

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

Γ Ε Ν Ι Κ Η Φ Υ Σ Ι Κ Η

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ



ΑΘΗΝΑΙ

1960

Ε 2 φ81
Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

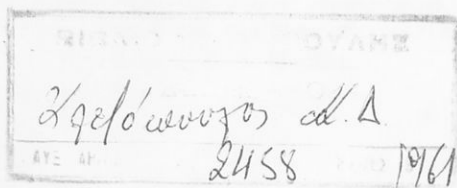
Γ Ε Ν Ι Κ Η Φ Υ Σ Ι Κ Η
Τ Ο Μ Ο Σ Π Ρ Ω Τ Ο Σ

Ζηζούνης (Κ.Δ.)



ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ
ΜΕΤΑ 401 ΣΧΗΜΑΤΩΝ



ΑΘΗΝΑΙ
1960

002
ΕΛΕ
ΕΤ3
309

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει
τὴν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.

Κ. Α. Σ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Δ' ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβάνει τὴν ἀπαραίτητον διὰ τοὺς πρωτοεῖς φοιτητὰς ὕλην ἐκ τῶν κεφαλαίων τῆς Μηχανικῆς καὶ τῆς Ἀκουστικῆς. Εἰς πολλὰ σημεῖα γίνεται ἐπέκτασις καὶ πέραν τοῦ τεθέντος προγράμματος, χωρὶς, ὅμως, τοῦτο νὰ δυσχεράνη τὸν διὰ πρώτην φορὰν ἀναγινώσκοντα τὸ βιβλίον, καθόσον, κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν, ἐγένετο χρήσις μικροτέρων τυπογραφικῶν στοιχείων.

Διὰ τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μελετήσουν ὁρισμένα θέματα ἀκόμη λεπτομερέστερον, ἀναφέρονται εἰς ἐπομένην σελίδα μερικὰ εἰδικὰ συγγράμματα.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν προσετέθησαν εἰς ὁρισμένα ἐνδιαφέροντα σημεῖα ἐφαρμογαὶ καὶ ἀσκήσεις. Διὰ τὴν τελείαν ἀφομοίωσιν τῆς ὕλης, συνιστῶμεν εἰς τοὺς φοιτητὰς ν' ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν λύσιν τῶν ἐν λόγῳ ἀσκήσεων.

Ὅπως ὁ ἀναγνώστης θὰ παρατηρήσῃ, τοῦ βιβλίου προτάσσεται ἡ «Εἰσαγωγή», εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται διάφορα θέματα, γενικῆς φύσεως. Τὰ πλεῖστα τῶν θεμάτων τούτων ἐντάσσονται, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς διδασκαλίας, εἰς τὰ οἰκεῖα κεφάλαια, εὐθὺς ὡς παρουσιασθῇ ἀνάγκη διὰ πρώτην φορὰν. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ἀνάλογον πρέπει νὰ πράξῃ καὶ ὁ ἀναγνώστης κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μελέτης του. Βεβαίως, μετὰ τὴν ἀνάγνωσιν ὁλοκλήρου τοῦ βιβλίου, ἐπιβάλλεται, ἐκ νέου, ἡ προσεκτικὴ μελέτη τῆς «Εἰσαγωγῆς».

Εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Ἀκουστικῆς ὁ ὅρος «ἐντασις τοῦ ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος» ἢ «ἠχοαἰσθημα» ἀντεκατεστάθη ὑπὸ τοῦ καταλληλοτέρου «ἀκουστότης».

Τὰς ἀσκήσεις τοῦ βιβλίου ἔλυσαν οἱ Φυσικοὶ κ.κ. **Δ. Ι. Μαγῆνος** καὶ **Χ. Ν. Κουμέλης**, τοὺς ὁποίους εὐχαριστοῦμεν.

Αἱ βελτιώσεις καὶ προσθήκαι τῆς νέας ἐκδόσεως ἔγιναν ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τοῦ Φυσικοῦ κ. **Γ. Δ. Μπίλλη**.

Κ. Α. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει τις ασκήσεις που είναι
απαραίτητες για την κατανόηση της θεωρίας και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι
ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.

Οι ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι
ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.

Οι ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι
ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.

Οι ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι
ασκήσεις είναι διατεταγμένες με τρόπο που να
επιδεικνύουν την εξέλιξη της σκέψης και την
ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΔΙ' ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΑΝ ΜΕΛΕΤΗΝ

- K. Γεωργιγεπούλου**, Τεχνική Μηχανική. Α' Μηχανική στερεῶν σωμάτων, Γ' Ἀντοχή ὑλικῶν, Ἀθήναι, 1952.
- K. Παπαϊωάννου**, Μηχανική, I, II, Ἀθήναι, 1954.
- S. Timoshenko - D. Young**, Engineering mechanics. I, Statics, II, Dynamics, New York, 1956.
- E. Meissner - H. Ziegler**, Mechanik. A'. Statik, B'. Dynamik, Basel, 1947.
- G. Bruhat**, Mécanique, Paris, 1955.
- H. Favre**, Cours de Mécanique, I. Statique, II, Dynamique, III, Ἐλαστικότητα, Κυματική, Ὑδροδυναμική, Paris, 1946-49.
- S. Timoshenko - G. Mac Cullough**, Elements of strength of materials, New York, 1940.
- O. G. Suttou**, The science of flight, London, 1955.
- G. R. Serane**, Cours d'Aérotechnique, Paris, 1957.
- W. Kaufmann**, Technische hydro- und Aeromechanik, Berlin, 1958.
- F. Trendelenburg**, Einführung in die Akustik, Berlin, 1959.
- R. Stephens - A. Bate**, Wave motion and Sound, London, 1950.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΤΗΡΙΑ ΜΕΛΕΤΗ

1. Γεωργίου, Γ. (1995). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 10(1), 1-10.
2. Κωνσταντίνου, Κ. (1998). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 13(2), 1-10.
3. Κωνσταντίνου, Κ. (2000). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 15(3), 1-10.
4. Κωνσταντίνου, Κ. (2002). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 17(4), 1-10.
5. Κωνσταντίνου, Κ. (2004). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 19(5), 1-10.
6. Κωνσταντίνου, Κ. (2006). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 21(6), 1-10.
7. Κωνσταντίνου, Κ. (2008). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 23(7), 1-10.
8. Κωνσταντίνου, Κ. (2010). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 25(8), 1-10.
9. Κωνσταντίνου, Κ. (2012). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 27(9), 1-10.
10. Κωνσταντίνου, Κ. (2014). Η εκπαίδευση στην Ελλάδα: Α αναγκαστική εξέλιξη. *Εκπαιδευτική Βιβλιοθήκη*, 29(10), 1-10.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περιεχόμενον τῆς Μηχανικῆς σ. 1.—Φυσικά μεγέθη καὶ μέτρησις αὐτῶν σ. 1.—Εἶδη ἀνυσμάτων σ. 2.—Θεμελιώδεις καὶ παράγωγοι μονάδες σ. 2.—Συστήματα μονάδων σ. 3.—Διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν σ. 3.—Διαστάσεις τῶν τύπων σ. 4.—Μονάδες μήκους σ. 4.—Μονάδες μάζης σ. 5.—Μονάδες χρόνου σ. 6.—Μονάδες ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου σ. 7.—Γωνίαι καὶ μονάδες αὐτῶν σ. 7.—Μονάδες μήκους, ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου, χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας σ. 8.—Μέτρησις μήκους σ. 8.—Μέτρησις χρόνου σ. 11.—Μέτρησις ἐμβαδοῦ σ. 11.—Μέτρησις ὄγκου σ. 12.—Μέτρησις γωνιῶν σ. 12.—Σφάλματα μετρήσεων σ. 14.—Γραφικὴ παράστασις φαινομένων σ. 15.—Στοιχειώδεις γνώσεις ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας σ. 16.—Στοιχεῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν σ. 18.—Στοιχειώδεις πράξεις ἐπὶ τῶν ἀνυσμάτων σ. 22.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Α' Κινηματικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Κίνησις σ. 26.—Βαθμοὶ ἐλευθερίας σ. 26.—Ταχύτης σ. 27.—Ἐπιτάχυνσις σ. 29.—Γωνιακὴ ταχύτης σ. 31.—Σχέσις ταχύτητος καὶ γωνιακῆς ταχύτητος σ. 31.—Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις σ. 32.—Ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις σ. 32.—Ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις σ. 33.—Ὁμαλὴ καμπυλόγραμμος κίνησις σ. 37.—Ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις σ. 37.—Σχέσις γωνιακῆς ταχύτητος καὶ συχνότητος σ. 39.—Σχέσις ἐπιταχύνσεως καὶ γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως κινήτου, κινουμένου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς σ. 39.—Γενικὴ περίπτωσις. Τυχοῦσα καμπυλόγραμμος κίνησις σ. 39.—Σύνθεσις κινήσεων σ. 40.—Ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας σ. 41.—Βολὴ σ. 41.—Ἀσκήσεις σ. 44.

Β' Στατικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Δυνάμεις σ. 45.—Ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως σ. 46.—Δυναμόμετρα σ. 48.—Σύνθεσις δυνάμεων σ. 48.—Ἀνάλυσις δυνάμεων σ. 49.—Ἰσορροπία δυνάμεων σ. 49.—Ἀσκήσεις σ. 50.

Γ' Δυναμικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς σ. 51.—Διερευνήσις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς σ. 51.—Μονάδες μάζης καὶ δυνάμεως σ. 52.—Σχέσις μεταξὺ τῶν ἀντιστοιχούντων μονάδων σ. 53.—Ἐφαρμογαὶ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς σ. 54.—Ὅρμῃ σ. 60.—Γενικωτέρα μορφή τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς σ. 60.—Στροφορμὴ σ. 61.—Ὡθησις δυνάμεως σ. 61.—Ἀσκήσεις σ. 62.

Δ' Ἔργον, ἐνέργεια, ἰσχύς.

Ἔργον σ. 63.—Ἰσχύς σ. 64.—Μονάδες ἔργου καὶ ἰσχύος σ. 65.—Ἐνέργεια σ. 66.—Θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας σ. 69.—Ἀσκήσεις σ. 71.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ε' Κινηματική τῶν στερεῶν.

Μεταφορική κίνησις στερεοῦ σώματος σ. 72.—Στροφική κίνησις στερεοῦ σώματος σ. 73.—Σύνθετος κίνησις στερεοῦ σώματος σ. 73.—Βαθμοὶ ἐλευθερίας σ. 75.—Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, ἐκτελοῦντος μεταφορικὴν κίνησιν σ. 75.—Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, στρεφομένου περὶ ἄξονα—Ρολὴ ἀδρανείας σ. 76.—Μεταβολὴ τῆς ροπῆς ἀδρανείας μετὰ τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος περιστροφῆς σ. 77.—Κύριοι ἄξονες ἀδρανείας σ. 79.—Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, ἐκτελοῦντος σύνθετον κίνησιν σ. 79.—'Ασκήσεις σ. 79.

Σ' Στατική τῶν στερεῶν.

Ρολὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον σ. 81.—Ρολὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα σ. 82.—Θεώρημα τῶν ροπῶν σ. 82.—'Η δύναμις ὡς ὀλισθαίνον ἄνυσμα σ. 83.—Σύνθεσις ὁμοεπιπέδων δυνάμεων σ. 83.—Σύνθεσις πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων σ. 86.—Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων σ. 86.—Ζεύγος δυνάμεων σ. 86.—Σύνθεσις ὁμοεπιπέδων, ἀλλὰ μὴ παραλλήλων δυνάμεων σ. 88.—'Αναγωγὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον σ. 88.—Σύνθεσις ἀσυμβάτων δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος σ. 89.—Κέντρον βάρους σ. 89.—Εὐρεσις τοῦ κέντρου βάρους σ. 90.—Εἰδικὸν βάρος—Πυκνότης σ. 91.—Συνθῆκαι ἰσορροπίας πολλῶν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος σ. 92.—'Αναλυτικὴ διατύπωσις τῶν συνθῆκαι ἰσορροπίας σ. 92.—Θεώρημα τῶν τριῶν δυνάμεων ἐν ἰσορροπίᾳ σ. 92.—Εἶδη ἰσορροπίας σ. 94.—'Ασκήσεις σ. 96.

Ζ' Δυναμικὴ τῶν στερεῶν.

Θεμελιώδης νόμος τῆς στροφικῆς κινήσεως σ. 97.—Στροφορμὴ στερεοῦ σώματος σ. 99.—Γενικωτέρα μορφὴ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφικῆς κινήσεως σ. 100.—'Ωθησις ροπῆς σ. 101.—'Εργον καὶ ἰσχύς, παραγόμενα ὑπὸ ροπῆς σ. 101.—Κίνησις στερεοῦ σώματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν οἰωνδῆποτε δυνάμεων σ. 102.—'Ελευθέρω στροφή τοῦ στερεοῦ σώματος σ. 103.—'Αναλογίαι μεταφορικῆς καὶ στροφικῆς κινήσεως σ. 104.—Στρόβος σ. 106.—Στρόβος, ἐλεύθερος ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ροπῶν) σ. 106.—Διερεῦνησις τῆς κλόνήσεως σ. 107.—Στρόβος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς ροπῆς—Μετάπτωσις σ. 109.—Μετάπτωσις καὶ κλόνησις τῆς Γῆς σ. 112.—'Ασκήσεις σ. 113.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

Η' Μηχανικὴ τῶν συστημάτων.

'Εσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις σ. 114.—Κέντρον βάρους συστήματος σ. 115.—Κίνησις συστήματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων σ. 115.—Κρούσις σ. 119.—'Απλὰ μηχαναὶ σ. 122.—'Ασκήσεις σ. 126.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Εἰδικαὶ μορφαὶ κινήσεως

Θ' Γραμμικαὶ ταλαντώσεις.

Γραμμικὴ ἀρμονικὴ ταλάντωσις σ. 128.—Διαφορὰ φάσεως σ. 129.—Ταχύτης καὶ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ἀρμονικὴν ταλάντωσιν σ. 130.—'Απαραίτητος ὕρος διὰ τὴν

παραγωγὴν ἐλευθέρας ἀρμονικῆς ταλαντώσεως σ. 131.—'Ιδιοπερίοδος· ἰδιοσυχνότης σ. 132.—'Ενέργεια ὕλικου σημείου, ἐκτελοῦντος ἀρμονικὴν ταλάντωσιν σ. 132.—Θεωρητικὴ διερεῦνσις τῆς παραγωγῆς τῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως σ. 133.—'Απλοῦν (ἢ μαθηματικὸν) ἔκκρεμὸς σ. 133.—'Αμείωτος καὶ φθίνουσα ταλάντωσις σ. 134.—'Απεριοδικὴ ταλάντωσις σ. 135.—Θεωρητικὴ διερεῦνσις τῶν ταλαντώσεων μετ' ἀπόσβεσιν σ. 135.—'Εξηναγασμένη ταλάντωσις σ. 137.—Θεωρητικὴ διερεῦνσις τῆς ἐξηναγασμένης ταλαντώσεως σ. 138.—Σύνθεσις ἀρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως σ. 139.—'Ανάλυσις περιοδικῶν ταλαντώσεων κατὰ Fourier σ. 143.—Φάσμα συχνοτήτων σ. 144.—'Ανάλυσις μὴ περιοδικῆς ταλαντώσεως σ. 145.—Συνεγγεμένα ταλαντώσεις σ. 147.—Σύνθεσις δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων, καθέτων ἐπ' ἀλλήλας σ. 148.—'Ασκήσεις σ. 150.

Ι' Στροφικαὶ ταλαντώσεις.

Στροφικὴ ἀρμονικὴ ταλάντωσις σ. 151.—Θεωρητικὴ διερεῦνσις τῆς στροφικῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως σ. 153.—Μέτρησις τῆς ροπῆς ἀδρανείας διὰ τῆς μεθόδου τῶν στροφικῶν ταλαντώσεων σ. 153.—Φυσικὸν ἔκκρεμὸς σ. 154.—Μέτρησις τοῦ g διὰ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ ἔκκρεμους σ. 156.—'Ασκήσεις σ. 157.

ΙΑ' Κεντρικαὶ κινήσεις.

Κεντρικὴ κίνησις σ. 157.—Θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν σ. 159.—Νόμοι τοῦ Kepler σ. 160.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΜΕΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΙΒ' Ἐλαστικότης.

'Ελαστικαὶ παραμορφώσεις σ. 161.—'Ελκυσμὸς καὶ θλίψις σ. 162.—Διάγραμμα μηχανώσεως σ. 163.—Κάμψις σ. 164.—Λυγισμὸς σ. 166.—Στρέψις σ. 166.—Στρέψις σύρματος σ. 168.—'Υπολογισμὸς τῆς κατευθυνούσης ροπῆς σωλήνος σ. 168.—'Υπολογισμὸς τῆς κατευθυνούσης ροπῆς σύρματος σ. 168.—'Ελαστικότης ὄγκου σ. 169.—'Ελαστικὴ ἀδράνεια σ. 169.—Σκληρότης σ. 170.—'Ασκήσεις σ. 171.

ΙΓ' Τριβή.

Γενικά περὶ τριβῆς σ. 172.—Τριβὴ ὀλισθήσεως σ. 173.—Νόμοι τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως σ. 174.—Στατικὴ τριβὴ σ. 175.—Τριβὴ κυλίσεως σ. 179.—'Ασκήσεις σ. 181.

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟΝ

ΙΔ' Παγκοσμία ἑλξις.

Νόμος τοῦ Νεύτωνος σ. 184.—Μέτρησις τῆς σταθερᾶς τῆς παγκοσμίας ἑλξεως σ. 184.—Βάρος σ. 185.—Γενικά περὶ πεδίων σ. 186.—Πεδίον βαρύτητος σ. 187.—Θεωρία τῆς μακροῦθεν ἐπιδράσεως καὶ θεωρία τοῦ πεδίου σ. 188.

ΜΕΡΟΣ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΙΕ' Κινούμενα συστήματα ἀναφορᾶς.

Δύναμις d'Alembert σ. 190.—Σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς σ. 190.—Σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ μετ' ἀσταθεράν ἐπι-

τάχυνσιν σ. 191.—Σύστημα ἀναφορᾶς, στρεφόμενον μὲ σταθεράν γωνιακὴν ταχύτητα σ. 193.—Ἡ Γῆ ὡς στρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς σ. 198.

ΜΕΡΟΣ ΟΓΔΟΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΙΓ' Ὑδροστατική.

Εἰσαγωγή εἰς τὴν Ὑδροστατικὴν σ. 201.—Πίσεις σ. 201.—Κατανομή τῆς πιέσεως ἐντὸς ὑγροῦ σ. 204.—Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἰσορροπούντων ὑγρῶν σ. 205.—Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους σ. 207.—Πλέσεις σ. 209.—Μέτρησις τῆς πυκνότητος στερεῶν καὶ ὑγρῶν σ. 209.—Συμπίεστότης τῶν ὑγρῶν σ. 212.—Δυνάμεις μεταξὺ μορίων σ. 212.—Σίφων σ. 213.—Ἐπιφανειακὴ τάσις σ. 214.—Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἰς καμπύλας ἐπιφανείας σ. 216.—Υγρὰ ὑμένα σ. 216.—Τριχοειδικὰ φαινόμενα σ. 219.—Μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς στενοῦ σωλήνος σ. 220.—Ἀσκήσεις σ. 221.

ΙΖ' Ἀεροστατική.

Ἰδιότητες τῶν ἀερίων σ. 222.—Κατανομή τῆς πιέσεως ἐντὸς ἀερίου σ. 222.—Μετάγγισις ἀερίων σ. 225.—Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους σ. 226.—Ἐπίδρασις τῆς ἀνώσεως ἐπὶ τῶν ἀποτρίψεων τῆς ζυγίσσεως σ. 226.—Ἀτμοσφαιρικὴ πίσις σ. 226.—Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως σ. 227.—Βαρόμετρα σ. 228.—Ἀσκήσεις σ. 228.

ΙΗ' Ὑδροδυναμική - Ἀεροδυναμική.

Γενικά περὶ ροῆς σ. 228.—Ἰδανικά καὶ πραγματικά ρευστὰ σ. 229.—Γενικά περὶ στρωτῆς ροῆς σ. 229.—Ροὴ ἰδανικῶν ρευστῶν σ. 231.—Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli σ. 223.—Θεώρημα τοῦ Torricelli σ. 235.—Ροὴ περὶ πλάκα, κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς· Σημεῖα ἀνακοπῆς σ. 235.—Ροὴ περὶ σφαῖραν σ. 236.—Μέτρησις ταχύτητος διὰ τοῦ σωλήνος Pitot σ. 236.—Ροὴ πραγματικῶν ρευστῶν σ. 238.—Ἐσωτερικὴ τριβὴ σ. 239.—Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ ἐντὸς σωλήνος σ. 241.—Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ κατὰ μῆκος πλακοῦ σ. 245.—Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ πλάκα, κάθετον ἐπὶ τὸ ρεῖμα σ. 246.—Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ σφαῖραν σ. 246.—Κριτήριον ἐμφανίσεως τῶν διαφορῶν μορφῶν ροῆς· Ἀριθμὸς τοῦ Reynolds σ. 248.—Μηχανικὴ ὁμοιότης σ. 249.—Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν σ. 250.—Ὑπολογισμὸς τῆς παροχῆς ἑνὸς σωλήνος διὰ τυρβώδη ροὴν σ. 253.—Στρόβιλοι σ. 254.—Κυκλοφορία σ. 257.—Μηχανισμὸς παραγωγῆς καὶ ἀποσπάσεως στροβίλων σ. 258.—Δυναμικὴ ἄνωσις· Φαινόμενον Magnus σ. 259.—Δυναμικὴ ἄνωσις ἐπιπέδου καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας σ. 260.—Πτέρυξ ἀεροπλάνου σ. 261.—Σχέσις μεταξὺ ἀντιστάσεως, δυναμικῆς ἀνώσεως καὶ γωνίας προσβολῆς σ. 261.—Προωστικαὶ διατάξεις ἀεροπλάνων σ. 267.—Πύραυλοι σ. 267.—Ὑπερηχητικαὶ ταχύτητες· Κύματα Mach σ. 267.—Ὑπερηχητικὰ ἀεροπλάνα σ. 270.—Μέθοδοι μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς ὑγρῶν σ. 271.—Μανόμετρα σ. 274.—Ἀεραντλία σ. 277.—Ὑδραντλία σ. 278.—Ὑδροκινητήρες σ. 279.—Ὑδροηλεκτρικαὶ ἐγκαταστάσεις σ. 282.

ΜΕΡΟΣ ΕΝΑΤΟΝ

ΚΥΜΑΤΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Κ' Κυματική.

Γενικά περὶ κυμάτων σ. 283.—Ἐγκάρσια κύματα σ. 284.—Διαμήκη κύματα σ. 284.—Ὡκότης σ. 285.—Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύματος σ. 286.—Διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ κύ-

ματος σ. 288.—Διασπασμός σ. 289.—Σφαιρικά καὶ ἐπίπεδα κύματα-Νόμος τῆς εὐθυγράμμου διαδόσεως σ. 289.—Συμβολὴ τῶν κυμάτων σ. 290.—'Αρχὴ τοῦ Huygens σ. 295.—'Ανάκλασις σ. 296.—Διάθλασις σ. 297.—Περίθλασις σ. 298.—'Αρχὴ "Ηρωῆς-Fermat σ. 301.—Φαινόμενον Doppler-Fizeau σ. 301.—Πόλωσις σ. 304.—Μεταφορὰ ἐνεργείας διὰ τοῦ κύματος σ. 305.—Σχέσις πλάτους καὶ ἐνεργείας σ. 306.—Μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως σφαιρικοῦ κύματος μετὰ τῆς ἀποστάσεως σ. 306.—'Εξασθένεισις τῶν κυμάτων σ. 306.—Κλίμαξ συγκρίσεως τῆς ἐντάσεως δύο κυμάτων σ. 307.—Διάδοσις ἐλαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν στερεῶν σ. 308.—'Υπολογισμός τῆς ταχύτητος διαδόσεως ἐλαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν στερεῶν σ. 309.—Μόνιμα στάσιμα ἐλαστικά κύματα εἰς τὰ στερεὰ σ. 311.—Χορδαὶ σ. 311.—Ράβδοι σ. 313.—Μεμβράναι καὶ πλάκες σ. 313.—Διάδοσις ἐλαστικῶν κυμάτων εἰς τὰ ὑγρά σ. 314.—Διάδοσις ἐλαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν ἀερίων σ. 315.—Στάσιμα ἐλαστικά κύματα εἰς τὰ ἀέρια σ. 316.—Μεταβολὴ τῆς φάσεως κατὰ τὴν ἀνάκλασιν σ. 319.—Στροβοσκοπικὴ παρατήρησις σ. 319.

ΚΑ' Ἀκουστικὴ.

Γενικὰ περὶ ἤχων σ. 321.—Πηγαὶ ἤχων σ. 322.—'Εκπέμπουσαι ἐπιφάνειαι σ. 325.—'Αντηχεῖα σ. 326.—'Ανίχνευσις ἤχων σ. 326.—'Ανάλυσις ἤχων σ. 327.—Κυματικά φαινόμενα εἰς τοὺς ἤχους σ. 328.—'Υπέρηχοι σ. 331.—Μέτρησις συχνότητος, μήκους κύματος καὶ ταχύτητος τῶν ἤχων σ. 333.

ΚΒ' Φυσιολογικὴ Ἀκουστικὴ.

Τὸ οὖς σ. 335.—'Υποκειμενικά χαρακτηριστικά τῶν ἤχων σ. 337.—Προσδιορισμός τῆς διευθύνσεως, ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ὁ ἤχος σ. 340.—'Ακουστότης τῶν ἤχων καὶ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὴν συχνότητα σ. 340.—Κλίμαξ ἀκουστότητος σ. 341.—Κλίμαξ ἀπολύτου ἐντάσεως τῶν ἤχων σ. 343.—'Ανθρωπίνη φωνὴ σ. 343.—Φυσικὴ θεωρία τῆς Μουσικῆς-Μουσικὰ διαστήματα σ. 345.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

- σ. 181 Στίχος 5 ἀντὶ $K \cdot R - F \cdot l$ γράφει $K \cdot R - B \cdot l$.
σ. 181 Νὰ διαγραφοῦν οἱ στίχοι 7ος καὶ 8ος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Περιεχόμενον τῆς Μηχανικῆς. Ἡ Μηχανικὴ εἶναι τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων τοῦ περιβάλλοντος ἡμᾶς κόσμου καὶ τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι τὰς προκαλοῦν.

Ὅλα τὰ σώματα ἔχουν ἔκτασιν, καταλαμβάνουν, δηλ., πεπερασμένον χώρον. Ἡ Μηχανικὴ, ὁμως, ἐνίοτε, διὰ τὴν ἀπλουστεύσιν διάφορα ζητήματα, θεωρεῖ τὰς διαστάσεις τῶν σωμάτων τόσον μικράς, ὥστε ἐν σῶμα νὰ καταλήγῃ εἰς **ὕλικὸν σημεῖον**. Κατὰ ταῦτα, τὸ **ὕλικὸν σημεῖον** εἶναι ἐν μαθηματικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν. Εἰς ἄλλας, ὁμως, περιπτώσεις λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ διαστάσεις τοῦ σώματος, ὁπότε τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πολλῶν ὑλικῶν σημείων, τόσον στερεῶς συνδεδεμένων μεταξὺ των, ὥστε αἱ ἀμοιβαῖαι ἀποστάσεις των νὰ παραμένουν πάντοτε ἀμετάβλητοι (**ἀπολύτως στερεὰ σώματα**). Εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει μόνον κατὰ προσέγγισιν, καθόσον τὰ σώματα δύναται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων, νὰ παραμορφωθοῦν καί, ἐπομένως, αἱ ἀποστάσεις τῶν ὑλικῶν σημείων δὲν παραμένουν ἀμετάβλητοι.

Εἰς τὰ ὑγρά καὶ τὰ ἀέρια αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ τῶν ὑλικῶν σημείων (δηλ. τῶν μορίων), εἶναι τόσον μικραὶ, ὥστε ταῦτα νὰ μὴ συγκροτοῦνται εἰς τὰς θέσεις των καὶ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος νὰ μὴ εἶναι καθωρισμένον, ἀλλὰ νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐκάστοτε ἐπικρατούντων ἐξωτερικῶν ὁρῶν (σχήμα περιέχοντος δοχείου κ.λ.).

Κατὰ ταῦτα, διακρίνομεν τὴν *Μηχανικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου*, τὴν *Μηχανικὴν τῶν στερεῶν σωμάτων* καὶ τὴν *Μηχανικὴν τῶν ρευστῶν*.

Ἐκτὸς τοῦ τρόπου τούτου τῆς διαιρέσεως, ἡ Μηχανικὴ διαιρεῖται καὶ εἰς τὴν *Κινηματικὴν*, τὸ μέρος, δηλ., τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὴν κίνησιν, ἀνεξαρτήτως τῶν αἰτίων αὐτῆς (δηλ. τῶν δυνάμεων).

τὴν *Στατικὴν*, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις καὶ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας αὗται ἰσορροποῦν καὶ

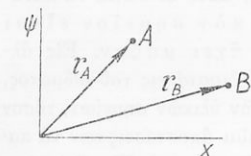
τὴν *Δυναμικὴν*, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὑπ' αὐτῶν παραγομένην κίνησιν.

§ 2. Φυσικὰ μεγέθη καὶ μέτρησις αὐτῶν. Πᾶν μέγεθος, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν φυσικῶν φαινομένων, καλεῖται **φυσικὸν μέγεθος**. Ἡ μέτρησις ἐνὸς φυσικοῦ μεγέθους συνίσταται εἰς τὴν σύγκρισιν αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, τὸ ὁποῖον, κατὰ συνθήκην, δεχό-

μεθα ὡς *μονάδα, ἀριθμητική* δὲ *τιμὴ* τοῦ μετρούμενου μεγέθους καλεῖται ὁ ἐκ τῆς συγκρίσεως προκύπτων ἀριθμός.

Τὰ φυσικὰ μεγέθη διαιροῦνται εἰς τὰ μονόμετρα καὶ τὰ ἀνυσματικά. **Μονόμετρον** λέγεται τὸ φυσικὸν μέγεθος, τὸ ὀριζόμενον τελείως ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς καὶ τῆς μονάδος αὐτοῦ. Μονόμετρον μέγεθος εἶναι π.χ., ἡ μᾶζα (5 gr), ἡ θερμότης (10 kcal) κ.ἄ. **Ἀνυσματικὸν** λέγεται τὸ μέγεθος, διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ὁποίου χρειάζονται, ἐκτὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς καὶ τῆς μονάδος (τὰ ὁποῖα, ὁμοῦ, ἀποτελοῦν τὸ **μέτρον** τοῦ ἀνυσματικοῦ μεγέθους) δύο ἐπὶ πλεόν στοιχεῖα, ἡ **διεύθυνσις** καὶ ἡ **φορὰ** αὐτοῦ. Ἀνυσματικά μεγέθη εἶναι, π.χ., ἡ δύναμις, ἡ ταχύτης κ.ἄ.

Ἐν ἀνυσματικὸν μέγεθος παρίσταται δι' ἐνὸς **ἀνύσματος**, δηλ., διὰ βέλους, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν διεύθυνσις καὶ φορὰ παρέχει τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τοῦ θεωρουμένου ἀνυσματικοῦ μεγέθους, τὸ δὲ μῆκος τὸ μέτρον αὐτοῦ. Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα, καλεῖται **φορεὺς** (ἢ **στήριγμα**) τοῦ ἀνύσματος. Ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα, καλοῦνται **συγγραμμικά**.



Σχ. 1. Ἡ θέσις τῶν σημείων A καὶ B ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x, y καθορίζεται διὰ τῶν ἐπιβατικών ἀκτίνων r_A καὶ r_B .

Ἐπιβατικὴ ἀκτίς. Ἀνυσμα, συχνὰ συναντῶμενον εἰς τὴν Μηχανικὴν, εἶναι ἡ **ἐπιβατικὴ ἀκτίς**, ἡ ὁποία καθορίζει τὴν θέσιν ἐνὸς σημείου ὡς πρὸς ἄλλο δεδομένον σημεῖον. Οὕτω, ἡ θέσις τῶν δύο σημείων A καὶ B (σχ. 1) καθορίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέ-

δου χ, ψ διὰ τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων r_A καὶ r_B .

§ 3. Εἶδη ἀνυσμάτων. Τὰ ἀνύσματα, ἀναλόγως τῶν ιδιοτήτων τῶν διαφόρων ἀνυσματικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα παριστάνουν, διακρίνονται εἰς ἐλεύθερα, ὀλισθαίνοντα καὶ ἐφαρμοστά.

Ἐλεύθερον καλεῖται ἓν ἄνυσμα, ὅταν δύναται νὰ μετατεθῇ, εἴτε ἐπὶ τοῦ φορέως του, εἴτε παραλλήλως πρὸς αὐτό. Ἐλεύθερον ἄνυσμα, π.χ., εἶναι ἡ ροπὴ ἐνὸς ζεύγους δυνάμεων (βλ. § 77).

Ὀλισθαίνον καλεῖται τὸ ἄνυσμα, τὸ ὁποῖον δύναται μὲν νὰ μετατεθῇ ἐπὶ τοῦ φορέως του, ἀλλ' ὄχι παραλλήλως πρὸς αὐτόν. Τοιοῦτο ἄνυσμα εἶναι, π.χ., ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος.

Ἐφαρμοστὸν καλεῖται ἓν ἄνυσμα, ὅταν ἔχῃ ὀρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς καί, συνεπῶς, δὲν δύναται νὰ μετατεθῇ οὔτε ἐπὶ τοῦ φορέως του, οὔτε παραλλήλως πρὸς αὐτό. Ἐφαρμοστὸν ἄνυσμα εἶναι ἡ ταχύτης ἐνὸς κινουμένου ὕλικου σημείου, ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ ὕλικου σημείου κ.ἄ.

§ 4. Θεμελιώδεις καὶ παράγωγοι μονάδες. Διὰ τὴν μέτρησιν ἐκάστου φυσικοῦ μεγέθους πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀντίστοιχον μονάδα. Δυνατόν, ἐν τούτοις, νὰ ἐκλέξωμεν ὀρισμένας **θεμελιώδεις μονάδας** καὶ ἐξ αὐ-

τῶν νὰ λάβωμεν, τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διάφορα μεγέθη μεταξύ των, *παραγώγους μονάδας*.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφορῶν μεγεθῶν, τῶν συναντωμένων εἰς τὴν Μηχανικὴν, ἀρκοῦν τρεῖς θεμελιώδεις μονάδες, ἐκ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ προκύψουν ὅλοι αἱ παράγωγοι. Αἱ τρεῖς αὗται μονάδες εἶναι δυνατόν νὰ ἐκλεγοῦν ἐντελῶς αὐθαίρετως, πρέπει, ὅμως, διὰ πρακτικούς λόγους, νὰ δύνανται ν' ἀναπαραχθοῦν ἐυκόλως, αἱ ἀριθμητικαὶ δὲ τιμαί, αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν μετρήσεων τῶν διαφορῶν φυσικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν, νὰ εἶναι εὐχρηστοί.

§ 5. Συστήματα μονάδων. Διεθνῶς ἐπεκράτησεν ὅπως εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς μετρήσεις, τῆς Μηχανικῆς κυρίως, χρησιμοποιοῦνται δύο συστήματα μονάδων: τὸ σύστημα C.G.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν σύστημα.

Εἰς τὸ *σύστημα μονάδων C.G.S. (centimètre, gramme, seconde)* ἐξελέγησαν ὡς θεμελιώδη μεγέθη τὸ *μῆκος*, ἡ *μᾶζα* καὶ ὁ *χρόνος*, με ἀντιστοίχους μονάδας τὸ *ἐκατοστομετρον (cm)* διὰ τὸ μῆκος, τὸ *γραμμάριον (gr)* διὰ τὴν μᾶζαν καὶ τὸ *δευτερόλεπτον (sec)* διὰ τὸν χρόνον. Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν αἱ διάφοροι παράγωγοι μονάδες, ὅπως ἡ μονὰς ἐμβαδοῦ (1 cm^2), ἡ μονὰς πυκνότητος (1 gr/cm^3) κ.λ.

Τὸ *Τεχνικὸν σύστημα (T.S.)* μονάδων ἔχει ὡς θεμελιώδη μεγέθη τὸ *μῆκος*, τὴν *δύναμιν* καὶ τὸν *χρόνον*, με ἀντιστοίχους μονάδας τὸ *μέτρον (m)* διὰ τὸ μῆκος, τὸ *χιλιόγραμμα βάρους (kg^r*)* διὰ τὴν δύναμιν καὶ τὸ *δευτερόλεπτον (sec)* διὰ τὸν χρόνον. Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν διάφοροι παράγωγοι μονάδες, ὅπως ἡ μονὰς μάζης ($1 \text{ kg^r*} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$) κ.λ.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐνῶ εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ἡ μᾶζα εἶναι θεμελιώδης μέγεθος — καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ δύναμις προκύπτει ὡς παράγωγον μέγεθος —, εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα ἡ δύναμις εἶναι θεμελιώδης μέγεθος καὶ ἡ μᾶζα παράγωγον.

Παραλλαγὴ τοῦ συστήματος C.G.S. εἶναι τὸ καλούμενον *σύστημα M.K.S.* Εἰς τοῦτο θεμελιώδη μεγέθη λαμβάνονται τὰ θεμελιώδη μεγέθη τοῦ συστήματος C.G.S. (δηλ., μῆκος, μᾶζα, χρόνος), αἱ μονάδες, ὅμως, εἶναι διάφοροι καί, συγκεκριμένως, τὸ 1 m , τὸ $1 \text{ kg^{r}}$ καὶ τὸ 1 sec .

§ 6. Διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Πᾶν φυσικὸν μέγεθος εὐρίσκεται εἰς ὠρισμένην σχέσιν πρὸς τὰ θεμελιώδη καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς συνάρτησις αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., εἶναι

$$\text{ἐμβαδὸν } S = \text{μῆκος} \cdot \text{μῆκος},$$

$$\text{ταχύτης } v = \frac{\text{μῆκος}}{\text{χρόνος}}.$$

* Ἄν παραστήσωμεν διὰ τῶν συμβόλων L , M , T τὸ μῆκος (*longueur*), τὴν μᾶζαν (*masse*) καὶ τὸν χρόνον (*temps*), αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γράφονται,

συμβολικῶς, ὡς ἑξῆς :

$$[S] = [L] \cdot [L] = [L^2]$$

$$[v] = \left[\frac{L}{T} \right] = [L \cdot T^{-1}].$$

Αἱ συμβολικαὶ αὗται σχέσεις δύνανται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς :

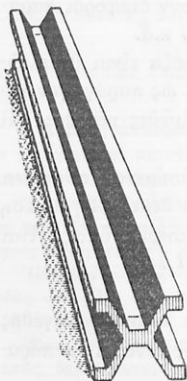
$$[S] = [L^2 \cdot M^0 \cdot T^0]$$

$$[v] = [L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}].$$

Οἱ ἐκθέται τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν ὀνομάζονται **διαστάσεις** τῶν μεγεθῶν. Οὕτω, αἱ διαστάσεις τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 2, 0, 0, τῆς ταχύτητος 1, 0, -1 κ.λ. Καταχρηστικῶς, ὅμως, λέγοντες διαστάσεις, π.χ., τοῦ ἐμβαδοῦ S , ἐννοοῦμεν ὅλον τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἄνω ἐξισώσεως, δηλ., τὸ $[L^2]$ (διότι $M^0 = 1$ καὶ $T^0 = 1$).

Εἶναι προφανὲς ὅτι οἱ καθαροὶ ἀριθμοὶ ἔχουν διαστάσεις 0, 0, 0.

§ 7. Διαστάσεις τῶν τύπων. Οἱ φυσικοὶ τύποι εἶναι ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου μέλους τῆς ἐξισώσεως. Τὰ μονώνυμα (ἢ πολυνώνυμα) ἐκάστου μέλους εἶναι γινόμενα ἢ πηλίκα φυσικῶν μεγεθῶν καὶ, ὡς ἐκ τούτου, ἔχουν διαστάσεις, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται ἐκ τῶν διαστάσεων τῶν ἀποτελούντων αὐτὰ συστατικῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἰσότης καὶ πρόσθεσις εἶναι δυνατὴ μόνον μεταξὺ ὁμοειδῶν μεγεθῶν, ἔπεται ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἰσότης μεταξὺ τῶν διαστάσεων τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως. Κατὰ ταῦτα, ὁ ἔλεγχος διὰ τῶν διαστάσεων εἶναι δυνατόν νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κριτήριον τοῦ ἂν εἴς φυσικὸς τύπος εἶναι ἐσφαλμένος.



Σχ. 2. Σχῆμα τοῦ προτύπου μέτρου.

§ 8. Μονάδες μήκους. Ὅπως εἶδομεν, ὡς μονὰς μήκους εἰς τὸ σύστημα C.G.S. λαμβάνεται τὸ *ἐκατοστόμετρον*. Τοῦτο ὀρίζεται ὡς τὸ $1/100$ τοῦ *προτύπου μέτρου*, δηλ., τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο χαραγῶν ἐφ' ἑνὸς κανόνος ἐξ ἱριδιούχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ Bureau International des Poids et Mesures εἰς Sèvres πλησίον τῶν Παρισίων (*). Ὁ κανὼν οὗτος ἔχει τὸ μὴν εἰς σχῆμα H (σχ. 2), οὕτως ὥστε τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐγίνεν ἡ χάραξις, νὰ συμπίπτῃ ἀκριβῶς μὲ τὰς οὐδετέρας ἵνας (βλ. Κεφ.

(*) Τὸ μέτρον εἶχεν ὀρισθῇ, ἀρχικῶς, ὡς τὸ $1/10\,000\,000$ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Τὸ οὕτως ὀριζόμενον μέτρον εἶναι, περίπου, κατὰ $0,1\%$ μικρότερον τοῦ σημερινοῦ προτύπου.

Ελαστικότητας), ὁπότε ἡ ἀπόστασίς των, κατὰ τυχὸν κάμψιν, παραμένει ἀμετάβλητος.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 cm χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ :

1 km (χιλιόμετρον)	$= 10^5\text{ cm}$
1 m (μέτρον)	$= 10^2\text{ cm}$
1 dm (δεκατόμετρον)	$= 10\text{ cm}$
1 mm (χιλιοστόμετρον)	$= 10^{-1}\text{ cm}$
$1\text{ }\mu$ (μικρὸν)	$= 10^{-4}\text{ cm}$
$1\text{ }\text{\AA}$ (<i>Ångström</i>)	$= 10^{-8}\text{ cm}$.

Διὰ νὰ λάβῃ τις μίαν ἰδέαν τῆς μονάδος 1 μικρὸν , ἀναφέρομεν ὅτι τὸ πᾶχος ἑνὸς φύλλου σιγαροχαρτοῦ εἶναι, περίπου, ἴσον πρὸς $10\text{ }\mu$.

Ἡ μονὰς $1\text{ }\text{\AA}$ χρησιμοποιεῖται, συνήθως, εἰς τὴν Ἀτομικὴν Φυσικὴν. Οὕτω, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀτόμων ἑνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς $3\text{ }\text{\AA}$.

Πρὸς τούτοις, εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ ἑξῆς μονάδες (*):
Εἰς τὴν φασματοσκοπίαν τῶν ἀκτίνων Röntgen ἡ μονὰς

$$1\text{ X (χί)} = 10^{-11}\text{ cm},$$

εἰς δὲ τὴν Ἀστρονομίαν αἱ μονάδες

$$\begin{aligned} 1\text{ ἔτος φωτός} &= 0,946 \cdot 10^{18}\text{ cm} \\ 1\text{ Parsec} &= 3,08 \cdot 10^{18}\text{ cm}. \end{aligned}$$

Ἐν ἔτος φωτός εἶναι ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διατρέχει τὸ φῶς, ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος, ἴσον πρὸς ἓν ἔτος.

Ἐν Parsec (ἐκ τῶν λέξεων *parallaxe* καὶ *seconde*) εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ Ἡλίου καὶ ἐκείνου τοῦ σημείου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς τροχιάς τῆς Γῆς φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ τῆς μοίρας.

Εἰς τὴν ναυτιλίαν χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

$$1\text{ ναυτικὸν μίλιον} = 1853\text{ m}.$$

Τὸ μῆκος τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων ἑνὸς μεσημβρινοῦ, τὰ ὁποῖα ὑποτείνουν τὸξον ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας.

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀναπαραγωγή τοῦ προτύπου μέτρου, ἐν περιπτώσει καταστροφῆς του, ἐγένετο σύγκρισις πρὸς τὸ μῆκος κύματος μιᾶς γραμμῆς τοῦ ὀπτικοῦ φάσματος τοῦ καδμίου (Cd). Οὕτως εὐρέθη ὅτι εἰς τὸν ἀέρα καὶ ὑπὸ κανονικῆν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν 15° C περιέχονται εἰς ἓν μέτρον $1553164,1$ μῆχη κύματος τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς τοῦ καδμίου.

§ 9. Μονάδες μάζης. Ὡς μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα C.G.S. χρησιμοποιεῖται τὸ **γραμμάριον (μάζης)**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $1/1000$ τῆς μάζης τοῦ **πρωτοῦ χιλιογράμμου**, δηλ., ἑνὸς ἑξ ἰριδιούχου λευκοχού-

(*) Βλ. καὶ § 13.

σου κατεσκευασμένου κυλίνδρου, φυλασσομένου εις τὸ Bureau International des Poids et Mesures. Τὸ γραμμάριον, κατὰ τὸν ἀρχικὸν του ὁρισμόν, εἶναι ἡ μᾶζα ἐνὸς cm^3 ὕδατος, ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας $+4^{\circ} C$ (*).

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 gr , χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ :

$$\begin{aligned} 1\text{ t (τόννος)} &= 10^3\text{ kgr} \\ 1\text{ kgr (χιλιόγραμμα)} &= 10^3\text{ gr} \\ 1\text{ mgr (χιλιοστόγραμμα)} &= 10^{-3}\text{ gr} \\ 1\text{ γ (γάμμα)} &= 10^{-6}\text{ gr}. \end{aligned}$$

Εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα ὡς μονὰς μᾶζης χρησιμοποιεῖται τὸ $1\text{ kgr} \cdot m^{-1} \cdot sec^2$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **τεχνικὴ μονὰς μᾶζης** ($T.M.$). Εἶναι δὲ

$$1\text{ T.M.} = 9,81\text{ kgr}.$$

Ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος ταύτης δίδεται κατωτέρω εἰς τὴν § 49.

Μονάδες μᾶζης, χρησιμοποιούμεναι συνήθως εἰς τὴν Χημείαν, εἶναι τὸ **γραμμοάτομον** καὶ τὸ **γραμμομόριον**. Αἱ μονάδες αὗται ὁρίζονται ὡς ἐξῆς :

Γραμμοάτομον ἐνὸς στοιχείου καλεῖται ἡ ποσότης ἐκείνη τῆς ὕλης ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ στοιχείου, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν τόσων γραμμαρίων, ὅσον εἶναι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ στοιχείου. Οὕτω, ἐπειδὴ τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 63,54, ἐν **γραμμοάτομον** χαλκοῦ εἶναι ποσότης χαλκοῦ, μᾶζης 63,54 gr .

Γραμμομόριον (Mol) μιᾶς οὐσίας καλεῖται ἡ ποσότης ἐκείνη τῆς ὕλης, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν τόσων γραμμαρίων, ὅσον εἶναι τὸ μοριακὸν βάρος τῆς οὐσίας. Οὕτω, ἐπειδὴ τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι 18, τὸ **γραμμομόριον** τοῦ ὕδατος εἶναι ποσότης ὕδατος, μᾶζης 18 gr .

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ μονὰς **γραμμομόριον** θὰ χρησιμοποιεῖται μόνον ὅταν ἀναφέρεται εἰς στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μόρια (π.χ., ὕδρογονον εἰς ἀέριον κατὰστασιν). Ἀντιστοίχως, τὸ **γραμμοάτομον** θὰ χρησιμοποιεῖται μόνον, ὅταν ἀναφέρεται εἰς στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄτομα (π.χ. χαλκός).

§ 10. Μονάδες χρόνου. Ὡς μονὰς χρόνου τόσον εἰς τὸ σύστημα $C.G.S.$ ὅσον καὶ εἰς τὸ $T.S.$ λαμβάνεται τὸ **δευτερόλεπτον** (sec), τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $1/86400 = 1/24 \cdot 60 \cdot 60$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας (**).

(*) Τὸ οὕτως ὁριζόμενον γραμμάριον εἶναι μικρότερον τοῦ σήμερον χρησιμοποιουμένου κατὰ 0,03 $\frac{1}{100}$.

(**) *Μέση ἡλιακὴ ἡμέρα* καλεῖται ὁ κατὰ μέσον ὅρον χρόνος, ὁ παρερχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεσοσημερινῶν τοῦ Ἡλίου. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ δευτερολέπτου πρέπει νὰ λαμβάνεται ἡ μέση τιμὴ, διότι, ὡς γνωστόν, ἡ διάρκεια τῆς ἀληθοῦς ἡμέρας μεταβάλλεται κατὰ διαφόρους ἐποχὰς τοῦ ἔτους.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 sec , χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, καὶ αἱ ἑξῆς :

$$1 \text{ min (λεπτόν)} = 60 \text{ sec}$$

$$1 \text{ h (ώρα)} = 60 \cdot 60 \text{ sec.}$$

§ 11. Μονάδες έμβαδοῦ καὶ ὄγκου. Ἡ παράγωγος μονὰς έμβαδοῦ εἰς τὸ σύστημα $C.G.S.$ εἶναι τὸ **τετραγωνικὸν εκατοστόμετρον** (1 cm^2). Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται, ἀντ' αὐτοῦ, τὸ 1 mm^2 καὶ τὸ 1 m^2 .

Ὡς μονὰς ὄγκου εἰς τὸ σύστημα $C.G.S.$ λαμβάνεται τὸ **κυβικὸν εκατοστόμετρον** (1 cm^3). Ἐπὶ πλέον χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ μονάδες

$$1 \text{ lt (λίτρον)} = 10^3 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 (\text{κυβ. μέτρον}) = 10^3 \text{ lt.}$$

§ 12. Γωνίαι καὶ μονάδες αὐτῶν. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, θεωροῦμεν ἕνα κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς των καὶ ἀκτῖνα r οἰανδήποτε. Οὕτω, μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν περιλαμβάνεται ἕν τόξον, μήκους s . Τὸ πηλίκον τοῦ μήκους s τοῦ τόξου τούτου διὰ τῆς ἀκτίνος r καλεῖται (ἐπίπεδος) **γωνία** φ . Ἡτοι εἶναι

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \quad (1)$$

Ἡ γωνία, ὥς πηλίκον δύο μηκῶν, εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς. Ὡς μονὰς γωνίας λαμβάνεται τὸ **ἀκτίριον** (*radian*). Ἐν **ἀκτίριον** ἴσονται μὲ τὴν ἐπικεντρον ἐκείνην γωνίαν, ἥ ὁποία ἐπὶ κύκλον, ἀκτίνος r , βαίνει εἰς τόξον, μήκους ἴσου πρὸς r . Ἐπομένως εἰς πλήρη κύκλον ἀντιστοιχεῖ γωνία 2π **ἀκτιρίων**.

Ἄλλη μονὰς γωνίας εἶναι ἡ **μοῖρα** (1°), ἥ ὁποία προκύπτει ἐξ ὑποδιαίρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360 ἴσα μέρη, καὶ ὁ **βαθμός**, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐξ ὑποδιαίρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 400 ἴσα μέρη.

Ἡ σχέσις μεταξὺ **ἀκτιρίων** καὶ **μοίρας** προκύπτει ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι

$$\frac{2\pi \text{ ἀκτίρια ἀντιστοιχοῦν εἰς } 360^\circ}{1 \text{ ἀκτίριον} \quad x;}$$

$$x = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296^\circ$$

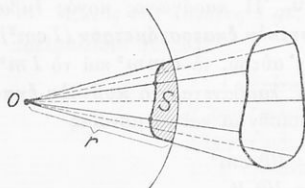
$$\text{ἦτοι:} \quad 1 \text{ rad} = 57,296^\circ.$$

Στερεὰ γωνία. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ σύνολον τῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου O πρὸς τὴν περίμετρον δεδομένης ἐπιφανείας φερομένων εὐθειῶν (σχ. 3), θεωροῦμεν σφαῖραν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα r οἰανδήποτε. Τὸ πηλίκον τοῦ έμβαδοῦ S , τὸ ὁποῖον ἀποκόπτεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτίνος καλεῖται **στερεὰ γωνία** Ω .

Ἦτοι

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Ἡ στερεὰ γωνία, ὡς πληκτικόν δύο ἐμβαδῶν, εἶναι καθαρός ἀριθμός. Μονὰς στερεᾶς γωνίας λαμβάνεται τὸ στερακτίσιον.



Σχ. 3.

Ἐν στερακτίσιον ἴσεται μὲ ἐκείνην τὴν στερεάν γωνίαν, ἥ ὁποία, ἐπὶ σφαίρας, ἀκτίνας r , ἀποκόπτει ἐπιφάνειαν, ἐμβαδοῦ, ἴσου πρὸς r^2 .

Κατὰ ταῦτα, εἰς μίαν σφαῖραν ἀντιστοιχεῖ στερεὰ γωνία 4π στερακτινίων.

§ 13. Μονάδες μήκους, ἐμβαδοῦ κ.λ., χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας. Συνήθως, εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας χρησιμοποιοῦνται αἱ ἑξῆς μονάδες:

- α) Μονάδες μήκους: $1 \text{ Ἴντ} \zeta \alpha$ (in) = 2,54 cm
 1 ποῦς (ft) = 12 in = 30,5 cm
 1 ὕαροδα (yd) = 3 πόδες = 0,914 m
 1 μίλιον (statute ἢ british mile) = 1609 m.

β) Μονάδες ἐμβαδοῦ. Ὡς μονάδες ἐμβαδοῦ λαμβάνονται ἡ τετραγωνικὴ Ἴντζα, ὁ τετραγωνικὸς ποῦς κ.λ.

γ) Μονάδες ὄγκου. Ἐκτὸς τῶν μονάδων yd^3 , ft^3 καὶ in^3 , χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ ἑξῆς μονάδες ὄγκου: 1 πίντα (pt), 1 κούαρτ (qt) = 2 pt, 1 γαλόνιον = 4 qt. Προκειμένου περὶ ὄγκου ὕδρων, τὸ γαλόνιον ὀρίζεται ἴσον πρὸς 1 British gallon = 4,546 lt εἰς τὴν Μεγάλην Βρετανίαν καὶ 1 gallon (U.S.) = 3,785 lt εἰς τὰς Ἠνωμένας Πολιτείας.

Ἐν Ἑλλάδι ἡ βενζίνη πωλεῖται εἰς (βρετανικά) γαλόνια.

δ) Μονάδες μάζης. Εἰς τὸ ἐμπόριον χρησιμοποιοῦνται αἱ μονάδες

$$1 \text{ οὐγγία (oz. Av)}^* = 28,35 \text{ gr}$$

$$1 \text{ λίμπρα (lb. Av)} = 16 \text{ oz} = 453,6 \text{ gr.}$$

Ἐνίοτε (π.χ. ἐν τῇ Φαρμακευτικῇ) χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ κατὰ τι διάφοροι μονάδες

$$1 \text{ οὐγγία (oz. t)}^{**} = 31,10 \text{ gr}$$

$$1 \text{ λίμπρα (lb. t)} = 373,2 \text{ gr.}$$

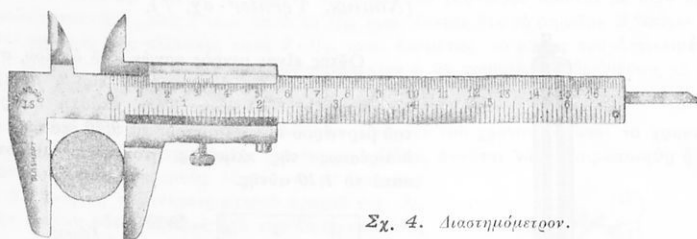
§ 14. Μέτρησις μήκους. Τὰ μήκη μετροῦμεν κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἀπλούστερος εἶναι ὁ δι' ἐπιθέσεως ἐπὶ τοῦ πρὸς μέτρησιν ἀντικειμένου ἐνὸς κανόνος, διηρημένου εἰς mm. Διὰ τῆς τοιαύτης μετρήσεως ἐπιτυγχάνεται ἀκρίβεια περίπου 0,5 mm. Ὄταν τὸ πρὸς μέτρησιν μῆκος εἶναι πολλῶν μέτρων, χρησιμοποιοῦνται, ἀντὶ κανόνος, ταινίαι (μετροταινίαι) ἢ ἄλυσες ἐκ χάλυβος.

Διὰ μετρήσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια περίπου 1/10 τοῦ mm, χρησιμοποιεῖται τὸ διαστημόμετρον (καλίμπρα) (σχ. 4). Διὰ τὴν μέτρησιν

(*) Av = Avoirdupois.

(**) t = Troy.

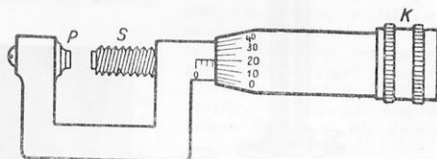
φέρεται τὸ ἀντικείμενον μεταξύ τῶν δύο σιαγόνων, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἀναγινώσκεται ἐπὶ τῆς κλίμακος, τῇ βοηθείᾳ βεργιέρου (βλ. κατωτέρω).



Σχ. 4. Διαστημόμετρον.

Συνήθως, ἡ κλίμαξ εἶναι ὑποδιηρημένη εἰς mm καὶ εἰς ἴντσας. Διὰ χρησιμοποίησης τῶν ἐξωτερικῶν παρεῖων τῶν σιαγόνων τοῦ διαστημομέτρου (ἄνω σιαγόνες εἰς τὸ σχῆμα 4), δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος σωλήνων, ἐνῶ διὰ τῆς εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὄργάνου γλωσσίδος (εἰς τὸ σχῆμα 4 δεξιῶ) μετρεῖται τὸ βάθος ἐντομῶν κ.λ.

Διὰ μετρήσεις μεγαλυτέρας ἀκριβείας (μέχρις $1/100 mm$) χρησιμοποιεῖται τὸ **μικροόμετρον** (σχ. 5). Τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου εἶναι ἴσον πρὸς $1 mm$ καὶ τὸ τύμπανον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 μέρη. Οὕτω, δι' ἐκάστην ὑποδιαίρεσιν τοῦ τυμπάνου, ὁ μικρομετρικὸς κοχλίας S προχωρεῖ κατὰ $1/100$ τοῦ χιλιοστομέτρου. Πρὸ ἐκάστης μετρήσεως πρέπει νὰ φέρωμεν τὸν κοχλίαν



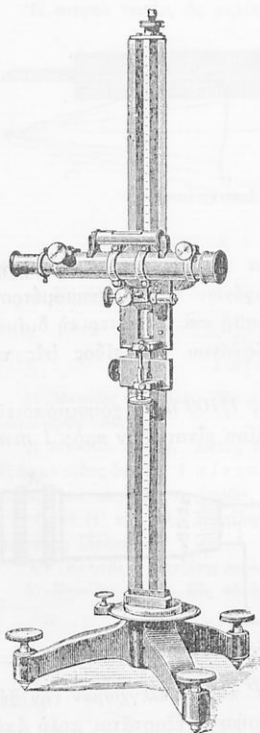
Σχ. 5. Μικροόμετρον.

εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν ἀπέναντι αὐτοῦ κύλινδρον P καὶ νὰ ἐλέγχωμεν τὴν θέσιν τοῦ μηδενός. Ἐπειδὴ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἐξαρτᾶται πολὺ ἀπὸ τὸ «σφίξιμο» τοῦ κοχλίου, προβλέπεται μία κινητὴ κεφαλὴ K , ἡ ὁποία, δι' ἑνὸς ἑλατηρίου, πιέζεται ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ κοχλίου καὶ τὸν παρασύρει, μόνον ἔφ' ὅσον ἡ ὑπὸ τῆς χειρὸς μεταδιδομένη ροπὴ δὲν ὑπερβαίνει ὁρισμένην τιμὴν. Ἐὰν ἡ ροπὴ γίνῃ μεγαλυτέρα, ἡ κεφαλὴ περιστρέφεται ἐλευθέρως, χωρὶς νὰ παρασύρῃ εἰς περιστροφὴν τὸν κοχλίαν.

Διὰ τὴν μέτρησιν κατακορύφων ἀποστάσεων χρησιμοποιεῖται τὸ **καθετόμετρον** (σχ. 6), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ κατακορύφου ράβδου, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας μετακινεῖται σύρτης, φέρων διόπτραν. Ἡ ἀπόστασις προκύπτει διὰ δύο διαδοχικῶν σκοπεύσεων τῶν δύο ἄκρων τῆς μετρουμένης ἀποστάσεως καὶ ἀναγνώσεως τῆς μετακινήσεως ἐπὶ τῆς κλίμακος, τῆς χαραγμένης ἐπὶ τῆς ράβδου.

Βεργιέρος. Συνήθως, κατὰ τὰς μετρήσεις, τὸ ἄκρον τοῦ μετρουμένου μήκους δὲν συμπίπτει μὲ μίαν χαραγὴν τῆς κλίμακος καὶ τότε τὸ ἀποτέ-

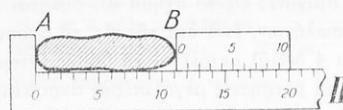
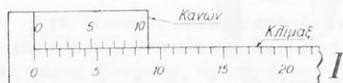
σμα τῆς μετρήσεως προκύπτει κατὰ προσέγγισιν, δι' ὑποκειμενικῆς ἐκτιμήσεως. Μεγαλύτεραν ἀκρίβειαν ἔχομεν, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν **βερνιέρον** (*Nonius, Vernier* - σχ. 7).



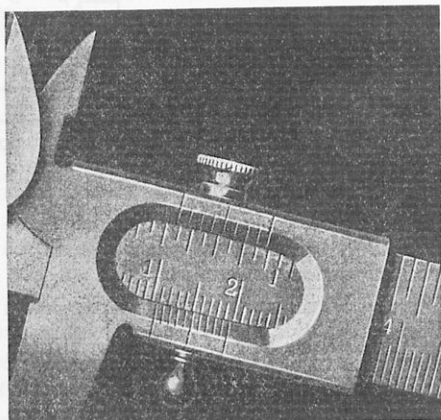
Σχ. 6. Καθετόμετρον.

Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ μήκους διὰ τοῦ βερνιέρου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θέτομεν τὸ πρὸς μέτροισιν μήκος AB ἐπὶ τῆς κλίμακος, οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον A νὰ εὐρεθῇ εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος καὶ μετακινούμεν τὸν βερνιέρον, μέχρις ὅτου ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ ἄκρον B . Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μηδὲν τοῦ βερνιέρου εὐρίσκεται μεταξὺ τῆς 11μ καὶ 12μ ὑποδιαίρεσεως· συνεπῶς τὸ μετρούμενον μήκος θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 11 mm κατὰ κλάσμα τι τοῦ χιλιοστομέτρου. Ἡ ἀκριβὴς τιμὴ εὐρίσκεται διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἐὰν τὸ μηδὲν τοῦ βερνιέρου συνέλιπτεν ἀκρι-

ὅτως εἶναι μικρὸς κανὼν, τοῦ ὁποίου, συνήθως, 10 διαίρεσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς 9 , ἀκριβῶς, διαίρεσεις τῆς κλίμακος. Τότε, ἐκάστη διαίρεσις τοῦ βερνιέρου εἶναι ἴση πρὸς τὰ $9/10$ ἐκάστης ὑποδιαίρεσεως τῆς κλίμακος, ἥτοι εἶναι μικροτέρα κατὰ τὸ $1/10$ αὐτῆς.



Σχ. 7. Τὸ μήκος AB τοῦ σώματος εἶναι ἴσον πρὸς $11,2\text{ mm}$.

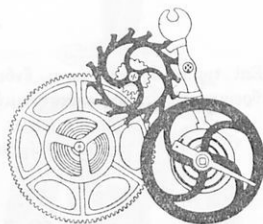


Σχ. 8. Ὁ βερνιέρος τοῦ διαστημομέτρου δεικνύει $10,6\text{ mm}$.

βῶς με τὴν $11^{\text{η}}$ διαίρεσιν τοῦ κανόνος, τὸ μήκος τοῦ ἀντικειμένου θὰ ᾗτο $11,0 \text{ mm}$. Εἰς τὸ σχῆμα μας, ὅμως, συμπίπτει ἡ δευτέρα διαίρεσις τοῦ βερνιέρου με τὴν $13^{\text{η}}$ τοῦ κανόνος. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη διαίρεσις τοῦ βερνιέρου ἰσοῦται με $9/10 \text{ mm}$, ὑπολείπεται, δηλ., τοῦ 1 mm κατὰ τὸ $1/10 \text{ mm}$, ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον B ἀπέχει τῆς $11^{\text{ης}}$ γραμμῆς τῆς κλίμακος κατὰ $2 \cdot 1/10 \text{ mm}$, ἐπομένως τὸ μήκος τοῦ ἀντικειμένου AB εἶναι ἴσον πρὸς $11,2 \text{ mm}$. Ἐὰν συνέλιπτεν ἡ $6^{\text{η}}$ γραμμὴ τοῦ βερνιέρου, τὸ μήκος θὰ ᾗτο $11,6 \text{ mm}$ κ.ο.κ.

§ 15. Μέτρησις χρόνου. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ οἰονδήποτε περιοδικὸν φαινόμενον. Οὕτω, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ταλάντωσις ἐνὸς ἐκκρεμοῦς (ὥρολόγιον με ἐκκρεμῆς) ἢ ἡ στροφικὴ ταλάντωσις μικροῦ τροχοῦ (σχ. 9), τὴν ὁποίαν οὗτος ἐκτελεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐνὸς σπειροειδοῦς ἐλατηρίου (ὥρολόγιον τσέπης).

Μεγάλην ἀκρίβειαν παρέχουν τὰ ὥρολόγια χαλαζίου. Εἰς ταῦτα ῥάβδος ἐκ χαλαζίου τίθεται, διὰ καταλλήλου ἠλεκτρικῆς διεγέρσεως (*), εἰς διὰ καταλλήλου ἠλεκτρικῆς διεγέρσεως (*), εἰς ἐπιμήκεις ἑλαστικὰς ταλαντώσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἰδιοσυχνότης παραμένει ἐξόχως σταθερά. Ἐπειδὴ ἡ ἰδιοσυχνότης τῆς ταλαντώσεως τοιαύτης ῥάβδου εἶναι πολὺ μεγάλη, ὑποπολλαπλασιάζομεν ταύτην διὰ καταλλήλου ἠλεκτρικῆς συνδεσμολογίας. Τελικῶς, ἐκ τῆς ἐν λόγῳ συσκευῆς λαμβάνεται ἐναλλασσόμενον ρεῖμα, τὸ ὁποῖον κινεῖ ἓνα σύγχρονον ἠλεκτρικὸν κινητήρα.



Σχ. 9. Μηχανισμὸς ὥρολόγιον τσέπης. Τὸ ἐν ἄκρον τοῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου εἶναι σπειροειδὸς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ (δεξιὰ), ὅστις, οὕτω, ἐκτελεῖ στροφικὰς ταλαντώσεις. Ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενη ἐνέργεια παρέχεται ὑπὸ ἰσχυροῦ ἐλατηρίου (ἀριστερὰ) διὰ μέσου ὁδοντωτῶν τροχῶν, τοῦ τροχοῦ διαφυγῆς (μέσση ἄνω) καὶ τῆς ἀγκύρας (δεξιὰ ἄνω).

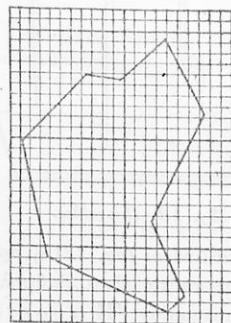
§ 16. Μέτρησις ἐμβαδού.

Τὸ ἐμβαδὸν (ἐπιπέδων) ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄ-

πλοὺν γεωμετρικὸν σχῆμα, εὐρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Ὅταν, ὅμως, τὸ σχῆμα δὲν ἐπιτρέπη τοιοῦτον ὑπολογισμόν, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἑξῆς μέθοδοι :

α) Χαράσσεται ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τὸ σχῆμα τῆς πρὸς ἐμβαδομέτρησιν ἐπιφανείας (σχ. 10) καὶ μετρεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων τετραγωνιδίων.

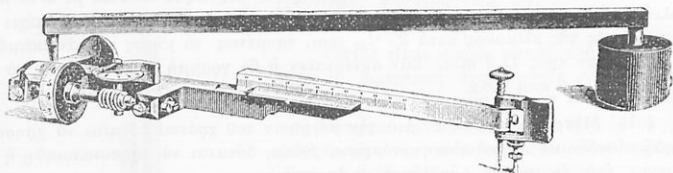
β) Ἀποκόπτεται ἐκ φύλλου ἰσοπαχοῦς χάρτου ἓν τμήμα, τὸ ὁποῖον ἔχει, ἀκριβῶς, τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν καὶ ζυγίζεται. Ἐκ συγκρίσεως τοῦ προκύψαντος βάρους πρὸς τὸ βάρος ἄλλου τεμαχίου ἐκ τοῦ αὐτοῦ χάρτου, ἔχοντος ἄπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα καί, συνεπῶς, γνωστὸν ἐμβαδόν, εὐρίσκεται τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.



Σχ. 10. Εὐρεσις τοῦ ἐμβαδου ἐπιφανείας, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἁπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα.

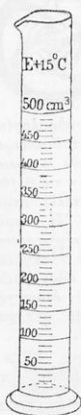
(*) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 38.

γ) Δι' *ἐμβαδομέτρου* (σχ. 11). Μετακινούμεν τὴν ἀκίδα τοῦ ὄργάνου ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς ἐπιφανείας, μέχρις ὅτου ἐπανεέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως.



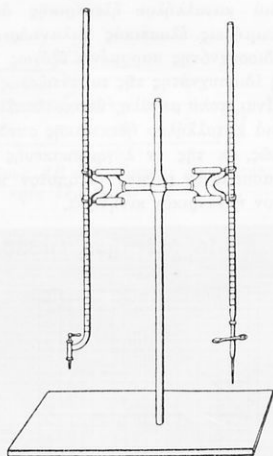
Σχ. 11. Ἐμβαδόμετρον.

Ἐπὶ τυμπάνου παρέχεται ἔνδειξις, ἀνάλογος πρὸς τὸ μετρούμενον ἐμβαδόν. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ, βαθμολογοῦμεν τὸ ὄργανον δι' ἐμβαδομετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας γνωστοῦ ἐμβαδοῦ.



Σχ. 12. Ὅγκο-μετρικὸς κύλινδρος.

§ 17. Μέτρησης ὄγκου. Ὁ ὄγκος στερεῶν σωμάτων, ἀπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, εὐρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Ὅταν, ὅμως, τὸ σχῆμα τοῦ σώματος εἶναι ἀκανόνιστον, ὅποτε δὲν εἶναι δυνατὸς τοιοῦτος ὑπολογισμός, ὁ ὄγκος δύναται νὰ εὐρεθῇ ἐμμέσως, ἐκ τῆς μάζης καὶ τῆς πυκνότητος τοῦ ὑλικοῦ ἢ δι' ἐμβαπτίσεως ἐντὸς ὑγροῦ τινος καὶ μετρήσεως τῆς φαινομένης αὐξήσεως τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ.



Σχ. 13. Προχοῖδες.

Διὰ τὴν μέτρησην τοῦ ὄγκου ὑγρῶν χρησιμοποιοῦνται ὀγκομετρικοὶ κύλινδροι (σχ. 12) ἢ προχοῖδες (σχ. 13).



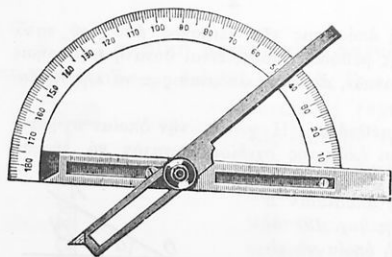
Σχ. 14.

Τὰ ὄργανα ταῦτα εἶναι βαθμολογημένα δι' ὠρισμένην θερμοκρασίαν. Ἡ εὐρεσις τοῦ ὄγκου γίνεται δι' ἀναγνώσεως ἐπὶ τῆς κλίμακος τῆς ὑποδιαίρεσεως, ἢ ὅποια συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ σχηματιζομένου μ'ηνίσκου (σχ. 14).

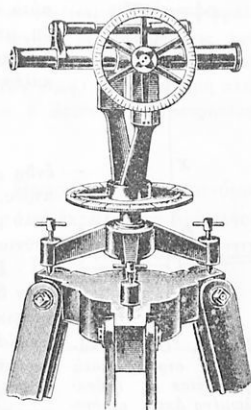
§ 18. Μέτρησης γωνιῶν. Διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται κύκλοι (*γωνιομετρικοὶ κύκλοι, μοιρογνωμόνια*), φέροντες

ἐπὶ τῆς περιφερείας διαιρέσεις εἰς μοίρας, ἡμισείας μοίρας κ.λ., ἀναλόγως τῆς διαμέτρου των. Ὃταν πρόκειται νὰ μετρηθῇ *διέδρος γωνία*, χρησιμοποιεῖται εἰδικὸς τύπος μοιρογώνιου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *γωνιόμετρον ἐπαφῆς* (σχ. 15).

Ὃταν ζητῆται ἡ γωνία δύο διευθύνσεων, χρησιμοποιεῖται διάταξις, ἀποτελουμένη ἐκ



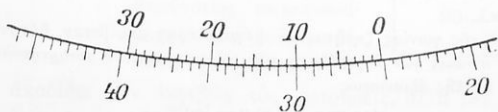
Σχ. 15. Γωνιόμετρον ἐπαφῆς.



Σχ. 16. Θεωδόλιχος.

γωνιομετρικοῦ κύκλου καὶ διόπτρας (*θεωδόλιχος*, σχ. 16). Διὰ τῆς διόπτρας σκοπεύομεν, διαδοχικῶς, τὰς δύο διευθύνσεις, ὁπότε ἡ γωνία προκύπτει ὡς διαφορὰ τῶν ἐπὶ τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου δύο ἀναγνώσεων.

Κυκλικὸς βερνιέρος. Διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀνάγνωσιν τῆς ἐνδείξεως τῶν γωνιομετρικῶν κύκλων χρησιμοποιεῖται ὁ *κυκλικὸς βερνιέρος*. Οὗτος εἶναι κανὼν τοξοει-



Σχ. 17. Κυκλικὸς βερνιέρος. Ἡ ἐνδείξις εἶναι $25^{\circ} 9'$.

δης (σχ. 17), ὑποδιηρημένος εἰς $n-1$ ὑποδιαίρεσεις (συνήθως 20 ἢ 30), ἀντιστοιχοῦσας εἰς n ὑποδιαίρεσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου. Ὃταν ὁ γωνιομετρικὸς κύκλος φέρῃ διαιρέσεις εἰς ἡμισείας μοίρας, χρησιμοποιεῖται, συνήθως, βερνιέρος 30 διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς 29 διαιρέσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου, δηλ. εἰς $14,5^{\circ}$. Ὁ κυκλικὸς βερνιέρος χρησιμοποιεῖται ὅπως καὶ ὁ εὐθύγραμμος. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ὁ βερνιέρος δίδει τὸ $1/30$ τῶν $0,5^{\circ}$, δηλ., $1'$. Ὃταν ὁ γωνιομετρικὸς κύκλος φέρῃ ὑποδιαίρεσεις εἰς τέταρτα τῆς μοίρας, χρησιμοποιεῖται βερνιέρος 25 διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς 24 διαιρέσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου (δηλ. εἰς 6°). Ὁ βερνιέρος δίδει, τώρα, τὸ $1/25$ τοῦ $1/4$ τῆς μοίρας, δηλ., τὸ $1/100$ τῆς μοίρας.

Κατοπτρικὴ μέθοδος. Εἰς ὥρισμένας περιπτώσεις, διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη ἓν σῶμα, προσαρμόζομεν εἰς αὐτὸ ἓν κάτοπτρον K (σχ. 18) καὶ θέτομεν ἀπέναντί του διόπτραν, τῆς ὁποίας ὁ ὀπτικὸς ἄξων εἶναι κά-

θετος ἐπὶ τὴν κλίμακα καὶ τὸ κάτοπτρον. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην παρατηρεῖται, διὰ τῆς διόπτρας, τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος. Ἄν, τώρα, τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν φ , κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν θὰ στραφῇ καὶ ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος, ὁπότε ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς KA θὰ σχηματίξῃ μετὰ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τὴν γωνίαν 2φ καὶ διὰ τῆς διόπτρας θὰ ἴδωμεν τὴν διαίρεσιν A τῆς κλίμακος. Ἄν καλέσωμεν l τὴν ἀπόστασιν OA , ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\epsilon\varphi 2\varphi = \frac{l}{x}$$

ἐνθα x εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κλίμακος ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις πολλῶν μικρῶν γωνιῶν, ἀρκεῖ ἡ ἀπόστασις x νὰ ληφθῇ ἀρκούντως μεγάλη.

Γραφικὴ μέθοδος. Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τινος σχεδίου, δυνατόν νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς, ἐάν ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς κορυφῆς (σχ. 19) ἀχθῇ κάθετος, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν εἰς τὸ σημεῖον A . Ἐάν, τότε, μετρήσωμεν τὸ μήκος AB , τὸ ὅποιον ἔστω y , τὸ πηλίκον y/x μᾶς παρέχει τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\epsilon\varphi a = \frac{y}{x}.$$

Ἐκ τῆς ἥδη γνωστῆς τιμῆς τῆς $\epsilon\varphi a$ εὐρίσκεται ἡ ζητούμενη γωνία a , τῇ βοηθεῖα τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, πινάκων, δηλ., οἱ ὅποιοι, εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς γωνίας a , παρέχουν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ $\eta\mu a$, $\epsilon\varphi a$ κ.λ.

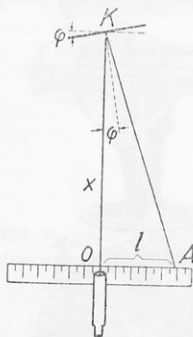
Ἐάν ἡ τιμὴ τῆς γωνίας ζητῆται μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ πίνακες τῶν λογαριθμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Ἡ γωνία προκύπτει, τότε, ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$\log \epsilon\varphi a = \log y - \log x.$$

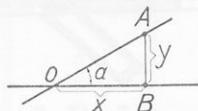
§ 19. Σφάλματα μετρήσεων. Αἱ μετρήσεις παρουσιάζουν, ἀναποφεύκτως, σφάλματα. Ταῦτα προέρχονται εἴτε ἐκ τῆς χρησιμοποιομένης μεθόδου, εἴτε ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων, εἴτε ἐξ ἀδεξιότητος τοῦ παρατηρητοῦ. Τὰ σφάλματα διαιροῦνται εἰς συστηματικὰ καὶ εἰς τυχαῖα.

Τὰ **συστηματικὰ σφάλματα** ὀφείλονται εἰς μόνιμον αἷτιον καὶ ἐπηρεάζουν τὸν ἐξαγόμενον πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Οὕτω, μετατόπισις τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος γαλβανομέτρου, ἀνακριβὴ σταθμὰ, κακῶς βαθμολογημένον θερμομέτρον κ.λ., ὑπεύθυνον συστηματικὰ σφάλματα εἰς τὰς μετρήσεις.

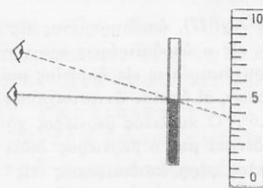
Τὰ **τυχαῖα σφάλματα** προέρχονται ἐκ μὴ μόνιμων αἰτίων καὶ ἐπιδροῦν ἐπὶ τοῦ αποτελέσματος ἀκανονίστως. Οὕτω, μετροῦντες



Σχ. 18. Ὅταν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν φ , ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ 2φ .



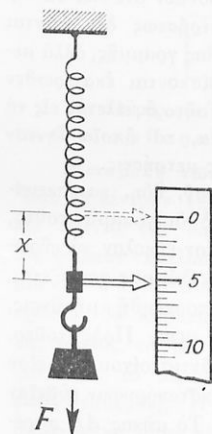
Σχ. 19. Γραφικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ γωνίας.



Σχ. 20. Ἡ μέτρησις τοῦ ὕψους τῆς ὕδαρρονηκῆς στήλης στερεῖται σφάλματος ἐκ παραλλήλεως, ὅταν ἡ παρατήρησις γίνῃται καθεῖως πρὸς τὴν κλίμακα.

πολλάκις ἐν μήκος, λαμβάνομεν ἐκάστοτε διαφόρους τιμὰς, ἄλλοτε μεγαλύτερας καὶ ἄλλοτε μικροτέρας τῆς πραγματικῆς. Τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ προέλθῃ ἐκ σφάλματος παραλάξεως κατὰ τὴν μέτρησιν (σχ. 20), ἐξ ἀκανονίστων μεταβολῶν τῆς τάσεως εἰς ἡλεκτρικὰς μετρήσεις κ.λ. Ἐκάστη, λοιπόν, μέτρησις συνοδεύεται ὑπὸ τυχαίου σφάλματος. Ἐνῶ δὲ τὰ συστηματικὰ σφάλματα αἰρονται μόνον δι' ἐξουδετερώσεως τοῦ προκαλοῦντος αὐτὰ αἰτίου, τὰ τυχαῖα ἐξουδετεροῦνται, ἐν μέρει, δι' ἐπανειλημμένων μετρήσεων καὶ σχηματισμοῦ τοῦ μέσου ὄρου αὐτῶν (μέση τιμή). Ἡ μέση τιμὴ πλησιάζει τόσον περισσότερο πρὸς τὴν πραγματικὴν, ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων αὐξάνει.

§ 20. Γραφικὴ παράσταση φαινομένου. Θεωρήσωμεν τὸ φαινόμενον τῆς μηκύνσεως ἑνὸς ἐλικοειδοῦς ἐλατηρίου, ὅταν τὸ ἐκτείνωμεν διὰ τινος



Σχ. 20 α.

δυνάμεως (σχ. 20 α):

Εἰς ἐκάστην τιμὴν τῆς τεινύσεως δυνάμεως F ἀντιστοιχεῖ ὠρισμένη μήκυνσις. Διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς σχέσεως, ἡ ὁποία συνδέει τὴν τεινύσαν δυνάμιν καὶ τὴν δι' αὐτῆς προκαλούμενην μήκυνσιν, ἐκτελοῦμεν σειρὰν μετρήσεων καὶ ἐκ τῶν προκύπτουσῶν τιμῶν τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἐπιμηκύνσεως κατασκευάζομεν τὸν ἔναντι πίνακα μετρήσεων. Ὁ

F gr^{**}	x mm
0	0,0
5	4,8
10	9,0
15	13,8
40	31,5
50	44,0
70	63,8
90	80,0

πίναξ οὗτος ἀποδίδει μὲν ἀκριβῶς τὰς μετρήσεις, ἀλλὰ δὲν παρέχει ἀμέσως σαφὴ εἰκόνα τῆς πορείας τοῦ φαινομένου, δηλ., ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος δὲν εὐρίσκομεν εὐχερῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τεινύσεως δυνάμεως F καὶ τῆς μηκύνσεως x . Τοῦτο, ὅμως, δύναται νὰ προκύψῃ εὐκόλως διὰ **γραφικῆς παραστάσεως** (σχ. 21): Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν δύο ἄξονας, τεμνομένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς μὲν (π.χ., τοῦ ὀριζοντίου) χαράσσομεν κατάλληλον κλίμακα μηκῶν, ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δὲ (τοῦ κατακόρυφου) κατάλληλον κλίμακα δυνάμεων. Εἶναι προφανές ὅτι ἕκαστον ζεύγος τιμῶν τοῦ πίνακος καθορίζει ἐν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου F, x . Ὅλα τὰ προκύπτοντα σημεία, ἐνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, παρέχουν τὴν σχέσιν

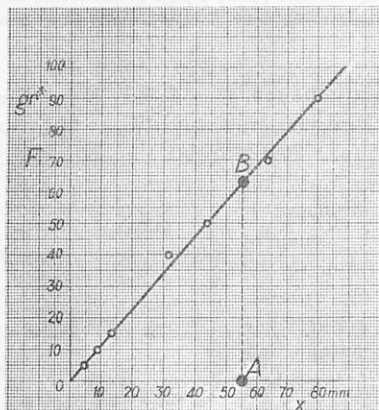
$$x = \text{συνάρτησις τοῦ } F = f(F)$$

μεταξὺ τῆς μηκύνσεως καὶ τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν νόμον τοῦ Hooke (βλ. Κεφ. Ἐλαστικότητος), ἡ μήκυνσις x εἶναι ἀνά-

λογος της προκαλούσης αυτήν δυνάμεως F , ή σχέσις $x = f(F)$, ή συνδέουσα τὰ x καὶ F , εἶναι ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ. Ἦτοι

$$x = k \cdot F$$

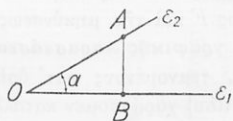
ἐνθα k εἶναι μία σταθερά. Θὰ πρέπει, ἐπομένως, ἡ σχέσις αὕτη ν' ἀποδίδεται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς, διὰ τὴν ὁποίαν καὶ μόνην τὸ x θὰ εἶναι ἀνάλογον τοῦ F . Ἐν τούτοις, εἰς τὸ σχῆμα 21 παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεία μετρήσεως δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἀλλὰ μερικὰ εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν αὐτῆς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα ἔγιναν κατὰ τὰς μετρήσεις.



Σχ. 21. Γραφικὴ παράστασις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.

A ($x = 55 \text{ mm}$) τοῦ ἄξονος τῶν μηκύνσεων φέρομεν κατακόρυφον εὐθεῖαν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον B . Τὸ μήκος AB παρέχει τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς δυνάμεως ($F = 63,0 \text{ gr}^*$).

§ 21. Στοιχειώδεις γνώσεις ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας. Μία γωνία δύναται νὰ καθορισθῇ ὄχι μόνον διὰ τῆς εἰς *μοίρας* ἢ εἰς *ἀκτίνια* τιμῆς της, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς συναρτήσεων. Αἱ συνηθέστερον εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιούμεναι *τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις* εἶναι τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη: Ἐστω ἡ γωνία α , τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 (σχ. 22). Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τῆς γωνίας α , φέρομεν ἕκ τινος σημείου τῆς μιᾶς εὐθείας (π.χ., τοῦ σημείου B) κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ, οὕτω, σχηματίζεται ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ OAB .



Σχ. 22. Αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις τῆς γωνίας α ὀρίζονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου OAB .

Ὡς *ἡμίτονον* τῆς γωνίας α ὀρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθετόν πλευρᾶς AB διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας OA . Ἦτοι

$$\eta\mu \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτείνουσας}}$$

Τὸ **συνημίτονον** ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς OB διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτείνουσας OA . Ὡτοι

$$\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτείνουσας}}$$

Ἡ **ἐφαπτομένη** τῆς γωνίας α ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς AB διὰ τοῦ μήκους τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς OB . Ὡτοι

$$\epsilon\varphi \alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων προκύπτει ὅτι αὗται εἶναι **καθ' αὐτοὺς ἀριθμοί**.

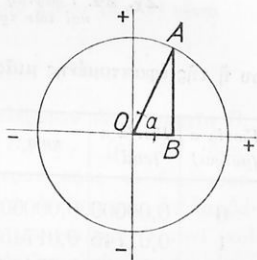
Μεταβολὴ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων μετὰ τῆς γωνίας.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν O τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν OA γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου (σχ. 23) καὶ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς OA στρέφεται περὶ τὸ κέντρον O , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, αὐξανομένης τῆς γωνίας, τὸ ἡμίτονον εἶναι διαρκῶς ἀνάλογον πρὸς τὸ μήκος AB (διότι τὸ μήκος OA εἶναι σταθερόν). Ἡ μεγίστη τιμὴ, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ ἡμίτονον, εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γωνίαν 90° .

Ἐὰν ἡ γωνία ἐξακολουθήσῃ αὐξανομένη, τὸ ἡμίτονον ἀρχίζει ἐλαττούμενον, διὰ νὰ μηδενισθῇ εἰς τὰς 180° . Ἀπὸ τῆς τιμῆς τῶν 180° μέχρι τῆς τιμῆς τῶν 360° αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου εἶναι ἀρνητικαί.

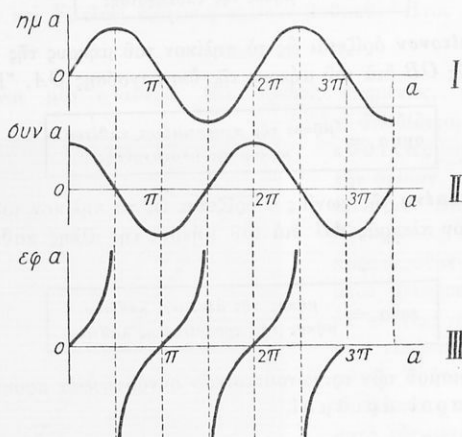
Γραφικῶς ἡ σχέσις $\eta\mu \alpha = f(\alpha)$ μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου μιᾶς γωνίας καὶ τῆς τιμῆς τῆς γωνίας παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 24, I. Τὸ διάγραμμα II τοῦ αὐτοῦ σχήματος παριστᾷ τὴν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu \alpha = f(\alpha)$, τὸ δὲ διάγραμμα III τὴν σχέσιν $\epsilon\varphi \alpha = f(\alpha)$.

Εἰς τὸν πίνακα τῆς ἐπομένης σελίδος δίδεται ἡ τιμὴ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων διὰ τινὰς γωνίας. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ πίνακος καὶ εἰς τὴν δευτέραν στήλην δίδονται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν εἰς ἀκτῖνα (rad). Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ μικρὰς γωνίας, αἱ τιμαὶ τῶν εἰς ἀκτῖνα εἶναι, περίπου, ἴσαι μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων, ἐνῶ εἰς μεγάλας γωνίας παρουσιάζονται διαρκῶς αὐξανόμεναι διαφοραί. Κατὰ ταύ-



Σχ. 23. Τριγωνομετρικὸς κύκλος.

τα, όταν η γωνία είναι μικρά, επιτρέπεται η αντικατάσταση του ημιτό-



Σχ. 24. Γραφική παράσταση των σχέσεων μεταξύ της γωνίας και των τριγωνομετρικών αυτής συναρτήσεων.

νου η της εφαπτομένης μιᾶς γωνίας διὰ τῆς τιμῆς τῆς γωνίας (εἰς ἀκτίνια).

Γωνία α (μοῖραι)	Γωνία α (rad)	ημ α	εφ α	Γωνία α (μοῖραι)	Γωνία α (rad)	ημ α	εφ α
0	0,00000	0,00000	0,00000	5	0,08727	0,08716	0,08749
1	0,01745	0,01745	0,01746	10	0,17453	0,17365	0,17633
2	0,03491	0,03490	0,03492	15	0,26180	0,25882	0,26795
3	0,05236	0,05234	0,05241	30	0,52360	0,50000	0,57735
4	0,06981	0,06976	0,06993	60	0,04720	0,86603	1,7321

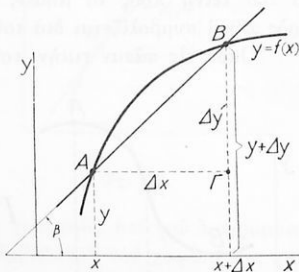
§ 22. Στοιχεία ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 20, ἡ μήκυνσις x , τὴν ὁποίαν προκαλεῖ μία δύναμις F , ἐξασκουμένη ἐπὶ τινος ἐλικοειδοῦς ἐλατηρίου, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δύναμιν ταύτην, ἡ δὲ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο μεταβλητὰ μεγέθη F καὶ x , παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$F = \frac{1}{k} \cdot x.$$

Γενικῶς, ἐὰν δύο μεγέθη x καὶ y συνδέονται διὰ μιᾶς σχέσεως $y=f(x)$, τὰ δύο ταῦτα μεγέθη καλοῦνται **μεταβλητὰ**, ἡ μὲν x **ανεξάρτητος μεταβλητή**, ἡ δὲ y **συνάρτησις τοῦ x** .

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς διὰ μιᾶς γραμμῆς, ἡ ὁποία λέγεται καὶ *γραφικὴ παράστασις* τῆς συναρτήσεως $y=f(x)$. Οὕτω, ἡ συνάρτησις $y=k \cdot x$ παρίσταται γραφικῶς διὰ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἡ συνάρτησις $y=k \cdot x^2$ διὰ παραβολῆς, ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu x$ διὰ μιᾶς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης κ.ο.κ.

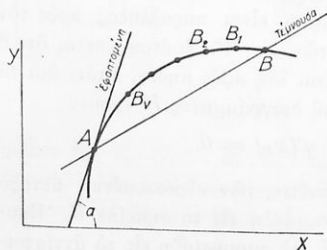
Τέμνουσα καὶ ἔφαπτομένη. Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα A καὶ B (σχ. 25) τῆς καμπύλης $y=f(x)$ μὲ τετμημένας x καὶ $x+\Delta x$, καὶ τεταγμένας y καὶ $y+\Delta y$. Ἄν ἐνώσωμεν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι' εὐθείας γραμμῆς, θὰ προκύψῃ μία **τέμνουσα** τῆς καμπύλης. Φέρομεν, τῶρα, ἐκ τοῦ σημείου A μίαν ὀριζόντιον εὐθείαν AG καὶ ἐκ τοῦ σημείου B μίαν κατακόρυφον εὐθείαν $B\Gamma$, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου αἱ κἀθετοὶ πλευραὶ εἶναι Δx καὶ Δy . Ὁ **συντελεστὴς κατευθύνσεως** τῆς τεμνοῦσας (δηλ., ἡ ἔφαπτομένη τῆς γωνίας β , τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τέμνουσα μὲ τὸν ἄξονα τῶν x) εἶναι



Σχ. 25.

$$\epsilon\varphi\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ἐάν, κρατοῦντες τὸ σημεῖον A σταθερόν, ἐκλέξωμεν ἄλλα σημεῖα $B_1, B_2, B_3, \dots, B_r, \dots$ (σχ. 26), διαρκῶς πλησιέστερον πρὸς τὸ A εὐρισκόμενα (ὁπότε τὰ ἀντίστοιχα Δx λαμβάνουν διαρκῶς μικροτέραν τιμὴν) καὶ θεωρήσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τεμνοῦσας $AB_1, AB_2, \dots, AB_r, \dots$, αἱ εὐθεῖαι αὗται ἔχουν μίαν ὀρίκην θέσιν, ὅταν τὸ σημεῖον B_r τείνῃ πρὸς τὸ A , ἡ ὁποία λέγεται **ἐφαπτομένη**. Ἐνῶ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως μιᾶς τεμνοῦσας ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν σημείων A καὶ B , ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ σημείου A .



Σχ. 26.

Κλίσις καμπύλης καὶ παράγωγος συναρτήσεως. Ὅρίζομεν ὡς **κλίσις** μιᾶς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Κατὰ ταῦτα, ἡ κλίσις θὰ ἴσούται μὲ τὴν ὀρίκην τιμὴν $\epsilon\varphi\alpha$, πρὸς τὴν ὁποίαν τείνουν αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ $\epsilon\varphi\beta_1, \epsilon\varphi\beta_2, \dots, \epsilon\varphi\beta_r, \dots$ τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως τῶν τεμνοῦσων $AB, AB_1, AB_2, \dots, AB_r, \dots$, ὅταν τὸ B_r τείνῃ πρὸς τὸ

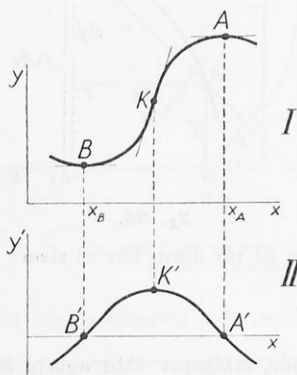
A , δηλ., όταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Τὴν ἰσότητα ταύτην, ἡ ὁποία ἰσχύει διὰ τὸ ὄριον, συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi a = o\varrho \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Ἡ ὁρική αὕτη τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ συντελεστής κατευθύνσεως, όταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, καλεῖται **παράγωγος** τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς x καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ y' .

Ὅπως εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία ὁρισμένη τιμὴ τοῦ y (σχ. 27, I), οὕτω εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὁρισμένη τιμὴ τῆς παραγώγου y' (II). Ἡ οὕτω προκύπτουσα καμπύλη εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y' = f'(x)$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κλίσις y' ἔχει διαφόρους τιμὰς-ἄλλου θετικὰς καὶ ἄλλου ἀρνητικὰς.



Σχ. 27.

Ἀκρότατα. Εἰς τὸ σημεῖον A τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος 27, I ἡ μεταβλητὴ y λαμβάνει τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν, εἰς δὲ τὸ σημεῖον B τὴν ἐλάχιστην. Τὰ σημεῖα ταῦτα, καλούμενα **μέγιστον** καὶ **ἐλάχιστον** τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$, χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ εἰς αὐτὰ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . Ἐκ τούτου ἐπεται ὅτι ἡ

κλίσις εἰς τὰ **ἀκρότατα** ταῦτα σημεῖα εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε διὰ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα A' , B' τῆς καμπύλης τοῦ διαγράμματος II ἔχομεν

$$y'(x_A) = 0 \quad \text{καὶ} \quad y'(x_B) = 0.$$

Σημεῖα καμπῆς. Ἐξ ὅλων τῶν σημείων, τῶν εὐρισκομένων μεταξύ τοῦ A καὶ τοῦ B , μεγίστην κλίσιν ἔχει ἡ καμπύλη εἰς τὸ σημεῖον K . Ἐπομένως καὶ ἡ καμπύλη τοῦ διαγράμματος II θὰ παρουσιάῃ εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον K' ἓν μέγιστον. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον K τῆς καμπύλης τοῦ διαγράμματος I, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη τὴν ἀφίνει ἐκατέρωθεν τῆς. Σημεῖα μὲ τοιαύτας ιδιότητες καλοῦνται **σημεῖα καμπῆς**.

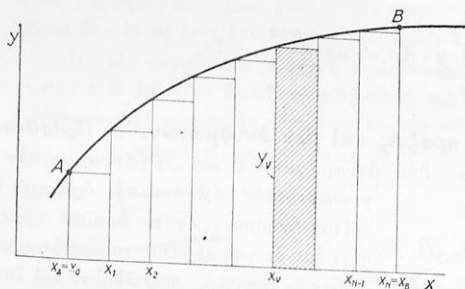
Διαφορικόν. Ἐστω ἡ συνάρτησις $y = f(x)$. **Διαφορικὸν** dy τῆς συναρτήσεως y διὰ τὴν αὔξησιν dx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου y' ἐπὶ τὴν αὔξησιν dx . Ἦτοι

$$dy = y' \cdot dx.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 28 τὸ διαφορικὸν dy παρίσταται ἀπὸ τὸ μήκος $I'A$. Πα-

ρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ Δy τῶν τιμῶν τοῦ y εἰς τὰς θέσεις x καὶ $x+dx$ (εἰς τὸ σχῆμα 28 τὸ μήκος BF') ἰσοῦται, περίπου, μὲ τὸ ἀντίστοιχον διαφορικὸν dy καὶ ἡ προσέγγις εἶναι τόσον καλυτέρα, ὅσον τὸ dx ἐκλεγεί μικρότερον. Συνεπεία τούτου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιῶμεν, διὰ πολὺ μικρὸν dx , τὸ dy ἀντὶ τῆς διαφορᾶς Δy τῶν ἀντιστοιχούντων τιμῶν τῆς συναρτήσεως y .

᾽Ορισμένον ὁλοκλήρωμα καὶ ἔμβαδὸν χωρίου. Θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ y εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x καὶ ἡ ὁποία παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 29. Διὰ νὰ εὑρωμεν τὸ ἔμβαδον S τοῦ χωρίου x_A, x_B ,



Σχ. 29.

σημείων $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, \dots$ τὰς κατακορύφους μέχρι τῆς καμπύλης καὶ, διὰ καταλλήλων ὁριζοντίων γραμμῶν, σχηματίζομεν N ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἡ βάσις ἐκάστου τῶν ὀρθογώνιων τούτων εἶναι ἴση πρὸς

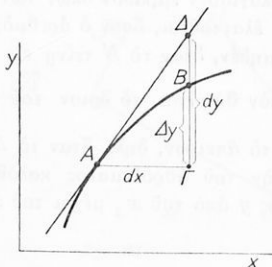
$$\Delta x = \frac{x_B - x_A}{N}.$$

Ἐὰν καλέσωμεν y_r τὴν τιμὴν τῆς τεταγμένης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τετμημένην x_r , τότε τὸ ἔμβαδον τοῦ γραμμοσκιασμένου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι $y_r \cdot \Delta x$, τὸ δὲ ὅλικόν ἔμβαδον τῶν ὀρθογώνιων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ἔμβαδῶν - ἤτοι

$$y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_r \cdot \Delta x + \dots + y_{N-1} \cdot \Delta x.$$

Ἐν τοιοῦτο ἄθροισμα συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{r=0}^{N-1} y_r \cdot \Delta x.$$



Σχ. 28.

B, A , τοῦ περιοριζομένου ἀφ' ἐνὸς μὲν ὑπὸ τῆς καμπύλης ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x , ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ δύο κατακορύφων, ἀγομένων ἐκ δύο σημείων A καὶ B , ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Χωρίζομεν τὸ διάστημα x_A ἕως x_B εἰς N ἴσα τμήματα, φέρομεν ἐκ τῶν προκυπτόντων

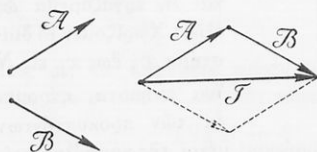
Τὸ ζητούμενον ἔμβαδὸν τοῦ χωρίου δὲν εἶναι, ἀκριβῶς, ἴσον μὲ τὸ οὕτως ὑπολογισθὲν ἔμβαδὸν ὧν τῶν ὀρθογωνίων, ἡ διαφορά, ὅμως, μεταξὺ τῶν δύο ἐλαττοῦται, ὅσον ὁ ἀριθμὸς N λαμβάνεται μεγαλύτερος καὶ τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ N τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Κατὰ ταῦτα, τὸ ζητούμενον ἔμβαδὸν θὰ εἶναι τὸ ὄριον τοῦ ἀθροίσματος $\sum_{r=0}^{r=N-1} y_r \cdot \Delta x$, ὅταν τὸ N τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, δηλ., ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Τὴν ὀρίκην ταύτην τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος καλοῦμεν **ὠρισμένον ὁλοκλήρωμα** τῆς συναρτήσεως y ἀπὸ τοῦ x_A μέχρι τοῦ x_B καὶ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$\int_{x_A}^{x_B} y \cdot dx.$$

Κατὰ ταῦτα, τὸ ἔμβαδὸν S τοῦ χωρίου x_A, x_B, B, A δίδεται ὑπὸ τοῦ ὠρισμένου ὁλοκληρώματος

$$S = \int_{x_A}^{x_B} y \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{r=N-1} y_r \cdot \Delta x.$$

§ 23. Στοιχειώδεις πράξεις ἐπὶ τῶν ἀνυσμάτων. α) **Πρόσθεσις ἀνυσμάτων.** Ὡς ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ (**ἀνυσματικὸν ἢ γεωμετρικὸν ἄθροισμα**) ὀρίζομεν ἓν



Σχ. 30. Τὸ ἀνυσμα $\mathcal{F}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.

τρίτον ἀνυσμα $\mathcal{F}$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐὰν ἐκ τοῦ πέρας τοῦ πρώτου φέρωμεν ἓν ἀνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ δεύτερον καὶ ἐνώσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου μὲ τὸ πέρας τοῦ δευτέρου (σχ. 30). Τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἀνυσμάτων καλεῖται **συνισταμένη** αὐτῶν, τὰ δὲ ἀνύσματα, ἐκ τῶν

ὁποίων αὕτη προκύπτει, **συνιστῶσαι**. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ πρόσθεσις δύο ἀνυσμάτων προϋποθέτει ἀνύσματα, παριστῶντα τὸ αὐτὸ φυσικὸν μέγεθος.

Ἡ συνισταμένη δύο ἀνυσμάτων εὐρίσκεται καὶ διὰ τῆς **μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου**: Ἄν, ἀντὶ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ πέρας τοῦ ἐνὸς ἀνυσματος $\mathcal{A}$ ἀνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο, φέρωμεν οὕτω εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ συμπληρώσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον, ἡ διαγώνιος $\mathcal{F}$ τοῦτου (σχ. 30) παριστᾷ τὴν συνισταμένην τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.

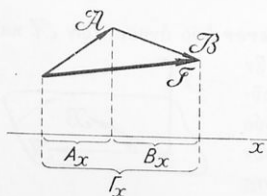
Ἡ πρόσθεσις τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων γίνεται διὰ τῆς **μεθόδου τοῦ πολυγώνου**: Οὕτω, π.χ., διὰ νὰ εὑρωμεν τὴν συνισταμένην τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ (σχ. 31, I) διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τοῦ σχεδίου σημειόν τι καὶ ἐξ αὐτοῦ

φέρομεν ἓν ἄνυσμα, ἶσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $\mathcal{A}$ (σχ. 31, I). Ἀκολούθως, ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ ἀνύσματος τούτου φέρομεν ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἶσον πρὸς τὸ ἄνυσμα $\mathcal{B}$. Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{B}$ φέρομεν ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἶσον πρὸς τὸ ἄνυσμα $\mathcal{F}$ καὶ ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ ἀνύσματος τούτου ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἶσον πρὸς τὸ τέταρτον ἄνυσμα $\mathcal{D}$. Ἐνώνοντες τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἀνύσματος $\mathcal{A}$ μετὰ τοῦ πέρατος τοῦ τετάρτου ἀνύσματος $\mathcal{D}$ εὐρίσκομεν ἓν ἄνυσμα $\mathcal{G}$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων ἀνυσμάτων $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{D}$.

Τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ὅταν τὰ πρὸς σύνθεσιν ἀνύσματα δὲν κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀλλ' εὐρίσκονται ὅπωςδῆποτε εἰς τὸν χώρον· τότε, ὁμως, ἡ ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν ἀνυσμάτων προκύπτουσα πολυγωνικὴ γραμμὴ δὲν κεῖται ὅλη ἐντὸς ἑνὸς ἐπιπέδου· εἶναι στρεβλή.

Διὰ τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων ἰσχύει ἡ πρότασις: «*Ἡ ἐπὶ τινι διεύθυνσιν προβολὴ τῆς συνισταμένης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς*».

Τοῦτο προκύπτει, ἀπλούστατα, ἐκ τοῦ σχήματος 32, ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν



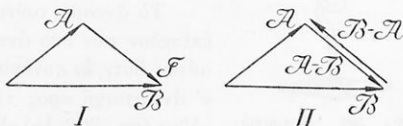
Σχ. 32.

$$\Gamma_x = A_x + B_x$$

ἐνθα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ εἶναι αἱ συνιστώσαι, $\mathcal{F}$ ἡ συνισταμένη καὶ A_x, B_x, Γ_x αἱ προβολαὶ αὐτῶν κατὰ τινι διεύθυνσιν x .

β) **Ἀφαίρεσις ἀνυσμάτων.** Ἐστωσαν δύο ἀνύσματα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ χώρου τοῦ σχεδίου ἓν σημεῖον καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν δύο ἀνύσματα, παράλληλα καὶ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (σχ. 33, I), ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ πρώτου ἀνύσματος (τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{A}$) φέρομεν ἓν ἄνυσμα $\mathcal{F}$, τὸ ὁποῖον νὰ καταλήγῃ εἰς τὸ πέρας τοῦ δευτέρου ἀνύσματος $\mathcal{B}$. Εἶναι προφανές ὅτι διὰ τὰ τρία ταῦτα ἀνύσματα ἰσχύει ἡ σχέσις



Σχ. 33.

$$\mathcal{A} + \mathcal{F} = \mathcal{B},$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} - \mathcal{A}.$$

Ἐκ τῶν λεχθέντων προκύπτει ὅτι ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου σχεδιάσωμεν δύο ἀνύσματα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, τότε τὸ ἄννομα $\mathcal{F}$, τὸ συνδέον τὰ πέρατα αὐτῶν, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν καί, συγκεκριμένως, ἴσον μὲ τὸ ἄνυσμα $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ ἢ τὸ ἄνυσμα $\mathcal{B} - \mathcal{A}$, ἀναλόγως τῆς φορᾶς τοῦ συνδέοντος τὰ δύο πέρατα ἀνύσματος (σχ. 33, II).

γ) **Πολλαπλασιασμός ἀνυσμάτων.** 1) Ὡς **ἀριθμητικὸν** (ἢ ἐσωτερικὸν) **γινόμενον** δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, παριστώμενον διὰ τοῦ $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$, ὀρίζομεν ἓν μονόμετρον μέγεθος, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $A \cdot B$ τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περικλειομένης γωνίας φ . Ἦτοι

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = A \cdot B \cdot \sigma \nu \varphi$$

Ἐπειδὴ τὸ $B \cdot \sigma \nu \varphi$ παριστᾷ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{B}$ ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{A}$ (σχ. 34), δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον ὡς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τοῦ ἄλλου.

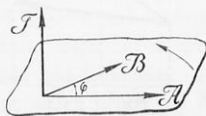
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ γινομένου προκύπτει ὅτι «δύο ἀνύσματα, *κάθετα ἐπ' ἄλληλα* (συν $\varphi = 0$), ἔχουν ἀριθμητικὸν γινόμενον, ἴσον πρὸς μηδέν».

2) Ὡς **ἀνυσματικὸν** (ἢ ἐξωτερικὸν) **γινόμενον** δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, παριστώμενον διὰ τοῦ $[\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}]$, ὀρίζομεν ἓν ἄνυσμα $\mathcal{F}$ (σχ. 35), τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον Γ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $A \cdot B$ τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περικλειομένης γωνίας φ . Ἦτοι

$$\Gamma = A \cdot B \cdot \eta \mu \varphi$$



Σχ. 36. Ἡ προχωρήσις δεξιόστροφου κοχλίου παρέχει τὴν φορὰν τοῦ ἀνυσματικοῦ γινομένου.



Σχ. 35. Τὸ ἄννομα $\mathcal{F}$ εἶναι τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.

Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἔχει διεύθυνσιν, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ καὶ φορὰν τοιαύτην ὥστε, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ ἀνύσματα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, ν' ἀντιστοιχῇ πρὸς τὴν προχωρήσιν δεξιόστροφου κοχλίου (σχ. 36)· δηλαδή, ἂν στρέψωμεν δεξιόστροφον κοχλίαν κατὰ τὴν φορὰν κατὰ τὴν ὁποίαν, στρεφόμενον τὸ ἄνυσμα $\mathcal{A}$, φθάνει, διὰ τῆς συντομωτέρας ὁδοῦ, εἰς τὸ ἄνυσμα $\mathcal{B}$, πρέπει τὸ ἄνυσμα $\mathcal{F}$ νὰ δεικνύῃ τὴν φορὰν, κατὰ τὴν ὁποίαν προχωρεῖ δεξιόστροφος κοχλίας.

Τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον γράφεται, συμβολικῶς, ὡς ἑξῆς :

$$\mathcal{I} = [\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}]$$

Ἐκ τοῦ ἄνω ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν παραγόντων, θὰ προκύρῃ ἄνυσμα τοῦ αὐτοῦ μέτρου καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. Εἶναι, δηλαδή,

$$[\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}] = -[\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}].$$

3) *Πολλαπλασιασμός ἀνύσματος ἐπὶ μονόμετρον μέγεθος*. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{A}$ ἐπὶ τὸ μονόμετρον μέγεθος k εἶναι ἄνυσμα $\mathcal{B}$, ἔχον τὴν διευθύνσιν τοῦ πρώτου καὶ μέτρον B , ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{A}$ ἐπὶ τὸ μονόμετρον μέγεθος k . Ἦτοι

$$B = A \cdot k.$$

Ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{B}$ ἔξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀλγεβρικοῦ σημείου τοῦ k .

Τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ μονόμετρον μέγεθος γράφεται, συμβολικῶς, ὡς ἑξῆς :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot k.$$

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

§ 24. Κίνησις. Ἐν ὑλικὸν σημεῖον λέγομεν ὅτι κινεῖται, ὅταν ἀλλάσῃ θέσιν ἐν σχέσει πρὸς ἄξονας συντεταγμένων, τοὺς ὁποίους δεχόμεθα, κατὰ συνήθη, ὡς ἀκίνητους. Συνήθως, ἡ κίνησις ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὴν Γῆν, θεωρουμένην ὡς ἀκίνητον· ἐπειδὴ, ὅμως, αὕτη πραγματικῶς κινεῖται, προκύπτει ὅτι ὅλαι αἱ κινήσεις εἶναι *σχετικαὶ κινήσεις*. Οὕτω, ἡ κίνησις τοῦ πεδίλου ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι διάφορος, ἀναλόγως τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφερόμεν τὴν κίνησιν. Διὰ σύστημα συντεταγμένων, μετακινούμενον μετὰ τοῦ ποδηλάτου, τὸ πῆδilon δια-



Σχ. 37. Τὸ πῆδilon τοῦ ποδηλάτου διαγράφει ἐν τῷ χώρῳ κυματοειδῆ γραμμὴν.

γράφει κύκλον — ὅπως, ἄλλωστε, τὸ ἀντιλαμβάνεται καὶ ὁ ποδηλάτης —, ἐνῶ διὰ σύστημα συντεταγμένων στερεῶς μετὰ τῆς Γῆς, τοῦτο διαγράφει μίαν κυματοειδῆ γραμ-

μὴν (σχ. 37) — ὅπως ἀκριβῶς ἀντιλαμβάνεται ταύτην εἰς ἀκίνητων παρατηρητῆς. Ἀπόλυτος κίνησις, κίνησις, δηλ., ἡ ὁποία δὲν ἀναφέρεται εἰς ἄξονας συντεταγμένων, εἶναι, διὰ τὴν Φυσικὴν, ἄνευ σημασίας.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν διαδοχικῶν θέσεων ἑνὸς κινητοῦ καλεῖται *τροχιὰ* αὐτοῦ. Ἀναλόγως τῆς μορφῆς τῆς, αὕτη εἶναι εἴτε *εὐθύγραμμος*, εἴτε *καμπυλόγραμμος*. Ἐκ τῶν τελευταίων, ἄλλαι εἶναι *ἐπίπεδοι*, δηλ., κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, καὶ ἄλλαι *στρεβλαί*. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τροχιὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ κίνησις λέγεται *κυκλική*.

§ 25. Βαθμοὶ ἐλευθερίας. Ἡ θέσις ἑνὸς κινουμένου ὑλικοῦ σημείου εἰς τὸν χώρον καθορίζεται, εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν τριῶν συντεταγμένων (x, y, z) αὐτοῦ, μετρούμενων ὡς πρὸς σύστημα ἄξωνων, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ἀκίνητον. Λέγομεν, δηλ., ὅτι τὸ κινητὸν ἔχει *τρεῖς βαθμοὺς ἐλευθερίας*.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, λοιπόν, ἡ κίνησις τοῦ ὑλικοῦ σημείου θὰ εἶναι γνωστή, ὅταν δίδωνται αἱ τρεῖς σχέσεις

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

αἱ ὁποῖαι παρέχουν εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν τὰς διαδοχικὰς θέσεις τοῦ κινητοῦ.

Ἐὰν ἡ κίνησις τοῦ κινητοῦ περιορίζεται ἐφ' ὀρισμένης ἐπιφανείας, τὸ κινητὸν ἔχει δύο βαθμοὺς ἐλευθερίας, ἐὰν δὲ ἐφ' ὀρισμένης γραμμῆς, ἔχει ἓνα βαθμὸν ἐλευθερίας. Παραδείγματα τῶν τριῶν αὐτῶν περιπτώσεων ἔχομεν εἰς ἀερόστατον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς συντεταγμένας, εἰς πλοῖον, κινούμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο συντεταγμένας καὶ εἰς σιδηρόδρομον, κινούμενον ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν του, ὃ ὁποῖος ἔχει μίαν συντεταγμένην.

Κατὰ ταῦτα, οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας ὁρίζονται ὡς ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ κινητοῦ.

§ 26. Ταχύτης. Ἐστω κινητὸν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ εὐθύγραμμου τροχιάς, εὐρίσκεται κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t εἰς τὸ σημεῖον A . Μετὰ χρόνον Δt , δηλ., τὴν χρονικὴν στιγμήν $t + \Delta t$, τὸ κινητὸν θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον B , θὰ ἔχη, δηλ., διατρέξει τὸ διάστημα AB , τοῦ ὁποῖου τὸ μήκος ἔστω Δs .

Ὅρίζομεν ὡς **μέσην ταχύτητα** $\bar{v}$ τοῦ κινητοῦ, ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμήν t μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς $t + \Delta t$, τὸ πηλίκον

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

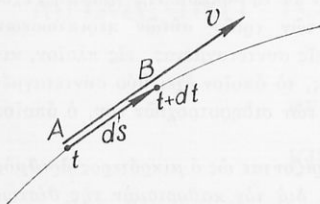
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἑξαρτᾶται — ἐξ ὁρισμοῦ — καὶ ἐκ τῶν δύο θεωρουμένων χρονικῶν στιγμῶν t καὶ $t + \Delta t$. Ἐπειδὴ, λοιπόν, αὕτη ἑξαρτᾶται ἐκ δύο τιμῶν τοῦ χρόνου, εἶναι πρακτικώτερον, κατὰ τὴν μελέτην τῶν κινήσεων, νὰ εἰσαγάγωμεν ἓν νέον φυσικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον νὰ ἑξαρτᾶται μόνον ἐκ μιᾶς τιμῆς τοῦ χρόνου, νὰ ἔχη δηλ., ὀρισμένην τιμὴν εἰς πᾶν σημεῖον τῆς τροχιάς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν διαρκῶς μικρότερα χρονικὰ διαστήματα Δt , ὅποτε καὶ τὰ ἐντὸς τῶν χρόνων αὐτῶν διανυόμενα διαστήματα Δs γίνονται διαρκῶς μικρότερα. Ὅταν τὸ Δt , ἐλαττούμενον, τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ πηλίκον $\Delta s / \Delta t$ τείνει πρὸς μίαν ὀρίκην τιμὴν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **στιγμιαίαν ταχύτητα** ἢ, ἀπλούστερον, **ταχύτητα** v τοῦ κινητοῦ. Ἦτοι εἶναι

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Τὴν τιμὴν τοῦ ὁρίου τούτου συμβολίζομεν διὰ τοῦ ds/dt , δηλ., θεωροῦμεν αὐτὴν ὡς ὀριζομένην ἐκ τοῦ πηλίκου τοῦ ἐντὸς τοῦ ἀπειροστοῦ χρόνου dt διανυομένου διαστήματος ds διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἦτοι:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Γενικός ὁρισμός τῆς ταχύτητος. Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐθεωρήσαμεν κίνησιν ἐπὶ εὐθύγραμμον τροχιάς. Ὅταν ἡ τροχιά δὲν εἶναι εὐθύγραμμος, τότε τὴν χωρίζομεν εἰς μεγάλων ἀριθμὸν τμημάτων, μήκους ds . Τὰ διαστήματα ταῦτα, λόγῳ τοῦ μικροῦ των μήκους, εἶναι δυνατόν νὰ θεωρηθῶν ὡς εὐθύγραμμα, οἷαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μορφή τῆς τροχιάς. Δυνάμεθα, ἐπομένως, τώρα, νὰ ὀρίσωμεν ἓν ἄνυσμα ds , μὲ μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ διάστημα ds καὶ μὲ φοράν, τὴν φοράν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ (σχ. 38).



