ βλήματος, ὑποτιθεμένου ὅτι αὐτὴ διατηρεῖται σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἐάν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ βλήματος, v τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποῖαν ἐξέρχεται τὸ βλήμα, s τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος καὶ t τὸν χρόνον διαδρομῆς τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, τότε θὰ ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$v = \gamma \cdot t \quad (1)$$

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t , λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{v^2}{2s} \quad (3)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ὁπότε $v = 850 \text{ m/sec}$ καὶ $s = 3 \text{ m}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\gamma = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m/sec}^2$$

β) Ἡ δύναμις, ἥτις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ βλήματος, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, διὰ $\gamma = v^2/2s$, ὅτι εἶναι :

$$F = \frac{m \cdot v^2}{2s} \quad (4)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὐρίσκομεν, ἐκ τῶν δεδομένων : $m = 1 \text{ kgf} = 1/10 \text{ T.M.}$ μάζης, $v = 850 \text{ m/sec}$, $s = 3 \text{ m}$, ὅτι :

$$F = 1,2 \cdot 10^4 \text{ kgf}^*$$

404. Ἐπὶ σώματος ἐπενεργεῖ ὀριζοντίως σταθερὰ δύναμις 4500 dyn. Εἰς ὥρισμένην στιγμὴν ἡ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι 60 cm/sec, μετὰ πάροδον δὲ 8 sec ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι 105 cm/sec. Πόση εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μάζα m τοῦ σώματος εἶναι :

$$m = \frac{F}{\gamma} \quad (1)$$

* Ἀν καλέσωμεν v_1 τὴν ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 καὶ v_2 τὴν ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 , τότε, ὡς γνωστὸν, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

όπότε η σχέση (1) γράφεται :

$$m = \frac{F(t_2 - t_1)}{u_2 - u_1} \quad (3)$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ἔχομεν : $F = 4500 \text{ dyn}$, $u_1 = 60 \text{ cm/sec}$, $u_2 = 105 \text{ cm/sec}$, $t_2 - t_1 = 8 \text{ sec}$, ὅτε, ἐκ τοῦ τύπου (3), προκύπτει :

$$m = 800 \text{ gr}$$

405. Ἐπὶ λείου ὀριζοντίου ἐδάφους εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ σῶμα, μάζης 2 kgr . Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπενεργεῖ πρὸς τὰ ἄνω καὶ ὑπὸ γωνίαν 30° ἐν σχέσει πρὸς τὴν κατακόρυφον δύναμις 1 kgr^* . Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐντὸς 10 sec .

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν ἐπενεργοῦσαν δύναμιν ἐπὶ τοῦ σώματος ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον, τότε ἡ ὀριζοντίως ἐπενεργοῦσα δύναμις F ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι :

$$F = F_1 \cdot \sin 60^\circ \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$, προκύπτει ὅτι $\gamma = F/m$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ}{m} \quad (2)$$

Λύσις εἰς τὸ ΤΕΧΝΙΚὸν ΣΥΣΤΗΜΑ. Θέτομεν εἰς τὴν σχέση (2) τὰ δεδομένα : $F_1 = 1 \text{ kgr}^*$, $m = 2/9,81 \text{ T.M.}$ μάζης, $\sin 60^\circ = 0,5$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\gamma = 2,45 \text{ m/sec}^2$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ διανυθὲν διάστημα, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως : $s = 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2$, ὅτε, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν :

$$s = 122,5 \text{ m}$$

406. Σῶμα, μάζης $3 \cdot 10^{10} \text{ gr}$, κινεῖται ὀριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 10^3 cm/sec . Πόση γίνεται ἡ ταχύτης αὐτοῦ μετὰ πάροdon 100 sec , ὅταν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως ἐπενεργήσῃ δύναμις $4,5 \cdot 10^7 \text{ dyn}$.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν u_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ σώματος, u τὴν ζητούμενην ταχύτητα μετὰ πάροdon χρόνου t καὶ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ σώματος, θὰ ἰσχύη, ὡς γνωστόν, ἡ σχέση :

$$u = u_0 + \gamma \cdot t \quad (1)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις ὅμως γ , συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, εἶναι :

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι :

$$u = u_0 + \frac{F}{m} \cdot t \quad (3)$$

Ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς ἀσκήσεως δίδονται εἰς τὸ ΣΥΣΤΗΜΑ C. G. S., ἐργαζόμεθα εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω, θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὴν σχέση (3), εὐρίσκομεν :

$$u = 16000 \text{ cm/sec}$$

407. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς βάρους 500 tn^* κινεῖται ἐπὶ ὀριζοντίων σιδηροτροχιῶν, πρέπει δὲ ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἀπὸ 4 m/sec νὰ αὐξηθῇ εἰς 20 m/sec ἐντὸς 4 min . Πόσῃ ἑλξιν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ἡ μηχανή. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Έκ του γνωστού τύπου $B = m \cdot g$ προκύπτει ότι :

$$m = \frac{B}{g} \quad (1)$$

Επίσης γνωρίζομεν ότι η επιτάχυνσις εις την όμαλώς επιταχυνόμενην κίνησιν δίδεται διά του τύπου :

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2)$$

Άρα η ζητούμενη δύναμις θα είναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς :

$$F = m \cdot \gamma = \frac{B}{g} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3)$$

Εργαζόμεθα εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν εις τὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα, ἥτοι : $B = 5 \cdot 10^3 \text{ kgr}^*$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $\Delta v = 20 - 4 = 16 \text{ m/sec}$ καὶ $\Delta t = 4 \text{ min} = 240 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$F = 3300 \text{ kgr}^*$$

408. Μάζα 2 τόνων ἡρεμεῖ ἐπὶ ὀριζοντίου καὶ ἄνευ τριβῆς ἐδάφους, πρέπει δὲ ἐντὸς 1 min νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 5 m/sec. Ζητεῖται ἡ ὀριζοντία δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐπενεργήσῃ ἐπὶ τῆς μάζης. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Έκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$ καὶ τοῦ τύπου τῆς επιταχύνσεως $\gamma = v/t$ προκύπτει ὅτι :

$$F = m \cdot \frac{v}{t} \quad (1)$$

Εργαζόμενοι εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εις τὸν ἀνωτέρω τύπον : $m = 2 \text{ tn} = 200 \text{ T.M. μάζης}$, $v = 5 \text{ m/sec}$, $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 16,6 \text{ kgr}^*$$

409. Ἐπὶ ἡρεμούσης μάζης 3 kgr ἐπενεργεῖ δύναμις 600 gr*, ἡ ὁποία μετατοπίζει αὐτὴν κατὰ 5 m. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἐπενεργεῖ ἡ δύναμις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν καὶ m τὴν μάζαν, τότε ἡ επιτάχυνσις θα εἶναι $\gamma = F/m$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τοῦ διαστήματος γράφεται :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \quad \text{ἐξ οὗ προκύπτει :} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot m}{F}} \quad (1)$$

Εργαζόμενοι εις τὸ Σύστημα C. G. S. ἔχομεν :

$$s = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}, \quad m = 3 \text{ kgr} = 3000 \text{ gr}, \quad F = 600 \text{ gr}^* = 600 \cdot 981 \text{ dyn}$$

Οὕτως, ἐκ τῆς σχέσεως (1), προκύπτει ὅτι :

$$t = 2,25 \text{ sec}$$

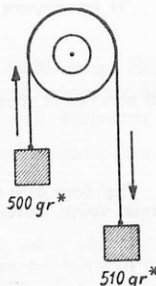
410. Ἐπὶ κατακόρυφου τροχαλίας μετὴν βοήθειαν καταλήλου νήματος ἐξαρτώμεν ἐκατέρωθεν δύο βάρη 500 gr* καὶ 510 gr*. Ἐὰν ἀφήσωμεν τὸ σύστημα τῶν βαρῶν ἐλεύθερον, βλέπομεν ὅτι τοῦτο κινεῖται. α) Νὰ περιγραφῇ ἡ κίνησις, καὶ β) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ επιτάχυνσις, παραλείπομένων τῶν τριβῶν.

Λύσις. α) Ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλὴς επιταχυνόμενη, διότι ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐπενεργεῖ δύναμις σταθερὰ κατ' ἑντάσιν καὶ διευθύνσιν :

$$F = 510 \text{ gr}^* - 500 \text{ gr}^* = 10 \text{ gr}^* = 10 \cdot 981 \text{ gr} \cdot \text{cm/sec}^2 = 9810 \text{ dyn}$$

β) Έκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, $F = m \cdot \gamma$, ἔχομεν : $\gamma = F/m$
Διὰ $F = 9810 \text{ dyn}$ καὶ $m = 500 + 510 = 1010 \text{ gr}$ προκύπτει :

$$\gamma = 9,73 \text{ cm/sec}^2$$



411. Δύναμις 180 gr* έπενεργεί επί 14 sec επί σώματος βάρους 4 kgr*, εύρισκομένου άρχικώς έν ήρεμία. Μετά παρέλευσιν άρκετού χρόνου τὸ σώμα άπομακρύνεται τής άρχικῆς του θέσεως 81,9 m. Νά περιγραφῇ λεπτομερῶς ή κίνησις και νά υπολογισθοῦν ή έπιτάχυνσις, τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς 14 sec και ή κηθεῖσα ταχύτης εἰς τὸ τέλος τοῦ 14ου δευτερολέπτου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Έκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$ έχομεν :

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad (1)$$

Διὰ $F = 180 \text{ gr}^* = 0,18 \text{ kgr}^*$ και $m = 4 \text{ kgr} = 0,4 \text{ T.M.}$ μάζης προκύπτει ότι :

$$\gamma = 0,45 \text{ m/sec}^2$$

β) Έκ τοῦ τύπου $s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$, διὰ $\gamma = 0,45 \text{ m/sec}^2$ και $t = 14 \text{ sec}$, προκύπτει :

$$s_{14} = 44,1 \text{ m}$$

γ) Έκ τοῦ τύπου $v = \gamma \cdot t$, διὰ $\gamma = 0,45 \text{ m/sec}^2$ και $t = 14 \text{ sec}$, προκύπτει :

$$v = 6,3 \text{ m/sec}$$

δ) Η διαφορά μεταξύ όλικου διαστήματος και διαστήματος, τὸ όποῖον διήνυσεν εἰς χρόνον $t = 14 \text{ sec}$, είναι :

$$s = s_1 - s_{14} = 81,9 \text{ m} - 44,1 \text{ m} = 37,8 \text{ m}$$

Η κίνησις, κατὰ τὸ διάστημα τὸ όποῖον διήνυσε τὸ κινητὸν κατὰ τήν διάρκειαν τῶν 14 άρχικῶν δευτερολέπτων, ήτο όμαλως έπιταχυνομένη, ένῳ κατὰ τὸ υπόλοιπον διάστημα τῶν 37,8 m ή κίνησις ήτο όμαλή και διήρκεσεν επί χρόνον :

$$\frac{t}{v} = \frac{s}{v} = \frac{37,8}{6,3} \frac{\text{m}}{\text{m/sec}} = 6 \text{ sec}$$

412. Σῶμα μάζης 150 gr διαγράφει κύκλον άκτίνας 50 cm ἢ 100 cm. Πόση πρέπει νά εἶναι ή κεντρομόλος δύναμις εἰς άμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἵνα ή γραμμική ταχύτης εἶναι 2 m/sec. Πόση εἶναι ή κεντρομόλος δύναμις, όταν ή περίοδος τῆς κινήσεως εἰς άμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι 1,2 sec.

Λύσις. Έάν καλέσωμεν r τήν άκτίνα τοῦ κύκλου, m τήν μάζαν τοῦ σώματος και v τήν ταχύτητα, τότε ή κεντρομόλος δύναμις δίδεται υπό τοῦ τύπου :

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Δίδονται : $m = 150 \text{ gr}$ και $v = 2 \text{ m/sec} = 200 \text{ cm/sec}$, άρα, όταν τὸ $r = 50 \text{ cm}$, θά εἶναι :

$$F_1 = \frac{150 \cdot 200^2}{50} = 120\,000 \text{ dyn}$$

και όταν $r = 100 \text{ cm}$, θά εἶναι :

$$F_2 = \frac{150 \cdot 200^2}{100} = 60\,000 \text{ dyn}$$

Ητοι, όταν ή άκτις περιστροφῆς διπλασιάζεται, ή κεντρομόλος δύναμις ύποδιπλασιάζεται (ή ταχύτης v είναι σταθερά).

Έάν καλέσωμεν T τήν περίοδον τῆς όμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως, ή ταχύτης θά εἶναι $v = 2 \pi \cdot r / T$ και έπομένως ή κεντρομόλος δύναμις θά εἶναι $F = m \cdot 4 \pi^2 \cdot r / T^2$. Άρα εἰς τήν πρώτην περίπτωση θά εἶναι :

$$F_1 = \frac{150 \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50}{1,2^2} = 205\,408 \text{ dyn}$$

και εἰς τήν δεύτεραν περίπτωση :

$$F_2 = \frac{150 \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 100}{1,2^2} = 410\,816 \text{ dyn}$$

"Ητοι, όταν η ακτίς διπλασιάζεται, διπλασιάζεται επίσης και η κεντρομόλος δύναμις (ή περίοδος T είναι σταθερά).

413. Σφαίρα, μάζας 1 kg , είναι προσδεσμένη εις σχοινίον και διαγράφει κύκλον οριζόντιον, ακτίνας 1 m . Πόση πρέπει να είναι η συχνότης κινήσεως τῆς σφαίρας, όταν η οριζοντία δύναμις, ή ἐπενεργούσα ἐπὶ τοῦ σχοινίου, εἶναι 10 kg .

Λύσις. "Όταν η συχνότης τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως εἶναι ν , τότε η περίοδος θά εἶναι $T = 1/\nu$ καὶ ἐπομένως ἡ κεντρομόλος δύναμις $F = m \cdot 4 \pi^2 \cdot r / T^2$ (βλ. προηγούμενη ἀσκηση) γίνεταί $F = m \cdot 4 \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $F = 10 \text{ kg} \cdot g = 9,81 \cdot 10^3 \text{ dyn}$, $r = 100 \text{ cm}$ καὶ $m = 1000 \text{ gr}$, θά ἔχωμεν :

$$\nu = \sqrt{\frac{F}{m \cdot 4 \pi^2 \cdot r}} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{F}{m \cdot r}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{10^4 \cdot 981}{10^3 \cdot 100}} = 1,58 \text{ sec}^{-1}$$

414. Νά εὑρεθῇ μὲ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα ὀριζοντίως, ὥστε νὰ μὴ ἐπανέλθῃ πλέον εἰς τὴν Γῆν, δηλαδὴ νὰ γίνῃ δορυφόρος τῆς. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος νὰ θεωρηθῇ ἀμελητέα. (Ἀκτίς τῆς Γῆς $R = 6370 \text{ km}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σῶμα μάζης m βάλλεται ὀριζοντίως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα u_0 καὶ ὅτι μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην περιστρέφεται περὶ τῆς Γῆς ἐπὶ περιφερείας κύκλου ακτίνας r . Ἐπὶ τοῦ σώματος, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀσκέται μόνον τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ καὶ ἐπομένως τὸ σῶμα περιστρέφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν κεντρομόλου δυνάμεως F_x ἡ ὁποία εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἡτοι :

$$F_x = B \quad \text{ἢ} : \frac{m \cdot u^2}{r} = m \cdot g \quad \text{ἐξ οὗ} : u = \sqrt{r \cdot g} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ βάρος ἔχει φορὰν πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς, τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιάς τοῦ σώματος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρον τῆς Γῆς καὶ συνεπῶς τὸ σῶμα περιστρέφεται περὶ τὸ κέντρον τῆς Γῆς.

Ὡς θεωροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα βάλλεται ἀπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πλησίον τοῦ ἐδάφους. Τότε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀκτίνα r περιστροφῆς τοῦ σώματος ἴσην περίπῳ μὲ τὴν ἀκτίνα R τῆς Γῆς, ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ ζητούμενη ταχύτης εἶναι :

$$u = 7900 \text{ m/sec}$$

415. Εἰς νῆμα, μήκους 1 m καὶ ἀντοχῆς θραύσεως 7 kg , ἐξαρτᾶται λίθος βάρους 2 kg καὶ τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν, ὥστε νὰ διαγράφῃ κατακόρυφον κύκλον. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ λίθου, ἵνα τὸ νῆμα θραυσθῇ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς κυκλικῆς τροχιάς ἡ κεντρομόλος δύναμις F_x ἀναπτύσσεται ἀπὸ τὴν τάσιν τοῦ νήματος T καὶ ἀπὸ τὸ βάρος B . Ἡτοι :

$$F_x = T + B \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁμως $F_x = m \cdot u^2 / r$ καὶ $B = m \cdot g$, ἔπεται ὅτι :

$$T = m \left(\frac{u^2}{r} - g \right) \quad (2)$$

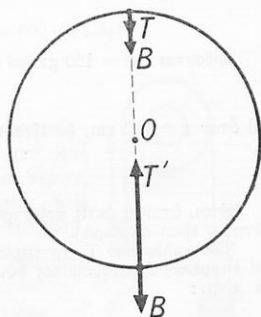
Ὁμοίως εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον θά ἔχωμεν :

$$F'_x = T' - B \quad (3) \quad \text{καὶ} : T' = m \left(\frac{u^2}{r} + g \right) \quad (4)$$

Ἡ ταχύτης u' εἰς τὸ κάτω ἄκρον εἶναι προφανῶς μεγαλύτερα τῆς ταχύτητος u . Εἰς τὸ κάτω ἄκρον δηλαδὴ u' , ἄρα ὅπωςδήποτε $T' > T$.

Ἐπομένως, διὰ νὰ θραυσθῇ τὸ νῆμα, θά πρέπει ἡ τάσις θραύσεως αὐτοῦ T_0 νὰ εἶναι :

$$T_0 \leq T' \quad \text{ἢ} \quad T_0 \leq \frac{m \cdot u'^2}{r} + m \cdot g \quad (5)$$



$$\eta: \quad v' \geq \sqrt{\frac{(T_0 - m \cdot g) r}{m}} \quad (6)$$

Θέτουμε εις τηνσχέσιν (6) τα δεδομένα, εργαζόμενοι εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἴτοι:

$$r = 1 \text{ m}, T' = 7 \text{ kgf}^*, m = \frac{2 \text{ kgf}^*}{10 \text{ m/sec}^2} = 0,2 \text{ T.M.} \text{ μάζης, ὅποτε προκύπτει ὅτι ἡ ζητούμενη γραμμικὴ ταχύτης εἶναι:}$$

$$v' \geq 5 \text{ m/sec}$$

416. Κατὰ τὴν ἀλληλεπενέργειαν μεταξὺ σώματος μάζης 12 kgf καὶ ἐτέρου 4 kgf, τὸ σῶμα 12 kgf ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 2,5 m/sec². Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 4 kgf.

Λύσις. Ἐστώσαν m_1 καὶ m_2 αἱ μάζαι καὶ γ_1 καὶ γ_2 αἱ ἐπιταχύνσεις ἀντιστοίχως τῶν δύο σωμάτων. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀλληλεπιδράσιν αὐτῶν τὰ σώματα ἀποκοῦν ἐπιταχύνσεις, ἔπεται ὅτι ἀσκοῦν ἄμοιβαίως ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις (Ἀξίωμα δράσεως καὶ ἀντιδράσεως). Ἀρα:

$$m_1 \cdot \gamma_1 = m_2 \cdot \gamma_2 \quad \text{καί:} \quad \gamma_2 = \frac{m_1 \cdot \gamma_1}{m_2} \quad (1)$$

Θέτουμε: $m_1 = 12 \text{ kgf}, m_2 = 4 \text{ kgf}, \gamma_1 = 2,5 \text{ m/sec}^2$ καὶ εὐρίσκομεν:

$$\gamma_2 = 7,5 \text{ m/sec}^2$$

417. Δοχεῖον, περιέχον ὕδωρ μάζης 5 kgf, ἐξαερίζεται ἐκ τοῦ ἄκρου νήματος. Ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο περιστροφῆς 1,5 m. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ταχύτης περιστροφῆς ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἵνα μὴ πίπτῃ τὸ ὕδωρ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Θεωροῦμεν ἐν στοιχείῳ μάζης m τοῦ ὕδατος εὐρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείας αὐτοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ δοχεῖον εὐρίσκεται εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν ἐπὶ τῆς τροχιάς του, καὶ ἔστω r ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου περιστροφῆς.

Ἐπὶ τοῦ στοιχείου τούτου τῆς μάζης, ἐφ' ὅσον τὸ δοχεῖον περιστρέφεται μὲ ἀρκετὴν ταχύτητα, θὰ ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις: α) τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$, καὶ β) ἡ δύναμις K ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου καὶ ἀσκοῦμένη ἐπ' αὐτοῦ μέσω τοῦ ὕδατος τοῦ δοχείου. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων ἔχει φορὰν πρὸς τὸ κέντρον περιστροφῆς καὶ θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ θεωρηθὲν στοιχείον μάζης. Ἀρα θὰ ἔχωμεν:

$$F_K = B + K \quad (1)$$

$$\eta: \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g + K \quad \eta: \quad m \left(\frac{v^2}{r} - g \right) = K \quad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴνσχέσιν (2) θέσωμεν:

$$\frac{v^2}{r} - g = 0 \quad \eta: \quad v = \sqrt{r \cdot g} \quad (3)$$

λαμβάνομεν $0 = K$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῆςσχέσεως (1) προκύπτει ὅτι: $F_K = B$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὴν ὀρικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἐπομένως ἡ ταχύτης:

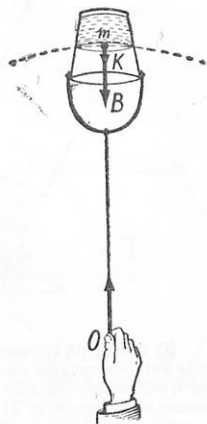
$$v_{op} = \sqrt{r \cdot g} \quad (4)$$

εἶναι ἡ μικροτέρα δυνατὴ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ περιστρέφεται ἡ μάζα m , ἵνα μὴ πίπτῃ.

Ἐὰν τῶρα ἰσχύῃ ἡ συνθήκη (4), παρατηροῦμεν ὅτι διὰ πᾶν ἄλλο στοιχείον μάζης, μὴ εὐρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἡ ταχύτης v θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς v_{op} καὶ συνεπῶς ἡ κεντρομόλος δύναμις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀσκοῦμένης ἐπὶ τῆς μάζης m . Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ὁλόκληρος ἡ μάζα τοῦ ὕδατος παραμένει ἐντὸς τοῦ δοχείου καὶ συνεπῶς τὸ ὕδωρ δὲν πίπτει, ὅταν ἰσχύῃ ἡσχέσις (4).

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν ζητούμενην ταχύτητα v_{op} , θέτουμε εἰς τὴνσχέσιν (4): $r = 1,5 \text{ m}, g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι:

$$v_{op} = 3,87 \text{ m/sec}$$



Παρατήρησις. Ἡ μάζα $m = 5 \text{ kg}$ εἶναι δεδομένη, τὸ ὅποιον, ὡς εἶδομεν κατὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως, δὲν ὑπερέχεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ αποτελέσματος. Ἀποτελεῖ οὕτω πλεονάζον στοιχείον.

418. Ἀτμάμαξα, βάρους 30 τόννων, διατρέχει καμπύλην τροχίαν ἀκτῖνος 500 m, μὲ ταχύτητα 60 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ τιμὴ τῆς φυγόκεντρον δυνάμεως. β) Ἡ ὑπερύψωσις τῆς ἐξωτερικῆς τροχιάς, ἡ ἀναγκαία ἵνα μὴ ἀσκοῦνται πλευρικά δυνάμεις ἐπὶ τῶν τροχιῶν. γ) Διὰ ποίαν ταχύτητα εἰς km/h θὰ ἐπέλθῃ ἀνατροπὴ, ἐὰν αἱ δύο τροχιαὶ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, δεδομένου ὅτι τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀτμαμάξης κεῖται εἰς ὕψος 1 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν τροχῶν εἶναι 1,45 m. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀλλοδαποὶ Σχολῶν Πολιτικῶν, Μηχανολόγων, Χημικῶν, 1962).

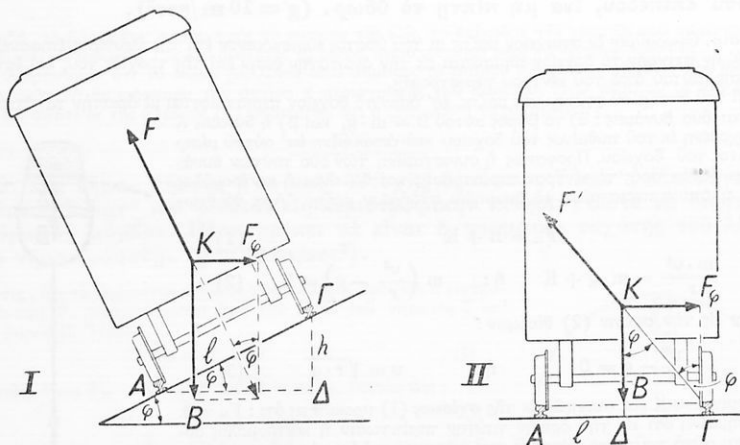
Λύσις. α) Ἡ φυγόκεντρος δύναμις F_φ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F_\varphi = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (1)$$

$$\delta\text{που } m = \frac{B}{g} = \frac{30\,000}{10} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}^2} = 3000 \text{ T.M. μάζης, } R = 500 \text{ m καὶ } v = 60 \text{ km/h} = \frac{60\,000}{3600}$$

$$\text{m/sec} = \frac{100}{6} \text{ m/sec. Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα, ὅποτε λαμβάνομεν:}$$

$$F_\varphi = 1667 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}^2$$



β) Διὰ νὰ μὴ ἔχωμεν πλευρικοὺς δυνάμεις ἐπὶ τῶν τροχῶν, θὰ πρέπει αἱ ἀντιδράσεις τῶν σιδηροτροχιῶν ἐπὶ τῶν τροχῶν νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου τοῦ ἐδάφους, ὅποτε καὶ ἡ συνισταμένη αὐτῶν F' θὰ εἶναι ἐπίσης κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἀτμαμάξης. Ἡ συνισταμένη τοῦ βάρους B ἀφ' ἑνὸς καὶ τῆς ἀντιδράσεως F' ἀφ' ἑτέρου, θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις καὶ ἡ ἀντίθετος αὐτῆς, ἡ φυγόκεντρος F_φ (σχῆμα I), ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος θὰ εἶναι:

$$F_\varphi = B \cdot \epsilon \varphi \varphi \quad (2)$$

ὅπου φ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τῶν σιδηροτροχιῶν. Ἀφ' ἑτέρου ἔαν h ἡ ὑπερύψωσις τῆς ἐξωτερικῆς τροχιάς καὶ l ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν τροχῶν, θὰ ἔχωμεν:

$$h = l \cdot \eta \mu \varphi \quad (3)$$

Λαμβανομένου υπ' όψιν ότι :

$$\eta \mu \varphi = \frac{\varepsilon \varphi \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 \varphi}} \quad (4)$$

προκύπτει, διά συνδυασμού τών εξισώσεων (2), (3) και (4) :

$$h = \frac{l \cdot F_{\varphi}}{\sqrt{B^2 + F_{\varphi}^2}} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντες εις την τελευταίαν εξίσωσιν τὰ δεδομένα : $l = 1,45 \text{ m}$ καὶ $B = 30 \text{ tn}^ = 30\,000 \text{ kgf}^*$, ὡς καὶ τὴν ὑπολογισθεῖσαν φυγόκεντρον δύναμιν $F_{\varphi} = 1667 \text{ kgf}^*$, ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$h = 0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$$

γ) Διὰ τὴν ἐπέλθῃ ἀνατροπῇ, δηλαδὴ τῆς ἀτμαμάξεως περὶ στιγμιαίον κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ τοῦ ἐξωτερικοῦ τροχοῦ μετὰ τῆς σιδηροτροχίᾳς (σχῆμα II), θὰ πρέπει ἡ ροπή τῆς φυγόκεντρον δυνάμεως F_{φ} εἰς πρὸς τὸ σημεῖον Γ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ροπῆς τοῦ βάρους B ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἦτοι :

$$F'_{\varphi} \cdot \alpha \geq B \cdot \frac{l}{2} \quad (6)$$

ὅπου α ἡ ἀπόστασις (ΚΔ) τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ἐὰν u_{α} ἡ ταχύτης διὰ τὴν ἀνατροπὴν τῆς ἀμαξοστοιχίας, θὰ ἔχωμεν :

$$F'_{\varphi} = \frac{m \cdot u_{\alpha}^2}{R} \quad (7)$$

Διὰ $B = m \cdot g$ ἡ ἀνισότης (6) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\frac{m \cdot u_{\alpha}^2}{R} \cdot \alpha \geq mg \cdot \frac{l}{2} \quad \eta : u_{\alpha} \geq \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot l}{2 \alpha}} \quad (8)$$

*Αντικαθιστώντες τὰ δεδομένα : $R = 500 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $l = 1,45 \text{ m}$, $\alpha = 1 \text{ m}$ καὶ λαμβάνομεν :
 $u_{\alpha} \geq 60 \text{ m/sec}$ ἢ : $u_{\alpha} \geq 216 \text{ km/h}$

419. Κομβολόγιον ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 σφαίρας ἐκ μολύβδου, ἐκάστη μάζης 30 gr, συνδεδεμέναις διὰ λεπτοῦ σύρματος δυνάμενον ν' ἀνθέξῃ εἰς τάσιν 5 kgf*, σχηματίζει δὲ κανονικὸν πολύγωνον, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἀκτίνας 25 cm καὶ περιστρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του περὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Διὰ ποίαν συχνότητα περιστροφῆς τὸ σύρμα θραύεται καὶ ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς σφαίρας A ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις μέσῳ τῶν συρμάτων AB καὶ AG. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις F_{κ} , ἡ ὁποία περιστρέφει τὴν σφαῖραν. Ἐπειδὴ τὸ θεωρούμενον κομβολόγιον εἶναι κανονικὸν ἐξάγωνον καὶ ἡ F_{κ} κείνεται ἐπὶ ἀκτίνας r τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ δύο γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς F_{κ} καὶ τῶν συρμάτων AB καὶ AG θὰ εἶναι ἐκάστη $\alpha = 60^\circ$. Συνεπῶς τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι ῥόμβος καὶ αἱ ἀσκοῦμεναι δυνάμεις ἐπὶ τῆς σφαίρας A θὰ εἶναι μετὰξὺ των ἴσαι καὶ ἐκάστη ἴση μὲ τὴν κεντρομόλον δύναμιν. Ἦτοι :

$$F = F_{\kappa} \quad (1)$$

Ἐὰν ἡ συχνότης περιστροφῆς τῆς σφαίρας εἶναι ν, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν $F_{\kappa} = m \cdot 4 \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$ καὶ λόγῳ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει ὅτι καὶ :

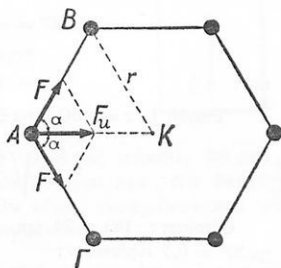
$$F = m \cdot 4 \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν :

$$\nu = \sqrt{\frac{F}{m \cdot 4 \pi^2 \cdot r}} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ δύναμις F παριστᾷ προφανῶς καὶ τὴν τάσιν τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον δύναται ν' ἀνθέξῃ εἰς τάσιν 5 kgf*, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰς τιμὰς $F = 5 \text{ kgf}^* = 5 \cdot 10^3 \cdot 981 \text{ dyn}$, $m = 30 \text{ gr}$, $r = 25 \text{ cm}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\nu = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 981}{30 \cdot 4 \cdot (3,14)^2 \cdot 25}} = \underline{\underline{13 \text{ sec}^{-1}}}$$



Ὡς γνωστόν, ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω συνδέεται μὲ τὴν συχνότητα περιστροφῆς ν διὰ τῆς σχέσεως : $\omega = 2\pi \cdot \nu$. Ἀρα ἡ ζητούμενη γωνιακὴ ταχύτης θὰ εἶναι :

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 13 = 81,64 \text{ rad/sec}$$

Σημείωσις. Προφανῶς μία ἐκ τῶν δύο ἴσων τούτων δυνάμεων (F , F'), αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦνται ὑπὸ τῶν συρμάτων ἐπὶ τῆς σφαίρας, ὑπολογίζεται ὡς τάσις τοῦ σύρματος.

420. Σφαῖρα, ζυγίζουσα $0,5 \text{ kg}^*$ καὶ κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec , κτυπάται μὲ ρακέταν, ἡ ὁποία ἀναγκάζει αὐτὴν νὰ κινήται μὲ ταχύτητα ἀντιθέτου φορᾶς 12 m/sec . Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς σφαίρας, διαρκεῖ ἐπὶ $0,01 \text{ sec}$. Πόση εἶναι ἡ μέση ἔντασις τῆς δυνάμεως κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.

Λύσις. Ἐστω m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας, F ἡ ἀσκουμένη ἐπ' αὐτῆς δύναμις ὑπὸ τῆς ρακέτας ἐπὶ χρόνον t καὶ γ ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἡ σφαῖρα. Ὁ ἔχουμεν :

$$F = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν τὴν τελικὴν ταχύτητα τῆς σφαίρας v_2 , τότε, ἐπειδὴ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτῆς θὰ εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς αὐτήν, πρέπει νὰ εἶναι αὕτη ἀρνητικὴ, ἔστω $-v_1$, καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$\Delta v = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1 \quad (2)$$

$$\text{Ἀρα ἡ σχέση (1) γράφεται : } F = \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t} \quad (3)$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $m = 0,5/9,81 \text{ T.M}$. μάζης, $v_1 = 20 \text{ m/sec}$, $v_2 = 12 \text{ m/sec}$. $\Delta t = 0,01 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$F = 163,1 \text{ kg}^*$$

421. Σφαῖρα Β περιστρέφεται, προσδεμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον σχοινίου μήκους 24 cm , ἐνῶ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ σχοινίου στηρίζεται ἐπὶ σταθεροῦ σημείου Ο. Ἡ σφαῖρα διαγράφει ὀριζόντιον κύκλον ἀκτίνος ΓΒ περὶ κέντρον εὐρισκόμενον κάτω τοῦ Ο. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιάς της, ὅταν τὸ σχοινίον σχηματίζῃ γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακορύφου.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπενεργοῦν δύο δυνάμεις : α) τὸ βάρος τῆς σφαίρας $B = m \cdot g$, κατακορύφως, καὶ β) ἡ τάσις τοῦ σχοινίου T . Προφανῶς ἡ δύναμις F πρέπει νὰ εἶναι συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων καὶ νὰ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρο τῆς περιστροφῆς, νὰ εἶναι δηλαδὴ ἡ κτρομόλος δύναμις $F_{\kappa} = m \cdot v^2/r$, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα. Ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν :

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{m \cdot v^2/r}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

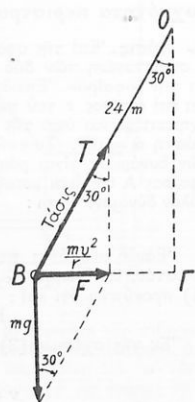
$$\text{καί : } v = \sqrt{r \cdot g \cdot \epsilon\phi 30^\circ} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $r = (BO) \cdot \eta\mu 30^\circ$, ἔχομεν :

$$v = \sqrt{\frac{(BO) \cdot g \cdot \eta\mu^2 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}} \quad (2)$$

Θέτοντες : $BO = 24 \text{ cm}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,865$, καὶ $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ εὐρίσκομεν :

$$v = 82,4 \text{ cm/sec}$$



422. Σύρμα ἐκ νήματος ἐλαστικοῦ, μήκους 1 m , ἐπιμηκύνεται κατὰ 52 cm , ὅταν τείνεται κατακορύφως διὰ τῆς ἐξαρτήσεως βάρους 500 gr^* ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ. Ἀντικαθίσταται τὸ βάρος δι' ἑτέρου 50 gr^* καὶ περιστρέφεται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου τὸ νῆμα μὲ ὁμαλὴν κίνησιν. Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης, ἵνα ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς καὶ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Λύσις. Καλούμεν B το βάρος του δευτέρου σώματος, r το μήκος του σύρματος και Δr την επιμήκυνση υπό την επενέργειαν της δύναμης $F = 500 \text{ gr}^*$.

Όταν το σώμα εύρεται εις τυχοῦσαν θέσιν Δ , τότε ἐπ' αὐτοῦ ἀσκούνται ὑπὸ τοῦ νήματος αἱ δυνάμεις $B_1 = B \cdot \sin \theta$ καὶ ἡ κεντρομόλος δύναμις F_x . Ἐὰν δὲ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι Δr ἡ επιμήκυνσις τοῦ σύρματος, θὰ ἔχωμεν :

$$F = F_x + B_1 = m \cdot \omega^2 (r + \Delta r) + B \cdot \sin \theta \quad (1)$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν :

$$\omega = \sqrt{\frac{F - B \cdot \sin \theta}{m(r + \Delta r)}} \quad (2)$$

Θέτομεν : $F = 500 \cdot 981 \text{ dyn}$, $B = 50 \cdot 981 \text{ dyn}$, $m = 50 \text{ gr}$,
 $r + \Delta r = 100 + 52 = 152 \text{ cm}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\omega = \sqrt{\frac{981(10 - \sin \theta)}{152}} \text{ rad/sec}$$

Ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας θ , ἥτοι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σώματος ἐπὶ τῆς κατακορύφου κυκλικῆς τροχιάς.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν δυνάμεθα νὰ περιστρέψωμεν σῶμα τῆς βοήθειᾳ νήματος, ἐπὶ κατακορύφου κύκλου, μὲ κίνησιν ὁμαλὴν, λόγῳ τῆς ἔλξεως τῆς Γῆς.

423. Ἀνελκυστήρ, μάζης 8 tn, εἶναι ἐξηρητημένος διὰ συρματοσχοίνου καὶ ἴσταιται μετέωρος. Τῇ ἐπιδράσει ὅμως σταθερᾶς δύναμews, ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1,2 \text{ m/sec}^2$. Κατὰ πόσον ηὔξηθῇ ἡ τάσις τοῦ συρματοσχοίνου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστήρ μένει μετέωρος, τὸ βάρος αὐτοῦ B ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς τάσεως T τοῦ συρματοσχοίνου καὶ ἡ ὀλική δύναμις $F_{ολ} = B - T = 0$. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς.

ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ὁ ἀνελκυστήρ ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1,2 \text{ m/sec}^2$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἡ ὀλική δύναμις δὲν εἶναι μηδέν, ἀλλὰ θὰ ἔχῃ ἀπόλυτον τιμὴν $F = m \cdot \gamma$. Ἐπειδὴ ὁ ἀνελκυστήρ ἔχει βάρος 8000 kg^* , θὰ ἔχῃ μάζαν 8000 kg ἢ 800 T.M. μάζης καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις, ἡ ὁποία συμπίπτει πρὸς τὴν ὀλικὴν δύναμιν, δὲν θὰ εἶναι μηδέν, ἀλλὰ ἴση πρὸς $F_{ολ} = 800 \cdot 1,2 = 960 \text{ kg}^*$, ἐπομένως δὲ θὰ ἔχωμεν :

$$F_{ολ} = -m \cdot \gamma = B - T$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εὐρίσκομεν :

$$F_{ολ} = -960 \text{ kg}^* = 8000 \text{ kg}^* - T$$

καί :

$$T = 8000 \text{ kg}^* + 960 \text{ kg}^* = 8960 \text{ kg}^*$$

ἥτοι ἡ τάσις τοῦ συρματοσχοίνου ηὔξηθῇ κατὰ :

$$T = 960 \text{ kg}^*$$

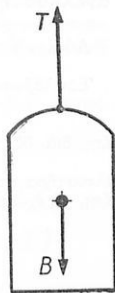
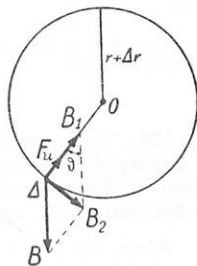
424. Σῶμα, μάζης 200 gr, τίθεται εἰς κίνησιν διὰ νήματος μήκους 40 cm, ὥστε νὰ διαγράφῃ κατακορύφον κύκλον ὑπὸ ταχύτητα 200 cm/sec. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς τὸ σχοινίον εἶναι τεταμένον καὶ νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν διατείνεται τὸ σχοινίον.

Λύσις. Ὅταν ἓν σῶμα περιστρέφεται (δι' ἀκίνητον παρατηρητήν), ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ σώματος κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

Ἡ τάσις T τοῦ νήματος εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς θὰ εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν κεντρομόλον δύναμιν μείον τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἦτοι :

$$T = F - B \quad (2)$$



"Αρα εις τὴν ἄσκησίν μας θὰ εἶναι τεταμένον τὸ νῆμα, ὅταν ὑπάρχῃ τάσις τοῦ νήματος, δηλαδή ὅταν $F' > B$. Συμφωνῶς πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἄσκησης θὰ ἔχωμεν :

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{200 \cdot 200^2}{40} = 200\,000 \text{ dyn}$$

καί :

$$B = 200 \cdot 981 = 196\,200 \text{ dyn}$$

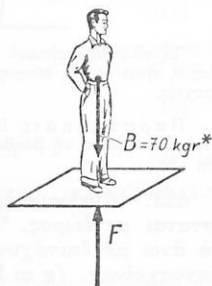
"Ἦτοι $F' > B$ καὶ συνεπῶς ὑπάρχει τάσις (τὸ νῆμα εἶναι τεταμένον) καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος, ὡς εἶδομεν, θὰ εἶναι :

$$T = F - B = 200\,000 \text{ dyn} - 196\,200 \text{ dyn} = 3800 \text{ dyn}$$

425. "Ανθρωπος ἔχει βάρος 70 kgr* καὶ εὐρίσκεται ἐντὸς ἀνελκυστήρος, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $2,5 \text{ m/sec}^2$. Πόση εἶναι ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ δάπεδον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου. (βλ. σχῆμα). ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστὴρ ἀκίνητῃ ἢ ἀνέρχεται ἀνεπιταχύν-
σεως, ὁ ἄνθρωπος εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ τὸ δάπεδον ἀσκεῖ ἐπ' αὐτοῦ
δύναμιν ἴσην πρὸς 70 kgr* διεθυνομένην πρὸς τὰ ἄνω. Ἵνα ὁ ἄνθρωπος
ἐπιταχυνθῇ πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 2,5 \text{ m/sec}^2$ ἀπαιτεῖται δύνα-
μις $F = m \cdot \gamma$. Ἐὰν ληφθῇ $g = 10 \text{ m/sec}^2$, ἡ μᾶζα τοῦ ἀνθρώπου θὰ εἶναι
 $70/10 = 7 \text{ T.M.}$ μάζης καὶ ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις, διεθυνομένη πρὸς τὰ
ἄνω, θὰ εἶναι $F = 7 \cdot 2,5 = 17,5 \text{ kgr*}$, ἡ δὲ ὀλική δύναμις, τὴν ὁποίαν θὰ
ἀσκήῃ τὸ δάπεδον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου, θὰ εἶναι :

$$F_{\text{ολ}} = 17,5 \text{ kgr*} + 70 \text{ kgr*} = 87,5 \text{ kgr*}$$



*Άσκησης 425.

**426. Ἀνελκυστὴρ βάρους 2000 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ συρ-
ματσοκίονον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ ἀντίβαρον
3200 kgr*. Πόση εἶναι ἡ βραχυτέρα ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ σταματήσῃ
ὁ ἀνελκυστὴρ, ὅταν κατέρχεται μὲ ταχύτητα 2 m/sec .**

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστήρος ἐνεργεῖ σταθερὰ δύναμις $F = 3200 \text{ kgr*} - 2000 \text{ kgr*} = 1200 \text{ kgr*}$.

Ἐὰν λάβωμεν $g = 10 \text{ m/sec}^2$ θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν μᾶζαν τοῦ ἀνελκυστήρος $m_1 = \frac{2000}{10} = 200 \text{ T.M.}$

μάζης, διὰ δὲ τὴν μᾶζαν τοῦ ἀντιβάρου $m_2 = \frac{3200}{10} = 320 \text{ T.M.}$ μάζης καὶ ἐπειδὴ ἡ κινουσα τὸν
ἀνελκυστήρα σταθερὰ δύναμις $F = 1200 \text{ kgr*}$ δρᾷ ἐπὶ συνολικῆς μάζης $m = 200 + 320 = 520 \text{ T.M.}$
μάζης, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν μεταδιδόμενην ἐπιτάχυνσιν γ , ὅτι :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{1200}{520} = \frac{30}{13} \text{ m/sec}^2$$

Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστὴρ κατέρχεται, ἡ κίνησις αὐτοῦ θὰ εἶναι ἀπὸ τίνος καὶ ἔπειτα ὁμαλῶς ἐπιβρα-
δυνομένη μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἥτις κατὰ τινά χρονικὴν στιγμὴν ἰσοῦται πρὸς 2 m/sec , μηδε-
νισθῇ. Ἐὰν συνεπῶς θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν ἀπὸ ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχο-
μεν $u_0 = 2 \text{ m/sec}$, θὰ εἶναι ἐπειδὴ $u = u_0 - \gamma \cdot t$ καὶ $u = 0$, ὅτι $u_0 = \gamma t$, ἄρα $t = \frac{u_0}{\gamma}$, ὁπότε διὰ

$$u_0 = 2 \text{ m/sec} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{30}{13} \text{ m/sec}^2 \quad \text{εὐρίσκομεν} : t = \frac{13}{15} \text{ sec.}$$

Κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν θὰ διανυθῇ ὑπὸ τοῦ ἀνελκυστήρος διάστημα $s = u_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2$,
τὸ ὁποῖον, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων, εὐρίσκεται ἴσον πρὸς :

$$s = \frac{13}{15} \text{ m} = 0,87 \text{ m}$$

427. Ἀπὸ τροχαλίαν ἐξαρτῶνται δύο κύλινδροι, τῶν ὁποίων αἱ μάζαι εἶναι $m_1 = 30 \text{ gr}$ καὶ $m_2 = 40 \text{ gr}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος.

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν μαζῶν $m = m_1 + m_2 = 70 \text{ gr}$ δρᾷ σταθερὰ δύναμις

$$F = 40 \text{ gr}^* - 30 \text{ gr}^* = 10 \text{ gr}^* = 10^4 \text{ dyn},$$

καὶ κατὰ συνέπειαν προσδίδει αὐτῇ εἰς τὴν μάζαν m ἐπιτάχυνσιν γ , διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{10^4}{70} \text{ cm/sec}^2 = \frac{10^3}{7} \text{ cm/sec}^2$$

ἢ περίπου :

$$\gamma = 143 \text{ cm/sec}^2$$

Πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τάσεως τοῦ νήματος, θεωροῦμεν κατ' ἰδίαν μίαν τῶν μαζῶν, τὴν m_2 . Ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργεῖ, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ βάρος αὐτῆς $m_2 \cdot g$, διευθυνόμενον πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ τάσις τοῦ νήματος, διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω· ἐπομένως ἡ δύναμις, ἡ ὁποία προκαλεῖ κίνησιν πρὸς τὰ κάτω τῆς μάζης m_2 ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν γ , εἶναι $m_2 \cdot \gamma$ καὶ ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot \gamma$ ἐξ ἧς εὐρίσκομεν :

$$T = m_2 (g - \gamma) \quad (1)$$

Ἐπομένως, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων, εὐρίσκομεν :

$$T = 40 (1000 - 143) \text{ gr} \cdot \text{cm/sec}^2 = 34\,280 \text{ dyn}$$

Ἐὰν ἐξετάσωμεν κατ' ἰδίαν τὴν ἑτέραν τῶν μαζῶν m_1 , βλέπομεν ὅτι ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργεῖ τὸ βάρος αὐτῆς $m_1 \cdot g$, διευθυνόμενον πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος T , διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω· ὅθεν ἡ δύναμις ἡ προκαλοῦσα τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω θὰ εἶναι ἡ $m_1 \cdot \gamma$. ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$m_1 \cdot g - T = -m_1 \cdot \gamma \quad (2)$$

ὅθεν : $T = m_1 (g + \gamma) \quad (3) \quad \text{ἢ} : T = 30 (1000 + 143) \text{ gr} \cdot \text{cm/sec}^2 = 34\,290 \text{ dyn}$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις πρέπει νὰ εὐρεθῇ ἡ αὐτὴ τιμὴ τάσεως. Ἡ μικρὰ διαφορά τιμῶν κατὰ 10 dyn ὀφείλεται εἰς τὰς προσεγγίσεις τὰς ὁποίας ἐδέχθημεν πρὸς ἀπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν κατὰ τὴν εὐρεσιν τῆς τιμῆς τῆς ἐπιτάχυνσεως.

428. Ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται ἀπὸ τὸν πρῶτον εἰς τὸν δεῦτερον ὄροφον οἰκοδομῆς. Παραστήσατε γραφικῶς : α) τὴν τείνουσαν δύναμιν συναρτῆσαι τοῦ χρόνου, καὶ β) τὴν ταχύτητα συναρτῆσαι τοῦ χρόνου.

Λύσις. α) Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ ἀνελκυστήρος γίνεται εἰς τρεῖς διαδοχικὰς φάσεις.

Ἡτοι : 1ον) Ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ κινεῖται ἐπὶ ὀλίγον χρονικὸν διάστημα μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, 2ον) ὅταν τελειώσῃ ἡ πρώτη φάσις κινήσεως, ἐξακολουθεῖ κινούμενος ὁ ἀνελκυστὴρ μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν τελικὴν ταχύτητα τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, καὶ 3ον) διὰ νὰ σταματήσῃ ὁ ἀνελκυστὴρ ἀποκτὰ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα τὴν σταθερὰν ταχύτητα τῆς ὁμαλῆς κινήσεως.

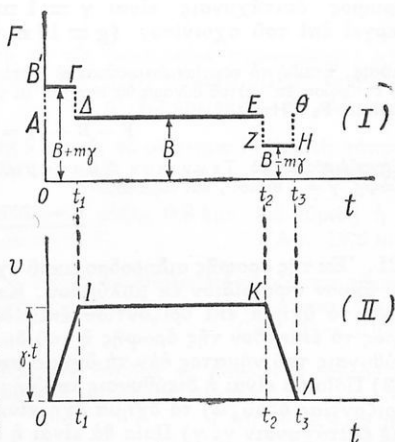
Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν μηδέν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκκινεῖ ὁ ἀνελκυστὴρ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη δύναμις B αὐτομάτως γίνεται :

$$B + m \cdot \gamma$$

ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα (διακεκομμένοι εὐθύγραμμον τμήμα AB ἐπὶ τοῦ ἀξόνος F). Διότι ἐκτὸς τῆς δυνάμεως B , τῆς ἀσκουμένης ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ καλωδίου, πρὸς ὑπερνήκησιν τοῦ βάρους τοῦ ἀνελκυστήρος ἀσκέται ἐπὶ πλέον καὶ ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις $m \cdot \gamma$.

Ἀκολουθῶς ἡ δύναμις αὐτὴ ($B + m \cdot \gamma$) παραμένει σταθερὰ μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς ἔστω t_1 , ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα (εὐθύγραμμον τμήμα BF , παράλληλον πρὸς τὸν ἀξόνα τῶν χρόνων t).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t_1 , ὁπότε τελειώνει ἡ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις καὶ ἀρχίζει ἡ



όμαλή κίνησης, ή δύναμις $B + m \cdot \gamma$ γίνεται αποτόμως B (διακεκομμένος ευθύγραμμον τμήμα ΓΔ, παράλληλον προς τὸν ἄξονα τῶν δυνάμεων F).

Ἀκολουθῶς ή δύναμις B παραμένει σταθερά μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς ἔστω t_2 (ευθύγραμμον τμήμα ΔΕ, παράλληλον προς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων t).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 , ὁπότε τελειώνει ή ὁμαλή κίνησης, ή δύναμις B γίνεται αποτόμως $B - m \cdot \gamma$, διότι ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστήρος ἀσκεῖται ἀντιθέτως πρὸς τὴν δύναμιν B καὶ ή ἐπιβραδύνουσα δύναμις $m \cdot \gamma$ (ευθύγραμμον διακεκομμένον τμήμα ΕΖ, παράλληλον προς τὸν ἄξονα τῶν δυνάμεων F). Ἐν συνεχείᾳ ή δύναμις αὕτη παραμένει σταθερά μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_3 (ευθύγραμμον τμήμα ΖΗ, παράλληλον προς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων t).

Ἐπίσης κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_3 , ὁπότε σταματᾷ ή κίνησης τοῦ ἀνελκυστήρος, ή δύναμις $B - m \cdot \gamma$ γίνεται αποτόμως B (διακεκομμένον ευθύγραμμον τμήμα ΗΘ, παράλληλον προς τὸν ἄξονα τῶν δυνάμεων F).

β) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολουθῶς. Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν μηδὲν ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 ή κίνησης, ὡς εἶδομεν, εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ θὰ ἰσχύη ή σχέση $v = \gamma \cdot t$. Ἀρα ή ταχύτης, ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ ευθυγράμμου τμήματος ΟΙ.

Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 , ὁπότε ή κίνησης εἶναι ὁμαλή, θὰ ἰσχύη ή σχέση: $v_0 = \gamma \cdot t = \text{σταθ.}$ Ἀρα ή ταχύτης, ἐπειδὴ παραμένει σταθερά, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ ευθυγράμμου τμήματος ΙΚ, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων t .

Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_3 , ὁπότε ή κίνησης εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, θὰ ἰσχύη ή σχέση: $v = v_0 - \gamma \cdot t$. Ἀρα ή ταχύτης, ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ.

429. Ἀνελκυστήρ βάρους 2000 kgr* κατέρχεται με ἐπιτάχυνσιν $1,2 \text{ m/sec}^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ή τάσις τοῦ καλωδίου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν ὁ ἀνελκυστήρ παρέμενεν ἀκίνητος, τότε ή τάσις τοῦ καλωδίου θὰ ἦτο ἴση με τὸ βάρος B αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀνελκυστήρ κατέρχεται, ή τάσις T θὰ εἶναι μικροτέρα κατὰ τὴν ἐπιταχύνουσαν αὐτὸν δύναμιν F_e . Ἦτοι:

$$T = B - F_e = B - m \cdot \gamma$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ ΤΕΧΝΙΚὸν ΣΥΣΤΗΜΑ. Θέτομεν:

$$B = 2000 \text{ kgr*}, m = 2000/10 = 200 \text{ T.M.}, \text{ μάζης, } \gamma = 1,2 \text{ m/sec}^2,$$

καὶ εὐρίσκομεν:

$$T = 1760 \text{ kgr*}$$

**430. Φορτίον 2 τόννων ἀνυψοῦται ὑπὸ γερανοῦ, ή δὲ κα-
τακόρυφος ἐπιτάχυνσις εἶναι $\gamma = 1 \text{ m/sec}^2$. Ποία δύναμις
ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ σχοινίου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).**

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ φορτίον ἀνυψοῦται με ἐπιτάχυνσιν κατακόρυφον, ή συν-
ολικῶς ἐπιδρῶσα ἐπ' αὐτοῦ δύναμις θὰ ἰσοῦται με τὸ βάρος B τοῦ φορτίου σὺν τὴν ἐπιταχύνουσαν
αὐτὸ δύναμιν F_e . Ἦτοι:

$$F = B + F_e = B + m \cdot \gamma$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ ΤΕΧΝΙΚὸν ΣΥΣΤΗΜΑ. Θέτομεν: $B = 2000 \text{ kgr*}, m = 2000/10 = 200$
T.M. μάζης, $\gamma = 1 \text{ m/sec}^2$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$F = 2200 \text{ kgr*}$$

**431. Ἐκ τῆς ὁροφῆς σιδηροδρομικοῦ ὁχήματος ἐξαρτᾶται ἄβαρὲς νῆμα φέρον
εἰς τὸ ἄκρον σφαιρίδιον ἐκ μολύβδου. Κατὰ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν εἶναι σταμα-
τημένον τὸ ὄχημα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ νῆμα ἔχει διεύθυνσιν κάθετον
ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁροφῆς ἢ τοῦ δαπέδου τοῦ ὁχήματος. α) Ποία θὰ εἶναι
ή διεύθυνσις τοῦ νήματος ἔάν τὸ ὄχημα σταματήσῃ ἐπὶ κεκλιμένης ὁδοῦ κλίσεως
5%. β) Ποία θὰ εἶναι ή διεύθυνσις τοῦ νήματος: 1) ἔάν τὸ ὄχημα κινῆται ὁμαλῶς
ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ, 2) τὸ ὄχημα ἔχῃ κίνησιν ὁριζοντίαν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομέ-
νην με ἐπιτάχυνσιν γ . γ) Ποία θὰ εἶναι ή διεύθυνσις τοῦ νήματος ὅταν τὸ ὄχημα
κινῆται ἐπὶ ἀνηφορικῆς ἢ κατηφορικῆς ὁδοῦ. Ἀριθμητικῆ ἐφαρμογῇ:
Τὸ νῆμα ἔχει μήκος 2 m, ή ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι $\gamma = 1 \text{ m/sec}^2$.**

Λύσις. α) Είναι προφανές ότι εάν η κλίσις της οδού είναι 5° , τότε θα είναι και η κλίσις του νήματος εν σχέσει με την κάθετον επί το δάπεδον του οχήματος. Εάν φ η γωνία, τότε η κλίσις εκφράζεται διά του $\eta\mu\varphi$ και θα έχουμε :

$$\eta\mu\varphi = 0,05 \quad \eta : \quad \varphi = 0,05 \text{ rad}$$

β) 1. Εάν το όχημα κινείται ομαλώς και το σφαιρίδιον θα κινείται επίσης ομαλώς και επομένως η συνισταμένη των επ' αυτού επενεργουσών δυνάμεων θα είναι μηδέν. Αι δυνάμεις αὗται είναι τὸ βάρος τοῦ σφαιριδίου καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος, αἱ ὁποῖαι θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἄρα τὸ νήμα θὰ εἶναι κατακόρυφον.

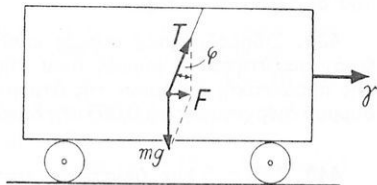
2. Τὸ σφαιρίδιον θὰ κινεῖται μετὰ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν, μετὰ τὴν ὁποῖαν κινεῖται τὸ όχημα. Ἄρα ἡ συνισταμένη F' τῶν επ' αὐτοῦ επενεργουσών δυνάμεων τοῦ βάρους $B = m \cdot g$ καὶ τῆς τάσεως T θὰ εἶναι ὀριζοντία.

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν :

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F}{B} \quad \eta : \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\gamma}{g}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εὐρίσκομεν :

$$\varepsilon\varphi\varphi = 0,1 \quad \eta : \quad \varphi = 6^\circ, \text{ περίπου}$$



(Τὸ σφαιρίδιον μετατοπίζεται πρὸς τὰ ὀπίσω κατὰ 20 cm περίπου, ἕνεκα τῆς κλίσεως τοῦ νήματος).

γ) Ἐάν τὸ όχημα κινεῖται ἐπὶ ἀνηφορικῆς ἢ κατηφορικῆς οδού θὰ συμβαίνειν τὰ αὐτὰ ὡς ἀνωτέρω. Ἦτοι, εάν ἡ κίνησις εἶναι ἰσοταχῆς, ἡ κλίσις τοῦ νήματος ὡς πρὸς τὴν ἐπιφανείαν τῆς οδού ἢ τὸ δάπεδον τοῦ οχήματος, θὰ ἴσουςται πρὸς τὴν κλίσιν τῆς οδού. Ἄλλ' εάν τὸ όχημα κινεῖται ἐπιταχυνόμενον ἢ ἐπιβραδυνόμενον ὁμαλῶς, θὰ ἔχωμεν αὐξησιν τῆς κλίσεως ἢ ἐλάττωσιν αὐτῆς κατὰ γωνίαν, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως ἢ ἐπιβραδύνσεως τοῦ οχήματος.

Παρατήρησις : Εἰς τι κινούμενον σύστημα ὑπάρχει εἰς ἐκάστην στιγμὴν ἰσορροπία μεταξύ τῶν ἀσκουμένων εἰς αὐτὸ δυνάμεων καὶ τῆς δυνάμεως ἀδράνειας.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

432. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὰς ἀκολουθούσας περιπτώσεις : α) Δύναμις 3000 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 2 kg, β) δύναμις 50 gr* ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 2 kg. (Ἀπ. α' $1,5 \text{ cm/sec}^2$, β' $24,5 \text{ cm/sec}^2$.)

433. Πόσον τὸ βάρος σώματος μάζης 9 kg εἰς τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ. εἰς τόπον ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. 88,3 Nt.)

434. Δύναμις $1,6 \text{ kg}^*$ ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 0,8 kg. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος τούτου. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $19,6 \text{ m/sec}^2$.)

435. Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς kg^* δύναμις, ἡ ὁποία προσδίδει εἰς κινούμενον σῶμα, ζυγίζον 50 kg^* , εἰς τόπον γεωγραφικοῦ πλάτους 45° καὶ παρὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ἐπιβράδυνσιν 2 m/sec^2 . (Ἀπ. $F = 10,2 \text{ kg}^*$.)

436. Ποῖαν ἐπιτάχυνσιν ἀποκτᾷ σῶμα, τὸ ὁποῖον εἰς κανονικὸν τόπον ἐπὶ τῆς Γῆς ἔχει βάρος 1 kg^* , διὰ τῆς ἐπενεργείας δυνάμεως 1 kg^* . (Ἀπ. $\gamma = 9,81 \text{ m/sec}^2$.)

437. Ποῖαν ἐπιτάχυνσιν ἀποκτᾷ σῶμα, βάρους 20 kg^* εἰς κανονικὸν τόπον ἐπὶ τῆς Γῆς, διὰ τῆς ἐπενεργείας δυνάμεως 5 kg^* . (Ἀπ. $\gamma = 2,45 \text{ m/sec}^2$.)

438. Σφαίρα μάζης 1 kgf και έτερα άγνωστου μάζης m, προσαρμόζονται εις τὰ άκρα έλαφροϋ έλατηρίου, άμελητέας μάζης. Δι' άπομακρύνσεως τών σφαιρών τείνεται τὸ έλατήριον και έν συνεχείαι τὸ σύστημα άφίεται έλεύθερον, όποτε παρατηρείται ότι τὸ σῶμα μάζης m έχει διπλασίαν έπιτάχυνσιν τοϋ πρώτου σώματος. Ποία ή διεύθυνσις τών έπιταχύνσεων και ποία ή μάζα τοϋ δευτέρου σώματος. (Άπ. $m = 0,5 \text{ kgf}$.)

439. Σιδηροδρομικός συρμός κινείται επί εύθυγράμμου όριζοντίας όδοϋ με σταθεράν ταχύτητα. Ό συρμός άνευ τής άτμομηχανής ζυγίζει 180 tn*. Ποία ή έντασις τής προωστικής δυνάμεως τής άτμομηχανής, εάν ή αντίστασις κατά τήν κίνησιν τοϋ συρμού άνέρχεται εις τὰ 0,005 τής δυνάμεως τήν όποίαν άσκει επί τών σιδηροτροχιών. (Άπ. 900 kgf*.)

440. Μάζα 5 kgf ύφίσταται έπιτάχυνσιν 2 m/sec^2 . Νά εύρεθί ή δύναμις, εις Νιοϋτον, ή ένεργοϋσα επί τοϋ σώματος. (Άπ. 10 Nt.)

441. Δύναμις 300 Nt προσδίδει εις σῶμα έπιτάχυνσιν 6 m/sec^2 . Ποία ή μάζα τοϋ σώματος. (Άπ. 50 kgf.)

442. Ποία δύναμις εις τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ. άπαιτείται νά έπενεργήσῃ επί σώματος μάζης 8 kgf, διὰ νά προσδώσῃ εις αυτό έπιτάχυνσιν $0,5 \text{ m/sec}^2$. (Άπ. 4 Nt.)

443. Έπί ποίας μάζης m, έπενεργοϋσα δύναμις 0,5 Nt, προσδίδει έπιτάχυνσιν $0,02 \text{ m/sec}^2$. (Άπ. 25 kgf.)

444. Σῶμα, εύρισκόμενον εις γεωγραφικόν πλάτος 45° και παρά τήν επιφάνειαν τής θαλάσσης, έχει βάρος 8 kgf*. α) Ποία ή μάζα τοϋ σώματος, και β) ποίον τὸ βάρος του εις μονάδας Νιοϋτον. (Άπ. α' 8 kgf, β' 78,48 Nt.)

445. Τὸ ταχύμετρον αϋτοκινήτου έν κινήσει δεικνύει ταχύτητα 48 km/h , ότε διὰ τής έπενεργείας τών τροχοπεδών τὸ αϋτοκίνητον ήρεμεί μετὰ πάροδον 2,8 sec. Έάν ή μάζα τοϋ αϋτοκινήτου είναι 1450 kgf, α) πόση ή επιβράδυνσις τοϋ αϋτοκινήτου, β) πόση ή δύναμις, ή άναπτυσσομένη υπό τών τροχοπεδών, και γ) πόσον τὸ διάστημα, τὸ όποίον διανύει τὸ αϋτοκίνητον άπό τής στιγμής τής έπενεργείας τών τροχοπεδών μέχρις ότου ήρεμήσῃ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Άπ. α' $4,76 \text{ m/sec}^2$, β' 690 kgf*, γ' 18,48 m.)

446. Νά ύπολογισθί ή έπιτάχυνσις, τήν όποίαν μεταδίδει δύναμις 13,5 kgf* επί σώματος μάζης 45 kgf. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Άπ. 3 m/sec^2 .)

447. Έπιβραδύνουσα δύναμις 141 kgf* έπενεργεί επ' αϋτοκινήτου, βάρους 1075 kgf*, κινουμένου υπό ταχύτητα 48 km/h . Ζητείται μετὰ πόσον χρόνον θά σταματήσῃ τὸ αϋτοκίνητον. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Άπ. 10,2 sec.)

448. Δύναμις 200 000 dyn έπενεργεί επί σώματος μάζης 5 kgf. Έάν τὸ σῶμα άναχωρή εκ τής ήρεμίας, μετὰ πόσον χρόνον θά έχῃ άποκτήσει ταχύτητα 500 cm/sec . (Άπ. 12,5 sec.)

449. Πόση δύναμις άπαιτείται διὰ τήν ρυμούλκῃσιν ένός οχήματος μάζης 5 τόννων εις όριζόντιον έδαφος και μετάδοσιν εις αυτό έπιταχύνσεως $0,6 \text{ m/sec}^2$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Άπ. 300 kgf*.)

450. Διὰ μέσου καλωδίου μεταβιβάζεται εις άνελκυστήρα μάζης 5 τόννων δύναμις $5,5 \text{ tn}$ * διευθυνομένη πρὸς τὰ άνω. Ζητείται πόση ή έπιτάχυνσις τοϋ άνελκυστήρος και πόσον διάστημα θά διανύσῃ οϗτος έντὸς 3 sec, όταν έκκινή εκ τής ήρεμίας. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Άπ. 1 m/sec^2 , 4,5 m.)

451. Πλοiάριον μάζης 1 τόννου ρυμουλκεiται υπό ανθρώπου εύρισκομένου έντòς λέμβου. Έάν τò πλοiάριον έκκινηi έκ τής ήρεμίας, πόση ή άπαιτουμένη δύναμις διá νά διανύση διάστημα 4,5 m έντòς 5 sec. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (*Απ. 36 kgr*.)

452. Σιδηροδρομικός συρμός μάζης 200 τόννων αύξάνει τήν ταχύτητά του άπό 9 m/sec εις 18 m/sec, διανύει δέ πρòς τούτο διάστημα 2000 m. Νά υπολογισθi ή δύναμις, ή προκαλούσα τήν επιτάχυνσιν τού συρμού. (*Απ. $F = 12 \cdot 10^8 \text{ dyn}$.)

453. Έπί πόσον χρόνον πρέπει δύναμις 30 kgr* νά έπενεργηi επί σώματος βάρους 120 kgr*, ίνα ή ταχύτης αύτου άπό 5 m/sec αύξηθi εις τò δεκαπλάσιον. (*Απ. $t = 18 \text{ sec}$.)

454. Σώμα μάζης 2 kgr ύφίσταται τήν έπενέργειαν δυνάμεως 30 kgr*. Νά υπολογισθi ή επιτάχυνσιν τού σώματος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (*Απ. $\gamma = 15 \cdot 10^3 \text{ cm/sec}^2$.)

455. Έλικòν σώμα μάζης 4 gr κινείται υπό τήν ταυτόχρονον έπενέργειαν τού βάρους του καi δυνάμεως 2000 dyn, σχηματίζουσης γωνiάν 30° μετá τής όριζοντίας καi διευθυνομένης πρòς τά άνω. Νά υπολογισθi ή επιτάχυνσιν τού σώματος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (*Απ. $\gamma = 866 \text{ cm/sec}^2$.)

456. Σώμα έχον μάζαν 200 gr έξαρτάται άπό τò έν άκρον νήματος μήκους 1 m. Διá τής χειρòς ανάγκάζομεν τò σώμα νά γράφη ίσοταχώς περιφέρειαν κύκλου έν κατακορύφω επιπέδω, υπό συχνότητα 3 στροφών άνά sec. Νά υπολογισθi ή κεντρομόλος δύναμις εις kgr* καi εις dyn. (*Απ. $F = 7,24 \text{ kgr}^*$, $F = 7,11 \cdot 10^6 \text{ dyn}$.)

457. Άνθρωπος ώθει βαγόνιον τών 2 τόννων υπό σταθεράν δύναμιν 400 Nt καi επί χρόνον 30 sec. Ποiά είναι κατá τήν στιγμην αύτην ή ταχύτης τού βαγονίου. (*Απ. $v = 6 \text{ m/sec}$.)

458. Έπό ποiαν ταχύτητα πρέπει νά περιστραφi σφενδόνη εις κατακόρυφον επίπεδον, ώστε κατá τήν διέλευσιν έκ τής ύψηλοτέρας θέσεως ή τάσις T τού νήματος, τò όποιον συνδέει τò σώμα πρòς τò κέντρον τής περιστροφής, νά έξισωθi πρòς τò βάρος τού σώματος. Άριθμητική έφαρμογή: $l = 0,7 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. (*Απ. $\omega = 5,3 \text{ rad/sec}$ ή $0,84 \text{ στρ/sec}$.)

459. Συρμός κινείται υπό ταχύτητα 108 km/h. Ποiά δύναμις πεδήσεως, έκφραζομένη εις Νιούτον άνά τόννον φορτίου (Nt/tn^*) πρέπει νά εφαρμοσθi διá νά σταματήση ούτος εις άπόστασιν 1800 m. Εις ποiαν άπόστασιν θά σταματήσει ó αύτός συρμός, άνερχόμενος άνω πεδήσεως εις επικλινές έδαφος κλίσεως 1,5 %. (*Απ. $F = 250 \text{ Nt}/\text{tn}^*$, $s = 3000 \text{ m}$.)

460. Έπί σώματος μάζης 6 kgr έπενεργούν δύο δυνάμεις, έντάσεως 3 Nt έκάστη. Ζητούνται: α) Ποiά τò μέγεθος καi ή διεύθυνσις τής επιταχύνσεως, έάν αi δυνάμεις σχηματίζουν γωνiάν 90° πρòς άλλήλας, β) έάν ένεργοούν κατá τήν ίδιαν διεύθυνσιν καi φοράν, καi γ) κατ' αντίθετον φοράν. (*Απ. α) $0,7 \text{ m/sec}^2$ κατá μήκος τής διχοτόμου, β' 1 m/sec^2 , γ' 0.)

461. Εύρατε τήν δύναμιν, ήτις άπαιτείται διá νά επιταχύνη πύραυλον μάζης 450 kgr, έκκινούντα έκ τής ήρεμίας, καi νά προσδώσi εις αύτόν ταχύτητα 60 m/sec, επί μήκους όριζοντίας τροχιás 100 m. Έ λόγω τριβών επιβραδύνουσα δύναμις ίσουται πρòς 93 Nt. (*Απ. 8200 Nt.)

462. Έπί σώματος μάζης 30 gr, κινουμένου όμαλώς πρòς τά δεξιá με ταχύτητα u_0 , επιδρá σταθερά δύναμις 600 dyn, τής όποιας ή φορά είναι πρòς τ' άριστερά. Παρατηρούμεν, ότι τò σώμα σταματά μετá χρόνον 5 sec άπό τής στιγμής κατá τήν όποιαν έπέδρασεν ή δύναμις. Νά εύρεθoύν: α) ποiά ήτο ή ταχύτης u_0 τού σώματος, β) πότε θ' άλλάξi φοράν ή ταχύτης, καi γ) εις ποiαν θέσιν θά συμβηi τούτο.

(‘Απ. α' $u_0 = 100 \text{ cm/sec}$, β' μετά τὸ πέρασ τοῦ 5ου sec, γ' $s = 2,5 \text{ m.}$)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Πολιτικῶν καὶ Μηχανολόγων—‘Αλλοδαποὶ—1960).

463. Μᾶζα 1 kg ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως 9800 dyn . Ἐὰν ἐκκινή ἐκ τῆς ἡρεμίας, πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 10 sec . (‘Απ. 490 cm .)

464. Σῶμα μάζης 6 kg ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ἐπὶ 1 min καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα 10 cm/sec . Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως.
(‘Απ. 1000 dyn .)

465. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐπενεργῇ ἐπὶ μάζης 1 kg , διὰ νὰ μεταβάλῃ ὁμαλῶς τὴν ταχύτητα αὐτῆς ἀπὸ 30 cm/sec , εἰς 10 cm/sec , ἐντὸς διαστήματος 1 m .
(‘Απ. 4000 dyn .)

466. Μοτοσυκλέτα μάζης 75 kg , κινουμένη ὀριζοντίως, φθάνει τὴν ταχύτητα 30 km/h ἐντὸς 2 min . Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ δύναμις, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς, β) τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τῆς μοτοσυκλέτας μέχρις ὅτου φθάσῃ τὴν ταχύτητα ταύτην. Δὲν λαμβάνονται ὑπ’ ὄψιν αἱ τριβαί. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.)
(‘Απ. α' $0,531 \text{ kg}^*$, β' 500 m .)

467. Ἀτμάκατος μάζης 175 kg , κινουμένη ὀριζοντίως, ἀποκτᾷ ταχύτητα 45 km/h ἐντὸς 100 sec . Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ δύναμις προωθήσεως αὐτῆς, καὶ β) τὸ διανυθὲν διάστημα, ἵνα φθάσῃ τὴν ταχύτητα 45 km/h . Δὲν λαμβάνονται ὑπ’ ὄψιν αἱ τριβαί. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$.)
(‘Απ. α' $2,232 \text{ kg}^*$, β' 625 m .)

468. Ὁ σωλὴν πυροβόλου ἔχει μῆκος 6 m καὶ ρίπτει βλήμα μάζης 100 kg ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec . Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα ἡ ὀβίς διανύσῃ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος, καὶ β) ἡ ἐπὶ τῆς ὀβίδος ἀσκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ὀβίδος δύναμις διατηρεῖται σταθερὰ καθ’ ὅλον τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος.
(‘Απ. α' $t = 0,02 \text{ sec}$, β' $F = 306\,000 \text{ kg}^*$.)

469. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκπυροσκοπήσεως πυροβόλου, τὸ βλήμα ἐγκαταλείπει τὸ στόμιον τοῦ σωλῆνος μὲ ταχύτητα 570 m/sec . Βάρος βλήματος 6 kg^* . Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως τῶν αερίων, θεωρουμένης σταθερᾶς, ἐὰν ὁ σωλὴν ἔχῃ μῆκος 2 m , καὶ ποῖος ὁ χρόνος διαδρομῆς τοῦ βλήματος διὰ τοῦ σωλῆνος.
(‘Απ. $F = 49,7 \text{ tn}^*$, $t = 0,007 \text{ sec}$.)

470. Αὐτοκίνητον βάρους 1200 kg^* , τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα 90 km/h , θέλομεν νὰ σταματήσῃ, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 50 m . Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν ἐφαρμοζομένη δύναμις καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος μέχρις ὅτου σταματήσῃ.
(‘Απ. $764,5 \text{ kg}^*$, 4 sec .)

471. Σφαῖρα ὅπλου ἔχει μᾶζαν 25 gr καὶ ἐξέρχεται τῆς κάννης ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec . Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, ἵνα ἡ σφαῖρα διανύσῃ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κάννης, ὅταν αὕτη ἔχῃ μῆκος 75 cm , β) ἡ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀσκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ δύναμις ἦτις ὠθεῖ τὴν σφαῖραν εἶναι σταθερὰ καθ’ ὅλον τὸ μῆκος τῆς κάννης. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$.)
(‘Απ. α' $0,0025 \text{ sec}$, β' $6 \cdot 10^8 \text{ dyn}$ ἢ 612 kg^* .)

472. Πόσον περίπου θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος πυροβόλου προωρισμένου νὰ ρίπτῃ βλήμα 50 kg ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec , εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς ὀβίδος δύναμις νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ $150\,000 \text{ kg}^*$.
(‘Απ. $6,1 \text{ m}$.)

473. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα σιδηροδρομικὸς συρμὸς μάζης 25 τόννων ἀποκτήσῃ ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 50 kg^* ταχύτητα $v = 2 \text{ m/sec}$ κινούμενος ἐπὶ ὀριζοντίῳ ἐδάφους. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$.)
(‘Απ. 100 sec .)

474. Αυτοκίνητον αναχωρεί ἐκ τῆς ἡρεμίας μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀποκτᾷ μετὰ 10 sec ταχύτητα 72 km/h. Ζητοῦνται : α) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεώς του. β) Ποῖον τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον κατὰ τὰ 10 sec. γ) Κατὰ τίνα στιγμήν ὁ ὁδηγὸς τροχοπεδεῖ καὶ σταματᾷ τὸ ὄχημα μετὰ 50 m· ποία ἡ ἐπιβράδυνσις καὶ πόση ἡ διάρκειά της.
(᾿Απ. α' 200 cm/sec. β' 100 m. γ' 400 cm/sec², 5 sec.)

475. Δύο μᾶζαι 100 gr καὶ 800 gr ὑφίστανται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως σταθερᾶς καὶ ἴσης πρὸς 5 Nt. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἐπιταχύνσεων τῶν δύο μαζῶν καὶ ποῖαι αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ αὐτῶν.
(᾿Απ. 8 : 1, 50 m/sec², 6,25 m/sec².)

476. Ἀμαξοστοιχία, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα εἶναι 720 τόννοι, κινεῖται ὀριζοντιῶς ὑπὸ ταχύτητα 54 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) ἡ δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰς τροχοπέδας, διὰ νὰ σταματήσῃ ἡ ἄμαξοστοιχία ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 300 m, καὶ β) ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τὴν στιγμήν ἐπενεργείας τῶν τροχοπεδῶν μέχρις ὅτου ὁ συρμὸς σταματήσῃ. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$).
(᾿Απ. α' 27 552 kg·r, β' 40 sec.)

477. Ἐπὶ ἐνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον εἰς κανονικὸν τόπον ἐπὶ τῆς Γῆς ἔχει βάρος 100 kg·r, ἐπενεργεῖ ἐπὶ χρονικὸν διάστημα 8 sec σταθερὰ ἐπιταχύνουσα δύναμις ἐντάσεως 30 kg·r. Τί διάστημα διήνυσεν τὸ σῶμα κινούμενον κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν.
(᾿Απ. s = 94,176 m.)

478. Ὅχημα μάζης 150 kg·r, ἡρεμοῦν ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ, ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ἐντάσεως 30 kg·r, ἐπὶ χρόνον 10 sec. Ποῖον τὸ ὑπὸ τοῦ σώματος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανυθὲν διάστημα, παραλειπομένων ὡς ἀμελητέων τῶν τριβῶν. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).
(᾿Απ. s = 98,1 m.)

479. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἐπενεργήσῃ δύναμις ἐντάσεως 10 kg·r ἐπὶ σώματος ζυγίζοντος εἰς κανονικὸν τόπον 50 kg·r, διὰ νὰ τὸ μετακινήσῃ κατὰ 20 m.
(᾿Απ. t = 4,5 sec.)

480. Εἰς κανονικὸν τόπον, ὄχημα ζυγίζον 1000 kg·r καὶ κινούμενον ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ, διὰ τῆς ἐπενεργείας σταθερᾶς δυνάμεως, ὀφείλει ἐντὸς χρόνου 6 min νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητα του ἀπὸ 4 m/sec εἰς 40 m/sec. Ποία ἡ ἐντασις τῆς δυνάμεως, ὅταν παραλείπωνται αἱ τριβαί.
(᾿Απ. F = 10,2 kg·r.)

481. Σταθερὰ δύναμις 30 Nt ἐνεργεῖ ὑπὸ γωνίαν 25° ἐπὶ ἀντικειμένου μάζης 25 kg·r. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἀντικειμένου, ἀφοῦ διανύσῃ ἀπόστασιν 1,5 m.
(᾿Απ. v = 1,9 m/sec.)

482. Ποία δύναμις εἰς Νιοῦτον, κατὰ μέσον ὅρον, ἀπαιτεῖται, ἵνα σταματήσῃ ἀντικείμενον μάζης 500 kg·r καὶ ταχύτητος 40 m/sec εἰς ἀπόστασιν 100 m.
(᾿Απ. 4000 Nt.)

483. Δύναμις 200 Nt ἐνεργεῖ ἐπὶ ὀχήματος βάρους 500 kg·r. Ἐὰν ἡ δύναμις ἐνεργῇ ἐπὶ 25 sec, ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ ὀχήματος.
(᾿Απ. 10 m/sec.)

484. Πόση δύναμις εἰς Νιοῦτον ἀπαιτεῖται, ἵνα μεταβάλῃ τὴν ταχύτητα ἀντικειμένου βάρους 12 kg·r ἀπὸ 30 m/sec εἰς 16 m/sec εἰς ἀπόστασιν 20 m.
(᾿Απ. 192 Nt.)

485. Κατὰ πόσον μεγεθύνεται ἡ μᾶζα ἡρεμίας 70 kg ἐνὸς ἀνθρωπίνου σώματος, ὅταν κινῆται : α) ἐντὸς αυτοκινήτου (100 km/h), β) ἐντὸς ἀεροπλάνου (800 km/h). Ποῖον πρακτικὸν ἀποτέλεσμα ἔχουν αἱ αὐξήσεις αὗται.
(᾿Απ. α' $\Delta m = 30,1 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$, β' $\Delta m = 1,92 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$. γ' Ἀσήμαντον.)

486. Ποία ή μάζα ατμομηχανής, κινουμένης με ταχύτητα 120 km/h, όταν ή μάζα ήρεμίας αυτής είναι 100 tn. Ποία ή αύξησης τής μάζης.

(Απ. $m = 100,000\,000\,000\,000\,006\,2$ tn, $\Delta m = 0,62 \cdot 10^{-14}$ tn $= 0,62 \cdot 10^{-2}$ μgr.)

487. Πόσον επί τοις εκατόν αύξάνει μάζα m_0 ήρεμουστος σώματος, όταν τουτο κινείται με ταχύτητα ίσην προς 80% τής ταχύτητος του φωτός. (Απ. $66\frac{2}{3}\%$.)

488. Με ποίαν ταχύτητα πρέπει νά κινείται σώμα διά νά διπλασιασθῇ ή μάζα ήρεμίας αυτού. (Απ. $v = 2,6 \cdot 10^8$ m/sec.)

489. Μάζα 60 gr κινείται επί κύκλου ακτίνας 25 cm εκτελούσα 2 στρ/sec. Νά υπολογισθοῦν: α) ή γραμμική ταχύτης εις cm/sec, β) τό μέγεθος και ή διεύθυνσις τής επιταχύνσεως, γ) ή κεντρομόλος δύναμις.

(Απ. α' 100 π cm/sec, β' 400 π² cm/sec², προς τό κέντρον, γ' 24 500 π² dyn.)

490. Έν κινητόν κινείται επί περιφερείας κύκλου ακτίνας $r = 0,50$ m. Νά εύρεθῇ ή ταχύτης του, όταν ή κεντρομόλος δύναμις ίσοῦται με τό βάρος του. ($g = 10$ m/sec²). (Απ. $v = 2,246$ m/sec). (Σχολή Έμποροπολιάρχων, 1958).

491. Λίθος μάζης 1 kgf έξαρτάται έκ του άκρου νήματος 0,5 m και τίθεται εις κυκλικήν περιστροφικήν κίνησην, εκτελών 3 στροφάς κατά sec. Ποία ή κεντρομόλος δύναμις εις Νιούτον. (Απ. $F = 177,65$ Nt.)

492. Σώμα μάζης 0,2 kgf έξαρτάται από τό άκρον νήματος μήκους 40 cm και περιστρέφεται κυκλικώς έν κατακόρυφω επιπέδω, με σταθεράν γραμμικήν ταχύτητα 200 cm/sec. Ποίαν δύναμιν άσκει τό νήμα εις τό άνωτάτον και τό κατώτατον σημείον τής τροχιάς. ($g = 10$ m/sec²). (Απ. $F_1 = 0$, $F_2 = 4$ Nt.)

493. Άντικείμενον μάζης 5 kgf κινείται επί κυκλικής τροχιάς, διαμέτρου 0,4 m με ταχύτητα 3,5 m/sec. Ποία ή κεντρομόλος δύναμις του εις Νιούτον. (Απ. 306 Nt.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

494. Σώμα μάζης 8 kgf, εύρισκόμενον επί όριζοντίου στρώματος πάγου, κινείται υπό την επενέργειαν δυνάμεως έντάσεως 4 kgf* και σχηματίζούσης γωνίαν 60° με τό όριζόντιον επίπεδον. Ποία ή επιτάχυνσις τής κινήσεως και ποίον τό υπό του σώματος διανυόμενον διάστημα εις χρόνον 6 sec, όταν παραλείπεται ή τριβή.

(Απ. $\gamma = 2,45$ m/sec², $s = 44,10$ m.)

495. Σιδηροδρομικός συρμός συνίσταται έκ τής ατμομηχανής, έξ ενός άνθρακοφόρου βαγονίου 45 tn*, μιάς σκευοφόρου 20 tn* και έκ 5 όχημάτων δι' επιβάτας, έκαστον τών όποιων ζυγίζει 48 tn*. Με ποίαν δύναμιν τείνονται αί ζεύξεις τών όχημάτων και ποία ή προσωστική δύναμις τής ατμομηχανής, όταν ή αντίστασις του σύρματός κατά την κίνησην ίσοῦται προς τό 1/200 του βάρους του. Νά θεωρηθῇ ότι ή αντίστασις κατανέμεται έξ ίσου επ' όλου του συρμού έν σχέσει προς τό βάρος.

(Απ. Προωστική δύναμις 1525 kgf*, την όποιαν μεταβιβάζει ή ζεύξις τής ατμομηχανής. Η ζεύξις του τελευταίου όχήματος 240 kgf*, ή του προτελευταίου $2 \cdot 240 = 480$ kgf* κ.ο.κ.)

496. Αυτοκίνητον μάζης 1600 kgf εισέρχεται επί καμπυλογράμμου τροχιάς ακτίνας καμπυλότητος 225 m με ταχύτητα 72 km/h. Πόση πρέπει νά είναι ή κλίσις τής όδου, ίνα άποφευχθῇ κάθε παρέκκλισις. Πόση είναι τότε ή άσκουμένη δύναμις υπό του όχήματος επί του έδάφους. ($g = 9,8$ m/sec²). (Απ. 11,4°, 1888 kgf*.)

497. Λίθος μάζης 1 kg, συνδεδεμένος εις τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους 0,5 m, στρέφεται ἐπὶ κατακόρυφου ἐπιπέδου, ὥστε νὰ ἐκτελῇ 4 στρ./sec. Εἰς πόσῃν δύναμιν ὁ φεῖλει νὰ ἀντέχῃ τὸ σχοινίον. (Ἀπ. 33,195 kgf*.)

498. Ποδηλατιστής, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα μετὰ τοῦ ποδηλάτου εἶναι 90 kg, μετατοπίζεται ἐπὶ στίβου ὁριζοντίου καὶ κυκλικοῦ ἁκτίνος 50 m καὶ ὑπὸ ταχύτητα 27 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ κεντρομόλος δύναμις, τὴν ὁποίαν υφίσταται ὁ ποδηλατιστής, καὶ β) ἡ κλίσις τοῦ ποδηλατιστοῦ ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. ($g = 980$ cm/sec²). (Ἀπ. 10,332 kgf*, $\alpha = 6^\circ 33'$.)

499. Ἀτμομηχανὴ 150 τόννων εἰσέρχεται ἐπὶ καμπύλης τροχιάς ἁκτίνας 500 m καὶ ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ κεντρομόλος δύναμις, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπὸκειται ἡ ἀτμομηχανή. β) Ἡ διαφορὰ ὕψους μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς σιδηροτροχιάς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀπόστασις τῶν σιδηροτροχιῶν ἐπὶ κανονικῆς ὁδοῦ εἶναι 1,44 m καὶ ὅτι τὸ πλάτος ἐκάστης εἶναι 6 cm. ($g = 980$ cm/sec²). (Ἀπ. α' 12 245 kgf*, β' 12,24 cm.)

500. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γραμμικὴ ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἀνοικτὸν δοχεῖον περιστρεφόμενον ἐπὶ κατακόρυφου ἐπιπέδου, ἵνα τὸ ὕγρον τὸ ὁποῖον περιέχει μὴ χυθῇ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Ἀκτίς τῆς διαγραφομένης περιφερείας 1,25 m, ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 9,81 m/sec². (Ἀπ. $v \geq \sqrt{g \cdot r}$, 350 cm/sec.)

501. Ἡ ἀντοχὴ θραύσεως σχοινίου μήκους 49 cm εἶναι 2 kgf*. Μᾶζα 500 gr προσαρμύζεται εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου καὶ περιστρέφεται ἐπὶ ὁριζοντίου κύκλου. (Ἡ βαρύτης δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς στροφῶν ἀνά sec, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ δοθῇ εἰς τὴν μᾶζαν χωρὶς νὰ θραυσθῇ τὸ σχοινίον. (Ἀπ. 1,42 στρ./sec.)

502. Πόσην πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως στίβου ποδηλατοδρομίου ἁκτίνας καμπυλότητος 280 m, ἵνα ποδηλάτης κινῆται μετ' ἀσφαλείας ἐπὶ τοῦ στίβου ὑπὸ ταχύτητα 160 km/h. (Ἀπ. $\theta = 35,2^\circ$.)

503. Ποδηλατιστής ζυγίζει μετὰ τοῦ ποδηλάτου 90 kgf* καὶ κινεῖται ἐπὶ κυκλικοῦ ποδηλατοδρομίου (στίβου), παρουσιάζοντος κλίσιν. Ἡ διάμετρος τῆς τροχιάς τὴν ὁποίαν διαγράφει εἶναι 40 m καὶ ἡ ταχύτης του 30 km καθ' ὥραν. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ κλίσις τῆς τροχιάς καὶ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ στίβου ἐκ μέρους τοῦ ποδηλατιστοῦ. (Ἀπ. $\theta = 19^\circ 9'$, 95,27 kgf*.)

504. Συρμὸς μάζης 400 τόννων διέρχεται διὰ τροχιάς ἁκτίνας καμπυλότητος 900 m ὑπὸ ταχύτητα 70 km/h. Μὲ πόσῃν δύναμιν ὁ συρμὸς πιέζει πλευρικῶς τὴν γραμμὴν. Κατὰ πόσον πρέπει ἡ ἐξωτερικὴ σιδηροτροχιά νὰ ὑψωθῇ, ὥστε ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιάς νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. (Ἀπ. $1,68 \cdot 10^5$ Nt, $h = 6$ cm.)

505. Ἀπὸ νῆμα μήκους 80 cm, παρουσιάζον ὄριον θραύσεως 8 kgf* ἐξαρτᾶται σφαῖρα μολύβδου μάζης 500 gr, ἡ ὁποία τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν, ἵνα τὸ νῆμα θραυσθῇ. (Ἀπ. 2,25 sec⁻¹.)

506. Φυγοκεντρικὴ μηχανὴ γάλακτος φέρει τύμπανον διαμέτρου 60 cm τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ 5400 στρ./min. Πόση δύναμις ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τυμπάνου, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ διὰ φυγοκεντρήσεως τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν λιποσφαιρίων τοῦ γάλακτος, ὅταν ἕκαστον λιποσφαίριον ἔχῃ διάμετρον 0,3 mm, ἡ δὲ πυκνότης τοῦ λίπους εἶναι $\rho = 0,93$ gr/cm³. (Ἀπ. $9,49 \cdot 10^{-5}$ Nt = 10 mgrf*, περίπου.)

507. Ἀμαξοστοιχία κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 72 km/h ἐπὶ καμπύλης τροχιάς ἁκτίνας 500 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἥτις ἀναγκάζει ταξιδιωτὴν βάρους 70 kgf* νὰ ἀκολουθῇ τὴν τροχίαν ταύτην. ($g = 9,81$ m/sec²). (Ἀπ. 5,708 kgf*.)

508. Ποίος ό ελάχιστος αριθμός στροφών ανά λεπτόν (στρ/min), τός όποιός πρέπει νά έκτελῇ ἐπί κατακορύφου ἐπιπέδου άνοικτόν δοχείον πλήρες ύδατος, ίνα μή πίπτει τό ύδωρ έξ αὐτοῦ. Ἀριθμητική ἐφαρμογή: Ἀκτίς τῆς διαγραφομένης περιφερείας 1,25 m, ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 9,80 m/sec². (Ἀπ. 26,75 στρ/min.)

509. Ποία εἶναι ἡ ἐλάχιστή ταχύτησ τῇν όποιάν πρέπει νά ἔχῃ κάδος ύδατος, ίνα περιστρέφεται ἐπί κατακορύφου ἐπιπέδου άκτίνας 0,4 m, χωρίς νά χυθῇ τό ύδωρ. Εἰς πόσας στρ/min ἐκφράζεται αὕτη. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 1,97 m/sec, 48 στρ/min.)

510. Ἀεροπλάνον μάζης 1300 kgf κινεῖται περίξ ἰστοῦ ὑπό ταχύτητα 380 km/h, ἡ δέ γωνία κλίσεως αὐτοῦ εἶναι 60°. Ζητοῦνται ἡ άκτίς τῆς τροχιάς του καί ἡ κεντρομόλος δύναμις. (Ἀπ. $F = 2252 \text{ kgf}^*$, $r = 649 \text{ m}$.)

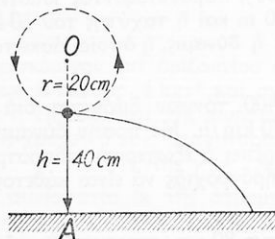
511. Ὑλικόν σῶμα μάζης 4 gr κινεῖται ὑπό τὴν ταυτόχρονον ἐπενέργειαν τοῦ βάρους του καί δυνάμεως 2000 dyn, σχηματίζουσης γωνίαν 30° μετὰ τῆς ὀριζοντίας καί διευθυνομένης πρὸς τὰ άνω. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $\gamma = 866 \text{ cm/sec}^2$.)

512. Λίθος μάζης 3 kgf, ἐξηρημένος εἰς τό άκρον νήματος μήκους 1 m, περιστρέφεται κυκλικῶς ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ μέ όλονέν αὐξανόμενην ταχύτητα. Εἰς ποίαν γραμμικήν ταχύτητα τοῦ λίθου θραύεται τό νήμα, όταν ἡ άντοχή θραύσεως αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς 6 kgf*. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $v = 3,16 \text{ m/sec}$.)

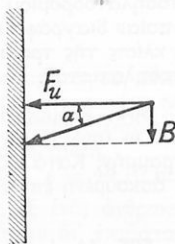
513. Ὅχημα βάρους 1000 kgf* κινεῖται ἐπί κυκλικῆς ὁδοῦ άκτίνας 120 m. Ἡ διὰ λόγους άσφαλείας ἐπιτρεπομένη φυγόκεντρος δύναμις δέν πρέπει νά ὑπερβαίνει τὴν τιμὴν τῶν 30 kgf*. Ποία ἡ ὑπό τὰς συνθήκας αὐτὰς ἐπιτρεπομένη μεγίστη γραμμική ταχύτης. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $v_m = 21,6 \text{ km/h}$.)

514. Ἐλκθρον κινεῖται ἐπί κυκλικῆς τροχιάς 50 m. Ποία ἡ ἐλάχιστη κλίσις τῆς ὁδοῦ, διὰ νά μή ἐκφεύγῃ τῆς τροχιάς του κινούμενον μέ ταχύτητα 25 m/sec. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $\phi = 51^\circ 20'$.)

515. Μάζα $m = 1 \text{ kgf}$ προσδένεται εἰς τό άκρον νήματος μήκους 20 cm καί μεγίστης ἐπιτρεπομένης φορτίσεως 6 kgf* καί τίθεται εἰς κυκλικήν περιστροφικήν κίνησιν ἐπί κατακορύφου ἐπιπέδου μέ όλονέν αὐξανόμενην ταχύτητα. Τό κατώτερον σημεῖον τῆς τροχιάς πρέπει νά απέχῃ άπόστασιν 40 cm άπό τοῦ ἐδάφους. Εἰς ὥρισμένην γραμμικήν ταχύτητα θραύεται τό νήμα. α) Ποία ἡ γραμμική αὕτη ταχύτης, β) εἰς ποίαν άπόστασιν άπό τοῦ Α συναντᾷ ἡ μάζα τό ἐδάφος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).



Ἀσκήσις 515.



Ἀσκήσις 516.

ἡ μάζα τό ἐδάφος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' $v = 3,16 \text{ m/sec}$. β' $x = 0,89 \text{ m}$.)

516. Μοτοσυκλετιστής κινεῖται κυκλικῶς ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας καθέτως τοποθετημένου κυλίνδρου, άκτίνας 8 m. Ἡ συνισταμένη τοῦ βόρους καί τῆς φυγόκεντρον ὀφείλει νά σχηματίζῃ μέ τό ἐπίπεδον τῆς τροχιάς τό πολὺ γωνίαν $\alpha = 20^\circ$, διότι εἰς μεγαλύτερας γωνίας οἱ τροχοὶ ὀλισθαίνουν (γλιστροῦν). Ποία ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τῆς γραμμικῆς ταχύτητος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ἀπ. $v = 53 \text{ km/h}$.)

517. Μεταλλική σφαίρα μάζης 4 kg, εξηρητημένη εις τὸ ἄκρον νήματος μήκους 60 cm, περιστρέφεται διαγράφουσα κατακόρυφον κύκλον. α) Πόσας περιστροφὰς πρέπει νὰ ἐκτελῇ κατὰ λεπτόν, διὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἡ τάσις τοῦ νήματος εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον, β) πόσας περιστροφὰς τὸ πολὺ πρέπει νὰ ἐκτελῇ κατὰ λεπτόν, ὅταν ἡ μεγίστη ἐπιτρεπομένη φόρτισις τοῦ νήματος ἰσοῦται πρὸς 40 kg*. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' 39 min⁻¹. β' 117 min⁻¹.)

518. Σιδηροδρομικὴ γραμμὴ, μὲ σιδηροτροχιάς ἀπεχούσας 1,5 m μεταξύ των, παρουσιάζει καμπὴν ἀκτίνος καμπυλότητος 120 m, χωρὶς νὰ ἐμφανίζῃ κλίσιν. Ποία ἡ μεγίστη ἐπιτρεπομένη ταχύτης τῆς ἀτμομηχανῆς, τὸ κέντρον βάρους τῆς ὁποίας ἀπέχει 1 m ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν σιδηροτροχιῶν, διὰ νὰ μὴ συμβῇ ἐκτροχιασμός. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $v = 30 \text{ m/sec}$ περίπου = 108 km/h.)

519. Σιδηροδρομικὴ γραμμὴ, τῆς ὁποίας αἱ σιδηροτροχιαὶ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν 1,5 m, σχηματίζει κυκλικὴν καμπὴν ἀκτίνος καμπυλότητος 800 m. Ἐὰν ὁ συρμός διατρέχῃ τὴν καμπὴν μὲ ταχύτητα 10 m/sec, κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ ἡ ἐξωτερικὴ σιδηροτροχιά, ὥστε νὰ ἀποφευχθῇ ὁ κίνδυνος ἐκτροχιάσεως. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $h = 1,9 \text{ cm}$.)

520. Κρεμαστός κύλαθος ἀνεκλύσεως ἀνασύρεται ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενος καὶ ἀποκτᾷ ἐντὸς χρόνου 4 sec ταχύτητα 4 m/sec. Κατὰ πόσον τοῖς ἑκατόν τοῦ βάρους των φαίνονται ὡς βαρύτερα καὶ ἐντὸς τοῦ καλάθου ἀνασυρόμενα ἀντικείμενα κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην διάρκειαν. (Ἀπ. 10 %.)

521. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τάσις τοῦ σύρματος ἀναρτήσεως ἀνελκυστήρος, μάζης 8 τόνων, ὅταν οὗτος τῇ ἐπιδράσει τοῦ κινητήρος ἀποκτᾷ σταθερὸν ἐπιτάχυνσιν 1,2 m/sec². (Ἀπ. $T = 8,96 \text{ tn}^*$ καὶ $T = 7,04 \text{ tn}^*$.) (Στρατιωτικὴ Ἱατρικὴ Σχολή, 1958).

522. Ἀνελκυστὴρ βάρους 270 kg* περιλαμβάνει 5 ἀνθρώπους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει βάρος 65 kg*. Νὰ υπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ καλωδίου τοῦ ἀνελκυστήρος: α) ὅταν οὗτος ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 1 m/sec², β) ὅταν κατέρχεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' 654,5 kg*, β' 535,5 kg*.)

523. Ἀνθρώπος ἔχων βάρος 68 kg* εὐρίσκεται ὀρθίος ἐντὸς ἀνελκυστήρος. Νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ οὗτος ἐπὶ τοῦ διαπέδου τοῦ ἀνελκυστήρος εἰς τὰς ἀκολουθούσας περιπτώσεις: α) ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν 2 m/sec², β) ὅταν ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 4 m/sec, γ) ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα καὶ ἀποτόμως ἐπιβραδύνῃ τὴν κίνησιν του μὲ ἐπιβράδυνσιν 1,5 m/sec² (ἡ ἐπιτάχυνσιν $-1,5 \text{ m/sec}^2$), δ) ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ κατέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 6 m/sec. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' 81,6 kg*, β' 68 kg*, γ' 57,8 kg*, δ' 68 kg*.)

524. Ἀνελκυστὴρ, ὁ ὁποῖος μετὰ τοῦ φορτίου του ζυγίζει 8 τόνους, κατέρχεται μὲ ταχύτητα 270 m/min. Ἐὰν τὸ φορτίον ἐπὶ τοῦ καλωδίου δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ τοὺς 14 τόνους, πόσον εἶναι τὸ βραχύτερον διάστημα, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει οὗτος νὰ σταματήσῃ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 1,35 m.)

525. Μάζα 5 kg εἶναι ἐξηρητημένη ἀπὸ ζυγὸν δι' ἐλατηρίου, ὁ ὁποῖος εἶναι βαθμολογημένος εἰς kg*, ἐξαρτᾶται δὲ ὁ ζυγὸς ἀπὸ τῆς ὁροφῆς ἀνελκυστήρος. Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $g = 10 \text{ m/sec}^2$, νὰ καθορισθοῦν αἱ ἐνδείξεις τοῦ ζυγοῦ εἰς τὰς ἀκολουθούσας περιπτώσεις: α) ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ εἶναι ἀκίνητος, β) ὅταν ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 3 m/sec, γ) ὅταν ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 3 m/sec², δ) ὅταν κατέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 3 m/sec², ε) ὅταν κατέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 3 m/sec.

(Ἀπ. α' 5 kg*, β' 5 kg*, γ' 6,5 kg*, δ' 3,5 kg*, ε' 5 kg*.)

526. Διατί είναι επικίνδυνοι δια τὸν ἄνθρωπον μόνον αἱ ὑψηλαί ἐπιταχύνσεις καὶ ὄχι αἱ ὑψηλαὶ ταχύτητες. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους τοῦ σώματός του δύναται ὁ ἄνθρωπος νὰ ὑποφέρει ἐπιταχύνσεις μέχρι τοῦ τετραπλασίου τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἀνέτως, ἐνῶ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ σώματος δύναται τις νὰ ὑποστήῃ ἐπιταχύνσεις μέχρι τιμῆς δεκαοκταπλασίας τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος δι' ὀλίγα λεπτά. Αἱ τιμαὶ αὗται παρουσιάζουν ἰδιαίτεραν σημασίαν διὰ τὴν ἐκκίνησιν ἐπιηδρωμένων πυραύλων. Κατὰ ποίαν διεύθυνσιν κινεῖται τὸ αἷμα ἀνθρώπου, ἐπιταχυνομένου κατὰ μήκος τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ μὲ φορὰν πρὸς τὴν κεφαλὴν. Ποῖα δυνάμεις ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ ἐπιταχυνθῇ ἄνθρωπος, μάζης 75 kg, μὲ ἐπιταχύνσεις ἴσας πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερομένας. Ποῖος ὁ λόγος τῶν δυνάμεων αὐτῶν πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἀνθρώπου.

(Ἄπ. Ἐκ τοῦ τύπου $F = m\gamma$ συνάγομεν ὅτι μόνον κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐπιταχύνσεων, δηλαδὴ τῶν μεταβολῶν ταχύτητος, ὑπείσέρχονται δυνάμεις δρῶσαι ἐπὶ τῶν κινουμένων σωμάτων καὶ ὄχι κατὰ τὴν διάρκειαν σταθερῶν ταχυτήτων. Τὸ αἷμα ἐγκαταλείπει τὴν κεφαλὴν. Ἐκ τοῦ τύπου $B = mg$, θὰ ἔχωμεν: $B_1 = 4\text{ g}$ καὶ $B_2 = 18\text{ g}$, ἀντιστοίχως, ἥτοι 300 kg^* καὶ 1350 kg^* .)

527. Δύο σώματα Α καὶ Β, μάζης 8 kg καὶ 2 kg ἀντιστοίχως, ἤρεμοῦν κείμενα ἐπὶ λείας, ἐπιπέδου καὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας, ἐφαπτόμενα ἀλλήλων. Κατά τινα χρονικὴν στιγμήν ἐνεργοῦν ἐπὶ τῶν σωμάτων Α καὶ Β δύο δυνάμεις, 0,70 Nt καὶ 1,4 Nt ἀντιστοίχως, κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ζητοῦνται: α) Μετὰ πόσον χρόνον τὰ σώματα ἔχουν ἀπομακρυνθῇ κατὰ 5 m. β) Ποία ἡ ταχύτης ἐκάστου σώματος κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν.

(Ἄπ. α' 4 sec. β' 0,35 m/sec καὶ 2,8 m/sec.)

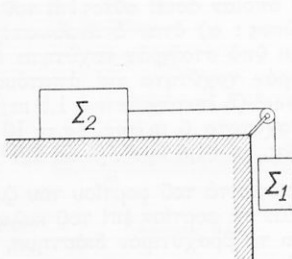
528. Σῶμα μάζης 3 kg κινεῖται κατὰ μήκος λείας ὁριζοντίας ἐπιφανείας μὲ ταχύτητα u_0 . Κατά τινα χρονικὴν στιγμήν ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ σώματος δύναμις 18 Nt, φορᾶς ἀντιθέτου πρὸς τὴν κίνησιν του, ὅποτε ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ἐλαττοῦται εἰς τὸ ἡμισυν τῆς ἀρχικῆς τῆς τιμῆς καὶ ἀφοῦ τὸ σῶμα διανύσῃ διάστημα 9 m, ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως. Ζητοῦνται: α) Ἐντὸς πόσου χρόνου συμβαίνει τοῦτο, β) Ποία ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος u_0 .

(Ἄπ. α' 1 sec, β' 12 m/sec.)

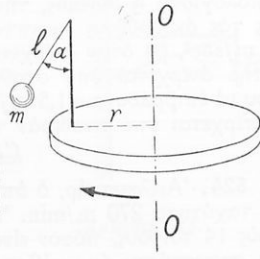
529. Τὸ σῶμα Σ_1 , πίπτειν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, σύρει τὸ σῶμα Σ_2 , εἰς τὸ ὁποῖον δίδει ἐπιτάχυνσιν 2 m/sec^2 . Ἡ μάζα τοῦ σώματος Σ_1 εἶναι 10 kg. Ζητεῖται ἡ μάζα τοῦ σώματος Σ_2 . Αἱ μάζαι τῆς τροχαλίας καὶ τοῦ σχοινίου, καθὼς καὶ αἱ τριβαὶ θεωροῦνται ἀμελητέαι. Δίδεται $g = 9,80\text{ m/sec}^2$.

(Ἄπ. 39 kg.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1961).



*Άσκησης 529.



*Άσκησης 530.

530. Κατακόρυφος ράβδος στερεοῦται ἐπὶ ὁριζοντίου περιστρεφομένης τραπέζης. Σφαῖρα μάζης m ἀναρτᾶται διὰ νήματος μήκους l ἐκ τοῦ ἀνω ἄκρου τῆς κατακόρυφου ράβδου. Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω τῆς περιστρεφομένης τραπέζης, ἐὰν τὸ νῆμα σχηματίζῃ γωνίαν 45° μετὰ τῆς κατακόρυφου. Τὸ μήκος τοῦ νήματος εἶναι 6 cm καὶ ἡ ἀπόστασις μετὰ τῆς ράβδου καὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστρεφομένης τραπέζης εἶναι 10 cm.

(Ἄπ. $\omega = 8,3\text{ rad/sec.}$)

531. Ρυθμιστής του Watt ἐν κινήσει ἐκτελεῖ ν στροφὰς ἀνὰ λεπτόν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος h τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο βραχίονες τοῦ ρυθμιστοῦ. (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικόν, 1962).
(Ἀπ. $h = 900 \text{ g}/51^{\circ} \cdot \nu^{12}$.)

532. Πύραυλος ἐκτοξεύεται ὀριζοντίως, κινούμενος περίξ τῆς Γῆς. Ὑπολογίσατε τὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ἀμελητέαν τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, ὡς ἀκτίνα δὲ περιφορὰς λαμβάνομεν τὴν ἀκτίνα τῆς Γῆς. ($R = 6400 \text{ km}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$.) (Πανεπιστήμιον Θεσ/νίκης, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φυσιγνωστικόν, 1962).
(Ἀπ. 8000 m/sec .)

533. Δύο λέμβοι, προσδεδεμένοι μεταξύ των διὰ σχοινίου, εὐρίσκονται ἐντὸς λίμνης. Ἀνθρώπος εὐρισκόμενος ἐντὸς τῆς πρώτης λέμβου ἔλκει τὸ σχοινίον μὲ σταθερὰν δύναμιν 5 kg^* . Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς ἔλκομένης λέμβου σχετικῶς πρὸς τὴν ἀκτὴν καὶ πρὸς τὴν ἐτέραν λέμβον 5 sec μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς δράσεως τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως. Ἡ μάζα τῆς πρώτης λέμβου εἶναι 250 kg , συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἀνθρώπου, τῆς δὲ δευτέρας 500 kg . Ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.
(Ἀπ. 1 m/sec , $1,5 \text{ m/sec}$.)

534. Σῶμα τι ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 44 m/sec . Ἀπὸ τοῦ τέρατος τῆς διαδρομῆς τοῦ σώματος ἐκσφενδονίζεται ταυτοχρόνως πρὸς τὰ κάτω κατακορύφως ἕτερον σῶμα μὲ ταχύτητα 40 m/sec . Ποῦ καὶ πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο σώματα καὶ ποῖαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ τὴν συνάντησίν των. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα. (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀλλοδαποὶ Σχολῶν Πολιτικῶν, Μηχανολόγων, Χημικῶν, 1962).
(Ἀπ. $h = 43,99 \text{ m}$, $v_1 = 32,5 \text{ m/sec}$, $v_2 = 51,5 \text{ m/sec}$.)

535. Βλήμα ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ $v_0 = 20 \text{ m/sec}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 15 m . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 1 sec .)
(Δημοσία Σχολή Ὑπομηχανικῶν Θεσσαλονίκης, 1961).

536. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 500 \text{ m/min}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τὸ σῶμα, καθὼς καὶ ὁ χρόνος ἀνόδου αὐτοῦ. Δίδεται $g = 10 \text{ m/sec}^2$. (Σχολή Ἐμποροπλοιαρχῶν, 1961).
(Ἀπ. $3,47 \text{ m}$, $5/6 \text{ sec}$.)

537. Ἀνελκυστὴρ μάζης $m = 500 \text{ kg}$ κατέρχεται μὲ ταχύτητα $v = 6 \text{ m/sec}$. Κατὰ τινα στιγμήν ἐπιβραδύνεται καὶ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα $4,5 \text{ m}$ σταματᾷ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ συρματοσχοινίου τοῦ ἀνελκυστήρος. Δίδεται $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. $703,3 \text{ kg}^*$.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Χημικόν, 1961).

538. Δίδεται ἀνελκυστὴρ βάρους 500 kg^* . Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποῖαν ἔλκεται οὗτος ἀπὸ τὸ καλώδιον ὅταν κινῆται ἐπιταχυνόμενος, ἐκκινῶν δὲ ἐκ τῆς ἡρεμίας ἀποκτᾷ ταχύτητα $v = 2 \text{ m/sec}$ εἰς 2 sec . Ἀπὸ τὴν στιγμήν αὐτὴν ἔχει τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ διανύει διάστημα $2,5 \text{ m}$, ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν του θέσιν. Νὰ εὑρεθοῦν ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ὕψος αὐτό, τὸ καταναλισκόμενον ἔργον καὶ ἡ δύναμις F εἰς τὴν πρώτῃν φάσιν τῆς κινήσεως. (Ἀπ. $2,25 \text{ sec}$, $1350 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$, 550 kg^* .) (Πανεπιστήμιον Θεσ/νίκης, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Φυσιγνωστικόν Τμήμα, 1961).

539. Ἐπὶ ἀνερχομένου ἀνελκυστήρος ζυγίζεται σῶμα τι διὰ δυναμομέτρου, δεικνύοντος $5,1 \text{ kg}^*$ διαρκούσης τῆς κινήσεως. Ἀκολούθως ἐπαναζυγίζεται τὸ αὐτὸ σῶμα τοῦ ἀνελκυστήρος ἡρεμούντος διὰ τοῦ ἰδίου δυναμομέτρου καὶ εὐρίσκεται ἔχον βάρος 5 kg^* . Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἀνελκυστήρος. (Ἀπ. $0,196 \text{ m/sec}^2$.)

540. Ἀεροπλάνον καθέτου ἐφορμήσεως ἵπταται κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω ἀποκτῶν κατὰ τινα στιγμὴν ταχύτητα 1000 km/h , ὁπότε καὶ ἄρχεται ἀναδυνάμενον διαγράφον κυκλικὸν τόξον ἀκτίνος 600 m . Ποία ἡ μεγίστη δύναμις ἢ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἀεροπόρου, ἔχοντος μᾶζαν 80 kgr . (Ἀπ. 1130 kgr^* .)

541. Ἐκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει μᾶζαν 50 gr , τὸ δὲ πρόσθετον βάρος εἶναι 10 gr^* . Ἡ μηχανὴ τοποθετεῖται ἐντὸς ἀνελκυστήρος. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς μηχανῆς, ὡς καὶ αἱ τάσεις τῶν νημάτων: α) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ εἴναι ἀκίνητος, β) ὅταν ἀνέρχεται ἐπιταχυνόμενος $1,2 \text{ m/sec}^2$, καὶ γ) ὅταν κατέρχεται ἐπιταχυνόμενος 1 m/sec^2 .

(Ἀπ. α' $89,1 \text{ cm/sec}^2$, $T_1 = T_2 = 53,455 \text{ dyn}$, β' 100 cm/sec^2 , $60\,000 \text{ dyn}$, γ' 80 cm/sec^2 , $48\,000 \text{ dyn}$.)

542. Ἀλεξιπτωτιστής, βάρους 70 kgr^* , ἐκτελεῖ τὸ ἄλμα τῆς καθόδου ἐκ τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ἀνοίγει τὸ ἀλεξίπτωτόν του μετὰ πτώσιν 100 m . Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις τῶν σχοινίων, διὰ τῶν ὁποίων συγκρατεῖται ὁ ἀλεξιπτωτιστής, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἀλεξιπτώτου 5 sec μετὰ τὸ ἀνοίγμα ἡλαττώθῃ εἰς $4,3 \text{ m/sec}$, τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος προϋποτιθεμένης ὡς σταθερᾶς. Μέχρι τοῦ ἀνοίγματος τοῦ ἀλεξιπτώτου ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα. (Ἀπ. $127,4 \text{ kgr}^*$.)

543. Ὁ μηχανοδηγὸς σιδηροδρομικοῦ συρμοῦ, κινουμένου μὲ σταθερὰν ταχύτητα 12 m/sec , διακόπτει τὴν παροχὴν ἀτμοῦ καὶ ἐνεργεῖ συγχρόνως ἐπὶ τῶν πεδῶν, εὐρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 500 m ἀπὸ τινος σταθμοῦ, παρουσιάζοντας ὑψομετρικὴν διαφοράν 2 m . Πόση πρέπει νὰ εἴναι ἡ σταθερὰ ἐπιβραδύνουσα δύναμις οὕτως, ὥστε ὁ συρμὸς νὰ ἡρεμήσῃ φθάνων ἐπὶ τοῦ σταθμοῦ, ἐὰν τὸ βάρος αὐτοῦ εἴναι 1000 tn^* καὶ ἡ ἀντίστασις τριβῆς 2 tn^* . (Ἀπ. 8690 kgr^* .)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΕΡΓΟΝ. ΙΣΧΥΣ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

544. Βάρους 16 kgr^* ἀνυψοῦται εἰς ὕψος 15 m . Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς erg , kgr^*m καὶ $\text{W} \cdot \text{sec}$.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψοῦται τοῦτο, τότε τὸ ἔργον δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$A = B \cdot h \quad (1)$$

Προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, διότι τὰ δεδομένα εἶναι ἤδη ἐκπεφρασμένα εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω ἔσονται: $B = 16 \text{ kgr}^*$ καὶ $h = 15 \text{ m}$, εὐρίσκομεν:

$$A = 16 \cdot 15 = 240 \text{ kgr}^*\text{m}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $1 \text{ kgr}^*\text{m} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}$ καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$A = 240 \cdot 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg} = 2,35 \cdot 10^{10} \text{ erg}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι $1 \text{ Joule} (1 \text{ W} \cdot \text{sec}) = 10^7 \text{ erg}$ καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$A = 2,35 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-7} \text{ Joule} = 2,35 \cdot 10^3 \text{ Joule} (\text{W} \cdot \text{sec})$$

545. Να υπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν 800 λίτρων ὕδατος ἀπὸ φρέατος βάθους 7 m.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $A = B \cdot h$. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τῶν 800 λίτρων τοῦ ὕδατος εἶναι 800 kgr*, θέτοντες $B = 800 \text{ kgr*}$ καὶ $h = 7 \text{ m}$ εὐρίσκομεν:

$$A = B \cdot h = 800 \cdot 7 \text{ kgr*m} = 5600 \text{ kgr*m}$$

546. Δύναμις 5 kgr* μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς εἰς ἀπόστασιν 10 m κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν αὐτῆς. Να υπολογισθῇ τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς erg καὶ εἰς Joule.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως καὶ ἡ μετατόπισις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συμπίπτουν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A = F \cdot s \quad (1)$$

ὅπου A τὸ ἔργον, F ἡ δύναμις καὶ s ἡ μετατόπισις.

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἔργον εἰς ἔργια τρέπομεν τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ἀπὸ kgr* εἰς dyn καὶ τὴν μετατόπισιν ἀπὸ m εἰς cm καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν (1). Οὕτως εὐρίσκομεν:

$$A = 5 \cdot 981\,000 \cdot 1000 \text{ erg} = 490,5 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦ $10^7 \text{ erg} = 1 \text{ Joule}$, εὐρίσκομεν ὅτι:

$$A = 490,5 \text{ Joule}$$

547. Ἐλκθρον μετατοπίζεται κατὰ 12 m ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους. Ἡ ἑλξις τοῦ σχοινίου εἶναι 15 kgr* καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τοῦ ἐδάφους. Να υπολογισθῇ τὸ ἔργον.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν (ἑλξιν), s τὴν μετατόπισιν καὶ φ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῆς μετατοπίσεως καὶ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως, τότε τὸ ἔργον δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$A = F \cdot s \cdot \sin \varphi$$

Θέτοντες: $F = 15 \text{ kgr*}$, $s = 12 \text{ m}$ καὶ $\varphi = 30^\circ$, εὐρίσκομεν:

$$A = 15 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kgr*m} = 155,85 \text{ kgr*m}$$

548. Γερανὸς ἀνυψώνει βάρος 500 kgr* ἐντὸς 4 sec εἰς ὕψος 1,5 m. Πόση ἡ ἰσχὺς του εἰς ἵππους καὶ kW.

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς, ὡς γνωστόν, εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t. Ἦτοι:

$$N = \frac{A}{t} \quad (1)$$

Ἀλλὰ, ὡς γνωστόν, $A = B \cdot h$, ὅπου B τὸ ἀνυψούμενον βάρος καὶ h ἡ ἀνύψωσις. Συνεπῶς ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \quad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $B = 500 \text{ kgr*}$, $h = 1,5 \text{ m}$, $t = 4 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$N = \frac{500 \cdot 1,5}{4} = 187,5 \text{ kgr*m/sec}$$

Γνωρίζομεν ὁμοῦ ὅτι $1 \text{ PS} = 75 \text{ kgr*m/sec}$ καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι:

$$N = 2,5 \text{ PS}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι $1 \text{ PS} = 0,736 \text{ kW}$ καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι:

$$N = 2,5 \cdot 0,736 \text{ kW} = 1,84 \text{ kW}$$

549. Εἰς πόσον χρόνον ποδηλάτης, συνολικοῦ βάρους 80 kgr* μετὰ τοῦ ποδηλάτου αὐτοῦ, διανύει ἀνωφερικὸν δρόμον, παρυσιάζοντα διαφοράν ὕψους 120 m, ὅταν ἀποδίδῃ ἰσχὺν 1/5 HP.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὸ ἔργον τοῦ πεδίου βαρύτητος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται τούτο. Ἀρα θὰ ἔχωμεν: $A = B \cdot h$. Ἐάν τὴν σχέσιν ταύτην διαιρέσωμεν κατὰ μέλη διὰ τοῦ χρόνου t , εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἀποδομένη ἰσχύς εἶναι:

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \quad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ λαμβάνομεν:

$$t = \frac{B \cdot h}{N} \quad (2)$$

Ἄς ἐργασθώμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Πρὸς τοῦτο θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $B = 80 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$, $h = 120 \text{ m}$ καὶ τὴν ἰσχύν N εἰς $\text{kgr} \cdot \text{m/sec}$. Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἰσχύν ἀπὸ HP εἰς $\text{kgr} \cdot \text{m/sec}$, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν $1 \text{ HP} = 76 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$, ὁπότε θέτομεν $N = 1/5 \cdot 746 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι:

$$t = 640 \text{ sec}$$

550. Πόσον ὄγκον ὕδατος δύναται νὰ ἀνυψώσῃ ἀντλία ἰσχύος 100 PS ἐντὸς 24 ὥρων ἀπὸ φρέατος βάθους 300 m.

Λύσις. Ἄς καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ ἀνυψουμένου ὕδατος καὶ h τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψοῦται τοῦτο ὑπὸ τῆς ἀντλίας. Τότε, ὡς γνωστόν, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς ἀντλίας ἔργον θὰ εἶναι:

$$A = B \cdot h \quad (1)$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως (1) διὰ τοῦ χρόνου t , ἐντὸς τοῦ ὁποῖου γίνεται ἡ ἀνύψωσις, καὶ λαμβάνομεν:

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \quad (2)$$

ἔπου $N = A/t$ ἡ ἰσχύς τῆς ἀντλίας. Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς τὸ βάρος B καὶ ἔχομεν:

$$B = \frac{N \cdot t}{h} \quad (3)$$

Μετατρέπομεν τὴν ἰσχύν ἀπὸ ἵππους εἰς $\text{kgr} \cdot \text{m/sec}$, χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν σχέσιν $1 \text{ PS} = 75 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$, καὶ ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) $N = 100 \cdot 75 \text{ m kgr} \cdot \text{m/sec}$, $t = 24 \cdot 3600 \text{ sec}$, $h = 300 \text{ m}$. Οὕτως εὐρίσκομεν:

$$B = 2,16 \cdot 10^6 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

ἥτοι, δύναται νὰ ἀνυψώσῃ: $V = 2,16 \cdot 10^6 \text{ lt}$ ὕδατος ἢ: $V = 2,16 \cdot 10^3 \text{ m}^3$ ὕδατος.

551. Γερανὸς ἀνυψώνει φορτίον βάρους 10 tn* ἀπὸ τοῦ κύτους πλοίου μέχρι τοῦ καταστρώματος, εὐρισκόμενου εἰς ὕψος 12 m ἀπὸ τοῦ κύτους, εἰς χρόνον 30 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς εἰς $\text{kgr} \cdot \text{m/sec}$, ἵππους καὶ kW.

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἰσχύος:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{B \cdot h}{t} \quad (1)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν:

$$N = \frac{10\,000 \cdot 12}{30} \frac{\text{kgr} \cdot \text{m}}{\text{sec}} = 4000 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$$

Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ὅτι $1 \text{ PS} = 75 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$, προκύπτει ὅτι:

$$N = \frac{4000}{75} \text{ PS} = 53,33 \text{ PS}$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ $1 \text{ PS} = 0,736 \text{ kW}$, προκύπτει ὅτι:

$$N = 53,33 \cdot 0,736 \text{ kW} = 39,24 \text{ kW}$$

552. Μία ηλεκτρική μηχανή δύναται νά τροφοδοτῇ 20 000 λυχνίας, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχύον 40 Watt. Πόση ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς εἰς kW καὶ HP.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν N τὴν ἰσχύον ἐκάστης λυχνίας καὶ α τὸν ἀριθμὸν τῶν λυχνιῶν, τότε ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς ὑπὸ ὅλων τῶν λυχνιῶν καὶ συνεπῶς ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ ὅλας τὰς λυχνίας θὰ εἶναι :

$$N_{\text{ολ}} = \alpha \cdot N \quad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ δεδομένα : $\alpha = 20\,000$, $N = 40\text{ W}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$N_{\text{ολ}} = 800 \cdot 10^3 \text{ W} = 800 \text{ kW}$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἰσχύον ἀπὸ kW εἰς HP, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν $1 \text{ HP} = 0,746 \text{ kW}$ καὶ ἔχομεν :

$$N = \frac{800}{0,746} \text{ HP} = 1072,3 \text{ HP}$$

553. Μία ἀντλία δύναται νὰ χορηγῇ 5000 kgr* ὕδατος ἐντὸς ὕδαταποθήκης εἰς 3 ὥρας. Τὸ μέσον ὕψος ἀντλήσεως τοῦ ὕδατος εἶναι 30 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς τῆς ἀντλίας, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι 20 % καταναλίσκεται εἰς ἀπώλειας λόγῳ τριβῆς.

Λύσις. Ἐστῶσαν B τὸ βάρος τοῦ ἀντλούμενου ὕδατος, h τὸ ὕψος ἀντλήσεως καὶ $N_{\omega\phi}$ ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς τῆς ἀντλίας. Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$N_{\omega\phi} = \frac{B \cdot h}{t} \quad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἀντλίας καὶ $N_{\delta\iota\alpha\tau}$ τὴν συνολικῶς ὑπ' αὐτῆς διατιθεμένην ἰσχύον, ἥτις τὴν ἰσχύον πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος καὶ τὴν ἰσχύον λόγῳ ἀπωλειῶν, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$\eta = \frac{N_{\omega\phi}}{N_{\delta\iota\alpha\tau}} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι :

$$N_{\delta\iota\alpha\tau} = \frac{B \cdot h}{t \cdot \eta} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπώλεια εἶναι 20 %, ἔπεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τῆς ἀντλίας θὰ εἶναι 80 % καὶ συνεπῶς ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτῆς 0,8. Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως καὶ ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τ ε χ ν ι κ ὸ ν Σ ὕ σ τ η μ α, εὐρίσκομεν :

$$N_{\delta\iota\alpha\tau} = \frac{5000 \cdot 30 \text{ kgr} \cdot \text{m}}{3 \cdot 3600 \cdot 0,8 \text{ sec}} = 17,38 \text{ kgr} \cdot \text{m/sec}$$

554. Δύναμις 25 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ μάζης 100 gr ἐπὶ 8 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης τῶν 100 gr.

Λύσις. Τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$A = F \cdot s \quad (1)$$

ὅπου A εἶναι τὸ ἔργον, F ἡ δύναμις καὶ s ἡ μετατόπισις κατὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως.

Ἡ κίνησις ὁμῶς τοῦ σώματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἄρα ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$A = \frac{F \cdot \gamma \cdot t^2}{2} \quad (3)$$

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς γνωρίζομεν ὅτι $\gamma = F/m$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (3) προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος :

$$A = \frac{F^2 \cdot t^2}{2m} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν ἔχουν δοθῇ εἰς τὸ Σύστημα C. G. S., προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτως, ἐκ τῆς σχέσεως (4) εὐρίσκουμεν :

$$A = 200 \text{ erg}$$

Ἐκ τοῦ μαθήματος τῆς Φυσικῆς εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ($E_{\text{κιν}}$) τοῦ σώματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον A τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ σῶμα τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$E_{\text{κιν}} = A = 200 \text{ erg}$$

555. Δύναμις, ἐπενεργοῦσα ἐπὶ μάζης 1 kgr, μεταδίδει εἰς αὐτὴν ταχύτητα 120 m/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἰς erg.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μάζαν τοῦ σώματος καὶ v τὴν ταχύτητα αὐτοῦ, τότε ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἔργια, εἶναι προτιμότερον νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς μάζης ἀπὸ kgr εἰς gr καὶ τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος ἀπὸ m/min εἰς cm/sec. Οὕτως ἔχομεν : $m = 1 \text{ kgr} = 1000 \text{ gr}$, $v = 120 \text{ m/min} = 12000/60 = 200 \text{ cm/sec}$. Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 2 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

556. Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ταχείας ἀμαξοστοιχίας βάρους 400 τόνων, ἐχούσης ταχύτητα 90 km/h, εἰς erg, Joule καὶ kWh.

Λύσις. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\text{κιν}}$ ἐνὸς σώματος εὐρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος καὶ v ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν εἰς erg, ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς μάζης τοῦ σώματος ἀπὸ tn εἰς gr καὶ τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος ἀπὸ km/h εἰς cm/sec. Οὕτως : $m = 400 \text{ tn} = 4 \cdot 10^8 \text{ gr}$, $v = 90 \cdot 10^5/3600 = 2500 \text{ cm/sec}$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 1,25 \cdot 10^{15} \text{ erg}$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ erg εἰς Joule, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν : $1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$. Οὕτω προκύπτει ὅτι :

$$E_{\text{κιν}} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ Joule}$$

Τέλος, μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ Joule εἰς kWh χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν σχέσιν : $1 \text{ kWh} = 3600000 \text{ Joule}$. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι :

$$E_{\text{κιν}} = 34,7 \text{ kWh}$$

557. Σῶμα μάζης 400 gr βάλλεται μὲ κινητικὴν ἐνέργειαν 981 Joule κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Μέχρι ποίου σημείου ἀνέρχεται τὸ σῶμα. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὄταν τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ θὰ ἔχῃ μετατραπῇ ἐν ὅλῳ ἐν ἐνέργειαν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν : $E_{\text{δυν}} = E_{\text{κιν}}$ (1). Ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βῆρος τοῦ σώματος καὶ h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται, τότε ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια εἰς τὸ ὕψος τοῦτο θὰ εἶναι : $E_{\text{δυν}} = B \cdot h$ (2) καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ : $B \cdot h = E_{\text{κιν}}$ (3). Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὥς πρὸς τὸ h καὶ λαμβάνομεν :

$$h = \frac{E_{\text{κιν}}}{B} \quad (4)$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς

ἐνεργείας ἀπὸ Joule εἰς $\text{kg} \cdot \text{m}$ ($1 \text{ kg} \cdot \text{m} = 9,81 \text{ Joule}$) καὶ τὴν τιμὴν τοῦ βάρους ἀπὸ gr^* εἰς kg^* :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{981}{9,81} = 100 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \text{καί:} \quad B = 400 \cdot 10^{-3} \text{ kg}^*$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ μεγέθη διὰ τῶν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσων τιμῶν, ὅτε προκύπτει:

$$h = 250 \text{ m}$$

558. Λίθος ἔχει μᾶζαν 20 gr καὶ βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ταχύτητα 2000 cm/sec . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια: α) κατὰ τὴν στιγμήν τῆς βολῆς, β) κατὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου, καὶ γ) κατὰ τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Καλοῦμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ λίθου καὶ v τὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Θὰ ἰσχύη, ὡς γνωστόν, ὁ τύπος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. θέτομεν: $m = 20 \text{ gr}$, $v = 200 \text{ cm/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$E_{\text{κιν}} = 4 \cdot 10^7 \text{ erg} \quad \text{ἢ:} \quad E_{\text{κιν}} = 4 \text{ Joule}$$

β) Ἄς καλέσωμεν v_1 τὴν ταχύτητα τοῦ λίθου κατὰ τὸ τέλος τοῦ χρόνου t_1 . Θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν:

$$v_1 = v - g \cdot t_1 \quad (2)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (2), ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, γράφεται:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m (v - g \cdot t_1)^2 \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $m = 20 \text{ gr}$, $v = 200 \text{ cm/sec}$, $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$, $t_1 = 1 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$E_{\text{κιν}} = 10^7 \text{ erg} \quad \text{ἢ:} \quad E_{\text{κιν}} = 1 \text{ Joule}$$

γ) Ἐάν καλέσωμεν t_2 τὸν χρόνον εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, θὰ ἔχωμεν:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m (v - g \cdot t_2) \quad (4)$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν σχέσιν (4): $m = 20 \text{ gr}$, $v = 200 \text{ cm/sec}$ καὶ $t_2 = 4 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν:

$$E_{\text{κιν}} = 4 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4 \text{ Joule}$$

559. Πλίνθος μάζης $2,5 \text{ kg}$ εὐρίσκεται εἰς τὴν κορυφὴν καπνοδόχου ὕψους 50 m . α) Πόση ἡ δυναμικὴ τῆς ἐνέργειας. β) Ἐὰν ἀποσπασθῇ ἀπὸ τῆς καπνοδόχου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ τῆς ἐνέργειας, καὶ γ) ἡ δυναμικὴ τῆς ἐνέργειας εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς πλίνθου θὰ εἶναι:

$$E_{\text{δυν}} = B \cdot h \quad (1)$$

ὅπου B τὸ βάρος τῆς πλίνθου καὶ h τὸ ὕψος τῆς καπνοδόχου. Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, εὐρίσκομεν:

$$E_{\text{δυν}} = 2,5 \cdot 50 \text{ kg} \cdot \text{m} = 125 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

β) Ὄταν ἡ πλίνθος ἀποσπασθῇ ἀπὸ τῆς καπνοδόχου, θὰ ἀποκτήσῃ εἰς χρόνον t ταχύτητα $v = g \cdot t$ καὶ συνεπῶς ἡ κινητικὴ τῆς ἐνέργειας θὰ εἶναι:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $m = 2,5/10 \text{ T.M.}$ μάζης, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $t = 3 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$E_{\text{κιν}} = 112,5 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

γ) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ δυναμικῆς ἐνεργείας εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν τῆς πλίνθου εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καπνοδόχου, ἥτοι :

$$E'_{\text{κιν}} + E'_{\text{δυν}} = 125 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

Ἐπειδὴ δὲ $E'_{\text{κιν}} = 112,5 \text{ kgr} \cdot \text{m}$ ἔχομεν :

$$E'_{\text{δυν}} = (125 - 112,5) \text{ kgr} \cdot \text{m} = 12,5 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

560. Σῶμα βάρους 5 kgr* βάλλεται ἀπὸ ὠρισμένου ὕψους μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους τὸ σῶμα ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν 200 kgr*m. Ἐκ ποίου ὕψους ἐβλήθη τὸ σῶμα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Τὸ σῶμα, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς, εἶχε κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ v ἡ ταχύτης βολῆς. Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς, θὰ ἔχη καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν :

$$E_{\text{δυν}} = m \cdot g \cdot h \quad (2)$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ μηχανικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι :

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{κιν}} + E_{\text{δυν}} \quad (3)$$

Ἐὰν τώρα τὸ σῶμα κατερχόμενον εὐρεθῇ εἰς ὕψος h' , ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια θὰ εἶναι :

$$E'_{\text{δυν}} = m \cdot g \cdot h' \quad (4)$$

Ἐστω δὲ ὅτι θὰ ἔχη καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν εἰς τὴν νέαν θέσιν $E'_{\text{κιν}}$.

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχομεν :

$$E_{\text{κιν}} + E_{\text{δυν}} = E'_{\text{κιν}} + E'_{\text{δυν}} \quad (5)$$

Ἡ, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (2) καὶ (4) :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = E'_{\text{κιν}} + m \cdot g \cdot h' \quad (6)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον ὕψος h καὶ λαμβάνομεν :

$$h = \frac{E'_{\text{κιν}}}{m \cdot g} + h' - \frac{v^2}{2g} \quad (7)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7) : $E'_{\text{κιν}} = 200 \text{ kgr} \cdot \text{m}$, $m = 0,5 \text{ T.M.}$ μάζης, $h' = 4 \text{ m}$, $v = 10 \text{ m/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$h = 39 \text{ m}$$

561. Σῶμα βάλλεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20 m/sec κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἡ ταχύτης του θὰ ἔχη ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, v_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ καὶ v ἡ ζητούμενη ταχύτης τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο εὐρίσκεται εἰς ὕψος h . Τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς θὰ ἔχη κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot v_0^2$ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν μηδέν.

Εἰς ὕψος h θὰ ἔχη κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot v^2$ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν $m \cdot g \cdot h$.

Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας θὰ ἔχομεν :

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h \quad (1) \quad \text{ἢ} : \quad \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} v^2 + g \cdot h \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἔχει δοθῇ ὅτι εἰς τὸ ὕψος h ἡ ταχύτης τοῦ σώματος θὰ εἶναι $v = v_0/2$, ὁ τύπος (3) γράφεται :

$$h = \frac{v_0^2 - \frac{v_0^2}{4}}{2g} \quad (4) \quad \text{ἢ} : \quad h = \frac{3 v_0^2}{8g} \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5) : $v_0 = 10 \text{ m/sec}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκωμεν :

$$h = 15 \text{ m}$$

562. Σῶμα βάλλεται ἐξ ὕψους **10 m** καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα **6 m/sec** κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὸ σῶμα, φθάνον εἰς τὸ ἔδαφος, εἰσχωρεῖ ἐντὸς αὐτοῦ εἰς βάθος **10 cm**. Πόση ἡ ἐπιβράδυνσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα, τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐδάφους θεωρουμένης ὡς σταθερᾶς. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m , εὐρίσκεται εἰς ὕψος h καὶ βάλλεται πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Εἰς τὸ ὕψος h καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι δυναμικὴ καὶ κινητικὴ ἐνέργεια καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$E_{ολ} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad (1)$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη, ὅταν τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, θὰ δαπανηθῇ ἵνα εἰσχωρήσῃ τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐάν δὲ καλέσωμεν s τὸ βάθος εἰς τὸ ὅποιον εἰσχωρεῖ τὸ σῶμα εἰς τὸ ἔδαφος καὶ F τὴν δύναμιν (ἀντίστασιν) τὴν ὁποίαν ὑπερνικᾷ πρὸς τοῦτο, τὴν ὁποίαν καὶ θεωροῦμεν εἰς πρώτην προσέγγισιν ὡς σταθεράν, τὸ δαπανώμενον ἔργον θὰ εἶναι :

$$A = F \cdot s \quad (2)$$

Συμφώνως τώρα πρὸς τὴν θεμελιώδη Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$A = E_{ολ} \quad \text{ἢ} : \quad F \cdot s = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad (3)$$

Ἐάν παραστήσωμεν μὲ γ τὴν ζητούμενην ἐπιβράδυνσιν, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, καὶ οὕτως ἡ σχέσις (3) δύναται νὰ γραφῇ :

$$\gamma \cdot s = g \cdot h + \frac{1}{2} v_0^2 \quad (4)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς γ λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{v_0^2}{2s} + \frac{g \cdot h}{s} \quad (5)$$

Θέτομεν ἀκολούθως εἰς τὴν σχέσιν (5) : $v_0 = 6 \text{ m/sec}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, $h = 10 \text{ m}$, $s = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\gamma = 1161 \text{ m/sec}^2$$

563. Σφαῖρα βάρους **5 kgr*** ἐξέρχεται ἀπὸ τῆς κάννης πυροβόλου μὲ ταχύτητα **800 m/sec**, τὸ δὲ μῆκος τοῦ σωλήνος τοῦ πυροβόλου εἶναι **2 m**. Ζητοῦνται ἡ κινητήριος δύναμις, ὑποτιθεμένη σταθερά, ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλήνος, εἰς **dyn** καὶ **kgr***, ὡς καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος, καθ' ἣν στιγμὴν ἐξέρχεται τοῦ πυροβόλου, εἰς **erg** καὶ **kgr*m**. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν F τὴν σταθεράν κινητήριον δύναμιν καὶ s τὸ μῆκος τοῦ σωλήνος, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι : $A = F \cdot s$. Τὸ ἔργον τοῦτο δαπανᾶται ἐξ ὁλοκλήρου διὰ νὰ προσδώσῃ εἰς τὸ βλήμα τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν : $E_{κιν} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$, ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ v ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ὅταν ἐξέρχεται τοῦ πυροβόλου. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \text{ἢ} : \quad F = \frac{m \cdot v^2}{2s} \quad (1)$$

Τὰ δεδομένα είναι : $m = 5 \text{ kg}^* = 0,5 \text{ T.M.}$ μάζης, $v = 800 \text{ m/sec}$, $s = 2 \text{ m}$ · ὅτε ἐκ τοῦ τύπου (1) εὐρίσκομεν :

$$F = 8 \cdot 10^4 \text{ kg}^*$$

Ἐπειδὴ $1 \text{ kg}^* = 1 \cdot 10^8 \text{ dyn}$, ἔχομεν καὶ :

$$F = 8 \cdot 10^{10} \text{ dyn}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον τὴν παρήγαγε :

$$E_{\text{κιν}} = F \cdot s \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2), ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S., εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 16 \cdot 10^{12} \text{ erg}$$

καὶ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα :

$$E_{\text{κιν}} = 16 \cdot 10^4 \text{ kg}^* \text{m}$$

564. Σφυρίον βάρους 2 kg^* κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec καὶ προσκρούον ἐπὶ καρφίον ἀναγκάζει αὐτὸ νὰ εἰσχωρήσῃ κατὰ $2,5 \text{ cm}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση δύναμις, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ καρφίου. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω διεργασία διαρκῇ $1/50 \text{ sec}$, πόση θὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ κτυπήματος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Τὸ σφυρίον θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ σφυρίου καὶ v ἡ ταχύτης αὐτοῦ. Ἡ ἐνέργεια αὕτη μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἔργον, ἵνα εἰσχωρήσῃ τὸ καρφίον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μέση ἀσκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ καρφίου εἶναι F καὶ ὅτι τὸ καρφίον εἰσχωρεῖ εἰς βάθος s , τότε τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι :

$$A = F \cdot s \quad (2)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$A = E_{\text{κιν}} \quad \text{ἢ} : \quad F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὥς πρὸς F καὶ λαμβάνομεν :

$$F = \frac{m \cdot v^2}{2s} \quad (4)$$

Ἐργαζόμενοι δὲ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὐρίσκομεν :

$$F = 900 \text{ kg}^*$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν t τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον παράγεται τὸ ἔργον τοῦτο, τότε ἡ ζητούμενη ἰσχὺς θὰ εἶναι :

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} \quad (5)$$

καὶ ἐργαζόμενοι πάλιν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὐρίσκομεν :

$$N = 1125 \text{ kg}^* \text{m/sec}$$

565. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς 500 τόνων, ἐκινῶν ἐκ τῆς ἡρεμίας, ἀποκτᾷ ταχύτητα 36 km/h ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 10 km εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον $1:1000$. Πόση εἶναι ἡ ἔλξις, τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἡ ἀτμομηχανὴ ἐπὶ τοῦ συρμοῦ, ὑποτιθεμένης αὐτῆς σταθερᾷς. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Διὰ νὰ κινῆται ὁ σιδηρόδρομος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρέπει ἡ δύναμις F , τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἐπ' αὐτοῦ ἡ ἀτμομηχανὴ, νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συνι-

πτώσης $B \cdot \eta \mu \alpha$ του βάρους του, ητις αντιτίθεται εις την κίνησιν αὐτοῦ, κατὰ τὴν ἐπιταχύνουσαν δύναμιν F_{ϵ} . Ἦτοι:

$$F = B \cdot \eta \mu \alpha + F_{\epsilon} \quad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν m τὴν μάζαν τοῦ σιδηροδρόμου καὶ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, θὰ ἔχωμεν:

$$F_{\epsilon} = m \cdot \gamma \quad (\text{θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς}) \quad (2)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (2) ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ τῶρα:

$$F = B \cdot \eta \mu \alpha + m \cdot \gamma \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ κίνησις τοῦ σιδηροδρόμου εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενη, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$v = \gamma \cdot t \quad (4) \quad \text{καί:} \quad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (5)$$

Ἐάν μεταξὺ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον t , λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{v^2}{2s} \quad (6)$$

καὶ οὕτως ἡ σχέσις (3) δύναται νὰ γραφῇ τελικῶς:

$$F = B \cdot \eta \mu \alpha + \frac{m \cdot v^2}{2s} \quad (7)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7): $B = 500 \cdot 10^3 \text{ kgr}^*$, $\eta \mu \alpha = 1/1000 = 0,001$, $m = 500 \cdot 10^2 \text{ T.M.}$ μάζης, $v = 36 \cdot 10^3 / 3600 = 10 \text{ m/sec}$, $s = 10 \cdot 10^3 \text{ m}$ καὶ εὐρίσκομεν:

$$F = 750 \text{ kgr}^*$$

566. Μικρὰ σφαῖρα ἀφίεται ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ὀλισθαίνει ἐπὶ ἡμικυλινδρικῆς ἐπιφανείας (βλ. σχῆμα) τῆς ὁποίας ὁ ἀξὼν εἶναι ὀριζόντιος. Νὰ εὕρεθῇ ποία δύναμις ἀσκειῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν ἡμικυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ὅταν αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κατωτάτου σημείου Γ.

Λύσις. Ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ, θὰ ἀσκούνται ἐπ' αὐτῆς, ἐκ μέρους τῆς ἐπιφανείας, πρῶτον ἡ δύναμις B' , ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἶναι ἰση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος, καὶ δεύτερον ἡ κεντρομόλος δύναμις F_{κ} , ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα καὶ ἀσκεῖται ἐπ' αὐτοῦ ἐπίσης ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἀρα ἡ συνολικῶς ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀσκουμένη δύναμις ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$F = B + F_{\kappa} \quad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (1): $B = m \cdot g$ καὶ $F_{\kappa} = m \cdot v^2 / r$, λαμβάνομεν:

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot v^2}{r} \quad (2)$$

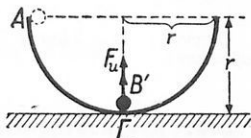
Ἐξ ἄλλου, ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ, θὰ ἔχη κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot v^2$ ἴσην πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν $m \cdot g \cdot r$, τὴν ὁποίαν εἶχεν εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἦτοι:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot r \quad \text{ἢ:} \quad v^2 = 2g \cdot r \quad (3)$$

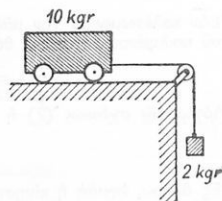
Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ v^2 εἰς τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν:

$$F = m \cdot g + 2 m \cdot g = 3B$$

*Ἀρα ἡ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλασίον τοῦ βάρους αὐτῆς.



567. Έλκθηρον μάζας $M = 10 \text{ kgr}$ δλισθαίνει ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἄνευ τριβῆς. Τὸ ἔλκθηρον εἶναι προσδεδεμένον διὰ νήματος, ἀμελητέου βάρους, καὶ διέρχεται διὰ τροχαλίας, ἀμελητέας μάζης, τὸ νήμα δὲ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ φέρει μάζαν $m = 2 \text{ kgr}$ (βλ. σχῆμα). Ζητεῖται πὸ διανυόμενον διάστημα εἰς 2 sec , τοῦ συστήματος ἀφιεμένου ἐλευθέρου, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).



Λύσις. Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία κινεῖ τὸ σύστημα, εἶναι τὸ βάρος τοῦ κατακορύφως κινουμένου σώματος. Ἐπομένως ἡ κίνησις θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενη καὶ τὸ διάστημα θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι :

$$\gamma = \frac{v}{t} \quad (2)$$

λαμβάνομεν :

$$s = \frac{v}{2} \cdot t \quad (3)$$

Κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος κατὰ διάστημα s ὑφίσταται τοῦτο ἀπώλειαν δυναμικῆς ἐνεργείας :

$$\Delta E_{\text{δυν}} = mg \cdot s \quad (4)$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη μετατρέπεται εἰς κινητικὴν, ἥτοι :

$$\Delta E_{\text{δυν}} = E_{\text{κιν}} \quad (5)$$

ἐνῶ ἐξ ἄλλου :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot v^2 \quad (6)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (3), (4), (5) καὶ (6), λαμβάνομεν :

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{m + M} \cdot t^2$$

Θέτοντες : $m = 2 \text{ kgr} = 2000 \text{ gr}$, $M = 10 \text{ kgr} = 10\,000 \text{ gr}$, $t = 2 \text{ sec}$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, λαμβάνομεν :

$$s = 327 \text{ cm}$$

568. Ἀνελκυστὴρ ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐδάφους ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ κινούμενος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, διέρχεται μετὰ πάροδον 10 sec δι' ἐνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ὕψος 20 m . Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡ μέση ἰσχύς τοῦ κινητήρος τοῦ ἀνελκυστήρος διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα τῶν 10 sec . Δίδονται: Μάζα ἀνελκυστήρος $m = 0,5 \text{ τόννοι}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. Ἡ μέση ἰσχύς N τοῦ κινητήρος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A ὑπ' αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t , ἥτοι :

$$N = \frac{A}{t} \quad (1)$$

Τὸ παραγόμενον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔργον θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς δυνάμεως F , ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστήρος ὑπὸ τοῦ καλωδίου, ἐπὶ τὸ ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἀναφερόμενον σημεῖον. Ἡτοι :

$$A = F \cdot h \quad (2)$$

Ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστήρος ὑπὸ τοῦ καλωδίου, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος αὐτοῦ B συν τὴν δύναμιν $m \cdot \gamma$, ἡ ὁποία ἐπιταχύνει αὐτόν. Δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$F = B + m \cdot \gamma \quad (3)$$

και συνεπώς η σχέση (2) γράφεται :

$$A = (B + m \cdot \gamma) \cdot h \quad (4)$$

Ούτως, εκ των σχέσεων (4) και (1) προκύπτει ότι :

$$N = \frac{(B + m \cdot \gamma) \cdot h}{t} \quad (5)$$

Επειδή όμως η κίνηση του ανελκυστήρος είναι ομαλώς επιταχυνόμενη, θα ισχύει ο τύπος :

$$h = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \xi \sigma \upsilon : \quad \gamma = \frac{2h}{t^2}$$

και συνεπώς η σχέση (5) γράφεται :

$$N = \frac{\left(B + \frac{m \cdot 2h}{t^2} \right) \cdot h}{t} \quad (6)$$

Θέτουμε εις την σχέση (6) : $B = 500 \text{ kg}^*$, $m = 50 \text{ T.M.}$ μάζης, $h = 20 \text{ m}$, $t = 10 \text{ sec}$, και εύρισκόμεν :

$$N = 1040 \text{ kg}^* \cdot \text{m/sec} \quad \eta : \quad N = 13,8 \text{ PS}$$

569. Άνελκυστήρ, μάζης $m = 1200 \text{ kg}$, επιταχυνόμενος κατά την άνοδον, αποκτά, εκκινών εκ της ηρεμίας, ταχύτητα 3 m/sec , αφού διανύση διάστημα 2 m . Ποία η έντασις της επί του σχοινίου επενεργούσης δυνάμεως κατά την διάρκεια της επιταχύνσεως, εις το σύστημα $M.K.S.$ ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Εάν F η δύναμις επί του σχοινίου και s το διάστημα, τότε θα δαπανηθῇ ἔργον :

$$A = F \cdot s \quad (1)$$

Τούτο θα παραγάγῃ κινητικὴν και δυναμικὴν ἐνέργειαν :

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2) \quad E_{\delta\upsilon\nu} = m g s \quad (3)$$

Επειδή δέ : $A = E_{\kappa\iota\nu} + E_{\delta\upsilon\nu}$, λαμβάνομεν :

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m v^2 + m g s \quad \eta : \quad F = \frac{m v^2}{2 s} + m g$$

Θέτοντες : $m = 1200 \text{ kg}$, $v = 3 \text{ m/sec}$ και $s = 2 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ θα ἔχωμεν :

$$F = 14\,472 \text{ Nt}$$

570. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐλάχιστον ὕψος h , ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἀφεθῇ τὸ ἀμάξιον τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος, ἵνα ἐκτελέσῃ με ἀσφάλειαν τὴν ἀνακύκλωσιν.

Λύσις. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀμάξιον, ὅταν διέρχεται διὰ τῆς ἀνωτάτης θέσεως A τῆς τροχιάς του, ἔχει τὸσον μεγάλην ταχύτητα, ὥστε νὰ συγκρατῇται ἐπὶ τῆς τροχιάς του. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην A ἀσκούνται ἐπὶ τοῦ ἀμαξίου δύο δυνάμεις, ἥτοι : α) τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ και β) ἡ δύναμις K , ἡ ἀσκουμένη ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τροχιάς.

Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον O τῆς περιστροφῆς και θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις F_x ἡ ὁποία περιτρέφει τὸ ἀμάξιον. Ἀρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$F_x = B + K \quad (1) \quad \eta : \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g + K \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν :

$$m \left(\frac{v^2}{r} - g \right) = K \quad (3)$$

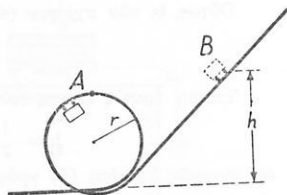
Εάν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $v^2 = r \cdot g$, δηλαδή :

$$v = \sqrt{r \cdot g} \quad (4)$$

τότε προκύπτει εκ της (3) ότι $K = 0$ και εκ της (1) ότι $F_x = B$. Τοῦτο σημαίνει ότι ὑπάρχει μία ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ταχύτητος $u_{op} = \sqrt{r \cdot g}$, διὰ τὴν ὁποῖαν τὸ ἀμάξιον, ὅταν εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Α, δὲν δέχεται δύναμιν ἀπὸ τὴν τροχίαν καὶ ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμις ἡ ὁποία τὸ περιστρέφει, εἶναι μόνον αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος τοῦ σώματος.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ κινητόν, διερχόμενον διὰ τῆς θέσεως ταύτης Α μετὰ τὴν ἐλαχίστην ταύτην ταχύτητα, δὲν χάνει τὴν ἐπαφὴν του μετὰ τὴν τροχίαν καὶ συνεπῶς ἐκτελεῖ μετὰ ἀσφάλειαν τὴν ἀνακύκλωσιν. Διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἀμάξιον τὴν ἀπαιτούμενην ταχύτητα $u_{op} = \sqrt{r \cdot g}$, ἔστω ὅτι ἀφίεται ἀπὸ ὕψους h . Εἰς τὴν θέσιν Α θὰ ἔχῃ ἐλαττωθῇ ἡ δυναμικὴ τοῦ ἐνέργειαν κατὰ:

$$m \cdot g \cdot x = m \cdot g (h - 2r)$$



καὶ θὰ ἔχῃ ἀποκτήσῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot u_{op}^2$. Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας θὰ ἔχωμεν:

$$m \cdot g (h - 2r) = \frac{1}{2} m \cdot u_{op}^2 \quad \eta: \quad g (h - 2r) = \frac{1}{2} u_{op}^2 \quad (5)$$

Ἡ σχέση (5), ἐν συνδυασμῷ μετὰ τὴν σχέσιν (4), γράφεται:

$$g (h - 2r) = \frac{1}{2} r \cdot g \quad (6)$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν:

$$h = \frac{5r}{2}$$

571. Διὰ τὴν ἀπογείωσιν ἀεροπλάνου, ζυγίζοντος εἰς κανονικὸν τόπον 10 000 kgr*, τῇ βοηθείᾳ καταπέλτου, διατίθεται διάδρομος μήκους 25 m. Ποίᾳς ἐντάσεως δύναμεις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἀεροπλάνον, ἀφοῦ διανύσῃ τὸ μῆκος τοῦτο, ταχύτητα 180 km/h.

Λύσις. Ἐστω F ἡ ζητούμενη δύναμις καὶ s τὸ μήκος τοῦ διαδρόμου. Τότε θὰ δαπανηθῇ ἔργον διὰ τὴν ἀπογείωσιν:

$$A = F \cdot s \quad (1)$$

Ἡ δαπάνη τοῦ ἔργου τούτου θὰ ἐπιφέρῃ αὐξησιν τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ ἀεροπλάνου, ἥτοι:

$$A = E_{κιν} \quad (2)$$

$$\text{Ἐχομεν ὁμῶς:} \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν:

$$F = \frac{m v^2}{2 s} \quad (4)$$

Θέτοντες: $m = B/g = 10\,000/9,81$ T.M. μάζης, $v = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/sec}$ καὶ $s = 25 \text{ m}$, ἐξάγομεν τὸ ἀποτέλεσμα:

$$F = 50\,968 \text{ kgr*}$$

572. Μάζα 2 m στερεοῦται εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἀβαροῦς ράβδου μήκους l . Εἰς ἄλλην περίπτωσιν δύο ἴσαι μάζαι m στερεοῦνται εἰς τὴν ράβδον, ἡ μία εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ ἡ ἑτέρα εἰς τὸ μέσον. Ἡ ράβδος δύναται νὰ περιστρέφεται ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον Α. Ποῖαι ὀριζόντιαι ταχύτητες πρέπει νὰ δοθοῦν εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ράβδου, εἰς ἐκάστην περίπτωσιν, διὰ νὰ λάβῃ αὕτη ὀριζοντίαν θέσιν.

Λύσις. α) Διὰ νὰ φθάσῃ ἡ ράβδος εἰς ὀριζοντίαν θέσιν, θὰ πρέπει νὰ λάβῃ τοιαύτην ταχύτητα
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Όταν θά εὑρίσκεται εἰς τὴν κατακόρυφον, ὥστε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς νὰ μετατραπῇ κατὰ τὴν κίνησιν εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν. Ἦτοι:

$$E_{δυν} = E_{κιν} \quad (1)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι:

$$E_{δυν} = mgl \quad (2) \quad \text{καί:} \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} mv_1^2 \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προκύπτει:

$$v_1 = \sqrt{2gl}$$

β) Καί εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν θά ἔχωμεν:

$$E_{δυν} = E_{κιν}$$

Ἐξ ἄλλου ὁμοῦς θά εἶναι:

$$E_{δυν} = mg \cdot l + mg \cdot \frac{l}{2} \quad \text{ἢ:} \quad E_{δυν} = \frac{3mg \cdot l}{2} \quad (4)$$

Ἄλλ' ἐὰν κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς ράβδου ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς ἀκραίης σφαίρας ἰσοῦται πρὸς v_2 , θά ἔχωμεν ἀρχικὴν ταχύτητα $v_2/2$ (γραμμικὴ ταχύτης), διὰ τὴν ἀνωτέρω σφαῖραν (τὴν στερεωμένην εἰς τὸ μέσον τῆς ράβδου, καὶ ἐποὶνως θά ἔχωμεν:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v_2}{2} \right)^2 \quad \text{ἢ:} \quad E_{κιν} = \frac{5}{8} mv_2^2 \quad (5)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$\frac{3mg \cdot l}{2} = \frac{5mv_2^2}{8} \quad \text{ἢ:} \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{3gl}{5}}$$

573. Ὑδατόπτωσις παροχῆς $12 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{min}$, μὲ ὕψος πτώσεως $h = 100 \text{ m}$, χρησιμεύει πρὸς παραγωγὴν ἡλεκτρικῆς ἐνεργείας. Ἐὰν αἱ ἀπώλειαι τῆς ἐγκαταστάσεως ἀνέρχονται εἰς 20%, νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ἡλεκτρικὴ ἰσχύς τοῦ ἐργοστασίου εἰς kW, καὶ β) ἡ παραγομένη ἡλεκτρικὴ ἐνέργεια εἰς χρόνον $t = 10 \text{ h}$ καὶ 10 min, εἰς μονάδας kWh, Joule καὶ erg. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν $N_{ωφ}$ τὴν ὠφέλιμον ἰσχύν τῆς ἐγκαταστάσεως, $N_{δπ}$ τὴν δαπανωμένην ἀντιστοίχως ἰσχύν τῆς ὑδατοπτώσεως καὶ η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως, θά ἔχωμεν ὡς γνωστόν:

$$\eta = \frac{N_{ωφ}}{N_{δπ}} \quad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι:

$$N_{δπ} = \Pi \cdot \epsilon \cdot h \quad (2)$$

ὅπου Π ἡ παροχὴ τοῦ ὕδατος, ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ h τὸ ὕψος τῆς πτώσεως. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων προκύπτει:

$$N_{ωφ} = \eta \cdot \Pi \cdot \epsilon \cdot h \quad (3)$$

Δίδονται: $\eta = 0,80$, $\Pi = 12 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{min} = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{sec}$, $h = 100 \text{ m}$ καὶ $\epsilon = 1 \text{ gr/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3 = 9,81 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$. Ὅλα τὰ μεγέθη ἐκφράζονται εἰς μονάδας τοῦ συστήματος M. K. S., ὅρα δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θά ἔχωμεν τὴν ἰσχύν εἰς Joule/sec, ἥτοι εἰς Watt:

$$N_{ωφ} = 157 \cdot 10^7 \text{ W} = 157 \cdot 10^4 \text{ kW}$$

β) Ἡ παραγομένη ἡλεκτρικὴ ἐνέργεια A_t εἰς χρόνον $t = 10 \text{ h}$ καὶ 10 min δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$A_t = N_{ωφ} \cdot t \quad (4)$$

1) Διά τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἐνεργείας εἰς kWh, θὰ θέσωμεν $N_{\omega\varphi} = 157 \cdot 10^7 \text{ kW}$ καὶ $t = 10 \text{ h}$ 10 min = 61/6 h, ἄρα :

$$\underline{A_t = 1596 \cdot 10^4 \text{ kWh}}$$

2) Διά τὸν ὑπολογισμόν εἰς μονάδας Joule, θὰ θέσωμεν : $N_{\omega\varphi} = 157 \cdot 10^7 \text{ W} = 157 \cdot 10^7 \text{ Joule/sec}$ καὶ $t = 61/6 \text{ h} = 36\,600 \text{ sec}$, ἄρα :

$$\underline{A_t = 57\,462 \cdot 10^9 \text{ Joule}}$$

3) Διά τὸν ὑπολογισμόν εἰς ἔργια (μονάδας C. G. S.), θὰ θέσωμεν $1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$, ἐπομένως :

$$\underline{A_t = 57\,462 \cdot 10^{16} \text{ erg}}$$

574. Διὰ τὴν ἄρδευσιν ἐνὸς κτήματος 200 000 τετραγωνικῶν μέτρων ἐγκαθίσταται ἡλεκτρικὴ ἀντλία πρὸς ἀντλήσιν ὕδατος εἰς μίαν συλλεκτήριον δεξαμενὴν, κειμένην 10 μέτρα ἄνωθεν τῆς στάθμης ὑδροληψίας. Ἡ ὑδραντλία λειτουργεῖ 6 ὥρας ἡμερησίως ἐπὶ 5 ἡμέρας ἐβδομαδιαίως. Τὸ κτῆμα ἄρδευεται ἐκ τῆς δεξαμενῆς ἡμερησίως, πλὴν τῆς Κυριακῆς, μὲ παροχὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς 5 χιλιόγραμμα ὕδατος ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον τῆς ἄρδευομένης ἐκτάσεως ἡμερησίως. Ζητεῖται ἡ ὠριαία δαπάνη διὰ τὸ ἡλεκτρικὸν ρεῦμα κινήσεως τῆς ἀντλίας ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τιμῆς ρεύματος 0,50 δρχ. ἀνὰ ὠριαίον χιλιόβατ καὶ γενικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως 50 %, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἀπωλειῶν ὕδατος ἐντὸς τῶν ἄρδευτικῶν αὐλάκων.

(Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1959).

Λύσις. Ἐστω B τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἄρδευσιν ὕδωρ, ἀνὰ ἐβδομάδα. Ἐάν h τὸ ὕψος ἀντλήσεως καὶ t ἡ διάρκεια λειτουργίας τῆς ἀντλίας ἀνὰ ἐβδομάδα, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς εἶναι :

$$N_{\omega\varphi} = \frac{A}{t} \quad \eta : N_{\omega\varphi} = \frac{B \cdot h}{t} \quad (1) \quad \text{Ἐπίσης : } N_{\omega\varphi} = \eta \cdot N_{\delta\alpha\pi} \quad (2)$$

ὅπου η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως καὶ $N_{\delta\alpha\pi}$ ἡ δαπανώμενη ὑπὸ τῆς ἀντλίας ἰσχύς. Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως :

$$N_{\delta\alpha\pi} = \frac{B \cdot h}{\eta \cdot t} \quad (3)$$

Δίδονται : $B = 5 \text{ kgr}^* / \text{m}^2 \times 1 \text{ ἡμέραν} \times 200\,000 \text{ m}^2 \times 6 \text{ ἡμέρας} = 6 \cdot 10^6 \text{ kgr}^*$, $h = 10 \text{ m}$, $\eta = 0,50$ καὶ $t = 5 \text{ ἡμέραι} \times 6 \text{ h} = 30 \text{ h}$ ἢ $t = 108\,000 \text{ sec}$, ἄρα :

$$N_{\delta\alpha\pi} = 1111 \text{ kgr}^* \text{m/sec} \quad \eta : \underline{N_{\delta\alpha\pi} = 10,9 \text{ kW}}$$

Ἡ κατανάλωσις ἡλεκτρικῆς ἐνεργείας ἀνὰ ὥραν θὰ εἶναι :

$$\underline{A = 10,9 \text{ kWh}}$$

καὶ ἐφ' ὅσον τὸ κόστος 1 kWh εἶναι 0,50 δραχμαί, ἡ ὠριαία δαπάνη θὰ εἶναι :

$$\underline{x = 5,45 \text{ δραχμαί/h}}$$

575. Μεταλλικὴ σφαῖρα μάζης 50 gr ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐξ ὕψους $h = 25 \text{ m}$. Εἰς ὕψος 1 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους συναντᾷ στρώμα παραφίνης πάχους 10 cm τὸ ὁποῖον διαπερᾷ καὶ ἐξέρχεται ἐξ αὐτοῦ μὲ ταχύτητα $u = 1 \text{ m/sec}$, τίπτει δὲ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸ ἔδαφος. Ζητοῦνται : α) ἡ ἀπόλεια ἐνεργείας τοῦ κινητοῦ ἐντὸς τῆς παραφίνης εἰς $\text{kgr}^* \text{m}$, καὶ β) ἡ ταχύτης μετὰ τῆς ὁποίας προσκρούει τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ τριβὴ παραλείπεται. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Τοπογράφων καὶ Ἀγρονόμων Μηχανικῶν, 1957).

Λύσις. Ἐστω m ἡ μάζα τῆς σφαίρας, h τὸ συνολικὸν ὕψος, h' τὸ ὕψος κάτωθεν τοῦ στρώματος τῆς παραφίνης μέχρι τοῦ ἐδάφους καὶ u ἡ ταχύτης ἐξόδου τῆς σφαίρας ἐκ τῆς παραφίνης.

α) Ἐάν καλέσωμεν Δ(E) τὴν ἀπώλεια ἐνεργείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ στρώματος τῆς παραφίνης

νης, $E_{\text{κιν}}$ την κινητική ενέργειαν τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ἐξοδον καὶ $E'_{\text{κιν}}$ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποῖαν θὰ εἴχεν ἡ σφαῖρα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε στρώμα παραφίνης, τότε προφανῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta(E) = E'_{\text{κιν}} - E_{\text{κιν}} \quad (1)$$

Ἐχομεν ὁμῶς :

$$E'_{\text{κιν}} = E_{\text{δυν}} = m \cdot g (h - h_1) \quad (2) \quad \text{καί :} \quad E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν :

$$\Delta(E) = m \cdot g (h - h_1) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς εἰς μονάδας τοῦ Τεχνικοῦ Συστήματος : $m = 0,05/\text{g} = 0,005 \text{ T.M.}$ μάζης, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $h - h_1 = 25 - 0,90 = 24,10 \text{ m}$, $v = 1 \text{ m/sec}$ καὶ λαμβάνομεν :

$$\Delta(E) = 1,2025 \text{ kgr} \cdot \text{m}$$

β) Ἐὰν υ ἡ ταχύτης ἐξόδου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὸ στρώμα τῆς παραφίνης, h' τὸ ὕψος αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐδάφους κατ' ἐκείνην τὴν στιγμὴν καὶ v' ἡ ταχύτης προσκρούσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, θὰ ἔχωμεν :

$$v' = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h'} \quad (5)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν : $v = 1 \text{ m/sec}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $h' = 0,9 \text{ m}$, λαμβάνομεν :

$$v' = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0,90} = \sqrt{19} \text{ m}, \quad \text{ἥτοι :} \quad v' = 4,36 \text{ m}$$

576. Δύο κεκλιμένα ἐπίπεδα, ἔχοντα γωνίας κλίσεως $\varphi_1 = 30^\circ$ καὶ $\varphi_2 = 45^\circ$ ἀντιστοίχως, τοποθετοῦνται πλησίον ἀλλήλων ὥστε νὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν. Ἐπὶ τοῦ πρώτου τοποθετεῖται σῶμα μάζης $m_1 = 3,8 \text{ kgr}$ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σῶμα μάζης $m_2 = 6 \text{ kgr}$. Τὰ δύο σώματα συνδέονται δι' ἀβαροῦς νήματος διερχομένου διὰ τῆς αὐλακῆς ἀμεταθέτου τροχαλίας, ἀμελητέας μάζης, εὐρισκομένης εἰς τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν ἐπιπέδων. Ἀφίεται τὸ σύστημα νὰ κινήθῃ καὶ ζητεῖται ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ὅταν θὰ ἔχη μετατεθῇ κατὰ διάστημα $s = 1,15 \text{ m}$. (Τριβαὶ ἀμελητέαι, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ σύστημα θὰ κινήθῃ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ σώματος μὲ τὴν μεγαλύτεραν μάζαν m_2 . Ὅταν τὸ σύστημα θὰ κινήθῃ κατὰ διάστημα s , τότε τὸ πρῶτον σῶμα θὰ ἀνέλθῃ κατακόρυφως ἀπὸστασιν :

$$h_1 = s \cdot \eta \mu \varphi_1 \quad (1)$$

καὶ τὸ δεύτερον σῶμα θὰ ἔχη κατακόρυφον πτώσιν :

$$h_2 = s \cdot \eta \mu \varphi_2 \quad (2)$$

Τὸ σύστημα θὰ ἔχη ὑποστῇ ἐλάττωσιν δυναμικῆς ἐνέργειας λόγῳ πτώσεως τῆς μάζης m_2 καὶ αὐξήσιν λόγῳ ἀνυψώσεως τῆς μάζης m_1 . Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας θὰ εἶναι :

$$\Delta E_{\text{δυν}} = m_2 g h_2 - m_1 g h_1 \quad (3)$$

ἢ, λόγῳ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) :

$$\Delta E_{\text{δυν}} = g \cdot s (m_2 \cdot \eta \mu \varphi_2 - m_1 \cdot \eta \mu \varphi_1) \quad (4)$$

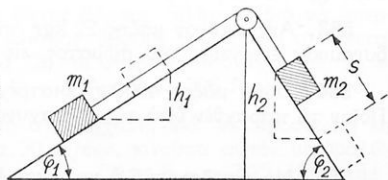
Βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας θὰ ἔχωμεν ἴσην μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνέργειας, ἡ ὁποία θὰ εἶναι :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (5)$$

ὅπου v ἡ ζητούμενη ταχύτης.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$g \cdot s (m_2 \eta \mu \varphi_2 - m_1 \eta \mu \varphi_1) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (6)$$



$$\eta: \quad v = \sqrt{\frac{2gs(m_2 \cdot \eta\mu \varphi_2 - m_1 \cdot \eta\mu \varphi_1)}{m_1 + m_2}} \quad (7)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα: $m_1 = 3,8 \text{ kgr}$, $m_2 = 6 \text{ kgr}$, $s = 1,15 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$, $\eta\mu \varphi_1 = 0,5$, $\eta\mu \varphi_2 = \sqrt{2}/2 = 0,7$ (κατὰ προσέγγισιν), λαμβάνομεν:

$$v = 2,3 \text{ m/sec}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

577. Βάρος 8 kgr^* άνυψούται κατὰ 30 cm . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ παραγόμενον ἔργον. (Ἀπ. $A = 2,4 \text{ kgr}^*\text{m}$.)

578. Δύναμις 2 kgr^* μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς κατὰ 5 m κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτῆς διεύθυνσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς erg καὶ Joule . (Ἀπ. $98 \cdot 10^7 \text{ erg}$, 98 Joule .)

579. Ἐπὶ δεξαμενῆς κυλινδρικῆς, διαμέτρου 3 m καὶ ὕψους 6 m , ἀποθηκεύεται ὕδωρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος, ὅταν ἡ δεξαμενὴ εἶναι πλήρης, λαμβανομένου ὑπ' ὅσιν ὅτι ὁ πυθμὴν αὐτῆς εὐρίσκεται εἰς ὕψος 9 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. (Ἀπ. $509\,000 \text{ kgr}^*\text{m}$.)

580. Βόμβα μάζης 200 kgr ἀφίεται ἀπὸ ἀεροπλάνου, εὐρισκομένου εἰς ὕψος 225 m . Πόση ἡ ἀρχικὴ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς βόμβας ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἔδαφος. (Ἀπ. $4,41 \cdot 10^5 \text{ Joule}$.)

581. Ἀθλητῆς ἐκτελεῖ κάμψιν τῶν γονάτων. Πόσον ἔργον παράγεται, ὅταν ἐκτελῇ 40 κάμψεις καὶ καθ' ἑκάστην τούτων τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται κατὰ 45 cm , ἡ δὲ μᾶζα τοῦ σώματος τοῦ ἀθλητοῦ εἶναι 70 kgr . (Ἀπ. $A = 1260 \text{ kgr}^*\text{m}$.)

582. Ποῖον ἔργον εἰς μονάδας Joule ἀπαιτεῖται ἵνα άνυψωθῇ βάρος 38 kgr^* κατὰ 4 m . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $1,52 \cdot 10^3 \text{ Joule}$.)

583. Ἀντικείμενον μάζης 22 kgr πίπτει ἀπὸ ὕψους 55 m . Ποία ἡ μεταβολὴ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος, εἰς μονάδας Joule . (Ἀπ. $1,2 \cdot 10^4 \text{ Joule}$.)

584. Σῶμα μάζης 4000 gr διατρέχει διάστημα 15 m μὲ ἐπιτάχυνσιν 5 cm/sec^2 . Ποῖον τὸ παραχθέν ὑπὸ τῆς ἐπιταχύνουσας δυνάμεως ἔργον. (Ἀπ. $A = 3 \cdot 10^7 \text{ erg}$, $0,306 \text{ kgr}^*\text{m}$.)

585. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μάζης 1 kgr , ὅταν πίπτῃ καὶ διανύῃ διάστημα 1 m . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κτηθεῖσα ταχύτης. (Ἀπ. $9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}$, 443 cm/sec .)

586. Μᾶζα 6 kgr κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 60 cm/sec . Πόση ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς. Ἐάν τεθῇ ἐν ἡρεμίᾳ ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως, ἀφοῦ διανύσῃ 100 cm , πόση εἶναι ἡ δύναμις αὐτῆς. (Ἀπ. $108 \cdot 10^5 \text{ erg}$, $108 \cdot 10^3 \text{ dyn}$.)

587. Σφαῖρα μάζης $0,25 \text{ kgr}$ βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 8 m/sec . Ζητοῦνται: α) Ἡ ἀρχικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας. β) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος. γ) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς της, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ἐβλήθη. δ) Τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει. (Ἀπ. α' 8 Joule . β' 0 . γ' 8 Joule . δ' $3,26 \text{ m}$.)

588. Σώμα μάζης 6 gr πίπτει εξ ύψους 20 cm. Νά υπολογισθῇ ἡ κινητικὴ τοῦ ἐνέργεια, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ποία ἡ δυναμικὴ τοῦ ἐνέργεια, ὅταν εὐρίσκετο εἰς ὕψος 20 cm. (Ἀπ. 118 000 erg, 118 000 erg.)

589. Ὁβὶς πυροβόλου 520 mm, ζυγίζουσα 1250 kg^r*, ἔχει ταχύτητα 800 m/sec εἰς τὸ στόμιον τοῦ πυροβόλου. Νά υπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος : α) εἰς Joule, β) εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. (Ἀπ. 4 · 10⁸ Joule, 40 775 000 kg^r*·m.)

590. Νά υπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια : α) δρομέως βάρους 60 kg^r* καὶ ταχύτητος 8 m/sec, β) ὀχήματος βάρους 2 tn* καὶ ταχύτητος 80 km/h, γ) ἑμαξοστοιχίας βάρους 500 tn* καὶ ταχύτητος 120 km/h. (Ἀπ. α' E_{κιν} = 1920 Joule, β' E_{κιν} = 493,8 · 10³ Joule, γ' E_{κιν} = 277,8 · 10⁶ Joule.)

591. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται σῶμα μάζης 1 kg^r, τὸ ὁποῖον ρίπτεται κατακόρυφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς 50 Joule. (g = 10 m/sec²). (Ἀπ. h = 5 m.)

592. Ἀντικείμενον μάζης 12 kg^r κινεῖται μὲ ταχύτητα 25 m/sec. Ποία εἶναι ἡ κινητικὴ τοῦ ἐνέργεια. (Ἀπ. 3750 Joule.)

593. Κλίμαξ ἔχει μήκος 5 m, ζυγίζει 25 kg^r*, τὸ δὲ κέντρον βάρους τῆς εὐρίσκεται 2 m ἀπὸ τῆς βάσεως. Βάρος 4 kg^r* εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς κλίμακος. Νά υπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνυψωθῇ ἡ κλίμαξ ἀπὸ τῆς ὀριζοντίας θέσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς κατακόρυφον διεύθυνσιν. (Ἀπ. A = 70 kg^r*·m.)

594. Ἐκκρεμές μήκους 1 m φέρει σφαῖραν μάζης 10 kg^r. α) Πόσον ἔργον εἰς kg^r*·m ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ ἐκκρεμοῦ ἀπὸ τῆς κατακόρυφου θέσεως, μέχρι τῆς ὀριζοντίας τοιαύτης. β) Ἐὰν τὸ ἐκκρεμές ἀφεθῇ νὰ πέσῃ ἀπὸ τῆς ὀριζοντίας θέσεως, πόσαι θὰ εἶναι ἡ ταχύτης καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας κατὰ τὴν στιγμήν καθ' ἣν διέρχεται διὰ τῆς κατωτάτης θέσεως. (Ἀπ. α' 10 kg^r*·m, β' 443 cm/sec, 10 kg^r*·m.)

595. Σώμα μάζης 5 kg^r κινεῖται διανύον διάστημα 20 m μὲ ἐπιτάχυνσιν 10 cm/sec². Ποῖον τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιταχύνουσας δυνάμεως ἐκτελούμενον ἔργον. (Ἀπ. A = 10 Joule.)

596. Ποῖον ἔργον ἀνυψώσεως καταβάλλει ἄλτης βάρους 50 kg^r*, διὰ νὰ ὑπερπηδήσῃ σχοινίον ὕψους 1,30 m, ὅταν τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἄλτου εὐρίσκεται εἰς ὕψος 85 cm καὶ πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ κατὰ 20 cm ὑπεράνω τοῦ σχοινοῦ. (g = 10 m/sec²). (Ἀπ. A = 325 Joule περίπου.)

597. Ποῖαν ἐνέργειαν πρέπει νὰ δαπανήσῃ ἀτμομηχανή, διὰ νὰ προσδώσῃ εἰς ἡμεροῦντα συρμόν, βάρους 500 tn*, ταχύτητα 30 m/sec, κινουσα αὐτὸν μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν. (Ἀπ. E_{κιν} = 2,25 · 10⁸ Joule.)

598. Νά υπολογισθῇ, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον σῶμα, ριπτόμενον κατακόρυφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα u₀ = 12 m/sec, ἐλαττώνει αὐτὴν εἰς τὸ ἥμισυ. (g = 10 m/sec²). (Ἀπ. h = 5,4 m.)

599. Σφῦρα, βάρους 100 kg^r*, ἀνυψοῦται κατὰ 2,8 m καὶ ἀκολούθως πίπτει ἐλευθέρως ἐπὶ καρφίδος. Ποία ἡ ἐνέργεια καὶ ἡ ταχύτης τῆς σφύρας κατὰ τὴν κρούσιν. (g = 10 m/sec²). (Ἀπ. E = 2800 Joule, v = 7,5 m/sec.)

600. Κινητὴρ ἔχει ἰσχὺν 12 PS καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 600 kg^r* εἰς ὕψος 10 m. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο. (Ἀπ. 6,67 sec.)

601. Έργατης ανυψώνει σφύραν μάζης 225 kgf και αφήνει αυτήν να καταπέσει από ύψους 4 m επί πασσάλου, ο οποίος εισχωρεί εις το έδαφος κατά 10 cm. Πόση ή μέση δύναμις, ή εφαρμοζόμενη επί του πασσάλου. (Άπ. 9000 kgf*.)

602. Αυτοκίνητον, κινούμενον υπό σταθεράν ταχύτητα 90 km/h, παρέχει όλην τήν ισχύν τής μηχανής του, ανερχομένην εις 20 PS. Ποία θα είναι ή τιμή τής δυνάμεως, ήτις αντίτιθεται εις τήν κίνησιν του αυτοκινήτου. (Άπ. 60 kgf*.)

603. Ύδραντλία λειτουργεί με κινητήρα ισχύος 5 PS, του οποίου ή απόδοσις είναι 40%, και ανυψώνει ύδωρ έντός δεξαμενής, εύρισκομένης εις ύψος 30 m άνωθεν τής έπιφανείας του ύδατος έν τῷ φρέατι. Πόσος είναι ο παρεχόμενος όγκος ύδατος καθ' ώραν. (Άπ. 18 m³/h.)

604. Μηχανή έξάγει εις 3 min φορτίον άνθρακος ζυγίζον 1800 kgf*, λαμβανόμενον εκ βάθους 400 m. Πόση ή ισχύς τής μηχανής εις PS και kW. (Άπ. 53,3 PS ή 39,2 kW.)

605. Άνθρωπος βάρους 65 kgf* άνέρχεται κλίμακα και ανυψούται εις ύψος 15 m. Ζητούνται : α) Πόσον τὸ παραγόμενον έργον, εις kgf*m και Joule. β) Πόση ή αναπτυσσόμενη ισχύς εις Watt και PS, όταν ή άνοδος διαρκή 1 min. γ) Εις πόσον χρόνον πρέπει νά άνέλθῃ ύψος 18 m, ίνα αναπτύξη ισχύν 1/10 PS. (Άπ. α' 975 kgf*m ή 9560 Joule. β' 159 W ή 0,217 PS. γ' 2 min 36 sec.)

606. Πόσῃν ισχύν εις kW πρέπει κατά μέσον όρον νά άποδίδῃ υδραυλική έγκατάστασις, όταν εις 1 sec διέρχωνται δια του υδροστροβίλου 89 m³ ύδατος. Η διαφορά ύψους μεταξύ έργοστασίου και άποθήκης ύδατοπτώσεως είναι 200 m. (Άπ. $1,78 \cdot 10^7$ kgf*m/sec = $1,74 \cdot 10^5$ kW.)

607. Πόση ισχύς εις κιλοβάτ διατίθεται εις κινητήρα ισχύος 12 ίππων έχοντα άπόδοσιν 90%, όταν άποδίδῃ ούτος τὸ μέγιστον έργον. (Άπ. 9,95 kW.)

608. Νά υπολογισθῇ ή ισχύς μηχανής εις Watt, ή οποία ανυψώνει σώμα βάρους 500 kgf* εις ύψος 20 m έντός 1 min. (Άπ. 1630 Watt.)

609. Άτμομηχανή άσκει επί τῶν κρίκων συνδέσεώς της μετά όχήματος δύναμιν έλξεως 6000 kgf*. Η ταχύτης του όχήματος είναι 72 km/h. Νά υπολογισθῇ εις PS ή ισχύς τής μηχανής. (Άπ. 1600 PS.)

610. Ηλεκτρικός κινητήρ ισχύος 1/2 HP ενεργεί συνεχώς επί φορτίου επί 5 h. Νά υπολογισθῇ τὸ έργον, τὸ έπιτελούμενον υπό του κινητήρος. Τὸ έργον νά εκφρασθῇ εις ώριαίους ίππους (HPh), Joule και kWh. (Άπ. 2,5 HPh, $6,71 \cdot 10^6$ Joule, 1,86 kWh.)

611. Πυροβόλον, του οποίου ο σωλήν έχει μήκος 1,50 m, εκτοξεύει βλήμα 7,5 kgf και υπό ταχύτητα 600 m/sec. Νά υπολογισθούν : α) Η ισχύς εις kW και PS, ή αναπτυσσόμενη τήν στιγμήν καθ' ήν τὸ βλήμα έξέρχεται του σωλήνος. β) Τὸ έργον εις kWh και PSh τής άνακρούσεως. (Άπ. α' 270 000 kW, 367 000 PS. β' 0,375 kWh, 0,51 PSh.)

612. Σώμα βάρους 300 kgf* πίπτει εξ ύψους 3 m επί του έδάφους. Πόσαι είναι ή ταχύτης και ή ένέργεια αυτού, όταν φθάνη εις τὸ έδαφος. Έάν τὸ σώμα πρέπει ν' ανυψούται πέντε φορές έντός 1 min μέχρις ύψους 3 m εκ του έδάφους, πόση ή απαιτουμένη μέση ισχύς. (Άπ. 7,75 m/sec, 9000 Joule. 750 W = 1 PS περίπου.)

613. Ός συνάγεται εκ μετρήσεων, ή ισχύς τήν όποιαν καταβάλλει ποδηλάτης υπό ταχύτητα 15 km/h είναι 120 Watt. Πόσῃν δύναμιν καταβάλλει ο ποδηλάτης υπό τήν ταχύτητα ταύτην. (Άπ. 28,8 Nt = 2,9 kgf*.)

614. Μία υδραυλική εγκατάσταση εκμεταλλεύεται διαφοράν ύψους 200 m και παρέχει ισχύ 170 000 HP. Πόση ή κατανάλωσις ύδατος ανά εικοσιτετράωρον.
(Απ. $5,5 \cdot 10^6 \text{ m}^3/24\text{ωρον.}$)

615. Πόση ισχύς εις Watt απαιτείται διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 200 kgr* εἰς 2,5 m ἐντὸς χρόνου 4 min.
(Απ. 23,8 Watt.)

616. Βάρους 8 kgr* ἀνυψοῦται κατὰ 5 m εἰς χρόνον 6 sec. Ποία ισχύς ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο εἰς kW καὶ εἰς HP.
(Απ. 0,0653 kW, 0,0875 HP.)

617. Πόση ισχύς εἰς Watt ἀπαιτεῖται ἵνα ἀνυψωθῇ ἀντικείμενον βάρους 200 kgr* ὑπὸ ταχύτητα 0,2 m/sec.
(Απ. 392 Watt.)

618. Μὲ ποῖαν ταχύτητα κινητὴρ ἰσχύος 3 kW ἀνυψώνει ἀντικείμενον βάρους 35 kgr*.
(Απ. 8,7 m/sec.)

619. Ποῖον βάρους δύναται νὰ ἀνυψώσῃ κινητὴρ ἰσχύος 10 kW μὲ ταχύτητα 20 m/sec.
(Απ. 51 kgr*.)

620. Διὰ διώρυγος τομῆς 12 m^2 ρεεῖ ὕδωρ μὲ ὠφέλιμον ταχύτητα 3 m/sec. Ποία ἡ ἰσχύς ὑδροστροβίλου, συντελεστοῦ ἀποδόσεως $\eta = 0,70$. (Απ. $N = 113,4 \text{ kW.}$)

621. Ποία ἡ ἰσχύς κινητήρος κινουντος ἀντλίας, ὅταν αὕτη ἀνυψώσῃ 6 m^3 ὕδατος εἰς ὕψος 12 m κατὰ πρῶτον λεπτόν καὶ ἡ ἀπόδοσις τῆς ὅλης ἐγκαταστάσεως εἶναι 60%. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Απ. $N = 20 \text{ kW.}$)

622. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχύς, ἣτις ἀπαιτεῖται ἵνα κινηθῇ αὐτοκίνητον ὑπὸ σταθεράν ταχύτητα 30 km/h ἐάν, ὑπὸ τὴν ταχύτητα ταύτην, ἡ ἀνθισταμένη εἰς τὴν κίνησιν δύναμις εἶναι ἴση πρὸς 20 kgr*. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Απ. 1,67 kW.)

623. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ ἀνυψώσῃ ἀντλία ἰσχύος 100 ἀτμοίππων ἐντὸς 24 ὥρων ἀπὸ φρέατος βάθους $h = 300 \text{ m}$. (Απ. $21,6 \cdot 10^5 \text{ kgr*}$.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1957).

624. Διὰ τὴν ἀνύψωσιν ποσότητος ὕδατος 5000 m^3 κατὰ 3 m χρησιμοποιεῖται ἀντλία, ἡ κινητὴρ τῆς ὁποίας παρέχει ισχύ 2 ἵππους. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν περάτωσιν τῆς ἐργασίας αὐτῆς, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς ἀντλίας ἰσοῦται πρὸς 0,8.
(Απ. 34 h 43 min 12 sec.)

625. Ποία ἡ ἰσχύς μηχανῆς εἰς ἵππους καὶ κιλοβάτ, ἡ ὁποία ἀνυψώνει κατὰ πρῶτον λεπτόν βάρους 200 kgr* 84άκις κατὰ 0,75 m, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς 0,7.
(Απ. 4 PS = 2,94 kW.)

626. Ἡ φόρτωσις ἀνθράκων ἐπὶ φορτηγοῦ ἐμαξοστοιχίας γίνεται μὲ γερανόν, τοῦ ὁποίου ὁ κάλαθος ἀνυψώνει ἐκάστοτε βάρους ἀνθράκων 1 tn* εἰς ὕψος 10 m. Τὸ βάρους τοῦ κάλαθου ἀνέρχεται εἰς 200 kgr*. Εἰς χρόνον 12 ὥρων φορτῶνουνται 600 tn* ἀνθράκων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θεωρητικὴ ἰσχύς τοῦ κινητήρος τοῦ γερανοῦ.
(Απ. 2,22 PS = 1,63 kW.)

627. Ἡ μηχανὴ πλοίου, κινουμένου μὲ ταχύτητα 15 κόμβων, ἀναπτύσσει ἰσχύ 5133 PS. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς εἰς τὴν ταχύτητα αὐτὴν ἰσοῦται πρὸς 0,4 καὶ 1 κόμβος = 0,5144 m/sec.
(Απ. 20 tn*.)

628. Πυροσβεστικὴ ἀντλία καταιονίζει 10 λίτρα ὕδατος τὸ δευτερόλεπτον εἰς ὕψος 27 m. Ἡ ἀντλία ἐξυπηρετεῖται ἀπὸ 20 ἄνδρας. Αἱ διάφοροι ἀντιοτάσεις καταναλίσκουν τὸ 1/3 τῆς παρεχομένης ἰσχύος. Ποία ἡ ἰσχύς, ἡ παρεχομένη ὑπὸ ἐκάστου τῶν ἀνδρῶν.
(Απ. 20,25 kgr*m/sec.)

629. Κατά τὸν 18ον αἰῶνα ἐχρησιμοποιεῖτο διὰ τὴν ἀντλησιν τοῦ ὕδατος ἐκ τῶν φρεάτων τῶν ὀρυχείων τὸ καλούμενον «στροφεῖον», κινούμενον δι' ἵππων. Ἡ μέση διάμετρος τοῦ στροφεῖου εἶναι 8 m, ὁ δὲ κύλινδρός του ἐκτελεῖ 6 στροφὰς κατὰ πρῶτον λεπτὸν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση τιμὴ τῆς κινητηρίου δυνάμεως, τῆς προσφερομένης ὑπὸ τοῦ ἵππου, τοῦ κινούντος τὸ στροφεῖον, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἰσχύϊν ἴσην πρὸς 1 PS.

(Ἀπ. 29,9 kgf*.)

630. Ἐξ ὕψους 2,5 m καταπίπτουν 9 m³ ὕδατος κατὰ sec. Ποία ἡ ἰσχύς τῆς ἐν λόγω ὕδατοπτώσεως.

(Ἀπ. 300 PS.)

631. Πρὸς ἀποπεράτωσιν οἰκοδομῆς ἀπαιτεῖται ὅπως μεταφερθῶν εἰς ὕψος 12 m 300 λίθοι, βάρους ἑκάστος 2 kgf*. Ποῖον τὸ ἀπαιτούμενον πρὸς τοῦτο ἔργον, ἐὰν οἱ λίθοι μεταφέρονται ἀνὰ 10, 20 ἢ 30 ἐκάστοτε.

(Ἀπ. Τὸ ἔργον εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον πρὸς 7200 kgf*m.)

632. Ποῖον τὸ ἔργον τὸ δαπανώμενον ὑπὸ ὀρειβάτου βάρους 42 kgf* διὰ νὰ ἀνέλθῃ οὗτος μέχρι τῆς κορυφῆς ὄρους ὕψους 1000 m.

(Ἀπ. 42 000 kgf*m.)

633. Ποῖον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἀνεγκυστήρ, ὁ ὁποῖος φέρει βάρος 930 kgf* περισσότερον ἀπὸ τὸ ἀντίβαρον, τέσσαρας ὀρόφους, ἑκάστος τῶν ὁποίων ἔχει ὕψος 3,5 m, τῆς τριβῆς θεωρουμένης ὡς ἀμελητέας.

(Ἀπ. 13 020 kgf*m.)

634. Τροχιόδρομος, βάρους 15 τόννων, μεταφέρει εἰς χρόνον 5 πρῶτων λεπτῶν 60 πρόσωπα, μέσου βάρους ἑκάστον 70 kgf*. Ἐπὶ ὁδοῦ μήκους 1000 m καὶ κλίσεως 50°/ω. Ποία ἡ μέση ἰσχύς τοῦ κινητήρος, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἴσούται πρὸς 0,02.

(Ἀπ. 60 PS.)

635. Ἄνθρωπος βάρους 60 kgf* προσδένεται εἰς τὸ ἐν ἄκρον σχοινίου, τὸ ὁποῖον, διερχόμενον διὰ τοῦ λαιμοῦ παγίας τροχαλίας, καταλήγει διὰ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου αὐτοῦ εἰς χεῖρας τοῦ ἐν λόγω ἀνθρώπου. Ποῖαν δύναμιν πρέπει νὰ καταβάλλῃ κατ' ἐλάχιστον ὅριον ὁ ἄνθρωπος, ἵνα, ἔλκων τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου, ἀνέλθῃ κατὰ 5 m καὶ ποῖον ἔργον δαπανᾷ πρὸς τοῦτο. Ποῖον ἔργον θὰ ἐχρειάζετο νὰ καταβληθῇ ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου διὰ νὰ ἀνέλθῃ οὗτος, ἀναρριχώμενος, κατὰ 5 m ἐπὶ κατακορύφως ἐξηρητημένου σχοινίου.

(Ἀπ. 30 kgf*, διότι ὅταν ἔλκῃ διὰ δυνάμεως 30 kgf* ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τοῦ σχοινίου, ἀπομένουν ἐκ τοῦ βάρους αὐτοῦ 30 kgf* ἀκόμη εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον. 300 kgf*m. Τὸ αὐτὸν ἔργον.)

636. Ποία ἡ ἰσχύς εἰς ἵππους, ἡ παρεχομένη ὑπὸ διχρόνου κινητήρος, ὅστις ὑπὸ συχνότητα 2500 στρ/min, παράγει ροπήν ὡς πρὸς τὸ κέντρον 7,5 kgf*m.

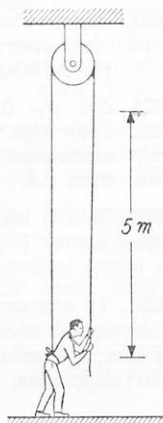
(Ἀπ. 26,2 PS.)

637. Πρὸς ὑπολογισμόν τῆς ροπῆς περιστροφῆς κινητήρος χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος $M = 716,2 \cdot N/n$, ὅπου M ἡ ροπή εἰς kgf*m, N ἡ ἰσχύς εἰς PS, n ἡ συχνότης εἰς στρ/min. Πῶς ἐξάγεται ὁ τύπος αὐτός.

(Ἀπ. Ἐκκινούντες ἐκ τοῦ τύπου $N = F \cdot v$ καὶ θέτοντες $v = 2 \pi r n / 60$ διὰ μετατροπῆς εἰς PS λαμβάνομεν $N = 2 F \pi r n / 60,75$, καὶ $M = F \cdot r = 4500 N / 2 \pi n = 716,2 N/n$.)

638. Ἐκάστος τῶν δύο κινητήρων δικινητηρίου ἀεροπλάνου ἔχει ἰσχύϊν 750 HP. Ἐὰν τὸ ἀεροπλάνον ἵπταται μὲ σταθερὰν ταχύτητα 540 km/h, ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ αἵρος.

*Ασκήσις 635.



639. Εἰς μίαν ἐγκατάστασιν παροχῆς ὕδατος 40 lt/min καὶ εἰς ὕψος 30 m, χρησιμοποιοῦται ἀντλία ἰσχύος 300 W. Ποῖος ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως αὐτῆς. ('Απ. 65%.)

640. Πόσων ἱππων (PS) ἰσχύος πρέπει νὰ εἶναι ὁ κινητὴρ ἀνελκυστήρος, βάρους 400 kgr*, διὰ νὰ δύναται νὰ ἀνέρχεται οὗτος ὕψος 40 m ἐντὸς 2 πρώτων λεπτῶν. ('Απ. $1\frac{7}{9}$ PS.)

641. Ποῖον χρόνον χρειάζεται πoδηλάτης, ζυγίζων μετὰ τοῦ ποδηλάτου αὐτοῦ 75 kgr*, διὰ νὰ διέλθῃ ὑψομετρικὴν διαφορὰν 1000 m, ἐὰν ἡ μέση ἰσχύς αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 0,2 ἀτμοίππους. ('Απ. $1^{\circ} 23^{\circ} 20^{\circ}$.)

642. Ἀντλία ἔχει ἰσχὺν 180 PS. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος δύναται νὰ ἀναρροφήσῃ αὕτη ἐντὸς 24 ὥρῶν ἀπὸ ὑδροφόρου στρώματος, εὐρισκομένου εἰς βάθος 200 m. ('Απ. 5832 m³.)

643. Ἡλεκτρικὸς σιδηρόδρομος ἀναπτύσσει, κινούμενος ἐπὶ ὀρεινῆς τιнос περιοχῆς, ταχύτητα 46 km/h, τῆς προωστικῆς δυνάμεως τοῦ κινητήρος αὐτοῦ ἀνέρχουμένης εἰς 10 500 kgr*. Ποία ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρος εἰς ἀτμοίππους. ('Απ. 1788 PS.)

644. Ποία ἡ ἰσχύς ὅπλου πεζικοῦ, ἐὰν τὸ βλήμα ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος $\frac{1}{800}$ sec, διανύῃ τὸ μήκος τῆς κάννης καὶ ἐγκαταλείπῃ τὸ ὅπλον ἔχον ἐνέργειαν 400 kgr*m. ('Απ. 4267 PS.)

645. Ὁρολόγιον κινεῖται διὰ βαριδίου, μάζης 300 gr, τὸ ὅποῖον κατέρχεται κατὰ 120 cm ἐντὸς χρόνου 24 ὥρῶν. α) Ποίαν ἰσχὺν χρειάζεται τὸ ὥρολόγιον πρὸς λειτουργίαν. β) Πόση ἰσχύς ἀπαιτεῖται πρὸς κούρδισμα, ἐὰν τοῦτο πραγματοποιῇται ἐντὸς ἑμισείας λεπτοῦ, αἱ δὲ ἀντιστάσεις τῆς συσκευῆς δαπανοῦν τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὠφελίμου ἰσχύος. ('Απ. α' $1/240\,000$ kgr*m/sec. β' $0,016$ kgr*m/sec = $(1 + \frac{1}{3}) \cdot 0,3 \cdot 1,2/30$.)

646. Ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς, ἡ παρεχόμενη ὑπὸ ὕδατοπτώσεως ὕψους 3,6 m, ἀνέρχεται εἰς 16 200 HP. Ἐὰν ἡ ἀπόδοσις τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι 75%, πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος διέρχονται κατὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ τὸν ὑδροστρόβilon. ('Απ. 450 m³.)

647. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξ 1 gr μάζης οἰουδήποτε σώματος ἀπελευθερουμένη ἐνέργεια ἰσοῦται πρὸς $9 \cdot 10^{13}$ Joule = $2,15 \cdot 10^{10}$ kcal = $2,5 \cdot 10^7$ kWh.

648. Σωματίδιον α, μάζης $6,64 \cdot 10^{-27}$ kgr, κινεῖται μὲ ταχύτητα 10 000 km/sec. α) Ποία ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια. β) Πόσα σωματίδια α ἔχουν ὁμοῦ κινητικὴν ἐνέργειαν 1 Joule. ('Απ. α' $E_{κιν} = 3,32 \cdot 10^{-23}$ Joule. β' $n = 3$ δισεκατομ. περίπου.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

649. Δύο δυνάμεις $F_1 = 30$ kgr* καὶ $F_2 = 40$ kgr* ἐφαρμόζονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α κατὰ διευθύνσεις σχηματίζουσας μεταξὺ τῶν ὀρθῶν γωνίαν. Ζητοῦνται: α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν. β) Ἐὰν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων τούτων μετατοπίζεται μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ ταχύτητα $v = 2$ m/sec κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τῶν, πόσον τὸ ὑπὸ τῶν δυνάμεων παραγόμενον ἔργον ἐντὸς 2 min. γ) Πόση ἡ ἰσχύς κινητήρος ἱκανοῦ νὰ παράγῃ τὸ ἔργον τοῦτο εἰς 25 sec. ('Απ. α' 50 kgr*. β' 12 000 kgr*m. γ' 480 kgr*m/sec ἢ 6,4 PS.)

650. Σπειροειδὲς ἐλατήριον τεντεῖται ὑπὸ δυνάμεως 10 kgr*. Ἡ τείνουσα δύναμις αὐξάνεται βαθμιαίως μέχρι 15 kgr*, ὅποτε τὸ μήκος τοῦ ἐλατηρίου αὐξάνεται κατὰ 30 cm. Ποῖον τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον κατὰ τὴν πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν. ('Απ. 3,75 kgr*m.)

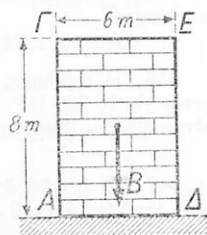
651. Άντλία τροφοδοτεί με 300 m^3 ύδατος ώριαίως ύδαταποθήκη, κειμένην εις ύψος 80 m από τοῦ ἐδάφους. Ζητοῦνται : α) Ποία ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρος, τοῦ κινούντος τὴν ἀντλίαν, ὅταν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 80% . β) Ποῖον τὸ κόστος συνεχoῦς ἐπὶ μίαν ἐβδομάδα ἀντλήσεως, ὅταν ἡ ηλεκτρικὴ ἐνέργεια τιμᾶται πρὸς $1,20$ δραχμὰς τὸ kWh . (Ἄπ. α' $N = 111,1 \text{ PS}$ ἢ $81,8 \text{ kW}$. β' $16\,490$ δραχμὰι.)

652. Εἰς πόσον χρόνον ἀεροπλάνον, ἱπτάμενον ὁριζοντίως, διανύει ἀπόστασιν 30 km , ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι $500 \text{ kg}^* \text{m}$ καὶ ὁ κινητὴρ αὐτοῦ εἶναι ἰσχύος 1000 PS . Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου. (Ἄπ. $3 \text{ min } 20 \text{ sec}$. 540 km/h .)

653. Μοτοποδηλάτον, ζυγίζον μετὰ τῆς μηχανῆς του $80 \text{ kg}^* \text{m}$, μετατοπίζεται ὁριζοντίως μετὰ ταχύτητα 18 km/h . Ἡ δύναμις τριβῶν ἔχει ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς τιμὴν $0,7 \text{ kg}^* \text{m}$ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος $0,5 \text{ kg}^* \text{m}$. Ζητοῦνται : α) Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ μοτοποδηλάτου ἔργον κατὰ χιλιόμετρον δρόμου, κινουμένου ἐπὶ ὁμαλοῦ καὶ ἐπιπέδου ἐδάφους. β) Ἡ ὑπὸ τοῦ μοτοποδηλάτου ἀναπτυσσομένη ἰσχύς. γ) Ἡ ἰσχύς, τὴν ὅποιαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ, ἐὰν ἀνέρχεται πλευρὰν κλίσεως 2% διατηροῦν τὴν αὐτὴν ὅπως καὶ προηγουμένως ταχύτητα. (Ἄπ. α' $1200 \text{ kg}^* \text{m}$. β' $6 \text{ kg}^* \text{m/sec}$ ἢ $0,08 \text{ PS}$. γ' $14 \text{ kg}^* \text{m/sec}$ ἢ $0,187 \text{ PS}$.)

654. Πόσον εἶναι εἰς $\text{kg}^* \text{m}$ τὸ ἔργον A , τὸ ἀποδιδόμενον εἰς 1 ὥραν ὑπὸ πτώσεως ὕδατος 40 m ὕψους καὶ παροχῆς $150 \text{ m}^3/\text{min}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς τῆς πτώσεως ταύτης εἰς PS καὶ kW . (Ἄπ. $A = 3,6 \cdot 10^8 \text{ kg}^* \text{m}$, $N = 1330 \text{ PS} = 981 \text{ kW}$.)

655. Ὁμογενὲς ὀρθογώνιον πλαίσιον ΑΓΕΔ, τοῦ ὁποῖου αἱ διαστάσεις καὶ ἡ τοποθέτησις δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα, ἔχει βάρος $B = 4000 \text{ kg}^* \text{m}$. Ποῖον ἔργον πρέπει νὰ καταβληθῇ διὰ νὰ στραφῇ τὸ πλαίσιον περὶ τὸ Δ καὶ ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, μέχρις ὅτου ἡ διαγώνιος ΓΔ συμπίπτῃ μετὰ τῆς κατακορύφου. (Ἄπ. $4000 \text{ kg}^* \text{m}$.)



Ἀσκήσις 655.

656. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως, τῆς ἀπαιτούμενης διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 2 tn^* κατὰ 5 m , ὅταν τὸ βάρος ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 30° καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἰσοῦται πρὸς $0,5$. (Ἄπ. $18\,660 \text{ kg}^* \text{m}$.)

557. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους $20 \text{ kg}^* \text{m}$. Τὸ βάρος ὀλισθαίνει κατὰ 6 m ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 30° , ὃ δὲ συντελεστὴς τριβῆς ἰσοῦται πρὸς $0,01$. (Ἄπ. $61,04 \text{ kg}^* \text{m}$.)

658. Ἀτμομηχανὴ πρέπει νὰ ἀσκῇ ὁριζοντίως δύναμιν $5 \text{ kg}^* \text{m}$ κατὰ τόννον φορτίου ἔλξεως, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι 40 km/h . Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ χορηγῇ καθ' ὥραν, ὅταν ρυμουλκῇ αὕτη ὁριζοντίως ἀμαξοστοιχίαν 360 τόννων καὶ ὑπὸ τὴν ταχύτητα τῶν 40 km/h . Πόση εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἀναπτυσσομένη ἰσχύς εἰς PS καὶ kW ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας. (Ἄπ. 267 PS ἢ 196 kW .)

659. Ἀμαξοστοιχία 600 τόννων κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ ὑπὸ ταχύτητα 108 km/h . Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατοπίσεως τῆς ἀμαξοστοιχίας. β) Ἡ δύναμις, ἥτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῶν τροχοπέδων, ἵνα ἡ ἀμαξοστοιχία σταματήσῃ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 180 m . γ) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, μέχρις ὅτου σταματήσῃ αὕτη. (Ἄπ. α' $275 \cdot 10^5 \text{ kg}^* \text{m}$. β' $153\,000 \text{ kg}^* \text{m}$. γ' 12 sec .)

660. Πόσον εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει αὐτοκίνητον κατὰ χιλιόμετρον, ὅταν ρυμουλκῇ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους, ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα καὶ με ἐλκτικὴν δύναμιν $430 \text{ kg}^* \text{m}$, ἔτερον ὄχημα (βάρους 12 τόννων). (Ἄπ. $430\,000 \text{ kg}^* \text{m}$.)

661. Ἀμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ καὶ φθάνει τὴν ταχύτητα 90 km/h. Αἱ παθητικαὶ ἀντιστάσεις ἀπορροφοῦν 5% τῆς ἐνεργείας τῆς χορηγομένης ὑπὸ τῆς μηχανῆς. Ἡ κίνησις κατὰ τὴν ἐκκίνησιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἐπιταχύνσεως 50 cm/sec². Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ἡ διάρκεια τῆς ἐκκινήσεως. β) Τὸ κατὰ τὴν ἐκκίνησιν διανυθὲν διάστημα. γ) Τὸ ὑπὸ τῆς μηχανῆς καταναλωθὲν ἔργον, κατὰ τόννον τῆς ἀμαξοστοιχίας, κατὰ τὴν ἐκκίνησιν. δ) Ἡ μέση δύναμις, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς, κατὰ τόννον τῆς ἀμαξοστοιχίας. ($g = 980 \text{ cm/sec}^2$).

(Ἀπ. α' 50 sec. β' 625 m. γ' 657 895 Joule. δ' 53,7 kgr*.)

662. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον μάζης 2 τόννων φέρει ὠφέλιμον φορτίον μάζης 10 τόννων, πρέπει δὲ ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως νὰ ἀποκτήσῃ τὴν μεγίστην του ταχύτητα 54 km/h, ἐντὸς 25 sec. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον μέχρις ἀποκτήσεως τῆς μεγίστης ταχύτητος, ὡς καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις. Πόσον ἐπίσης τὸ ἔργον καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη μέση ἰσχύς.

(Ἀπ. $\gamma = 0,6 \text{ m/sec}^2$, 187 m, 720 kgr*, 0,375 kWh, 72 PS.)

663. Πόσων ἵππων ἰσχὺν ἀπαιτεῖται νὰ ἀναπτύσῃ μηχανὴ συμμοῦ ἀποτελουμένου ἐξ 8 βαγονίων, ἵνα μεταδίδῃ εἰς τὸν συμμὸν ἐντὸς 40 sec ταχύτητα 72 km/h. Πόσην δύναμιν ἀναπτύσσει ἡ μηχανή. Ἡ μηχανὴ ἔχει μᾶζαν 150 τόννων καὶ ἑκάστον βαγόνιον ἔχει μᾶζαν 45 τόννων. Τριβαὶ ἀμελεῖται. (Ἀπ. $N = 3430 \text{ PS}$, $1,8 \cdot 10^5 \text{ Nt}$.)

664. Σῶμα μάζης 100 gr ἀφίεται νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψους 100 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ καὶ ἡ δυναμικὴ του ἐνέργειας μετὰ χρόνον 0 sec, 1 sec, καὶ 2 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφῆθῃ ἐλεύθερον. Ὁμοίως τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ κτυπήσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1960).

(Ἀπ. α' $E_{\text{κιν}} = 0$, $E_{\text{δυν}} = 10 \text{ kgr*m}$, $E_{\text{ολ}} = 10 \text{ kgr*m}$. β' $E_{\text{κιν}} = 0,4905 \text{ kgr*m}$, $E_{\text{δυν}} = 9,5095 \text{ kgr*m}$. γ' $E_{\text{κιν}} = 1,962 \text{ kgr*m}$, $E_{\text{δυν}} = 8,038 \text{ kgr*m}$. δ' $E_{\text{κιν}} = 10 \text{ kgr*m}$, $E_{\text{δυν}} = 0$).

665. Ἐκ νέφους εὐρισκομένου εἰς ὕψος 1 km πίπτει ἐπὶ πεδιάδος ἐπιφανείας 10 km² ποσότης βροχῆς 4 mm ὕψους. α) Ποία ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς εἰς τὸ νέφος περιεχομένης ποσότητος ὕδατος. β) Ποία ἡ ἀπώλεια τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, ἐὰν αἱ σταγόνες τῆς βροχῆς φθάνουν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα 10 m/sec, καὶ εἰς τί μετετράπη αὕτη. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ἀπ. α' $E_{\text{δυν}} = 4 \cdot 10^{11} \text{ Joule}$. β' $E_{\text{κιν}} = 2 \cdot 10^9 \text{ Joule}$, $\Delta E = 398 \cdot 10^9 \text{ Joule}$. Μετετράπη εἰς θερμότητα.)

666. Χρηματοκιβώτιον βάρους 10 τόννων δέον νὰ φορτωθῇ ἐπὶ φορτηγοῦ αὐτοκινήτου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ὑπὲρ τὸ ἔδαφος 1,5 m, τῇ βοηθείᾳ δοκῶν μήκους 6 m, διὰ τῶν ὁποίων σχηματίζεται κεκλιμένον ἐπίπεδον. Ἐὰν αἱ πρὸς ὑπερνίκησιν τριβαὶ ἀνέρχωνται εἰς 158 kgr*, πόση ἡ ἐλαχίστη δύναμις διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ χρηματοκιβωτίου.

(Ἀπ. 2658 kgr*.)

667. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς γεννητρίας τροφοδοτοῦσης δίκτυον τροchioδρόμων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τροchioδρομικῶν ὀχημάτων ἀνέρχεται εἰς 45, τὸ βάρος ἑκάστου ὀχήματος εἰς 10 tn*, ἡ ἀντίστασις τῆς τριβῆς εἰς 0,02 τοῦ βάρους τοῦ ὀχήματος καὶ ἡ μέση ταχύτης τῶν ὀχημάτων εἰς 12 km/h. Αἱ ἀπώλειαι ἰσχύος ἀνέρχονται εἰς 5%.

(Ἀπ. 420 PS = 309 kW.)

668. Ὁ τροχὸς μύλου ἐκτελεῖ 100 στροφὰς κατὰ πρῶτον λεπτόν, ἡ διάμετρος του ἰσοῦται πρὸς 1 m, ἡ δὲ ἰσχύς του πρὸς 2 PS. Ποία ἡ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἀσκούμενη δύναμις.

(Ἀπ. 28,64 kgr*.)

669. Πάσσαλος πρόκειται νά ἐνσφηνωθῇ ἐντὸς τοῦ ἐδάφους, τὸ ὁποῖον προβάλλει εἰς τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ ἀντίστασιν $6750 \text{ kg}^*\text{r}$. Ἐὰν τοῦτο ἐπιδιώκεται νά γίνη διὰ σφύρας μάζης $135 \text{ kg}^*\text{r}$, ἡ ὁποία καταφέρεται ἐπὶ τοῦ πασσάλου μὲ ταχύτητα 9 m/sec , εἰς πόσον βάθος θὰ εἰσδύσῃ ὁ πάσσαλος μὲ ἐν κτύπημα. Πόση ἡ μέση ἰσχύς εἰς ἵππους. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). Οὐδεμία ἀπώλεια ἐνεργείας φέρεται.

(Ἀπ. $0,081 \text{ m}$, 405 HP .)

670. Αὐτοκίνητον βάρους $1,5$ τόννου ρυμουλκεῖται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους διὰ μέσου δύο σχοινίων, ὀριζοντίως διατεταμένων, ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα. Ἡ συνισταμένη τάσις τῶν σχοινίων εἶναι $85 \text{ kg}^*\text{r}$, τὸ δὲ αὐτοκίνητον μετατοπίζεται κατὰ 135 m ἐντὸς 30 sec . Ζητοῦνται: α) πόσον τὸ ἔργον κατὰ τὴν ρυμούλκισιν τοῦ αὐτοκινήτου ἐπὶ 135 m , καὶ β) πόση ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς εἰς HP διὰ τὴν ρυμούλκισιν αὐτοῦ.

(Ἀπ. $11\,475 \text{ kg}^*\text{r}\cdot\text{m}$, $5,1 \text{ HP}$.)

671. Δι' ἐνὸς ὑδροστροβίλου ρέουν $12\,000$ λίτρα ὕδατος κατὰ πρῶτον λεπτόν. Ἡ χρήσιμος κατωφέρεια παρουνιάζει ὕψος $h = 12 \text{ m}$. Ποία ἡ ἰσχύς τοῦ στροβίλου, ὅταν ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως ἰσοῦται πρὸς 70% . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ἀπ. $N = 16,8 \text{ kW}$.)

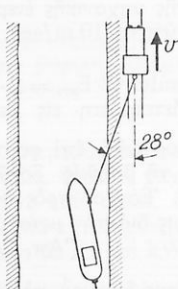
672. Ἡλεκτρόνιον ἐκτινάσσεται ἀπὸ τεμάχιον ραδίου C μὲ ταχύτητα 99% τῆς τοῦ φωτός. (Μάζα ἡρεμίας ἡλεκτρονίου $m_0 = 9,1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}^*\text{r}$). α) Ποία ἡ ἀναλογία κινουμένης καὶ ἡρεμούσης μάζης αὐτοῦ. β) Ποία ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια. γ) Εἰς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀνέρχεται τὸ λάθος, ὅταν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ αὐξήσις τῆς μάζης.

(Ἀπ. α' $m = 7,1 m_0$. β' $E_1 = 42,2 \cdot 10^{-15} \text{ Joule}$, $E_2 = 285 \cdot 10^{-15} \text{ Joule}$. γ' 600% .)

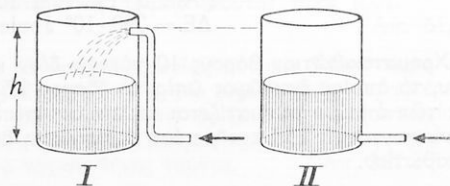
673. Νά ἐκφρασθῇ εἰς ἀτμοίππους καὶ εἰς μεγαβάτ ἡ ὀλική ἰσχύς τριῶν διαδοχικῶν ὑδατοπτώσεων τοῦ αὐτοῦ ποταμοῦ, ἔαν τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι 12 m , $12,8 \text{ m}$ καὶ 15 m , ἡ δὲ παροχὴ τοῦ ποταμοῦ $75,4 \text{ m}^3/\text{sec}$. (Ἀπ. $40\,000 \text{ CV}$, $29,4 \text{ MW}$.)

674. Φορτηγὶς σύρεται ἐπὶ διώρυγος ὑπὸ ἀτμομηχανῆς καὶ εἰς τρόπον ὥστε τὸ σχοινίον ἔλξεως νά σχηματίζῃ γωνίαν 28° πρὸς τὰς σιδηροτροχιάς. Ἡ τάσις τοῦ σχοινίου ἀνέρχεται εἰς $800 \text{ kg}^*\text{r}$. Ζητοῦνται: α) Τὸ ἔργον διὰ διαδρομὴν 3 km . β) Ἡ ἰσχύς, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς ἀτμομηχανῆς, κινουμένης ὑπὸ ταχύτητα 9 km/h .

(Ἀπ. α' $2\,118\,000 \text{ kg}^*\text{r}\cdot\text{m}$. β' $23,5 \text{ PS}$.)



Ἀσκήσις 674.



Ἀσκήσις 675.

675. Κυλινδρική ὑδαταποθήκη, βάσεως 6 m^2 , πληροῦται δι' ὕδατος μέχρις ὕψους 3 m , δι' ἀντλίας καὶ κατὰ τοὺς ἀκολουθοῦντας δύο τρόπους: α) Τὸ ὕδωρ χορηγεῖται διὰ σωλῆνος, τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ ὁποῖου εὐρίσκεται εἰς ὕψος 3 m ἀπὸ τοῦ πυθμένος. β) Ὁ ὕδραγωγὸς προσαρμόζεται ὀριζόντιος εἰς τὸν πυθμένα (σχ. I καὶ II). Ποῖον τὸ εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ἀναγκαίου πρὸς πλήρωσιν τῆς ὑδαταποθήκης ἔργον.

(Ἀπ. α' $A = B \cdot h = 54\,000 \text{ kg}^*\text{r}\cdot\text{m}$. β' $A = B \cdot h/2 = 27\,000 \text{ kg}^*\text{r}\cdot\text{m}$.)

676. Ὁδοιπὸρος βαδίζει ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ μήκους 10 km, βηματίζων οὕτως, ὥστε τὸ βάρος του, ἀνερχόμενον εἰς 60 kg*, νὰ ἀνυψοῦται εἰς ἕκαστον βῆμα κατὰ 30 mm. Ἐὰν τὸ μήκος τῶν βημάτων τοῦ ὁδοιπόρου εἶναι 75 cm : α) Νὰ εὐρεθῇ τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ὁδοιπόρου ἔργον, λόγω ἀνυψώσεως τοῦ βάρους τοῦ σώματος αὐτοῦ καθ' ὅλον τὸ μήκος τῆς διαδρομῆς. β) Ἐὰν ὁ ὁδοιπὸρος βαδίζει μὲ ρυθμὸν 100 βημάτων ἀνὰ λεπτόν, ποία ἡ ἰσχύς αὐτοῦ εἰς ἵππους (HP) καὶ Watt.
(Ἀπ. α' 24 000 kg*m. β' 0,04 HP = 30 W.)

677. Ἡλεκτροκίνητον λεωφορεῖον, βάρους 10 000 kg*, κινεῖται ἐπὶ εὐθείας ὀριζοντίας ὁδοῦ μὲ σταθερὰν ταχύτητα 30 km/h. Ἐκ τοῦ δικτύου προσφέρεται εἰς τοὺς ἠλεκτροκινήτηρας ἰσχύς 25 kW, ἐξ αὐτῆς δὲ μεταβιβάζεται εἰς τοὺς τροχοὺς κινήσεως ποσοστὸν 83%. Νὰ υπολογισθοῦν : α) Ἡ ἀντίστασις κινήσεως, ἥτοι ἡ ὀλικὴ ἀντίστασις, ἡ ἀσκούμενὴ κατὰ τὴν ἐπὶ ὀριζοντίας τροχιάς κίνησιν τοῦ ὀχήματος, (ἄνευ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος), τὴν ὁποίαν ὑπερνικᾷ τὸ ὄχημα. β) Ἡ ἰσχύς, ἡ προσλαμβανομένη ὑπὸ τοῦ δικτύου, ὅταν τὸ ὄχημα μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα ἀνέρχεται ἀνωφερικὸν δρόμον, κλίσεως 4%.
(Ἀπ. α' 254 kg*, β' 64,4 kW.)

678. Ὁ τροχὸς μύλου σιτηρῶν ἐκτελεῖ 100 περιστροφὰς ἀνὰ λεπτόν, ἔχει διάμετρον 1 m καὶ παρέχει οὕτως ἰσχύν 2 PS. Ποία ἡ ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς μολόπετρας ἀσκούμενὴ δύναμις.
(Ἀπ. 28,64 kg*.)

679. Μύλος χρειάζεται ἰσχύν 10 PS πρὸς λειτουργίαν, κινεῖται δὲ δι' ὕδατοπτώσεως ὕψους 4 m, ὁ ὕδροστρόβιλος τῆς ὁποίας ἔχει συντελεστὴν ἀποδόσεως 0,50. Ποία ἡ παροχὴ τῆς ὕδατοπτώσεως πρὸς ἐπίτευξιν τῆς ἀπαιτουμένης ἰσχύος.
(Ἀπ. 0,375 m³/sec.)

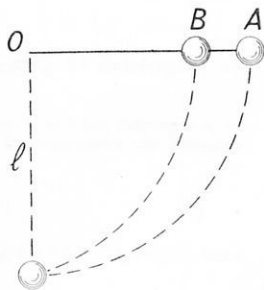
680. Ἀνθρώπος εὐρισκόμενος ἐντὸς λέμβου A, συνολικῆς μάζης 300 kg, ἔλκει σχοινίον μὲ δύναμιν 10 kg*. Εἰς τὴν μίαν περίπτωσην τὸ ἔπερον ἄκρον τοῦ σχοινοῦ προσδένεται εἰς δένδρον ἐπὶ τῆς ἀκτῆς, εἰς τὴν ἄλλην εἰς λέμβον B, ἔχουσαν μάζαν 200 kg. Νὰ εὐρεθῇ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἡ ταχύτης τῆς λέμβου A εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου. Ποῖον τὸ παραχθὲν ἔργον ἐντὸς τοῦ χρόνου αὐτοῦ καὶ ποία ἡ ἀναπτυχθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου ἰσχύς εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου. Τὸ βάρος τοῦ σχοινοῦ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος παραλείπονται

(Ἀπ. α' $v_1 = 0,98$ m/sec, $A_1 = 14,7$ kg*m, $N_1 = 9,8$ kg*m/sec, β' $v_2 = 1,47$ m/sec, $A_2 = 36,8$ kg*m, $N_2 = 24,5$ kg*m/sec.)

681. Σφαῖρα A μάζης m εἶναι ἐξηρτημένη δι' ἑλαστικοῦ νήματος, σφαῖρα δὲ B τῆς αὐτῆς μάζης ἐξαρτᾶται διὰ μὴ ἐλαστικοῦ νήματος. Ἀμφοτέραι αἱ σφαῖραι ἀπομακρύνονται ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας αὐτῶν μέχρις ὅτου τὰ νήματα καταστοῦν ὀριζόντια καὶ ἀκολούθως ἀφίονται ἐλεύθεραι. Ὅταν αἱ σφαῖραι διέρχωνται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, τὸ μήκος τοῦ ἐλαστικοῦ νήματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μήκος l τοῦ μὴ ἐλαστικοῦ νήματος. Ποία ἐκ τῶν δύο σφαιρῶν θὰ ἔχῃ τὴν μεγαλυτέραν γραμμικὴν ταχύτητα κατὰ τὴν διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας διέλευσιν.

(Ἀπ. Ἡ ἐξηρτημένη διὰ τοῦ μὴ ἐλαστικοῦ νήματος.)

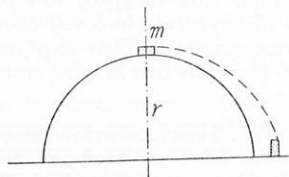
682. Τὸ νήμα ἐκκρεμοῦς μήκους l ἀπομακρύνεται κατὰ 90° ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας καὶ ἀφίεται ἐλεύθερον. Ποία ἡ ἐλαχίστη ἀντοχὴ τοῦ νήματος διὰ νὰ ἀντισταθμίσῃ τὴν τάσιν, ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας (κατωτέρας θέσεως αὐτοῦ). Ἡ μάζα τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἴση πρὸς m. Ἡ μάζα τοῦ νήματος καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.



* Ἀσκήσις 681.

(Ἀπ. 3m kg*.)

683. Σώμα μάζης m , μικρών διαστάσεων, ολισθαίνει άνευ τριβής επί ήμισφαιρίου ακτίνας r , ξεκινώντας εκ της κορυφής τούτου. Είς ποίον ύψος τὸ σώμα θὰ ἀπολέση τὴν ἐπαφήν του μετὰ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας
(᾿Απ. $2r/3$.)



*Ασκήσις 683.

684. Ἐν ἡλεκτροκίνητον λεωφορεῖον, βάρους $10\,000\text{ kgf}^*$, κινεῖται ἐπὶ εὐθείας ὀριζοντίας ὁδοῦ με ταχύτητα 30 km/h . Οἱ κινητήρες του λαμβάνουν ἐκ τοῦ δικτύου ἰσχύιν 25 kW , ἐκ τῆς ὁποίας μεταβιβάζεται εἰς τοὺς τροχοὺς κινήσεως ποσοστὸν 83% αὐτῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἀντίστασις κινήσεως, ἥτοι ἡ ὀλική ἀντίστασις τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ ὑπερνικήσῃ τὸ ὄχημα κινούμενον ἐπὶ ἐπιπέδου τροχιάς με σταθερὰν ταχύτητα, β) ἡ ἰσχύς, ἡ ὑπὸ τῶν κινητήρων προσλαμβανομένη διὰ τοῦ δικτύου, ὅταν τὸ ὄχημα κινῆται μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος ἐπὶ ἀνωφερικῆς ὁδοῦ, κλίσεως 4% .
(᾿Απ. α' 254 kgf^* , β' $64,4\text{ kW}$.)

685. Εἰς ὕδροηλεκτρικὸν ἐργοστάσιον ἡ διαφορά στάθμης ὕδατος εἰς τὴν ἀνωτέραν καὶ τὴν κατωτέραν δεξαμενὴν ἀνέρχεται εἰς 10 m . Ποία ἡ μάζα τοῦ ὕδατος, ἡ ἀπαραίτητος ὅπως πίπτῃ ἀνὰ δευτερόλεπτον μεταξὺ τῶν δύο δεξαμενῶν, διὰ νὰ διατηρῇ ἀμείωτον τὴν λειτουργίαν ἡλεκτρικοῦ φούρνου, ἰσχύος 2 kW , μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν διαφορῶν ἀπωλειῶν.
(᾿Απ. $20,4\text{ kgf}$.)

686. Πυρῆνες α πολωνίου ταχύτητος u πλήττουν ἀκίνητα πρωτόνια καὶ μεταδίδουν εἰς αὐτὰ ταχύτητα u' διευθυνομένην παραλλήλως πρὸς τὴν ταχύτητα u . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν πρωτονίων μετὰ τὴν κρούσιν συναρτήσῃ τῆς ἀρχικῆς ἐνεργείας A τῶν πυρηνῶν α . Δίδεται ὅτι ὁ πυρὴν α ἔχει μάζαν τετραπλασίαν τῆς τοῦ πρωτονίου.
(᾿Απ. $E_{\text{πρωτ}} = 0,64\text{ W}$.)

687. Δύο λέμβοι A καὶ B κινούνται, ἐπὶ τοῦ ἡρεμοῦντος ὕδατος μὲς λίμνης, πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν καὶ ἡ μία παραλλήλως πρὸς τὴν ἄλλην με ταχύτητα 6 m/sec . Καθὼς κινούνται ἡ μία παρὰ τὴν ἄλλην, μεταφέρεται φορτίον τι ἐκ τῆς λέμβου A πρὸς τὴν B . Κατόπιν τούτου, ἡ λέμβος B ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν ἀλλὰ με ταχύτητα 4 m/sec . Ἡ πρώτη λέμβος συνεχίζει νὰ κινῆται με τὴν ταχύτητά της. Ζητεῖται ἡ μάζα τῆς λέμβου B , ἐὰν ἡ πρώτη λέμβος ἔχῃ βάρος 500 kgf^* άνευ τοῦ φορτίου καὶ 560 kgf^* μετὰ τοῦ φορτίου. Ὑπολογίσατε τὴν ἐνέργειαν τῶν λέμβων καὶ τοῦ φορτίου πρὸ καὶ μετὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ φορτίου. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

$$(\text{᾿Απ. } M_2 = 300\text{ kgf} \cdot E_1 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + m) u^2, E_2 = \frac{1}{2} M_1 \cdot u^2 + \frac{1}{2} (M_2 + m) u_2'^2.)$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Ε'

ΒΑΡΥΤΗΣ. ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ.

I. ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΤΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ, ΒΟΛΑΙ. ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ.

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

688. Σφαῖρα πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους τινὸς καὶ συναντᾷ τὸ ἔδαφος ἐντὸς 3 sec. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος ἐξ οὗ ἀφέθη νὰ πέσῃ ἡ σφαῖρα. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου πίπτει ἡ σφαῖρα ἐλευθέρως, κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, καὶ t τὸν ἀπαιτούμενον πρὸς τοῦτο χρόνον, ἐπεὶδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη ($\gamma = g$) καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι μηδὲν ($v_0 = 0$), θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

Ἔργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θὰ ἔχωμεν:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3^2 \text{ m} = \underline{44,14 \text{ m}}$$

689. Λίθος βάλλεται κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ τοῦ στομίου φρέατος μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 30 m/sec καὶ φθάνει εἰς τὸν πυθμένα ἐντὸς 2 sec. Πόσον τὸ βάθος τοῦ φρέατος. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν βάλλεται ὁ λίθος πρὸς τὰ κάτω (κατακορύφως), θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση:

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἔργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὐρίσκομεν ὅτι τὸ βάθος τοῦ φρέατος θὰ εἶναι:

$$h = 30 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 2^2 \text{ m} = \underline{79,62 \text{ m}}$$

690. Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως ἐπὶ 6 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα, τὸ διανυόμενον εἰς τὰ τελευταῖα 2 sec. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν του διανύει εἰς χρόνον $t_1 = 6 \text{ sec}$ διάστημα $s_1 = 1/2 \cdot g \cdot t_1^2$ καὶ εἰς χρόνον $t_2 = 4 \text{ sec}$ διάστημα $s_2 = 1/2 \cdot g \cdot t_2^2$. Συνεπῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν τελευταίων 2 sec τῆς κινήσεώς του θὰ διανύσῃ διάστημα:

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_2^2) \quad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, καὶ εὐρίσκομεν:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (6^2 - 4^2) \text{ m} = \underline{98,1 \text{ m}}$$

691. Ἀπὸ κατερχομένου ἀεροστάτου καὶ ἐξ ἀποστάσεως 100 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καθόδου τοῦ ἀεροστά-

του, όταν το σώμα φθάνει εις τὸ ἔδαφος ἐντὸς 2 sec. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν u_0 τὴν ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν κατέρχεται τὸ αερόστατον, ἡ ταχύτης αὕτη θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν πίπτει τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφίεται ἀπὸ τοῦ αεροστατοῦ καὶ ἐπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις :

$$h = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἢ} : \quad u_0 = \frac{h}{t} - \frac{1}{2} g \cdot t$$

Ἐπειδὴ δὲ $h = 100 \text{ m}$, $t = 2 \text{ sec}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύνστημα εὐρίσκομεν :

$$u_0 = \frac{100}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 2 = 40,19 \text{ m/sec}$$

692. Ἐκ ποίου ὕψους πρέπει νὰ πέσῃ ἄνθρωπος, ἵνα φθάνων εἰς τὸ ἔδαφος ἔχῃ τὸ αὐτὸ συναίσθημα πρὸς ἀλεξιπτωτιστὴν προσγειούμενον με ταχύτητα 8 m/sec . ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν u τὴν ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν φθάνει ὁ ἄνθρωπος εἰς τὸ ἔδαφος καὶ t τὸν χρόνον καθόδου, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις :

$$u = g \cdot t \quad (1)$$

Ἐάν δὲ h εἶναι τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποῖου πίπτει ὁ ἄνθρωπος, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσηις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t , λαμβάνομεν τὴν σχέσηιν :

$$h = \frac{u^2}{2g}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $u = 8 \text{ m/sec}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, προκύπτει ὅτι τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποῖου πρέπει νὰ πέσῃ ὁ ἄνθρωπος εἶναι :

$$h = 3,26 \text{ m}$$

693. Σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως ἔχει εἰς τὸ σημεῖον Α ταχύτητα 40 cm/sec καὶ εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον Β ταχύτητα 150 cm/sec . Πόσον τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ. ($g = 9,81 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ἐάν τὸ σῶμα ἀναχωρῇ ἀπὸ ἐν σημεῖον Ο (τῆς κατακορύφου ΑΒ) καὶ φθάνῃ εἰς τὸ σημεῖον Α εἰς χρόνον t_1 καὶ ὑπὸ ταχύτητα u_1 , τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$OA = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (1) \quad \text{καί} : \quad u_1 = g \cdot t_1 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_1 , ὅτι :

$$OA = \frac{u_1^2}{2g} \quad (3)$$

Ἐπίσης, ἐάν τὸ σῶμα ἀπὸ τοῦ σημείου Ο φθάνῃ εἰς τὸ Β εἰς χρόνον t_2 καὶ ὑπὸ ταχύτητα u_2 , θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$OB = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (4) \quad \text{καί} : \quad u_2 = g \cdot t_2 \quad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) εὐρίσκομεν, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_2 , ὅτι :

$$OB = \frac{u_2^2}{2g} \quad (6)$$

Ἐάν τώρα ἀφαιρέσωμεν τὴν (3) ἀπὸ τὴν (6), λαμβάνομεν :

$$AB = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \quad (7)$$



Όποτε, δι' αντικατάστασης των μεγεθών της σχέσεως (7) διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκουμεν ὅτι τὸ διάστημα AB εἶναι εἰς τὸ Σ ὅστιμα C. G. S. :

$$AB = \frac{150^2 - 40^2}{2 \cdot 981} \frac{(\text{cm/sec})^2}{\text{cm/sec}^2} = \underline{10,6 \text{ cm}}$$

694. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς φρέατος βάθους 20 m ἀφίεται νὰ πέσῃ σφαῖρα καὶ μετὰ πάροδον 1 sec ἀφίεται νὰ πέσῃ καὶ δευτέρα σφαῖρα. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ πυθμένος θὰ εὐρίσκηται ἡ δευτέρα σφαῖρα, ὅταν ἡ πρώτη φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα. ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι ἡ πρώτη σφαῖρα φθάνει εἰς τὸν πυθμένα εἰς χρόνον t . Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ θὰ ἔχωμεν :} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

Ἡ δευτέρα σφαῖρα, ἐφ' ὅσον ἀφίεται μετὰ πάροδον 1 sec ἀπὸ τὴν πρώτην, θὰ ἔχῃ κινήθῃ, ὅταν ἡ δευτέρα ἐγγίξῃ τὸν πυθμένα, ἐπὶ χρόνον $t - 1$. Δηλαδή :

$$t - 1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \quad (3)$$

Ἐπομένως ἡ δευτέρα σφαῖρα θὰ ἔχῃ κατέλθῃ κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα κατὰ h' , ὑπολογιζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως :

$$h' = \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \right)^2 \quad (4)$$

Ὅταν ἡ πρώτη σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα, δηλαδή εἰς βάθος h , ἡ δευτέρα θὰ ἔχῃ κατέλθῃ κατὰ h' καὶ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ πυθμένος ἀπόστασιν :

$$x = h - h' \quad (5)$$

Ἡ σχέσις (5), βάσει τῶν σχέσεων (1) καὶ (4), γράφεται :

$$x = h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \right)^2$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $h = 20 \text{ m}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκουμεν ὅτι :

$$\underline{x = 15 \text{ m}}$$

695. Ἀπὸ γεφύρας ὕψους 40 m βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω σῶμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 5 m/sec. Μὲ πόσῃ ταχύτητά καὶ μετὰ πόσον χρόνον συναντᾷ τὸ σῶμα τὸ ὕδωρ κάτωθεν τῆς γεφύρας. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὅταν τὸ σῶμα ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος εἰς χρόνον t , τότε ἡ ταχύτης αὐτοῦ u θὰ εἶναι μηδὲν καὶ θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως :

$$u = u_0 - g \cdot t \quad (1) \quad \text{ὅτι : } 0 = u_0 - g \cdot t \quad (2)$$

Συνεπῶς τὸ σῶμα, διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος, θὰ δαπανῇ χρόνον :

$$t = \frac{u_0}{g} \quad (3)$$

Τὸ μέγιστον ὕψος ($h_{\text{μεγ}}$) εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ εἶναι, ὡς γνωστὸν :

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{u_0^2}{2g} \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος τῆς γεφύρας, τότε προφανῶς τὸ σῶμα, κατερχόμενον ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχῃ διανύσει συνολικῶς διάστημα :

$$h' = h_{\text{μεγ}} + h \quad (5)$$

Λόγω της σχέσεως (4), ή σχέσις (5) γράφεται :

$$h' = \frac{v_0^2}{2g} + h \quad (6)$$

Επίσης, εάν καλέσωμεν t_1 τὸν χρόνον καθόδου τοῦ σώματος, πίπτοντος ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν :

$$h' = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (7)$$

δτε, βάσει τῆς σχέσεως (6), ή σχέσις (7) γράφεται :

$$\frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{v_0^2}{2g} + h \quad (8)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (8) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t_1 καὶ λαμβάνομεν :

$$t_1 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}}{g} \quad (9)$$

Ὁ συνολικὸς ἐπομένως ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι :

$$t_{\text{ολ}} = t + t_1 = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h}}{g} \quad (10)$$

Οὕτως, ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως προκύπτει ὅτι :

$$t_{\text{ολ}} = 0,5 + 2,87 = \underline{3,37 \text{ sec}}$$

Ἡ ταχύτης, ὑπὸ τὴν ὁποίαν συναντᾷ τὸ ὕδωρ, θὰ εἶναι :

$$v = g \cdot t_1 = 10 \cdot 2,87 = \underline{28,7 \text{ m/sec}}$$

696. Βλήμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 900 m/sec καὶ λόγω τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος ἀνέρχεται εἰς ὕψος 8600 m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὕψους τούτου πρὸς τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήρχετο τὸ βλήμα ἐν τῷ κενῷ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις τοῦ βλήματος εἰς τὸ κενὸν εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς επιβραδυνόμενη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = v_0 - g \cdot t \quad (1) \quad h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Εἰς τὸ μέγιστον ὅμως ὕψος $h_{\text{μεγ}}$ αὐτοῦ ἡ ταχύτης v εἶναι μηδέν καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι :

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ βλήμα θὰ ἀνήρχετο εἰς τὸ κενὸν εἰς ὕψος :

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{900^2}{2 \cdot 10} \frac{(\text{m/sec})^2}{\text{m/sec}^2} = 40\,500 \text{ m}$$

*Αρα ὁ λόγος τοῦ ὕψους, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται πράγματι τὸ βλήμα, ὡς πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήρχετο εἰς τὸ κενόν, εἶναι :

$$\frac{8600 \text{ m}}{40\,500 \text{ m}} = \underline{0,212}$$

697. Μὲ πόσῃν ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα τὸ μέγιστον ὕψος εἶναι 20 m. Πόσῃ ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. 'Εάν καλέσωμεν t τὸν χρόνον ἀνάδου, $h_{μεγ}$ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται τὸ σῶμα καὶ v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$0 = v_0 - g \cdot t \quad (v = 0) \quad (1) \quad h_{μεγ} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$h_{μεγ} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς v_0 καὶ ἔχομεν :

$$v_0 = \sqrt{2g \cdot h_{μεγ}} \quad (4)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκῆσεως προκύπτει :

$$v_0 = 19,8 \text{ m/sec}$$

'Εάν καλέσωμεν v'_0 τὴν ζητούμενὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος εἰς ὕψος $h_{μεγ}/2$, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἐξῆς : Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης v'_0 τοῦ βλήματος, ἵνα τοῦτο ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $h_{μεγ}/2$.

Οὕτως, ἐκ τῆς σχέσεως (3), δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ v_0 διὰ τοῦ v'_0 καὶ τοῦ $h_{μεγ}$ διὰ τοῦ $h_{μεγ}/2$, προκύπτει ἡ σχέση :

$$\frac{h_{μεγ}}{2} = \frac{v'^2_0}{2g} \quad \eta: \quad v'_0 = \sqrt{g \cdot h_{μεγ}} \quad (5)$$

'Εκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως, ἐπειδὴ $h_{μεγ} = 20 \text{ m}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$v'_0 = 14 \text{ m/sec}$$

698. Μὲ πόσιν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα ἐξ ὕψους 10 m κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἵνα τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα 20 m/sec. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ τὸ σῶμα διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. 'Επειδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = v_0 + g \cdot t \quad (1) \quad \text{καί:} \quad h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

'Εάν λύσωμεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς t καὶ τὴν προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ t θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2g \cdot h} \quad (3)$$

'Εκ τῆς σχέσεως (3), θέτοντες τὰς δεδομένας τιμὰς τῆς ἀσκῆσεως : $v = 20 \text{ m/sec}$, $h = 10 \text{ m}$, εὐρίσκομεν :

$$v_0 = 14,3 \text{ m/sec}$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, ἵνα τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{v - v_0}{g} \quad (4)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν σχέσιν (4) τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν τιμῶν τῶν εὐρίσκομεν :

$$t = 0,58 \text{ sec}$$

699. Μὲ πόσιν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει σῶμα νὰ βληθῇ ἐξ ὕψους 10 m κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἵνα τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ἐντὸς 1 sec. Πόση εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. 'Επειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καί:} \quad v = v_0 + g \cdot t \quad (2)$$

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος u_0 , λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς u_0 καὶ λαμβάνομεν :

$$u_0 = \frac{h}{t} - \frac{1}{2} g \cdot t \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως, προκύπτει :

$$u_0 = 5,1 \text{ m/sec}$$

Ἡ τελικὴ ταχύτης u εὐρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι εἶναι :

$$u = 14,91 \text{ m/sec}$$

700. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τοῦ ἐδάφους μὲ ταχύτητα 10 m/sec . Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους θὰ εὐρίσκεται τὸ σῶμα μετὰ πέρασον 2 sec . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κατακορύφως, θὰ ἔχῃ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$h = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μεγέθη διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκῆσεως, λαμβάνομεν :

$$h = 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 0$$

Ἡ τιμὴ $h = 0$ σημαίνει ὅτι τὸ σῶμα μετὰ πέρασον 2 sec θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποῖου ἐβλήθη, δηλ. εἰς τὸ ἔδαφος.

701. Σῶμα βάλλεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec . Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἡ ταχύτης θὰ ἔχῃ ἐλαττωθῇ εἰς τὸ $1/4$ τῆς ἀρχικῆς. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = u_0 - g \cdot t \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad h = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{u_0^2 - v^2}{2g} \quad (3)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως εἰς τὴν σχέσιν (3) εὐρίσκομεν :

$$h = \frac{20^2 - 5^2}{2 \cdot 9,81} = 19,13 \text{ m}$$

702. Ἀπὸ ἀεροστάτου, τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται κατακορύφως ὑπὸ ταχύτητα 90 m/min , ἀφίεται νὰ πέσῃ βόμβα, ἡ ὁποία φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἐκρήγνυται. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν γίνεται ἀντιληπτὸς ὁ κρότος εἰς τὸ ἀερόστατον, εἶναι $11,5 \text{ sec}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου καθ' ἣν στιγμὴν ἐρριψε τὴν βόμβαν, ἐὰν ἡ ταχύτης διάδοσεως τοῦ ἡχοῦ εἶναι 340 m/sec καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ταχύτης τῆς βόμβας κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ρίψεως εἶναι μηδέν.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολὴ τμήμα Φυσικόν, 1954).

Λύσις. Ἐστω A τὸ σημεῖον ἀπ' ὅπου ἀφῆθη ἡ βόμβα εἰς ὕψος $h = (AB)$ ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ἐστω ἐπίσης Γ τὸ σημεῖον ὅπου θὰ εὐρίσκεται τὸ ἀερόστατον ὅταν φθάσῃ εἰς αὐτὸ ὁ ἡχος ἐκ τῆς ἐκρήξεως, εἰς

ύψος $h_1 = (\Gamma B)$. Εάν t_1 ο χρόνος πτώσεως της βόμβας και t_2 ο χρόνος διὰ νὰ φθάσῃ ὁ ἥχος εἰς τὸ ἀερόστατον, θὰ ἰσχύουν τότε αἱ σχέσεις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (1)$$

(ἐλευθέρᾳ πτώσει βόμβας)

$$h_1 = v_n \cdot t_2 \quad (2)$$

(ὁ ἥχος διαδίδεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_n)

$$h_1 - h = v \cdot t_{ολ} \quad (3)$$

(τὸ ἀερόστατον κινεῖται ἐπίσης μὲ σταθερὰν ταχύτητα v)

$$\text{καί :} \quad t_{ολ} = t_1 + t_2 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$h_1 = v_n (t_{ολ} - t_1) \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὴν τιμὴν τοῦ h_1 , ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (5) :

$$v_n (t_{ολ} - t_1) - h = v \cdot t_{ολ} \quad (6)$$

Ἐκ τῆς (1) εὐρίσκομεν :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (7)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ t_1 εἰς τὴν (6) καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$v_n \left(t_{ολ} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) - h = v \cdot t_{ολ} \quad (8)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (8) τὰ δεδομένα, ἦτοι : $v_n = 340 \text{ m/sec}$, $v = 90 \text{ m/min} = 1,5 \text{ m/sec}$, $t_{ολ} = 11,5 \text{ sec}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ εὐρίσκομεν :

$$340 \left(11,5 - \sqrt{\frac{2h}{10}} \right) - h = 90 \cdot 11,5 \quad \eta : \quad 3910 - 340 \sqrt{\frac{h}{5}} - h = 1035$$

$$\eta : \quad 340 \sqrt{\frac{h}{5}} = 2875 - h$$

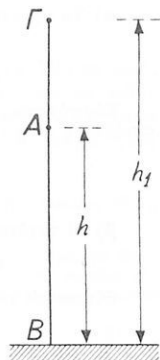
Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν κατὰ τὰ γνωστά, εὐρίσκομεν :

$$h_1 = 295 \text{ m} \quad \text{καί :} \quad h_2 = 28575 \text{ m}$$

703. Ἀπὸ τινος σημείου Α ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμα ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Ἐξ ἐτέρου σημείου Β, εὐρίσκομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου καὶ κάτωθεν τοῦ σημείου Α, εἰς ἀπόστασιν τινὰ ἀπ' αὐτοῦ, βάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . Ζητοῦνται : α) Ποῦ καὶ εἰς ποίαν χρονικὴν στιγμὴν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις τῶν δύο σωμάτων. β) Ποῖα θὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως. γ) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ πρὸς τὰ ἄνω ριπτομένου σώματος, ἵνα ἡ συνάντησις γίνῃ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Δίδεται ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος g εἰς μονάδας C.G.S.

Λύσις. Ἐστω ὅτι ἡ συνάντησις τῶν δύο σωμάτων γίνεται εἰς τὸ σημεῖον Γ μετὰ πάροδον χρόνου t . Τότε τὸ ἐκ τοῦ Α ἀφιέμενον σῶμα θὰ ἔχη διανύσει τὸ διάστημα ΑΓ καὶ τὸ ἐκ τοῦ Β βαλλόμενον, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , τὸ διάστημα ΒΓ. Ἐπομένως θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$ΑΓ = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καί :} \quad ΒΓ = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$



Προσθέτομεν τὰς εξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$s = v_0 \cdot t \quad (3)$$

α) Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι :

$$t = \frac{s}{v_0}$$

Ἐάν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χρόνου θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2), εὐρίσκομεν ὅτι ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς ὕψος ἀνωθεν τοῦ σημείου Β :

$$B\Gamma = s - \frac{1}{2} g \cdot \frac{s^2}{v_0^2}$$

β) Αἱ ταχύτητες τῶν δύο σωμάτων διδονται ἀντιστοίχως ἐκ τῶν σχέσεων :

$$v_1 = g \cdot t \quad (5) \quad \text{καὶ} : \quad v_2 = v_0 - g \cdot t \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὰς σχέσεις (5) καὶ (6) τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου $t = s/v_0$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$v_1 = g \cdot \frac{s}{v_0} \quad (7) \quad \text{καὶ} : \quad v_2 = v_0 - g \cdot \frac{s}{v_0} \quad (8)$$

γ) Ὅταν ἡ συνάντησις πραγματοποιηθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως AB, τότε τὸ δεύτερον σῶμα θὰ ἔχῃ ἀνέλθει εἰς ὕψος $h = s/2$ καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\frac{s}{2} = v'_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (9)$$

ὅπου v'_0 εἶναι ἡ ζητούμενη ἀρχικὴ ταχύτης, καὶ :

$$v = 0 = v'_0 - g \cdot t_1^2 \quad (10)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (9) καὶ (10), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_1 , εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενην ἀρχικὴν ταχύτητα :

$$v'_0 = \sqrt{g \cdot s}$$

704. Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους 20 m. Ταυτοχρόνως δεύτερον σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω με ἀρχικὴν ταχύτητα 15 m/sec. Πότε καὶ εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους συναντῶνται τὰ σώματα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ πρῶτον σῶμα ἀφίεται ἀπὸ τοῦ σημείου Α καὶ τὸ δεύτερον σῶμα ὅτι βάλλεται ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἔστω ἐπίσης ὅτι τὰ δύο σώματα συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς κατακορύφου AB (βλ. σχῆμα). Ἐπειδὴ τὰ δύο σώματα ἀναχωροῦν συγχρόνως, τὰ διαστήματα ΑΓ καὶ ΒΓ διανύονται ὑπ' αὐτῶν ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου t . Ἀρα θὰ ἔχωμεν, διὰ τὸ πρῶτον σῶμα :

$$A\Gamma = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

καὶ διὰ τὸ δεύτερον :

$$B\Gamma = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς εξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$A\Gamma + B\Gamma = AB = v_0 \cdot t \quad (3)$$

Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ χρόνου t , κατὰ τὸν ὅποιον συναντῶνται τὰ δύο σώματα, λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{AB}{v_0} \quad \text{ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι} : t = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ sec}$$

ἦτοι ὁ χρόνος, ὁ ὅποιος θὰ χρειασθῇ ἵνα συναντηθοῦν, εἶναι :

$$t = 1,33 \text{ sec}$$



Τό ύψος ΒΓ, εις τό όποιον συναντῶνται, εύρίσκεται έκ τής σχέσεως (2), δι' άντικαταστάσεως τῶν δεδομένων, ότι είναι :

$$\underline{ΒΓ} = 15 \cdot 1,3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,3^2 = \underline{11,11 \text{ m}}$$

705. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρός τά άνω μέ ταχύτητα 20 cm/sec . Κατά τήν αὐτήν στιγμήν από τοῦ άνωτάτου σημείου, όπου δύναται νά φθάσῃ τό σῶμα, βάλλεται δεύτερον σῶμα πρός τά κάτω μέ τήν αὐτήν άρχικήν ταχύτητα. Πότε καί ποῦ συναντῶνται τά δύο σῶματα. Ποῖαι αἱ ταχύτητες αὐτῶν κατά τήν στιγμήν ταύτην. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Τό πρῶτον σῶμα δύναται νά άνέλθῃ εις ύψος $h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2g}$ (1) (βλ. άσκησιν 696), όπου v_0 ἡ άρχική ταχύτης τοῦ σώματος.

Καλούμεν Β τό σημείον από τοῦ όποίου βάλλεται κατακορύφως τό πρῶτον σῶμα πρός τά άνω, Α τό σημείον από τοῦ όποίου βάλλεται κατακορύφως τό δεύτερον πρός τά κάτω, Γ τό σημείον τής κατακορύφου ΑΒ εις τό όποιον συναντῶνται καί t τόν χρόνον συναντήσεως αὐτῶν, ότε θά ισχύουν αἱ

$$\text{σχέσεις:} \quad \text{διὰ τό πρῶτον:} \quad \underline{ΒΓ} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

$$\text{καί διὰ τό δεύτερον:} \quad \underline{ΑΓ} = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (3)$$

Προσθέτομεν τās σχέσεις (2) καί (3) κατά μέλη καί ἔχομεν :

$$\underline{ΒΓ} + \underline{ΑΓ} = \underline{ΒΑ} = 2 v_0 \cdot t \quad (4)$$

Ἐπειδή ΒΑ είναι τό μέγιστον ύψος, εις τό όποιον δύναται νά άνέλθῃ τό πρῶτον σῶμα, ἡ σχέση (4), λόγω τής (1), γράφεται :

$$\frac{v_0^2}{2g} = 2 v_0 \cdot t \quad \eta: \quad \frac{v_0}{2g} = 2t \quad (5)$$

Διὰ τήν εύρεσιν τοῦ ζητουμένου χρόνου t , λύομεν τήν σχέσηιν (5) ὡς πρός t καί ἔχομεν :

$$t = \frac{v_0}{4g} \quad (6)$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τής άσκήσεως προκύπτει ότι ὁ ζητούμενος χρόνος είναι :

$$\underline{t} = \frac{20}{4 \cdot 10} = \underline{0,5 \text{ sec}}$$

Τό ύψος, εις τό όποιον θά συναντηθοῦν, εύρίσκεται από τήν σχέσηιν (2), δι' άντικαταστάσεως τῶν δεδομένων ότι είναι :

$$\underline{ΒΓ} = 20 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,5^2 = \underline{8,75 \text{ m}}$$

Διὰ τήν εύρεσιν τῶν ταχυτήτων, τās όποίας ἔχουν τά σώματα εις τό σημείον Γ τής συναντήσεως αὐτῶν, καλούμεν v_1 τήν ταχύτητα τοῦ πρῶτου καί v_2 τήν ταχύτητα τοῦ δευτέρου, όποτε θά ισχύουν αἱ σχέσεις :

$$v_1 = v_0 - g \cdot t \quad (7) \quad \text{καί:} \quad v_2 = v_0 + g \cdot t \quad (8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (7) καί (8) εύρίσκομεν τελικῶς ότι :

$$\underline{v_1} = 20 - 10 \cdot 0,5 = \underline{15 \text{ m/sec}} \quad \text{καί:} \quad \underline{v_2} = 20 + 10 \cdot 0,5 = \underline{25 \text{ m/sec}}$$

706. Σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου επιπέδου. Τό επίπεδον σχηματίζει γωνίαν 60° ὡς πρός τήν ὀριζοντίαν. Νά προσδιορισθοῦν: α) ἡ ὀριζοντία απόστασις Χ, καί β) ἡ κατακόρυφος απόστασις Ψ, τήν όποιαν θά διανύσῃ τό σῶμα ἐντός 5 sec . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω ότι τό σῶμα ἀφίεται από τήν κορυφήν Β τοῦ κεκλιμένου επιπέδου ΒΓ. Τό σῶμα,

ὡς γνωστόν, θὰ ὀλισθαίνει μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = g \cdot \eta\mu 60^\circ$ καὶ ἐπομένως θὰ ἔχη διανύσει εἰς χρόνον t διάστημα :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot t^2 \quad (1)$$

Ἡ ὀριζοντία ἀπόστασις X εὑρίσκεται, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Delta E$, ὅτι εἶναι :

$$X = s \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot t^2 \quad (2)$$

καὶ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις Ψ , ἀπὸ τὸ ἴδιον τρίγωνον, ὅτι εἶναι :

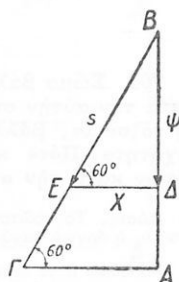
$$\Psi = s \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu^2 60^\circ \cdot t^2 \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) :

$$\eta\mu 60^\circ = 0,866, \quad \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0,5, \quad t = 5 \text{ sec}, \quad g = 10 \text{ m/sec}^2$$

εὑρίσκομεν :

$$\underline{X = 54,1 \text{ m}} \quad \text{καὶ} : \quad \underline{\Psi = 93,75 \text{ m}}$$



707. Σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) ἡ ταχύτης, ὅταν τὸ κινητὸν, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας, διανύσῃ 800 cm , καὶ β) ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τοῦτο. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα μηδέν, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = \gamma \cdot t \quad (1) \quad \text{καὶ} : \quad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Εἰς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὑπὸ γωνίαν κλίσεως 30° , ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι, ὡς γνωστόν, $\gamma = g \cdot \eta\mu 30^\circ$. Ἀρα αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) γράφονται :

$$v = g \cdot \eta\mu 30^\circ \cdot t \quad (3) \quad \text{καὶ} : \quad s = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu 30^\circ \cdot t^2 \quad (4)$$

Διὰ τὰ εὑρωμεν τὸν χρόνον t , λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \eta\mu 30^\circ}} \quad (5)$$

ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, θὰ εὑρωμεν :

$$\underline{t = 1,8 \text{ sec}}$$

Ἡ ταχύτης v εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (3) ὅτι εἶναι :

$$\underline{v = 8,82 \text{ m/sec}}$$

708. Σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30° ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 40 m/sec , μετρουμένην κατὰ μῆκος τῆς κλίσεως. Νὰ εὑρεθοῦν : α) ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἐπανέλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ἐξ ἧς ἐβλήθη, καὶ β) ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποῖαν διήνυσσε ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὴν ὁποῖαν ἔχει τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα αὐτοῦ καὶ t τὸν χρόνον, τότε, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, τὸ διάστημα θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1)$$

Τὸ διάστημα ὅμως, τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα, ἐφ' ὅσον ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν, εἶναι μηδέν, ἥτοι $s = 0$, καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$0 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ή:} \quad \left(v_0 - \frac{1}{2} \gamma \cdot t \right) \cdot t = 0 \quad (2)$$

Επειδή όμως ο χρόνος t δεν είναι μηδέν, διαιρούμεν διά t και έχουμε :

$$v_0 - \frac{1}{2} \gamma \cdot t = 0 \quad \text{ή:} \quad t = \frac{2 v_0}{\gamma} \quad (3)$$

Θέτοντες εις την σχέσιν (3) : $\gamma = g \cdot \eta \mu 30^\circ$ (τύπος του κεκλιμένου επιπέδου), λαμβάνομεν :

$$t = \frac{2 v_0}{g \cdot \eta \mu 30^\circ} \quad (4) \quad \text{εξ ης προκύπτει:} \quad t = 16 \text{ sec}$$

Ο χρόνος $t = 16 \text{ sec}$ είναι προφανώς ο χρόνος t_{zv} τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τοῦ κεκλιμένου επιπέδου καὶ ὁ χρόνος $t_{κz0}$ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ κατέλθῃ. Ἀλλὰ, ὡς γνωστὸν, ὁ χρόνος ἀνάδου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χρόνον καθόδου καὶ συνεπῶς :

$$t_{zv} = 8 \text{ sec}$$

Ἡ ἀπόστασις x τὴν ὁποῖαν διανύει ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου επιπέδου θὰ εἶναι συνεπῶς :

$$x = v_0 \cdot t_{zv} - \frac{1}{2} g \cdot \eta \mu 30^\circ \cdot t_{zv}^2 \quad (5)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) προκύπτει ὅτι :

$$x = 160 \text{ m}$$

709. Σφαῖρα, πίπτουσα ἐπὶ κεκλιμένου επιπέδου, ὑφίσταται εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον αὐξησιν τῆς ταχύτητός της κατὰ 5 cm/sec . Πόση ἡ ταχύτης αὐτῆς μετὰ πάροδον 10 sec καὶ πόσον διάστημα διήνυσε.

Λύσις. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σφαίρας θὰ εἶναι προφανῶς $\gamma = 5 \text{ cm/sec}^2$ καὶ ἐπομένως ἡ ταχύτης αὐτῆς μετὰ πάροδον 10 sec θὰ εἶναι :

$$v = \gamma \cdot t = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm/sec}$$

καὶ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσε :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = 250 \text{ cm}$$

710. Ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἄκρου κεκλιμένου επιπέδου βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 1 m/sec . Ἡ ἐπιβράδυνσις εἶναι 20 cm/sec^2 . Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα καὶ πόσον χρόνον χρειάζεται πρὸς τοῦτο. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἄκρου τοῦ κεκλιμένου επιπέδου ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς.

Λύσις. Ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$v = v_0 - \gamma \cdot t \quad (1) \quad \text{καί:} \quad s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Επειδή όμως, ὅταν ἡ σφαῖρα διανύσῃ τὸ μέγιστον αὐτῆς διάστημα ($s_{\text{μεγ}}$), ἡ τελικὴ ταχύτης αὐτῆς v γίνεται μηδέν, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) γράφονται :

$$0 = v_0 - \gamma \cdot t \quad (3) \quad \text{καί:} \quad s_{\text{μεγ}} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ αὐτῶν, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μέγιστον διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα, εἶναι :

$$s_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2 \gamma} \quad (5)$$

Έργαζόμενοι εις τὸ Σύστημα C. G. S. καὶ θέτοντες: $\gamma = 20 \text{ cm/sec}^2$, $v_0 = 100 \text{ cm/sec}$ εὐρίσκομεν ὅτι:

$$s_{\text{μεγ}} = \frac{100^2}{2 \cdot 20} = 250 \text{ cm}$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸν χρόνον t , λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t , ὁπότε εὐρίσκομεν:

$$t = \frac{v_0}{\gamma} = \frac{100}{20} = 5 \text{ sec}$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμῖς τῆς ἀρχικῆς, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) $v = v_0/2$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - \gamma \cdot t \quad \text{καί:} \quad t = \frac{v_0}{2\gamma}$$

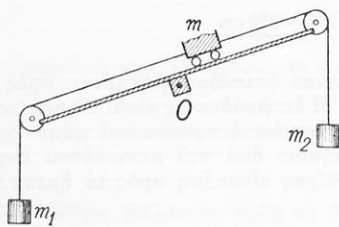
Ἀκολουθῶς θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χρόνου εἰς τὴν σχέσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν:

$$s = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{\gamma} \quad (6)$$

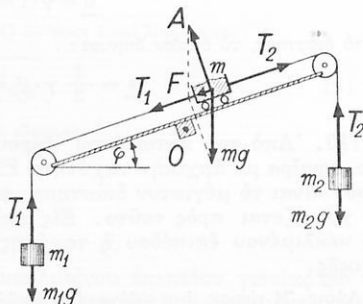
ἐξ ἧς προκύπτει:

$$s = 187,5 \text{ cm}$$

711. Κεκλιμένον ἐπίπεδον κινεῖται περὶ ἄξονα ὁριζόντιον O . Ἀμάξιον μάζης $m = 0,5 \text{ kg}$ ὀλισθαίνει ἐπ' αὐτοῦ ἄνευ τριβῆς καὶ συγκρατεῖται ὑπὸ νήματος φέροντος εἰς τὰ ἄκρα του δύο μάζας $m_1 = 0,2 \text{ kg}$, $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ (σχ. α). α) Νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τοῦ συστήματος ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον. β) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σύστημα. γ) Νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις διὰ κλίσιν διπλασίαν τῆς κλίσεως ἰσορροπίας. δ) Ἡ μάζα m φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος ἐνῶ τὸ ἀμάξιον εὐρίσκεται τότε εἰς τὸ μέσον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχει ταχύτητα $v_0 = 0,2 \text{ m/sec}$. Νὰ μελετηθῇ ἡ περαιτέρω κίνησις αὐτοῦ. Δίδεται $g = 10 \text{ m/sec}^2$.



(α)



(β)

Λύσις. α) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ σύστημα κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως:

$$F = m_2 g - m_1 \cdot g \quad (1)$$

ἐνῶ ἡ συνολικὴ μάζα:

$$m_{\text{ολ}} = m_1 + m_2 + m \quad (2)$$

Ἐπομένως ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος θὰ εἶναι:

$$\gamma = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2 + m} \quad (3)$$

Δι' αντικαταστάσεως τῶν δεδομένων $m_1 = 0,2 \text{ kg}$, $m_2 = 0,3 \text{ kg}$, $m = 0,5 \text{ kg}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ λαμβάνομεν :

$$\underline{\gamma = 1 \text{ m/sec}^2}$$

β) Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας, ἔστω φ ἡ γωνία κλίσεως (σχ. β). Τὸ ἀμάξιον εὐρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τεσσάρων δυνάμεων. Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι : ἡ τάσις τοῦ ἐνὸς νήματος $T_2 = m_2 \cdot g$, ἡ τάσις τοῦ ἑτέρου νήματος $T_1 = m_1 \cdot g$, τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ καὶ ἡ ἀντίδρασις Α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Β καὶ Α εἶναι :

$$F = B \cdot \eta \mu \varphi \quad \eta : \quad F = mg \cdot \eta \mu \varphi \quad (4)$$

Ἐπομένως διὰ τὴν ἰσορροπίαν θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$T_1 + F = T_2 \quad \eta : \quad m_1 \cdot g + m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = m_2 g \quad (5)$$

$$\text{καί :} \quad \eta \mu \varphi = \frac{m_2 - m_1}{m} \quad \eta : \quad \underline{\eta \mu \varphi = 0,2}$$

γ) Ἐὰν ἡ κλίσις εἶναι διπλασία θὰ ἔχωμεν :

$$\eta \mu \varphi' = 2 \eta \mu \varphi \quad (6)$$

ὅπου φ' ἡ νέα γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ συνισταμένη F' τοῦ βάρους τοῦ ἀμαξίου καὶ τῆς νέας ἀντιδράσεως Α' θὰ εἶναι :

$$F' = B \cdot \eta \mu \varphi' \quad \eta : \quad F' = 2 mg \cdot \eta \mu \varphi \quad (7)$$

Ἀφ' ἑτέρου αἱ νέαι τάσεις τῶν νημάτων θὰ εἶναι αἱ T'_1 καὶ T'_2 καὶ ἡ συνισταμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ ἀμαξίου θὰ εἶναι :

$$\Sigma = T'_1 + F' - T'_2 \quad (8)$$

Ἐπίσης αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι θὰ κινοῦν τὰς μάζας m_1 καὶ m_2 , θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$F_1 = m_1 \cdot g - T'_1 \quad (9) \quad \text{καί :} \quad F_2 = T'_2 - m_2 \cdot g \quad (10)$$

Ἐὰν γ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τοῦ συστήματος, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Δυναμικῆς :

$$\Sigma = m \cdot \gamma', \quad F_1 = m_1 \cdot \gamma', \quad F_2 = m_2 \cdot \gamma' \quad (11)$$

Συνδυάζοντες τὰς ἐξισώσεις (11) μὲ τὰς ἐξισώσεις (7), (8), (9) καὶ (10), λαμβάνομεν :

$$(2m \cdot \eta \mu \varphi + m_1 - m_2) g = (m + m_1 + m_2) \gamma', \quad \eta : \quad \gamma' = g \frac{2m \cdot \eta \mu \varphi + m_1 - m_2}{m + m_1 + m_2} \quad (12)$$

καὶ δι' αντικαταστάσεως τῶν δεδομένων λαμβάνομεν τελικῶς :

$$\underline{\gamma = 1 \text{ m/sec}^2}$$

δ) Μετὰ τὴν ἀφίξιν τῆς μάζης m_1 εἰς τὸ ἔδαφος, ἡ κίνησις γίνεται ἐπιβραδυνομένη, διότι τώρα ἡ συνισταμένη δύναμις Σ' ἐπὶ τοῦ κινουμένου συστήματος ἀμαξίου - μάζης m_2 εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς. Ἐχομεν δέ :

$$\Sigma'' = m_2 g - mg \eta \mu \varphi' \quad (13)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Sigma'' = (m + m_2) \cdot \gamma''$ (14) λαμβάνομεν τελικῶς :

$$\gamma'' = \frac{m_2 - m \cdot \eta \mu \varphi'}{m + m_2} \cdot g \quad (15)$$

ἐξ οὗ :

$$\underline{\gamma'' = 1,25 \text{ m/sec}^2}$$

Ἐπομένως, λόγῳ τῆς ἐπιβραδύνσεως θὰ ἔχωμεν χρόνον ἀναστροφῆς τῆς κινήσεως :

$$t_m = \frac{v_0}{\gamma''} \quad \eta : \quad \underline{t_m = 1,6 \text{ sec}}$$

και μέγιστον διάστημα :

$$s_m = \frac{v_0^2}{2\gamma} \quad \eta : \quad s_m = 1,6 \text{ m}$$

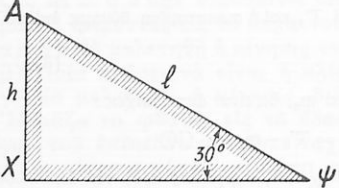
712. Ύλικον σημείον ἀφίεται νὰ πέσῃ κατακορύφως ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ σημείου Α κατὰ τὴν ΑΧ. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον κινεῖται ἕτερον κινητὸν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΨ ἐπὶ κεκλιμένον ἐπιπέδου, ὅπου ἡ ΑΨ σχηματίζει γωνίαν $\theta = 30^\circ$ ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Δεδομένου ὅτι τὸ δευτέρον κινητὸν ἀρχεται κινουμένον ταυτοχρόνως μετὰ τοῦ κατακορύφως πλίντοντος, ζητεῖται ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς κινήσεως τοῦ δευτέρου κινητοῦ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι τὰ δύο κινητὰ φθάνουν ταυτοχρόνως εἰς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται κατὰ 2000 cm χαμηλότερον τοῦ Α. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Μαθηματικόν, 1958).

Λύσις. Ἐστωσαν h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, l τὸ μήκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γ καὶ v_0 ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΨ κινουμένου ὕλικου σημείου καὶ t ὁ κοινὸς χρόνος κινήσεως. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} : \quad l = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἀπαλείφοντες τὸ t μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων λαμβάνομεν :



$$v_0 = \frac{l - \frac{\gamma \cdot h}{g}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (3)$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι :

$$h = l \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{l}{2} \quad \eta : \quad l = 2h \quad (4)$$

$$\text{καὶ} : \quad \gamma = g \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{g}{2} \quad (5)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (3) τὰς τιμὰς τῶν h καὶ γ ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$v_0 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \cdot h}{2}} \quad (6)$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $h = 20 \text{ m}$, λαμβάνομεν :

$$v_0 = 15 \text{ m/sec}$$

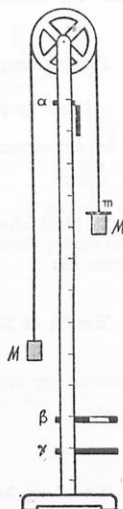
713. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood οἱ δύο κύλινδροι ἔχουν ὁ εἰς μᾶζαν 500 gr καὶ ὁ ἄλλος 510 gr. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, ὅταν κινῆται. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μᾶζαν ἐκάστου κυλίνδρου καὶ m τὴν πρόσθετον μᾶζαν, ἡ ἐπιτάχυνσις, ὡς γνωστὸν, θὰ δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2M + m}$$

Ἐπεὶ δὲ $m = 510 - 500 = 10 \text{ gr}$, καὶ $M = 500 \text{ gr}$ εὐρίσκομεν :

$$\gamma = \frac{10 \cdot 981}{2 \cdot 500 + 10} = 9,7 \text{ cm/sec}^2$$



* Ασκήσις 713.

714. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood τὸ πρόσθετον βάρος εἶναι 6 gr* καὶ προκαλεῖ ἐπιτάχυνσιν 39,24 cm/sec². Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἐκάστου τῶν κυλίνδρων τῆς μηχανῆς. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγούμενην ἀσκήσιν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἡ ἐπιτάχυνσις διδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2M + m}$$

ἢ, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὁρῶν τοῦ κλάσματος ἐπὶ g , ἔχομεν :

$$\gamma = \frac{\beta \cdot g}{2B + \beta} \quad (1)$$

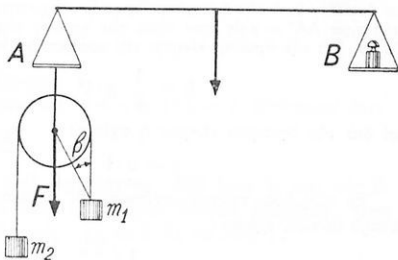
ὅπου B εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης M καὶ β τὸ βάρος τῆς μάζης m . Ἐὰν τὴν σχέσιν (1) λύσωμεν ὡς πρὸς B , λαμβάνομεν :

$$B = \frac{\beta}{2} \left(\frac{g}{\gamma} - 1 \right) \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $\beta = 6 \text{ gr}^*$, $\gamma = 39,24 \text{ cm/sec}^2$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$B = 72 \text{ gr}^*$$

715. Ἀγκιστρον προσηρτημένον ἐπὶ δίσκου ζυγοῦ φέρει τροχαλίαν ἀμελητέας μάζης, ἐκ τῆς ὁποίας διέρχεται λεπτὸν νῆμα ἀμελητέας μάζης. Εἰς τὰ δύο ἄκρα τοῦ νήματος εἶναι ἐξηρτημένοι αἱ μάζαι $m_1 = 0,3 \text{ kgr}$ καὶ $m_2 = 0,2 \text{ kgr}$ (πραγματοποιουμένης τοιουτοτρόπως μηχανῆς Atwood). Τὸ σύστημα ἀκίνητοποιεῖται διὰ νήματος β τὸ ὁποῖον συγκρατεῖ τὴν μάζαν m_1 εἰς τὸ ἄγκιστρον, ἀντίβαρον δὲ τίθεται εἰς τὸν ἕτερον δίσκον τοῦ ζυγοῦ, ὥστε τὸ σύστημα νὰ εὐρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν. Ἀκολουθῶς καίομεν τὸ νῆμα β . Νὰ δεῖχθῇ ὅτι ὁ ζυγὸς δὲν εὐρίσκεται πλέον εἰς ἰσορροπίαν. Νὰ καθορισθῇ ἡ μάζα, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προστεθῇ ἐπὶ ἐνὸς δίσκου διὰ νὰ ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσορροπία. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).



Λύσις. Μόλις καύσωμεν τὸ νῆμα θὰ ἀρχίσῃ ἡ περιστροφή τῆς τροχαλίας με φoρὰν πρὸς τὴν μεγαλύτεραν μάζαν m_1 . Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Ἡ τάσις τοῦ νήματος T , ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν τῆς μῆς ἐκ τῶν δύο μαζῶν, θὰ συνδέεται μετὰ τῆς ἐπιτάχυνσεως, διὰ τῆς σχέσεως :

$$m_1 g - T = m_1 \gamma \quad \text{ἢ} : \quad T = m_1 (g - \gamma) \quad (2)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$T = \frac{2 m_1 m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Ἐπομένως ἡ δύναμις F , ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἀξονος τῆς τροχαλίας καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπὶ τοῦ δίσκου A ὡς συνισταμένη τῶν δύο παραλλήλων καὶ ἰσῶν τάσεων τῶν νημάτων, θὰ εἶναι :

$$F = \frac{4 m_1 m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

*Αντικαθιστώμεν τὰ δεδομένα εἰς τὴν (4), ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$F = 4,8 \text{ Nt} \quad \eta : \quad F = 0,48 \text{ kg}^*$$

*Ενῶ κατὰ τὴν περίπτωσηιν τῆς ἡρεμίας ἐπὶ τοῦ δίσκου Α ἀσκέεται δύναμις :

$$F' = (m_1 + m_2) g \quad \text{καὶ δι' ἀντικαταστάσεως :}$$

$$F' = 5 \text{ Nt} \quad \eta : \quad F' = 0,5 \text{ kg}^*$$

*Ἐχομεν λοιπὸν διαφορὰν δυνάμεων ἐπὶ τοῦ δίσκου :

$$\Delta F = 0,02 \text{ kg}^*$$

καὶ ἐπομένως ἐπὶ τοῦ δίσκου Α θὰ πρέπει νὰ προστεθῇ μάζα :

$$m = 0,02 \text{ kg}$$

716. Ἐξ ἐνὸς σημείου Ο βάλλεται σφαῖρα ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα **10 cm/sec** κατὰ κατακορύφου τοίχου. Ἡ σφαῖρα συναντᾷ τὸν τοῖχον εἰς σημεῖον Α', τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται κατὰ **40 cm** κάτωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς θέσεως βολῆς. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν εὐρίσκεται ὁ τοῖχος ἀπὸ τοῦ σημείου Ο. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα πτίζει πρῶτον κατὰ διάστημα $OA = h$ με κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀκολουθῶς ὅτι κινεῖται ὁριζοντίως με κίνησιν ὁμαλὴν, ὑπὸ τὴν δεδομένην ἀρχικὴν ταχύτητα u καὶ διανύει τὸ διάστημα $AA' = s$ εἰς ἴσον πρὸς τὸν χρόνον τῆς πτώσεως χρόνον. Οὕτω, διὰ τὴν πρώτην κίνησιν τῆς σφαίρας θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

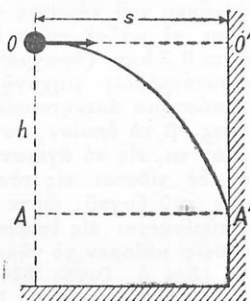
$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

καὶ διὰ τὴν δευτέραν κίνησιν ἡ σχέση :

$$s = u \cdot t \quad (2)$$

*Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ αὐτῶν, ἔχομεν :

$$s = u \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$



*Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ ΤΕΧΝΙΚὸν ΣΥΣΤΗΜΑ, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα : $h = 0,40 \text{ m}$, $u = 0,10 \text{ m/sec}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$s = 2,86 \text{ m}$$

717. Ἀπὸ τῆς στέγης πύργου ὕψους **45 m** βάλλεται ὁριζοντίως λίθος με ἀρχικὴν ταχύτητα **10 m/sec**. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς βολῆς καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ πύργου συναντᾷ ὁ λίθος τὸ ἐδάφος. Πόσαι εἶναι ἡ ταχύτης αὐτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν προσκρούσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὁ λίθος φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ ἐδάφους κινούμενος ἐπὶ τῆς καμπύλης ΟΒ ἔστω εἰς χρόνον t . Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὁ λίθος πτίζει πρῶτον κατακορύφως καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν $OA = h$ με κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εἰς χρόνον t καὶ κατόπιν ὅτι κινεῖται ὁριζοντίως καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν $AB = s$ με σταθερὰν ταχύτητα u_0 , ἐπίσης εἰς χρόνον t .

Οὕτως, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ κατα-

κόρυφος κίνησις, δύναται νά εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

ὅτι εἶναι :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) : $h = 45 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$t = 3 \text{ sec}$$

Κατὰ τὴν ὀριζοντίαν κίνησιν ὁ λίθος διανύει διάστημα :

$$s = v_0 \cdot t \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) : $v_0 = 10 \text{ m/sec}$, $t = 3 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$s = 30 \text{ m}$$

Καλοῦμεν u' τὴν ζητούμενην ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν πτίπτει ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος, κινούμενος ἐπὶ τῆς καμπύλης OB. Τότε, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει, θά ἔχωμεν :

$$u' = \sqrt{v_0^2 + u^2} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ ὁμως $u = g \cdot t$, ἡ σχέση (4) γράφεται :

$$u' = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2} \quad (5)$$

Ἐκ τῆς εξισώσεως (5) προκύπτει ὅτι :

$$u' = 31,6 \text{ m/sec}$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος u' ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον

ἐπίπεδον προσδιορίζεται, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ γωνία α . Ἐπειδὴ δέ : $\tan \alpha = g \cdot t / v_0 = 3$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha = 71^\circ 34'$$

718. Ἀεροπλάνον ἵπταται ὀριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα **400 km/h** καὶ εἰς ὕψος **4000 m**. Ἐὰν ὁ ἀεροπόρος ἀφήσῃ ἀπὸ τοῦ ἄνωτέρω ὕψους βόμβαν, ὑπὸ ποίαν ταχύτητα φθάνει ἡ βόμβα εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἡ βόμβα, ὅταν ἀφῇθῇ ἐλευθέρᾳ, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκτελεῖ δύο κινήσεις. Ἦτοι μίαν κατακόρυφον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ μίαν ὀριζοντίαν ὁμαλὴν μὲ ταχύτητα v_0 , ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφίεται ἡ βόμβα εἶναι h , τότε διὰ τὴν κατακόρυφον κίνησιν ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἢ} : \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1) \quad \text{καί} : \quad u = g \cdot t \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ἡ κατακόρυφος συνιστώσα τῆς ζητούμενης ταχύτητος εἶναι :

$$u = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

Ἡ ζητούμενη ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν φθάνει ἡ βόμβα εἰς τὸ ἔδαφος κινουμένη ἐπὶ τῆς καμπύλης τροχιάς, θά εἶναι συνεπῶς :

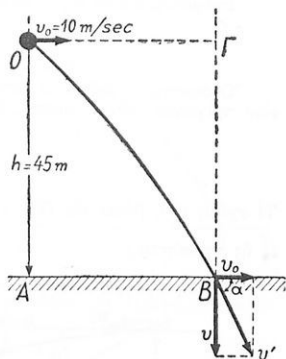
$$u' = \sqrt{u_0^2 + u^2} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὴν τιμὴν τοῦ u ἐκ τῆς σχέσεως (3) καὶ λαμβάνομεν :

$$u' = \sqrt{u_0^2 + 2g \cdot h} \quad (5)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5), δι' ἀντικατάστασεως διὰ τῶν δεδομένων, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$u' = 301,3 \text{ m/sec}$$



719. 'Υπό ποίαν γωνίαν, ως πρὸς τὴν ὀριζοντίαν, πρέπει ἀεροπόρος, ἰπτάμενος ὑπὸ ταχύτητα $u_0 = 120 \text{ m/sec}$ καὶ εἰς ὕψος 4000 m , νὰ διοπτρεύσῃ τὸν στόχον, ἵνα ἡ βόμβα ἐπιτύχῃ αὐτόν. Πῶς βλέπει τὴν βόμβαν κινουμένην ὁ ἀεροπόρος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως αὐτῆς. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$, ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα).

Λύσις. Ἡ βόμβα διὰ τὴν πῆσιν θὰ χρειασθῇ χρόνον t , ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ὅτι εἶναι :} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1)$$

Ἐπομένως, διὰ νὰ εὕρῃ τὸν στόχον, πρέπει νὰ ἀφεθῇ ἀπὸ ὀριζοντίαν ἀπόστασιν :

$$s = u_0 \cdot t = u_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

Ὁ ἀεροπόρος πρέπει νὰ διοπτρεύσῃ ὑπὸ γωνίαν α , ἡ ὁποία εὑρίσκεται εὐκόλως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ σχήματος, διότι :

$$\epsilon\phi \alpha = \frac{h}{s} \quad (3)$$

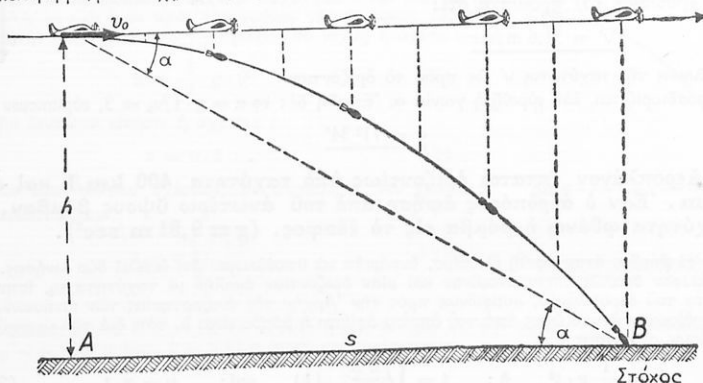
Ἡ σχέση (3), βάσει τῆς (2), γράφεται :

$$\epsilon\phi \alpha = \frac{\sqrt{2g \cdot h}}{2u_0} \quad (4)$$

ἐξ ἧς προκύπτει :

$$\alpha = 49^\circ 40'$$

Ἐπειδὴ ἡ βόμβα θὰ ἔχῃ εἰς τὴν ὀριζοντίαν τῆς κίνησιν ταχύτητα ἴσην μετὰ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀερο-



πλάνου, ὁ ἀεροπόρος θὰ βλέπῃ τὴν βόμβαν διαρκῶς κάτωθεν αὐτοῦ ν' ἀπομακρύνεται μετὰ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενην καὶ εὐθύγραμμον.

720. Λίθος βάλλεται ὑπὸ γωνίαν 60° , ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν, μετὰ ταχύτητα 30 m/sec . Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται οὗτος. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν συναντᾷ τὸ ἔδαφος. Εἰς ποίαν θέσιν εὑρίσκεται οὗτος μετὰ 3 sec . Πόση ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς ανεξαρτησίας τῶν κινήσεων, ὁ λίθος θὰ χρειασθῇ τὸν αὐτὸν χρόνον t εἴτε διὰ νὰ κινήθῃ ὀριζοντίως μετὰ σταθερὰν ταχύτητα $u_x = u_0 \cdot \sin \alpha$, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον A, εἴτε διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον B καὶ ἀκολουθῶς νὰ ἐπιστρέψῃ πάλιν εἰς τὸ σημεῖον O, βαλλόμενος μετὰ ταχύτητα $u_y = u_0 \cdot \eta\mu \alpha$ κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω.

Ὁ χρόνος t ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνόμενης κινήσεως :

$$h = u_y \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

ὁ ὁποῖος ἰσχύει διὰ τὴν κατακόρυφον πρὸς τὰ ἄνω κίνησιν.

Ἐφ' ὅσον κατὰ τὴν κατακόρυφον κίνησιν ὁ λίθος ἐπιστρέφει εἰς τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεως Ο, ἔπεται ὅτι τὸ διανυόμενον κατακορύφως διάστημα εἶναι μηδέν. Οὕτω, θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1): $h = 0$, εὐρίσκωμεν :

$$-\frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_y \cdot t \quad (2)$$

ἢ, ἐπειδὴ τὸ t εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός :

$$\frac{1}{2} g \cdot t = v_y \quad (3)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t λαμβάνομεν :

$$t = \frac{2 v_y}{g} = \frac{2 v_0 \cdot \eta \mu \alpha}{g} \quad (4)$$

Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις $OA = R$ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $R = v \cdot t$ τῆς ὁμαλῆς κινήσεως, ἐὰν θέσωμεν : $v = v_x = v_0 \cdot \sigma \nu \alpha$ καὶ

$$t = \frac{2 v_0 \cdot \eta \mu \alpha}{g}. \text{ Οὕτω λαμβάνομεν :}$$

$$R = \frac{2 v_0^2 \cdot \eta \mu \alpha \cdot \sigma \nu \alpha}{g}$$

$$\text{ἢ : } R = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu 2 \alpha}{g} \text{ (τύπος βεληνεκοῦς) } \quad (5)$$

Τὸ μέγιστον ὕψος OB , εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (1). Πράγματι ἐὰν θέσωμεν $v_y = v_0 \cdot \eta \mu \alpha$ καὶ $t = v_0 / g$ λαμβάνομεν :

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu^2 \alpha}{2 g} \quad (6)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) εὐρίσκωμεν, δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ὅτι :

$$R = 77,9 \text{ m} \quad \text{καί :} \quad h_{\text{μεγ}} = 33,75 \text{ m}$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εἶναι ὁ λίθος μετὰ $t_1 = 3 \text{ sec}$, ὃς καλέσωμεν x_1 τὴν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν καὶ y_1 τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν, μετὰ τὴν πάροδον τοῦ ἀνωτέρω χρονικοῦ διαστήματος. Θὰ ἰσχύουν προφανῶς αἱ σχέσεις :

$$x_1 = v_0 \cdot \sigma \nu \alpha \cdot t_1 \quad (7) \quad \text{καί :} \quad y_1 = v_0 \cdot \eta \mu \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων 7 καὶ 8 εὐρίσκωμεν :

$$x_1 = 45 \text{ m} \quad \text{καί :} \quad y_1 = 32,85 \text{ m}$$

Ἡ ζητούμενη ταχύτης εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν K τῆς τροχιάς θὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ συνεπῶς ἴση πρὸς v_x . Ἀρα θὰ ἔχωμεν :

$$v_x = v_0 \cdot \sigma \nu \alpha \quad (9)$$

Οὕτως, ἐκ τῆς σχέσεως (9) προκύπτει ὅτι :

$$v_x = 15 \text{ m/sec}$$

721. Σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν 45° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν, ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, βλέπει παρατηρητῆς ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς βολῆς τὸν λίθον, ὅταν οὗτος διέρχεται διὰ τοῦ ἀνωτάτου σημείου τῆς τροχιάς του.

Λύσις. Ὅταν τὸ βλήμα ἀνέλθῃ εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος, θὰ εἶναι (βλ. σχῆμα προηγούμενης ἀσκήσεως) :

$$h_{\text{μεγ}} = AK = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu^2 45^\circ}{2 g} \quad \text{καί :} \quad OA = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu (2 \cdot 45^\circ)}{2 g}$$

(τὸ ἥμισυ τοῦ βεληνεκοῦς). Ἄρα :

$$\epsilon\phi \omega = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{\eta\mu^2 45^\circ}{\eta\mu 90^\circ} = 0,5 \quad \text{καί :} \quad \omega = 26^\circ 33'$$

722. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν βολῆς, ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν, πρέπει νὰ βληθῇ βλήμα πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec συναντήσῃ τὸ ὀριζόντιον ἔδαφος εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τῆς θέσεως βολῆς. Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος ἀνάδου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὁ τύπος τοῦ βεληνεκοῦς εἶναι (βλ. ἄσκησιν 720) : $R = \frac{v_0^2 \cdot \eta\mu 2\alpha}{g}$

$$\text{Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :} \quad \eta\mu 2\alpha = \frac{R \cdot g}{v_0^2} = \frac{5 \cdot 10}{10^2} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{m/sec}^2}{(\text{m/sec})^2} = 0,5 \quad \eta : 2\alpha = 30^\circ$$

καί :

$$\alpha = 15^\circ$$

Ἐπειδὴ ὁμως $\eta\mu 2\alpha = \eta\mu (180^\circ - 2\alpha)$, θὰ εἶναι καὶ $180^\circ - 2\alpha = 30^\circ$, καί :

$$\alpha = 75^\circ$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο γωνίαι βολῆς διὰ τὸ αὐτὸ βεληνεκὲς, αἵτινες εἶναι συμπληρωματικαί :

$$15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$$

Τὸ μέγιστον ὕψος εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

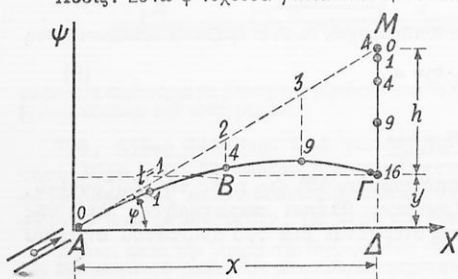
$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \eta\mu^2 \alpha}{2g}$$

ὅτι εἶναι (βλ. ἄσκησιν 720), εἴτε :

$$h_{\max} = \frac{10^2 \cdot \eta\mu^2 15^\circ}{2 \cdot 10} = 0,328 \text{ m} \quad \eta : \quad h'_{\max} = \frac{10^2 \cdot \eta\mu^2 75^\circ}{2 \cdot 10} = 4,77 \text{ m}$$

723. Κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλήμα πυροβόλου ἐξέρχεται τοῦ στομίου τοῦ πυροβόλου, στόχος εὐρισκόμενος εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄξονος τῆς κάννης τοῦ πυροβόλου ἀρχίζει νὰ πίπτῃ ἐλευθέρως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, δι' οἵανδήποτε κλίσιν τῆς κάννης καὶ οἵανδήποτε ἀπόστασιν τοῦ στόχου, τὸ βλήμα θὰ συναντᾷ πάντοτε τὸν στόχον, ἐφ' ὅσον ἡ τροχιά τοῦ βλήματος τέμνεται μετὰ τῆς διὰ τοῦ στόχου διερχομένης κατακορύφου, ὑποτιθεμένης ἀμελητέας τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος.

Λύσις. Ἐστω ϕ τυχούσα γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν



γίνεται ἡ ἐκτόξευσις τοῦ σώματος καὶ Μ τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς διεθύνσεως ἐκτόξευσεως τοῦ βλήματος. Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι ἡ τροχιά τοῦ βλήματος, ὅπου Γ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς τροχιάς μετὰ τῆς ἐκ τοῦ σημείου Μ κατακορύφου, θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν τὸ σῶμα ἀφεθῇ ἐλευθέρων ταυτοχρόνως μετὰ τὴν ἐκτόξευσιν τοῦ βλήματος, τότε τὸ τελευταῖον θὰ εὕρῃ τὸν στόχον εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἀναλύομεν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος εἰς μίαν ὀριζοντίαν καὶ μίαν κατακόρυφον συνιστώσαν. Τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$v_{op} = v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \phi \quad (1)$$

$$\text{καί :} \quad v_{κατ} = v_0 \cdot \eta\mu \phi \quad (2)$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ βλήμα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ, μετὰ χρόνον t , τότε θὰ ἔχωμεν δι' ἐκάστην συνιστώσαν κίνησιν :

$$x = (v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \phi) \cdot t \quad (3)$$

$$\text{καί :} \quad y = (v_0 \cdot \eta\mu \phi) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν :

$$v_0 \cdot t = \frac{x}{\sin \varphi} \quad (5)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) θὰ ἔχωμεν :

$$y = x \cdot \varepsilon \varphi \varphi - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (6)$$

Ἐὰν καλέσωμεν τὴν ἀπόστασιν (ΜΓ) = h καὶ t' τὸν χρόνον διελύσεως τοῦ πύπτοντος σώματος διὰ τοῦ σημείου Γ, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \quad (7)$$

καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΜΔ θὰ ἔχωμεν ἐπίσης :

$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{h + y}{x} \quad (8)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τῆς $\varepsilon \varphi \varphi$ εἰς τὴν (6), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$y = x \cdot \frac{h + y}{x} - \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \quad \eta : \quad h = \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \quad (9)$$

ὁπότε ἐκ τῶν σχέσεων (7) καὶ (9) προκύπτει :

$$t = t'$$

Δηλαδή κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμήν θὰ διέλθουν διὰ τοῦ σημείου Γ τόσον τὸ σῶμα Μ ὅσον καὶ τὸ βλήμα.

724. Λίθος βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 38 m/sec (βλ. σχῆμα). Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος, β) τὸ μέγιστον ὕψος, γ) ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ κατέλθῃ ἐκ νέου, δ) ἡ ταχύτης τὴν ὁποῖαν θὰ ἔχῃ ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἐκ τῆς σχέσεως $v = v_0 - g \cdot t$, ἐὰν θέσωμεν $v = 0$, $v_0 = 38 \text{ m/sec}$, εὐρίσκομεν τὸν χρόνον ἀνόδου, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν, ὅτι εἶναι :

$$38 - 10 \cdot t = 0 \quad \text{καὶ :} \quad t = 3,8 \text{ sec}$$

β) Τὸ μέγιστον ὕψος h ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου :

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2, \quad \text{ἐὰν θέσωμεν } v_0 = 38 \text{ m/sec}, t = 3,8 \text{ sec καὶ } g = 10 \text{ m/sec}^2, \quad \text{ὁπότε θὰ ἔχωμεν :}$$

$$h = 38 \cdot 3,8 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (3,8)^2 = 72,2 \text{ m}$$

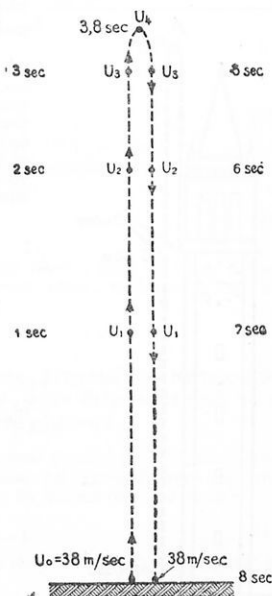
Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἐὰν μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν τύπων $v = v_0 - g \cdot t$ καὶ

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον, ὅτε εὐρίσκομεν :}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 g \cdot h$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $v = 0$, προκύπτει :

$$h = v_0^2 / 2g$$



Θέτουμεν εις τὸν τύπον τοῦτον : $v_0 = 38 \text{ m/sec}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$h = 72,2 \text{ m}$$

γ) Ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ κατέλθῃ τὸ σῶμα ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, λαμβάνομένου ὑπ' ὅψιν ὅτι ὁ λίθος θ' ἀρχίσῃ ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου ὕψους νὰ κατέρχεται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Ἐκ τῆς ἀνω σχέσεως, ἐὰν θέσωμεν $h = 72,2 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,8 \text{ sec}$$

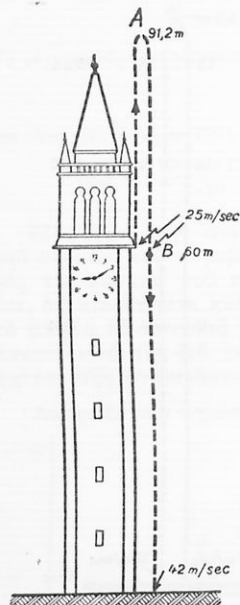
ἦτοι τὸ σῶμα, διὰ νὰ κατέλθῃ ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους, ἐχρειάσθῃ τόσον χρόνον ὅσον διὰ νὰ ἀνέλθῃ.

δ) Ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποῖαν θὰ φθάσῃ ὁ λίθος ἐκ νέου εἰς τὸ ἔδαφος, εἶναι $v = g \cdot t$. Οὕτως, ἐὰν θέσωμεν : $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $t = 3,8 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$v = 38 \text{ m/sec}$$

ἦτοι ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποῖαν φθάει ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποῖαν ἐβλήθη πρὸς τὰ ἄνω.

725. Ἀπὸ κωδωνοστασίου, ὕψους 60 m , ἄνθρωπος βάλλει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω λίθον, ὑπὸ ταχύτητα 25 m/sec . Ζητεῖται πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ ὁ λίθος διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος καὶ μὲ ποῖαν ταχύτητα. Δίδεται ὅτι $g = 10 \text{ m/sec}^2$.



Λύσις. Ὁ ὀλίκος χρόνος t , τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ σῶμα ἵνα φθάσῃ βαλλόμενον κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω μέχρι τοῦ ἐδάφους, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀθροῖσμα τῶν χρόνων t_1 καὶ t_2 , ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον δαπανᾷ τὸ σῶμα, βαλλόμενον μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον αὐτοῦ ὕψος h , ὃ δὲ t_2 ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ αὐτὸ σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως καὶ ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἐξ ὕψους $h + l$, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Οὕτως ἔχομεν :

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \quad (1), \quad h + l = \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (2)$$

Ἐξ ἁλλων, ἐπειδὴ : $h = \frac{v_0^2}{2g}$ (3), ἡ σχέση (3) γίνεται :

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gl}}{g} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (4) θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ὀλίκον χρόνον t ὅτι :

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gl}}{g} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gl}}{g} \quad (5)$$

Δι' ἀντικατάστασεως τῶν δεδομένων, ἦτοι : $v_0 = 25 \text{ m/sec}$, $l = 60 \text{ m}$, καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ εὐρίσκομεν :

$$t = 6,7 \text{ sec}$$

Ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποῖαν θὰ φθάσῃ ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος, εὐρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως $v = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot l}$, ἐὰν θέσωμεν : $v_0 = 25 \text{ m/sec}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $l = 60 \text{ m}$, ὅτε προκύπτει :

$$v = 42 \text{ m/sec}$$

726. Ὄταν ἀερόστατον εὐρίσκεται εἰς ὕψος 600 m καὶ ἀνέρχεται ὑπὸ ταχύτητα 10 m/sec , ἀφίεται ἐλευθέρως εἰς λίθος. Νὰ εὐρεθῇ ὁ χρόνος, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίσεως, ἕως ὅτου ὁ λίθος συναντήσῃ τὸ ἔδαφος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. 'Εφ' όσον ό λίθος εύρίσκεται έντός του άνερχομένου άεροστάτου έχει την ταχύτητα άνόδου αυτού. Κατά συνέπεια όταν άφεθή έλεύθερος είναι ώς νά έβλήθη έξ ύψους 600 m κατακορύφως και προς τά άνω μέ άρχικήν ταχύτητα 10 m/sec. Δι' άντικαταστάσεως των δεδομένων ήτοι: $l = 600$ m, $u_0 = 10$ m/sec και $g = 10$ m/sec² εις τόν τύπον (5) της προηγούμενης άσκήσεως εύρίσκομεν:

$$t = 12 \text{ sec}$$

Η άρνητική τιμή του χρόνου απορρίπτεται ώς μη άναποκρινόμενη προς την έκφώνησιν της άσκήσεως.

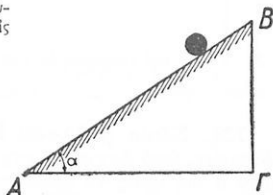
727. Δίδεται ή βάση ΑΓ κεκλιμένου επιπέδου και ζητείται νά προσδιορισθ ή γωνία κλίσεως α ούτως, ώστε σώμα όλισθαίνον κατά μήκος τούτου νά χρειασθ τόν έλάχιστον δυνατόν χρόνον διά νά κατέλθη.

Λύσις. 'Εστω ότι ή ζητούμένη γωνία είναι α. Τό σώμα κινούμενον επί του κεκλιμένου επιπέδου θά διανύη τό διάστημα BA εις χρόνον t, μέ επιτάχυνσιν $\gamma = g \cdot \eta\mu \alpha$, και θά ισχύη ή σχέσις:

$$BA = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu \alpha \cdot t^2 \quad (1)$$

Εις την σχέσιν (1) θέτομεν $BA = AG/\sigma\upsilon\upsilon \alpha$ και λαμβάνομεν:

$$\frac{AG}{\sigma\upsilon\upsilon \alpha} = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu \alpha \cdot t^2 \quad (2)$$



Λύοντες την σχέσιν (2) ώς προς t εύρίσκομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2 (AG)}{g \cdot \eta\mu \alpha \cdot \sigma\upsilon\upsilon \alpha}} \quad (3)$$

'Επειδή όμως: $\eta\mu \alpha \cdot \sigma\upsilon\upsilon \alpha = 1/2 \cdot \eta\mu 2 \alpha$, ή σχέσις (3) γράφεται:

$$t = \sqrt{\frac{4 (AG)}{g \cdot \eta\mu 2 \alpha}} \quad (4)$$

Εις την σχέσιν (4) παρατηρούμεν ότι τό μόνον μεταβλητόν μέγεθος είναι τό $\eta\mu 2 \alpha$. 'Επομένως, ίνα ό χρόνος t είναι έλάχιστος, πρέπει τό $\eta\mu 2 \alpha$ νά είναι μέγιστον. 'Ητοι: $\eta\mu 2 \alpha = 1$, ή $2 \alpha = 90^\circ$ και:

$$\alpha = 45$$

728. Νά άποδειχθ ή ότι ή ταχύτης ένός σώματος, ριπτομένου κατακορύφως έκ των κάτω προς τά άνω, έχει την αυτήν τιμήν, όταν διέρχεται από τό αυτό σημείον της τροχιάς, είτε άνερχόμενον είτε κατερχόμενον.

Λύσις. 'Εστώσαν Α τό σημείον έκτοξεύσεως, Β τό άνωτάτον σημείον εις τό όποϊον φθάνει τό σώμα (μέγιστον ύψος) και Ο τυχόν σημείον επί της κατακορύφου AB. 'Εστω επίσης, ότι και την άνοδον του σώματος, έχει τούτο ταχύτητα u_1 . 'Η ταχύτης αυτή θά δίδεται υπό του τύπου:

$$u_1 = u_0 - g \cdot t_1 \quad (1)$$

όπου u_0 ή άρχική ταχύτης, και t_1 ό διαρρέυσας χρόνος κατά την κίνησιν από του Α εις Ο. 'Αφ' έτέρου γνωρίζομεν ότι:

$$h_1 = u_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (2)$$

όπου $h_1 = AO$. Διά συνδυασμού των εξισώσεων (1) και (2) θά έχωμεν:

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 - 2 g \cdot h_1} \quad (3)$$

'Εστω u_2 ή ταχύτης του σώματος εις τό σημείον Ο κατά την κάθοδον. 'Εάν θέσωμεν $BO = h_2$ και t_2 τόν χρόνον από Β εις Ο, τότε θά έχωμεν:

$$u_2 = g \cdot t_2 \quad (4)$$

και:

$$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (5)$$



ἐκ τῶν ὁποίων διὰ συνδυασμοῦ θὰ ἔχωμεν :

$$v_2 = \sqrt{2g \cdot h_2} \quad (6)$$

Ἔχομεν ὁμως ὅτι $h_2 = h - h_1$, ὅπου $h = AB$, τὸ μέγιστον ὕψος, ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (6) μετατρέπεται εἰς τὴν :

$$v_2 = \sqrt{2g \cdot h - 2g \cdot h_1} \quad (7)$$

Ἀφ' ἑτέρου, βάσει τοῦ τύπου (3), ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα φθάνει εἰς τὸ μέγιστον ὕψος (σημεῖον B), ὁπότε ἡ τελικὴ ταχύτης του θὰ εἶναι ἰση πρὸς μηδέν, λαμβάνομεν :

$$0 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot h} \quad \text{ἢ} : \quad 2g \cdot h = v_0^2 \quad (8)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) τὴν τιμὴν ταύτην λαμβάνομεν :

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot h_1} \quad (9)$$

καὶ ἐπομένως ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (9) προκύπτει ὅτι :

$$v_1 = v_2$$

729. Σῶμα βάλλεται ἐκ τινος σημείου A εὐρισκομένου εἰς ὕψος h ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ὑπὸ γωνίαν θ ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο ἐγίξῃ τὸ εἶδος.

Λύσις. Τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν A θὰ περικλείῃ δυναμικὴν καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μάζα αὐτοῦ εἶναι m καὶ ἡ ἀρχικὴ τοῦ ταχύτης v_0 , τότε ἡ συνολικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἰς τὴν θέσιν A θὰ εἶναι :

$$E_{ολ} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ὅταν τὸ σῶμα ἐγίξῃ τὸ εἶδος, θὰ ἔχη μόνον κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐγίξῃ τὸ εἶδος μὲ ταχύτητα v, τότε ἡ κινητικὴ τοῦ ἐνέργεια θὰ εἶναι :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (2)$$

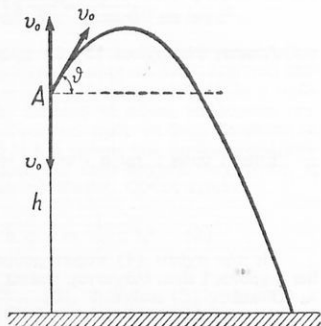
Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot h} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει ὅτι τὸ μέτρον v τῆς ταχύτητος εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ δι' ὅτανδῇ-ποτε γωνίαν βολῆς, ἀρκεῖ τὸ μέτρον τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 νὰ μὴ μεταβάλλεται.



730. Κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, θεωρουμένην ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου, ἀεροπλάνον ἐξομοιούμενον πρὸς σημεῖον διέρχεται ἀκριβῶς διὰ τῆς κατακορύφου τῆς ἀγομένης διὰ τῆς θέσεως ἀντιαεροπορικοῦ τηλεβόλου, καὶ εἰς ὕψος h ἀπ' αὐτοῦ. Τὸ ἀεροπλάνον ἵπταται ὀριζοντιῶς μὲ σταθερὰν ταχύτητα v καὶ ἐντὸς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ ὀριζομένου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ τηλεβόλου. Τὴν χρονικὴν στιγμήν O, τὸ τηλεβόλον βάλλει ὑπὸ γωνίαν α σχηματιζομένην ὑπὸ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ καὶ τῆς δι' αὐτοῦ διερχομένης κατακορύφου. Ἄν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βληματος εἶναι v_0 , ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν διὰ τὴν ὁποῖαν τὸ βλήμα θὰ ἐπιτύχῃ

τὸ ἀεροπλάνον, καθὼς καὶ τὰς χρονικὰς στιγμὰς καὶ τὰς προϋποθέσεις ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι δυνατόν νὰ συμβῇ τοῦτο.

(Γπανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσικόν, 1955).

Λύσις. Ἄν καλέσωμεν v_1 τὴν ὀριζοντίαν συνιστώσαν τῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$v_1 = v_0 \cdot \eta \mu \alpha \quad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βλήμα συναντᾷ τὸ ἀεροπλάνον εἰς τὸ σημεῖον Α, τότε τὸ βλήμα θὰ ἔχῃ διανύσει ὀριζοντίως τὸ αὐτὸ διάστημα ΚΑ μὲ τὸ ἀεροπλάνον καὶ ἐπομένως ἡ ὀριζοντία συνιστώσα v_1 τῆς ταχύτητος αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου v . Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$v_1 = v_0 \cdot \eta \mu \alpha = v \quad (2)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς γωνίας α λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς $\eta \mu \alpha$ καὶ ἔχομεν :

$$\eta \mu \alpha = \frac{v}{v_0} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) ὑπολογίζεται ἡ γωνία α , δεδομένου ὅτι εἶναι γνωστὰ τὰ v καὶ v_0 .

Ἡ πρὸς τὰ ἄνω κατακόρυφος κίνησις τοῦ βλήματος εἶναι φανερόν ὅτι εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα τὴν κατακόρυφον συνιστώσαν τῆς ταχύτητος τοῦ ἀεροπλάνου v_2 , ἥτοι :

$$v_2 = v_0 \cdot \sigma \upsilon \nu \alpha = v_0 \sqrt{1 - \eta \mu^2 \alpha}$$

ἥ, λόγῳ τῆς σχέσεως (3), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - v^2}$$

Τὸ ὕψος h , εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τὸ βλήμα διὰ τὴν συναντήσιν τοῦ ἀεροπλάνου, θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$h = v_2 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ἥ :

$$h = \sqrt{v_0^2 - v^2} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (4)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν χρονικῶν στιγμῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ βλήμα θὰ ἐπιτύχῃ τὸ ἀεροπλάνον, λύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (4) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 - v^2} \pm \sqrt{v_0^2 - v^2 - 2g \cdot h}}{g} \quad (5)$$

Διὰ διερευνήσεως τῆς σχέσεως (5) προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $v_0^2 - v^2 - 2g \cdot h = 0$ (6), τότε ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ χρόνου, ἥτοι :

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 - v^2}}{g} \quad (7)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ βλήμα θὰ ἐπιτύχῃ μίαν μόνον φοράν τὸν στόχον τοῦ ἀεροπλάνου, τοῦτο δὲ θὰ συμβῇ, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς σχέσεως (6), ὅταν :

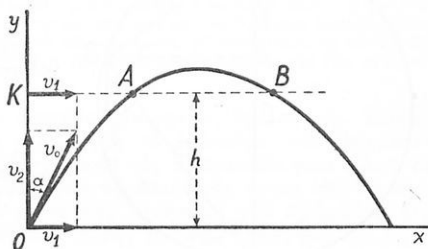
$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέγιστον ὕψος $h_{\text{μεγ}}$ εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ βλήμα εἶναι :

$$h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2 \cdot \sigma \upsilon \nu^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὸ βλήμα θὰ ἐπιτύχῃ μίαν μόνον φοράν τὸν στόχον, καὶ μάλιστα ὅταν δύναται νὰ φθάσῃ εἰς μέγιστον ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἵπταται τὸ ἀεροπλάνον, ἥτοι $h_{\text{μεγ}} = h$.

β) Ἐὰν $v_0^2 - v^2 - 2g \cdot h > 0$, τότε θὰ ὑπάρχουν δύο τιμαὶ χρόνου κατὰ τὰς ὁποίας δύναται νὰ βληθῇ τὸ ἀεροπλάνον, ἥτοι εἰς τὴν θέσιν Α καὶ εἰς τὴν θέσιν Β. Ἐξάγεται εὐκόλως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν



ταύτην ὅτι τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ βλήμα, πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἵπταται τὸ ἀεροπλάνον, ἥτοι $h_{\text{μεγ}} > h$.

γ) Ἐὰν $u_0^2 - u^2 - 2g \cdot h < 0$, τότε αἱ τιμαὶ τοῦ χρόνου εἶναι φανταστικαὶ καὶ ἐπομένως εἶναι ἀπαράδεκτοι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ βλήμα δὲν δύναται νὰ συναντήσῃ τὸ ἀεροπλάνον. Ἐξάγεται δὲ εὐκόλως ὅτι διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο πρέπει $h_{\text{μεγ}} < h$.

731. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ χρόνοι οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται, ἵνα πῖπτον σῶμα διατρέξῃ τὴν κατακόρυφον διάμετρον ΑΓ ἐνὸς κύκλου καθὼς καὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, ὅταν ἡ χορδὴ ΒΓ σχηματίζῃ τυχούσαν γωνίαν θ μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φυσικόν, 1954).

Λύσις. α) Ὅταν τὸ σῶμα πῖπτῃ κατὰ τὴν κατακόρυφον διάμετρον ΑΓ = 2r (βλ. σχῆμα), κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν g καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (1)$$

β) Ὅταν πῖπτῃ κατὰ τὴν χορδὴν ΑΒ, κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_1 = g \cdot \eta \mu \omega$ καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$AB = \frac{1}{2} g \cdot \eta \mu \omega \cdot t_2^2$$

Ἐπειδὴ ὁμως : $AB = 2r \cdot \eta \mu \omega$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (2)$$

γ) Ὅταν πῖπτῃ κατὰ τὴν χορδὴν ΒΓ, κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_2 = g \cdot \eta \mu \theta = g \cdot \sigma \nu \omega$ καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$BG = \frac{1}{2} g \cdot \sigma \nu \omega \cdot t_3^2$$

Ἐπειδὴ ὁμως $BG = 2r \cdot \sigma \nu \omega$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_3^2 \quad (3)$$

Λύοντες ἐκάστην σχέσιν ὡς πρὸς τὸν χρόνον εὐρίσκομεν :

$$t_1 = t_2 = t_3 = 2 \sqrt{\frac{r}{g}}$$

732. Τί θὰ συμβῇ ἐὰν λίθος ἀφεθῇ νὰ πέσῃ ἐλευθέρως ἐντὸς στενῆς κυλινδρικῆς σήραγγος, ἥτις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς ἐκτείνεται ἀπὸ τοῦ Βορείου ὡς τὸν Νότιον Πόλον.

Λύσις. Τὸ πρόβλημα θὰ διεξέλθωμεν ποιοτικῶς μόνον, διότι ποσοτικῆς ἐξέτασις αὐτοῦ παρουσιάζει μεγάλας δυσκολίας καὶ ἀπαιτεῖ γνώσεις ἀνωτέρας μαθηματικῆς στάθμης.

Ἐνας λίθος, ὁ ὁποῖος ἀρίνεται νὰ κινήθῃ πῖπτων ἐλευθέρως ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ σήραγγος καὶ ἀπὸ τοῦ Βορείου πρὸς τὸν Νότιον Πόλον, θὰ ἐπιταχύνεται μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς Γῆς καὶ ἀκολουθῶς συνεχίζων τὴν κίνησιν του θὰ ἐπιβραδύνεται. Ἡ δύναμις, ἡ ὥρσα ἐπὶ τοῦ λίθου θὰ ἐλαττοῦται βαθμιαίως κατὰ τὴν μέχρι τοῦ κέντρου τῆς Γῆς πτώσιν, διότι τὸ ἀνώτερον τμήμα τῆς μάζης τῆς Γῆς, διὰ τοῦ ὁποῖου ὁ λίθος ἔχει διέλθῃ κατὰ τὴν ἐντὸς τῆς σήραγγος πτώσιν, ἔλκει αὐτὸν ἀντιθέτως πρὸς τὴν κίνησιν του. Ἐξ ὧτων αὐτῶν συνάγεται ὅτι καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν μέχρι τοῦ κέντρου τῆς Γῆς πτώσιν τοῦ λίθου θὰ ἐλαττοῦται. Ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου βαρύτητος συναρτῆται τῆς θέσεως τοῦ λίθου ἐντὸς τῆς σήραγγος εἶναι δύσκολον νὰ ἐκφρασθῇ, ἀνεῖ τῆς χρήσεως ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Εἶναι ὁμως δυνατόν νὰ περιγραφῇ ἡ κίνησις μὲ περισσην λεπτομέρειαν ἂν καὶ ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως δὲν εἶναι ἐκάστοτε γνωστὴ. Οὕτως, ἐὰν δεχθῶμεν συμμετρίαν περὶ τὸ κέντρον τῆς Γῆς ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομήν τῆς μάζης, τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ λίθου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς, ἡ δὲ φορὰ τῆς δυνάμεως θὰ εἶναι πρὸς τὸ κέντρον. Ὁ λίθος κατὰ συνέπειαν θὰ ὑφίσταται συνεχῶς ἐπιτάχυνσιν κατὰ τὴν πτώσιν (μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος κ.λ.π.), θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἐπιβραδύνομενος εὐθὺς ὡς διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς, ὁπότε καὶ ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως ἀντιστρέφεται.

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν δύο τυχόντα σημεία ἐντὸς τῆς σήραγγος, x_1 καὶ x_2 , τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν τοῦ

Λύσις. α) 'Η κίνηση επί του τμήματος AB είναι ομαλώς επιταχυνόμενη, καθ' όσον η σφαίρα κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F, η οποία αποτελεί την συνισταμένη του βάρους B και της αντίδρασης N της επιφάνειας επί της σφαίρας. 'Αφ' ετέρου η επιτάχυνσις γ επί του τμήματος AB, το οποίο αποτελεί κεκλιμένον επίπεδον με γωνίαν κλίσεως 60° , θα δίδεται υπό του τύπου :

$$\gamma = g \cdot \eta \mu 60^\circ \text{ ήτοι : } \gamma = g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,5 \text{ m/sec}^2$$

Είς το τμήμα ΒΓ, η κίνηση θα είναι ομαλή ευθύγραμμος, ενώ εις το τμήμα ΓΔ θα είναι ομαλώς επιβραδυνόμενη, με επιβράδυνσις :

$$\gamma = g \cdot \eta \mu 60^\circ \text{ ήτοι : } \gamma = 8,5 \text{ m/sec}^2$$

β) 'Εστωσαν t_1 , t_2 και t_3 οι απαιτούμενοι χρόνοι διά να διανύση η σφαίρα τὰ τμήματα AB, ΒΓ και ΓΔ, αντίστοιχως. 'Ο συνολικός χρόνος μέχρι της επιστροφής εις τὸ σημείον Α θα είναι προφανώς :

$$t = 2(t_1 + t_2 + t_3) \quad (1)$$

'Εάν καλέσωμεν υ την σταθεράν ταχύτητα επί του διαστήματος ΒΓ, τότε αὕτη θα είναι επίσης η τελική ταχύτης τῆς επιταχυνομένης κινήσεως εις τὸ Β καὶ η ἀρχική ταχύτης τῆς επιβραδυνομένης κινήσεως εις τὸ σημείον Γ. 'Αρα θὰ ἔχωμεν : $u = \gamma \cdot t_1$ καὶ $u = \gamma \cdot t_3$, ήτοι : $t_1 = t_3$ (2)

'Αφ' ετέρου :

$$(B\Gamma) = u \cdot t_2 \quad (3) \text{ ή : } t_2 = (AB)/u \quad (4)$$

καὶ ἐπειδὴ $(AB) = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2$ καὶ $u = \gamma \cdot t_1$ προκύπτει :

$$t_2 = \frac{t_1}{2} \quad (5)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (5), λαμβάνομεν : $t = 5 t_1$ (6)

$$\text{Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι } (AB) = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει : } t_1 = \sqrt{\frac{2(AB)}{\gamma}},$$

$$\text{καὶ : } t = 5 \sqrt{\frac{2(AB)}{\gamma}} \quad (7)$$

Θέτομεν εις τὴν ἐξίσωσιν (7) τὰ δεδομένα : $(AB) = 20 \text{ m}$ καὶ $\gamma = 8,5 \text{ m/sec}^2$ ὁπότε λαμβάνομεν :
 $t = 10,85 \text{ sec}$

735. Κυλινδρικός σωλὴν ἀκτίνοσ 3 cm ἐκ χαλκοῦ, λεπτῶν τοιχωμάτων, ἱσταται ἐπὶ λείας ὀριζοντίας ἐπιφάνειας. Εὐρέθη ὅτι, ἐάν εἰσαχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο σφαιρικά σώματα, ἕκαστον ἀκτίνοσ 2 cm καὶ μάζης 200 gr, ὁ σωλὴν εἶναι ἔτοιμος νὰ κλίνη. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου.

Λύσις. 'Εφ' ὅσον ὁ κύλινδρος εἶναι ἔτοιμος νὰ κλίνη (θέσις ἀσταθοῦς ἰσορροπίας), σημαίνει ὅτι εἰς τὸ ἄκρον Ε δὲν ὑπάρχει ἀντίδρασις ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (γίνεται ἀπλή ἐπαφή), ἐνῶ εἰς τὸ ἄκρον Α ἔχομεν τὴν συνολικὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἐδάφους F. 'Εκτὸς ἀπὸ αὐτὴν ὁ κύλινδρος ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν τοῦ βάρους αὐτοῦ Β καὶ τὰς δράσεις ἐπ' αὐτοῦ τῶν δύο σφαιρῶν F_Γ καὶ F_Δ ἀσκουμένας εἰς τὰ σημεία Γ καὶ Δ. 'Εφ' ὅσον ἔχομεν ἰσορροπίαν (ἔστω καὶ ἀσταθὴ) θὰ πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημείον Α νὰ εἶναι μηδέν. 'Ητοι :

$$F_{\Gamma} (A\Gamma) - B (AM) - F_{\Delta} (HA) = 0 \quad (1)$$

Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν προβολῶν θὰ πρέπει εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας αἱ ὀριζόντιοι συνιστώσαι τῶν δυνάμεων νὰ ἔχουν συνισταμένην μηδέν. 'Ητοι :

$$F_{\Gamma} - F_{\Delta} = 0 \quad \text{ή : } F_{\Gamma} = F_{\Delta} \quad (2)$$

Λόγῳ τῆς (2) ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$F_{\Gamma} [(A\Gamma) - (HA)] - B (AM) = 0 \quad \text{ή : } B = \frac{F_{\Gamma} (H\Gamma)}{(AM)} \quad (3)$$

Έχουμε όμως $(AM) = R = 3 \text{ cm}$ (ακτίς κυλίνδρου) (4) και $(H\Gamma) = (O_1Z)$ (5).

Από το ορθογώνιον τρίγωνον O_1O_2Z παρατηρούμεν ότι η υπότεινους $(O_1O_2) = 2r = 4 \text{ cm}$ και η $(O_2Z) = (H\Delta) - (H\Gamma) - (O_2\Delta) = 2R - 2r = 2 \text{ cm}$

Επομένως η γωνία $\theta = 30^\circ$ και :

$$(O_1Z) = 2r \cdot \sin \theta = 2r \cdot \sin 30^\circ \quad (6)$$

Άρα και : $(H\Gamma) = (O_1Z) = 2r \cdot \sin 30^\circ$ (7)

Εκ τῶν ἐξισώσεων (3), (5) και (7) προκύπτει :

$$B = \frac{F_r \cdot 2r \sin 30^\circ}{R} \quad (8)$$

Ἡ F_r εἶναι ἡ μία ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν τοῦ βάρους B_1 τῆς ἀνω σφαίρας, ἐνῶ ἡ ἄλλη συνιστώσα αὐτῆς ἔχει διευθύνον κατὰ τὴν διάκεντρον.

Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων (σχῆμα II) προκύπτει :

$$F_r = B_1 \cdot \epsilon\phi 30^\circ \quad (9)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (8) καὶ λαμβάνομεν :

$$B = \frac{B_1 \cdot 2r \cdot \eta\mu 30^\circ}{R} \quad (10)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα : $B_1 = 200 \text{ gr}^*$, $r = 2 \text{ cm}$, $R = 3 \text{ cm}$ καὶ $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, ἔχομεν ὡς ἀποτέλεσμα :

$$B = 133,3 \text{ gr}^*$$

736. Κύλινδρος ἔχων ἀκτίνα βάσεως 6 cm τοποθετεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 35° καὶ στηρίζεται ἐπ' αὐτοῦ διὰ μιᾶς βάσεώς του. Ποῖον τὸ ἀνώτατον ὕψος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κύλινδρος, ἵνα μὴ ἀνατραπῇ.

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον ἀνώτατον ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι h καὶ ἡ ἀκτίς αὐτοῦ r . Ἴνα μὴ ἀνατραπῇ ὁ κύλινδρος, πρέπει ἡ διεύθυνσις τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ διέρχεται διὰ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦλάχιστον νὰ διέρχεται διὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, ἥτοι διὰ τοῦ σημείου A (βλ. σχῆμα).

Ὡς γνωστὸν, τὸ κέντρον βάρους K ὁμοιογενούς κυλίνδρου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ, συνεπῶς ἐπὶ τοῦ ἀξονος τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἀρα θὰ ἔχομεν :

$$KA = \frac{MA}{2} = \frac{h}{2} \quad (1)$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου AKA προκύπτει ὅτι :

$$KA = r \cdot \sigma\phi 35^\circ \quad (2)$$

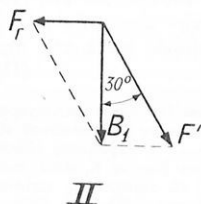
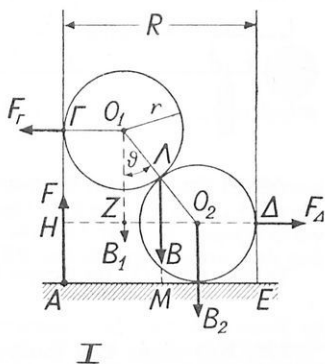
Ἡ σχέση (2), λόγῳ τῆς σχέσεως (1), γράφεται :

$$h = 2r \cdot \sigma\phi 35^\circ \quad (3)$$

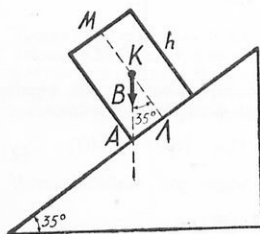
Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $r = 6 \text{ cm}$, $\sigma\phi 35^\circ = 1,428$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀνώτατον ὕψος τοῦ κυλίνδρου πρέπει νὰ εἶναι :

$$h = 2 \cdot 6 \cdot 1,428 = 17,14 \text{ cm}$$

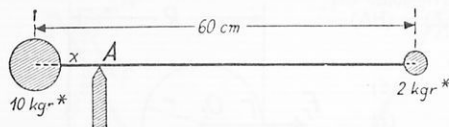
737. Δύο σφαῖραι 10 kg^* καὶ 2 kg^* εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα ράβδου, ὑποτιθεμένης ἄνευ βάρους, μήκους 60 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος.



Ἀσκήσις 735.



Λύσις. Πρὸς τοῦτο ἰσορροποῦμεν τὴν ράβδον ἐπὶ ὀξείας ἀκμῆς Α καὶ δεχόμεθα ὅτι μία σφαῖρα, τῆς ὁποίας τὴν μᾶζαν νοοῦμεν συγκεντρωμένην εἰς τὸ κέντρον, ἀπέχει κατὰ x cm ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους Α, ἐνῶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέρας σφαίρας θὰ ἀπέχει τὸ σημεῖον Α ἀπόστασιν $60 - x$.



Ἐὰν τὰ βάρη τῶν δύο μαζῶν εἶναι ἀντιστοίχως B_1 καὶ B_2 , ἐπειδὴ τὸ σύστημα εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, αἱ ροπαὶ αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι ἴσαι μεταξὺ τῶν. Ἦτοι :

$$B_1 \cdot x = B_2 \cdot (60 - x) \quad (1)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς x λαμβάνομεν :

$$x = \frac{B_2 \cdot 60}{B_1 + B_2} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν $B_1 = 10 \text{ kg}^*$ καὶ $B_2 = 2 \text{ kg}^*$, εὐρίσκομεν ὅτι :

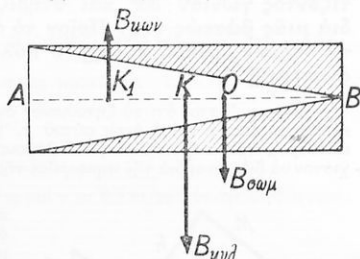
$$x = 10 \text{ cm}$$

738. Κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα R καὶ ὕψος h . Ἀποσπῶμεν ἐξ αὐτοῦ τεμάχιον σχήματος κώνου, ἔχοντος βάσιν τὴν ἄνω ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ κορυφὴν τὸ μέσον τῆς κάτω κυκλικῆς βάσεως αὐτοῦ. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ κώνου εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ ἀπέχει κατὰ τὰ $3/4$ τοῦ ὕψους ἀπὸ τὴν κορυφὴν του. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον ἀπομένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κώνου.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἱατρικὴ Σχολή, 1960).

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς : Ἐὰν ἦτο πλήρης ὁ κύλινδρος, εἰς τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ K θὰ ἐφημερόζετο μία δύναμις $B_{\text{κυλ}}$. Ἡ ἀφαίρεσις κώνου ἔχοντος βάρους $B_{\text{κων}}$ καὶ κέντρον βάρους K_1 εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὸ σημεῖον K_1 κατακόρυφου δυνάμεως ἴσης πρὸς τὸ βάρος τοῦ κώνου, ἀλλὰ ἀντιθέτου (πρὸς τὰ ἄνω) φορῶς. Ἐπομένως, διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος, θὰ πρέπει νὰ συνθέσωμεν τὰς δυνάμεις $B_{\text{κυλ}}$ καὶ $B_{\text{κων}}$ καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς O . Ἐχομεν προφανῶς :

$$B_{\text{σωμ}} = B_{\text{κυλ}} - B_{\text{κων}} \quad (1)$$



Ἡ $B_{\text{σωμ}}$ θὰ ἔχῃ σημεῖον ἐφαρμογῆς O ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ὀριζομένης ὑπὸ τῶν δύο κέντρων K καὶ K_1 ἀλλὰ κείμενον ἐκτὸς τοῦ διαστήματος αὐτοῦ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου K . Ἐφαρμόζομεν δὲ τὸν γνωστὸν τύπον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου O , τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς δηλ. τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρροπῶν δυνάμεων :

$$\frac{B_{\text{κυλ}}}{B_{\text{κων}}} = \frac{OK_1}{OK} \quad (2)$$

Ἄφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι :

$$B_{\text{κυλ}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \varepsilon \quad (3) \quad \text{καὶ :} \quad B_{\text{κων}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \varepsilon \quad (4)$$

ὅπου r ἡ κοινὴ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, h τὸ κοινὸν ὕψος καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει :

$$\frac{OK_1}{OK} = 3 \quad (5)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5), δι' ἀλγεβρικοῦ μετασχηματισμοῦ, λαμβάνομεν :

$$\frac{OK_1 - OK}{OK} = 2 \quad (6) \quad \text{ἢ :} \quad KK_1 = 2 (OK) \quad (7)$$

$$\text{Έξ άλλου:} \quad KK_1 = BK_1 - BK = \frac{3}{4} \cdot h - \frac{h}{2} = \frac{h}{4} \quad (8)$$

$$\text{Άρα:} \quad 2 (OK) = \frac{h}{4} \quad \eta: \quad OK = \frac{h}{8}$$

Ήτοι τὸ κέντρον βάρους τοῦ κοίλου σώματος εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἀξονος τοῦ κυλίνδρου εἰς ἀπόστασιν $h/8$ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου.

739. Εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἑνὸς κανονικοῦ ὀριζοντίου ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἐφαρμόζομεν δι' ἐξαρτήσεως βάρη 1 kgr*, 2 kgr*, 3 kgr*, 4 kgr*, 5 kgr*, 6 kgr*, ἀντιστοίχως. Νὰ δευχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τῶν ἐξ παραλλήλων τούτων δυνάμεων εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΕ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ε ἴσην πρὸς τὰ 5/7 τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου.

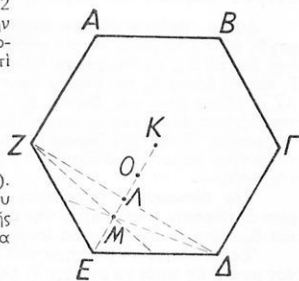
Λύσις. Ἐστω τὸ κανονικὸν ἑξαγώνον ΑΒΓΔΕΖ ἐπὶ τῶν κορυφῶν τοῦ ὁποίου, κατὰ σειρὰν καὶ ἀρχῆς γινομένης ἀπὸ τοῦ Α, κρέμονται βάρη 1 kgr*, 2 kgr*, 3 kgr*, 4 kgr*, 5 kgr* καὶ 6 kgr* ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν ὅτι τὰ εὐρισκόμενα εἰς τὰς κορυφὰς Δ, Ε καὶ Ζ βάρη ἀναλύονται ἑκαστον εἰς δύο δυνάμεις ὡς ἑξῆς: Εἰς σημεῖον Δ 3 kgr* + 1 kgr*, εἰς σημεῖον Ε 3 kgr* + 2 kgr*, εἰς σημεῖον Ζ 3 kgr* + 3 kgr*. Συνθέτομεν τὸν δεύτερον προσθετέον ἐκάστης δυνάμεως ἐκ τούτων μὲ τὴν ἀντίστοιχον εἰς τὴν ἑναντι κορυφὴν ἴσην δύναμιν. Ήτοι τὸ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α ἀναρτηθέν 1 kgr* συνθέτομεν μὲ 1 kgr* ἐκ τοῦ εἰς τὸ Δ βάρους, ὁπότε ἡ συνισταμένη τῶν, ἴση πρὸς 2 kgr*, θὰ ἔχη σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ κέντρον Κ τοῦ ἑξαγώνου. Ὁμοίως τὰ 2 kgr* συνθέτομεν μὲ τὰ 2 kgr* ἐκ τοῦ εἰς τὸ Ε βάρους καὶ ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἐκ 4 kgr* θὰ ἔχη σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ σημεῖον Κ πάλιν, καί, τέλος, τὰ 3 kgr* τῆς κορυφῆς Γ συνθέτομεν μετὰ τῶν 3 kgr* ἐκ τοῦ βάρους τῆς κορυφῆς Ζ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν συνισταμένην εἰς τὸ σημεῖον Κ ἴσην πρὸς 6 kgr*. Τὰς τρεῖς οὕτω προκυψάσας μερικὰς συνιστάμενας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Κ, συνθέτομεν εἰς μίαν, ἡ ὁποία θὰ ἔχη μέτρον 12 kgr* (2 kgr*, 4 kgr*, 6 kgr*). Πλὴν ταύτης, ἀπομένουν εἰσέτι ἀνὰ 3 kgr* ἐπὶ τὴν κορυφὴν Δ, Ε καὶ Ζ. Ἡ συνισταμένη τούτων θὰ ἔχη μέτρον 9 kgr* καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ σημεῖον τομῆς Μ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

Ἦδη ἀπομένει νὰ συνθέσωμεν δύο δυνάμεις, τὴν πρώτην ἐκ 12 kgr*, μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ κέντρον Κ τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν δευτέραν ἐξ 9 kgr*, μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Μ. Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνιστάμενης αὐτῶν Ο θὰ εὐρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΚ, ὥστε:

$$\frac{(OM)}{(OK)} = \frac{12}{9} \quad (1)$$

Ἐχομεν ὁμῶς: (OM) = (OE) - (EM) καὶ (OK) = (KE) - (OE). Ἀφ' ἑτέρου (KE) = α (ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου) εἶναι δι' ἑξ ἄλλου καὶ (EM) = 2/3 (ΕΛ) καὶ (ΕΛ) = α/2, διότι ἀποτελεῖ τὸ ἡμισυ τῆς διαγωνίου ρόμβου, ἀγόμενης ἐκ κορυφῆς γωνίας 120° (ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου). Ἐπομένως:

$$(OM) = (OE) - \alpha/3 \quad \text{καὶ} \quad (OK) = \alpha - (OE)$$



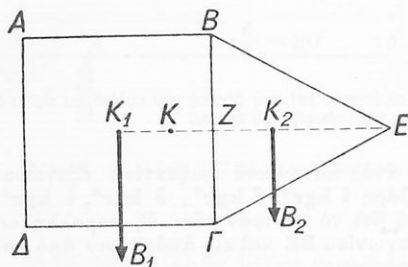
Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\frac{(OE) - \alpha/3}{\alpha - (OE)} = \frac{12}{9} \quad \eta: \quad (OE) = \frac{5}{7} \cdot \alpha$$

740. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τετραγώνου πλευρᾶς 3 cm ἐκ λεπτοῦ ὁμογενοῦς μετάλλου εἶναι προσκεκολλημένη ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγωνικοῦ τεμαχίου ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης. Ἐὰν τὸ τρίγωνον τοῦτο ἔχη βάσιν 3 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ὅλης ἐπιφανείας.

Λύσις. Ἐστω ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον καὶ ΒΕΓ τὸ προσκεκολλημένον τρίγωνον. Ἐκαστον ἐξ αὐτῶν ἔχει ἀντιστοίχως βάρη Β₁ καὶ Β₂, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κατακόρυφοι δυνάμεις ἐπενεργούσαι εἰς τὰ κέντρα βάρους αὐτῶν Κ₁ καὶ Κ₂. Τὸ κέντρον βάρους Κ τοῦ συστήματος θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς

εύθείας K_1K_2 και θά αποτελέσει τὸ σημείον ἐφαρμογῆς τῶν παραλλήλων δυνάμεων B_1 καὶ B_2 . Ἐπομένως, ἡ θέσις τοῦ θά εἶναι τοιαύτη ὥστε :



$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{(KK_2)}{(KK_1)} \quad (1)$$

Ἄλλὰ :

$$(KK_2) = (K_1K_2) - (KK_1) \quad (2)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (1) καὶ ἐπιλύομεν ὡς πρὸς (KK_1) , ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$(KK_1) = \frac{B_2}{B_1 + B_2} (K_1K_2) \quad (3)$$

Ἐχομεν ὁμῶς ὅτι $(K_1K_2) = (K_1Z) + (ZK_2)$, ὅπου (K_1Z) εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρῆς τοῦ τετραγώνου, δηλ. 1,5 cm καὶ (ZK_2) τὸ 1/3 τῆς διαμέσου (καὶ ὕψους) τοῦ τριγώνου, δηλαδή 1 cm. Ἄρα $K_1K_2 = 1,5 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$.

Ἐξ ἄλλου, ἂν θέσωμεν β τὸ βάρος ἀνά cm^2 τοῦ μετάλλου, θά ἔχωμεν :

$$B_1 = \beta \cdot 9 \text{ cm}^2 \quad \text{καὶ} : \quad B_2 = \beta \cdot 9/2 \text{ cm}^2$$

Ἀντικαθιστώντες τὰ δεδομένα εἰς τὴν (3), λαμβάνομεν :

$$(KK_1) = \frac{\beta \cdot 9/2 \text{ cm}^2}{\beta \cdot 9 \text{ cm}^2 + \beta \cdot 9/2 \text{ cm}^2} \cdot 2,5 \text{ cm} \quad \eta : \quad \underline{KK_1 = 0,83 \text{ cm}}$$

Ἦτοι τὸ κέντρον βάρους, μετὰ τὴν προσκόλλησιν τοῦ τριγώνου, μετατοπίζεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κατὰ 0,83 cm.

741. Χαλυβδίνη ὁμογενῆς ράβδος, μήκους 2 m καὶ βάρους 35 kgr*, φέρει δακτύλιον ζυγίζοντα 1,5 kgr* καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ ἕτερον δακτύλιον ζυγίζοντα 0,5 kgr* εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς ράβδου ἐνεργοῦν τρεῖς κατακόρυφοι δυνάμεις: Τὸ βάρος αὐτῆς B , μὲ σημείον ἐφαρμογῆς αὐτοῦ τὸ μέσον M τῆς ράβδου, τὸ βάρος B_1 τοῦ ἐνὸς δακτύλιου, εἰς ἀπόστασιν $GE = 10 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ , καὶ τὸ βάρος B_2 τοῦ ἑτέρου δακτύλιου, εἰς ἀπόστασιν $DZ = 80 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ ἄκρου Δ . Τὸ σημείον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων θά εἶναι, προφανῶς, τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος. Ἐστω K τὸ κέντρον βάρους εἰς ἀπόστασιν $KM = x$ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ράβδου.

Ἐὰν θέσωμεν ἐν ὑποστήριγμα εἰς τὸ σημείον K , ἥτοι μίαν ἀντίδρασιν A ἰσὴν πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν B , B_1 καὶ B_2 , τότε τὸ σύστημα θά ἰσορροπῇ.

Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ὑπολογίζοντες τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ σημείον K . Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$A \cdot 0 + B_1 (KE) - B (KM) - B_2 (KZ) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ἐχομεν ἐπίσης: } (KE) = (ME) - x = 90 \text{ cm} - x \quad (2)$$

$$(KM) = x \quad (3)$$

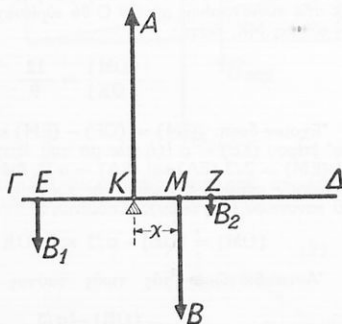
$$\text{καὶ: } (KZ) = x + (MZ) = x + 20 \text{ cm} \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν 4 ἐξισώσεων καὶ ἀντικαταστάσεως τῶν B , B_1 καὶ B_2 διὰ τῶν τιμῶν των 3,5 kgr*, 1,5 kgr* καὶ 0,5 kgr* ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν :

$$\underline{x = 22,73 \text{ cm}}$$

Ἦτοι τὸ κέντρον βάρους K τοῦ συστήματος εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 22,73 cm ἀπὸ τοῦ μέσου M καὶ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ βαρυτέρου δακτύλιου.

742. Ὅμοιομορφος σανὶς, μήκους 3 m καὶ μάζης 20 kgr, φέρει συγκεντρωμένον βάρος 10 kgr* εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ ἕτερον συγκεντρωμένον βάρος 7,5 kgr* εἰς ἀπόστασιν 90 cm ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ



ἄκρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄκρου.

Λύσις. Ἐστω K τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος εἰς ἀπόστασιν $(K\Gamma) = x$ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς σανίδος. Αἱ ροπαὶ τῶν δύο βαρῶν B_1 καὶ B_2 ὡς καὶ τοῦ βάρους B τῆς σανίδος $\Gamma\Delta$ πρέπει νὰ ἔχουν ἀλγεβρικὸν ἀθροισμα μηδέν, ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους K . Ἦτοι:

$$B_1(EK) + B_2(ZK) - B(KM) = 0 \quad (1)$$

ἔχομεν ἐπίσης:

$$(KE) = (K\Gamma) - (\Gamma E) = x - (\Gamma E) \quad (2)$$

$$(ZK) = (K\Gamma) - (Z\Gamma) = x - (Z\Gamma) \quad (3)$$

καί:

$$(KM) = (M\Gamma) - (K\Gamma) = (M\Gamma) - x \quad (4)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν: $B_1[x - (\Gamma E)] + B_2[x - (Z\Gamma)] - B[(M\Gamma) - x] = 0$ καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς x εὐρίσκουμεν:

$$x = \frac{B(M\Gamma) + B_1(\Gamma E) + B_2(Z\Gamma)}{B + B_1 + B_2} \quad (5)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰ δεδομένα: $B = 20 \text{ kgf}^*$, $B_1 = 10 \text{ kgf}^*$, $B_2 = 7,5 \text{ kgf}^*$, $(M\Gamma) = 1/2 \cdot 3 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, $(\Gamma E) = 30 \text{ cm}$ καὶ $(Z\Gamma) = 90 \text{ cm}$, εὐρίσκουμεν:

$$x = 106 \text{ cm}$$

743. Ράβδος χαλυβδίνη, ὁμογενῆς, διαμέτρου 2,5 cm καὶ μήκους 90 cm τοποθετεῖται ἐπὶ τὸρνου καὶ λεπτύνεται κατὰ μήκος 30 cm, ὥστε ἡ διάμετρος τῆς νὰ γίνῃ 1,5 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τῆς προκυπτούσης στερεῆς ράβδου.

Λύσις. Ἡ προκύπτουσα ράβδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενη ἐκ δύο κυλινδρικῶν ράβδων, διαμέτρου $d_1 = 2,5 \text{ cm}$ καὶ μήκους $l_1 = 60 \text{ cm}$, ἡ πρώτη, καὶ διαμέτρου $d_2 = 1,5 \text{ cm}$ καὶ μήκους $l_2 = 30 \text{ cm}$, ἡ δευτέρα. Τὸ κέντρο βάρους αὐτῶν K_1 καὶ K_2 θὰ εὐρίσκωνται εἰς τὰ κέντρα βάρους τῶν ἀντιστοίχων κυλίνδρων, ἥτοι θὰ ἔχωμεν $(AK_1) = 30 \text{ cm}$ καὶ $(K_2\Gamma) = 15 \text{ cm}$, ὅπου $A\Gamma$ ὁ κοινὸς ἀξων τῶν δύο κυλίνδρων. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ συνολικὸν βάρος ἐκάστης κυλινδρικής ράβδου ἀποτελεῖ δύναμιν μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ ἀντίστοιχον κέντρον βάρους. Οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς K , δύο παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεων. Ὡς γνωστὸν, τὸ σημεῖον τοῦτο K θὰ εὐρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{(KK_2)}{(KK_1)} \quad (1)$$

Ἐστω $(KK_1) = x$, τότε: $(KK_2) = (K_1K_2) - x = \frac{l_1 + l_2}{2} - x$

Ἄφ' ἑτέρου, ἂν εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ράβδου, θὰ ἔχωμεν:

$$B_1 = V_1 \cdot \epsilon = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot l_1 \cdot \epsilon$$

καί:

$$B_2 = V_2 \cdot \epsilon = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot l_2 \cdot \epsilon$$

ἤ:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{d_1^2 \cdot l_1}{d_2^2 \cdot l_2} \quad (2)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων προκύπτει:

$$\frac{l_1 + l_2}{2} - x = \frac{d_1^2 \cdot l_1}{d_2^2 \cdot l_2} \quad \text{ἢ:} \quad x = \frac{d_2^2 \cdot l_2 (l_1 + l_2)}{2(d_1^2 \cdot l_1 + d_2^2 \cdot l_2)} \quad (3)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰ δεδομένα: $d_1 = 2,5 \text{ cm}$, $d_2 = 1,5 \text{ cm}$, $l_1 = 60 \text{ cm}$ καὶ $l_2 = 30 \text{ cm}$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), εὐρίσκωμεν :

$$x = 6,86 \text{ cm}$$

Ἦτοι, τὸ κέντρον βάρους τῆς ράβδου θὰ εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 6,86 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ μεγαλύτερου κυλίνδρου ἢ εἰς ἀπόστασιν $6,86 + 30 \approx 36,86 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α τοῦ ἄξονος, τοῦ κειμένου ἐπὶ τῆς μεγαλύτερας βάσεως τοῦ σώματος.

744. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τόπον, ὅπου μαθηματικὸν ἔκκρεμὲς μήκους 100 cm ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις ἐντὸς 246 sec.

Λύσις. Ὁ τύπος τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους εἶναι :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

ὅπου l τὸ μήκος τοῦ ἔκκρεμους καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον ὅπου ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι T . Λύοντες ὡς πρὸς g εὐρίσκομεν :

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Θέτομεν : $l = 100 \text{ cm}$, $T = 246/100 = 2,46 \text{ sec}$, καὶ λαμβάνομεν :

$$g = 979 \text{ cm/sec}^2$$

745. Ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν χαλύβδινον σύρμα μήκους 6 m, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται μικρὰ βαρεῖα σφαῖρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλήρων αἰωρήσεων ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν. Δίδεται ὅτι $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ἐὰν θέσωμεν : $l = 6 \text{ m}$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$T = 4,91 \text{ sec}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν πλήρων αἰωρήσεων ἀνὰ min θὰ εἶναι :

$$v = \frac{1}{4,91} \cdot 60 = 12,2 \text{ min}^{-1}$$

ἦτοι :

$$v = 12,2 \text{ min}^{-1}$$

746. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος ἔκκρεμους δευτερολέπτων εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης εἶναι $978,049 \text{ cm/sec}^2$.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως, τὸ ἔκκρεμὲς θὰ κτυπᾷ τὰ δευτερολέπτα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχῃ περίοδον $T = 2 \text{ sec}$. Λύομεν τὸν τύπον τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμους $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ὡς πρὸς l , ὅτε εὐρίσκομεν :

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$$

Θέτομεν : $T = 2 \text{ sec}$ καὶ $g = 978,049 \text{ cm/sec}^2$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$l = 99,09 \text{ cm}$$

747. Μαθηματικὸν ἔκκρεμὲς ἐκτελεῖ εἰς 1 min 60 πλήρεις ταλαντώσεις. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ βραχυυνθῇ, ἵνα τοῦτο ἐκτελῇ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 90 πλήρεις ταλαντώσεις. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Έστω ότι εις τήν πρώτην περίπτωσιν ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς εἶναι T_1 καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ l_1 καὶ εις τήν δευτέραν περίπτωσιν ὅτι ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι T_2 καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ l_2 . Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad (1)$$

καὶ εις τήν δευτέραν περίπτωσιν ἡ σχέσις :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς l_1 , προκύπτει ὅτι : $l_1 = \frac{T_1^2 \cdot g}{4\pi^2}$ (3)

καὶ ἐκ τῆς (2), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς l_2 , προκύπτει ὅτι : $l_2 = \frac{T_2^2 \cdot g}{4\pi^2}$ (4)

Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$l_1 - l_2 = \frac{g}{4\pi^2} (T_1^2 - T_2^2) \quad (5)$$

ὅπου $l_1 - l_2$ εἶναι προφανῶς ἡ ζητούμενη βράχυνσις τοῦ μήκους τοῦ ἔκκρεμοῦς.

Θέτομεν εἰς τήν (5) : $T_1 = 60/60 = 1 \text{ sec}$, $T_2 = 60/90 = 2/3 \text{ sec}$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$l_1 - l_2 = 13,84 \text{ cm}$$

748. Ἐκκρεμὲς ἔχει περίοδον κινήσεως $2,14 \text{ sec}$ εὐρισκόμενον εἰς ὕψος 5 km ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ποία ἡ περίοδος τοῦ ἰδίου ἔκκρεμοῦς εἰς ὕψος 32 km ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. (Δίδεται ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς $R = 6,3 \cdot 10^8 \text{ cm}$).

Σημείωσις. Ἡ ἀσκήσις αὕτη ἔχει λυθῇ ὑποδειγματικῶς εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ βιβλίου. (Ὁδηγία διὰ τὴν λύσιν τῶν Ἀσκήσεων Φυσικῆς. Μεθοδικὴ λύσις Ἀσκήσεων).

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

749. Λίθος πίπτει ἐλευθέρως ἀπὸ γέφυραν καὶ μετὰ χρόνον 4 sec κτυπᾷ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποῖον τὸ ὕψος τῆς γεφύρας. (Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος. $g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $s = 80 \text{ m}$.)

750. Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα συναντᾷ τὸ ἔδαφος σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου τοῦ Eiffel. (Ὑψος πύργου 300 m , $g = 10 \text{ m/sec}^2$, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Ἀπ. α' $t = 7,7 \text{ sec}$. β' $v = 77 \text{ m/sec}$.)

751. Ἀπὸ ποῖον ὕψος πρέπει νὰ πηδῇ ἄνθρωπος, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, διὰ νὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος μὲ τὴν ταχύτητα 6 m/sec , μὲ τὴν ὁποίαν κατέρχεται πῖπτων ἀλεξιπτωτιστής. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν. $g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $s = 1,8 \text{ m}$.)

752. Ἀπὸ κωδωνοστασίου ὕψους 60 m ἄνθρωπος βάλλει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω λίθον ὑπὸ ταχύτητα 25 m/sec . Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ ὁ λίθος διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Σχολή Ἰκάρων, 1959). (Ἀπ. $t = 6,25 \text{ sec}$, $v = 37,5 \text{ m/sec}$.)

753. Ἀπὸ γεφύρας ὕψους 40 m βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω σῶμα μὲ

ἀρχικήν ταχύτητα 5 m/sec . Μὲ ποίαν ταχύτητα καὶ μετὰ πόσον χρόνον συναντᾷ τὸ σῶμα τὸ ὕδωρ κάτωθεν τῆς γεφύρας. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Ἀρχιτεκτόνων καὶ Χημικῶν (Ἀλλοδαποί), 1957).
(Ἀπ. $28,7 \text{ m/sec}$, $t = 3,37 \text{ sec}$.)

754. Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ βάθους φρέατος ἀφίεται ἀπὸ τοῦ χεῖλους λίθος, ὅστις πίπτει ἐλευθέρως ἐντὸς αὐτοῦ. Ὁ ἤχος τῆς κρούσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα ἀκούγεται μετὰ πάροδον χρόνου 15 sec ἀπὸ τῆς ἀφέσεως. (Ταχύτης ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 15°C 340 m/sec , $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).
(Ἀπ. $s = 800 \text{ m}$.)

755. Παιδίον εὐρισκόμενον ἐπὶ κρημνοῦ, ὕψους 49 m , ἀφίνει νὰ πέσῃ ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος λίθον μετὰ δὲ πάροδον 1 sec βάλλει κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω ἕτερον λίθον μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα τοιαύτην, ὥστε οἱ δύο λίθοι νὰ φθάσουν ὁμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ δευτέρου λίθου, ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρῇται ὡς ἀμελητέα.
(Ἀπ. 12 m/sec .)

756. Ἀπὸ τὰ ἄκρα νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας κρέμονται δύο ὅμοια δοχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μάζαν 1350 gr . Τὰ δοχεῖα εὐρίσκονται ἐν ἀρχῇ εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ἄν τῶρα τεθῇ ἐντὸς τοῦ ἐνὸς δοχείου μία μάζα 56 gr , τοῦτο ἀρχίζει νὰ κατέρχεται, ἐνῶ τὸ ἄλλο νὰ ἀνέρχεται. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, ὥστε τὰ δύο δοχεῖα νὰ ἀπέχουν μεταξύ των 2 m . (Σχολὴ Ναυτικῶν Δοκίμων, 1961).
(Ἀπ. $t = 3,16 \text{ sec}$.)

757. Λίθος πίπτει ἐλευθέρως, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ τοῦ ἀκροστέγου οἰκίας, καὶ διερχόμενος πρὸ παραθύρου, μήκους 2 m , εἶναι ὁρατὸς ἐπὶ $0,1 \text{ sec}$. Ποία ἡ ἀπόστασις τῆς στέγης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ παραθύρου.
(Ἀπ. $19,4 \text{ m}$.)

758. Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμὴν ἀκούεται ὁ ἤχος κρούσεως λίθου, πίπτοντος ἐλευθέρως ἐντὸς φρέατος βάθους 400 m . (Ταχύτης ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 15°C , 340 m/sec καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).
(Ἀπ. $t_1 = 8,9 \text{ sec}$, $t_2 = 1,2 \text{ sec}$, $t = 10,1 \text{ sec}$.)

759. Ἡ ἄκτις τῆς Γῆς ἰσοῦται πρὸς 6400 km , ἡ ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου ἀνέρχεται εἰς $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, ἡ πυκνότης τῆς Γῆς εἶναι $5,6 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ἡ περίοδος τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον λαμβάνεται ἴση πρὸς 365 ἡμέρας. Ποία ἡ μέση δύναμις ἔλξεως μεταξύ Γῆς καὶ Ἡλίου.
(Ἀπ. $3,7 \cdot 10^{21} \text{ kgr}^*$.)

760. Ὑπὸ ποίαν γωνιακὴν ταχύτητα θὰ ἔπρεπε νὰ περιστρέφεται ἡ Γῆ, ἵνα τὸ βάρος σώματός τινος ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Πυκνότης τῆς Γῆς $5,6 \text{ gr/cm}^3$, ἄκτις αὐτῆς 6400 km .
(Ἀπ. $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec}$.)

761. Ἡ μέση γωνιακὴ ταχύτης τῆς Γῆς κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτῆς περὶ τὸν Ἥλιον εἶναι 1° ἀνὰ ἡμέραν. Ἡ ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου εἶναι $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$. Ποία ἡ μάζα τοῦ Ἡλίου.
(Ἀπ. $2 \cdot 10^{27} \text{ tn}$.)

762. Μάζα $m_1 = 200 \text{ gr}$ τοποθετεῖται ἐπὶ λείου κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ γωνίας κλίσεως 30° μετὰ τῆς ὀριζοντίου. Ἡ μάζα συνδέεται διὰ σχοινίου διερχομένου διὰ μικρᾶς τροχαλίας, τοποθετημένης εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ἐπιπέδου καὶ φέροντος ἑτέραν ἐλευθέρως ἐξηρητημένην μάζαν $m_2 = 105 \text{ gr}$ κατακορύφως αἰωρουμένην. Νὰ υπολογισθοῦν ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διανύει ἡ μάζα m_2 κατὰ τὴν κάθοδόν της ἐντὸς 2 sec , ἐκκινουσα ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$.)
(Ἀπ. $32,2 \text{ cm}$, $103,3 \text{ gr}^*$.)

763. *Ανθρώπος πηδᾷ ἀπὸ πύργου ὕψους 10 m εἰς τὸ ὕδωρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν εἰσχωρεῖ εἰς τὸ ὕδωρ εἰς m/sec καὶ km/h.
(Ἄπ. 14 m/sec, 50 km/h.)

764. Ὁριζοντία πλάξ, φέρουσα βάρος 10 kgr*, κινεῖται κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 4 m/sec². Ποία ἡ ἐπὶ τῆς πλακὸς λόγω τοῦ βάρους τῶν 10 kgr* ἀσκουμένη δύναμις. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. 5,92 kgr*.)

765. Σῶμα βάρους 210 gr* πίπτει ἐλευθέρως. Ζητοῦνται : α) Ἡ ὑπὸ τοῦ σώματος ἀποκτωμένη ταχύτης μετὰ πτώσιν 150 m. β) Ἡ τιμὴ τῆς ἐπὶ τοῦ κινήτου ἐφαρμοζομένης ἐπιβραδυνούσης δυνάμεως, ἵνα ἐπανέλθῃ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τῆς ἡρεμίας μετὰ 10 sec. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἄπ. α' 54,25 m/sec. β' 319 935 dyn.)

766. Παρατηρητὴς εὐρισκόμενος εἰς ὕψος 250 m βλέπει τὴν 15ην ὥραν νὰ διέρχεται πρὸ αὐτοῦ λίθος ἀφθελὺς ὑπὸ ἀερονάουτου. Ἐτερος παρατηρητὴς διαπιστώνει ὅτι ὁ λίθος φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος τὴν 15ην ὥραν καὶ 3 sec. Εἰς ποῖον ὕψος εὕρισκετο ὁ ἀερονάουτης ὅταν ἄφησε τὸν λίθον καὶ κατὰ ποῖαν στιγμὴν τοῦ χρόνου τὸν ἄφησε. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν. $g = 9,80 \text{ m/sec}^2$).
(Ἄπ. 490 m, 14 h 59 min 53 sec.)

767. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ βάθους φρέατος ἀφίνομεν ἀπὸ τοῦ στομίου αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐλευθέρως λίθος. Τὸν κρότον τοῦ λίθου ἀκούομεν μετὰ πάροδον $t = 4 \text{ sec}$. Πόσον τὸ βάθος τοῦ φρέατος, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἡχοῦ εἴναι $v = 340 \text{ m/sec}$. (Ἄπ. 70 m.)

768. *Ἐκ τίνος σημείου Α ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμα κατὰ τὴν κατακορύφον. Ὅταν τὸ σῶμα τοῦτο ἔχῃ διατρέξῃ διάστημα s_1 , ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἕτερον σῶμα. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀφίσεως τοῦ πρώτου τὰ δύο σώματα θὰ εὐρεθοῦν εἰς δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσην πρὸς s_2 .
(Ἄπ. $t = s_2 + s_1/\sqrt{2g \cdot s_1}$.)

769. Ἀπὸ ποίου ὕψους h πρέπει νὰ ἀφεθοῦν δύο σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ πίπτει ἐλευθέρως, ἐνῶ τὸ δεύτερον θὰ ριφθῇ κατὰ τὴν κατακορύφον, $t \text{ sec}$ μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ πρώτου, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , ἵνα φθάσουν εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : Χρόνος μετὰξὺ ἀναχωρήσεως πρώτου καὶ δευτέρου σώματος 2 sec. Ἀρχικὴ ταχύτης δευτέρου σώματος 22,05 m/sec, $g = 9,80 \text{ m/sec}^2$.
(Ἄπ. $h = g \cdot t^2/8 [(2v_0 - g \cdot t)/(v_0 - g \cdot t)]^2$, 490 m.)

770. Ἀντικείμενον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας καὶ ὀλισθαίνει κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ γωνίαν 15°, ἄνευ τριβῆς. Πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ ἵνα ὀλισθήσῃ κατὰ 1,5 m. (Ἄπ. 1,1 sec.)

771. Ἀντικείμενον βάρους 3 kgr*, ἡρεμοῦν ἐπὶ λείας τραπέζης ἄνευ τριβῆς, συνδέεται μὲ σχοινίον διερχόμενον διὰ τροχαλίας καὶ προσδεδεμένον εἰς ἐπὶ βάρους 0,5 kgr*, ἐλευθέρως αἰωρούμενον. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.
(Ἄπ. 1,4 m/sec², 4,2 Nt.)

772. Ἀντικείμενον ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως 28°. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔχῃ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν 4,8 m. Ποία ἡ ταχύτης του εἰς τὸ πέρας τοῦ διαστήματος τούτου. (Ἄπ. $t = 1,45 \text{ sec}$, $v = 6,67 \text{ m/sec}$.)

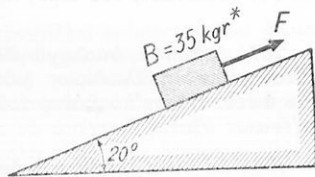
773. Ἀντικείμενον βάρους 25 kgr* ἀκίνητε ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 20°. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του, ἐὰν ὠθηθῇ πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μὲ σταθερὰν δύναμιν 200 Nt. Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης μετὰ 2 sec. Πόσον θὰ ἔχῃ μετακινηθῇ κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν.
(Ἄπ. $\gamma = 4,6 \text{ m/sec}^2$, $v = 9,2 \text{ m/sec}$, $s = 9,2 \text{ m}$.)

774. Ποία ή γωνία κλίσεως κεκλιμένου επιπέδου, όταν σώμα κινούμενον ἐπ' αὐτοῦ τὸ διατρέχη εἰς πενταπλάσιον χρόνον, ἐκείνου τὸν ὅποιον ἐχρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ, πῆπτον ἐλευθέρως, τὸ ὕψος του. (Ἀπ. $\alpha = 11^\circ 32'$.)

775. Ἐπὶ κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσεως 30° , κινεῖται σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec , διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Ποῖον τὸ ὑπ' αὐτῆς διανυθὲν διάστημα, μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος, καὶ πόσον χρόνον χρειάζεται πρὸς τοῦτο. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $s = 10 \text{ m}$, $t = 2 \text{ sec}$.)

776. Δύναμις $F = 235 \text{ kg}^*$ ἐνεργεῖ ὑπὸ γωνίαν 60° σχηματιζομένην μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπίπεδου ἐπὶ σώματος κινούμενου ἐπὶ κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσεως 22° . Νὰ καθορισθοῦν ἀλγεβρικῶς: α) ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κάθετος συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως F , καὶ β) αἱ συνιστῶσαι τῆς F κάθετος καὶ παράλληλος ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον. (Ἀπ. α' 118 kg^* , 204 kg^* . β' 185 kg^* , 145 kg^* .)

777. Ποία δύναμις F παράλληλος πρὸς τὴν λείαν ἐπιφάνειαν κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσεως 20° (βλ. σχῆμα), ἀπαιτεῖται ἵνα συγκρατήσῃ εἰς ἰσορροπίαν βάρος $B = 35 \text{ kg}^*$. (Ἀπ. $F = 12 \text{ kg}^*$.)

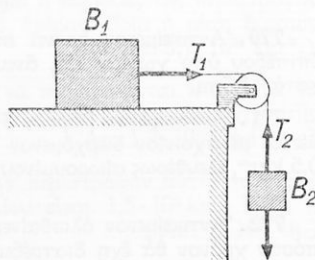


*Άσκησης 777.

778. Εἰς τὰ ἄκρα νήματος, διερχομένου διὰ τῆς αὐλάκος τροχαλίας, τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι ὀριζόντιος, κρέμονται δύο ἴσα βάρη, ζυγίζοντα εἰς κανονικὸν τόπον 200 kg^* ἕκαστον. Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τούτων τοποθετεῖται πρόσθετον βάρος 5 gr^* . Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, ἐὰν ἡ τριβὴ καὶ αἱ μᾶζαι τροχαλίας καὶ νήματος παραλείπονται ὡς ἀμελητέαι. (Ἀπ. $\gamma = 0,12 \text{ m/sec}^2$.)

779. Τροχαλία ἄνευ τριβῆς συγκρατεῖ ἐλαφρὸν σχοινίον, εἰς τὰ πέρατα τοῦ ὁποίου εὐρίσκονται προσδεδεμένα μᾶζαι $0,15 \text{ kg}$ καὶ $0,2 \text{ kg}$ ἀντιστοίχως. Νὰ εὐρεθοῦν ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινοῦ. (Ἀπ. $\gamma = 1,4 \text{ m/sec}^2$, ὀλικὴ ἰσχύς (τάσις σχοινοῦ) $= 1,68 \text{ Nt}$.)

780. Σχοινίον διερχόμενον ἀπὸ τροχαλίαν ἄνευ τριβῆς ὑποβαστάζει μᾶζαν 7 gr ἐξηρτημένην ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ καὶ μᾶζαν 9 gr ἐξηρτημένην ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινοῦ. (Ἀπ. $\gamma = 122 \text{ cm/sec}^2$, $T = 7,9 \text{ gr}^*$.)



*Άσκησης 781.

781. Σῶμα βάρους $B_1 = 200 \text{ gr}^*$ δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ ἄνευ τριβῆς ἐπὶ ὀριζοντίου επιπέδου (βλ. σχῆμα) καὶ τίθεται εἰς κίνησιν τῇ βοήθειᾳ βάρους $B_2 = 50 \text{ gr}^*$ ἐξηρτημένου ἀπὸ τοῦ ἄκρου σχοινοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ἕτερον ἄκρον μέσῳ μικρᾶς τροχαλίας συνδέεται πρὸς τὸ σῶμα βάρους B_1 . Ζητοῦνται, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ αἱ τάσεις T_1 καὶ T_2 .

(Ἀπ. $196,2 \text{ cm/sec}^2$, $T_1 = T_2 = 39 \text{ 240 dyn}$.)

782. Αἱ δύο μᾶζαι τῆς μηχανῆς Atwood ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι 60 gr , εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς μάζης A , ἥτις εἶναι εἰς τὴν στάθμην τοῦ μηδενὸς κατακορυφον κανόνος, πρόσθετος μᾶζα 5 gr , ἥτις προσδίδει, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν θὰ εὐρεθῇ ἡ μᾶζα A μετὰ 2 sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς πτώ-

σεως. Κατὰ τὴν στιγμήν ταύτην ἀφαιρείται ἡ πρόσθετος μάζα. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν θὰ εὐρεθῇ ἡ μάζα Α, 4 sec μετὰ τὴν ἀναχώρησίν της. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. 78,5 cm, 235,5 cm.)

783. Εἰς μηχανὴν Atwood ἐκάστη τῶν ἴσων μαζῶν Μ εἶναι 50 gr καὶ τὸ ὕψος τῆς διατομῆς της 25 mm. Ἡ ἀρχὴ τῆς πτώσεως γίνεται εἰς χρόνον μηδὲν καὶ ἡ πρόσθετος μάζα εὐρίσκεται τότε εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος. Δακτύλιος διάτρητος, τοποθετημένος 50 cm κάτωθεν, θέλομεν ν' ἀφαιρέσῃ τὴν πρόσθετον μάζαν μετὰ 3 sec πτώσεως καὶ ὁ πλήρης δίσκος νὰ σταματήσῃ τὴν μάζαν μετὰ 2 sec. Ζητοῦνται : α) νὰ καθορισθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πρόσθετος μάζα, καὶ β) ποῖα πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ δίσκου. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' 1,146 gr. β' 119,17 cm.)

784. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood θεωροῦμεν τὴν τροχαλίαν καὶ τὸ νῆμα ἀμελητέας μάζης. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ νήματος εὐρίσκονται δύο ἴσαι μάζαι, ἐκάστη ἴση πρὸς 450 gr. Ἐπὶ τῆς μᾶς ἐξ αὐτῶν προστίθεται μάζα 50 gr. Ζητοῦνται : α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως ἐκάστης μάζης. β) Ἡ τάσις τοῦ νήματος.
(Ἀπ. α' 51,5 cm/sec². β' 464 200 dyn.)

785. Εἰς ἕκαστον τῶν ἄκρων νήματος μηχανῆς τοῦ Atwood ἐξαρτᾶται βάρους 200 gr* καὶ ἀκολούθως προστίθεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρόσθετος μάζα 5 gr. Ζητοῦνται : α) Πόσον θὰ εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τοῦ κατερχομένου βάρους μετὰ 2 sec. β) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ 3 sec. Δὲν θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ μάζα τῆς τροχαλίας. Δίδεται : $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.
(Ἀπ. α' 0,24 m. β' 0,36 m/sec.)

786. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τετραγώνων ἐπιτιθέμενον ἐπὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἡ κοινὴ βάσις ἔχει μήκος $s = 6 \text{ m}$.
(Ἀπ. Μεταξὺ τοῦ κ. β. τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κ. β. τοῦ τριγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν 1,43 m ἀπὸ τοῦ κ. β. τοῦ τετραγώνου.)

787. Ἐπίπεδος τριγωνικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ = ΑΓ = 10 cm καὶ ΒΓ = 8 cm φέρει εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ ἀντιστοίχως βάρη 60 kg*, 30 kg*, 30 kg*. Εἰς ποῖον σημεῖον δέον νὰ στηριχθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη, διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὀριζοντιῶς ἐπὶ κατακόρυφου στελέχους.
(Ἀπ. Εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσην πρὸς 4,6 cm.)

788. Μάζαι 10 gr, 20 gr καὶ 30 gr τοποθετοῦνται ἐπὶ ἀβαροῦς εὐθείας γραμμῆς ΑΒ, μήκους 1 m, κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν : Ἡ μάζα 10 gr εὐρίσκεται εἰς Α, ἡ μάζα 20 gr εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἡ μάζα 30 gr εὐρίσκεται εἰς Β. Ζητεῖται εἰς ποῖαν θέσιν θὰ εὐρίσκεται τὸ κέντρον βάρους (μάζης) τοῦ συστήματος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.
(Ἀπ. 70 cm ἀπὸ τοῦ Α.)

789. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ εὐθεῖα ΑΒ πραγματοποιηθῇ ὑπὸ ὁμογενοῦς ράβδου μάζης 40 gr, εἰς ποῖαν θέσιν ἐπ' αὐτῆς θὰ εὐρίσκειται τὸ κέντρον βάρους τῶν ἀνωτέρω μαζῶν.
(Ἀπ. 62 cm ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α.)

790. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κέντρον μάζης τῆς περιμέτρου ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἔχουν, ἀντιστοίχως, μήκος 3 cm καὶ 4 cm.
(Ἀπ. $x = 1 \text{ cm}$, $y = 1,5 \text{ cm}$.)

791. Ὁμογενὴς ράβδος ΑΒ, μήκους 3 m, ἔχει βάρος 4 kg* ἀνὰ τρέχον μέτρον. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς Α φορτίζεται μὲ βάρος 3 kg* καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον 0,60 m ἀπὸ τοῦ Β, μὲ βάρος 5 kg*. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ ἡ ράβδος, ἵνα ἰσορροπῇ.
(Ἀπ. Εἰς ἀπόστασιν 1,5 m ἀπὸ τοῦ Α.)

792. Ἀπὸ τοῦ ἐδάφους βάλλονται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω δύο σώματα μὲ διαφοράν χρόνου 3 sec καὶ ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 30 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους συναντῶνται. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 33,75 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους.)

793. Δεδομένου ὅτι ἡ χεὶρ εἰς ἐλεύθερον χειρισμὸν καὶ ἐπὶ διάστημα $s = 50 \text{ cm}$ κινεῖται μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ζητεῖται πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν σώματος μάζης 400 gr, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα τοῦτο φθάσῃ εἰς ὕψος 15 m. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 120 Nt = 12 kgr*, περίπου.)

794. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 10 m/sec. Νὰ υπολογισθοῦν: α) Τὸ μέγιστον ὕψος. β) Ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα παραμένει εἰς τὸν ἀέρα. (Ἀπ. α' 509,7 cm. β' 2,038 sec.)

795. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου βάλλονται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω δύο σώματα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $u_0 = 18 \text{ m/sec}$, ἀλλὰ τὸ ἐν σῶμα βάλλεται βραδύτερον κατὰ $t = 3 \text{ sec}$ ἢ τὸ ἄλλο. Πότε καὶ εἰς ποῖον σημεῖον τὰ δύο σώματα συναντῶνται. (Ἀπ. $t = 0,3 \text{ sec}$, $h = 4,95 \text{ m}$.)

796. Κατὰ τινὰ ἔκρηξιν τοῦ Βεζουβίου ἐξετινάχθησαν λίθοι εἰς ὕψος 2 km. Μὲ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα ἐξήλθον τοῦ κρατῆρος. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν. $g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $u_0 = 200 \text{ m/sec}$.)

797. Θάλαμος ἀνελκυστήρος βάρους 280 kgr* κατέρχεται ἐντὸς φρέατος μεταλλείου, κινούμενος μὲ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν, καὶ διανύει εἰς τὰ πρῶτα 10 sec τῆς κινήσεώς του βάθος 35 m. Ποία δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σχοινίου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι προσδεδεμένος ὁ θάλαμος. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 260 kgr*.)

798. Εἰς σῶμα βάρους 3 kgr*, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐπὶ τινος τραπέζης, προσδένεται νῆμα. Μὲ ποίαν ἐπιτάχυνσιν πρέπει νὰ σύρωμεν τὸ νῆμα κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἐπάνω διὰ νὰ θραυσθῇ. Τὸ φορτίον θραύσεως τοῦ νήματος εἶναι $T = 4,2 \text{ kgr*}$. (Ἀπ. $\gamma = 3,92 \text{ cm/sec}^2$.)

799. Βλήμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 200 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος θὰ ἀνέλθῃ τοῦτο καὶ μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεως. ($g = 9,8 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $h = 2040,8 \text{ m}$, $t = 40,8 \text{ sec}$.)
(Σχολή Ἰκάρων, 1960.)

800. Βλήμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $u_0 = 600 \text{ cm/sec}$. Μετὰ πόσον χρόνον t πρέπει νὰ βληθῇ δεύτερον βλήμα ὁμοίως πρὸς τὰ ἄνω μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, ἵνα συναντήσῃ τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου ὕψους.
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαί: Πολιτικῶν καὶ Μηχανολόγων, Ἀλλοδαποί, 1960.)

801. Ἀπλοῦν ἑκκρεμὲς ἔχει μῆκος 0,5 m. Ποία ἡ περίοδος αἰωρήσεώς του.
(Ἀπ. $T = 1,42 \text{ sec}$.)

802. Ἡ περίοδος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς αὐξάνει κατὰ 0,01 sec, ὅταν τὸ μῆκος αὐξάνῃ κατὰ 1 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν μῆκος τοῦ ἑκκρεμοῦς.
(Ἀπ. 100,7 cm.)

803. Εἰς τὸ ἄκρον ἀβαροῦς νήματος μήκους 5 m κρέμαται μικρὰ βαρεῖα σφαῖρα, ἔξομιουμένη πρὸς ὑλικὸν σημεῖον. Ποία ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ μαθηματικοῦ τούτου ἑκκρεμοῦς καὶ ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν αἰωρήσεων κατὰ πρῶτον λεπτόν. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. α' $T = 4,44 \text{ sec}$. β' $\nu = 13,5 \text{ sec}^{-1}$.)

804. Ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ 90 πλήρεις αἰωρήσεις ἐντὸς 1 min. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ περίοδος καὶ ἡ συχνότης.
(Ἀπ. 0,67 sec, $1,5 \text{ sec}^{-1}$.)

805. Νά υπολογισθῇ τὸ μήκος ἑκκρεμοῦς κυτῶντος τὰ δευτερόλεπτα εἰς τόπον ὅπου ἑκκρεμές μήκους 1 m χρειάζεται δι' 100 αἰωρήσεις χρόνον 200,5 sec. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον αὐτόν.

(Ἀπ. α' $l = 0,995$ m. β' $g = 9,82$ m/sec².)

806. Νά υπολογισθῇ τὸ μήκος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον ἔχει περίοδον $T = 2,0000$ sec : α) εἰς τόπον ὅπου $g = 9,80665$ m/sec², β) εἰς ἕτερον τόπον ὅπου $g = 9,7812$ m/sec².

(Ἀπ. α' $l = 0,99362$ m. β' $l = 0,99103$ m.)

807. Ὁρολόγιον ἔχον ἑκκρεμές δευτερολέπτων ($T = 2$ sec) κερδίζει 2 min τὴν ἡμέραν. Ποῖον εἶναι τὸ σφάλμα εἰς τὸ μήκος τοῦ ἑκκρεμοῦς.

(Ἀπ. 1,58 cm.)

808. Ἐκκρεμές κυτῶν τὰ δευτερόλεπτα, ὅταν ἡ ἡμιπερίοδος αὐτοῦ εἶναι 1 sec. Ζητοῦνται : α) Πόσον τὸ μήκος τοῦ ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec². β) Πόσον εἶναι τὸ μήκος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον κυτῶν τὸ ἡμιον τοῦ δευτερολέπτου, δηλ. ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι 1 sec, εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec².

(Ἀπ. α' 99,3 cm. β' 24,8 cm.)

809. Ἐκκρεμές ὠρολόγιον ὑστερεῖ 3 min καθ' ἡμέραν. Διὰ βραχύνσεως τοῦ μήκους αὐτοῦ κατὰ 4,15 mm τοῦτο ἐγένετο καὶ πάλιν ἀκριβές. Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικόν μήκος αὐτοῦ.

(Ἀπ. 997 mm.)

810. Τὸ μήκος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον κυτῶν τὸ δευτερόλεπτον, εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης 994 mm. Ζητοῦνται : α) Πόση ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν τόπον αὐτόν. β) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ βραχυνθῇ τὸ μήκος τοῦ νήματος, ἵνα τὸ ἑκκρεμές ἀναβιβαζόμενον εἰς τὸ αὐτὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἰς ὕψος 3500 m κυτῶν καὶ πάλιν τὸ δευτερόλεπτον.

(Ἀπ. α' $g = 981,05$ cm/sec². β' $\Delta l = 0,11$ cm.)

811. Ἀπλοῦν ἑκκρεμές μήκους 1 m ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς 200,5 sec. α) Νά υπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ ἑκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον εἰς τὸν τόπον τοῦτον κυτῶν τὸ δευτερόλεπτον. β) Ποία ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν αὐτὸν τόπον.

(Ἀπ. α' 99,50 cm. β' 982,06 cm/sec².)

812. Κατὰ πόσα δευτερόλεπτα ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας καθυστερεῖ ὠρολόγιον, ὅταν μετατεθῇ ἀπὸ τόπου ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις $g_1 = 9,8121$ m/sec² εἰς τὸν Ἰσημερινὸν ὅπου $g_2 = 9,7810$ m/sec².

(Ἀπ. 137 sec.)

813. Ἀπλοῦν ἑκκρεμές ἐκτελεῖ 30 αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ βραχυνθῇ διὰ νὰ ἐκτελῇ 90 αἰωρήσεις εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

(Ἀπ. $l_2 = \frac{1}{9} l_1$.)

814. Ποῖον τὸ μήκος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς ἔχοντος περίοδον ἡμίσεος δευτερολέπτου εἰς τόπον ὅπου $g = 9,81$ m/sec².

(Ἀπ. $l = 6,2$ cm.)

815. Ποῖον τὸ μήκος ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς κυτῶντος τὸ δευτερόλεπτον : α) εἰς τοὺς πόλους ($g = 9,83$ m/sec²), β) εἰς τὸν Ἰσημερινὸν ($g = 9,78$ m/sec²).

(Ἀπ. α' $l = 99,60$ cm. β' $l' = 99,09$ cm.)

816. Ἡ μάζα ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς ἐξαρτᾶται ἐκ μακροῦ νήματος ἐξ ἀκλονήτου σημείου καὶ ἡ περίοδος τοῦ ἑκκρεμοῦς εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 4,5 sec. Διὰ βραχύνσεως τοῦ ἑκκρεμοῦς κατὰ 1 m, ἡ περίοδος γίνεται 4,03 sec. Νά υπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον αὐτόν.

(Ἀπ. 984,5 cm/sec².)

817. Μικρὰ μάζα βάρους 50 gr* αἰωρεῖται ὡς ἀπλοῦν ἑκκρεμές μὲ εὖρος 5 cm καὶ περίοδον 2 sec. Νά εὐρεθοῦν : α) ἡ μεγίστη ταχύτης τῆς μάξης, καὶ β) ἡ τάσις τοῦ νήματος, εἰς τὴν θέσιν μεγίστης ταχύτητος.

(Ἀπ. α' 5π cm/sec = 15,7 cm/sec. β' 50,13 gr*.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

818. Όχημα βάρους $2000 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$ άκινητεί επί άνελκυστήρος έμπορευμάτων. Ποίαν δύναμιν άσκει το δάπεδον του άνελκυστήρος επί του οχήματος: α) όταν ο άνελκυστήρ άκινητή, β) όταν κινείται προς τα άνω με έπιτάχυνσιν 3 m/sec^2 , και γ) όταν κινείται προς τα κάτω με έπιτάχυνσιν $2,5 \text{ m/sec}^2$.

(Άπ. α' $2000 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$ β' $2612 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$ γ' $1490 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$.)

819. Με ποίαν άρχικήν ταχύτητα πρέπει νά ριφθή λίθος κατακορύφως και προς τα άνω, δια νά άνέλθη εις ύψος 30 m . Μετά πόσον χρόνον από της ρίψεως πίπτει επί του εδάφους. (Ή αντίστασις του άέρος δέν λαμβάνεται ύπ' όψιν. $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Άπ. α' $u_0 = 24,5 \text{ m/sec}$. β' $2 \text{ t} = 4,9 \text{ sec}$.)

920. Με ποίαν άρχικήν ταχύτητα πρέπει νά ριφθή σώμα κατακορύφως και προς τα άνω, δια νά πέση επί της Γης μετά πάροδον χρόνου 20 sec . Εις ποίον ύψος άνέρχεται τó σώμα. (Ή αντίστασις του άέρος δέν λαμβάνεται ύπ' όψιν. $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Άπ. $u_0 = 100 \text{ m/sec}$, $h = 500 \text{ m}$.)

821. Βλήμα βαλλόμενον κατακορύφως και προς τα άνω έξέρχεται του στομίου του σωλήνος άντιαεροπορικού τηλεβόλου με άρχικήν ταχύτητα 900 m/sec και άνέρχεται εις ύψος 8600 m . Τι ποσοστόν επί τοις % του μεγίστου ύψους, εις τó όποιον θά άνήρχετο τó βλήμα, βαλλόμενον έντός κενού, είναι τούτο. (Ή αντίστασις του άέρος δέν λαμβάνεται ύπ' όψιν. $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Άπ. 21% .)

822. Φωτιστικόν βλήμα βάλλεται κατακορύφως και προς τα άνω με άρχικήν ταχύτητα 200 m/sec . Μετά πάροδον χρόνου 6 sec βάλλεται έτερον φωτιστικόν βλήμα με άρχικήν ταχύτητα 300 m/sec . Πόσος χρόνος παρέρχεται, μετά την βολήν του πρώτου βλήματος, δια νά συναντηθούν και εις ποίον ύψος έπιτυγχάνεται ή συνάντησις. (Ή αντίστασις του άέρος δέν λαμβάνεται ύπ' όψιν $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Άπ. $t = 12^{3/8} \text{ sec}$, $h = 1709,3 \text{ m}$.)

823. Άνθρωπος ίσταται επί ζυγοϋ έντός άνελκυστήρος. Όταν τó σύστημα ήρεμή, ό ζυγός δεικνύει βάρος $160 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$. Ο άνελκυστήρ κινείται με έπιτάχυνσιν 3 m/sec^2 . Τί βάρος δεικνύει ό ζυγός: α) κατά την άνοδον, β) κατά την κάθοδον του άνελκυστήρος.

(Άπ. α' $209 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$. β' $111 \text{ kg} \cdot \text{g}^*$.)

824. Έξ ύψους $h = 180 \text{ m}$ από του εδάφους βάλλεται κατακορύφως προς τα άνω σώμα υπό άρχικήν ταχύτητα 84 m/sec . Ζητούνται: α) Εις ποίον ύψος από του εδάφους θ' άνέλθη τó σώμα. β) Με πόσην ταχύτητα θά διέλθη τó σώμα κατά την κάθοδον αυτού από σημείου εύρισκομένου εις ύψος 72 m από του εδάφους. γ) Πόση θά είναι ή ταχύτης του σώματος, όταν φθάση εις τó έδαφος. δ) Πόσος ό χρόνος τόν όποιον θά χρειασθή τó σώμα από της άρχής της κινήσεώς του μέχρις ότου φθάση εις τó έδαφος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Άπ. α' $532,8 \text{ m}$. β' 96 m/sec . γ' 103 m/sec . δ' $18,7 \text{ sec}$.)

825. Σώμα πίπτει έλευθέρως εξ ύψους 20 m . Ταυτοχρόνως δεύτερον σώμα βάλλεται κατακορύφως προς τα άνω με άρχικήν ταχύτητα 15 m/sec . Πότε και εις ποίον ύψος από του εδάφους συναντώνται τά δύο σώματα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ε.Μ. Πολυτεχνείον, Σχολαί Άρχιτεκτόνων και Χημικών, — Άλλοδαποί — 1957).

(Άπ. $t = 4/3 \text{ sec}$, $h = 11,11 \text{ m}$.)

826. Τρεις δακτύλιοι βάλλονται κατακορύφως προς τα άνω με διαφοράν βολής κατά ήμισιον δευτερόλεπτον και εις τρόπον ώστε ν' άνέλθουν εις ύψος 10 m . Ποίαν απόστασιν έχουν οι δακτύλιοι μεταξύ των, όταν ό πρώτος δακτύλιος έχη άποκτήσει τó άνώτατον ύψος.

(Άπ. $h_2 = 4,15 \text{ m}$, $h_3 = 0,84 \text{ m}$.)

827. Έν σύγχρονον αεριοπρωθούμενον αεροπλάνον αναπτύσσει ταχύτητα 900 km/h. Πόση πρέπει να είναι κατ' ελάχιστον η ακτίς οριζοντίως διαγραφόμενου κύκλου, ίνα η αναπτυσσόμενη φυγόκεντρος επιτάχυνσις μὴ ὑπερβαίῃ τὸ ἐννεαπλάσιον τῆς επιταχύνσεως τῆς βαρύτητος. (Μεγαλύτεραν επιτάχυνσιν δὲν δύναται νὰ ὑποφέρει τὸ ἀνθρώπινον σῶμα.) (Ἀπ. 694 m.)

828. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἐκσφενδονισθῇ κατὰ τὴν κατακόρυφον σῶμα, ίνα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως πρὸς ἕτερον σῶμα ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς 1 sec, γωνιοῦ ὄντος ὅτι τὸ ὕψος τοῦ σημείου τούτου εἶναι 2 m. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ: Χρόνος διαρρεύσας μεταξύ τῶν ἀναχωρήσεων τῶν δύο σωμάτων 1 sec, ὕψος πτώσεως 122,5 m, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. $u_0 = g \cdot t \cdot [\sqrt{2h/g} - t/2] / [\sqrt{2h/g} - t]$, 11,025 m/sec.)

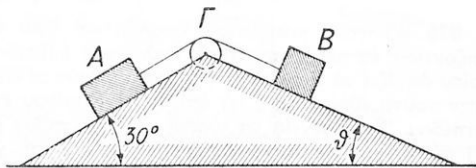
829. Δύο σῶματα βάλλονται διαδοχικῶς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἐν τῷ κενῷ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα u_0 . Ζητεῖται πόσον χρονικὸν διάστημα πρέπει νὰ παρέλθῃ μεταξύ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου σώματος καὶ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ δευτέρου, ίνα ἡ συνάντησις αὐτῶν γίνῃ εἰς ὕψος ἄνωθεν τοῦ σημείου ἀναχωρήσεως ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου ὕψους ἐνθα ἀνιψοῦται τὸ πρῶτον σῶμα. (Ἀπ. $u_0/g\sqrt{2}$.)

830. Ρουκέττα τύπου A4 επιταχύνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ προωθητικοῦ της συστήματος ἐντὸς 1 min ἀπὸ τῆς ταχύτητος μηδὲν εἰς τὴν ταχύτητα 2,4 km/sec. Ἀκολουθῶς, λόγω ἐξαντλήσεως τῆς καυσίμου ὕλης, ἡ ρουκέττα ἐξακολουθεῖ κινουμένη χωρὶς επιτάχυνσιν. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται αὕτη ἐντὸς 1 min, ἐὰν δεχθῶμεν κατακόρυφον καὶ σταθερὰν επιτάχυνσιν. Ποῖον εἶναι τὸ ἀνώτατον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ ἡ ρουκέττα. (Ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα.)

(Ἀπ. $s_1 = 72 \text{ km}$, $s_2 = 288 \text{ km}$, $h = 360 \text{ km}$.)

831. Σῶματα A καὶ B, βάρους 40 kg* καὶ 30 kg* ἀντιστοίχως, εὐρίσκονται ἐπὶ λείων κεκλιμένων ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, ὡς ἐν τῷ σχήματι, συνδέονται δὲ δι' ἄβαροῦς νήματος διερχομένου διὰ σταθερὰς τροχαλίας Γ, ἄνευ τριβῆς. Νὰ εὐρεθοῦν ἡ γωνία θ καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας.

(Ἀπ. $\theta = 41,8^\circ$, 20 kg*.)



832. Αἱ δύο μάζαι τῆς μηχανῆς Atwood, ἀντὶ νὰ μετατίθενται κατακόρυφως, ὀλισθαίνουν, ἄνευ τριβῆς, ἐπὶ δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων, ὑπὸ γωνίας 30° καὶ 60° , τὰ δὲ νήματα διὰ τῶν ὁποίων συνδέονται αἱ μάζαι M καὶ M_1 εἶναι παράλληλα πρὸς τὰ ἐπίπεδα ταῦτα. Ζητοῦνται: α) Ποία ἡ σχέση τῶν μαζῶν ἡ ἀναγκαία, ίνα αἱ δύο μάζαι εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπία. β) Ποία ἡ επιτάχυνσις τῆς κινήσεως, ὅταν αἱ μάζαι εἶναι ἑκάστη 5 kg*. γ) Τί συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐὰν μετὰ 3 sec ἀφ' ἧς πίπτουν αἱ μάζαι δώσωμεν αἰφνιδίως εἰς τὸ ἐν τῶν ἐπιπέδων τὴν αὐτὴν κλίσιν μὲ τὸ ἔτερον, τῶν νημάτων παραμενοντων παράλληλων πρὸς τὰ ἐπίπεδα. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.)

(Ἀπ. α' $M/M_1 = \sqrt{3} = 1,73$. β' $179,54 \text{ cm/sec}^2$. γ' Ἡ κίνησις γίνεται ὁμαλή.)

833. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος l. Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ εἰς n μέρη τοιαῦτα ὥστε νὰ διανύονται εἰς ἴσους χρόνους ὑπὸ κινήτου ὀλισθαίνοντος ἐπ' αὐτοῦ, ἄνευ τριβῆς καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς κορυφῆς. (Ἀπ. Τὰ τμήματα ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5 ... $2n-1$.)

834. Κεκλιμένον επίπεδον ἔχει μήκος 2,5 m καὶ ὕψος 0,3 m. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται ἵνα ὀλισθήσῃ πρὸς τὰ ἄνω ἀντικείμενον βάρους 40 kg*, ἐάν ἡ ἀπόδοσις εἴναι 62%.

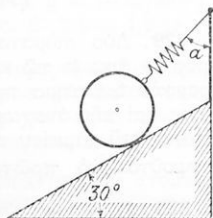
(Ἀπ. 76 Nt.)

835. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς ἐπὶ ὁδοῦ σχηματίζουσας κλίσιν 0,008. Ὁ συρμὸς ἔχει βάρους ἄνευ τῆς ἀτμομηχανῆς 180 tn*. Ποία ἡ ἔντασις τῆς προωστικῆς δυνάμεως τῆς ἀτμομηχανῆς, ὅταν ἡ ἀντίστασις κατὰ τὴν κίνησιν ἀνέρχεται εἰς τὰ 0,5% τῆς ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν ἀσκουμένης ὑπὸ τοῦ συρμοῦ δυνάμεως.

(Ἀπ. 2340 kg*.)

836. Σφαῖρα ζυγίζουσα 20 kg* συγκρατεῖται ἐπὶ τινος λείου κεκλιμένου ἐπιπέδου διὰ σχοινίου προσδεδεμένου εἰς τὸ ἄκρον δυναμομέτρου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ὑπεράνω τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ὅπως εἰς τὸ σχῆμα δεικνύεται. Τὸ δυναμομέτρον δεικνύει ἐνδειξιν 10 kg*. Ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου εἶναι 30°. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ γωνία α μεταξὺ σχοινίου - κατακορύφου καὶ ἡ ὑπὸ τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀσκουμένη δύναμις. Τὸ βάρος τοῦ δυναμομέτρου ἀμελητέον.

(Ἀπ. α = 60°, F = 17,3 kg*.)



*Ασκήσις 836.

837. Εἰς τὸ ἀνώτερον καὶ τὸ κατώτερον ἄκρον κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους 8 m καὶ γωνίας κλίσεως 30° εὐρίσκονται δύο σώματα. Ἀμφότερα ἄρχονται κινούμενα κατὰ μήκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ μάλιστα τὸ εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον εὐρισκόμενον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τὸ δὲ εἰς τὸ κατώτερον μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 6 m/sec, διευθύνσιν παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ σημεία ἐκινήσεως θὰ συναντηθοῦν. Ποίαν ταχύτητα ἔχει ἕκαστον τῶν δύο σωμάτων κατὰ τὴν συνάντησιν. (g = 10 m/sec²).

(Ἀπ. α' t = 1 1/3 sec. β' s₁ = 4 1/9 m, s₂ = 35/9 m. γ' v₁ = 6 2/3 m/sec, v₂ = -2 2/3 m/sec.)

838. Κινητὸν κινούμενον ὁμαλῶς καὶ ἄνευ τριβῆς μὲ ταχύτητα 3 m/sec ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου συναντᾷ κεκλιμένον ἐπίπεδον γωνίας κλίσεως 15°, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Νὰ σχεδιασθοῦν αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος ἀσκούμεναι δυνάμεις, ὅταν τοῦτο εὐρίσκεται : α) ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ, β) ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐν συνεχείᾳ νὰ εὑρεθῇ : α') εἰς ποῖον σημεῖον θὰ σταματήσῃ τὸ κινητὸν, β') πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο καί, γ') μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἀρχικὸν ὀριζόντιον ἐπίπεδον (ημ 15° = 0,229).

(Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, 1959). (Ἀπ. α' 1,73 m. β' 1,15 sec. γ' 3 m/sec.)

839. Σφαῖρα κυλιόμενη ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου διανύει κατὰ τὸ τρίτον δευτερόλεπτον διάστημα s = 0,5 m. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ σχέσις ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξύ ὕψους καὶ μήκους τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διήνυσε εἰς τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς της.

(Ἀπ. 1/h = 1/50, s = 0,3 m.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Χημικῶν, 1957).

840. Ράβδος σιδηρᾶ ἔγκρασις τομῆς 1 cm² καὶ μήκους 10 cm ζυγίζει 79 gr* καὶ ράβδος ἀργιλίου τομῆς 1 cm² καὶ μήκους 10 cm ζυγίζει 27 gr*, προσαρμύζονται δὲ ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ράβδον μήκους 20 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς συνισταμένης ράβδου τῶν 20 cm. (Ἀπ. 2,45 cm.)

841. Ράβδος σχηματίζεται ἀπὸ κυλινδρικὸν ὁμογενὲς στέλεχος μήκους 90 cm, ὅπερ τελειώνει εἰς ὁμογενῆ σφαῖραν διαμέτρου 6 cm. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ βάρους τοῦ στελέχους, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ράβδου.

(Ἀπ. Ἐπὶ τοῦ στελέχους, 13 cm ἀπὸ τῆς σφαίρας.)

842. Μεταλλική ομογενής πλάς έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ορθογωνίου εις Β, και τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι 2 kgf*. Ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ ὕψος, ἔχει μῆκος 0,90 m, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΑ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάση, ἔχει μῆκος 0,30 m. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κέντρον βάρους: α) ὅταν εἰς τὴν κορυφὴν Β προστίθεται βάρος 2 kgf* καὶ β) ὅταν τὸ αὐτὸ βάρος προστίθεται εἰς τὸ μέσον τῆς μεγαλύτερας τῶν καθέτων πλευρῶν.

(Ἄπ. α' Τὸ κέντρον βάρους θὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου τῆς ὑποτείνουσας καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαμέσου, ἥτοι 21 cm. β' Τὸ κέντρον βάρους θὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου τῆς ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν $\frac{5}{6}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, ἥτοι 45 cm ἀπὸ τῆς Α.)

843. Βλήμα βάλλεται ὁριζοντίως ἀπὸ ἀκίνητο ὑποστράτου, εὐρίσκομένου εἰς ὕψος 1000 m ἐν τῷ ἀέρι. Ἐὰν ἡ ταχύτης κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τῆς κάννης εἶναι 700 m/sec, ποῖαν ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ πρὶν ἢ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ πρὸς τοῦτο.

(Ἄπ. 10 km, 14,3 sec.)

844. Ἀπὸ θέσεως ὕψους $h = 150$ m βάλλεται λίθος ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα $u_1 = 50$ m/sec. Ζητοῦνται: α) μετὰ πόσον χρόνον ὁ λίθος θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. β) Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κατακορύφου τῆς θέσεως βολῆς θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος ($g = 10$ m/sec²) καὶ, γ) πόση ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος.

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1957).

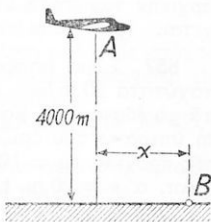
(Ἄπ. α' $t = 5,48$ sec. β' 273,85 m. γ' $u = 74,16$ m/sec.)

845. Ἀπὸ πύργου ὕψους 40 m βάλλεται ὁριζοντίως σῶμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20 m/sec. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ πύργου θὰ συναντήσῃ ὁ λίθος τὸ ἔδαφος καὶ ποῖαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ ἀποκτήσῃ τότε. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται. $g = 10$ m/sec²).

(Ἄπ. $s = 56,6$ m, $u = 34,6$ m/sec.)

846. Ἀεροπλάνον Α ἵπταται ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα 500 km/h εἰς ὕψος 4000 m ὑπεράνω τῆς Γῆς. Εἰς ποῖαν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν x πρὸ δοθέντος σημείου Β πρέπει νὰ ἀφεθῇ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, βόμβα ἐκ τοῦ ἀεροπλάνου διὰ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Β. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται.

(Ἄπ. $x = 3960$ m.)



*Άσκησης 846.

847. Πυροβόλον βάλλει ὁριζοντίως σφαῖραν ἀπὸ ὕψους 64 m ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 1000 m/sec. Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ παραμείνῃ ἡ σφαῖρα εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς ποῖαν ἀπόστασιν θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος. (Ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ἀμελητέα καὶ $g = 9,80$ m/sec²).

(Ἄπ. 2 sec, 2000 m.)

848. Τηλεβόλον διατίθεται ὁριζοντίως εἰς ὕψος 10 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ βάλλει βλήμα, τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸ ἔδαφος εἰς ἀπόστασιν 400 m. Πόση ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος.

(Ἄπ. 283 m/sec.)

849. Σῶμα ἐκτοξεύεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $u_0 = 333,3$ m/sec καὶ ὑπὸ γωνίαν $\theta = 75^\circ$ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῶν: α) εἰς ποῖαν ἀπόστασιν θὰ συναντήσῃ τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος, β) ποῖον τὸ ἀνώτερον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ καί, γ) πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ διανύσῃ τὴν τροχίαν του.

(Ἄπ. α' 5663 m. β' 5284 m.)

850. Βλήμα βάρους 40 kgf* ρίπτεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὸ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec, κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν 45° . Ζητοῦνται: α) Τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ βλήμα ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεώς του. β) Τὸ βεληνεκές.

(Ἄπ. α' 6371 m. β' 25 484 m.)

851. Βλήμα εκτοξεύεται και κινούμενον επιτυγχάνει μέγιστον ύψος $h = 40$ m και βεληνεκές 190 m. Ποία η αρχική του ταχύτης v_0 και ποία η γωνία βολής.
(Απ. $v_0 = 43,5$ m/sec, $\varphi = 40^\circ 6'$.)

852. Σφαίρα βάλλεται υπό αρχικήν ταχύτητα 96 m/sec και υπό γωνίαν 30° πρὸς τὰ ἄνω, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὀριζόντιαν. Ἐὰν τὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποίου βάλλεται ἡ σφαίρα εἶναι 6 m ἀνωθεν τοῦ ἐδάφους, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται αὕτη και τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὀριζοντίως μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν φθάνει εἰς τὸ ἐδαφος. ($g = 9,80$ m/sec²). (Απ. 42 m, 259 m.)

853. Πυροβόλον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀβίς ἔχει ἀρχικήν ταχύτητα 800 m/sec, βάλλει κατακορύφως, 4,2 sec πρὸ τῆς διελεύσεως διὰ τῆς κατακορύφου αὐτοῦ, κατὰ ἀεροπλάνου τὸ ὁποῖον μετατοπίζεται ὑπὸ ταχύτητα 360 km/h και ἵπταται εἰς ὕψος 3000 m. Θὰ βληθῇ τὸ ἀεροπλάνον; Και εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, εἰς πόσῃ ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ διέρχεται ἡ ὀβίς. ($g = 9,80$ m/sec²).
(Απ. Δὲν θὰ βληθῇ, εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς διελεύσεως τῆς ὀβίδος εἰς τὸ ὕψος τῶν 3000 m, κατὰ 32 m.)

854. Πυροβόλον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀβίς ἔχει ἀρχικήν ταχύτητα 600 m/sec, βάλλει κατακορύφως κατὰ ἀεροπλάνου τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ὕψος 1200 m. Πρὸ πόσου χρόνου ἀπὸ τῆς διαβάσεως τοῦ ἀεροπλάνου ἐκ τῆς κατακορύφου τοῦ πυροβόλου πρέπει νὰ ριφθῇ τὸ βλήμα. ($g = 9,80$ m/sec²). (Απ. 2 sec.)

855. Πυροβόλον βάλλει βλήμα ὑπὸ ταχύτητα 300 m/sec. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο γωνίαι κλίσεως κατὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ πυροβόλον, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτύχῃ στόχον εἰς ἀπόστασιν 1500 m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον ὕψος και οἱ χρόνοι κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις. (Αντίστασις ἀέρος ἀμελητέα. $g = 9,80$ m/sec²). (Απ. $\theta = 16,1^\circ$ καὶ $73,9^\circ$, $h = 108$ m καὶ 1298 m, $t = 5,20$ sec καὶ 17, sec.)

856. Φωτιστικὸν βλήμα βάλλεται ὑπὸ γωνίαν 60° , ὡς πρὸς τὸν ὀρίζοντα, με ἀρχικήν ταχύτητα 200 m/sec. Ποῖον τὸ βεληνεκές αὐτοῦ και εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται. ($g = 10$ m/sec²). (Απ. $\alpha' s = 3464,1$ m, $h = 1500$ m.)

857. Σῶμα ἐκτοξεύεται ὑπὸ γωνίαν 45° , ὡς πρὸς τὸν ὀρίζοντα, με ἀρχικήν ταχύτητα 30 m/sec. α) Ποῖον τὸ βεληνεκές και μετὰ πόσον χρόνον τὸ σῶμα συναντᾷ τὸ ἐδαφος. β) Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμὴν τὸ σῶμα εὐρίσκεται εἰς ὕψος 17,5 m ὑπεράνω τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. γ) Ποία ἡ ταχύτης εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς. ($g = 10$ m/sec². Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Απ. $\alpha' s = 90$ m, $t = 4,2$ sec. $\beta' t_1 = 3,1$ sec, $t_2 = 1,1$ sec. $\gamma' v = 21,2$ m/sec.)

858. Ποτιστικὸς σωλὴν σχηματίζει γωνίαν 60° με τὸν ὀρίζοντα και διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω. Πόσον μακρὰν και εἰς ποῖον ὕψος δυνάμεθα νὰ ἐκτοξεύσωμεν ὕδωρ, ὅταν τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ στομίου τοῦ σωλῆνος με ταχύτητα 30 m/sec. ($g = 10$ m/sec². Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).
(Απ. $\alpha' s = 77,9$ m. $\beta' h = 33,75$ m.)

859. Σῶμα βαλλόμενον ὑπὸ γωνίαν με ἀρχικήν ταχύτητα 30 m/sec ἀνέρχεται μέχρις ὕψους 45 m. Ποία ἡ γωνία βολῆς. ($g = 10$ m/sec². Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Απ. $\varphi = 90^\circ$.)

860. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν βολῆς πρέπει νὰ ἐκτοξευθῇ βλήμα, διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον δυνατὸν ὕψος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα. (Απ. $\varphi = 45^\circ$.)

861. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν, ὡς πρὸς τὸν ὀρίζοντα, πρέπει νὰ ἐκτοξευθῇ σῶμα με ἀρχικήν ταχύτητα 60 m/sec, ἵνα ἀνέλθῃ μέχρις ὕψους 150 m. ($g = 10$ m/sec². Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Απ. $\varphi = 65^\circ 54'$.)

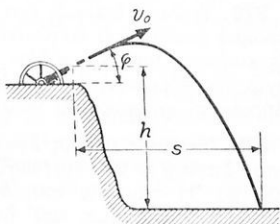
862. Σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα 120 m/sec και γωνία 60° , ως προς τον ορίζοντα. Ποία η εξίσωσις της τροχιάς του. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. 'Η αντίστασις του αέρος δεν λαμβάνεται υπ' όψιν.)
(Απ. $y = x \cdot \sqrt{3} - x^2/720$.)

863. 'Αθλητής εκτινάσσει σφαίραν με αρχική ταχύτητα 10 m/sec , η οποία ανέρχεται μέχρις ύψους 2 m από το έδαφος. Πόσον απέχει το σημείον εις το οποίον η σφαίρα προσκρούει επί του εδάφους από το σημείον ρίψεως, όταν η γωνία υπό την οποίαν εκτινάσσεται η σφαίρα είναι 35° , 40° ή 45° , ως προς τον ορίζοντα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. 'Η αντίστασις του αέρος δεν λαμβάνεται υπ' όψιν.)
(Απ. $\alpha' x = 11,7 \text{ m}$. $\beta' x = 11,8 \text{ m}$. $\gamma' x = 11,7 \text{ m}$.)

864. Σφαίρα βάλλεται με αρχική ταχύτητα 300 m/sec και γωνία βολής 30° , ως προς τον ορίζοντα. Ποίαι αι συνεταγμέναι της σφαίρας, ποία δηλαδή η οριζωντία απόστασις αυτής από την θέσιν βολής και ποία η κατακόρυφος απόστασις αυτής από το έδαφος, μετά πάροδον χρόνου 5 sec και 10 sec . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Απ. $\alpha' s_x = 1299 \text{ m}$, $s_y = 625 \text{ m}$. $\beta' s_x = 2598 \text{ m}$, $s_y = 1000 \text{ m}$.)

865. Διά γωνίαν βολής ϕ πραγματοποιεί το βλήμα βεληνεκές R_ϕ . Νά υπολογισθῇ το βεληνεκές διά γωνίαν βολής $\phi/2$, μη λαμβανομένης υπ' όψιν της αντίστασεως του αέρος.
(Απ. $R_{\phi/2} = R_\phi \cdot 2 \sin \phi$.)

866. 'Από πυροβόλον παρακτίου πυροβολαρχίας, του οποίου το στόμιον του σωλήνος εφύρσκειται εις ύψος $h = 30 \text{ m}$ υπεράνω της επιφανείας της θαλάσσης, βάλλεται βλήμα υπό γωνίαν $\phi = 45^\circ$ και αρχική ταχύτητα $u_0 = 1000 \text{ m/sec}$. Εις ποίαν οριζωντίαν απόστασιν από το πυροβόλου συναντᾷ το βλήμα την επιφανείαν της θαλάσσης. 'Η αντίστασις του αέρος παραλείπεται.



(Απ. $s = 102 \text{ km}$.)

*Άσκησης 866.

867. Νά υπολογισθῇ η γωνία βολής πυροβόλου, όταν ο άναγνωρισθείς στόχος εφύρσκειται εις απόστασιν 32 km και η αρχική ταχύτης του βλήματος ανέρχεται εις $u_0 = 600 \text{ m/sec}$, μη λαμβανομένης υπ' όψιν της αντίστασεως του αέρος.
(Απ. $\phi_1 = 30^\circ 18'$, $\phi_2 = 59^\circ 42'$.)

868. Νά λυθῇ η προηγούμενη άσκησης διά την περίπτωσιν κατά την οποίαν ο στόχος εφύρσκειται 200 m υπεράνω του επιπέδου της θέσεως του πυροβόλου.
(Απ. $\phi_1 = 30^\circ 45'$, $\phi_2 = 59^\circ 23'$.)

869. Βλήμα βάρους 40 kg * ρίπεται εκ των κάτω προς τα άνω με αρχική ταχύτητα 500 m/sec κατά διεύθυνσιν σχηματίζουσιν μετά της κατακόρυφου γωνίαν 45° . Ζητούνται: α) Το μέγιστον ύψος εις το οποίον θα φθάσῃ από το σημείον της αναχωρήσεώς του. β) Το βεληνεκές.
(Απ. $h = 6250 \text{ m}$, $s = 25\,000 \text{ m}$.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνείον, Σχολή 'Αρχιτεκτόνων, 1958.)

870. Το μέγιστον βεληνεκές πυροβόλου είναι R . Νά υπολογισθῇ το βεληνεκές του αυτού πυροβόλου και το βέλος της τροχιάς διά γωνίαν βολής 30° , μη λαμβανομένης υπ' όψιν της αντίστασεως του αέρος.
(Απ. $\sqrt{3}/2 \cdot R$, $R/8$.)

871. 'Εκκρεμές ώρολόγιον εφύρσκειται εις τον βόρειον πόλον ($g_1 = 9,83 \text{ m/sec}^2$) και άλλο όμοιον εις τον 'Ισημερινόν ($g_2 = 9,78 \text{ m/sec}^2$). Ποίαν ώραν δεικνύει το εις τον 'Ισημερινόν εφύρσκόμενον, όταν το εις τον πόλον δεικνύῃ την 24ην ώραν.
(Απ. $23 \text{ h } 56,3 \text{ min}$.)

872. Πόσον τοῖς ἑκατὸν μεταβάλλεται ἡ συχνότης ἑπλοῦ ἔκκρεμοῦς, ὅταν τὸ μῆκος του αὐξηθῇ διὰ θερμάνσεως κατὰ τὸ $1/1000$ αὐτοῦ. (Ἄπ. $0,5\%$ περίπου.)

873. Μαθηματικὸν ἔκκρεμές, τὸ ὁποῖον διὰ 1000 αἰωρήσεις χρειάζεται χρόνον 2006 sec, ἐπιμηκύνεται κατὰ 50 cm καὶ ἀπαιτεῖ τοιοῦτοτρόπως χρόνον 2457 sec διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αἰωρήσεων. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον. (Ἄπ. $g = 9,807 \text{ m/sec}^2$.)

874. Δύο ἀπλὰ ἔκκρεμῇ ἔκτελουν εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν 18 καὶ 24 πλήρεις ταλαντώσεις ἀντιστοίχως κατὰ τινὰ δὲ χρονικὴν στιγμήν ἀμφότερα ἔχουν ταυτοχρόνως τὸ μέγιστον τῆς ἀποκλίσεως αὐτῶν, λογιζομένης κατὰ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν μηκῶν l_1, l_2 τῶν δύο ἔκκρεμῶν καὶ ὁ χρόνος ὅστις παρέρχεται μέχρις ὅτου τὰ δύο ἔκκρεμῇ εὐρεθοῦν καὶ πάλιν διὰ πρώτην φοράν ἐν φάσει. (Ἄπ. 16 : 9, 10 sec.)

875. Ἀπλοῦν ἔκκρεμές συνίσταται ἐκ σφαιριδίου μάζης 2 kg, ἐξηρητημένου εἰς τὸ ἄκρον νήματος τάσεως θραύσεως 3 kg*. Κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ ἐκ τοπισθῇ τὸ ἔκκρεμές ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἵνα κατὰ τὴν κίνησιν τὸ νῆμα θραυσθῇ. (Ἄπ. $41^\circ 25'$.)

876. Ἀπλοῦν ἔκκρεμές ἔχει μῆκος 1 m. Ἐὰν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἔκκρεμοῦς παρεμβάλωμεν ἄνωθεν τοῦ κατωτάτου σημείου τῆς τροχιάς καὶ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς κινήσεως μικρὸν ραβδίον εἰς ἀπόστασιν 36 cm ἀπὸ τοῦ σφαιριδίου, ἡ σφαῖρα λόγω τῆς ἀδρανείας τῆς θὰ ἐξακολουθήσῃ κινουμένη. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος μῆς πλήρους αἰωρήσεως τοῦ νέου ἔκκρεμοῦς. (Ἄπ. 1,6 sec.)

877. Ἐκκρεμές μήκους $l = 4 \text{ m}$ αἰωρεῖται περὶ τὸ σημεῖον O μὲ πλάτος $5,5^\circ$ εἰς τόπον ὅπου $g = 980 \text{ cm/sec}^2$. Ζητοῦνται: α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τοῦ ἔκκρεμοῦς. β) Ἡ ταχύτης του, ὅταν διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ O. γ) Ἐὰν κοπῇ αἶφνης τὸ νῆμα, καθ' ἣν στιγμήν τὸ ἔκκρεμές διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ O, ἡ σφαῖρα ἐκτοξεύεται τότε μετὰ τῆς προηγουμένης ταχύτητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ μελετηθῇ ἡ τροχία τῆς καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀριζοντία ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κατακορύφου τοῦ O, ὅταν συναντᾷ τὸ ἐδάφος. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου O ἐξαρτήσεως τοῦ ἔκκρεμοῦς ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, μετρουμένη ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ O, εἶναι 16,9 m. (Ἄπ. α' 4 sec περίπου. β' $62,62 \text{ cm/sec}$. γ' $111,7 \text{ cm}$.)

878. Ἀπλοῦν ἔκκρεμές, μὴ γνωστοῦ μήκους, ἔκτελεῖ 100 αἰωρήσεις εἰς 375,6 sec. Τὸ μῆκος τοῦ ἔκκρεμοῦς ἐλαττοῦται κατὰ 50, 100, 150, 200, 250 cm καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἡ διάρκεια 100 αἰωρήσεων εὐρίσκεται ἀντιστοίχως 347,7, 317,4, 283,9, 254,9, 200,7 sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς: α) Τὸ μῆκος τοῦ ἔκκρεμοῦς. β) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος. (Ἄπ. α' 350 cm. β' 980 cm/sec^2 .)

879. Σῶμα περιστρέφεται ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου, μήκους 1,75 m. Κατὰ τινὰ στιγμήν τὸ σχοινίον θραύεται καὶ τοιοῦτοτρόπως τὸ σῶμα ἐκτινάσσεται εἰς ἀπόστασιν 280 m. Παραλειπομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συχνότητος περιστροφῆς τοῦ σώματος κατὰ τὴν στιγμήν τῆς θραύσεως τοῦ σχοινίου. (Ἄπ. 286 στρ/min.)

880. Ὁρολόγιον ἔκκρεμές ἀκριβείας, εὐρίσκεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης εἰς τόπον ὅπου $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6360 \text{ km}$. Μεταφερόμεν τὸ ὁρολόγιον ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ τόπου, εἰς ὕψος 6360 m. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ φορὰ καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἡμερησίας μεταβολῆς τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ὁρολόγιον. β) Τὸ ἀρχικὸν μῆκος του καὶ ἡ φορὰ, καθ' ἣν πρέπει νὰ μεταβάλλωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἔκκρεμοῦς, ἵνα διορθωθῇ ἡ παρατηρηθεῖσα μεταβολή. (Ἄπ. Ὑστερεῖ κατὰ 86,31 sec, ἐλάτ. μήκους κατὰ $1/500$ περίπου αὐτοῦ.)

881. Ὁ τροχὸς ὥρολογίου ἐκτελεῖ 2 πλήρεις αἰωρήσεις ἀνὰ sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις, ὅταν οὗτος στρέφεται κατὰ 15° ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ ἀκολουθῶς ἀφίεται ἐλεύθερος. (Ἄπ. $41,3 \text{ rad/sec}^2$.)

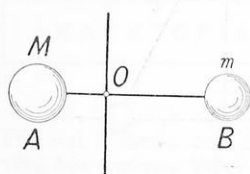
882. Μάζα 1 kg κρέμεται ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O διὰ νήματος μήκους 50 cm . Εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τὸ νῆμα σχηματίζει μετὰ τῆς κατακόρυφου γωνίαν 60° , ἡ δὲ μάζα προσλαμβάνει ταχύτητα $u_0 = 210 \text{ cm/sec}$ πρὸς τὰ κάτω, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα εὐρίσκεται εἰς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, τὸ διὰ τοῦ νήματος διερχόμενον, καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ νῆμα. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ τάσις τοῦ νήματος εἰς τὴν κατωτέραν θέσιν. β) Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ ἐκ νέου ἡ μάζα. ($g = 9,81 \text{ m/sec}$). (Ἄπ. α' $2,9 \text{ kg}$. β' $47,5 \text{ cm}$.)

883. Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως παραμένουν οἱ αὐτοί, μὲ ἐξαίρεσιν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα u_0 , νὰ ὑπολογισθῇ διὰ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα τὸ βάρος διαγράφει πλήρη κύκλον. (Ἄπ. $u_0 > 4,43 \text{ m/sec}$.)

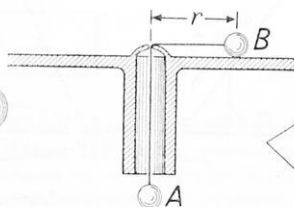
884. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς περιφορῶν ἀνὰ λεπτὸν εἰς τὰς ὁποίας σῶμα μάζης 200 gr , προσδεδεμένον εἰς νῆμα μήκους 1 m , δύναται νὰ περιστρέφεται ἐπὶ ὀριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, ἐὰν ἡ τάσις θραύσεως τοῦ νήματος εἶναι 5 kg . Πρὸς ποίαν κατεύθυνσιν θὰ κινηθῇ τὸ σῶμα, ὅταν θραυσθῇ τὸ νῆμα. (Ἄπ. $149,6 \text{ στρ/min}$.)

885. Δύο σφαῖραι μαζῶν M καὶ m , ἴσων πρὸς 9 gr καὶ 3 gr ἀντιστοίχως, εἶναι συνδεδεμέναι διὰ νημάτων AO καὶ OB , ὀλικοῦ μήκους 1 m , πρὸς κατακόρυφον ἄξονα O , στρεφόμεναι περὶ αὐτὸν ἐν ὀριζοντίῳ ἐπιπέδῳ με σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω (βλ. σχῆμα). Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν μηκῶν τοῦ νήματος διὰ τὸν ὁποῖον αἱ τάσεις θὰ εἶναι αἱ αὐταί. Τὸ βάρος τῶν νημάτων θεωρεῖται ἀμελητέον. (Ἄπ. (AO) = 25 cm , (OB) = 75 cm .)

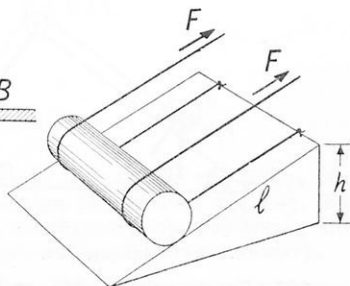
886. Δύο ὅμοιαι σφαῖραι A καὶ B προσδένονται εἰς τὰ ἄκρα νήματος, διερχομένου διὰ μέσου σωλῆνος (βλ. σχῆμα). Ἡ σφαῖρα B περιστρέφεται ἐν ὀριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ἀπόστασις r αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ σωλῆνος εἶναι 20 cm . Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς σφαίρας B ἵνα ἡ A παραμένῃ ἐν ἰσορροπίᾳ. Αἱ τριβαὶ θεωροῦνται ἀμελητέαι. (Ἄπ. 7 rad/sec .)



Ἀσκήσις 885.



Ἀσκήσις 886.



Ἀσκήσις 887.

887. Βαρὺς κύλινδρος ἔλκεται πρὸς τὴν κορυφὴν κεκλιμένου ἐπιπέδου τῇ βοήθειᾳ δύο παραλλήλων σχοινίων, διευθετημένων ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Τὸ βάρος B τοῦ κυλίνδρου εἶναι 400 kg , τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου $h = 1 \text{ m}$ καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ $l = 2 \text{ m}$. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ἕκαστον τῶν σχοινίων διὰ νὰ ἀνυψωθῇ ὁ κύλινδρος. Νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα διὰ δύο τρόπων. (Ἄπ. 50 kg .)

888. Ἀπλοῦν ἐκκρεμές μήκους 1 m ἔχει μάζαν 20 gr καὶ κινεῖται περίξ ὁριζοντίας κυκλικῆς τροχιάς ἀκτίνας 10 cm. Νά ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ταχύτης τοῦ σώματος, β) ἡ τάσις τοῦ σύρματος.
(Ἀπ. α' 31,4 cm/sec. β' 1972 dyn.)

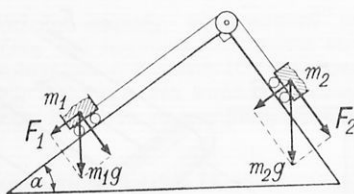
889. Δύο σφαῖρα ἐκάστη μάζης m τοιποθετοῦνται εἰς τὰς δύο κορυφὰς ἰσοπλευροῦ τριγώνου, ἐνῶ τρίτη σφαῖρα μάζης 2 m τοιποθετεῖται εἰς τὴν τρίτην κορυφήν. Νά εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος.

(Ἀπ. Εἰς τὸ μέσον τῆς διχοτόμου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς ἐνθα εὑρίσκεται ἡ μάζα 2 m.)

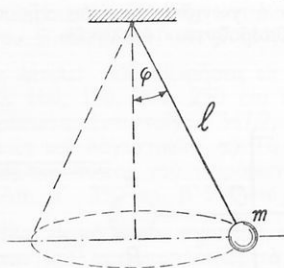
890. Νά εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους ὁμογενοῦς δίσκου ἀκτίνας R , ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀφαιρεθῇ τμήμα, σχήματος κύκλου ἀκτίνας r . Τὸ κέντρον τῆς ὁπῆς εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{2} R$ ἀπὸ τοῦ κέντρον τοῦ δίσκου.

(Ἀπ. Ἀπέχει ἀπὸ τοῦ O ἀπόστασιν $Rr^2/2(R^2 - r^2)$.)

891. Νά μελετηθῇ ἡ κίνησις δύο μαζῶν m_1 καὶ m_2 συνδεδεμένων διὰ νήματος καὶ μετατοπιζομένων ἐπὶ δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων σχηματίζονταν ὀρθὴν γωνίαν. Νά ὑπολογισθῶσιν ἀκολουθῶς: α) Ἡ γωνία α τοῦ ἐνὸς τῶν ἐπιπέδων μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἵνα τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. β) Ἡ ἐπιτάχυνσις γ ὅταν ἡ γωνία αὕτη ἔχει δοθεῖσαν τιμὴν θ . Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1,73 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$.
(Ἀπ. α' $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 1,9 \text{ m/sec}^2$.)



Ἀσκήσις 891.



Ἀσκήσις 892.

892. Βαρεῖα σφαῖρα μάζης m ἐξαρτᾶται διὰ νήματος μήκους l , περιστρέφεται δὲ ἰσοταχῶς ἐπὶ περιφερείᾳ κύκλου, ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, (κωνικὸν ἐκκρεμές), τοῦ νήματος σχηματίζοντος γωνίαν ϕ μετὰ τῆς κατακορύφου. Νά εὑρεθῇ ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τῆς σφαίρας.

(Ἀπ. $2\pi\sqrt{h/g}$, ὅπου $h = l \sin\phi$.)

893. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς μηχανὴν Atwood, ἀποτελουμένη ἀπὸ δύο ἴσας μάζας M , πρόσθετον μάζαν m , τροχαλίαν μάζης m' καὶ ἀκτίνας r , τῆς ὁποίας ὅλη ἡ μάζα κατανέμεται ἐπὶ τῆς περιφερείας.
(Ἀπ. $\gamma = g m / (2M + m + m')$.)

894. Δύο βλήματα εκσφενδονίζονται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, τὸ δεύτερον 2 sec μετὰ τὸ πρῶτον. Τὸ πρῶτον μὲ $v_0 = 50 \text{ m/sec}$ καὶ τὸ δεύτερον μὲ $v_0 = 80 \text{ m/sec}$. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθοῦν, εἰς ποῖον ὕψος καὶ ποῖα ἡ ταχύτης αὐτῶν κατὰ τὴν στιγμήν τῆς συναντήσεως.

(Πανεπιστήμιον Θεσ/νίκης. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Χημικόν, 1962).
(Ἀπ. $t = 3,6 \text{ sec}$, $h = 115,2 \text{ m}$, $v_1 = 14 \text{ m/sec}$, $v_2 = 64 \text{ m/sec}$.)

895. Λίθος ἀφίεται κατὰ τινα στιγμήν νὰ πέση ἀπὸ ὕψους 30 m, ἐνῶ κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν βάλλεται ἐκ τοῦ ἐδάφους, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἄλλος λίθος ὑπὸ ταχύτητα τοιαύτην, ὥστε τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον δύναται οὗτος νὰ ἀνέλθῃ νὰ εἶναι 30 m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος κατὰ τὸ ὁποῖον οἱ δύο λίθοι ἀντιπαρέρχονται ἀλλήλους, ὁ εἰς τούτων κατερχόμενος, ὁ δὲ ἕτερος ἀνερχόμενος. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1962).

(Ἀπ. 22,5 m.)

896. Ἀπὸ ὕψους $h = 9 \text{ m}$, ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, εκσφενδονίζεται λίθος μὲ ἀνοδικὴν κλίσιν $\alpha = 45^\circ$ καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 30 \text{ m/sec}$. Ποῖα ἡ μεγίστη ἀνύψωσις (ὑπὲρ τὸ ἔδαφος) τοῦ λίθου; Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο; Ποῖα ἡ μεγίστη ὀριζοντία ἀπόστασις, εἰς ἣν πίπτει ὁ λίθος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως; Ποῦ εὑρίσκεται ὁ λίθος μετὰ πάροδον 2 sec; Ἀντίστασις ἀέρος = μηδενική.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀλλοδαποὶ Ἀρχιτεκτόνων, Τοπογράφων, 1962).

(Ἀπ. 31,5 m, $t = 2,12 \text{ sec}$, $s = 97,5 \text{ m}$, $y = 22,3 \text{ m}$, $x = 42,3 \text{ m}$.)

897. Μεταλλικὴ σφαῖρα μάζης $m = 2 \text{ gr}$ περιστρέφεται περὶ κέντρον μέσῳ νήματος πρακτικῶς ἀβαροῦς, μήκους $r = 90 \text{ cm}$, μὲ σταθερὰν φυγόκεντρον δύναμιν $F = 81 \text{ gr}^*$ καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου κατακορύφου. Εἰς τινα στιγμήν κόπτεται τὸ νῆμα, ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται ἀκριβῶς κάτωθι τοῦ κέντρον περιστροφῆς καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου. Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου ταύτης, θὰ φθάσῃ ἡ σφαῖρα, ἐπὶ ἐπιπέδου εὐρισκομένου εἰς ἀπόστασιν $h = 10 \text{ cm}$ ἀπὸ τῆς θέσεώς της. (Σχολὴ Ἰκάρων, 1962).

(Ἀπ. 2,7 m.)

II. ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

898. Ἡ μάζα τοῦ Ἡλίου εἶναι $3,55 \cdot 10^5$ φορές μεγαλύτερα τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ Ἡλίου 112 φορές μεγαλύτερα τῆς ἀκτίος τῆς Γῆς. Ἐκ τῶν δύο τούτων δεδομένων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἐπὶ τοῦ Ἡλίου. (Αἱ μάζαι θεωροῦνται συγκεντρωμέναι εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μάζαν τῆς Γῆς, R τὴν ἀκτίνα αὐτῆς καὶ k τὴν σταθερὰν τῆς παγκοσμίου ἐλξεως, τότε ἡ ἐπιτάχυνσις g τῆς βαρύτητος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς δίδεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$g = k \cdot \frac{M}{R^2} \quad (1)$$

Ὁμοίως ἐὰν καλέσωμεν M' τὴν μάζαν τοῦ Ἡλίου καὶ R' τὴν ἀκτίνα αὐτοῦ, τότε ἡ ἐπιτάχυνσις g' ἐπὶ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ Ἡλίου θὰ δίδεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$g' = k \cdot \frac{M'}{R'^2} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως, $M' = 3,55 \cdot 10^5$ Μ καὶ $R' = 112$ R, ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$g' = \frac{3,55 \cdot 10^5}{112^2} \cdot k \cdot \frac{M}{R^2} \quad (3)$$

ἦ, λόγῳ τῆς σχέσεως (1):

$$g' = \frac{3,55 \cdot 10^5}{112^2} \cdot g \quad \text{ἦτοι:} \quad g' = 28 g$$

899. Ἡ μάζα τοῦ Ἡλίου εἶναι 335 000 φορές μεγαλύτερα τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ 112 φορές μεγαλύτερα τῆς γῆινης διαμέτρου. Νὰ εὐρεθῇ τὸ βάρος μάζης 1 kgf ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μάζαν σώματος εὐρισκομένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου καὶ g' τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος εἰς τὸν Ἡλίον, τότε συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι:

$$B = m \cdot g' \quad (1)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις ὁμοῦ g' εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἡλίου εἶναι, ὅπως ὑπελογίσθη εἰς τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν, $g' = 28 g$, ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$B = 28 m \cdot g \quad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $m = 1 \text{ kgf} = 1/9,81$ Τ.Μ. μάζης καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, ὅτε εὐρίσκωμεν:

$$B = 28 \text{ kgf}^*$$

900. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g_A ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἄρεως εἶναι ἴση πρὸς 0,385 g καὶ ἡ ἀκτίς αὐτοῦ R_A ἴση πρὸς 0,532 R, ὅπου $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς καὶ $R = 6370 \text{ km}$ ἡ ἀκτίς αὐτῆς. Νὰ εὐρεθῶν: α) Ἡ πρώτη κοσμικὴ ταχύτης διὰ σημείου ἐκτοξεύσεως δορυφόρου, κείμενον εἰς ἀπόστασιν $h = 200 \text{ km}$ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἄρεως, θεωρουμένου ὡς σφαίρας. β) Ἡ ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας δευτέρα κοσμικὴ ταχύτης.

Λύσις. α) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πρώτης κοσμικῆς ταχύτητος (δηλ. τῆς ἐλαχίστης δυνατῆς ταχύτητος τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσδώσωμεν εἰς τὸν δορυφόρον, ὥστε νὰ ἐκτελῇ κυκλικὴν τροχίαν περὶ τοῦ πλανήτου), σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις F_k τοῦ δορυφόρου πρέπει νὰ ἀντισταθμίσῃ τὴν δύναμιν ἑλξεως αὐτοῦ F ἀπὸ τοῦ Ἄρεως. Ἦτοι:

$$F = F_k \quad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅμοιως ὅτι:

$$F = k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (2) \quad \text{καί:} \quad F_k = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad (3)$$

ὅπου k ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἑλξεως, m ἡ μάζα τοῦ δορυφόρου, M ἡ μάζα τοῦ Ἄρεως, $r = R_A + h$ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐκτοξεύσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ἄρεως καὶ v ἡ ταχύτης ἐκτοξεύσεως τοῦ δορυφόρου, δηλαδὴ ἡ ζητούμενη πρώτη κοσμικὴ ταχύτης.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει:

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot M}{r}} \quad (4)$$

Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g_A ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἄρεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$g_A = \frac{k \cdot M}{R_A^2} \quad \text{ἦ:} \quad k \cdot M = g_A \cdot R_A^2 \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) καὶ θέτοντες: $r = R_A + h$, λαμβάνομεν:

$$v = \sqrt{\frac{g_A \cdot R_A^2}{R_A + h}} \quad (6)$$

ή, επειδή δίδεται: $g_A = 0,385 \text{ g}$ και $R_A = 0,532 \text{ R}$, ο τύπος μεταβάλλεται εις :

$$v = \sqrt{\frac{0,385 \text{ g} \cdot 0,532^2 \cdot R^2}{0,532 \text{ R} + h}} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα: $g = 9,81 \text{ m/sec}^2 = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ km/sec}^2$, $R = 6370 \text{ km}$ και $h = 200 \text{ km}$, τότε εύρισκόμεν :

$$v = 3,46 \text{ km/sec}$$

β) Διά την εύρεσιν της δευτέρας κοσμικής ταχύτητας (δηλ. της ελαχίστης ταχύτητας την οποίαν πρέπει να προσδώσωμεν εις τὸν δορυφόρον, ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐκφύγῃ — πρακτικῶς — ἀπὸ τὴν ἑλξιν τοῦ πλανήτου — θεωρητικῶς: νὰ δύναται νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς ἀπειρον ἀπόστασιν) σκεπτόμεθα ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἀνά μονάδα μάζης τοῦ ἐκτοξευομένου δορυφόρου πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ δυναμικὸν τοῦ πεδίου βαρύτητος εἰς τὴν θέσιν ἐκτοξεύσεως, ἴτοι:

$$\frac{E_k}{m} = k \cdot \frac{M}{r} \quad (8)$$

καὶ ἐπειδὴ $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$, ὅπου v_0 ἡ δευτέρα κοσμικὴ ταχύτης, προκύπτει :

$$v_0^2 = \frac{2 k \cdot M}{r} \quad \text{ἢ} : \quad v_0 = \sqrt{\frac{2 k \cdot M}{r}} \quad (9)$$

ἀλλὰ $\sqrt{\frac{k \cdot M}{r}} = v$, δηλαδὴ μὲ τὴν πρώτῃν κοσμικὴν ταχύτητα, ὅπως εὔρομεν ἄνωτέρω, ἐξίσωσις (4).

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν : $v_0 = v \cdot \sqrt{2}$ ἢ : $v_0 = 4,88 \text{ km/sec}$

901. Τεχνητὸς δορυφόρος στρέφεται περίξ τῆς Γῆς εἰς σταθερὸν ὕψος 1700 km. Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαῖρα ἀκτίνος 6400 km, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς 10 m/sec^2 , νὰ προσδιορισθοῦν: α) Τὸ εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ δορυφόρου, β) ἡ γραμμικὴ ταχύτης αὐτοῦ, γ) ὁ χρόνος μιᾶς περιφορᾶς περὶ τὴν Γῆν.

(Ἐδόθη εἰς τὰς ἐξετάσεις τῶν τελειοφοίτων τοῦ Γυμνασίου ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας, 1963).

Λύσις. α) Ἐστω $AD = h$, τὸ σταθερὸν ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον διατηρεῖται ὁ δορυφόρος κατὰ τὴν περιστροφὴν. Ἐὰν R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς, ὁ δορυφόρος ἐκτελεῖ τροχίαν ἀκτίνος

$$R' = R + h \quad (1)$$

Ἡ κίνησις τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁμαλὴ κυκλική, δεδομένου ὅτι μοναδικὴ δύναμις ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ δορυφόρου εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ B_h εἰς τὸ ὕψος h , τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ δύναμιν ἐνεργοῦσαν πάντοτε κατὰ τὴν ἀκτίνα περιστροφῆς, ἐπέχον θέσιν κεντρομόλου δυνάμεως F_k ἡτοι :

$$B_h = F_k \quad (2)$$

β) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης v τοῦ δορυφόρου συνδέεται μετὰ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, διὰ τῆς σχέσεως :

$$F_k = \frac{m \cdot v^2}{R'} \quad (3)$$

ἢ λόγῳ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2):

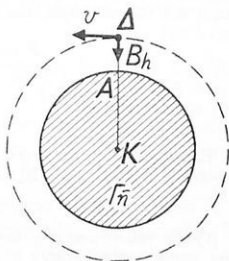
$$B_h = \frac{m \cdot v^2}{R + h} \quad \text{ἢ} : \quad m \cdot g_h = \frac{m \cdot v^2}{R + h} \quad (4)$$

ὅπου g_h ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς ὕψος h . Διὰ μετασχηματισμοῦ τῆς (4) λαμβάνομεν:

$$v = \sqrt{g_h \cdot (R + h)} \quad (5)$$

Γνωρίζομεν ἐκ τοῦ νόμου τῆς Παγκοσμίου ἑλξεως ὅτι:

$$g_0 = k \cdot \frac{M}{R^2} \quad (6) \quad \text{καί} : \quad g_h = k \cdot \frac{M}{(R + h)^2} \quad (7)$$



δπου g_0 και g_h αι επιταχύνσεις της βαρύτητας, εις την επιφάνειαν της Γῆς ἀφ' ἑνὸς καὶ εἰς ὕψος h ἀφ' ἑτέρου, k ἡ σταθερά της Παγκοσμίου ἑλξης, M ἡ μάζα της Γῆς καὶ R ἡ ἀκτίς αὐτῆς. Ἐκ τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) προκύπτει :

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad (8)$$

Συνδυάζομεν τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (8) ὁπότε λαμβάνομεν:

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}} \quad (9)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα: $R=6400 \text{ km} = 64 \cdot 10^3 \text{ m}$, $h = 1700 \text{ km} = 17 \cdot 10^3 \text{ m}$ καὶ $g_0 = 10 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν:

$$v = 64 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{10}{81 \cdot 10^3}} \text{ m/sec} \quad \eta : \quad v = \frac{64}{9} \cdot 10^3 \text{ m/sec} \quad \eta :$$

$$v = 7,11 \text{ km/sec}$$

γ) Ὁ χρόνος περιφορᾶς T συνδέεται μετὰ της γραμμικῆς ταχύτητος διὰ της σχέσεως:

$$v = \frac{2\pi R'}{T} \quad \eta : \quad T = \frac{2\pi R'}{v} \quad (10)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα: $R' = 6400 + 1700 = 8100 \text{ km}$, $v = 7,11 \text{ km/sec}$, $\pi = 3,14$, λαμβάνομεν:

$$T = 7154,4 \text{ sec} = 1 \text{ h } 42 \text{ min } 32,4 \text{ sec}$$

902. Ὁ ὑπὸ τῶν Ἀμερικανῶν ἐξαπολυθεὶς τεχνητὸς δορυφόρος «Ἐξερευνητὴς Ι» διαγράφει τροχίαν μέσου ὕψους **1445 km** ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς. Ἐάν υποθέσωμεν τὴν τροχίαν αὐτοῦ κυκλικήν, ἐπὶ τῆς ὁποίας κινεῖται ὁμαλῶς, καὶ ἐάν ἡ μάζα αὐτοῦ εἶναι **14 kg**, ζητοῦνται: α) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ δορυφόρου ἐπὶ τῆς τροχιάς του, β) ἡ περίοδος τῆς κινήσεως αὐτοῦ καὶ γ) ἡ κινητικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια. Δίδονται ἀκτίς τῆς Γῆς $= 6400 \text{ km}$, ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος παρὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης $g_0 = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ g μετὰ τοῦ ὕψους δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $g_h = g_0 \cdot (R/R+h)^2$.