Σχ. 38. Τὰ ἀνύσματα v καὶ ds εἶναι συγγραμμικά.

Ὅρίζομεν ὡς **ταχύτητα** τοῦ κινητοῦ ἓν ἄνυσμα v , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος ds διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν, συμπέπτονσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος ds . Ἦτοι :

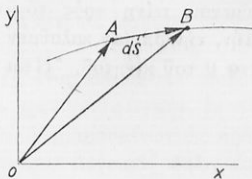
$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1), ὡς ἀνυσματικὴ ἐξίσωσις, ἀποδίδει ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς ταχύτητος· διότι, τὸ δεξιὸν μέλος, ὡς γινόμενον τοῦ μονομέτρου μεγέθους $1/dt$ ἐπὶ τὸ ἀνυσματικὸν μέγεθος ds , εἶναι, κατὰ τὴν § 19, ἀνυσματικὸν μέγεθος τῆς ἰδίας διευσθύνσεως μὲ τὸ ἄνυσμα ds καὶ ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς

$$\frac{1}{dt} \cdot ds.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ ταχύτης εἰς πᾶν σημεῖον τῆς τροχιάς ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐπ' αὐτῆς.

Ἐάν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B τῆς τροχιάς (σχ. 39) φέρωμεν τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἄνυσμα ds δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ἀνυσματικὴ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν ἐπιβατικῶν ἀκτῖνων. Ἐπομένως, ἡ ταχύτης εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνος ὡς πρὸς τὸν χρόνον. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ ἄνυσμα ds εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου O , ἐκ τοῦ ὁποῖου ἄγονται αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες· ἐπομένως καὶ ἡ παράγωγος τοῦ ἀνύσματος τούτου ὡς πρὸς τὸν χρόνον (δηλ., ἡ ταχύτης) εἶναι καὶ αὕτη ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου τούτου.



Σχ. 39.

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ταχύτητος. Ἡ ταχύτης ἔχει διαστάσεις

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = [L \cdot T^{-1}].$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. μονὰς ταχύτητος εἶναι τὸ

$$1 \frac{cm}{sec},$$

εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα τὸ

$$1 \frac{m}{sec}.$$

Ἐκτὸς τῶν μονάδων τούτων χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλαι. Οὕτω, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος αὐτοκινήτων, ἀεροπλάνων κ.λ. χρησιμοποιεῖται, συνήθως, ἡ μονὰς

$$1 \frac{km}{h},$$

ἐνῶ διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος πλοίων χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

$$1 \text{ κόμβος}.$$

$$1 \text{ κόμβος} = 1 \text{ ναυτικὸν μίλιον ἀνὰ ὥραν} = 1853 \text{ m/h} = 1853/3600 \text{ m/sec}.$$

Προβολαὶ τῆς ταχύτητος ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἐὰν λάβωμεν τὰς προβολὰς τοῦ ἀνύσματος ds ἐπὶ τοὺς δύο ἄξονας x καὶ y καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὰς dx καὶ dy , τότε αἱ προβολαὶ v_x καὶ v_y τῆς ταχύτητος v ἐπὶ τοὺς ἄξονας αὐτοὺς θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

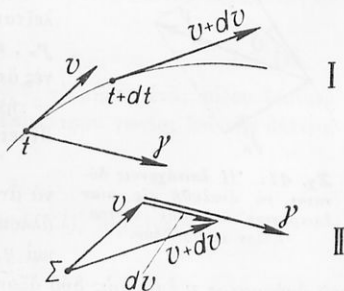
$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{καὶ} \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

§ 27. Ἐπιτάχυνσις. Ἐστω κινητόν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ τῆς τροχιάς του, ἔχει κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t ταχύτητα v (σχ. 40, I). Μετὰ χρόνον dt , δηλ., τὴν χρονικὴν στιγμήν $t + dt$, ἔστω ὅτι ἡ ταχύτης του ἔχει μεταβληθῇ (π. χ., ἔχει ἀυξηθῇ) κατὰ dv - ἄρα εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου dt αὕτη θὰ εἶναι ἴση πρὸς $v + dv$. Ὁ-ρίζομεν ὡς **ἐπιτάχυνσιν** τοῦ κινητοῦ ἐν ἄνυσμα p , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος dv διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν, συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος dv . Ἦτοι

$$p = \frac{dv}{dt}$$

$$(1) \quad \Sigma \chi. 40. \text{ Τὰ ἀνύσματα } p \text{ καὶ } dv \text{ εἶναι συγγραμμικά.}$$

Ἐάν, ἀπὸ τινος σημείου Σ (σχ. 40, II), φέρωμεν τὰ ἀνύσματα v καὶ



$v + dv$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄνυσμα dv εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ αὐτῶν διαφορὰ. Ἡ ἐπιτάχυνσις, λοιπόν, εἶναι ἄνυσμα συγγραμμικὸν μὲ τὸ ἄνυσμα dv . Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ κινητὸν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t (σχ. 40, I), φέρωμεν ἓν ἄνυσμα, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ p , τοῦτο δὲ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἀρνητικὴ ἐπιτάχυνσις καλεῖται **ἐπιβράδυνσις**.

Ὅπως συνάγεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (I), ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ παράγωγος τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἐπειδὴ δέ, ὡς εἶδομεν, ἡ ταχύτης εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνος, ἔπεται ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνος ὡς πρὸς τὸν χρόνον.

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἔχει διαστάσεις

$$[\gamma] = \left[\frac{v}{t} \right] = [L \cdot T^{-2}].$$

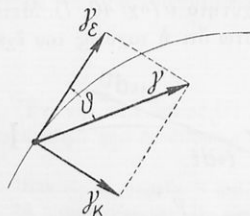
Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. μονὰς ἐπιταχύνσεως εἶναι τὸ

$$1 \frac{cm}{sec^2},$$

εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα τὸ

$$1 \frac{m}{sec^2}.$$

Συνιστώσαι τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος, δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς συνιστώσας. Ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ ἀνάλυσις κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις - τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τῆς τροχιάς καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτήν (σχ. 41). Ἐκ τούτων ἡ πρώτη, p , καλεῖται **ἐπιτροχίος ἐπιτάχυνσις**, ἡ δὲ δευτέρα, p_k , **κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις**. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ κάθετος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως — τὴν ὁποίαν ἐκαλέσαμεν κεντρομόλον — διευθύνεται πάντοτε πρὸς τὸ κοῖλον τῆς τροχιάς.



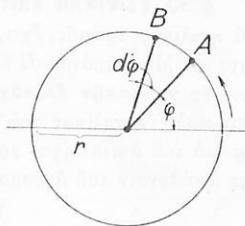
Σχ. 41. Ἡ ἐπιτάχυνσις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μίαν ἐπιτροχίον καὶ μίαν κεντρομόλον συνιστώσαν.

τοῦ ἄνυσματος v ἐπὶ τοὺς δύο ἄξονας x καὶ y , τότε αἱ προβολαὶ γ_x καὶ γ_y τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τοὺς ἄξονας τούτους θὰ εἶναι

$$\gamma_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{καὶ} \quad \gamma_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

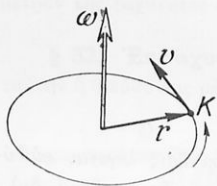
§ 28. Γωνιακή ταχύτης. Ἐστω κινητόν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίνος r (σχ. 42), εὐρίσκεται, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t , εἰς τὸ σημεῖον A . Μετὰ χρόνον dt , δηλ., τὴν χρονικὴν στιγμήν $t + dt$, τὸ κινητόν θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον B , ὁπότε ἡ ἀκτίς θὰ ἔχη διαγράψῃ τὴν γωνίαν $d\varphi$. Ὁρίζομεν ὡς **γωνιακὴν ταχύτητα** τοῦ κινητοῦ ἐν ἄνυσμα ω , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τῆς γωνίας $d\varphi$ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιάς. Ἦτοι

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



Σχ. 42.

Ἡ φορὰ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ω λαμβάνεται, συμβατικῶς, τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη μετὰ τὴν φορὰν τῆς περιστροφῆς τοῦ κινητοῦ, ν' ἀντιστοιχῇ εἰς προχώρησιν δεξιόστροφου κοχλίου (σχ. 43).



Σχ. 43. Τὸ ἄνυσμα ω εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιάς.

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἔχει διαστάσεις

$$[\omega] = \left[\frac{\varphi}{t} \right] = [T^{-1}].$$

Μονὰς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{ἀκτίνιον}}{\text{sec}} \left(1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right).$$

§ 29. Σχέσις ταχύτητος καὶ γωνιακῆς ταχύτητος. Κινητόν, κινούμενον μετὰ ταχύτητα v ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, διατρέχει ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διάστημα ds , ἴσον πρὸς

$$ds = v \cdot dt. \quad (1)$$

Ἐπειδή, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 9, τὸ μῆκος ἐνὸς τόξου ἰσοῦται μετὰ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτείνουσας αὐτὸ ἐπικέντρου γωνίας ἐπὶ τὴν ἀκτίνα, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$ds = d\varphi \cdot r.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ds εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν

$$d\varphi \cdot r = v \cdot dt$$

ἢ

$$v = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r$$

ἢ

$$v = \omega \cdot r$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ἀνυσματικῶς ὡς ἑξῆς:

$$v = [\omega \cdot r].$$

§ 30. Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. Ἐστω κινητόν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἔχει, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t , γωνιακὴν ταχύτητα ω . Μετὰ χρόνον dt ἔστω ὅτι αὕτη ἔχει μεταβληθῇ κατὰ $d\omega$. Ὁρίζομεν ὡς **γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν** ἐν ἄνυσμα ω' , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου $d\omega$ τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διευθύνσιν, συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος $d\omega$. Ἦτοι

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt}$$

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις ἔχει διαστάσεις

$$[\omega'] = \left[\frac{\omega}{t} \right] = [T^{-2}].$$

Μονὰς τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}.$$

§ 31. Ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις. Μία κίνησις λέγεται **εὐθύγραμμος** καὶ **ὁμαλὴ**, ὅταν ἡ ταχύτης παραμένῃ χρονικῶς σταθερά, δηλ., ὅταν δὲν μεταβάλλεται οὔτε τὸ μέτρον, οὔτε ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἀφοῦ ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ ταχύτης δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς

$$v = \frac{s}{t} \quad (1)$$

χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ληφθῇ ὁ χρόνος ἀπειροστός, ὅπως εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς § 26, διότι ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου s/t διατηρεῖται σταθερά, ἀνεξαρτήτως τοῦ θεωρουμένου χρόνου.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$s = v \cdot t \quad (2)$$

Εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν, λοιπόν, — εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά — τὸ διάστημα s εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου t , ἐντὸς τοῦ ὁποίου διανύεται.

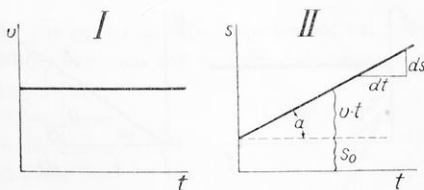
Ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=0$, τὸ κινητὸν ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἄξονος τῶν διαστημάτων κατὰ $s=0$. Ἐάν, ὅμως, τὸ κινητόν, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=0$,

ἀπέχῃ αὐτῆς κατὰ $s = s_0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ γραφῇ ὡς ἐξῆς :

$$s = s_0 + v \cdot t.$$

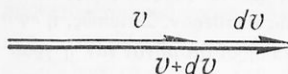
Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα II τοῦ σχήματος

44. Ὅπως παρατηροῦμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t = 0$, ὄντως τὸ κινητὸν ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων κατὰ s_0 . Ἡ ἐπερχομένη, ἀκολούθως, ἐντὸς τοῦ χρόνου t αὐξήσις τοῦ διαστήματος κατὰ $v \cdot t$ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς. Ἡ κλίσις ds/dt τῆς εὐθείας εἶναι σταθερά, ὅπως, ἄλλως τε, ἀναμένεται, ἀφοῦ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι σταθερὸν (I).

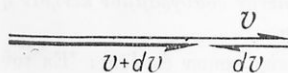


Σχ. 44. Γραφικὴ παράστασις τῶν σχέσεων $v = f(t)$ καὶ $s = f(t)$ εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν.

§ 32. Έπιταχυνόμενη ευθύγραμμος κίνησης. Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην ἡ διεύθυνσις μὲν τῆς ταχύτητος παραμένει σταθερά, τὸ μέτρον, ὅμως,



I



II

Σχ. 45. Εἰς τὴν ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ὑπάρχει μόνον ἐπιτόχιος ἐπιτάχυνσις.

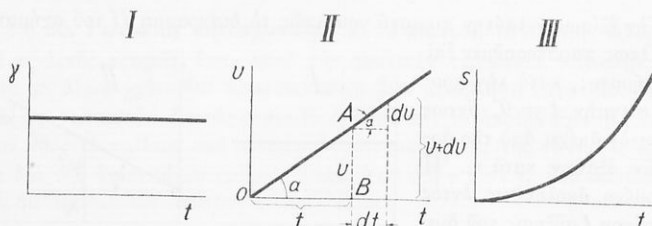
ἐπιτόχιος συνιστώσα τῆς ἐπιταχύνσεως, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις θὰ διατηρῇ σταθεράν τὴν διεύθυνσίν της.

Εἰς τὴν ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: α) ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά καὶ β) ἡ ἐπιτάχυνσις μεταβάλλεται.

α) **Ὁμαλὴς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησης.** Μία εὐθύγραμμος κίνησης, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις διατηρεῖται σταθερά (σχ. 46, I), καλεῖται **ὁμαλὴς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησης**. Κατωτέρω θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀνεύρωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ, ἐκτελοῦντος τοιαύτην κίνησιν, συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ ποῖα σχέσις συνδέει τὸ διανυόμενον ὑπ' αὐτοῦ διάστημα μετὰ τοῦ χρόνου.

Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρό-

νον ἀποδίδεται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς (σχ. 46, II). Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος



Σχ. 46. Γραφικὴ παράστασις τῶν σχέσεων $\gamma = f(t)$, $v = f(t)$ καὶ $s = f(t)$ εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν.

εἶναι v . Μετὰ χρόνον dt , δηλ., κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t + dt$, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι $v + dv$. Ἐκ τοῦ μικροῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι dv καὶ dt , ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{dv}{dt} = \epsilon\varphi \alpha \quad (*).$$

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον dv/dt ἰσοῦται, ἀκριβῶς, μὲ τὸ μέτρον γ τῆς ἐπιταχύνσεως, τὸ ὁποῖον ἐδέχθημεν, ἐν προκειμένῳ, ὡς σταθερόν. Συνεπῶς, ἡ $\epsilon\varphi \alpha$ πρέπει νὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμὴν, τοῦτο, ὅμως, ἐκπληροῦται μόνον ἐὰν ἡ γραμμὴ $v = f(t)$ εἶναι εὐθεΐα.

Συμπέρασμα: Εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ ταχύτης εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAB λαμβάνομεν

$$v = t \cdot \epsilon\varphi \alpha,$$

Ἐπειδὴ δὲ εὔρομεν ἀνωτέρω ὅτι

$$\epsilon\varphi \alpha = \frac{dv}{dt} = \gamma,$$

ἔχομεν

$$\boxed{v = \gamma \cdot t} \quad (1)$$

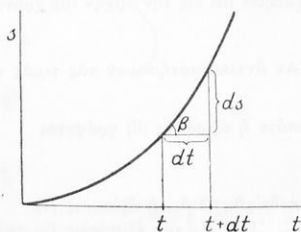
Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι δυνατόν νὰ εὐρεθῇ καὶ ἡ σχέση, ἡ συνδέουσα τὸ διανυόμενον διάστημα συναρτήσῃ τοῦ χρόνου. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ σχέση αὕτη εἶναι ἡ ἑξῆς:

(*) Εἰς τὸν τύπον αὐτὸν διὰ τῆς ἐκφράσεως $\epsilon\varphi \alpha$ δὲν ἐννοοῦμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας α , τῆς ἐμφανιζομένης εἰς τὸ σχῆμα 46, II, ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον, ἐξ ἄλλου, δὲν εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς, ἀλλ' ἔχει διαστάσεις ἐπιταχύνσεως.

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

παρίσταται δὲ γραφικῶς διὰ τοῦ διαγράμματος *III*, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα παραβολῆς.

Ἡ καμπύλη, ἡ παρέχουσα τὴν σχέσιν μεταξύ διαστήματος καὶ χρόνου (σχ. 47), δύναιται νὰ δώσῃ καὶ τὴν ταχύτητα τοῦ κινήτου ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμὴν t , ἀρκεῖ νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ κλίσις αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν δύο χρονικὰς στιγμὰς t καὶ $t + dt$, ὁπότε τὰ ἀντίστοιχα διαστήματα θὰ εἶναι ἴσα πρὸς s καὶ $s + ds$. Αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς dt καὶ ds . Ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον ds/dt παρέχει τὴν ταχύτητα. Κατὰ τὸ σχῆμα 47, ὅμως, ἔχομεν $\varepsilon\varphi \beta = ds/dt$. Ἀρα, ἡ κλίσις τῆς καμπύλης εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς θὰ δίδῃ τὴν ταχύτητα τοῦ κινήτου ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμὴν t . Ἐφ' ὅσον ἡ κλίσις αὐξάνεται πρὸς τὰ δεξιὰ, ἔπεται ὅτι, παρερχομένου τοῦ χρόνου, θὰ αὐξάνεται καὶ ἡ ταχύτης, ὅπως ἄλλως τε προκύπτει καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1).



Σχ. 47.

Ὅταν τὸ κινητὸν ἔχῃ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , διάφορον τοῦ μηδενός, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) μετατρέπονται ὡς ἑξῆς:

$$v = v_0 + \gamma \cdot t \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2. \quad (4)$$

Ἀπόδειξις τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4). Ἐξ ὀρισμοῦ, ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς $\gamma = dv/dt$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν

$$dv = \gamma \cdot dt.$$

Εἰς τὴν ὁμαλῶς επιταχυνομένην ευθύγραμμον κίνησην, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν, ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι σταθερά, ἐπομένως, δι' ὁλοκληρώσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, λαμβάνομεν

$$v = \gamma \cdot t + C_1 \quad (5)$$

ἐνθα C_1 εἶναι σταθερὰ ὁλοκληρώσεως. Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ταύτης προκύπτει ἐκ τῶν ὁρίκων συνθηκῶν: Ἐὰν καλέσωμεν v_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, ἔχομεν

$$v = v_0 \quad \text{διὰ} \quad t = 0.$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν v καὶ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5), λαμβάνομεν

$$v_0 = C_1,$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται

$$v = v_0 + \gamma \cdot t$$

ἀπεδείχθη, δηλ., ἡ ἐξίσωσις (3).

Ἡ ἐξίσωσις (4) εὐρίσκεται ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ v διὰ τοῦ ἴσου του ds/dt , ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + \gamma \cdot t.$$

Δι' ολοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λαμβάνομεν

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 + C_2. \quad (6)$$

Τὴν σταθερὰν C_2 τῆς ολοκληρώσεως εὐρίσκομεν ἐκ τῶν ὁριζῶν συνθηκῶν: Ἄν δεχθῶμεν ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου τὸ διάστημα s ἦτο ἴσον πρὸς μηδέν, θὰ λάβωμεν

$$s = 0 \quad \text{διὰ} \quad t = 0.$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν (6), λαμβάνομεν

$$0 = 0 + 0 + C_2,$$

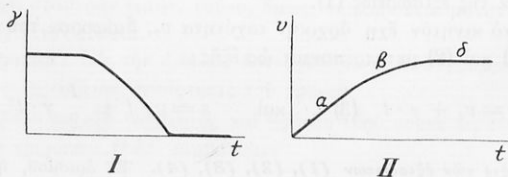
ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$$

ἀπεδείχθη, δηλ., ἡ ἐξίσωσις (4).

Ἐάν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) θέσωμεν $v_0 = 0$, προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

β) **Ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις μετὰ μεταβλητὴν ἐπιτάχυνσιν.** Ἡ κίνησις αὕτη παρουσιάζεται, συνήθως, κατὰ τὴν κίνησιν τῶν διαφορῶν ὄχημάτων. Οὕτω, π.χ., αὐτοκίνητον, ἐκκινουὺν ἐκ τῆς ἡρεμίας, ἔχει

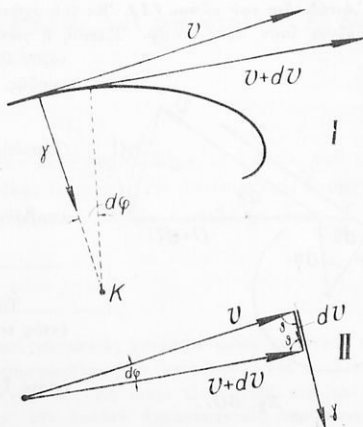


Σχ. 48.

ἀρχικῶς μεγάλην ἐπιτάχυνσιν (σχ. 48, I), καθόσον ἡ ταχύτης του, ἀρχομένη ἀπὸ τῆς τιμῆς μηδέν, αὐξάνεται ταχέως. Ὄταν, ὁμως, τὸ αὐτοκίνητον ἀποκτήσῃ σχεδὸν τὴν κανονικὴν ταχύτητα τῆς πορείας του, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχῃ μειωθῇ σημαντικῶς, θὰ λάβῃ δὲ ἀκριβῶς τὴν τιμὴν μηδέν, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται ἰσοταχῶς. Ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου ἀποδίδεται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος 48, II, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τμήμα α τῆς καμπύλης ἀνέρεται εὐθύγραμμος (τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά), ἐνῶ τὸ τμήμα β εἶναι καμπύλον, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις μεταβάλλεται. Ἡ διαρκῶς ἐλαττουμένη κλίσις τοῦ τμήματος τούτου ἰσοδυναμεῖ μετὰ διαρκῶς ἐλαττουμένην ἐπιτάχυνσιν. Τέλος, τὸ τμήμα δ εἶναι ὀριζόντιον — ἡ ταχύτης, δηλ., διατηρεῖται σταθερὰ — καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν.

§ 33. Ὁμαλή καμπυλόγραμμος κίνησης. Τοιαύτη είναι ἡ κίνησης ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν, κινούμενον ἐπὶ καμπυλογράμμου τροχιάς, ἔχει ταχύτητα, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον μὲν παραμένει διαρκῶς σταθερὸν (δηλ., τὸ κινητὸν διανύει εἰς ἴσους χρόνους ἴσα διαστήματα), ἢ διεύθυνσις, ὅμως, μεταβάλλεται. Κατὰ ταῦτα, ἡ ὁμαλὴ καμπυλόγραμμος κίνησης εἶναι μία ἐπιταχυνομένη κίνησης. Εἰς τὴν κίνησην ταύτην τὸ ἄνυσμα v καὶ τὸ ἄνυσμα $v + dv$ (σχ. 49, I) ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, καί, συνεπῶς, τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν τὰ ἄνυσματα v καὶ $v + dv$, εἶναι ἰσοσκελὲς (II). Ἐπειδὴ, ὅμως, ἡ γωνία $d\varphi$ εἶναι ἀπειροστή, ἔπεται ὅτι αἱ γωνίαι θ , αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θὰ εἶναι, κατὰ προσέγγισιν, ἴσαι πρὸς 90° , τὸ ἄνυσμα, δηλ., dv εἶναι, περίπου, κάθετον ἐπὶ τὸ ἄνυσμα v (ἢ τὸ ἄνυσμα $v + dv$). Ἐφ' ὅσον, λοιπόν, τὸ ἄνυσμα dv εἶναι, περίπου, κάθετον ἐπὶ τὸ ἄνυσμα v , ἔπεται ὅτι εἰς τὴν ὁμαλὴν καμπυλόγραμμον κίνησην ὑπάρχει μόνον κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, δηλ., ἡ ἐπιτροχίος ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Τὸ μέτρον γ_{κ} τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι (ὥπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως) ἴσον πρὸς



Σχ. 49. Εἰς τὴν ὁμαλὴν καμπυλόγραμμον κίνησην ὑπάρχει μόνον κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

ἐνθα r εἶναι ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς τροχιάς εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.

§ 34. Ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησης. Μία κυκλικὴ κίνησης λέγεται *ὁμαλή*, ὅταν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος παραμένῃ σταθερόν. Εἰς τὴν κίνησην ταύτην ὑπάρχει—συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην παράγραφον—μόνον κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι σταθερὸν (*) καὶ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρον τῆς ταχύτητος διὰ τοῦ μέτρον τῆς ἀκτίνος. Ἦτοι

(*) Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς § 33, εἰς τὴν ὁποίαν, ἂν θέσωμεν $v = \text{σταθ.}$ καὶ $r = \text{σταθ.}$, λαμβάνομεν $\gamma_{\kappa} = \text{σταθ.}$

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (1). Ἐκ τοῦ σχήματος 50 προκύπτει ὅτι τὸ μήκος dl τοῦ τόξου εἶναι ἴσον πρὸς $v \cdot d\varphi$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $d\varphi$ εἶναι ἀπειροστή, τὸ μήκος τοῦ τόξου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μήκος dv τῆς χορδῆς. Ἐχομεν, συνεπῶς,

$$dv = v \cdot d\varphi.$$

Ἐπειδὴ, ἔξ ἄλλου, εἶναι

$$ds = r \cdot d\varphi$$

λαμβάνομεν

$$dv = \frac{v \cdot ds}{r}.$$

Τὸ διάστημα, ὅμως, ds , τὸ διανυόμενον ἐντὸς τοῦ χρόνου dt , εἶναι ἴσον πρὸς

$$ds = v \cdot dt,$$

ὁπότε ἔχομεν

$$dv = v^2 \cdot \frac{dt}{r}.$$

Ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ dt , λαμβάνομεν

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{r}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

Περίοδος καὶ συχνότης. Εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν καλεῖται **περίοδος** T ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ κινητοῦ.

Συχνότης ν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν, τὰς ὁποίας ἔκτελεῖ τὸ κινητὸν ἐντὸς χρόνου τινός, διὰ τοῦ χρόνου τούτου.

Ἐπειδὴ ἐντὸς τοῦ χρόνου T τὸ κινητὸν ἔκτελεῖ 1 στροφὴν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς συχνότητος. Ἡ συχνότης ἔχει διαστάσεις

$$[\nu] = \frac{1}{[T]} = [T^{-1}].$$

Μονὰς συχνότητος εἶναι τὸ

$$1 \text{ sec}^{-1}.$$

Ἡ μονὰς αὕτη καλεῖται καὶ **1 Hertz (1 Hz)** ἢ καὶ **1 κύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον (1 c/sec)**. Χρησιμοποιοῦνται, ἐπίσης, τὰ πολλαπλάσια αὐτῆς

$$1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad 1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}.$$

Αι μονάδες αὐται καλοῦνται και

$$1 \text{ kc/sec} \quad \text{και} \quad 1 \text{ Mc/sec} (*).$$

§ 35. Σχέσεις γωνιακής ταχύτητας και συχνότητας. Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (§ 28) ἔχομεν

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ἄν ὥς χρόνον λάβωμεν τὸν χρόνον μιᾶς περιόδου, τότε ἡ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου διαγραφομένη γωνία θὰ εἶναι ἴση πρὸς 2π ἀκτίνια και, ἐπομένως, ἡ γωνιακή ταχύτης θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\omega = 2\pi/T$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $T = 1/\nu$ λαμβάνομεν

$$\omega = 2\pi\nu$$

§ 36. Σχέσεις ἐπιταχύνσεως και γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως κινητοῦ, κινουμένου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς. Θεωρήσωμεν κινητὸν, κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς ἀκτίνας r , μὲ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν ω' . Ἐφ' ὅσον τὸ κινητὸν κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, θὰ ἔχῃ ἐπιτάχυνσιν γ_e τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας· μίαν ἐπιτρόχιον γ_e και μίαν κεντρομόλον γ_{κ} .

Ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις ἔχει μέτρον, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται (κατὰ τὴν § 22) ὡς τὸ πηλίκον τῆς μεταβολῆς dv τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt . Ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητας κατὰ τινά χρονικὴν στιγμὴν εἶναι ἴσον πρὸς $r \cdot \omega$, ἡ μεταβολὴ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $r \cdot d\omega$, ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\gamma_e = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

ἢ

$$\gamma_e = r \cdot \omega'$$

Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ_{κ} θὰ ἔχῃ, ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν, μέτρον, ἴσον πρὸς

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{r}.$$

§ 37. Γενικὴ περίπτωσις. Τυχοῦσα καμπυλόγραμμος κίνησις. Εἰς τὴν γενικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ ἐπιτάχυνσις ἔχει και ἐπιτρόχιον και κεντρομόλον συνιστώσαν. Τοιαύτη κίνησις εἶναι, π.χ., ἡ κίνησις αὐτοκινήτου, τὸ ὁποῖον, εὐρισκόμενον ἐπὶ καμπύλης ὁδοῦ, ἔκκινεῖ. Λόγῳ τῆς αὐξήσεως τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας τοῦ αὐτοκινήτου, ὑπάρχει ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς

$$\gamma_e = \frac{dv}{dt}.$$

(*) Καταχρηστικῶς, αἱ μονάδες c/sec , kc/sec και Mc/sec καλοῦνται και κύκλος (c) χιλίωντος (kc) και megacyκλος (Mc).

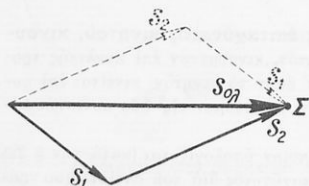
Ἀφ' ἑτέρου, λόγῳ τῆς καμπυλότητος τῆς ὁδοῦ, ὑπάρχει καὶ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον, ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμήν, εἶναι ἴσον πρὸς

$$\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{r},$$

ἐνθα v εἶναι τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος καὶ r ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ὁδοῦ εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, πᾶσα καμπυλόγραμμος κίνησις (ὀμαλὴ ἢ μὴ) εἶναι ἐπιταχυνομένη κίνησις, διότι θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, ἔστω καὶ ἂν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος παραμένῃ σταθερόν.

§ 38. Σύνθεσις κινήσεων. α) *Σύνθεσις διαστημάτων.* Ἐστω κινή-
τόν, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ διανύσῃ τὸ εὐθύγραμμον διάστημα s_1 (σχ. 51), κινεῖ-
ται πρὸς ἄλλην διεύθυνσιν, διανῶν τὸ εὐθύγραμμον διάστημα s_2 καὶ κατα-
λήγον, οὕτω, εἰς τὸ σημεῖον Σ. Εἰς τὸ
αὐτὸ σημεῖον θὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἐὰν
διανύσῃ πρῶτον τὸ τμήμα s_2 τῆς τροχιάς
του (ἐστιγμένη γραμμὴ) καὶ κατόπιν τὸ
 s_1 . Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ ἀποτε-
λεσμα τῶν δύο κινήσεων εἶναι τὸ αὐτὸ
ὡς ἐὰν τὸ κινητόν, ἀντὶ νὰ κινηθῇ, δια-
δοχικῶς, κατὰ τὰ διαστήματα s_1 καὶ s_2 ,
ἐκινεῖτο κατὰ τὴν διαγώνιον $s_{\sigma\lambda}$ τοῦ ὑπ'
αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμ-

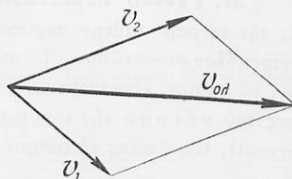


Σχ. 51. Παραλληλόγραμμον διαστη-
μάτων.

μου, ἢ ὁποία, ὡς εἶδομεν, ὀρίζεται ὡς ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἀνυσμάτων s_1 καὶ s_2 . Ἦτοι «τὸ ὑπὸ τινος κινήτου διανυόμενον συνολικῶς διάστημα εὑρίσκεται ὡς τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν μερικῶν διαστημάτων».

Ἐὰν ἐν κινήτῳ ἐκτελῇ τὰς δύο κινήσεις ταυτοχρόνως, τότε, ὡς ἀποδει-
κνύεται δι' ἀπλῶν συλλογισμῶν, ἡ διανυομένη τροχιά θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν
συνισταμένην.

β) *Σύνθεσις ταχυτήτων.* Ἐστω κινήτόν, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ταυτοχρό-
νως δύο κινήσεις, μίαν μὲ ταχύτητα v_1 ,
καὶ τὴν ἄλλην μὲ ταχύτητα v_2 (σχ. 52).
Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., ἄνθρωπος,
εὗρισκόμενος ἐπὶ πλοίου, κινουμένου μὲ
ταχύτητα v , καὶ βαδίζων ἐπὶ τοῦ κατα-
στρώματος μὲ ταχύτητα v_2 . Ἐπειδὴ, κατὰ
τὰ προηγούμενα, τὸ ἐντὸς χρόνου τινὸς
πραγματικῶς διανυόμενον διάστημα δίδε-
ται ὑπὸ τῆς συνισταμένης τῶν διαστημά-
των, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ταχύτης $v_{\sigma\lambda}$, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὁ ἄνθρωπος, κινού-



Σχ. 52. Παραλληλόγραμμον
ταχυτήτων.

μενος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης ταύτης τῶν διαστημάτων, δὲ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων.

Γενικῶς, λοιπόν, ἰσχύει ἡ πρότασις ὅτι, ὅταν κινητὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως δύο κινήσεις, ἡ ταχύτης του δίδεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο ταχυτήτων.

Σχετικὴ ταχύτης. Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τὴν § 20, ἡ θέσις καὶ ἡ ταχύτης ἐνὸς κινητοῦ ἀναφέρονται πάντοτε εἰς ἓν σύστημα συντεταγμένων. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὡς τοιοῦτο σύστημα ἐκλέγεται σύστημα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκλονήτως συνδεδεμένον πρὸς τὴν Γῆν καὶ τὸ ὁποῖον δεχόμεθα ὡς «ἀκίνητον», μολονότι συμμετέχει τῆς κινήσεως τῆς Γῆς. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ὡς σύστημα συντεταγμένων ἐκλέγομεν σύστημα, τὸ ὁποῖον κινεῖται ὡς πρὸς τὴν Γῆν. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα αἱ ταχύτητες v_1 καὶ v_{01} ἀνεφέροντο ὡς πρὸς τὴν Γῆν καὶ τοῦτο διότι ἡ ταχύτης v_1 ἦτο ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὴν Γῆν, ἡ δὲ ταχύτης v_{01} ἦτο ἡ ταχύτης τοῦ ἀνθρώπου ὡς πρὸς τὴν Γῆν. Ἀντιθέτως, ἡ ταχύτης v_2 ἦτο ἡ ταχύτης τοῦ ἀνθρώπου ὡς πρὸς σύστημα συντεταγμένων, τὸ ὁποῖον εἶναι συνδεδεμένον μετὰ τοῦ πλοίου καὶ τὸ ὁποῖον, συνεπῶς, κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου. Τὴν ταχύτητα ταύτην v_2 , ἣτις ἀναφέρεται εἰς σύστημα συντεταγμένων, κινούμενον μετὰ τοῦ πλοίου, καλοῦμεν **σχετικὴν ταχύτητα** τοῦ ἀνθρώπου ὡς πρὸς τὸ πλοῖον.

Ἐκ τοῦ σχήματος 49 προκύπτει ὅτι, ὅταν ἓν σῶμα κινῆται μὲ τὴν ταχύτητα v_1 (ὡς πρὸς τὴν Γῆν) καὶ ἄλλο σῶμα κινῆται μὲ τὴν ταχύτητα v_{01} (ὡς πρὸς τὴν Γῆν) ἡ σχετικὴ ταχύτης v_2 τοῦ ἐνὸς σώματος ὡς πρὸς τὸ ἄλλο δὲ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀνυσματικὴν διαφορὰν τῶν δύο ταχυτήτων.

γ) **Σύνθεσις ἐπιταχύνσεων.** Ὅτι ἰσχύει διὰ τὴν σύνθεσιν διαστημάτων καὶ ταχυτήτων, ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἐπιταχύνσεις.

§ 39. Ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας. Ὅλα τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπαλληλίας τῶν κινήσεων, ἡ ὁποία διατυπώται ὡς ἑξῆς: «Τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς κινήσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν τὸ κινητὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως καὶ ἄλλην κίνησιν».

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ μελετήσωμεν τὴν κίνησιν ἐνὸς κινητοῦ, ἐκτελοῦντος ταυτοχρόνως δύο ἢ περισσοτέρας κινήσεις, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν ἐκάστην κίνησιν χωριστὰ καὶ νὰ ἐπαλληλίσωμεν τ' ἀποτελέσματα (*).

§ 40. Βολή. Θεωρήσωμεν πυροβόλον ὅπλον, τὸ ὁποῖον βάλλει, ὑπὸ γωνίαν βολῆς α , βλήμα, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 (σχ. 53). Τὸ πρόβλημα τῆς βολῆς συνίσταται ἀφ' ἐνὸς μὲν εἰς τὴν εὑρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως καί, ἐν συνεχείᾳ, τῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιάς, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὴν εὑρεσιν

(*) Τὸ περιεχόμενον τῆς παραγράφου ταύτης δικαιολογεῖ τὸν εἰς τὴν § 19 αὐθαιρέτως διατυπωθέντα κανόνα τῆς προσθέσεως δύο ἀνυσμάτων.

τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι θὰ παρέχουν εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.

α) Ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εὐρίσκεται διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν:

Ἄν ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἐπέδρα δύνამεις, τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο κατὰ τὴν διεύθυνσιν OA ἐνθυγαδύμως καὶ ἰσοταχῶς, θὰ διήνυε δὲ ἐντὸς τοῦ χρόνου t τὸ διάστημα $v_0 \cdot t$ καὶ θὰ εἶχε συντεταγμένας

$$x = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \eta\mu \alpha.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν τὸ βλήμα ἔπιπτεν ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ ἐξετέλει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐντὸς τοῦ χρόνου t θὰ διήνυε τὸ διάστημα

$$OB = \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Αἱ συντεταγμένα, συνεπῶς, τοῦ βλήματος θὰ ἦσαν

$$x = 0$$

$$\text{καὶ} \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπαλληλίας, ἡ πραγματικὴ θέσις Γ τοῦ κινητοῦ εὐρίσκεται τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου, αἱ δὲ συντεταγμένα του εὐρίσκονται διὰ προσθέσεως. Ἦτοι εἶναι

$$x = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + 0 \quad (1)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \eta\mu \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιάς, τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t , εἶναι ἡ ἐξῆς:

$$y = \epsilon\phi \alpha \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot x^2. \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ παριστᾷ *παραβολήν*.

β) Ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν εὐρίσκεται διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Ἄν ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἐπέδρα δύνამεις, τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο διαρκῶς μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_0 , αἱ συνιστώσαι, συνεπῶς, τῆς ταχύτητος θὰ ἦσαν, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$v_x = v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$v_y = v_0 \cdot \eta\mu \alpha.$$

Ἄν, ἀφ' ἐτέρου, τὸ βλήμα ἔπιπτεν ἑλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ εἶχε ταχύτητα μὲ συνιστώσας

$$\begin{aligned}v_x &= 0 \\v_y &= -g \cdot t.\end{aligned}$$

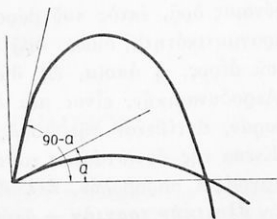
Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπαλληλίας, αἱ συνιστώσας τῆς πραγματικῆς ταχύτητος θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cdot \sin \alpha + 0 \\v_y &= v_0 \cdot \eta \mu \alpha - g \cdot t.\end{aligned} \quad (4)$$

Βεληνεκές. Ἐν στοιχείῳ, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὴν Βλητικὴν, εἶναι τὸ **βεληνεκές**, ἡ ὀριζοντία, δηλ., ἀπόστασις OA μεταξὺ τοῦ σημείου ἀναχωρήσεως O τοῦ βλήματος καὶ τοῦ σημείου A , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τροχιά συναντᾷ τὸ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχόμενον ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Τὸ βεληνεκές εὐρίσκουμεν, ἑάν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), θέσωμεν $y = 0$. Ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δίδει δύο λύσεις:

$$x = 0 \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \eta \mu \alpha \cdot \sin \alpha \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \eta \mu 2\alpha.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως βλέπομεν ὅτι τὸ βεληνεκές γίνεται μέγιστον, ὅταν τὸ $\eta \mu 2\alpha$ γίνῃ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, δηλ., ὅταν $\alpha = 45^\circ$. Ἐπειδὴ $\eta \mu 2\alpha = \eta \mu(180^\circ - 2\alpha)$, ἔπεται ὅτι τὸ βλήμα ἔχει τὸ αὐτὸ βεληνεκές διὰ δύο γωνίας βολῆς α καὶ $90^\circ - \alpha$ (σχ. 54). Ἡ σκόπευσις ὑπὸ τὴν μικροτέραν γωνίαν ὀνομάζεται *εὐθύφορος*, ἐνῶ ὑπὸ τὴν μεγαλύτεραν *ἐπισκοπητικὴ*.



Σχ. 54. Τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι δυνατόν νὰ βληθῇ ὑπὸ δύο γωνίας.

Μέγιστον ὕψος. Τὸ μέγιστον ὕψος $y_{\max}$, εἰς τὸ ὁποῖον — ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν βολῆς — φθάνει τὸ βλήμα, εὐρίσκειται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τροχιάς ἡ ταχύτης ἔχει ὀριζοντίαν διεύθυνσιν καί, συνεπῶς, ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστώσα v_y θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐάν, λοιπόν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) θέσωμεν $v_y = 0$, θὰ λάβωμεν

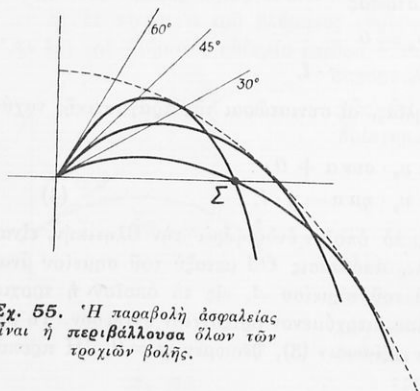
$$t = \frac{v_0}{g} \cdot \eta \mu \alpha.$$

Ἀντικαθιστώντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), λαμβάνομεν

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \eta \mu^2 \alpha.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν ὅτι τὸ $y_{\max}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γω-

νίας βολής και λαμβάνει την μεγίστην του τιμήν, όταν $\eta\mu^2 \alpha = 1$, δηλ., όταν ή βολή γίνεται κατακορύφως.

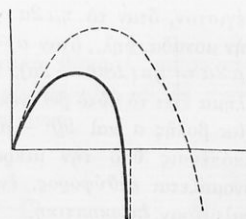


Σχ. 55. Ἡ παραβολή ασφαλείας είναι ἡ περιβάλλουσα όλων τῶν τροχιῶν βολῆς.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, τὰ σημεῖα τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα βάλλονται ἀπὸ τοῦ σημείου O μετὰ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , χωρίζονται ἀπὸ τὰ ἀπρόσβλητα διὰ καμπύλης, ἡ ὁποία εἶναι παραβολὴ καὶ καλεῖται **παραβολὴ ασφαλείας** (σχ. 55). Δι' ἐκάστου σημείου τῆς καμπύλης ταύτης μία μόνον τροχιά βολῆς διέρχεται, ἐνῶ, ὡς εἶδομεν προηγουμένως, δι' ἐκάστου τῶν ἐντὸς αὐτῆς εὐρι-

σκομένων σημείων διέρχονται δύο τροχιαὶ βολῆς - ἡ εὐθύφορος καὶ ἡ ἐπισκηπτική.

Βολὴ ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ὅλα τὰ προεκτεθέντα ἰσχύουν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἄλλη δύναμις δρᾷ, ἐκτὸς τοῦ βάρους του. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, δρᾷ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν Ἀεροδυναμικὴν, εἶναι μία δύναμις, ἔχουσα, φοράν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος. Ἐνεκα τῆς ἀντιστάσεως ταύτης τὸ βλήμα δὲν διαγράφει παραβολὴν, ἀλλ' ἄλλην τροχίαν — τὴν **βλητικὴν τροχίαν** — ἀσύμμετρον ὡς πρὸς τὸ ἄνωτατον σημεῖον τῆς (σχ. 56). Τὸ μέγιστον ὕψος εἶναι τώρα μικρότερον, τὸ βεληνεκές ἐπίσης. Ὁ κατερχόμενος κλάδος τῆς τροχιάς εἶναι πλέον ἀπότομος τοῦ ἀνερχομένου καὶ καταλήγει ἀσυμπτωτικῶς εἰς μίαν κατακόρυφον.



Σχ. 56. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος μεταβάλλει τὴν τροχίαν τοῦ βλήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κινητὸν κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ τροχιάς, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σχῆμα ἐλλείψεως. α) Ἡ ἐπιτροχίος ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά; β) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ἔχει σταθερὸν μέτρον;
2. Βλήμα, βαλλόμενον μετὰ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ὑπὸ γωνίαν βολῆς α , διαγράφει παραβολικὴν τροχίαν (σχ. 53). α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος μεταβάλλεται κατὰ μήκος τῆς τροχιάς; β) Ἡ κεντρομόλος καὶ ἡ ἐπιτροχίος ἐπιτάχυνσις μεταβάλλονται κατὰ μήκος τῆς τροχιάς; γ) Πόση εἶναι ἡ ἐπιτροχίος ἐπιτάχυνσις καὶ πόση ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις εἰς τὸ σημεῖον Δ ;

3. Αυτόκινητον, εύρισκόμενον ἐπὶ καμπύλης ὁδοῦ, ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἡρεμίας. Ὁ κινητὴρ τοῦ αὐτοκινήτου ἔστω ὅτι δίδει εἰς αὐτὸ σταθεράν (ἐπιτρόχιον) ἐπιτάχυνσιν γ . Ποία θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ_{κ} κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t ; Ἡ ἀκτίς καμπυλότητος r τῆς ὁδοῦ ἔστω σταθερά.

$$\left(\text{ΑΠ.: } \gamma_{\kappa} = \frac{\gamma^2 \cdot t^2}{r} \right)$$

4. Κινητὸν, κινεῖται κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x , κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἰσχύη ἡ σχέση $x = a \cdot t$ (ἐνθα $a = \text{σταθερά}$). Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ;

5. Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x, y κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις $x = a \cdot t$ καὶ $y = \beta \cdot t$ (ἐνθα a καὶ β σταθεραί). Ποία εἶναι ἡ μορφή τῆς τροχιάς;

6. Θεωρήσωμεν τροχόν, στρεφόμενον ὁμαλῶς, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἕν σημεῖον, εύρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτρόχιος καὶ πόση ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις τοῦ σημείου τούτου, ὅταν α) ὁ τροχὸς εἶναι ὀριζόντιος καὶ β) ὅταν εἶναι κατακόρυφος;

7. Αυτόκινητον ἀνέρχεται ἐπὶ κεκλινένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως 30° , με σταθεράν ταχύτητα v . Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ αὐτοκινήτου;

8. Ὁ χειριστὴς ἑνὸς ἀεροπλάνου, ἔχοντος τὴν ἱκανότητα νὰ ἵπταται με ταχύτητα 200 km/h (ἐντὸς ἀκίνητου ἀέρος) ρυθμίζει τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἀεροπλάνου οὕτως ὥστε νὰ κινῆται ἀκριβῶς πρὸς Βορρᾶν, παρὰ τὸν ἄνεμον, ὁ ὁποῖος πνέει ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς με ταχύτητα 160 km/h . Ποία θὰ εἶναι ἡ πραγματικὴ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου ὡς πρὸς τὴν Γῆν;

(ΑΠ.: 120 km/h)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

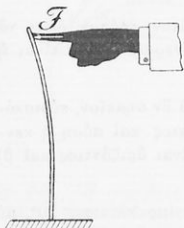
ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

§ 41. Δυνάμεις. Ἐνῶ εἰς τὴν Κινηματικὴν ἐξητάσαμεν τὴν κίνησιν αὐτὴν καθ' ἑαυτήν, χωρὶς νὰ ἐνδιαφερόμεν διὰ τὰ αἷτια, τὰ ὁποῖα τὴν προκαλοῦν, εἰς τὴν **Στατικὴν**, ἀντιθέτως, ἐξετάζομεν μόνον τὰ αἷτια ταῦτα, δηλ., τὰς **δυνάμεις**. Κατὰ ταῦτα, **δυνάμεις** καλοῦνται τὰ αἷτια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ προκαλέσουν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος ἑνὸς κινητοῦ (*). Διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καθορίζεται μόνον ποιοτικῶς ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως. Διὰ νὰ ὁρισθῇ αὕτη καὶ ποσοτικῶς, πρέπει νὰ καθορίσωμεν πότε δύο δυνάμεις λέγονται ἴσαι, πότε μία δύναμις εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης κ.λ. Λέγομεν ὅτι δύο δυνάμεις εἶναι ἴσαι, ὅταν, ἐπιδρῶσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὕλικου σημείου καὶ κατ' ἀντιθέτους φορὰς, ἀλληλοαναιροῦνται. Μία δύναμις $\mathcal{F}_1$ εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης $\mathcal{F}_2$, ὅταν δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ δύο δυνάμεις, ἴσας πρὸς τὴν $\mathcal{F}_2$.

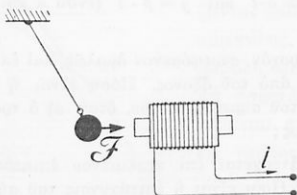
(*) Ἐάν τὸ κινητὸν εἶναι ὕλικόν σημεῖον, τὸ μόνον ἀποτέλεσμα τῆς ἐπ' αὐτοῦ δράσης δυνάμεως εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητός του, ἐνῶ, ὅταν ἡ δύναμις ἐξασκῆται ἐπὶ σώματος, δύναται νὰ προκαλέσῃ καὶ παραμόρφωσιν αὐτοῦ (βλ. Κεφ. 1Β' Ἑλαστικότης).

Ἡ δύναμις εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος, ἔχει, δηλ., μέτρον, διεύθυνσιν καὶ φορὰν.

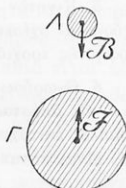
Αἱ μᾶλλον γνώριμοι εἰς ἡμᾶς δυνάμεις εἶναι αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι ὑφ' ἑνὸς σώματος ἐπὶ ἄλλου, μὲ τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν, ὥπως, π.χ., ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ δάκτυλός μας ἐπὶ ἐλάσματος, τὸ ὁποῖον πιέζομεν (σχ. 57). Ὁμοίως, ἄμαξα, συρομένη ὑπὸ σχοι-



Σχ. 57. Διὰ τοῦ δακτύλου ἐξασκεῖται ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἥτις παραμορφώνει τὸ ἐλάσμα.



Σχ. 58. Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης ἐξασκεῖ δύναμιν ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας, χωρὶς νὰ εὐρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μὲ αὐτήν.

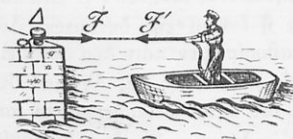


Σχ. 59. Ἡ Γῆ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ λίθου τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$. Ἡ σὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ ἐξασκεῖ καὶ ὁ λίθος ἐπὶ τῆς Γῆς.

νίου, ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτῆς τὸ τεταμένον σχοινίον.

Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται, χωρὶς τὰ δύο σώματα νὰ εὐρίσκωνται εἰς ἐπαφὴν. Οὕτω, ὁ ἠλεκτρομαγνήτης τοῦ σχήματος 58 ἐξασκεῖ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ ἐπὶ τῆς διὰ νήματος ἐξηρητημένης σιδηρᾶς σφαίρας, χωρὶς νὰ εὐρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μετ' αὐτῆς. Ἀνάλογον περίπτωσιν ἔχομεν εἰς τὸ φαινόμενον τῆς βαρύτητος. Οὕτω, ὁ λίθος Λ (σχ. 59) ἔλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς Γ μὲ δύναμιν $\mathcal{B}$, χωρὶς νὰ εὐρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μετ' αὐτῆς. Τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$ καλοῦμεν, ὡς γνωστόν, βάρος τοῦ λίθου.

§ 42. Ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως. Εἰς τὸ πείραμα τοῦ



Σχ. 60. Ἐκ τῶν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, ἡ $\mathcal{F}$ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἡ $\mathcal{F}'$ ἐπὶ τῆς δέστρας.

σχήματος 57 ὁ δάκτυλός μας ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐλάσματος μίαν δύναμιν. Ταυτοχρόνως, ὅμως, καὶ τὸ ἐλάσμα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δακτύλου μίαν δύναμιν, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν πρώτην. Ἡ δύναμις αὕτη, ἀκριβῶς, προκαλεῖ συμπίεσιν τοῦ ἄκρου τοῦ δακτύλου.

Ἀνάλογον φαινόμενον παρουσιάζεται καὶ εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 60: Ὁ ἐπὶ τῆς λέμβου εὐρισκόμενος ἄνθρω-

πος ἔλκει διὰ τοῦ σχοινίου τὴν δέστραν Δ διὰ τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$. Ταυτοχρό-

νος ἐμφανίζεται καὶ δευτέρα δύναμις $\mathcal{F}'$, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ δέστρα ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου, ἔλκουσα αὐτὸν πρὸς ἐαυτήν. Καὶ ἡ μὲν δέστρα, ὡς στερεωμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, παραμένει ἀκίνητος, ἐνῶ ὁ ἀνθρώπος μετὰ τῆς λέμβου, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}'$, κινεῖται φερόμενος πρὸς τὴν προκυμαίαν. Καὶ εἰς τὸ πείραμα τοῦτο ἐκ τῶν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται ταυτοχρόνως, ἡ μία ($\mathcal{F}$) ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς δέστρας, ἡ δὲ ἄλλη ($\mathcal{F}'$) ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθὼς καὶ ἄλλων ἀναλόγων παραδειγμάτων συνάγεται ὅτι μία μόνη δύναμις δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν φύσιν: Αἱ δυνάμεις παρουσιάζονται, πάντοτε, ἀνὰ δύο.

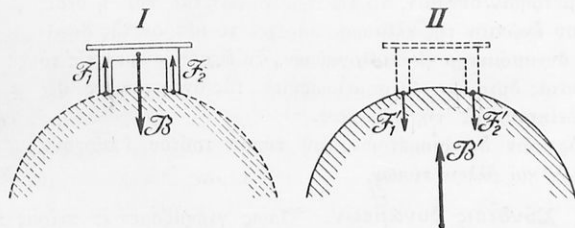
Ἡ ἐμφάνισις τῶν δυνάμεων ἐν τῇ φύσει ἀνὰ ζεύγη εἶναι φαινόμενον γενικὸν καὶ διευτυπώθη ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος εἰς ἀξίωμα - τὸ **ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως**:

«*actio = reactio*»

«*δράσις = ἀντίδρασις*».

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τοῦ ὅτι ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων ἡ μία ἐξασκεῖται ἐφ' ἑνὸς σώματος καὶ ἡ ἄλλη ἐπὶ ἄλλου σώματος. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 59 ἡ μὲν $\Gamma\eta$ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ λίθου τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$, ὁ δὲ λίθος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς $\Gamma\eta$ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}$. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$ ὁ λίθος φέρεται πρὸς τὴν $\Gamma\eta$ - δηλ., πίπτει. Ταυτοχρόνως, ἡ $\Gamma\eta$, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$, φέρεται πρὸς τὸν λίθον, λόγῳ ὅμως τῆς μεγάλης μάζης τῆς $\Gamma\eta$, ἡ κίνησις αὕτη εἶναι ἀνεπαίσθητος.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ καταστήσουν ἐντελῶς σαφῆ τὰ λεχθέντα: Θεωρήσωμεν τράπεζαν, στηριζομένην διὰ τῶν τεσσάρων ποδῶν της ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (σχ. 61, I). Ἐπὶ τῆς τραπέζης ἐξασκοῦνται πέντε δυνάμεις: Τὸ



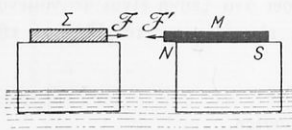
Σχ. 61.

βάρος $\mathcal{B}$ αὐτῆς, ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἔλξιν τῆς $\Gamma\eta$, καὶ τέσσαρες δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$, ὀφειλόμεναι εἰς τὴν ἐπαφὴν αὐτῆς μετὰ τοῦ ἐδάφους. (Αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ δὲν φαίνονται ἐπὶ τοῦ σχήματος). Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δράσις = ἀντίδρασις» ἡ τράπεζα ἔλκει τὴν $\Gamma\eta$ διὰ τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}'$ (σχ. 61, II),

ἐνῶ ταυτοχρόνως, ἐξασκεί ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὰς δυνάμεις $\mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2', \mathcal{F}_3', \mathcal{F}_4'$. Αἱ πέντε αὗται δυνάμεις εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς τὰς δυνάμεις $\mathcal{B}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$.

Ἐπαναλαμβάνομεν ὅτι αἱ εἰς τὸ σχῆμα 61, I ἀναφερόμεναι πέντε δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῆς τραπεζίης, ἐνῶ αἱ εἰς τὸ σχῆμα 61, II ἀναφερόμεναι πέντε δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῆς Γῆς. Λόγῳ τοῦ ἀξιώματος «δραῖσις=ἀντίδρασις» αἱ δυνάμεις, ἀνὰ δύο, εἶναι κατὰ μέτρον ἴσαι· δηλ., εἶναι $B=B', F_1=F_1', F_2=F_2', F_3=F_3', F_4=F_4'$.

Δεύτερον παράδειγμα διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ ἀξιώματος «δραῖσις=ἀντίδρασις» εἶναι τὸ ἐξῆς: Ἐπὶ πλωτῆρων (σχ. 62) στηρίζονται ὁ μαγνήτης



Σχ. 62. Αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{F}'$ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

M καὶ τὸ σιδηροῦν σῶμα Σ . Ὁ μαγνήτης ἔλκει τὸ σῶμα μὲ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$. Λόγῳ τοῦ ἀξιώματος «δραῖσις=ἀντίδρασις» καὶ τὸ σῶμα ἔλκει τὸν μαγνήτην μὲ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}'$. Ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος Σ , θέτει αὐτὸ εἰς κίνησιν. Ὁμοίως, ὁ μαγνήτης, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}'$, τίθεται καὶ αὐτὸς εἰς κίνησιν. Διὰ τοῦ πειράματος, λοιπόν, τούτου πιστοποιεῖται ἡ ὑπαρξίς τῶν δύο δυνάμεων $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$, λόγῳ τῶν ὁποίων καὶ οἱ δύο πλωτῆρες τίθενται εἰς κίνησιν.

§ 43. Δυναμόμετρα. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δυνάμεων, χρησιμοποιοῦνται ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **δυναμόμετρα**. Τὰ ἀπλούστερα τῶν δυναμομέτρων (κ. κανταράκια, σχ. 63), ἀποτελοῦνται ἐκ χαλυβδίνου ἐλατηρίου, ἐφωδιασμένου μὲ δείκτην, ὁ ὁποῖος κινεῖται ἐνώπιον βαθμολογημένης κλίμακος. Ἄν στερεώσωμεν, καταλλήλως, τὸ ἐν ἄκρον καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄλλο τὴν πρὸς μέτρησιν δύναμιν, τὸ ἐλατήριο τείνεται καὶ ἡ θέσις τοῦ δείκτου ἐνώπιον τῆς κλίμακος παρέχει τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως. Τὰ δυναμόμετρα βαθμολογοῦμεν, ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄκρον γνωστὰς δυνάμεις καὶ σημειώσωμεν τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ δείκτου ἐπὶ τῆς κλίμακος.

Ἐκτὸς τῶν δυναμομέτρων τοῦ τύπου τούτου, ὑπάρχουν δυναμόμετρα καὶ ἄλλων τύπων.



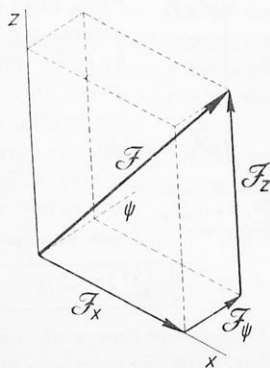
Σχ. 63.

§ 44. Σύνθεσις δυνάμεων. Ὅπως γνωρίζομεν ἐκ πείρας καὶ διὰ διαφόρων πειραμάτων δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ υλικοῦ σημείου, προκαλοῦν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ μία τρίτη δύναμις, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου. Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη τῶν δύο δυνάμεων (**συνιστᾶσαι**) διὰ μιᾶς (**συνισταμένη**), καλεῖται **σύνθεσις δυνάμεων**.

Διὰ τὰ συνθέσωμεν τρεῖς ἢ περισσοτέρας δυνάμεις, ἐφαρμόζομεν τὰ εἰς τὴν § 23 περιγραφέντα διὰ τὴν σύνθεσιν τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων.

§ 45. Ἀνάλυσις δυνάμεων. Ὅπως δύο δυνάμεις δυνάμεθα νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν διὰ μιᾶς — τῆς συνισταμένης των — οὕτω καὶ μίαν δύναμιν δυνάμεθα νὰ τὴν ἀντικαταστήσωμεν διὰ δύο συνιστωσῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ σχεδιάσωμεν παραλληλόγραμνον, τοῦ ὁποῖου ἡ διαγώνιος νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἡ διδομένη δύναμις. Τὸ πρόβλημα, ὅμως, οὕτω διδόμενον, εἶναι ἀπροσδιόριστον, διότι ἄπειρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλογράμμων μὲ διαγώνιον, ἐκπληροῦσαν τὸν ἄνω ὅρον. Συνήθως, ἐπιζητεῖται ἡ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας, τῶν ὁποίων δίδονται οἱ φορεῖς. Τοῦτο εἶναι δυνατόν μόνον, ὅταν οἱ δύο φορεῖς διέρχωνται διὰ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμενον ἐπίπεδον περιέχῃ τὴν δύναμιν.

Ἄλλη περίπτωσις, συχνάκις ἐμφανιζομένη, εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις ἀναλύεται εἰς τρεῖς συνιστώσας, μὴ ὁμοεπιπέδους. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δύναμις αὕτη θὰ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν συνιστωσῶν σχηματιζομένου παραλληλεπίπεδου (σχ. 64).



Σχ. 64. Πᾶσα δύναμις ἐν τῷ χώρῳ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς συνιστώσας.

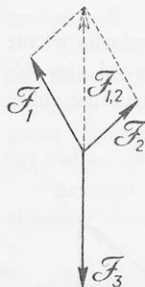
§ 46. Ἰσορροπία δυνάμεων. Δύο ἢ περισσοτέρας δυνάμεις, ἐξασκουμέναι ἐπὶ τινος ὀλικοῦ σημείου, ἰσορροποῦν, ὅταν ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$\sum \mathcal{F} = 0$	Συνθήκη ἰσορροπίας δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ ὀλικοῦ σημείου
------------------------	--

Συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 19, ἡ συνισταμένη πολλῶν δυνάμεων εὐρίσκεται, διὰ τῆς μεθόδου τοῦ πολυγώνου, ὡς ἡ δύναμις, ἡ συνδέουσα τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης δυνάμεως μετὰ τοῦ πέρατος τῆς τελευταίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν, λοιπόν, τῆς ἰσορροπίας πρέπει ἡ συνισταμένη αὕτη νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν καί, συνεπῶς, τὸ πολύγωνον τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι κλειστόν.

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι δύο, διὰ νὰ εἶναι ἡ συνισταμένη των ἴση πρὸς μηδέν, πρέπει αἱ δύο αὗται δυνάμεις νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Όταν αἱ δυνάμεις εἶναι τρεῖς, διὰ νὰ εἶναι ἡ συνισταμένη των ἴση πρὸς μηδέν, πρέπει ἡ συνισταμένη δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην (σχ. 65). Βεβαίως, διὰ νὰ εἶναι τοῦτο δυνατόν, πρέπει αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις νὰ εἶναι ὁμοεπίπεδοι· νὰ κεῖνται, δηλ., ὅλοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 65. Αἱ δυνάμεις $F_{1,2}$ καὶ F_3 ἰσορροποῦν.

Ἀναλυτικὴ διατύπωσις τῆς συνθήκης ἰσορροπίας. Κατὰ τὴν § 23 ἡ κατὰ τινὰ διεύθυνσιν προβολὴ τῆς συνισταμένης πολλῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν. Ἐπομένως, ὅταν ἡ συνισταμένη πολλῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐάν, λοιπόν, ἐκλέξωμεν τρεῖς ἄξονας x, y, z , δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας διὰ τριῶν ἐξισώσεων (ἀντὶ μιᾶς — τῆς ἐξισώσεως (1)) — τῶν ἐξῆς:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

Τὴν μορφήν ταύτην τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας χρησιμοποιοῦμεν, συνήθως, κατὰ τὴν λύσιν τῶν διαφορῶν προβλημάτων τῆς ἰσορροπίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σφαῖρα, βάρους B , εἶναι ἐξηρτημένη ἐκ νήματος, στερεωμένου εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του. Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον καὶ ποῖα ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ σφαῖρα ἐπὶ τοῦ νήματος;
2. Σφαῖρα, βάρους B , εἶναι ἐξηρτημένη ἐκ νήματος. Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον καὶ ποῖα ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ νήμα ἐπὶ τῆς σφαίρας;
3. Σφαῖρα, βάρους B , εἶναι ἐξηρτημένη ἐκ νήματος. Πόσαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτῆς καὶ ποῖα σώματα τὰς ἐξασκοῦν;
4. Σφαῖρα, βάρους B , εἶναι ἐξηρτημένη διὰ νήματος, ἀπὸ ἄγκιστρον, στερεωμένον εἰς τὴν ὀροφήν. Πόσαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ νήματος, ποῖα σώματα τὰς ἐξασκοῦν καὶ ποῖα ἡ φορὰ ἐκάστης δυνάμεως; Ἐκφράσατε τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ νήματος.
5. Πόσαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας τοῦ σχήματος 58 καὶ ποῖα σώματα τὰς ἐξασκοῦν;
6. Βλήμα, ἐξελθὼν τῆς κάνης πυροβόλου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 , διαγράφει παραβολικὴν τροχίαν. Πόσαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ βλήματος καὶ ποῖα σώματα τὰς ἐξασκοῦν; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).
7. Λίθος ρίπεται βιαίως πρὸς τὰ κάτω. Πόσαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ λίθου μετὰ παρέλευσιν 1 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ρίψεως καὶ ποῖα σώματα τὰς ἐξασκοῦν; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).
8. Νὰ διατυπωθῇ ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς σφαίρας τοῦ σχήματος 58 α) διὰ κατακόρυφον ἄξονα καὶ β) δι' ὀριζόντιον ἄξονα.
9. Εἰς τὸ σχῆμα 60 ὁ ἄνθρωπος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς δέστρας μίαν δύναμιν $\mathcal{F}$, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, ἡ δέστρα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου τὴν δύναμιν $\mathcal{F}'$. Ἀφοῦ αἱ δύο δυνάμεις $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{F}'$ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, διατὶ ἡ λέμβος τίθεται εἰς κίνησιν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

§ 47. Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια, ἡ Κινηματική ἐξετάζει τὰς ταχύτητας καὶ ἐπιταχύνσεις, ἀνεξαρτήτως τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς δυνάμεων, ἐνῶ ἡ Στατική ἐξετάζει μόνον τὰς δυνάμεις, ἀδιαφοροῦσα διὰ τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα αὐταὶ προκαλοῦν. Ἡ **Δυναμική**, τέλος, ἐξετάζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ αἰτίου — τῆς δυνάμεως — καὶ τοῦ ἀποτελέσματος — τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἐὰν $\mathcal{F}$ εἶναι ἡ ἐπὶ τινος ὑλικοῦ σημείου ἐξασκουμένη δύναμις καὶ p ἡ ὑπὸ ταύτης προκαλουμένη ἐπιτάχυνσις, μεταξὺ αὐτῶν ἰσχύει ἡ σχέση

$$\mathcal{F} = m \cdot p \quad \left| \begin{array}{l} \text{Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας m (ὁ ὁποῖος εἶναι μονόμετρον μέγεθος), καλεῖται **μάζα** τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἐκ τῆς ἐξίσωσος (1) συνάγεται ὅτι ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τῆς ἐπιταχύνσεως συμπίπτουν μετὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ.

Ἡ ὡς ἄνω σχέσις φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα **θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς**, διότι ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀποτελεῖ τὸν μόνον νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγονται οἱ ἄλλοι νόμοι αὐτῆς.

§ 48. Διερεῦνσις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς.

1) **Σταθερὰ δύναμις προκαλεῖ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.** Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\mathcal{F} = m \cdot p$ θέσωμεν $\mathcal{F} = \text{σταθ.}$, θὰ λάβωμεν $m \cdot p = \text{σταθ.}$ Δεδομένου ὅτι ἡ μάζα m εἶναι σταθερά, ἔπεται ὅτι $p = \text{σταθ.}$ Τοῦτο διατυπῶται ὡς ἑξῆς: Ὅταν, ἐπὶ τινος ὑλικοῦ σημείου ἐξασκῇται σταθερὰ δύναμις, τὸ ὑλικὸν τοῦτο σημεῖον θὰ κινῆται μετὰ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.

2) **Διὰ δεδομένην δύναμιν, ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς μάζης.** Ἐκ τοῦ τύπου $\mathcal{F} = m \cdot p$ λαμβάνομεν

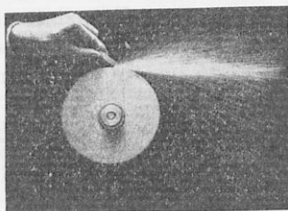
$$p = \frac{\mathcal{F}}{m}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι, ἐὰν ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ διατηρῇται σταθερά, ἡ ἐπιτάχυνσις p εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς μάζης. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἡ αὐτὴ δύναμις ἐξασκηθῇ ἐπὶ δύο σωμάτων, διαφόρου μάζης, τὸ σῶμα τῆς μικροτέρας μάζης θ' ἀποκτήσῃ ἐπιτάχυνσιν, μεγαλυτέραν τῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ ἄλλου σώματος.

3) Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\mathcal{F} = m \cdot p$ θέσωμεν $\mathcal{F} = 0$, θὰ λάβωμεν $p = 0$, ἄρα $v = \text{σταθ.}$ Τοῦτο διατυπῶται ὡς ἑξῆς: «Ἐκαστον σῶμα ἐμμέ-

νει εἰς τὴν κατάστασιν ἡρεμίας ἢ εὐθυγράμμου καὶ ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἀναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν τῆς καταστάσεως». Τὸ θεώρημα τοῦτο φέρεται, δι' ἱστορικοὺς λόγους, ὡς **ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας**, διευπλώθη δὲ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους.

Παράδειγμα, κατὰ τὸ ὅποιον ἐν κινήτῳ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται, διατηρεῖ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ σταθεράν, ἔχοντες εἰς τοὺς



Σχ. 66. Οἱ σπινθῆρες, ἐκτινασόμενοι, κινούνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον ἐκτινάξεως.

σπινθῆρας, τοὺς ἐκπεμπομένους ἐκ τοῦ σφυριδοτροχοῦ (σχ. 66): Τὰ πυρακτωμένα τεμαχίδια τοῦ μετάλλου παρασύρονται, κατ' ἀρχάς, ὑπὸ τοῦ τροχοῦ, ὅταν, ὅμως, τυχὸν ἐκτιναχθῶν, κινούνται ἐφεξῆς εὐθυγράμμως καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον ἐκτινάξεως ἐκ τοῦ τροχοῦ, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

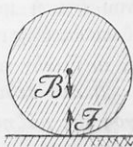
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐπὶ τινος ἡρεμοῦντος ὕλικου σημείου ($v=0$) ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, τοῦτο ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ταχύτητα μηδέν· δηλ. ἐξακολουθεῖ νὰ ἡρεμῇ.

Ἀντιστρέφοντες τὸν συλλογισμόν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας, δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν ὅτι, ὅταν ἡ ταχύτης ἐνὸς ὕλικου σημείου διατηρῇται σταθερά, εἴτε δὲν ἐπιδρῷ ἐπ' αὐτοῦ καμία δύναμις, εἴτε, ἂν ἐπιδρῶν δυνάμεις, ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Παράδειγμα τῆς δευτέρας περιπτώσεως ἔχοντες εἰς πλοῖον, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Βεβαίως, ἐπὶ τοῦ πλοίου ἐξασκοῦνται δυνάμεις (προσωπικὴ δύναμις, ἀντίστασις, βάρος, ἄνωσις), ἡ συνισταμένη, ὅμως, αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Σταθερὰν ταχύτητα ἔχοντες, ἐπίσης, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἡρεμίας, ὅταν, δηλ., ἡ ταχύτης εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ κινήτου ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Οὕτω, ἡ ἡρεμοῦσα σφαῖρα τοῦ σχήματος 67 ἔχει ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς μηδέν καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δύο δυνάμεων $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἦτοι ἔχοντες τὴν σχέσιν

$$\mathcal{F} - \mathcal{B} = 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ · ἀποτέλεσμα γνωστὸν καὶ ἐκ τῆς συνθήκης τῆς ἰσοροπίας.



Σχ. 67. Ἐπὶ τῆς ἡρεμοῦσας σφαίρας ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις.

§ 49. Μονάδες μάξης καὶ δυνάμεως. 1) Σύστημα C. G. S. Μο-

νάς μάζης εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι τὸ **γραμμάριον μάζης (1 gr)**, τοῦ ὁποῖου ὁ ὀρισμὸς ἐδόθη εἰς τὴν § 9.

Ἡ μονὰς δυνάμεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἐκ τῶν μονάδων *cm, gr, sec*, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ δύναμις εἶναι παράγωγον μέγεθος. Ἡ οὕτως ὀριζομένη μονὰς καλεῖται **δύνη (1 dyn)** καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν δυνάμιν ἐκείνην, ἡ ὁποία, ἐπιδρώσα ἐπὶ σώματος, μάζης 1 gr, δίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$. Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

2) **Τεχνικὸν σύστημα.** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς δυνάμεως εἶναι τὸ **χιλιόγραμμα βάρους (1 kgr^{*})**, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ προϋέπου χιλιογράμμου (δηλ., τὴν δυνάμιν, μετὰ τὴν ὁποίαν ἔλκεται τοῦτο ὑπὸ τῆς Γῆς). Ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς προσεχῇ παρὰγραφον, ἡ μονὰς αὕτη ἐξαγτᾶται ἐκ τοῦ τύπου, εἰς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ μέτροσις. Ἐπειδὴ, ὅμως, αἱ ἀπὸ τύπου εἰς τύπον μεταβολαὶ εἶναι μικραὶ, ἡ οὕτως ὀριζομένη μονὰς δυνάμεως δύναται νὰ θεωρηθῇ πρακτικῶς σταθερά.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 kgr^{*}, χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ χιλιοστὸν αὐτῆς, τὸ **γραμμάριον βάρους (1 gr^{*})**.

Ἡ μονὰς μάζης εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου ἐκ τῶν μονάδων *m, kgr^{*}, sec*, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μᾶζα εἶναι παράγωγον μέγεθος. Ἡ οὕτως ὀριζομένη μονὰς ἰσοῦται πρὸς τὴν μᾶζαν ἐκείνην, ἡ ὁποία, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr^{*}, λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $1 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$, καλεῖται δὲ **τεχνικὴ μονὰς μάζης (1 T.M.)**. Εἶναι, ἐπομένως,

$$1 \text{ T.M.} = 1 \text{ kgr}^* \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2.$$

3) **Σύστημα M.K.S.** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς μάζης εἶναι τὸ 1 kgr. Ἡ μονὰς δυνάμεως, ἡ ὁποία εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, εἶναι ἴση πρὸς $1 \text{ kgr} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$ καὶ καλεῖται **1 Newton (1 Nt)**. Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ Nt} = 1 \text{ kgr} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

§ 50. **Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων μονάδων.** Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν μονάδων δυνάμεως εὐρίσκομεν ὥς ἑξῆς: Συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν τῆς μονάδος 1 kgr^{*}, σῶμα, μάζης 1 kgr, ἔλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς διὰ δυνάμεως ἴσης πρὸς 1 kgr^{*}. Ἐπειδὴ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ σῶμα πίπτει, ὥς γνωστόν, μετὰ ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$, προκύπτει, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, ἡ σχέσις

$$1 \text{ kgr}^* = 1000 \text{ gr} \cdot 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$$

$$\text{ἢ} \quad 1 \text{ kgr}^* = 981000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} = 981000 \text{ dyn}.$$

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν καὶ τὴν σχέσιν

$$1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn}$$

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν εὐρίσκεται ὅτι ἡ μονὰς δυνάμεως 1 Nt εἶναι ἴση πρὸς

$$1 \text{ Nt} = 10^5 \text{ dyn} = \frac{1}{9,81} \text{ kgr}^*.$$

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων μάζης εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς: Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 47, ἡ μάζα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιτάχυνσεως. Ἀφ' ἑτέρου, γνωρίζομεν ὅτι σῶμα, μάζης 1 kgr , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr^* , λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν, ἴσην πρὸς $9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφήν $m = F/\gamma$, ἔχομεν

$$1 \text{ kgr} = \frac{1 \text{ kgr}^*}{9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}} = \frac{1}{9,81} \text{ kgr}^* \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2 = \frac{1}{9,81} \text{ T.M.}$$

ἄρα

$$1 \text{ T.M.} = 9,81 \text{ kgr}.$$

§ 51. Ἐφαρμογὰὶ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς.

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς $\mathcal{F} = m \cdot p$ χρησιμοποιεῖται, συνήθως, διὰ τὴν λύσιν δύο εἰδῶν προβλημάτων: 1) Δίδεται ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τινος κινητοῦ, καὶ ζητεῖται τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ. 2) Δίδεται τὸ εἶδος τῆς κινήσεως (π.χ., ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις, ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις κ.λ.) καὶ ζητεῖται ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ γίνῃ ἡ κίνησις αὕτη. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ λύσωμεν μερικὰ προβλήματα ἐξ ἑκάστου εἶδους.

α) *Βλήμα, βάρους B , εὐρίσκεται ἐντὸς πυροβόλου, κατευθυνομένου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Κατὰ τὴν ἐκπυροσορότησιν παράγονται ἀέρια, τῶν ὁποίων τὴν πίεσιν p θεωροῦμεν σταθεράν καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ βλήματος ἐντὸς τῆς κάνης. Ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος κατὰ τὴν κίνησιν του ἐντὸς τῆς κάνης. (Τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τῆς κάνης ἔστω S).*

Ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: τὸ βάρος του B καὶ ἡ ἐκ τῆς πίεσεως τῶν ἀερίων προερχομένη δύναμις $F = p \cdot S$. Ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς $p \cdot S - B$. Ἐπομένως, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ βλήματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\gamma = \frac{p \cdot S - B}{m}.$$

Ἐπειδὴ ὅλα τὰ μεγέθη τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι σταθερά, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος θὰ εἶναι σταθερά· ἄρα ἡ κίνησις τοῦ βλήματος ἐντὸς τῆς κάνης θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις.

β) *Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος τοῦ προηγουμένου προβλήματος, μετὰ τὴν ἔξοδόν του ἐκ τῆς κάνης; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).*

Ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐξασκεῖται μία μόνον δύναμις — τὸ βάρος του B —

ἡ ὁποία θὰ προσδώσῃ ἐπιτάχυνσιν p , ὑπολογιζομένην ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου $\mathcal{F} = m \cdot p$. Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $\mathcal{F} = \mathcal{B} = m \cdot g$, λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν γνωστὴν τιμὴν $p = g$. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις $\mathcal{B}$ ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω, ἔπεται ὅτι τὴν αὐτὴν φορὰν θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις.

γ) *Διατὶ ἄνθρωπος, ἰστάμενος ἐπὶ ζυγοῦ δι' ἐλατηρίου (σχ. 68) πρέπει νὰ παραμείνῃ ἀκίνητος, ἐὰν θέλῃ νὰ εὖρῃ τὸ πραγματικὸν του βάρος;*

1) Ὁ ἄνθρωπος ἰστᾶται ἀκίνητος ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ. Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις· τὸ βάρος του $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ ὑπὸ συμπίεσιν εὐρισκόμενον ἐλατήριον τοῦ ζυγοῦ. Ἀφοῦ ὁ ἄνθρωπος εἶναι ἀκίνητος ($v = 0$ ἄρα $p = 0$), ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\mathcal{F} - \mathcal{B} = m \cdot 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}.$$



Σχ. 68.

Ἀφοῦ τὸ ἐλατήριον ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$, πρέπει, κατὰ τὸ ἀξίωμα «δράσεις = ἀντίδρασεις», καὶ ὁ ἄνθρωπος νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}'$. Ἐπειδὴ εἶναι $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ ἔπεται καὶ $\mathcal{F}' = \mathcal{B}$. Ἀρα, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὁ ζυγὸς δεικνύει τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ ἀνθρώπου.

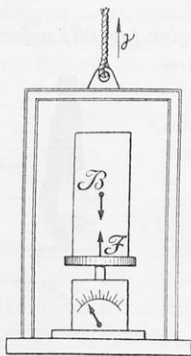
2) Ὁ ἄνθρωπος κἀμπτεῖ τὰ γόνατά του, μετακινῶν, οὕτω, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ πρὸς τὰ κάτω. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ κέντρον βάρους ἔχει ἐπιτάχυνσιν μὲ φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ δυνάμεις $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$ ἔπαυσαν νὰ ἰσορροποῦν καί, μάλιστα, ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ ἔχῃ τὴν φορὰν τῆς ἐπιταχύνσεως, δηλ., φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ἀνθρώπου, τὸ μὲν βάρος αὐτοῦ δὲν μετεβλήθη, ἡ συνισταμένη, ὅμως, τῶν δυνάμεων $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$ ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω, συνάγεται ὅτι, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ ἀνθρώπου πρὸς τὰ κάτω, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ πρέπει νὰ ἐμφανίζεται ἡλαττωμένη. Τὴν ἐλάττωσιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως πιστοποιοῦμεν καὶ ἐκ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ζυγοῦ, ἡ ὁποία, τώρα, εἶναι μικροτέρα τῆς κανονικῆς.

3) Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος, ἀφοῦ ἀκινήτησιν εἰς τὴν στάσιν εἰς τὴν ὁποίαν τώρα εὐρίσκεται, ἐκταθῇ ἀποτόμως, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ ἄνω, ὁπότε θὰ παρατηρήσωμεν ἐνδείξιν τοῦ ζυγοῦ, μεγαλύτεραν τῆς κανονικῆς.

δ) Ἄνθρωπος, εὐρισκόμενος ἐντὸς ἀνελκυστήρος, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται, αἰσθάνεται τὸ βάρος του φαινομενικῶς νὰ αὐξάνεται.

Τουναντίον, ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ ἀρχίζει νὰ κατέρχεται, ὁ ἐντὸς αὐτοῦ εὐρισκόμενος αἰσθάνεται τὸ βάρος του φαινομενικῶς νὰ ἐλαττοῦται.

1) Ὁ ἀνελκυστήρ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ ἄνω. Ἐντὸς τοῦ ἀνελκυστήρος θεωροῦμεν ζυγὸν δι' ἐλατηρίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται ἓν σῶμα (σχ. 69).



Σχ. 69. Ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ ἄνω, ὁ ζυγὸς δεικνύει ἔνδειξιν, μεγαλυτέραν τοῦ βάρους τοῦ σώματος.

Ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ εἶναι ἀκίνητος, ὁ ζυγὸς παρέχει τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος (βλ. προηγούμενον παράδειγμα)· εἶναι, δηλ., $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Ἔστω, τώρα, ὅτι ὁ ἀνελκυστήρ ἀρχίζει νὰ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν p . Εἶναι προφανές ὅτι καὶ τὸ σῶμα θὰ κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν. Συμφώνως, ὅμως, μὲ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, διὰ νὰ κινῆται τὸ σῶμα μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν p , πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις, ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς μάζης του m ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν p καὶ μὲ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ δύναμις αὕτη πρέπει, προφανῶς, νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν συνισταμένην τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δύο δυνάμεων $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$. Ἦτοι εἶναι

$$\mathcal{F} - \mathcal{B} = m \cdot p.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} + m \cdot p.$$

Ἐπειδὴ $\mathcal{F}$ εἶναι ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν δεικνύει ὁ ζυγὸς, ἐπεται ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ ζυγοῦ θὰ εἶναι, τώρα, μεγαλυτέρα τοῦ βάρους $\mathcal{B}$ κατὰ $m \cdot p$. Ἄλλως: Τὸ βάρος τοῦ σώματος φαίνεται ἡξημένον κατὰ $m \cdot p$.

2) Ὁ ἀνελκυστήρ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ κάτω. Διὰ νὰ κινῆται τὸ σῶμα μὲ ἐπιτάχυνσιν p πρὸς τὰ κάτω, πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις, ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς μάζης του m ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν p καὶ μὲ φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Ἡ δύναμις αὕτη πρέπει νὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκουμένων δυνάμεων $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$. Ἄρα ἔχομεν

$$\mathcal{F} - \mathcal{B} = -m \cdot p.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} - m \cdot p.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ζυγὸς δεικνύει, τώρα, μίαν δύναμιν $\mathcal{F}$, μικροτέραν τοῦ βάρους $\mathcal{B}$ τοῦ σώματος κατὰ $m \cdot p$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως συνάγεται καὶ τὸ ἐξῆς: Ἐὰν τὸ καλῶδιον τοῦ ἀνελκυστήρος κοπῇ, οὗτος θὰ πίπτῃ ἐλευθέρως μὲ ἐπιτάχυνσιν $p = g$. Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} - m \cdot g$$

ἢ, ἐπειδὴ εἶναι $\mathcal{B} = m \cdot g$,

$$\mathcal{F} = 0.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ὅταν ὁ ἀνεκκυστήρ πίπτῃ ἐλευθέρως, ἡ ἔνδειξις τοῦ ζυγοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν· ἡ βαρύτης, δηλ., θὰ ἔχῃ φαινομενικῶς ἔξαφανισθῇ.

ε) Ἐκ τῶν ἄκρων νήματος ἔξαριθῶνται δύο σώματα Σ_1 , Σ_2 , ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 70, τῶν ὁποίων αἱ μᾶζαι εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς m_1 , m_2 . (Εἶναι $m_1 > m_2$). Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ ἑκάστου σώματος καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{K}$, ἡ τείνουσα τὸ νήμα. (Ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας θεωρεῖται ἀμελητέα).

Ἐπὶ τοῦ σώματος Σ_1 ἔξασκοῦνται δύο δυνάμεις·

τὸ βάρος του $\mathcal{B}_1$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{K}$ ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος. Ἐπὶ τοῦ ἄλλου σώματος Σ_2 ἔξασκοῦνται δύο ἐπίσης δυνάμεις· τὸ βάρος του $\mathcal{B}_2$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{K}$ ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος (ἡ ὁποία, προφανῶς, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος Σ_1 ἔξασκουμένην δύναμιν $\mathcal{K}$).

Ἐφαρμόζοντες τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, λαμβάνομεν τὰς ἑξισώσεις

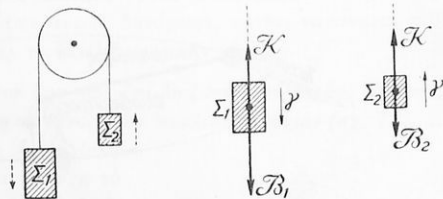
$$\mathcal{K} - \mathcal{B}_1 = -m_1 \cdot \gamma.$$

$$\mathcal{K} - \mathcal{B}_2 = m_2 \cdot \gamma.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον κατελήξαμεν εἰς σύστημα δύο ἑξισώσεων μετὰ τῶν δύο ἀγνώστων $\mathcal{K}$ καὶ γ , τὸ πρόβλημα, κατ' ἀρχὴν ἐλύθη. Ἐπομένως, λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, εὐρίσκομεν τὰ ζητούμενα γ καὶ $\mathcal{K}$. Ἡ δύναμις $\mathcal{K}$, τὴν ὁποίαν θὰ εὐρωμεν, εἶναι ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἔξασκεῖ τὸ νήμα ἐπὶ τοῦ σώματος Σ_1 (ἢ τοῦ σώματος Σ_2). Κατὰ τὸ ἀξίωμα, ὁμως, «δραῖσις = ἀντίδρασις», πρέπει καὶ τὸ σῶμα Σ_1 νὰ ἔξασκῃ ἐπὶ τοῦ νήματος μίαν δύναμιν, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν $\mathcal{K}$.

ς) Ποίου εἴδους δυνάμεις πρέπει νὰ ἔξασκοῦνται ἐπὶ τινος ὀλικοῦ σημείου, ἵνα τοῦτο ἐκτελῇ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν;

Ὡς γνωστόν, κινητόν, ἐκτελοῦν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, ἔχει μόνον κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς v^2/r . Κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἐπὶ τοῦ κινητοῦ πρέπει νὰ ἔξασκῇται μία δύναμις, ἡ ὁποία νὰ εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα καὶ τῆς ὁποίας τὸ μέτρον νὰ διατηρῇται σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς

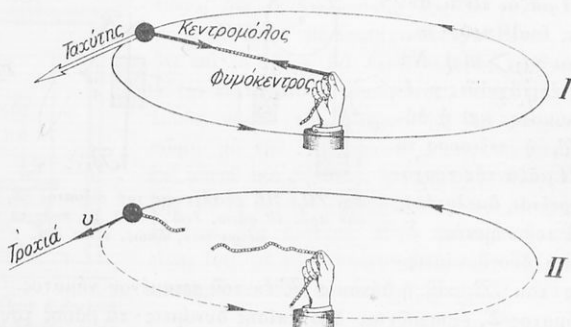


Σχ. 70. Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος Σ_1 ἔχει φερόν πρὸς τὰ κάτω, ἐνῶ ἡ τοῦ Σ_2 πρὸς τὰ ἄνω. Τὰ μέτρα των, ὁμως, εἶναι ἴσα.

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται **κεντρομόλος δύναμις**, καθόσον ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως.

Τοιαύτην ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ σφαῖρα, προσδεδεμένη διὰ νήματος καὶ περιστρεφόμενη διὰ τῆς χειρὸς μὲ σταθεράν γωνιακὴν ταχύ-



Σχ. 71. Ἐπὶ τῆς περιστρεφόμενης σφαίρας ἐξασκεῖται (ἐκτός ἀπὸ τὸ βάρος) μόνον μία δύναμις, ἡ κεντρομόλος.

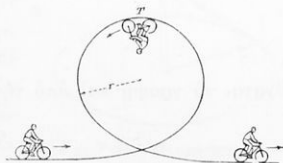
τητα (σχ. 71, I). Εἶναι προφανές ὅτι, ἐὰν παραμελήσωμεν τὸ βάρος, ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκεῖται μία καὶ μόνη δύναμις — ἡ κεντρομόλος — προερχομένη ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος.

Ἐάν, κατὰ τὴν περιστροφὴν, θραυσθῇ τὸ νῆμα (σχ. 71, II), παύει ἐπιδρῶσα ἐπὶ τῆς σφαίρας ἡ κεντρομόλος δύναμις, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας, ἡ σφαῖρα θὰ κινήθῃ εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος, τὴν ὁποίαν ἔχει αὕτη κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς θραύσεως τοῦ νήματος. Ἡ εὐθύγραμμος τροχιά θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον ἀκριβῶς ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκετο ἡ σφαῖρα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς θραύσεως τοῦ νήματος.

Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, διὰ νὰ ἐκτελῇ ἡ σφαῖρα ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, πρέπει νὰ ἐξασκῇται ἐπ' αὐτῆς ἡ κεντρομόλος δύναμις. Τὴν δύναμιν ταύτην ἐξασκεῖ (διὰ μέσου τοῦ τεταμένου νήματος) ἡ χεὶρ. Κατὰ τὸ ἀξίωμα, ὁμως, «δραῖσις = ἀντίδρασις», πρέπει καὶ ἡ σφαῖρα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ νήματος καί, συνεπῶς, ἐπὶ τῆς χειρὸς τοῦ κρατοῦντος τοῦ νήματος, δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον. Τὴν δύναμιν ταύτην, ὡς ἔχουσιν φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς κεντρομόλου, καλοῦμεν **φυγόκεντρον δύναμιν**. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ μόνη πραγματικῶς δρῶσα ἐπὶ τῆς σφαίρας δύναμις εἶναι ἡ κεντρομόλος, ἐνῶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς χειρὸς καὶ ὄχι ἐπὶ τῆς σφαίρας.

Συνηθέστατα, εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο προκαλεῖται σύγχυσις ἐκ τῆς παραδοχῆς ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας. Τοῦτο, ὅμως, εἶναι ἀδύνατον διὰ τοὺς ἐξῆς λόγους: 1) Ἐπὶ τῆς σφαίρας μόνον τὸ τεταμένον νῆμα ἐφάπτεται, ἄρα μία μόνον δύναμις ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτῆς - ἡ κεντρομόλος. 2) Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι, ἐκτὸς τῆς κεντρομόλου, ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ δευτέρα δύναμις (ἄγνωστον πόθεν προερχομένη), ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρώτην - ἡ φυγόκεντρος - τότε ἡ σφαῖρα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων αὐτῶν δυνάμεων, πρέπει νὰ κινῆται εὐθυγραμμῶς καὶ ἰσοταχῶς καὶ ὅχι νὰ ἐκτελῇ κυκλικὴν κίνησιν.

ζ) *Ποδήλατον, κινούμενον ἀρχικῶς ἐπὶ ὀριζοντίας τροχιᾶς, ἀναγκάζεται, ἀκολούθως, νὰ διαγράψῃ κατακόρυφον κυκλικὴν τροχιάν (σχ. 72). Ζητεῖται νὰ εὗρεθῇ ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ποδήλατον, ὅταν εὗρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον T τῆς τροχιᾶς του, ἵνα μὴ ἀποσπασθῇ αὐτῆς.*



Σχ. 72. Τὸ ποδήλατον ἀποσπᾶται τῆς τροχιᾶς εἰς τὸ σημεῖον T , ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ τροχιά, νὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν.

Ἐπὶ τοῦ ποδήλατου ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος του B καὶ ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ τροχιά. Καὶ αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι κατακόρυφοι καὶ ἔχουν φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Διὰ νὰ δύναται τὸ ποδήλατον νὰ διαγράψῃ τὸ ἀνώτατον κυκλικὸν τμήμα τῆς τροχιᾶς του, μὲ ταχύτητα v , πρέπει ἡ συνισταμένη $B + F$ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων νὰ εἶναι κεντρομόλος καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς $m \cdot v^2/r$. Ἦτοι πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$B + F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

ἐνθα r εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς τροχιᾶς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} - B = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$$

(ἀφοῦ $B = m \cdot g$). Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ ταχύτης εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις v^2/r νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ g , ἡ δύναμις F εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς - τὸ ποδήλατον, δηλ., εὗρίσκεται ἐν ἐπαφῇ πρὸς τὴν τροχιάν. Ὄταν ἡ ταχύτης εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ v^2/r νὰ εἶναι ἴσον πρὸς g , ἡ δύναμις F γίνεται ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ποδήλατον παύει νὰ ἐφάπτεται τῆς τροχιᾶς. Ἐπομένως, ἡ ἐλαχίστη ταχύτης $v_{ελ}$, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τὸ ποδήλατον στηρίζεται εἰς τὴν τροχιάν, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$v_{ελ} = \sqrt{r \cdot g}.$$

§ 52. Ὅρμη. Ἡ ἄλλη, μεγάλης σημασίας, ἔννοια τῆς Μηχανικῆς εἶναι ἡ ἔννοια τῆς *ὀρμῆς* ἐνὸς ὕλικου σημείου. Διὰ τοῦ ὅρου τούτου ἐννοοῦμεν ἓν ἀνυσματικὸν μέγεθος $\mathcal{J}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μάζης m τοῦ ὕλικου σημείου ἐπὶ τὴν ταχύτητα v τούτου. Ἦτοι

$$\boxed{\mathcal{J} = m \cdot v}$$

Ὅπως προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἡ διεύθυνσις τῆς ὀρμῆς συμπίπτει μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητος· ἡ ὀρμή, δηλ., εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τροχιάς τοῦ κινητοῦ.

§ 53. Γενικωτέρα μορφή τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς

$$\mathcal{F} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\mathcal{F} = \frac{d(m \cdot v)}{dt}.$$

Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $m \cdot v$ παριστᾷ τὴν ὀρμήν, ἔχομεν

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}} \quad (2)$$

Οὕτω γραφόμενος ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς, ἀποτελεῖ τὴν γενικωτέραν αὐτοῦ μορφήν, ὡς διευκρινίσθη ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος (*).

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{F} = d\mathcal{J}/dt$. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θέσωμεν $\mathcal{F} = 0$ θὰ λάβωμεν $d\mathcal{J} = 0$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ὀρμῆς ἐνὸς ὕλικου σημείου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου οὐδεμία δύναμις ἐξασκείται, εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ὅταν, ὅμως, ἡ μεταβολὴ τῆς ὀρμῆς εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ ὀρμή θὰ διατηρῇται σταθερά.

Ἐφαρμογὴ τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{F} = d\mathcal{J}/dt$. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{F} = d\mathcal{J}/dt$ δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου δημιουργεῖται ὑπὸ τῆς ἔλικος ἐνὸς πλοίου ἡ δύναμις, ἡ προσωθοῦσα αὐτό: Ἡ ἔλιξ, περιστρεφόμενη, ἐκσφενδονίζει ὑδατίνους μάζας πρὸς τὰ ὀπίσω· ὥς τοῦτο εἶναι εὐκόλον νὰ παρατηρηθῇ. Ἐπειδὴ αἱ μάζαι αὗται εὐρίσκοντο ἀρχικῶς ἐν ἡρεμίᾳ, ἥδη δὲ κινοῦνται πρὸς τὰ ὀπίσω, ἔπεται ὅτι μετεβλήθη

(*) Ἐνῶ ἡ ἰσχύς τῆς ἐξισώσεως (1) περιορίζεται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ μάζα εἶναι σταθερά, ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει καὶ ὅταν αὕτη μεταβάλλεται μετὰ τῆς ταχύτητος, ὅπως ἀπαιτεῖ ἡ θεωρία τῆς Σχετικότητος, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ἐνθα m_0 εἶναι ἡ μάζα ἡρεμίας καὶ $\beta = v/c$ (c = ταχύτης τοῦ φωτὸς ἐν τῷ κενῷ).

ή όρμή των. Κατά τήν άνωτέρω, όμως, έξίσωσιν, διά νά μεταβληθῇ ή όρμή απαιτεῖται δύναμις. Τήν δύναμιν, άκριβώς, ταύτην έξήσκησεν επί τών υδάτινων μαζών ή έλιξ. Κατά τό άξίωμα, όμως, «δράσις = αντίδρασις», πρόει και αί πρὸς τά όπίσω έκσφενδονιζόμεναι υδάτινα μάζαι νά έξασκούν επί τῆς έλικος—και συνεπώς επί τοῦ πλοίου—μίαν ἴσην και αντίθετον δύναμιν. Η δύναμις, άκριβώς, αὕτη είναι ή δύναμις, ή προσωθοῦσα τὸ πλοϊον.

§ 54. Στροφορμή. Έστω ὕλικόν σημεῖον, μάζης m , τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ακτίνος r (σχ. 73). Ὡς γνωστόν, ή όρμή τοῦ ὕλικου τούτου σημείου είναι ἴση πρὸς $m \cdot v$. Καλοῦμεν **στροφορμήν** τοῦ ὕλικου τούτου σημείου ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐν ἄνυσμα G , τοῦ ὁποῖου τὸ μέτρον G είναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $r \cdot mv$, ή διεύθυνσις είναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιάς, ή δέ φορά είναι τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη με τήν φοράν περιστροφῆς, ν' ἀντιστοιχῇ εἰς προχώρησιν δεξιόστροφου κοχλίου. Ἡτοι είναι

$$G = r \cdot mv, \quad (1)$$

Ἡ εξίσωσις (1) δύναται νά γραφῇ και ἀνυσματικῶς ὡς εξῆς:

$$G = [r \cdot mv]$$

§ 55 Ὡθησις δυνάμεως. Έστω ὅτι ἐπὶ τινος ὕλικου σημείου εξασκεῖται μία δύναμις, ή ὁποία μεταβάλλεται χρονικῶς, ὅπως παριστᾷ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 74, δηλ., ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ μηδένος, αὐξάνεται μέχρι μιᾶς μεγίστης τιμῆς και, κατόπιν, ἐλαττωμένη, μηδενίζεται ἐκ νέου (*).

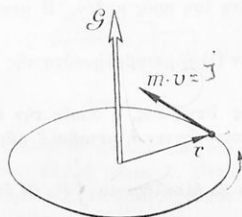
Συμφώνως πρὸς τήν γενικωτέραν μορφήν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, ή ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἐπερχομένη μεταβολή dJ τῆς όρμης θά είναι ἴση πρὸς

$$dJ = F \cdot dt$$

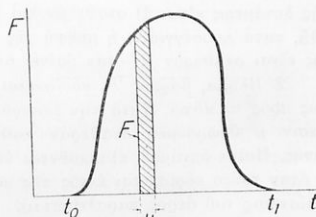
και θά παρίσταται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ ἔμβადου τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. Ἐάν ολοκληρώσωμεν τήν ἄνω εξίσωσιν ἀπὸ τὸν χρόνον t_0 ἕως τὸν χρόνον t_1 , θά λάβωμεν διὰ τήν ἐντὸς τοῦ χρόνου $t_1 - t_0$ μεταβολήν $J_1 - J_0$ τῆς όρμης τήν τιμήν

$$J_1 - J_0 = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt \quad (1)$$

(*) Μία οὕτω μεταβαλλομένη δύναμις είναι ή δύναμις, ή εξασκουμένη ἐπὶ ἐλαστικῆς σφαίρας, όταν αὕτη συγκρούεται με ἄλλο σῶμα (§ 104).



Σχ. 73. Ἡ στροφορμή τοῦ ὕλικου σημείου είναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιάς.



Σχ. 74.

Ἡ παράστασις

$$\int F \cdot dt$$

ονομάζεται *ᾠθησις δυνάμεως*.

Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁ θεμελιώδης νόμος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἐξῆς :

«Ἡ ὑπὸ τίνος δυνάμεως προκαλουμένη μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ᾠθησιν τῆς δυνάμεως ταύτης».

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ χρόνον τ , ἡ ᾠθησις αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς $F \cdot \tau$.

Ἐφαρμογή Αὐτοκίνητον, μάζης m , κινούμενον μὲ ταχύτητα v , συναντᾷ τοῖχον, μετὰ τοῦ ὁποίου καὶ συγκρούεται, ὅποτε ἡ ταχύτης του, μετὰ τὴν σύγκρουσιν, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς εἶναι ἴση πρὸς mv . Κατὰ τὴν ἐξίσω-

σιν (1) ἡ μεταβολὴ αὐτῆς τῆς ὁρμῆς θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ᾠθησιν $\int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt$

τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία τὴν προεκάλεσεν. Ἀναλόγως τοῦ χρόνου $t_1 - t_0$, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἡ μεταβολὴ αὕτη, ἡ δύναμις F θὰ εἶναι μικρὰ ἢ μεγάλη, δεδομένου

ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν. Τοῦτο ἐξηγεῖ διατὶ, ἂν τὸ αὐτοκί-

νητον συναντήσῃ στερεὸν τοῖχον, θὰ ὑποστῇ μεγάλῃν δυνάμιν (ικανὴν καὶ νὰ τὸ καταστρέψῃ), ἐνῶ, ἐὰν ἐπιπέσῃ ἐπὶ σωροῦ ἄμμου, λόγῳ τοῦ μεγάλου χρόνου, ὁ ὁποῖος διατίθεται διὰ τὴν ἐπιβράδυνσιν αὐτοῦ, ἡ δύναμις καί, συνεπῶς, ἡ βλάβη θὰ εἶναι μικρά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐπὶ τίνος κινήτου ἐξασκεῖται μία δύναμις, ἡ ὁποία εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα. α) Πῶς μεταβάλλεται τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ κινήτου καὶ διατὶ; β) Ποίου εἶδους κίνησιν θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν, ἐὰν τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως εἶναι 1) σταθερὸν καὶ 2) ἐὰν μεταβάλλεται χρονικῶς; γ) Νὰ σχεδιασθῇ, κατὰ προσέγγισιν, ἡ μορφή τῆς τροχιάς 1) ὅταν τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι σταθερὸν 2) ὅταν βαίνει αὐξανόμενον καὶ 3) ὅταν βαίνει ἐλαττούμενον.

2. Βλήμα, βάρους B , εὐρίσκεται ἐντὸς πυροβόλου, κατευθυνομένου κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω. Κατὰ τὴν ἐκφυροκρότησιν παράγονται ἀέρια, τῶν ὁποίων τὴν πίεσιν p θεωροῦμεν σταθεράν καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ βλήματος ἐντὸς τῆς κήνης. Ποῖαι δυνάμεις ἐξασκούνται ἐπὶ τοῦ βλήματος καὶ ποῖα ἡ συνισταμένη των α) ὅταν τοῦτο εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς κήνης καὶ β) ὅταν εὐρίσκεται ἐκτὸς αὐτῆς; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραλείπεται).

3. Τεχνητὸς δορυφόρος, μάζης m , κινεῖται περὶ τὴν Γῆν, ἐκτελὼν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν. α) Πόση εἶναι ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις καὶ β) ποῖον σῶμα τὴν ἐξασκεῖ; (Λεχόμεθα ὅτι εἰς ὅλα τὰ σημεία τῆς τροχιάς τὸ g ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς Γῆς).

4. Ποῖαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ τεχνητὸς δορυφόρος, μάζης m , ἵνα κινῆται περὶ τὴν Γῆν ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς καὶ εἰς ὕψος 900 km ; (Λεχόμεθα ὅτι εἰς τὸ ὕψος τοῦτο τὸ g ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς Γῆς. Ἀκτὶς τῆς Γῆς = 6300 km).

5. Διατὶ σῶμα, πῖπτον ἐλευθέρως εἰς τὸ κενόν, ἔχει σταθεράν ἐπιτάχυνσιν; 6. Διὰ τῆς χειρὸς μας κρατοῦμεν νῆμα, ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι ἐξηρτημένη μία σφαῖρα, μεγάλης μάζης m . Νὰ εὐρεθῇ ἡ δύναμις, ἡ τείνουσα τὸ

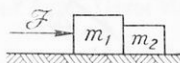
νήμα α) όταν η χειρ είναι ακίνητος και β) όταν επιταχύνεται προς τα άνω με σταθεράν επιτάχυνσιν γ .

7. Σώμα είναι εξηρημένον ἐκ τοῦ ἄκρου ἐνὸς δυναμομέτρου δι' ἐλατηρίου, στερεωμένου εἰς τὴν ὀροφὴν ἐνὸς ἀνελευστήρου. Ἐάν ὁ ἀνελευστήρ ἀνέροχεται με σταθεράν επιτάχυνσιν γ καὶ ὁ ξυγὸς δεικνύῃ τὴν δύναμιν F , ποῖον εἶναι τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος;

8. Ἐκ τῆς ὀροφῆς ἐνὸς σιδηροδρομικοῦ ὀχήματος ἐξαριῶται ἐν ἐκκρεμές, μάζης m . Ποῖαν γωνίαν φ μετὰ τῆς κατακόρυφου θὰ σχηματίζῃ τοῦτο, ὅταν τὸ ὄχημα ἐπιταχύνεται διαρκῶς με σταθεράν επιτάχυνσιν γ ;

$$(\text{ΑΠ: } \varepsilon\varphi \varphi = \frac{\gamma}{g})$$

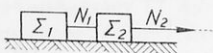
9. Δύο σώματα, μάζης m_1 καὶ m_2 , κείμενα ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, εὐρίσκονται ἐν ἐπαφῇ. Μία ὀριζοντία δύναμις $\mathcal{F}$ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου σώματος. Νὰ εὐρεθῇ ἡ δύναμις K , τὴν ὁποῖαν ἐξασκεῖ τὸ ἐν σῶμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν ὑπάρχει τριβή.



$$(\text{ΑΠ: } K = F \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2})$$

Ἀσκήσις 9η.

10. Δύο σώματα Σ_1 , Σ_2 , μάζης m_1 καὶ m_2 , εἶναι συνδεδεμένα μεταξύ των διὰ τοῦ νήματος N_1 καὶ εὐρίσκονται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Εἰς τὸ σῶμα Σ_2 εἶναι προσδεδεμένον δεύτερον νήμα N_2 , τὸ ὁποῖον, ἔλκον ἀμφότερα τὰ σώματα, προσδίδει εἰς αὐτὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ . Ζητεῖται α) νὰ σχεδιασθοῦν (εἰς δύο σχέδια) αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι εἰς ἕκαστον σῶμα καὶ β) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ τείνουσα ἕκαστον τῶν νημάτων. (Ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα).



Ἀσκήσις 10η.

$$(\text{ΑΠ: } F_1 = m_1 \cdot \gamma, \quad F_2 = (m_1 + m_2) \cdot \gamma)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΕΡΓΟΝ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΙΣΧΥΣ

§ 56. Έργον. Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$, μετατίθεται ἐπὶ εὐθύγραμμον τροχιᾷ ἐκ τοῦ σημείου Σ_1 εἰς τὸ σημεῖον Σ_2 . Ἐάν τὸν δρόμον $\Sigma_1 \Sigma_2$ συμβολίσωμεν διὰ τοῦ Δs , τότε ὀρίζομεν ὡς **ἔργον** ΔA τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὸν δρόμον Δs καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας α , τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ δρόμου. Ἦτοι εἶναι

$$\Delta A = F \cdot \Delta s \cdot \sin \alpha$$

(1)

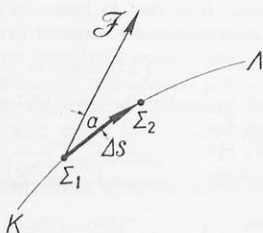
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι τὸ ἔργον δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς γινόμενον τοῦ δρόμου Δs ἐπὶ τὴν προβολὴν $F \cdot \sin \alpha$ τῆς δυνάμεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ δρόμου.

Συμφάνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμητικοῦ γινομένου (§ 23), τὸ ἔργον ΔA δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{F}$ καὶ Δs . Ἦτοι εἶναι

$$dA = (\mathcal{F} \cdot ds) \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἔργου προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

Τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγεται, ὅταν ἡ δύναμις μετακινή τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ μιᾶς οἰασδῆποτε τροχιάς KA (σχ. 75) ἢ ὅταν ἡ δύναμις μεταβάλλεται κατὰ μήκος αὐτῆς, εὗρισκομεν, ἂν χωρίσωμεν τὸν ὅλον δρόμον KA εἰς μεγάλον ἀριθμὸν τμημάτων, μήκους Δs , καί, ἂν υπολογίσωμεν τὸ ἔργον ΔA δι' ἕκαστον στοιχειώδες τμήμα, ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ στοιχειώδη ταῦτα ἔργα. Ἦτοι θὰ ἔχωμεν



Σχ. 75.

$$A = \sum \Delta A = \sum F \cdot \Delta s \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

Ἐὰν ὁ δρόμος $\Sigma_1 \Sigma_2$ ληφθῇ ἀπειροστός καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ ds , ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$dA = (\mathcal{F} \cdot ds). \quad (4)$$

Ἐπειδὴ δὲ $v = ds/dt$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (4) καὶ ὡς ἑξῆς:

$$dA = (\mathcal{F} \cdot v) \cdot dt. \quad (5)$$

Εἰδικὴ περίπτωσις. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ τροχιά εὐθύγραμμος, τὰ μεγέθη F καὶ $\sin \alpha$ τοῦ πολωνύμου τῆς ἐξίσωσεως (3) εἶναι σταθερὰ καί, συνεπῶς, κοινοὶ παράγοντες ὅλων τῶν προσθετέων. Ἐπομένως, ἡ ἐξίσωσις (3) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$A = F \cdot \sin \alpha \cdot \sum \Delta s.$$

Ἐπειδὴ, ὅμως, τὸ $\sum \Delta s$ παριστᾷ, ἀκριβῶς, τὸ ὅλικόν μήκος s τῆς τροχιάς, ἔχομεν

$$A = F \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

§ 57. Ἰσχύς. Ὅπως εἶδομεν, εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἔργου δὲν ὑπεισέρεται ἡ ἔννοια τοῦ χρόνου. Εἰς πολλάς, ὅμως, περιπτώσεις—ὅπως, π.χ., εἰς τὰς μηχανάς—πρακτικὴν σημασίαν ἔχει ὅχι μόνον πόσον ἔργον παράγεται, ἀλλὰ καὶ εἰς πόσον χρόνον. Τοῦτο μᾶς ἄγει εἰς τὸν ὁρισμὸν ἐνὸς νέου φυσικοῦ μεγέθους, τὸ ὁποῖον νὰ δεικνύῃ τὸν ρυθμὸν, μὲ τὸν ὁποῖον παράγεται τὸ ἔργον. Τὸ μέγεθος τοῦτο καλεῖται ἰσχύς καὶ ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἰσχύς N καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἔργου dA , τὸ ὁποῖον παράγεται ἐντὸς τοῦ χρόνου dt , διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἦτοι

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Ίσχυς και ταχύτης. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) τῆς προηγουμένης παραγράφου λαμβάνομεν διὰ τὴν ἰσχύϊν καὶ τὴν ἔκφρασιν

$$N = (\mathcal{F} \cdot v).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσχύς, ὡς ἀριθμητικὸν γινόμενον (§ 23), εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

§ 58. Μονάδες έργου και ισχύος. 1) C.G.S. Ἡ μονὰς ἔργου εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καλεῖται **ἔργιον** (*1 erg*) καὶ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει δύναμις, ἴση πρὸς μίαν δύνῃν, ὅταν μεταθέτῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ *1 cm.* Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

Μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εἶναι τὸ

$$1 \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

2) T. Σ. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μονὰς τοῦ ἔργου καλεῖται **χιλιογραμμόμετρον** (*1 kgr*m*) καὶ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει δύναμις, ἴση πρὸς *1 kgr**, ὅταν μεταθέτῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ *1 m.* Εἶναι δὲ

$$1 \text{ kgr*m} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}.$$

Μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα εἶναι τὸ

$$1 \frac{\text{kgr*m}}{\text{sec}}.$$

3) **Πρακτικὸν σύστημα** (χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς τὸν Ἠλεκτρισμόν). Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς ἔργου εἶναι τὸ *1 Joule* (*). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

Ὡς μονὰς ἰσχύος χρησιμοποιεῖται τὸ *1 Joule/sec*, τὸ ὁποῖον καλεῖται *1 Watt* (*1 W*). Ἦτοι

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}.$$

Πολλαπλάσια τῆς μονάδος ταύτης εἶναι τὸ *1 κιλοβάτ* (*1 kW*) καὶ τὸ *1 μεγαβάτ* (*1 MW*):

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}, \quad 1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}.$$

Κατὰ ταῦτα, ἡ μονὰς *Joule* εἶναι ἴση πρὸς *1 W \cdot sec*. Πολλαπλάσιον τῆς μονάδος ταύτης εἶναι καὶ τὸ

$$1 \text{ κιλοβατώραιον} (1 \text{ kWh}).$$

(*) Ἡ μονὰς αὕτη ἀνήκει εἰς τὸ σύστημα M.K.S. (§ 49) εἰς τὸ ὁποῖον βασίζεται τὸ Πρακτικὸν σύστημα μονάδων τοῦ Ἠλεκτρισμοῦ (βλ. καὶ Ἠλεκτρισμός, § 256).

Είναι δὲ

$$1 \text{ kWh} = 1000 \cdot 60 \cdot 60 \text{ W} \cdot \text{sec} \text{ (ἢ Joule)}.$$

4) Ἄλλαι μονάδες. Διὰ τὴν ἰσχύϊν μηχανῶν κυρίως χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς ἀτιμόϊππος ἢ, ἀπλῶς, ἵππος (1 CV ἢ PS)(*). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ PS} = 75 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}} = 736 \text{ W}.$$

Ὁ εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας χρησιμοποιούμενος ἵππος (1 HP)(*) εἶναι κατὰ τι μεγαλύτερος τοῦ προηγούμενου. Συγκεκριμένως εἶναι

$$1 \text{ HP} = 76 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}} = 746 \text{ W}.$$

Ἐκ τῆς μονάδος ἵππος προκύπτει ἡ μονὰς ἔργου **ὠριαῖος ἵππος** (CVh ἢ PSh ἢ HPhr).

Ἄλλη μονὰς ἔργου, χρησιμοποιουμένη κυρίως διὰ τὴν μέτρησιν τῆς θερμότητος, εἶναι ἡ **θερμὶς** (1 cal) καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτῆς ἡ **χιλιοθερμὶς** (1 kcal). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ Joule}$$

καὶ

$$1 \text{ kcal} = 427 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Εἰς τὴν Ἀτομικὴν Φυσικὴν ὡς μονὰς ἔργου χρησιμοποιεῖται τὸ **ἡλεκτρονικὸν βόλτ** (1 eV). Τοῦτο ἰσοῦται μετὰ $1,602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$.

§ 59. Ἐνέργεια. Ἐνέργεια E ἐνὸς ὕλικου σημείου (ἢ σώματος) καλεῖται τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον τοῦτο δύναται νὰ παραγάγῃ. Ἡ ἐνέργεια παρουσιάζεται ὑπὸ διαφόρους μορφάς, π.χ., ὡς δυναμικὴ, κινητικὴ, ἡλεκτρικὴ, θερμικὴ κ.λ.

Τὴν Μηχανικὴν ἐνδιαφέρουν δύο ἐξ αὐτῶν: ἡ δυναμικὴ καὶ ἡ κινητικὴ.

Ὡς **δυναμικὴν ἐνέργειαν** E_{dyn} ὀρίζομεν τὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἐν ὕλικὸν σημεῖον (ἢ σῶμα), λόγῳ τῆς θέσεως ἢ τῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται. Κατὰ ταῦτα, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον κατηναλώθη, διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ἢ κατὰστασιν ταύτην.

Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας φέρομεν δύο παραδείγματα: Ὑλικὸν σημεῖον, βάρους B , εὐρίσκόμενον εἰς ὕψος h ἀπὸ τινος ὀριζοντίου ἐπιπέδου (διὰ τὸ ὁποῖον δεχόμεθα $E_{\text{dyn}} = 0$), ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, διότι, ἂν τὸ ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ, εἶναι ἱκανὸν νὰ παραγάγῃ ἔργον. Ἡ δυναμικὴ αὕτη ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς

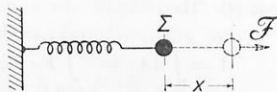
$$E_{\text{dyn}} = B \cdot h$$

(*) Ἀπὸ τοὺς ὁρους *cheval vapeur*, *Pferdestärke*, *horse power*.

καὶ τοῦτο διότι, διὰ ν' ἀνέλθῃ τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἰς τὸ ὕψος h , ἐξησκήθη ἐπ' αὐτοῦ δύνამεις, ἴση πρὸς τὸ βάρος του B , ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου, παρήγαγε τὸ ἔργον $B \cdot h$. Τὸ ἔργον, ἀκριβῶς, τοῦτο ἐναποθηκεύθη ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὅπως εἶδομεν, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ἐνὸς ὑλικοῦ σημείου μετρεῖται ἀπὸ τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου (π.χ., τοῦ διαπέδου τῆς αἰθούσης), διὰ τὸ ὁποῖον δεχόμεθα ὅτι αὕτη ἔχει τὴν τιμὴν μηδέν. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο μᾶς εἶναι ἀδιάφορον, διότι, ὥς θὰ ἴδωμεν καὶ ἀργότερον, εἰς τὰ διάφορα φυσικὰ φαινόμενα ἐνδιαφέρουν μόνον αἱ μεταβολαὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας καὶ ὄχι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῆς - ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι, ὅταν ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια λαμβάνῃ ἀρνητικὰς τιμὰς, τοῦτο σημαίνει, ἀπλῶς, ὅτι αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς ἐνεργείας, τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ὡς ἀφετηρία διὰ τὴν μέτρησιν.

Δυναμικὴ ἐνέργεια τεταμένου ἐλατηρίου. Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἀναφέρομεν ἐλατήριον, τὸ ὁποῖον ἐκτείνομεν οὕτως ὥστε τὸ μήκος του ν' αὐξηθῇ κατὰ x (σχ. 76). Εἰς τὴν κατάστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται, τώρα, τὸ ἐλατήριον, περιέχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον κατεπαισθῆναι διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν αὐτοῦ. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔργου $\sum F \cdot \Delta s$ συν α , τοῦ ἀπαιτηθέντος διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ δύναμις μετὰ τῆς μηκύνσεως. Ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ περὶ ἐλαστικότητος Κεφάλαιον, ἡ μήκυνσις x εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως F . Ἦτοι



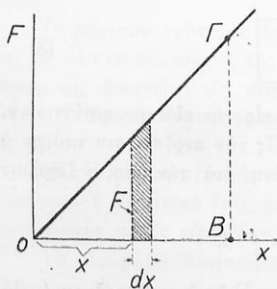
Σχ. 76. Διὰ τὴν ἔκτασιν τοῦ ἐλατηρίου καταναλίσκεται ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας.

$$F = D \cdot x \quad (1)$$

ἐνθα D εἶναι μία σταθερά(*). Τὴν σχέσιν ταύτην παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 77. Ἐπ' αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου κατὰ x , χρειάζεται νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις, ἴση πρὸς F . Διὰ τὴν περαιτέρω ἐπιμήκυνσιν κατὰ dx θὰ χρειασθῇ ἔργον, ἴσον πρὸς

$$dA = F \cdot dx. \quad (2)$$

Τὸ ἔργον τοῦτο dA παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ γραμμοσκιασμένου ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος. Ἐπομένως, διὰ νὰ ἐπιμηκύνωμεν τὸ ἐλατήριον ἀπὸ $x=0$ ἕως $x=OB=\lambda$, θὰ χρειασθῇ ἔργον A , ἴσον



Σχ. 77. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OBF παρίσχει τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτηθὲν διὰ τὴν μήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου κατὰ OB .

τὸ ἐλατήριον ἀπὸ $x=0$ ἕως $x=OB=\lambda$, θὰ χρειασθῇ ἔργον A , ἴσον

(*) Ἡ σταθερά αὕτη, ὥς θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, καλεῖται κατεπυκνυνόσα δύναμις τοῦ ἐλατηρίου.

πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OBF . Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $OB = \lambda$ καὶ τὸ ὕψος $BF = F_{μεγ}$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ὑπολογίζεται εἰς $\frac{1}{2} \lambda \cdot F_{μεγ}$, ὅθεν

$$A = \frac{1}{2} \lambda \cdot F_{μεγ}.$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $F_{μεγ}$ διὰ τοῦ $D \cdot \lambda$ (κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)), λαμβάνομεν

$$A = \frac{1}{2} D \cdot \lambda^2.$$

Τὸ ἔργον τοῦτο, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἀποθηκευμένον ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνέργειας τοῦ τεταμένου ἐλατηρίου, ἀποδίδεται, ἐκ νέου, κατὰ τὴν συσπείρωσιν αὐτοῦ.

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις προκύπτει, εὐκόλως, δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως (2). Ἦτοι

$$A = \int_{x=0}^{x=\lambda} dA = \int_{x=0}^{x=\lambda} F \cdot dx = \int_{x=0}^{x=\lambda} D \cdot x \cdot dx = \left| \frac{D \cdot x^2}{2} \right|_0^{\lambda} = \frac{D \cdot \lambda^2}{2}.$$

Κινητικὴ ἐνέργεια. Ὀνομάζομεν *κινητικὴν ἐνέργειαν* $E_{κιν}$ ὕλικου τινος σημείου τὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο, λόγῳ τῆς ταχύτητός του. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον κατηναλώθη ὑπὸ τῆς δυνάμεως, ἥ ὁποία τὸ ἐπετάχυνε καὶ τοῦ ἔδωσε τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ἔχει.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ὕλικου σημείου, μάζης m καὶ ταχύτητος v , εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀποδεικνύεται, εὐκόλως, εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις εἶναι σταθερά: Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ κίνησις εἶναι, ὡς γνωστόν, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύουν οἱ τύποι

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = \gamma \cdot t.$$

Τὸ ἔργον A , τὸ ὁποῖον παρήγαγεν ἡ δύναμις F ἐντὸς τοῦ χρόνου t , θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = F \cdot s = m \cdot \gamma \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot \gamma^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀκριβῶς, ἀνευρίσκεται ὡς κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ὕλικου σημείου.

Τὴν ἐξίσωσιν (3) εὐρίσκομεν καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ δύναμις δὲν εἶναι σταθερά: Ἀφοῦ εἶναι

$$dA = (\mathcal{F} \cdot ds) = m \cdot \left(\frac{dv}{dt} \cdot v \right) \cdot dt = m \cdot (dv \cdot v),$$

λαμβάνομεν διὰ τὸ ἔργον A

$$A = \int dA = \int_0^v m \cdot (v \cdot dv) = \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

§ 60. Θεώρημα διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὑλικὸν σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς ὕψος h , ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν $B \cdot h$. Ἄν, τώρα, τὸ ἀφίσωμεν νὰ πέσῃ, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον μηδενικῆς δυναμικῆς ἐνέργειας, θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει ταχύτητα v , ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἐκ τῶν τύπων $h = 1/2 g \cdot t^2$ καὶ $v = g \cdot t$ εἰς $v = \sqrt{2gh}$, δεδομένου ὅτι ἡ πτώσις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενη κίνησις. Ἡ κινητικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια θὰ εἶναι, ἐπομένως, ἴση πρὸς

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2gh = mg \cdot h = B \cdot h.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι, ἀκριβῶς, ἴση πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἰς τὸ ὕψος h .

Ἐὰν καλέσωμεν **μηχανικὴν ἐνέργειαν** τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας, τότε, ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι, κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτώσιν, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια τοῦ ὑλικοῦ σημείου παρέμεινε σταθερά.

Τὸ πόρισμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἰσχύει ὅχι μόνον διὰ τὴν πτώσιν, ἀλλὰ καὶ δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν μεταβολὴν τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας εἰς κινητικὴν (ἢ καὶ ἀντιστρόφως), φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα **θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας** καὶ διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Κατὰ τὰς μετατροπὰς τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας εἰς κινητικὴν καὶ ἀντιστρόφως, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια παραμένει σταθερά, ἐφ' ὅσον δὲν ἔχομεν μετατροπὴν αὐτῆς εἰς ἄλλην μορφήν ἐνέργειας (π.χ., θερμότητα)».

Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις μιᾶς γενικωτέρας ἀρχῆς τῆς Φυσικῆς, τῆς γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα **ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας**, ἡ ὁποία διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

«Ἡ ὅλική ἐνέργεια (δηλ. τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μορφῶν ἐνέργειας) ἐνὸς ἀπομεμονωμένου συστήματος σωμάτων (*) εἶναι σταθερά».

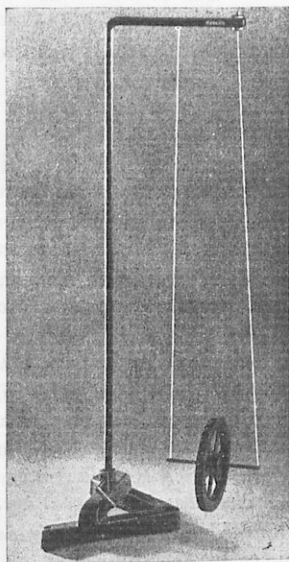
Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀξιώματος τούτου ἐπεκτείνεται εἰς ὅλας τὰς μορφὰς ἐνεργ.

(*) Διὰ τοῦ ὅρου «ἀπομεμονωμένον σύστημα» ἐννοοῦμεν σύνολον σωμάτων, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ δύναται ν' ἀνταλλάσῃ ἐνέργειαν μὲ τὸ περιβάλλον, δηλ., νὰ μὴ δύναται ν' ἀνταλλάσῃ οὔτε θερμότητα, οὔτε ἔργον μὲ τὸ περιβάλλον.

γείας, τὰς ὁποίας ἔχει ἐν ἀπομεμονωμένον σύστημα, π.χ. ἐνέργειαν ἡλεκτρικοῦ πεδίου, χημικὴν ἐνέργειαν κ.λ. Ἀμεσος συνέπεια τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας εἶναι καὶ τὸ ἀδύνατον τῆς κατασκευῆς τοῦ **δεικνύ- του**, δηλ., μιᾶς μηχανῆς, ἡ ὁποία θὰ παρήγεν ἐνέργειαν ἐκ τοῦ μηδενός.

Ἐφαρμογαί. 1) Κατὰ τὴν ταλάντωσιν ἐνὸς ἐκκρεμοῦς ἡ κινητικὴ τοῦ ἐνέργεια μετατρέπεται περιοδικῶς εἰς δυναμικὴν καὶ ἀντιστρόφως· πάντως, εἰς ἐκάστην χρονικὴν στιγμήν τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας του εἶναι σταθερόν. Τοῦτο ἰσχύει, βεβαίως, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν ὑπάρχουν τριβαί, διότι, ἄλλως, μέρος τῆς ἐνεργείας μεταδίδεται εἰς τὸ περιβάλλον ὑπὸ μορφὴν θερμότητος.

2) Τὸ σχῆμα 78 παριστᾷ μικρὸν σφόνδύλον, ἐξηρητημένον διὰ δύο νημάτων ἀπὸ τοῦ ἄξονός του. Περιστρέφοντες τὸν σφόνδύλον, περιτυλίγομεν



Σχ. 78. Ὅταν τὰ νήματα ἐκτυλιχθοῦν, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια θὰ ἔξη μετατραπῇ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν περιστροφῆς.

τὰ νήματα εἰς τὸν ἄξονα, ὁπότε ὁ σφόνδύλος ἀνυψοῦται. Ἐάν, τώρα, τὸν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θ' ἀρχίσῃ κατερχόμενος βραδέως, ἐνῶ ταυτοχρόνως θὰ περιστρέφεται μετὰ διαρκῶς αὐξανομένην γωνιακὴν ταχύτητα. Ὅταν τὰ νήματα ἐκτυλιχθοῦν ἐντελῶς, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σφονδύλου θὰ ἔξη μετατραπῇ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, ἀποταμιευμένην εἰς αὐτὸν ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας περιστροφῆς. Ἐν συνεχείᾳ, ὁ σφόνδύλος συνεχίζει, λόγῳ ἄδρανείας, τὴν περιστροφὴν του, προκαλῶν περιέλιξιν τῶν νημάτων εἰς τὸν ἄξονα κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ ἀνυψοῦται, μετατρέπομένης, οὕτω, τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυναμικὴν. Τὸ φαινόμενον ἐπαναλαμβάνεται περιοδικῶς· ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τὸ ἐκκρεμές. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς πᾶσαν θέσιν τοῦ σφονδύλου τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας του θὰ εἶναι σταθερόν.

3) Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας δυνατόν νὰ μᾶς δώσῃ τὴν λύσιν ὠρισμένων προβλημάτων πολὺ εὐκολώτερον ἢ ἄλλαι μέθοδοι: Εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου τοῦ σχήματος 76, προσσαρμόζομεν μίαν σφαῖραν Σ, μάζης m καί, ἀφοῦ τὸ ἐκτείνομεν κατὰ λ , τὸ ἀφήνομεν ἐλεύθερον (*). Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω

(*) Ἐπὶ τοῦ συστήματος θεωροῦμεν ὅτι δὲν ἐπιδρᾷ ἡ βαρύτης.

(§ 109), η σφαίρα θά ἐκτελέσῃ *ἀρμονικὴν ταλάντωσιν*, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ἐλατηρίου θά μετατρέπεται, περιοδικῶς, εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῆς σφαίρας, καὶ ἀντιστρόφως. Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν θά ἔχῃ ἡ σφαῖρα, ὅταν διέρχεται διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της: Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψωμεν, δι' οἵανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν, τὴν σχέσιν

$$E_{δυν} + E_{κιν} = σταθ.$$

Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς μεγίστης μηχανώσεως τοῦ ἐλατηρίου, ὅλη ἡ ἐνέργεια ἔχει μετατραπῇ εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν § 59, εἶναι ἴση πρὸς $1/2 D \cdot \lambda^2$. Ἀντιστρόφως, κατὰ τὴν διάβασιν τῆς σφαίρας διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὅλη ἡ ἐνέργεια ἔχει μετατραπῇ εἰς κινητικὴν. Κατὰ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, ἔχομεν

$$(E_{δυν} + E_{κιν})_{\substack{\text{εἰς τὴν θέσιν μεγί-} \\ \text{στης μηχανώσεως}}} = (E_{δυν} + E_{κιν})_{\substack{\text{εἰς τὴν θέσιν} \\ \text{ἰσορροπίας}}}$$

$$\eta \quad \frac{1}{2} D \cdot \lambda^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὐρίσκουμεν τὴν ταχύτητα v , τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαῖρα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διαβάσεως ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Πόσον ἔργον παράγει ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ λίθου, μάζης m , εὐρισκομένου ἐντὸς σφενδόνης καὶ κινουμένου ὁμαλῶς ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτίως r , μὲ συχνότητα ν ;

2. Σῶμα, βάρους B , κινεῖται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ σταθερὰν ταχύτητα v ἐπὶ χρόνον t . α) Πόση εἶναι ἡ πρὸς τοῦτο ἀναγκαία δύναμις; β) Πόσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς δυνάμεως ταύτης παραχθὲν ἔργον;

3. Παιδικὸν τυφέκιον ἐκτινάσσει τὸ βλήμα τῇ βοηθείᾳ συσπειρωμένου ἐλατηρίου. Ἐστω B τὸ βάρος τοῦ βλήματος, D ἡ κατευθύνουσα δύναμις τοῦ ἐλατηρίου καὶ l ἡ ἐπιβράχυνσις αὐτοῦ. Εἰς ποῖον ὕψος h θά φθάσῃ τὸ βλήμα, ἐάν, ἀφοῦ κατευθύνωμεν τὸ ὅπλον κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, πιέσωμεν τὴν σκανδάλην;

$$\left(\text{ΑΠ: } h = \frac{D \cdot l^2}{2B} \right)$$

4. Σφαῖρα, βάρους B , εἶναι προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον νήματος, μήκους l , καὶ περιστρέφεται ἐπὶ κατακορύφου κυκλικῆς τροχιάς μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος. Ἐάν v εἶναι ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς, νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ $F_{κάτω} - F_{ἄνω}$ μεταξὺ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς χειρός, ὅταν ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς καὶ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς χειρός, ὅταν ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιάς.

$$(\text{ΑΠ: } F_{κάτω} - F_{ἄνω} = 6B)$$

5. Πλοῖον κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα 30 κόμβων, ὅταν αἱ μηχαναὶ τοῦ ἀναπτύσσουν ἰσχὺν 25 000 HP. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις, τὴν ὁποίαν προβάλλει τὸ ὕδωρ εἰς τὸ πλοῖον;

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

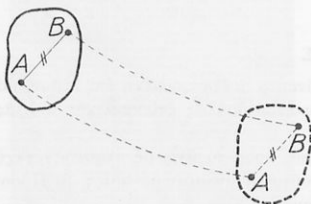
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Ἐνῶ εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια ἡσχολήθημεν μετὰ τὸ ὕλικόν σημεῖον, εἰς τὰ κατωτέρω θ' ἂσχοληθῶμεν μετὰ σώματα, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις δὲν δύνανται, πλέον, νὰ θεωρηθοῦν ἀμελητέαι.

§ 61. Μεταφορικὴ κίνησις στερεοῦ σώματος. Ἡ ἀπλουστέρα ἐκ τῶν δυνατῶν κινήσεων ἑνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι ἡ *μεταφορικὴ κίνησις*, ἢ κίνησις, δηλ., ἔκκεντρον, κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν



Σχ. 79. Κατὰ τὴν μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ σώματος, ἡ εὐθεῖα AB παραμένει παράλληλος πρὸς ἑαυτήν.

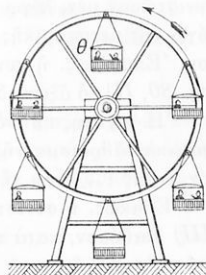
τὴν αὐτὴν ταχύτητα. Οὕτω, ἐὰν τὸ σῶμα τοῦ σχήματος 79 ἐκτελεῖ μεταφορικὴν κίνησιν, ἡ ταχύτης τοῦ σημείου A , θὰ εἶναι ἴση μετὰ τὴν ταχύτητα τοῦ σημείου B . Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, κατὰ τὴν μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ σώματος, αἱ τροχιαὶ ὅλων τῶν σημείων θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν ἡ τροχιά τοῦ σημείου A εἶναι καμπυλόγραμμος, τὴν αὐτὴν, ἀκριβῶς, μορφήν θὰ ἔχῃ καὶ ἡ τροχιά τοῦ σημείου B . Κατὰ τὴν κίνησιν ταύ-

την πᾶσα εὐθεῖα τοῦ σώματος — π.χ. ἡ AB — παραμένει, διαρκῶς, παράλληλος πρὸς ἑαυτήν.

Ἀντιστρέφοντες τὸν συλλογισμόν, δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι, ὅταν ἓν σῶμα κινῆται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε οἰαδήποτε εὐθεῖα ἐπ' αὐτοῦ νὰ παραμένῃ παράλληλος πρὸς ἑαυτήν, τὸ σῶμα τοῦτο ἐκτελεῖ μεταφορικὴν κίνησιν. Παράδειγμα τοιαύτης κινήσεως ἔχομεν εἰς τὴν ἐξῆς περίπτωσιν: Ἐπὶ τραπέζης τοποθετοῦμεν μαγνητικὴν βελόνην, στηριζομένην ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος, καὶ τὴν ἀφήνομεν νὰ ἰσοροπήσῃ. Ἐάν, ἀκολουθῶς, μετακινήσωμεν διὰ τῆς χειρὸς μας τὴν βάσιν τοῦ ἄξονος, οὕτως ὥστε αὐτὴ νὰ διαγράφῃ κυκλικὴν τροχίαν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ προσανατολισμὸς τῆς μαγνητικῆς βελόνης δὲν ἀλλάσσει, ἀφοῦ αὕτη διαρκῶς διατηρεῖ τὴν κατεύθυνσιν

Βορρᾶς—Νότος· ἡ κίνησης, δηλ., τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι μεταφορικὴ κίνησης (καὶ ὄχι στροφικὴ, ὥπως ἐκ πρώτης ὄψεως θὰ ἐνόμιζέ τις).

Ὁμοίως, μεταφορικὴν κίνησιν ἐκτελοῦν οἱ θαλαμίσκοι θ τοῦ «γίγαντιοῦ τροχοῦ» τοῦ σχήματος 79a, ὁ ὁποῖος συναντᾶται εἰς ἐκθέσεις, πανηγύρεις κ.λ. Οὗτος εἶναι τροχὸς μεγάλης διαμέτρου, στρεπτός περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ ὁποίου εἶναι ἐξηρητημένοι οἱ θαλαμίσκοι. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τροχοῦ, οἱ θαλαμίσκοι παραμένουν διαρκῶς παρῶντες πρὸς ἐαυτοὺς· ἐκτελοῦν, συνεπῶς, καθαρῶς μεταφορικὴν κίνησιν.



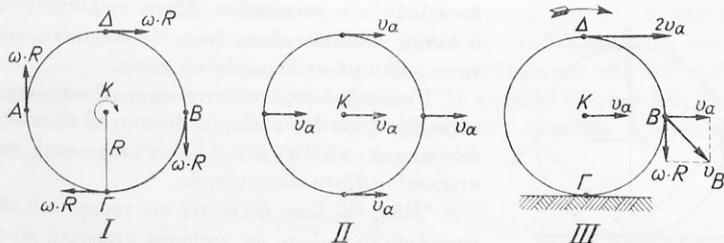
Σχ. 79a. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τροχοῦ, οἱ θαλαμίσκοι ἐκτελοῦν μεταφορικὴν κίνησιν.

§ 62. Στροφικὴ κίνηση στερεοῦ σώματος. Ἄλλο εἶδος ἀπλῆς κινήσεως ἐνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι ἡ **στροφικὴ κίνησης**, ἡ κίνησης, δηλ., ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει μία εὐθεΐα — ὁ **ἄξων** — τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα παραμένουν ἀκίνητα κατὰ τὴν περιστροφὴν, ἐνῶ τὰ διάφορα ἄλλα σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν διαφόρους ταχύτητας v , ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως r αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Ἦτοι εἶναι

$$v = \omega \cdot r$$

ἐνθα ω εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ σώματος. Τοιαύτην, ἀκριβῶς, κίνησιν ἐκτελεῖ τροχός, περιστρεφόμενος περὶ ἀκίνητον ἄξονα.

§ 63. Σύνθετος κίνησης στερεοῦ σώματος. Ὅταν ἐν σῶμα ἐκτελῇ, ταυτοχρόνως, καὶ μεταφορικὴν καὶ στροφικὴν κίνησιν, λέγομεν ὅτι ἐκτελεῖ **σύνθετον κίνησιν**. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., ὁ τροχὸς ἐνὸς αὐτοκι-



Σχ. 80. Ἡ κύλις τοῦ τροχοῦ (III) εἶναι ἐπαλληλία τῆς στροφικῆς κινήσεως (I) καὶ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως (II).

νήτου, κυλιόμενος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, διότι, ἀφ' ἐνὸς μὲν οὗτος περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά του (σχ. 80, I), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως μεταφορικὴν κίνησιν (II) - τὴν τοῦ αὐτοκινήτου.

Ἡ ταχύτης ἐκάστου σημείου τοῦ τροχοῦ εὐρίσκεται διὰ συνθέσεως τῆς

ταχύτητας, λόγω της μεταφορικής κινήσεως και της ταχύτητος, λόγω της στροφικής κινήσεως. Ούτω, η ταχύτης v του σημείου K του άξονος έχει συνιστώσαν μέν, λόγω της περιστροφής, ίσην πρὸς μηδέν, συνιστώσαν δέ, λόγω της μεταφορικής κινήσεως, ίσην πρὸς τὴν ταχύτητα v_a τοῦ αὐτοκινήτου. Ἐπομένως, ἡ συνισταμένη ταχύτης τοῦ σημείου K εἶναι ἴση πρὸς v_a (σχ. 80, II) - ὁ ἄξων, δηλ., κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου.

Ἡ ταχύτης v_B ἐνὸς τυχόντος σημείου B (III) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἀνυματικὸν ἄθροισμα τῆς ταχύτητος $\omega \cdot R$, λόγω της περιστροφῆς (I) καὶ τῆς ταχύτητος v_a , λόγω της μεταφορικής κινήσεως (II).

Εἰδικῶς, ἡ συνισταμένη ταχύτης τοῦ σημείου Γ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν (III) (καθόσον, κατὰ τὴν κύλιν, ὁ τροχὸς δὲν ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους) ὁπότε ἔχομεν $v_a - \omega \cdot R = 0$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$v_a = \omega \cdot R. \quad (1)$$

Εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον A τοῦ τροχοῦ ἡ συνισταμένη ταχύτης v_A θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$v_A = \omega \cdot R + v_a$$

ἥ, λόγω της ἐξισώσεως (1),

$$v_A = 2v_a.$$

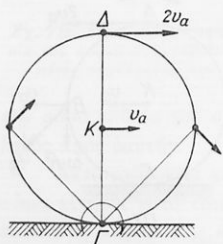
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀνώτατον σημεῖον (A) τοῦ τροχοῦ κινεῖται μὲ ταχύτητα, διπλασίαν τῆς ταχύτητος τοῦ αὐτοκινήτου.

Εἶναι δυνατόν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα κίνησις ἐνὸς σώματος, καὶ ἡ πλέον πολὺπλοκος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπαλληλία μιᾶς στροφικῆς καὶ μιᾶς μεταφορικῆς κινήσεως.

Στιγμιαίος ἄξων περιστροφῆς. Ὅπως εὐρίσκεται, κατὰ τὴν κίνησιν ἐνὸς σώματος ὑπάρχουν πάντοτε σημεῖα, κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, τῶν ὁποίων ἡ συνισταμένη ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα ἀποτελοῦν τὸν **στιγμιαῖον ἄξωνα περιστροφῆς**, ὁ ὁποῖος καλεῖται οὕτω, διότι δὲν παραμένει ἀκίνητος, ἀλλὰ μετατίθεται ἐν τῷ χώρῳ.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ στιγμιαίου ἄξονος περιστροφῆς, ἡ σύνθετος κίνησις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κίνησις καθαρώς στροφικῇ περὶ τὸν στιγμιαῖον ἄξωνα περιστροφῆς.

Ἦδη, ἐφ' ὅσον ἡ κύλινς τοῦ τροχοῦ τοῦ αὐτοκινήτου θεωρεῖται ὡς καθαρώς στροφικῇ κίνησις περὶ τὸν διὰ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον στιγμιαῖον ἄξωνα, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν συνισταμένην ταχύτητα ἐκάστου σημείου τοῦ τροχοῦ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ταχύτης εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν στιγμιαίαν ἀκτῖνα (σχ. 81) καὶ ἀνάλογος τοῦ μήκους αὐτῆς. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ ταχύτης



Σχ. 81. Ἡ κύλινς τοῦ τροχοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς καθαρώς στροφικῇ κίνησις περὶ τὸν διὰ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον στιγμιαῖον ἄξωνα.

τοῦ ἀνωτάτου σημείου A τοῦ τροχοῦ εἶναι διπλασία τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου K - ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὁποῖον εἴχομεν καταλήξει καὶ διὰ τῆς προηγουμένης μεθόδου. Ὁ στιγμιαίος ἄξων, ὡς διερχόμενος πάντοτε διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ τροχοῦ μετὰ τοῦ ἐδάφους (σημεῖον I'), μετατίθεται ἐν τῷ χώρῳ.

§ 64. Βαθμοί ἐλευθερίας. Ὅπως εἰς τὸ ὑλικὸν σημεῖον (§ 24), οὕτω καὶ εἰς τὸ στερεὸν σῶμα οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας ὀρίζονται ὡς ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σώματος.

Ἡ θέσις ἐνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ συντεταγμέναι $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ τριῶν σημείων αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα, ἐν στερεὸν σῶμα θὰ ἔχη, ἐκ πρώτης ὕψους, ἑννέα βαθμοὺς ἐλευθερίας· οὗτοι, ὅμως, περιορίζονται, ὡς ἀποδεικνύεται, εἰς ἕξι, καθόσον αἱ ἑννέα συντεταγμέναι δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, δεδομένου ὅτι αἱ ἀποστάσεις μετὰ τῶν τριῶν σημείων εἶναι σταθεραὶ καὶ ἀνεξάρτητοι τῆς θέσεως τοῦ σώματος. Ὅταν ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος εἶναι καθωρισμένη, τὸ σῶμα ἔχει ὀλιγωτέρους βαθμοὺς ἐλευθερίας. Οὕτω, ὁ σφόνδυλος μηχανῆς, στερεωμένης ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ὡς κινούμενος περὶ μόνιμον ἄξονα, ἔχει ἓνα μόνον βαθμὸν ἐλευθερίας, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν τιμὴν τῆς κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐξανομένης γωνίας φ .

§ 65. Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, ἐκτελοῦντος μεταφορικὴν κίνησιν. Θεωρήσωμεν στερεὸν σῶμα, μάζης m , τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ μεταφορικὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον ἔστω v . Τὸ σῶμα τοῦτο ἔχει, λόγῳ τῆς κινήσεώς του ταύτης, κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{κιν}$, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ὡς ἀκολουθῶς: Θεωροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μέγαν ἀριθμὸν ὑλικῶν σημείων, μάζης $m_1, m_2, m_3 \dots$ καὶ ὑπολογίζομεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἐκάστου ἑξ αὐτῶν, ὁπότε ἡ συνολικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων αὐτῶν τῶν ὑλικῶν σημείων: Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς ὑλικοῦ σημείου, μάζης m_i , εἶναι ἴση πρὸς $1/2 m_i \cdot v_i^2$, ἐπομένως ἡ ὅλική κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

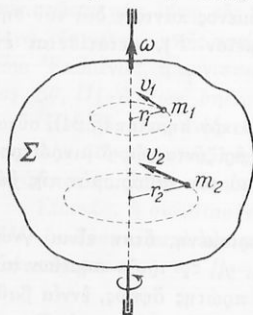
$$E_{κιν} = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2.$$

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης v_i εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ἀντ' αὐτῆς, v , ὁπότε ἔχομεν

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} v^2 \cdot \sum m_i \quad \eta \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

ἔνθα τὸ $\sum m_i$ δίδει τὴν ὅλικήν μάζαν m τοῦ σώματος.

§ 66. Κινητική ενέργεια σώματος, στρεφόμενου περί άξονα - Ροπή αδρανείας. Θεωρήσωμεν έν στερεόν σώμα Σ (σχ. 82), τὸ ὁποῖον



Σχ. 82.

περιστρέφεται περί μόνιμον άξονα με σταθεράν γωνιακήν ταχύτητα, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον ἔστω ω . Τὸ σώμα τοῦτο ἔχει, λόγω τῆς κινήσεώς του ταύτης, κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{κιν}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ άθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων, τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτελοῦν: Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἐνὸς ὑλικοῦ σημείου, μάζης m_1 , εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$$

ἐνθα $v_1 = \omega \cdot r_1$ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ r_1 ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ άξονος. Ὁμοίως,

ἡ κινητικὴ ἐνέργεια δευτέρου ὑλικοῦ σημείου, μάζης m_2 , εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$$

ἐνὸς τρίτου $1/2 m_3 \cdot v_3^2$ κ.ο.κ.

Ἐπομένως, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2.$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ ὑλικά σημεία τοῦ σώματος, ἔχομεν

$$E_{κιν} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i \cdot r_i^2. \quad (1)$$

Ἄν τὴν παράστασιν $\sum m_i \cdot r_i^2$ ὀνομάσωμεν **ροπήν αδρανείας** Θ τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν άξονα περιστροφῆς, ἤτοι ἂν γράψωμεν

$$\boxed{\Theta = \sum m_i \cdot r_i^2} \quad (2)$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἐξῆς:

$$\boxed{E_{κιν} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) συνάγομεν ὅτι ἡ ροπή αδρανείας ἐνὸς σώματος ὡς πρὸς ἓνα άξονα ἐξαρτᾶται ὅχι μόνον ἐκ τῆς μάζης, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ τρόπου κατανομῆς αὐτῆς περί τὸν θεωρούμενον άξονα. Αὕτη εἶναι τόσον μεγα-

λυτέρα, όσον ή μάζα είναι κατανεμημένη εις μεγαλυτέρας από του άξονος αποστάσεις. Ούτω, ό άνθρωπος του σχήματος 83 δύναται, διά καταλλήλουν συμπτύξεως του σώματός του, νά ελαττώσῃ τήν ροπήν άδραναίης αυτού.

Διαστάσεις και μονάδες τής ροπής άδραναίης. Αί διαστάσεις τής ροπής άδραναίης προκύπτουν, εύκόλως, έκ του τύπου (2) και είναι

$$[\Theta] = [M \cdot L^2].$$

Μονάς τής ροπής άδραναίης εις τό σύστημα C.G.S. είναι τό

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2.$$

Δεδομένου ότι εις τό Τεχνικόν σύστημα μονάς μὲν μάζης είναι τό $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$, μονάς δὲ μήκους τό 1 m , ή μονάς τής ροπής άδραναίης εις τό σύστημα τούτου είναι τό

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^2.$$



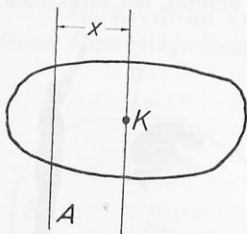
Σχ. 83. 'Ο άνθρωπος με άνατεταμένης τής χειρας (δεξιᾶς) ἔχει ροπήν άδραναίης ως πρὸς τὸν άξονα, τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ λευκοῦ σημείου, περίπου ἐξαπλασίαν τής ροπής άδραναίης, τήν ὅποιαν ἔχει εις τήν θέσιν συμπτύξεως (ἀριστερᾶς).

ΠΙΝΑΞ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Κύλινδρος $\Theta = \frac{1}{2} m R^2$	Σφαῖρα $\Theta = \frac{2}{5} m R^2$	Πρίσμα $\Theta = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$
Λεπτότοιχος σωλήν $\Theta = m R^2$	Παχύτοιχος σωλήν $\Theta = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$	Λεπτή ράβδος $\Theta = \frac{1}{12} m \cdot l^2$

§ 67. Μεταβολή τής ροπής άδραναίης μετά τής θέσεως του άξονος περιστροφής. Η ροπή άδραναίης ενός σώματος εξαρτάται όχι μόνον έκ τής μορφής του σώματος, αλλά και έκ τής θέσεως του άξονος ως πρὸς τό σῶμα, θά μεταβάλλεται, συνεπώς, αν μετακινήσωμεν τὸν άξονα παράλλλως πρὸς εαυτόν. Μεταξὺ τής τιμῆς Θ_K τής ροπής άδραναίης ως πρὸς άξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους K τοῦ σώματος (σχ. 84) και τής τιμῆς Θ_A τής ροπής άδραναίης ως πρὸς ἄλλον άξονα A , παράλλλουν

πρὸς τὸν πρῶτον καὶ ἀπέχοντα αὐτοῦ κατὰ τὴν ἀπόστασιν x , ὑπάρχει ἡ σχέση



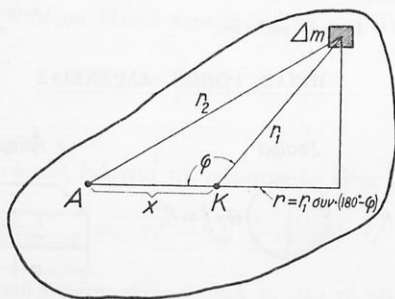
Σχ. 84. Ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρὸς ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους K , εἶναι μικρότερα παρὰ δι' οἰονδήποτε ἄλλον παράλληλον ἄξονα A .

τῶν σημείων K καὶ A . Ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦτους εἶναι

$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot x^2$	Θεώρημα τοῦ Steiner
-------------------------------------	---------------------

ἐνθα m εἶναι ἡ ὅλική μᾶζα τοῦ σώματος. Ἐάν, λοιπόν, συγκρίνωμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας διὰ διαφόρους ἄξονας, παραλλήλους μεταξὺ τῶν, θὰ εὔρωμεν ὅτι αὕτη λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν δι' ἐκεῖνον τὸν ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος.

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Steiner. Εἰς τὸ σχῆμα 85 τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχεδίου θεωρεῖται κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τοὺς διερχομένους διὰ



Σχ. 85.

$$\Theta_K = \sum \Delta m \cdot r_1^2 \quad \text{καὶ} \quad \Theta_A = \sum \Delta m \cdot r_2^2 \quad (1)$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν $r_2^2 = r_1^2 + x^2 - 2r_1 \cdot x \cdot \sin \varphi$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ τοῦ r_2^2 τὸ ἴσον του, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \sum \Delta m (r_1^2 + x^2 - 2r_1 \cdot x \cdot \sin \varphi) = \\ &= \sum \Delta m \cdot r_1^2 + \sum \Delta m \cdot x^2 - \sum \Delta m \cdot 2r_1 \cdot x \cdot \sin \varphi = \\ &= \Theta_K + x^2 \cdot \sum \Delta m - 2x \cdot \sum \Delta m \cdot r_1 \cdot \sin \varphi = \\ &= \Theta_K + x^2 \cdot m - 2x \cdot \sum \Delta m \cdot r_1 \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

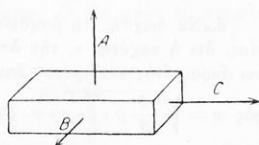
Ἐπειδὴ $r = r_1 \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = -r_1 \cdot \sin \varphi$, ὁ τελευταῖος προσθετέος γράφεται

$$2x \cdot \sum Am \cdot r.$$

Λεδομένου, ὅμως, ὅτι τὸ r εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους K , ὁ παράγων $\sum Am \cdot r$ εἶναι ἴσος πρὸς μηδέν (βλ. § 82), ὁπότε λαμβάνομεν, τελικῶς, τὴν σχέσιν

$$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot x^2. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

§ 68. Κύριοι ἄξονες ἁδρανείας. Ἐάν συγκρίνωμεν τὰς ροπὰς ἁδρανείας ἑνὸς σώματος ὡς πρὸς διαφόρους ἄξονας, οἱ ὅποιοι νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν δύο ἑξ' αὐτῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ ροπή ἁδρανείας θὰ ἔχη μίαν μεγίστην καὶ μίαν ἐλαχίστην τιμὴν. Ὡς ἀποδεικνύεται, οἱ δύο οὗτοι ἄξονες τέμνονται καθέτως. Ἐάν θεωρήσωμεν καὶ τρίτον ἄξονα, διερχόμενον καὶ αὐτὸν διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων (σχ. 86), θὰ λάβωμεν ἓν τρισσοβιγώνιον σύστημα ἁξόνων, οἱ ὅποιοι καλοῦνται **κύριοι ἄξονες ἁδρανείας**. Οὕτω, ἐκ τῶν τριῶν κυρίων ἁξόνων ἁδρανείας μιᾶς ράβδου, κυκλικῆς διατομῆς, ὁ ἄξων τῆς ἐλαχίστης ροπῆς ἁδρανείας συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῆς ράβδου, ἡ δὲ εἰς αὐτὸν ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς ροπῆς ἁδρανείας εἶναι πολὺ μικρά. Αἱ τιμαὶ διὰ τοὺς δύο ἄλλους κυρίους ἄξονας ἁδρανείας εἶναι, σχετικῶς, μεγάλαι καὶ ἴσαι μεταξὺ τῶν.



Σχ. 86. Οἱ τρεῖς κύριοι ἄξονες ἁδρανείας.

§ 69. Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος, ἐκτελοῦντος σύνθετον κίνησιν. Ὡς εἶδομεν ἄνωτέρω, ἡ σύνθετος κίνησις ἑνὸς σώματος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ περιστροφὴν τοῦ σώματος περὶ ἓνα οἰονδήποτε ἄξονα καὶ ἀπὸ μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ ὅλου σώματος. Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους K , ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, λόγῳ τῆς στροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα καὶ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, λόγῳ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως. Ἦτοι

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \Theta_K \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_K^2$$

ἐνθα Θ_K εἶναι ἡ ροπή ἁδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ v_K ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τί εἶδους κίνησιν ἐκτελοῦν οἱ δεῖκται ἑνὸς ὥρολογίου ;
2. Ποῦ εὐρίσκεται ὁ στιγμιαίος ἄξων περιστροφῆς ἑνὸς σώματος, τὸ ὅποιον ἐκτελεῖ μεταφορικὴν, μόνον, κίνησιν ;

3. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ (συνισταμένη) ταχύτης ἑνὸς σημείου, εὐρισκομένου εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς ὀριζοντίας διαμέτρου ἑνὸς κυλιομένου τροχοῦ αὐτοκινήτου, εἶναι ἴση πρὸς $v \cdot \sqrt{2}$, ἔνθα v εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου.

4. Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον καὶ ποῖα ἡ φορά τῆς ἐπιταχύνσεως α) τοῦ ἀνωτάτου σημείου A τοῦ κυλιομένου τροχοῦ τοῦ σχήματος $8I$, β) τοῦ κατωτάτου σημείου G καὶ γ) τοῦ σημείου K ;

Σημειώσεις. Ἡ ἄσκησης νὰ λυθῇ διὰ συνθέσεως τῆς ἐπιταχύνσεως, τῆς προερχομένης ἐκ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως, τῆς προερχομένης ἐκ τῆς στροφικῆς κινήσεως. (ΑΠ: α) $\omega^2 \cdot r$ μὲ φοράν πρὸς τὰ κάτω, β) $\omega^2 \cdot r$ μὲ φοράν πρὸς τὰ ἄνω, γ) μηδέν).

5. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ροπή ἀδραναίας ἑνὸς κυλίνδρου ὡς πρὸς ἄξονα μίαν γενέτειραν αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς $3/2 m \cdot R^2$, ἔνθα m εἶναι ἡ μάζα τοῦ κυλίνδρου καὶ R ἡ ἀκτίς αὐτοῦ.

6. Νά δειχθῇ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, ὅτι ἡ ταχύτης v , τὴν ὁποῖαν ἀποκτᾷ κύλινδρος, ἀφιέμενος ἐλεύθερος ἐκ τοῦ ἄνω ἄκρου ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, μήκους l καὶ γωνίας κλίσεως φ , εἶναι ἴση

πρὸς $v = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot l \cdot \eta \mu \varphi}$. (Ἀπώλειαι ἐνεργείας, λόγῳ τριβῆς, ἀμεληταί).

7. Μία στεφάνη ἀφίηται νὰ κυλίεται κατὰ μήκους ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, μήκους l καὶ γωνίας κλίσεως φ . Ποίαν ταχύτητα θ' ἀποκτήσῃ αὕτη, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου; (Νὰ λυθῇ τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας).

$$(ΑΠ: v = \sqrt{g \cdot l \cdot \eta \mu \varphi})$$

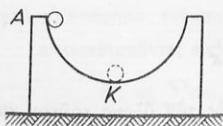
8. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μιᾶς στεφάνης, κυλιομένης κατὰ μήκους κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἶναι κατὰ τὸ ἥμισυ κινητικῆς ἐνέργειας, λόγῳ τῆς στροφικῆς κινήσεως περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς, καὶ κατὰ τὸ ἄλλο ἥμισυ κινητικῆς ἐνέργειας, λόγῳ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως.

9. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς κυλίνδρου, δεδομένης μάζης, ὁ ὁποῖος κυλίεται μὲ δεδομένην ταχύτητα, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτίνος του.

10. Μία στεφάνη, μάζης m καὶ ἀκτίνος R , κυλίεται μὲ ταχύτητα v ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Εἰς ποῖον ὕψος h θὰ ἀνέλθῃ αὕτη, ἐὰν συναντήσῃ ἐν κεκλιμένον ἐπίπεδον, γωνίας κλίσεως φ ;

$$(ΑΠ: h = v^2/g)$$

11. Μία σφαῖρα, βάρους B καὶ ἀκτίνος R , κυλίεται ἐντὸς κατακορύφου ἡμι-



κυκλίου, ὅπως δεικνύει τὸ ἔναντι σχῆμα. Ἡ σφαῖρα ἀφίηται ἐλεύθερα ἐκ τοῦ σημείου A . Νά δειχθῇ ὅτι ἡ κάθετος συνιστώσα τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν δίοδον αὐτῆς ἐκ τοῦ κατωτάτου σημείου K τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι

$$\text{ἴση πρὸς } \frac{17}{7} B.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Στατικῆς τοῦ ὕλικου σημείου ἡσυχολήθημεν με δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διήρχοντο, ὑποχρεωτικῶς, δι' ἑνὸς σημείου. Προκειμένου, ὅμως, περὶ δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος, τοῦτο δὲν εἶναι ἀναγκαῖον. Οὕτω, ἐπὶ τινος σώματος εἶναι δυνατόν νὰ ἐξασκούνται, π.χ., δύο, τρεῖς κ.λ. δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς νὰ μὴ τέμνονται. Τοιαῦτα περιπτώσεις ἐξετάζονται εἰς τὸ παρὸν Κεφάλαιον.

§ 70. Ροπή δυνάμεως ως πρὸς σημείον. Θεωρήσωμεν τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ (σχ. 87) καὶ τὸ σημείον A . **Ροπήν** τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ ως πρὸς τὸ σημείον A καλοῦμεν ἓν ἀνυσματικὸν μέγεθος $\mathcal{M}$, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν (κάθετον) ἀπόστασιν x αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου. Ἦτοι

$$M = F \cdot x. \quad (1)$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς ροπῆς λαμβάνεται, ἐξ ὁρισμοῦ, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ σημείου, ἡ δὲ φορά της τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη μετὰ τὴν φορὰν τῆς περιστροφῆς, τὴν ὁποίαν τείνει νὰ προσδώσῃ ἡ δύναμις, ν' ἀποτελῇ προχώρησιν δεξιόστροφου κοχλίου.

Τὴν ροπήν δυνάμεως ως πρὸς σημείον δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν καὶ ὡς ἐξῆς: Ἐάν, ἀπὸ τοῦ σημείου A , φέρωμεν τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα r πρὸς τυχόν σημείον B τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν ροπήν ὡς τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον (§ 23) τῶν ἀνυσμάτων r καὶ $\mathcal{F}$. Ἦτοι

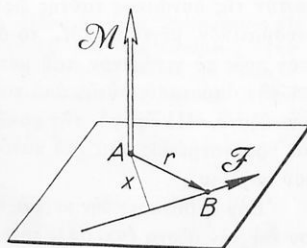
$$\mathcal{M} = [r \cdot \mathcal{F}] \quad (2)$$

Ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς παρέχει, ὅντως, τὸ αὐτὸ ἀνυσμα $\mathcal{M}$, ὅπως ὁ προηγούμενος. Διότι, ἐκ τῆς ἀνυσματικῆς μορφῆς τῆς ἐξίσωσης (2) προκύπτει ὅτι τὸ μέτρον τῆς ροπῆς εἶναι ἴσον πρὸς

$$M = F \cdot r \cdot \eta\mu\alpha = F \cdot x,$$

ἡ διεύθυνσις αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἀνυσμάτων r καὶ $\mathcal{F}$, ἡ δὲ φορά (διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς ὁποίας θεωροῦμεν τὸ ἀνυσμα r μετακινούμενον ἐπὶ τοῦ φορέως του, ἕως ὅτου ἡ ἀρχὴ του ἔλθῃ εἰς τὸ σημείον B) εἶναι ἐκεῖνη, τὴν ὁποίαν ὠρίσαμεν προηγουμένως.

Ἡ ροπή δυνάμεως ως πρὸς σημείον ἔχει, προφανῶς, τὴν ἐξῆς ἰδιό-



Σχ. 87. Τὰ ἀνύσματα r , $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{M}$ ἀποτελοῦν δεξιόστροφον σύστημα.

τητα: Δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ μετακινήθῃ ἐπὶ τοῦ φορέως της. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δύναμις εἶναι ὀλισθαίνον ἄνυσμα (§ 3).

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ροπῆς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν

$$[M] = [F] \cdot [x].$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. μονὰς ροπῆς εἶναι ἡ

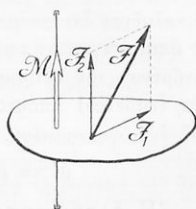
$$1 \text{ dyn} \cdot \text{cm},$$

εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν σύστημα τὸ

$$1 \text{ kg}^* \cdot \text{m} \text{ (χιλιογραμμόμετρον)}.$$

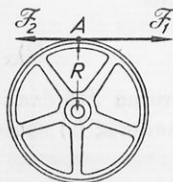
§ 71. Ροπή δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα. Ἐστω δύναμις, κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ ἑνᾷ ἄξονα. Καλοῦμεν **ροπήν** τῆς δυνάμεως ταύτης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, ἓν ἄνυσματικὸν μέγεθος $\mathcal{M}$, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ φορεᾶ τὸν ἄξονα. Ἡ φορεὰ τῆς ροπῆς εὐρίσκεται, ὅπως καὶ προηγουμένως, διὰ τοῦ κανόνος τοῦ δεξιοστροφου κοχλίου.

Ἐὰν ἡ δύναμις δὲν κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα (σχ. 88), τότε ἀναλύομεν τὴν δύναμιν ταύτην $\mathcal{F}$ εἰς δύο συνιστώσας—τὴν $\mathcal{F}_1$, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου καὶ τὴν $\mathcal{F}_2$, κάθετον ἐπ' αὐτὸ—καὶ ὀρίζομεν ὡς ροπήν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τὴν ροπήν τῆς προβολῆς $\mathcal{F}_1$ ὡς πρὸς τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα.



Σχ. 88. Μόνον ἡ συνιστώσα $\mathcal{F}_1$ ἔχει ροπήν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.

§ 72. Θεώρημα τῶν ροπῶν. Θεωρήσωμεν τροχόν, στρεπτόν περὶ ἄξονα (σχ. 89), εἰς ἓν σημεῖον A τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἐξασκοῦνται αἱ δύο ἀντιπαράλληλοι δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ $\mathcal{F}_1$ ἔστω μεγαλύτερα τῆς $\mathcal{F}_2$. Αἱ δύο αὐτὶ δυνάμεις ἔχουν ροπὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς



Σχ. 89.

$$M_1 = F_1 \cdot R \quad \text{καὶ} \quad M_2 = -F_2 \cdot R,$$

ἐνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ. Ἐπομένως, ἡ συνισταμένη ροπή $\mathcal{M}_{ολ}$ θὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς

$$M_{ολ} = (F_1 - F_2) \cdot R$$

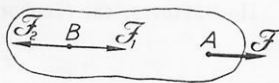
Ἡ ἔκφρασις, ὅμως, $F_1 - F_2$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνισταμένη $F_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων, ὁπότε ἔχομεν

$$M_{ολ} = F_{ολ} \cdot R.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὀλικὴ ροπὴ τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ροπὴν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ αὐτῶν. Ἐάν, τώρα, ἀντὶ δύο δυνάμεων, θεωρήσωμεν περισσοτέρας ($\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \dots$) ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ὀλικὴ ροπὴ $\mathcal{M}_{ολ}$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ροπὴν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν πολλῶν αὐτῶν δυνάμεων. (Θεώρημα τῶν ροπῶν).

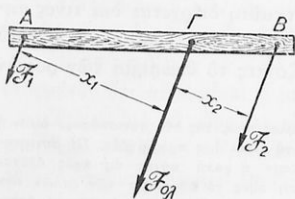
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ εὐρίσκωμεν τὴν συνισταμένην ροπὴν πολλῶν δυνάμεων ὡς πρὸς ἓνα ἄξονα κατὰ δύο τρόπους: α) Εὐρίσκομεν τὴν ροπὴν μιᾶς ἐκάστης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα καί, ἀκολουθῶς, συνθίτομεν τὰς ροπὰς ταύτας. β) Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν, εὐρίσκομεν πρῶτον τὴν συνισταμένην $\mathcal{F}_{ολ}$ ὅλων τῶν δυνάμεων καί, ἀκολουθῶς, ὑπολογίζομεν τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης ταύτης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα.

§ 73. Ἡ δύναμις ὡς ὀλισθαίνων ἄνυσμα. Πᾶσα δύναμις, ἐξασκουμένη εἰς τι σημεῖον στερεοῦ σώματος, δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἴσης δυνάμεως, ἐφηρμοσμένης εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ αὐτοῦ φορέως. Αἱ δυνάμεις, λοιπόν, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ στερεῶν σωμάτων, συμπεριφέρονται ὡς ὀλισθαίνοντα ἀνύσματα. Ἡ ἀποδείξις τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι εὐκόλος, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι δύο δυνάμεις, ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος, ἰσορροποῦν, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως καὶ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. Ἐστω, ἤδη, ὅτι ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκεῖται μία δύναμις $\mathcal{F}$ (σχ. 90). Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θεωροῦμεν ὅτι εἰς τι σημεῖον B τοῦ φορέως τῆς ἐξασκούντος δύο πρόσθετοι δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, ἴσαι μεταξὺ τῶν καὶ πρὸς τὴν πρώτην, πρὸς τούτοις δὲ καὶ ἀντίρροποι. Τοῦτο οὐδόλως μεταβάλλει τὴν κατάστασιν, ἀφοῦ αἱ δύο αὗται δυνάμεις ἀλληλοαναιροῦνται. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{F}_2$ ἰσορροπεῖ, αἱ δυνάμεις αὗται δύνανται ν' ἀφαιρεθῶν, ὁπότε ἀπομένει ἡ δύναμις $\mathcal{F}_1$, ἡ ὁποία δύνανται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι ἡ $\mathcal{F}$, ἐφηρμοσμένη, τώρα, εἰς τὸ σημεῖον B .



Σχ. 90. Πᾶσα δύναμις, ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος, δύναται νὰ μετατεθῇ κατὰ μῆκος τοῦ φορέως τῆς.

§ 74. Σύνθεσις ὁμοεπιπέδων δυνάμεων. Εἰς τὴν § 44 ἡσυχολήθη-



Σχ. 91.

μεν μὲ τὴν σύνθεσιν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν δυνάμεις, ἐξασκουμένας ἐπὶ στερεοῦ σώματος. Ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ ἀντικατάστασις τῶν δυνάμεων διὰ μιᾶς συνισταμένης δὲν εἶναι δυνατὴ, παρὰ μόνον εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις.

1) **Σύνθεσις δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων.** Ἐστω ὅτι ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκούνται δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, παραλλήλοι καὶ ὁμόρροποι (σχ. 91) καὶ ζητεῖται ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ αὐτῶν.

Ἐφ' ὅσον αἱ δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ εἶναι παράλληλοι, εἶναι φανερόν ὅτι καὶ ἡ συνισταμένη τῶν $\mathcal{F}_{o\lambda}$ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς. Ἐνῶ, ὁμως, οὕτω γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης, εἶναι ἄγνωστα τόσον τὸ μέτρον, ὅσον καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν εὐθεϊαν AB . Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον Γ . Ἄν ὡς ἄξονα λάβωμεν εὐθεϊαν, διερχομένην διὰ τοῦ ζητουμένου σημείου Γ καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, τότε, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\begin{aligned} \text{ροπή τῆς } F_1 + \text{ροπή τῆς } F_2 &= \text{ροπή τῆς } F_{o\lambda} \\ -F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 &= F_{o\lambda} \cdot 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (2)$$

Προκειμένου νὰ εὗρωμεν τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης $\mathcal{F}_{o\lambda}$, θεωροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου B καὶ εφαρμόζομεν, ἐκ νέου, τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot (x_1 + x_2) + F_2 \cdot 0 = F_{o\lambda} \cdot x_2. \quad (3)$$

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$F_{o\lambda} = F_1 + F_2. \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) προκύπτει ὅτι ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν AB τῶν δύο συνιστωσῶν εἰς τμήματα x_1 καὶ x_2 ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν, τὸ δὲ μέτρον αὐτῆς ἴσούται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν(*).

2) **Σύνθεσις δύο δυνάμεων, παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων.** Ἐστω ὅτι ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ (σχ. 92), παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι καὶ ζητεῖται ἡ συνισταμένη αὐτῶν. Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης $\mathcal{F}_{o\lambda}$, δεχόμεθα ὅτι αὕτη διέρχεται διὰ τινος σημείου Γ . Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν εὐρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B (**). Ἦδη, εφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν

(*) Αὐτονόητον ὅτι ἡ συνισταμένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δύο συνιστώσας, διότι ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ ἄξονα, κάθετον πρὸς αὐτάς, θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ συνισταμένη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο συνιστωσῶν, καθόσον ἡ ροπή αὐτῆς ὡς πρὸς ἄξονα, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δύο συνιστωσῶν, δηλ., ἴση πρὸς μηδέν (ἀφοῦ αἱ δύο αὐταὶ συνιστώσαι τέμνουσιν τὸν ἄξονα). Δεδομένου ὅτι αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκοῦμεναι ἐπὶ σωμάτων, εἶναι ὀλισθαίνοντα ἀνίσματα, οὐδεμίαν σημείαν ἔχουν τὰ σημεία ἐφαρμογῆς αὐτῶν.

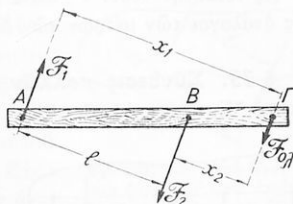
(**) Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εὐρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B , τότε ἡ συνισταμένη $F_{o\lambda}$ ἔχει ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ροπήν, ἴσην πρὸς μηδέν, ἐνῶ αἱ ροπαὶ τῶν συνιστωσῶν εἶναι ὁμόρροποι καὶ, συνεπῶς, συντιθέμεναι δὲν δύνανται νὰ δώσουν συνισταμένην ροπήν, ἴσην πρὸς μηδέν.

δι' ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 = F_{o\lambda} \cdot 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ σχέσις

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5)$$



Σχ. 92.

Ἐπειδὴ, ἐκ παραδοχῆς, ἡ δύναμις F_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δυνάμεως F_1 , θὰ πρέπει, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (5), ἡ ἀπόστασις x_1 νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως x_2 . Ἄρα, ἡ συνισταμένη κεῖται ἐκείθεν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως.

Ἦδη, ἐφαρμόζοντες τὸ αὐτὸ θεώρημα δι' ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου A, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot (x_1 - x_2) = F_{o\lambda} \cdot x_1,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ σχέσις

$$F_{o\lambda} = F_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) \quad (6)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸν λόγον x_2/x_1 διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5), ἔχομεν διὰ τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης τὴν ἐξίσωσιν

$$F_{o\lambda} = F_2 \cdot \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad F_{o\lambda} = F_2 - F_1. \quad (7)$$

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν δύο παραλλήλων συνιστωσῶν.

Ἡ φορὰ τῆς $\mathcal{F}_{o\lambda}$ θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}_2$, δεδομένου ὅτι αὕτη εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν δύο δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$.

Τέλος, διὰ νὰ εὑρωμεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνισταμένη τέμνει τὴν εὐθείαν AB, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6), ἀντὶ τοῦ $F_{o\lambda}$, τὸ ἴσον του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (7), ὁπότε ἔχομεν

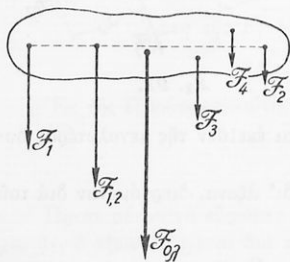
$$x_1 = \frac{F_2 \cdot l}{F_2 - F_1} \quad (8)$$

(δεδομένου ὅτι $x_1 - x_2 = l$).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ

ἀντιρρόπων δυνάμεων ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ὥς αἱ συνιστῶσαι, φορᾶν τὴν φορὰν τῆς μεγαλυτέρας, κεῖται ἐκείθεν αὐτῆς καὶ τέμνει τὴν εὐθείαν AB εἰς τοιαύτην θέσιν Γ , ὥστε αἱ ἀποστάσεις x_1 καὶ x_2 νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν.

§ 75. Σύνθεσις πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων. Ἐστωσαν αἱ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ (σχ. 93), αἱ ὁποῖαι

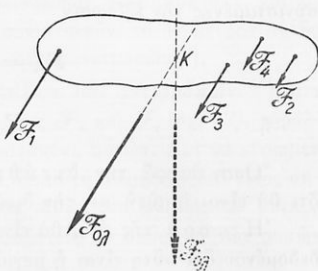


Σχ. 93.

εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόροποι, ἐξασκοῦνται δὲ εἰς διάφορα σημεῖα ἐνὸς στερεοῦ σώματος. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν, συνθέτομεν, κατὰ τὰ γνωστά, δύο ἐξ αὐτῶν, π.χ., τὰς F_1 καὶ F_2 , καὶ εὕρισκόμεν τὴν συνισταμένην τῶν $F_{1,2}$. Ἀκολουθῶν, τὴν συνισταμένην ταύτην συνθέτομεν μετὰ τὴν δύναμιν F_3 , τὴν δὲ προκύπτουσαν νέαν συνισταμένην $F_{1,2,3}$ συνθέτομεν μετὰ τὴν δύναμιν F_4 κ.ο.κ., μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δυνάμεων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ προ-

κύψῃ ἡ τελικὴ συνισταμένη $F_{ολ}$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόροπος πρὸς τὰς συνιστώσας καὶ θὰ ἔχῃ μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν.

§ 76. Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων. Ἐὰν αἱ δυνάμεις $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ τοῦ σχήματος 93 ἀλλάξουν διεύθυνσιν, ἐξασκολουθοῦν, ὅμως, νὰ εἶναι παράλληλοι καὶ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον (σχ. 94), τότε καὶ ἡ συνισταμένη τῶν $F_{ολ}$ θ' ἀλλάξῃ διεύθυνσιν, ἀλλὰ τὸ μέτρον αὐτῆς θὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητον. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης $F_{ολ}$ τέμνει τὴν προηγουμένην τῆς διεύθυνσιν (ἔστιγμένη) εἰς ἓν σημεῖον K , τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον παραλλήλων δυνάμεων** καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ αὐτῶν. (Θεώρημα τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων).

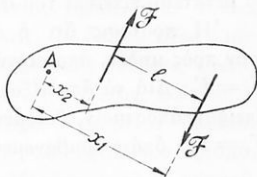


Σχ. 94.

§ 77. Ζεύγος δυνάμεων. Ζεύγος δυνάμεων καλεῖται σύστημα δύο παραλλήλων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀλλ' ἀντιθέτους φορὰς (σχ. 95). Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν

δυνάμεων ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς μηδέν, ὃ δὲ φορέως τῆς εὐρίσκεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὸ ζεύγος δυνάμεων δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς δυνάμεως, διότι τὸ ζεύγος προκαλεῖ μίαν καθαρῶς στροφικὴν κίνησιν, ἡ ὁποία, ὅμως, δὲν δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ μιᾶς μόνης δυνάμεως.

Ἐν ζεύγος δυνάμεων χαρακτηρίζεται διὰ τῆς ροπῆς αὐτοῦ, ἡ ὁποία ὀρίζεται ὡς ἑξῆς: **Ροπή** ἐνὸς ζεύγους δυνάμεων καλεῖται ἐν ἀνυσματικὸν μέγεθος M , τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου F τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο ἴσων δυνάμεων ἐπὶ τὴν (κάθετον) ἀπόστασιν l αὐτῶν. Ἦτοι

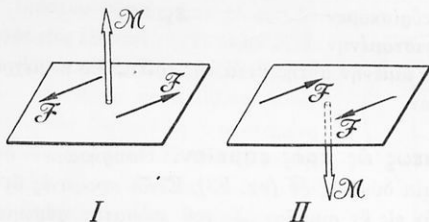


Σχ. 95. Ἡ ροπή ἐνὸς ζεύγους δυνάμεων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος.

$$M = F \cdot l$$

(1)

Ἡ διεύθυνσις τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους δυνάμεων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων (σχ. 96), ἡ δὲ φορά αὐτῆς εἶναι τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη μὲ τὴν φορὰν περιστροφῆς, τὴν ὁποίαν τείνει νὰ προκαλέσῃ τὸ ζεύγος, ν' ἀντιστοιχῇ εἰς προχώρησιν δεξιόστροφου κοχλίου.



Σχ. 96. Ἡ ροπή M τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων F , F εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (*), ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς

$$M = F \cdot x_1 - F \cdot x_2 = F \cdot (x_1 - x_2).$$

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σχήματος 95 ἔχομεν $x_1 - x_2 = l$, ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$M = F \cdot l.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ροπή ἐνὸς ζεύγους εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος, ἐξαρτωμένη μόνον ἐκ τοῦ μέτρου τῶν δύο δυνάμεων καὶ ἐκ τῆς ἀποστάσεως τούτων· ἀποτελεῖ, συνεπῶς, χαρακτηριστικὸν μέγεθος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ αἱ δύο δυνάμεις τοῦ ζεύγους καθορίζουν ἐν ἐπίπεδον, ἡ δὲ ροπή εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, ἀλλ' ἀνεξάρτητος τοῦ ἄξονος, ἔπεται ὅτι ἡ

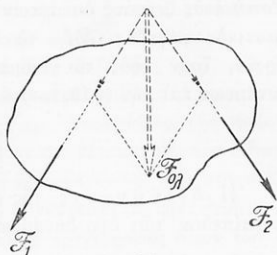
(*) Εἰς τὸ σχῆμα 95 τὸ σημεῖον A εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ἄξονος.

ροπή τοῦ ζεύγους εἶναι ἐλεύθερον ἄνυσμα (§ 3) - δηλ., ἄνυσμα, δυνάμενον νὰ μετατεθῇ εἴτε ἐπὶ τοῦ φορέως του, εἴτε παραλλήλως πρὸς αὐτόν.

Ἡ πρότασις ὅτι ἡ συνισταμένη ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς μηδέν, ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἐξίσωσως (7) τῆς § 74 ἂν θέσωμεν $F_2 = F_1$. Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ φορεὺς τῆς συνισταμένης εὐρίσκεται εἰς ἀπειρον ἀπόστασιν, θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (8) τῆς αὐτῆς παραγράφου $F_1 = F_2$, ὁπότε λαμβάνομεν $x_1 = \infty$.

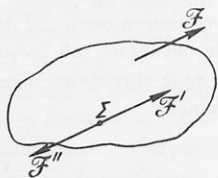
§ 78. Σύνθεσις ὁμοεπιπέδων, ἀλλὰ μὴ παραλλήλων δυνάμεων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην δύο οἰωνδήποτε ὁμοεπιπέδων, ἀλλὰ μὴ παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2 (σχ. 97), αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ στερεοῦ σώματος, μετακινούμεν αὐτὰς ἐπὶ τῶν φορέων των μέχρις ὅτου τμηθοῦν εἰς ἓν σημεῖον, ὁπότε πλέον εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην $F_{\text{ολ}}$ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐὰν πρόκειται νὰ συνθέσωμεν περισσοτέρας δυνάμεις, εὐρίσκομεν κατὰ τὰ προηγούμενα, τὴν συνισταμένην δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὴν συνισταμένην αὐτῆς μετὰ τῆς τρίτης κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δυνάμεων.



Σχ. 97.

§ 79. Ἀναγωγή δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. Θεωρήσωμεν ὅτι ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκεῖται μία δύναμις F (σχ. 98). Εἶναι προφανές ὅτι,



Σχ. 98. Ἡ δύναμις F εἶναι ἰσοδύναμη μετὰ τὴν δύναμιν F' καὶ τὸ ζεύγος F, F'' .

ἂν εἰς ἓν σημεῖον Σ τοῦ σώματος φέρωμεν δύο δυνάμεις F', F'' , ἴσας μεταξὺ των καὶ πρὸς τὴν πρώτην, παραλλήλους δὲ καὶ ἀντιρόπους, αὗται οὐδεμίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχουν. Ἡδη, ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ σώματος τρεῖς δυνάμεις καὶ, συγκεκριμένως, ἡ δύναμις F' καὶ τὸ ζεύγος F, F'' . Τὸ σύστημα τῆς δυνάμεως F' , τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Σ , καὶ τοῦ ζεύγους F, F'' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν πραγματικῶς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκουμένην δύναμιν F . Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι μία δύναμις, ἐξασκουμένη ἐπὶ τινος στερεοῦ σώματος, δύναται ν' ἀντικατασταθῇ δι' ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων καὶ διὰ μιᾶς ἄλλης δυνάμεως, ἴσης καὶ ὁμοροῦτου πρὸς τὴν ἀρχικὴν, διερχομένης δὲ δι' ἄλλου τινὸς σημείου τοῦ σώματος. Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους εἶναι ἴση πρὸς τὴν ροπήν τῆς δεδομένης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ ἐκλεγέν σημεῖον. Τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην καλοῦμεν *ἀναγωγήν δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον*.

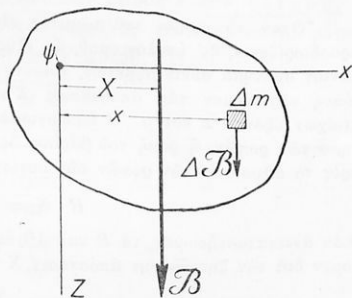
§ 80. Σύνθεσις άσυμβάτων δυνάμεων, έξασκουμένων επί στερεού σώματος. Υποθέσωμεν ότι επί τινος σώματος έξασχούνται πολλές δούμβatoi δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots$, δηλ., δυνάμεις, αϊ όποϊαι ούτε όμοεπίπεδοι, ούτε παράλληλοι είναι. Διά νά συνθέσωμεν τās δυνάμεις ταύτας άνάγομεν, κατά τὰ λεχθέντα εις τήν προηγουμένην παράγραφον, έκάστην εξ αυτών εις έν σημείον Σ , όποτε τελικώς, θά λάβωμεν ώρισμένον άριθμόν δυνάμεων, διερχομένων διά του αυτού σημείου Σ , και ώρισμένον άριθμόν ροπών. Τās δυνάμεις ταύτας και τās ροπās συνθέτομεν, κατά τὰ γνωστά, όποτε προκύπτει μία συνισταμένη δύναμις και μία συνισταμένη ροπή.

Τ' ανωτέρω έκφράζομεν διά τής εξής προτάσεως: «*Σύστημα οϊωνδήποτε δυνάμεων, έξασκουμένων επί στερεού σώματος, είναι δυνατόν ν' αντι-κατασταθῇ υπό μιās (συνισταμένης) δυνάμεως και μιās (συνισταμένης) ροπής*».

Η συνισταμένη δύναμις είναι ανεξάρτητος τής θέσεως του σημείου, ένω η συνισταμένη ροπή προφανώς έξαρτάται εκ του σημείου τούτου (*).

§ 81. Κέντρον βάρους. Έκαστον σῶμα, μάξης m , δύναται νά θεωρηθῇ ως άποτελούμενον εκ πολλών ύλικών σημείων, μάξης Δm (σχ. 99), έφ' έκάστον των όποιων τὸ πεδϊον βαρύτητας έξασκεϊ τήν δύναμιν $\Delta \mathcal{B}$. Τὰ στοιχειώδη βάρη $\Delta \mathcal{B}$ άποτελοῦν συστημα παραλλήλων δυνάμεων, των όποιων η συνισταμένη ονομάζεται **βάρος** $\mathcal{B}$ του σώματος. Έπειδὴ όλαι αϊ στοιχειώδεις αὐται δυνάμεις είναι κατακόρυφοι, έπεται ότι τὸ βάρος, ως συνισταμένη αυτών, θά έχῃ και αὐτὸ τήν διεύθυνσιν τής κατακορύφου. Έάν στρέψωμεν όποσδήποτε τὸ άνω σῶμα, τὸ μέτρον του βάρους δέν θ' αλλάξῃ, ὁ φορεὺς, όμως, αὐτοῦ θά στραφῇ, αλλά, κατά τὸ θεώρημα του κέντρον παραλλήλων δυνάμεων, θά διέρχεται πάντοτε δι' ενός σημείου, σταθεροῦ ως πρὸς τὸ σῶμα, τὸ όποϊον καλεῖται **κέντρον βάρους** του σώματος.

Σημείωσις. Η Γῆ δέν έξασκεϊ επί του σώματος τήν δύναμιν $\mathcal{B}$, αλλά τās στοιχειώδεις δυνάμεις $\Delta \mathcal{B}$ και, συνεπώς, τὸ κέντρον βάρους δέν είναι σημείον επί του όποϊου έξασκεϊται υπό τής Γῆς ἡ δύναμις $\mathcal{B}$, άλλ' είναι, άπλως, έν σημείον διά του όποϊου διέρχεται ὁ φορεὺς τής συνισταμένης όλων των στοιχειωδων βαρων $\Delta \mathcal{B}$.

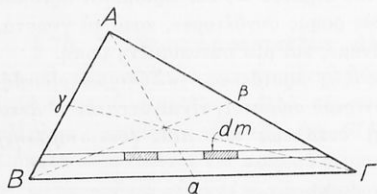


Σχ. 99. Ο φορεὺς του βάρους $\mathcal{B}$ διέρχεται διά του κέντρον βάρους του σώματος.

(*) Είς περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ συνισταμένη δύναμις προκύψῃ ἴση πρὸς μηδέν, ἡ συνισταμένη ροπή είναι ανεξάρτητος τής θέσεως του εκλεγέντος σημείου.

§ 82. Εὗρεσις τοῦ κέντρου βάρους. Ἐάν τὸ σῶμα εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἔχῃ ἀπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα, ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους δύναται νὰ καθορισθῇ εὐκόλως. Οὕτω, ὅταν τὸ σῶμα ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας, τὸ κέντρον βάρους θὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

Τὸ κέντρον βάρους ἐπιπέδου τριγωνικῆς ἐπιφανείας (σχ. 100) εὗρίσκειται ἐπὶ τῆς διαμέσου Aa , διότι, ἂν χωρίσωμεν τὸ τρίγωνον δι' εὐθειῶν,



Σχ 100. Τὸ κέντρον βάρους ἐνὸς τριγώνου εὐρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν διαμέσων.

παρὰλλήλων πρὸς τὴν $BΓ$, εἰς ἀπείρως στενάς λωρίδας, διὰ πᾶν τμήμα dm ἐκάστης ἐξ αὐτῶν ὑπάρχει ἄλλο τμήμα, ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῆς διαμέσου, καί, συνεπῶς, τὸ κέντρον βάρους τῶν δύο κεῖται ἐπ' αὐτῆς. Ἐπειδὴ δέ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ κέντρον βάρους θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου $Bβ$ καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου

$Γγ$, ἔπεται ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἐπιπέδου τριγωνικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν τριῶν διαμέσων.

Ὅταν τὸ σχῆμα τοῦ σώματος εἶναι οἰοδήποτε, ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους προσδιορίζεται, δι' ὑπολογισμοῦ, ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ σώματος τρισσορθόγωνιον σύστημα συντεταγμένων, τοιοῦτο ὥστε ὁ ἄξων x νὰ εἶναι κατακόρυφος. Κατόπιν, εὐρίσκομεν τὰς ἀποστάσεις X καὶ Y τοῦ φορέως τοῦ βάρους ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἄξωνων x καὶ y . Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἀκολούθως: Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ἡ ροπή τοῦ βάρους ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτοῦ. Ἦτοι

$$B \cdot X = \sum AB \cdot x.$$

Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τὰ B καὶ AB διὰ τῶν ἴσων των $m \cdot g$ καὶ $\Delta m \cdot g$, λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητούμενην ἀπόστασιν X τοῦ φορέως ἀπὸ τοῦ ἄξωνος y τὴν τιμὴν

$$X = \frac{\sum \Delta m \cdot x}{m}.$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τὸν συλλογισμὸν διὰ τὸν ἄξονα x , λαμβάνομεν τὴν ἑξίσωσιν

$$Y = \frac{\sum \Delta m \cdot y}{m}.$$

Ἐάν, τώρα, στρέψωμεν τὸ σῶμα κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ὁ ἄξων x νὰ γίνῃ κατακόρυφος, θὰ ἔχωμεν

$$Y = \frac{\sum \Delta m \cdot y}{m} \quad \text{καὶ} \quad Z = \frac{\sum \Delta m \cdot z}{m}.$$

Ἐάν, τέλος, στρέψωμεν τὸ σῶμα οὕτως ὥστε ὁ ἄξων y νὰ γίνῃ κατακόρυφος, θὰ ἔχωμεν

$$X = \frac{\sum \Delta m \cdot x}{m} \quad \text{καὶ} \quad Z = \frac{\sum \Delta m \cdot z}{m}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι X, Y, Z εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὁ φορεὺς τοῦ βάρους καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς συντεταγμένας X, Y, Z καὶ τὸ ὁποῖον ὠρίσαμεν ὡς κέντρον βάρους. Ὡς ἀποδεικνύεται, ὁ φορεὺς τοῦ βάρους διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους, ὁποσδήποτε καὶ ἂν στρέψωμεν τὸ σῶμα.

Ἐάν ἐκλέξωμεν τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ ἀρχὴ τῶν νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον βάρους (ὁπότε τοῦτο θὰ ἔχῃ συντεταγμένας $X=0, Y=0, Z=0$), λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\sum Am \cdot x = 0, \quad \sum Am \cdot y = 0, \quad \sum Am \cdot z = 0.$$

Ἐπειδὴ τὰ x, y καὶ z δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ συντεταγμέναι μιᾶς ἐπιβατικῆς ἀκτίνος r , ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἀρχὴν τῆς εἰς τὸ κέντρον βάρους καὶ τὸ τέλος τῆς εἰς τὸ θεωρούμενον στοιχειῶδες τμήμα, μάζης Am , δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰς τρεῖς τελευταίας ἐξισώσεις διὰ μιᾶς τῆς ἑξῆς:

$$\sum Am \cdot r = 0.$$

Ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἐξαρτᾶται, κατὰ τὰς ἄνω ἐξισώσεις, μόνον ἐκ τῆς κατανομῆς τῆς μάζης ἐν τῷ χώρῳ, διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτὸν ὀνομάζεται, ἐνίοτε, καὶ *κέντρον μάζης*.

§ 83. Ειδικὸν βάρος - Πυκνότης. Θεωρήσωμεν ὁμογενὲς σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος B καὶ ὄγκον V . Ειδικὸν βάρος ε τοῦ ὑλικοῦ, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἀποτελεῖται τὸ σῶμα τοῦτο, καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ βάρους B τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ. Ἦτοι

$$\varepsilon = \frac{B}{V}$$

Μονάδες: α) C.G.S.: $1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3}$.

β) T. S.: $1 \frac{\text{kg}r^*}{\text{m}^3}$.

Συνήθως χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$.

Πυκνότης ρ τοῦ ὑλικοῦ, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἀποτελεῖται ἓν σῶμα, καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς μάζης m τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ. Ἦτοι

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Μονάδες: C.G.S.: $1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$.

Σημείωσις. Εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα ἀποφεύγεται, κατὰ τὸ δυνατόν, ἡ χρησιμοποίησις τῆς πυκνότητος, χρησιμοποιουμένου, συνήθως, τοῦ ειδικοῦ βάρους.

Σχέσις ειδικοῦ βάρους καὶ πυκνότητος. Ἡ πυκνότης καὶ τὸ ειδικὸν βάρος συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon = \rho \cdot g$$

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $B = m \cdot g$. Ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσης ταύτης διὰ τοῦ ὄγκου V , θὰ λάβωμεν

$$\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις Ἐάν ἐκφράσωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς ὕλικου εἰς gr/cm^3 καὶ τὴν πυκνότητα τοῦ αὐτοῦ ὕλικου εἰς gr/cm^3 , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ αὐτῶν συμπίπτουν. Οὕτω, τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι ἴσον πρὸς $13,6 \text{ gr/cm}^3$ καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ ἴση πρὸς $13,6 \text{ gr/cm}^3$. Ἐνεκα τούτου, ἀκριβῶς, προκαλεῖται, συνήθως, σύγχυσις μεταξὺ εἰδικῶν βάρους καὶ πυκνότητος, χρησιμοποιοῦμένου τοῦ εἰδικοῦ βάρους ἐκεῖ ὅπου πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ πυκνότης καὶ ἀντιστρόφως. Τοῦτο, βεβαίως, δὲν ἐπιτρέπεται, καθόσον, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῶν, τὰ δύο μεγέθη εἶναι διάφορα καί, κατὰ συνέπειαν, ἡ πυκνότης καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς ὕλικου — εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἐκφραζόμενα — θὰ διαφέρουν καὶ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ κατὰ τὰς μονάδας. Οὕτω, εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ἡ πυκνότης, π.χ., τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς 1 gr/cm^3 , τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ ἴσον πρὸς 981 dyn/cm^3 .

§ 84. Συνθῆκαι ἰσορροπίας πολλῶν δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἓν σύστημα δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐπιδρῶν ὁποσδήποτε ἐπὶ στερεοῦ σώματος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ συνισταμένη δύναμις καὶ ἡ συνισταμένη ροπή ὡς πρὸς οἰονδήποτε σημεῖον ἢ ἄξονα νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν. Τοῦτο ἀποδίδεται διὰ τῶν ἀνυσματικῶν ἐξισώσεων

$\begin{aligned} \sum \mathcal{F} &= 0 \\ \sum \mathcal{M} &= 0 \end{aligned}$	Συνθῆκαι ἰσορροπίας δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος
--	---

§ 85. Ἀναλυτικὴ διατύπωσις τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας. Ὡς γνωστόν, ἡ κατὰ τινα διεύθυνσιν προβολὴ τῆς συνισταμένης πολλῶν ἀνυσμάτων εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν. Ἐπομένως, αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι ἰσορροπίας δύνανται νὰ γραποῦν ὡς ἑξῆς:

$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum F_y &= 0, & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0, & \sum M_y &= 0, & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$
--

Τὴν μορφήν ταύτην τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας χρησιμοποιοῦμεν, συνήθως, κατὰ τὴν λύσιν τῶν διαφόρων προβλημάτων τῆς ἰσορροπίας δυνάμεων, ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος.

Ἐπενθυμίζεται ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ροπῶν δύναται νὰ γίνη ὡς πρὸς οἰονδήποτε ἄξονα ἢ σημεῖον.

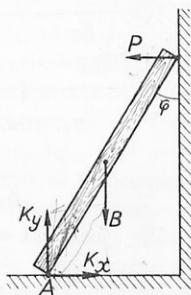
§ 86. Θεώρημα τῶν τριῶν δυνάμεων ἐν ἰσορροπίᾳ. «Τρεῖς

ὁμοεπίπεδοι καὶ μὴ παράλληλοι δυνάμεις τότε μόνον δύναται νὰ ἰσορροπήσουν, ὅταν οἱ φορεῖς των τέμνονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ δὲ σχηματιζόμενον πολύγωνον (τριγώνον) εἶναι κλειστόν».

Ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι ἡ συνισταμένη δύο ὁμοεπίπεδων καὶ μὴ παραλλήλων δυνάμεων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς αὐτῶν, πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν, ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ.

Ἐφαρμογὰί. 1) Μία ὁμογενὴς κλίμαξ ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ σχῆμα 101. Ὁ κατακόρυφος τοίχος θεωρεῖται ἐντελὼς λείος (δὲν ὑπάρχει, δηλ., τριβή). Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἐξασκοῦν ἐπὶ τῆς κλίμακος ὁ τοίχος καὶ τὸ δάπεδον.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς κλίμακος, ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις, τὸ βάρος της B , ἡ δύναμις P ἐκ τοῦ κατακόρυφου τοίχου, ἡ ὁποία, λόγῳ ἑλλείψεως τριβῆς, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὸν καὶ μία δύναμις ἐκ τοῦ δαπέδου, ἀγνώστου διευθύνσεως, τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας K_x καὶ K_y . Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἀγνώστα μεγέθη εἶναι τρία· ἴτοι τὰ K_x , K_y καὶ P . Διὰ τὴν εὑρεσιν αὐτῶν ἐκφράζομεν τὰς συνθήκας ἰσορροπίας, δεδομένου ὅτι ἡ κλίμαξ ἰσορροπεῖ.



Σχ. 101.

Ἡ συνθήκη $\sum F = 0$ δίδει τὰς δύο ἐξισώσεις

$$K_x - P = 0 \quad \text{καὶ} \quad K_y - B = 0$$

ὅς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας x καὶ y . Ὡς πρὸς τὸν τρίτον ἄξονα z , ἡ συνθήκη ἰσορροπίας οὐδεμίαν ἐξίσωσιν παρέχει, καθόσον αἱ συνιστώσαι ὅλων τῶν δυνάμεων κατὰ τὸν ἄξονα τοῦτον εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν.

Ἡ συνθήκη $\sum M = 0$, ἐφαρμοζομένη ὡς πρὸς οἰονδήποτε ἄξονα—π.χ., τὸν διὰ τοῦ σημείου A διερχόμενον καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον x, y —δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$-P \cdot l \cdot \sin \varphi + B \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta \mu \varphi = 0$$

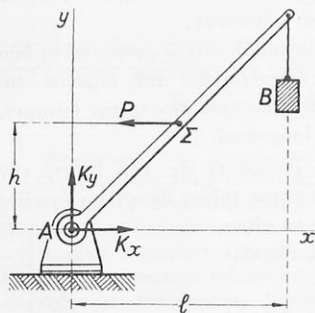
ἐνθα l εἶναι τὸ μήκος τῆς κλίμακος.

Ἦδη, ἐφ' ὅσον εὔρομεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους τὰ τρία ζητούμενα K_x , K_y καὶ P τὸ πρόβλημα, κατ' ἀρχὴν, ἐλύθη. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν

$$K_x = \frac{B}{2} \cdot \epsilon \varphi \varphi, \quad K_y = B, \quad P = \frac{B}{2} \cdot \epsilon \varphi \varphi.$$

2) Γερανὸς (ἀβαρὴς) φέρει τὸ φορτίον B (σχ. 102). Ζητεῖται α) ἡ δύναμις P , τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ συρματόσχοινον εἰς τὸ μέσον Σ τῆς ράβδου

καὶ β) αἱ προβολαὶ K_x καὶ K_y τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ γερανοῦ ὁ ἄξων A τῆς ἀρθρώσεως. (Αἱ ἀποστάσεις l καὶ h εἶναι γνωσταί).



Σχ. 102.

Αἴτισις. Ἐπὶ τοῦ γερανοῦ ἐξασκοῦνται αἱ δυνάμεις B , P , K_x καὶ K_y . Διὰ τὴν εὐρωμεν τὰς δυνάμεις ταύτας γράφομεν τὰς συνθήκας ἰσορροπίας: Ἡ συνθήκη $\sum F = 0$, γραφομένη διὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y , δίδει τὰς ἐξισώσεις

$$K_x - P = 0 \quad K_y - B = 0.$$

Ἡ συνθήκη $\sum M = 0$, ἐκφραζομένη ὡς πρὸς ἄξονα, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον x, y καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου A , δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$K_x \cdot 0 + K_y \cdot 0 - P \cdot h + B \cdot l = 0.$$

Ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐξισώσεων ὑπολογίζονται οἱ τρεῖς ἄγνωστοι εἰς

$$P = B \cdot \frac{l}{h}, \quad K_y = B \quad \text{καὶ} \quad K_x = B \cdot \frac{l}{h}.$$

§ 87. Εἶδη ἰσορροπίας. Ἐστω σῶμα τι, εὐρίσκόμενον ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἐάν τὸ σῶμα τοῦτο ἀπομακρυνθῇ ὀλίγον ἐκ τῆς θέσεώς του, αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπ' αὐτοῦ, δυνατόν νὰ μεταβληθοῦν καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη αὐτῶν νὰ λάβῃ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Τὸ σῶμα δὲν εὐρίσκεται, πλέον, ἐν ἰσορροπίᾳ.

Οὕτω, ἐπὶ σφαίρας, εὐρισκομένης εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον μιᾶς κοίλης ἐπιφανείας (σχ. 103, μέσον) ἐξασκοῦνται δύο κατακόρυφοι δυνάμεις· τὸ βάρος της καὶ ἡ ἐκ τῆς κοίλης ἐπιφανείας προερχομένη δύναμις. Αἱ δύο αὗται δυνάμεις ἰσορροποῦν.

Ἐάν, τώρα, ἀπομακρύνωμεν ὀλίγον τὴν σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως



Σχ. 103. Αἱ τρεῖς περιπτώσεις ἰσορροπίας.

τῆς ἰσορροπίας της, ἡ μὲν μία δύναμις (τὸ βάρος) μένει ἀμετάβλητος, ἡ ἄλλη, ὅμως, θὰ παύσῃ νὰ εἶναι κατακόρυφος. Ἡ σφαῖρα εἰς τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν, τώρα, εὐρίσκεται, δὲν ἰσορροπεῖ, ἀλλ' εὐθὺς ὡς ἀφεθῇ ἐλευθέρα, κινεῖται πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Ἐκ τούτου ἐπεταί ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένων δύο δυνάμεων ἔχει φορὰν τοιαύτην ὥστε τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὴν σφαῖραν εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Ἡ ἰσορροπία, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται ἡ σφαῖρα εἰς τὴν ἄνω περιπτῶσιν, καλεῖται **εὐσταθὴς ἰσορροπία**.

Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ὅταν ἐν σῶμα ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεως τῆς

ἰσορροπίας του, δημιουργεῖται μία συνισταμένη δύναμις, τείνουσα νὰ ἀπομακρύνῃ αὐτὸ ἀκόμη περισσότερο τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. Τοιοῦτο παράδειγμα ἔχομεν εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ σχήματος 103 δεξιᾷ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς *ἀσταθῆ ἰσορροπίαν*.

Ἄλλο εἶδος ἰσορροπίας εἶναι ἡ *ἀδιάφορος ἰσορροπία*, δηλ., ἡ ἰσορροπία ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δυνάμεις ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσορροποῦν, ὅταν τὸ σῶμα ἐκτραπῇ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του (σχ. 103 ἀριστερά).

Ἀνάλογα φαινόμενα παρατηροῦνται, ὅταν, ἀπομακρυνομένου ἑνὸς σώματος ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του, ἀναπτύσσονται ῥοπαί. Οὕτω, ἐὰν μία μαγνητικὴ βελόνη, στρεπτῇ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, ἀφελθῇ ἑλευθέρα, θὰ ἰσορροπήσῃ, ὅταν λάβῃ τὴν διεύθυνσιν βορρᾶς-νότος, καθόσον εἰς τὴν θέσιν ταύτην οὐδεμία ῥοπὴ ἐκ τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτῆς. Ἐάν, τώρα, στρέψωμεν ὀλίγον τὴν μαγνητικὴν βελόνην, θὰ ἐμφανισθῇ ῥοπὴ ἐκ τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου, τείνουσα νὰ τὴν ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν προτέραν τῆς θέσιν· ἡ μαγνητικὴ βελόνη, δηλ., εὐρίσκετο εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν. Ἡ μαγνητικὴ αὕτη βελόνη δύναται νὰ ἰσορροπήσῃ καὶ ἀσταθῶς, ἀρκεῖ νὰ στραφῇ κατὰ 180° ἐκ τῆς προηγουμένης θέσεως.

Τὰ εἶδη τῆς ἰσορροπίας δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν καὶ ἄλλως, χρησιμοποιοῦντες τὴν ἔννοιαν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα: Ὅπως ἀνέφεραμεν ἀνωτέρω, κατὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ἑνὸς σώματος ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, ἐμφανίζεται μία συνισταμένη δύναμις (ἢ ῥοπὴ), ἡ ὁποία εἴτε παρᾶγει ἔργον εἴτε καταναλίσκει. Καὶ ὅταν μὲν παρᾶγῃ ἔργον, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος αὐξάνεται, ὅταν δὲ καταναλίσκῃ, ἐλαττοῦται. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι *εἰς τὰς θέσεις εὐσταθοῦς καὶ ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια λαμβάνει ἀκροτάτας τιμὰς καὶ δὴ εἰς μὲν τὴν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν γίνεται ἐλαχίστη, εἰς δὲ τὴν ἀσταθῆ μέγιστη*.

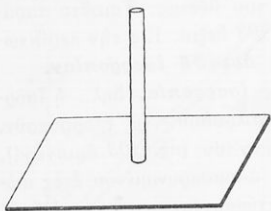
Τὰ ἀνάλογα, ἀκριβῶς, ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης: Διὰ νὰ τὴν ἐκτρέψωμεν ἐκ τῆς θέσεως τῆς (εὐσταθοῦς) ἰσορροπίας τῆς, πρέπει νὰ καταναλώσωμεν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποταμιεύεται εἰς αὐτὴν ὑπὸ μορφήν δυναμικῆς ἐνεργείας.

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ μαγνητικὴ βελόνη εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, εἶναι ἐλαχίστη, δηλ., εἶναι μικροτέρα τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας αὐτῆς εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ μαγνητικὴ βελόνη, ὅταν εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, εἶναι μέγιστη.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὸ εἶδος τῆς ἰσορροπίας ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φορᾶς τῶν δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν), αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται κατὰ μίαν π ο λ ὺ μ ι κ ρ ᾶ ν μετακίνησιν τοῦ σώματος. Ὅταν ὅμως, ἡ μετακίνησις εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη, εἶναι δυνατόν, ἐνῶ αἱ δυνάμεις ἀρχικῶς ἔτεινον νὰ ἐπαναφέρουν τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικὴν τῶν θέσιν, νὰ μεταβληθῇ ἡ φορὰ των, οὕτως ὥστε νὰ τὸ

ἀπομακρύνουν ἀκόμη περισσότερον. Παράδειγμα τοιαύτης περιπτώσεως ἔχο-



Σχ. 104. Ἡ εὐσταθὴς ἰσορροπία τῆς ἀπεικονιζομένης ράβδου ἔχει μικρὸν βαθμὸν σταθερότητος.

μεν εἰς τὴν κυλινδρικήν ράβδον τοῦ σχήματος 104. Ἐὰν ὠθήσωμεν αὐτὴν ἐλαφρῶς, αὕτη ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν της, εὐρίσκεται, δηλ., εἰς εὐσταθὴ ἰσορροπίαν. Ἐάν, ὅμως, ἡ ὠθησις γίνῃ ἰσχυροτέρα, ἡ ράβδος ἀνατρέπεται. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ εὐσταθὴς ἰσορροπία τῆς ράβδου ταύτης ἔχει μικρὸν **βαθμὸν σταθερότητος**, ἐν ἀντιθέσει πρὸς ἓνα κύβον, π.χ., ὁ ὁποῖος ἔχει μεγάλον βαθμὸν σταθερότητος, καθόσον οὗτος ἀνατρέπεται, μόνον ἐὰν ἀπομα-

κρυνθῇ πολὺ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία δύναμις $\mathcal{F}$, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x, y , ἔχει συνιστώσας $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y$, διέρχεται δὲ διὰ τοῦ σημείου Σ , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι εἶναι x_Σ, y_Σ . Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως ταύτης ἑς πρὸς τὸν ἄξονα z .

$$(ΑΠ: M_z = F_x \cdot y_\Sigma + F_y \cdot x_\Sigma)$$

2. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x, y δίδεται ἓν ἑξῆς δυνάμεων $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ μία τρίτη δύναμις, κειμένη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τοιαύτη ὥστε τὸ σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων νὰ ἰσορροπῇ. Πόσον θὰ εἶναι τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως ταύτης καὶ ποῦ θὰ εὐρίσκεται ὁ φορεὺς αὐτῆς;

3. Τρεῖς δυνάμεις, διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ , εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Πόση θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη ροπή τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων ὡς πρὸς ἓν ἄλλο σημεῖον Γ , ἀπέχον τοῦ πρώτου κατὰ τὴν ἀπόστασιν l ;

4. Ὁμογενὴς ράβδος, μήκους l καὶ βάρους B , εἶναι ἐξηρητημένη δι' ὀριζοντίου ἄξονος, διερχομένου διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς. Δι' ὀριζοντίας δυνάμεως, ἐξακουμένης εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ἐπιτυγχάνομεν ὥστε ἡ ράβδος νὰ κρατῇται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ γωνίαν 45° . Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀριζοντία συνιστώσα καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστώσα τῆς δυνάμεως $\mathcal{K}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἄξων ἐπὶ τῆς ράβδου.

$$(ΑΠ: K_x = \frac{B}{2}, K_y = B)$$

5. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς ὁ φορεὺς τῆς δυνάμεως $\mathcal{K}$.

6. Εἰς τὴν 1ην ἐφαρμογὴν τῆς § 86 νὰ εὐρεθῇ γραφικῶς ὁ φορεὺς τῆς δυνάμεως K .

7. Εἰς τὴν αὐτὴν ἐφαρμογὴν νὰ εὐρεθοῦν γραφικῶς αἱ δυνάμεις K καὶ P .

8. Εἰς τὴν 2αν ἐφαρμογὴν τῆς § 86 νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις K , ἡ προερχομένη ἐκ τῆς ἀρθρώσεως, δὲν ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ράβδου.

9. Ἐὰν ἡ ράβδος τοῦ γεγρανοῦ σχήματος 102 εἶναι ὁμογενὴς καὶ ἔχῃ βάρους β , κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ δύναμις P , ἡ τείνουσα τὸ συρματόσχοινον;

$$(ΑΠ: \theta' \text{ ἀξηθῇ κατὰ } \frac{\beta \cdot l}{2h})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

§ 88. **Θεμελιώδης νόμος τῆς στροφικῆς κινήσεως.** Ὅπως μία δύναμις, ἐξασκουμένη ἐπὶ τινος ὕλικου σημείου, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐπιτάχυνσιν, οὕτω καὶ μία ροπή, ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἀκλόνητον ἄξονα, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν. Μεταξὺ τοῦ αἰτίου—τῆς ροπῆς $\mathcal{M}$ —καὶ τοῦ ἀποτελέσματος—τῆς γωνιακῆς ἐπιτάχυνσεως ω' —ὑπάρχει (ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω) ἡ σχέσις

$$\boxed{\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'} \quad (1)$$

ἐνθα Θ εἶναι ἡ ροπή ἀδρανεΐας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς.

Ἡ σχέσις αὕτη ἀποτελεῖ τὸν *θεμελιώδη νόμον τῆς στροφικῆς κινήσεως*.

Ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως ἐνὸς ὕλικου σημείου ἡ ἐξίσωσις $\mathcal{F} = m \cdot p$ μᾶς ἐπιτρέπει τὴν λύσιν δύο εἰδῶν προβλημάτων, οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἡ ἐξίσωσις $\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'$ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν τὰ ἐξῆς δύο εἶδη προβλημάτων: 1) Δίδεται ἡ ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκουμένη ροπή καὶ ζητεῖται τὸ εἶδος τῆς στροφικῆς κινήσεως, ἡ ὁποία θὰ προκληθῇ. 2) Δίδεται τὸ εἶδος τῆς στροφικῆς κινήσεως ἐνὸς σώματος καὶ ζητεῖται ἡ προκαλοῦσα αὐτὴν ροπή.

Διερευνήσις τῆς ἐξίσωσεως (1). α) Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) $\mathcal{M} = 0$, λαμβάνομεν $\omega' = 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω θὰ διατηρῆται σταθερά. Ἐπομένως, ὅταν ἐπὶ τινος σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, οὐδεμία ροπή ἐξασκῆται ἢ, ἐὰν ἐξασκοῦνται ροπαί, ἡ συνισταμένη των εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, τότε ἡ γωνιακὴ του ταχύτης διατηρεῖται σταθερά. Καὶ ἂν μὲν τὸ σῶμα, ἀρχικῶς, δὲν περιστρέφετο ($\omega = 0$), θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ μὴ περιστρέφεται, ἐάν, ὅμως, περιστρέφετο μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω , ἐξακολουθεῖ νὰ διατηρῇ τὴν γωνιακὴν του ταχύτητα σταθεράν. (*Ἀξίωμα τῆς ἀδρανεΐας εἰς τὴν περιστροφήν*).

Ἀντιστρέφοντες τὸν συλλογισμόν, εὐρίσκομεν ὅτι, ἐὰν ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἐνὸς σώματος εἶναι σταθερὰ (ὅποτε $\omega' = 0$), ἡ δὲν ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ καμμία ροπή ἢ, ἐὰν ἐξασκοῦνται ροπαί, ἡ συνισταμένη των εἶναι ἴση πρὸς μηδέν ($\mathcal{M} = 0$).

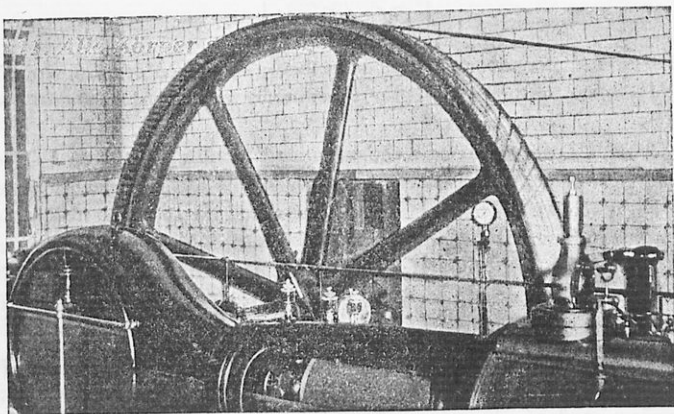
β) Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) $\mathcal{M} = \text{σταθ.}$, λαμβάνομεν $\omega' = \text{σταθ.}$ Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τινος σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, ἐξασκῆται σταθερὰ ροπή, τὸ σῶμα τοῦτο στρέφεται μὲ σταθεράν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν.

γ) Τὴν ἐξίσωσιν (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\mathcal{M} = \Theta \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως ταύτης συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τινος σώματος, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, ἐξασκηθῇ μία ροπή $\mathcal{M}$ ἐπὶ χρόνον dt , θὰ μεταβληθῇ ἡ γωνιακὴ του ταχύτης κατὰ $d\omega$. Ἀναλόγως τῆς φορᾶς τῆς ροπῆς, ἐν σχέσει πρὸς τὴν φορὰν τῆς ἥδη ὑπαρχούσης γωνιακῆς ταχύτητος, ἡ μεταβολὴ $d\omega$ αὐτῆς θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ - ἡ γωνιακὴ ταχύτης, δηλ., θ' αὐξηθῇ ἢ θὰ ἐλαττωθῇ.

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐξηγεῖ τὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον εἰς πολλὰς μηχανὰς χρησιμοποιοῦνται **σφόνδυλοι** (σχ. 105), μεγάλοι, δηλ., τροχοί, κατεσκευα-



Σχ. 105. Σφόνδυλος ἀτμομηχανῆς.

σμένοι κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ μᾶζα των νὰ εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειαν, ὁπότε, ὑπὸ δεδομένην μᾶζαν, ἔχουν τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν ροπὴν ἀδρανείας: Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς $d\omega$ λαμβάνομεν

$$d\omega = \frac{\mathcal{M} \cdot dt}{\Theta}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ δεδομένην ροπὴν $\mathcal{M}$, ἐξασκουμένην ἐπὶ δεδομένον χρόνον dt , ἡ μεταβολὴ $d\omega$ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος θὰ εἶναι τόσον μικρότερα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας. Τῇ βοηθείᾳ, λοιπόν, τῶν σφονδύλων εἶναι δυνατόν νὰ διατηρῇται, περίπου, σταθερὰ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἑνὸς κινητήρος καὶ τῶν μετ' αὐτοῦ συνδεδεμένων μηχανῶν, ἔστω καὶ ἂν ἡ ὑπὸ τοῦ κινητήρος παραγομένη ροπή μεταβάλλεται κατὰ τὴν περιστροφὴν.

Ἀπόδειξις τῆς ἐξισώσεως (1). Θεωρήσωμεν τὸ σῶμα, τοῦ ὁποῖου ἡ μᾶζα ἔστω m , ἀποτελούμενον ἐκ μεγάλου ἀριθμοῦ ὑλικῶν σημείων, μάζης $m_1, m_2, \dots$ ἐφ' ἐκάστου τῶν ὁποίων ἐξασκοῦνται αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι ἀάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ καθοριζόμενον ἐκ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἄξονος καὶ τῶν ἀκτίνων $r_1, r_2, \dots$ (σχ. 106). Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν, αἱ μάζαι $m_1, m_2, \dots$ λαμβάνουν ἐπιταχύνσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἀπὸ τὸν θεμελιώδη νόμον. Οὕτω, διὰ τὴν μᾶζαν m_1 ἔχομεν

$$F_1 = m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt}.$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ v_1 διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $\omega \cdot r_1$, λαμβάνομεν

$$F_1 = \frac{m_1 \cdot d(\omega \cdot r_1)}{dt}.$$

Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν περιστροφὴν, ἡ μᾶζα m_1 διαγράφει κυκλικὴν τροχίαν, στὰθερὰς ἀκτίνος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς:

$$F_1 = \frac{m_1 \cdot r_1 \cdot d\omega}{dt}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη μὲ τὸ r_1 , λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Ἀνάλογοι ἐξισώσεις ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἄλλας μάζας $m_2, m_3, \dots$. Προσθέτοντες, ἤδη, ὅλας τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\sum F_i \cdot r_i = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\sum F_i \cdot r_i$ παριστᾷ τὴν συνολικῶς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκουμένην ροπὴν M καὶ τὸ $d\omega/dt$ εἶναι κοινὸς παράγων τοῦ ἀθροίσματος, ἔχομεν

$$M = \frac{d\omega}{dt} \cdot \sum m_i \cdot r_i^2 = \omega' \cdot \Theta. \quad \text{ὁ.ε.δ.}$$

§ 89. Στροφορμὴ στερεοῦ σώματος. Ἐν πλήρει ἀναλογίᾳ πρὸς τὸ ὑλικὸν σημεῖον (§ 54) ὀρίζομεν ὡς **στροφορμὴν** G ἐνὸς σώματος τὸ ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν τῶν ὑλικῶν σημείων, ἐκ τῶν ὁποίων τοῦτο ἀποτελεῖται. Ὅτιοι εἶναι

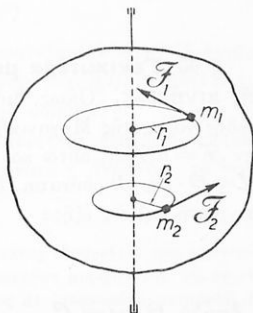
$$G = \sum r_i \cdot m_i \cdot v_i.$$

Ἐὰν τὸ σῶμα περιστρέφεται μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω , τότε ἡ ταχύτης v_i ἐκάστου ὑλικοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς $\omega \cdot r_i$, ὁπότε ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$G = \sum r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i = \omega \cdot \sum m_i \cdot r_i^2$$

ἢ

$$G = \Theta \cdot \omega.$$



Σχ. 106.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται ἀνυσματικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega \quad (1) (*)$$

§ 90. Γενικωτέρα μορφή τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφοκινῆσεως. Ὅπως, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς ὁρμῆς, ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς $\mathcal{F} = m \cdot dv/dt$ ἔλαβε τὴν γενικωτέραν μορφήν $\mathcal{F} = d\mathcal{T}/dt$, οὕτω καὶ ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς στροφοκινῆσεως $\mathcal{M} = \Theta \cdot d\omega/dt$ δύναται, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς στροφορμῆς, νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{M} = \frac{d(\Theta \cdot \omega)}{dt}$$

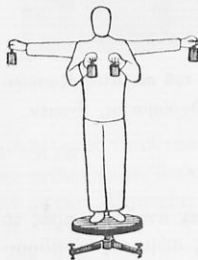
ἢ, ἐπειδὴ $\Theta \cdot \omega = \mathcal{G}$,

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt} \quad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς στροφορμῆς ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν ροπήν (**).

Ἡ γενικωτέρα αὕτη μορφή τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφοκινῆσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: «Ἡ ταχύτης μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς ἐνὸς σώματος ἰσοῦται μὲ τὴν ροπήν, ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ».

Διερευνήσις τῆς ἐξίσωσεως (1). Ἄν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), θέσωμεν $\mathcal{M} = 0$, προκύπτει $d\mathcal{G} = 0$, δηλ., $\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega = \text{σταθ.}$ Τοῦτο ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐπὶ τραπέζης, δυναμένης νὰ στρέφεται μὲ ἐλαχίστας τριβάς περὶ κατακόρυφον ἄξονα, ἵσταται ἄνθρωπος μὲ ἐκτεταμέναν τὰς χεῖρας καὶ κρατῶν δύο βάρη (σχ. 107). Δι' ἐλαφροῦς ὠθησεως τίθεται οὗτος εἰς περιστροφὴν. Ἐστω Θ_1 καὶ ω_1 ἡ ροπή ἀδρανείας καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης του. Ἐφ' ὅσον ἐπ' αὐτοῦ δὲν δρᾷ ἐξωτερικὴ ροπή ($\mathcal{M} = 0$), οὗτος στρέφεται μὲ τὴν σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω_1 . Ἄν, τώρα, πλησιάσῃ τὰ βάρη πρὸς τὸ σῶμα του, ἡ ροπή ἀδρανείας θὰ ἐλαττωθῇ καὶ θὰ γίνῃ Θ_2 . Ἐπειδὴ, ὅμως, ἡ στροφορμὴ πρέπει νὰ παραμῇ σταθερὰ (ἀφοῦ $\mathcal{M} = 0$), θ' ἀποκτήσῃ νέαν γωνιακὴν ταχύτητα ω_2 , μεγαλυτέραν τῆς ω_1 καὶ τοιαύτην ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις



Σχ. 107. Κατὰ τὴν σύμπτυξιν τῶν χειρῶν, ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐξάνεται.

(*) Ἡ σχέσις (1) μεταξὺ στροφορμῆς καὶ γωνιακῆς ταχύτητος ἰσχύει μόνον ἐφ' ὅσον ἡ περιστροφή γίνεται περὶ κύριον ἄξονα ἀδρανείας.

(**) Ὅλον τὸ περιεχόμενον τῆς § 90 καθὼς καὶ τῆς § 88 ἀναφέρεται εἰς ἀκλόνητον ἄξονα περιστροφῆς (δηλ. τὸν στιγμιαίον ἄξονα περιστροφῆς). Ὅπως ἀποδεικνύεται, τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ δι' οἰονδήποτε ἄξονα, ἀρκεῖ οὗτος νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους.

$$\text{στροφορμή (πρὸς)} = \text{στροφορμή (μετὰ)}$$

$$\Theta_1 \cdot \omega_1 = \Theta_2 \cdot \omega_2 (*).$$

Ἀνάλογον, ἀκριβῶς, εἶναι καὶ τὸ γνωστὸν φαινόμενον κατὰ τὸ ὁποῖον ἄνθρωπος, ἐκτελὼν περιστροφὴν κατὰ τὴν κατὰδυσιν (σχ. 83), ἀποκτῇ μεγάλῃ γωνιακὴν ταχύτητα, εὐθὺς ὥς συσπειρώσῃ τὸ σῶμα του: Διὰ τῆς συσπειρώσεως, ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ ἀνθρώπου ἐλαττοῦται, ὅποτε ἡ γωνιακὴ του ταχύτης πρέπει ν' αὐξηθῇ, διὰ τὰ διατηρηθῇ, κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον $\Theta \cdot \omega$ σταθερόν.

§ 91. "Ωθησις ροπῆς. Ἐστω ὅτι ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκεῖται μία χρονικῶς μεταβαλλομένη ροπὴ M . Συμφώνως πρὸς τὴν γενικωτέραν μορφήν τοῦ νόμου τῆς στροφικῆς κινήσεως, ἡ ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἐπερχομένη μεταβολὴ dG τῆς στροφορμῆς θὰ εἶναι ἴση πρὸς $M \cdot dt$. Ἦτοι

$$dG = M \cdot dt.$$

Ἄν ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τοῦ χρόνου $t = t_0$ μέχρι τοῦ χρόνου $t = t_1$, θὰ λάβωμεν

$$G_1 - G_0 = \int_{t_0}^{t_1} M \cdot dt \quad (1)$$

Ἡ παράστασις

$$\int M \cdot dt$$

ὀνομάζεται *ᾠθησις ροπῆς*.

Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς στροφικῆς κινήσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: «Ἡ ὑπὸ τινος ροπῆς προκαλουμένη μεταβολὴ τῆς στροφορμῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ᾠθησιν τῆς ροπῆς».

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς στροφικῆς κινήσεως, ὑπὸ τὴν τελευταίαν του διατύπωσιν, χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν παρακολούθησιν τῆς κινήσεως τῶν *βαλλιστικῶν γαλβανόμετρων* (**). Τὸ κινητὸν πλαίσιον τῶν ὀργάνων αὐτῶν διαρρέεται ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα τ ὑπὸ ρεύματος, προκαλουμένης, οὕτω, ροπῆς M , ἴσης διαρκείας. Τὸ

ὁλοκλήρωμα $\int_0^{\tau} M \cdot dt$ παρέχει τὴν στροφορμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει τὸ (ἀρ-

χικῶς ἀκίνητον) πλαίσιον μετὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος.

§ 92. Ἔργον καὶ ἰσχύς, παραγόμενα ὑπὸ ροπῆς. Ἐστω σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται ἡ ροπὴ M καὶ τὸ ὁποῖον στρέφεται ἐντὸς τοῦ χρόνου dt κατὰ τὴν γωνίαν $d\varphi$ περὶ ἄξονα, παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροπῆς. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τὸ ὑπὸ τῆς ροπῆς παραγόμενον (στοιχειῶδες) ἔργον dA δίδεται διὰ τοῦ τύπου

(*) Ὅσον ἄφορᾷ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν εὐκόλως συνάγεται ὅτι αὕτη δὲν διατηρεῖται σταθερά, ἀλλ' αὐξάνεται. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ὁ ἄνθρωπος παράγει ἔργον, ὅταν μετακινή τὰς δύο μάζας πρὸς ἑαυτὸν.

(**) *ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ*, § 124.

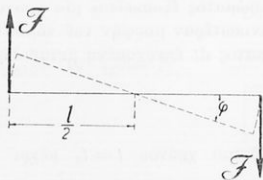
$$dA = M \cdot d\varphi \quad (1)$$

Ίσχύς καὶ γωνιακὴ ταχύτης. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσης (1) διὰ τοῦ dt , λαμβάνομεν διὰ τὴν ἰσχὺν N τὸν τύπον

$$N = M \cdot \omega$$

Ἀπόδειξις τῆς ἐξίσωσης (1). Ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν ροπήν διὰ ζεύγους δυνάμεων $\mathcal{F}, \mathcal{F}$ (σχ. 108), αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περιστροφῆς καὶ ἀπέχουν τοῦ ἄξονος κατ' ἴσας ἀποστάσεις $l/2$, τοιαύτας ὥστε ἡ ροπή των νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν ροπήν. Ἦτοι

$$M = F \cdot l.$$



Σχ. 108.

Κατὰ τὴν περιστροφήν, ἡ δύναμις F μετακινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν ἀπόστασιν $l/2 \cdot d\varphi$. Ἐπομένως, τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον εἶναι ἶσον πρὸς

$$F \cdot \frac{l}{2} \cdot d\varphi.$$

Ἐπειδὴ ἶσον ἔργον παράγει καὶ ἡ ἄλλη δύναμις, τὸ ὅλικόν ἔργον θὰ εἶναι ἶσον πρὸς

$$dA = 2 \cdot F \cdot \frac{l}{2} \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

§ 93. Κίνησις στερεοῦ σώματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν εἰωνόηποτε δυνάμεων. Ἐστω στερεὸν σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπιδροῦν οἱ αἰδιήροτε δυνάμεις. Θὰ μελετήσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν κίνησιν αὐτοῦ τούτου τοῦ σώματος περὶ τὸ κέντρον βάρους. Πρὸς τοῦτο ἀνάγομεν εἰς τὸ κέντρον βάρους ὅλας τὰς δυνάμεις, τὰς ἐξασκουμένας ἐπὶ τοῦ σώματος, ὁπότε, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ προκύψῃ μία συνισταμένη δύναμις, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ μία συνισταμένη ροπή.

Διὰ τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους ἰσχύει τὸ ἐξῆς **θεώρημα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους**:

«Τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς σώματος κινεῖται ὡς θὰ ἐκινεῖτο ὁλικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν, ἴσην πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπιδρωσῶν δυνάμεων».

Διὰ τὴν στροφικὴν κίνησιν τοῦ σώματος περὶ τὸ κέντρον βάρους ἰσχύει τὸ ἐξῆς **θεώρημα περιστροφῆς περὶ τὸ κέντρον βάρους**:

«Τὸ σῶμα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης ροπῆς, θὰ στρέφεται περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους, μὲ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν, παρεχομένην ὑπὸ τῆς γνωστῆς ἐξίσωσης

$$\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'.$$

Ἦδη, ἄς μελετήσωμεν τὴν ἐπίδρασιν οἰωνδήποτε δυνάμεων ἐπὶ ἀκίνητου σώματος. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1) Ἐκ τῆς ἀναγωγῆς τῶν δυνάμεων αὐτῶν (ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους) προκύπτει μόνον συνισταμένη δύναμις (δηλ., ἡ συνισταμένη ροπὴ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σῶμα θὰ ἐκτελέσῃ μεταφορικὴν, μόνον, κίνησιν.

2) Ἐκ τῆς ἀναγωγῆς τῶν δυνάμεων προκύπτει μόνον συνισταμένη ροπὴ (δηλ., ἡ συνισταμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σῶμα θὰ ἐκτελέσῃ στροφικὴν, μόνον, κίνησιν περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους, τὸ ὁποῖον (κέντρον βάρους) θὰ παραμείνῃ, οὕτω, ἀκίνητον.

3) Ἐκ τῆς ἀναγωγῆς τῶν δυνάμεων προκύπτει καὶ (συνισταμένη) δύναμις καὶ (συνισταμένη) ροπὴ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σῶμα θὰ ἐκτελέσῃ σύνθετον κίνησιν, δυναμένην ν' ἀναλυθῇ εἰς μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ σώματος καὶ εἰς στροφικὴν κίνησιν αὐτοῦ περὶ τὸ (κινούμενον) κέντρον βάρους.