Λύσις. α) Ἐστωσαν R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς, h τὸ ὕψος τοῦ δορυφόρου, T ἡ περίοδος τῆς κυκλικῆς αὐτοῦ κινήσεως, v ἡ γραμμικὴ αὐτοῦ ταχύτης ἐπὶ τῆς τροχιάς, m ἡ μάζα αὐτοῦ, F ἡ δρῶσα φυγόκεντρος δύναμις καὶ B_h τὸ βάρος τοῦ δορυφόρου εἰς ὕψος h . Θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R+h} = B_h = m \cdot g_h = m \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot g_0 \quad (1)$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν :

$$v = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{(R+h)}} \quad (2)$$

Ἔργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα $M. K. S.$, ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα εἰς τὸν τύπον (2), ἦτοι: $R = 6400 \cdot 10^3 \text{ m}$, $g_0 = 10 \text{ m/sec}^2$, $h = 1445 \cdot 10^3 \text{ m}$, ὅτε εὐρίσκομεν:

$$v = 7225 \text{ m/sec}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου $v = \omega \cdot r$ καὶ $\omega = 2\pi/T$ προκύπτει ὁ τύπος $\omega = 2\pi \cdot r/T$ καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν :

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T} \quad \text{καὶ} : \quad T = \frac{2\pi(R+h)}{v} \quad (3)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων εἰς τὸν τύπον (3) προκύπτει:

$$T = 6814 \text{ sec} = 1 \text{ h } 53 \text{ min } 34 \text{ sec}$$

γ) Ἐκ τοῦ τύπου $E_{κιν} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων, προκύπτει :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (7225)^2 = 362,88 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

903. Εἰς ποῖον ὕψος ὑπεράνω τοῦ βορείου πόλου ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἐλαττοῦται κατὰ 1%, ὅταν ἡ Γῆ θεωρηθῇ ὡς σφαῖρα ἀκτίνος 6370 km.

(Ἀπ. $h = 32$ km.)

904. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἐλευθέρως πιπτοῦσης σφαίρας πλησίον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εἶναι $9,8$ m/sec². Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς εἶναι $6,7 \cdot 10^6$ m, νὰ εὐρεθῇ ἡ μάζα τῆς Γῆς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ Γῆ ἔλκει ὅλα τὰ σώματα τὰ ἐκτὸς αὐτῆς εὐρισκόμενα, ὡς ἂν ὅλη ἡ μάζα τῆς εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς.

(Ἀπ. $6,6 \cdot 10^{24}$ kgf.)

905. Ἡ μάζα ἐνὸς πλανήτου καὶ ἡ ἀκτίς αὐτοῦ εἶναι m καὶ n φορὰς μεγαλύτεραι τῶν ἀντιστοίχων γηίνων μεγεθῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐν λόγω πλανήτου.

(Ἀπ. $g_{\pi\lambda} = g \cdot m/n^2$.)

906. Ἐὰν ἐκκρεμές ἔχῃ χρόνον περιόδου ἀκριβῶς 1 sec εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς, ποῖα θὰ εἶναι ἡ περίοδος του εἰς σημεῖον κείμενον 10 km ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Νὰ ληφθῇ ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς ἴση πρὸς 6400 km.

(Ἀπ. 1,0016 sec.)

907. Μεταξὺ τῶν τροχιῶν Ἀρεως καὶ Διὸς εὐρίσκονται περισσότεροι τῶν χιλίων μικροὶ πλανήται (ἀστεροειδεῖς), οἵτινες κινουνται ὡς καὶ οἱ ἄλλοι πλανῆται περὶ τὸν ἥλιον. Εἰς ἐξ αὐτῶν ἔχει περίοδον 1681 ἡμερῶν. Ποία ἡ μέση ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἥλιου.

(Ἀπ. Ἐὰν r_1 ἡ ἀκτίς περιφορᾶς

τοῦ πλανήτου καὶ r_2 ἡ ἀκτίς περιφορᾶς τῆς Γῆς, δι' ἣν εἶναι $r_2 = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, θὰ ἔχωμεν $(r_1/r_2)^3 = (T_1/T_2)^2$, ἐξ ἧς $r_1 = 4,15 \cdot 10^{11}$ m.)

908. Ἐκκρεμές κτυπᾷ τὰ δευτερόλεπτα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Ποία ἡ περίοδος του εἰς ὕψος 30 000 ποδῶν ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς.

(Ἀπ. 1,00142 sec.)

909. Δύο μικραὶ σφαῖραι ἐκ μολύβδου, μάζης 20 gr ἑκάστη, ἐξαρτῶνται πλησίον ἀλλήλων διὰ νημάτων μήκους 20 m τῶν ὁποίων τὰ ἄνω πέρατα ἀπέχουν ἀλλήλων 3 cm. Νὰ εὐρεθῇ πόσον ὀλιγώτερον τῶν 3 cm ἀπέχουν τὰ κέντρα τῶν ἐκ μολύβδου σφαιρῶν λόγω τῆς παγκοσμίου ἐλξεως. Δίδεται $k = 6,7 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm² · gr⁻² καὶ $g = 980$ cm/sec².

(Ἀπ. $6 \cdot 10^{-7}$ cm.)

910. Δύο ἀντικείμενα μάζης 500 kgf καὶ 800 kgf ἀντιστοίχως ἀπέχουν ἀλλήλων 0,5 m. Ποία ἡ δύναμις βαρύτητος ἣτις ἔλκει ταῦτα.

(Ἀπ. $1,06 \cdot 10^{-4}$ Nt.)

911. Δύο σφαῖραι ἐκ μολύβδου, μάζης 4 kgf ἑκάστη, τοποθετοῦνται εἰς τρόπον ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ εὐρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 20 cm. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐλκτική δύναμις ἡ ἀσκουμένη μεταξὺ αὐτῶν.

(Ἀπ. $2,67 \cdot 10^{-3}$ dyn.)

912. Δοθέντος ὅτι ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς τῆς παγκοσμίου ἐλξεως εἶναι $k = 6,6 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm² · gr⁻², νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλξις, εἰς γραμμάρια βάρους, μεταξὺ δύο μικρῶν σφαιρῶν εὐρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 20 cm καὶ μάζης 1 kgf ἑκάστης.

(Ἀπ. $1,70 \cdot 10^{-7}$ gr*.)

913. Ποία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, μετὰ τῆς ὁποίας ἔλκονται δύο σώματα μάζης 1 kgf ἕκαστον ἐξ ἀποστάσεως 1 m. (Ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἐλξεως $k = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ · kgf⁻¹ · sec⁻²).

(Ἀπ. $F = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nt.)

914. Μὲ ποίαν δύναμιν ἔλκονται δύο πλοῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μάζαν 10 000 tn καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων βάρους των εἶναι 50 m.

(Ἀπ. $F = 2,67$ Nt = 0,27 kgf*.)

915. Ποία ἡ μάζα καὶ ἡ μέση πυκνότης τῆς Γῆς, ὅταν κατὰ μέσον ὅρον ληφθῶν ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς 6370 km καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος $9,81$ m/sec².

(Ἀπ. $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kgf, $\rho = 5,51$ gr/cm³.)

916. Ἐπὶ τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα Γῆς-Σελήνης εὐθείας εὐρίσκεται μᾶζα m_0 . Εἰς ποῖαν θέσιν αὐτὸ ἀποτέρων τῶν οὐρανίων σωμάτων ἀσκούμεναι ἑλκτικαὶ ἐπὶ τῆς μάζης m_0 δυνάμεις ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον καὶ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

(Ἄπ. 429 975 km, ὑπάρχουν δύο ἀκόμη θέσεις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν οὐρανίων σωμάτων.)

917. Αἱ μᾶζαι M_1 καὶ M_2 τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης ἔχουν μεταξὺ τῶν λόγον 81 : 1. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο τῶν σωμάτων εἶναι 382 420 km. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς εὐρίσκεται τὸ «κέντρον βάρους» τοῦ συστήματος τῶν δύο σωμάτων.

(Ἄπ. 4663,6 km.)

918. Ἡ ἄκτις τοῦ πλανήτου Ἀρεως εἶναι τὰ 0,53 τῆς γηϊνῆς ἄκτινος, ἡ δὲ μᾶζα αὐτοῦ τὰ 0,105 τῆς γηϊνῆς μάζης. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἀρεως, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν g τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς Γῆς.

(Ἄπ. 0,37 g.)

919. Πόση ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις τῆς Σελήνης ἐπὶ τῆς τροχιάς της περὶ τὴν Γῆν ὥς καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον. Περίοδος κινήσεως τῆς Σελήνης περὶ τὴν Γῆν: 27 ἡμέραι 7 h 43 min 12 sec. Περίοδος τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον: 365 ἡμέραι 6 h 9 min 9 sec. Μέση ἀπόστασις Γῆς — Σελήνης: $3,844 \cdot 10^8$ m. Μέση ἀπόστασις Γῆς — Ἡλίου: $1,497 \cdot 10^{11}$ m.

(Ἄπ. $2,7 \cdot 10^{-3}$ m/sec², $5,9 \cdot 10^{-3}$ m/sec².)

920. Σῶμα ζυγίζον ἐπὶ τῆς Γῆς 20 kg^{*} μεταφέρεται ἐπὶ τῆς Σελήνης. Ποία ἡ ἐκεῖ μᾶζα του καὶ ποῖον τὸ βάρος του εἰς kg^{*} καὶ Νιούτον. (Ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὴν Σελήνην $g_{\text{Σελήνης}} = 1,6$ m/sec², $g_{\text{Γῆς}} = 9,81$ m/sec²).

(Ἄπ. $m = 20$ kg, $B = 32$ Nt = 3,26 kg^{*}.)

921. Ἡ μᾶζα τῆς Γῆς εἶναι 81 φορές μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῆς Σελήνης καὶ ὁ λόγος τῶν διαμέτρων τῶν 11 : 3. Ποία ἡ ἔντασις τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς Σελήνης. Ποῖον τὸ ἐπὶ τῆς Σελήνης βάρος σώματος ζυγίζοντος ἐπὶ τῆς Γῆς 100 kg^{*}.

(Ἄπ. $g_{\text{Σελ}} = 1,66$ m/sec², $B_{\text{Σελ}} = 17$ kg^{*}.)

922. Ἡ κίνησις τῆς Σελήνης κατὰ προσέγγισιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις, ἡ ἄκτις τῆς τροχιάς τῆς ὁποίας ἰσοῦται πρὸς $r = 384$ 420 km. Ὁ χρόνος μιάς περιστροφῆς τῆς Σελήνης περὶ τὴν Γῆν εἶναι $T = 27$ ἡμέραι 7 h 43 min 12 sec. α) Ποία ἡ γραμμικὴ ταχύτης τῆς Σελήνης. β) Ποία ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις αὐτῆς. γ) Ποῖον λόγον ἔχουν τὰ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιάς καὶ τῆς ἄκτινος διανυόμενα διαστήματα.

(Ἄπ. $\alpha' v = 1023$ m/sec. $\beta' \gamma_k = 0,00272$ m/sec². $\gamma' 752$ 200.)

923. Δεδομένης τῆς ἄκτινος τῆς Γῆς ἴσης πρὸς $6,38 \cdot 10^8$ cm καὶ τῆς σταθερᾶς παγκοσμίου ἑλξεως ἴσης πρὸς $6,67 \cdot 10^{-8}$ cm³ · gr⁻¹ · sec⁻², νὰ εὐρεθῇ ἡ μέση πυκνότης τῆς Γῆς. ($g = 981$ cm/sec²).

(Ἄπ. 5,50 gr/cm³.)

924. Νὰ συγκριθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἀρεως μὲ τὴν τιμὴν της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, δοθέντος ὅτι αἱ ἄκτινες Ἀρεως καὶ Γῆς ἔχουν σχέσιν 0,53 : 1 καὶ αἱ μέσαι πυκνότητές των ἔχουν σχέσιν 0,71 : 1.

(Ἄπ. 0,376 gr_{Γῆς}.)

925. Νὰ συγκριθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἑρμοῦ μὲ τὴν τιμὴν της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, δοθέντος ὅτι αἱ ἄκτινες τοῦ Ἑρμοῦ καὶ τῆς Γῆς ἔχουν σχέσιν 1 : 3 καὶ αἱ μέσαι πυκνότητές των ἔχουν σχέσιν 3 : 5.

(Ἄπ. 0,2 gr_{Γῆς}.)

926. Νὰ συγκριθοῦν, ἡ περίοδος κινήσεως τοῦ αὐτοῦ ἐκκρεμοῦς, εὐρισκομένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἡλίου. Ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν Σελήνην εἶναι τὸ 1/6 τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῆς Γῆς, καὶ εἰς τὸν Ἥλιον 28 φορές μεγαλυτέρα.

(Ἄπ. 1 : 2,5 : 0,19.)

927. Δοθέντος ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς εἶναι κατὰ 3,75 φορές μεγαλύτερα τῆς ἀκτί-
νος τῆς Σελήνης καὶ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εἶναι κατὰ 6 φορές
μεγαλύτερα τῆς ἐπὶ τῆς Σελήνης, νὰ εὑρεθοῦν: α) ὁ λόγος τῆς μάζης τῆς Γῆς πρὸς
τὴν μάζαν τῆς Σελήνης καὶ β) ἡ περίοδος γήινου ἐκκρεμοῦς ἀπλῆς αἰωρήσεως 1 sec ἐπὶ
τῆς ἐπιφανείας τῆς Σελήνης.
(Ἀπ. α' 84,4 : 1. β' 4,9 sec.)

928. Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι κυκλικαί, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ
ἀκτίς τῆς τροχιάς τοῦ Ἄρεως, ἐὰν ἡ ἀκτίς τῆς τροχιάς τῆς Γῆς εἶναι $92,9 \cdot 10^6$ μίλια καὶ
αἱ περίοδοι τοῦ Ἄρεως καὶ τῆς Γῆς 687 ἡμέραι καὶ 365 ἡμέραι ἀντιστοίχως.
(Ἀπ. $141,6 \cdot 10^6$ μίλια.)

929. Δοθέντος ὅτι ἡ Γῆ κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς περὶ τὸν ἥλιον ἐπὶ 365 ἡμέ-
ρας, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μάζα τοῦ ἥλιου. Σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἔλξεως = $6,7 \cdot 10^{-8}$
dyn · cm² · gr⁻². Ἀπόστασις τοῦ ἥλιου ἀπὸ τῆς Γῆς = $1,5 \cdot 10^{11}$ m.
(Ἀπ. $2 \cdot 10^{33}$ gr.)

930. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος περιόδου δορυφόρου ὅστις περιφέρεται πέριξ τῆς
ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ἐὰν ἡ μέση πυκνότης τῆς εἶναι 5,5 gr/cm³ καὶ ἡ σταθερὰ παγκο-
σμίου ἔλξεως εἶναι $6,66 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm² · gr⁻².
(Ἀπ. 1 h 24 min 32 sec.)

931. Ποία ἡ περίοδος δορυφόρου, εὑρισκομένου εἰς ὕψος 42 000 km ἀπὸ τοῦ κέν-
τρου τῆς Γῆς καὶ κινουμένου περὶ αὐτὴν ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς. Ποία ἡ γραμμικὴ ταχύ-
της τοῦ δορυφόρου. (Ἀπ. T = 85 700 sec = 1 ἡμέρα περίπου, v = 3079 m/sec.)

932. Ὁ πρῶτος γήινος τεχνητὸς δορυφόρος ἐκινεῖτο περὶ τὴν Γῆν μὲ περίοδον
96 min. Ποῖα αἱ μέσαι ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς καὶ ἀπὸ τὴν γήινην
ἐπιφάνειαν καθὼς καὶ ἡ γραμμικὴ του ταχύτης, ἐὰν ἡ τροχία του θεωρηθῇ κατὰ προσέγ-
γισιν κυκλική.
(Ἀπ. 6943 km καὶ 573 km περίπου.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

933. Συγκρίνατε τὴν τιμὴν ἐπιτάχυνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς
Γῆς μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἐπὶ σημείου 5 km ἐντὸς τοῦ φλοιοῦ τῆς Γῆς, δοθέντος ὅτι ἡ πυ-
κνότης τοῦ φλοιοῦ ἰσοῦται πρὸς 2,5 gr/cm³, ἡ μέση πυκνότης τῆς Γῆς εἶναι 5,5 gr/cm³
καὶ ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς εἶναι ἰση πρὸς 6400 km.
(Ἀπ. 0,9995 : 1.)

934. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται σῶμα, βαλλόμενον ἐκ τῆς γήινης ἐπιφανείας κατα-
κορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 6 km/sec, ὅταν παραλείπεται ἡ ἀντί-
στασις τοῦ ἀέρος. Ποῖον λάθος προκύπτει, ὅταν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἐλάττωσις
τῆς δυνάμεως τῆς βαρύτητος μετὰ τοῦ ὕψους. ($g = 10$ m/sec²).
(Ἀπ. h = 2509 km. Μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυν-
σιν $h_1 = 1800$ km, ἥτοι 28% μικρότερον.)

935. Ὑποτιθεμένης τῆς Γῆς ὡς τελείας σφαίρας ἀκτίνος $6,4 \cdot 10^8$ cm καὶ τῆς ἐπι-
ταχύνσεως τῆς βαρύτητος εἰς τοὺς πόλους ἴσης πρὸς 983 cm/sec², νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγε-
θος καὶ ἡ κατεύθυνσις τῆς ἐπιταχύνσεως εἰς πλάτος 45°.
(Ἀπ. 981,3 cm/sec², διεύθυνσις 6° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον.)

936. Δύο σφαίραι μάζης $m_1 = 250$ gr καὶ $m_2 = 500$ gr, ἀντιστοίχως, εὑρίσκον-
ται, ἄνευ ἐξωτερικῶν συνδέσμων, εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας μήκους 50 cm, ἐπὶ τῆς ὁποίας
δύναται νὰ κινῆται ἐλευθέρως μάζα 5 gr. Εἰς ποῖαν θέσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης
θὰ ἰσορροπήσῃ ἡ μάζα αὕτη.
(Ἀπ. 21 cm ἀπὸ τῆς m_1 .)

937. Κατά πόσον τοῖς ἑκατὸν διαφέρει ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος τῆς περιστρεφομένης Γῆς ἀπὸ ἐκείνην τῆς ἡρεμύσεως : α) Εἰς τὸν Ἰσημερινόν, β) εἰς πλάτος 45° , γ) εἰς τοὺς πόλους. Ἡ Γῆ νὰ θεωρηθῇ ὡς σφαῖρα μὲ ἀκτίνα 6370 km. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$, $T = 86\,164 \text{ sec}$). (Ἀπ. α' $0,34\%$, β' $0,17\%$, γ' 0% .)

938. Κατὰ ποῖον κλάσμα τῆς τιμῆς της πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἡ περίοδος περιστροφῆς τῆς Γῆς T , διὰ νὰ εἶναι ἀβαρὲς σῶμα εὐρισκόμενον ἐπὶ τοῦ Ἰσημερινοῦ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$, $R = 6370 \text{ km}$, $T = 86\,164 \text{ sec}$). (Ἀπ. $T_1 = 1/17 T$.)

939. Κατὰ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐλαττοῦται τὸ διὰ τῆς ἔλξεως τῆς Γῆς προσκτώμενον βάρος ἐνὸς σώματος μάζης m , ἐξ αἰτίας τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς: α) Ἐπὶ τοῦ Ἰσημερινοῦ, β) εἰς τόπον γεωγραφικοῦ πλάτους $\varphi = 53^\circ 33'$, ὅταν ἡ Γῆ θεωρηθῇ ὡς σφαῖρα ἀκτίνας 6370 km. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$, $T = 86\,164 \text{ sec}$). (Ἀπ. α' $1/3\%$, β' $1/8\%$.)

940. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Ἰσημερινοῦ ἡ ἀκτινικὴ δύναμις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴν ἐκεῖ ἐνεργοῦσαν ἐλκτικὴν δύναμιν τῆς Γῆς. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, $R = 6370 \text{ km}$, $T = 86\,164 \text{ sec}$). (Ἀπ. Περίπου $6,62 R = 42\,200 \text{ km}$.)

941. Δείξατε ὅτι ἡ περιστροφή τῆς Γῆς προκαλεῖ ἐλαφράν ἀπόκλισιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης ἀπὸ τῆς κατακορύφου εἰς ὅλα τὰ γεωγραφικὰ πλάτη ἐκτὸς τῶν σημείων τῶν εὐρισκομένων εἰς 0° καὶ 90° . Δείξατε περαιτέρω ὅτι τὸ φαινόμενον τοῦτο ἔχει μεγίστην τιμὴν διὰ πλάτη 45° καὶ ὑπολογίσατε τὸ μέγεθος διὰ τὸ πλάτος τοῦτο, ἐὰν g εἶναι 981 cm/sec^2 καὶ ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς 6400 km. (Ἀπ. $6,3'$.)

942. Πόση ἔπρεπε νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης βλήματος βαλλομένου ὁριζοντίως (παρολιπομένης τῆς τριβῆς λόγω ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος), εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ ῥθύνωτο νὰ περιστρέφεται εἰς σταθεράν ἀπόστασιν περὶ τὴν G ν ὡς μία μικρὰ Σελήνη. (Ἀπ. $7,98 \text{ km/sec}$.)

943. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος περιφορᾶς ἀπειροελαχίστου δορυφόρου γράφοντος κυκλικὴν τροχίαν πέριξ σφαιρικοῦ πλανήτου πυκνότητος ἴσης πρὸς τὴν μονάδα, τῆς ἀκτίνας τῆς τροχίως οὗσης μόλις κατ' ἐλάχιστον μεγαλυτέρας τῆς ἀκτίνας τοῦ πλανήτου. Σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἔλξεως $k = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{gr}^{-2}$. (Ἀπ. $11\,950 \text{ sec} = 3 \text{ h } 19 \text{ min } 10 \text{ sec}$.)

944. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐλαχίστη ὁριζοντία ταχύτης μὲ τὴν ὁποῖαν σῶμα πρέπει νὰ ἐκτιναχθῇ ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ὥστε τὸ σῶμα νὰ δύναται νὰ περιφέρεται ὡς δορυφόρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἀκριβῶς τῆς Γῆς. Ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς λαμβάνεται ἴση πρὸς 4000 μίλια (1 μίλιον (ἀγγλ.) = 1,609 km). (Ἀπ. 356 mil/h .)

945. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ταχύτης μὲ τὴν ὁποῖαν δέον νὰ ἐκτοξευθῇ σῶμα τι κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τὴν γηίνην ἐπιφάνειαν, ὥστε νὰ μὴ ἐπιστρέψῃ. Ἀκτίς τῆς Γῆς = 6400 km, μέση πυκνότης τῆς Γῆς = $5,5 \text{ gr/cm}^3$, σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἔλξεως $6,66 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{gr}^{-2}$. (Ἀπ. $1,12 \cdot 10^6 \text{ cm/sec}$.)

946. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς καὶ ἐπὶ τῆς ἐνοῦσης ταύτης μετὰ τῆς Σελήνης εὐθείας θὰ ἡρέμει εὐρισκόμενος δορυφόρος. Τὰ κέντρα Γῆς — Σελήνης ἔχουν μίαν μέσην ἀπόστασιν 60 γηίνων ἀκτίων καὶ ἡ γηίνη μᾶζα εἶναι 81 φορές μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῆς Σελήνης. (Ἀκτίς Γῆς = 6370 km). (Ἀπ. $x = 54 R = 343\,980 \text{ km}$.)

947. Ποῖον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μεταφερθῇ ἀπὸ τῆς γηίνης ἐπιφανείας πέραν τοῦ ἐλκτικοῦ πεδίου τῆς Γῆς μᾶζα $m = 1 \text{ kgr}$. Ποῖαν ταχύτητα θὰ ἔπρεπε νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἐν λόγω μᾶζαν, διὰ νὰ τῆς προσδώσωμεν τὸ ἔργον αὐτὸ ὑπὸ μορφήν κινητικῆς ἐνεργείας. (Σταθερὰ παγκοσμίου ἔλξεως $k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-3} \cdot \text{kgr}^1 \cdot \text{sec}^{-2}$, καὶ $M_r = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kgr}$, $R = 6370 \text{ km}$). (Ἀπ. $A = 6,25 \cdot 10^7 \text{ Joule}$, $v = 11,2 \text{ km/sec}$.)

948. Με ποίαν ταχύτητα φθάνει επί της γήινης επιφανείας μάζα m , όταν αφήνεται να πέση προς την Γῆν από τὸ ἄπειρον, δηλαδή πρακτικῶς ἀπὸ πολὺν μεγάλην ἀπόστασιν, καὶ δὲν ὑφίσταται ἀτμοσφαιρική ἀντίστασις. Ἡ τελικὴ ταχύτης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς μάζης; (Ἀπ. $v = 11,2 \text{ km/sec.}$ Ἀνεξάρτητος.)

949. Μετεωρίτης εὐρίσκεται ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος εἰς τὸ ἑλκτικὸν πεδίου τοῦ Ἡλίου καὶ πίπτει ἐπ' αὐτοῦ. Ποίαν ταχύτητα ἀποκτᾷ μέχρι τῆς γήινης τροχιάς καὶ ἕως τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἡλίου, ὅταν ἡ ἡλιακὴ μάζα ἰσοῦται πρὸς $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, ἡ ἀκτίς τοῦ Ἡλίου πρὸς $696\,000 \text{ km}$ καὶ ἡ ἀκτίς τῆς γήινης τροχιάς πρὸς $149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$. (Ἀπ. $\alpha' v = 42,1 \text{ km/sec.}$ $\beta' v = 618 \text{ km/sec.}$)

950. Ποία ἐνέργεια πρέπει νὰ μεταδοθῇ εἰς μάζαν m ἵνα αὕτη μὴ ἐπαναπέσῃ ἐπὶ τῆς Γῆς ὅταν ἐξακοντισθῇ καθέτως. Ποία εἶναι τότε ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς μάζης ταύτης; (Ἀπ. $6,27 \cdot 10^7 \text{ Joule}$, $v = 11,3 \text{ km/sec.}$)

951. Δείξατε ὅτι ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἑνὸς τεχνητοῦ δορυφόρου τοποθετημένου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἀκτίνα τῆς τροχιάς ταύτης. Ποία ἡ διάρκεια τῆς περιστροφῆς δορυφόρου περιφερομένου εἰς ἀπόστασιν 1000 km ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Τὸ αὐτὸ διὰ δορυφόρον εὐρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $2 R$ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς, ἔνθα R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς. ($R = 6400 \text{ km}$, $g_0 = 10 \text{ m/sec}^2$.) (Ἀπ. $T_{1000} = 105 \text{ min}$, $T_{2R} = 12,5 \text{ h.}$)

952. Δορυφόρος διαγράφει κυκλικὴν τροχίαν ἀκτίνας r ἐντὸς χρόνου T . Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ T^2 καὶ r^3 . Ἡ Σελήνη διαγράφει τὴν τροχίαν της εἰς 656 ὥρας περίπου. Ποία θὰ εἶναι ἡ διάρκεια τῆς περιφορᾶς δορυφόρου κειμένου εἰς ἀπόστασιν 1600 km ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Ἀπόστασις Γῆς - Σελήνης: $60 R$ καὶ $R = 6400 \text{ km}$, ὅπου R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς. (Ἀπ. $T^2/(1,25 R)^3 = (656)^2/(60 R)^3$, $T = 1 \text{ h } 55 \text{ min.}$)

953. Θέτομεν δορυφόρον μάζης m ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς ἀκτίνας r . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια τοῦ τεχνητοῦ δορυφόρου. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $r = 1,2 R$, $R = 6400 \text{ km}$, $g_0 = 9,8 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. $v = 3,73 \cdot 10^7 \text{ Joule}$ ἀνὰ μονάδα μάζης.)

954. Πύραυλος μάζης $2,10^3 \text{ kg}$ ἐξετοξεύθη διὰ νὰ διαφύγῃ τὴν ἔλξιν τῆς Γῆς. Ἀλλ' ὅταν οὗτος εὐρέθῃ εἰς ἀπόστασιν ὀλίγων χιλιομέτρων ἀπὸ τῆς Γῆς, εἶχε ταχύτητα 30 m/sec καὶ ἦτο προφανές ὅτι θὰ ἐπέστρεφε ἐντὸς τῆς γήινης ἀτμοσφαιρας. Τὸ παρατηρητήριον τοῦ κέντρου ἐκτοξεύσεως στέλλει τότε ραδιοσημὰ πρὸς τὸν πύραυλον, προκαλοῦν τὴν ἐκτόξευσιν μάζης μερικῶν χιλιογράμμων ἐκ τοῦ πυραύλου πρὸς τὴν Γῆν. Ἡ ἐναπομείνουσα μάζα τοῦ πυραύλου ἴση πρὸς $0,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$ συνέχισε τὴν πορείαν της ἀπομακρυνομένη τῆς Γῆς με ταχύτητα 330 m/sec . α) Ὑπολόγισατε τὴν ταχύτητα τῆς πρὸς τὴν Γῆν ἐκτοξευθείσης ὑπὸ τοῦ πυραύλου μάζης. β) Τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ ἀρχικοῦ πυραύλου (πρὶν τῆς ἐξ αὐτοῦ ἐκτοξεύσεως ἀντιπυραύλου) καὶ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἐκάστου τμήματος μετὰ τὸν ἀποχωρισμὸν. γ) Διατὶ ὑπάρχει μεγαλύτερη κινητικὴ ἐνέργεια μετὰ τὸν ἀποχωρισμὸν ἢ πρὸ αὐτοῦ.

(Ἀπ. $\alpha' 70 \text{ m/sec.}$ $\beta' 9 \cdot 10^5 \text{ Joule}$, $2,7 \cdot 10^7 \text{ Joule}$, $0,37 \cdot 10^7 \text{ Joule}$. γ' Ἡ αὐξησης τῆς κινητικῆς ἐνεργείας προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐκτόνωσιν τῶν καυσασφαιρίων, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν μετασχηματισμὸν χημικῆς ἐνεργείας εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν θραυσμάτων ἀφ' ἑνὸς καὶ θέρμανσιν τούτων ἀφ' ἑτέρου.)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Σ Τ'

ΟΡΜΗ. ΚΡΟΥΣΙΣ

Κ Α Τ Η Γ Ο Ρ Ι Α Α'

955. Δύναμις 2000 dyn επενεργεί επί σώματος μάζης 400 gr. Να υπολογισθούν η ταχύτης και η όρμη του σώματος μετά παρέλευσιν 8 sec.

Λύσις. Εάν καλέσωμεν γ την επιτάχυνσιν την οποίαν αποκτᾷ τὸ σῶμα, τότε, μετά παρέλευσιν χρόνου t ἀπὸ τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως, ἡ ταχύτης τοῦ σώματος θὰ εἶναι $v = \gamma \cdot t$ καὶ ἐπομένως ὁ θεμελιώδης τύπος τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$ δύνανται νὰ γραφῇ :

$$F = m \cdot \frac{v}{t} \quad (1)$$

Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα v λαμβάνομεν:

$$v = \frac{F \cdot t}{m} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν ἔχουν δοθῇ εἰς τὸ Σ ύ σ τ η μ α C. G. S., προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) : $m = 400 \text{ gr}$, $F = 2000 \text{ dyn}$ καὶ $t = 8 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$v = 40 \text{ cm/sec}$$

Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν ζητουμένην ὁρμὴν τοῦ σώματος, χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνωστὸν τύπον τῆς ὁρμῆς :

$$J = m \cdot v \quad (3)$$

καὶ ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σ ύ σ τ η μ α C. G. S. εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου :

$$J = 16000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

956. Σῶμα μάζης 2 kgf κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 1 m/sec. Πόση ἡ ὁρμή του. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν ὁρμὴν τοῦ σώματος, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ὁρμῆς :

$$J = m \cdot v \quad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος καὶ v ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τ ε χ ν ι κ ὸ ν Σ ύ σ τ η μ α θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) : $m = 0,2 \text{ T.M.}$ μάζης, $v = 1 \text{ m/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$J = 0,2 \text{ kgf} \cdot \text{sec}$$

957. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται, ἵνα μᾶζα 500 gr μεταβάλλῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς κατὰ 1 m/sec ἐντὸς 2 sec.

Λύσις. Εάν καλέσωμεν F τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν ἵνα μεταβληθῇ ἡ ὁρμή καὶ t τὸν ἀντίστοιχον χρόνον, τότε ἡ ὥθησις τῆς δυνάμεως Ω θὰ εἶναι :

$$\Omega = F \cdot t \quad (1)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ $(v - v_0)$ τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος αὐτοῦ, τότε ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ΔJ τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\Delta J = m (v - v_0) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμως ὡς γνωστόν, ἡ ὥθησις τῆς δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς ὀρμῆς, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$F \cdot t = m (v - v_0) \quad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς F καὶ λαμβάνομεν :

$$F = \frac{m (v - v_0)}{t} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Σ ύ σ τ η μ α C. G. S. καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 25\,000 \text{ dyn}$$

958. Ἡ ὀρμὴ σώματος εἶναι $40\,000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ τεθῇ τὸ σῶμα ἐν ἡρεμίᾳ ἐντὸς 8 sec .

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ἡ ὥθησις τῆς δυνάμεως Ω θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς ὀρμῆς ΔJ τὴν ὁποίαν προκαλεῖ. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\Omega = \Delta J \quad (1)$$

ἢ, ἐπειδὴ $\Omega = F \cdot t$ καὶ $\Delta J = m (v - v_0)$ ἔχομεν :

$$F \cdot t = m \cdot (v - v_0) \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λύοντες ὡς πρὸς F καὶ θέτοντες τὰ δεδομένα : $\Delta J = 40\,000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ καὶ $t = 8 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$F = 5000 \text{ dyn}$$

959. Σφαῖρα μάζης 8 gr βάλλεται ὀριζοντίως καὶ εἰσχωρεῖ ἐντὸς τεμαχίου ξύλου βάρους 9 kgr^* , τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κινῆται ἐλευθέρως. Ἡ ταχύτης τοῦ ξύλου καὶ τῆς σφαίρας μετὰ τὴν κρούσιν εἶναι 40 cm/sec . Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m καὶ v τὴν μάζαν καὶ τὴν ταχύτητα τῆς σφαίρας πρὸ τῆς κρούσεως, v_1 τὴν κοινὴν ταχύτητα τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν καὶ M τὴν μάζαν τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὀρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\text{πρὸ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{πρὸ}} = m \cdot v + M \cdot 0 \quad (1)$$

καὶ ἡ ὀρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν ($J_{\text{μετὰ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{μετὰ}} = (m + M) \cdot v_1 \quad (2)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$m \cdot v = (m + M) \cdot v_1 \quad (3)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην ταχύτητα v λαμβάνομεν :

$$v = \frac{(m + M) \cdot v_1}{m} \quad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $m = 8 \text{ gr}$, $M = 9000 \text{ gr}$ καὶ $v_1 = 40 \text{ cm/sec}$, εὐρίσκομεν :

$$v = 45\,050 \text{ cm/sec}$$

960. Πυροβόλον 600 kgr^* εἶναι τοποθετημένον ἐπὶ τροχοφόρου ὀχήματος καὶ βάλλει βλήμα 10 kgr^* ὑπὸ ταχύτητα 700 m/sec , ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀριζοντίαν ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μάζαν τοῦ ὀχήματος καὶ v_1 τὴν ζητούμενην ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὀρμὴ τοῦ πυροβόλου μετὰ τὴν ἀνάκρουσιν ($J_{\text{πυρ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{πυρ}} = M \cdot v_1 \quad (1)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μάζαν τοῦ βλήματος καὶ v_2 τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν ἐξέρχεται τὸ βλήμα ἐκ τοῦ πυροβόλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὀρμὴ τοῦ βλήματος (ὀριζοντίως) μετὰ τὴν ἀνάκρουσιν ($J_{\text{βλημ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{βλημ}} = m \cdot v_2 \cdot \sin 30^\circ \quad (2)$$

Δεδομένου ότι η όρμη του συστήματος προ της άνακρούσεως ήτο μηδέν, συμφώνως προς την Άρχη της διατηρήσεως της όρμης, θα ισχύη η σχέσις :

$$M \cdot v_1 = m \cdot v_2 \cdot \sin 30^\circ \quad (3)$$

Λύομεν την σχέσιν (3) ως προς την ζητουμένην ταχύτητα v_1 του πυροβόλου και λαμβάνομεν :

$$v_1 = \frac{m}{M} \cdot v_2 \cdot \sin 30^\circ \quad (4)$$

Έκ τών δεδομένων της άσκήσεως : $m = 10 \text{ kg}$, $M = 600 \text{ kg}$, $v_2 = 700 \text{ m/sec}$, $\sin 30^\circ = 0,866$, προκύπτει ότι :

$$v_1 = 10,1 \text{ m/sec}$$

961. Τεμάχιον σκυροκονιάματος (beton) διαστάσεων 0,07 m, 0,07 m, 0,07 m πίπτει έλευθέρως άνευ άρχικης ταχύτητος έξ ύψους **11 m** από οικοδομής. Ζητούνται : α) 'Η όρμη και ή κινητική ένέργεια αυτού εις ύψος από του έδάφους ίσον προς τó ύψος μέσου άνδρός (**1,7 m**). β) 'Η δύναμις την όποιαν άσκει εις τó ύψος αυτό δια προσκρούσεως επί κωλύματος, άν ύποτεθί ότι αύτη διαρκεί **0,1 sec**. Δίδεται ή πυκνότης του σκυροκονιάματος $\rho = 2,2 \text{ gr/cm}^3$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) 'Εάν καλέσωμεν m την μάζαν του τεμαχίου του σκυροκονιάματος και v την ταχύτητα την όποιαν άποκτήσ τούτο εις ύψος άναστήματος μέσου άνδρός, τότε ή όρμη του δίδεται δια του τύπου :

$$J = m \cdot v \quad (1)$$

'Επειδή όμως $m = \rho \cdot V$ (2), όπου ρ ή πυκνότης του σώματος και V ό όγκος αυτού, είναι δέ και $v = \sqrt{2g \cdot h}$ (3), όπου h τó διάστημα τó όποιον διήνυσε δια να άποκτήσ η ταχύτητα v , ό τύπος (1) γράφεται :

$$J = \rho \cdot V \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad (4)$$

Έκ της σχέσεως (4), εάν θέσωμεν τά δεδομένα της άσκήσεως, έργαζόμενοι εις τó Τεχνικόν Σύστημα : $\rho = 2,2 \text{ gr/cm}^3 = 220 \text{ kg}^* \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-4}$, $V = (0,07)^3 = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, $h = 11 - 1,7 = 9,3 \text{ m}$, εύρίσκομεν :

$$J = 1,02 \text{ kg}^* \cdot \text{sec}$$

'Η κινητική ένέργεια εύρίσκεται έκ του γνωστού τύπου :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (5)$$

'Αρα θα έχωμεν, λόγω των σχέσεων (2) και (3), ότι :

$$E_{\text{κιν}} = \rho \cdot V \cdot g \cdot h \quad (6)$$

ότε προκύπτει ότι :

$$E_{\text{κιν}} = 7,07 \text{ kg}^* \cdot \text{m}$$

β) Γνωρίζομεν ότι ή ώθησις της δυνάμεως Ω ίσοῦται προς την μεταβολήν της όρμης ΔJ , την όποιαν προκαλεί. 'Ητοι : $\Omega = \Delta J$, ή :

$$F \cdot t = \Delta J \quad (7)$$

δεδομένου δέ ότι ή άρχική όρμη είναι μηδέν, θα έχωμεν ότι :

$$F \cdot t = J \quad (8)$$

Λύνοντες την σχέσιν (8) ως προς F λαμβάνομεν :

$$F = \frac{J}{t} \quad (9)$$

'Εργαζόμενοι εις τó Τεχνικόν Σύστημα και θέτοντες : $J = 1,02 \text{ kg}^* \cdot \text{sec}$ και $t = 0,1 \text{ sec}$, εύρίσκομεν :

$$F = 10,2 \text{ kg}^*$$

962. Μία σφαίρα πυροβόλου όπλου μάζης $m = 20 \text{ gr}$, κινουμένη όριζοντίως υπό ταχύτητα v , έσφηνούται επί τεμαχίου ξύλου μάζης $M = 1 \text{ kg}$, τó όποιον

είναι προσδεδεμένον διὰ νήματος μήκους $l = 1 \text{ m}$ ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O . Τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου, ὅταν ἐνσφηνωθῇ ἐπ' αὐτοῦ ἡ σφαῖρα, ἐκτρέπεται καὶ σχηματίζει τὸ νήμα γωνίαν 60° μετὰ τῆς κατακορύφου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον μετετράπη εἰς θερμότητα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω u_x ἡ ταχύτης τοῦ συστήματος ξύλου - σφαίρας ἀμέσως μετὰ τὴν ἐνσφηνώσιν, m ἡ μάζα τῆς σφαίρας καὶ M ἡ μάζα τοῦ ξύλου. Ἐὰν τὸ σύστημα μετὰ τὴν ἐνσφηνώσιν ἀνέρχεται εἰς ὕψος h , τότε συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, θὰ ἔχωμεν $h = l/2$ καὶ ἐπομένως καὶ ἡ δυναμικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια μεταβάλλεται κατὰ :

$$E_{δυν} = (M + m) \cdot g \cdot \frac{l}{2} \quad (1)$$

Ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας θὰ προέρχεται ἀπὸ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἐκινήθη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα u_x ἀνερχόμενον, καὶ ἡ ὁποία εἶναι :

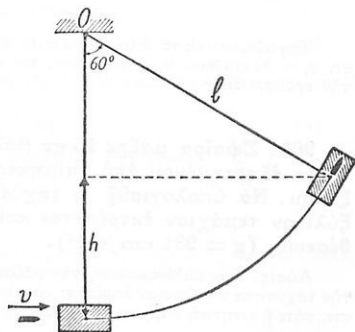
$$E_{κιν} = \frac{1}{2} (M + m) \cdot u_x^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν ὅτι :

$$u_x = \sqrt{g \cdot l} \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερόν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας :

$$E'_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (4)$$



μετετράπη ἄφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν $E_{δυν}$ καὶ ἄφ' ἑτέρου εἰς θερμότητα Q λόγω τριβῶν. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = (M + m) \cdot g \cdot \frac{l}{2} + Q \quad (5) \quad \text{ἢ} \quad Q = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - (M + m) \cdot g \cdot \frac{l}{2} \quad (6)$$

Συμφώνως, ὁμως, πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$m \cdot v = (M + m) \cdot u_x \quad (7)$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ u_x ἐκ τῆς σχέσεως (3) εἰς τὴν σχέσιν (7) καὶ λαμβάνομεν :

$$v = \frac{(M + m) \cdot \sqrt{g \cdot l}}{m} \quad (8)$$

Ἐὰν τώρα εἰς τὴν σχέσιν (6) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ v ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (8), εὐρίσκομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$Q = \frac{1}{2} (M + m) \cdot g \cdot l \cdot \left(\frac{M + m}{m} - 1 \right) \quad (9)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (9) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τ Ε Χ Ν Ι Κ Ο Ν Σ Υ Σ Τ Η Μ Α, ἥτοι : $M = 1 \text{ kg} = 0,1 \text{ T.M.}$ μάζης, $m = 20 \text{ gr} = 0,002 \text{ T.M.}$ μάζης, $l = 1 \text{ m}$, ὅτε εὐρίσκομεν :

$$Q = 25,5 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

963. Δύο τελείως μὴ ἐλαστικαὶ μάζαι 16 gr καὶ 4 gr κινούνται κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις ὑπὸ ταχύτητας 30 cm/sec καὶ 50 cm/sec ἀντιστοίχως. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ κοινὴ ταχύτης v μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

Λύσις. Ἀς καλέσωμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν δύο σωμάτων καὶ v_1, v_2 ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας τὰς ὁποίας ἔχουν ταῦτα πρὸ τῆς κρούσεως. Ἐπίσης, ἀς καλέσωμεν v τὴν κοινὴν ταχύτητα αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν. Τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{πρὸ}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{πρὸ} = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

Επίσης η όρμη του συστήματος μετά την κρούσιν ($J_{\text{μετά}}$):

$$J_{\text{μετά}} = (m_1 + m_2) \cdot v \quad (2)$$

Συμφώνως δε προς την Αρχήν της διατηρήσεως της όρμης, θα ισχύη η σχέση:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 - m_2) \cdot v \quad (3)$$

Λύομεν την σχέση (3) ως προς v και λαμβάνομεν:

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Εργαζόμενοι εις τὸ Σύστημα C. G. S. θέτομεν εις την σχέση (4) τὰς τιμὰς: $m_1 = 16 \text{ gr}$, $m_2 = 4 \text{ gr}$, $v_1 = 30 \text{ cm/sec}$, $v_2 = 50 \text{ m/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν εἶναι:

$$v = 14 \text{ cm/sec}$$

964. Σφαῖρα μάζης 15 gr βάλλεται ὀριζοντίως ἐπὶ ξυλίνου τεμαχίου μάζης 3 kgρ ἐξηρτημένου ἀπὸ ἐπιμηκες νῆμα καὶ ἡ σφαῖρα ἐνσωματοῦται ἐντὸς τοῦ ξύλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας, ὅταν κατὰ τὴν κρούσιν τὸ ξύλινον τεμάχιον ἐκτρέπεται καὶ ἀνυψοῦται κατὰ 10 cm ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τῆς σφαίρας, m_2 τὴν μᾶζαν τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου καὶ u τὴν ταχύτητα τὴν ὅποιαν λαμβάνει τὸ σύστημα σφαίρας καὶ τεμαχίου ξύλου ἀμέσως μετὰ τὴν ἐνσφηνώσιν, τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην θὰ εἶναι:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 \quad (1)$$

Επίσης ἐὰν καλέσωμεν h τὴν ἀνύψωσιν τὴν ὅποιαν ὑφίσταται τὸ σύστημα, ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια μεταβάλλεται κατὰ:

$$E_{\text{δυν}} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h \quad (2)$$

Ἐπειδὴ, ὁμως, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος πρέπει νὰ διατηρῆται σταθερά, λαμβάνομεν δι' ἐξίσωσως τῶν δευτέρων μελῶν τῶν σχέσεων (1) καὶ (2):

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (3)$$

Πρὸ τῆς ἐνσφηνώσεως, ἐὰν ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι u_1 , ἡ ὁρμὴ αὐτῆς θὰ εἶναι $m_1 \cdot u_1$, ἡ δὲ ὁρμὴ τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου μηδέν, καθόσον ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι μηδέν. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\text{πρὸ}}$) ἰσοῦται πρὸς:

$$J_{\text{πρὸ}} = m_1 \cdot u_1 \quad (4)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν ($J_{\text{μετά}}$) θὰ ἰσοῦται πρὸς:

$$J_{\text{μετά}} = (m_1 + m_2) \cdot v \quad (5)$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν Αρχήν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν τὴν σχέση:

$$m_1 \cdot u_1 = (m_1 + m_2) \cdot v \quad (6)$$

Λύομεν τὴν σχέση (6) ως πρὸς τὴν ζητούμενην ταχύτητα τῆς σφαίρας u_1 καὶ λαμβάνομεν:

$$u_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v}{m_1} \quad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέση (7) τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος v τοῦ συστήματος ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔχομεν

$$u_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{2g \cdot h}}{m_1} \quad (8)$$

Εργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C.G.S. καὶ θέτοντες: $m_1 = 15 \text{ gr}$, $m_2 = 3000 \text{ gr}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ καὶ $h = 10 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν ὅτι:

$$u_1 = 28 \ 140 \text{ cm/sec} \quad \text{ἢ:} \quad u_1 = 281,4 \text{ m/sec}$$

965. Δύο σφαῖραι μάζης 30 gr και 80 gr κινούνται κατ' ἀντιθέτους φορὰς μὲ ταχύτητας -6 m/sec και $+4 \text{ m/sec}$ ἀντιστοίχως. Ποία ἡ ταχύτης αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν. (Ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι $\kappa = 0,4$).

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, m_2 τὰ μάζας τῶν σφαιρῶν και v_1, v_2 ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως. Θὰ ἔχωμεν τότε ὅτι ἡ ὁρμή τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\text{πρὸ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{πρὸ}} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

Ἐπίσης καλοῦμεν v'_1 και v'_2 τὰς ταχύτητας ἀντιστοίχως τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν. Θὰ ἔχωμεν τότε ὅτι ἡ ὁρμή τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν ($J_{\text{μετὰ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{μετὰ}} = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) και (2) δι' ἐφαρμογῆς τῆς Ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς προκύπτει ἡ σχέση :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ συντελεστὴς κρούσεως κ δίδεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\kappa = - \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσηιν (4) ὡς πρὸς v'_2 , λαμβάνομεν : $v'_2 = \kappa \cdot (v_1 - v_2) + v'_1$, και ἀκολουθῶς, ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3), προκύπτει δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ὅτι :

$$v'_1 = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - \kappa \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σ Ὑ σ τ η μ α C. G. S. και θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{v'_1 = 418,2 \text{ cm/sec}}$$

Ἀκολουθῶς ἐκ τῆς σχέσεως (4) εὐρίσκομεν :

$$\underline{v'_2 = 18,2 \text{ cm/sec}}$$

966. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, πόση ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα κατὰ τὴν κρούσιν.

Λύσις. Πρὸ τῆς κρούσεως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 \quad (1)$$

μετὰ δὲ τὴν κρούσιν εἶναι :

$$E'_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v'^2_2 \quad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν Q τὴν ἐνέργειαν ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα, θὰ ἔχωμεν προφανῶς :

$$Q = E'_{\text{κιν}} - E_{\text{κιν}} \quad \text{ἢ} : \quad Q = \frac{1}{2} m_1 \cdot (v_1^2 - v'^2_1) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (v_2^2 - v'^2_2) \quad (3)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3), ὅταν ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Σ Ὑ σ τ η μ α C. G. S., προκύπτει ὅτι :

$$\underline{Q = 0,263 \cdot 10^7 \text{ erg}}$$

Δεδομένου δὲ ὅτι $1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$, ἔχομεν και :

$$\underline{Q = 0,263 \text{ Joule}}$$

967. Σῶμα μάζης 400 gr κινεῖται ἐπ' εὐθείας ὑπὸ ταχύτητα 8 m/sec . Ἐτερον σῶμα μάζης 600 gr κινεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας και κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ὑπὸ ταχύτητα 12 m/sec . Τὸ δεύτερον σῶμα προσκρούει ἐπὶ τοῦ

πρώτου. 'Εφ' ὅσον ἡ κρούσις θεωρεῖται μὴ ἐλαστικῇ, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο σωμάτων μετὰ τὴν κρούσιν.

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν σωμάτων καὶ v_1, v_2 τὰς ταχύτητας αὐτῶν ἀντιστοίχως πρὸ τῆς κρούσεως καὶ u τὴν κοινὴν ταχύτητα μετὰ τὴν κρούσιν, τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\text{πρὸ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{πρὸ}} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν ($J_{\text{μετὰ}}$) ἰσοῦται πρὸς :

$$J_{\text{μετὰ}} = (m_1 + m_2) \cdot u \quad (2)$$

'Εφαρμόζοντες τὴν 'Αρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἐξάγομεν ὅτι :

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

'Εργαζόμενοι εἰς τὸ $T \epsilon \chi \nu \iota \kappa \delta \nu \Sigma \upsilon \sigma \tau \eta \mu \alpha$ θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $m=0,4/9,81$ T.M. μάζης, $m_2 = 0,6/9,81$ T.M. μάζης, $v_1 = 8$ m/sec, $v_2 = 12$ m/sec, καὶ εὐρίσκομεν :

$$u = 10,4 \text{ m/sec}$$

968. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν κεντρικῆς καὶ μὴ ἐλαστικῆς κρούσεως τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας, τὸ ὅποιον μετατρέπεται κατὰ τὴν κρούσιν δύο σωμάτων εἰς θερμότητα. Μᾶζαι σωμάτων m_1 καὶ m_2 , ταχύτητες αὐτῶν v_1 καὶ v_2 .

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν δύο σωμάτων, v_1, v_2 τὰς ταχύτητας αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως καὶ u τὴν κοινὴν ταχύτητα αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν. 'Επειδὴ ἡ κρούσις εἶναι τελείως μὴ ἐλαστικὴ θὰ ἰσχύη, συμφώνως πρὸς τὴν 'Αρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἡ σχέσις :

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u + Q \quad (1)$$

ὅπου Q εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὅποιον παράγεται λόγῳ τῶν τριβῶν.

'Επίσης, συμφώνως πρὸς τὴν 'Αρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad (2)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς u καὶ λαμβάνομεν :

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

'Εὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ u εἰς τὴν σχέσιν (1), προκύπτει :

$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{m_1 + m_2} + 2Q \quad (4)$$

'Εκ τῆς σχέσεως (4) δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εὐρίσκομεν τελικῶς ὅτι ἡ ζητουμένη ἐνέργεια, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα κατὰ τὴν τελείως μὴ ἐλαστικὴν κρούσιν, δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$Q = \frac{m_1 \cdot m_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)}$$

969. Δύο σώματα ζυγίζουν ὁμοῦ 20 kg* καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλὰ κατ' ἀντιθέτους φορὰς, τὸ ἓν μὲ ταχύτητα 4 m/sec καὶ τὸ ἄλλο μὲ ταχύτητα 11 m/sec, καὶ συγκρούονται. 'Η κρούσις θεωρεῖται μὴ ἐλαστικῇ, ἡ δὲ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο σωμάτων εἶναι 3 m/sec κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σώματος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος ἐκάστου τῶν σωμάτων.

Λύσις. 'Εστὼ ὅτι αἱ μᾶζαι τῶν σωμάτων εἶναι m_1 καὶ m_2 . 'Επίσης v_1 καὶ v_2 αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἀντιστοίχως πρὸ τῆς κρούσεως καὶ u ἡ κοινὴ ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν. Συμφώνως πρὸς τὴν 'Αρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν συνολικὴν μάζαν τῶν δύο σωμάτων, θὰ ἔχωμεν : $M = m_1 + m_2$ καὶ συνεπῶς :

$$m_2 = M - m_1 \quad (2)$$

Οὕτως ἡ σχέση (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$m_1 \cdot v_1 - (M - m_1) \cdot v_2 = M \cdot v \quad (3)$$

Λύοντες τὴν σχέση (3) ὡς πρὸς m_1 εὐρίσκομεν :

$$m_1 = \frac{M \cdot (v + v_2)}{v_1 + v_2} \quad (4)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ g ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4) προκύπτει :

$$m_1 \cdot g = \frac{M \cdot g \cdot (v + v_2)}{v_1 + v_2} \quad \eta : \quad B_1 = \frac{B \cdot (v + v_2)}{v_1 + v_2} \quad (5)$$

ὅπου B_1 εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης m_1 καὶ B_2 τὸ βάρος τῆς μάζης M .

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ $T \epsilon \chi \nu \iota \kappa \acute{o} \nu \Sigma \acute{u} \sigma \tau \eta \mu \alpha$ θέτομεν εἰς τὴν σχέση (5) : $B = 20 \text{ kgr}^*$, $v = 3 \text{ m/sec}$, $v_1 = 4 \text{ m/sec}$, $v_2 = 12 \text{ m/sec}$ ὁπότε εὐρίσκομεν ὅτι :

$$B_1 = 18,75 \text{ kgr}^* \quad \text{καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ : } B_2 = 20 - 18,75 = 1,25 \text{ kgr}^*$$

970. Αὐτόματον ὅπλον μάζης M ἐξακοντίζει κατὰ δευτερόλεπτον n βλήματα ἑκαστον μάζης m , μικρᾶς ὡς πρὸς τὴν μάζαν τοῦ ὅπλου, ὑπὸ ταχύτητα v . Τὸ ὅπλον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κινήθῃ πρὸς τὰ ὀπισθεν, ἐπαναφέρεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἡρεμίας ὑπὸ ἐλατηρίου σταθερᾶς k . Νὰ καθορισθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου κατὰ τὴν βολήν. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ : $m = 15 \text{ gr}$, $v = 600 \text{ m/sec}$, $k = 10^3 \text{ Nt/m}$, $n = 10$.

Λύσις. Ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Delta l = \frac{F}{k} \quad (1)$$

ὅπου F ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου καὶ k ἡ σταθερὰ αὐτοῦ. Ἀφ' ἑτέρου ἡ δύναμις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν τὴν ἀσκουμένην ὑπὸ τῶν ἐκτοξευομένων βλημάτων ἐντὸς τοῦ ὅπλου καὶ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = \frac{\Delta J}{\Delta t} \quad (2)$$

ὅπου ΔJ ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῶν ἐκτοξευομένων βλημάτων ἐντὸς χρόνου Δt .

Ἐὰν καλέσωμεν n τὸν ἀριθμὸν τῶν βλημάτων ἐντὸς χρόνου Δt , τότε θὰ ἔχωμεν προφανῶς :

$$\Delta J = n \cdot m \cdot v \quad (3)$$

ὅπου m ἡ μάζα καὶ v ἡ ταχύτης ἑκάστου βλήματος.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$\Delta l = \frac{n \cdot m \cdot v}{\Delta t \cdot k} \quad (4)$$

Θέτοντες $n = 10$, $m = 15 \text{ gr}$, $v = 600 \text{ m/sec} = 6 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$, $\Delta t = 1 \text{ sec}$ καὶ $k = 10^3 \text{ Nt/m} = 10^6 \text{ dyn/cm}$, λαμβάνομεν :

$$\Delta l = 9 \text{ cm}$$

971. Χαλυβδίνη σφαῖρα πίπτει ἀπὸ ὕψους 2 m ἐπὶ τραχείας ἐπιφανείας. Ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι $0,8$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὀλικὸς χρόνος τῶν διαδοχικῶν ἀναπηδήσεων καὶ ἡ διανυομένη ὑπὸ τῶν ἀναπηδήσεων τῆς σφαίρας ὀλικὴ ἀπόστασις κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω h τὸ ἀρχικὸν ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποῖου πίπτει ἡ σφαῖρα. Ἐὰν u ἡ ταχύτης κατὰ τὴν

πρώτην κρούσιν μετά της τραχείας επιφανείας, v_1 ή άρχική ταχύτης άναπηδήσεως μετ' αὐτήν καὶ k ὁ συντελεστὴς κρούσεως, θὰ ἰσχύουσιν αἱ σχέσεις :

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1) \quad \text{καί:} \quad k = -\frac{v_1}{v} \quad (2)$$

Π α ρ α τ ῆ ρ σ ι ς : Κατὰ τὴν κρούσιν τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς τραχείας επιφανείας, θεωροῦμεν ὅτι ἡ τελευταία παραμένει ἀμετακίνητος λόγῳ τῆς μεγάλης μάζης αὐτῆς. Οὕτως, ὁ τύπος τοῦ συντελεστοῦ κρούσεως γράφεται :

$$k = -\frac{v_1 - 0}{v - 0} \quad \eta: \quad k = -\frac{v_1}{v}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος ἀναπηδήσεως θὰ ἔχωμεν :

$$v_1 = k \cdot v \quad (3)$$

Κατὰ τὴν δευτέραν κρούσιν, ἡ σφαῖρα πίπτει ἐπὶ τῆς επιφανείας μετ' ταχύτητα v_1 καὶ ἀναπηδᾷ μετ' ταχύτητα v_2 τοιαύτην ὥστε κατ' ἀπόλυτον τιμὴν νὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$v_2 = k \cdot v_1 \quad \eta: \quad v_2 = k^2 \cdot v \quad (4)$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον σκεπτόμενοι εὐρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν νουστήν ἀναπήδησιν ἡ ἐκάστοτε ταχύτης θὰ εἶναι :

$$v_n = k^n \cdot v \quad (5)$$

ἦτοι, αἱ διαδοχικαὶ ταχύτητες ἀναπηδήσεως ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόδον (ἐπειδὴ $k < 1$) μετ' ἀρχικὴν ταχύτητα $v_1 = k \cdot v$ καὶ λόγον k .

Ἀντιστοίχως τὸ ὕψος ἀναπηδήσεως κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} \quad \eta: \quad h_1 = k^2 \cdot h \quad (6)$$

(διότι $v_1^2 = v^2 k^2$ καὶ $v^2 = 2gh$). Ὅμοίως διὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν θὰ ἔχωμεν :

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} \quad \eta: \quad h_2 = k^2 \cdot h_1 \quad \eta: \quad h_2 = (k^2)^2 \cdot h \quad (7)$$

καὶ διὰ τὴν νουστήν ἀναπήδησιν θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος :

$$h_n = (k^2)^n \cdot h \quad (8)$$

Ἦτοι : τὰ διαδοχικὰ ὕψη ἀναπηδήσεως ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόδον (ἐπειδὴ $k^2 < 1$) μετ' ἀρχικὸν ὅρον $h_1 = k^2 \cdot h$ καὶ λόγον k^2 .

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι τὸ ὅλικόν διάστημα τὰ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα κατὰ τὰς διαδοχικὰς ἀναπηδήσεις θὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁρῶν τῆς γεωμετρικῆς προόδου, (διότι τὰ ἴδια διαστήματα τὰ διανύει ἐκάστοτε καὶ κατὰ τὴν ἀνοδὸν καὶ κατὰ τὴν κάθοδον) πλὴν τὸ ἀρχικὸν ὕψος πτώσεως h , τὸ ὁποῖον διανύει μόνον μίαν φορὰν. Ἦτοι :

$$s = h + 2 \sum h_n \quad (9)$$

ὅπου $\sum h_n$ τὸ ἀθροῖσμα τῶν ὁρῶν τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ἐχομεν ὁμῶς :

$$\sum h_n = \frac{k^2 \cdot h}{1 - k^2} \quad (10) \quad \alpha\pi\alpha: \quad s = h + \frac{2k^2 \cdot h}{1 - k^2} \quad (11)$$

Θέτοντες $h = 2 \text{ m}$ καὶ $k = 0,8$ λαμβάνομεν :

$$s = 9,111 \text{ m}$$

Ἐφ' ὅσον, ὡς εἶδομεν, αἱ ἀρχικαὶ ταχύτητες τῶν διαδοχικῶν ἀναπηδήσεων ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόδον καὶ οἱ διαδοχικοὶ χρόνοι ἀνόδου θὰ ἀποτελοῦν ὡσαύτως φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόδον, διότι, ὡς γνωστόν, ὁ χρόνος ἀνόδου εἶναι πάντοτε πηλίκον ταχύτητος ἐκτοξεύσεως διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g . Ἐπομένως οἱ χρόνοι ἀνόδου θὰ ἔχουν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς προόδου :

$$t_1 = \frac{v_1}{g} \quad \eta: \quad t_1 = k \cdot \frac{v}{g} \quad (12)$$

καὶ λόγον προόδου πάλιν k . Ὁ συνολικὸς χρόνος δὲ $t_{\text{ολ}}$ θὰ εἶναι ἴσος μετ' τὸ διπλάσιον ἀθροῖσμα τῶν

δρων της γεωμετρικής προόδου, (διότι έχουμε και χρόνους καθόδου αντιστοίχως ίσους προς τους χρόνους ανόδου) και επί πλέον τον χρόνον t της αρχικής πτώσεως. *Ητοι :

$$t_{ολ} = t + 2 \sum t_n \quad (13)$$

*Έχουμε όμως :

$$\sum t_n = \frac{k \cdot \frac{v}{g}}{1-k} \quad (14) \quad \eta: \quad \sum t_n = \frac{k \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}{1-k} \quad (15) \quad \text{και: } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (16)$$

*Αρα

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2k \sqrt{\frac{2h}{g}}}{1-k}$$

Θέτοντες $h = 2\text{m}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ και $k = 0,8$ λαμβάνομεν :

$$t_{ολ} = 5,75 \text{ sec}$$

972. Να εύρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν ἐκτόξευσιν πυραύλου ἐκ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ κατακόρυφον διεύθυνσιν, ἂν τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι $B = 5\text{tn}^*$, ἡ ταχύτης ἐξόδου τῶν ἀερίων τῆς καύσεως $v = 500 \text{ m/sec}$ καὶ ἡ ποσότης τῶν ἐξερχομένων ἀερίων $\alpha = 200 \text{ kgr/sec}$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. *Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).

Λύσις. Ἡ ὥστικὴ δύναμις F τῶν ἀερίων δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

ὅπου m ἡ ἐξερχομένη μᾶζα τῶν ἀερίων εἰς χρόνον Δt καὶ $\Delta v = v - 0 = v$, δηλαδὴ ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος Δv τῶν ἀερίων εἶναι ἰση μὲ τὴν ταχύτητα ἐξόδου. *Ἐξ ἄλλου

$$\alpha = \frac{m}{\Delta t} \quad (2) \quad \text{*Επομένως: } F = \alpha \cdot v \quad (3)$$

*Ἐὰν καλέσωμεν F' τὴν δύναμιν εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ὀφείλεται ἡ κίνησις τοῦ πυραύλου, θὰ ἔχωμεν :

$$F' = F - B \quad \eta: \quad F' = \alpha \cdot v - m' \cdot g \quad (4)$$

ὅπου m' ἡ μᾶζα τοῦ πυραύλου. *Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὁ πύραυλος ἐκτοξεύεται μὲ ἐπιτάχυνσιν γ , θὰ ἔχωμεν $F' = m' \cdot \gamma$ καὶ ἐπομένως :

$$\gamma = \frac{\alpha \cdot v}{m'} - g \quad (5)$$

*Εργαζόμενοι εἰς τὸ σὺ σ τ η μ α Μ. Κ. Σ. θὰ ἔχωμεν : $\alpha = 200 \text{ kgr/sec}$, $v = 500 \text{ m/sec}$, $m' = 5000 \text{ kgr}$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει :

$$\gamma = 10 \text{ m/sec}^2$$

973. *Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τοποθετεῖται κατακόρυφως πύραυλος, βάρους $B = 8 \text{ tn}^*$, ἐφωδιασμένος δι' ἐπαρκῶν καυσίμων. *Ὁ πύραυλος πυροδοτεῖται καὶ ἀρχεταὶ ἀνερχόμενος. *Ἐὰν ἡ ποσότης τῶν ἐξερχομένων ἀπὸ τὸν πύραυλον ἀερίων εἶναι $\alpha = 200 \text{ kgr/sec}$, ποία ἡ ἐλάχιστη ταχύτης ἐξόδου αὐτῶν. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. *Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).

Λύσις. *Ὁ πύραυλος θὰ ἀρχίσῃ νὰ ἀνέρχεται, ὅταν ἡ ὥστικὴ δύναμις τῶν ἀερίων F ἐξουδετερώσῃ τὴν ἑλξιν τῆς Γῆς ἐπὶ τοῦ πυραύλου, ἥτοι ὅταν :

$$F = B \quad (1)$$

Γνωρίζομεν όμως ότι :

$$F = \frac{m_{\alpha} \cdot \Delta v_{\alpha}}{\Delta t} \quad (2)$$

όπου m_{α} ή μάζα τών εξερχομένων αερίων εις χρόνον Δt και Δv_{α} ή μεταβολή τῆς ταχύτητος αὐτῶν.
 'Εξ ἄλλου, ἐφ' ὅσον πρὸ τῆς πυροδοτήσεως δὲν ἔχομεν κίνησιν αερίων, $\Delta v_{\alpha} = v_{\alpha}$, δηλαδή Δv_{α} εἶναι ἰση μετὴν ταχύτητα ἐξόδου τῶν αερίων v_{α} μετὰ τὴν πυροδότησιν, ἐνῶ $m_{\alpha} / \Delta t = \alpha$.
 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν :

$$F = \alpha \cdot v_{\alpha} \quad \eta : \quad v_{\alpha} = \frac{F}{\alpha} = \frac{B}{\alpha} \quad (3)$$

'Εργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων θὰ ἔχωμεν : $B = 8000 \text{ kg} \cdot \text{sec}^{-1}$ καὶ $\alpha = 200 \text{ kg} / \text{sec} = 20 \text{ T.M. μάζης/sec}$. *Ὅθεν εὐρίσκομεν :

$$v_{\alpha} = 400 \text{ m/sec}$$

KΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

974. Αὐτοκίνητον μάζης 1500 kg κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec . Πόση ἡ ὁρμή τοῦ αὐτοκινήτου. (Ἄπ. $3000 \text{ kg} \cdot \text{sec}$.)

975. Σφαῖρα χαλυβδίνης μάζης 200 gr βάλλεται ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. Ἡ σφαῖρα προσκρούει ἐπὶ τῆς πλακός κατακορυφῶς καὶ ἀναπηδᾷ. Ἐὰν ἡ ταχύτης πρὸ τῆς κρούσεως εἶναι 20 m/sec καὶ μετὰ τὴν κρούσιν 18 m/sec , πόση ἡ συνολικὴ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. (Ἄπ. $0,76 \text{ kg} \cdot \text{sec}$.)

976. Σφαῖρα μάζης 1 kg εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ καὶ μεταδίδεται εἰς αὐτὴν ταχύτης 4 m/sec . Πόση ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. Πόση ἡ ὥθησις δυνάμεως. (Ἄπ. $4 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}$, $4 \text{ Nt} \cdot \text{sec}$.)

977. Ποία ἡ ὁρμή βλήματος βάρους $250 \text{ kg} \cdot \text{sec}$ κινουμένου μετὰ ταχύτητα 75 m/sec . (Ἄπ. $1,9 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}$.)

978. Σφαῖρα, μάζης 60 gr , βάλλεται ὑπὸ πυροβόλου ὅπλου μάζης $4,5 \text{ kg}$ ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec . Νὰ ὑπολογισθῇ, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου. (Ἄπ. 800 cm/sec .)

979. Σφαῖρα Α, μάζης $2,25 \text{ kg}$, καὶ ἑτέρα Β, μάζης $4,5 \text{ kg}$, ἔχουν ἀντιστοίχως ταχύτητας 3 m/sec καὶ $4,2 \text{ m/sec}$ καὶ κινοῦνται κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις, πλησιάζουσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι $0,80$, πόση ἡ ταχύτης αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν. (Ἄπ. $v_1 = -5,34 \text{ m/sec}$, $v_2 = 0,12 \text{ m/sec}$.)

980. Ἀπὸ ποῖον ὕψος πίπτει σφαῖρα, ἥτις κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως αὐτῆς μετὰ τοῦ ἐδάφους ἔχει ὁρμὴν $100 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$ καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$. Ποία ἡ μάζα τῆς ἐν λόγω σφαίρας. (Ἄπ. $h = 5,10 \text{ m}$. Ἡ μάζα m τῆς σφαίρας εἶναι $m = 10 \text{ kg}$.)

981. Ἐξ ἐνὸς τηλεβόλου μάζης 4000 kg ἐξακοντίζεται βλήμα μάζης $24,5 \text{ kg}$. Τὸ τηλεβόλον κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος ὠθεῖται πρὸς τὰ ὀπίσω μετὰ ταχύτητα $1,4 \text{ m/sec}$. Ποίαν ταχύτητα ἀπέκτησε τὸ βλήμα. (Ἄπ. $228,6 \text{ m/sec}$.)

982. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει δύναμις $30 \text{ kg} \cdot \text{sec}^{-1}$ νὰ ἐπενεργῇ ἐπὶ σώματος βάρους $120 \text{ kg} \cdot \text{sec}^{-1}$, ἵνα ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἀπὸ 5 m/sec αὐξηθῇ εἰς τὸ δεκαπλάσιον. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. $t = 18,34 \text{ sec}$.)

983. Σφαίρα ἐξ ἐλεφαντοστοῦ μάζης 400 gr, κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec, προσκρούει κεντρικῶς μὲ ἑτέραν μάζης 100 gr, κινουμένην ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν ἦσαν πρὸ τῆς κρούσεως τῆς αὐτῆς φορᾶς, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν.
(Ἀπ. 3,80 m/sec, 6,80 m/sec.)

984. Σφαίρα ἐλαστικῆ μάζης 400 gr, κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec, προσκρούει κεντρικῶς μὲ ἑτέραν ὁμοίαν μάζης 100 gr, κινουμένην ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν εἶχον πρὸ τῆς κρούσεως ἀντιθέτους φορᾶς, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν.
(Ἀπ. 2,2 m/sec, 9,2 m/sec.)

985. Πόση εἶναι ἡ ὁρμὴ φορτηγοῦ βαγονίου μάζης 5 τόννων, ὅταν κινῆται ὑπὸ ταχύτητα 96 km/h. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. 13 345 kg·sec.)

986. Σφαίρα ἐξ ἐλεφαντοστοῦ, μάζης 400 gr, κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec ὑφίσταται κεντρικὴν κρούσιν μὲ ἑτέραν σφαῖραν ὁμοίαν, μάζης 100 gr, εὐρίσκομένην ἐν ἡρεμίᾳ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν.
(Ἀπ. $v = 300 \text{ cm/sec}$, $v' = 800 \text{ cm/sec}$.)

987. Πρὸ ἀνενδότου κατακορύφου τοίχου εὐρίσκονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ τοίχου ἀποστάσεις 2,75 m καὶ 4 m ἀντιστοίχως, καὶ μεταξύ των ἀποστάσιν (AB) = 10 m. Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἐκκινουσα ἐκ τοῦ Α ἀνακλᾷται ἐπὶ τοῦ τοίχου εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκολούθως κινουμένη διέρχεται διὰ τοῦ Β. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπὸ τῆς σφαίρας διανυθὲν διάστημα $s = (ΑΓ) + (ΒΓ)$.
(Ἀπ. 12 m.)

988. Παιδίον ἄρχεται ἀναρριχώμενον διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου σχοινίου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ λαιμοῦ παγίας τροχαλίας καὶ φέρει εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ, ἀντίβαρον, ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ παιδίου. Πῶς θὰ ἐξελιχθῇ τὸ φαινόμενον, τῆς τριβῆς θεωρουμένης ὡς ἀμελητέας.

(Ἀπ. Ἐπειδὴ τὸ παιδίον καὶ τὸ ἀντίβαρον ἀποτελοῦν ἀποκεκλεισμένον σύστημα, καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος παραμένει σταθερά, τοῦ παιδίου ἀναρριχώμενου, κινουμένου δηλαδὴ πρὸς τὰ ἄνω, θὰ κινῆται πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὸ ἀντίβαρον καὶ μάλιστα μετὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται καὶ τὸ παιδίον. Συνεπῶς ἀντίβαρον καὶ παιδίον φθάνουν ὁμοῦ εἰς τὴν τροχαλίαν.)



Ἀσκήσις 988.

989. Σφαῖρα Α μάζης m_1 καὶ ἑτέρα Β μάζης m_2 κινοῦνται ἐπὶ τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα αὐτῶν εὐθείας, κατὰ τινα δὲ στιγμὴν αἱ δύο σφαῖραι συναντῶνται καὶ ἐκτελοῦν κρούσιν τελειῶς ἐλαστικὴν. Μετὰ τὴν κρούσιν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι v_1 καὶ v_2 . Ποῖαι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ: $m_1 = 600 \text{ gr}$, $m_2 = 400 \text{ gr}$, $v_1 = 4 \text{ m/sec}$, $v_2 = 1 \text{ m/sec}$.
(Ἀπ. $v_1 = 1,6 \text{ m/sec}$, $v_2 = 4,6 \text{ m/sec}$.)

990. Ἐλαστικὴ σφαῖρα βάρους 2 kg·sec συναντᾶται μετ' ἄλλης σφαίρας βάρους 1 kg·sec καὶ ταχύτητος 2 m/sec καὶ ἐκτελεῖ μετ' αὐτῆς κεντρικὴν κρούσιν τελειῶς ἐλαστικὴν. Ζητοῦνται: α) Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ κέκτηται ἡ πρώτη σφαῖρα πρὸ τῆς κρούσεως, ἵνα ἡ δευτέρα ἡρεμῇ μετὰ ταύτην. β) Ποία ἡ ταχύτης τῆς πρώτης σφαίρας μετὰ τὴν κρούσιν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.
(Ἀπ. α' 0,5 m/sec. β' 1,5 m/sec.)

991. Ποίαν ταχύτητα ἀνακρούσεως ἀποκτᾷ πυροβόλον ὅπλον, ὅταν τὸ βάρος του εἶναι 4 kg·sec καὶ ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας τὸ βάρος εἶναι 10 gr·sec, ἐξέρχεται τοῦ ὅπλου ὑπὸ ταχύτητα 900 m/sec.
(Ἀπ. 2,25 m/sec = 8,1 km/h.)

992. Βλήμα μάζης 12 gr βάλλεται από όπλον βάρους 5 kg*. Πόση είναι η ταχύτης ανακρούσεως του πυροβόλου, εάν το βλήμα εξέρχεται της κάννης με ταχύτητα 850 m/sec. ('Απ. $u_2 = -2$ m/sec.)

993. Πυροβόλον βάρους 2500 kg* έχει ταχύτητα ανακρούσεως 2,5 m/sec. Ποία η ταχύτης βλήματος βάρους 7,5 kg* κατά την στιγμήν της έκπυρσοκροτήσεως. ('Απ. 833 m/sec.)

994. Σφαίρα Α μάζης 200 gr, κινουμένη με ταχύτητα 50 cm/sec, συγκρούεται απ' ευθείας μετ' άλλης σφαίρας Β, μάζης 300 gr, ήτις άκίνητη. Νά εύρεθῇ ἡ ταχύτης ἐκάστης σφαίρας μετὰ τὴν κρούσιν, ἐάν ὁ συντελεστὴς κρούσεως μεταξὺ τῶν εἶναι 0,6. ('Απ. $A = 2$ cm/sec, $B = 3,2$ cm/sec.)

995. Δύο ἀντικείμενα, μάζης 0,15 kg, καὶ 0,1 kg, κινοῦνται κατ' ἀντίθετον φορὰν μετὰ ταχύτητα 4 m/sec καὶ 3 m/sec ἀντιστοίχως. Ποία ἡ ταχύτης τῶν δύο ἀντικειμένων μετὰ τὴν σύγκρουσιν τῶν, ἐάν : α) ἡ κρούσις εἶναι τελείως μὴ ἐλαστική, β) ὁ συντελεστής κρούσεως εἶναι 0,6. ('Απ. $\alpha' u = 1,2$ m/sec. $\beta' u_1 = -0,48$ m/sec, $u_2 = 3,7$ m/sec.)

996. Χαλυβδίνη σφαῖρα μάζης 0,2 kg ρίπτεται ἐξ ὕψους 6 m καὶ μετὰ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου χαλυβδίνης πλακός. Εἰς ποῖον ὕψος ἀναπηδᾷ ἡ σφαῖρα, ὅταν τὰ 20% τῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν ἀναπήδησιν μεταβάλλωνται εἰς θερμότητα. ($g = 10$ m/sec²). ('Απ. $h = 8,8$ m.)

997. Σφαῖρα μάζης 4 kg καὶ ταχύτητος 6 m/sec πίπτει ἐπὶ ἄλλης σφαίρας, τὴν ὅποιαν καταφθάνει, μάζης 10 kg, καὶ συγκρούεται μετὰ αὐτὴν κεντρικῶς καὶ ἐλαστικῶς. Μετὰ τὴν κρούσιν ἡ μικροτέρα σφαῖρα ἡρεμεῖ. α) Ποία ἡ ταχύτης τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας πρὸ τῆς κρούσεως. β) Ποία ἡ ταχύτης τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας μετὰ τὴν κρούσιν. ('Απ. $\alpha' u_2 = 1,8$ m/sec. $\beta' u_2 = 4,2$ m/sec.)

998. Σῶμα μάζης m_1 ἔχει ταχύτητα u_1 καὶ συγκρούεται πρὸς σῶμα μάζης m_2 ἔχον ταχύτητα u_2 . Τὰ διανύσματα τῶν ταχυτήτων εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἡ σύγκρουσις εἶναι τελείως ἐλαστική. Νά ἐκφρασθοῦν βάσει τῶν δεδομένων αἱ ταχύτητες u καὶ u' τῶν δύο σωμάτων μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

$$(\text{'Απ. } u = \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad u' = \frac{(m_2 - m_1) u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2})$$

999. Δύο ἐλαστικαὶ σφαῖραι, μετὰ μάζας $m_1 = 2$ kg καὶ $m_2 = 4$ kg, κινοῦνται ἀντιθέτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ ταχύτητας $u_1 = 6$ m/sec καὶ $u_2 = -3$ m/sec. α) Ποία ἡ ταχύτης τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν. β) Ποία ἡ συνολικὴ κινητικὴ ἐνέργεια, πρὸ καὶ μετὰ τὴν κρούσιν.

$$(\text{'Απ. } \alpha' u_1 = -6 \text{ m/sec, } u_2 = 3 \text{ m/sec. } \beta' E_{\text{κιν}} = 54 \text{ Joule.})$$

1000. Δύο σφαῖραι μετὰ μάζας $m_1 = 200$ gr καὶ $m_2 = 600$ gr κινοῦνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν μετὰ ταχύτητας $u_1 = 4$ m/sec καὶ $u_2 = 10$ m/sec. Ἡ δευτέρα σφαῖρα προφθάνουσα τὴν πρώτην προσκρούει ἐπ' αὐτῆς κεντρικῶς καὶ μὴ ἐλαστικῶς. Ποία ἡ ταχύτης τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν. ('Απ. $u = 8,5$ m/sec.)

1001. Ἀντικείμενον βάρους 2,5 gr*, κινούμενον μετὰ ταχύτητα 0,7 m/sec, πλησιάζει πρὸς ἀντικείμενον βάρους 1,8 gr*, κινούμενον κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν μετὰ ταχύτητα 1,2 m/sec. α) Ποία θὰ εἶναι αἱ ταχύτητες τῶν κατόπιν τελείας ἐλαστικῆς κρούσεως. β) Ποία θὰ εἶναι αἱ ταχύτητες, ἐάν ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι 0,75.

$$(\text{'Απ. } \alpha' -0,89 \text{ m/sec, } 1 \text{ m/sec. } \beta' -0,69 \text{ m/sec, } 0,73 \text{ m/sec.})$$

1002. Ἡ κεφαλὴ σφυρίου κτυπᾷ καρφίον μετὰ δύναμιν 550 Νιοῦτον καὶ ἀκίνητῇ εἰς χρόνον 0,005 sec. Ποία εἶναι ἡ παραγομένη ὁρμή. ('Απ. 2,75 Nt·sec.)

1003. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἐπενεργεῖ δύναμις $4 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$, ἐπὶ ἀρχικῶς ἡρεμοῦντος σώματος, μάζης $0,1 \text{ kg}$, διὰ τὴν τοῦ προσδωσθέντα ταχύτητα 5 m/sec . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. $t = 1/80 \text{ sec}$.)

1004. Χαλυβδίνη σφαῖρα μάζης 50 gr πίπτει ἐξ ὕψους $h = 5 \text{ m}$ ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. α) Ποία ἡ ὁρμὴ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως. β) Ποία ἡ ἐπὶ τῆς πλακὸς ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν ἡ ἐπαφὴ σφαίρας καὶ πλακὸς διαρκῇ $0,01 \text{ sec}$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. α' $J = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$. β' $F = 50 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$.)

1005. Σφαῖρα ἀντισφαιρίσεως 140 gr προσπίπτει καθέτως ὑπὸ ταχύτητα 48 m/sec ἐπὶ ρακέττας, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκφεύγει κατὰ ἀντίθετον διεύθυνσιν, ἀφοῦ μείνῃ ἐν ἐπαφῇ πρὸς αὐτὴν ἐπὶ $0,02 \text{ sec}$, ὑπὸ ταχύτητα 84 m/sec . Ζητοῦνται : α) Ἡ ὁρμὴ τῆς ὁποίας μεταδίδει ἡ ρακέττα εἰς τὴν σφαῖραν, β) ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκει ἡ ρακέττα ἐπὶ τῆς σφαίρας. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἀπ. α' $1,18 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$. β' $59 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$.)

1006. Ἐὰν ἡ μᾶζα αὐτοκινήτου εἶναι 3 τόννοι , κινῆται δὲ ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h καὶ προσκρούει ἐπὶ κωλύματος, ἡ δὲ κρούσις διαρκῇ ἐπὶ $0,1 \text{ sec}$, πόση ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις.
(Ἀπ. $49980 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$.)

1007. Χαλυβδίνη σφαῖρα 500 gr πίπτει κατακορυφῶς ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. Ἡ ταχύτης προσκρούσεως εἶναι 30 m/sec , ἡ δὲ σφαῖρα ἀναπηδᾷ μετὰ τὴν κρούσιν ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec . Πόση ἡ ὥθησις δυνάμεως κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κρούσεως τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς πλακὸς εἰς ἐπαφὴν ἐπὶ $0,01 \text{ sec}$, πόση ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπ' αὐτῆς.
(Ἀπ. $25 \text{ Nt} \cdot \text{sec}$, 2500 Nt .)

1008. Σφαῖρα γκόλφ $0,02 \text{ kg}$ εὐρισκόμενη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κρούεται μὲ δύναμιν $0,5 \text{ Nt}$, ἥτις τῆς προσδίδει ταχύτητα 3 m/sec . Ποία ἡ ὁρμὴ καὶ ὁ χρόνος ἐπαφῆς τῆς σφαίρας.
(Ἀπ. $0,06 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$, $t = 0,12 \text{ sec}$.)

1009. Ποία δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τῆς κεφαλῇς καρφίδος, κυττωμένης ὑπὸ σφύρας, μάζης $m = 1 \text{ kg}$, ἐὰν ἡ καρφὶς ἐντὸς χρόνου $0,01 \text{ sec}$ ἐκ τῆς ταχύτητος τῶν 5 m/sec ἐπανερχεται εἰς τὴν ἡρεμίαν.
(Ἀπ. $F = 50 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$.)

1010. Αὐτοκίνητον, μάζης 10 τόννων , κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 10 km/h καὶ συγκρούμενον συζεύγνυται πρὸς ἕτερον αὐτοκίνητον, μάζης 7 τόννων , εὐρισκόμενον ἐν ἡρεμίᾳ. Πόση ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο αὐτοκινήτων εἰς cm/sec .
(Ἀπ. 164 cm/sec .)

1011. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον μάζης 50 τόννων , κινούμενον ὑπὸ ταχύτητα 24 km/h , ἐπιτίπτει ἐπὶ ἑτέρου ἀκινήτου αὐτοκινήτου τῆς αὐτῆς μάζης καὶ ἐξακολουθοῦν κινούμενα ἀμφότερα ὥς νὰ ἀπετέλουν ἓν σῶμα. Πόση ἡ κοινὴ ταχύτης ἀμφοτέρων εἰς m/sec .
(Ἀπ. $3,35 \text{ m/sec}$.)

1012. Ὅπλον μάζης 5 kg βάλλει σφαῖραν μάζης 10 gr ὑπὸ ταχύτητα 700 m/sec . Πόση εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου.
(Ἀπ. 140 cm/sec .)

1013. Δύο σφαῖραι Α καὶ Β, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν 2 kg , κινοῦνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς ἐνοῦσης τὰ κέντρα αὐτῶν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ πλησιάζουν ἀλλήλας. Ἡ Α ἔχει ταχύτητα $u_1 = 9 \text{ m/sec}$, ἡ δὲ Β $u_2 = 6 \text{ m/sec}$. Ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ κρούσις τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι τελείως ἐλαστικὴ, ποῖα θὰ εἶναι αἱ ταχύτητες αὐτῶν u'_1 καὶ u'_2 μετὰ τὴν κρούσιν.
(Ἀπ. $u'_1 = 6 \text{ m/sec}$, $u'_2 = 9 \text{ m/sec}$.)

1014. Ὑπὸ ποίαν ἀναλογίαν μάζης δύναται μία σφαῖρα, ἡ ὁποία συγκρούεται ἐλαστικῶς καὶ κεντρικῶς μετὰ ἡρεμοῦσης σφαίρας, νὰ δίδῃ εἰς αὐτὴν τὴν μεγίστην ἐνέργειαν.
(Ἀπ. $m_1/m_2 = 1$.)

1015. Δύο σφαίραι Α και Β, έχουσαι εκάστη μάζαν 2 kg, κινούνται υπό ταχύτητας 6 m/sec και 9 m/sec κατ' αντιθέτους διευθύνσεις, πλησιάζουσαι πρὸς ἀλλήλας. Ζητείται, πόση ἡ ταχύτης αὐτῶν μετὰ τὴν κρούσιν, ὑποτιθεμένου ὅτι αὕτη εἶναι τελείως ἐλαστική.
(Ἄπ. $u_1 = -9$ m/sec, $u_2 = 6$ m/sec.)

1016. Αὐτοκίνητον βάρους 1440 kg* κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 96 km/h. Ζητοῦνται : α) Ἡ ὁρμή τοῦ αὐτοκινήτου, β) ἡ δύναμις ἡ ὁποία δύναται νὰ τὸ ἀκίνητοποιήσῃ ἐντὸς 2,5 sec καὶ γ) πόσον διαστήμα θὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον μέχρις ὅτου ἡρεμήσῃ. ($g = 10$ m/sec²). (Ἄπ. α' 3845 kg*·sec, β' 1538 kg*, γ' 34,5 m.)

1017. Σφύρα, βάρους 250 kg*, ἐπιτίπτεται ἐπὶ πασσάλου, βάρους 150 kg*, ἐξ ὕψους 2 m. Ἡ σφύρα ἀναπηδᾷ, κτυπῶσα ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ πασσάλου καὶ οὕτω κατὰ τὴν τελικὴν κρούσιν ὁ πάσσαλος εἰσχωρεῖ κατὰ 6 cm ἐντὸς τοῦ ἐδάφους. Ποῖον μέγιστον φορτίον δύναται νὰ ὑποφέρῃ ὁ πάσσαλος, διὰ νὰ μὴ εἰσχωρήσῃ βαθυτέρον.
(Ἄπ. 5195 kg*.)

1018. Πυροβόλον ἔχει βάρος 450 kg* ἡ δὲ ὀβίς βάρους 16 kg*. Πόση ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ σωλήνος τοῦ πυροβόλου, ὅταν ἡ ὀβίς ἐξέρχεται ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ ταχύτητα 550 m/sec, καὶ πόση ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ἡ ἐκρηκτικὴ ὕλη.
(Ἄπ. 19,6 m/sec = 70,5 km/h, 0,7 kWh.)

1019. Σῶμα μάζης 50 gr, κινούμενον ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ἀποστάσεως 30 cm καθέτως πρὸς ὀριζοντίαν ἐπιφάνειαν καὶ μετὰ τὴν κρούσιν ἀναπηδᾷ εἰς ὕψος 20 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς καὶ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν κρούσιν. ($g = 981$ cm/sec²).

(Ἄπ. Ἀπωλεσθεῖσα ὁρμὴ 225 gr·cm·sec⁻¹ μονάδες, ἀπωλεσθεῖσα κινητικὴ ἐνέργεια 4,905·10⁴ erg.)

1020. Ἡ ἀντίστασις τῶν πεδῶν κατὰ τὴν ὀπισθοδρόμησιν σωλήνος πυροβόλου θεωρεῖται εἰς πρώτην προσέγγισιν σταθερά. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος ἀνακρούσεως τοῦ σωλήνος πυροβόλου, ὅταν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σωλήνος εἶναι 10 m/sec καὶ τὸ μήκος τοῦ διαστήματος ὀπισθοδρομήσεως 1 m.
(Ἄπ. 0,2 sec.)

1021. Τί συμβαίνει ὅταν ἓν μόριον ἀερίου συγκρούεται καθέτως πρὸς ἀκλόνητον παραπέτασμα καὶ ἡ κρούσις εἶναι ἐλαστικὴ. Ποῖον ποσὸν ἐνεργείας ἀπορροφᾷται ὑπὸ τοῦ πετάσματος κατὰ τὴν κρούσιν.

(Ἄπ. Ἡ ταχύτης τοῦ μορίου παραμένει ἡ αὕτη κατὰ τὸ μέτρον. Ἀλλάσσει μόνον ἡ διεύθυνσίς της. Οὐδὲν ποσὸν ἐνεργείας ἀποτίθεται εἰς τὸ πέτασμα.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1022. Πυροβόλον τῶν 15 cm βάλλει βλήμα βάρους 40 kg*, τὸ ὁποῖον ἐξερχόμενον τοῦ σωλήνος τοῦ πυροβόλου ἔχει ταχύτητα 500 m/sec. Ὁ σωλὴν ἔχει βάρους 1000 kg*, ἐκτελεῖ δὲ κίνησιν ἀνακρούσεως μετατοπιζόμενος πρὸς τὰ ὅπια κατὰ 1 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ἡ μεγίστη ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ σωλήνος, β) ἡ ἀκουμένη ἐπὶ τοῦ σωλήνος δύναμις πεδήσεως.
(Ἄπ. 20 m/sec, 20 tn*.)

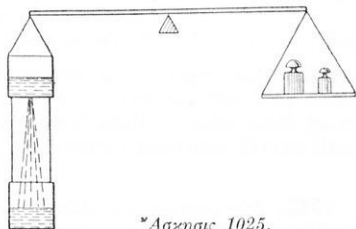
1023. Πυροβόλον μήκους 4 m ρίπτει βλήμα βάρους 30 kg* ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec. Ζητοῦνται : α) Ἡ ἐντασις τῆς ὠθούσης αὐτὸ δυνάμεως ἐντὸς τοῦ πυροβόλου, ὑποτιθεμένης σταθερᾶς, εἰς kg* καὶ dyn. β) Τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως ταύτης εἰς kg*m καὶ Joule. γ) Ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἰσχύς εἰς Watt καὶ HP.

(Ἄπ. α' 135 000 kg*, 135·10⁹ dyn. β' 540 000 kg*m, 54·10⁵ Joule. γ' 405·10⁶ Watt, 526 666 HP.)

1024. Πυροβόλον, μάζης 2000 kg, βάλλει βλήμα, μάζης 5 kg, το όποιον κατά την έξοδον εκ του σωλήνος, έχοντος μήκος 2 m, κινείται με ταχύτητα 800 m/sec. Ζητούνται : α) Ποία ή ώστική δύναμις τῶν αερίων εἰς dyn καὶ kgf*. β) Ποία ή κινητική ἐνέργεια τοῦ βλήματος εἰς τὸ στόμιον τοῦ σωλήνος. γ) Πόση εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ή ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ὅπλου.

(Ἀπ. α' $8 \cdot 10^{10}$ dyn = 81 550 kgf*.

β' $16 \cdot 10^{12}$ erg. γ' 2 m/sec.)



*Άσκησης 1025.

1025. Ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ δίσκου ζυγοῦ, εὐρίσκομένου εἰς ἰσορροπίαν, κρέμαται δοχεῖον πλήρες ὕδατος, κάτωθεν δὲ αὐτοῦ εὐρίσκεται κενὸν δοχεῖον. Κατὰ τινα στιγμὴν ἀνοίγεται ὀπή, ὑπάρχουσα εἰς τὸν πυθμένα τοῦ ἄνω δοχείου, καὶ ἀρχίζει νὰ ἐκρέη ὕδωρ, συλλεγόμενον εἰς τὸ κάτω δοχεῖον. Τί συμβαίνει διαρκούσης τῆς ἐκροῆς τοῦ ὕδατος.

(Ἀπ. Ἡ ἰσορροπία διατηρεῖται. Πράγματι, ἐὰν u_1 ή ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος, τότε εἰς τὸ κάτω δοχεῖον τὸ ὕδωρ ἔχει ταχύτητα $u_2 = u_1 + gt$ (1), ὅπου t ὁ χρόνος πτώσεως τῶν σταγόνων. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἐπὶ m , ἥτοι ἐπὶ τὴν μάζαν ἐκροῆς εἰς χρόνον t , καὶ διαιρέσεως διὰ t λαμβάνομεν :

$$\frac{mu_2}{t} - \frac{mu_1}{t} - mg = 0 \quad (2)$$

Αἱ ποσότητες $\frac{mu_2}{t}$ καὶ $\frac{mu_1}{t}$ παριστοῦν τὴν χρονικὴν μεταβολὴν τῆς ὀρμῆς, ἥτοι τὰς ἐπὶ τοῦ κάτω καὶ ἄνω δοχείου δρώσας δυνάμεις καὶ mg τὸ βάρος τοῦ κατ' ὁδὸν εὐρίσκομένου ὕδατος.)

1026. Δίδονται δύο τελείως ἐλαστικαὶ σφαῖραι, Α καὶ Β. Ἡ μάζα τῆς Α εἶναι 100 gr καὶ κινεῖται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ με ταχύτητα 20 cm/sec. Εὔρατε τὰς ταχύτητας τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν κατὰ τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις : α) Ὅταν ή Β ήρεμὴ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως, β) ὅταν ή Β κινῆται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν ὡς πρὸς τὴν Α, με ταχύτητα 50 cm/sec, γ) ὅταν ή Β κινῆται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν με τὴν Α, με ταχύτητα 50 cm/sec.

(Ἀπ. α' $u_1' = +13,3$ cm/sec, $u_2' = +20$ cm/sec. β' $u_1' = -3,3$ cm/sec, $u_2' = +20$ cm/sec. γ' $u_1' = +30$ cm/sec, $u_2' = +20$ cm/sec.)

1027. Πυροβόλον βάλλει 10 σφαῖρας κατὰ δευτερόλεπτον ἐπὶ στόχον. Ἐκάστη τῶν σφαιρῶν ἔχει μάζαν 14,5 gr καὶ κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 720 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ή δύναμις ή ἀπαιτούμενη διὰ τὴν συγκράτησιν τόσοσ τοῦ πυροβόλου ὅσον καὶ τοῦ στόχου εἰς τὴν θέσιν των. ($g = 10$ m/sec²). (Ἀπ. 10,4 kgf*, 10,4 kgf*.)

1028. Σφαῖρα κινουμένη με ταχύτητα μέτρου u_1 συγκρούεται κεντρικῶς με ἄλλην σφαῖραν ταχύτητος μέτρου u_2 καὶ τῆς αὐτῆς μάζης. Τί συμβαίνει ὅταν αἱ σφαῖραι κινούνται : α) κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, β) πρὸς ἀντίθετους διευθύνσεις καὶ ή κρούσις γίνεται : 1) μὴ τελείως ἐλαστικῶς, 2) ἐλαστικῶς.

(Ἀπ. 1. α' $u = u_1 + u_2/2$. β' $u = u_1 - u_2/2$.
2. α' $u_1' = u_2$, $u_2' = u_1$. β' $u_1' = u_2$, $u_2' = u_1$.)

1029. Δύο σώματα με μάζας 4 kgf καὶ 6 kgf καὶ ταχύτητας 8 m/sec καὶ 12 m/sec συγκρούονται : α) ἐκ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, β) ἐξ ἀντιθέτων διευθύνσεων. Ποῖαι αἱ ταχύτητες τῶν σωμάτων μετὰ τὴν κρούσιν, ὅταν αὕτη γίνεται : 1) μὴ τελείως ἐλαστικῶς, 2) ἐλαστικῶς.

(Ἀπ. 1. α' $u = 10,4$ m/sec. β' $u = -4$ m/sec. 2. α' $u_1' = 12,8$ m/sec, $u_2' = 8,8$ m/sec. β' $u_1' = -16$ m/sec, $u_2' = 4$ m/sec.)

1030. Σφαίρα μάζης 5 kgf και ταχύτητας 12 m/sec συγκρούεται κεντρικῶς με ἡρεμοῦσαν σφαίραν μάζης 10 kgf. α) Ποῖαι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν, ὅταν αὕτη γίνεται : 1) μὴ τελείως ἐλαστικῶς, 2) ἐλαστικῶς. β) Ποῖον ποσοστὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας μεταβάλλεται κατὰ τὴν μὴ ἐλαστικὴν κρούσιν εἰς θερμότητα.
(‘Απ. α’ 1. $v = 4$ m/sec, 2. $v_1 = -4$ m/sec, $v_2 = 8$ m/sec.
β’ $\Delta E = 240$ Joule, $E_1 = 360$ Joule, $E_2 = 120$ Joule, 67%.)

1031. Δύο σφαίραι, μετὰ τὴν αὐτὴν μάζαν τῶν 3 kgf, κινούνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ ἀντιθέτους ταχύτητας μέτρου 5 m/sec ἑκάστη καὶ προσκρούουν κεντρικῶς καὶ μὴ ἐλαστικῶς. α) Ποία ἡ ταχύτης τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν. β) Ποῖον τὸ ἐξ αἰτίας τῆς κρούσεως ἀναπτύχθην ποσὸν θερμότητος.
(‘Απ. α’ $v = 0$. β’ $Q = 18 \cdot 10^{-3}$ kcal.)

1032. Δύο σφαίραι μετὰ μάζας 2 kgf καὶ 6 kgf, κινούμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ ἀντιθέτους ταχύτητας, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα εἶναι 5 m/sec καὶ 10 m/sec, ὑφίστανται κεντρικὴν μὴ ἐλαστικὴν κρούσιν. α) Ποία ἡ ταχύτης τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κρούσιν. β) Ποῖον ποσὸν θερμότητος (εἰς kcal) ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν κρούσιν καὶ ποῖον ποσοστὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας μεταβάλλεται εἰς θερμότητα.
(‘Απ. α’ $v = -6,25$ m/sec. β’ $\Delta E = 0,04$ kcal, 52%, $E_1 = 325$ Joule, $E_2 = 156,25$ Joule.)

1033. Δύο μάζαι 5 kgf καὶ 15 kgf εἶναι προσδεδεμέναι εἰς τὰ δύο ἄκρα μικροῦ μὴ ἐλαστικοῦ σχοινίου, τὸ ὅποιον διατηρεῖται χαλαρόν. Εἰς τὴν μικρὰν σφαῖραν μεταδίδεται ἀκολουθῶς ταχύτης 500 cm/sec. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ συστήματος, ὅταν τὸ σχοινίον διαταθῇ.
(‘Απ. $v = 12,5$ cm/sec.)

1034. Σφαῖρα μάζης $m_1 = 500$ gr κινεῖται ἐπ’ εὐθείας ὑπὸ ταχύτητα $v_1 = 50$ cm/sec καὶ προλαμβάνει ἑτέραν σφαῖραν μάζης $m_2 = 1000$ gr, κινουμένην ὑπὸ ταχύτητα $v_2 = 25$ cm/sec. Ἐάν ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι 0,8, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν v'_1 καὶ v'_2 μετὰ τὴν κρούσιν, ὅτε αὗται ἀποχωρίζονται ἐκ νέου.
(‘Απ. $v'_1 = 20$ cm/sec, $v'_2 = 40$ cm/sec.)

1035. Τεμάχιον ἐκ ξύλου, μάζης 2 kgf, ἐξαρθᾶται ἐκ λεπτοῦ σύρματος μήκους 5 m ἐκ σταθεροῦ σημείου. Σφαῖρα μάζης 2 gr ἐκτοξεύεται ὀριζοντίως ἐντὸς τοῦ ξύλου κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ κέντρου βάρους του καὶ παραμένει ἐνσφηνωμένη ἐντὸς αὐτοῦ. Λόγω τῆς κρούσεως τὸ ξύλον μετακινεῖται κατὰ 35 cm πρὸς τὴν ὀριζοντίαν κατεύθυνσιν. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας κατὰ τὴν κρούσιν καὶ β) ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἥτις ἔλαβε χώραν.
(‘Απ. α’ $4,92 \cdot 10^4$ cm/sec. β’ $2,41 \cdot 10^9$ erg.)

1536. Ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ λείου ἐπιπέδου ἐκσφενδονίζεται σῶμα μετὰ ταχύτητα 20 m/sec ὑπὸ γωνίαν 30° μετὰ τῆς ὀριζοντίας. Ἐάν ὁ συντελεστὴς κρούσεως μετὰ τοῦ σώματος καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι 0,5, νὰ εὐρεθῇ ὁ διαρρέων πρὸ τῆς παύσεως τῆς ἀναπηδήσεως χρόνος καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ σώματος διανυθεῖσα ἀπόστασις κατὰ μήκος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν.
(‘Απ. 4,08 sec, 70,62 m.)

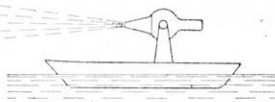
1037. Ὑαλινὴ σφαῖρα πίπτει ἀπὸ ὕψους 1 m ἐπὶ τραχείας ἐπιφανείας καὶ τὸ ὕψος τῆς δευτέρας ἀναπηδήσεως εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 45 cm. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κρούσεως μετὰ τὴν σφαῖρας καὶ ἐπιφανείας.
(‘Απ. 0,67.)

1038. Χαλυβδίνη σφαῖρα, μάζης 140 gr, προσπίπτει κατακορύφως ἐπὶ ἀκλονήτου χαλυβδίνης πλακὸς πρὸς τὴν ὁποίαν παραμένει εἰς ἐπαφὴν ἐπὶ χρονικὸν διάστημα 0,02 sec. Ἀκολουθῶς ἡ σφαῖρα ἀναπηδᾷ καὶ κινεῖται μετὰ ἀντίθετον διεύθυνσιν, ὑπὸ ταχύτητα 74 m/sec. Πόση ἡ ὁρμή, τὴν ὁποίαν μεταδίδει ἡ χαλυβδίνη πλᾶξ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ πόση ἡ μέση δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ πλᾶξ ἐπὶ τῆς σφαίρας.
(‘Απ. $10,4 \cdot 10^5$ gr · cm/sec, $10,4 \cdot 10^7$ dyn.)

1039. Βλήμα μάζης $m = 14 \text{ gr}$ διεισδύει υπό ταχύτητα u , υποτιθεμένην ὀριζοντίαν, ἐντὸς σώματος μάζης M ἐξηρητημένου διὰ νήματος ἀπὸ ἄξονα O . Τὸ βλήμα παραμένει ἐντὸς τοῦ σώματος καὶ τὸ σύνολον ὑψοῦται εἰς ὕψος h . Τὸ βλήμα εἰσδύει ἐντὸς τοῦ σώματος κατὰ τὴν ὀριζοντίαν διευθύνσιν, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος τούτου καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον βάρους. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης u . Δίδονται: $h = 0,1 \text{ m}$, $M = 5,986 \text{ kgr}$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. β) Ποία εἶναι ἡ ἀπώλεια τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἐντὸς τοῦ σώματος τούτου.

(Ἀπ. α' $u = 600 \text{ m/sec}$. β' $5986/6000$.)

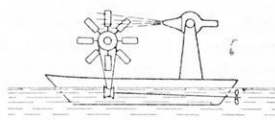
1040. Λέμβος πρόκειται νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν τῇ βοηθείᾳ ἄσκοῦ, παρέχοντος ἱκανὴν ποσότητα πεπιεσμένου ἀέρος, διὰ τῶν ἀκολουθῶν τριῶν διατάξεων: α) Διὰ τοῦ ἄσκοῦ μόνου, παρέχοντος ἐλεύθερον ρεῦμα ἀέρος (σχ. I). β) Τὸ ρεῦμα τοῦ πεπιεσμένου ἀέρος προσκρούει ἐπὶ ἱστίῳ (σχ. II). γ) Ὁ πεπιεσμένος ἀήρ προσκρούει ἐπὶ τῶν πτερυγίων τροχοῦ, θέτοντος διὰ παρεμβολῆς ἄξονος εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ἑλικά (σχ. III). Ποῖον τὸ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἀποτέλεσμα.



I



II



III

(Ἀπ. α' Θὰ ἔχωμεν κίνησιν τῆς λέμβου, διευθύνσεως ἀντιθέτου πρὸς τὸ ρεῦμα πεπιεσμένου ἀέρος, λόγω τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς. β' Ὁ ἄσκος, τὸ ἱστίον καὶ ἡ λέμβος ἀποτελοῦν ἀποκεκλεισμένον σύστημα, διὰ τοῦτο δὲν θὰ κινηθῇ ἡ λέμβος. γ' Ἡ ὁρμὴ τοῦ ἐπὶ τῶν πτερυγίων τοῦ τροχοῦ προσκρούοντος ἀέρος κινεῖ τελικῶς τὴν ἑλικά καὶ συνεπῶς ἡ λέμβος κινεῖται.)

1041. Σφαῖρα τυφεκίου, μάζης 50 gr , ρίπτεται ὀριζοντίως ἐντὸς ξυλίνου ὄγκου μάζης 10 kgr , ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται διὰ νημάτων μήκους 3 m . Ἐὰν μετὰ τὴν ἐνσφήνωσιν τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ ξύλου τὰ νήματα κινηθοῦν σχηματίζοντα γωνίαν 30° , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

(Ἀπ. $u = 5,65 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$.)

1042. Σφαῖρα τυφεκίου, μάζης 50 gr , κινουμένη μετὰ ταχύτητα 600 m/sec , προσπίπτει ἐπὶ ξυλίνου σώματος μάζης 20 kgr , τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ μακρῶν κατακορύφων νημάτων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ αἰωρῇται ἐλευθέρως. Ἡ σφαῖρα διαπερᾷ πλήρως τὸ ξύλον καὶ ἐξέρχεται ἐκ τῆς ἄλλης πλευρᾶς, κινουμένη μετὰ ταχύτητα 400 m/sec πρὸς τὴν ἀρχικὴν κατεύθυνσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κατακόρυφον ὕψος μέχρι τοῦ ὁποῖου ἀνέρχεται τὸ σῶμα.

(Ἀπ. $1,28 \text{ cm}$.)

1043. Σάκος πλήρης ἄμμου, βάρους 10 kgr^* , ἐξαρτᾶται ἀπὸ μακρὸν ἐλαφρὸν σχοινίον. Ἐὰν σφαῖρα τυφεκίου μάζης 45 gr , κινουμένη ὀριζοντίως, προσκρούσῃ ἐπὶ τοῦ σάκου καὶ ἐνσφηνωθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ὁ σάκος ὑποχωρεῖ μέχρις ὅτου τὸ κέντρον βάρους του φθάσῃ 15 cm ἀνωθεν τοῦ ἀρχικοῦ τοῦ ὕψους. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκινεῖτο ἡ σφαῖρα, ὅταν προσέκρουσεν ἐπὶ τοῦ σάκου.

(Ἀπ. 383 m/sec .)

1044. Σφαῖρα τυφεκίου κινουμένη μετὰ ταχύτητα 200 m/sec δύναται νὰ εἰσδύσῃ κατὰ 2 cm ἐντὸς ξύλου. Εἰς ποῖον βάθος δύναται νὰ εἰσδύσῃ, ὅταν κινῆται μετὰ ταχύτητα 500 m/sec , καὶ πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο.

(Ἀπ. $12,5 \text{ cm}$. $1/2000 \text{ sec}$.)

1045. Σφαῖρα ρίπτεται ἐπὶ λείου ὀριζοντίου δαπέδου καὶ προσπίπτει ἐπ' αὐτοῦ μετὰ ταχύτητα 5 m/sec ὑπὸ γωνίαν 60° μετὰ τῆς ὀριζοντίας. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς κρού-

σεως μεταξύ της σφαίρας και του δαπέδου είναι 0,6, να εύρεθῇ ἡ ὀριζοντία προβολή καὶ τὸ μέγιστον ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως. (Ἀπ. 132,4 cm, 34,4 cm.)

1046. Διὰ τὴν ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα βλήματος, χρησιμοποιοῦμεν βαλλιστικὸν ἐκκρεμές μάζης $M = 6 \text{ kgr}$ καὶ μήκους $l = 180 \text{ cm}$. Τὸ ὀριζοντίως βαλλόμενον βλήμα μάζης $m = 10 \text{ gr}$ προσενεῖ εἰς τὸ ἐκκρεμές ὀριζοντίαν ἀπόκλισην $s = 50 \text{ cm}$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $v = 715 \text{ m/sec}$.)

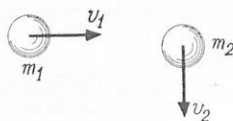
1047. Μᾶζα 300 gr ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πέρατος ἐλαφροῦ νήματος ὥστε νὰ σχηματίζῃ νῆμα τῆς στάθμης μήκους 100 cm. Σῶμα μάζης 50 gr, κινούμενον ὀριζοντίως, συγκρούεται μετὰ τῆς μάζης τῶν 300 gr καὶ εἰσέρχεται ἐν αὐτῇ. Τὸ σύστημα οὕτως ἀποκλίνει κατὰ γωνίαν 30° . Νὰ εύρεθῇ ἡ ταχύτης κρούσεως τοῦ σώματος.

(Ἀπ. 1135 cm/sec.)

1048. Σφαῖρα μάζης m προσπίπτει ἐλαστικῶς ἐπὶ τοῖχου ὑπὸ γωνίαν α . Ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας πρὸ καὶ μετὰ τὴν πρόσκρουσιν εἶναι ἡ αὐτὴ v , ἡ δὲ γωνία πρόσπτωσης ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν ἀνακλάσεως. Νὰ εύρεθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. (Ἀπ. 2 $m \cdot v \cdot \eta \mu \alpha$.)



Ἀσκήσις 1048.

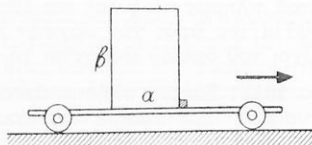


Ἀσκήσις 1049.

1049. Δύο σφαῖραι, μαζῶν m_1 καὶ m_2 , κινοῦνται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου μετὰ ταχύτητας v_1 καὶ v_2 ἀντιστοίχως καὶ καθέτους διευθύνσεις. Ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν σφαιρῶν, ἐὰν $m_1 = 2 \text{ gr}$, $m_2 = 3 \text{ gr}$, $v_1 = 6 \text{ m/sec}$, $v_2 = 4 \text{ m/sec}$. (Ἀπ. 1700 gr·cm/sec.)

1050. Τὰ καύσιμα ἀέρια ἱπταμένης βόμβας ἐξέρχονται μετὰ ταχύτητα 2 km/sec. Πόσα χιλιόγραμμα ἀερίων ἐκτινάσσονται ἀνὰ δευτερόλεπτον, ὅταν ἡ προωστικὴ δύναμις ἀνέρχεται εἰς 20 tn*. Μὲ ποίαν ἐπιτάχυνσιν ἀνυψοῦται κατακορύφως ὁ πύραυλος, ἐὰν ἡ μᾶζα αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς 10 tn. Ἐπὶ πόσον χρόνον διαρκεῖ ἡ καύσις 5 tn καυσίμων. (Ἀπ. α' 100 kgr/sec. β' 10 m/sec². γ' 50 sec.)

1051. Κιβώτιον πλάτους 3 m καὶ ὕψους 4 m, κεῖται ἐπὶ φορτηγοῦ κινουμένου ὀχήματος, ἀσφαλίζεται δὲ ἀπὸ ὀλίστησιν διὰ λεπτοῦ πάχους ἐμποδίου. Αἶφνης σταματᾷ τὸ ὄχημα καὶ τὸ κιβώτιον ἀνατρέπεται. Ποία ἡ μεγαλύτερα ταχύτης τοῦ οχήματος διὰ τὴν ὁποίαν τὸ κιβώτιον δὲν ἀνατρέπεται δι' αἰφνιδίαν ἀκίνητοποίησιν αὐτοῦ. (Ἀπ. 4,5 m/sec.)



Ἀσκήσις 1051.

1052. Πύραυλος ἐξαπολύεται ἐκ τοῦ ἐδάφους κατακορύφως, ἀποκτᾷ δὲ διὰ τῶν καυσίμων αὐτοῦ προωστικὴν δύναμιν 60 kgr* ἐντὸς χρόνου 100 sec. Τὸ βάρος τοῦ πυραύλου θεωρεῖται σταθερῶς ἴσον πρὸς 40 kgr*. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ταχύτης τοῦ πυραύλου μετὰ χρόνον 100 sec. β) Ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ. γ) Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται ἐντὸς 100 sec. (Ἀπ. α' 500 m/sec. β' 5 m/sec². γ' 25 000 m.)

1053. Ἡ ὁρμή σώματος πίπτοντος ἐλευθέρως ἀνέρχεται, μετὰ πτώσιν 6 m, εἰς 20 kgr·m/sec. Ποία ἡ μᾶζα καὶ τὸ ὀλικόν ὕψος πτώσεως, ἐὰν κατὰ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κρούσιν τὸ σῶμα ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν 400 kgr·m²/sec².

(Ἀπ. 1,843 kgr, 22,12 m.)

1054. Δύο ὅμοιαι ἐλαστικαὶ σφαῖραι συγκρούονται μὲ ταχύτητας u_1 καὶ u_2 , αἵ τινες κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως σχηματίζουν γωνίας ϕ_1 καὶ ϕ_2 μετὰ τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν εὐθείας. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μέτρα τῶν ταχυτήτων καὶ αἱ διευθύνσεις αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον μετὰ τὴν κρούσιν. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δευτέρα σφαῖρα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως ἡρεμεῖ.

(Ἀπ. α' ἐφ $\beta_1 = u_1 \eta \mu \alpha_1 / u_2 \sin \alpha_2$, ἐφ $\beta_2 = u_2 \eta \mu \alpha_2 / u_1 \sin \alpha_1$, $\omega_1 = u_2 \sin \alpha_2 / \sin \beta_1 = u_1 \eta \mu \alpha_1 / \eta \mu \beta_1$, $\omega_2 = u_1 \sin \alpha_1 / \sin \beta_2 = u_2 \eta \mu \alpha_2 / \eta \mu \beta_2$. β' Ἐὰν $u_2 = 0$, $\beta_1 = 90^\circ$, $\beta_2 = 0^\circ$, $\omega_1 = u_1 \eta \mu \alpha_1$, $\omega_2 = u_1 \sin \alpha_1$.)

1055. Δύο κυλινδρικὰ σώματα, ἔχοντα μάζας $m_1 = 120 \text{ gr}$ καὶ $m_2 = 300 \text{ gr}$ ἐκτινάσσονται αἰφνιδίως ὑπὸ τίνος ἀποσυσπειρωθέντος ἐλατηρίου πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις. Ζητοῦνται: α) Αἱ ταχύτητες u_1 καὶ u_2 ἐὰν τὸ ἐλατήριο ἀποδίδει ἐνέργειαν $0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}$. β) Αἱ αὐταὶ ταχύτητες ἐὰν ἐν τῶν δύο σωμάτων εἶναι ἀκλονήτως στερεωμένον.

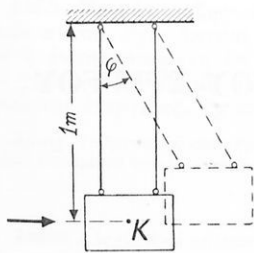


(Ἀπ. α' Εἶναι $m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2 = E$, $m_1 u_1 = m_2 u_2$, ἐξ ὧν: $m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_1^2 / 2 m_2 = E$, $u_1 = 764 \text{ cm/sec}$, $u_2 = 306 \text{ cm/sec}$. β' $m_1 u_1^2 / 2 = E$ ἢ $m_2 u_2^2 / 2 = E$, $u_1 = 904 \text{ cm/sec}$, $u_2 = 571 \text{ cm/sec}$.)

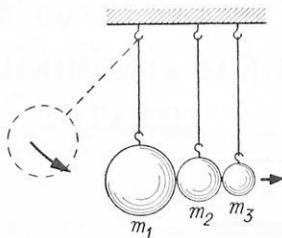
1056. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ταχύτητος βλήματος πυροβόλου ὄπλου, χρησιμοποιεῖται κιβώτιον πλήρες ἄμμου, μάζης 20 kg , σχηματίζον διὰ διπλῆς ἐξαρτήσεως βαλλιστικὸν ἐκκρεμές. Ἡ μάζα τοῦ βλήματος ἰσοῦται πρὸς 12 gr , ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ κιβωτίου ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως εἶναι 1 m , ἡ δὲ γωνία ϕ , κατὰ τὴν ὁποίαν ἀποκλίνουν τὰ νήματα ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας 10° . Ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος.

(Ἀπ. Τὸ κιβώτιον ἀποκτᾷ ταχύτητα $u_2 = 0,012 \cdot u / 20,012 = u / 1667,7$. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ κιβωτίου ἀνυψοῦται κατὰ $h = 1 - \sin 10^\circ = 0,0152 \text{ m}$. $u_2 = u / 1667,7 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,0152}$, $u = 910,7 \text{ m/sec}$.)

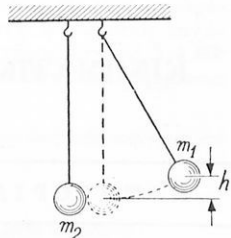
1057. Τρεῖς ἐλαστικαὶ σφαῖραι, αἱ μᾶζαι τῶν ὁποίων εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ $1 : 1/2 : 1/4$ ἐξαρτῶνται εἰς τρόπον ὥστε τὰ νήματα ἐξαρτήσεως νὰ εἶναι κατακόρυφα καὶ αἱ σφαῖραι νὰ ἐφάπτονται, τῶν κέντρων αὐτῶν εὕρισκομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίας.



Ἀσκησις 1056.



Ἀσκησις 1057.



Ἀσκησις 1058.

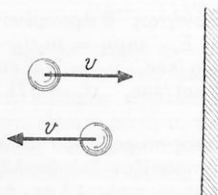
Ἀνυψοῦμεν τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν καὶ ἀφίνομεν ταύτην νὰ προσκρούσῃ πίπτουσα ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο μετὰ ταχύτητος u_1 . Μὲ ποίαν ταχύτητα ἀποσπᾶται ἡ τελευταία σφαῖρα, ἥτις ἔχει καὶ τὴν μικροτέραν μάζαν.

(Ἀπ. $16/9 u_1$.)

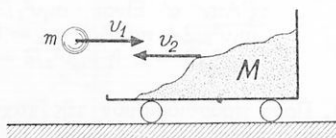
1058. Δύο ελαστικά σφαίρα της αὐτῆς ἀκτίνος, εἶναι ἐξηρητημένα διὰ νημάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἐφάπτονται ἀλλήλων. Αἱ μάζαι τῶν σφαιρῶν ἔχουν λόγον 2 : 1. Ἡ βαρύτερα ἀνυψοῦται κατὰ ὕψος h καὶ ἀφίεται ἐλευθέρως. Μέχρι ποίου ὕψους ἀνέρχονται αἱ σφαίραι μετὰ τὴν κρούσιν. (Ἀπ. $\frac{1}{9}h, \frac{16}{9}h$.)

1059. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος περιστρόφου, χρησιμοποιεῖται ὡς βαλλιστικὸν ἐκκρεμὲς τεμάχιον ξύλου, μάζης 616 gr, ἐξηρητημένον καταλλήλως οὕτως, ὥστε τὸ μήκος τοῦ ἐκκρεμοῦς νὰ ἰσοῦται πρὸς 178 cm. Τὸ βλήμα ἔχει μάζαν 2,59 gr καὶ κατὰ τὴν ἐκπυροσκόρθησιν παρατηρεῖται ἀπόκλισις τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας αὐτοῦ, 60 cm κατὰ ὀριζοντίαν διεύθυνσιν. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. (Ἀπ. $v_1 = [m_1 + m_2] / m_1 \sqrt{2g(l - \sqrt{l^2 - \alpha^2})} = 342 \text{ m/sec.}$)

1060. Σφαῖρα μάζης m προσπίπτει ἐπὶ τοίχου μὲ ταχύτητα u ὑπὸ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὸν τοῖχον, συγκρούεται ἐλαστικῶς μὲ αὐτὸν καὶ ἐπιστρέφει μὲ τὴν



Ἀσκῆσις 1060.



Ἀσκῆσις 1061.

αὐτὴν ταχύτητα. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ὥσεως τὴν ὁποίαν προσδίδει ὁ τοῖχος εἰς τὴν σφαῖραν. Ποία ἡ μέση δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ σφαῖρα δρᾷ ἐπὶ τοῦ τοίχου ἐὰν ἡ κρούσις διαρκεῖ $t \text{ sec.}$ (Ἀπ. $-2 \text{ mv}, 2 \text{ mv}/t$.)

1061. Ὅχημα πλήρες ἄμμου κινεῖται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιφανείας ἄνευ τριβῆς μὲ ταχύτητα $u_2 = 1 \text{ m/sec.}$ Σφαῖρα μάζης m , ἴσης πρὸς 2 kg, προσπίπτει ἐπὶ τοῦ ὀχήματος μὲ ὀριζοντίαν ταχύτητα $u_1 = 7 \text{ m/sec.}$ ἀντίθετον τῆς τοῦ βαγονίου. Μετὰ τὴν κρούσιν ἡ σφαῖρα ἐνσωματοῦται ἐντὸς τῆς ἄμμου. Ποία θὰ εἶναι ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ ταχύτης τοῦ βαγονίου μετὰ τὴν ἐνσωμάτωσιν τῆς σφαίρας ἐντὸς τῆς ἄμμου. Ἡ μάζα M τοῦ ὀχήματος εἶναι 10 kg. (Ἀπ. $v = 0,33 \text{ m/sec.}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1062. Ἀκονιστικὸς τροχός, διαμέτρου 20 cm καὶ πάχους 4 cm, κινεῖται ὑπὸ συχνότητα 50 στροφῶν ἀνά sec. Ἡ μάζα του εἶναι 3 kg. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητική του ἐνέργεια. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ροπή ἀδρανείας $\Theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)

Λύσις. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ περιστρεφομένου τροχοῦ εὐρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 \quad (1)$$

δπου Θ είναι ή ροπή αδράνειας τοῦ τροχοῦ καὶ ω ή γωνιακή ταχύτης περιστροφῆς αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὁμως $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ὁ τύπος (1) γράφεται :

$$E_{\text{κιν}} = 2\Theta \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \quad (2)$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2) προκύπτει ὅτι :

$$E_{\text{κιν}} = m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r^2 \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἥτοι :

$r = 0,1 \text{ m}$, $m = 0,3 \text{ T.M.}$ μάζης, $\nu = 50 \text{ στρ/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 73,95 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

1063. Τροχὸς 35 kgf*, ἀκτίνος 60 cm, κατέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 15 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ή ταχύτης μεταφορᾶς τοῦ τροχοῦ, ὅταν εὐρίσκεται εἰς τὴν βάσιν τοῦ ἐπιπέδου. Νὰ θεωρηθῇ ὅτι ή μάζα τοῦ τροχοῦ συγκεντρώνεται ἐπὶ τῆς περιφερείας του. ($g = 9,8 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἡ ἐλάττωσις τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας τοῦ τροχοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν κτηθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν περιστροφῆς καὶ μεταφορᾶς, ἥτοι :

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot \nu^2$$

$$\text{Ἀλλὰ } \Theta = m \cdot r^2 \quad \text{καὶ } \omega = \nu/r, \quad \text{ὁθεν : } m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \frac{\nu^2}{r^2} + \frac{1}{2} m \cdot \nu^2 = m \cdot \nu^2$$

$$\text{καὶ : } \nu = \sqrt{g \cdot h} = \sqrt{9,8 \cdot 15} \text{ m/sec} = 12,12 \text{ m/sec}$$

1064. Σφαῖρα μάζης 1 kgf κυλῖεται ἐπὶ ὀριζοντίας ἐπιφανείας μὲ ταχύτητα 20 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ή κινητικὴ της ἐνέργεια εἰς Joule. (Ἡ ροπή αδράνειας τῆς σφαίρας ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου της ἰσοῦται πρὸς $\Theta = 2/5 m \cdot r^2$).

Λύσις. Ἡ ὁλική κινητικὴ ἐνέργεια ἰσοῦται πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν περιστροφῆς καὶ μεταφορᾶς, ἥτοι :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot \nu^2 \quad \text{ἢ : } E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \frac{\nu^2}{r^2} + \frac{1}{2} m \cdot \nu^2 = \frac{7}{10} m \cdot \nu^2$$

Θέτομεν : $m = 1000 \text{ gr}$, $\nu = 2000 \text{ cm/sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 28 \cdot 10^8 \text{ erg} = 280 \text{ Joule}$$

1065. Τροχὸς μάζης 45 kgf, συγκεντρωμένης ὁμοιογενῶς εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, ἔχει ἀκτίνα περιφορᾶς 45 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ή γωνιακή ταχύτης ή ἀναπτυσσομένη ἐπ' αὐτοῦ, ὅταν κινῆται ὑπὸ κινητῆρος ἰσχύος $3/4 \text{ HP}$ ἐπὶ χρονικὸν διάστημα 6 sec, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι δὲν ὑπείσέρχονται ἀπώλειαι ἐνέργειας. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Τὸ ἔργον τοῦ κινητῆρος ἰσχύος $3/4 \text{ HP}$ εἰς 6 sec ἰσοῦται πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ τροχοῦ κινουμένου ὑπὸ γωνιακὴν ταχύτητα ω , ἥτοι :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ή ἰσχύς εἶναι πηλίκον τοῦ ἔργου διὰ τοῦ χρόνου, ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει :

$$N = \frac{1/2 \cdot \Theta \cdot \omega^2}{t} \quad (2)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς ω καὶ λαμβάνομεν :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 N \cdot t}{\Theta}} \quad \text{ἢ : } \omega = \sqrt{\frac{2 N \cdot t}{m \cdot r^2}} \quad (3)$$

(διότι $\Theta = m \cdot r^2$). Θέτουμε $N = 3/4 \cdot 76 = 57 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}$, $t = 6 \text{ sec}$, $m = 45/10 = 4,5 \text{ T.M. μάζης}$, $r = 0,45 \text{ m}$, και εύρισκουμε :

$$\omega = 27,6 \text{ rad/sec}$$

1066. Τροχός μετ' άξονος τίθεται εις περιστροφήν περί τόν οριζόντιον άξονά του με την βοήθειαν βάρους $B = 4 \text{ kg} \cdot \text{r}^*$ προδεδεμένου επί σχοινίου, τὸ ὁποῖον περιτυλίσσεται περί τόν άξονα αὐτοῦ άκτίνοσ $r = 5 \text{ cm}$. Τὸ βάρος πίπτει κατακορύφως διανύον διάστημα $s = 2 \text{ m}$ εις χρόνον $t = 10 \text{ sec}$, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἡρεμίας. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή άδρανείας Θ τοῦ τροχοῦ καὶ άξονος.

Λύσις. Ἡ ροπή άδρανείας Θ εύρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$\Theta = \frac{M}{\omega} \quad (1)$$

ὅπου M ἡ ροπή περιστροφῆς καὶ ω ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνσις. Ὡς γνωστόν, ὅμως, ἡ ροπή M ἰσοῦται μετ' τὴν τάσιν (δύναμιν) τοῦ σχοινίου T ἐπὶ τὴν άκτίνα r τοῦ άξονος, ἥτοι :

$$M = T \cdot r \quad (2)$$

Ἡ σχέσις (1) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (2) γράφεται :

$$\Theta = \frac{T \cdot r}{\omega} \quad (3)$$

Ἡ τάσις ὅμως T εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἀνηρτημένον βάρος B μείον τὴν δύναμιν ἐπιταχύνσεως τῆς μάζης αὐτοῦ, ἥτοι :

$$T = B - m \cdot \gamma \quad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει, λοιπόν, ὅτι :

$$\Theta = \frac{(B - m \cdot \gamma) \cdot r}{\omega} \quad (5)$$

Ἐπίσης ἡ γωνιακή ταχύτης ω ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$\omega = \gamma / r \quad (6)$$

ὅπου γ ἡ γραμμικὴ ἐπιτάχυνσις καὶ r ἡ άκτις τοῦ άξονος. Βάσει τῆς σχέσεως (6), ἡ (5) γράφεται :

$$\Theta = \frac{(B - m \cdot \gamma) \cdot r^2}{\gamma} \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐπιτάχυνσις γ εύρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $s = 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2$ τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ἀνευ άρχικῆς ταχύτητος, ὅτε εἶναι $\gamma = 2s/t^2$, καὶ οὕτως ἐκ τῆς σχέσεως (7) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ γ προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος τῆς ροπῆς άδρανείας :

$$\Theta = \frac{\left(B - m \cdot \frac{2s}{t^2} \right) \cdot r^2 \cdot t^2}{2s} \quad (8)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. θέτοντες $B = 4 \text{ kg} \cdot \text{r}^* = 4 \cdot 981\,000 \text{ dyn}$, $m = 4000 \text{ gr}$, $s = 200 \text{ cm}$, $t = 10 \text{ sec}$, $r = 5 \text{ cm}$ εύρίσκομεν :

$$\Theta = 2,44 \cdot 10^7 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$$

1067. Κινητήρ, τοῦ ὁποῖου ἡ ἰσχὺς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω , ἔχει κανονικὴν συχνότητα 955 στρ/min , συχνότητα διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἰσχὺς εἶναι 100 kW . Ὁ κινητήρ οὗτος θέτει εἰς περιστροφὴν τροχὸν μάζης 2000 kg , άκτίνοσ 1 m , τοῦ ὁποῖου ὅλη ἡ μάζα εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ τῆς περιφερείας. Πόσος χρόνος απαιτεῖται διὰ νὰ μεταδοθῇ εἰς τὸν τροχὸν ἡ συχνότης τοῦ κινητήρος.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ τροχὸς τίθεται εἰς περιστροφὴν ἐκ τῆς ἡρεμίας, θὰ ἔχωμεν :

$$\omega = \omega' \cdot t \quad \text{ἢ:} \quad t = \frac{\omega}{\omega'} \quad (1)$$

όπου t ο ζητούμενος χρόνος, ω ή ω' εκείνη την στιγμήν γωνιακή ταχύτης και ω' ή γωνιακή επιτάχυνσις.

Η γωνιακή επιτάχυνσις, α φ' ετέρου δίδεται υπό του τύπου :

$$M = \Theta \cdot \omega' \quad \text{ή} : \quad \omega' = \frac{M}{\Theta} \quad (2)$$

όπου M ή άσκουμένη ροπή επί του τροχού και Θ ή ροπή αδρανείας αυτού. Έξ άλλου ή ροπή την οποίαν επιφέρει ο κινητήρ, συναρτήσει της ισχύος αυτού N και της γωνιακής ταχύτητος αυτού ω , δίδεται υπό του τύπου :

$$N = M \cdot \omega \quad \text{ή} : \quad M = \frac{N}{\omega} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τας τρεις εξισώσεις λαμβάνομεν :

$$t = \frac{\Theta \cdot \omega^2}{N} \quad (4)$$

Θέτοντες $\Theta = m \cdot r^2 = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 955 = 100 \text{ rad/sec}$ (όπου n ή συχνότης περιστροφής όταν άποκατασταθή ή κανονική λειτουργία) και $N = 100 \text{ kW} = 10^5 \text{ W}$, λαμβάνομεν :

$$t = 200 \text{ sec}$$

1068. Φυσικόν έκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἐκ λεπτοῦ ὁμοιογενοῦς δακτυλίου ακτίνος R , ἀνηρτημένον ἐκ τινος σημείου τῆς περιφερείας του. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς ακτίνος αὐτοῦ, ὥστε τὸ έκκρεμὲς νὰ κτυπᾷ τὰ δευτερόλεπτα εἰς τὸν ἴσημερινόν, ἔνθα $g = 978,049 \text{ cm/sec}^2$.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν l τὸ ἀνηγμένον μῆκος τοῦ έκκρεμοῦς θὰ ἔχωμεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$l = \frac{\Theta}{m \cdot \alpha} \quad (1)$$

όπου m ή μάζα τοῦ δακτυλίου, Θ ή ροπή αδρανείας αὐτοῦ καὶ α ή άπόστασις μεταξύ κέντρου βάρους K καὶ σημείου άναρτήσεως O , δηλαδή :

$$\alpha = R \quad (2)$$

Πρὸς ὑπόλογισμὸν τῆς ροπῆς αδρανείας αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Θεωροῦμεν τυχὸν σημείον A ἐπὶ τοῦ δακτυλίου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει άπόστασιν $r_A = (OA)$ ἀπὸ τὸ σημείον άναρτήσεως. Εἰς τὸ σημείον αὐτό, θεωροῦμεν ὅτι ὑφίσταται μία στοιχειώδης μάζα Δm , ἔχουσα στοιχειώδη ροπήν αδρανείας Θ_A . Τότε, ὡς γνωστὸν, θὰ ἰσχύη ή σχέσηις :

$$\Theta_A = \Delta m \cdot r_A^2 \quad (3)$$

Λαμβάνομεν τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημείον τοῦ A , τὸ σημείον B . Τότε, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ή στοιχειώδης ροπή αδρανείας τῆς μάζης εἰς τὸ σημείον B θὰ δίδεται υπό του τύπου :

$$\Theta_B = \Delta m \cdot r_B^2 \quad (4)$$

όπου $OB = r_B$. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν εξισώσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\Theta_A + \Theta_B = \Delta m (r_A^2 + r_B^2) = \Delta m \cdot 4 R^2 \quad \text{ή} : \quad \Theta_A + \Theta_B = (2 \Delta m) \cdot 2 R^2 \quad (5)$$

Ἀπὸ τὴν εξίσωσιν (5), παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε ζεύγους σημειακῶν μαζῶν, εὑρισκομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ή συνολική ροπή αδρανείας τοῦ ζεύγους αὐτοῦ ($\Theta_A + \Theta_B$) εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἁθροίσματος τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν τῶν δύο σημείων ($2 \Delta m$), ἐπὶ τὸν σταθερὸν παράγοντα $2 R^2$. Ἀθροίζοντες ἐπομένως τὰς ροπὰς ὅλων τῶν σημειακῶν ζευγῶν θὰ ἔχωμεν :

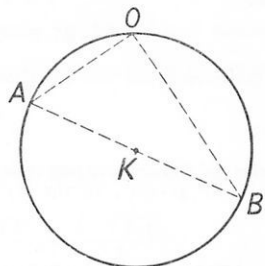
$$\sum (\Theta_A + \Theta_B) = \sum (2 \Delta m) 2 R^2 = 2 R^2 \sum (2 \Delta m) \quad \text{ή} : \quad \Theta = 2 R^2 \cdot m \quad (6)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὴν Θ ἐκ τῆς (6) καὶ τὴν α ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν :

$$l = 2 R$$

καὶ ἐπειδὴ $l = 99,09 \text{ cm}$ (βλέπε άσκησιν ἀριθ. 746)

$$R = 49,545 \text{ cm}$$



1069. Κινητή τροχαλία, περιστρεφόμενη με σταθεράν γωνιακήν ταχύτητα 25 rad/sec, ἀκίνηται μετά την συμπλήρωσιν 30 περιστροφών, όταν ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτῆς ἀκίνητον ἀντίθετον ζεύγος ροπῆς 100 gr*·cm. Ζητούνται: α) Ποία ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς τροχαλίας καὶ β) ἐάν τὸ αὐτὸ ζεύγος ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς τροχαλίας ἐπὶ 5 sec, ποία γωνιακὴ ταχύτης ἀπαιτεῖται.

Λύσις. α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{κιν}$ κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς τροχαλίας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 \quad (1)$$

Ἡ κινητικὴ αὕτη ἐνέργεια θὰ μηδενισθῇ λόγω τῆς πεδησεως τῆς τροχαλίας ὑπὸ τοῦ ζεύγους M , θὰ εἶναι δὲ τὸ ἔργον τῆς ροπῆς M ἴσον πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, ἤτοι: $E_{κιν} = A$ (2)

Ἄφ' ἐτέρου γνωρίζομεν ὅτι:

$$A = M \cdot \varphi \quad (3)$$

ὅπου φ ἡ γωνία περιστροφῆς μέχρι τῆς ἀκινήσεως τῆς τροχαλίας. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$E_{κιν} = M \cdot \varphi \quad \eta: \quad \Theta = \frac{2 M \cdot \varphi}{\omega^2} \quad (4)$$

Δίδονται: $M = 100 \text{ gr} \cdot \text{cm} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$, $\varphi = 20 \cdot 2 \pi = 40 \pi$ καὶ $\omega = 25 \text{ rad/sec}$. Δι' ἀντικατάστασεως εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν:

$$\Theta = 5,917 \cdot 10^4 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$$

β) Ἐάν καλέσωμεν ω τὴν ἀρχικὴν γωνιακὴν ταχύτητα καὶ ω' τὴν γωνιακὴν ἐπιβράδυνσιν, θὰ ἔχωμεν:

$$\omega - \omega' \cdot t = 0 \quad \eta: \quad \omega = \omega' \cdot t \quad (5) \quad \text{καί:} \quad \omega' = \frac{M}{\Theta} \quad (6)$$

ἡ διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων:

$$\omega = \frac{M \cdot t}{\Theta} \quad (7)$$

ὁπότε δι' ἀντικατάστασεως τῶν γνωστῶν μεγεθῶν: $M = 9,81 \cdot 10^4 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$, $t = 5 \text{ sec}$ καὶ $\Theta = 5,917 \cdot 10^4 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$, εἰς τὴν (7) λαμβάνομεν:

$$\omega = 8,29 \text{ rad/sec}$$

1070. Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι σῶμα μάζης m περιφερόμενον με ταχύτητα v ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς ἀκτίνος r κέντηται ὁρμὴν περιφορᾶς $G_1 = m \cdot v \cdot r$ κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν $G = m \cdot v$ τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἐπιπέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς ἑξαπολυθεὶς δορυφόρος βάσει τῶν ἐξῆς ἀπλοποιηθέντων στοιχείων καὶ προϋποθέσεων:

α) Ἡ περιφορὰ τοῦ δορυφόρου νὰ θεωρηθῇ ὡς κινήσις ἐνὸς σώματος ἐντὸς πολὺ ἀραιᾶς ἀτμοσφαίρας, ὥστε νὰ μὴ ἐπέλθῃ καταστροφὴ αὐτοῦ, λόγω ὑπερθερμάνσεως ἐκ τριβῆς ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. β) Παρατηρήθῃ ὅτι, λόγω τῆς σταθερᾶς ὁρμῆς περιφορᾶς τοῦ δορυφόρου, ἡ διάρκεια περιφορᾶς αὐτοῦ περίξ τῆς Γῆς εἶχε μειωθῇ ἀπὸ $t_1 = 1 \text{ h } 36 \text{ min } 0 \text{ sec}$ εἰς $t_2 = 1 \text{ h } 35 \text{ min } 58 \text{ sec}$ μετὰ παρέλευσιν τοῦ πρώτου 24ώρου. γ) Ἡ τροχία τοῦ δορυφόρου νὰ θεωρηθῇ κύκλος εἰς ὕψος $H = 900 \text{ km}$ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. δ) Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6,366 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Λύσις. Ἡ ὁρμὴ περιφορᾶς τοῦ δορυφόρου εἰς τὴν ἀρχικὴν τροχίαν εἶναι:

$$G_1 = m \cdot v_H \cdot (R + H) \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ δορυφόρου, v_H ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς ὕψος H ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, R ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς.

Κατά την τελευταίαν περιφορὰν αὐτοῦ, ὅτε προσκρούει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ἡ σταθερὰ ὁρμὴ περιφορᾶς αὐτοῦ θὰ εἶναι ἰσὴ πρὸς:

$$G_1 = m \cdot v \cdot R \quad (2)$$

$$^* \text{Αρα θὰ ἔχωμεν: } v \cdot R = v_H \cdot (R + H) \quad (3)$$

Ἀφ' ἐτέρου εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν ἔχομεν:

$$v = \frac{2 \pi \cdot R}{t^2} \quad (4) \quad \text{καί: } v_H = \frac{2 \pi (R + H)}{t_1} \quad (5)$$

ὅπου t_1 , t_2 αἱ διάρκειαι περιφορᾶς ἀντιστοίχως. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) προκύπτει:

$$\frac{2 \pi \cdot R^2}{t^2} = \frac{2 \pi (R + H)^2}{t_1^2} \quad \eta: \quad t_2 = t_1 \cdot \frac{R^2}{(R + H)^2} \quad (6)$$

Δίδονται: $t_1 = 96 \text{ min} = 5760 \text{ sec}$, $R = 6,366 \cdot 10^6 \text{ m}$, $H = 900 \text{ km} = 0,9 \cdot 10^6 \text{ m}$. Ἀρα προκύπτει:

$$t_2 = 4420 \text{ sec}$$

Ἐπομένως ἡ συνολικὴ μείωσις τῆς διαρκείας περιφορᾶς μέχρι τῆς πτώσεως: $t = t_1 - t_2$ (7) εἶναι:

$$t = 1340 \text{ sec}$$

καὶ ἐφ' ὅσον δίδεται $\Delta t/24\omega\rho\alpha\nu = 2 \text{ sec}$, ἀπαιτοῦνται ἡμέραι διὰ τὴν πτώσιν: $A = \frac{t}{\Delta t/24\omega\rho\alpha\nu}$

$$\eta: \quad A = 670 \text{ ἡμέραι}$$

2α Λύσις. Ἐξισοῦμεν τὴν στροφορμὴν τοῦ δορυφόρου ἐπὶ τῆς ὀρθοκίτης τροχίᾳς μὲ τὴν στροφορμὴν αὐτοῦ μετὰ 24ωρον:

$$G_1 = m \cdot v (R + H) = m \cdot v' (R + H') \quad (1)$$

ὅπου R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς, H τὸ ὀρθικὸν ὕψος ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς καὶ v ἡ ἀντίστοιχος ταχύτης, H' καὶ v' τὸ ὕψος καὶ ἡ ταχύτης μετὰ 24ωρον.

Ἐκφράζοντες τὰς γραμμικὰς ταχύτητας συναρτήσῃ τῶν περιόδων ($v = 2 \pi \cdot r/T$), μετατρέπομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{(R + H)^2}{t} = \frac{(R + H')^2}{t'} \quad (2)$$

ὅπου t καὶ t' αἱ ἀντίστοιχοι περίοδοι τοῦ δορυφόρου. Δι' ἀλγεβρικοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς ἰσότητος (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{R + H}{R + H'} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t'}} \quad \eta: \quad \frac{H - H'}{R + H} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t'}}{\sqrt{t}} = \frac{t - \sqrt{t \cdot t'}}{t}$$

$$\eta\tau\omicron: \quad H - H' = \Delta H = (R + H) \cdot \frac{t - \sqrt{t \cdot t'}}{t} \quad (3)$$

ὅπου $\Delta H = H - H'$ εἶναι ἡ ἀνὰ 24ωρον πτώσις τοῦ δορυφόρου. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων: $R + H = 6,366 \cdot 10^6 \text{ m} + 0,9 \cdot 10^6 \text{ m} = 7,266 \cdot 10^6 \text{ m}$, $t = 1 \text{ h } 36 \text{ min} = 5760 \text{ sec}$, $t' = 5758 \text{ sec}$, προκύπτει:

$$\Delta H = 1261 \text{ m}/24\omega\rho\alpha\nu$$

Ἐπομένως ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς ἡμερῶν ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν πτώσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εἶναι:

$$A = \frac{900 \text{ km}}{1,261 \text{ km}/24\omega\rho\alpha\nu} = 731,2 \text{ ἡμέραι}$$

Σημείωσις. Κατὰ τὰς ὡς ἄνω δύο λύσεις προκύπτει μία σημαντικὴ διαφορὰ τελικοῦ ἀποτελέσματος. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν τρόπον λύσεως. Εἰς τὴν πρώτην λύσιν, πλὴν τῶν ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος καθοριζομένων στοιχείων καὶ προϋποθέσεων, γίνεται ἡ πρόσθετος παραδοχὴ ὅτι ἀνὰ 24ωρον ἔχομεν σ τ α θ ε ρ ἄ ν ἐλάττωσιν περιόδου $\Delta t = 2 \text{ sec}$. Εἰς τὴν δευτέραν λύσιν, ἡ πρόσθετος παραδοχὴ εἶναι ὅτι ἀνὰ 24ωρον ὁ δορυφόρος πλησιάζει πρὸς τὴν Γῆν κατὰ σ τ α θ ε ρ ὄ ν διάστημα. Ἡ διαφορὰ τῶν ἀποτελεσμάτων δεικνύει ὅτι ἡ μία ἐκ τῶν δύο προσθέντων παραδοχῶν δὲν εἶναι σωστὴ ἡ, ὅπερ καὶ τὸ ἀληθές, καὶ αἱ δύο παραδοχαὶ αὗται δὲν εἶναι σωσταὶ εἰ μὴ μόνον κατὰ προσέγγισιν. Ἐξ αὐτοῦ δὲ καὶ ἡ διαφορὰ ἀποτελεσμάτων.

1071. Μεταλλικός κύλινδρος είναι εξηρημένος εις ὀριζοντίαν θέσιν ἐκ καθέτου χαλυβδίνου σύρματος προσδεμένου εις τὸ κέντρον του. Ροπή $8 \text{ Nt} \cdot \text{m}$ στρέφει ὀριζοντίως τὸν κύλινδρον κατὰ γωνίαν 20° . Ὄταν ἀφεθῇ ἐλεύθερος ὁ κύλινδρος, αἰωρεῖται μὲ περίοδον $1,5 \text{ sec}$. Ποία ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κυλίνδρου.

Λύσις. Ἡ περίοδος ταλαντώσεως T δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta \cdot \varphi}{M}} \quad (1)$$

ἔνθα M ἡ ροπή στρέψεως, Θ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ φ ἡ γωνιακὴ μετατόπισις. Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ τύπου λαμβάνομεν :

$$\Theta = \frac{T^2 \cdot M}{4\pi^2 \cdot \varphi} \quad (2)$$

Δίδονται : $T = 1,5 \text{ sec}$, $M = 8 \text{ Nt} \cdot \text{m}$ καὶ $\varphi = 20^\circ = \pi/9 \text{ rad}$. Ἐφ' ὅσον ἡ ροπή M δίδεται εἰς μονάδας τοῦ Συστήματος Μ.Κ.Σ., ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα μεγέθη, ἔαν ἀντικαταστήσωμεν τὰ δεδομένα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), θὰ εὕρωμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας Θ εἰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ συστήματος, ἥτοι εἰς $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Ἀντικαθιστῶμεν καὶ εὐρίσκομεν :

$$\Theta = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1072. Σφαῖρα μάζης m δύναται νὰ μετατοπισθῇ ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας κενοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι κάθετος καὶ ἀνοικτὸς πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ ἄνευ τριβῆς μόνον κατὰ μῆκος ἐγκοπῆς κατὰ τὴν γεννήτριαν τοῦ κώνου. Ἀρχικῶς ἡ σφαῖρα στηρίζεται ἐπὶ στηρίγματος τοποθετημένου εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κώνον εἰς περιστροφὴν, διὰ ποίαν γωνιακὴν ταχύτητα ω ἡ σφαῖρα θὰ ἀποκολληθῇ ἀπὸ τὸ στηρίγμα; Ἡ σφαῖρα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς κατὰστασιν ἰσορροπίας; Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Δίδεται ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου : $2\alpha = 120^\circ$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$ καὶ $d = 0,1 \text{ m}$.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς σφαίρας Σ ἀσκοῦνται δύο δυνάμεις. Τὸ βάρος αὐτῆς $B = mg$ καὶ ἡ ἀντίδρασις A τοῦ διαπέδου. Διὰ νὰ διατηρῇται ἐπὶ τοῦ στηρίγματος ἡ σφαῖρα χωρὶς νὰ ἀσκήσῃ δυνάμιν ἐπ' αὐτοῦ, δηλ. νὰ εἶναι ἐτοιμὴ νὰ ἀποκολληθῇ, θὰ πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων νὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$F_k = \frac{B}{\epsilon \varphi \alpha} \quad (1) \quad \text{καί :} \quad F_k = m\omega^2 \cdot x \quad (2)$$

ὅπου F_k ἡ κεντρομόλος δυνάμεις α τὸ ἡμῖσις τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, B τὸ βάρος τῆς σφαίρας, ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης περιστροφῆς καὶ x ἡ ἀπόστασις $\Sigma\Lambda$ τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἀξονος τοῦ κώνου (ἀκτὺς περιστροφῆς τῆς σφαίρας). Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x \cdot \epsilon \varphi \alpha}} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ $x = d \cdot \eta \mu \alpha$ (4) λαμβάνομεν τελικῶς :

$$\omega = \frac{1}{\eta \mu \alpha} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{d}} \quad (5)$$

Θέτοντες $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$, $d = 0,1 \text{ m}$, $\eta \mu \alpha = \eta \mu 60^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,866$ καὶ $\sin \alpha = \sin 60^\circ = 0,5$, εὐρίσκομεν :

$$\omega = 8,08 \text{ rad/sec}$$

Λύνοντας την εξίσωση (5), ως προς την απόσταση d , λαμβάνομεν την έκφραση :

$$d = \frac{g \cdot \sin \alpha}{\omega^2 \cdot \eta \mu^2 \alpha} \quad (6)$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ὅτι αὐξανομένης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, αὐξάνεται ἡ απόστασις d , δηλαδὴ ἐὰν $\omega > 8,08 \text{ rad/sec}$, ἡ σφαῖρα ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Ἐξ ἄλλου, ἡ σφαῖρα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν βᾶσιν τῆς, μόνον ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰς τὸ ἀνωτέρω ὅριον ἢ κάτωθεν αὐτοῦ.

1073. Ἐπὶ τροχοῦ ἀκτίνος $r = 0,15 \text{ m}$ καὶ μάζης $m = 40 \text{ kg}$, ἑξομοιούμενου πρὸς κενὸν κύλινδρον, περιτυλίσσεται σχοινίον τοῦ ὁποῖου τὸ ἐλεύθερον ἄκρον φέρει κάδον ὕδατος μάζης $M = 10 \text{ kg}$. Κατὰ τινα στιγμὴν τὸ σύστημα ἀφίεται νὰ κινηθῇ ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. α) Ἐὰν κοπῇ τὸ νῆμα ὑπεράνω τοῦ κάδου νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις αὐτοῦ. β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις τοῦ τροχοῦ καὶ ἡ γραμμικὴ ἐπιτάχυνσις τοῦ κάδου. Τὸ νῆμα στερεῖται τριβῆς ὀλισθήσεως. Δίδεται $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. α) Ὁ τροχὸς κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου T , ἐπομένως ἡ ροπή αὐτῆς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$T \cdot r = \Theta \cdot \omega' \quad (1)$$

ὅπου Θ ἡ ροπή ἀδραναίας τοῦ τροχοῦ καὶ ω' ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ. Ἀφ' ἑτέρου ὁ κάδος κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης τοῦ βάρους αὐτοῦ B καὶ τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου T , μὲ ἐπιτάχυνσιν γ , θὰ ἰσχύῃ δὲ ἡ σχέσις :

$$B - T = M \cdot \gamma \quad (2)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κάδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ σχοινίου καὶ ἐφ' ὅσον δὲν γίνεται ὀλισθήσις τοῦτο ἐπὶ τοῦ τροχοῦ καὶ ἡ γραμμικὴ ἐπιτάχυνσις τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ αὐτή. Ἐπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\gamma = r \cdot \omega' \quad (3)$$

ὅπου r ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ.

Ἐχομεν ἐπίσης :

$$\Theta = m \cdot r^2 \quad (4) \quad \text{καί:} \quad B = M \cdot g \quad (5)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ γ ἐκ τῆς (3) εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν :

$$B - T = M \cdot r \cdot \omega' \quad (6)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega' = \frac{T \cdot r}{\Theta} = \frac{T \cdot r}{m \cdot r^2} = \frac{T}{m \cdot r} \quad (7)$$

ὁπότε ἡ (6) γίνεταί :

$$B - T = \frac{M T}{m} \quad (8)$$

ἐξ ἧς τελικῶς προκύπτει ἡ σχέσις :

$$T = \frac{M \cdot m \cdot g}{M + m} \quad (9)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν $M = 10 \text{ kg}$, $m = 40 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν :

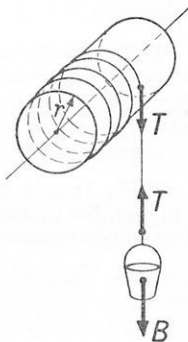
$$T = 80 \text{ Nt} \quad \text{ἢ:} \quad T = 8 \text{ kg} \cdot \text{sec}^{-2}$$

β) Συνδυάζοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\omega' = \frac{T}{m \cdot r} \quad (10)$$

Θέτοντες $T = 80 \text{ Nt}$, $m = 40 \text{ kg}$ καὶ $r = 0,15 \text{ m}$, εὐρίσκομεν :

$$\omega' = \frac{40}{3} \text{ rad/sec} \quad \text{ἢ:} \quad \omega' = 13,3 \text{ rad/sec}$$



‘Αφ’ ἐτέρου, θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $r = 0,15 \text{ m}$ καὶ $\omega' = 40/3 \text{ rad/sec}$, λαμβάνομεν :

$$\underline{\gamma = 2 \text{ m/sec}^2}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1074. Τροχὸς ἀκτίνος 4 cm καὶ ροπῆς ἀδρανείας $3200 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$ ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 5 gr^* , ἐφηρμοσμένης ἐφαπτομενικῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας. Νὰ προσδιορισθοῦν : α) Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. β) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης μετὰ 3 sec ἀπὸ τῆς ἡρεμίας. γ) Ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ εἰς χρόνον 3 sec ἐκ τῆς ἡρεμίας. (‘Απ. α’ $\omega' = 6,12 \text{ rad/sec}^2$. β’ $\omega = 18,4 \text{ rad/sec}$. γ’ $4,39$ στροφαί.)

1075. Ὄταν καταναλίσκεται ἔργον 10^9 erg ἐπὶ σφονδύλου, ἡ συχνότης τοῦ αὐξάνεται ἀπὸ 60 στρ/min εἰς 180 στρ/min . Πόση εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σφονδύλου. (‘Απ. $6,33 \cdot 10^6 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$.)

1076. Τροχὸς μετ’ ἄξονος ἔχει ὀλικὴν ροπὴν ἀδρανείας $200\,000 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$ καὶ τίθεται εἰς περιστροφὴν περὶ ὀριζόντιον ἄξονα διὰ βάρους 80 gr^* , προσηρμοσμένου εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου περιελιγμένου περὶ τὸν ἄξονα. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἄξονος εἶναι 2 cm . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις καθ’ ἣν πρέπει νὰ πέσει τὸ βάρος, ἵνα μεταδώσῃ εἰς τὸν τροχὸν συχνότητα 3 στρ/sec ἀπὸ τῆς ἡρεμίας. (‘Απ. 453 cm .)

1077. Τροχὸς μάζης 10 kg κυλίνεται ἐπὶ ὀριζοντίᾳ ἐπιφανείᾳ ὑπὸ ταχύτητα 4 m/sec . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ τοῦ κινητικῆς ἐνέργεια, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ μάζα εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ. (‘Απ. 160 Joule .)

1078. Ὁμογενὴς κύλινδρος μάζης $m = 10 \text{ kg}$ καὶ ἀκτίνος $r = 12 \text{ cm}$ στρέφεται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου μὲ γωνιακὴν ταχύτητα $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ κυλίνδρου. (Ροπὴ ἀδρανείας ὁμογενοῦς κυλίνδρου $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$). (‘Απ. $E_{\text{κιν}} = 0,432 \text{ Joule}$.)

1079. Ἐλεύθερος τροχὸς ἐκ τῆς καταστάσεως ἡρεμίας ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται μὲ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 4 rad/sec^2 . Πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ ἵνα ἀποκτήσῃ ταχύτητα 600 στρ/min . Πόσας περιφορὰς θὰ ἔχη πραγματοποιήσῃ κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτήν. (‘Απ. $15,7 \text{ sec}$, $78,5 \text{ στρ}$.)

1080. Κινητὴρ ἐκ τῆς καταστάσεως ἡρεμίας ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται καὶ φθάνει τὴν ταχύτητα τῶν 200 στρ/min εἰς χρόνον 4 sec . Ποία ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις του. (‘Απ. $1,7 \pi \text{ rad/sec}^2$.)

1081. Περιστρεφόμενη σφαῖρα μάζης 16 kg ἔχει ἀκτῖνα περιστροφῆς $0,75 \text{ m}$. Ποία ροπὴ ἀπαιτεῖται ἵνα προσδώσῃ εἰς αὐτὴν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 5 rad/sec^2 . (‘Απ. $45 \text{ Nt} \cdot \text{m}$.)

1082. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτελῇ σφόνδυλος μηχανῆς ἐντὸς 5 sec , ἐν ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἡρεμίας, ὅταν περιστρέφεται ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 20 rad/sec^2 . (‘Απ. 40 στροφαί.)

1083. Κινητὴρ ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 5 rad/sec^2 . Πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ εἰς 8 sec ἀπὸ τῆς ἡρεμίας. (‘Απ. $25,5$ στροφὰς.)

1084. Τροχὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 3 rad/sec^2 καὶ ἀποκτᾷ γωνιακὴν ταχύτητα 24 rad/sec . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τοῦ τροχοῦ μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ τὴν ἀνωτέρω ταχύτητα. (‘Απ. $48/\pi$ στροφαί.)

1085. Κινητήρ ισχύος 2 kW θέτει εις περιστροφικήν κίνησην σφόνδυλον μηχανής μάζης 50 kgf και ακτίνας 40 cm. Ποία είναι η γωνιακή ταχύτης του σφονδύλου μετά 5 sec από της έναρξεως της κινήσεώς του. (Απ. $\omega = 50 \text{ rad/sec.}$)

1086. Ὁριζοντία ράβδος φέρει εις τὰ ἄκρα της δύο σφαίρας μάζης m, ἀμελητέων διαστάσεων, στερεούται δὲ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς ἐπὶ κατακόρυφον ἄξονος, ὅστις στρέφεται ὑπὸ ταχύτητα 300 στρ/min. Ἄνευ μεταβολῆς τῆς κινητικῆς ἐνεργείας αἱ δύο μάζαι, κατὰ τινα στιγμήν, μετατοπίζονται πρὸς τὸν ἄξονα καὶ ἀκίνητοι εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ 1/4 τοῦ μήκους τῆς ράβδου. Ποία είναι ἡ νέα γωνιακή ταχύτης τοῦ ἄξονος. (Απ. $\omega = 125,6 \text{ rad/sec.}$)

1087. Δύναμις 800 Νιοῦτον ἐπενεργεῖ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τροχοῦ διαμέτρου 0,5 m, προκαλοῦσα εἰς αὐτὸν 720 στρ/min. Ποία ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ τροχοῦ ισχύς. Πόσον ἔργον παράγει εἰς χρόνον 30 sec. (Απ. 15 kW, $4,5 \cdot 10^5 \text{ Joule.}$)

1088. Σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ ακτίνας 0,25 m ἔχει γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν 2 m/sec². Ποία ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνσις εἰς rad/sec² καὶ στρ/sec². (Απ. 8 rad/sec², 1,3 στρ/sec².)

1089. Τροχὸς ἔχει γωνιακὴν ταχύτητα 20 rad/sec. Πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ ἵνα στραφῇ κατὰ γωνίαν 4 ἀκτινίων. (Απ. 0,2 sec.)

1090. Κινητήρ περιστρέφεται μὲ 900 στρ/min. Ποία γωνιακή ἐπιτάχυνσις θὰ αὐξήσῃ τὴν γωνιακὴν του ταχύτητα εἰς 3000 στρ/min, ἀφοῦ οὗτος ἐκτελέσῃ 150 στροφάς. Πόσος χρόνος θὰ ἀπαιτηθῇ πρὸς τοῦτο. (Απ. $\omega' = 47,4 \text{ rad/sec}^2$, $t = 4,64 \text{ sec.}$)

1091. Πόσον ἔργον παρήχθη κατὰ τὴν περιστροφήν τροχοῦ ακτίνας 0,25 m ὑπὸ γωνίαν 60°, ἐὰν δύναμις 500 Νιοῦτον ἐνεργῇ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ σημείου τῆς περιφερείας του. (Απ. 131 Joule.)

1092. Σφαῖρα ακτίνας 1,2 m τοποθετεῖται εἰς τὴν κορυφὴν κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 0,42 m καὶ μήκους 1,8 m. Ἐὰν κυλίεται ἄνευ τριβῆς, ποία θὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ καὶ γωνιακὴ ταχύτης της εἰς τὸ τέρμα. (Ροπή ἀδρανεῖας σφαίρας $\Theta = 2/5 \cdot m \cdot r^2$.) (Απ. 2,4 m/sec, 2 rad/sec.)

1093. Ράβδος 1 m αἰωρεῖται περὶ τὸ ἓν ἄκρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίοδος αἰωρήσεως. Ποῖον τὸ μήκος ἰσοδυνάμου μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς. (Ροπή ἀδρανεῖας ὁμογενοῦς ράβδου, ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς της: $\Theta = 1/3 \cdot m \cdot l^2$.) (Απ. 0,67 m.)

1094. Ἐπίπεδος σιδηρᾶ κυλινδρική πλάξ, πάχους $h = 4 \text{ cm}$ καὶ ακτίνας $r = 20 \text{ cm}$, στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου μὲ περίοδον $T = 0,5 \text{ sec}$. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς πλάκας. (Ροπή ἀδρανεῖας κυλινδρική πλάκας, ὡς πρὸς τὸν ἄξονά της: $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$ καὶ $\rho_{\text{σις}} = 7,9 \text{ gr/cm}^3$.) (Απ. $E_{\text{κιν}} = 62,7 \text{ Joule}$, περίπου.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1095. Ποία ἡ ροπή ἀδρανεῖας ἐλευθέρως περιστρεφομένου λεπτοῦ δακτυλίου μάζης 80 kgf καὶ διαμέτρου 0,3 m, περιστρεφομένου ὑπὸ ταχύτητα 660 στρ/min. (Απ. 108,9 kgf·m².)

1096. Ὑπολογίσατε τὴν ροπήν ἀδρανεῖας ἐνὸς δίσκου ὡς πρὸς τὸν ἄξονά του. (Απ. $\Theta = 1/2 \text{ m}r^2$.)

1097. Τροχός διαμέτρου $0,2 \text{ m}$ έχει ροπήν αδρανείας $30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Έαν δύναμις 400 N ιοϋτον ενεργήση κατά την εφαπτομένην ἐπὶ τοῦ τροχοῦ, πόση γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις θὰ παραχθῇ. Ποία θὰ εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης 5 sec μετὰ τὴν ἐναρξιν τῆς κινήσεως. (Ἀπ. $\omega' = 1,3 \text{ rad/sec}^2$, $\omega = 6,5 \text{ rad/sec}$.)

1098. Φυσικὸν ἐκκερμές δύναται νὰ αἰωρῇται περὶ δοθέντα ἄξονα ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἡ ροπή αδρανείας εἶναι $5 \cdot 10^6 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$. Ἡ μᾶζα του εἶναι 1000 gr καὶ ὁ ἄξων αἰωρήσεως ἀπέχει 60 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἐκκερμοῦς. Ὑπολογίσατε τὴν περίοδον αἰωρήσεως. (Ἀπ. $1,83 \text{ sec}$.)

1099. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου μὲ γωνίαν κλίσεως $\phi = 30^\circ$ κεῖται ὁμογενὲς, κυλινδρικὸν ξύλινον σῶμα ἀκτίνος $r = 5 \text{ cm}$ καὶ μάζης $m = 200 \text{ gr}$, τὸ ὁποῖον κατὰ τινὰ στιγμήν ἀφίεται νὰ κυλισθῇ κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. α) Ποίαν ταχύτητα ἔχει ἀποκτήσει τὸ κέντρον βάρους τοῦ κυλίνδρου, ὅταν διανύσῃ ἀπόστασιν 2 m ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. β) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν. γ) Εἰς πόσον χρόνον ὁ κύλινδρος διανύει τὸ διάστημα τῶν 2 m . δ) Νὰ ἐξετασθοῦν τὰ αὐτὰ εἰς τὴν περίπτωσιν ὁμογενοῦς μεταλλικοῦ κυλίνδρου ἀκτίνος 10 cm καὶ μάζης 3 kg . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ροπή αδρανείας ὁμογενοῦς κυλίνδρου, ὡς πρὸς τὸν ἄξονά του, $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$.)

(Ἀπ. $\alpha' v = 3,65 \text{ m/sec}$. $\beta' \gamma = 13,33 \text{ m/sec}^2$. $\gamma' t = 1,10 \text{ sec}$. δ' Προκειμένου περὶ ὁμογενοῦς κυλίνδρου δὲν παίζουν κανένα ρόλον ἡ μᾶζα καὶ ἡ ἀκτίς του.)

1100. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως $\phi = 30^\circ$, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, κεῖται ὁμογενὲς, μεταλλικὸς, κοῖλος κύλινδρος ἐξωτερικῆς ἀκτίνος $r_1 = 5 \text{ cm}$, ἐσωτερικῆς $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ καὶ μάζης $m = 200 \text{ gr}$, ὁ ὁποῖος ἀφίεται νὰ κυλισθῇ ἐλευθέρως κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. α) Ποία ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου βάρους τοῦ κυλίνδρου, ὅταν ἔχῃ διανύσει 2 m ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. β) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἐν λόγω κίνησιν. γ) Μετὰ πόσον χρόνον ὁ κύλινδρος διανύει τὸ διάστημα τῶν 2 m κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. δ) Ἀπαντήσατε εἰς τὰ αὐτὰ ἐρωτήματα δι' ἓνα ὁμογενὲ κοῖλον κύλινδρον ἀκτίνων $r_1 = 20 \text{ cm}$ καὶ $r_2 = 10 \text{ cm}$ καὶ μάζης $m = 5 \text{ kg}$. Δίδεται ὅτι: ($g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ροπή αδρανείας κοῖλου ὁμογενοῦς κυλίνδρου $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot (r_1^2 + r_2^2)$.)

(Ἀπ. $\alpha' v = 3,51 \text{ m/sec}$. $\beta' \gamma = 3,08 \text{ m/sec}^2$. $\gamma' t = 1,14 \text{ sec}$. δ' Ὁ ὑπολογισμὸς δεικνύει ὅτι ἡ μᾶζα εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς πορείας τῆς κινήσεως. Ἡ τελικὴ ταχύτης, ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ὁ ἀναγκαῖον χρόνος ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τοῦ λόγου $r_1 : r_2$.)

1101. Εἰς πλήρη ἐκ ξύλου κύλινδρος καὶ εἰς μετάλλινος κοῖλος κύλινδρος, μὲ τὰς αὐτὰς ἐξωτερικὰς ἀκτίνας καὶ τὴν αὐτὴν μᾶζαν, κυλίνονται ἐλευθέρως κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους 10 m καὶ γωνίας κλίσεως $\phi = 30^\circ$. Ἡ διάμετρος τοῦ κοῖλου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὰ $2/3$ τῆς ἐξωτερικῆς διαμέτρου. Ποῖος κύλινδρος διατρέχει ταχύτερον τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ ποία ἡ διαφορά τῶν χρόνων. [$g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ροπή αδρανείας: α) πλήρους ὁμογενοῦς κυλίνδρου, ὡς πρὸς τὸν ἄξονά του, $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$, β) κοῖλου ὁμογενοῦς κυλίνδρου, ὡς πρὸς τὸν ἄξονά του, $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot (r_1^2 + r_2^2)$.]

(Ἀπ. $t_1 = 2,45 \text{ sec}$, $t_2 = 2,62 \text{ sec}$, ὁ πλήρης φθάνει $0,17 \text{ sec}$ ἐνωρίτερον.)

1102. Νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις μηχανῆς Atwood, τῆς ὁποίας τὸ νῆμα φέρει μάζας m_1 καὶ m_2 λαμβανομένης ὑπ' ὅψιν καὶ τῆς μάζης m τῆς τροχαλίας. Ἡ μᾶζα m νὰ ὑποτεθῇ συγκεντρωμένη ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς τροχαλίας ἀκτίνος r . Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m_1 = 180 \text{ gr}$, $m_2 = 260 \text{ gr}$, $m = 50 \text{ gr}$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. $\gamma = 1,6 \text{ m/sec}^2$.)

1103. Στερεός κύλινδρος κυλίσεται άνευ όλισθήσεως επί οριζοντίων σιδηροτροχιών κατά τόν ακόλουθον τρόπον: Λεπτόν νήμα, άμελητέας μάζης, τυλιγμένον πέριξ του κυλίνδρου, φέρει μάζαν 10 gr εις τὸ ἐλευθέρον πέρασ καὶ κρέμαται κατακορύφως. Καθώς ἡ μάζα πίπτει πρὸς τὰ κάτω, προκαλεῖ τὴν κίνησιν τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν. Ἡ μάζα τοῦ κυλίνδρου εἶναι 1000 gr καὶ ἡ ἀκτίς του 10 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις του. ($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$. Ροπή ἀδρανείας ὁμογενοῦς κυλίνδρου, ὡς πρὸς τὸν ἀξονά του, $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$.) (Ἐπ. 6,5 cm/sec².)

1104. Γυροσκόπιον μάζης 0,25 kgρ ἀποτελεῖται ἀπὸ δίσκον διαμέτρου 8 cm, φερόμενον ἐπὶ ἀξονος περιφερείας 18 mm, ἐπὶ τοῦ ὁποίου περιτυλίσσεται λεπτόν σχοινίον μήκους 72 cm. Σύρομεν τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου ἀσκούντες σταθεράν δύναμιν ἐνῶ ἡ ἐκτύλιξις τοῦ νήματος διαρκεῖ 2 sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως. β) Ἡ ταχύτης τοῦ γυροσκοπίου. γ) Ἡ ἀσκηθεῖσα δύναμις διὰ τὴν ἐπιτευχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο. (Ἐπ. α' $\gamma = 40\pi \text{ rad/sec}^2$. β' $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$. γ' $F = 8,8 \text{ Nt}$.)

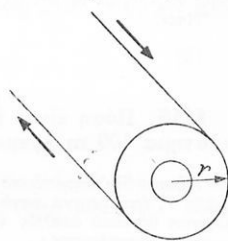
1105. Κινητὴρ ἰσχύος 1000 Nt·m/rad σύρει τροχὸν ροπῆς ἀδρανείας 2000 kgρ·m², γωνιακῆς ταχύτητος 100 rad/sec. Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸν κινητῆρα ζεύγος σταθερᾶς ἀντιστάσεως 5000 Nt·m/rad. Ἡ ταχύτης τοῦ τροχοῦ μεταβάλλεται ἀπὸ 100 rad/sec εἰς 80 rad/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ἰσχύς N ἡ παρεχόμενη ὑπὸ τοῦ τροχοῦ κατὰ τὴν φάσιν ταύτην τῆς κινήσεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον καὶ ἡ ἐλευθερωθεῖσα ἐνέργεια κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως. (Ἐπ. $N_{\text{μέση}} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ W}$, 143 στρ, $A = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Joule}$.)

1106. Σιδηρὰ ράβδος, μήκους 100 cm, διατομῆς 1 cm², περιστρέφεται περὶ κατακόρυφον ἀξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς. Ἡ ράβδος διατίθεται κατὰ τὴν περιστροφὴν ὀριζοντίᾳ. Πυκνότης σιδήρου 7,5 gr/cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς ράβδου διὰ συχνότητα περιστροφῆς 10 στρ/sec. (Ἐπ. 50,3 kgρ·m.)

1107. Νὰ ὑπολογισθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἡ τελικὴ ταχύτης κενοῦ ξυλίνου κυλίνδρου μὲ λεπτὰ τοιχώματα, ὁ ὁποῖος κυλίσεται καταρχόμενος κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους h. (Ἐπ. $v = \sqrt{g \cdot h}$.)

1108. Ὁμογενὴς εὐθεῖα ράβδος, περιστρέφεται διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς, περὶ ὀριζοντίου ἀξονα. Ποῖον τὸ ὑπὸ τοῦ ἐτέρου ἄκρου αὐτῆς διανυόμενον διάστημα εἰς $1/20 \text{ sec}$, ἐὰν ἡ ράβδος ἀφεθῇ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ τῆς ὀριζοντίας αὐτῆς θέσεως. (Ἐπ. 1,84 cm.)

1109. Τροχαλία περιστρέφεται δι' ἱμάντος. Ἡ ἀκτίς αὐτῆς εἶναι 25 cm καὶ ἡ συχνότης περιστροφῆς 120 min^{-1} . Ἡ τάσις εἰς τὸν κατώτερον κλάδον τοῦ ἱμάντος εἶναι διπλασία τῆς τάσεως εἰς τὸν ἄνωτερον κλάδον, ἀμφοτέρων τῶν κλάδων ὄντων παραλλήλων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις τοῦ ἱμάντος εἰς τοὺς δύο κλάδους αὐτοῦ, ἐὰν οὗτος μεταφέρῃ ἰσχύν 15 kW ἐπὶ τῆς τροχαλίας. (Ἐπ. 490 kgρ*, 970 kgρ*.)



* Ἀσκήσις 1109.

1110. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ συστήματος μηχανῆς Atwood, λαμβανομένης ὑπ' ὅσιν τῆς κινήσεως τῆς τροχαλίας. Αἱ ἐξηρητημένα μάζαι ἔχουν τιμὰς m_1 καὶ m_2 , ἡ μάζα τῆς τροχαλίας m_3 καὶ ἡ ἀκτίς αὐτῆς r . (Ἐπ. $\gamma = g \cdot [m_1 - m_2] / [(m_1 + m_2 + m_3/2)]$.)

1111. Σῶμα ἡρεμοῦν ἄρχεται περιστρεφόμενον, ἐπιταχυνόμενον ὁμαλῶς καὶ ἐκτελεῖ οὕτως ἐντὸς χρόνου 2 min 3600 στροφάς. Ποία ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος. (Ἐπ. $\pi \text{ sec}^{-2}$.)

1112. Σφαίρα ακτίνας r , κυλίνεται άνευ άρχικης ταχύτητος κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως φ και ύψους h , λόγω του βάρους της. Ποία ή τελική ταχύτης αυτής εις την άρχήν του κεκλιμένου επιπέδου, εάν ό συντελεστής τριβής ίσοϋται προς η .
(Άπ. $v = \sqrt{10 gh/7 \cdot (1 - \sigma\varphi \varphi \cdot \eta/r)}$.)

1113. Ποία ροπή απαιτείται να δράση επιβραδυντικώς επί της Γής δια να άκινήτοποιήση αυτήν εντός ένός έτους. Ποία ή προς τοϋτο αναγκαίουσα δύναμις, εάν αυτή ένήργει έφαπτομενικώς επί του Ήλιμου και έκειτο επί του επιπέδου αϋτου.
(Άπ. $2,3 \cdot 10^{19} \text{ tn}^* \cdot \text{km}$, $3,6 \cdot 10^{15} \text{ tn}^*$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΤΡΙΒΗ. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1114. Δύναμις 10 kgr^* σύρει σῶμα μάζης 10 T. M. μάζης επί όριζοντίου εδάφους. Ό συντελεστής τριβής όλισθήσεως είναι $\eta = 0,04$. Τί κίνησις προκύπτει. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Εάν καλέσωμεν T την αναπτυσσομένην τριβήν όλισθήσεως, F_x την δύναμιν ή όποία άσκείται καθέτως επί των τριβομένων επιφανειών και η τον συντελεστήν τριβής, τότε ό τύπος της τριβής είναι :

$$T = \eta \cdot F_x \quad (1)$$

Η δύναμις όμως ή όποία άσκείται καθέτως επί των τριβομένων επιφανειών είναι μόνον το βάρος B του σώματος και έπομένως ή σχέση (1) γράφεται :

$$T = \eta \cdot B \quad (2)$$

Έκ της (2), εάν θέσωμεν : $B = 10 \cdot 10 = 100 \text{ kgr}^*$ και $\eta = 0,04$ εύρισκομεν ότι ή αναπτυσσομένη τριβή είναι $T = 4 \text{ kgr}^*$. Έπειδή επί του σώματος άσκείται δύναμις $F = 10 \text{ kgr}^*$, έπεται ότι το σῶμα θά κινήται με επιτάχυνσιν προερχομένην από την δύναμιν $F_1 = F - T = 10 - 4 = 6 \text{ kgr}^*$.
Ήτοι :

$$\gamma = \frac{F_1}{m} = \frac{6}{10} \text{ m/sec}^2 = 0,6 \text{ m/sec}^2$$

1115. Πόση είναι ή άρχική ταχύτης σώματος, το όποιον άφου διανύση διάστημα 100 m ήρεμεί λόγω τριβής. ($\eta = 0,01$, και $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Έφ' όσον το σῶμα διανύει μέγιστον διάστημα s_m υπό την επίδρασιν σταθερῶς δυνάμεως τριβής T , ήτις ένεργεί κατά φοράν αντίθετον της φοράς της άρχικής ταχύτητος u_0 , ή κίνησις του σώματος θά είναι όμαλώς επιβραδυνομένη με επιτάχυνσιν γ και θά ίσχύη ό γνωστός τύπος του μεγίστου διαστήματος :

$$s_m = \frac{u_0^2}{2 \gamma} \quad (1)$$

Έξ άλλου, εκ του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής έχομεν : $\gamma = F/m = T/m$ και οϋτως ό τύπος (1) δύναται να γραφή :

$$s_m = \frac{u_0^2 \cdot m}{2 T} \quad (2)$$

Ἐάν καλέσωμεν F_x τὴν δύναμιν ἣ ὁποία ἀσκείται καθέτως ἐπὶ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν καὶ η τὸν συντελεστὴν τριβῆς, τότε, ὡς γνωστὸν, ἡ τριβὴ θὰ εἶναι : $T = \eta \cdot F_x$ (3)

$$\eta, \text{ ἐπειδὴ } F_x = B \text{ (βάρους τοῦ σώματος) : } T = \eta \cdot B \quad (4)$$

Βάσει τῆς σχέσεως (4), ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$s_m = \frac{v_0^2}{2 \cdot \eta \cdot g} \quad (5)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς v_0 καὶ λαμβάνομεν :

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot g \cdot s_m}$$

Θέτομεν : $s_m = 100 \text{ m}$, $\eta = 0,01$ καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι :

$$v_0 = 4,43 \text{ m/sec}$$

1116. Πόση ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοκινήτου, ὅταν δι' ἀποτόμου λειτουργίας τῶν τροχοπέδων του ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους διανύῃ **20 m** μέχρις ὅτου ἡρεμήσῃ. ($\eta = 0,5$, καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἀσκήσιν 1115, οὕτω καὶ ἐδῶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot g \cdot s_m}$$

Θέτομεν : $\eta = 0,5$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $s_m = 20 \text{ m}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$v_0 = 14,2 \text{ m/sec} = 51,1 \text{ km/h}$$

1117. Αὐτοκίνητον κινούμενον ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους ὑφίσταται πέδησιν καὶ διανύει διάστημα **40 m** διὰ τὴν ἡρεμίσιν. Ἐάν δεχθῶμεν συντελεστὴν τριβῆς ὀλισθητικῆς $\eta = 0,5$, πόση εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιβράδυνσις κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πεδήσεως. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἀσκήσιν 1115, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἐδῶ ἡ σχέσις :

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot g \cdot s_m} \quad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) : $\eta = 0,5$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $s_m = 40 \text{ m}$, ὅτε εὐρίσκομεν :

$$v_0 = 20 \text{ m/sec}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις γ εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ μεγίστου διαστήματος $s_m = v_0^2 / 2\gamma$ ὅτι εἶναι :

$$\gamma = \frac{v_0^2}{2 s_m} \quad (2)$$

Δι' ἀντικατάστασεως διὰ τῶν τιμῶν εἰς τὸν τύπον (2) εὐρίσκομεν :

$$\gamma = 5 \text{ m/sec}^2$$

1118. Σῶμα μάζης **20 gr**, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπενεργεῖ σταθερὰ δύναμις **800 dyn**, διανύει ἐντὸς **4 sec** ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους διάστημα **200 cm**. Πόση εἶναι ἡ τριβὴ του.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν ἣ ὁποία ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ T τὴν δύναμιν τριβῆς, τότε ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σῶμα δύναμις θὰ εἶναι $F_e = F - T$ καὶ συνεπῶς ἡ τριβὴ θὰ εἶναι :

$$T = F - F_e \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν ὅτι $F_e = m \cdot \gamma$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$T = F - m \cdot \gamma \quad (2)$$

Έξ άλλου, επειδή η κίνηση είναι ομαλώς επιταχυνόμενη άνευ αρχικής ταχύτητας, θα ισχύει ο τύπος $s = 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2$, εκ του οποίου προκύπτει ότι $\gamma = 2s/t^2$, και συνεπώς η σχέση (2) γράφεται:

$$T = F - \frac{m \cdot 2s}{t^2} \quad (3)$$

Θέτουμε: $m = 20 \text{ gr}$, $s = 200 \text{ cm}$, $t = 4 \text{ sec}$ και $F = 800 \text{ dyn}$, και εύρισκουμε:

$$T = 300 \text{ dyn}$$

1119. Πόση δύναμις απαιτείται, για μεταδοθή εις όχημα βάρους 18 tn* και επί οριζοντίου έδάφους έντός 1 min ταχύτης εκ τής ήρεμίας ίση πρὸς 10 m/sec. ($\eta = 0,005$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Η απαιτούμενη δύναμις F θα είναι ίση με την επιταχύνουσαν δύναμιν F_e συν την δύναμιν η οποία καταβάλλεται πρὸς υπερνίκησιν τής τριβῆς T , ήτοι:

$$F = F_e + T \quad (1)$$

Εάν καλέσωμεν m την μάζαν του οχήματος και γ την επιτάχυνσιν την οποίαν προσλαμβάνει τοῦτο ὑπὸ τήν επίδρασιν τής δυνάμεως F_e , τότε εκ του θεμελιώδους νόμου τής Μηχανικῆς ἔχομεν:

$$F_e = m \cdot \gamma \quad \text{ή:} \quad F_e = m \cdot \frac{v}{t} \quad (2)$$

Επίσης, εάν καλέσωμεν F_k την κάθετον δύναμιν, επειδή η καθέτως ασκουμένη δύναμις επί των τριβομένων επιφανειών είναι μόνον τὸ βάρος του σώματος, ὁ τύπος τής τριβῆς: $T = \eta \cdot F_k$ γράφεται:

$$T = \eta \cdot m \cdot g \quad (3)$$

Λόγω τῶν σχέσεων (2) και (3), η σχέση (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$F = \frac{m \cdot v}{t} + \eta \cdot m \cdot g \quad (4)$$

Εργαζόμενοι εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, θέτομεν εις τήν (4): $m = 18\,000 \text{ kgr} = 1800 \text{ T.M.}$ μάζης, $v = 10 \text{ m/sec}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $t = 60 \text{ sec}$, $\eta = 0,005$, και εύρισκόμεν:

$$F = 390 \text{ kgr*}$$

1120. Αυτοκίνητον βάρους 1000 kgr* κινείται επί οριζοντίας ὁδοῦ ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h. Ποίαν ισχὺν ἀποδίδει ὁ κινητὴρ του, όταν $\eta = 0,02$ και ἡ ἀντίστασις του ἀέρος ἀντιστοιχῇ εις δύναμιν 10 kgr*.

Λύσις. Εφ' ὅσον τὸ αυτοκίνητον κινεῖται με σταθεράν ταχύτητα επί οριζοντίας ὁδοῦ, ἡ δύναμις του κινητῆρος θα είναι ίση με τὸ ἄθροισμα τής τριβῆς T και τής ἀντιστάσεως του ἀέρος F' .
*Ητοι:

$$F = T + F' \quad (1)$$

Επειδή ὁμως ἡ τριβὴ είναι: $T = \eta \cdot F_k = \eta \cdot B$, ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$F = \eta \cdot B + F' \quad (2)$$

Η ισχύς του κινητῆρος θα είναι:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \quad (3)$$

ὅπου v ἡ ταχύτης με την οποίαν κινεῖται τὸ αυτοκίνητον. Η σχέση (3), λόγω τής σχέσεως (2), γράφεται:

$$N = (\eta \cdot B + F') \cdot v \quad (4)$$

Εργαζόμενοι εις τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εις τήν σχέση (4): $B = 1000 \text{ kgr*}$, $\eta = 0,02$, $F' = 10 \text{ kgr*}$ και $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/sec}$, και εύρισκόμεν ὅτι ἡ ζητούμενη ισχύς είναι: $N = (0,02 \cdot 1000 + 10) \cdot 20 = 600 \text{ kgr* m/sec}$, ἥ, δεδομένου ὅτι $1 \text{ PS} = 75 \text{ kgr* m/sec}$:

$$N = 8 \text{ PS}$$

1121. Σώμα μάζης **1 kg** εύσκεται επί οριζοντίου επιπέδου. 'Επί τοῦ σώματος προσαρμόζομεν οριζόντιον σχοινίον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας ἄνευ τριβῆς καὶ φορτίζεται κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ ὑπὸ βάρους **400 gr***. Ζητοῦνται: α) Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν παρουσιάζει τριβήν. β) Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις ὅταν $\eta = 0,2$. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐπειδὴ ἡ κίνησις διεξάγεται ἄνευ τριβῶν, ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σύστημα δύναμις F_e εἶναι τὸ βάρος $m \cdot g$ τοῦ φορτίου καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_e = m \cdot g = (M + m) \cdot \gamma \quad (1)$$

ὅπου M ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ m ἡ μᾶζα τοῦ φορτίου. Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς γ καὶ λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{m}{M + m} \cdot g \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $M = 10^3 \text{ gr}$, $m = 400 \text{ gr}$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$\gamma = 280 \text{ cm/sec}^2$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἐὰν καλέσωμεν γ_1 τὴν ζητουμένην ἐπιτάχυνσιν, τότε ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σύστημα δύναμις θὰ εἶναι:

$$F'_e = (M + m) \cdot \gamma_1 \quad (3)$$

λύντες δὲ ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἐπιτάχυνσιν θὰ ἔχωμεν:

$$\gamma_1 = \frac{F'_e}{M + m} \quad (4)$$

'Η ἐπιταχύνουσα, ὅμως, τὸ σύστημα δύναμις εἶναι $F'_e = \beta - T = \beta - \eta \cdot B$, ὅπου β τὸ βάρος τοῦ φορτίου, B τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ η ὁ συντελεστὴς τριβῆς, καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (4) γράφεται:

$$\gamma_1 = \frac{\beta - \eta \cdot B}{M + m} = \frac{m - \eta \cdot M}{M + m} \cdot g \quad (5)$$

'Εκ τῆς σχέσεως (5), ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα: $m = 400 \text{ gr}$, $M = 1000 \text{ gr}$, $\eta = 0,2$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, εὐρίσκομεν:

$$\gamma_1 = 140 \text{ cm/sec}^2$$

1122. 'Ελαφρὸν ἀμάξιον, φέρον μᾶζαν m , δύναται νὰ μετατοπίζεται ἐπὶ οριζοντίας τραπέζης. Συνδέεται δὲ διὰ δύο νημάτων μὲ δύο σώματα μαζῶν m_1 καὶ m_2 τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ μετατοπίζωνται καθέτως. 'Η κίνησις τοῦ ἀμαξίου m παρεμποδίζεται ὑπὸ δυνάμεως τριβῆς $F = \eta \cdot m \cdot g$ ἀναλόγως πρὸς τὸ βάρος τὸ φερόμενον ὑπὸ τοῦ ἀμαξίου. 'Υποθέτομεν ὅτι $m_1 > m_2$. α) Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς κινήσεως. β) Νὰ καθορισθῇ τὸ φορτίον m_0 πέραν τοῦ ὁποίου τὸ σύστημα δὲν δύναται νὰ ἐκκινήσῃ. γ) Φορτίζεται τὸ ἀμάξιον ὑπὸ μάζης $m = 1 \text{ kg}$. Νὰ υπολογισθῇ τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς 2 sec . 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m_1 = 0,6 \text{ kg}$, $m_2 = 0,4 \text{ kg}$, $\eta = 0,04$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. α) Τὸ ἀμάξιον εὐρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τάσεων τῶν νημάτων T_1 καὶ T_2 καὶ τῆς δυνάμεως τριβῆς F . 'Επομένως ἡ συνισταμένη αὐτῶν Σ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Sigma = T_1 - T_2 - F \quad (1)$$

'Εὰν γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\Sigma = m \cdot \gamma \quad (2)$$

Διά συνδυασμού των άνωτέρω εξισώσεων λαμβάνομεν :

$$m \cdot \gamma = T_1 - T_2 - F \quad (3)$$

‘Αφ’ ἑτέρου βάσει τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς δυναμικῆς θά ἔχωμεν διὰ τὰς μάζας m_1 καὶ m_2 τὰς σχέσεις :

$$B_1 - T_1 = m_1 \cdot \gamma \quad \text{ἢ} : T_1 = m_1 g - m_1 \cdot \gamma \quad (4)$$

$$\text{καὶ } T_2 - B_2 = m_2 \cdot \gamma \quad \text{ἢ} : T_2 = m_2 g + m_2 \cdot \gamma \quad (5)$$

ἐνῶ ἡ δύναμις τριβῆς F δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = \eta \cdot m \cdot g \quad (6)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν εξισώσεων (3), (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$\gamma = g \cdot \frac{m_1 - m_2 - \eta \cdot m}{m + m_1 + m_2} \quad (7)$$

β) Εἰς τὴν ὀριακὴν περίπτωσιν τῆς μάζης τοῦ ἀμαξίου m_0 θά ἔχωμεν συνισταμένην μηδενικὴν καὶ ἐπομένως καὶ ἐπιτάχυνσιν μηδενικὴν. Ὡτοὶ ἡ ἐξίσωσις (7) θά γράφη :

$$\gamma = g \cdot \frac{m_1 - m_2 - \eta \cdot m_0}{m_0 + m_1 + m_2} = 0 \quad \text{ἢ} : m_0 = \frac{m_1 - m_2}{\eta} \quad (8)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα $m_1 = 0,6 \text{ kg}$, $m_2 = 0,4 \text{ kg}$ καὶ : $\eta = 0,04$, εὐρίσκομεν :

$$m_0 = 5 \text{ kg}$$

γ) Τὸ διάστημα τῆς κινήσεως s , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (9)$$

ἢ λόγῳ τῆς (7) :

$$s = \frac{1}{2} g \cdot \frac{m_1 - m_2 - \eta \cdot m_0}{m_0 + m_1 + m_2} \cdot t^2 \quad (10)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα καὶ εὐρίσκομεν :

$$s = 1,6 \text{ m}$$

1123. Ὁριζόντιος δίσκος δύναται νὰ περιστραφῇ περίξ τοῦ κατακορύφου τοῦ ἄξονος. Θέτομεν ἐπὶ τοῦ δίσκου καὶ εἰς ἀπόστασιν $0,20 \text{ m}$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, ἀντικείμενόν τι καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τίθεται εἰς κίνησιν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν τοῦ δίσκου ὑπερβαίνει τὰς 50 στροφὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς τριβῆς. Νὰ ληφθῇ $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $\pi = 3$.
(Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1961).

Λύσις. Ὁ περιστρεφόμενος δίσκος ἐξαναγκάζει τὸ ἀντικείμενον εἰς περιστροφήν λόγῳ τῆς ἄσκουμένης δυνάμεως τριβῆς τοῦ δίσκου ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου καὶ ἡ ὁποία ἀποκλείει τὴν οἰανδήποτε κίνησιν τοῦ τελευταίου ἐν σχέσει μὲ τὸν δίσκον. Δηλαδή ἡ δύναμις τριβῆς T ἐπέχει θέσιν κεντρομόλου δυνάμεως. Εἰς τὴν ὀρικὴν περίπτωσιν τῆς μεγίστης συχνότητος ἔχομεν :

$$T = F_{\kappa} \quad (1)$$

Ἡ δύναμις τριβῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$T = \eta \cdot m \cdot g \quad (2)$$

ὅπου η ὁ συντελεστὴς τριβῆς, ἐνῶ ἡ κεντρομόλος δύναμις θά πρέπει νὰ εἶναι ἀφ’ ἑτέρου :

$$F_{\kappa} = 4 \pi^2 \cdot v^2 \cdot R \cdot m \quad (3)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν εξισώσεων λαμβάνομεν :

$$\eta \cdot m \cdot g = 4 \pi^2 \cdot v^2 \cdot R \cdot m \quad \text{ἢ} : \eta = \frac{4 \pi^2 \cdot v^2 \cdot R}{g} \quad (4)$$

Θέτοντες $\pi = 3$, $v = 50 \text{ c/min} = 5/6 \text{ c/sec}$, $R = 0,2 \text{ m}$ και $g = 10 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν :

$$\eta = 0,5$$

1124. Αυτοκίνητον κινείται επί ασφαλτοστρωμένου αυτοκινητοδρόμου και επιδιώκει να διαγράψη καμπύλην διαδρομήν ακτίνας **10 m**. Πόση ή άνωτέρα επιτρεπομένη ταχύτης, την οποίαν πρέπει να άναπτύξη ό οδηγός, δεδομένου ότι $\eta = 0,3$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Διά να διαγράψη τό αυτοκίνητον την καμπύλην με ασφάλειαν, πρέπει ή κεντρομόλος δύ-
ναμις F_k , ήτις ενεργεί επί του αυτοκινήτου, να είναι τούλάχιστον ίση με την τριβήν T . *Ητοι $F_k = T$.
*Επειδή όμως $F_k = m \cdot v^2/r$ και $T = \eta \cdot m \cdot g$, θά ίσχύη ή σχέσις : $v^2/r = \eta \cdot g$.

Συνεπώς ή επιτρεπομένη ελάχιστη ταχύτης θά είναι :

$$v_{ελ} = \sqrt{\eta \cdot g \cdot r}$$

Θέτομεν εις την σχέσηιν ταύτην : $\eta = 0,3$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ και $r = 10 \text{ m}$, ότε εύρίσκομεν :

$$v_{ελ} = 5,4 \text{ m/sec}$$

1125. α) Αυτοκίνητον προσεγγίζει στροφην υπό ταχύτητα $v = 72 \text{ km/h}$.
*Η στροφή έχει ακτίνα $R = 250 \text{ m}$. Δείξατε ότι τό δχημα ούδόλως τείνει να
άνατραπή εάν τό επίπεδον της όδοϋ κλίη προς τό κέντρον της στροφής κατά
ωρισμένην ελάχιστην γωνίαν α . β) Τό δχημα προσεγγίζει την στροφήν υπό
ταχύτητα άνωτέραν της v . Ποίος κίνδυνος δύναται να ύπάρξη, εάν δίδεται ό
συντελεστής τριβής του τροχού μετά της όδοϋ $\eta = 0,3$. Ποία ή όριακή ταχύ-
της του αυτοκινήτου δια να μη επέλθη άνατροπή αυτού. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Αί δυνάμεις αί όποιαί έπενεργούν επί του αυτοκινήτου όταν εκτελεί την στροφήν είναι άφ'
ένος τό βάρος B και άφ' έτέρου ή αντίδρασις του έδάφους A , κάθετος επί την διεύθυνσιν αυτού. Διά να
έχωμεν ασφαλή στροφήν, θά πρέπει ή συνισταμένη των άνω-
τέρω δυνάμεων να έχη διεύθυνσιν κατά την ακτίνα της τροχιάς,
δηλ. να είναι κεντρομόλος. Ός εμφανίζεται εκ του παραλληλο-
γράμμου των δυνάμεων, ή κεντρομόλος δύναμις F_k συνδέεται
μετά του βάρους B , δια της σχέσεως :

$$F_k = B \cdot \epsilon\phi \alpha \quad (1)$$

όπου α ή γωνία κλίσεως του έδάφους. *Αφ' έτέρου ή κεντρο-
μόλος δύναμις δίδεται υπό του τύπου :

$$F_k = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (2)$$

όπου m ή μάζα, του αυτοκινήτου, v ή ταχύτης αυτού και R ή
ακτίς της τροχιάς.

Συνδυάζοντες τās δύο εξισώσεις λαμβάνομεν.

$$\epsilon\phi \alpha = \frac{v^2}{R \cdot g} \quad (3)$$

Θέτοντες $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/sec}$, $R = 250 \text{ m}$ και $g = 10 \text{ m/sec}^2$, λαμβάνομεν :

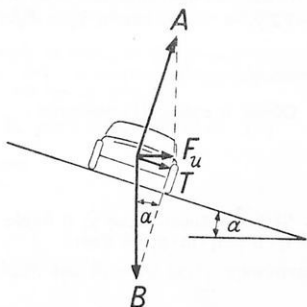
$$\epsilon\phi \alpha = 0,16 \quad \text{ή :} \quad \alpha = 1^\circ, \text{ περίπου}$$

β) *Εφ' όσον αύξάνεται ή ταχύτης, θεωρητικώς θά έπρεπε να άνατραπή τό αυτοκίνητον. Λόγω
όμως της ύπάρξεως της δυνάμεως τριβής αύξάνεται τό όριον ταχύτητος υπό την αυτήν γωνίαν κλίσεως
του έδάφους, άνωθεν του όποίου έπέρχεται ή άνατροπή. Εις την δευτέραν αυτήν όριακήν περίπτωσιν,
ή κεντρομόλος δύναμις θα είναι ή συνισταμένη του βάρους της νέας καθέτου αντίδράσεως του έδάφους A'
και της δυνάμεως τριβής T . Λαμβάνοντες τās όριζοντίας συνισταμένας των τριών αυτών δυνάμεων και
συνθέτοντες αυτάς θά έχωμεν :

$$F'_k = A' \cdot \eta \mu \alpha + T \cdot \sigma \nu \alpha \quad (4)$$

*Εάν λάβωμεν τās κατακορύφους συνιστώσας θά έχωμεν :

$$A' \cdot \sigma \nu \alpha - T \cdot \eta \mu \alpha - B = 0 \quad (5)$$



Γνωρίζομεν επίσης ότι :

$$T = \eta \cdot A' \quad (6) \quad \text{καί :} \quad F'x = \frac{mv^2}{R} \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τās εξισώσεις (4), (5), (6) καί (7) λαμβάνομεν τήν νέαν όριακήν ταχύτητα v' του αὐτοκινήτου κάτωθεν τῆς όποίας δέν ἐπέχρεται ἀνατροπή του αὐτοκινήτου :

$$v' = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\eta + \epsilon\phi \alpha}{1 - \eta \cdot \epsilon\phi \alpha}} \quad (8)$$

Θέτοντες $R = 250 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $\epsilon\phi \alpha = 0,16$ καί $\eta = 0,3$ εὐρίσκομεν :

$$v' = 34,5 \text{ m/sec} \quad \eta : \quad v' = 123 \text{ km/h, περίπου}$$

1126. "Ανθρωπος δύναται ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα νὰ ἀναπτύξῃ δύναμιν 70 kgf^* . Μὲ τὴν δύναμιν ταύτην ἐκσφενδονίζει ὁριζοντίως ἐπὶ παγωμένης λίμνης τεμάχιον πάγου μάζης 8 kgf . Ἐὰν κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν ἡ χεὶρ διανύῃ διάστημα 120 cm , ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ κινῆται ὀλισθαίνον τὸ τεμάχιον πάγου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς παγωμένης λίμνης, ὅταν ὁ συντελεστῆς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0,02$. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι ὁ πάγος ἐκσφενδονίζεται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα u_0 καὶ κινεῖται ἐπὶ χρόνον t , ἕως ὅτου ἡρεμήσῃ ἐπὶ τῆς παγωμένης λίμνης. Ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ πάγου θὰ ἀσκήται ἀντιθέτως πρὸς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ ἡ σταθερὰ δύναμις T τῆς τριβῆς, ἡ κίνησις αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύσῃ ὁ γνωστός τύπος τοῦ μεγίστου χρόνου :

$$t = \frac{u_0}{\gamma} \quad (1)$$

Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης u_0 θὰ εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F' τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ χεὶρ τοῦ ἀνθρώπου καὶ συνεπῶς, ἔαν καλέσωμεν γ_1 τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ s τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὁ πάγος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F' , θὰ ἔχωμεν :

$u_0 = \sqrt{2 \gamma_1 \cdot s}$ ἢ, ἐπειδὴ $\gamma_1 = F'/m$, προκύπτει :

$$u_0 = \sqrt{\frac{2 F' \cdot s}{m}} \quad (2)$$

Οὕτως ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$t = \frac{\sqrt{\frac{2 F' \cdot s}{m}}}{\gamma} \quad (3)$$

Ἡ ἐπιβράδυνσις ὁμῶς γ , ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν τριβὴν T , θὰ εἶναι $\gamma = T/m$, ἢ, ἐπειδὴ $T = \eta \cdot B = \eta \cdot m \cdot g$, θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{\eta \cdot B}{m} = \eta \cdot g \quad (4)$$

Οὕτω, λόγῳ τῆς σχέσεως (4), ἡ (3) δύναται τῶρα νὰ γραφῇ :

$$t = \frac{\sqrt{\frac{2 F' \cdot s}{m}}}{\eta \cdot g} \quad (5)$$

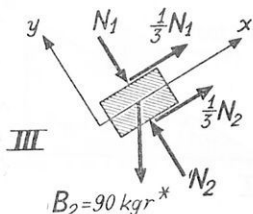
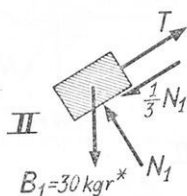
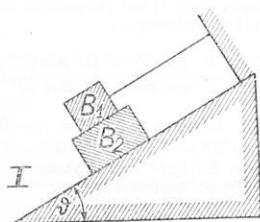
Ἐκ τῆς σχέσεως (5) ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ θέτοντες : $F' = 70 \text{ kgf}^*$, $m = 0,8 \text{ T.M.}$ μάζης, $s = 1,2 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, εὐρίσκομεν :

$$t = 72,5 \text{ sec}$$

1127. Σῶμα βάρους $B_2 = 90 \text{ kgf}^*$ εὐρίσκεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως θ . Ἐπ' αὐτοῦ τοποθετοῦμεν ἕτερον σῶμα βάρους $B_1 = 30 \text{ kgf}^*$, προσδεδεμένον διὰ νήματος ἀκλονήτως, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ

ἐπιπέδου (βλ. σχήμα I). Ἐάν οἱ συντελεσταὶ τριβῆς δι' ὅλας τὰς ἐπιφάνειας εἶναι $\eta = 1/3$, ποία ἡ τιμὴ τῆς γωνίας θ .

Λύσις. Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως πρὸς τὰ κάτω, θὰ λάβωμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς γωνίας θ , κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ὑφισταμένων δυνάμεων εἶναι ἰση μὲ 0, ὁπότε τὸ σύστημα ἢ θὰ ἰσορροπῇ ἢ τὸ σῶμα B_2 θὰ ἀρχίσῃ κινούμενον πρὸς τὰ κάτω μὲ σταθερὰν ταχύτητα.



Θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰς ἐπὶ τοῦ σώματος B_1 ἐνεργοῦσας δυνάμεις (βλ. σχήμα II). Αὗται εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ B_1 , ἡ τάσις τοῦ σχοινίου T , ἡ ἀντίδρασις τοῦ σώματος B_2 ἐπ' αὐτοῦ N_1 καὶ ἡ ἀναπτυσσόμενη δύναμις τριβῆς $\eta \cdot N_1$, μὲ διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ φορὰν πρὸς τὰ κάτω, διότι ἡ σχετικὴ κίνησις τοῦ σώματος B_1 ὡς πρὸς τὸ B_2 ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ N_1 θὰ δίδεται προφανῶς ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$N_1 = B_1 \cdot \sin \theta \quad (1)$$

Θεωροῦμεν ἤδη τὰς ἐπὶ τοῦ σώματος B_2 ἐνεργοῦσας δυνάμεις (βλ. σχήμα III). Αὗται εἶναι, τὸ βάρος αὐτοῦ B_2 , ἡ συνολικὴ ἀντίδρασις τοῦ ἐπιπέδου ἐπ' αὐτοῦ N_2 , ἡ δύναμις N_1 τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ βάρος B_1 ἐπὶ τοῦ B_2 (ἴση ἀλλ' ἀντίθετος πρὸς τὴν ἀντίδρασιν τοῦ B_2 ἐπὶ τοῦ B_1 , συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως), καὶ ἐπὶ πλέον ἔχομεν δύο δυνάμεις τριβῆς ἀναπτυσσομένας, ἀφ' ἑνὸς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων, ἡ ὁποία κατὰ τὸ μέτρον εἶναι ἰση πρὸς $\eta \cdot N_1$, ἀλλὰ μὲ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω, διότι τὸ B_2 κινεῖται πρὸς τὰ κάτω ἐν σχέσει μὲ τὸ σῶμα B_1 , καί, ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς B_2 καὶ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία προφανῶς θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω καὶ θὰ εἶναι ἰση πρὸς $\eta \cdot N_2$.

Ἐφ' ὅσον τὸ B_2 ἀρχεται κινούμενον μὲ σταθερὰν ταχύτητα πρὸς τὰ κάτω, αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις θὰ εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅρα καὶ αἱ προβολαὶ ἐπὶ συστήματος ὀρθογωνίων συντεταγμένων x, y θὰ πρέπει νὰ ἔχουν ἀλγεβρικὸν ἀθροισμα μηδέν. Θὰ ἔχωμεν αὐτὸ :

$$-B_2 \cdot \eta \mu \theta + \eta \cdot N_1 + \eta \cdot N_2 = 0 \quad (2) \quad \text{καὶ :} \quad -B_2 \cdot \sin \theta + N_2 - N_1 = 0 \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\epsilon \phi \theta = \eta \cdot \frac{2 B_1 + B_2}{B_2} \quad (4)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων : $\eta = 1/3$, $B_1 = 30 \text{ kgr}^*$ καὶ $B_2 = 90 \text{ kgr}^*$, προκύπτει :

$$\epsilon \phi \theta = \frac{5}{9} \quad \text{ἢ :} \quad \theta = 29^\circ 4'$$

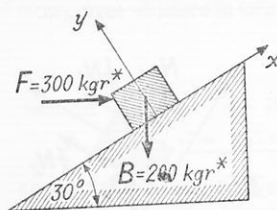
1128. Σῶμα βάρους $B = 200 \text{ kgr}^*$ τοποθετεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 30° . Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπενεργεῖ δύναμις $F = 300 \text{ kgr}^*$ ὑπὸ ὀριζοντίαν διεύθυνσιν. Ἐάν ὁ συντελεστὴς τριβῆς $\eta = 0,3$, εἶναι δυνατόν νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα ;

Λύσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι πλέον ἢ ἀρκετὴ διὰ νὰ συγκρατήσῃ ἀπὸ τὴν ὀλισθησιν τὸ σῶμα. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ προκαλεσθῇ κίνησις πρὸς τὰ ἄνω, ὁπότε θὰ ἀναπτυχθῇ δύναμις τριβῆς T , παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὰ κάτω. Ἄν καλέσωμεν N τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ η τὸν συντελεστὴν τριβῆς, τότε :

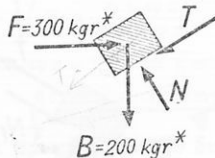
$$T = \eta \cdot N \quad \text{ἢ :} \quad \frac{T}{N} = \eta \quad (1)$$

Ἐάν θεωρήσωμεν, τώρα, τὴν περίπτωση τῆς ἰσορροπίας τῶν δυνάμεων καὶ λάβωμεν τὰς προβολὰς αὐτῶν ἐπὶ ἀξόνους παραλλήλους πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἀφ' ἑνός, καὶ ἐπὶ ἀξόνους καθετοῦ ἐπ' αὐτό, ἀφ' ἑτέρου, θὰ ἔχωμεν :

$$-T - B \cdot \sin 60^\circ + F \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad -B \cdot \sin 30^\circ - F \cdot \sin 60^\circ + N = 0 \quad (3)$$



I



II

Λύοντας τὰς δύο εξισώσεις ὡς πρὸς T καὶ N καὶ διαιρούμεν κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{T}{N} = \frac{F \cdot \sin 30^\circ - B \cdot \sin 60^\circ}{F \cdot \sin 60^\circ + B \cdot \sin 30^\circ} \quad (4)$$

Θέτοντες : $T/N = \eta = 0,3$, $\sin 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 60^\circ = 1/2$, $B = 200 \text{ kgf}$ καὶ ἐπιλύοντας ὡς πρὸς F, λαμβάνομεν :

$$F = 212 \text{ kgf}^*, \text{ περίπου}$$

Ἦτοι διὰ τὴν περίπτωση τῆς ἰσορροπίας θὰ ἔπρεπε νὰ εἴχομεν μέτρον τῆς δυνάμεως $F = 212 \text{ kgf}^$. Ἡ F δὲμος δίδεται ἴση πρὸς $F = 300 \text{ kgf}^*$. Ἀρα τὸ σύστημα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως F ἄνωτέρας τῆς ἀπαιτουμένης πρὸς ἰσορροπίαν, θὰ κινήθῃ πρὸς τὰ ἄνω.

1129. Σφόνδυλος, τοῦ ὁποίου ὁλόκληρος ἡ μάζα, ἴση πρὸς 1 τόννον, εἶναι συγκεντρωμένη εἰς περιφέρειαν ἀκτίνας $r = 1 \text{ m}$, περιστρέφεται ἄνευ τριβῶν μὲ τὸν ἀέρα καὶ τὰ ἔδρανα μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 400 στρ/min. Ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἐφαρμόζεται ἀποτόμως πίεσις πιέζουσα μὲ δύναμιν 1 kgf^* . Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ πέδης καὶ σφονδύλου εἶναι 0,1. Ζητοῦνται : α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σφονδύλου εἰς $\text{kgf}^* \cdot \text{m}$. β) Ὁ χρόνος ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐφαρμογῆς τῆς πέδης μέχρι τῆς στιγμῆς στάσεως τοῦ σφονδύλου. γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφορῶν τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ ὁ σφόνδυλος κατὰ τὸ εἰς τὴν ἐρώτησιν (β) χρονικὸν διάστημα.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1959).

Λύσις. α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\text{κιν}}$ περιστρεφομένου σώματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 \quad (1)$$

ὅπου Θ ἡ ροπή ἄδρανεας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἀξονα περιστροφῆς καὶ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι :

$$\Theta = m \cdot r^2 \quad (2)$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ σώματος καὶ r ἡ ἀκτίς τοῦ σφονδύλου, καὶ ἐπίσης ὅτι :

$$\omega = 2 \pi \cdot \nu \quad (3)$$

ὅπου ν ἡ συχνότης περιστροφῆς. Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὸν τύπον (1), προκύπτει :

$$E_{\text{κιν}} = 2 m \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \quad (4)$$

Δίδονται : $m = 1000 \text{ kgf}^*/10 \text{ m/sec}^2 = 100 \text{ T.M.}$ μάζης, $r = 1 \text{ m}$, $\nu = 400 \text{ στρ/min} = 6,67 \text{ στρ/sec}$, ἐπομένως εὐρίσκομεν :

$$E_{\text{κιν}} = 87 \, 780 \text{ kgf}^* \cdot \text{m}$$

β) Ἐάν M ἡ ροπή τῆς τριβῆς, G ἡ στροφορμὴ τοῦ σφονδύλου καὶ t ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν στάσιν τοῦ σφονδύλου, τότε :

$$M = \frac{\Delta G}{t} \quad (5)$$

ὅπου διὰ τοῦ συμβόλου ΔG παριστῶμεν τὴν μεταβολὴν τῆς στροφορμῆς. Ἐχομεν ἐξ ἄλλου :

$$M = T \cdot r \quad (6)$$

δπου T ή δύναμις τριβής και r ή ακτίς τοῦ σφονδύλου, καί :

$$T = \eta \cdot F \quad (7)$$

δπου η ὁ συντελεστής τριβῆς και F ἡ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη ὑπὸ τῆς πέδης. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (5), (6) καὶ (7), προκύπτει :

$$t = \frac{\Delta G}{\eta \cdot F \cdot r} \quad (8)$$

Ἔχομεν ἐπίσης :

$$\Delta G = \Theta \cdot \omega \quad \eta : \quad \Delta G = 2 \pi \cdot v \cdot m \cdot r^2 \quad (9)$$

ἔρα :

$$t = \frac{2 \pi \cdot v \cdot m \cdot r}{\eta \cdot F} \quad (10)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς : $v = 6,67$ στρ/sec, $m = 100$ T.M. μάζης, $r = 1$ m, $\eta = 0,1$, $F = 1$ kgf*, λαμβάνομεν :

$$t = 41\,900 \text{ sec}$$

γ) Τὸ ἔργον A τῆς ροπῆς M , συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ εἶ-
και ἴσον πρὸς $E_{\text{κιν}}$, ἥτοι :

$$A = E_{\text{κιν}} \quad (11)$$

Ἔχομεν ἀφ' ἐτέρου ὅτι :

$$A = M \cdot \phi \quad \eta : \quad A = \eta \cdot F \cdot r \cdot \phi \quad (12)$$

δπου ϕ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ ὁ τροχὸς ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πεδήσεως μέχρι τῆς στάσεως τοῦ σφονδύλου. Ἐπίσης :

$$\phi = 2 \pi \cdot v' \quad (13)$$

δπου v' ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς στροφῶν μέχρι τῆς στάσεως τοῦ σφονδύλου. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (11), (12) καὶ (13), προκύπτει :

$$v' = \frac{E_{\text{κιν}}}{2 \eta \cdot F \cdot r \cdot \pi} \quad (14)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς $E_{\text{κιν}} = 87\,780$ kgf*m, $\eta = 0,1$, $F = 1$ kgf*, $r = 1$ m, καὶ λαμβάνομεν :

$$v' = 14 \cdot 10^4 \text{ στρ/sec}$$

1130. Ἐλαστικὴ ράβδος μήκους 4 m καὶ τομῆς $0,5$ cm² ἐπιμηκύνεται κατὰ 1 mm, ὅταν ἐξαρτηθῇ ἀπὸ αὐτὴν βάρος 225 kgf*. Πόσον τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τῆς ράβδου. ($g = 10$ m/sec²).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Δl τὴν ἐπιμήκυνσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ράβδος, E τὸ μέτρον ἐλαστικότητος, F τὴν τείνουσαν δύναμιν, S τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς ράβδου καὶ l τὸ μήκος αὐτῆς, τότε κατὰ τὸν νόμον τοῦ Hooke θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \quad (1)$$

ἔξ ἧς, λύοντες ὡς πρὸς E , λαμβάνομεν :

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S} \quad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ $\Sigma \upsilon \sigma \tau \eta \mu \alpha$ C. G. S. θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) : $F = 225 \cdot 10^6$ dyn, $l = 400$ cm, $S = 0,5$ cm², $\Delta l = 0,1$ cm, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος εἶναι :

$$E = 18 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

1131. Ἡ διάμετρος ὀρειχαλκίνης ράβδου εἶναι 6 mm. Ζητεῖται πόση δύναμις εἰς dyn δύναται νὰ προκαλέσῃ ἐπιμήκυνσιν αὐτῆς κατὰ $0,20$ % τοῦ μήκους τῆς. (Μέτρον ἐλαστικότητος ὀρειχάλκου $= 9 \cdot 10^{11}$ dyn/cm²).

Λύσις. Ἐπιμήκυνσις $0,2\%$ ἰσοῦται μὲ ἐπιμήκυνσιν $2 \cdot 10^{-3}$, τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἡ ράβδος ἔχη μήκος l , τότε ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτῆς εἶναι $\Delta l = 0,002l$. Ἐπίσης, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ράβδος ἔχει ἀκτίνης τομῆς r , τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς θὰ εἶναι $S = \pi \cdot r^2$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \quad (\text{νόμος τοῦ Hooke})$$

δύναται νὰ γραφῇ :

$$0,002 l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{\pi \cdot r^2} \cdot l$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λύοντες ὡς πρὸς F λαμβάνομεν :

$$F = 0,002 \cdot E \cdot \pi \cdot r^2$$

καί, ἀφοῦ θέσωμεν : $E = 9 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$ καί : $r = 0,3 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$F = 5,1 \cdot 10^8 \text{ dyn}$$

1132. Ράβδος ἐκ σιδήρου μήκους 4 m καὶ τομῆς 1 cm^2 ἐπιμηκύνεται κατὰ $0,46 \text{ mm}$, διὰ φορτίου 100 kgf . Πόσον τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ σιδήρου εἰς kgf/mm^2 καὶ dyn/cm^2 .

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ νόμου τοῦ Hooke ἔχομεν τὸν τύπον $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l$, ἐὰν δὲ λύσωμεν αὐτὸν ὡς πρὸς E , λαμβάνομεν :

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S}$$

Θέτομεν : $l = 4 \cdot 10^3 \text{ mm}$, $S = 10^2 \text{ mm}^2$, $\Delta l = 46 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$, $F = 10^2 \text{ kgf}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$E = 87 \cdot 10^2 \text{ kgf/mm}^2$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μέτρον ἐλαστικότητος ἀπὸ kgf/mm^2 εἰς dyn/cm^2 , τρέπομεν τὰ kgf εἰς dyn ($1 \text{ kgf} = 981000 \text{ dyn}$) καὶ τὰ mm^2 εἰς cm^2 ($1 \text{ mm} = 10^{-2} \text{ cm}$). Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$E = 8,5 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

1133. Σῦρμα χαλύβδινον, μήκους 4 m καὶ τομῆς 2 mm^2 , ἐξηρητημένον μονίμως κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, ὑφίσταται κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 40 kgf . Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος εἶναι $2,2 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2$. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος.

Λύσις. Ἐὰν εἰς τὸν γνωστὸν τύπον : $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l$ (νόμος τοῦ Hooke)

θέσωμεν : $E = 2,2 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2$, $l = 4 \cdot 10^3 \text{ mm}$, $S = 2 \text{ mm}^2$ καὶ $F = 40 \text{ kgf}$, εὐρίσκομεν :

$$\Delta l = 3,64 \text{ mm}$$

1134. Ποῖον βάρος προσδεδεμένον εἰς τὸ πέρασ σύρματος ἐκ χάλυβος, διαμέτρου 1 mm καὶ μήκους 2 m , θὰ προκαλέσῃ ἐπιμήκυνσιν 2 mm , ἐὰν τὸ μέτρον τοῦ Young διὰ τὸν χάλυβα εἶναι $2 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$. Νὰ εὐρεθῇ ἐπίσης τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας ἐφελκυσμοῦ τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ τεινόμενον σύρμα.

Λύσις. α) Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ Young E δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$E = \frac{F}{\Delta l} \cdot \frac{l}{S} \quad \text{ἢ} : F = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot S \quad (1)$$

δπου F ή τείνουσα δύναμις, Δl ή επιμήκυνσις, l τὸ ἀρχικὸν μήκος τοῦ σύρματος καὶ S ἡ διατομὴ αὐτοῦ.
Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ $\Sigma \dot{\sigma} \tau \eta \mu \alpha$ C. G. S. ἔχομεν ὡς δεδομένα : $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$, $\Delta l = 2 \text{ mm} = 0,2 \text{ cm}$, $l = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$ καὶ $S = \pi \cdot 8^2/4 = (3,14/4) \cdot 0,05^2 \text{ cm}^2 = 0,00785 \text{ cm}^2$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 157 \cdot 10^6 \text{ dyn} \quad \eta : \quad F = 16,010 \text{ gr}^*$$

β) Τὸ ἔργον τῆς ἐπιμηκύνσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = \bar{F} \cdot \Delta l \quad (2)$$

δπου $\bar{F}$ τὸ μέσον μέτρον τῆς δυνάμεως, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιμηκύνσεως τοῦ σύρματος. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναρτήσεως τοῦ βάρους, ἐπενεργεῖ δύναμις F , ἐν συνεχείᾳ ὁμως ἀναπτύσσεται ἐσωτερικὴ τάσις τοῦ σύρματος T , ἀντιθέτου φορῆς, ἡ ὁποία συνεχῶς αὐξάνει, ὥστε εἰς τὴν τελικὴν θέσιν νὰ ἔχωμεν $T = F$, ὁπότε παύει ἡ ἐπιμήκυνσις. Ἐπομένως κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραγωγῆς τοῦ ἔργου ἐπιμηκύνσεως ἔχομεν μεταβλητὴν δυνάμιν ἐπενεργείας $F - T$, τῆς ὁποίας τὸ ἔργον παράγεται, αὐξανομένης τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας τοῦ σύρματος. Ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς $F - T$ μεταβάλλεται ἀπὸ F (ἐναρξίς ἐπιμηκύνσεως, ὁπότε $T = 0$), μέχρι τοῦ 0 (τελικὴ θέσις, ὁπότε $T = F$ καὶ $F - T = 0$). Διὰ τοῦτο τὸ μέτρον τῆς μέσης σταθερᾶς δυνάμεως $\bar{F}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\bar{F} = \frac{F}{2} \quad (3)$$

καὶ ἐπομένως :

$$A = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l \quad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ γνωστὰ μεγέθη εἰς τὴν (4) : $F = 157 \cdot 10^6 \text{ dyn}$ καὶ $\Delta l = 0,2 \text{ cm}$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$A = 1,57 \cdot 10^6 \text{ erg}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1135. Ἀνθρώπος κρατεῖ βιβλίον βάρους 3 kg^* μεταξὺ τῶν παλαμῶν του καὶ δὲν τὸ ἀφίνει νὰ πέσῃ, πιέζων ἀμφοτέρας τὰς παλάμας του ὀριζοντίως. Ἐὰν δύναμις ἡ ἄσκουμένη ὑπὸ ἐκάστης παλάμης εἶναι $7,5 \text{ kg}^*$, ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ βιβλίου καὶ παλαμῶν. (Ἀπ. 0,20.)

1135α. Λίθος βάρους 100 kg^* συγκρατεῖται ἐπὶ δοκοῦ κεκλιμένης κατὰ γωνίαν $90^\circ 30'$ ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις τριβῆς. (Ἀπ. $16,5 \text{ kg}^*$.)

1136. Ἐλκθρον βάρους 100 kg^* φθάνει εἰς τοὺς πρόποδας λόφου μὲ ταχύτητα $12,2 \text{ m/sec}$. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως μεταξὺ ἐλκθρου καὶ ὀριζοντίας ἐπιφανείας τῆς χιόνος εἶναι 0,03. Ποῖον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ ἐλκθρον ἐπὶ τῆς χιόνος (Ἀπ. $251,17 \text{ m}$.)

1137. Πιάνο βάρους 500 kg^* σύρεται ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου δαπέδου κατὰ 6 m ὑπὸ ὀριζοντίας δυνάμεως 75 kg^* . Εὐράτε τὸν συντελεστὴν τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Τί συνέβη εἰς τὴν καταναλωθεῖσαν ἐνέργειαν; (Ἀπ. 0,15.)

1138. Πρὸς μετακίνησιν ὀχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec ἀπαιτεῖται ἰσχύς 5000 Watt . Ποία ἡ ὑπερνικωμένη δύναμις τριβῆς, εἰς Νιούτον. (Ἀπ. 2500 Nt .)

1139. Σῶμα βάρους B διανύει κατόπιν ἐπενεργείας δυνάμεως διάστημα $s = 24,5 \text{ m}$ εἰς χρόνον $t = 5 \text{ sec}$, κινούμενον ἐπὶ μὴ λείου ὀριζοντίου ἐπιπέδου, καὶ ἡρεμεῖ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς. (Ἀπ. $\eta = 0,2$.)

1140. Ἡ δύναμις ἔλξεως ἐπὶ τῆς ράβδου συνδέσεως ἀμαξοστοιχίας ἢ ὁποία σύρει δύο ὁχήματα 15 tn^* εἶναι 4500 kg^* . Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἰς τὴν ἔλξιν εἶναι $0,004$, νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ χρόνος καὶ τὸ διάστημα τὰ ὅποια χρειάζεται ἡ ἀμαξοστοιχία, ἵνα ὀριζοντίως κινουμένη ἀποκτήσῃ ταχύτητα 72 km/h .
(Ἀπ. 185 sec , 1848 m .)

1141. Σῶμα βάρους $B = 10 \text{ kg}^*$ κινεῖται εὐθυγράμμως, ὀλισθαίνον ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 380 \text{ cm/sec}^2$, τῇ ἐπενεργείᾳ δυνάμεως $F = 6 \text{ kg}^*$, σχηματίζουσας γωνίαν 45° μετὰ τῆς ὀριζοντίας διευθύνσεως τῆς κινήσεως πρὸς τὰ ἄνω. Νὰ εὐρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς μετὰ τῶν σώματος καὶ ἐπιπέδου. (Ἀπ. $0,07$.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαί: Ἀρχιτεκτόνων καὶ Τοπογράφων, 1955).

1142. Ἀπὸ ὑψηλοῦ ὁρους ἀποσπᾶται λιθίνη μᾶζα ὄγκου $200\,000 \text{ m}^3$ καὶ φθάνει εἰς τὴν πεδιάδα. Ἐάν τὸ ὕψος ἐξ οὗ ἀπεσπᾶσθῇ ἡ μᾶζα εἶναι 160 m , ἡ δὲ πυκνότης τοῦ ὕλικου $2,8 \text{ tn/m}^3$, ὁ συντελεστὴς τριβῆς $0,6$ καὶ ἡ κλίσις τοῦ δρόμου τὸν ὅποιον ἠκολούθησεν 60° , μὲ πόσῃν ταχύτητά (εἰς km/h) φθάνει εἰς τὴν πεδιάδα καὶ πόσῃ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς εἰς κιλοβατῶρας (kWh). (Ἀπ. 165 km/h , $163\,000 \text{ kWh}$.)

1143. Χαλυβδίνη πλὰξ βάρους 40 kg^* κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς ἐπὶ ὀριζοντίας χυτοσιδηρᾶς πλακῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν μετακίνησιν παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως δύναμις, ὅταν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἰσοῦται πρὸς $0,18$.
(Ἀπ. $7,2 \text{ kg}^*$.)

1144. Ὅριζοντία δύναμις 500 Ν ιοῦτον ἀπαιτεῖται ἵνα μετακινήσῃ ἀντικείμενον μάζης 100 kg κατὰ μῆκος τραχείας ἐπιφανείας. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως τῆς ἐπιφανείας ταύτης.
(Ἀπ. $0,51$.)

1145. Ποία ἡ μέση ἰσχύς, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τροchioδρομικοῦ ὁχήματος μεταφέροντος 60 ἐπιβάτας εἰς διάστημα 600 m ἐντὸς 3 min . Τὸ βάρος τοῦ ὁχήματος εἶναι 14 tn^* , τὸ μέσον βάρος ἑκάστου ἐπιβάτου 70 kg^* , ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους $50^\circ/_{00}$ καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς $0,01$.
(Ἀπ. $N = 48,5 \text{ PS}$.)

1146. Τάσις 10 gr^* , ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ἐνὸς πέρατος σχοινίου περιελιγμένου τρεῖς φορές πέραν κυλινδρικοῦ στύλου, ἰσορροπεῖ τάσιν 5 kg^* εἰς τὸ ἕτερον πέραν. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς μετὰ τοῦ σχοινίου καὶ τοῦ κυλινδρικοῦ στύλου.
(Ἀπ. $0,33$.)

1147. Σῶμα ἀκίνητῃ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ ὅποιον δύναται νὰ λάβῃ κλίσιν γωνίας θ , ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μετὰ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ σώματος εἶναι $1/\sqrt{3}$. Ἐάν ἡ γωνία θ αὐξάνεται προοδευτικῶς ἀπὸ τὸ μηδέν, ὑπὸ ποίαν τιμὴν τῆς θ θὰ ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ τὸ σῶμα κατὰ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του, ὅταν ἡ γωνία θ εἶναι ἴση πρὸς 60° .
(Ἀπ. $\theta = 30^\circ$, $1/\sqrt{3}$.)

1148. Ἀνθρώπος τρέχει ἐπὶ τοῦ πάγου μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης αὐτοῦ γίνῃ 3 m/sec καὶ μετὰ ἀφίεται νὰ ὀλισθήσῃ μέχρις ὅτου σταματήσῃ. Ἐάν ὁ συντελεστὴς ὀλισθήσεως μετὰ τῶν πάγου καὶ παγοπεδίων εἶναι $\eta = 0,02$, ἐπὶ πόσον διάστημα θὰ ὀλισθήσῃ.
(Ἀπ. $s = 22,5 \text{ m}$.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολή Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων, 1959).

1149. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως 30° εὐρίσκεται σῶμα βάρους 6 kg^* . Νὰ εὐρεθῇ ἡ δύναμις, ἥτις πρέπει νὰ ἀσκηθῇ ἐπὶ τὸ σῶμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ὥστε τοῦτο νὰ κινήται ἰσοταχῶς. Δίδεται συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως μετὰ τῶν ἐπιφανείας κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ σώματος $\eta = 0,4$.
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσικόν, 1958).
(Ἀπ. $F = 5,076 \text{ kg}^*$, $F = 0,924 \text{ kg}^*$.)

1150. Ύαλινη πλάξ ρίπτειται κατὰ μήκος χαλυβδίνης ἐπιφανείας μὲ ταχύτητα 48 km/h. Ἐάν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι 0,27, πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ αὕτη καὶ μετὰ πόσον χρόνον θὰ σταματήσῃ.

(Ἀπ. 33 m, 5 sec.)

1151. Ἀντικείμενον μάζης 0,1 kg ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 0,5 m. Ἐάν ἡ ταχύτης τοῦ ἀντικείμενου εἶναι 1,25 m/sec, ποία ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας λόγω τριβῆς.

(Ἀπ. 0,412 Joule.)

1152. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου μεταβλητῆς γωνίας, ξύλινον σῶμα, μάζης 100 gr, εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον ἐνάρξεως τῆς ὀλισθήσεως, ὅταν ἡ γωνία κλίσεως εἶναι 30°. Ποία ἡ συνισταμένη δύναμις ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος ἵνα ὀλισθήσῃ πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν ἡ γωνία κλίσεως αὐξάνῃ εἰς 60°. (Ἀπ. 57,7 gr*.)

1153. Ἀντικείμενον μάζης 20 kg ὀλισθαίνει πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 5 m. Ἐάν ἡ ταχύτης του εἶναι 8 m/sec, πόσῃ ἐνέργειαν θὰ ἀπωλέσῃ λόγω τῆς τριβῆς.

(Ἀπ. 340 Joule.)

1154. Χιονοδρόμος διατρέχει στενωπόν, ἀπὸ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὁποίας κατερχόμενος ἐξ ὕψους 12 m, ἀνέρχεται εἰς ὕψος 8 m ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ποία ἡ μέση δύναμις τῆς τριβῆς, ὅταν ὁ χιονοδρόμος ζυγίσῃ 80 kg* καὶ διανύῃ ἀπόστασιν 160 m. (Δίδεται ὅτι $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ἀπ. $T = 2 \text{ kg}^*$.)

1155. Ὄχημα, ζυγίζον εἰς κανονικὸν τόπον 2 kg*, ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως ἐντάσεως 0,1 kg* καὶ εἰς χρόνον 4 sec διανύει ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ διάστημα 1,60 m. Νὰ εὐρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς.

(Ἀπ. $\eta = 0,03$.)

1156. Σταθερὰ δύναμις 2400 Nt ἐνεργεῖ ὀριζοντίως ἐπὶ μάζης 100 kg καὶ προσδίδει εἰς αὐτὴν ταχύτητα 36 km/h εἰς χρόνον 0,5 sec. Ποίος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως.

(Ἀπ. 0,41.)

1157. Χιονοδρόμος βάρους 70 kg* κατέρχεται ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὕψωμα ὕψους 10 m, εἰς τὴν βάσιν τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἀμέσως ἀνωφέρεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας οὗτος, λόγω τῆς κεκτημένης ταχύτητος, ἀνέρχεται εἰς ὕψος 6 m. Ποία ἡ μέση δύναμις τριβῆς, ἐάν ὁ χιονοδρόμος διέτρεξε συνολικῶς διάστημα 56 m. (Ἀπ. 5 kg*.)

1158. Σῶμα, ἔχον μάζαν 20 gr, ὀλισθαίνει ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 800 dyn καὶ διανύει οὕτως ἐντὸς χρόνου 4 sec διάστημα 2 m, ἐκκινουῖν ἐκ τῆς ἡρεμίας. Ποία ἡ δύναμις τῆς τριβῆς καὶ ποίος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως.

(Ἀπ. α' 300 dyn, β' 0,015.)

1159. Ὄχημα κατέρχεται, κινούμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, μήκους 200 m καὶ κλίσεως 4%, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ ἀνέρχεται ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ ἐτέρου κεκλιμένου ἐπιπέδου τῆς αὐτῆς ὥς καὶ τὸ προηγούμενον κλίσεως. Ἐάν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἴσοῦται πρὸς 0,03, ποῖον τὸ ἐπὶ τοῦ δευτέρου κεκλιμένου ἐπιπέδου διανυόμενον ὑπὸ τοῦ ὀχήματος διάστημα.

(Ἀπ. 28,9 m.)

1160. Πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ σταματήσῃ ἑλκηθρον, κινούμενον μὲ ταχύτητα 6 m/sec ἐπὶ ὀριζοντίας ὁδοῦ κεκαλυμμένης ὑπὸ χιόνων, ἐάν ἡ δύναμις τῆς τριβῆς ἴσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{200}$ τοῦ βάρους τοῦ ἑλκηθρου.

(Ἀπ. 2 min 2 sec.)

1161. Δύο σύρματα, τὸ ἓν ἐκ χαλκοῦ καὶ τὸ ἄλλο ἐκ σιδήρου, ἑκαστον διαμέτρου 1 mm, ἐνοῦνται ἐν σειρᾷ. Τὸ χάλκινον σύρμα ἔχει μήκος 2 m καὶ τὸ σιδηρῶν 3 m. Ἐάν τὸ μέτρον τοῦ Young εἶναι διὰ τὸν χαλκὸν $12 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$ καὶ διὰ τὸν σίδηρον $19 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$, ποία θὰ εἶναι ἡ ὀλικὴ ἐπιμήκυνσις, ὅταν μῶξα 2 kg ἀναρτηθῇ εἰς τὸ κάτω ἄκρον τοῦ σύρματος.

(Ἀπ. 0,081 cm.)

1162. Χαλύβδινον σύρμα μήκους 3 m και διαμέτρου 1,2 mm δύναται νὰ συγκρατῇ βάρος 40 kg*. Ποία εἶναι ἡ ἐπιμήκυνσίς του. Μέτρον ἔλαστικότητος τοῦ χαλύβος = $2 \cdot 10^{11}$ Nt/m². (Ἀπ. $5,2 \cdot 10^{-3}$ m.)

1163. Σύρμα ἐξ ὀρείχαλκου μήκους 2 m φορτίζεται διὰ βάρους 3 kg*. Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος εἶναι 0,9 mm, νὰ υπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος, β) τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν ἔργον. ($g = 980$ cm/sec². Μέτρον τοῦ Young διὰ τὸν ὀρείχαλκον = $9,8 \cdot 10^{11}$ dyn/cm²). (Ἀπ. α' 0,94 mm. β' $1,39 \cdot 10^5$ erg.)

1164. Σύρμα ἀργυροῦν μήκους $l = 10$ m ἔχει ἐξηρητημένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον του βάρος 50 kg*, χωρὶς νὰ ὑπερβαίῃ τὸ ὅριον ἔλαστικότητος, τὸ ὁποῖον διὰ τὸν ἄργυρον ἐπιτυγχάνεται διὰ φορτίσεως 11 kg*/mm². α) Πόση πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἐλάχιστον ἡ διατομὴ τοῦ σύρματος, ὅταν τὸ βάρος αὐτοῦ: 1) λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, 2) δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν. β) Ποία ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις. ($E_{Ag} = 10,5$ gr*/cm³, $E_{Ag} = 8100$ kg*/mm²). (Ἀπ. α' 1) 4,59 mm², 2) 4,55 mm². β' 1) 13,45 mm, 2) 13,57 mm.)

1165. Ἐχομεν ἓν σύρμα ἐξηρητημένον ἀπὸ ἀκλονήτου στηρίγματος, μήκους 4 m καὶ τομῆς 2 mm². Τείνεται τοῦτο ὑπὸ δυνάμεως 40 kg*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις. Μέτρον ἔλαστικότητος = $2,2 \cdot 10^4$ kg*/mm². (Ἀπ. $\Delta l = 3,63$ mm.) (Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1959).

1166. Χαλύβδινον σχοινίον μήκους 50 m, συνιστάμενον ἐξ 20 συρμάτων διαμέτρου 2 mm ἑκάστου, φορτίζεται μέχρις οὗ το πολὺ φθάσῃ τὸ ὅριον ἔλαστικότητος τοῦ χαλύβος, τὸ ὁποῖον ἐπιτυγχάνομεν διὰ φορτίσεως 60 kg*/mm². Ποῖον τὸ ἀνώτατον δυνατὸν βάρος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐξαρθήσωμεν ἐκ τοῦ ἄκρου τοῦ σχοινίου, καὶ ποία τότε ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτοῦ. ($E_{\chi\lambda} = 21 \cdot 10^3$ kg*/mm²). (Ἀπ. 3770 kg*, 14 cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1167. Ἐπὶ ὀριζοντίᾳ ἐπιφανείᾳ πάγου ὑπάρχει λίθος βάρους 8 kg*. Ἐπὶ τοῦ λίθου τούτου προσπίπτει τεμάχιον πάγου βάρους 3 kg*. Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ κρούσις εἶναι κεντρικὴ καὶ τελείως μὴ ἔλαστικὴ, ὁ λίθος καὶ τὸ τεμάχιον πάγου διακινῶνται ὡς ἓν σῶμα διάστημα 18 m. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,02, πόσῃ ἡ ταχύτης τοῦ τεμαχίου πάγου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως. (Ἀπ. 9,8 m/sec.)

1168. Σῶμα μάζης 12 kg ἀρχίζει νὰ κινῆται κατὰ μῆκος ὀριζοντίας ἐπιφανείας ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως 4 kg* ἐνεργοῦσης πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς κινήσεως. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κτηθεῖσα κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἰς τὸ τέλος τῶν 10 sec καὶ β) νὰ συγκριθῇ αὕτη πρὸς τὸ ὁλικῶς ἐπιτελεσθὲν ἔργον ὑπὸ τοῦ σώματος κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. (Συντελεστὴς τριβῆς = 0,28). (Ἀπ. α' $1,64 \cdot 10^3$ erg. β' 0,16.)

1169. Μᾶζα 25 kg κατέρχεται, μέσω πολυσπάστου, κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω καὶ διανύει διάστημα 2,4 m, ἀνυψώσασα ταυτοχρόνως μᾶζαν 76 kg κατὰ 0,6 m. Ἐὰν ἡ κάτω τροχαλιοθήκη ἔχη μᾶζαν 10 kg, νὰ καθορισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον καταναλίσκεται εἰς τριβὰς. (Ἀπ. 8,4 kg*m.)

1170. Αὐτοκίνητον, βάρους 800 kg* μετὰ τοῦ φορτίου, διανύει εἰς 3 ὥρας διάστημα 30 km μὲ 40 m ἀνύψωσιν. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς τῆς ὁδοῦ ἰσοῦται πρὸς 1/50, ἐκ τῶν ἀντιστάσεων δὲ τῆς μηχανῆς καταναλίσκονται τὰ 40% τῆς ἰσχύος τοῦ κινητήρος. Ποία ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρος. (Ἀπ. 1,05 PS.)

1171. Κατά την ἐκκίνηση αὐτοκινήτου ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς του, ἥτοι πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ὀχήματος. Αἱ τριβαὶ ἰσοδυναμοῦν πρὸς 250 Νιούτον. Τὸ ὄχημα ἔχει μάζαν $m = 1200 \text{ kg}$. Ὁ λόγος τῆς ἰσχύος N πρὸς τὴν ταχύτητα v εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς $k = 3000 \text{ W} \cdot \text{sec}/\text{m}$. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ ὄχημα τοῦτο τὴν ταχύτητα τῶν $54 \text{ km}/\text{h}$. (Ἀπ. $t = 6 \text{ sec}$.)

1172. Ἐλκθρον ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁδοῦ ἐχούσης γωνίαν κλίσεως φ . Εἰς ποῖον σημείον Γ τοῦ ὀριζοντίου τμήματος τῆς ὁδοῦ $AB\Gamma$ θὰ ἤρμησῃ, ὅταν $AB = s$ καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς η .

(Ἀπ. $B\Gamma = s (\eta \mu \varphi / \eta - \sigma \nu \varphi)$.)

1173. Σῶμα κατέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἄν ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διατρέχει τοῦτο μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, εἶναι 30 m , ἡ ὀριζοντία προβολὴ αὐτοῦ ἴση πρὸς 15 m καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἴσος πρὸς $0,2$, νὰ εὑρεθοῦν: α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος καὶ β) ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ σῶμα τὴν ἀπόστασιν τῶν 30 m . (Ἀπ. α' $7,52 \text{ m}/\text{sec}^2$, β' $2,82 \text{ sec}$.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Σχολὴ Ἱατρικὴ, Τμήμα Ὀδοντιατρικόν, 1960).

1174. Τεμάχιον ξύλου μάζης 400 gr ὀλισθαίνει ἄνευ ἐπιταχύνσεως ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 30° μετὰ τῆς ὀριζοντίας θέσεως. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξύ τοῦ ξύλου καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως αὐξηθῇ εἰς 60° , νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ξύλου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ β) τὸ ἐπιτελεσθὲν διὰ τῆς τριβῆς ἔργον, ὅταν τὸ ξύλον ὀλισθαίνῃ κατὰ 1 cm ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. ($g = 980 \text{ cm}/\text{sec}^2$). (Ἀπ. α' $566 \text{ cm}/\text{sec}^2$, β' $1,13 \cdot 10^7 \text{ erg}$.)

1175. Κιβώτιον βάρους B τοποθετεῖται ἐπὶ μὴ λείου ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ὃ δὲ συντελεστὴς τριβῆς ἴσους πρὸς η . Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία θ , ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ δύναμις F διὰ νὰ μετακινήσῃ τὸ κιβώτιον με τὴν μικρότερην δυνατὴν τιμὴν τῆς F (βλ. σχῆμα). Ποία ἡ ἔντασις τῆς $F_{\min}$.

(Ἀπ. $\epsilon \varphi \theta = \eta$, $F_{\min} = \eta \cdot B / \sqrt{1 + \eta^2}$.)

1176. Χιονοδρόμος ὀλισθαίνει κατερχόμενος ἐπὶ χιονοσκεποῦς κλιτύος ὄρους, ἐχούσης γωνίαν κλίσεως 45° , χωρὶς νὰ χρησιμοποιοῇ τὰς χιονοδρομικὰς ράβδους. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς τῶν χιονοπεδίων ἐπὶ τῆς χιόνος εἶναι $\eta = 0,1$, ἡ δὲ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος κατὰ τὴν κίνησιν $F = k \cdot v^2$, ὅπου k σταθερὰ καὶ v ἡ ταχύτης τοῦ χιονοδρόμου. Διὰ ταχύτητα $1 \text{ m}/\text{sec}$ ἡ F ἴσους πρὸς $0,0635 \text{ kgf}$. Ποίαν ὀρικὴν ταχύτητα ἀποκτᾷ ὁ χιονοδρόμος, ἔαν τὸ βάρος αὐτοῦ μετὰ τῶν χιονοπεδίων ἀνέρχεται εἰς 90 kgf . Κατὰ πόσον αὐξάνει ἡ ὀρική ταχύτης, ὅταν ὁ χιονοδρόμος, ἐπαλειφὼν διὰ καταλλήλου κηροῦ τὰ χιονοπέδιλα, ἐλαττώσῃ τὸν συντελεστὴν τριβῆς εἰς $0,05$. (Ἀπ. $v_{100} = 108 \text{ km}/\text{h}$, $v_{200} = 111 \text{ km}/\text{h}$.)

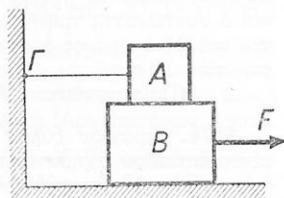
1177. Σιδηροδρομικὸν ὄχημα κινεῖται με σταθερὰν ταχύτητα ἐπὶ εὐθυγράμμων σιδηροτροχιῶν γωνίας κλίσεως $\varphi = 10^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ὀχήματος καὶ ἡ ταχύτης του μετὰ πάροdon χρόνου 20 sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως, ὅταν κινῆται κατερχόμενον ἐπὶ σιδηροτροχιῶν γωνίας κλίσεως $\varphi_1 = 15^\circ$, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Ποῖον τὸ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανυθὲν διάστημα.

(Ἀπ. $\gamma = 0,87 \text{ m}/\text{sec}^2$, $v = 1,74 \text{ m}/\text{sec}$, $s = 17,4 \text{ m}$.)

1178. Κατά την άνοδικήν κίνησιν ύλικού σημείου επί μη λείου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσεως $\varphi = 30^\circ$, έχει τούτο άρχικήν ταχύτητα $v_0 = 15 \text{ m/sec}$. Μετά πόσον χρόνον από τῆς έναρξεως τῆς κινήσεως τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἡρεμεῖ, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς $\eta = 0,1$. Ποῖον τὸ διανυθὲν διάστημα.
(Ἀπ. $t = 2,61 \text{ sec}$, $s = 19,55 \text{ m}$.)

1179. Ἐλευθέρα τροχαλία ροπῆς ἀδραναίας $10^5 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$ στρεφόμενη μὲ 50 στροφὰς ἀνὰ δευτερόλεπτον ἀκίνηται, λόγω τῆς τριβῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας, μετὰ τὴν συμπλήρωσιν 100 περιφορῶν. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ζεύγος τριβῆς τὸ ὁποῖον ἀσκεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας καί, ὑποτιθεμένης τῆς τιμῆς τοῦ ζεύγους ὡς σταθερᾶς, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς εἰς ἵππους ἢ ἀναγκαῖα ἵνα διατηρήσῃ τὸν τροχὸν περιστρεφόμενον μὲ συχνότητα 100 στρ/sec, (1 ἵππος = 746 Watt). (Ἀπ. $7,852 \cdot 10^6 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$, 0,66 HP.)

1180. Σῶμα A βάρους 100 kgf^* στηρίζεται ἐπὶ σώματος B καὶ συνδέεται δι' ὀριζοντίου σχοινίου πρὸς τὸν τοῖχον Γ. Τὸ σῶμα B ἔχει βάρος 200 kgf^* . Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξύ A καὶ B εἶναι $1/4$ καὶ μεταξύ B καὶ τῆς ἐπιφανείας $1/3$, ποῖα ὀριζοντία δύναμις F ἀπαιτεῖται ἵνα μετακινήσῃ τὸ σῶμα B. (Ἀπ. $F = 125 \text{ kgf}^*$.)



* Ασκήσις 1180.

1181. Δύο βάρη 15 kgf^* καὶ 30 kgf^* , συνδεόμενα δι' εὐλύγιστον καὶ μὴ ἑκτατοῦ σχοινίου, ἀκίνητοῦν ἐπὶ λείου κεκλιμένου επιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 45° μετὰ τῆς ὀριζοντίας. Ὅταν τὰ βάρη ἀφίενται, ποῖα θὰ εἶναι ἡ τάσις τοῦ σχοινίου. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξύ τοῦ επιπέδου καὶ τοῦ ἐκ 30 kgf^* βάρους εἶναι $1/4$ καὶ μεταξύ τοῦ επιπέδου καὶ τοῦ ἐκ 15 kgf^* βάρους $3/8$.
(Ἀπ. $T = 0,887 \text{ kgf}^*$.)

1182. Κιβώτιον βάρους 120 kgf^* σύρεται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιφανείας μέσω σχοινίου ὑπὸ γωνίαν 30° καὶ μὲ δύναμιν 10 kgf^* . Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως.
(Ἀπ. 0,075.)

(Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Ἀνωτ. Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1961.)

1183. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 2 m καὶ ὕψος $0,4 \text{ m}$. Ποῖα δύναμις ἀπαιτεῖται ἵνα ἀντικείμενον βάρους $0,25 \text{ kgf}^*$ ὀλισθήσῃ πρὸς τὰ ἄνω: α) ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ τριβὴ καὶ β) ἐὰν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 75% . (Ἀπ. α' $F = 0,49 \text{ Nt}$, β' $F = 0,65 \text{ Nt}$.)

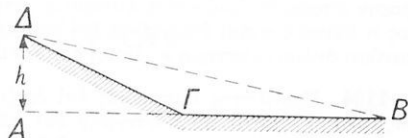
1184. Σῶμα μάζης 500 gr εὑρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ ἐπὶ ὀριζοντίου τραπέζης καὶ εἶναι προσδεμένον εἰς λεπτόν ὀριζόντιον νῆμα τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας στερεωμένης εἰς τὸ ἄκρον τῆς τραπέζης καὶ φέρει εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον μάζαν 150 gr . Τὸ σύστημα κατ' ἀρχὰς διατηρεῖται εἰς κατάστασιν ἡρεμίας καὶ ἀκολουθῶς ἀφίεται ἐλεύθερον. Τὸ ἐξ 150 gr^* βάρος κατέρχεται ἀπόστασιν ἐξ 75 cm ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Τὸ σῶμα μετακινεῖται συνολικῶς κατὰ 100 cm ἐπὶ τῆς τραπέζης. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως μεταξύ τοῦ σώματος καὶ τῆς τραπέζης.
(Ἀπ. 0,209.)

1185. Ποδηλάτης κινεῖται ἐπὶ καμπῆς ἀκτίνος 10 m μὲ ταχύτητα 5 m/sec . Ποῖα ἡ ὑπὸ τοῦ ποδηλάτου μετὰ τῆς κατακόρυφου σχηματιζομένη γωνία καὶ ποῖος ὁ ἐλάχιστος δυνατός συντελεστὴς τριβῆς μεταξύ τῶν τροχῶν τοῦ ποδηλάτου καὶ τοῦ ἐδάφους διὰ νὰ παραμένῃ ἐν ἰσορροπίᾳ ὁ ποδηλάτης.
(Ἀπ. $14^\circ 20'$, 0,255.)

1186. Μικρόν ὄχημα, μάζης 4 kgf, κεῖται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Τὸ ὄχημα τίθεται εἰς κίνησιν μέσω νήματος, τὸ ὁποῖον προσδένεται κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ εἰς τὸ ὄχημα, ἀκολουθῶς δὲ τεινόμενον παραλλήλως πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ λαιμοῦ τροχαλίας καὶ φέρεται εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ προσδεδεμένον βάρους 500 gr*. Ποία ἐπιτάχυνσις ἐπιτυγχάνεται τῆς τριβῆς θεωρουμένης ὡς ἀμελητέας ἢ τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς ἀνερχομένου εἰς 0,02. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς διὰ τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἰσοταχῆ κίνησιν. Μᾶζαι τροχαλίας καὶ νημάτων ἀμελητέαι.
(Ἀπ. 109 cm/sec². 91,6 cm/sec². 0,125.)

1187. Σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς πλευρῶς κεκλιμένου ἐπιπέδου διὰ πάγου, ἐκκινουῖν ἀπὸ τινος ὕψους h αὐτοῦ καὶ διανύον τὸ μήκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξακολουθεῖ κινούμενον ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου μέχρι ἀποστάσεως ΓΒ. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ ἰσοῦται πρὸς s . Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως μεταξὺ τοῦ σώματος καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πάγου κατὰ τὴν διαδρομὴν ΔΓΒ.

(Ἀπ. $\eta = h/s$.)



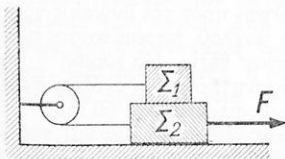
1188. Κιβώτιον βάρους 800 kgf* πρόκειται νὰ μετακινηθῇ ὀλισθαίνον ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους, κατὰ 10 m. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι 0,4. Ποία εἶναι ἡ μικροτέρα δυνατὴ τιμὴ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν; Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν δύναμιν 360 kgf*, πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετακίνησιν ταύτης.
(Ἀπ. 320 kgf*, 140,7 sec.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1961.)

1189. Ὁ ὁδηγὸς αὐτοκινήτου ἐκκινουῦντος ἐκ τινος σημείου Α ρυθμίζει τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος εἰς τρόπον ὥστε νὰ κινῆται τοῦτο μὲ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν 0,7 m/sec². Ἀκολουθῶς ὁ ὁδηγὸς πᾶναι τὴν τροφοδότησιν τοῦ κινητήρος καὶ τοιοῦτοτρόπως τὸ ὄχημα ἐξακολουθεῖ κινούμενον καὶ φθάνει εἰς σημεῖον Β μὲ μηδενικὴν ταχύτητα. Τὰ δύο σημεῖα ἀπέχουν 500 m. Ἡ ἀντίστασις κινήσεως ἰσοῦται μὲ 6 kgf* κατὰ τόννον. Ζητοῦνται: α) Ἡ διάρκεια τῶν δύο φάσεων τῆς κινήσεως. β) Τὸ εἰς ἐκάστην φάσιν διανυόμενον διάστημα. γ) Ἡ μεγίστη ταχύτης, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. δ) Ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου.

(Ἀπ. α' 10,6 sec, 124 sec. β' 39,32 m, 460,68 m. γ' 7,42 m/sec. δ' 3,71 m/sec.)

1190. Σῶμα Σ₁, βάρους Β₁ εὑρίσκεται ἐπὶ σώματος Σ₂, βάρους Β₂. Τὰ δύο σώματα συνδέονται πρὸς ἀλλήλα διὰ νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τῶν δύο σωμάτων καὶ τοῦ ἐξ αὐτῶν Σ₂ μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἰσοῦται πρὸς η . Ποία ἡ τιμὴ τῆς ὀριζοντίας δυνάμεως F , τῆς ἀπαιτουμένης ὥπως τὸ σῶμα Σ₂ ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου κινούμενον μὲ σταθεράν ταχύτητα. [Ἀπ. $F = \eta \cdot (3B_1 + B_2)$.]



1191. Τετραγωνικὸν σῶμα βάρους Β κινεῖται ἰσοταχῶς κατὰ μήκος ὀριζοντίου ἐπιπέδου, παραλλήλως πρὸς μίαν ἀκμὴν αὐτοῦ, διὰ δυνάμεως δράσεως ὑπὸ γωνίαν φ , ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, καὶ διευθυνομένης πρὸς τὰ ἄνω. Πρὸς ἀποφυγὴν ροπῆς πρέπει ὁ φορεὺς τῆς δυνάμεως νὰ διέρχεται διὰ τῆς προβολῆς τοῦ κέντρου βάρους ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ποία ἡ τιμὴ τῆς φ , ἵνα διὰ συντελεστὴν τριβῆς η ἢ πρὸς κίνησιν ἀπαιτουμένη δύναμις ἔχῃ ἐλαχίστην τιμὴν καὶ ποία ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.
(Ἀπ. $\varphi = \eta$, $F = B \cdot \eta / \sqrt{1 + \eta^2}$.)

1192. Σιδηροδρομικός συρμός, μάζης 100 tn, αρχεται κινούμενος εκ της ήρεμίας επί ευθυγράμμου οριζοντίας οδού. Η αντίστασις κινήσεως ίσοῦται πρὸς 10 kgf*/tn. Μέχρις ὅτου ἡ ἀμαξοστοιχία ἀποκτήσῃ τὴν κανονικὴν ταχύτητα, ἴσην πρὸς 108 km/h, οἱ κινητῆρες ἀναπτύσσουσιν προωστικὴν δύναμιν 50 tn*. Ζητοῦνται: α) Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως ἡ ἀμαξοστοιχία ἀποκτᾷ τὴν ἐν λόγω ταχύτητα καὶ πόσον διάστημα διανύει κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν. β) Ἐὰν ἡ ἀμαξοστοιχία σταματήσῃ ἀφ’οὗ διανύσῃ διάστημα 2 km, πόσον χρόνον θὰ διαρκέσῃ ἡ κίνησις της καὶ ποία ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσουσιν αἱ τροχοπέδες.

(Ἀπ. α' 1 min 15 sec, 1125 m. β' 2 min 13,3 sec, 12,5 tn*.)

1193. Κιβώτιον, βάρους B, ἡρεμοῦν ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς ὀριζοντίας δυνάμεως, ἥτις τὸ μετακινεῖ κατὰ διάστημα s. Ἀκολουθῶς ἡ δύναμις παύει ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ κιβωτίου καὶ οὕτω τὸ κιβώτιον ἡρεμεῖ ἀφ’οὗ διανύσει ἀκόμη διάστημα s'. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς. (Ἀπ. $\eta = F_s/[B(s+s')]$.)

1194. Ποδηλάτης κινούμενος ἐπὶ ὀριζοντίας οδού μὲ σταθεράν ταχύτητα 25 m/sec, ἐνεργῶν κατὰ τινα στιγμήν ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν ἐπιτυγχάνει ἐπιβράδυνσιν 5 m/sec². Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου μετὰ διάστημα 10 m ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιβράδυνσεως, ποῖον τὸ ὅλικόν διάστημα μέχρις ὅτου ὁ ποδηλάτης σταματήσει καὶ ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς. (Ἀπ. 22,9 m/sec, 62,5 m, 0,51.)

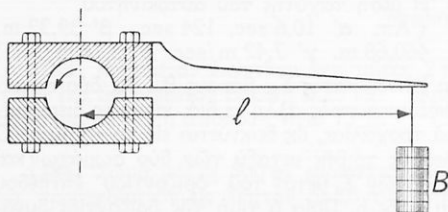
1195. Ἀμαξοστοιχία συνολικῆς μάζης 360 tn ἀποκτᾷ κινουμένη ἐπὶ ὀριζοντίων σιδηροτροχιῶν ἐντὸς 2 min ταχύτητα 90 km/h. Ἡ ἀτμομηχανὴ ἔχει μάζαν 100 tn. Ποία ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ζεύξις μεταξύ ἀτμομηχανῆς καὶ πρώτου ὀχήματος καὶ ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἀτμομηχανῆς καὶ σιδηροτροχιῶν.

(Ἀπ. 5520 kgf*, 0,076.)

1196. Ἄνθρωπος, μάζης 70 kgf, θέτει εἰς κίνησιν ὄχημα, μάζης 420 kgf, ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Ποίαν ἐπιτάχυνσιν δύνανται τὸ πολὺ νὰ προσδώσῃ οὗτος εἰς τὸ ὄχημα, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξύ ἀνθρώπου καὶ ἐδάφους εἶναι 0,6 ὁ δὲ ἄνθρωπος θεωρηθῇ ὡς ἡρεμῶν. Συντελεστὴς τριβῆς ὀχήματος καὶ ἐδάφους ἀμελητέος.

(Ἀπ. 0,98 m/sec².)

1197. Ἡ ἰσχὺς κινητῆρος προσδιορίζεται συνήθως διὰ πέδης ἀποτελουμένης ἐκ



δύο σιαγόνων περισφιγγουσῶν τὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρος. Εἰς τὴν μίαν σιαγόνα ὑπάρχει μοχλὸς διὰ τοῦ ὁποίου ἐξαρτῶνται βάρη. Τὸ φορτίον ἐκλέγεται οὕτως, ὥστε νὰ ἴσουςται πρὸς τὰς δυνάμεις τριβῆς, τοῦ μοχλοῦ παραμένοντος εἰς ὀριζοντίαν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ἐὰν ὁ ἄξων στρέφεται μὲ συχνότητα 60 min⁻¹, τοῦ μήκους l ὄντος 1 m καὶ τοῦ βάρους B 50 kgf* κατὰ τὴν ἰσορροπίαν. Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ βάρος τοῦ μοχλοῦ.

(Ἀπ. 4,1 HP.)

1198. Σύρμα διαμέτρου 1 mm ἐκτείνεται ὀριζοντίως μεταξύ δύο σταθερῶν σημείων ἀπέχοντων 2 m. Ποῖον βάρος, προσδεδεμένον εἰς τὸ κέντρον τοῦ σύρματος, θὰ προκαλέσῃ κάμψιν 5 cm, ἐὰν τὸ μέτρον ἐλαστικότητος διὰ τὸ σύρμα εἶναι $11 \cdot 10^{11}$ dyn/cm². (Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ βάρος τοῦ σύρματος). (Ἀπ. 275 gr*.)

1199. Σύρμα ἐξ ὀρειχάλκου, μήκους 200 cm, εἶναι ἀκίνητον εἰς τὸ πέρασ του A καὶ διατηρεῖται τεταμένον εἰς κατακόρυφον θέσιν τῇ βοήθειᾳ βάρους (ἐδράνου) εἰς

Β, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν πρόσθετα βάρη. Ἀπὸ τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ ἐδράνου, χαλύβδινον σύρμα ΓΔ, ὁμοίως 200 cm μήκους, στηρίζεται εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ διατηρεῖται τεταμένον ὑπὸ ὁμοίου ἐδράνου εἰς τὸ Δ. Ἀμφότερα τὰ σύρματα ἔχουν διάμετρον 0,7 mm. Πόσον θὰ ἐπιμηκυνθῇ τὸ πέρασ Δ, ὅταν βάρος 4 kgr* τοποθετηθῇ: α) εἰς τὸ Β καὶ β) εἰς τὸ Δ. (Μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ Young διὰ τὸν χάλυβα = $2,2 \cdot 10^{12}$ dyn/cm² καὶ διὰ τὸν ὀρείχαλκον = $1,1 \cdot 10^{12}$ dyn/cm²).
(Ἀπ. α' 1,86 mm. β' 2,79 mm.)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Θ'

ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1200. Διὰ νὰ εξαγάγωμεν καρφίον ἀπὸ τεμαχίου ξύλου, ἀπαιτεῖται δύναμις 100 kgr*. Νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἐξαγωγήν τοῦ καρφίου μὲ κατάλληλον ἐξολκέα, τοῦ ὁποίου τὸ ὑπομόχλιον ἀπέχει 4 cm ἀπὸ τοῦ καρφίου καὶ ἡ λαβὴ 20 cm ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου.

Λύσις. Ὡς καλέσωμεν F τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν λαβὴν τοῦ ἐξολκέως πρὸς ἐξαγωγήν τοῦ καρφίου, καὶ δ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου. Ἐπίσης ὡς καλέσωμεν A τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ καρφίου, ἵνα ἐπιτευχθῇ ἡ ἐξαγωγή αὐτοῦ, καὶ α τὴν ἀπόστασιν τῆς κεφαλῆς τοῦ καρφίου ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, θὰ ἔχωμεν:

$$F \cdot \delta = A \cdot \alpha \quad (1)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς F λαμβάνομεν:

$$F = A \cdot \frac{\alpha}{\delta} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἦτοι: $A = 100$ kgr*, $\alpha = 4$ cm καὶ $\delta = 20$ cm, εὐρίσκομεν:

$$F = 20 \text{ kgr*}$$

1201. Χειραμάξιον μετὰ τοῦ φορτίου τοῦ ζυγίζει 60 kgr*. Ἡ ὀριζοντία ἀπόστασις τῶν λαβῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ φορτισμένου ἀμαξίου εἶναι 120 cm καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ εἶναι 45 cm. Νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ ἐκάστης λαβῆς τοῦ ἀμαξίου, διὰ νὰ διατίθεται τὸ χειραμάξιον ὀριζοντίως.

Λύσις. Ἐστω F ἡ δύναμις, ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ ἐκάστης λαβῆς τοῦ ἀμαξίου, καὶ δ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ (ὑπομόχλιον). Ἐπὶ τῶν δύο λαβῶν θὰ ἀσκήται συνολικῶς δύναμις 2 F καὶ συνεπῶς ἡ ροπή M_1 τῆς δυνάμεως 2 F ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ εἶναι:

$$M_1 = 2 F \cdot \delta \quad (1)$$

Ἐπίσης, ἔστω B τὸ συνολικὸν βάρος ἀμαξίου καὶ φορτίου καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ. Ἡ ροπή M_2 τοῦ βάρους B ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ εἶναι:

$$M_2 = B \cdot \alpha \quad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$2 F \cdot \delta = B \cdot \alpha \quad (3)$$

Λύνοντας την σχέση (3) ως προς F εύρισκομεν ότι η εφαρμοζομένη επί εκάστης λαβής δύναμις είναι :

$$F = \frac{B \cdot \alpha}{2 \delta} \quad (4)$$

Θέτομεν εις την σχέση (4) τὰ δεδομένα : $B = 60 \text{ kgr}^*$, $\alpha = 45 \text{ cm}$, $\delta = 120 + 45 = 165 \text{ cm}$ και εύρισκομεν :

$$F = 8,18 \text{ kgr}^*$$

1202. Εἰς μοχλὸν μὲ δύο ἀνίσους βραχίονας ὁ βραχίων ἀντιστάσεως εἶναι **30 cm** καὶ ὁ βραχίων δυνάμεως **70 cm**. Πόση εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἰσορροπεῖ φορτίον **84 kgr***, καὶ πόσος εἶναι ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ διανύσῃ ἡ δύναμις, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ **9 cm**.

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν μοχλῶν $F \cdot \delta = A \cdot \alpha$ καὶ λύνοντας ὡς πρὸς F εύρισκομεν :

$$F = \frac{A \cdot \alpha}{\delta} \quad (1)$$

Θέτοντες εις την σχέση (1) τὰ δεδομένα : Ἀντίστασις $A = 84 \text{ kgr}^*$, βραχίων ἀντιστάσεως $\alpha = 30 \text{ cm}$, βραχίων δυνάμεως $\delta = 70 \text{ cm}$, εύρισκομεν :

$$F = 36 \text{ kgr}^*$$

Ἐὰν ἐπίσης καλέσωμεν x τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καὶ y τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν τοῦ φορτίου, τότε, συμφώνως πρὸς τὸν χρυσὸν κανόνα τῆς Δυναμικῆς « ἔργον δυνάμεως = ἔργον ἀντιστάσεως », θὰ ἔχωμεν :

$$F \cdot x = A \cdot y \quad (2)$$

Θέτοντες εις την σχέση (2) τὰ δεδομένα καὶ λύνοντας ὡς πρὸς x εύρισκομεν :

$$x = 21 \text{ cm}$$

1203. Μεταθετὴ τροχαλία ζυγίζει μετὰ τῆς τροχαλιοθήκης **2 kgr***. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δύναμις, διὰ νὰ ἀνυψώσῃ φορτίον **125 kgr***, ὅταν ἡ τριβὴ εἶναι ἀμελητέα.

Λύσις. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῆς μεταθετῆς τροχαλίας γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν ἐν ὀρισμένον βάρος μὲ τὴν μικροτέραν δυνατὴν δύναμιν, πρέπει τὰ δύο νήματα νὰ εἶναι μεταξὺ τῶν παράλληλων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπειδὴ τὸ φορτίον διαμοιρίζεται ἐξ ἴσου καὶ εἰς τὰ δύο νήματα, ἔπεται ὅτι ἕκαστον νήμα δέχεται δύναμιν ἴσην μὲ τὸ ἡμῖς τοῦ φορτίου καὶ ἐπομένως εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος πρέπει, διὰ νὰ ἰσορροπήσωμεν τὸ σύστημα, νὰ ἐφαρμόσωμεν δύναμιν :

$$F = \frac{B}{2} \quad (1)$$

ὅπου B εἶναι τὸ συνολικῶς ἀνυψούμενον βάρος τροχαλίας καὶ φορτίου.

Θέτομεν εις τὸν τύπον (1) : $B = 125 + 2 = 127 \text{ kgr}^*$, καὶ εύρισκομεν :

$$F = 63,5 \text{ kgr}^*$$

1204. Πολύσπαστον περιλαμβάνει τροχαλιοθήκας, ἐκάστη τῶν ὁποίων περικεῖται 4 τροχαλίας. Ἡ κινητὴ τροχαλιοθήκη ζυγίζει **4 kgr***. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους **640 kgr***. Πόσος εἶναι ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ **2,4 m**.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ βάρος $640 + 4 = 644 \text{ kgr}^*$ τείνει ἐξ ἴσου τὰ ὀκτὼ νήματα τοῦ πολυσπάστου, ἔπεται ὅτι τὸ βάρος αὐτὸ θὰ διαμοιράζεται ἐξ ἴσου εἰς τὰ ὀκτὼ νήματα καὶ συνεπῶς πρέπει εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος νὰ ἐφαρμόσωμεν, πρὸς ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος, δύναμιν :

$$F = 644 / 8 = 80,5 \text{ kgr}^*$$

Προφανῶς, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ **2,4 m**, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως θὰ διανύη

δρόμον ὅτῳ φορές μεγαλύτερον καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος δρόμος θὰ εἶναι :

$$s = 8 \cdot 2,4 = 19,2 \text{ m}$$

1205. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀπαιτούμενη δύναμις F ἵνα συγκρατήσῃ εἰς ἰσορροπίαν βάρος 100 kgf^* , διὰ τοῦ ἐν τῷ σχήματι συστήματος τροχαλιῶν. Ὑποτίθεται ὅτι αἱ τροχαλίες εἶναι τοῦ αὐτοῦ μεγέθους καὶ ἀμελητέου βάρους.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὴν κατωτέραν τροχαλίαν α. Ἡ τάσις ἐκάστου τῶν σχοινίων αὐτῆς T_α θὰ πρέπει νὰ εἶναι :

$$T_\alpha = \frac{B}{2} \quad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὴν τροχαλίαν β, ἡ τάσις ἐκάστου σχοινίου αὐτῆς T_β θὰ πρέπει νὰ εἶναι :

$$T_\beta = \frac{T_\alpha}{2} \quad (2)$$

Τέλος, εἰς τὴν τρίτην τροχαλίαν γ, ἡ δύναμις F θὰ πρέπει νὰ εἶναι :

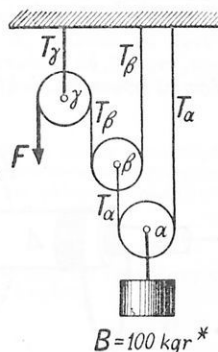
$$F = T_\beta \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει :

$$F = \frac{B}{4} \quad (4)$$

καί, ἐπεὶ δὴ $B = 100 \text{ kgf}^*$, θὰ ἔχωμεν :

$$F = 25 \text{ kgf}^*$$



1206. Διαφορική τροχαλία ἀποτελεῖται ἐκ διδύμου ἀμεταθέτου τροχαλίας, τῆς ὁποίας αἱ τροχαλίες ἔχουν ἀκτῖνας $r = 10 \text{ cm}$ καὶ $R = 11 \text{ cm}$, καὶ ἐκ μιᾶς μεταθετῆς τροχαλίας. Συνεχὲς σχοινίον διέρχεται διὰ τῆς ἄνω τροχαλίας ἀκτίνος 11 cm , ἀκολουθῶς διὰ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας πρὸς τὰ κάτω καὶ τέλος διὰ τῆς τροχαλίας ἀκτίνος 10 cm . Ἡ δύναμις F ἀσκεῖται πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τοῦ σχοινίου καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους B . Νὰ καθορισθοῦν : α) Τὸ θεωρητικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα (Θ.Μ.Π.) καὶ β) πόση ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς, ἐὰν δύναμις $F = 50 \text{ kgf}^*$ ἀπαιτῆται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 700 kgf^* .

Λύσις. α) Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις F μετατοπίζεται πρὸς τὰ κάτω εἰς τοιαύτην ἀπόστασιν ὥστε ἡ διδύμος τροχαλία νὰ ἐκτελῇ μίαν πλήρη περιστροφήν. Εἰς τὴν περιπτώσιν ταύτην εἶναι προφανές ὅτι τὸ σχοινίον μεταξὺ τῶν ἄνω καὶ κάτω τροχαλιῶν βραχύνεται κατ' ἀπόστασιν ἰσὴν πρὸς τὴν περιφέρειαν ($2\pi \cdot R$) τῆς μεγάλης τροχαλίας καὶ ἐπιμηκύνεται κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς τὴν περιφέρειαν ($2\pi \cdot r$) τῆς μικροτέρας τροχαλίας. Συνεπῶς, τὸ μὲν βάρος B θὰ μετατοπίζεται κατ' ἀπόστασιν ἰσὴν πρὸς τὸ ἕμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο περιφερειῶν, ἥτοι $1/2 \cdot (2\pi \cdot R - 2\pi \cdot r)$, ἡ δὲ δύναμις θὰ μετατοπίζεται κατὰ $2\pi \cdot R$ καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\text{Θ.Μ.Π.} = \frac{\text{μετατόπισις } F}{\text{μετατόπισις } B} = \frac{2\pi \cdot R}{1/2 \cdot (2\pi \cdot R - 2\pi \cdot r)} = \frac{2R}{R-r} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ὅτι :

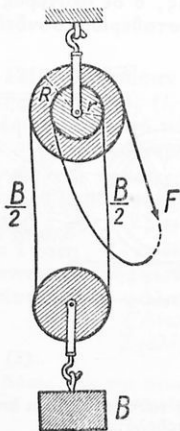
$$\text{Θ.Μ.Π.} = 22$$

β) Ὅταν ἡ δύναμις F μετατοπίζεται κατὰ $s_8 = 22 \text{ cm}$, τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ $s_\varphi = 1 \text{ cm}$ καὶ ἐπομένως ἔχομεν :

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{\text{ἔργον ἀποδιδόμενον}}{\text{ἔργον διατιθέμενον}} = \frac{B \cdot s_\varphi}{F \cdot s_8} = \frac{700 \cdot 1}{50 \cdot 22} \quad (2)$$

ἦτοι :

$$\text{ἀπόδοσις} = 0,636 \quad \text{ἢ} : 63,6\%$$



1207. Τὰ δύο τύμπανα διαφορετικοῦ βαρούλκου ἔχουν διαμέτρους 30 cm καὶ 20 cm ἀντιστοίχως. Τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου εἶναι 40 cm. Ἐὰν ἐργάτης ἀσκῇ ἐπὶ τοῦ στροφάλου καθέτως δύναμιν 18 kgf*, ποῖον βάρος δύναται νὰ ἀνυψώσῃ, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς ταύτης εἶναι 0,8.

Λύσις. Ἐστω ὅτι ἡ διάμετρος (μεγάλη) τοῦ ἐνὸς τυμπάνου εἶναι Δ , ἡ διάμετρος (μικρά) τοῦ ἄλλου τυμπάνου δ , τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου l , ἡ ἀσκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ στροφάλου F καὶ τὸ ἀνυψούμενον βάρος B . Ὄταν τὸ βαρούλκον ἐκτελῇ μίαν περιστροφήν, τότε τὸ μὲν σημεῖον, ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως θὰ μετατοπίζεται κατὰ $s_1 = 2\pi \cdot l$, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνυψουμένου βάρους θὰ μετατοπίζεται κατὰ :

$$s_2 = \frac{1}{2} (\pi \cdot \Delta - \pi \cdot \delta) = \frac{1}{2} \pi \cdot (\Delta - \delta)$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον ὑπὸ τοῦ βαρούλκου (ωφέλιμον ἔργον) εἶναι :

$$A_{\omega\phi\epsilon\lambda} = B \cdot s_2 = B \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot (\Delta - \delta) \quad (1)$$

καὶ ὅτι τὸ διατιθέμενον ἔργον εἶναι :

$$A_{\delta\iota\alpha\tau} = F \cdot s_1 = 2 F \cdot \pi \cdot l \quad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως, θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν :

$$\eta = \frac{N_{\omega\phi\epsilon\lambda}}{N_{\delta\iota\alpha\tau}} \quad (3)$$

καὶ οὕτω λαμβάνομεν, λόγῳ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) :

$$\eta = \frac{B \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot (\Delta - \delta)}{2 F \cdot \pi \cdot l} = \frac{1}{4} \cdot \frac{B \cdot (\Delta - \delta)}{F \cdot l} \quad (4)$$

Λύσαμεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον βάρος B , τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν, καὶ προκύπτει ὁ τύπος :

$$B = \frac{4 F \cdot l \cdot \eta}{\Delta - \delta} \quad (5)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (5) θέσωμεν : $F = 18 \text{ kgf}^*$, $l = 40 \text{ cm}$, $\eta = 0,8$, $\Delta = 30 \text{ cm}$ καὶ $\delta = 20 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$B = 230,4 \text{ kgf}$$

1208. Τὸ σύστημα κινήσεως ποδηλάτου περιλαμβάνει τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς Α καὶ Β, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἀριθμεῖ 26 ὀδόντας, ὁ δὲ δεύτερος 9, καὶ ἀλυσίδα μεταδίδουσιν τὴν κίνησιν. Ὁ τροχὸς Β εἶναι σταθερῶς συνδεδεμένος μὲ τὸν ὀπίσθιον τροχὸν Γ τοῦ ποδηλάτου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 70 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου, ὅταν ὁ τροχὸς Α ἐκτελῇ μίαν περιστροφήν κατὰ sec, ἐνῶ ὁ τροχὸς Γ κινεῖται κυλιόμενος ἐπὶ εὐθυγράμμου ὁδοῦ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν v_1 καὶ v_2 τὰς συχνότητας περιστροφῆς τῶν τροχῶν Α καὶ Β, μ_1 καὶ μ_2 τοὺς ἀριθμοὺς ὀδόντων ἐκάστου τροχοῦ ἀντιστοίχως, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

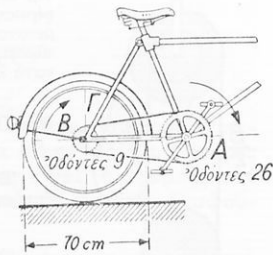
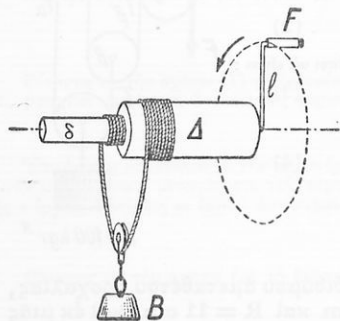
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{ἢ} : \quad v_2 = \frac{v_1 \mu_1}{\mu_2} \quad (1)$$

Ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ Γ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συχνότητα τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ Β, ἐπομένως ἡ γραμμικὴ ταχύτης u τῶν σημείων τῆς περιφέρειας αὐτοῦ θὰ εἶναι :

$$u = 2\pi \cdot v_2 \cdot R \quad \text{ἢ} : \quad u = \pi \cdot v_2 \cdot \delta \quad (2)$$

ὅπου δ ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ Γ.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τῶν σημείων τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα μεταφορᾶς τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, δηλαδὴ μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ ποδηλάτου.



Συνδυάζοντας έπομένως τὰς δύο εξισώσεις λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ ποδηλάτου :

$$v = \pi \cdot \frac{v_1 \mu_1}{\mu_2} \cdot d \quad (3)$$

Θέτομεν : $v_1 = 1 \text{ στρ/sec}$, $\mu_1 = 26$, $\mu_2 = 29$, $d = 0,7 \text{ m}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$v = 6,35 \text{ m/sec} = 22,86 \text{ km/h}$$

1209. Εἰς ζυγὸν μὲ δύο βραχίονας ὁ εἰς τῶν βραχίωνων εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον. Ἐὰν ἀντικείμενον εὐρίσκεται εἰς τὸν δίσκον A_1 , ἰσορροπεῖται μὲ σταθμὰ $24,98 \text{ gr}^*$ τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_2 . Ὄταν τὸ ἀντικείμενον τεθῇ εἰς τὸν δίσκον A_2 , τότε ἰσορροπεῖται μὲ σταθμὰ $24,50 \text{ gr}^*$, τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_1 . Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ λόγος τῶν βραχίωνων τοῦ ζυγοῦ καὶ τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἐστω ὅτι θέτομεν τὸ βάρος B εἰς τὸν δίσκον A_1 τοῦ ζυγοῦ, εἰς τὸν ὅποιον ἀντιστοιχεῖ βραχίον l_1 καὶ ἰσορροποῦμεν μὲ σταθμὰ β_1 , τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_2 , εἰς τὸν ὅποιον ἀντιστοιχεῖ βραχίον l_2 . Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον περιστροφῆς τῆς φάλαγγος ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$B \cdot l_1 = \beta_1 \cdot l_2 \quad (1)$$

Ἐὰν ὁμοῦ τοποθετήσωμεν τὸ βάρος B εἰς τὸν δίσκον A_2 , τότε διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς φάλαγγος πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν δίσκον A_1 ἄλλα σταθμὰ, ἔστω β_2 , καὶ θὰ ἰσχύῃ τὴν αἰσχίαν :

$$\beta_2 \cdot l_1 = B \cdot l_2 \quad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{B}{\beta_2} = \frac{\beta_1}{B} \quad (3)$$

Ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$B = \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2} \quad (4)$$

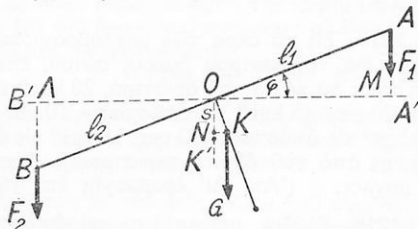
Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4) : $\beta_1 = 24,98 \text{ gr}^*$ καὶ $\beta_2 = 24,50 \text{ gr}^*$, εὐρίσκομεν :

$$B = 24,74 \text{ gr}^*$$

Ὁ λόγος τῶν βραχίωνων εὐρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐὰν θέσωμεν : $\beta_1 = 24,98 \text{ gr}^*$ καὶ $B = 24,74 \text{ gr}^*$. Οὕτως ἔχομεν :

$$\frac{l_1}{l_2} = 1,019$$

1210. Ἐστωσαν F_1 καὶ F_2 αἱ κατακόρυφοι δυνάμεις εἰς τὰ δύο ἄκρα A καὶ B τῆς φάλαγγος ($l_1 + l_2$) ἐνὸς ζυγοῦ. Ἐστω G τὸ βάρος τῆς φάλαγγος μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ κέντρον βάρους K αὐτῆς, κείμενον εἰς ἀπόστασιν s κάτωθεν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς O τῆς φάλαγγος καὶ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα AB αὐτῆς. Δίδονται $F_1 = 100 \text{ gr}^*$, $F_2 = 100,1 \text{ gr}^*$, $l = l_1 = l_2 = 10 \text{ cm}$, $s = 1 \text{ mm}$, $G = 50 \text{ gr}^*$. Ζητεῖται ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας κλίσεως ἰσορροπίας φ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ. (Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1960).



Λύσις. Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας τῆς φάλαγγος θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ροπῶν, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως O αὐτῆς, ἴσον πρὸς μηδέν. Ἦτοι :

$$F_1 \cdot (MO) + G \cdot (KN) - F_2 \cdot (OL) = 0 \quad (1)$$

*Έχουμε όμως: $(MO) = l \cdot \sin \varphi$ (2) $(OL) = l \cdot \sin \varphi$ (3) και $(KN) = s \cdot \eta \mu \varphi$ (4)
Δι' αντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν:

$$F_1 \cdot l \cdot \sin \varphi + G \cdot s \cdot \eta \mu \varphi - F_2 \cdot l \cdot \sin \varphi = 0 \quad (5)$$

$$\eta : \quad \text{εφ } \varphi = \frac{l \cdot (F_2 - F_1)}{G \cdot s} \quad (6)$$

Δίδονται: $l = 10 \text{ cm}$, $F_2 = 100,1 \text{ gr}^*$, $F_1 = 100 \text{ gr}^*$, $G = 50 \text{ gr}^*$, $s = 0,1 \text{ cm}$. Δι' αντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων εἰς τὸν τύπον (6) εὐρίσκουμεν:

$$\text{εφ } \varphi = 0,2$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1211. Μοχλὸς AB ἀποτελεῖται ἀπὸ ράβδον, μήκους $1,80 \text{ m}$, κινητὴν πέριξ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἄκρων τῆς A. Ἡ ράβδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ ὑποστηρίγματος εὐρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ ἄκρου, ὅπερ κρατεῖ τὴν ράβδον ὀριζοντίαν. Πόση θὰ εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος ὑπὸ βάρους 20 kg^* , ἐξηρηγμένου ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον B τῆς ράβδου, καὶ πόση ἡ δύναμις ἡ ἐπιφερομένη ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ σημείου A. (Ἀπ. 240 kg^* , 220 kg^* .)

1212. Ἡ μέση δύναμις, ἥτις δεόν νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄκρον ζεύγους καρνοθράυστου ἵνα θραύσῃ κάρνυν, ἰσοῦται πρὸς $0,5 \text{ kg}^*$. Τὸ μήκος τῶν σκελῶν τοῦ καρνοθράυστου εἶναι 15 cm καὶ τὸ κάρνυν τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπὸ τῆς ἀρθρώσεως. Νὰ εὐρεθῇ ἡ μέση δύναμις εἰς δύνας, ἥτις ἀπαιτεῖται ἵνα θραύσῃ ἀμέσως ἔν κάρνυν. (Ἀπ. $1,84 \cdot 10^6 \text{ dyn.}$)

1213. Τροχαλία σταθερὰ καὶ ἑτέρα μεταθετὴ διατίθενται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἀνυψώσουν βάρος 40 kg^* . Ἡ δύναμις ἔλξεως ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ σχοινίου σχηματίζει γωνίαν 60° μετὰ τῆς κατακόρυφου. Ζητοῦνται: α) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις ἔλξεως. β) Πόσῃν δυνάμει ὑφίσταται ὁ σταθερὸς κρίκος εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι συνδεδεμένοι τὸ σχοινίον. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς σταθερᾶς τροχαλίας ἀσκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι τὰ δύο τμήματα τοῦ σχοινίου, τὰ ὁποῖα ὑποβαστάζουν τὴν κινητὴν τροχαλίαν, εἶναι κατακόρυφα. Δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ τριβαὶ ὡς καὶ τὸ βάρος τοῦ σχοινίου καὶ τῶν δύο τροχαλιῶν. (Ἀπ. α' 20 kg^* . β' 20 kg^* . γ' Ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἀσκουμένη δύναμις σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακόρυφου, ἔχει δὲ τιμὴν $34,6 \text{ kg}^*$.)

1214. Ἐπὶ μιᾷ κώπῃ μήκους $2,20 \text{ m}$, ὁ ἄξων περιστροφῆς τῆς ὁποίας ἀπέχει 60 cm ἀπὸ τοῦ σημείου στηρίξεως τῆς χειρὸς, ἀσκεῖται διὰ τοῦ κωπηλάτου δύναμις 15 kg^* . Ποία ἔντασις τῆς εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς κώπῃς ἀσκουμένης δυνάμεως. (Ἀπ. $5,6 \text{ kg}^*$.)

1215. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν μοχλοβραχιόνων μοχλοῦ, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, ἐπενεργοῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις, καθεὶς καὶ πρὸς τὰ κάτω: α) ἀριστερά, 20 kg^* εἰς ἀπόστασιν 30 cm , 25 kg^* εἰς ἀπόστασιν 20 cm , 15 kg^* εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, β) δεξιὰ, 18 kg^* εἰς ἀπόστασιν 40 cm , 12 kg^* εἰς ἀπόστασιν 35 cm , 10 kg^* εἰς ἀπόστασιν 45 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. Κατὰ ποῖον τρόπον δύναται νὰ ἰσορροπήσῃ ὁ μοχλός. (Ἀπ. Δι' ἐφαρμογῆς ἐπὶ τῆς ἀριστερᾶς πλευρᾶς ροπῆς $3,4 \text{ kg}^* \cdot \text{m.}$)

1216. Ράβδος, μήκους 1 m καὶ ἀμελητέου βάρους, ὀριζοντίως κειμένη, φορτίζεται διὰ βαρῶν $0,5 \text{ kg}^*$, $0,3 \text{ kg}^*$, $0,6 \text{ kg}^*$, $0,2 \text{ kg}^*$, εἰς ἀποστάσεις 20 cm , 40 cm , 70 cm καὶ 90 cm , ἀντιστοίχως, ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ ἄξων περιστροφῆς διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἰσορροπία. (Ἀπ. $51,25 \text{ cm.}$)

1217. Πολύσπαστον αποτελείται εκ 5 ακινήτων και 5 κινητών τροχαλίων, εκάστης βάρους 2 kg^* . Δι' αὐτοῦ ἀνυψοῦται βάρος 200 kg^* κατὰ 3 m , τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως ἀνερχομένου εἰς 80% . α) Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο. β) Πόσα μέτρα σχοινίου πρέπει νὰ ἑλκυσθοῦν. (Ἀπ. α' $26,25 \text{ kg}^*$, β' 30 m .)

1218. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὄχημα βάρους 150 kg^* , κείμενον ἐπὶ κεκλιμένης ὁδοῦ, ἥτις παρουσιάζει ὑψομετρικὴν διαφορὰν 8 m εἰς 100 m αὐτῆς, τῆς τριβῆς μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν. (Ἀπ. 12 kg^* .)

1219. Βαρέλιον βάρους 200 kg^* φορτῶνεται ἐπὶ ὀχήματος εἰς ὕψος $0,80 \text{ m}$ ἀπὸ τοῦ ἐδάφους τῇ βοηθείᾳ κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους $2,5 \text{ m}$. Ποία δύναμις πρέπει νὰ καταβληθῇ ὑπὸ τοῦ ἐργάτου διὰ νὰ συγκρατήσῃ τὸ βαρέλιον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. (Ἀπ. 64 kg^* .)

1220. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀνέρχεται ὄχημα βάρους 120 kg^* . Ἡ κινουσα δύναμις ἰσοῦται πρὸς 25 kg^* . Κατὰ ποῖον ὕψος θὰ ἀνέλθῃ τὸ ὄχημα, ὅταν θὰ ἔχῃ διανύσει 8 m ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, τῆς τριβῆς θεωρουμένης ὡς ἀμελητέας. (Ἀπ. $1,66 \text{ m}$.)

1221. Δοκός, στρεπτή περὶ τὸ μέσον αὐτῆς, χρησιμοποιεῖται ὡς τραμπάλα. Παιδίον, βάρους 30 kg^* , κάθεται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ καθήσῃ ἕτερον παιδίον, βάρους 25 kg^* , ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἰσορροπία. (Ἀπ. $2,4 \text{ m}$.)

1222. Ἐάν ὁ ἄνθρωπος (βλ. σχῆμα) ζυγίσῃ 70 kg^* , πόσῃν δυνάμειν πρέπει τοῦλάχιστον νὰ ἀσκήῃ ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ σχοινίου διὰ νὰ ἀνέρχεται. (Ἀπ. 35 kg^* .)

1223. Σῶμα βάρους 80 kg^* ἀνυψοῦται, α) δι' ἀκινήτου τροχαλίας, β) δι' ἐλευθέρως τροχαλίας. Ποία ἡ ἀπαραίτητος πρὸς ἀνύψωσιν δύναμις ἐάν τὰ σχοινία εἶναι παράλληλα. (Ἀπ. α' 80 kg^* , β' 40 kg^* .)

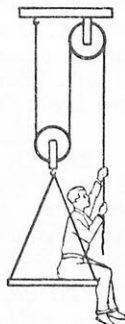
1224. Βάρος 160 kg^* ἀνυψοῦται δι' ἀκινήτου τροχαλίας. Ποία ἡ ἀναγκαία πρὸς τοῦτο δύναμις, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τριβῶν, ἐάν τὰ σχοινία : α) εἶναι παράλληλα, β) σχηματίζουν γωνίαν 50° μετ' ἀλλήλων. (Ἀπ. 100 kg^* .)

1225. Δι' ἐλευθέρως τροχαλίας, βάρους 8 kg^* , ἀνυψοῦται βάρος 120 kg^* . Ποία ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενη δύναμις, ἐάν τὰ σχοινία : α) εἶναι παράλληλα, β) σχηματίζουν γωνίαν 60° . (Ἀπ. α' 64 kg^* , β' 74 kg^* .)

1226. Τῇ βοηθείᾳ συνήθους πολυσπάστου, τὸ ὅποῖον περιλαμβάνει 4 τροχαλίας, ἐκάστην βάρους 1 kg^* , κρατεῖται εἰς ἰσορροπίαν βάρος 52 kg^* , τῆς τριβῆς μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν. Ποία δύναμις ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ σχοινίου : α) εἰς τὴν σταθερὰν τροχαλιόθηκην, β) εἰς τὴν ἐλευθέραν τροχαλιόθηκην. (Ἀπ. α' 7 kg^* , β' $6,2 \text{ kg}^*$.)

1227. Ἀνυψωτικὴ μηχανὴ διὰ κοχλίου, ἔχοντος βῆμα $2,5 \text{ cm}$, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 500 kg^* . Ἐάν ὁ μοχλὸς ἔχῃ μήκος 95 cm καὶ ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς εἶναι 40% , πόσῃ ἡ ἀπαιτούμενη δύναμις. (Ἀπ. $F = 5,13 \text{ kg}^*$.)

1228. Ἀπὸ σταθερᾶς τροχαλίας ἑξαρτᾶται, ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τοῦ σχοινίου αὐτῆς, δύναμις 50 kg^* . Ζητοῦνται : α) πόσῃν δυνάμειν πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχοινίου, ὥπως ἀποκατασταθῇ ἰσορροπία, ὅταν τὰ δύο τμήματα τοῦ σχοινίου σχηματίζουν γωνίαν 80° , καὶ β) πόσῃ ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν. (Ἀπ. α' 50 kg^* , β' $76,6 \text{ kg}^*$.)



* Ἀσκήσις 1222.

1229. 'Επί του δαπέδου μεταλλείου ἴσταται ἄτομον, ζυγίζον 64 kg^* , τὸ ὁποῖον συγκρατεῖ διὰ σχοινίου διερχομένου διὰ τῆς αὐλακὸς ἀκινήτου (παγίας) τροχαλίας βάρους 48 kg^* . α) Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ δαπέδου τοῦ μεταλλείου ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ ὥς ἄνω ἀτόμου ὀκτική δύναμις. β) Ποῖον τὸ ἀνώτατον δυνατὸν βῆρος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συγκρατήσῃ τὸ ἐν λόγω ἄτομον. ('Απ. α' 16 kg^* . β' 64 kg^* .)

1230. Βῆρος $K = 30 \text{ kg}^*$ ἤρμευ δι' ἐνὸς ἀντιβάρου, τὸ ὁποῖον προσδένεται κατὰ τὸ ἐν ἄκρον σχοινίου διερχομένου διὰ τῆς αὐλακὸς ἀκινήτου (παγίας) τροχαλίας. Τὸ σχοινίον ζυγίζει 5 kg^* . Νὰ ὑπολογισθοῦν, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὅσιν τῆς ἀντοχῆς τοῦ σχοινίου, τῆς τριβῆς καὶ τῆς ἀκτίνας τῆς τροχαλίας, τὸ ἀντίβαρον P καὶ αἱ δυνάμεις F_A , F_r , αἱ τείνουσαι τὸ σχοινίον εἰς τὰ ἄκρα A καὶ Γ , καθὼς ἐπίσης αἱ δυνάμεις αἱ ἐνεργοῦσαι εἰς τὴν μεσοτομὴν B τοῦ σχοινίου, ὑπὸ τοὺς ἀκολουθοῦντες ὅρους: α) "Ὅταν τὰ σημεῖα A καὶ Γ εὐρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, β) ὅταν τὸ σημεῖον A κατέχῃ τὴν ὑψηλοτέραν θέσιν, γ) ὅταν τὸ σημεῖον A κατέχῃ τὴν χαμηλοτέραν θέσιν.

('Απ. α' $P = 30 \text{ kg}^*$, $F_A = 30 \text{ kg}^*$, $F_B = 32,5 \text{ kg}^*$, $F_r = 30 \text{ kg}^*$.

β' $P = 25 \text{ kg}^*$, $F_A = 30 \text{ kg}^*$, $F_B = 27,5 \text{ kg}^*$, $F_r = 25 \text{ kg}^*$.

γ' $P = 35 \text{ kg}^*$, $F_A = 30 \text{ kg}^*$, $F_B = 32,5 \text{ kg}^*$, $F_r = 35 \text{ kg}^*$.)

1231. Ὁ κύλινδρος ἐνὸς βαροῦλκου ἔχει διάμετρον 12 cm καὶ περιστρέφεται τῇ βοήθειᾳ στροφάλου μήκους 54 cm . Ἐργάτης ἐκτελεῖ 40 στρ/μιν ἀνυψῶν βῆρος 30 kg^* . Πόση η ὑπὸ τοῦ ἐργάτου καταβαλλομένη δύναμις. Πόση ἡ ἀναπτυσσόμενη ἰσχύς. Ὑποτίθεται ὅτι ἐν ὑπάρχουν τριβῶν.

('Απ. $F = 3,33 \text{ kg}^*$, $N = 7,53 \text{ kg}^* \text{m/sec}$ ἢ $0,10 \text{ PS}$.)

1232. Εἰς βαροῦλκον ὁ στροφάλος ἔχει μήκους 60 cm καὶ ὁ κύλινδρος διάμετρον 12 cm . Ὁ χειριστὴς δαπανᾷ ἰσχύιν $1/12 \text{ PS}$, ἵνα ἀνυψώσῃ βῆρος 25 kg^* . Γνωστοῦ ὄντος ὅτι η ἀπόδοσις τοῦ βαροῦλκου εἶναι 60% , ζητεῖται πόσας στρ/μιν θὰ ἐκτελέσῃ ὁ χειριστὴς τοῦ στροφάλου καὶ πόση η δύναμις, ἡ ἀσκουμένη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου. ('Απ. 24 στρ/μιν , $4,17 \text{ kg}^*$.)

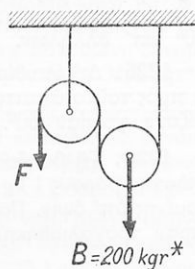
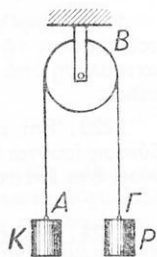
1233. Βῆρος 500 N οὔτων δύναται νὰ ἀνυψωθῇ τῇ βοήθειᾳ βαροῦλκου, ὅταν δύναμις 40 N οὔτων ἐπιδρᾷ ἐπὶ τοῦ στροφάλου. Ἡ ἀκτίς τοῦ στροφάλου καὶ τοῦ κυλίνδρου εἶναι $1,5 \text{ m}$ καὶ $0,1 \text{ m}$ ἀντιστοίχως. Νὰ εὐρεθοῦν τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα καὶ ἡ ἀπόδοσις τοῦ βαροῦλκου. ('Απ. $M.P. = 12,5$, ἀπόδ. 83% .)

1234. Μηχανή, τύπου ἐργάτης, ἔχει μοχλοβραχίονα μήκους 1 m καὶ βῆμα κοχλίου 40 mm . Ἐάν η ἀπόδοσις εἶναι 20% , νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα καὶ ἡ ἀπαιτούμενη πρὸς ἀνύψωσιν βάρους 100 kg^* δύναμις. ('Απ. $M.P. = 31,4$, $F = 3,1 \text{ kg}^* = 30 \text{ Nt}$.)

1235. Δύο τροχαλίας, ἐξ ὧν ἡ μία κινητὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀκίνητος, περιβάλλονται ὑπὸ νήματος, ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα. Ποία δύναμις F ἀπαιτεῖται, ἵνα ἀνυψώσῃ βάρους 200 kg^* , ὑπὸ σταθεράν ταχύτητα. ('Απ. $F = 100 \text{ kg}^*$.)

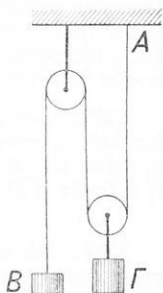
1236. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βραχύτατον μήκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἄνευ τριβῆς, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 250 kg^* εἰς ὕψος 1 m με δύναμιν 50 kg^* ἐνεργοῦσαν παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. ('Απ. 5 m .)

1237. Πόση δύναμις παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ σύρωμεν βῆρος 60 kg^* ἐπ' αὐτοῦ, ἄνευ τριβῆς, καὶ κλίσεως 30° ὡς πρὸς τὴν ὀριζοντίαν. ('Απ. 30 kg^* .)



* Δοκίμης 1235.

1238. Σύστημα ἐκ δύο τροχαλιῶν, ἀποτελούμενον ἐκ μιᾶς κινητῆς καὶ μιᾶς ἀκίνητου τροχαλίας, εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγεθος τοῦ φορτίου Β ἂν τὸ φορτίον Γ εἶναι ἴσον πρὸς 10 kg^* . Ἐν τὸ σημείον Α, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι στερεωμένον τὸ σχοινίον, μετακινήθῃ πρὸς τὰ δεξιὰ, ἡ ἰσορροπία θὰ καταστραφῇ; Ἐν ναί, κατὰ ποῖον τρόπον θὰ κινηθούν τὰ φορτία Β καὶ Γ; Αἱ μᾶζαι τῶν σχοινίων καὶ τροχαλιῶν ὡς καὶ αἱ τριβαὶ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.
(Ἀπ. $B = \Gamma/2$. Ἐν τὸ Α μετακινήθῃ, ἡ ἰσορροπία θὰ καταστραφῇ καὶ τὸ μὲν φορτίον Γ θὰ κινηθῇ πρὸς τὰ κάτω, τὸ δὲ Β πρὸς τὰ ἄνω.)



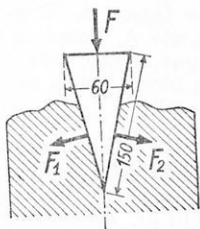
* Ἀσκήσις 1238.

1239. Ἐργάτης, ἵνα φορτώσῃ βαρέλιον ἐπὶ ἐμάξης, κυλίει αὐτὸ κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου. Τὸ βαρέλιον ζυγίζει 240 kg^* καὶ τὸ δάπεδον τῆς ἐμάξης εἶναι $1,10 \text{ m}$ ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἵνα ὁ ἐργάτης καταβάλῃ δύναμιν 40 kg^* .
(Ἀπ. $6,60 \text{ m}$.)

1240. Εἰς τῶν βραχιόνων φάλαγγος ζυγοῦ ἔχει μῆκος $164,80 \text{ mm}$, ἐνῶ ὁ ἕτερος εἶναι ὀλίγον βραχύτερος. Ἡ βελὼν τοῦ δείκτου σταματᾷ εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοὶ καὶ ὅταν εἶναι φορτισμένοι μὲ $312,8 \text{ gr}$ καὶ $314,5 \text{ gr}$ ἀντιστοίχως. Πόσον τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου βραχίονος τῆς φάλαγγος.
(Ἀπ. $163,91 \text{ mm}$.)

1241. Ἐπὶ τοῦ διπλοῦ σφηνός (βλ. σχῆμα) ἐπενεργοῦμεν μέσῳ σφύρας διὰ δυνάμεως $F = 32 \text{ kg}^*$. Ποῖαι αἱ πλευρικαὶ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων τοῦ τεμνομένου σώματος.
(Ἀπ. $F_1 = F_2 = 80 \text{ kg}^*$.)

1242. Ὁ σφὴν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ ἑτέρου ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον ἀσκεῖ ἐπὶ ἐκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ δύναμιν $F_1 = F_2 = 45 \text{ kg}^*$. Μὲ ποῖαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐνεργήσωμεν ἐπὶ τοῦ σφηνός, διὰ νὰ τμηθῇ τὸ σῶμα.
(Ἀπ. $F = 18 \text{ kg}^*$.)



* Ἀσκήσις 1241.

1243. Οἱ δύο βραχιόνες φάλαγγος ζυγοῦ ἔχουν μῆκος ἀντιστοίχως $159,2 \text{ mm}$ καὶ $160,4 \text{ mm}$. Ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοί, ἡ βελὼν σταματᾷ εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν + 2. Τίθενται $120,5 \text{ gr}$ εἰς τὸν δίσκον τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν μικρότερον βραχίονα. Πόσον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου, ἵνα ἡ βελὼν ἐπανάλθῃ εἰς τὴν πρώτην τῆς θέσιν.
(Ἀπ. $121,4 \text{ gr}^*$.)

1244. Εὐθεῖα δοκὸς ὑποστηρίζεται εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς εἰς τρόπον, ὥστε νὰ δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα. Λόγῳ ὅμως κακῆς κατεργασίας αὐτῆς, οἱ δύο βραχιόνες τῆς δοκοῦ εἶναι ἀνισοί. Ἡ δοκὸς αὕτη πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ζυγὸς καὶ εἰς τὸ ἓν ἄκρον τίθεται τὸ ἐμπόρευμα, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τὸ βάρος. Σῶμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀληθὲς βάρος Β δεικνύει, ὅταν ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον, βάρος $B_1 = 534 \text{ gr}^*$ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον βάρος $B_2 = 596 \text{ gr}^*$. Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος Β. Ποῖος ὁ λόγος μεταξύ τῶν δύο βραχιόνων καὶ ποῖας διορθώσεως πρέπει νὰ ἐπιφέρωμεν εἰς τὰς ἐνδείξεις μᾶζης τοῦ ζυγοῦ.
(Ἀπ. 564 gr^* , $\alpha_2/\alpha_1 = 1,056$, $\alpha_1/\alpha_2 = 0,947$.)

1245. Ἡ βελὼν ἐνὸς ζυγοῦ δεικνύει τὴν ὑποδιαίρεσιν 6 πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοί. Βάρος 1 gr^* τιθέμενον ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου φέρει τὴν βελὼν εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 4 πρὸς τὰ ἀριστερά. Πόσον πρόσθετον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου, ἵνα ἡ βελὼν ἔλθῃ εἰς τὸ μηδέν. Αἱ ὑποδιαίρεσεις ἀπέχουν ἴσον μεταξύ των καὶ αἱ μικραὶ μετατοπίσεις τῆς βελὼνης εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐπιφορτίσεων.
(Ἀπ. $0,06 \text{ gr}^*$.)

1246. Είς τὸν ἓνα δίσκον ζυγοῦ μὲ ἀνίσους βραχίονας θέτομεν σῶμα ἀγνώστου βάρους. Διὰ τὴν ἐπέλθῃ ἰσορροπία, θέτομεν εἰς τὸν ἄλλον δίσκον σταθμὰ 225 gr. Ἀλλὰ σπομεν κατόπιν ἀμοιβαίως τὴν θέσιν τῶν σταθμῶν καὶ τοῦ σώματος ἐπὶ τῶν δίσκων. Τότε πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ σταθμὰ 31 gr, ἵνα ἀποκατασταθῇ καὶ πάλιν ἡ ἰσορροπία. Νὰ εὑρεθοῦν: α) Τὸ ἀληθὲς βῆρος τοῦ σώματος. β) Ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγος. (Ἀπ. α' 240 gr*. β' 15 : 16.)

1247. Ἐμπορος κάμνει 100 ζυγίσαις τοῦ 1 kg, θέτων τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα ἐναλλάξ εἰς τοὺς δύο δίσκους τοῦ ζυγοῦ. Ὁ ζυγὸς δὲν εἶναι ἀκριβής, καθότι ὁ εἰς βραχίον αὐτοῦ α_1 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑτέρου α_2 κατὰ 0,01 α_2 . Ποῖον τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία τοῦ ἐμποροῦ ἐπὶ τοῦ παρατιδομένου ἐμπορεύματος. (Ἀπ. Ζημία 5 gr, περίπου.)

1248. Διὰ τὴν ἰσορροπήσῃ βῆρος 100 gr* τοποθετημένον ἐπὶ τοῦ ἐνὸς τῶν δίσκων ζυγοῦ, πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν 100,1 gr εἰς τὸν ἕτερον δίσκον. Ζητεῖται νὰ καθορισθῇ, πόσον βῆρος πρέπει νὰ θέσῃ τις εἰς τὸν δεῦτερον δίσκον, διὰ τὴν ἐπέλθῃ ἰσορροπία βάρους 1 kg* τιθεμένου εἰς τὸν πρῶτον δίσκον. (Ἀπ. 1001 gr*.)

1249. Σῶμα τίθεται ἐπὶ ζυγοῦ, τοῦ ὁποῦ οἱ δύο βραχίονες εἶναι ἀνισοί. Ὅταν τοῦτο τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐνὸς δίσκου, εὑρίσκεται τὸ βῆρος τοῦ $\beta_1 = 534$ gr*, ὅταν δὲ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου δίσκου, εὑρίσκεται $\beta_2 = 596$ gr*. Ποῖον εἶναι τὸ ἀκριβὲς βῆρος Β τοῦ σώματος. (Ἀπ. 564,2 gr*.)

1250. Σῶμα τοποθετούμενον ἐπὶ τοῦ δίσκου Α ζυγοῦ ἰσορροπεῖ μὲ 576 gr εἰς τὸν δίσκον Β. Ὅταν ὁμοῦ τοποθετῇται εἰς τὸν Β, χρειάζονται πρὸς τοῦτο 625 gr εἰς τὸν Α. Ποῖον τὸ πραγματικὸν βῆρος τοῦ σώματος. Ἐὰν λάβετε σταθμὰ καὶ ὁλίγην ἄμμον, πῶς ἔστιν ἂν νὰ καθορίσετε τὸ ἀκριβὲς βῆρος τοῦ σώματος, χωρὶς νὰ θέσετε τοῦτο ἐπὶ τοῦ δίσκου Β ἢ νὰ μετρήσετε τὸ μήκος τῶν βραχιόνων τοῦ ζυγοῦ. (Ἀπ. 600 gr*.)

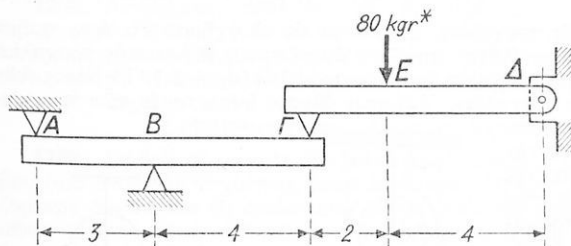
1251. Ἐὰν ἀντικείμενον τοποθετηθῇ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου ζυγοῦ, ἀπαιτοῦνται 25,0 gr εἰς τὸν ἀριστερὸν δίσκον πρὸς ἰσορροπήσιν του, ἐὰν ὁμοῦ τὸ ἀντικείμενον μεταφερθῇ εἰς τὸν ἀριστερὸν δίσκον, τότε πρὸς ἐπίτευξιν τῆς ἰσορροπίας ἀπαιτοῦνται 24,01 gr. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ἀκριβὴς μάζα τοῦ ἀντικείμενου, β) ὁ λόγος τοῦ μήκους τῶν βραχιόνων. (Ἀπ. α' 24,50 gr, β' δεξιὸς βραχίων/ἀριστερὸς βραχίων = 1/0,981.)

1252. Οἱ βραχίονες φάλαγγος ζυγοῦ ἔχουν μήκος 8 cm, ὁ δείκτης ἔχει μήκος 15 cm καὶ ἡ μάζα τῆς φάλαγγος εἶναι 50 gr. Ἐὰν τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 0,02 cm κάτωθεν τῆς κεντρικῆς πρισματικῆς ἀκμῆς, κατὰ πόσον θὰ ἐκτραπῇ τὸ πέρας τοῦ δείκτη ἀνὰ 0,001 gr διαφορᾶς βάρους ἐπὶ τῶν δίσκων. (Ἀπ. 0,12 cm.)

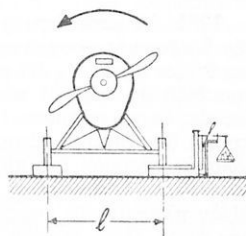
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1253. Εἰς μοχλὸν μὲ δύο ἀνίσους βραχίονας, σχηματίζοντας γωνίαν, καὶ στρεπτόν περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις: Ἡ μία, 180 kg*, ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ μικροτέρου βραχίονος, καὶ ἡ Γ' ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ μεγαλύτερου βραχίονος. Αἱ δύο δυνάμεις σχηματίζουν γωνίαν 75°, ὁ βραχίον τῆς δυνάμεως 180 kg* εἶναι 81 cm καὶ τῆς Γ' εἶναι 45 cm. Ζητοῦνται: α) πόση ἡ δύναμις F ἵνα ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ, β) πόση ἡ δύναμις τ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. (Ἀπ. α' 100 kg*, β' 227,4 kg*.)

1254. Σύστημα δύο μοχλῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἰς στηρίζεται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὡς ἐν τῷ σχήματι, ὁ δὲ ἕτερος στηρίζεται δι' ἀρθρώσεως Δ ἐπὶ ἐνὸς τοίχου καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ πρώτου μοχλοῦ, ὑπόκειται εἰς τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως $80 \text{ kg}^*\text{m}$ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Οἱ λόγοι τῶν ἀποστάσεων μεταξὺ τῶν στηριγμάτων δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντιδράσεις εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τοῦ πρώτου μοχλοῦ. (Ἀπ. $F_A = -71,1 \text{ kg}^*\text{m}$, $F_B = +124 \text{ kg}^*\text{m}$.)



"Ασκήσις 1254.



"Ασκήσις 1255.

1255. Κατὰ τὸν ἔλεγχον τῆς λειτουργίας κινητήρος ἀεροπλάνου τοποθετεῖται τὸ ἀεροπλάνον ὁριζοντίως μετ' ἑνὸς ἐμπρόσθιου τροχὸν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς πλακὸς δεκαπλασιαστικῆς πλάστιγγος. Ὅταν ἡρεμῇ ὁ κινητήρ, ἡ πλάστιγγη δεικνύει ἐνδειξιν $460 \text{ kg}^*\text{m}$, καὶ ὅταν λειτουργῇ, $640 \text{ kg}^*\text{m}$. Ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐπὶ τῆς πλακὸς τῆς πλάστιγγος ἀσκουμένης δυνάμεως κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητήρος ἐξηγεῖται ἐκ τῆς παρουσίας ροπῆς ἀντιδράσεως, ἡ ὁποία τείνει νὰ κλίνη τὸ ἀεροπλάνον κατὰ διέυθυνσιν ἀντίθετον πρὸς τὴν τῆς περιστροφῆς τῆς ἑλικὸς καὶ ἡ ὁποία ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ροπῆς αὐτῆς διὰ $l = 2,5 \text{ m}$.

(Ἀπ. $450 \text{ kg}^*\text{m}$.)

1256. Ἡ ἀμετάθετος καὶ μεταθετὴ τροχαλιότηκη συνήθους πολυσπᾶστου ἔχουν βάρος ἐκάστη $3 \text{ kg}^*\text{m}$, φέρουν δὲ ἀνὰ δύο τροχαλίας. Ἀνθρώπος ἔχων βάρος $80 \text{ kg}^*\text{m}$ ἰσορροπεῖ, διὰ τῆς ἐπενεργείας ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ σχοινίου, βάρος ἐξηρητημένον ἀπὸ τοῦ πολυσπᾶστου ἴσον πρὸς $100 \text{ kg}^*\text{m}$. Ζητοῦνται: α) ἡ ἀντίδρασις ἐπὶ τῶν ποδῶν τοῦ ἀνθρώπου, β) ἡ ἀπόδοσις τοῦ συστήματος. γ) Νὰ ἐξηγηθῇ διὰ ποῖον λόγον, ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα ὑποτίθεται ἄνευ τριβῆς, ἡ ἀπόδοσις εὐρίσκεται μικρότερα τῶν 100%.

(Ἀπ. α' $105,75 \text{ kg}^*\text{m}$, β' 97%. γ' Ἔνεκα τοῦ βάρους τῆς κάτω τροχαλιότηκης.)

1257. Εἰς σύνθηες πολυσπᾶστον ἡ ἀμετάθετος τροχαλιότηκη φέρει τρεῖς τροχαλίας καὶ ἔχει βάρος $1 \text{ kg}^*\text{m}$, ἡ δὲ μεταθετὴ τροχαλιότηκη ἔχει βάρος $1 \text{ kg}^*\text{m}$. Ἡ σταθερὰ τροχαλιότηκη ἐξαρτᾶται διὰ σχοινίου ἀπὸ ἀκλόνητον σημεῖον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἀγκίστρου τῆς μεταθετῆς τροχαλίας ἐφαρμόζεται φορτίον $11 \text{ kg}^*\text{m}$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα καὶ νὰ καθορισθοῦν: α) ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ φορτίου, β) ὁ λόγος μετατοπίσεως φορτίου καὶ δυνάμεως, καὶ γ) ἡ τάσις τοῦ σχοινίου ἐξαρτήσεως. (Ἀπ. α' $2 \text{ kg}^*\text{m}$, β' 1 : 6, γ' $13 \text{ kg}^*\text{m}$.)

1258. Δυναμικὸν πολυσπᾶστον ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας μεταθετὰς καὶ μίαν ἀμετάθετον τροχαλίαν, πρόκειται δὲ δι' αὐτοῦ ν' ἀνυψωθῇ βάρος $8 \text{ kg}^*\text{m}$. Ζητοῦνται: α) νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα, β) ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ φορτίου, γ) ἡ τάσις τοῦ σχοινίου ἐξαρτήσεως τῆς ἀμεταθέτου τροχαλιότηκης, καὶ δ) ὁ λόγος τῶν μετατοπίσεων φορτίου καὶ δυνάμεως.

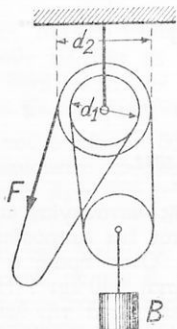
(Ἀπ. β' $0,5 \text{ kg}^*\text{m}$, γ' $1 \text{ kg}^*\text{m}$, δ' 1 : 16.)

1259. Τò προηγούμενον πρόβλημα νὰ λυθῇ, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἑκάστη τροχαλία ζυγίζει 4 gr^* . ('Απ. $\beta' 1 \text{ kgr}^*$ καὶ $3,5 \text{ gr}^*$, $\gamma' 2,011 \text{ kgr}^*$. $\delta' 1 : 16$.)

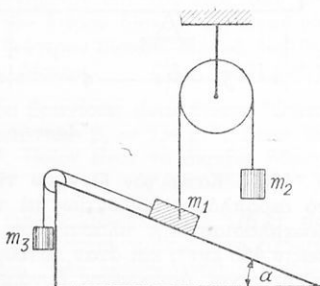
1260. Ἀμετάθετος τροχαλία ἔχει ἀκτίνα 150 mm , διὰ τὴν ἀνύψωσιν δὲ φορτίου 70 kgr^* ἀπαιτεῖται δύναμις 75 kgr^* . Ζητοῦνται: α) ὁ λόγος ταχυτήτων (Λ.Τ.), β) τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα (Μ.Π.), γ) ἡ ἀπόδοσις. ('Απ. $\alpha' \text{ Λ.Τ.} = 1$, $\beta' \text{ Μ.Π.} = 0,933$, $\gamma' 93,3\%$.)

1261. Ἄλυσος διαφορικῆς τροχαλίας, ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Τὸ ἄνω μῆμα τῆς διαφορικῆς τροχαλίας ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους αὐλακωτὰς τροχαλίας διαμέτρων d_1 καὶ d_2 . Ἡ κάτω τροχαλία ἔχει διάμετρον $1/2 (d_1 + d_2)$. Τὸ βάρος εἶναι προσδεδεμένον εἰς τὴν κάτω τροχαλίαν. Ἀτέρμων ἄλυσος διέρχεται ἐκ τῶν τροχαλιῶν, ὡς ἐν τῷ σχήματι. Ὑποτίθεται ὅτι δὲν ὑπάρχει τάσις εἰς τὴν χαλαρὰν πλευρὰν (τὸ μῆμα τῆς ἄλυσου τὸ ἐμφαινόμενον εἰς τὴν δεξιὰν πλευρὰν τῆς μικρᾶς τροχαλίας ἄνω). Ποία δύναμις F ἀπαιτεῖται διὰ νὰ δώσῃ τὴν ἀρχικὴν κίνησιν πρὸς τὰ ἄνω εἰς τὸ βάρος B .

('Απ. $F = B/2 \cdot [(d_2 - d_1)/d_2]$.)



* Ἀσκήσις 1261.



* Ἀσκήσις 1262.

1262. Τὸ σύστημα τῶν φορτίων m_1 , m_2 καὶ m_3 εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγεθος τῆς μάζης m_3 καὶ ἡ πίεσις ἡ ἀκουμένη ὑπὸ τῆς μάζης m_1 ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν αἱ μάζαι m_1 , m_2 καὶ ἡ γωνία α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι γνωσταί. Αἱ μάζαι τῶν τροχαλιῶν καὶ τῶν νημάτων καθὼς καὶ αἱ τριβαὶ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. ('Απ. $m_3 = (m_1 - m_2) \eta \mu \alpha$, $P = (m_1 - m_2) \cdot g \cdot \sigma \nu \alpha$.)

1263. Διὰ συνήθους πολυσπᾶστου, περιέχοντος ἐν συνόλῳ τρεῖς μεταθετὰς καὶ τρεῖς ἀμεταθέτους τροχαλίας, διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 120 kgr^* ἀπαιτεῖται δύναμις 30 kgr^* . Ζητοῦνται: α) ὁ λόγος ταχυτήτων (Λ.Τ.), β) τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα (Μ.Π.), καὶ γ) ἡ ἀπόδοσις. ('Απ. $\alpha' \text{ Λ.Τ.} = 6$, $\beta' \text{ Μ.Π.} = 4$, $\gamma' 67\%$.)

1264. Τροχὸς T ἀκτίνος R εἶναι προσηρμοσμένος ἐπὶ ἄξονος A . Ἐπὶ τοῦ ἄξονος A περιελίσσεται σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εἶναι ἐφηρμοσμένον μονίμως ἐπὶ τοῦ τυμπάνου, εἰς δὲ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον ἐφαρμόζεται φορτίον B . Ἐπὶ τοῦ τροχοῦ T περιελίσσεται ἐπίσης σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εὐρίσκεται μονίμως προσηρμοσμένον ἐπὶ τοῦ τροχοῦ, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου αὐτοῦ ἐπενεργεῖ ἡ δύναμις F . Ζητεῖται ἡ δύναμις F ἡ ἰσορροποῦσα τὸ φορτίον B . Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα. Ἐφαρμογή: $r = 10 \text{ cm}$, $R = 50 \text{ cm}$, $B = 100 \text{ kgr}^*$.

('Απ. $F = B \cdot r/R$, $F = 20 \text{ kgr}^*$.)

1265. Οἱ βραχίονες χημικοῦ ζυγοῦ ἔχουν ἑκαστος μῆκος 7 cm , ἐνῶ τὸ μῆκος τοῦ δείκτου εἶναι 12 cm καὶ ἡ μάζα τῆς φάλαγγος 50 gr . Ἐὰν αἱ τρεῖς ἀκμαὶ εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος εἰς σημεῖον κείμενον $0,02 \text{ cm}$ κάτωθεν τῆς κεντρικῆς ἀκμῆς, πόσον θὰ παρεκκλίνῃ τὸ πέρασ τοῦ δείκτου, ὅταν ἡ διαφορὰ βάρους εἰς τοὺς δίσκους εἶναι 1 mgr^* . ('Απ. $0,084 \text{ cm}$.)

1266. Αἱ πλευραὶ πρὸς τὴν βάσιν τριγωνικοῦ διπλοῦ σφηνὸς ἔχουν λόγον $20:3$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀκουμένη καθέτως ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ σφηνὸς διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν 100 kgr^* πλευρικῆς δυνάμεως. ('Απ. 15 kgr^* .)

1267. Ἡ φάλαγξ κοινού ζυγοῦ εὐρίσκεται εἰς ὀριζοντίαν θέσιν μὲ $25,62 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν ἀριστερὸν δίσκον καὶ $25,50 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν δεξιόν, καθὼς καὶ ὅταν ὑπάρχῃ βάρος $18,87 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν ἀριστερὸν δίσκον καὶ $18,75 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν δεξιόν. Ποία ἡ κατάσταση τοῦ ζυγοῦ βάσει τῶν ἀνωτέρω.

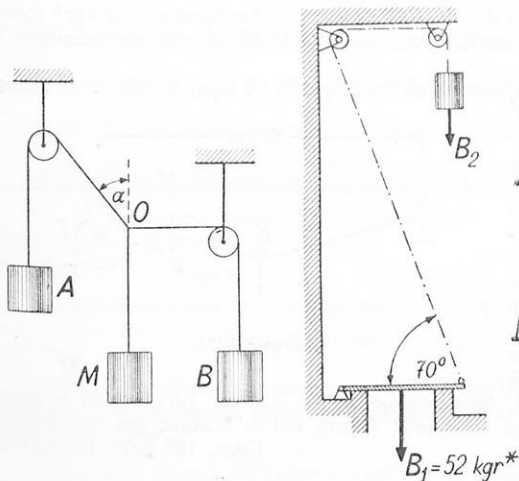
(Ἀπ. Οἱ βραχίονες τοῦ ζυγοῦ εἶναι ἴσοι εἰς μῆκος, τὸ δὲ σφάλμα ὀφείλεται εἰς τὸν δεξιὸν δίσκον, ὅστις εἶναι κατὰ $0,12 \text{ gr}^*$ βαρύτερος τοῦ ἀριστεροῦ.)

1268. Ἀντικείμενον τεθὲν ἐπὶ τῆς ἀριστερᾶς πλάστιγγος ζυγοῦ ἰσορροπεῖται διὰ σταθμῶν 200 gr^* ἐνῶς τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον τεθὲν ἐπὶ τῆς δεξιᾶς πλάστιγγος, ἰσορροπεῖται διὰ σταθμῶν 195 gr . Ζητοῦνται: α) τὸ πραγματικὸν βῆρος τοῦ ἀντικειμένου, καὶ β) ἡ ἀπόστασις λ τοῦ σημείου στηρίξεως τῆς φάλαγγος, μήκους 10 cm , ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς μέσον αὐτῆς. (Ἀπ. α' $197,4 \text{ gr}$, β' $0,03 \text{ cm}$.)

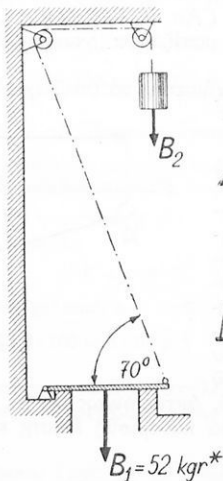
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1961.)

1269. Λεμβοῦχος κωπηλατῶν καὶ μὲ τὰς δύο κώπας διατηρεῖ τὴν κίνησιν τῆς λέμβου ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα, ἀσκεῖ δὲ δύναμιν 30 kgf^* ἐπὶ ἐκάστης κώπης, ἐφαρμοζομένων ἀμφοτέρων εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ σκαρμοῦ. Ἐὰν αἱ κώπαι ἔχουν μῆκος $2,40 \text{ cm}$ ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ λεπιδοῦ τοῦ μέρους μέχρι τῆς χειρολαβῆς, τοῦ ὑπολοίπου βυθιζομένου ἐντὸς τοῦ ὕδατος, πόση εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς λέμβου. (Ἀπ. $68,6 \text{ kgf}^*$.)

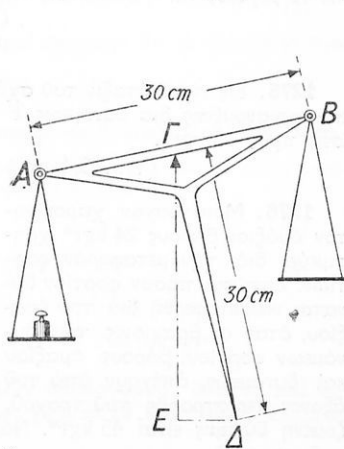
1270. Φορτίον M ἴσον πρὸς 10 kgf^* ἰσορροπεῖται ὑπὸ δύο φορτίων A καὶ B . Τὸ νῆμα τὸ φέρον τὸ φορτίον B εἶναι ὀριζόντιον ἀπὸ τοῦ σημείου O μέχρι τῆς τροχαλίας. Νὰ εὐρεθῶν τὸ μέγεθος τοῦ φορτίου B καὶ ἡ γωνία α , ἐὰν τὸ φορτίον A εἶναι ἴσον πρὸς 18 kgf^* . (Ἀπ. $B = 15 \text{ kgf}^*$, $\alpha = 56^\circ$.)



*Άσκησης 1270.



*Άσκησης 1271.

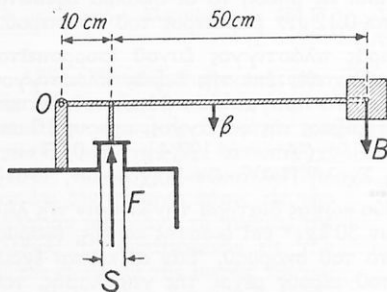


*Άσκησης 1272.

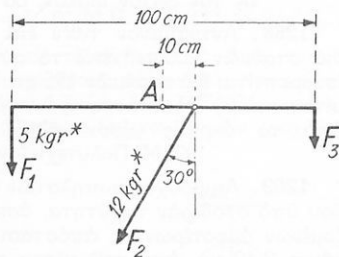
1271. Ποῖον ἀντίβαρον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνασηκωθῇ μέσῳ ἄβαροῦς σχοινίου, τὸ μεταλλινὸν σκέπαστρον τὸ εἰκονιζόμενον εἰς τὸ σχῆμα. (Ἀπ. $27,7 \text{ kgf}^*$.)

1272. Τὸ μῆκος AB τῆς φάλαγγος ζυγοῦ ἀνέρχεται εἰς 30 cm , τὸ βῆρος αὐτῆς εἰς 300 gr^* , ὃ δὲ δείκτης $\Gamma\Delta$ ἔχει μῆκος 30 cm . Πρόσθετον βῆρος $0,01 \text{ gr}^*$ ἐπὶ τοῦ ἐνὸς δίσκου ἀπομακρύνει τὴν ἀκρὴν Δ τοῦ δείκτη, ἀπὸ τῆς κατακορύφου κατὰ $\Delta E = 3 \text{ mm}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς φάλαγγος ἀπὸ τὴν ἐγκοπὴν Γ . (Ἀπ. $0,05 \text{ cm}$.)

1273. Εις την βαλβίδα ασφαλείας, την δεικνυομένην ὑπὸ τοῦ σχήματος, ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος B , ἐὰν ὁ ἀτμὸς πρέπει νὰ ἐκφεύγῃ ὑπὸ πίεσιν 10 at. Τὸ βάρος τῆς δοκοῦ εἶναι 2 kgf^* , ἡ ἐσωτερικὴ διατομὴ τῆς βαλβίδος 3 cm^2 . Ποίαν δύναμιν ὑφίσταται ὁ ἄξων περιστροφῆς. (Ἀπ. $B = 4 \text{ kgf}^*$, εἰς τὸ O 24 kgf^* .)



*Άσκησης 1273.



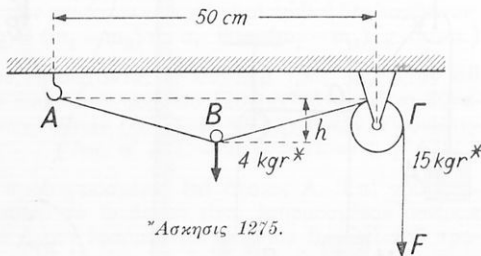
*Άσκησης 1274.

1274. Ἐπὶ ὁμογενοῦς ράβδου μοχλοῦ βάρους 2 kgf^* , στρεπτήσ περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους αὐτῆς, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους, δροῦν αἱ εἰς τὸ σχῆμα παριστώμεναι δυνάμεις, κείμεναι ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις F_3 , διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἰσορροπία, ὡς καὶ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ἄξονος.

(Ἀπ. $F_3 = 2,92 \text{ kgf}^*$, ἡ ἀντίδρασις $21,2 \text{ kgf}^*$ σχηματίζουσα γωνίαν $16^\circ 28'$ μετὰ τὴν κατακόρυφον.)

1275. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος h , τῆς ἰσορροπίας ἐπιτυγχανομένης διὰ δυνάμεως F ἴσης πρὸς 15 kgf^* .

(Ἀπ. $3,4 \text{ cm}.$)



*Άσκησης 1275.

1276. Μονότροχον χειροκίνητον ὁμάξιον βάρους 24 kgf^* χρησιμεύει διὰ τὴν μεταφορὰν φορτίων. Ζητεῖται πόσον φορτίον δύναται νὰ μεταφερθῇ διὰ τοῦ ὁμαξίου, ὅταν οἱ βραχίονες τῶν δυνάμεων φορτίου, βάρους ὁμαξίου καὶ δυνάμεως, ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ

ἄξονος περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ, ἀντιστοίχως $0,4 \text{ m}$, $0,55 \text{ m}$, $1,6 \text{ m}$, ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἶναι 45 kgf^* . Νὰ καθορισθῇ ἐπίσης καὶ ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ.

(Ἀπ. 147 kgf^* , 126 kgf^* .)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I'

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1277. Πόση είναι : α) *ή* πίεσις στήλης υδραργύρου ύψους 760 mm, β) *πόσον* τὸ ὕψος στήλης υδραργύρου, *ή* ὁποία ἄσκει πίεσιν 1 at. ($\epsilon_{\text{υδρ}} = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. α) Ἐάν καλέσωμεν p τὴν ζητούμενην πίεσιν, ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ υδραργύρου καὶ h τὸ ὕψος τῆς υδραργυρικῆς στήλης, τότε ὁ τύπος τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως εἶναι :

$$p = \epsilon \cdot h \quad (1)$$

Θέτομεν : $\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $h = 76 \text{ cm}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$p = 1033,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

β) Λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς h , ὁπότε ἔχομεν :

$$h = \frac{p}{\epsilon} \quad (2)$$

Θέτομεν : $p = 1 \text{ at} = 1000 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, $\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι :

$$h = 73,6 \text{ cm} = 736 \text{ mm}$$

1278. Πόσῃν δυνάμειν ἄσκει τὸ ὕδωρ ἐπὶ ἐπιφανείας 1 dm² εἰς βάθος 50 m.

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν S τοῦ ἔμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας καὶ p τὴν πίεσιν, ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπ' αὐτῆς, τότε ἡ ὀλική δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι :

$$F = p \cdot S \quad (1)$$

ἢ, ἐπειδὴ $p = \epsilon \cdot h$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F = \epsilon \cdot h \cdot S \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $h = 5000 \text{ cm}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 1 \cdot 5000 \cdot 100 = 5 \cdot 10^5 \text{ gr}^* \quad \text{ἤτοι : } \underline{F = 500 \text{ kgr}^*}$$

1279. Ποῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὕψη στήλῶν υδραργύρου, ὕδατος καὶ οἰνοπνεύματος, αἱ ὁποῖαι ἀσχοῦν πίεσιν 5000 μBar. ($\epsilon_{\text{υδρ}} = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon_{\text{οἰνοπν}} = 0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $1 \text{ μBar} = 1 \text{ dyn/cm}^2$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $5000 \text{ μBar} = 5 \cdot 10^3 \text{ dyn/cm}^2$. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως $p = \epsilon h \text{ gr}^*/\text{cm}^2 = \epsilon h \text{ dyn/cm}^2$ θὰ ἔχωμεν $h = p/\epsilon \text{ gr}$ καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν :

$$\alpha) \text{ Ὑψος υδραργύρου : } \underline{h_1 = \frac{p}{\epsilon_{\text{υδρ}} \cdot g} = \frac{5 \cdot 10^3}{13,6 \cdot 981} = 0,376 \text{ cm}}$$

$$\beta) \text{ Ὑψος ὕδατος : } \underline{h_2 = \frac{p}{\epsilon_{\text{υδ}} \cdot g} = \frac{5 \cdot 10^3}{1 \cdot 981} = 5,1 \text{ cm}}$$

$$\gamma) \text{ Ὑψος οἰνοπνεύματος : } \underline{h_3 = \frac{p}{\epsilon_{\text{οἰν}} \cdot g} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,79 \cdot 981} = 6,45 \text{ cm}}$$

1280. Νά υπολογισθῇ, εἰς gr^*/cm^3 , πίεσις εἰς βάθος 15 m ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν λίμνης, χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις.

Λύσις. Ἡ ὑδροστατική πίεσις p δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$p = h \cdot \rho \cdot g \text{ dyn/cm}^2 \quad (1)$$

ὅπου h τὸ βάθος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τῆς λίμνης καὶ ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὕγρου.

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸν Σύστημα C. G. S. ἔχομεν : $h = 1500 \text{ cm}$, $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$p = 1500 \cdot 1 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2 \quad \text{ἢ} : \quad p = 1500 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

1281. Ὁ ὑδράργυρος ἔχει πυκνότητα $13,56 \text{ gr/cm}^3$. Νά υπολογισθῇ ἡ πίεσις στήλης ὕψους 76 cm : α) εἰς dyn/cm^2 , καὶ β) εἰς kgr^*/m^2 .

Λύσις. α) Ἡ ὑδροστατική πίεσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$p = h \cdot \rho \cdot g \text{ dyn/cm}^2 \quad (1)$$

Δίδονται : $h = 76 \text{ cm}$, $\rho = 13,56 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$p = 76 \cdot 13,56 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2 \quad \text{ἢ} : \quad p = 1,01 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

β) Ἐὰν ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων θὰ ἔχωμεν : $h = 0,76 \text{ m}$, $\rho = 13,56 \cdot 10^6 \text{ gr/m}^3 = 13,56 \cdot 10^6 / 10^3 \cdot 9,81 \text{ T.M.} = 13,56 \cdot 10^3 \text{ kgr/m}^3$ καὶ $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$.

Ἐπομένως, δι' ἀντικατάστασεως εἰς τὸν τύπον $p = h \cdot \rho \cdot g$ προκύπτει ὅτι :

$$p = 0,76 \cdot \frac{13,56 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 9,81} \cdot 9,81 \text{ kgr}^*/\text{m}^2 \quad \text{ἢ} : \quad p = 10 \ 330 \text{ kgr}^*/\text{m}^2$$

γ) Ἐὰν ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Σύστημα M. K. S., δι' ἀντικατάστασεως τῶν δεδομένων, ἦτοι : $h = 76 \text{ cm} = 0,76 \text{ m}$, $\rho = 13,56 \text{ gr/cm}^3 = 13,56 \cdot 10^3 \text{ kgr/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, εἰς τὸν τύπον $p = \epsilon h g$, λαμβάνομεν :

$$p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Nt/m}^2$$

Σημείωσις. Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν τὴν τιμὴν τῆς πίεσεως εἰς dyn/cm^2 μετατρέποντες αὐτὴν εἰς kgr^*/m^2 καὶ Nt/m^2 .

1282. Εἰς πόσον βάθος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας ὕγρου, εἰδικοῦ* βάρους $0,75 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ἡ πίεσις ἡ δημιουργουμένη ὑπὸ τοῦ ὕγρου εἶναι $24 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$.

Λύσις. Ἡ ὑδροστατική πίεσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$p = h \cdot \rho \cdot g \text{ dyn/cm}^2 \quad \text{ἢ} : \quad p = h \cdot \epsilon \text{ gr}^*/\text{cm}^2 \quad (1)$$

ὅπου h τὸ βάθος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$h = p / \epsilon$$

Δίδονται : $p = 24 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$ καὶ $\epsilon = 0,75 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ἄρα :

$$h = \frac{24 \text{ gr}^*/\text{cm}^2}{0,75 \text{ gr}^*/\text{cm}^3} \quad \text{ἢ} : \quad h = 32 \text{ cm}$$

1283. Δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 6 m, πλάτος 4 m καὶ βάθος 2 m. Νά υπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ δύναμις εἰς kgr^* τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ πυθμὴν : α) ὅταν ἡ δεξαμενὴ εἶναι πλήρως ὑδατος, β) ὅταν κατὰ τὰ 0,75 εἶναι πλήρως ὕγρου εἰδικοῦ βάρους $1,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

Λύσις. α) Ἡ συνολικὴ δύναμις F τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ πυθμὴν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = p \cdot S \quad (1)$$

ὅπου p ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ πυθμὴν τῆς δεξαμενῆς καὶ S ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς. Ἐξ ἄλλου :

$$p = h \cdot \epsilon \quad (2) \quad \text{καὶ ἔπομένως θὰ ἔχωμεν : } F = h \cdot S \cdot \epsilon \quad (3)$$

Δίδονται: $h = 2 \text{ m}$, $S = 6 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 24 \text{ m}^2$ και $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 = 10^3 \text{ kg}^*/\text{m}^3$. Έπομένως θα έχουμε:

$$F = 48\,000 \text{ kg}^*$$

β) Έφαρμόζομεν τούς αυτούς τύπους με δεδομένα: $h = 0,75 \cdot 2 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$, $S = 24 \text{ m}^2$ και $\epsilon = 1,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ kg}^*/\text{m}^3$, οπότε εύρισκομεν:

$$F = 57\,600 \text{ kg}^*$$

1284. Εἰς σύστημα ὁμοίων συγκοινωνούντων δοχείων θέτομεν ἐν ἀρχῇ ὑδράργυρον καὶ εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ σκέλος προσθέτομεν ὠρισμένην ποσότητα ὕδατος, εὐρίσκομεν δὲ ὅτι, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας, ἡ κατωτέρα στάθμη τοῦ ὑδραργύρου εὐρίσκεται εἰς ὕψος $38,5 \text{ cm}$, ἡ δὲ ἀνωτέρα εἰς ὕψος $41,6 \text{ cm}$, ἐνῶ ἡ στάθμη τῆς ὑδατίνης στήλης εἶναι $80,7 \text{ cm}$. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου.

Λύσις. Μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ ὕδατος θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν πιέσεων εἰς τὰ δύο δοχεῖα ὑπολογιζομένη ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ὡς βάσιν συγκρίσεως ἐκλέγομεν τὴν κατωτέραν στάθμην τοῦ ὑδραργύρου. Ἐὰν καλέσωμεν ϵ καὶ ϵ' τὰ εἰδικὰ βάρη τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὑδραργύρου ἀντιστοίχως καὶ h καὶ h' τὰ ὑπὲρ τὴν βάσιν συγκρίσεως ὑψηλῶν στήλων τῶν δύο ὑγρῶν, θὰ ἔχωμεν ἂν $p = h \cdot \epsilon$ καὶ ἂν $p = h' \cdot \epsilon'$ καὶ:

$$h \cdot \epsilon = h' \cdot \epsilon' \quad \eta: \quad \epsilon' = \frac{h}{h'} \cdot \epsilon \quad (1)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰ γνωστὰ μεγέθη: $h = 80,7 \text{ cm}$, $h' = 41,6 - 38,5 = 3,1 \text{ cm}$, $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ εὐρίσκομεν:

$$\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 \quad \eta: \quad \rho = 13,6 \text{ gr}/\text{cm}^3$$

1285. Εἰς σύστημα δύο κατακορύφως συγκοινωνούντων σωλῆνων τῆς αὐτῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου $0,9 \text{ cm}$ θέτομεν ὑδράργυρον. Ἀκολουθῶς, εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ σκέλος θέτομεν 30 gr ὕδατος, εἰς δὲ τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ 52 gr οἰνοπνεύματος. Ποία εἶναι ἡ κατάστασις ἰσορροπίας. (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εἰδικὸν βάρος οἰνοπνεύματος $0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστῶσαν B_1 καὶ B_2 τὰ βάρη τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ οἰνοπνεύματος, p_1 , p_2 αἱ ὑδροστατικαὶ πιέσεις τῶν δύο προστεθέντων ὑγρῶν ἀντιστοίχως καὶ S ἡ κοινὴ διατομὴ τῶν δύο σωλῆνων. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$p_1 = \frac{B_1}{S} \quad (1) \quad \text{καὶ:} \quad p_2 = \frac{B_2}{S} \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου δίδεται $B_2 > B_1$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν καὶ $p_2 > p_1$. Ἀρα, μετὰ τὴν προσθήκην καὶ τῶν δύο ὑγρῶν, ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου θὰ κατέλθῃ ἐντὸς τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ σκέλους, ἔστω κατὰ ὕψος $h/2$. Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν διαφορὰν πιέσεων τοῦ ὑδραργύρου μετὰ τῶν δύο σκελῶν καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, h_1 τὸ ὕψος στήλης ὕδατος καὶ ϵ_1 τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ h_2 , ϵ_2 τὸ ὕψος στήλης καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος στήλης τοῦ οἰνοπνεύματος, θὰ ἔχωμεν προφανῶς:

$$p_2 = p + p_1 \quad (3) \quad \text{καὶ:} \quad p = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \epsilon \quad \eta: \quad p = h \cdot \epsilon \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων προκύπτει:

$$\frac{B_2}{S} = h \cdot \epsilon + \frac{B_1}{S} \quad \eta: \quad h = \frac{B_2 - B_1}{S \cdot \epsilon} \quad (5)$$

Δίδονται: $B_2 = 52 \text{ gr}^*$, $B_1 = 30 \text{ gr}^*$, $\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ $S = \pi \cdot d^2/4 = 3,14 \cdot 0,9^2/4 \text{ cm}^2 = 0,636 \text{ cm}^2$, ὅποτε δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν (5) προκύπτει:

$$h = 2,55 \text{ cm} \quad \eta: \quad \frac{h}{2} = 1,275 \text{ cm}$$

Ἦτοι ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ κατὰ $1,275 \text{ cm}$ ἐντὸς τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ σκέλους. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν:

$$B_1 = S \cdot h_1 \cdot \epsilon_1 \quad \eta: \quad h_1 = \frac{B_1}{S \cdot \epsilon_1} \quad (6) \quad \text{καὶ:} \quad B_2 = S \cdot h_2 \cdot \epsilon_2 \quad \eta: \quad h_2 = \frac{B_2}{S \cdot \epsilon_2} \quad (7)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7) τὰς τιμὰς : $B_1 = 30 \text{ gr}^*$, $S = 0,636 \text{ cm}^2$, $\epsilon_1 = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $B_2 = 52 \text{ gr}^*$ καὶ $\epsilon_2 = 0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$h_1 = 47 \text{ cm} \quad \text{καὶ} : \quad h_2 = 104 \text{ cm}$$

1286. Κλειστὸν δοχεῖον κυβικοῦ σχήματος, ἀκμῆς 20 cm , φέρει κατὰ τὴν ἄνω ἐδρὰν σωλῆνα ὕψους 40 cm καὶ τομῆς 10 cm^2 . Ἐὰν τὸ δοχεῖον καὶ ὁ σωλὴν πληροῦνται τελείως δι' ὕδατος, νὰ υπολογισθοῦν αἱ ὀλικάι δυνάμεις, αἱ ἀσκούμεναι ἐπὶ ἐκάστης τῶν ἐδρῶν.

Λύσις. Ἐστωσαν α ἡ ἀκμὴ τοῦ κυβικοῦ δοχείου, h τὸ ὕψος τοῦ σωλῆνος καὶ σ ἡ τομὴ αὐτοῦ. Αἱ ὀλικάι δυνάμεις, αἱ ἀσκούμεναι ἐπὶ ἐκάστης τῶν ἐδρῶν, εἶναι αἱ ἑξῆς :

α) Ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας :

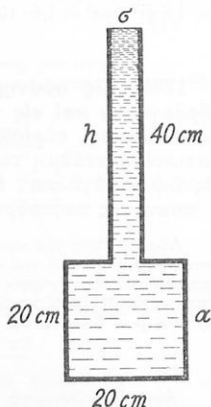
$$F_1 = \epsilon \cdot (h + \alpha) \cdot \alpha^2 = 1 \cdot (40 + 20) \cdot 20^2 = \underline{24\,000 \text{ gr}^*}$$

β) Ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας :

$$F_2 = \epsilon \cdot h \cdot (\alpha^2 - \sigma) = 1 \cdot 40 \cdot (20^2 - 10) = \underline{15\,600 \text{ gr}^*}$$

γ) Ἐπὶ ἐκάστης ἐκ τῶν πλευρικῶν ἐπιφανειῶν :

$$F_3 = \epsilon \cdot \left(h + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \alpha^2 = 1 \cdot (40 + 10) \cdot 20^2 = \underline{20\,000 \text{ gr}^*}$$



1287. Εἰς τὰ τοιχώματα πλοίου καὶ εἰς βάθος $3,03 \text{ m}$ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ὑπάρχει ὀπὴ ἀκτίνος $R = 0,1 \text{ m}$. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐπιδρῇ ἐπὶ τοῦ καλύμματος τῆς ὀπῆς, διὰ νὰ ἐμποδίσῃ τὴν ροὴν τοῦ θαλασσίου ὕδατος ἐντὸς τοῦ σκάφους. Πυκνότης θαλασσίου ὕδατος $1,026 \text{ gr}/\text{cm}^3$.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολή, 1957).

Λύσις. Τὸ ἀπαιτούμενον βάρος B , τὸ ὁποῖον θὰ ἐπιδρῇ ἐπὶ τοῦ καλύμματος τῆς ὀπῆς, πρέπει νὰ ἀντισταθμίξῃ τὴν δύναμιν F , τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ θαλάσσιον ὕδωρ λόγω διαφορᾶς στάθμης. Δηλαδή :

$$B = F \quad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι :

$$F = p \cdot S \quad \text{ἢ} : \quad F = \epsilon \cdot h \cdot S \quad (2)$$

ὅπου p ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις, ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος, h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης καὶ S ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὀπῆς.

Ἄφ' ἑτέρου :

$$S = \pi \cdot R^2 \quad (3)$$

Ἄρα, διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1), (2) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$B = \epsilon \cdot h \cdot \pi \cdot R^2 \quad (4)$$

ὅπου $\epsilon = 1,026 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $h = 303 \text{ cm}$ καὶ $R = 10 \text{ cm}$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$B = 97\,615,7 \text{ gr}^* = \underline{97,62 \text{ kg}^*}, \text{ περίπου}$$

1288. Εἰς σωλῆνα σχήματος U (βλ. σχῆμα) τὸ δεξιὸν σκέλος περιέχει ὑδράργυρον, ἐνῶ τὸ ἕτερον πληροῦται μὲ ὑγρὸν ἀγνώστου πυκνότητος. Τὸ ὕψος τῶν στηλῶν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δύο σκέλη ἀπὸ τῆς ὀρικῆς ἐπιφανείας, τῆς διαχωρίζουσας τὰ δύο ὑγρά, εἶναι εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος 2 cm καὶ εἰς τὸ ἀριστερὸν 14 cm . Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. ($\rho_{\text{υδρ}} = 13,6 \text{ gr}/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι ἡ ζητούμενη πυκνότης εἶναι ρ_1 , τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ h_1 , ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου ρ_2 καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου h_2 . Ἐπὶ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας αἱ πιέσεις αἱ ὁποῖαι ἀσκούνται

ὑπὸ τῶν δύο ὑγρῶν θὰ εἶναι ἴσα, διότι ἡ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια εἶναι ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$P_1 = P_2 \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὑδροστατικῆς πίεσεως ἔχομεν :

$$P_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad \text{καί} : \quad P_2 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

ὅτε ἡ σχέση (1) γίνεταί :

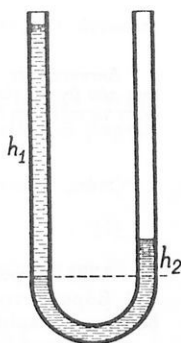
$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2 \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς ρ_1 :

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 \cdot h_2}{h_1} \quad (3)$$

καί, ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho_2 = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, $h_2 = 2 \text{ cm}$, $h_1 = 14 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$\rho_1 = 1,94 \text{ gr/cm}^3$$



* Ἀσκήσις 1288.

1289. Ἡ βάσις ὑαλίνου δοχείου ἔχει διάμετρον 20 cm καὶ ἡ κορυφὴ 30 cm, ἐνῶ τὸ βάθος του εἶναι 22 cm καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ 1,5 kg*. Τὸ δοχεῖον τοποθετεῖται ἐπὶ τραπέζης καὶ πληροῦται δι' ὕδατος. (Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι 10,9 λίτρα). Νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, ὡς καὶ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη, ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ, ἐπὶ τῆς τραπέζης.

Λύσις. Ἡ δύναμις F ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ βάρους τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ (ὑδροστατικὸν παράδοξον), ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἀπὸ τὸ ἔμβαδον S τοῦ πυθμένος, ἀπὸ τὸ ὕψος h τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀπὸ τὸ εἰδικὸν βάρος ϵ τοῦ ὑγροῦ. Ἦτοι :

$$F = \epsilon \cdot h \cdot S \quad (1)$$

ἥ, ἔπειδὴ $S = \pi \cdot \delta^2 / 4$, ἔχομεν :

$$F = \epsilon \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot \delta^2}{4} \quad (2)$$

Θέτομεν : $\epsilon = 1 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$, $h = 22 \text{ cm}$, $\delta = 20 \text{ cm}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 6908 \text{ gr}^*$$

Ἡ δύναμις F_1 ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς τραπέζης θὰ εἶναι προφανῶς τὸ βάρος B_1 τοῦ ὕδατος σὺν τῷ βάρει B_2 τοῦ δοχείου. Ἦτοι : $F_1 = B_1 + B_2$, ἥ, ἔπειδὴ $B_1 = \epsilon \cdot V$, θὰ ἔχωμεν :

$$F_1 = \epsilon \cdot V + B_2$$

Θέτομεν : $\epsilon = 1 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$, $V = 10,9 \text{ lt} = 10\,900 \text{ cm}^3$, $B_2 = 1500 \text{ gr}^*$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F_1 = 12\,400 \text{ gr}^*$$

1290. Τεμάχιον χαλκοῦ, εἰδικοῦ βάρους $\epsilon_1 = 8,9 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$, ἔχει βάρος 523 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 447 gr* ὅταν εἶναι βυθισμένον εἰς ὕδωρ. Νὰ ἐξακριβωθῇ ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι πληρὲς ἢ κοῖλον· ἐὰν εἶναι κοῖλον, νὰ καθορισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ τεμάχιον τοῦ χαλκοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 523 gr* καὶ εἰς τὸ ὕδωρ 447 gr*, ἔπεται ὅτι ἡ ἀνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τοῦτο ἀπὸ τὸ ὕδωρ εἶναι :

$$A = 523 - 447 = 76 \text{ gr}^*$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦς ἡ ἀνωσις A εἶναι γινόμενον τοῦ ὄγκου V τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ϵ τοῦ ὑγροῦ, ἦτοι $A = \epsilon \cdot V$, ὁ ὄγκος τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$V = \frac{A}{\epsilon} = \frac{76}{1} = 76 \text{ cm}^3$$

Τὸν ὄγκον ὅμως τοῦ σώματος, ἐὰν τοῦτο εἶναι συμπαγές, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\epsilon_1 = B/V$). Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι :

$$V_1 = \frac{B}{\epsilon_1} = \frac{523}{8,9} = 58,67 \text{ cm}^3$$

Διαπιστοῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὄγκος, ὁ εὐρισκόμενος ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τὸν εὐρισκόμενον ἐκ τοῦ τύπου τοῦ εἰδικοῦ βάρους, καὶ προφανῶς τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ σῶμα θὰ ἔχη ὀπασσὴποτε κοιλότητα. Ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος εἶναι :

$$V_{\text{κοιλ}} = V - V_1$$

Ὅποτε, δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν εὐρεθεισῶν τιμῶν, λαμβάνομεν :

$$V_{\text{κοιλ}} = 17,33 \text{ cm}^3$$

1291. Σφαῖρα χαλκοῦ ἔχει βάρος 890 gr*, βυθιζομένη δ' ἐν ὕδατι χάνει ἐκ τοῦ βάρους τῆς 112,25 gr*. Ἡ σφαῖρα εἶναι πλήρης ἢ κοίλη; Καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσην, πόσος ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος. (Εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ $\epsilon_1 = 8,93 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἡ φαινόμενη ἀπώλεια βάρους τῆς σφαίρας ὀφείλεται εἰς τὴν ἀνωσιν Α τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται αὕτη. Γνωρίζομεν ἄφ' ἑτέρου ὅτι ἡ ἀνωσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = V \cdot \epsilon \quad (1)$$

ὅπου V ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$V = \frac{A}{\epsilon} \quad (2)$$

Δίδονται : $A = 112,25 \text{ gr}^*$, $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ἄρα :

$$V = 112,25 \text{ cm}^3$$

Ὁ πραγματικὸς ὄγκος V_1 τῆς σφαίρας δίδεται ἐξ ἄλλου ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V_1 = \frac{B}{\epsilon_1} \quad (3)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα : $B = 890 \text{ gr}^*$ καὶ $\epsilon_1 = 8,93 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, λαμβάνομεν :

$$V_1 = 99,67 \text{ cm}^3$$

Δηλαδὴ εὐρίσκομεν ὄγκον V_1 μικρότερον τοῦ ἐξωτερικοῦ ὄγκου V. Ἐπομένως ἡ σφαῖρα εἶναι κοίλη καὶ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος V' θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς :

$$V' = V - V_1 \quad (4) \quad \text{ἤτοι:} \quad V' = 12,58 \text{ cm}^3$$

1292. Τεμάχιον σιδήρου βάρους 200 gr* ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἀνωσιν 27,2 gr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν χασμάτων τὰ ὁποῖα παρουσιάζει ἐσωτερικῶς. (Εἰδικὸν βάρος σιδήρου $7,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστω V ὁ ὄγκος τῶν χασμάτων καὶ V_1 ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος τοῦ τεμαχίου τοῦ σιδήρου. Τότε ὁ πραγματικὸς ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι :

$$V_2 = V_1 - V \quad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ τεμαχίου σιδήρου, Α τὴν ἀνωσιν τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ ϵ_1 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν :

$$B = V_2 \cdot \epsilon \quad \text{ἤ:} \quad V_2 = \frac{B}{\epsilon} \quad (2) \quad \text{καί:} \quad A = V_1 \cdot \epsilon_1 \quad \text{ἤ:} \quad V_1 = \frac{A}{\epsilon_1} \quad (3)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν :

$$V_1 - V_2 = \frac{A}{\epsilon_1} - \frac{B}{\epsilon} \quad (4)$$

ή, λόγω τῆς ἐξισώσεως (1), προκύπτει :

$$V = \frac{A}{\varepsilon_1} - \frac{B}{\varepsilon} \quad (5)$$

Δίδονται : $A = 27,2 \text{ gr}^*$, $B = 200 \text{ gr}^*$, $\varepsilon = 7,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ὁπότε δι' ἀντικατάστασεως λαμβάνομεν :

$$V = 1,56 \text{ cm}^3$$

1293. Ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται σῶμα εἰς ὕδωρ εἶναι 65 gr^* . Πόση ἡ ἄνωσις τοῦ αὐτοῦ σώματος, ὅταν βυθίζεται εἰς οἰνόπνευμα εἰδικοῦ βάρους $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ εἰς ὑδράργυρον εἰδικοῦ βάρους $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

Λύσις. Ἡ ἄνωσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = V \cdot \varepsilon, \text{ ἐκ τοῦ ὁποίου : } V = \frac{A}{\varepsilon} \quad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν A_1 καὶ A_2 ἀντιστοίχως τὴν ἄνωσιν ἐντὸς τοῦ ὕδατος, οἰνοπνεύματος καὶ ὑδραργύρου καὶ ε_1 , ε_2 τὰ ἀντίστοιχα εἰδικὰ βάρη τῶν ὑγρῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$V = \frac{A}{\varepsilon} = \frac{A_1}{\varepsilon_1} = \frac{A_2}{\varepsilon_2} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὐρίσκομεν :

$$A_1 = \frac{A \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon} \quad \text{καί :} \quad A_2 = \frac{A \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon} \quad (3)$$

καὶ ἐπειδὴ $A = 65 \text{ gr}^*$, $\varepsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\varepsilon_1 = 0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\varepsilon_2 = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, λαμβάνομεν δι' ἀντικατάστασεως :

$$A_1 = 52 \text{ gr}^* \quad \text{καί :} \quad A_2 = 884 \text{ gr}^*$$

1294. Πόσον τὸ βάρος, εἰς gr^* , σφαίρας χαλκοῦ ἀκτίνος 4 cm , ὅταν αὕτη βυθίζεται ἐντὸς πετρελαίου εἰδικοῦ βάρους $0,84 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ $8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐάν V ὁ ὅγκος τῆς σφαίρας καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτῆς, τὸ πραγματικὸν βάρος B θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$B = V \cdot \varepsilon \quad \text{ἢ :} \quad B = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Ἡ ἄνωσις A ἐντὸς τοῦ πετρελαίου εἰδικοῦ βάρους ε' θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = V \cdot \varepsilon' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \varepsilon' \quad (2)$$

Δι' ἀφαίρεσεως κατὰ μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων προκύπτει τὸ φαινόμενον βάρος B_φ τῆς σφαίρας, ὅταν αὕτη βυθίζεται ἐντὸς πετρελαίου, ἥτοι :

$$B_\varphi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot (\varepsilon - \varepsilon') \quad (3)$$

Ἀντικαθιστώντες διὰ τῶν δεδομένων : $r = 4 \text{ cm}$, $\varepsilon = 8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ $\varepsilon' = 0,84 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, λαμβάνομεν :

$$B_\varphi = 2149,7 \text{ gr}^*$$

1295. Τεμάχιον κασσιτέρου μάζης 20 gr καὶ τεμάχιον χαλκοῦ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τῶν ἄκρων νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας, τὸ δὲ σύστημα εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπῇ, ὅταν τὰ δύο σώματα εἶναι βυθισμένα εἰς ὕδωρ. Νὰ υπολογισθῇ ἡ μάζα τοῦ χαλκοῦ. (Πυκνότης κασσιτέρου $7,3 \text{ gr}/\text{cm}^3$, χαλκοῦ $8,9 \text{ gr}/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστωσαν m_1 καὶ m_2 αἱ μάζαι τοῦ κασσιτέρου καὶ τοῦ χαλκοῦ ἀντιστοίχως, ε_1 καὶ ε_2 τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν, B_1 καὶ B_2 τὰ φαινόμενα βάρη αὐτῶν ὅταν τὰ σώματα εἶναι βυθισμένα ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν ἰσορροπίαν :

$$B_1 = B_2 \quad (1)$$

*Έκαστον τούτων αποτελεί την διαφοράν πραγματικού βάρους και άνώσεως. *Ητοι θά ἔχωμεν :

$$B_1 = m_1 \cdot g - V_1 \cdot \epsilon = m_1 \cdot g - \frac{m_1 \cdot g}{\epsilon_1} \cdot \epsilon \quad \eta: \quad B_1 = m_1 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_1}\right) \quad \text{καί:} \quad B_2 = m_2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_2}\right)$$

ὅπου ϵ τὸ εἰδικὸν βᾶρος τοῦ ὕδατος. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) προκύπτει :

$$m_1 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_1}\right) = m_2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_2}\right) \quad \eta: \quad m_2 = \frac{m_1 \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_1}\right)}{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_2}}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξίσωσως, δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων : $m_1 = 20 \text{ gr}$, $\epsilon = 1 \text{ gr}^/\text{cm}^3$, $\epsilon_1 = 7,3 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon_2 = 8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, προκύπτει :

$$m_2 = 19,45 \text{ gr}$$

1296. Κύλινδρος ἐκ ξύλου πυκνότητος $0,6 \text{ gr}/\text{cm}^3$ ἰσορροπεῖ ἐντὸς ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ὁ εὐρισκόμενος ἔξω τοῦ ὕδατος.

Λύσις. *Ἐστω V ὁ ὄγκος καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βᾶρος τοῦ ξυλίνου κυλίνδρου, V' ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ὁ ὁποῖος εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν ἰσορροπίαν καὶ ϵ' τὸ εἰδικὸν βᾶρος τοῦ ὕδατος. Εἰς τὴν περὶπτωσησιν ταύτην θά ἔχωμεν ἐξίσωσιν βάρους καὶ ἀνώσεως, ἥτοι :

$$B = A \quad \eta: \quad V \cdot \epsilon = (V - V') \cdot \epsilon' \quad (1)$$

Δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς V' λαμβάνομεν :

$$V' = \frac{V \cdot (\epsilon' - \epsilon)}{\epsilon'} \quad (2)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν γνωστῶν μεγεθῶν : $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ $\epsilon = 0,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, προκύπτει :

$$V' = 0,4 V$$

1297. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ τεθῇ εἰς κυλινδρικὸν ὑάλινον σωλῆνα βάρους 40 gr^* καὶ ἐξωτερικῆς τομῆς 2 cm^2 , ἵνα οὗτος βυθισθῇ κατὰ 20 cm ἐντὸς ὑγροῦ, εἰδικοῦ βάρους $1,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, (Πυκνότης ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}/\text{cm}^3$).

Λύσις. *Ἐστωσαν V ὁ ἀπαιτούμενος ὄγκος ὑδραργύρου καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βᾶρος αὐτοῦ. *Ἐστωσαν ἐπίσης S ἡ ἐξωτερικὴ διατομὴ τοῦ σωλῆνος καὶ h τὸ βάθος ἐντὸς τοῦ ὁποῖου ἐμβαπτίζεται κατὰ τὴν ἰσορροπίαν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους ϵ' . Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν θά ἔχωμεν ἐξίσωσιν τοῦ συνολικοῦ βάρους B καὶ τῆς ἀνώσεως A , ἥτοι :

$$B = A \quad (1)$$

*Ἐχομεν ὁμῶς $B = B_1 + B_2$ (2), ὅπου B_1 τὸ βᾶρος τοῦ κυλίνδρου καὶ B_2 τὸ βᾶρος τοῦ ὑδραργύρου, τὸ ὁποῖον θά δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$B_2 = V \cdot \epsilon \quad (3)$$

*Ἀφ' ἐτέρου ἡ ἀνωσις A θά δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = S \cdot h \cdot \epsilon' \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τεσσάρων ἐξίσωσεων προκύπτει :

$$S \cdot h \cdot \epsilon' = B_1 + V \cdot \epsilon \quad \eta: \quad V = \frac{S \cdot h \cdot \epsilon' - B_1}{\epsilon} \quad (5)$$

Δίδονται : $S = 2 \text{ cm}^2$, $h = 20 \text{ cm}$, $\epsilon' = 1,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $B_1 = 40 \text{ gr}^*$ καὶ $\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) προκύπτει :

$$V = 1,47 \text{ cm}^3$$

1298. Ἡ πυκνότης τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἶναι $1,03 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Νὰ καθορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν μέτρων τοῦ ἐκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος ὑπὸ πλοίου ἐκτοπίσματος 5000 τόννων.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ πλοῖον εἶναι ἑκτοπίσματος 5000 τόνων, ἔπεται ὅτι ἡ μάζα m τοῦ ἑκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος θὰ εἶναι 5000 τόννοι καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος αὐτοῦ δύναται νὰ εὐρεθῇ ἀπὸ τὸν τύπον τῆς πυκνότητος ($\rho = m/V$) ὅτι εἶναι :

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (1)$$

Θέτομεν : $m = 5 \cdot 10^3 \text{ gr}$, $\rho = 1,03 \text{ gr/cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$V = 5 \cdot 10^3 / 1,03 \text{ cm}^3 = 4,86 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

ἦτοι :

$$V = 4,86 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

1299. Τεμάχιον ξύλου διαστάσεων $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ καὶ ὕψους 3 cm ἐπιπλέει εἰς ὕδωρ βυθιζόμενον κατὰ $2,5 \text{ cm}$. Πόση μάζα ἀργιλίου (πυκνότητος $2,6 \text{ gr/cm}^3$) πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ τεμαχίου ξύλου, ἵνα τοῦτο μετὰ τοῦ ἀργιλίου βυθίζεται τελείως ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου ἔχει βάρος B , βάσιν S καὶ βυθίζεται ἡ βᾶσις του ἐντὸς τοῦ ὕδατος κατὰ h , ὅταν ἐπιπλέῃ. Ἐπειδὴ τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου ἰσορροπεῖ, θὰ εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ ἴσον πρὸς τὴν ἀνωσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὑπὸ τοῦ ὕδατος. Ἦτοι :

$$B = A \quad (1)$$

Ἐάν δὲ καλέσωμεν ρ τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, τότε ἡ ἀνωσις εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τῆς ἀνώσεως :

$$A = \rho \cdot g \cdot S \cdot h \quad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$B = \rho \cdot g \cdot S \cdot h \quad (3)$$

Καλοῦμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ ἀργιλίου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ θέσωμεν ἀνωθεν τοῦ ξύλου, ἵνα τὸ σύστημα ἀργιλίου καὶ ξύλου αἰωρηθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα εὐρίσκεται εἰς ἰσορροπία, τὸ βάρος αὐτοῦ $B_{ολ}$ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀνωσιν $A_{ολ}$ τὴν ὁποίαν ὑφίσταται. Ἦτοι :

$$B_{ολ} = A_{ολ} \quad (4)$$

Εἶναι ὁμῶς $B_{ολ}$ τὸ βάρος τοῦ ξύλου καὶ τὸ βάρος τοῦ ἀργιλίου, δηλαδή :

$$B_{ολ} = B + m_1 \cdot g \quad (5)$$

καὶ $A_{ολ}$ ἡ ἀνωσις τοῦ ξύλου καὶ ἡ ἀνωσις τοῦ ἀργιλίου, δηλαδή :

$$A_{ολ} = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \quad (6)$$

ὅπου V ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου καὶ V_1 ὁ ὄγκος τοῦ ἀργιλίου. Οὕτως ἡ σχέσις (4) γράφεται :

$$B + m_1 \cdot g = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \quad (7)$$

ἦ, λόγῳ τῆς (3) :

$$\rho \cdot g \cdot S \cdot h + m_1 \cdot g = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \quad (8)$$

Ἐάν δὲ θέσωμεν εἰς τὴν (8) : $V_1 = m_1 / \rho_1$, ὅπου ρ_1 ἡ πυκνότης τοῦ ἀργιλίου, λαμβάνομεν :

$$\rho \cdot S \cdot h + m_1 = \rho \cdot V + \rho \cdot \frac{m_1}{\rho_1} \quad (9)$$

Ἀκολουθῶνς λύομεν τὴν σχέσιν (9) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην μάζαν m_1 τοῦ ἀργιλίου καὶ προκύπτει οὕτως ὁ γενικὸς τύπος :

$$m_1 = \frac{\rho \cdot \rho_1 \cdot (V - S \cdot h)}{\rho_1 - \rho} \quad (10)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (10) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ὡς εἶναι, δηλ. εἰς τὸ Σ ύ σ τ η μ α C. G. S., καὶ εὐρίσκομεν :

$$m_1 = 16,25 \text{ gr}$$

1300. Τεμάχιον ὀρειχάλκου ἔχει βάρος 400 gr^* καὶ ἀποτελεῖται κατὰ 65% τοῦ βάρους αὐτοῦ ἀπὸ χαλκὸν καὶ κατὰ 35% ἀπὸ ψευδάργυρον. Πόσῃν ἀνωσιν

υφίσταται ἐντὸς ἐλαίου εἰδικοῦ βάρους $0,87 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. ($\epsilon_{\text{χαλκ}} = 8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon_{\text{ψευδ}} = 7,1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὐρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι $B_{\text{χαλκ}} = 65 \cdot 400/100 = 260 \text{ gr}^*$ καὶ τὸ βάρος τοῦ ψευδαργύρου $B_{\text{ψευδ}} = 140 \text{ gr}^*$. Ὡς καλέσωμεν $V_{\text{χαλκ}}$ τὸν ὄγκον τοῦ χαλκοῦ, $V_{\text{ψευδ}}$ τὸν ὄγκον τοῦ ψευδαργύρου καὶ $\epsilon_{\text{χαλκ}}$, $\epsilon_{\text{ψευδ}}$ ἀντιστοιχῶς τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\epsilon = B/V$) θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$V_{\text{χαλκ}} = \frac{B_{\text{χαλκ}}}{\epsilon_{\text{χαλκ}}} \quad \text{καί:} \quad V_{\text{ψευδ}} = \frac{B_{\text{ψευδ}}}{\epsilon_{\text{ψευδ}}} \quad (1)$$

καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὀρειχάλκου θὰ εἶναι:

$$V_{\text{ορειχ}} = \frac{B_{\text{χαλκ}}}{\epsilon_{\text{χαλκ}}} + \frac{B_{\text{ψευδ}}}{\epsilon_{\text{ψευδ}}} \quad (2)$$

Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι ϵ , τότε τὸ τεμάχιον τοῦ ὀρειχάλκου ἐντὸς αὐτοῦ θὰ ὑφίσταται ἄνωσιν: $A = \epsilon \cdot V_{\text{ορειχ}}$ ἢ, λόγῳ τῆς (2):

$$A = \epsilon \cdot \left(\frac{B_{\text{χαλκ}}}{\epsilon_{\text{χαλκ}}} + \frac{B_{\text{ψευδ}}}{\epsilon_{\text{ψευδ}}} \right) \quad (3)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $B_{\text{χαλκ}} = 260 \text{ gr}^*$, $B_{\text{ψευδ}} = 140 \text{ gr}^*$, $\epsilon_{\text{χαλκ}} = 8,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon_{\text{ψευδ}} = 7,1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon = 0,87 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$A = 42,56 \text{ gr}^*$$

1301. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἰς 0°C εἶναι $1,03 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Πόσον τοῖς ἑκατὸν τοῦ ὄγκου ἐνὸς παγοβούνου βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου εἶναι $0,917 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ παγοβούνον ἐπιπλέει, εὐρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν καὶ ἔπομένως ἡ ἄνωσις αὐτοῦ θὰ εἶναι ἰσὴ μὲ τὸ βάρος του. Ἦτοι:

$$A = B \quad (1)$$

Ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ παγοβούνου εἶναι V καὶ ὁ ὄγκος ὁ εὐρισκόμενος ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι V_1 , τότε ἡ ἄνωσις θὰ εἶναι:

$$A = \epsilon_1 \cdot V_1 \quad (2)$$

ὅπου ϵ_1 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος. Ἐξ ἄλλου τὸ βάρος τοῦ παγοβούνου B εἶναι:

$$B = \epsilon \cdot V \quad (3)$$

ὅπου ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου.

Βάσει τῶν σχέσεων (1), (2) καὶ (3) θὰ ἔχωμεν:

$$\epsilon_1 \cdot V_1 = \epsilon \cdot V \quad (4)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς V_1 προκύπτει ὁ τύπος:

$$V_1 = \frac{\epsilon \cdot V}{\epsilon_1} \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5) τὰ δεδομένα: $\epsilon = 0,917 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ $\epsilon_1 = 1,03 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εὐρίσκομεν:

$$V_1 = 0,89 V$$

Ἦτοι ὁ βυθισμένος ὄγκος τοῦ παγοβούνου εἶναι τὰ 89% τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

1302. Τεμάχιον σμύριδος ζυγίζει 52 gr^* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 39 gr^* εἰς τὸ ὕδωρ. Πόσον τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς σμύριδος.

Λύσις. Προφανῶς ἡ ἄνωσις A τὴν ὁποῖαν δέχεται ἡ σμύρις ὑπὸ τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$A = B - B' \quad (1)$$

δπου Β τὸ βάρος αὐτῆς εἰς τὸν ἀέρα καὶ Β' τὸ βάρος αὐτῆς εἰς τὸ ὕδωρ. Ἐὰν καλέσωμεν ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ V τὸν ὄγκον τῆς συμύριδος, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ἀνωσις αὐτῆς εἶναι :

$$A = \epsilon' \cdot V \quad (2)$$

Οὕτως ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\epsilon' \cdot V = B - B' \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὐρίσκομεν, λύοντες ὡς πρὸς V, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς συμύριδος εἶναι :

$$V = \frac{B - B'}{\epsilon'} \quad (4)$$

καὶ συνεπῶς τὸ εἰδικὸν βάρος ε τῆς συμύριδος δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{B \cdot \epsilon'}{B - B'} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα : $B = 52 \text{ gr}^*$, $B' = 39 \text{ gr}^*$, $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\epsilon = 4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$$

1303. Τεμάχιον ἀργιλίου πυκνότητος $2,7 \text{ gr}/\text{cm}^3$ ζυγίζει 67 gr^* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 45 gr^* ὅταν βυθίζεται εἰς τερεβινθέλαιον. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθέλαιου.

Λύσις. Ἐστωσαν B τὸ βάρος τοῦ ἀργιλίου εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, B' τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς τὸ τερεβινθέλαιον καὶ ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ τερεβινθέλαιου. Προφανῶς ἡ ἀνωσις A τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀργίλιον ἐντὸς τοῦ τερεβινθέλαιου θὰ εἶναι ἴση πρὸς $B - B'$. Ἥτοι :

$$A = B - B' \text{ gr}^* \quad (1)$$

ἢ, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως ἔχομεν :

$$A = \epsilon' \cdot V \quad (2)$$

δπου V ὁ ὄγκος τοῦ ἀργιλίου, ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\epsilon' \cdot V = B - B' \quad (3)$$

Δυνάμεθα ὁμοῦ εἰς τὴν σχέσιν (3) νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ὄγκον V τοῦ ἀργιλίου θέτοντες :

$$V = \frac{B}{\epsilon} \quad (4)$$

δπου B τὸ βάρος τοῦ ἀργιλίου καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ. Οὕτως ἡ σχέση (3) γράφεται τώρα :

$$\epsilon' \cdot \frac{B}{\epsilon} = B - B' \quad (5)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς, λύοντες ὡς πρὸς ε', λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\epsilon' = \frac{\epsilon \cdot (B - B')}{B} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰ δεδομένα : $\epsilon = 2,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, διότι σῶμα ἔχον πυκνότητα $2,7 \text{ gr}/\text{cm}^3$ ἔχει καὶ εἰδικὸν βάρος $2,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $B = 67 \text{ gr}^*$, $B' = 45 \text{ gr}^*$, καὶ εὐρίσκομεν : $\epsilon' = 0,88 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Συνεπῶς θὰ εἶναι :

$$\rho' = 0,88 \text{ gr}/\text{cm}^3$$

1304. Σῶμα μάζης 36 gr ἔχει βάρος $31,96 \text{ gr}^*$, ὅταν βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $1,26 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἀς καλέσωμεν m τὴν μάζαν τοῦ σώματος καὶ B' τὸ βάρος αὐτοῦ, ὅταν βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ἐπίσης, ὅς καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, ρ τὴν πυκνότητα αὐτοῦ καὶ ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Προφανῶς τὸ βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι $B = m \cdot g$ καὶ ἡ ἀνωσις A, τὴν ὁποίαν δέχεται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ, θὰ εἶναι $m \cdot g - B'$. Ἀρα θὰ ἔχωμεν :

$$m \cdot g - B' = A \quad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως ἔχομεν :

$$A = \epsilon' \cdot V \quad (2)$$

και συνεπώς η σχέση (1) γράφεται :

$$m \cdot g - B' = \epsilon' \cdot V \quad (3)$$

Θέτουμε εις την (3) : $V = m/\rho$ (διότι $\rho = m/V$), και λαμβάνομεν :

$$m \cdot g - B' = \epsilon' \cdot \frac{m}{\rho} \quad (4)$$

Εάν δε λύσωμεν την σχέσηιν (4) ως προς την ζητούμενην πυκνότητα του σώματος, εύρισκομεν τον γενικόν τύπον :

$$\rho = \frac{\epsilon' \cdot m}{m \cdot g - B'} \quad (5)$$

Εργαζόμενοι εις το Σύστημα C. G. S., θέτουμε εις την (5) : $\epsilon' = 1,26 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^3$, $m = 36 \text{ gr}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $B' = 31,96 \cdot 981 \text{ dyn}$, και εύρισκομεν :

$$\rho = 11,25 \text{ gr/cm}^3$$

1305. Έν λίτρον γάλακτος ζυγίζει 1032 gr^* και το βούτυρον το όποιον περιέχει είναι 4% κατ' όγκον και έχει πυκνότητα $0,865 \text{ gr/cm}^3$. Πόση ή πυκνότης του άποβουτυρωθέντος γάλακτος.

Λύσις. Εάν V_1 είναι ό όγκος του γάλακτος, τότε ό όγκος του βουτύρου θα είναι $V_2 = 0,04 \cdot V_1$ και συνεπώς ό όγκος του άποβουτυρωθέντος γάλακτος θα είναι :

$$V = V_1 - 0,04 \cdot V_1 = 0,96 \cdot V_1 \quad (1)$$

Επίσης, εάν καλέσωμεν ρ_2 την πυκνότητα του βουτύρου, τότε το βάρος αυτού θα είναι :

$$B_2 = \rho_2 \cdot g \cdot 0,04 \cdot V_1 \quad (2)$$

και εάν καλέσωμεν B_1 το βάρος του γάλακτος, τότε προφανώς το βάρος B του άποβουτυρωθέντος γάλακτος θα είναι :

$$B = B_1 - B_2 = B_1 - 0,04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1 \quad (3)$$

Πρός εύρεσιν τής πυκνότητος του άποβουτυρωθέντος γάλακτος, εφαρμόζομεν τον τύπον του ειδικού βάρους και έχομεν :

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{B_1 - 0,04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1}{0,96 \cdot V_1} \quad (4)$$

ή, έπειδή $\epsilon = \rho \cdot g$, έχομεν :

$$\rho \cdot g = \frac{B_1 - 0,04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1}{0,96 \cdot V_1} \quad (5)$$

Λύομεν τώρα την σχέσηιν (5) ως προς την ζητούμενην πυκνότητα ρ του άποβουτυρωθέντος γάλακτος και εύρισκομεν ούτω τον γενικόν τύπον :

$$\rho = \frac{B_1}{0,96 \cdot g \cdot V_1} - \frac{\rho_2}{24} \quad (6)$$

Θέτοντες δε εις τον γενικόν τύπον τα δεδομένα τής άσκησης εις το Σύστημα C. G. S., : $B_1 = 1032 \cdot 981 \text{ dyn}$, $\rho_2 = 0,865 \text{ gr/cm}^3$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ και $V_1 = 1000 \text{ cm}^3$, εύρισκομεν :

$$\rho = 1,04 \text{ gr/cm}^3$$

1306. Δοχείον περιέχει ύδωρ και έλαιον πυκνότητος $0,87 \text{ gr/cm}^3$, τα όποια διαχωρίζονται δι' όρικής επιφανείας. Στερεόν σώμα έπιπλέει βυθιζόμενον κατ' 70% του όγκου του εις το ύδωρ και κατ' το υπόλοιπον εις το έλαιον. Πόση ή πυκνότης του στερεού σώματος.

Λύσις. Εάν ό όγκος του σώματος είναι V , τότε ό όγκος του σώματος ό όποιος εύρίσκεται εις το ύδωρ θα είναι $V_1 = 0,7 \cdot V$ και ό όγκος ό όποιος εύρίσκεται εις το έλαιον θα είναι $V_2 = 0,3 \cdot V$.

Η άνωσις ή προερχομένη υπό του ύδατος θα είναι : $A_1 = \rho_1 \cdot g \cdot 0,7 \cdot V$, και ή προερχομένη υπό του ελαίου θα είναι : $A_2 = \rho_2 \cdot g \cdot 0,3 \cdot V$, όπου ρ_1 ή πυκνότης του ύδατος και ρ_2 ή πυκνότης του ελαίου,

και συνεπώς η ολική άνωσις θα είναι: $A = A_1 + A_2$. Προφανώς, αφού το σώμα ισορροπεί, η άνωσις θα είναι ίση με το βάρος του.

$$\text{Ήτοι:} \quad B = A_1 + A_2 \quad (1)$$

$$\eta: \quad \rho \cdot g \cdot V = \rho_1 \cdot g \cdot 0,7 \cdot V + \rho_2 \cdot g \cdot 0,3 \cdot V \quad (2)$$

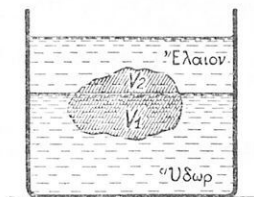
$$\eta: \quad \rho = 0,7 \cdot \rho_1 + 0,3 \cdot \rho_2 \quad (3)$$

όπου ρ η ζητούμενη πυκνότης του σώματος. Θέτουμε εις την (3):

$$\rho_1 = 1 \text{ gr/cm}^3, \rho_2 = 0,87 \text{ gr/cm}^3,$$

και εύρισκόμεν:

$$\rho = 0,951 \text{ gr/cm}^3$$



1307. Σώμα έχει εντός του αέρος βάρος 33 gr* και εντός του ύδατος 30 gr*. Το σώμα προσαρμόζεται επί τεμαχίου ξύλου, το όποιον ζυγίζει εις τον αέρα 10 gr*. Όταν το σύστημα βυθίζεται εντός του ύδατος, ζυγίζει 20 gr*. Πόση η πυκνότης του ξύλου.

Λύσις. Έφ' όσον η μάζα του ξύλου είναι γνωστή, διά να εύρωμεν την πυκνότητα αυτού, αρκεί να υπολογίσωμεν τον όγκον του. Διά τον υπολογισμόν του όγκου του ξύλου εργαζόμεθα ως ακολούθως: Καλούμεν B_1 το βάρος του σώματος εις τον αέρα και B_2 το βάρος αυτού εντός του ύδατος, όποτε θα έχωμεν ότι η άνωσις A_1 την όποιαν δέχεται τούτο υπό του ύδατος είναι:

$$A_1 = B_1 - B_2 \quad (1)$$

Εάν ακολούθως υποθέσωμεν ότι το σώμα προσαρμόζεται επί του τεμαχίου του ξύλου, το όποιον έχει βάρος έστω B , και ότι το σύστημα σώμα και τεμάχιον ξύλου ζυγίζει εντός του ύδατος B' , τότε η άνωσις A_2 , την όποιαν θα δέχεται τούτο, θα είναι:

$$A_2 = B_1 + B - B' \quad (2)$$

Καθίσταται τώρα φανερόν ότι, εάν αφαιρέσωμεν κατά μέλη την σχέσηιν (1) από την (2), προκύπτει η άνωσις A , την όποιαν δέχεται το ξύλον εντός του ύδατος. Ήτοι:

$$A = B + B_2 - B' \quad (3)$$

Έχομεν όμως εκ του γνωστού τύπου τής άνώσεως ότι:

$$A = \epsilon' \cdot V \quad (4)$$

όπου ϵ' το ειδικόν βάρος του ύδατος και V ο όγκος του ξύλου. Αντικαθιστώντες την τιμήν του A εκ τής σχέσεως (4) εις την σχέσηιν (3) λαμβάνομεν:

$$\epsilon' \cdot V = B + B_2 - B' \quad (5)$$

και εξ αυτής, λύοντες ως προς V , έχομεν:

$$V = \frac{B + B_2 - B'}{\epsilon'} \quad (6)$$

Πρός εύρεσιν τής ζητούμενης πυκνότητος ρ του ξύλου, λαμβάνοντες υπ' όψιν ότι $V = m/\rho$, τελικώς έχομεν τον γενικόν τύπον:

$$\rho = \frac{\epsilon' \cdot B}{B + B_2 - B'} \quad (7)$$

Θέτοντες εις τον γενικόν τύπον (7) τα δεδομένα τής άσκήσεως εργαζόμενοι εις το $\Sigma \upsilon \sigma \tau \eta \mu \alpha$ C. G. S., ήτοι: $\epsilon' = 981 \text{ dyn/cm}^3$, $B = 10 \text{ gr}^* = 10 \cdot 981 \text{ dyn}$, $B' = 20 \text{ gr}^* = 20 \cdot 981 \text{ dyn}$, $B_2 = 30 \text{ gr}^* = 30 \cdot 981 \text{ dyn}$, εύρισκόμεν:

$$\rho = 0,5 \text{ gr/cm}^3$$

1308. Τεμάχιον σακχάρου ζυγίζει εις τον αέρα 20 gr*, ενώ όταν βυθίζεται εντός κηροζίνης, εις την όποιαν δέν διαλύεται, ζυγίζει 10 gr*. Η πυκνότης τής κηροζίνης είναι $0,8 \text{ gr/cm}^3$. Να καθορισθούν: α) η πυκνότης του σακχάρου εν σχέσει προς την κηροζίνη, και β) η πυκνότης του σακχάρου εν σχέσει προς το ύδωρ.

Λύσεις. Ὡς καλέσωμεν B_1 τὸ βάρος τοῦ σακχάρου εἰς τὸν ἀέρα καὶ B_2 τὸ βάρος αὐτοῦ ἐντὸς τῆς κηροζίνης. Ἡ ἀνωσις A , τὴν ὁποῖαν θὰ δέχεται ἐντὸς τῆς κηροζίνης, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαρῶν B_1 καὶ B_2 . Ὡτοι :

$$A = B_1 - B_2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωσις A εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος B τῆς ἐκτοπιζομένης κηροζίνης, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$B = B_1 - B_2 \quad (2)$$

α) Πρὸς εὐρεσιν τῆς σχετικῆς πυκνότητος τοῦ σακχάρου ὡς πρὸς τὴν κηροζίνη, διαιροῦμεν τὴν μάζαν τοῦ σακχάρου m_1 διὰ τῆς μάζης m τῆς ἐκτοπιζομένης κηροζίνης. Ὡτοι :

$$\rho_1 = \frac{m_1}{m} \quad (3)$$

ἢ, ἔπειδὴ ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν : $B = m \cdot g$, ἡ σχέσις (3) γίνεται :

$$\rho_1 = \frac{B_1/g}{B/g} = \frac{B_1}{B} = \frac{B_1}{B_1 - B_2} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B_1 = 20 \text{ gr}^*$, $B_2 = 10 \text{ gr}^*$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότης $\rho_{1\sigma\chi}$ τοῦ σακχάρου ὡς πρὸς τὴν κηροζίνη εἶναι :

$$\rho_{1\sigma\chi} = 2$$

β) Ἡ σχετικὴ πυκνότης ἐνὸς σώματος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς, ὡς γνωστόν, πρὸς τὴν ἀπόλυτον πυκνότητα αὐτοῦ εἰς τὸ Σ Ὑ σ τ η μ α C. G. S.

Ἡ ἀπόλυτος ὁμῶς πυκνότης ἐνὸς σώματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν σχετικὴν πυκνότητα αὐτοῦ ὡς πρὸς ἕν ἄλλο σῶμα ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον πυκνότητα τοῦ ἄλλου σώματος καὶ συνεπῶς ἡ μὲν ἀπόλυτος πυκνότης τοῦ σακχάρου θὰ εἶναι $\rho = 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ gr/cm}^3$, ἡ δὲ σχετικὴ πυκνότης αὐτοῦ $\rho_{\sigma\chi}$ ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ :

$$\rho_{\sigma\chi} = 1,6$$

1309. Νὰ καθορισθῇ ἡ πυκνότης τῆς γλυκερίνης ἐκ τῶν ἀκολουθῶν δεδομένων : Δοχεῖον μάζης 15 gr πληροῦται ὑπὸ ὕδατος καὶ τὸ σύνολον ζυγίζει 65 gr^* . Ἀκολουθῶς τὸ αὐτὸ δοχεῖον πληροῦται μὲ γλυκερίνην καὶ τὸ σύνολον ζυγίζει 78 gr^* .

Λύσεις. Καλοῦμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ δοχείου καὶ B_2 τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι πλήρες γλυκερίνης. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ δοχείου εἶναι $m_1 \cdot g$, ἔπεται ὅτι τὸ βάρος B τῆς γλυκερίνης θὰ εἶναι :

$$B = B_2 - m_1 \cdot g \quad (1)$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν B_3 τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι πλήρες ὕδατος, τότε τὸ βάρος B' τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$B' = B_3 - m_1 \cdot g \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς ($B = m \cdot g$), εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μάζα m τῆς γλυκερίνης εἶναι :

$$m = \frac{B_2 - m_1 \cdot g}{g} \quad (3)$$

καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν τύπον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\epsilon = B/V$), εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ ὕδατος, καὶ συνεπῶς καὶ ὁ ὄγκος τῆς γλυκερίνης, εἶναι :

$$V = \frac{B_3 - m_1 \cdot g}{\epsilon'} = \frac{B_3 - m_1 \cdot g}{\rho' \cdot g} \quad (4)$$

ὅπου ϵ' καὶ ρ' ἀντιστοιχῶς τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος. Πρὸς εὐρεσιν τῆς πυκνότητος τῆς γλυκερίνης διαιροῦμεν τὴν μάζαν m τῆς γλυκερίνης διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτῆς καὶ εὐρίσκομεν, βάσει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4), ὅτι ἡ ζητούμενη πυκνότης ρ τῆς γλυκερίνης εἶναι :

$$\rho = \frac{(B_2 - m_1 \cdot g) \cdot \rho'}{B_3 - m_1 \cdot g} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Σ Ὑ σ τ η μ α C. G. S. : $m_1 = 15 \text{ gr}$, $B_2 = 78 \cdot 981 \text{ dyn}$, $B_3 = 65 \cdot 981 \text{ dyn}$, $\rho' = 1 \text{ gr/cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\rho = 1,26 \text{ gr/cm}^3$$

1310. Ὁμογενὲς μεταλλικὸν σῶμα ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 40,47 gr* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 34,77 gr*. α) Πόσον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, καὶ β) πόσον ζυγίζει ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος. (Εἶδ. βάρος οἰνοπνεύματος $\epsilon = 0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστω ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι B καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος B'. Προφανὲς ἡ ἀνωσις A, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα ὑπὸ τοῦ ὕδατος, εἶναι B - B' καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$A = B - B' \quad (1)$$

Ἡ ἀνωσις ὁμοῦ, ὡς γνωστὸν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου V τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ϵ' τοῦ ὕδατος. Ἦτοι :

$$A = \epsilon' \cdot V \quad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\epsilon' \cdot V = B - B' \quad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος καὶ εὐρίσκομεν :

$$V = \frac{B - B'}{\epsilon'} \quad (4)$$

α) Πρὸς εὐρεσιν τώρα τοῦ εἰδικοῦ βάρους ϵ τοῦ σώματος διαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος B διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ V καί, λόγῳ τῆς σχέσεως (4), λαμβάνομεν :

$$\epsilon = \frac{\epsilon' \cdot B}{B - B'} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : B = 40,47 gr*, B' = 34,77 gr*, $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\epsilon = 7,1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$$

β) Διὰ νὰ εὐρωμεν πόσον ζυγίζει τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ σώματος B τὴν ἀνωσιν A', τὴν ὁποίαν δέχεται τοῦτο ἀπὸ τὸ οἰνόπνευμα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωσις τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ σῶμα εἰς τὸ οἰνόπνευμα ἰσοῦται μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος ϵ_1 τοῦ οἰνοπνεύματος ἐπὶ τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος, καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (4), προκύπτει ὅτι τὸ βάρος B₁ τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος εἶναι :

$$B_1 = B - \epsilon_1 \cdot V = B - \epsilon_1 \cdot \frac{B - B'}{\epsilon'} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\epsilon_1 = 0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, B = 40,47 gr*, B' = 34,77 gr*, $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$B_1 = 35,97 \text{ gr}^*$$

1311. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῆς παραφίνης γίνονται αἱ ἀκόλουθοι μετρήσεις : Τεμάχιον παραφίνης ζυγίζεται εἰς τὸν ἀέρα, ὅτε τὸ βάρος αὐτοῦ εὐρίσκεται 7,83 gr*. Ἀκολουθῶς διὰ νήματος ἀμελητέου βάρους ἐξαρτῶμεν ἀπὸ τὴν παραφίνην μεταλλικὸν τεμάχιον καί, ὅταν ἡ παραφίνη εὐρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα καὶ τὸ μέταλλον ἐντὸς τοῦ ὕδατος, τὸ σύστημα ἔχει βάρος 43,38 gr*. Τέλος, ὅταν καὶ ἡ παραφίνη καὶ τὸ μέταλλον βυθίζονται εἰς τὸ ὕδωρ, τὸ βάρος τοῦ συστήματος εἶναι 34,38 gr*.

Λύσις. Ἐστώσαν B τὸ βάρος τοῦ τεμαχίου τῆς παραφίνης καὶ B₁ τὸ βάρος τοῦ μεταλλικοῦ τεμαχίου, V ὁ ὄγκος τῆς παραφίνης καὶ V₁ ὁ ὄγκος τοῦ μεταλλικοῦ τεμαχίου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅταν τὸ μέταλλον εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἡ ἀνωσις A₁ θὰ εἶναι :

$$A_1 = B + B_1 - B_2 \quad (1)$$

ὅπου B₂ εἶναι τὸ φαινόμενον βάρος τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅταν καὶ τὰ δύο σώματα εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἡ ἀνωσις A₂ θὰ εἶναι :

$$A_2 = B + B_1 - B_2 \quad (2)$$

όπου B_3 είναι το φαινόμενο βάρος του συστήματος. 'Η σχέσις (1), εάν καλέσωμεν ϵ' το ειδικόν βάρος του ύδατος, γράφεται :

$$\epsilon' \cdot V_1 = B + B_1 - B_2 \quad (3)$$

και ή σχέσις (2) γράφεται :

$$\epsilon' \cdot (V + V_1) = B + B_1 - B_3 \quad (4)$$

'Αφαιρούμεν τὰς σχέσεις (3) και (4) κατὰ μέλη, ὅτε προκύπτει ή σχέσις :

$$\epsilon' \cdot V = B_2 - B_3 \quad (5)$$

και ἐξ αὐτῆς εὐρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς παραφίνης :

$$V = \frac{B_2 - B_3}{\epsilon'} \quad (6)$$

Συνεπῶς τὸ ειδικόν βάρος τῆς παραφίνης θὰ εἶναι :

$$\epsilon = \frac{B}{V} = \frac{\epsilon' \cdot B}{B_2 - B_3} \quad (7)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως : $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $B = 7,83 \text{ gr}^*$, $B_2 = 43,38 \text{ gr}^*$, $B_3 = 34,38 \text{ gr}^*$, και εὐρίσκομεν :

$$\epsilon = 0,87 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$$

1312. 'Ωρισμένη πίεσις ἰσορροπεῖται ὑπὸ στήλης ὕδατος ὕψους 60 cm. 'Η αὐτὴ πίεσις ἰσορροπεῖται ὑπὸ στήλης διαλύματος ἁλατος ὕψους 50 cm. Πόση ή πυκνότης τοῦ διαλύματος.

Λύσις. 'Εάν καλέσωμεν p τὴν ὀρισμένην πίεσιν, ϵ' τὸ ειδικόν βάρος τοῦ ὕδατος, ϵ τὸ ειδικόν βάρος τοῦ διαλύματος, h' τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος και h τὸ ὕψος τοῦ διαλύματος τοῦ ἁλατος, τότε, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκῆσεως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς σχέσεις :

$$p = \epsilon' \cdot h' \quad (1) \quad p = \epsilon \cdot h \quad (2)$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὴν σχέσιν : $\epsilon \cdot h = \epsilon' \cdot h'$ (3)

'Εάν ἀκολουθῶς καλέσωμεν ρ' τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος και ρ τὴν πυκνότητα τοῦ διαλύματος, θὰ ἔχωμεν : $\epsilon' = \rho' \cdot g$ και $\epsilon = \rho \cdot g$, ὅτε, ἐκ τῆς σχέσεως (3), προκύπτει ὁ τύπος :

$$\rho = \frac{\rho' \cdot h'}{h} \quad (4)$$

'Εάν ἀντικαταστήσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως εἰς τὸν τύπον (4), ἦτοι : $\rho' = 1 \text{ gr}/\text{cm}^3$, $h' = 60 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\rho = 1,2 \text{ gr}/\text{cm}^3$$

1313. Τεμάχιον ξύλου δρυὸς ζυγίζει 100 gr* εἰς τὸν ἀέρα και σῶμα ζυγίζει 150 gr* εἰς τὸ ὕδωρ. Τὸ σῶμα προσαρμόζεται εἰς τὸ ξύλον και τὸ σύστημα ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγίζει 110 gr*. Πόσον τὸ ειδικόν βάρος τοῦ ξύλου.

Λύσις. Τὸ ειδικόν βάρος ϵ τοῦ ξύλου εὐρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$\epsilon = \frac{B}{V} \quad (1)$$

όπου B εἶναι τὸ βάρος τοῦ ξύλου και V ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Διὰ τὸν ἀνωτέρω ὑπολογισμόν πρέπει προηγουμένως νὰ εὑρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ξύλου ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολουθῶς : 'Εστῶσαν B τὸ βάρος τοῦ ξύλου εἰς τὸν ἀέρα, B_1 τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸν ἀέρα, B_2 τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸ ὕδωρ, V_1 ὁ ὄγκος τοῦ σώματος και ϵ_1 τὸ ειδικόν βάρος τοῦ ὕδατος. Συμφώνως πρὸς τὴν 'Αρχὴν τῆς ἀνάσεως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$B_1 - B_2 = \epsilon_1 \cdot V_1 \quad (2)$$

'Εάν τώρα ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ξύλον τὸ σῶμα και καλέσωμεν B_3 τὸ βάρος τοῦ συστήματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ ἰσχύη ή σχέσις :

$$B + B_1 - B_3 = \epsilon_1 \cdot V + \epsilon_1 \cdot V_1 \quad (3)$$

Ἀφαιρούμεν κατὰ μέλη τὴν σχέσιν (2) ἀπὸ τὴν (3) καὶ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$B + B_2 - B_3 = \varepsilon_1 \cdot V \quad (4)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν ὅτι :

$$V = \frac{B + B_2 - B_3}{\varepsilon_1} \quad (5)$$

Ἄρα, λόγῳ τῆς σχέσεως (5), ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \cdot B}{B + B_2 - B_3} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B = 100 \text{ gr}^*$, $B_2 = 150 \text{ gr}^*$, $B_3 = 110 \text{ gr}^*$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι :

$$\varepsilon = 0,714 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$$

1314. Ποῖον ἐκ τῶν δύο βυθιζομένων εἰς τὸ ὕδωρ χάνει περισσότερον βάρος : α) 1 λίτρον ἀλουμινίου ἢ 1 λίτρον χαλκοῦ, β) 1 kgf ἀλουμινίου ἢ 1 kgf χαλκοῦ.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων, 1959).

Λύσις. α) Ἡ ἄνωσις, τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται σῶμα ἐμβαπτιζόμενον ἐντὸς ὕγρου, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ βάρος τὸ ὁποῖον χάνει τὸ σῶμα τοῦτο. Ἐχομεν ὁμῶς ὅτι :

$$A = \varepsilon \cdot V$$

ὅπου V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕγρου. Ἐφ' ὅσον οἱ ὄγκοι τῶν δύο μετάλλων εἶναι ἴσοι, ἐπεται ὅτι καὶ ἡ ἄνωσις εἶναι ἡ αὐτή.

β) Ὁ ὄγκος ἐνὸς σώματος V , τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος B καὶ εἰδικὸν βάρος ε , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{B}{\varepsilon}$$

Ἐκ τοῦ τύπου προκύπτει ὅτι, ὅταν τὸ βάρος εἶναι σταθερὸν, ὁ ὄγκος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ εἰδικοῦ βάρους. Ἐπομένως τὸ ἀλουμίνιον εἰδικῶς ἐλαφρότερον τοῦ χαλκοῦ, θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον ὄγκον αὐτοῦ καὶ ἐπομένως θὰ ὑφίσταται καὶ μεγαλύτεραν ἄνωσιν.

1315. Κύλινδρος ὕψους 20 cm ἐξαρτᾶται καταλλήλως ἀπὸ ζυγοῦ εἰς τρόπον, ὥστε ὁ κύλινδρος νὰ βυθίζεται κατὰ 5 cm ἐντὸς ὕδατος. Διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁ ζυγός, δέον νὰ προστεθοῦν 54 gr* ἐπὶ τοῦ ἐτέρου τῶν δίσκων. Ὁταν ὁ κύλινδρος βυθίζεται κατὰ 12 cm εἰς ἕτερον ὕγρον πυκνότητος 0,83 gr/cm³, ἀπαιτοῦνται 22 gr* διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας. Ζητοῦνται ἡ μᾶζα καὶ ἡ πυκνότης τῆς ὕλης τοῦ κυλίνδρου.

Λύσις. Ἐστωσαν S ἡ ἐγκάρσια τομὴ τοῦ κυλίνδρου, h τὸ ὕψος, ρ ἡ πυκνότης καὶ m ἡ μᾶζα αὐτοῦ. Τότε τὸ βάρος αὐτοῦ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$B = m \cdot g \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad B = S \cdot h \cdot \rho \cdot g \quad (2)$$

Ἀφ' ἐτέρου, ἐὰν καλέσωμεν h_1 τὸ βάθος ἐμβαπτίσεως τοῦ κυλίνδρου ἐντὸς τοῦ ὕδατος, h_2 ἐντὸς τοῦ ἐτέρου ὕγρου καὶ ρ_1 , ρ_2 τὰς πυκνότητας τῶν ὑγρῶν ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν :

$$A_1 = S \cdot h_1 \cdot \rho_1 \cdot g \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad A_2 = S \cdot h_2 \cdot \rho_2 \cdot g \quad (4)$$

Ἀφαιρούντες κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (4) καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς S λαμβάνομεν :

$$S = \frac{A_2 - A_1}{(h_2 \cdot \rho_2 - h_1 \cdot \rho_1) \cdot g} \quad (5)$$

Δίδονται : $h_2 = 12 \text{ cm}$, $\rho_2 = 0,83 \text{ gr/cm}^3$, $h_1 = 5 \text{ cm}$, $\rho_1 = 1 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $A_2 - A_1 = (B - A_1) - (B - A_2) = 54 \text{ gr}^* - 22 \text{ gr}^* = 32 \text{ gr}^*$.

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἡ διατομὴ τοῦ κυλίνδρου :

$$S = 6,45 \text{ cm}^2$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3), δι' ἀντικαταστάσεως, διὰ τῶν γνωστῶν μεγεθῶν, προκύπτει :

$$A_1 = 3225 \text{ gr}^*$$

Καί ἐπειδὴ δίδεται : $B - A_1 = 54 \text{ gr}^*$, προκύπτει :

$$B = 86,25 \text{ gr}^* \quad \eta : \quad m = 86,25 \text{ gr}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐξ ἄλλου, δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς ρ , προκύπτει :

$$\rho = \frac{B}{S \cdot h \cdot g} = \frac{m}{S \cdot h} \quad (6)$$

καί δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν γνωστῶν μεγεθῶν λαμβάνομεν :

$$\rho = 0,67 \text{ gr/cm}^3$$

1316. Κοῖλος κύλινδρος, κλειστός κατ' ἀμφότερα τὰ ἄκρα, ἐπιπλέει ὀρθίως εἰς τὸ ὕδωρ. Τὸ ἐξωτερικὸν ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 35 cm, τὸ ἐσωτερικὸν 33 cm καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος αὐτοῦ 20 cm. Ἐὰν τοποθετηθῇ ἐπὶ τοῦ ἁνω μέρους τοῦ κυλίνδρου πρόσθετος μᾶζα 4510 gr, οὗτος θὰ βυθισθῇ μέχρι τῆς στάθμης τοῦ ὕγρου ἐν τῷ δοχείῳ. Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ κύλινδρος ἔχει σταθερὸν πάχος, νὰ υπολογισθῇ ἡ πυκνότης τῆς ὕλης αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐστώσαν V ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος τοῦ κυλίνδρου καὶ V' ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος (τὸ κοῖλον). Τότε ἡ ἀνωσις A , τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται ὁ κύλινδρος, ὅταν ἐμβαπτισθῇ ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$A = V \cdot \epsilon' \quad (1)$$

ὅπου ϵ' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου καὶ B' τὸ πρόσθετον βάρος, θὰ ἔχωμεν :

$$A = B + B' \quad (2)$$

Τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου δίδεται ἐξ ἄλλου ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$B = (V - V') \cdot \epsilon \quad (3)$$

ὅπου ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης τοῦ κυλίνδρου.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει :

$$V \cdot \epsilon' = (V - V') \cdot \epsilon + B' \quad \eta : \quad \epsilon = \frac{V \cdot \epsilon' - B'}{V - V'} \quad (4)$$

Δίδονται : $\epsilon' = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $B' = 4510 \text{ gr}^*$, οἱ ὄγκοι δὲ V καὶ V' υπολογίζονται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου :

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{καί} : \quad V' = \pi \cdot r'^2 \cdot h'$$

ὅπου : $r = 10 \text{ cm}$, $h = 35 \text{ cm}$, $r' = 9 \text{ cm}$ καὶ $h' = 33$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει : $V = 10990 \text{ cm}^3$ καὶ $V' = 8392 \text{ cm}^3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν :

$$\epsilon = 2,496 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 \quad \eta : \quad \rho = 2,496 \text{ gr/cm}^3$$

1317. Εἰς ὕδραυλικὸν πιεστήριον ὁ μέγας ἐμβολεὺς ἔχει διάμετρον 1 m καὶ ὁ μικρὸς 5 cm. Διὰ τοῦ πιεστηρίου θέλομεν νὰ ἀναπτύξωμεν δύναμιν 80 tn*. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως. Πόση εἶναι ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ πιεστηρίου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν δύναμιν τὴν ὁποῖαν ἀσκοῦμεν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, S_1 τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, F_2 τὴν δύναμιν τὴν ὁποῖαν λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως καὶ S_2 τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ μεγάλου ἐμβολέως, τότε, ὡς γνωστὸν, ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $S_1 = \frac{\pi \cdot \delta_1^2}{4}$ καὶ $S_2 = \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4}$, ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \quad (2)$$

Λύομεν τήν σχέσιν (2) ὡς πρὸς F_1 καὶ εὐρίσκομεν :

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{\delta_1^3}{\delta_2^3} \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τήν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα, ἤτοι: $F_2 = 80 \cdot 10^3 \text{ kgr*}$, $\delta_1 = 5 \text{ cm}$, $\delta_2 = 100 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$F_1 = 200 \text{ kgr*}$$

*Εξ ἄλλου :

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_1}{\pi \cdot \delta_1^2/4} \quad (4)$$

ὁπότε, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητούμενη πίεσις εἶναι :

$$p = 10,2 \text{ kgr*/cm}^2 = 10,2 \text{ at}$$

1318. Ἐν ὑδραυλικῷ πιεστηρίῳ, ἡ διάμετρος τοῦ μικροῦ ἐμβολέως εἶναι **1,6 cm** καὶ ἡ τοῦ μεγάλου **32 cm**. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι **60 cm** καὶ ὁ τῆς ἀντιστάσεως **10 cm**. Ποία ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ πιεστηρίου, ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἶναι **12 kgr***.

Λύσις. Ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐμβολέων, ἐπομένως ἐὰν καλέσωμεν διὰ F_1 καὶ F_2 τὰς ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως ἐπιπνευγούσας ἀντιστοίχως δυνάμεις καὶ S_1 , S_2 τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{ἢ} : \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} = F_1 \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad (1)$$

ὅπου d_1 καὶ d_2 αἱ ἀντίστοιχοι διαμέτροι τῶν κυλίνδρων. Ἡ δύναμις F_1 ἡ ἐπιπνευγούσα ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως ἀσκέται ὑπὸ δυνάμεως F , μέσῳ μοχλοῦ, με ἀντιστοίχους μοχλοβραχίονας l_1 καὶ l . Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως :

$$F_1 = \frac{F \cdot l}{l_1} \quad (2)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν :

$$F_2 = F \cdot \frac{l \cdot d_2^2}{l_1 \cdot d_1^2} \quad (3)$$

Δίδονται ὁμοῦς : $F = 12 \text{ kgr*}$, $l = 60 \text{ cm}$, $l_1 = 10 \text{ cm}$, $d_1 = 1,6 \text{ cm}$ καὶ $d_2 = 32 \text{ cm}$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων εἰς τὴν (3) προκύπτει :

$$F = 28 \text{ kgr*}$$

1319. Σῶμα πυκνότητος **2 gr/cm³** ἀφίεται ἐξ ὕψους **15 m** ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας βαθείας λίμνης. Νὰ εὐρεθῇ εἰς ποῖον βάθος ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ εἰσχωρήσῃ τὸ σῶμα μετὰ πάροδον **5 sec** ἀπὸ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἐγγίζει τὸ ὕδωρ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). Ἡ τριβὴ μετὰ τὸ σῶμα καὶ ὕδατος θεωρεῖται ἀμελητέα. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Χημικόν, 1962).

Λύσις. Ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὸ σῶμα θὰ ἔχῃ κίνησιν ὁμαλῶς επιταχυνομένην με ἀρχικὴν ταχύτητα u_0 ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα τὴν ὅποιαν ἔχει ἀποκτήσει κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν του, ὅταν ἐγγίξῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Συνεπῶς, ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ σώματος, τὸ βάθος h εἰς τὸ ὅποιον θὰ εὐρίσκεται μετὰ πάροδον χρόνου t θὰ εἶναι :

$$h = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (1)$$

Πρὸς εὐρεσιν τοῦ βάθους h πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα u_0 καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ .
α) Ὑπολογισμὸς τῆς ταχύτητος. Ἐστω ὅτι τὸ ὅψος ἐξ οὗ ἀφίεται τὸ σῶμα εἶναι h_1 , ὁ χρόνος τὸν ὅποιον χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν t_1 καὶ u_0 ἡ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὅποιαν ἐγγίζει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Θὰ ἰσχύουν, ὡς γνωστόν, αἱ σχέσεις :

$$u_0 = g \cdot t_1 \quad (2) \quad \text{καί} : \quad h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (3)$$

εκ τῶν ὁποίων πρακύπτει, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_1 , ὅτι :

$$u_0 = \sqrt{2g \cdot h_1} \quad (4)$$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς ἐπιταχύνσεως γ . Ὅταν τὸ σῶμα βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ ἀσκούνται ἐπ' αὐτοῦ ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ βάρος του B κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἀνωσὶς A κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἀσκουμένη λοιπὸν συνισταμένη δύναμις θὰ εἶναι :

$$F = B - A \quad (5)$$

Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μάζαν, V τὸν ὄγκον καὶ ρ τὴν πυκνότητα τοῦ σώματος, ὡς καὶ ρ' τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν :

$$B = \rho \cdot g \cdot V \quad \text{καὶ} : \quad A = \rho' \cdot g \cdot V$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (5) γράφεται :

$$F = (\rho - \rho') \cdot g \cdot V \quad (6)$$

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς ($F = m \cdot \gamma$) :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{(\rho - \rho') \cdot g \cdot V}{\rho \cdot V} = \frac{(\rho - \rho') \cdot g}{\rho} \quad (7)$$

Θέτομεν ἀκολουθῶς τὰς εὐρεθείσας τιμὰς τοῦ u_0 καὶ γ εἰς τὴν σχέσιν (1) καὶ προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος :

$$h = \sqrt{2g \cdot h_1} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\rho - \rho') \cdot g}{\rho} \cdot t^2 \quad (8)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (8), δι' ἀντικατάστασεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν :

$$h = 149,1 \text{ m}$$

1320. Ἐντὸς βαθέος δοχείου περιέχοντος ὕδωρ ὕψους δύο μέτρων ἀφίεται νὰ πέσῃ μικρὰ σφαῖρα ἐκ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ἡ σφαῖρα φθάνει εἰς τὸν πυθμένα μετὰ δύο δευτερόλεπτα. Νὰ εὐρεθῇ ἡ πυκνότης αὐτῆς. Ἡ τριβὴ μεταξὺ σφαίρας καὶ ὕδατος θεωρεῖται ἀμελητέα.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολή, 1957).

Λύσις. Ἡ πτώσις τῆς σφαίρας προκαλεῖται ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως F , ἴσης πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ βάρους B καὶ τῆς ἀνώσεως A αὐτῆς ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$F = B - A \quad (1)$$

καὶ ἡ κίνησις τῆς σφαίρας θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μετ' ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad \text{ἢ} : \quad \gamma = \frac{B - A}{m} \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου τὸ βάρος τῆς σφαίρας :

$$B = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g \quad (3)$$

ὅπου ρ ἡ πυκνότης τῆς σφαίρας καὶ V ὁ ὄγκος αὐτῆς. Ἐξ ἄλλου διὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἀνωσιν θὰ εἶναι :

$$A = \rho' \cdot V \cdot g \quad (4)$$

ὅπου ρ' ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{\rho \cdot V \cdot g - \rho' \cdot V \cdot g}{m} \quad \text{ἢ} : \quad \gamma = \frac{\rho \cdot V \cdot g - \rho' \cdot V \cdot g}{\rho \cdot V} \quad \text{ἢ} : \quad \gamma = g \cdot \frac{\rho - \rho'}{\rho} \quad (5)$$

καὶ :

$$\rho = \frac{g \cdot \rho'}{g - \gamma} \quad (6)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ τύπου $s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$ λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{2s}{t^2} \quad (7)$$

καί αντικαθιστώντες εἰς τὴν (6) εὐρίσκομεν :

$$\rho = \frac{g \cdot t^2 \cdot \rho'}{g \cdot t^2 - 2s} \quad (8)$$

*Έχομεν ὁμῶς : $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$, $t = 2 \text{ sec}$, $\rho' = 1 \text{ gr/cm}^3$ (πυκνότης ὕδατος) καὶ $s = 200 \text{ cm}$ (τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου), ἐξ ὧν προκύπτει :

$$\rho = 1,11 \text{ gr/cm}^3$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1321. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις, τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ στήλη ὕδατος ὕψους 20 m, α) εἰς dyn/cm^2 , β) εἰς gr^*/cm^2 , γ) εἰς kg^*/m^2 , δ) εἰς at, ε) εἰς Atm.

(Ἰ.Α.Π. α' $\rho = 1,962 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$, β' $2000 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, γ' $20\,000 \text{ kg}^*/\text{m}^2$, δ' 2 at, ε' 1,9 Atm.)

1322. Ποία ἡ ἀσκουμένη πίεσις εἰς Nt/m^2 ὑπὸ στήλης ὑδραργύρου ὕψους 0,8 m. Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Ἰ.Α.Π. $1,06 \cdot 10^5 \text{ Nt/m}^2$.)

1322α. Εἰς τί συνίσταται τὸ σφάλμα τοῦ ἀεικινήτου, τὸ ὁποῖον εἰκονίζεται εἰς τὸ σχῆμα. (Ἰ.Α.Π. Εἰς τὸ ὅτι ὁ σίφων δὲν λειτουργεῖ ὅταν τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτοῦ εὐρίσκεται ὑψηλότερον τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.)

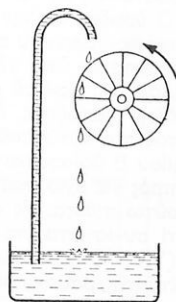
1323. Ποία ἡ ὀλική δύναμις ἡ ἀσκουμένη πλευρικῶς ἐπὶ σώματος πλάτους 3 m καὶ ὕψους 2 m, ἡ ἀνωτέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὁποίου ἀπέχει 5 m ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος μιᾶς λίμνης. (Ἰ.Α.Π. 36 tn^* .)

1324. Δοχεῖον σχήματος κύβου πλευρᾶς 20 cm περιέχει ὕδωρ μέχρις ὕψους 12 cm. Τεμάχιον ξύλου σχήματος κύβου εἰδικοῦ βάρους $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος ἐκάστης πλευρᾶς εἶναι 10 cm, τοποθετεῖται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ αὔξησις τῆς πίεσεως εἰς ἓν σημεῖον τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου. (Ἰ.Α.Π. $2 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$.)

1325. Εἰς βάθος 4 m ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης εὐρίσκεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν πλοίου κυκλικὴ δικλῆς ἀκτίνος 4 cm. Ποία δύναμις πρέπει κατ' ἐλάχιστον νὰ ἀσκήται ἐπὶ ταύτης, διὰ νὰ μὴ εἰσέρχεται ὕδωρ ἐντὸς τοῦ σκάφους. Πυκνότης θαλασσίου ὕδατος $\rho = 1,03 \text{ gr/cm}^3$. (Ἰ.Α.Π. $20,7 \text{ kg}^*$.)

1326. Νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ ὕψους μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β εὐρισκομένων ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ὑδραργύρον, ὅταν ἡ διαφορὰ πίεσεων μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι $p = 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Πυκνότης ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1957). (Ἰ.Α.Π. 73,5 cm.)

1327. Ἀνεστραμμένον δοχεῖον περιέχει οἰνόπνευμα, ἡ ἐλευθέρως ἐπιφάνεια τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται κατὰ 1,5 m ὑπὲρ τὸ μέσον τοῦ πώματος. Ποία ἡ διάμετρος τοῦ πώματος, ὅταν ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη δύναμις ἀνέρχεται εἰς 2 kg^* . ($\epsilon_{\text{oiv}} = 0,79 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (Ἰ.Α.Π. 4,64 cm.)



*Άσκησης 1322α.

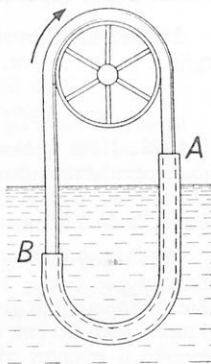
1328. Έντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εὐρίσκονται: ὑδράργυρος σχετ. πυκνότητος 13,6 καταλαμβάνων ὕψος 0,8 m, πετρέλαιον σχετ. πυκνότητος 0,8 καταλαμβάνον ὕψος 0,6 m καὶ ὕδωρ καταλαμβάνον ὕψος 1,28 m. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἰς χιλιοστὰ ὑδραργύρου (mm Hg) εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου καὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ τῶν ὑγρῶν. (Ἀπ. 929,3 mm Hg, 129,3 mm Hg, 35,3 mm Hg.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Ἀρχιτεκτόνων καὶ Ἀγρονόμων - Τοπογράφων, 1955).

1329. Κυλινδρικὸν δοχεῖον διαμέτρου $d = 60$ cm καὶ ὕψους 1 m πληροῦται δι' ἐλαίου εἰδικοῦ βάρους $\epsilon = 0,86$ gr*/cm³. Ποῖαι αἱ ἐπὶ τοῦ πυθμένος καὶ τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας ἀσκούμεναι δυνάμεις. (Ἀπ. α' 243 kg*, β' 811 kg*.)

1330. Ὁρθογώνιον κιβώτιον, μήκους 1,5 m, πλάτους 1,2 m καὶ ὕψους 1,4 m, φέρει εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν, καθέτως, κύλινδρον μήκους 3,5 m καὶ τομῆς 0,1 m². Ἐὰν τὸ κιβώτιον καὶ ὁ σωλὴν πληρωθοῦν ὕδατος, ποῖαι ἡ πίεσις καὶ ἡ δύναμις ἐπὶ ἐκάστης πλευρᾷ τοῦ κιβωτίου.

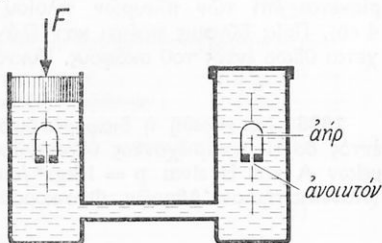
(Ἀπ. Πίεσις ἐπὶ τῆς βάσεως = $4,80 \cdot 10^4$ Nt/m². Δύναμις ἐπὶ τῆς βάσεως = $8,64 \cdot 10^4$ Nt. Πίεσις ἐπὶ τῆς κορυφῆς = $3,43 \cdot 10^4$ Nt/m². Δύναμις ἐπὶ τῆς κορυφῆς = $5,83 \cdot 10^4$ Nt. Πίεσις ἐπὶ τῆς πλευρᾷ 1,4 = $4,12 \cdot 10^4$ Nt/m². Δύναμις ἐπὶ τῆς πλευρᾷ 1,4 = $6,92 \cdot 10^4$ Nt.)

1331. Ἀεικίνητον κατασκευάζεται, ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα, διὰ τινος ἐλαστικοῦ ἀεροθαλάμου, ὡς ἐκεῖνοι τῶν τροχῶν αὐτοκινήτων, ὅστις διερχόμενος διὰ τῆς αὐλακὸς τροχοῦ εἰσέρχεται ὑδατοστεγῶς ἐντὸς ὀρειδοῦς σωλήνος μὲ ἄνισα σκέλη. Ὁ ὀρειδὴς σωλὴν εἶναι ἐμβαπτισμένος ἐντὸς ὕδατος εἰς τρόπον ὥστε τὸ στόμιον τοῦ βραχέος σκέλους αὐτοῦ νὰ εὐρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, ἐνῶ τὸ στόμιον τοῦ μακροῦ σκέλους ὑπέρκειται αὐτοῦ. Ὡς ἐκ τῆς ὅλης διατάξεως, ὁ ἀεροθάλαμος λόγω τοῦ τμήματος αὐτοῦ τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος εὐρίσκομένου ἄνωθεν τοῦ στόμιου Β ὑφίσταται ἄνωσιν, ἥτις μετακινεῖ αὐτὸν σταθερῶς πρὸς τὰ ἄνω καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους καὶ οὕτω τίθεται εἰς ἀδιάκοπον περιστροφὴν ὁ τροχός. Εἰς τὴ συνίσταται τὸ σφάλμα. (Ἀπ. Ὁ ἀεροθάλαμος δὲν ὑφίσταται ἄνωσιν διότι οὔτε ἐπὶ τῆς βάσεως οὔτε ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ ἐμβαπτισμένου ὄγκου αὐτοῦ ἐνεργεῖ οὐδεμία ὑδροστατικὴ πίεσις.)



1332. Εἰς δύο συγκοινωνοῦντα ὑάλινα δοχεῖα εὐρίσκονται, ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα, ἄνα εἰς κολυμβητὴς τοῦ Καρτεσιίου. Τί θὰ συμβῇ ἂν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἀσκηθῇ δύναμις F.

1333. Διὰ τοῦ εἰς τὸ σχῆμα εἰκονιζομένου ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ, πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄνωσις πρισματικοῦ χαλυβδίνου σώματος, βάρους B, τομῆς $S = 5$ cm² καὶ ὕψους $h = 4$ cm. Τὸ σῶμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον εἰς τὸν ἀέρα ἰσορροπεῖται ἐπὶ τῆς μῆδος πλάστιγγος τοῦ ζυγοῦ διὰ σταθμῶν B₁, ἐμβαπτίζεται πλήρως ἐντὸς ἐλαίου. Ποῖον βάρος σταθμῶν B₂, πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου τῆς φάλαγγος διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἐκ νέου ἰσορροπίαν. Ποῖα ἡ ἄνωσις τοῦ σώματος.

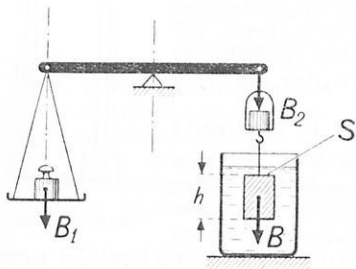


*Άσκησης 1332.

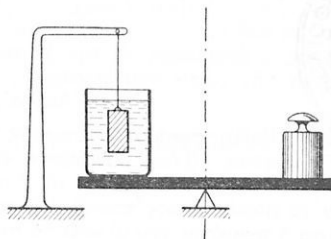
(Ἀπ. 16 gr*.)

1334. Ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ δίσκου τοῦ ἰσορροποῦντος ζυγοῦ τοῦ σχήματος εὐρίσκεται δοχεῖον περιέχον ὕδωρ. Ἀκολουθῶς ἐμβαπτιζομεν ἐντὸς τοῦ ὕδατος χαλύβδινον πρίσμα, ἐξηρηγμένον διὰ νήματος, εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ ἔρχεται τοῦτο εἰς ἐπαφήν μὲ τὰ τοιχώματα καὶ τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου. Θὰ παραμείνῃ τὸ σύστημα ἐν ἰσορροπῇ μετὰ τὴν ἐμβάπτισιν τοῦ χαλυβδίνου σώματος;

(Ἀπ. Ἡ ἰσορροπία θὰ καταστραφῇ. Τοῦτο συμβαίνει διότι ἐφ' ὅσον τὸ ὕδωρ ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος τὴν ἄνωσιν θὰ πρέπει κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς Μηχανικῆς δρᾶσις = ἀντίδρασις, νὰ ἀσκήσῃ καὶ τὸ σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὕδατος, καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ, ἴσῃν καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ἄνωσιν δύναμιν.)

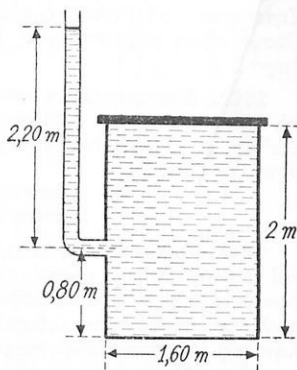


Ἀσκήσις 1333.



Ἀσκήσις 1334.

1335. Τὸ εἰς τὸ σχῆμα παριστῶμενον κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει διάμετρον $d = 1,6$ m καὶ ὕψος $h_1 = 2$ m, τὸ δὲ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον συγκολλᾶται ὁ κατακόρυφος σωλὴν ἀπέχει $h_2 = 80$ cm ἀπὸ τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου. Δοχεῖον καὶ σωλὴν πληροῦνται δι' ἑλαίου $\epsilon = 0,85$ gr*/cm³, ἀνέρχεται δὲ τὸ ἔλαιον ἐντὸς τοῦ σωλὴνος μέχρι ὕψους $h_3 = 2,20$ m. α) Ποία ἢ ἐπὶ τοῦ πυθμένος καὶ τοῦ καλύμματος τοῦ δοχείου ἀσκουμένη πίεσις. β) Ποία ἀντιστοίχως ἡ ἀσκουμένη ὁλική δύναμις. (Ἀπ. α' $p_1 = 2550$ kgr*/m², $p_2 = 850$ kgr*/m². β' $F_{1ολ} = 5127$ kgr*, $F_{2ολ} = 1709$ kgr*.)



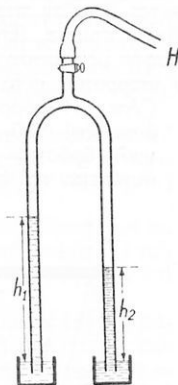
Ἀσκήσις 1335.

1336. Εἰς δεξαμενὴν ὕδατος, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 60 cm, στερεοῦται εἰς τὸν πυθμένα κυλινδρικὸν ξυλίνον σῶμα, διατομῆς 4 cm² καὶ ὕψους 40 cm, μὲ τὴν βοήθειαν ἑλαστικοῦ, ὥστε μεταξὺ τοῦ πυθμένος τῆς δεξαμενῆς καὶ τῆς βάσεως τοῦ σώματος νὰ μὴ περιέχεται ὕδωρ. Ποία ἢ ἐπὶ τοῦ ξυλίνου κυλίνδρου ἐπενεργοῦσα δύναμις καὶ ποία ἡ διεύθυνσις αὐτῆς. ($\epsilon_{\text{ξύλ}} = 0,6$ gr*/cm³). (Ἀπ. 176 gr*, κατακόρυφος πρὸς τὰ κάτω.)

1337. Τεμάχιον κυλινδρικοῦ σωλὴνος, ἐξωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, πάχους τοιχώματος 1 cm καὶ ὕψους 6 cm, ἐκ μετάλλου εἰδ. βάρους 5 gr*/cm³, τοποθετεῖται μὲ κατακόρυφον τὸν ἄξονα ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου, εἰδ. βάρους 13,5 gr*/cm³. Ζητεῖται τὸ βάθος h μέχρι τοῦ ὁποίου θὰ εἰσχωρήσῃ ὁ σωλὴν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Θὰ προτιμηθῇ λύσις εἰς τὴν ὁποίαν οὐδόλως γίνεται χρῆσις τοῦ συμβόλου π ἢ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς 3,14 αὐτοῦ. (Ἀπ. 2,22 cm.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἡλεκτρολόγων, 1955).

1338. Σωλήν κεκαμμένος, ως δεικνύεται εις τὸ σχῆμα, βυθίζεται κατὰ τὸ ἐν σκέλος αὐτοῦ ἐντὸς γλυκερίνης ($\epsilon_2 = 1,26 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$), ἐνῶ κατὰ τὸ ἕτερον ἐντὸς ἀλκοόλης ($\epsilon_1 = 0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). Ἐὰν ἀναρροφῶμεν τὸν ἀέρα ἀπὸ τὸ στόμιον H, ἡ γλυκερίνη ἀνέρχεται εἰς ὕψος $h_2 = 34 \text{ cm}$ ἐντὸς τοῦ δεξιοῦ σκέλους. Ποῖον τὸ ὕψος τῆς στήλης τῆς ἀλκοόλης ἐντὸς τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους.

(Ἀπ. $h_1 = 53,5 \text{ cm}$.)



Ἀσκήσις 1338.

1339. Ὑάλινον κυλινδρικὸν δοχεῖον, βάσεως ἐμβαδοῦ 300 cm^2 , περιέχει ὕδωρ μέχρις ὕψους 6 cm . Ὁρθογώνιος πλάξ ἀλουμινίου διαστάσεων $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ ἐξαρτάται κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ὁλοσχερῶς ἐμβαπτισμένη ἐντὸς τοῦ ὕδατος μετὰ καθέτους τὰς πλευρὰς τῶν 5 cm . Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ἄνωσις, ἡ ἀσκουμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ δοχείου, καὶ β) ἡ πίεσις εἰς τὴν βάσιν τοῦ δοχείου.

(Ἀπ. α' 300 gr^* , β' $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$.)

1340. Κοίλη σφαῖρα, ἐσωτερικῆς ἀκτίνος 9 cm καὶ ἐξωτερικῆς ἀκτίνος 10 cm , βυθιζομένη ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος $0,8 \text{ gr}/\text{cm}^3$, ἰσορροπεῖ κατὰ τὸ ἡμισυ αὐτῆς ἐν καταδύσει. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ τῆς σφαίρας. Ποία ἐπρεπε νὰ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑλικοῦ τούτου, ἵνα ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ ἐν πλήρει καταδύσει. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Φυσικόν, 1955). (Ἀπ. $1,47 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $2,94 \text{ gr}/\text{cm}^3$.)

1341. Σωλήν ρυθμίζεται οὕτως, ὥστε νὰ ἐπιπλέῃ ἐπὶ τοῦ ὕδατος καὶ ἐξέχῃ ἐκ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας αὐτοῦ κατὰ $4,2 \text{ cm}$ τοῦ στελέχους του. Ὅταν προστεθῇ ἐντὸς τοῦ σωλήνος μάζα 10 gr , τὸ μήκος τοῦ ἐξέχοντος στελέχους του εἶναι $2,8 \text{ cm}$. Ζητοῦνται: α) Ποῖον τὸ ἐξωτερικὸν ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς τοῦ σωλήνος. β) Πόσον μήκος τοῦ στελέχους θὰ ἐξέχῃ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ἐὰν προστεθοῦν ἔτερα 5 gr .

(Ἀπ. α' $7,14 \text{ cm}^2$, β' $2,1 \text{ cm}$.)

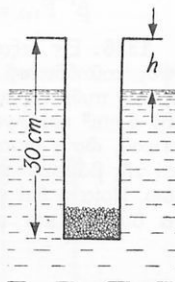
1342. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ βάρους B εἰς τὸ κενόν, κρέμονται εἰς τὰ ἄκρα μοχλοῦ καὶ βυθίζονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Αἱ πυκνότητες αὐτῶν εἶναι $5 \text{ gr}/\text{cm}^3$ καὶ $10 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος l/l' τῶν μοχλοβραχιόνων, ἵνα ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ ὀριζοντίως.

(Ἀπ. $8/9$.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Χημικόν, 1957).

1343. Σωλήν ἐξ ἀργιλίου, βάρους 120 gr^* , διαμέτρου 4 cm καὶ μήκους 30 cm , φορτίζεται μετὰ σκάγια ἐκ μολύβδου, ὥς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, βάρους 150 gr^* καὶ ἐπιπλέει ἐντὸς πετρελαίου, πυκνότητος $0,8 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Κατὰ πόσον ἐξέχει ὁ σωλήν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ πετρελαίου.

(Ἀπ. $3,1 \text{ cm}$.)



Ἀσκήσις 1343.

1344. Συμπαγὴς σφαῖρα ἀπὸ σίδηρον, εἰδ. β. $7,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, πλέει ἐπὶ ὑγροῦ πυκνότητος δεκαπλασίας τῆς τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσοστὸν τοῦ συνολικοῦ ὄγκου ποῦ εἶναι βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. (Ἀπ. $0,78$ τοῦ συνολικοῦ ὄγκου.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσικόν, 1957).

1345. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τεμαχίου ὕαλου ὑπάρχει μία κοιλότης. Τὸ τεμαχίον τοῦτο ζυγίζει $23,4 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν ἀέρα καὶ $3,9 \text{ gr}^*$ ὅταν βυθισθῇ ὁλόκληρον ἐντὸς ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος. Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕαλου εἶναι $2,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, Τμῆμα Ὀδοντιατρικόν, 1960).

1346. Τεμάχιον ξύλου ειδικού βάρους $0,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ επιπλέει ύδατος. Ρίπτομεν ἐπ' αὐτοῦ ἔλαιον μέχρις ὅτου καλυφθῇ ὁλόκληρον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ἐλαίου μέρους τοῦ ξύλου, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι $0,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Ἀπ. $V_1/V_2 = 3$.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φυσιογνωστικόν, 1957).

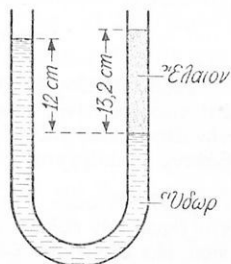
1347. Ἐντὸς λουτήρος επιπλέει μικρὸν πλοῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον αἰφνιδίως ὑφίσταται διαρροὴν καὶ βυθίζεται. Ἀνέρχεται, κατέρχεται ἢ παραμένει ἡ αὐτὴ ἢ στάθμη τοῦ ὕδατος μετὰ τὴν βύθισιν; Νὰ δικαιολογηθῇ ἡ ἀπάντησις.
(Ἀπ. Κατέρχεται, διότι τὸ επιπλέον πλοῖαριον ἐκτοπίζει μᾶζαν ὕδατος, τῆς ὁποίας τὸ βάρος ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος αὐτοῦ, ἐνῶ τὸ βυθισμένον πλοῖαριον ἐκτοπίζει μικροτέραν μᾶζαν ὕδατος.)

1348. Χαλύβδινος πλωτήρ, ὕψους 1 m καὶ βάρους 750 kgr^* μὲ ἐπιφάνειαν βάσεως $4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$, πληροῦται δι' ὕδατος μέχρις ὅτου ἐξέχει κατὰ 10 cm τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος μῖδος λίμνης. Ποία ἡ πρὸς τοῦτο ἀναγκαία ποσότης ὕδατος καὶ ποῖον τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον πρὸς ἀνέλκυσιν τοῦ πλωτήρος ἐκ τῆς θέσεως πλεύσεως αὐτοῦ.
(Ἀπ. 6450 kgr , $3240 \text{ kgr}^*\text{m}$.)