§ 94. Ἐλευθέρα στροφή τοῦ στερεοῦ σώματος. Εἰς τὴν § 66 ἐξητάσθη ἡ περιστροφή ἑνὸς σώματος περὶ μόνιμον ἄξονα, τοῦ ὁποῖου ἡ θέσις διετηρεῖτο σταθερὰ διὰ καταλλήλων ἐδράνων. Βεβαίως, τὰ ἔδρανα ἐξήσκουν δυνάμεις ἐπὶ τοῦ σώματος, ἐπειδὴ, ὅμως, αὗται διήρχοντο διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ροπαὶ τῶν ἦσαν ἴσαι πρὸς μηδέν καί, ὡς ἐκ τούτου, οὐδεμία περὶ αὐτῶν ἐγένετο συζήτησις. Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ στροφικὰς κινήσεις, εἰς τὰς ὁποίας δὲν ἐμφανίζονται δυνάμεις εἰς τὰ ἔδρανα καὶ εἰς τὰς ὁποίας, συνεπῶς, ἡ στροφή εἶναι δυνατὴ, χωρὶς τὴν ὕλικὴν ὑπαρξίν ἁξόνων. Οἱ ἄξονες οὗτοι ὀνομάζονται **ἐλεύθεροι ἄξονες**. Οὕτω, περὶ ἐλεύθερον ἄξονα στρέφεται ὁ κολυμβητὴς τοῦ σχήματος 83, ὁ ἐκτελὼν περιστροφὴν εἰς τὸν ἄερα κατὰ τὴν κατάδυσιν. Ἐπίσης, περὶ ἐλεύθερον ἄξονα περιστρέφεται τὸ πινάκιον τοῦ σχήματος 109.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, ὡς ἐλεύθεροι ἄξονες εἶναι δυνατοὶ μόνον οἱ κύριοι ἄξονες ἀδραναίας. Εἰς ὅλας, ὅμως, τὰς περιπτώσεις παρατηροῦμεν ὅτι μόνιμος στροφή περὶ ἐλεύθερον ἄξονα παρουσιάζεται, πρακτικῶς, μόνον ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ἢ ἐλαχίστης ροπῆς ἀδραναίας. Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες εἶναι **εὐσταθεῖς ἐλεύθεροι ἄξονες**, ἐνῶ ἡ στροφή περὶ τὸν τρίτον κύριον ἄξονα, δηλ., τὸν μέσης ροπῆς ἀδραναίας, εἶναι **ἀσταθής**. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος (σχ. 110): Ἐὰν ἐκσφενδονίσωμεν τὸ πα-



Σχ. 109. Ἡ περιστροφή τοῦ πινακίου γίνεται περὶ ἐλεύθερον ἄξονα, συμπίπτοντα μὲ τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ.

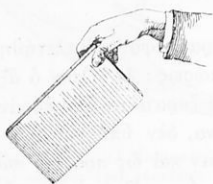
§ 95. Ἀναλογίαι μεταφορικῆς καὶ στροφικῆς κινήσεως.

Π Ι Ν Α Ξ

Μ Ε Τ Α Φ Ο Ρ Α	Σ Τ Ρ Ο Φ Η
Διάστημα s	Γωνία φ
Ταχύτης $v = \frac{ds}{dt}$	Γωνιακὴ ταχύτης $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ἐπιτάχυνσις $p = \frac{dv}{dt}$	Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$
$s = \varphi \cdot r$ $v = \omega \cdot r$ $p = \omega' \cdot r$	
Δύναμις $\mathcal{F}$	Ροπή $\mathcal{M}$
Μᾶζα m	Ροπή ἀδρανείας Θ
$\mathcal{F} = m \cdot p$	$\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'$
Ὅρμη $\mathcal{I} = m \cdot v$	Στροφορμὴ $\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega$
$\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{I}}{dt}$	$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}$
ᾠθησις δυνάμεως $\int F \cdot dt$	ᾠθησις ροπῆς $\int M \cdot dt$
Ἔργον $dA = (\mathcal{F} \cdot ds)$	Ἔργον $dA = M \cdot d\varphi$
Ἰσχύς $N = (\mathcal{F} \cdot v)$	Ἰσχύς $N = (\mathcal{M} \cdot \omega)$
Κινητικὴ ἐνέργεια $E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	Κινητικὴ ἐνέργεια $E_{κιν} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$
Κατευθύνουσα δύναμις $D = -\frac{F}{x} (*)$	Κατευθύνουσα ροπή $D^* = -\frac{M}{\varphi} (*)$
Περίοδος γραμμικῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως	Περίοδος στροφικῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως
$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} (*)$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} (*)$

(*) Οἱ δι' ἀστερίσκου σημειούμενοι τύποι ἀναφέρονται κατωτέρω εἰς τὰς §§ 109 καὶ 125.

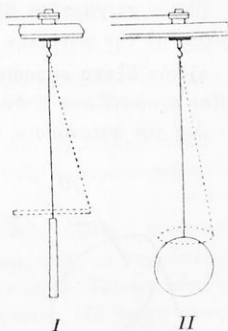
ραλληλεπίπεδον τοῦ σχήματος 86 κατὰ τρόπον ὥστε νὰ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τῆς μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας A , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο



Σχ. 110. Τὸ παραλληλεπίπεδον, ἐκσφενδονιζόμενον κατὰ τὸν ὑποδεικνυόμενον τρόπον, θὰ περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας.

ἔξακολουθεῖ στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον. Λεδομένου ὅτι ὁ ἄξων οὗτος εἶναι εὐσταθὴς ἄξων, τὸ παραλληλεπίπεδον θὰ ἐξακολουθήσῃ στρεφόμενον περὶ αὐτόν, ἔστω καὶ ἂν ἀρχικῶς ἡ ἐκσφενδόνισις δὲν ἐγένετο ἀκριβῶς περὶ τὸν ἄξονα τῆς μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον θὰ παρατηρήσωμεν, ἐὰν προκαλέσωμεν στροφήν τοῦ παραλληλεπίπεδου περὶ τὸν ἄξονα C τῆς ἐλαχίστης ροπῆς ἀδρανείας. Ἐάν, ὅμως, θελήσωμεν νὰ τὸ περιστρέψωμεν περὶ τὸν ἄξονα B τῆς μέσης ροπῆς ἀδρανείας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν μόνιμον ἐλευθέραν περιστροφήν περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον^(*), ἀλλ' ἐμφανίζεται, ἀντ' αὐτῆς, ἄλλη τις πολὺπλοκος κίνησις.

Ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶναι ὁ **βαθμὸς σταθερότητος**. Οὕτω, ὅταν ἡ ροπή ἀδρανείας διὰ τὸν ἄξονα ἐλαχίστης ροπῆς ἀδρανείας εἶναι πολὺ μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν αὐτῆς διὰ τὸν ἄξονα μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας, ἡ ἐλευθέρα στροφή περὶ τὸν τελευταῖον διατηρεῖται μόνον ἔφ' ὅσον ἀρχικῶς ἡ ἀπόκλισις ἐκ τῆς ἰδανικῆς διευθύνσεως δέν ἦτο σημαντικὴ. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν λάβωμεν ράβδον καί, ἀποῦ ἐξαγυρῶμεν αὐτὴν ἀπὸ τὸ ἐν ἄκρον, τὴν ἀναγκάσωμεν νὰ περιστραφῇ ταχέως περὶ τὸν γεωμετρικόν της ἄξονα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη δὲν ἐξακολουθεῖ νὰ περιστρέφεται ὡς πρότερον, ἀλλ' ἀνυψομένη, περιστρέφεται περὶ ἄξονα, κείμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον (σχ. 111, I). Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ράβδου εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς ροπῆς ἀδρανείας ὡς πρὸς ἄξονα, κείμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον καί, συνεπῶς, ὁ βαθμὸς σταθερότητος τοῦ ἄξονος τοῦτου εἶναι μικρὸς. Αἱ κατὰ τὴν περιστροφήν ὑπὸ τοῦ νήματος ἐξασκούμεναι τυχαῖαι ὠθήσεις προκαλοῦν τὴν ἀπόκλισιν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπὸ τῆς ἰδανικῆς διευθύνσεως καὶ ἀναγκάζουν, οὕτω, τὴν ράβδον νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα, μεγαλυτέρου βαθμοῦ σταθερότητος. Τὸ



Σχ. 111. Κατὰ τὴν περιστροφήν, ἡ ράβδος καὶ ὁ δίσκος, ἀνυψούμενοι, περιστρέφονται «σταθερῶς» περὶ τοὺς ἄξονας μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας.

(*) Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι μόνιμος περιστροφή περὶ τὸν ἄξονα τῆς μέσης ροπῆς ἀδρανείας εἶναι, κατ' ἀρχήν, δυνατὴ (διότι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ ὁ ἄξων οὗτος εἶναι κύριος ἄξων ἀδρανείας, ἀρα εἶναι ἐλευθερὸς ἄξων), ἀλλὰ, ἐὰν κατὰ τὴν περιστροφήν, ἐκφύγομεν ὀλίγον τῆς διευθύνσεως ταύτης, ὁ ἄξων περιστροφῆς παύει νὰ εἶναι μόνιμος, δηλ., ἡ στροφή περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον εἶναι ἀσταθής.

αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν λεπτοῦ δίσκου, ἐξηρημένου ἀπὸ σημείον τι τῆς περιφερείας του (σχ. 111, II), ὁ ὁποῖος, κατὰ τὴν ταχείαν περιστροφὴν, ἀνυψοῦται καὶ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τῆς μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας.

§ 96. Στρόβος. Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐμελετήθη ἡ στροφὴ στερεοῦ σώματος περὶ ἄξονα διὰ δύο περιπτώσεις: 1) Ὅταν ὁ ἄξων ἦτο στερεῶς συνδεδεμένος μετὰ τοῦ σώματος καὶ ἐκρατεῖτο ὑπὸ ἐδράνων καὶ 2) ὅταν, κατὰ τὴν στροφὴν περὶ ἐλεύθερον ἄξονα, δὲν ὑπῆρχον μὲν τὰ ἔδρανα, ἀλλ' ὁ νοητὸς ἄξων διετῆρει σταθερὰν θέσιν καὶ ὡς πρὸς τὸ σῶμα καὶ ὡς πρὸς οἰονδήποτε ἀκίνητον σύστημα συντεταγμένων. Γενικωτέρα εἶναι ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄξων περιστροφῆς μεταβάλλει τὴν διεύθυνσίν του καὶ ὡς πρὸς τὸ σῶμα καὶ ἐν τῷ χώρῳ, ἀλλὰ διέρχεται, διαρκῶς, δι' ἐνὸς ὠρισμένου ἀκινήτου σημείου. Σῶμα, ἐκτελοῦν τοιαύτην κίνησιν, καλεῖται **στρόβος**. Ἡ μελέτη οἰονδήποτε στρόβου ἀποτελεῖ πρόβλημα δυσχερέστατον. Κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μόνην τεχνικῶς ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν τοῦ συμμετρικοῦ (ἐκ περιστροφῆς) **στρόβου**, τοῦ ὁποῖου ὁ ἄξων συμμετρίας νὰ εἶναι, ταυτοχρόνως, ἄξων μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας. Κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ συμμετρικοῦ στρόβου διακρίνομεν τρεῖς ἄξονας, οἱ ὁποῖοι, ὡς εἶναι ἐπόμενον, τέμνονται εἰς τὸ ἀκίνητον σημεῖον:

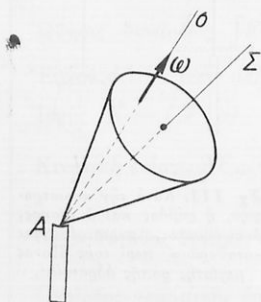
α) τὸν **ἄξονα συμμετρίας**:

β) τὸν **στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς**, περὶ τὸν ὁποῖον στρέφεται ὁ στρόβος μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω καὶ

γ) τὸν **ἄξονα στροφορμῆς**. Οὗτος εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο προηγούμενοι.

Διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, θεωρήσωμεν τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 112, δηλ., τὴν *κοινὴν σβοῦραν*. Ἐστω ὅτι, κατὰ τὴν θεωρουμένην χρονικὴν στιγμήν, ὁ στρόβος περιστρέφεται περὶ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα σ . Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας Σ δὲν συμπίπτει μὲ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα, ἀλλὰ καὶ οἱ δύο τέμνονται εἰς τὸ ἀκίνητον σημεῖον A . Ὁ ἄξων τῆς στροφορμῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων καί, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, μεταξὺ τῶν ἄξόνων σ καὶ Σ . Ὁ ἄξων οὗτος δὲν ὑποπίπτει εἰς τὴν ἄμεσον ἀντίληψίν μας.

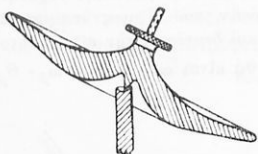
Θὰ ἐξετάσωμεν τὸν στρόβον 1) ἐλεύθερον ἑξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ροπῶν) καὶ 2) ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοιούτων.



Σχ. 112. Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς σβοῦρας, τὸ σημεῖον A μένει ἀκίνητον.

§ 97. Στρόβος ἐλεύθερος ἑξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ροπῶν). Εἰς ἕνα τοιοῦτον στρόβον πρέπει τὸ κέντρον βάρους νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἀκί-

νητον σημείον στηρίζεως, διότι τότε μόνον τὸ βάρος τοῦ σώματος δὲν προκαλεῖ ροπήν.

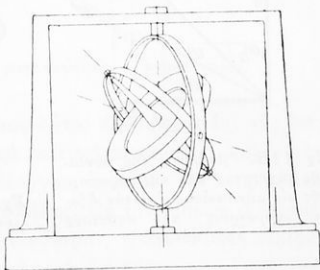


Σχ. 113. Ὁ ἀλκιονιζόμενος στρόβος ἔχει τοιοῦτον σχῆμα, ἵνα τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ συμπίπτῃ μετὰ τὸ σημείον στηρίζεως.

πρῶτον καὶ κρατούμενον, ὁμοίως, ὑπὸ δευτέρου δακτυλίου. Ὁ δεύτερος οὗτος δακτύλιος δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα, κάθετον ἐπὶ τὸν δεύτερον, κρατούμενον ὑπὸ ἀκινήτου πλαισίου. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ κέντρον βάρους τοῦ στρόβου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς τὸ σημείον τομῆς τῶν τριῶν ἁξόνων, μένει ἀκίνητον κατὰ τὴν στροφὴν περὶ οἰονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν ἁξόνων. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ στρόβος μὲ στήριξιν Cardano ἰσορροπεῖ εἰς οἴανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἀφεθῇ.

Ἐφ' ὅσον ἐπὶ τοῦ στρόβου δὲν ἐξασκοῦνται δυνάμεις, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ δὲν θὰ ἐπιταχύνεται. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ καὶ ροπᾶ δὲν ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτοῦ, ἡ στροφορμὴ του θὰ παραμένῃ σταθερά.

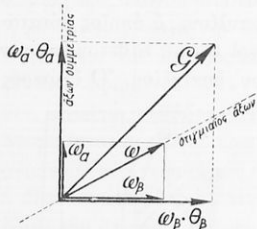
Ἄν ὁ ἐλεύθερος δυνάμεων ἢ ροπῶν στρόβος τεθῇ εἰς περιστροφὴν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἀρχικῶς ὁ ἄξων συμμετρίας νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἁξονος τῆς στροφορμῆς, ἡ διεύθυνσις τῶν ἐν λόγῳ ἁξόνων παραμένει σταθερὰ ἐν τῷ χώρῳ. Εἰς τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 113 τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν ὁ στρόβος, ἀφοῦ τεθῇ εἰς περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας, ἀφεθῇ μετὰ προσοχῆς ἐπὶ τοῦ στηρίγματος αὐτοῦ. Ἄν, ὅμως, ὁ ἄξων συμμετρίας δὲν συμπίπτῃ ἀρχικῶς μετὰ τὸν ἄξονα τῆς στροφορμῆς, τότε ὁ πρῶτος ἄξων διαγράφει, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, κῶνον περὶ τὸν δεύτερον. Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ ἁξονος συμμετρίας περὶ τὸν διαρκῶς σταθερὸν ἐν τῷ χώρῳ ἄξονα στροφορμῆς καλεῖται **κλόνησις**. Οὕτω, κλόνησιν ἀρχίζει νὰ ἐκτελῇ ὁ στρόβος τοῦ σχήματος 113, ὅταν ὑποστῇ μικρὰν ὥθησιν, ὁπότε ὁ ἄξων τῆς στροφορμῆς θὰ παύσῃ νὰ συμπίπτῃ μετὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας.



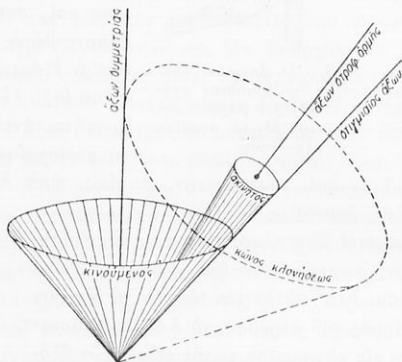
Σχ. 114. Ἐξάστῃσι στρόβον διὰ συστήματος Cardano.

§ 98. Διερεύνησις τῆς κλόνησεως. Ἡ κλόνησις εἶναι ἀποτέλεσμα τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς. Τὴν πολύπλοκον ταύτην κίνησιν δυνάμεθα

νά παρακολουθήσωμεν ὡς ἑξῆς: Ὁ στιγμιαίος ἄξων περιστροφῆς (σχ. 115) ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, τὸν φορέα τῆς γωνιακῆς ταχύτητος. Ἀναλύομεν τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω εἰς δύο συνιστώσας, μίαν, τὴν ω_α , κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος συμμετρίας (ὁ ὁποῖος εἶναι, ταυτοχρόνως, κύριος ἄξων ἀδρανείας) καὶ δευτέραν, τὴν ω_β , κάθετον ἐπ' αὐτήν, ὅποτε αἱ δύο συνιστώσαι τῆς στροφορμῆς θὰ εἶναι $\omega_\alpha \cdot \Theta_\alpha$ καὶ $\omega_\beta \cdot \Theta_\beta$, ἔνθα Θ_α καὶ Θ_β εἶναι αἱ ροπαὶ ἀδρανείας διὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας καὶ διὰ τὸν κάθετον ἐπ' αὐτὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ ἡ ροπή ἀδρανείας Θ_α διὰ τὸν ἄξονα



Σχ. 115. Ἀνάλυσις τῆς γωνιακῆς ταχύτητος καὶ τῆς στροφορμῆς εἰς συνιστώσας ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας καὶ κάθετους πρὸς αὐτόν.



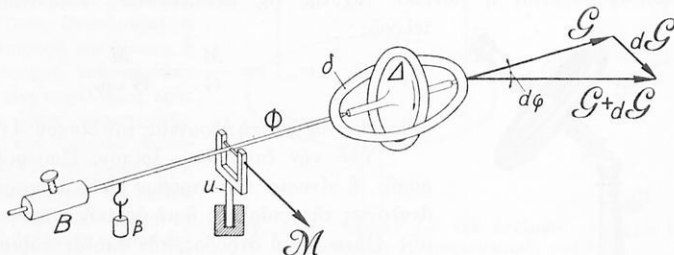
Σχ. 116. Κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ κινουμένου πολικοῦ κώνου ἐπὶ τοῦ ἀκίνητου, ὁ ἄξων συμμετρίας διαγράφει τὸν κῶνον κληνῆσεως.

συμμετρίας εἶναι, εἰς τοὺς ὑφ' ἡμῶν θεωρουμένους στρόβους, πολὺν μεγαλυτέρα τῆς ροπῆς ἀδρανείας Θ_β , ἢ ὁλική στροφορμὴ $\mathcal{G}$ θὰ ἔχῃ φορέα, μὴ συμπίπτοντα μὲν τὸν στιγμιαίον ἄξονα, ἀλλ' εὐρισκόμενον μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Τὸ ἄνυσμα τῆς στροφορμῆς, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη, θὰ παραμείνῃ ἀκίνητον ἐν τῷ χώρῳ, ἐνῷ οἱ ἄλλοι δύο ἄξονες—ὁ στιγμιαίος ἄξων καὶ ὁ ἄξων συμμετρίας—κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν στρέφονται περὶ αὐτόν. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς οὗτοι ἄξονες κεῖνται, ὡς εἶναι προφανές ἐκ τοῦ σχήματος, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπειδὴ, πρὸς τούτοις, αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξὺ των, μένουσι διαρκῶς σταθεραί, ἔπεται ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας καὶ ὁ στιγμιαίος ἄξων θὰ διαγράφουν περὶ τὸν ἄξονα στροφορμῆς κῶνους (σχ. 116). Ὁ κῶνος, τὸν ὁποῖον διαγράφει ὁ ἄξων συμμετρίας, ὑποπίπτει ἀμέσως εἰς τὴν ἀντίληψιν τοῦ παρατηρητοῦ, καλεῖται δὲ **κῶνος κληνῆσεως**. Ὁ στιγμιαίος ἄξων διαγράφει ἕνα κῶνον, καλούμενον **ἀκίνητον πολικὸν κῶνον**.

Ταῦτα ὡς πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δύο αὐτῶν ἄξόνων σχετικῶς πρὸς τὴν ἐν τῷ χώρῳ ἀκίνητον στροφορμὴν. Κατωτέρω θὰ διερευνήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἐν σχέσει πρὸς τὸν στρόβον καὶ, συγκεκριμένως, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ. Λόγῳ τῆς σταθερότητος τῶν γωνιῶν, ὁ στιγμιαίος ἄξων διαγράφει περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας ἕνα κῶνον, καλούμενον **κινούμενον πολικὸν κῶνον**. Ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ἀκίνητος ἐν σχέσει πρὸς τὸν στρόβον. Ἡ κίνησις, λοιπόν, τοῦ στιγμιαίου ἄξονος δύναται νὰ περιγραφῇ ὡς ἑξῆς: Ὁ κινούμενος πολικὸς κῶνος (ὁ ὁποῖος εἶναι στερεὸς συνδεδεμένος μετὰ τοῦ στρόβου) κυλίνεται ἐπὶ τοῦ ἀκινήτου (ἐν τῷ χώρῳ) πολικοῦ κώνου, ἢ ἐκάστοτε δὲ κοινὴ γενέτειρα καθορίζει τὸν στιγμιαίον ἄξονα.

Ὅταν ὁ στιγμιαίος ἄξων συμπίπτῃ, ἐξ ἀρχῆς, μὲ τὴν στροφορμὴν, ὅλαι αἱ γωνίαι μηδενίζονται καί, συνεπῶς, δὲν παρουσιάζεται κλόνησις τοῦ ἄξονος συμμετρίας.

§ 99. Στρόβος υπό την επίδρασιν εξωτερικῆς ροπῆς - Μετάπτωσις. Ἡ συμπεριφορὰ τοῦ στρόβου υπό την επίδρασιν εξωτερικῆς ροπῆς μελετᾶται, εὐκόλως, διὰ στρόβου εἰδικῆς κατασκευῆς (σχ. 117): Ὁ δίσκος Δ , δύναται νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα, τοῦ ὁποίου τὰ ἔδρανα εἶναι στε-



Σχ. 117. Στρόβος διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς μεταπτώσεως. (Γυροσκοπίον).

ρεωμένα ἐπὶ τοῦ δακτυλίου δ . Ὁ δακτύλιος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς φάλαγγος Φ , ἡ ὁποία δύναται νὰ στραφῇ περὶ κατακόρυφον καὶ ὀριζόντιον ἄξονα. Βάρος B , στερεούμενον ἐπὶ τῆς φάλαγγος, ἐπιφέρει τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ὅλου συστήματος. Ἐὰν δώσωμεν, καταλλήλως, εἰς τὸν δίσκον Δ γωνιακὴν ταχύτητα ω καὶ ἀφήσωμεν τὸ σύστημα ἐλεύθερον, τοῦτο θὰ συμπεριφέρεται ὡς στρόβος ἐλεύθερος ἐξωτερικῶν ροπῶν, ὁ δὲ ἄξων συμμετρίας—ὁ ὁποῖος συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα στροφορμῆς—θὰ παραμένῃ ἀκίνητος. Ἄν, ἥδη, ἐξαρθήσωμεν τὸ πρόσθετον βάρος β , τοῦτο θὰ ἐξασκῇ τὴν ροπὴν $\mathcal{M}$, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς στροφορμῆς. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς ταύτης, ὁ ἄξων τῆς στροφορμῆς τοῦ στρόβου ἀρχίζει νὰ στρέφεται περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα κ , ἐκτελὼν μίαν κίνησιν, ἡ ὁποία καλεῖται **μετάπτωσις**. Ἡ γωνιακὴ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν στρέφεται ὁ ἄξων στροφορμῆς κατὰ τὴν μετάπτωσιν, καλεῖται **γωνιακὴ ταχύτης μετάπτωσεως** $\omega_{\text{μετ}}$ καὶ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς στροφοικῆς κινήσεως

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt} \quad (1)$$

ἡ ροπή $\mathcal{M}$ ἐντὸς τοῦ χρόνου dt προσδίδει εἰς τὸν στρόβον τὴν στροφορμὴν $d\mathcal{G}$. Τὸ ἄνυσμα $d\mathcal{G}$, συντιθέμενον μετὰ τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{G}$, δίδει τὴν νέαν στροφορμὴν $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ τοῦ στρόβου. Ἐπειδὴ τὸ ἄνυσμα $d\mathcal{G}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἄνυσμα $\mathcal{G}$ καὶ ἡ γωνία $d\phi$ εἶναι ἀπειροστική, ἔπεται ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα τὸ νέον ἄνυσμα $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ ἀρχικὸν $\mathcal{G}$. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$d\mathcal{G} = \mathcal{G} \cdot d\phi.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ dG εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσηιν

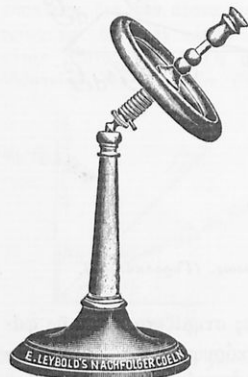
$$M = G \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ἐπειδὴ $d\varphi/dt$ εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς μεταπτώσεως, λαμβάνομεν τελικῶς

$$\omega_{\text{μετ}} = \frac{M}{G} = \frac{M}{\Theta \cdot \omega}$$

ἐνθα Θ εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ δίσκου A (*).

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν, λοιπόν, ἐξωτερικῆς ροπῆς, ἡ κίνησις τοῦ στρόβου εἶναι διάφορος, ἀνalogὸς τῆς ὑπάρξεως ἢ μὴ ἀρχικῆς στροφορμῆς. Οὕτω, ἂν ὁ στρόβος, τὸν ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχῆμα 118, δὲν περιστρέφεται ($\mathcal{G} = 0$), τότε, ἀφιέμενος ἐλεύθερος εἰς τὸ στήριγμά του, «θὰ πέσῃ» ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του. Ἄν, ὅμως, περιστρέφεται ($\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega$), ἡ ροπή, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ βάρος του, ἀντὶ νὰ τὸν ἀνατρέψῃ, θὰ προκαλέσῃ μετὰπτωσιν καὶ ὁ στρόβος θ' ἀρχίσῃ νὰ διαγράφῃ κῶνον. Καὶ γενικῶς παρατηροῦμεν ὅτι, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ροπῆς τίνος, ὁ ἄξων συμμε-



Σχ. 118. Τὸ βάρος τοῦ στρόβου προκαλεῖ μετὰπτωσιν καὶ ὁ στρόβος διαγράφει κῶνον.

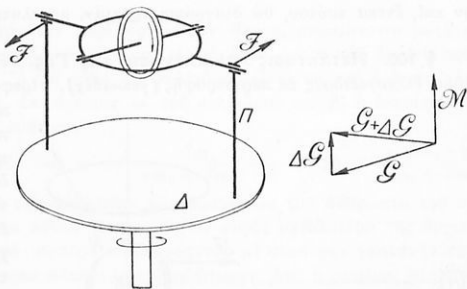
τρίας ἐνὸς στρόβου μετατίθεται πρὸς διεύθυνσιν, κάθετον ἐπὶ τὴν ἐκ τῆς πείρας μας (ἐπὶ μὴ στρεφομένων σωμάτων) ἀναμενομένην.

Ἄλλη περίπτωσις, εἰς τὴν ὁποίαν παρουσιάζεται τὸ φαινόμενον τῆς μεταπτώσεως, εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς κοινῆς *σβούρας*, στρεφομένης περὶ μὴ κατακόρυφον ἄξονα (σχ. 112). Εἰς ταύτην, ὅμως, λόγφ τῆς σημαντικῆς σχετικῶς τριβῆς, ἡ κίνησις εἶναι μᾶλλον πολὺπλοκος.

Ἐφαρμογαί. Αἱ ιδιότητες τοῦ στρόβου τυγχάνουν πολλῶν ἐφαρμογῶν. Μία ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων εἶναι ἡ *γυροσκοπικὴ πυξίς*. Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἀρχῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ λειτουργία τῆς γυροσκοπικῆς πυξίδος, θεωροῦμεν τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 119: Ὅταν ὁ δίσκος A , ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ πλαίσιον Π , τεθῇ εἰς περιστροφὴν, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων τοῦ στρόβου ἀνορθοῦται καὶ τείνει νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰς (ὀριζοντίας) δυνάμεις $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ πλαίσιον καὶ τῶν ὁποίων ἡ ροπή $\mathcal{M}$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐὰν $\mathcal{G}$ εἶναι ἡ στροφορμὴ τοῦ στρόβου πρὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ πλαισίου καὶ $A\mathcal{G}$ ἡ ὑπὸ τῆς ροπῆς

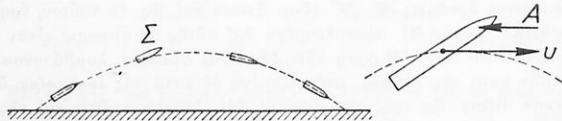
(*) Εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν ἐδέχθημεν τὴν ροπὴν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφορμῆς. Ἡ γενικωτέρα περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ροπή ἔχει οἰανδήποτε διεύθυνσιν, παραλείπεται, ὡς πολὺπλοκος.

ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt προκαλουμένη μεταβολὴ αὐτῆς, τότε ἡ νέα στροφορμὴ $\mathcal{G} + \Delta\mathcal{G}$, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὁ στρόβος μετὰ τὸν χρόνον Δt , θὰ ἔχῃ διεύθυνσιν, πλησιάζουσαν περισσότερον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἢ ἀρχικῶς καί, συνεπῶς, ἐφ' ὅσον ἐξακολουθεῖ ἡ περιστροφή τοῦ δίσκου, ἡ στροφορμὴ τοῦ στρόβου θὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ Γ ἢ περιστρέφεται, θὰ πρέπει πᾶς στρόβος, στηριγμένος κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐπ' αὐτῆς, νὰ τείνῃ νὰ καταστήσῃ τὸν ἄξονά του παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς Γ ἤ.



Σχ. 119. Διὰ τὰς διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀρχῆς τῆς λειτουργίας τῆς γυροσκοπικῆς πυξίδος.

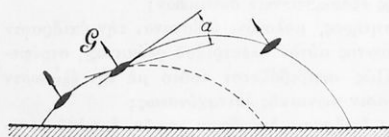
Ἀλλὴν σπουδαίαν ἐφαρμογὴν τῶν ιδιοτήτων τοῦ στρόβου εὐρίσκομεν εἰς τὴν *πυροβολικὴν* διὰ τὴν διατήρησιν ἐπιμήκων βλημάτων εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων αὐτῶν νὰ συμπίπτῃ διαρκῶς μετὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος, διότι, ἄλλως, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, δρῶσα πλαγίως, τείνει νὰ τὰ ἀνατρέψῃ. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ μεταδόσεως εἰς τὸ βλήμα περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν γεωμετρικόν του ἄξονα. Τὴν κίνησιν ταύτην λαμβάνει τὸ βλήμα κατὰ τὴν διαδρομὴν του ἐντὸς τῆς κήνης, ἡ ὁποία φέρει ἐσωτερικῶς ἐλικοειδῆ ἐνσκαφήν. Ὅταν τὸ βλήμα φθάσῃ εἰς σημεῖον τι Σ τῆς τροχιάς (σχ. 120), εἰς τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῆς κυρτότητος αὐτῆς, ὁ



Σχ. 120. Διὰ βραδείας μεταπτώσεως τοῦ βλήματος ἐπιτυγχάνεται ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ διατηρῆται πάντοτε παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος.

ἄξων παύει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ταχύτητα, ἡ ἀντίστασις A τοῦ ἀέρος, δρῶσα πλαγίως (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος δεξιὰ), δὲν διέρχεται, πλέον, διὰ τοῦ κέντρου βάρους καί ἡ ἐξ αὐτῆς προκαλουμένη ροπή προκαλεῖ μετάπτωσιν τοῦ ἄξονος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἄξων ἐπανέρχεται (καθὼς δι' ὑπολογισμοῦ ἀποδεικνύεται), ἀφοῦ διαγραφῇ κῶνον, εἰς τὴν ἐπιζητουμένην διεύθυνσιν.

Τρίτην ἐφαρμογὴν ἀνευρίσκομεν εἰς τὴν *διοκοβολίαν*: Κατὰ τὴν βολήν, δίδεται

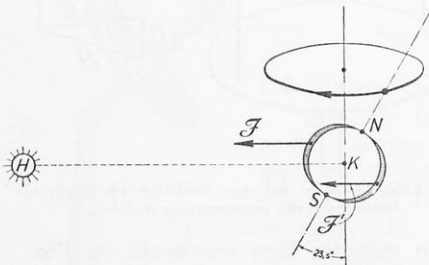


Σχ. 121. Διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ δίσκου ἐπιτυγχάνεται μεγαλύτερον βεληνεκές.

εἰς τὸν δίσκον περιστροφικὴ κίνησις περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ. Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{G}$ τῆς στροφορμῆς (σχ. 121) παραμένει σταθερὸν κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ δίσκου, με ἀποτελεσμα νὰ δημιουργηθῇ, σὺν τῷ χρόνῳ, μία γωνία προσπτώσεως α . Ὁ δίσκος, κινούμενος ἐντὸς τοῦ ἀέρος ὑπὸ τοιαύτην γωνίαν, ὑφίσταται μίαν δύναμιν πρὸς τὰ ἄνω (δυναμικὴ ἄνωσις, § 206). Ὡς ἐκ τούτου, ἐνῶ ἐν σφαιρικόν

βλήμα με τὰ αὐτὰ στοιχεῖα βολῆς θὰ διέγραφε τὴν ἐστιγμένην καμπύλην, ὁ δίσκος, λόγῳ τῆς δυναμικῆς ἀνώσεως, θὰ συγκρατεῖται εἰς τὸν ἀέρα ἐπὶ περισσότερον χρόνον καί, ἔνεκα τούτου, θὰ διαγράψῃ τροχίαν, μεγαλύτερου βελιγνευοῦς.

§ 100. Μετάπτωσις καὶ κλόνησις τῆς Γῆς. Ἡ Γῆ ἔχει, κατὰ προσέγγισιν, σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς (γεωειδές), στρεφόμενην δὲ περὶ τὸν ἄξονά της,



Σχ. 122. Ἡ ἑλξις τοῦ Ἡλίου προκαλεῖ μετάπτωσιν τοῦ ἄξονος τῆς Γῆς.

ἐκτελεῖ μετάπτωσιν. Τὴν ἐμφάνισιν τοιαύτης ροπῆς κατανοοῦμεν, ἂν θεωρήσωμεν τὴν Γῆν ὡς σφαῖραν, περιβαλλομένην ὑπὸ δακτυλιοειδοῦς ἐξογκώσεως. (Εἰς τὸ σχῆμα 122 ἡ τομὴ τῆς ἐξογκώσεως ταύτης εἶναι γραμμικοσκιωμένη). Τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐκλειπτικῆς χωρίζει τὴν ἐξογκώσιν ταύτην εἰς δύο συμμετρικὰ μέρη, τὰ ὅποια, ὁμως, δὲν ἀπέχουν, κατὰ μέσον ὁρον, ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ Ἡλίου. Αἱ ἐπ' αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἐξασκούμεναι δυνάμεις $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ εἶναι ἄνισοι καί, ὡς ἐκ τούτου, ἐμφανίζεται ἡ προαναφερθεῖσα ροπή. Ἡ προκαλουμένη ὑπ' αὐτῆς μετάπτωσις εἶναι βραδεία, ἔχουσα περίοδον 26000 ἐτῶν. Ἡ ροπή αὕτη δὲν εἶναι σταθερά, λαμβάνουσα τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν κατὰ τὰς τροπὰς, μηδενίζομένη δὲ κατὰ τὰς ἰσημερίας, ὅτε ἡ Γῆ ἔχει συμμετρικὴν θέσιν ὡς πρὸς τὴν εὐθείαν KH . Ἐνεκα τούτου καὶ τῆς ἐπιδράσεως τῆς Σελήνης, ἡ κίνησις δὲν εἶναι ἀπλὴ μεταπτωτική, ἀλλ' ἐκτὸς τῆς μεταπτώσεως, ὁ ἄξων τῆς Γῆς ἐκτελεῖ καὶ κλόνησιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία ὁμογενὴς σφαῖρα, ἀκτίνος 10 cm καὶ μάζης 1 kg, στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον αὐτῆς. Ἐὰν ἡ σφαῖρα αὕτη ἐκκινῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας καί, στρεφόμενη με σταθερὰν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν, ἀποκτήσῃ συχνότητα 1800 στροφῶν/μῖν ἐντὸς 10 sec, ποία εἶναι ἡ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένη ροπή; (ΑΠ: $75,36 \cdot 10^4 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$)
2. Ἡ Γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της με σταθεράν γωνιακὴν ταχύτητα. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δυνάμεων;
3. Ὁ ρῶτωρ ἐνὸς ἡλεκτρικοῦ κινητήρος, μολονότι ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς ροπῆς (προερχομένης ἐκ τοῦ διαρρέοντος αὐτὸν ἡλεκτρικοῦ ρεύματος), στρέφεται με σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα. Πῶς συμβιβάζεται τοῦτο με τὴν ἐξίσωσιν $\mathcal{M} = \theta \cdot \omega'$, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ τὴν ἐμφάνισιν γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως;
4. Σῶμα τι, μολονότι ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν διαφορῶν ροπῶν, ἐκτελεῖ μεταφορικὴν, μόνον, κίνησιν. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τῶν ἐν λόγῳ ροπῶν;
5. Ἐπὶ τινος σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ὁποίων τοῦτο ἐκτελεῖ στροφικὴν, μόνον, κίνησιν περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τῶν ἐν λόγῳ δυνάμεων;

6. 'Επί τινος σώματος εξασκούνται δύο δυνάμεις, υπό την επίδρασιν των οποίων τούτο εκτελεί μεταφορικήν, μόνον, κίνησιν. Τί δυνάμεθα νά εἰπωμεν περὶ τῶν ἐν λόγῳ δυνάμεων;

✓ 7. Περὶ κυλίνδρον, στρεπτόν περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, συμπίπτοντα μετὰ τοῦ γεωμετρικοῦ τοῦ ἄξονος, περιτυλίσσεται νῆμα, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὁποίου προσδένεται ἐν σώμα, μάζης m_1 . Ἄν ἡ μάζα τοῦ κυλίνδρου εἶναι m_2 καὶ ἡ ἀκτίς αὐτοῦ R , νά εὑρεθῇ α) ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις ω' τοῦ κυλίνδρου καὶ β) ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος, ὅταν ἀφεθῇ ἐλευθέρων.

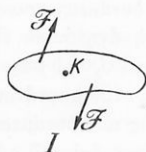
$$(ΑΠ: \quad \alpha) \quad \omega' = \frac{2m_1 \cdot g}{(m_2 + 2m_1) \cdot R}, \quad \beta) \quad \gamma = \frac{2m_1 \cdot g}{m_2 + 2m_1})$$

8. Νά δειχθῇ ὅτι, κατὰ τὴν σύμπτυξιν τῶν βραχιόνων τοῦ ἀνθρώπου τοῦ σχήματος 107 ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ γίνεται Θ_1/Θ_2 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀρχικῆς.

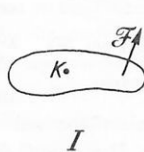
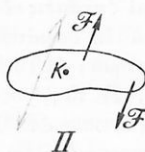
9. Μία ὁμογενὴς στερεὰ σφαῖρα περιστρέφεται μετὰ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα περὶ ἄξονα μίαν διάμετρον αὐτῆς. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα, ψυχρομένη, ὑφίσταται ἐλάττωσιν τῆς διαμέτρου τῆς κατὰ $0,1\%$, ποία ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐλαττώσεως ταύτης ἐπὶ τῆς κινήσεως τῆς σφαίρας;

10. 'Επὶ αἰωρουμένης καὶ ἀκινήτουσαν σανίδος εξασκοῦμεν μίαν δύναμιν, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς σανίδος καὶ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς.

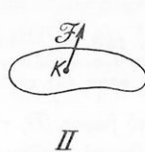
11. 'Επὶ τινος σώματος, μάζης m , εξασκεῖται ἐν ζευγος δυνάμεων. Ποία θὰ



Άσκησης 11η.



Άσκησης 12η.



εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κέντρου βάρους K α) ἐάν τὸ ζευγος ἐξασκηθῇ ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα I καὶ β) ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα II ;

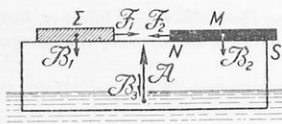
12. 'Επὶ τινος σώματος, μάζης m , εξασκεῖται μία δύναμις F . Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κέντρου βάρους K α) ἐάν ἡ δύναμις ἐξασκηθῇ ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα I καὶ β) ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα II ;

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ 101. **Ἑσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις.** Θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα παριστᾷ τὸ σχῆμα 123, δηλ., τὸν μαγνήτην M , τὸ σιδηροῦν σῶμα Σ καὶ τὸν πλωτήρα, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ταῦτα στηρίζονται. Ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν τριῶν αὐτῶν σωμάτων ἐξασκοῦνται αἱ ἑξῆς **ἐξωτερικαὶ δυνάμεις** - δηλ., δυνάμεις, προερχόμεναι ἐκ σωμάτων, μὴ ἀνηκόντων εἰς τὸ σύστημα: 1) Τὸ βάρος B_1 τοῦ σώματος Σ , 2) τὸ βάρος B_2 τοῦ μαγνήτου,



Σχ. 123. Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος τῶν τριῶν σωμάτων.

3) τὸ βάρος B_3 τοῦ πλωτήρος καὶ 4) ἡ ἀνωσις A . Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐξωτερικαί, ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι. Οὕτω, ἐπὶ τοῦ σώματος Σ ἐξασκεῖται ἡ δύναμις F_1 , προερχομένη ἐκ τοῦ μαγνήτου. Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δράσις = ἀντίδρασις» καὶ τὸ σῶμα Σ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ μαγνήτου τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν F_2 . Αἱ δύο αὗται δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , ἐπειδὴ δὲν ἐξασκοῦνται ὑπὸ σωμάτων ἔξω τοῦ συστήματος εὐρισκομένων, καλοῦνται **ἐσωτερικαὶ δυνάμεις**. Ἑσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος εἶναι, ἐπίσης, αἱ ἑξῆς δύο: Ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ πλωτὴρ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ καὶ ἡ ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς αὐτήν, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ σῶμα τοῦτο ἐπὶ τοῦ πλωτήρος. Ὁμοίως, ἐσωτερικαὶ εἶναι αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι μεταξύ τοῦ πλωτήρος καὶ τοῦ μαγνήτου.

Ὅπως παρατηροῦμεν αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις παρουσιάζονται ἀνὰ δύο καὶ ἔχουν συνισταμένην, ἴσην πρὸς μηδέν.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συλλογισμῶν προκύπτει ὅτι, κατὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς κινήσεως ἑνὸς συστήματος, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάζονται μόνον αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, διότι—καθὼς εἵπομεν καὶ ἀνωτέρω—αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἐμφανίζονται πάντοτε ἀνὰ δύο, εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι μεταξύ των καί, ὥς ἐκ τούτου, ἔχουν συνισταμένην, ἴσην πρὸς μηδέν. Οὕτω, διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομεν, πρέπει νὰ ἰσορροποῦν αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι τέσσαρες ἐξωτερικαὶ δυνάμεις B_1 , B_2 καὶ A .

§ 102. Κέντρον βάρους συστήματος. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος δύο σωμάτων εὐρίσκεται διὰ συλλογισμῶν, ἀναλόγων πρὸς τοὺς ἐκτεθέντας εἰς τὴν § 82. Ὅπως εἶναι δυνατόν ν' ἀποδειχθῇ, τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς συστήματος ὁσωνδήποτε σωμάτων εὐρίσκεται ἐνδόχως, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ μᾶζα καὶ τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς ἐκάστου τῶν ἀπαρτιζόντων αὐτὸ σωμάτων, διότι, τότε, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἕκαστον σῶμα ὡς ὑλικὸν σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς τὸ κέντρον βάρους ἐκάστου σώματος καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κέντρον βάρους ὅλων αὐτῶν τῶν ὑλικῶν σημείων.

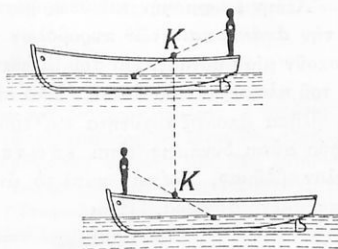
§ 103. Κίνησις συστήματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων. Ἐστω σύστημα, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐπιδροῦν οἱ αἰδιήποτε δυνάμεις. Θὰ μελετήσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος περὶ τὸ κέντρον βάρους. Πρὸς τοῦτο ἀνάγομεν ὅλας τὰς δυνάμεις εἰς τὸ κέντρον βάρους, ὁπότε, ὡς γνωστόν, θὰ προκύψῃ μία συνισταμένη δύναμις καὶ μία συνισταμένη ροπή.

α) **Μεταφορικὴ κίνησις - Θεωρήματα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους καὶ διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς.** Διὰ τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς συστήματος ἰσχύει τὸ ἑξῆς **θεώρημα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος:** «Τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς συστήματος κινεῖται ὡς ὑλικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν, ἴσην πρὸς τὴν ὅλικήν μᾶζαν τοῦ συστήματος καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐξασκεῖται ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐξασκούμενων ἐξωτερικῶν δυνάμεων».

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις οὐδεμίαν ἐπιτάχυνσιν δίδουν εἰς τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος, ἀφοῦ, ὡς εἶδομεν ἄνωτέρω, αὐταί, ἐμφανίζονται πάντοτε ἀνὰ δύο, ἰσορροποῦν.

Ἐκ τοῦ ἄνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς συστήματος, εὐρισκομένου ἐν ἡρεμίᾳ, δὲν δύναται νὰ μετακινηθῇ, χωρὶς τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς δυνάμεως. Οὕτω, τὸ κέντρον βάρους K τοῦ συστήματος «ἄνθρωπος - λέμβος» τοῦ σχήματος 124 παραμένει ἀκίνητον, ὅταν ὁ ἐπὶ τῆς λέμβου ἄνθρωπος ἀλλάσσει θέσιν ἐντὸς αὐτῆς. Ὅμοιως, ἐκ τοῦ ἄνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι, ἐὰν ὁ (ἐντὸς τῆς λέμβου εὐρισκόμενος) ἄνθρωπος ἐξασκήσῃ ἐπ' αὐτῆς μίαν ὥθησιν, οὐδεμίαν θὰ τῆς προκαλέσῃ ἐπιτάχυνσιν, ἐφ' ὅσον ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν οὗτος ἐξασκεῖ, εἶναι ἐσωτερικῆς δυνάμεως.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς συστήματος



Σχ. 124. Τὸ κέντρον βάρους K τοῦ συστήματος «λέμβος - ἄνθρωπος» δὲν μετακινεῖται, οἰανδήποτε κίνησιν καὶ ἂν ἐκτελέσῃ ὁ ἐντὸς αὐτῆς εὐρισκόμενος ἄνθρωπος.

συνάγομεν ὅτι, ὅταν ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος παραμένει σταθερά. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ **θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς**, τὸ ὁποῖον διατυπῶνται ὡς ἑξῆς: «*Ἡ ὁρμὴ ἐνὸς μονωμένου συστήματος* (δηλ., συστήματος, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου δὲν ἐπιδρῶν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἢ, ἐὰν ἐπιδρῶν, ἡ συνισταμένη τῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν) *διατηρεῖται σταθερά*».

Ἐφαρμογὰί: Πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν εἰς τὸ ἀναφερθὲν πείραμα τοῦ συστήματος «λέμβος-ἄνθρωπος». Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἐλεύθερον ἐξωτερικῶν δυνάμεων, διότι κατὰ μὲν τὸν ὀριζόντιον ἄξονα οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται (ἡ τριβὴ τοῦ ὕδατος θεωρεῖται ἀμελητέα), αἱ δὲ κατὰ τὸν κατακόρυφον ἄξονα ἐξασκούμεναι δυνάμεις βάρους καὶ ἄνωσις ἰσορροποῦν. Ὅταν ὁ ἄνθρωπος κινήθῃ κατὰ μῆκος τῆς λέμβου κατὰ μίαν φορὰν, ἡ λέμβος θὰ κινήθῃ ἀντιθέτως· μόλις σταματήσῃ αὐτός, θὰ σταματήσῃ καὶ ἡ λέμβος. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ὁρμῆς $m_a \cdot v_a$ τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῆς ὁρμῆς $m_\lambda \cdot v_\lambda$ τῆς λέμβου, τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς δίδει τὴν σχέσιν

$$\begin{aligned} \delta\rho\mu\eta_{(\text{πρὸς τῆς κινήσεως})} &= \delta\rho\mu\eta_{(\text{κατὰ τὴν κίνησιν})} = \delta\rho\mu\eta_{(\text{μετὰ τὴν κίνησιν})} \\ 0 + 0 &= m_a \cdot v_a + m_\lambda \cdot v_\lambda = 0 + 0. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_λ τῆς λέμβου

$$v_\lambda = - \frac{m_a}{m_\lambda} \cdot v_a.$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως δηλοῖ, ἀκριβῶς, ὅτι ἡ λέμβος θὰ κινήται ἀντιθέτως πρὸς τὸν ἄνθρωπον.

Ἄλλην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς εὐρίσκομεν εἰς τὴν **ἀνάκρουσιν** τῶν πυροβόλων ὅπλων: Τὰ ἐκ τῆς ἀναφλέξεως ἀέρια ἐξασκοῦν μίαν δύναμιν ἐπὶ τοῦ βλήματος, ἴσην, ὅμως, δύναμιν ἐξασκοῦν καὶ ἐπὶ τοῦ κλείστρου τοῦ ὅπλου. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν, τὸ μὲν βλήμα ἀποκτᾷ ταχύτητα v_β , τὸ δὲ ὅπλον ταχύτητα v_o . Ἐπειδὴ, ὅμως, αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος «ὅπλον-βλήμα», πρέπει, κατὰ τὸ ἄνω θεώρημα, ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος νὰ παραμένῃ σταθερά. Ἦτοι

$$\begin{aligned} \delta\rho\mu\eta_{(\text{πρὸς})} &= \delta\rho\mu\eta_{(\text{μετὰ})} \\ 0 + 0 &= m_\beta \cdot v_\beta + m_o \cdot v_o. \end{aligned}$$

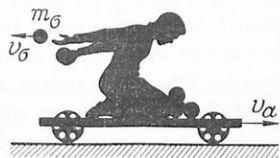
Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι, ταυτοχρόνως μὲ τὴν ἐκφερόδονισιν τοῦ βλήματος, τὸ ὅπλον κινεῖται ἀντιθέτως (**ἀνάκρουσις**), μὲ ταχύτητα v_o , ἴσην πρὸς

$$v_o = - \frac{m_\beta}{m_o} \cdot v_\beta.$$

Ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ ὄπλον, εἶναι μικρά, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος, διότι τὸ κλάσμα m_β/m_α ἔχει μικρὰν τιμὴν.

Τρίτην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν εἰς τὴν ἑξῆς περίπτωσιν: Βλήμα, βαλλόμενον πλαγίως, διαγράφει, ὡς γνωστόν, παραβολικὴν τροχίαν (ἢ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα). Ἐὰν εἰς τι σημεῖον τῆς τροχιάς του τὸ βλήμα ἐκραγῇ, τὰ θραύσματα θὰ πρέπει νὰ κινηθοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ κέντρον βάρους αὐτῶν νὰ διαγράφῃ τὴν προβλεπομένην παραβολικὴν τροχίαν, καθόσον αἱ δυνάμεις, αἱ προκαλέσασαι τὴν ἐκρηξιν, εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συνόλου τῶν θραυσμάτων.

Ἄλλην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν εἰς τὸν **πύ-
ραυλον**. Διὰ νὰ μελετήσωμεν τὸν μηχανισμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον δημιουργεῖται ἡ προσωπικὴ δύναμις εἰς τοὺς πυραύλους, περιγράφομεν τὸ ἑξῆς πείραμα: Ἐπὶ ἐλαφρᾷ ἀμάξει, δυναμένης νὰ κινῆται μὲ ἐλαχίστας τριβάς, ὑπάρχει ἄνθρωπος καὶ σωρὸς μεταλλίνων σφαιρῶν (σχ. 125). Ἀρχικῶς, τὸσον ἡ ἄμαξα καὶ ὁ ἄνθρωπος, ὅσον καὶ αἱ σφαῖραι ἀκίνητον, συνεπῶς ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐάν, τώρα, ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ μίαν σφαῖραν πρὸς τὰ ὀπίσω, ἡ ἄμαξα (μετὰ τοῦ ἀνθρώπου) ἀρχίζει νὰ κινῆται πρὸς τὰ ἔμπροσ. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ὅταν ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ πρὸς τὰ ὀπίσω μίαν σφαῖραν μὲ ταχύτητα v_σ , θὰ προσδώσῃ εἰς αὐτὴν ὁρμὴν, ἴσην πρὸς $m_\sigma \cdot v_\sigma$, ἐνθα m_σ εἶναι ἡ μάζα τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ τὸ θεωρούμενον σύστημα εἶναι μονωμένον, πρέπει, κατὰ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ ἄμαξα (μετὰ τοῦ ἀνθρώπου) νὰ κινήθῃ ἀντιθέτως, μὲ ταχύτητα v_a , ὑπολογισμένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως



Σχ. 125. Κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τῶν σφαιρῶν πρὸς τὰ ὀπίσω, ἡ ἄμαξα κινεῖται πρὸς τὰ ἔμπροσ.

$$v_a = - \frac{m_\sigma}{m_a} \cdot v_\sigma.$$

Ἐάν ὁ ἄνθρωπος ρίψῃ πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ δευτέραν σφαῖραν, ἡ ταχύτης τῆς ἀμάξης θ' αὐξηθῇ πάλιν κατὰ v_a , ὥστε ἡ νέα ταχύτης θὰ εἶναι ἴση πρὸς $2v_a$. (Τοῦτο ἰσχύει, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ μάζα τοῦ συνόλου δὲν ἔχει μεταβληθῇ οὐσιωδῶς). Οὕτω, μετὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τρίτης σφαίρας, ἡ ταχύτης θὰ ἔχῃ γίνει $3v_a$ κ.ο.κ. Ἐάν, λοιπόν, ἐντὸς τοῦ χρόνου t ἐκσφενδονισθοῦν n σφαῖραι, ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης, ἡ ἐπιτάχυνσις γ_a , τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ἄμαξα, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\gamma_a = \frac{n \cdot v_a}{t}.$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἄμαξα τὴν ἐπιτάχυνσιν ταύτην, πρέπει ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία τὴν προεκάλεσε, νὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F = m \cdot \gamma_a = m_a \cdot n \cdot \frac{v_a}{t} = -m_a \cdot n \cdot \frac{m_\sigma}{m_a} \cdot v_\sigma \cdot \frac{1}{t} = -n \cdot m_\sigma \cdot v_\sigma \cdot \frac{1}{t}$$

$$\eta \quad F = - \frac{n \cdot m_\sigma}{t} \cdot v_\sigma. \quad (1)$$

Τὸ πηλίκον $n \cdot m_0/t$ παρέχει τὴν ὀλικὴν μάζαν τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξεσφενδονίσθησαν ἐντὸς τοῦ χρόνου t . Εἰς τὸν πύραυλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἐχομεν συνεχῆ ροὴν ἀερίου μετὰ ταχύτητα v_{aeg} , δυνάμεθα νὰ γράψωμεν διὰ τὸ πηλίκον τῆς ὀλικῆς ἐκσφενδονιζομένης μάζης διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου, ἀντὶ τοῦ $n \cdot m_0/t$, τὸ dm/dt , ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) μᾶς δίδει τὴν σχέσιν

$$F = - \frac{dm}{dt} \cdot v_{aeg}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ προωστικὴ δύναμις τοῦ πυραύλου εἶναι ἀνάλογος ἀπ' ἐνὸς μὲν πρὸς τὴν ἀνὰ μονάδα χρόνου ἐπιταχυνομένην πρὸς τὰ ὀπίσω μάζαν τοῦ ἀερίου, ἀπ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ.

β) Στροφικὴ κίνησις - Θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς.

Κατὰ τὴν στροφικὴν κίνησιν τοῦ συστήματος, ἕκαστον τῶν σωμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τοῦτο ἀποτελεῖται, ἔχει ὠρισμένην στροφορμὴν. Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ὀλικὴ στροφορμὴ τοῦ συστήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν στροφορμῶν ὅλων τῶν σωμάτων, τῶν ἀποτελούντων τὸ σύστημα. Διὰ τὴν ὀλικὴν ταύτην στροφορμὴν $\mathcal{G}$ ἰσχύει τὸ ἐξῆς θεώρημα: *Τὸ σύστημα, ἐπὶ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης ροπῆς $\mathcal{M}$, μεταβάλλει τὴν στροφορμὴν του, συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν*

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ τυχόν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐξασκούμεναι ἐσωτερικαὶ ροπαὶ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν, ἀφοῦ αὗται, κατὰ τὸ ἀξίωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις», ἀλληλοαναιροῦνται.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ὅτι, *ὅταν ἡ ἐπὶ τινος συστήματος ἐξασκουμένη (συνισταμένη) ροπή εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ στροφορμὴ του παραμένει σταθερά.* Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ **θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς** ἐνὸς συστήματος.



Σχ. 126. Ἡ στροφή τοῦ τροχοῦ κατὰ μίαν φοράν προκαλεῖ στροφήν τοῦ ἀνθρώπου κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν.

Ἐφαρμογή. Ἐπὶ καθίσματος, δυνάμενου νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα μετὰ ἐλαχίστας τριβάς, κάθεται ἄνθρωπος, κρατῶν διὰ τῆς μίας χειρὸς τὸν ἄξονα ἐνὸς τροχοῦ κατακόρυφως (σχ. 126). Ἐὰν οὔτε ὁ ἄνθρωπος, οὔτε ὁ τροχὸς στρέφονται, ἡ στροφορμὴ τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἡ στροφορμὴ τοῦ τροχοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν, ἐπομένως καὶ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα αὐτῶν (δηλ., ἡ στροφορμὴ τοῦ συστήματος) εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἄν, τώρα, ὁ ἄνθρωπος θέσῃ εἰς περιστροφὴν τὸν τροχὸν διὰ τῆς ἄλλης χειρὸς καὶ τοῦ προσδώσῃ γωνιακὴν ταχύτητα ω_1 , παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν μετὰ γωνιακὴν ταχύτητα ω_2 . Τοῦτο ἐξηγεῖται

ὡς ἑξῆς: Ἡ στροφορμὴ τοῦ συστήματος «ἄνθρωπος· τροχός», λόγῳ τῆς μὴ ὑπάρξεως ἑξωτερικῆς ροπῆς, πρέπει νὰ παραμένῃ σταθερὰ (δηλ., ἴση πρὸς μηδέν), ἄρα ἔχομεν

$$\begin{aligned} \delta\lambdaικὴ \sigmaτροφορμῆ_{(πρὸ)} &= \delta\lambdaικὴ \sigmaτροφορμῆ_{(μετὰ)} \\ 0 + 0 &= \Theta_r \cdot \omega_r + \Theta_a \cdot \omega_a \end{aligned}$$

ἐνθα Θ_r καὶ Θ_a εἶναι αἱ ροπαὶ ἄδρανεῖας τοῦ τροχοῦ καὶ τοῦ ἀνθρώπου.

Ἐκ τῆς ἑξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα τοῦ ἀνθρώπου τὴν σχέσιν

$$\omega_a = - \frac{\Theta_r}{\Theta_a} \cdot \omega_r.$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ, ἀκριβῶς, ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ ἀνθρώπου ἔχει φορὰν, ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ τροχοῦ.

§ 104. Κρούσεις. Ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς καὶ τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν εἰς τὰ προβλήματα τῆς **κρούσεως**. Ἐπειδὴ, συνήθως, τὸ φαινόμενον τῆς κρούσεως δύο οἰωνδῆ-ποτε σωμάτων διαρκεῖ τόσον ὀλίγον χρόνον, ὥστε νὰ εἶναι δυσχερὲς ἡ παρακολούθησις αὐτοῦ, θὰ περιγράψωμεν, ἐνταῦθα, εἰδικὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ὅροι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διάρκεια τῆς συγκρούσεως νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη: Ἐκ δύο ἁμαξίων, ἐφωδιασμένων διὰ συγκρουστήρων (σχ. 127), τὸ ἓν ἀκίνηται, ἐνῶ τὸ ἄλλο, κινούμενον μετ' ὀρισμένην ταχύτητα,



Σχ. 127. Διάταξις διὰ τὴν βραδείαν ἐπίδειξιν τῶν νόμων τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως.

συγκρούεται μετ' τὸ πρῶτον. Εὐθὺς ὡς οἱ δύο συγκρουστήρες ἔλθουν εἰς ἐπαφήν, τὰ ἐλατήριά των ἀρχίζουν συμπιεζόμενα, ἀφοῦ δὲ ἀποκτήσουν μίαν μεγίστην παραμόρφωσιν, ἐπανατοῦν βαθμιαίως τὸ ἀρχικόν των μήκος. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς συγκρούσεως, αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τῶν ἐλατηρίων ἐπὶ τῶν δύο ἁμαξίων, μεταβάλλονται χρονικῶς, περίπου κατὰ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 74. Ἡ ἐνέργεια, ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν παραμόρφωσιν τῶν ἐλατηρίων, λαμβάνεται ἐκ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ κινουμένου ἁμαξίου (ἐνεκα τοῦ ὁποῦ, ἀκριβῶς, ἐπέρχεται καὶ ἡ παρατηρουμένη ἐλάττωσις τῆς ταχύτητός του). Μετὰ τὸ πέρας τῆς συγκρούσεως, τὰ δύο ἁμαξία ἀποχωρίζονται καὶ κινοῦνται μετ' νέας ταχύτητας, ἡ δὲ δυναμικὴ ἐνέργεια τῶν ἐλατηρίων ἔχει μετατραπῇ, ἐκ νέου, εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν ἁμαξίων.

Ἄν τὰ δύο ἐλατήρια ᾗσαν τελείως ἐλαστικά, ἡ δυναμικὴ ἐνέ-

γεια τῆς παραμορφώσεως θὰ μετετρέπετο ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν (**τελείως ἐλαστικὴ κρούσις**). Ἐν, ὅμως, ταῦτα δὲν εἶναι τελείως ἐλαστικά, τότε μέρος τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τῆς ἐλαστικῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἐν, τέλος, τὰ ἐλατήρια εἶναι τελείως πλαστικά, ὅλη ἡ ἐνέργεια τῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται εἰς θερμότητα (**τελείως πλαστικὴ κρούσις**). Παράδειγμα τελείως πλαστικῆς κρούσεως εἶναι ἡ κρούσις δύο μολυβδίνων σφαιρῶν.

Κατωτέρω θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς **κεντρικῆς κρούσεως** δύο σφαιρῶν (σχ. 128), (δηλ., τῆς κρούσεως ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ταχύτητες κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς ἐνούσης τὰ δύο κέντρα αὐτῶν), εἰς τὰς ἄκρας περιπτώσεις τῆς τελείως ἐλαστικῆς κρούσεως καὶ τῆς τελείως πλαστικῆς κρούσεως.

α) **Τελείως ἐλαστικὴ κρούσις**. Αἱ δύο σφαῖραι, τῶν ὁποίων αἱ μᾶζαι εἶναι m_1 καὶ m_2 , κινούνται μὲ ταχύτητας v_1 καὶ v_2 , συγκρούμεναι δὲ κεντρικῶς, ἀποχωρίζονται μὲ νέας ταχύτητας v'_1 καὶ v'_2 . Ζητοῦμεν νὰ εὗρωμεν τὰς δύο ταύτας ταχύτητας:



Σχ. 128. Κεντρικὴ κρούσις δύο σφαιρῶν: Αἱ ταχύτητες αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς ἐνούσης τὰ δύο κέντρα των.

Ἐφ' ὅσον ἡ κρούσις εἶναι τελείως ἐλαστικὴ, ἔπεται ὅτι ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν δύο σφαιρῶν

μετὰ τὴν κρούσιν θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως. Ἦτοι

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2.$$

Ἄφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν δύο σφαιρῶν δὲν ἐξασκοῦνται ἑξωτερικαὶ δυνάμεις, τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων ὑπολογίζομεν τὰς δύο ἀγνώστους ταχύτητας v_1' καὶ v_2' .

β) **Τελείως πλαστικὴ κρούσις**. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ σφαῖραι, μετὰ τὴν σύγκρουσιν, δὲν ἀποχωρίζονται, ἀλλὰ κινούνται, πλέον, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα

$$v_1' = v_2'. \quad (1)$$

Κατὰ ταῦτα, εἰς τὴν τελείως πλαστικὴν κρούσιν δὲν ἐπιτρέπεται νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ἀφοῦ μέρος τῆς ἐνεργείας ταύτης μετετρέπη εἰς θερμότητα. Τὸ θεώρημα, ὅμως, διατηρήσεως τῆς ὀρμῆς ἰσχύει—ἀφοῦ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπὶ τῶν σφαιρῶν δὲν ἐξασκοῦνται ἑξωτερικαὶ δυνάμεις—ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ τιμὴ τῆς ζητουμένης κοινῆς ταχύτητος $v' = v'_2$.

Ἐφαρμογή. Βαλλιστικὸν ἔκκρεμές. Τὸ βαλλιστικὸν ἔκκρεμές εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου μετροῦμεν, συνήθως, τὴν ταχύτητα ἑνὸς βλήματος. Ἡ λειτουργία του στηρίζεται ἐπὶ τοῦ φαινομένου τῆς πλαστικῆς κρούσεως.

Τὸ σχῆμα 129 παριστᾷ βαλλιστικὸν ἔκκρεμές, ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς τεμαχίου ξύλου, μάζης M , ἐξηρημένου διὰ δύο νημάτων. Τὸ βλήμα, (μάζης m), κινούμενον μετὰ ταχύτητα v , ἐνσφηνοῦται ἐντὸς τοῦ ἔκκρεμους, ὁπότε τὸ σύστημα τῶν δύο σωμάτων κινεῖται μετὰ ταχύτητα V καί, ὥς ἔκ τούτου, τὸ ἔκκρεμές ἀνυψοῦται κατὰ τι ὕψος y . Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος, σκεπτόμεθα ὥς ἑξῆς: Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα «βλήμα-ἐκκρεμές» εἶναι ἐλεύθερον ἐξωτερικῶν δυνάμεων, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$m \cdot v + 0 = (m + M) \cdot V. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι δυνατὴ ἡ εὗρεσις τῆς ταχύτητος v τοῦ βλήματος, ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ, κατὰ τινὰ τρόπον, ἡ ταχύτης V τοῦ συστήματος. Ἡ ταχύτης αὕτη προσδιορίζεται ὥς ἑξῆς: Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κρούσιν θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot V^2. \quad (2)$$

Τὸ ἔκκρεμές θ' ἀνυψωθῇ μέχρις ἐκείνου τοῦ ὕψους y , εἰς τὸ ὁποῖον ὅλη ἡ ἄνω κινητικὴ ἐνέργεια θὰ μετατραπῇ εἰς δυναμικὴν. Ἐπομένως, ἔχομεν τὴν σχέσιν

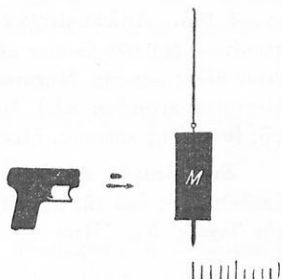
$$\frac{1}{2} (m + M) \cdot V^2 = (m + M) \cdot g \cdot y. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v τοῦ βλήματος τὴν σχέσιν

$$v = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{2g \cdot y}. \quad (4)$$

Ἐάν, λοιπόν, μετρήσωμεν τὴν ἀνύψωσιν y καὶ γνωρίζωμεν τὰς μάζας M καὶ m , εὐρίσκομεν, διὰ τοῦ τύπου (4), τὴν ζητουμένην ταχύτητα v τοῦ βλήματος.

Σημειώσεις. Πειραματικῶς εἶναι εὐχερέστερον νὰ μετρήσωμεν ὅχι τὴν



Σχ. 129. Βαλλιστικὸν ἔκκρεμές.

ἀνύψωσιν y , ἀλλὰ τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως, εἰς τὴν ὁποίαν τίθεται τὸ ἐκκρεμές, ὁπότε εἶναι εὐκόλον νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 129 τὸ πλάτος μετρεῖται ἐπὶ τῆς κάτωθεν τοῦ ἐκκρεμοῦς εὐρισκομένης κλίμακος.

§ 105. Ἀπλὰι μηχαναί. *Μηχαναί*, ἐν γένει, καλοῦνται συστήματα σωμάτων, διὰ τῶν ὁποίων μετασχηματίζεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς. Μηχαναί, π.χ., εἶναι οἱ *κινητῆρες* (βενζινοκινητῆρες, ἠλεκτρικοὶ κινητῆρες κ.λ.), διὰ τῶν ὁποίων μετατρέπεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς (θερμότης καύσεως, ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια κ.λ.) εἰς μηχανικὸν ἔργον.

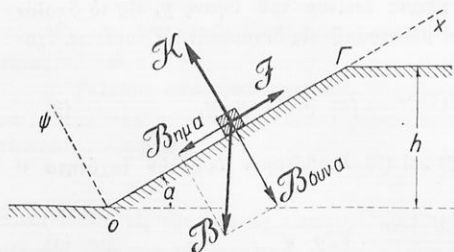
Συντελεστὴς ἀποδόσεως ἡ μιᾶς μηχανῆς καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς ἀποδιδομένης ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἰσχύος N_a διὰ τῆς προσφερομένης εἰς αὐτὴν ἰσχύος N_{π} . Ὅτιοι

$$\eta = \frac{N_a}{N_{\pi}}$$

Αἱ μηχαναὶ ἀποτελοῦνται ἐκ διαφόρων μερῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐκτελέσῃ καθωρισμένην, μόνον, κίνησιν. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς ἐκ τῶν *ἀπλῶν μηχανῶν*, εἰς τὰς ὁποίας τόσον ἡ προσφερομένη, ὅσον καὶ ἡ ἀποδιδομένη ἐνέργεια εὐρίσκονται ὑπὸ μορφήν μηχανικοῦ ἔργου.

Τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει συνήθως, εἶναι ἡ ἀνεύρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς. Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις τὴν σχέσιν ταύτην εὐρίσκομεν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν συνθηκῶν τῆς ἰσορροπίας, εἰς πολυπλοκωτέρας, ὅμως, περιπτώσεις προτιμᾶται, ὥς θὰ ἴδωμεν, ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέων τριβῶν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ πόρισμα ὅτι κατὰ τὴν λειτουργίαν

μιᾶς ἀπλῆς μηχανῆς, τὸ ἔργον τῆς δρώσης δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τῆς ἀνθισταμένης.



Σχ. 130. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκοῦνται αἱ τρεῖς δυνάμεις B , K καὶ F . (Ἡ τριβὴ ἐν προκειμένῳ θεωρεῖται ἀμελητέα).

1) *Κεκλιμένον ἐπίπεδον.* Τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια (π.χ. μία σάνις), εὐρισκομένη ὑπὸ κλίσιν ὡς πρὸς τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν

ἐν σῶμα, καταβάλλοντες δύναμιν, μικροτέραν τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Ἐπὶ τοῦ σώματος (σχ. 130)

ἐπιδρῶν τρεῖς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος τοῦ $\mathcal{B}$, 2) ἡ δύναμις $\mathcal{K}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ 3) ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, μὲ τὴν ὁποίαν ἀνυψώνομεν τὸ σῶμα. Τὴν τριβὴν θεωροῦμεν ἐν προκειμένῳ ἀμελητέαν, ὁπότε ἡ δύναμις $\mathcal{K}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, διότι τότε τὸ ἐπίπεδον μόνον κάθετον δύναμιν ἐπ' αὐτὸ δύναται νὰ μεταδώσῃ (*). Διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐπιδρῶσαι δυνάμεις νὰ ἰσορροποῦν. Ὅτοι θὰ εἶναι

$$\text{συνισταμένη τῶν δυνάμεων} = 0,$$

ὁπότε διὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y λαμβάνομεν, ἀντιστοίχως, τὰς ἐξισώσεις

$$F - B \cdot \eta\mu\alpha = 0$$

$$K - B \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως συνάγομεν ὅτι ἡ δύναμις F , ἡ ἀνυψοῦσα τὸ σῶμα, εἶναι ἴση πρὸς $F = B \cdot \eta\mu\alpha$, δηλαδή εἶναι μικροτέρα τοῦ βάρους B τοῦ σώματος.

Θὰ ὑπολογίσωμεν, τώρα, τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος μέχρι τοῦ ὕψους h : Τὸ ἔργον τοῦτο A εἶναι ἶσον πρὸς

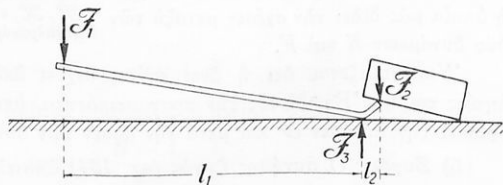
$$A = F \cdot l = F \cdot \frac{h}{\eta\mu\alpha},$$

ἐνθα l εἶναι ἡ ἀπόστασις OG . Ἀλλὰ $F/\eta\mu\alpha = B$, ὁπότε ἔχομεν

$$A = B \cdot h.$$

Βλέπομεν, δηλαδή, ὅτι διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, κατηναλώθη τὸ αὐτὸ ἔργον $B \cdot h$, τὸ ὁποῖον θὰ ἐχρεώζετο καὶ χωρὶς τὴν χρῆσιν αὐτοῦ.

2) **Μοχλός.** Καλοῦμεν *μοχλὸν* σῶμα στερεόν, διὰ τοῦ ὁποίου κάτορθώνομεν νὰ ἐξασκήσωμεν μίαν δύναμιν ἐπὶ τινος σώματος, ἐφαρμόζοντες ἄλλην δύναμιν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ μοχλοῦ. Εἰς τὸ ἐν ἄκρον τοῦ *λοστίου* τοῦ σχήματος 131 ἐξασκοῦμεν τὴν δύναμιν $\mathcal{F}_1$, ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας εἶναι ἡ ἐμφάνισις τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}_2$, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Ἐπὶ τοῦ λοστίου ἐξασκοῦνται, συνολικῶς, τρεῖς δυνάμεις, αἱ $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ καὶ $\mathcal{F}_3$. Αὗται, εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκινήτου λοστίου, ἰσορ-



Σχ. 131. Λοστός ἐν ἰσορροπίᾳ.

(*) Εἰς τὴν § 148, 2 θὰ ἐξετάσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἀλλὰ μὲ τριβὴν.

ροποῦν. Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δυνάμεων προκύπτει ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας $\sum F = 0$, $\sum M = 0$. Ἦτοι

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0 \quad \text{καὶ} \quad -F_1 \cdot l_1 + F_3 \cdot 0 + F_2 \cdot l_2 = 0.$$

3) **Τροχαλία.** Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπούσης ἀκινήτου τροχαλίας (σχ. 132), τὰ ζητούμενα εὐρίσκονται δι' ἐφαρμογῆς τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας. Οὕτω, ἐὰν r παριστᾷ τὴν ἀκτίνα τῆς τροχαλίας, ἡ ἔκφρασις $\sum M = 0$, ἐφαρμοζομένη διὰ τὸ σημεῖον K , μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$-F_1 \cdot r + F_3 \cdot 0 + F_2 \cdot r = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$F_1 = F_2.$$

Σχ. 132. Ἀκίνητος τροχαλία ἐν ἰσορροπίᾳ.

4) **Κοχλίας.** Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δυνάμεων εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας: Τὸ ἔργον A , τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ (σχ. 133) κατὰ μίαν πλήρη στροφὴν τοῦ κοχλίου, εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = \text{ροπή} \cdot \text{γωνία} = K \cdot l \cdot 2\pi.$$

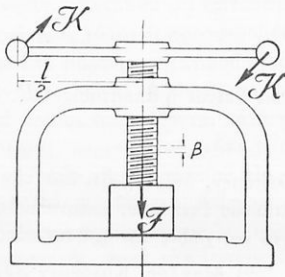
Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ὁ κοχλίας θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὸ διάστημα β , τὸ ὁποῖον καλεῖται **βῆμα** τοῦ κοχλίου. Κατὰ τὴν προχώρησιν, ἡ δύναμις F θὰ καταναλώσῃ ἔργον, ἴσον πρὸς $F \cdot \beta$. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$K \cdot l \cdot 2\pi = F \cdot \beta,$$

ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο δυνάμεων K καὶ F .

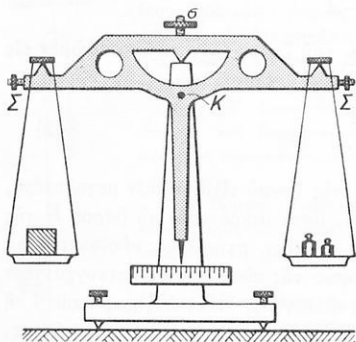
Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἄνω σχέσις ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέας τριβῆς. Ἐπειδὴ εἰς τὴν πραγματικότητα ὑπάρχει τριβή, ὁ κοχλίας ἐξασκεῖ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ καὶ μετὰ τὴν ἄρσιν τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$.

5) **Ζυγός.** Ὁ συνήθης **ζυγός** (σχ. 134) ἀποτελεῖται ἐκ φάλαγγος, στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ἐνὸς πρίσματος, περὶ τὴν ὁποίαν δύναται ἐλευθέρως νὰ περιστρέφεται. Εἰς ἀποστάσεις, κατὰ τὸ δυνατόν ἴσας ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ταύτης, ἐξαρτῶνται δύο πλάστιγγες, στηριζόμεναι καὶ αὗται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν δύο πρισμάτων. Ἐκ κατασκευῆς, αἱ τρεῖς ἀκμαὶ εἶναι παράλληλοι καὶ κεῖνται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος εἶναι στερεωμένος δείκτης, ὁ ὁποῖος κινεῖται ἐνώπιον κλίμακος καὶ ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῆς

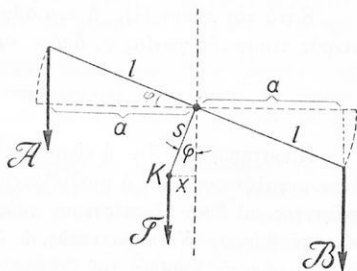


Σχ. 133. Τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔργον, τὸ καταναλισκόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$.

ἐκάστοτε θέσεως τῆς φάλαγγος. Διὰ μικρῶν κινητῶν βαρῶν σ , Σ , εἶναι δυνατόν νά μετατεθῇ τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος κατακορύφως ἢ ὀριζοντίως. Δι' εἰδικοῦ συστήματος δεσμεύεται ἡ φάλαγξ, ὅταν ὁ ζυγὸς δὲν λει-



Σχ. 134.



Σχ. 135. "Όταν αἱ δυνάμεις $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ εἶναι ἄντιστοι, ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὑπὸ κλίσιν.

τουργῇ, διὰ ν' ἀποφεύγεται ἡ καταστροφή τῶν ἀκμῶν ἐκ τυχόν ὑπερφορτίσεων (π.χ., ἐξ ἀποτόμου τοποθετήσεως τῶν σταθμῶν κ.λ.).

Λειτουργία τοῦ ζυγοῦ. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος ἰσορροποῦντος ζυγοῦ ἐξασκοῦνται, ἐκτὸς τῆς δυνάμεως, τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ κεντρικοῦ στηρίγματος, αἱ ἐξῆς τρεῖς δυνάμεις (σχ. 135): Αἱ δυνάμεις $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ ἐκ τοῦ βάρους τῶν πλαστίγγων καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν εὐρισκομένων σωμάτων καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἐκ τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος (τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς δρῶσαν εἰς τὸ κέντρον βάρους K αὐτῆς). Ἡ συνθήκη $\sum M = 0$, γραφομένη ὡς πρὸς ἄξονα, συμπίπτοντα μὲ τὴν ἀκμὴν στηρίξεως, μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$-A \cdot \alpha - \Gamma \cdot x + B \cdot \alpha = 0.$$

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\alpha = l \cdot \sin \varphi \quad \text{καὶ} \quad x = s \cdot \eta \mu \varphi$$

ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς:

$$-A \cdot l \cdot \sin \varphi - \Gamma \cdot s \cdot \eta \mu \varphi + B \cdot l \cdot \sin \varphi = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης προκύπτει ἡ σχέση

$$\varepsilon \varphi = \frac{B - A}{\Gamma} \cdot \frac{l}{s}. \quad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ δύο δυνάμεις A καὶ B δὲν εἶναι ἴσαι, ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ τελευταία ἐξίσωσις (1) καὶ ὅχι εἰς τὴν θέσιν τοῦ μηδενός.

Εὐαισθησία τοῦ ζυγοῦ. **Εὐαισθησία** ε ἐνὸς ζυγοῦ καλεῖται τὸ πη-

λίκον τῆς γωνίας φ , τὴν ὁποίαν προκαλεῖ δοθεῖσα διαφορὰ δυνάμεων $B-A$, διὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης. Ἦτοι εἶναι

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{B-A}.$$

Κατὰ τὸν τύπον (1), ἡ εὐαισθησία τοῦ ζυγοῦ (ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ , ὁπότε $\varepsilon \varphi = \varphi$) ἰσοῦται πρὸς

$$\varepsilon = \frac{l}{F \cdot s}. \quad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐαισθησία ἐνὸς ζυγοῦ εἶναι τόσον μεγαλύτερα, ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ μοχλοβραχίον l , ὅσον μικρότερον τὸ βάρος F τῆς φάλαγγος καὶ ὅσον πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως εὐρίσκεται τὸ κέντρον βάρους K . Πρακτικῶς, ἡ αὔξησις τῆς εὐαισθησίας ἐπιτυγχάνεται δι' ἐλαττώσεως, κυρίως, τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος, διότι αὔξησις τοῦ l ἢ ἐλάττωσις τοῦ s προκαλεῖ, ταυτοχρόνως, αὔξησιν τοῦ χρόνου αἰωρήσεως, ὁπότε ἡ μέτρησις διαρκεῖ ἐπὶ πολὺ, δυσχεραίνουσα τὴν ἐργασίαν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ εὐαισθησία εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φορτίσεως τῶν πλαστίγγων (*).

Ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ. Ὁ ζυγὸς εἶναι ἀκριβής, ἐὰν ἡ θέσις τοῦ δείκτου παραμένῃ ἀμετάβλητος, ὅταν αἱ δύο πλαστίγγες φορτισθοῦν δι' ἴσων σταθμῶν.

Διὰ νὰ ἐλέγξωμεν τὴν ἀκρίβειαν ἐνὸς ζυγοῦ, θέτομεν ἐπὶ τῶν πλαστίγγων δύο βάρη, τοιαῦτα ὥστε ἡ θέσις τοῦ δείκτου νὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος. Ἐάν, τώρα, ἀνταλλάξωμεν τὰ δύο βάρη ἐπὶ τῶν πλαστίγγων καὶ ἐξακολοθῇ ὁ δείκτης νὰ εὐρίσκεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, ἔπεται ὅτι οἱ βραχίονες εἶναι ἴσοι καὶ τὰ βάρη εἶναι ἴσα. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀνακρίβεια ἐνὸς ζυγοῦ δύναται νὰ ἐξουδετερωθῇ διὰ *διπλῆς ζυγώσεως*. Δι' ἀκριβεῖς ζυγίσεις πρέπει, πρὸς τούτοις, νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ *ἀνωσις*, τὴν ὁποίαν ὑφίστανται τὰ σώματα ἐντὸς τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος καὶ ἡ ὁποία εἶναι διάφορος διὰ δύο σώματα, βάρους μὲν τοῦ αὐτοῦ, πυκνότητος, ὁμως, διαφόρου (βλ. § 179).

Μέγιστον φορτίον. Ἐπειδὴ ὑπερβολικὴ φόρτισις τοῦ ζυγοῦ δύναται νὰ προκαλέσῃ μόνιμον κάμψιν τῆς φάλαγγος, διὰ τοῦτο ἕκαστος ζυγὸς χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸ *μέγιστον φορτίον*, τὸ ὁποῖον δὲν πρέπει νὰ υπερβαίνομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρήσωμεν ἄμαξαν, συρομένην ὑπὸ ἵππου. Ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἔασκει ὁ ἵππος ἐπὶ τῆς ἀμάξης εἶναι ἐξωτερικὴ ἢ ἐσωτερικὴ δύναμις τοῦ συστήματος («ἵππος-ἄμαξα»;
(ΑΠ: Ἐσωτερικὴ. Διὰ τί.)

2. Ἄνθρωπος, κρατῶν λίθον, ἵσταται εἰς τὸ κέντρον παγωμένης λίμνης καὶ θέλει νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ὄχθην. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει τριβή, οὐδεμία ὀρίζοντιά δύναμις ἔασκεται ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ

(*) Ὑπενθυμίζεται ὅτι τοῦτο ἰσχύει μόνον ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς ἀκμαὶ εὐρίσκονται ἐντὸς ἐνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὁμως, λόγῳ τῆς κάμψεως τῆς φάλαγγος, τῆς προσεχομένης ὑπὸ τῶν βαρῶν, τὸ κέντρον βάρους κατέρχεται καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ εὐαισθησία ἐλαττοῦται μετὰ τῆς φορτίσεως.

δέν δύναται νά ἐπιταχυνθῇ. Τί πρέπει νά κάμῃ οὗτος, ὥστε νά κατορθώσῃ νά φθάσῃ εἰς τὴν ὄχθην;

3. Εἰς πύθηκος κρατεῖται ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου ἀβαροῦς σχοινίου (ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα), εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὁποίου ὑπάρχει κλάδος βανανῶν, ἴσου πρὸς αὐτὸν βάρους. Ὁ πύθηκος, θέλων νά φθάσῃ τὰς βανάνας, ἀρχίζει νά ἀναρριχᾶται ἐπὶ τοῦ σχοινίου. Κατὰ τὴν ἀναρρίχασιν, ἡ ἀπόστασις πύθηκου—βανανῶν θὰ μεταβληθῇ; (Ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας θεωρεῖται ἀμελητέα).

(ΑΠ: Ἡ ἀπόστασις παραμένει ἀμετάβλητος. Τοῦτο προκύπτει τῇ βοήθειᾳ τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς. Ἐν προκειμένῳ, τὸ σύστημα ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ πύθηκου, τῶν βανανῶν καὶ τῆς τροχαλίας).

4. Βόμβα, αἰωρουμένη ἀκίνητος εἰς χῶρον ἐλεύθερον τοῦ πεδίου βαρύτητος, ἐκρήγνυται, τὰ δὲ ἐκ τῆς ἐκρήξεως τεμάχια διασκορπίζονται μὲ διαφόρους ἑκαστον ταχύτητας. Ἐὰν σχεδιάσωμεν τὸ πολύγωνον τῶν ὁρμῶν ὅλων αὐτῶν τῶν τεμαχίων, τὸ σχῆμα, τὸ ὅποιο θὰ προκύψῃ, θὰ εἶναι κλειστὸν ἢ ὄχι; Διαιτῇ;

5. Εἰς τὸ κατάστρωμα μιᾶς λέμβου, ἐφοδιασμένης δι’ ἰστίων, εἶναι στερεωμένη μία φιάλη πίεσεως, πλήρης ἀερίου ὑπὸ πίεσιν. Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὴν στρόφιγγα καὶ κατευθύνωμεν τὸ ρεῖμα καθέτως ἐπὶ τῶν ἰστίων, ἡ λέμβος θὰ τεθῇ εἰς κίνησιν;

6. Δύο σώματα, εὐρισκόμενα ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ἄνευ τριβῆς, ἀπωθοῦνται ὑφ’ ἐνὸς συσπειρωμένου ἐλατηρίου, τοῦ ὁποίου ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια εἶναι γνωστὴ. Ἐὰν m_1 καὶ m_2 εἶναι αἱ μᾶζαι τῶν δύο σωμάτων, νά εὑρεθῇ ὁ λόγος E_1/E_2 τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν αὐτῶν, ὅταν ταῦτα θὰ ἔχουν ἀπομακρυνθῇ μετὰξὺ τῶν κατὰ τὴν ἀπόστασιν l .

$$(ΑΠ: \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2}{m_1})$$

7. Δύο ἀπολύτως πλαστικά σώματα κινούνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλὰ κατ’ ἀντιθέτους φοράς, τὸ μὲν πρῶτον μὲ ταχύτητα 4 m/sec , τὸ δὲ δεύτερον μὲ ταχύτητα 12 m/sec . Ὅταν τὰ δύο ταῦτα σώματα συγκρουσθῶν, κινούνται μὲ τὴν κοινήν ταχύτητα 3 m/sec καὶ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σώματος. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν τῶν δύο σωμάτων εἶναι 20 kg , νά εὑρεθῇ α) ἡ μᾶζα ἐκάστου σώματος καὶ β) ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν χοῦδον, μετετράπη εἰς θερμότητα.

(ΑΠ: α) $18,75 \text{ kg}$, $1,25 \text{ kg}$, β) 150 Joule)

8. Σῶμα, βάρους B , ἀνυψοῦται διὰ πολυσπάστου, ἀποτελουμένου ἐκ πολλῶν κινητῶν καὶ ἀκινήτων τροχαλιῶν. Παρατηρεῖται ὅτι, ὅταν τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου μετακινηθῇ κατὰ τὴν ἀπόστασιν l , τὸ σῶμα ἀνυψοῦται κατὰ τὴν ἀπόστασιν h . Ζητεῖται ἡ δύναμις K , ἡ ἔλκουσα τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος. Τριβὴ δὲν ὑπάρχει.

$$(ΑΠ: K = B \cdot \frac{h}{l})$$

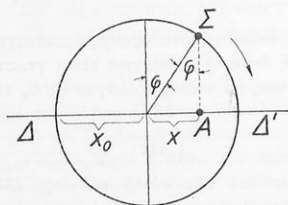
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'

ΓΡΑΜΜΙΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

§ 106. **Γραμμική ἄρμονική ταλάντωση.** Θεωρήσωμεν κινητὸν Σ (σχ. 136), κινούμενον ὁμαλῶς ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἀκτίνος x_0 . Θὰ μελετήσωμεν τὴν κίνησιν τῆς προβολῆς A τοῦ κινητοῦ Σ ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου $\Delta\Delta'$.



Σχ. 136. "Όταν τὸ κινητὸν Σ ἐκτελεῖ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, τὸ σημεῖον A ἐκτελεῖ ἐπὶ τῆς διαμέτρου $\Delta\Delta'$ γραμμικὴν ἄρμονικὴν ταλάντωσιν.

Ἡ κίνησις αὕτη, ἥ ὁποία εἶναι παλινδρομικὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων σημείων τῆς διαμέτρου, καλεῖται **περιοδικὴ κίνησις**, διότι ἐπαναλαμβάνεται ἡ αὐτὴ μετὰ ὀρισμένον χρονικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **περίοδον** T τῆς κινήσεως. Ἡ ἀπόστασις x τοῦ σημείου A ἐκ τοῦ κέντρου, ὀνομάζεται **ἀπομάκρυνσις**. Ἡ ἀπομάκρυνσις εἶναι ἄλλοτε θετικὴ καὶ ἄλλοτε ἀρνητικὴ, μὲ μεγίστη τιμὴν, ἴσην πρὸς $\pm x_0$. Ἡ μεγίστη αὕτη τιμὴ τῆς ἀπομακρύνσεως καλεῖται **πλάτος** τῆς περιοδικῆς κινήσεως.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀπομακρύνσεως x καὶ τοῦ χρόνου t εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ σχήματος λαμβάνομεν

$$x = x_0 \cdot \eta\mu \varphi.$$

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν Σ κινεῖται ὁμαλῶς, ἡ γωνιακὴ του ταχύτης ω εἶναι ἴση πρὸς $\omega = \varphi/t$, ὁπότε ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$x = x_0 \cdot \eta\mu \omega t \quad (1)$$

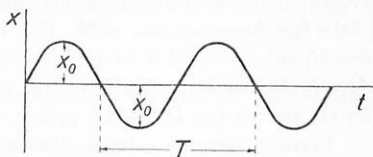
Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπομάκρυνσις x τοῦ σημείου A εἶναι «ἡμιτονοειδής» συνάρτησις τοῦ χρόνου. Γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις (1) παρίσταται διὰ μιᾶς γραμμῆς, ἥ ὁποία καλεῖται **ἡμιτονοειδής** (σχ. 137). Ἡ γωνία ωt , ἥ ὁποία διαρκῶς αὐξάνεται, καλεῖται **φάσις** τῆς κινή-

σεως, τὸ δὲ ω , τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κυκλικῶς κινουμένου σημείου Σ , καλεῖται **κυκλικὴ συχνότης** αὐτῆς. Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$\omega = 2\pi\nu$$

(ἐνθα $\nu = 1/T$ εἶναι ἡ συχνότης τῆς περιοδικῆς κινήσεως).

Ἡ περιγραφεῖσα κίνησις τοῦ σημείου A εἶναι ἡ ἀπλουστάτη τῶν περιοδικῶν κινήσεων καὶ καλεῖται **ἀρμονικὴ ταλάντωσις**, δεδομένου δὲ ὅτι ἐκτελεῖται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, καλεῖται **γραμμικὴ ἀρμονικὴ ταλάντωσις**.



Σχ. 137. Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $x = x_0 \cdot \eta\mu \omega t$. (T εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλάντωσεως).

§ 107. Διαφορά φάσεως. Θεωρήσωμεν τὰς δύο ἀρμονικὰς ταλαντώσεις

$$x = x_0 \cdot \eta\mu \omega t \quad \text{καὶ} \quad y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \delta),$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυκλικὴν συχνότητα ω , ἀλλὰ διάφορον πλάτος καὶ φάσιν. Ἡ διαφορά δ μεταξὺ τῆς φάσεως $\omega t + \delta$ τῆς μιᾶς ταλαντώσεως καὶ τῆς φάσεως ωt τῆς ἄλλης ταλαντώσεως καλεῖται **διαφορὰ φάσεως**, εἶναι δέ, εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα, χρονικῶς σταθερά.

Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρει ἡ περίπτωσις δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν σταθερὰν διαφορὰν φάσεως 90° :

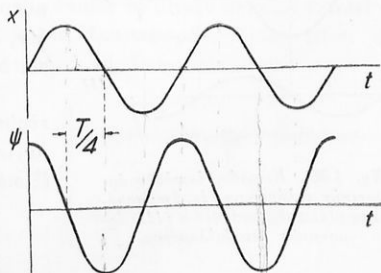
$$x = x_0 \cdot \eta\mu \omega t$$

$$y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + 90^\circ) = y_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \omega t.$$

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τί σημαίνει ἡ διαφορά φάσεως 90° , κατασκευάζομεν τὸν κάτωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὰς δύο ἄνω ἐξισώσεις

Π Ι Ν Α Κ

t	x	y
0	0	y_0
$\frac{T}{4}$	x_0	0
$\frac{T}{2}$	0	$-y_0$
$\frac{3T}{4}$	$-x_0$	0
T	0	y_0



Σχ. 138. Αἱ δύο ταλαντώσεις παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως 90° .

θέσωμεν, διαδοχικῶς, ἀντὶ τοῦ χρόνου t , τὰς τιμὰς $0, T/4, T/2, 3T/4$ καὶ T .

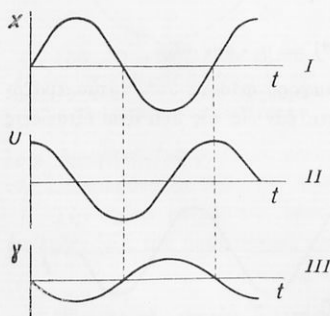
Ὅπως παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ πίνακος, ἡ μία ταλάντωσις λαμβάνει τὴν μεγίστην (ἀπολύτως) ἀπομάκρυνσιν, ἀκριβῶς τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἄλλη ἔχει ἀπομάκρυνσιν μηδὲν (βλ. καὶ σχ. 138). Τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ἄλλως: Διὰ νὰ λάβῃ ἡ δευτέρα ταλάντωσις τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν, τὴν ὁποίαν ἔχει τώρα ἡ πρώτη, πρέπει νὰ παρέλθῃ χρόνος, ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν γωνίαν 90° , δηλ., χρόνος, ἴσος πρὸς $T/4$.

Γενικῶς, διαφορὰ φάσεως δ μοιρῶν μεταξὺ δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἡ μία ταλάντωσις λαμβάνῃ μίαν οἰανδήποτε τιμὴν, διὰ νὰ λάβῃ ἡ ἄλλη τὴν ἀνάλογον τιμὴν, πρέπει νὰ παρέλθῃ χρόνος, ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν γωνίαν δ μοιρῶν. Ὁ χρόνος οὗτος εὐρίσκεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, δεδομένου ὅτι εἰς γωνίαν 360° ἀντιστοιχεῖ χρόνος, ἴσος πρὸς μίαν περιόδον T .

§ 108. Ταχύτης καὶ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τόσον ἡ ταχύτης, ὅσον καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ A , τοῦ ἐκτελοῦντος τὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, μεταβάλλονται ἁρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Ὁ ὑπολογισμὸς δίδει διὰ τὴν ταχύτητα v τὴν ἐξίσωσιν

$$v = v_0 \cdot \eta\mu(\omega t + 90^\circ). \quad (1)$$

Διὰ συγκρίσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς παραγράφου 106 συνάγομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ A μεταβάλλεται ἡμιτονοειδῶς μετὰ τοῦ χρόνου, ἀλλὰ παρουσιάζει διαφορὰν φάσεως 90° ὡς πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν (βλ. καὶ σχῆμα 139).



Σχ. 139. Κινητόν, ἐκτελοῦν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν (I), ἔχει ταχύτητα (II) καὶ ἐπιτάχυνσιν (III) ἁρμονικῶς μεταβαλλομένας.

Ἐπομένως, ἡ ταχύτης θὰ λαμβάνῃ τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν v_0 (πλάτος τῆς ταχύτητος) κατ' ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀπομάκρυνσις λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδέν, ὅταν, δηλ., τὸ κινητὸν A διέρχεται διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ , εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη μεταβάλλεται ἁρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \eta\mu(\omega t + 180^\circ). \quad (2)$$

Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ ἀπομάκρυνσις παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως 180° . Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ φορὰ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι πάντοτε ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς ἀπομακρύνσεως (βλ. καὶ σχ. 139, III).

Ἀποδείξεις τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Τὴν ἐξίσωσιν (1) εὐρίσκομεν, ἂν διαφορίσωμεν ὡς πρὸς τὸν χρόνον τὴν ἐξίσωσιν $x = x_0 \cdot \eta\mu \omega t$, ὁπότε προκύπτει

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu \omega t = x_0 \cdot \omega \cdot \eta\mu(\omega t + 90^\circ). \quad (3)$$

Ἄν τὸ πλάτος $x_0 \cdot \omega$ τῆς ταχύτητος, συμβολίσωμεν διὰ τοῦ v_0 , λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$v = v_0 \cdot \eta\mu(\omega t + 90^\circ).$$

Ἡ ἐξίσωσις (2), ἥ ὁποία μᾶς δίδει τὴν ἐπιτάχυνσιν, εὐρίσκεται διὰ διαφορίσεως ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς ἐξισώσεως (3). Ἦτοι

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \eta\mu \omega t = x_0 \cdot \omega^2 \cdot \eta\mu(\omega t + 180^\circ).$$

Ἄν τὸ πλάτος $x_0 \cdot \omega^2$ τῆς ἐπιταχύνσεως συμβολίσωμεν διὰ τοῦ γ_0 , λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \eta\mu(\omega t + 180^\circ).$$

§ 109. Ἀπαραίτητος ὅρος διὰ τὴν παραγωγὴν ἐλευθέρας ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Κατὰ τὴν προηγουμένην παραγράφον, ὑλικὸν σημεῖον, μάζης m , ἐκτελοῦν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, ἔχει ἐπιτάχυνσιν, ἥ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου. Διὰ νὰ ἔχῃ, ὅμως, τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπιτάχυνσιν, πρέπει νὰ δοῇ ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, διὰ νὰ παραχθῇ ἁρμονικὴ ταλάντωσις, πρέπει ἡ δύναμις αὕτη νὰ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν καὶ νὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρὸς αὐτὴν φοράν. Ἦτοι, ἁρμονικὴ ταλάντωσις παράγεται, ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις

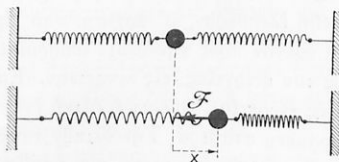
$$F = -D \cdot x$$

Ἡ σταθερὰ D τῆς ἀναλογίας καλεῖται **κατευθύνουσα δύναμις** καὶ ὀρίζεται, ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ὡς τὸ ἀρνητικὸν πηλίκον τῆς δυνάμεως F , τῆς προκαλούσης τὴν ἀπομάκρυνσιν x , διὰ τῆς ἀπομακρύνσεως ταύτης. Ἡ δύναμις F , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἐκτελεῖ τὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, καλεῖται **δύναμις ἐπαναφορᾶς**, διότι τείνει πάντοτε νὰ ἐπαναφέρῃ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του.

Ὁ ἀπαραίτητος οὗτος ὅρος ἐκ-

πληροῦται εἰς τὴν περίπτωσιν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 140: Σφαῖρα, μάζης m , κρατεῖται ὀριζοντίως ὑπὸ δύο ὁμοίων ἐλατηρίων (θεωρουμένων ἄνευ μάζης). Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὴν σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της κατὰ τὴν ἀπόστασιν x , ἀναπτύσσεται ὑπὸ τῶν ἐλατηρίων δύναμις ἐπαναφορᾶς $\mathcal{F}$,

ἥτις τείνει νὰ τὴν ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς. Ἡ δύναμις αὕτη εἶναι



Σχ. 140. Ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς $\mathcal{F}$ ἔχει φοράν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ἀπομακρύνσεως x .

ανάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν (νόμος τοῦ Hooke, § 133). Ἦτοι εἶναι $F = -D \cdot x$, ἔνθα D εἶναι ἡ κατευθύνουσα δύναμις τῶν ἐλατηρίων (*). Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως, ἔπεται ὅτι, ἐν ἀπομακρύνωμεν τὴν σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της καί, κατόπιν, τὴν ἀφήσωμεν ἐλευθέραν, αὕτη, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, θὰ ἐκτελέσῃ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, ἡ ὁποία καλεῖται *ἐλευθέρα ἁρμονικὴ ταλάντωσις*.

§ 110. Ἰδιοπερίοδος - ιδιοσυχνότης. Ἡ κυκλικὴ συχνότης ω τῆς ἐλευθέρας ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, ἡ ὁποία καλεῖται *κυκλικὴ ιδιοσυχνότης*, παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1)$$

(Ὁ τύπος οὗτος ἀποδεικνύεται κατωτέρω).

Ἐκ τῆς κυκλικῆς ιδιοσυχνότητος (τύπος (1)) ὑπολογίζεται ἡ *ιδιοπερίοδος* T καὶ ἡ *ιδιοσυχνότης* ν διὰ τῶν τύπων

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{καὶ} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

§ 111. Ἐνέργεια ὕλικου σημείου, ἐκτελοῦντος γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν. Διὰ ν ἀπομακρύνωμεν τὸ κινητὸν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του, πρέπει, ὅπως εἶδομεν, νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ δύναμιν, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν μετακίνησιν, παράγει ἔργον. Τὸ ἔργον τοῦτο ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφήν δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ κινητοῦ. Οὕτω, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ παραμορφωθὲν ἐλατήριο τοῦ σχήματος 140, ὑπελογίσθη εἰς τὴν § 59 ἴση πρὸς

$$E_{\delta\nu\nu} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

ἐνθα x εἶναι ἡ ἐκάστοτε τιμὴ τῆς ἀπομακρύνσεως. Ἐάν, τώρα, τὸ κινητὸν ἀφεθῇ ἐλεύθερον, θ' ἀρχίσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ἐπαναφορᾶς, κινούμενον πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, μετατρεπομένης, οὕτω, τῆς δυναμικῆς του ἐνεργείας εἰς κινητικὴν. Κατὰ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, πρέπει ἡ ὅλικη ἐνέργεια ($E_{\delta\nu\nu} + E_{κιν}$) τῆς ταλαντώσεως νὰ παραμένῃ σταθερά. Τὴν ὅλικὴν ταύτην ἐνέργειαν ὑπολογίζομεν, εὐκόλως, ἐκ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ κινητὸν, ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσις x εἶναι ἴση μὲ τὸ πλάτος x_0 , διότι, ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμήν, ἡ κινη-

(*) Αὕτη εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἄν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκήσωμεν τὴν δύναμιν F καὶ μετρήσωμεν τὴν προκαλουμένην ἀπομάκρυνσιν x , τὸ πηλίκον F/x μᾶς δίδει τὴν κατευθύνουσαν δύναμιν τῶν ἐλατηρίων.

τικὴ ἐνέργεια ἔχει μηδενισθῇ. Ἔχομεν, συνεπῶς,

$$E_{ολ} = E_{δν} + 0$$

$$\eta \quad E_{ολ} = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὅλική ἐνέργεια μιᾶς ταλαντώσεως εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους αὐτῆς.

✓
§ 112. Θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς παραγωγῆς τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Θεωρήσωμεν ὕλικὸν σημεῖον, μάζης m , τὸ ὁποῖον εἶναι «ἐλαστικῶς» συνδεδεμένον μὲ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου, δηλ., δοθῇ μία δύναμις ἐπαναφορᾶς F , ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν x ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἡ κίνησις, τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ σημεῖον τοῦτο, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, ὁπότε ἔχομεν

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \eta \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x \quad \eta \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0. \quad (1)$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις εἶναι ἡ τυπικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἡ λύσις αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$x = x_0 \cdot \eta \mu \omega t. \quad (2)$$

Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ω εὐρίσκεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὴν τιμὴν τοῦ x , ὥς αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ τὴν τιμὴν τοῦ d^2x/dt^2 , ὥς αὕτη προκύπτει διὰ δύο διαδοχικῶν διαφορίσεων τῆς ἐξισώσεως (2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \eta \mu \omega t,$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_0 \cdot \eta \mu \omega t + D \cdot x_0 \cdot \eta \mu \omega t = 0.$$

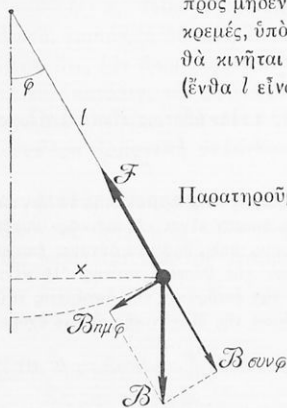
Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν, δι' ἀπλοποιήσεως, τὴν ἐξίσωσιν

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

§ 113. Ἀπλοῦν (ἢ μαθηματικὸν) ἔκκρεμές. Ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω εὐρίσκομεν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ **μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς**. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ ὕλικου σημείου, μάζης m , ἐξηρητημένου δι' ἄβαροὺς καὶ μὴ ἔκτατοῦ νήματος (σχ. 141). Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ ἔκκρεμές ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ τὴν γωνίαν φ καὶ ἀκολουθῶς τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐπιδρῶν ἐπ' αὐτοῦ δύο δυνάμεις: τὸ βάρος $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἔξασκει ἐπ' αὐτοῦ τὸ νῆμα. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$ εἰς δύο συνιστώσας, μίαν—τὴν $\mathcal{B} \cdot \sigma \nu \varphi$ —κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος καὶ τὴν ἄλλην—τὴν $\mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi$ —καθέτως ἐπ' αὐτήν. Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς π ο λ ὺ μ ι κ ρ ῶ ς γωνίας φ , ἡ κίνησις τοῦ ἔκκρεμοῦς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι δὲν γίνεται ἐπὶ τόξου, ἀλλ' ἐπὶ τῆς χορδῆς x , ἡ ὁποία εἶναι ὀριζοντία. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{B} \cdot \sigma \nu \varphi$ ἰσορροποῦν· δεδομέ-

νου ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἐκκρεμοῦς κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν, ὅμως, τῆς χορδῆς τὸ ἐκκρεμές, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{K} = -\mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi$, θὰ κινῆται ἐπιταχυνόμενον. Ἐπειδὴ εἶναι $\eta \mu \varphi = x/l$ (ἐνθα l εἶναι τὸ μήκος τοῦ ἐκκρεμοῦς), ἔχομεν

$$\mathcal{K} = -\frac{\mathcal{B}}{l} \cdot x.$$



Σχ. 141.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ γωνία φ , κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτρέπεται τὸ ἐκκρεμές, εἶναι πολὺ μικρά, ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς $\mathcal{K}$ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως x καὶ ἔχει φορὰν, ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν αὐτῆς. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν, λοιπόν, τῆς δυνάμεως $\mathcal{K}$, τὸ ἐκκρεμές θὰ ἐκτελέσῃ γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν.

Ἡ περίοδος T τοῦ ἐκκρεμοῦς ὑπολογίζεται, ἐὰν εἰς τὸν γνωστὸν τύπον

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

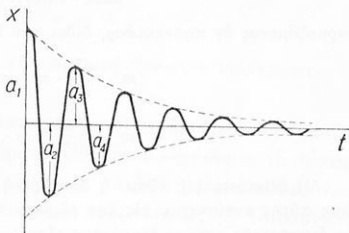
ἀντικαταστήσωμεν τὴν κατευθύνουσαν δύναμιν D διὰ τοῦ ἴσου της $\mathcal{B}/l = m \cdot g/l$, (τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κατευθύνουσα δύναμις τοῦ ἐκκρεμοῦς), ὁπότε θὰ λάβωμεν

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ μήκους l αὐτοῦ καὶ ἀντίστροφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g .

§ 114. Ἀμείωτος καὶ φθίνουσα ταλάντωσις. Ἡ εἰς τὰ προηγούμενα περιγραφεῖσα ταλάντωσις θεωρεῖται ὅτι διατηρεῖ τὸ πλάτος της σταθερόν, ἔνεκα τοῦ ὁποίου καλεῖται **ἀμείωτος** (ἢ **συντηρουμένη**) **ταλάντωσις**. Ἐν τούτοις, ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι τὸ πλάτος τῶν ταλαντώσεων ἐλαττοῦται συνεχῶς, ἐφ' ὅσον αὗται δὲν διεγερθοῦν ἐκ νέου, μέχρις ὅτου γίνῃ μηδέν, καὶ τοῦτο διότι ἡ ἐνέργεια τῆς ταλαντώσεως μετατρέπεται, ὀλίγον κατ' ὀλίγον, εἰς ἄλλας μορφὰς ἐνεργείας, π.χ., θερμότητα. Αἱ τοιαῦται ταλαντώσεις καλοῦνται **φθίνουσαι** (ἢ **ἀποσβευνόμεναι**) (σχ. 142). Ἡ ἐλάττωσις τοῦ πλάτους προέρχεται ὑπὸ δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιτίθενται

εἰς τὴν κίνησιν (π.χ., τριβή, ἀντίστασις τοῦ ἀέρος κ.λ.), γίνεται δὲ κατὰ διαφόρους νόμους, ἀναλόγως τοῦ τύπου τῆς δυνάμεως, τῆς ἀντιτιθεμένης εἰς τὴν κίνησιν. Μία, प्राकृतिकῶς σπουδαιοτάτη, περίπτωσις εἶναι ἐκεῖνη, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις, ἡ ἀντιδρῶσα εἰς τὴν κίνησιν, εἶναι ἀνάλογος τῆς ταχύτητος (π.χ., φθίνουσα ταλάντωσης γαλβανόμετρον, λόγω ἐπαγωγικῶν ρευμάτων, κίνησις ἐκκρεμοῦς ἐντὸς τοῦ ἀέρος κ.λ.). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, τὰ διαδοχικὰ πλάτη $a_1, a_2, a_3 \dots$ τῶν ταλαντώσεων ἀποτελοῦν, ὥς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον. Ὁ σταθερὸς λόγος k δύο πλατῶν, ἀφισταμένων ἀλλήλων κατὰ μίαν περίοδον, καλεῖται **λόγος ἀποσβέσεως**. Ἦτοι εἶναι

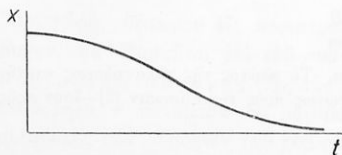


Σχ. 142. Φθίνουσα ταλάντωσης με μικράν, σχετικῶς, ἀπόσβεσιν.

$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+2}}.$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ταλαντώσεων, μετὰ τὸν ὁποῖον ἡ ταλάντωσης ἔχει प्राकृतिकῶς ἀποσβεσθῇ ἔντελως, ἐξαργαῖται, προφανῶς, ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς ἀντιδρώσης δυνάμεως.

§ 115. Ἀπεριοδικὴ ταλάντωσης. Ἐὰν αἱ ἀντιδρῶσαι εἰς τὴν κίνησιν δυνάμεις εἶναι πολὺν μεγάλαι, ἡ ἀπόσβεσις γίνεται, ἐπίσης, πολὺν μεγάλη καὶ τὸ κινητὸν ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας, χωρὶς νὰ τὴν ὑπερβῇ (σχ. 143). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ταλάντωσης καλεῖται **ἀπεριοδικὴ ταλάντωσης**. Τοιαύτην ταλάντωσιν ἐκτελεῖ, π.χ., ἐκκρεμές, τὸ ὁποῖον ἀφήνομεν νὰ κινηθῇ ἐντὸς ὑγροῦ μεγάλου συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς (π.χ. μέλι, γλυκερίνη κ.λ.).



Σχ. 143. Ἀπεριοδικὴ ταλάντωσης. (Ταλάντωσης με πολὺν μεγάλην ἀπόσβεσιν).

§ 116. Θεωρητικὴ διερεύνησις τῶν ταλαντώσεων με ἀπόσβεσιν. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ταλάντωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν τὴν εἰς τὴν κίνησιν ἀντιδρῶσαν δύναμιν K ἀνάλογον τῆς ταχύτητος v . Ἦτοι

$$K = -p \cdot v = -p \cdot \frac{dx}{dt}$$

ἐνθα p εἶναι μία σταθερά, καλουμένη **σταθερὰ ἀποσβέσεως**. (Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι ἡ ἀντιδρῶσα δύναμις ἔχει φορὰν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος).

Ἐπὶ τοῦ κινήτου, ἐπομένως, δρῶν δύο δυνάμεις - ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς $-D \cdot x$ καὶ ἡ ἀντιδρῶσα δύναμις $-p \cdot dx/dt$. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς

$$m\ddot{x} + \text{ἐπιτάχυνσις} = \text{δύναμις},$$

ἐφαρμοζόμενος ἐν προκειμένῳ, δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -p \cdot \frac{dx}{dt} - D \cdot x$$

$$\text{ἢ} \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + p \cdot \frac{dx}{dt} + D \cdot x = 0. \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς θεωρουμένης κινήσεως, ἡ δὲ λύσις αὐτῆς συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν x καὶ t . Ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς ταύτης ἐξισώσεως εἶναι

$$x = a_1 \cdot e^{-\frac{p}{2m} \cdot t} \cdot \eta \mu \omega t \quad (2)$$

ἐνθα

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{p^2}{4m^2}}.$$

(Τὸ e εἶναι ἡ βάση τῶν φυσικῶν λογαριθμῶν: $e \approx 2,72$).

Ἀναλόγως τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σταθερὰ ἀποσβέσεως p , διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1^η περίπτωσις: Πολὺ μεγάλη ἀπόσβεσις. Ὅταν εἶναι

$$\frac{p^2}{4m^2} > \frac{D}{m}$$

ἡ κυκλικὴ ἰδιοσυχνότης λαμβάνει φανταστικὰς τιμὰς, ἡ ταλάντωσις, δηλ., εἶναι ἀπεριοδική.

2^α περίπτωσις: Μετρία ἀπόσβεσις. Ὅταν εἶναι

$$\frac{p^2}{4m^2} < \frac{D}{m}$$

ἡ ταλάντωσις εἶναι περιοδική, ἀλλὰ φθίνουσα. Τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως ταύτης κατὰ τινὰ χρονικὴν στιγμὴν t θὰ εἶναι—συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2)—ἴσον πρὸς

$$a_1 \cdot e^{-\frac{p}{2m} \cdot t}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλάτος ἐλαττοῦται ἐκθετικῶς μετὰ τοῦ χρόνου (βλ. καὶ σχῆμα 142, ἐστιγμένη καμπύλη). Ἐάν θεωρήσωμεν δύο διαδοχικὰ πλάτη a_1 καὶ a_2 , δηλ., δύο μεγίστας τιμὰς τοῦ x , ἀφισταμένας ἀλλήλων κατὰ μίαν περίοδον, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος ἀποσβέσεως k θὰ εἶναι σταθερός, ἥτοι θὰ ἔχωμεν

$$k = \frac{a_1}{a_2} = e^{\frac{p}{2m} \cdot T}$$

ἐνθα $T = 2\pi/\omega$ εἶναι ὁ μεσολαβήσας χρόνος, δηλ., ἡ περίοδος. Διὰ λογαριθμώσεως λαμβάνομεν τὴν **λογαριθμικὴν μείωσιν** A :

$$A = \ln k = \frac{p}{2m} \cdot T.$$

3η περίπτωση: "Ανυ αποσβέσεως. Όταν είναι $p=0$, ή εξίσωσις (1) απλουστεύεται εις την εξίσωσιν

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0,$$

ή όποία, ως είδομεν εις την παράγραφον 112, παριστᾷ ἀμείωτον ταλάντωσιν.

§ 117. Ξηναγκασμένη ταλάντωση. Θεωρήσωμεν σύστημα, τὸ όποϊον δύναται νά ταλαντοῦται ἐλευθέρως. Ἐάν ἀπομακρύνωμεν τὸ σύστημα τοῦτο ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ κατόπιν τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐκτελέσῃ, ὡς γνωστόν, ἐλευθέραν ταλάντωσιν, τῆς όποίας ἡ ἰδιοσυχνότης ἔστω ν_0 . Ἐάν, τώρα, ἐπὶ τοιούτου συστήματος ἐπιδρῷ ἐξωτερικὴ περι-
δικὴ δύναμις, συχνότητος ν , τοῦτο θὰ ἐκτελέσῃ μίαν ταλάντωσιν, ἡ όποία καλεῖται **ξηναγκασμένη ταλάντωση**.