1349. Ἡ διάμετρος τοῦ μεγάλου ἐμβόλου ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου εἶναι 50 cm καὶ τοῦ μικροῦ $\sqrt{10} \text{ cm}$. Ἐὰν ἐφαρμόζεται δύναμις 20 kgr^* ἐπὶ τοῦ ἄκρου μοχλοῦ δευτέρου εἴδους, τοποθετημένου εἰς τὸ μικρὸν ἐμβολον, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν διὰ τοῦ ὡς ἄνω πιεστηρίου, ἐὰν τὸ ὅλικόν μήκος τοῦ μοχλοῦ εἶναι $1,20 \text{ m}$ καὶ τοῦ μικροῦ βραχίονος 30 cm .
(Δασολογικὴ Σχολή Θεσσαλονίκης, 1962).
(Ἀπ. $2 \cdot 10^4 \text{ kgr}^*$.)

1350. Ὑοειδῆς σωλὴν, ἀνοικτὸς κατ' ἀμφότερα τὰ ἄκρα αὐτοῦ, πληροῦται δι' ὕδατος καὶ ἐλαίου, ὡς δεῖκνυται εἰς τὸ σχῆμα, αἱ δὲ στήλαι τοῦ ὕδατος καὶ ἐλαίου εὐρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαίου, β) τὸ ὕψος τῆς ὑδατίνης στήλης, ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ, ὅταν ἀντὶ ἐλαίου τοποθετηθῇ ὑγρὸν πυκνότητος $1,1 \text{ kgr}/\text{dm}^3$ καὶ εἰς ἴσον ὄγκον μὲ ἐκεῖνον τοῦ ἐλαίου.
(Ἀπ. α' $0,91 \text{ kgr}/\text{dm}^3$, β' $14,5 \text{ cm}$.)



* Ἀσκήσις 1350.

1351. Τεμάχιον ξύλου ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 200 gr^* . Τεμάχιον μετάλλου ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 300 gr^* . Συνδέομεν τὰ δύο τεμάχια καὶ τὸ ὅλον σύστημα ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 240 gr . Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου σώματος καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ.
(Ἀπ. 260 cm^3 , $0,769 \text{ gr}/\text{cm}^3$.)
(Δασολογικὴ Σχολή Θεσσαλονίκης, 1961).

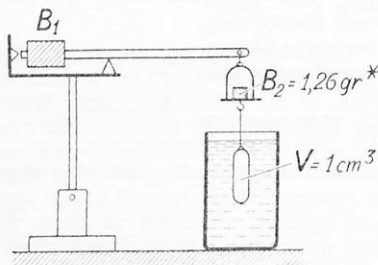
1352. Διάλυμα ἔχει μᾶζαν 400 gr καὶ πυκνότητα $d_1 = 1,7 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Δεύτερον διάλυμα ἔχει πυκνότητα $d_2 = 1,2 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Τὸ ὅλον μίγμα ἔχει βάρος 1000 gr^* καὶ πυκνότητα $d = 1,4 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συστολή τοῦ ὄγκου τοῦ διαλύματος.
(Κτηνιατρικὴ Σχολή Θεσσαλονίκης, 1962).
(Ἀπ. $0,028$ ἤτοι $28 \text{ }^\circ/_{100}$.)

1353. Δεῖγμα γάλακτος ἀναμειγμένου μεθ' ὕδατος ἔχει εἰδικὸν βάρος $1,025 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος ἀγνοῦ γάλακτος εἶναι $1,03 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, νὰ ὑπολογισθῇ πόσον ὕδωρ προσετέθη εἰς ἐν ἡμίλιτρον γάλακτος.
(Ἀπ. $0,1 \text{ lt}$ ἢ 100 gr .)

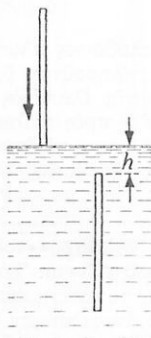
1354. Ἀναμιγνύομεν οἰνόπνευμα πυκνότητος $0,79 \text{ gr/cm}^3$, μὲ ἴσον ὄγκον ὕδατος, ὁπότε ἐπέρχεται συστολή ὄγκου κατὰ $1/20$ τοῦ ἀρχικοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ μίγματος. Ἐάν εἰς ἀραιόμετρον Baumé ἡ ἔνδειξις δι' ὑγρὸν πυκνότητος $1,1 \text{ gr/cm}^3$ εἶναι 0° , διὰ τὸ ὕδωρ 10° , ποία ἡ ἔνδειξις διὰ τὸ μίγμα.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης. Σχολὴ Ὀδοντιατρικὴ, 1962).
(Ἀπ. $\rho = 0,94 \text{ gr/cm}^3$. 17° Baumé .)

1355. Τὸ ὑάλινον σῶμα ὄγκου 1 cm^3 , ἰσορροπεῖ εἰς τὸν ἀέρα διὰ σταθμῶν B_1 (βλ. σχῆμα). Δι' ἐμβραπτίσεως τοῦ ὑαλίνου σώματος ἐντὸς ὑγροῦ ἀγνώστου πυκνότητος, ἀποκαθιστῶμεν ἐκ νέου τὴν ἰσορροπίαν διὰ τοποθετήσεως σταθμῶν $B_2 = 1,26 \text{ gr}^*$. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ.



*Άσκησης 1355.



*Άσκησης 1356.

1356. Ράβδος ἐκ ξύλου, μήκους 50 cm καὶ τομῆς 2 cm^2 τοποθετεῖται καθέτως ἐπὶ τινος ὑδατίνης ἐπιφανείας, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφάπτεται τὸ ἐν ἄκρον αὐτῆς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, καὶ ἀκολουθῶς ἡ ράβδος ἀφίεται ἐλευθερά. Μέχρι ποίου βάθους ἡ εἰσέρχεται τὸ ἀνώτερον ἄκρον τῆς ράβδου.

(Ἀπ. $12,5 \text{ cm}$.)

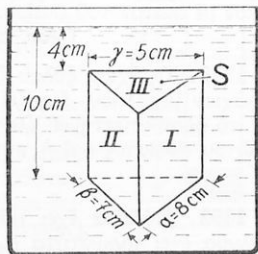
1357. Ἀτομον βάρους 60 kg^* καὶ πυκνότητος $1,1 \text{ gr/cm}^3$ συγκρατεῖται κατὰ τὴν ἐκμάθησιν κολυμβήσεως διὰ τινος κατακορύφου σχοινίου. Ποία ἡ τάσις τοῦ σχοινίου, ἐάν ἐξέχη τοῦ ὕδατος ἡ κεφαλὴ τοῦ ἀτόμου, βάρους 3 kg^* . Πόσα kg^* φελλοῦ, πυκνότητος $0,2 \text{ gr/cm}^3$, πρέπει νὰ περιέχη σωσίβιος στεφάνη, ἀντικαθιστῶσα τὸ σχοινίον.

(Ἀπ. α' 8 kg^* , β' $1,6 \text{ kg}^*$.)

1358. Ἡ κάθετος τομὴ πρισματικοῦ σώματος εἶναι τρίγωνον μὲ πλευρὰς $\alpha = 8 \text{ cm}$, $\beta = 7 \text{ cm}$ καὶ $\gamma = 5 \text{ cm}$ ($S = 17,32 \text{ cm}^2$), εὐρίσκεται δὲ τὸ σῶμα ὑπὸ τὸ ὕδωρ εἰς τρόπον ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἀπέχη 10 cm ἡ δὲ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἔδρα 4 cm ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.

α) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ εἰς τὰς διαφόρους ἔδρας τοῦ πρίσματος ἐπενεργούσαι δυνάμεις καὶ ἡ ἄνωσις ἣν ὑφίσταται τοῦτο. β) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ πλευρικαὶ δυνάμεις ἀλληλοαναιροῦνται.

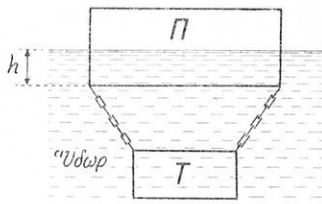
(Ἀπ. α' Εἰς τὴν βάσιν $173,2 \text{ gr}^*$, εἰς τὴν ἄνω παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ἔδραν $69,28 \text{ gr}^*$, ἄνωσις $103,92 \text{ gr}^*$. Πλευρικαὶ δυνάμεις: Ἐπὶ τῆς ἔδρας I 336 gr^* , ἐπὶ τῆς II 294 gr^* , ἐπὶ τῆς III 210 gr^* .)



*Άσκησης 1358.

1359. Σανίς βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος. Ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει ἐμβαδὸν $S = 320 \text{ cm}^2$. Τὸ ὕψος αὐτῆς $h = 3 \text{ cm}$, τὸ δὲ ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθισμένον ὕψος αὐτῆς εἶναι $h_1 = 2,5 \text{ cm}$. Νὰ εὑρεθῇ πόσον βάρος πρέπει νὰ θέσωμεν ἐπὶ τῆς σανίδος, ἵνα αὕτη βυθισθῇ καθ' ὅλοκληρίαν. (Σχολή Ἐμποροπλοιάρχων, 1962). (Ἀπ. 160 gr^* .)

1360. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν θεμελίων τῶν στύλων γεφύρας, ὑπεράνω εὐρέος ποταμοῦ, οἱ τσιμεντόλιθοι μεταφέρονται εἰς τὰ κατάλληλα σημεία, προσδεδμένοι εἰς πλωτήρας. Εἰς τοιοῦτος πλωτήρ ἔχει βάρος 15 kg^* , βάσιν $1 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ καὶ ὕψος 40 cm . Ὁ τσιμεντόλιθος ἔχει ὄγκον $50 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Εἰδικὸν βάρος σκυροκονιάματος $2 \text{ kg}^*/\text{dm}^3$. Κατὰ πόσον βυθίζεται ὁ πλωτήρ. Τὸ βάρος τῆς ἀλύσου ἀμελητέον. (Ἀπ. $h = 2,1 \text{ dm}$.)



Ἀσκήσις 1360.

1361. Ποία δύνამις ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ κρατήσῃ ὑπὸ τὸ ὕδωρ κοίλην σφαῖραν, διαμέτρου 40 cm , ἔχουσαν βάρος 500 gr^* . (Ἀπ. 33 kg^* .)

1362. Ποία ἡ πίεσις ὕδαταγωγοῦ σωλῆνος εἰς τὸν τέταρτον ὄροφον πολυκατοικίας εἰς ὕψος 14 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, ἐὰν ἡ πίεσις εἰς τὸ ἰσόγειον ἀνέρχεται εἰς 4 at . (Ἀπ. $2,6 \text{ at}$.)

1363. Πυκνόμετρον ζυγίζει κενὸν $28,50 \text{ gr}^*$ καὶ μετὰ βενζίνης ($\rho = 0,72 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$) $64,86 \text{ gr}^*$. Εἰσάγομεν ἐντὸς τοῦ πυκνόμετρου τεμάχιον σύρματος, βάρους $2,65 \text{ gr}^*$, ὅποτε, μετὰ τὴν ξήρανσιν τῆς ἐκχυθείσης βενζίνης, τὸ πυκνόμετρον ζυγίζει $67,42 \text{ gr}^*$. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ σύρματος. (Ἀπ. $21,2 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$.)

1464. Εἰς ὑδραυλικὸν πιεστήριον ἡ διάμετρος τοῦ μικροῦ ἐμβολέως εἶναι 25 mm , ἡ διάμετρος τοῦ μεγάλου ἐμβολέως 300 mm , ὁ δὲ μοχλοβραχίον τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 12 cm . Ἐὰν ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ πιεστηρίου εἶναι $30\,000 \text{ kg}^*$, ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἶναι 15 kg^* , ποῖον τὸ συνολικὸν μήκος τοῦ μοχλοῦ. (Ἀπ. $166,6 \text{ cm}$.)

1365. Δύο τεμάχια ἀλουμινίου (εἰδικὸν βάρος $2,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) Α καὶ Β ξερτῶνται ἐκ τῶν δίσκων ζυγοῦ. Ἐὰν τὸ Α εἶναι ὁλοσχερῶς βυθισμένον ἐντὸς ὕδατος καὶ τὸ Β ἐντὸς παραφίνης (εἰδικὸν βάρος $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$), ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ ὅταν ὁμως τὸ Α εἶναι βυθισμένον ἐντὸς παραφίνης καὶ τὸ Β ἐντὸς ὕδατος, ἀπαιτεῖται πρόσθετον βάρος 10 gr^* εἰς τὸν δίσκον τοῦ Β, ἵνα ἐπέλθῃ ἰσορροπία. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μάζαι τῶν Α καὶ Β. (Ἀπ. $71,25 \text{ gr}$, $63,75 \text{ gr}$.)

1366. Στήλη ὑδραργύρου (εἰδικὸν βάρος $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) πληροῖ λεπτὸν σωλῆνα μέχρις ὕψους 63 cm . Τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου εὐρίσκεται ὅτι εἶναι $1,683 \text{ gr}^*$. Ποία ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος. Ἐὰν ἡ τομὴ εἶναι κυκλική, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος. (Ἀπ. $0,196 \text{ mm}$, $0,5 \text{ mm}$.)

1367. Ποσότης 100 gr^* ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ μίγνυται μεθ' 100 cm^3 ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $1,2 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μίγματος, δοθέντος ὅτι ὁ ὄγκος του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀθροισμα τῶν ὀγκῶν τῶν συστατικῶν αὐτοῦ μερῶν. (Ἀπ. $0,98 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

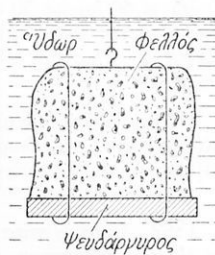
1368. Πυκνὸν θεικὸν ὀξύ, εἰδικοῦ βάρους $1,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, μίγνυται μεθ' ὕδατος κατ' ἀναλογίαν ὄγκου $1 : 3$. Ἐὰν τὸ προκύπτον μίγμα ἔχῃ εἰδικὸν βάρος $1,28 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, πόση εἶναι ἡ ἐκταοσιαία ἀναλογία τῆς μεταβολῆς ὄγκου, ἥτις λαμβάνει χώραν κατὰ τὴν μίξιν. (Ἀπ. $6,25\%$.)

1369. Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ ξύλου, εἰδικοῦ βάρους $0,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ εἶναι βυθισμένον κατὰ $0,8$ τοῦ ὅγκου του ἐντὸς ὑγροῦ τινος καὶ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἰσορροπεῖ. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. (Ἄπ. $0,75 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.) (Στρατιωτικὴ Σχολὴ Ναυτικῶν Δοκίμων, 1961).

1370. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς πυκνότητος τοῦ φελλοῦ, ἐπειδὴ τὸ σῶμα τοῦτο εἶναι λίαν ἐλαφρὸν προσδένομεν ἐπὶ τεμαχίου φελλοῦ, βάρους 12 gr^* , διὰ τινος λεπτοῦ σύρματος, πλάκα ἐκ ψευδαργύρου, βάρους 70 gr^* καὶ πυκνότητος $7 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Τὸ σύστημα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ὑφίσταται οὕτως ἀπώλειαν βάρους 60 gr^* . Ποία ἡ πυκνότης τοῦ φελλοῦ. (Ἄπ. $0,24 \text{ gr}/\text{cm}^3$.)

1371. Σχεδία πρόκειται νὰ φορτωθῇ μὲ βάρος 2 tn^* , μὲ τὸ φορτίον δὲ αὐτὸ θὰ πρέπει ὁ ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθιζόμενος ὅγκος τῆς νὰ μὴ ὑπερβαίνει τὰ 90% τοῦ συνολικοῦ τῆς ὅγκου. Πόσα m^3 ξύλου πυκνότητος $820 \text{ kgr}/\text{m}^3$ ἀπαιτοῦνται κατ' ἐλάχιστον διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς σχεδίας. (Ἄπ. 25 m^3 .)

1372. Δοκιμαστικὸς σωλὴν ἔχει μᾶζαν 10 gr , ἐξωτερικὴν διάμετρον 2 cm καὶ συνολικὸν μήκος 15 cm . Ποῖον βάρος ὑδραργύρου πρέπει νὰ εἰσαχθῇ, ἵνα ἐπιπλήρῃ καθέτως ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $0,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ τὸ ἄνωθεν ἀνοικτὸν του στόμιον νὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὑγροῦ. (Ἄπ. $22,25 \text{ gr}^*$.)



Ἄσκησης 1370.

1373. Κυλινδρικὸν σιδηροῦν στέλεχος διαμέτρου 160 mm καὶ ὕψους 4 m στηρίζεται διὰ τετραγωνικοῦ ποδός, ἀκμῆς 250 mm , ἐπὶ τινος τοίχου. Νὰ υπολογισθοῦν : α) Τὸ βάρος τοῦ στελέχους ($\epsilon_{\text{σιδ}} = 7,3 \text{ kgr}^*/\text{dm}^3$), β) ἡ πίεσις, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ τοίχου, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τοῦ βάρους τοῦ ποδός, ἴσου πρὸς 42 kgr^* καὶ μᾶς προσθέτου φορτίσεως 8750 kgr^* . (Ἄπ. $15 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2$.)

1374. Νὰ υπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος : α) ὕαλου, β) οἰνοπνεύματος, γ) κρυσταλλικοῦ θεικοῦ χαλκοῦ, ἐκ τῶν κάτωθι δεδομένων : Βάρος τεμαχίου ὕαλου = $13,11 \text{ gr}^*$. Φαινόμενον βάρος ὕαλου ἐμβαπτισμένης ὁλοσχερῶς ἐντὸς ὕδατος = $7,73 \text{ gr}^*$. Φαινόμενον βάρος ὕαλου ἐντὸς οἰνοπνεύματος = $8,63 \text{ gr}^*$. Βάρος θεικοῦ χαλκοῦ = $8,01 \text{ gr}^*$. Φαινόμενον βάρος θεικοῦ χαλκοῦ ἐμβαπτισμένου ἐντὸς οἰνοπνεύματος = $4,99 \text{ gr}^*$. (Ἄπ. α' $2,44 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. β' $0,833 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. γ' $2,21 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1375. Σῶμα εὐρίσκεται βυθισμένον ἐν μέρει ἐντὸς ὕδατος καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐντὸς ἄλλου ὑγροῦ, μὴ ἀναμιγνυομένου μετὰ τοῦ ὕδατος. Τὰ 60% τοῦ ὅγκου τοῦ σώματος εἶναι βυθισμένα ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ τὰ 40% εἰς τὸ ἄλλο ὑγρὸν. Ἐὰν ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ εἶναι $2,5 \text{ gr}/\text{cm}^3$, νὰ υπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ σώματος. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1961). (Ἄπ. $1,6 \text{ gr}/\text{cm}^3$.)

1376. Κυλινδρικός ὕαλινος σωλὴν μήκους $l = 30 \text{ cm}$, διατομῆς $S = 1 \text{ cm}^2$ καὶ βάρους $B = 4 \text{ gr}^*$ εἶναι κλειστὸς κατὰ τὸ ἐν ἄκρον. α) Πόσον βάρος ἄμμου πρέπει νὰ θέσωμεν ἐντὸς αὐτοῦ, διὰ νὰ βυθίζεται κατὰ τὸ ἥμισυ ἐπιπλέων ἐντὸς ὕδατος. β) Διὰ νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἐν λόγῳ σωλὴνα ὡς ἀραιόμετρον, πρέπει νὰ σημειώσωμεν χαραγὰς διὰ $1,00$ $0,90$ $0,80$ κλπ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἀπέχουν αἱ χαραγὰι αὐταὶ ἐκ τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου τοῦ σωλῆνος. γ) Τί παρατηροῦμεν διὰ τὰς ἀποστάσεις αὐτάς. ($\epsilon_{\text{ἄμμου}} = 1,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

(Ἄπ. α' 11 gr^* ἄμμου καταλαμβάνοντα ὕψος $7,33 \text{ cm}$ τοῦ σωλῆνος. β' Ἡ ἐνδειξις $1,00$ ἀπέχει 15 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σωλῆνος. Ὁμοίως ἡ ἐνδειξις $0,90$ ἀπέχει $13,33 \text{ cm}$. Ὁμοίως ἡ ἐνδειξις $0,80$ ἀπέχει $11,25 \text{ cm}$. γ' Αἱ ἐνδείξεις δὲν ἀπέχουν σταθερὰς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις, αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι.)

1377. Είς ποίαν σχέσιν ὄγκων πρέπει νὰ συνενώσωμεν φελλὸν μετὰ μολύβδου, διὰ νὰ ἐπιπλέῃ εἰς ἀλκοόλην τὸ προκύπτον οὕτω σῶμα. ($\rho_{\text{φελ}} = 0,2 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{αλκ}} = 0,79 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{μολ}} = 11,3 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. $V_1 : V_2 = 18$.)

1378. Σφαῖρα ἐξηρητημένη διὰ δυναμομέτρον ζυγίζει 96 gr^* εἰς τὸν ἀέρα, 81 gr^* εἰς τὸ ὕδωρ καὶ 84 gr^* εἰς τὸ πετρέλαιον. Νὰ εὑρεθοῦν : α) τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος, καὶ β) τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πετρελαίου. (Ἀπ. $6,4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, Τμήμα Ὀδοντιατρικόν, 1959).

1379. Ὁμογενὴς κυλινδρική ράβδος ἐκ ξύλου μήκους 20 cm ἐπιπλέει μὲ 4 cm τοῦ μήκους τῆς ἄνω τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας στρώματος ἐξ ἐλαίου πάχους 10 cm , ἐπιπλέοντος ἐπὶ ὕδατος περιεχομένου ἐντὸς βαθέως κυλίνδρου. Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου. (Ἀπ. $0,7 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1380. Λήκυθος πλήρης ὕδατος ζυγίζει $68,27 \text{ gr}^*$. Μολύβδινον σῶμα ἔχον βάρος $45,60 \text{ gr}^*$ βυθίζεται ἐντὸς αὐτῆς, τὸ πῶμα δὲ τοποθετεῖται ἐπιμελῶς καὶ ἀποξηραίνεται τὸ ἐξωτερικόν τῆς. Ἐὰν τὸ σύνολον ζυγίσῃ τώρα $109,87 \text{ gr}^*$, ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου. (Ἀπ. $11,4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1381. Αἱ ἀκόλουθοι μετρήσεις ἐγένοντο διὰ ληκύθου : Βάρος κενῆς φιάλης ληκύθου $= 15,43 \text{ gr}^*$, βάρος φιάλης πλήρους οἴνοπνεύματος $= 55,94 \text{ gr}^*$, βάρος φιάλης πλήρους ὕδατος $= 64,83 \text{ gr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ οἴνοπνεύματος. (Ἀπ. $0,82 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

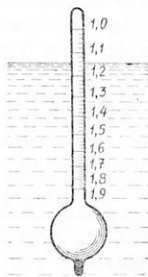
1382. Ἐὰν ἐπιδιώκωμεν νὰ βαθμολογήσωμεν πυκνόμετρον (βλ. σχῆμα), τοῦ ὁποῦ αἱ χαραγαὶ διὰ $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ $2 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ πρέπει νὰ ἀπέχον κατὰ 15 cm , ἐπὶ στελέχους ἐγκαρσίας τομῆς 1 cm^2 , πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας κάτωθεν τῆς χαραγῆς 2 καὶ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὀλικὸν βάρος τοῦ πυκνομέτρου καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς χαραγῆς 1,0 θὰ εὐρίσκεται ἡ χαραγὴ 1,5. (Ἀπ. 15 cm^3 , 30 gr^* , 10 cm .)

1383. Πυκνόμετρον ἐπιπλέον ἐντὸς ὕδατος ἔχει 2 cm τοῦ στελέχους τοῦ ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας, ἐνῶ ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $1,2 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ ἔχει 20 cm τοῦ στελέχους τοῦ ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας. Πόσον μήκος τοῦ στελέχους θὰ ἐξέχῃ τῆς ἐπιφανείας, ὅταν τὸ πυκνόμετρον ἐπιπλέῃ ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $1,1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Ἀπ. $11,8 \text{ cm}$.)

1384. Σύνηθες πυκνόμετρον ἔχει σφαιρικὴν βάσιν πεπληρωμένην καὶ στέλεχος κυλινδρικὸν ὁμοιομόρφου τομῆς ὄγκου 25 cm^3 *Ἀσκήσις 1382. μέχρι τῆς ἐνδείξεως 1,00 τοῦ στελέχους. Τὸ μήκος τοῦ στελέχους μεταξὺ τῶν ἐνδείξεων 1,00 καὶ 0,90 εἶναι 10 cm . Νὰ εὑρεθῇ ἡ κάθετος τομὴ τοῦ στελέχους. (Ἀπ. $0,278 \text{ cm}^2$.)

1385. Τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τὴν ἐλαχίστην καὶ μεγίστην ἐνδειξιν ἐπὶ τῆς κλίμακος κοινοῦ πυκνομέτρου εἰδικὰ βάρη εἶναι 1,20 καὶ 1,00. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποῦ τὸ πυκνόμετρον θὰ εἶναι βυθισμένον μέχρι τοῦ ἡμίσεος τῶν ἐνδείξεων τοῦ. (Ἀπ. $1,091 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1386. Μικρὰ σφαῖρα, ἐξ ὑλικοῦ εἰδικοῦ βάρους $0,2 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, φέρεται ὑπὸ τὸ ὕδωρ εἰς βάθος 10 m καὶ ἀκολουθῶς ἀφίεται ἐλευθέρως. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ αὕτη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος δὲν θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $t = 0,707 \text{ sec}$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικόν, 1960).



*Ἀσκήσις 1382.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

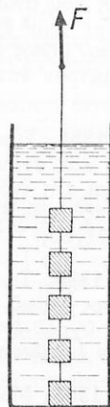
1387. Ἡ μεγίστη ἀρτηριακὴ πίεσις εἶναι 25 cm Hg ὑπὲρ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Εἰς ποῖον ὕψος θὰ ἀνεπὶθῇ τὸ αἷμα, ἐὰν ἀφίετο ἐλεύθερον. (Δίδεται πυκνότης τοῦ αἵματος $1,1 \text{ gr/cm}^3$ καὶ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. 3,09 m.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1950.)

1388. Ἡ καρδιά ἀνθρώπου εἰς ἕκαστον παλμὸν ἐκτοξεύει 75 cm^3 αἵματος ὑπὸ μέσῃν πίεσιν 10 cm Hg. Δοθέντος ὅτι ἡ συχνότης τῶν παλμῶν εἶναι 72 min^{-1} , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς εἰς Watt. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$. Πυκνότης ὑδραργύρου = $13,6 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. 1,2 W.)

1389. Δοχεῖον πλήρες ὕδατος ζυγίζει 300 gr^* . Τεμάχιον μετάλλου, ὄγκου 10 cm^3 καὶ μάζης 88 gr , βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἐξαρτῶμενον διὰ λεπτοῦ νήματος. Νὰ εὐρεθῇ ἡ δύναμις ἥτις δέον νὰ ἐνεργήσῃ ἐπὶ τοῦ νήματος πρὸς συγκρίπτοντος τοῦ μετάλλου, ἵνα μὴ βυθισθῇ, ὥς καὶ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκέι τὸ ὅλον σύστημα ἐπὶ τοῦ βάθρου του. Πῶς εἶναι δυνατὸς ὁ πειραματικὸς καθορισμὸς ἐκάστης δυνάμεως. (Ἀπ. 78 gr^* , 310 gr^* .)

1390. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πυθμένος λεκάνης περιεχοῦσης ὕδωρ εἶδ. βάρους e_1 τοποθετεῖται κυλινδρικὸν τεμάχιον ἐκ φελλοῦ εἶδ. βάρους e_2 , ἐπιφανείας βάσεως S καὶ ὕψους α , πιέζεται δὲ τοῦτο ἐπαρκῶς ἐπὶ τῆς ὑαλίνης πλάκας, ὥστε μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ φελλοῦ νὰ μὴ παραμείνῃ ὕδωρ. Διὰ λεπτοῦ σύρματος μήκους α συμπίπτοντος μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου στερεοῦται ἐπὶ τοῦ πρώτου φελλοῦ εἰς δεύτερος, ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίτος κ.ο.κ. Τὸ σύστημα ἀποτελεῖται τελικῶς ἐκ τεμαχίων φελλοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ἀπέχει ἀπόστασιν α ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποία ἡ τιμὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν ἐπὶ τῶν τεμαχίων ἐνεργουσῶν δυνάμεων. (Ἀπ. Πρὸς τὰ κάτω, $F = n \cdot \alpha \cdot S [e_1 + e_2]$.)

1391. Ἐπὶ νήματος στερεοῦνται εἰς ἴσας ἀποστάσεις 5 τεμάχια φελλοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὕψος 3 cm καὶ διατομὴν 2 cm^2 . Ἡ ὅλη διάταξις, δεικνυομένη εἰς τὸ σχῆμα, φέρεται ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, περιέχοντος ὕδωρ μέχρις ὕψους 50 cm, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ κατώτερον τεμάχιον φελλοῦ νὰ προσκολλᾶται ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου ἄνευ τῆς παρεμβολῆς ὕδατος. Μὲ ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ὡς ἐπὶ τοῦ νήματος, κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω, διὰ νὰ ἀποσπασθῇ τὸ κατώτερον τεμάχιον τοῦ φελλοῦ ἀπὸ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου. (Βάρος νήματος ἀμελητέον καὶ $\epsilon_{\text{φελ}} = 0,3 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (Ἀπ. 79 gr^* .)



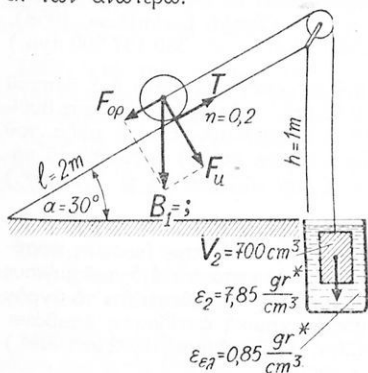
Ἀσκ. 1391.

1392. Δοχεῖον, βάρους 300 kgr^* καὶ ὄγκου 10 m^3 , πληροῦται διὰ βενζίνης καὶ αἰωρεῖται ἐντὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος. Ποίαν ἄνωσιν ὑφίσταται τὸ δοχεῖον ὑπὸ τὸ ὕδωρ, ποῖον δηλαδὴ ὠφέλιμον βάρος δύναται νὰ ὑποφέρει τοῦτο, παραμένον ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τὸ ὕδωρ. (Πυκνότης βενζίνης $0,7 \text{ kgr/dm}^3$, θαλασσίου ὕδατος $1,03 \text{ kgr/dm}^3$). (Ἀπ. 3000 kgr^* .)

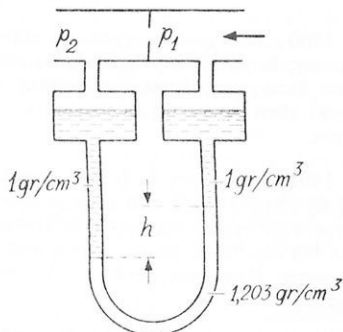
1393. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος ἐπικρατεῖ ἰσορροπία α) Ἐὰν αἱ τριβαὶ θεωροῦνται ἀμελητέαι, ποῖον τὸ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου βάρος B_1 . β) Μεταξὺ ποίων ὀρίων περιέχεται τὸ βάρος B_1 , ἐὰν ὑπάρχῃ τριβὴ μεταξὺ τοῦ σώματος B_1 καὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ($\eta = 0,2$).

(Ἀπ. α' $9,8 \text{ kgr}^*$ β' 7280 gr^* ἕως $15\,000 \text{ gr}^*$)

1394. Πρὸς μέτρησιν μικρῶν διαφορῶν πιέσεων χρησιμεύει τὸ εἰκονιζόμενον εἰς τὸ σχῆμα μανόμετρον. Ἐν προκειμένῳ πληροῦται τοῦτο μὲ νιτροβενζόλιον, πυκνότητος $1,203 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ὕδωρ, πυκνότητος 1 gr/cm^3 , ὁπότε ἐμφανίζει διαφορὰν στάθμης $h = 26 \text{ mm}$. Ποία διαφορὰ πίεσεως εἰς χιλιοστόμετρα ὑδατίνης ἐξάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω. (Ἀπ. $5,28 \text{ mm H}_2\text{O}$.)



Ἀσκήσις 1393.



Ἀσκήσις 1394.

1395. Ἐντὸς σκέλους σωλῆνος σχήματος U περιέχοντος ὑδραργύρου χύνεται ὕδωρ μέχρις ὅτου ἡ ἀνωτέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος φθάσῃ τὰ $6,8 \text{ cm}$ ἀνωθεν τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ. Ποία ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ ὕδωρ πίεσις εἰς τὴν ἐπιφανείαν ταύτην. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ ἕτερον σκέλος εἶναι $0,5 \text{ cm}$ ἀνωθεν τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ, ποία εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου.

(Ἀπ. $6,8 \text{ gr/cm}^3$, $13,6 \text{ gr/cm}^3$.)

1396. Σημαντήρ κυβικοῦ σχήματος, ἀκμῆς 40 cm , κοίλος ἐσωτερικῶς, βυθίζεται ἄνευ ἀλύσου κατὰ 16 cm ἐντὸς γλυκέως ὕδατος. Διὰ προσδέσεως τοῦ σημαντήρος δι' ἀλύσου βυθίζεται οὗτος κατὰ τὸ ἥμισυ. Ποῖον τὸ βάρος τῆς ἀλύσου: α) ἐντὸς τοῦ ὕδατος, β) ἐντὸς τοῦ ἀέρος. (Πυκνότης ὑλικοῦ ἀλύσου $7,8 \text{ gr/cm}^3$.)

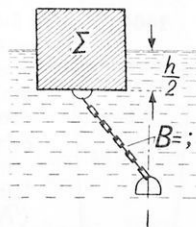
(Ἀπ. α' $6,4 \text{ kgr}^*$, β' $7,341 \text{ kgr}^*$.)

1397. Κυλινδρική πλάξ ἐκ μολύβδου (εἰδικοῦ βάρους ϵ_1) καὶ ὕψους h_1 ἐπιπλέει ἐντὸς ὑδραργύρου (εἰδικοῦ βάρους ϵ_2) κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι κατακόρυφος. Ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου ὑπάρχει στρώμα γλυκερίνης (εἰδικοῦ βάρους ϵ_3) τοιοῦτου πάχους, ὥστε ἡ μολύβδινη πλάξ νὰ καλύπτεται τελείως. Ζητοῦνται: α) Πόσον μέρος τοῦ κυλίνδρου βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου. β) Πόσον, ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ στρώμα τῆς γλυκερίνης. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $h_1 = 5 \text{ cm}$, $\epsilon_1 = 11,3 \text{ gr/cm}^3$, $\epsilon_{\text{δρ}} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, $\epsilon_{\text{γλκ}} = 1,26 \text{ gr/cm}^3$.

(Ἀπ. $4,07 \text{ cm}$, $4,10 \text{ cm}$.)

1398. Τεμάχιον σύρματος ἐκ χαλκοῦ ζυγίζον $17,8 \text{ gr}^*$ περιελίσσεται περίξ ὄγκου πάγου, ὅστις ἐπιπλέει κατόπιν ἐντὸς ψυχροῦ ὕδατος. Καθὼς ὁ πάγος τήκεται βαθμηδόν, παρατηρεῖται ὅτι τὸ σύστημα βυθίζεται περισσότερο ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν βυθίζεται ἐντελῶς ἀποσύρεται, καθαρίζεται ἀπὸ τὸ εὕρισκόμενον εἰς τὰς ἐπιφανεῖας τοῦ ὕδατος καὶ τίθεται ἐντὸς δοχείου ζυγίσεως. Τὸ βάρος τοῦ πάγου καὶ τοῦ χαλκοῦ εὕρσκεται ὅτι εἶναι $199,5 \text{ gr}^*$. Ποῖαν τιμὴν διὰ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου δίδει τὸ πείραμα τοῦτο. (Εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ $8,9 \text{ gr/cm}^3$.)

(Ἀπ. $0,92 \text{ gr/cm}^3$.)



Ἀσκήσις 1396.

1399. Κοίλη σφαίρα βάρους 125 kg^* και όγκου $0,5 \text{ m}^3$ πλέει επί της επιφάνειας θαλάσσης ειδικού βάρους $1,025 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ζητούνται: α) Πόσος είναι ο όγκος του υπό την επιφάνειαν της θαλάσσης βυθισμένου μέρους της. β) Πόσον βάρος μολύβδου πρέπει να προστεθή, όταν αυτή επιπλέη, ίνα βυθισθή κατά τα $2/3$ του έκτος του ύδατος όγκου της. γ) Με ποίαν δύναμιν, εκφραζομένην εις δύνες, ώθειται προς τα άνω, όταν αυτή είναι έξ ολοκλήρου βυθισμένη. (Σχολιά Ευελπίδων, 1958).
(Απ. α' $121,95 \text{ lt}$. β' $258,32 \text{ kg}^*$, γ' $380 \text{ } 137 \text{ } 500 \text{ dyn}$.)

1400. Τεμάχιον όρειχάλκου, ειδικού βάρους $8,4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εξαρτάται διά λεπτόν νήματος έκ μικράς σφαίρας κηροῦ ειδικού βάρους $0,92 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ και τὸ σύστημα βυθίζεται ολοσχερώς έντός διαλύματος ειδικού βάρους $1,15 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Έάν ή μάζα του κηροῦ είναι 10 gr , ζητούνται: α) ή μάζα του όρειχάλκου, και β) ή τάσις του νήματος. (Απ. α' $2,897 \text{ gr}$, β' $2,50 \text{ gr}^*$.)

1401. Κύλινδρος έκ ξύλου, επιπλέει με κάθετον τὸν άξονά του έντός ύγρου βυθισμένος κατά τα $3/4$ του μήκους του. Τὸ ύγρὸν άραιούται δι' ύδατος ίμισείας ποσότητος του όγκου του και ο κύλινδρος επιπλέει βυθισμένος κατά τα $4/5$ του μήκους του. Νά εύρηθῇ τὸ ειδικὸν βάρος του ύγρου και του ξύλου. (Υποτίθεται ότι τὸ ύγρὸν μίγνυται έλευθέρως μετά του ύδατος και ότι ούδεμία χημική αντίδρασις λαμβάνει χώραν). (Απ. $1,23 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $0,92 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1402. Στερεὸν σώμα ζυγίζει 125 gr^* έν τῷ άέρι, 75 gr^* έμβαπτισμένον πλήρως έντός ύγρου Α και $62,5 \text{ gr}^*$ έμβαπτισμένον όμοίως έντός ύγρου Β. Έάν έντός μίγματος τῶν ύγρῶν ζυγίξη 70 gr^* , ποία ή κατ' όγκον αναλογία μίξεως έκάστου ύγρου. (Υποτίθεται ότι ούδεμία χημική δράσις λαμβάνει χώραν κατά την μίξιν τῶν δύο ύγρῶν). (Απ. 3 όγκοι Α : 2 όγκοι Β.)

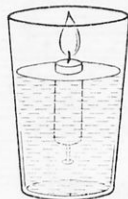
1403. Καταδυτική συσκευή συνίσταται έκ δύο χαλυβδίνων ίμισφαιρίων άκτινὸς $1,1 \text{ m}$, άτινα συγκρατούνται προς άλληλα διά της πίεσεως του θαλασσίου ύδατος, ($\epsilon = 1,03 \text{ kg}^*/\text{dm}^3$). Νά υπολογισθῇ ή όλική δύναμις, ή άσκουμένη έπ' άμφοτέρων τῶν ήμισφαιρικῶν επιφανειῶν, εις βάθος $11 \text{ } 000 \text{ m}$. (Απ. 43 tn^* .)

1404. Κηρίον διά τινος καρφίου, τὸ όποίον φέρει εις τὸ κάτω άκρον αὐτοῦ, επιπλέει όρθιον έντός ύδατος έξερχόμενον όλίγον της έλευθέρως επιφάνειας τοῦ ύγρου. Ανάπτομεν άκολουθως την θρυαλλίδα του κηρίου, όπότε άρχίζει τοῦτο νά φωτοβολῇ συνεχῶς άνερχόμενον, έφ' όσον αναλίσκεται λόγω της καύσεως. Ως έξήγησις τοῦ φαινομένου έθεωρεῖτο παλαιότερον τὸ γεγονός ότι λόγω καύσεως τὸ κηρίον γίνεται έλαφρότερον και διά τοῦτο καιόμενον άνέρχεται. Είναι όρθή ή έρμηνεία αὕτη;

(Απ. Προϊούσης της καύσεως αύξάνεται ή επίδρασις του βάρους του καρφίου επί του κηρίου. Τοῦτο έχει ως άποτέλεσμα αύξησιν της πυκνότητος του συστήματος, μέχρι στιγμῆς καθ' ήν γίνεται μεγαλύτερα εκείνης του ύδατος, όπότε και θά έπρεπε νά βυθισθῇ τὸ κηρίον. Ένεκα όμως της φλογός σχηματίζεται εις την κορυφήν του κηρίου βθεία ήμισφαιρική κοιλότης, έξ αίτίας της όποίας τὸ κηρίον παραμένει επιπλέον, διότι καθίσταται μὲν τὸ σύστημα πυκνότερον του ύδατος, έκτοπίζει όμως μάζαν ύδατος μεγαλύτεραν του βάρους του.)

1405. Κύλινδρος ύψους 40 cm πλέει κατακορύφως επί ύδραργύρου και βυθίζεται έντός αὐτοῦ κατά τὸ $1/4$ του ύψους του. Χύνομεν επί του ύδραργύρου στρῶμα ύδατος άρκετὸν νά επιφέρῃ την πλήρη κατάδυσιν του κυλίνδρου. Ζητεῖται τὸ ύψος του τμήματος του κυλίνδρου, τὸ όποίον είναι βυθισμένον εις τὸν ύδραργυρον. (Απ. $7,6 \text{ cm}$.)

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαί Πολιτικῶν, Μηχανολόγων, Χημικῶν, Άλλοδαποί, 1962).



1406. Πλοῖον βυθισμένον ἐντὸς τῆς θαλάσσης ἀνασύρεται διὰ προσδέσεως εἰς αὐτὸ 24 μεταλλικῶν βαρελίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὄγκον $2,5 \text{ m}^3$ καὶ βάρος 200 kg^* , ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀφαιρεῖται διὰ πεπιεσμένου ἀέρος τὸ ὕδωρ. Ὅταν ἐκδιωχθῇ τὸ ὕδωρ ἐξ ὧλων τῶν βαρελίων, ἀρχεται τὸ πλοῖον μόλις αἰωροῦμενον ἐντὸς τοῦ θαλάσσιου ὕδατος. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ πλοίου ἐντὸς τῆς θαλάσσης. (Πυκνότης θαλάσσιου ὕδατος $1,03 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. 57 tn^* .)

1407. Ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου, ἐπιφανείας 4 cm^2 , ἀσκειῖται δύναμις 15 kg^* . Ὁ μεγάλος ἐμβολεὺς ἔχει ἐπιφανείαν 60 cm^2 . α) Ποία ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγάλου ἐμβολέως δρῶσα δύναμις, τῆς τριβῆς μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν. β) Κατὰ ποῖον διάστημα μετακινεῖται τὸ μεγάλον ἐμβολον, ὅταν τὸ μικρὸν μετατοπισθῇ 6 cm . γ) Τί ἐξάγεται διὰ τὰ ἔργα τὰ καταναλισκόμενα ὑπὸ τῶν δύο ἐμβόλων. δ) Ποῖα πλεονεκτήματα παρουσιάζει τὸ ὑδραυλικὸν πιεστήριον. (Ἀπ. α' 225 kg^* , β' $0,4 \text{ cm}$, γ' ἴσα.)

1408. Τὸ στέλεχος ἀραιομέτρου μεταξὺ τῶν ἐνδείξεων $0,8$ καὶ $1,2$ ἔχει μῆκος 8 cm . Τὸ βάρος τοῦ ἀραιομέτρου ἀνέρχεται εἰς 24 gr^* . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐξωτερικὴ τομὴ τοῦ στελέχους. (Ἀπ. $1,25 \text{ cm}^2$.)

1409. Ὁγκολίθος ἐκ μπετόν, ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ἀέρος 4000 kg^* . Ἀμέσως ἅμα τῇ βυθίσει τοῦ ἐντὸς ὕδατος, τὸ φαινομενικὸν του βάρους εὐρέθῃ μὲν 1900 kg^* , παρουσιάζει ὅμως ἔκτοτε μίαν ἑλαφρὰν αὐξησιν προφανῶς λόγῳ τοῦ ἀρραμένου διαποτισμοῦ τῶν ἐσωτερικῶν πόρων τοῦ μὴ τελείως συμπαγοῦς ὕλικου. Ζητεῖται τὸ φαινομενικὸν βάρος τοῦ ὁγκολίθου πρὸς τὸ ὅποιον οὗτος τείνει σὺν τῇ παρόδῳ τοῦ χρόνου. Δίδεται τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς συμπαγοῦς μάζης τοῦ μπετόν: $2000 \text{ kg}^*/\text{m}^3$.

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1961). (Ἀπ. 2000 kg^* .)

1410. Πυκνόμετρον βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ μέχρι τῆς ὑποδιαίρεσεως 0 . Ὁ ὄγκος τοῦ πυκνόμετρου μέχρι τῆς ὑποδιαίρεσεως 0 εἶναι $12,8 \text{ cm}^3$. Βυθίζεται κατόπιν εἰς πετρέλαιον εἰδικοῦ βάρους $\rho_1 = 0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ὁπότε βυθίζεται μέχρι τῆς ὑποδιαίρεσεως 40 . Νὰ εὐρεθῇ ἡ τομὴ τοῦ πυκνόμετρου, ὅταν ἕκαστος βαθμὸς ἀντιστοιχῇ πρὸς $0,4 \text{ cm}$. (Στρατιωτικὴ Σχολὴ Εὐελπίδων, 1961). (Ἀπ. $0,2 \text{ cm}^3$.)

1411. Κρᾶμα ψευδαργύρου (εἰδικὸν βάρος $7,2 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) καὶ χαλκοῦ (εἰδικὸν βάρος $8,95 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$) ζυγίζει 467 gr^* . Ὁ ὄγκος του εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 60 cm^3 . Νὰ εὐρεθῇ ὁ ὄγκος ἑκάστου συστατικοῦ μέρους. (Ἀπ. 40 cm^3 ψευδάργυρος, 20 cm^3 χαλκός.)

1412. Κόσμημα ἐκ κράματος χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἔχει βάρος εἰς τὸν ἀέρα 48 gr^* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 44 gr^* . Ποία ἡ σύνθεσις τοῦ κράματος, δεδομένου ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι $19 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ τοῦ ἀργύρου $10,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαὶ Ἀρχιτεκτόνων, Τοπογράφων, Ἀλλοδαποί, 1962). (Ἀπ. $27,94\%$ χρυσός, $72,06\%$ ἀργυρός.)

1413. Σῶμα βάρους 100 gr^* , εἰδικοῦ βάρους $3 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ἐξαρτᾶται κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι βυθισμένον μερικῶς ἐντὸς ὕδατος, καὶ ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς εὐρίσκωμεν ὅτι τὸ βάρος του ἀνέρχεται εἰς 80 gr^* . Πόσον κλάσμα τοῦ ὅγκου του εἶναι βυθισμένον. (Ἀπ. $3/5$.)

1414. Δύο σώματα ἔχουν τὴν αὐτὴν μάζαν. Ὁ ὄγκος τοῦ ἐνὸς συνίσταται κατὰ τὸ ἡμισι ἐξ ὕλικῶν εἰδικοῦ βάρους $4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ κατὰ τὸ ἡμισι ἐξ ὕλικῶν εἰδικοῦ βάρους $6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Τὸ ἕτερον σῶμα ἔχει μάζαν κατὰ τὸ ἡμισι εἰδικοῦ βάρους $4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ κατὰ τὸ ἡμισι εἰδικοῦ βάρους $6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ἀμφότερα τὰ σώματα βυθίζονται ἐντὸς ὕδατος. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐλξεων τῶν νημάτων ἐξ ὧν ἐξαρτῶνται. (Ἀπ. $96 : 95$.)

1415. Το ύψος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι 10 cm καὶ ἡ βάσις του, διαμέτρου 10 cm, καλύπτεται διὰ φύλλου μολύβδου πάχους 1 mm. Ἐὰν κατὰ τὴν τοποθέτησιν ἐντὸς ὕδατος ὁ ἐπιμολυβδωμένος κώνος ἐπιπλῇ μὲ 2 cm τοῦ ὕψους του ἐξερχόμενα τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου. Εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου $11,4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Ἀπ. $0,68 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1416. Λίθος εἶδ. βάρους $2500 \text{ kg}^*/\text{m}^3$ ζυγίζει $1,5 \text{ kg}^*$ εἰς τὸν ἀέρα. Ἐὰν ὄγκος ἐκ ξύλου $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ προσδεθῇ εἰς αὐτόν, τὸ σύνολον τούτων ζυγίζει $0,55 \text{ kg}^*$ ὑπὸ τὸ ὕδωρ. Ποῖον τὸ εἶδ. βάρος τοῦ ξύλου. (Ἀπ. $875 \text{ kg}^*/\text{m}^3$.)

1417. Τὸ βάρος σώματος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 20 gr^* . Τὸ σῶμα προσδένεται εἰς ἓνα πλωτήρα καὶ τὸ βάρος τοῦ συνόλου τούτου ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 24 gr^* ἐνῶ ὁ πλωτήρ μόνος ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγίζει 29 gr^* . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος. (Ἀπ. $0,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.)

1418. Ποσότης 90 gr^* θεικοῦ ὀξέως εἰδικοῦ βάρους $1,8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ μείγνυται μετὰ 90 gr^* ὕδατος. Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μείγματος εἶναι $1,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου, ὅταν μείγνυνται τὰ ὑγρά. (Ἀπ. $1/7$.)

1419. Τὸ βάρος ἀραιομέτρου εἶναι $24,15 \text{ gr}^*$. Τὸ κενόν του στέλεχος ἔχει (ἐξωτερικὴν) κάθετον τομὴν $0,23 \text{ cm}^2$. Ἐντὸς τοῦ στελέχους ὑπάρχει χιλιοστομετρικὴ κλίμαξ, τῆς ὁποίας ἡ ἔνδειξις μηδὲν εὐρίσκεται ἀκριβῶς ἀνωθεν τῆς διογκώσεως. Ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος τῆς διογκώσεως, μέχρι τοῦ σημείου μηδὲν τῆς κλίμακος, εἶναι $21,56 \text{ cm}^3$. Ποία ἡ ἔνδειξις τοῦ ὄργανου, ὅταν ἐπιπλῇ ἐντὸς ψυχροῦ ὕδατος. Ὅταν τὸ ἀραιόμετρον ἐπιπλῇ ἐντὸς ἐτέρου ὑγροῦ, ἡ ἔνδειξις εἶναι $3,3 \text{ cm}$. Ποία ἡ σχετικὴ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ τούτου. (Ἀπ. $11,3 \text{ cm}$, $1,08$.)

1420. Σφαιρίδιον βάρους 15 gr^* καὶ ὄγκου $2,8 \text{ cm}^3$ ἀφίεται ἐλευθέρων ἐπὶ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας ὑγροῦ, σταθερᾶς πυκνότητος $1,3 \text{ gr}/\text{cm}^3$. Δεδομένου ὅτι τὸ σφαιρίδιον φθάνει εἰς τὸν πυθμένα μετὰ πάροδον $1,8 \text{ sec}$, νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ ἐν τῷ δοχείῳ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ κίνησις διενεργεῖται ἀνευ τριβῆς. (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις, Ἀλλοδαποί, 1958). (Ἀπ. $12,22 \text{ m}$.)

1421. Δίδεται δοχεῖον περιέχον ὑγρὸν πυκνότητος d . Σῶμα πυκνότητος $d_1 < d$ ἀφίεται νὰ πῶσῃ ἀπὸ ὕψος h ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ βάθος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα καθὼς καὶ ὁ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενος χρόνος. (Στρατιωτικὴ Σχολὴ Μηχανικῶν Ἀεροπορίας (ΣΜΑ), 1961).

$$(\text{Ἀπ. } s = h \frac{d_1}{d-d_1}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{d}{d-d_1}.)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1422. Ἀερόστατον ὄγκου 2000 m^3 πληροῦται μὲ ὑδρογόνον καὶ ἰσορροπεῖ εἰς ὕψος 3000 m ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην ἡ πίεσις ἀνέρχεται εἰς 526 Torr εἰς θερμοκρασίαν 0°C . Πόσον τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ αεροστάτου. (Εἰδικὸν βάρος ἀέρος $= 0,001293 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Το όλικόν βάρος B του αεροστάτου θά είναι ίσον πρὸς τὴν ἀνωσιν A , τὴν ὁποίαν δέχεται, τούτο εἰς τὸ ὕψος τῶν 3000 m. Ἦτοι:

$$B = A \quad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τοῦ αεροστάτου καὶ ϵ' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἀνωτέρω ὕψος, ἡ σχέσηις (1) γράφεται:

$$B = \epsilon' \cdot V \quad (2)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ βάρος B τοῦ αεροστάτου, πρέπει προηγουμένως νὰ εὑρωμεν τὸ εἶδ. βάρος ϵ' τοῦ ἀέρος.

Ἐστω ϵ τὸ εἶδ. βάρος τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ὅπου ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι p , καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸ ὕψος τῶν 3000 m ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι p' . Εἶναι γνωστὸν ὅμως ἐκ τοῦ νόμου Boyle - Mariotte, ὅτι τὰ εἰδικὰ βάρη εἶναι ἀνάλογα τῶν πιέσεων καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{p'}{p} \quad \text{καί:} \quad \epsilon' = \frac{\epsilon \cdot p'}{p} \quad (3)$$

Οὕτω, λόγῳ τῆς σχέσεως (3), ἡ σχέσηις (2) γράφεται:

$$B = \frac{\epsilon \cdot p' \cdot V}{p} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως, ἦτοι: $\epsilon = 0,001293 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $p = 760 \text{ Torr}$, $p' = 526 \text{ Torr}$, $V = 2000 \text{ m}^3 = 2 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$B = 1790 \cdot 10^3 \text{ gr}^* = 1790 \text{ kgr}^*$$

1423. Ἀπὸ μιᾶς ἡμέρας εἰς τὴν ἄλλην ἡ βαρομετρικὴ πίεσις μεταβάλλεται ἀπὸ 720 Torr εἰς 710 Torr. Πόσον μεταβάλλεται ἡ δύναμις ἐπὶ ἀεροκένου κάψης, τῆς ὁποίας τὸ κάλυμμα παρουσιάζει ἐπιφάνειαν 100 cm^2 .

Λύσις. Ἡ δύναμις, ὡς γνωστὸν, εἶναι γινόμενον τῆς πίεσεως ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας καὶ συνεπῶς ἡ μεταβολὴ ΔF τῆς δυνάμεως, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια παραμένει σταθερά, θὰ εἶναι γινόμενον τῆς μεταβολῆς τῆς πίεσεως Δp ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας S . Ἦτοι:

$$\Delta F = \Delta p \cdot S \quad (1)$$

Ἡ μεταβολὴ τῆς πίεσεως ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως εἶναι:

$$\Delta p = h \cdot \epsilon = 720 - 710 \text{ Torr} = 10 \text{ Torr}$$

Τρέπομεν ταύτην εἰς gr^*/cm^2 καὶ λαμβάνομεν:

$$\Delta p = h \cdot \epsilon = 1 \cdot 13,6 = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1): $\Delta p = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, $S = 100 \text{ cm}^2$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$\Delta F = 1360 \text{ gr}^* = 1,36 \text{ kgr}^*$$

1424. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος στήλης βαρομέτρου δι' ἐλαίου, ὅταν τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου εἶναι 750 mm. (Εἰδικὸν βάρος ἐλαίου $0,92 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

Λύσις. Ἐστώσαν $h_{\epsilon\lambda}$ καὶ $h_{\epsilon\delta}$ ἀντιστοιχῶς τὸ ὕψος καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου· τότε ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαιρας θὰ εἶναι:

$$p = \epsilon_{\epsilon\lambda} \cdot h_{\epsilon\lambda} \quad (1)$$

Ἐπίσης ἔστωσαν $h_{\epsilon\delta\rho}$ καὶ $\epsilon_{\epsilon\delta\rho}$ ἀντιστοιχῶς τὸ ὕψος καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου· τότε ἡ αὐτὴ πίεσις τῆς ἀτμοσφαιρας θὰ εἶναι:

$$p = \epsilon_{\epsilon\delta\rho} \cdot h_{\epsilon\delta\rho} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\epsilon_{\epsilon\lambda} \cdot h_{\epsilon\lambda} = \epsilon_{\epsilon\delta\rho} \cdot h_{\epsilon\delta\rho} \quad \text{ἢ:} \quad h_{\epsilon\lambda} = \frac{\epsilon_{\epsilon\delta\rho} \cdot h_{\epsilon\delta\rho}}{\epsilon_{\epsilon\lambda}} \quad (3)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως: $\epsilon_{\epsilon\delta\rho} = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $h_{\epsilon\delta\rho} = 75 \text{ cm}$, $\epsilon_{\epsilon\lambda} = 0,92 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ εὐρίσκομεν:

$$h_{\epsilon\lambda} = 1108,7 \text{ cm}$$

1425. Δοχείον βάθους 110 cm περιέχει υδράργυρον μέχρις ύψους 84 cm.
 α) Μέχρι ποίου βάθους είναι δυνατόν να εξαχθῇ υδράργυρος υπεράνω τῶν χειλέων. β) Πόσον μῆκος πρέπει να ἔχῃ ἰσοσκελὴς σίφων, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις τῶν δύο παραλλήλων σωλήνων εἶναι 10 cm, διὰ νὰ εξαχθῇ ἡ μεγίστη δυνατὴ ποσότης.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων, 1959).

Λύσις. α) Τὸ ἐντὸς τοῦ υδραργύρου ἐμβαπτισμένον ἄκρον τοῦ σίφωνος, ἔστω ὅτι ἀπέχει εἰς τὴν θέσιν τοῦ μεγίστου δυνατοῦ βαθμοῦ ἀπόστασιν x ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ υδραργύρου. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$x = h - \alpha \quad (1)$$

ὅπου h ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἰς ἑκατοστόμετρα στήλης υδραργύρου καὶ α ἡ ἀπόστασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ υδραργύρου ἀπὸ τῶν χειλέων.

Δίδονται : $h = 76 \text{ cm}$ καὶ $\alpha = 110 - 84 = 26 \text{ cm}$. Ἀρα τὸ μέγιστον βάθος ἀπὸ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ εξαχθῇ υδράργυρος εἶναι :

$$x = 50 \text{ cm}$$

β) Ἐὰν l τὸ συνολικὸν μῆκος τοῦ σίφωνος, h τὸ μῆκος ἐκαστοῦ κατακορύφου σκέλους καὶ β τὸ μῆκος τοῦ ὀριζοντίου τμήματος, θὰ ἔχωμεν :

$$l = 2h + \beta \quad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν : $h = 76 \text{ cm}$ καὶ $\beta = 10 \text{ cm}$, εὐρίσκομεν :

$$l = 162 \text{ cm}$$

1426. Τὸ βάρος σώματος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 89 gr*. Ποῖον τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς τὸ κενόν. Τὸ σῶμα ἀποτελεῖται ἐξ ἀργιλίου πυκνότητος 2,7 gr/cm³. Πυκνότης σταθμῶν 8,9 gr/cm³. Πυκνότης ἀέρος 0,0013 gr/cm³.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἱατρικὴ Σχολή, Τμήμα Ὁδοντιατρικόν, 1960).

Λύσις. Ἐστώσαν B τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸ κενόν, A ἡ ἀνῶσις αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ. Ἐστώσαν ἐπίσης B' , A' καὶ ϵ' ἀντιστοίχως τὸ βάρος εἰς τὸ κενόν, ἡ ἀνῶσις ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τῶν σταθμῶν καὶ ϵ_α τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος.

Ὅταν ὁ ζυγὸς ἰσορροπῇ μὲ τὸ σῶμα καὶ τὰ σταθμὰ ἐπὶ τῶν δίσκων αὐτοῦ, τότε τὰ φαινόμενα βάρη B_φ καὶ B'_φ τοῦ σώματος καὶ τῶν σταθμῶν θὰ εἶναι ἴσα. Ἦτοι :

$$B_\varphi = B'_\varphi \quad (1)$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι : } B_\varphi = B - A \quad (2) \quad \text{καὶ : } B'_\varphi = B' - A' \quad (3)$$

$$\text{ἄρα καὶ : } B - A = B' - A' \quad (4)$$

$$\text{Ἐπίσης : } A = V \cdot \epsilon_\alpha \quad (5) \quad \text{καὶ : } A' = V' \cdot \epsilon_\alpha \quad (6)$$

ὅπου V καὶ V' οἱ ὄγκοι τοῦ σώματος καὶ τῶν σταθμῶν ἀντιστοίχως. Ἐχομεν ὅμως :

$$V = \frac{B}{\epsilon} \quad (7) \quad \text{καὶ : } V' = \frac{B'}{\epsilon'} \quad (8)$$

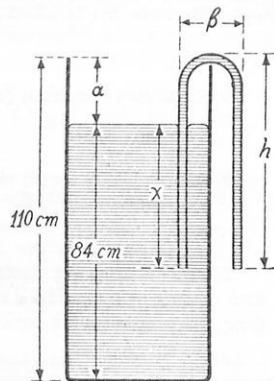
$$\text{ἐπομένως : } A = \frac{B}{\epsilon} \cdot \epsilon_\alpha \quad (9) \quad \text{καὶ : } A' = \frac{B'}{\epsilon'} \cdot \epsilon_\alpha \quad (10)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς τῶν A καὶ A' ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9) καὶ (10) εἰς τὴν (4), λαμβάνομεν :

$$B - \frac{B}{\epsilon} \cdot \epsilon_\alpha = B' - \frac{B'}{\epsilon'} \cdot \epsilon_\alpha \quad \text{ἢ : } B = B' \cdot \frac{\epsilon \cdot (\epsilon' - \epsilon_\alpha)}{\epsilon' \cdot (\epsilon - \epsilon_\alpha)} \quad (11)$$

Δίδονται : $\epsilon = 2,7 \text{ gr/cm}^3$, $\epsilon' = 8,9 \text{ gr/cm}^3$, $\epsilon_\alpha = 0,0013 \text{ gr/cm}^3$, ἐπειδὴ δὲ τὰ σταθμὰ ὡς ἔχοντα μάζαν 89 gr θὰ ἔχουν καὶ βάρος 89 gr*, θὰ εἶναι $B' = 89 \text{ gr}^*$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν :

$$B = 89,03 \text{ gr}^*$$



*Άσκησις 1425.

1427. Πόση ή πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0 °C ὑπὸ πίεσιν 285 Torr. (Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0 °C καὶ 760 Torr εἶναι 0,001293 gr/cm³).

Λύσις. Ὄταν ἡ θερμοκρασία ἐνὸς ἀερίου παραμένῃ σταθερά, τότε αἱ πυκνότητες αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀσκουμένων πιέσεων, ἤτοι :

$$\frac{p}{p'} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), λύοντες ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην πυκνότητα ρ , λαμβάνομεν :

$$\rho = \frac{p' \cdot \rho'}{p} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $p' = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$, $p = 285 \text{ Torr}$, $p' = 760 \text{ Torr}$, εὐρίσκομεν :

$$\rho = 4,849 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm}^3$$

1428. Ὑπὸ ποίαν πίεσιν εἰς 1 atm καταλαμβάνει 1 gr ἀέρος εἰς 0 °C ὅγκον 20 cm³. ($\rho = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$).

Λύσις. Ὁ ὅγκος 1 gr ἀέρος ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν* εἶναι :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{0,001293} \text{ cm}^3 \quad (1)$$

Βάσει τοῦ νόμου τῶν Boyle - Mariotte : $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$, ἔχομεν :

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $p_1 = 1 \text{ atm}$, $V_1 = 1/0,001293 \text{ cm}^3$ καὶ $V_2 = 20 \text{ cm}^3$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$p_2 = 39 \text{ atm}$$

1429. Μᾶζα ὀξυγόνου καταλαμβάνει ὅγκον 2 λίτρων ὑπὸ πίεσιν 750 Torr. Πόσος ὁ ὅγκος αὐτῆς ὑπὸ πίεσιν 1000 Torr, ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά, ἰσχύει ὁ νόμος Boyle - Mariotte.

Ἐὰν καλέσωμεν V τὸν ζητούμενον ὅγκον ὀξυγόνου ὑπὸ πίεσιν p καὶ V' τὸν ὅγκον αὐτοῦ ὑπὸ πίεσιν p' , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$p \cdot V = p' \cdot V' \quad \text{καί :} \quad V = \frac{p' \cdot V'}{p} \quad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) τὰ δεδομένα : $p' = 750 \text{ Torr}$, $V' = 2 \text{ lt}$ καὶ $p = 1000 \text{ Torr}$, εὐρίσκομεν :

$$V = 1,5 \text{ lt}$$

1430. Δέκα λίτρα ὕδρογόνου ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας περιέχονται ἐντὸς κυλίνδρου ἐφωδιασμένου δι' ἐμβολέως. Ὁ ἐμβολεὺς μετακινεῖται, τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης σταθερᾶς, μέχρις ὅτου ὁ ὅγκος τοῦ ἀερίου ἐλαττωθῇ εἰς 2 λίτρα. Πόση ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά, θὰ ἰσχύῃ ὁ νόμος Boyle - Mariotte :

$$p \cdot V = p' \cdot V' \quad (1)$$

καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ζητούμενη πίεσις τοῦ ἀερίου θὰ εἶναι :

$$p = \frac{p' \cdot V'}{V} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (2) τὰ δεδομένα : $p' = 1 \text{ at}$, $V' = 10 \text{ lt}$, $V = 2 \text{ lt}$, εὐρίσκομεν :

$$p = 5 \text{ at}$$

1431. Μάζα αερίου υπό ατμοσφαιρικήν πίεσιν 760 Torr καταλαμβάνει όγκον 5 λίτρων. Εάν ή πίεσις ελάττωθῇ εἰς 200 Torr, χωρίς ή θερμοκρασία νά μεταβληθῇ, πόσος ό όγκος τῆς αερίου μάζης.

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου Boyle - Mariotte : $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$, ἔχομεν :

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} \quad (1)$$

καί ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $p_1 = 760 \text{ Torr}$, $V_1 = 5 \text{ lt}$ καί $p_2 = 200 \text{ Torr}$, εὐρίσκομεν :

$$V_2 = 19 \text{ lt}$$

1432. Δοχεῖον όγκου 10 lt περιέχει όξυγόνον πίεσεως 6 ατμοσφαιρῶν. Τό δοχεῖον τοῦτο συνδέεται πρὸς ἕτερον δοχεῖον όγκου 5 lt περιέχον ἀέρα υπό πίεσιν 3 ατμοσφαιρῶν. Ὑπολογίσατε τήν τελικήν πίεσιν.

(Δημοσία Σχολή Ὑπομηχανικῶν Ἀθηνῶν, 1962).

Λύσις. Καλοῦμεν V_1 τόν όγκον τοῦ όξυγόνου καί p_1 τήν πίεσιν αὐτοῦ, V_2 τόν όγκον τοῦ ἀέρος καί p_2 τήν πίεσιν αὐτοῦ. Εάν τώρα θεωρήσωμεν ὅτι τὰ δύο δοχεῖα συνδέονται μεταξύ των, ό όγκος τοῦ μίγματος όξυγόνου καί ἀέρος θά εἶναι προφανῶς $V_1 + V_2$, ή δέ πίεσις τήν ὁποίαν θά ἀσκή τὸ μίγμα ἔστω p . Συμφώνως πρὸς τόν νόμον Boyle - Mariotte θά ἰσχύη διὰ τὸ όξυγόνον ή σχέσις :

$$(V_1 + V_2) \cdot p'_1 = V_1 \cdot p_1 \quad (1)$$

όπου p'_1 εἶναι ή πίεσις τοῦ όξυγόνου ἐντὸς τοῦ νέου όγκου $V_1 + V_2$, καί διὰ τόν ατμοσφαιρικόν ἀέρα θά ἰσχύη ή σχέσις :

$$(V_1 + V_2) \cdot p'_2 = V_2 \cdot p_2 \quad (2)$$

όπου p'_2 εἶναι ή πίεσις τοῦ ατμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ όγκου $V_1 + V_2$.

Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν σχέσεων (1) καί (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(V_1 + V_2) (p'_1 + p'_2) = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 \quad (3)$$

ἐπειδὴ ὁμως εἶναι : $p'_1 + p'_2 = p$ (νόμος τοῦ Dalton), ή σχέσις (3) γράφεται :

$$(V_1 + V_2) \cdot p = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 \quad (4)$$

Λύομεν τήν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τήν ζητούμενην πίεσιν p , ὁπότε προκύπτει :

$$p = \frac{V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2}{V_1 + V_2} \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τήν (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $V_1 = 10 \text{ lt}$, $p_1 = 6 \text{ Atm}$, $V_2 = 5 \text{ lt}$, $p_2 = 3 \text{ Atm}$, εὐρίσκομεν :

$$p = 5 \text{ Atm}$$

1433. Φυσαλλίς ἀέρος, ὑφουμένη ἐκ τοῦ πυθμένος μιᾶς λίμνης μέχρι τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, αὐξάνει τόν όγκον της ἀπὸ 2 cm^3 εἰς 5 cm^3 . Ὑπολογίσατε τὸ βάθος τῆς λίμνης.

Λύσις. Ἐστῶσαν V_1 ό όγκος τῆς φυσαλλίδος, ὅταν αὕτη εὐρίσκεται εἰς τόν πυθμένα καί V_2 ὅταν εὐρίσκεται εἰς τήν ἐπιφάνειαν. Εάν εἰς τόν πυθμένα ή φυσαλλίς ὑφίσταται πίεσιν p_1 καί εἰς τήν ἐπιφάνειαν πίεσιν p_2 (ἀεροστατική πίεσις), ή πίεσις p_1 θά εἶναι ἴση πρὸς $p_2 + p$, ὅπου p εἶναι ή ὑδροστατική πίεσις, καί συνεπῶς δυνάμεθα συμφώνως πρὸς τόν νόμον Boyle - Mariotte νά γράψωμεν τήν σχέσιν :

$$(p_2 + p) \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ἢ} : \quad p_2 \cdot V_1 + p \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁμως ή ὑδροστατική πίεσις p_2 ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ϵ τοῦ ὕδατος εἰς τὸ βάθος h τῆς λίμνης ($p = \epsilon \cdot h$), ή ἀνωτέρω σχέσις (1) γίνεται :

$$p_2 \cdot V_1 + \epsilon \cdot h \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad (2)$$

Λύομεν τήν σχέσιν (2) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον βάθος h τῆς λίμνης, ὅτε λαμβάνομεν :

$$h = \frac{p_2 \cdot (V_2 - V_1)}{\epsilon \cdot V_1} \quad (3)$$

Θέτοντες εις τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $V_1 = 2 \text{ cm}^3$, $V_2 = 5 \text{ cm}^3$, $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $p_2 = 1033 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, εὐρίσκομεν:

$$h = 1550 \text{ cm} = 15,5 \text{ m}$$

1434. Ἐὰν ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ ἓν σκέλος ἀνοικτοῦ μανομέτρου εὐρίσκεται κατὰ 57 cm ὑψηλότερον ἢ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος, πόση ἡ πίεσις εἰς gr^*/cm^2 , ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ αἰρίου τοῦ περιεχομένου εἰς δοχεῖον, τὸ ὁποῖον συγκοινωνεῖ πρὸς τὸ σκέλος τοῦ μανομέτρου, ὅπου ὁ ὑδραργυρος εὐρίσκεται εἰς ταπεινότεραν στάθμην. (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, βαρομετρικὴ πίεσις 760 Torr).

Λύσις. Ἡ πίεσις p τοῦ αἰρίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως p_1 καὶ τῆς πίεσεως p_2 τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἡ στήλη h τοῦ ὑδραργύρου. Ἦτοι:

$$p = p_1 + p_2 \quad (1)$$

Εἶναι ὁμῶς $p_1 = \epsilon \cdot h_1$ καὶ $p_2 = \epsilon \cdot h$ ὅπου ϵ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου, h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα καὶ h_1 τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ βαρομέτρου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι:

$$p = \epsilon \cdot (h_1 + h) \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2): $\epsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $h = 57 \text{ cm}$, $h_1 = 76 \text{ cm}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$p = 1810 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

1435. Εἰς ἀνοικτὸν μανόμετρον ἡ διαφορά στάθμης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη εἶναι 24 cm . Τὸ βαρόμετρον δεικνύει πίεσιν 750 Torr . Εἰς ποῖον κλάσμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως ἀντιστοιχεῖ ἡ πίεσις τοῦ αἰρίου.

Λύσις. Ἐστω p ἡ πίεσις τοῦ αἰρίου εἰς τὸν πρὸς μέτρησιν ὥρον. Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς πίεσεως τοῦ αἰρίου καὶ τῆς πίεσεως τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἡ διαφορά στάθμης τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, ἡ ὁποία εἶναι 240 mm . Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$750 = 240 + p \quad \text{ἐξ οὗ: } p = 510 \text{ Torr}$$

Ἡ πίεσις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς κλάσμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως:

$$510/760 = 0,671$$

1436. Βαρομετρικὸς σωλῆν ἔχει μῆκος 85 cm καὶ τομὴν 1 cm^2 , ἡ δὲ ὑδραργυρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 75 cm . Ἐν τῷ σωλῆνι εἰσάγεται ποσότης ἀέρος, ἡ ὁποία, ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, καταλαμβάνει ὄγκον 1 cm^3 . Νὰ υπολογισθῇ ἡ πτώσις τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης.

Λύσις. Ἀς καλέσωμεν x τὴν πτώσιν τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, p τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, V τὸν ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν ὄγκον τοῦ εἰσαχθέντος ἀέρος καὶ V' τὸν νέον ὄγκον αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Boyle - Mariotte, θὰ ἔχωμεν:

$$p \cdot V = x \cdot V' \quad (1)$$

διότι προφανῶς x εἶναι ἡ νέα πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν S ἡ διατομὴ τοῦ σωλῆνος καὶ $h = (x + 10) \text{ cm}$ τὸ ὕψος τοῦ σωλῆνος ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου, ἡ ἐξίσωσις (1) μετατρέπεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$p \cdot V = x \cdot S \cdot h \quad (2)$$

Δίδονται: $p = 75 \text{ cm}$ στήλης ὑδραργύρου, $V = 1 \text{ cm}^3$, $S = 1 \text{ cm}^2$, $h = (x + 10) \text{ cm}$, ὅπου x ἐκφράζεται εἰς cm . Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$75 \cdot 1 = x \cdot 1 \cdot (x + 10) \quad \text{ἢ: } x^2 + 10x - 75 = 0$$

εκ της οποίας λαμβάνομεν :

$$x = 5 \text{ cm} \quad \eta : \quad x = -15 \text{ cm}$$

Προφανώς η άρνητική τιμή απορρίπτεται, οπότε ως μοναδική λύσις διά την πτώσιν της υδραργυρικής στήλης παραμένει :

$$x = 5 \text{ cm}$$

1437. Ο όγκος ενός αεροστάτου είναι 500 m^3 και πληροῦται δι' υδρογόνου πυκνότητας $0,089 \text{ gr/lit}$. Ἡ πυκνότης τοῦ περιβάλλοντος αέρος είναι $1,250 \text{ gr/lit}$. Πόση είναι ἡ άνυψωτική δύναμις τοῦ αεροστάτου.

Λύσις. Ἡ άνυψωτική δύναμις F τοῦ αεροστάτου δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$F = A - B \quad (1)$$

ὅπου A εἶναι ἡ άνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ αερόστατον καὶ B τὸ βάρος αὐτοῦ.

Ἐάν καλέσωμεν $\epsilon_{\text{υδρ}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ υδρογόνου, $\epsilon_{\text{αέρ}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ αέρος καὶ V τὸν ὄγκον τοῦ αεροστάτου, τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$A = \epsilon_{\text{αέρ}} \cdot V \quad (2) \quad B = \epsilon_{\text{υδρ}} \cdot V \quad (3)$$

καὶ ἐπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$F = \epsilon_{\text{αέρ}} \cdot V - \epsilon_{\text{υδρ}} \cdot V \quad \eta : \quad F = V \cdot (\epsilon_{\text{αέρ}} - \epsilon_{\text{υδρ}}) \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $V = 500 \cdot 10^3 \text{ lit}$, $\epsilon_{\text{υδρ}} = 0,089 \text{ gr/lit}$, $\epsilon_{\text{αέρ}} = 1,25 \text{ gr/lit}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 580,5 \cdot 10^3 \text{ gr}^* = 580,5 \text{ kg}^*$$

1438. Ἀερόστατον ἔχει χωρητικότητα 1000 m^3 . Νὰ υπολογισθῇ ἡ άνυψωτική δύναμις αὐτοῦ, ὅταν τοῦτο εἶναι πλήρες ἀερίου ἡλίου. (Μέση πυκνότης αέρος $1,25 \text{ gr/lit}$, ἡλίου $0,178 \text{ gr/lit}$).

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἀσκήσιν 1437, οὕτω καὶ ἐδῶ ἰσχύει ἡ σχέση $F = A - B$ (1). Ἐπειδὴ $A = \epsilon_{\text{αέρ}} \cdot V$ καὶ $B = \epsilon_{\text{ηλ}} \cdot V$, ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$F = V \cdot (\epsilon_{\text{αέρ}} - \epsilon_{\text{ηλ}}) \quad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $V = 1000 \cdot 10^3 \text{ lit}$, $\epsilon_{\text{ηλ}} = 0,178 \text{ gr/lit}$, $\epsilon_{\text{αέρ}} = 1,25 \text{ gr/lit}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$F = 1072 \cdot 10^3 \text{ gr}^* = 1072 \text{ kg}^*$$

1439. Ἐξερευνητικὸν αερόστατον μετεωρολογίας πληροῦται υδρογόνου, ὥστε νὰ παρουσιάσῃ άνυψωτικὴν δύναμιν 125 gr^* . Τὸ βάρος τοῦ ἐλαστικοῦ σάκκου εἶναι 30 gr^* . Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ υδρογόνου. (Πυκνότης αέρος $1,250 \text{ gr/lit}$, υδρογόνου $0,090 \text{ gr/lit}$).

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Σχολὴ Ἱατρικὴ, 1961).

Λύσις. Ἡ άνυψωτικὴ δύναμις F τοῦ αεροστάτου θὰ εἶναι :

$$F = A - B_{\text{ολ}} \quad (1)$$

ὅπου A ἡ άνωσις τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ αερόστατον καὶ $B_{\text{ολ}}$ τὸ συνολικὸν βάρος αὐτοῦ. Τὸ συνολικὸν βάρος $B_{\text{ολ}}$ εἶναι ἀθροισμα τοῦ βάρους τοῦ υδρογόνου $B_{\text{υδρ}}$ καὶ τοῦ βάρους τοῦ σάκκου $B_{\text{σак}}$. Ἀρα ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$F = A - B_{\text{υδρ}} - B_{\text{σак}} \quad (2)$$

Ἐάν καλέσωμεν V τὸν ζητούμενον ὄγκον τοῦ υδρογόνου, $\epsilon_{\text{αέρ}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ αέρος καὶ $\epsilon_{\text{υδρ}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ υδρογόνου, τότε : $A = \epsilon_{\text{αέρ}} \cdot V$ καὶ $B_{\text{υδρ}} = \epsilon_{\text{υδρ}} \cdot V$. Συνεπῶς ἡ σχέση (2) γράφεται :

$$F = \epsilon_{\text{αέρ}} \cdot V - \epsilon_{\text{υδρ}} \cdot V - B_{\text{σак}} \quad \eta : \quad F = V \cdot (\epsilon_{\text{αέρ}} - \epsilon_{\text{υδρ}}) - B_{\text{σак}} \quad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὸν ζητούμενον ὄγκον V καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{F + B_{\text{σак}}}{\epsilon_{\text{αέρ}} - \epsilon_{\text{υδρ}}} \quad (4)$$

Θέτοντες εις την σχέσηιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως : $F = 125 \text{ gr}^*$, $B_{\text{αρχ}} = 30 \text{ gr}^*$, $\epsilon_{\lambda\eta\rho} = 1,25 \text{ gr}^*/\text{lt}$, $\epsilon_{\nu\delta\rho} = 0,090 \text{ gr}^*/\text{lt}$, εὐρίσκομεν :

$$V = 134 \text{ lt}$$

1440. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον εἶναι τοποθετημένον εἰς ἀνελκυστήρα. Ποῖαι αἱ ἐνδείξεις αὐτοῦ: α) Κατὰ τὴν ἀνοδὸν τοῦ ἀνελκυστήρος ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν $0,7 \text{ m/sec}^2$. β) Κατὰ τὴν ἀνοδὸν αὐτοῦ μὲ ἐπιβράδυνσιν $0,7 \text{ m/sec}^2$ ὡσαύτως. γ) Κατὰ τὴν κάθοδον μὲ ἐπιτάχυνσιν $0,7 \text{ m/sec}^2$. δ) Κατὰ τὴν κάθοδον μὲ ἐπιβράδυνσιν $0,7 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. Κατὰ τὴν ἀνοδὸν μὲ σταθερὸν ἐπιτάχυνσιν, ἐπὶ τῆς βάσεως τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλήνος ἀσκήεται δύναμις F_1 προερχομένη ἀπὸ τὴν ὑπόλοιπον μᾶζαν τοῦ ἐντὸς τῆς λεκάνης ὑδραργύρου. Ἡ συνισταμένη Σ_1 αὐτῆς καὶ τοῦ βάρους τῆς στήλης ἀποτελεῖ τὴν ἐπιταχύνουσαν δύναμιν ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου. Ἦτοι :

$$\Sigma_1 = F_1 - B \quad \eta : \quad F_1 = \Sigma_1 + B \quad (1)$$

Ἔχομεν ὁμῶς :

$$\Sigma_1 = m \cdot \gamma \quad (2)$$

καὶ ἐπομένως :

$$F = B + m \cdot \gamma \quad \eta : \quad F = m(g + \gamma) \quad (3)$$

Ἐὰν καλέσωμεν S τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ σωλήνος, θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῆς σχέσεως (3) :

$$p = \frac{F}{S} \quad \eta : \quad p = \frac{m}{S}(g + \gamma) \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν h_1 τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργύρου, ρ τὴν πυκνότητα καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$m = V \cdot \rho \quad \eta : \quad m = \frac{S \cdot h_1 \cdot \epsilon}{g} \quad (5)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$p = \frac{h_1 \cdot \epsilon}{g}(g + \gamma) \quad (6)$$

Ἡ πίεσις p εἶναι ἐξ ἄλλου ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν, ἣτις δίδεται καὶ ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$p = h_0 \cdot \epsilon \quad (7)$$

ὅπου h_0 ἡ ἐνδείξις τοῦ ἐν ἡρεμίᾳ εὐρισκομένου βαρομέτρου καὶ ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7) λαμβάνομεν τὴν τελικὴν σχέσιν :

$$h_1 = h_0 \cdot \frac{g}{g + \gamma} \quad (8)$$

Θέτομεν : $h_0 = 0,76 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$, $\gamma = 0,7 \text{ m/sec}^2$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$h_1 = 0,709 \text{ m} = 70,9 \text{ cm}$$

β) Κατὰ τὴν ἀνοδὸν μὲ ἐπιβράδυνσιν ἀντὶ τῆς σχέσεως (1) θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις :

$$\Sigma_2 = B - F_2 \quad \eta : \quad F_2 = m(g - \gamma) \quad (9)$$

καὶ κατ' ἀναλογίαν ἡ τελικὴ σχέσηις θὰ εἶναι :

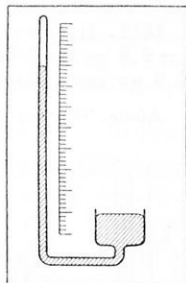
$$h_2 = h_0 \cdot \frac{g}{g - \gamma} \quad (10)$$

ὅτε, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων, προκύπτει :

$$h_2 = 81,8 \text{ cm}$$

γ) Κατὰ τὴν κάθοδον μὲ ἐπιτάχυνσιν αἱ ἀντίστοιχοι σχέσεις θὰ εἶναι :

$$\Sigma_3 = B - F_3 \quad \eta : \quad F_3 = m(g - \gamma) \quad (11)$$



και η τελική σχέσις θα είναι :

$$h_3 = h_0 \cdot \frac{g}{g - \gamma} \quad (12)$$

εκ τής οποίας προκύπτει ότι :

$$h_3 = 81,8 \text{ cm}$$

δ) Κατά την κάθοδον με επιβράδυνσιν θα έχωμεν :

$$\Sigma_4 = F_4 - B \quad \eta : \quad F_4 = m(g + \gamma)$$

και η τελική σχέσις θα είναι :

$$h_4 = h_0 \cdot \frac{g}{g + \gamma}$$

εκ τής οποίας προκύπτει ότι :

$$h_4 = 70,9 \text{ cm}$$

1441. Πόσον είναι τὸ μέγιστον ὕψος h_1 , ἐκ τοῦ οὗ οὗ ὑγρὸν πυκνότητος $\rho = 0,8 \text{ gr/cm}^3$ δύναται νὰ μεταγισθῇ διὰ σίφωνος. (Πυκνότης ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$, βαρομετρικὴ πίεσις $76,2 \text{ cm Hg}$).

Λύσις. Ἡ πίεσις p τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ ἐν λόγω ὑγρὸν πρέπει, ὅταν τοῦτο ἔχῃ ὕψος h_1 , νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως p_1 . Ἐπειδὴ δὲ $p = \rho \cdot g \cdot h_1$ καὶ $p_1 = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_{\text{Hg}}$, ὅπου ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ, ρ_{Hg} ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου καὶ h_{Hg} τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ βαρομέτρου, θὰ έχωμεν :

$$\rho \cdot h_1 = \rho_{\text{Hg}} \cdot h_{\text{Hg}}$$

Οὕτως, ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος h_1 δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

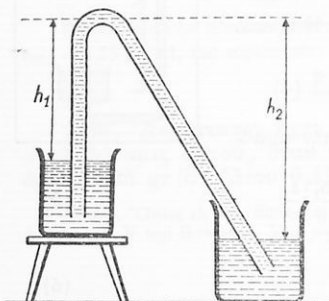
$$h_1 = \frac{\rho_{\text{Hg}} \cdot h_{\text{Hg}}}{\rho}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως :

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ gr/cm}^3, h_{\text{Hg}} = 76,2 \text{ cm}, \rho = 0,8 \text{ gr/cm}^3$$

εὐρίσκομεν ὅτι :

$$h_1 = 1295,4 \text{ cm}$$



ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1442. Κοίλη μεταλλική σφαῖρα ἔχει ὄγκον 120 cm^3 καὶ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 75 gr^* . Ποῖον θὰ εἶναι τὸ βάρος τῆς ἐντὸς : α) ὑδρογόνου, β) διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος. Δίδεται ὅτι 1 λίτρον ὑδρογόνου ζυγίζει $0,09 \text{ gr}^*$, 1 λίτρον διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος ζυγίζει $1,98 \text{ gr}^*$, 1 λίτρον ἀέρος ζυγίζει $1,29 \text{ gr}^*$. (Ἀπ. $75,144 \text{ gr}^*$, $74,917 \text{ gr}^*$.)

1443. Τεμάχιον μολύβδου ὄγκου 1 cm^3 καὶ φελλὸς ὄγκου 45 cm^3 εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ ἐπὶ δίσκων μικροῦ ζυγοῦ ἐντὸς ἀέρος πυκνότητος $1,25 \text{ gr/l}$. Ὁ ζυγὸς τοποθετεῖται ἀκολουθῶς κάτωθεν κώδωνος, ὅστις κενοῦται ἀέρος ἐντελῶς. Ποῖον σῶμα θὰ εἶναι τῶρα βαρύτερον καὶ κατὰ πόσον. (Ἀπ. $0,055 \text{ gr}^*$.)

1444. Κυλινδρικὸν δοχεῖον ὕψους 35 cm καὶ ἀκτίνος βάσεως 5 cm περιέχει ὀλίγον ὕδωρ, τὸ ὁποῖον βράζει μέχρις ὅτου ἐκδιωχθῇ τοῦ δοχείου ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ ὅλος ὁ ἐν αὐτῷ ὑπάρχων ἀήρ. Πωματίζεται καλῶς τὸ δοχεῖον καὶ ἀκολουθῶς ψύχεται. Ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ πίεσις τοῦ δοχείου φθάσῃ τὰ 2 cm Hg , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις εἰς χιλιόγραμμα ἐπὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. (Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 76 cm Hg .) (Ἀπ. 1107 kg^* .)

1445. Ἐάν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 720 Torr, ποία ἡ ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἀσκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ σώματος ἀνθρώπου συνολικῆς ἐπιφανείας $1,35 \text{ m}^2$. (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (Ἀπ. 13 219 kg^* .)

1446. Ἐπιδίδωκεται ἡ κατασκευὴ ἀεροστάτου, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἐκτόπισμα ὀλίκοῦ βάρους, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ περικαλύμματος τοῦ, ἐξ 150 kg^* . Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περικαλύμματος. Πυκνότης τοῦ ἀέρος = $1,29 \text{ gr}/\text{lt}$, τοῦ ὑδρογόνου = $0,09 \text{ gr}/\text{lt}$. (Ἀπ. $125 \cdot 10^3 \text{ lt}$.)

1447. Ἐάν ἡ γηίνη ἀτμόσφαιρα ἦτο ὁμογενὴς καὶ εἶχε τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος καθ' ὅλον τὸ ὕψος αὐτῆς, πόσον θὰ ἦτο τὸ πάχος τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς km, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1 ἀτμόσφαιρα. ($\rho_{\text{air}} = 0,001293 \text{ gr}/\text{cm}^3$). (Ἀπ. 8 km.)

1448. Παρὰ τὴν στάθμην τῆς θαλάσσης, ἡ στήλη ὑδραργύρου ἑνὸς βαρομέτρου ἔχει ὕψος 76 cm. Ζητεῖται τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μεταφερθῇ τὸ βαρόμετρον, ὥστε ἡ στήλη ὑδραργύρου αὐτοῦ νὰ κατέλθῃ κατὰ 1 mm. Ὑποτίθεται ὅτι ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ ἔχει σταθερὰν πυκνότητα ἐντὸς τῆς ὑπ' ὅψιν περιοχῆς καὶ ὅτι 1 λίτρον ἀέρος ζυγίζει $1,3 \text{ gr}^*$. Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1958). (Ἀπ. $h = 10,44 \text{ m}$.)

1449. Ποία ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν καταδυτικοῦ κώδωνος, τοῦ ὁποῖου ἡ κατωτέρα ἐπιφάνεια εὐρίσκεται 10 m ὑπὸ στὴν στάθμην τοῦ ὕδατος, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἀνέρχεται εἰς 760 Torr. (Ἀπ. 1496 Torr.)

1450. Νὰ υπολογισθῇ ἡ πίεσις εἰς βάθος 100 m κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἡμέραν, καθ' ἣν τὸ βαρόμετρον δεικνύει 75,0 cm στήλης ὑδραργύρου. Νὰ δοθῇ ἡ ἀπάντησις: α) εἰς cm στήλης ὑδραργύρου, β) εἰς cm καθαροῦ ὕδατος, γ) εἰς gr^*/cm^2 , δ) εἰς dyn/cm^2 . Πυκνότης θαλασσίου ὕδατος = $1,05 \text{ gr}/\text{cm}^3$. (Ἀπ. α' 847,1 cm Hg, β' 11 250 cm ὕδατος, γ' 11 250 gr^*/cm^2 , δ' $1,13 \cdot 10^7 \text{ dyn}/\text{cm}^2$.)

1451. Παροχὴ ἀερίου συνδέεται πρὸς μανομετρικὸν σωλῆνα σχήματος U περιέχοντα ὕδωρ. Ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὕδατος εἶναι 11 cm. Νὰ εὐρεθῇ, εἰς dyn/cm^2 , κατὰ πόσον ὑπερέχει τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως ἡ πίεσις τῆς παροχῆς ἀερίου. (Ἀπ. 10 791 dyn/cm^2 .)

1452. Πραγματοποιεῖται τὸ πείραμα τοῦ Torricelli μὲ γλυκερίνην. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται τὸ ὑγρὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 760 Torr. (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, γλυκερίνης $1,25 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (Ἀπ. 8,27 m.)

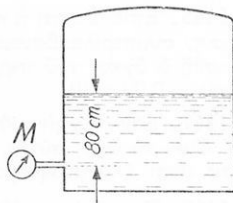
1453. Δύο δοχεῖα, Α καὶ Β, συνδέονται διὰ βραχέος σωλῆνος μετὰ κλειστῆς στρόφιγγος. Τὸ δοχεῖον Α, χωρητικότητος 650 cm^3 , εἶναι πλήρες ἀέρος ὑπὸ ἀτμοσφαιρικῆν πίεσιν, ἐνῶ τὸ Β, τοῦ ὁποῖου ὁ ὄγκος εἶναι 350 cm^3 , εἶναι κενὸν ἀέρος. Ἀνοίγομεν τὴν στρόφιγγα. Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις εἰς ἕκαστον δοχεῖον. (Τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου εἶναι 750 Torr). (Ἀπ. 48,75 cm Hg.)

1454. Πρὸς ἐκδίωξιν τῶν θαλασσερμάτων ὑποβρυχίου χρησιμοποιεῖται πεπιεσμένος ἀήρ, ἔχων πίεσιν κατὰ 25 at μεγαλυτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, ἀνερχομένης εἰς 740 Torr. Μετὰ τὸ πέρασ τῆς ἐκδιώξεως, ἡ ὁποία συντελεῖται ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, ὁ χρησιμοποιοηθεὶς πεπιεσμένος ἀήρ καταλαμβάνει ὄγκον πενταπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ. Κατὰ πόσον ἡ νέα πίεσις αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὴν ἀτμοσφαιρικήν. (Ἀπ. 4,2 at.)

1455. Τέλειον ἀέριον ἔχει μοριακὸν βάρος 44 καὶ εὐρίσκεται ἐντὸς κλειστοῦ δοχείου περιεκτικότητος 1500 cm^3 ὑπὸ πίεσιν 2 ἀτμοσφαιρῶν καὶ θερμοκρασίαν 75°C . Νὰ εὐρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀερίου. (Ἀπ. 4,62 gr^* .) (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἐξ Ἀλλοδαπῆς σπουδασταί, 1958).

1456. Ποία πίεσις επικρατεί εις τὸν ἀέριον χῶρον λέβητος πίεσεως, ὅταν τὸ μανόμετρον M δεικνύη ὑπερπίεσιν 2,450 at. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἰσοῦται πρὸς 730 Torr, ἡ δὲ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνειᾳ τοῦ ὑγροῦ, πυκνότητος $0,85 \text{ gr/cm}^3$, ἀπέχει κατὰ 80 cm ἀπὸ τὸν σωλῆνα συνδέσεως μετὰ τοῦ μανομέτρου.

(Ἀπ. Ἡ ὑπὸ τοῦ μανομέτρου δεικνυομένη πίεσις εἶναι $2,450 + (1,033 \cdot 730)/760 = 3,442 \text{ at.}$ Δι' ἀφαιρέσεως ἐκ ταύτης τῆς πίεσεως τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ $0,08 \cdot 0,85 = 0,068 \text{ at}$ ἔχομεν $p = 3,374 \text{ at.}$)



*Ασκήσις 1456.

1457. Ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος $1,2 \text{ gr/cm}^3$, σταθερᾶς θερμοκρασίας, καὶ εἰς βάθος 60 cm ἀπὸ τῆς ἐλευθέρᾳ του ἐπιφάνειας, εὐρίσκεται μικρὰ φυσαλλίς ἀέρος ἔχουσα ὄγκον $9/10 \text{ cm}^3$, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 760 Torr. Ποῖος ὁ ὄγκος τῆς φυσαλλίδος, ὅταν ἡ πίεσις ἐλαττωθῇ κατὰ 8 Torr. Πυκνότης ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. $0,221 \text{ cm}^3$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1958).

1458. Ἐὰν εἰς βαρομετρικὸν σωλῆνα χρησιμοποιήσωμεν ὕδωρ ἀντὶ ὑδραργύρου, μέχρι ποίου ὕψους θὰ ἀνέλθῃ τοῦτο καὶ διατί. Διατί, ὅταν εἰσαχθῇ ἀήρ ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος, αἰετῶνδείξεις εἶναι λανθασμένα. Πυκνότης $\text{Hg} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. 10,336 m.)

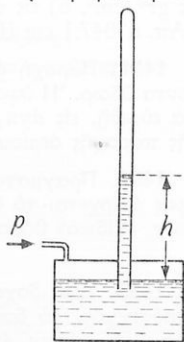
(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Σχολή Ἱατρική, Τμήμα Ὀδοντιατρικόν, 1960).

1459. Αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου εἰς κλειστὸν μανόμετρον εὐρίσκονται, διὰ πίεσιν 750 Torr καὶ θερμοκρασίαν 20°C , εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐνῶ ὁ βαρομετρικὸς θάλαμος περιέχει 50 cm^3 (τομὴ σωλῆνος 1 cm^2 , πυκνότης ὑδραργύρου $\rho = 13,595 \text{ gr/cm}^3$). Ποίαν πίεσιν p , εἰς at, δεικνύει τὸ μανόμετρον, δι' ἀνοδὸν τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου καθ' ὕψος $h = 20 \text{ cm}$, τῆς θερμοκρασίας παραμενοῦσης στοθερᾶς.

$$\begin{aligned} (\text{Απ. } p = h\rho + p_1, \text{ ὅπου } p_1 = (p_0 V_0)/V_1 = \\ = \frac{1,033 \cdot 750 \cdot 50}{30 \cdot 760} = 1,699 \text{ at, ἄρα } p = 1,971 \text{ at.}) \end{aligned}$$

1460. Βαρομετρικὸς σωλὴν διατομῆς $S = 1 \text{ cm}^2$, πλήρης ὑδραργύρου, εἶναι βυθισμένος ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου. Τὸ ὕψος h τοῦ βαρομετρικοῦ κενοῦ εἶναι 3 cm. Κατὰ πόσον θὰ κατέλθῃ ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ὅταν εἰς τὸ κενὸν εἰσαχθῇ ἀήρ ὄγκου 1 cm^3 .

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1959).



*Ασκήσις 1459.

1461. Ἐὰν πομφόλυξ εἰς τὸν πυθμένα λίμνης βάθους 8 m καταλαμβάνῃ ὄγκον $0,001 \text{ cm}^3$, ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς, ὅταν ἀνέρχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Δίδεται ὡς βαρομετρικὴ πίεσις 740 mm Hg καὶ εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. $0,0018 \text{ cm}^3$.)

1462. Ἐν λίτρον ἀέρος ζυγίζει $1,293 \text{ gr}^*$ εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg. Πόσον τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $4 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. ($\epsilon_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. 5 gr/cm^3 .)

1463. Μίγμα ὀξυγόνου καὶ ἀζώτου περιέχει 20% κατ' ὄγκον ἐκ τοῦ πρώτου. Ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου εἶναι $1,429 \text{ gr/lit}$ καὶ τοῦ ἀζώτου $1,251 \text{ gr/lit}$. Νὰ υπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ μίγματος. (Ἀπ. $1,2865 \text{ gr/lit}$.)

1464. Φιάλη πλήρης αέρος ζυγίζει $21,29 \text{ gr}^*$ και πλήρης διοξειδίου του άνθρακος $21,63 \text{ gr}^*$. Ὁ ὄγκος τῆς φιάλης εἶναι 510 cm^3 . Δεδομένου ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ αέρος κατὰ τὸ πείραμα εἶναι $1,24 \text{ gr/lit}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ διοξειδίου τοῦ άνθρακος. (Ἀπ. $1,91 \text{ gr/lit}$.)

1465. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν 25 gr αέρος εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν 85 cm Hg , γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 lit αέρος εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg ζυγίζει $1,293 \text{ gr}^*$. (Ἀπ. $17,3 \text{ cm}^3$.)

1466. Ὑαλίνη σφαῖρα διαμέτρου $4,2 \text{ cm}$ φέρει ἐντὸς αὐτῆς φυσαλλίδα αέρος καὶ ζυγίζει $91,32 \text{ gr}^*$. Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὑάλου εἶναι $2,5 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, ποῖος ὁ ὄγκος τῆς φυσαλλίδος αέρος. (Ἀπ. $2,28 \text{ cm}^3$.)

1467. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ περιβάλλοντος τὴν Γῆν αέρος, ἐὰν ἡ Γῆ θεωρηθῇ ὡς σφαῖρα ἀκτίνος 6370 km , ἡ δὲ ἀτμοσφαιρική πίεσις ληφθῇ κατὰ μέσον ὅρον ὡς ἴση πρὸς 760 Torr . (Ἀπ. $5270 \cdot 10^{12} \text{ tn}^*$.)

1468. Ἐντὸς φιάλης ὀξυγόνου, χωρητικότητος 40 lit , εὐρίσκεται ὀξυγόνον ὑπὸ πίεσιν 150 at ἐπὶ πλεόν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. α) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου αέριου ὑπὸ πίεσιν 1 at , β) ὑπὸ πίεσιν 1 atm , γ) πόσα lit ὀξυγόνου ἐξέρχονται ὑπὸ ἐξωτερικῇ πίεσιν 760 Torr . Ἡ θερμοκρασία εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις παραμένει ἀμετάβλητος. (Ἀπ. α' 6040 lit , β' 5846 lit , γ' 5806 lit .)

1469. Ἐλεύθερον ἀερόστατον ζυγίζει μετὰ φορτίου, ἀλλὰ κενὸν αέριου, 280 kgr^* . Πόσον ὕδρογόνον πρέπει νὰ περιέχῃ, διὰ νὰ αἰωρῆται μόλις ἐντὸς τοῦ αέρος, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. ($\rho_{\text{αερ}} = 1,293 \text{ kgr/m}^3$, $\rho_{\text{υδρ}} = 0,090 \text{ kgr/m}^3$). (Ἀπ. 233 m^3 .)

1470. Πόσα πρόσωπα, ἕκαστον βάρους 80 kgr^* , δύναται νὰ συμπαραλάβῃ μετ' ἑαυτοῦ ἐλεύθερον ἀερόστατον, πληρωμένον διὰ φωταερίου, ἐὰν ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 1500 m^3 τὸ δὲ βάρος τῶν διαφόρων ἐξαρτημάτων εἰς 650 kgr^* . ($\rho_{\text{αερ}} = 1,293 \text{ kgr/m}^3$, $\rho_{\text{φωτ}} = 0,549 \text{ kgr/m}^3$). (Ἀπ. 5.)

1471. Βαρομετρικὸς σωλὴν μήκους 180 cm πληροῦται κατὰ τὸ ἥμισυ δι' ὕδραργυρου. Ἀναστρέφεται τότε καὶ τὸ ἄκρον του τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀκριβῶς, ὕδραργυρου ἐντὸς λεκάνης καὶ ἀπομακρύνεται ὁ ἀντίχειρ. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὕδραργυρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 750 Torr . (Ἀπ. 30 cm .)

1472. Ἀντλία αέρος, ἐκδιώκουσα ὄγκον 200 cm^3 αέρος καθ' ἑκάστην πλήρη διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως τῆς, χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ ἀντλήσῃ τὸν ἀέρα ἀεροθαλάμου ὄγκου 10 lit . Πόσαι διαδρομαὶ τοῦ ἐμβολέως ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ἀεροθαλάμου κατέλθῃ ἀπὸ μιᾶς ἀτμοσφαίρας εἰς 1 Torr^* . (Ἀπ. 335 διαδρομαί.)

1473. Ἀεροπόρος, εὐρισκόμενος εἰς τι ὕψος, βλέπει ὅτι τὸ βαρόμετρον δεικνύει πίεσιν 10 cm Hg . Ἐὰν ἡ μέση πυκνότης τοῦ αέρος εἶναι $0,0013 \text{ gr/cm}^3$, πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. (Ἀπ. 6900 m .)

1474. Ἡ πυκνότης αέριου εἰς πίεσιν 95 cm Hg εἶναι $0,5$ γραμμάρια κατὰ λίτρον. Πόση ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς gr/cm^3 ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg . (Ἀπ. $0,0004 \text{ gr/cm}^3$.)

1475. Ὑδραργυρικὸν βαρομετρον ὁ σωλὴν εὐρίσκεται βυθισμένους ἐντὸς βαθείας λεκάνης ὕδραργυρου, ἡ δὲ στήλη τοῦ ὕδραργυρου ἔχει κατὰ τινα στιγμὴν μήκος 74 cm . Ἐὰν ὁ σωλὴν βυθισθῇ, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄνωθεν τοῦ ὕδραργυρου χώρος νὰ ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ, ἡ στήλη τοῦ ὕδραργυρου καθίσταται 72 cm . Νὰ ἐξηγηθῇ πῶς συμβαίνει τοῦτο καὶ πόση εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις. (Ἀπ. 76 cm .)

1476. Δοχείον περιέχει 30 λίτρα ὀξυγόνου ὑπὸ πίεσιν $5 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ καὶ ἐκ τοῦτον ἐξάγομεν ποσότητα ὀξυγόνου, ἡ ὁποία ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ ὑπὸ πίεσιν $1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ καταλαμβάνει ὄγκον 12 λίτρων. Ζητεῖται ἡ πίεσις τοῦ ἀπομεινόντος αέριου. (Ἄπ. $4,6 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$.)

1477. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον βυθίζεται εἰς τὴν θάλασσαν οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν λεκάνην νὰ εὑρίσκεται 1 m κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ βαρομέτρου, ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 760 Torr. (Εἰδικὸν βάρος θαλασσίου ὕδατος $= 1,03 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.) (Ἄπ. 83,6 cm.)

1478. Ποία ἡ ὁλικὴ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη λόγῳ ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἐπὶ τοίχου διαστάσεων $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$, τῆς βαρομετρικῆς πίεσεως οὔσης 760 Torr. (Ἄπ. 31 tn^* .)

1479. Πόση μάζα ὀξυγόνου εὑρίσκεται ἐντὸς φιάλης ὄγκου 40 lt ὑπὸ πίεσιν 150 Atm. ($\rho = 1,4 \text{ gr}/\text{lt}$ εἰς 1 Atm.) (Ἄπ. 8,5 kg.)

1480. Ποῖος ὁ ὄγκος αέριου μάζης εἰς πίεσιν 750 Torr, ἐὰν αὕτη ὑπὸ πίεσιν 720 Torr κατέχη ὄγκον 12 lt, ἡ δὲ θερμοκρασία παραμένει ἀμετάβλητος. (Ἄπ. 11,52 lt.)

1481. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ αέρος ὑπὸ πίεσιν 200 Torr καὶ θερμοκρασίαν 0°C , ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ ὑπὸ κανονικῆς συνθήκας ἴσουται πρὸς $1,293 \text{ kg}^*/\text{m}^3$. (Ἄπ. $0,340 \text{ kg}^*/\text{m}^3$.)

1482. Ὑπὸ ποίαν πίεσιν πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἀέριος μάζα, ἵνα 1 cm^3 αὐτῆς εἰς 0°C ἔχη βάρος 1 gr^* . (Εἰδικὸν βάρος αέρος ὑπὸ κανονικῆς συνθήκας $1,293 \text{ kg}^*/\text{m}^3$.) (Ἄπ. 773 Atm.)

1483. Ἐπιμήκης σωλὴν σωλὴν μὲ τὸ ἔν πέρασ ἐντὸς ὑδραργύρου ἔχει τὸ ἔτερον πέρασ συνδεδεμένον μὲ ἀντλίαν κενοῦ. Ὅταν ἀφαιρῇται ἐκ τοῦ σωλῆνος ὁ ἀήρ, ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται μέχρις ὕψους 76 cm ἄνω τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας. Ποία ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας πίεσις εἰς ἑκατοστόμετρα στήλης ὑδραργύρου, εἰς gr^*/cm^2 καὶ εἰς dyn/cm^2 . (Ἄπ. 76 cm Hg , $1033,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, $1,014 \cdot 10^6 \text{ dyn}/\text{cm}^2$.)

1484. Ἡ στήλη αέρος ἐντὸς κλειστοῦ στελέχους σωλῆνος σχήματος U περιέχοντος ὑδράργυρον ὑπὸ κανονικὴν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν (760 Torr) ἔχει ὕψος 21 cm. Ποῖον τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργύρου ὅστις δέον νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ στελέχους ὥστε νὰ μειωθῇ τὸ ὕψος τῆς αέριου στήλης εἰς 14 cm. (Ἄπ. 52 cm Hg.)

1485. Σωλὴν ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου περιέχει ὀλίγον ἀέρα ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου. Ἡ κορυφή τοῦ σωλῆνος εὑρίσκεται 80 cm ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τῆς λεκάνης καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἶναι 74 cm ἄνωθεν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας. Ὁ σωλὴν βυθίζεται τότε κατὰ 8 cm βαθύτερον ἐντὸς τῆς λεκάνης τοῦ ὑδραργύρου καὶ τὸ μῆκος τοῦ χώρου ἄνωθεν τῆς στήλης ὑδραργύρου μειοῦται εἰς 2 cm. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ ἀληθοῦς βαρομέτρου. (Ἄπ. 76 cm.)

1486. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ ἀνοικτὸν σκέλος σωλῆνος σχήματος U εἶναι κατὰ 5 cm ὑψηλότερα ἐν σχέσει πρὸς τὸ κλειστὸν στέλεχος τὸ ὁποῖον περικλείει 10 cm αέρος. Πόσον ὑδράργυρον πρέπει νὰ διοχετεύσωμεν ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους ὥστε νὰ μειώσωμεν τὴν στήλην αέρος εἰς 8 cm, ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος εἶναι 75 cm Hg. (Ἄπ. 24 cm.)

1487. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη λόγῳ ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως ἐπὶ τοῦ σκεπάστρου κιβωτίου, ἐπιφανείας 50 cm^2 , ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἔξ 750 Torr κατέλθῃ εἰς 720 Torr. (Ἄπ. 2 kg^* .)

1488. Κυλινδρικόν δοχείον, έξωτερικῆς διαμέτρου 6 cm, έσωτερικοῦ ὕψους 20 cm καί έσωτερικῆς διαμέτρου 4 cm, πληροῦται δι' ὕδατος μέχρι τοῦ χεῖλους αὐτοῦ, κλείεται ἀεροστεγῶς δι' ὑαλίνης πλάκας, διαμέτρου 6 cm καί πάχους 3 mm καί ἀναστρέφεται. Μὲ ποίαν δύναμιν πιέζει ἡ ὑαλίνη πλάξ τὸν κύλινδρον. (Ἀπ. 29 kgf*.)

1489. Ἡ κορυφὴ βαρομετρικοῦ σωλῆνος ἔγκαρσίας τομῆς 1 cm² εὐρίσκεται 80 cm ἀνωθεν τῆς ἀνοικτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐντὸς τῆς λεκάνης εὐρισκομένου ὑδραργύρου. Ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εὐρίσκεται εἰς ὕψος 70 cm ἀνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν λεκάνην. Ποσότης 22,5 cm³ ἀέρος, ὡς ἔμετρήθη μὲ τὴν πίεσιν τῆς έξωτερικῆς ἀτμοσφαίρας, εἰσάγεται κατόπιν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ νέον ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης. (Ἀπ. 35 cm.)

1490. Εἰς τὸ ἐν ἄκρον τῆς φάλαγγος ζυγοῦ μὲ ἴσους βραχίονας ἐξαρτᾶται ὑαλίνη σφαῖρα ὄγκου 100 cm³, ἐνῶ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον μεταλλικὸν σῶμα ὄγκου 2 cm³. Ὄταν ὁ ζυγὸς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ἔχομεν ἰσορροπίαν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. Κατὰ πόσον μεταβάλλονται αἱ ἀνώσεις τῶν δύο σωμάτων, ἐὰν ὁ ζυγὸς τεθῇ ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀεραντλίας, ἐντὸς τοῦ ὁποίου, τῆς θερμοκρασίας παραμενουσῆς ἀμεταβλήτου, ἡ πίεσις ἔχει ἐλαττωθῇ εἰς τὸ 1/4 τῆς ἀρχικῆς τῆς τιμῆς. Τί παρατηροῦμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτῇ. (Ἀπ. 0,0970 gr*, 0,00194 gr*.)

1491. Εἰς κλειστὸν μανόμετρον δι' ὑδραργύρου αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι αὐτοῦ εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σωλῆνος εὐρίσκονται πρὸ τῆς χαραγῆς μηδέν, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1 at. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τῆς χαραγῆς μηδέν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ ἐνδειξις 2 at, ἐὰν ὁ κλειστὸς σωλὴν ἀπὸ τῆς ἐνδείξεως μηδέν εἰς τὸ κλειστὸν ἄκρον αὐτοῦ ἔχη μήκος 40 cm. (Ἀπ. 15 cm.)

1492. Κώδων ἀεραντλίας ἔχει ὄγκον 2 λίτρων καὶ περιέχει ἀέρα ὑπὸ ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν. Ὁ ὄγκος τοῦ ἐμβολοφόρου κυλίνδρου αὐτῆς εἶναι 200 cm³. Ζητοῦνται : α) Ποία ἡ πίεσις μετὰ τὴν πρώτην ἀντλησιν. β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀναγκαῖος ἀριθμὸς ἀντλήσεων, ἵνα μειώσῃ τὴν πίεσιν εἰς τὸ 0,1 τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. (Ἀπ. α' 10/11 at. β' 25.)

1493. Ἀεροσυμπιεστὴς πιέζει ἀέρα περιεχόμενον εἰς χῶρον 100 λίτρων. Τὸ ἐμβολὸν λειτουργεῖ ἐντὸς κυλίνδρου χωρητικότητος 10 λίτρων, τὸν ὅποιον ἐκκενώνει εἰς ἐκάστην ἀντλησιν. Πόσα ἀντλήσεις ἀπαιτοῦνται, ἵνα παραχθῇ πίεσις 50 ἀτμοσφαιρῶν ἐντὸς τοῦ ὡς ἀνω χώρου συμπίεσεως, ἐὰν ἡ θερμοκρασία διατηρῇται σταθερά. (Ἀπ. 490.)

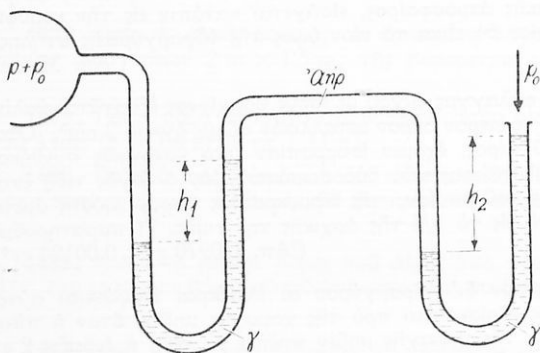
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1494. Κατὰ πόσον εἶναι βαρύτερον εἰς τὸ κενὸν τεμάχιον μολύβδου (εἰδ. βάρους 13,3 gr*/cm³) ἢ ἀργιλίου (εἰδ. βάρους 2,7 gr*/cm³), ἐὰν ἕκαστον ζυγίζῃ ἐντὸς τοῦ ἀέρος 1 kgf*. (Ἀπ. Τὸ ἀργίλιον εἶναι κατὰ 0,37 gr* βαρύτερον.)

1495. Τεμάχιον ὑάλου πυκνότητος 2,5 gr/cm³ εὐρίσκεται ὅτι ἔχει βάρος 34,2625 gr* εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν 17°C καὶ πίεσιν 75,2 cm Hg. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πραγματικὸν βάρος τῆς ὑάλου εἰς τὸ κενόν. Πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας = 0,001293 gr/cm³. Πυκνότης ὀρεοχάλκου = 8,4 gr/cm³. Πυκνότης ὕδατος = 1,0 gr/cm³. (Ἀπ. 34,2741 gr*.)

1496. Εἰς κώδων περιέχει ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν ἀέρα, ὅγκου 5 dm^3 . Δημιουργοῦμεν διὰ μιᾶς ἀεραντλίας, χωρητικότητος $V_1 = 0,5 \text{ dm}^3$, κενόν. Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις μετὰ πέντε ἀντλήσεις. (Στρατιωτικὴ Ἰατρικὴ Σχολή, 1962). (Ἀπ. $47,1 \text{ cm Hg.}$)

1497. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πίεσεως ἑνὸς ἀερίου χρησιμοποιεῖται ἡ ἐν τῷ σχήματι διάταξις ἐκ δύο σωλῆνων σχήματος U σταθερᾶς διατομῆς, περιεχόντων βαρὺ μετρητικὸν ὑγρὸν εἰδικοῦ βάρους γ καὶ συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ, μέσῳ ἀνεστραμμένου σωλῆνος U, περιέχοντος ἀέρος. Ὄταν τὰ δύο ἄκρα τῆς διατάξεως δέχωνται τὴν αὐτὴν πίεσιν τῆς ἀτμοσφαιρᾶς p_0 , τότε ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ εἰς ὅλα τὰ σκέλη τῶν σωλῆνων εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ἀέρος καταλαμβάνόμενον μῆκος τοῦ ἀνεστραμμένου σωλῆνος U εἶναι L_0 . Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ διαφοραὶ στάθμης h_1 καὶ h_2 τοῦ μετρητικοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ σκέλη τῶν δύο ὑεειδῶν



σωλῆνων καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος, ὅταν τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τῆς διατάξεως συνδεθῇ πρὸς ἀέριον πίεσεως ὑπερβαίνουσας κατὰ p τὴν ἀτμοσφαιρικήν, ἥτις ἐξακολουθεῖ νὰ ὀρᾷ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ ἄκρου. Τὸ ὅλον σύστημα (συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος) πρὸ τῆς μετρήσεως τῶν h_1 , h_2 ἀφίεται ὅπως ἰσορροπήσῃ μηχανικῶς καὶ θερμοκρασιακῶς. Μετὰ τὴν γενικὴν λύσιν νὰ γίνῃ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή, διὰ $p_0 = 1 \text{ kgf/cm}^2$, $p = 2 \text{ kgf/cm}^2$, $L_0 = 1,5 \text{ m}$ καὶ $\gamma = 10 \text{ kgf/dm}^3$. (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1961). (Ἀπ. $h_1 - h_2 = 1 \text{ m}$, $p = 1,5 \text{ kgf/cm}^2$.)

1498. Σωλὴν σχήματος U ἐσωτερικῆς τομῆς 1 cm^2 καὶ κλειστὸς κατὰ τὸ ἐν αὐτοῦ ἄκρον, πληροῦται δι' ὑδραργύρου, τοῦ ὁποῦ αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σωλῆνος εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Εἰς τὸ κλειστὸν σκέλος εὐρίσκονται ἄνω τοῦ ὑδραργύρου 10 cm^3 ὀξυγόνου θερμοκρασίας 0°C . Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἰσοῦται πρὸς 740 Torr καὶ $\epsilon_{02} = 1,4290 \text{ kgf/m}^3$ εἰς 0°C καὶ 760 Torr . α) Ποῖον τὸ βάρος τοῦ ἀποκεκλεισμένου ὀξυγόνου. β) Ποία ἡ πίεσις εἰς gr/cm^2 , τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ ὀξυγόνον ἐπὶ τοῦ ὑδραργύρου. γ) Διατί ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου ἐπὶ τῆς 1 cm^2 ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου δὲν εἶναι ἀριθμητικῶς ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ὀξυγόνου, ὅπως θὰ συνέβαινε μὲ στερεὰ ἢ ὑγρὰ σώματα. δ) Ποία περίπου ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων τοῦ ἀποκεκλεισμένου ὀξυγόνου.

(Ἀπ. α' $0,0139 \text{ gr}^*$, β' 1006 gr/cm^2 . γ' Διότι ἡ πίεσις ἀερίου δὲν εἶναι ἀπόρροια τοῦ βάρους του, ἀλλὰ τῶν κρούσεων τῶν κινουμένων μορίων αὐτοῦ, ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τῆς ὁρμῆς τῶν μορίων. δ' 461 m/sec.)

1499. Τὰ ὑπὸ τοῦ Otto von Guericke χρησιμοποιηθέντα κατὰ τὸ 1657 ἡμισφαίρια εἶχον διάμετρον $57,5 \text{ cm}$. Ποίαν δύναμιν ἤσκουν ταῦτα ἐπ' ἀλλήλων, ἐὰν ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν ἀνῆρχετο εἰς 10 Torr , ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς 755 Torr . (Ἀπ. 2631 kgf^* .)

1500. Δασύμετρον (ὄργανον μετρήσεως τῆς πυκνότητος τοῦ ἀέρος) συνίσταται ἐξ ὀρειχαλκίνου σώματος, ὄγκου 3 cm^3 , καὶ ἐξ ὑαλίνου σώματος, ὄγκου 150 cm^3 . Ὑπὸ πίεσιν 740 Torr καὶ θερμοκρασίαν 16°C ἀμφότερα τὰ σώματα ταῦτα εὐρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν. Φέρομεν τὴν συσκευήν ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀεραντλίας καὶ ἀφαίρουμέν τὸν αέρα, ἕως ὅτου πρακτικῶς νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ χῶρος ὡς κενόν. Ποία ἡ διαφορά βάρους, ἐὰν ἡ θερμοκρασία παραμένῃ ἀμετάβλητος. (Πυκνότης ἀέρος ὑπὸ κανονικῆς συνθήκας $1,293 \text{ kg/m}^3$). (Ἀπ. $0,175 \text{ gr}^*$.)

1501. Διὰ τριῶν ζυγίσεων κοίλης ὑαλίνης σφαίρας πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ἡ πυκνότης ρ ἐνὸς αἰρίου. Κατὰ τὴν πρώτην ζύγισιν ἡ σφαῖρα πληροῦται δι' αἰέρος, πυκνότητος ρ_x , καὶ ἐξακριβουταὶ ἐντὸς αὐτῆς αἰέριος μᾶζα x . Κατὰ τὴν πληρώσιν διὰ τοῦ ἀγνώστου πυκνότητος αἰρίου, ἐξακριβουταὶ μᾶζα y καὶ κατὰ τὴν πληρώσιν δι' ὕδατος, πυκνότητος ρ_y , μᾶζα z . α) Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ἀγνώστου αἰρίου. β) Νὰ γίνῃ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ διὰ $x = 185,25 \text{ gr}$, $y = 184,62 \text{ gr}$, $z = 1253,50 \text{ gr}$, $\rho_x = 0,00128 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\rho_y = 1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$. (Ἀπ. α' $\rho = [\rho_y (x - y) \rho_x (z - y)] / (x - z)$. β' $0,000691 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$.)

1502. Ἐλεύθερον ἀερόστατον, χρησιμοποιούμενον διὰ μετεωρολογικῆς μετρήσεως εἰς μεγάλην ὕψιν, πληροῦται διὰ 10 m^3 ὑδρογόνου πίεσεως 760 Torr . Τὸ βάρος τοῦ κενοῦ αερόστατου μετὰ τῶν διαφόρων εξαρτημάτων αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 8 kg^* . Ὁ ὄγκος τοῦ αερόστατου παραμένει ἀμετάβλητος κατὰ τὴν πτήσιν. α) Ποία ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους. β) Ποία ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις εἰς ὕψος, εἰς τὸ ὅποιον ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ἰσοῦται πρὸς $1,080 \text{ kg/m}^3$. γ) Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς πυκνότητος τοῦ ἀέρος παύει νὰ ἀνέρχεται τὸ αερόστατον. (Πυκνότης ἀέρος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς, $1,293 \text{ kg/m}^3$, $\rho_H = 0,090 \text{ kg/m}^3$). (Ἀπ. α' 4 kg^* . β' $1,9 \text{ kg}^*$. γ' $0,89 \text{ kg/m}^3$.)

1503. Σωλὴν ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου περιέχει μικρὰν ποσότητα ἀέρος εἰς τὸν ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου χῶρον. Ὄταν τὸ ἀκριβὲς βαρόμετρον δεικνύῃ ἐνδείξιν $75,0 \text{ cm}$, τὸ λανθασμένον βαρόμετρον δεικνύῃ $74,4 \text{ cm}$ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $10,6 \text{ cm}$ κάτωθεν τοῦ κλειστοῦ πέρατος τοῦ σωλῆνος τοῦ βαρομέτρου. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀρθὴ ἐνδείξις τοῦ βαρομέτρου ὅταν τὸ λανθασμένον βαρόμετρον δεικνύῃ $73,0 \text{ cm}$ στήλης ὑδραργύρου, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἀμφότερα τὰ βαρόμετρα. (Ἀπ. $73,53 \text{ cm}$.)

1504. Νὰ ἐκφρασθῇ ἀναλυτικῶς ἡ αὐξήσις τῆς ὀλικῆς δυνάμεως, εἰς gr^* , ἣν ἀσκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα ἐπὶ σφαιρικοῦ ἡλεκτρικοῦ λαμπτήρος διαμέτρου 20 cm , ὅταν τὸ βαρομετρικὸν ὕψος αὐξάνεται ἀπὸ $p_1 \text{ mm Hg}$ εἰς $p_2 \text{ mm Hg}$. (Ἀπ. $1709,7 \cdot (p_1 - p_2) \text{ gr}^*$.)

1505. Λεπτὸς σωλὴν, κλειστὸς κατὰ τὸ ἐν ἄκρον, περιέχει αέρα ἐγκλωβισμένον ὑπὸ νήματος (στήλης) ὑδραργύρου ὕψους 25 cm . Ὄταν ὁ σωλὴν εὐρίσκεται εἰς ὀριζοντίαν θέσιν, τὸ ὕψος τοῦ ἀέρος εἶναι 30 cm . Ὄταν ὁ σωλὴν εἶναι κάθετος μετὰ τὸ ὀνοικτὸν στόμιον ἄνωθεν, ἡ στήλη τοῦ ἀέρος εἶναι $22,5 \text{ cm}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. (Ἀπ. 75 cm Hg .)

1506. Ποῖον τὸ βάρος καὶ ποία ἡ μᾶζα τῆς ἀτμοσφαίρας, ὅταν ἡ ἄκτις τῆς Γῆς $R = 6370 \text{ km}$ καὶ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐπὶ τῆς γῆινης ἐπιφανείας $p_0 = 1,0332 \cdot 10^4 \text{ kg}^* / \text{m}^2$. (Ἀπ. $5 \cdot 10^{18} \text{ kg}^*$, $5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$.)

1507. Ἀεριοφυλάκιον ὄγκου $V_1 = 30 \text{ lt}$ εἶναι πλήρες ὀξυγόνου καὶ ἕτερον ὄγκου $V_2 = 60 \text{ lt}$ πλήρες ὀζώτου, τίθενται δὲ εἰς ἐπικοινωνίαν διὰ λεπτοτάτου σωλῆνος. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τελικὴ πίεσις τοῦ μίγματος, δοθέντος ὅτι ἡ θερμοκρασία κατὰ τὴν μείξιν παραμένει σταθερά, αἱ δὲ πίεσεις εἶναι 4 at καὶ 8 at ἀντιστοίχως. (Ἀπ. $6,7 \text{ at}$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Σχολὴ Ἱατρικὴ, Τμήμα Ὀδοντιατρικόν, 1957).

1508. Δίδεται βαρομετρικός σωλήν διατομής 2 cm^2 περιέχων υδράργυρον ύψους $h = 76 \text{ cm}$, ενώ υπεράνω του σωλήνος υπάρχει αερόκενον τμήμα ύψους 8 cm . Νά εύρεθῇ πόσον ὄγκον ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος πρέπει νά θέσωμεν ἐντὸς τοῦ σωλήνος, ὥστε ἡ στήλη τοῦ υδραργύρου νά κατέλθῃ εἰς τὰ 40 cm . (Ἀπ. $V_2 = 41,68 \text{ cm}^3$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικόν, 1958).

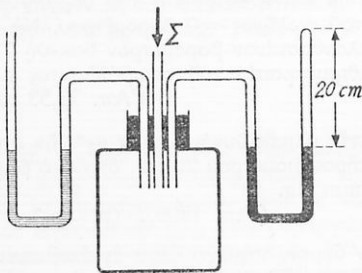
1509. Ὁ ὄγκος ἐνὸς αεριοφυλακίου πλήρους ὀξυγόνου εἶναι $0,04 \text{ m}^3$ καὶ τὸ μανόμετρον δεικνύει πίεσιν 7 at . Ἐὰν ἡ στρόφιγξ τοῦ αεριοφυλακίου ἀνοιχθῇ ἐπὶ ὀριζόμενον χρονικὸν διάστημα, ὥστε νὰ συγκοινωνήσῃ πρὸς τὴν ἀτμόσφαιραν καὶ ἀκολουθῶς κλεισθῇ, ἡ ἐνδείξις τοῦ μανομέτρου καθίσταται 2 at . Ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 1 at , πόσον ἀέριον ἐξήλθεν εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν, ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία παρέμεινεν ἀμετάβλητος. (Ἀπ. $0,20 \text{ m}^3$.)

1510. Ἀεροθάλαμος ἐλαστικοῦ αὐτοκινήτου ἔχει ὄγκον $0,027 \text{ m}^3$ καὶ τὸ μανόμετρον δεικνύει πίεσιν $13,6 \text{ at}$. Πόσος ἐπὶ πλέον ἀήρ ὑπὸ πίεσιν 1 at πρέπει νά προστεθῇ, ἵνα ἡ ἐνδείξις τοῦ μανομέτρου ἀνέλθῃ εἰς $22,8 \text{ at}$. (Ἀπ. $0,24 \text{ m}^3$.)

1511. Ἀεριοφυλάκιον ὄγκου $0,65 \text{ m}^3$ περιέχει ὀξυγόνον ὑπὸ πίεσιν $9,3 \text{ at}$ καὶ συγκοινωνεῖ διὰ λεπτοτάτου σωλήνος πρὸς αεριοφυλάκιον ὄγκου $1,3 \text{ m}^3$ περιέχον ἄζωπον ὑπὸ πίεσιν $8,2 \text{ at}$. Ὄταν τὰ ἀέρια μειχθοῦν, πόση θὰ εἶναι ἡ πίεσις τοῦ μείγματος, τῆς θερμοκρασίας ὑποτιθεμένης ἀμεταβλήτου. (Ἀπ. $8,5 \text{ at}$.)

1512. Φιάλη περιέχει οἶνον ($\epsilon = 1,02 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$), μέχρις ὕψους 20 cm , ἡ δὲ στήλη ἀέρος εἰς τὸν κυλινδρικὸν λαίμον τῆς φιάλης ἔχει ὕψος 5 cm . Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ πώματος ὁ ἀήρ συμπιέζεται εἰς ῥῶρον ὕψους 1 cm . α) Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος τῆς φιάλης ἀσκουμένη πίεσις. β) Ποία ἡ ἀσκουμένη ὀλικὴ δύναμις, ὅταν ἡ διάμετρος τοῦ ἐπιπέδου πυθμένος ἀνέρχεται εἰς 6 cm . (Ἀπ. α' $5,2 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$, β' $F_{\text{ολ}} = 147 \text{ kg}^*$.)

1513. Ἀνοικτὸν μανόμετρον δι' ὕδατος καὶ κλειστὸν δι' υδραργύρου συνδέονται πρὸς ἀλλήλα, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, διὰ φιάλης, ἐντὸς τῆς ὁποίας δύναται νὰ εἰσέρχεται διὰ σωλήνος Σ ἀήρ. Ὁ υδράργυρος, ὑπὸ ἐξωτερικὴν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν 760 Torr , εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη καὶ ἀπομονώνη ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ σκέλους στήλην ἀέρος ὕψους $h_1 = 20 \text{ cm}$. Ἀκολουθῶς ἐμφυσᾶται διὰ τοῦ σωλήνος Σ ἀήρ ἐντὸς τῆς φιάλης, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν τῶν ὑδατίνων στηλῶν νὰ ἀνέλθῃ εἰς 40 cm . Ποία ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν τῶν υδραργυρικῶν στηλῶν. (Ἀπ. $\Delta h = 1,5 \text{ cm}$.)



1514. Ἀέριον συλλέγεται ἐντὸς δοκιμαστικοῦ σωλήνος ἐπὶ λεκάνης με ὑδράργυρον, καταλαμβάνει δὲ ὄγκον $48,3 \text{ cm}^3$ καὶ ὁ υδράργυρος ἀνυψοῦται κατὰ 8 cm ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλήνος. Πόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ τῶν αερίων, ἐὰν βυθισθῇ ὁ δοκιμαστικὸς σωλήν εἰς τρόπον, ὥστε ἡ στάθμη τοῦ υδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλήνος νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ με τὴν τῆς λεκάνης. Ἀτμοσφαιρική πίεσις 750 Torr . (Ἀπ. $43,1 \text{ cm}^3$.)

1515. Ἐμβολοφόρος ἀεραντλία συνδέεται μετὰ χώρου περιέχοντος ἀέρα ὑπὸ πίεσιν $p_0 = 10 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Ζητεῖται ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ χώρου τούτου (V), ἂν εἶναι $v = 5 \text{ lt}$ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀεραντλίας καὶ ἐὰν μετὰ τὴν δευτέραν παλινδρόμησιν ἡ πίεσις τοῦ περιεχομένου ἀέρος γίνεταί $p_2 = 8 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. (Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, ΣΜΑ, 1958). (Ἀπ. $V = 42,1 \text{ lt}$.)

1516. Ὅριζόντιος σωλὴν σταθερᾶς τομῆς, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ ἐν ἄκρον καὶ κλειόμενος διὰ στρόφιγγος κατὰ τὸ ἕτερον, περιέχει σταγονίδιον ὑδραργύρου μήκους α ἀπέχον ἐκ τῆς στρόφιγγος ἀπόστασιν l . Ἐάν, τῆς στρόφιγγος παραμενοῦσης κλειστῆς, ὁ σωλὴν τοποθετηθῇ κατὰ τὰς δύο δυνατὰς κατακορύφους θέσεις αὐτοῦ, κατὰ πόσον θὰ κατέλθῃ τὸ σταγονίδιον, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι β . Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $l = 40$ cm, $\beta = 72$ cm Hg, $\alpha = 8$ cm Hg.

(Ἀπ. Ἡ στρόφιγξ: Πρὸς τὰ ἄνω $x = (l \cdot \alpha) / (\beta - \alpha) = 5$ cm. Πρὸς τὰ κάτω $x = (l \cdot \alpha) / (\beta + \alpha) = 4$ cm.)

1517. Ἐντὸς κλειστοῦ δοχείου σταθεροῦ ὄγκου $V = 24,9$ lt τίθεται ποσότης $m_1 = 0,336$ gr ὀξυγόνου καὶ ποσότης $m_2 = 0,042$ gr ὑδρογόνου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν $t = 22^\circ\text{C}$. Ζητεῖται ποῖα θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ μείγματος τούτου ἄσκουμένη πίεσις ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου (p), ἂν τὰ μοριακὰ βάρη τοῦ ὀξυγόνου καὶ τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἀντιστοίχως $M_1 = 32$ καὶ $M_2 = 2$ καὶ ἡ σταθερὰ τῶν ἀερίων $R = 0,83$ kg·m / grad.

(Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, ΣΜΑ, 1958).

(Ἀπ. $0,03101$ kg·m³·cm².)

1518. Ἀνάστροφος σωλὴν σχήματος U ἔχει βυθισμένα τὰ δύο ἄκρα του ἐντὸς κυπέλλων περιεχόντων ἀντιστοίχως ἔλαιον καὶ ὕδωρ. Ἐάν ἀπορροφηθῇ ἐκ τοῦ σωλῆνος ποσότης ἀέρος, τὰ ὑγρά ἀνέρχονται ἐντὸς αὐτοῦ εἰς διάφορον ὕψος. Τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλαίου ἀνωθεν τῆς ἐπιφανείας του ἐντὸς τοῦ κυπέλλου εἶναι 35,5 cm. Τὸ ἀντίστοιχον ὕψος διὰ τὸ ὕδωρ εἶναι 28,4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου καὶ νὰ ἐξηγηθῇ πῶς εὑρέθη τὸ ἀποτέλεσμα καὶ διατί τὸ πείραμα δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὰς διαμέτρους τῶν δύο σκελῶν τοῦ σωλῆνος.

(Ἀπ. $0,8$ gr/cm³.)

1519. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς μανόμετρον διὰ μέτρησιν ὑψηλῶν πιέσεων. Πρὸς τοῦτο πληροῦται ὁ σωλὴν δι' ἀέρος ἢ διὰ τινος ἀερίου, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν λεκάνην πίεσις ὑπολογίζεται ὡς ἄθροισμα τῆς πίεσεως τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ τοῦ ἀποκεκλεισμένου ἀερίου ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου. Εἰς ποίας ἀποστάσεις εὐρίσκονται αἱ ἐνδείξεις διὰ πιέσεις $n = 2, 3, 4, 5$ καὶ 10 Atm, ἐάν ὁ σωλὴν ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου αὐτοῦ μέχρι τῆς ὡς σταθερᾶς θεωρουμένης στάθμης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν λεκάνην ἔχῃ μήκος $l = 114$ cm καὶ ἐάν κατὰ τὴν θερμοκρασίαν τῶν μετρήσεων καὶ διὰ πίεσιν 1 Atm ($= 760$ Torr), ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸν σωλῆνα εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης.

$$(\text{Ἀπ. } x = \frac{l - 76n + \sqrt{(76n - l)^2 + 4 \cdot 76l}}{2},$$

$76,0 \cdot 52,1 \cdot 38,0 \cdot 29,3 \cdot 13,1$ cm ἀπὸ τοῦ ἀνωτ. ἄκρου.)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν ΙΒ'

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ-ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1520. Σωλήν παροχής αερίοφωτος φέρει προσηρμοσμένον εις τὸ στόμιόν του ἕτερον σωλήνα μὲ διάμετρον ἀρχικῶς 10 mm, ἀκολουθῶς ὅμως ὁ σωλήν ἀποστενοῦται, ὥστε ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ γίνῃ 5 mm. Ἐκ τοῦ στενοῦ σωλήνος τὸ φωταέριον ἐκρέει ὑπὸ ταχύτητα 25,1 m/sec. Ζητοῦνται: α) Πόση ἡ ταχύτης τοῦ φωταερίου εἰς τὸν εὐρὺν σωλήνα. β) Πόση ἡ παροχὴ φωταερίου ἀπὸ τὸν στενὸν σωλήνα εἰς cm³/sec. γ) Εἰς πόσον χρόνον ἐκρέει διὰ τοῦ σωλήνος 1 m³ φωταερίου.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν v_1 τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ φωταέριον εἰς τὴν τομὴν S_1 τοῦ εὐρέος σωλήνος καὶ v_2 τὴν ταχύτητα εἰς τὴν τομὴν S_2 τοῦ στενοῦ σωλήνος, τότε κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $S_1 = \pi \cdot \delta_1^2/4$ καὶ $S_2 = \pi \cdot \delta_2^2/4$, ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \quad \eta: \quad v_1 = v_2 \cdot \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως: $v_2 = 25,1$ m/sec, $\delta_1 = 10$ mm, $\delta_2 = 5$ mm καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητούμενη ταχύτης τοῦ φωταερίου εἶναι:

$$v_1 = 6,275 \text{ m/sec}$$

β) Ἡ παροχὴ εἰς τὸν στενὸν σωλήνα θὰ εἶναι:

$$\Pi_2 = S_2 \cdot v_2 = \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4} \cdot v_2^2$$

ἐξ ἧς εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι:

$$\Pi_2 = 492 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

γ) Ἐφ' ὅσον τὰ 492 cm³ ἐκρέουν εἰς χρόνον 1 sec, τὰ 10⁶ cm³ (1 m³) θὰ ἐκρέουν εἰς χρόνον:

$$t = \frac{10^6}{492} = 2037 \text{ sec} \quad \eta\tau\omicron\iota: \quad t = 34 \text{ min, περίπου}$$

1521. Κατακόρυφον κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχει ὕδωρ, τοῦ ὁποίου ἡ στάθμη διατηρεῖται 46 cm ὑπὲρ τὴν ὀπὴν ἐκροῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος. ($g = 9,81$ m/sec²).

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli, ἡ ταχύτης ἐκροῆς v θὰ εἶναι:

$$v = \sqrt{2gh}$$

ὅπου h τὸ ὕψος τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος ὑπὲρ τὴν ὀπὴν. Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως εἰς τὸ Τ ε χ ν ι κ ὸ ν Σ ύ σ τ η μ α: $g = 9,81$ m/sec² καὶ $h = 0,46$ m, εὐρίσκομεν:

$$v = 3 \text{ m/sec}$$

1522. Κυλινδρικών δοχείων περιέχει ύδωρ μέχρις ύψους 40 cm. α) Πόση ή ταχύτης έκροης του ύδατος από όπης εύρισκομένης εις απόστασιν 10 cm από τής ελευθέρας επιφανείας. β) Εις ποίαν απόστασιν από του πυθμένος του δοχείου συναντᾶ ἡ ὑγρὰ φλέψ τὸ ἔδαφος. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἄνωθεν τῆς όπης, τότε ἡ ταχύτης v έκροης τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli:

$$v = \sqrt{2g \cdot h} \quad (1)$$

ἔξ οὗ προκύπτει εύκόλως ὅτι:

$$v = 140 \text{ cm/sec}$$

β) Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἕκαστον στοιχείον μάζης τοῦ ὕδατος ἔχει δύο κινήσεις, μίαν ὀριζοντίαν καὶ μίαν κατακόρυφον, καὶ ὅτι ἀμφότερα αἱ κινήσεις διαρκοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον t . Εἰς τὴν ὀριζοντίαν τὸν κίνησιν τὸ ὕδωρ ἔχει κίνησιν ὁμαλὴν καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$s = v \cdot t \quad (2)$$

Εἰς δὲ τὴν κατακόρυφον κίνησιν τοῦ τὸ ὕδωρ ἔχει ἐπιτάχυνσιν g καὶ συνεπῶς θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (3)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t , προκύπτει ὅτι ἡ ὀριζοντία ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι:

$$s = v \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Σ ύ σ τ η μ α C. G. S.: $v = 140 \text{ cm/sec}$, $h_1 = 30 \text{ cm}$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, εύρίσκομεν:

$$s = 34,6 \text{ cm}$$

1523. Ὑδωρ ἐκρέει ἀπὸ δεξαμενῆς ὑπὸ παροχὴν 2 lt/sec δι' όπης εύρισκομένης εἰς τὸν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 360 cm. Νὰ υπολογισθῇ ἡ νέα παροχή, ὅταν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀσκήται πρόσθετος πίεσις 8 kg $\cdot$ m²/cm².

Λύσις. Ἡ παροχή Π , ὡς εἶναι γνωστὸν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Pi = S \cdot v \quad (1)$$

ὅπου S εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τῆς όπης καὶ v ἡ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐκρέει τὸ ὕδωρ. Ἐπειδὴ ὁμοῦ ἡ ταχύτης έκροης τοῦ ὕγρου εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli $v = \sqrt{2g \cdot h}$, ὅπου h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῆς όπης ἀπὸ τῆς ελευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου, ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$\Pi = S \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad (2)$$

Ἐστὼ τώρα ὅτι προκαλοῦμεν αὐξησιν τοῦ ὕψους τοῦ ὕγρου κατὰ Δh , ὅποτε ἔχομεν καὶ αὐξησιν τῆς πίεσεως κατὰ Δp . Ἐπειδὴ $\Delta p = \epsilon \cdot \Delta h$, ὅπου ϵ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν $\Delta h = \Delta p / \epsilon$ καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη παροχή θὰ εἶναι τώρα:

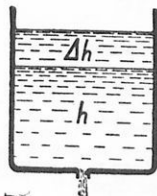
$$\Pi' = S \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h + \frac{\Delta p}{\epsilon}\right)} \quad (3)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἐν συνεχείᾳ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς Π' λαμβάνομεν:

$$\Pi' = \Pi \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta p}{\epsilon \cdot h}} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα: $\Pi = 2 \text{ lt/sec}$, $h = 360 \text{ cm}$, $\Delta p = 8000 \text{ gr} \cdot \text{m}^2 / \text{cm}^2$ $\epsilon = 1 \text{ gr} \cdot \text{m}^2 / \text{cm}^3$, καὶ εύρίσκομεν:

$$\Pi' = 9,6 \text{ lt/sec}$$



1524. Δεξαμενή πλήρης ύδατος, τοῦ ὁποῖου ἡ στάθμη διατηρεῖται εἰς σταθερὸν ὕψος $h = 3 \text{ m}$, φέρει εἰς τὸν πυθμένα ὀπὴν διατομῆς 50 cm^2 . Ζητεῖται ἡ διὰ τῆς ὀπῆς παροχὴ τοῦ ὕδατος εἰς cm^3/sec . ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Τοπογράφων καὶ Ἀγρονόμων Μηχανικῶν, 1957).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Π τὴν παροχὴν, S τὴν διατομὴν τῆς ὀπῆς καὶ u τὴν ταχύτητα ροῆς τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῆς Ὑδροδυναμικῆς, ὅτι :

$$\Pi = S \cdot u \quad (1)$$

Ἡ ταχύτης ροῆς ἐξ ἄλλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$u = \sqrt{2g \cdot h} \quad (2)$$

ὅπου h τὸ σταθερὸν ὕψος τῆς στάθμης τῆς δεξαμενῆς.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\Pi = S \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad (3)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (3) τὰς γνωστὰς τιμὰς : $S = 50 \text{ cm}^2$, $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$ καὶ $h = 300 \text{ cm}$ λαμβάνομεν :

$$\Pi = 38\,730 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

1525. Νὰ καθορισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ κυκλικοῦ δίσκου ἐπιφανείας 16 cm^2 , ὅταν οὗτος προσβάλλεται καθέτως ὑπὸ ρεύματος ἀέρος πυκνότητος $0,00125 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ταχύτητος 1000 cm/sec . (Διὰ τὸν δίσκον εἶναι συντελεστής ἀντιστάσεως $C_{\text{αντ}} = 1,2$).

Λύσις. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$F = C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u^2 \quad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος, u ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, $S_{\text{μετ}}$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγίστης διατομῆς τοῦ σώματος κατὰ διευθύνσιν κάθετον πρὸς τὴν ταχύτητα καὶ $C_{\text{αντ}}$ ἀριθμητικὸς συντελεστής (ἀνευ διστάσεων), καλούμενος συντελεστὴς ἀντιστάσεως.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $C_{\text{αντ}} = 1,2$, $S_{\text{μετ}} = 16 \text{ cm}^2$, $\rho = 0,00125 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $u = 1000 \text{ cm/sec}$, εὐρίσκομεν :

$$F = 1,2 \cdot 10^4 \text{ dyn}$$

1526. Ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν ὀρικὴν ταχύτητα σώματος πύπτοντος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $u_{\text{op}} = \sqrt{2m \cdot g / C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}}}$. Ἐὰν τὸ σῶμα ἔχῃ σχῆμα σφαίρας ἀκτίνος r καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι ρ , ποίαν μορφήν λαμβάνει ὁ ἀνωτέρω τύπος. Τί συμπέρασμα συνάγεται.

Λύσις. Ἡ μάζα τοῦ σώματος δίδεται, ὡς γνωστόν, διὰ τοῦ τύπου $m = \rho \cdot V$ καί, ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad (1)$$

Ἐπίσης ἡ διατομὴ $S_{\text{μετ}}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ἥτοι :

$$S_{\text{μετ}} = \pi \cdot r^2 \quad (2)$$

Βάσει τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὀρικῆς ταχύτητος σώματος πύπτοντος εἰς τὸν ἀέρα :

$$u_{\text{op}} = \sqrt{\frac{2m \cdot g}{C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}}}} = 2 \sqrt{\frac{2g \cdot r \cdot \rho}{3 C_{\text{αντ}}}} \quad (3)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) συνάγεται ὅτι ἡ ὀρικὴ ταχύτης πύπτουσας σφαίρας εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς πυκνότητος καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἀκτίνος τῆς σφαίρας.

1527. Να καθορισθῇ ὁ λόγος τῶν ὀριζων ταχυτήτων δύο σφαιρῶν ἐκ ξύλου δρυὸς πυκνότητος $0,7 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ἐκ μολύβδου πυκνότητος $11,3 \text{ gr/cm}^3$ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὅταν πίπτουν ἐντός ἀέρος.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (3) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως θὰ ἔχωμεν, διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ξυλίνης σφαίρας :

$$v_{op} = 2 \sqrt{\frac{2g \cdot r \cdot \rho}{3 C_{avt}}} \quad (1) \quad \text{καὶ :} \quad v'_{op} = 2 \sqrt{\frac{2g \cdot r \cdot \rho'}{3 C_{avt}}} \quad (2)$$

διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς μολυβδίνης σφαίρας.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{v_{op}}{v'_{op}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} \quad (3)$$

θέτοντες δὲ τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν πυκνοτήτων : $\rho = 0,7 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $\rho' = 11,3 \text{ gr/cm}^3$, εὐρίσκομεν :

$$\frac{v_{op}}{v'_{op}} = \frac{1}{4} \quad (\text{περίπου})$$

1528. Ἀεροπλάνον μεγίστης μετωπικῆς ἐπιφανείας 1 m^2 ἵπταται μὲ ταχύτητα 360 km/h εἰς ὕψος 2000 m , ὅπου ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι $0,001 \text{ gr/cm}^3$. α) Ποία ἡ ἀεραντίστασις, ἐὰν $C_{avt} = 0,05$. β) Ποίαν ἰσχὺν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ὁ κινητήρ αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ἀπόδοσις τῆς ἑλικος εἶναι 85% .

Λύσις. α) Τὸ μέτρον τῆς ἀντίστασεως T τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀεροπλάνον εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$T = C_{avt} \cdot S_{μετ} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, v ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, $S_{μετ}$ ἡ μετωπικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ C_{avt} ἀριθμητικὸς συντελεστὴς ἐξαρτώμενος κυρίως ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ ὀπισθίου τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ὁ ὁποῖος καλεῖται συντελεστὴς ἀντίστασεως.

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Σ ὅ τ η μ α C. G. S. θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $C_{avt} = 0,05$, $\rho = 0,001 \text{ gr/cm}^3$, $v = 360 \cdot 10^5 / (36 \cdot 10^2) = 10^4 \text{ cm/sec}$, $S_{μετ} = 10^4 \text{ cm}^2$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$T = 25 \cdot 10^6 \text{ dyn} \quad \eta : \quad T = 25,4 \text{ kgr}^*$$

β) Ἡ ἰσχὺς ὡς πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A διὰ τοῦ χρόνου t , εἶναι :

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \quad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἑλικος καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν F διὰ τῆς ἰσχύος T , προκύπτει ὅτι ἡ ζητούμενη ἰσχὺς ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$N = \frac{T \cdot v}{\eta} \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3) : $T = 25,4 \text{ kgr}^*$, $v = 100 \text{ m/sec}$, $\eta = 0,85$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$N = 298,82 \text{ kgr}^* \text{ m/sec} = 39,8 \text{ PS}$$

1529. Θεωροῦμεν ἀεροπλάνον ἐκτελοῦν πτήσιν ἀνόδου (βλ. σχῆμα). Ἐστωσαν δὲ αἱ γωνίαι $\angle AOF = \varphi = 20^\circ$ καὶ $\angle BOB_1 = \theta = 30^\circ$, ὡς καὶ ἡ ἀεροδύναμις $OF = 1500 \text{ kgr}^*$. Ζητοῦνται : α) Ἡ ἄνωσις OA τοῦ ἀεροπλάνου. β) Ἡ προωστικὴ δύναμις OK αὐτοῦ.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAF (βλ. σχῆμα) προκύπτει ὅτι $OA = OF \cdot \sin \varphi$, ὅποτε, διὰ $OF = 1500 \text{ kgr}^*$ καὶ $\varphi = 20^\circ$ (συν $\varphi = 0,939$) εὐρίσκομεν :

$$OA = 1410 \text{ kgr}^*$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1531. Ἀγωγὸς ὕδατος ἀποτελεῖται ἐκ δύο τμημάτων διαμέτρων 0,4 m καὶ 0,3 m, παρέχει δὲ 240 lt ὕδατος ἀνὰ sec. Ποῖα ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος εἰς τὰ δύο τμήματα. (Ἀπ. $u_1 = 1,9 \text{ m/sec}$, $u_2 = 3,4 \text{ m/sec}$.)

1532. Ἐντὸς αὐλακος βάθους 2 m καὶ πλάτους 5 m ρεῖ ὕδωρ μὲ μέσην ταχύτητα $u = 100 \text{ cm/sec}$. Ποῖα ἡ ἰσχύς εἰς ἵππους (PS) τοῦ ρέοντος ὕδατος. (Ἀπ. 6,8 PS.)

1533. Μὲ ποῖαν ταχύτητα ἐκρέει ὕδωρ ἐξ ὀπῆς, εὐρισκομένης εἰς σταθερὸν βάθος $h = 3 \text{ m}$ ὑπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ἐὰν τὸ ὕδωρ εὕρσκεται ὑπὸ πίεσιν στήλης ὕδατος 20 m. (Ἀπ. 21 m/sec.)

1534. Ἐπὶ τοῦ πυθμένος δοχείου ὕψους $h = 52 \text{ cm}$, τὸ ὁποῖον διατηρεῖται διαρκῶς πλήρες, ἐκρέει ὕδωρ. Ποῖα ἡ ταχύτης αὐτοῦ 0,5 sec μετὰ τὴν διόδον του ἐκ τῆς ὀπῆς. (Ἀπ. 8,1 m/sec.)

1535. Ἡ μέση ταχύτης ὑγροῦ ἐντὸς ἀγωγοῦ εἶναι 0,3 m/sec. Ἐὰν ἡ παροχὴ εἶναι 0,06 m³/min, ποῖα εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ ἀγωγοῦ. (Ἀπ. 0,065 m.)

1536. Ὑγρὸν εἰδικοῦ βάρους $0,85 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ ρεῖ ἐντὸς ὀριζοντίου σωλῆνος διαμέτρου 6 cm μὲ ταχύτητα 20 m/min καὶ πίεσιν $8 \cdot 10^3 \text{ Nt/m}^2$. Ὄταν διέρχεται ἀπὸ στένωσιν διαμέτρου 2 cm, ποῖα θὰ εἶναι ἡ πίεσις καὶ ἡ ροή. Ποῖα θὰ εἶναι ἡ παροχὴ. (Ἀπ. $4,3 \cdot 10^3 \text{ Nt/m}^2$, 180 m/min, $5,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{min}$.)

1537. Διὰ κυλινδρικοῦ σωλῆνος διαμέτρου 52 mm διέρχονται $5,4 \text{ m}^3$ ἀέρος ἀνὰ min. Ποῖα ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. (Ἀπ. 42,4 m/sec.)

1538. Μὲ ποῖαν ταχύτητα u ἐκρέει ἀπὸ πίεσεως 760 Torr καὶ εἰδικοῦ βάρους $\epsilon = 0,001293 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ εἰς τὸ κενόν. Μεταβάλλεται αὕτη μετὰ τῆς πυκνότητος τοῦ ἀέρος; (Εἰδικὸν βάρος ὕδραργύρου $\epsilon' = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$). (Ἀπ. 396 m/sec. Ὀχι.)

1539. Κύλινδρος, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ κατώτερον ἄκρον αὐτοῦ, κλείεται κατὰ τὸ ἀνώτερον δι' ὑαλίνης πλακῆς, φερούσης εἰς τὸ μέσον αὐτῆς μικρὰν ὀπὴν, πληροῦται δὲ διὰ φωταερίου καὶ βυθίζεται ἐντὸς λεκάνης ὕδατος. Ἀνοίγουμεν τὴν ὀπὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀνερχόμενον ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ὕδωρ ἀπαιτεῖ χρόνον 70 sec διὰ νὰ διέλθῃ ἐνώπιον δύο ἐπ' αὐτοῦ κειμένων χαραγῶν. Ἐὰν ὁ κύλινδρος ἐπληρωτο δι' ἀέρος, ὁ χρόνος οὗτος θὰ ἦτο 105 sec. Νὰ εὐρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ φωταερίου ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀέρα. ($\rho = 1$). (Ἀπ. 0,44.)

1540. Ἐκ τοῦ στομίου ἀεροσωλῆνος διαμέτρου $d = 2 \text{ m}$ προσφυσᾶται ἐπὶ τῶν πτερυγίων ἀνεμομύλου ρεῦμα ἀέρος ὑπὸ ταχύτητα $u_1 = 20 \text{ m/sec}$ ἥτις, μετὰ τὴν πρόσπτωσιν τοῦ ἀέρος ἐπὶ τῶν πτερυγίων, καθίσταται $u_2 = 5 \text{ m/sec}$. Πόσῃν ἰσχύϊ εἰς PS ἀποκτᾷ ὁ ἀνεμόμυλος. (Πυκνότης ἀέρος $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$). (Ἀπ. 20 PS.)

1541. Ποῖα ἡ ἀεραντίστας εἰς ἀεροπλάνον, τοῦ ὁποῖου ὁ κινητὴρ εἶναι ἰσχύος 800 PS καὶ ἔχει ἀπόδοσιν 75%, ὅταν ἐκτελῇ ὀριζοντίαν πτήσιν μὲ ταχύτητα 360 km/h. (Ἀπ. 450 kgf.)

1542. Ἀλεξίπτωτον βάρους B πίπτει μὲ ταχύτητα $u = 3 \text{ m/sec}$. Ποῖα ἡ δύναμις τὴν ὁποῖαν δέχεται ἐκ μέρους τοῦ ἀέρος. Ἐὰν τὸ βάρος τοῦ ἀλεξίπτωτου εἶναι 2 B, μὲ ποῖαν ταχύτητα θὰ πίπτῃ τὸ ἀλεξίπτωτον. (Ἀπ. $\alpha' F = B$. $\beta' 4,23 \text{ m/sec}$.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1959.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1543. Δοχείον ύψους 20 cm φέρει εις τὸν πυθμένα αὐτοῦ ὀπὴν διαμέτρου 5 mm, εἶναι δὲ ἀρχικῶς πλήρες ὕδατος. Ἐάν, μετὰ τὴν ἐξοδὸν τοῦ ἐκ τῆς ὀπῆς, τὸ ὕδωρ ἐκρῆῃ διὰ σωλῆνος τομῆς 0,6 φορές μικροτέρας τῆς ὀπῆς, νὰ ὑπολογισθῇ μὲ πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ τροφοδοτῆται τὸ δοχεῖον, ἵνα ἡ στάθμη αὐτοῦ παραμένῃ εἰς τὸ ἀνώτερον χεῖλος τούτου. ($g = 1000 \text{ cm/sec}^2$). (Ἄπ. $v/t = 0,15 \text{ πδ}^2/2gh = 23,4 \text{ cm}^3/\text{sec}$.)

1544. Ὑάλινος σωλὴν διαρρέεται ὑπὸ ὕδατος, ἀποτελεῖται δὲ ἐκ δύο τμημάτων τομῆς 4 cm² καὶ 1 cm². Ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων εὐρίσκεται ἀνὰ εἰς κατακόρυφος λεπτὸς σωλὴν, ἐντὸς δὲ τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται εἰς ὕψος 15 cm. Ἐάν τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ στενοῦ τμήματος τοῦ σωλῆνος μὲ ταχύτητα 80 cm/sec, νὰ εὑρεθῶν: α) Τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δευτέρου σωλῆνος. β) Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἐξέρχεται τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ στενοῦ τμήματος, ἵνα τὸ ὕψος εἰς τὸ ὅποιον ἀνέρχεται τοῦτο ἐντὸς τοῦ πρώτου σωλῆνος παραμένῃ τὸ αὐτὸ ὥς καὶ προηγουμένως, ἐνῶ ἐντὸς τοῦ δευτέρου εἶναι μηδέν. γ) Τί θὰ συμβῇ εἰς τὸν δεύτερον σωλῆνα, ἂν ἡ ταχύτης ροῆς αὐξήθῃ πέραν ταύτης. (Ἄπ. α' 11,1 cm. β' 177,2 cm/sec.)

1545. Σωλὴν ὀρθογωνίως κεκαμμένος καὶ ἀνοικτὸς κατὰ τὰ δύο ἄκρα βυθίζεται ἐντὸς ρέοντος ὕδατος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ἐν σκέλος νὰ διατεθῇ ἐντὸς αὐτοῦ ὀριζοντίως μὲ τὸ στόμιον ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῆς ροῆς. Τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ κατακορύφου σκέλους εἰς ὕψος $h = 25 \text{ cm}$ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Ποία ἡ ταχύτης v τοῦ ὕδατος. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. 2,24 m/sec.)

1546. Ὑάλινος σωλὴν κάμπτεται εἰς τὸ ἐν ἄκρον αὐτοῦ ὀρθογωνίως κατὰ μικρὸν τμήμα. Τὸ ἔτερον ἄκρον συνδέεται μὲσω βραχέος ἐλαστικοῦ σωλῆνος πρὸς ὀριζοντίαν στρόφιγγα ὕδατος. Ἀφίνομεν νὰ διέλθῃ μὲ ὀρισματὴν ταχύτητα διὰ τοῦ σωλῆνος ὕδωρ, τὸ ὅποιον ἐκρέει ἐκ τοῦ κεκαμμένου ἄκρου καθέτως πρὸς τὰ κάτω. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἀναλόγως τῆς δυνάμεως ἀντιδράσεως τοῦ ὑγροῦ ὁ σωλὴν λαμβάνει διαφόρους θέσεις, μετὰξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν ὀριζοντίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ πόσα $\text{kg} \cdot \text{r}^*$ ὕδατος ἐκρέουν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὀριζοντίας θέσεως, ἐντὸς 30 sec, ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 60 cm, τὸ βάρος αὐτοῦ 51,5 gr^* καὶ ἡ ἐσωτερικὴ του διάμετρος 0,8 cm. (Τὸ μῆκος τοῦ κεκαμμένου τμήματος εἶναι ἀμελητέον). (Ἄπ. 4,26 $\text{kg} \cdot \text{r}^*$.)

1547. Ποία ἡ ταχύτης ροῆς ὕδατος μέσω κυκλικοῦ δακτυλίου διαμέτρου $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, εὐρίσκομένου 3,4 m κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ποία ἡ παροχὴ τοῦ ὑγροῦ. Ποία ἡ ταχύτης ροῆς καὶ ἡ παροχὴ, ἐὰν ἀσκήται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ πίσεις $3 \cdot 10^5 \text{ Nt/m}^2$. (Ἄπ. $v = 8,18 \text{ m/sec}$, $\Pi = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec}$, $v = 11,3 \text{ m/sec}$, $\Pi = 2,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec}$.)

1548. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀρική ταχύτης κατὰ τὴν πτώσιν σφαίρας βάρους $B = 10 \text{ kg} \cdot \text{r}^*$ καὶ ἀκτίνος $r = 8 \text{ cm}$, προϋποτιθεμένου ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $R = k \cdot S \cdot v^2$, ὅπου v ἡ ταχύτης πτώσεως, S ἡ ἐπιφάνεια προβολῆς τοῦ πίπτοντος σώματος ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς πτώσεως καὶ k συντελεστὴς ἀναλογίας ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος καὶ ἴσος πρὸς 0,024 $\text{kg} \cdot \text{r}^* \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-4}$, διὰ τὴν σφαῖραν. (Ἄπ. $v_{op} = 144 \text{ m/sec}$.)

1549. Δύο σφαῖραι τῆς αὐτῆς διαμέτρου $d = 2 \text{ cm}$ ἀποτελοῦνται ἡ μία ἐξ ἀλουμινίου (Al) καὶ ἡ ἑτέρα ἐκ μολύβδου (Pb), ἀφίνοινται δὲ νὰ πέσουν ἀπὸ μεγάλου ὕψους. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὀρικαὶ ταχύτητες αὐτῶν, ἐὰν ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι $\rho = 1,3 \text{ gr/lit}$. Δίδονται ἐπίσης συντελεστῆς ἀντιστάσεως $C_{avt} = 0,22$, πυκνότης $Pb \rho_1 = 11 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $Al \rho_2 = 2,7 \text{ gr/cm}^3$. (Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, 1958). (Ἄπ. $v_1 = 105,14 \text{ m/sec}$, $v_2 = 49,66 \text{ m/sec}$.)

1550. Βραστήρ περιέχει ύδωρ υπό πίεσιν $4 \cdot 10^5 \text{ Nt/m}^2$ ἐπὶ πλεόν τῆς ἀτμοσφαιρικής πίεσεως. Ποία ἡ ταχύτης διαφυγῆς ἀπὸ ἀνοιγμα τοῦ βραστήρος.
(Ἀπ. $v = 2,8 \cdot 10^1 \text{ m/sec.}$)

1551. Ἀλεξιπτωτιστὴς ἐγκαταλείπει ἀεροπλάνον εἰς τοιοῦτον ὕψος, ὥστε μετὰ τὸ ἀνοιγμα τοῦ ἀλεξιπτώτου του ἡ ταχύτης πτώσεως αὐτοῦ καθίσταται σταθερὰ εἰς ὕψος 1500 m ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ὁ ἀλεξιπτωτιστὴς προσγειοῦται εἰς ὕψος 500 m ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὸ βάρος δὲ αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἀλεξιπτώτου του ἀνέρχεται εἰς 85 kgr^* . Τὸ ἀλεξιπτωτὸν ἔχει μορφὴν ἡμισφαιρίου διαμέτρου 6 m. Ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι $0,00169 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $C_{avt} = 1,4$. Ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ καὶ ποῖος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ πτώσιν 1000 m.
(Ἀπ. $6,21 \text{ m/sec, 161 sec.}$)

1552. Δύο ὁμογενεῖς σφαῖραι τῆς αὐτῆς ἀκτίνος, τῶν ὁποίων τὰ εἰδικὰ βάρη εἶναι ϵ_1 καὶ ϵ_2 , πῖπτουν ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὀρικῶν ταχυτήτων τῶν σφαιρῶν, ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος.
(Ἀπ. $v_{100}/v_{200} = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$.)

1553. Ποία ἡ ταχύτης ἀνόδου ἀεροσκάφους βάρους 1500 kgr^* , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἔλξις τοῦ κινητήρος εἶναι 300 kgr^* , ἡ ἀεραντίστασις 210 kgr^* καὶ ἡ ταχύτης πτήσεως 180 km/h .
(Ἀπ. 3 m/sec.)

1554. Ἀεροπλάνον ἵπταται ὀριζοντίως. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος καὶ ἀνέρχεται εἰς $0,05 \text{ kgr}^*$ διὰ ταχύτητα 1 m/sec . Ἡ προωστικὴ δύναμις τῆς ἑλικος εἶναι σταθερῶς ἴση πρὸς 3080 kgr^* καὶ σχηματίζει γωνίαν 10° μετὰ τὴν γραμμὴν πτήσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀρικὴ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου.
(Ἀπ. $v_{op} = 246 \text{ m/sec.}$)

1555. Ἀεροπλάνον βάρους 2 tn^* ἵπταται ὀριζοντίως, κινούμενον με ἐπιτάχυνσιν 5 m/sec^2 καὶ ἔχει εἰς δεδομένην χρονικὴν στιγμήν ταχύτητα 200 m/sec . Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος καὶ διὰ ταχύτητα 1 m/sec ἀνέρχεται εἰς $0,05 \text{ kgr}^*$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προωστικὴ δύναμις τῆς ἑλικος, ἂν αὕτη σχηματίζῃ γωνίαν 10° πρὸς τὴν γραμμὴν πτήσεως. (Ἀπ. $F = 3080 \text{ kgr}^*$.)

1556. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος κατὰ τὸν πλοῦν πλοίου αὐξάνει μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος, ἀνερχομένη εἰς $0,12 \text{ tn}^*$ διὰ ταχύτητα 1 m/sec . Ἡ προωστικὴ δύναμις τῆς ἑλικος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως μεταβάλλεται συμφώνως μετὰ τὸν νόμον $T = T_0 \cdot (1 - v/v_s)$, ὅπου $T_0 = 120 \text{ tn}^*$ παριστᾷ τὴν ὥστικὴν δύναμιν διὰ $v = 0$ καὶ $v_s = \text{σταθερὸν} = 33 \text{ m/sec}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀρικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἀναπτύξῃ τὸ σκάφος.
(Ἀπ. $v_{op} = 72 \text{ km/h.}$)

1557. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀρικὴ ταχύτης σταγόνος ὁμίχλης διαμέτρου 2 μικρῶν (2μ). Δίδεται: $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς (ἰξῶδες) ἀέρος εἶναι: $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ MKS (Nt} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2})$.
(Ἀπ. $v = 0,12 \text{ mm/sec.}$)

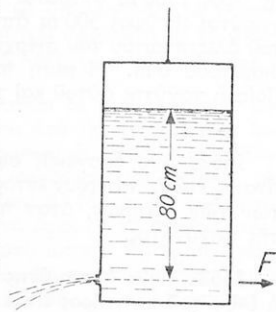
1558. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀρικὴ ταχύτης κόκκου χαλάζης διαμέτρου 1 cm , τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι $\rho = 9,2 \cdot 10^2 \text{ kgr/m}^3$. Ἰξῶδες $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ MKS (Nt} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2})$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $C_{avt} = 0,24$. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι $\rho = 1,3 \text{ kgr/m}^3$.
(Ἀπ. $v = 20 \text{ m/sec, περίπου.}$)

1559. Παραδεχόμεθα ὅτι ἀλεξιπτωτων λαμβάνει ὡς ὀρικὴν ταχύτητα τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τις πῖπτων ἐλευθέρως ἐξ ὕψους $0,8 \text{ m}$. Ποία ἡ ἀκτὶς τῆς μετωπικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ὅταν τὸ ἀλεξιπτωτὸν φέρῃ φορτίον 80 kgr^* . Δίδεται: $g = 10 \text{ m/sec}^2$, συντελεστὴς ἀντιστάσεως $C_{avt} = 1,8$, πυκνότης ἀέρος $= 1,3 \text{ kgr/m}^3$.
(Ἀπ. $r = 3,7 \text{ m.}$)

1560. Υπολογίσατε την όρική ταχύτητα σφαίρας εξ ύαλου διαμέτρου 3 mm, πιπτούσης ἐντὸς ρευστῆς βαζελίνης πυκνότητος 920 kgr/m^3 καὶ συντελεστοῦ ἰξώδους $\eta = 0,006 \text{ MKS (Nt} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2})$. $\rho = 2,52 \cdot 10^3 \text{ kgr/m}^3$. (Ἀπ. $v = 5,3 \text{ cm/sec.}$)

1561. Δοχεῖον πλήρες ὕδατος ἔχει, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, πλευρικήν ὀπήν ἔμβαδου 1 cm^2 . Ποία ἡ ἐξ αἰτίας τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος ἀναπτυσσομένη δύναμις ἀνακρούσεως, ὅταν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἀπέχη 80 cm ἀπὸ τῆς ὀπῆς.

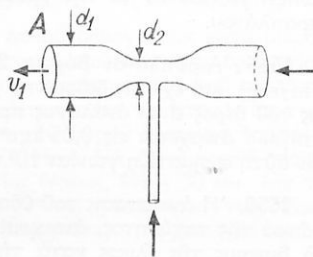
(Ἀπ. Ἐὰν ἐκρῆ κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης ὕδατος $\rho \cdot S \cdot v$, τότε ἡ κατὰ δευτερόλεπτον μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς $\rho \cdot S \cdot v^2$ ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν ἀνακρούσεως F . Ταχύτης ἐκροῆς $v = \sqrt{2gh}$, $F = \rho \cdot S \cdot 2gh = 1,57 \text{ Nt.}$)



Ἀσκήσις 1561.

1562. Αὐτοκίνητον μάζης 1200 kgr ἔχει κυρίαν τομήν $S = 2,4 \text{ m}^2$. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἶναι $C_{αντ} = 0,39$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ὁ ἄηρ ἔχει πυκνότητα $1,2 \text{ kgr/m}^3$. α) Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος κατὰ τὸν τύπον $T_1 = k \cdot v^2$. β) Αἱ τριβαὶ ὀλισθήσεως ἰσοδυναμοῦν πρὸς δύναμιν 300 Nt ἀνὰ τόννον. Εἰς ποίαν ταχύτητα v_0 ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀντίστασιν τριβῆς ὀλισθήσεως T_2 . γ) Τὸ ὄχημα κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 108 km/h . Ποῖον τὸ ποσοστὸν τῆς καταναλισκομένης ἰσχύος ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος. δ) Ἡ δύναμις τῆς μεγίστης ἔλξεως τοῦ κινητήρος εἶναι 1440 Nt . Ποία εἶναι ἡ ὀρικὴ ταχύτης τοῦ ὀχήματος. Ποῖον εἶναι τότε τὸ ποσοστὸν τῆς ἀπορροφουμένης ἰσχύος ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος.

(Ἀπ. α' $T_1 = 0,6 v^2$. β' $v = 88 \text{ km/h}$. γ' 60%. δ' 42,4 m/sec, 75%.)



Ἀσκήσις 1563.

1563. Ποία ὑποπίεσις προκαλεῖται εἰς τὴν στένωσιν τοῦ ἀποξηραντικοῦ σωλῆνος τοῦ σχήματος, ἐὰν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ σημεῖον Α ρεῖ με ταχύτητα $v_1 = 6 \text{ m/sec}$. Δίδεται διὰ τὰς διαμέτρους $d_1 = 9 \text{ cm}$ καὶ $d_2 = 6 \text{ cm}$.

(Ἀπ. $v_2 = 6 \cdot 81/36 = 13,5 \text{ m/sec}$, συνεπῶς $\Delta p = 1000/2 \cdot 9,81 (13,5^2 - 6^2) = 0,746 \text{ at.}$)

1564. Ἐντὸς ἡρεμοῦντος ἀέρος κινεῖται ὀριζοντίως ἀεροπλάνον, κάτωθεν τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται ἐξηρημένη διὰ λεπτοῦ ἀβαροῦς νήματος μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα, ἀκτίνος 3 cm καὶ πυκνότητος 11 gr/cm^3 . Κατὰ τινα στιγμήν ὁ ἀεροπόρος παρατηρεῖ, ὅτι τὸ νῆμα σχηματίζει μετὰ τῆς κατακόρυφου γωνίαν $0,1 \text{ rad}$. Δοθέντος ὅτι ἡ ἀντίστασις R τοῦ ἀέρος, ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τῆς σφαίρας δίδεται εἰς μονάδας C.G.S. ὑπὸ τῆς σχέσεως $R = k \cdot S \cdot v^2$, ὅπου $k = 0,000245 \text{ C.G.S.}$, νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου κατὰ τὴν στιγμήν τῆς παρατηρήσεως. (Π α ρ α τ ῆ ρ η σ ι ς. Ἐὰν γωνία τῆς εἶναι μικροτέρα τῶν 7° δυνατόν ἐντὶ τῆς ἐραπτομένης αὐτῆς νὰ λαμβάνωμεν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τὴν γωνίαν ἐκτεφρασμένην εἰς ἀκτίνια). (Ἀπ. $41,97 \text{ m/sec.}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'

ΜΟΡΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1565. 'Εάν όλα τὰ μόρια αέρος, τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ κανονικᾶς συνθή-
κας εἰς ὄγκον 500 cm^3 , ἀφηροῦντο ἐξ αὐτοῦ καὶ ἀκολουθῶς διὰ μικρᾶς ὀπῆς ἀ-
φρίετο νὰ εἰσχωρήσουν ἐκ νέου ὑπὸ ρυθμὸν ἐνὸς ἑκατομμυρίου μορίων ἀνὰ δευ-
τερόλεπτον, πόσος χρόνος εἰς ἔτη θὰ ἀπαιτηθῇ, ἵνα ὅλα πάλιν τὰ μόρια εἰσχω-
ρήσουν εἰς τὸ δοχεῖον. (1 ἔτος = 365 ἡμέραι).

Λύσις. 'Εκ μετρήσεων εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς 1 cm^3 αέρος περιέχονται ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας $28 \cdot 10^{18}$ μόρια. Συνεπῶς τὰ 500 cm^3 αέρος θὰ περιέχουν $14 \cdot 10^{21}$ μόρια. Ἀφοῦ δὲ εἰς 1 sec θὰ εἰσχωροῦν 10^6 μόρια, διὰ νὰ εἰσχωρήσουν τὰ $14 \cdot 10^{21}$ μόρια, θὰ ἀπαιτηθῇ χρόνος:

$$t = \frac{14 \cdot 10^{21}}{10^6} = 14 \cdot 10^{15} \text{ sec}$$

$$\eta: \quad t = \frac{14 \cdot 10^{15}}{86400} \text{ ἡμέραι (1 ἡμέρα = 86400 sec)}$$

$$\eta: \quad t = \frac{14 \cdot 10^{15}}{365 \cdot 86400} = 4,4 \cdot 10^9 \text{ ἔτη}$$

1566. Εἰς ὀρθογώνιον πλαίσιον ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα ἡ μία πλευρὰ εἶναι
κινητή, ὀλισθαίνουσα ἐπὶ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν καὶ ἔχει μῆκος 4 cm . 'Επὶ
τοῦ πλαισίου τούτου δι' ἐμβυθίσεως αὐτοῦ ἐντὸς διαλύματος σάπωνος σχημα-
τίζομεν λεπτὸν ὑμένιον, τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπιφάνεια, ὅταν τὸ πλαίσιον διατίθεται
ὀριζοντίως, λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως τείνει νὰ σμικρυνθῇ, παρασύρουσα οὖ-
τω τὸ κινητὸν ὀριζόντιον σύρμα. Διὰ τὴν διατήρησιν τοῦ σύρματος εἰς τὴν θέ-
σιν του, πρέπει καθέτως πρὸς τὸ σύρμα καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὑμενίου νὰ ἐ-
πενεργῇ δύναμις 240 mgr^* . Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως.

Λύσις. 'Εάν καλέσωμεν l τὸ μῆκος τῆς κινητῆς πλευρᾶς τοῦ πλαισίου, α τὸν συντελεστὴν τῆς ἐπι-
φανειακῆς τάσεως καὶ F τὴν ἀσκουμένην δύναμιν, τότε, ὡς γνωστὸν, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$F = 2 \alpha \cdot l \quad (1)$$

'Εκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς α , λαμβάνομεν:

$$\alpha = \frac{F}{2 l} \quad (2)$$

*Εργαζόμενοι εἰς τὸ Σύστημα C. G. S. θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $F = 240 \cdot 10^{-3} \cdot 981 = 235 \text{ dyn}$ περίπου, $l = 4 \text{ cm}$ καὶ εὐρίσκομεν:

$$\alpha = 29 \text{ dyn/cm}$$

1567. 'Η ἐν τῷ ἐσωτερικῷ σφαιρικῆς φουσαλλίδος σάπωνος ἐπικρατοῦσα
ὑπερπίεσις εἶναι $\Delta p = 4 \alpha / r$, ὅπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως καὶ r
ἡ ἀκτίς τῆς φουσαλλίδος. 'Εὰν $r = 5 \text{ mm}$ καὶ $\alpha = 25 \text{ dyn/cm}$, πόση ἡ ὑπερπίεσις.

Λύσις. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν:

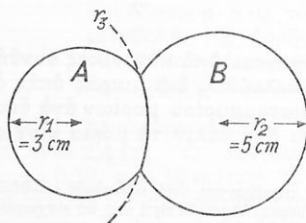
$$\Delta p = \frac{4 \alpha}{r}$$

$\alpha = 25 \text{ dyn/cm}$, $r = 0,5 \text{ cm}$, και εύρισκόμεν ότι η ζητούμενη υπερπίεσις είναι :

$$\Delta p = 200 \text{ dyn/cm}^2$$

1568. Δύο σφαιρικοί πομφόλυγες εκ σάπωνος Α και Β ακτίνων 3 cm και 5 cm εφάπτονται κατά τρόπον, ώστε έχουν τμήμα των επιφανειών των κοινόν. Να υπολογισθῇ ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς κοινῆς ταύτης ἐπιφανείας.

Λύσις. Ἐστω r_3 ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς κοινῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν δύο πομφόλυγων. Ἐάν p_1 καλέσωμεν τὴν πίεσιν ἐντὸς τῆς πρώτης πομφόλυγος, p_2 τὴν πίεσιν ἐντὸς τῆς δευτέρας καὶ p_3 τὴν διαφοράν αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :



$$p_3 = p_1 - p_2 \quad (1)$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι : } p_1 = \frac{4\alpha}{r_1} \quad (2) \quad p_2 = \frac{4\alpha}{r_2} \quad (3)$$

$$\text{καὶ : } p_3 = \frac{4\alpha}{r_3} \quad (4)$$

ὅπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως. Δι' ἀντικατάστασιν προκύπτει :

$$\frac{4\alpha}{r_3} = \frac{4\alpha}{r_1} - \frac{4\alpha}{r_2} \quad \eta : \quad r_3 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (5)$$

Δίδονται : $r_1 = 3 \text{ cm}$ καὶ $r_2 = 5 \text{ cm}$. Ἐπομένως, δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν (5), λαμβάνομεν :

$$r_3 = 7,5 \text{ cm}$$

1569. Ἐντὸς τριχοειδοῦς σωλῆνος βυθισμένου ἐντὸς ὕδατος, ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις παρέχεται ἐκ τοῦ τύπου $h = 2\alpha / r \cdot \rho \cdot g$, ὅπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως, r ἡ ἀκτίς τοῦ σωλῆνος, ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. Ἐάν εἶναι $r = 1 \text{ mm}$ καὶ $\alpha = 25 \text{ dyn/cm}$, πόση ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος.

Λύσις. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{2\alpha}{r \cdot \rho \cdot g}$$

$\alpha = 25 \text{ dyn/cm}$, $r = 0,1 \text{ cm}$, $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, καὶ εύρισκόμεν ὅτι ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος εἶναι :

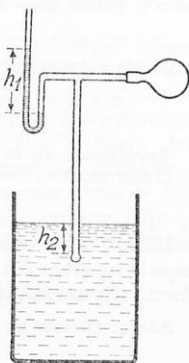
$$h = 0,51 \text{ cm}$$

1570. Τριχοειδὴς σωλὴν ἀκτίνος $0,2 \text{ mm}$ τοποθετεῖται κατακορύφως μὲ τὸ κάτω ἄκρον του κατὰ 4 cm ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τὸ ἄνω ἄκρον συνδέεται διὰ σωλῆνος ἐν σχήματι Τ πρὸς μανόμετρον μὲ ὕδωρ καὶ πρὸς ἐλαστικὴν σφαῖραν πλήρη ἀέρος. Ἡ σφαῖρα πιέζεται μέχρῃς ὅτου σχηματισθῇ ἡμισφαιρική πομφόλυξ ἐξ ἀέρος εἰς τὸ κάτω ἄκρον τοῦ κατακορύφου σωλῆνος. Ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ τοῦ ὕδατος ἐν τῷ μανομέτρῳ εὐρίσκεται ὅτι εἶναι $10,6 \text{ cm}$. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἰσορροπίας ἔχομεν γωνίαν ἐπαφῆς μετὰ τοῦ ὕδατος καὶ τριχοειδοῦς σωλῆνος $\theta = 0^\circ$, διότι ἔχομεν ἡμισφαιρικήν φυσαλλίδα. Ἐπομένως, ἡ πίεσις p , λόγῳ τριχοειδοῦς ἀνύψωσης, θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$p = \frac{2\alpha}{r} \quad (1)$$

ὅπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος καὶ r ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἀκτίς τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος. Ἡ πίεσις αὕτη θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς ἡμισφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ἐάν καλέσωμεν p_0 τὴν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν, p_1 τὴν πίεσιν ἐντὸς τοῦ



τριχοειδούς σωλήνος και p_2 την συνολικήν πίεσιν ή όποια άσκειται εις τὸ κάτω άκρον τοῦ σωλήνος, θά έχωμεν :

$$p = p_1 - p_2 \quad (2)$$

Γνωρίζομεν επίσης ότι :

$$p_1 = p_0 + p'_1 \quad (3) \quad \text{και} : \quad p_2 = p_0 + p'_2 \quad (4)$$

όπου p'_1 ή υπερπίεσις ἐντὸς τοῦ τριχοειδούς σωλήνος και p'_2 ή υδροστατική πίεσις τοῦ ὕδατος εις τὸ κάτω άκρον τοῦ σωλήνος. Διά συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (2), (3) και (4) προκύπτει :

$$p = p'_1 - p'_2 \quad (5)$$

Ἀφ' ἐτέρου :

$$p'_2 = h_2 \cdot \epsilon \quad (6) \quad \text{και} : \quad p'_1 = h_1 \cdot \epsilon \quad (7)$$

όπου h_2 ή διαφορά στάθμης τῶν δύο ἐπιφανειῶν τοῦ ὕδατος, h_1 τὸ ὕψος τῆς στήλης ὕδατος τοῦ μανομέτρου και ϵ τὸ ειδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος. Διά συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (5), (6) και (7), προκύπτει :

$$\frac{2}{r} \alpha = h_1 \cdot \epsilon - h_2 \cdot \epsilon \quad \eta : \quad \alpha = \frac{r}{2} \cdot \epsilon \cdot (h_1 - h_2) \quad (8)$$

Δίδονται : $r = 0,2 \text{ mm} = 0,02 \text{ cm}$, $\epsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 = 981 \text{ dyn/cm}^3$, $h_2 = 4 \text{ cm}$ και $h_1 = 10,6 \text{ cm}$. Δι' ἀντικατάστασως διὰ τῶν δεδομένων εις τὴν (8) λαμβάνομεν :

$$\alpha = 64,7 \text{ dyn/cm}$$

1571. Ὑοειδής σωλὴν περιέχει ὑγρὸν συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως $\alpha = 75 \text{ dyn/cm}$ και πυκνότητος $\rho = 1,1 \text{ gr/cm}^3$. Τὰ σκέλη τοῦ σωλήνος εἶναι και τὰ δύο κατακόρυφα και διαμέτρων $d_1 = 2 \text{ mm}$ και $d_2 = 0,6 \text{ mm}$ ἀντιστοίχως. Νά υπολογισθῇ ή διαφορά ὕψους μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τῶν δύο σκελῶν. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). Ἡ γωνία ἐπαφῆς ὑγροῦ - σωλήνος θά ληφθῇ ἴση πρὸς 0° .

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν ὀριζόντιον ἐπίπεδον ΓΔ ὑπὸ τὴν στάθμην τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εις ἀμφότερα τὰ σκέλη και εις βάθη h_1 και h_2 κάτωθεν αὐτῶν ἀντιστοίχως. Αἱ πιέσεις P_1 , P_2 αἱ όποια ἀντιστοιχοῦν εις τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θά πρέπει νά εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δὲν ἔχομεν ροὴν τοῦ ὑγροῦ. Ἡτοι θά έχωμεν :

$$P_1 = P_2 \quad (1)$$

Ἡ πίεσις P_1 , ἀφ' ἐτέρου, θά πρέπει νά εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς υδροστατικῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ p'_1 και τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως p_0 μετὼν τὴν ἀντιστοιχὸν ἐπιφανειακὴν τάσιν τοῦ ὑγροῦ p_1 .

$$\text{Ἡτοι} : \quad P_1 = p'_1 + p_0 - p_1 \quad (2)$$

$$\text{και ὁμοίως} : \quad P_2 = p'_2 + p_0 - p_2 \quad (3)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει :

$$p'_2 - p'_1 = p_2 - p_1 \quad (4)$$

Ἐχομεν επίσης :

$$p'_2 = h_2 \cdot \rho \cdot g \quad (5) \quad p'_1 = h_1 \cdot \rho \cdot g \quad (6)$$

$$p_2 = 2 \alpha / r_2 \quad (7) \quad \text{και} : \quad p_1 = 2 \alpha / r_1 \quad (8)$$

όπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὑγροῦ, ρ ή πυκνότης αὐτοῦ και r_1 , r_2 αἱ ἐσωτερικαὶ ἀκτῖνες τῶν σωλήνων. Διά συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων, (4), (5), (6), (7) και (8) προκύπτει :

$$(h_2 - h_1) \cdot \rho \cdot g = \frac{2 \alpha}{r_2} - \frac{2 \alpha}{r_1} \quad \eta : \quad h_2 - h_1 = \frac{2 \alpha}{\rho \cdot g} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (9)$$

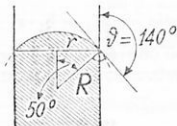
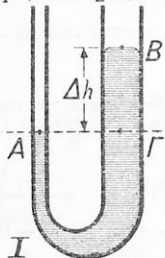
Δίδονται : $\alpha = 75 \text{ dyn/cm}$, $\rho = 1,1 \text{ gr/cm}^3$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $r_1 = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$ και $r_2 = 0,3 \text{ mm} = 0,03 \text{ cm}$. Δι' ἀντικατάστασως εις τὴν (9) λαμβάνομεν :

$$h_2 - h_1 = 3,24 \text{ cm}$$

1572. Δύο τριχοειδεῖς σωλήνες, διαμέτρων $d_1 = 0,2 \text{ mm}$ και $d_2 = 1 \text{ mm}$ ἀντιστοίχως, συνδέονται πρὸς σχηματισμὸν ὑοειδούς σωλήνος. Οἱ σωλήνες τοποθετοῦνται εις κατακόρυφον θέσιν και ἐντὸς τοῦ συγκροτήματος αὐτῶν προσ-

τίθεται ποσότης υδραργύρου. Νά υπολογισθῇ ἡ διαφορά στάθμης τοῦ υδραργύρου ἐντὸς τῶν δύο σωλῆνων, ἐὰν ὁ συντελεστῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ υδραργύρου εἶναι $\alpha = 460 \text{ dyn/cm}$ καὶ ἡ γωνία ἐπαφῆς αὐτοῦ μετὰ τῆς ὑάλου εἶναι $\theta = 140^\circ$. (Πυκνότητος υδραργύρου $\rho = 13,6 \text{ gr/cm}^3$).

$$r_1 = 0,1 \text{ mm} \quad r_2 = 0,5 \text{ mm}$$



Λύσις. Ἡ διαφορά ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἀσκῆσιν ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἡ γωνία ἐπαφῆς ὑγροῦ καὶ ὑαλίνων σωλῆνων θ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ ἐπομένως οἱ τύποι διὰ τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$p_1 = \frac{2\alpha \cdot \sin \theta}{r_1} \quad (1)$$

$$\text{καὶ :} \quad p_2 = \frac{2\alpha \cdot \sin \theta}{r_2} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ υδράργυρος δὲν διαβρέχει τὸν ὑάλινον σωλῆνα, ἔχομεν γωνίαν $\theta = 140^\circ > 90^\circ$, ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ $\sin \theta(0)$, καὶ διὰ τοῦτο ὁ τελικὸς τύπος τῆς διαφορᾶς στάθμης

ἔχομεν πτωσὶν στάθμης εἰς τὸν λεπτότερον σωλῆνα, ὅποτε ὁ τελικὸς τύπος τῆς διαφορᾶς στάθμης θὰ εἶναι :

$$\Delta h = \frac{2\alpha \cdot \sin \theta}{\rho \cdot g} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων : $\alpha = 460 \text{ dyn/cm}$, $\rho = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $\sin \theta = -0,766$ (ἐκ τῶν πινάκων), $r_1 = 0,01 \text{ cm}$ καὶ $r_2 = 0,05 \text{ cm}$, λαμβάνομεν :

$$\Delta h = 4,23 \text{ cm}$$

1573. Ὑδωρ ρεεῖ μέσῳ ὀριζοντίου σωλῆνος μήκους 25 cm καὶ ἐσωτερικῆς διαμέτρου 1 mm ὑπὸ σταθερὰν στάθμην τοῦ ὑγροῦ ὕψους 15 cm . Ἐὰν ὄγκος ἐξ $72,5 \text{ cm}^3$ ὕδατος ρεύσῃ ἐκ τοῦ σωλῆνος ἐντὸς 10 min , νά υπολογισθῇ ὁ συντελεστῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὕδατος ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ πειράματος. (Δύνασθε νὰ θεωρήσετε ὅτι ἐπικρατοῦν συνθήκαι ἀστροβίλου - νηματικῆς ροῆς).

Λύσις. Ὁ συντελεστῆς τοῦ ἰσώδους δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Poiseuille :

$$\eta = \frac{\pi \cdot p \cdot r^4}{8 \cdot l \cdot v}$$

ὅπου p ἡ διαφορά πιέσεων μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος, r καὶ l ἡ ἀκτίς καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ καὶ v ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὑγροῦ (παροχή) εἰς cm^3/sec .

Εἰς τὴν ἀσκῆσιν δίδονται : $p = h \cdot \epsilon = 15 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2$, $r = 0,05 \text{ cm}$, $l = 25 \text{ cm}$ καὶ $v = 72,5 \text{ cm}^3/600 \text{ sec}$, ἐπομένως δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν :

$$\eta = 0,012 \text{ Poise (Po)}$$

Σημείωσις. $1 \text{ Poise} = 1 \text{ Po} = 100 \text{ cPo (centipoise)} = 1 \text{ gr/cm} \cdot \text{sec}$. 1 cPo εἶναι ὁ συντελεστής ἰσώδους τοῦ χημικῶς καθαροῦ ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν $20,5^\circ \text{C}$.

1574. Μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι, διαμέτρου 2 mm καὶ πυκνότητος $7,8 \text{ gr/cm}^3$, πίπτουν ἐντὸς γλυκερίνης μὲ ὀρικὴν ταχύτητα $0,6 \text{ cm/sec}$. Νά υπολογισθῇ ὁ συντελεστῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς τῆς γλυκερίνης, δοθέντος ὅτι ἡ πυκνότης εἶναι $1,26 \text{ gr/cm}^3$. ($g = 9,81 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Stokes, ὅταν μικρὰ σφαῖρα πίπτῃ ἐντὸς ἰσώδους ὑγροῦ, ἀποκτᾷ ταχύτητα :

$$v = \frac{T}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} \quad (1)$$

ὅπου T ἡ δύναμις τριβῆς, λόγῳ τοῦ ἰσώδους τοῦ ὑγροῦ, η ὁ συντελεστῆς ἰσώδους αὐτοῦ καὶ r ἡ ἀκτίς

τῆς σφαίρας. Ἀφ' ἐτέρου γνωρίζομεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ σφαῖρα πίπτει ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν τῶν ἐπιτερουσῶν ἐπ' αὐτῆς δυνάμεων, ἥτοι τοῦ βάρους Β, τῆς ἀνώσεως Α καὶ τῆς τριβῆς Τ. Ἦτοι:

$$B - A - T = 0 \quad (2)$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας $V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$ (3). Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$B = m \cdot g = V \cdot \rho_1 \cdot g \quad (4) \quad \text{καί:} \quad A = V \cdot \rho_2 \cdot g \quad (5)$$

ὅπου ρ_1 καὶ ρ_2 αἱ πυκνότητες τῆς σφαίρας καὶ τῆς γλυκερίνης ἀντιστοίχως. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4) καὶ (5) προκύπτει:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_1 - \rho_2) = 6 \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad \text{ἥ:} \quad \eta = \frac{2 r^2 \cdot g \cdot (\rho_1 - \rho_2)}{9 v} \quad (6)$$

Δίδονται: $r = 0,1 \text{ cm}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $\rho_1 = 7,8 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_2 = 1,26 \text{ gr/cm}^3$, $v = 0,6 \text{ cm/sec}$, Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν (6) λαμβάνομεν:

$$\eta = 23,8 \text{ Poise}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1575. Σταγὼν βροχῆς ἔχει ἀκτίνα 2 mm . Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι $\alpha = 71 \text{ dyn/cm}$, ποῖα ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σταγόνης. (Ἀπ. 1420 dyn/cm^2 .)

1576. Βελὼνῃ μήκους 4 cm καὶ βάρους $0,4 \text{ gr}^*$ ἐπιπλᾶει εἰς ὕδωρ τοῦ ὁποῖου ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἶναι $\alpha = 72 \text{ dyn/cm}$. Ὑπολογίσατε τὴν διαφορὰν εἰς δύναν μεταξὺ τοῦ βάρους τῆς βελόνῃς καὶ τῆς δυνάμεως πρὸς τὰ ἄνω, τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς βελόνῃς. (Ἀπ. 184 dyn .)

1577. Ἐκ κατακορύφου τριχοειδοῦς σωλῆνος διαμέτρου 1 mm ἐκρέει κατὰ σταγόναν ὕδωρ ($\alpha = 73 \text{ dyn/cm}$). Ποῖον τὸ μήκος τῆς στήλης τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ τριχοειδοῦς, μετὰ τὴν πτώσιν τῆς τελευταίας σταγόνης. (Ἀπ. $5,96 \text{ cm}$.)

1578. Εἰς τριχοειδῇ σωλῆνα ἡ αἰθυλικὴ ἀλκοόλη ($\alpha_1 = 22 \text{ dyn/cm}$) ἀνέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ μέχρις ὕψους 36 mm . Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται τὸ ὕδωρ ($\alpha_2 = 73 \text{ dyn/cm}$) ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος. (Ἀπ. $h_2 = 94,4 \text{ mm}$.)

1579. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τερεβινθέλαιον εἰς τριχοειδῇ σωλῆνα διαμέτρου $0,6 \text{ mm}$, θεθέντος ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις καὶ ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθελαιίου εἶναι 27 dyn/cm καὶ $0,87 \text{ gr/cm}^3$ ἀντιστοίχως καὶ ὅτι ἡ γωνία συνεπαφῆς τερεβινθελαιίου καὶ ὕδατος εἶναι 17° . (Ἀπ. $2,02 \text{ cm}$.)

1580. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ ὕδατος εἰς τὸ μεταξὺ δύο σκελῶν σωλῆνος σχήματος U, ἐὰν αἱ ἐσωτερικαὶ διαμέτροι τῶν δύο σκελῶν εἶναι ἀντιστοίχως 1 mm καὶ $0,5 \text{ mm}$. Νὰ ληφθῇ ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος ἴση πρὸς 75 dyn/cm . ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. $3,06 \text{ cm}$.)

1581. Ποῖα διαφορὰ πίεσεως ὑφίσταται μεταξὺ δύο πομφολύγων σάπωνος, διαμέτρου 2 cm καὶ 8 cm , αἵτινες συνδέονται μεταξὺ των διὰ λεπτοῦ σωλῆνος. ($\alpha = 29 \text{ dyn/cm}$). (Ἀπ. 87 mBar .)

1582. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν πομφόλυγος σάπωνος διαμέτρου $d_1 = 4 \text{ cm}$, ὅταν αὐτὴ ἀυξηθῇ εἰς $d_2 = 8 \text{ cm}$. ($\alpha = 3,3 \text{ mgr}^*/\text{mm}$). (Ἀπ. Ὀλίγ. $33 \text{ mgr}^*/\text{cm}^2$.)

1583. Ὑπολογίσατε, εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου, τὴν πίεσιν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σφαιρικῆς φυσαλλίδος ἀέρος ἀκτίνος 0,1 mm, κειμένης 10 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου εἶναι 760 mm. (Ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος $\alpha = 73 \text{ dyn/cm}$, πυκνότης ὑδραργύρου $= 13,6 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. 778,3 mm Hg.)

1584. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ἐντὸς πομφόλυγος ἐκ σάπωνος ἀκτίνος 5 mm, ὅταν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 750 Torr. Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως διαλύματος σάπωνος $= 25 \text{ dyn/cm}$. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. 75,2 cm Hg.)

1585. Σφαιρικὴ πομφόλυξ διαμέτρου 1,6 cm συνδέεται πρὸς μανόμετρον σχήματος U, περιέχον ὑγρὸν πυκνότητος $0,80 \text{ gr/cm}^3$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ διαλύματος σάπωνος, ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑψῶν εἶναι 1,5 mm. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. 23,5 dyn/cm.)

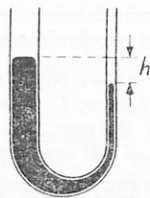
1586. Πομφόλυξ ὑδρατμοῦ διαμέτρου 1 mm δημιουργεῖται εἰς βάθος 10 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ἐντὸς δοχείου. Ἐὰν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 75,10 cm στήλης ὑδραργύρου, ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ὑδρατμοῦ, ἐντὸς τῆς πομφόλυγος. Πυκνότης τοῦ ὕδατος $= 0,96 \text{ gr/cm}^3$ καὶ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος $= 60 \text{ dyn/cm}$. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. 75,99 cm Hg.)

1587. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ἐντὸς σφαιρικῆς πομφόλυγος διαμέτρου 0,1 cm βυθισμένης εἰς ἀπόστασιν 20 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας ὑγροῦ πυκνότητος $1,26 \text{ gr/cm}^3$ καὶ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως 64 dyn/cm . Δίδεται ἐξωτερικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 76 cm Hg καὶ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. $1,04 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$.)

1588. Ὑάλινος δίσκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἑνὸς βραχίονος ζυγοῦ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ εἶναι κάθετον, ἡ δὲ ἐκ 10 cm πλεურὰ αὐτοῦ νὰ διατίθεται ὀριζοντίως. Ὁ δίσκος ἰσορροπεῖται διὰ σταθμῶν. Δοχεῖον μὲ διάλυσιν σάπωνος τίθεται κάτωθεν τῆς ἐκ 10 cm πλευρᾶς τοῦ δίσκου καὶ ἀκολουθῶς ἀπομακρύνεται ἡρέμως εἰς τρόπον, ὥστε λεπτὸς ὕμην σάπωνος νὰ ἐφάπτεται τῆς κάτω πλευρᾶς τοῦ δίσκου. Διὰ νὰ ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ, τοποθετοῦνται εἰς τὸν ἕτερον δίσκον του σταθμὰ 0,60 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τῆς διαλύσεως σάπωνος. ($g = 9,80 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. 29,4 dyn/cm.)

1589. Ὑαλινὴ πλᾶξ μήκους 10 cm, πλάτους 1,54 cm καὶ πάχους 0,20 cm ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 8,2 gr*. Ἐὰν εὐρίσκεται εἰς κάθετον θέσιν μὲ τὴν μεγάλην τῆς πλευρὰν ὀριζοντίαν καὶ τὸ κάτω ἡμισυνθετικὸν βυθισμένον ἐντὸς ὕδατος, ποῖον θὰ εἶναι τὸ φαινόμενον βάρος τῆς. Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος $= 73 \text{ dyn/cm}$. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. 8,18 gr*.)

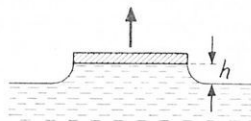
1590. Ἐν γραμμομόριον αἰρίου καταλαμβάνει ὄγκον $22 \cdot 400 \text{ cm}^3$ ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πίεσεως. Ὑπὸ αὐτὰς τὰς συνθήκας, πόσα μόρια θὰ εὐρίσκωνται ἐντὸς 1 cm^3 τοῦ αἰρίου. (Ἀπ. $2,68 \cdot 10^{19}$.)



* Ἀσκήσις 1591.

1591. Ποία διαφορὰ στάθμης ἐπικρατεῖ εἰς σωλῆνα σχήματος U, περιέχοντα ὑδράργυρον ἀλλ' ὅχι μέχρι τῶν χειλέων τοῦ σωλῆνος, ἐὰν αἱ διαμέτροι τῶν δύο σκελῶν εἶναι 10 mm καὶ 1 mm ἀντιστοίχως. (Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως $\alpha = 500 \text{ dyn/cm}$, $\rho = 13,6 \text{ gr/cm}^3$). (Ἀπ. $h_2 - h_1 = 1,35 \text{ cm}$.)

1592. Σταγών ύδατος τοποθετείται μεταξύ δύο επιπέδων υαλίνων επιφανειών, αΐτινες συμπίεζονται εις τρόπον, ὥστε ἡ σταγών ύδατος νὰ σχηματίσῃ λεπτόν ὑμένιον ἁκτίνος 5 cm καὶ πάχους 0,2 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ (εἰς kgf*) ἡ δύναμις ἣτις ἀπαιτεῖται πρὸς ἀποχωρισμόν των, ἐὰν ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος εἴναι 72 dyn/cm. (Ἀπ. 1,15 kgf*.)



* Ἀσκήσις 1593.

1593. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται πρὸς ἀνύψωσιν καὶ συγκράτησιν κυκλικῆς πλάκος, διαμέτρου 3 cm, ὑπὸ τινος ἐλευθέρως ἐπιφανείας ὕδατος, μετὰ τῆς ὁποίας ἡ πλάξ εὐρίσκεται ἐν ἐπαφῇ καὶ διαβρέχεται. Ποῖον τὸ ὕψος h τοῦ ὑδατίνου στρώματος, (Ἀπ. 698 dyn, 0,39 cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1594. Τὸ κάτω ἄκρον τριχοειδοῦς σωλῆνος ἁκτίνος 0,020 cm βυθίζεται εἰς βάθος 3 cm ἐντὸς ὕγρου πυκνότητος 0,85 gr/cm³. Ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ σωλῆνος ἀνυψοῦται μέχρις ὅτου σχηματισθῇ ἡμισφαιρικὴ φυσαλλίς εἰς τὸ κάτω ἄκρον. Ἡ ἐπὶ πλεόν πίεσις, ἡ ἀπαιτούμενη πρὸς τοῦτο, εὐρέθῃ ἴσῃ πρὸς τὴν ὀφειλόμενῃν εἰς στήλην ὕδατος ὕψους 4,95 cm. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕγρου. (Ἀπ. 23,5 dyn/cm.)

1595. Τεμάχιον υαλίνου σωλῆνος, ἐξωτερικῆς διαμέτρου 4 cm καὶ ἐσωτερικῆς διαμέτρου 3,5 cm, εὐρίσκεται κατακορύφως βυθισμένον κατὰ τὸ ἐν ἄκρον ἐντὸς ὕδατος. Ποία ἡ πρὸς τὰ κάτω ἑλξις ἣτις ἀσκεῖται ἐπὶ τοῦ σωλῆνος καὶ ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν. (Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος $\alpha = 74$ dyn/cm.) (Ἀπ. 1,78 gr*.)

1596. Ὑάλινος τριχοειδὴς σωλὴν, ὁμοιομόρφου ἐσωτερικῆς διαμέτρου, τοποθετεῖται κατακορύφως μὲ τὸ ἐν πέρασ του βυθισμένον ἐντὸς παραφίνης, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἶναι 27 dyn/cm, ἡ γωνία ἐπαφῆς 26° καὶ ἡ πυκνότης 0,85 gr/cm³. Ἐὰν ἡ παραφίνη ὑψοῦται μέχρι 4,5 cm, ποία εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σωλῆνος. Τί θὰ συμβῇ, ἐὰν ὁ σωλὴν βυθισθῇ μέχρις ὅτου μόνον 3 cm τοῦ μήκους του εὐρεθοῦν ἔξω τῆς παραφίνης. (Ἀπ. 0,26 mm.)

1597. Ὑδωρ ἀνυψοῦται ἐντὸς υαλίνου τριχοειδοῦς σωλῆνος μέχρις 9,6 cm ἀνωθεν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας λεκάνης. Μέχρι ποίου βόθους θὰ κατέλθῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸν αὐτὸν σωλῆνα, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὑδραργύρου εἴναι ἀντιστοιχῶς 72 dyn/cm καὶ 540 dyn/cm καὶ αἱ ἀντιστοιχοὶ γωνίαι ἐπαφῆς αὐτῶν μετὰ τῆς ὕδατος 0° καὶ 140°. (Ἀπ. 4,06 cm.)

1598. Ὑδωρ εὐρισκόμενον ἐντὸς δοχείου δύναται νὰ ρεῇ ἡρέμῳ μέσω λεπτοῦ κατακορύφου σωλῆνος. Δοχεῖον τοποθετούμενον κάτωθεν τοῦ σωλῆνος τούτου αὐξάνει τὴν μᾶζαν του κατὰ 6,9 gr μετὰ τὴν πτώσιν ἐντὸς αὐτοῦ 20 σταγόνων. Δεύτερον δοχεῖον, περιέχον ἔλαιον πυκνότητος 0,92 gr/cm³, τοποθετεῖται ἀκολουθῶς κάτωθεν τοῦ σωλῆνος, ὥστε τὸ πέρασ τοῦ σωλῆνος νὰ εὐρίσκεται ἀκριβῶς κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλαίου. Ἡ μᾶζα τοῦ δοχείου τούτου εὐρίσκεται ὅτι αὐξάνει κατὰ 25,1 gr μετὰ τὴν πτώσιν ἐντὸς αὐτοῦ 20 σταγόνων ὕδατος. Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι 72 dyn/cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως μετὰ τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ἐλαίου, ἅτινα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ ὥς ἀνω πείραμα. (Ἀπ. 20,7 dyn/cm.)

1599. Ἐάν τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται ἐντὸς τριχοειδοῦς σωλῆνος 5,8 cm ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ἔξωθεν ὑγροῦ, τί θὰ συμβῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν αὐτὸν σωλῆνα, ὅταν τοποθετηθῇ ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου. Ἀπεικονίσατε τοῦτο τῇ βοθηαίᾳ διαγράμματος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ψυφομετρικὴ διαφορά μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἔξωθεν τοῦ σωλῆνος ὑδραργύρου καὶ τοῦ ἔσωθεν αὐτοῦ. Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος = 75 dyn/cm, τοῦ ὑδραργύρου = 547 dyn/cm. Γωνία ἐπαφῆς τοῦ ὑδραργύρου με καθαρὰν ὑάλον = 130°. Πυκνότης ὑδραργύρου = 13,6 gr/cm³. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἀπ. 2 cm.)

1600. Σωλὴν ἐν σχήματι U ἀποτελεῖται ἐκ δύο τριχοειδῶν σωλῆνων ἑσωτερικῶν διαμέτρων 1 mm καὶ 0,2 mm ἀντιστοίχως. Ὁ σωλὴν πληροῦται μερικῶς δι' ὑγροῦ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως 22 dyn/cm καὶ γωνίας ἐπαφῆς μηδέν. Ὄταν ὁ σωλὴν εὐρίσκεται εἰς κατακόρυφον θέσιν, παρατηρεῖται ὑψομετρικὴ διαφορά τῶν μηνίσκων κατὰ 2,1 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. (Ἀπ. 0,85 gr/cm³.)

1601. Ποία ἡ ἀσκουμένη πίεσις ἐντὸς σφαιρικῆς πομφόλυγος ἐκ σάπωνος ἀκτίνος 5 cm, ἔάν ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ διαλύματος σάπωνος εἶναι 40 dyn/cm. Νὰ εὐρεθῇ ὁμοίως τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν πλήρωσιν τῆς πομφόλυγος ἔργον. (Ἀπ. 32 dyn/cm², $2,51 \cdot 10^4 \text{ erg.}$)

1602. Πομφόλυξ ἐκ σάπωνος σχηματίζεται ἐπὶ δύο δακτυλίων ἐκ σύρματος, ἀκτίνος 2 cm, τοποθετημένων παραλλήλως. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δακτυλίων ὑπολογίζεται κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ μεταξὺ τῶν πομφόλυξ νὰ λάβῃ σχῆμα κυλινδρικών. Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν κυρτῶν σφαιρικῶν ἐξωτερικῶν ἐπιφανειῶν. (Ἀπ. 4 cm.)

1603. Ποῖον ποσὸν ἐνεργείας θὰ ἀπαιτηθεῖται, ἔάν ἐν ἑκατομμύριον σταγονιδίων ὕδατος, διαμέτρου ἑκάστου 10^{-6} cm , συσπειρωθοῦν πρὸς σχηματισμὸν μιᾶς μεγάλης σφαιρικῆς σταγόνης. (Νὰ ληθῇ ὡς συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος 70 dyn/cm). (Ἀπ. $2,2 \cdot 10^{-4} \text{ erg.}$)

1604. Ὁρθογώνιον πλαίσιον ἐκ σύρματος ἐξ ἐλαφροῦ μετάλλου, ἔχον τὴν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μήκους 5 cm κινητήν, βυθίζεται εἰς ὑδατικὸν διάλυμα σάπωνος. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ ἐπιφανειακὴ ἐνέργεια, ὅταν ἡ κινητὴ πλευρὰ μετατοπίζεται τόσον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὑγρὰ μεμβράνη πλάτους 2 cm. ($\alpha = 30 \text{ dyn/cm}$). (Ἀπ. 600 erg.)

1605. Σταγὼν ὕδατος τοποθετεῖται μεταξὺ δύο παραλλήλων ὑαλίνων πλακῶν. αἱ ὁποῖαι πιέζονται μεταξὺ τῶν μέχρις ὅτου ἡ ὑδατίνη ταινία ἔχῃ πάχος 0,01 cm. Ἐάν τὸ ἔμβადον τοῦ εὐρίσκομένου εἰς ἐπαφὴν μὲ ἑκάστην πλάκα ὕδατος εἶναι 10 cm², ποία θὰ εἶναι ἡ δύναμις ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν συγκρατοῦσαν τὰς πλάκας ἐπιφανειακὴν τάσιν. Δίδεται ὅτι $\alpha_{\text{ws}} = 75 \text{ dyn/cm}$ καὶ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$. (Ἀπ. 153 gr*.)

1606. Μικρὰ πομφόλυξ ἀέρος, ἀφιεμένη εἰς τὸ βάθος δοχείου περιέχοντος ἐλαιόλαδον, ἀνέρχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μὲ σταθερὰν ταχύτητα 1,2 cm/sec. Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστὴς ἑσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ἐλαιολάδου εἶναι 0,84 Poise καὶ ὅτι ἡ πυκνότης του εἶναι 0,92 gr/cm³, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἀερίου πομφόλυγος. (Ἀπ. 0,71 mm.)

1607. Δοχεῖον κενοῦται μέσῳ ὀριζοντίου τριχοειδοῦς σωλῆνος τοποθετημένου παρὰ τὴν βᾶσιν του. Μετὰ τὴν πλήρωσίν του τὸ δοχεῖον κενοῦται ἐντὸς 100 sec, ἐνῶ κατὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ὕδατος διὰ τερεβινθελαίου ἀπαιτοῦνται 165 sec πρὸς κένωσιν τοῦ δοχείου. Ἐάν ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθελαίου εἶναι 0,87 gr/cm³ καὶ ὁ συντελεστὴς ἑσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὕδατος 0,012 Poise, νὰ εὐρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἑσωτερικῆς τριβῆς τοῦ τερεβινθελαίου. (Ἀπ. 0,0172 Poise.)

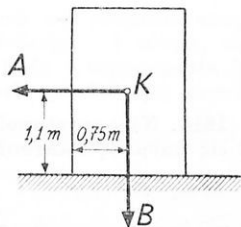
1608. Δοθέντος ότι η τριβή ολισθήσεως F εντός ιξώδους υγρού ενός σώματος ακτίνας α και πυκνότητας ρ , κινουμένου μετά ταχύτητας u εντός ουσίας συντελεστού έσωτερικής τριβής η , δίδεται ως $6 \pi \cdot \eta \cdot \alpha \cdot u$, να εύρεθῇ τύπος διὰ τὴν τελικὴν ταχύτητα τοιοῦτου σώματος πλὴτοντος κατακορύφως ἐντὸς τῆς οὐσίας ταύτης. Ποσότης κολιποποιημένης κιμωλίας, περιέχουσα σωμάτια διαφόρων μεγεθῶν, ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐντὸς λεκάνης ὕδατος. Δοθέντος ὅτι τὰ σωμάτια εἶναι σχήματος σφαιρικοῦ, νὰ εύρεθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ μεγαλυτέρου σωματίου, τὸ ὁποῖον χρειάζεται 12 ὥρας ἵνα διανύσῃ τὸ διάστημα ἐπιφανείας-πυθμένος, ἐὰν τὸ βάθος τοῦ ἐντὸς τῆς λεκάνης ὕδατος εἶναι 10 cm. Νὰ ληφθῇ ἡ πυκνότης τῆς κιμωλίας $2,6 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ὁ συντελεστὴς έσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὕδατος ὡς $0,012 \text{ Poise}$. (Ἀπ. $8,92 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.)

1609. Ἀλεξιπτωτον, βάρους 32 kg^* , ἔχει ἀνοικτὴν διάμετρον 12 m καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡμισφαίριον μὲ συντελεστὴν ἀντιστάσεως $C_{\text{αντ}} = 1,3$. Τὸ βάρος τοῦ ἀλεξιπτωτιστοῦ ἀνέρχεται εἰς 75 kg^* . Ποία ἡ ὀρική ταχύτης κατὰ τὴν πτώσιν ἐντὸς τοῦ ἀέρος, πυκνότης $1,25 \text{ kg/m}^3$.

(Ἀπ. Ἀντίστασις ἀέρος=βάρος, ἐξ οὗ ἔχομεν : $u = \sqrt{\frac{107 \cdot 4 \cdot 9,81 \cdot 2}{1,3 \cdot 12^2 \pi \cdot 1,25}} = 3,38 \text{ m/sec}$.)

1610. Διὰ ποῖαν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου ἀνατρέπεται ὀρθογώνιον ὁμογενὲς παραλληλεπίπεδον ἐκ ξύλου, βάρους 280 kg^* , ὕψους 2,20 m καὶ βάσεως $1,50 \text{ m} \times 1,50 \text{ m}$ ἐὰν ὁ ἄνεμος φυσᾷ καθέτως πρὸς μίαν τῶν παραπλευρῶν ἐδρῶν αὐτοῦ. Συντελεστὴς ἀντιστάσεως $C_{\text{αντ}} = 0,9$.

(Ἀπ. Εἶναι $B \cdot 0,75 = A \cdot 1,1$, ἀλλ' ἐπειδὴ $B = 280 \text{ kg}^*$, εὐρίσκομεν $A = 190,9 \text{ kg}^*$. Τελικῶς $u = 31,27 \text{ m/sec}$.)



*Ασκήσις 1610.

1611. Γνωρίζομεν ὅτι ἐκ τοῦ ἐπιφανειακοῦ στρώματος ὑγροῦ σφαιρικοῦ σχήματος προέρχεται πίεσις ἴση πρὸς $2\alpha/R$, ὅπου α ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως καὶ R ἡ ἀκτίς. Λεπτὸς ὕαλινος σωλὴν διαμέτρου 0,4 mm βυθίζεται κατακορύφως ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότης $1,2 \text{ gr/cm}^3$, εἰς τρόπον ὥστε τὸ κάτω ἄκρον του νὰ εὐρίσκεται 2 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ὄταν διὰ τοῦ ἄνω ἄκρου τοῦ σωλῆνος εἰσαχθῇ ἀήρ ὑπὸ πίεσιν 5 mm Hg ἀνωτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, τότε ἡ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος στήλη ὑγροῦ κατέρχεται μέχρι τοῦ κάτω ἄκρου τοῦ σωλῆνος ὅπου καὶ σχηματίζεται ἡμισφαίριος μηνίσκος. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὑγροῦ. $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $P_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. $43,164 \text{ dyn/cm}$.)

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Μηχανολόγων—Ηλεκτρολόγων, 1961).

1612. Ἐν κοχλιάριον ὕδατος ($m = 9 \text{ gr}$) χύνεται εἰς τὴν θάλασσαν καὶ διαχέεται ὁμοιομόρφως εἰς ὅλους τοὺς ὠκεανούς. Δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος τῆς θαλάσσης ἐκτιμᾶται εἰς $1370 \cdot 10^6 \text{ km}^3$, ὑπάρχει περίπτωσις νὰ ἀνευρεθοῦν μόρια τοῦ ἀρχικοῦ ὕδατος, εἰς δεῖγμα ἐνός κοχλιαρίου θαλασσίου ὕδατος, μετὰ τὴν τοιαύτην διάχυσιν; Ἄν ναί, πόσα; (1 kg Mol ὕδατος $= 6 \cdot 10^{26}$ μόρια). (Ἀπ. 2 μόρια/κοχλιάριον.)

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1962).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'

ΘΕΡΜΟΤΗΣ - ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1613. Νὰ μετατραποῦν αἱ ἐνδείξεις θερμοκρασιῶν 70°F , 84°F , 98°F , 110°F εἰς βαθμοὺς Κελσίου.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου:
$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

διὰ τοῦ ὁποῦ μετατρέπομεν τὰς ἐνδείξεις τῆς κλίμακος τοῦ Φαρενάιτ εἰς ἐνδείξεις κλίμακος Κελσίου, εὐρίσκομεν:

$$\alpha) \quad C = \frac{5}{9} (70 - 32) = \underline{21,1^{\circ}\text{C}}$$

$$\beta) \quad C = \frac{5}{9} (84 - 32) = \underline{28,9^{\circ}\text{C}}$$

$$\gamma) \quad C = \frac{5}{9} (98 - 32) = \underline{36,7^{\circ}\text{C}}$$

$$\delta) \quad C = \frac{5}{9} (110 - 32) = \underline{43,8^{\circ}\text{C}}$$

1614. Νὰ μετατραποῦν αἱ ἐνδείξεις θερμοκρασιῶν 4°C , 15°C , 40°C , 86°C εἰς βαθμοὺς Fahrenheit.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου:
$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

διὰ τοῦ ὁποῦ μετατρέπομεν τὰς ἐνδείξεις τῆς κλίμακος τοῦ Κελσίου εἰς ἐνδείξεις κλίμακος Φαρενάιτ, εὐρίσκομεν:

$$\alpha) \quad F = \frac{9}{5} \cdot 4 + 32 = \underline{39,2^{\circ}\text{F}}$$

$$\beta) \quad F = \frac{9}{5} \cdot 15 + 32 = \underline{59^{\circ}\text{F}}$$

$$\gamma) \quad F = \frac{9}{5} \cdot 40 + 32 = \underline{104^{\circ}\text{F}}$$

$$\delta) \quad F = \frac{9}{5} \cdot 86 + 32 = \underline{186^{\circ}\text{F}}$$

1615. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν αἱ ἐνδείξεις θερμομέτρων Κελσίου καὶ Φαρενάιτ συμπίπτουν.