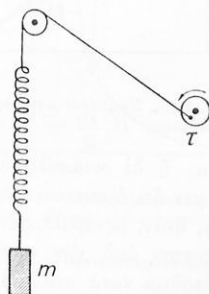
Μηχανικὸν παράδειγμα ξηναγκασμένης ταλαντώσεως εἶναι τὸ ἐπόμε-
νον: Ἡ μᾶζα m (σχ. 144) ἔξαρτᾶται ἐξ ἑνὸς ἐλατηρίου, τὸ όποϊον
εἶναι στερεωμένον διὰ νήματος ἐπὶ τοῦ τυμ-
πάνου τ , τὸ όποϊον δύναται νά περιστρέφε-
ται περὶ ἄξονα. Ἄν ἐκτείνωμεν τὸ ἐλατήριο
καὶ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, τὸ σύστημα θὰ
ἐκτελέσῃ ἐλευθέραν ταλάντωσιν με-
ἰδιοσυχνότητα ν_0 , ἔξαρτωμένην ἐκ τῆς μᾶζης
 m καὶ τῆς κατευθυνούσης δυνάμεως D τοῦ
ἐλατηρίου, κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Ἄν, τώρα, θέσωμεν εἰς περιστροφὴν τὸ τύμ-
πανον, θὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ συστήματος μία
περιοδικὴ δύναμις (*), τῆς όποίας τὴν
συχνότητα ν δυνάμεθα νά μεταβάλλωμεν διὰ
μεταβολῆς τῶν στροφῶν τοῦ τυμπάνου. Ἡ ταλάντωση, τὴν όποίαν θὰ ἐκτε-
λέσῃ, τώρα, ἡ μᾶζα m , εἶναι ξηναγκασμένη.

Θὰ ἐξετάσωμεν α) τὴν συχνότητα καὶ β) τὸ πλάτος αὐτῆς: Ὅπως ἀπο-
δεικνύεται κατωτέρω, κατὰ τὴν ξηναγκασμένην ταλάντωσιν ἡ μᾶζα m τα-
λαντοῦται μετὰ τὴν συχνότητα ν τῆς ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως καὶ ὄχι,
πλέον, μετὰ τὴν ἰδιοσυχνότητα ν_0 τῆς ἐλευθέρως ταλαντώσεως. Ὅσον ἀφορᾷ
τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως, τοῦτο μεταβάλλεται μετὰ τῆς συχνότητος τῆς
ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

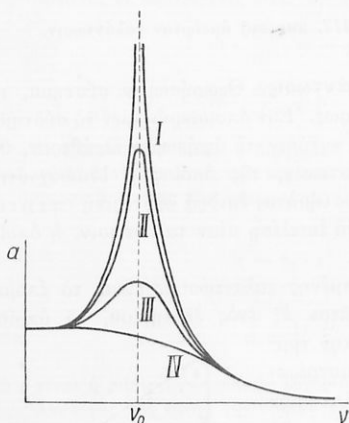
1) **Ταλάντωση χωρὶς ἀπόσβεσιν.** Ἄν ἡ συχνότης ν τῆς διεγειρούσης



Σχ. 144. Ἡ μᾶζα m , ἐπὶ
τὴν ἐπίδρασιν περιοδικῆς δυ-
νάμεως, ἐκτελεῖ ξηναγκα-
σμένην ταλάντωσιν.

(*) Διὰ νά εἶναι ἡ δύναμις αὕτη ἁρμονικὴ, πρέπει ἡ ἀπόστασις τῆς τροχαλίας ἀπὸ
τοῦ τυμπάνου νά εἶναι ἀπειρος.

δυνάμειος είναι πολὺ μικροτέρα ἢ πολὺ μεγαλυτέρα τῆς ιδιοσυχνότητος ν_0 τοῦ συστήματος, τὸ πλάτος a τῆς ἐξηναγκασμένης ταλαντώσεως είναι, σχετικῶς, μικρόν. Ἐν, ὅμως, ἡ συχνότης τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμειος λάβῃ τιμὴν,



Σχ. 145. Καμπύλαι συντονισμοῦ. I: ἄνευ ἀποσβέσεως II, III καὶ IV: μετ' ἀποσβέσεων.

μέγαν, ἡ δὲ καμπύλη ὀλιγώτερον ὀξεῖα (III). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ συντονισμὸς δὲν είναι ὀξὺς. Κατὰ ταῦτα, ὁ συντονισμὸς είναι ὀξὺς, ὅταν, μεταβαλλομένης τῆς συχνότητος τῆς διεγερούσης δυνάμειος κατ' ἐλάχιστον ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ συντονισμοῦ, τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως ἐλαττωταὶ κατὰ πολὺ. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅσον ἡ ἀπόσβεσις είναι μικροτέρα, τόσον ὁ συντονισμὸς είναι ὀξύτερος.

§ 118. Θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς ἐξηναγκασμένης ταλαντώσεως. Ἐπὶ τοῦ ὁμοίου σημείου, μάξις m , ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: Ἡ δυνάμις ἐπαναφορᾶς $-D \cdot x$, ἡ ἐξωτερικὴ περιοδικὴ δυνάμις $F = F_0 \cdot \eta \mu \omega t$ καὶ ἡ τριβὴ $-p \cdot dx/dt$. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (I) τῆς § 110, ἡ κατεπύθονουσα δυνάμις D είναι δυνατόν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς μάξις m καὶ τῆς κυκλικῆς ιδιοσυχνότητος ω_0 , τὴν ὁποίαν θὰ εἴχε το σῦστημα, ἐάν ἐταλαντοῦτο ἐλευθέρως. Ἦτοι

$$D = m \cdot \omega_0^2.$$

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς, ἐφαρμοζόμενος ἐν προκειμένῳ, δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -p \cdot \frac{dx}{dt} - m \cdot \omega_0^2 \cdot x + F_0 \cdot \eta \mu \omega t$$

ἢ

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + p \cdot \frac{dx}{dt} + m \cdot \omega_0^2 \cdot x = F_0 \cdot \eta \mu \omega t.$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς διαφορικῆς ταύτης ἐξίσωσεως είναι πολὺπλοκος. Ἐνταῦθα

θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μορφήν τῆς σχέσεως $x = f(t)$, ἡ ὁποία παρουσιάζεται μετὰ πάροδον ἀρκετοῦ χρόνου ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιδράσεως τῆς ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως, δηλ., ἀφοῦ ἐκλείψουν τὰ **φαινόμενα ἀποκαταστάσεως** (*). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόσβεσις δὲν εἶναι πολὺ μεγάλη, ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσσεως εἶναι

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2 \cdot \omega^2}} \cdot \eta\mu(\omega t - \varphi)$$

$$\eta \quad x = a \cdot \eta\mu(\omega t - \varphi)$$

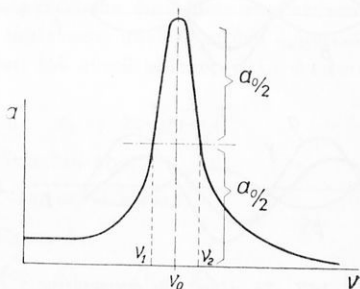
$$\text{ἐνθα} \quad a = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2 \cdot \omega^2}} \quad (1)$$

* Ἡ διαφορὰ φάσεως φ παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσσεως

$$\varepsilon\varphi \varphi = \frac{p \cdot \omega}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσσεως (1) προκύπτει ὅτι τὸ πλάτος a τῆς ἐξηναγασμένης ταλαντώσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην του τιμὴν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ ($\omega_0 = \omega$), γίνεται δὲ ἀπειρον, ὅταν, ἐπὶ πλέον, ἡ ἀπόσβεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν (ὅταν, δηλ., εἶναι $p = 0$).

Χαρακτηριστικὸν μέτρον τῆς ὀξύτητος τοῦ συντονισμοῦ εἶναι τὸ **εὖρος ἡμισείας τιμῆς**, δηλ., ἡ διαφορὰ συχνοτήτων $\nu_1 - \nu_2$, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς πλάτος, ἴσον πρὸς $a_0/2$, ἐνθα a_0 εἶναι τὸ πλάτος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ (σχ. 146).



Σχ. 146. Ἐκ τοῦ εὗρους ἡμισείας τιμῆς $\nu_1 - \nu_2$ κρίνεται ἡ ὀξύτης τοῦ συντονισμοῦ.

§ 119. Σύνθεσις ἀρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως. Ἐστω κινητόν, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο γραμμικὰς ἀρμονικὰς ταλαντώσεις ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἡ μορφή τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως θὰ ἐξαρηθῇ ἐκ τῶν συχνοτήτων τῶν δύο ταλαντώσεων, ἐκ τῶν πλατῶν, ἐκ τῶν φάσεων κ.λ.

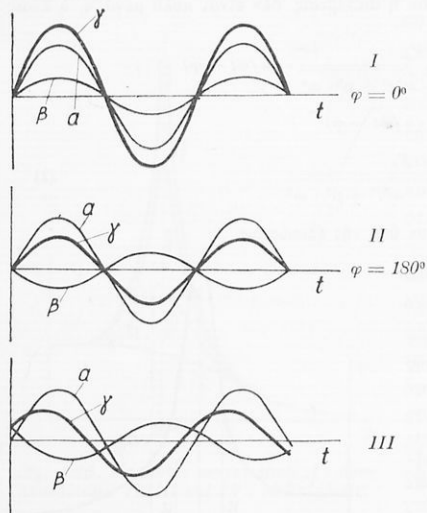
α) **Σύνθεσις δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος.** Θεωρήσωμεν δύο ἀρμονικὰς ταλαντώσεις τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ διαφόρων πλατῶν καὶ φάσεων:

$$\alpha = A \cdot \eta\mu \omega t \quad (1)$$

$$\beta = B \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

(*) Ἡ κίνησις κατὰ τὴν ἐναρξιν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως περιγράφεται ὡς μία συνάρτησις $x = f(t)$, ἀποτελούμενη ἐκ δύο προσθετίων. Ἐξ αὐτῶν ὁ εἰς εἶναι ἀρνητικὴ ἐκθετικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ, συνεπῶς, μετὰ τινα χρόνον, ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ p , ἐκλείπει, ἀπομένει δὲ μόνον τὸ μόνιμον φαινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει σταθερὸν πλάτος.

Τὴν συνισταμένην ταλάντωσιν γ — ἡ ὁποία εἰς τὸ σχῆμα 147 παρίσταται διὰ παχυτέρας γραμμῆς — εὐρίσκομεν, ἔάν, δι' ἐκάστην χρονικὴν στιγμήν, προσθέσωμεν τὰς μερικὰς ἀπομακρύνσεις α καὶ β .



Σχ. 147. Τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης γ (παχέια γραμμή) τῶν δύο ταλαντώσεων α καὶ β ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσης διαφορᾶς φάσεως.

ταλαντώσεως εἶναι ἴσον πρὸς $A + B$, εἰς τὸ διάγραμμα II εἶναι ἴσον πρὸς $A - B$ καὶ εἰς τὸ διάγραμμα III ἔχει ἐνδιάμεσον τιμὴν. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ συνιστώσαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πλάτος ($A = B$), ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ ἔχῃ πλάτος εἴτε ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ πλάτους τῆς μιᾶς τῶν συνιστωσῶν, εἴτε ἴσον πρὸς μηδέν, εἴτε ἐνδιάμεσον τιμὴν, ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἡ διαφορὰ φάσεως ἔχῃ τιμὴν $\varphi = 0^\circ$ ἢ $\varphi = 180^\circ$ ἢ ἐνδιάμεσον τιμὴν.

Τ' ἀνωτέρω εἶναι δυνατόν ν' ἀποδειχθῶν καὶ διὰ μαθηματικῆς ἀναλύσεως: Ἐάν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + \beta = A \cdot \eta\mu \omega t + B \cdot \eta\mu (\omega t + \varphi) = A \cdot \eta\mu \omega t + B \cdot \eta\mu \omega t \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi + \\ &+ B \cdot \sigma\upsilon\nu \omega t \cdot \eta\mu \varphi = (A + B \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi) \cdot \eta\mu \omega t + B \cdot \eta\mu \varphi \cdot \sigma\upsilon\nu \omega t. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$K \cdot \eta\mu y + A \cdot \sigma\upsilon\nu y = \sqrt{K^2 + A^2} \cdot \eta\mu (y + \theta)$$

ἐνθα

$$\epsilon\varphi \theta = \frac{A}{K}.$$

γμήν, προσθέσωμεν τὰς μερικὰς ἀπομακρύνσεις α καὶ β . Τὰ διαγράμματα I καὶ II παριστοῦν τὴν σύνθεσιν δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ μὲ διαφορὰν φάσεως $\varphi = 0^\circ$, ἢ $\varphi = 180^\circ$, τὸ δὲ διάγραμμα III τὴν περίπτωσιν τυχούσης διαφορᾶς φάσεως. Παρατηροῦμεν ὅτι, καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις εἶναι καὶ αὐτὴ ἁρμονικὴ, ἔχει δὲ τὴν αὐτὴν συχνότητα, τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ συνιστώσαι τῆς. Τὸ πλάτος αὐτῆς ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τῶν πλατῶν A, B τῶν δύο συνιστωσῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς φάσεως μεταξὺ αὐτῶν. Οὕτω, εἰς τὸ διάγραμμα I παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης

Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν ταύτην εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν, λαμβάνομεν

$$y = \sqrt{(A + B \cdot \sin \varphi)^2 + (B \cdot \eta \mu \varphi)^2} \cdot \eta \mu (\omega t + \theta)$$

ἐνθα

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{B \cdot \eta \mu \varphi}{A + B \cdot \sin \varphi}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, πράγματι, ἡ σύνθεσις δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος δίδει ἀρμονικὴν ταλάντωσιν τῆς αὐτῆς, πάλιν, συχνότητος.

Διὰ δεδομένα πλάτη A καὶ B τῶν συνιστωσῶν, τὸ πλάτος

$$\sqrt{(A + B \cdot \sin \varphi)^2 + (B \cdot \eta \mu \varphi)^2}$$

τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς φάσεως φ . Οὕτω, διὰ $\varphi = 0^\circ$, ἡ ἐκφρασις λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν $A + B$, ἐνῶ, διὰ $\varphi = 180^\circ$, τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $A - B$.

β) **Σύνθεσις δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων διαφόρων συχνότητων - Διακροτήματα.** Θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν συνθέσεως δύο ἀρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀλλὰ διαφόρων συχνότητων:

$$x_1 = x_0 \cdot \eta \mu \omega_1 t \quad \text{καὶ} \quad x_2 = x_0 \cdot \eta \mu \omega_2 t.$$

Ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 = x_0 \cdot (\eta \mu \omega_1 t + \eta \mu \omega_2 t).$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι

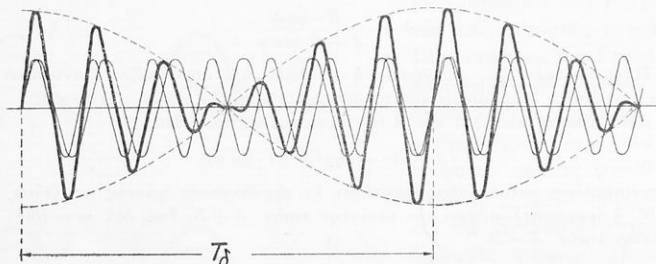
$$\eta \mu \alpha + \eta \mu \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

ἡ ἄνω ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς τὴν ἐξῆς:

$$x_{\text{ολ}} = 2x_0 \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right). \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ μίαν, ἐν γένει, πολύπλοκον ταλάντωσιν. Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ κυκλικαὶ συχνότητες ω_1 καὶ ω_2 διαφέρουν ὀλίγον μεταξὺ τῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ δύο κυκλικαὶ συχνότητες ω_1 καὶ ω_2 εἶναι, περίπου, ἴσαι καί, συνεπῶς, ὁ παράγων $\eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right)$ μεταβάλλεται μὲ κυκλικὴν συχνότητα, ἴσην πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν κυκλικῶν συχνότητων τῶν δύο συνιστωσῶν. Ἐπειδὴ αἱ δύο κυκλικαὶ συχνότητες ω_1 καὶ ω_2 εἶναι, περίπου, ἴσαι καὶ ἡ μέση τιμὴ τῶν αὐτῶν θὰ εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς αὐτάς, ἥτοι $\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$. Κατὰ ταῦτα, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὥς μία ταλάντωσις τῆς αὐτῆς, περίπου, συχνότητος μὲ τὴν συχνότητα τῶν συνιστωσῶν, ἀλλὰ μὲ πλάτος $2x_0 \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right)$, τὸ ὅποion μεταβάλλεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας

λαμβάνει τοῦτο, κυμαίνονται μεταξύ $+2x_0$ καὶ $-2x_0$. Ἡ κύμανσις αὕτη τοῦ πλάτους (σχ. 148, παχεῖα γραμμὴ) εἶναι βραδεῖα, λόγῳ τῆς μικρᾶς διαφο-



Σχ. 148. "Όταν αἱ περίοδοι δύο ταλαντώσεων (λεπτὰ γραμμαί) διαφέρουν ὀλίγον μεταξύ των, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως αὐτῶν (παχεῖα γραμμὴ) εἶναι ἐν διακρότημα.

ρᾶς $\omega_1 - \omega_2$ τῶν κυκλικῶν συχνοτήτων τῶν δύο ταλαντώσεων. Ταλαντώσεις τοιαύτης μορφῆς καλοῦνται **διακροτήματα** (ἢ *συγκροτήσεις*). Ἡ περίοδος T_δ τῶν διακροτημάτων, δηλ., ὁ χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικῶν μεγίστων τοῦ πλάτους, ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἴση πρὸς $1/(v_1 - v_2)$ (*): Δηλ., ἡ *συχνότης* v_δ τῶν διακροτημάτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν *διαφορὰν* $v_1 - v_2$ τῶν *συχνοτήτων* τῶν συνιστωσῶν ταλαντώσεων.

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ γραφικῶς: Ἄν παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς δύο ταλαντώσεις (σχ. 118, λεπτὰ γραμμαί) καὶ θεωρήσωμεν μίαν χρονικὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ταλαντώσεις εἶναι ἐν φάσει, ἢ συνισταμένη αὐτῶν θὰ ἔχῃ, κατ' ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμήν, τὸ μέγιστον πλάτος. Μετὰ πάροδον χρόνου τινός, αἱ δύο ταλαντώσεις, λόγῳ τῆς διαφορᾶς συχνότητος αὐτῶν, θὰ παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως. Οὕτω, π.χ., κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, ἡ διαφορὰ φάσεως θὰ ἔχῃ γίνῃ ἴση πρὸς 180° καὶ τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.

(*) Ἡ περίοδος T_δ τῶν διακροτημάτων εἶναι ὁ χρόνος ἐντός τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος λαμβάνει δύο διαδοχικὰς μεγίστας τιμὰς, ὁ χρόνος, δηλ., ἐντός τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τοῦ $\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)$ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $+1$ μέχρι τῆς τιμῆς -1 . Ὁ χρόνος οὗτος T_δ εἶναι, προφανῶς, ἴσος πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς περιόδου T_{syn} τῆς μεταβολῆς τοῦ $\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)$. Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$T_{\text{syn}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{syn}}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{4\pi}{2\pi(v_1 - v_2)} = \frac{2}{v_1 - v_2}.$$

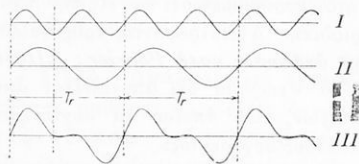
Ἐπομένως, ἔχομεν

$$T_\delta = \frac{T_{\text{syn}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{v_1 - v_2} = \frac{1}{v_1 - v_2}$$

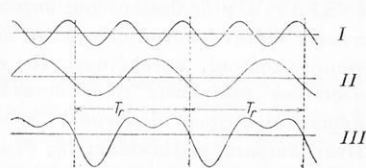
ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$v_\delta = v_1 - v_2.$$

§ 120. 'Ανάλυσις περιοδικῶν ταλαντώσεων κατὰ Fourier. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐξητάσαμεν, μεταξὺ ἄλλων, τὴν σύνθεσιν δύο ταλαντώσεων διαφόρων συχνότητων. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν, εἰδικῶς, τὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ πρὸς σύνθεσιν ταλαντώσεις ἔχουν συχνότητας, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἀπλοῦς ρητὸς ἀριθμὸς (*). Οὕτω, τὰ



Σχ. 149. Τὸ διάγραμμα III παριστᾷ τὴν ταλάντωσιν, ἣ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν δύο ταλαντώσεων I καὶ II, τῶν ὁποίων ὁ λόγος συχνότητων εἶναι 2 : 1. ('Αρχικὴ διαφορὰ φάσεως ἴση πρὸς μηδέν).

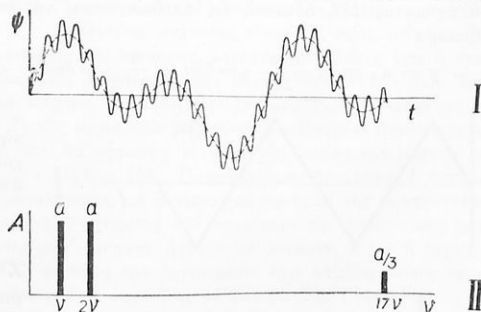


Σχ. 150. Τὸ διάγραμμα III παριστᾷ τὴν συνισταμένην, ἣ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν αὐτῶν ταλαντώσεων I καὶ II τοῦ προηγουμένου σχήματος, ἀλλὰ μὲ ἀρχικὴν διαφορὰν φάσεως.

διαγράμματα III τῶν σχημάτων 149 καὶ 150 παριστοῦν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως δύο ταλαντώσεων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες ἔχουν λόγον 2 : 1. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνισταμένη ταλάντωσις ἔχει μὲν πολὺπλοκον μορφήν, ἀλλ' εἶναι περιοδική. Ἡ περίοδος T , τῆς συνισταμένης ταύτης ταλαντώσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν περίοδον τῆς ταλαντώσεως μὲ τὴν μικροτέραν συχνότητα (II), ἣ ὁποία, ὥς ἐκ τούτου, ὀνομάζεται **θεμελιώδης**. Ἡ συνιστώσα I μὲ τὴν διπλασίαν συχνότητα καλεῖται **δευτέρα ἀρμονική**. Ἡ συνισταμένη III τῶν σχημάτων 149 καὶ 150, μολονότι προκύπτει ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν αὐτῶν ταλαντώσεων, ἔχει διάφορον ἐκάστοτε μορφήν, λόγῳ τοῦ ὅτι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ δύο συνιστώσαι δὲν παρουσιάζουν ἀρχικῶς διαφορὰν φάσεως, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν παρουσιάζουν τοιαύτην.

Ἐὰν εἰς τὴν ταλάντωσιν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ διάγραμμα III τοῦ σχήματος 149

(καὶ ἡ ὁποία προέκυψεν, ὅπως εἶδομεν, ἐκ συνθέσεως δύο ταλαντώσεων μὲ συχνότητας ν καὶ 2ν), ἐπιπροσθέσωμεν μίαν τρίτην ταλάντωσιν, τῆς ὁποίας



Σχ. 151. Ταλάντωσις, προσερχομένη ἐκ συνθέσεως τριῶν ἀρμονικῶν ταλαντώσεων μὲ συχνότητας ν , 2ν καὶ 17ν καὶ μὲ πλάτη a , a καὶ $a/3$.

(*) Ρητὸς ἀριθμὸς καλεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἐκφράζων τὸν λόγον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ἡ συχνότης νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς συχνότητος τῆς θεμελιώδους (π.χ. ἴση πρὸς 17ν), θὰ προκύψῃ τὸ διάγραμμα I τοῦ σχήματος 151, τὸ ὁποῖον, ὅπως παρατηροῦμεν, παριστᾷ, ὁμοίως, περιοδικὴν ταλάντωσιν. Ἐπεκτείνοντες τοὺς συλλογισμοὺς τούτους εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνθέσεως πολλῶν ταλαντώσεων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς θεμελιώδους συχνότητος, εὐρίσκομεν ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνισταμένη εἶναι περιοδική. Ἀντιστρέφοντες τοὺς συλλογισμοὺς τούτους, καταλήγομεν εἰς τὴν **ἀνάλυσιν κατὰ Fourier**: «Πᾶσα περιοδικὴ ταλάντωσις εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄθροισμα ἀπείρων ἁρμονικῶν προσθετέων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους συχνότητος».

Ἐπομένως, ἡ περιοδικὴ κίνησις $y = f(t)$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$y = f(t) = A_1 \cdot \eta\mu \omega t + A_2 \cdot \eta\mu 2\omega t + A_3 \cdot \eta\mu 3\omega t + \dots + \dots$$

ἢ
$$y = \sum A_n \cdot \eta\mu n \cdot \omega t (*).$$

Οὕτω, ἡ περιοδικὴ κίνησις τοῦ σχήματος 151 δύναται νὰ περιγραφῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$y = a \cdot \eta\mu \omega t + a \cdot \eta\mu 2\omega t + 0 \cdot \eta\mu 3\omega t + 0 \cdot \eta\mu 4\omega t + \dots \\ \dots + \frac{a}{3} \cdot \eta\mu 17\omega t + 0 \cdot \eta\mu 18\omega t + \dots$$

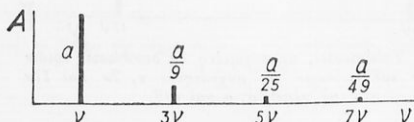
Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν ἀπείρων προσθετέων, εἰς τοὺς ὁποίους ἀνελύθη ἡ ταλάντωσις, ἐμφανίζονται μόνον τρεῖς, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιποι ἔχουν πλάτη, ἴσα πρὸς μηδέν. Ἐπίσης, ἡ περιοδικὴ ταλάντωσις $y = f(t)$, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ διάγραμμα I τοῦ σχήματος 152, δύναται, ὡς ἀποδεικνύεται, νὰ ἀναλυθῇ κατὰ Fourier εἰς τὸ ἄθροισμα

$$y = a \cdot \eta\mu \omega t - \frac{a}{3^2} \cdot \eta\mu 3\omega t + \frac{a}{5^2} \cdot \eta\mu 5\omega t - \frac{a}{7^2} \cdot \eta\mu 7\omega t + \dots + \dots$$



I

Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὑπάρχουν μόνον περιττῆς τάξεως ἀνώτεραι ἁρμονικαί.



II

Σχ. 152. Τὸ διάγραμμα II ἀποδίδει τὸ φάσμα συχνότητων τῆς ταλάντωσεως I.

§ 121. Φάσμα συχνοτήτων. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄξων τῶν τετμημένων παριστᾷ συχνότητας (ν), ὁ δὲ ἄξων τῶν τεταγμένων πλάτη (A), τότε τὸ

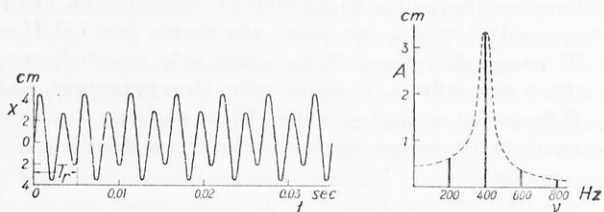
(*) Εἰς τὴν μορφήν ταύτην τῆς ταλάντωσεως δεχόμεθα ὅτι, ἀρχικῶς (διὰ χρόνον, δηλ., $t = 0$), ὅλαι αἱ ἁρμονικαὶ εἶχον τὴν αὐτὴν φάσιν μετὰ τὴν θεμελιώδη.

πλάτος ἐκάστου προσθετέου τῆς σειρᾶς Fourier θὰ παρίσταται ὑπὸ τμήματος εὐθείας, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν πλατῶν (σχ. 151, II καὶ σχ. 152, II). Ἡ τοιαύτη ἀπεικόνισις τῆς ἀναλύσεως μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως καλεῖται **φάσμα συχνοτήτων**. Τὸ φάσμα τοῦτο εἶναι **γραμμικόν**, ἀποτελεῖται, δηλ., ἐξ ὠρισμένου ἀριθμοῦ γραμμῶν. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ φάσμα μιᾶς ἡμιτονοειδοῦς (ἢ συνημιτονοειδοῦς) ταλαντώσεως ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς καὶ μόνης γραμμῆς.

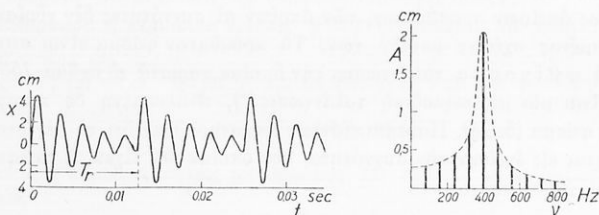
§ 122. Ἀνάλυσις μὴ περιοδικῆς ταλαντώσεως. Ὅπως ἀποδεικνύεται μαθηματικῶς, εἶναι δυνατόν ν' ἀναλύσωμεν καὶ ταλαντώσεις μὴ περιοδικάς, ὁπότε, ὅμως, αὗται θὰ περιγράφονται ὡς ἀποτελεσμα ἀθροίσεως ἀπείρων προσθετέων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες δὲν εὐρίσκονται εἰς ὠρισμένας σχέσεις μεταξύ τῶν. Τὸ προκύπτον φάσμα εἶναι **συνεχές**. Οὕτω, ἡ φθίνουσα ταλάντωσις, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 156 (ἀριστερᾷ) εἶναι μία μὴ περιοδικὴ ταλάντωσις (*), ἀναλυομένη δὲ παρέχει ἐν συνεχῆς φάσμα (δεξιᾷ). Παρεπιπτόντως παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέγιστον παρουσιάζεται εἰς ἐκείνην τὴν συχνότητα, τὴν ὁποίαν θὰ εἶχεν ἡ ταλάντωσις αὕτη, ἐὰν ἦτο ἀμείωτος.

Ἡ ἀνάλυσις μὴ περιοδικῆς ταλαντώσεως εἶναι δυνατόν νὰ κατανοηθῇ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν μίαν φθίνουσαν ταλάντωσιν μετ' ἰδιοσυχνότητα 400 Hz , ἡ ὁποία, διὰ καταλλήλου διεγέρσεως, νὰ ἐνισχύεται μεθ' ἐκάστην δευτέραν ταλάντωσιν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ προκύπτῃ μία κίνησις πολυπλόκου μορφῆς (σχ. 153). Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ μορφή τῆς κινήσεως παρουσιάζει περιοδικότητα (μετ' ἐπίδοον T_r , ἀντιστοιχοῦσαν εἰς συχνότητα 200 Hz), δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ τὴν ἀναλύσωμεν κατὰ Fourier, ὁπότε θὰ λάβωμεν τὸ φάσμα τοῦ σχήματος 153, δεξιᾷ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ θεμελιώδης συχνότης εἶναι ἴση πρὸς 200 Hz . Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν συνιστωσῶν τῆς κινήσεως, μεγαλύτερον πλάτος ἔχει ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς συχνότητα, ἀκριβῶς, ἴσην πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα (400 Hz). Ἐάν, τώρα, ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ πείραμα, ἀλλὰ διεγείρωμεν μεθ' ἐκάστην πέμπτῃν ταλάντωσιν (ὁπότε ἡ περίοδος T_r τῆς περιοδικότητος εἶναι μεγαλύτερα, ἀντιστοιχοῦσα εἰς θεμελιώδη συχνότητα 80 Hz), θὰ προκύψῃ κίνησις, τῆς ὁποίας τὴν μορφήν καὶ τὸ ἀντίστοιχον φάσμα παριστᾷ τὸ σχῆμα 154. Παρατηροῦμεν ὅτι, τώρα, ὁ ἀριθμὸς τῶν συνιστωσῶν εἶναι πολὺν μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως. Τὰ διαγράμματα τοῦ σχήματος 155 παριστοῦν τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διέγερσις γίνεται μεθ' ἐκάστην ὀγδόην ταλάντωσιν, ὁπότε ἡ περίοδος T_r εἶναι ἀκόμη μεγαλύτερα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνιστωσῶν ἔχει αὐξηθῇ ἀκόμη περισσότερον, χωρὶς ἡ μορφή τῆς ἐστιγμένης καμπύλης νὰ μεταβληθῇ. Ἐπεκτείνοντες τὸν συλλογισμόν, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι, διὰ $T_r = \infty$, δηλ., διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταλάντωσις, ἀφοῦ ἀπαξ διεγερθῇ, ἀφίενται νὰ ἀποβῇ μόνῃ τῆς, αἱ συνιστώσαι θὰ εἶναι ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων, τὸ φάσμα, δηλ., θὰ εἶναι συνεχές (σχ. 156).

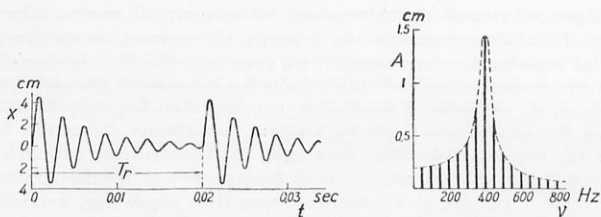
(*) Ἡ ἄνω ταλάντωσις, τὴν ὁποίαν εἰς τὰ προηγούμενα ὀνομάσαμεν φθίνουσαν περιοδικὴν ταλάντωσιν, ἀπὸ αὐτῆς μὴ μαθηματικῆς ἀπόψεως ἐξεταζομένη, δὲν εἶναι περιοδική, διότι δὲν ἐπαναλαμβάνεται, ἀκριβῶς, ἡ αὐτή.



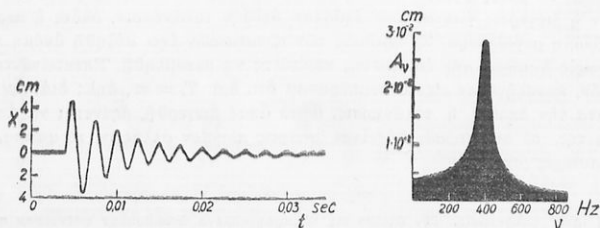
Σχ. 153. Φθίνουσα ταλάντωσις, διεγερομένη μεθ' ἐκάστην δευτέραν ταλάντωσιν.



Σχ. 154. Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις, διεγερομένη μεθ' ἐκάστην πέμπτην ταλάντωσιν.

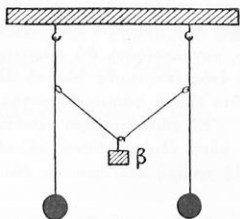


Σχ. 155. Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις, διεγερομένη μεθ' ἐκάστην ὀγδόην ταλάντωσιν.

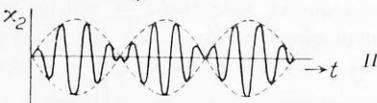
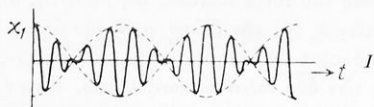


Σχ. 156. Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις, ἐφ' ἅπαξ διεγερθεῖσα. Τὸ φάσμα τῆς εἶναι συνεχές, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ τῶν προηγουμένων, τὰ ὅποια εἶναι γραμμικά.

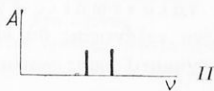
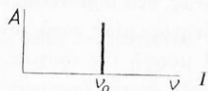
§ 123. Συνεξευγμένα ταλαντώσεις. Θεωρήσωμεν δύο εκκρεμή του αυτού μήκους, συνδεδεμένα μεταξύ των διὰ νήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἑξαρτήσῃ ἓν μικρὸν βάρος β (σχ. 157). Ἄν θέσωμεν εἰς ταλάντωσιν τὸ ἐν εκκρεμές, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς ταλάντωσης βαθμηδὸν ἐλαττοῦται, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, τὸ δεύτερον ἀρχίζει νὰ ταλαντοῦται μετὰ πλάτος διαρκῶς αὐξανόμενον. Τοῦτο συνεχίζεται, μέχρις οὗ τοῦ πλάτος τοῦ πρώτου εκκρεμοῦς γίνῃ ἴσον πρὸς μηδέν. Τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμήν ὅλη ἡ ἐνέργεια τοῦ πρώτου εκκρεμοῦς ἔχει μεταδοθῇ εἰς τὸ δεύτερον, τοῦ ὁποῖου τὸ πλάτος ἔχει, τώρα, λάβει τὴν μεγίστην τιμήν. Τὸ φαινόμενον, ἀκολούθως, συνεχίζεται κατ' ἀντίθετον φοράν καί, μετ' ὀλίγον, ὅλη ἡ ἐνέργεια τοῦ δευτέρου εκκρεμοῦς θὰ μεταδοθῇ, ἐκ νέου, εἰς τὸν πρῶτον κ.ο.κ. Ἐὰν μελετήσωμεν τὴν ἀπομάκρυνσιν x_1 τοῦ πρώτου εκκρεμοῦς συναρτήσει τοῦ χρόνου, θὰ εὕρωμεν ὅτι αὕτη μεταβάλλεται συμφώνως πρὸς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 148-ἔχει, δηλ., τὴν μορφήν ἐνὸς διακροτήματος (σχ. 158, I). Τὴν αὐτὴν μορ-



Σχ. 157. Τὸ βάρος β προκαλεῖ σύζευξιν τῶν δύο ταλαντώσεων.



Σχ. 158. Ἡ ταλάντωσις ἐκάστου εκκρεμοῦς ἔχει τὴν μορφήν διακροτήματος.



Σχ. 159. Φάσμα συγχροτῶν τῆς ταλάντωσης τοῦ ἐνὸς εκκρεμοῦς I χωρὶς σύζευξιν, II μετὰ σύζευξιν.

φήν, ἀλλὰ μετατοπισμένην χρονικῶς, ἔχει καὶ ἡ ταλάντωσις τοῦ δευτέρου εκκρεμοῦς (σχ. 158, II).

Τὸ περιγραφέν φαινόμενον εἶναι γενικὸν καὶ παρουσιάζεται πάντοτε, ὅταν ὑπάρχουν δύο συστήματα, τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦν ταλαντώσεις τῆς αὐτῆς ἰδιοσυχνότητος καὶ εὐρίσκονται ἐν συζεύξει. Ταλαντώσεις τοιαύτης μορφῆς καλοῦνται **συνεξευγμένα ταλαντώσεις**, παρουσιάζονται δὲ εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἰς τὴν Φυσικὴν (π.χ., συνεξευγμένα ταλαντώσεις εἰς κυκλώματα Thomson).

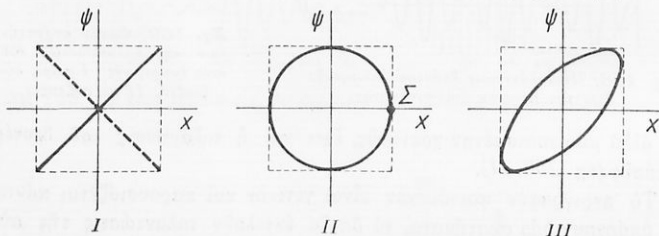
Ἐὰν τὰ δύο εκκρεμή δὲν ᾗσαν συνεξευγμένα, ἐκαστὸν ἐξ αὐτῶν, διεγερθόμενον, θὰ ἐξετέλῃ ἐλευθέραν ταλάντωσιν μετὰ ἰδιοσυχνότητα ν_0 - τὸ φάσμα, δηλ., τῆς ταλάντωσης ἐκάστου εκκρεμοῦς θ' ἀποτελεῖτο ἐκ μιᾶς μόνον γραμμῆς (σχ. 159, I).

Ἐάν, ὅμως, συζεύξωμεν τὰ ἐκκρεμῆ, ἡ ταλάντωσις ἐκάστου ἔχει τὴν μορφήν διακροτήματος, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου τῆς παραγωγῆς του (§ 119), ἀναλυόμενον, θὰ μᾶς δώσῃ δύο συχνότητες $\nu_0 + \nu_\delta/2$ καὶ $\nu_0 - \nu_\delta/2$, ἐνθα ν_δ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ διακροτήματος. Κατὰ ταῦτα, τὸ φάσμα συχνότητων ἐκάστης ταλαντώσεως θ' ἀποτελεῖται ἐκ δύο γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ ν_δ καὶ κεῖνται συμμετρικῶς περὶ τὴν γραμμὴν τῆς συχνότητος ν_0 (σχ. 159, II). Ἐάν, τώρα, αὐξήσωμεν τὴν σύζευξιν τῶν δύο ἐκκρεμῶν (ἀντικαθιστῶντες τὸ μικρὸν βάρος β δι' ἄλλου, μεγαλυτέρου), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ταλάντωσις μεταδίδεται ταχύτερον ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἐκκρεμοῦ εἰς τὸ ἄλλο· ἡ συχνότης, δηλ., τοῦ διακροτήματος αὐξάνεται. Τοῦτο εἰς τὸ φάσμα συχνότητων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀπομάκρυνσιν τῶν δύο γραμμῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, *ὅταν ἐν παλλόμενον σύστημα συνενθῇ μὲ ἑτερον, τῆς αὐτῆς ἰδιοσυχνότητος, εἰς τὸ φάσμα συχνότητων τῆς ταλαντώσεως αὐτοῦ ἡ ἀρχικῶς ἀπλὴ γραμμὴ ἀναλύεται εἰς δύο.*

§ 124. Σύνθεσις δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων, καθέτων ἐπ' ἀλλήλας. Εἰς προηγουμένας παραγράφους ἐξητάσαμεν τὴν σύνθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως. Ἦδη, θὰ ἐξετάσωμεν τὴν σύνθεσιν ἁρμονικῶν ταλαντώσεων, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

α) **Σύνθεσις καθέτων ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ τῆς αὐτῆς συχνότητος.** Θεωρήσωμεν κινητόν, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ, ταυτοχρόνως, δύο ἁρμονικὰς ταλαντώσεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους A (*) καὶ τῆς αὐτῆς συχνότητος· μίαν κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τὴν ἄλλην κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y . Ἡ μορφή τῆς τροχίως, ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ κινηθῇ, τώρα, τὸ κινητόν, θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τῆς διαφορᾶς φάσεως τῶν δύο ταλαντώσεων. Οὕτω, ὅταν αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως $\varphi = 0^\circ$, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι μία ἁρμονικὴ ταλάντωσις ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, σχηματίζουσης γωνίαν 45° μετὰ τῶν δύο ἀξόνων (σχ. 160, I). Τοῦτο



Σχ. 160. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως δύο καθέτων ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσης διαφορᾶς φάσεως.

εἶναι προφανές, διότι, ἀφοῦ αἱ δύο ταλαντώσεις εἶναι ἐν φάσει, θὰ λαμβάνουν ταυτοχρόνως τὴν τιμὴν μηδέν, τὴν μεγίστην τιμὴν κ.λ.

Ὅταν αἱ δύο αὐταὶ ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν

(*) Οἱ συλλογισμοὶ δὲν ἀλλάσουν, ἂν θεωρήσωμεν τὰς δύο ταλαντώσεις μὲ διάφορα πλάτη.

φάσεως $\varphi = 90^\circ$, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, κίνησις ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς (II). Τοῦτο εὐρίσκομεν καὶ γραφικῶς: Εἰς τὸ σημεῖον Σ ἡ μία ταλάντωσις ἔχει λάβει τὴν μεγίστην τιμὴν ($x = A$), ἐνῶ ἡ ἄλλη ἔχει λάβει τὴν μηδενικὴν τῆς τιμὴν ($y = 0$)· χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τῆς διαφορᾶς φάσεως 90° μεταξύ δύο ταλαντώσεων. Ἐάν, τέλος, αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν τυχούσαν διαφορὰν φάσεως, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι κίνησις ἐπὶ ἑλλειπτικῆς τροχιάς (III).

Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν δύο ταλαντώσεις μὲ διαφορὰν φάσεως φ , τὰς

$$x = A \cdot \eta\mu \omega t \quad \text{καὶ} \quad y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi).$$

Τὰς ἐξισώσεις ταύτας γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x}{A} = \eta\mu \omega t \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{A} = \eta\mu \omega t \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi + \sigma\upsilon\nu \omega t \cdot \eta\mu \varphi.$$

Ἐπειδὴ, ὡς γνωστὸν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\sigma\upsilon\nu \omega t = \sqrt{1 - \eta\mu^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{y}{A} = \frac{x}{A} \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi + \eta\mu \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (1)$$

Ἐάν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 0^\circ$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπλουστεύεται εἰς

$$y = x.$$

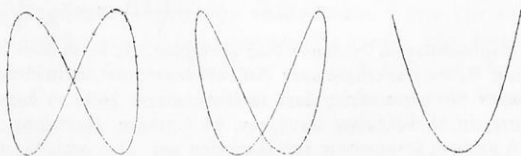
Ἡ τελευταία, ὁμως, αὕτη ἐξίσωσις παριστᾷ, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, εὐθεῖαν γραμμὴν, ὑπὸ κλίσιν 45° ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας.

Ἐάν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 180^\circ$, προκύπτει, ὁμοίως, εὐθεῖα γραμμὴ, ἀλλὰ κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτῃν (εἰς τὸ σχῆμα 160, I ἐστιγμένη). Ἐάν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 90^\circ$ ἢ 270° , ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει

$$\frac{y}{A} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad \eta \quad y^2 + x^2 = A^2.$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις παριστᾷ, ὡς γνωστὸν, περιφέρειαν κύκλου.

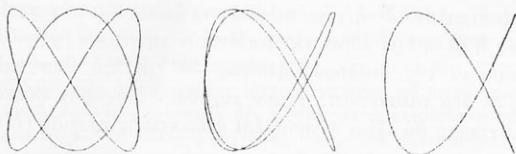
Εἰς τὴν περίπτωσιν, τέλος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ φάσεως ἔχει τυχούσαν



Σχ. 161. Εἰκόνες Lissajous, προερχόμεναι ἐκ συνθέσεως δύο καθέτων ταλαντώσεων μὲ λόγον συχνότητων 1:2 καὶ μὲ διαφορὰς ἀρχικὰς διαφορὰς φάσεων.

τιμὴν, ἡ ἐξίσωσις (1) — ἡ ὁποία, σημειωτέον, εἶναι δευτέρου βαθμοῦ — παρέχει ὡς τροχίαν ἑλλειψιν.

β) *Σύνθεσις δύο καθέτων ἀρμονικῶν ταλαντώσεων διαφόρων συχνοτήτων*. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἡ προκύπτουσα τροχιά εἶναι πολύπλοκος, εἶναι δὲ κλειστή,



Σχ. 162. Εἰκόνες Lissajous δύο ταλαντώσεων μὲ λόγον συχνοτήτων 2:3.

μόνον ἐφ' ὅσον ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς. Ὄταν ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων εἶναι, ἐπὶ πλέον, ἀπλοῦς (π.χ., 1:2, 2:3, 3:4...), αἱ προκύπτουσαι καμπύλαι ἔχουν, σχετικῶς, ἀπλᾶς μορφάς (εἰκόνες Lissajous, σχ. 161 καὶ 162).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἡ κλίμαξ ἐνὸς δυναμομέτρου δι' ἐλατηρίου ἔχει μῆκος 15 cm καὶ δεικνύει ἔνδειξιν ἀπὸ 0 ὡς 5 kgr*. Ἐν σῶμα, ἐξαερωμένον ἐκ τοῦ δυναμομέτρου καὶ τιθέμενον εἰς ταλάντωσιν, πάλλεται μὲ συχνότητα 1,5 sec⁻¹. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος β τοῦ σώματος; (ΑΠ: $\beta = 3,6 \text{ kgr}^*$)

2. Μικρὸς δίσκος εἶναι ἐξηρητημένος ἐκ τινος ἐλικοειδοῦς ἐλατηρίου, τιθέμενος δὲ εἰς ταλάντωσιν, πάλλεται μὲ περίοδον T_0 . Ὄταν ὁ δίσκος φορτισθῇ διὰ μιᾶς γνωστῆς μᾶζης m_1 , πάλλεται μὲ περίοδον T_1 . Ὄταν ἡ μᾶζα m_1 ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλης, m_2 , πάλλεται μὲ περίοδον T_2 . Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄγνωστος μᾶζα m_2 .

$$\left(\text{ΑΠ: } m_2 = m_1 \cdot \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \right)$$

3. Ξύλινον παραλληλεπίπεδον, ὕψους h καὶ βάσεως S , ἐπιπλέει εὐσταθῶς ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἐξασκοῦντες μίαν κατακόρυφον δυνάμιν, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, προκαλοῦμεν βύθισιν αὐτοῦ κατὰ l καί, ἀκολουθῶς, τὸ ἀφήνομεν ἐλεύθερον. Ποῖαι εἶναι αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκούμεναι δυνάμεις κατὰ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφῆθη τοῦτο ἐλεύθερον καὶ πόση εἶναι ἡ συνισταμένη αὐτῶν;

4. Τὸ παραλληλεπίπεδον τῆς ἄνω ἀσκήσεως, ἀφιέμενον ἐλεύθερον, ἐκτελεῖ ταλάντωσιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Νὰ δεიχθῇ ὅτι ἡ ταλάντωσις αὕτη θὰ εἶναι ἀρμονικὴ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης αὐτῆς. $\left(\text{ΑΠ: } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\varrho_{\text{ὕδατος}} \cdot g}{\varrho_{\text{ξύλιν}} \cdot h}} \right)$

5. Ἐὰν στερεώσωμεν τὸ ἐν ἄκρον ἐνὸς ἐλατηρίου, εἰς δὲ τὸ ἄλλο προσδένωμεν ἐν σῶμα, βάρους B , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατὰ ξ . Ἐὰν ἀνυψώσωμεν τὸ σῶμα οὕτως ὥστε τὸ ἐλατήριο νὰ λάβῃ τὸ ἀρχικόν του μῆκος καί, ἐν συνεχείᾳ, τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐκτελέσῃ ἐλεύθεραν ταλάντωσιν. Ζητεῖται α) ἡ μεγίστη ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου καὶ β) ἡ περίοδος τῆς ταλάντωσεως. Ἡ κατευθύνουσα δύναμις τοῦ ἐλατηρίου ἔστω D .

$$\left(\text{ΑΠ: α) } 2\xi, \text{ β) } T = 2\pi \sqrt{\frac{\xi}{g}} \right)$$

6. Εἰς τὸ ἄκρον ἐνὸς ἐλατηρίου στερεοῦμεν σιδηρὰν σφαῖραν, μᾶζης m καὶ πλυσιάζομεν εἰς αὐτὴν πηνίον, τροφοδοτούμενον δι' ἐναλλασσομένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐλκτικήν δύναμιν, μεταβαλλομένην μὲ συχνότητα ν .

Ἡ σφαῖρα, ὡς γνωστόν, θὰ ἐκτελέσῃ ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν. α) Ζητεῖται ἡ συχνότης, μὲ τὴν ὁποίαν πάλλεται ἡ σιδηρὰ σφαῖρα. β) Ἐάν ἡ σφαῖρα ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλης, διπλάσις μάζης, ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης τῆς ταλαντώσεως; γ) Εἰς τὴν περίπτωσιν (β) τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως θὰ εἶναι τὸ αὐτό, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν (α), μικρότερον ἢ μεγαλύτερον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'

ΣΤΡΟΦΙΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

§ 125. Στροφική ἀρμονική ταλάντωσις. Θεωρήσωμεν σῶμα, στρεπτόν περὶ ἄξονα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δοῖται ἐπίπεδον σπειροειδὲς ἐλατήριο (σχ. 163), οὕτως ὥστε νὰ ἰσορροπῇ εἰς ὁρισμένην θέσιν. Ἐάν στρέψωμεν τὸ σῶμα κατὰ τινα γωνίαν φ , τὸ ἐλατήριο θὰ παραμορφωθῇ καὶ θὰ ἐξασκήσῃ ἐπ' αὐτοῦ μίαν ροπὴν M , τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἀνάλογον τῆς γωνίας φ . Ἦτοι

$$M = -D^* \cdot \varphi.$$

Ἡ σταθερὰ D^* τῆς ἀναλογίας καλεῖται **κατευθύνοσα ροπή** τοῦ ἐλατηρίου καὶ ὀρίζεται, ἐκ τῆς ἐξίσωσως ταύτης, ὡς τὸ ἀρνητικὸν πηλίκον τῆς ροπῆς M , τῆς προκαλούσης τὴν γωνίαν φ , διὰ τῆς γωνίας ταύτης. Ἦτοι

$$D^* = - \frac{M}{\varphi}$$

Ἡ ροπή M καλεῖται **ροπή ἐπαναφορᾶς**, διότι τείνει πάντοτε νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς ταύτης, τὸ σῶμα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν ($\varphi = 0$), ἀλλὰ, λόγῳ ἀδρανείας, θὰ τὴν ὑπερβῇ καί, οὕτω, θὰ ἐκτελέσῃ μίαν **ἐλευθέραν στροφικὴν ταλάντωσιν**. Κατὰ τὴν ταλάντωσιν ταύτην ἡ γωνία φ θὰ μεταβάλλεται περιοδικῶς μεταξὺ τῶν ἁκρῶν τιμῶν $\pm \varphi_0$.

Ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 109 περὶ τῆς γραμμικῆς ἀρμονικῆς ταλαντώσεως, ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ ροπή ἐπαναφορᾶς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνίαν, τὸ σῶμα θὰ ἐκτελῇ στροφικὴν ἀρμονικὴν ταλάντωσιν-ταλάντωσιν, δηλ., εἰς τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ μεταβάλλεται ἀρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Ἦτοι θὰ εἶναι

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \eta \mu \omega t$$

Ἡ σταθερὰ ω τῆς ἐξίσωσως εἶναι ἡ **κυκλικὴ ἰδιοσυχνότης** τῆς τα-



Σχ. 163. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς, τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου, ἡ σφαῖρα θὰ ἐκτελέσῃ στροφικὴν ἀρμονικὴν ταλάντωσιν.

λαντώσεως. Ἐκ ταύτης προκύπτει καὶ ἡ *ἰδιοπερίοδος* T , ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως $T = 2\pi/\omega$.

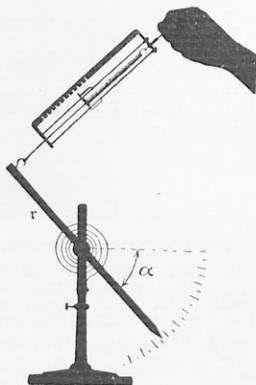
Ὅταν ἐν σῶμα ἐκτελῇ στροφικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, μεταβάλλεται τόσον ἡ γωνιακὴ ταχύτης Ω αὐτοῦ (*), ὅσον καὶ ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις Ω' . Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, αὐτὰ μεταβάλλονται ἁρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.

Ἡ ἰδιοπερίοδος T τῆς ταλάντωσεως ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου

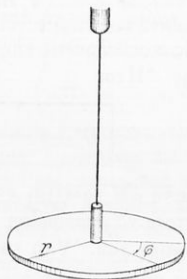
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} \quad (1)$$

ἐνθα Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ D^* ἡ κατευθύνουσα ροπή. Ὁ τύπος (1) — ὁ ὁποῖος ἀποδεικνύεται κατωτέρω — εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀντίστοιχον τύπον, τὸν παρέχοντα τὴν ἰδιοπερίοδον τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλάντωσεως (§ 110).

Μέτρησις τῆς κατευθύνουσης ροπῆς ἐνὸς ἐλατηρίου. Τὴν κατευθύνουσαν ροπὴν ἐνὸς ἐλατηρίου εὐρίσκομεν, ἐὰν ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ



Σχ. 164. Ἡ κατευθύνουσα ροπή τοῦ ἐλατηρίου μετρεῖται ἐκ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποῖαν δεικνύει τὸ δυναμόμετρον, τῆς ἀποστάσεως r καὶ τῆς γωνίας α .



Σχ. 165. Κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ δίσκου, ἡ γωνία φ μεταβάλλεται ἁρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.

γνωστὴν ροπὴν καὶ μετρήσωμεν τὴν ἐπ' αὐτῆς προκαλουμένην γωνίαν (σχ. 164). Τὸ πηλίκον

$$\frac{\text{ροπή}}{\text{γωνία}}$$

μᾶς παρέχει τὴν κατευθύνουσαν ροπὴν τοῦ ἐλατηρίου.

(*) Δὲν πρέπει νὰ γίνῃ σύγχυσις μεταξὺ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος $\Omega = d\varphi/dt$ τῆς σφαίρας καὶ τῆς κυκλικῆς ἰδιοσυχνότητος ω τῆς ταλάντωσεως.

Παραδείγματα στροφικῶν ταλαντώσεων. Στροφικὴν ταλάντωσιν ἐκτελεῖ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, ὁ αἰωρητὴς τῶν ὥρο-λογίων τσέπης (σχ. 9). Ὅμοιος, στροφικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ἐκτε-λεῖ καὶ δίσκος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐξηρημένος διὰ σύρματος (σχ. 165): Ἐὰν στρέψωμεν τὸν δίσκον κατὰ τὴν γωνίαν φ καί, ἀκολουθῶς, τὸν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, οὗτος ἀρχίζει νὰ ταλαντοῦται, διότι τὸ σύρμα, λόγῳ τῆς στρέ-ψεως, ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δίσκου μίαν ροπὴν ἐπαναφορᾶς, ἀνάλογον πρὸς τὴν γωνίαν (§ 138), ὁπότε ἡ ταλάντωσις εἶναι ἁρμονική.

§ 126. Θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς στροφικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Θεωρήσωμεν σῶμα, ροπῆς ἀδρανείας Θ , στρεπτόν περὶ ἄξονα καὶ «ἐλαστικῶς» συν-δεδεμένον μὲ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του· σῶμα, δηλ., ἐπὶ τοῦ ὁποίου δορᾷ μία ροπή ἐπαναφορᾶς M , ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν φ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἡ κί-νησις, τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ σῶμα τοῦτο ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς M , εὐρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφικῆς κινήσεως $M = \Theta \cdot \omega'$. Ἡτοι ἔχομεν

$$M = \Theta \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \eta \quad \Theta \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D^* \cdot \varphi \quad \eta \quad \Theta \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D^* \cdot \varphi = 0. \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ τυπικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς στροφικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἡ λύσις αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \eta \mu \omega t. \quad (2)$$

Ἐὰν διαφορίσωμεν ὡς πρὸς τὸν χρόνον τὴν ἐξίσωσιν (2), θὰ λάβωμεν τὴν γωνιακὴν ταχύτητα Ω . Ἡτοι

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \varphi_0 \sigma \eta \mu \omega t.$$

Ἐὰν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διαφορίσωμεν ὡς πρὸς τὸν χρόνον, θὰ λάβωμεν τὴν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν Ω' . Ἡτοι

$$\Omega' = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \varphi_0 \eta \mu \omega t. \quad (3)$$

Τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς ω εὐρίσκομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσω-σιν (1) τὴν τιμὴν τοῦ φ , τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), καὶ τὴν τι-μὴν τοῦ $d^2\varphi/dt^2$, ὡς αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3). Ἡτοι θὰ ἔχωμεν

$$-\Theta \cdot \omega^2 \cdot \varphi_0 \eta \mu \omega t + D^* \cdot \varphi_0 \eta \mu \omega t = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν, δι' ἀπλοποιήσεως, τὴν σχέσιν

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \quad \text{καὶ, ἐκ ταύτης, τὴν ἐξίσωσιν} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}.$$

§ 127. Μέτρησις τῆς ροπῆς ἀδρανείας διὰ τῆς μεθόδου τῶν στροφικῶν ταλαντώσεων. Ἐὰν εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 163 ἀντικαταστήσωμεν τὴν σφαῖραν, τῆς ὁποίας ἡ ροπή ἀδρανείας ἔστω Θ_1 , διὰ σώματος, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας Θ_2 , καὶ μετρήσωμεν τὴν περιόδον T_2 τῆς ταλαντώσεως, λαμ-βάνομεν [κατὰ τὸν τύπον (1) τῆς § 125] διὰ τὸν λόγον τῶν δύο ροπῶν ἀδρανείας τὴν σχέσιν

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

ἐνθα T_1 εἶναι ἡ περίοδος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ ἡ ροπή ἀδρανείας Θ_1 μιᾶς σφαίρας εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ, λόγῳ τοῦ ἀπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος αὐτῆς (βλ. Πίνακα σ. 77), αἱ δὲ περίοδοι T_1 καὶ T_2 προέκυψαν ἐκ τῆς μετρήσεως, ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως εὐρίσκεται ἡ ἄγνωστος τιμὴ Θ_2 .

Ἄλλῃ μέθοδος μετρήσεως τῆς ροπῆς ἀδρανείας εἶναι ἡ ἐξῆς: Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν, διαδοχικῶς, τὰς περιόδους διὰ δύο σώματα, τοῦ ἐνὸς τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν ροπήν ἀδρανείας, μετροῦμεν ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν περίοδον T_2 , διὰ τὸ σῶμα τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας Θ_2 , ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν περίοδον T_1 διὰ τὸ αὐτὸ σῶμα, ἀφοῦ αὐξήσωμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας αὐτοῦ κατὰ γνωστὸν ποσὸν διὰ προσθήκης σώματος (ἢ σωμάτων) γνωστῆς ροπῆς ἀδρανείας. Οὕτω, ἡ περίοδος T_2 τῆς ταλαντώσεως τοῦ πλαισίου ἐνὸς κατοπινοῦ γαλβανομέτρου (σχ. 166) εἶναι ἴση πρὸς

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_2}{D^*}} \quad (1)$$

ἐνθα Θ_2 εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ πλαισίου καὶ D^* ἡ κατευθύνουσα ροπή τοῦ σύρματος ἐξαερίσεως. Ἐάν, τώρα, προσθέσωμεν δύο μικρὰς σφαίρας εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἡ νέα τιμὴ τῆς περιόδου θὰ εἶναι

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_2 + \Theta_1}{D^*}} \quad (2)$$

ἐνθα Θ_1 εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας τῶν δύο σφαιρῶν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται εὐκόλως. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην ροπήν ἀδρανείας Θ_2 τοῦ πλαισίου.

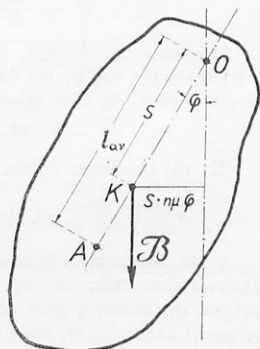
Σχ. 166. Διὰ προσθήκης τῶν δύο σφαιρῶν, αὐξάνεται ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κινητοῦ οὐστήματος τοῦ γαλβανομέτρου κατὰ γνωστὸν ποσόν.

λως. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην ροπήν ἀδρανείας Θ_2 τοῦ πλαισίου.

§ 128. Φυσικὸν ἐκκρεμές. Πᾶν στερεὸν σῶμα, δυνάμενον νὰ στραφῇ περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, καλεῖται **φυσικὸν ἐκκρεμές**. Ἄν ἀπομακρύνωμεν ἓν φυσικὸν ἐκκρεμές ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ τὴν γωνίαν φ (σχ. 167), ἡ δύναμις B (τὸ βάρος, δηλ., τοῦ ἐκκρεμοῦς) θὰ σχηματίσῃ, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαερίσεως O , τὴν ροπήν

$$M = -B \cdot s \cdot \eta \mu \varphi$$

ἐνθα s εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος ἐξαερίσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους K . Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τῆς ἐξισώσεως δηλοῖ ὅτι ἡ ροπή αὕτη τείνει νὰ ἐλαττώσῃ τὴν γωνίαν φ , εἶναι, δηλ., μία ροπή ἐπαναφορᾶς. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς ταύτης, τὸ ἐκκρεμές τείνει νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ὅταν, ὅμως, φθάσῃ



Σχ. 167. Φυσικὸν ἐκκρεμές. O = ἄξων ἐξαερίσεως, K = κέντρον βάρους, A = κέντρον αἰωρήσεως.

εἰς αὐτήν, λόγῳ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει, τὴν ὑπερβαίνει καὶ ἐκτελεῖ, οὕτω, στροφικὰς ταλαντώσεις. Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς πολὺ μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ , θὰ ἔχωμεν $\eta \mu \varphi \approx \varphi$ (*), ὁπότε ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$M = -B \cdot s \cdot \varphi.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγουμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ γωνία φ εἶναι μικρὰ ($\eta \mu \varphi \approx \varphi$), ἡ ροπή ἐπαναφορᾶς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνίαν καί, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὸ ἔκκρεμὲς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς ταύτης, θὰ ἐκτελέσῃ ἁρμονικὴν στροφικὴν ταλάντωσιν.

Ἡ κατευθύνουσα ροπή D^* τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς εἶναι ἴση πρὸς

$$D^* = \frac{B \cdot s \cdot \varphi}{\varphi} = B \cdot s = m g \cdot s.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 125, τὸ D^* διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $m g \cdot s$, λαμβάνομεν διὰ τὴν περιόδον T τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς τὸν τύπον

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_0}{m g \cdot s}} \quad (1)$$

ἐνθα Θ_0 εἶναι ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ ἔκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως O . Ἄν τὴν παράστασιν $\Theta_0/m \cdot s$ ὀνομάσωμεν **ἀνηγμένον μῆκος** l_{av} τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{av}}{g}}. \quad (2)$$

Παραβάλλοντες τὸν τύπον (2) πρὸς τὸν ἀντίστοιχον τύπον τοῦ μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς, συνάγουμεν ὅτι τὸ ἀνηγμένον μῆκος ἑνὸς φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος ἑνὸς μαθηματικοῦ ἔκκρεμοῦς τῆς αὐτῆς περιόδου. Ἄν, λοιπόν, θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς τὸ σημεῖον A (**κέντρον αἰωρήσεως**), τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως, ἴσην πρὸς τὸ ἀνηγμένον μῆκος l_{av} καὶ φαντασθῶμεν ὅλην τὴν μάζαν τοῦ ἔκκρεμοῦς συγκεντρωμένην εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, θὰ προκύψῃ ἓν μαθηματικὸν ἔκκρεμὲς μὲ περίοδον, ἴσην πρὸς τὴν περίοδον τοῦ φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς.

Διὰ τὸ φυσικὸν ἔκκρεμὲς ἰσχύουν τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 1ον. «Αἱ περίοδοι ἑνὸς φυσικοῦ ἔκκρεμοῦς, ἐξηρημένον ἐκ διαφορῶν ἄξωνων, παραλλήλων καὶ ἴσων ἀπεχόντων ἐκ τοῦ κέντρου βάρους, εἶναι αἱ αὐταί». Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), δεδομένου ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας Θ_0 ὡς πρὸς ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἄξονας εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Steiner, ἡ αὐτὴ καί, ἐπὶ πλέον, ἡ ἀπόστασις s αὐτῶν ἐκ τοῦ κέντρου βάρους εἶναι, ἐκ παραδοχῆς, ἡ αὐτή.

(*) Βλ. § 17.

Θεώρημα 2^{ον}. «*Ἡ περίοδος ἐνὸς φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς δὲν μεταβάλλεται, ἂν τοῦτο ἐξαρτηθῇ ἀπὸ ἄξονα, παράλληλον πρὸς τὸν ἀρχικὸν καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αἰωρήσεως.*»

Ἀπόδειξις: Ἀρχεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τὸ ἀνηγμένον μῆκος εἶναι τὸ αὐτό: Ὄταν τὸ ἐκκρεμὲς ἔχῃ ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ἄξονος O , ἔχει, ὡς εἶδομεν, ἀνηγμένον μῆκος, ἴσον πρὸς

$$l_{av} = \frac{\Theta_0}{m \cdot s}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Θ_0 κατὰ τὸ θεώρημα Steiner (§ 67), λαμβάνομεν

$$l_{av} = \frac{\Theta_K + m \cdot s^2}{m \cdot s} = \frac{\Theta_K}{m \cdot s} + s \quad (3)$$

καὶ ἐκ τούτου

$$l_{av} - s = \frac{\Theta_K}{m \cdot s}.$$

Ὄταν τὸ ἐκκρεμὲς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ἄξονος A , τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αἰωρήσεως, ἡ ἀπόστασις τοῦ νέου ἄξονος ἐξαρτήσεως ἐκ τοῦ κέντρου βάρους εἶναι $l_{av} - s$. Ἄν εἰς τὸν τύπον (3) αντικαταστήσωμεν τὸ s διὰ τῆς νέας του τιμῆς $l_{av} - s$, θὰ λάβωμεν διὰ τὸ νέον ἀνηγμένον μῆκος l'_{av} τὴν τιμὴν

$$l'_{av} = \frac{\Theta_K}{m \cdot (l_{av} - s)} + (l_{av} - s) = \frac{\Theta_K}{m \cdot \frac{\Theta_K}{m \cdot s}} + \frac{\Theta_K}{m \cdot s} = s + \frac{\Theta_K}{m \cdot s} = l_{av}.$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ νέον ἀνηγμένον μῆκος l'_{av} εἶναι ἴσον μὲ τὸ παλαιὸν l_{av} .



Σχ. 168. Ἀντιστρεπτόν ἐκκρεμὲς.

περιόδου T εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ g .

§ 129. Μέτρησις τοῦ g διὰ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐκ τοῦ τύπου (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου δυνάμεθα νὰ εὐρώμεν τὸ g , ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίοδον T καὶ τὸ ἀνηγμένον μῆκος l_{av} ἐνὸς φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν, ὅμως, τοῦ l_{av} ἀπαιτεῖται ἡ γνώσις τῶν τριῶν μεγεθῶν Θ_0 , m καὶ s . Ἡ πολύπλοκος αὕτη μέθοδος ἀπλουστεύεται διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ **ἀντιστρεπτοῦ ἐκκρεμοῦς** (σχ. 168): Τοῦτο εἶναι ἐκκρεμὲς, φέρον δύο παράλληλους ἄξονας, ἀπὸ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐξαρτηθῇ ἀλληλοδιαδόχως, εἶναι δὲ (διὰ λόγους, τοὺς ὁποίους θὰ ἴδωμεν κατωτέρω) ἀσυμμέτρως κατασκευασμένον ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονας. Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ g ἐξαρθόμεν τὸ ἐκκρεμὲς διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ ἐνὸς καὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος καί, διὰ καταλλήλου μετακινήσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ κινητῶν μαζῶν, ἐπιτυγχάνομεν, ὥστε ἡ περίοδος νὰ καταστῇ ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις. Τότε εἴμεθα βέβαιοι ὅτι οἱ δύο ἄξονες εἶναι, ἀντιστοίχως, ἄξονες ἐξαρτήσεως καὶ αἰωρήσεως, ἀφοῦ, κατὰ τὸ θεώρημα (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου, τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει καὶ ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονας τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἦδη, διὰ μετρήσεως τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀποστάσεως l (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὸ κοινὸν ἀνηγμένον μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς) καὶ τῆς

Τὸ ἔκκρεμὲς πρέπει νὰ κατασκευασθῇ οὕτως ὥστε ἡ μᾶζα του νὰ εἶναι ἀσυμμέτρως κατανεμημένη ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας διὰ τὸν ἐξῆς λόγον: Κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τῆς προηγουμένης παραγράφου, δύο ἄξονες, συμμετρικῶς κεῖμενοι ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους, ἔχουν τὴν αὐτὴν περίοδον. Εἰς ἕκαστον, ὅμως, ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ καὶ εἰς ἀκόμῃ ἄξων, ἔχων πρὸς τὸν πρῶτον σχέσιν ἄξονος ἐξαρτήσεως - ἄξονος αἰωρήσεως, καί, συνεπῶς, ἔχει τὴν αὐτὴν περίοδον. Ὑπάρχουν, λοιπόν, κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἔκκρεμοῦς, τέσσαρες ἄξονες μὲ τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἄν, λοιπόν, τὸ κέντρον βάρους κεῖται συμμετρικῶς ὡς πρὸς δύο ἄξονας (κεῖται, δηλ., εἰς ἴσην ἀπ' αὐτῶν ἀπόστασιν), αἱ περίοδοι θὰ εἶναι, κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τῆς προηγουμένης παραγράφου, αἱ αὐταί, χωρὶς ἐκ τούτου νὰ ἔπεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι, ἀμοιβαίως, ἄξονες ἐξαρτήσεως καὶ αἰωρήσεως. Δι' αὐτόν, ἀκριβῶς, τὸν λόγον ἔχει προστεθῇ εἰς τὸ ἐν ἄκρον τοῦ ἔκκρεμοῦς τοῦ σχήματος 168 μία μεγάλη μᾶζα, ἵνα τὸ κέντρον βάρους μὴ εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δακτύλιος, ἀμελητέου πάχους, στηρίζεται ἐπὶ ὀριζόντιον ἀκμῆς καὶ τίθεται εἰς στροφικὴν ταλάντωσιν μικροῦ πλάτους, ἀποτελῶν οὕτω φυσικὸν ἔκκρεμὲς. Ἐάν r εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ δακτυλίου καὶ m ἡ μᾶζα αὐτοῦ, νὰ εὐρεθῇ ἡ περίοδος τῆς ταλάντωσεως.

$$(ΑΠ: T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}})$$

2. Ράβδος, μήκους l καὶ μάζης m , τίθεται εἰς στροφικὴν ταλάντωσιν μικροῦ πλάτους περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ ἐνός ἄκρου αὐτῆς. Νὰ εὐρεθῇ ἡ περίοδος τῆς ταλάντωσεως.

$$(ΑΠ: T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}})$$

3. Σώμα, μάζης m καὶ μήκους l , κόμπεται οὕτως ὥστε νὰ σχηματίσῃ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ὅταν τεθῇ εἰς ταλάντωσιν περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, διερχόμενον διὰ τῆς μιᾶς κορυφῆς, ποία θὰ εἶναι ἡ περίοδος; (Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς ροπῆς ἀδρανείας τοῦ τριγώνου θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας μιᾶς ράβδου καὶ τὸ θεώρημα Steiner).

$$(ΑΠ: T = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g \cdot \sqrt{3}}})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'

ΚΕΝΤΡΙΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

§ 130. **Κεντρικὴ κίνησις.** Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ μελετήσωμεν εἰδικὴν μορφήν κινήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις διευθύνεται, διαρκῶς, πρὸς ἓν ὠρισμένον σημεῖον, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον ἐπιταχύνσεως** KE (σχ. 169). Πᾶσα κίνησις τοιαύτης μορφῆς καλεῖται **κεντρικὴ κίνησις**. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις ἔχει πάντοτε τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιταχύνσεως, ἔπεται ὅτι **κεντρικαὶ κινήσεις** παράγονται, ὅταν ἡ δύναμις διενθύνεται, διαρκῶς, πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως. Οὕτω, κεντρικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ φορτισμένον σωματίον, κινούμενον περὶ φορτισμένον κέντρον, τὰ οὐράνια σώματα, κινούμενα περὶ τὸν ἥλιον κ.λ..

χική ταχύτης εἶναι πολὺ μικρὰ καί, συνεπῶς, ἡ ἔλλειψις πολὺ πεπλατυσμένη. Δυνάμεθα, λοιπόν, νὰ θεωρήσωμεν τὸ κέντρον τῆς Γῆς ὡς ἀπείρως μακρὸν εὐρισκόμενον, ὅποτε ὅλαι αἱ ἐπιβατικάι ἀκτίνες θὰ εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ ἔλλειψις θὰ ἔχῃ, πρακτικῶς, σχῆμα παραβολῆς.

Ὑπάρχει, τέλος, καὶ ἡ περίπτωσις ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης θὰ εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε τὸ βλήμα ν' ἀπομακρυνθῇ ὀριστικῶς τῆς Γῆς, διαγράφον ὑπερβολικὴν τροχίαν. Ἐπειδὴ τὸ βλήμα ἐξακολουθεῖ εὐρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ἑλκτικοῦ πεδίου τοῦ Ἡλίου, θὰ καταστῇ *τεχνητὸς πλανήτης*. Τοῦτο θὰ συμβῇ, ὅταν ἡ ταχύτης γίνῃ μεγαλυτέρα μιᾶς τιμῆς v_∞ (ἡ ὁποία ὑπολογίζεται κατωτέρω). Ἐὰν ἡ ταχύτης εἶναι, ἀκριβῶς, ἴση μὲ v_∞ , ἡ τροχία εἶναι παραβολή.

Ἡ ταχύτης v_∞ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει ἀρχικῶς τὸ βλήμα, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ νὰ μετακινήθῃ τοῦτο ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς μέχρι τοῦ ἀπείρου. Κατὰ τὰς §§ 150, 152, θὰ ἔχωμεν, λοιπόν,

$$\text{κινητικὴ ἐνέργεια} = \int_R^\infty \text{δύναμις} \cdot \text{δρόμος}$$

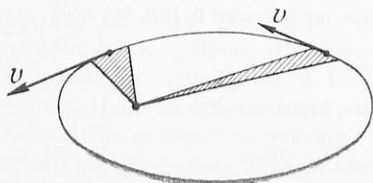
$$\frac{1}{2} m \cdot v_\infty^2 = \int_R^\infty k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot dr.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_∞ τὴν τιμὴν

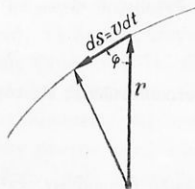
$$v_\infty = \sqrt{\frac{2k \cdot M}{R}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

§ 131. Θεώρημα τῶν ἑμβαδῶν. Διὰ τὴν κεντρικὴν κίνησιν ἰσχύει τὸ εἰς τὰ κατωτέρω ἀποδεικνυόμενον *θεώρημα τῶν ἑμβαδῶν*: «Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτίς διαγράφει εἰς ἴσους χρόνους ἴσα ἑμβαδὰ».

Ἀμεσον ἀποτέλεσμα τοῦ θεωρήματος τῶν ἑμβαδῶν εἶναι ὅτι ἡ ταχύτης εἰς τὰ



Σχ. 171. Τὰ δύο γραμμοσκιασμένα ἑμβαδὰ εἶναι ἴσα, ὡς διαγραφέντα εἰς ἴσους χρόνους.



Σχ. 172.

σημεῖα τῆς τροχιάς, τὰ πλησιέστερα πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως, θὰ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ταχύτητα εἰς τὰ ἀπώτερα σημεῖα (σχ. 171).

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν ἑμβαδῶν: Ἡ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ ἐξασκουμένη δύναμις διευθύνεται διαρκῶς πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως καί, συνεπῶς, ἡ ροπή

αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, κατὰ τὴν γενικωτέραν μορφήν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφικῆς κινήσεως, ἡ στροφορμὴ τοῦ κινήτου ὡς πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως θὰ διατηρῆται σταθερά. Ἦτοι

$$[r \cdot mv] = \text{σταθ.} \quad \text{ἐκ τοῦ ὁποίου} \quad [r \cdot v] = \text{σταθ.} \quad (1)$$

Ἐάν, ἀφ' ἐτέρου, σχεδιάσωμεν τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας εἰς δύο χρονικάς στιγμὰς t καὶ $t + dt$, θὰ λάβωμεν τὸ σχῆμα 172, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς

$$\frac{r \cdot v \cdot dt \cdot \eta \mu \varphi}{2}.$$

Ἐπειδὴ τὸ $r \cdot v \cdot \eta \mu \varphi$ εἶναι, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), σταθερόν, ἔπεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνος διαγραφόμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου.

§ 132. Νόμοι τοῦ Kepler. Ὁ Kepler, μελετῶν τὰς κινήσεις τῶν πλανητῶν, συνήγαγε τοὺς ἑξῆς νόμους:

1) Αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐπίπεδοι, ἡ δὲ ἐπιβατικὴ ἀκτίς, ἡ συνδέουσα τὸν Ἥλιον πρὸς τὸν πλανήτην, διαγράφει ἐμβαδὰ, ἀνάλογα τοῦ χρόνου.

2) Αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐλλείψεις, τῶν ὁποίων τὴν μίαν ἐστὶν κατέχει ὁ Ἥλιος.

3) Τὰ τετράγωνα τῶν περιόδων τῆς περιφορᾶς περὶ τὸν Ἥλιον εἶναι ἀνάλογα τῶν κύβων τῶν μεγάλων ἀξόνων τῶν τροχιῶν.

Τοὺς τρεῖς ἐκ παρατηρήσεων προκύψαντας νόμους τοῦ Kepler ἐξήγησεν ὁ Newton διὰ τῆς θεωρίας τῆς παγκοσμίας ἑλξεως (*), θεωρῶν τὴν κίνησιν τῶν πλανητῶν ὡς κεντρικὴν. Ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν νόμων ὁ πρῶτος δὲν εἶναι εἰ μὴ τὸ διὰ πᾶσαν κεντρικὴν κίνησιν ἰσχύον θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν. Ὁ δευτερός νόμος προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἐκ τῆς παγκοσμίας ἑλξεως ἀσκουμένη δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Ὁ τρίτος, τέλος, νόμος συνάγεται καὶ αὐτὸς ἐκ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἑλξεως, ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν κυκλικῆς τροχιάς: Ὡς γνωστόν, μεταξὺ τῆς περιόδου T , τῆς ταχύτητος v καὶ τῆς ἀκτίνος R ἰσχύει ἡ σχέση $T = 2\pi R/v$. Ἀφ' ἐτέρου, ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ κινήτου διὰ νὰ διαγράφῃ τὴν κυκλικὴν τροχίαν, εἶναι ἴση πρὸς $F = m \cdot v^2/R$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν τοῦ v , τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας, ἔχομεν

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R \cdot m}{F}.$$

Ἡ δύναμις F εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος (§ 150), ἴση πρὸς

$$F = k \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k \cdot M} \cdot R^3.$$

Ἐπειδὴ ὁ παράγων $4\pi^2/k \cdot M$ εἶναι σταθερὸς διὰ τὸ ἥλιακὸν σύστημα, ἔπεται ὅτι τὸ T^2 εἶναι ἀνάλογον τοῦ R^3 .

(*) Βλ. Κεφ. ΙΔ'.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΜΕΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΣ

§ 133. **Ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις.** Μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τὰ στερεὰ σώματα ὡς μὴ παραμορφούμενα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων (ἢ ροπῶν). Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, τὰ στερεὰ παραμορφοῦνται, θέμα δὲ τοῦ κεφαλαίου τούτου θὰ εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ἀνεύρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν προκαλουσῶν τὰς παραμορφώσεις δυνάμεων (ἢ ροπῶν) καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν.

Αἱ παραμορφώσεις καλοῦνται **ἐλαστικαί**, ὅταν αἴρωνται, μόλις παύσουν ἐπιδρῶσαι αἱ προκαλοῦσαι αὐτὰς δυνάμεις (ἢ ροπαί). Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, εἰς τὰ περισσότερα στερεὰ αἱ παραμορφώσεις εἶναι ἐλαστικαί, ἔφ' ὅσον εἶναι μικραί. Ἐάν, τουναντίον, αἱ παραμορφώσεις ὑπερβοῦν ὥρισμένον ὅριον, καθίστανται **μόνιμοι** (**πλαστικά**), τὸ σῶμα, δηλ., δὲν ἀναλαμβάνει τὰς ἀρχικὰς του διαστάσεις, ὅταν ἀρθοῦν τὰ αἷτια τῆς παραμορφώσεως. Ὅταν, τέλος, αἱ παραμορφώσεις γίνουν ὑπερβολικῶς μεγάλαι, τὸ σῶμα θραύεται.

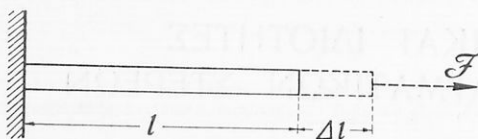
Ἡ ἀνάγκη τῆς ἐπιδράσεως δυνάμεων διὰ τὴν παραμόρφωσιν δύνатаи νὰ ἐξηγηθῇ ὡς ἑξῆς: Ὡς γνωστόν, τὰ στερεὰ σώματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ στοιχειώδεις δομικοὺς λίθους (ἰόντα, ἄτομα, μόρια), οἱ ὅποιοι, συγκρατούμενοι μεταξὺ τῶν διὰ δυνάμεων, ἰσορροποῦν εἰς ὥρισμένας ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις. Πᾶσα παραμόρφωσις τοῦ στερεοῦ προκαλεῖ μεταβολὴν τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν μεταβολὴν τῶν δυνάμεων καί, συνεπῶς, ἐξαφάνισιν τῆς ἰσορροπίας. Ἰσορροπία εἰς τὴν νέαν ταύτην κατάστασιν τῆς παραμορφώσεως εἶναι δυνατή, μόνον ἐὰν ἐξασκηθοῦν πρόσθετοι δυνάμεις ἕξωθεν.

Πειραματικῶς εὐρίσκομεν ὅτι αἱ παραμορφώσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς δυνάμεων (ἢ ροπῶν), ἔφ' ὅσον αὗται εἶναι μικραί. Ἡ πρότασις αὕτη ἀποτελεῖ τὸν **νόμον τοῦ Hooke**, τοῦ ὁποίου ποσοτικὴν διατύπωσιν θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω.

Ἡ ἀνεύρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ δυνάμεων καὶ παραμορφώσεων εἶναι

ιδιαιτέρως ἀπλή εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις, τὰς ὁποίας καὶ ἐξετάζομεν εἰς τὰς ἐπομένους παραγράφους.

§ 134. Ἐλκυσμὸς καὶ θλίψις. Θεωρήσωμεν ράβδον, μήκους l [καὶ διατομῆς, ἔμβαδου S , στερεωμένην εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ τεινομένην ὑπὸ τῆς



Σχ. 173. Ἡ μήκυνσις Δl εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως F .

δυνάμεως F (σχ. 173). Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ὁμοιόμορφως κατανεμημένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς, ἡ ράβδος θὰ μακυνθῇ, ἀλλὰ θὰ διατηρήσῃ τὸ σχῆμα της.

Τοιαύτην ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν καλοῦμεν **ἐλκυσμόν**. Ὅπως εὐρίσκομεν πειραματικῶς, ἡ μήκυνσις Δl τῆς ράβδου εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως F , ἀνάλογος τοῦ μήκους l καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἔμβαδου S τῆς διατομῆς. Ἦτοι :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l. \quad (1)$$

Ἡ σταθερὰ E ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τῆς ράβδου καὶ καλεῖται **μέτρον ἐλαστικότητος** ἢ **μέτρον τοῦ Young**.

Ἄν καλέσωμεν **τάσιν** σ τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως F διὰ τοῦ ἔμβαδου S τῆς διατομῆς καὶ **ἀνηγμένην μήκυνσιν** ε τὸ πηλίκον τῆς μακύνσεως Δl διὰ τοῦ ἀρχικοῦ μήκους l τῆς ράβδου, δηλ., ἂν γράψωμεν

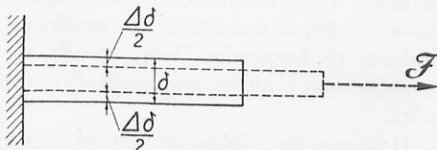
$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2)$$

καὶ ἐκφράζει τὸν νόμον τοῦ Hooke διὰ τὸν ἐλκυσμόν.

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $\varepsilon = 1$, λαμβάνομεν $\sigma = E$. Τὸ μέτρον, δηλ., ἐλαστικότητος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τάσις, ἡ ἀναγκαῖα διὰ τὸν διπλασιασμόν ($\Delta l/l = 1$) τοῦ μήκους μιᾶς ράβδου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ νόμος τοῦ Hooke ἰσχύει καὶ διὰ τὰς μεγάλας αὐτὰς παραμορφώσεις.



Σχ. 174. Κατὰ τὴν μήκυνσιν τῆς ράβδου ἐπέρχεται ἐλάττωσις τῆς διαμέτρου.

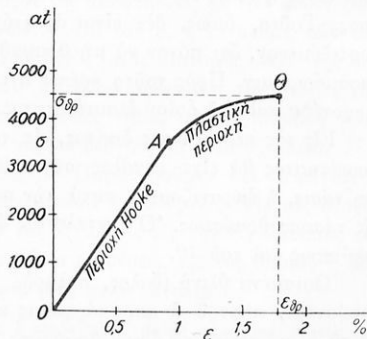
Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐδέχθημεν ὅτι, κατὰ τὸν ἐλκυσμόν, ἡ ράβδος ἀπλῶς

ἐπιμηκύνεται. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, ἡ ἐπιμήκυνσις συνοδεύεται καὶ ὑπὸ ἐλαττώσεως τῆς διαμέτρου δ τῆς ράβδου (σχ. 174). Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται *ἐκλέπτυνσις*.

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ τάσις ἔχει διαστάσεις δυνάμεως δι' ἐμβαδοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς, τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ἔχει διαστάσεις τάσεως. Συνήθως, τοῦτο μετρεῖται εἰς kgp^*/cm^2 (δηλ., εἰς *τεχνικὰς ἀτμοσφαίρας, at*). Εἰς τὸν πίνακα τῆς ἐπομένης σελίδος δίδονται αἱ τιμαὶ τοῦ E διὰ μερικὰ ὑλικά.

Θλίψις. Ἐὰν ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς ράβδου τοῦ σχήματος 173, εἶναι ἀντίθετος, ἡ ράβδος, ἀντὶ νὰ μηκυνθῇ, βραχύνεται, ὁπότε λέγομεν ὅτι τὸ ὑλικὸν ὑφίσταται *θλίψιν*.

§ 135. Διάγραμμα μηχανόσεως. Ἐάν, διὰ καταλλήλου διατάξεως, τείνωμεν μίαν ράβδον ἐκ τινος ὑλικοῦ καὶ μετρήσωμεν τὰς μηχανήσεις καὶ τὰς προκαλούσας αὐτὰς δυνάμεις, ἀκολουθῶν δὲ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τάσεως σ καὶ τῆς ἀνηγμένης μηχανήσεως ϵ , θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 175. Εἰς τὸ διάγραμμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον εἶναι χαρακτηριστικὸν τῶν ἐλαστικῶν ιδιοτήτων τοῦ ἐξεταζομένου ὑλικοῦ, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιοχάς: 1) Τὴν εὐθύγραμμον περιοχὴν OA (περιοχὴ *Hooke*), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν τάσεως· εἰς τὴν περιοχὴν, δηλ., ταύτην ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Hooke. Ἡ τάσις, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον A καλεῖται *ὄριον ἐλαστικότητος*, ἡ δὲ κλίσις τοῦ τμήματος OA παριστᾷ τὸ μέτρον ἐλαστικότητος. 2) Τὴν περιοχὴν $A\Theta$, ἡ ὁποία εἶναι καμπυλόγραμμος καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις, διὰ δεδομένην αὐξησιν τῆς τάσεως, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προβλεπομένης ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Hooke. Ἡ περιοχὴ αὕτη καλεῖται *πλαστικὴ περιοχὴ*, καθόσον εἰς ταύτην, μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς τάσεως, ἡ παραμόρφωσις παραμένει μονίμως. Ἡ μεγίστη τάσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντέχει τὸ ὑλικόν, χωρὶς νὰ θραυσθῇ, καλεῖται *τάσις θραύσεως* σ_{θ} , παρέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ σημείου Θ τοῦ διαγράμματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ὄριον θραύσεως*.



Σχ. 175. Διάγραμμα μηχανόσεως.

Εἰς τὸν πίνακα τῆς ἐπομένης σελίδος δίδονται ὠρισμένοι ἐλαστικοὶ σταθεραὶ διὰ τινὰ, τεχνικῆς σημασίας, ὑλικά.

ΠΙΝΑΞ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

	Μέτρον ελαστικότητας (at)	Τάσις θραύσεως (at)	Ἀνηγμένη μήκυνσις θραύσεως ($\frac{\sigma}{\epsilon}$)
Χάλυψ ἀρίστης ποιότητος (κράμα)	$2 \cdot 10^6$	25 000	6
Χάλυψ	$2 \cdot 10^6$	5000	25
Ὁρείχαλκος	$0,9 \cdot 10^6$	3000	45
Χαλκός	$1,3 \cdot 10^6$	2100	50
Ἀργίλιον	$0,7 \cdot 10^6$	1500	30
Ξύλον ἐλάτης			
α) παραλλήλως πρὸς τὰς ἴνας . .	$5 \div 12 \cdot 10^4$	800	
β) καθέτως πρὸς τὰς ἴνας		25	
Ἐλαστικὸν κόμμι	$2 \div 80$	200	800

Εἰς τὰς τεχνικὰς κατασκευὰς πρέπει, κατ' ἀρχήν, νὰ λαμβάνεται πρόνοια ὥστε ἡ τάσις εἰς ὅλα τὰ σημεῖα νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τάσεως θραύσεως. Τοῦτο, ὅμως, δὲν εἶναι ἀρκετόν, καθόσον πρέπει τὸ κατασκευάσμα, φορτιζόμενον, ὄχι μόνον νὰ μὴ θραυσθῇ, ἀλλὰ καὶ νὰ μὴ ὑποστῇ μόνιμον παραμόρφωσιν. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἡ τάσις εἰς πᾶν σημεῖον αὐτοῦ νὰ εἶναι μικροτέρα καὶ τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος.

Εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκεῖνας, εἰς τὰς ὁποίας ἡ καταστροφή ἐνὸς κατασκευάσματος θὰ εἶχε μεγάλας συνεπείας, λαμβάνεται πρόνοια ὥστε ἡ μεγίστη τάσις, ἡ ἐμφανιζομένη κατὰ τὴν φόρτισιν, νὰ εἶναι n φορὰς μικροτέρα τῆς τάσεως θραύσεως. Ὁ συντελεστὴς ἀσφαλείας n λαμβάνεται, ἐνίοτε, μεγαλύτερος καὶ τοῦ 10.

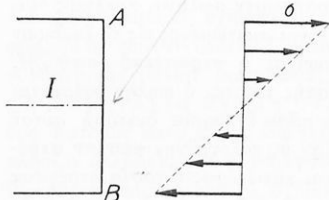
Ὀρισμένα ὑλικά (ὑαλος, σκληρὸς χάλυψ κ.λ.), ὑφιστάμενα ἑλκυσμόν, θραύονται, προτοῦ ἡ παραμόρφωσις καταστῇ μόνιμος. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὰ ὑλικά ταῦτα τὸ ὅριον θραύσεως προηγεῖται τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος (εὐθραυστα ὑλικά).

Παραβάλλοντες τὰς ἐλαστικὰς σταθερὰς τοῦ χαλκοῦ πρὸς τὰς σταθερὰς τῶν ἄλλων μετάλλων, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος, ἂν καὶ ἔχῃ μικρὰν ἀντοχήν (δηλ., μικρὰν τάσιν θραύσεως), εἶναι λίαν ἐκτατός, ἔχει, δηλ., μεγάλην ἀνηγμένην μήκυνσιν θραύσεως. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία χαλκίνη ράβδος εἶναι δυνατόν νὰ ὑποστῇ μεγάλην ἐπιμήκυνσιν, χωρὶς νὰ θραυσθῇ.

Αἱ ιδιότητες τῶν διαφόρων ὑλικῶν εἶναι δυνατόν νὰ μεταβληθοῦν διὰ καταλήλου κατεργασίας. Οὕτω, εἰς τὴν βιομηχανίαν ἐπιτυγχάνεται καλλιρευσίς τοῦ χάλυβος διὰ σφυρηλατήσεως, βαφῆς, ἀνοπτήσεως (θερμάνσεως εἰς ὑψηλὰς θερμοκρασίας) κ.λ.

§ 136. Κάμψις. Θεωρήσωμεν δοκόν, στηριζομένην ἐλευθέρως εἰς τὰ ἄκρα της (σχ. 176) καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐξασκεῖται ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, ἡ δο-

κός κάμπτεται - ἐνῶ, δηλ., προηγουμένως ὁ ἄξων αὐτῆς εἶχε σχῆμα εὐθείας γραμμῆς, τώρα ἔχει καμπυλωθῇ, χωρὶς, ὅμως, τὸ μήκος του νὰ μεταβληθῇ. Πᾶσα διατομὴ τῆς δοκοῦ, κάθετος ἀρχικῶς ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ κάθετος ἐπ' αὐτόν. Εἶναι προφανές ὅτι, κατὰ τὴν κάμψιν, αἱ πρὸς τὴν κοίλῃν ἐπιφάνειαν εὐρισκόμεναι ἴνες θὰ ἐπιβραχυνθοῦν, ἐνῶ αἱ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν θὰ ἐπιμηκυνθοῦν. Αἱ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἄξονος ἴνες I διατηροῦν τὸ ἀρχικόν των μήκος καὶ καλοῦνται **οὐδέτεραι ἴνες**. Λόγω τῆς παραμορφώσεως τῶν ἰνῶν, ἀναπτύσσεται εἰς ἐκάστην ἐξ αὐτῶν μία τάσις, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς μηκύνσεως (ἢ βραχύνσεως) αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἡ μῆκυνσις μιᾶς ἰνὸς εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἐκ τῶν οὐδετέρων ἰνῶν, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ τάσεις θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῆς ἀποστάσεως ἐκ τῶν οὐδετέρων ἰνῶν. Κατὰ ταῦτα, ἡ κατανομὴ τῶν τάσεων ἐντὸς μιᾶς διατομῆς AB τῆς δοκοῦ θὰ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως - ὅπως τοῦτο παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 177 (δεξιᾷ). Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ μέγιστα τῶν τάσεων ἐμφανίζονται εἰς τὰς θέσεις A καὶ B (θλίψις εἰς τὴν A , ἐλκυσμός εἰς τὴν B) καί, ἐπομένως, αἱ θέσεις αὗται εἶναι αἱ θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἡ δοκὸς ἀρχίζει νὰ θραύεται, ὅταν ἡ κάμψις γίνῃ πολὺ μεγάλη.



Σχ. 177. Κατανομὴ τῆς τάσεως ἐντὸς μιᾶς διατομῆς AB δοκοῦ ὑπὸ κάμψιν.

Τὸ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F προκύπτων βέλος κάμψεως h εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ὑπολογίζεται ἴσον πρὸς

$$h = \frac{1}{4} \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{l^3}{J} \quad (1)$$

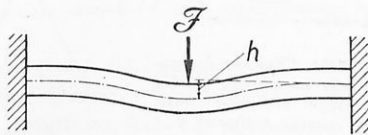
ἐνθα l εἶναι τὸ μήκος τῆς δοκοῦ καὶ J ἡ **ἐπιφανειακὴ ροπή ἀδρανείας**. Αὕτη ὀρίζεται διὰ τοῦ τύπου



Σχ. 178.

εἰς τὸν ὁποῖον dS εἶναι ἓν στοιχειῶδες τμήμα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς διατομῆς καὶ z ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἐκ τῶν οὐδετέρων ἰνῶν. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ βέ-

$$J = \int dS \cdot z^2,$$



Σχ. 179. Κάμψις δοκοῦ πακτωμένης καὶ εἰς τὰ δύο ἅκρα.

λος κάμψεως εἶναι τόσο μικρότερον, ὅσον ἡ ἐπιφανειακὴ ροπή ἀδρανείας εἶναι

μεγαλύτερα. Εάν, λοιπόν, επιζητηται ὅπως δοκός, μὲ δεδομένον ἐμβαδὸν διατομῆς, παρουσιάξῃ ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλύτεραν ἐπιφανειακὴν ροπὴν ἀδρανείας, θὰ πρέπει τὸ σχῆμα τῆς διατομῆς νὰ ἐκλεγῇ τοιοῦτο, ὥστε τὰ στοιχειώδη τμήματα dS τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς νὰ εὐρίσκωνται εἰς ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλύτερας ἀποστάσεις z ἐκ τῶν οὐδετέρων ἰνῶν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ δοκοῦ, τῆς ὁποίας ἡ διατομὴ ἔχει τὴν μορφήν διπλοῦ T (σχ. 178). Ὅταν ἡ δοκὸς στηρίζεται κατ' ἄλλον τρόπον—εἶναι, π.χ., *πακτωμένη* καὶ εἰς τὰ δύο ἅκρα τῆς (σχ. 179)—τὸ βέλος κάμψως εἶναι μικρότερον τοῦ ὑπολογιζομένου διὰ τοῦ τύπου (1).

§ 137. Λυγισμός. Θεωρήσωμεν λεπτὴν ράβδον, στηριζομένην ἐλευθέρως εἰς τὸ ἓν ἅκρον τῆς (σχ. 180) καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄλλο τὴν δύναμιν F κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός της, οὕτως ὥστε αὕτη νὰ ὑφίσταται θλίψιν. Ὅταν ἡ δύναμις ὑπερβῇ ὥρισμένην τιμὴν, ἡ ράβδος δὲν θὰ παραμείνῃ εὐθύγραμμος, ἀλλὰ θὰ λάβῃ ἄλλο σχῆμα (*λυγισμός*).

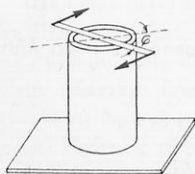


Σχ. 180. Λυγισμός.

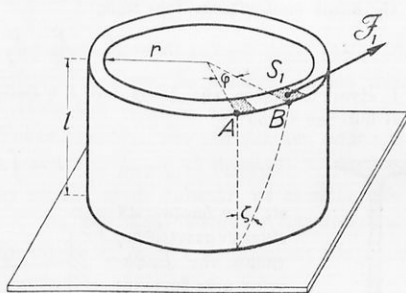
§ 138. Στρέψις. Θεωρήσωμεν σωλῆνα, κυκλικῆς διατομῆς (σχ. 181), ὁ ὁποῖος εἶναι πακτωμένος εἰς τὸ ἓν ἅκρον του, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο ἐξασκεῖται ἡ *στρεπτική ροπή* M . Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς ταύτης, ὁ σωλὴν ὑφίσταται *στρέψιν*, κατὰ τὴν ὁποίαν πᾶσα ἐγκαρσία διατομὴ αὐτοῦ στρέφεται κατὰ τινα γωνίαν φ , καλουμένην *γωνίαν στρέψεως*. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ γωνία στρέψεως εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν στρεπτικὴν ροπὴν. Ἡτοι εἶναι

$$M = D^* \cdot \varphi$$

Ἡ σταθερὰ D^* καλεῖται *κατευθύνουσα ροπή* τοῦ σωλῆνος καὶ ἐξαρτᾶται



Σχ. 181. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς στρεπτικῆς ροπῆς, ὁ σωλὴν στρέφεται κατὰ τὴν γωνίαν στρέψεως φ .



Σχ. 182.

ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων τοῦ σωλῆνος καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου αὐτοῦ.

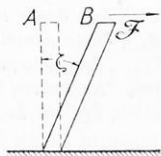
Διὰ νὰ ἐρευνήσωμεν τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον διαδίδεται ἡ στρε-

πτική ροπή από τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ σωλῆνος εἰς τὸ ἄλλο, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ἔγκαρσιαν διατομήν, χωρίζουσαν τὸν σωλῆνα εἰς δύο μέρη. Αἱ δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ ἐν τμήμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἔχουν διευθύνσεις, παραλλήλους πρὸς τὴν θεωρουμένην ἐπιφάνειαν τῆς διατομῆς καὶ καλοῦνται **διατμητικαὶ δυνάμεις**. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἓν στοιχειῶδες τμήμα τῆς διατομῆς (π.χ., τὸ S_1 - σχ. 182) καὶ σχηματίσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διατμητικῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπ' αὐτοῦ, διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ, θὰ λάβωμεν ἓν μέγεθος

$$\tau = \frac{F}{S}$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται **διατμητικὴ τάσις**.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν διατμητικῶν δυνάμεων τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σωλῆνος στρέφεται κατὰ τινα γωνίαν φ , ὅποτε τὸ σημεῖον A μετακινεῖται εἰς τὴν θέσιν τοῦ σημείου B . Ὡς ἐκ τούτου, ἡ γενέτειρα, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου A , σχηματίζει τὴν γωνίαν ζ μετὰ τῆς ἀρχικῆς τῆς διευθύνσεως. Τὴν γωνίαν ταύτην ζ καλοῦμεν **γωνίαν διατμήσεως**. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν διατμήσεως, θεωροῦμεν σωλῆνα, μὴ ὑποστάντα ἀκόμη στρέψιν, καὶ κάμνομεν δύο διατομὰς κατὰ μήκος δύο γενετειρῶν, εὐρισκομένων πλησίον ἀλλήλων, ὅποτε θὰ λάβωμεν ἓν τμήμα ἐκ τοῦ ὕλικου, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σχῆμα 183 ἀποδίδεται δι' ἐστιγμένων γραμμῶν. Ἐάν, ἀκολούθως, εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σωλῆνος ἐξασκῶμεν διατμητικὰς τάσεις, τὸ ἀρχικῶς ὀρθογώνιον τμήμα τοῦ ὕλικου γίνεται πλαγιογώνιον, τῶν ὀρθῶν γωνιῶν παραμορφουμένων κατὰ τὴν γωνίαν ζ . Πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι ἡ γωνία διατμήσεως ζ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν διατμητικὴν τάσιν τ . Ἦτοι εἶναι



Σχ. 183. Ἡ διατμητικὴ δύναμις F προκαλεῖ τὴν γωνίαν διατμήσεως ζ .

$$\tau = G \cdot \zeta$$

(1)

Ἡ σταθερὰ G καλεῖται **μέτρον διατμήσεως** ἢ **μέτρον στρέψεως** καὶ ἐξαριτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τοῦ σωλῆνος. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ διατύπωσις τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς στρέψεως, μᾶς ὑπενθυμίζει δὲ τὴν ἐντελῶς ἀνάλογον ἐξίσωσιν $\sigma = E \cdot \epsilon$ τῆς περιπτώσεως τοῦ ἔλκυσμοῦ.

Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $\zeta = 1$, θὰ λάβωμεν $\tau = G$ συνεπῶς τὸ μέτρον διατμήσεως εἶναι ἡ διατμητικὴ τάσις, ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ προκαλέσῃ γωνίαν διατμήσεως, ἴσην πρὸς 1 **ἀκτίριον**, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ παραμόρφωσις εἶναι ἔλαστική.

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ζ εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς,

τὸ μέτρον διατμήσεως G ἔχει διαστάσεις τάσεως. Ἦτοι εἶναι

$$[G] = \frac{[F]}{[S]}.$$

Διὰ τὸν χάλυβα, π.χ., εἶναι $G = 8000 \text{ kg} \cdot \text{r}^* / \text{mm}^2$.

§ 139. Στρέψις σύρματος. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω εἶναι δυνατόν νὰ ἐξετασθῇ καὶ ἡ συμπεριφορὰ σύρματος, τὸ ὅποιον εἶναι στερεωμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον του, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο ἐξασκεῖται μία στρεπτική ροπή. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σύρματος ἡ γωνία στρέψεως φ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν στρεπτικὴν ροπήν M . Ἦτοι

$$M = D^* \cdot \varphi$$

Ἡ σταθερὰ D^* εἶναι ἡ **κατευθύνουσα ροπή** τοῦ σύρματος, ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων καὶ ἐκ τοῦ ὕλικου τοῦ σύρματος.

§ 140. Ὑπολογισμός τῆς κατευθυνούσης ροπῆς σωλῆνος. Θεωρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ἐνὸς σωλῆνος, μήκους l (σχ. 182), ἐφαρμόζεται ἡ στρεπτικὴ ροπή M , ἡ ὁποία μεταδίδεται εἰς τὸν σωλῆνα ὡς ἄθροισμα ροπῶν τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$, ὁμοιομόρφως κατανεμημένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς ἄνω διατομῆς τοῦ σωλῆνος. Ἀν ἐκάστη δύναμις F_i , δρῶσα ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος ἐπιφανείας, ἐμβαδου S_i , ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης, ἔχομεν

$$M = \sum F_i \cdot r_i = \sum \tau_i \cdot S_i \cdot r_i$$

(διότι ἐξ ὁρισμοῦ: *τάσις · ἐπιφάνεια* = *δύναμις*). Ὁ σωλὴν θεωρεῖται λεπτότοιχος, ὁπότε ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι S_i ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν r ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Ἡ διαμητική τάσις τ , λόγῳ τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς τῶν δυνάμεων, εἶναι σταθερά, ὁπότε ἔχομεν

$$M = \tau \cdot r \cdot \sum S_i = \tau \cdot r \cdot S$$

ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἄνω διατομῆς τοῦ σωλῆνος. Ἐάν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἀντικαταστήσωμεν τὸ τ διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὅποιον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου, θὰ ἔχομεν

$$M = \zeta \cdot G \cdot r \cdot S.$$

Ἡ γωνία διατμήσεως ζ συνδέεται, ἐπίσης, μὲ τὴν γωνίαν στρέψεως φ τῆς ἄνω διατομῆς τοῦ σωλῆνος διὰ τῆς σχέσεως $AB = \varphi \cdot r$. Ὅμοιως, εἶναι $AB = \zeta \cdot l$, ἐπομένως ἔχομεν

$$M = \frac{\varphi \cdot r}{l} \cdot G \cdot r \cdot S = G \cdot r^2 \cdot \frac{S}{l} \cdot \varphi. \quad (1)$$

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι ἡ κατευθύνουσα ροπή D^* τοῦ σωλῆνος εἶναι ἴση πρὸς

$$D^* = \frac{G \cdot r^2 \cdot S}{l}.$$

§ 141. Ὑπολογισμός τῆς κατευθυνούσης ροπῆς σύρματος. Ἐάν, ἀντὶ σω-

λῆνος, λάβωμεν σύρμα, τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατόν νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πολλῶν λεπτοτάτων χιτῶνων, ἡ κατευθύνουσα ροπὴ τοῦ σύρματος ὑπολογίζεται διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Ἄν dr εἶναι τὸ πάχος ἐνὸς χιτῶνος καὶ r ἡ ἀκτίς, διὰ νὰ στραφῇ ὁ χιτῶν οὗτος κατὰ τὴν γωνίαν φ , χρειάζεται νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ ἡ (στοιχειώδης) ροπὴ dM , ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου, εἶναι ἴση πρὸς

$$dM = G \cdot r^2 \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{l} \cdot \varphi.$$

Δι' ὅλους τοὺς χιτῶνας ἡ γωνία στρέψεως φ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν, ὁπότε ἡ ὁλικὴ ροπὴ M , ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν στρέψιν τοῦ σύρματος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$M = \int dM = G \cdot \frac{2\pi}{l} \cdot \varphi \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr$$

ἐνθα R ἡ ἀκτίς τοῦ σύρματος. Ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης δίδει

$$M = \frac{G \cdot \pi \cdot R^4}{2l} \cdot \varphi.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν κατευθύνουσαν ροπὴν D^* τοῦ σύρματος τὴν τιμὴν

$$D^* = \frac{G \cdot \pi \cdot R^4}{2l}.$$

§ 142. Ἐλαστικότης ὄγκου. Ἐστω σῶμα στερεόν, ὄγκου V , πιεζόμενον πανταχόθεν ὁμοιομόρφως διὰ τῆς πίεσεως p . Ἐὰν ἡ πίεσις p αὐξηθῇ κατὰ Δp , ὁ ὄγκος τοῦ σώματος θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ ΔV . Ἡ ἐλάττωσις αὕτη τοῦ ὄγκου εὐρίσκεται ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως Δp τῆς πίεσεως, ἀνάλογος τοῦ ὄγκου V καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕλικου τοῦ σώματος. Ἦτοι

$$\Delta V = -\kappa \cdot \Delta p \cdot V.$$

Ἡ σταθερὰ κ καλεῖται **συμπιεστότης**.

Ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς § 134, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

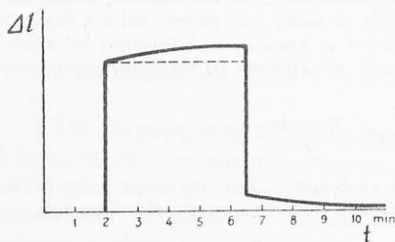
ἢ (πίεσις = μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου · ἀνηγμένη ἐλάττωσις ὄγκου).

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις εἶναι ἡ διατύπωσις τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαστικότητος ὄγκου.

Τὸ ἀντίστροφον $1/\kappa$ τῆς συμπιεστότητος καλεῖται **μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου**.

§ 143. Ἐλαστικὴ ἀδράνεια. Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐδέχθημεν ὅτι τὰ στερεά, ὑπὸ ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς δυνάμεως λαμβάνουν ἀμέσως τὴν τελικὴν των μορφήν. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, ἐπέρχεται κατ' ἄρχάς ὠρισμένη παραμόρφωσις, ἡ ὁποία, ἐφ' ὅσον ἡ ἐξωτερικὴ αἰτία ἐξακολουθεῖ ἐπιδρῶσα, αὐξάνεται βραδέως καὶ τὸ

σώμα λαμβάνει την τελική του μορφή ασυμπτωτικῶς (σχ. 184). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ



Σχ. 184.

διὰ τὴν ἐπ'άνοδον τοῦ σώματος εἰς τὴν ἀρχικὴν του μορφὴν, μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία προεκάλεσε τὴν παραμόρφωσιν. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἐλαστικὴ ἀδράνεια*, καθίσταται τόσον ἐντονώτερον, ὅσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ ὅριον ἐλαστικότητος. Ἰδιαιτέρως μικρὰν ἐλαστικὴν ἀδράνειαν παρουσιάζει ὁ *χαλαζίας* καὶ διὰ τοῦτο εἰς πολλὰ ὄργανα μετρήσεως (γαλβανόμετρα κ.λ.) ἡ ἐξάρ-

τησις στρεπτικῶν συστημάτων γίνεται διὰ νημάτων ἐκ τετηγμένου χαλοζίου.

§ 144. Σκληρότης. Καλοῦμεν *σκληρότητα* τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ἡ ἐπιφάνεια τῶν στερεῶν σωμάτων, ὅταν προσπαθῶμεν νὰ διασπᾶσωμεν τὴν συνέχειαν τῆς ἐπιφανείας των ἢ νὰ μεταβιβάσωμεν τὸ σχῆμα αὐτῆς. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς σκληρότητος χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τῶν δορυκτολόγων ἡ κατωτέρω περιγραφομένη *σκληρομετρικὴ κλίμαξ τοῦ Mohs*. Σήμερον διὰ τὴν μέτρησιν τῆς σκληρότητος τῶν μετάλλων χρησιμοποιοῦνται νέαι μέθοδοι, εἰς τὰς ὁποίας ἡ σκληρότης εὐρίσκεται ἐκ τῶν παραμορφώσεων, τὰς ὁποίας προκαλεῖ εἰς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν ὕλικον ἡ ἔμπηξις σκληρῶν ἀντικειμένων (χαλυβδίνων σφαιριδίων, κώνων ἐξ ἀδάμαντος κ.λ.).

α) *Κλίμαξ τοῦ Mohs*. Αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι, ἐκ δύο σωμάτων, τὸ σκληρότερον χαράσσει τὸ ὀλιγώτερον σκληρόν. Τὴν κλίμακα ταύτην ἀποτελεῖ ἡ σκληρότης 10 ὕλικων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ σκληρότερον εἶναι ὁ ἀδάμας (10) καὶ τὸ μαλακώτερον ὁ τάλκης (1).

Σκληρομετρικὴ κλίμαξ	
1. Τάλκης	6. Ἀστριος
2. Γύψος	7. Χαλαζίας
3. Ἀσβεστίτης	8. Τοπάzion
4. Φθορίτης	9. Κορούνδιον
5. Ἀπατίτης	10. Ἀδάμας

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς σκληρότητος ἑνὸς σώματος γίνεται ὥς ἐξῆς: Ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ἀδάμαντος, χαράσσομεν, διαδοχικῶς, τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν σῶμα μὲ ὕλικα μικροτέρας σκληρότητος. Καὶ ἂν εὕρωμεν ὅτι τοῦτο χαράσσεται, π.χ., ὑπὸ τοῦ ἀδάμαντος καὶ τοῦ κορουνδίου, ἀλλὰ χαράσσει τὸ τοπάzion, ἡ σκληρότης αὐτοῦ θὰ εὐρίσκεται μεταξὺ 8 καὶ 9. Ἄν δὲ οὔτε χαράσσει τὸ τοπάzion, οὔτε χαράσσεται ὑπ' αὐτοῦ, ἡ σκληρότης του θὰ εἶναι ἀκριβῶς 8. Οὕτω, ἡ σκληρότης τοῦ ἀνθρωπίνου ὀνυχος εὐρίσκεται ἴση πρὸς 2,5.

β) *Κλίμαξ Brinell*. Το υπό εξέταση υλικόν υποβάλλεται εις την πίεσιν λίαν σκληρᾶς χαλυβδίνης σφαίρας (*) καὶ μετρεῖται ἡ διάμετρος τοῦ προκαλουμένου κοιλώματος. Ἡ διάμετρος αὕτη, προφανῶς, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σκληρότητος τοῦ ἐξεταζομένου υλικοῦ.

γ) *Κλίμαξ Rockwell*. Κατὰ ταύτην ἐμπηγνύεται, διὰ καταλλήλου μηχανῆς καὶ ὑπὸ ὀρισμένον φορτίον, χαλύβδινον σφαιρίδιον ἢ ἀδαμάντινος κῶνος καὶ μετρεῖται τὸ βάθος τῆς σχηματιζομένης κοιλότητος.

δ) *Κλίμαξ Vickers*. Αὕτη εἶναι παραλλαγή τῆς κλίμακος Brinell. Πρὸς μέτρησιν τῆς σκληρότητος ἐμπηγνύεται, δι' ὀρισμένης δυνάμεως, ἀδαμάντινη πυραμῖς, τετραγωνικῆς βάσεως, καὶ μετρεῖται ἡ πλευρὰ τῆς σχηματιζομένης κοιλότητος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον φορτίον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φέρῃ ἐν σύρμα ἐκ χάλυβος, μήκους 2 m καὶ διαμέτρου 2 mm , χωρὶς νὰ θραυσθῇ; (ΑΠ: 157 kg^*)

2. Χάλκινον σύρμα, διαμέτρου 2 mm , ἐξαρτᾶται ἀκλονήτως ἐκ τοῦ ἐνὸς ἄκρου, ἐνῶ εἰς τὸ ἄλλο φορτίζεται διὰ βάρους 150 kg^* . Τὸ ὅριον ἐλαστικότητος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 1700 at , τὸ δὲ μέτρον ἐλαστικότητος $1,3 \cdot 10^6\text{ at}$. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τεῖνον βάρος, τὸ σύρμα θὰ ἐπανακτίσῃ τὸ μήκος του; (ΑΠ: Ὁχι, διαί.)

3. Μία δύναμις εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὴν θραῖσιν μιᾶς ράβδου ἐκ χαλκοῦ, ἡ ὁποία ὑποβάλλεται εἰς ἐλκυσμόν. Ποία δύναμις θ' ἀπαιτηθῇ διὰ τὴν θραῖσιν μιᾶς ἄλλης ράβδου ἐκ τοῦ αὐτοῦ υλικοῦ, ἡ ὁποία ἔχει α) διπλάσιον μήκος καὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον β) διπλάσιαν διάμετρον καὶ τὸ αὐτὸ μήκος;

4. Ὁ λόγος τῶν διαμέτρων δύο συρμάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ υλικοῦ εἶναι k . Ἐὰν εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δύο συρμάτων ἐξασκηθῇ ἡ αὐτὴ δύναμις, ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐπιμηκύνσεων;

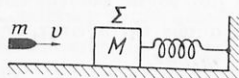
5. Εἰς τὴν ὁροφὴν ἀνελκυστήρος εἶναι στερεωμένον τὸ ἐν ἄκρον χαλυβδίνου σύρματος, μήκους l καὶ διαμέτρου d , εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται τὸ βάρος B . Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος, ὅταν ὁ ἀνελκυστήρ ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν γ ;

6. Τὸ ὅριον ἐλαστικότητος τοῦ χαλυβδίνου καλωδίου ἐνὸς ἀνελκυστήρος εἶναι 2500 at . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις πρὸς τὰ ἄνω, τὴν ὁποίαν ἐπιτρέπεται νὰ δώσωμεν εἰς ἕνα ἀνελκυστήρα, βάρους 2 t^* , ἐξηρητημένον δι' ἐνὸς τοιούτου καλωδίου, τοῦ ὁποίου ἡ διατομὴ εἶναι $2,5\text{ cm}^2$, ἐὰν ἡ τάσις δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ τὸ $1/4$ τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος.