Λύσις. Ἐστω x ἡ θερμοκρασία εἰς βαθμοὺς Κελσίου καθ' ἣν αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο θερμομέτρων συμπίπτουν. Τότε, ἐπειδὴ $C = x$ καὶ $F = x$, ἡ σχέση $C = \frac{9}{5} F + 32$ γράφεται:

$$x = \frac{9}{5} x + 32 \quad (1)$$

Δι' ἐπιλύσεως δὲ τῆς ἐξισώσεως (1) εὐρίσκομεν ὅτι αἱ ἐνδείξεις συμπίπτουν εἰς τὴν θερμοκρασίαν:

$$\underline{x = -40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}}$$

1616. Τὸ οἰνόπνευμα βράζει εἰς $78,5^{\circ}\text{C}$ καὶ πῆγνυται εἰς -117°C . Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι εἰς βαθμοὺς Φαρενάιτ.

Λύσις. Ἐάν εἰς τὴν σχέσιν $F = \frac{9}{5}C + 32$, μετατροπῆς τῶν βαθμῶν Κελσίου εἰς βαθμοὺς Fahrenheit, θέσωμεν : $C = 78,5^{\circ}\text{C}$ καὶ κατόπιν $C = -117^{\circ}\text{C}$, εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους ζητούμενας θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς Fahrenheit. Οὕτως ἔχομεν :

$$F = \frac{9}{5} \cdot 78,5 + 32 = \underline{173,3^{\circ}\text{F}}$$

$$F = \frac{9}{5}(-117) + 32 = \underline{-173^{\circ}\text{F}}$$

1617. Ὁ ὑδράργυρος βράζει εἰς 675°F καὶ πῆγνυται εἰς -38°F . Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι εἰς βαθμοὺς Κελσίου.

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

εὐρίσκομεν :

$$C = \frac{5}{9}(675 - 32) = \underline{357^{\circ}\text{F}}$$

καί :

$$C = \frac{5}{9}(-38 - 32) = \underline{-38,9^{\circ}\text{C}}$$

1618. Εἰς θερμόμετρον διεπιστώθη ὅτι ἐκ λάθους κατὰ τὴν ρύθμισίν του, τὸ μὲν σημεῖον τήξεως τοῦ πάγου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔνδειξιν $+1$ αὐτοῦ, τὸ δὲ σημεῖον βρασμοῦ τοῦ ὕδατος εἰς τὴν ἔνδειξιν $+99$. Ποία ἡ θερμοκρασία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἔνδειξιν $+25$ τοῦ θερμομέτρου καὶ ποία ἔνδειξις αὐτοῦ δίδει τὴν ἀκριβῆ θερμοκρασίαν.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικόν, 1960).

Λύσις. α) Τὸ διάστημα τῶν 98 ἔνδειξεων τοῦ ἐσφαλμένως βαθμολογηθέντος θερμομέτρου θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς 100°C . Ἐπομένως μία ὑποδιαιρέσις αὐτοῦ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς κλάσμα $100/98$ ἀληθῶν βαθμῶν C. Συνεπῶς αἱ 24 ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ $(25 - 1)$ θὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀληθῆ θερμοκρασίαν :

$$\theta = 24 \cdot \frac{100}{98}^{\circ}\text{C} \quad \eta : \quad \theta = \underline{24,49^{\circ}\text{C}}$$

β) Ἐστω x ἡ ἔνδειξις ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἀληθῆ θερμοκρασίαν βαθμῶν C. Τότε αἱ $x - 1$ ἔνδειξεις θὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς πραγματικούς βαθμοὺς Κελσίου :

$$(x - 1) \cdot \frac{100}{98}$$

Ἐπομένως θὰ ἰσχύη ἡ σχέσηις :

$$x = (x - 1) \cdot \frac{100}{98}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν :

$$\underline{x = 50^{\circ}\text{C}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1619. Ἡ θερμοκρασία σώματος εἶναι $98,6^{\circ}\text{F}$. Ποία ἡ ἀντίστοιχος εἰς βαθμοὺς Κελσίου.
(Ἀπ. -24°C .)

1620. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐρυθροπυρωμένου χάλυβος εἶναι 1300°F . Ποία ἡ ἀντίστοιχος εἰς βαθμοὺς Κελσίου.
(Ἀπ. $704,4^{\circ}\text{C}$.)

1621. Εἰς ποῖαν θερμοκρασίαν ἡ ἔνδειξις θερμομέτρου Φαρενάϊτ εἶναι διπλασία τῆς ἔνδειξως τοῦ ἑκατονταβάθμου θερμομέτρου (Κελσίου). (°Απ. 320 °F.)

1622. Ὁ φωσφόρος τήκεται εἰς 44,2 °C. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ φωσφόρου εἰς βαθμοὺς Ρεωμύρου, Φαρενάϊτ καὶ ἀπολύτους. (°Απ. 35,4 °R, 111,6 °F, 317,3 °K.)

1623. Ἡ τολουόλη πηγνύται εἰς 180,1 ἀπολύτους βαθμοὺς. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία πήξεως τῆς τολουόλης εἰς βαθμοὺς Κελσίου, Ρεωμύρου καὶ Φαρενάϊτ. (°Απ. — 93 °C, — 74,4 °R, — 135,4 °F.)

1624. Ἡ βενζόλη τήκεται εἰς 41,7 °F. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία τήξεως τῆς βενζόλης εἰς βαθμοὺς Κελσίου, Ρεωμύρου καὶ ἀπολύτους. (°Απ. 5,4 °C, 4,3 °R, 278,4 °K.)

1625. Ἐν ἀβαθμολόγητον ὑδραργυρικόν θερμομέτρον προσαρμόζεται ἐπὶ χιλιοστομετρικῆς κλίμακος. Ὄταν τὸ κάτω ἄκρον τοῦ θερμομέτρου εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς κλίμακος αὐτοῦ εἶναι 3,2 cm, ὅταν τὸ θερμομέτρον εὐρίσκεται ἐντὸς ἀτμοῦ, ἡ ἔνδειξις εἶναι 21,8 cm, καὶ ὅταν τοῦτο εὐρίσκεται ἐντὸς ἀτμῶν ζεοῦσης ἁλκοόλης, ἡ ἔνδειξις τῆς κλίμακος εἶναι 17,7 cm. Ὑπολογίσατε τὴν θερμοκρασίαν τῶν ἀτμῶν τῆς ἁλκοόλης. (°Απ. 77,9 °C.)

1626. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ξηροῦ πάγου εἶναι —109 °F. Εἶναι οὗτος θερμότερος ἢ ψυχρότερος ἀπὸ αἰθάνιον εὐρισκόμενον εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως, τὸ ὁποῖον εἶναι —88 °C; (°Απ. Θερμότερος.)

1627. Αἱ ἀκόλουθοι θερμομετρικαὶ ἔνδειξεις μιᾶς κλίμακος νὰ μετατραποῦν εἰς θερμομετρικὰς ἔνδειξεις καὶ τῶν δύο ἄλλων κλιμάκων :

α) + 30 °C, + 45 °C, + 68 °C — 10 °C, — 18 °C, — 40 °C,

β) + 20 °R, + 35 °R, + 46 °R, — 12 °R, — 25 °R, — 38 °R,

γ) + 90 °F, + 60 °F, + 10 °F, — 8 °F, — 24 °F, — 36 °F.

1628. Ἐὰν εἰς τὰς Ἀθήνας, κατὰ τινὰ ἡμέραν, ἐπεκράτει θερμοκρασία 30 °C, εἰς Παρίσιους 24 °R καὶ εἰς Νέαν Ὑόρκην 86 °F, εἰς ποῖαν πόλιν ἡ θερμοκρασία ἦτο ὑψηλότερα ; (°Απ. Καὶ εἰς τὰς τρεῖς ἡ αὐτή.)

1629. Ποία ἡ κανονικὴ θερμοκρασία τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος (37 °C), εἰς βαθμοὺς R καὶ F; (°Απ. 29,6 °R, 98,6 °F.)

1630. Τί ἔχομεν νὰ εἴπωμεν διὰ τινὰ εἶδησιν ἐφημερίδος, εἰς τὴν ὁποῖαν ἀνεφέρετο ὅτι εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας ἐπεκράτει καύσων 77 °F; (°Απ. Ἐπειδὴ 77 °F ἀντιστοιχοῦν πρὸς 25 °C, πρόκειται περὶ συνήθους θερμοκρασίας.)

1631. Ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ ἡμέρας καὶ νυκτὸς ἀνέρχεται εἰς τὴν ἔρημον εἰς 45 °F. Ποία ἡ ἐν λόγῳ διαφορὰ εἰς °C καὶ °R. (°Απ. 25 °C, 20 °R.)

1632. Εἰς ποῖαν θερμοκρασίαν συμπίπτουν ἀριθμητικῶς, ἀλλὰ μὲ ἀντίθετον σημεῖον, αἱ ἔνδειξεις τῶν θερμομέτρων Φαρενάϊτ καὶ Κελσίου. (°Απ. 11,4 °F, — 11,4 °C.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'

ΘΕΡΜΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1633. Ράβδος εκ χαλκού έχει μήκος 2,45 m εις 20 °C και θερμαίνεται εις 100 °C. Κατά πόσον ηύξηθη τὸ μήκος αὐτῆς. ($\alpha_{\text{χαλκ}} = 16,7 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν τὸ ἀρχικὸν μήκος τῆς ράβδου l_0 , τότε ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους Δl αὐτῆς εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀρχικοῦ μήκους καὶ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας $\Delta \theta$. Ἦτοι :

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta \theta \quad (1)$$

ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ράβδου.

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $l_0 = 2,45 \text{ m}$, $\alpha = 16,7 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\Delta \theta = 100 - 20 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\Delta l = 0,327 \text{ cm}$$

1634. Ράβδος ὑαλινὴ ἔχει εἰς 0 °C μήκος 412,5 mm καὶ ἐπιμηκύνεται κατὰ 0,329 mm, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτῆς αὐξηθῇ εἰς 98,5 °C. Πόσος ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου.

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta \theta$ (βλ. ἀσκήσιν 1633) προκύπτει ὅτι :

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta \theta} \quad (1)$$

Θέτομεν : $\Delta l = 0,329 \text{ mm}$, $l_0 = 412,5 \text{ mm}$, $\Delta \theta = 98,5 \text{ }^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\alpha = 8,1 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$$

1635. Μὲ χαλύβδινον μετρικὸν κανόνα, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀκριβὴς εἰς 0 °C, μετροῦμεν εἰς 25 °C τὸ μήκος ὑδραργυρικῆς στήλης, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἴσον πρὸς 720 mm. Ποῖον τὸ ἀληθὲς μήκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης καὶ πόσον τὸ μήκος αὐτῆς εἰς 0 °C. ($\alpha_{\text{χαλ}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\gamma_{\text{υδρ}} = 181 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ὁ χαλύβδινος μετρικὸς κανὼν εἰς θερμοκρασίαν 25 °C δὲν παρέχει τὸ πραγματικὸν μήκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, διότι εἰς τοὺς 25 °C ὁ κανὼν ἔχει ὑποστῇ διαστολὴν καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως εἶναι μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ. Ἐπομένως τὸ πραγματικὸν μήκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μετροῦμενον καὶ ἴσον πρὸς 720 mm. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὐρωμεν ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν μήκος τοῦ κανόνας εἰς 25 °C, ὅταν οὗτος εἰς θερμοκρασίαν 0 °C ἔχη μήκος 720 mm. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν τὸν τύπον τῆς γραμμικῆς θερμικῆς διαστολῆς :

$$l_\theta = l_0 \cdot (1 + \alpha_{\text{χαλ}} \cdot \theta) \quad (1)$$

ὅπου l_θ εἶναι τὸ μήκος εἰς θερμοκρασίαν $\theta \text{ }^\circ\text{C}$, l_0 τὸ μήκος εἰς θερμοκρασίαν 0 °C, $\alpha_{\text{χαλ}}$ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς καὶ θ ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος εἰς βαθμοὺς Κελσίου. Οὕτω, θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $l_\theta = 720 \text{ mm}$, $\alpha_{\text{χαλ}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\theta = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἀληθὲς μήκος εἶναι :

$$l_0 = 720,3 \text{ mm}$$

Ἐφ' ὅσον τώρα γνωρίζομεν τὸ πραγματικὸν μήκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς 25 °C, δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὸ μήκος αὐτῆς εἰς 0 °C ἐκ τῆς σχέσεως :

$$l_0 = \frac{l_\theta}{(1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \theta)} \quad (2)$$

Οὕτως ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν : $l_\theta = 720,3 \text{ mm}$, $\gamma_{\text{υδρ}} = 181 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\theta = 25^\circ \text{C}$, εὐρίσκομεν :

$$l_0 = 717 \text{ mm}$$

1636. Δύο μεταλλικαὶ ράβδοι, ἐξ ὧν ἡ μία σιδηρᾷ καὶ ἡ ἑτέρα ὀρειχαλκίνη, θερμαίνονται εἰς θερμοκρασίαν 15 °C, παρουσιάζουν διαφορὰν μήκους 0,015 cm, τῆς ὀρειχαλκίνης ράβδου οὗσης βραχυτέρας. Ἡ σιδηρᾷ ράβδος ἔχει τότε μήκος 50,2 cm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν αἱ δύο ράβδοι παρουσιάζουν τὸ αὐτὸ μήκος. ($\alpha_{\text{σιδ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{ορειχ}} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς θερμοκρασίαν 15 °C ἡ ὀρειχαλκίνη ράβδος εἶναι βραχυτέρα τῆς σιδηρᾶς καὶ $\alpha_{\text{ορειχ}} > \alpha_{\text{σιδ}}$, ἔπεται ὅτι τὰ μήκη τῶν δύο ράβδων θὰ ἐξισωθοῦν εἰς τινα θερμοκρασίαν θ , ἀνωτέραν τῶν 15 °C. Θὰ πρέπει κατὰ συνέπειαν διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τοῦτο νὰ αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία τῶν 15 °C κατὰ $\Delta\theta$ καὶ θὰ εἶναι :

$$\theta = 15^\circ \text{C} + \Delta\theta$$

Ἐστῶσαν l_1 καὶ l_2 τὰ μήκη τῶν δύο ράβδων, τῆς σιδηρᾶς καὶ τῆς ὀρειχαλκίνης ἀντιστοίχως, εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 15 °C καὶ l'_1 καὶ l'_2 τὰ μήκη αὐτῶν, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνυψωθῇ κατὰ $\Delta\theta$. Προφανῶς θὰ ἔχωμεν :

$$l'_1 = l'_2 \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι :

$$l'_1 = l_1 (1 + \alpha_{\text{σιδ}} \cdot \Delta\theta) \quad (2)$$

$$l'_2 = l_2 (1 + \alpha_{\text{ορειχ}} \cdot \Delta\theta) \quad (3)$$

καὶ λόγῳ τῆς (1) :

$$l_1 (1 + \alpha_{\text{σιδ}} \cdot \Delta\theta) = l_2 (1 + \alpha_{\text{ορειχ}} \cdot \Delta\theta) \quad (4)$$

Λύοντες τὴν (4) ὡς πρὸς $\Delta\theta$ λαμβάνομεν :

$$\Delta\theta = \frac{l_1 - l_2}{l_2 \alpha_{\text{ορειχ}} - l_1 \alpha_{\text{χαλ}}} \quad (5)$$

Δι' ἀντικατάστασεως εἰς τὴν (5) τῶν δεδομένων, ἦτοι : $l_1 = 50,2 \text{ cm}$, $l_2 = (50,2 - 0,015) = 50,185 \text{ cm}$, $\alpha_{\text{ορειχ}} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{χαλ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, λαμβάνομεν :

$$\Delta\theta = 42,7^\circ \text{C}$$

Συνεπῶς αἱ δύο ράβδοι θὰ εἶναι ἴσαι εἰς θερμοκρασίαν :

$$\theta = 15^\circ \text{C} + 42,7^\circ \text{C} = 57,7^\circ \text{C}$$

1637. Τὰ ἐκκρεμῇ δύο ὥρολογίων ἐκτελοῦν μίαν πλήρη αἰώρησιν ἐντὸς ἐνὸς δευτερολέπτου, αἰωρούμενα συγχρόνως εἰς τὸν αὐτὸν τόπον, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος ἀνέρχεται εἰς 5 °C. Τὸ στέλεχος τοῦ ἐνὸς ἐκκρεμοῦς εἶναι σιδηροῦν καὶ τοῦ ἑτέρου ὀρειχάλκινον. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ κατὰ 20 °C, πόσην διαφορὰν παρουσιάζουν ἡμερησίως τὰ δύο ἐκκρεμῇ. ($\alpha_{\text{σιδ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{ορειχ}} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. Ἐστω θ ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν ὁποίαν τὰ δύο ἐκκρεμῇ ἐκτελοῦν μίαν πλήρη αἰώρησιν εἰς 1 sec, ὅπότε θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μήκος l καὶ τὴν αὐτὴν περίοδον T . Εἰς τὴν νέαν θερμοκρασίαν θ' τὸ ἐκ σιδηροῦ στέλεχος ἐκκρεμῆς ἔχει μήκος :

$$l_1 = l (1 + \alpha_{\text{σιδ}} \cdot \Delta\theta) \quad (1) \quad \text{καὶ περίοδον } T_1$$

τὸ δὲ ἐξ ὀρειχαλκίνου στελέχους ἐκκρεμῆς μήκος :

$$l_2 = l (1 + \alpha_{\text{ορειχ}} \cdot \Delta\theta) \quad (2) \quad \text{καὶ περίοδον } T_2.$$

$$\text{Δυνάμει τοῦ τύπου τοῦ ἐκκρεμοῦς : } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3) \quad \text{θὰ ἔχωμεν :}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l(1 + \alpha_{\text{σιδ}} \cdot \Delta\theta)}{g}} \quad (4)$$

καί :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l(1 + \alpha_{\text{ορειχ}} \cdot \Delta\theta)}{g}} \quad (5)$$

Ἐπειδὴ δέ : $\alpha_{\text{ορειχ}} > \alpha_{\text{σιδ}}$ ἔπεται ὅτι :

$$l_2 > l_1 \quad (6) \quad \text{καὶ συνεπῶς : } T_2 > T_1 \quad (7)$$

Ἦτοι τὸ ἐξ ὀρειχάλκου ἔκκρεμὸς θὰ καθυστερῇ ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐκ σιδήρου.
Διὰ διαίρεσέως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1 + \alpha_{\text{ορειχ}} \cdot \Delta\theta}{1 + \alpha_{\text{σιδ}} \cdot \Delta\theta}} \quad (8)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων εἰς τὴν (8), ἦτοι : $\alpha_{\text{ορειχ}} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{σιδ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\Delta\theta = 20^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν :

$$\frac{T_2}{T_1} = 1,00006 \quad (9)$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = 0,00006$$

Ἡ σχετικὴ διαφορὰ συνεπῶς τῶν περιόδων τῶν δύο ἔκκρεμῶν ἰσοῦται πρὸς 0,00006. Κατὰ συνέπειαν τὰ δύο ὥρολόγια θὰ παρουσιάζουν ἡμερησίως διαφορὰν ἴσην πρὸς :

$$\Delta t = 0,00006 \cdot 86400 \text{ sec} = \underline{5,184 \text{ sec}}$$

1638. Κατὰ πόσον αὐξάνεται ἡ ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου πλακοῦ ἐκ χαλκοῦ, διαστάσεων 0,8 m καὶ 1,5 m, διὰ θερμάνσεως αὐτῆς ἀπὸ 5°C εἰς 45°C . ($\alpha_{\text{χαλκ}} = 14 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ ΔS τὴν ὅποیان ὑφίσταται μία ἐπιφάνεια S_0 εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας ταύτης καὶ ἀνάλογος τῆς θερμοκρασίας $\Delta\theta$. Ἦτοι :

$$\Delta S = \beta \cdot S_0 \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

ὅπου β εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς καὶ ἰσοῦται μὲ 2 α (α ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς). Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὴν τιμὴν $\beta = 2 \alpha$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\Delta S = 2 \alpha \cdot S_0 \cdot \Delta\theta \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $S_0 = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2 \text{ m}^2 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$, $\Delta\theta = 45 - 5 = 40^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\underline{\Delta S = 13,4 \text{ cm}^2}$$

1639. Κυκλικὴ πλάξ ἐκ νικελίου ἔχει εἰς 15°C διάμετρον 100 mm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει ἡ πλάξ νὰ θερμανθῇ, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς αὐξηθῇ κατὰ 10 mm^2 . ($\alpha_{\text{νικελ}} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας θὰ εἶναι $\Delta\theta = \theta - \theta'$, ὅπου θ ἡ ζητούμενη θερμοκρασία καὶ θ' ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τῶν 15°C . Οὕτως, ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\Delta S = 2 \alpha \cdot S_0 \cdot \Delta\theta$ (βλ. ἀσκήσιν 1638, τύπον 2), λαμβάνομεν :

$$\Delta S = 2 \alpha \cdot S_0 \cdot (\theta - \theta') \quad (1)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην θερμοκρασίαν θ , προκύπτει :

$$\theta = \frac{\Delta S}{2 \alpha \cdot S_0} + \theta' \quad (2)$$

Έπειδή όμως, ως γνωστόν, είναι $S_0 = \pi \cdot d^2/4$, ο τύπος (2) γίνεται :

$$\theta = \frac{4 \cdot \Delta S}{2 \alpha \cdot \pi \cdot d^2} + \theta' \quad (3)$$

Θέτουμε εις τόν τύπον (3) : $\Delta S = 10 \text{ mm}^2$, $\alpha = 13 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $d = 100 \text{ mm}$ και $\theta' = 15^\circ \text{C}$,
 οτε εύρισκόμεν :

$$\theta = 64^\circ \text{C}$$

1640. Εὐθεῖα ράβδος ΑΓ ὁμοιομόρφου καθέτου τομῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη ΑΒ καὶ ΒΓ, ἑκαστον μήκους 50 cm ὑπὸ 20°C . Ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ σιδήρου καὶ ἡ ΒΓ ἐξ ἀλουμινίου. Ἡ ράβδος ὑποβαστάζεται ἐξ ἀρπάγης εἰς σημεῖον κείμενον εἰς ἀπόστασιν 37,65 cm ἀπὸ τοῦ Α καὶ στηρίζεται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἡ ράβδος θερμαίνεται τότε ὁμοιομόρφως καί, εἰς ὠρισμένην θερμοκρασίαν, τὸ πέρασ Γ κλίνει πρὸς τὰ κάτω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία αὕτη βάσει τῶν κάτωθι δεδομένων : πυκνότης τοῦ σιδήρου εἰς $20^\circ \text{C} = 7,86 \text{ gr/cm}^3$, πυκνότης τοῦ ἀλουμινίου εἰς $20^\circ \text{C} = 2,65 \text{ gr/cm}^3$, συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου $= 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$, συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ἀλουμινίου $= 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$.

Λύσις. Κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἀρχίσῃ νὰ κλίνη ἡ ράβδος, θὰ πρέπει τὸ βάρος τῆς ράβδου, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως νὰ ἀναπύσῃ ῥοπὴν πρὸς τὸ ἄκρον Γ αὐτῆς. Εἰς τὴν ὁριακὴν θέσιν ἰσορροπίας θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐξισώσιν τῶν ἐκατέρωθεν ῥοπῶν. Ἐὰν καλέσωμεν Ο τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ὑποβαστάζεται ὑπὸ τῆς ἀρπάγης ἡ ράβδος, τοῦτο ἀπὸ τὸ μέσον M_1 τοῦ σιδήρου τμήματος θὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν :

$$\alpha = 37,65 - 25 = 12,65 \text{ cm}$$

ἐνῷ ἀπὸ τοῦ σημείου Β, τὸ Ο θὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν :

$$\beta = 50 - 37,65 = 12,35 \text{ cm}$$

Τέλος τὸ μέσον M_2 τοῦ ἐξ ἀλουμινίου τμήματος τῆς ράβδου θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀπόστασιν :

$$\gamma = 25 \text{ cm}$$

Εἰς τὰ σημεία M_1 καὶ M_2 , ἀνεξαρτήτως θερμοκρασίας τῆς ράβδου, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζονται αἱ κατακόρυφοι δυνάμεις B_1 καὶ B_2 ἴσαι πρὸς τὰ βάρη τῶν ἐκ σιδήρου καὶ ἀλουμινίου τμημάτων τῆς ράβδου. Ἐὰν θερμανθῇ ἡ ράβδος μέχρι τῆς ὁριακῆς θερμοκρασίας, θὰ πρέπει ὁ λόγος τῶν βραχιόνων $l_1 = OM_1$ καὶ $l_2 = OM_2$ νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῶν βαρῶν.
 Ἦτοι :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad (1)$$

Λόγω τῆς διαστολῆς τῶν δύο τμημάτων ὅμως, θὰ ἔχωμεν :

$$l_1 = \alpha (1 + \alpha_1 \cdot \Delta\theta) \quad (2)$$

ὅπου α_1 ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ σιδήρου καὶ $\Delta\theta$ ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας. Ἀφ' ἑτέρου :

$$l_2 = \beta (1 + \alpha_2 \cdot \Delta\theta) + \gamma (1 + \alpha_2 \cdot \Delta\theta) \quad (3)$$

ὅπου α_2 ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἀλουμινίου.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τῆς ράβδου εἶναι ὁ αὐτός, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{e_1}{e_2} \quad (4)$$

ὅπου e_1 καὶ e_2 τὰ ἐδικὰ βάρη τοῦ σιδήρου καὶ τοῦ ἀλουμινίου ἀντιστοίχως.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\beta (1 + \alpha_1 \Delta\theta) + \gamma (1 + \alpha_2 \Delta\theta)}{\alpha (1 + \alpha_1 \Delta\theta)} \quad (5)$$

$$\eta : \Delta\theta = \frac{e_1 \alpha - e_2 (\beta + \gamma)}{e_2 (\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_2) - e_1 \alpha \cdot \alpha_1} \quad (6)$$

Θέτοντες: $\epsilon_1 = 7,86 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\epsilon_2 = 2,65 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $\alpha = 12,65 \text{ cm}$, $\beta = 12,35 \text{ cm}$, $\gamma = 25 \text{ cm}$,
 $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, λαμβάνομεν:

$$\Delta\theta = 528^\circ\text{C}$$

Άρα η τελική θερμοκρασία θ_z θα είναι:

$$\theta_z = \theta + \Delta\theta \quad \text{ή:} \quad \theta_z = 548^\circ\text{C}$$

1641. Σφαίρα εκ σιδήρου έχει εις 0°C διάμετρον 19 mm . Εις ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει αὕτη νὰ θερμανθῇ, διὰ νὰ δύναται μόλις νὰ διέρχεται ἀπὸ ακτυλίου διαμέτρου $19,04 \text{ mm}$. Κατὰ πόσον ηὐξήθη ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας. Δίδεται ὅτι: $\alpha_{\text{σιδ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.

Λύσις. Ἡ σχέσις, ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν γραμμικὴν διαστολὴν εἶναι, ὡς γνωστόν:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς $\Delta\theta$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμως ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 0°C , ἔπεται ὅτι $\Delta\theta = \theta$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$\theta = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $l_0 = 19 \text{ mm}$, $\Delta l = 19,04 - 19 = 0,04 \text{ mm}$ καὶ $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$\theta = 175,4^\circ\text{C}$$

Ἡ αὐξήσις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\Delta V = \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta\theta \quad (4)$$

ἔπου: $\gamma = 3 \alpha$ καὶ $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$. Ἐπειδὴ δὲ $V_0 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$, ὁ τύπος

(4) γράφεται:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \alpha \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \Delta\theta \quad (5)$$

Δι' ἀντικατάστασως εἰς τὸν τύπον (5) εὐρίσκομεν:

$$\Delta V = 22,6 \text{ mm}^3$$

1642. Πόση ἡ μεταβολὴ ὄγκου 1 kg ὀρειχάλκου, ὅταν ἡ θερμοκρασία του αὐξάνεται ἀπὸ 20°C εἰς 100°C . Δίδεται ὅτι: $\rho_{\text{ορειχ}}$ εἰς $20^\circ\text{C} = 8,4 \text{ gr/cm}^3$, $\alpha_{\text{ορειχ}} = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.

Λύσις. Ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ὀρειχάλκου εὐρίσκεται, ἐκ τοῦ ὁρίσμου τῆς πυκνότητος, ὅτι εἶναι $V_0 = m/\rho$. Οὕτως, ὁ γνωστὸς τύπος τῆς κυβικῆς διαστολῆς $\Delta V = 3 \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta\theta$, γράφεται:

$$\Delta V = 3 \alpha \cdot \frac{m}{\rho} \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $\alpha = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $m = 1000 \text{ gr}$, $\rho = 8,4 \text{ gr/cm}^3$, $\Delta\theta = 100 - 20 = 80^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητούμενη μεταβολὴ τοῦ ὄγκου εἶναι:

$$\Delta V = 0,54 \text{ cm}^3$$

1643. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς 80°C ὁ ὄγκος ὀγκομετρικῆς φιάλης ἀπὸ ὕαλον, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἰς 20°C εἶναι 100 cm^3 . ($\alpha_{\text{υαλ}} = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν V_0 τὸν ὄγκον τῆς φιάλης εἰς θερμοκρασίαν 80°C καὶ V_θ τὸν ὄγκον αὐτῆς εἰς θερμοκρασίαν 20°C , τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$V_\theta = V_0 \cdot (1 + 3 \alpha \cdot \Delta\theta) \quad (1)$$

όπου α είναι ο συντελεστής της γραμμικής διαστολής της ύλης και $\Delta\theta$ η μεταβολή της θερμοκρασίας. Συνεπώς εκ της ανωτέρω σχέσεως, όταν θέσωμεν: $V_0 = 100 \text{ cm}^3$, $\alpha = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ και $\Delta\theta = 80 - 20 = 60^\circ\text{C}$, εύρισκομεν:

$$V_\theta = 100,14 \text{ cm}^3$$

1644. Ἡ ὀγκομετρικὴ φιάλη ἐξ ὑάλου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως πληροῦται εἰς 20°C μετ' ὑδράργυρου. Ποία ποσότης ὑδραργύρου εἰς gr πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ εἰς 80°C , λόγῳ τῆς ταυτοχρόνου διαστολῆς ὑάλου καὶ ὑδραργύρου. ($\gamma_{\text{υδρ}} = 181 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ὁ ὀγκος V_θ τοῦ ὑδραργύρου εἰς $\theta^\circ\text{C}$ θὰ εἶναι:

$$V_\theta = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta) = 100 (1 + 181 \cdot 10^{-6} \cdot 60) = 101,09 \text{ cm}^3$$

Διὰ νὰ χωρῇ λοιπὸν εἰς τὸν ὀγκον $100,14 \text{ cm}^3$ τῆς φιάλης, πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ὀγκος ὑδραργύρου:

$$V = 101,09 - 100,14 = 0,95 \text{ cm}^3$$

Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\rho = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, ἡ μᾶζα ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ θὰ εἶναι:

$$m = \rho \cdot V = 13,6 \cdot 0,95 = 12,92 \text{ gr}$$

1645. Ὑαλινὴ φιάλη ὀγκοῦ 2000 cm^3 εἶναι πεπληρωμένη δι' οἰνοπνεύματος ὑπὸ θερμοκρασίαν 10°C . Ἐὰν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ εἰς 80°C , πόσον οἰνοπνεῦμα θὰ ἐκχυθῇ. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου $\alpha = 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$. Συντελεστής κατ' ὄγκον διαστολῆς τοῦ οἰνοπνεύματος $1,01 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸν ὀγκον τοῦ οἰνοπνεύματος, ὡς καὶ τὴν χωρητικότητα τῆς φιάλης, εἰς τὴν νέαν θερμοκρασίαν, τότε ἡ διαφορά αὐτῶν θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ὀγκον τοῦ ἐκχυθέντος οἰνοπνεύματος. Οἱ δύο ὀγκοὶ εἰς τὴν νέαν θερμοκρασίαν δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$V_{\text{οιν}} = V \cdot (1 + \gamma_{\text{οιν}} \cdot \Delta\theta) \quad (1) \quad \text{καί:} \quad V_{\text{υαλ}} = V \cdot (1 + \gamma_{\text{υαλ}} \cdot \Delta\theta) \quad (2)$$

ὅπου V ὁ ἀρχικὸς ὀγκος τοῦ οἰνοπνεύματος καὶ ἡ ἀρχικὴ χωρητικότης τῆς φιάλης, $V_{\text{οιν}}$ καὶ $V_{\text{υαλ}}$ οἱ ἀντίστοιχοι ὀγκοὶ ὑπὸ τὴν νέαν θερμοκρασίαν, $\Delta\theta$ ἡ διαφορά θερμοκρασιῶν καὶ $\gamma_{\text{οιν}}$, $\gamma_{\text{υαλ}}$ οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ κυβικῆς διαστολῆς.

Ἀφαιρούμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τῶν νέων ὀγκων ΔV , ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸν ὀγκον τοῦ ἐκχυθέντος οἰνοπνεύματος. Δηλαδή ἔχομεν:

$$\Delta V = V_{\text{οιν}} - V_{\text{υαλ}} = V \cdot \Delta\theta \cdot (\gamma_{\text{οιν}} - \gamma_{\text{υαλ}}) \quad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὰ δεδομένα: $V = 2000 \text{ cm}^3$, $\Delta\theta = 80 - 10 = 70^\circ\text{C}$, $\gamma_{\text{υαλ}} = 3 \cdot \alpha_{\text{υαλ}} = 3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\gamma_{\text{οιν}} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$, καὶ λαμβάνομεν:

$$\Delta V = 137,6 \text{ cm}^3$$

1646. Σιδηροῦς κύλινδρος περιέχει ὑδράργυρον μέχρις ὕψους 10 cm ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C . Κατὰ πόσον ἠῤῥῆθη ἡ στήλη ὑδραργύρου, ἐὰν ὁ κύλινδρος μετὰ τοῦ ἐν αὐτῷ ὑδραργύρου, ἐθερμάνθῃ μέχρις 100°C . (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου $= 0,000118 \text{ grad}^{-1}$, συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου $= 0,000182 \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐστῶσαν V_0 ὁ ἀρχικὸς ὀγκος τοῦ ὑδραργύρου, V_θ ὁ τελικὸς, $\gamma_{\text{υδρ}}$ ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου καὶ $\Delta\theta$ ἡ διαφορά θερμοκρασιῶν· τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση:

$$V_\theta = V_0 \cdot (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \Delta\theta) \quad (1)$$

Ἐστῶσαν ἐπίσης h_0 καὶ h_θ τὸ ἀρχικὸν καὶ τελικὸν ὕψος τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, S_0 καὶ S_θ ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ ἐπιφάνεια τοῦ σιδηροῦ σωλῆνος καὶ α_s , β_s οἱ συντελεσταὶ γραμμικῆς καὶ ἐπιφανειακῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου. Τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$V_\theta = S_\theta \cdot h_\theta \quad (2), \quad V_0 = S_0 \cdot h_0 \quad (3), \quad S_\theta = S_0 \cdot (1 + \beta_s \cdot \Delta\theta) \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad \beta_s = 2 \alpha_s \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν V_θ καὶ V_0 ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), ὁπότε λαμβάνομεν:

$$S_\theta \cdot h_\theta = S_0 \cdot h_0 \cdot (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \Delta\theta) \quad \text{ἤ:} \quad h_\theta = \frac{S_0}{S_\theta} \cdot h_0 \cdot (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \Delta\theta) \quad (6)$$

Εν συνεχείᾳ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (6) τὸν λόγον S_0/S_θ , ὡς προκύπτει οὗτος ἐκ τῆς ἐξίσωσως (4), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$h_\theta = h_0 \cdot \frac{1 + \gamma_{\theta\beta} \cdot \Delta\theta}{1 + \beta_\sigma \cdot \Delta\theta} \quad (7)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα : $h_0 = 10 \text{ cm}$, $\gamma_{\theta\beta} = 0,000182 \text{ grad}^{-1}$, $\Delta\theta = 100^\circ\text{C}$ καὶ $\beta_\sigma = 2 \text{ ας} = 2 \cdot 0,0000118 \text{ grad}^{-1}$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$h_\theta = 10,16 \text{ cm}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου ἠῤῥήθη κατὰ :

$$h_\theta - h_0 = 10,16 - 10 = 0,16 \text{ cm}$$

1647. Κατακόρυφος ὑάλινος σωλὴν, μήκους 1 m καὶ σταθερᾶς τομῆς, κλειστός κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, περιέχει Hg. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ Hg ἐντὸς τοῦ σωλῆνος οὕτως, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ σωλῆνος ὑπεράνω τοῦ Hg νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας. Δίδεται ὅτι εἶναι : $\lambda_{\text{ύλου}} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\kappa_{\text{Hg}} = 182 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φυσικόν, 1961).

Λύσις. Διὰ τὰ ἔχωμεν σταθερὸν ὄγκον ὑπεράνω τοῦ Hg, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν δι' οἰανδήποτε θερμοκρασίαν τὴν αὐτὴν μεταβολὴν ὄγκου, τὸσον διὰ τὸν ὑδραργύρον ὅσον καὶ διὰ τὴν ὕαλον. Ἐὰν καλέσωμεν V τὸν ἀρχικὸν ὄγκον τῆς ὕαλου καὶ V' τὸν ἀρχικὸν ὄγκον τοῦ ὑδραργύρου, θὰ ἔχωμεν διὰ τυχούσαν διαφορὰν θερμοκρασιῶν $\Delta\theta$:

$$\Delta V = V \cdot 3 \lambda \cdot \Delta\theta \quad (1) \quad \text{διὰ τὴν ὕαλον,}$$

καὶ : $\Delta V = V' \cdot \kappa \cdot \Delta\theta \quad (2) \quad \text{διὰ τὸν ὑδραργύρον, ὅπου } \lambda \text{ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὕαλου καὶ } \kappa \text{ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου.}$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$3 \lambda \cdot V = \kappa \cdot V' \quad (3)$$

Ἐὰν S ἡ ἀρχικὴ διατομή τοῦ σωλῆνος, h τὸ ἀρχικὸν ὕψος αὐτοῦ καὶ h' τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου θὰ ἔχωμεν :

$$V = S \cdot h \quad (4) \quad \text{καὶ :} \quad V' = S \cdot h' \quad (5)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (3), (4) καὶ (5) προκύπτει :

$$h' = \frac{3 \lambda \cdot h}{\kappa} \quad (6)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα : $\lambda = 8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\kappa = 182 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $h = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, λαμβάνομεν :

$$h' = 13,19 \text{ cm}$$

1648. Ὑάλινος σφαῖρα ὄγκου 20 cm^3 φέρει ὁμογενὲς στέλεχος τοῦ ὁποίου 10 cm μήκους ἀντιπροσωπεύουν ὄγκον 2 cm^3 . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ φαινόμενος συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς, ὡς πρὸς τὴν ὕαλον, ὕγρου τινος, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὴν σφαῖραν καὶ $12,5 \text{ cm}$ τοῦ στελέχους εἰς 0°C καὶ ἐπεκτείνεται προσθέτως ἐντὸς τοῦ στελέχους κατὰ $7,5 \text{ cm}$ δι' αὐξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ 50°C . (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς ὕαλου $= 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Ὁ φαινόμενος συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς γ_ϕ τοῦ ὕγρου συνδέεται μετὰ τοῦ πραγματικοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὕγρου γ_π καὶ τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου γ_χ διὰ τῆς σχέσεως :

$$\gamma_\phi = \gamma_\pi - \gamma_\chi \quad (1)$$

Ἐστω V_0 ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ὕγρου ὡς καὶ ἡ ἀντιστοιχὸς χωρητικότης τοῦ δοχείου μέχρι τῆς ὑποδιαίρεσως $12,5 \text{ cm}$ τοῦ στελέχους, εἰς 0°C . Ἐστῶσαν V_π ὁ πραγματικὸς ὄγκος τοῦ ὕγρου, V_ϕ ὁ φαινόμενος ὄγκος μέχρι τῆς ὑποδιαίρεσως $12,5 + 7,5 = 20 \text{ cm}$ τοῦ στελέχους μετὰ τὴν αὐξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$, ἤτοι ἀπὸ 0°C μέχρι 50°C . Τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$V_\pi = V_0 \cdot (1 + \gamma_\pi \cdot \Delta\theta) \quad (2) \quad \text{καὶ :} \quad V_\phi = V_0 \cdot (1 + \gamma_\phi \cdot \Delta\theta) \quad (3)$$

διὰ τὸ ὕγρον καὶ τὸ δοχεῖον ἀντιστοιχῶς. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), λαμβανομένου ὅτι :

$$\gamma_\chi = 3 \alpha_\chi \quad (4)$$

δπου α_{χ} ο γραμμικός συντελεστής της ύαλου, εύρισκομεν :

$$\gamma_{\varphi} = \frac{V_{\varphi} \cdot (1 + 3 \alpha_{\chi} \cdot \Delta\theta) - V_0}{V_0 \cdot \Delta\theta} \quad (5)$$

Αντικαθιστώμεν τέλος τὰς τιμὰς τῶν γ_{φ} καὶ γ_{χ} ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) εἰς τὴν (1), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\gamma_{\varphi} = \frac{V_{\varphi} \cdot (1 + 3 \alpha_{\chi} \cdot \Delta\theta) - V_0}{V_0 \cdot \Delta\theta} - 3 \alpha_{\chi} \quad (6)$$

Ἐκ τῆς (6), δι' ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων : $\Delta\theta = 50^{\circ}\text{C}$, $V_0 = 20 \text{ cm}^3 + 12,5 \cdot 2/10 \text{ cm}^3 = 22,5 \text{ cm}^3$, $V_{\varphi} = 20 \text{ cm}^3 + (12,5 + 7,5) \cdot 2/10 \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$ καὶ $\alpha_{\chi} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, προκύπτει :

$$\gamma_{\varphi} = 0,001335 \text{ grad}^{-1}$$

1649. Ἐντὸς μεταλλικοῦ δοχείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται τεμάχιον λευκοχρύσου, χύνεται ὑδράργυρος μέχρι πληρώσεως τοῦ δοχείου. Ἐὰν ἡ φαινόμενη διαστολὴ τοῦ συστήματος ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ποῖος ὁ λόγος τῶν μαζῶν ὑδραργύρου καὶ λευκοχρύσου. Δίδονται αἱ πυκνότητες ὑδραργύρου καὶ λευκοχρύσου εἰς 0°C $\rho_{\text{υδρ}}$ καὶ $\rho_{\text{λευκ}}$. Συντελεσταὶ κυβικῆς διαστολῆς : ὑδραργύρου $\gamma_{\text{υδρ}}$, λευκοχρύσου $\gamma_{\text{λευκ}}$, δοχείου $\gamma_{\text{δοχ}}$.

Λύσις. Ἐστῶσαν $m_{\text{υδρ}}$ καὶ $m_{\text{λευκ}}$ αἱ μάζαι ὑδραργύρου καὶ λευκοχρύσου, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται μηδενικὴ φαινόμενη διαστολὴ τοῦ συστήματος.

Ἐὰν $V_{\text{υδρ}}$ καὶ $V_{\text{λευκ}}$ οἱ ὅγκοι τοῦ ὑδραργύρου καὶ λευκοχρύσου εἰς θερμοκρασίαν 0°C , θὰ ἔχωμεν :

$$V_{\text{υδρ}} = \frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} \quad (1) \quad , \quad V_{\text{λευκ}} = \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} \quad (2)$$

καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα ὑδράργυρος λευκοχρύσος θὰ παρουσιάζῃ ὄγκον :

$$V_{\text{συστ}} = V_{\text{υδρ}} + V_{\text{λευκ}} = \frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} + \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} \quad (3)$$

ἐνῶ ἐξ ἄλλου, πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ συστήματος θὰ ἰσοῦται καὶ ὁ ὄγκος τοῦ περιέχοντος τὸ σύστημα δοχείου. Διὰ νὰ εἶναι δὲ ἡ φαινόμενη διαστολὴ μηδενικὴ, θὰ πρέπει ἡ διαστολὴ τοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸν λευκοχρυσὸν καὶ τὸν ὑδράργυρον, νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ὅλικήν διαστολὴν λευκοχρύσου καὶ ὑδραργύρου. Οὕτως, εἰς τινα θερμοκρασίαν θ θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ὄγκον $V'_{\text{υδρ}}$ τοῦ ὑδραργύρου :

$$V'_{\text{υδρ}} = V_{\text{υδρ}} (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \theta) \quad (4)$$

διὰ δὲ τὸν ὄγκον $V'_{\text{λευκ}}$ τοῦ λευκοχρύσου :

$$V'_{\text{λευκ}} = V_{\text{λευκ}} (1 + \gamma_{\text{λευκ}} \cdot \theta) \quad (5)$$

Αἱ σχέσεις (4) καὶ (5) ἔνεκα τῶν (1) καὶ (2) γίνονται :

$$V'_{\text{υδρ}} = \frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \theta) \quad (6)$$

$$\text{καί :} \quad V'_{\text{λευκ}} = \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} (1 + \gamma_{\text{λευκ}} \cdot \theta) \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου, διὰ τὸν ὄγκον $V'_{\text{δοχ}}$ τοῦ δοχείου θὰ ἔχωμεν, ἔνεκα τῆς (3) :

$$V'_{\text{δοχ}} = (V_{\text{υδρ}} + V_{\text{λευκ}}) \cdot (1 + \gamma_{\text{δοχ}} \cdot \theta) \quad (8)$$

$$\text{ἢ :} \quad V'_{\text{δοχ}} = \left(\frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} + \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} \right) \cdot (1 + \gamma_{\text{δοχ}} \cdot \theta) \quad (9)$$

Ἀλλ' ἐφ' ὅσον ἡ φαινόμενη διαστολὴ εἶναι μηδενικὴ, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση :

$$V'_{\text{υδρ}} + V'_{\text{λευκ}} = V'_{\text{δοχ}} \quad (10)$$

$$\text{ἢ :} \quad \frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} (1 + \gamma_{\text{υδρ}} \cdot \theta) + \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} (1 + \gamma_{\text{λευκ}} \cdot \theta) = \left(\frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} + \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} \right) (1 + \gamma_{\text{δοχ}} \cdot \theta) \quad (11)$$

Εξ ης, μετά την έκτέλεσιν τών πράξεων, λαμβάνομεν :

$$\frac{m_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{υδρ}}} (\gamma_{\text{υδρ}} - \gamma_{\text{δοχ}}) = \frac{m_{\text{λευκ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} (\gamma_{\text{δοχ}} - \gamma_{\text{λευκ}}) \quad (12)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν διὰ τὸν λόγον τῶν μαζῶν ὑδραργύρου καὶ λευκοχρῶστος τὴν σχέσιν :

$$\frac{m_{\text{υδρ}}}{m_{\text{λευκ}}} = \frac{\rho_{\text{υδρ}}}{\rho_{\text{λευκ}}} \cdot \frac{\gamma_{\text{δοχ}} - \gamma_{\text{λευκ}}}{\gamma_{\text{υδρ}} - \gamma_{\text{δοχ}}}$$

1650. Κυκλικὴ χαλυβδίνη στεφάνη, διαμέτρου 99,5 cm καὶ τομῆς 5 cm², ὑπὸ θερμοκρασίαν 10 °C, δέον νὰ προσαρμοσθῇ ἐπὶ τροχοῦ διαμέτρου 1 m. Μέλχι ποίας θερμοκρασίας δέον νὰ θερμανθῇ ἡ στεφάνη. Νὰ εὐρεθῇ ἐπίσης ἡ τάσις τῆς στεφάνης, ὅταν θὰ ψυχθῇ ἐκ νέου εἰς 10 °C. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ τροχὸς δὲν συστέλλεται. (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χάλυβος εἶναι = 0,000011 grad⁻¹. Μέτρον τοῦ Young διὰ τὸν χάλυβα = 2 · 10¹² dyn/cm²).

Λύσις. α) Ἡ διάμετρος τῆς στεφάνης πρέπει νὰ ὑποστῇ γραμμικὴν διαστολὴν Δl, ὥστε νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ τροχοῦ. Ὁ τύπος τῆς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι :

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \quad \eta : \quad \Delta \theta = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha} \quad (1)$$

Δίδονται : Δl = l - l₀ = (100 - 99,5) cm = 0,05 cm, l₀ = 99,5 cm, α = 0,000011 grad⁻¹. Ἐπομένως, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1), λαμβάνομεν :

$$\Delta \theta = \frac{0,05 \text{ cm}}{99,5 \text{ cm} \times 0,000011 \text{ grad}^{-1}} \quad \eta : \quad \Delta \theta = 457^{\circ}\text{C}$$

Ἐπομένως ἡ στεφάνη πρέπει νὰ θερμανθῇ εἰς βαθμοὺς Κελσίου :

$$\theta = 10^{\circ}\text{C} + 457^{\circ}\text{C} \quad \eta : \quad \theta = 467^{\circ}\text{C}$$

β) Ἡ δύναμις (τάσις), ἡ ὁποία θὰ ἀναπτυχθῇ ἐντὸς τῆς στεφάνης μετὰ τὴν ψύξιν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot S \quad (2)$$

δπου E τὸ μέτρον τοῦ Young, l τὸ ἀρχικὸν μήκος τῆς περιφερείας τῆς στεφάνης, Δl ἡ αὐξήσις τοῦ μήκους αὐτῆς καὶ S ἡ τομὴ τῆς στεφάνης. Ἐχομεν ὁμως :

$$l = \pi \cdot d_1 \quad (3) \quad \text{καὶ :} \quad \Delta l = \pi \cdot (d_2 - d_1) \quad (4)$$

δπου d₁ ἡ ἀρχικὴ καὶ d₂ ἡ τελικὴ διάμετρος τῆς στεφάνης. Ἐπομένως ἡ (2) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς :

$$F = E \cdot \frac{\pi \cdot (d_2 - d_1)}{\pi \cdot d_1} \cdot S \quad \eta : \quad F = E \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{d_1} \cdot S \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5) τὰ δεδομένα : S = 5 cm², d₂ = 100 cm, d₁ = 99,5 cm καὶ E = 2 · 10¹² dyn/cm², ὁπότε λαμβάνομεν :

$$F = 5,025 \cdot 10^{10} \text{ dyn} \quad \eta : \quad F = 5,12 \cdot 10^4 \text{ kgf}^*$$

1651. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0 °C εἶναι 13,6 gr/cm³ καὶ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς αὐτοῦ 182 · 10⁻⁶ grad⁻¹. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 50 °C.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τῶν διαφόρων στερεῶν ἢ ὑγρῶν σωμάτων μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, ἐνῶ ἡ μάζα των διατηρεῖται σταθερά, ἔπεται ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου θὰ μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ἐὰν ρ₀ = m/V₀ εἶναι ἡ ἀρχικὴ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου, μετὰ τὴν θέρμανσιν αὐτοῦ κατὰ Δθ βαθμοὺς Κελσίου ἡ πυκνότης θὰ εἶναι :

$$\rho_{\theta} = \frac{m}{V_{\theta}} \quad (1)$$

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, $V_\theta = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\rho_\theta = \frac{m}{V_\theta \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta\theta} \quad (2)$$

ὅπου γ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho_0 = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, $\gamma = 182 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν :

$$\rho_0 = 13,48 \text{ gr/cm}^3$$

1652. Εἰς 18°C ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργύρου εἶναι $13,551 \text{ gr/cm}^3$. Πόση ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς 0°C καὶ 100°C καὶ εἰς ποίαν θερμοκρασίαν εἶναι αὕτη $13,6 \text{ gr/cm}^3$. ($\gamma_{\text{Hg}} = 181 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).

Λύσις. Εἰς 0°C ἡ πυκνότης ρ_0 τοῦ ὕδραργύρου εἶναι :

$$\rho_0 = \rho_{\theta_1} \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta) \quad (1)$$

ὅπου ρ_{θ_1} εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν $\theta_1^\circ\text{C}$, γ ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς καὶ $\Delta\theta$ ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας (βλ. προηγούμενη ἀσκηση).

Συνεπῶς, ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) θέσωμεν : $\rho_{\theta_1} = 13,551 \text{ gr/cm}^3$, $\gamma = 181 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\Delta\theta = 18^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργύρου εἰς 0°C εἶναι :

$$\rho_0 = 13,595 \text{ gr/cm}^3$$

Διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) ὅπου θ_1 τὸ ἴσον τοῦ θ_2 καὶ λύομεν ὡς πρὸς ρ_{θ_2} , ὅτε λαμβάνομεν :

$$\rho_{\theta_2} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta\theta} \quad (2)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργύρου εἰς τὴν θερμοκρασίαν 100°C εἶναι :

$$\rho_{\theta_2} = 13,353 \text{ gr/cm}^3$$

Ἀκολουθῶς, διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς θερμοκρασίας θ_3 , εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ὕδραργυρος ἔχει πυκνότητα $\rho_{\theta_3} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς σχέσεως (1), θέτοντες ὅπου $\theta_1 = \theta_3$ καὶ $\Delta\theta = \theta_3$:

$$\theta_3 = \frac{\rho_0 - \rho_{\theta_3}}{\rho_{\theta_3} \cdot \gamma} \quad (3)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν :

$$\theta_3 = -1,9^\circ\text{C}$$

1653. Μέχρι ποίας θερμοκρασίας πρέπει νὰ θερμανθῇ ἀέριος μᾶζα θερμοκρασίας 17°C , ἵνα ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν ὁ ὄγκος αὐτῆς διπλασιασθῇ.

Λύσις. Ὁ ὄγκος V_θ ἐνὸς αἰρίου εἰς θερμοκρασίαν $\theta^\circ\text{C}$ εὐρίσκεται ἐκ τῶν νόμου τῶν Gay - Lussac ὅτι εἶναι :

$$V_\theta = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \quad (1)$$

ὅπου V_0 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ αἰρίου, πάντοτε ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C καὶ $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$ συντελεστὴς σταθερὸς δι' ὅλα τὰ αἲρια.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν (1) καὶ διὰ θερμοκρασίαν $\theta_1^\circ\text{C}$, θὰ ἔχωμεν :

$$V_{\theta_1} = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta_1) \quad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ὅτε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{V_\theta}{V_{\theta_1}} = \frac{1 + \alpha \cdot \theta}{1 + \alpha \cdot \theta_1} \quad (3)$$

ἢ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως $V_\theta = 2 V_{\theta_1}$, ἔχομεν :

$$2 = \frac{1 + \alpha \cdot \theta}{1 + \alpha \cdot \theta_1} \quad (4)$$

Ἀκολουθῶς, ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην θερμοκρασίαν θ , προκύπτει ἡ σχέση :

$$\theta = \frac{1 + 2 \alpha \cdot \theta_1}{\alpha} \quad (5)$$

ἐξ ἧς, θέτοντες : $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\theta_1 = 18^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν :

$$\theta = 307^\circ\text{C}$$

1654. Ἐντὸς κυλίνδρου εὐρίσκεται ἀέριον ὀγκοῦ 1 dm^3 , πίεσεως 4 at καὶ θερμοκρασίας 100°C , συγκρατούμενον ἀπὸ ἔμβολον. Ζητοῦνται : α) Ὁ ὀγκος τὸν ὁποῖον θὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἀέριον ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, ἐὰν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀνυψωθῇ εἰς 200°C . β) Ἡ πίεσις τὴν ὁποῖαν θὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἀέριον, ἐὰν ὁ ὀγκος μεταβληθῇ ὑπὸ ἰσόθερμον μεταβολὴν εἰς 4 dm^3 .

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1959).

Λύσις. α) Γνωρίζομεν ὅτι ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν οἱ ὄγκοι τῶν δύο καταστάσεων τοῦ αἰρίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \eta: \quad V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \quad (1)$$

Δίδονται : $V_1 = 1 \text{ dm}^3$, $T_1 = 373^\circ\text{K}$, $T_2 = 473^\circ\text{K}$, ἄρα :

$$V_2 = 1,27 \text{ dm}^3$$

β) Εἰς τὴν ἰσόθερμον μεταβολήν, οἱ ὄγκοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πιέσεων, ἤτοι :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} \quad \eta: \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} \quad (2)$$

Δίδονται : $p_1 = 4 \text{ at}$, $V_1 = 1 \text{ dm}^3$, $V_2 = 4 \text{ dm}^3$, ἄρα :

$$p_2 = 1 \text{ at}$$

1655. Χαλκίνη σφαῖρα κοίλη πληροῦται δι' αἰέρος θερμοκρασίας 0°C καὶ ἀπολύτου πίεσεως 720 Torr . Ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις (βαρομετρικὴ) εἶναι 756 Torr . Θερμαίνομεν τὴν σφαῖραν μετὰ τοῦ ἐγκλεισμένου αἰέρος, μέχρις οὗ ἡ πίεσις τοῦ ἐντὸς τῆς σφαίρας αἰέρος ὑπερβῇ τὴν βαρομετρικὴν πίεσιν κατὰ 252 Torr . Μέχρι ποίας θερμοκρασίας δέον νὰ θερμανθῇ ἡ σφαῖρα μετὰ τοῦ ἐγκλεισμένου αἰέρος; Συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς (γραμμικῆς) τοῦ χαλκοῦ $\lambda = 0,000017 \text{ grad}^{-1}$.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀλλοδαποί: Ἀρχιτεκτόνων, Τοπογράφων, 1962).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν V_1 τὸν ἀρχικὸν ὄγκον (χωρητικότητα) τῆς σφαίρας καὶ V_2 τὸν τελικόν, θὰ ἔχωμεν :

$$V_2 = V_1 (1 + 3\lambda\theta) \quad (1)$$

ἔπου λ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ καὶ θ ἡ ζητούμενη θερμοκρασία.

Ἐὰν καλέσωμεν p_1 τὴν ἀρχικὴν πίεσιν τοῦ αἰρίου, p_2 τὴν τελικὴν, p_0 τὴν ἀτμοσφαιρικήν καὶ Δp τὴν διαφορὰν τῆς τελικῆς πίεσεως ἀπὸ τῆς βαρομετρικῆς, θὰ ἔχωμεν, συμφωνῶς πρὸς τὰ δεδομένα :

$$p_2 = \Delta p + p_0 \quad (2)$$

Βάσει τῆς ἐξίσωσως τῶν τελείων αἰρίων, ἐφ' ὅσον ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 0°C , θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{p_2 V_2}{1 + \alpha\theta} = p_1 \cdot V_1 \quad (3)$$

ἔπου α ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν αἰρίων.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$\frac{(\Delta p + p_0) V_1 (1 + 3\lambda\theta)}{1 + \alpha\theta} = p_1 V_1 \quad (4)$$

ἤ :

$$\theta = \frac{\Delta p + p_0 - p_1}{p_1 \alpha - 3\lambda (\Delta p + p_0)}$$

Θέτοντες: $\Delta p = 252 \text{ Torr}$, $p_0 = 756 \text{ Torr}$, $p_1 = 720 \text{ Torr}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, $\lambda = 0,000017 \text{ grad}^{-1}$, λαμβάνομεν:

$$\theta = 111,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

1656. Δίδεται φιάλη πρισματική καθέτου τομής 200 cm^3 , περιέχουσα αέριον. Εἰς τὸ στόμιον αὐτῆς φέρεται εὐκίνητον ἔμβολον, τὸ ὁποῖον κλείει ἀεροστεγῶς τὴν φιάλην καὶ ἰσορροπεῖ εἰς τινὰ θέσιν. Τὸ βάρος τοῦ ἐμβόλου εἶναι 40 kg^* , ὁ ὄγκος τοῦ αἰρίου εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας εἶναι 3 lt καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἀτμοσφαιρική πίεσις $p = 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Νὰ εὕρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ πίεσις p_1 τοῦ αἰρίου. Ἐὰν τὸ αἷριον θερμανθῇ ἀπὸ $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ εἰς $99,5 \text{ } ^\circ\text{C}$, νὰ εὕρεθοῦν τὸ παραγόμενον ἔργον καὶ ἡ ἀνύψωσις τοῦ ἐμβόλου.

(Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1960).

Λύσις. α) Ἡ πίεσις τοῦ αἰρίου p_1 εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως p καὶ τῆς πίεσεως τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ τὸ βάρος τοῦ ἐμβόλου. Ἦτοι:

$$p_1 = p + \frac{B}{S} \quad (1)$$

ὅπου B τὸ βάρος τοῦ ἐμβόλου καὶ S ἡ διατομὴ τοῦ ἐμβόλου.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα: $p = 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$, $B = 40 \text{ kg}^*$, $S = 200 \text{ cm}^2$, καὶ εὕρισκομεν:

$$p_1 = 1,2 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$$

β) Ἡ μετατόπισις τοῦ ἐμβόλου Δh θὰ προσδιορισθῇ βάσει τῆς διαστολῆς τοῦ αἰρίου. Ἡ διαστολὴ γίνεταί ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν $p_1 = 1,2 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Ἐπομένως θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$\frac{V_\theta}{T_\theta} = \frac{V_0}{T_0} \quad (2)$$

Ἐχομεν ὁμῶς: $V_\theta = S \cdot (h + \Delta h)$ (3), ὅπου h τὸ ἀρχικὸν ὕψος τοῦ αἰρίου ὄγκου,

$$\text{καί:} \quad h = \frac{V_0}{S} \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$S \cdot \left(\frac{V_0}{S} + \Delta h \right) = V_0 \cdot \frac{T_0}{T_\theta} \quad \text{ἢ:} \quad \Delta h = \frac{V_0 \cdot (T_\theta - T_0)}{S \cdot T_0} \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5) τὰ δεδομένα: $V_0 = 3 \text{ lt} = 3000 \text{ cm}^3$, $T_0 = 273 + 99,5 = 372,5 \text{ } ^\circ\text{K}$, $T_\theta = 273 \text{ } ^\circ\text{K}$ καὶ $S = 200 \text{ cm}^2$, ὁπότε εὕρισκομεν:

$$\Delta h = 5,47 \text{ cm}$$

γ) Τὸ παραγόμενον ἔργον ὀφείλεται εἰς τὴν μετατόπισιν τοῦ ἐμβόλου κατὰ $\Delta h = 5,47 \text{ cm}$. Ἡ ὑπερνικωμένη δύναμις F εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ βάρους B τοῦ ἐμβόλου καὶ τῆς δυνάμεως F' τὴν ὁποῖαν ἀσκεῖ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις p ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου. Ἦτοι θὰ ἔχωμεν:

$$A = F \cdot \Delta h \quad (6), \quad F = B + F' \quad (7), \quad F' = p \cdot S \quad (8)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων, προκύπτει:

$$A = \Delta h \cdot (B + p \cdot S) \quad (9)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ γνωστὰ μεγέθη καὶ εὕρισκομεν:

$$A = 13,13 \text{ kg}^*\text{m}$$

1657. Ὑάλινον ἀεροφυλάκιον ὄγκου 1200 cm^3 περιέχει $5400 \text{ gr}^* \text{ Hg}$ καὶ ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν $10 \text{ } ^\circ\text{C}$. Τὸ ἀεροφυλάκιον κλείεται μὲ βαλβίδα βάρους $B \text{ kg}^*$ καὶ θερμαίνεται ὁμοιομόρφως εἰς $210 \text{ } ^\circ\text{C}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος B ὅταν ἡ βαλβὶς ἀνοίγῃ εἰς τοὺς $210 \text{ } ^\circ\text{C}$. ($\lambda_{\text{H}_2\text{O}} = 8 \cdot 10^{-6}$, $\kappa_{\text{Hg}} = 180 \cdot 10^{-6}$).

(Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Ἀνωτάτη Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1961).

Λύσις. Ἐστω V ὁ ἀρχικὸς ὄγκος (χωρητικότης) τῆς φιάλης, V_1 ὁ ὄγκος τοῦ Hg καὶ V_2 ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν p_0 . Θὰ ἰσχύη τότε ἡ σχέσις :

$$V_2 = V - V_1 \quad (1)$$

Ἐστώσαν V' ὁ τελικὸς ὄγκος τῆς φιάλης, V'_1 ὁ ὄγκος τοῦ Hg καὶ V'_2 ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος, ὑπὸ τὴν νέαν πίεσιν p . Θὰ ἔχωμεν :

$$V'_2 = V' - V'_1 \quad (2)$$

Ἐὰν T ἡ ἀρχικὴ ἀπόλυτος θερμοκρασία τοῦ ἀέρος καὶ T' ἡ τελικὴ, θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ νόμου τῶν τελείων ἀερίων :

$$\frac{V'_2 \cdot p}{T'} = \frac{V_2 \cdot p_0}{T} \quad (3)$$

$$\eta : \quad p = \frac{V_2 \cdot p_0 \cdot T'}{V'_2 \cdot T} \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (3) καὶ (4) προκύπτει :

$$p = \frac{(V - V_1) p_0 \cdot T'}{(V' - V'_1) \cdot T} \quad (5)$$

Βάσει τοῦ νόμου τῶν Gay-Lussac, ἔχομεν :

$$V' = V (1 + 3\lambda \cdot \Delta\theta) \quad \eta : \quad V' = V (1 + 3\lambda \cdot \Delta T) \quad (6)$$

$$\kappa \acute{\alpha} \iota : \quad V'_1 = V_1 (1 + \kappa \Delta\theta) \quad \eta : \quad V'_1 = V_1 (1 + \kappa \cdot \Delta T) \quad (7)$$

(διότι $\Delta\theta = \Delta T$), ὅπου ΔT ἡ διαφορά τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν, λ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὕαλου καὶ κ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ Hg.

Ἐὰν B_1 τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου καὶ ϵ_1 τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ εἰς τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν $\theta = 10^\circ\text{C}$ θὰ ἔχωμεν :

$$B_1 = V_1 \cdot \epsilon_1 \quad \eta : \quad V_1 = \frac{B_1}{\epsilon_1} \quad (8)$$

καὶ ἐὰν ϵ_0 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0° , θὰ ἔχωμεν :

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{1 + \kappa\theta} \quad \eta : \quad \epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{1 + \kappa(T - 273)} \quad (9)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (5), (6), (7), (8) καὶ (9), προκύπτει :

$$p = \frac{\left(V - \frac{B_1 [\kappa \cdot (T - 273)]}{\epsilon_0} \right) p_0 \cdot T'}{\left(V + 3V\lambda \cdot \Delta T - \frac{B_1 [\kappa \cdot (T - 273)]}{\epsilon_0} - \frac{B_1 [\kappa \cdot (T - 273)]}{\epsilon_0} \cdot \kappa \cdot \Delta T \right) \cdot T} \quad (10)$$

Θέτομεν : $V = 1200 \text{ cm}^3$, $B_1 = 5400 \text{ gr}^*$, $\epsilon_0 = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $p_0 = 76 \text{ cm Hg}$, $\kappa = 180 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\lambda = 8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $T = 10 + 273 = 283^\circ\text{K}$, $T' = 210 + 273 = 483^\circ\text{K}$, $\Delta T = 483 - 283 = 200^\circ\text{K}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$p = 131,5 \text{ cm Hg} \quad \eta : \quad p = 1788 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

Ἐὰν S , ἡ διατομή τῆς βαλβίδος εἰς cm^2 καὶ B τὸ βάρος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$p = \frac{B}{S} \quad \eta : \quad B = p \cdot S' \quad (11)$$

Ἐπομένως :

$$B = 1788 \cdot S \text{ gr}^*$$

1658. Να υπολογισθῇ ἡ μάζα ἀέρος, ἡ ὁποία καταλαμβάνει ὄγκον 20 λίτρων, ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C καὶ πίεσιν 100 at. (Μάζα 1 λίτρου ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας = 1,293 gr).

Λύσις. Διὰ τὴν εὐρώμενην μάζαν τοῦ ἀερίου, πρέπει νὰ ἀναγάγωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ εἰς θερμοκρασίαν 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαιρας (κανονικαὶ συνθήκαι). Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ἰσοθέρου μεταβολῆς (νόμος Boyle - Mariotte):

$$p \cdot V = p_1 \cdot V_1 \quad (1) \quad \text{ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι:} \quad V = \frac{p_1 \cdot V_1}{p} \quad (2)$$

Συνεπῶς, ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν πυκνότητα τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, τότε ἡ ζητούμενη μάζα m τοῦ ἀέρος θὰ διδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$m = \rho \cdot V = \frac{\rho \cdot p_1 \cdot V_1}{p} \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3): $\rho = 1,293 \text{ gr/lit}$, $V_1 = 20 \text{ lit}$, $p_1 = 100 \text{ at} = 100 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2$ καὶ $p = 1,033 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2$, εὐρίσκομεν:

$$m = 2500 \text{ gr} = 2,5 \text{ kgr}$$

1659. Ποσότης 50 λίτρων διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος εὐρίσκεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 280°K καὶ πίεσιν 840 Torr. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς εἰς 30°C καὶ πίεσιν 600 Torr.

Λύσις. Ἐστω ὅτι n Mol ἀερίου εὐρίσκονται εἰς θερμοκρασίαν T_1 ἀπὸλυτον, ὑπὸ πίεσιν p_1 , καὶ καταλαμβάνουν ὄγκον V_1 . Τότε, συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων, θὰ ἔχωμεν:

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1 \quad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ μάζα ἀερίου εὐρίσκεται εἰς θερμοκρασίαν T_2 , ὑπὸ πίεσιν p_2 , καὶ καταλαμβάνῃ ὄγκον V_2 , θὰ ἔχωμεν:

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \quad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{ἢ:} \quad V_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot p_1} \quad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) θέσωμεν: $V_2 = 50 \text{ lit}$, $T_2 = 280^{\circ}\text{K}$, $p_2 = 840 \text{ Torr}$, $T_1 = 273 + 30 = 303^{\circ}\text{K}$ καὶ $p_1 = 600 \text{ Torr}$, εὐρίσκομεν:

$$V_1 = 75,75 \text{ lit}$$

1660. Μεταβάλλομεν τὴν πίεσιν καὶ τὴν θερμοκρασίαν μιᾶς δεδομένης ποσότητος ἀερίου κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ πυκνότης νὰ παραμένῃ σταθερά. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 25°C καὶ ἡ πίεσις 760 mm Hg, ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις εἰς 50°C . Ἀποδώσατε τὸ φαινόμενον εἰς διάγραμμα μὲ συντεταγμένας τὴν πίεσιν καὶ τὸν ὄγκον.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικόν, 1961).

Λύσις. α) Ἐφ' ὅσον ἡ πυκνότης ρ θὰ εἶναι σταθερά, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ ὄγκος V θὰ εἶναι πάντοτε σταθερός, ἀφοῦ $V = m/\rho$.

Ἐὰν καλέσωμεν p_1 καὶ T_1 τὰς ἀρχικὰς συνθήκας πίεσεως καὶ θερμοκρασίας καὶ p_2 , T_2 τὰς τελικὰς συνθήκας τοῦ ἀερίου, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{ἢ:} \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

Δίδονται: $p_1 = 760 \text{ mm Hg}$, $T_1 = 25 + 273 = 298^{\circ}\text{K}$, $T_2 = 50 + 273 = 323^{\circ}\text{K}$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν:

$$p_2 = 823,8 \text{ mm Hg}$$

β) Ἐφ' ὅσον ὁ ὄγκος παραμένει σταθερός τὸ διάγραμμα τοῦ ὄγκου ὡς πρὸς τὴν πίεσιν θὰ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν πίεσεων.

1661. Πόσος ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ 0,2 Mol αερίου ὑπὸ πίεσιν 720 Torr καὶ θερμοκρασίαν 20 °C.

Λύσις. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν τελείων αερίων $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς V , λαμβάνομεν :

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} \quad (1)$$

Θέτομεν : $n = 0,2 \text{ Mol}$, $R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{Mol}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $T = 273 + 20 = 293 \text{ }^\circ\text{K}$, $p = 1033 \cdot 981 \cdot 720 / 760 = 96 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$, (καθότι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι $1033 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2$ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ στήλη ὑδραργύρου 760 mm), καὶ εὐρίσκομεν :

$$V = 5070 \text{ cm}^3$$

1662. Μᾶζα χλωρίου καταλαμβάνει ὄγκον 200 cm³ εἰς 100 °C. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς εἰς 0 °C ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν.

Λύσις. Ἡσχέσις $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ ἐφ' ὅσον ἡ πίεσις παραμένει ἡ αὐτὴ ($p_1 = p_2$), γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (1) \quad \text{ἢ} : \quad V_1 = \frac{V_2 \cdot T_1}{T_2} \quad (2)$$

Θέτομεν : $V_2 = 200 \text{ cm}^3$, $T_2 = 273 + 100 = 373 \text{ }^\circ\text{K}$, $T_1 = 273 \text{ }^\circ\text{K}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$V_1 = 147 \text{ cm}^3$$

1663. Χαλύβδινον δοχεῖον περιέχει διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος ὑπὸ θερμοκρασίαν 27 °C καὶ πίεσιν 12 ἀτμοσφαιρῶν. Νά υπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ πίεσις τοῦ αερίου, ὅταν τοῦτο θερμανθῇ μέχρις 100 °C.

Λύσις. Τὸ διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον, δηλ. τὸν ὄγκον τοῦ δοχείου. Οὕτως ἐὰν εἰς τὴνσχέσιν : $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ θέσωμεν $V_1 = V_2$, λαμβάνομεν :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{ἢ} : \quad p_1 = \frac{p_2 \cdot T_1}{T_2} \quad (1)$$

Θέτομεν : $p_2 = 12 \text{ at}$, $T_2 = 273 + 27 = 300 \text{ }^\circ\text{K}$, $T_1 = 273 + 100 = 373 \text{ }^\circ\text{K}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$p_1 = 14,9 \text{ at}$$

1664. Ἐν λίτρον αερίου εὐρίσκεται ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαιράς καὶ θερμοκρασίαν -20 °C. Τὸ αέριον πρέπει ὑπὸ θερμοκρασίαν 40 °C νά καταλάβῃ ὄγκον 0,5 lt. Πόση ἡ πίεσις αὐτοῦ.

Λύσις. α) Ἀπὸ τὴνσχέσιν :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{λαμβάνομεν :} \quad p_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot V_1} \quad (1)$$

Θέτομεν : $p_2 = 1 \text{ at}$, $T_2 = 273 - 20 = 253 \text{ }^\circ\text{K}$, $V_2 = 1 \text{ lt}$, $V_1 = 0,5 \text{ lt}$ καὶ $T_1 = 273 + 40 = 313 \text{ }^\circ\text{K}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$p_1 = 2,47 \text{ at}$$

1665. Σφαιρικὸν ὑάλινον δοχεῖον ὄγκου 100 cm³ συνδέεται διὰ λεπτοῦ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου πρὸς ἕτερον ὑάλινον σφαιρικὸν δοχεῖον ὄγκου 300 cm³. Ἡ συσκευὴ πληροῦται ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 76 cm στήλης ὑδραργύρου καὶ θερμοκρασίαν 12 °C, κατόπιν δὲ κλείεται. Τὸ μικρότερον δοχεῖον βυθίζεται ἀκολούθως ἐντὸς τηχομένου πάγου, ἐνῶ τὸ μεγαλύτερον τοποθετεῖται ἐντὸς ζέον-

τος ύδατος. Νά υπολογισθούν: α) 'Η τελική πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῆς συσκευῆς, β) τὸ κλάσμα τῆς ὀλικῆς μάζης ἀέρος ἐντὸς τοῦ μεγαλύτερου δοχείου. 'Η διαστολὴ τῆς ὕαλου θεωρεῖται ἀμελητέα.

Λύσις. α) Μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν πίεσιν p ἐντὸς καὶ τῶν δύο δοχείων. Ἐὰν καλέσωμεν V_1 καὶ V_2 τοὺς ὄγκους τῶν δύο δοχείων, τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεγαλύτερου ἀντιστοίχως, T_1 , T_2 τὰς ἀπολύτους θερμοκρασίας αὐτῶν καὶ V'_1 , V'_2 τοὺς ὄγκους ποὺ θὰ κατελάμβανον ὑπὸ τὴν ἀρχικὴν πίεσιν p_0 καὶ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν T , αἱ ποσότητες τῶν ἀερίων, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται εἰς ἐκάστην φιάλην εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν, τότε βάσει τοῦ νόμου τῶν Boyle - Mariotte καὶ Gay - Lussac, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{p \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_0 V'_1}{T} \quad (1)$$

διὰ τὸ ἀέριον τοῦ ἐνὸς δοχείου, καί :

$$\frac{p \cdot V_2}{T_2} = \frac{p_0 V'_2}{T} \quad (2)$$

διὰ τὸ ἀέριον τοῦ ἑτέρου.

Ὁ συνολικὸς ὄγκος ὁμῶς τῶν ἀερίων παραμένει σταθερὸς. Ἦτοι :

$$V'_1 + V'_2 = V_1 + V_2 \quad (3)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) καὶ λύοντες ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην πίεσιν p λαμβάνομεν :

$$p = \frac{\frac{p_0}{T} (V'_1 + V'_2)}{\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}} \quad (4)$$

ἢ, λόγῳ τῆς ἐξισώσεως (3) :

$$p = p_0 \frac{\frac{V_1 + V_2}{T}}{\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}} \quad (5)$$

Θέτοντες : $p_0 = 76 \text{ cm Hg}$, $V_1 = 100 \text{ cm}^3$, $V_2 = 300 \text{ cm}^3$, $T = 12 + 273 = 285 \text{ }^\circ\text{K}$, $T_1 = 273 \text{ }^\circ\text{K}$, $T_2 = 100 + 273 = 373 \text{ }^\circ\text{K}$, λαμβάνομεν τελικῶς :

$$p = 91,1 \text{ cm Hg}$$

β) Εἰς τὴν τελικὴν φάσιν, ἐὰν καλέσωμεν m_1 καὶ m_2 τὰς μάζας τῶν ἀερίων τῶν περιεχομένων εἰς ἐκάστην φιάλην, καὶ ρ_1 , ρ_2 τὰς ἀντιστοίχους πυκνότητας αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$m_1 = V_1 \cdot \rho_1 \quad (6) \quad \text{καί :} \quad m_2 = V_2 \cdot \rho_2 \quad (7)$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν p , αἱ πυκνότητες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν. Ἦτοι :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad (8)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8), λαμβάνομεν :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} \quad (9) \quad \text{ἢ :} \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1} \quad (10)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (10) : $V_2 = 300 \text{ cm}^3$, $V_1 = 100 \text{ cm}^3$, $T_2 = 100 + 273 = 373 \text{ }^\circ\text{K}$ καὶ $T_1 = 273 \text{ }^\circ\text{K}$, εὐρίσκομεν :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,687$$

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα α εἶναι :

$$\alpha = 68,7\%$$

1666. "Εν γραμμομόριον αερίου καταλαμβάνει υπό κανονικᾶς συνθήκας ὄγκον 22,4 λίτρων. Ζητοῦνται: α) Πόση ἡ απαιτούμενη πίεσις διὰ τὴν συμπίεσιν ἐνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου εἰς δοχείον χωρητικότητος 5 λίτρων καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 100 °C. β) Πόση ἡ θερμοκρασία διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὸ ὀξυγόνον ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπὸ πίεσιν 3 at. γ) Πόση χωρητικότης θὰ ἀπαιτῇτο διὰ νὰ διατηρηθῇ τὸ ὀξυγόνον ὑπὸ συνθήκας 100 °C καὶ ὑπὸ πίεσιν 3 at.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου: $\frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}$, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς p_2 , λαμβάνομεν:

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} \quad (1)$$

Θέτομεν: $p_1 = 1 \text{ at}$, $V_1 = 22,4 \text{ lt}$, $T_1 = 273^\circ\text{K}$, $T_2 = 373^\circ\text{K}$, $V_2 = 5 \text{ lt}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$p_2 = 6,12 \text{ at}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς T_2 , λαμβάνομεν:

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} \quad (2)$$

Θέτομεν: $p_2 = 3 \text{ at}$, $V_2 = 5 \text{ lt}$, $T_1 = 273^\circ\text{K}$, $p_1 = 1 \text{ at}$, $V_1 = 22,4 \text{ lt}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$T_2 = 182,8^\circ\text{K} \quad \eta: \quad \theta = 182,8 - 273 = -90,2^\circ\text{C}$$

γ) Ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς V_2 , λαμβάνομεν:

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} \quad (3)$$

Θέτομεν: $p_1 = 1 \text{ at}$, $V_1 = 22,4 \text{ lt}$, $T_1 = 273^\circ\text{K}$, $T_2 = 383^\circ\text{K}$, $p_2 = 3 \text{ at}$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$V_2 = 10,2 \text{ lt}$$

1667. Ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, 28 gr ἄζωτου καταλαμβάνουν ὄγκον 22,4 λίτρων. Πόση ἡ μᾶζα 10 λίτρων ἄζωτου ὑπὸ θερμοκρασίαν 25 °C καὶ πίεσιν 810 Torr.

Λύσις. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μᾶζαν τοῦ ἄζωτου, ὄγκον 10 lt, θερμοκρασίας 25 °C καὶ πίεσεως 810 Torr, ἀρκεῖ νὰ εὐρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἄζωτου ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας. Ὁ ὄγκος τοῦ ἄζωτου, ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{ὅτι εἶναι:} \quad V_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot p_1} = \frac{810 \cdot 10 \cdot 273}{(273 + 5) \cdot 760} = 0,99 \text{ lt}$$

Ἐφ' ὅσον ὄγκος ἄζωτου 22,4 lt ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας ἔχει μᾶζαν 28 gr, εὐρίσκομεν διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὅτι ὁ ὄγκος 0,99 lt ἄζωτου, ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, θὰ ἔχη μᾶζαν:

$$m = \frac{0,99 \cdot 28}{22,4} = 12,2 \text{ gr}$$

1668. Ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου, ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας, εἶναι 1,43 gr/lt. Πόση ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς 17 °C καὶ πίεσιν 700 Torr.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς πυκνότητος: $\rho_0 = \rho \cdot \frac{p}{p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$ εὐρίσκομεν:

$$\rho_0 = 1,43 \cdot \frac{700}{760 \left(1 + \frac{1}{273} \cdot 17\right)} = 1,24 \text{ gr/lt}$$

1669. Νά υπολογισθῇ ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικᾶς συνθηκᾶς πιέσεως καὶ θερμοκρασίας. (Πυκνότης ἀέρος ὑπὸ κανονικᾶς συνθηκᾶς $p = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$, εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $\epsilon = 13,6 \text{ gr/cm}^3$).

Λύσις. Ἐάν καλέσωμεν $\bar{v}$ τὴν μέσην ταχύτητα τῶν μορίων τοῦ ἀέρος καὶ p τὴν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \bar{v}^2 \quad \text{ἢ} : \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Δίδεται $p = 76 \text{ cm}$ στήλης ὑδραργύρου· ἐπειδὴ ὁμοῦ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου $\epsilon = 13,6 \text{ gr/cm}^3$ ἢ $\epsilon = 13,6 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^3$, ἡ κανονικὴ πίεσις τοῦ ἀέρος $p = 76 \cdot 13,6 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2 = 1013959 \text{ dyn/cm}^2$. Ἀφ' ἑτέρου $\rho = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$, ἐπομένως, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον, θὰ ἔχωμεν τὴν ταχύτητα εἰς cm/sec :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1013959}{0,001293}} \text{ cm/sec} \quad \text{ἢ} : \quad \bar{v} = 0,0485 \text{ cm/sec}$$

1670. Ποία ἡ μέση ταχύτης: α) ἐνὸς μορίου ὑδρογόνου, καὶ β) ἐνὸς μορίου ὀξυγόνου, ὑπὸ κανονικῆν πίεσιν καὶ εἰς θερμοκρασίαν 20°C . Μοριακὸν βάρος ὑδρογόνου $= 2,016$, μοριακὸν βάρος ὀξυγόνου $= 16$, παγκόσμιος σταθερὰ ἀερίων $R = 8,317 \cdot 10^7 \text{ erg/Mol} \cdot \text{grad}$.

Λύσις. α) Ἡ μέση ταχύτης $\bar{v}$ ἐνὸς μορίου ἀερίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p_0}{\rho}} \quad (1)$$

ὅπου p_0 ἡ κανονικὴ ἀτμοσφαιρική πίεσις καὶ ρ ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου. Ἡ πυκνότης ρ ἐξ ἄλλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὡς ὄγκον τὸν γραμμομοριακὸν ὄγκον V , ὑπὸ κανονικῆν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν 20°C , καὶ ὡς μᾶζαν τὸ γραμμομόριον M , ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (3)$$

Ὁ γραμμομοριακὸς ὄγκος V ὑπὸ θερμοκρασίαν $\theta = 20^\circ\text{C}$ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \quad \text{ἢ} : \quad V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} \quad (4)$$

ὅπου V_0 ὁ γραμμομοριακὸς ὄγκος εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0°C ἢ ἀπόλυτον θερμοκρασίαν $T_0 = 273^\circ\text{K}$ καὶ $T = 273 + 20 = 293^\circ\text{K}$.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 p_0 \cdot V_0 \cdot T}{M \cdot T_0}} \quad (5)$$

Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι: $R = p_0 \cdot V_0 / T_0$ (6). Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (5) μετατρέπεται εἰς:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 R \cdot T}{M}} \quad (7)$$

Δίδεται: $R = 8,317 \cdot 10^7 \text{ erg/Mol} \cdot \text{grad}$, $T = 273 + 20 = 293^\circ\text{K}$ καί, προκειμένου περὶ ὕδρογονου, $M = 2,016 \text{ gr/Mol}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) καὶ λαμβάνομεν:

$$\bar{v} = 190\,400 \text{ cm/sec, περίπου} \quad \text{ἢ} : \quad \bar{v} = 1904 \text{ m/sec περίπου}$$

β) Προκειμένου περὶ ὀξυγόνου, θὰ ἐφαρμόσωμεν πάλιν τὴν ἐξίσωσιν (7), θέτοντες ὅπου $M = 16 \text{ gr/Mol}$, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\bar{v} = 478 \text{ m/sec περίπου}$$

1671. Ποία ἡ εἰς ἓν μόριον ἀερίου θερμοκρασίας 100°C ἀναλογοῦσα μέση κινητική ἐνέργεια ἐκ μεταφορᾶς. (Σταθερὰ τοῦ Boltzmann $k = 1,3804 \cdot 10^{-23} \text{ Nt} \cdot \text{m} \cdot \text{grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἡ μέση κινητική ἐνέργεια μεταφορᾶς ($\bar{E}_{\text{κιν}}$), ἑνὸς μορίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\bar{E}_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}^2 \quad (1)$$

Ἡ μέση ταχύτης $\bar{v}$ τοῦ μορίου ἑνὸς ἀερίου, ὅμως, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p_0}{\rho}} \quad (2)$$

Ὁ τύπος μετασχηματίζεται εἰς :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3R \cdot T}{M}} \quad (3)$$

ὅπου R ἡ παγκόσμιος σταθερὰ τῶν ἀερίων καὶ M τὸ γραμμομόριον τοῦ ἀερίου (βλέπε προηγουμένην ἀσκησην, ἐξίσωσιν (7)). Ἡ σταθερὰ τοῦ Boltzmann k δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$k = \frac{R}{N} \quad \eta: \quad R = k \cdot N \quad (4)$$

ὅπου N ἡ σταθερὰ τοῦ Loschmidt.

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (4) μετατρέπεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k \cdot N \cdot T}{M}} \quad (5)$$

Ἀφ' ἑτέρου τὸ πηλίκον M/N εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτον μᾶζαν m τοῦ μορίου ἑνὸς ἀερίου. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (5) μετατρέπεται τελικῶς εἰς :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k \cdot T}{m}} \quad (6)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς μέσης ταχύτητος εἰς τὴν (1), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\bar{E}_{\text{κιν}} = \frac{3k \cdot T}{2} \quad (7)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα : $k = 1,3804 \cdot 10^{-23} \text{ Nt} \cdot \text{m} \cdot \text{grad}^{-1} = 1,3804 \cdot 10^{-23} \text{ Joule} \cdot \text{grad}^{-1}$ (διότι $1 \text{ Νιούτον} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ Joule}$) καὶ $T = 273 + 100 = 373^{\circ}\text{K}$, ὁπότε προκύπτει :

$$\bar{E}_{\text{κιν}} = 772,3 \cdot 10^{-23} \text{ Joule} \quad \eta: \quad \bar{E}_{\text{κιν}} = 772,3 \cdot 10^{-16} \text{ erg περίπου}$$

1672. Διὰ τὴν ἀνέλκυσιν τοῦ ἀποσπασθέντος πρώτου ὁρόφου ἑνὸς πυραύλου, ἑσωτερικῆς χωρητικότητος ἀπάντων τῶν κενῶν 20 m^3 , ἐξετοπίσθη ὁλόκληρον τὸ ἐντὸς αὐτοῦ εἰσδύσαν θαλάσσιον ὕδωρ, ἀφοῦ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον εἰσῆχθησαν 250 m^3 ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ὑπὸ ἀρχικὴν πίεσιν 700 Torr καὶ θερμοκρασίαν 25°C . Δίδονται: Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος $1050 \text{ kgr}^* / \text{m}^3$ καὶ τοῦ ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^* / \text{cm}^3$. Ζητεῖται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὠκεανοῦ εἰς βάθος 100 m , ὅπου εὐρίσκεται βυθισμένον τὸ πρὸς ἀνέλκυσιν τμήμα τοῦ πυραύλου.

(Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1962).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν θ_2 τὴν ζητούμενην θερμοκρασίαν εἰς βάθος 100 m , V_2 τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος τὸν ὅποιον θὰ καταλάβῃ ὁ ἀτμοσφαιρικός ἀήρ, p_2 τὴν πίεσιν αὐτοῦ καὶ V_1 , p_1 , θ_1 , τὸν ἀρχικὸν ὄγκον, πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{1 + \alpha \theta_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{1 + \alpha \theta_2} \quad \eta: \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἐάν θέσωμεν τὰς ἀντιστοίχους ἀπολύτους θερμοκρασίας. Λύομεν ὡς πρὸς T_2 :

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} \cdot T_1 \quad (2)$$

Δίδονται : $V_1 = 250 \text{ m}^3$, $V_2 = 20 \text{ m}^3$, $p_1 = 700 \text{ Torr} = 70 \cdot 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2 = 9520 \text{ kg}^*/\text{m}^2$, $p_2 = p_1 + h \cdot \epsilon = 9520 + 100 \cdot 1050 = 114\,520 \text{ kg}^*/\text{m}^2$ καὶ $T_1 = 25 + 273 = 298 \text{ }^\circ\text{K}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν σχέσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν :

$$T_2 = 286,8 \text{ }^\circ\text{K} \quad \eta_1 : \quad \theta = 13,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

1673. Ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς μορίου ἀερίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T τοῦ ἀερίου. Πρῶτος ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας, ἐὰν ἡ μέση ταχύτης $\bar{v}$ ἐνὸς μορίου ὀξυγόνου εἰς $0 \text{ }^\circ\text{C}$ εἶναι 460 m/sec . Μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου $= 32$. Σταθερὰ Loschmidt $N = 6,06 \cdot 10^{23}$ μόρια/Mol.

Λύσις. Ἐστω m ἡ μᾶζα ἐνὸς μορίου ἀερίου καὶ $\bar{v}$ ἡ μέση ταχύτης τῆς θερμικῆς κινήσεως αὐτοῦ εἰς θερμοκρασίαν T . Τότε, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον συντελεστὴν διὰ k , θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{2} m \cdot \bar{v}^2 = k \cdot T$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς k , λαμβάνομεν :

$$k = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{2 \cdot T} \quad (1)$$

Ἐὰν ἂν ἑτέρου καλέσωμεν M τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου, θὰ εἶναι 1 Mol ὀξυγόνου $= M \text{ gr}$ καὶ θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν μᾶζαν ἐνὸς μορίου ὀξυγόνου :

$$m = \frac{M}{N} \quad (2)$$

ἔνθα M τὸ γραμμομόριον τοῦ ὀξυγόνου καὶ N ἡ σταθερὰ Loschmidt. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$k = \frac{M \cdot \bar{v}^2}{2 \cdot N \cdot T} \quad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (3) θέσωμεν : $M = 32 \text{ gr}$, $\bar{v} = 460 \text{ m/sec} = 4,6 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$, $N = 6,06 \cdot 10^{23}$ μόρια/Mol καὶ $t = 0 \text{ }^\circ\text{C} = 273 \text{ }^\circ\text{K}$, εὐρίσκομεν :

$$k = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$$

1674. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἀερίου, ὥστε ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς μορίου τοῦ ἀερίου νὰ αὐξηθῇ κατὰ 1 eV .

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\bar{E}_{\text{κιν}} = k \cdot T \quad (1)$$

ἐὰν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς T , λαμβάνομεν :

$$T = \frac{\bar{E}_{\text{κιν}}}{k} \quad (2)$$

Εἰς τὴν προηγουμένην ὁσκήσιν εὐρομεν $k = 2,05 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$, εἶναι δὲ $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι ἴση πρὸς :

$$T = 7767 \text{ }^\circ\text{K}$$

1675. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς ἀτόμου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἀστέρος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία εἶναι $20 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὰ ἄτομα ἀερίου εὐρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν T , ἔχουν μέσην κινητικὴν ἐνέργειαν παρεχομένην ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = k \cdot T$$

ἐνθα $k = 2,05 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $T = 20 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς ἀτόμου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἀστέρος θὰ εἶναι ἰση πρὸς :

$$E_{\text{μεν}} = 4,1 \cdot 10^{-9} \text{ erg} = 2562,5 \text{ eV}$$

1676. Ἐντὸς ὑαλίνου δοχείου περιέχοντος ποσότητα ὕδατος μάζης M_1 , τίθεται τεμάχιον βολφραμίου μάζης M_2 . Ζητεῖται ἡ ἀναλογία μαζῶν $M_1 : M_2$, ὥστε ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου νὰ παραμένῃ ἡ αὐτὴ εἰς πᾶσαν θερμοκρασίαν. Δίδονται : ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς τῆς ὑάλου $8 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, τοῦ βολφραμίου $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, ὁ συντελεστὴς πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ ὕδατος $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$ καὶ ἡ πυκνότης τοῦ βολφραμίου $19,3 \text{ gr/cm}^3$.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Μηχανολόγων — Ἡλεκτρολόγων, 1955).

Λύσις. Διὰ νὰ παραμένῃ σταθερὰ ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου θὰ πρέπει, δι' ἰσωνδή-ποτε διαφορὰν θερμοκρασιῶν $\Delta\theta$, ἡ μεταβολὴ τῆς χωρητικότητος τοῦ ὑαλίνου δοχείου ΔV μέχρι τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος, νὰ εἶναι ἰση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν τοῦ ὄγκου τοῦ ὕδατος ΔV_1 καὶ τοῦ βολφραμίου ΔV_2 . Ἦτοι :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (1)$$

Ἐχομεν ὁμῶς :

$$\Delta V = V \cdot \gamma \cdot \Delta\theta \quad (2)$$

ὅπου V ἡ χωρητικότης τοῦ ὑαλίνου δοχείου μέχρι τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος εἰς τὴν χαμηλοτέραν θερμοκρασίαν καὶ γ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου. Ἀπ' ἐτέρου :

$$\Delta V_1 = V_1 \cdot \gamma_1 \cdot \Delta\theta \quad (3) \quad \text{καὶ :} \quad \Delta V_2 = V_2 \cdot \gamma_2 \cdot \Delta\theta \quad (4)$$

ὅπου V_1 καὶ V_2 οἱ ὄγκοι εἰς τὴν χαμηλοτέραν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ βολφραμίου ἀντιστοίχως καὶ γ_1, γ_2 οἱ συντελεσταὶ κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὕδατος (πραγματικῆς) καὶ τοῦ βολφραμίου.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) ἕως (4) προκύπτει :

$$V \cdot \gamma = V_1 \cdot \gamma_1 + V_2 \cdot \gamma_2 \quad (5)$$

Θὰ ἔχωμεν ὁμῶς ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκῶν βολφραμίου καὶ ὕδατος θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ὄγκον τοῦ δοχείου μέχρι τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος, ἥτοι :

$$V = V_1 + V_2 \quad (6)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$(V_1 + V_2) \cdot \gamma = V_1 \cdot \gamma_1 + V_2 \cdot \gamma_2 \quad \text{ἥ :} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma} \quad (7)$$

Ἰσχύουν ὁμῶς καὶ οἱ σχέσεις :

$$V_1 = \frac{M_1}{\rho_1} \quad (8) \quad \text{καὶ :} \quad V_2 = \frac{M_2}{\rho_2} \quad (9)$$

ὅπου M_1, M_2 αἱ μάζαι τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ βολφραμίου καὶ ρ_1, ρ_2 αἱ πυκνότητες αὐτῶν ἀντιστοίχως. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (7), (8) καὶ (9) λαμβάνομεν :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\gamma - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma} \quad (10)$$

Θέτομεν : $\rho_1 = 1 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_2 = 19,3 \text{ gr/cm}^3$, $\gamma = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\gamma_1 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\gamma_2 = 34,3 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$\frac{M_1}{M_2} = 0,00369$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1677. Είς 20 °C μία όρειχαλκίνη ράβδος έχει μήκος 128,2 cm και μία σιδηρά 128,4 cm. Είς ποίαν θερμοκρασίαν θά έχουν τὸ αὐτὸ μήκος. ($\alpha_{\text{ορειχ.}} = 185 \cdot 10^{-7} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{σιδ.}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$). (Άπ. 254 °C.)

1678. Ἡ θερμοκρασία γεφύρας ἐκ χάλυβος ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$), μήκους 200 m, κατέρχεται τὸν χειμῶνα εἰς -15 °C καὶ ἀνέρχεται τὸ θέρος μέχρι 40 °C. Πόσον διάκενον πρέπει νὰ ἔχη προβλεφθῇ εἰς ἕκαστον ἄκρον αὐτῆς, ἵνα ἐπιτρέπεται ἡ ἀκώλυτος διαστολή της. (Άπ. 7,7 cm.)

1679. Ὑάλινος κύβος ἀκμῆς 2 cm ἀκριβῶς εἰς 20 °C βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος εἰς 4 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς ὕλου = $0,000075 \text{ grad}^{-1}$). (Άπ. 7,997 cm³.)

1680. Μεταλλικὴ ράβδος ὑπὸ θερμοκρασίαν 20 °C ἔχει μήκος 18,516 cm καὶ ὑπὸ 100 °C ἔχει μήκος 18,531 cm. Ποῖος ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου. (Άπ. $1 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$.)

1681. Μεταλλικὴ ράβδος μήκους 10 cm θερμαίνεται κατὰ 450 °C, ὁπότε τὸ μήκος της γίνεται 10,1305 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ θερμικὸς συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ράβδου. (Σχολή Ἰκάρων, 1959). (Άπ. $\alpha = 0,00029 \text{ grad}^{-1}$.)

1682. Εἰς όρειχάλκινος σωλὴν μετρεῖται μὲ χαλυβδίνην ράβδον εἰς θερμοκρασίαν 25 °C καὶ εὐρίσκεται ὅτι ἔχει μήκος 600 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος εἰς 0 °C. Ἡ χαλυβδίνη ράβδος εἶναι βαθμολογημένη εἰς θερμοκρασίαν 0 °C. Δίδονται: $\alpha_{\text{ορειχ.}} = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ καὶ $\alpha_{\text{χαλκ.}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$. (Άπ. $l = 599,9 \text{ cm}$.) (Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Σχολή Ἀρχιτεκτόνων, 1960.)

1683. Ἡ πυκνότης ἐνὸς μετάλλου εἶναι 8 gr/cm³ ὑπὸ θερμοκρασίαν 0 °C καὶ ὁ συντελεστής του γραμμικῆς διαστολῆς $12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης του εἰς θερμοκρασίαν 100 °C. (Άπ. 7,971 gr/cm³.)

1684. Σιδηρὰ στρογγύλη πλάξ ἐμβαδοῦ 5 cm² ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐντὸς ὁπῆς εἰς όρειχάλκινον πλάκα ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χάσματος μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν εἰς θερμοκρασίαν 100 °C. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου $0,00012 \text{ grad}^{-1}$ καὶ τοῦ όρειχάλκου, $0,00018 \text{ grad}^{-1}$). (Άπ. 0,0051 cm².)

1685. Σωλὴν σχήματος U περιέχει τολουόλην. Τὸ ἐν σκέλος αὐτοῦ εὐρίσκεται ἐντὸς τηκομένου πάγου, τὸ δὲ ἕτερον ἐντὸς ὕδατος θερμοκρασίας 98,80 °C. Τὰ ὕψη τῶν στηλῶν τοῦ ὕγρου εἰς τὰ δύο σκέλη εὐρέθησαν ἴσα πρὸς 412,5 mm καὶ 456,9 mm. Ποῖος ὁ συντελεστής θερμικῆς διαστολῆς τῆς τολουόλης. (Άπ. $1090 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.)

1686. Ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἰς 30 °C εἶναι 0,9957 gr/cm³ καὶ εἰς 70 °C εἶναι 0,9778 gr/cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος συντελεστής διαστολῆς μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν τούτων. (Άπ. $0,000457 \text{ grad}^{-1}$.)

1687. Ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον ἔχει ὕαλινον σωλῆνα ἐσωτερικῆς διαμέτρου 0,1 mm καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σταθερῶν σημείων (0 °C καὶ 100 °C) εἶναι 25 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ τοῦ στελέχους κάτωθεν τοῦ κάτω σταθεροῦ σημείου. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὕλου = $9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, ἀπόλυτος συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὕδραργύρου = $18 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$). (Άπ. 0,128 cm³.)

1688. Δύο όμοια ύαλινα δοχεία πληρούνται δι' ύδραργύρου μέχρις ύψους 50 cm εις 0°C και 200°C αντίστοιχως. Νά εύρεθῇ ἡ διαφορά πιέσεων εις τὰς βάσεις τῶν δύο δοχείων. (Απ. 23,6 gr/cm².)

1689. Τὸ ὕψος ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου ἔχει ἔνδειξιν 758 mm ἐπὶ κλίμακος ἐκ χάλυβος ὑπὸ θερμοκρασίαν 16°C. Ποῖον τὸ ὄρθον ὕψος ὑπὸ 0°C, ἐὰν ἡ κλίμαξ παρουσιάζῃ ὀρθὴν ἔνδειξιν ὑπὸ 0°C. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χάλυβος = $12 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹, συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου = $18 \cdot 10^{-5}$ grad⁻¹) (Απ. 756 mm.)

1690. Ποσότης 500 cm³ βενζολίου, θερμοκρασίας 20°C φέρεται εις θερμοκρασίαν 0°C. Ποῖος ὁ νέος ὄγκος αὐτῆς. ($\gamma_{\text{βενζ.}} = 12 \cdot 10^{-4}$ grad⁻¹). (Απ. 488 cm³.)

1691. Δοχεῖον περιέχει 8,450 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C, ὅταν τὸ ὑπολειπόμενον τμήμα του πληροῦται διὰ παραφίνης. Ὅταν τὸ ὕδωρ μετατρέπεται εις πάγον ὑπὸ 0°C, τότε 0,620 gr παραφίνης ἔκτοπίζονται. Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς παραφίνης ὑπὸ 20°C εἶναι 0,8 gr*/cm³ καὶ ὁ συντελεστής διαστολῆς τῆς 0,00090 grad⁻¹. Νά ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου ἐκ τῶν ὡς ἄνω δεδομένων. (Απ. 0,917 gr*/cm³.)

1692. Ὑάλινον δοχεῖον θερμομέτρου περιέχει 33,7 gr ὑγροῦ καὶ πληροῦται ἐντελῶς ὑπ' αὐτοῦ εις θερμοκρασίαν 20°C. Ἐὰν ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι 0,000025 grad⁻¹ καὶ τοῦ ὑγροῦ 0,00085 grad⁻¹, νά εύρεθῇ ἡ μάζα τοῦ ὑγροῦ, τὴν ὁποίαν δύναται νά περιέχῃ τὸ δοχεῖον, ἐὰν ἡ θερμοκρασία του αὐξηθῇ εις 80°C. (Απ. 32,1 gr.)

1693. Ἐντὸς φιάλης μὲ λεπτοδιαμετρικὸν σωλῆνα, τῆς ὁποίας ἡ χωρητικότης εἶναι 400 cm³ εις 0°C, ρίπτομεν ὑδράργυρον μέχρι τοῦ ἀνωτάτου σημείου. Θερμαίνομεν τὴν φιάλην μέχρις 100°C, ὁπότε ἔκρουν 2,286 gr. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι 0,000008 grad⁻¹, νά εύρεθῇ ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου. (Πυκνότης ὑδραργύρου = 13,6 gr/cm³). (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἰατρικὴ Σχολή, 1960). (Απ. $\gamma = 2,82 \cdot 10^{-5}$ grad⁻¹.)

1694. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εις 0°C εἶναι 13,6 gr/cm³. Ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 0,000182 grad⁻¹. Νά εύρεθῇ ἡ πυκνότης του εις τοὺς 50°C. (Πανερ. Ἀθηνῶν, Ἰατρικὴ Σχολή, 1960). (Απ. 13,477 gr/cm³.)

1695. Μάζα ἀερίου καταλαμβάνει χῶρον 22,4 λίτρων εις 0°C καὶ ὑπὸ 760 Torr πίεσιν. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος του εις 12°C καὶ 772 Torr. (Απ. 23,0 lt.)

1696. Ἐὰν ὁ συντελεστής διαστολῆς ἀερίου τινὸς εις 15°C ᾗτο 1/280 grad⁻¹, ποία θερμοκρασία θὰ ἐλαμβάνετο ὡς τὸ ἀπόλυτον μηδέν. (Απ. -265°C.)

1697. Ὑπὸ ποίαν θερμοκρασίαν ὁ ὄγκος δοθείσης μάζης ἀέρος θὰ εἶναι : α) διπλάσιος, καὶ β) τὰ 2/3 τοῦ ὄγκου του εις 0°C, ἐὰν ἡ πίεσις του δὲν μεταβάλλεται. (Απ. 273°C, -91°C.)

1698. Ἀῆρ ἐγκλεισμένος ἄνωθεν ὑδραργύρου, εις σωλῆνα Torricelli ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, καταλαμβάνει 81,9 cm³ εις 0°C καὶ 111,9 cm³ εις 100°C. Νά ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστής διαστολῆς τοῦ ἀέρος. Ἐὰν ὁ συντελεστής παραμείνῃ ἀμετάβλητος ὑπὸ χαμηλᾶς θερμοκρασίας, ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος εις -273°C. (Απ. 1/273 grad⁻¹, 0.)

1699. Ὁ ἀῆρ ὁ εύρισκόμενος εις δωμάτιον διαστάσεων 8 m μήκους, 6 m πλάτους καὶ 3 m ὕψους, θερμαίνεται ἀπὸ τοὺς 10°C εις τοὺς 20°C. Πόσα m³ ἀέρος διαφεύγουν διὰ τῶν ἀνοιγμάτων τῶν θυρῶν καὶ παραθύρων. (Απ. 5,1 m³.)

1700. 'Ο έντος αεροθαλάμου μοτοσυκλέττας εύρισκόμενος άήρ έχει πίεσιν 3 at υπό θερμοκρασίαν 20 °C. Κατά πόσον αύξάνει ή πίεσις, όταν ανυψωθή ή θερμοκρασία λόγω τής ήλιακής ακτινοβολίας εις τούς 50 °C. ('Απ. 0,3 at.)

1701. Δοχείον περιεκτικότητος 50 λίτρων κλείεται αεροστεγώς υπό θερμοκρασίαν 20 °C και πίεσιν 762 Torr. 'Επί τινος όρους άνοίγεται, άφού τό περιεχόμενον του δοχείου έψύχθη εις τήν θερμοκρασίαν τών -10 °C, ή δέ άτμοσφαιρική πίεσις κατήλθεν εις 720 Torr. Εισρέει ή έκρέει άήρ κατά τό άνοιγμα του δοχείου και πόσου όγκου; ('Απ. Εισρέουν 2,5 lt.)

1702. Τό μήκος βαρομετρικού σωλήνος ύδραργυρικού βαρομέτρου είναι 100 cm. 'Ο χώρος άνωθεν του ύδραργύρου περιέχει όλίγον άέρα και τό ύψος του έντος του σωλήνος ύδραργύρου είναι 74 cm άνωθεν τής επιφανείας του ύδραργύρου τής λεκάνης, εις ήμέραν καθ' ήν ή βαρομετρική ένδειξις είναι 75 cm Hg και ή θερμοκρασία 12 °C. Νά ύπολογισθ ή άληθής θερμομετρική ένδειξις, όταν τό λανθασμένον θερμόμετρον παρουσιάξη ένδειξιν 75 cm Hg και ή θερμοκρασία είναι 21 °C. ('Απ. 76,07 cm Hg.)

1703. 'Εν άέριον εύρίσκεται έντός σφαίρας υπό πίεσιν 80 cm Hg και θερμοκρασίαν 293 °C. Ποία θα είναι ή πίεσις του άερίου υπό θερμοκρασίαν 50 °C, όταν ό όγκος τής σφαίρας παραμένη σταθερός. (Πανεπιστήμιον 'Αθηνών, 'Ιατρική Σχολή, 1957). ('Απ. $p = 45,6$ cm Hg.)

1704. 'Αέριον έχει όγκον 3 cm³ υπό θερμοκρασίαν 15 °C και πίεσιν 740 Torr. Τό άέριον θερμαίνεται εις 120 °C και ή πίεσίς του αύξάνεται εις 1520 Torr. Ποίος ό όγκος του άερίου. (Σχολή 'Ικάρων, 1960). ('Απ. 1,993 cm³.)

1705. 'Η πυκνότης του άέρος υπό κανονικάς συνθήκας είναι 1,293 gr/lt. Ποία θα είναι εις 12 °C και 770 Torr. ('Απ. 1,254 gr/lt.)

1706. Νά συγκριθ ή πυκνότης οίουδήποτε άερίου εις 17 °C και πίεσιν 750 Torr με τήν πυκνότητα εις 60 °C και πίεσιν 500 Torr. ('Απ. 1,723 : 1.)

1707. 'Υάλινον δοχείον χωρητικότητος 5 lt, πληροῦται δι' ύδατος μέχρι τών χειλέων αυτού, εις θερμοκρασίαν 20 °C. Πόσον ύδωρ έχώνεται εκ του δοχείου, διά θερμάνσεως εις 90 °C, έάν : α) ή διαστολή του δοχείου θεωρηθ ή άμελητέα, β) έάν αύτή ληφθ ή ύπ' όψιν. ($\gamma_{\text{υδ}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$, $\gamma_{\text{οξ}} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$). ('Απ. α' 0,07 lt, β' 0,061 lt.)

1708. Κανών εξ όρειχάλκου έβαθμολογήθη εις θερμοκρασίαν 0 °C, δι' αυτού δέ μετρείται εις 20 °C τό μήκος ράβδου και εύρίσκεται ίσον πρὸς 80 cm. Ποίον τό πραγματικόν μήκος αύτής. ($\alpha_{\text{ορειχ}} = 185 \cdot 10^{-7} \text{ grad}^{-1}$). ('Απ. 80,03 cm.)

1709. Πόσος άήρ εκφεύγει εκ τινος φιάλης, χωρητικότητος 5 lt, έάν εκ τής θερμοκρασίας τών 0 °C φέρωμεν αύτήν εις 80 °C. 'Η διαστολή τής φιάλης άμελητέα. ('Απ. 1,47 lt.)

1710. Πόσος άήρ εκφεύγει εκ τινος αίθούσης, διαστάσεων 18 m × 32 m × 10 m, έάν διά θερμάνσεως ύψώσωμεν τήν θερμοκρασίαν του άέρος : α) εκ 0 °C εις 15 °C, β) εκ 15 °C εις 30 °C. ('Απ. α' 317 m³, β' 300 m³.)

1711. Κατά πόσον επί τοις έκατόν μεταβάλλεται ό όγκος 4 m³ ύδατος, έάν ή θερμοκρασία αυτού μεταβληθ ή κατά 30 °C. ($\gamma_{\text{υδ}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$). ('Απ. 0,6%.)

1712. Ποσότης ύδατος 0 °C μετατρέπεται εις πάγον 0 °C. Κατά πόσον επί τοις έκατόν μεταβάλλεται εκ τούτου ό όγκος, έάν ή πυκνότης του πάγου εις 0 °C ίσοῦται πρὸς 0,917 gr/cm³, του δέ ύδατος, εις τήν αύτήν θερμοκρασίαν, πρὸς 0,999 868 gr/cm³, ήτοι περίπου 1 gr/cm³. ('Απ. 9%.)

1713. Ποσότης ύδραργύρου, με την οποίαν εις θερμοκρασίαν 0°C δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν 1000 υαλίνας φιάλας, ἐκάστην χωρητικότητος 1 lt, θερμαίνεται εις 100°C . α) Ποίος ὁ νέος ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου, β) πόσας φιάλας δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν ἤδη διὰ τῆς διατιθεμένης ποσότητος ὑδραργύρου, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὅσιν τῆς διαστολῆς τῶν φιαλῶν, γ) πόσας φιάλας δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν, λαμβανομένης ὑπ' ὅσιν τῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου. ($\gamma_{\text{Hg}} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$, $\gamma_{\text{υαλ}} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).
(Ἀπ. α' 1018 lt, β' 1018 φιάλας, γ' 1015,3 φιάλας.)

1714. Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς τῆς ἀλκοόλης, φέρεται τὸ ὑγρὸν ἐντὸς σωλῆνος σχήματος U, ἀκτίνος r. Τὸ ἐν σκέλος τοῦ σωλῆνος εὑρίσκεται ἐντὸς τηκομένου πάγου, τὸ ἕτερον ἐντὸς ἀτμῶν ζέοντος ὕδατος. Τὰ ὕψη τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τῶν δύο σκελῶν ἐμετρήθησαν καὶ εὑρέθησαν ἀντιστοίχως 380,8 mm καὶ 422,7 mm.
(Ἀπ. $11 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$.)

1715. Φιάλη ζέσεως με ἀνοικτὸν στόμιον τοποθετεῖται ἐντὸς δοχείου ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 60°C , ὥστε νὰ βυθισθῇ πλήρως, με τὸ στόμιόν της ἀκριβῶς ὑπερ-ἄνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῆς φιάλης. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῆς αἰθούσης εἶναι 1,25 gr/lt καὶ ἡ θερμοκρασία του 15°C .
(Ἀπ. 1,08 gr/lt.)

1716. Δωμάτιον διαστάσεων 5 m $\times$ 4 m $\times$ 3 m περιέχει ἀέρα θερμοκρασίας 20°C καὶ πίεσεως 710 Torr. Ποῖον τὸ βῆρος τοῦ ἐμπεριεχομένου ἀέρος, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας ἰσοῦται πρὸς 1,293 kg/m³.
(Ἀπ. 67,53 kg*.)

1717. Ἐντὸς χαλυβδίνης φιάλης περιεκτικότητος 20 λίτρων εὑρίσκεται ὀξυγόνον θερμοκρασίας 15°C καὶ πίεσεως 100 at. Ποία ἡ μάζα τοῦ ὀξυγόνου, ὅταν ἡ πυκνότης αὐτοῦ ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας ἰσοῦται πρὸς 1,429 kg/m³.
(Ἀπ. 2,71 kg*.)

1718. α) Κατὰ πόσον διαφέρουν ἀλλήλων αἱ πυκνότητες τοῦ ἀέρος κατὰ τὰς θερμοκρασίας 50°C καὶ -50°C , ὅταν ἡ πίεσις εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἰσοῦται πρὸς 760 Torr. β) Ποία ἡ διαφορά βάρους 100 m³ ἀέρος εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις, ὅταν ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικᾶς συνθήκας ἰσοῦται πρὸς 1,293 kg/m³.
(Ἀπ. α' 0,4901 kg/m³. β' 49 kg*.)

1719. Ὑπὸ ποίαν θερμοκρασίαν 20 Mol ἀμμωνίας ὑπὸ πίεσιν 1,5 at καταλαμβάνουν ὄγκον 0,4 m³.
(Ἀπ. 366 °K.)

1720. Ὑπὸ ποίαν θερμοκρασίαν 1 γραμμομόριον ἡλίου καταλαμβάνει $5 \cdot 10^{-2}$ m³ ἔαν ἡ πίεσις εἶναι 720 mm Hg.
(Ἀπ. 577 °K.)

1721. Τὸ σφαιρικὸν δοχεῖον ἀερικοῦ θερμομέτρου, σταθεροῦ ὄγκου, ἔχει ὄγκον 91 cm³ καὶ ὁ σωλὴν μέχρι τῆς σταθερᾶς ἐπιφανείας τοῦ μανομέτρου ἔχει ὄγκον 9 cm³. Ἐὰν ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι 100 cm στήλης ὑδραργύρου, ὅταν τὸ σφαιρικὸν δοχεῖον εὑρίσκεται εἰς 0°C , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ δοχείου εἶναι 90°C : α) μὴ ὄντος γνωστοῦ τοῦ ὄγκου τοῦ ἀέρος, ἐντὸς τοῦ συνεχομένου σωλῆνος, β) ὑποθέτοντες ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἰς τὸν σωλῆνα παραμένει καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος εἰς 24°C .
(Ἀπ. α' 132,9 cm Hg. β' 129,4 cm Hg.)

1722. Δίδεται ὕδρογόνον τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 1 λίτρον καὶ θερμοκρασίαν 50°C . Ποία ἡ μάζα αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία γίνῃ 100°C καὶ ἡ πίεσις 2 ἀτμόσφαιραι, ποία ὁ ὄγκος καὶ ἡ μάζα τοῦ αερίου.
(Ἀπ. m = 0,075 gr, V = 0,5774 l.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1959).

1723. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος ὑπὸ θερμοκρασίαν 185°C καὶ πίεσιν 250 cm στήλης ὑδραργύρου.
(Ἀπ. 0,0376 gr/lt.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν καὶ Τμῆμα Μεταλλειολόγων Μηχανικῶν, 1960).

1724. Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων ἀερίου, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐντὸς ὑαλίνου κώδωνος ὅγκου 5 λίτρων, θερμοκρασίας 0°C καὶ πίεσεως 10^{-6} Torr. (Μοριακὸς ὅγκος = $22,421 \text{ m}^3$ ἀνὰ kMol , σταθερὰ Loschmidt = $6,025 \cdot 10^{26}$ μόρια ἀνὰ kMol , 1 χιλιόγραμμα-μόριον = 1000 γραμμομόρια.) (Ἀπ. $176,8 \cdot 10^{12}$.)

1725. α) Ποῖος ὁ ὅγκος 400 gr ὀξυγόνου θερμοκρασίας 40°C καὶ πίεσεως 2,5 atm. β) Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμπεριεχομένων μορίων. (Μοριακὸς ὅγκος = $22,421 \text{ m}^3/\text{kg}$ - Mol , σταθερὰ τοῦ Loschmidt = $6,025 \cdot 10^{26}$ μόρια/ kMol , παγκόσμιος σταθερὰ τῶν ἀερίων $R = 8,317 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{kMol}^{-1}$.) (Ἀπ. α' $0,124 \text{ m}^3$, β' $7,53 \cdot 10^{24}$ μόρια.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1726. Ράβδος ἐκ σιδήρου θερμαίνεται εἰς 100°C καὶ θερμὴ οὐσα στερεοῦται μετὰ-ξὺ δύο στηριγμάτων, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ συσταλῇ. Ψύχεται εἰτα μέχρι 15°C . Ποία θὰ εἶναι ἡ τάσις τῆς ράβδου. (Τομὴ τῆς ράβδου 0,5 τετρ. ἴντσαι καὶ δεῖγμα ταύτης μήκους 1 m εὐρίσκεται ὅτι τείνεται 0,154 mm ὑπὸ τὸ βάρος ἑνὸς τόνου. Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου = $0,000012 \text{ grad}^{-1}$, 1 ἴντσα = 2,54 cm.) (Ἀπ. $6,62 \text{ tn}^{\circ}$.)

1727. Σύρμα ἐκ χαλκοῦ διαμέτρου 2 mm κρέμαται καθέτως μὲ ἐλαφρὸν βάρος ἐξηρητημένον ἀπὸ τὸ κάτω ἄκρον του. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος κατέλθῃ ἀπὸ 20°C εἰς 0°C , νὰ ὑπολογισθῇ εἰς gr^* τὸ πρόσθετον βάρος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ, ἵνα ἀποφύγωμεν μεταβολὴν τοῦ μήκους τοῦ σύρματος. (Μέτρον τοῦ Young διὰ τὸν χαλκὸν = $1,1 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$. Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ = $0,000018 \text{ grad}^{-1}$.) (Ἀπ. $1,27 \cdot 10^4 \text{ gr}^*$.)

1728. Κλίμαξ ἀκριβεῖας, ἐξ ὀρειχάλκου, θερμοκρασίας 0°C , χρησιμοποιεῖται πρὸς μέτρησιν τοῦ μήκους χαλυβδίνης ράβδου εἰς θερμοκρασίαν 14°C . Τὸ παρατηρούμενον μήκος τῆς χαλυβδίνης ράβδου εἶναι 49,50 cm. Ποῖον τὸ ἀληθὲς μήκος αὐτῆς εἰς 14°C καὶ εἰς 0°C . (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου = $0,000019 \text{ grad}^{-1}$ καὶ τοῦ χάλυβος = $0,000011 \text{ grad}^{-1}$.) (Ἀπ. 49,513 cm, 49,506 cm.)

1729. Σιδηρᾶ ράβδος ἔχει μήκος 100 cm, ὅταν μετρηθῇ διὰ κανόνος ἐξ ὀρειχάλκου, τοῦ ὁποῖου ἡ κλίμαξ εἶναι ὀρθὴ εἰς 0°C . Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως ἀμφότεραι αἱ ράβδοι ἔχουν θερμοκρασίαν 20°C . Νὰ εὐρεθῇ τὸ μήκος τῆς σιδηρᾶς ράβδου καὶ τὸ μήκος τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ αὕτη εἰς 100°C . (Γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὀρειχάλκου = $20 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, σιδήρου = $12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.) (Ἀπ. 100,04 cm, 100,136 cm.)

1730. Ἑσχάρα ἐκκρεμοῦς εἶναι κατεσκευασμένη ἀπὸ 5 σιδηρᾶς καὶ 4 ὀρειχαλκίνας ράβδους. Ἐὰν τὸ μήκος ἐκάστης σιδηρᾶς ράβδου εἶναι 50 cm, ποῖον εἶναι τὸ μήκος ἐκάστης ὀρειχαλκίνης ράβδου. (Γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὀρειχάλκου α = $20 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, σιδήρου = $12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.) (Ἀπ. 45 cm.)

1731. Πόσα εἶναι τὰ μήκη ράβδων ἐξ ὀρειχάλκου καὶ χάλυβος, συνηνωμένων διὰ τὴν κατασκευὴν ἐκκρεμοῦς ἀντισταθμίσεως, τῶν ὁποίων τὸ σταθερὸν μήκος εἶναι 0,75 m. ($\alpha_{\text{ορειχ}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $\alpha_{\text{χάλκ}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$.) (Ἀπ. 150 cm, 225 cm.)

1732. Ὁ μέσος γραμμικὸς συντελεστὴς τῆς ὕλου εἶναι $0,000008 \text{ grad}^{-1}$ καὶ ὁ μέσος φαινόμενος συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ὕδατος ἐντὸς ὑαλίνου δοχείου εἶναι $0,00021 \text{ grad}^{-1}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος ἀπόλυτος συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ὕδατος. (Ἀπ. $0,000234 \text{ grad}^{-1}$.)

1733. Το δοχείον ἐξ ὑάλου ὑδραργυρικοῦ θερμομέτρου ἔχει ὄγκον $0,5 \text{ cm}^3$ καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν διαβαθμίσεων εἶναι 2 mm . Ἐὰν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ καὶ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν καθέτου τομῆς τῆς ἐσωτερικῆς τομῆς τοῦ στελέχους. (Ἀπ. $0,0375 \text{ mm}^2$.)

1734. Δοχείον ὑαλίνου θερμομέτρου πληροῦται μὲ $65,42 \text{ gr}$ ἐλαίου ὑπὸ θερμοκρασίαν 15°C . α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ ἐκδιωκομένου ἐλαίου, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνεται εἰς 55°C , ἐὰν ὁ ἀπόλυτος συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἐλαίου εἶναι $0,00043 \text{ grad}^{-1}$ καὶ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $0,00001 \text{ grad}^{-1}$. Τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 18°C εἶναι 756 mm μετρούμενον ἐπὶ ὀρειχαλκίνης κλίμακος ὀρθῆς ἐνδείξεως εἰς 0°C . β) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου ὑπὸ 0°C ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν. (Συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου = $0,000182 \text{ grad}^{-1}$, συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου = $0,000018 \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. α' $1,03 \text{ gr}$. β' $753,8 \text{ mm}$.)

1735. Ὑαλινὸν δοχείον ἔχει ὄγκον 1 lt ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τῆς παραφίνης ἣτις πληροῖ τὸ δοχείον ὑπὸ θερμοκρασίαν 60°C , ἐὰν οἱ μέσοι ἀπόλυτοι συντελεσταὶ κυβικῆς διαστολῆς τῆς παραφίνης καὶ τῆς ὑάλου εἶναι ἀντιστοίχως $0,0009 \text{ grad}^{-1}$ καὶ $0,00003 \text{ grad}^{-1}$ καὶ ἡ πυκνότης τῆς παραφίνης ὑπὸ 0°C εἶναι $0,82 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. 777 gr .)

1736. Τὸ ὕψος στήλης ὑδραργύρου ἑνὸς μανομέτρου, μετρούμενον διὰ κανόνος ἐξ ὀρειχάλκου ἀκριβοῦς εἰς θερμοκρασίαν 0°C , εἶναι $77,5 \text{ cm}$. Ἡ θερμοκρασία κατὰ τὴν ὥραν τῆς παρατηρήσεως εἶναι 16°C . Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης. (Ἀπ. $77,525 \text{ cm}$.)

1737. Λήκυθος περιέχει $100,93 \text{ gr}$ ὑδραργύρου εἰς 0°C , εἰς 60°C ὅμως περιέχει 100 gr . Ποῖος ὁ συντελεστὴς φαινομένης διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τῆς ὑάλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος τῆς φιάλης εἰς 60°C , δοθέντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0°C εἶναι $13,6 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ὁ συντελεστὴς πραγματικῆς διαστολῆς εἶναι $0,000182 \text{ grad}^{-1}$. (Ἀπ. $0,000155 \text{ grad}^{-1}$, $7,43 \text{ cm}^3$.)

1738. Ἡ κυβικὴ κοιλότης ὑαλίνου δοχείου ἔχει ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C μῆκος πλευρῶς ἀκριβῶς 1 cm . Ὁ κύβος πληροῦται δι' ὑδραργύρου. Πόσον ὄγκον ὑδραργύρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 1°C δέον νὰ ἐξαγάγωμεν, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου του ἀνέλθῃ εἰς 1°C . (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς ὑάλου = $9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. $0,000153 \text{ cm}^3$.)

1739. Ὑδραργυρικὸν θερμομέτρον, δοκιμασθὲν διὰ κανονικῆς μεθόδου, ἐμβαπτίζεται ἐντὸς θερμοῦ ὕγρου μέχρι τῆς ἐνδείξεως τοῦ 40°C καὶ σημειώνει 80°C . Ἡ μέση θερμοκρασία τοῦ ἐκτεθειμένου τμήματος τοῦ στελέχους καὶ τοῦ περιεχομένου του εἶναι 25°C . Ποία ἡ ἀληθὴς θερμοκρασία τοῦ ὕγρου, ἐὰν ὁ συντελεστὴς φαινομένης διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς ὑάλου εἶναι $0,00015 \text{ grad}^{-1}$. (Ἀπ. $80,33^\circ\text{C}$.)

1740. Ὑποβρύχιον βάρος 10^9 gr^* δέον νὰ πληρωθῇ διὰ 10^8 gr^* ὕδατος ἵνα καταδυθῇ, ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς θαλάσσης εἶναι 10°C . Πόση μικρότερα ποσότης ὕδατος δέον νὰ εἰσρεῦσῃ, ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς θαλάσσης εἶναι 15°C . (Συντελεστὴς διαστολῆς θαλασσίου ὕδατος = $2 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$, συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς χάλυβος = $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. $9 \cdot 10^5 \text{ gr}^*$.)

1741. Μεταλλικὴ σφαῖρα ζυγίζει $265,04 \text{ gr}^*$ εἰς τὸν ἀέρα, $200,34 \text{ gr}^*$ ἐντὸς τερεβινθελαίου εἰς 15°C καὶ $202,54 \text{ gr}^*$ ἐντὸς τερεβινθελαίου εἰς 55°C . Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τῆς πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ τερεβινθελαίου εἶναι $94 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ στερεοῦ. (Ἀπ. $0,00002 \text{ grad}^{-1}$.)

1742. Σιδηρούν δοχείον πληροῦται μὲ τέσσαρα ἡμίλιτρα ὕδατος εἰς 10°C . Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ ὑπερεκχειλίζοντος ὕδατος, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ εἰς 90°C . Μέσος συντελεστής ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὕδατος $0,00045 \text{ grad}^{-1}$. (Συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς σιδήρου $12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. 66 cm^3 .)

1743. Ἀέριον ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἔχει ὄγκον 500 cm^3 ὑπὸ 20°C καὶ ὑπὸ 40°C ἔχει ὄγκον $534,3 \text{ cm}^3$. Ἐκ τῶν στοιχείων τούτων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀπολύτου μηδενός. (Ἀπ. -272°C .)

1744. Ἡ μάζα τῆς πληρούσης λήκυθον παραφίνης ὑπὸ θερμοκρασίαν 15°C εἶναι $42,32 \text{ gr}$ καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 60°C εἶναι $41,48 \text{ gr}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀληθὴς συντελεστής διαστολῆς τοῦ ὕγρου ἔαν ὁ γραμμικὸς συντελεστής τοῦ ὑλικοῦ τῆς λήκυθου εἶναι $0,000008 \text{ grad}^{-1}$. (Ἀπ. $0,000474 \text{ grad}^{-1}$.)

1745. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον μετὰ κλίμακος ἐξ ὀρειχάλκου δεῖκνυε ἐνδειξιν $76,53 \text{ cm}$ ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°C . Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐνδείξεις ὑπὸ 0°C , ἔαν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις παραμένῃ ἡ αὐτή. (Συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς ὕδραργύρου $= 0,000181 \text{ grad}^{-1}$, συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς ὀρειχάλκου $= 0,000019 \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. $76,282 \text{ cm}$.)

1746. Ἄνωθεν ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 10°C συγκεντροῦται ὕδρογόνον. Τὸ ἀέριον μείγνυται οὕτω μὲ ἀτμούς τοῦ ὕδατος, ἡ πίεσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὁποῖου εἰς 10°C εἶναι $0,92 \text{ cm}$ στήλης ὕδραργύρου. Ποία ἡ μερική πίεσις τοῦ ὕδρογόνου, ἔαν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι $75,52 \text{ cm}$ στήλης ὕδραργύρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ξηροῦ ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ἔαν ὁ ὄγκος του, μετρούμενος ὡς ἄνω, ᾗτ' 180 cm^3 . (Ἀπ. $74,60 \text{ cm Hg}$, $170,5 \text{ cm}^3$.)

1747. Δύο ὑάλινα σφαιρικά δοχεῖα, ὄγκων 500 cm^3 καὶ 100 cm^3 , συνδέονται διὰ λεπτοῦ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου. Ὅταν ἡ συσκευὴ κλείεται, ἡ πίεσις τοῦ ἐντὸς αὐτῆς ἀέρος εἶναι 70 cm στήλης ὕδραργύρου καὶ ἡ θερμοκρασία 20°C . Πόση θὰ εἶναι ἡ πίεσις, ἔαν τὸ δοχεῖον τῶν 100 cm^3 διατηρῆται εἰς θερμοκρασίαν 20°C καὶ τὸ ἕτερον δοχεῖον θερμαίνεται μέχρις 100°C . (Ἀπ. $85,2 \text{ cm Hg}$.)

1748. Δύο ὑάλινα σφαιρικά δοχεῖα ἐσωτερικοῦ ὄγκου 500 cm^3 καὶ 200 cm^3 συνδέονται διὰ στενοῦ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου. Ἡ συσκευὴ πληροῦται δι' ἀέρος καὶ ἀκολουθῶς κλείεται. Ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι 75 cm στήλης ὕδραργύρου καὶ ἡ θερμοκρασία 17°C . Ἡ μικροτέρα σφαῖρα βυθίζεται ἐντὸς τηκομένου πάγου, ἐνῶ ἡ μεγαλυτέρα βυθίζεται ἐντὸς ζέοντος ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῶν σφαιρικῶν δοχείων, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου. (Ἀπ. $87,3 \text{ cm Hg}$.)

1749. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης ξηροῦ ἀέρος: α) εἰς $15,7^{\circ}\text{C}$ καὶ πίεσιν 760 Torr , καὶ β) εἰς $7,5^{\circ}\text{C}$ καὶ 598 Torr . Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πυκνότης ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι $0,00129 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ὁ συντελεστής διαστολῆς τοῦ ἀέρος $1/273 \text{ grad}^{-1}$. Κατὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ὕψους τῇ βοηθείᾳ βαρομέτρου, ἐγένοντο παρατηρήσεις εἰς δύο σταθμούς ταυτοχρόνως. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸν χαμηλότερον σταθμὸν ἡ πίεσις καὶ ἡ θερμοκρασία ἦσαν 760 Torr καὶ $15,7^{\circ}\text{C}$ ἀντιστοίχως, ἐνῶ εἰς τὸν ὑψηλότερον σταθμὸν 598 Torr καὶ $7,5^{\circ}\text{C}$ ἀντιστοίχως. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς ἕκαστον σταθμὸν ὑπολογισθῇ ὡς ἄνω. Δοθέντος ὅτι ἡ διαφορά πίεσεως ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος καθέτου στήλης ἀέρος ἐκτεινομένης μεταξύ τῶν δύο σταθμῶν καὶ ὅτι ἡ πυκνότης εἶναι ἴση πρὸς τὸν μέσον ὅρον τῶν ὡς ἄνω δεδομένων τιμῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορά ὕψους τῶν δύο σταθμῶν. Ἡ πυκνότης τοῦ ὕδραργύρου εἶναι $13,6 \text{ gr/cm}^3$. (Ἀπ. $0,001220 \text{ gr/cm}^3$, $0,000988 \text{ gr/cm}^3$, 1995 m .)

1750. Κατὰ τὴν χημικὴν ἀνάλυσιν ἀραιοῦ θειικοῦ ὀξέος ἐλευθερώνονται 215 cm^3 ὕδρογόνου, ὑπὸ θερμοκρασίαν $22,3^{\circ}\text{C}$ καὶ πίεσιν 745 Torr . Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ ὕδρογόνου αὐτοῦ εἰς κανονικὰς συνθήκας καὶ πόσα kMol ὕδρογόνου παρήχθησαν. (Μοριακὸς ὄγκος $= 22,421 \text{ m}^3$ ἀνὰ kMol). (Ἀπ. $194,8 \text{ cm}^3$ καὶ $8,7 \cdot 10^{-6} \text{ kMol}$.)

1751. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 1,29 gr/lit ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σταθερὰ ἀερίων ἀνὰ γραμμάριον ἀερίου. Φιάλη 200 cm³ συνδέεται μετὰ φιάλης 100 cm³ μέσῳ λεπτοδιαμετρικοῦ σωλῆνος καὶ ἡ θερμοκρασία ἐκάστης φιάλης εἶναι 17 °C. Ὁ ἀήρ ἐντὸς τῆς φιάλης ἔχει πίεσιν 75 cm στήλης ὑδραργύρου. Ποία θὰ εἶναι ἡ νέα πίεσις, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τῆς μεγαλυτέρας φιάλης αὐξηθῇ εἰς 77 °C, ἐνῶ ἡ θερμοκρασία τῆς μικροτέρας θὰ παραμείνῃ ἡ αὐτή.

(Ἀπ. 85 cm στήλης ὑδραργύρου.)

1752. Αἱ κάτωθι παρατηρήσεις ἐγένοντο δι' ἀερικοῦ θερμομέτρου. Θερμοκρασία εἰς °C: 10, 30, 50, 90. Ἀντίστοιχος πίεσις ἐπὶ πλεόν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς εἰς cm στήλης ὑδραργύρου: 0,5, 5, 11,7, 21,5. Νὰ χαραχθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἐξ αὐτῆς ὁ συντελεστής αὐξήσεως τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον.

1753. Τὸ δοχεῖον ἀερικοῦ θερμομέτρου σταθεροῦ ὄγκου βυθίζεται κατὰ πρῶτον ἐντὸς διαλυομένου πάγου καὶ κατόπιν ἐντὸς ἀτμοῦ, ὁ δὲ ὑδράργυρος κατ' ἀρχὰς κατέρχεται κατὰ 8,0 cm καὶ κατόπιν ἀνέρχεται κατὰ 17,0 cm ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ βραχίονος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν κλειστὸν βραχίονα, ὥστε νὰ διατηρηθῇ ὁ ὄγκος σταθερός. Τὸ βαρόμετρον δεικνύει ἐνδειξιν 76,2 cm Hg. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστής πίεσεως τοῦ ἀερίου.

(Ἀπ. 0,00367 grad⁻¹.)

1754. α) Κατὰ πόσον τοῖς ἐκατὸν μεταβάλλεται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐκ μεταφορᾶς τῶν μορίων ἐνὸς ἀερίου, ὅταν ἡ εἰς βαθμοὺς Κελσίου, μετρηθεῖσα θερμοκρασία διπλασιασθῇ. β) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία, διὰ νὰ ἀνέλθῃ κατὰ 50 % ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐκ μεταφορᾶς κατὰ τὸν διπλασιασμὸν τῆς θερμοκρασίας.

(Ἀπ. α' $(\theta_1/273^\circ + \theta_1) \cdot 100\%$. β' 273 °C.)

1755. Πῶς ἐξηγεῖται τὸ ὅτι ἡ Γῆ δὲν χάνει τὸν ἐξ ἀέρος μανδύαν της λόγῳ τῆς θερμικῆς κινήσεως τῶν μορίων

(Ἀπ. Διότι αἱ ταχύτητες τῶν μορίων τῶν διαφόρων ἀερίων εἶναι κατὰ πολὺ μικρότεροι τῆς $v = 11\,200$ m/sec.)

1756. Κατὰ πόσον τοῖς ἐκατὸν μεταβάλλεται ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων ἀερίου, ὅταν ἡ εἰς βαθμοὺς Κελσίου μετρηθεῖσα θερμοκρασία αὐτοῦ τριπλασιασθῇ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία, διὰ νὰ αὐξηθῇ κατὰ 10% ἡ μέση ταχύτης.

(Ἀπ. α' $\left[\sqrt{\frac{273^\circ + 3\theta_1}{273^\circ + \theta_1}} - 1 \right] \cdot 100\%$, β' 32 °C.)

1757. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια: α) ἐνὸς χιλιογραμμομορίου (kMol), β) ἐνὸς μορίου ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. (Μοριακὸς ὄγκος $V_0 = 22,421$ m³ κατὰ χιλιογραμμομόριον, σταθερὰ τοῦ Loschmidt = $6,025 \cdot 10^{26}$ μόρια κατὰ χιλιογραμμομόριον, 1 χιλιογραμμομόριον = 1000 γραμμομόρια).

(Ἀπ. α' $3408 \cdot 10^3$ Joule/kMol, β' $5,66 \cdot 10^{-21}$ Joule.)

1758. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ εἰς ἕκαστον μόριον ἀντιστοιχοῦσα μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἐκ μεταφορᾶς, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ θεωρουμένου ἀερίου ἀπὸ $\theta_1 = 50$ °C ἀνέλθῃ εἰς $\theta_2 = 150$ °C.

(Ἀπ. $2,0706 \cdot 10^{-21}$ Joule.)

1759. Ποία ἡ θερμοκρασία ὑδρατμῶν, ὅταν ἡ εἰς ἕκαστον μόριον ἀναλογοῦσα μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἐκ μεταφορᾶς ἴσoustai πρὸς 10^{-20} Joule.

(Ἀπ. 210 °C.)

1760. Ποία ἡ ὅλικη κινητικὴ ἐνέργεια μεταφορᾶς τῶν ἐμπιερχομένων μορίων εἰς 1 kMol α) ὑδρογόνου, β) ὀξυγόνου, εἰς θερμοκρασίαν 20 °C.

(Ἀπ. $3,655 \cdot 10^6$ Joule/kMol, ἀνεξαρτήτως ἀερίου.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'

ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1761. Ποία θερμοκρασία αποκαθίσταται, όταν αναμιγνύωμεν 200 gr ύδατος θερμοκρασίας 10 °C μετά 500 gr ύδατος θερμοκρασίας 45 °C.

Λύσις. Έστω ότι αναμιγνύωμεν ύδωρ μάζης m_1 και θερμοκρασίας θ_1 με ύδωρ μάζης m_2 και θερμοκρασίας θ_2 και έστω επίσης ότι η τελική θερμοκρασία του ύδατος μετά την αποκατάστασιν θερμικής Ισορροπίας είναι θ . Θα έχωμεν :

α) Διά να θερμανθῇ τὸ ὕδωρ μάζης m_1 ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν θ_1 εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ , προσλαμβάνει θερμότητα :

$$Q_1 = m_1 \cdot c \cdot (\theta - \theta_1) \quad (1)$$

ὅπου c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

β) Διά να ψυχθῇ τὸ ὕδωρ μάζης m_2 ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν θ_2 εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ , ἀποδίδει θερμότητα :

$$Q_2 = m_2 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = Q_2 \quad (3), \quad \text{προκύπτει ὅτι:} \quad m_1 \cdot c \cdot (\theta - \theta_1) = m_2 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (4)$$

Δι' ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὡς πρὸς θ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\theta = \frac{m_1 \cdot \theta_1 + m_2 \cdot \theta_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m_1 = 200$ gr, $m_2 = 500$ gr, $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 45^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\theta = 35^\circ\text{C}$$

1762. Θέλομεν νὰ παρασκευάσωμεν 50 kggr ὕδατος θερμοκρασίας 35 °C δι' ἀναμίξεως ὕδατος 17 °C καὶ 80 °C. Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι ποσότητες ὕδατος 17 °C καὶ 80 °C.

Λύσις. Καλοῦμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ ὕδατος τῆς μικροτέρας θερμοκρασίας θ_1 καὶ m_2 τὴν μάζαν τοῦ ὕδατος τῆς μεγαλυτέρας θερμοκρασίας θ_2 , c τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ὕδατος καὶ m τὴν μάζαν τοῦ ὕδατος τῆς τελικῆς θερμοκρασίας θ , ἡ ὁποία θὰ προέλθῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως τοῦ ὕδατος. Θα ἔχωμεν προφανῶς τὰς σχέσεις :

$$m_1 \cdot c \cdot (\theta - \theta_1) = m_2 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (1), \quad \text{καὶ:} \quad m_1 + m_2 = m \quad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων προκύπτει ἡ σχέση :

$$m_1 = \frac{m \cdot (\theta_2 - \theta)}{\theta_2 - \theta_1} \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $m = 50$ kggr, $\theta_2 = 80^\circ\text{C}$, $\theta = 35^\circ\text{C}$, $\theta_1 = 17^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$m_1 = 35,7 \text{ kggr}$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως (2) προκύπτει ὅτι :

$$m_2 = 14,3 \text{ kggr}$$

1763. Ἐντὸς γλυκερίνης θερμοκρασίας $14,5^{\circ}\text{C}$ ρίπτονται τεμάχια ψευδαργύρου θερμοκρασίας $98,3^{\circ}\text{C}$. Ἡ μᾶζα γλυκερίνης καὶ ψευδαργύρου εἶναι 400 gr, ἡ δὲ θερμοκρασία ἰσορροπίας $19,6^{\circ}\text{C}$. Πόση ἡ μᾶζα τῆς γλυκερίνης καὶ πόση ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου. (Εἰδ. θερμότης ψευδαργύρου $= 0,092 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, γλυκερίνης $= 0,57 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τῆς γλυκερίνης καὶ m τὴν συνολικὴν μᾶζαν τοῦ ψευδαργύρου καὶ τῆς γλυκερίνης, τότε ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου θὰ εἶναι $m_2 = m - m_1$.

Ἐστῶσαν θ_1 ἡ θερμοκρασία τῆς γλυκερίνης, θ_2 ἡ θερμοκρασία τοῦ ψευδαργύρου, θ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος καὶ c_1 καὶ c_2 ἀντιστοίχως αἱ εἰδικαὶ θερμότητες αὐτῶν.

Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ ἡ γλυκερίνη εἶναι :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (1)$$

ἡ δὲ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ὁ ψευδαργύρος εἶναι :

$$Q_2 = c_2 \cdot (m - m_1) (\theta_2 - \theta) \quad (2)$$

Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

καὶ συνεπῶς λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως, βάσει τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ὅτι :

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) = c_2 \cdot (m - m_1) (\theta_2 - \theta) \quad (4)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς m_1 προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος :

$$m_1 = \frac{c_2 \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta)}{c_1 \cdot (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot (\theta_2 - \theta)} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (5) : $m = 400 \text{ gr}$, $\theta_1 = 14,5^{\circ}\text{C}$, $\theta_2 = 98,3^{\circ}\text{C}$, $\theta = 19,6^{\circ}\text{C}$, $c_1 = 0,57 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $c_2 = 0,092 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τῆς γλυκερίνης εἶναι :

$$\underline{m_1 = 285 \text{ gr}}$$

Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου εἶναι :

$$\underline{m_2 = 400 - 285 = 115 \text{ gr}}$$

1764. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ μάζης 200 gr περιέχει 300 gr πετρελαίου. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι $18,5^{\circ}\text{C}$ καὶ, ὅταν ἐντὸς τοῦ πετρελαίου ρίψωμεν 100 gr μολύβδου θερμοκρασίας 100°C , ἡ τελικὴ θερμοκρασία καθίσταται 20°C . Πόση ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ πετρελαίου, ὅταν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι $0,092 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$ καὶ τοῦ μολύβδου $0,031 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$.

Λύσις. Ἐστῶσαν m_1 ἡ μᾶζα, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ c_1 ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ. Ἐὰν θ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, τότε ὁ χαλκὸς ἀπορροφᾷ θερμότητα :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (1)$$

Ἐστῶσαν m_2 ἡ μᾶζα τοῦ πετρελαίου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ πετρελαίου εἶναι θ_1 . Τὸ πετρέλαιον ἀπορροφᾷ θερμότητα :

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (2)$$

Ἐστῶσαν m_3 ἡ μᾶζα, c_3 ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου. Ὁ μόλυβδος ἀποδίδει θερμότητα :

$$Q_3 = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (3)$$

Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (4)$$

Συνεπῶς προκύπτει ὅτι :

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (5)$$

Λύομεν την σχέση (5) ως προς c_2 και λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$c_2 = \frac{c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) - c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1)}{m_2 \cdot (\theta - \theta_1)} \quad (6)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸν γενικὸν τύπον (6) καὶ εὐρίσκομεν :

$$c_2 = 0,488 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$$

1765. Θερμιδόμετρον περιέχει 210 gr ὕδατος θερμοκρασίας 11,3 °C. Εἰς τὸ θερμιδόμετρον προσθέτομεν 245 gr ὕδατος 31,5 °C, ὅτε ἡ θερμοκρασία ἰσορροπίας εὐρίσκεται 21,7 °C. Πόση ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ θερμιδομέτρου καὶ c_1 τὴν εἰδικὴν θερμότητα αὐτοῦ, τότε ἡ ζητούμενη θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, $m_1 \cdot c_1$. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι θ_1 καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ θ . Τὸ θερμιδόμετρον ἀπορροφᾷ θερμότητα :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (1)$$

Ἔστωσαν m_2 ἡ μάζα τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι θ_1 καὶ τελικὴ θ).

Τὸ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου ἀπορροφᾷ θερμότητα :

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (2)$$

Ἔστωσαν m_3 ἡ μάζα τοῦ ὕδατος τὸ ὅποιον προσθέτομεν καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ. (Τελικὴ θερμοκρασία εἶναι θ). Τὸ ὕδωρ τὸ ὅποιον προσθέτομεν ἀποδίδει θερμότητα :

$$Q_3 = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (3)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν : $Q_1 + Q_2 = Q_3$ καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι :

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (4)$$

Λύομεν τὴν σχέση (4) ὡς πρὸς $c_1 \cdot m_1$ καὶ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$c_1 \cdot m_1 = \frac{c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) - c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1)}{\theta - \theta_1} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_3 = 1 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $m_2 = 210 \text{ gr}$, $m_3 = 245 \text{ gr}$, $\theta_1 = 11,3^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 31,5^\circ\text{C}$, $\theta = 21,7^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι :

$$c_1 \cdot m_1 = 20,9 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1}$$

1766. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν 100 gr χαλκοῦ ἀπὸ 10 °C εἰς 100 °C. Τὸ αὐτὸ ποσὸν θερμότητος προσδίδεται εἰς 100 gr ἀργιλίου 10 °C. Ποῖον ἐκ τῶν δύο σωμάτων καθίσταται θερμότερον. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,093 cal · gr⁻¹ · grad⁻¹, ἀργιλίου = 0,217 cal · gr⁻¹ · grad⁻¹).

Λύσις. Ἄς καλέσωμεν m_1 , m_2 τὰς μάζας τοῦ χαλκοῦ καὶ τοῦ ἀργιλίου, c_1 , c_2 τὰς εἰδικὰς θερμότητας αὐτῶν ἀντιστοίχως, καθὼς καὶ θ_1 τὴν ἀρχικὴν τῶν θερμοκρασίαν, θ_2 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ χαλκοῦ καὶ θ_3 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀργιλίου.

Συμφώνως πρὸς τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς θερμιδομετρίας θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν χαλκόν :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

καὶ διὰ τὸ ἀργίλιον :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (\theta_3 - \theta_1) \quad (2)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ ζητούμενη θερμότης διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ χαλκοῦ ἀπὸ 10 °C εἰς 100 °C εἶναι :

$$Q_1 = 0,093 \cdot 100 \cdot (100 - 10) = 837 \text{ cal}$$

Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ δεδομένου ὅτι $Q_1 = Q_2$ καὶ $m_1 = m_2$, προκύπτει ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ἀργιλίου εἶναι :

$$\theta_3 = \frac{c_1}{c_2} (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 \quad (3)$$

Οὕτως, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_1 = 0,093 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $c_2 = 0,217 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $\theta_2 = 100^\circ \text{C}$ καὶ $\theta_1 = 10^\circ \text{C}$, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\theta_3 = 48,5^\circ \text{C}$$

Ἄρα ὁ χαλκὸς καθίσταται θερμότερος ἀπὸ τὸ ἀργίλιον.

1767. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν λύχνου **Bunsen**, ἐκτελοῦμεν τὸ κάτωθι πείραμα : Εἰς θερμιδόμετρον χαλκοῦ μάζης $152,5 \text{ gr}$ θέτομεν 300 gr ὕδατος, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου καὶ ὕδατος εἶναι $18,4^\circ \text{C}$. Ἀκολουθῶς λαμβάνομεν τεμάχιον σιδήρου μάζης $6,85 \text{ gr}$, τὸ ὁποῖον θερμαίνομεν εἰς τὸν λύχνον **Bunsen** καὶ κατόπιν βυθίζομεν αὐτὸ ἐντὸς τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου. Ἡ θερμοκρασία ἰσορροπίας εὐρίσκεται $21,3^\circ \text{C}$. Ἐκ τῶν δεδομένων τούτων, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς φλογὸς τοῦ λύχνου **Bunsen**. (Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου $= 0,111 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, χαλκοῦ $= 0,092 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐστωσαν θ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, m_1 ἡ μάζα τοῦ χαλκοῦ, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ c_1 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ.

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπερρόφησεν ὁ χαλκὸς θερμαινόμενος εἶναι :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (1)$$

Ἐστωσαν m_2 ἡ μάζα τοῦ ὕδατος καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι θ_1).

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπερρόφησε τὸ ὕδωρ θερμαινόμενον εἶναι :

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) \quad (2)$$

Ἐστωσαν, τέλος, m_3 ἡ μάζα τοῦ σιδήρου, c_3 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ του θερμοκρασία (θερμοκρασία φλογὸς λύχνου **Bunsen**).

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπέδωσεν ὁ σίδηρος ψυχόμενος εἶναι :

$$Q_3 = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (3)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta - \theta_1) = c_3 \cdot m_3 \cdot (\theta_2 - \theta) \quad (4)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (4) ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην θερμοκρασίαν θ εὐρίσκομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\theta = \frac{(c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2) (\theta - \theta_1)}{c_3 \cdot m_3} + \theta \quad (5)$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_1 = 0,092 \text{ cal} \cdot \text{gr} \cdot \text{grad}$, $c_2 = 1 \text{ cal} \cdot \text{gr} \cdot \text{grad}$, $c_3 = 0,111 \text{ cal} \cdot \text{gr} \cdot \text{grad}$, $m_1 = 152,5 \text{ gr}$, $m_2 = 300 \text{ gr}$, $m_3 = 6,85 \text{ gr}$, $\theta_1 = 18,4^\circ \text{C}$, $\theta_2 = 21,3^\circ \text{C}$, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητούμενη θερμοκρασία τῆς φλογὸς τοῦ λύχνου **Bunsen** εἶναι :

$$\theta_2 = 1219^\circ \text{C}$$

1768. Καίονται 3 gr ἄνθρακος πρὸς διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ μάζης 1500 gr , περιέχοντος 2000 gr ὕδατος. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 20°C καὶ ἡ τελικὴ 31°C . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἄνθρακος. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ $= 0,093 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ χαλκοῦ, m_2 τὴν μάζαν τοῦ ὕδατος, θ_1 τὴν ἀρχικὴν καὶ θ_2 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν, c_1 καὶ c_2 ἀντιστοίχως τὰς εἰδικὰς θερμότητας αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

α) Ὁ χαλκὸς θερμαινόμενος ἀπερρόφησε θερμότητα :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

β) Το ὕδωρ θερμαινόμενον ἀπερρόφησε θερμότητα :

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὅλική θερμότης $Q_1 + Q_2$ προῆλθεν ἀπὸ τὴν θερμότητα Q ἐκ τῆς καύσεως τοῦ ἀνθρακός, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, τὴν σχέσιν :

$$Q = Q_1 + Q_2 = c_1 \cdot m_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (3)$$

ἢ : Ἐὰν καλέσωμεν θ_x τὴν ζητουμένην θερμότητα καύσεως, τότε : $Q = \theta_x \cdot m$, καὶ ἡ σχέσηis (3) γράφεται :

$$\theta_x = \frac{(c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2) (\theta_2 - \theta_1)}{m} \quad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_1 = 0,093 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $c_2 = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $m_1 = 1500 \text{ gr}$, $m_2 = 2000 \text{ gr}$, $m = 3 \text{ gr}$, $\theta_1 = 20^\circ \text{C}$, $\theta_2 = 31^\circ \text{C}$, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθρακός εἶναι :

$$\theta_x = 7845 \text{ cal/gr}$$

1769. Ποῖον ποσὸν θερμότητος πρέπειν μεταδοθῆ εἰς 1 gr νέου θερμοκρασίας 0°C , ἵνα ἡ πίεσις αὐτοῦ διπλασιασθῇ ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον. ($c_p = 0,246 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $\gamma = c_p / c_v = 1,64$).

Λύσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (1)$$

ἐὰν θέσωμεν $p_2 = 2 p_1$, λαμβάνομεν :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{2 p_1}{T_2} \quad (2)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς T_2 προκύπτει : $T_2 = 2 T_1$ (3)

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), ἐπειδὴ $T_2 = \theta + 273^\circ \text{C}$ καὶ $T_1 = 273^\circ \text{C}$, ὅπου θ εἶναι ἡ θερμοκρασία εἰς βάρθμους Κελσίου, εὐρίσκομεν :

$$\theta = 273^\circ \text{C}$$

Εἰς τὰ ἀέρια διακρίνομεν δύο εἰδικὸς θερμότηας : τὴν εἰδικὴν θερμότητα ὑπὸ σταθερὸν πίεσιν (c_p) καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον (c_v). Ὅταν θερμαίνωμεν τὰ ἀέρια, εἴτε ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν εἴτε ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, τότε μεταξὺ τῶν δύο εἰδικῶν θερμότητων ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad (4)$$

Συνεπῶς λαμβάνομεν ἐκ τῆς (4) ὅτι :

$$c_v = \frac{c_p}{\gamma}$$

Ἡ ζητουμένη θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου νέου διπλασιασθῇ, ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, θὰ εἶναι :

$$Q = c_v \cdot m \cdot \theta = \frac{c_p}{\gamma} \cdot m \cdot \theta \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν τῆς θερμοκρασίας $\theta = 273^\circ \text{C}$ καὶ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_p = 0,246 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $m = 1 \text{ gr}$ καὶ $\gamma = c_p / c_v = 1,64$, εὐρίσκομεν :

$$Q = 40,95 \text{ cal}$$

1770. Ὑαλινὴ σφαῖρα περιέχει 1 li ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 Torr καὶ θερμοκρασίαν 0°C . Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ πίεσις ἐντὸς αὐτῆς. (Ἡ διαστολὴ τῆς ὑαλίνης σφαίρας εἶναι ἀμελητέα. Πυκνότης ἀέρος $0,001293 \text{ gr/cm}^3$. Εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον $0,17 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$).

Λύσις. 'Εφ' όσον ό όγκος παραμένει σταθερός, θα ισχύη ή σχέσις :

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T} \quad \eta : \quad T = \frac{p \cdot T_0}{p_0} \quad (1)$$

Δίδεται όμως ότι ή τελική πίεσις :

$$p = 2 p_0 \quad (2)$$

Έπομένως :

$$T = 2 T_0 \quad \eta : \quad T = 546 ^\circ K$$

Έάν Q τό απαιτούμενον ποσόν θερμότητος, c_v ή ειδική θερμότης υπό σταθερόν όγκον και m ή μάζα του αέριου, θα ισχύη ή σχέσις :

$$Q = m \cdot c_v \cdot \Delta \theta \quad \eta : \quad Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T \quad (3)$$

Γνωρίζομεν όμως ότι :

$$m = V_0 \cdot \rho_0 \quad (4)$$

όπου V_0 ό όγκος και ρ_0 ή αντίστοιχος πικνότης του άέρος υπό κανονικάς συνθήκας.
Διά συνδυασμού των εξισώσεων (3) και (4), λαμβάνομεν :

$$Q = V_0 \cdot \rho_0 \cdot c_v \cdot (T - T_0) \quad (5)$$

Θέτομεν : $V_0 = 1 \text{ lt} = 10^3 \text{ cm}^3$, $\rho_0 = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$, $c_v = 0,17 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $T_0 = 273 ^\circ K$, $T = 546 ^\circ K$ όπότε λαμβάνομεν :

$$Q = 55,86 \text{ cal}$$

1771. Ποίαν μεταβολήν όγκου υφίσταται άτμοσφαιρικός άήρ υπό κανονικάς συνθήκας, όταν υπό σταθεράν πίεσιν προσδίδεται εις αύτόν ποσόν θερμότητος 5 kcal. Πόση είναι ή τελική θερμοκρασία, εάν ό άρχικός όγκος του άέρος είναι 1 m³. ($c_p = 0,240 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $\rho_{\text{αήρ}} = 0,001293 \text{ gr/cm}^3$).

Λύσις. 'Η θεμελιώδης εξίσωσις της θερμιδομετρίας διά τά αέρια, όταν θερμαίνονται υπό σταθεράν πίεσιν, είναι :

$$Q = m \cdot c_p \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

Λύνοντες την εξίσωσιν ταύτην ως προς $\theta_2 - \theta_1$ έχομεν την σχέσιν :

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{Q}{m \cdot c_p} \quad (2)$$

ή, έπειδή ή άρχική θερμοκρασία θ_1 είναι μηδέν, θα έχωμεν :

$$\theta_2 = \frac{Q}{m \cdot c_p} \quad (3)$$

Θέτοντες εις την σχέσιν (3) : $m = \rho_0 \cdot V_0$, ένθα ρ_0 και V_0 ή πικνότης και ό όγκος του άέρος υπό κανονικάς συνθήκας, λαμβάνομεν την σχέσιν :

$$\theta_2 = \frac{Q}{\rho_0 \cdot V_0 \cdot c_p} \quad (4)$$

Έκ της σχέσεως (4), δι' άντικατάστασεως διά των δεδομένων της άσκήσεως : $Q = 5000 \text{ cal}$, $\rho_0 = 1293 \cdot 10^{-6} \text{ gr/cm}^3$, $V_0 = 10^6 \text{ cm}^3$ και $c_p = 0,24 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, εύρίσκομεν :

$$\theta_2 = 16,1 ^\circ C$$

Ακολουθώς, εις την σχέσιν ή όποία μās δίδει την μεταβολήν του όγκου των αέριων υπό σταθεράν πίεσιν :

$$\Delta V = V_0 - V_0 = V_0 \cdot \alpha \cdot \theta \quad (5)$$

θέτοντες : $V_0 = 10^6 \text{ cm}^3$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$ και $\theta = 16,1 ^\circ C$, εύρίσκομεν ότι ή μεταβολή του όγκου είναι :

$$\Delta V = 59\,000 \text{ cm}^3 = 59 \text{ lt}$$

1772. Κύλινδρος ύψους $h = 75 \text{ cm}$ και ακτίνας $r = 3 \text{ cm}$, πυκνότητος $8,93 \text{ gr/cm}^3$, εκ χαλκού και θερμοκρασίας 50°C , θερμαίνεται με ποσόν θερμότητος $50\,000 \text{ cal}$ και η θερμοκρασία ανέρχεται εις 500°C . Να εύρεθῃ ἐὰν ὁ κύλινδρος εἶναι κοῖλος καὶ πόση εἶναι ἡ κοιλότης αὐτοῦ. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ $= 0,01 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.
(Στρατιωτικὴ Σχολὴ Εὐελπίδων, 1957).

Λύσις. Ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος $V_{\text{εξ}}$ τοῦ κυλίνδρου εἶναι :

$$V_{\text{εξ}} = \pi r^2 \cdot h \quad (1)$$

ὅπου ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως $r = 3 \text{ cm}$ καὶ τὸ ὕψος $h = 75 \text{ cm}$. Ἐπομένως :

$$V_{\text{εξ}} = 2119 \text{ cm}^3$$

Ὁ πραγματικὸς ὄγκος V θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῆς σχέσεως :

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (2)$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ χαλκοῦ καὶ ρ ἡ πυκνότης αὐτοῦ.

Ἐὰν Q τὸ προσφερόμενον ποσὸν θερμότητος, c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ καὶ $\Delta\theta$ ἡ διαφορὰ θερμοκρασιῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$V = \frac{Q}{c \cdot \rho \cdot \Delta\theta} \quad (4)$$

Θέτομεν : $Q = 50\,000 \text{ cal}$, $c = 0,01 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, $\rho = 8,93 \text{ gr/cm}^3$ καὶ $\Delta\theta = 500 - 50 = 450^\circ\text{C}$, ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$V = 1244 \text{ cm}^3$$

Ἐπομένως ὁ κύλινδρος θὰ εἶναι κοῖλος, ἐφ' ὅσον ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πραγματικοῦ. Ἐὰν $V_{\text{κ}}$ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος, θὰ ἔχωμεν :

$$V_{\text{κ}} = V_{\text{εξ}} - V \quad \text{ἢ} : \quad V_{\text{κ}} = 875 \text{ cm}^3$$

1773. Αἱ συνολικαὶ ἀπώλειαι θερμότητος χώρου εἶναι $400\,000 \text{ cal/h}$. Να ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης πετρελαίου εἰς kg ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται δι' ἓνα πλήρη μῆνα (πλήρη ἡμερονύκτια) διὰ τὴν λειτουργίαν τῆς θερμάνσεως. (Συντελεστής ἀποδόσεως μηχανῆς $\eta = 0,6$, θερμότης καύσεως πετρελαίου $\theta_{\text{κ}} = 9000 \text{ cal/gr}$).

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ K τὰς ἀνὰ ὥραν ἀπωλείας τοῦ χώρου καὶ διὰ t τὸν χρόνον λειτουργίας τῆς μηχανῆς, τότε τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q τὸ ὁποῖον ἀπόλλυται ἰσοῦται πρὸς :

$$Q = K \cdot t \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν διὰ τοῦ m παραστήσωμεν τὴν μάζαν τοῦ πετρελαίου τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ποσοῦ τούτου τῆς θερμότητος, τὸ ποσὸν τοῦτο Q ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$Q = \eta \cdot m \cdot \theta_{\text{κ}} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$K \cdot t = \eta \cdot m \cdot \theta_{\text{κ}} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὁ ἀκόλουθος τύπος πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς μάζης m :

$$m = \frac{K \cdot t}{\eta \cdot \theta_{\text{κ}}} \quad (4)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $K = 4 \cdot 10^5 \text{ cal/h}$, $t = 30 \cdot 24 = 720 \text{ h}$, $\eta = 0,6$, $\theta_{\text{κ}} = 9000 \text{ cal/gr}$, εὐρίσκομεν :

$$m = 53\,330 \text{ gr} = 53,3 \text{ kg}$$

1774. Έστω μεταλλικόν αντικείμενον, ἀνηρτημένον ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τῆς φάλαγγος ζυγοῦ μέσῳ λεπτοῦ σύρματος ἀμελητέας μάζης. Ἡ θερμοκρασία τοῦ αντικειμένου εἶναι 40°C καὶ ἡ μᾶζα αὐτοῦ 800 gr . Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τίθεται καταλλήλως ἐντὸς ρεύματος ὑδρατμοῦ θερμοκρασίας 100°C , ὑπὸ ἀτμοσφαιρικῆν πίεσιν 760 Torr . Μετὰ παρέλευσιν ὠρισμένου χρόνου ὁ ζυγὸς δεικνύει τὸ νέον βάρος τοῦ αντικειμένου 810 gr^* , τὸ ὁποῖον καὶ παραμένει ἕκτοτε σταθερόν. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ ὑδροποιηθέντος ἀτμοῦ παρέμεινεν ἐπὶ τοῦ αντικειμένου ὑπὸ μορφὴν ὕδατος, νὰ υπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος = 540 cal/gr).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαί: Χημικῶν Μηχανικῶν καὶ Ἀρχιτεκτόνων, 1948).

Λύσις. Ἡ ὑδροποίησις τοῦ ὑδρατμοῦ ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου σταματᾷ ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀνέλθῃ εἰς 100°C . Ἐπομένως ἐὰν Q τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπερρόφησε τὸ σῶμα, m ἡ μᾶζα αὐτοῦ, c ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ καὶ $\Delta\theta$ ἡ διαφορὰ θερμοκρασιῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad \text{ἢ} : \quad c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\theta} \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ποσὸν θερμότητος Q' τὸ ὁποῖον ἀπέδωσεν ὁ ὑδροποιηθεὶς ἀτμός, ἦτοι :

$$Q = Q' \quad (2)$$

Ἀφ' ἐτέρου ὁμως, ἐὰν καλέσωμεν m' τὴν μᾶζαν τοῦ ὑδροποιηθέντος ἀτμοῦ καὶ λ τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν :

$$Q' = \lambda \cdot m' \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$c = \frac{\lambda \cdot m'}{m \cdot \Delta\theta} \quad (4)$$

Θέτομεν : $\lambda = 540\text{ cal/grad}$, $m' = 10\text{ gr}$, διότι ὁ ὑδροποιούμενος ἀτμός παραμένει ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ ἡ αὔξησις βάρους εἶναι $810 - 800 = 10\text{ gr}^*$, $m = 800\text{ gr}$ καὶ $\Delta\theta = 100 - 40 = 60^{\circ}\text{C}$, ὅποτε προκύπτει :

$$c = 0,1125\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1775. Ἐὰν $0,08\text{ kgr}$ ἁλουμινίου (εἰδικῆς θερμότητος $0,212\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$) ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C τοποθετηθοῦν ἐντὸς $0,1\text{ kgr}$ ὕδατος ὑπὸ 15°C , ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. (Ἀπ. $27,3^{\circ}\text{C}$.)

1776. Ἐὰν $0,04\text{ kgr}$ μετάλλου ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C τοποθετηθοῦν ἐντὸς $0,15\text{ kgr}$ ὕδατος ὑπὸ 18°C καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 20°C , ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου. (Ἀπ. $0,94\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.)

1777. Μολυβδίνη σφαῖρα τυφεκίου μάζης 2 gr , κινουμένη μὲ ταχύτητα 20 m/sec , κτυπᾷ ἐπὶ στόχον. Νὰ υπολογισθῇ ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας τῆς σφαίρας, ὑποτιθέμενου ὅτι ὅλη ἡ παραγομένη θερμότης ἀπορροφεῖται ὑπ' αὐτῆς. (Εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου = $0,03\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. $1,59^{\circ}\text{C}$.)

1778. Ποσότης 200 gr σιδήρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C βυθίζεται ἐντὸς 90 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 16°C ἐντὸς θερμομέτρου μάζης 150 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος $0,2\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος. (Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου = $0,1\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 28°C .)

1779. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ μάζης 120 gr περιέχει 100 gr παραφίνης, ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C. Ἐὰν 48 gr ἄλουμινίου ὑπὸ θερμοκρασίαν 100 °C μεταφερθοῦν ἐντὸς τοῦ ὕγρου καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 27 °C, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τῆς παραφίνης, μὴ ὑπολογιζομένων τῶν ἀπωλειῶν θερμότητος. (Εἰδικὴ θερμότης ἄλουμινίου = 0,25 cal/gr·grad καὶ χαλκοῦ = 0,1 cal/gr·grad).

(Ἀπ. 0,61 cal/gr·grad.)

1780. Τεμάχιον σιδήρου 8 kgr, θερμοκρασίας 20 °C, θερμαίνεται μέχρις 800 °C. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο. (Μέση τιμὴ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σιδήρου εἰς τὸ ἐν λόγῳ θερμομετρικὸν διάστημα $c = 0,16$ kcal/kgr·grad).

(Ἀπ. 998,4 kcal.)

1781. Ἀναμιγνύομεν 0,4 kgr ρινισμάτων σιδήρου θερμοκρασίας 210 °C, μετὰ 0,5 kgr κόκκων ψευδαργύρου θερμοκρασίας 100 °C καὶ 0,3 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 10 °C. Αἱ εἰδικαὶ θερμότητες τοῦ σιδήρου καὶ ψευδαργύρου εἶναι ἀντιστοίχως 0,11 cal/gr·grad καὶ 0,09 cal/gr·grad. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

(Ἀπ. 43 °C.)

1782. Ποῖαν ὕψωσιν θερμοκρασίας προκαλεῖ ποσὸν θερμότητος 50 kcal, ὅταν τοῦτο προσδοθῇ εἰς 20 kgr ἐκ τῶν ἀκολουθῶν οὐσιῶν: α) ὕδατος ($c = 1$ kcal/kgr·grad, β) σιδήρου ($c = 0,108$ kcal/kgr·grad), γ) μολύβδου ($c = 0,031$ kcal/kgr·grad).

(Ἀπ. α' 2,5 °C, β' 23,1 °C, γ' 80,6 °C.)

1783. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ θερμανθοῦν 3 kgr ψευδαργύρου 23 °C μέχρι τήξεως (232 °C). Εἰδικὴ θερμότης ψευδαργύρου $c = 0,054$ kcal/kgr·grad.

(Ἀπ. 33,858 kcal.)

1784. Εἰσάγεται ἐντὸς θερμιδομέτρου θερμοχωρητικότητος 25 cal/grad, περιέχοντος 400 gr ὕδατος θερμοκρασίας 12,45 °C, τεμάχιον 200 gr νικελίου θερμοκρασίας 100 °C. Μετὰ τὴν ἀνάδυσιν ἀναγινώσκεται θερμοκρασία 16,75 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ νικελίου.

(Ἀπ. 0,11 cal/gr·grad.)

1785. Θερμιδόμετρον περιέχει 300 gr ὕδατος θερμοκρασίας 15 °C. Τὸ δοχεῖον τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι ἐξ ὀρειχάλκου καὶ ζυγίζει 150 gr. Εἰσάγονται ἐντὸς αὐτοῦ 590 gr μολύβδου θερμοκρασίας 100 °C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 19,7 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου. (Δίδεται εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου 0,1 cal/gr·grad).

(Ἀπ. 0,0312 cal/gr·grad.)

1786. Ρίπτονται 600 gr ὑδραργύρου 100 °C εἰς 400 gr ὕδατος 18,6 °C, περιεχομένον εἰς δοχεῖον θερμικῶς μεμονωμένον (δοχεῖον Dewar), τοῦ ὁποῖου ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι 24,3 cal/grad. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 22,2 °C.

(Ἀπ. 0,033 cal/gr·grad.)

1787. Ποία ποσότης ὕδατος θερμοκρασίας 80 °C πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ μὲ 10 kgr ὕδατος 12 °C, ἵνα λάβωμεν μίγμα 37 °C.

(Ἀπ. 5,81 kgr.)

1788. Μίγνυνται 250 gr ὕδατος 15 °C καὶ 750 gr ὕδατος 40 °C. Πόση ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

(Ἀπ. 33,75 °C.)

1789. Χάλκινον θερμιδόμετρον μάζης 42,88 gr περιέχει 58,71 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 10 °C. Ὀλίγα μολύβδινα σφαιρίδια θερμοκρασίας 100 °C ρίπτονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Ἡ μᾶζα τοῦ θερμιδομέτρου, ὕδατος καὶ σφαιριδίων ἦτο 252,89 gr. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ 0,09 cal/gr·grad, μολύβδου 0,03 cal/gr·grad.

(Ἀπ. 16,1 °C.)

1790. Χαλκίνη φιάλη, μάζης 2 kg, χωρητικότητας 3 lt, πληροῦται δι' ὕδατος. Πόσας θερμίδας ἀποδίδει ἓν ἐκ τῆς θερμοκρασίας τῶν 80 °C κατέλθῃ εἰς τοὺς 40 °C. ($c_{cu} = 0,092 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 127,36 kcal.)

1791. Ἐπὶ ἐστίας διὰ φωταερίου τοποθετεῖται χύτρα ἐξ ἀλουμινίου, μάζης 200 gr, περιέχουσα 1,5 lt ὕδατος, πρὸς θέρμανσιν. Ἐκ τῆς παραγομένης θερμότητος τὰ 20 % παραλαμβάνει τὸ περιβάλλον. Τί ποσοστὸν ἐκ τοῦ ἀποδιδόμενου ὑπὸ τῆς φλογὸς ποσοῦ θερμότητος προσλαμβάνουν τὸ ὕδωρ καὶ ἡ χύτρα. ($c_{Al} = 0,214 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 2,2 % ἡ χύτρα, 77,8 % τὸ ὕδωρ.)

1792. Δύο σιδηραῖ φιάλαι, βάρους ἑκάστη 400 gr* ὅταν εἶναι κεναί, πληροῦνται μὲ 500 cm³ ὕδραργύρου καὶ ὕδατος ἀντιστοίχως. Νὰ συγκριθοῦν αἱ ποσότητες τῆς ἐκλυομένης ὑπ' αὐτῶν θερμότητος, ὅταν ψύχωνται ἀπὸ 90 °C εἰς 20 °C. Δίδονται : εἰδικὸν βᾶρος ὕδραργύρου = 13,6 gr/cm³, εἰδικὴ θερμότης ὕδραργύρου = 0,033 cal/gr · grad, σιδήρου = 0,12 cal/gr · grad. (Ἀπ. 0,498 : 1.)

1793. Πόση ποσότης ὕδατος δύναται νὰ θερμανθῇ ἐκ τοῦ σημείου πήξεως εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως διὰ 1234 θερμίδων. (Ἀπ. 12,34 gr.)

1794. Πόσαι θερμίδες ἐκλύονται, ὅταν ψυχθοῦν 200 gr ὕδατος ἀπὸ 140 °F εἰς 68 °F. (Ἀπ. 8000 cal.)

1795. Μικρὸν μεταλλικὸν δοχεῖον, θερμικῶς μονωμένον, θερμοκρασίας 15,5 °C, πληροῦται σχεδὸν ἐξ ὀλοκλήρου μὲ 120 gr θερμοῦ ὕδατος εἰς 66,7 °C καὶ ἡ προκύπτουσα θερμοκρασία εἶναι 63,5 °C. Ποῖον τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ μεταλλικοῦ δοχείου. (Ἀπ. 8 gr.)

1796. Ποσότης 30 gr κασιτέρου εἰς 100 °C ρίπτεται ἐντὸς 60 gr ὕδατος εἰς 17,8 °C καὶ ἡ θερμοκρασία αὐξάνει εἰς 20,0 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ κασιτέρου. (Ἀπ. 0,055 cal/gr · grad.)

1797. Χάλκινον θερμιδόμετρον ζυγίζον 45 gr περιέχει 50,5 gr ὕδατος εἰς 15 °C. Ἐάν 25 gr κασιτέρου θερμαίνοντα μέχρις 97 °C βυθισθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ, ἡ εὐρισκόμενη τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 17 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ κασιτέρου. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad. (Ἀπ. 0,055 cal/gr · grad.)

1798. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται, ἵνα ὁ ὄγκος 60 m³ ἀέρος θερμοκρασίας 0 °C καὶ πίεσεως 760 Torr αὐξηθῇ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν κατὰ 1²/₃ φορὰς τοῦ ἀρχικοῦ. (Πυκνότης τοῦ ἀέρος 0,001293 gr/cm³, εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν 0,238 cal/gr · grad, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$). (Ἀπ. 3360,5 kcal.)

1799. Ὑδωρ ρεεῖ μέσῳ θερμιδομέτρου, σταθερᾶς ροῆς, μὲ ταχύτητα 4 lt/min. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ὅταν εἰσέρχεται εἶναι 12 °C καὶ ὅταν ἐξέρχεται εἶναι 42 °C. Ποία ποσότης θερμότητος ἀνὰ δευτερόλεπτον ἀπάγεται ἀπὸ τὸ θερμιδόμετρον. (Ἀπ. 2000 cal/sec.)

1800. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς μέσης θερμοκρασίας καμίνου φέρεται ἐντὸς αὐτῆς ἐπὶ ὠρισμένον χρόνον τεμάχιον λευκοχρύσου, μάζης 150 gr, τὸ ὅποιον ἀκολουθῶς βυθίζεται ταχέως ἐντὸς μάζης 800 gr ὕδατος θερμοκρασίας 12 °C, ὁπότε, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας, παρατηροῦμεν τελικὴν θερμοκρασίαν 19 °C. Ποία ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου, ἐάν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ λευκοχρύσου εἶναι 0,032 cal/gr · grad. (Ἀπ. 1200 °C.)

1801. Ἀναμειγνύομεν 20 gr ὕδατος θερμοκρασίας 80 °C καὶ 500 gr ὕδατος θερμοκρασίας 20 °C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. (Ἀπ. 37,1 °C.)
(Σχολή Ἐμποροπλοίαρχων, 1958).

1802. Ποίας ποσότητας ύδατος τών 80°C και τών 17°C πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίγμα τών 35°C . (Στρατιωτική Ἱατρική Σχολή, 1958).
(Ἀπ. 2 : 5.)

1803. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μαρμάρου ἀπὸ τὰ κάτωθι πειραματικὰ δεδομένα : Μᾶζα θερμιδομέτρου ἐξ ἀλουμινίου = 34,55 gr. Μᾶζα θερμιδομέτρου ἐξ ἀλουμινίου μετὰ ψυχροῦ ὕδατος = 93,84 gr. Θερμοκρασία θερμιδομέτρου ἐξ ἀλουμινίου μετὰ ψυχροῦ ὕδατος = 15°C . Θερμοκρασία θερμαντικῆς ὕλης περιεχοῦσης μάρμαρον = 100°C . Τελικὴ διωρθωμένη θερμοκρασία μίγματος ὕδατος καὶ μαρμάρου ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐξ ἀλουμινίου = 24°C . Μᾶζα θερμιδομέτρου, ὕδατος καὶ μαρμάρου = 134,44 gr. Εἰδικὴ θερμότης ἀλουμινίου = $0,2 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.
(Ἀπ. $0,193 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.)

1804. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται ἵνα αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία 12 gr ὕδατος ἀπὸ 10°C εἰς 80°C . Πόση θερμότης ἐκλύεται, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τίπτην κατόπιν εἰς 15°C .
(Ἀπ. 840 cal, 780 cal.)

1805. Νὰ εὐρεθῇ ἡ προκύπτουσα θερμοκρασία ὅταν 250 θερμίδες προστίθενται εἰς 5 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 17°C .
(Ἀπ. 67°C .)

1806. Ποία εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία ὅταν : α) 50 gr ὕδατος εἰς 32°C μίγνυνται με 50 gr ὕδατος εἰς 14°C . β) 25 gr ὕδατος εἰς 72°C μίγνυνται με 35 gr ὕδατος εἰς 12°C .
(Ἀπ. 23°C , 37°C .)

1807. Ποσότης 25 gr χαλκοῦ εἰς 92°C ρίπτεται ἐντὸς 50 gr ὕδατος εἰς 15°C καὶ ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς $18,5^{\circ}\text{C}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ.
(Ἀπ. $0,095 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.)

1808. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀποδίδει μικρὰ λίμνη, ἐπιφανείας 1 km^2 καὶ μέσου βάθου 10 m, ἐὰν ἐκ μίᾳ μέσης θερμοκρασίας 20°C , κατὰ τὸ θέρος, ψυχθῇ μέχρι 2°C κατὰ τὸν χειμῶνα.
(Ἀπ. $18 \cdot 10^{10} \text{ kcal}$.)

1809. Ποσότης 250 gr σιδήρου εἰς 100°C τοποθετεῖται ἐντὸς 50 gr ὕδατος εἰς 16°C . Ποία ἡ προκύπτουσα θερμοκρασία. Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου $0,12 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.
(Ἀπ. $47,5^{\circ}\text{C}$.)

1810. Ποσότης 0,2 kgr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 80°C μίγνυνται μετὰ 0,075 kgr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C . Ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ προκύπτοντος μίγματος.
(Ἀπ. $58,2^{\circ}\text{C}$.)

1811. Ποία ποσότης νικελίου (εἰδικῆς θερμότητος $0,113 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$) ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐντὸς 0,25 kgr ὕδατος ὑπὸ 30°C , ἵνα ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν μέχρι 35°C .
(Ἀπ. 0,17 kgr.)

1812. Ἐὰν 0,045 kgr πλατίνης (εἰδικῆς θερμότητος $0,032 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$) ὑπὸ 150°C τοποθετηθοῦν ἐντὸς 0,25 kgr χλωροφορμίου (εἰδικῆς θερμότητος $0,234 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$) ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°C , ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.
(Ἀπ. $23,1^{\circ}\text{C}$.)

1813. Πόσα λίτρα ὕδατος θερμοκρασίας 15°C δύνανται νὰ ἀχθοῦν μέχρι βρασμοῦ διὰ προσφοράς ποσοῦ θερμότητος 500 kcal.
(Ἀπ. 5,882 λίτρα.)

1814. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ θερμάνωμεν χαλκίνην χύτραν 400 gr καὶ τὸ ἐντὸς αὐτῆς εὐρισκόμενον ὕδωρ 1 kgr ἐκ τών 20°C εἰς τοὺς 100°C . ($c_{\text{Cu}}=0,092 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$).
(Ἀπ. 83 kcal.)

1815. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ θερμάνωμεν χύτραν ἄλουμινίου 200 gr μετὰ τοῦ περιεχομένου αὐτῆς 1,5 lt ὕδατος 15 °C μέχρις 100 °C. ($c_{Al} = 0,214 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 131 kcal.)

1816. Μᾶζα ὕδατος 200 gr, θερμοκρασίας 60 °C, χύνεται ἐντὸς ὑαλίνου δοχείου μάζης 80 gr καὶ θερμοκρασίας 20 °C καὶ πληροῖ αὐτό. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος. ($c_{\text{υλ}} = 0,18 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 57 °C.)

1817. Λουτήρ πρόκειται νὰ πληρωθῇ μὲ 300 lt ὕδατος 38 °C. Πρὸς τοῦτο διατίθεται ζέον ὕδωρ καὶ τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τῶν σωλήνων ὑδρεύσεως, θερμοκρασίας 15 °C. Ποῖα ποσότητες ἐξ ἐκάστου εἶδους πρέπει νὰ ληφθοῦν. (Ἀπ. 219 lt 15 °C καὶ 81 lt 100 °C.)

1818. Πόσα λίτρα ζέοντος ὕδατος πρέπει νὰ ἀναμιχθοῦν μὲ 90 lt ὕδατος 15 °C διὰ νὰ ἀποτελέσουν μῆγμα θερμοκρασίας 34 °C. (Ἀπ. 25,9 lt.)

1819. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ χαλκοῦ φέρονται 500 gr χαλκοῦ ἐντὸς ζέοντος ὕδατος καὶ ἀκολουθῶς εἰσάγονται ταῦτα ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος 500 gr ὕδατος 20 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 26 °C. Νὰ υπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ καὶ νὰ παραβληθῇ αὕτη πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν πινάκων δεδομένην $c_{Cu} = 0,092 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$. Εἰς τί ὀφείλεται ἡ διαφορά. (Ἀπ. 0,081 kcal/kg · grad. Εἰς τὸ ὅτι δὲν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν τὰ ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ ἀέρος παραληφθέντα ποσὰ θερμότητος.)

1820. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς εἰδικῆς θερμότητος μιᾶς οὐσίας θερμαίνονται 300 gr ἐξ αὐτῆς εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 100 °C καὶ ἀκολουθῶς φέρονται ἐντὸς ὕδατος, μάζης 100 gr καὶ θερμότητος 20 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος ἀνέρχεται εἰς 27 °C. Ποία ἡ ζητούμενη εἰδικὴ θερμότης, ἐὰν 10% ἐκ τοῦ ὑπὸ τῆς οὐσίας ἀποδοθέντος ποσοῦ θερμότητος ἀπορροφήθῃσιν ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιβάλλοντος. (Ἀπ. 0,036 kcal/kg · grad.)

1821. Ἐντὸς δοχείου περιέχονται 500 gr ὕδατος θερμοκρασίας 20 °C. Ἀκολουθῶς προστίθενται 800 gr ὕδατος 80 °C καὶ μετρεῖται τελικὴ θερμοκρασία 52 °C. Ποῖον τὸ ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιβάλλοντος ἀπορροφήθῃν ποσὸν θερμότητος. (Ἀπ. 6,4 kcal.)

1822. Τεμάχιον μολύβδου, μάζης 1,5 kgρ καὶ θερμοκρασίας 100 °C, φέρεται ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐξ ὀρειχάλκου, μάζης 400 gr, περιέχοντος 1,5 lt ὕδατος. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 18 °C. α) Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία, β) ποῖον τὸ ὑπὸ τοῦ μολύβδου ἀποδοθὲν ποσὸν θερμότητος, γ) ποῖον τὸ ὑπὸ τοῦ ὕδατος προσληφθὲν ποσὸν θερμότητος, δ) πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τοῦ ὑπὸ τοῦ μολύβδου ἀποδοθέντος ποσοῦ θερμότητος παρελήφθη ὑπὸ τοῦ θερμιδομέτρου. ($c_{Pb} = 0,031 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $c_{\text{ορειχ}} = 0,091 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. α' 20,4 °C, β' 3,7 kcal, γ' 3,6 kcal, δ' 2,7%.)

1823. Ἐντὸς θερμιδομέτρου χαλκοῦ, μάζης 160 gr, εὐρίσκονται 250 gr ἄλκοόλης, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 19 °C, ἐντὸς δὲ αὐτῆς φέρονται 120 gr μολύβδου, θερμοκρασίας 100 °C, ἡ δὲ τελικὴ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 20,9 °C. Ποία ἡ εἰδικὴ θερμότης τῆς ἄλκοόλης. ($c_{Pb} = 0,031 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $C_{Cu} = 0,92 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 0,56 kcal/kg · grad.)

1824. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θερμοκρασίας λύχνου Bunsen, θερμαίνεται διὰ τῆς φλογὸς σιδηρᾶ σφαῖρα, μάζης 12 gr. Ἡ σφαῖρα φέρεται ἀκολουθῶς ἐντὸς θερμιδομέτρου χαλκοῦ, μάζης 150 gr, περιέχοντος 0,3 lt ὕδατος, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 18 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 21,3 °C. Ποία ἡ θερμοκρασία τῆς φλογός. ($c_{Fe} = 0,108 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $c_{Cu} = 0,092 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 820 °C.)

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

KATHΓΟΡΙΑ Γ'

1825. Μεταλλικόν δοχείον περιέχει 100,4 gr ὕδατος εἰς 16 °C. Ὄταν ποσότης ὕδατος μάζης 124,2 gr εἰς 42 °C χυθῇ ἐντὸς τοῦ δοχείου, ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται εἰς 28 °C. Πόση θερμότης διωχτεύθη εἰς τὸ μέταλλον. Ἐὰν ἡ μάζα τοῦ δοχείου εἶναι 445 gr, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου.

(Ἄπ. 534 cal, 0,1 cal/gr · grad.)

1826. Μεταλλικὸς κύλινδρος βάρους 20,52 gr* θερμαίνεται μέχρι σταθερᾶς θερμοκρασίας 97,6 °C. Ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου χύνεται ὕδωρ βάρους 38,20 gr*. Τὸ ὅλικόν βάρος εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 136,98 gr* καὶ ἡ θερμοκρασία 19,3 °C. Ὁ θερμὸς κύλινδρος μεταφέρεται ταχέως ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 22,6 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ κυλίνδρου. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad.

(Ἄπ. 0,22 cal/gr · grad.)

1827. Σφαῖρα ἐκ χαλκοῦ μάζης 80,40 gr θερμαίνεται μέχρις 100 °C καὶ ρίπτεται ἐντὸς 180,24 gr ἐλαίου εἰς 15,3 °C περιεχομένου ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 50,20 gr. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 21,9 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἐλαίου. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad.)

(Ἄπ. 0,5 cal/gr · grad.)

1828. Ποσότης 127,5 gr τερεβινθελαίου περιέχεται ἐντὸς δοχείου μάζης 9,75 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος 0,2 cal/gr · grad θερμανθεῖσα μέχρις 94,8 °C. Βυθίζοντες τὸ σύνολον ἐντὸς 175,8 gr ὕδατος 16,1 °C, περιεχομένου ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 48,0 gr, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 34,6 °C. Νὰ εὐρεθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ τερεβινθελαίου. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad.)

(Ἄπ. 0,42 cal/gr · grad.)

1829. Ρίπτοντες 100 gr χάλυβος ὑπὸ θερμοκρασίαν 315 °C ἐντὸς 2600 gr ὕδραργυρου εἰς 15 °C, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ αὐξάνει εἰς 51 °C. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδραργυρου εἶναι 0,033 cal/gr · grad. Ποία ἦτο ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χάλυβος.

(Ἄπ. 0,117 cal/gr · grad.)

1830. Ποσότης 200 gr χαλκοῦ θερμοκρασίας 100 °C χύνεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 140 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C. Ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγίστη θερμοκρασία ὑπὸ τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τῶν περιεχομένων του μετὰ τὴν ἀνάμειξιν εἶναι 25 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ θερμιδομέτρου. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad.)

(Ἄπ. 10 gr.)

1831. Ποσότης 15 gr ὑγροῦ θερμοκρασίας 35 °C ρίπτεται ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 45 gr εἰς 10 °C καὶ ἡ θερμοκρασία αὐξάνει μέχρις 27,5 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑγροῦ. (Εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad.)

(Ἄπ. 0,70 cal/gr · grad.)

1832. Τεμάχιον χαλκοῦ μάζης 7,5 gr θερμαίνεται ἐπὶ λίαν μακρὸν χρονικὸν διάστημα μετὰ λυχνίαν Bunsen καὶ ρίπτεται κατόπιν ἀμέσως ἐντὸς 75,2 gr ὕδατος 14 °C. Ἐὰν ἡ προκύπτουσα θερμοκρασία εἶναι 21,5 °C, νὰ εὐρεθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς φλογὸς τῆς λυχνίας Bunsen.

(Ἄπ. 773,5 °C.)

1833. Ὄγκος ἐκ νικελίου, μάζης 400 gr, θερμαίνεται ἐντὸς κλιβάνου καὶ κατόπιν μεταφέρεται εἰς μίαν λεκάνην πλήρη ὕδατος, τῆς ὁποίας ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι 1400 cal/grad. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἦτο 12 °C, καὶ ἀνέλθῃ εἰς 37 °C, ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ κλιβάνου. (Εἰδικὴ θερμότης νικελίου = 0,112 cal/gr · grad.)

(Ἄπ. 818,25 °C.)

1834. Ἡ καύσις 1,5 gr οὐσίας τινὸς ἀνυψώνει τὴν θερμοκρασίαν 0,25 kgr ὕδατος ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ 0,1 kgr ἀπὸ 18 °C εἰς 27 °C. Ποία ἡ θερμότης καύσεως εἰς kcal/kg. (Εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ = 0,092 kcal/kg·grad).
(Ἀπ. 1560 kcal/kg.)

1835. Ἡ μοριακὴ θερμότης καύσεως τῆς ναφθαλίνης εἶναι 1231,8 kcal/Mol. Ἐὰν 0,550 gr ναφθαλίνης καίομενα ἐντὸς θερμιδομέτρου ἀνυψώσουν τὴν θερμοκρασίαν αὐτοῦ κατὰ 2,05 °C, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου. (Μοριακὸν βάρος ναφθαλίνης : 128,16).
(Ἀπ. 2544 cal/grad.)

1836. Μεταλλικὸν κρᾶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ 60% χαλκοῦ καὶ 40% νικελίου. Τεμάχιον ἐκ τοῦ κράματος, ἔχον μᾶζαν 40 gr, βυθίζεται ἐντὸς 60 gr ὕδατος περιεχομένου ἐντὸς θερμιδομέτρου, τοῦ ὁποίου τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον εἶναι 5 gr καὶ ἀρχικῆς θερμοκρασίας 10 °C. Ἐὰν ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 18 °C, πόση ἡ θερμοκρασία τοῦ κράματος, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ εἰδικὴ θερμότης ἀποτελεῖ προσθετικὴν ιδιότητα. (Εἰδ. θερμότης χαλκοῦ 0,095, νικελίου 0,11 cal·gr⁻¹·grad⁻¹). (Ἀπ. 146,7 °C.)

1837. Νὰ καθορισθῇ πότε ἀποδίδεται μεγαλύτερον ποσὸν θερμότητος : ὅταν 15 gr ὀρεχάλκου εἰδ. θερμότητος 0,09 cal·gr⁻¹·grad⁻¹ ψύχωνται ἀπὸ 100 °C εἰς 60 °C, ἢ ὅταν 8 gr ἀργύρου εἰδ. θερμότητος 0,056 cal·gr⁻¹·grad⁻¹ ψύχωνται ἀπὸ 100 °C εἰς 50 °C;
(Ἀπ. Ὁρεχάλκος.)

1838. Ποσότης 50 gr μολύβδου ἀπαιτεῖ 60 cal δι' ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ 20 °C εἰς 60 °C. Ζητοῦνται : α) ἡ εἰδ. θερμότης τοῦ μολύβδου, β) ἡ θερμοχωρητικότης αὐτοῦ.
(Ἀπ. α' 0,03 cal·grad⁻¹·gr⁻¹, β' 1,5 cal/grad.)

1839. Ποσότης 40 gr ἐλαίου εἰδ. θερμότητος 0,46 cal·gr⁻¹·grad⁻¹ τίθεται ἐντὸς θερμιδομέτρου, τοῦ ὁποίου τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ εἶναι 6 gr. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐλαίου καὶ τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 20 °C, πόσον ὕδωρ εἰς θερμοκρασίαν 100 °C δέον νὰ προστεθῇ, ἵνα ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ εἰς 50 °C.
(Ἀπ. 14,6 gr.)

1840. Λέβης ἀποτελεῖται ἐκ μετάλλου εἰδ. θερμότητος 0,12 cal·gr⁻¹·grad⁻¹ καὶ ζυγίζει 8 τόνους. Ἐντὸς τοῦ λέβητος τίθενται 6 τόννοι ὕδατος θερμοκρασίας 20 °C. Ζητεῖται πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέλθῃ εἰς 100 °C.
(Ἀπ. 5,568 · 10⁸ cal.)

1841. Τεμάχιον χαλκοῦ μάζης 40 gr θερμαίνεται ἐντὸς καμίνου καὶ ἀκολουθῶς φέρεται ἐντὸς δοχείου περιέχοντος 1 kgr ἐλαίου εἰς 15 °C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐλαίου ἀνέρχεται κατὰ 5 °C. (Εἰδ. θερμότης χαλκοῦ 0,1, ἐλαίου 0,8 cal/gr·grad). Πόση ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου.
(Ἀπ. 1020 °C.)

1842. Πόσος ὁ λόγος τῶν θερμοχωρητικοτήτων ἴσων ὄγκων ὑδραργύρου καὶ ὕαλου. (Εἰδ. θερμότης ὑδραργύρου 0,033 cal·gr⁻¹·grad⁻¹, πυκνότης 13,6 gr/cm³, εἰδ. θερμότης ὕαλου 0,12 cal·gr⁻¹·grad⁻¹, πυκνότης 3 gr/cm³). (Ἀπ. 1,25 : 1.)

1843. Κρᾶμα μετάλλου μάζης 200 gr εἶναι γνωστόν, ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ σιδήρου εἰδ. θερμότητος 0,12 cal·gr⁻¹·grad⁻¹, καὶ χαλκοῦ εἰδ. θερμότητος 0,094 cal·grad⁻¹·gr⁻¹. Τὸ μέταλλον θερμαίνεται εἰς 100 °C καὶ ἀκολουθῶς τίθεται ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ μάζης 50 gr καὶ περιέχοντος 200 gr ὕδατος θερμοκρασίας 15 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 22,5 °C. Ζητεῖται ἡ μᾶζα ἐκάστου τῶν συστατικῶν τοῦ κράματος.
(Ἀπ. 39 gr σιδήρος, 161 gr χαλκός.)

1844. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ, μάζης 32 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος 0,095 cal/gr·grad, περιέχει 45 gr τρεβινθελαίου, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία θερμιδομέτρου καὶ ὕρου εἶναι 10 °C. Ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου θέτομεν 40 gr χαλκοῦ θερμοκρασίας 100 °C, ἡ δὲ θερμοκρασία ἰσορροπίας τοῦ συστήματος εἶναι 27 °C. Ζητεῖται ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ τρεβινθελαίου.
(Ἀπ. 0,294 cal/gr·grad.)

1845. Δοχείον ἀπὸ ὀρείχαλκον ζυγίζει κενὸν 50 gr. Ἡ θερμοκρασία του εἶναι 10 °C καὶ ρίπτονται ἐντὸς αὐτοῦ 20 gr ὕδατος θερμοκρασίας 50 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 42 °C. Νὰ εὐρεθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὀρείχαλκου.

(Ἀπ. 0,10 cal/gr · grad.)

1846. Τεμάχιον ὀρείχαλκου, μάζης 150 gr, ψύχεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος καὶ ρίπτεται ἐντὸς ὀρειχαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 120 gr, τὸ ὁποῖον περιέχει 130 gr ὕδατος εἰς 25 °C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 16 °C. Εὗρατε τὴν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος. (Εἰδικὴ θερμότης ὀρείχαλκου = 0,88 cal/gr · grad.)

(Ἀπ. — 79,8 °C.)

1847. Τεμάχιον λευκοχρύσου θερμοκρασίας 120 °C βυθίζεται ἐντὸς ὕδραργύρου θερμοκρασίας 15 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 40 °C. Τὸ αὐτὸ τεμάχιον λευκοχρύσου εἰς ἑτέραν μέτρησιν μετὰ ὕδραργύρου 20 °C ἔδωσε τελικὴν θερμοκρασίαν 50 °C. Ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ λευκοχρύσου κατὰ τὴν δευτέραν μέτρησιν.

(Ἀπ. 146 °C.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1848. Νὰ υπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία κατὰ τὴν ἀνάμιξιν 150 gr πάγου 0 °C πρὸς 300 gr ὕδατος 50 °C. (Θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr).

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $Q_1 = m_1 \cdot \lambda$, ὅπου λ ἡ θερμότης τήξεως, υπολογίζομεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπορροφεῖ ὁ πάγος μάζης m_1 , ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως αὐτοῦ:

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda = 150 \cdot 80 = 12\,000 \text{ cal}$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου $Q_2 = m_2 \cdot c \cdot \theta$ υπολογίζομεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ μάζα m_2 τοῦ ὕδατος, ἵνα ψυχθῇ ἀπὸ θ °C εἰς 0 °C:

$$Q_2 = m_2 \cdot c \cdot \theta = 300 \cdot 1 \cdot 50 = 15\,000 \text{ cal}$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν δύο ποσῶν θερμότητος Q_1 καὶ Q_2 εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία θὰ εἶναι μεταξὺ 0 °C καὶ θ °C. Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν, θὰ ἔχωμεν:

α) Ὁ πάγος ἀπορροφεῖ, διὰ νὰ τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, θερμότητα: $Q_1 = m_1 \cdot \lambda$.

β) Τὸ ὕδωρ τὸ ὁποῖον προέρχεται ἀπὸ τὴν τήξιν τοῦ πάγου ἀπορροφεῖ, ἵνα θερμανθῇ ἀπὸ 0 °C εἰς x °C, θερμότητα:

$$Q'_1 = m_1 \cdot c \cdot x$$

γ) Τὸ ὕδωρ τῆς θερμοκρασίας θ °C, ἵνα ψυχθῇ εἰς x °C, ἀποδίδει θερμότητα: $Q'_2 = m_2 \cdot c \cdot (\theta - x)$. Ἐπειδὴ ὁμως κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἰσχύει ἡ σχέσις: $Q_1 + Q'_1 = Q'_2$, θὰ ἔχωμεν:

$$m_1 \cdot \lambda + m_1 \cdot c \cdot x = m_2 \cdot c \cdot (\theta - x)$$

Δι' ἐπιλύσεως δὲ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ὡς πρὸς x , προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$x = \frac{m_2 \cdot c \cdot \theta - m_1 \cdot \lambda}{c \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{Q_2 - Q_1}{c \cdot (m_1 + m_2)}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὐρίσκομεν, θέτοντες τὰς εὐρεθείσας τιμὰς Q_2 καὶ Q_1 καὶ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ὅτι ἡ ζητούμενη θερμοκρασία εἶναι:

$$x = 6,6 \text{ °C}$$

1849. Ποία ποσότης πάγου -15°C τήκεται υπό 1 kgρ ύδατος θερμοκρασίας 50°C . (Ειδική θερμότης πάγου $= 0,58 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, θερμότης τήξεως πάγου $= 79,7 \text{ cal/gr}$).

Λύσις. Ἐστώσαν $m_1, c_1, \theta_1, \lambda$, ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης, ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἐπίσης, ἔστώσαν m_2, c_2, θ_2 , ἡ μᾶζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος. Ἐχομεν :

α) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφεῖ ὁ πάγος, ἵνα θερμανθῇ ἀπὸ θ_1 εἰς 0°C , εἶναι :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 \quad (1)$$

β) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφεῖ ὁ πάγος, ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, εἶναι :

$$Q_2 = m_1 \cdot \lambda \quad (2)$$

γ) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὸ ὕδωρ μάζης m_2 ἀπὸ θ εἰς 0°C εἶναι :

$$Q_3 = m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2 \quad (3)$$

Ἐπειδὴ θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (4)$$

λαμβάνομεν :

$$m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 + m_1 \cdot \lambda = m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2 \quad (5)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς m_1 λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2}{c_1 \cdot \theta_1 + \lambda} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m_2 = 1000 \text{ gr}$, $c_2 = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $c_1 = 0,58 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $\theta_2 = 50^{\circ}\text{C}$, $\theta_1 = -15^{\circ}\text{C}$ καὶ $\lambda = 79,7 \text{ cal/gr}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ πάγου ἡ ὁποία τήκεται εἶναι :

$$m_1 = 565 \text{ gr}$$

1850. Θερμιδόμετρον ἀργιλίου, μάζης 80 gr, περιέχει 300 gr ὕδατος $18,6^{\circ}\text{C}$. Ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ρίπτομεν τεμάχιον πάγου 0°C καὶ μάζης 12,5 gr καί, ὅταν τακῇ ὅλος ὁ πάγος, ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 15°C . Πόση ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. (Εἰδικὴ θερμότης ἀργιλίου $= 0,214 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$).

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, c_1 , τὴν μᾶζαν καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ἀργιλίου. Ἐπίσης m_2, c_2, θ_2 , τὴν μᾶζαν, τὴν εἰδικὴν θερμότητα καὶ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος. Ὡς ἐπίσης m_3, λ , τὴν μᾶζαν καὶ τὴν θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι θ , θὰ ἔχομεν :

α) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα ψυχθῇ τὸ ἀργίλιον ἀπὸ $\theta_1^{\circ}\text{C}$ εἰς $\theta^{\circ}\text{C}$: $Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_1 - \theta)$.

β) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τὸ ὕδωρ ψυχθῇ ἀπὸ $\theta_1^{\circ}\text{C}$ εἰς $\theta^{\circ}\text{C}$: $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (\theta_1 - \theta)$.

γ) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τακῇ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως : $Q_3 = m_3 \cdot \lambda$.

δ) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τὸ ὕδωρ τὸ προερχόμενον ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου θερμανθῇ ἀπὸ 0°C εἰς $\theta^{\circ}\text{C}$: $Q_4 = m_3 \cdot c_2 \cdot \theta$.

Ἐπειδὴ ὁμοῦ πρέπει, κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$Q_3 + Q_4 = Q_1 + Q_2$$

λαμβάνομεν :

$$m_3 \cdot \lambda + m_3 \cdot c_2 \cdot \theta = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_1 - \theta) + m_2 \cdot c_2 \cdot (\theta_1 - \theta)$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς λ ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\lambda = \frac{(m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) (\theta_1 - \theta) - m_3 \cdot c_2 \cdot \theta}{m_3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εὐρίσκομεν :

$$\lambda = 76,3 \text{ cal/gr}$$

1851. Εἰς θερμιδόμετρον πάγου τήκονται 0,72 gr πάγου, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ εἰσαχθῇ τεμάχιον ψευδαργύρου μάζης 6,33 gr καὶ θερμοκρασίας 98,5 °C. Πόση ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ψευδαργύρου. (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου = 79,7 cal/gr).

Λύσις. Ἐστωσαν m_1 , c_1 , θ_1 , ἡ μάζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ψευδαργύρου, m_2 , λ , ἡ μάζα καὶ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Θὰ ἔχωμεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ἀπὸ τὸν ψευδαργύρον :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 \quad (1)$$

β) Θερμότης ἀπορροφουμένη ὑπὸ τοῦ πάγου, ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως :

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda \quad (2)$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 = m_2 \cdot \lambda \quad (3)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ψευδαργύρου, προκύπτει :

$$c_1 = \frac{m_2 \cdot \lambda}{m_1 \cdot \theta_1} \quad (4)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m_2 = 0,72$ gr, $\lambda = 79,7$ cal/gr, $m_1 = 6,33$ gr, $\theta_1 = 98,5$ °C, εὐρίσκομεν :

$$c_1 = 0,092 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$$

1852. Ποσότης 5 cm³ ὑδραργύρου 20 °C εὐρίσκεται εἰς περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας -39 °C. Πόσῃν θερμότητι ἀποδίδει ὁ ὑδραργύρος μέχρι στερεοποιήσεώς του. (Πυκνότης ὑδραργύρου = 13,58 gr/cm³, εἰδικὴ θερμότης ὑδραργύρου = 0,033 cal · gr⁻¹ · grad⁻¹, θερμότης τήξεως ὑδραργύρου = 2,7 cal/gr).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μάζαν, λ τὴν θερμότητα τήξεως, c τὴν εἰδικὴν θερμότητα, θ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑδραργύρου καὶ θ_0 τὴν θερμοκρασίαν τήξεως αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ἵνα ὁ ὑδραργύρος ψυχθῇ ἀπὸ θ °C εἰς θ_0 °C :

$$Q_1 = m \cdot c \cdot (\theta - \theta_0) \quad (1)$$

β) Θερμότης ἀποδιδομένη ἵνα στερεοποιηθῇ ὁ ὑδραργύρος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως :

$$Q_2 = m \cdot \lambda \quad (2)$$

* Ἀρα ἡ ὅλικη ἀποδιδομένη θερμότης ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου εἶναι :

$$Q = m \cdot c \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot \lambda \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ὁμως $m = \rho \cdot V$, ὅπου ρ ἡ πυκνότης καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου, ἡ σχέση (3) γράφεται :

$$Q = \rho \cdot V \cdot c \cdot (\theta - \theta_0) + \rho \cdot V \cdot \lambda \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho = 13,55$ gr/cm³, $V = 5$ cm³, $\theta = 20$ °C, $\theta_0 = -39$ °C, $\lambda = 2,7$ cal/gr, καὶ εὐρίσκομεν :

$$Q = 315 \text{ cal}$$

1853. Τεμάχιον πάγου 100 gr* βάρους ἐπιπλέει ὕδατος θερμοκρασίας 0 °C καὶ εἰς τὸ ὕδωρ ρίπτεται τεμάχιον μετάλλου μάζης $m = 150$ gr καὶ θερμοκρασίας $\theta = 100$ °C. Μετὰ τὴν ἐξίσωσιν τῶν θερμοκρασιῶν ἐπιπλέει τεμάχιον πάγου. Νὰ εὐρεθοῦν : α) τὸ ποσὸν τοῦ τηχθέντος πάγου, καὶ β) ἡ ἐπελθοῦσα συστολή. (Θερμοκρασία τήξεως πάγου 80 cal/gr, πυκνότης πάγου = 0,92 gr/cm³, εἰδικὴ θερμότης μετάλλου $c = 0,12$ cal/gr).

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσικόν, 1957).

Λύσις. α) Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 0 °C, ἐφ' ὅσον θὰ παραμείνῃ μία ποσότης πάγου ἀτηκτος. Ἐστω Q_m ἡ ποσότης τῆς θερμότητος, τὴν ὁποίαν προσφέρει τὸ μέταλλον εἰς τὸ μίγμα, m_m καὶ c_m ἡ μάζα καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου καὶ $\Delta\theta$ ἡ διαφορὰ τῶν θερμοκρασιῶν αὐτοῦ. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$Q_m = m_m \cdot c_m \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

Ἐάν καλέσωμεν Q_{π} τὴν θερμότητα τὴν ὁποίαν ἀπερρόφησεν ὁ πάγος διὰ νὰ τακῇ ἐν μέρει, m_{π} τὴν μάζαν τοῦ τηχθέντος πάγου καὶ λ τὴν θερμότητα τήξεως αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$Q_{\pi} = m_{\pi} \cdot \lambda \quad (2)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν θεμελιώδη Ἀρχὴν τῆς Θερμιδομετρίας :

$$Q_{\mu} = Q_{\pi} \quad (3) \quad \text{ἔρα καὶ :} \quad m_{\mu} \cdot c_{\mu} \cdot \Delta\theta = m_{\pi} \cdot \lambda$$

$$\eta : \quad m_{\pi} = \frac{m_{\mu} \cdot c_{\mu} \cdot \Delta\theta}{\lambda} \quad (4)$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (4) τὰς τιμὰς : $m_{\mu} = 150 \text{ gr}$, $c_{\mu} = 0,12 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $\Delta\theta = 100^{\circ} - 0^{\circ} = 100^{\circ}\text{C}$ καὶ $\lambda = 80 \text{ cal/gr}$, εὐρίσκομεν :

$$m_{\pi} = 22,5 \text{ gr}$$

β) Ἐάν V_{π} καλέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ τηχθέντος πάγου, $V_{\nu\delta}$ τὸν ὄγκον τοῦ παραχθέντος ὕδατος καὶ V τὴν συστολὴν τοῦ ὄγκου κατὰ τὴν τήξιν, θὰ ἔχωμεν :

$$V = V_{\pi} - V_{\nu\delta} \quad (5) \quad \text{Ἐξ ἄλλου :} \quad V_{\pi} = \frac{m_{\pi}}{\rho_{\pi}} \quad (6)$$

ὅπου m_{π} ἡ μάζα καὶ ρ_{π} ἡ πυκνότης τοῦ πάγου. Ἄρα :

$$V = \frac{m_{\pi}}{\rho_{\pi}} - V_{\nu\delta} \quad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (7) : $m_{\pi} = 22,5 \text{ gr}$, $\rho_{\pi} = 0,92 \text{ gr/cm}^3$, καὶ $V_{\nu\delta} = 22,5 \text{ cm}^3$, εὐρίσκομεν :

$$V = 2 \text{ cm}^3$$

1854. Δοχεῖον περιέχει 2 kgr* ὕδατος θερμοκρασίας 10°C . Εἰσάγομεν 200 gr* πάγου θερμοκρασίας -5°C . Ἐάν ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι ἀμελητέα, πόσον πάγον καὶ πόσον ὕδωρ θὰ ἔχωμεν μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας. (Εἰδικὴ θερμότης πάγου $c = 0,5 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$. Θερμότης τήξεως πάγου $\lambda = 80 \text{ cal/gr}$). (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φαρμακευτικόν, 1962).

Λύσις. Ὁ πάγος ἀπαιτεῖ ποσὸν θερμότητος Q_1 διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ $\theta_1^{\circ}\text{C}$ εἰς 0°C . Ἐάν καλέσωμεν m_1 τὴν μάζαν καὶ c_1 τὴν εἰδικὴν θερμότητα αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 \quad (1)$$

$$\eta : \quad Q_1 = 200 \cdot 0,5 \cdot 5 = 500 \text{ cal}$$

Ἐν συνεχείᾳ διὰ νὰ τακῇ ὁ πάγος καὶ νὰ λάβωμεν ὕδωρ θερμοκρασίας 0°C , ἀπαιτεῖται ποσὸν θερμότητος :

$$Q_2 = m_1 \cdot \lambda \quad (2)$$

ὅπου λ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἐπεὶδὴ $m = 200 \text{ gr}$ καὶ $\lambda = 80 \text{ cal/gr}$, λαμβάνομεν :

$$Q_2 = 16\,000 \text{ cal}$$

Ἦτοι τὸ συνολικὸν ποσὸν θερμότητος Q διὰ τὴν τήξιν τοῦ πάγου εἶναι :

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \eta : \quad Q = 16\,500 \text{ cal}$$

Ἀφ' ἑτέρου τὸ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου κατὰ τὴν ψύξιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας $\theta_2 = 10^{\circ}\text{C}$ εἰς 0°C , ἀποδίδει ποσὸν θερμότητος :

$$Q_3 = m \cdot c \cdot \theta_2 \quad (3)$$

$$\eta : \quad Q_3 = 2000 \cdot 1 \cdot 10 = 20\,000 \text{ cal}$$

Δηλαδή ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι πλέον ἢ ἀρκετὴ διὰ τὴν τήξιν τοῦ πάγου

και επομένως η τελική θερμοκρασία θα είναι άνω των 0°C . Εάν θ η τελική θερμοκρασία του μίγματος, το ύδωρ θα αποδώσει ποσόν θερμότητας :

$$Q' = m \cdot c (\theta_2 - \theta) \quad (4)$$

ένω ο πάγος θα απορροφήσει ποσόν θερμότητας :

$$Q'' = Q_1 + Q_2 + m_2 \cdot c \cdot \theta \quad (5)$$

Έπειδι δέ :

$$Q' = Q'' \quad (6)$$

λαμβάνομεν τελικώς :

$$Q_1 + Q_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot \theta = m \cdot c (\theta_2 - \theta)$$

ή :

$$\theta = \frac{m \cdot c \cdot \theta_2 - Q_1 - Q_2}{(m + m_1) \cdot c} \quad (7)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα : $m = 2 \text{ kgr} = 2000 \text{ gr}$, $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $m_1 = 200 \text{ gr}$, $\theta_2 = 10^{\circ}\text{C}$ και τὰ υπολογισθέντα $Q_1 = 500 \text{ cal}$, $Q_2 = 16\,000 \text{ cal}$, ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$\theta = 1,59^{\circ}\text{C}$$

1855. Ἐν τινι δοχείῳ ἀναμειγνύονται **0,3 kgr** πάγου, θερμοκρασίας 0°C , με **1,8 kgr** ὕδατος, θερμοκρασίας 10°C καὶ με **0,15 kgr** ὕδρατος, θερμοκρασίας 100°C . Ὄταν ἐπέλθῃ πλήρης θερμοκρασιακὴ ἰσορροπία, ποία θὰ εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Θερμότης τήξεως πάγου : **80 kcal/kgr**, λανθάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ : **540 kcal/kgr**.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀλλοδαποὶ Σχολῶν Πολιτικῶν, Μηχανολόγων, Χημικῶν, 1962).

Λύσις. Ἐὰν ὑγροποιηθῇ ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος θὰ μᾶς ἀπεδώσῃ ποσόν θερμότητος :

$$Q_1 = m_1 \cdot L \quad (1)$$

ὅπου m_1 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος καὶ L ἡ λανθάνουσα θερμότης εξαερώσεως αὐτοῦ. Θέτομεν : $m_1 = 0,15 \text{ kgr}$ καὶ $L = 540 \text{ kcal/kgr}$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$Q_1 = 81 \text{ kcal}$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ πάγος διὰ τὰ τακῇ ἀπαιτεῖ ποσόν θερμότητος :

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda \quad (2)$$

ὅπου $m_2 = 0,3 \text{ kgr}$ ἡ μᾶζα τοῦ πάγου καὶ $\lambda = 80 \text{ kcal/kgr}$ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα καὶ εὐρίσκομεν :

$$Q_2 = 24 \text{ kcal}$$

Ἐπομένως, κατὰ τὴν ἀνάμειξιν θὰ τακῇ ὅλη ἡ ποσότης τοῦ πάγου, ἐφ' ὅσον ἀπαιτεῖται μικρότερον ποσόν διὰ τὴν τήξιν ἀπὸ ὅσον προσφέρεται κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τοῦ ἀτμοῦ. Ἀφ' ἑτέρου, λόγω τῆς σχετικῶς μεγάλης ποσότητος ὕδατος, ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ ἀτμοῦ θὰ ὑγροποιηθῇ. Ἐπομένως τὸ τελικὸν μίγμα θὰ εὐρίσκεται εἰς τὴν ὑγρὰν κατὰστασιν καὶ θὰ ἔχωμεν :

α) Συνολικὸν ποσόν θερμότητος προσφερόμενον ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ :

$$Q' = m_1 \cdot L + m_1 (100^{\circ} - \theta) \cdot c \quad (3)$$

ὅπου θ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

β) Ποσόν ἀπορροφούμενον ὑπὸ τοῦ ὕδατος :

$$Q = m \cdot c (\theta - \theta_2) \quad (4)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα, c ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος.

γ) Συνολικὸν ποσόν θερμότητος ἀπορροφούμενον ὑπὸ τοῦ πάγου :

$$Q'' = m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c \cdot \theta \quad (5)$$

Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν θερμικὴν ἰσορροπίαν θὰ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$Q' = Q + Q'' \quad (6)$$

λαμβάνομεν τελικῶς, λόγω τῶν ἐξισώσεων (3), (4) καὶ (5) :

$$m_1 \cdot L + m_1 (100 - \theta_c) c = m \cdot c (\theta_c - \theta) + m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c \cdot \theta_c$$

$$\eta : \quad \theta_c = \frac{m_1 \cdot L + 100 \cdot c \cdot m_1 + m \cdot c \cdot \theta - m_2 \cdot \lambda}{(m_1 + m_2 + m)}$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα : $m_1 = 0,3 \text{ kgr}$, $m_2 = 0,15 \text{ kgr}$, $m = 1,8 \text{ kgr}$, $\lambda = 80 \text{ kcal/kgr}$, $L = 540 \text{ kcal/kgr}$, $\theta = 10^\circ \text{C}$, $c = 1 \text{ kcal/kgr} \cdot \text{grad}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$\theta_c = 40^\circ \text{C}$$

1856. Στῶμα χιόνος θερμοκρασίας -4°C , ὕψους 12 cm καὶ ἐκτάσεως $1,5 \text{ km}^2$, τήκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας. Τὸ προκύπτον ὕδωρ θερμαίνεται μέχρις 6°C . Νὰ εὐρεθῇ : α) Ποία ποσότης θερμότητος πρέπει νὰ παρασχεθῇ ὑπὸ τοῦ ἥλιου. β) Εἰς πόσους τόννους ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100°C ἀντιστοιχεῖ ἡ θερμότης αὕτη. (Δίδονται : πυκνότης χιόνος $\rho = 200 \text{ kgr/m}^3$, $c_x = 0,5 \text{ kcal/kgr} \cdot \text{grad}$, $\lambda = 80 \text{ kcal/kgr}$, $L = 540 \text{ kcal/kgr}$).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1962).