7. Ὁ ἄξων ἐνὸς κινητήρος, στρεφομένου μὲ 100 στροφάς ἀνά sec , ἔχει μήκος 3 m καὶ διάμετρον 8 cm . Ἡ κατευθύνουσα ροπή D^* αὐτοῦ ὑπελογίσθη εἰς $98 \cdot 10^6\text{ dyn} \cdot \text{cm}$. Ἐὰν ὁ ἄξων οὕτος μεταδίδῃ ἰσχύν $N = 50\text{ HP}$, ποία θὰ εἶναι ἡ γωνία στρέψεως τοῦ ἄκρου του;

$$\left(\text{ΑΠ: } \varphi = \frac{N}{D^* \cdot 2\pi} = 0,035^\circ \right)$$

8. Βλήμα, μάζης m , βαλλόμενον ὁριζοντίως, ἐνσφηνοῦται ἐντὸς τοῦ σώματος M . Κατὰ τὴν κρούσιν, τὸ ἐλατήριο βραχύνεται μέχρι μιᾶς μεγίστης βραχύνσεως ξ καί, κατόπιν, μηκύνεται ἐκ νέου, δημιουργουμένης, οὕτω, ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἐὰν ἡ κατευθύνουσα δύναμις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἴση πρὸς D καὶ ἡ τριβὴ τοῦ σώματος Σ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου θεωρηθῇ ἀμελήτα, νὰ εὑρεθῇ α) ἡ μεγίστη



(*) Δύναμις 3 τόννων ἐπὶ σφαίρας, διαμέτρου 1 cm .

δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, β) ή ταχύτης του σώματος Σ άμέσως μετά την κρούσιν και γ) ή ταχύτης v του βλήματος.

$$\left(\text{ΑΠ: } E_{\text{δυν}} = \frac{D \cdot \xi^2}{2}, \quad v_{\Sigma} = \xi \cdot \sqrt{\frac{D}{m+M}}, \quad v = \frac{\xi}{m} \cdot \sqrt{D \cdot (m+M)} \right)$$

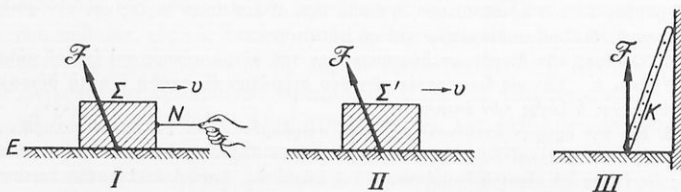
9. Το μέτρον ελαστικότητας της ύαλου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον του μέτρον ελαστικότητας του ελαστικού κόμμεως;

10. Ἡ σταθερά κ (συμπιεστότης) του ὕδατος θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα ἢ μικρότερα της του αέρος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'

ΤΡΙΒΗ

§ 145. Γενικά περί τριβῆς. Ὡς γνωστόν, ὅταν δύο σώματα εὐρίσκονται εἰς ἐπαφήν, τὸ ἐν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μίαν δύναμιν. Μέχρι τοῦδε ἐδέχθημεν ὅτι ἡ δύναμις αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Ἦδη, θὰ ἐξετάσωμεν περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἡ δύναμις αὕτη δὲν εἶναι κάθετος, ἀλλὰ πλαγία. Οὕτω, π.χ., ἐπὶ τοῦ σώματος Σ (σχ. 185, I), τὸ ὁποῖον σύρομεν διὰ τοῦ νήματος N , ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ ὀριζον-



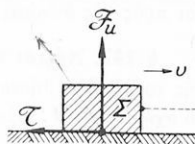
Σχ. 185. Τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον ἐξασκεῖ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριῶν σωμάτων τὴν πλαγίαν δύναμιν $\mathcal{F}$.

τίου ἐπίπεδου E ἡ πλαγία δύναμις $\mathcal{F}$. Ὁμοίως, ἐπὶ τοῦ σώματος Σ' (σχ. 185, II), τὸ ὁποῖον, ἐκσπενδονισθέν, κινεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ, τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον ἐξασκεῖ τὴν πλαγίαν δύναμιν $\mathcal{F}$. Ἐπίσης, ἐπὶ τοῦ κάτω ἄκρου τῆς κλίμακος K (III), τὸ ἔδαφος ἐξασκεῖ τὴν πλαγίαν δύναμιν $\mathcal{F}$ (*).

Θεωροῦντες δύο ὀρθογωνίους ἄξονας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ ὁ ἄλλος παράλληλος πρὸς αὐτὸ καὶ ἀναλύοντες ἑκάστην τῶν πλαγίων δυνάμεων, λαμβάνομεν δύο συνιστώσας. Ἐξ αὐτῶν τὴν πρώτην, $\mathcal{F}_\kappa$, καλοῦμεν **κάθετον δύναμιν**, τὴν δὲ δευτέραν, $\mathcal{T}$, **τριβήν**.

(*) Βεβαίως, ἐπὶ τῶν ἐν λόγῳ σωμάτων, πλὴν τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$, ἐξασκοῦνται καὶ ἄλλαι δυνάμεις - π.χ., τὸ βάρος αὐτῶν ἐκ τῆς γῆς, ἡ δύναμις ἐκ τοῦ ἑλκοντος νήματος εἰς τὴν περίπτωσιν I κ.λ.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη διὰ τὴν περίπτωσιν *I* ἀποδίδεται εἰς τὸ σχῆμα 186, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος Σ ἐξασκουμένη πλαγία δύναμις $\mathcal{F}$ ἔχει ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῶν συνιστωσῶν τῆς $\mathcal{F}_x$ καὶ $\mathcal{T}$. Τὸ αὐτό, βεβαίως, δύναται νὰ γίνη καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις *II* καὶ *III* τοῦ σχήματος 185.



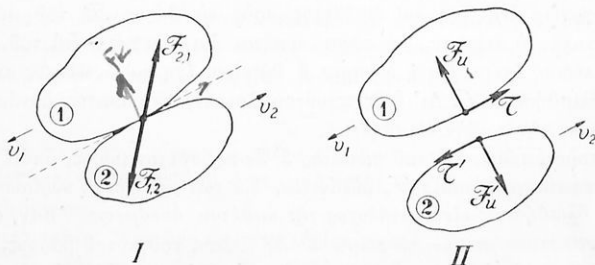
Σχ. 186.

Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει τριβή, θὰ ὑπάρχῃ μόνον ἡ κάθετος συνιστώσα $\mathcal{F}_x$ καί, συνεπῶς, εἰς τὰς περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ τριβή, ἡ ὑπὸ τοῦ ἐνὸς σώματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Εἰς τὰς περιπτώσεις *I* καὶ *II*, τὸ ἐν σῶμα ἐκινεῖτο σχετικῶς ὡς πρὸς τὸ ἄλλο, τὸ ὁποῖον εὐρίσκето ἐν ἡρεμίᾳ, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν *III* καὶ τὰ δύο σώματα ἦσαν ἀκίνητα. Εἰς ἄλλας, λοιπόν, περιπτώσεις ἡ τριβὴ παρουσιάζεται κατὰ τὴν ὁλίσθησιν τοῦ ἐνὸς σώματος ὡς πρὸς τὸ ἄλλο, ἐνῶ εἰς ἄλλας, ὅταν τὰ δύο σώματα ἡρεμοῦν.

Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ἐκάστην τῶν δύο περιπτώσεων ἰδιαιτέρως.

§ 146. Τριβὴ ὀλισθήσεως. Θεωρήσωμεν δύο στερεὰ σώματα (1) καὶ (2) (σχ. 187, *I*), τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται εἰς ἐπαφὴν καὶ ὀλισθαίνουν τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καὶ ἂς καλέσωμεν $\mathcal{F}_{2,1}$ τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ



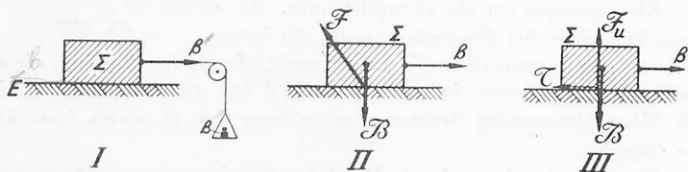
Σχ. 187. Τριβὴ ὀλισθήσεως.

σῶμα (2) ἐπὶ τοῦ σώματος (1). Τὴν δύναμιν ταύτην ἀναλύομεν, ὡς γνωστόν, εἰς δύο συνιστώσας - τὴν κάθετον δύναμιν $\mathcal{F}_x$ (σχ. 187, *II*) καὶ τὴν τριβὴν $\mathcal{T}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ τριβὴ $\mathcal{T}$ καλεῖται **τριβὴ ὀλισθήσεως** καὶ ἔχει πάντοτε φορὰν, ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς σχετικῆς ταχύτητος τοῦ σώματος (1) ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται.

Βεβαίως, κατὰ τὸ ἀξίωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις» καὶ τὸ σῶμα (1) ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος (2) τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}_{1,2}$. Τὴν δύναμιν ταύτην, $\mathcal{F}_{1,2}$, ἀναλύομεν, ὁμοίως, εἰς δύο συνιστώσας - τὴν κάθετον δύ-

ναμιν $\mathcal{F}_*$ και την τριβήν $\mathcal{T}$, αἱ ὁποῖαι, προφανῶς, εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς τὰς δυνάμεις $\mathcal{F}_*$ καὶ $\mathcal{T}$.

§ 147. Νόμοι τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν νόμων τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως χρησιμοποιοῦμεν τὴν συσκευὴν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 188, I: Ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου E τοποθετοῦμεν ἓν σῶμα



Σχ. 188.

Σ , τὸ ὁποῖον προσδένομεν διὰ νήματος. Τὸ νῆμα διέρχεται διὰ τροχαλίας, φέρει δὲ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του μικρὸν δίσκον, τὸν ὁποῖον φορτίζομεν μὲ σταθμὰ β , τοιαῦτα ὥστε τὸ σῶμα ν' ἀρχίζῃ νὰ ὀλισθαίῃ μὲ σταθερὰν ταχύτητα.

Ἐπὶ τοῦ σώματος Σ (σχ. 188, II) ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος του B , 2) ἡ λόγῳ τῶν σταθμῶν δύναμις β καὶ 3) ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἐπιπεδον E . Τὴν τελευταίαν ταύτην δύναμιν ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας: τὴν (ὀριζοντίαν) τριβὴν ὀλισθήσεως $\mathcal{T}$ (σχ. 188, III) καὶ τὴν (κατακόρυφον) κάθετον δύναμιν $\mathcal{F}_*$. Ἡ κάθετος δύναμις $\mathcal{F}_*$ προφανῶς εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος B τοῦ σώματος. Ἀφοῦ, κατὰ τὸ πείραμα, τὸ σῶμα κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἔπεται ὅτι ἡ δύναμις β θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως $\mathcal{T}$. Δι' ἐνὸς τοιούτου, λοιπόν, πειράματος δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως.

Θέτομεν, τώρα, ἐπὶ τοῦ σώματος Σ ἓν πρόσθετον βάρος, ὁπότε ἡ συμπίεζουσα κάθετος δύναμις $\mathcal{F}_*$ αὐξάνεται. Ἐκ τῶν μετρήσεων εὐρίσκομεν ὅτι ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως εἶναι ἀνάλογος τῆς καθέτου δυνάμεως. Ἐάν, ἀκολουθῶς, ἀντικαταστήσωμεν τὸ σῶμα Σ δι' ἄλλου, τοῦ αὐτοῦ βάρους, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕλικου καὶ μὲ ὁμοίως κατεργασμένην ἐπιφάνειαν, ἀλλὰ μὲ μεγαλύτερον ἔμβαδον τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ τριβὴ δὲν μετεβλήθη. Ἀρα, ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως εἶναι ἀνεξάρητος τοῦ ἔμβαδου τῆς ἐπιφανείας, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δύο σώματα ἐφάπτονται.

Οἱ ἀνωτέρω εὐρεθέντες νόμοι περιγράφονται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$T = \eta \cdot F_*$	$\left \begin{array}{l} \text{Τριβὴ κατὰ} \\ \text{τὴν ὀλισθησιν} \end{array} \right $	(1)
----------------------	---	-----

Ὁ συντελεστὴς η καλεῖται **συντελεστὴς τριβῆς** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῶν δύο ἐν ἐπαφῇ ἐπιφανειῶν.

Ἡ συντελεστής τριβῆς ἐλαττοῦται, ἂν μεταξὺ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν παρεντεθῇ στρώμα ὑγροῦ (λιπαντικά).

Διαστάσεις: Ὁ συντελεστής τριβῆς ἔχει διαστάσεις

$$[\eta] = \frac{[T]}{[F]} = [0, 0, 0]$$

εἶναι, δηλ., καθαρὸς ἀριθμὸς.

ΠΙΝΑΞ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΡΙΒΗΣ

Χάλυψ ἐπὶ πάγου	0,01
Χάλυψ ἐπὶ χάλυβος	0,1
Ἐλαστικὸν κόμμι ἐπὶ ὑγροῦ ἀσφαλτικοῦ ὁδο- στρώματος	0,5
Ἐλαστικὸν κόμμι ἐπὶ ξηροῦ ἀσφαλτικοῦ ὁδο- στρώματος	0,7

§ 148. Στατική τριβή. Τριβὴ ἐμφανίζεται, ὅχι μόνον ὅταν τὰ δύο σώματα ὀλισθαίνουν τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡρεμοῦν. Τοῦτο δεικνύομεν πειραματικῶς ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸν δίσκον τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 188, I θέτομεν σταθμὰ β', μικρότερα τῶν ἀπαιτουμένων διὰ ν' ἀρχίσῃ ἡ ὀλίσθησις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα ἡρεμεῖ: Ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ κατὰ τὴν ὀριζοντίαν διεύθυνσιν ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις· ἡ δύναμις β' ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος καὶ μία δύναμις, προερχομένη ἐκ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **στατικὴν τριβὴν** $T_{στ}$.

Ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$T_{στ} = \beta'.$$

Ἐπειδὴ ἡ δύναμις β' εἶναι μικροτέρα τῆς δυνάμεως β, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ὀλίσθησιν, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ στατικὴ τριβὴ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τριβῆς ὀλίσθήσεως.

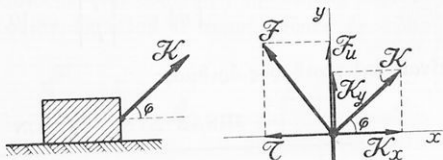
Κατὰ ταῦτα, ὅταν δύο σώματα εὐρίσκωνται εἰς ἐπαφὴν καὶ συμπίεζονται διὰ τῆς καθέτου δυνάμεως F_{κ} , ὁ δὲ συντελεστής τριβῆς αὐτῶν εἶναι η , τότε, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως, ἡ στατικὴ τριβὴ δύναται νὰ λάβῃ οἰανδήποτε τιμὴν μεταξὺ τῆς τιμῆς μηδέν καὶ μίας μεγίστης τιμῆς, ἴσης πρὸς $\eta \cdot F_{\kappa}$. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 188, ἡ στατικὴ τριβὴ, ἀναλόγως τῆς δυνάμεως β', λαμβάνει διαφόρους τιμὰς. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν ἐπὶ τοῦ δίσκου δὲν ὑπάρχουν σταθμὰ, ἡ στατικὴ τριβὴ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διὰ τὴν στατικὴν τριβὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἀνίσωτητα

$$T_{στ} < \eta \cdot F_{\kappa} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Τριβὴ κατὰ} \\ \text{τὴν ἡρεμίαν} \end{array} \right.$$

Ἀνακεφαλαίωσης: Διὰ τὴν τριβὴν ὀλισθήσεως ἰσχύει ἡ ἰσότης $T = \eta \cdot F_{\kappa}$, ἐνῶ διὰ τὴν στατικὴν τριβὴν ἰσχύει ἡ ἀνίσότης $T_{στ} < \eta \cdot F_{\kappa}$.

Ἐφαρμογαί. 1) Ποία δυνάμεις $\mathcal{K}$ (σχ. 189), σχηματίζουσα τὴν γωνίαν φ μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἀπαιτεῖται διὰ νὰ θέσῃ εἰς ἰσοταχὴ κίνησιν πρὸς τὰ δεξιὰ κιβώτιον, βάρους $\mathcal{B}$; (Συντελεστής τριβῆς η).



Σχ. 189.

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ κιβώτιου ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς τρεῖς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος του $\mathcal{B}$, 2) ἡ (πλαγία) δυνάμεις $\mathcal{F}$ ἐκ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου καὶ 3) ἡ ζητουμένη δυνάμεις $\mathcal{K}$. Ἀναλύομεν τὰς δυνάμεις ταύτας κατὰ τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας x καὶ y . Δεδομένου ὅτι τὸ κιβώτιον ἰσορροπεῖ καὶ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$K_x - T = 0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad F_{\kappa} + K_y - B = 0. \quad (2)$$

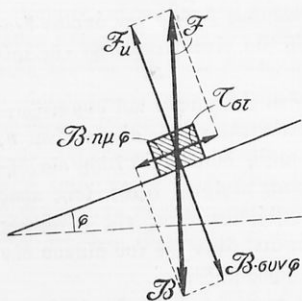
Ἐπειδὴ τὸ κιβώτιον ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἡ τριβὴ T εἶναι τριβὴ ὀλισθήσεως, διὰ τὴν ὁποίαν, ὡς γνωστόν, ἰσχύει ἡ σχέση

$$T = \eta \cdot F_{\kappa}. \quad (3)$$

Πρὸς τοῦτοις, ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{K_y}{K_x} = \varepsilon \varphi \varphi. \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εὔρομεν τέσσαρας ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τοὺς τέσσαρας ἀγνώστους K_x , K_y , T καὶ F_{κ} , ὁπότε τὸ πρόβλημα, κατ' ἀρχὴν, ἐλύθη.



Σχ. 190. Ἡ ἡρεμία εἶναι δυνατὴ, μόνον ἐφ' ὅσον ἡ γωνία φ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας τριβῆς.

2) **Σῶμα, ἡρεμοῦν ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου.** Λόγω τῆς στατικῆς τριβῆς, εἶναι δυνατόν ἐν σῶμα νὰ εὐρίσκειται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου (σχ. 190), χωρὶς νὰ ὀλισθαίνει, δηλ., νὰ εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ: Ἐπὶ τοῦ ἡρεμοῦντος σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις—τὸ βάρος του $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δυνάμεις $\mathcal{F}$, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ σῶμα ἡρεμεῖ, ἡ δυνάμεις $\mathcal{F}$ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος $\mathcal{B}$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν στατικὴν τριβὴν, ἀναλύομεν τὰς δυνάμεις $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$ εἰς τὰς συνιστώσας των κατὰ

δύο ὀρθογωνίους ἄξονας· ἓνα παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὸν ἄλλον, κάθετον ἐπ' αὐτό. Ἡ δύναμις $\mathcal{B}$ δίδει ὥς συνιστώσας τὰς $\mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi$ καὶ $\mathcal{B} \cdot \sigma \nu \varphi$, ἡ δὲ δύναμις $\mathcal{F}$ τὰς $\mathcal{F}_\kappa$ καὶ $\mathcal{T}_{\sigma\tau}$. Ἐξ αὐτῶν τὴν κάθετον δύναμιν F_κ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας

$$F_\kappa - \mathcal{B} \cdot \sigma \nu \varphi = 0. \quad (5)$$

Τὴν στατικὴν τριβὴν, ὅμως, $\mathcal{T}_{\sigma\tau}$ δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τοῦ νόμου τῆς στατικῆς τριβῆς, παρὰ τὸ γεγονός ὅτι, ἤδη, γνωρίζομεν τὴν κάθετον δύναμιν F_κ ἐκ τῆς ἐξίσωσως (5), καθόσον ὁ νόμος οὗτος περιγράφεται δι' ἀνισότητος· καί, ὥς γνωστόν, ἐκ τῆς ἀνισότητος δὲν εἶναι δυνατόν νὰ προκύψῃ ἡ τιμὴ τῆς στατικῆς τριβῆς. Τὴν τιμὴν ταύτην εὐρίσκομεν ἐκ τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας δι' ἄξονα, παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἡ ὁποία δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$\mathcal{T}_{\sigma\tau} - \mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi = 0. \quad (6)$$

3) Σῶμα, ὀλισθαίνον ἰσοταχῶς κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Εἰς τὴν προηγουμένην ἐφαρμογὴν ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου ἦτο μικρὰ καὶ τὸ σῶμα εὐρίσκετο ἐν ἡρεμίᾳ. Ἄν, τώρα, αὐξάνωμεν βαθμηδὸν τὴν γωνίαν φ , θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, διὰ μίαν ὠρισμένην τιμὴν αὐτῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **γωνίαν τριβῆς** $\varphi_{\tau\theta}$, τὸ σῶμα θ' ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ μὲ $\sigma \tau α \theta \epsilon \rho \acute{\alpha} \nu \tau α \chi \acute{\upsilon} \tau \eta \tau α$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν ταύτην, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκοῦνται (ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν) δύο δυνάμεις· τὸ βάρος τοῦ $\mathcal{B}$ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου προερχομένη δύναμις, ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας τῆς $\mathcal{F}_\kappa$ καὶ $\mathcal{T}$. Δεδομένου ὅτι τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ καὶ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$F_\kappa - \mathcal{B} \cdot \sigma \nu \varphi_{\tau\theta} = 0 \quad (7) \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{T} - \mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi_{\tau\theta} = 0. \quad (8)$$

Ἐπειδὴ, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ τριβὴ $\mathcal{T}$ εἶναι τριβὴ ὀλισθήσεως, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\mathcal{T} = \eta \cdot F_\kappa. \quad (9)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (7), (8) καὶ (9) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

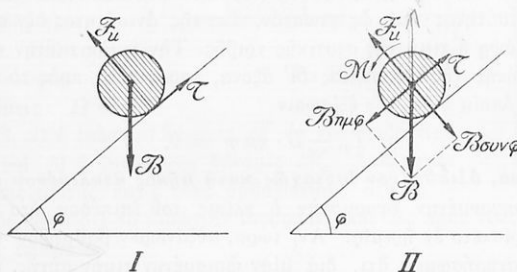
$$\boxed{\epsilon \varphi \varphi_{\tau\theta} = \eta}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μᾶς παρέχει ἓνα εὐκόλον τρόπον προσδιορισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς: Αὐξάνομεν τὴν γωνίαν κλίσεως, μέχρις ὅτου τὸ σῶμα ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ταύτης μᾶς παρέχει τὸν συντελεστὴν τριβῆς.

Ἄν ἡ γωνία κλίσεως γίνῃ **μεγαλυντέρα** τῆς γωνίας τριβῆς, αἱ δυνάμεις $\mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi$ καὶ $\mathcal{T}$ δὲν εἶναι, πλέον, δυνατόν νὰ ἰσορροποῦν καὶ τοῦτο διότι, αὐξανόμενης τῆς γωνίας φ , ἡ μὲν δύναμις $\mathcal{B} \cdot \eta \mu \varphi$ αὐξάνεται,

ἐνῶ ἡ δύναμις $\mathcal{T}$, ὅχι μόνον δὲν αὐξάνεται (ἀφοῦ, ἥδη, ἔχει λάβει τὴν ὀρίκην τῆς τιμῆς $T = \eta \cdot F_{\kappa}$), ἀλλ' ἐλαττοῦται, καθόσον ἡ κάθετος δύναμις F_{κ} , συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2), ἡλαττώθη. Ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς ἐλλείψεως ἰσορροπίας, τὸ σῶμα κατέρχεται ἐπιταχυνόμενον.

4) **Κύλινδρος, κυλιόμενος κατὰ μῆκος κεκλιμένον ἐπιπέδου.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς κυλίνδρου, μάζης m καὶ ἀκτίνος R , ὁ ὁποῖος κυλίεται (χωρὶς νὰ ὀλισθαίνει) κατὰ μῆκος κεκλιμένον ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ .



Σχ. 191.

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου (σχ. 191, I) ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος τοῦ B καὶ 2) ἡ ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου προερχομένη δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας - τὴν κάθετον δύναμιν F_{κ} καὶ τὴν τριβὴν $\mathcal{T}$.

Ὁ κύλινδρος, κατερχόμενος κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐκτελεῖ σύνθετον κίνησιν, διὰ τὴν μελέτην τῆς ὁποίας ἀνάγομεν ὅλας τὰς δυνάμεις εἰς τὸ κέντρον βάρους τοῦ κυλίνδρου, ὁπότε, κατὰ τὰ γνωστά, ἔχομεν τὰς δυνάμεις B , F_{κ} καὶ $\mathcal{T}$ διερχομένας διὰ τοῦ ἄξονος (II), καὶ ροπὴν $\mathcal{M}$ τὴν ροπὴν τῆς δυνάμεως $\mathcal{T}$, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον, ἴσον πρὸς $T \cdot R$.

Ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ κυλίνδρου, ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$T - B \cdot \eta \mu \varphi = - m \cdot \gamma. \quad (10)$$

(Εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξίσωσεως τίθεται ἀρνητικὸν σημεῖον, διότι ἡ ἐπιτάχυνσις γ ἔχει τὴν φορὰν τοῦ ἀρνητικοῦ ἄξονος) (*).

Ἀφ' ἐτέρου, ἐὰν καλέσωμεν ω' τὴν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ κυλίνδρου καὶ Θ τὴν ροπὴν ἀδραναίας αὐτοῦ ὡς πρὸς ἄξονα, συμπίπτοντα μὲ τὸν γεωμετρικὸν αὐτοῦ ἄξονα, ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στροφικῆς κινή-

(*) Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (10) δὲν εἶναι δυνατόν νὰ προκύψῃ τὸ γ , καθόσον τὰ μὲν m , φ , B εἶναι γνωστά, εἶναι ὁμως ἀγνωστος ἡ τριβὴ T . Ἀυτὴ δὲν ἰσοῦται πρὸς $\eta \cdot F_{\kappa}$, διότι ὁ κύλινδρος δὲν ὀλισθαίνει.

σεως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$T \cdot R = \Theta \cdot \omega'. \quad (11)$$

Ὡς γνωστὸν (§ 95), μεταξὺ τῆς ἐπιταχύνσεως γ καὶ τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως ω' ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\gamma = R \cdot \omega'. \quad (12)$$

Λαμβάνοντες καὶ τὴν ροπήν ἀδρανείας τοῦ κυλίνδρου ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σ. 77, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2. \quad (13)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (10), (11), (12) καὶ (13) λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητούμενην ἐπιτάχυνσιν γ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ κυλίνδρου τὴν σχέσιν

$$\gamma = \frac{2}{3} g \cdot \eta \mu \varphi.$$

§ 149. Τριβή κυλίσεως. Θεωρήσωμεν κύλινδρον, κυλιόμενον ἐλευθέρως ἐπὶ τινος ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Εἰς τὴν ἰδανικὴν περίπτωσιν ὁ κύλινδρος θὰ ἐξηκολούθη τὴν κύλίσιν του ἐπ' ἀπειρον, καθόσον οὐδεμία ροπή ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κυλίνδρου θὰ ἐλαττοῦται συνεχῶς, διὰ τὰ μηδενισθῇ τελικῶς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐπὶ τοῦ κυλιομένου κυλίνδρου ἐξασκεῖται μία ροπή, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν κύλίσιν. Ἡ ροπή αὕτη καλεῖται **τριβὴ κυλίσεως** $\mathcal{M}_\kappa$. Πειραματικῶς εὐρίσκεται ὅτι ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι ἀνάλογος τῆς καθέτου δυνάμεως F , διὰ τῆς ὁποίας συμπίεζονται ὁ κύλινδρος καὶ τὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ὅτιοι εἶναι

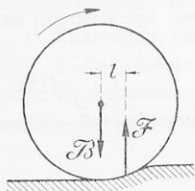
$$M_\kappa = l \cdot F$$

Ὁ συντελεστὴς l εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία καλεῖται **συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως** καὶ ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ τῆς πλαστικότητος τῶν ὑλικῶν, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι κατεσκευασμένος ὁ κύλινδρος καὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἐφ' ὅσον ἡ ροπή $\mathcal{M}_\kappa$ ἀντιτίθεται εἰς τὴν κύλίσιν, ἔπεται ὅτι, διὰ τὰ κυλίεται ὁ κύλινδρος ἰσοταχῶς, πρέπει νὰ ἐφαρμόζωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἕξωθεν μίαν ροπήν, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν τριβὴν κυλίσεως. Τοιαύτην, ἀκριβῶς, ροπήν ἐξασκεῖ ὁ κινητὴρ τοῦ αὐτοκινήτου (διὰ συστήματος ὁδοντωτῶν τροχῶν κ.λ.) ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ὀπισθίων τροχῶν, ὅταν τὸ ὄχημα κινῆται ἰσοταχῶς.

Ἡ ἐμφάνισις τῆς τριβῆς κυλίσεως ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τόσον ὁ κύλινδρος, ὅσον καὶ τὸ ἔδαφος ἦσαν ἀπολύτως ἀνένδοτα, οὐδεμία παραμόρφωσις αὐτῶν θὰ παρατηρεῖτο καὶ ἡ κάθετος δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἔδαφος ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, θὰ διήρχετο διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ καί, ὡς ἐκ

τούτου, οὐδεμία ροπή θὰ ἐδημιουργεῖτο καὶ ὁ κύλινδρος θὰ ἐκυλίετο ἐπ' ἄπειρον. Εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅμως, τὸν ὅ κύλινδρος, ὅσον καὶ τὸ



Σχ. 192. Λόγω τῆς παραμορφώσεως, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου.

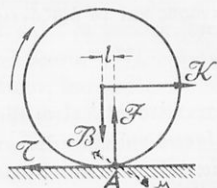
ἔδαφος παραμορφοῦνται πάντοτε κατὰ τι (σχ. 192) καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ ἐπαφὴ τοῦ κυλίνδρου μετὰ τοῦ ἔδαφους δὲν γίνεται κατὰ μίαν γενέτειραν, ἀλλὰ κατὰ μίαν μικρὰν ἐπιφάνειαν. Ὅταν ὁ κύλινδρος κυλίεται, αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκουμέναι ὑπὸ τοῦ ἔδαφους δὲν εἶναι συμμετρικῶς κατανεμημέναι, λόγω ἐλαστικῆς ἀδραναίας (§ 143), καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}$ αὐτῶν δὲν διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, ἀλλ' εἶναι ὀλίγον μετατοπισμένη. Ἀποτέλεσμα τούτου εἶναι αἱ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐξασκουμέναι δύο δυνάμεις—τὸ βάρος $\mathcal{B}$ αὐτοῦ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἐκ τοῦ ἔδαφους—νὰ σχη-

ματίζουν ζεύγος, τὸ ὁποῖον ἀντιτίθεται εἰς τὴν κύλιν. Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ τριβὴ κυλίσεως.

ΠΙΝΑΞ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΡΙΒΗΣ ΚΥΛΙΣΕΩΣ

Χαλύβδινος τροχὸς ἐπὶ χαλυβοτροχιᾷ	0,05 cm
Ἐλαστικὸς τροχὸς ἐπὶ ἀσφαλτικού ὁδοστρώματος	0,2 cm

Ἐφαρμογή. Διὰ νὰ κινοῦνται μὲ σταθερὰν ταχύτητα τὰ διάφορα τροχοφόρα ὀχήματα, πρέπει, λόγω τῆς τριβῆς κυλίσεως, νὰ ἐξασκῆται συνεχῶς ἐπ' αὐτῶν μία ροπή, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τριβὴν κυλίσεως. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις—π.χ., εἰς τὴν ἱππύλατον ἄμαξαν—ἐξασκῆται, ἀντὶ ροπῆς, μία δύναμις $\mathcal{K}$ (σχ. 193), ἡ ὁποία, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τροχῶν, δημιουργεῖ μετὰ τῆς τριβῆς $\mathcal{T}$ τὸ ἀναγκαῖον διὰ τὴν κύλιν ζεύγος δυνάμειον.



Σχ. 193. Διὰ νὰ κυλίεται ὁ τροχὸς μὲ σταθερὰν ταχύτητα, πρέπει νὰ ἐξασκῶνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς δυνάμει $\mathcal{K}$.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{K}$, ἧς ἐξετάσωμεν τὰς δυνάμεις, τὰς ἐξασκουμένας ἐπὶ τοῦ ἰσοταχῶς κινουμένου τροχοῦ τοῦ σχήματος 193: Ἐπὶ τοῦ τροχοῦ τούτου ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις: 1) Ἡ ὀριζοντία κινή-ριος δύναμις $\mathcal{K}$, ἡ ὁποία, ὥς εἵπομεν, θεωρεῖται ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ. 2) Τὸ βάρος $\mathcal{B}$ τοῦ τροχοῦ (τυχὸν ἐπηυξημένον κατὰ ποσοστὸν τοῦ βάρους τοῦ ὀχήματος) καὶ 3) ἡ ἐκ τοῦ ἔδαφους προερχομένη δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας· τὴν κάθετον δύναμιν $\mathcal{F}$ καὶ τὴν (ὀριζοντίαν) τριβὴν $\mathcal{T}$. Ἐφ' ὅσον ὁ τροχὸς περιστρέφεται μὲ στα-

θεράν γωνιακὴν ταχύτητα, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν ὅλων τῶν ἄνω δυνάμεων νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Γράφοντες τὴν συνθήκην ταύτην ὡς πρὸς τὸν στιγμιαίον ἄξονα περιστροφῆς, τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου A , λαμβάνομεν τὴν ἑξίσωσιν

$$K \cdot R - B \cdot l = 0 \quad (\text{καὶ διαρρυθμίζετε ὡς ἐξῆς})$$

$$F \cdot l = 0$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ.

Ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως F εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τοῦ βάρους B , ἔχομεν

$$K = \frac{l}{R} \cdot B.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις K , ἡ ἀναγκαία διὰ τὰ κινῆται τὸ ὄχημα ἰσοταῶς, εἶναι ἀνάλογος τοῦ βάρους τοῦ ὀχήματος. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εὐρίσκεται ἐν συμφωνίᾳ μὲ τὸ ἐκ τῆς πείρας γνωστὸν φαινόμενον, ὅτι ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ φορτίον ἐνὸς ὀχήματος, τόσον μεγαλύτερα εἶναι καὶ ἡ δύναμις, ἡ ἀπαιτούμενη διὰ τὴν κίνησιν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις K εἶναι τόσον μικρότερα, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀκτίς R τοῦ τροχοῦ, γεγονὸς τὸ ὁποῖον δικαιολογεῖ τὴν χρησιμοποίησιν τροχῶν μεγάλης διαμέτρου εἰς τὰ ὄχηματα.

Εἰς τοὺς σιδηροδρόμους τὸ πηλίκον l/R καλεῖται *συντελεστής ἔλξεως*.

Σημείωσις 1^η. Ἐσφαλμένον εἶναι τὸ πολλάκις λεγόμενον ὅτι «ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι μικρότερα τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως», καθόσον τὰ δύο μεγέθη δὲν ἐπιδέχονται σύγκρισιν· δεδομένου ὅτι ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως εἶναι δύναμις, ἐνῶ ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι ροπή.

Σημείωσις 2^η. Διὰ νὰ κυλίεται εἰς τροχός, πρέπει, κατὰ τ' ἄνωτέρω, νὰ ὑπάρχῃ, ἀπαραιτήτως, ἡ τριβὴ T . Κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ τροχοῦ, ἡ δύναμις αὕτη δὲν παράγει ἔργον, καθόσον τὸ σημεῖον A παραμένει διαρκῶς ἀκίνητον.

Σημείωσις 3^η. Κατὰ τὴν κύλισιν, εἰς ἄλλας περιπτώσεις ὑπάρχει τριβὴ κυλίσεως—ὅπως, π.χ., κατὰ τὴν κύλισιν τροχοῦ ἐπὶ μαλακοῦ ἐδάφους—ἐνῶ εἰς ἄλλας θεωρεῖται ἀμελής. Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἐμφανίζεται, κατὰ προσέγγισιν, εἰς τροχὸν σιδηροδρόμου, κυλιόμενον ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιᾶς του. Κατὰ τὴν κύλισιν ἡ τριβὴ κυλίσεως καταναλίσκει ἔργον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐξασκοῦντες διὰ τῆς χειρὸς μας μίαν ὀριζοντίαν δύναμιν F ἐπὶ κιβωτίου, μάζης m , εὐρισκομένου ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, προσδίδομεν εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν γ . Ζητεῖται 1) νὰ εὐρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τοῦ κιβωτίου καὶ τοῦ ἐπιπέδου. 2) Νὰ εὐρεθῇ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ κιβώτιον ἐπὶ τῆς χειρὸς μας καὶ 3) νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀριζοντία δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ κιβώτιον ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

$$(\text{Ἀπ: } 1) \eta = \frac{F - m \cdot \gamma}{mg}, \quad 2) F, \quad 3) F_{\text{οριζ}} = F - m \cdot \gamma)$$

2. Σῶμα, βάρους B , κινούμενον μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 ἐπὶ τινος ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἐπιβραδύνεται, λόγῳ τῆς τριβῆς, καὶ ἀκίνητεῖ, ἀφοῦ διανύσῃ ἀπόστασιν

5. Να εύρεθῇ ὁ συντελεστής τριβῆς η , ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ἡ ἐπιβράδυνσις ἦτο σταθερά.

$$(\text{ΑΠ: } \eta = \frac{v_0^2}{2g \cdot s})$$

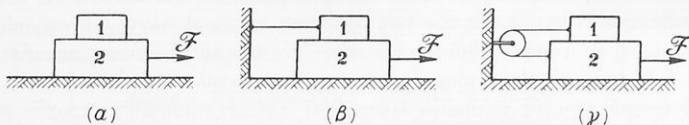
3. Αυτόκίνητον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζονται ἰσχυρότατα αἱ τροχοπέδες, ἀκίνηται, ἀφοῦ διανύσῃ ἀπόστασιν s . Ἐάν ὁ συντελεστής τριβῆς μεταξὺ τῶν τροχῶν καὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι η , νὰ εύρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς πεδήσεως.

$$(\text{ΑΠ: } v = \sqrt{2g \cdot s \cdot \eta})$$

4. Ὁ οδηγὸς ἐνὸς αὐτοκινήτου, βάρους B , κινουμένου εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταῶς, ἐφαρμόζων ἰσχυρότατα τὰς τροχοπέδας, ἀναγκάζει τοὺς τροχοὺς νὰ ὀλισθήσουν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Παρατηρεῖται ὅτι τὸ αὐτοκίνητον σταματᾷ, ἀφοῦ διατρέξῃ διάσταμα s ἐντὸς τοῦ χρόνου t . Νὰ εύρεθῇ ὁ συντελεστής τριβῆς η μεταξὺ τροχῶν-ἐδάφους, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐπιβράδυνσις τοῦ αὐτοκινήτου ἦτο σταθερά.

$$(\text{ΑΠ: } \eta = \frac{2s}{g \cdot t^2})$$

5. Τὸ σῶμα 1 ἔχει βάρος 4 kgf^* , τὸ δὲ σῶμα 2 ἔχει βάρος 8 kgf^* . Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τῶν σωμάτων 1 καὶ 2 καθὼς καὶ μεταξὺ τοῦ σώματος 2



καὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου εἶναι ἴσος πρὸς $0,25$. Νὰ εύρεθῇ ἡ δύναμις F , ἡ ἀπαιτούμενη διὰ νὰ κινήται τὸ σῶμα 2 πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ σταθερὰν ταχύτητα 1) ἐάν τὸ σῶμα 1 παραμένῃ ἐπὶ τοῦ σώματος 2 καὶ κινήται μετ' αὐτοῦ (α). 2) Ἐάν τὸ σῶμα 1 παραμένῃ ἀκίνητον (β) καὶ 3) ἐάν τὸ σῶμα 1 εἶναι συνδεδεμένον διὰ νήματος, διερχομένου δι' ἀκινήτου τροχαλίας (γ).

$$(\text{ΑΠ: } 3 \text{ kgf}^*, 4 \text{ kgf}^*, 5 \text{ kgf}^*)$$

6. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις μὲ τὴν ὁποίαν κατέρχεται ἐν σῶμα, μάζης m , κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ , μεγαλυτέρας τῆς γωνίας τριβῆς. (Συντελεστής τριβῆς $= \eta$).

$$(\text{ΑΠ: } \gamma = g \cdot (\eta \mu \varphi - \eta \cdot \sigma \nu \varphi))$$

7. Σῶμα, βάρους B , ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον, γωνίας κλίσεως φ , μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 . 1) Ἐάν η εἶναι ὁ συντελεστής τριβῆς, νὰ εύρεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ σταματήσῃ τὸ σῶμα. 2) Μετὰ πόσον χρόνον, κατόπιν τούτου, τὸ σῶμα θὰ ἐπανεέλθῃ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ 3) ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο;

$$(\text{ΑΠ: } 1) s = \frac{v_0^2}{2g \cdot (\eta \mu \varphi + \eta \cdot \sigma \nu \varphi)}, \quad 2) t = \frac{v_0}{g \cdot \sqrt{\eta \mu^2 \varphi - \eta^2 \cdot \sigma \nu^2 \varphi}},$$

$$3) v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{\eta \mu \varphi - \eta \cdot \sigma \nu \varphi}{\eta \mu \varphi + \eta \cdot \sigma \nu \varphi}}$$

8. Ἐπὶ ὀριζοντίας τραπέζης, στρεπτῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα, καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἐξ αὐτοῦ, εὐρίσκεται σῶμα, βάρους 100 gr^* . Ἐάν ἡ τράπεζα τεθῇ εἰς περιστροφὴν, παρατηρεῖται ὅτι, ὅταν ἡ γωνιακὴ ταχύτης γίνῃ ἴση πρὸς 7 rad/sec , τὸ σῶμα ἀρχίζει νὰ ὀλισθαίνει καὶ ἐκφεύγει ἐκ τῆς τραπέζης. Νὰ εύρεθῇ ὁ συντελεστής τριβῆς.

$$(\text{ΑΠ: } 0,5)$$

9. Αυτόκίνητον, βάρους 3 t^* , διαγράφει ὀριζοντίαν κυκλικὴν τροχίαν, ἀκτίνας 100 m . Ἐάν ὁ συντελεστής τριβῆς μεταξὺ τροχῶν καὶ ἐδάφους εἶναι ἴσος πρὸς $0,3$, νὰ εύρεθῇ ἡ μεγίστη ταχύτης, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἔχῃ τὸ αὐτοκίνητον.

$$(\text{ΑΠ: } 17,1 \text{ m/sec})$$

10. Σώμα, βάρους B , εὐρισκόμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, μεταβλητῆς γωνίας κλίσεως, ἄρχεται ὀλισθαίνον με σταθεράν ταχύτητα, ὅταν ἡ γωνία κλίσεως γίνῃ ἴση πρὸς φ . Ἐὰν ἐπὶ τοῦ σώματος τούτου στερεωθῇ δεύτερον σῶμα, βάρους $2B$, ἡ ὀλίσθησις με σταθεράν ταχύτητα θὰ γίνῃ εἰς τὴν αὐτήν, ὡς προηγουμένως, γωνίαν φ , εἰς μεγαλύτεραν ἢ εἰς μικροτέραν καὶ διατῷ;

11. Σῶμα, βάρους B , στηρίζεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ , χωρὶς νὰ ὀλισθαίνῃ. Ἐὰν η εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς, ποία δύναμις K , παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, εἶναι ἀναγκαία διὰ νὰ κινή τὸ σῶμα με σταθεράν ταχύτητα α) πρὸς τὰ ἄνω καὶ β) πρὸς τὰ κάτω;

$$(\text{ΑΠ: } \alpha) K = B \cdot (\eta \cdot \sigma \nu \varphi + \eta \mu \varphi), \quad \beta) K = B \cdot (\eta \cdot \sigma \nu \varphi - \eta \mu \varphi)$$

12. Σῶμα, βάρους B , εὐρίσκεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ , καὶ ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω διὰ μιᾶς δυνάμεως F , παραλλήλου πρὸς αὐτό. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι ἴσος πρὸς 0,25, νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀναγκαία δύναμις F , ὅταν ἡ γωνία κλίσεως λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ σχέσις $F = f(\varphi)$.

$$(\text{ΑΠ: } 0,5 B, 0,742 B, 0,933 B, 1,060 B, 1,116 B, 1,095 B, B)$$

13. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἑνὸς κυλίνδρου, μάζης m καὶ ἀκτίνος R , ὁ ὁποῖος κυλίεται ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, ἐξασκεῖται ἡ ὀριζοντία δύναμις F . Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ ἄξονος; (Συντελεστὴς τριβῆς $= \eta$, συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως $= 0$).

$$(\text{ΑΠ: } \gamma = \frac{2}{3} \frac{F}{m})$$

14. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς σφαίρας, μάζης m καὶ ἀκτίνος R , ἡ ὁποία κυλίεται (χωρὶς νὰ ὀλισθαίνῃ) κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως φ . (Συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως $= 0$).

$$(\text{ΑΠ: } \gamma = \frac{5}{7} g \cdot \eta \mu \varphi)$$

15. Κύλινδρος ἐκ ξύλου καὶ σωλὴν λεπτότοιχος ἐκ χαλκοῦ ἔχουν τὴν αὐτὴν διάμετρον καὶ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν μάζαν. Ἐὰν ἀφεθῶν ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ ἄνω ἄκρου ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, ποῖον ἐκ τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων θὰ φθάσῃ πρῶτον εἰς τὸ κάτω ἄκρον;

16. Κύλινδρος, διαμέτρου d , κυλίεται κατὰ μῆκος ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, διὰ νὰ φθάσῃ δὲ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον χρειάζεται χρόνον t . Κατόπιν ἀνοίγεται μία ὀπή, διαμέτρου δ , κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου. Ἐάν, τώρα, ὁ κύλινδρος ἀφεθῇ νὰ κυλίεται, ὁ χρόνος καθόδου θὰ εἶναι μεγαλύτερος, μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς t ;

$$(\text{ΑΠ: Μεγαλύτερος τοῦ } t)$$

17. Νὰ λυθῇ ἡ ἄσκησις 15 διὰ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει τριβὴ κυλίσεως, ὁ δὲ συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως εἶναι ἴσος πρὸς l .

$$(\text{ΑΠ: } \gamma = \frac{5}{7} g \cdot (\eta \mu \varphi - \frac{l}{R} \cdot \sigma \nu \varphi))$$

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΙΣ

§ 150. Νόμος τοῦ Νεύτωνος. Τὰ φαινόμενα τῆς βαρύτητος καὶ αἱ κινήσεις τῶν οὐρανίων σωμάτων ἐξηγοῦνται, ἂν δεχθῶμεν τὴν ὑπαρξίν ἐλκτικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ δύο οἰωνδήποτε ὑλικῶν σημείων καὶ αἱ ὁποῖαι ὑπακούουν εἰς τὸν ἐξῆς νόμον· τὸν **νόμον τοῦ Νεύτωνος**: «Δύο ὑλικά σημεῖα ἔλκονται ἀναλόγως τοῦ γινομένου τῶν μαζῶν των m_1 καὶ m_2 καὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως r αὐτῶν». Ἦτοι εἶναι

$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	Νόμος τοῦ Νεύτωνος
---	--------------------

ἔνθα k εἶναι μία παγκοσμία σταθερὰ (**σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἐλξεως**), τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῶν ὑλικῶν.

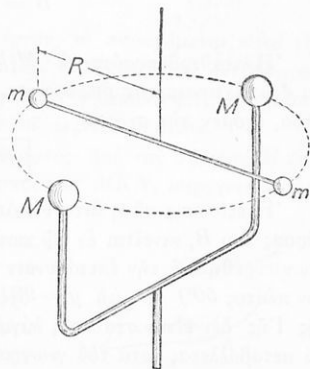
Ἄν αἱ ἐλκόμεναι μᾶζαι εἶναι σφαῖραι, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀπόστασις r εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των, τῶν μαζῶν θεωρουμένων ὡς συγκεντρωμένων εἰς τὰ κέντρα ταῦτα. Ὅμοίως, ἀποδεικνύεται ὅτι ὑλικὸν σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς οἰωνδήποτε σημεῖον τοῦ ἐσωτερικοῦ κοίτης σφαίρας, οὐδεμίαν ἔξιν ὑφίσταται ὑπὸ τῆς σφαίρας.

Διαστάσεις τοῦ k . Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Νεύτωνος προκύπτει ὅτι ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἐλξεως ἔχει διαστάσεις

$$[k] = \frac{[F] \cdot [r^2]}{[m^2]}.$$

§ 151. Μέτρησις τῆς σταθερᾶς τῆς παγκοσμίας ἐλξεως. Ἡ τιμὴ τοῦ k εὐρίσκεται, κατ' ἀρχήν, διὰ μετρήσεως τῆς δυνάμεως, μετὰ τὴν ὁποίαν ἔλκονται δύο σφαῖραι, γνωστῶν μαζῶν, εὐρισκόμεναι εἰς γνωστὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν. Ἐπειδὴ, ὅμως, ἡ δύναμις αὕτη εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ μετ' ἀκριβείας, χρησιμοποιοῦνται ἄλλαι μέθοδοι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ δύναμις προκύπτει ἐμμέσως.

Μία εκ των μεθόδων μετρήσεως της σταθεράς k είναι η μέθοδος *Cavendish* : Διά λεπτού σύρματος (σχ. 194) εξαρτάται ελαφρὸν στέλεχος, φέρον εἰς τὰ ἄκρα του δύο μικρὰς σφαίρας, μάζης m , m , καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἔστω $2R$. Δύο ἄλλαι σφαῖραι, μεγάλης μάζης M , M , στηρίζονται ἐπὶ καταλήλου στηρίγματος οὕτως ὥστε τὰ κέντρα των νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ὀριζόντιον ἐπίπεδον μετὰ τὰ κέντρα τῶν ἄλλων σφαιρῶν. Τὰ κέντρα τῶν μεγάλων σφαιρῶν ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων, ἐπίσης, κατὰ $2R$. Ἐάν στρέψωμεν τὸ ὑποστήριγμα οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα $M-M$ νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $m-m$, τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς διατάξεως, οὐδεμία ροπή ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ στελέχους. Ἐάν, τώρα, στρέψωμεν τὸ ὑποστήριγμα οὕτως ὥστε αἱ μεγάλαι σφαῖραι νὰ πλησιάσουν πρὸς τὰς μικράς, αἱ τελευταῖαι αὐταί, ἐλκόμεναι, θὰ ἰσορροπήσουν εἰς νέαν θέσιν. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην μετροῦμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν γωνίαν φ , κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ στέλεχος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν ἀπόστασιν r τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν m , M . Ἡ ἔλξις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ μεγάλη σφαῖρα M ἐπὶ τῆς μικρᾶς σφαίρας m , εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 194. Διάταξις *Cavendish* (ἀσχή) διὰ τὴν μέτρησην τῆς σταθεράς τῆς παγκοσμίας ἐλξεως.

$$F = k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

Ἐπομένως, ἡ ροπή, ἡ δρῶσα ἐπὶ τοῦ στελέχους, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$2R \cdot F = 2R \cdot k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

θ' ἀντισταθμίζεται δὲ ὑπὸ τῆς ροπῆς $D^* \cdot \varphi$, τῆς ἀναπτυσσομένης ἐκ τῆς στρέψεως τοῦ σύρματος ἐξαργήσεως. Ἐχομεν, λοιπόν, τὴν σχέσιν

$$D^* \cdot \varphi = 2R \cdot k \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}. \quad (1)$$

Τὴν κατευθύνουσαν ροπήν D^* τοῦ σύρματος εὐρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} \quad [\text{ἐξίσωσις (1), § 125}]$$

ἐάν μετρήσωμεν τὴν περίοδον T τῆς ταλαντώσεως τοῦ στρεπτοῦ συστήματος καὶ γνωρίζωμεν τὴν ροπήν ἀδρανείας Θ αὐτοῦ (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $2mR^2$). Ἡδη, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) εὐρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς σταθεράς k . Αἱ ἀκριβέστεραι μετρήσεις ἔδωσαν τὴν τιμὴν

$$k = 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{gr}^{-2}.$$

§ 152. Βάρος. Τὴν δύναμιν, διὰ τῆς ὁποίας ἡ $\Gamma\eta$ ἔλκει ἓν ὑλικὸν σημεῖον (ἢ σῶμα), καλοῦμεν **βάρος**. Τὸ βάρος B ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Νεύτωνος, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ m_1 διὰ τῆς μάζης M τῆς $\Gamma\eta$, τὸ m_2 διὰ

τῆς μάζης m τοῦ ὕλικου σημείου καὶ τὸ r διὰ τῆς ἀκτίνος R τῆς $\Gamma\etaς$. Ἦτοι

$$B = k \cdot \frac{M}{R^2} \cdot m.$$

Ἡ σταθερὰ ποσότης $k \cdot M/R^2$ ἔχει διαστάσεις ἐπιταχύνσεως καὶ καλεῖται **ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος**, συμβολίζεται δὲ διὰ τοῦ γράμματος g . Ἄρα, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{B = m \cdot g} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δεικνύει ὅτι σῶμα, μάζης m , ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του B , κινεῖται ἐν τῷ κενῷ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν g . Ἐκ μετρήσεων εὐρέθῃ διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος εἰς μέσά πλάτη (γεωγραφικὸν πλάτος 50°) ἡ τιμὴ $g = 981 \text{ cm/sec}^2$. Ἐπειδὴ, ὡς γνωστόν, ἡ ἀκτὶς τῆς $\Gamma\etaς$ δὲν εἶναι σταθερά, λόγῳ τοῦ σχήματος αὐτῆς, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ g θὰ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους. Διὰ μετρήσεων (π.χ. διὰ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ ἔκκρεμοῦς) εὐρίσκεται ὅτι τὸ g κυμαίνεται μεταξὺ τῆς τιμῆς 978 cm/sec^2 (ἰσημερινός) καὶ 983 cm/sec^2 (πόλοι). Εἰς τὰς Ἀθήνας τὸ g ἔχει τὴν τιμὴν $980,1 \text{ cm/sec}^2$.

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως (1) προκύπτει ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν τόπον τὰ βάρη δύο σωμάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς μάζας των, ἔπομένως, ἡ μέτρησις τῶν μαζῶν των δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς μέτρησιν τῶν βαρῶν αὐτῶν (π.χ., διὰ ζυγοῦ).

§ 153. Γενικὰ περὶ πεδίων. *Πεδίον* καλεῖται ὁ χώρος ἐκεῖνος, εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ὁποίου ἐν φυσικὸν μέγεθος ἔχει ὀρισμένην τιμὴν. Ὅταν τὸ μέγεθος τοῦτο εἶναι ἀνυσματικόν, τὸ πεδίον καλεῖται **ἀνυσματικὸν πεδίον**. Ἀνυσματικὰ πεδία εἶναι, π.χ., τὰ *πεδία δυνάμεων*, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι, ἐὰν φέρωμεν ἐντὸς αὐτῶν ἐν κατάλληλον *ὑπόθεμα*, ἔξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις. Τοιοῦτο πεδίον εἶναι, π.χ., τὸ πεδίον βαρύτητος, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ κατάλληλον ὑπόθεμα εἶναι ἡ μάζα, τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ κατάλληλον ὑπόθεμα εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον κ.λ. Ἄλλο ἀνυσματικὸν πεδίον εἶναι τὸ *πεδίον ταχυτήτων*, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς πᾶν σημεῖον αὐτοῦ ἡ ταχύτης ἔχει ὀρισμένην τιμὴν. Τοιοῦτο πεδίον εἶναι ὁ χώρος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ρεεῖ ἐν ὕγρῳ (§ 184).

Ἐάν, ἐντὸς πεδίου δυνάμεων, μετακινήθῃ τὸ ὑπόθεμα κατὰ τὸν δρόμον Δs , θὰ παραχθῇ ἔργον ΔA , ἴσον πρὸς

$$\Delta A = (\mathcal{F} \cdot \Delta s).$$

Τὸ ἔργον $A_{1,2}$ τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ὑποθέματος ἀπὸ τοῦ σημείου 1 μέχρι τοῦ σημείου 2, θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσον πρὸς

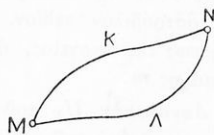
$$A_{1,2} = \sum_1^2 (\mathcal{F} \cdot \Delta s).$$

Ἀναλόγως τοῦ ἔαν τὸ ἔργον τοῦτο ἐξαρτᾶται ἢ ὄχι ἐκ τῆς μορφῆς τῆς τροχιάς, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔγινεν ἡ μετακίνησις, τὰ πεδία ὑποδιαίρουνται εἰς *στροβιλὰ καὶ ἀστροβίλα*.

α) **Ἀστροβίλα πεδία.** Εἰς ταῦτα τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ὑποθέματος ἀπὸ τινος σημείου εἰς ἄλλο, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς μορφῆς τῆς τροχιάς ἐπὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ μετακίνησις, ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τῶν θέσεων τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τοῦ τελικοῦ σημείου.

Οὕτω, κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ὑποθέματος ἀπὸ τοῦ σημείου M (σχ. 195) μέχρι τοῦ σημείου N κατὰ μῆκος τῆς τροχιάς MKN , παράγεται ἔργον A_{MKN} , ἴσον, ἀκριβῶς, πρὸς τὸ ἔργον A_{MLN} .

Εἶναι, λοιπόν, φανερόν ὅτι ἔαν τὸ ὑπόθεμα, ἐκκινουῦν ἐκ τοῦ σημείου M , διαγράφῃ τὴν κλειστὴν τροχιάν $MKNAM$, ἐπανερχόμενον, οὕτω, εἰς τὴν ἀφετηρίαν του, τὸ ὅλκον ἔργον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, καθόσον, ἔαν ὀρίσωμεν ὡς θετικὸν τὸ ἔργον κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ σημείου M εἰς τὸ σημεῖον N , τότε τὸ ἔργον κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν ἐκ τοῦ σημείου N εἰς τὸ σημεῖον M θὰ εἶναι ἀρνητικὸν (καὶ ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον). Χαρακτηριστικόν, λοιπόν, τῶν ἀστροβίλων πεδίων εἶναι ὅτι, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὑποθέματος ἐπὶ κλειστῆς τροχιάς, τὸ ὑπὸ τοῦ πεδίου παραγόμενον ἔργον εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.



Σχ. 195.

Εἰς τὰ ἀστροβίλα πεδία ἀνήκουν τὸ πεδῖον βαρύτητος, τὸ ἠλεκτροστατικὸν πεδῖον κ.ἄ.

β) **Στροβιλὰ πεδία.** Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ ἀστροβίλα πεδία, καλοῦνται *στροβιλὰ*, τὰ πεδία ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποία τὸ ἔργον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τροχιάς, ἐπὶ τῆς ὁποίας μετεκινήθη τὸ ὑπόθεμα. Τοιοῦτο πεδῖον εἶναι τὸ μαγνητικὸν πεδῖον, τὸ χρονικῶς μεταβαλλόμενον ἠλεκτρικὸν πεδῖον καὶ ἄλλα. Εἶναι προφανές ὅτι, ἐφ' ὅσον εἰς τὰ στροβιλὰ πεδία τὸ ἔργον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τροχιάς, τὸ συνολικὸν ἔργον διὰ μίαν κλειστὴν τροχιάν θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός.

§ 154. Πεδῖον βαρύτητος. Ὁ χώρος περὶ τὴν Γῆν εἶναι ἓν πεδῖον δυνάμεων, τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδῖον βαρύτητος* καὶ διὰ τὸ ὁποῖον τὸ κατὰ τὸν ὅσον εἶναι ἡ μάζα. Ἐάν, ἐντὸς τοῦ πεδίου βαρύτητος, φέρωμεν μίαν μάζαν m θὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτῆς μία δύναμις $\mathcal{B}$ — τὸ βάρος — ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης. Ἦτοι εἶναι

$$\mathcal{B} = g \cdot m$$

Ἡ σταθερὰ g καλεῖται *ἐνταση τοῦ πεδίου βαρύτητος* καὶ ὀρίζεται ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως ὡς τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$, τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ

τοῦ πεδίου ἐπὶ τῆς μάζης m , διὰ τῆς μάζης ταύτης. Ἦτοι εἶναι

$$g = \frac{\mathcal{B}}{m}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου βαρύτητος ἔχει διαστάσεις ἐπιταχύνσεως καὶ συμπύπτει, ἀκριβῶς, μετὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος.

Τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ πεδίου βαρύτητος κατὰ τὴν μετακίνησιν τῆς μάζης ἐκ τοῦ σημείου 1 μέχρι τοῦ σημείου 2, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τροχιάς, ἐπὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ μετακίνησις, ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τῆς θέσεως τῶν σημείων 1 καὶ 2· ἦτοι τὸ πεδίου βαρύτητος εἶναι ἀστροβίλον πεδίου. Τὸ ἔργον τοῦτο, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης m .

Δυναμικὸν U_{Σ} τοῦ πεδίου βαρύτητος εἰς τὸ σημεῖον Σ καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ὑπὸ τοῦ πεδίου παραγομένου ἔργου $A_{\Sigma, \infty}$, ὅταν ἡ μᾶζα m μετακινήθῃ ἐκ τοῦ σημείου Σ μέχρι τοῦ ἀπείρου, διὰ τῆς μάζης ταύτης. Ἦτοι

$$U_{\Sigma} = \frac{A_{\Sigma, \infty}}{m} \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον τὸ ἔργον $A_{\Sigma, \infty}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου, ἀνεξάρτητον αὐτοῦ θὰ εἶναι καὶ τὸ δυναμικόν, ἐξαρτώμενον, ὅπως καὶ τὸ ἔργον, μόνον ἐκ τῆς θέσεως (x, y, z) τοῦ σημείου Σ .

Διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων 1 καὶ 2 καλεῖται ἡ διαφορὰ $U_1 - U_2$ τῶν δυναμικῶν τῶν δύο σημείων.

Ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τροχιάς, εὐρίσκομεν διὰ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ τὴν σχέσιν

$$U_1 - U_2 = \frac{A_{1,2}}{m}$$

ἐνθα $A_{1,2}$ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ παραχθὲν κατὰ τὴν μετακίνησιν τῆς μάζης m ἐκ τοῦ σημείου 1 μέχρι τοῦ σημείου 2.

§ 155. Θεωρία τῆς μακρόθεν ἐπιδράσεως καὶ θεωρία τοῦ πεδίου.

Ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνος, ὅπως διευπλώθη ἀνωτέρω, θεωρεῖ τὴν βαρύτητα ὡς μίαν μακρόθεν ἐπίδρασιν. Τὸ ἐν σῶμα, δηλ., ἑξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ εὐρισκομένου, μίαν ἑλκτικὴν δύναμιν ἀπλῶς ὡς ἐκ τῆς παρουσίας του, χωρὶς νὰ ἐπέρχεται μεταβολή τις εἰς τὸν ἀναμεταξὺν χώρον. Ἡ ἐπίδρασις αὕτη δὲν θ' ἀπαιτῇ χρόνον διὰ τὴν μετάδοσίν της, ἡ ταχύτης, δηλ., τῆς μεταδόσεως θὰ εἶναι ἀπειρος. Ἄν, τοῦναντίον, ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐνὸς σώματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου μεταδίδεται διὰ τοῦ διαμέσου

περιβάλλοντος, ἡ μετάδοσις θὰ γίνεται μὲ πεπερασμένην ταχύτητα. Κατὰ τὴν θεωρίαν ταύτην, καλουμένην *θεωρίαν τοῦ πεδίου*, ὁ χώρος περὶ ὑλικὸν σημεῖον ἀποκτᾷ τὴν ιδιότητα νὰ ἔξασκῇ δύναμιν ἐπὶ ἄλλου τινὸς ὑλικοῦ σημείου, ἐντὸς τοῦ χώρου τούτου τεθέντος. Κατὰ τὴν θεωρίαν ταύτην, πᾶσα μεταβολὴ εἰς τὸ αἷτιον τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητος θὰ πρέπη νὰ χρειάζεται πεπερασμένον χρόνον διὰ νὰ μεταδοθῇ εἰς ἄλλο σημεῖον. Τὸ πηλίκον τῆς ἀποστάσεως διὰ τοῦ χρόνου τούτου παρέχει τὴν ταχύτητα μεταδόσεως τῆς ἐπιδράσεως. Διὰ τὸ πεδῖον τῆς βαρύτητος δὲν κατορθώθη νὰ εὑρεθῇ πειραματικὸς τρόπος μετρήσεως τῆς ταχύτητος μεταδόσεως (*).

(*) Δι' ἄλλα πεδία, ὅπως, π.χ., διὰ τὸ ἠλεκτρικόν, τοῦτο ἔχει ἐπιτευχθῇ.

ΜΕΡΟΣ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'

ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

§ 156. **Δύναμις d' Alembert.** Τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς

$$\mathcal{F} = m \cdot p$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\mathcal{F} - m \cdot p = 0 \quad \eta \quad \mathcal{F} + (-m \cdot p) = 0.$$

Ἡ μορφή αὕτη τῆς ἐξισώσεως ὑπενθυμίζει τὴν συνθήκην ἰσορροπίας, ἐπὶ τῷ ὄρῳ τὸ $(-m \cdot p)$ νὰ θεωρηθῇ ὡς δύναμις. Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα (εἶναι, δηλ., μία ὑποθετικὴ δύναμις), καλεῖται **δύναμις d' Alembert**.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς δυνάμεως d' Alembert τὰ προβλήματα δυνάμεως μετατρέπονται εἰς προβλήματα ἰσορροπίας. Λαμβάνοντες, λοιπόν, ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν δυνάμιν ταύτην, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἐξῆς πρότασιν:

Εἰς ὅλας τὰς κινήσεις ἑνὸς σώματος — περιλαμβανομένης καὶ τῆς ὁριζωνίας περιπτώσεως τῆς ἡρεμίας — τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων, πραγματικῶν καὶ ὑποθετικῶν, εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν».

Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σφενδόνης (σ. 58), ἀντὶ νὰ εἰπώμεν:

«Ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἄρα ἐπιταχύνεται, τοῦτο δὲ εἶναι δυνατόν μόνον ἐὰν ἐπιδρῇ ἐπ' αὐτῆς μία δύναμις· ἡ δύναμις ἐκ τοῦ τεταμένου νήματος»,

θεωροῦμεν ὅτι ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ λέγομεν:

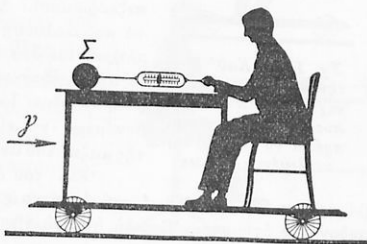
«τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις· ἡ δύναμις τοῦ νήματος καὶ ἡ δύναμις d' Alembert».

§ 157. **Σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς.** Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς $\mathcal{F} = m \cdot p$ ἐμελετήθη μέχρι τοῦδε καὶ εὐρέθῃ ἰσχύων εἰς σύστημα ἀναφορᾶς, θεωρούμενον «ἀκίνητον». Ἐπειδὴ, ὅμως, ὑπάρχουν καὶ ἄλλα συστήματα ἀναφορᾶς, τὰ ὁποῖα κινούνται ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο, τίθεται τὸ ἐρώτημα κατὰ πόσον ὁ θεμελιώδης νόμος ἐξακολουθεῖ ἰσχύων καὶ διὰ τὰ ἄλλα ταῦτα συστήματα. Ὅπως

ἀποδεικνύεται, ἡ ὀρθὴ ἀπάντησις εἶναι ἡ ἐξῆς: Ἐὰν ὁ θεμελιώδης νόμος ἰσχύῃ δι' ἓν σύστημα ἀναφορᾶς, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ πᾶν ἄλλο, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ὡς πρὸς τοῦτο μεταφορικὴν κίνησιν μὲ σταθερὰν ταχύτητα (*). Ἐφαρμογὴν τούτου ἔχομεν, ὅταν παρατηρητὴς εὐρίσκειται ἐντὸς κλειστοῦ θαλάμου πλοίου, κινουμένου εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταῶς. Σῶμα, ἀκίνητον ὡς πρὸς τὸ νέον τοῦτο σύστημα ἀναφορᾶς, κινεῖται ὁμαλῶς ὡς πρὸς ἄλλον παρατηρητὴν, μὴ συμμετέχοντα τῆς κινήσεως τοῦ πλοίου. Ἡ ταχύτης, λοιπόν, τοῦ σώματος εἶναι διάφορος διὰ τὰ δύο συστήματα ἀναφορᾶς. Ἄν, ὅμως, τὸ σῶμα κινήθῃ μὲ ἐπιτάχυνσιν τινα, ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἰδίᾳ καὶ ὡς πρὸς τὰ δύο συστήματα. Οὕτω, σῶμα, ἰσοροποῦν ὡς πρὸς τὸν ἓνα παρατηρητὴν ($p = 0$ καὶ $\omega' = 0$), ἰσοροπεῖ καὶ ὡς πρὸς τὸν ἄλλον. Ἐνεκα τούτου, ὅλα τὰ φαινόμενα ἐξελίσσονται ὁμοίως καὶ διὰ τοὺς δύο παρατηρητὰς καὶ δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ἐξακριβώσιν ποῖον ἐκ τῶν δύο συστημάτων πραγματικῶς κινεῖται.

§ 158. Σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Παράδειγμα τούτου εἶναι τὸ ἐξῆς: Ἐπὶ μιᾶς

ἀμάξης εἶναι στερεωμένη μία τράπεζα καὶ ἓν κάθισμα (σχ. 196). Ἐπὶ τοῦ καθίσματος κάθεται ἄνθρωπος, κρατῶν δυναμόμετρον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται σφαῖρα, μᾶξης m . Τὸ ὅλον σύστημα δύναται νὰ ἐπιταχυνθῇ δι' ἰσχυρᾶς ὠθήσεως μὲ ἐπιτάχυνσιν p (πρὸς τὰ δεξιὰ). Τὸ δυναμόμετρον τείνεται καὶ δεικνύει μίαν δύναμιν $F = m \cdot p$. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου εἶναι ἄλλη διὰ τὸν ἐπιτα-



Σχ. 196. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιτάχυνσεως τὸ δυναμόμετρον δεικνύει μίαν δύναμιν.

χυνόμενον παρατηρητὴν καὶ ἄλλη διὰ παρατηρητὴν, εὐρισκόμενον ἔξω τοῦ συστήματος, διότι ἕκαστος τούτων ἔχει διάφορον ἀντίληψιν τοῦ φαινομένου.

1) Ἀκίνητος παρατηρητὴς: Ἡ σφαῖρα ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ δεξιὰ. Τοῦτο προέρχεται ὑπὸ μιᾶς δυνάμεως, ἐξασκουμένης ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς χειρὸς διὰ μέσου τοῦ δυναμομέτρου καὶ ἴσης πρὸς $m \cdot p$. Τὴν δύναμιν, ἀκριβῶς, ταύτην δεικνύει τὸ δυναμόμετρον.

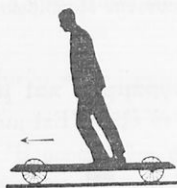
2) Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητὴς: Ἡ σφαῖρα ἠρεμεῖ, συνεπῶς δὲν ἐπιταχύνεται. Ἀρα ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δυνάμεων πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἐκτὸς τῆς ὑπὸ τῆς χειρὸς ἐξασκουμένης δυνάμεως, πρέπει νὰ δοῦν ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ μία ἄλλη δύναμις, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρώτην, ἡ $F' = -m \cdot p$.

(*) Τὸ σύνολον τοιοῦτων συστημάτων ἀναφορᾶς ἀποτελεῖ ἓν σύστημα ἀδρανείας.

Τὴν δύναμιν ταύτην, ἡ ὁποία δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα (διότι ὑπὸ οὐδενὸς σώματος ἐξασκεῖται), πρέπει νὰ δεχθῇ ὁ ἐπιταχυνόμενος παρατηρητής, ἂν θέλῃ νὰ ἐφαρμόσῃ τοὺς συνήθεις νόμους τῆς Μηχανικῆς διὰ σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς: Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς εἰς σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ ἐπιτάχυνσιν p , πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἐπιδρωσάν ἐφ' ἐκάστης μάζης m μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν, ἴσην πρὸς $(-m \cdot p)$. Ἡ ὑποθετικὴ αὕτη δύναμις ὀνομάζεται, συνήθως, *δύναμις ἀδρανείας*.

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς δυνάμεως ἀδρανείας, φέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ἐπὶ τροχιοδρομικοῦ ὀχήματος ἵσταται ἄνθρωπος χω-



Σχ. 197. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιτάχυνσεως ὁ ἄνθρωπος, διὰ νὰ μὴ πέσῃ, πρέπει νὰ διατηρῇ τὴν κεκλιμένην στάσιν.

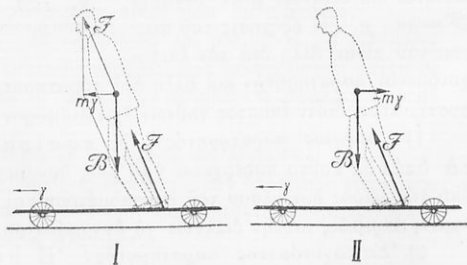
οὶς νὰ κρατῇται. Κατὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὀχήματος, ἂν θέλῃ οὗτος νὰ μὴ πέσῃ, πρέπει νὰ λάβῃ τὴν στάσιν, τὴν ὑποδεικνυομένην ὑπὸ τοῦ σχήματος 197. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τούτου εἶναι διάφορος, ἀναλόγως τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀνάγεται ἡ κίνησις.

1) Ἀκίνητος παρατηρητής (εὐρισκόμενος, δηλ., ἐπὶ τοῦ πεζοδρομίου). Διὰ νὰ μὴ ἀνατραπῇ ὁ ἄνθρωπος καὶ διὰ νὰ παρακολουθῇ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος, πρέπει νὰ ἐκπληροῦνται δύο ὅροι: α) Ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν καὶ β) ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι ὀριζοντίαν καὶ ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ ἀνθρώπου ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὀχήματος.

Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκούνται δύο δυνάμεις: τὸ βάρος τοῦ B (σχ. 198, I) καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ δάπεδον τοῦ ὀχήματος. Ἐπειδὴ ἡ ροπή τῆς δυνάμεως B εἶναι ἴση πρὸς μηδέν (διότι αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους), ἔπεται

ὅτι καὶ ἡ ροπή τῆς ἄλλης συνιστώσας $\mathcal{F}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, δηλαδή ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἀνθρώπου. Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος παρέμενε κατακόρυφος, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ὡς διερχομένη ἀναγκαστικῶς διὰ τοῦ κέντρου βάρους,

θὰ ἦτο κατακόρυφος καὶ, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων B καὶ $\mathcal{F}$ δὲν θὰ ἦδύνατο νὰ ἦτο ὀριζοντίαν, ἐνῶ τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἐὰν ὁ ἄνθρωπος λάβῃ κεκλιμένην στάσιν. Ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ δάπεδον, ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας — μίαν κατακόρυφον καὶ μίαν ὀριζοντίαν — ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ὀριζοντίαν (τριβή) εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἴση πρὸς $m \cdot \gamma$.

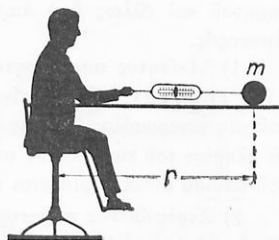


Σχ. 198.

2) *Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητής* (εὐρισκόμενος ἐντὸς τοῦ ὀχήματος). Ὁ ἄνθρωπος ἰσορροπεῖ, συνεπῶς αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι δυνάμεις, ἀναγόμεναι εἰς τὸ κέντρον βάρους, πρέπει νὰ δίδουν συνισταμένην δύναμιν καὶ συνισταμένην ροπήν ἴσας πρὸς μηδέν. Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκούνται τρεῖς δυνάμεις: τὸ βάρος τοῦ B (σχ. 198, II), ἡ δύναμις ἀδραναίας $-m \cdot \gamma$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἐκ τοῦ διαπέδου. Αἱ δύο πρῶται διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους, ἐπομένως καὶ ἡ τρίτη πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ νὰ ἔχη τοιοῦτο μέτρον καὶ τοιαύτην διεύθυνσιν, ὥστε νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δύο πρώτων.

§ 159. Σύστημα ἀναφοράς, στρεφόμενον με σταθεράν γωνιακήν ταχύτητα. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἶδομεν ὅτι, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς νόμους τῆς Μηχανικῆς καὶ εἰς ἐπιταχυνόμενον σύστημα ἀναφοράς, κινούμενον εὐθυγράμμως, πρέπει νὰ δεχθῶμεν μίαν ἀνύπαρκτον δύναμιν ἀδραναίας. Τὸ αὐτὸ ἀναγκαζόμεθα νὰ πράξωμεν καὶ ὅταν τὸ σύστημα ἀναφοράς περιστρέφεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διακρίνομεν δύο δυνάμεις ἀδραναίας· τὴν *φυγόκεντρον δύναμιν* καὶ τὴν *δύναμιν Coriolis*.

α) *Φυγόκεντρος δύναμις.* Ἐπὶ καθίσματος, στρεπτοῦ περὶ κατακόρυφον ἄξονα (σχ. 199), κάθεται ἄνθρωπος, κρατῶν δυναμόμετρον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται μία σφαῖρα (μάζης m). Ἡ σφαῖρα στηρίζεται ἐπὶ τραπέζης, ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένη ἐπὶ τοῦ καθίσματος, οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ περιστρέφεται μετ' αὐτοῦ. Θέτοντες τὸ ὅλον σύστημα εἰς περιστροφήν (ἔστω δὲ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δυναμόμετρον ἐκτείνεται καὶ δεικνύει μίαν δύναμιν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς $m \cdot \omega^2 \cdot r$. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τούτου εἶναι ἄλλη δι' ἀκίνητον παρατηρητὴν καὶ ἄλλη διὰ τὸν στρεφόμενον ἄνθρωπον.



Σχ. 199. Κατὰ τὴν περιστροφήν, τὸ δυναμόμετρον δεικνύει μίαν δύναμιν.

1) *Ἀκίνητος παρατηρητής:* Ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, συνεπῶς ἐπιταχύνεται. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη, ἀπαιτεῖται δύναμις $F = m \cdot \gamma = m \cdot v^2/r = m \cdot \omega^2 \cdot r$, με φορὰν πρὸς τὸ κέντρον περιστροφῆς (κεντρομόλος δύναμις)· αὐτὴν δέ, ἀκριβῶς, τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἄνθρωπος ἐπὶ τῆς σφαίρας, μετρεῖ τὸ δυναμόμετρον.

2) *Στρεφόμενος παρατηρητής:* Ἡ σφαῖρα ἡρεμεῖ, συνεπῶς δὲν ἐπιταχύνεται. Διὰ νὰ συμβαίῃ, ὅμως, τοῦτο, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπ' αὐτῆς, νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἐκτὸς τῆς ὑπὸ τῆς χειρὸς, διὰ τοῦ δυναμομέτρου, ἐξασκουμένης δυνάμεως, πρέπει νὰ δοῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ μία ἄλλη δύναμις, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρώτην, ἢ $F_c = -m \cdot \omega^2 \cdot r$. Τὴν δύναμιν ταύτην,

ή όποία εἰς τήν πραγματικότητα δέν ὑπάρχει (διότι ὑπό οὐδενός σώματος ἐξασκεῖται), πρέπει νά δεχθῇ ὁ στρεφόμενος παρατηρητής, ἐάν θέλῃ νά ἐφαρμόσῃ τοὺς συνήθεις νόμους τῆς Μηχανικῆς καί διὰ τὸ στρεφόμενον σύστημα ἀναφοράς. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς: Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς καί εἰς σύστημα ἀναφοράς, στρεφόμενον μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα, πρέπει νά δεχθῶμεν ὡς ἐπιδρωσάν ἐφ' ἐκάστης μάζης m μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν $F_{\varphi} = -m \cdot \omega^2 \cdot r$. Ἡ ὑποθετικὴ αὕτη δύναμις, ἡ όποία δορᾷ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτίνος καί ἔχει φορὰν τὴν φορὰν τῆς ἀκτίνος (δηλ., ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν), ὀνομάζεται **φυγόκεντρος δύναμις**.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, δυνάμεθα, ἤδη, νά διερευνήσωμεν τὴν κίνησιν ἐνός ἐπιβάτου, καθημένου ἐντὸς αὐτοκινήτου, τὸ όποῖον ἀρχίζει νά διαγράφῃ κυκλικὴν τροχιάν: Ἐπὶ τοῦ ἐπιβάτου ἐξασκεῖται ὀριζοντίως μία δύναμις, προερχομένη ἐκ τοῦ τοιχώματος τοῦ ἀμαξώματος, μετὰ τοῦ όποίου οὗτος εὐρίσκεται εἰς ἐπαφήν. (Ὅταν ὁ ἐπιβάτης δέν ἐκρίπτεται τοῦ τοιχώματος, τὴν δύναμιν μεταβιβάζει ἡ τριβὴ ἐκ τοῦ καθίσματος).

Ἡ κίνησις τοῦ ἐπιβάτου περιγράφεται ἄλλως ὑφ' ἐνός ἀκινήτου παρατηρητοῦ καί ἄλλως ὑπὸ παρατηρητοῦ, στρεφόμενου μετὰ τοῦ συστήματος ἀναφοράς.

1) **Ἀκίνητος παρατηρητής.** Ὁ ἐπιβάτης διαγράφει κυκλικὴν τροχιάν. Διὰ νά εἶναι τοῦτο δυνατόν, πρέπει νά ἐξασκῇται ἐπ' αὐτοῦ μία κεντρομόλος δύναμις. Τὴν δύναμιν ταύτην ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιβάτου τὸ πλησίον τοῦ καθίσματος τοίχωμα τοῦ ἀμαξώματος τοῦ αὐτοκινήτου, μετὰ τοῦ όποίου οὗτος εὐρίσκεται εἰς ἐπαφήν (*).

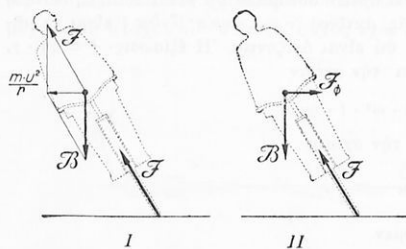
2) **Στρεφόμενος παρατηρητής** (δηλ. συνταξιδεύων μετὰ τοῦ ἐπιβάτου). Ὁ ἐπιβάτης ἡρεμεῖ, συνεπῶς δέν ἐπιταχύνεται. Ἄρα, ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι ἅφ' ἐνός μὲν ἡ ὑπὸ τοῦ τοιχώματος ἐξασκουμένη δύναμις, ἅφ' ἑτέρου δὲ ἡ (ὑποθετικὴ) φυγόκεντρος δύναμις. Προφανῶς, αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι ἴσαι καί ἀντίθετοι.

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου τῆς χρησιμοποιοῦσεως τῆς φυγόκεντρος δυνάμεως, φέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ὅταν ποδηλάτης κινῆται ἐπὶ καμπῆς, εἶναι ὑποχρεωμένος, διὰ νά μὴ πέσῃ, νά κλίνει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τροχιάς του. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τούτου εἶναι διάφορος, ἀναλόγως τοῦ συστήματος ἀναφοράς, ὡς πρὸς τὸ όποῖον ἀνάγεται ἡ κίνησις.

1) **Ἀκίνητος παρατηρητής** (εὐρισκόμενος, δηλ., ἐπὶ τοῦ πεζοδρομίου): Διὰ νά κινῆται ὁ ποδηλάτης ἐπὶ τῆς τροχιάς, τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τῆς ὁδοῦ, χωρὶς νά ἀνατρέπεται, πρέπει νά ἐκπληροῦνται οἱ ἴδιοι ὅροι, οἱ όποιοι καί εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος 197, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις ἐδῶ εἶναι κεντρομόλος

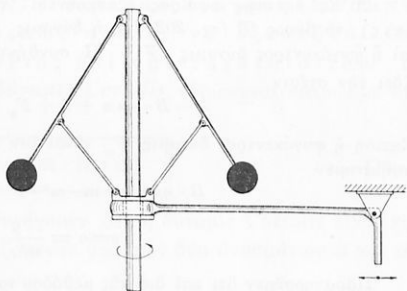
(*) Ἐάν δέν ὤπῃχε τὸ τοίχωμα (ἡ ἡ τριβὴ ἐκ τοῦ καθίσματος), ὁ ἐπιβάτης θά ἐκινῆτο εὐθυγράμμως καί ἰσοταῶς καί, συνεπῶς, θά εὐρίσκετο ἐκτὸς τοῦ αὐτοκινήτου, τὸ όποῖον, ὡς ἐλέχθη, διαγράφει κυκλικὴν τροχιάν.

καὶ ἴση πρὸς v^2/r , ἔνθα v εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου καὶ r ἡ ἀκτίς καμπυλότητος τῆς τροχιάς. Οἱ ὄροι οὗτοι δὲν θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἐκπληρωθοῦν, ἐὰν τὸ ποδήλατον δὲν ἐλάμβανε τὴν πρὸς τὰ ἔσω κλίσιν (σχ. 200, I).

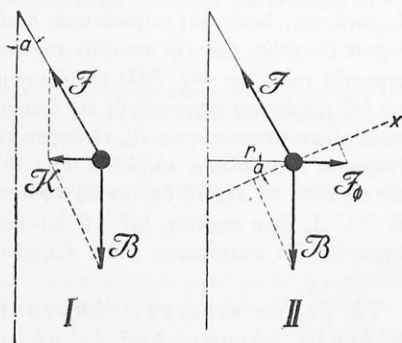


Σχ. 200. Ὁ ποδηλάτης διὰ τὴν μὴ πῆσιν, πρέπει εἰς τὰς καμπὰς νὰ κλίνει πρὸς τὰ ἔσω.

Ρυθμιστὴς τοῦ Watt. Οὗτος (σχ. 201) ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὁμοίων μεταλλίων σφαιρῶν, στερεωμένων εἰς τὰ ἄκρα δύο ράβδων. Τὰ ἄλλα ἄκρα τῶν ράβδων εἶναι ἀρθρωτῶς συνδεδεμένα με κατακόρυφον ἄξονα. Ὄταν τὸ σύστημα τεθῇ εἰς περιστροφὴν, αἱ σφαῖραι ἀπομακρύνονται τοῦ ἄξονος τόσον περισσότερο, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης. Κατὰ τὴν κίνησιν τῶν ταύτην, παρασύρουν ἓνα δακτυλίου, ὃ ὁποῖος δύναται νὰ ὀλισθαίνει κατὰ μήκος τοῦ ἄξονος. Ἡ κίνησις αὕτη, μεταδιδομένη εἰς καταλήλους μοχλοὺς, ρυθμίζει τὴν τροφοδότησιν διαφόρων μηχανῶν (ἀτμομηχανῶν, μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως), οὕτως ὥστε ἡ γωνιακὴ τῶν ταχύτης νὰ παραμένῃ, κατὰ προσέγγισιν, σταθερά.



Σχ. 201. Ρυθμιστὴς τοῦ Watt.



Σχ. 202.

τῶς συνδεδεμένη μετὰ τοῦ κατακόρυφου ἄξονος καὶ αἱ ἐκ τοῦ δακτυλίου προερχό-

2) Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητής (εὐρισκόμενος ἐπὶ τοῦ ποδηλάτου): Τὸ ποδήλατον ἰσορροπεῖ, συνεπῶς, αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις B , F καὶ F_ϕ (σχ. 200, II) διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ ἔχουν συνισταμένην, ἴσην πρὸς μηδέν.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς γωνίας α (σχ. 202, I) καὶ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ω δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν κατὰ δύο τρόπους: Εἴτε ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$, εἴτε, παρὰ τὴν περιστροφὴν, θεωροῦμεν τὸ σύστημα ἐν ἰσορροπίᾳ, ὁπότε, ὅμως, εἰσάγομεν, ὑποχρεωτικῶς, τὴν φυγόκεντρον δύναμιν.

1) Ἐφ' ἐκάστης σφαίρας ἐπιδρῶν δύο δυνάμεις, τὸ βάρος τῆς B (σχ. 202, I) καὶ ἡ δύναμις F ἐκ τῆς ράβδου, ἐπὶ τῆς ὁποίας αὕτη ἔχει στερεωθῇ. Ἐπειδὴ ἡ ράβδος εἶναι ἀρθρω-

μεναι δυνάμεις εἶναι ἀμελητέαι, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς ράβδου. Ἡ συνισταμένη $\mathcal{K}$ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ σφαῖρα νὰ κινῆται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιάς, ἀκτῖνος $r = l \cdot \eta \mu \alpha$ (ἐνθα l εἶναι τὸ μήκος τῆς ράβδου)· ἡ δύναμις, δηλ., $\mathcal{K}$ θὰ εἶναι ὀριζοντία. Ἡ ἐξίσωσις $F = m \cdot \gamma$, ἐφαρμοζομένη ἐν προκειμένῳ, μᾶς δίδει τὴν σχέσιν

$$K = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \eta \mu \alpha.$$

Ἐκ τοῦ σχήματος, ἀφ' ἐτέρου, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\varepsilon \varphi \alpha = \frac{K}{B},$$

ὁπότε ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$\sigma \nu \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot l}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς ὠρισμένην τιμὴν τοῦ ω , ἀντιστοιχεῖ ὠρισμένη τιμὴ τοῦ $\sigma \nu \alpha$ καί, μάλιστα, ὅτι, αὐξανομένης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, αὐξάνεται ἡ γωνία α , πρέπει, δηλ., αἱ σφαῖραι νὰ διαγράφουν κύκλον μεγαλυτέρας ἀκτῖνος.

2) Ἐφ' ἐκάστης σφαίρας ἐξασκοῦνται τρεῖς ἰσορροποῦσαι δυνάμεις: τὸ βάρος $\mathcal{B}$ (σχ. 202, II), ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς ράβδου, καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις $\mathcal{F}_\varphi$. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x δίδει τὴν σχέσιν

$$-B \cdot \eta \mu \alpha + 0 + F_\varphi \cdot \sigma \nu \alpha = 0.$$

Ἐπειδὴ ἡ φυγόκεντρος δύναμις F_φ εἶναι ἴση πρὸς $m \cdot \omega^2 \cdot r$ καὶ τὸ $r = l \cdot \eta \mu \alpha$, λαμβάνομεν

$$B \cdot \eta \mu \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \eta \mu \alpha \cdot \sigma \nu \alpha$$

ἢ

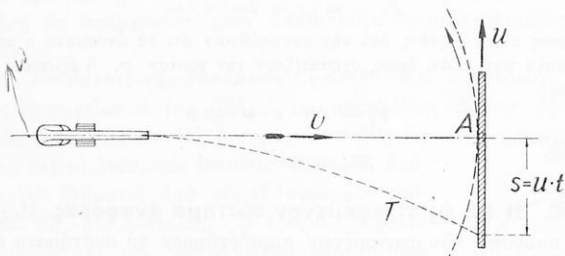
$$\sigma \nu \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot l}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτό, ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀποτέλεσμα, ὅπως, ἄλλωστε, καὶ ἀνεμένετο.

β) **Δύναμις Coriolis.** Ἐπὶ σωμάτων, κινουμένων σχετικῶς πρὸς στρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς, ἐμφανίζεται, ἐκτὸς τῆς φυγόκεντρος δυνάμεως, καὶ μία ἄλλη δύναμις—ἡ **δύναμις Coriolis**. Διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ φαινομένου τούτου στερεοῦται ἐπὶ στρεπτῆς τραπέζης (σχ. 203) πιστόλιον μὲ τὸ στόμιον τῆς κάννης εὐρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς καὶ ἐστραμμένον ὀριζοντίως πρὸς στόχον, στερεωμένον κατακορύφως εἰς τὸ ἄκρον τῆς τραπέζης. Ἄν ὁ στρεφόμενος ἄνθρωπος πυροβολήσῃ, τὸ βλήμα δὲν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ὀπτικῶς σκοπευθὲν σημεῖον A , εἰς τὸ ὅποιον θὰ ἔφθανεν ἂν ἡ τράπεζα δὲν περιστρεφέτο, ἀλλ' εἰς ἄλλο σημεῖον, δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ αὐτοῦ, ἀναλόγως τῆς φορᾶς περιστροφῆς. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

1) **Ἀκίνητος παρατηρητής:** Τὸ βλήμα κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς, διότι οὐδεμίαν δύναμις δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ (τὸ βάρος δὲν ἐνδιαφέρει). Ἄν τὸ βλήμα δὲν φθάνῃ εἰς τὸ σκοπευθὲν σημεῖον A , ἀλλὰ συναντῇ τὸν στόχον εἰς ἄλλο σημεῖον, τοῦτο ὀφείλεται ἀπλῶς

εἰς τὸ ὅτι, κατὰ τὸν χρόνον, ὃ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα τὸ βλήμα διατρέξῃ τὴν μέγροι τοῦ στόχου ἀπόστασιν, οὗτος ἔχει μετατοπισθῇ.



Σχ. 203. "Όταν τὸ σύστημα ἀναφοράς στρέφεται, τὸ βλήμα δὲν φθάνει εἰς τὸ σκοπευθὲν σημεῖον Α.

2) *Στρεφόμενος παρατηρητής*: Τὸ βλήμα διαγράφει καμπυλόγραμμον τροχιάν, συνεπῶς πρέπει νὰ ἐξασκῇται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις, κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητά του. Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία καλεῖται **δύναμις Coriolis**, εὐρίσκεται κατωτέρω ὅτι εἶναι ἴση πρὸς

$$\mathcal{F}_c = 2m \cdot [v \cdot \omega] \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγεται ὅτι ἡ δύναμις Coriolis εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ καθοριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀνυσμάτων v καὶ ω .

'Απόδειξις τῆς *τύπου (1)*. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν Coriolis, ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὴν ὁποίαν τὸ βλήμα τοῦτο εμφανίζεται ἔχον ὡς πρὸς τὸ στρεφόμενο σύστημα. Πρὸς τοῦτο κάμνομεν τοὺς ἑξῆς συλλογισμούς: Ὁ χρόνος t , ὅστις ἀπαιτεῖται ἵνα τὸ βλήμα φθάσῃ εἰς τὸν στόχον, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$t = \frac{R}{v} \quad (2)$$

ἐνθα R εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ στόχου ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ v ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ὁ στόχος, κινούμενος, λόγω τῆς περιστροφῆς τῆς τραπεζίης, με ταχύτητα u , μετακινεῖται κατὰ τὸ διάστημα $s = u \cdot t = \omega \cdot R \cdot t = \omega \cdot R^2/v$ (διότι $u = \omega \cdot R$ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ στόχου) καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ βλήμα θὰ συναντήσῃ τὸν στόχον, μετατοπισμένον κατὰ τὸ διάστημα

$$s = \frac{\omega \cdot R^2}{v} \quad (3)$$

Διὰ τὸν στρεφόμενο παρατηρητὴν ἡ μετατόπισις αὕτη προῆλθεν ἐκ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ βλήματος· ἐπομένως θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ τοῦ βλήματος τὴν τιμὴν

$$\gamma = 2v \cdot \omega$$

και, επομένως, διά την δύναμιν Coriolis F_c την τιμήν

$$F_c = m \cdot \gamma = 2m \cdot v \cdot \omega. \quad (5)$$

Ὁ τύπος οὗτος εὐρέθῃ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ ἀνίσματα v καὶ ω εἶναι κάθετα μεταξύ των. Ἐάν, ὅμως, σχηματίζουν τὴν γωνίαν φ , ἡ ἐξίσωσις (5) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$F_c = 2m \cdot v \cdot \omega \cdot \eta\mu\varphi$$

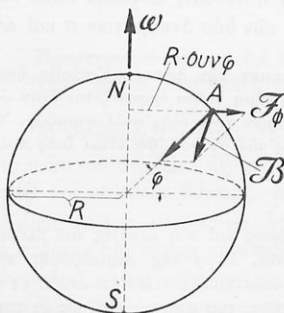
καί, ἀनुσμητικῶς,

$$\mathcal{F}_c = 2m \cdot [v \cdot \omega]. \quad \delta. \epsilon. \delta.$$

§ 160. Ἡ Γῆ ὡς στρεφόμενον σύστημα ἀναφοράς. Μέχρι τοῦδε, κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν φαινομένων παρεδέχθημεν τὰ συστήματα ἀναφοράς (τοιχοί, δάπεδον τῆς αἰθούσης) ὡς ἀκίνητα. Λόγω, ὅμως, τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, τὰ ἄνω συστήματα ἀναφοράς στρέφονται καί, διὰ τὰ ἐφαρμοσώμεν τοὺς νόμους τῆς Μηχανικῆς, πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὴν ὑπαρξίν ὑποθετικῶν δυνάμεων· τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως καὶ τῆς δυνάμεως Coriolis. Ἐν τούτοις, λόγω τῆς μικρᾶς γωνιακῆς ταχύτητος τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ τῆς μικρᾶς διαρκείας τῶν πλείστων πειραμάτων, ἡ ἐπίδρασις τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων δὲν προκαλεῖ αἰσθητὴν μεταβολὴν ἐπὶ τῆς ἐκβάσεως τῶν πειραμάτων.

1) **Ἐπίδρασις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον A τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς (σχ. 204), γεωγραφικοῦ πλάτους φ , ἡρεμεῖ ἓν σῶμα, μάζης m . Παρατηρητὴς, εὐρισκόμενος ἐπὶ τῆς Γῆς — συνεπὼς στρεφόμενος μετ' αὐτῆς — πρέπει νὰ δεχθῇ ὅτι, ἐκτὸς τῆς ἑλξεως τῆς Γῆς, δρᾷ ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ ἡ φυγοκέντρος δύναμις

$$F_\varphi = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi.$$



Σχ. 204. Διὰ τοὺς ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητὰς τὸ «φαινόμενον βάρος» $\mathcal{B}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἑλξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.

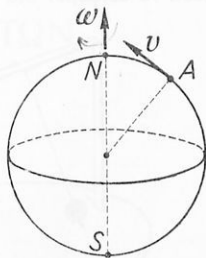
Ἡ συνισταμένη τῆς ἑλξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἀποτελεῖ τὸ «φαινόμενον βάρος» $\mathcal{B}$ τοῦ σώματος καὶ ὄχι τὸ «ἀληθὲς βάρος», τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἐκ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίου ἑλξεως. Τὸ φαινόμενον βάρος δὲν διέρχεται, ἀκριβῶς, διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς, ἔνεκα τούτου δὲ καὶ ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια τῶν ἰσορροπούντων ὑγρῶν δὲν εἶ-

ναι, ἀκριβῶς, κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς.

Ἡ ἀνάγκη τῆς παραδοχῆς τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, ὅταν γίνεται χρῆσις συστήματος ἀναφοράς, στρεφόμενου μετὰ τῆς Γῆς, προκύπτει καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἐνῶ πραγματικῶς (δηλ., διὰ παρατηρητὴν, εὐρι-

σκόμενον ἔξω τῆς Γῆς) τὸ σῶμα διαγράφει κυκλικὴν τροχίαν (συνεπῶς, ἔχει ἐπιτάχυνσιν), ὁ ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητὴς δέχεται ὅτι τὸ σῶμα ἠρεμεῖ, δηλ., ὅτι δὲν ἔχει ἐπιτάχυνσιν. Τοῦτο ἐπιτρέπεται νὰ τὸ δεχθῇ, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ θεωρήσῃ ὡς ὑπάρχουσιν μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν - ἀκριβῶς τὴν φυγό-κεντρον.

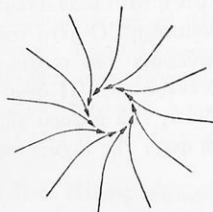
2) *Ἐπίδρασις τῆς δυνάμεως Coriolis.* Ἐπὶ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου καὶ εἰς τὸ σημεῖον *A* (σχ. 205) ἔστω πυροβόλον, βάλλον ὁριζοντίως καὶ ἀκριβῶς πρὸς βορρᾶν. Ἡ δύναμις Coriolis, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰ ἀνύσματα v καὶ ω , προκαλεῖ ἀπόκλισιν τοῦ βλήματος ἀπὸ τῆς εὐθυγράμμου τροχιάς καὶ δὴ πρὸς ἀνατολάς. Ἡ τροχία, παρακολουθουμένη ἐπὶ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου, δεικνύει στροφὴν πρὸς τὰ δεξιὰ. Ὁμοίᾳ ἀπόκλισις τῆς τροχιάς πρὸς τὰ δεξιὰ ἐμφανίζεται εἰς ὅλας τὰς ὁριζοντίας κινήσεις ἐπὶ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ νότιον ἡμισφαίριον ἡ ἀπόκλισις γίνεται πρὸς τ' ἀριστερά.



Σχ. 205. Τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου *A* βαλλόμενον βλήμα ἀποκλίνει τῆς εὐθυγράμμου τροχιάς διὰ τοὺς ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητάς, λόγῳ δυνάμεως Coriolis.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐμφανίζεται καὶ εἰς τοὺς ἀλλογενεῖς ἀνέμους, οἱ ὅποιοι εἶναι κινήσεις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐκ σημείων μεγαλυτέρας πίεσεως πρὸς τὰς εἰς τὸν ἡσημερινὸν ἐμφανιζομένας ὑφέσεις. Οἱ ἄνεμοι οὗτοι εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον πνέουν ἀπὸ *BA*, ἀντὶ ἀπὸ τοῦ βορρᾶ, ὡς θὰ ἔπνεον χωρὶς τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως Coriolis. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον φορᾶν, παρουσιάζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἐκ τοῦ ἡσημερινοῦ πρὸς τοὺς πόλους κινουμένων εἰς μεγάλη ὕψη ἀερίων μαζῶν (ἀνταλλογενεῖς).

Ἄλλο ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως Coriolis εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῶν **κυκλῶνων**: Ὅταν, λόγῳ τοπικῆς τιнос ὑφέσεως, ποσότητες ἀέρος κινουῦνται ἐκ διαφόρων διευθύνσεων πρὸς ἓν σημεῖον, ἡ δύναμις Coriolis προκαλεῖ κάμψιν τῶν τροχιῶν (σχ. 206), μὲ ἀποτέλεσμα τὸν σχηματισμὸν κυκλῶνος, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον, ἔχει φορᾶν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου, εἰς δὲ τὸ νότιον ὁμόρροπον πρὸς αὐτήν.

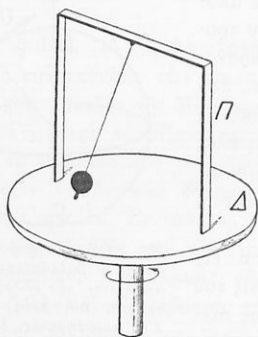


Σχ. 206. Παραγωγή κυκλῶνος εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον.

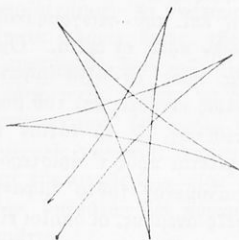
Ἡ δύναμις Coriolis ἐμφανίζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «φαινομένης» στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως ἑνὸς ἐκκρεμοῦς: Ἐπὶ αἰωρουμένου ἐκκρεμοῦς οὐδεμία πραγματικὴ δύναμις δρᾷ καὶ θίετω ἔπὶ τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως, τὸ ὁποῖον, οὕτω, δὲν πρέπει νὰ μεταβάλλεται. Καὶ πράγματι τοῦτο θὰ ἐπιστοποιεῖ παρατηρητής, μὴ συμμετέχων τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς. Ἐπειδὴ, ὅμως, ὁ παρατηρητής, ὁ εὐρισκό-

μενος ἐπὶ τῆς $\Gamma\eta$ s, στρέφεται μετ' αὐτῆς καί, κατ' ἀνάγκην, ἀνάγει τὰ φαινόμενα εἰς σύστημα ἀναφοράς, συνδεδεμένον μετὰ τῆς $\Gamma\eta$ s, θὰ παρατηρῇ στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως. Τοῦτο τὸ ἀποδίδει εἰς τὴν δύναμιν Coriolis. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς στρέφεται βραδέως. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, ἀκριβῶς, ἐχρησιμοποίησεν ὁ Foucault διὰ ν' ἀποδείξῃ τὴν περιστροφὴν τῆς $\Gamma\eta$ s περὶ ἄξονα.

Τὴν φαινομένην στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τῆς ἑξῆς συσκευῆς (σχ. 207): Πλαίσιον Π στερεοῦται



Σχ. 207. Λιάταξ διὰ τὴν ἐπίδειξιν τοῦ πειράματος τοῦ Foucault.



Σχ. 208. Ἰχνη, γραφόμενα ὑπὸ τῆς γραφίδος ἐπὶ τοῦ στροφομένου δίσκου τοῦ σχήματος 207.

ἐπὶ δίσκου Δ , δυνάμενον νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Ἐκ τοῦ πλαισίου καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄξονος ἔχει ἐξαρτηθῇ ἐκκρεμές, φέρον εἰς τὸ ἄκρον γραφίδα. Ἐὰν θέσωμεν τὸ ἐκκρεμές εἰς ταλάντωσιν καί, ἀκολουθῶς, στρέψωμεν βραδέως τὸν δίσκον, ἡ γραφὶς θὰ γράψῃ ἐπ' αὐτοῦ τὰς εἰς τὸ σχῆμα 208 ἀποδιδόμενας καμπύλας. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κατὰ μίαν ἀπλὴν αἰώρησιν γραφομένη γραμμὴ δὲν εἶναι εὐθεΐα, ἀλλὰ καμπύλη. Ὁ μετὰ τοῦ δίσκου στροφόμενος παρατηρητὴς θὰ ἀπέδιδε τὴν καμπύλωσιν τῶν τροχιῶν εἰς τὴν δύναμιν Coriolis, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἡ δύναμις αὕτη ἀλλάσσει φορὰν μεθ' ἑκάστην ἡμιπερίοδον, διότι, ἐνῶ ἡ φορὰ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ δίσκου παραμένει σταθερά, ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀλλάσσει.

ΜΕΡΟΣ ΟΓΔΟΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 161. **Εισαγωγή.** Ἐνῶ τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε (στερεά), παρουσιάζουν καὶ ἐλαστικότητα ὄγκου καὶ ἐλαστικότητα σχήματος — δηλ., ἀνθίστανται εἰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις (ἢ ροπὰς), αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ μεταβάλλουν εἴτε τὸν ὄγκον αὐτῶν, εἴτε καὶ τὸ σχῆμα των — ὑπάρχει καὶ ἄλλη κατηγορία σωμάτων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **ρευστά**. Ταῦτα χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι παρουσιάζουν μόνον ἐλαστικότητα ὄγκου καὶ ὄχι σχήματος, δὲν προβάλλουν, δηλ., ἀντίστασιν εἰς μεταβολὰς τοῦ σχήματος αὐτῶν. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἰσχύει ἀπολύτως μόνον διὰ τὰ καλούμενα **ἰδανικὰ ρευστά**, ἐνῶ, εἰς τὰ πραγματικά, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς Ὑδροδυναμικῆς, παρουσιάζεται ἀντίστασις κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ σχήματος αὐτῶν, αἰσθητὴ, κυρίως, εἰς ταχεῖας μεταβολὰς.

Τὰ ρευστὰ διαιροῦμεν εἰς δύο κατηγορίας: Τὰ **ὕγρὰ**, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὄγκον ὥρισμένον καὶ τὰ **ἀέρια**, τὰ ὁποῖα τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον ὄγκον. Γενικῶς, τὰ ὑγρὰ ἔχουν μικρὰν συμπιεστότητα — δύναται, λοιπόν, συγκρινόμενα πρὸς τὰ ἀέρια, νὰ θεωρηθῶν πραγματικῶς ἀσυμπίεστα—ἐνῶ, τουναντίον, τὰ ἀέρια εἶναι ἐξόχως συμπιεστά. Ἀκριβῶς δ' ἕνεκα τούτου ἐξετάζομεν χωριστὰ τὰ ὑγρὰ καὶ χωριστὰ τὰ ἀέρια.

§ 162. **Πίσις.** Θεωρήσωμεν κυλινδρικὴν κάψαν, τῆς ὁποίας ἡ μία βάσις ἀποτελεῖται ἐξ ἐλαστικῆς μεμβράνης (σχ. 209) καὶ ἡ ὁποία διὰ πλευρικῶς σωλήνος, συνδέεται μὲ μανόμετρον. Ἄν ἐμβαπτίσωμεν τὴν κάψαν ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος ὑγρὸν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ μανόμετρον δεικνύει μίαν ἔνδειξιν. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ ὑγρὸν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς μεμβράνης μίαν δύναμιν, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας αὕτη παραμορφοῦται καὶ συμπιέζει τὸν ἐντὸς τῆς κάψης ἀέρα. Ἐνεκα τούτου, τὸ ἐντὸς τοῦ δεξιοῦ σκέλους τοῦ μανομέτρου ὑγρὸν ἀνέρχεται.

Ἐάν dF εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος ἐπιφανείας, ἐμβαδοῦ dS , τὸ πηλίκον

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (1)$$

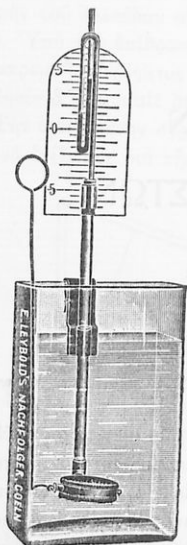
καλεῖται **πίεσις**.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις dF , ἡ προερχομένη ἐκ τῆς πίεσεως p , θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$dF = p \cdot dS \quad (2)$$

Ἐάν ἡ θεωρουμένη ἐπίπεδος ἐπιφάνεια δὲν εἶναι ἀπειροστή, ἀλλ' ἔχη ἐμβαδὸν S , ἡ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένη δύναμις F εὐρίσκεται δι' ἀθροίσεως ὅλων τῶν στοιχειωδῶν δυνάμεων dF . Ἐάν, πρὸς τοῦτοις, ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὅλική δύναμις F εἶναι ἴση πρὸς

$$F = p \cdot S$$



Σχ. 209. Ὅταν περιστρέφωμεν τὴν κάρταν, ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου δὲν μεταβάλλεται.

Ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐν ὑγρὸν ἐπὶ μιᾷ μικρᾷ ἐπιφανείᾳ, εὐρίσκεται ὅτι εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας. Τὸ τελευταῖον τοῦτο δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ πειραματικῶς διὰ τῆς περιγραφείσης συσκευῆς: Κρατοῦντες τὴν κάρταν εἰς τὸ αὐτὸ βάθος καὶ περιστρέφοντες αὐτὴν περὶ τὸν πλευρικὸν σωλήνα, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου δὲν μεταβάλλεται. Ἐκ τοῦ ἄνω πειράματος προκύπτει καὶ τὸ ἐξῆς: Ἐφ' ὅσον ἡ δύναμις εἶναι πάντοτε ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ πίεσις θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας - ἡ πίεσις, δηλ., εἶναι μονόμετρον μέγεθος (*).

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς πίεσεως. Ἡ πίεσις ἔχει διαστάσεις

$$[p] = \frac{[F]}{[S]}.$$

(*) Ἡ ἐξίσωσις (2), γραφομένη ὑπὸ ἀνυσματικῆν μορφήν, λαμβάνει τὴν μορφήν

$$d\mathcal{F} = p \cdot dS$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι τὰ ἀνύσματα $d\mathcal{F}$ καὶ dS εἶναι παράλληλα. Ἄρα, διὰ τοῦ dS χαρακτηρίζομεν, ἐν προκειμένῳ, ἓν ἀνυσμα, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν διεύθυνσις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν θεωρουμένην στοιχειώδη ἐπιφάνειαν dS , τὸ δὲ μέτρον, ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας.

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. μονὰς πίεσεως εἶναι ἡ

$$1 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2},$$

εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν σύστημα τὸ $1 \text{ kgf}^*/\text{m}^2$. Εἰς τὴν πράξιν, ὅμως, χρησιμο-
ποιεῖται, ἀντ' αὐτῆς, ἡ **τεχνικὴ ἀτμόσφαιρα** (1 at). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ at} = 1 \frac{\text{kgf}^*}{\text{cm}^2}$$

Ἐκτὸς τῆς τεχνικῆς ἀτμοσφαίρας, εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ **φυσικὴ ἀτμόσφαιρα** (1 Atm), ὀλίγον διαφέρουσα τῆς πρώτης. Εἶναι δὲ

$$1 \text{ Atm} = 1,033 \frac{\text{kgf}^*}{\text{cm}^2}$$

Ἡ μονὰς αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν πίεσιν, τὴν ὁποίαν, κατὰ μέσον ὄρον, ἔχει ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ εἰς τὸ ὑψόμετρον τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης.

Ἄλλη μονὰς πίεσεως εἶναι τὸ 1 Torr , τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὴν πίε-
σιν, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ εἰς τὴν βάσιν τῆς στήλης ὑδραργύρου, ὕψους 1 mm ,
ὡς ἐκ τοῦ ὁποίου καλεῖται καὶ **1 χιλιοστόμετρον στήλης ὑδραργύρου**
(1 mm Hg). Ἦτοι εἶναι

$$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg}$$

Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω (§ 181), μία φυσικὴ ἀτμόσφαιρα ἀντι-
στοιχεῖ εἰς 760 Torr .

Ἄλλαι μονάδες πίεσεως. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων πίεσεως χρησιμο-
ποιοῦνται, συνήθως, καὶ αἱ ἑξῆς:

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} \text{ (1 χιλιοστόμετρον στήλης ὕδατος)} = 1/13,6 \text{ Torr} = 0,0736 \text{ Torr}.$$

Εἰς τὴν Μετεωρολογίαν χρησιμοποιεῖται, συνήθως, ἡ μονὰς

$$1 \text{ Bar} = 10^6 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

(Ἐπομένως, ἡ μονὰς πίεσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S., δηλ., ἡ $1 \text{ dyn}/\text{cm}^2$, δύναται
νὰ ὀνομασθῇ καὶ 1 μικροBar ($1 \mu\text{Bar} = 1 \text{ dyn}/\text{cm}^2$).

Εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας ὡς μονὰς πίεσεως χρησιμοποιεῖται ἡ

$$1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 51,7 \text{ Torr} = 0,0703 \text{ at}.$$

Ἄρα εἶναι

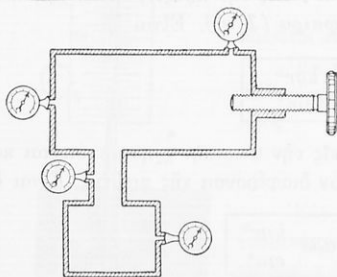
$$1 \text{ at} = 14,22 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}.$$

Διὰ πολὺ μικρὰς πίεσεις χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ μονὰς **1 μικρὸν** (1μ). Εἶναι δὲ

$$1 \mu = 10^{-5} \text{ Torr}.$$

§ 163. Κατανομή τῆς πίεσεως ἐντὸς ὑγροῦ. Ὄταν ἐξετάζεται ἡ κατανομή τῆς πίεσεως ἐντὸς ὑγροῦ τινος, πρέπει νὰ γίνεται σαφὴς διάκρισις μεταξὺ τῶν ἐξῆς δύο ἁκρων περιπτώσεων :

1) Τὸ ὑγρὸν θεωρεῖται ὡς εὐρισκόμενον ἔξω τοῦ πεδίου βαρύτητος,



Σχ. 210. Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal : Διὰ τοῦ κοιλίου δημιουργοῦμεν πίεσιν, ἡ ὁποία μεταδίδεται ἢ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ὑγροῦ, ὅπως διαπιστοῦμεν ἐκ τῆς ἐνδείξεως τῶν μανομέτρων.

ὁπότε ἡ πίεσις προέρχεται, ἀποκλειστικῶς, ἀπὸ ἐξωτερικῶς πιεζόμενον ἔμβολον (σχ. 210).

2) Ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ ὀφείλεται, ἀποκλειστικῶς, εἰς τὸ πεδῖον βαρύτητος.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύει ἡ **ἀρχὴ τοῦ Pascal**, ἡ ὁποία διατυπῶνται ὡς ἑξῆς : «Ὄταν ἐπὶ ἠρεμοῦντος ὑγροῦ δὲν ἐπιδρῷ τὸ πεδῖον βαρύτητος, ἡ πίεσις εἶναι, καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ, σταθερά».

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἰσχύει ὁ **θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς**, συμφώνως πρὸς τὸν

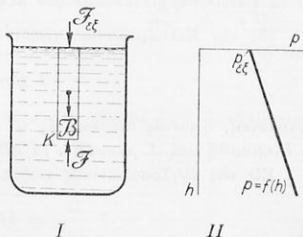
ὁποῖον ἡ πίεσις p δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ὑγροῦ, ἀλλ' ἐξαρτᾶται, ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἐκ τοῦ βάθους h τοῦ θεωρουμένου σημείου, κατὰ τὴν ἑξίσωσιν

$p = p_{\varepsilon} + \varepsilon \cdot h$	Θεμελιώδης νόμος τῆς Ὑδροστατικῆς	(1)
---	--------------------------------------	-----

ἐνθα p_{ε} εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς ἐλευθέρᾳ ἐπιφανείᾳ ἐξασκουμένη ἐξωτερικὴ πίεσις (εἰς τὸ σχῆμα 211, I, π.χ., ἡ ἀτμοσφαιρική) καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Ἡ ἑξίσωσις (1), ἡ συνδέουσα τὰς μεταβλητάς p καὶ h , εἶναι ἑξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, ἀποδίδεται, ἄρα, γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς (σχ. 211, II). Τοῦτο, βεβαίως, ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος ε εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ βάθους — τὸ ὑγρὸν, δηλ., θεωρεῖται ἀσυμπίεστον.

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (1) : Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν πίεσιν εἰς τὸ σημεῖον K, θεωροῦμεν κατακόρυφον κυλινδρῶδη στήλην ὑγροῦ, βάσεως S καὶ ὕψους h (δηλ., ἴσου πρὸς τὸ βάθος, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον). Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς



Σχ. 211. Ἡ πίεσις ἐντὸς βαρέος ὑγροῦ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ βάθους.

δυνάμεις: 1) τὸ βάρος της B , 2) ἡ δύναμις F , τὴν ὁποίαν ἔξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τὸ ὑγρὸν, 3) ἡ δύναμις $F_{εξ}$, τὴν ὁποίαν ἔξασκεῖ ἐπὶ τῆς ἀνω βάσεως ἡ ἀτμόσφαιρα καὶ 4) αἱ (ὀριζόντιοι) δυνάμεις, αἱ ἔξασκούμεναι ἐπὶ τῶν παραπλευρῶν ἐπιφανειῶν τῆς στήλης. Ἀφοῦ ἡ ὑγρὰ αὕτη στήλη εὐρίσκεται ἐν ἰσορροσίᾳ, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἔξασκουμένων δυνάμεων νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἔχομεν κατὰ τὸν κατακόρυφον ἄξονα τὴν σχέσιν

$$F - B - F_{εξ} = 0.$$

Τὸ βάρος B τῆς ὑγρᾶς στήλης εἶναι ἴσον πρὸς

$$B = \text{εἰδικὸν βάρος} \cdot \text{ὄγκος} = \varepsilon \cdot S \cdot h.$$

Αἱ δυνάμεις F καὶ $F_{εξ}$ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$F = p \cdot S \quad \text{καὶ} \quad F_{εξ} = p_{εξ} \cdot S.$$

Ἐπομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν

$$p \cdot S - \varepsilon \cdot S \cdot h - p_{εξ} \cdot S = 0$$

ἢ

$$p = p_{εξ} + \varepsilon \cdot h.$$

ὁ.ἔ.δ.

Ἐφαρμογαί: 1) Θὰ ἐξετάσωμεν ποία εἶναι ἡ πίεσις εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν συσκευὴν τοῦ σχήματος 210, τὴν ὁποίαν, ὁμως, τώρα, θεωροῦμεν ὡς εὐρισκομένην ἐν τῷ πεδίῳ βαρύτητος. Εἰς τὴν περιπτῶσιν ταύτην, τὰ μανόμετρα δὲν θὰ δεικνύουν τὴν αὐτὴν πίεσιν. Εἰς τὸ πείραμα τοῦτο δὲν ὑπάρχει ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καὶ, ἐπομένως, τὸ μέγεθος $p_{εξ}$ εἶναι ἀκαθόριστον. Ἐὰν ὀρίσωμεν ὡς $p_{εξ}$ τὴν πίεσιν ἐπὶ τοῦ κοιλίου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πίεσιν εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ὑγροῦ, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πίεσεων δύο σημείων θὰ ἴσούται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν αὐτῶν.

2) Ζητεῖται τὸ βάθος ἐντὸς ὕδατος, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πίεσις θὰ εἶναι κατὰ 1 Atm μεγαλυτέρα τῆς ἐξωτερικῆς.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τούτου λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς h , ὁπότε λαμβάνομεν

$$h = \frac{p - p_{εξ}}{\varepsilon}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $p - p_{εξ}$ διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $1 \text{ Atm} = 1033 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$ καὶ τὸ ε διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, εὐρίσκομεν

$$h = 1033 \text{ cm} = 10,33 \text{ m}.$$

§ 164. Ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνειᾳ ἰσορροποῦντων ὑγρῶν. Διὰ τὴν ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνειαν ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις: «*Ἡ ἐλευθέρᾳ ἐπιφάνειᾳ βαρέος ὑγροῦ, εὐρισκομένου ἐν ἰσορροσίᾳ, εἶναι ἐπίπεδον ὀριζόντιον*». Τοῦτο προκύπτει διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἄν ἡ ἐλευ-

θέρα ἐπιφάνεια ἦτο διάφορος τῆς ὀριζοντίας, τὸ ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος τοῦ ὑγροῦ δρῶν βάρος θ' ἀνελύτο εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν ἐφαπτομένην αὐτῆς. Ἡ δευτέρα αὕτη συνιστώσα θὰ μετεκίνει τὸ ὑγρὸν, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ ὑγρὸν εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἐκ τούτου καὶ τῆς ἐξίσωσης (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου συνάγεται ὅτι ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἐνὸς ὑγροῦ εἶναι σταθερὰ δι' ὅλα τὰ ὀριζόντια ἐπίπεδα, ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἐκ τοῦ βάθους. Ἐπειδὴ τοῦτο ἰσχύει διὰ δοχεῖον οἰοῦνδήποτε σχήματος, ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως καὶ τὴν ἀπόδειξιν τῆς γνωστῆς **ἀρχῆς τῶν συγκοινωνούντων δοχείων**.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν συγκοινωνούντων δοχείων, περιεχόντων μὴ μειγνύμενα ὑγρά, μετὰ διάφορα εἰδικὰ βάρη: Τὰ ὕψη τῶν ὑγρῶν εἰς τὰ συγκοινωνούντα δοχεῖα τοῦ σχήματος 212 εὐρίσκονται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι ἐντὸς ἐκάστου ἐξ αὐτῶν ἡ πίεσις εἶναι σταθερὰ δι' οἰοῦνδήποτε ὀριζόντιον ἐπίπεδον. Ἡ πίεσις εἰς δύο σημεῖα τοῦ βαρυτέρου ἐκ τῶν δύο ὑγρῶν, εὐρισκόμενα ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπίπεδου AB , εἶναι ἴση πρὸς

$$p_A = p_{εξ} + ε_1 \cdot h_1$$

$$\text{καὶ} \quad p_B = p_{εξ} + ε_1 \cdot h_3 + ε_2 \cdot h_2$$

ἐνθα $ε_1$ καὶ $ε_2$ εἶναι τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν δύο ὑγρῶν. Ἐπειδή, ὅμως, εἶναι $p_A = p_B$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$ε_1 \cdot h_1 = ε_1 \cdot h_3 + ε_2 \cdot h_2$$

καὶ ἐκ ταύτης τὴν σχέσιν

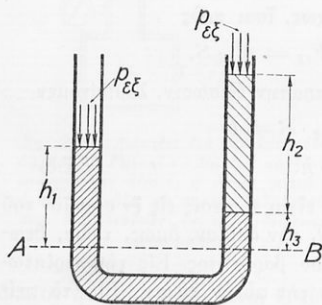
$$ε_1 \cdot (h_1 - h_3) = ε_2 \cdot h_2.$$

Ἄν τὸ ἐπίπεδον AB ἐκλεγῇ οὕτως ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας τῶν δύο ὑγρῶν (ὁπότε $h_3 = 0$), τότε ἔχομεν

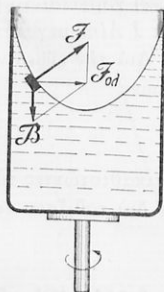
$$ε_1 \cdot h_1 = ε_2 \cdot h_2.$$

Τὰ ὕψη, δηλ., τῶν δύο ὑγρῶν ὑπὲρ τὴν διαχωριστικὴν τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν.

Ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια ἐνὸς ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον δὲν εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, δὲν εἶναι ὀριζοντία, ἀλλὰ λαμβάνει σχῆμα, ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ὑγρὸν. Οὕτω, ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια ὑγροῦ, εὐρισκόμενου ἐντὸς δοχείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τεθῆ εἰς περιστροφὴν (σχ. 213), λαμβάνει, ὡς ἀποδεικνύεται, σχῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, δηλ., ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας μία τομὴ, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι παραβολή.



Σχ. 212.



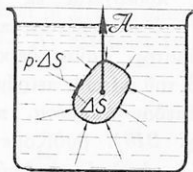
Σχ. 213. Ἐλευθέρη ἐπιφάνεια ὑγροῦ ἐντὸς περιστρεφομένου δοχείου.

Ἐπὶ τμήματος ὑγροῦ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: Τὸ βάρος $\mathcal{B}$ αὐτοῦ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ προερχομένη ἐκ τῶν πιέσεων τοῦ περιβάλλοντος ὑγροῦ, ἡ ὁποία, διὰ λόγους συμμετρίας, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια, εἶναι τοιοῦτο ὥστε ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων νὰ εἶναι ὀριζοντίᾳ καὶ νὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον. Ὑπὸ τὴν ἐπιδράσιν τῆς δυνάμεως ταύτης $\mathcal{F}_{ολ}$, τὸ θεωρούμενον τμήμα τοῦ ὑγροῦ ἐκτελεῖ κίνησιν ἐπὶ περιφερείας κύκλου.

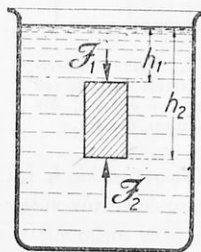
§ 165. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΔS τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βυθισμένου σώματος (σχ. 214) ἐξασκεῖται ἡ δύναμις $p \cdot \Delta S$.

Ἀνάλογοι δυνάμεις ἐξασκοῦνται καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων τμημάτων τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος, αἱ ὁποῖαι, μάλιστα, εἶναι τόσον μεγαλύτεραι, ὅσον βαθύτερον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εὐρίσκονται τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἐπιφανείας. **Ἄνωσιν $\mathcal{A}$ καλοῦμεν τὴν συνισταμένην ὅλων αὐτῶν τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας τὸ ὑγρὸν ἐξασκεῖ πανταχόθεν ἐπὶ τοῦ σώματος.** Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ ἄνωσις ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω.

Ἡ ἄνωσις ὑπολογίζεται εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσηιν σώματος μὲ πρισματικὸν σχῆμα (σχ. 215),



Σχ. 214. Ἡ ἄνωσις $\mathcal{A}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $p \cdot \Delta S$.



Σχ. 215. Ἡ ἄνωσις εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$.

τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἔστω S : Ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἐξασκοῦνται, λόγῳ τῶν πιέσεων, αἱ ἐξῆς δυνάμεις: α) Αἱ δυνάμεις, αἱ δρῶσαι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀλληλοαναιροῦνται καὶ β) αἱ ἐπὶ τῶν δύο βάσεων δυνάμεις F_1 καὶ F_2 , αἱ ὁποῖαι εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$F_1 = p_1 \cdot S = \varepsilon \cdot h_1 \cdot S$$

καὶ

$$F_2 = p_2 \cdot S = \varepsilon \cdot h_2 \cdot S$$

ἐνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν, δηλ., ἡ ἄνωσις $\mathcal{A}$, εἶναι ἴση πρὸς

$$\mathcal{A} = F_2 - F_1 = \varepsilon \cdot (h_2 - h_1) \cdot S.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(h_2 - h_1) \cdot S$ εἶναι ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος, ἔπεται ὅτι

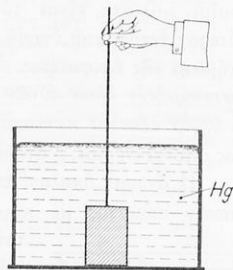
$$\mathcal{A} = \varepsilon \cdot V.$$

Ἐπειδὴ, ἐξ ἄλλου, ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ πρίσματος, τὸ γινόμενον $\varepsilon \cdot V$ (δηλ., τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ) παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, ὁπότε δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν **ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους** ὡς ἐξῆς:

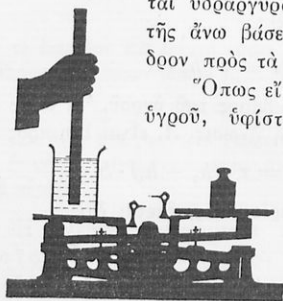
«Πᾶν σῶμα, εὐρισκόμενον ἐντὸς ὑγροῦ τινος, ὑφίσταται ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ».

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν περιστρέψωμεν, ὁποῦδήποτε, τὸ ἐντελὼς ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βυθισμένον σῶμα, ἢ ἄνωσις δὲν θὰ μεταβληθῇ. Ὅπως ἀποδεικνύεται, οἱ εἰς τὰς διαφόρους αὐτὰς θέσεις ἀντιστοιχοῦντες φορεῖς τῆς ἀνώσεως τέμνονται πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον — τὸ **κέντρον ἀνώσεως**—, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὑπὸ τοῦ σώματος ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βυθισμένον σῶμα εἶναι ὁμογενές, τὸ κέντρον ἀνώσεως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος.

Πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τοῦ ἐξῆς: Ἡ ἄνωσις προέρχεται ἐκ τῶν δυνάμεων, λόγῳ τῶν ὑδροστατικῶν πιέσεων, τῶν ἐξασκουμένων πανταχοῦθεν ἐπὶ τοῦ σώματος. Τοῦτο δεικνύομεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ κάτωθι πειράματος: Ἐντὸς δοχείου μὲ ἐπίπεδον πυθμένα, περιέχοντος ὑδράργυρου (σχ. 216), βυθίζομεν σιδηροῦν κύλινδρον. Ἐάν, ἀκολούθως, ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τὸν κύλινδρον, οὗτος, λόγῳ τῆς ἀνώσεως, ἀνέρχεται καὶ ἐπιπλέει. Ἄν, ὅμως, τὸν βυθίσωμεν μέχρι τοῦ πυθμένος, οὕτως ὥστε ἡ κάτω βάσις του νὰ ἐφάπτεται τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου χωρὶς τὴν παρεμβολὴν ὑδραργύρου καὶ τὸν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, τώρα, δὲν ἀνέρχεται. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἐξῆς: Ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου καὶ τοῦ κυλίνδρου δὲν παρεμβάλλε-



Σχ. 216. Ὅταν ὁ κύλινδρος ἐφάπτεται ἐντελῶς τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, δὲν ὑφίσταται ἄνωσις.



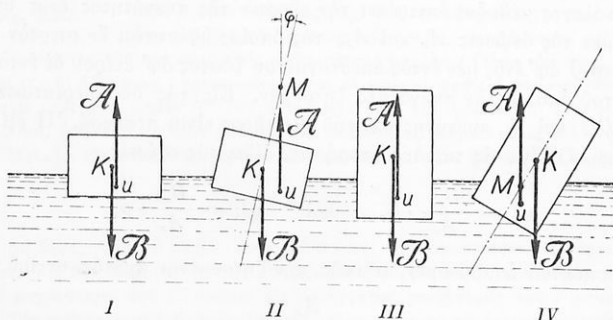
Σχ. 217. Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀντιθέσεως εἰς τὴν ἄνωσιν.

ται ὑδράργυρος, ὅχι μόνον δὲν ὑπάρχει ἄνωσις, ἀλλὰ ἡ ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως του ἐξασκουμένη δύναμις ὠθεῖ τὸν κύλινδρον πρὸς τὰ κάτω.

Ὅπως εἶδομεν εἰς τὰ ἀνωτέρω, σῶμα, βυθιζόμενον ἐντὸς ὑγροῦ, ὑφίσταται μίαν δύναμιν, τὴν ἄνωσιν· συμφώνως, ὅμως, πρὸς τὸ ἀξίωμα «δραῖσις = ἀντίδρασις» πρέπει καὶ τὸ σῶμα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ μίαν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν. Τοῦτο δεικνύομεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλάστιγγος ἐνὸς ζυγοῦ (σχ. 217) θέτομεν δοχεῖον πληθύνοντος ὑγροῦ καὶ τὸ ἰσορροποῦμεν διὰ σταθμῶν. Ἄν, τώρα, βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ἓν σῶμα (π.χ. μίαν ξυλινὴν ράβδον),

χωρὶς τοῦτο νὰ ἐφάπτεται τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου (ὅπως, ἀκριβῶς, δεικνύει τὸ σχῆμα), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ καταστρέφεται καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τῆς ράβδου.

§ 166. Πλεῦσις. Τὸ βάρος ἐνὸς σώματος καὶ ἡ ἀνωσις ἔχουν, ὡς εἴδομεν, ἀντιθέτους φοράς. Καὶ ἂν μὲν τὸ βάρος εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα βυθίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀνωσιν, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ ἀδιαφόρως ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ὅταν δέ, τέλος, τὸ βάρος εἶναι μικρότερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα, ἀνερχόμενον, ἐξέρχεται ἐν μέρει ἐκ τοῦ ὑγροῦ, ἰσορροπία δὲ θὰ ἐπέλθῃ εἰς ἐκείνην τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος δρῶσαι δυνάμεις θὰ ἰσορροπήσουν (**πλεῦσις**). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ ἀνωσις, ἐλαττωμένη, γίνῃ ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ὅταν ἡ ροπή τοῦ ζεύγους τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν. Πρὸς τοῦτο, πρέπει αἱ δύο δυνάμεις νὰ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου (σχ. 218, I, III). Ἐν κλίνωμεν ἐν ἐπι-



Σχ. 218. Εὐσταθὴς πλεῦσις (I) καὶ ἀσταθὴς πλεῦσις (III). Κατὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, τὸ κέντρον ἀνώσεως μετατοπίζεται, ἀναπτυσσομένην, οὕτω, εἴτε ζεύγους ἐπαναφοράς (II), εἴτε ζεύγους ἀνατροπῆς (IV).

πλέον σῶμα κατὰ γωνίαν φ ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας (σχ. 218, II), τὸ κέντρον ἀνώσεως κ μετατοπίζεται, διότι τοῦτο πρέπει νὰ εὐρίσκεται, πάντοτε, εἰς τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Ἡ ροπή, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῶν δύο δυνάμεων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, ἡ ἐπαναφέρει τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν (**εὐσταθὴς πλεῦσις**, I, II), ἢ τὸ ἀνατρέπει (**ἀσταθὴς πλεῦσις**, III, IV).

Ἡ εὐσταθία καὶ ἡ ἀσταθία τῆς πλεύσεως δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ καὶ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ **μετακέντρου** M , δηλ., τοῦ σημείου τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς ἀνώσεως καὶ τῆς προηγουμένης κατακορύφου, τῆς εὐρισκομένης ἤδη ὑπὸ κλίσιν. Ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής, ὅταν τὸ κέντρον βάρους εἶναι κάτω τοῦ μετακέντρου, ἄλλως εἶναι ἀσταθής.

§ 167. Μέτρησις τῆς πυκνότητος στερεῶν καὶ ὑγρῶν.

α) **Μέθοδος τῆς ἀνώσεως.** Σῶμα στερεὸν ἐμφανίζει, λόγῳ τῆς ἀνώσεως, φαινομένην ἐλάττωσιν τοῦ βάρους του, ὅταν βυθισθῇ ἐντὸς ὑγροῦ τι-

νος, π.χ., απεσταγμένου ύδατος. Ἄν, λοιπόν, μετρήσωμεν τὸ βάρος B καὶ τὸ φαινόμενον βάρος $B-A$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἄνωσιν A καί, ἐκείθεν, τὴν πυκνότητα ρ τοῦ ὕλικου τοῦ σώματος ὡς ἑξῆς: Ἡ ἄνωσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Ἦτοι

$$A = \epsilon_v \cdot V = \rho_v \cdot g \cdot V$$

ἐνθα ϵ_v καὶ ρ_v εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος. Ἡ ζητουμένη πυκνότης ρ_x τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\rho_x = \frac{m}{V} = \frac{B/g}{A/\rho_v \cdot g} = \frac{B}{A} \cdot \rho_v. \quad (1)$$

Ἀνάλογος μέθοδος ἐπιτρέπει τὴν εὗρεσιν τῆς πυκνότητος ἑνὸς ὑγροῦ: Μετροῦμεν τὰς ἀνώσεις A_v καὶ A_x , τὰς ὁποίας ὑφίσταται ἐν στερεῶν σῶμα (ὁ **πλωτήρ**) ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐντὸς απεσταγμένου ὕδατος ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου τὴν πυκνότητα ζητοῦμεν. Εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ βάρος $B_{\pi\lambda}$ καὶ ἡ πυκνότης $\rho_{\pi\lambda}$ τοῦ πλωτήρος εἶναι σταθερά. Ἡ ἐξίσωσις (1), ἐφαρμοζομένη εἰς τὰς δύο μετρήσεις, δίδει τὰς σχέσεις

$$\rho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_v} \cdot \rho_v \quad \text{καὶ} \quad \rho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_x} \cdot \rho_x.$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν, τελικῶς, τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ

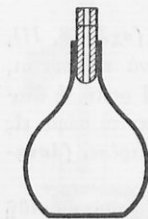
$$\rho_x = \frac{A_v}{A_x} \cdot \rho_v.$$

β) **Μέθοδος τῆς ληκύθου.** Πληροῦμεν τὴν *λήκυθον* (σχ. 219) πρῶτον δι' απεσταγμένου ὕδατος καὶ κατόπιν διὰ τοῦ ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου τὴν πυκνότητα ζητοῦμεν. Διὰ ζυγίσεως εὐρίσκομεν τὸ βάρος B_v τοῦ ὕδατος καὶ τὸ βάρος B_x τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος V , τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν τὰ δύο ὑγρά, εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$B_v = \rho_v \cdot g \cdot V \quad \text{καὶ} \quad B_x = \rho_x \cdot g \cdot V.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ

$$\rho_x = \frac{B_x}{B_v} \cdot \rho_v.$$

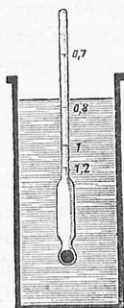


Σχ. 219. Ἡ λήκυθος πληροῦται πάντοτε μέχρι τῆς χαραγῆς.

Διὰ τῆς μεθόδου τῆς ληκύθου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν πυκνότητα στερεῶν σωμάτων.

γ) **Πυκνόμετρα - ἀραιόμετρα.** Διὰ τὴν ταχέϊαν εὗρεσιν τῆς πυκνότητος ὑγρῶν χρησιμοποιοῦνται ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **πυκνόμετρα** ἢ **ἀραιό-**

μετρα, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ μετρήσεις ὑγρῶν, τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος. Τὰ ὄργανα ταῦτα εἶναι πλωτῆρες, καταλλήλου σχήματος (σχ. 220), φέροντες κλίμακα, βαθμολογημένην, συνήθως, εἰς gr/cm^3 καὶ εἰς τὸ κάτω ἄκρον ἔρμα. Ἡ λειτουργία των στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, κατὰ τὴν ὁποίαν, εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, τὰ σώματα βυθίζονται ἐντὸς τῶν ὑγρῶν τόσον ὀλιγώτερον, ὅσον πυκνότερον εἶναι τὸ ὑγρὸν.



Σχ. 220.

Πρακτικαὶ κλίμακες. Τὰ περιγραφέντα πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα ἔχουν βαθμολογηθῇ οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν πυκνότητα τῶν ὑγρῶν. Εἰς τὴν προᾶξιν, ὅμως, χρησιμοποιοῦνται πολλάκις (π.χ. διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πυκνότητος τοῦ ηλεκτρολύτου τῶν συσσωρευτῶν κ.λ.), πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα, παρέχοντα τὴν πυκνότητα εἰς αὐθαιρέτους μονάδας. Οὕτω, δι' ὑγρά, πυκνότερα τοῦ ὕδατος, χρησιμοποιοῦνται οἱ **πυκνοὶ βαθμοὶ Baumé** ($^{\circ}Be$). Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην τὸ μηδὲν ($0^{\circ} Be$) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πυκνότητα $1 gr/cm^3$, οἱ δὲ ὑπόλοιποι, ἄνω τοῦ μηδενὸς βαθμοὶ, εἰς πυκνότητας, μεγαλυτέρας τοῦ $1 gr/cm^3$.

Μεταξὺ τῆς πυκνότητος ρ καὶ τῶν πυκνῶν βαθμῶν Baumé b ἰσχύει ἡ σχέση

$$\rho = \frac{146,8}{146,8 - b}.$$

Δι' ὑγρά, ἀραιότερα τοῦ ὕδατος, χρησιμοποιοῦνται οἱ **ἀραιοὶ βαθμοὶ Baumé**. Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην $10^{\circ} Be$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πυκνότητα $1 gr/cm^3$, οἱ δὲ μεγαλύτεροι τοῦ 10 βαθμοὶ εἰς πυκνότητας, μικροτέρας τοῦ $1 gr/cm^3$.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ βαθμῶν Baumé καὶ πυκνότητος παρέχουν οἱ κάτωθι πίνακες :

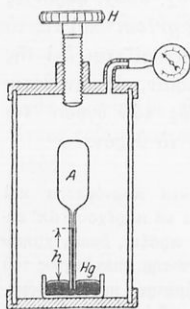
ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΒΑΘΜΩΝ BAUMÉ ΕΙΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΟΣ

Πυκνοὶ βαθμοὶ Baumé	Πυκνότης (gr/cm^3)
0	1,000
10	1,074
20	1,160
30	1,261
40	1,381
50	1,526
60	1,706
70	1,933

Ἀραιοὶ βαθμοὶ Baumé	Πυκνότης (gr/cm^3)
10	1,000
20	0,933
30	0,875
40	0,823
50	0,778
60	0,737
70	0,700
80	0,667

Πυκνόμετρα δι' εἰδικὰς μετρήσεις ἔχουν βαθμολογηθῇ οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν περιεκτικότητα ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον συστατικὸν (π.χ. οἶνο-πνευματόμετρα κ.λ.).

§ 168. Συμπιεστότης τῶν ὑγρῶν. Ὡς γνωστόν, ἐὰν συμπιέσωμεν πανταχόθεν ἐν ὑλίκόν, θὰ ὑποστῇ ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου του, ἡ δὲ συμπεριφορά του κατὰ τὴν συμπίεσιν χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς *συμπιεστότητος* $\times$ αὐτοῦ (βλ. § 142). Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, τὰ στερεὰ σώματα παρουσιάζουν μικροτέραν συμπιεστότητα ἢ τὰ ὑγρά, ἐνῶ τὰ ἀέρια εἶναι ἐξόχως συμπιεστά.



Σχ. 221. Πιεσίμετρον.

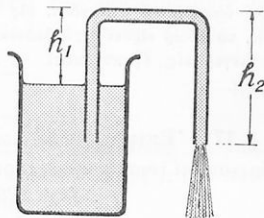
Τὴν συμπιεστότητα τῶν ὑγρῶν δυνάμεθα νὰ δειξωμεν πειραματικῶς διὰ τοῦ *πιεσιμέτρου*, συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 221: Τὸ ὑάλινον δοχεῖον *A* πληροῦται διὰ τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν ὑγροῦ καὶ τέθεται ἀνεστραμμένον ἐντὸς λεκανῆς ὑδροαγύρου. Τὸ ὅλον τοποθετεῖται ἐντὸς παχυντοῦ ὑαλίνου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος πληροῦται δι' ὕδατος. Διὰ τοῦ κολλίου *H* συμπιέζεται τὸ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ὕδωρ. Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου *A* δὲν μεταβάλλεται, καθόσον ἐξωτερικῶς καὶ ἐσωτερικῶς ὑφίσταται τὴν αὐτὴν πίεσιν. Ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου, τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ δοχείου *A* ὑγροῦ, δεικνύεται ἐκ τῆς ἀνυψώσεως τῆς στήλης τοῦ ὑδροαγύρου κατὰ *h*.

§ 169. Δυνάμεις μεταξὺ μορίων. Ὅταν δύο οἰαδήποτε μόρια πλησιάσουν πολὺ μεταξὺ των, ἐμφανίζεται μία ἰσχυρὰ ἐλκτική δύναμις, ἡ ὁποία καὶ τὰ συγκρατεῖ. Αἱ τοιαῦται δυνάμεις καλοῦνται *δυνάμεις Van der Waals* καὶ ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνισιν διαφόρων φαινομένων - ὅπως, π.χ., τοῦ φαινομένου τῆς ὑγροποιήσεως τῶν ἀερίων, τοῦ φαινομένου τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως κ.λ. Εἰς τοιαύτας δυνάμεις ὀφείλεται καὶ ἡ *συνοχή* τῶν σωμάτων. Ἐκτὸς τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ φαινόμενον τῆς συνοχῆς εἶναι ἔκδηλον (ἀντοχή τῶν στερεῶν), συνοχή ἐμφανίζεται καὶ εἰς τὰ ὑγρά. Λόγω τῆς συνοχῆς τῶν ὑγρῶν λειτουργεῖ καὶ ὁ κατωτέρω περιγραφόμενος *σίφων*.

Συνάφεια. Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἐπρόκειτο περὶ δυνάμεων Van der Waals, ἐμφανιζομένων μεταξὺ ὁμοειδῶν μορίων. Ἐλκτικά, ὅμως, δυνάμεις Van der Waals ἐμφανίζονται καὶ μεταξὺ ἑτεροειδῶν μορίων. Λόγω τοιούτων δυνάμεων συγκρατοῦνται τὰ μόρια τῆς κιμωλίας ἐπὶ τοῦ μαυροπίνακος κατὰ τὴν γραφήν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ κατὰ τὴν γραφήν διὰ μολυβδοκονδύλου ἐπὶ τοῦ χάρτου. Αἱ δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι μεταξὺ ἑτεροειδῶν μορίων, καλοῦνται *δυνάμεις συναφείας*.

Εἰς τ' ἀναφερόμενα δύο παραδείγματα πρόκειται περὶ συναφείας μεταξὺ δύο στερεῶν σωμάτων. Δυνάμεις, ὅμως, συναφείας παρουσιάζονται καὶ κατὰ τὴν ἐπαφὴν στερεῶν μὲ ὑγρά. Εἰς τὰς δυνάμεις, ἀκριβῶς, ταύτας ὀφείλονται καὶ τὰ εἰς τὴν § 174 περιγραφόμενα *τριχοειδικὰ φαινόμενα*.

§ 170 Σίφων. Οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ σωλῆνος, κεκαμμένου, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 222: Ἐὰν πληρώσωμεν τὸν σωλῆνα δι' ὕδατος καὶ βυθίσωμεν τὸ ἓν ἄκρον του ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος ἓν ὑγρὸν (π.χ. ὕδωρ), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν ἀρχίζει νὰ ἐκρῆθῃ ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου. Ἡ ροὴ προέρχεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ βάρους τῶν δύο ὑγρῶν στηλῶν h_1 καὶ h_2 εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σίφωνος, ἀκριβῶς ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς ἄλυσιν, διερχομένην διὰ τροχαλίας (σχ. 223): Ὅταν τὰ δύο ποτήρια, τὰ ὁποῖα περιέχουν μέ-



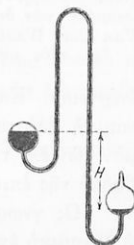
Σχ. 222. Σίφων.



Σχ. 223.
Μηχανικὸν
ἀνάλογον διὰ
τὴν κατανόη-
σιν τῆς λει-
τουργίας τοῦ
σίφωνος.

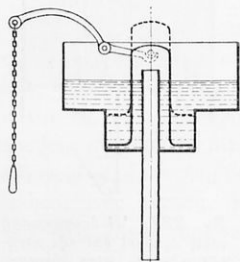
ρος τῆς ἀλύσεως, τεθοῦν εἰς διάφορα ὕψη, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἄλυσιν «ρῆει» ἐκ τοῦ ὑψηλότερου εὐρισκομένου ποτηρίου εἰς τὸ ἄλλο. Κατὰ τὸν αὐτὸν, ἀκριβῶς, τρόπον ρεῖ τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ σίφωνος, ὅταν τὸ ἔξω τοῦ ὕδατος ἄκρον τοῦ σωλῆνος εὐρίσκεται χαμηλότερον τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰς τὸ δοχεῖον. Εἶναι προφανές ὅτι, χωρὶς τὰς δυνάμεις συνοχῆς, αἱ δύο «κρεμάμεναι» στήλαι τοῦ ὕδατος θὰ διεκόπτοντο.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ παρουσία τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως δὲν εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ σίφωνος, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λειτουργῇ καὶ ἐν τῷ κενῷ. Καὶ πράγματι τοῦτο συμβαίνει, ὅπως δεικνύομεν πειραματικῶς διὰ τοῦ σίφωνος τοῦ σχήματος 224, ὁ ὁποῖος περιέχει ὕδωρ, ἀπηλλαγμένον ἀέρος (διὰ βρασμοῦ).



Σχ. 224.

Ἡ προφύλαξις αὕτη εἶναι ἀπαραίτητος, διότι, ἄλλως, αἱ



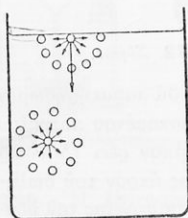
Σχ. 225. Ὑδαταποθήκη
ἀφοδευτήριον μετὰ σίφωνος.

εἰς μικρὰς πιέσεις ἐντὸς τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ σχηματίζονται φυσαλίδες τοῦ ἀέρος διακόπτουν τὴν ὑγρὰν φλέβα, ὁπότε διακόπτεται, ὁμοίως, καὶ ἡ λειτουργία τοῦ σίφωνος. Ἀντιθέτως, ἔξωτερικαὶ πιέσεις (π.χ. 1 Atm) ἐμποδίζουν τὸν σχηματισμὸν τῶν φυσαλίδων καὶ, συνεπῶς, ὁ σίφων λειτουργεῖ χωρὶς καμμίαν εἰδικὴν προφύλαξιν. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ὁ ρόλος τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως εἶναι βοηθητικός.

Ὑδαταποθήκη ἀφοδευτήριον μετὰ σίφωνος. Τὴν ἀρχὴν τοῦ σίφωνος ἐκμεταλλεόμεθα διὰ τὴν δι' ἐνὸς χειρισμοῦ πλήρη ἐκκένωσιν τῶν ὕδαταποθηκῶν τῶν ἀφοδευτηρίων (σχ. 225). Δι' ἑλξεως τῆς λαβῆς ἀνυψοῦται ὁ κώδων, ὁ ὁποῖος,

ἀφιέμενος κατόπιν ἐλεύθερος, κατέρχεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Ὁ κώδων, λόγω τῆς διαμορφώσεως τῶν χειλέων του, ἀναγκάζεται τὸ ἐπ' αὐτὸν ὕδωρ ν' ἀνυψωθῇ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται προηγουμένως. Εὐθὺς ὡς ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος ὑπερβῇ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ σωλήνος ἐκροῆς, τὸ ὕδωρ εἰρέει εἰς αὐτὸν καὶ οὕτως ὁ σίφων ἀρχίζει νὰ λειτουργῇ. Οὕτως, ἀπαξ διεγερθεῖς, ἐξακολουθεῖ νὰ λειτουργῇ μέχρι πλήρους ἐκκενώσεως τῆς ὕδατα-ποθήκης.

§ 171. Ἐπιφανειακὴ τάσις. Αἱ δυνάμεις Van der Waals, αἱ ἐξα-σκούμεναι ἐπὶ τινος μορίου, εὐρισκομένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἐνὸς ὑγροῦ

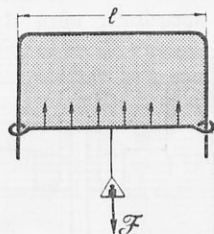


Σχ. 226. Εἰς μόρια, εὐ-ρισκόμενα εἰς τὸ ἐσωτε-ρικὸν τοῦ ὑγροῦ, ἡ συν-ισταμένη τῶν δυνάμεων Van der Waals εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

(σχ. 226), ἀλληλοαναιροῦνται καί, ἐπομένως, ἡ συν-ισταμένη των θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἀντιθέτως, μόριον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται πλησίον τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας, ἔλκεται μονοπλεύρως καί, ὡς ἐκ τούτου, παρουσιάζεται μία συνισταμένη δύναμις με φορὰν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ. Διὰ νὰ ἐξέλθῃ ἐν μό-ριον ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ ὑγροῦ καὶ νὰ καταλάβῃ θέσιν ἐντὸς τῆς ἐπιφανειακῆς στιβάδος, πρέπει νὰ καταναλωθῇ ἔργον πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται, ὅταν τὸ μόριον φθάσῃ πλη-σίον τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ὁποία ἔλκει αὐτὸ πρὸς τὸ ἐσωτερικόν. Ἔνεκα τούτου, πᾶν μόριον, εὐρισκόμε-νον ἐντὸς τῆς ἐπιφανειακῆς στιβάδος, ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν. Ἐπομένως, ἡ εἰς τὰς δυνάμεις Van der Waals ὀφειλομένη δυ-ναμικὴ ἐνέργεια μιᾶς ποσότητος ὑγροῦ θὰ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀριθ-μὸν τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εὐρισκομένων μορίων, δηλ., ἀνάλογος τοῦ ἐμ-βαδοῦ τῆς ἐπιφανείας.

Ὡς γνωστόν, εἰς τὴν κατὰστασιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια εἶναι ἐλαχίστη, τὸ ἐμβα-δόν, λοιπόν, τῆς ἐπιφανείας ἔχει τὴν μι-κροτέραν δυνατὴν τιμήν. Ἡ ἰδιό-της αὕτη ἐξηγεῖ διατὶ σταγὼν ὑγροῦ, αἰωρου-μένη ἐντὸς ἄλλου ὑγροῦ τῆς αὐτῆς πυκνότητος, λαμβάνει σφαιρικὸν σχῆμα, ἀφοῦ, ὡς γνωστόν, τὸ σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον, ὑπὸ δεδομένον ὄγκον, ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐλαχίστη ἐπιφάνεια, εἶναι τὸ σχῆ-μα τῆς σφαίρας. Κατὰ προσέγγισιν, σφαιρικὸν σχῆμα λαμβάνουν καὶ σταγόνες ὑδραργύρου, ἡρεμοῦσαι ἐπὶ ὀριζοντίου ἐπιφανείας.

Τὰ φαινόμενα ταῦτα δυνάμεθα νὰ παρα-κολογηθῶμεν, ποσοτικῶς, διὰ τῆς ἐξῆς διατά-ξεως (σχ. 227): Ἐπὶ πλαισίου, τοῦ ὁποῖου ἡ τετάρτη πλευρὰ εἶναι κινητή, σχηματίζομεν ὑμένιον ἀπὸ διάλυμα σάπωνος.



Σχ. 227. Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κινη-τῆς πλευρᾶς μιάν δύναμιν, ἡ ὁποία ἀνισταθμίζεται διὰ τῶν σταθμῶν F .

Ἄν ἡ κινητὴ πλευρὰ εἶναι ἐλαφρά, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μετακινεῖται, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑμενίου νὰ ἐλαττωθῇ. Ἡ δύναμις, διὰ τῆς ὁποίας ἔλκεται ἡ κινητὴ πλευρά, εἶναι δυνατόν νὰ μετρηθῇ ἐκ τοῦ βάρους F τῶν σταθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται πρὸς ἀντιστάθμισιν αὐτῆς. Ἡ δύναμις F εὐρίσκεται ἀνάλογος τοῦ μήκους l τῆς κινητῆς πλευρᾶς. Ἦτοι εἶναι

$$F = 2a \cdot l$$

Ὁ συντελεστὴς a καλεῖται *συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως* καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ καὶ τῆς θερμοκρασίας (*). (Ὁ παράγωγος 2 τίθεται, διότι τὸ ὑμένιον ἔχει δύο ἐπιφανείας).

Ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἶναι δυνατόν νὰ ὁρισθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον: Ἄν μετακινήσωμεν τὴν κινητὴν πλευρὰν κατὰ dx , ἡ ἐπιφάνεια S τοῦ ὑμενίου θ' αὐξηθῇ ὅλιγον κατὰ $dS = 2 \cdot l \cdot dx$. Κατὰ τὴν μετακίνησιν ταύτην, ἡ δύναμις F θὰ παραγάγῃ ἔργον dA , ἴσον πρὸς

$$dA = F \cdot dx = 2a \cdot l \cdot dx = a \cdot dS.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὸν συντελεστὴν ἐπιφανειακῆς τάσεως τὴν σχέσιν

$$a = \frac{dA}{dS}$$

Ἡ σχέσις αὕτη δηλοῖ ὅτι ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἔργου, τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν αὐξησιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑμενίου, διὰ τῆς ἀντιστοίχου αὐξήσεως τῆς ἐπιφανείας.

Διαστάσεις τοῦ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως. Ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἔχει διαστάσεις

$$[a] = \frac{[F]}{[l]}$$

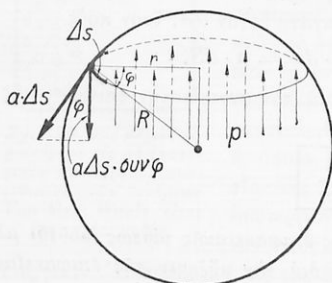
Μονάδες: C.G.S.: $1 \text{ dyn/cm} = 1 \text{ erg/cm}^2$.

Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἶναι οὐσιώδους σημασίας διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐκροῆς ἐνὸς ὑγροῦ διὰ μικρᾶς ὀπῆς ὑπὸ μορφὴν σταγόνων: Τὸ ὑγρὸν, ἐξερχόμενον ἐκ τῆς ὀπῆς — π.χ., ἐκ τοῦ στομίου ἐνὸς σίφωνος — συγκρατεῖται εἰς τὸ κάτω ἄκρον του, λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, ἐφ' ὅσον ἡ ποσότης αὐτοῦ εἶναι μικρά. Ὅταν, ὅμως, ἡ ποσότης τοῦ ὑγροῦ, διαρκῶς αὐξανόμενη, ἀποκτήσῃ βάρος, μὴ δυνάμενον, πλέον, νὰ συγκρατηθῇ ὑπὸ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, ἀποσπᾶται ἐκ τοῦ σίφωνιόν καὶ πίπτει ὑπὸ μορφὴν σταγόνος. Εἶναι προφανές ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι σταγόνες θὰ εἶναι τόσον μεγαλύτεραι, ὅσον μεγαλύτερα θὰ εἶναι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ.

(*) Ἐλάχιστοι προσμῖξεις δύνανται γὰρ μεταβάλλουν πολὺ τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως.

§ 172. Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἰς καμπύλας ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἰς ὑγρόν, τὸ ὁποῖον παρουσιάζει καμπύλην ἐπιφάνειαν, προκαλεῖ μεταβολὴν τῆς πίεσεως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ. Οὕτω, ἐνῶ εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔξω τοῦ ὑγροῦ ἐπικρατοῦσαν πίεσιν, εἰς κυρτὴν μὲν ἐπιφάνειαν παρουσιάζεται μεγαλυτέρα αὐτῆς, εἰς κοίλην δὲ μικροτέρα. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις δημιουργεῖ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σφαιρικῆς σταγόνος πίεσιν, μεγαλυτέραν τῆς πίεσεως τοῦ περιβάλλοντος. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πιέσεων — ἡ *ὑπερπίεσις* — ὑπολογίζεται κατωτέρω καὶ εὐρίσκεται ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος τῆς σταγόνος.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἐντὸς σφαιρικῆς σταγόνος δημιουργουμένης ὑπερπίεσεως p , θεωροῦμεν τμήμα αὐτῆς (σχ. 228) καὶ ἐκφράζομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας. Ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου τῆς σταγόνος ἐξασκοῦνται ἀφ' ἑνὸς μὲν δυνάμεις, προερχόμεναι ἐκ τῆς ὑπερπίεσεως p εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σταγόνος, ἀφ' ἑτέρου δὲ δυνάμεις, προερχόμεναι ἐκ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως.



Σχ. 228.

Ἡ πίεσις p , ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ κύκλῳ, ἀκτίνος r , προκαλεῖ τὴν δύναμιν $p \cdot \pi r^2$. Ἐπὶ τμήματός τινος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου, μήκους Δs , ἐξασκεῖται, λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, δύναμις $a \cdot \Delta s$, τῆς ὁποίας ἡ κατακόρυφος συνιστώσα εἶναι ἴση πρὸς $a \cdot \Delta s \cdot \text{συν } \varphi$, προκαλουμένης, οὕτω, συνολικῶς, τῆς δυνάμεως $a \cdot 2\pi r \cdot \text{συν } \varphi$. Ἡ ἐξίσωσις τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων δίδει

$$p \cdot \pi r^2 = a \cdot 2\pi r \cdot \text{συν } \varphi.$$

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\text{συν } \varphi = r/R$, προκύπτει διὰ τὴν ὑπερπίεσιν ἡ σχέσηις

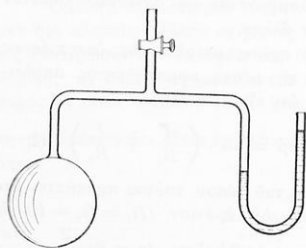
$$p = \frac{2a}{R}.$$

Ἡ πίεσις αὕτη λαμβάνει σημαντικὰς τιμὰς, ὅταν ἡ ἀκτίς γίνῃ πολὺ μικρά. Οὕτω, ἡ ἐπιφάνεια μικροσκοπικοῦ σταγονιδίου ὕδραργου, ἀκτίνος $R = 0,1 \mu$, ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ πίεσιν 100 at!

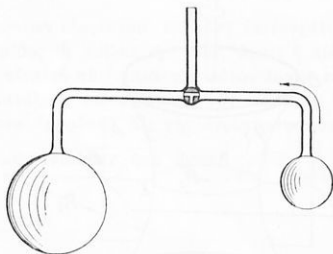
Ὁ ἄνω τύπος παρέχει τὴν λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως ὑπερπίεσιν εἰς τὴν περιπτώσιν κυρτῆς ἐπιφανείας. Ὄταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κοίλη, ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως τοῦ περιβάλλοντος κατὰ $2a/R$.

§ 173. Ὑγρά ὑμένια. α) *Πομφόλυγες.* Λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, τὸ ἐντὸς μιᾶς πομφόλυγος ἀέριον συμπίεζεται, οὕτως ὥστε ἡ πίεσις του νὰ εἶναι κατὰ Δp μεγαλυτέρα τῆς ἐξωτερικῆς πίεσεως. Τὴν ὑπαρξιν τῆς ὑπερπίεσεως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πομφόλυγος δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 229. Ἐπὶ πλέον, διὰ τοῦ πειράματος τοῦ-

τοῦ εὐρίσκωμεν ὅτι ἡ ὑπερπίεσις τοῦ ἐντὸς τῆς πομφόλυγος ἀερίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος τῆς πομφόλυγος. Τοῦτο, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἶναι δυνατόν νὰ εὐρεθῇ καὶ θεωρητικῶς.



Σχ. 229. Ἡ πίεσις ἐντὸς τῆς πομφόλυγος εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐξωτερικῆς.



Σχ. 230. Ὄταν αἱ δύο πομφόλυγες ἔλθουν εἰς συγκοινωνίαν, ὁ ἀέρας κινεῖται ἐκ τῆς μικροτέρας πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Χαρακτηριστικὸν πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἐξαρτήσεως τῆς ὑπερπίεσεως ἐκ τῆς ἀκτίνος εἶναι τὸ ἐξῆς: Εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς ὑαλίνης συσκευῆς τοῦ σχήματος 230, σχηματίζομεν ἐκ διαλύματος σάπωνος δύο πομφόλυγας, διαφόρου ἀκτίνος. Ἄν, διὰ τῆς στορόφιγγος, φέρωμεν εἰς συγκοινωνίαν τὰς δύο πομφόλυγας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ μεγαλυτέρα ἀυξάνεται, ἐνῶ ἡ μικροτέρα ἐλαττοῦται, διὰ νὰ καταλήξῃ, τελικῶς, εἰς ἄπλοῦν κυρτὸν ὑμένιον. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ὑπερπίεσις εἰς τὴν μικρὰν πομφόλυγα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπερπίεσεως, τῆς ἐπικρατούσης εἰς τὴν ἄλλην, λόγῳ τῆς μικροτέρας ἀκτίνος, τὴν ὁποίαν ἔχει αὕτη.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ὑπερπίεσεως Δp καὶ τῆς ἀκτίνος R εὐρίσκωμεν διὰ τῶν ἐξῆς συλλογισμῶν: Ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ὑμένιου εἶναι, κατὰ τὴν προηγουμένην παράγραφον, μεγαλυτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως κατὰ $2a/R$. Ἄφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὸ ὑγρὸν σχηματίζει ἐσωτερικῶς κοίλην ἐπιφάνειαν, ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ ὑμένιου θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως τοῦ ἀερίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πομφόλυγος κατὰ $2a/R$. Συνεπῶς, ἡ ὑπερπίεσις Δp τοῦ ἐντὸς τῆς πομφόλυγος ἀερίου θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\Delta p = \frac{4a}{R}. \quad (1)$$

β) Ὑμένια οἰοῦνδήποτε σχήματος. Ὡς εἶδομεν, εἰς τὰ σφαιρικὰ ὑμένια ἡ ὑπερπίεσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος των. Ὄταν τὸ ὑμένιον ἔχῃ οἰοῦνδήποτε σχῆμα, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ὑπερπίεσις εἶναι ἀνάλογος τῆς μέσης καμπυλότητος

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην R_1 καὶ R_2 εἶναι αἱ ἀκτίνες καμπυλότητος δύο καμπύλων γραμμῶν α καὶ β (σχ. 231), αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς τομῆς τοῦ ὑμένιου διὰ

δύο επίπεδων A, B , καθέτων ἐπ' ἄλληλα καὶ διερχομένων διὰ τῆς καθέτου εἰς οἷον-
δήποτε σημείου, π.χ., εἰς τὸ σημεῖον Σ τοῦ ὑμένιου (*).

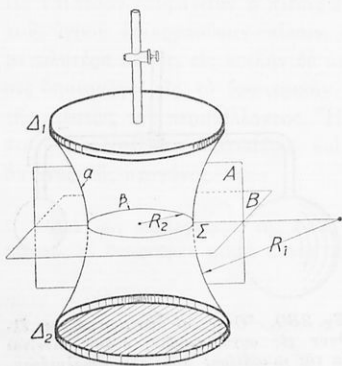
Εἰς τὰς σφαιροειδῆς ἐπιφανείας — ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος 231 — τὰ
κέντρα καμπυλότητος δὲν εὐρίσκονται πρὸς
τὴν αὐτὴν πλευρὰν τῆς ἐπιφανείας καί, ὥς
ἐκ τούτου, ἡ μία ἀκτὺς καμπυλότητος πρέ-
πει νὰ λαμβάνεται μὲ ἀντίθετον σημεῖον
ἀπὸ τὴν ἄλλην.

Ἡ σχέσης μεταξὺ τῆς ὑπερπίεσεως
 Δp καὶ τῆς μέσης καμπυλότητος ἀποδει-
κνύεται ὅτι εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\Delta p = 2\alpha \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

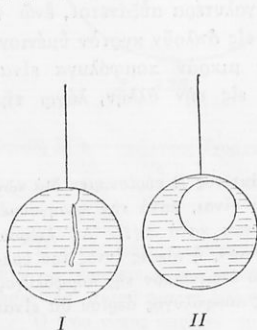
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι
εἰς σφαιρικὸν ὑμένιον ($R_1 = R_2 = R$) ἡ
ὑπερπίεσις Δp θὰ εἶναι $\Delta p = 2\alpha \cdot \frac{2}{R} = \frac{4\alpha}{R}$
δηλ., προκύπτει ὁ προηγούμενος τύπος (1).

γ) Ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ. Ἐάν
ἐντὸς διαλύματος σάπωνος ἐμβαπτίσωμεν
ἐπίπεδον πλαίσιον καὶ ἔπειτα τὸ ἀνασύ-
ρωμεν, θὰ σχηματισθῇ ἐν ἐπίπεδον ὑμένιον. Ἐάν, κατόπιν, ἀποθέσωμεν ἐπὶ τοῦ
ὑμένιου λεπτὸν νήμα, τοῦ ὁποίου ἔχομεν συνδέσει τὰ δύο ἄκρα ὥστε ν' ἀποτελῇ
βρόχον (σχ. 232, I) καὶ θραύσωμεν τὴν ἐντὸς αὐτοῦ ὑγρὰν μεμβράνην, παρατηροῦ-

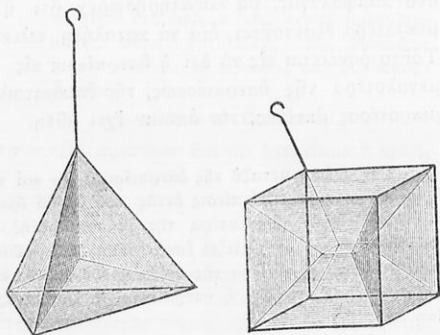


σχ. 231. Μεταξὺ τῶν δίσκων A_1 καὶ
 A_2 σχηματίζεται σφαιροειδὲς ὑμένιον.

μεν, θὰ σχηματισθῇ ἐν ἐπίπεδον ὑμένιον. Ἐάν, κατόπιν, ἀποθέσωμεν ἐπὶ τοῦ
ὑμένιου λεπτὸν νήμα, τοῦ ὁποίου ἔχομεν συνδέσει τὰ δύο ἄκρα ὥστε ν' ἀποτελῇ
βρόχον (σχ. 232, I) καὶ θραύσωμεν τὴν ἐντὸς αὐτοῦ ὑγρὰν μεμβράνην, παρατηροῦ-



σχ. 232. Ὑμένια ἐλαχίστου
ἐμβαδοῦ.



σχ. 233. Ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ.

μεν ὅτι ὁ βρόχος λαμβάνει κυκλικὸν σχῆμα (II). Οὕτω τὸ ὑμένιον ἔχει, τώρα, τὸ
ἐλάχιστον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ ὑπὸ τὸ δεδομένον μῆκος τοῦ νήμα-
τος (ὑμένιον ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ).

Ὑπὸ δεδομένον περίγραμμα σχηματίζεται ὑμένιον ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ, ὡσάκις
ἡ πίεσις ἐκατέρωθεν τοῦ ὑμένιου εἶναι ἡ αὐτὴ ($\Delta p = 0$). Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν

(*) Ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ μέση καμπυλότης εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῶν δύο καθέ-
των ἐπιπέδων, δὲν μεταβάλλεται, δηλαδὴ, ἐάν περιστρέψωμεν ταῦτα περὶ τὴν καθέτον.

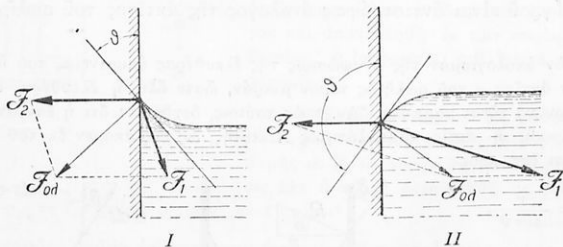
ή μέση καμπυλότης θά είναι, συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2), ἴση πρὸς μηδέν. Εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 232 τὸ ὑμένιον ἦτο ἐπίπεδον, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει πράγματι ἡ σχέσις

$$\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} = \frac{I}{\infty} + \frac{I}{\infty} = 0.$$

Ὁμοίως, σχηματισμὸν ἐπιπέδων ὑμένων ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ ἐπιτυγχάνομεν διὰ πλαισίων ἄλλου σχήματος (π.χ. πυραμίδος ἢ κύβου, σχ. 233), ἀρκεῖ ἡ πίεσις ἐκατέρωθεν τῶν πλευρῶν τοῦ ὑμένιου νὰ εἶναι ἡ αὐτή. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὑμένια, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 231 καὶ ὅταν ἡ στρόφιγξ εἶναι ἀνοικτή, εἶναι ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ὑμένιον δὲν εἶναι ἐπίπεδον, λαμβάνει ὅμως τοιοῦτο σχῆμα ὥστε $\left| \frac{I}{R_1} \right| = \left| \frac{I}{R_2} \right|$, ὁπότε

$$\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} = 0.$$

§ 174. Τριχοειδικὰ φαινόμενα. Ὅταν ἐν ὑγρὸν ἐφάπτεται ἐνὸς στερεοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν εἴτε διαβρέχει τὸ στερεόν, εἴτε ὄχι. Εἰς τὸ μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ συναντᾷ τὸ στερεόν, αὕτη δὲν παραμένει πλέον ἐπίπεδος καὶ ὀριζοντία, ἀλλὰ γίνεται κοίλη ἢ κυρτή. Τὰ φαινόμενα ταῦτα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **τριχοειδικὰ φαινόμενα** (*), ἐξηγοῦνται διὰ τῶν δυνάμεων συναφείας, δηλ., τῶν δυνάμεων, τῶν ἐξασκουμένων μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ τῶν μορίων τοῦ στερεοῦ. Ἡ μορφή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, ἐκεῖ ὅπου συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ (σχ. 234), ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διευσθύν-



Σχ. 234.

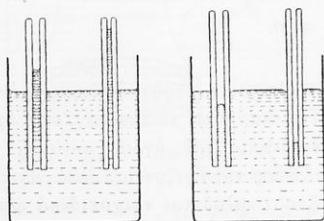
σεως τῆς συνισταμένης F_{ol} τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη αὕτη δύναμις, ἐφ' ὅσον τὸ ὑγρὸν εὐρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν.

Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τινος μορίου

(*) Ἡ ὀνομασία ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ φαινόμενα ταῦτα ἐμελετήθησαν, τὸ πρῶτον, ἐντὸς σωλῆνων, πολὺ μικρᾶς διαμέτρου (τριχοειδεῖς σωλῆνες).

τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν ὑπολοίπων μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ $\mathcal{F}_2$ τὴν δύναμιν συναφείας, τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μορίου τὰ μόρια τοῦ στερεοῦ, τότε, ἀναλόγως τῆς τιμῆς τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων, ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ αὐτῶν εἴτε ἔχει διεύθυνσιν πρὸς τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ (I), εἴτε πρὸς τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ (II). Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται μία γωνία θ —ἡ **γωνία συνεπαφῆς**—, ἡ ὁποία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ ἢ ὅχι τὸ στερεόν.

§ 175. Μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς στενοῦ σωλήνος. Τὰ τριχοειδῆ φαινόμενα προκαλοῦν μεταβολὴν τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐνὸς ὑγροῦ ἐντὸς στενῶν σωλήνων. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ αὐτούς, ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια ἀνέρχεται, σχηματίζουσα κοῖλον μηνίσκον (σχ. 235, I), ἐνῶ, ἀντιθέτως, ὅταν οἱ σωλήνες δὲν διαβρέχωνται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ, ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια κατέρχεται ἐντὸς αὐτῶν, σχηματίζουσα κυρτὸν μηνίσκον (II). Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ ταπείνωσις ἢ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος.



Σχ. 235. Ἡ ἀνύψωσις ἢ ἡ ταπείνωσις τῆς στάθμης ἐντὸς σωλήνων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος.

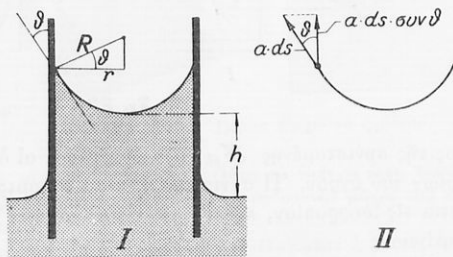
εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος τοῦ σωλήνος.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀνύψωσης τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, δεχόμεθα τὴν ἀκτὶνα r τοῦ σωλήνος τόσον μικράν, ὥστε ὅλη ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια τοῦ μηνίσκου νὰ εἶναι καμπύλη. Ἄν, πρὸς τούτοις, δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι σφαιρική, ἡ ἀκτίς καμπυλότητος R αὐτῆς, ὡς εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ σχήματος 236, I, εἶναι ἴση πρὸς

$$R = \frac{r}{\sin \theta}.$$

Ἡ ἀνύψωσις h τῆς ἐπιφανείας εὐρίσκεται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι αἱ λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως κατακόρυφοι συνιστώσαι τῶν δυνάμεων, τῶν ἐξασκουμένων κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας, πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς τὸ βάρος $e \cdot \pi r^2 \cdot h$ τῆς ὑγρᾶς στήλης, ἥτις ἔχει ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

Ἡ ἐκ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τμήματός τινος



Σχ. 236.

τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, μήκους ds , θὰ εἶναι ἴση πρὸς $a \cdot ds$ (σχ. 236, II) καί, συνεπῶς, ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστώσα θὰ εἶναι ἴση πρὸς $a \cdot ds \cdot \sin \theta$. Ἐφ' ὁλοκλήρῳ, λοιπόν, τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐξασκεῖται ἡ δύναμις $a \cdot 2\pi r \cdot \sin \theta$.

Ἐφ' ὅσον ἡ ὑγρὰ στήλη ἰσορροπεῖ, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις

$$\varepsilon \cdot \pi r^2 \cdot h = a \cdot 2\pi r \cdot \sin \theta,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει διὰ τὴν ἀνύψωσιν h ἡ ἐξίσωσις

$$h = \frac{2a \cdot \sin \theta}{\varepsilon \cdot r}. \quad (1)$$

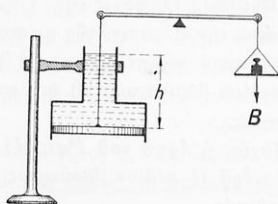
Ὅταν τὸ ὑγρὸν δὲν διαβρέχῃ τὸν σωλῆνα, ἡ γωνία συνεπαφῆς θ εἶναι ἀμβλεία, τὸ συνημίτονον αὐτῆς ἀρνητικόν, ἐπομένως καὶ τὸ h ἀρνητικόν, δηλ., εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἀντὶ ἀνυψώσεως, ἐπέρχεται ταπείνωσις τῆς στάθμης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀνώσεως, τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ τοῦ ὕδατος α) ἐπὶ μιᾶς φουαλλίδος ἀέρος, ὄγκου 1 cm^3 , καὶ β) ἐπὶ μιᾶς μολυβδίνης σφαίρας τοῦ αὐτοῦ ὄγκου; Δίδονται: $\rho_{\text{ἀἰρ}} = 0,0013 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{ὑδωρ}} = 1 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{μολυβδος}} = 11,3 \text{ gr/cm}^3$.

2. Σιδηροῦς κύβος ἐπιπλέει ἐντὸς ὑδραργύρου. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ ὑπεράνω τοῦ ὑδραργύρου ἀτμοσφαιρικός ἀήρ, ὁ κύβος θὰ παραμείνῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, θὰ ἀνέλθῃ ἢ θὰ κατέλθῃ; Δίδονται: $\rho_{\text{Fe}} = 7,8 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{ἀἰρ}} = 0,0013 \text{ gr/cm}^3$. (Διὰ τὴν λύσιν ὑπολογίζομεν τὰς δυνάμεις, τὰς ἐξασκουμένας ἐπὶ τῆς ἄνω καὶ τῆς κάτω βάσεως τοῦ κύβου).

3. Ὅταν τὸ δοχεῖον τοῦ σχήματος πληρωθῇ δι' ὕδατος μέχρι τοῦ ὕψους h ,

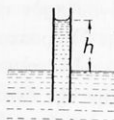


πρέπει νὰ τεθοῦν εἰς τὴν πλάστιγγα τοῦ ζυγοῦ τὰ σταθμὰ B , διὰ νὰ ἰσορροπῇ οὗτος ὀριζοντίως. Ἐὰν τὸ ὕδωρ μεταβληθῇ εἰς πάγον καὶ ἀποκολληθῇ ἐκ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου, ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ θὰ καταστραφῇ;

4. Ἐντὸς ὕδατος καὶ εἰς βάθος h κρέμονται διὰ νήματος μικρὸς σιδηροῦς κύβος, ἀκμῆς d . Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ ἄνωσις, ἐὰν ὁ κύβος μετακινήθῃ εἰς βάθος $2h$;

Δίδονται: $\rho_{\text{Fe}} = 7,8 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_{\text{ὑδωρ}} = 1 \text{ gr/cm}^3$.

5. Τριχοειδῆς σωλὴν ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὑγροῦ τινος, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα. Τὸ ὑγρὸν πρέπει νὰ ἀνέλθῃ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μέχρις ἐνὸς ὀρισμένου ὕψους h , τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (1) τῆς § 175. Ἐὰν τὸ ἐξέχον τοῦ ὑγροῦ τμήμα τοῦ σωλῆνος γίνῃ μικρότερον τοῦ h , τὸ ὑγρὸν πρέπει νὰ ἀρχίσῃ νὰ χύνεται ἐκ τοῦ ἄνω ἄκρου, προκαλουμένης, οὕτω, μιᾶς ἀενάου κινήσεως τοῦ ὑγροῦ. Διὰ τὴν δὲν συμβαίνει τοῦτο;



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 176. Ἰδιότητες τῶν ἀερίων. Τὰ ἀέρια ἔχουν μικρὰν πυκνότητα ἐν σχέσει πρὸς τὰ ὑγρά. Οὕτω, ἐνῶ 1 m^3 ὕδατος ζυγίζει 1000 kg^* (δηλ., 1 τόννον), 1 m^3 ἀέρος ζυγίζει, ὑπὸ συνήθεις συνθήκας, μόνον $1,2 \text{ kg}^*$ περὶπου. Ἡ μικρὰ πυκνότης τῶν ἀερίων ὀφείλεται εἰς τὴν μεγάλην, σχετικῶς, ἀπόστασιν τῶν μορίων μεταξὺ τῶν. Λόγω τῆς μεγάλης ἀποστάσεως, αἱ μεταξὺ τῶν μορίων δυνάμεις εἶναι μικραὶ καί, ὥς ἐκ τούτου, τὰ ἀέρια δὲν σχηματίζουν ἐπιφανείας, ἀλλὰ τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον ὄγκον.

Τὰ μόρια τῶν ἀερίων κινοῦνται ἀτάκτως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις καί, ὥς ἐκ τούτου, συγκρουόμενα μετὰ τῶν τοιχωμάτων τῶν περιεχόντων αὐτὰ δοχείων, ἐξασκοῦν ἐπ' αὐτῶν πίεσιν. Κατὰ ταῦτα, ἡ πίεσις τῶν ἀερίων ὀφείλεται εἰς ἐντελῶς διάφορον λόγον παρὰ εἰς τὰ ὑγρά. Καί εἰς μὲν τὰ ὑγρά ἡ πίεσις ὀφείλεται, ὥς εἶδομεν, εἰς τὴν βαρύτητα ἢ καὶ εἰς ἄλλας ἐξωτερικὰς, τυχόν, δυνάμεις, ἐνῶ εἰς τὰ ἀέρια αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν *θερμικὴν κίνησιν* τῶν μορίων τῶν.

§ 177. Κατανομή τῆς πίεσεως ἐντὸς ἀερίου. Ὅπως εἰς τὴν Ὑδροστατικὴν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Ἀεροστατικὴν κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς πίεσεως πρέπει νὰ γίνηται σαφὴς διάκρισις μεταξὺ δύο ἄρκων περιπτώσεων: 1) Τὸ ἀέριον θεωρεῖται ὥς εὐρισκόμενον ἔξω τοῦ πεδίου βαρύτητος· 2) ἡ πίεσις ὀφείλεται, ἀποκλειστικῶς, εἰς τὸ πεδῖον βαρύτητος.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύει ἡ *ἀρχὴ τοῦ Pascal*:

«*Εφ' ὅσον εἰς ἐν ἡρεμῶν ἀέριον δὲν ἐπιδρῷ τὸ πεδῖον βαρύτητος, ἡ πίεσις εἶναι καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ σταθερά*».

Πειραματικῶς ἀποδεικνύομεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal διὰ συσκευῆς, ἀναλόγων πρὸν τὴν χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς αὐτῆς ἀρχῆς εἰς τὴν Ὑδροστατικὴν (σχ. 210).

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ πίεσις δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ἀερίου, ἀλλ' ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑψομέτρου h τοῦ θεωρουμένου σημείου κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$p_h = p_0 \cdot e^{-c \cdot h}$	<i>Βαρομετρικὸς τύπος</i>	(1)
----------------------------------	---------------------------	-----

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ p_h παριστᾷ τὴν πίεσιν εἰς ὑψόμετρον h ,

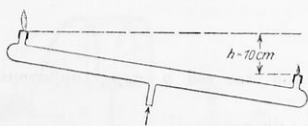
τὸ p_0 τὴν πίεσιν εἰς ὑψόμετρον $h=0$, τὸ e εἶναι ἡ βᾶσις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων ($e \approx 2,72$) καὶ c μία σταθερά (*).

Ἡ ἐξίσωσις (1) δεικνύει ὅτι εἰς τὰ ἀέρια ἡ πίεσις εἶναι ἀρνητικῆ ἐκθετική συνάρτησις τοῦ ὕψους, ὅπως παριστᾷ γραφικῶς καὶ τὸ διάγραμμα II τοῦ σχήματος 237.

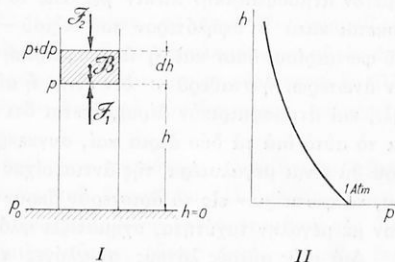
Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὰς ἐξῆς παρατηρήσεις: 1) Ὁ ἐκθετικός παράγων $e^{-c \cdot h}$ εἶναι καθαρός ἀριθμός, μικρότερος τῆς μονάδος ἀφοῦ τὸ p_h εἶναι μικρότερον τοῦ p_0 . 2) Καθαρός ἀριθμός εἶναι καὶ ὁ ἐκθέτης $c \cdot h$ ἐπομένως ἡ σταθερά c θὰ ἔχη διαστάσεις ἀντιστροφῆς μήκους. 3) Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $h=0$, λαμβάνομεν $p_h = p_0$ ὅπως ἄλλως τε προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ διαγράμματος II τοῦ σχήματος 237.

Παραβάλλοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς τὴν ἀντίστοιχον τῶν ὑγρῶν (§ 163), παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μὲν τὰ ὑγρά ἡ πίεσις μεταβάλλεται γραμμικῶς μετὰ τοῦ h , ἐνῶ εἰς τὰ ἀέρια μεταβάλλεται ἐκθετικῶς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ μὲν ὑγρά ἐθεωρήσαμεν ὡς ἀσυμπίεστα (πυκνότης σταθερά· ἀνεξάρτητος, δηλ., τοῦ βάθους), ἐνῶ τὰ ἀέρια εἶναι συμπίεστά (πυκνότης μεταβλητὴ μετὰ τῆς πίεσεως).

Ἡ σταθερά c τῆς ἐξισώσεως (1) ἐξαρτᾶται, μετὰξὺ ἄλλων, καὶ ἐκ τῆς πυκνότητος ρ_0 τοῦ αερίου. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, διὰ δεδομένην μεταβολὴν h τοῦ ὕψους, τὸ πηλίκον p_h/p_0 δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ ἀέρια. Τοῦτο



Σχ. 238. Αἱ ὑψηλότερον ἐνδισκόμεναι φλόγες φωταερίου καίουν ζωηρότερον.



Σχ. 237. Ὁ βαρομετρικὸς τύπος (τὸν ὁποῖον παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα II) ὑπολογίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας τῆς γραμμοσταθμῆς στήλης τοῦ αἰμοσφαιρικοῦ αέρος (I).

δυνάμεθα νὰ δείξωμεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Διοχετεύομεν διὰ τοῦ σωλῆνος τοῦ σχήματος 238 φωταέριον καὶ εἰς τὰ ἄκρα του ἀνάπτομεν δύο φλόγας. Ἐὰν ρυθμίσωμεν τὴν ροὴν τοῦ φωταερίου, οὕτως ὥστε αἱ φλόγες μολὶς ν' ἀνάπτουν καὶ κλίνωμεν τὸν σωλῆνα, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα, θὰ πα-

(*) Ἡ σταθερά c εἶναι ἰση πρὸς $\rho_0 \cdot g/p_0$, (ἐνθα ρ_0 εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ αερίου εἰς τὸ ὑψόμετρον $h=0$), ὁπότε ὁ ἄνω τύπος γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}.$$

ρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς χαμηλότερον εὐρισκομένης φλογὸς (δεξιᾶ) γίνεται μικρότερον, ἐνῶ, τοῦναντίον, τὸ ὕψος τῆς ἄλλης φλογὸς γίνεται μεγαλύτερον. Τοῦτο ἐξηγείται ὡς ἐξῆς: Τὸ μικρὸν ὕψος τῆς δεξιᾶς φλογὸς δεικνύει ὅτι ἐκεῖ ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου εἶναι, σχεδόν, ἴση μὲ τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν p_0 . Εἰς τὸ ἀριστερὸν ἄκρον — τὸ ὅποιον εὐρίσκεται κατὰ h ὑψηλότερον τοῦ δεξιοῦ — ἔχει ἐλαττωθῆ τόσον ἡ πίεσις τοῦ φωταερίου, ὅσον καὶ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. Ἐπειδὴ, ὅμως, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἡ σταθερὰ c δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὰ δύο ἀέρια (φωταέριον, δηλ., καὶ ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα), ἔπεται ὅτι καὶ τὸ πηλίκον p_h/p_0 δὲν θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ διὰ τὰ δύο ἀέρια καί, συγκεκριμένως, ἡ πίεσις p_h τοῦ φωταερίου θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου πίεσεως τοῦ ἀέρος. Ἐνεκα τούτου, τὸ φωταέριον εἰς τὸ ἀριστερὸν ἄκρον ἔχει μεγάλην ὑπερπίεσιν καί, ἐκρῶν μὲ μεγάλην ταχύτητα, σχηματίζει φλόγα μεγάλου ὕψους.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ φλόγες τῶν λύχνων φωταερίου εἶναι ζωηρότεραι εἰς τοὺς ἄνω ὁρόφους μιᾶς οἰκίας ἢ εἰς τὸ ἰσόγειον, μολονότι ὅλοι οἱ λύχνοι τροφοδοτοῦνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ δικτύου.

Ἀπόδειξις τῆς ἐξίσωσως (1). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πίεσιν εἰς σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς ὕψος h , θεωροῦμεν κατακόρυφον κυλινδρικὴν στήλην τοῦ ἀερίου, μὲ τὴν μίαν βάσιν εἰς ὕψος h καὶ τὴν ἄλλην εἰς ὕψος $h + dh$ (σχ. 237, 1). Ἐπὶ τῆς στήλης ταύτης ἐξασκοῦνται αἱ ἐξῆς δυνάμεις: 1) Τὸ βάρος αὐτῆς $B = \rho \cdot g \cdot S \cdot dh$ (ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως) 2) ἡ δύναμις F_1 , ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $p \cdot S$ (ἐνθα p εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὴν κάτω βάσιν) 3) ἡ δύναμις $F_2 = (p + dp) \cdot S$, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως καὶ 4) αἱ (ὀριζόντιοι) δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς στήλης. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας, κατὰ κατακόρυφον ἄξονα ἐκφραζομένη, μᾶς δίδει τὴν σχέσιν

$$-\rho \cdot g \cdot S \cdot dh + p \cdot S - (p + dp) \cdot S = 0$$

$$\eta \quad dp = -\rho \cdot g \cdot dh. \quad (2)$$

Ὅπως, ὅμως, προκύπτει ἐκ τοῦ γνωστοῦ νόμου τῶν Boyle · Mariotte, ἡ πυκνότης ρ ἐνὸς ἀερίου εἶναι ἀνάλογος τῆς πίεσεως αὐτοῦ, ἥτοι

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ ρ διὰ τοῦ ἴσου του $p \cdot \rho_0/p_0$, λαμβάνομεν

$$dp = -\frac{p \cdot \rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot dh.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δι' ὀλοκληρώσεως, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \ln p &= -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h + K \\ \eta \quad p &= e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} \cdot e^K \end{aligned} \quad (3)$$

Τὴν σταθερὰν K τῆς ὀλοκληρώσεως εὐρίσκομεν ἐκ τῆς ὀρικῆς συνθήκης, κατὰ τὴν ὁποίαν διὰ $h = 0$ εἶναι $p = p_0$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν

έξισωσιν (3), λαμβάνομεν $e^K = p_0$, όποτε ή έξισωσις (3) γράφεται

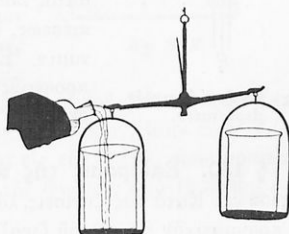
$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} \quad (4)$$

ή

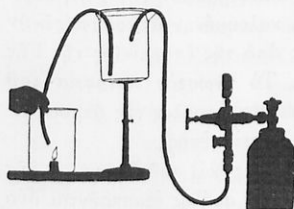
$$p = p_0 \cdot e^{-c \cdot h} \quad \text{ό.έ.δ.}$$

§ 178. Μετάγγις αερίων. Ός είδομεν, τὰ αέρια δέν σχηματίζουν επιφάνειαν, έπομένως, φερόμενα εις κενόν χώρον, καταλαμβάνουν αυτόν άμέσως. Εάν, όμως, τὰ φέρωμεν εις χώρον, εις τόν όποιον ευρίσκεται έν άλλο αέριον (τής αútης πίεσεως), τó αέριον διατηρεί τόν όγκον του, διαχωριζόμενον, ούτω, σαφώς από τού άλλου.

Όταν τὰ δύο αέρια έχουν διάφορον πυκνότητα, διατίθενται ούτως ώστε τó ελαφρότερον νά υπέρκειται τού βαυότερου. Η διάκρισις, όμως, τών δύο αερίων δέν διαρκεί επί πολύ, αλλά, λόγω τού φαινομένου τής διαχύσεως, έπέρχεται, βαθμηδόν, άνάμιξις αútων, ούτως ώστε, τελικώς, έκαστον τών δύο αερίων νά καταλαμβάνη όλον τόν διαθέσιμον χώρον. Τοúτο δυνάμεθα νά αποδείξωμεν δια τού έξης πειράματος: Έπεράνω ποτηρίου, εύρισκομένου εις τήν μίαν πλάστιγγα ισορροπούντος ζυγού (σχ. 239), κλίνομεν φιάλην, περιέχουσαν ποσότητα αιθέρος. Οί υπεράνω τής έλευθέρας επιφανείας τού ύγρου αιθέρος ευρίσκόμενοι άτμοί, ως έχοντες πυκνότητα μεγαλύτεραν τής πυκνότητος τού αέρος, εκρέουν εκ τής φιάλης καί συγκεντρώνται εις τόν πυθμένα τού ποτηρίου. Τοúτο πιστοποιούμεν καί εκ τής προκαλουμένης διαταραχής τής ισορροπίας τού ζυγού.



Σχ. 239. Οί άτμοί τού αιθέρος, ως είδικώς βαυότεροι τού αέρος, συγκεντρώνται εις τόν πυθμένα τού ποτηρίου.

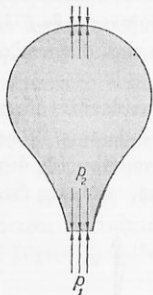


Σχ. 240. Μετάγγις διοξειδίου τού άνθρακος δια σίφωνος.

Η διαφορά τής πυκνότητος ενός αερίου ως προς τó περιβάλλον αέριον δύναται νά χρησιμοποιηθῇ δια τήν μετάγγισιν αútου εκ ενός δοχείου εις άλλο δια σίφωνος. Ούτω, εις τήν διάταξιν τού σχήματος 240 πληροούμεν έν ποτήριον δια διοξειδίου τού άνθρακος, τó όποιον, ως γνωστόν, είναι πυκνότερον τού αέρος. Τó αέριον τούτο δυνάμεθα νά μεταγγίσωμεν δια σίφωνος εις άλλο ποτήριον, χαμηλότερον τού πρώτου ευρισκόμενον, εις τó όποιον έχομεν τοποθετήσει μικρόν άνημμόν κηρίον. Όταν ή εις τó ποτήριον τούτο συγκεντρουμένη ποσότης τού διοξειδίου τού άνθρακος φθάση μέχρι τής φλογός τού κηρίου, τούτο σβέννυται.

§ 179. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅπως εἰς τὴν Ὑδροστατικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Ἀεροστατικήν ἡ *ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους* διατυπώται ὡς ἑξῆς: «Πᾶν σῶμα, ἐνδρισκόμενον ἐντὸς ἀερίου, ὑφίσταται ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀερίου».

Λόγῳ τῆς ἀνώσεως ταύτης ἀνέρχονται τὰ *ἀερόστατα*, ὅταν πληρωθοῦν δι' ἀερίου, εἰδικῶς ἐλαφροτέρου τοῦ ἀέρος (π.χ. δι' ὑδρογόνου, ἡλίου, φωταερίου). Εἰς τὰ *ἀνοικτὰ ἀερόστατα* (σχ. 241), ἐμφανίζεται ἀνυψωτικὴ δύναμις, καίτοι τὸ κάτω ἄκρον



Σχ. 241. Ἀνοικτὸν ἀερόστατον.

εἶναι ἀνοικτόν, διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους: Εἰς τὸ ἄκρον τοῦτο αἱ πιέσεις p_1 τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ p_2 τοῦ ἀερίου εἶναι, βεβαίως, ἴσαι. Εἰς τὴν κορυφήν, ὅμως, τοῦ ἀεροστάτου αὗται δὲν ἔχουν ἐλαττωθῇ ἐξ ἴσου (διὰ τοὺς αὐτοὺς, ἀκριβῶς, λόγους, οἱ ὁποῖοι ἀνεφέρθησαν εἰς τὴν ἐξήγησιν τοῦ πειράματος τοῦ σχήματος 238), με ἀποτέλεσμα νὰ ἐμφανισθῇ διαφορὰ πιέσεως, ἡ ὁποία καὶ προκαλεῖ τὴν ἀνυψωτικὴν δύναμιν. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει ὀπή, εἶναι προφανές ὅτι, λόγῳ τῆς διαφορᾶς ταύτης τῶν πιέσεων, τὸ ἀέριον θὰ ἐξέρχεται ἐξ αὐτῆς.

§ 180. Ἐπίδρασις τῆς ἀνώσεως ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ζυγίσεως. Κατὰ τὰς ζυγίσεις, λόγῳ, ἀκριβῶς, τῆς ἀνώσεως, δὲν λαμβάνομεν τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος. Καὶ κατὰ μὲν τὴν ζύγισιν διὰ ζυγοῦ ὑφίστανται ἄνωσιν τόσον τὸ ζυγιζόμενον σῶμα, ὅσον καὶ τὰ σταθμά, ἐπειδὴ, ὅμως, τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν δὲν εἶναι, συνήθως, ἴσα καὶ αἱ ἀνώσεις αὗται δὲν εἶναι ἴσαι καί, ὡς ἐκ τούτου, θὰ προκύπτουν σφάλματα (*), ἐκτὸς ἂν γίνουιν διορθώσεις. Εἰς τὴν ζύγισιν διὰ δυναμομέτρου τὸ σφάλμα εἶναι, ἀκριβῶς, ἴσον πρὸς τὴν ἀνωσιν.

§ 181. Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. Ὁ ἀήρ, ὁ περιβάλλων τὴν Γῆν, εὐρίσκεται, λόγῳ τοῦ πεδίου βαρύτητος, ὑπὸ πίεσιν, καλουμένην *ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν*, ἡ ὁποία μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς κατὰ τὸν βαρομετρικὸν τύπον (1) τῆς § 177. Τὸ γνωστὸν *πείραμα τοῦ Torricelli* (σχ. 242) ἀφ' ἐνὸς μὲν ἀποδεικνύει τὴν ὑπαρξιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπιτρέπει τὴν μέτρησιν αὐτῆς.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως καὶ τοῦ ὕψους h τῆς ὑδροαργυρικῆς στήλης εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς στήλης ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος B αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $\varepsilon \cdot S \cdot h$ (ἐνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ

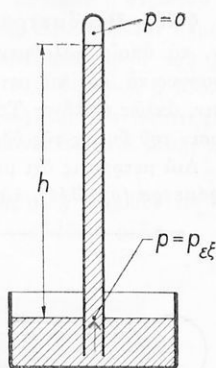
(*) Κατὰ τὴν ζύγισιν ὕδατος διὰ σταθμῶν ἐξ ὀρειχάλκου, τὸ ἐξ ἀνώσεως σφάλμα ἀνέρχεται εἰς $1/100$ περίπου.

υδροαργύρου) καὶ ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τῆς στήλης ὁ ὑπόλοιπος ὑδραργύρος, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $p_{εξ} \cdot S$ (καὶ τοῦτο διότι ἡ πίεσις εἰς τὴν κάτω βάσιν εἶναι, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκαίνωνόντων δοχείων, ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν $p_{εξ}$). Ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως τῆς στήλης οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται, ἀφοῦ ὁ ὑπεράνω αὐτῆς χώρος δὲν περιέχει ἀέρα, ἐπομένως εἰς τὸν χώρον αὐτὸν ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἀφοῦ ἡ ὑδροαργυρική στήλη ἰσορροπεῖ, ἔπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δυνάμεων θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἦτοι

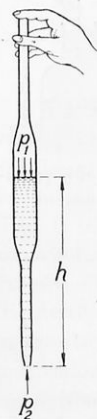
$$-\varepsilon \cdot S \cdot h + p_{εξ} \cdot S = 0$$

$$\eta \quad p_{εξ} = \varepsilon \cdot h.$$

Ἐὰν τὸ πείραμα γίνη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, τὸ ὕψος h τῆς ὑδροαργυρικής στήλης εἶναι, κατὰ μέσον ὄρον, ἴσον πρὸς 76 cm. Γνωστοῦ δὲ ὅτιος καὶ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑδροαργύρου ($\varepsilon = 13,6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$), εὐρίσκομεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ἴσην πρὸς $1,033 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$. Τὴν πίεσιν ταύτην, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὴν § 162, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα πίεσεως εἰς τὰς μετρήσεις τῆς Φυσικῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα **φυσικῆ ἀτμόσφαιρα (1 Atm)**.



Σχ. 242.



Σχ. 243.

§ 182. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως. Διὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως λειτουργοῦν διάφορα ὄργανα, μερικὰ τῶν ὁποίων καὶ περιγράφομεν.

Τὸ **σιφώνιον** (σχ. 243) εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου μεταφέρομεν μικρὰν ποσότητα ὑγροῦ ἐξ ἑνὸς δοχείου εἰς ἄλλο. Πρὸς τοῦτο, ἐμβαπτίζομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σιφωνίου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στόματος, τὸ ὁποῖον φέρομεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ἀναρροφῶμεν τὸν ἐντὸς τοῦ σιφωνίου ἀέρα. Οὕτω, ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σιφωνίου ἐλαττοῦται καὶ τὸ ὑγρὸν, λόγῳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, ἀνέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ. Ἀκολουθῶς, κλείομεν διὰ τοῦ δακτύλου τὸ ἄνω ἄκρον καὶ ἀνασύρομεν τὸ σιφώνιον ἐκ τοῦ ὑγροῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκρέει ὀλίγον ὑγρὸν καί, κατόπιν, ἡ ἐκροὴ παύει. Τώρα, ἡ πίεσις p_1 εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως p_2 εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν). Μεταξὺ τῶν δύο πιέσεων ἰσχύει ἡ σχέσις

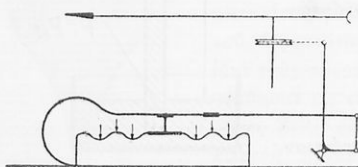
$$p_2 = p_1 + \varepsilon \cdot h.$$

Ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ λειτουργία τοῦ σταγανομέτρου. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς

ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῆς ἱατρικῆς σύριγγος, τῶν ἀναρροφητικῶν ὑδραντλιῶν (βλ. κατωτέρω) κ.λ.

§ 183. Βαρόμετρα. Τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν μετροῦμεν δι' ὀργάνων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **βαρόμετρα**. Τούτων ὑπάρχουν δύο τύποι, τὰ ὑδραργυρικὰ καὶ τὰ μεταλλικὰ. Τὰ **ὑδραργυρικὰ βαρόμετρα** εἶναι, κατὰ βάσιν, ἀπλῶς σωλῆνες Torricelli, ἐφωδιασμένοι μὲ κλίμακα διὰ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ὕψους τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης.

Διὰ μετρήσεις ὅχι μεγάλης ἀκριβοείας χρησιμοποιοῦνται τὰ **μεταλλικὰ βαρόμετρα** (σχ. 244), τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται, κατ' ἀρχήν, ἐξ ἀεροκένου κυ-



Σχ. 244. Μεταλλικὸν βαρόμετρον (ἀρχή).

λινδρικοῦ δοχείου, τοῦ ὁποῖου ἡ ἄνω βάσις ἀποτελεῖται ἐκ λεπτοῦ μεταλλίνου ἐλάσματος, φέροντος πτυχώσεις πρὸς αὐξησιν τῆς εὐκαμψίας του. Τὸ ἔλασμα τοῦτο, παραμορφούμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, μεταδίδει, διὰ καταλλήλου συστήματος μοχλῶν, τὴν μετακίνη-

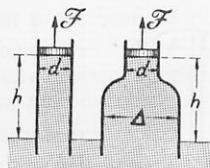
σιν εἰς δείκτην, ὁ ὁποῖος παρέχει, ἐνώπιον κλίμακος, τὴν ζητουμένην ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο σωλῆνες Torricelli, ὡς οἱ ὑποδεικνύμενοι εἰς τὸ σχῆμα, φράσσονται εἰς τὸ ἄνω αὐτῶν ἄκρον δι' ἄβαρῶν ἐμβόλων. Νὰ υπολογισθῇ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται, ἵνα ἕκαστον τῶν ἐμβόλων ἰσορροπῇ εἰς τὸ ὕψος h (Εἶναι $h < 76 \text{ cm}$).

$$(\text{ΑΠ: } F = \frac{\varepsilon \cdot h \cdot \pi d^2}{4}, \quad F = \frac{\varepsilon \cdot h \cdot \pi d^2}{4})$$

2. Σωλὴν Torricelli εἶναι ἐμβαπτισμένος ἐντὸς ὑδραργύρου κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑδραργύρου τμήμα αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς $76/2 = 38 \text{ cm}$. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ κατανομή τῆς πίεσεως κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ'

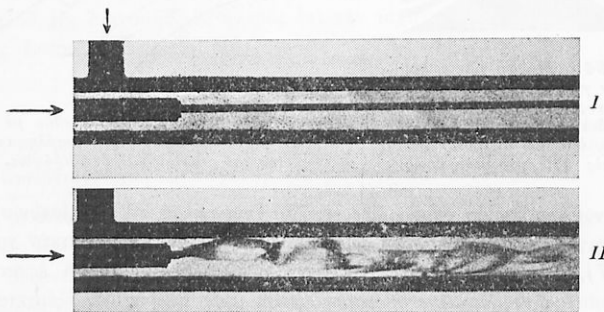
ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

§ 184. Γενικὰ περὶ ροῆς. Ὁ χῶρος, ἐντὸς τοῦ ὁποῖου κινεῖται ἓν ρευστόν, καλεῖται πεδῖον ροῆς. Τὸ πεδῖον ροῆς εἶναι ἐντελῶς καθωρισμένον, ὅταν δίδεται ἡ ταχύτης v , τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ρευστόν εἰς πᾶν σημεῖον x, y, z τοῦ χώρου ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμήν t . Κατὰ ταῦτα, εἰς πᾶν πε-

δίου ροής αντιστοιχεί ἐν ἀνυσματικόν πεδίων (§ 153), τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδῖον ταχυτήτων*.

Τὸ πεδῖον ροῆς εἰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι *μόνιμον* ἢ *στρωτὸν* καὶ εἰς ἄλλας *μὴ μόνιμον*, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ ταχύτης εἰς δεδομένον σημεῖον τοῦ χώρου παραμένῃ χρονικῶς ἀμετάβλητος ἢ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου. Ὡς θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὰ κατωτέρω (βλ. *τυρβώδης ροή*, § 195, β), ὑπάρχουν πολλαὶ περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ταχύτης δὲν διατηρεῖται ἐντελῶς σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται ὀλίγον, κυμαινομένη περὶ μέσην τινὰ τιμὴν (*ἡμιμόνιμος ροή*).

Τὸ σχῆμα 245, I παριστᾷ τὴν μορφήν στρωτῆς ροῆς ὑγροῦ ἐντὸς σωλῆνος, ἐνῶ τὸ σχῆμα 245, II παριστᾷ τὴν μορφήν τυρβώδους ροῆς.

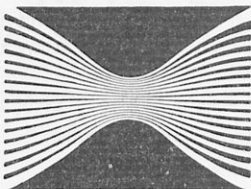


Σχ. 245. Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς στρωτῆς ροῆς (I) καὶ τῆς τυρβώδους ροῆς (II). Τὸ διὰ τοῦ κεντρικοῦ σωλῆνος εἰσαγόμενον ἔγχρωμον ὕδωρ σχηματίζει φλέβα, τῆς ὁποίας ἡ μορφή ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἶδους τῆς ροῆς. Τὸ διαγγές ὕδωρ εἰσάγεται διὰ τοῦ πλευρικοῦ σωλῆνος (ἄνω).

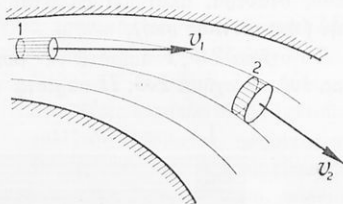
§ 185. Ἰδανικὰ καὶ πραγματικὰ ρευστά. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς κινήσεως ἑνὸς ρευστοῦ παρουσιάζει τόσας μαθηματικὰς δυσχερείας, ὥστε τὰ προβλήματα τῆς ροῆς εἰς ἐλαχίστας μόνον περιπτώσεις νὰ ἔχουν λυθῇ. Ἡ θεωρητικὴ μελέτη τῆς ροῆς ἀπλουστεύεται, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ρευστὸν εἶναι 1) τελείως ἀσυμπίεστον, 2) ἀπηλλαγμένον ἐσωτερικῆς τριβῆς καὶ 3) δὲν παρουσιάζει συνάφειαν μετὰ τὰ στερεὰ τοιχώματα, μετὰ τὰ ὁποῖα ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν. Ἐν ρευστὸν μετὰ τοιαύτας ιδιότητας καλεῖται *ἰδανικὸν ρευστόν*. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοῦτο, τὰ ἐν τῇ φύσει παρουσιαζόμενα ρευστά καλοῦνται *πραγματικά*. Εἰς τὰς προσεχεῖς παραγράφους θὰ ἐρευνήσωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς νόμους τῆς ροῆς τῶν ἰδανικῶν ρευστῶν καὶ κατόπιν τὴν ροὴν τῶν πραγματικῶν ρευστῶν δι' ὠρισμένας τεχνικῶς ἐνδιαφερούσας περιπτώσεις.

§ 186. Γενικά περὶ στρωτῆς ροῆς. Ὡς εἶδομεν, εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἰς δεδομένον σημεῖον ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς θέσεως (y, x, z) αὐτοῦ. *Ρευματικὴ γραμμὴ* καλεῖται ἡ τροχία, τὴν ὁποίαν

διαγράφει κατὰ τὴν κίνησιν του ἐν ὥρισμένον μόριον τοῦ ρευστοῦ. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος εἰς πᾶν σημεῖον πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένης ρευματικῆς γραμμῆς. Εἰς τὸ σχῆμα 246 ἀποδίδεται ἡ μορφή τῶν ρευματικῶν γραμμῶν, ὡς αὗται σχηματίζονται ἐντὸς σωλήνων εἰς σημεῖον στενώσεως.



Σχ. 246. Μορφή τῶν ρευματικῶν γραμμῶν εἰς στενωσιν σωλήνος. Ἡ εἰκὼν λαμβάνεται διὰ συσκευῆς μὲ σειρὰν ὀπῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐκρέει διανγῆς καὶ ἐγχρωμον ὕδωρ.



Σχ. 247. Εἰς σημεῖα τῆς φλεβὸς μὲ μικρὰν διατομὴν ἀντιστοιχεῖ μεγάλη ταχύτης τοῦ ρευστοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄν θεωρήσωμεν στοιχειῶδες τμήμα ἐπιφανείας καὶ ἐξ ἐκάστου σημείου τοῦ περιγράμματος αὐτῆς φέρωμεν τὴν ἀντίστοιχον ρευματικὴν γραμμὴν (σχ. 247), σχηματίζεται ἡ ὑγρὰ **φλέψ**. Ἀφοῦ ἡ ταχύτης εἶναι ἐφαπτομένη τῶν ρευματικῶν γραμμῶν, τὸ περιεχόμενον μιᾶς φλεβὸς δὲν ἐξέρχεται ποτὲ ἐξ αὐτῆς, οὔτε τὸ ρευστὸν γειτονικῆς φλεβὸς εἰσέρχεται ἐντὸς αὐτῆς· τὸ ρευστόν, δηλαδή, ῥεεῖ ἐντὸς μιᾶς φλεβὸς, ἀκριβῶς ὡς ἐὰν τὰ τοιχώματά της ἦσαν στερεά.

Παροχὴ Π μιᾶς φλεβὸς καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ὄγκου dV τοῦ ρευστοῦ, τοῦ διερχομένου διὰ τινος διατομῆς τῆς φλεβὸς ἐντὸς τοῦ χρόνου dt , διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἦτοι

$$\Pi = \frac{dV}{dt}$$

Υπολογισμὸς τῆς παροχῆς. Τὴν παροχὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς γινόμενον τῆς ταχύτητος v τῆς ροῆς ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν S τῆς διατομῆς τῆς φλεβὸς. Ἦτοι

$$\Pi = S \cdot v$$

(1)

Τὴν σχέσιν ταύτην λαμβάνομεν, ἐὰν τὸν ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διὰ τινος διατομῆς διερχόμενον ὄγκον dV τοῦ ρευστοῦ (γραμμοσκιασμένον εἰς τὸ σχῆμα 247) γράψωμεν ὡς γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς διατομῆς ἐπὶ τὸν δρόμον ds , τὸν ὁποῖον διανύει τὸ ρευστὸν ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου, ὅποτε θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = \frac{dV}{dt} = \frac{S \cdot ds}{dt} = S \cdot v.$$

§ 187. Ροή ιδανικῶν ρευστῶν. Διὰ τὴν ροὴν μιᾶς φλεβὸς ιδανικοῦ ρευστοῦ ἰσχύουν οἱ ἑξῆς δύο νόμοι :

α) **Νόμος τῆς συνεχείας :** « Ἡ παροχὴ μιᾶς φλεβὸς εἶναι σταθερὰ δι' οἰαδήποτε διατομὴν αὐτῆς ».

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου τούτου θεωρήσωμεν δύο διατομὰς 1 καὶ 2 μιᾶς φλεβὸς (σχ. 247). Ἐφ' ὅσον τὸ ρευστὸν θεωρεῖται ἀσυνπίεστον καὶ ἡ ροὴ μόνιμος, θὰ πρέπει, ἐντὸς δεδομένου χρόνου, νὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν δύο διατομῶν ὁ αὐτὸς ὄγκος τοῦ ρευστοῦ. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἡ παροχὴ ὑπολογίζεται ὡς γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς τῆς φλεβὸς ἐπὶ τὴν ταχύτητα ροῆς, ὁ νόμος τῆς συνεχείας ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

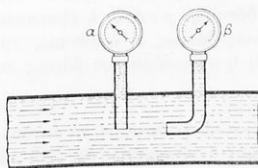
Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι εἰς μικρὰν διατομὴν τῆς φλεβὸς ἀντιστοιχεῖ μεγάλη ταχύτης τοῦ ρευστοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

β) **Νόμος τοῦ Bernoulli.** Ἐκτὸς τοῦ νόμου τῆς συνεχείας, τοῦ παρέχοντος τὴν ταχύτητα εἰς πᾶν σημεῖον μιᾶς φλεβὸς, εἰς τὴν ροὴν τῶν ιδανικῶν ρευστῶν ἰσχύει καὶ ὁ **νόμος τοῦ Bernoulli**, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν πίεσιν κατὰ μῆκος τῆς φλεβὸς. Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν πίεσιν, ϱ τὴν πυκνότητα, v τὴν ταχύτητα, ε τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ h τὸ ὑψόμετρον, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$p + \varrho \cdot \frac{v^2}{2} + \varepsilon \cdot h = \text{σταθ.}$	Νόμος τοῦ Bernoulli (1)
--	--

Εἰς τὸν ἄνω τύπον τὸ p παριστᾷ τὴν πίεσιν, ὡς αὕτη μετρεῖται διὰ μανομέτρου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅμως, τὸ ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ ἄκρον νὰ μὴ μεταβάλλῃ τὴν ροὴν (σχ. 248, α) καὶ τὴν ὁποίαν εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ὀνομάζωμεν **στατικὴν πίεσιν**. Τὸ μονώνυμον $\varrho \cdot v^2/2$ καλοῦμεν **δυναμικὴν πίεσιν**, τὸ δὲ μονώνυμον $\varepsilon \cdot h$ **ὑψομετρικὴν πίεσιν**. Κατόπιν τῶν ὁρισμῶν αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν νόμον τοῦ Bernoulli ὡς ἑξῆς :

« Κατὰ μῆκος μιᾶς φλεβὸς, τὸ ἄθροισμα τῆς στατικῆς πίεσεως, τῆς



Σχ. 248. Τὸ μανόμετρον α δὲν μεταβάλλει τὴν ροὴν καί, συνεπῶς, μετρεῖ τὴν στατικὴν πίεσιν. Τὸ μανόμετρον β ἐπηρεάζει τὴν ροὴν καὶ μετρεῖ διάφορον πίεσιν (βλ. κατωτέρω, § 190).

δυναμικῆς πίεσεως καὶ τῆς ὑψομετρικῆς πίεσεως εἶναι σταθερόν».

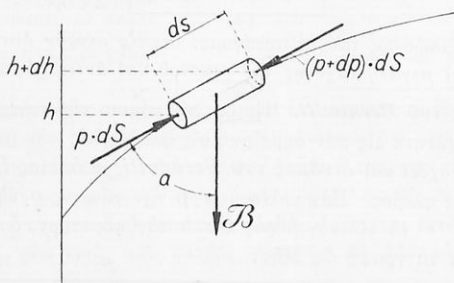
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ φλέψ εἶναι ὀριζο-
ντία, τὸ ὑψόμετρον h παραμένει σταθερόν κατὰ τὴν ροὴν καὶ ἡ ἐξίσωσις
(1) ἀπλουστεύεται εἰς τὴν ἐξῆς :

$p + \rho \cdot \frac{v^2}{2} = \text{σταθ.}$	$\text{Νόμος τοῦ Bernoulli δι' ὀριζοντίαν φλέβα}$
---	---

(2)

“Ὅπως εἶναι δυνατόν ν' ἀποδειχθῇ, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἰσοδυναμεῖ
μὲ τὴν πρότασιν ὅτι ἡ ὀλικὴ ἐνέργεια δεδομένης ποσότητος τοῦ ρευστοῦ
— δηλ., ἡ ἐνέργεια, ἡ προερχομένη ἐκ τῆς πίεσεως, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια καὶ
ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, λόγῳ τοῦ πεδίου βαρύτητος — παραμένει σταθερὰ
καθ' ὅλον τὸ μήκος τῆς φλεβός.

Ἀπόδειξις τῆς ἐξισώσεως (1). Θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν στοιχειώδους τμήμα-
τος τοῦ ρευστοῦ, ἔχοντος σχῆμα κυλίνδρου μὲ ὕψος ds (σχ. 249) καὶ ἐμβαδὸν βάρ-



Σχ. 249.

σεως dS καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Ἐπὶ τοῦ τμήματος
τούτου τοῦ ρευστοῦ ἐξασκοῦνται, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, τρεῖς δυνάμεις :
1) ἡ δύναμις $p \cdot dS$, ἡ ἐξασκουμένη ἐκ τῆς πίεσεως τοῦ περιβάλλοντος ὑγροῦ ἐπὶ
τῆς μιᾶς βάσεως, 2) ἡ δύναμις $(p + dp) \cdot dS$, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης βάσεως
καὶ 3) ἡ συνιστασά τοῦ βάρους κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς

$$\text{εἰδικὸν βάρος} \cdot \text{ὄγκος} \cdot \text{συν} \alpha = \varepsilon \cdot dS \cdot ds \cdot \text{συν} \alpha.$$

Τὸ $\text{συν} \alpha$ εἶναι δυνατόν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ὕψους ds τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ὑψο-
μετρικῆς διαφορᾶς dh τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ἦτοι $\text{συν} \alpha = dh/ds$.

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς

$$\mu\acute{\alpha}\varsigma \alpha \cdot \text{ἐπιτάχυνσις} = \text{δύναμις},$$

ἐφαρμοζόμενος ἐν προκειμένῳ, μᾶς δίδει τὴν σχέσιν

$$dS \cdot ds \cdot \rho \cdot \frac{dv}{dt} = p \cdot dS - (p + dp) \cdot dS - \varepsilon \cdot dS \cdot ds \cdot \frac{dh}{ds}.$$

ἢ

$$ds \cdot \rho \cdot \frac{dv}{dt} = -dp - \varepsilon \cdot dh.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναιται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἐξῆς :

$$\varrho \cdot v \cdot dv + dp + \varepsilon \cdot dh = 0.$$

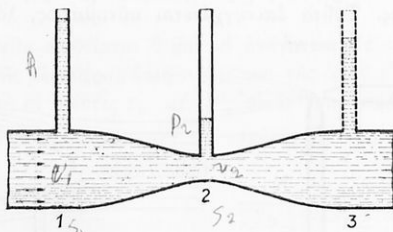
Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\varrho \cdot \frac{v^2}{2} + p + \varepsilon \cdot h = \text{σταθ.} \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

§ 188. Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli. Ἐὰν παρακολουθήσωμεν τὴν στατικὴν πίεσιν κατὰ μῆκος μιᾶς φλεβός, θὰ εὕρωμεν ὅτι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, εἰς σημεῖα μὲν μεγάλης ταχύτητος αὕτη εἶναι ἠλαττωμένη, εἰς σημεῖα δὲ μικρᾶς ταχύτητος ἠϋξημένη. Ὁ συλλογισμὸς οὗτος, ἐφαρμοζόμενος εἰς τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 246, δεικνύει ὅτι εἰς τὴν στένωσιν τοῦ σωλῆνος, εἰς τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας, ἡ ταχύτης εἶναι μεγάλη, ἡ πίεσις θὰ εἶναι μικρά.

Τὴν ἐλάττωσιν τῆς πίεσεως εἰς σημεῖα μεγάλης ταχύτητος ἐκμεταλλεύομεθα εἰς πολλὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς. Ὡς πρώτην ἐφαρμογὴν ἀναφέρομεν

τὸ **βεντουρίμετρον**. Τοῦτο εἶναι ὄργανον, χρησιμοποιούμενον διὰ τὴν μέτρησιν τῆς παροχῆς ἑνὸς σωλῆνος. Ἀποτελεῖται ἐξ ὀριζοντίου σωλῆνος, φέροντος στένωσιν (σχ. 250) καὶ εἰς τὸν ὁποῖον, διὰ καταλλήλου διατάξεως, μετροῦμεν τὰς στατικὰς πιέσεις εἰς δύο διατομὰς 1 καὶ 2 διαφορετικοῦ ἔμβαδου. Ἐὰν γράψωμεν τὸν νόμον τῆς



Σχ. 250. Βεντουρίμετρον. Ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς πίεσεως εἰς τὰ σημεῖα 1 καὶ 2 εὐρίσκεται ἡ παροχή.

συνχείας καὶ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ τὰς δύο ταύτας διατομὰς, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

καὶ

$$p_1 + \varrho \cdot \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \varrho \cdot \frac{v_2^2}{2}.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_1 εἰς τὴν διατομὴν 1 τὴν τιμὴν

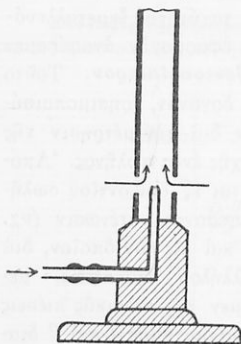
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Ἐὰν, λοιπόν, μετρήσωμεν τὴν διαφορὰν $p_1 - p_2$ τῶν στατικῶν πιέσεων καὶ γνωρίζωμεν τὴν πυκνότητα ϱ τοῦ ὑγροῦ καὶ τὰ ἔμβαδὰ S_1 καὶ S_2 τῶν

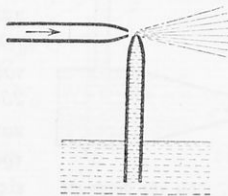
διατομῶν 1 καὶ 2, εὐρίσκομεν διὰ τοῦ ἄνω τύπου τὴν ταχύτητα ροῆς v , καί, ἐκ ταύτης, τὴν παροχὴν.

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν θέσωμεν ἐν μανόμετρον εἰς τὴν θέσιν β', τοῦτο θὰ δεικνύη τὴν αὐτὴν πίεσιν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ μανόμετρον, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὴν θέσιν 1. Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι, κατὰ τὴν ροὴν ἐνδὸς ἰδανικοῦ ρευστοῦ ἐντὸς σωληνῶς σταθεροῦς διατομῆς, ἡ πίεσις ἐκατέρωθεν μιᾶς στενώσεως εἶναι ἡ αὐτή. Τοῦτο, ὅμως, δὲν ἰσχύει κατὰ τὴν ροὴν τῶν πραγματικῶν ρευστῶν, εἰς τὰ ὁποῖα, ὡς θὰ ἴδωμεν, λόγῳ τῆς «ἐσωτερικῆς τριβῆς», ἡ πίεσις μετὰ τὴν στένωσιν εἶναι μικροτέρα τῆς πίεσεως πρὸ τῆς στενώσεως, ὅπως ἀκριβῶς δεικνύουν καὶ τὰ σχήματα 250 καὶ 263.

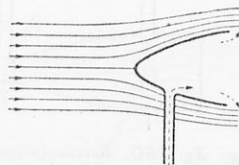
Ἄλλην ἐφαρμογὴν τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli ἔχομεν εἰς τὸν **λύχνον** Bunsen (σχ. 251), ὁ ὁποῖος χρησιμεύει διὰ τὴν καλὴν καύσιν τοῦ φωταερίου καὶ τὴν παραγωγὴν φλογὸς μεγάλης θερμοκρασίας. Πρὸς τοῦτο, πρέπει τὸ φωταέριον νὰ ἀναμειγνύεται μετὰ τοῦ ἀέρος πρὸ τῆς καύσεως. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται αὐτομάτως, λόγῳ



Σχ. 251. Λύχνος τοῦ Bunsen.



Σχ. 252. Ψεκαστὴρ (ἀρχή).



Σχ. 253. Ἐξαεριστὴρ πλοίων.

τῆς κατασκευῆς τοῦ λύχνου, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἑξῆς: Κεντρικὸς σωληνίσκος, καταλήγων εἰς μικρὰν ὀπὴν, περιβάλλεται διὰ σωληνῶς, μεγαλύτερας διαμέτρου, φέροντος εἰς τὰ πλάγια δύο ὀπὰς. Τὸ φωταέριον ἐξέρχεται διὰ τοῦ στομίου τοῦ κεντρικοῦ σωληνίσκου μὲ μεγάλην ταχύτητα. Ἀκολούθως, ῥεεῖ εἰς τὸν κύριον σωλῆνα μὲ μικροτέραν ταχύτητα, λόγῳ τῆς μεγαλύτερας αὐτοῦ διατομῆς. Ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ κυρίου σωλῆνος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν, ὁπότε ἡ πίεσις εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σωληνίσκου εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (*). Λόγῳ τῆς οὕτω δημιουργουμένης ὑποπίεσεως, ὁ ἔξω ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ εἰσρῥεεῖ διὰ τῶν πλαγίων ὀπῶν καὶ ἀναμειγνύεται μετὰ τοῦ φωταερίου.

(*) Ὅπως ἐλέγχθη, ἡδη, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἰσχύει διὰ τὰ ἰδανικά ρευστά. Συνεπῶς, εἰς τὰ ἀέρια δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ ἰσχύη, ἀφοῦ ταῦτα εἶναι ἐξόχως συμπιεστά. Ἐν τούτοις, ὅπως εὐρίσκεται, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἰσχύει καὶ εἰς αὐτὰ μὲ ἀρκετὰ μεγάλην προσέγγισιν, ἀρκεῖ αἱ ταχύτητες ροῆς νὰ μὴ εἶναι πολὺ μεγάλαι.

Ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ λειτουργία τοῦ *ψεκαστήρος* (σχ. 252), τῶν *ἐξαεριστήρων τῶν πλοίων* (σχ. 253), τῆς ἀντλίας διὰ φλεβὸς ὕδατος (§ 216, σχ. 318), κ.λ.

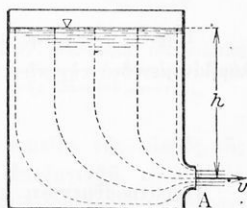
§ 189. Θεώρημα τοῦ Torricelli: «Υγρὸν, ῥέον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος δι' ὁπῆς, εὐρισκομένης εἰς βάθος h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας, ἔχει ταχύτητα, ἴσην πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν θὰ ἐλάμβανεν, ἐὰν ἐπιπτεν ἐλευθέρως ἀπὸ τοῦ ὕψους τούτου».

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ὁπὴ ἔχει ἐμβαδὸν πολὺ μικρόν, ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας (σχ. 254), καὶ τοῦτο διότι θέλομεν τὸ ὕγρὸν τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας νὰ διατηρῇ, κατὰ τὴν ροήν, ταχύτητα, ἴσην πρὸς μηδέν. Ὁ νόμος τοῦ Bernoulli δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$p_0 + \varrho \cdot \frac{v_0^2}{2} + \varepsilon \cdot h_0 = p_A + \varrho \cdot \frac{v_A^2}{2} + \varepsilon \cdot h_A$$

ἐνθα οἱ δεῖκται θ καὶ A ἀνάγονται εἰς σημεῖα τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας καὶ τῆς ὁπῆς. Ἐπειδὴ αἱ πιέσεις p_0 καὶ p_A εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν καὶ ἡ ταχύτης v_0 ἴση πρὸς μηδέν, ἰσχύει δὲ καὶ ἡ σχέση $\varepsilon = \varrho \cdot g$, λαμβάνομεν

$$v_A = \sqrt{2g \cdot (h_0 - h_A)}$$

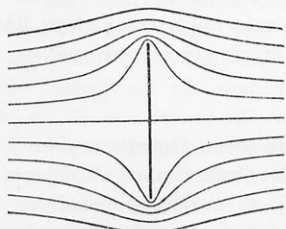


Σχ. 254.

ἢ

$$v_A = \sqrt{2g \cdot h}$$

§ 190. Ροὴ περὶ πλάκα, κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς - Σημεῖα ἀνακοπῆς. Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ διερεύνησις τῆς ροῆς περὶ ἐπίπεδον πλάκα, καθέτως τεθεισαν πρὸς τὸ ρεῖμα (σχ. 255). Ἡ μορφή τῶν ρευματικῶν γραμμῶν δεικνύει ὅτι, πλησίον τῶν ἀκμῶν τῆς πλακὸς, ἡ ταχύτης εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐπειδὴ δὲ ἐκεῖ καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς διευσθύνσεως τῆς ταχύτητος εἶναι ὁμοίως μεγάλη, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχῃ ἐξαιρετικῶς μεγάλας τιμὰς. Εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς καὶ εἰς ἀμφοτέρας αὐτῆς τὰς πλευρὰς ὑπάρχουν σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι,



Σχ. 255. Ροὴ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ ἐπίπεδον πλάκα.

εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν, τὸ ἄνυσμα τῆς ταχύτητος εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ εἶχε διεύθυνσιν εἴτε πρὸς τὰ ἄνω, εἴτε πρὸς τὰ κάτω, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐκεῖ

ἡ ροὴ εἶναι συμμετρικὴ. Σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, καλοῦνται *σημεῖα ἀνακοπῆς*.

Τὴν στατικὴν πίεσιν p_A εἰς σημεῖον ἀνακοπῆς ὑπολογίζομεν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ φλέβα, διερχομένην ἀπείρως πλησίον τοῦ σημείου τούτου. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν δύο σημεῖα τῆς φλεβός· τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἓν ἄλλο σημεῖον, εὐρισκόμενον εἰς τόσον μεγάλην ἀπὸ τῆς πλακὸς ἀπόστασιν, ὥστε ἐκεῖ ἡ πίεσις p_∞ καὶ ἡ ταχύτης v_∞ νὰ μὴ ἔχουν μεταβληθῇ ἐκ τῆς παρουσίας τῆς πλακὸς, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἑξίσωσιν

$$p_\infty + \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2} = p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης v_A εἰς τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, λαμβάνομεν διὰ τὴν πίεσιν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τὴν τιμὴν

$$p_A = p_\infty + \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2}. \quad (1)$$

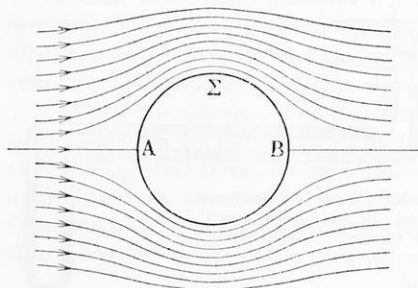
Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς ἡ πίεσις λαμβάνει τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν.

Ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς εἰκόνης τῆς ροῆς ἔπεται ὅτι αἱ πιέσεις εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς πλακὸς θὰ εἶναι ἴσαι καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη δύναμις θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν: Ἡ πλάξι, δηλ., δὲν ὑφίσταται ἀντίστασιν ἐντὸς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ. Τὸ παράδοξον τοῦτο πόρισμα, καθὼς καὶ αἱ αἰτούμεναι ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ροῆς ἐξαιρετικῶς μεγάλαι ἐπιταχύνσεις εἰς ὠρισμένα σημεῖα μᾶς ἄγουν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ θεωρία τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ πλάκα δὲν δίδει ἀποτελέσματα, χρησιμοποίησιμα διὰ τὰ πραγματικὰ ρευστά. Τὴν πραγματικὴν ροὴν περὶ πλάκα θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἑπομένην παράγραφον.

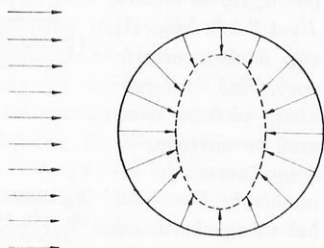
Ἐάν, ἐντὸς τῆς ροῆς, εἰσαγάγωμεν σωλῆνα, τοῦ ὁποῖου τὸ στόμιον νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς (σχ. 248, β), θὰ σχηματισθῇ πρὸ τοῦ στομίου σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος πίεσις θὰ εἶναι, κατὰ τὸν τύπον (1), ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς στατικῆς πιέσεως p_∞ καὶ τῆς δυναμικῆς πιέσεως $\rho \cdot v_\infty^2/2$.

§ 191. Ροὴ περὶ σφαῖραν. Ἄλλη ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις εἶναι ἡ ροὴ περὶ σφαῖραν (σχ. 256): Ἐάν παρακολουθήσωμεν μίαν οἰανδήποτε φλέβα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ διατομὴ αὐτῆς παρουσιάζει διακυμάνσεις. Οὕτω, ἡ φλέβη, ἡ διερχομένη πλησίον τοῦ σημείου Σ, ἔχει εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο διατομὴν μικροτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ἔχει μακρὰν τῆς σφαίρας· εἰς τὰ σημεῖα, δηλ., εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ροὴ δὲν ἔχει ἐπηρεασθῇ ἐκ τῆς παρουσίας αὐτῆς καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης ἔστω v_∞ . Κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας, ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον Σ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτη-

τος v_∞ καί, μάλιστα, θά ἔχῃ τήν μεγίστην τιμήν (*). Εἰς τὰ σημεῖα A, B ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, δηλ., τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι σημεῖα ἀνακοπῆς.



Σχ. 256. Ροή ἰδανικοῦ ρευστοῦ περί σφαῖραν.



Σχ. 257. Κατανομή τῆς πίεσεως περί σφαῖραν, εὐρισκομένην ἐντὸς ροῆς ἰδανικοῦ ρευστοῦ.

Ἐκ τῆς ταχύτητος τοῦ ρευστοῦ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς φλεβός, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Σ , εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli, ἡ πίεσις. Εἰς τὸ σχῆμα 257 ἀποδίδεται γραφικῶς ἡ κατανομή τῆς πίεσεως περί τὴν σφαῖραν διὰ τμημάτων εὐθείας γραμμῆς, φερομένων ἐξ ὧλων τῶν σημείων αὐτῆς πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἀναλόγων πρὸς τὴν πίεσιν. Ἡ συμμετρία τῆς σχηματιζομένης καμπύλης δεικνύει ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας, εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἄρα, σφαῖρα, εὐρισκομένη ἐντὸς ροῆς ἰδανικοῦ ρευστοῦ, οὐδεμίαν ἀντίστασιν ὑφίσταται. Τὸ θεωρητικόν τοῦτο συμπέρασμα, τὸ ὅποιον ἀνέυρομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πλακός, εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται, κοινὸν τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περί σῶμα οἷα σ δ ἦ πο τε μορφῆς. Τοῦτο, βεβαίως, δὲν παρατηρεῖται εἰς τὴν πραγματικότητα, διότι, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἡ πίεσις εἰς τὸ ὀπισθεν τμήμα τοῦ σώματος παρουσιάζεται πάντοτε μικρότερα τῆς πίεσεως εἰς τὸ ἔμπροσθεν.