Λύσις. α) Ἐστω Q τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν θερμότητος διὰ τὴν τήξιν τῆς χιόνος καὶ τὴν θέρμανσιν τοῦ προκύπτοντος ὕδατος μέχρι τῆς θερμοκρασίας τῶν 6°C . Τοῦτο θὰ εἶναι :

$$Q = m \cdot c_x (0^\circ - \theta_1) + m \cdot \lambda + m \cdot c \cdot \theta_2 \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τῆς χιόνος, c_x ἡ εἰδικὴ θερμότης τῆς χιόνος, c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος, λ ἡ θερμότης τήξεως τῆς χιόνος, θ_1 ἡ θερμοκρασία τῆς χιόνος καὶ θ_2 ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος.

Ἀφ' ἑτέρου :

$$m = V \cdot \rho \quad (2)$$

ὅπου V ὁ ὄγκος τῆς χιόνος καὶ ρ ἡ πυκνότης αὐτῆς

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει :

$$m = S \cdot h \cdot \rho \quad (3)$$

ὅπου S ἡ ἐπιφάνεια καὶ h τὸ ὕψος τῆς χιόνος. Ἐπειδὴ δέ : $S = 1,5 \text{ km}^2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$, $h = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$ καὶ $\rho = 200 \text{ kgr/m}^3$, προκύπτει :

$$m = 36 \cdot 10^6 \text{ kgr}$$

Ἀφ' ἑτέρου δίδονται : $c_x = 0,5 \text{ kcal/kgr} \cdot \text{grad}$, $c = 1 \text{ kcal/kgr} \cdot \text{grad}$, $\lambda = 80 \text{ kcal/kgr}$, $\theta_1 = -4^\circ \text{C}$, $\theta_2 = 6^\circ \text{C}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ εὐρίσκομεν :

$$Q = 3168 \cdot 10^6 \text{ kcal}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν L τὴν θερμοκρασίαν ἐξαερώσεως τοῦ ἀτμοῦ καὶ m' τὴν μᾶζαν αὐτοῦ, θὰ ἰσχύῃ διὰ τὴν ὑγροποίησην τοῦ ἀτμοῦ ἡ σχέσις :

$$Q = L \cdot m' \quad \eta : \quad m' = \frac{Q}{L} \quad (4)$$

Δι' ἀντικατάστασεως λαμβάνομεν :

$$m' = \frac{3168 \cdot 10^6}{540} \text{ kgr} \quad \eta : \quad m' = 5867 \text{ τόννοι}$$

1857. Τεμάχιον φωσφόρου εὐρίσκεται εἰς κατάστασιν ὑστερήσεως πήξεως. Μέχρι ποίας θερμοκρασίας πρέπει νὰ κατέλθῃ ὁ φωσφόρος, ὥστε στερεοποιούμενος ὁλικῶς ἀποτόμως, νὰ ἀποκτήσῃ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως αὐτοῦ. Δίδεται ὅτι εἶναι διὰ τὸν φωσφόρον : θερμοκρασία τήξεως 44°C , εἰδικὴ θερμότης $0,20 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης τήξεως $5,4 \text{ cal/gr}$.

Λύσις. Ἐστωσαν θ_c ἡ θερμοκρασία τήξεως, c ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ λ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ φωσφόρου. Ἐστω προσέτι θ ἡ ἀγνωστὸς θερμοκρασία, τοιαύτη ὥστε τὸ ποσὸν θερμότητος Q_1 , τὸ ἐλευθερούμενον κατὰ τὴν στερεοποίησην τοῦ τεμαχίου φωσφόρου, μᾶζης m , νὰ ἰσχύῃ πρὸς τὸ ποσὸν θερ-

μότητος Q_2 , τὸ ἀπαιτούμενον πρὸς ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῆς αὐτῆς μάζης m τοῦ ὑγροῦ φωσφόρου ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας θ εἰς τὴν θ_z .

Κατὰ συνέπειαν θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = m \cdot \lambda \quad (1) \quad Q_2 = m \cdot c (\theta_z - \theta) \quad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ : $Q_1 = Q_2$ (3) λαμβάνομεν :

$$m \cdot c (\theta_z - \theta) = m \cdot \lambda \quad (4)$$

ἐξ ἧς, λύοντες ὡς πρὸς θ , ἔχομεν :

$$\theta = \frac{c \cdot \theta_z - \lambda}{c} \quad (5)$$

*Αντικαθιστώντες ἤδη τὰ διάφορα μεγέθη τῆς (5) διὰ τῶν δεδομένων, ἴπτοι : $c = 0,20 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $\theta_z = 44^\circ\text{C}$, $\lambda = 5,4 \text{ cal/gr}$, λαμβάνομεν :

$$\theta = 17^\circ\text{C}$$

1858. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατροπὴν 50 gr πάγου θερμοκρασίας -10°C εἰς ἀτμὸν θερμοκρασίας 120°C . (Εἰδικὴ θερμότης πάγου $= 0,5 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, ἀτμοῦ $= 0,5 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, θερμότης τήξεως πάγου $= 80 \text{ cal/gr}$, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς $100^\circ\text{C} = 540 \text{ cal/gr}$).

Λύσις. Τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν τῆς θερμότητος εἶναι ἀθροισμα τῶν ἐξῆς ποσοτήτων θερμότητος: α) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_1 , τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ἵνα θερμανθῇ ὁ πάγος ἀπὸ -10°C εἰς 0°C , β) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_2 ἵνα μεταβληθῇ ἀπὸ πάγον 0°C εἰς ὕδωρ 0°C , γ) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_3 ἵνα θερμανθῇ τὸ ὕδωρ ἀπὸ 0°C εἰς 100°C , δ) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_4 ἵνα μετατραπῇ τὸ ὕδωρ 100°C εἰς ἀτμὸν 100°C , ε) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_5 ἵνα θερμανθῇ ὁ ἀτμὸς ἀπὸ 100°C εἰς 120°C .

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν:

$$Q_1 = m \cdot c_{\text{παγ}} \cdot \theta_{\text{παγ}} = 50 \cdot 0,5 \cdot 10 = 250 \text{ cal}$$

$$Q_2 = m \cdot \lambda = 50 \cdot 80 = 4000 \text{ cal}$$

$$Q_3 = m \cdot c_{\text{υδ}} \cdot \theta_{\text{υδ}} = 50 \cdot 1 \cdot 100 = 5000 \text{ cal}$$

$$Q_4 = m \cdot L = 50 \cdot 540 = 27000 \text{ cal}$$

$$Q_5 = m \cdot c_{\text{ατμ}} \cdot (\theta_{\text{ατμ}} - \theta_{\text{εξαερ}}) = 50 \cdot 0,5 \cdot 20 = 500 \text{ cal} \quad \text{καί :}$$

$$Q_{\text{ολ}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 36750 \text{ cal}$$

1859. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀποδίδεται ὑπὸ 20 gr ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100°C , ὅταν ὑγροποιῇται καὶ ψύχεται μέχρις 20°C . (Θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς $100^\circ\text{C} = 540 \text{ cal/gr}$).

Λύσις. Καλοῦμεν m , θ_1 , τὴν μάζαν καὶ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀτμοῦ, L , c , θ_2 , τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως, τὴν εἰδικὴν θερμότητα καὶ τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος. Τότε ἔχομεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ ἵνα ὑγροποιηθῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν ὑγροποιήσεως :

$$Q_1 = m \cdot L$$

β) Θερμότης ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον προῆλθε ἀπὸ τοῦ ἀτμοῦ, ἵνα ψυχθῇ ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς Κελσίου :

$$Q_2 = m \cdot c \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

*Ἀρα ἡ συνολικὴ ἀποδιδομένη θερμότης θὰ εἶναι :

$$Q = Q_1 + Q_2 = m \cdot L + m \cdot c \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ἐὰν θέσωμεν : $m = 20 \text{ gr}$, $L = 540 \text{ cal/gr}$, $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $\theta_1 = 100^\circ\text{C}$ καὶ $\theta_2 = 20^\circ\text{C}$, εὐρίσκομεν :

$$Q = 12400 \text{ cal}$$

1860. Πάγος θερμοκρασίας -10°C θερμαίνεται μέχρις ὅτου μετατραπῇ εἰς ὕδωρ θερμοκρασίας 10°C . Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς κατ' ἐλευθέραν βούλησιν αἱ σχέσεις : α) μεταξύ ὄγκου καὶ θερμοκρασίας, β) μεταξύ ὄγκου καὶ χρόνου, καὶ γ) μεταξύ θερμοκρασίας καὶ χρόνου.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1959).

Λύσις. α) Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ διαγράμματος ὄγκου — θερμοκρασίας (V, θ) θὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ ἑξῆς :

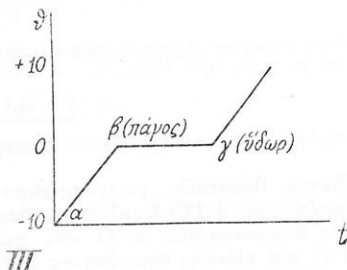
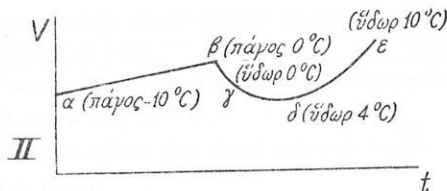
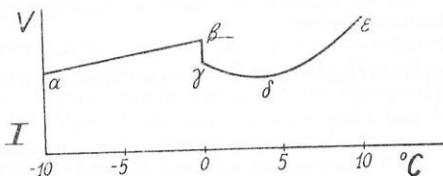
1) Ὁ πάγος θερμαίνεται ἀπὸ -10°C ἕως 0°C διαστέλλεται. Ἐπομένως τὸ τμήμα τοῦτο (αβ) τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ ἀνιούσαν τάσιν (βλ. σχῆμα Ι).

2) Ἡ τήξις τοῦ πάγου εἰς 0°C ἐπιφέρει συστολὴν τοῦ ὄγκου, ἐφ' ὅσον ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι περίπου τὰ $9/10$ τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος εἰς 0°C . Ἀρα, ἐφ' ὅσον ἔχομεν σταθερὰν θερμοκρασίαν, τὸ 2ον τμήμα τοῦ διαγράμματος (βγ) θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμον τμήμα κείμενον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν θερμοκρασιῶν.

3) Τὸ ὕδωρ ἀπὸ 0°C ἕως 4°C συστέλλεται ἐλαφρῶς. Ἐπομένως τὸ τρίτον τμήμα τοῦ διαγράμματος (γδ) θὰ ἔχῃ κατιούσαν τάσιν.

4) Ἀπὸ 4°C καὶ ἄνω τὸ ὕδωρ διαστέλλεται, ἄρα θὰ ἔχομεν ἀνιούσαν τάσιν (δε). β) Τὸ διάγραμμα ὄγκου — χρόνου (V, t), (βλ. σχῆμα ΙΙ), διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἐκτεθέντας λόγους, θὰ εἶναι ἀντίστοιχον εἰς τὰ τμήματα (αβ), (γδ) καὶ (δε). Τὸ τμήμα ὁμῶς (βγ) θὰ εἶναι διάφορον, καθ' ὅσον, κατὰ τὴν προοδευτικὴν τήξιν τοῦ πάγου, ἥτις θὰ διαρκέσῃ ἐπὶ τινα χρόνον, θὰ ἔχομεν προοδευτικὴν συστολὴν τοῦ ὄγκου, ἀνάλογον πρὸς τὸ ἐλάχιστον τηκόμενον ποσὸν πάγου. Ἦτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τμήμα (βγ) τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ κατιούσαν τάσιν.

γ) Τὸ διάγραμμα θερμοκρασίας — χρόνου (θ, t) (βλ. σχῆμα ΙΙΙ) θὰ ἔχῃ ἀνιούσαν τάσιν ἀπὸ -10°C ἕως 0°C (ἐναρξίς τήξεως). Ἐν συνεχείᾳ, μέχρι πέρατος τῆς τήξεως, ἡ θερμοκρασία θὰ διατηρῆται σταθερά. Ἀρα θὰ ἔχομεν εὐθύγραμμον τμήμα παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν (t) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀνιούσαν τάσιν.



1861. Νὰ καθορισθῇ τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν 200 gr ὕδατος 0°C καὶ 20 gr πάγου 0°C εὐρίσκονται ἐντὸς θερμιδομέτρου θερμοχωρητικότητος 30 cal/grad, ὅταν διὰ τοῦ συστήματος διαβιβάζονται 10 gr ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100°C . (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου = 80 cal/gr, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς 100°C = 540 cal/gr).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μάζαν τοῦ πάγου καὶ λ_1 τὴν θερμότητα τήξεως αὐτοῦ, τότε ἡ θερμότης, ἡ ἀπαιτούμενη ἵνα τακῇ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως (0°C), θὰ εἶναι :

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda_1 \quad (1)$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν : $m_1 = 20$ gr καὶ $\lambda_1 = 80$ cal/gr, εὐρίσκομεν :

$$Q_1 = 1600 \text{ cal}$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m_2 τὴν μάζαν τῶν ἀτμῶν καὶ λ_2 τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, τότε ἡ θερμότης, ἡ ἀποδιδόμενη κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τῶν ἀτμῶν ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν ζέσεως, θὰ εἶναι :

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda_2 \quad (2)$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν : $m_2 = 10$ gr καὶ $\lambda_2 = 540$ cal/gr, εὐρίσκομεν :

$$Q_2 = 5400 \text{ cal}$$

Ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἀποτελεσμάτων προκύπτει ὅτι ἡ θερμότης, ἥτις ἀποδίδεται κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τῶν ἀτμῶν, εἶναι ἀρκετὴ, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἵνα τακῇ ὁ πάγος καὶ ἀφ' ἑτέρου ἵνα τὸ προκύπτον ἔξ

αὐτοῦ ὕδωρ καθὼς καὶ τὸ προϋπάρχον θερμανθοῦν εἰς θερμοκρασίαν θ κειμένην μεταξύ τῶν 0°C καὶ τῶν 100°C .

Διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ προερχομένου ἐκ τοῦ πάγου εἰς $\theta^\circ\text{C}$ θὰ ἀπαιτηθῇ θερμότης :

$$Q_3 = c \cdot m_3 \cdot \theta \quad (3)$$

διὰ δὲ τὴν θέρμανσιν τοῦ θερμιδομέτρου θὰ ἀπαιτηθῇ θερμότης :

$$Q_4 = k \cdot \theta \quad (4)$$

ὅπου k εἶναι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου.

Ἐς ἄλλου, κατὰ τὴν ψύξιν τοῦ ὕδατος ἀπὸ 100°C εἰς $\theta^\circ\text{C}$ θὰ ἀποδοθῇ θερμότης :

$$Q_5 = c \cdot m_2 \cdot (100 - \theta) \quad (5)$$

Ὅτω, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 + Q_3 + Q_4 = Q_2 + Q_5$$

ἦ, λόγῳ τῶν σχέσεων (3), (4) καὶ (5), θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 + c \cdot m_3 \cdot \theta + k \cdot \theta = Q_2 + c \cdot m_2 \cdot (100 - \theta) \quad (6)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς τὴν ζητούμενην θερμοκρασίαν θ καὶ λαμβάνομεν :

$$\theta = \frac{Q_2 - Q_1 + 100 c \cdot m_2}{c \cdot (m_2 + m_3) + k} \quad (7)$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν σχέσιν (7) τὰς εὐρεθείσας τιμὰς : $Q_1 = 1600 \text{ cal}$, $Q_2 = 5400 \text{ cal}$, καὶ τὰς δοθείσας τιμὰς : $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, $m_2 = 10 \text{ gr}$, $m_3 = 200 + 20 = 220 \text{ gr}$ καὶ $k = 30 \text{ cal/grad}$, εὐρίσκομεν :

$$\theta = 18,4^\circ\text{C}$$

*Ἀρα τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι ὕδωρ θερμοκρασίας $18,4^\circ\text{C}$.

1862. Ἐντὸς θερμικῶς μεμονωμένου δοχείου ἐκ σιδήρου, μάζης 1 kg , εἰδικῆς θερμότητος $0,115 \text{ kcal/kg}$, θερμοκρασίας 5°C , ρίπτεται ποσότης 5 kg ὕδατος θερμοκρασίας 25°C καὶ τεμάχιον χαλκοῦ μάζης 2 kg , θερμοκρασίας 15°C καὶ εἰδικῆς θερμότητος $0,094 \text{ kcal/kg}$. Ζητεῖται τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσφερθῇ ἔξωθεν εἰς kcal μέχρι βρασμοῦ τῆς ἡμισείας ποσότητος ὕδατος. (Θερμότης ἀτμοποιήσεως ὕδατος ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν = 539 kcal/kg).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων, 1957).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Q τὴν ποσότητα θερμότητος ἡ ὁποία θὰ προσφερθῇ ἔξωθεν, αὕτη θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων θερμότητος, τὰς ὁποίας θὰ ἀπορροφήσουν : 1) τὸ δοχεῖον τοῦ σιδήρου, 2) τὸ τεμάχιον τοῦ χαλκοῦ, 3) ἡ συνολικὴ ποσότης τοῦ ὕδατος, ὥστε ἅπαντα νὰ ἀποκτήσουν θερμοκρασίαν 100°C , καὶ 4) ἡ ἡμίσεια ποσότης τοῦ ὕδατος διὰ τὴν ἀτμοποίησιν τῆς. Ἐὰν καλέσωμεν Q_1 , Q_2 , Q_3 καὶ Q_4 ἀντιστοίχως τὰ ἀπορροφούμενα ποσὰ θερμότητος, θὰ ἔχωμεν :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \quad (1)$$

*Ἀφ' ἑτέρου ὁμως :

$$Q_1 = m_{\sigma} \cdot c_{\sigma} \cdot (100 - \theta_{\sigma}) \quad (2)$$

$$Q_2 = m_{\chi} \cdot c_{\chi} \cdot (100 - \theta_{\chi}) \quad (3)$$

$$Q_3 = m_{\nu\delta} \cdot c_{\nu\delta} \cdot (100 - \theta_{\nu\delta}) \quad (4)$$

καί :

$$Q_4 = \frac{m_{\nu\delta}}{2} \cdot L \quad (5)$$

ὅπου m , c καὶ θ μὲ τοὺς ἀντιστοίχους δείκτας ἐκφράζουν τὴν μάζαν, τὴν εἰδικὴν θερμότητα καὶ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ σιδηροῦ δοχείου, τοῦ χαλκίνου τεμαχίου καὶ τοῦ ὕδατος, καὶ L τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν πέντε ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$Q = m_{\sigma} \cdot c_{\sigma} \cdot (100 - \theta_{\sigma}) + m_{\chi} \cdot c_{\chi} \cdot (100 - \theta_{\chi}) + m_{\nu\delta} \cdot c_{\nu\delta} \cdot (100 - \theta_{\nu\delta}) + m_{\nu\delta} \cdot L/2$$

και αντικαθιστώντες τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν :

$$Q = 1749,4 \text{ kcal}$$

1863. Ποσότης ὑγροῦ ἴση πρὸς $m_1 = 3,6 \text{ gr}$ ἀφίεται εἰς κρυσταλλωτήριον διαμέτρου $d_1 = 6 \text{ cm}$ καὶ ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν $p_1 = 760 \text{ mm Hg}$ εξατμίζεται ἐντὸς χρόνου $t_1 = 18 \text{ sec}$. Ζητεῖται: Ἐντὸς πόσου χρόνου t_2 θὰ εξατμισθῇ ποσότης τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ ἴση πρὸς $m_2 = 5 \text{ gr}$, ἐντὸς κρυσταλλωτηρίου διαμέτρου $d_2 = 5 \text{ cm}$ καὶ ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν $p_2 = 740 \text{ mm Hg}$, ὑποτιθεμένης σταθερᾶς τῆς τάσεως ἀτμῶν τοῦ ὑγροῦ καὶ τῆς μεγίστης τάσεώς του.

(Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, Σ.Μ.Α. 1959).

Λύσις. Ἡ ταχύτης εξατμίσεως u ἐνὸς ὑγροῦ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ S , ἀνάλογος τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς μεγίστης τάσεως τῶν ἀτμῶν τοῦ ὑγροῦ $P_{\max}$, ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν θερμοκρασίαν, καὶ τῆς μερικῆς τάσεως P τῶν ἀτμῶν τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ ἐν τῇ ἀτμοσφαίρᾳ, ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως p καὶ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ μίαν σταθεράν k , λόγῳ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ. Ἦτοι :

$$u = k \cdot \frac{S \cdot (P_{\max} - P)}{p} \quad (1)$$

Ἐχομεν ὁμῶς ἐπίσης ὅτι :

$$u = \frac{m}{t} \quad (2)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα καὶ t ὁ χρόνος. Ἐπομένως ὁ χρόνος εξατμίσεως εἶναι :

$$t = \frac{m \cdot p}{k \cdot S \cdot (P_{\max} - P)} \quad (3)$$

θὰ ἔχωμεν δὲ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τοῦ ὑγροῦ :

$$t_1 = \frac{m_1 \cdot p_1}{k \cdot S_1 \cdot (P_{\max} - P)} \quad (4) \quad \text{καί:} \quad t_2 = \frac{m_2 \cdot p_2}{k \cdot S_2 \cdot (P_{\max} - P)} \quad (5)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{m_2 \cdot p_2 \cdot S_1}{m_1 \cdot p_1 \cdot S_2} \quad (6) \quad \text{ἢ:} \quad t_2 = t_1 \cdot \frac{m_2 \cdot p_2 \cdot d_1^2}{m_1 \cdot p_1 \cdot d_2^2} \quad (7)$$

Δίδονται : $t_1 = 18 \text{ sec}$, $m_1 = 3,6 \text{ gr}$, $p_1 = 760 \text{ mm Hg}$, $d_1 = 6 \text{ cm}$, $m_2 = 5 \text{ gr}$, $p_2 = 740 \text{ mm Hg}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$. Ἀρα :

$$t_2 = 35 \text{ sec}$$

1864. Ὅριζόντιος σωλὴν ὁμοιομόρφου ἐσωτερικῆς διαμέτρου, κλειστὸς εἰς τὸ ἓν πέρασ, ἔχει ἐγκλωβισμένον ἀέρα μεταξὺ κλειστοῦ πέρατος καὶ μικρᾶς σταγόνης ὕδατος. Τὸ ἕτερον πέρασ τοῦ σωλῆνος εἶναι ἀνοικτὸν, ἢ δὲ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 75 cm στήλης ὕδραργγρου. Ὑπὸ θερμοκρασίαν 12°C τὸ μήκος τῆς στήλης ἀέρος εἶναι 42 cm καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 50°C εἶναι $53,5 \text{ cm}$. Ἡ πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος ὑπὸ 12°C εἶναι $1,05 \text{ cm}$ στήλης ὕδραργγρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 50°C .

Λύσις. Ἐστώσαν p_0 ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις, p_1 ἡ πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 12°C , p_2 ἡ μερικὴ πίεσις τοῦ ἐγκλωβισμένου ἀέρος, l τὸ μήκος αὐτοῦ καὶ S ἡ διατομὴ τοῦ σωλῆνος. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς μίξεως τῶν ἀερίων τοῦ Dalton, θὰ ἔχωμεν :

$$p_0 = p_1 + p_2 \quad \text{ἢ:} \quad p_2 = p_0 - p_1 \quad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ ὄγκος V τοῦ ἐγκλωβισμένου ἀέρος θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = S \cdot l \quad (2)$$

Ἐστώσαν ἤδη p'_1 ἡ πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 50°C , p'_2 ἡ με-

ρική πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, l' τὸ νέον μήκος τῆς ἀερίου στήλης καὶ V' ὁ νέος ὄγκος. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$p'_2 = p_0 - p'_1 \quad (3) \quad \text{καὶ :} \quad V' = S \cdot l' \quad (4)$$

Βάσει τοῦ νόμου τῶν τελείων ἀερίων, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ἀέρα :

$$\frac{p_2 \cdot V}{T} = \frac{p'_2 \cdot V'}{T'} \quad \text{ἢ :} \quad p'_2 = \frac{p_2 \cdot V \cdot T'}{V' \cdot T} \quad (5)$$

ὅπου T καὶ T' αἱ ἀπόλυτοι θερμοκρασίαι τοῦ ἀέρος εἰς τὰς δύο φάσεις, ἀντιστοίχως. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5) τὰς τιμὰς τῶν V καὶ V' ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4), ὁπότε προκύπτει :

$$p'_2 = \frac{p_2 \cdot l \cdot T'}{l' \cdot T} \quad (6)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (3) καὶ (6) προκύπτει :

$$p_0 - p'_1 = \frac{(p_0 - p_1) \cdot l \cdot T'}{l' \cdot T} \quad \text{ἢ :} \quad p'_1 = p_0 - \frac{(p_0 - p_1) \cdot l \cdot T'}{l' \cdot T} \quad (7)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (7) τὰ δεδομένα : $p_0 = 75$ cm στήλης ὑδραργύρου, $p_1 = 1,05$ cm στήλης ὑδραργύρου, $l = 42$ cm, $l' = 53,5$ cm, $T = 273 + 12 = 285^\circ\text{K}$ καὶ $T' = 273 + 50 = 323^\circ\text{K}$, καὶ λαμβάνομεν :

$$p'_1 = 9,21 \text{ cm στήλης ὑδραργύρου}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1865. Πόσος πάγος θερμοκρασίας 15°C δύναται νὰ τακῇ ὑπὸ ἐνὸς χιλιογράμμου ὕδατος θερμοκρασίας 50°C . (Εἰδικὴ θερμότης πάγου = $0,58 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἱατρικὴ Σχολή, 1957). (Ἄπ. $563,7 \text{ gr}$.)

1866. Ποία μᾶζα πάγου θερμοκρασίας -18°C δύναται νὰ τακῇ ἀπὸ 3 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 50°C , ἐὰν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου εἶναι : $c_p = 0,5 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. (Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Τμήμα Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1959). (Ἄπ. 1685 gr .)

1867. Πόση ποσότης πάγου -20°C δέον νὰ ἀναμιχθῇ μὲ 2 kgr ὕδατος 5°C , ἵνα, ὅταν ἀποκατασταθῇ θερμικὴ ἰσορροπία, ἡ μᾶζα τοῦ πάγου ἔχῃ αὐξηθῇ κατὰ 50 gr. Εἰδικὴ θερμότης πάγου $0,5 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr . (Σχολὴ Εὐελπίδων, 1960). (Ἄπ. $1,4 \text{ kgr}$.)

1868. Τεμάχιον μετάλλου μάζης 83 gr βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν -180°C καὶ μεταφέρεται κατόπιν ἐντὸς 100 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 10°C περιεχομένου ἐντὸς δοχείου μάζης 50 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος $0,20 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Ἐὰν σχηματισθοῦν 5 gr πάγου, ποία ἡ μέση εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου. (Λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου = 80 cal/gr). (Ἄπ. $0,100 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.)

1869. Ἐὰν ἡ ἡλιακὴ ἀκτινοβολία μεταφέρῃ $1,5 \text{ cal/min} \cdot \text{cm}^2$, νὰ εὐρεθῇ πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἵνα ὁ ἥλιος τήξῃ στρώμα χιόνος πάχους 2 cm. Δίδονται : Θερμότης τήξεως πάγου $\lambda = 80 \text{ cal/gr}$, πυκνότης πάγου $\rho = 0,917 \text{ gr/cm}^3$. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμήματα Φυσικὸν καὶ Φυσιογνωστικόν, 1959). (Ἄπ. 1 h 37 min 49 sec.)

1870. Ἀτμός ἐκ ζέοντος ὕδατος διαβιβάζεται ἐντὸς μίγματος πάγου καὶ ὕδατος, μέχρις ὅτου τὸ βάρος τοῦ μίγματος αὐξηθῇ κατὰ 2 gr*. Ποία ποσότης πάγου ἐτάκη. (Λανθάνουσα θερμότης ἐξατμίσεως ὕδατος = 536 cal/gr , λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr). (Ἄπ. $15,9 \text{ gr}$.)

1871. Ποῖον ὕψος βροχῆς πρέπει νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας χιόνος, πάχους 5 cm καὶ θερμοκρασίας -2°C διὰ νὰ τακῇ ἡ χιών. Θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τῆς βροχῆς 6°C . ($\rho_{\chiιόν} = 200 \text{ kg/m}^3$, εἰδικὴ θερμότης πάγου $= 0,50 \text{ kcal/kg}$, λαυθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 135 mm.)

1872. Πόσαι χιλιοθερμίδες (kcal) ἀπαιτοῦνται ἵνα μεταβάλουν 5 kgρ πάγου ὑπὸ θερμοκρασίαν -30°C εἰς ἀτμὸν θερμοκρασίας 170°C . (Εἰδικὴ θερμότης ἀτμοῦ καὶ πάγου περίπου $0,5 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Λαυθάνουσα θερμότης πάγου 80 cal/gr , λαυθάνουσα θερμότης εξαερώσεως ὕδατος 540 cal/gr .) (Δημοσία Σχολὴ Ὑπομηχανικῶν Ἀθηνῶν, 1962.) (Ἀπ. 3850 kcal.)

1873. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατραποῦν 5 kgρ πάγου 0°C εἰς ὕδωρ 30°C . ($c_{\text{ὕδωρ}} = 1 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $\lambda_{\text{ὕδωρ}} = 80 \text{ kcal/kg}$.) (Ἀπ. 550 kcal.)

1874. Ποῖον ποσὸν θερμότητος πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἐκ 5 kgρ ὕδατος 25°C διὰ νὰ μεταβληθῇ τοῦτο εἰς πάγον 0°C . (Ἀπ. 525 kcal.)

1875. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατραποῦν 5 kgρ πάγου -12°C εἰς ὕδωρ 50°C . ($c_{\text{πάγου}} = 0,5 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$.) (Ἀπ. 680 kcal.)

1876. Ποσότης 1 kgρ ὑδραργύρου 20°C ψύχεται μέχρι πήξεως (-39°C) καὶ μεταβαίνει εἰς τὴν στερεὰν κατὰστασιν. Ποῖον τὸ πρὸς τοῦτο ἀφαιρούμενον ποσὸν θερμότητος. ($c_{\text{Hg}} = 0,033 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $\lambda_{\text{Hg}} = 3 \text{ kcal/kg}$.) (Ἀπ. 4,947 kcal.)

1877. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἐλευθεροῦται κατὰ τὴν συμπύκνωσιν 500 gr ὑδρατμῶν 100°C καὶ τὴν ψύξιν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ὕδατος μέχρις 20°C . (Ἀπ. 309,5 kcal.)

1878. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ μετατρέψωμεν 2 kgρ ὕδατος 25°C εἰς ἀτμὸν 140°C ὑπὸ πίεσιν 1 at. ($c_{\text{ὕδρατμῶν}} = 0,46 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$.) (Ἀπ. 1264,8 kcal.)

1879. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατρέψωμεν 50 gr πάγου -30°C εἰς ἀτμὸν 120°C πίεσεως 1 at. (Ἀπ. 37,16 kcal.)

1880. Τί θὰ συμβῇ ἂν ἐκ ποσότητος 50 gr ὑδρατμῶν 100°C ἀφαιρέσωμεν ποσὸν θερμότητος 36 kcal. (Ἀπ. Θὰ ἔχωμεν πάγον -2°C .)

1881. Ποῖαν ποσότητα ὑδρατμῶν 100°C πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν εἰς 10 kgρ ὕδατος 20°C διὰ νὰ ἔχωμεν τελικὴν θερμοκρασίαν μίγματος 90°C . (Ἀπ. 1,275 kgρ.)

1882. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατρέψωμεν 3 kgρ ὕδατος 15°C εἰς ἀτμὸν 100°C . ($L_{\text{ὕδωρ}} = 539 \text{ kcal/kg}$.) (Ἀπ. 1872 kcal.)

1883. Ποσότης 1 kgρ πάγου -15°C ἀναμειγνύεται μετὰ 8 kgρ ὕδατος 75°C . Ποῖα ἡ τελικὴ θερμοκρασία μετὰ τὴν ὁλοκληρωτικὴν τήξιν τοῦ πάγου. ($c_{\text{πάγου}} = 0,5 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$.) (Ἀπ. $56,9^{\circ}\text{C}$.)

1884. Ἐντὸς θερμιδομέτρου φέρονται 600 gr ζέοντος ὕδατος καὶ 500 gr πάγου -4°C . Ποῖα ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. (Ἀπ. $17,3^{\circ}\text{C}$.)

1885. Θερμιδοόμετρον ἐξ ὀρειχάλκου βάρους 20 gr* περιέχει 500 gr ὑγροῦ εἰδικῆς θερμότητος $0,05 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Τὸ θερμιδοόμετρον μετὰ τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ εὐρίσκεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 20°C . Προστίθενται ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου 50 gr πάγου 0°C . Ζητεῖται ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Δεδομένα: Εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου $0,095 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr . (Δημοσία Σχολὴ Ὑπομηχανικῶν Ἀθηνῶν, 1961.) (Ἀπ. 0°C .)

1886. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατρέψῃ 100 gr πάγου ὑπὸ -15°C , περιεχομένου ἐντὸς θερμιδομέτρου ἰσοδυνάμου πρὸς ὕδωρ 5 gr, εἰς ὕδωρ ὑπὸ 20°C . ('Απ. 10,925 cal.)

1887. Πόσαι χιλιοθερμίδες ἀπαιτοῦνται ἵνα 24 kgr πάγου θερμοκρασίας -12°C μετατραποῦν εἰς ὕδωρ θερμοκρασίας 22°C . (Εἰδική θερμότης πάγου 0,5 cal/gr · grad). ('Απ. 2592 kcal.)

1888. Δοχεῖον περιέχει 1 l ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 18°C καὶ θέλομεν νὰ τὸ ψύξωμεν μέχρις 6°C . Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν ἐντὸς αὐτοῦ τεμάχιον πάγου. Πόσον τὸ ἐλάχιστον βάρος τοῦ ἀπαιτουμένου πάγου πρὸς ψύξιν. (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr). ('Απ. 139,5 gr*.)

1889. Ἐπὶ τεμαχίου πάγου 0°C τίθενται 300 gr κασσιτέρου. Ἡ τακείσα μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι 18,5 gr. Πόση ἦτο ἡ θερμοκρασία τοῦ κασσιτέρου. (Εἰδική θερμότης κασσιτέρου 0,054 cal/gr · grad, θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr). ('Απ. 91°C .)

1890. Τεμάχιον σιδήρου μάζης 200 gr ἐξάγεται ἐκ κλιβάνου καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς τῆς ὀπῆς ὄγκου πάγου ὑπὸ 0°C . Τὸ σχηματιζόμενον ὕδωρ εὐρίσκεται ὅτι καταλαμβάνει ὄγκον 225 cm³. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ κλιβάνου. Εἰδική θερμότης σιδήρου 0,12 cal/gr · grad. ('Απ. 750°C .)

1891. Ἐὰν 2 kgr μετάλλου (εἰδικῆς θερμότητος 0,092 cal/gr · grad) ὑπὸ θερμοκρασίαν 190°C τοποθετηθοῦν ἐντὸς 0,4 kgr πάγου ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C , ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr. ('Απ. $5,1^{\circ}\text{C}$.)

1892. Δοχεῖον περιέχει μῖγμα πάγου καὶ ὕδατος συνολικῆς μάζης 400 gr. Ποία ποσότης πάγου περιείχετο ἐντὸς τοῦ μίγματος, ὅταν μετὰ προσθήκην ἐντὸς αὐτοῦ 300 gr ὕδατος θερμοκρασίας 80°C ἡ τελικὴ θερμοκρασία κατέστη 10°C . (Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι ἀμελητέα). ('Απ. 213 gr.)

1893. Ἐπὶ τεμαχίου πάγου 0°C τίθεται τεμάχιον σιδήρου βάρους 500 gr* καὶ θερμοκρασίας 100°C . Νὰ εὐρεθῇ ἡ τακείσα μᾶζα πάγου. (Εἰδική θερμότης σιδήρου 0,113 cal/gr · grad. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr). ('Απ. 70,6 gr.)

1894. Ὁ κασσίτερος ἐν στερεᾷ καὶ ὑγρᾷ καταστάσει ἔχει μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 0°C καὶ 400°C εἰδικὴν θερμότητα 0,053 kcal/kg · grad. Τί συμβαίνει ὅταν ἐντὸς κοιλότητος πάγου ρίψωμεν 25 gr τετηκότος κασσιτέρου. (Σημεῖον τήξεως κασσιτέρου 232°C , θερμότης τήξεως 14,2 kcal/kg, θερμοκρασία κασσιτέρου 300°C .) ('Απ. Τήκονται 9,41 gr πάγου.)

1895. Πόσα γραμμάρια πάγου θερμοκρασίας -8°C δύνανται νὰ τακοῦν ὑπὸ μάζης 1,05 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 60°C . (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr). ('Απ. 750 gr.)

1896. Θερμιδομέτρον ἐκ χαλκοῦ βάρους 100 gr περιέχει 150 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 30°C . Τεμάχια πάγου μὴ ἀποξηρανθέντα ρίπτονται ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία μετὰ τὴν ἀνάδυσιν γίνεται 5°C . Τὸ βάρος τοῦ θερμιδομέτρου μετὰ τοῦ περιεχομένου εἶναι τότε 300 gr. Πόσον ὕδωρ ἐτέθη ἐντὸς αὐτοῦ ὁμοῦ μετὰ τῶν τεμαχίων τοῦ πάγου. (Λανθάνουσα θερμότης τοῦ πάγου 80 cal/gr, εἰδική θερμότης χαλκοῦ 0,1 cal/gr · grad). ('Απ. $46\frac{7}{8}$ gr ξηροῦ πάγου καὶ $3\frac{1}{8}$ gr ὕδατος.)

1897. Θερμιδομέτρον ἐκ χαλκοῦ μάζης 24 gr περιέχει 100 gr ὕδατος ὑπὸ $19,5^{\circ}\text{C}$. Προστίθενται 12,8 gr ξηροῦ πάγου ὑπὸ 0°C καὶ ἡ θερμοκρασία πίπτει εἰς $8,5^{\circ}\text{C}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λανθάνουσα θερμότης τοῦ πάγου. Εἰδική θερμότης χαλκοῦ 0,1 cal/gr · grad. ('Απ. 79,5 cal/gr.)

1898. Πόση ποσότης ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C δέον νὰ χυθῇ ἐπὶ τεμαχίου πάγου θερμοκρασίας 0°C , μάζης 200 gr, ἵνα τὸν τήξῃ. (Ἀπ. 160 gr.)

1899. Θερμιδόμετρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ εἶναι 15 gr, περιέχει 250 cm^3 ἐλαίου εἰδικῆς θερμότητος $0,6\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$ καὶ εἰδικοῦ βάρους $0,8\text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐλαίου εἶναι 20°C , πόσος πάγος εἰς 0°C δέον νὰ προστεθῇ ἐντὸς αὐτοῦ ἵνα τὸ ψύξῃ μέχρι 10°C . (Ἀπ. 15 gr.)

1900. Τεμάχιον χαλκοῦ, βάρους 40 gr*, ψύχεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ ἀέρος καὶ ἐν συνεχείᾳ ρίπτεται ἐντὸς ὕδατος θερμοκρασίας τηκομένου πάγου. Ὁ σχηματισθεὶς πάγος ζυγίζει 7,4 gr*. Εὗρατε τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ ἀέρος. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,08\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$, θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr). (Ἀπ. -185°C .)

1901. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μεταβληθοῦν : α) 120 gr πάγου 0°C εἰς ὕδωρ 0°C . β) 5 gr πάγου 0°C εἰς ὕδωρ 100°C . γ) 10 gr πάγου -10°C εἰς ὕδωρ 60°C . δ) 15 gr στερεοῦ κασσιτέρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 232°C εἰς ὑγρὸν τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας. ε) 40 gr κασσιτέρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 7°C εἰς τετηκότα κασσίτερον ὑπὸ θερμοκρασίαν 232°C . (Δίδονται : θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr , θερμότης τήξεως τοῦ κασσιτέρου 14 cal/gr , σημεῖον τήξεως τοῦ κασσιτέρου 322°C). (Ἀπ. α' 9600 cal. β' 900 cal. γ' 1450 cal. δ' 210 cal. ε' 1055 cal.)

1902. Μεταλλικὸν ἀντικείμενον ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C , μάζης 0,7 kgr, χύνεται ἐντὸς μεγάλου τεμαχίου ἐκ πάγου ὑπὸ 0°C καὶ προκαλεῖ τὴν τήξιν 0,85 kgr πάγου. Ποία ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀντικειμένου. Λαμβάνουσα θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr . (Ἀπ. 0,0906 kcal/kg·grad.)

1903. Μικρὰ ποσότης πάγου ὑπὸ 0°C εἰσάγεται ἐντὸς 500 cm^3 ὕδατος ὑπὸ 30°C περιεχομένου ἐντὸς χαλκίνου δοχείου μάζης 100 gr. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι 5°C μόλις ὅλος ὁ πάγος τακῇ ἐντελῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βᾶρος τοῦ πάγου. (Εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ = $0,50\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$). (Ἀπ. 150 gr*.)

1904. Ποίαν ποσότητα ὑδρατμῶν 100°C πρέπει νὰ διαβιβάζωμεν εἰς μίγμα 500 gr ὕδατος καὶ 500 gr πάγου, εὐρισκόμενον εἰς θερμικὴν ἰσορροπίαν, διὰ νὰ ἔχωμεν τελικῶς μόνον ὕδωρ 20°C . (Ἀπ. 96,9 kgr.)

1905. Ποσότης 1 kgr ὑδρατμῶν 100°C καὶ πίεσεως 1 at φέρεται εἰς ἐπικοινωνίαν μετὰ ποσότητος 1 kgr πάγου 0°C . Τί θὰ συμβῇ μετὰ τὴν θερμικὴν ἰσορροπίαν, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀπωλειῶν θερμότητος εἰς τὸ περιβάλλον. (Ἀπ. 0,666 kgr ὑδρατμῶν 100°C καὶ 1,334 kgr ὕδατος 100°C .)

1906. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ποσὰ θερμότητος, τὰ ἀπαιτούμενα πρὸς πλήρη ἐξάερωσιν : α) 50 gr αἰθέρος 15°C (θερμ. ἐξαιρ. αἰθέρος 35°C , $c_{\text{αιθ}} = 0,542\text{ kcal/kg}\cdot\text{grad}$, $L_{\text{αιθ}} = 85\text{ kcal/kg}$), β) 30 gr βενζόλης 20°C (θερμ. ἐξαιρ. βενζόλης 80°C , $c_{\text{βενζ}} = 0,406\text{ kcal/kg}\cdot\text{grad}$, $L_{\text{βενζ}} = 94\text{ kcal/kg}$), γ) 400 gr ὑδραργύρου 30°C (θερμ. ἐξαιρ. ὑδραργύρου 357°C , $c_{\text{υδρ}} = 0,033\text{ kcal/kg}\cdot\text{grad}$, $L_{\text{υδρ}} = 68\text{ kcal/kg}$). (Ἀπ. α' 4,792 kcal, β' 3,551 kcal, γ' 31,52 kcal.)

1907. Ποῖον ποσὸν μάζης ἐκ σιδήρου ὑπὸ θερμοκρασίαν 17°C θὰ προκαλέσῃ τὴν ἐξάτμισιν 3 gr ὑγροῦ ὀξυγόνου ὑπὸ θερμοκρασίαν -183°C ἐὰν ριφθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. (Λαμβάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ ὀξυγόνου = 51 cal/gr , εἰδικὴ θερμότης σιδήρου = $0,09\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$. Σημεῖον ζέσεως ὑγροῦ ὀξυγόνου = -183°C). (Ἀπ. 8,5 gr.)

1908. Ποσότης 6 gr ἀτμοῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C διέρχεται ἐντὸς 80 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 14°C ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ μάζης 150 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος $0,1\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία. (Λαμβάνουσα θερμότης ἀτμοῦ = 540 cal/gr). (Ἀπ. $51,2^{\circ}\text{C}$.)

1909. Χάλκινον θερμιδόμετρον ζυγίζει 43,70 gr ὅταν εἶναι κενὸν καὶ 251,33 gr ὅταν πληροῦται ἐν μέρει δι' ὕδατος ὑπὸ 5,8 °C. Ξηρὸς ἀτμὸς ὑπὸ 100 °C διοχετεύεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέχρις ὅτου ἡ θερμοκρασία φθάσῃ τοὺς 30,0 °C. Τὸ θερμιδόμετρον καὶ τὰ περιεχόμενα ὑλικά ζυγίζουν τώρα 259,81 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λαμβάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad). (Ἀπ. 535 cal/gr.)

1910. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θερμότητος ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, ὠρισμένη μάζα ἐξ αὐτοῦ, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 30 °C, θερμαίνεται ἐντὸς 35 sec μέχρι τοῦ σημείου ζέσεως, καὶ ἐντὸς τῶν ἐπομένων 4,5 min αὕτη ἐξατμίζεται τελείως. Ποία ἡ θερμότης ἐξαερώσεως. (Ἀπ. 540 cal/gr.)

1911. Ξηρὸς ἀτμὸς ὑπὸ 100 °C διοχετεύεται ἐντὸς 100 gr ὕδατος ὑπὸ 15 °C, περιεχομένου ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου, μάζης 50 gr. Ὅταν ἡ θερμοκρασία φθάσῃ τοὺς 43,5 °C, 5 gr ἀτμοῦ ἔχουν συμπυκνωθῇ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λαμβάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,101 cal/gr · grad). (Ἀπ. 542 cal/gr.)

1912. Ἐντὸς σιδηροῦ δοχείου μάζης 100 gr θερμικῶς μεμονωμένου, περιέχοντος 300 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C, ρίπτεται σιδηρὰ μάζα 400 gr εἰς θερμοκρασίαν 1000 °C. Τὸ δοχεῖον μετὰ τοῦ περιεχομένου του ζυγίζει 773 gr. Ἐάν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σιδήρου εἶναι 0,114 cal/gr · grad, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λαμβάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ. (Ἀπ. 540 cal/gr.)

1913. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ καλῶς μονωμένον θερμικῶς ἔχει μάζαν 58,3 gr. Προστίθεται ὕδωρ καὶ ἡ ὅλη μάζα φθάνει εἰς 117,47 gr. Ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ περιεχομένου του εἶναι 12 °C. Ποία θὰ εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ περιεχομένου του μετὰ τὴν προσθήκην ἐντὸς αὐτοῦ 5 gr ξηροῦ ἀτμοῦ. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,1 cal/gr · grad, λαμβάνουσα θερμότης ἀτμοῦ = 540 cal/gr). (Ἀπ. 56,9 °C.)

1914. Θερμιδόμετρον, εἰδικῆς θερμότητος 0,1 cal/gr · grad καὶ μάζης 22,4 gr, ζυγίζει 145,16 gr μετὰ τὴν προσθήκην ἐντὸς αὐτοῦ ὀλίγου ὕδατος. Τὸ ὕδωρ, ἀρχικῶς εἰς 20 °C, ψύχεται εἰς 4 °C διὰ τῆς προσθηκῆς τεμαχίων ὑγροῦ πάγου. Τότε ἡ μάζα γίνεται 173,16 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑκατοστιαία ἀναλογία βάρους τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον ὑπῆρχεν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ πάγου. (Ἡ λαμβάνουσα θερμότης τοῦ πάγου δέον νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 80 cal/gr). (Ἀπ. 15,7%.)

1915. Εἰς ἐστίαν ἐξατμίζονται 5 kg ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 0 °C καὶ ὑπὸ πίεσιν 760 Torr διὰ καύσεως 1 kg ἄνθρακος, θερμότητος καύσεως 7500 kcal/kg. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐστίας. (Ἀπ. 42,6%.)

1916. Ἀτμὸς εἰσέρχεται εἰς σῶμα ἐγκαταστάσεως καλοριφέρ ὑπὸ θερμοκρασίαν 104 °C καὶ ἐξέρχεται ὡς ὕδωρ 60 °C. Ἐάν 2 lt ὕδατος ἐπιστρέφουν ἐκ τοῦ σώματος ἀνὰ ὥραν, πόση θερμότης ἀπομένει εἰς τὸ σῶμα. (Ἀπ. 1 164 000 cal.)

1917. Τεμάχιον χαλκοῦ, μάζης 0,495 gr, ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C, ριπτόμενον ἐντὸς ὑγροῦ ὀξυγόνου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ζέσεώς του -183 °C, προκαλεῖ ἐξάτμισιν μέρους τοῦ ὑγροῦ. Τὸ σχηματισθὲν ἀέριον ἔχει ὄγκον 123 cm³ ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C καὶ πίεσιν 75,5 cm στήλης ὕδραργύρου. Ἐάν ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου, ὑπὸ κανονικῆς συνθήκας, εἶναι 1,43 gr/lt καὶ ἡ λαμβάνουσα θερμότης ἐξατμίσεως εἶναι 51 cal/gr, ποία ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ μεταξύ 15 °C καὶ -183 °C. (Ἀπ. 0,086 cal/gr · grad.)

1918. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λαμβάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου βάσει τῶν κάτωθι δεδομένων : Μάζα θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ 24,40 gr. Μάζα θερμιδομέτρου καὶ ὕδατος ὑπὸ 21 °C = 130,56 gr. Μάζα τοῦ θερμιδομέτρου μετὰ τὴν προσθήκην ξηροῦ πάγου = 143,16 gr, 0 °C. Ἐλαχίστη ἐπιτευχθεῖσα θερμοκρασία = 10,5 °C. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,10 cal/gr · grad. (Ἀπ. 80 cal/gr.)

1919. Ποσότης 40 gr πάγου υπό θερμοκρασίαν -20°C καὶ 1000 gr τεττηγμένου μολύβδου εἰς 400°C μίγνυνται. Χρησιμοποιήσατε τὰ κάτωθι δεδομένα, διὰ νὰ εὑρετε τὴν τελικὴν κατάστασιν τοῦ μίγματος, ὑπολογιζομένου ὅτι δὲν ὑπάρχει διαφυγὴ θερμότητος εἰς τὸν περίξ ἠῶρον. (Εἰδικὴ θερμότης: πάγου = $0,5 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, τεττηγμένου μολύβδου = $0,04 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, στερεοῦ μολύβδου = $0,03 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Λανθάνουσα θερμότης τήξεως: πάγου = 80 cal/gr , μολύβδου = $5,4 \text{ cal/gr}$. Λανθάνουσα θερμότης ἀτμοῦ = 540 cal/gr . Σημεῖον τήξεως μολύβδου = 328°C .)
(Ἀπ. Ἐξατμίζονται 13,9 gr ὕδατος.)

1920. Μικρὰ ποσότης ἀέρος περιορίζεται μεταξὺ τοῦ κλειστοῦ πέρατος ὀριζοντίου ὑαλίνου σωλήνος καὶ σταγόνος ὕδατος. Τὸ ἕτερον πέρας τοῦ ὑαλίνου σωλήνος εἶναι ἐλευθέρον εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα. Τὸ μήκος τῆς στήλης ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν 12°C εἶναι 50 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μήκος τῆς στήλης ἀέρος ὑπὸ 50°C , ὅταν ἡ θερμοκρασία παραμένῃ σταθερὰ εἰς 75,4 cm Hg. (Ἡ πίεσις κορεσμοῦ ὑδρατμῶν ὑπὸ 12°C καὶ 50°C εἶναι 10,5 mm Hg καὶ 92 mm Hg, ἀντιστοίχως.) (Ἀπ. 63,65 cm.)

1921. Βαρομετρικὸς σωλὴν περιέχει ὑδραργύρον μέχρις ὕψους 75,2 cm, ἐνῶ ὁ ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου ἠῶρος ἔχει ὕψος 24 cm. Μικρὰ ποσότης αἰθυλικῆς ἀλκοόλης εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου χώρου. Ἡ ἀλκοόλη ἐξατμίζεται ὀλοσχερῶς καὶ τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης πίπτει εἰς 74 cm. Ὁ σωλὴν βυθίζεται ἀκολουθῶς ἐντὸς τῆς λεκάνης ὑδραργύρου, μέχρις ὅτου ἐμφανισθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλήνος ὑδραργύρου λεπτὸν στρώμα ὑγρᾶς ἀλκοόλης. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου χώρου. (Πίεσις κεκορεσμένων ἀτμῶν αἰθυλικῆς ἀλκοόλης ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ πειράματος = 45 mm στήλης ὑδραργύρου.) (Ἀπ. 6,7 cm.)

1922. Ἐὰν διαφορὰ βαρομετρικῆς πίεσεως 2,7 mm προκαλῇ διαφορὰν $0,1^{\circ}\text{C}$ εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως, ποῖαν ἔνδειξιν θὰ παρουσιάξῃ ἐν θερμόμετρον εἰς βαθμοὺς Φαρενάιτ εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ βαρόμετρον δεικνύῃ ἔνδειξιν 750 mm στήλης ὑδραργύρου. (Ἀπ. $211,3^{\circ}\text{F}$.)

1923. Ἐντὸς ὄγκου ἐκ πάγου ἀνοίγεται κοιλότης καὶ τοποθετεῖται ἄνωθεν ἐπίπεδος πλᾶξ πάγου ὡς κάλυμμα. Εἰσάγονται ἐντὸς τῆς κοιλότητος τοῦ πάγου 50 gr ὑδραργύρου ὑπὸ 100°C καὶ τὸ κάλυμμα τοποθετεῖται ἐκ νέου. Μετ' ὀλίγον χρόνον τὰ περιεχόμενα ὑλικά τῆς κοιλότητος ἐξάγονται καὶ εὐρίσκεται ὅτι ζυγίζουν 52 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου. (Θερμότης τήξεως πάγου $\lambda = 80 \text{ cal/gr}$.) (Ἀπ. $0,032 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.)

1924. Ποία ἀλλαγὴ θὰ ἐπέλθῃ εἰς τὸν ὄγκον μίγματος πάγου καὶ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C : α) ὅταν ἀπορροφηθοῦν 10 cal ὑπ' αὐτοῦ, β) ὅταν εἰσαχθοῦν 0,8 gr κασσιτέρου ὑπὸ 100°C ἐντὸς αὐτοῦ. (1 gr πάγου καταλαμβάνει $1,09 \text{ cm}^3$. Εἰδικὴ θερμότης τοῦ κασσιτέρου = $0,055 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr .) (Ἀπ. $-0,01125 \text{ cm}^3$, $-10,00495 \text{ cm}^3$.)

1925. Μικρὸν χάλκινον δοχεῖον μάζης 50 gr περιέχον 100 gr ὕδατος ὑπὸ 20°C εἶναι σχεδὸν πλήρες. Ποσότης 5 gr ἀτμοῦ ὑπὸ 100°C συμπυκνοῦται ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο βεβαιοῦται ὅτι τὸ δοχεῖον χάνει ἀπὸ τὴν ἐπιφανείαν του δι' ἀκτινοβόλου θερμότητος, μεταφορᾶς καὶ ἀγωγιμότητος 60 cal. Ποία ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει τὸ ὕδωρ. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,10 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος = 536 cal/gr . (Ἀπ. $47,45^{\circ}\text{C}$.)

1926. Δοχεῖον, μὲ θερμικὸν ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ 5 gr, περιέχει 70,8 gr ὕδατος θερμοκρασίας 14°C . Τεμάχια ξηροῦ πάγου ὑπὸ 0°C προστίθενται, μέχρις ὅτου ἡ θερμοκρασία τοῦ δοχείου μετὰ τοῦ περιεχομένου του κατέλθῃ μέχρι 0°C . Ἡ αὔξησις τῆς μάζης τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου εὐρίσκεται ὅτι εἶναι 13,26 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. (Ἀπ. 80 cal/gr.)

1927. Ποία είναι η μάζα πάγου εις 0°C , ή όποία δύναται νά σχηματισθῇ ἀπό ὕδωρ ὑπὸ 0°C διὰ τῆς ἐξατμίσεως εις αὐτὴν τὴν θερμοκρασίαν 20 gr αἰθέρος, τοῦ όποίου ἡ μέση λαυθάνουσα θερμότης ὑπὸ 0°C εἶναι $92,4$ θερμίδες ἀνά gr . (Θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr). (Ἀπ. $23,1\text{ gr}$.)

1928. Χάλκινον δοχεῖον μάζης $218,5\text{ gr}$ περιέχει 350 cm^3 ὕδατος ὑπὸ 9°C . Ἀπὸ τοῦ ὑπὸ 100°C διοχετεύεται ἀπ' εὐθείας ἀπὸ φιάλην ζέοντος ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου, αὐξάνων τὴν θερμοκρασίαν τοῦ δοχείου εις 23°C . Τὸ δοχεῖον καὶ τὰ περιεχόμενα του ζυγίζων ἦδη $579,0\text{ gr}$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἑκατοστιαία ἀναλογία ὕδατος ἐντὸς τοῦ ὕγρου ἀτμοῦ. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,10\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, λαυθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος = 539 cal/gr). (Ἀπ. 22% .)

1929. Πόση ποσότης ἀτμοῦ ὑπὸ 100°C πρέπει νά συμπυκνωθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σιδηρᾶς σφαίρας μάζης 350 gr , όταν ἡ θερμοκρασία τῆς σφαίρας ἀνέρχεται ἀπὸ 33°C εις 100°C . (Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου = $0,12\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος = 536 cal/gr). (Ἀπ. $5,25\text{ gr}$.)

1930. Σφαῖρα ἐκ χαλκοῦ μάζης 50 gr μεταφέρεται ἀπὸ ὕγρον διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ὕδωρ ὑπὸ 0°C . Οὕτως εὐρίσκεται ὅτι σχηματίζονται $4,4\text{ gr}$ πάγου. Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕγρου διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,1\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. $-70,4^{\circ}\text{C}$.)

1931. Δίδεται δοχεῖον ἀνοικτόν, περιέχον τρίμματα πάγου θερμοκρασίας κάτω τοῦ μηδενός, καὶ μηχανικὸς ἀναδευτήρ. Θερμαίνομεν τὸ δοχεῖον διὰ φλογός. Νά περιγραφῇ ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας καὶ νά παρασταθῇ αὕτη γραφικῶς. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἱατρικὴ Σχολή, 1948).

1932. Μάζα 1000 gr ὕδατος εὐρίσκεται εις κατάστασιν ὑπερτήξεως, ἔχουσα θερμοκρασίαν -9°C . Δι' εἰσαγωγῆς ἐντὸς αὐτῆς κρυσταλλίου πάγου, προκαλοῦμεν τὴν ἑναρξιν τῆς πήξεως. Ποία ἡ μάζα τοῦ πηγνυομένου ὕδατος. (Ἀπ. $112,5\text{ gr}$.)

1933. Ὑπὸ καταλλήλους συνθήκας εἶναι δυνατόν νά ψύξωμεν ὕδωρ κάτω τοῦ σημείου πήξεως αὐτοῦ τῶν 0°C , ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν (760 Torr), χωρὶς νά στερεοποιηθῇ. Ἐστῶσαν 100 gr ὕδατος, θερμοκρασίας -5°C ἐν ὕστερήσει πήξεως. Πόσος πάγος σχηματίζεται, όταν αἰφνιδίως τὸ ἐν ὕστερήσει πήξεως ὕδωρ ταραχθῇ. (Θερμότης τήξεως πάγου = 80 kcal/kg). (Ἀπ. $6,25\text{ gr}$.)

1934. Ποῖον τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον ὅπως 1 kmol πάγου, θερμοκρασίας -20°C , μεταβληθῇ εις ὕδρατμόν 120°C . (Εἰδικὴ θερμότης πάγου = $0,43\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδρατμοῦ = $0,45\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr , θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος = 539 cal/gr , μοριακὸν βάρος ὕδατος = 18). (Ἀπ. $13,259\text{ kcal}$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1935. Ἐντὸς δοχείου μὲ ἀμελητέαν θερμοχωρητικότητα ὑπάρχουν 120 gr ὕδατος εις κατάστασιν ὕστερήσεως πήξεως καὶ θερμοκρασίας -18°C . Πόση μάζα πάγου θά σχηματισθῇ, όταν ἡ θερμοκρασία γίνῃ 0°C . Εἰδικὴ θερμότης πάγου $0,5\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr . (Ἀπ. $24,3\text{ gr}$.)

1936. Νά εὐρεθῇ ἡ ἰσχύς εις κιλοβάτ (kW), ἥτις ἀπαιτεῖται ἵνα τηχθοῦν 10 kg πάγου 0°C ἐντὸς 3 πρώτων λεπτῶν. (Λαυθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr). (Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολή Ἀθηνῶν, 1957). (Ἀπ. $18,66\text{ kW}$.)

1937. Ψυκτήρ μεταβάλλει 0,25 gr υδάτος υπό θερμοκρασίαν 90°C εις πάγον υπό θερμοκρασίαν -10°C . Ἐάν ἡ θερμότης αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἵνα θερμάνῃ ράβδον ἐξ ἀλουμινίου (ειδικῆς θερμότητος 0,214 cal/gr·grad) μάζης 10 kgr, κατὰ πόσον θὰ αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς ράβδου. (Λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr, εἰδικὴ θερμότης πάγου = 0,5 cal/gr·grad).
(Ἀπ. $20,4^{\circ}\text{C}$.)

1938. Εἰς ψυγεῖον πάγου ὑπάρχουν 4 kgr υδάτος καὶ 12 kgr τρόφιμα. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ ἀπαιτούμενου πάγου, ἵνα τὸ περιεχόμενον μετατραπῇ ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας 25°C εἰς 5°C , λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ τηκομένου πάγου ἀπάγεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C . (Εἰδικὴ θερμότης τροφίμων = 0,9 cal/gr·grad, θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr).
(Ἀπ. 3,7 kgr.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσικόν, 1956).

1939. Ἐντὸς δοχείου ἔχομεν ὕδωρ καὶ πάγον συνολικοῦ βάρους 400 gr. Ρίπτομεν 300 gr υδάτος $\theta = 80^{\circ}\text{C}$, ὅτε ἡ τελικὴ θερμοκρασία γίνεται $\theta' = 10^{\circ}\text{C}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τοῦ πάγου, ὅταν ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι = 80 cal/gr.
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Μαθηματικόν, 1959).
(Ἀπ. 212,5 gr, 187,5 gr.)

1940. Ἐντὸς μάζης υδάτος 5 χιλιογράμμων εἰς θερμοκρασίαν 25°C τίθεται τεμάχιον χαλκοῦ μάζης 500 γραμμαρίων θερμοκρασίας 90°C καὶ τεμάχιον πάγου 0°C μάζης 2 χιλιογράμμων. Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,1 cal/gr·grad. Θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ υδάτος. β) Ἡ μᾶζα τοῦ ἐνδεχομένου μὴ τακέντος πάγου. (Ἀπ. α' 0°C , β' m = 381,25 gr.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτάτῃ Σχολῇ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1958).

1941. Ἐντὸς δοχείου τήκομεν μόλυβδον. Ὄταν τὸ σύνολον τοῦ μολύβδου ἔξη τακῇ, ἀπομακρύνομεν τὸ δοχεῖον τοῦ πυρὸς καὶ χύνομεν 500 gr ὕγρου μολύβδου ἐντὸς λίτρου υδάτος θερμοκρασίας $19,5^{\circ}\text{C}$. Ὄταν ἐπέλθῃ θερμικὴ ἰσορροπία, ἡ θερμοκρασία τοῦ υδάτος ἀνέρχεται εἰς 27°C . Ποία ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεως (λτ) τοῦ μολύβδου. Θὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ὅλη ἡ ποσότης τῆς θερμότητος τὴν ὁποίαν ἔχασεν ὁ μολύβδος προσελήφθη ὑπὸ τοῦ υδάτος. Δίδονται: εἰδικὴ θερμότης μολύβδου $c = 0,03$ cal/gr·grad, σημεῖον τήξεως μολύβδου $\theta = 327^{\circ}\text{C}$. (Ἀπ. λτ = 6 cal/gr.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Ἀνωτ. Σχολῇ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1959).

1942. Ποσότης 8 gr πάγου ὑπὸ 0°C ρίπτονται ἐντὸς μίγματος ἐλαίου καὶ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°C καὶ τήκονται ἀκριβῶς ὅταν ἡ ψύξις τοῦ μίγματος φθάσῃ τοὺς 0°C . Ἐάν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,5 cal/gr·grad καὶ τὸ ὅλικόν βάρος τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὴν ἡλξιν τοῦ πειράματος εἶναι 60 gr, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀρχικαὶ ποσότητες ἐλαίου καὶ ὕδατος. (Λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr).
(Ἀπ. 40 gr ἐλαίου, 12 gr ὕδατος.)

1943. Μᾶζα 1,62 gr κράματος ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C ρίπτεται ἐντὸς προπαρασκευασθέντος θερμιδομέτρου πάγου Bunsen. Ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου μετετοπίσθη κατὰ 1,44 cm ἐντὸς τοῦ τριχοειδοῦς σωλήνος καθέτου τομῆς 1 mm². Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μίγματος, δοθέντος ὅτι 1 gr πάγου συστέλλεται κατὰ τὴν τῆξιν του κατὰ 0,091 cm³ καὶ ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι = 80 cal/gr.
(Ἀπ. 0,078 cal/gr·grad.)

1944. Ποῖα δεδομένα ἀπαιτοῦνται, ἵνα ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον ὅπως 1 gr πάγου -10°C μετατραπῇ εἰς ἀτμὸν 100°C . (Ἀπ. Ἀπαιτεῖται ἡ γνώσις τῆς εἰδ. θερμότητος τοῦ πάγου, τῆς θερμότητος τήξεως αὐτοῦ, τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ υδάτος καὶ τῆς θερμότητος εξαερώσεως αὐτοῦ.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Χημικόν, 1961).

1945. Ποσότης 5 gr χαλκού θερμοκρασίας 17°C ρίπτεται ἐντὸς ὑγροῦ ὀξυγόνου εὐρίσκομένου εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως (-183°C). Τὸ ἐξαερωθὲν ὀξυγόνον εὐρέθη ὅτι ἦτο 1020 cm^3 εἰς 15°C καὶ ὑπὸ ἀτμ. πίεσιν 760 Torr. Εὐρατε τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὑγροῦ ὀξυγόνου. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,08\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, 32 gr ὀξυγόνου καταλαμβάνουν ὄγκον $22,4\text{ lt}$ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας).
(Ἀπ. $57,2\text{ cal/gr.}$)

1946. Δίδεται δοχεῖον θερμικῶς μεμονωμένον. Θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ 3 kgr^* πάγου θερμοκρασίας 0°C , 18 kgr^* H_2O θερμοκρασίας 10°C καὶ $1,5\text{ kgr}^*$ ὑδρατμῶν θερμοκρασίας 100°C . Νὰ εὐρεθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, ἐὰν ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 cal/gr , ἡ δὲ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος 540 cal/gr . (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Μαθηματικῶν 1961).
(Ἀπ. 40°C .)

1947. Πόσον βάρος ὕδατος εἰς 0°C θὰ σχηματισθῇ ὅταν αἱ ἀκόλουθοι οὐσαί τοποθετηθοῦν ἐντὸς ὄγκου ἐκ πάγου εἰς 0°C : α) 40 gr ὕδατος ὑπὸ 60°C , β) σφαῖρα ἐκ κασιτέρου ὑπὸ 96°C βάρους 240 gr^* , γ) ἐν χιλιόγραμμον σιδήρου ὑπὸ 140°F . Δίδονται: εἰδικὴ θερμότης κασιτέρου $0,055\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, σιδήρου $0,10\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.
(Ἀπ. α' 30 gr , β' $15,84\text{ gr}$, γ' 90 gr.)

1948. Ποσότης ἐκ κασιτέρου 450 gr θερμαίνεται εἰς 100°C καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς κοιλότητος πάγου ὑπὸ 0°C . Ἡ μᾶζα τοῦ τηκομένου πάγου εἶναι $31,5\text{ gr}$. Ποῖαν τιμὴν διὰ τὴν λανθάνουσαν θερμότητα τοῦ πάγου δίδει τὸ πείραμα τοῦτο. Εἰδικὴ θερμότης κασιτέρου $0,055\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$.
(Ἀπ. $78,6\text{ cal/gr.}$)

1949. Ξηρὸς ἀτμὸς ὑπὸ 100°C διοχετεύεται ἐντὸς 150 gr ὕδατος ὑπὸ 16°C μέχρις ὅτου τὸ ὕδωρ ἀύξηθῇ κατὰ 10 gr . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία.
(Ἀπ. $54,75^{\circ}\text{C}$.)

1750. Ρεῦμα ξηροῦ ἀτμοῦ 100°C πίπτει ἐπὶ 315 gr χαλκοῦ 15°C . Ἐὰν ἡ ὀλικὴ ποσότης ἀτμοῦ ἦτις συμπυκνοῦται ἐπὶ τοῦ χαλκοῦ εἶναι $5,0\text{ gr}$, νὰ εὐρεθῇ ἡ λανθάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = $0,091\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$).
(Ἀπ. $535,5\text{ cal/gr.}$)

1951. Ἀτμὸς ὑπὸ 100°C διοχετεύεται εἰς ὄγκον πάγου ὑπὸ 0°C ἐπὶ τινὰ χρόνον καὶ τὸ σχηματιζόμενον ὕδωρ συλλέγεται. Εὐρίσκεται ὅτι ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ πάγου μειοῦται ἀπὸ 1220 gr εἰς 1020 gr , τὸ ποσὸν τοῦ συλλεγομένου ὕδατος εἶναι 225 gr . Ἐὰν ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ ὕδατος εἶναι 80 cal/gr , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λανθάνουσα θερμότης τοῦ ἀτμοῦ.
(Ἀπ. 540 cal/gr.)

1952. Ἐὰν 20 kgr ἀτμοῦ ὑπὸ 130°C μίγνυνται μετὰ 100 kgr πάγου ὑπὸ -10°C , ποῖα θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Εἰδικὴ θερμότης πάγου καὶ ὑδρατμοῦ $0,5\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr , λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως ἀτμοῦ 540 cal/gr .
(Ἀπ. $38,3^{\circ}\text{C}$.)

1953. Ἐὰν $0,30\text{ kgr}$ ἀτμοῦ ὑπὸ 100°C συμπυκνωθοῦν ἐντὸς $5,75\text{ kgr}$ ὕδατος ὑπὸ 10°C , περιεχομένων ἐντὸς μεταλλικοῦ θερμιδομέτρου εἰδικῆς θερμότητος $0,11\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$, ἡ τελικὴ θερμοκρασία θὰ εἶναι 40°C . Ποῖα ἡ μᾶζα τοῦ θερμιδομέτρου. Λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος 540 cal/gr .
(Ἀπ. $2,27\text{ kgr.}$)

1954. Ποσότης 20 gr πάγου θερμοκρασίας -15°C ρίπτεται ἐντὸς 80 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 40°C ἐντὸς θερμιδομέτρου μάζης 50 gr , εἰδικῆς θερμότητος $0,1\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία. (Λανθάνουσα θερμότης πάγου = 80 cal/gr . Εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου = $0,5\text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$).
(Ἀπ. $15,6^{\circ}\text{C}$.)

1955. Εάν 0,1 kgρ ατμού υπό 130 °C συμπυκνωθούν εντός 2,5 kgρ ύδατος υπό θερμοκρασίαν 30 °C, περιεχομένου εντός θερμιδομέτρου μάζης 0,5 kgρ, ποία θά εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. (Εἰδικὴ θερμότης ἀλουμινίου = 0,21 cal/gr · grad, εἰδικὴ θερμότης ατμοῦ = 0,5 cal/gr · grad). (Ἀπ. 51,1 °C.)

1956. Τεμάχιον μετάλλου μάζης 0,5 gr υπό θερμοκρασίαν 18 °C βυθίζεται εντός ὑγροῦ ὀξυγόνου εἰς τὸ σημεῖον βρασμοῦ αὐτοῦ — 183 °C. Ποσότης ἐκ τοῦ ὑγροῦ εξατμίζεται, παράγουσα 130 cm³ ὀξυγόνου υπό θερμοκρασίαν 18 °C καὶ πίεσιν 75 cm στήλης ὕδραργύρου. Ὑπολογίσατε τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ μετάλλου, ἐὰν ἡ λαμβανούσα θερμότης εξατμίσεως τοῦ ὑγροῦ ὀξυγόνου εἶναι 51 cal/gr καὶ ἡ πυκνότης τοῦ αἰρίου ὀξυγόνου 1,43 gr/lit, υπό κανονικὰς συνθήκας. (Ἀπ. 0,09 cal/gr · grad.)

1957. Ποσότης 400 gr διαλύματος θεικοῦ χαλκοῦ θερμοκρασίας 60 °C ρίπτεται ἐντός θερμιδομέτρου, περιέχοντος 80 gr ὕδατος υπό θερμοκρασίαν 16 °C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 20 °C. Ὅταν 80 gr ὕδατος υπό θερμοκρασίαν 60 °C ριφθοῦν εντός 400 gr διαλύματος θεικοῦ χαλκοῦ υπό θερμοκρασίαν 16 °C, ἐντός τοῦ αὐτοῦ θερμιδομέτρου, ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 38 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ διαλύματος θεικοῦ χαλκοῦ καὶ τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ θερμιδομέτρου, μὴ ὑπολογιζομένων τῶν ἀπωλειῶν θερμότητος. (Ἀπ. 0,036 cal/gr · grad, 65,5 gr.)

1958. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος 1 λίτρου ἀέρος κεκορεσμένου δι' ὕδρατμῶν εἰς 18 °C ὅταν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 765 mm Hg. (Πυκνότης ὕδρατμῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν πυκνότητα ξηροῦ ἀέρος υπό τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν = 0,63. Πίεσις κεκορεσμένων ὕδρατμῶν υπό 18 °C = 15,3 mm στήλης ὕδραργύρου. Πυκνότης ξηροῦ ἀέρος υπό κανονικὰς συνθήκας = 1,293 gr/lit). (Ἀπ. 1,212 gr·*)

1959. Ποσότης 200 gr ζέοντος ὕδατος ρίπτεται ταχέως ἐντός χαλκίνου δοχείου μὲ παχεὰ τοιχώματα, μάζης 2000 gr καὶ ἀρχικῆς θερμοκρασίας 18 °C. Μετὰ τὴν ἀνάδευσιν παρατηρεῖται ὅτι τὸ ὕδωρ παραμένει σταθερὸν ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα εἰς 60 °C. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) ἡ θερμοχωρητικότητα τοῦ δοχείου, β) τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ δοχείου, γ) ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ. (Ἀπ. α' 190,5 cal/grad, β' 190,5 gr, γ' 0,095 cal/gr · grad.)

1960. Ὁ πυθμὴν καθέτου κυλινδρικοῦ δοχείου καταλαμβάνεται υπό ὄγκου πάγου θερμοκρασίας 0 °C καὶ πάχους 10 cm. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος στήλης ὕδατος υπό 100 °C τὸ ὁποῖον, ὅταν χυθῇ ἐπὶ τῆς ἀνω ἐπιφανείας τοῦ πάγου, θά τὸν τήξῃ καὶ θά αὐξήσῃ τὴν θερμοκρασίαν εἰς 8 °C, μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ εἰς ὕδωρ ἰσοδυνάμου τοῦ δοχείου. Νὰ ληφθῇ ὡς πυκνότης τοῦ ζέοντος ὕδατος 0,96 gr/cm³, ὡς πυκνότης τοῦ πάγου 0,917 gr/cm³ καὶ ὡς θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr. (Ἀπ. 9,14 cm.)

1961. Κλειστὸν δοχεῖον περιέχει ἀέρα καὶ ὕδωρ υπό 7 °C καὶ ἡ ὀλικὴ πίεσις ἐντός τοῦ δοχείου εἶναι 78 cm στήλης ὕδραργύρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ νέα ὀλικὴ πίεσις ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνεται εἰς 27 °C, τοῦ ὕδατος παραμένοντος εἰσέτι ἐντός τοῦ δοχείου. (Πίεσις ατμῶν τοῦ ὕδατος υπό θερμοκρασίαν 27 °C καὶ 7 °C = 28 mm Hg καὶ 12 mm Hg ἀντιστοίχως). (Ἀπ. 85,1 cm.)

1962. Ἡ ἀσκουμένη πίεσις υπό μίγματος ἀέρος καὶ κεκορεσμένων ὕδρατμῶν ἐντός κλειστοῦ δοχείου υπό θερμοκρασίαν 70 °C εἶναι 109,7 cm στήλης ὕδραργύρου. Ποία θά εἶναι ἡ ἀσκουμένη πίεσις υπό τοῦ μίγματος: α) ἐὰν ἡ θερμοκρασία μειοῦται εἰς 30 °C, β) ἐὰν ὁ ὄγκος τότε μειωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ. Ἡ πίεσις κεκορεσμένων ὕδρατμῶν εἶναι 23,4 cm Hg υπό θερμοκρασίαν 70 °C καὶ 3,2 cm Hg υπό 30 °C. (Ἀπ. α' 79,4 cm Hg, β' 155,7 cm Hg.)

1963. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θερμότητος ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, διαβιβάζονται ὑδρατμοὶ 100°C καὶ κανονικῆς πίεσεως εἰς 200 gr ὕδατος 15°C , μέχρις ὅτου ἀνυψώσουν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος εἰς 30°C . Διὰ ζυγίσεως ἐξακριβοῦται ὅτι συνεπυκνώθησαν 5 gr ὑδρατμῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, τῶν ἀπωλειῶν θερμότητος ἐκ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιβάλλοντος θεωρουμένων ὡς ἀμελητέων. (Ἀπ. 530 kcal/kg.)

1964. Δύο ὅμοια δοχεῖα περιέχουν ἀντιστοίχως 500 gr ὕδατος ὑπὸ 12°C καὶ 250 gr πάγου ὑπὸ 0°C . Τὰ δοχεῖα τοποθετοῦνται ταυτοχρόνως ἐπὶ λεπτοῦ διαφράγματος πυρᾶς ὑπεράνω λύχνου Bunsen, ἀφοῦ προηγουμένως ἐρρυθμίσθησαν ἰσοπύσως μὲ κάθε δυνατὴν ἀκρίβειαν. Ὅταν τακῇ ὅλος ὁ πάγος, μετρεῖται ἡ θερμοκρασία ἐντὸς ἐκάστου δοχείου. Ποία θὰ εἶναι δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν. (Ἀπ. 52°C καὶ 0°C .)

1965. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ μάζης 120 gr περιέχει 150 gr ὑγροῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 26°C . Προστίθενται 25 gr πάγου ὑπὸ 0°C καὶ σημειοῦται ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία τοῦ μίγματος. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ μίγματος ἀτμός ἐκ τοῦ ἰδίου ζέοντος ὑγροῦ, μέχρις ὅτου ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ νέου περιεχομένου του φθάσῃ τοὺς 30°C . Πόση μάζα ἀτμῶν συνεπυκνώθη. (Δίδονται: Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ $0,1\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$, εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑγροῦ $0,6\text{ cal/gr}\cdot\text{grad}$, σημεῖον ζέσεως τοῦ ὑγροῦ $64,7^{\circ}\text{C}$, λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὑγροῦ 267 cal/gr , λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr .) (Ἀπ. $10,97\text{ gr.}$)

1966. Δοκιμαστικὸς σωλὴν πληροῦται ὕδατος καὶ πωματίζεται. Τοποθετεῖται ἐντὸς ἀνθεκτικῆς ὑαλίνης φιάλης πλήρους ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 Torr καὶ θερμοκρασίαν 12°C . Ἡ φιάλη πωματίζεται τότε καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς ἀτμοῦ εἰς 100°C . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐντὸς τῆς φιάλης πίεσις: α) ἐὰν ὁ δοκιμαστικὸς σωλὴν παραμένῃ ἀθραυστος, β) μετὰ τὴν θραύσιν τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος. (Ἀπ. α' $99,47\text{ cm Hg}$, β' $175,47\text{ cm Hg}$.)

1967. Ἐὰν τὸ ἔδαφος καλύπτεται ἐκ χιόνος μέσης πυκνότητος $0,1\text{ gr/cm}^3$ καὶ θερμοκρασίας 0°C εἰς βάθος 9 cm , ποία ἡ μέση βροχόπτωσης ἥτις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ τήξῃ τὴν χιόνα, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ βροχὴ ἔχει ἀρχικὴν θερμοκρασίαν 12°C . (Ἀπ. 6 cm.)

1968. Φιάλη κατὰ τὸ ἥμισυ πλήρης ὕδατος θερμοκρασίας 0°C πωματίζεται, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 76 cm στήλης ὑδραργύρου. Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ εἰς 100°C . (Ἡ πίεσις τῶν ὑδρατμῶν ὑπὸ 0°C δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀμελητέα.) (Ἀπ. $179,8\text{ cm Hg}$.)

1969. Ποσότης ἀέρος θερμοκρασίας 14°C καὶ πίεσεως 76 cm Hg περιέχει ἀκριβῶς τοὺς ἀπαιτούμενους πρὸς κορεσμόν του ὑδρατμούς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις του, ἐὰν ὁ ὄγκος: α) μειωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ, β) διπλασιασθῇ, ἰσοθέρμως. (Πίεσις κορεσμοῦ ὑδρατμῶν = 12 mm Hg εἰς 14°C .) (Ἀπ. α' $150,8\text{ cm Hg}$, β' 38 cm Hg .)

1970. Ποσότης ὕδατος περιέχεται ἐντὸς στενοῦ κεκαμμένου δοχείου ὑπὸ θερμοκρασίαν 18°C . Τὸ δοχεῖον τοποθετεῖται ἀνωθεν λύχνου Bunsen καὶ εὐρίσκεται ὅτι μετὰ $4\frac{1}{2}$ λεπτά τὸ ὕδωρ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον βρασμοῦ. Μετὰ παρέλευσιν $30\frac{1}{4}$ εἰσέτι λεπτῶν ὅλον τὸ ὕδωρ ἐξητμίσθη. Ποίαν τιμὴν δίδουν αἱ παρατηρήσεις αὗται διὰ τὴν λανθάνουσαν θερμότητα ἐξατμίσεως τοῦ ὕδατος. (Ἀπ. 551 cal/gr.)

1971. Ὀλίγος ἀήρ καὶ ὕδωρ εὐρίσκονται εἰς τὴν κορυφὴν ὑδραργυρικῆς στήλης βαρομέτρου. Ἡ ὀλικὴ πίεσις εἶναι 8 cm στήλης ὑδραργύρου καὶ ἡ θερμοκρασία εἶναι 27°C . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ 60°C , ἐὰν ἡ ὀλικὴ πίεσις γίνεται 52 cm στήλης ὑδραργύρου, τοῦ ὄγκου παραμένοντος σταθεροῦ. (Πίεσις ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ 27°C = 28 mm Hg .) (Ἀπ. $46,3\text{ mm Hg}$.)

1972. Λεπτὸς σωλὴν ὁμοιομόρφου ἑσωτερικῆς διατομῆς, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον του, περιέχει ὀλίγον ἀέρα περιοριζόμενον ἀπὸ μικρὰν σταγόνα ὕδατος. Τὸ μήκος τῆς ἀερίου στήλης εἶναι 10 cm, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 14°C καὶ ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις 76 cm στήλης ὑδραργύρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς στήλης, ὅταν ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται εἰς 30°C . (Πίεσις ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $14^{\circ}\text{C} = 12 \text{ mm Hg}$ καὶ ὑπὸ $30^{\circ}\text{C} = 30 \text{ mm Hg}$). (Ἀπ. 10,8 cm.)

1973. Λεπτοδιαμετρικὸς σωλὴν ὁμοιομόρφου ἑσωτερικῆς τομῆς, ἐρματισμένος εἰς τὸ ἓν πέρασ, περιέχει ὀλίγον ἀέρα κλειόμενον ὑπὸ μικρᾶς σταγόνας ὕδατος. Ὑπὸ θερμοκρασίαν 18°C τὸ μήκος τῆς ἀερίου στήλης εἶναι 15,4 cm καὶ ὑπὸ 52°C εἶναι 22,6 cm. Ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι 76 cm στήλης ὑδραργύρου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ 52°C . (Πίεσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ $18^{\circ}\text{C} = 16 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου). (Ἀπ. 19,4 cm.)

1974. Ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ἀέρα ὑγρὸν ἢ ὀλική πίεσις εἶναι 75 cm στήλης ὑδραργύρου, ἡ θερμοκρασία 20°C καὶ ἡ πίεσις ἀτμῶν 9,2 mm στήλης ὑδραργύρου. Ὁ ἀήρ συμπιέζεται ἡρέμα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ θερμοκρασία νὰ παραμῇν εἰς τοὺς 20°C . Ὑπὸ ποίαν πίεσιν θὰ ἀρχίσουν νὰ συμπυκνῶνται οἱ ἀτμοί. (Πίεσις κεκορεσμένων ὑδρατμῶν ὑπὸ $20^{\circ}\text{C} = 17,5 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου). (Ἀπ. 142,7 cm Hg.)

1975. Ὁμοιομόρφος λεπτοδιαμετρικὸς σωλὴν, κλειστὸς περὶ τὸ ἓν πέρασ, περιέχει ὀλίγον ἀέρα δεσμευμένον διὰ μικρᾶς σταγόνας ὕδατος. Ὑπὸ θερμοκρασίαν 18°C τὸ μήκος τῆς ἀερίου στήλης εἶναι 14,6 cm. Ὑπὸ θερμοκρασίαν 60°C τὸ μήκος τῆς εἶναι 22,8 cm. Ἐὰν ἡ πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 18°C εἶναι 15 mm Hg, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ὑπὸ 60°C . Βαρομετρικὴ πίεσις 755 mm Hg. (Ἀπ. 21,3 cm στήλης ὑδραργύρου.)

1976. Ὑάλινος σωλὴν, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν πέρασ, πληροῦται ἐντελῶς ὑδραργύρου καὶ ἀναστρέφεται ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ κορυφή τοῦ σωλῆνος νὰ εὐρίσκεται εἰς ὕψος 32 cm ἀνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐντὸς τῆς λεκάνης ὑδραργύρου. Νὰ περιγραφῇ καὶ νὰ ἐξηγηθῇ τί θὰ συμβῇ, ἐὰν εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μικρὰ ποσότης αἰθέρος ὑπὸ τὴν συνήθη θερμοκρασίαν τοῦ ἐργαστηρίου (15°C). Τί θὰ συμβῇ, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τῆς συσκευῆς αὐξάνῃ τμηματικῶς. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βαρομετρικὸν ὕψος τὴν τιμὴν 76 cm Hg.

1977. Ἐὰν 5 kgf πετρελαίου (θερμότης καύσεως $18\,000 \text{ kcal/kgf}$) καοῦν ἐντὸς κλιβάνου ἀποδόσεως 20% καὶ ἡ παραγομένη θερμότης χρησιμοποιηθῇ πρὸς παραγωγήν ἀτμοῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C ἐξ ὕδατος θερμοκρασίας 15°C , νὰ εὐρεθῇ τὸ παραγόμενον ποσὸν ἀτμοῦ. (Λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος = 540 cal/gr). (Ἀπ. 25,46 kgf.)

1978. Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ συμπυκνώσωμεν εἰς τὰ $2/3$ ποσότητα 30 000 kgf γλεῦκος θερμοκρασίας 30°C μεταχειριζόμενοι ὡς καύσιμον ὕλην τὸ κώκ, τοῦ ὁποίου ἡ θερμότης καύσεως ἀνὰ kgf εἶναι 7000 kcal. Πόσα kgf κώκ χρειάζομεθα, ἐὰν ὁ συντελεστὴς χρησιμοποίησεως τῶν θερμίδων τοῦ κώκ εἶναι 80 %. Ὡς εἰδικὴ θερμότης τοῦ γλεῦκος λαμβάνεται ἡ τοῦ ὕδατος καὶ ὡς θερμότης ἐξατμίσεως τοῦ ὕδατος τοῦ γλεῦκος 537 cal/gr . (Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1956). (Ἀπ. 1334 kgf.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ'

ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1979. Σιδηρά πλάξ 2 cm πάχους έχει έγκαρσίαν τομήν 5000 cm². 'Η μία πλευρά εύρίσκεται υπό θερμοκρασίαν 150 °C και ή άλλη υπό 140 °C. Ποία ποσότης θερμότητος μεταβιβάζεται εις 1 sec. ($k = 0,115 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$).

Λύσις. Έαν καλέσωμεν Q τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' ὁμοιομόρφου σώματος έγκαρσίας τομῆς S καὶ μήκους l εἰς χρόνον t , ὅταν εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ ὑπάρχῃ διαφορά θερμοκρασίας $\theta_1 - \theta_2$, καὶ k τὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος, τότε, ὡς γνωστὸν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις :

$$Q = k \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{l} \cdot S \cdot t \quad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $k = 0,115 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$, $\theta_1 - \theta_2 = 10^\circ \text{C}$, $l = 2 \text{ cm}$, $S = 5000 \text{ cm}^2$, $t = 1 \text{ sec}$, καὶ εύρίσκομεν :

$$Q = 2875 \text{ cal}$$

1980. Πλάξ ἐκ νικελίου πάχους 0,4 cm έχει μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς διαφορὰν θερμοκρασίας 32 °C καὶ μεταβιβάζει 200 kcal καθ' ὥραν διὰ μέσου έμβαδοῦ 5 cm². Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς τῆς θερμικῆς ἀγωγιμότητος.

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις (1). Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς k καὶ λαμβάνομεν :

$$k = \frac{Q \cdot l}{(\theta_1 - \theta_2) \cdot S \cdot t}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν ταύτην τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἦτοι : $Q = 200\,000 \text{ cal}$, $l = 0,4 \text{ cm}$, $\theta_1 - \theta_2 = 32^\circ \text{C}$, $S = 5 \text{ cm}^2$, $t = 3600 \text{ sec}$, καὶ εύρίσκομεν :

$$k = 0,14 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$$

1981. 'Η θερμοκρασία ἐνὸς δοχείου ὕδατος πίπτει ἀπὸ 62 °C εἰς 58 °C ἐντὸς χρόνου 3 min καὶ 20 sec. Πόσον χρόνον δέον νὰ ἀναμείνωμεν, διὰ νὰ κατέλθῃ ἀπὸ 51 °C εἰς 49 °C, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ δωματίου εἶναι 10 °C.

Λύσις. Κατὰ τὴν μετάδοσιν θερμότητος ἀπὸ στερεοῦ εἰς ρευστὸν (ὕγρον ἢ ἀέριον) ἰσχύει ἡ σχέσηις :

$$Q = k \cdot \Delta\theta \cdot S \cdot t \quad (1)$$

ἔπου Q ἡ μεταφερομένη δι' ἀγωγῆς θερμότης, k ὁ συντελεστὴς ἀγωγιμότητος, ἐξαρτῶμενος ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν σωμάτων καὶ τὴν φύσιν τῆς ἐπιφανείας, $\Delta\theta$ ἡ διαφορά θερμοκρασίας, S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ σώματος καὶ t ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποῖου συντελεῖται ἡ μεταφορά τῆς ποσότητος θερμότητος Q . Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ τοῦ αὐτοῦ δοχείου, μεταβαλλόμενα μεγέθη εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι μόνον ἡ ποσότης θερμότητος, ἡ διαφορά θερμοκρασίας καὶ ὁ χρόνος. Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως :

$$Q_1 = k \cdot \Delta_1\theta \cdot S \cdot t_1 \quad (2) \quad \text{καὶ :} \quad Q_2 = k \cdot \Delta_2\theta \cdot S \cdot t_2 \quad (3)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Delta_1\theta \cdot t_1}{\Delta_2\theta \cdot t_2} \quad (4) \quad \eta : \quad t_2 = \frac{\Delta_1\theta \cdot t_1 \cdot Q_2}{\Delta_2\theta \cdot Q_1} \quad (5)$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι :

$$Q_1 = (\theta_2 - \theta_1) \cdot m \cdot c \quad (6) \quad \text{καί :} \quad Q_2 = (\theta'_2 - \theta'_1) \cdot m \cdot c \quad (7)$$

ὅπου θ_1 καὶ θ_2 αἱ ἀκραὶ θερμοκρασίαι τοῦ ὕδατος εἰς τὴν α' περίπτωσιν ($\theta_1 = 58^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 62^\circ\text{C}$), θ'_1 καὶ θ'_2 αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι εἰς τὴν β' περίπτωσιν, m ἡ μάζα τοῦ ὕδατος καὶ c ἡ ἐιδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ δοχείου παραλείπεται ὡς ἐλάχιστον ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕδωρ.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰς τιμὰς τῶν Q_1 καὶ Q_2 ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7), λαμβάνομεν :

$$t_2 = \frac{\Delta_1 \theta \cdot t_1 \cdot (\theta'_2 - \theta'_1)}{\Delta_2 \theta \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \quad (8)$$

Δίδονται ὁμοίως : $\Delta_1 \theta = 60^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C} = 50^\circ\text{C}$ (60°C εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν 58°C καὶ 62°C), $\Delta_2 \theta = 50^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C} = 40^\circ\text{C}$ (50°C εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν θερμοκρασιῶν 49°C καὶ 51°C), $t_1 = 200 \text{ sec}$, $\theta'_2 = 51^\circ\text{C}$, $\theta'_1 = 49^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 62^\circ\text{C}$, $\theta_1 = 58^\circ\text{C}$. Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (8) ἔχομεν :

$$t_2 = 125 \text{ sec} = 2 \text{ min } 5 \text{ sec}$$

1982. Κιβώτιον πάγου κατασκευάζεται ἐκ ξύλου πάχους $1,75 \text{ cm}$ μὲ ἐσωτερικὴν ἐπίστρωσιν φελλοῦ πάχους 3 cm . Ἐάν ἡ θερμοκρασία τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ φελλοῦ εἶναι 0°C καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ ξύλου 12°C , ποία θὰ εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς ἐνδιάμεσου ἐπιφανείας. (Συντελεστὴς ἀγωγιμότητος ξύλου $= 0,0006 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$ καὶ φελλοῦ $= 0,0012 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$).

Λύσις. Ἐστωσαν θ ἡ θερμοκρασία τῆς ἐνδιάμεσου ἐπιφανείας μεταξὺ ξύλου καὶ φελλοῦ, θ_1 ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία τοῦ ξύλου καὶ θ_2 τοῦ φελλοῦ, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν σταθερᾶς ροῆς θερμότητος ἐκ τοῦ περιβάλλοντος πρὸς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ κιβωτίου. Ἐάν καλέσωμεν q τὴν ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας ἐπαφῆς τῶν δύο σωμάτων καὶ ἀνὰ 1 sec διερχομένην ποσότητα θερμότητος ($q = Q/S \cdot s$), τότε θὰ ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$q = k_1 \cdot (\theta_1 - \theta) \quad (1) \quad \text{καί :} \quad q = k_2 \cdot (\theta - \theta_2) \quad (2) \quad \eta : \quad \frac{k_1 \cdot (\theta_1 - \theta)}{l_1} = \frac{k_2 \cdot (\theta - \theta_2)}{l_2} \quad (3)$$

ὅπου k_1 καὶ k_2 ἀντιστοίχως οἱ συντελεσταὶ ἀγωγιμότητος τοῦ ξύλου καὶ τοῦ φελλοῦ, l_1 καὶ l_2 τὰ πάχη αὐτῶν.

Ἐπιλύοντες ὡς πρὸς θ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\theta = \frac{k_1 \cdot \theta_1 \cdot l_2 + k_2 \cdot \theta_2 \cdot l_1}{k_1 \cdot l_2 + k_2 \cdot l_1} \quad (4)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς : $k_1 = 0,0006 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, $k_2 = 0,0012 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, $\theta_1 = 12^\circ\text{C}$ καὶ $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$, $l_1 = 1,75 \text{ cm}$, $l_2 = 3 \text{ cm}$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\theta = 10,7^\circ\text{C}$$

1983. α) Πόση εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ἡλίου ἀνὰ δευτερόλεπτον προσφερομένη ἐνέργεια, ὅταν ἡ ἡλιακὴ σταθερὰ ἰσοῦται πρὸς $I_0 = 19,4 \text{ kcal} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, δηλαδή, ὅταν κατὰ μέσον ὅρον ἐντὸς τοῦ ἔτους διέρχεται δι' ἐπιφανείας 1 m^2 , εἰς τὴν ἀπόστασιν τῆς Γῆς, ἐνέργεια $19,4 \text{ kcal}$ κατὰ πρῶτον λεπτόν, προερχομένη ἐξ ἀκτινοβολίας. Ἡ ἀπόστασις Γῆς-Ἡλίου εἶναι κατὰ μέσον ὅρον $1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}$. β) Πόσοι τόνοι ἀνθρακός θὰ ἔπρεπε νὰ καίωνται ἀνὰ δευτερόλεπτον διὰ νὰ ἀποδώσουν τὴν αὐτὴν ἐνέργειαν, ὅταν ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθρακός εἶναι 8000 kcal/kg . γ) Πόσοι τόνοι πάγου 0°C θὰ ἠδύνατον μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐκ τοῦ Ἡλίου ἀκτινοβολουμένης ἐνεργείας νὰ μεταβάλλωνται κατὰ sec εἰς ὑδατμοὺς 100°C . (Θερμότης ἑξαερώσεως ὕδατος εἰς $100^\circ\text{C} = 539 \text{ kcal/kg}$, θερμότης τήξεως ὕδατος $= 80 \text{ cal/gr}$).

Λύσις. α) Ἐστω N ἡ προσφερομένη ἀνὰ δευτερόλεπτον ἡλιακὴ ἐνέργεια. Αὕτη θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$N = S \cdot I_0 \quad (1)$$

δπου S ή επιφάνεια σφαίρας με κέντρον τὸν ἥλιον καὶ ἀκτίνα R ἴσην μετὴν ἀπόστασιν Ἡλίου - Γῆς.
Ὡς γνωστόν :

$$S = 4\pi \cdot R^2 \quad (2) \quad \text{καὶ ἔπομένως :} \quad N = 4\pi \cdot R^2 \cdot I_0 \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3) : $R = 1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $I_0 = 19,4 \text{ kcal} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = 19,4/60 \text{ kcal} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, λαμβάνομεν :

$$N = 9,081 \cdot 10^{22} \text{ kcal/sec, περίπου}$$

β) Ἐστω m ἡ μάζα τοῦ ἀνθρακος εἰς τόννους, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἀνὰ δευτερόλεπτον διὰ νὰ ἀποδῶσῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα ἰσχύος μετὴν ἡλιακῆν. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$N = m \cdot Q \quad \eta : \quad m = \frac{N}{Q} \quad (4)$$

δπου Q ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθρακος. Δίδονται : $N = 9,081 \cdot 10^{22} \text{ kcal/sec}$ καὶ $Q = 8000 \text{ kcal/kg} = 8 \cdot 10^6 \text{ kcal/tn}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$m = 11,35 \cdot 10^{15} \text{ tn}$$

γ) Ἐστω m' ἡ μάζα εἰς τόννους τοῦ πάγου, ἡ ὁποία θὰ μεταβληθῇ εἰς ὕδρατους ἐντὸς ἐνὸς δευτερολέπτου. Ἐὰν καλέσωμεν διὰ Q' τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται 1 τόννος πάγου 0 °C διὰ νὰ μεταβληθῇ εἰς ὕδρατους 100 °C, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$N = m' \cdot Q' \quad \eta : \quad m' = \frac{Q'}{N} \quad (5)$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι : $Q' = \lambda + c \cdot \Delta\theta + L$ (6) δπου λ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου ἀνὰ τόννον, c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος ἀνὰ τόννον, L ἡ θερμότης ἑξαερώσεως αὐτοῦ ἀνὰ τόννον καὶ $\Delta\theta$ ἡ διαφορά θερμοκρασιῶν μεταξὺ σημείου τήξεως καὶ βρασμοῦ. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) προκύπτει :

$$m' = \frac{N}{\lambda + c \cdot \Delta\theta + L} \quad (7)$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (7) τὰ δεδομένα : $\Delta\theta = 100 \text{ grad}$, $\lambda = 80 \text{ cal/gr} = 80 \cdot 10^3 \text{ kcal/tn}$, $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad} = 10^3 \text{ kcal/tn}$, $L = 539 \text{ cal/gr} = 539 \cdot 10^3 \text{ kcal/tn}$, $N = 9,081 \cdot 10^{22} \text{ kcal/sec}$ ὁπότε εὐρίσκομεν :

$$m' = 126,4 \cdot 10^{15} \text{ tn/sec}$$

1984. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου ἐκ τῶν κάτωθι δεδομένων: Σταθερὰ τῶν Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ erg/sec} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4$. Σταθερὰ τοῦ Ἡλίου ἐνέργεια, λαμβανομένη τακτικῶς ἀνὰ δευτερόλεπτον ἐκ τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς $I = 0,14 \text{ Joule/cm}^2 \cdot \text{sec}$. Ἀκτίς τοῦ Ἡλίου $= 6,97 \cdot 10^8 \text{ m}$. Ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου $= 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Λύσις. Ἐστω T ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῶν Stefan-Boltzmann, ἡ ἀκτινοβολουμένη ἰσχύς ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ S δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$N = \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad (1)$$

δπου σ ἡ σταθερὰ τῶν Stefan-Boltzmann. Ἐὰν καλέσωμεν R τὴν ἀκτίνα τοῦ Ἡλίου, θὰ ἔχωμεν :

$$S = 4\pi R^2 \quad (2)$$

Ἀφ' ἐτέρου, ἐὰν καλέσωμεν S' τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἀκτίνας R' , δπου R' ἡ ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$N = S' \cdot I \quad \eta : \quad N = 4\pi R'^2 \cdot I \quad (3)$$

δπου I ἡ σταθερὰ τῆς ἀνὰ δευτερόλεπτον ἐπὶ τῆς Γῆς προσπιπτούσης ἡλιακῆς ἐνεργείας. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 4\pi R'^2 \cdot I \quad \eta : \quad T = \sqrt[4]{\frac{R'^2 \cdot I}{R^2 \cdot \sigma}} \quad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα: $R' = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $R = 6,97 \cdot 10^8 \text{ m}$, $I = 0,14 \text{ Joule/cm}^2 \cdot \text{sec} = 14 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sec}$ καὶ $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{grad}^4$, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$T = 5789^\circ \text{K} \quad \eta: \quad \theta = 5516^\circ \text{C}$$

1985. Ἐκ πειραματικῶν δεδομένων προέκυψεν ὅτι μάζα 142 gr ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν τηκομένου πάγου, ἐκτεθειμένη εἰς εὐρείαν αἰθουσαν, ἀνῆλθεν εἰς θερμοκρασίαν 4°C , ἐντὸς ἡμισείας ὥρας. Ἴση μάζα πάγου, ἐκτεθειμένη εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἐξυφάνθη 10 ὥρας ἵνα τακῇ ἐντελῶς. Ἐκ τοῦ δεδομένου τούτου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λαμβάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου.

Λύσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν μεταφορὰν θερμότητος δι' ἀγωγῆς ἐκ τοῦ περιβάλλοντος ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος πρὸς τὰς ἰσὰς μάζας ὕδατος καὶ πάγου μέσῳ τῶν δοχείων, ἐντὸς τῶν ὁποίων αὐταὶ εὐρίσκονται. Τὰ δύο δοχεῖα τὰ λαμβάνομεν ἐντελῶς ὁμοία, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἀγωγιμότητος. Ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος ἡ θεωρεῖται σταθερά, καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῶν πειραμάτων, ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ εὐρείας αἰθούσης, περιλαμβανομένης μεγάλῃν μάζαν ἀέρος. Παραλείπεται ἐπίσης τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ δοχείου ὡς πολὺ μικρὸν σχετικῶς. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ταχύτης ἀγωγῆς τῆς θερμότητος, προκειμένου περὶ τῆς τήξεως τοῦ πάγου, θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{Q_1}{t_1} = \frac{k \cdot S \cdot (\theta - \theta_1)}{l} \quad (1)$$

καὶ προκειμένου περὶ τῆς θερμάνσεως τοῦ ὕδατος ἀπὸ 0°C ἕως 4°C θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{Q_2}{t_2} = \frac{k \cdot S \cdot (\theta - \theta_2)}{l} \quad (2)$$

ὅπου Q_1 καὶ Q_2 ἡ θερμότης τὴν ὁποῖαν προσφέρει τὸ περιβάλλον πρὸς τὸν πάγον καὶ τὸ ὕδωρ ἀντιστοίχως, καὶ t_1 καὶ t_2 οἱ χρόνοι διὰ τὴν λήξιν τῶν δύο πειραμάτων ἀντιστοίχως, ἐπίσης θ ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος, θ_1 ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ πάγου καὶ θ_2 ἡ μέση θερμοκρασία τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος, k ὁ συντελεστὴς ἀγωγιμότητος τοῦ δοχείου, S ἡ ἐπιφάνεια καὶ l τὸ πᾶχος τῶν τοιχωμάτων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ θερμοκρασία θ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη ἐν σχέσει μετὰ τὴν θερμοκρασίαν $\theta_1 = 0^\circ \text{C}$ τῆς τήξεως τοῦ πάγου καὶ τὴν μέσην θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος, $\theta_2 = (4^\circ \text{C} + 0^\circ \text{C})/2 = 2^\circ \text{C}$ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετρήσεως, θεωροῦμεν ὅτι κατὰ προσέγγισιν $(\theta - \theta_1) = (\theta - \theta_2)$, ἔπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{Q_1}{t_1} = \frac{Q_2}{t_2} \quad (3)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν:

$$Q_1 = \lambda \cdot m \quad (4) \quad \text{καί:} \quad Q_2 = (\theta_2 - \theta_1) \cdot m \cdot c \quad (5)$$

ὅπου λ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου, θ_1 καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος, m ἡ μάζα (ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις) καὶ c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων (3), (4) καὶ (5) προκύπτει:

$$\lambda = \frac{t_1 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot c}{t_2} \quad (6)$$

Ἐχομεν ὁμῶς: $t_1 = 10 \text{ h}$, $t_2 = 1/2 \text{ h}$, $\theta_2 = 4^\circ \text{C}$, $\theta_1 = 0^\circ \text{C}$ καὶ $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$. Δι' ἀντικατάστασιν διὰ τῶν τιμῶν λαμβάνομεν:

$$\lambda = 80 \text{ cal/gr}$$

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω λύσις ἀποτελεῖ τεχνικὴν λύσιν μετὰ ἱκανοποιητικὸν βαθμὸν ἀκρίβειας. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὁμῶς αἱ διαφοραὶ θερμοκρασιῶν εἰς τὰ δύο πειράματα δὲν εἶναι αἱ αὐταί, διότι, ἔαν εἶναι σταθερὰ ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος, τότε εἶναι μὲν σταθερὰ ἡ διαφορὰ αὐτῆς ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας τοῦ δοχείου τοῦ τηκομένου πάγου, δὲν εἶναι ὁμῶς σταθερὰ ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας περιβάλλοντος καὶ δοχείου ὕδατος, δεδομένου ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ τελευταίου κυμαίνεται μεταξὺ 0°C ἕως 4°C κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος. Ἡ μέση διαφορὰ θερμοκρασίας περιβάλλοντος καὶ ὕδατος εἶναι ὅμως 2°C , ἐνῶ τοῦ περιβάλλοντος καὶ τοῦ πάγου εἶναι σταθερὰ $\theta^\circ \text{C}$. Διὰ τοῦτο καὶ αἱ δύο ταχύτητες ἀγωγῆς μόνον κατὰ προσέγγισιν καὶ εἰς τεχνικὰς ἐφαρμογὰς εἶναι δυνατόν νὰ ληφθοῦν ὡς ἰσαί.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1986. Ποῖον ποσὸν θερμότητος διέρχεται καθ' ὥραν διὰ πλακὸς ἐκ χαλκοῦ ἢ φελλοῦ ἐπιφανείας 1 dm^2 καὶ πάχους 10 cm , ἂν μεταξύ τῶν δύο πλευρῶν τῆς πλακὸς ὑφίσταται διαφορὰ θερμοκρασίας 5°C . (Συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος χαλκοῦ $= 0,94 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$ καὶ τοῦ φελλοῦ $= 0,00011 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$).
(Ἀπ. $169,2 \text{ kcal}$, $19,8 \text{ cal}$.)

1987. Εἰς μίαν συσκευὴν μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος εὐρίσκεται ὅτι 280 cal/min ρέουν διὰ μέσου τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν ράβδου μετάλλου τινός, ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς ράβδου εἰς σημεία ἀπέχοντα 10 cm εἶναι 72°C καὶ 22°C . Ἐὰν ἡ ράβδος ἔχῃ διάμετρον 2 cm , εὗρατε τὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου.
(Ἀπ. $0,248 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$.)

1988. Ὄταν τὸ ἐν ἄκρον ράβδου ἐκ χαλκοῦ, μήκους 30 cm καὶ διαμέτρου 8 mm , εὐρίσκεται ἐντὸς ζέοντος ὕδατος (100°C) καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς πάγου (0°C), εὐρίσκεται ὅτι $1,2 \text{ gr}$ πάγου τήκονται ἀνὰ min . Ποῖος ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου.
(Ἀπ. $0,96 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$.)

1989. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ἡλίου ἀκτινοβολεῖ ἐνέργειαν μὲ ρυθμὸν $1500 \text{ cal/sec} \cdot \text{cm}^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τῆς θερμοκρασίας τοῦ Ἡλίου. (Ἀπ. 5490°C .)

1990. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτινοβολουμένην ἀνὰ ὥραν θερμότητα 1 m^2 ἐπιφανείας κλιβάνου εὐρισκομένου ὑπὸ θερμοκρασίαν 1727°C , ὑπὸ τὰς συνθήκας τῆς ἀκτινοβολίας μέλανος σώματος. (Σταθερὰ τῶν Stefan - Boltzmann $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ erg/sec} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4$, $J = 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal}$).
(Ἀπ. $7,8 \cdot 10^8$.)

1991. Αἱ ἀντίθετοι πλευραὶ στερεοῦ μεταλλικοῦ κύβου διατηροῦνται ὑπὸ θερμοκρασίας 100°C καὶ 12°C ἀντιστοίχως. Ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 10 cm καὶ ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης του $0,6$ μονάδες C.G.S. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ἡ ἀνὰ ἑκατοστόμετρον διαφορὰ θερμοκρασίας ἐντὸς τοῦ κύβου, β) ἡ ποσότης θερμότητος ἣτις διέρχεται ἐντὸς 10 min μέσῳ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ κύβου εἰς κατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας.
(Ἀπ. α' $8,8^\circ\text{C/cm}$, β' $316\,800 \text{ cal}$.)

1992. Κυλινδρική ράβδος ἐκ σιδήρου μήκους 10 cm ἐννοῦται πρὸς κυλινδρικήν ράβδον ἐκ χαλκοῦ μήκους 15 cm καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας καθέτου τομῆς, ὥστε νὰ ἀποτελοῦν σύνθετον ράβδον. Ἐὰν τὰ πέρατα τῶν ἐκ σιδήρου καὶ χαλκοῦ ράβδων διατηροῦνται ὑπὸ θερμοκρασίας 100°C καὶ 10°C ἀντιστοίχως, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ σημεῖον ἐνώσεως τῶν ράβδων. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ σιδήρου καὶ τοῦ χαλκοῦ $= 0,12$ καὶ $0,92 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, ἀντιστοίχως). (Ἀπ. $24,7^\circ\text{C}$.)

1993. Δωμάτιον θερμοκρασίας 20°C ἔχει ὑάλινον παράθυρον 2 m πλάτους καὶ $2,5 \text{ m}$ ὕψους, τὸ δὲ πάχος τῆς ὑάλου εἶναι 3 mm . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπώλεια θερμότητος ἀπὸ τὸ δωμάτιον, ἀνὰ λεπτόν, δι' ἀγωγιμότητος μόνον μέσῳ τοῦ παραθύρου, τῆς ἐξωτερικῆς ἀτμοσφαιράς οὗσης 12°C . (Θερμικὴ ἀγωγιμότης ὑάλου παραθύρου $= 0,0025 \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$).
(Ἀπ. $200\,000 \text{ cal}$.)

1994. Σιδηροῦς σωλὴν μὴ μεμονωμένους θερμικῶς, ἔχων μήκος 5 m , διάμετρον 5 cm καὶ πάχος τοιχωμάτων 4 mm , διαρρέεται ὑπὸ ὕδατος 80°C . Εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σωλῆνος ἡ θερμοκρασία εἶναι 60°C . Ποία ποσότης θερμότητος πρέπει νὰ μεταβιβάζεται ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἀνὰ sec , ἵνα ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ θερμοκρασίας παραμένῃ σταθερά.
(Ἀπ. $49,1 \text{ kcal/sec}$.)

1995. Τεμάχιον ὀρειχάλκου πάχους $0,01 \text{ m}$ ἐκτίθεται εἰς θερμοκρασίαν 40°C ἐκ τῆς μιᾶς πλευρᾶς καὶ εἰς 30°C ἐκ τῆς ἄλλης. Ἐὰν μεταδίδωνται $3,75 \text{ kcal}$ ἐντὸς 5 min ἀνὰ ἐπιφάνειαν 5 cm^2 , ποία ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ ὀρειχάλκου.
(Ἀπ. $0,025 \text{ kcal}/\text{m} \cdot \text{sec} \cdot \text{grad}^{-1}$.)

1996. Ἡ θερμοκρασία τῆς ὑδατίνης πλευρᾶς τοῦ πυθμένος μεταλλικοῦ βραστήρος εἶναι 140°C , 3000 δε kg ὕδατος ἐξατμίζονται ἀνὰ 1 m^2 τοῦ βραστήρος ἐντὸς μιᾶς ὥρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς ἐτέρας πλευρᾶς τοῦ πυθμένος τοῦ βραστήρος ἐὰν ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ μετάλλου εἶναι $0,2 \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, τὸ πάχος αὐτοῦ $1,2 \text{ cm}$ καὶ ἡ λαϊνθάνουσα θερμότης ἐξατμίσεως τοῦ ἀτμοῦ $540 \text{ cal}/\text{gr}$.
(Ἀπ. 410°C .)

1997. Τὸ ἐσωτερικὸν ὑαλίνου παραθύρου πάχους 2 mm καὶ ἐμβαδοῦ 1 m^2 εὐρίσκεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 15°C καὶ τὸ ἐξωτερικὸν ὑπὸ -5°C . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ρυθμὸς διαφυγῆς θερμότητος δι' ἀγωγῆς ἐκ τοῦ δωματίου μέσω τῆς ὕαλου. (Συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητος ὕαλου $= 0,002 \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$). (Ἀπ. $2000 \text{ cal}/\text{sec}$.)

1998. Δύο ὑλικά θερμικῆς ἀγωγιμότητος $0,9$ καὶ $0,6 \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$ ἀντιστοίχως, ὑπὸ μορφὴν ράβδων τῆς αὐτῆς τομῆς ἐκ 2 cm^3 καὶ μηκῶν 10 cm καὶ 30 cm ἀντιστοίχως, τοποθετοῦνται μὲ τὰ πέρατα ἠνωμένα καὶ καλῶς προσηρητημένα. Ἐὰν τὸ ἐν πέρας τῆς συμπαγοῦς ράβδου διατηρῆται ὑπὸ θερμοκρασίαν 100°C καὶ τὸ ἕτερον ὑπὸ 0°C , νὰ εὐρεθῇ πόση θερμότης διέρχεται κατὰ μῆκος τῆς ράβδου ἀνὰ sec εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ὅταν ἀποκατασταθῇ ἰσορροπία. (Ἀπ. $3,27 \text{ cal}$.)

1999. Δοχεῖον μὲ θερμὸν ὕδωρ καλύπτεται ὑπὸ μονωτικοῦ ὑλικοῦ πάχους 2 cm καὶ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $6 \cdot 10^{-4} \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$. Ἐὰν αἱ θερμοκρασίαι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ εἶναι 60°C καὶ 20°C ἀντιστοίχως, πόσην θερμότητα θὰ χάνῃ τὸ δοχεῖον ἀνὰ m^2 καὶ ἀνὰ ὥραν.
(Ἀπ. $4,3 \cdot 10^5 \text{ cal}$.)

2000. Ράβδος ἐκ χαλκοῦ ἔχει διάμετρον 2 cm καὶ μῆκος 50 cm . Τὸ ἐν ἄκρον τῆς ράβδου εὐρίσκεται ἐντὸς ζέοντος ὕδατος, τὸ ἕτερον δὲ ἄκρον ἐντὸς περιβλήματος ψυχρομένου ὑπὸ ρέοντος ὕδατος τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 10°C . Ὁ συντελεστής θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ χαλκοῦ εἶναι $1,02 \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$. Ἐὰν 200 gr ὕδατος ρέουν μέσω τοῦ περιβλήματος ἐντὸς 6 min , νὰ εὐρεθῇ κατὰ πόσον αὐξάνεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τούτου.
(Ἀπ. 10°C .)

2001. Πόσα γραμμάρια αἰθυλαίθερος θερμοκρασίας 0°C δυνάμεθα νὰ ἐξατμίσωμεν διὰ τῆς θερμότητος ἣτις ἀπαιτεῖται, ἵνα 200 gr αἰθυλαλκόλης θερμοκρασίας 0°C μεταβληθοῦν εἰς ἀτμόν.
(Ἀπ. 466 gr .)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2002. Ὁρθογώνιον δωματίον ἔχει διαστάσεις 5 m μήκους, 4 m πλάτους καὶ 3 m ὕψους. Δύο συνορεύοντες τοῖχοι ἀποτελοῦν τμήμα τῶν ὑπολοίπων δωματίων τῆς οἰκίας, ἐνῶ οἱ ἕτεροι δύο ἀποτελοῦν τὴν ἐξωτερικὴν τῆς πλευράν. Ὁ μικρότερος τοῖχος ἔχει ὀρθογώνιον παράθυρον πλάτους 2 m καὶ ὕψους 2 m , τὸ δὲ πάχος τῶν ὑαλοπινάκων εἶναι 3 mm . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπώλεια θερμότητος ἀνὰ λεπτόν διὰ τῶν δύο ἐξωτερικῶν τοίχων καὶ τοῦ παραθύρου, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ δωματίου εἶναι 18°C καὶ τῆς ἀτμοσφαιρᾶς 11°C . Τὸ πάχος τῶν τοίχων εἶναι 24 cm . (Θερμικὴ ἀγωγιμότης ὕαλου $= 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ βλαῶν $= 6 \cdot 10^{-4} \text{ cal}/\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$).
(Ἀπ. 1575 kcal , 140 kcal .)

2003. Νά εύρεθῇ ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ὥραν : α) μέσω τοίχου ἐκ πλίνθων πάχους 12 cm, β) μέσω τοῦ ἰδίου τοίχου κεκαλυμμένου ἀπὸ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὑπὸ στρώματος φελλοῦ πάχους 3 cm, ἐάν, εἰς ἐκάστην περιπτώσει, ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ τῶν ἐκτιθεμένων ἐπιφανειῶν εἶναι 20 °C. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ φελλοῦ εἶναι $1 \cdot 10^{-4} \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$ καὶ τῶν πλίνθων $12 \cdot 10^{-4} \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, ἀντιστοίχως.

(Ἄπ. 72 kcal, 18 kcal.)

2004. Ὑάλινον δοχεῖον μήκους 30 cm καὶ πλάτους 15 cm περιέχει πάγον. Νά εύρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τηκομένου ἀνὰ λεπτὸν πάγου, ἐάν τὸ δοχεῖον βυθισθῇ ἐντὸς δεξαμενῆς πλήρους ὕδατος ὑπὸ 30 °C μέχρι βάθους 10 cm. Τὸ πάχος τῆς ὑάλου εἶναι 4 mm καὶ ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης τῆς ὑάλου εἶναι 0,0025 cal/grad · cm · sec. (Λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr.)

(Ἄπ. 190 gr.)

2005. Τέλμα καλύπτεται διὰ πάγου πάχους 3 cm καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι -10 °C. Μὲ ποῖον ρυθμὸν αὐξάνεται τὸ πάχος τοῦ πάγου. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης πάγου = 0,006 cal/grad · cm · sec, λανθάνουσα θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr, πυκνότης πάγου = 0,93 gr/cm³).

(Ἄπ. 0,97 cm/h.)

2006. Στρώμα χιόνος ἐκτάσεως 1 km², πάχους 10 cm καὶ θερμοκρασίας -5 °C, τήκεται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων. α) Ποία ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν προσφερομένη ὑπὸ τοῦ ἡλίου θερμότης. β) Πόση μᾶζα ἀνθρώκων θὰ ἔπρεπε νὰ καίῃ, διὰ νὰ προσδώσῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν θερμότητος, ὅταν ἡ θερμότης καύσεως ἀνθρώκου ἴσούται πρὸς 8000 kcal/kg. ($\rho_{\chiιόνος} = 200 \text{ kgr/m}^3$, $c_{\text{πάγου}} = 0,50 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, εἰδικὴ θερμότης πάγου = 80 kcal/kg.)

(Ἄπ. α' $1,65 \cdot 10^9 \text{ kcal}$. β' 206 tn.)

2007. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ἀνὰ λεπτὸν θερμικὴ ἀγωγιμότης : α) τοίχου ἐκ τούβλων πάχους 10 cm, β) μέσω τοῦ ἰδίου τοίχου ἐπενδεδυμένου ἀπὸ τῆς μιᾶς πλευρᾶς διὰ φελλοῦ πάχους 2 cm, τῆς διαφορᾶς τῆς θερμοκρασίας μεταξὺ τῶν ἐκτεθειμένων ἐπιφανειῶν οὔσης εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις 20 °C. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης τῶν τούβλων καὶ τοῦ φελλοῦ = $12 \cdot 10^{-4} \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$ καὶ $1 \cdot 10^{-4} \text{ cal/grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, ἀντιστοίχως).

(Ἄπ. α' 1440 cal, β' 424 cal.)

2008. Τοίχος ἐκ τούβλων ἔχει πάχος 25 cm καὶ ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ τῶν ἐκτεθειμένων ἐπιφανειῶν εἶναι 30 °C. Νά ὑπολογισθῇ ἡ διερχομένη μέσω αὐτοῦ θερμότης ἀνὰ 1 m²/h. Ἐάν τὰ τούβλα καλύπτονται ἐκ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας δι' ἐπικαλύμματος πάχους 5 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνὰ κυβικὸν μέτρον ὥριαία θερμότης, ἥτις διέρχεται ἤδη, τῆς διαφορᾶς θερμοκρασίας τῶν δύο ἐκτεθειμένων ἐπιφανειῶν οὔσης τῆς αὐτῆς ὥς καὶ πρότερον. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης ἐπικαλύμματος = 0,00001 cal/grad · cm · sec).

(Ἄπ. 5184 cal, 1525 cal.)

2009. Ὑάλινος σωλὴν μήκους 50 cm εἶναι ὁλοσχερῶς βυθισμένος ἐντὸς δεξαμενῆς περιχοῦσης μεγάλην ποσότητα πάγου καὶ ὕδατος. Ὑδωρ ὑπὸ θερμοκρασίαν 45 °C εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ ἐξέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C. Νά ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ τηκομένου πάγου ἀνὰ λεπτόν, ἐάν ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλῆνος εἶναι 10,2 mm, ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος 10,6 mm, ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης τῆς ὑάλου $3 \cdot 10^{-4}$ μονάδες C.G.S. καὶ ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου = 80 cal/gr.

(Ἄπ. 55,1 gr.)

2010. Ὑδωρ ἐντὸς σωλῆνος ἐκ χαλκοῦ πάχους 2 mm ἐξαερούται διὰ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ σωλῆνος ὑπὸ θερμοκρασίαν ἀνω τῶν 100 °C. Ἐάν ὁ ρυθμὸς ἐξαερώσεως εἶναι 3 gr ἀνὰ δευτερόλεπτον καὶ ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκατόστομετρον ἐπιφανείας, ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ σωλῆνος. (Ἀγωγιμότης χαλκοῦ = 0,92 cal/grad · cm · sec, λανθάνουσα θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος ὑπὸ 100 °C = 540 cal/gr.)

(Ἄπ. 103,52 °C.)

2011. Είς άπλουν πείραμα πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀγωγιμότητος τοῦ ἐλαστικοῦ, διέρχεται μέσῳ ἐλαστικοῦ σωλήνος, λεπτῶν τοιχωμάτων, ἀτμὸς ὑπὸ 100 °C. Μῆκος 20 cm τοῦ σωλήνος βυθίζεται ἐντὸς 200 cm³ ὕδατος περιεχομένου ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 112 gr. Ἡ μέση ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλήνος εἶναι 2 cm καὶ τὸ πάχος του 1 mm. Τὸ ὕδωρ αὐξάνει ἀπὸ 8 °C εἰς 32 °C ἐντὸς 2 min. Ποῖαν τιμὴν δίδει τὸ πείραμα διὰ τὴν θερμικὴν ἀγωγιμότητα τοῦ ἐλαστικοῦ.
(Ἀπ. 0,00042 cal/grad · cm · sec.)

2012. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τῆς γλυκερίνης βάσει τῶν κάτωθι παρατηρήσεων: Μᾶζα τοῦ ἐκ σιδήρου θερμιδομέτρου = 20,50 gr, μᾶζα ὅταν εἶναι πλήρης ὕδατος = 121,04 gr, μᾶζα ὅταν εἶναι πλήρης γλυκερίνης = 147,32 gr, ἀπαιτούμενος χρόνος πρὸς ψύξιν ὕδατος ἀπὸ 65 °C εἰς 60 °C = 3 min 26 sec, ἀπαιτούμενος χρόνος πρὸς ψύξιν γλυκερίνης ἀπὸ 65 °C εἰς 60 °C = 2 min 32 sec. (Ἀπ. 0,58 cal/gr · grad.)

2013. Κύλινδρος ἐκ χαλκοῦ, τομῆς 5,25 cm², διατηρεῖται εἰς τὸ ἐν πέρας τῇ βοηθεῖα ἀτμοῦ εἰς θερμοκρασίαν 100 °C, καὶ εἰς τὸ ἄλλο ψύχεται δι' ἀργοῦ ρεύματος ψυχροῦ ὕδατος. Τὸ ὕδωρ εἰσέρχεται μὲ 11,3 °C καὶ ἐξέρχεται μὲ 18,8 °C, ὅταν διέρχονται 250 cm³ εἰς 100 sec. Δύο θερμόμετρα δεικνύουν ὅτι αἱ θερμοκρασίαι τῆς ράβδου εἰς δύο σημεία ἀπέχοντα 10 cm εἶναι 79,2 °C καὶ 42,7 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἀγωγιμότητος τῆς χαλκίνης ράβδου, δοθέντος ὅτι δὲν ὑφίστανται ἀπώλειαι.
(Ἀπ. 0,978 cal/grad · cm · sec.)

2014. Τοίχος αἰθούσης ἀποτελεῖται ἐσωτερικῶς ἐκ πλακὸς μονωτικῆς πάχους 6 cm καὶ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $0,17 \cdot 10^{-3}$ cal/grad · cm · sec, ἐξωτερικῶς δὲ ἐκ 12 cm παχέος στρώματος σκυροκονιάματος. α) Ποία ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς τοῦ μονωτικοῦ καὶ τοῦ σκυροκονιάματος, ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ θερμοκρασία εἶναι 18 °C καὶ ἡ ἐξωτερικὴ -12 °C. β) Ποῖον ποσὸν θερμότητος εἰς kcal ἐξέρχεται δι' ἐπιφανείας 1 m² τοῦ τοίχου τούτου καθ' ὥραν. γ) Ποῖον τὸ πάχος τὸ ἰσοδυναμοῦν μὲ τοῖχον ἐκ πλίνθων. (Συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος σκυροκονιάματος 0,0028 cal/grad · cm · sec καὶ τῶν πλίνθων 0,0012 cal/grad · cm · sec).
(Ἀπ. α' - 8,75 °C. β' 27,3 kcal. γ' 47,5 cm.)

2015. Ποσότης 80 cm³ ὕδατος ἀπαιτεῖ 12 min διὰ νὰ ψυχθῇ ἐντὸς δοχείου θερμιδομέτρου, ἔχοντος μᾶζαν 150 gr καὶ εἰδικὴν θερμότητα 0,1 cal/gr · grad. Ὁ αὐτὸς ὄγκος ἄλκοόλης, πυκνότητος 0,8 gr/cm³ ἀπαιτεῖ 8 min ἵνα ψυχθῇ ἀπὸ 40 °C εἰς 15 °C ἐντὸς τοῦ δοχείου τοῦ αὐτοῦ θερμιδομέτρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τῆς ἄλκοόλης.
(Ἀπ. 0,76 cal/gr · grad.)

2016. Σύνθετος ράβδος ἀποτελεῖται ἀπὸ ράβδον ἐκ χαλκοῦ μήκους 10 cm, ράβδον ἐκ σιδήρου μήκους 8 cm καὶ ράβδον ἐξ ἀλουμινίου μήκους 12 cm, ἐκάστην ἔχουσαν τὴν αὐτὴν κάθετον τομὴν. Ἐὰν τὰ ἐξωτερικὰ πέρατα τῆς ράβδου διατηροῦνται ὑπὸ θερμοκρασίαν 100 °C καὶ 10 °C ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθοῦν αἱ θερμοκρασίαι τῶν δύο ἐπαφῶν. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ χαλκοῦ, τοῦ σιδήρου καὶ τοῦ ἀλουμινίου = 0,9, 0,1 καὶ 0,5 cal/grad · cm · sec, ἀντιστοίχως).
(Ἀπ. 91,3 °C, 28,8 °C.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2017. Ήλεκτρικὸς θερμαντὴρ βυθίζεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 380 gr ὕδατος θερμοκρασίας 10°C . Ὁ θερμαντὴρ καταναλίσκει ἰσχύϊν 84 Watt καὶ μετὰ 10 min ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 40°C . Ἐὰν ἡ θερμωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 20 cal/grad, πόση ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυναμοῦ τῆς θερμότητος εἰς erg/cal.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ ἔργον (ἡλεκτρικὴ ἐνέργεια) τὸ ὁποῖον μετατρέπεται εἰς θερμότητα Q , τότε, ὡς γνωστόν, τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος δίδεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$J = \frac{A}{Q} \quad (1)$$

Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον προσδίδει ὁ ἡλεκτρικὸς θερμαντὴρ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος αὐτοῦ N ἐπὶ τὸν χρόνον t , ἥτοι :

$$A = N \cdot t \quad (2)$$

Ἐπίσης, ἡ θερμότης τὴν ὁποῖαν ἀπορροφᾷ τὸ ὕδωρ ἰσοῦται μὲ τὴν μᾶζαν m_1 τοῦ ὕδατος ἐπὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα c_1 αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας $(\theta_1 - \theta_2)$, ἥτοι :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$

Ἡ θερμότης τὴν ὁποῖαν ἀπορροφᾷ τὸ θερμιδόμετρον εἶναι :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad (4)$$

ὅπου m_2 ἡ μᾶζα τοῦ θερμιδομέτρου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ $Q = Q_1 + Q_2$, ἡσχέσις (1) γράφεται :

$$J = \frac{N \cdot t}{(m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) (\theta_1 - \theta_2)} \quad (5)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα : $N = 84 \cdot 10^7$ erg/sec, $t = 10 \cdot 60$ sec, $m_1 = 380$ gr, $c_1 = 1$ cal/gr · grad, $\theta_1 - \theta_2 = 30^{\circ}\text{C}$, $m_2 \cdot c_2 = 20$ cal/grad, καὶ εὐρίσκομεν :

$$J = 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal} = 4,2 \text{ Joule/cal}$$

2018. Πόση ἰσχύς εἰς ἵππους ἀπαιτεῖται διὰ τὴν τῆξιν 60 gr πάγου 0°C ἐντὸς 15 πρώτων λεπτῶν.

Λύσις. Ἐστῶσαν N ἡ ἰσχύς, A τὸ ἔργον καὶ t ὁ χρόνος. Τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $N = A/t$ (1). Ἐπειδὴ ὁμοῦ τὸ ἔργον A εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q εἰς τὸ ὁποῖον μετατρέπεται, ἥτοι $A = J \cdot Q$, θὰ ἔχωμεν : $N = J \cdot Q/t$ (2). Ἐὰν καλέσωμεν ἀκολουθῶς m τὴν μᾶζαν τοῦ πάγου καὶ λ τὴν θερμότητα τήξεως αὐτοῦ, ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$N = \frac{J \cdot m \cdot \lambda}{t} \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $J = 4,2$ Joule/cal, $m = 60$ gr, $\lambda = 80$ cal/gr, $t = 15 \cdot 60$ sec, καὶ εὐρίσκομεν :

$$N = 22,4 \text{ Watt}$$

Ἐπειδὴ 1 CV = 736 Watt, ἔχομεν :

$$N = 0,03 \text{ CV}$$

2019. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτης σφαίρας εκ μολύβδου θερμοκρασίας 20°C ώστε, όταν η σφαίρα προσκρούση επί του στόχου, να τακίη αυτή εξ ολοκλήρου. (Ειδική θερμότητα μολύβδου $= 0,032 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, σημείον τήξεως μολύβδου $= 327^{\circ}\text{C}$, θερμότης τήξεως μολύβδου $= 5,4 \text{ cal/gr}$. Υποτίθεται ότι όλη η αναπτυσσόμενη θερμότης απορροφείται υπό της σφαίρας εκ μολύβδου).

Λύσις. Έστωσαν m η μάζα, v η ταχύτης, c η ειδική θερμότης, θ_1 η αρχική θερμοκρασία, θ_2 η τελική θερμοκρασία και λ η θερμότης τήξεως του μολύβδου. Η κινητική ενέργεια του μολύβδου θα είναι :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Όταν ο μολύβδος προσκρούση επί του τοίχου, η κινητική ενέργεια θα μετατραπῇ εἰς θερμότητα Q , ἡ ὁποία ὑποθέτομεν ὅτι ἀφ' ἑνὸς θ' αὐξήσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ μολύβδου ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς καὶ ἀφ' ἑτέρου θὰ τήξῃ αὐτόν. Ἡ θερμότης ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ μολύβδου εἶναι : $Q_1 = m \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1)$, ἡ δὲ θερμότης ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν τήξιν αὐτοῦ εἶναι : $Q_2 = m \cdot \lambda$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\text{κιν}}$ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν θερμότητα $Q_1 + Q_2$ τὴν ὁποίαν προσλαμβάνει ὁ μολύβδος, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ἔχομεν :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = J \cdot [m \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1) + m \cdot \lambda] \quad \eta : \quad v = \sqrt{2J \cdot [c \cdot (\theta_2 - \theta_1) + \lambda]}$$

ὅπου $J = 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal}$ τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως καὶ εὐρίσκομεν :

$$v = 36\,000 \text{ cm/sec} = 360 \text{ m/sec}$$

2020. Τεμάχιον μετάλλου βάρους 4 kgr^* πίπτει ἐξ ὕψους $106,75 \text{ m}$ ἐπὶ τελείως μὴ ἐλαστικοῦ βάθρου, ὅτε ἡ ὅλη ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀναπτύσσεται.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν : $A = J \cdot Q$ καὶ ἐπομένως : $Q = A/J$ (1). Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ σῶμα καὶ B τὸ βάρος αὐτοῦ, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$Q = \frac{B \cdot h}{J} \quad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B = 4 \text{ kgr}^*$, $h = 106,75 \text{ m}$, $J = 427 \text{ kgr}^* \cdot \text{m/kcal}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$Q = 1 \text{ kcal}$$

2021. Κανονικὸς ἄνθρωπος, ὁ ὁποῖος δὲν ἐκτελεῖ σωματικὸν ἔργον, διὰ νὰ συντηρῇται χρειάζεται ἡμερησίως 1800 kcal . Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὄρον, εἰς Watt , ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχύς διὰ τὴν διατήρησιν τῆς ζωῆς. Πόση ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια εἰς κιλοβατώρας ἐντὸς ἐνὸς ἔτους.

Λύσις. Μεταξὺ ἔργου καὶ θερμότητος ἰσχύει, ὡς γνωστὸν, ἡ σχέσις : $A = J \cdot Q$ (1). Ἐπειδὴ ὁμως $A = N \cdot t$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$N = \frac{J \cdot Q}{t} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2) : $J = 4,2 \text{ Joule/cal}$, $Q = 18 \cdot 10^5 \text{ cal}$, $t = 24 \cdot 3600 \text{ sec}$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$N = 87,3 \text{ Watt}$$

Ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια εἰς 1 ἔτος θὰ εἶναι :

$$A = 0,873 \text{ kW} \times 365 \times 24 \text{ h} = 765 \text{ kWh}$$

2022. Πόσον μηχανικόν ἔργον, παραγόμενον διὰ τριβῆς, ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν τὴν θερμοκρασίαν κοίλου κυλινδρικοῦ τυμπάνου ἐκ χαλκοῦ μάζης 150 gr περιέχοντος 600 gr ὕδατος κατὰ 5 °C. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,092 cal · gr⁻¹ · grad⁻¹).

Λύσις. Εἰς τὸν γνωστὸν τύπον: $A = J \cdot Q$ θέτομεν: $Q = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) + m_2 \cdot c_2 \cdot (\theta_1 - \theta_2)$

$$\eta: Q = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) (\theta_1 - \theta_2)$$

καὶ λαμβάνομεν:

$$A = J \cdot (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) (\theta_1 - \theta_2) \quad (1)$$

Εἰς τὸν τύπον (1) θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως: $m_1 = 150$ gr, $c_1 = 0,092$ cal · gr⁻¹ · grad⁻¹, $m_2 = 600$ gr, $c_2 = 1$ cal · gr⁻¹ · grad⁻¹, $\theta_1 - \theta_2 = 5$ °C καὶ $J = 4,2$ Joule/cal, καὶ εὐρίσκομεν:

$$A = 12\,889 \text{ Joule} = 1310 \text{ kgr}^* \text{m}$$

2023. Ὑδωρ πίπτει ἐξ ὕψους 85 m. Νὰ εὐρεθῇ πόσον θὰ ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία του, ἐὰν τὰ 50% τοῦ παραγομένου ἔργου μετατρέπωνται εἰς θερμότητα. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Ἱατρικὴ Σχολή, 1957).

Λύσις. Ἐστωσαν m ἡ μάζα τοῦ ὕδατος, $\Delta\theta$ ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας, c ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ καὶ h τὸ ὕψος πτώσεως. Κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ ὕδατος, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ $E_{\text{δυν}}$ μετατρέπεται συνολικῶς εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, ὑπὸ ἀντίστοιχον παραγωγὴν ἰσοδύναμου ἔργου A . Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν: $A = E_{\text{δυν}} = m \cdot g \cdot h$ (1). Τὰ 50% αὐτοῦ μετατρέπονται εἰς θερμότητα Q καὶ ἐὰν καλέσωμεν J τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ παραγομένη ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{A/2}{J} = \frac{m \cdot g \cdot h}{2J} \quad (2)$$

Ἀφ' ἐτέρου ἡ ποσότης αὕτη τῆς θερμότητος ἀνυψώνει κατὰ $\Delta\theta$ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$Q = \frac{m \cdot g \cdot h}{2J} = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad (4) \quad \eta: \quad \Delta\theta = \frac{g \cdot h}{2J \cdot c} \quad (5)$$

Ἐκφράζομεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν εἰς τὸ σύστημα M. K. S., ὅποτε ἔχομεν: $g = 10$ m/sec², $h = 85$ m, $c = 1$ kcal/kg · grad καὶ $J = 4,2$ Joule/cal = 4200 Joule/kcal, καὶ ἀντικαθιστῶμεν, ὅποτε προκύπτει:

$$\Delta\theta = 0,101 \text{ }^\circ\text{C}$$

2024. Κατὰ τὸ πείραμα τοῦ Joule πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδύναμου τῆς θερμότητος, τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 2,5 kgr*. Τὰ βάρη τῶν μαζῶν εἶναι ἕκαστον 25 kgr* καὶ κατέρχονται ἀποστάσιν 4 m ἐπὶ 5 φορές. Ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ἀνυψοῦται κατὰ 0,84 °C. Ποία τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδύναμου τῆς θερμότητος δύναται νὰ ληφθῇ μὲ τὸ πείραμα τοῦτο. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς τριβὰς αἱ ὁποῖαι ἐπιφέρουν ἀπώλειαν ἐνεργείας ἐξωτερικῶς εἰς τὸ θερμιδόμετρον, ἀποσυνδέομεν τὸν τροχόν. Τὰ νήματα περιτυλίσσονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὅταν τὸ ἐν βάρος ἀνέρχεται τὸ ἄλλο νὰ κατέρχεται. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν αὐτὴν τελικὴν ταχύτητα τῶν μαζῶν, χρειάζεται πρόσθετον βάρος 5 kgr*. Ἡ ταχύτης τῶν μαζῶν εὐρίσκεται τότε ἴση πρὸς 0,3 m/sec. Ποίαν τιμὴν εὐρίσκομεν τελικῶς διὰ τὸ J . Θὰ ληφθῇ $g = 10$ m/sec².

Λύσις. α) Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ἀφ' ἑνὸς θὰ εἶναι:

$$Q = k \cdot \Delta\theta \quad (1)$$

ὅπου k τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου καὶ $\Delta\theta$ ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας αὐτοῦ.

‘Αφ’ ετέρου θά ἔχωμεν :

$$Q = \frac{A}{J} \quad (2)$$

ὅπου A τὸ παραγόμενον ἔργον καὶ J, τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων προκύπτει :

$$J = \frac{A}{k \cdot \Delta\theta} \quad (3)$$

Δίδονται : $k = 2,5 \text{ kcal/grad}$, $\Delta\theta = 0,84^\circ\text{C}$ καὶ $A = 2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 4 \text{ kgr} \cdot \text{m} = 10^4 \text{ Joule}$.

(Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν πιπτούσων μαζῶν παραλείπεται ὡς πολὺ μικρά, λόγῳ τῆς μικρᾶς ταχύτητος πτώσεως, ἐντὸς τοῦ ὕδατος). Δι’ ἀντικαταστάσεως προκύπτει :

$$J = 4,77 \cdot 10^3 \text{ Joule/kcal}$$

β) Ἡ δευτέρα μέτρησις δεικνύει ὅτι τὸ ἔργον τῶν τριῶν καὶ ἡ μικρὰ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἔργον A’ τοῦ προσθέτου βάρους B’ = 5 kgr*. Ἦτοι, διὰ 5 πτώσεις : $A' = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100 \text{ kgr} \cdot \text{m} = 1000 \text{ Joule}$. Ἄρα τὸ ἔργον τὸ ὅποιον μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι :

$$\Delta A = A - A' = 9000 \text{ Joule}$$

Ἐπομένως, βάσει τῆς σχέσεως (3), λαμβάνομεν :

$$J = 4,284 \text{ Joule/kcal}$$

2025. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν 1 γραμμομορίου ὕδατος ἐκ τῶν δύο συστατικῶν του, ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος ἴση πρὸς 69 kcal (ἐξώθερμος ἀντίδρασις). Πόσῃ ἀπώλειαν μάζης ἀντιπροσωπεύει ἡ ἐκλυομένη ποσότης θερμότητος. (Σχολή Ἰκάρων, 1962).

Λύσις. Βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας, ἔχομεν :

$$E = m \cdot c^2 \quad \eta : \quad m = \frac{E}{c^2}$$

ὅπου m ἡ ἀπώλεια μάζης, E ἡ ἀποδιδομένη ἐνέργεια καὶ c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

Δίδονται : $E = 69 \text{ kcal} = 69 \cdot 10^3 \cdot 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg}$ καὶ $c = 300\,000 \text{ km} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}$. Ἐπομένως θά ἔχωμεν :

$$m = 32,2 \cdot 10^{-10} \text{ gr}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2026. Τὸ ὕδωρ τοῦ καταρράκτου τοῦ Νιαγάρα πίπτει ἐξ ὕψους 50 m. Ποία ἡ ἐξ αἰτίας τῆς πτώσεως ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας αὐτοῦ. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. $0,12^\circ\text{C}$.)

2027. Νὰ εὑρεθῇ τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος, ὅταν σῶμα μάζης $m = 1000 \text{ kgr}$, κινούμενον μὲ ταχύτητα $v = 72 \text{ km/h}$, ἐξαναγκάζεται νὰ ἡρεμῇ. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Φυσιογνωστικόν, 1957). (Ἄπ. $Q = 47,619 \text{ kcal}$.)

2028. Πόσοι τόννοι ἄνθρακος καταναλίσκονται καθ’ ὥραν ὑπὸ ἀτμομηχανῆς ἰσχύος 3000 HP καὶ ἀποδόσεως 9%, ὅταν ὁ χρησιμοποιούμενος ἄνθραξ παρέχῃ 6000 kcal/kgr. Δεδομένον : Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος = 427 kgr·m/kcal. (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἄνωτ. Σχολή Ἀρχιτεκτόνων, 1954). (Ἄπ. 3,513 τόννοι.)

2029. Πρὸς ποῖα ποσὰ μηχανικῆς ἐνεργείας ἀντιστοιχοῦν : α) 0,0117 kcal, β) 234 kcal, γ) 0,14 kcal. (Ἄπ. α' 5 kgr·m, β' 100 000 kgr·m, γ' 60 kgr·m.)

2030. Σιδηροδρομικός συρμός μάζης 250 tn κινείται υπό ταχύτητα 90 km/h. Ποιον ποσόν θερμότητας εκλύεται εις τὰ φρένα, όταν ὁ συρμός τίθεται ἀποτόμως εις ἀκίνησιαν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὅλη ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εις θερμότητα ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολή Χημικῶν Μηχανικῶν καὶ Τμήμα Μεταλλεολόγων, 1955).

2031. Τεμάχιον μολύβδου μάζης 10 gr κινείται μὲ ταχύτητα $v = 250 \text{ m/sec}$. Τὸ τεμάχιον τοῦτο προσκρούει ἐπὶ ἐτέρου ἀκλονήτου τεμαχίου μάζης 450 gr καὶ ἐνσωματοῦται. Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ πόσον θὰ ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου. (Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου $= 0,031 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$ καὶ $1 \text{ Joule} = 0,239 \text{ cal}$). (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Ἱατρικὴ Σχολή, Τμήμα Ὀδοντιατρικόν, 1958). (Ἀπ. $\Delta\theta = 5,2^\circ\text{C}$.)

2032. Τί ποσὰ θερμικῆς ἐνεργείας ἀντιπροσωπεύουν: α) 3416 kgr*m, β) 5337,5 kgr*m, γ) 341,6 kgr*m. (Ἀπ. α' 8 kcal, β' 12,5 kcal, γ' 0,8 kcal.)

2033. Ἀτομὸν τι λαμβάνει διὰ γεύματος τροφὴν ἀποδοτικότητος 300 kcal. Ποῖον μηχανικὸν ἔργον δύναται ἐνεκα τῆς ληφθείσης τροφῆς νὰ παραγάγῃ τὸ ἐν λόγω ἄτομον, ἐὰν τὰ 15% τῆς προσφερθείσης εις αὐτὸ ἐνεργείας μετατραποῦν εις μηχανικὸν ἔργον. (Ἀπ. 19 215 kgr*m.)

2034. Ποῖον τὸ ἔργον τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τῆς θερμότητος εις 1 kgr ἁέρος, εὐρίσκόμενον ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας όταν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀνυψῶνεται κατὰ 10°C ἰσοβαρῶς. (Πυκνότης ἁέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $1,293 \text{ kgr/m}^3$, $1 \text{ Torr} = 133,32 \text{ Nt} \cdot \text{m}^{-2}$). (Ἀπ. 2870 Joule.)

2035. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς μάζης 200 tn κινεῖται μὲ ταχύτητα 90 km/h. Ζητεῖται: α) Ποῖον τὸ παραγόμενον εις τὸ σύστημα πεδήσεως ποσὸν θερμότητος, μέχρις ὅτου ὁ συρμὸς ἡρεμῇ, ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἅπασα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εις θερμότητα. β) Πόσα λίτρα ὕδατος θερμοκρασίας 0°C δυνάμεθα νὰ θερμάνωμεν μὲ αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου ζέσεως. (Ἀπ. $1,87 \cdot 10^4 \text{ kcal}$, 187 lt.)

2036. Μετέωρον μάζης 15 tn πίπτει ἐπὶ τοῦ Ἡλίου μὲ ταχύτητα 100 km/sec. Ποῖον τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος κατὰ τὴν σύγκρουσιν μετὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου. (Ἀπ. $179 \cdot 10^8 \text{ kcal}$.)

2037. Αὐτοκίνητον μάζης 1500 kgr κινεῖται μὲ ταχύτητα 15 m/sec. Ἐὰν τεθῇ εις ἀκίνησιαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν φρένων του, ποία ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία θὰ ἀναπτυχθῇ εις τὰ φρένα. (Ἀπ. 40 200 cal.)

2038. Ἡλεκτρικὸν ἐργοστάσιον παρέχει 120 000 kW. Πόσον ἄνθρακα πρέπει νὰ προμηθευθῶμεν διὰ λειτουργίαν ἑνὸς ἔτους. (Θερμότης καύσεως ἄνθρακος 8000 kcal/kg). (Ἀπ. 129 200 tn*.)

2039. Πόσαι κιλοβατῶραι (kWh) ἀπαιτοῦνται, ἵνα ὁ ἄνθρωπος αἰθούσης 250 m^3 ὑπὸ πίεσιν 740 mm Hg θερμανθῇ ἀπὸ -10°C εἰς $+20^\circ\text{C}$. (Ἀπ. 2,57 kWh.)

2040. Διάττων ἀστήρ, κινούμενος μὲ ταχύτητα 1,5 km/sec, φέρεται εις ἀκίνησιαν ὑπὸ τῆς γήινης ἀτμοσφαίρας. Εὑρατε τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ διάττοντος ἀστέρος, ὑποθέτοντες ὅτι ὅλη ἡ παραχθεῖσα θερμότης ἀπορροφεῖται ὑπὸ τοῦ ἀστέρος. (Εἰδικὴ θερμότης τῆς ὕλης τοῦ διάττοντος ἀστέρος $= 0,15 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 1786°C .)

2041. Ἀτομὸν βάρους 50 kgr* τρώγει μῆλα, θρεπτικῆς ἀξίας 60 kcal, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 15% μετατρέπονται εις μηχανικὸν ἔργον. Ἐπὶ ποίου ὕψους δύναται νὰ ἀνέλθῃ. (Ἀπ. 77 m.)

2042. Σώμα βάρους 80 kg^* διανύει ὀλισθαίνον ἐπὶ σανίδος, ἐχούσης κλίσιν 30° ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, διάστημα 10 m . Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $0,4$, νὰ εὐρεθῇ ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ σώματος καὶ τὸ διὰ τῆς τριβῆς παραχθὲν ποσὸν θερμότητας. (Ἀπ. $5,47 \text{ m/sec}$, $0,65 \text{ kcal}$.)

2043. Ἀντικείμενον βάρους 250 kg^* πίπτει ἐξ ὕψους 40 m . Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλη ἡ ἐνέργεια μετεβλήθη εἰς θερμότητα, ποῖον ποσὸν kcal παρήχθη. (Ἀπ. $23,4 \text{ kcal}$.)

2044. Κατὰ πόσον αὐξάνει μάζα 1 tn ὕδατος ὅταν θερμανθῇ εἰς 50°C . (Ἀπ. $m = 2,3 \text{ mgr}$.)

2045. Μολυβδίνη σφαῖρα, ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς πλήρως μὴ ἐλαστικὴ, πίπτει ἐξ ὕψους $2,5 \text{ m}$ ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. Κατὰ πόσον ἀνέρχεται, λόγω τῆς κρούσεως κατὰ τὴν πτώσιν, ἡ θερμοκρασία τῆς σφαίρας, θεωρουμένου ὅτι ὁλόκληρος ἡ παραγομένη θερμότης καταναλίσκεται μόνον διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ μολύβδου. ($c_{\text{Pb}} = 0,031 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $0,19^\circ \text{C}$.)

2046. Μετεωρίτης συνιστάμενος ἐκ σιδήρου κινεῖται ἐπὶ μικρὸν χρονικὸν διάστημα ἐντὸς τῆς γήινης ἀτμοσφαιρας, ἐλαττώνων τὴν ταχύτητά του, ἕνεκα τῆς τριβῆς μετὰ τοῦ ἀέρος, ἀπὸ $v_1 = 400 \text{ m/sec}$ εἰς $v_2 = 100 \text{ m/sec}$. Ἡ κατὰ τὴν τριβὴν ἀναπτυσσόμενη θερμότης καταναλίσκεται πλήρως διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ μετεωρίτου. Κατὰ πόσον ἀνέρχεται ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ. ($c_{\text{Fe}} = 0,108 \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. 166°C .)

2047. Τὰ 30% τῆς ἐκ τῆς ἀναφλέξεως τῆς πυρίτιδος θερμότητος καλοῦ πυροβόλου ὅπλου μετατρέπονται εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν καὶ μεταβάλλονται κατὰ τὴν ἐξόδου τοῦ βλήματος ἐκ τοῦ στομίου τῆς κάννης εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Ποία ἡ ταχύτης ἐξόδου τοῦ βλήματος ἐκ τοῦ στομίου, ὅταν τὸ πυροβόλον ὅπλον ἔχῃ βάρους 10 gr^* καὶ ἡ πυρίτις ἐνὸς φυσιογίου δίδει 3 kcal κατὰ τὴν ἀνάφλεξιν. (Ἀπ. 868 m/sec .)

2048. Κατὰ τὴν τήξιν χιόνος, συχνάκις πίπτει ἀπὸ τῆς στέγης οἰκίας εἰς τὸ ἔδαφος χιὼν κατὰ μεγάλας μάζας. Νὰ υπολογισθῇ ἡ μάζα τῆς τηκομένης χιόνος, ὅταν 10 kg πίπτουν ἀπὸ ὕψους 30 m . (Ἀπ. $8,76 \text{ gr}$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2049. Τὸ ὕψος καταρράκτου εἶναι 100 m . Ποία ἡ ἐπιτυγχανομένη κινητικὴ ἐνέργεια ὑπὸ 1 kg^* ὕδατος πίπτοντος ἐκ τοῦ ὕψους τούτου. Ἐὰν ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ τοῦ ὕδατος τῆς κορυφῆς καὶ τῆς βάσεως τοῦ καταρράκτου εἶναι $0,24^\circ \text{C}$, νὰ υπολογισθῇ ἡ τιμὴ διὰ τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, ὑποτιθεμένου ὅτι ὅλη ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμικὴν ἐνέργειαν. (Ἀπ. $10^7 \text{ gr}^* \cdot \text{cm}$, $4,09 \cdot 10^7 \text{ erg/cal}$.)

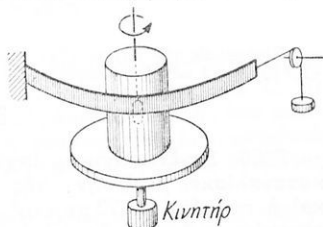
2050. Σωλὴν ἐκ χαρτονίου μήκους 217 cm καὶ κλειστὸς εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἄκρα περιέχει μολυβδίνης σφαῖρας (σκάγια) ὑπὸ θερμοκρασίαν $12,5^\circ \text{C}$. Ἀντιστρέφεται ὁ σωλὴν ταχέως 100 φορές καὶ ἡ θερμοκρασία τῶν σφαιρῶν εὐρίσκεται τότε ὅτι εἶναι $28,85^\circ \text{C}$. Ποίαν τιμὴν θὰ δώσῃ τοῦτο διὰ τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. (Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου $= 0,031 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$). (Ἀπ. $4,2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal}$.)

2051. Σφαῖρα τυφεκίου μάζης $0,01 \text{ kg}^*$ ἐκ μολύβδου ἔχει ταχύτητα 800 m/sec . Δοθέντος ὅτι τὸ σύνολον τῆς ἐνεργείας μετεβλήθη εἰς θερμότητα, πόση θερμότης παράγεται κατὰ τὴν κρούσιν τοῦ βλήματος ἐπὶ τοῦ στόχου του. (Ἀπ. $0,76 \text{ kcal}$.)

2060. Εἰς τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν ἡ μάζα εἶναι 5 gr περίπου, ἡ ἀπόστασις 0,8 m εἰς χρόνον 2 min, ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγματοποιηθεισῶν στροφῶν εἰς 5 min εἶναι 5 στροφαὶ περίπου. Ἡ διάρκεια τοῦ πειράματος εἶναι 0,4 sec καὶ ἡ ὑψωσις τῆς θερμοκρασίας 0,05 °C. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται ἡ τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος.
(Ἀπ. $4,07 < J < 4,38$.)

2061. Εἰς 1 m³ ἀερίου ἡλίου, εὐρισκομένου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, προσφέρεται πρὸς θερμότητος ἴσον πρὸς 10 kcal, ἄνευ μεταβολῆς τῆς πίεσεως. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου ($\rho_0 = 0,1785 \text{ kg/m}^3$, παγκόσμιος σταθερὰ τῶν ἀερίων $R = 1,987 \text{ kcal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{Mol}^{-1}$).
(Ἀπ. 45 °C.)

2062. Κινητὴρ παρασύρει στρεφόμενος πτερύγια ἐντὸς κατακορύφου κυλίνδρου πλήρους ὕδατος. Ταῖνα διερχομένη διὰ τοῦ κυλίνδρου διατείνεται ὑπὸ βάρους τινος. Διὰ καταλλήλου τιμῆς τοῦ βάρους τούτου, ὁ κύλινδρος παραμένει ἀκίνητος παρὰ τὴν ροπήν τὴν ὁποίαν τοῦ μεταδίδει τὸ παρασυρόμενον ἀπὸ τὰ πτερύγια ὕδωρ. Ἀποκαθίσταται ἰσορροπία ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται ὑπὸ συχνότητα 3000 στρ/min καὶ ὅταν ἡ δύναμις $F = 50 \text{ Nt}$. Τὸ εἰς ὕδωρ ἰσοδύναμον τοῦ κυλίνδρου εἶναι 100 gr, ἡ δὲ θερμοκρασία ἀνέρχεται κατὰ 5,5 °C/min. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος.



(Ἀπ. $J = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Joule/kcal}$.)

2063. Θερμιδόμετρον κρατεῖται ἀκίνητον ὑπὸ τινος σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, ἐνῶ ἡλεκτρικὸς κινητὴρ θέτει εἰς περιστροφήν πτερύγια τὰ ὁποῖα πραγματοποιοιοῦν $100 \pm 0,3 \text{ στρ/min}$. Τὸ ἐλατήριον, τοῦ ὁποίου ἡ σταθερὰ τάσεως εἶναι 1,1 μονάδες MKS, συστρέφεται τότε κατὰ 2,14 rad. Ἡ γωνία αὕτη εἶναι περίπου 0°,5. Διὰ τοῦ θερμιδομετροῦ ἀρχίζει νὰ διέρχεται ὕδωρ, καὶ ὅταν διέρχωνται 950 gr + 1 gr ὕδατος εἰς 5 min, ἡ ὑψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος εἶναι $1,85 \text{ °C} \pm 0,02 \text{ °C}$. Ποία ἡ ἐξαγομὴν ἡ ἐκ τοῦ πειράματος τούτου τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος.
(Ἀπ. $4,11 < J < 4,29$.)

2064. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης βλήματος ἐκ μολύβδου οὕτως, ὥστε ὅταν προσκρούσῃ ἐπὶ τινος ἐμποδίου νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῆς τήξεώς του. Παραδεχόμεθα ὅτι τὸ ἐμπόδιον δὲν θερμαίνεται. Δίδεται ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία 27 °C, ἡ θερμοκρασία τῆς τήξεως 327 °C, ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου 0,031 cal/gr · grad καὶ $J = 4180 \text{ Joule/kcal}$.
(Ἀπ. $v = 280 \text{ m/sec}$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ'

ΘΕΡΜΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2065. Πόσα χιλιόγραμμα ἄνθρακος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμότης καύσεως εἶναι 7000 kcal/kg, καταναλίσκονται εἰς ἀτμομηχανὴν 2000 PS συντελεστοῦ ἀποδόσεως 16% διὰ συνεχῆ λειτουργίαν αὐτῆς ἐπὶ 24 ὥρας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως, $A_{\text{δπ}}$ τὸ δαπανώμενον ἔργον καὶ $A_{\text{ωφ}}$ τὸ ὠφέλιμον ἔργον, ἔχομεν :

$$A_{\text{δπ}} = \frac{A_{\text{ωφ}}}{\eta} \quad (1)$$

Το δαπανώμενον έργον προέρχεται από την καύσιν του άνθρακος και θα είναι $A_{82\pi} = J \cdot Q$, όπου J είναι το μηχανικόν ισοδύναμον της θερμότητας, το δε ώφέλιμον έργον, το προερχόμενον εκ της λειτουργίας της άτμομηχανής, θα είναι $A_{ωφ} = N \cdot t$. Άρα ή σχέσις (1) γράφεται :

$$J \cdot Q = \frac{N \cdot t}{\eta} \quad \eta : \quad Q = \frac{N \cdot t}{J \cdot \eta} \quad (2)$$

Έάν καλέσωμεν θ_x την θερμότητα καύσεως και α τον αριθμόν τών χιλιογράμμων άνθρακος τα όποια απαιτούνται διά να λάβωμεν την θερμότητα Q , θα έχωμεν :

$$Q = \alpha \cdot \theta_x$$

και συνεπώς ή σχέσις (2) γράφεται :

$$\alpha \cdot \theta_x = \frac{N \cdot t}{J \cdot \eta} \quad \eta : \quad \alpha = \frac{N \cdot t}{\theta_x \cdot J \cdot \eta} \quad (3)$$

Θέτομεν εις την σχέσιν (3) : $N = 2000 \text{ PS} = 2000 \cdot 736 \text{ Watt}$, $t = 24 \cdot 3600 \text{ sec}$, $\theta_x = 7000 \cdot 10^3 \text{ cal/gr}$, $J = 4,2 \text{ Joule/cal}$, $\eta = 0,16$, και εύρισκομεν :

$$\alpha = 27 \text{ } 100 \text{ kgr} = 27,1 \text{ tn}$$

2066. Βενζινοκινητήρ ισχύος 1000 PS και συντελεστού άποδόσεως 30 % καταναλίσκει βενζίνην, της οποίας ή θερμότης καύσεως είναι 10 200 cal/gr και ή πυκνότης 0,72 gr/cm³. Πόσα λίτρα βενζίνης απαιτούνται διά την λειτουργίαν του κινητήρος επί μίαν ώραν.

Λύσις. Όπως και εις την προηγουμένη άσκησιν (σχέσις 3), θα έχωμεν :

$$\alpha = \frac{N \cdot t}{\theta_x \cdot J \cdot \eta} \quad (1)$$

Έάν καλέσωμεν α τον αριθμόν χιλιογράμμων m μάζης βενζίνης και β τον αριθμόν τών λίτρων V δγκου βενζίνης, τότε, εκ του τύπου της πυκνότητος $\rho = m/V$, λαμβάνομεν :

$$\alpha = \rho \cdot \beta \quad (2)$$

Ούτως ή σχέσις (1) γράφεται :

$$\beta = \frac{N \cdot t}{\rho \cdot \theta_x \cdot J \cdot \eta} \quad (3)$$

Θέτομεν εις την σχέσιν (3) : $N = 1000 \cdot 736 \text{ Watt}$, $\rho = 0,72 \text{ kgr/l}$, $t = 3600 \text{ sec}$, $\theta_x = 10 \text{ } 200 \cdot 10^3 \text{ cal}$, $J = 4,2 \text{ Joule/cal}$, $\eta = 0,3$, και εύρισκομεν :

$$\beta = 287 \text{ l}$$

2067. Αυτόκινητον, του οποίου ό κινητήρ έχει ισχύν 20 ίππων και συντελεστήν άποδόσεως 25 %, αναπτύσσει ταχύτητα 75 km/h. Πόσα λίτρα βενζίνης, της οποίας ή θερμότης καύσεως είναι 10 000 cal/gr και ή πυκνότης 0,72 gr/cm³, θα καταναλωθούν διά την διαδρομήν 100 km.

Λύσις. Όπως και εις την προηγουμένη άσκησιν, έχομεν :

$$\beta = \frac{N \cdot t}{\rho \cdot \theta_x \cdot J \cdot \eta} \quad (1)$$

όπου β ό αριθμός τών λίτρων της καταναλισκομένης βενζίνης.

Έπειδή όμως $t = s/v$, όπου s το διανυόμενον διάστημα υπό του αυτόκινήτου εις χρόνον t και v ή ταχύτης αυτού, ή σχέσις (1) γράφεται :

$$\beta = \frac{N \cdot s}{\rho \cdot \theta_x \cdot J \cdot \eta \cdot v} \quad (2)$$

Θέτοντες εις την σχέσιν (2) : $N = 20 \cdot 736 \text{ Watt}$, $s = 100 \text{ km}$, $v = 75 \text{ km/h} = 75/3600 \text{ km/sec}$, $\rho = 0,72 \text{ kgr/l}$, $\theta_x = 10 \text{ } 000 \cdot 10^3 \text{ cal/kgr}$, $J = 4,2 \text{ Joule/cal}$, $\eta = 0,25$, εύρισκομεν :

$$\beta = 9,4 \text{ l}$$

2068. Νά καθορισθῇ ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις ἀτμομηχανῆς ἐργαζομένης μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 400 °C καὶ 105 °C.

Λύσις. Θεωρητικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως ἡ θερμικῆς μηχανῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀπολύτους θερμοκρασίας T_1 καὶ T_2 τῶν δύο δεξαμενῶν θερμότητος καὶ ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Θέτομεν : $T_1 = 400 + 273 = 673$ °K, $T_2 = 105 + 273 = 378$ °K, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\eta = 0,438$$

ἦτοι ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις εἶναι : 43,8 %

2069. Ποσότης 1500 kgr/h ὕδατος θερμαίνεται ἀπὸ θερμοκρασίας 20 °C εἰς 80 °C, διὰ συμπυκνώσεως, ἐντὸς τῆς μάζης του, ἀτμοῦ θερμοκρασίας 101 °C. Ὁ ἀτμὸς παράγεται εἰς ἀτμολέβητα, μὲ βαθμὸν θερμικῆς ἀποδόσεως 0,6, ἀπὸ καύσιμον θερμότητος καύσεως 3500 kcal/kgr. Ποία ἡ ποσότης τοῦ ἀπαιτουμένου ἀτμοῦ (kgr/h) καὶ ποία ἡ κατανάλωσις καυσίμου (kgr/h). (Εἰδικὴ θερμότης ἀτμοῦ 0,5 kcal/kgr·grad, $L = 540$ kcal/kgr).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Χημικῶν-Μεταλλειολόγων Μηχανικῶν, 1962).

Λύσις. α) Τὸ ὕδωρ ἀπορροφᾷ ποσὸν θερμότητος :

$$Q_1 = m_1 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

ὅπου m_1 ἡ μάζα τοῦ ὕδατος, c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος, θ_2 καὶ θ_1 ἡ τελικὴ καὶ ἀρχικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ.

Ὁ ἀτμὸς ἀποδίδει ποσὸν θερμότητος Q_2 διδόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$Q_2 = m_2 (101 - 100) \cdot c' + m_2 \cdot L + m_2 \cdot c (100 - \theta_2) \quad (2)$$

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$m_1 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1) = m_2 [(101 - 100) \cdot c' + L + c \cdot (100 - \theta_2)] \quad (3)$$

$$\eta : \quad m_2 = \frac{m_1 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{(101 - 100) \cdot c' + L + 100 - \theta_2} \quad (4)$$

Θέτομεν : $m_1 = 1500$ kgr/h, $c = 1$ kcal/kgr·grad, $\theta_2 = 80$ °C, $\theta_1 = 20$ °C, $c' = 0,5$ kcal/kgr·grad, $L = 540$ kcal/kgr καὶ εὐρίσκομεν :

$$\underline{m_2 = 160,6 \text{ kgr/h}}$$

β) Ἡ ἀπαιτουμένη ὠφέλιμος θερμότης Q_w ἀνὰ ὥραν διὰ τὴν ἀτμοποίησιν θὰ εἶναι :

$$Q_w = m_2 (L + c \cdot \Delta\theta + c' \cdot 1 \text{ grad}) \quad (5)$$

ὅπου $\Delta\theta$ ἡ διαφορὰ θερμοκρασιῶν ἀτμοποίησης 100 °C καὶ θερμοκρασίας περιβάλλοντος.

Ἡ δαπανωμένη ἀφ' ἐτέρου ποσότης Q_8 θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$Q_8 = m \cdot q \quad (6)$$

ὅπου m ἡ ποσότης τοῦ καυσίμου καὶ q ἡ θερμότης καύσεως αὐτοῦ.

Ἐὰν η ὁ βαθμὸς θερμικῆς ἀποδόσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$\eta = \frac{Q_w}{Q_8} \quad (7)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (5), (6) καὶ (7), λαμβάνομεν :

$$m = \frac{m_2 \cdot [L + c \cdot \Delta\theta + c' \cdot 1 \text{ grad}]}{\eta \cdot q}$$

Θέτουμε: $m_2 = 160,6 \text{ kg}/\text{h}$, $L = 540 \text{ kcal}/\text{kg}$, $c = 1 \text{ kcal}/\text{gr} \cdot \text{grad}$, $c' = 0,5 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot \text{grad}$,
 $\Delta\theta = 100 - 20 = 80^\circ\text{C}$, $\eta = 0,6$ και $q = 3500 \text{ kcal}/\text{kg}$, οπότε λαμβάνουμε:

$$m = 47,5 \text{ kg}/\text{h}$$

2070. Θερμικός κινητήρ ισχύος 1000 ίππων, καταναλίσκει ωριαίως 160 kgf πετρελαίου με θερμότητα καύσεως 10 000 kcal/kgf. Διά την καύσιν χρησιμοποιεί 20 kgf αέρος ανά χιλιόγραμμον πετρελαίου, παρέχει δε ως προϊόν της καύσεως καυσαέριον θερμοκρασίας 400°C και ειδικής θερμότητος $c = 0,3 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot \text{grad}$. Το καυσαέριον τούτο εισέρχεται εις λέβητα ένθα αποδίδει θερμότητα πρὸς ἀτμοποίησιν ὕδατος καὶ ἐξέρχεται αὐτοῦ με θερμοκρασίαν 200°C . Τὸ ὕδωρ ἄφ' ἐτέρου εἰσαγόμενον εἰς τὸν λέβητα ὑπὸ θερμοκρασίαν 40°C ἐξέρχεται αὐτοῦ, ὡς κεκορεσμένος ἀτμός θερμοκρασίας 180°C (θερμότης ἀτμοποίησης 480 kcal/kgf). Ποία ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τοῦ κινητήρος καὶ ποία ἡ ἀτμοπαραγωγή τοῦ λέβητος εἰς kgf/h.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀγρονόμων-Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1962).

Λύσις. α) Ἐάν $N_{\omega\varphi}$ ἡ ωφέλιμος ἰσχύς τοῦ θερμοκινητήρος, N_8 ἡ δαπανώμενη καὶ η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν:

$$\eta = \frac{N_{\omega\varphi}}{N_8} \quad (1)$$

Ἄφ' ἐτέρου ἔχομεν:

$$N_8 = \frac{A}{t} \quad (2) \quad \text{ἢ:} \quad N_8 = \frac{J \cdot Q}{t} \quad (3)$$

δπου A τὸ δαπανώμενον ἔργον, Q τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν θερμότητος καὶ J τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3), λαμβάνομεν:

$$\eta = \frac{N_{\omega\varphi} \cdot t}{J \cdot Q} \quad (4)$$

Δίδονται: $N_{\omega\varphi} = 1000 \text{ CV} = 75\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}$, $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ sec}$, $J = 427 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{kcal}$, $Q = 10\,000 \cdot 160 = 16 \cdot 10^5 \text{ kcal}$. Ἐπομένως, δι' ἀντικατάστασεως θὰ ἔχωμεν:

$$\eta = 0,39$$

β) Τὰ καυσαέρια ἀποδίδουν ποσὸν θερμότητος:

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (\theta_\tau - \theta_\alpha) \quad (5)$$

δπου m_1 ἡ μάζα, c_1 ἡ εἰδικὴ θερμότης, θ_τ καὶ θ_α ἡ τελικὴ καὶ ἀρχικὴ θερμοκρασία αὐτῶν.

Ἀφ' ἐτέρου, ἐάν m_2 ἡ μάζα τοῦ ἀτμοποιημένου ὕδατος, c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος, c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀτμοῦ, L ἡ θερμότης ἀτμοποίησης, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ θ_2 ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀτμοῦ, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾷ ὁ ἀτμός:

$$Q_2 = m_2 [c (100 - \theta_1) + L + c_2 (\theta_2 - 100)] \quad (6)$$

Ἐπειδὴ δὲ θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$Q_1 = Q_2 \quad (7)$$

ἔπεται ὅτι:

$$m_1 c_1 (\theta_\tau - \theta_\alpha) = m_2 [c (100 - \theta_1) + L + c_2 (\theta_2 - 100)] \quad (8)$$

$$\text{ἢ:} \quad m_2 = \frac{m_1 \cdot c_1 (\theta_\tau - \theta_\alpha)}{c (100 - \theta_1) + L + c_2 (\theta_2 - 100)} \quad (9)$$

Δίδονται: $m_1 = 160 + 160 \cdot 20 = 3360 \text{ kg}/\text{h}$ (ἡ ποσότης τῶν καυσαερίων εἶναι ἄθροισμα τῆς καιομένης ἀνὰ ὥραν μάζης πετρελαίου καὶ τῆς μάζης τοῦ προσφερομένου διὰ τὴν καύσιν αέρος), $c_1 = 0,3 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot \text{grad}$, $c = 1 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot \text{grad}$, $c_2 = 0,5 \text{ kcal}/\text{kg} \cdot \text{grad}$, $L = 480 \text{ kcal}/\text{kg}$, $\theta_1 = 40^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 180^\circ\text{C}$, $\theta_\tau = 400^\circ\text{C}$, $\theta_\alpha = 200^\circ\text{C}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (9) καὶ εὕρισκομεν:

$$m_2 = 347,6 \text{ kg}/\text{h}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2071. Ἀτμομηχανὴ λειτουργεῖ ὑπὸ ἀπόδοσιν 15%. Πόσῃ θερμότητι πρέπει νὰ προμηθεύωμεν ἀνὰ ὥραν, ἵνα αὕτη ἐμφανίσῃ ἰσχὺν 3 HP. (Ἀπ. $1,285 \cdot 10^7$ cal.)

2072. Ποσότης 1 kgf λιθάνθρακος καιομένη παράγει 16 kgf ἁτμοῦ, διὰ τοῦ ὁποίου ἀτμομηχανὴ ἰσχύος 1 PS λειτουργεῖ ἐπὶ 2 ὥρας. Ἡ θερμότης καύσεως τοῦ λιθάνθρακος εἶναι 8000 kcal/kgf. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς. (Ἀπ. 16%.)

2073. Ποία ἡ μεγίστη δυνατὴ θερμικὴ ἀπόδοσις ἀτμοστροβίλου, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ ἁτμὸς εἰσέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 257°C , εἰς δὲ τὸν συμπυκνωτὴν ἡ θερμοκρασία εἶναι 49°C . (Ἀπ. 39%.)

2074. Ἐκαστος τῶν τριῶν ἀτμολεβήτων πλοίου καταναλίσκει καθ' ὥραν 5,6 tn πετρελαίου θερμότητος καύσεως 9500 kcal/kgf. Ἐάν ἡ συνολικὴ ἰσχύς τῆς μηχανῆς αὐτοῦ εἶναι 23 000 PS, ποία ἡ ἀπόδοσις. (Ἀπ. 9,1%.)

2075. Ὁ κύλινδρος ἀτμομηχανῆς ἔχει διάμετρον 60 cm καὶ ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου εἶναι 5 m/sec. Ἐάν ἡ πίεσις τοῦ ἁτμοῦ εἶναι $2,5 \text{ kgf/cm}^2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς ἀτμομηχανῆς ἰσχύς. (Ἀπ. 346 kW.)

2076. Ποία ἡ μεγίστη δυνατὴ ἀπόδοσις ἀτμομηχανῆς, ὅταν ὁ ἁτμὸς εἰσέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 350°C καὶ ἐξέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 120°C . (Ἀπ. 33,2%.)

2077. Δι' ἐκρήξεως κινητὴρ ἰσχύος 60 PS καταναλίσκει 15 λίτρα βενζίνης ὠριαίως. Ποῖος ὁ βιομηχανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητήρος. (ρβενζ. = 780 kgf/m^3 , θερμότης καύσεως βενζίνης = 11 000 kcal/kgf.) (Ἀπ. 29,5 %.)

2078. Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς PS καὶ kW ἡ ἰσχύς ἀτμομηχανῆς, ὅταν ἡ μέση πίεσις τοῦ ἐμβόλου κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς πλήρους κύκλου λειτουργίας ἰσοῦται πρὸς 5 kgf/cm^2 . Ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου ἀνέρχεται εἰς 40 cm, ἡ ἐπιφάνειά του εἰς 300 cm^2 , ὁ ἀριθμὸς τῶν κύκλων λειτουργίας εἰς 120 κατὰ πρῶτον λεπτὸν καὶ ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἰς 0,9. (Ἀπ. 14,4 PS = 10,6 kW.)

2079. Κινητὴρ αὐτοκινήτου καταναλίσκει 6 kgf βενζίνης θερμότητος καύσεως 11 000 kcal/kgf καὶ ἀποδίδει ἰσχὺν 32 ἵππων. Πόση εἶναι ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ. (Ἀπ. 30,7 %.)

2080. Ἀτομον βάρους 60 kgf λαμβάνει πινάκιον σοκολάτας, ἀντιστοιχοῦσης εἰς θρεπτικὴν ἀξίαν 120 kcal, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 20% μετατρέπονται εἰς μηχανικὸν ἔργον. Ἐπὶ ποίου ὕψους δύναται τὸ ἐν λόγω ἄτομον νὰ ἀνέλθῃ. (Ἀπ. 171 m.)

2081. Ἀτμομηχανή, ἰσχύος 75 PS, μετατρέπει εἰς μηχανικὸν ἔργον τὰ 12% τῆς προσφερομένης εἰς αὐτὴν ἐνεργείας. Ποῖον ποσὸν θερμότητος προσφέρεται εἰς τὴν ἀτμομηχανὴν κατὰ δευτερόλεπτον. (Ἀπ. 110 kcal/sec.)

2082. Ἀτμομηχανὴ ἀποδίδει ἰσχὺν 1000 PS, ἔχει συντελεστὴν ἀποδόσεως 12%, ἐργάζεται δὲ 10 ὥρας. Ποία ποσότης ἀνθράκων καταναλίσκεται ὑπὸ τῆς ἀτμομηχανῆς, ἐάν ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθράκων εἶναι 7500 kcal/kgf . (Ἀπ. 7028 kgf.)

2083. Εἰς 50 m βιομηχανικὴν ἐγκατάστασιν καταιονίζεται ὕδωρ 1300 m^3 ἀνὰ ὥραν εἰς ὕψος 50 m. Πρὸς τοῦτο λειτουργεῖ ἀντλία καταναλίσκουσα 3 tn ἀνθράκων ἀνὰ 24 ὥρας. Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατόν τῆς ὑπὸ τῶν ἀνθράκων προσφερομένης ἐνεργείας χρησιμοποιεῖται, ἐάν ἡ θερμότης καύσεως αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς 7000 kcal/kgf . (Ἀπ. 17,4%.)

2084. Κινητήρ καύσεως, αποδίδων ισχύ 800 PS και βαθμού αποδόσεως 25%, εργάζεται επί 2 ώρας. Πόσα λίτρα βενζίνης καταναλίσκει, εάν η θερμότης καύσεως της βενζίνης ανέρχεται εις 10 000 kcal/kg και η πυκνότης αὐτῆς εις 0,78 gr/cm³.
(Απ. 519 lt.)

2085. Αἱ μηχαναὶ ὑπερωκεανείου αποδίδουν ισχύ 100 000 PS. Πόσους τόννους ἀνθράκων καταναλίσκουν ἡμερησίως, ἐὰν ὁ βαθμὸς ἀποδόσεως εἶναι 20% ἢ δὲ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθράκος 6000 kcal/kg.
(Απ. 1265 tn.)

2086. Αὐτοκίνητον, ὁ κινητήρ τοῦ ὁποίου ἀποδίδει ισχύ 20 PS καὶ ἔχει συντελεστήν ἀποδόσεως 25%, διανύει ἀπόστασιν 300 km με ταχύτητα 60 km/h. Πόσα λίτρα βενζίνης καταναλίσκει, ἐὰν ἡ θερμότης καύσεως τῆς βενζίνης εἶναι 10 000 kcal/kg ἢ δὲ πυκνότης αὐτῆς 0,78 gr/cm³.
(Απ. 32,4 lt.)

2087. Ἐλκυστήρ σύρει κορμὸν δένδρου με σταθερὰν ταχύτητα καὶ δαπανᾷ πρὸς τοῦτο δύναμιν 600 kg*. Ποία θερμότης, λόγω τριβῆς, ἀναπτύσσεται εις διάστημα 800 m.
(Απ. 1123 kcal.)

2088. Ἀτομον, βάρους 54 kg*, ὀλισθαίνει με σταθερὰν ταχύτητα κατὰ μῆκος κατακορύφου σχοινίου, κατερχόμενον 10 m/sec. α) Ποία ἡ οὕτως ἀποδομένη ισχύς. β) Ποῖον τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος.
(Απ. α' 7,2 PS. β' 1,2636 kcal.)

2089. Κιβώτιον, βάρους 80 kg*, σύρεται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐδάφους μῆκους 50 m. Ποία ἡ ἀναπτυσσομένη λόγω τριβῆς θερμότης, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἰσοῦται πρὸς 0,25.
(Απ. 2,3 kcal.)

2090. Σιδηροδρομικὴ γραμμὴ παρουσιάζει ἐπὶ μῆκος 5,6 km ὑψομετρικὴν διαφορὰν 113 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ λόγω πεδήσεως ἀναπτυσσομένη θερμότης κατὰ τὴν κάθοδον συρμοῦ, συνολικοῦ βάρους 800 000 kg*.
(Απ. 212 000 kcal)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2091. Ἡ ισχύς μηχανῆς αὐτοκινήτου εἶναι 60 HP. Τὸ καύσιμον εἶναι βενζίνη θερμότητος καύσεως 9000 kcal/kg με συντελεστήν ἀποδόσεως $\eta = 0,35$. α) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν τῆς βενζίνης, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ λειτουργίαν τῆς μηχανῆς ἐπὶ 15 h συνεχῶς. β) Νὰ εὗρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ ἀποταμειωθῇ ἡ ἀπαιτούμενη ποσότης βενζίνης.
(Απ. α' 180,6 kg. β' 0,258 m³.)

2092. Εἰς διζελοκινητῆρα ὠφέλιμον ισχύος 50 PS ἡ κατανάλωσις ἐλαίου ἀνέρχεται εις 200 gr κατὰ ὥριαον ἵππον. Ἀτμομηχανὴ καταναλίσκει δι' ἕκαστον ὠφέλιμον ἔργον ὥριαίου ἵππου 0,7 kg ἀνθράκων καὶ κινητῆρ 270 gr βενζίνης. Ποῖος ὁ βιομηχανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως, ὅταν αἱ ἀποδόσεις καύσεως ἀνέρχωνται εις 10 000 kcal/kg διὰ τὸ ἐλαῖον κινητήρων Δῆζελ, 7500 kcal/kg διὰ τὸν ἀνθράκα καὶ 11 000 kcal/kg διὰ τὴν βενζίνη. (1 PSh = 632,6 kcal).
(Απ. α' 31,6%. β' 12,05%. γ' 21,3%.)

2093. Νὰ εὗρεθῇ πὸς ἀνθραξ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν 24ωρον λειτουργίαν ἀτμομηχανῆς ισχύος 500 CV καὶ ἀποδόσεως 5%, ὅταν ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἀνθράκος εἶναι 7000 kcal/kg*. (Πολυτεχνικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Ἀνωτάτῃ Σχολῇ Ἀρχιτεκτόνων, 1961). (Απ. 21 670 kg*.)

2094. Ποία ἡ ἀπόδοσις ἀτμομηχανῆς καταναλισκούσης 683 gr μαζοῦτ ἀνά κιλοβατώραν. Τὸ μαζοῦτ παρέχει καίόμενον 10 500 kcal/kg. (1 kcal ἰσοδυναμεῖ πρὸς 4185 Joule).
(Απ. 0,12.)

2095. Ἡ θερμότης καύσεως τοῦ φωταερίου εἶναι 8000 kcal/kg. Ποία ἡ θερμικὴ ἀπόδοσις θερμαντήρος φωταερίου, ὅταν κατὰ τὴν καύσιν 3,7 lt φωταερίου ἀνέρχεται ἡ θερμοκρασία 1500 cm³ ὕδατος κατὰ 8 °C. Πυκνότης φωταερίου = 0,0006 gr/cm³. (Γεωπονικὴ Σχολὴ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, 1961). (Ἀπ. 0,67.)

2096. Κινητήρ, χωρητικότητος κυλίνδρου 1,6 lt, στρεφόμενος μὲ 3000 στρ/min, καταναλίσκει εἰς μίαν ὥραν 4,8 kgρ ἀποστάγματος, δίδοντος 10⁴ kcal · kgρ⁻¹. Διὰ τὰ ὑψώσωμεν κατὰ 1 °C τὴν θερμοκρασίαν 1 Mol ἀέρος ἀπαιτοῦνται 5 cal. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας θ, γενομένου δεκτοῦ ὅτι αἱ παρειαὶ τῶν κυλίνδρων δὲν θερμαίνονται. Μοριακὸς ὄγκος 24 lt. (Ἀπ. 1600 °C.)

2097. Τὸ ἔργον κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου ἀτμομηχανῆς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $A = p \cdot V$, ἐκπεφρασμένον εἰς μονάδας Μ.Κ.Σ. Εἰς τὴν πρᾶξιν χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἀκολουθοῦσας μονάδας: Πίσεις: Χιλιόγραμμα βάρους κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον. Ὅγκος: λίτρον. Ἔργον: Χιλιογραμμόμετρον. Νὰ καθορισθῇ ὁ συντελεστὴς k τῆς σχέσεως $A = k \cdot p \cdot V$. (Ἀπ. $k = 10$.)

2098. Εἰς τὴν βιομηχανίαν ἡ θερμότης μετρεῖται εἰς kcal, τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν μηχανῶν εἰς kgρ·m καὶ ἡ ἰσχύς αὐτῶν συνήθως εἰς ἀτμοίππους. Ποῖος ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως μηχανῆς καταναλισκούσης 800 gr ἄνθρακος κατὰ ὥριστον ἀτμοίππον (CVh). Ὁ ἄνθραξ ἀποδίδει 8000 kcal/kgρ. (Ἀπ. $\eta = 0,107$.)

2099. Ἡ πίσις ἐντὸς λέβητος δίδεται διὰ τῆς σχέσεως: $P_{Nt \cdot m^{-2}} = 10^{-3} \cdot t^4$ (t εἰς °C). Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίσις ἰσοῦται πρακτικῶς πρὸς 10⁵ Nt · m⁻². Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔργον κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου εἰς μονοκύλινδρον μηχανήν, τῆς ὁποίας ὁ κύλινδρος ἔχει τομὴν 1000 cm² καὶ μήκος 0,6 m, ἡ δὲ θερμοκρασία τοῦ λέβητος εἶναι 180 °C. (Ἀπ. $A = 57$ kJ.)

2100. Ποία ἡ δύναμις ἔλξεως, ὑποτιθεμένη σταθερά, ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ ἀτμομηχανῆς, ἥτις μεταδίδει εἰς σιδηροδρομικὸν συρμὸν μάζης 750 τόννων ταχύτητα 72 km/h ἐντὸς χρόνου 100 sec. Ποῖον εἶναι τὸ παραγόμενον ἔργον κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ ἐμβόλου, ἐὰν ἡ ἐν λόγω ἀτμομηχανὴ, τῆς ὁποίας οἱ τροχοὶ ἔχουν περίμετρον 6 m, ἔχη δύο κυλίνδρους διπλῆς ἐνεργείας. Ἡ μηχανὴ λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀποδόσεως. Ἡ ἔξοδος τῶν ἀερίων γίνεται εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀέρα. Ἡ πίσις εἰς τὸν λέβητα εἶναι $p = 16$ ἀτμόσφαιραι. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν κυλίνδρων. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίσις εἶναι $p = 1$ ἀτμόσφαιρα ἢ 10 Nt · m⁻². (Ἀπ. $V = 0,15$ m³.)

2101. Μηχανὴ ψύξεως παράγει 5 kgρ πάγου ἀνὰ ὥραν ἐξ ὕδατος 22 °C. Πόσαι kcal ἀποδίδονται ἀνὰ λεπτόν. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr. (Ἀπ. 8,5 kcal/min.)

2102. Εἰς ἀτμομηχανήν, ὁ εἰς τὸν κύλινδρον εἰσερχόμενος ἀτμὸς ἔχει θερμοκρασίαν 300 °C καὶ ὁ πρὸς τὸν συμπτυκωτὴν ἐξερχόμενος 50 °C. Ἐκ πείρας γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐν λόγω ἀτμομηχανὴ ἀπαιτεῖ μάζαν ὕδατμῶν 5 kgρ πρὸς ἀπόδοσιν 1 PSh καὶ ὅτι πρὸς παρασκευὴν 1 kgρ ὕδατμῶν ἀπαιτεῖται καύσις 0,125 kgρ ἄνθρακος, θερμότητος καύσεως 7500 kcal/kgρ. α) Ποῖος ὁ θερμοδυναμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς. β) Ποῖος ὁ βιομηχανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτῆς. (Ἀπ. $\alpha' 43,6\%$. $\beta' 13,3\%$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2103. Ποία ἡ σχετική ὑγρασία ἐν τῷ ἀέρι, ὅταν ἡ πυκνότης ἀτμοῦ εἶναι 8 gr/m^3 καὶ ἡ πυκνότης κεκορεσμένων ἀτμῶν 14 gr/m^3 .

Λύσις. Ἡ σχετική ὑγρασία β δίδεται ἐξ ὁρισμοῦ ὡς τὸ πηλίκον τῆς πυκνότητος τῶν ἀτμῶν ἐν τῷ ἀέρι ὡς πρὸς τὴν πυκνότητα τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν ἐν τῷ ἀέρι ἐπὶ 100.

Ἐπομένως :

$$\beta = \frac{8}{14} \frac{\text{gr/m}^3}{\text{gr/m}^3} \cdot 100 \quad \eta : \quad \beta = 57 \%$$

2104. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία τοῦ ἀέρος, ἡμέραν καθ' ἣν ἡ θερμοκρασία εἶναι 14°C , ἡ βαρομετρικὴ πίεσις 764 mm Hg καὶ τὸ σημεῖον δρόσου 10°C . (Πυκνότης ὑδρατμῶν ἐν σχέσει πρὸς ξηρὸν ἀέρα ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας πίεσεως καὶ θερμοκρασίας $= 0,63$. Πίεσις κορεσμοῦ ὑδρατμῶν ὑπὸ $10^\circ\text{C} = 9,2 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου. Πυκνότης ξηροῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $= 1,293 \text{ gr/lit}$).

Λύσις. Ἐστω α ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία τοῦ ἀέρος. Αὕτη ἐξ ὁρισμοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\alpha = \frac{m}{V} \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μάζα τῶν ὑδρατμῶν καὶ V ὁ ὅγκος τοῦ ἀέρος. Ἐὰν V_1 ὁ μερικός ὅγκος τῶν ὑδρατμῶν καὶ p_1 ἡ πυκνότης αὐτῶν εἰς 14°C , τότε θὰ ἔχωμεν :

$$m = V_1 \cdot p_1 \quad (2) \quad \text{καὶ ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν (1):} \quad \alpha = \frac{V_1 \cdot p_1}{V} \quad (3)$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ἡ πυκνότης p_1 μετὰ τῆς πυκνότητος p_0 εἰς 0°C συνδέεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$p_1 = p_0 \cdot \frac{T_0}{T_1} \quad (4)$$

ὅπου T_0 καὶ T_1 αἱ ἀντίστοιχοι ἀπόλυτοι θερμοκρασίαι. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\alpha = \frac{V_1}{V} \cdot p_0 \cdot \frac{T_0}{T_1} \quad (5)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν ὅτι :

$$\frac{p_1}{p} = \frac{V_1}{V} \quad (6)$$

ὅπου p ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἰς 14°C καὶ p_1 ἡ μερική πίεσις τῶν ἀτμῶν εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$\alpha = \frac{p_1}{p} \cdot p_0 \cdot \frac{T_0}{T_1} \quad (7)$$

Ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις ἦτο ἡ κανονικὴ p_0 , θὰ εἴχομεν μίαν νέαν μερικήν πίεσιν p'_1 καὶ θὰ ἴσχυεν ἡ σχέση :

$$\frac{p_1}{p} = \frac{p'_1}{p_0} \quad (8)$$

Διά συνδυασμού τῶν εξισώσεων (7) καὶ (8) προκύπτει :

$$\alpha = \frac{p'_1}{p_0} \cdot \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T_1} \quad (9)$$

Ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν δεδομένων : $p'_1 = 9,2 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου, $p_0 = 760 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου, $\rho_0 = 0,63 \cdot 1,293 \text{ gr/lit} = 0,63 \cdot 1293 \text{ gr/m}^3$, $T_0 = 273^\circ\text{K}$, $T_1 = 273 + 14 = 287^\circ\text{K}$, καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha = 9,38 \text{ gr/m}^3$$

2105. Ἐκ ποσότητος ἀέρος θερμοκρασίας 25°C ἀφαιρεῖται διὰ πεντοξειδίου τοῦ φωσφόρου ἡ περιεχομένη ἐντὸς αὐτῆς ὑγρασία, ὁπότε ἡ πίεσις αὐτῆς πίπτει κατὰ $15,5 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου. Νὰ εὑρεθοῦν : Ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἐξετασθέντος ἀέρος. Ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία αὐτοῦ. (Τάσις ἀτμῶν ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $25^\circ\text{C} = 23,76 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου).

Λύσις. α) Ἐστω α ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία τοῦ ἀέρος. Τότε θὰ ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\alpha = \frac{m}{V} \quad (1)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα εἰς gr τοῦ περιεχομένου ὑδατμοῦ εἰς τὸν ἀέρα καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος εἰς m^3 . Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ p' τὴν μερικὴν πίεσιν τῶν ὑδατμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ πραγματικὸς ὄγκος τῶν ὑδατμῶν V' θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\frac{V'}{V} = \frac{p'}{p} \quad \eta : \quad V = V' \cdot \frac{p}{p'} \quad (2)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν δύο εξισώσεων προκύπτει :

$$\alpha = \frac{m}{V'} \cdot \frac{p'}{p} \quad (3)$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι :

$$\frac{m}{V'} = \rho \quad (4)$$

ἡ πυκνότης τῶν καθαρῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος, καί :

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} \quad (5)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν εξισώσεων (3), (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$\alpha = \rho_0 \cdot \frac{T_0 \cdot p'}{T \cdot p_0} \quad (6) \quad \text{ἐνῶ :} \quad \rho_0 = \frac{M}{V_{\text{Mol}}} \quad (7)$$

ὅπου M τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ V_{Mol} ὁ μοριακὸς ὄγκος.

Διά συνδυασμοῦ τῶν εξισώσεων (6) καὶ (7) λαμβάνομεν :

$$\alpha = \frac{M}{V_{\text{Mol}}} \cdot \frac{T_0 \cdot p'}{T \cdot p} \quad (8)$$

Ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν δεδομένων : $M = 18 \text{ gr}$, $V_{\text{Mol}} = 22,4 \text{ lit} = 0,0224 \text{ m}^3$, $T_0 = 273^\circ\text{K}$, $T = 273 + 25 = 298^\circ\text{K}$, $p = 760 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου καὶ $p' = 15,5 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\alpha = 15 \text{ gr/m}^3$$

β) Ἡ τάσις τῶν ὑδατμῶν εἰς 25°C εἶναι $P = 23,76 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου, ἐπομένως ἡ σχετικὴ ὑγρασία β ἐξ ὁρισμοῦ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\beta = \frac{p' \cdot 100}{P} = \frac{15,5 \text{ mm Hg}}{23,76 \text{ mm Hg}} \cdot 100 \quad \eta : \quad \beta = 65\%$$

2106. Έντὸς βαρομετρικοῦ κενοῦ σωλῆνος τοῦ Τορρικέλλι τομῆς 2 cm^2 καὶ ὕψους 20 cm , τίθεται ποσότης αἰθέρος $m = 2 \text{ gr}$, ἥτις ἐξαερούμενη ἐξ ὀλοκλήρου καταβιβάζει τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου ἀπὸ 760 mm Hg εἰς 550 mm Hg . Ζητοῦνται: α) Ποία ἡ τάσις τῶν ἀτμῶν τοῦ αἰθέρος, καὶ β) ποία ἡ θερμοκρασία τὴν στιγμήν τῆς μετρήσεως, ἐὰν τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ αἰθέρος εἶναι $\mu = 74,1$, τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου $13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ ἡ σταθερὰ $R = 0,84 \text{ kgr}^* \text{m}/\text{grad}$. (Σχολή 'Ικάρων, 1958).

Λύσις. α) Ἐὰν p_0 ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις, p ἡ τάσις τῶν ἀτμῶν τοῦ αἰθέρος καὶ p' ἡ πίεσις τῆς στήλης ὑδραργύρου μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ αἰθέρος ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ κενοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$p_0 = p + p' \quad \text{ἢ} : \quad p = p_0 - p' \quad (1)$$

Θέτομεν : $p_0 = 760 \text{ mm Hg}$, $p' = 550 \text{ mm Hg}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$p = 210 \text{ mm Hg} \quad \text{ἢ} : \quad p = 285,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

(ἐπειδὴ $\epsilon_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$).

β) Γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων :

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{ἢ} : \quad T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} \quad (2)$$

ὅπου T ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία, $p = 285,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2 = 2856 \text{ kgr}^*/\text{m}^2$ ἡ πίεσις, $V = 2 \cdot 40 = 80 \text{ cm}^3 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ ὁ ὄγκος, $n = m/\mu = 2/74,1$ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμομορίων τοῦ αἰθέρος, καὶ $R = 0,84 \text{ kgr}^* \text{m}/\text{grad}$ ἡ σταθερὰ τῶν ἀερίων. Ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα καὶ εὐρίσκομεν :

$$T = 10,8^\circ \text{K}$$

2107. Ἐν κυβικὸν μέτρον ἀέρος θερμοκρασίας 20°C εὐρέθη ὅτι περιεῖχε $12,5 \text{ gr}$ ὑδρατμῶν. Δοθέντος ὅτι ἡ τάσις τῶν κεκορεσμένων ὑδρατμῶν τῶν 20°C εἶναι $17,34 \text{ mm Hg}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος. (Δίδονται κατὰ προσέγγισιν : $g = 10 \text{ m}/\text{sec}^2$, πυκνότης ἀέρος κανονικῶν συνθηκῶν $1300 \text{ gr}/\text{m}^3$ καὶ σχετικὴ πυκνότης ὑδρατμῶν $0,62$).

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἡλεκτρολόγων, 1962).

Λύσις. Ἡ σχετικὴ ὑγρασία β , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\beta = \frac{m}{m_k} \quad (1)$$

ἐνθα m ἡ μάζα τῶν ὑδρατμῶν ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ m_k ἡ μάζα τῶν ὑδρατμῶν τοὺς ὁποίους θὰ περιεῖχεν ὁ ἀέρ. ἐὰν ἦτο κεκορεσμένος.

Ἀφ' ἐτέρου :

$$m_k = V_0 \cdot d_0 \quad (2)$$

ὅπου V_0 ὁ ὄγκος τῶν ὑδρατμῶν εἰς 0°C καὶ d_0 ἡ ἀντίστοιχος πυκνότης αὐτῶν.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότης δ καὶ ἡ ἀπόλυτος πυκνότης d_0 τῶν ὑδρατμῶν συνδέονται μετὰ τῆς πυκνότητος d τοῦ ἀέρος διὰ τῆς σχέσεως :

$$\delta = \frac{d_0}{d} \quad \text{ἢ} : \quad d_0 = \delta \cdot d \quad (3)$$

Ἐπίσης, ἐὰν θ ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος, p_0 ἡ κανονικὴ πίεσις, V ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας καὶ P ἡ τάσις ἀτμῶν εἰς θερμοκρασίαν 20°C , θὰ ἔχωμεν :

$$p_0 V_0 = \frac{P \cdot V}{(1 + \alpha\theta)} \quad \text{ἢ} : \quad V_0 = \frac{P \cdot V}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4), λαμβάνομεν :

$$\beta = \frac{m \cdot p_0(1 + \alpha\theta)}{\delta \cdot d \cdot P \cdot V} \quad (5)$$

Ἐὰν θέσωμεν : $m = 12,5 \text{ gr}$, $p_0 = 760 \text{ mm Hg}$, $P = 17,34 \text{ mm Hg}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, $\theta = 20^\circ \text{C}$ $\delta = 0,62$, $d = 1300 \text{ gr}/\text{m}^3$ καὶ $V = 1 \text{ m}^3$, προκύπτει :

$$\beta = 0,73 \quad \text{ἢ} : \quad 73\%$$

2108. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα ἐνὸς λίτρου ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 20°C καὶ πίεσιν 75 cm ὑδραργυρικῆς στήλης, ἐὰν ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 60% . Δίδεται ὅτι ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἰς θερμοκρασίαν 20°C ἰσοῦται πρὸς $1,75\text{ cm}$ ὑδραργυρικῆς στήλης, αἱ δὲ πυκνότητες τοῦ ἀέρος καὶ τῶν ὑδρατμῶν, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, εἶναι ἴσαι πρὸς $1,293\text{ gr/l}$ καὶ $0,806\text{ gr/l}$ ἀντιστοίχως.

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρίσμου τῆς σχετικῆς ὑγρασίας καὶ τῆς ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος διδομένης τιμῆς αὐτῆς ἐπεταί ὅτι, ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ὑπάρχουν ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἀκόρεστοι ὑδρατμοί. Ἐὰν $\rho_{\alpha,\text{υδ}}$ ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας καὶ $P_{\alpha,\alpha}$ ἡ μεγίστη τάσις αὐτῶν εἰς θερμοκρασίαν θ , τότε ἡ πυκνότης τῶν κεκορεσμένων ὑδρατμῶν $\rho_{\alpha,\text{υδ}}$ θὰ ἰσοῦται πρὸς:

$$\rho_{\alpha,\text{υδ}} = \rho_{0,\text{υδ}} \cdot \frac{P_{\alpha,\alpha}}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (1)$$

Ἐς ἄλλου, τὸ μέγιστον τῆς μάζης M τῶν ὑδρατμῶν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ περιλαμβάνῃ εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ ὄγκος V κεκορεσμένου ἀέρος, ἰσοῦται πρὸς:

$$M = V \cdot \rho_{\alpha,\text{υδ}} \quad (2)$$

καὶ ἔνεκα τῆς (1) ἔχομεν:

$$M = V \cdot \rho_{0,\text{υδ}} \cdot \frac{P_{\alpha,\alpha}}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω θερμοκρασίαν θ οἱ ὑδρατμοὶ δὲν εἶναι κεκορεσμένοι, ἔχουν εἰς δεδομένην στιγμὴν τάσιν P_{α} μικροτέραν τῆς $P_{\alpha,\alpha}$, ἡ δὲ πυκνότης τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν $\rho_{\alpha,\text{υδ}}$, ὑπὸ θερμοκρασίαν θ καὶ τάσιν P_{α} ἰσοῦται πρὸς:

$$\rho_{\alpha,\text{υδ}} = \rho_{0,\text{υδ}} \cdot \frac{P_{\alpha}}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (4)$$

Ἐς ἄλλου ἡ μᾶζα m τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν, οἵτινες περιέχονται εἰς τὸν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω ὄγκον V ἀέρος εἶναι:

$$m = V \cdot \rho_{\alpha,\text{υδ}} \quad (5)$$

ἢ, λόγῳ τῆς (4):

$$m = V \cdot \rho_{0,\text{υδ}} \cdot \frac{P_{\alpha}}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (6)$$

Διαιροῦντες ἤδη κατὰ μέλη τὰς (6) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{m}{M} = \frac{P_{\alpha}}{P_{\alpha,\alpha}} \quad (7)$$

Ἄλλ' ὁ λόγος m/M ἐκφράζει ἐξ ὁρίσμου τὴν σχετικὴν ὑγρασίαν β τοῦ ἀέρος, ἥτοι:

$$\beta = P_{\alpha} / P_{\alpha,\alpha} \quad (8) \quad \text{ἢ:} \quad P_{\alpha} = \beta \cdot P_{\alpha,\alpha} \quad (9)$$

Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν $p_{\alpha\pi\rho}$ τὴν πίεσιν τοῦ ξηροῦ ἀέρος, διὰ τὴν ὁποίαν θὰ εἶναι:

$$p_{\alpha\pi\rho} = p - P_{\alpha} \quad (10)$$

ὅπου p ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος, διὰ τὴν πυκνότητα τοῦ ξηροῦ ἀέρος, ρ_{α} εἰς θερμοκρασίαν θ καὶ πίεσιν $p_{\alpha\pi\rho}$, θὰ ἔχομεν:

$$\rho_{\alpha\pi\rho} = \rho_{0,\alpha\pi\rho} \cdot \frac{p_{\alpha\pi\rho}}{p_0(1 + \alpha\theta)} \quad (11)$$

διὰ δὲ τὴν πυκνότητα τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν, εἰς θερμοκρασίαν θ καὶ πίεσιν P_{α} , θὰ ἔχομεν τὴν ἐκφρασιν τὴν διδομένην ὑπὸ τῆς (4).

Ἡδὲ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ζητούμενη μᾶζα $m_{\alpha\pi\rho}$ ὄγκον ἐνὸς λίτρου θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς μάζης m_{π} τοῦ ξηροῦ ἀέρος καὶ τῆς μάζης $m_{\text{υδ}}$ τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους περιλαμβάνει τὸ λίτρον τοῦ ἀέρος. Θὰ εἶναι κατὰ συνέπειαν:

$$m_{\alpha\pi\rho} = m_{\pi} + m_{\text{υδ}} \quad (12)$$

Συνεπῶς θὰ ἔχομεν:

$$m_{\alpha\pi\rho} = u \cdot \rho_{\alpha\pi\rho} + u \cdot \rho_{\alpha,\text{υδ}} = u \cdot (\rho_{\alpha\pi\rho} + \rho_{\alpha,\text{υδ}}) \quad (13)$$

ὅπου u ὁ κοινὸς ὄγκος ἴσος πρὸς 1 lt .

Δι' αντικαταστάσεως των τιμών των μεγεθών της (13), εύρεθέντων δι' υπολογισμού εκ των σχε-
σεων (4), (9), (10) και (11) ἔτσι:

$\rho_{0, \text{υδ}} = 0,806 \text{ gr/lit}$, $P_{\alpha} = \beta \cdot P_{\alpha, \alpha} = 0,60 \cdot 1,75 = 1,05 \text{ cm Hg}$, $P_0 = 76 \text{ cm Hg}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$,
 $\theta = 20^\circ \text{C}$, $P_{\text{αερ}} = P - P_{\alpha} = 75 - 1,05 = 73,95 \text{ cm Hg}$, $\rho_{0, \text{αερ}} = 1,293 \text{ gr/lit}$, $u = 1 \text{ lit}$, λαμβάνομεν:

$$m_{\text{αερ}} = 1,183 \text{ gr}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2109. Ποία ἡ σχετική ὑγρασία, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 21°C καὶ τὸ σημεῖον δρόσου 21°C . ('Απ. 100%.)

2110. Ποία ποσότης ὕδατος δεόν νὰ εξατμισθῇ, ἵνα ἀλλάξῃ τὴν σχετικὴν ὑγρασίαν ἀπὸ 27% εἰς 35%, ἐντὸς δωματίου $7 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 4 \text{ m}$, ἐὰν ἡ θερμοκρασία παραμένῃ σταθερά. ('Απ. 775 gr.)

2111. Ἡ σχετικὴ ὑγρασία ἐντὸς κλειστοῦ δωματίου ὑπὸ 10°C εἶναι 70%. Πόση γίνεται ἡ σχετικὴ ὑγρασία, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ δωματίου ἀύξηθῇ εἰς 15°C . (Τάσις ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $10^\circ \text{C} = 9 \text{ mm Hg}$ καὶ ὑπὸ $15^\circ \text{C} = 13 \text{ mm Hg}$, ἀντιστοίχως). ('Απ. 49,3%.)

2112. Ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος ἐντὸς δωματίου εἶναι 75% καὶ ἡ θερμοκρασία 16°C . Πόσον τμήμα τῆς μάζης τῶν ὑδρατμῶν συμπυκνῶται, ἐὰν ἡ θερμοκρασία πύπτῃ εἰς 6°C . (Πίσεις ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ $6^\circ \text{C} = 7 \text{ mm Hg}$ καὶ ὑπὸ $16^\circ \text{C} = 14 \text{ mm Hg}$). ('Απ. 1/3.)

2113. Νὰ υπολογισθῇ ἡ σχετικὴ ὑγρασία, ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 17°C . (Τάσις ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $17^\circ \text{C} = 15 \text{ mm Hg}$ καὶ $6^\circ \text{C} = 7 \text{ mm Hg}$, ἀντιστοίχως). ('Απ. 46,7%.)

2114. Πόσα kgr ὑδρατμοῦ περιέχονται ἐντὸς αἰθούσης διαστάσεων $50 \text{ m} \times 30 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ εἰς 20°C , ἐὰν ἡ σχετικὴ ὑγρασία ἀνέρχεται εἰς 80%. (Τάσις κεκορεσμένων ἀτμῶν ὕδατος εἰς $20^\circ \text{C} = 17,54 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου). ('Απ. 208 kgr.)

2115. Ἐὰν τὸ σημεῖον ὑγροποιήσεως εἶναι 17°C , ποία ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν ἐντὸς μάζης ἀέρος. ('Απ. $14,47 \text{ gr/m}^3$.)

2116. Αἱ διαστάσεις δωματίου εἶναι $4 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Ποία ἡ πραγματικὴ ποσότης ἀτμοῦ ἐν τῷ ἀέρι τοῦ δωματίου τούτου, ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἶναι 68°F καὶ ἡ σχετικὴ ὑγρασία 30%. ('Απ. 60 m^3 , 311 gr.)

2117. Ποία ἡ σχετικὴ ὑγρασία, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία εἶναι 15°C καὶ τὸ σημεῖον ὑγροποιήσεως εἶναι 12°C . ('Απ. 83,2%.)

2118. Ἡ πίσεις ὑδρατμῶν ἐντὸς λέβητος εἶναι $16,5 \text{ mm Hg}$. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία ἐν τῷ ἀέρι τοῦ λέβητος εἶναι 30°C , ποία εἶναι ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ λέβητος. (Τάσις ἀτμῶν ὕδατος εἰς $30^\circ \text{C} = 31,82 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου). ('Απ. 51,9%.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2119. Ἡ σχετικὴ ὑγρασία ἐντὸς δωματίου ὑπὸ θερμοκρασίαν 30°C εἶναι 60%. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία μειωθῇ εἰς 10°C , ποία ἑκατοστιαία ἀναλογία ὑδρατμῶν θὰ συμπυκνωθῇ. ('Απ. 48,3%.)

2120. Μίγμα αέρος και ύδατμων υπό θερμοκρασίαν 17°C ἔχει ὄγκον 2 λίτρων ὑπὸ πίεσιν 77 cm στήλης ὑδραργύρου. Ἐὰν τὸ σημεῖον ὑγροποιήσεως τοῦ αέρος εἶναι 10°C καὶ ἡ πυκνότης τοῦ αέρος εἶναι 1,3 gr/l ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ἡ δὲ πυκνότης τῶν ὑδατμων ἀνέρχεται εἰς τὰ 5/8 τῆς τοῦ αέρος, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ μᾶζα τοῦ μίγματος. (Πίσεις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $10^{\circ}\text{C} = 9 \text{ mm}$ στήλης ὑδραργύρου). (Ἀπ. 2,47 gr.)

2121. Ὁ ὄγκος ποσότητος αέρος ὑγροῦ, ἀρχικῶς ὑπὸ θερμοκρασίαν 17°C καὶ πίεσιν 75,8 mm στήλης ὑδραργύρου, μειοῦται εἰς τὸ ἥμισυ. Ταυτοχρόνως ἡ θερμοκρασία πίπτει εἰς 10°C καὶ ὁ ἀήρ κορέννεται. Δοθέντος ὅτι ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ αέρος ἦτο ἀρχικῶς 70 % καὶ ὅτι ἡ πίεσις τῶν κεκορεσμένων ὑδατμων ὑπὸ 17°C καὶ 10°C εἶναι ἀντιστοίχως 14,4 mm Hg καὶ 9,14 mm Hg, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ πίεσις. (Ἀπ. 146,9 cm Hg.)

2122. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα ἐνὸς λίτρου αέρος ὑγροῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 30°C καὶ πίεσιν 76 cm στήλης ὑδραργύρου, ἂν τὸ σημεῖον ὑγροποιήσεως εἶναι 12°C . (Ἡ πυκνότης τοῦ ξηροῦ αέρος εἶναι 1,18 gr ἀνὰ λίτρον ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας καὶ ἡ πυκνότης τῶν ὑδατμων εἶναι τὰ 5/8 τῆς τοῦ αέρος, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν. Πίσεις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν $12^{\circ}\text{C} = 1,1 \text{ cm Hg}$). (Ἀπ. 1,06 gr.)

2123. Ἡ πίεσις κεκορεσμένων ὑδατμων ὑπὸ θερμοκρασίαν $11,25^{\circ}\text{C}$ εἶναι 1 cm στήλης ὑδραργύρου, ἡ πυκνότης ξηροῦ αέρος, εἰς 76 cm Hg πίεσιν καὶ 25°C θερμοκρασίαν, εἶναι 0,001184 gr/cm³ καὶ ἡ πυκνότης ὑδατμων ἐν σχέσει πρὸς τὴν πυκνότητα αέρος ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν εἶναι 0,624. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἐνὸς λίτρου ὑγροῦ αέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν 25°C , ἂν τὸ βαρόμετρον δεικνύη 76 cm Hg καὶ τὸ σημεῖον δρόσου εἶναι $11,25^{\circ}\text{C}$. (Ἀπ. 1,178 gr*.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ'

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2124. Μᾶζα ἐκτελεῖ γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, τῆς ὁποίας ἡ περίοδος εἶναι 2 sec καὶ τὸ πλάτος 20 cm. α) Πόση εἶναι ἡ ὠκύτης κατὰ τὴν διόδον αὐτῆς ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, β) ποία ἡ ἀπομάκρυνσις τῆς μετὰ χρόνον 0,2 sec ἀπὸ τῆς διελεύσεως αὐτῆς ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, καὶ γ) πόση εἶναι εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἡ ὠκύτης τῆς.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν u τὴν ὠκύτητα τῆς μάζης κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t καὶ u_0 τὴν μεγίστην ὠκύτητα τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, θὰ ἰσχύσῃ, ὡς γνωστὸν, ἡ σχέσις :

$$u = u_0 \cdot \sin \omega \cdot t \quad (1)$$

Τὴν στιγμήν ὅμως κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μᾶζα διέρχεται ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐπειδὴ εἶναι $\omega \cdot t = \varphi = 0^0$ καὶ $\sin \omega \cdot t = 1$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι : $u = u_0$. Ἀκολουθῶν, ἐπειδὴ :

$$u_0 = \omega \cdot a = \frac{2\pi}{T} \cdot a, \quad \text{θὰ ἔχωμεν καὶ : } u = \frac{2\pi}{T} \cdot a \quad (2)$$

και συνεπώς η ζητούμενη ώκύτης εύρίσκεται εκ τής σχέσεως (2) ότι είναι :

$$v = 62,8 \text{ cm/sec}$$

β) 'Η απόμάκρυνσις x δίδεται εκ του τύπου :

$$x = \alpha \cdot \eta\mu \omega \cdot t = \alpha \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

"Αρα κατά την χρονικήν στιγμήν $t = 0,2 \text{ sec}$ εύρισκομεν ότι :

$$x = 2 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{2} \cdot 0,2 = (20 \cdot \eta\mu 36^\circ) \text{ cm}$$

και τελικώς :

$$x = 11,76 \text{ cm}$$

γ) 'Η ώκύτης v κατά την χρονικήν στιγμήν $t = 0,2 \text{ sec}$ θα είναι :

$$v = v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} \cdot t = 62,8 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{2} \cdot 0,2 = 62,8 \cdot \sigma\upsilon\nu 36^\circ$$

όποτε εύρισκομεν τελικώς ότι :

$$v = 50,8 \text{ cm/sec}$$

2125. 'Επί μάξης δυναμένης να εκτελή γραμμικήν αρμονικήν ταλάντωσιν, όταν εύρίσκεται εις την θέσιν ισορροπίας, μεταδίδεται ταχύτης 1 m/sec , συνεπεία τής οποίας αποκτᾷ αὕτη πλάτος 10 cm . α) Ποία είναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως και πόση ἡ απόμάκρυνσις αὐτῆς μετὰ παρέλευσιν 4 sec . β) Μετὰ πόσον χρόνον ἡ κινουμένη μᾶζα διέρχεται διὰ δευτέραν φορὰν δι' ἐνὸς σημείου, τοῦ ὁποίου ἡ απόμάκρυνσις εἶναι 8 cm .

Λύσις. α) "Εστω ότι ἡ μεταδιδόμενη ἐπὶ τῆς μάξης ταχύτης εἶναι v . "Επειδὴ αὕτη εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινήτου, όταν τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ισορροπίας, θα εἶναι καὶ ἡ μεγίστη ταχύτης αὐτοῦ, ἦτοι : $v = v_0$.

Γνωρίζομεν ὅμως ότι εἶναι : $v_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha$, ἔξ οὗ : $T = \frac{2\pi \cdot \alpha}{v_0}$ (1)

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὴν σχέσιν (1) : $v_0 = 100 \text{ cm/sec}$, $\alpha = 10 \text{ cm}$, καὶ εύρίσκομεν :

$$T = 0,628 \text{ sec}$$

'Η απόμάκρυνσις x , μετὰ πάροδον χρόνου $t = 4 \text{ sec}$, εύρίσκεται εκ του γνωστοῦ τύπου :

$$x = \alpha \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t, \quad \text{ὅτι εἶναι : } x = 10 \cdot \eta\mu \frac{6,28}{0,628} \cdot 4 = [10 \cdot \eta\mu (40 \text{ rad})] \text{ cm}$$

$$\eta : x = 10 \cdot \eta\mu (6 \cdot 6,28 + 2,32) = 10 \cdot \eta\mu (2,32 \text{ rad}) = [10 \cdot \eta\mu (3,14 - 2,32)] \text{ cm καὶ τελικώς :}$$

$$x = 7,5 \text{ cm}$$

β) "Εστω ότι ἡ κινουμένη μᾶζα διέρχεται διὰ πρώτῃν φορὰν ἀπὸ τὴν θέσιν $x_1 = 8 \text{ cm}$ εἰς χρόνον t_1 . Θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 = \alpha \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 \quad (2)$$

'Η σχέσις (2) λυομένη ὡς πρὸς t_1 δίδει :

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \cdot \tau\omicron\varsigma \eta\mu \frac{x_1}{\alpha} \quad (3)$$

"Απὸ τὴν θέσιν ταύτην, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ ἀκρότατον σημεῖον τῆς τροχιάς, θὰ παρέλθῃ χρόνος ἔστω t_2 , ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ $1/4$ τῆς περιόδου μείον τὸν χρόνον t_1 . "Ἦτοι :

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 \quad (4)$$

Διά νά ἐπιστρέψῃ δὲ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ($x = 8$ cm), θὰ χρειασθῇ ἐπίσης χρόνον t_2 καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος χρόνος, ἵνα διὰ δευτέραν φοράν διέλθῃ διὰ τοῦ ἀναφερομένου σημείου, θὰ εἶναι :

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + 2 t_2 = \frac{T}{2} - t_1 \quad \eta : \quad t_{\text{ολ}} = \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} \cdot \text{τοξ ημ} \frac{x_1}{\alpha} \quad (5)$$

Διὰ τὰ δεδομένα: $x_1 = 8$ cm καὶ $\alpha = 10$ cm εὐρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων :

$$\text{τοξ ημ} \frac{x_1}{\alpha} = 53^\circ 8' \quad \eta : \quad \text{τοξ ημ} \frac{x_1}{\alpha} = 0,93 \text{ rad} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) τὴν τιμὴν ταύτην ὥς καὶ $T = 0,628$ sec καὶ εὐρίσκομεν :

$$t_{\text{ολ}} = 0,314 - 0,093 = 0,221 \text{ sec}$$

2126. Σπειροειδὲς ἐλατήριο ἔχει σταθερὰν 8000 dyn/cm καὶ μάζαν ἀμελητέαν. Ζητοῦνται: α) Πόση μάζα πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἐλατήριο, ἵνα ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως εἶναι $\pi/10$ sec. β) Πόση εἶναι ἡ ἀπομάκρυνσις μετὰ χρόνον 1 sec. γ) Πόση ἡ ὠκύτης τῆς μάζης μετὰ 1 sec ἀπὸ τῆς διελεύσεως διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὅταν τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι 5 m.

Λύσις. α) Ἐάν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν, ἣ ὁποία προκαλεῖ τὴν ἀπλὴν ἀρμονικὴν κίνησιν τοῦ σημείου εἰς μίαν θέσιν ἔχουσιν ἀπομάκρυνσιν x , τότε ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως ταύτης.

$$\text{Ἥτοι:} \quad F = m \cdot k \cdot x \quad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος καὶ k μία σταθερὰ ἴση πρὸς :

$$k = \frac{v_0^2}{\alpha^2} = \frac{4 \pi^2}{T^2} \quad (2)$$

Ἡ σχέσις λοιπὸν (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$F = m \cdot \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot x \quad (3)$$

Λύοντες δὲ ὥς πρὸς τὸ m λαμβάνομεν :

$$m = \frac{F/x}{4 \pi^2/T^2} \quad (4)$$

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀσκήσιν, ἐάν καλέσωμεν D τὴν σταθερὰν τοῦ ἐλατηρίου, φαίνεται σαφῶς ὅτι ἡ σταθερὰ αὕτη εἶναι τὸ πηλίκον F/x . Ἥτοι :

$$D = \frac{F}{x} \quad (5)$$

Οὕτως, ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) προκύπτει ὅτι ἡ ζητούμενη μάζα θὰ εἶναι :

$$m = \frac{D \cdot T^2}{4 \pi^2} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) : $D = 8000 \text{ dyn/cm}$ καὶ $T = \pi/10$ sec, ὅτε εὐρίσκομεν :

$$m = 20 \text{ gr}$$

β) Ἡ ἀπομάκρυνσις μετὰ χρόνον $t = 1$ sec εἶναι :

$$x = \alpha \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t = 5 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{\pi/10} \cdot 1 = [5 \cdot \eta\mu (20 \text{ rad})] \text{ cm}$$

$$\eta : \quad x = 5 \cdot \eta\mu (3 \cdot 6,28 + 1,16) = [5 \cdot \eta\mu (1,16 \text{ rad})] \text{ cm}$$

$$\text{καὶ τελικῶς:} \quad x = 4,56 \text{ cm}$$

γ) Ἡ ὠκύτης θὰ εἶναι :

$$v = v_0 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{2\pi \cdot \alpha}{T} \cdot \sin \frac{2\pi}{\pi/10} \cdot 1 = [100 \cdot \sin (20 \text{ rad})] \text{ cm/sec}$$

ἦ :

$$v = [100 \cdot \sin (1,16 \text{ rad})] \text{ cm/sec}$$

ἦτοι :

$$v = 40,8 \text{ cm/sec}$$

2127. Ἐπὶ κατακορύφως στηριζομένου ἐλατηρίου ἐξαρτῶμεν κατ' ἀρχὰς βάρος 300 gr* καὶ ἀκολουθῶς ἀντικαθιστῶμεν τοῦτο μὲ ἕτερον βάρος 400 gr*, ὁπότε τὸ ἐλατήριο ὑφίσταται πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 6,4 cm. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως μάζης 500 gr ἐξηρητημένης ἀπὸ τοῦ ἐλατηρίου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου καὶ προκαλεῖ ἐπιμήκυνσιν x, θὰ ἔχωμεν (βλ. προηγούμενη ἀσκηση) :

$$F = m \cdot k \cdot x \quad (1)$$

Ἐπίσης, ὡς εἶδομεν εἰς τὴν προηγούμενη ἀσκησην, εἶναι :

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι :

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x \quad (3)$$

Λύομεν τὴν (3) ὡς πρὸς T καὶ λαμβάνομεν :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) : $m = 500 \text{ gr}$, $F = 400 - 300 = 100 \text{ gr}^* = 98 \cdot 100 \text{ dyn}$, $x = 6,4 \text{ cm}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$T = 1,14 \text{ sec}$$

2128. Σπειροειδὲς ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατὰ 4,9 cm ὑπὸ μάζης 200 gr. Ζητοῦνται : α) πόση εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως μάζης 400 gr ἐξηρητημένης ἀπὸ τοῦ ἐλατηρίου, καὶ β) πόση θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ὠκύτης τῆς μάζης, ὅταν τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι 3 cm. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).

Λύσις. α) Εἰς τὴν ἀσκησην ταύτην θὰ ἰσχύσῃ ἡ σχέσις (4) τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως. Ἦτοι :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \quad (1)$$

Θέτομεν : $m = 400 \text{ gr}$, $x = 4,9 \text{ cm}$, $F = 200 \cdot 981 \text{ dyn}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ζητούμενη περίοδος εἶναι :

$$T = 0,628 \text{ sec}^*$$

β) Ἡ μεγίστη ὠκύτης θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$v_0 = \frac{2\pi \cdot \alpha}{T} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν :

$$v_0 = 30 \text{ cm/sec}$$

2129. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως ὕλικου σημείου ἐκτελοῦντος ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιτάχυνσιν 64 cm/sec^2 , ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτοῦ εἶναι 16 cm.

Λύσις. Ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις δίδεται διὰ τοῦ τύπου : $\gamma_0 = 4\pi^2 \cdot \alpha / T^2$, ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_0}}$$

Θέτοντες δέ: $\gamma_0 = 64 \text{ m/sec}^2$ και $\alpha = 16 \text{ m}$, εύρισκουμε ότι:

$$T = 3,14 \text{ sec}$$

2130. Μάζα 500 gr είναι εξηρημένη από επιμήκεις και ελαφρόν σπειροειδές ελατήριο. Πρόσθετος δύναμις 10 gr^* διατείνει το ελατήριο κατά 1 cm . Να υπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως μάζης 500 gr , όταν τὸ ελατήριο διατείνεται κατά 2 cm καὶ ἀφίεται ἀκολούθως ἐλευθέρων.

Λύσις. Ἡ ζητούμενη περίοδος εύρσκεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \quad (\text{βλ. ἄσκησιν 2127})$$

Θέτομεν: $m = 500 \text{ gr}$, $x = 1 \text{ cm}$, $F = 10 \text{ gr}^* = 9810 \text{ dyn}$, καὶ εύρισκουμε:

$$T = 1,4 \text{ sec}$$

2131. Κατακορύφως εξηρημένον σπειροειδές ελατήριο ἐπιμηκύνεται κατὰ 8 cm ὑπὸ βάρους 120 gr^* . Πόση ἡ σταθερά τοῦ ελατηρίου καὶ πόσον τὸ βάρος εξηρημένου σώματος, τὸ ὁποῖον διατείνει τὸ ελατήριο κατὰ $14,6 \text{ cm}$.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν τείνουσαν τὸ ελατήριο δύναμιν καὶ Δl τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ελατηρίου, τότε, ἐφ' ὅσον δὲν ὑπερβαίνουμεν τὸ ὅριον ἐλαστικότητος, ἰσχύει ἡ σχέση $F = D \cdot \Delta l$, ὅπου D εἶναι ἡ σταθερά τοῦ ελατηρίου. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ἐξάγεται ὅτι:

$$D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{120}{8} = 15 \text{ gr}^*/\text{cm}$$

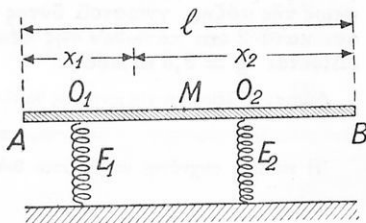
Ἐὰν τώρα καλέσωμεν B τὸ βάρος τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ελατηρίου καὶ ἐπιμηκύνει τοῦτο κατὰ Δl_1 , θὰ ἔχωμεν:

$$B = D \cdot \Delta l_1$$

Θέτομεν: $D = 15 \text{ gr}^*/\text{cm}$, $\Delta l_1 = 14,6 \text{ cm}$, καὶ εύρισκουμε:

$$B = 219 \text{ gr}^*$$

2132. Ράβδος ὁμογενῆς AB , μάζης m , στηρίζεται εἰς δύο σημεῖα O_1 καὶ O_2 ὑπὸ δύο ελατηρίων E_1 καὶ E_2 , σταθερῶν D_1 καὶ D_2 , τὰ ὁποῖα συσπειροῦνται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τοῦ βάρους τῆς ράβδου. Οὕτως, ἕκαστον ελατήριο ὑποφέρει κατὰ τι μέγεθος τὸ βάρος τῆς ράβδου. α) Νὰ καθορισθοῦν τὰ σημεῖα O_1 καὶ O_2 εἰς τρόπον ὥστε ἡ ράβδος νὰ εἶναι ὀριζοντία, τῶν σημείων τούτων ὄντων ἐξ ἄλλου εἰς τὸ μέσον τῶν δύο τμηζομένων τῆς ράβδου, ἀμοιβαίως ὑποστηριζομένων ὑπὸ τῶν δύο αὐτῶν ελατηρίων. β) Νὰ καθορισθῇ, βάσει τῶν m , D_1 , D_2 , ἡ περίοδος τῶν ταλαντώσεων τῆς ράβδου.



Λύσις. α) Διὰ νὰ παραμένῃ πάντοτε εἰς ὀριζοντίαν θέσιν ἡ ράβδος, θὰ πρέπει ἡ ἀπομάκρυνσις καὶ εἰς τὰ δύο ελατήρια, ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας αὐτῶν, νὰ εἶναι πάντοτε ἡ ἴδια. Ἦτοι:

$$x_1 = x_2 \quad (1) \quad \text{καί:} \quad x_{0,1} = x_{0,2} \quad (2)$$

Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , αἱ ἀσκούμεναι ἐπὶ τῶν ελατηρίων εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$F_1 = D_1 \cdot x_{0,1} \quad (3) \quad F_2 = D_2 \cdot x_{0,2} \quad (4)$$

ὁπότε, λόγῳ καὶ τῆς ἐξισώσεως (2), θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (5)$$

‘Αφ’ ἐτέρου διὰ τὴν θέσιν ἰσορροπίας θὰ ἰσχύη ἡ σχέσηις :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(MO_2)}{(MO_1)} \quad (6)$$

$$\text{ἐνῶ :} \quad (MO_1) + (MO_2) = \frac{l}{2} \quad (7)$$

ὅπου l τὸ μήκος τῆς ράβδου καὶ M τὸ μέσον αὐτῆς.

‘Εκ τῶν ἐξισώσεων (5), (6) καὶ (7) λαμβάνομεν :

$$(MO_1) = \frac{l}{2} \cdot \frac{D_2}{D_1 + D_2} \quad \text{καί :} \quad (MO_2) = \frac{l}{2} \cdot \frac{D_1}{D_1 + D_2}$$

β) ‘Εάν διεγερθῇ τὸ σύστημα εἰς ταλάντωσιν, θὰ ἔχωμεν σταθερὰν ταλαντώσεως D , διδομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$D = \frac{B}{x_0} \quad (8)$$

ὅπου B τὸ βάρος τῆς ράβδου καὶ x_0 ἡ ἀντίστοιχος ὀριζοντία μετατόπισις τῆς ράβδου. ‘Εφ’ ὅσον ὁμως ἡ ράβδος παραμένει πάντοτε εἰς ὀριζοντίαν θέσιν, θὰ ἔχωμεν :

$$x_0 = x_{0,1} = x_{0,2} \quad (9)$$

ἐνῶ διὰ τὴν θέσιν ἰσορροπίας θὰ εἶναι :

$$B = F_1 + F_2 \quad (10)$$

‘Εκ τῶν σχέσεων (3), (4), (8), (9) καὶ (10) λαμβάνομεν :

$$D = D_1 + D_2 \quad (11)$$

‘Επομένως, διὰ τὴν περίοδον τῆς ταλαντώσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D_1 + D_2}}$$

ὅπου m ἡ μάζα τῆς ράβδου.

2133. ‘Ελατήριο ἐπιμηκύνεται κατὰ 25 mm ὅταν ἐξαρτηθῇ ἐξ αὐτοῦ μάζα 50 gr. ‘Εξαρτῶμεν ἀκολούθως μάζαν 100 gr καὶ ἀποκατασταθείσης τῆς ἰσορροπίας προκαλοῦμεν πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 4 cm. Ποία ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τῆς μάζης, γνωστοῦ ὅντος ὅτι κατὰ τὴν στιγμήν $t = 0$ ἡ μάζα εὑρίσκεται κατὰ 2 cm κάτωθεν τῆς θέσεως ἰσορροπίας, διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω. (Δίδεται $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. ‘Η ἐξίσωσις τῆς κινήσεως θὰ εἶναι :

$$x = x_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \phi) \quad (1)$$

‘Η κυκλικὴ συχνότης καθορίζεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (2)$$

ἐνῶ ἀφ’ ἐτέρου :

$$D = \frac{m \cdot g}{x} \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) προκύπτει ὅτι :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x}} \quad (4)$$

Διὰ $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$ καὶ $x = 2 \cdot 25 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$, λαμβάνομεν :

$$\omega = 14 \text{ rad/sec}$$

Θέτοντες εις την εξίσωσιν (1): $x_0 = 4 \text{ cm}$, $t = 0$ και την αντίστοιχον τιμήν $x = 2 \text{ cm}$, εϋρίσκομεν :

$$2 = 4 \eta \mu \varphi \quad \eta : \quad \eta \mu \varphi = \frac{1}{2} \quad (5)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{καί :} \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Διὰ $t = 0$, ἡ στιγμιαία ταχύτης v , ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς σχέσεως :

$$v = v_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητική, ἐφ' ὅσον ἐλάβομεν ὡς θετικήν ἀπομάκρυνσιν τὴν κάτωθεν τοῦ σημείου ἰσορροπίας, ὁπότε ἡ πρὸς τὰ ἄνω φερόσα ταχύτης θὰ εἶναι ἀρνητική. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\sin(\omega t + \varphi) < 0$$

ἢ, διὰ $t = 0$:

$$\sin \varphi < 0$$

Ἄλλ' ἡ πρώτη ρίζα ἀπορρίπτεται διότι $\sin \pi/6 > 0$. Κατὰ συνέπειαν :

$$\varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Θέτομεν εις τὴν εξίσωσιν (1): $x_0 = 4 \text{ cm}$, $\omega = 14 \text{ rad/sec}$ καὶ $\varphi = 5\pi/6$ ὁπότε λαμβάνομεν :

$$x = 4 \eta \mu \left(14 t + \frac{5\pi}{6} \right)$$

2134. Ὁ κινητὴρ ὥρολογίου ἀναλίσκει εἰς μίαν ἐβδομάδα ἐνέργειαν 8,4 Joule. Ὁ κινητὴρ οὗτος εἶναι ἐλατήριο, τὸ ὁποῖον συσπειροῦται διὰ 5 περιστροφῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κατευθύνουσα ροπή στρέψεως τοῦ ἐλατηρίου τούτου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν D^* τὴν ζητουμένην κατευθύνουσαν ροπήν στρέψεως, M τὴν στιγμιαίαν ροπήν, λόγῳ τῆς συσπειρώσεως τοῦ ἐλατηρίου, καὶ φ τὴν ἀντίστοιχον γωνίαν στρέψεως, θὰ ἰσχύη ἡ σχέση :

$$M\varphi = D^* \cdot \varphi \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ροπή μεταβάλλεται γραμμικῶς μετὰ τῆς γωνίας, ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τῆς μεγίστης τιμῆς αὐτῆς M , τὸ ἔργον τῆς συσπειρώσεως θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$A = \overline{M} \cdot \alpha \quad (2)$$

ὅπου α ἡ μεγίστη γωνία στρέψεως καὶ $\overline{M}$ ἡ μέση ροπή, ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου, διδομένη ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\overline{M} = \frac{M}{2} \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου, διὰ τὴν μεγίστην γωνίαν στρέψεως α , θὰ ἰσχύη ἡ σχέση :

$$M = D^* \cdot \alpha \quad \eta : \quad D^* = \frac{M}{\alpha} \quad (4)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν εξισώσεων (2), (3) καὶ (4), λαμβάνομεν :

$$D^* = \frac{2A}{\alpha^2}$$

Θέτομεν : $A = 8,4 \text{ Joule}$ καὶ $\alpha = 5 \cdot 2\pi = 10\pi$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$D^* = \frac{2 \cdot 8,4}{(10\pi)^2} \text{ Joule/rad}^2 \quad \eta : \quad D^* = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ Nt} \cdot \text{m/rad}$$

2135. Ὁμογενὴς τροχός, ἡ μάζα τοῦ ὁποίου θεωρεῖται συγκεντρωμένη ἐπὶ τῆς περιφερείας, δύναται νὰ ταλαντωθῇ περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Δίδεται ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ $d = 0,7 \text{ m}$ καὶ $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῶν ταλαντώσεων του, μικροῦ πλάτους. Ποῖον τὸ μῆκος l τοῦ ἰσοχρόνου πρὸς τὸν τροχὸν ἀπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

Λύσις. α) Ὁ τροχὸς ἀποτελεῖ φυσικὸν ἐκκρεμές, τοῦ ὁποίου τὸ ἀνηγγόμενον μῆκος (μῆκος ἰσοχρόνου ἀπλοῦ ἐκκρεμοῦς), δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$l = \frac{\Theta_M}{m \cdot \alpha} \quad (1)$$

ἔπου Θ_M ἡ ροπή ἀδραναίας αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, m ἡ μάζα αὐτοῦ καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπὸ τοῦ παραλλήλου πρὸς αὐτὸν ἄξονος, τοῦ διερχομένου ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους O τοῦ τροχοῦ.

Ὡς γνωστὸν ὁμως:

$$\Theta_M = \Theta_0 + m \cdot a^2 \quad (2)$$

ἔπου Θ_0 ἡ ροπή ἀδραναίας τοῦ τροχοῦ ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$\Theta_0 = m \cdot r^2 \quad (3) \quad \text{καί:} \quad \alpha = r \quad (4)$$

ἔπου r ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ, $l = 2r$ ἤ: $l = d$

λαμβάνομεν:

$$l = 0,7 \text{ m}$$

Ἡ περίοδος τοῦ τροχοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

δι' ἀντικατάστασιν δὲ τῶν δεδομένων εἰς τοῦτον εὐρίσκομεν:

$$T = 1,68 \text{ sec}$$

2136. Μάζα $M = 0,4 \text{ kg}$ εἶναι ἐξηρητημένη ἀπὸ ἐλατήριον σταθερᾶς $D = 20 \text{ Nt/m}$. Τὸ σύστημα εἶναι ἀκίνητον. Ἀπὸ ὕψος $h = 0,2 \text{ m}$ ἀφίνομεν νὰ πέσῃ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, μάζα $m = 0,1 \text{ kg}$ ἐπὶ τῆς μάζης M , ἐνσωματωμένη μετ' αὐτῆς. Νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τοῦ συστήματος. Δίδεται $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

Λύσις. Ἡ μάζα m πίπτουσα ἐπὶ τῆς μάζης M θὰ ἔχῃ ταχύτητα:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Λόγω τῆς ἐνσωματώσεως (πλαστικὴ κρούσις) θὰ ἰσχύῃ, βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ σχέση:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot V \quad \text{ἤ:} \quad V = \frac{m \cdot v}{M + m} \quad (2)$$

ἔπου V ἡ ταχύτης ἐκκινήσεως τῶν ἐνσωματωμένων μαζῶν. Τὸ σύστημα τῶν μαζῶν θὰ ἔχῃ ἑπομένως κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$E_K = \frac{1}{2} (m + M) V^2 \quad (3)$$

ἤ, λόγῳ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2):

$$E_K = \frac{m^2}{m + M} \cdot g \cdot h \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ἀπομάκρυνσιν τῶν δύο μαζῶν ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, αὗται θὰ ἔχουν διαφορὰν δυναμικῆς ἐνεργείας ἀπ' αὐτῆς:

$$E_D = (m + M) \cdot g \cdot x \quad (5)$$

*Αρα η συνολική ενέργεια του συστήματος θα είναι :

$$E_{ολ} = E_K + E_{\Delta} \quad \eta : \quad E_{ολ} = \frac{m^2}{m+M} \cdot g \cdot h + (m+M) \cdot g \cdot x \quad (6)$$

*Εξ άλλου εις την θέσιν ισορροπίας του ελατηρίου θα ισχύη η σχέση :

$$F = D \cdot (\Delta l + x) \quad \eta : \quad (m+M)g = D \cdot (\Delta l + x) \quad (7)$$

όπου Δl η αρχική επιμήκυνσις του ελατηρίου πρὸ τῆς ἐνσωματώσεως τῆς μάζης m .

*Αφ' ἑτέρου, πρὸ τῆς ἐνσωματώσεως θα ισχύη η σχέση :

$$M \cdot g = D \cdot \Delta l \quad (8)$$

*Εκ τῶν σχέσεων (7) καὶ (8) εὐρίσκωμεν :

$$\Delta l = \frac{M \cdot g}{D} \quad \eta : \quad \Delta l = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{καὶ :} \quad m \cdot g = D \cdot x \quad \eta : \quad x = \frac{m \cdot g}{D} = 0,05 \text{ m}$$

*Επομένως ἡ νέα θέσις ισορροπίας θα ἀντιστοιχῇ εις ἐπιμήκυνσιν :

$$x + \Delta l = 0,25 \text{ m}$$

*Εάν καλέσωμεν x_0 τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως, ἡ ὀλική ἐνέργεια θα δίδεται ἐπίσης ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 \quad (9)$$

ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (9), λαμβάνομεν :

$$x_0 = \sqrt{2 \frac{m^2}{m+M} \cdot gh + 2(m+M) \cdot g \cdot x} \quad (10)$$

Θέτομεν : $m = 0,1 \text{ kg}$, $M = 0,4 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $h = 0,2 \text{ m}$, $x = 0,05 \text{ m}$, $D = 20 \text{ Nt/m}$
καὶ εὐρίσκωμεν :

$$x_0 = 0,08 \text{ m}$$

Τέλος, ἡ περίοδος ταλαντώσεως θα ὑπολογισθῇ βάσει τοῦ τύπου :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m+M}{D}} \quad (11)$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

$$T = 1,005 \text{ sec}$$

2137. Εἰς ἀπλοῦν ἐκκρεμές ὁ χρόνος μᾶς ἀπλῆς αἰωρήσεως εἶναι **1 sec.** Καταβιβάζομεν τὸ ἐκκρεμές ἐντὸς φρέατος, ὅτε παρατηρεῖται καθυστέρησις ἡμερησία κατὰ **24/10 sec.** 1) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάθος τοῦ φρέατος. 2) Νὰ εὐρεθῇ κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὥστε νὰ διορθωθῇ ἡ παρατηρουμένη καθυστέρησις. *Ακτὶς τῆς Γῆς **$R = 6400 \text{ km}$** .
(Σχολή Μηχανικῶν Ἀεροπορίας, Σ. Μ. Α., 1962).

Λύσις. α) Ἐστω x τὸ ζητούμενον βάθος τοῦ φρέατος. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς βάθος x θα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$g_x = \frac{k \cdot M_x}{(R-x)^2} \quad (1)$$

ὅπου k ἡ σταθερά τῆς παγκοσμίου ἐλξεως, R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς καὶ M_x ἡ μᾶζα τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τῆς Γῆς ἀκτίνος $R - x$. Ἐάν ἡ Γῆ θεωρηθῇ ὁμογενής, θα ἔχωμεν :

$$M_x = V_x \cdot d \quad (2)$$

δπου d ή πυκνότης αὐτῆς καὶ V_x ὁ ὄγκος σφαίρας μὲ ἀκτῖνα $R - x$. Ἐπειδὴ δέ :

$$V_x = \frac{4}{3} \pi (R - x)^3 \quad (3)$$

διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$g_x = k \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot d (R - x) \quad (4)$$

Δι' ἀναλόγων ὑπολογισμῶν εὐρίσκομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν g ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς :

$$g = k \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot d \cdot R \quad (5)$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) καὶ εὐρίσκομεν :

$$\frac{g_x}{g} = \frac{R - x}{R} \quad (6)$$

Αἱ περίοδοι τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὰς δύο θέσεις θὰ εἶναι :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7) \quad \text{καί :} \quad T_x = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_x}} \quad (8)$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$\frac{g_x}{g} = \frac{T^2}{T_x^2} \quad (9)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (9) προκύπτει :

$$x = R \left(1 - \frac{T^2}{T_x^2} \right) \quad (10)$$

Ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς T_x θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῆς ἡμερησίας καθυστέρησεως $\Delta t = 24/10$ sec. Θὰ ἔχωμεν καθυστέρησιν τῆς περιόδου τοῦ ἐκκρεμοῦς $\Delta T = 24/10 \cdot 43\,200$ sec. Ἐπομένως ἡ περίοδος T_x θὰ εἶναι :

$$T_x = T + \frac{24}{432\,000} \text{ sec}$$

Θέτοντες : $T = 2$ sec καὶ $R = 6\,400$ km, εὐρίσκομεν :

$$x = 0,356 \text{ km} \quad \text{ἢ :} \quad \underline{x = 356 \text{ m}}$$

β) Ἐάν βραχυνθῇ τὸ μήκος κατὰ Δl , ὥστε νὰ γίνῃ καὶ πάλιν ἀκριβὲς τὸ ἐκκρεμές, θὰ ἔχωμεν :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l - \Delta l}{g_x}} \quad \text{ἢ :} \quad \Delta l = l - \frac{T^2}{4\pi^2} g_x \quad (11)$$

Ἐνῶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7) λαμβάνομεν :

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} \quad (12)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (11) καὶ (12) προκύπτει :

$$\Delta l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot (g - g_x) \quad (13)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (6) λαμβάνομεν διὰ μετασχηματισμοῦ :

$$g - g_x = g \cdot \frac{x}{R} \quad (14)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (13) καὶ (14), προκύπτει τελικῶς :

$$\Delta l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g \cdot \frac{x}{R}$$

Εέτομεν : $T = 2 \text{ sec}$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$, $x = 356 \text{ m}$, $R = 6400 \text{ km} = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$ και εύρισκομεν :

$$\Delta l = 0,006 \text{ cm}$$

2138. Σπειροειδές ελατήριο τείνεται υπό δυνάμεως, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον αὐξάνεται γραμμικῶς ἀπὸ 0 μέχρι 10 kgf^* , ὁπότε προκαλεῖται ἐπιμήκυνσις τοῦ ελατηρίου κατὰ 10 cm . Ποῖον τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον.

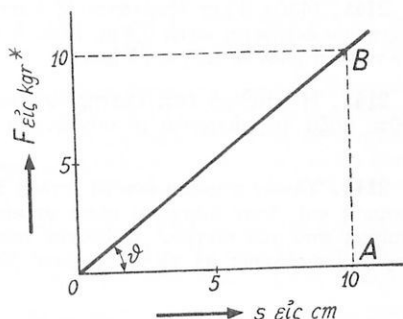
Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως αὐξάνεται γραμμικῶς μετὰ τῆς ἐπιμήκυνσεως, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$F = D \cdot s \quad (1)$$

ὅπου F τὸ μεταβλητὸν μέτρον τῆς δυνάμεως, D ἡ σταθερά τοῦ ελατηρίου καὶ s ἡ ἐκάστοτε ἐπιμήκυνσις. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ἐξισώσεως (1), θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν, εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων F, s καὶ μὲ κλίσιν $\alpha = \tan \theta$.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἔργον A παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ τριγώνου OAB , ἥτοι θὰ ἔχωμεν :

$$A = \frac{1}{2} F_{\text{μεγ}} \cdot s_{\text{μεγ}} \quad (2)$$



Ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν δεδομένων : $F_{\text{μεγ}} = 10 \text{ kgf}^*$ καὶ $s_{\text{μεγ}} = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ εἰς τὴν (2), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$A = 0,5 \text{ kgf}^* \cdot \text{m}$$

2139. Ἐλατήριο, σταθερᾶς $D = 42 \text{ Nt/m}$, τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 2 kgf^* . Ποία ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ τεταμένου ελατηρίου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. Βάσει τῆς Ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια $E_{\text{δυν}}$ ἀν ἀφεθῇ ἐλευθέρου τὸ ελατήριο, θὰ μετατραπῇ κατὰ τὴν διέλευσιν αὐτοῦ ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας εἰς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{\text{κιν}}$. Ἦτοι θὰ ἔχωμεν : $E_{\text{δυν}} = E_{\text{κιν}}$, καὶ ἐπειδὴ : $E_{\text{κιν}} = 1/2 \cdot m \cdot v_0^2$, θὰ ἔχωμεν :

$$E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 \quad (1)$$

ὅπου v_0 ἡ μεγίστη ὠκύτης καὶ m ἡ μάζα τοῦ ελατηρίου. Γνωρίζομεν ἀφ' ἑτέρου ὅτι :

$$F = m \cdot \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot \alpha \quad (2)$$

ὅπου F ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς τοῦ ελατηρίου εἰς τὴν θέσιν τῆς μεγίστης ἀπομακρύνσεως καὶ T ἡ περίοδος αὐτοῦ, καὶ ὅτι :

$$v_0 = \frac{2 \pi}{T} \cdot \alpha \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2} F \cdot \alpha \quad \text{ἢ} : \quad E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{D} \quad (4)$$

ὅπου $D = F/\alpha$, ἡ σταθερά τοῦ ελατηρίου.

Εέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰ δεδομένα : $F = 2 \text{ kgf}^* = 20 \text{ Nt}$ καὶ $D = 42 \text{ Nt/m}$ (μονάδες συστήματος Μ. Κ. Σ.), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$E_{\text{δυν}} = 4,8 \text{ Joule, περίπου}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2140. Ποία ή περίοδος παλλομένου αντικειμένου με επιτάχυνση 4 m/sec^2 , εάν ή μετατόπισή του είναι $0,5 \text{ m}$. (Απ. $T = 2,2 \text{ sec.}$)

2141. Μάζα 8 kg εξαρτάται εξ ελατηρίου. Εάν προστεθή βάρος $0,5 \text{ kg}^*$, τὸ ελατήριο εκτείνεται κατὰ $0,4 \text{ m}$. Ποία ή περίοδος ταλαντώσεως τῆς μάζης ἐξ 8 kg , εάν τὸ ελατήριο εκταθῇ κατὰ 1 m καί εἴτα ἀφεθῇ ἐλεύθερον. (Απ. $T = 5 \text{ sec.}$)

2142. Ἡ σταθερά ἐνὸς ελατηρίου εἶναι ἴση πρὸς 200 Nt/m . Εάν προστεθῇ εἰς τοῦτο μάζα τις, αἰωρεῖται με συχνότητα 20 min^{-1} . Ποία ή μάζα τοῦ ἀντικειμένου. (Απ. 46 kg.)

2143. Ὑλικὸν σημεῖον ἐκτελεῖ ἀπλᾶς ἁρμονικὰς ταλαντώσεις κατὰ μήκος εὐθείας γραμμῆς καί, ὅταν διέρχεται μέσῳ σημείων ἀπεχόντων κατὰ 3 cm καὶ 4 cm ἀντιστοίχως ἀπὸ τοῦ κέντρου, ή ὠκότης του εἶναι 16 cm/sec καὶ 12 cm/sec ἀντιστοίχως. Νά εὐρεθοῦν: α) τὸ πλάτος, καὶ β) ή περίοδος τῆς κινήσεως. (Απ. α' 5 cm , β' $\pi/2 \text{ sec} = 1,57 \text{ sec.}$)

2144. Σῶμα ἐκτελοῦν ἀπλᾶς ἁρμονικὰς ταλαντώσεις ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ἔχει ὠκότητας 8 cm/sec καὶ 2 cm/sec , ὅταν εὐρίσκεται εἰς θέσεις ἀπεχούσας 3 cm καὶ 5 cm ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας. Νά ὑπολογισθοῦν τὸ πλάτος τῶν ταλαντώσεων καὶ ή περίοδος τῆς ταλαντώσεως τοῦ σώματος. (Απ. $\alpha = 5,1 \text{ cm}$, $T = 3,24 \text{ sec}^{-1}$.)

2145. Σπειροειδὲς ελατήριο ἐκτείνεται κατὰ 5 cm , εάν προσδῶσμεν εἰς αὐτὸ βάρος ἐξ 100 gr^* . Νά ὑπολογισθῇ ή μεγίστη τάσις τοῦ ελατηρίου τούτου, εάν μάζα 50 gr προσπέσῃ ἐξ ὕψους 10 cm ἐπὶ ἐλαφροῦ δίσκου, προσδεδεμένου εἰς τὸ ελατήριο. (Απ. $7,07 \text{ cm.}$)

2146. Πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ή ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς ἓνα τόπον δι' ἀναστρεψίμου ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον αἰωρεῖται ἰσοχρόνως περὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ἄξονας, ἀπέχοντας ἀλλήλων $143,5 \text{ cm}$. Εάν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἐκτελῇ 50 ἀπλᾶς αἰωρήσεις εἰς 60 sec , ποία εἶναι ή ζητούμενη ἔντασις τῆς βαρύτητος. (Απ. $982,53 \text{ cm/sec}^2$.)

2147. Σπειροειδὲς ελατήριο ἔχει σταθερὰν 10 Nt/m . Ποίαν μάζαν πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ, διὰ νὰ ἔχωμεν περίοδον ταλαντώσεως $\pi/2 \text{ sec}$. (Απ. $m = 625 \text{ gr.}$)

2148. Ἀντικείμενον 2 kg στερεοῦται εἰς τὸ ἄκρον ελατηρίου. Δύναμις 5 Nt ἀρκεῖ ἵνα μετακινήσῃ τὸ ἀντικείμενον κατὰ $0,04 \text{ m}$ πρὸς τὴν μίαν πλευράν. Νά εὐρεθοῦν: α) ή σταθερά τοῦ ελατηρίου, β) ή περίοδος ταλαντώσεως, καὶ γ) ή συχνότης ταλαντώσεως. (Απ. α' 125 Nt/m , β' $2\pi \sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{125 \text{ Nt/m}}} = 0,82 \text{ sec}$, γ' $1,2 \text{ ταλ./sec.}$)

2149. Ἐλατήριο ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς 5 sec . Νά προσδιορισθῇ ή περίοδος T καὶ ή συχνότης ν . (Απ. $T = 0,05 \text{ sec}$, $\nu = 20 \text{ sec}^{-1}$.)

2150. Βάρος 150 gr^* , ὅταν ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐπίμηκες καὶ ἐλαφρὸν ελατήριο, διατείνεται κατὰ 40 cm . Νά ὑπολογισθῇ ή περίοδος τῆς κινήσεως, ὅταν μετατοπίζεται ὀλίγον πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀκολουθῶς ἀφίεται ἐλεύθερον. ($g = 980 \text{ cm/sec}^2$). (Απ. $1,27 \text{ sec.}$)

2151. Μάζα 49 gr εκτελεί αρμονική κίνηση και εκτελεί 4 πλήρεις αιώρήσεις εις 1 sec. Νά υπολογισθούν η επιτάχυνσις και η επενεργούσα δύναμις επί του σώματος, όταν η απόκλισις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 2 cm.
(Ἐπ. $128 \pi^2 \text{ cm/sec}^2$, $6270 \pi^2 \text{ dyn.}$)

2152. Ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου καθέτως κρεμαμένου σπειροειδοῦς ἐλατηρίου ἐξαρτᾶται σῶμα μάζης 20 gr, ὅποτε ἐπιτυγχάνεται ἐπιμήκυνσις 10 cm. Ποῖον τὸ μέγεθος τῆς κατευθυνούσης δυνάμεως. Ποία ἡ περίοδος ταλαντώσεως, ὅταν ἐξαρτησῶμεν σῶμα μάζης 50 gr, ἡ δὲ μάζα τοῦ ἐλατηρίου δύναται νὰ παραλειφθῇ ὡς ἀμελητέα. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἐπ. 2 kg/sec^2 . $T = 1 \text{ sec.}$)

2153. Μάζα 200 gr, ἐξηρητημένη ἀπὸ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, ἀπομακρύνεται διὰ τῆς ἐπενεργείας δυνάμεως 50 gr* κατὰ 10 cm ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας τῆς καὶ ἀκολουθῶς ἀφίεται ἐλευθέρα. α) Ποία ἡ περίοδος τῆς οὕτως ἐπιτευχθείσης ταλαντώσεως. β) Μὲ ποίαν ταχύτητα διέρχεται ἡ ταλαντουμένη μάζα διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τῆς. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).
(Ἐπ. α' $T = 1,3 \text{ sec.}$ β' $v = 50 \text{ cm/sec.}$)

2154. Σπειροειδὲς χαλύβδιον ἐλατήριο ἔχει μήκος 8 cm ὅταν δὲν ἔχῃ ἐκταθῇ, καὶ ὅταν ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτοῦ μάζα τις τὸ μήκος του εἶναι 14 cm. Νά υπολογισθῇ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μάζης, ἐὰν αὕτη κινήται κατακορύφως. (Ἐπ. 0,49 sec.)

2155. Νά υπολογισθῇ ἡ περίοδος μικρῶν καθέτων ταλαντώσεων μάζης 200 gr ἐξηρητημένης ἐκ τοῦ πέρατος ἐλαφροῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, δοθέντος ὅτι τὸ ἐλατήριο θὰ ἐκταθῇ κατὰ 5 cm ἐὰν ἐξαρτηθῇ ἐξ αὐτοῦ βάρος 60 gr. (Ἐπ. 0,82 sec.)

2156. Μάζα ἐξηρητημένη ἐκ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου ἐκτείνει τὸ ἐλατήριο κατὰ 3 cm. Ἐὰν ἡ μάζα ἐκτελῇ κατακόρυφον ταλάντωσιν μικροῦ εὗρους, ποία εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως. Ἡ μάζα τοῦ ἐλατηρίου θεωρεῖται ἀμελητέα.
(Ἐπ. 0,35 sec.)

2157. Ἐὰν μάζα προσδεδεμένη εἰς ἐλατήριο μετακινήθῃ πρὸς τὰ κάτω κατὰ 0,05 m καὶ εἴτα ἀφεθῇ ἐλευθέρα, ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν $3,5 \text{ m/sec}^2$. Ποία εἶναι ἡ περίοδος καὶ ἡ συχνότης τῆς ταλαντώσεως.
(Ἐπ. 0,75 sec, 1,3 sec⁻¹.)

2158. Σπειροειδὲς ἐλατήριο μετακινεῖται κατὰ 5 cm, ὅταν φορτισθῇ ὑπὸ μάζης 500 gr. Νά εὐρεθῇ ἡ μεγίστη συντελουμένη μετακίνησις, ὅταν μάζα 80 gr ρίπτεται ἀπὸ ὕψους 10 cm ἐντὸς ὑποδοχέως προσορητμένου εἰς τὸ ἐλατήριο. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$).
(Ἐπ. 4,9 cm.)

2159. Δοκιμαστικὸς σωλὴν ἐξωτερικῆς διαμέτρου 2 cm καὶ μάζης 4 gr βυθίζεται κατακορύφως ἐντὸς ὕδατος διὰ τῆς τοποθετήσεως ἐντὸς αὐτοῦ 12 gr ὕδραργύρου. Νά εὐρεθῇ ἡ περίοδος ταλαντώσεως, ὅταν ὁ σωλὴν μετακινήθῃ ἐλαφρῶς καὶ εἴτα ἀφεθῇ ἐλευθέρως.
(Ἐπ. 0,45 sec.)

2160. Ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς ἐξ ὀρειχάλκου εἶναι εἰς 15°C 1 sec. Πόσας ταλαντώσεις ὀλιγώτερον ἐκτελεῖ τὸ ἐκκρεμὲς ἡμερησίως, ἐὰν ἡ θερμοκρασία κατέλθῃ εἰς 30°C . (ἀρρεχ = $19 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$).
(Ἐπ. 12.)

2161. Σῶμα μάζης 2 gr ἐκτελεῖ γραμμικὰς ἀπλᾶς ἀρμονικὰς κινήσεις περιόδου 4 sec καὶ πλάτους 10 cm. Νά εὐρεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος, καθ' ὃν χρόνον διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας του καὶ κατὰ τὴν ἐκ 5 cm μετακίνησιν ἐκ τῆς θέσεως ταύτης.
(Ἐπ. 246,7 erg, 185 erg.)

2162. Νά υπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διελεύσεως διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας ταλαντουμένου ὑλικοῦ σημείου μάζης 3 gr, ὅταν τοῦτο διὰ μίαν πλήρη ταλάντωσιν ἀπαιτῇ χρόνον $T = 0,2 \text{ sec}$ καὶ τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι $\alpha = 4 \text{ cm}$.
(Ἐπ. 23 687 erg.)

2163. Έλαφρὸν σπειροειδὲς ἐλατήριον φέρει φορτίον μάζης 50 gr καὶ ἐκτείνεται κατὰ 10 cm. Τίθεται τότε εἰς κατακόρυφον παλμικὴν κίνησιν. Δείξατε ὅτι ἡ κίνησις αὕτη εἶναι ἀπλὴ ἁρμονικὴ καὶ εὗρατε : α) τὴν περίοδον τῆς κινήσεως. β) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καὶ κινητικῆς ἐνεργείας τῶν 50 gr εἶναι 100 000 erg, νὰ υπολογισθῇ τὸ εὖρος τῆς παλμικῆς κινήσεως. (Ἄπ. α' 0,63 sec. β' 6,45 cm.)

2164. Ἐλατήριον τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 3 kg^r* καὶ ἐπιμηκύνεται κατὰ 40 cm. Ποία ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ τεταμένου ἑλατηρίου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. $E_{\delta\upsilon\nu} = 6 \text{ Joule}$.)

2165. Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν ἡ ὠκύτης ἐνὸς ἁρμονικῶς ταλαντουμένου σώματος, περιόδου T , ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μεγίστης του ταχύτητος. (Ἄπ. $T/6$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2166. Σῶμα μάζης 15 gr δύναται νὰ αἰωρῇται περὶ σταθερὸν σημεῖον μὲ ἀπλὴν ὁρμονικὴν κίνησιν πλάτους 8 cm. Ἐὰν τὸ σῶμα ὑφίσταται ἔλξιν πρὸς τὸ σταθερὸν σημεῖον ἴσην πρὸς 10 gr*, ὅταν εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπὸ τούτου, νὰ εὗρεθῶν : α) ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μάζης περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον, καὶ β) ἡ μεγίστη κινητικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης εἰς ἔργια. ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$). (Ἄπ. α' 0,49 sec, β' $7,85 \cdot 10^4 \text{ erg}$.)

2167. Εἰς σπειροειδὲς ἐλατήριον μὲ σταθεράν 9 Nt/m κρέμαται μᾶζα, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἐπιμήκυνσις 10 cm. Κατὰ τὴν διέλευσιν ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἡ μᾶζα ἔχει ὠκύτητα 50 cm/sec. α) Ποία ἡ ἐξαρτηθεῖσα μᾶζα. β) Ποία ἡ περίοδος αἰωρήσεως καὶ ποῖον τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. α' $m = 90 \text{ gr}$. β' $T = 0,6 \text{ sec}$, α' = 5 cm.)

2168. Μᾶζα 500 gr, ἐξηρητημένη ἀπὸ σπειροειδὲς ἐλατήριον, ἐκτελεῖ ταλαντώσεις καὶ εἰς τὴν ἀκροτάτην θέσιν, ἀπέχουσιν 12 cm ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 60 cm/sec². Ποία ἡ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου. (Ἄπ. 2,5 Nt/m.)

2169. Ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου σπειροειδοῦς ἐλατηρίου ἐξαρτᾶται μᾶζα 300 gr, ἐκτελοῦσα ὁρμονικὴν ταλάντωσιν περιόδου $\pi/2 \text{ sec}$ καὶ πλάτους 12 cm. α) Ποία ἡ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου. β) Ποία ἡ ὠκύτης τῆς ταλαντουμένης μάζης κατὰ τὴν διέλευσιν τῆς ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας. γ) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν διέλευσιν ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας. δ) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὸν χρόνον τῆς μεγίστης ἀπομακρύνσεως. (Ἄπ. α' 4,8 Nt/m. β' $v = 48 \text{ cm/sec}$. γ' $\gamma = 0$ (θέσις ἰσορροπίας). δ' 1,92 m/sec².)

2170. Σῶμα τι ἐκτελεῖ ἀπλὴν ἁρμονικὴν παλμικὴν κίνησιν περὶ σταθερὸν σημεῖον. Ἐὰν ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος κατὰ τὴν ἐκ 5 cm μετατόπισιν του ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου εἶναι ἀντιστοίχως 17,3 cm/sec καὶ 20 cm/sec², νὰ εὗρεθῶν τὸ πλάτος καὶ ὁ χρόνος περιόδου τῆς κινήσεως. (Ἄπ. 9,99 cm, 3,14 sec.)

2171. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περίοδος τῆς κατακόρυφου ταλαντώσεως σώματος ἐξηρητημένου ἀπὸ μακρὸν καὶ ἑλαφρὸν σπειροειδὲς ἐλατήριον εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν περίοδον ἀπλοῦ ἑκκρεμοῦς, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μεγίστην ἀπόκλισιν τοῦ ἐλατηρίου, τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸ βᾶρος τοῦ σώματος.

2172. Μᾶζα 1 kg^r κινεῖται κατὰ μήκος εὐθείας μήκους 20 cm ἐκτελοῦσα ὁρμονικὴν κίνησιν μὲ περίοδον 4 sec. Νὰ προσδιορισθῶν : α) Ὁ κύκλος ἀναφορᾶς. β) Ἡ ταχύτης σημείου ἐπὶ τοῦ κύκλου ἀναφορᾶς. γ) Ἡ ὠκύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ παλλο-

μένου σώματος εις τὸ μέσον τῆς τροχιάς του. δ) Ἡ ὠκύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εις τὸ ἄκρον τῆς τροχιάς. ε) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν τὸ σῶμα εὐρίσκεται εις τὸ μέσον τῆς τροχιάς. στ) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν εὐρίσκεται εις τὸ ἄκρον τῆς τροχιάς. ζ) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν ἡ ἀπόκλισις εἶναι 8 cm.

(Ἄπ. α' 10 cm. β' 5 π cm/sec. γ' 5 π cm/sec, 0 cm/sec². δ' 0 cm/sec, 2·5 π². ε' 0 dyn. στ' 2500 π² dyn. ζ' 2000 π² dyn.)

2173. Σῶμα μάζης 500 gr ἑξαρθρώμενον ἐξ ἐνὸς ἐλατηρίου τίθεται εις ταλάντωσιν πλάτους 6 cm. Ποία ἡ ὠκύτης τῆς μάζης, ὅταν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ ἔχοντος ἀπόκλινιν 4 cm, ἐὰν τὸ ἐλατήριον ὑφίσταται ὑπὸ δυνάμεως 200 gr* πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 5 cm. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἄπ. $\pm 39,6 \text{ cm/sec}$.)

2174. Ἐκκρεμές ἐκτελεῖ 60 πλήρεις ταλαντώσεις ἀνὰ min καὶ ἕτερον ἐκτελεῖ 56 κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. Ὑποτίθεται ὅτι εὐρίσκονται ἐν συμφωνίᾳ φάσεως κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν χρόνων καὶ ζητεῖται πόσας φορὰς θὰ εὐρίσκωνται εις τὴν αὐτὴν κατάστασιν ἐντὸς 1 min. (Ἄπ. 4.)

2175. Τὸ πλάτος μίᾶς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως εἶναι 100 cm καὶ ἡ περίοδος αὐτῆς 12 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ταλαντουμένου σώματος ἐν δευτερόλεπτον μετὰ τὴν ἐπανάκαμψιν. Ποία ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εις τὸ σημεῖον αὐτό. (Ἄπ. 0,866 m, -0,262 m/sec, -0,237 m/sec².)

2176. Ποία ἡ ἀπομάκρυνσις καὶ ἡ ὠκύτης σώματος ἐκτελοῦντος ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, μετὰ πάροδον χρόνου 0,3 sec καὶ 0,5 sec ἀπὸ τῆς διελεύσεως διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὅταν ἡ περίοδος τῆς αἰωρήσεώς του ἰσοῦται πρὸς 3 sec καὶ τὸ πλάτος αὐτῆς πρὸς 10 cm. (Ἄπ. α' 58,8 mm, 0,169 m/sec, β' 86,7 mm, 0,105 m/sec.)

2177. Σῶμα μάζης m ἐξαρτᾶται ἐξ ἐλατηρίου E_1 , ἡ περίοδος τοῦ ὁποίου εἶναι $T_1 = 0,6 \text{ sec}$. Τὸ ἴδιον σῶμα ὅταν ἐξαρθρῇ ἐξ ἐλατηρίου E_2 παρουσιάζει περίοδον ταλαντώσεως $T_2 = 0,8 \text{ sec}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῶν ταλαντώσεων τοῦ σώματος τούτου, ἐξηρημένου ἐκ τοῦ ἄκρου τῶν δύο ἐλατηρίων, ἀφοῦ τεθοῦν ταῦτα εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ἄκρα των νὰ εὐρίσκωνται ἐγγὺς ἀλλήλων. (Ἄπ. $T = 1 \text{ sec}$.)

2178. Δύναμις 500 gr* ἐνεργοῦσα ἐπὶ ἐλατηρίου προκαλεῖ ἐπιμήκυνσιν 8 cm κατὰ μέτρον μήκους τοῦ ἐλατηρίου. Ποῖον τὸ μήκος ἐλατηρίου εἰς τὸ ὁποῖον σφαιρικὸν ἔκκρεμές, μάζης 900 gr, ἐκτελεῖ αἰωρήσεις διαρκείας 1,2 sec.

2179. Ἐλατήριον ἐπιμηκύνεται κατὰ 50 cm, δι' ἐξαρτήσεως ἐκ τοῦ ἄκρου του βάρους 1 kg*. Ποία ἡ μᾶζα σφαιρικοῦ ἔκκρεμοῦς, ἡ ὁποία παράγει διὰ τοῦ ἐλατηρίου τούτου αἰώρησιν περιόδου 1 sec.

2180. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ μεγίστη ταχύτης καὶ ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις διὰ ἔκκρεμές περιόδου 2 sec καὶ πλάτους 7,62 cm. (Ἄπ. 23,7 cm/sec, 74,4 cm/sec².)

2181. Ρυθμιστικὸν ἔκκρεμές ὥρολογίου ἔχει πρακτικῶς μῆκος 1 m καὶ περίοδον 2 sec. Ὁ συντελεστὴς δαστολής του εἶναι $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$. Τὸ ὥρολόγιον εἶναι καλῶς ρυθμισμένον εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 10 °C, χρησιμοποιεῖται δὲ εἰς τόπον ὅπου ἡ μέση θερμοκρασία εἶναι 35 °C. Ποῖον τὸ κατὰ εἰκοσιτετράρων σφάλμα τοῦ ὥρολογίου. (Ἄπ. 17 sec ἀνὰ 24 ὥρον.)

2182. Ταλάντωσίς τις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = a \sin(\omega t - \phi)$. Νὰ καθορισθοῦν τὰ a , ω , ϕ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τροχιά ἔχει μῆκος 6 cm, ἡ περίοδος εἶναι 6 sec καὶ ὅτι κατὰ τὴν στιγμὴν t τὸ κινητὸν σῶμα ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἀπόστασιν $+3 \text{ cm}$. (Ἄπ. $a = 3 \text{ cm}$, $\omega = \pi/3$, $\phi = 0$.)

2183. Ώρολόγιον ρυθμίζεται υπό φυσικού έκκρεμου, φέροντος στέλεχος μήκους l m, εις τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ὑπάρχει σημειώδης μάζα $m = 625$ gr. Διὰ τινὰ λόγον ἡ περίοδος T ἔχει ὑποστή μεταβολὴν ΔT τοιαύτην ὥστε $\Delta T/T = 2 \cdot 10^{-4}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ διορθωθῇ ἡ πορεία τοῦ ὥρολογίου διὰ προσθήκης, εἰς τὸ μέσον τοῦ στελέχους, μάζης m καταλλήλου ἐκλεγείσης τιμῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μάζα m . (Ἀπ. $m = 1$ gr.)

2184. Ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ ὕλικὸν σωματίον A προσηρμοσμένον εἰς τὸ ἄκρον νήματος μήκους $l = 86,4$ cm. Ἐστω $x = x_0$ συν $(\omega t - \varphi)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου A ἐπὶ τῆς τροχιάς του, ἑξομοιωμένη πρὸς μικρὸν τμήμα εὐθείας. Ἐκλέγομεν ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν $x = 2,4$ cm καὶ ἡ ταχύτης ἔχει τιμὴν $+14$ cm/sec. Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου A . Δίδεται $g = 9,8$ m/sec². [Ἀπ. $x = 4,8$ συν $(3,87 \cdot t - \pi/3)$.]

2185. Ώρολόγιον εἶναι καλῶς ρυθμισμένον ὑπὸ τοὺς ἀκολουθούσους ὁρους: Θερμοκρασία 15°C , ὑψόμετρον 1280 m, γεωγραφικὸν πλάτος 45° . Μεταφέρεται τοῦτο εἰς τόπον καθοριζόμενον οὕτω: Πλάτος $\lambda = 6^\circ$, ὑψόμετρον 0 , θερμοκρασία 31°C . Ποία θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς καθημερινῆς πορείας του. Δίδονται: ὁ συντελεστὴς τῆς διαστολῆς τοῦ ρυθμιστικοῦ ἐκκρεμοῦς $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹, $g_1 = 9,806 - 0,0265 \cdot \text{συν } 2\lambda$, ὅπου λ τὸ πλάτος τοῦ τόπου. Ἡ g_z (τιμὴ τοῦ g εἰς τὸ ὑψόμετρον Z) θὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῆς σχέσεως $g_z = g_0 (R/R + Z)^2$, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ Z θὰ θεωρηθῇ ὡς πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀκτίνα R τῆς Γῆς. $R = 6400$ km. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ τροποποιηθῇ τὸ μήκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, διὰ νὰ ἀποκατασταθῇ ἡ κανονικὴ λειτουργία. (Ἀπ. $\Delta l = 2,4$ mm δι' ἐκκρεμὲς 1 m.)

2186. Δύο ἐκκρεμῇ ἔχουν τὸ αὐτὸ μήκος l , περίπου ἴσον πρὸς 1 m. Τὸ ἓν εἶναι ἀπλοῦν, ἐνῶ τὸ ἕτερον συνίσταται ἀπὸ νῆμα καὶ σφαῖραν, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν l ἀπὸ τοῦ ἀξονος περιστροφῆς. Μεταξὺ δύο διαβάσεων, κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν γινομένων καὶ ταυτοχρόνως ἐντὸς κατακόρυφου ἐπιπέδου, τὰ ἐκκρεμῇ πραγματοποιοῦν περίπου 1000 ταλαντώσεις. Νὰ καθορισθῇ ἡ σχετικὴ διαφορά τῶν δύο περιόδων. Ἡ ροπή ἀδραναίας τῆς σφαίρας ὡς πρὸς μίαν διάδικη διαφορά τῶν δύο περιόδων. Ἡ ροπή ἀδραναίας τῆς σφαίρας ὡς πρὸς μίαν διάδικη διαφορά τῶν δύο περιόδων. Ἡ ροπή ἀδραναίας τῆς σφαίρας ὡς πρὸς μίαν διάδικη διαφορά τῶν δύο περιόδων. (Ἀπ. $2 \cdot 10^{-3}$ sec, $k = 0,45$.)

2187. Ταλάντωσις τις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = \alpha$ συν $(\omega t - \varphi)$. Νὰ καθορισθοῦν τὰ α , ω , φ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τροχιά ἔχει μήκος 12 cm καὶ ὅτι κατὰ τὴν στιγμὴν $t = 0$, $x = +3$ cm καὶ $v = +15\sqrt{3}$ cm/sec. (Ἀπ. $\alpha = 6$ cm, $\omega = 5$ rad/sec, $\varphi = +\pi/3$.)

2188. Ταλάντωσις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = \alpha$ συν $(\omega t - \varphi)$. Νὰ καθορισθοῦν τὰ α , ω , φ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τροχιά ἔχει μήκος 10 cm, ὅτι ἡ σχέσις τῆς ταχύτητος πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν λαμβάνει ἐκ νέου τὴν ἰδίαν τιμὴν κατὰ δύο στιγμὰς ἀπεχούσας μεταξύ των κατὰ 2 sec καὶ ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 1$ sec ἔχομεν $v = 1,103$ γ. (Ἀπ. $\alpha = 5$ cm, $\omega = 0,5$ π, $\varphi = \pi/6$.)

2189. Σημεῖον μάζης ἴσης πρὸς τὴν μονάδα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν καταλλήλου δυνάμεως, ἐκτελεῖ γραμμικὰς ταλαντώσεις πλάτους α καὶ κυκλικῆς συχνότητος ω . Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐνέργεια A τοῦ σημείου τούτου εἶναι σταθερὰ καὶ ἀνεξάρτητος τῆς θέσεώς του. Νὰ καθορισθοῦν τὸ πλάτος α , ἡ φάσις φ , ἡ κυκλικὴ συχνότης ω , γνωστοῦ ὄντος ὅτι $A = 10$ Joule καὶ ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\text{κιν}}$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν $E_{\text{δυν}}$ κατὰ τὴν στιγμὴν $t = 0$ καὶ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀριθμητικῶς σταθερῶς ἴση πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀπομακρύνσεως. (Ἀπ. $\alpha = \sqrt{5}$, $\omega = 2$ sec⁻¹, $\varphi = \pi/4$.)

2190. Ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου κατακορύφως κρεμαμένου ἐλατηρίου ἐξαρτῶμεν κατὰ πρῶτον βάρος $0,3 \text{ kg}^*$ καὶ ἀκολούθως βάρος $0,5 \text{ kg}^*$, διὰ τοῦ ὁποῖου ἐπιτυγχάνομεν μίαν πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 12 cm , χωρὶς νὰ φθάνωμεν τὸ ὄριον ἐλαστικότητος. Ἐν συνεχείᾳ, ἀντὶ τῶν δύο τούτων βαρῶν ἐξαρτῶμεν μᾶζαν 1 kg . Ποία ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. $T = 1,54 \text{ sec}$.)

2191. Ἐλατήριο, τεινόμενον ὑπὸ δυνάμεως 5 kg^* , ἐπιμηκύνεται διὰ προσθέτου δυνάμεως 8 kg^* κατὰ 20 cm . α) Ποῖον τὸ διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν αὐτὴν ἀπαιτούμενον ἔργον. β) Ποία ἡ συνολικὴ ἐνέργεια τοῦ τεταμένου ἐλατηρίου. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$). (Ἀπ. α' $E_1 = 18 \text{ Joule}$. β' $E_{\text{ολ}} = 21,1 \text{ Joule}$.)

2192. Σῶμα μάζης 300 gr εἶναι προσδεδεμένον εἰς τὸ κάτω πέρασ ἐλαφροῦ ἐλατηρίου καὶ προκαλεῖ σταθερὰν μετατόπισιν κατὰ 5 cm . Τείνεται πρὸς τὰ κάτω κατὰ 5 cm ἀκόμη καὶ εἴτα ἀφίεται ἐλευθέρον. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ περίοδος κινήσεως ὡς καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μὲ τὴν ὁποίαν ἡ μᾶζα διέρχεται διὰ τῆς μέσης θέσεως τῆς κινήσεως. (Ἀπ. $0,448 \text{ sec}$, $450 \text{ gr}^*\text{cm}$.)

2193. Ἡ μᾶζα M_1 τῆς Σελήνης ἰσοῦται πρὸς $M/81$, ὅπου M ἡ μᾶζα τῆς Γῆς. Ἡ ἀκτίς τῆς Σελήνης εἶναι $R' = 3 R/11$, ὅπου R ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς. Ποία ἡ ἐπὶ τῆς Σελήνης περίοδος ἐκκρεμοῦς μήκους 1 m . Ἡ τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς Γῆς εἶναι $g = \pi^2$. (Ἀπ. $T = 4,9 \text{ sec}$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΓ'

ΚΥΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2194. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως κύματος εἶναι 340 m/sec καὶ ἡ συχνότης 256 Hz , πόσον τὸ μῆκος κύματος.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος εἶναι v , ἡ συχνότης ν καὶ τὸ μῆκος κύματος λ , τότε, ὡς γνωστόν, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$v = \lambda \cdot \nu$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως: $v = 340 \text{ m/sec}$ καὶ $\nu = 256 \text{ Hz}$, προκύπτει ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος εἶναι:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{256} \text{ cm}$$

2195. Πόση εἶναι ἡ συχνότης σωματιδίου ἐντὸς κύματος, διαδιδόμενου μὲ ταχύτητα 5000 m/sec , ὅταν τὸ μῆκος κύματος εἶναι 10 cm ἢ 200 cm .

Λύσις: Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσηιν ἔχομεν:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{5000}{10} = 5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσηιν:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{5000}{200} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

2196. Ήχος συχνότητας 600 Hz ανακλάται καθέτως επί στερεάς επιφάνειας και επιστρέφουν δημιουργεί διαφορά στάσιμα κύματα. Ζητείται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών.

Λύσις. Εάν παραστήσωμεν διά l την ζητούμενη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών και λ το μήκος κύματος του ήχου, θα έχουμε, ως γνωστόν:

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Υπολογίζοντας το λ εκ της σχέσεως $v = \lambda \cdot \nu$, λαμβάνομεν $\lambda = v/\nu$, και αντικαθιστώντες εις την σχέσιν (1) έχουμε:

$$l = \frac{v}{2\nu} \quad (2)$$

Διά $v = 34\,000$ cm/sec και $\nu = 600$ Hz εύρισκομεν εκ της σχέσεως (2) ότι:

$$l = 28,33 \text{ cm}$$

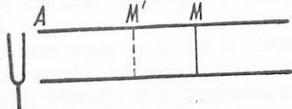
2197. Διαπασών δίδον το κανονικόν $1a$ ($1a_3 = 435$ Hz) πάλλεται εις το στόμιον κυλινδρικού σωλήνος άπειρορίστου μήκους. Ποία ή κινητική κατάσταση δονήσεως του άέρος (πύκνωσις ή άραίωσις) εις απόστασιν 170/29 m εκ του στομιού του σωλήνος. (Ταχύτης διαδόσεως του ήχου 340 m/sec).

Λύσις. Έστωσαν u ή ταχύτης του ήχου, ν ή συχνότης και λ το μήκος κύματος. Εκ της γνωστής σχέσεως $v = \lambda \cdot \nu$ λαμβάνομεν $\lambda = v/\nu$. Εάν τώρα παραστήσωμεν διά x την απόστασιν μεταξύ A και M, ο άριθμός μηκών κύματος μεταξύ A και M θα είναι $x : \lambda$, ότε

διά $x = 170/29$ m και $\lambda = 340/435$ m λαμβάνομεν:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{170}{29} : \frac{340}{435} = \frac{15}{2}$$

Ήτοι, προκύπτει περιττός άριθμός ήμιμηκών κύματος, όπερ δεικνύει ότι ή κινητική κατάσταση εις τας περιοχάς A και M εύρίσκεται εις αντίθεσιν φάσεως. Εάν δηλαδή εις δεδομένην στιγμην έχουμε πύκνωσιν εις το A, κατά την αυτήν στιγμην εις το M θα έχουμε άραίωσιν.



2198. Έλασμα μεταλλικόν δονούμενον παράγει ήχον συχνότητας 348 Hz. Εάν ή ταχύτης του ήχου εις τον άέρα είναι 340 m/sec, ζητείται να εύρεθούν: α) πόσος χρόνος απαιτείται, ίνα ο ήχος διαδοθι μέχρι σημείου εύρισκομένου εις απόστασιν 2,55 m από της πηγής, και β) ποία ή διαφορά φάσεως μεταξύ των σημείων τούτων και της πηγής.

Λύσις. α) Εάν παραστήσωμεν διά s την απόστασιν του θεωρουμένου σημείου από της πηγής, λ το μήκος κύματος, ν την συχνότητα, u την ταχύτητα του ήχου και διά t και δ αντίστοιχως τὰ ζητούμενα μεγέθη, χρόνον και διαφοράν φάσεως, θα έχουμε:

$$t = \frac{s}{u} = \frac{2,55}{340} \text{ sec} \quad \text{ήτοι:} \quad t = 0,0075 \text{ sec}$$

β) Προς εύρεσιν της διαφοράς φάσεως, γνωρίζομεν εξ όρισμού ότι μεταξύ δύο σημείων άπεχόντων κατά λ έχουμε διαφοράν φάσεως 2π και εάν παρεμβάλλεται μεταξύ δύο σημείων άριθμός μηκών κύματος s/λ , ή διαφορά φάσεως δ είναι: $\delta = 2\pi \cdot s/\lambda$. Άλλά επειδή $\lambda = v/\nu$ και $T = 1/\nu$, λαμβάνομεν:

$$\delta = 2\pi \cdot s \cdot \nu \cdot T \quad \text{ή, λόγω της σχέσεως } t = s/u, \text{ έχουμε:}$$

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

Όθεν διά $t = 0,0075$ sec και $T = 1/348$ sec, εύρισκομεν ότι:

$$\delta = 16,40 \text{ rad}$$

2199. Δύο μικρά σώματα ρίπτονται το έν 3/7 του δευτερολέπτου μετά το άλλο εις το αυτό σημείον της ήρέμου επιφανείας ενός ύγρου. Συνεπεία του-
ηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

του ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ σχηματίζονται διαδιδόμενα κυκλικὰ κύματα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον διεγέρσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἐστω 0,65 μέτρα τὸ μῆκος κύματος τῶν ἀνωτέρω κυμάτων. Ζητεῖται ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάτων. (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1957).

Λύσις. Ἐστω λ τὸ μῆκος κύματος, T ἡ περίοδος τῆς κυμάνσεως καὶ v ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάτων. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ δίδεται $\lambda = 0,65$ m καὶ ἡ περίοδος $T = 3/7$ sec, ἐφ' ὅσον δὲν ἐπέρχεται διαταραχὴ τῆς πρώτης κυμάνσεως ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ δευτέρου μικροῦ σώματος. Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν, εὐρίσκομεν :

$$v = 1,52 \text{ m/sec}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2200. Ποία ἡ ταχύτης διαδόσεως κύματος, ἔχοντος μῆκος κύματος 80 m καὶ περίοδον 0,5 sec. (Ἀπ. $v = 160$ m/sec.)

2201. Ποία ἡ συχνότης ραδιοφωνικοῦ κύματος μὲ μῆκος κύματος 600 m καὶ ταχύτητα διαδόσεως 300 000 km/sec. (Ἀπ. $v = 5 \cdot 10^5$ sec⁻¹.)

2202. Δύο ἐγκάρσια κύματα, μὲ μήκη κύματος $\lambda_1 = 6$ cm, $\lambda_2 = 4$ cm καὶ πλάτη $\alpha_1 = 3$ cm καὶ $\alpha_2 = 1$ cm, συμβάλλουν. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ συνιστάμενον κύμα, ὅταν ἡ διαφορά φάσεως, εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ἴσουςται πρὸς : α) 0°, β) 30°, γ) 90°, δ) 180°, ε) 270°.

2203. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος τοῦ βομβίσματος ἐντόμου, τὸ προκαλούμενον ἐκ τῶν πτερύγων αὐτοῦ, ὅταν ἡ συχνότης τοῦ κτυπήματος τῶν πτερύγων εἶναι $v = 240$ sec⁻¹ καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα $v = 340$ m/sec. (Ἀπ. $\lambda = 1,4$ m.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2204. Μότορσιπ πλέει εὐθέως μὲ ταχύτητα 27 km/h, σχηματίζον κυματοειδῆ σφῆνα γωνίας 40°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ἐξαπλώσεως τῶν παραγομένων ὕδατινων κυμάτων. (Ἀπ. 9,23 m/sec.)

2205. Ἐγκάρσιον κύμα ἐκτείνεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ ταχύτητα 3 m/sec, ἀρχεται δὲ διαδιδόμενον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t = 0$ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Τὸ πλάτος εἶναι 10 cm, ἡ δὲ συχνότης 0,25 sec⁻¹. α) Ποῖον τὸ μῆκος κύματος. β) Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν ἀρχεται δονούμενον σωματίδιον ἔχον $x = 120$ m. γ) Ποίαν ἀπομάκρυνσιν παρουσιάζει τὸ σωματίδιον αὐτὸ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t = 50$ sec. (Ἀπ. α' $\lambda = 12$ m. β' $t = 40$ sec. γ' $y = 0$.)

2206. Μονοδιάστατον ἐγκάρσιον κύμα, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t = 0$ ἀρχεται διαδιδόμενον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἐκτείνεται μετὰ ταχύτητος $v = 5$ m/sec κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τῶν x . Τὸ μῆκος κύματος εἶναι 50 cm καὶ τὸ πλάτος 12 cm. α) Ποῖαι ἡ συχνότης καὶ ἡ περίοδος. β) Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν τὸ κύμα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $x = 15$ m. γ) Ποία ἡ ἐξί-

σώσεις του κύματος. δ) Ποιαν άπομάκρυνσιν παρουσιάζει τὸ σημεῖον $x = 8 \text{ m}$ κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t_1 = 5 \text{ sec}$, $t_2 = 5\frac{1}{4} \text{ sec}$, $t_3 = 5\frac{1}{3} \text{ sec}$.

(Ἀπ. α' $v = 10 \text{ Hz}$, $T = 0,1 \text{ sec}$. β' $t = 3 \text{ sec}$. γ' Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $y = A \cdot \eta\mu 2\pi/T \cdot (t - x/v) = A \cdot \eta\mu 2\pi \cdot (t/T - x/\lambda)$ γίνεται $y = 0,12 \text{ m} \cdot \eta\mu [2\pi (10 t \text{ sec}^{-1} - 2x\text{m}^{-1})]$. δ' $x = 8 \text{ m}$, $t_1 = 5 \text{ sec}$, $y = 0$. $x = 8 \text{ m}$, $t_2 = 5\frac{1}{4} \text{ sec}$, $y = 0$. $x = 8 \text{ m}$, $t_3 = 5\frac{1}{3} \text{ sec}$, $y = 0,10 \text{ m}$.)

2207. Δύο ἐγκάρσια κύματα μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος $\lambda = 6 \text{ cm}$, τὴν αὐτὴν συχνότητα $\nu = 4 \text{ sec}^{-1}$ καὶ πλάτη $\alpha_1 = 2 \text{ cm}$ καὶ $\alpha_2 = 3 \text{ cm}$, εὐρισκόμενα ἐν φάσει, διαδίδονται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x . α) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς τὰ δύο κύματα καθὼς καὶ τὸ συνισταμένον κύμα. β) Ποῖαι αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο κυμάτων. γ) Ποία ἡ ἐξίσωσις τοῦ συνισταμένου κύματος καὶ ποῖον τὸ πλάτος αὐτοῦ.

(Ἀπ. β' $y_1 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [4 t \text{ sec}^{-1} - x/6 \text{ cm}]$, $y_2 = 3 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [4 t \text{ sec}^{-1} - x/6 \text{ cm}]$. γ' $y_1 + y_2 = 5 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [4 t \text{ sec}^{-1} - x/6 \text{ cm}]$, $\alpha = 5 \text{ cm}$.)

2208. Δύο ἐγκάρσια κύματα, μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος $\lambda = 4 \text{ cm}$, τὴν ἰδίαν συχνότητα $\nu = 2 \text{ sec}^{-1}$ καὶ τὸ αὐτὸ πλάτος $\alpha = 2 \text{ cm}$, διαδίδονται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x , ἔχοντα διαφορὰν φάσεως ἴσην πρὸς ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/2$. α) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς τὰ δύο κύματα καθὼς καὶ τὸ συνισταμένον κύμα. β) Ποῖαι αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο κυμάτων. γ) Ποία ἡ ἐξίσωσις τοῦ συνισταμένου κύματος καὶ ποῖον τὸ πλάτος αὐτοῦ.

(Ἀπ. β' $y_1 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} - x/4 \text{ cm}]$, $y_2 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} + 2n \cdot T \text{ sec}^{-1} - x/4 \text{ cm}] = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi [2 t \text{ sec}^{-1} + n - x/4 \text{ cm}]$. γ' $y = \pm 4 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} + n/2 - x/4 \text{ cm}]$, $\alpha = 4 \text{ cm}$.)

2209. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνωτέρω ἀσκήσις διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν διαδιδόμενων κυμάτων εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/2$.

(Ἀπ. β' $y_1 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} - x/4 \text{ cm}]$, $y_2 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi [2 t \text{ sec}^{-1} + (2n - 1) \cdot T \text{ sec}^{-1} - x/4 \text{ cm}]$. γ' $y = 0$, $\alpha = 0$.)

2210. Δύο ἐγκάρσια κύματα, μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος $\lambda = 4 \text{ cm}$, τὴν αὐτὴν συχνότητα $\nu = 2 \text{ sec}^{-1}$ καὶ τὸ αὐτὸ πλάτος $\alpha = 2 \text{ cm}$, διαδίδονται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις ὁδεύοντα πρὸς συνάντησίν των καὶ ἐκκινοῦντα ἐκ δύο σημείων, ἀπεχόντων 16 cm ἀπ' ἀλλήλων. α) Νὰ σχεδιασθῇ τὸ συνισταμένον κύμα κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T , $5T/4$, $3T/2$, $7T/4$, $2T$, θεωρουμένου ὡς χρόνου $t = 0$ τοῦ χρόνου τῆς συναντήσεως τῶν δύο κυμάτων. β) Ποῖαι αἱ ἐξισώσεις τῶν κυμάτων. γ) Ποία ἡ ἐξίσωσις τοῦ συνισταμένου κύματος καὶ νὰ διερευνηθῇ αὐτή.

(Ἀπ. β' $y_1 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} - x/4 \text{ cm}]$, $y_2 = 2 \text{ cm} \cdot \eta\mu 2\pi \cdot [2 t \text{ sec}^{-1} + x/4 \text{ cm}]$. γ' $y = 4 \text{ cm} \cdot \eta\mu 4\pi t \text{ sec}^{-1} \cdot \sin \pi x/2 \text{ cm}$, ἐξ ἧς ἑπεται: 1) ὅτι διὰ $x = 1 \text{ cm}$, 3 cm , 5 cm , ... $(2n - 1) \text{ cm}$ $y = 0$: τὰ σημεία αὐτὰ συνεπῶς εὐρίσκονται διαρκῶς ἐν ἡρεμίᾳ (δεσμοί). 2) ὅτι τὴν μεγαλυτέραν ἀπόκλισιν ἀποκοτῶν αἱ θέσεις δι' ὅς $\sin \pi x/2 \text{ cm} = \pm 1$, ἥτοι διὰ $x = 0 \text{ cm}$, 2 cm , 4 cm ... $2n \text{ cm}$: διὰ τὰ σημεία ταῦτα ἰσχύει ἡ $y = 4 \text{ cm} \cdot \eta\mu 4\pi t \text{ sec}^{-1}$ (κοιλίαι).)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΔ'

ΦΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

2211. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς 0 °C εἶναι 331,57 m/sec. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν γίνεται αὕτη ἴση πρὸς 340 m/sec.

Λύσις. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ ἐν γένει εἰς τὰ ἀέρια αὐξάνεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας θ , συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν:

$$v_{\theta} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \quad (1)$$

ὅπου v_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν θ καὶ v_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς αὐτοῦ εἰς 0 °C καὶ α συντελεστής, καλούμενος θερμικός συντελεστής τῶν ἀερίων.

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς θ καὶ λαμβάνομεν:

$$\theta = \frac{v_{\theta}^2 - v_0^2}{\alpha \cdot v_0^2} \quad (2)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (2) θέτομεν: $v_{\theta} = 331,57$ m/sec, $v_0 = 340$ m/sec, $\alpha = 1/273$ grad⁻¹, καὶ εὐρίσκομεν:

$$\theta = 14,1^{\circ}\text{C}$$

2212. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι 331,36 m/sec εἰς 0 °C, πόση θὰ εἶναι εἰς 12 °C καὶ εἰς 25 °C.

Λύσις. Εἰς τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$v_{\theta} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \quad (1)$$

ἐὰν θέσωμεν: $v_{\theta} = 331,36$ m/sec, $\theta = 12^{\circ}\text{C}$ καὶ $\alpha = 1/273$ grad⁻¹, λαμβάνομεν:

$$v_{12} = 338,64 \text{ m/sec}$$

Ἐπίσης, ἐὰν εἰς τὴν ἰδίαν σχέσιν θέσωμεν $\theta = 25^{\circ}\text{C}$, λαμβάνομεν:

$$v_{25} = 346,53 \text{ m/sec}$$

2213. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τοὺς 10 °C, ὅταν ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τοὺς 15 °C εἶναι 340 m/sec.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1959).

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς διαφόρους θερμοκρασίας εἶναι:

$$v_{\theta} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

ὅπου v_{θ} ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς $\theta^{\circ}\text{C}$ καὶ v_0 εἰς 0 °C, θ ἡ θερμοκρασία καὶ α ὁ συντελεστής διαστολῆς τῶν ἀερίων. Διὰ τὰς θερμοκρασίας $\theta_1 = 10^{\circ}\text{C}$ καὶ $\theta_2 = 15^{\circ}\text{C}$ θὰ ἔχωμεν:

$$v_{\theta_1} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta_1} \quad (1) \quad \text{καὶ:} \quad v_{\theta_2} = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta_2} \quad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις καὶ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς v_{θ_1} λαμβάνομεν:

$$v_{\theta_1} = v_{\theta_2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha \cdot \theta_1}{1 + \alpha \cdot \theta_2}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τὰς τιμὰς : $v_{02} = 340 \text{ m/sec}$ $\alpha = 1/273$, $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$ καὶ $\theta_2 = 15^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκουμεν :

$$v_{01} = 336,6 \text{ m/sec}$$

2214. Εἷς γεωργὸς συγχρονίζει τὸ ὥρολόγιόν του τὴν μεσημβρίαν μετὰ τὸν συριγμὸν ἐργοστασίου εὐρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 13 μιλίων. Ποίαν διόρθωσιν πρέπει νὰ ἐπιφέρει, ἐὰν ὑπολογίσῃ τὸν χρόνον τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἥχος διὰ τὴν διάδοσιν αὐτοῦ, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 24°C .

Λύσις. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου v_θ εἰς θερμοκρασίαν θ , εἶναι ὡς γνωστὸν :

$$v_\theta = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \quad (1)$$

ὅπου α εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς τῶν ἀερίων ($\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$) καὶ v_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 0°C . Διὰ νὰ εὐρωμεν ποίαν διόρθωσιν πρέπει νὰ ἐπιφέρει ὁ γεωργὸς εἰς τὸ ὥρολόγιόν του, πρέπει νὰ εὐρωμεν προφανῶς τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ὁ ἥχος διανύσῃ τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν ἀσκήτην ἀπόστασιν s . Ὁ χρόνος οὗτος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῆς κινήσεως ὅτι εἶναι :

$$t = \frac{s}{v_\theta} = \frac{s}{v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $s = 13 \text{ mil} = 13 \cdot 1852 \text{ m}$, $v_0 = 331 \text{ m/sec}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, $\theta = 24^\circ\text{C}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$t = 69 \text{ sec}$$

Συνεπῶς ὁ γεωργὸς πρέπει νὰ θέσῃ τὸ ὥρολόγιόν του 69 sec πρὸς τὴν ἐμπρός.

2215. Διαπασῶν ἐκτελεῖ 284 παλμοὺς ἀνὰ sec εἰς τὸν ἀέρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν 25°C .

Λύσις. Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ παραγομένου ἤχου ὑπὸ τοῦ διαπασῶν εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$v_\theta = \lambda \cdot \nu \quad (1)$$

ὅπου v_θ εἶναι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν θ καὶ ν ἡ συχνότης τῆς ἡχητικῆς πηγῆς. Ἐκ τοῦ τύπου (1), λύοντες ὡς πρὸς λ , εὐρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{v_\theta}{\nu} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦ, ὡς γνωστὸν, εἶναι : $v_\theta = v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$, ὁ ἀνωτέρω τύπος (2) γράφεται :

$$\lambda = \frac{v_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}}{\nu} \quad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3) : $v_0 = 331 \text{ m/sec}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, $\theta = 25^\circ\text{C}$, $\nu = 284 \text{ sec}^{-1}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος τοῦ ἤχου εἶναι :

$$\lambda = 1,22 \text{ m}$$

2216. Δίσκος σειρήνης ἐκτελεῖ 800 στροφὰς ἀνὰ λεπτὸν καὶ φέρει 72 ὀπὰς. Πόση ἡ συχνότης τοῦ ἤχου.

Λύσις. Ἐὰν ὁ δίσκος περιστρέφεται ὑπὸ συχνότητα N καὶ φέρῃ n ὀπὰς, τότε ἡ συχνότης ν τοῦ παραγομένου ἤχου δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\nu = N \cdot n$$

Θέτομεν : $N = 800/60 \text{ sec}^{-1}$, $M = 72$, καὶ εὐρίσκομεν :

$$\nu = 960 \text{ sec}^{-1}$$

2217. Να καθορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἤχου σειρήνος, τῆς ὁποίας ὁ δίσκος φέρει 15 ὁπὰς καὶ ἐκτελεῖ 20 στροφὰς ἀνὰ sec.

Λύσις. Ἐὰν ὁ δίσκος τῆς σειρήνος φέρῃ n ὁπὰς καὶ περιστρέφεται μὲ συχνότητα N , τότε ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῆς σειρήνος ἤχος ἔχει ὕψος ν , τὸ ὁποῖον δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\nu = n \cdot N$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον : $n = 15$ καὶ $N = 20 \text{ sec}^{-1}$, εὐρίσκομεν :

$$\nu = 300 \text{ sec}^{-1}$$

2218. Τὰ ὅρια συχνότητων ἀκουστῶν ἤχων περιλαμβάνονται μεταξύ 20 sec^{-1} καὶ $20\,000 \text{ sec}^{-1}$. Ἐὰν ληφθῇ ὡς ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου 340 m/sec , ποῖα τὰ ἀντίστοιχα μῆκη κύματος.

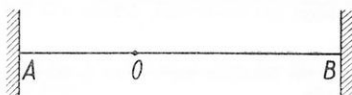
Λύσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως $\nu = \lambda \cdot \nu$, ἡ ὁποία συνδέει τὴν ταχύτητα ν τοῦ ἤχου, τὴν συχνότητα ν καὶ τὸ μῆκος κύματος λ αὐτοῦ, εὐρίσκομεν :

$$\alpha) \quad \lambda = \frac{\nu}{\nu} = \frac{340}{20} = 17 \text{ m}$$

$$\beta) \quad \lambda = \frac{\nu}{\nu} = \frac{340}{20\,000} = 0,017 \text{ m} = 1,7 \text{ cm}$$

2219. Ἄνθρωπος ἰστάμενος μεταξύ δύο τοίχων παράγει ἤχον διὰ συγκρούσεως τῶν παλαμῶν τῶν χειρῶν του. Μετὰ πάροδον $0,42 \text{ sec}$ ἡ ἡχώ ἐπιστρέφει ἐκ τοῦ τοίχου Α καὶ $0,12 \text{ sec}$ βραδύτερον ἡ ἡχώ φθάνει ἐκ τοῦ τοίχου Β. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἶναι 20°C , πόση ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τοίχων καὶ πόση ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀνθρώπου ἐξ ἐκάστου τοίχου.

Λύσις. Ἐστω ὅτι ὁ παρατηρητὴς εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Ο (βλ. σχῆμα). Τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὁ ἤχος μὲ ταχύτητα ν_0 ἀνακλῶμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Α εἶναι 2 (ΟΑ) καὶ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἀνακλῶμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Β εἶναι 2 (ΟΒ). Ἐὰν καλέσωμεν ν_0 τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 20°C καὶ t_1 τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἐπιστρέψῃ ὁ ἤχος εἰς τὸν παρατηρητὴν ἀνακλῶμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Α, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :



$$2(\text{OA}) = \nu_0 \cdot t_1 \quad \eta : \quad \text{OA} = \frac{\nu_0 \cdot t_1}{2} \quad (1)$$

Ὁμοίως, ἐὰν καλέσωμεν t_2 τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἐπιστρέψῃ ὁ ἤχος ἀνακλῶμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Β, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$2(\text{OB}) = \nu_0 \cdot t_2 \quad \eta : \quad \text{OB} = \frac{\nu_0 \cdot t_2}{2} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) : $\nu_0 = \nu_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$, ὅτε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\text{OA} = \frac{\nu_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \cdot t_1}{2} \quad (3) \quad \text{καὶ :} \quad \text{OB} = \frac{\nu_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \cdot t_2}{2} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) θέτοντες : $\nu_0 = 331 \text{ m/sec}$, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, $\theta = 20^\circ \text{C}$, $t_1 = 0,42 \text{ sec}$ καὶ $t_2 = 0,42 + 0,12 = 0,56 \text{ sec}$, εὐρίσκομεν :

$$\text{OA} = 71,58 \text{ m} \quad \text{καὶ :} \quad \text{OB} = 92,03 \text{ m}$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τοίχων εἶναι :

$$\text{AB} = 71,58 + 92,03 = 164 \text{ m, περίπου}$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

2220. Ἀερόστατον εὐρίσκεται ἀκίνητον εἰς ὕψος 1000 m ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας λίμνης βάθους 200 m. Ἐπὶ τοῦ ἀεροστάτου εὐρίσκεται πηγὴ ἤχου συχνότητος 500 περιόδων/sec καὶ λίαν εὐαίσθητον ἀκουστικόν. Ζητοῦνται: α) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ λειτουργήσῃ ἡ πηγὴ ἤχου, μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ ἀκουστικόν ἢ ἡχώ, πρῶτον ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ βυθοῦ. β) Πόσας διαταραχὰς θὰ ὑποστῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης ἐκ τῆς ἐπ' αὐτῆς προσπτώσεως τοῦ ἤχου, πρῶτον μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ ἀκουστικόν ἢ ἡχώ τῆς ἐπιφανείας καὶ δεύτερον μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς αὐτὸ ἢ ἡχώ τοῦ βυθοῦ. Δίδονται: ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα $v_a = 340 \text{ m/sec}$, ταχύτης ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος $v_u = 1440 \text{ m/sec}$.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1960).

Λύσις. α) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος t , διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἀκουστικόν ἢ πρώτη ἡχώ, ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$t = \frac{2h}{v_a} \quad (1)$$

ὅπου h τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης καὶ v_a ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα. Ἐπομένως ἔχομεν:

$$t = 5,88 \text{ sec}$$

Ἡ δευτέρα ἡχώ ἐκ τοῦ βυθοῦ θὰ ἀκουσθῇ εἰς χρόνον:

$$t' = \frac{2h}{v_a} + \frac{2h'}{v_u} \quad (2)$$

ὅπου h' τὸ βάθος τῆς λίμνης καὶ v_u ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Δι' ἀντικατάστασιν τῶν δεδομένων προκύπτει:

$$t' = 6,16 \text{ sec}$$

β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαταραχῶν, εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν:

$$N = v \cdot \frac{t}{2} \quad (3)$$

ὅπου v ἡ συχνότης τῆς πηγῆς ἤχου καὶ $t/2$ ὁ χρόνος ἐπιστροφῆς τοῦ ἤχου ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης μέχρι τοῦ ἀκουστικοῦ. Δίδεται $v = 500 \text{ c/sec}$ καὶ εὐρέθῃ $t = 5,88 \text{ sec}$, ἄρα:

$$N = 1470$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ διάρκεια τῶν διαταραχῶν εἶναι $t' - t/2$ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαταραχῶν:

$$N' = v \cdot \left(t' - \frac{t}{2} \right) \quad (4)$$

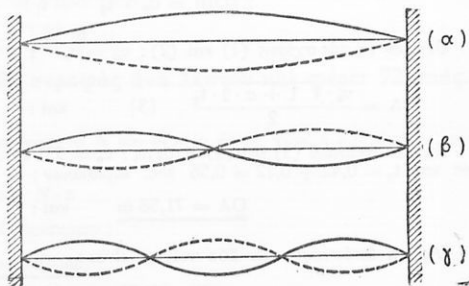
Ἐκ τῆς ἐξίσωσως (4) προκύπτει:

$$N' = 1610$$

2221. Μεταλλικὴ χορδὴ μήκους 50 cm καὶ μάζης 0,50 gr διατείνεται ὑπὸ βάρους 9 kg*. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ταχύτης διαδόσεως ἐγκαρσίου κύματος κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου (πρώτου ἁρμονικοῦ) ὡς καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἁρμονικοῦ.

Λύσις. Ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν παλλομένων χορδῶν:

$$v_1 = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\delta}}$$



δπου l είναι το μήκος της χορδής, δ ή γραμμική πυκνότης αὐτῆς ($\delta = m/l$) καὶ F ἡ τείνουσα δύναμις.
Θέτομεν: $l = 50 \text{ cm}$, $\delta = m/l = 0,01 \text{ gr/cm}$, $F = 9 \text{ kgr}^* = 9 \cdot 10^3 \text{ dyn}$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ὁ θεμελιώδης ἤχος ἔχει ὕψος:

$$v_1 = 300 \text{ sec}^{-1}$$

Ἄρα ὁ δεύτερος ἀρμονικὸς θὰ ἔχη ὕψος:

$$v_2 = 2 \cdot 300 = 600 \text{ sec}^{-1}$$

καὶ ὁ τρίτος ἀρμονικὸς ὕψος:

$$v_3 = 3 \cdot 300 = 900 \text{ sec}^{-1}$$

Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἐγκαρσίου κύματος κατὰ μήκος τῆς χορδῆς εἶναι:

$$v = \lambda \cdot v_1$$

ἢ, ἐπειδὴ $\lambda = 2l$, θὰ ἔχωμεν: $v = 2l \cdot v = 2 \cdot 50 \cdot 300 = 300 \cdot 10^3 \text{ cm/sec}$, ἥτοι:

$$v = 300 \text{ m/sec}$$

2222. Χορδὴ μήκους 80 cm καὶ μάζης 0,2 gr προσαρμόζεται εἰς τὸ ἐν σκέλος διαπασῶν, ἐκτελοῦντος 250 παλμούς ἀνά sec. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς χορδῆς, ἵνα αὕτη ταλαντοῦται εἰς 4 τμήματα.

Λύσις. Ὅταν ἡ χορδὴ ταλαντοῦται εἰς 4 τμήματα (θὰ σχηματίζονται 5 δεσμοί), ἡ χορδὴ θὰ παράγῃ τὸν τέταρτον ἀρμονικόν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ χορδὴ λόγῳ φαινομένου συντονισμοῦ θὰ ἔχῃ συχνότητα ἴσην μετὰ τὴν συχνότητα τοῦ διαπασῶν, ἔπεται ὅτι θὰ παράγῃ ἤχον συχνότητος 250 Hz. Ἐπομένως πρὸς λύσιν τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν τὴν σχέσιν τῶν χορδῶν:

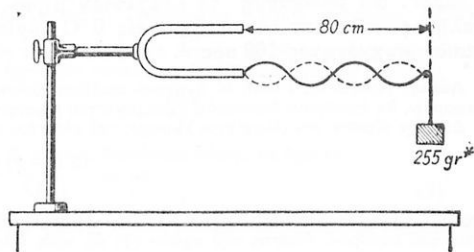
$$v_n = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\delta}} \quad (1)$$

καὶ λύομεν ὡς πρὸς F , ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$F = \frac{v_n^2 \cdot \delta \cdot 4l^2}{n^2} \quad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα εἰς τὴν σχέσιν (2), ἥτοι: $v_n = 250 \text{ Hz}$, $\delta = 0,2/80 \text{ gr/cm}$, $l = 80 \text{ cm}$, $n = 4$, καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις πρέπει νὰ εἶναι:

$$F = 250 \cdot 000 \text{ dyn} = 255 \text{ gr}^*$$



2223. Χορδὴ πιάνου μήκους 72 cm καὶ γραμμικῆς πυκνότητος 0,1 gr/cm παρέχει θεμελιώδη συχνότητος 435 Hz. Πόση ἡ τείνουσα δύναμις τὴν χορδὴν.

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέση:

$$F = \frac{v_n^2 \cdot \delta \cdot 4l^2}{n^2} \quad (1)$$

Θέτομεν: $v_n = 435 \text{ Hz}$, $\delta = 0,1 \text{ gr/cm}$, $l = 72 \text{ cm}$, $n = 1$, καὶ εὐρίσκομεν:

$$F = 392 \cdot 10^3 \text{ dyn} = 395 \text{ kgr}^*, \text{ περίπου}$$

2224. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ τετάρτου ἀρμονικοῦ ἤχου χορδῆς μήκους 40 cm, γραμμικῆς πυκνότητος 0,4 gr/cm καὶ ἡ ὁποία τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 1600 gr*.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν χορδῶν:

$$v_n = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\delta}} \quad (1)$$

ἐὰν θέσωμεν : $n = 4$, $l = 40$ cm, $\delta = 0,4$ gr/cm καὶ $F = 1600 \cdot 981$ dyn, εὐρίσκομεν :

$$v_1 = 100 \text{ Hz, περίπου}$$

2225. Πόση θὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ τρίτου ἀρμονικοῦ κλειστοῦ σωλῆνος μήκους 63 cm. (Ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec).

Λύσις. Διὰ κλειστοὺς σωλῆνας ἰσχύει ὁ τύπος :

$$v_n = \frac{(2n-1) \cdot v}{4l} \quad (1)$$

ὅπου $(2n-1) = n'$ καὶ δηλοῖ τὴν τάξιν τοῦ ἀρμονικοῦ, v ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος. Θέτομεν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν : $(2n-1) = n' = 3$, $v = 340$ m/sec, $l = 0,63$ m, καὶ εὐρίσκομεν :

$$v_3 = 404 \text{ Hz}$$

2226. Πόση εἶναι ἡ θεμελιώδης συχνότης κλειστοῦ ἡχητικοῦ σωλῆνος μήκους 67 cm, ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι 348 m/sec.

Λύσις. Εἰς τὸν γνωστὸν τύπον (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἐὰν θέσωμεν : $(2n-1) = n' = 1$, $l = 0,67$ m καὶ $v = 348$ m/sec, εὐρίσκομεν :

$$v_1 = 129 \text{ Hz}$$

2227. Νὰ καθορισθῇ τὸ ἐλάχιστον μήκος κλειστοῦ καὶ ἀνοικτοῦ ἡχητικοῦ σωλῆνος, τῶν ὁποίων οἱ ἤχοι εἰς 0°C εὐρίσκονται ἐν συντονισμῷ πρὸς διαπασῶν συχνότητος 160 sec⁻¹.

Λύσις. Προφανῶς, ἐπεὶ οἱ ἡχητικοὶ σωλῆνες εὐρίσκονται ἐν συντονισμῷ πρὸς τὸ παλλόμενον διαπασῶν, θὰ παράγουν θεμελιώδη ἦχον μεγίστου πλάτους, τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης εἶναι 160 sec⁻¹.

Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ (ἐλάχιστου) μήκους τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$v_{n'} = \frac{(2n-1) \cdot v}{4l} \quad (1)$$

ὅπου $v_{n'}$ ἡ συχνότης τοῦ ἤχου τῆς $n' = (2n-1)$ ἀρμονικῆς τάξεως, v ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος. Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς l λαμβάνομεν :

$$l = \frac{(2n-1) \cdot v}{4 v_{n'}} \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν :

$$l = 0,517 \text{ m}$$

Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ μήκους l τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$v_n = \frac{n \cdot v}{2l}$$

ὅπου v_n ἡ συχνότης τῆς n ἀρμονικῆς τάξεως, v ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος.

Λύοντες ὡς πρὸς l τὸν ἀνωτέρω τύπον καὶ δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκήσεως εὐρίσκομεν :

$$l = \frac{n \cdot v}{2 v_n} = 1,034 \text{ m}$$

2228. Κλειστὸς ἡχητικὸς σωλὴν περιέχει ἀέρα, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς αὐτοῦ εἶναι $c = 340$ m/sec. Ἡ συχνότης τοῦ 5ου ἀρμονικοῦ τοῦ παραγομένου ὑπ' αὐτοῦ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συχνότητα τοῦ 2ου ἀρμονικοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ἰδίου σωλῆνος, ὅταν οὗτος εἶναι ἀνοικτός. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Μαθηματικόν, 1957).

Λύσεις. Οι τύποι των ήχητικών σωλήνων είναι :

$$v_{n'} = \frac{n' \cdot v'}{4l} \text{ διὰ τοὺς κλειστοὺς, ὅπου } n' \text{ εἶναι } (2n - 1)$$

καί :

$$v_n = \frac{n \cdot v}{2l} \text{ διὰ τοὺς ἀνοικτοὺς}$$

ὅπου $v_{n'}$ καὶ v_n αἱ συχνότητες, n' καὶ n αἱ τάξεις τῶν ὁρμονικῶν, l τὸ μῆκος τῶν σωλήνων, v' καὶ v αἱ ταχύτητες τοῦ ἤχου.

Ἀπὸ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ἔχομεν ὅτι, διὰ $n' = 5$ καὶ $n = 2$, $v_{n'} = v_n$. Ἀρα :

$$\frac{n' \cdot v'}{4l} = \frac{n \cdot v}{2l} \quad \text{ἢ} : \quad v = \frac{n' \cdot v'}{2n} \quad (1)$$

Ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς διὰ τῶν γνωστῶν μεγεθῶν λαμβάνομεν :

$$v = 425 \text{ m/sec}$$

2229. Δίσκος σειρήνος φέρων 50 ὁπὰς περιστρέφεται μὲ ταχύτητα n στρ/min, ὃ δὲ ἤχος τῆς σειρήνος προσπίπτει καὶ ἀνακλάται ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου καθέτου τοίχου, σχηματίζων στάσιμα κύματα ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ζητοῦνται : α) Ποία ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ δίσκου, ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης κοιλίας K_1 καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ Δ_5 εἶναι 100 cm. β) Ποία τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ πρώτου δεσμοῦ Δ_1 καὶ τοῦ τοίχου. (Ταχύτης τοῦ ἤχου = 340 m/sec). (᾿Ανωτάτη Γεωπονικὴ Σχολή ᾿Αθηνῶν, 1958).

Λύσεις. α) Ἐστῶσαν n ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τῆς σειρήνος ἀνὰ λεπτόν καὶ K ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁπῶν αὐτῆς. Τότε ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ήχητικῶν κυμάτων ν θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\nu = K \cdot \frac{n}{60} \quad \text{καί} : \quad n = \frac{60 \nu}{K} \quad (1)$$

Ἀφ' ἐτέρου, ἂν λ τὸ μῆκος κύματος καὶ v ἡ ταχύτης διαδόσεως αὐτοῦ, θὰ ἔχομεν :

$$v = \lambda \cdot \nu \quad \text{ἢ} : \quad \nu = \frac{v}{\lambda} \quad (2)$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ἡ ἀπόστασις l μεταξὺ πρώτης κοιλίας καὶ πέμπτου δεσμοῦ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$l = (2 \cdot 4 - 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \text{ἢ} : \quad \lambda = \frac{4l}{7} \quad (3)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἐξισώσεων προκύπτει :

$$n = \frac{60 \cdot v \cdot 7}{4 \cdot K \cdot l} \quad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν τιμῶν : $v = 340 \text{ m/sec}$, $K = 50$, $\lambda = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ καὶ εὐρίσκομεν :

$$n = 714 \text{ στρ/min}$$

β) Ἐπὶ τοῦ τοίχου σχηματίζεται δεσμὸς, ὃ ὁποῖος θὰ εἶναι καὶ ὁ πρῶτος δεσμὸς τοῦ στασίμου κύματος. Ἦτοι θὰ ἔχομεν ἀπόστασιν τοίχου καὶ πρώτου δεσμοῦ, μηδὲν (0).

2230. Σωλὴν Kundt πληροῦται ὑπὸ ἀέρος θερμοκρασίας 15°C . Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σωρῶν ρινισμάτων φελλοῦ εἶναι 10 cm. Ἐν συνεχείᾳ πληροῦται ὑπὸ ὕδρογόνου θερμοκρασίας 15°C , ὅτε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σωρῶν εὐρίσκεται 38,5 cm. α) Καθορίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδρογόνο, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 m/sec, ἀμφοτέρων τῶν αερίων εὐρισκομένων εἰς 15°C . β) Πόσαι ταλαντώσεις ἀνὰ sec παράγονται εἰς τὴν ράβδον.

Λύσεις. Εἰς τὸν σωλὴνα Kundt οἱ σωροὶ τῶν ρινισμάτων φελλοῦ σχηματίζονται εἰς τὰ σημεῖα ὅπου ἀντιστοιχοῦν οἱ δεσμοὶ τῆς κινήσεως τοῦ στασίμου κύματος. Ἐὰν καλέσωμεν λοιπὸν l τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν, αὕτη θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀπόστασιν δύο διαδοχικῶν σωρῶν ρινισμάτων.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

των φελλού και θα ίσχυται, συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν στασίμων κυμάτων, μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους κύματος λ τοῦ ἡχητικοῦ κύματος. Ἦτοι :

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν $v = \lambda \cdot \nu$, ὅπου λ τὸ μήκος κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου καὶ ν ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς πηγῆς (ράβδου), ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$l = \frac{v}{2\nu} \quad (2)$$

α) Καλοῦμεν l_1, l_2 τὰς ἀποστάσεις τῶν ρινισμάτων φελλοῦ ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδρογόνου, ὡς καὶ ν_1, ν_2 ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας τῶν παραγομένων ἤχων καὶ οὕτω δυνάμεθα, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (2), νὰ γράψωμεν διὰ τὰς δύο ἀναφερομένας περιπτώσεις :

$$l_1 = \frac{v_1}{2\nu} \quad (3) \quad l_2 = \frac{v_2}{2\nu} \quad (4)$$

Διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ δι' ἐπιλύσεως ἀκολουθῶς ὡς πρὸς ν_2 λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\nu_2 = \frac{l_2 \cdot \nu_1}{l_1} \quad (5)$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκῆσεως, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδρογόνον εἶναι :

$$\nu_2 = 1309 \text{ m/sec}$$

β) Ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς ράβδου εὐρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἢ τῆς σχέσεως (4). Οὕτω, δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς ν τῆς σχέσεως (3), ἔχομεν :

$$\nu = \frac{v_1}{2 l_1} \quad (6)$$

καὶ θέτοντες : $\nu_1 = 340 \text{ m/sec}$ καὶ $l_1 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$, εὐρίσκομεν :

$$\nu = 1700 \text{ Hz}$$

2231. Ἀμαξοστοιχία πλησιάζει ἀκίνητον παρατηρητὴν ὑπὸ ταχύτητα **15 m/sec**. Πόσον εἶναι τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἤχου διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι **340 m/sec** καὶ ἐκ τῆς ἀμαξοστοιχίας ἐκπέμπεται ἤχος συχνότητος **870 Hz**.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν V τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν μεταδίδεται ὁ ἤχος, v τὴν ταχύτητα τῆς ἀμαξοστοιχίας καὶ ν τὴν συχνότητα τοῦ ἐκπεμπομένου ἤχου, τότε ἡ φαινόμενη συχνότης ν' τοῦ ἤχου, διὰ τὸν ἀκίνητον παρατηρητὴν, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V}{V - v}$$

Συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκῆσεως : $\nu = 870 \text{ Hz}$, $V = 340 \text{ m/sec}$, $v = 15 \text{ m/sec}$, εὐρίσκομεν :

$$\nu' = 910 \text{ Hz}$$

2232. Ἀεροπλάνον κινεῖται παράγον ἤχον ὑπὸ τῶν κινήσεων τοῦ συχνό-
τητος $\nu = 800 \text{ sec}^{-1}$. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v = 332 \text{ m/sec}$. Ζητεῖται πό-
αν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἀεροπλάνον, ἵνα μὴ γίνεται ἀκουστὸς ὁ ἤχος,
δεδομένου ὅτι ἡ μεγίστη ἀκουστὴ συχνότης διὰ τὸν εἰς τὸν στόχον εὐρισκό-
μενον παρατηρητὴν εἶναι $\nu' = 30\,000 \text{ sec}^{-1}$. (Σχολή Ἰκάρων, 1958).

Λύσις. Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῶν Doppler - Fizeau, ἡ φαινόμενη συχνότης τῆς κινουμένης πρὸς τὸν παρατηρητὴν ἡχογόνου πηγῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v}{v - v_{\pi}} \quad (1)$$

δπου v' ή φαινομενική συχνότητα, v ή πραγματική, v ή ταχύτης του ήχου και v_{π} ή συχνότητα του ήχο-γόνου σώματος (του αεροπλάνου).

Εάν v_1 είναι ή μεγίστη άκουστή συχνότητα από τον παρατηρητήν, τότε, διά να μη είναι άκουστός ο ήχος, θα πρέπει :

$$v' > v_1 \quad (2)$$

Διά συνδυασμού των (1) και (2) προκύπτει :

$$v \cdot \frac{v}{v - v_{\pi}} > v_1 \quad (3) \quad \text{ή} : \quad v_{\pi} > \frac{(v_1 - v) \cdot v}{v_1} \quad (4)$$

Δι' αντικατάστασέως διά των δεδομένων τιμών λαμβάνομεν :

$$v_{\pi} > 323,15 \text{ m/sec}$$

2233. Τò μήκος κύματος, τò έκπεμπόμενον υπό διαπασών, συχνότητος 512 παλμών/sec εις τόν άέρα υπό θερμοκρασίαν 17°C , είναι 66,5 cm. Εάν ή πυκνότης του άέρος υπό κανονικάς συνθήκας είναι 1,293 gr/l, να υπολογισθῇ ο λόγος των δύο ειδικών θερμοτήτων του άέρος. Δίδεται ή πυκνότης του ύδραργύρου ίση πρὸς 13,6 gr/cm³.

Λύσις. Ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων αέριου τινὸς $\gamma = c_p / c_v$ συνδέεται μετὰ τῆς πυκνότητος ρ καὶ τῆς πίεσεως αὐτοῦ ὡς καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ήχου v ἐν αὐτῷ διά τοῦ τύπου :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} \quad \text{ή} : \quad \gamma = \frac{v^2 \cdot \rho}{p} \quad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2) \quad \text{καί} : \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0} \quad (3)$$

ὅπου ρ_0 ή πυκνότης εις 0°C , m ή μάζα καὶ V , V_0 ἀντιστοίχως οἱ ὅγκοι εις θερμοκρασίας $\theta^{\circ}\text{C}$ καὶ 0°C .

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι ή εξίσωσις των τελείων αέριων είναι :

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad (4)$$

Διά συνδυασμοῦ των εξισώσεων (2), (3) καὶ (4) προκύπτει :

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0 \cdot T_0}{T \cdot p_0} \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εις τὴν (1) τὴν τιμὴν τοῦ πηλίκου ρ/p ἐκ τῆς (5), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{v^2 \cdot \rho_0 \cdot T_0}{T \cdot p_0} \quad \text{ή} : \quad \gamma = \frac{v^2 \cdot \lambda^2 \cdot \rho_0 \cdot T_0}{T \cdot p_0} \quad (6)$$

διότι $v = \lambda \cdot v$, ὅπου λ τὸ μήκος κύματος καὶ v ή συχνότης.

Ἀντικαθιστῶμεν διά των δεδομένων : $v = 512 \text{ Hz}$, $\lambda = 66,5 \text{ cm}$, $\rho_0 = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$, $T_0 = 273^{\circ}\text{K}$, $T = 273 + 17 = 290^{\circ}\text{K}$, $p = 76 \cdot 13,6 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\gamma = 1,39$$

2234. Ποῖον τὸ μέτρον ἐλαστικότητος καὶ ποία ή τιμή τῆς συμπιεστότητος τοῦ ὕδατος, ὅταν ή ταχύτης τοῦ ήχου εις τὸ ὕδωρ είναι 1407 m/sec εις 0°C . Τί σημαίνουν αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί. ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

Λύσις. α) Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος E συνδέεται πρὸς τὴν πυκνότητα ρ καὶ τὴν ταχύτητα v τοῦ ήχου ἐντὸς ὕλικου μέσου διά τοῦ τύπου :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{ή} : \quad E = v^2 \cdot \rho \quad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν δεδομένων : $v = 1407 \text{ m/sec} = 140,7 \cdot 10^3 \text{ cm/sec}$, $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$E = 19\,800 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2, \text{ περίπου}$$

ἢ, ἐφ' ὅσον $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$, προκύπτει :

$$E = 19\,800 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2, \text{ περίπου} \quad \eta : \quad E = 19\,800 \text{ at, περίπου}$$

β) Ἡ συμπίεστότης τοῦ ὄγκου x ἀποτελεῖ τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος E , ἥτοι :

$$x = \frac{1}{E}$$

$$\eta : \quad x = 50,5 \cdot 10^{-6} \text{ at}$$

Δηλαδή, ὅταν αὐξήσωμεν τὴν ἀσκουμένην πίεσιν ἐπὶ ποσότητος ὕδατος κατὰ 1 at, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 50,5 ἑκατομμυριοστὰ στήλης ὑδραργύρου.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

2235. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἀπομακρύνεται ἄνθρωπος ἀπὸ ἡχοῦν σώμα, ἐὰν τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἡχου ταπεινοῦται κατὰ 10%. (Ταχύτης ἡχου 335,5 m/sec). (Ἀπ. 33,55 m/sec.)

2236. Ἀνοικτὸς ἡχητικὸς σωλὴν δίδει ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἡχον ὠρισμένης συχνότητος, ἐντὸς δὲ ἀτμοσφαίρας φωταερίου τὸ ὕψος τοῦ ἡχου αὐξάνεται κατὰ μίαν πέμπτην. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου εἰς τὸ φωταέριον. (Ταχύτης τοῦ ἡχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec). (Ἀπ. Περίπου 500 m/sec.)

2237. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἐνὸς κλειστοῦ καὶ ἐνὸς ἀνοικτοῦ ἡχητικοῦ σωλήνος ἁρμονίου, οἱ ὅποιοι δίδουν τὸν αὐτὸν θεμελιώδη ἡχον συχνότητος 32 Hz. ($v = 340 \text{ m/sec}$). (Ἀπ. 2,65 m, 5,30 m.)

2238. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος τοῦ βαθυτέρου καὶ τοῦ ὑψηλοτέρου τόνου φωνῆς ὑψιφώνου, ἡ ὁποία κυμαίνεται μεταξύ 200 Hz ἕως 1100 Hz. (Ἀπ. 1,7 m καὶ 0,31 m.)

2239. Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ βάθους φρέατος ἀφίεται ἀπὸ τοῦ χείλους λίθος, ὅστις πίπτει ἐλευθέρως ἐντὸς αὐτοῦ. Ὁ ἡχος τῆς κρούσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα ἀκούεται μετὰ πάροδον χρόνου 15 sec ἀπὸ τῆς ἀφέσεως. (Ταχύτης ἡχου εἰς θερμὴν ἀέρα 340 m/sec, $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Ἀπ. $s = 800 \text{ m}$.)

2240. Κατὰ τίνα καταιγίδα ἐξακριβοῦται ὅτι μεταξύ κερανοῦ καὶ βροντῆς παρέρχονται 6 sec. Ποία ἡ μικροτέρα δυνατὴ ἀπόστασις μεταξύ παρατηρητοῦ καὶ νέφους. (Ταχ. τοῦ ἡχου 340 m/sec). (Ἀπ. 2040 m.)

2241. Ἐκ πλοίου ἐκπέμπεται ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἡχητικὸν σῆμα βραχείας διαρκείας. Τὸ σῆμα ἀνακλῶμενον ἐπὶ τοῦ βυθοῦ ἐπιστρέφει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μετὰ 1,6 sec. Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης εἰς τὸ σημεῖον τῆς μετρήσεως, ὅταν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἡχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 1440 m/sec. (Ἀπ. $h = v \cdot t/2 = 1152 \text{ m}$.)

2242. Χορδὴ μήκους 33 cm δίδει ὡς τρίτον ἑρμονικὸν τὸ μi συχνότητος 1320 Hz. Ποία ἡ ταχύτης τῶν ἐγκαρσίων κυμάτων ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς. (Ἀπ. 290,4 m/sec.)

2243. Χορδή μήκους 200 cm και βάρους 0,5 gr* εκτελεί 120 ταλαντώσεις ανά sec. Ποία τάσις πρέπει να άσκηθῇ ἐπ' αὐτῆς, ἵνα ταλαντοῦται εἰς τέσσερα τμήματα. (Απ. 367 gr*.)

2244. Σύρμα ὑποκείμενον εἰς τάσιν ταλαντοῦται μὲ θεμελιώδη συχνότητα 256 sec⁻¹. Ποία θά εἶναι ἡ θεμελιώδης συχνότης, ἐὰν τὸ σύρμα εἶχε τὸ ἥμισυ μήκος, διπλάσιον πάχος καὶ ὑπέκειτο εἰς τὸ ἐν τέταρτον τῆς τάσεως ἀπ' ὅ,τι προηγουμένως. (Απ. 128 sec⁻¹.)

2245. Χορδή μήκους 73 cm καὶ διαπασῶν δίδουν ἦχον τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἐὰν τὸ μήκος τῆς χορδῆς ἐλαττωθῇ κατὰ 0,5 cm, παρατηρεῖται ὅτι οἱ δύο ἦχοι δίδουν 3 διακροτήματα ἀνά sec. Ποία ἡ συχνότης τοῦ διαπασῶν. (Απ. 435 Hz.)

2246. Ἀμαξοστοιχία ἀπομακρύνεται ἀκινήτου παρατηρητοῦ ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec καὶ ἐκπέμπει ἦχον συχνότητος 870 Hz. Ποῖον εἶναι τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἤχου τούτου ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ. (Ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec). (Απ. 833 Hz.)

2247. Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμήν ἀκούεται ὁ ἦχος κρούσεως λίθου, πίπτοντος ἐλευθέρως ἐντὸς φρέατος βάθους 400 m. (Ταχύτης ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 15 °C, 340 m/sec καὶ $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). (Απ. $t_1 = 8,9 \text{ sec}$, $t_2 = 1,2 \text{ sec}$, $t = 10,1 \text{ sec}$.)

2248. Μουσικὸν ὄργανον σχήματος σωλῆνος ἔχει ἐναρμονισθῇ εἰς συχνότητα 320 παλῶν ἀνά sec ἐντὸς αἰθούσης συναυλιῶν ὑπὸ 12 °C. Ποία θά εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ἐκπεμπομένου φθόγγου, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ εἰς 25 °C. (Απ. 327 sec⁻¹.)

2249. Μὲ θεμελιώδη τόνον do (528 Hz) κατασκευάζεται μείζων κλίμαξ. Ποῖαι αἱ ὀνομασίαι καὶ αἱ συχνότητες τῶν διαφόρων τόνων αὐτῆς. (Απ. do 528 Hz, re 594 Hz, mi 660 Hz, fa 704 Hz, sol 792 Hz, la 880 Hz, si 990 Hz, do 1056 Hz.)

2250. Ἐκ τίνος θεμελιώδους τόνου ἀνερχόμεθα κατὰ μίαν ὀγδόην καὶ ἀκολουθῶς κατερχόμεθα κατὰ μίαν τρίτην μικράν. Ποῖον διάστημα ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ οὕτω κατασκευασθέντος τόνου καὶ τοῦ ἀρχικοῦ θεμελιώδους. (Απ. Ἐκτὴ μεγάλην.)

2251. Ἐκ τίνος τόνου κατερχόμεθα κατὰ δύο πέμπτας. Ποῖον διάστημα μεσολαβεῖ μεταξὺ τοῦ οὕτω δημιουργηθέντος τόνου καὶ τοῦ κατὰ ὀγδόην χαμηλοτέρου τοῦ ἀρχικοῦ. (Απ. Εἰς μέγας τόνος.)

2252. Αἱ συχνότητες δύο τόνων εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1 : 40. Πόσας ὀγδῶας καὶ πτόων ἐπὶ πλέον διάστημα δυνάμεθα νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν τόνων. (Απ. 5 ὀγδῶας καὶ μίαν τρίτην μεγάλην.)

2253. Πόσαι ὀγδῶαι παρεμβάλλονται μεταξὺ τοῦ τόνου do 66 Hz καὶ τοῦ do 1056 Hz. (Απ. 4 ὀγδῶαι.)

2254. Πόσας ὀγδῶας περιλαμβάνει ἡ ἀκουστικὴ περιοχὴ ἐνὸς ἀνθρώπου, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἦχοι κάτω τῶν 16 Hz καὶ ἄνω τῶν 20 000 Hz δὲν γίνονται ἀκουστοί. Ποία ἡ δεκάτη ὀγδῶή ὡς πρὸς τὸν βαθύτερον ἀκουστὸν τόνον τῶν 16 Hz. (Απ. 10 ὀγδῶαι, 16 384 Hz.)

2255. Σειρὴν φέρει τρεῖς σειρὰς ὁπῶν καὶ παράγει μίαν τριπλὴν μείζονα συγχορδίαν. Ὁ βαθύτερος τόνος παράγεται διὰ τῆς σειρᾶς τῶν 60 ὁπῶν. α) Πόσαι ὁπαὶ πρέπει νὰ ὑπάρχουν ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων σειρῶν. β) Πόσας στροφὰς κατὰ λεπτόν πρέπει νὰ ἐκτελῇ ἡ σειρὴν οὕτως, ὥστε ἡ συχνότης τοῦ βαθυτέρου τόνου νὰ ἀνέρχεται εἰς 500 Hz. γ) Ποῖαι αἱ συχνότητες τῶν ἄλλων τόνων, ὅταν συμβαίῃη τοῦτο. (Απ. α' 75 ὁπάς, 90 ὁπάς. β' 500 στρ/λεπτόν. γ' 625 Hz, 750 Hz.)

2256. Χορδή μήκους 40 cm, παράγουσα τόν τον re 297 Hz, βραχύνεται εις τρόπον ὥστε νά παράγη τόν τόνον sol 396 Hz. Κατά πόσον πρέπει νά βραχυνθῇ ἡ χορδή, τῆς τάσεως παραμενουμένης τῆς ιδίας. (Ἀπ. 10 cm.)

2257. Τό παλλόμενον τμήμα τῆς χορδῆς la ἐνός βιολιού ἔχει μήκος 33 cm καί πάλλεται μέ συχνότητα 440 Hz. Εἰς ποίας ἀποστάσεις πρέπει νά τοποθετηθοῦν οἱ δάκτυλοι διὰ νά παραχθοῦν οἱ τόνοι τῆς μείζονος κλίμακος τοῦ la . (Ἀπ. $3\frac{2}{3}$ cm, $6\frac{3}{5}$ cm, $8\frac{1}{4}$ cm, 11 cm, $13\frac{1}{5}$ cm, $15\frac{2}{5}$ cm.)

2258. Κατά τινα καταιγίδα ἡ βροντῇ διαρκεῖ χωρίς ἀντίλαλον ἐπὶ 4 sec. Ποῖον τὸ ἐλάχιστον δυνατόν μήκος τοῦ κεραυνού. (Ἀπ. 1360 m.)

2259. Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης ἐάν κατά τινα ἡχοβόλησιν ἐμετρήθῃ χρόνος 0,68 sec, ἀπὸ τῆς ἐκπομπῆς τοῦ σήματος μέχρι τῆς ἐπιστροφῆς αὐτοῦ. Μέ ποίαν προσέγγισιν πρέπει νά γίνη ἡ μέτρησις τοῦ χρόνου, ἐάν τὸ βάθος πρέπει νά προσδιορισθῇ μέ ἀκρίβειαν 1 m. (Ταχύτης ἡχου εἰς τὸ θαλάσσιον ὕδωρ 1425 m/sec). (Ἀπ. 1/700 sec.)

2260. Πόσας στροφὰς κατά λεπτόν πρέπει νά ἐκτελῇ σειρὴν, φέρουσα 80 ὀπὰς, διὰ νά παράγῃ τόν τόνον la (440 Hz). (Ἀπ. 330 στροφὰι/λεπτόν.)

2261. Σειρὴν φέρει 80 ὀπὰς καὶ ἐκτελεῖ 11 στροφὰς κατά δευτερόλεπτον. Ποῖος τόνος παράγεται. (Ἀπ. 880 Hz, ἤτοι la κατά μίαν ὀγδόην ὑψηλότερος τοῦ προτύπου τόνου.)

2262. Σειρὴν δι' ὀπῶν φέρει 100 ὀπὰς. α) Πόσας στροφὰς πρέπει νά ἐκτελῇ αὐτὴ κατά λεπτόν, διὰ νά παράγῃ τόν πρότυπον τόνον (la 440 Hz). β) Ποῖος ὁ κατά λεπτόν ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν διὰ νά παράγεται ὁ κατά ὀγδόην ὑψηλότερος τόνος. γ) Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν διὰ νά παράγεται ἡ πέμπτη, ὡς πρὸς τὸν πρότυπον τόνον καὶ πῶς ὀνομάζεται ὁ τόνος οὗτος. (Ἀπ. α' 264 στρ/λεπτόν, β' 528 στρ/λεπτόν, γ' 396 στρ./λεπτόν, μι 660 Hz.)

2263. Τόνος ἔχει συχνότητα 264 Hz. Ποῖαι αἱ συχνότητες τῆς ἐπομένης ὀγδός, τῆς πέμπτης, τῆς τετάρτης, τῆς μεγάλης καὶ τῆς μικρᾶς τρίτης. (Ἀπ. α' 528 Hz, β' 396 Hz, γ' 352 Hz, δ' 330 Hz, ε' 316,8 Hz.)

2264. Μέ ποίαν δύναμιν πρέπει νά τείνεται χαλύβδινον σύρμα, μήκους 350 mm καὶ διαμέτρου 0,5 mm, διὰ νά δίδῃ διὰ τανύσματος τόνον 1000 Hz. (Ἀπ. $F = 75 \text{ kg}^*$.)

2265. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀκτῆς εὐρίσκεται πλοῖον, ἐάν, ἡμεροῦσης τῆς ἀτμοσφαίρας ἡχητικὸν σῆμα ἐκπεμφθὲν ἐκ τοῦ πλοίου ὑποθαλασσίως φθάνῃ εἰς τὴν ἀκτὴν 5 sec ἐνωρίτερον ἀπὸ ἀνάλογον ἡχητικὸν σῆμα ἐκπεμφθὲν διὰ τοῦ ἀέρος. (Ταχύτης ἡχου εἰς τὸν ἀέρα = 340 m/sec, ταχ. ἡχου εἰς τὸ ὕδωρ 1425 m/sec). (Ἀπ. 2233 m.)

2266. Ποῖον τὸ ἀπόλυτον καὶ τὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν σφάλμα κατά τὴν λήψιν ἡχητικοῦ σήματος ὑποθαλασσίως, ἐάν δύνανται νά μετρηθοῦν μόνον ἀκέραια δευτερόλεπτα, ἐνῶ ὁ ἡχος ἔχειράσθῃ εἰς τὴν πραγματικότητα 5,3 sec. (Ταχ. ἡχου εἰς τὸ ὕδωρ 1425 m/sec). (Ἀπ. 427,5 m, 5,7 %.)

2267. Λίθος ἀφίεται ἀπὸ στόμιον φρέατος καὶ ὁ κρότος τῆς κρούσεως ἀκούεται μετὰ $t = 3 \text{ sec}$ ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἀφέσεως. Νά εὐρεθῇ τὸ ὕψος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος τοῦ στομίου τοῦ φρέατος. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 14°C . Ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου εἰς τοὺς 0°C εἶναι $v_0 = 331,57 \text{ m/sec}$. (Ἀπ. 117,8 m.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Φαρμακευτικόν, 1958).

2268. Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ βάθος φρέατος ἀφίνομεν λίθον νὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ καὶ μετροῦμεν τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφήσαμεν τὸν λίθον, μέχρις ὅτου ἠκούσαμεν τὸν κρότον. Ἔστω ὅτι ὁ χρόνος οὗτος εἶναι 4 sec. Ποῖον τὸ ζητούμενον βάθος, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου εἶναι 340 m/sec.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1960).
(Ἀπ. $h = 70,5$ m.)

2269. Ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου ἐντὸς φωταερίου ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C εἶναι 500 m/sec. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου ἐντὸς τοῦ αἵριου αὐτοῦ: α) ὑπὸ 20°C , β) ὑπὸ -10°C .

(Ἀπ. α' 518 m/sec, β' 491 m/sec.)

2270. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου ἐν τῷ ὕδρογόνῳ ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°C ἐκ τῶν κάτωθι δεδομένων: Ταχύτης ἡχου ἐν τῷ αἵρι ὑπὸ $0^\circ\text{C} = 331$ m/sec. Πυκνότης τοῦ αἵρος $= 1,293$ gr/lit. Πυκνότης τοῦ ὕδρογόνου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $= 0,0896$ gr/lit.

(Ἀπ. 1302 m/sec.)

2271. Νὰ δοθοῦν οἱ ἑρμονικοὶ τοῦ ἡχου μὲ συχνότητα 7000 Χέρτς.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν καὶ Μεταλ. Μηχανικῶν, 1960).
(Ἀπ. $v_1 = 14000$ Hz, $v_2 = 21\,000$ Hz, διὰ $n = 2$ καὶ $n = 3$.)

2272. Χορδὴ μήκους 56 cm παράγει τὸν αὐτὸν ἡχον μὲ διαπασῶν. Ἐὰν βραχυνηθῇ κατὰ 4 mm, τότε ὁ ἡχος τῆς μὲ ἐκείνον τοῦ διαπασῶν δίδει 4 ταλαντώσεις κατὰ sec. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ τόνου τοῦ διαπασῶν.

(Ἀπ. $v = 556$ sec⁻¹.)

2273. Χορδὴ μήκους 52 cm δίδει τὸν τόνον συχνότητος 330 Hz. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μεταβληθῇ τὸ μήκος τῆς χορδῆς, διὰ νὰ δίδῃ ὑπὸ τὴν ἰδίαν τάσιν τὸν τόνον συχνότητος 440 Hz.

(Ἀπ. $l' = 39$ cm.)

2274. Κατὰ τὴν ταυτόχρονον διέγερσιν διαπασῶν (440 Hz) καὶ χορδῆς κλειδοκυμβάλου, ἀκούονται 1,4 ταλαντώσεις κατὰ sec. Ποία ἡ συχνότης τῆς ἡχοῦσης χορδῆς.

(Ἀπ. $440 \pm 1,4$ sec⁻¹.)

2275. Δύο ὅμοιοι χορδαὶ 86 cm μήκους συντονίζονται εἰς τὸν θεμελιῶδη ἡχον 256 Hz. Ποία ἡ προκύπτουσα ταλάντωσις, ὅταν βραχυνηθῇ ἡ μία χορδὴ κατὰ 4 mm καὶ διεγερθοῦν ἀκολουθῶς καὶ αἱ δύο.

(Ἀπ. $v = 1,2$ sec⁻¹.)

2276. Δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους εὐρίσκονται ἐν συντονισμῷ. Ἡ πρώτη τείνεται μὲ δύναμιν τριπλασίαν τῆς δευτέρας, ὁ δὲ λόγος τῶν πυκνοτήτων τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν εἶναι 1,2. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν διαμέτρων αὐτῶν.

(Σχολὴ Εὐελπίδων, 1956). (Ἀπ. $r_2/r_1 = 0,63$.)

2277. Χορδὴ μήκους 60 cm ἔχει μᾶζαν 0,125 gr. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τάσις τῆς χορδῆς, ὥστε ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους νὰ εἶναι 250 ταλαντώσεις ἀνὰ sec. Ποῖον τὸ μήκος κύματος, εἰς τὸν αἶρα, τοῦ παραγομένου ἡχου.

(Ἀπ. $1,9 \cdot 10^6$ dyn, 130 cm.)

2278. Ἐκ δύο χορδῶν, τοῦ αὐτοῦ ὕλικου καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους, τῶν ὁποίων αἱ τομαὶ ἔχουν λόγον 5 : 8, ἡ λεπτοτέρα παράγει ἡχον διπλασίας συχνότητος τῆς ἄλλης. Ποῖος ὁ λόγος τῶν τεινουσῶν αὐτὰς δυνάμεων.

(Ἀπ. 5 : 2.)

2279. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν πυκνοτήτων δύο χορδῶν, ἵνα ὁ τρίτος ἑρμονικὸς τῆς χαμηλοτέρας εἶναι κατὰ ἓνα τόνον ὑψηλότερος τοῦ δευτέρου ἑρμονικοῦ τῆς ὑψηλοτέρας, ὅταν αἱ χορδαὶ εὐρίσκωνται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας.

(Ἀπ. 9 : 16.)

2280. Χαλυβδίνη χορδὴ διαμέτρου 0,4 mm ἔχει κατὰ μίαν πέμπτην ὑψηλότερον ἀπὸ μίαν ἴσου μήκους χορδὴν ἐξ ἀργιλίου διαμέτρου 0,8 mm. Ποῖος ὁ λόγος τῶν τεινουσῶν τὰς δύο χορδὰς δυνάμεων. (Πυκνότης χάλυβος 7,7 gr/cm³, ἀργιλίου 2,65 gr/cm³).

(Ἀπ. 1,65.)

2281. Έκ δύο διαπασών, τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς παρῆχον συχνότητα 440 Hz, ἐγένετο τὸ ἐν τὸσον παράφωνον, ὥστε ἀμφότερα τὰ διαπασών, ἠχοῦντα ταυτοχρόνως, νὰ παράγουν 30 ταλαντώσεις εἰς 6 sec. Ποῖα ἡ συχνότης τοῦ παραφώνου διαπασών.
(Ἀπ. 445 Hz ἢ 435 Hz.)

2282. Ὑπολογίσατε τὸν ἀριθμὸν ταλαντώσεων τοῦ θεμελιώδους τοῦ ἐκπεμπομένου εἰς 13 °C ὑπὸ κλειστοῦ σωλῆνος μήκους 1 m.
(Ἀπ. 85 sec⁻¹.)

2283. Ὑπολογίσατε τὸ πραγματικὸν μήκος ἀνοικοῦ μουσικοῦ αὐλοῦ, ἐναρμονισμένου εἰς φθόγγον τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης εἶναι 435 sec⁻¹ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 20 °C, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 342,5 m/sec. Ποῖα θὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ἐκπεμπομένου ὑπὸ τοῦ αὐλοῦ φθόγγου, ὅταν ἡ θερμοκρασία κατέλθῃ εἰς 10 °C.
(Ἀπ. 39,4 cm, 428 sec⁻¹.)

2284. Πνευστὸν μουσικὸν ὄργανον ρυθμίζεται εἰς θερμοκρασίαν 5 °C, ὥστε τὸ 1a αὐτοῦ νὰ συμφωνῇ πρὸς τὸν ἦχον διαπασών συχνότητος 440 Hz. Ποῖα ἡ συχνότης τοῦ 1a τοῦ ὄργανου εἰς 20 °C.
(Ἀπ. 452 Hz.)

2285. Κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν δίδει εἰς 20 °C τὸν τόνον συχνότητος 261 Hz. Ποῖον τὸ μήκος τοῦ σωλῆνος. Ποῖα ἡ συχνότης τοῦ ὑπὸ τοῦ σωλῆνος διδομένου τόνου εἰς 0 °C. (Ταχύτης ἤχου εἰς 0 °C = 331 m/sec, εἰς 20 °C = 343 m/sec).
(Ἀπ. 1,315 m, 252 sec⁻¹.)

2286. Διὰ διαπασών, δίδοντος τόνον 512 Hz, διεγείρεται ἡ ἀερία στήλη ὑαλίνου σωλῆνος. Τὸ μήκος τῆς ἀερίας στήλης δύναται νὰ μεταβάλλεται δι' ὑψώσεως ἢ βυθίσεως τοῦ σωλῆνος ἐντὸς ὕδατος. Ὄταν ὁ σωλὴν ἐξέχῃ τοῦ ὕδατος κατὰ 160 mm ἢ 485 mm, συμβαίνει συνήχησις. Ποῖα ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.
(Ἀπ. 329 m/sec.)

2287. Διαπασών, δίδον τόνον 261 Hz, κρατεῖται ὑπεράνω καθέτως κειμένου ἀνοικοῦ ὑαλίνου σωλῆνος, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸ κατώτατον ἄκρον του βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐξέχῃ ὁ σωλὴν τοῦ ὕδατος, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν συνήχησιν. (Ἀπ. 326 mm, 978 mm, 1630 mm κλπ., δηλαδὴ ὅταν $l = (2k + 1) \cdot \lambda/4$.)

2288. Ὑπεράνω τοῦ ἀνοίγματος ὑαλίνου σωλῆνος, κλειστοῦ κατὰ τὸ ἄλλον ἄκρον καὶ διαμέτρου ὀλίγων ἑκατοστομέτρων, κρατεῖται διαπασών, τὸ ὁποῖον δίδει τόνον συχνότητος 850 Hz. Ἀκολουθῶς πληροῦται ὁ σωλὴν ὕδατος μέχρις ὠρισμένου ὕψους, ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται συνήχησις. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν αἱ στήλαι ἀέρος ἔχουν ὕψος $h_1 = 10$ cm καὶ $h_2 = 30$ cm. Ποῖα ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.
(Ἀπ. 340 m/sec.)

2289. Ἀνοικτὸς ἠχητικὸς σωλὴν δίδει δι' ἐμφυσήσεως ρεύματος ἀέρος τόνον 264 Hz. Ποῖον τόνον θὰ ἔδιδεν ὁ αὐτὸς σωλὴν, ἐὰν διηγείρετο ὑπὸ ρεύματος διοξειδίου τοῦ ἀνθράκος.
(Ἀπ. $v = 209,3$ sec⁻¹.)

2290. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάθους θαλάσσης δι' ἠχοβολήσεων τοποθετεῖται, ἀμέσως ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, κατάλληλος σταθερὰ πηγὴ παραγωγῆς ἠχητικῶν κυμάνσεων, παράγουσα κύματα συχνότητος 600 Hz. Μετὰ πάροδον χρόνου 6 sec συλλαμβάνεται τὸ εἰς τὸν βυθὸν ἀνακλῶμενον κύμα, ὑπὸ καταλλήλου δέκτου εὐρίσκομένου εἰς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς πηγῆς σημεῖον. α) Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης, εὐρίσκομένου εἰς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς πηγῆς σημεῖον. β) Ποῖον τὸ μήκος κύματος τῶν χρησιμοποιουμένων κυμάτων εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς τὸ ὕδωρ. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν 10 °C ἴση πρὸς 338 m/sec).
(Ἀπ. α' 4350 m. β' $\lambda_1 = 2,417$ m, $\lambda_2 = 0,563$ m.)

2291. Εἰς σωλῆνα Kundt τὰ σημεῖα στηρίξεως τῆς χρησιμοποιουμένης χαλυβδίνης ράβδου ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ 80 cm, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σωρῶν ρινισμάτου εἶναι 5,33 cm εἰς 20 °C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.
(Ἀπ. 5150 m/sec.)

2292. Εἰς τὸν σωλῆνα τοῦ Kundt ἡ ταλαντουμένη ράβδος, μήκους 120 cm, παράγει 6 δεσμούς εἰς αἰρίαν στήλην μήκους 55,5 cm. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 344 m/sec, πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὴν ράβδον.
(Ἀπ. 5220 m/sec.)

2293. Μὲ ποῖαν ταχύτητα πρέπει παρατηρητής: α) νὰ πλησιάσῃ ἀκίνητον ἡχητικὴν πηγὴν, β) νὰ ἀπομακρύνεται ἀκίνητου ἡχητικῆς πηγῆς, διὰ νὰ ἀκούῃ τὸν τόνον διαφέροντα κατὰ μίαν ὁγδόην ἀπὸ ἐκεῖνον τῆς ἐκπεμπομένης συχνότητος. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς θερμοκρασίαν 15 °C ἴση πρὸς 340 m/sec).
(Ἀπ. α' 340 m/sec, β' 170 m/sec.)

2294. Κατὰ ποῖον διάστημα μεταβάλλεται τὸ ὕψος τοῦ ἤχου κώδωνος ποδηλάτου δι' ἀκίνητον παρατηρητήν, ὅταν ὁ ποδηλάτης διέρχεται πρὸ αὐτοῦ ἀπομακρυνόμενος μὲ ταχύτητα 6 m/sec. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec).
(Ἀπ. 1 : 0,965.)

2295. Μὲ ποῖαν ταχύτητα πρέπει νὰ διέρχεται πρὸ ἀκινήτου παρατηρητοῦ ἡχητικὴ πηγὴ, διὰ νὰ κατέλθῃ κατὰ μίαν πέμπτην τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου τόνου, κατὰ τὸν χρόνον τῆς διελεύσεως. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec, διάστημα πέμπτης 3 : 2).
(Ἀπ. 68 m/sec.)

2296. Μὲ ποῖαν ταχύτητα πρέπει νὰ προσπερνᾷ παρατηρητής ἀκίνητον ἡχητικὴν πηγὴν, διὰ νὰ κατέλθῃ τὸ ὕψος τοῦ τόνου κατὰ μίαν τετάρτην, τὴν στιγμὴν τῆς διελεύσεως. (Διάστημα τετάρτης 4 : 3. Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec).
(Ἀπ. 48,6 m/sec, περίπου.)

2297. Ποῖον τόνον ἀκούει πεζός, ὅταν διέρχεται πρὸ αὐτοῦ συρίζουσα ἀτμομηχανὴ (2000 Hz) μὲ ταχύτητα 96 km/h.
(Ἀπ. 2170 Hz ἢ 1860 Hz.)

2298. Ποία ἡ συχνότης ταλαντώσεως, τὴν ὁποῖαν ἀκούομεν, ὅταν διαπασῶν συχνότητος 1700 Hz ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν παρατηρητήν, κινούμενον πρὸς τοῖχον, μὲ ταχύτητα 2 m/sec.
(Ἀπ. 20 Hz.)

2299. Παρατηρητής καὶ ἡχητικὴ πηγὴ κινοῦνται, σχετικῶς πρὸς τὸν ἀέρα, μὲ ταχύτητας τοῦ αὐτοῦ μέτρου καὶ ἀντιθέτων διευθύνσεων, ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ πρὸς συνάντησίν των. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης, διὰ νὰ κατέλθῃ τὸ ὕψος τοῦ τόνου κατὰ μίαν ὁγδόην τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec).
(Ἀπ. 58,3 m/sec.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

2300. Πυροβόλον ὅπλον ἀπέχει 1200 m ἀπὸ τὸν στόχον καὶ ρίπτει βλήμα μὲ ταχύτητα $v = 600$ m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ παρατηρητής ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνοούσης τὸ πυροβόλον μὲ τὸν στόχον, ἵνα ἀκούῃ ταυτοχρόνως τὸν ἤχον τὸν παραγόμενον ἐκ τῆς ἐκπυροκροτήσεως τοῦ πυροβόλου καὶ τὸν ἤχον τὸν παραγόμενον ἐκ τοῦ κτύπου τοῦ στόχου ὑπὸ τοῦ βλήματος. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec).
(Ἀπ. 940 m, ἀπὸ πυροβόλου.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Ἱατρικὴ Σχολή, Τμῆμα Ὀδοντιατρικόν, 1957).

2301. Κατὰ τὸν καθορισμὸν τῆς συχνότητος ἑνὸς διαπασῶν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἰσοχρόνως πιπτούσης αἰθαλωμένης ὑάλου, ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῆς ἀρχῆς τῶν ἰχνῶν κυμάτων ἐπὶ τῆς ὑάλου καὶ σημείου τινὸς Α πλῆσιον τοῦ πέρατος τῶν ἰχνῶν ἦτο 22,50 cm. Ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῆς ἀρχῆς τῶν ἰχνῶν καὶ αὐθαίρετως ληφθέντος σημείου Β ἦτο 6,4 cm. Ἐὰν μεταξύ τῶν σημείων Β καὶ Α ὑπάρχουν 35 πλήρη κύματα, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης τοῦ διαπασῶν.
(Ἀπ. 350 Hz/sec.)

2302. Πρὸς μέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐγκαθίστανται δύο παρατηρηταὶ εἰς σημεῖα Α καὶ Β, ἀπέχοντα κατὰ 1,5 km. Ὁ εἰς πυροβολεῖ κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν διὰ τυφεκίου μὲ ἀσφαίρους βολάς, ὁ δὲ ἕτερος μετρεῖ διὰ χρονομέτρου τὸν χρόνον, ὅστις παρήλθε ἀφ' ἧς στιγμῆς ἀντελήφθη τὴν λάμψιν τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως μέχρις ὅτου ἤκουσε τὸν κρότον αὐτῆς, εὐρίσκει δὲ αὐτὸν 4,3 sec. Ἀκολουθῶς οἱ δύο παρατηρηταὶ ἐναλλάσσονται καὶ προβαίνουν εἰς νέαν παρομοίαν μέτρησιν, τὸ ἀποτελεσμα τῆς ὁποίας εἶναι 4,5 sec. α) Ποῖα ταχύτητες προκύπτουν διὰ τὸν ἤχον ἐκ τῶν δύο μετρήσεων. β) Πῶς ἐξηγεῖται ἡ διαφορὰ τῶν δύο μετρήσεων, ἐὰν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑπείσέρχεται μετρικὸν σφάλμα. γ) Τί εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μετρηθέντων χρόνων. δ) Ποία προκύπτει ὡς πραγματικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

(Ἀπ. α' 349 m/sec, 333 m/sec. β' ἕνεκα τῆς ταχύτητος τοῦ ἀνέμου. γ' Ἡ συνιστώσα τῆς ταχύτητος τοῦ ἀνέμου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο παρατηρητῶν ἴση πρὸς 8 m/sec. δ' 341 m/sec.)

2303. Μὲ ποῖαν ταχύτητα πρέπει ἡχητικὴ πηγή: α) νὰ πλησιάζῃ ἀκίνητον παρατηρητὴν, β) νὰ ἀπομακρύνεται ἀκινήτου παρατηρητοῦ, διὰ νὰ ἀκούῃ αὐτὸς τὸν ἐκπεμπόμενον τόνον διαφέροντα κατὰ μίαν ὁγδόην. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς θερμοκρασίαν 15 °C ἴση πρὸς 340 m/sec.)

(Ἀπ. α' 170 m/sec. β' 340 m/sec.)

2304. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς ἀερίου δίδεται διὰ τοῦ τύπου: $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$,

ὅπου $\gamma = 1,4$. Ποῖα εἶναι ἡ σύνθεσις μίγματος διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος καὶ ἀέρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὁ ἤχος μεταδίδεται μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν μεταδίδεται καὶ εἰς τὸ ὁξυγόγον. Ποῖα εἶναι ἡ ταχύτης αὐτὴ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 10 °C. (Ἀπ. 38 %. 321 m/sec.)

2305. Διαπασῶν, συχνότητος 256 παλμῶν ἀνὰ δευτερόλεπτον, τοιποθετεῖται ἄνωθεν τοῦ στομίου σωλήνος μήκους 200 cm καὶ διαμέτρου 4 cm, πλήρους ὕδατος. Ἐὰν τὸ ὕδωρ ἐκφεύγῃ ἡρέμα καὶ τὸ διαπασῶν ἡχῇ συνεχῶς, εἰς ποίας θέσεις τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος θὰ παρατηρῇται συνήχησις. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec.) (Ἀπ. 32 cm, 98,4 cm καὶ 164,8 cm, ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος.)

2306. Αἱ χορδαὶ 1a δύο ἄρπῶν δίδουν τὸν ἤχον 440 Hz. Εἰς τὴν μίαν ἄρπαν ὁ λόγος τοῦ διαστήματος 1a - sol εἶναι 10 : 9, ἡ ἄλλη δὲ εἶναι χορδισμένη κατὰ τὴν συγκεκραμένην κλίμακα. Ποῖα ἡ ὁκτουμένη συχνότης κατὰ τὴν ταυτοχρόνον ἡχησιν ἀμφοτέρων τῶν χορδῶν sol τῶν δύο ἄρπῶν. (Ἀπ. 14,2 Hz.)

2307. Σιδηρὰ ράβδος μήκους 1 m, στερεωμένη ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς ἀκλονήτως, παράγει ἤχους διὰ τριβῆς καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς. Τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου ἤχου συμπίπτει μὲ τὸν πρῶτον ἀνώτερον τόνον ἐνὸς ἰσχυρῶς διεγερμένου δι' ἐμφυσήσεως ὑαλίνου σωλήνος ἀντιδραστηρίου μήκους 10,5 cm. Ποῖα ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου εἰς τὸν χάλυβα. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα = 340 m/sec, ὑπὸ θερμοκρασίαν 15 °C.) (Ἀπ. 4857 m/sec.)

2308. Δύο ἀνοικτοὶ ἡχητικοὶ σωλήνες ἐκκλησιαστικοῦ ὀργάνου, 160 cm καὶ 162 cm μήκους, παράγουν δι' ἐμφυσήσεως ρεύματος ἀέρος ταυτοχρόνως τὸν θεμελιώδη τῶν ἤχων. Ποῖα ἡ προκύπτουσα ταλάντωσις. (Ἀπ. $v = 1,2 \text{ sec}^{-1}$.)

2309. Ἐλαστικὸν σχοινίον, πακτωμένον κατὰ τὸ ἐν ἄκρον καὶ ὀριζοντίως τεταμένον, ὑποβάλλεται διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου του εἰς ταλάντωσιν πλάτους 10 cm καὶ συχνότητος 4 sec^{-1} , ὅποτε σχηματίζονται στάσιμα κύματα, τῶν ὁποίων οἱ δεσμοὶ ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ 1,3 m. Μὲ ποῖαν ταχύτητα διαδίδεται ἡ ἐγκαρσία ταλάντωσις ἐντὸς τοῦ σχοινίου. (Ἀπ. 10,4 m/sec.)

2310. Σωλήν κλείεται κατά τὸ ἐν ἄκρον αὐτοῦ διὰ στερεοῦ τοιχώματος, ἐνῶς κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον δι' ἐλαστικῆς μεμβράνης, καὶ πληροῦται διὰ φωταερίου θερμοκρασίας 18°C. Δι' ἐνὸς διαπασῶν συχνότητος 440 Hz, εὐρισκομένου ἔμπροσθεν τῆς μεμβράνης, παράγωμεν ἐντὸς τοῦ σωλήνος στάσιμον κύμα, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὸ μέρος τῆς μεμβράνης μίαν κοιλίαν καὶ μίαν εἰσέτι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλήνος. Ζητεῖται : α) Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξύ μήκους κύματος καὶ τοῦ μήκους τοῦ σωλήνος. β) Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μήκος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ φωταερίον εἰς 0°C εἶναι 442,1 m/sec.

$$\left(\text{Απ. } \alpha' L = \frac{3}{4} \lambda. \quad \beta' l = \frac{3v_0}{4\nu} \sqrt{\frac{T}{273}}, 77,8 \text{ cm.} \right)$$

2311. Διαπασῶν συχνότητος 440 Hz ἡχεῖ ὑπεράνω ἀνοικτοῦ κατὰ τὰ δύο ἄκρα ὑαλίνου σωλήνος, βυθιζομένου ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Εἰς ποίαν θέσιν τοῦ κυλίνδρου παρατηρεῖται συνήχησις. (Απ. Ὅταν ἡ ἀερία στήλη ἔχη ὕψος 19,3 cm.)

2312. Ἀνοικτὸς ἡχητικὸς σωλήν πλήρης ἀέρος, μήκους 120 cm, παράγει τὸν 5ον ἑρμονικὸν τῶν θεμελιώδους ἤχου του. Ἄν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 m/sec, νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου ἤχου καὶ τὸ μήκος κλειστοῦ σωλήνος ἔχοντος ὡς πρῶτον ἑρμονικὸν τὸν προηγούμενον. (Απ. 708,3 sec⁻¹, 12 cm.) (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμήμα Χημικόν, 1950).

2313. Δίσκος σειρήνος φέρων 25 ὁπὰς περιστρέφεται μὲ ταχύτητα n στρ/min, ὃ δὲ ἤχος τῆς σειρήνος προστίπτεται καθέτως καὶ ἀνακλᾶται ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου τοίχου σχηματίζων στάσιμα κύματα ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Δίδεται ἡ ταχύτης ἤχου 340 m/sec. Ζητεῖται ποία ἡ ταχύτης περιστροφῆς n τοῦ δίσκου τῆς σειρήνος, ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῆς πρώτης κοιλίας K_1 καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ D_5 ἐμετρήθῃ εἰς 200 cm. (E. M. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολή Ἀρχιτεκτόνων, 1953). (Απ. 11,9 στρ/sec.)

2314. Ἡ ἀληθὴς συχνότης σειρήνος πλοίου εἶναι 250 sec⁻¹, τὸ δὲ πλοῖον κινεῖται πλοισιάζον πρὸς ἀκίνητον παρατηρητὴν, μὲ ταχύτητα 10 κόμβοι. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης τοῦ ἤχου, τὴν ὁποίαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής. (1 κόμβος = 1 ναυτικὸν μίλιον καθ' ὥραν καὶ 1 ναυτικὸν μίλιον = 1852 m). (Απ. 253,7 sec⁻¹.) (E.M. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτη Σχολή Ἀρχιτεκτόνων, 1962).

2315. Χαλυβδίνη ράβδος, ἡ ὁποία στερεοῦται διὰ συσφίξεως ἐν δύο σημεῖα ἀπέχοντα ἀπ' ἐλλήλων 60 cm, τρίβεται καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μήκος, εἰς τρόπον ὥστε νὰ παράγῃ ἐντὸς σωλήνος Kundt στάσιμα ἡχητικά κύματα. Οἱ δεσμοὶ τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῆς κόνεως σχεδίων ἔχουν ἀπόστασιν 4 cm κατὰ τὰ μέσα αὐτῶν. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν χάλυβα. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς θερμοκρασίαν 15°C ἴση πρὸς 340 m/sec.) (Απ. 5100 m/sec.)

2316. Ἡ τάσις σύρματος 100 cm εἶναι 6,4 kgf*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη διαφορὰ τάσεως πρὸς αὐξήσιν τοῦ ὕψους κατὰ μίαν ὀγδόην (δηλαδὴ νὰ διπλασιασθῇ), ἐὰν τὸ μήκος μειωθῇ εἰς 80 cm. (Απ. 10 kgf*.)

2317. Πλοῖον ἐφωδιασμένον διὰ καταλλήλου συσκευῆς προκαλεῖ ἐκρηξιν ἀκρίβως κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὰ δὲ εὐρισκόμενα εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ὑδρόφωνα συλλαμβάνουν τὴν ἤχῳ μετὰ πάροδον 4,6 sec. Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης. Ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος 1450 m/sec. (Απ. 3335 m.)

2318. Ἀἷρ ἐντὸς σωλήνος, κλειστοῦ κατὰ τὸ ἐν πέρας, δονεῖται ἐκ συνήχησεως μὲ δύο διαπασῶν, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι 210 sec⁻¹ καὶ 350 sec⁻¹, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 20°C. Νὰ ἐξηγηθῇ πῶς δύναται τοῦτο νὰ συμβῇ καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ πραγματικὸν μήκος τοῦ σωλήνος. Νὰ ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ 0°C ὡς ἴση πρὸς 331,5 m/sec. (Απ. 122,6 cm.)

2319. Διαπασών εκπέμπει ήχον συχνότητας $\nu = 435 \text{ Hz}$. Τοῦτο ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως ἀπὸ σημεῖον Α, εὐρισκόμενον εἰς ὕψος 80 m ὑπεράνω ἀκινήτου παρατηρητοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου. Νὰ εὐρεθῇ ἡ συχνότης τὴν ὁποίαν ἀκούει ὁ παρατηρητής: α) 2 sec πρὶν τὸ διαπασών φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν τοῦ παρατηρητοῦ, καὶ β) 2 sec μετὰ τὴν διέλευσιν αὐτοῦ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ παρατηρητοῦ. Ταχύτης ἤχου $u = 340 \text{ m/sec}$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$. (Ἀπ. α' 459,4 Hz, β' 372 Hz.)

(Σχολῇ Μηχανικῶν Ἀεροπορίας (Σ.Μ.Α.), 1961).

2320. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ πλησιάσῃ πρὸς ἀκίνητον παρατηρητὴν ἡχητικὴ πηγὴ, εκπέμπουσα ἤχον συχνότητος 300 c/sec, ἵνα οὗτος ἀντιλαμβάνεται ἤχον διπλασίας συχνότητος. (Ἀπ. 170 m/sec.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτῃ Σχολῇ Ἀρχιτεκτόνων, 1961).

2321. Θεωρήσωμεν τὰ μόρια 1, 2, 3, ... ἐλαστικῆς χορδῆς παλλομένης συνεχῶς ἐγκαρσίως. α) Νὰ σχεδιασθῇ ἡ θέσις τῶν μορίων 1, 2, 3, ... εἰς δύο διαφορετικὰς χρονικὰς στιγμὰς διαφερούσας κατὰ $T/4$. β) Ποία μόρια ἔχουν τὴν μεγίστην ταχύτητα. γ) Ἐὰν ἡ συχνότης παραμένῃ ἡ αὐτὴ καὶ μεταβάλλεται τὸ πλάτος, πῶς μεταβάλλεται ἡ ταχύτης. (Ἀπ. β' Τὰ κατέχοντα τὰς θέσεις τῶν κοιλιῶν τοῦ στασίμου κύματος. γ' Αὐξάνεται ἀναλόγως μετὰ τοῦ πλάτους.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Φυσικομαθηματικὴ Σχολή, Τμῆμα Μαθηματικόν, 1962).

2322. Στενὸς ἡχητικὸς σωλὴν, μήκους 15 cm, εκπέμπει μουσικὸν φθόγγον συχνότητος 563 sec^{-1} , ὅταν ρεῖμα ἀέρος φυσᾷ διὰ στομίου του, τῆς θερμοκρασίας οὔσης 10°C . Νὰ καθορισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς 0°C . (Ἀπ. 331,8 m/sec.)

2323. Ὑαλινὴ ράβδος μήκους 1 m καὶ ἐτέρα ὀρειχαλκινὴ μήκους 75 cm στερεοῦνται κατὰ τὸ μέσον αὐτῶν. Διὰ τριβῆς κατὰ μήκος τῶν ράβδων καὶ ἐντὸς σωλῆνος Kundt παράγονται ἡχητικὰ κύματα μήκους 135 mm ὑπὸ τῆς ὑαλίνης καὶ 150 mm ὑπὸ τῆς ὀρειχαλκίνης. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὴν ὑάλον καὶ τὸν ὀρείχαλκον. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα = 340 m/sec.) (Ἀπ. 5040 m/sec καὶ 3405 m/sec.)

2324. Ὅταν συσκευὴ σωλῆνος Kundt πληροῦται ἀέρος, δίδει 16 σωροὺς δεσμῶν κόνεως λυκοποδίου κατὰ τὴν συνήχησιν, τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου οὔσης 72,8 cm. Ὅταν ὁ σωλὴν πληροῦται διὰ φωταερίου, σχηματίζονται κατὰ τὴν συνήχησιν 11 δεσμοὶ συνολικῆς ἀποστάσεως 74,1 cm. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς φωταερίου, δοθέντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 332 m/sec. (Ἀπ. 507 m/sec.)

2325. Εἰς τι πείραμα μὲ σωλὴνα τοῦ Kundt ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν σωριδίων κόνεως ἰσοῦται πρὸς 164 mm, ὅταν ὁ σωλὴν πληροῦται ἀέρος, καὶ πρὸς 130 mm, ὅταν περιέχῃ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα = 340 m/sec.) (Ἀπ. 270 m/sec.)

2326. Αὐτοκίνητον εκπέμπον ἤχον ὑπὸ συχνότητι 450 sec^{-1} διασταυροῦται μετ' ἐτέρου αὐτοκινήτου ἐρχομένου ἀντιθέτως μὲ ταχύτητα 72 km/h. Οἱ ἐπιβάται τοῦ δευτέρου αὐτοκινήτου ἀκούουν ἤχον συχνότητος 500 sec^{-1} . Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου αὐτοκινήτου, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/sec. (Ἀπ. 56 km/h.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Ἀνωτάτῃ Σχολῇ Μηχανολόγων — Ἠλεκτρολόγων, 1947).

2327. Εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τοίχου καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτὸν τοποθετοῦνται δύο μεγάφωνα, ἀπέχοντα 40 cm ἀπ' ἀλλήλων καὶ συνδεδεμένα πρὸς τινὰ πηγὴν ἐναλλασσομένου ρεύματος. Ποίαν συχνότητα πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὥστε δέκτης μετακινούμενος κατὰ μήκος τοῦ τοίχου νὰ δεικνύῃ τὸ κυρίως μέγιστον καὶ τὸ πρῶτον δευτερεῖον μέγιστον, εἰς ἀπόστασιν 40 cm. (Ταχύτης ἤχου = 340 m/sec.)

(Ἀπ. $\nu = 10\,600 \text{ Hz}$.)

2328. Ἀεριοθούμενον ἀεροπλάνον ἵπταται μὲ ταχύτητα 1100 km/h, εἰς ὕψος 600 m, κατευθυνόμενον πρὸς ἀκίνητον παρατηρητήν. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν, ὑπεράνω τοῦ ὀρίζοντος, βλέπει οὗτος τὸ ἀεροπλάνον, καθ' ἣν στιγμὴν ἀκούει κατὰ πρῶτον τὸν θόρυβον τοῦ κινητήρος, καὶ πόσον ἀπέχει τότε ἀπ' αὐτοῦ.
(Ἀπ. $\theta/2 = 48^\circ 2'$, 807 m.)

2329. Εἰς τὸ ἐν ἄκρον ξυλίνης ράβδου μήκους 3 m κρατεῖται ὥρολόγιον χειρὸς, οἱ κτύποι τοῦ ὁποίου ἀκούονται εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον. Πόσον χρόνον χρειάζονται τὰ ἡχητικά κύματα, διὰ νὰ μεταδοθοῦν ἀπὸ τὸ ἐν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ράβδου. (Μέτρον τοῦ Young διὰ τὸ ξύλον τῆς χρησιμοποιουμένης ράβδου $E = 1000 \text{ kgf}^*/\text{mm}^2$, $\rho = 0,5 \text{ gr}/\text{cm}^3$, $g = 10 \text{ m}/\text{sec}^2$).
(Ἀπ. $6,7 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$.)

2330. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς ράβδους ἀπὸ: α) μόνυβδον ($E = 1700 \text{ kgf}^*/\text{mm}^2$, $\rho = 11,3 \text{ gr}/\text{cm}^3$), β) χαλκὸν ($E = 12\,600 \text{ kgf}^*/\text{mm}^2$, $\rho = 8,9 \text{ gr}/\text{cm}^3$), γ' χάλυβα ($E = 21\,000 \text{ kgf}^*/\text{mm}^2$, $\rho = 7,8 \text{ gr}/\text{cm}^3$). ($g = 10 \text{ m}/\text{sec}^2$).
(Ἀπ. α' 1230 m/sec, β' 3760 m/sec, γ' 5190 m/sec.)

2331. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος, ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°C καὶ 760 mm Hg, δοθέντος ὅτι 22,2 λίτρα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ζυγίζουν 44 gr καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰδικῶν θερμότητων τοῦ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος ὑπὸ σταθεράν πίεσιν καὶ σταθερὸν ὄγκον εἶναι 1,26.
(Ἀπ. 263 m/sec.)

2332. Ὁ πέμπτος ἁρμονικὸς ἐνὸς κλειστοῦ ἡχητικοῦ σωλῆνος, μήκους 1 m, συμβάλλων μὲ τὸν τρίτον ἁρμονικὸν χορδῆς, ὀλίγον χαμηλότερον τοῦ προηγουμένου, δίδει 5 διακροτήματα ἀνὰ sec. Ποία ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου τῆς χορδῆς.
($v = 340 \text{ m}/\text{sec}$).
(Ἀπ. 140 sec^{-1} .)

2333. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐξελέγησαν δύο σταθμοὶ ἀπέχοντες 5 km. Εὐρέθη ὅτι τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ ὁποῖον μεσολαβεῖ ἀφ' ὅτου βλέπομεν τὴν ἐκπυρσοκρότησιν πυροβόλου μέχρις ὅτου ἀκούσωμεν ταύτην εἶναι 15,5 sec διὰ τὸν ἕνα σταθμὸν καὶ 14,5 sec διὰ τὸν ἄλλον. Καθορίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, ὡς καὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου.
(Ἀπ. 334 m/sec, 11,1 m/sec.)

2334. Μία κατὰ τὸ μέσον συνεσφιγμένη ὑαλίνη ράβδος μήκους 1 m παράγει εἰς σωλῆνα τοῦ Kundt στάσιμα κύματα. Ὄταν ὁ σωλὴν περιέχῃ ἀέρα, μετροῦμεν ἐπὶ εὐθείας μήκους 24,5 cm 12 δεσμούς, ἐνῶ ὅταν ὁ σωλὴν πληρωθῇ διὰ φωταερίου μετροῦμεν 12 δεσμούς ἐπὶ εὐθείας μήκους 32,6 cm. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ φωταερίου. (Ταχύτης ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς θερμοκρασίαν 15°C ἴση πρὸς 340 m/sec).
(Ἀπ. 452 m/sec.)

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Συνισταμένη δύο δυνάμεων, ενεργουσών επί του αὐτοῦ σημείου ὑπὸ γωνίαν :

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \varphi} \quad \epsilon \varphi \theta = \frac{F_1 \cdot \eta \mu \varphi}{F_2 + F_1 \cdot \sin \varphi}$$

F = συνισταμένη, F_1 = πρώτη συνιστώσα, F_2 = δευτέρα συνιστώσα, φ = γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν F_1 καὶ F_2 , θ = γωνία μεταξύ συνισταμένης καὶ F_2 .

Ροπή δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον ἢ ὡς πρὸς ἄξονα :

$$M = F \cdot \alpha$$

M = ροπή, F = δύναμις, α = ἀπόστασις σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως.

Ροπή ζεύγους :

$$M = F \cdot l$$

F = ἡ μία τῶν ἴσων δυνάμεων, l = ἀπόστασις τῶν δύο δυνάμεων.

Κίνησις εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλή : $s = v \cdot t$

s = διάστημα, v = ταχύτης, t = χρόνος.

Εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις. *Ανεῦ ἀρχικῆς ταχύτητος :

$$v = \gamma \cdot t \quad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad v^2 = 2 \gamma \cdot s \quad v = \sqrt{2 \gamma \cdot s}$$

γ = ἐπιτάχυνσις.

Εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις. Μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad v = v_0 + \gamma \cdot t \quad v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \cdot s \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 \gamma \cdot s}$$

v_0 = ἀρχικὴ ταχύτης, γ = ἐπιτάχυνσις θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ.

Κυκλικὴ ὁμαλὴ κίνησις :

$$v = \frac{l}{T} \quad v = \omega \cdot r \quad \omega = \frac{2 \pi}{T} \quad \omega = 2 \pi \cdot v$$

$$\gamma = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot r = 4 \pi^2 \cdot v^2 \cdot r$$

ω = γωνιακὴ ταχύτης, v = γραμμικὴ ταχύτης, r = ἀκτίς τροχιάς, T = περίοδος, v = συχνότης, γ = κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.

Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς. Δύναμις : $F = m \cdot \gamma$

Κεντρομόλος δύναμις :

$$F_k = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad F_k = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad F_k = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r \quad F_k = m \cdot \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot r$$

F_k = κεντρομόλος δύναμις, m = μάζα σώματος, v = γραμμικὴ ταχύτης, ω = γωνιακὴ ταχύτης, r = ἀκτίς κυκλικῆς τροχιάς (ἢ ἀκτίς καμπυλότητος τροχιάς), T = περίοδος, v = συχνότης.

Τύπος Einstein. Μεταβολὴ τῆς μάζης μετὰ τῆς ταχύτητος :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m = μάζα κινουμένου σώματος, m_0 = μάζα τοῦ σώματος ἐν ἡρεμίᾳ, c = ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec), v = ταχύτης τοῦ σώματος.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Έργον :

$$A = F \cdot s \cdot \sin \varphi$$

διὰ $\varphi = 0$:

$$A = F \cdot s$$

$A =$ έργον, $s =$ μετατόπισις, $\varphi =$ γωνία σχηματιζομένη υπό της δυνάμεως και της τροχιάς.

Ίσχύς :

$$N = \frac{A}{t}$$

Ένέργεια :

$$E_{\text{δυν}} = B \cdot h$$

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = F \cdot s$$

Θεώρημα της κινητικής ενέργειας :

$$A = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

$v_0 =$ αρχική ταχύτης, $v =$ τελική ταχύτης.

Ίσодυναμία μάζης και ενέργειας :

$$E = m \cdot c^2$$

$E =$ ενέργεια αντίστοιχούσα εις μάζαν m , $c =$ ταχύτης διαδόσεως του φωτός.

Συντελεστής αποδόσεως :

$$\eta = \frac{N_{\omega \text{ φελ}}}{N_{\text{διατ}}}$$

Βάρος :

$$B = m \cdot g$$

$B =$ βάρος, $g =$ επιτάχυνσις βαρύτητος.

Κεκλιμένον επίπεδον :

$$F = B \cdot \eta \mu \varphi \quad \gamma = g \cdot \eta \mu \varphi$$

$\varphi =$ γωνία κλίσεως ως πρὸς τὸ ὀριζόντιον επίπεδον.

Μηχανή Atwood :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2M + m}$$

$\gamma =$ επιτάχυνσις, $M =$ μάζα κυλίνδρου, $m =$ πρόσθετος μάζα.

Πυκνότης. Ειδικόν βάρος :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \epsilon = \frac{B}{V} \quad \epsilon = \rho \cdot g$$

$\rho =$ πυκνότης, $V =$ όγκος, $\epsilon =$ ειδικόν βάρος.

Βολαί. α) Κατακόρυφος βολή πρὸς τὰ ἄνω :

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad v = v_0 - g \cdot t \quad t = \frac{v_0}{g} \quad h_{\text{μεγ}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$h_{\text{μεγ}} =$ μέγιστον ύψος.

β) Κατακόρυφος βολή πρὸς τὰ κάτω :

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad v = v_0 + g \cdot t$$

γ) Όριζοντία βολή :

$$s_x = v_0 \cdot t \quad s_y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

δ) Βολή υπό γωνίαν :

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu^2 \alpha}{2g} \quad T = \frac{2 v_0 \cdot \eta \mu \alpha}{g} \quad R = \frac{2 v_0^2 \cdot \eta \mu \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \eta \mu 2 \alpha}{g}$$

$s_x =$ τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὸν ὀριζόντιον άξονα τῶν x , $s_y =$ τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὸν άξονα τῶν y . Εἰς τὴν (δ) τὸ $h =$ μέγιστον ύψος, $T =$ χρόνος ἀνόδου καὶ καθόδου, $R =$ βεληνεκές, $\alpha =$ γωνία βολῆς.

Έκκρεμές. α) Ἀπλοῦν :

$$T = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$T =$ περίοδος, $l =$ μήκος εκκρεμούς, $g =$ επιτάχυνσις βαρύτητος.

β) Σύνθετον :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot \alpha}}$$

Θ = ροπή αδρανείας ως προς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, m = μάζα τοῦ ἐκκρεμοῦς, α = ἀπόστασις κέντρου βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

Παγκόσμιος ἔλξις :

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F = δύναμις ἔλξεως, m_1, m_2 = αἱ μάζαι τῶν ἐλκομένων σωμάτων, r = ἀπόστασις αὐτῶν, k = σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἔλξεως.

Ὁρμή :

$$J = m \cdot v$$

Ὡθησις δυνάμεως :

$$\Omega = F \cdot \Delta t$$

Γενικὴ ἐξίσωσις μεταβολῆς ὁρμῆς — ὠθήσεως :

$$F \cdot t = m \cdot v \quad F = \frac{m \cdot v}{t} \quad F \cdot \Delta t = m \cdot v - m \cdot v_0 \quad F = \frac{m \cdot v - m \cdot v_0}{\Delta t} = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

v_0 = ἀρχικὴ ταχύτης, v = τελικὴ ταχύτης, ΔJ = μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt .

Ροπή αδρανείας ὑλικοῦ σημείου :

$$\Theta = m \cdot r^2$$

Θ = ροπή αδρανείας, m = μάζα ὑλικοῦ σημείου, r = ἀπόστασις ὑλικοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἄξονος.

Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος περιστρεφομένου περὶ σταθερὸν ἄξονα :

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

Θ = ροπή αδρανείας τοῦ σώματος, ὅπου $\Theta = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots$, ω = γωνιακὴ ταχύτης.

Στροφορμή :

$$G = \Theta \cdot \omega$$

Τριβὴ ὀλισθήσεως :

$$T = \eta \cdot F_N$$

η = συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως, F_N = κάθετος δυνάμεις.

Τριβὴ κυλίσεως .

$$F = l \cdot \frac{B}{r \cdot \sin \alpha}$$

B = βάρος σώματος, F = κινητήριος δύναμις, r = ἀκτίς κυλιομένου σώματος, l = συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως (ἐνίοτε $\sin \alpha = 1$).

Συντελεστὴς ἔλξεως :

$$\varphi = \frac{F}{F_{\text{καθ}}}$$

Ἐπιμήκυνσις σύρματος (νόμος τοῦ Hooke) :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l$$

E = μέτρον ἐλαστικότητος (ἢ μέτρον τοῦ Young), F = τείνουσα δύναμις, l = μήκος ἀρχικὸν σύρματος, S = ἐμβαδὸν τομῆς τοῦ σύρματος.

Χρυσοὺς κανὼν τῆς Μηχανικῆς : $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

Κινητὴ τροχαλία (νήματα παράλληλα) :

$$F = \frac{B}{2}$$

F = ἐφαρμοζομένη δύναμις.

Πολύσπαστον :

$$F = \frac{B}{n}$$

n = ἀριθμὸς σχοινίων ἐπὶ τῶν ὁποίων διαμοιράζεται ἡ ἐπενέργεια τοῦ βάρους B .

Διαφορική τροχαλία :

$$F = \frac{R-r}{2R} \cdot B \quad \eta : \quad F = \frac{Z-z}{2Z} \cdot B$$

R = ακτίς μεγάλης άμεταθέτου τροχαλίας, r = ακτίς μικράς, Z = αριθμός οδόντων μεγάλου τροχού,
 z = αριθμός οδόντων μικρού τροχού.

Βαροϋλκον :

$$F = \frac{r}{R} \cdot B$$

r = ακτίς βαρούλκου, R = βραχίων δυνάμεως.

Διπλοῦς σφήν :

$$F = 2 \Delta \cdot \eta \mu \frac{\phi}{2}$$

ϕ = γωνία σφήνός, Δ = πλευρική δύναμις.

Κοχλίας :

$$F = \frac{\beta}{2\pi \cdot l} \cdot B$$

l = βραχίων δυνάμεως, β = βήμα κοχλίου.

Ζυγός. α) Μέθοδος διπλής ζυγίσσεως :

$$B = \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2}$$

B = βάρος του σώματος, β_1 = βάρος σταθμών τιθεμένων επί του δεξιού δίσκου, β_2 = βάρος σταθμών τιθεμένων επί του αριστερού δίσκου κατά την δευτέραν ζύγισιν.

β) Ήξιςωσις ευαίσθησις ζυγοῦ :

$$\epsilon \phi \phi = \frac{F_2 - F_1}{B \cdot s}$$

= μήκος μοχλοβραχιόνων ζυγοῦ, $F_2 - F_1$ = διαφορὰ φορτίων εἰς δίσκους, B = βάρος φάλαγγος ζυγοῦ, s = ἀπόστασις κέντρου βάρους ζυγοῦ ἀπὸ σημείου ἐξαρτήσεως φάλαγγος, ϕ = γωνία ἐκτροπῆς δείκτου ζυγοῦ :

Πίσεις :

$$p = \frac{F}{S}$$

F = δύναμις ἀσκουμένη ἐπὶ ἐπιφανείας S .

Ἐκφρασις πίσεως διὰ τοῦ ὕψους ὑγρᾶς στήλης. Ὑδροστατικὴ πίσεις :

$$p = \epsilon \cdot h \quad p = \rho \cdot g \cdot h$$

h = ὕψος ὑγρᾶς στήλης, ϵ = εἰδικὸν βάρος ὑγροῦ, ρ = πυκνότης ὑγροῦ.

Ἀνωσις :

$$A = \epsilon \cdot V$$

ϵ = εἰδικὸν βάρος ρευστοῦ, V = ὄγκος ἐκτοπιζομένου ρευστοῦ.

Ὑδραυλικὸν πιεστήριον :

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

F_2 = δύναμις ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολῶς, F_1 = δύναμις ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολῶς, S_2 = ἐπιφάνεια μεγάλου ἐμβόλου, S_1 = ἐπιφάνεια μικροῦ ἐμβόλου.

Ἀναγωγή ζυγίσσεως εἰς τὸ κενόν :

$$m = M \left[1 + \alpha \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) \right]$$

$\alpha = 0,013 \text{ gr/cm}^3$ πυκνότης ἀέρος, m = ἀληθὴς μᾶζα σώματος, M = φαινομένη μᾶζα σώματος, ρ = πυκνότης σώματος, ρ' = πυκνότης σταθμῶν.

Νόμος Boyle - Mariotte :

$$p \cdot V = \text{σταθ.} \quad \eta : \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

Νόμος Dalton :

$$P \cdot V = p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 + \dots$$

$V_1, V_2, \dots$ ὄγκοι δοθέντων ἀερίων, $p_1, p_2, \dots$ = πίσεις δοθέντων ἀερίων, V = ὄγκος μίγματος, P = πίσις μίγματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

*Ανυψωτική δύναμις αεροστάτου :

$$F = (\epsilon\lambda\rho - \epsilon\acute{\alpha}\rho\iota\omicron\nu) \cdot V - B_{\text{περιβλ}}$$

F = ανυψωτική δύναμις, $\epsilon\lambda\rho$ = ειδικόν βάρος ατμοσφαιρικού αέρος, $\epsilon\acute{\alpha}\rho\iota\omicron\nu$ = ειδικόν βάρος αερίου, V = όγκος αεροστάτου, $B_{\text{περιβλ}}$ = βάρος περιβλήματος.

Παροχή :

$$\Pi = \frac{V}{t} \quad \Pi = S \cdot v$$

Π = παροχή, V = όγκος ρευστού διερχομένου διά τινος τομής εντός χρόνου t , v = ταχύτης ροής, S = διατομή σωλήνος.

Νόμος συνεχείας :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Νόμος Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + h \cdot \rho \cdot g = \text{σταθ.}$$

p = στατική πίεσις, ρ = πυκνότης ρευστού, v = ταχύτης ρευστού, h = ύψόμετρον, g = επιτάχυνσις βαρύτητος.

Θεώρημα Torricelli :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

v = ταχύτης έκροης, h = απόστασις όπης από τής ελευθέρας επιφανείας του ύγρου.

Δύναμις άσκουμένη υπό ύγρᾶς φλεβός εν κινήσει :

$$F = S \cdot \rho \cdot v^2$$

*Αντίστασις σωμάτων κινουμένων εντός του αέρος :

$$T = C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

T = αντίστασις του αέρος, $C_{\text{αντ}}$ = συντελεστής αντίστασεως, $S_{\text{μετ}}$ = μετωπική επιφάνεια, ρ = πυκνότης του αέρος, v = ταχύτης του σώματος ως προς τον αέρα.

Πτώσις σωμάτων εντός του αέρος :

$$T + A - B = 0, \quad B = C_{\text{αντ}} \cdot S_{\text{μετ}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{\text{ορ}}^2$$

A = άνωσις, B = βάρος του σώματος, $v_{\text{ορ}}$ = όρική ταχύτης.

Συντελεστής επιφανειακής τάσεως :

$$\alpha = \frac{F}{2l} \quad \alpha = \frac{\Delta A}{2\Delta S}$$

F = δύναμις επί τής πλευράς μήκους l , α = συντελεστής επιφανειακής τάσεως, ΔA = δαπανώμενον έργον δι' αύξησιν επιφανείας ύμένος κατά ΔS .

Θ Ε Ρ Μ Ο Τ Η Σ

*Αντιστοιχία ένδειξεων θερμομέτρων :

$$C = \frac{5}{9} (F - 32) \quad F = \frac{9}{5} C + 32$$

C = βαθμοί Κελσίου, F = βαθμοί Fahrenheit.

Θερμική διαστολή. Στερεά :

$$l = l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \quad S = S_0 (1 + 2 \alpha \cdot \Delta\theta) \quad V = V_0 (1 + 3 \alpha \cdot \Delta\theta)$$

l = μήκος, S = επιφάνεια, V = όγκος, α = συντελεστής γραμμικής διαστολής, $\Delta\theta$ = μεταβολή θερμοκρασίας.

*Υγρά :

$$\gamma_{\pi} = \gamma_{\varphi} + \gamma_{\kappa}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ_p = πραγματικός συντελεστής διαστολής υγρού, γ_ϕ = φαινομενικός συντελεστής διαστολής υγρού, γ_κ = συντελεστής κυβικής διαστολής δοχείου.

Μεταβολή της πυκνότητας στερεών και υγρών μετά της θερμοκρασίας :

$$\rho_0 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \theta} \quad \gamma = 3 \alpha \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{[1 + 3 \alpha (\theta_2 - \theta_1)]}$$

Εξίσωσις τελείων αερίων :

$$V_\theta = V_0 (1 + \alpha \cdot \theta) \quad \eta : \quad V_\theta = \frac{V_0}{273} \cdot T$$

$$p_\theta = p_0 (1 + \alpha \cdot \theta) \quad \eta : \quad p_\theta = \frac{p_0}{273} \cdot T$$

$$p_0 \cdot V_0 = \frac{p \cdot V}{1 + \alpha \cdot \theta} = \text{σταθ}$$

V_θ = όγκος εις θερμοκρασίαν θ °C, V_0 = όγκος εις 0 °C, $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$, p_θ = πίεσις εις θ °C, p_0 = πίεσις εις 0 °C, T = απόλυτος θερμοκρασία.

Κανονικαί συνθήκαι αερίου μάζης :

$$V_0 = \frac{V}{1 + \alpha \cdot \theta} \cdot \frac{h}{760}$$

V_0 = όγκος αερίου υπό κανονικάς συνθήκας (0 °C, 760 mm Hg), V = όγκος αερίου εις θερμοκρασίαν θ και πίεσιν p , αντίστοιχοῦσαν εις h mm Hg.

Μεταβολή της πυκνότητος τῶν αερίων μετά της θερμοκρασίας :

$$\rho_\theta = \rho_0 \frac{p_0}{p_\theta (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

$p_0 = 76 \text{ cm Hg}$.

Σχετική πυκνότης αερίου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα :

$$\rho_{\text{σχ}} = \frac{\rho_{\text{αέριον}}}{\rho_{\text{ἀτμ. ἀήρ}}} = \frac{\rho_0}{0,001293}$$

ρ_0 = πυκνότης αερίου υπό κανονικάς συνθήκας, $\rho_{\text{ἀτμ. ἀήρ}}$ αἱ πυκνότητες αερίου και ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος υπό τὰς αὐτάς συνθήκας.

Εἰδική μορφή εξίσώσεως τελείων αερίων διὰ μάζαν 1 γραμμομορίου (1 Mol) :

$$p \cdot V_{\text{Mol}} = R \cdot T$$

p = πίεσις εις dyn/cm², V_{Mol} = μοριακός όγκος εις cm³ (όγκος 1 γραμμομορίου) υπό πίεσιν p και απόλυτον θερμοκρασίαν T , $R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/grad} \cdot \text{Mol}$ = παγκόσμιος σταθερά τῶν αερίων.

Τύπος Clapeyron :

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

V = όγκος αερίου υπό πίεσιν p και θερμοκρασίαν T , n = αριθμός περιεχομένων Mol, m = μάζα εις gr τοῦ αερίου μοριακοῦ βάρους M .

Σχέσις μοριακοῦ βάρους M αερίου και σχετικῆς πυκνότητος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα $\rho_{\text{σχ}}$:

$$M_{\text{αερ}} = 28,96 \cdot \rho_{\text{σχ}}$$

Πίεσις ἀσκουμένη υπό αερίου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων δοχείου :

$$p = \frac{1}{3} \rho \cdot v^2$$

v = μέση ταχύτης τῶν μορίων, ρ = πυκνότης αερίου.

Εξίσωσις Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - \beta) = R \cdot T$$

a, β = σταθεραί εξαρτάμεναι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ αερίου.

Θερμιδομετρικός τύπος : $Q = m \cdot c (\theta_2 - \theta_1)$

Q = ποσόν θερμότητας εις cal διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας μάζης m γραμμικῶν σώματός τινος, εἰδικῆς θερμότητος c , ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας θ_1 εἰς θ_2 .

Τύπος ὑπολογισμοῦ θερμότητος διαδόσεως δι' ἀγωγῆς :

$$Q = k \cdot \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l} \cdot S \cdot t$$

Q = ποσόν θερμότητος εις cal, διερχόμενον διὰ τῆς ἐγκαρσίας τομῆς S cm² ὁμοιομόρφου ράβδου μήκους l cm εἰς χρόνον t sec, ὅταν μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ράβδου ὑφίσταται διαφορά θερμοκρασίας $\theta_1 - \theta_2$, καὶ k ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου, ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ὕλικου αὐτῆς, ἐκφράζεται δὲ εἰς cal/grad · cm · sec.

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος :

$$A = J \cdot Q$$

A = ἔργον εις kgtr·m ἰσοδυναμοῦν πρὸς Q kcal, J = μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος = 427 kgtr·m/kcal. Ἐὰν A εἰς Joule, Q εἰς cal, τότε J = 4,2 Joule/cal.

Ἀποδόσις θερμικῶν μηχανῶν :

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Q_1 = ποσόν θερμότητος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ θερμικὴ δεξαμενὴ ἀνωτέρας θερμοκρασίας T_1 (ἀπόλυτος θερμοκρασία), Q_2 = ποσόν θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τὴν θερμικὴν δεξαμενὴν κατωτέρας θερμοκρασίας T_2 , $Q_1 - Q_2$ ποσόν θερμότητος μετατρεπόμενον εἰς ἔργον.

Ἰσχὺς ἀτμομηχανῶν :

$$N = (P - p) \cdot S \cdot l \cdot n$$

P = πίεσις ἀτμοῦ, p = ἀτμοσφαιρική πίεσις, S = ἐπιφάνεια ἐμβολέως, l = διαδρομὴ ἐμβολέως, n = ἀριθμὸς διαδρομῶν εἰς 1 sec.

Βιομηχανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως :

$$\eta_{\text{βιομ}} = \frac{A_{\omega\phi\epsilon\lambda}}{Q}$$

$A_{\omega\phi\epsilon\lambda}$ = ὠφέλιμον ἔργον, Q = προσφερομένη θερμότης.

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

Ἐξισώσεις ἁρμονικῆς ταλαντώσεως :

$y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \delta)$, y = ἀπομάκρυνσις, y_0 = πλάτος, δ = ἀρχικὴ φάσις.

Ταχύτης ταλαντώσεως (ὠκύτης) :

$$y' = \omega \cdot y_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \omega t \quad y' = \omega\kappa\upsilon\tau\eta\varsigma$$

Ἐπιτάχυνσις ταλαντώσεως :

$$y'' = -\omega^2 \cdot y_0 \cdot \eta\mu \omega t \quad y'' = \epsilon\pi\iota\tau\acute{\alpha}\chi\upsilon\nu\sigma\iota\varsigma$$

Ἐνέργεια ὕλικου σημείου ἐκτελοῦντος γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν :

$$E_{\omega\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot y_0^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_0^2, \quad \delta\pi\upsilon\upsilon \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

καὶ D ἡ κατευθύνουσα δύναμις.

Στροφικαὶ ταλαντώσεις :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}, \quad T = \text{ἰδιοπερίοδος τῆς ταλαντώσεως,}$$

Θ = ροπή ἀδρανείας τοῦ δίσκου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ D^* = κατευθύνουσα ροπή.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Φυσικόν ἔκκρεμές :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{mga}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{av}}{g}}$$

Θ = ροπή αδρανείας τοῦ ἔκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως, a = ἀπόστασις ἄξονος ἐξαρτήσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους, $l_{av} = \Theta / ma$ = ἀνηγμένον μῆκος τοῦ ἔκκρεμοῦς.

Περίοδος ἐλατηρίου :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}}$$

$$D = m \cdot k = F/x = \text{σταθερά ἐλατηρίου}$$

Κύματα :

$$\lambda = v \cdot T$$

$$v = \lambda \cdot \nu$$

λ = μῆκος κύματος, T = περίοδος, v = ταχύτης διαδόσεως κύματος, ν = συχνότης.

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Μεταβολή τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου μετὰ τῆς θερμοκρασίας :

$$v_\theta = v_0 \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

$v_0 = 332$ m/sec ταχύτης διαδόσεως ἤχου εἰς 0°C , v_θ = ταχύτης διαδόσεως ἤχου εἰς $\theta^\circ\text{C}$, $\alpha = 1/273$ grad $^{-1}$.

Ταχύτης διαδόσεως ἤχου ἐντὸς ἐλαστικοῦ μέσου :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E = μέτρον ἐλαστικότητος (μέτρον Young), ρ = πυκνότης τοῦ μέσου.

Τύποι χορδῶν :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$v_n = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \rho}}$$

$$v_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

v = ταχύτης διαδόσεως κύματος κατὰ μῆκος χορδῆς, F = τείνουσα τὴν χορδὴν δύναμις, μ = γραμμικὴ πυκνότης τῆς χορδῆς, v_n = συχνότης ἁρμονικοῦ πατρὸς τάξεως, l = μῆκος χορδῆς, r = ἀκτίς τῆς χορδῆς.

Τύποι ἡχητικῶν σωλῆνων :

Κλειστός :

$$v_n = n \cdot \frac{v}{4l}$$

Ἀνοικτός :

$$v_n = \frac{n v}{2l}$$

l = μῆκος σωλῆνος, v_n = συχνότης τοῦ ἁρμονικοῦ, $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, v = ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

Ἐφεξὺς Doppler. α) Πηγὴ κινουμένη, παρατηρητὴς ἀκίνητος :

$$v' = v \cdot \frac{V}{V \pm v}$$

v' = φαινόμενη συχνότης, v = συχνότης πηγῆς, v = ταχύτης πηγῆς, V = ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου.

β) Παρατηρητὴς κινούμενος, πηγὴ ἀκίνητος :

$$v' = v \cdot \frac{V \pm v}{V}$$

Διαστάσεις και μονάδες μεγεθών Μηχανικής

Είδος μεγέθους	Εξίσωση όρισμού	Διαστάσεις εις συστήμ. C.G.S. M.K.S.	Μονάδες C.G.S.	Μονάδες M.K.S.	Διαστάσεις εις το T.Σ.	Μονάδες T.Σ.	Σχέσεις μονάδων C.G.S., M.K.S. και T.Σ.
Χρόνος.....	—	T	sec	sec	T	sec	—
Μήκος.....	—	L	cm	m	L	m	1 m = 10 ² cm
Επιφάνεια.....	$S = \alpha \cdot \beta$	L ²	cm ²	m ²	L ²	m ²	1 m ² = 10 ⁴ cm ²
Όγκος.....	$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$	L ³	cm ³	m ³	L ³	m ³	1 m ³ = 10 ⁶ cm ³
Γωνία.....	τόξον/ακτίνας	—	rad	rad	—	rad	1 rad = 57,296°
Ποσότητα.....	$v = s/t$	LT ⁻¹	cm · sec ⁻¹	m · sec ⁻¹	LT ⁻¹	m · sec ⁻¹	1 m/sec = 100 cm/sec
Γραμμική ταχύτητα.....	$\omega = \phi/t$	T ⁻¹	rad · sec ⁻¹	rad · sec ⁻¹	T ⁻¹	rad · sec ⁻¹	—
Γραμμική επιτάχυνση.....	$\gamma = \Delta v / \Delta t$	LT ⁻²	cm · sec ⁻²	m · sec ⁻²	LT ⁻²	m · sec ⁻²	1 m/sec ² = 100 cm/sec ²
Μάζα.....	—	M	gr	kg	—	—	—
Μάζα.....	$m = F/\gamma$	—	—	—	FL ⁻¹ T ²	kg · m ⁻¹ · sec ² ή T.M. μάζης	T.M. μάζης = 9810 gr ή 9,81 kg
Δύναμη.....	—	—	—	—	F	kg · m ⁻¹ · sec ²	—
Δύναμη.....	$F = m \cdot \gamma$	MLT ⁻²	gr · cm · sec ⁻² ή δυνή	Nt	—	—	1 kg · m ⁻¹ · sec ² = 981 000 dyn = 9,81 Nt
Έργο, Ενέργεια.....	$A = F \cdot l$	ML ² T ⁻²	gr · cm ² · sec ⁻² ή έργο	Joule	FL	kg · m ⁻¹ · sec ² · m	1 kg · m ⁻¹ · sec ² · m = 9,81 · 10 ⁷ erg = 9,81 Joule
Ροπή.....	$N = A/t$	ML ² T ⁻³	gr · cm ² · sec ⁻³	Watt	FLT ⁻¹	kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹	1 kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ = 9,81 · 10 ⁷ dyn · cm = 9,81 Nt · m
Ροπή.....	$M = F \cdot l$	ML ² T ⁻²	gr · cm ² · sec ⁻² ή dyn · cm	Nt · m	FL	kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m	1 kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m = 9,81 · 10 ⁵ gr · cm · sec ⁻¹ = 9,81 kg · m · sec ⁻¹
Όρμη.....	$J = m \cdot v$	MLT ⁻¹	gr · cm · sec ⁻¹	kg · m · sec ⁻¹	FT	kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m	1 kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m = 9,81 · 10 ⁵ dyn · sec = 9,81 Nt · sec
Όγκος δυνάμεως.....	$\Omega = F \cdot \Delta t$	MLT ⁻¹	gr · cm · sec ⁻¹	Nt · sec	FT	kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m	1 kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m = 98,4 dyn/cm ² = 9,81 Nt/cm ² ή 1 kg · m ⁻¹ · sec ⁻¹ · m = 981 000 μB = 9,81 Nt/cm ²
Πίεση.....	$p = F/S$	ML ⁻¹ T ⁻²	gr · cm ⁻¹ · sec ⁻² ή dyn/cm ² ή μB	Nt · m ⁻²	FL ⁻²	kg · m ⁻¹ · sec ⁻²	—

Μονάδες ενέργειας και μετατροπή αυτών

	kg·m	kcal	kWh	Joule
1 kg·m =	1	$2,3430 \cdot 10^{-3}$	$2,7241 \cdot 10^{-6}$	9,80665
1 kcal =	$4,2680 \cdot 10^3$	1	$1,1626 \cdot 10^{-3}$	$4,1855 \cdot 10^3$
1 kWh =	$3,6710 \cdot 10^5$	$8,6011 \cdot 10^2$	1	$3,6 \cdot 10^6$
1 Joule =	$1,0197 \cdot 10^{-1}$	$2,3892 \cdot 10^{-4}$	$2,7778 \cdot 10^{-7}$	1

Μονάδες ισχύος και μετατροπή αυτών

	kg·m · sec ⁻¹	PS	W	kW	kcal · sec ⁻¹
1 kg·m · sec ⁻¹ =	1	$1,3333 \cdot 10^{-2}$	9,80665	$9,80665 \cdot 10^{-3}$	$2,3430 \cdot 10^{-3}$
1 PS =	75	1	$7,3550 \cdot 10^2$	$7,3550 \cdot 10^{-1}$	$1,7573 \cdot 10^{-1}$
1 W =	$1,0197 \cdot 10^{-1}$	$1,3596 \cdot 10^{-3}$	1	10^{-3}	$2,3892 \cdot 10^{-4}$
1 kW =	$1,0197 \cdot 10^2$	1,3596	10^3	1	$2,3892 \cdot 10^{-1}$
1 kcal · sec ⁻¹ =	$4,2680 \cdot 10^2$	5,6907	$4,1855 \cdot 10^3$	4,1855	1

Μονάδες πίεσης και μετατροπή αυτών

	Nt/m ²	kg·m ²	Atm	Torr	at
1 Nt/m ² =	1	$1,01972 \cdot 10^{-1}$	$0,98692 \cdot 10^{-5}$	$0,75006 \cdot 10^{-2}$	$1,01972 \cdot 10^{-5}$
1 kg·m ² =	9,80665	1	$0,96784 \cdot 10^{-4}$	$0,73556 \cdot 10^{-1}$	10^{-4}
1 Atm =	$1,01325 \cdot 10^5$	$1,03323 \cdot 10^4$	1	760	1,03323
1 Torr =	$1,33322 \cdot 10^3$	13,59510	$1,31579 \cdot 10^{-3}$	1	$1,35951 \cdot 10^{-3}$
1 at = 1 kg·m/cm ² =	$0,980665 \cdot 10^5$	10^4	0,96784	735,559	1

Μονάδες Ἀγγλοσαξονικῶν χωρῶν

Μήκος	Ἐμβαδόν
1 Ἴντζα (in) = 2,54 cm	1 τετρ. Ἴντζα (1 in ²) = 6,452 cm ²
1 ποὺς (ft = foot) = 12 in = 30,5 cm	1 τετρ. ποὺς (1 ft ²) = 0,093 m ²
1 ὑάρδα (yd) = 3 ft = 0,914 m	1 τετρ. μίλιον (1 mile ²) = 2,59 km ²
1 ἀγγλικὸν μίλιον (mile) = 1,609 km	
Ὅγκος	Μᾶζα
1 κυβικὴ Ἴντζα (1 in ³) = 16,387 cm ³	1 οὔγγια (1 oz. Av) = 28,35 gr
1 κυβικὸς ποὺς (1 ft ³) = 0,0283 m ³	1 λίμπρα (1 lb = pound) = 453,6 gr
1 κυβικὴ ὑάρδα (1 yd ³) = 0,765 m ³	1 κόκκος (1 grain) = 64,8 mgr
1 γαλλόνιον U.S. (1 gal) = 3,785 l	1 τόννος (1 tn = 2000 lb) = 907,18 kgr

Πυκνότης διαφόρων οὐσιῶν, εἰς gr/cm³

Στερεὰ		
Ἀδάμας 3,52	Ὄστᾱ 1,7	Γκαζολίνη 0,79
Ἀνθραξ 1,8	Πάγος 0,917	Γλυκερίνη 1,26
Ἀργίλιον 2,65	Πλίνθος 2,10	Ἐλαιόλαδον 0,91
Ἀργυρος 10,5	Πυριτύαλος 3,70	Ἥλιον 0,15
Βάμβαξ 1,5	Σάκχαρον 1,59	Λινέλαιον 0,93
Ἡλεκτρον 1,1	Σιδήρος (σφυρ.) .. 7,8	Ὄξυγόνον 1,13
Κασσίτερος 7,29	Σιδήρος (χυτός) .. 7,2	Πετρέλαιον 0,8
Καουτσούκ 0,94	Στεφανύαλος 2,50	Τερεβινθέλαιον ... 0,87
Κηρὸς 0,96	Τσιμέντο 1,5	Υδράργυρος 13,6
Κολοφώνιον ... 1,07	Υἄλος 2,5	Υδρογόνον 0,06
Κώκ 1,4	Φελλὸς 0,24	Χλώριον 1,51
Λευκόχρυσος ... 21,4	Χαλκὸς 8,93	
Λιγνίτης 1,4	Χάλυψ 7,7	Ἀέρια
Μαρμαρυγίας ... 2,9	Χάρτης 1,2	Ἀζωτον 0,001 25
Μάρμαρον 2,7	Χρυσὸς 19,32	Ἀήρ 0,001 29
Μόλυβδος 11,37	Ψευδάργυρος 7,15	Ἀμμωνία 0,000 77
Νικέλιον 8,90		Ἀνθρακὸς διοξ. 0,001 97
Ξύλον (δρυὸς) .. 0,80	Υγρὰ	Ἀνθρακὸς μον. . 0,001 25
Ξύλον (πεύκης) . 0,50	Ἀζωτον 0,79	Ἥλιον 0,000 17
Ὀρυκτὸν ἄλας ... 2,35	Αἰθέρ 0 °C 0,735	Ὄξυγόνον 0,001 43
Ὀρείχαλκος 8,60	Ἀλκοόλη 20 °C ... 0,789	Υδρογόνον ... 0,000 09
	Βαμβακέλαιον ... 0,96	Χλώριον 0,003 22

Θερμικά σταθερά στερεών σωμάτων

Ο υ σ ί α	Συντελεστής γραμμικής διαστολής εις 18 °C	Ειδική θερμότητα cal gr · grad	Ατομική θερμότητα cal grad · Mol	Σημείον τήξεως °C	Θερ- μότης τήξ. cal gr	Συντελεστής θερμικής α- γωγιμότητος cal grad · cm · sec
Ανθραξ (Γραφίτης) ..	—	0,26	3,1	3900	—	0,01
Αργυρος	0,000185	0,055	5,9	960,5	26	1,006
Αργίλιον	218	0,214	5,8	658	77	0,48
Βισμούθιον	134	0,029	5,9	271	13	0,019
Βολφράμιον	035	—	—	3400	—	—
Εβρονίτης	800	—	—	—	—	0,0004
Θείον	600	0,16 - 0,24	5,1 - 7,4	119	10	0,0007
Κάδιον	286	0,055	—	320,9	14	0,22
Κασσίτερος	213	0,052	6,4	231,8	14	0,15
Λευκόχρυσος	088	0,032	6,2	1770	27	0,17
Μαγνήσιον	250	0,250	6,0	651	—	0,38
Μόλυβδος	288	0,031	6,4	327,4	5,5	0,08
Νικέλιον	127	0,106	5,9	1460	65	0,14
Όρειχαλκος	185	0,093	—	900	40	0,15 - 0,30
Σίδηρος	120	0,105	5,6	1100 - 1600	30	0,14 - 0,17
Ταντάλιον	079	0,036	—	2900	—	—
Υαλος	080	0,190	—	800 - 1400	—	0,0025
Χαλκός	159	0,091	5,7	1083	42	0,90
Χάλυψ	100	0,114	—	1300 - 1400	49	0,06 - 0,12
Χρυσός	141	0,031	6,7	1063	15,9	0,70
Ψευδάργυρος]	286	0,091	6,9	419,4	28	0,27

Θερμικά σταθερά υγρών

Ο υ σ ί α	Συντελεστής πραγματικής διαστολής 1 grad	Ειδική θερμότητα εις 18 °C cal gr · grad	Σημείον τήξεως °C	Σημείον ζέσεως °C	Θερμότητας εξεαέρσεως cal gr
Αζωτον	—	—	-210,5	-195,8	48
Αιθέρ (C ₄ H ₁₀ O)	0,00163	0,56	-123,6	34,6	90
Αλκοόλη (C ₂ H ₆ O)	0,00110	0,58	-114	78,3	202
Βενζόλη (C ₆ H ₆)	0,00124	0,41	+ 5,5	80,2	94
Γλυκερίνη (C ₃ H ₈ O ₃)	0,00050	0,58	- 20	290	—
Διθειάνθραξ (CS ₂)	0,00121	0,24	-112	46,2	85
Διοξειδίον άνθρακος	—	—	- 57	- 78,5	142
Ήλιον	—	—	—	-268,8	—
Νέον	—	—	—	-245,9	—
Όξυγόνον	—	—	-218	-183,0	51
Πετρέλαιον	0,00092	0,51	—	110 - 120	75
Τερεβινθέλαιον (C ₁₀ H ₁₆)	0,00094	0,42	—	161	70
Υδράργυρος	0,000181	0,0333	- 38,87	356,7	68
Υδρογόνον	—	—	-259	-252,8	110
Υδωρ (εις 18 °C)	0,0018	0,999	0	100	539,1

Τετράγωνα, τετραγωνικά ρίζαι, κύβοι, κυβικά ρίζαι, πολλαπλάσια

n	n ²	$\sqrt{n}$	n ³	$\sqrt[3]{n}$	$\pi \cdot n$	$\frac{1}{4} \pi \cdot n^2$
1	1	1,0000	1	1,0000	3,1416	0,7854
2	4	1,4142	8	1,2599	6,2832	3,1416
3	9	1,7321	27	1,4422	9,4248	7,0686
4	16	2,0000	64	1,5874	12,566	12,566
5	25	2,2361	125	1,7100	15,708	19,635
6	36	2,4495	216	1,8171	18,850	28,274
7	49	2,6458	343	1,9129	21,991	38,485
8	64	2,8284	512	2,0000	24,133	50,266
9	81	3,0000	729	2,0801	28,274	63,617
10	100	3,1623	1 000	2,1544	31,416	78,540
11	121	3,3166	1 331	2,2240	34,558	95,033
12	144	3,4641	1 728	2,2894	37,699	113,10
13	169	3,6056	2 197	2,3513	40,841	132,73
14	196	3,7417	2 744	2,4101	43,982	153,94
15	225	3,8730	3 375	2,4662	47,124	176,71
16	256	4,0000	4 096	2,5198	50,265	201,06
17	289	4,1231	4 913	2,5713	53,407	226,98
18	324	4,2426	5 832	2,6207	56,549	254,47
19	361	4,3589	6 859	2,6684	59,690	283,53
20	400	4,4721	8 000	2,7144	62,832	314,16
21	441	4,5826	9 261	2,7589	65,973	346,36
22	484	4,6904	10 648	2,8020	69,115	380,13
23	529	4,7958	12 167	2,8439	72,257	415,48
24	576	4,8990	13 824	2,8845	75,398	452,39
25	625	5,0000	15 625	2,9240	78,540	490,87
26	676	5,0990	17 576	2,9625	81,681	530,93
27	729	5,1962	19 683	3,0000	84,823	572,56
28	784	5,2915	21 952	3,0366	87,965	615,75
29	841	5,3852	24 389	3,0723	91,106	660,52
30	900	5,4772	27 000	3,1072	94,248	706,86
31	961	5,5678	29 791	3,1414	97,389	754,77
32	1024	5,6569	32 768	3,1748	100,53	804,25
33	1089	5,7446	35 937	3,2075	103,67	855,80
34	1156	5,8310	39 304	3,2396	106,81	907,92
35	1225	5,9161	42 875	3,2711	109,96	962,11
36	1296	6,0000	46 656	3,3019	113,10	1017,88
37	1369	6,0828	50 653	3,3322	116,24	1075,21
38	1444	6,1644	54 872	3,3620	119,38	1134,11
39	1521	6,2450	59 319	3,3912	122,52	1194,59
40	1600	6,3246	64 000	3,4200	125,66	1256,64
41	1681	6,4031	68 921	3,4482	128,81	1320,25
42	1764	6,4807	74 088	3,4760	131,95	1385,44
43	1849	6,5574	79 507	3,5034	135,09	1452,20
44	1936	6,6332	85 184	3,5303	138,23	1520,53
45	2025	6,7082	91 125	3,5569	141,37	1590,43
46	2116	6,7823	97 336	3,5830	144,51	1661,90
47	2209	6,8557	103 823	3,6088	147,65	1734,94
48	2304	6,9282	110 592	3,6342	150,80	1809,56
49	2401	7,0000	117 649	3,6593	153,94	1885,74
50	2500	7,0711	125 000	3,6840	157,08	1963,50

τοῦ π καὶ πολλαπλάσια τοῦ τετραγώνου ἐπὶ $\pi/4$, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

n	n ²	$\sqrt{n}$	n ³	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\pi \cdot n$	$\frac{1}{4} \pi \cdot n^2$
51	2601	7,1414	132 651	3,7084	160,22	2042,82
52	2704	7,2111	140 608	3,7325	163,36	2123,72
53	2809	7,2801	148 877	3,7563	166,50	2206,18
54	2916	7,3485	157 464	3,7798	169,65	2290,22
55	3025	7,4162	166 375	3,8030	172,78	2375,83
56	3136	7,4833	175 616	3,8259	175,93	2463,01
57	3249	7,5498	185 193	3,8485	179,07	2551,76
58	3364	7,6158	195 112	3,8709	182,21	2642,08
59	3481	7,6811	205 379	3,8930	185,35	2733,97
60	3600	7,7460	216 000	3,9149	188,49	2827,43
61	3721	7,8102	226 981	3,9365	191,63	2922,47
62	3844	7,8740	238 328	3,9579	194,78	3019,07
63	3969	8,9373	250 047	3,9791	197,92	3117,25
64	4096	8,0000	262 144	4,0000	201,06	3216,99
65	4225	8,0623	274 625	4,0207	204,20	3318,31
66	4356	8,1240	287 496	4,0412	207,35	3421,19
67	4489	8,1854	300 763	4,0615	210,49	3525,65
68	4624	8,2462	314 432	4,0817	213,63	3631,68
69	4761	8,3066	328 509	4,1016	216,77	3739,28
70	4900	8,3666	343 000	4,1213	219,91	3848,45
71	5041	8,4261	357 911	4,1408	223,05	3559,19
72	5184	8,4853	373 248	4,1602	226,19	4071,50
73	5329	8,5440	389 017	4,1793	229,34	4185,39
74	5476	8,6023	405 224	4,1983	232,48	4300,84
75	5625	8,6603	421 875	4,2172	235,62	4417,86
76	5776	8,7178	438 976	4,2358	238,76	4536,46
77	5929	8,7750	456 533	4,2543	241,90	4656,63
78	6084	8,8318	474 552	4,2727	245,04	4778,36
79	6241	8,8882	493 039	4,2908	248,19	4901,67
80	6400	8,9443	512 000	4,3089	251,33	5026,55
81	6561	9,0000	531 441	4,3267	254,47	5153,00
82	6724	9,0554	551 368	4,3445	257,61	5281,02
83	6889	9,1104	571 787	4,3621	260,75	5410,61
84	7056	9,1652	592 704	4,3795	263,89	5541,77
85	7225	9,2195	614 125	4,3968	267,04	5674,50
86	7396	9,2736	636 056	4,4140	270,18	5808,80
87	7569	9,3274	658 503	4,4310	273,32	5944,68
88	7744	9,3808	681 472	4,4490	276,46	6082,12
89	7921	9,4340	704 969	4,4648	279,60	6221,14
90	8100	9,4868	729 000	4,4814	282,74	6361,73
91	8281	9,5394	753 571	4,4979	285,88	6503,88
92	8464	9,5917	778 688	4,5144	289,03	6647,61
93	8649	9,6437	804 357	4,5307	292,17	6792,91
94	8836	9,6954	830 584	4,5468	295,31	6939,78
95	9025	9,7468	857 375	4,5629	298,45	7088,22
96	9216	9,7980	884 736	4,5789	301,59	7238,23
97	9409	9,8489	912 673	4,5947	304,73	7389,81
98	9604	9,8995	941 192	4,6104	307,88	7542,96
99	9801	9,9499	970 299	4,6261	311,02	7697,69
100	10000	10,0000	1 000 000	4,6416	314,16	7853,98

Υφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πίναξ φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

Γωνία		ημ	συν	εφ	Γωνία		ημ	συν	εφ
Μοίραι	΄Ακτίνια				Μοίραι	΄Ακτίνια			
0	0,000	0,000	1,000	0,000	45	0,785	0,707	0,707	1,000
1	0,017	0,018	1,000	0,018	46	0,803	0,719	0,695	1,036
2	0,035	0,035	0,999	0,035	47	0,820	0,731	0,682	1,072
3	0,052	0,052	0,999	0,052	48	0,838	0,743	0,669	1,111
4	0,070	0,070	0,998	0,070	49	0,855	0,755	0,656	1,150
5	0,087	0,087	0,996	0,088	50	0,873	0,766	0,643	1,192
6	0,105	0,105	0,995	0,105	51	0,890	0,777	0,629	1,235
7	0,122	0,122	0,993	0,123	52	0,908	0,788	0,616	1,280
8	0,140	0,139	0,990	0,141	53	0,925	0,799	0,602	1,327
9	0,157	0,156	0,988	0,158	54	0,942	0,809	0,588	1,376
10	0,175	0,174	0,985	0,176	55	0,960	0,819	0,574	1,428
11	0,192	0,191	0,982	0,194	56	0,977	0,829	0,559	1,483
12	0,209	0,208	0,978	0,213	57	0,995	0,839	0,545	1,540
13	0,227	0,225	0,974	0,231	58	1,012	0,848	0,530	1,600
14	0,244	0,242	0,970	0,249	59	1,030	0,857	0,515	1,664
15	0,262	0,259	0,966	0,268	60	1,047	0,866	0,500	1,732
16	0,279	0,276	0,961	0,287	61	1,065	0,875	0,485	1,804
17	0,297	0,292	0,956	0,306	62	1,082	0,883	0,470	1,881
18	0,314	0,309	0,951	0,325	63	1,100	0,891	0,454	1,963
19	0,332	0,326	0,946	0,344	64	1,117	0,899	0,438	2,050
20	0,349	0,342	0,940	0,364	65	1,134	0,906	0,423	2,145
21	0,367	0,358	0,934	0,384	66	1,152	0,914	0,407	2,246
22	0,384	0,375	0,927	0,404	67	1,169	0,921	0,391	2,356
23	0,401	0,391	0,921	0,425	68	1,187	0,927	0,375	2,475
24	0,419	0,407	0,914	0,445	69	1,204	0,934	0,358	2,605
25	0,436	0,423	0,906	0,466	70	1,222	0,940	0,342	2,747
26	0,454	0,438	0,899	0,488	71	1,239	0,946	0,326	2,904
27	0,471	0,454	0,891	0,510	72	1,257	0,951	0,309	3,078
28	0,489	0,470	0,883	0,532	73	1,274	0,956	0,292	3,271
29	0,506	0,485	0,875	0,554	74	1,292	0,961	0,276	3,487
30	0,524	0,500	0,866	0,577	75	1,309	0,966	0,259	3,732
31	0,541	0,515	0,857	0,601	76	1,326	0,970	0,242	4,011
32	0,559	0,530	0,848	0,625	77	1,344	0,974	0,225	4,331
33	0,576	0,545	0,839	0,649	78	1,361	0,978	0,208	4,705
34	0,593	0,559	0,829	0,675	79	1,379	0,982	0,191	5,145
35	0,611	0,574	0,819	0,700	80	1,396	0,985	0,174	5,671
36	0,628	0,588	0,809	0,727	81	1,414	0,988	0,156	6,314
37	0,646	0,602	0,799	0,754	82	1,431	0,990	0,139	7,115
38	0,663	0,616	0,788	0,781	83	1,449	0,993	0,122	8,144
39	0,681	0,629	0,777	0,810	84	1,466	0,995	0,105	9,514
40	0,698	0,643	0,766	0,839	85	1,484	0,996	0,087	11,43
41	0,716	0,658	0,755	0,869	86	1,501	0,998	0,070	14,30
42	0,733	0,669	0,743	0,900	87	1,518	0,999	0,052	19,08
43	0,751	0,682	0,731	0,933	88	1,536	0,999	0,035	28,64
44	0,768	0,695	0,719	0,966	89	1,553	1,000	0,018	57,29
					90	1,571	1,000	0,000	∞

ΣΥΜΒΟΛΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ως ταῦτα κατὰ προτίμησιν χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ βιβλίον

A	=	έργον, ἄνωσις	kWh	=	κιλοβατώρα
Å	=	Ångström = 10^{-8} cm	kg·m	=	χιλιογραμμόμετρον
α	=	συντελεστής γραμ. διαστ. στερεῶν	λ	=	μήκος κύματος
α	=	θερμικός συντελεστής αερίων	λ	=	θερμότης τήξεως
α	=	γωνία	L	=	θερμότης εξαερώσεως
α	=	πλάτος	l	=	μήκος
Atm	=	φυσική ἀτμόσφαιρα	lt	=	λίτρον
at	=	τεχνική ἀτμόσφαιρα	M	=	ροπή δυνάμεως
B, β	=	βάρος	M.K.S.	=	σύστημα Τζιόρτζι
B	=	Bar	M.K.*.S.	=	Τεχνικὸν Σύστημα
β	=	συντελεστής ἐπιφαν. διαστολῆς	μ	=	μικρόν = 10^{-4} cm
γ	=	ἐπιτάχυνσις σώματος	mB	=	mikrobar
γ	=	συντελεστής κυβικής διαστολῆς	m	=	μέτρον
γ	=	λόγος c_p/c_v	m, M	=	μάζα
c	=	ταχύτης διαδόσεως φωτός	mB	=	millibar
°C	=	ειδική θερμότης	mm	=	μιλλιμικρόν
cal	=	βαθμοὶ Κελσίου	mm	=	χιλιοστόν
C.G.S.	=	θερμὺς	mgr	=	χιλιοστόν γραμμαρίου μάζης
c/sec	=	ἀπόλυτον σύστημα μονάδων	min	=	λεπτόν
CV	=	κύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον	mil	=	μίλιον
CVh	=	ἀτμόιππος	Mol	=	γραμμομόριον
cm	=	ώριαῖος ἀτμόιππος	N	=	ισχύς
δ, d	=	ἐκατοστόμετρον	Nt	=	Νιούτον
D	=	διάμετρος	v	=	συχνότης
	=	σταθερά ἐλατηρίου, κατευθύνουσα δύναμις	Π	=	παροχή
D*	=	κατευθύνουσα ροπή	p	=	πίεσις
dm	=	δεκατόμετρον	PS	=	ἀτμόιππος
dyn	=	δύνη	Q	=	ποσότης θερμότητος
E	=	μέτρον ἐλαστικότητος	R	=	παγκόσμιος σταθερά αερίων
E _{δυν}	=	δυναμική ἐνέργεια	°R	=	βαθμοὶ Ρεωμόνρου
E _{κιν}	=	κινητική ἐνέργεια	R, r	=	ἀκτίς
ε	=	ειδικὸν βάρος	rad	=	ἀκτίνιον
erg	=	ἐργιον	ρ	=	πυκνότης
εφ	=	ἐφαπτομένη	s	=	διάστημα
F	=	δύναμις	S	=	ἐπιφάνεια, τομή
°F	=	βαθμοὶ Fahrenheit	sec	=	δευτερόλεπτον
G	=	στροφορμή	Σ	=	συνισταμένη
g	=	ἐπιτάχυνσις βαρύτητος	Σ	=	ἄθροισμα
gr	=	γραμμάριον μάζης	συν	=	συνημίτονον
gr*	=	γραμμάριον βάρους	T	=	τριβή, τάσις, περίοδος
grad	=	βαθμὸς	T	=	ἀπόλυτος θερμοκρασία
h	=	ώρα, ὕψος	tn	=	τόννος μάζης
Hz	=	Hertz	tn*	=	τόννος βάρους
HP	=	ἵππος	t	=	χρόνος, θερμοκρασία
ημ	=	ἡμίτονον	T.Σ.	=	Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων
η	=	συντελεστής ἀποδόσεως	T.M.	=	Τεχνικὴ μονὰς μάζης
η	=	συντελεστής τριβῆς	Torr	=	mm στήλης Hg
Θ	=	ροπή ἀδραναίας	υ	=	ταχύτης
θ	=	θερμοκρασία, γωνία	υ ₀	=	ἀρχική ταχύτης
J	=	ὁρμή	φ	=	φορτίον
J	=	μηχαν. ἰσοδύναμον θερμότητος	φ	=	γωνία
κ	=	συντελεστής κρούσεως	V	=	φάσις
°K	=	βαθμοὶ Kelvin (ἀπόλυτοι)	W	=	ὄγκος
k	=	σταθερά	W	=	Watt
km	=	χιλιόμετρον	x, y	=	ἀπομάκρυνσις
kg	=	χιλιόγραμμον μάζης	x, y	=	ζητούμενα μεγέθη
kg*	=	χιλιόγραμμον βάρους	X, Y,	=	ἀξονες συντεταγμένων
kcal	=	χιλιοθερμὺς	ω	=	γωνιακή ταχύτης
kW	=	χιλιοβάτ (κιλοβάτ)	ω'	=	γωνιακή ἐπιτάχυνσις
			Ω	=	ώθησις δυνάμεως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

‘Οδηγία διὰ τὴν λύσιν τῶν ‘Ασκήσεων Φυσικῆς	Σελ. 9
Στοιχειώδεις γνώσεις ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας	» 13

I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εἰσαγωγή εἰς τὴν Μηχανικὴν. Διαστάσεις. Μονάδες. Γραφικαὶ παραστάσεις. Σύνθεσις διανυσμάτων	» 17
A' — Στατική. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις δυνάμεων. Ροπαὶ δυνάμεων	» 30
B' — Κινηματική. Εὐθύγραμμος καὶ κυκλικὴ κίνησις	» 65
Γ' — Δυναμική. Δυναμικὴ τοῦ ὕλικου σημείου. Θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς Δυναμικῆς. Κεντρομόλος καὶ φυγόκεντρος δύναμις	» 90
Δ' — Ἔργον. Ἰσχύς. Ἐνέργεια	» 116
Ε' — Βαρύτης. Παγκόσμιος Ἐλξίς. I. Ἐλευθέρᾳ πτώσει τῶν σωμάτων. Βολαί. Κέντρον βάρους. Ἴσορροπία στερεοῦ σώματος. II. Παγκόσμιος Ἐλξίς	» 143
ΣΤ' — Ὅρμη. Κρούσις	» 202
Ζ' — Κινηματική καὶ Δυναμική τοῦ στερεοῦ σώματος	» 222
Η' — Τριβή. Ἐλαστικότης	» 234
Θ' — Ἀπλάι Μηχαναί	» 253
Ι' — Ὑδροστατική	» 267
ΙΑ' — Ἀεροστατική	» 300
ΙΒ' — Ὑδροδυναμική. Ἀεροδυναμική	» 318
ΙΓ' — Μοριακὴ Φυσικὴ	» 327

II. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΙΔ' — Θερμότης. Θερμομετρία	» 336
ΙΕ' — Θερμικὴ διαστολὴ	» 339
ΙΣΤ' — Θερμιδομετρία	» 368
ΙΖ' — Μεταβολαὶ τῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων	» 382
ΙΗ' — Διάδοσις τῆς θερμότητος	» 404
ΙΘ' — Στοιχεῖα ἐκ τῆς Θερμοδυναμικῆς	» 412
Κ' — Θερμικαὶ Μηχαναί	» 419
ΚΑ' — Στοιχεῖα ἐκ τῆς Μετεωρολογίας	» 426

III. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΑ

ΚΒ' — Ταλαντώσεις	» 431
ΚΓ' — Κύματα	» 447

IV. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΔ' — Φυσικὴ Ἀκουστικὴ	» 451
Πίναξ τῶν κυριωτέρων τύπων	» 470
Διαστάσεις καὶ μονάδες μεγεθῶν Μηχανικῆς	» 478
Μονάδες ἐνεργείας, ἰσχύος, πίεσεως καὶ μετατροπαὶ αὐτῶν	» 479
Μονάδες ἀγγλοσαξονικῶν χωρῶν. Πυκνότης διαφόρων οὐσιῶν.	» 480
Θερμικαὶ σταθεραί.	» 481
Τετράγωνα, τετραγωνικαὶ ρίζαι, κύβοι, κυβικαὶ ρίζαι, κ.ἄ.	» 482
Πίναξ φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν	» 484
Σύμβολα διαφόρων μεγεθῶν	» 485

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τὸς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων, τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν καὶ τὸς ὑποψηφίους
διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Ἐκπαιδευτικῶν Ἰδρυμάτων.

Ἐγκειμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Θερμότης - Ἀκουστικὴ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

Ἀτομικὴ καὶ Πυρηνικὴ Φυσικὴ

Ὅλα τὰ προβλήματα τὰ περιεχόμενα εἰς τὰ βιβλία « Στοιχεῖα Φυσικῆς »
καὶ « Μαθηματικὰ Φυσικῆς » εἶναι λελυμένα ἐντὸς τοῦ βιβλίου τούτου.

ΤΟΜΟΣ ΙΙΙ, ΤΕΥΧΟΣ Α'

Μηχανικὴ - Θερμότης - Ταλαντώσεις καὶ Κύματα - Ἀκουστικὴ

ΤΟΜΟΣ ΙΙΙ, ΤΕΥΧΟΣ Β'

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

Ἀτομικὴ καὶ Πυρηνικὴ Φυσικὴ

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἀνωτέρας στάθμης διὰ τὸς ὑποψηφίους τῶν ἀνωτάτων Σχολῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τὸς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν
ὡς καὶ διὰ τὸς μαθητὰς τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Ἐγκειμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΝΕΩΤΕΡΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ἠλεκτρονικὴ - Ἀτομικὴ καὶ Πυρηνικὴ Φυσικὴ

Διὰ τὸς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν
ὡς καὶ διὰ τὸς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν.
Ὅλαι αἱ ἀσκήσεις αἱ περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον Κουγιουντζέλη - Περιστέρακη
« Στοιχεῖα Πυρηνικῆς Φυσικῆς » εἶναι λελυμένα εἰς τὸ βιβλίον τούτο.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τὸς μαθητὰς τῶν Κλασσικῶν Γυμνασίων.

Ἐγκειμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

ΚΟΥΓΙΟΥΜΖΕΛΗ - ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ • ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ ΙΙΙ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Πρὸς χρῆσιν

τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν καὶ τῶν ὑποψηφίων
διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Ἐκπαιδευτικῶν Ἰδρυμάτων.

Αἱ ἀσκήσεις αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ ἀνωτέρω βιβλία εἶναι λελυμένα εἰς τὸ βιβλίον :
Σ. Περίστερακη «Ἀσκήσεις Φυσικῆς», Τόμοι Ι, ΙΙ καὶ ΙΙΙ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΑΤΟΜΙΚΗ - ΠΥΡΗΝΙΚΗ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΝ ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Πρὸς χρῆσιν

τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν καὶ τῶν ὑποψηφίων
διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Ἐκπαιδευτικῶν Ἰδρυμάτων.

Οἱ συγγραφεῖς κατορθῶνουν κατὰ τρόπον ἄριστον νὰ ἀπλουστεύουν τὰ διάφορα ζητήματα χωρὶς νὰ ἀπομακρύνονται τῆς ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας. Μεγίστη σαφήνεια, πλήθος σχημάτων υποβοηθούτων εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ κειμένου, ἀπλότης εἰς τὴν διατύπωσιν, εἶναι μερικὰ ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ βιβλίου τούτου, τὸ ὅποιον ὁδηγεῖ τὸν μαθητὴν μέχρι τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπασχολοῦν τὴν σημερινὴν Φυσικὴν καὶ τὰ ὅποια, ὡς γνωστόν, κινοῦν τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ συνόλου σχεδὸν τῶν πολιτισμένων ἀνθρώπων.