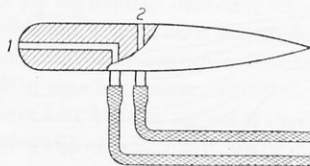
Ἐξ ὧλων τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ θεωρία τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ δίδει, συχνά, ἀποτελέσματα, τελείως ἀπέχοντα τῆς πραγματικότητος. Αἱ διαφοραὶ αὗται ὀφείλονται, κυρίως, εἰς τὸ φαινόμενον τῆς συναφείας μεταξὺ τῶν ρευστῶν καὶ τῶν στερεῶν, μὲ τὰ ὅποια ταῦτα εὐρίσκονται εἰς ἐπαφήν, ὡς καὶ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβήν. Παρὰ τὰς διαφοράς, ὅμως, ταύτας, ἡ διερεῦνησις τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ δὲν εἶναι ἐντελῶς ἄσκοπος, διότι εἰς ὥρισμένας περιπτώσεις (βλ. §§ 197, 198 καὶ 206), παρέχει ἀποτελέσματα κατὰ προσέγγισιν ἐπαληθευόμενα.

§ 192. Μέτρησις ταχύτητος διὰ τοῦ σωλῆνος Pitot. Τὴν διαφορὰν μεταξὺ στατικῆς καὶ δυναμικῆς πίεσεως ἐκμεταλλεύομεθα εἰς τὸν σω-

(*) Ὅπως εὐ. ἴσκεται δι' ὑπολογισμοῦ, αὕτη ἴσεται μὲ $3/2 \cdot v_\infty$.

λήνα Pitot διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τῶν ἀεροπλάνων. Οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ κυλινδρικοῦ σώματος, «ἀεροδυναμικοῦ» σχήματος (σχ. 258), φέροντος εἰς τὰ σημεία

1 καὶ 2 δύο ὁπίας, εἰς τὰς ὁποίας καταλήγουν, διὰ σωληνώσεως, τὰ ἄκρα ἀνοικτοῦ μανομέτρου. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ τὰ σημεία 1 καὶ 2, ἔχομεν τὴν σχέσιν



Σχ. 258. Σωλὴν Pitot. Ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς πίεσεως εἰς τὰ σημεία 1 καὶ 2 εὐρίσκεται ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου.

$$p_1 = p_2 + \rho \cdot \frac{v^2}{2}.$$

(Ἡ ταχύτης v_1 εἰς τὸ σημεῖον 1 εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σημεῖον ἀνακοπῆς· ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος). Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v_2 τὴν τιμὴν

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}.$$

Ἡ μετρούμενη ταχύτης v_2 εἶναι κατὰ τι μεγαλυτέρα τῆς ζητούμενης ταχύτητος v_∞ , διότι ἡ παρουσία τοῦ ὄργανου προκαλεῖ στένωσιν τῶν φλεβῶν εἰς τὸ σημεῖον 2. Ἔνεκα τούτου, οἱ σωλῆνες Pitot πρέπει νὰ βαθμολογούνται οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν τὴν ταχύτητα v_∞ .

§ 193. Ροὴ πραγματικῶν ρευστῶν. Εἰς τὰ κεφάλαια τῆς Ὑδροστατικῆς καὶ τῆς Ἀεροστατικῆς εἶδομεν ὅτι εἰς τὰ ἀκίνητοῦντα ρευστὰ ἡ ἐφ' οἰουδήποτε τμήματος ἐπιφανείας ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπ' αὐτὸ καί, συνεπῶς, δὲν παρουσιάζονται ἐντὸς αὐτοῦ διατμητικαὶ τάσεις (§ 138). Τὸ αὐτὸ δὲν ἰσχύει, πλέον, διὰ τὰ κινούμενα πραγματικὰ ρευστὰ. Εἰς ταῦτα ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι μεταξὺ στρωμάτων διαφόρου ταχύτητος ἐξασκοῦνται δυνάμεις, πλάγαι ὡς πρὸς τὸ θεωρούμενον τμήμα ἐπιφανείας, δυνάμεις, δηλ., μὲ συνιστώσαν παραλλήλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ διατμητικὴ, αὕτη, δύναμις, ἔχει τοιαύτην φορὰν, ὥστε νὰ τείνῃ νὰ ἐξισώσῃ τὰς ταχύτητας τῶν στρωμάτων, δι' ἐπιταχύνσεως τοῦ βραδυτέρου στρώματος καὶ ἐπιβραδύνσεως τοῦ ταχύτερου. Κατὰ τὴν διερευνήσιν, λοιπόν, τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἓν ὠρισμένον τμήμα πραγματικοῦ ρευστοῦ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐξασκοῦν ἐπ' αὐτοῦ τὰ γειτονικὰ τμήματα τοῦ ρευστοῦ, θὰ πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὅχι μόνον ἡ πίεσις—ἡ ὁποία παρέχει τὰς καθέτους πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν δυνάμεις—, ἀλλὰ καὶ ἡ διατμητικὴ τάσις.

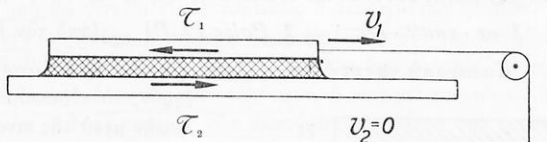
Ἄλλο φαινόμενον, ἐπεμβαῖνον εἰς τὰ ζητήματα τῆς ροῆς, εἶναι ἡ *συνάφεια* μεταξὺ τῶν ρευστῶν καὶ τῶν στερεῶν σωμάτων, μὲ τὰ ὁποία τὰ πρῶτα

εϋρίσκονται εις ἐπαφήν. Λόγω τῆς συναφείας, τὸ ρευστὸν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἔχει πάντοτε τὴν ταχύτητα τοῦ στερεοῦ.

Τρίτον, τέλος, χαρακτηριστικὸν τῶν πραγματικῶν ρευστῶν εἶναι ἡ συμπεριποίησις, ἡ ὁποία, ὅμως, δὲν ἐπηρεάζει τὴν ροὴν τῶν ὑγρῶν, ἐνῶ εἰς τὰ ἀέρια ἐμφανεῖς ἀποκλίσεις παρουσιάζονται μόνον εἰς τὰς πολὺν μεγάλας ταχύτητας - ταχύτητας δηλ., αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν τὴν ταχύτητα τοῦ ἥχου.

Αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι ἰδιότητες τῶν πραγματικῶν ρευστῶν προκαλοῦν ὠρισμένα νέα φαινόμενα, τὰ ὁποῖα, βεβαίως, δὲν παρουσιάζονται εἰς τὰ ἰδανικὰ ρευστά. Οὕτω, διάφορα σώματα, τιθέμενα ἐντὸς ρεύματος πραγματικοῦ ρευστοῦ, τείνουν νὰ παρασυρθοῦν ὑπ' αὐτοῦ - παρουσιάζουν, δηλ., ἀντίστασιν. Ἄλλο χαρακτηριστικὸν φαινόμενον τῶν πραγματικῶν ρευστῶν εἶναι ἡ δημιουργία στροβίλων κατὰ τὴν τυρβώδη ροὴν κ.λ.

§ 194. Έσωτερική τριβή. Διὰ νὰ προκαλέσωμεν ροὴν ἐνὸς ὑγροῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν διάφορα στρώματα νὰ κινοῦνται μὲ διαφόρους ταχύτητας, καταφεύγομεν εἰς τὸ ἐξῆς πείραμα: Λαμβάνομεν δύο ἐπιπέδους καὶ παραλλήλους πλάκας, εὐρισκομένας εἰς ἀπόστασιν Z , μεταξὺ τῶν ὁποίων θέτομεν ποσότητά τινα ἐνὸς ὑγροῦ (σχ. 259).



Σχ. 259. Διάταξις πρὸς ἐπίδειξιν τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς ἐνὸς ὑγροῦ (ἀρχή).

Κρατοῦντες τὴν

κάτω πλάκα ἀκίνητον ($v_2 = 0$), κινούμεν τὴν ἄνω μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_1 . Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ὅλα τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ, τὰ εὑρισκόμενα εἰς ἐπαφήν μετὰ τῆς ἄνω πλακός, θὰ κινοῦνται, λόγῳ συναφείας, μὲ τὴν ταχύτητα v_1 , ἐνῶ ὅλα τὰ μόρια, τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν κάτω πλάκα, θὰ παραμένουν ἀκίνητα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μετὰξὺ τῶν δύο πλακῶν, δημιουργοῦνται στρώματα, κινούμενα μὲ διαφόρους ταχύτητας, κυμαινόμενας μετὰξὺ τῆς τιμῆς μηδέν καὶ τῆς τιμῆς v_1 . Διὰ νὰ κινήται ἡ ἄνω πλάξ κατὰ τὸν περιγραφέντα τρόπον, πρέπει νὰ ἐξασκῶμεν ἐπ' αὐτῆς μίαν δύναμιν (εἰς τὸ σχῆμα 259 δι' ἐξαρτήσεως ἐνὸς βάρους). Ἐπειδὴ, ὅμως, ἡ ταχύτης v_1 τῆς πλακὸς διατηρεῖται σταθερά, συνάγομεν ὅτι καὶ τὸ ὑγρὸν θὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τῆς πλακὸς μίαν δύναμιν $\mathcal{T}_1$ ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν προκαλοῦσαν τὴν κίνησιν. Ἡ δύναμις αὕτη εὑρίσκεται ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς κινουμένης πλακός, ἀνάλογος τῆς ταχύτητος v_1 αὐτῆς, ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως Z καί, τέλος, ἀνάλογος ἐνὸς συντελεστοῦ η (συντελεστῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς), χαρακτηριστικοῦ τοῦ ὑγροῦ (*). Ἦτοι εἶναι

(*) Ὁ συντελεστῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς ἐξαρτᾶται πολὺ ἐκ τῆς θερμοκρασίας, ἐλαττούμενος, ὥς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὅταν αὕτη αὐξάνεται.

$$T_1 = \eta \cdot S \cdot \frac{v_1}{Z} \quad (1)$$

Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία καλεῖται **ἑσωτερικὴ τριβὴ**, ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κινουμένης πλακὸς ὑπὸ τῆς ἀκινήτου τοιαύτης διὰ μέσον τοῦ ὕγρου. Κατὰ τὸ ἀξίωμα «δραῖσις = ἀντίδρασις», καὶ ἡ κινουμένη πλάξ ἐξασκεῖ ἴσην δύναμιν T_2 ἐπὶ τῆς ἀκινήτου, τείνουσαν νὰ παρασύρῃ αὐτήν.

Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἄνω πλακὸς, ἡ δύναμις τῆς ἑσωτερικῆς τριβῆς παρᾶγει ἔργον, τὸ ὁποῖον, μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα, προκαλεῖ θέρμανσιν τοῦ ὕγρου.

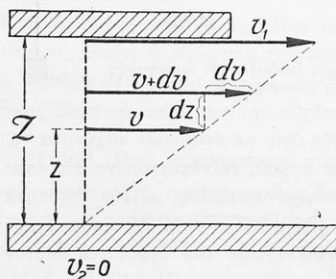
Διαστάσεις καὶ μονάδες τοῦ συντελεστοῦ ἑσωτερικῆς τριβῆς. Ὁ συντελεστὴς ἑσωτερικῆς τριβῆς ἔχει διαστάσεις

$$[\eta] = \frac{[F] \cdot [Z]}{[S] \cdot [v]}$$

Ἡ μονὰς συντελεστοῦ ἑσωτερικῆς τριβῆς εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εἶναι τὸ $1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} = 1 \text{ Poise (1 P)}$ (ἀπὸ τὸν Poiseuille) (*).

Κατανομὴ ταχυτήτων. Ὅπως εἴπομεν ἥδη, λόγῳ τῆς συναφείας, τὸ ὕγρον, τὸ εὐρισκόμενον εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μετὰ τῆς κινουμένης πλακὸς, κινεῖται καὶ αὐτὸ μὲ τὴν ταχύτητα v_1 . Κατ' ἀναλογίαν, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κάτω πλακὸς ἡ ταχύτης τοῦ ὕγρου εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, αἱ ταχύτητες αὐξάνουν μετὰ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς κάτω πλακὸς. Ἄν παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι γραμμικὴ (σχ. 260), λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὁμοιότητος τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου τριγώνου τὴν σχέσιν

$$\frac{v_1}{Z} = \frac{dv}{dz}$$



Σχ. 260. Ἐντὸς τοῦ στρώματος τοῦ ὕγρου, τοῦ εὐρισκόμενου μεταξὺ τῶν πλακῶν τοῦ προηγούμενου σχήματος, δεχόμεθα ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι γραμμικὴ.

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

(*) Εἰς τὴν βιομηχανίαν χρησιμοποιεῖται, ἀντὶ τῆς μονάδος Poise, ὁ βαθμὸς Engler E. Ἡ σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ ἑσωτερικῆς τριβῆς η εἰς μονάδας Poise καὶ τοῦ E εἰς βαθμοὺς Engler δίδεται ὑπὸ τοῦ πρακτικοῦ τύπου:

$$100 \cdot \frac{\eta}{\varrho} = 7,24 \cdot E - \frac{6,25}{E}$$

ἔνθα ϱ εἶναι ἡ πυκνότης εἰς μονάδας gr/cm^3 .

$$T_1 = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dz}$$

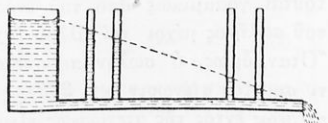
Τὸ πηλίκον dv/dz καλεῖται *βαθμὶς ταχύτητος*.

Ἐσωτερικὴν τριβὴν παρουσιάζουν ὄχι μόνον τὰ ὑγρά, ἀλλὰ καὶ τὰ ἀέρια. Ἡ ἐμφάνισις τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς εἰς τὰ ἀέρια ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι μόρια, προσερχόμενα ἐκ στρωμάτων μεγάλης ταχύτητος, εἰσέρχονται ἐντὸς γειτονικῶν στρωμάτων, μικροτέρας ταχύτητος, μεταδίδοντα εἰς αὐτὰ τὴν ὁρμὴν των καὶ προκαλοῦντα, οὕτω, ἐπιτάχυνσιν αὐτῶν. Ἀντιθέτως, ἡ μετάβασις μορίων ἐκ στρωμάτων μικρᾶς ταχύτητος, εἰς στρώματα μεγάλης ταχύτητος, προκαλεῖ ἐπιβράδυνσιν τῶν τελευταίων. Αἱ μεταβολαὶ αὗται τῆς ὁρμῆς πρέπει, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, νὰ συνοδεύωνται ἀπὸ ἐμφάνισιν δυνάμεων - ἀκριβῶς τῶν δυνάμεων ἐσωτερικῆς τριβῆς. Εἰς τὰ ὑγρά τὸ αἷτιον τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς εἶναι τὸ αὐτό, ἀλλὰ, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, τὸ φαινόμενον δὲν παρουσιάζεται τόσον ἁπλοῦν.

§ 195. Ροή πραγματικοῦ ρευστοῦ ἐντὸς σωλήνος. Θεωρήσωμεν πραγματικὸν ρευστόν, κινούμενον ἐντὸς σωλήνος. Ἐὰν ἡ ταχύτης εἶναι μικρά, ἡ ροὴ θὰ γίνεταί ἐντὸς τακτικῶς διατεταγμένων φλεβῶν, θὰ εἶναι, δηλ., *στρωτή*. Τοῦτο δεικνύεται πειραματικῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 245, I, εἰς τὴν ὁποίαν μία τῶν φλεβῶν ἔχει καταλλήλως χρωματισθῇ. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἐπαρκῶς τὴν ταχύτητα, ἡ ροὴ μεταπίπτει εἰς τὴν *τυρβώδη* μορφήν καὶ αἱ τροχαὶ τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ ρευστοῦ γίνονται ἀκανόνιστοι καὶ διαρκῶς περιπλέκονται (σχ. 245, II). Ἡ ταχύτης εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ρευστοῦ δὲν εἶναι, πλέον, χρονικῶς σταθερά, κυμαίνεται, ὅμως, περὶ μέσσην τινὰ τιμὴν ὁμοίως, διακυμάνσεις παρουσιάζει καὶ ἡ τιμὴ τῆς πίεσεως.

Οἱ νόμοι, οἱ διέποντες τὴν ροὴν εἰς τὰς δύο ταύτας μορφάς, εἶναι διάφοροι καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔξετασθῶν ἰδιαιτέρως.

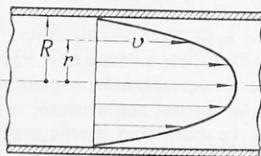
α) Στρωτὴ ροή - Νόμος τοῦ Poiseuille. Εἰς τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ δι' ὀριζοντίου σωλήνος, σταθερᾶς διατομῆς, ἡ πίεσις κατὰ μῆκος αὐτοῦ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, σταθερά. Τουναντίον, εἰς τὴν ροὴν πραγματικοῦ ρευστοῦ ἡ πίεσις ἑλαττοῦται κατὰ μῆκος τοῦ σωλήνος. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐπιδεικνύεται εὐχερῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 261, εἰς τὴν ὁποίαν προσηρμόσθησαν, κατὰ μῆκος τοῦ σωλήνος, μανόμετρα, μετρῶντα τὴν στατικὴν πίεσιν. Ὅπως παρατηροῦμεν, αἱ ἐνδείξεις των ἑλαττοῦνται, ἐφ' ὅσον προχωροῦμεν πρὸς τὸ ἄκρον ἐκροῆς τοῦ σωλήνος.



Σχ. 261. Εἰς τὴν ροὴν πραγματικοῦ ρευστοῦ διὰ σωλήνος παρουσιάζεται βαθμὶς πίεσεως κατὰ μῆκος αὐτοῦ.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς παροχῆς ἐνὸς ὀριζοντίου σωλήνος καὶ τῆς διαφορᾶς πίεσεως εἰς τὰ ἄκρα του ὑπελογίσθη ὑπὸ τοῦ Poiseuille. Οἱ ὑπολο-

γισμοί του οδηγούν, άρχικώς, εις την εύρεσιν του νόμου κατανομής των ταχυτήτων εντός μιᾶς διατομῆς, τὸ διάγραμμα τοῦ ὁποίου καὶ ἀποδίδεται εἰς τὸ σχῆμα 262. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ φλέβες, αἱ εὐρισκόμεναι εἰς διαφόρους



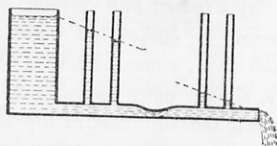
Σχ. 262. Εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι παραβολικὴ.

ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ σωλῆνος, ἔχει τὴν μορφήν παραβολῆς (σχ. 262). Ἐφ' ὅσον, ἥδη, εἶναι γνωστὴ ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων, εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παροχῆς Π τοῦ σωλῆνος (*), ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸν τύπον

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot R^4 \quad \text{Νόμος τοῦ Poiseuille} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσης ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ παροχὴ ἐνὸς ὀριζοντίου σωλῆνος, κυκλικῆς διατομῆς, διὰ τοῦ ὁποίου ρεῖ ὑγρὸν μὲ στρωτὴν ροήν, εἶναι ἀνάλογος τῆς βαθμίδος πίεσεως $(p_1 - p_2)/l$ καὶ τῆς τετάρτης δυνάμεως τῆς ἀκτίνος R τοῦ σωλῆνος, ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογος τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ υγροῦ.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ διὰ σωλῆνος εἶναι δυνατή, μόνον ὅταν κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος ὑπάρχῃ βαθμὶς πίεσεως. Καὶ ὅταν μὲν ὁ σωλὴν ἔχῃ σταθερὰν διατομήν, ἡ βαθμὶς πίεσεως εἶναι σταθερὰ κατὰ μῆκος αὐτοῦ, ἡ πίεσις, δηλ., ἑλαττοῦται γραμμικῶς ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τοῦ σωλῆνος μέχρι τοῦ ἄλλου (σχ. 261). Ὅταν, ὅμως, ὁ σωλὴν παρουσιάζῃ εἰς τι σημεῖον στενώσιν (σχ. 263), ἡ βαθμὶς πίεσεως ἐντὸς τῆς στενώσεως εἶναι μεγαλύτερα τῆς βαθμίδος πίεσεως, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὰ ὑπόλοιπα τμήματα τοῦ σωλῆνος καί, ὥς ἐκ τούτου, μετὰ τὴν στενώσιν, ἡ πίεσις παρουσιάζεται δυσαναλόγως ἡλαττωμένη.

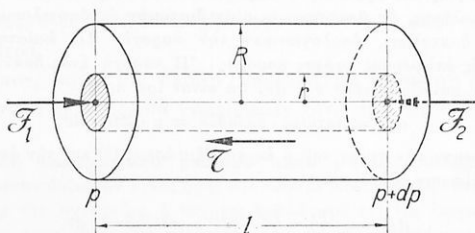


Σχ. 263. Εἰς τὰς στενώσεις ἡ βαθμὶς τῆς πίεσεως εἶναι μεγάλη.

Ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ Poiseuille. Θεωρήσωμεν κυλινδρικὸν τμήμα ρευστοῦ, ἀκτίνος r καὶ μήκους l (σχ. 264) καὶ ἔστωσαν p_1 καὶ p_2 αἱ πίεσεις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ

(*) Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος γίνεται κατωτέρω.

ύγρου τούτου κυλίνδρου. Κατά την διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου δρῶν αἱ ἑξῆς δυνάμεις: α) αἱ λόγω τῶν πιέσεων δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ καὶ β) ἡ ἐσωτερικὴ



Σχ. 264. Αἱ ἐπὶ τοῦ ὕγρου κυλίνδρου, λόγω πιέσεων, ἐξασκούμεναι δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ καὶ ἡ λόγω ἐσωτερικῆς τριβῆς δύναμις $\mathcal{T}$ ἰσορροποῦν.

τριβὴ $\mathcal{T}$ ἐπὶ τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν μ ο ν ἰ μ ο υ ροῆς πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν· ἤτοι

$$\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 - \mathcal{T} = 0.$$

Αἱ δυνάμεις αἰτῶνται, ἀφ' ἑτέρου, ἰσοῦνται πρὸς

$$F_1 = p_1 \cdot \pi r^2, \quad F_2 = p_2 \cdot \pi r^2$$

καὶ

$$T = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dz} = -\eta \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr}.$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ, ὅτι αὐξανομένου τοῦ r , ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται, δηλ., διὰ θετικὸν dr , τὸ dv εἶναι ἀρνητικόν.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν τῶν τιμῶν τῶν F_1 , F_2 καὶ T λαμβάνομεν

$$\pi r^2 \cdot (p_1 - p_2) + \eta \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr} = 0.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν διαφορικὴν ταύτην ἐξίσωσιν, χωρίζομεν τὰς μεταβλητάς, ὁπότε ἔχομεν

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta \cdot l} \cdot r \cdot dr.$$

Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, θὰ λάβωμεν

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta \cdot l} \cdot \frac{r^2}{2} + C. \quad (2)$$

Τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς C τῆς ὁλοκληρώσεως εὐρίσκομεν ἐκ τῆς συνθήκης ὅτι, διὰ $r = R$ (δηλ., εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ σωλήνος) ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἀντικαθιστώντες, λαμβάνομεν

$$0 = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} \cdot R^2 + C.$$

Τὴν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτουσιν τιμὴν τοῦ C θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), ὁπότε λαμβάνομεν

$$v = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot (R^2 - r^2). \quad (3)$$

Ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως συνάγομεν ὅτι ἡ κατανομή τῶν ταχυτήτων ἐντὸς τοῦ σωλήνος εἶναι παραβολικὴ. Ἐκ τῆς γνωστῆς, πλέον, σχέσεως μεταξὺ τῆς ταχύτητος καὶ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν παροχὴν τοῦ σωλήνος, ἂν θεωρήσωμεν μίαν διατομὴν ὡς ἀποτελουμένην ἐκ πολλῶν συγκεντρωτικῶν δακτυλίων, ὑπολογίσωμεν τὴν παροχὴν $d\Pi$ ἐκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ ἀθροίσωμεν τὰς ἐπὶ μέρους ταύτας παροχάς: Ἡ παροχὴ ἐνὸς δακτυλίου, μὲ ἐσωτερικὴν ἀκτίνα r καὶ ἐξωτερικὴν $r + dr$, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$d\Pi = \text{ταχύτης} \cdot \text{ἐμβαδόν} = v \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ v ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) καὶ τὴν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, θὰ ἔχωμεν:

$$d\Pi = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Λι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης μεταξὺ τῶν τιμῶν $r=0$ καὶ $r=R$ λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{(p_1 - p_2) \cdot 2\pi}{4\eta \cdot l} \cdot \left\{ R^2 \cdot \int_{r=0}^{r=R} r \cdot dr - \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr \right\} = \\ &= \frac{2\pi \cdot (p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} \cdot \left\{ R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right\} \end{aligned}$$

ἢ

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot R^4. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

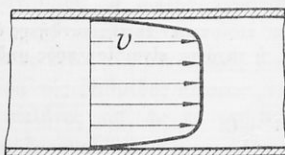
Στρωτὴ ροὴ ἐντὸς μὴ ὀριζοντίων σωλήνων. Ἄν ὁ σωλὴν δὲν εἶναι ὀριζόντιος, ἀντὶ τοῦ τύπου (1), ἔχομεν τὸν ἐξῆς:

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{l} + \frac{\rho g \cdot h}{l} \right) \cdot R^4 \quad (4)$$

ἐνθα p_1 εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὸ ἀνώτατον ἄκρον τοῦ σωλήνος καὶ p_2 εἰς τὸ κατώτατον, τὸ δὲ g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος. Ἄν, πρὸς τοῦτοις, τὸ ὑγρὸν ἔχῃ τὴν αὐτὴν στατικὴν πίεσιν εἰς τὰ δύο ἄκρα τοῦ σωλήνος — ὅπως, π.χ., εἰς σωλὴνα, ἀνοικτὸν εἰς τὰ δύο ἄκρα, ὁπότε $p_1 = p_2 = 1 \text{ atm}$ — τὸ ὑγρὸν ρεῖ, ἀπλῶς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του καὶ ὁ τύπος (4) ἀπλουστεύεται εἰς τὸν ἐξῆς:

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\rho g \cdot h}{l} \cdot R^4. \quad (5)$$

β) **Τυρβώδης ροή.** Εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ μεταβάλλονται διαρκῶς ἀκανονίστως, παρουσιάζουσιν καὶ τμήματα, μὴ παραλλήλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σωλήνος. Ἡ ταχύτης εἰς ἕκαστον σημεῖον δὲν εἶναι, πλέον, χρονικῶς σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται, κυμαινομένη περὶ μίαν τιμὴν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν μέσην ταχύτητα εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον. Ἐνὼ εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἡ ταχύτης τῶν διαφόρων σημείων μιᾶς διατομῆς ἔχει, ὡς εἶδομεν, παραβολικὴν κατανομήν, εἰς τὴν

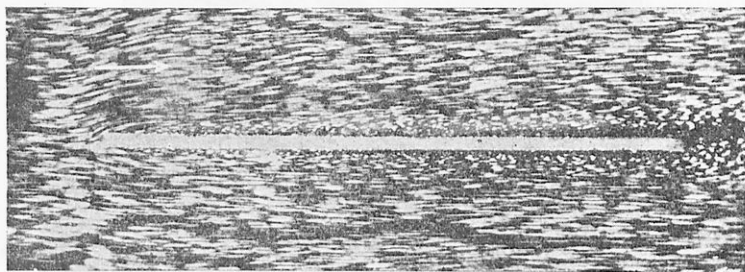


Σχ. 265. Κατανομή τῆς μέσης ταχύτητος εἰς τὴν τυρβώδη ροήν.

τυρβώδη ροήν ή κατανομή τής μέσης ταχύτητος είναι διάφορος (σχ. 265). Παρατηρούμεν ότι, πλησίον τών τοιχωμάτων, επικρατεί μεγάλη βαθμὶς τής μέσης ταχύτητος, ἐνῶ εἰς τὴν «ψυχὴν» τοῦ σωλῆνος ἡ μέση ταχύτης εἶναι, περίπου, σταθερά.

Τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζεται ἡ παροχὴ ἐνὸς σωλῆνος, ὅταν ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης, θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω εἰς τὴν § 202.

§ 196. Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ κατὰ μήκος πλακός. Θεωρήσωμεν πλάκα, κρατουμένην ἀκίνητον ἐντὸς ροῆς καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς (σχ. 266). Λόγω τῆς συναφείας, ἡ ταχύτης τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς πλακός θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, θὰ αὐξάνεται δὲ μετὰ τῆς ἀποστάσεως ἀπ' αὐτῆς διὰ



Σχ. 266. Τὸ πάχος τοῦ ὀρικοῦ στρώματος αὐξάνεται, ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ προσθίου ἄκρου τῆς πλακός.

νὰ λάβῃ ταχέως τὴν τιμὴν v_{∞} , τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ρευστὸν εἰς ἀπομακρυσμένα σημεῖα. Ἡ βαθμὶς ταχύτητος παρουσιάζεται, κυρίως, πλησίον τῆς πλακός, τὸ δὲ στρώμα ἐντὸς τοῦ ὁποίου συμβαίνει τοῦτο καλεῖται *ὀρικὸν στρώμα*. Εἰς τὸ σχῆμα 266 φαίνεται σαφῶς τὸ στρώμα τοῦτο, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ πάχος αὐτοῦ αὐξάνεται, ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ προσθίου ἄκρου τῆς πλακός. Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν § 193 περὶ τοῦ φαινομένου τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς, τὸ ρευστὸν θὰ ἐξασκῇ



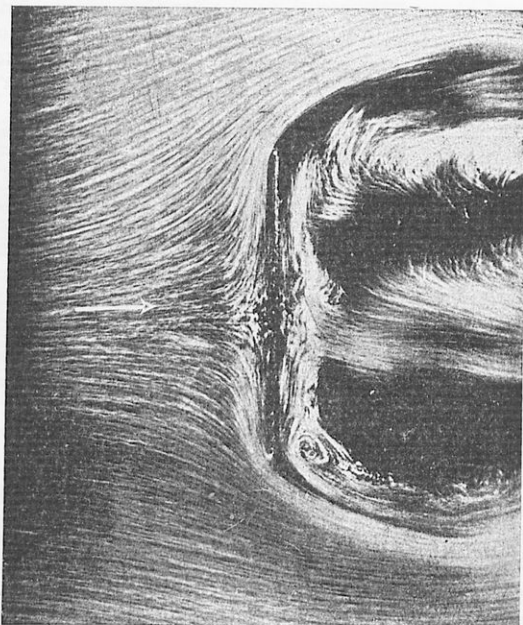
Σχ. 267. Κατανομή τῆς ταχύτητος ἐντὸς τοῦ ὀρικοῦ στρώματος.

ἐπὶ τῆς πλακός δυνάμεις διατμητικές, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν ἀντίστασιν αὐτῆς. Ἐνῶ εἰς πολὺν μικρὰς ταχύτητας τὸ πάχος δ τοῦ ὀρικοῦ στρώματος (σχ. 267) εἶναι σχετικῶς μέγα, ἐλαττωταί, ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ταχύτης. Μὲ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ πάχους τοῦ ὀρικοῦ στρώματος, αὐξάνεται ἡ ἐντὸς αὐτοῦ βαθμὶς ταχύτητος καί, ἀντιστοίχως, ἡ ἀντίστασις. Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν τὴν ταχύτητα αὐξανομένην πέραν ὁρισμένου ὁρίου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ ὀρικοῦ στρώματος καὶ πρὸς τὸ οὐραῖον ἄκρον τῆς πλακός ἡ ροὴ θὰ μεταπέσῃ ἐκ τῆς στρωτῆς μορφῆς εἰς τὴν τυρβώδη. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἀκόμη περισσότερον τὴν ταχύτητα, τὸ σημεῖον μεταπτώσεως θὰ μετακινήθῃ πρὸς τὸ πρόσθιον ἄκρον, ἀπὸ τίνος

δὲ ταχύτητος καὶ πέραν ἡ ροὴ ἐντὸς ὅλου τοῦ ὀρικοῦ στρώματος θὰ εἶναι τυρβώδης. Κατὰ ταῦτα, τὸ πεδίου ροῆς ὑποδιαιρεῖται, τώρα, εἰς τὴν μακρὰν τῆς πλακός περιοχὴν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ροὴ θὰ εἶναι στρωτὴ καὶ τὴν ἐντὸς τοῦ ὀρικοῦ στρώματος περιοχὴν, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἡ ροὴ θὰ εἶναι τυρβώδης. Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν πε-

ρίπτωσιν τοῦ τυρβώδους ὀρικοῦ στρώματος θὰ αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος ταχύτερον παρὰ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ στρωτοῦ ὀρικοῦ στρώματος.

§ 197. **Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ πλάκα, κάθετον ἐπὶ τὸ ρεῦμα.** Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ροὴ εἶναι στρωτὴ, μόνον ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι ἐξόχως μικρά, ἐνῶ εἰς μεγαλύτερας ταχύτητας μεταπίπτει ταχέως εἰς τὴν τυρβώδη μορφήν. Εἰς τὰς ἀκμὰς τῆς πλακὸς καὶ πρὸς τὴν ὀπισθίαν αὐτῆς πλευράν, σχηματίζονται ἰσχυροὶ στρόβιλοι, οἱ ὁποῖοι ἀποσπῶνται περιδικῶς καὶ ἀπομακρύνονται αὐτῆς ἐντὸς τῆς



Σχ. 268. Ὅπισθεν τῆς πλακὸς καὶ ἐντὸς τῆς αὐλακὸς ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης.

καλουμένης **αὐλακὸς** (σχ. 268). Εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς πλακὸς ἡ ροὴ δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς ἐκείνης, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ (σχ. 255). Ἐπίσης, ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς εὐρίσκεται ἴση πρὸς τὴν ὑπολογιζομένην κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ ὀπισθεν μέρος τῆς πλακὸς δὲν σχηματίζεται σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ πίεσις ἐκεῖ εἶναι πολὺ μικρά, με ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνισιν σημαντικῆς ἀντιστάσεως.

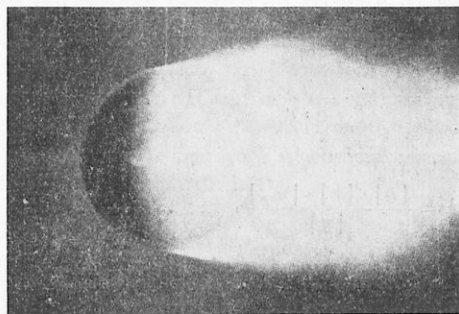
§ 198. **Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ σφαῖραν.** Ἡ ροὴ περὶ σφαῖραν εἶναι στρωτὴ μόνον εἰς μικρὰς ταχύτητας, μεταπίπτουσα εἰς τὴν τυρβώδη διὰ μεγαλύτερας. Ἐπειδὴ οἱ νόμοι εἶναι διάφοροι εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, θὰ ἐξετάσωμεν ἐκάστην ἰδιαιτέρως.

α) **Στρωτή ροή.** Τὴν ἀντίστασιν διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς στρωτῆς ροῆς περὶ σφαῖραν ὑπελόγισεν ὁ Stokes εἰς

$$T = 6\pi\eta \cdot r \cdot v_{\infty} \quad \text{τύπος τοῦ Stokes}$$

ἔνθα η εἶναι ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὑγροῦ r ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας καὶ v_{∞} ἡ σχετικὴ ταχύτης τοῦ ὑγροῦ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν. Ἄξιον προσοχῆς εἶναι ὅτι εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος τῆς πρώτης δυνάμεως τῆς ταχύτητος.

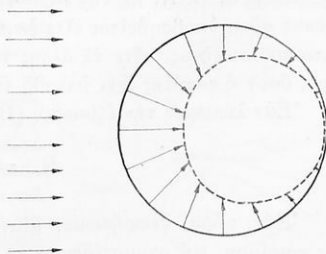
Ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομὴν τῆς ταχύτητος περὶ τὴν σφαῖραν σημειοῦνται διαφοραί, ἔναντι τῆς ἀντιστοίχου περιπτώσεως εἰς τὰ ἰδανικὰ ρευστά.



Σχ. 269. Τυρβώδης ροή περὶ σφαῖραν.

Οὕτω, εἰς τὸ σημεῖον Σ τῆς σφαίρας τοῦ σχήματος 256, εἰς τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ροὴν τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ ταχύτης ἦτο μεγίστη, ἡ ταχύτης, τώρα, εἶναι, λόγω τῆς συναφείας, ἴση πρὸς μηδέν. Ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τῆς σφαίρας, ἡ ταχύτης αὐξάνεται, διὰ τὰ λάβει, τέλος, εἰς μεγάλην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς τὴν τιμὴν v_{∞} .

β) **Τυρβώδης ροή.** Ἡ μορφή τῆς τυρβώδους ροῆς ἀποδίδεται εἰς τὸ σχῆμα 269: Εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς σφαίρας ἡ ροή εἶναι, ἀκριβῶς, ὁμοία μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ δὲ πίεσις ἐκεῖ εὐρίσκεται πειραματικῶς ὅτι ἔχει ἀκριβῶς τὴν τιμὴν, τὴν υπολογιζομένην ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli. Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη πρὸς τὴν ροὴν τῶν ἰδανικῶν ρευστῶν ἰσχύει δι' ὅλην τὴν περιοχὴν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ φλέβες γίνονται στενώτεροι. Μετὰ τὴν περιοχὴν τῆς μεγίστης στενώσεως, αἱ φλέβες, ἀντὶ τὰ καμφθῶν πρὸς τὸ ὀπίσθεν μέρος τῆς σφαίρας (ὑπὸ ταυτοχρόνον αὐξήσιν τῆς διατομῆς τῶν), ἀπομακρύνονται αὐτῆς καὶ σχηματίζουν στροβίλους, οἱ ὅποιοι, περιοδικῶς ἀποσπώμενοι, ἐγκαταλείπουν τὴν σφαῖραν καὶ κινοῦνται ἐντὸς τῆς καλουμένης **αὔλακος**. Εἰς τὸ ὀπίσθεν μέρος



Σχ. 270. Κατανομὴ τῶν πιέσεων εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν περὶ σφαῖραν.

τῆς σφαίρας δὲν σχηματίζεται σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ πίεσις ἐκεῖ εἶναι πολὺ μικρὰ (σχ. 270). Λόγω, ἀκριβῶς, τῆς ἀσυμμετρίας τῆς κατανομῆς τῆς πίεσεως περὶ τὴν σφαῖραν ἐμφανίζεται σημαντικὴ ἀντίστασις, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται κατωτέρω εἰς τὴν § 201.

§ 199. Κριτήριον ἐμφανίσεως τῶν διαφόρων μορφῶν ροῆς - Ἀριθμὸς τοῦ Reynolds. Ὡς εἶδομεν, ἡ στρωτὴ ροὴ μεταπίπτει εἰς τὴν τυρβώδη, ἐὰν ἡ ταχύτης ροῆς ὑπερβῇ ὠρισμένην τιμὴν· τὴν *κρίσιμον ταχύτητα*. Ἡ τιμὴ $v_{κρ}$ τῆς κρίσιμου ταχύτητος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μορφῆς καὶ τῶν διαστάσεων τοῦ σώματος καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ρευστοῦ. Οὕτω, διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος, κυκλικῆς διατομῆς, εὐρέθη ὅτι ἡ κρίσιμος ταχύτης εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτίνος r τοῦ σωλῆνος καὶ τῆς πυκνότητος ρ τοῦ ρευστοῦ, εὐθέως δὲ ἀνάλογος τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς η . Ὅτοι εἶναι

$$v_{κρ} = R_{κρ} \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}. \quad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς $R_{κρ}$ εἶναι, ὡς ἀποδεικνύει ἡ σχέσις

$$[R_{κρ}] = \frac{[\rho] \cdot [r] \cdot [v_{κρ}]}{[\eta]},$$

καθαρὸς ἀριθμὸς καὶ ὀνομάζεται *κρίσιμος ἀριθμὸς τοῦ Reynolds*. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $R_{κρ}$ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἐκ πειραμάτων(*). Κατὰ ταῦτα, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι μικροτέρα τῆς κρίσιμου ταχύτητος, ἡ ροὴ εἶναι στρωτὴ, μεταπίπτει δὲ εἰς τυρβώδη, ὅταν τὴν ὑπερβῇ. Ἡ τιμὴ αὕτη ἀποτελεῖ ἓν ἀνώτερον ὄριον διὰ τὴν εὐστάθειαν τῆς στρωτῆς ροῆς. Ὅταν ἡ ταχύτης ὑπερβῇ τὴν τιμὴν ταύτην, εἶναι δυνατόν, ὅφ' ὠρισμένους ὅρους, νὰ ἐξακολουθῇ ἡ ροὴ νὰ εἶναι στρωτὴ, ἀλλ' ἡ κατάστασις εἶναι ἀσταθῆς καὶ μεταπίπτει, μὲ τὴν μικροτέραν διαταραχὴν, εἰς τυρβώδη. Ἡ μετὰ πτωσις αὕτη ὑποβοηθεῖται εἴτε ἐκ τῆς παρουσίας ἀνωμαλιῶν εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ σωλῆνος, εἴτε ἐξ ἄλλης τινὸς διαταραχῆς, εἶναι δὲ τόσον εὐκολώτερα, ὅσον ἡ ταχύτης ἔχει ὑπερβῇ τὴν κρίσιμον τιμὴν.

Ἐάν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς $R_{κρ}$, θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν

$$R_{κρ} = \frac{v_{κρ} \cdot \rho \cdot r}{\eta}.$$

Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν μίαν ροὴν μὲ ταχύτητα v , μικροτέραν τῆς κρίσιμου, καὶ σχηματίσωμεν τὸ πηλίκον $v \cdot \rho \cdot r / \eta$, ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου τούτου

$$R = \frac{v \cdot \rho \cdot r}{\eta}, \quad (2)$$

(*) Διὰ σωλῆνα κυκλικῆς διατομῆς εὐρίσκεται $R_{κρ} = 1160$.

τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν **ἀριθμὸν τοῦ Reynolds** R , θὰ εἶναι, προφανῶς, μικροτέρα τῆς τιμῆς $R_{κρ}$. Ὁ συλλογισμὸς οὗτος μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κρίνωμεν ἂν μία ροὴ εἶναι στρωτὴ ἢ ὄχι, ἀρκεῖ, ἐκ τῶν δεδομένων v , ϱ , r καὶ η , νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ Reynolds καὶ νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸν μὲ τὸν κρίσιμον ἀριθμὸν τοῦ Reynolds. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds εὐρεθῇ μικρότερος τοῦ $R_{κρ}$, ἡ ροὴ θὰ εἶναι στρωτή, ἐὰν δὲ μεγαλύτερος, ἡ ροὴ θὰ εἶναι τυρβώδης.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰς κρίσιμους ταχύτητας ἐντὸς σωλῆνων μὲ διατομὰς ὄχι κυκλικὰς, γεωμετρικῶς, ὅμως, ὁμοίας (π.χ., τετραγωνικὴν, τριγωνικὴν κ.λ.), θὰ εὕρωμεν ὅτι ἰσχύει τύπος, ἀνάλογος τοῦ τύπου (1). Ἦτοι

$$v_{κρ} = R_{κρ} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot l}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀκτίς r ἀντικατεστάθῃ ὑπὸ μιᾶς ἄλλης ἐκ τῶν γραμμικῶν διαστάσεων τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος, π.χ., τοῦ μήκους l τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν. Ἡ τιμὴ τοῦ $R_{κρ}$ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ εἶναι, προφανῶς, διάφορος τῆς τιμῆς διὰ σωλῆνα κυκλικῆς διατομῆς (*).

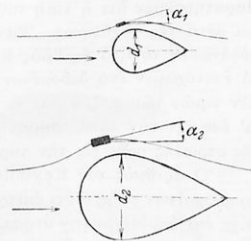
Διὰ τὴν ροὴν περὶ σφαῖραν εὐρίσκεται διὰ τὴν κρίσιμον ταχύτητα τύπος, ἀνάλογος τοῦ τύπου (1). Ἦτοι εἶναι

$$v_{κρ} = R_{κρ} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot d} \quad (3)$$

ἐνθα d εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας. Ἡ τιμὴ τοῦ κρίσιμου ἀριθμοῦ τοῦ Reynolds εὐρίσκεται διὰ πειραμάτων (**).

Ἐάν, ἀντὶ σφαίρας, ἔχωμεν σῶμα ἄλλης μορφῆς, εὐρίσκεται ἰσχύων ὁ τύπος (3), ἀλλὰ διὰ τοῦ d θὰ συμβολίζεται γραμμικὴ τις διάστασις τοῦ σώματος, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ $R_{κρ}$ θὰ πρέπη νὰ προσδιορισθῇ εἰδικῶς διὰ τὸ σῶμα τῆς ἐν λόγω μορφῆς.

§ 200. Μηχανικὴ ὁμοιότης. Διὰ τὴν ταξινόμησιν τῶν διαφορῶν εἰδῶν ροῆς εἶναι χρήσιμος ἡ ἔννοια τῆς **μηχανικῆς ὁμοιότητος**. Ὅπως εἰς τὴν Γεωμετρίαν δύο σχήματα λέγονται γεωμετρικῶς ὅμοια, ὅταν ὁ λόγος δύο οἰωνδῆποτε ἀντιστοιχῶν μηκῶν εἶναι σταθερός, οὕτω, εἰς τὴν Μηχανικὴν, δύο φαινόμενα λέγονται μηχανικῶς ὅμοια, ὅταν ὁ λόγος δύο οἰωνδῆποτε ἀντιστοιχῶν μηχανικῶν μεγεθῶν ἔχει σταθερὰν τιμὴν. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ὁμοιότης εἶναι ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν μηχανικὴν ὁμοιότητα, ἀφοῦ τὸ μήκος εἶναι καὶ αὐτὸ μηχανικὸν μέγεθος. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν αἱ δύο ροαὶ τοῦ σχήματος 271 εἶναι μηχανικῶς ὅμοιαι, θὰ πρέπει ὁ λόγος, π.χ., v_1/v_2 , τῶν ταχυτήτων εἰς δύο



Σχ. 271. Εἰς τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ εἶναι ὅμοιαι.

(*) Ὅταν ἡ διατομὴ ἔξῃ σχῆμα ἰσοπλευροῦ τριγώνου ἢ τετραγώνου, πλευρᾶς l , ὁ κρίσιμος ἀριθμὸς Reynolds εἶναι, ἀντιστοιχῶς, ἴσος πρὸς 4100 καὶ 2100.

(**) Εἰς τὴν σφαῖραν ἡ τυρβώδης ροὴ ἀρχίζει διὰ $R_{κρ} = 10$.

άντιστοιχα σημεία, νά ἔχη τὴν αὐτὴν τιμὴν, ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ θεωρουμένου σημείου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸν λόγον ρ_1/ρ_2 δύο ἀντιστοίχων πυκνοτήτων ἢ διὰ τὸν λόγον F_1/F_2 δύο ἀντιστοίχων δυνάμεων (π.χ. τῶν δυνάμεων, τῶν ἐξασκουμένων ἐπὶ τῶν δύο μελανομένων τμημάτων τοῦ ρευστοῦ τοῦ σχήματος 271). Ἡ σταθερότης τοῦ λόγου S_1/S_2 δύο ἀντιστοίχων ἐμβαδῶν ἔπεται, ἤδη, ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος. Ἐπειδὴ αἱ διαστάσεις τῆς δυνάμεως, τῆς πυκνότητος, τῆς ταχύτητος καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

$$[F] = [\rho] \cdot [v^2] \cdot [S]$$

τὸ σταθερὸν πηλίκον δύο ἀντιστοίχων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 \cdot v_1^2 \cdot S_1}{\rho_2 \cdot v_2^2 \cdot S_2} \quad (4)$$

Ἐάν εἰς τὰς δύο ροὰς ἐμφανίζονται δυνάμεις ἐσωτερικῆς τριβῆς, τότε, δεδομένου ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S] \cdot \left[\frac{v}{l} \right]} \quad (\S 194)$$

(ἐνθα l εἶναι μία γραμμικὴ διάστασις, χαρακτηριστικὴ τῆς ροῆς — εἰς τὸ σχῆμα 271 ἡ διάμετρος d —), θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ πηλίκον η_1/η_2 — κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ F_1/F_2 διὰ τοῦ ἴσου του ἐκ τοῦ τύπου (4) — τὴν σχέσιν

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 \cdot v_1 \cdot l_1}{\rho_2 \cdot v_2 \cdot l_2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ σχέσις

$$\frac{\rho_1 \cdot v_1 \cdot l_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 \cdot v_2 \cdot l_2}{\eta_2}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\rho \cdot v \cdot l/\eta$ εἶναι σταθερὰ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς. Ὁ λόγος

$$R = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς καί, καθὼς εἴδομεν ἄνωτέρω, καλεῖται **ἀριθμὸς τοῦ Reynolds**. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds, διὰ σταθερὰ ρ , l καὶ η , αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος. Ἐάν, ἀφ' ἑτέρου, κρατήσωμεν σταθερὰ τὰ ρ , v καὶ η καὶ αὐξάνωμεν τὸ l , ὁ ἀριθμὸς Reynolds αὐξάνεται. Ἀνάμεθα, λοιπόν, ὡς βλέπομεν, νὰ ἐπιτύχωμεν ἓνα δεδομένον ἀριθμὸν Reynolds κατὰ πολλοὺς τρόπους, ἀναλόγως τῶν τιμῶν τῶν ρ , l , v καὶ η . Ἡ τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ ἀριθμὸς Reynolds, δι' ἐκείνην τὴν κατάστασιν τῆς ροῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν παρατηρεῖται μετὰπτωσις ἐκ τῆς στρωτῆς ροῆς εἰς τὴν τυρβώδη, καλεῖται, ὡς εἴδομεν, **κρίσιμος ἀριθμὸς Reynolds**.

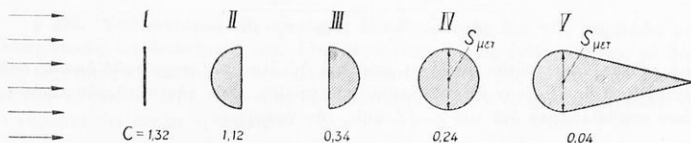
Ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds εἶναι μεγίστης σημασίας διὰ τὴν διερεύνησιν τῶν προβλημάτων ροῆς, διότι ἐπιτρέπει μετρήσεις ἐπὶ ὁμοιωμάτων μικροτέρων διαστάσεων (π.χ., ἐπὶ ὑποδειγμάτων ἀεροπλάνων ἐντὸς ἀεροδυναμικῶν σφαιρῶν) καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἀποτελεσμάτων εἰς τὰς πραγματικὰς διαστάσεις. Ἡ ἀναγωγή αὕτη ἐπιτρέπεται μόνον, ἐφ' ὅσον, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς ταχύτητος (καὶ τῆς πυκνότητος), ἐπιτύχωμεν ὥστε εἰς ἀμφοτέρους τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς Reynolds νὰ ἔχη τὴν αὐτὴν τιμὴν.

§ 201. Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν τυρβώδη ροήν. Ἡ ἀντίστασις T , τὴν ὁποίαν συναντοῦν σώματα οἰασδήποτε μορφῆς ἐντὸς τυρβώδους ροῆς,

εὐρίσκεται θεωρητικῶς καὶ πειραματικῶς ὅτι εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς σχετικῆς ταχύτητος, ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ $S_{μετ}$ τῆς μεγίστης διατομῆς καθεύως πρὸς τὸ ρεῦμα (**μειωπικῆς ἐπιφανείας**) καὶ ἀνάλογος τῆς πυκνότητος ρ τοῦ ρευστοῦ. Ἦτοι εἶναι

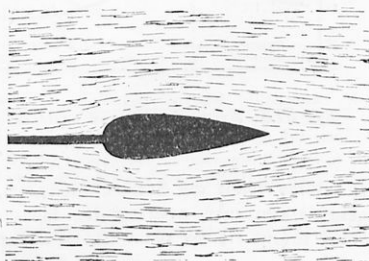
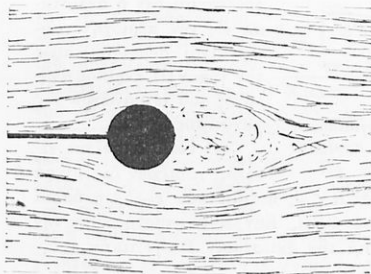
$$T = c_{αντ} \cdot S_{μετ} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{\infty}^2 \quad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς $c_{αντ}$ καλεῖται **συντελεστὴς ἀντιστάσεως** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ σώματος καὶ κυρίως—ὅπως προκύπτει ἐκ συγκρίσεως τῶν τιμῶν αὐτοῦ διὰ τὰ εἰς τὸ σχῆμα 272 ἀπεικονιζόμενα σώματα—ἐκ τῆς



Σχ. 272. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ τῆς διαμορφώσεως τοῦ ὀπισθεν τμήματος τοῦ σώματος.

μορφῆς τοῦ ὀπισθεν αὐτοῦ τμήματος. Τοῦτο εἶναι εὐνόητον, διότι ἕκαστος παραγόμενος στρόβιλος περιέχει κινητικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐκ τοῦ ἔργου, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς δυνάμεως, τῆς ἀνθισταμένης εἰς τὴν ροήν, δηλ., τῆς ἀντιστάσεως. Ἐάν, ἐπομένως, διὰ καταλλήλου διαμορφώσεως τοῦ ὀπισθεν μέρους τοῦ σώματος, ἐλαττωθῇ ἡ παραγωγὴ στρόβιλων, θὰ ἐλαττωθῇ ἀντιστοίχως καὶ ἡ ἀντίστασις καί, κατ' ἐπέκτασιν, ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Ἐξαιρετικῶς μικρὸν συντελεστὴν ἀντιστάσεως ἔχει τὸ *ιχθυοειδὲς* σχῆμα τὸ κοινῶς καλούμενον «ἀεροδυναμικόν» (σχ. 272, V).



Σχ. 273 καὶ 274. Ἡ δημιουργία στρόβιλων ἀναστέλλεται διὰ καταλλήλου διαμορφώσεως τοῦ ὀπισθεν τμήματος τοῦ σώματος.

Τὰ σχήματα 273 καὶ 274 δεικνύουν, χαρακτηριστικῶς, τὴν σημασίαν τῆς διαμορφώσεως τοῦ ὀπισθεν τμήματος τοῦ σώματος: Ἐνῶ εἰς τὴν σφαι-

ραν παρατηρείται έντονος σχηματισμός στρωβίλων, εις τὸ ἰχθυοειδές ἡ ροή εἶναι πρακτικῶς ἀπληλλαγμένη αὐτῶν.

Ὁ τύπος (1) ἔχει μεγάλην πρακτικὴν σημασίαν, διότι, βάσει αὐτοῦ, ὑπολογίζεται ἡ ἀντίστασις ταχέως κινουμένων ὀχημάτων (αὐτοκινήτων, ἀεροπλάνων κ.λ.).

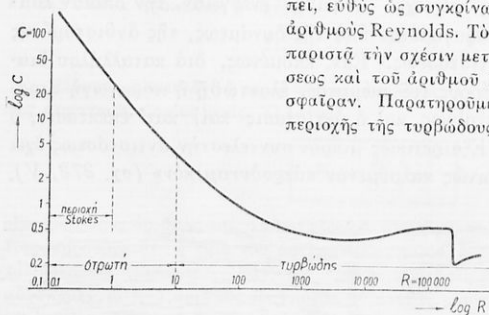
Εἰς τ' ἀνωτέρω ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως σώματος, με δεδομένον γεωμετρικὸν σχῆμα, ἐθεωρήθη, χάριν ἀπλότητος, σταθερός, ὁπότε ἡ ἀντίστασις, κατὰ τὸν τύπον (1), εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος. Τοῦτο ἰσχύει με ἀπόλυτον ἀκρίβειαν, μόνον ἐφ' ὅσον συγκρίνομεν εἶδη ροῆς με τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Reynolds. Ὄντως, ἐάν γράψωμεν τὸν τύπον (4) τῆς § 199 ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{F_1}{\rho_1 \cdot v_1^2 \cdot S_1} = \frac{F_2}{\rho_2 \cdot v_2^2 \cdot S_2},$$

ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου τούτου θὰ εἶναι σταθερὰ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροάς, θὰ ἐξαρτᾶται, δηλ., μόνον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds. Ἐάν τὴν σταθεράν τιμὴν τοῦ πηλίκου συμβολίσωμεν διὰ τοῦ $c_{\text{cavt}}/2$, δηλ., ἐάν γράψωμεν

$$\frac{F}{\rho \cdot v^2 \cdot S} = \frac{c_{\text{cavt}}}{2}$$

καὶ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς F , θὰ λάβωμεν τὸν τύπον (1). Ἡ σταθερότης τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως εἰς ροάς με τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Reynolds ἐκλείπει, εὐθύς ὡς συγκρίνομεν εἶδη ροῆς με διαφόρους ἀριθμοὺς Reynolds. Τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 275 παριστᾷ τὴν σχέσιν μεταξύ τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds διὰ τὴν ροὴν περὶ σφαῖραν. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μέγα τμήμα τῆς περιοχῆς τῆς τυρβώδους ροῆς—μεταξὺ $R = 200$ ἕως



Σχ. 275. Σχέσις μεταξύ τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds εἰς τὴν ροὴν περὶ σφαῖραν.

R καὶ τὸν νόμον τοῦ Stokes. Πράγματι, διὰ $R < 1$, ἡ τιμὴ τοῦ c_{cavt} — ἡ ὁποία μεταβάλλεται πολὺ μετὰ τοῦ R — ἰσοῦται πρὸς $24/R$. Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον (1), θὰ λάβωμεν διὰ τὴν ἀντίστασιν T τὴν τιμὴν

$$T = 6\pi\eta \cdot \frac{d}{2} \cdot v_{\infty}$$

δηλ., ἀκριβῶς τὸν τύπον τοῦ Stokes.

Ἡ ἀπότομος μεταβολή, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν καμπύλην διὰ τὴν τιμὴν $R = 150\,000$, ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ροὴ ἐντὸς τοῦ ὀρικοῦ στρώματος εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς σφαίρας μεταπίπτει ἐκ τῆς στρωτῆς μορφῆς εἰς τὴν τυρβώδη.

Ὁ τύπος (1) εἶναι γενικός, περιέχων διὰ μικρὰ

Ἡ ὀλική ἀντίστασις δύναται, γενικῶς, νὰ χωρισθῇ εἰς τὴν *ἀντίστασιν ἐκ τριβῆς* καὶ τὴν *ἀντίστασιν ἐκ πιέσεως*. Ἐξ αὐτῶν, ἡ πρώτη μᾶς εἶναι ἤδη γνωστὴ ἐκ τῆς στρωτῆς (ἢ καὶ τῆς τυρβώδους) ροῆς περὶ πλάκα, παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, δύναται δέ, ὡς εἶδομεν, νὰ θεωρηθῇ τυπικῶς ὅτι προέρχεται ἐκ δυναμικῶν, ἐξασκουμένων ἐπὶ τῶν στοιχειωδῶν τμημάτων τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης. Ἡ δευτέρα εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων, τῶν ἐξασκουμένων ἐκ τῶν πιέσεων τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς στερεά, κινούμενα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑγρῶν, ἐμφανίζεται καὶ τρίτος προσθετός εἰς τὴν ὀλικὴν ἀντίστασιν - ἡ *ἀντίστασις ἐκ κυμάτων*. Ἡ πρόσθετος αὕτη ἀντίστασις, ἡ ὁποία ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὰ πλοῖα, εἶναι ἀντίστασις ἐκ πιέσεων, ὀφειλομένη εἰς τὰς διαφορὰς τῆς στάθμης τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ περὶ τὸ πλοῖον διάφορα σημεῖα. Ἡ ἐκ τῆς προσθέτου ταύτης δυνάμεως καταναλισκόμενη ἐνέργεια διαδίδεται εἰς τὸ περιβάλλον διὰ τῶν ὑπὸ τοῦ πλοίου δημιουργουμένων κυμάτων.

§ 202. Ύπολογισμός της παροχής ενός σωλήνος διά την τυρβώδη ροήν.

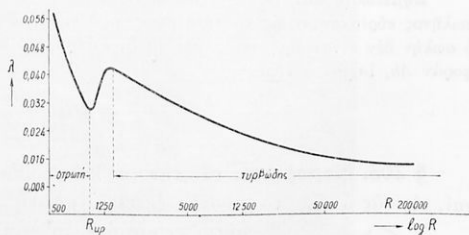
Πειραματικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐάν συγκρίνωμεν ροὰς ἐντὸς σωλήνος μὲ διαφόρους ταχύτητας v , ἀκτίνας r , συντελεστὰς ἐσωτερικῆς τριβῆς η , ἀλλὰ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Reynolds $R = v \cdot r \cdot \rho / \eta$, δηλ., ἐάν συγκρίνωμεν «μηχανικῶς ὁμοίαις» ροὰς, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda(R) \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \quad (1)$$

ἔνθα $\lambda(R)$ εἶναι ἀδιάστατος συντελεστής, ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ R , καὶ $\bar{v}$ ἡ μέση ταχύτης, ἡ ὁποία ὀρίζεται, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$H = \pi r^2 \cdot \bar{v}, \quad (2)$$

ὡς τὸ πηλίκον τῆς παροχῆς H διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ πr^2 τῆς διατομῆς τοῦ σωλήνος. Ἐάν, τώρα, συγκρίνωμεν ροὰς μὲ διαφόρους τιμὰς τοῦ R , θὰ εὕρωμεν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ R , ἄλλην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ $\lambda(R)$. Εἰς τὸ σχῆμα 276 ἀποδίδεται ἡ σχέσις μεταξὺ τοῦ λ καὶ τοῦ $\log R$. Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τυρβώδους ροῆς παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ λ δὲν μεταβάλλεται πολὺ μετὰ τοῦ R . (Οὕτω, μετὰ $R=4000$ καὶ $R=200\,000$, τὸ λ μεταβάλλεται μόνον κατὰ 65%). Τοῦτο, κατὰ τὸν τύπον (1), σημαίνει ὅτι ἡ βαθμὶς πιέσεως $\Delta p/l$ εἶναι, περίπου, ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς μέσης ταχύτητος $\bar{v}$. Ἡ παροχή, επομένως, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου



Σχ. 276. Σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ λ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds εἰς τὴν ροήν ἐντὸς σωλήνος.

$$H = \pi r^2 \cdot \bar{v} = \pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{2r}{\rho \cdot \lambda}} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{l}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \lambda}} \cdot r^{2.5}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν ὅτι, ὑπὸ δεδομένην βαθμίδα πιέσεως καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης (δηλ., $\lambda \approx \text{σταθ.}$), ἡ παροχὴ δὲν εἶναι, πλέον, ἀνάλογος τῆς τετάρτης

δυνάμεως τῆς ἀκτίνος, ὅπως εἰς τὸν νόμον τοῦ Poiseuille, ἀλλ' ἀνάλογος μικροτέρας δυνάμεως.

Ὁ τύπος (1) εἶναι γενικός, περιέχων καὶ τὸν νόμον τοῦ Poiseuille. Πράγματι, εἰς τὴν περιοχὴν μικρῶν ἀριθμῶν Reynolds ($R < 1160$), δηλ., εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στρωτῆς ροῆς, ὁ συντελεστὴς λ μεταβάλλεται πολὺ, μεταβαλλομένου τοῦ R καὶ συγκεκρμενῶς ἰσοῦται πρὸς $\lambda = 16/R$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοῦτο εἰς τὸν τύπον (1) καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ ν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (2), προκύπτει διὰ τὴν παροχὴν ὁ τύπος

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot r^4$$

δηλ., ἀκριβῶς, ὁ τύπος τοῦ Poiseuille.

Σημείωσις 1η. Ὁ τύπος (1) προκύπτει καὶ θεωρητικῶς ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι εἰς δύο μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς ὁ λόγος τῶν πιέσεων

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{F_1/S_1}{F_2/S_2}$$

εἰς δύο οἰαδήποτε ἀντίστοιχα σημεία θὰ εἶναι σταθερός. Δι' ἀντικατάστασιν τοῦ λόγου F_1/F_2 ἐκ τοῦ τύπου (4) τῆς § 199, λαμβάνομεν

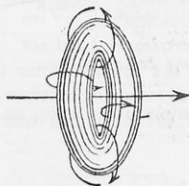
$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{\varrho_1 \cdot v_1^2}{\varrho_2 \cdot v_2^2} \quad \eta \quad \frac{\Delta p_1}{\varrho_1 \cdot v_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\varrho_2 \cdot v_2^2}.$$

Τὴν τιμὴν τοῦ ἀδιαστάτου μονωνύμου $\Delta p/\varrho \cdot v^2$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς, συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\lambda \cdot l/2r$, ἐνθα l καὶ r εἶναι τὸ μήκος καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ σωλῆνος — μεγέθη, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἰς ὁμοίας ροὰς θὰ εἶναι σταθερός — καὶ λ μία ἀδιάστατος σταθερά. Καταλήγομεν, λοιπόν, εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ μονώνυμον $\Delta p/\varrho \cdot v^2$ ἔχει τὴν σταθεράν τιμὴν $\lambda \cdot l/2r$ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς, ἐξ οὗ προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (1).

Σημείωσις 2α. Ὁ τύπος (1) ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ δύο ἄκρα τοῦ σωλῆνος εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος — πρόκειται, δηλ., περὶ ὀριζόντιον ροήν. Ἐὰν ὁ σωλὴν δὲν εἶναι ὀριζόντιος καὶ τὰ δύο ἄκρα του παρουσιάζουν ὑψομετρικὴν διαφορὰν h , ἰσχύει ὁ τύπος

$$\frac{\Delta p}{l} + \frac{\varrho \cdot g \cdot h}{l} = \lambda(R) \cdot \frac{\varrho \cdot \bar{v}^2}{2} \cdot \frac{1}{r}.$$

§ 203. Στρόβιλοι. Εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν ἐμφανίζονται συχνὰ περιοχαί, εἰς τὰς ὁποίας τὸ ρευστὸν ἐκτελεῖ ἐμφανῆ περιστροφικὴν κίνησιν. Τοιαῦτα περιοχαὶ καλοῦνται **στρόβιλοι**.



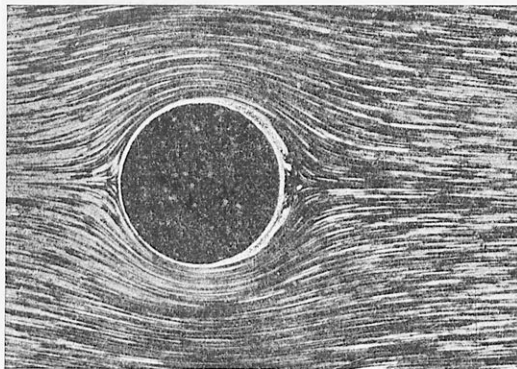
Σχ. 277. Δακτυλιοειδὴς στρόβιλος.

Οἱ στρόβιλοι ἀκολουθοῦν ὠρισμένους νόμους, τῶν ὁποίων ἡ διατύπωσις εἶναι εὐχερής, ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ρευστοῦ. Οἱ αὐτοὶ νόμοι ἰσχύουν, κατὰ προσέγγισιν, καὶ διὰ τὰ πραγματικὰ ρευστά.

1ος νόμος. Ἐκαστος στρόβιλος πρέπει ν' ἀποτελῇ ἓνα δακτύλιον (δακτυλιοειδὴς στρόβιλος — σχ. 277), δὲν δύναται, δηλαδή, νὰ ἀρχίξῃ ἢ νὰ περατοῦ-

ται ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ.

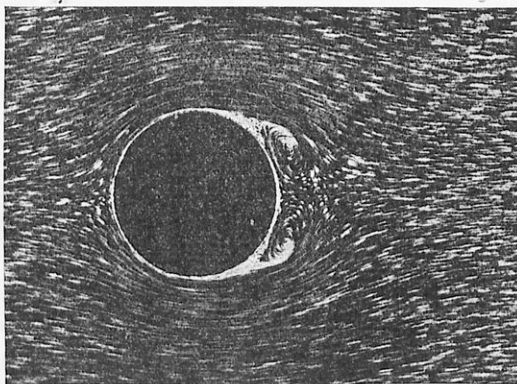
Ὁ δακτυλιοειδὴς στρόβιλος δύναται, κατὰ τὴν κίνησίν του, νὰ παραμορφοῦται, ἀλλὰ θὰ παραμένῃ πάντοτε κλειστός. Ὅταν τὸ ρευστὸν εἶναι πεπερασμένων διαστάσεων (περιορίζεται, π.χ., διὰ δοχείου) ὁ δακτύλιος δύναται νὰ περατοῦται ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου.



Σχ. 278.

Ὡς ἀποδεικνύεται, ὁ νόμος οὗτος εἶναι ἀποτέλεσμα τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς.

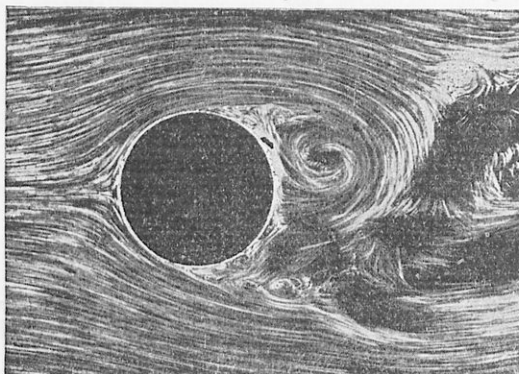
2ος νόμος. Τὰ μόρια τοῦ ρευστοῦ, τ' ἀποτελοῦντα τὸν στρόβιλον, εἶναι



Σχ. 278α.

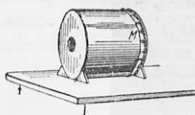
πάντοτε τὰ αὐτά, δὲν ἐναλλάσσονται, δηλαδή, μετὰ τῶν μορίων τοῦ ὑπολοίπου ρευστοῦ.

Εἰς τὰ ἰδανικά ρευστά, λόγῳ τοῦ ἁδυνάτου τῆς ἐξασκήσεως διατμητικῶν τάσεων, δὲν εἶναι δυνατόν νὰ παραχθοῦν στροβίλοι. Ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται ὅτι τυχὸν ὑπάρχοντες στροβίλοι διατηροῦνται ἐπ' ἄπειρον.



Σχ. 278β. Ἡ εἰκὼν αὕτη καὶ αἱ δύο προηγούμεναι παριστοῦν τρεῖς διαδοχικὰς φάσεις τῆς δημιουργίας καὶ ἀποσπάσεως στροβίλου, ἅμα τῇ ἐνάρξει τῆς ροῆς περὶ κύλινδρον.

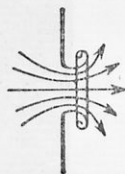
Πειραματικῶς δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν δακτυλιοειδεῖς στροβίλους διὰ τῆς ἐξῆς διατάξεως (σχ. 279): Ἡ μία βάσις κυλινδρικοῦ τυμπάνου ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μεμβράνης *M*, ἡ δὲ ἄλλη φέρει ὀπὴν εἰς τὸ κέντρον. Ἐν πληρώσωμεν τὸ τύμπανον διὰ νέφους (τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν



Σχ. 279. Συσκευὴ διὰ τὴν παραγωγὴν δακτυλιοειδῶν στροβίλων.

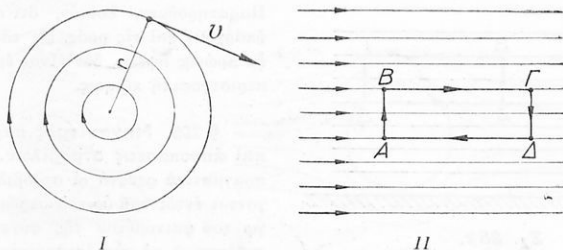
δι' εἰσαγωγῆς ἐντὸς τοῦ τυμπάνου σταγόνων τινῶν ἀμμωνίας καὶ ὑδροχλωρικοῦ ὀξέος) καὶ κτυπήσωμεν, ἀποτόμως, τὴν μεμβράνην, ἐξέρχεται ἐκ τῆς ὀπῆς λευκὴ φλέψ, ἀποτελουμένη ἐξ αἰωρουμένων μικρῶν κρυστάλλων χλωριούχου ἀμμωνίου. Τὸ τμήμα τῆς φλεβός, τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ χεῖλους τῆς ὀπῆς, ἀναδιπλοῦται (σχ. 280) καί, οὕτω, σχηματίζεται λευκὸς δακτυλιοειδὴς στροβίλος. Ὁ στροβίλος οὗτος, ἀπομακρυνόμενος, διατηρεῖται σχετικῶς ἐπὶ μακρόν, θὰ διετηρεῖτο δὲ ἐπ' ἄπειρον, ἂν τὸ ρευστὸν δὲν εἶχεν ἐσωτερικὴν τριβήν.

Ἐν συμφωνίᾳ πρὸς τὸν 2ον νόμον τῶν στροβίλων—κατὰ τὸν ὁποῖον τὰ μόρια, τ' ἀποτελοῦντα ἓνα στροβίλον, εἶναι πάντοτε τὰ αὐτὰ—παρατηροῦμεν ὅτι ὁ στροβίλος, ἐνῶ μετακινεῖται, παραμένει λευκός, ἀποτελεῖται, δηλ., διαρκῶς ἐκ τῶν αὐτῶν μορίων.



Σχ. 280. Σχηματισμὸς δακτυλιοειδοῦς στροβίλου κατὰ τὴν ἐκροὴν δι' ὀπῆς.

§ 204. Κυκλοφορία. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ στρόβιλου, ὡς ἐδόθη ἀνωτέρω, δὲν εἶναι ἐντελὲς ἀκριβῆς. Τὸν στρόβιλον ὁρίζομεν διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν τὸ πεδίον ταχυτήτων τοῦ σχήματος 281, I, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ ρευματικαὶ γραμμαῖαι εἰ-



Σχ. 281.

ναι κυκλικαί. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int (v \cdot ds)$ γὰτὰ μῆκος μιᾶς κυκλικῆς ρευματικῆς γραμμῆς, ἀκτίνος r , θὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν

$$\int (v \cdot ds) = v \cdot 2\pi r$$

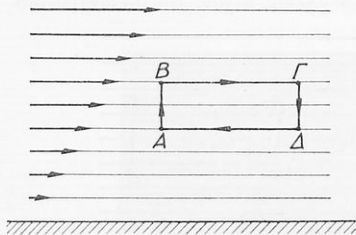
δηλ., τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος $\int (v \cdot ds)$ καλεῖται **κυκλοφορία** Γ κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς καὶ χαρακτηρίζει τὴν ἔντασιν, μὲ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ περιστροφή τοῦ ρευστοῦ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν τὸ πεδίον ταχυτήτων τοῦ σχήματος 281, II καὶ ὑπολογίσωμεν τὴν κυκλοφορίαν διὰ τὴν κλειστὴν γραμμὴν $AB\Gamma A$, θὰ λάβωμεν $\Gamma = 0$, διότι τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῶν τμημάτων AB καὶ ΓA εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν (ἀφοῦ τὸ ἄνυσμα v εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν δρόμον), τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τοῦ τμήματος $B\Gamma$ εἶναι ἴσον καὶ ἀντιθετον τοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ τοῦ τμήματος DA . Ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὸ πεδίον αὐτὸ τῶν ταχυτήτων ἡ κυκλοφορία ἐφ' οἷσάδηποτε κλειστῆς γραμμῆς, ἀνεξαρτήτως τοῦ σχήματός της, εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ ἰδιότης αὕτη χαρακτηρίζει μεγάλην καὶ ἐνδιαφέρουσαν κατηγορίαν πεδίων ταχυτήτων - τὴν κατηγορίαν τῶν **ἀστρόβιλων πεδίων** (ἢ **δυναμικῶν πεδίων**). Τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ πεδία τῶν σχημάτων 255 καὶ 256. Ἀντιθέτως, πεδία ταχυτήτων, ὅπως τὸ πεδίον τοῦ σχήματος 281, I, λέγονται **στρόβιλά**. Γενικῶς, **πεδίων ταχυτήτων, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κυκλοφορία ἐφ' οἷσάδηποτε κλειστῆς καμπύλης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, καλεῖται ἀστροβίλον, διὰν δὲ ὑπάρχῃ καμπύλη, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ κυκλοφορία εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πεδίον καλεῖται στρόβιλον**. Ἡτοι

$$\begin{aligned} \Gamma &= 0, \text{ ἀστροβίλον πεδίων ταχυτήτων} \\ \Gamma &\neq 0, \text{ στρόβιλον πεδίων ταχυτήτων.} \end{aligned}$$

Περιοχὴ ρευστοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ πεδίων ταχυτήτων εἶναι στρόβιλον, καλεῖται **στρόβιλος**.

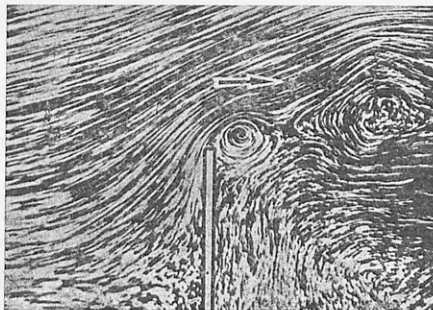
Ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος τῆς ροῆς πραγματικοῦ ρευστοῦ ὑπάρχουν στρόβιλοι. Τοῦτο εὐρίσκεται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς κυκλοφορίας κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς γραμμῆς $AB\Gamma A$ τοῦ σχήματος 282, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int (v \cdot ds)$ ἐπὶ τοῦ τμήματος $B\Gamma$ δὲν ἀναιρεῖται, πλέον, ὁλοσχερῶς ὑπὸ τοῦ ὁλοκλη-

ρώματος ἐπὶ τοῦ τμήματος AA , καθόσον ἐπὶ τῶν δύο ρευματικῶν γραμμῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν γραμμῶν BI' καὶ AA , αἱ ταχύτητες εἶναι διάφοροι. Ὅμοίως, εὐρίσκεται ὅτι ὑπάρχουν στρόβιλοι καὶ εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἐντὸς σωλήνος. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι στρόβιλοι ὑπάρχουν καὶ εἰς ροάς, εἰς τὰς ὁποίας, ἐκ πρώτης ὄψεως, δὲν εἶναι ἐμφανὲς ἡ περιστροφικὴ κίνησις.



Σχ. 282.

ἀποσπώμενοι δὲ ἐξ αὐτοῦ, παραμένουν ἐντὸς τῆς αὐλακὸς ὡς ἐμφανὲς περιστρεφόμενοι μάζαι τοῦ ρευστοῦ. Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πλακὸς, τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ροήν (σχ. 283), τὸ ὀρικὸν στρώμα, τὸ ὁποῖον λείχει τὴν προσθίαν ἐπιφάνειαν,

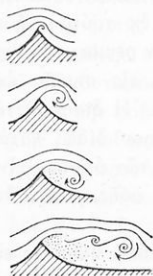


Σχ. 283.

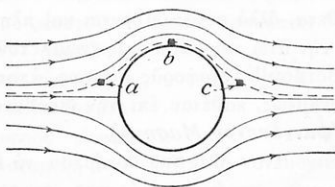
ἀποσπᾶται ἐκ τῆς πλακὸς εἰς τὰς ἀκμὰς καὶ συσσωρεύεται ὀπισθεν αὐτῶν. Ἡ συσσώρευσις αὕτη τῶν στροβιλιζομένων μαζῶν τοῦ ρευστοῦ ἄγει, τελικῶς, εἰς τὸν σχηματισμὸν ἰσχυροῦ στρόβιλου, ὁ ὁποῖος, ὅταν αὐξηθῇ ἐπαρκῶς, ἀπομακρύνεται τῆς πλακὸς.

Ἐμφανεῖς στρόβιλοι σχηματίζονται γενικῶς εἴτε εἰς σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα, λόγῳ τῆς ἀσυνεχείας τῆς ροῆς, ἐπέρχεται ἀπόσπαισις καὶ συσσώρευσις τοῦ ὀρικοῦ στρώματος (ὅπως εἰς τὰς ἀνωμαλίας τῆς στερεᾶς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος 284), εἴτε εἰς περιοχάς, εἰς τὰς ὁποίας τὸ ρευστόν, τὸ ὁποῖον λείχει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ, κινεῖται ἐκ σημείων μικροτέρας πίεσεως εἰς σημεῖα μεγαλυτέρας πίεσεως (ὅπως τὰ τμήματα τοῦ ρευστοῦ, τὰ κινούμενα ἐκ τοῦ σημείου b πρὸς τὸ σημεῖον c τοῦ σχ. 285). Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τελευταίου τούτου φαινομένου θεωροῦμεν τὴν φλέβα, τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων a, b, c . Εἰς τὰ ἰδανικά ρευστὰ τὸ περιεχόμενον τῆς φλεβὸς ταύτης ἐπιταχύνεται μεταξὺ τῶν σημείων a καὶ b , ἐνῶ, ἀντιστοίχως, ἐκεῖ ἢ πίεσις ἐλαττοῦται. Ἀντιθέτως, μεταξὺ τῶν σημείων b καὶ c ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται, ἐκ νέου, αὐξανομένης, ἀντιστοίχως, τῆς πίεσεως. Εἰς τὰ πραγματικὰ ρευστὰ ἡ ταχύ-

της εἰς τὸ σημεῖον *b* εἶναι, λόγω τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς, μικροτέρα τῆς ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli προβλεπομένης, ὁπότε καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ποσότητός τινος



Σχ. 284. Διαδοχικαὶ εἰκόνες τῆς ροῆς περὶ ἀνωμαλίας μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας.



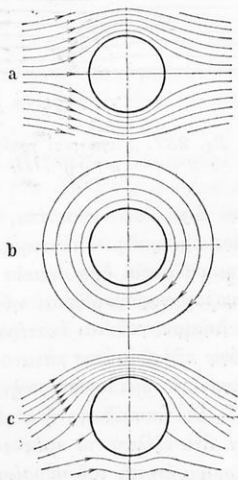
Σχ. 285. Ἡ πίεσις τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸ σημεῖον *c* εἶναι μεγαλυντέρα τῆς πίεσεως, τῆς ἐλικρατοῦσης εἰς τὸ σημεῖον *b*. Τοῦτο διευκολύνει τὴν παραγωγὴν στροβίλου.

τοῦ ρευστοῦ, εὐρισκομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, θὰ εἶναι ἀνεπαρκὴς διὰ νὰ φθάσῃ ἡ ποσότης αὕτη εἰς τὸ σημεῖον *c*. Ὡς ἐκ τούτου, τὸ ρευστὸν ἀναδιπλοῦται καὶ ἐμφανίζεται εἰς ἰσχυρὸς στροβίλος.

§ 206. Δυναμικὴ ἄνωσις - Φαινόμενον Μαγνύς. Μέχρι τοῦδε

ἐγνωρίσαμεν δυνάμεις, ἔξασκουμένας ὑπὸ τῶν ρευστῶν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, ἥτοι ἀντιστάσεις. Ἐνταῦθα θὰ γνωρίσωμεν τοὺς ὅρους, ὑπὸ τοὺς ὁποίους ἐμφανίζονται δυνάμεις πλάγιαί ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, δηλ., δυνάμεις μὲ συνιστώσαν, κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Τὴν κάθετον αὐτὴν συνιστώσαν καλοῦμεν **δυναμικὴν ἄνωσιν**. Τοιαύτη ἀπλὴ περίπτωσις ἐμφανίζεται εἰς τὸ φαινόμενον **Magnus**.

Φαινόμενον Magnus. Ὅταν ἰδανικὸν ρευστὸν ρεῖ περὶ ἀκίνητον κύλινδρον, αἱ ρευματικαὶ γραμماὶ θὰ παρίστανται ὑπὸ τοῦ σχήματος 286, *a*. Ἐάν, ἀφ' ἐτέρου, τὸ ρευστὸν ἐκτελῇ μόνον περιφορὰν περὶ τὸν κύλινδρον (δημιουργουμένην, π.χ., διὰ περιστροφῆς τοῦ κυλίνδρου), θὰ προκύψουν αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ τοῦ σχήματος 286, *b*. Ἐάν, τώρα, τὸ ρευστὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως καὶ τὰς δύο κινήσεις, ἢ συνισταμένη κίνησις (*c*) θὰ προκύψῃ δι' ἐπαλληλίας τῶν κινήσεων (*a*) καὶ (*b*). Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἄλλας μὲν περιοχὰς ἡ ταχύτης ἐκ

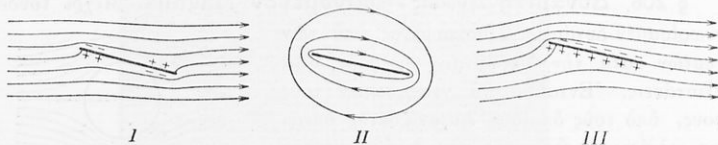


Σχ. 286. Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ τῆς εἰκόνος (*c*) εὐρίσκονται δι' ἐπαλληλίας τῶν γραμμῶν τῶν εἰκόνων (*a*) καὶ (*b*).

περιφορᾶς ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη ταχύτητος θὰ εἶναι μεγάλη (συμπύκνωσης τῶν ρευματικῶν γραμμῶν-ἄνω), ἐνῶ εἰς ἄλλας αἱ ταχύτητες ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη ταχύτης θὰ ἔχῃ μικρὰν τιμὴν (ἀραίωσης τῶν ρευματικῶν γραμμῶν-κάτω). Τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς δὲν εὐρίσκονται, τώρα, εἰς σημεῖα ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα, ἀλλὰ μετατοπίζονται καὶ πλησιάζουν. Ἡ διαφορὰ τῶν ταχυτήτων εἰς τὴν ἄνω καὶ κάτω ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δίδει, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, διαφορὰς πιέσεως, ἀποτέλεσμα τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἐμφάνισις δυνάμεως, καθέτου ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, δηλ., δυναμικῆς ἀνώσεως (**φαινόμενον Magnus**).

Τὸ φαινόμενον Magnus δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν, δίδοντες εἰς κύλινδρον, εὐρισκόμενον ἐντὸς ρεύματος, περιστροφικὴν κίνησιν, ὁπότε οὗτος, λόγῳ τῆς συναφείας, συμπαρασύρει τὸ ρευστὸν καὶ δημιουργεῖ περιφορὰν αὐτοῦ (*). Εἰς τὸ φαινόμενον Magnus ὁφείλεται καὶ ἡ ἰδιάζουσα τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει μία ἐκσφενδονιζομένη σφαῖρα, ἡ ὁποία ταυτοχρόνως περιστρέφεται («κομμένη» σφαῖρα εἰς τὴν ἀντισφαίρισιν, τὸ ποδόσφαιρον κ.λ.)

§ 207. Δυναμικὴ ἄνωσις ἐπιπέδου καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὸ σχῆμα 287, I ἀποδίδονται αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ ἰδανικοῦ ρευστοῦ



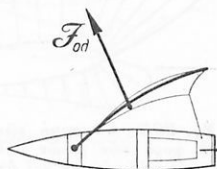
Σχ. 287. Ρευματικαὶ γραμμαὶ περὶ ἐπίπεδον πλάκα ἀπείρου μήκους. Ἡ ροὴ τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ (III) εὐρίσκεται δι' ἐπαλληλίας τῶν σχημάτων (I) καὶ (II).

περὶ ἐπίπεδον πλάκα, σχηματίζουσιν μικρὰν γωνίαν μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς ροῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν τῆς πλακὸς σχηματίζονται δύο σημεῖα ἀνακοπῆς καὶ ὅτι εἰς ἄλλα σημεῖα ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ παρουσιάζεται ἠδξημένη καὶ εἰς ἄλλα ἠλαττωμένη, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δημιουργοῦνται ἐκατέρωθεν αὐτῆς ὑπερπίεσεις (+) καὶ ὑποπίεσεις (—). Λόγῳ τῆς τοιαύτης κατανομῆς τῶν πιέσεων, δημιουργεῖται ζεύγος δυνάμεων, τείνον νὰ καταστήσῃ τὴν πλάκα κάθετον ἐπὶ τὸ ρεῦμα. Εἰς τὸ σχῆμα 287, III ἀποδίδεται ἡ περίπτωσις πραγματικοῦ ρευστοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐξέλιπε τὸ πρὸς τὰ ὀπισθεν σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ὅτι τὸ ρευστὸν ἀπομακρύνεται τοῦ οὐράου ἄκρου ὁμαλῶς, χωρὶς νὰ τὸ παρακάμπτῃ. Εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πλακὸς ὑπάρχει, τώρα, παντοῦ ὑπερπίεσις, εἰς δὲ

(*) Ἡ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐμφανιζομένη ροὴ διαφέρει κατὰ τι τῆς εἰς τὸ σχῆμα 286, c ἀπεικονιζομένης ἰδανικῆς ροῆς: Ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ ἐμφανίζεται, ὡς εἶδομεν, μόνον δυναμικὴ ἄνωσις, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ παρουσιάζεται καὶ ἀντίστασις.

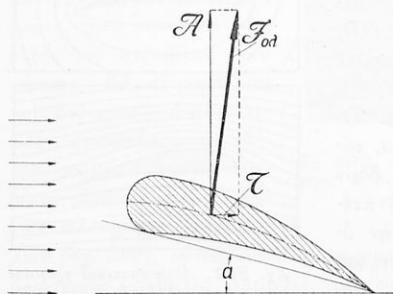
τὴν ἄνω παντοῦ ὑποπίσεις. Ἀποτέλεσμα: Ἐπὶ τῆς πλακὸς ἐξασκείται, συνολικῶς, ἐκτὸς τῆς ροπῆς καὶ μίᾳ δυνάμει, ἡ ὁποία εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὸ ρεῦμα, δυναμένη, συνεπῶς, ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας· τὴν ἀντίστασιν καὶ τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ροή (III) ὁμοιάζει πολὺ (*) μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἐπαλληλίας τῆς ροῆς (I) καὶ μιᾶς ροῆς (II), κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὕγρον περιφέρεται περὶ τὴν πλάκα.

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν διὰ κυρτῆς, ἡ περιφορὰ γίνεται ἐντατιωτέρα καί, συνεπῶς, ἡ δυναμικὴ ἄνωσις μεγαλυτέρα. Τοῦτο ἐκμεταλλεύομεθα εἰς τὴν ἱστιοπλοΐαν, δίδοντες εἰς τὰ ἱστία κατάλληλα σχήματα. Εἰς τὸ σχῆμα 288 παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν καὶ ὁ ἄνεμος εἶναι ἐνάντιος, ἡ δύναμις $\mathcal{F}_{ol}$, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἱστίου, ἔχει συνιστώσαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ πλοίου, ἡ ὁποία καὶ τὸ προωθεῖ. Ἡ δύναμις αὕτη $\mathcal{F}_{ol}$ προέρχεται ἐκ συνθέσεως μιᾶς δυνάμεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνέμου (ἀντιστάσεως) καὶ μιᾶς καθέτου πρὸς αὐτὴν (ὀφειλομένης εἰς τὴν περιφορᾶν).



Σχ. 288. Πλοῦς μὲ ἐνάντιον ἄνεμον.

§ 208. Πτέρυξ αεροπλάνου. Εἰς τὴν πλάκα, τὴν εὐρισκομένην ὑπὸ γωνίαν ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος, ἡ ἀντίστασις εἶναι μεγάλη σχετικῶς πρὸς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Σημαντικὴν βελτίωσιν ἔχομεν εἰς



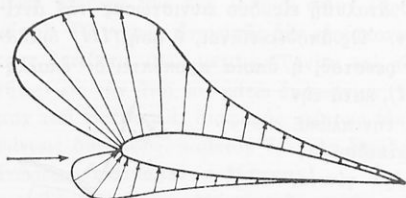
Σχ. 289. Τομὴ πτέρυγος αεροπλάνου. $\mathcal{A}$ = δυναμικὴ ἄνωσις, $\mathcal{T}$ = ἀντίστασις, α = γωνία προσβολῆς.

καὶ προωστικὴν συνιστώσαν, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐλάττωσιν τῆς ἀντιστάσεως. Ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος ἐπικρατοῦν ὑπερπίσεις·

τὴν **πτέρυγα** τῶν αεροπλάνων (σχ. 289), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίστασις εἶναι πολὺ μικρότερα. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν κατανομὴν τῶν πιέσεων, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν δημιουργοῦνται ὑποπίσεις — δηλ., πιέσεις, μικρότεροι τῆς ἀτμοσφαιρικῆς — αἱ ὁποῖαι προκαλοῦν ὄχι μόνον ἄνωσιν ἀλλὰ, συγχρόνως, (λόγῳ τῆς διαμορφώσεως τοῦ προσθίου ἄκρου)

(*) Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται κυρίως εἰς τὸ δυνάμει σῆμα, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται εἰς τὴν ροὴν πραγματικῶν ρευστῶν.

πίεσεις, δηλ., μεγαλύτεραι τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Τὴν τοιαύτην κατανομὴν τῶν πιέσεων περὶ τὴν πτέρυγα παριστᾷ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 290:

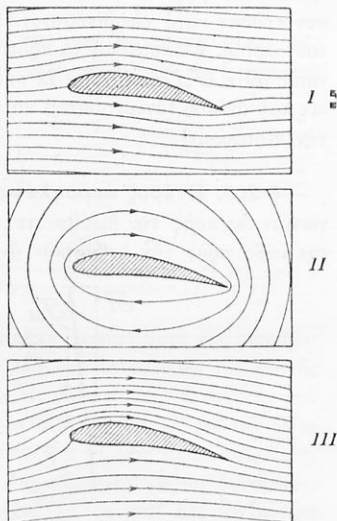


Σχ. 290. Κατανομή τῶν πιέσεων περὶ πτέρυγα. Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δηλοῖ ὑπερπίεσεις εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν καὶ ὑποπίεσεις εἰς τὴν ἄνω.

θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ - ἐάν, δηλ., πρόκειται περὶ ὑπερπίεσεως ἢ ὑποπίεσεως (*).

Τοὺς λόγους, διὰ τοὺς ὁποίους αἱ πιέσεις κατανέμονται κατὰ τὸν περιγραφέντα τρόπον, κατανοοῦμεν, ἐὰν μελετήσωμεν τὴν μορφήν τῶν ρευματικῶν γραμμῶν (σχ. 291, III). Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πτέρυγος ἐπικρατοῦν ταχύτητες, μικρότεραι τῆς ταχύτητος v_∞ , εἰς δὲ τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν, καὶ κυρίως πρὸς τὸ πρόσθιον ἄκρον, μεγαλύτεραι αὐτῆς. Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ροὴ (III) ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἐπαλληλίας τῆς ροῆς (I) καὶ μιᾶς ροῆς (II), κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ρευστὸν ἐκτελεῖ περιφορὰν περὶ τὴν πτέρυγα.

Προέλευσις τῆς περιφορᾶς. Ὁπως εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, τόσον εἰς τὸ φαινόμενον Magnus, ὅσον καὶ εἰς τὴν ροὴν περὶ πλάκα (ἢ πτέρυγα) ὑπάρχει περιφορὰ, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ὁφείλονται αἱ ὑποπίεσεις καὶ ὑπερπίεσεις, αἱ προκαλοῦσαι τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Καὶ εἰς μὲν τὸ φαινόμενον Magnus ἡ περιφορὰ προέρχεται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὴν πλάκα, ὅμως, (ἢ τὴν πτέρυγα) ἡ



Σχ. 291. Αἱ ρευματικαὶ γραμماὶ περὶ πτέρυγα (III) εἶναι ἐπαλληλία μιᾶς περιφορᾶς (II) καὶ μιᾶς ἰδανικῆς ροῆς (I).

(*) Ἡ περιγραφεῖσα μέθοδος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς κατανομῆς τῶν πιέσεων διαφέρει τῆς χρησιμοποιηθείσης εἰς τὰ σχήματα 257 καὶ 270, εἰς τὰ ὁποία τὰ μήκη τῶν βελῶν ἐλήφθησαν ἀνάλογα πρὸς τὴν ἀπόλυτον πίεσιν.

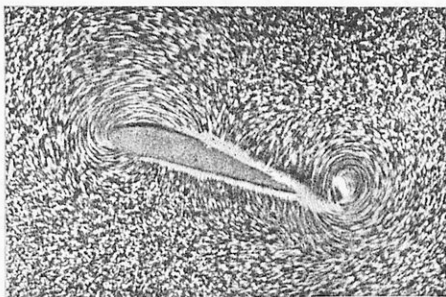
(**) Ὅπως παρατηροῦμεν εἰς τὸ σχῆμα 290, ἡ μεγίστη ὑπερπίεσις εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας καὶ πρὸς τ' ἄριστερά. Ἐκεῖ, συνεπῶς, θὰ εἶναι τὸ πρόσθιον σημεῖον ἀνακοπῆς.

περιφορά δημιουργείται αὐτομάτως ὡς ἐκ τῆς μορφῆς τῶν. Ἐνταῦθα θὰ ἐξηγήσωμεν τὸν μηχανισμόν τῆς παραγωγῆς τῆς περιφορᾶς εἰς τὴν πτέρυγα: Ἐνῶ εἰς τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας καὶ πρὸς τὸ οὐραῖον ἄκρον ἐν σημείον ἀνακοπῆς S (σχ. 292, a καὶ 291, I)



Σχ. 292. Ἀρχὴ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως.

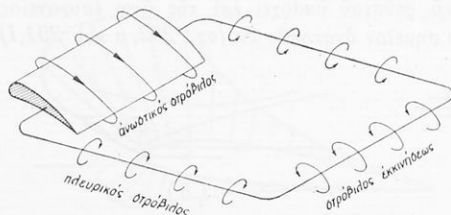
καί, συνεπῶς, τὸ ρευστὸν παρακάμπτει τὴν ἀκμὴν μὲ μεγάλας ταχύτητας καὶ μεγάλας ἐπιταχύνσεις, εἰς τὸ πραγματικὸν ρευστὸν τοῦτο εἶναι δυνατόν μόνον εἰς πολὺ μικρὰς ταχύτητας. Αὐξανομένης τῆς ταχύτητος, τὸ ρευστὸν δὲν κατορθώνει νὰ παρακάμψῃ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀποσπᾶται ἐξ αὐτῆς. Τοῦτο, ὅμως, συνοδεύεται ἀπὸ τὸν σχηματισμὸν ἐνὸς στροβίλου (σχ. 292, b καὶ σχ. 293), ὁ ὁποῖος ἀπομακρύνεται τῆς πτέρυγος. Ὁ στροβίλος οὗτος, ὡς σχηματιζόμενος κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, καλεῖται **στροβίλος ἐκκινήσεως**. Κατὰ τὸν πρῶτον, ὅμως, νόμον τῶν στροβίλων, πᾶς στροβίλος πρέπει νὰ σχηματίσῃ κλειστὸν δακτύλιον, ὁπότε, κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, ἐκτὸς τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως, θὰ σχηματίζεται καὶ δεύτερος — ὁ **ἀνωστικός στροβίλος** — ἀντιθέτου φορᾶς, ὁ ὁποῖος συνδέεται μετὰ τοῦ πρώτου διὰ τῶν **πλευρικῶν στροβίλων** (σχ. 294), οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζεται δακτυλιοειδὲς στροβίλος. Ὁ ἀνωστικὸς στροβίλος ἀποτελεῖ, ἀκριβῶς, τὴν περιφορὰν περὶ τὴν πτέρυγα.



Σχ. 293. Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ἀποσπᾶται ἐκ τῆς πτέρυγος ὁ στροβίλος ἐκκινήσεως, ἐνῶ ταυτοχρόνως δημιουργεῖται ὁ ἀνωστικὸς στροβίλος.

Ἡ συνεχὴς παραγωγή τῶν πλευρικῶν στροβίλων, τῶν ὁποίων, οὕτω, τὸ μῆκος διαρκῶς αὐξάνεται κατὰ τὴν πτῆσιν, ἐξηγεῖται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος ἡ πίεσις εἶναι παντοῦ μεγαλυτέρα τῆς πιέσεως p_x , ἐνῶ ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας παντοῦ μικροτέρα. Λόγῳ τῆς διαφορᾶς ταύτης τῆς πιέσεως, σχηματίζεται περὶ τὰ πλευρικὰ ἄκρα τῆς πτέρυγος ροὴ ἀέρος ἐκ τῆς κάτω πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄνω, μὲ ἀποτέλεσμα τὸν σχηματισμὸν τῶν πλευρικῶν στροβίλων.

Ὅπως παρατηροῦμεν εἰς τὸ σχῆμα 291, III, ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος ὀπισθεν μιᾶς πτέρυγος εἶναι διάφορος τῆς ἀρχικῆς, κατευθυνομένη, τώρα,

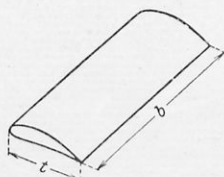


Σχ. 294. Ὁ στρόβιλος ἐκκινήσεως, οἱ πλευρικοὶ στρόβιλοι καὶ ὁ ἀνωστὸς στρόβιλος σχηματίζουν κλειστὸν δακτύλιον.

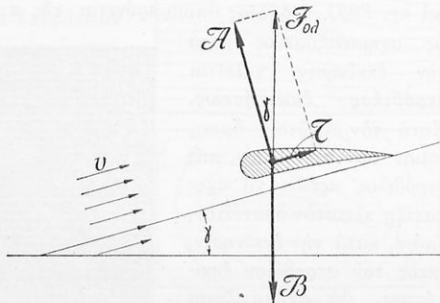
ὁποίας ὁ ἀῆρ οὗτος ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ κάτω (*).

πρὸς τὰ κάτω. Τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον καὶ διὰ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, καθόσον, κατὰ τὸ ἀξίωμα «δραῖσις = ἀντίδρασις», ἡ πτέρυξ ἔξασκει ἐπὶ τοῦ ἀέρος μίαν κατακόρυφον δύναμιν, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς

§ 209. Σχέσεις μεταξύ ἀντιστάσεως, δυναμικῆς ἀνώσεως καὶ γωνίας προσβολῆς. Τόσον ἡ δυναμικὴ ἄνωσις A , ὅσον καὶ ἡ ἀντίστασις T εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτος (§ 201). Εἴθισται αἱ δυνάμεις αὗται νὰ ἐκφράζονται ὅχι συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μετωπικῆς ἐ-



Σχ. 295.



Σχ. 296. Κατὰ τὴν πτήσιν ὀλισθηρῶς ἔξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ἀεροπλάνου αἱ δύο ἰσορροποῦσαι δυνάμεις B καὶ $F_{ολ}$.

πιφανείας, ἀλλὰ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο ἐπιφανειῶν τῆς πτέρυγος. Διὰ πτέρυγα, χορδῆς l καὶ πλάτους b (σχ. 295), εὐρίσκονται οἱ τύποι

$$A = c_a \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l$$

καὶ

$$T = c_{αντ} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l.$$

Οἱ συντελεσταὶ c_a καὶ $c_{αντ}$ καλοῦνται *συντελεσταὶ ἀνώσεως καὶ ἀντιστάσεως*

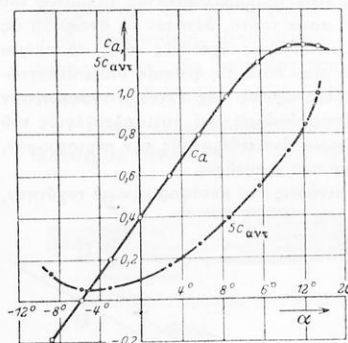
(*) Ἀσθενῆ ἀνερχόμενα ρεύματα (ἀνοδικὰ ρεύματα) ἐμφανίζονται περὶ τῆς περιοχῆς, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ πτέρυξ, λόγῳ τῶν πλευρικῶν στρόβιλων. Ὁρισμένα ἀποδημητικὰ πτηνὰ ἐκμεταλλεύονται τοιαῦτα ἀνοδικὰ ρεύματα, τὰ ὁποῖα παράγονται κατὰ τὴν πτήσιν των, σχηματίζοντα σμήνη εἰς σχῆμα V, ὅπότε κάθε πτηνὸν πετᾷ ἐντὸς τοῦ ἀνερχομένου ρεύματος τοῦ προηγουμένου του.

καὶ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς *γωνίας προσβολῆς* α (βλ. σ.χ. 289) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds (βλ. § 199). Ἡ μεταξὺ τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_{ολ}$ καὶ $\mathcal{A}$ σχηματιζομένη γωνία γ (σ.χ. 296) καλεῖται *γωνία ὀλισθήσεως*, ἥ δὲ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ταύτης *ἀριθμὸς ὀλισθήσεως*. Εἶναι δὲ (κατὰ τὸ σχῆμα 296)

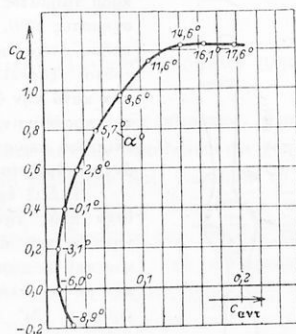
$$\epsilon\phi \gamma = \frac{T}{A}.$$

Εἰς τὰς συνήθεις πτέρυγας, ὁ ἀριθμὸς ὀλισθήσεως ἔχει τιμὴν περὶ τὸ $1/20$. Ἡ ὀνομασία γωνία ὀλισθήσεως ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἡ ἐλαχίστη γωνία ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὴ μόνιμος πτήσις ὀλισθήσεως, δηλ., πτήσις ἄνευ τῆς λειτουργίας τοῦ κινητήρος καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα ($\mathcal{B} = \mathcal{F}_{ολ}$).

Τὰ διαγράμματα τοῦ σχήματος 297 δίδουν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν c_a , $c_{αντ}$ καὶ τῆς γωνίας προσβολῆς α . Ὅπως παρατηροῦμεν, ὁ συντελεστὴς ἀνώ-



Σχ. 297. Σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν c_a , $c_{αντ}$ καὶ τῆς γωνίας προσβολῆς α . (Ἡ καμπύλη τοῦ $c_{αντ}$ ἐσχεδιάσθη ὑπὸ πενταπλοσίαν κλίμακα).



Σχ. 298. Πολικὸν διάγραμμα Lilienthal διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς τιμῆς τῆς ἀρίστης γωνίας προσβολῆς $\alpha_{αρ}$.

σεως λαμβάνει θετικὰς τιμὰς ἤδη δι' ἀρνητικὰς γωνίας προσβολῆς, ἐφ' ὅσον αὗται εἶναι μικρότεροι τῶν θ , περίπου, μοιρῶν. Τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ ἀνώσεως ἐπιτυγχάνομεν διὰ γωνίαν α , περίπου, 12° , ἐνῶ, διὰ μεγαλυτέρας τιμὰς τῆς γωνίας, οὗτος ἐλαττοῦται ἐκ νέου. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως, ἀφ' ἐτέρου, αὐξάνεται μονοτόνως μετὰ τῆς γωνίας. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, ἐάν ἡ πτέρυξ παρουσιάζῃ μεγάλην γωνίαν προσβολῆς, ναὶ μὲν ὑφίσταται μεγάλῃν ἄνωσιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντιστάσις εἶναι ἐξαιρετικῶς μεγάλη. Ἡ ἀρίστη — ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομίας καυσίμων — γωνία $\alpha_{αρ}$ διὰ τὴν πτήσιν, εἶναι ἐκεῖνη, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν ἀντιστάσεως καὶ ἀνώσεως, δηλ., ὁ ἀριθμὸς ὀλισθήσεως, εἶναι ὅσον τὸ δυνατόν μικρότερος. Τὴν γωνίαν ταύτην εὐρίσκομεν, ἂν κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 298 (διάγραμμα Lilienthal), τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐάν, διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς γωνίας α , λάβωμεν τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῶν c_a καὶ $c_{αντ}$. Ἐὰν ἐκ τούτου σημείου τομῆς τῶν ἀξόνων φέρωμεν ἐφαπτομένην ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς θὰ μᾶς δώσῃ τὴν ζητούμενην γωνίαν $\alpha_{αρ}$, διότι, διὰ τὴν γωνίαν ταύτην, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως, ὁ ὁποῖος παρέχει τὸν λόγον $c_a/c_{αντ}$, ἔχει τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν τιμὴν.

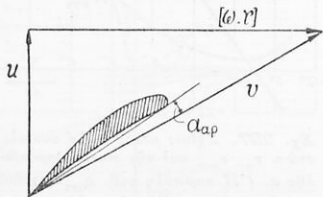
§ 210. Προωστικές διατάξεις αεροπλάνων. Ἡ προώθησις τῶν αεροπλάνων προκαλεῖται ὑπὸ δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται κατὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν ποσοτήτων ἀέρος ἢ ἀερίων πρὸς τὰ ὀπισθεν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται σήμερον, ἐκτὸς τῆς ἀπὸ πολλοῦ γνωστῆς ἑλικος, καὶ ἄλλαι προωστικαὶ διατάξεις, αἱ ὁποῖαι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ σύστημα προώσεως δι' ἑλικος, ἔχουν ἐλάχιστα μόνον κινούμενα μέρη, μειονεκτοῦν, ὅμως, λόγῳ τοῦ ὅτι συμφέρουν οἰκονομικῶς μόνον εἰς μεγάλας ταχύτητας.

Ἑλὶξ αεροπλάνου. Διὰ τὴν προώθησιν τῶν αεροπλάνων χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, *ἑλικες*, αἱ ὁποῖαι κατασκευάζονται οὕτως ὥστε ἡ διατομή των νὰ ἔχη μορφήν πτέρυγος (σχ. 299). Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς παραγωγῆς τῆς προωστικῆς δυνάμεως, θὰ ἐξετάσωμεν τὴν δύναμιν, τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ μικροῦ τμήματος τῆς ἑλικος (τοῦ γραμμοσκιασμένου τμήματος τοῦ σχήματος 299), τὸ ὁποῖον, κατὰ ταῦτα, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τμήμα πτέρυγος. Ὁ αἶρ, κινούμενος σχετικῶς πρὸς τὸ τμήμα τοῦτο, ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία δίδει συνιστώσαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς ἑλικος, προκαλοῦσαν τὴν προώθησιν. Ταυτοχρόνως, ὑπάρχει καὶ συνιστώσα ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου περιστροφῆς, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν περιστροφὴν, ἀνισταθμίζεται, ὅμως, ὑπὸ τοῦ κινητήρος.



Σχ. 299. Ἑλὶξ αεροπλάνου.

Ἡ ἑλὶξ ἐκτελεῖ δύο κινήσεις: α) μεταφορικὴν μὲ ταχύτητα, ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα u τοῦ αεροπλάνου καὶ β) περιστροφικὴν μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω . Δι' ἕκαστον τμήμα τῆς ἑλικος ἡ ταχύτης u (σχ. 300) εἶναι ἡ αὐτή, ἐνῶ ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς ταχύτης $\omega \cdot r$ μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως r τοῦ θεωρουμένου τμή-



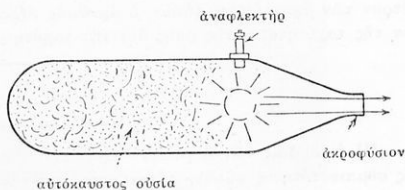
Σχ. 300.

ματος ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς ἑλικος. Ἡ ταχύτης v τοῦ τμήματος τούτου ὡς πρὸς τὸν αἶρα εὐρίσκεται διὰ συνθέσεως τῶν δύο ταχυτήτων u καὶ $\omega \cdot r$, θὰ πρέπει δὲ νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν χορδὴν τῆς πτέρυγος τὴν ἀρίστην γωνίαν προσβολῆς α_{ap} . Ἀφοῦ ἡ ταχύτης $\omega \cdot r$ αὐξάνεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως r , πρέπει ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς καὶ τῆς ταχύτητος u — δηλ., ἡ γωνία τῆς χορδῆς μὲ τὸν ἄξονα τῆς ἑλικος — νὰ αὐξάνεται. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ἀκριβῶς, δίδεται εἰς τὴν ἑλίκαν τὸ γνωστὸν στρεβλὸν σχῆμα.

Κινητὴ ἀεριοθουμένον αεροπλάνον (turbo-jet). Εἰς τὴν διάταξιν ταύτην, ὁ αἶρ, ἀντὶ νὰ ἐπιταχύνεται διὰ τοῦ συστήματος κινητήρος-ἑλικος, λαμβάνει τὴν πρὸς τὰ ὀπίσω ταχύτητα ἀπ' εὐθείας κατ' ἀμεσώτερον τρόπον: Διὰ καύσεως πετρελαίου θερμαίνεται ὁ ἀναρροφώμενος αἶρ εἰς ὑψηλὴν θερμοκρασίαν καί, ἐν συνεχείᾳ, ἀφήνεται νὰ ἐκτονωθῇ ἐντὸς ἀκροφυ-

σίον εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ἀποκτῶν, οὕτω, μεγάλην ταχύτητα (*).

§ 211. Πύραυλοι. Εἰς τὸν *πύραυλον* αἱ ἀπαραίτητοι ποσότητες ἀερίων παράγονται ἐντὸς αὐτοῦ τούτου τοῦ πυραύλου. Τὸ σχῆμα 301 παριστᾷ σχηματικῶς πύραυλον, χρησιμοποιοῦντα αὐτόκαυστον οὐσίαν, δηλ., μείγμα τοῦ καυσίμου μετὰ τοῦ διὰ τὴν καύσιν ἀπαιτουμένου ὀξυγόνου. Τὸ παραγόμενον ἀέριον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ὑπὸ ὑψηλὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν, ἐξερχόμενον διὰ τοῦ ἀκροφυσίου, ἐκτονοῦται, μετατρέπομένης, οὕτω, τῆς ἐνέργειας του εἰς κινητικὴν. Τοιοῦτοι πύραυλοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐκκίνησιν ἀεροπλάνων.



Σχ. 301. Πύραυλος με αὐτόκαυστον οὐσίαν (ἀρχή).

Πολὺ εὐκολώτερον ἐπιτυγχάνεται ἡ ρύθμισις τῆς καύσεως, ὅταν τὸ καύσιμον εἶναι ὑγρόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποθηκεύεται χωριστὰ τὸ καύσιμον καὶ χωριστὰ τὸ ὀξειδωτικόν, π.χ., οἰνόπνευμα καὶ ὑγρὸν ὀξυγόνον (σχ. 302). Ἐνίοτε προστίθεται εἰς τὸ καύσιμον καὶ ἀδρανές τι ἀέριον, χάρις εἰς τὸ ὁποῖον ἐλαττοῦνται κατὰ τι αἱ δημιουργούμεναι ὑψηλαὶ θερμοκρασίαι. Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῶν πυραύλων ὥς καὶ ὅλων τῶν ἀναλόγων συστημάτων προώσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχέσεως τῆς ταχύτητος τοῦ πυραύλου καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ ἀκροφυσίου. Ὅταν αἱ δύο ταχύτητες εἶναι ἴσαι, τὰ ἐξερχόμενα ἀέρια ἀκίνητοῦν ὥς πρὸς τὴν Γῆν, συνεπῶς ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην του τιμὴν. Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τῶν ἐκτονουμένων καυσσαερίων εἶναι πολὺ μεγάλη, ἡ χρῆσις τοῦ πυραύλου δὲν εἶναι ἀποδοτικὴ διὰ μικρὰς ταχύτητας.



Σχ. 302. Πύραυλος με ὑγρὰ καύσιμα.

Διὰ τοιούτων πυραύλων ἐκινούντο αἱ βολίδες V2 τοῦ τελευταίου πολέμου, χρησιμοποιοῦνται δὲ καὶ σήμερον διὰ τὴν ἐξαπόλυσιν τῶν τεχνητῶν δορυφόρων καὶ διὰ τὰ διαπλανητικὰ ὁχήματα, δεδομένου ὅτι διὰ τὴν λειτουργίαν των δὲν ἔχουν ἀνάγκην τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος.

Διὰ τοιούτων πυραύλων ἐκινούντο αἱ βολίδες V2 τοῦ τελευταίου πολέμου, χρησιμοποιοῦνται δὲ καὶ σήμερον διὰ τὴν ἐξαπόλυσιν τῶν τεχνητῶν δορυφόρων καὶ διὰ τὰ διαπλανητικὰ ὁχήματα, δεδομένου ὅτι διὰ τὴν λειτουργίαν των δὲν ἔχουν ἀνάγκην τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος.

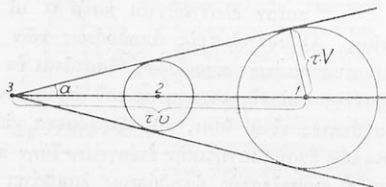
§ 212. Ὑπερηχητικαὶ ταχύτητες - Κύματα Mach. Οἱ νόμοι τῆς συνεχείας καὶ τοῦ Bernoulli ἰσχύουν, ὥς γνωστόν, διὰ τὰ ἰδανικὰ ρευστά. Εἰς τὰ ρευστά, λοιπόν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν μεγάλην συμπίεστικότητα — ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς

(*) Διὰ περισσώτερας λεπτομερείας βλ. ΘΕΡΜΟΤΗΣ, § 164.

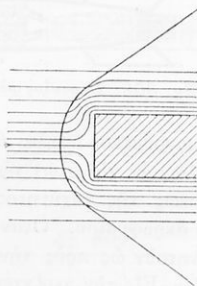
τὰ ἀέρια—θὰ ἔπρεπεν οἱ νόμοι οὗτοι νὰ μὴ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν. Ἐν τούτοις, ὁμως, εὐρέθη ὅτι δυνάμεθα νὰ τοὺς ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὰ ἀέρια, ἀρκεῖ ἡ ταχύτης νὰ εἶναι, σχετικῶς, μικρά. Ἀποκλίσεις ἀρχίζουν νὰ παρουσιάζονται, ὅταν αἱ ταχύτητες, ἀξιοσημείωται, πλησιάζουν πρὸς τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου. Κατὰ τὴν ἔρευναν τῶν διαφορῶν φαινομένων εἰς μεγάλας ταχύτητας, χρησιμοποιεῖται, ὡς μέτρον τῶν αποκλίσεων αὐτῶν, ὁ ἀριθμὸς *Mach* M , ὁ ὁποῖος ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τῆς ταχύτητος v τῆς ροῆς διὰ τῆς ταχύτητος V τοῦ ἤχου. Ἦτοι

$$M = \frac{v}{V}$$

Ἡ ἐπίδρασις τῶν μεγάλων ταχυτήτων, ἡ παρουσιάζομένη εἰς τὰ ἀέρια, λόγῳ τῆς συμπεριότητος αὐτῶν, γίνεται καταφανὴς ἐκ τῶν ἑξῆς: Ὅταν ἓν σῶμα κινῆται μὲ μικρὰν ταχύτητα, προκαλοῦνται διαταραχαὶ εἰς τὴν εἰκόνα τῶν ἀρχικῶς εὐθυγράμμων ρευματικῶν γραμμῶν καὶ εἰς τὸ ἔμπροσθεν καὶ εἰς τὸ ὀπισθεν μέρος αὐτῶν (βλ. σελ. 256). Ἐάν, ὁμως, ἡ ταχύτης τοῦ κινήτου αὐξάνεται καὶ ὑπερβῇ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, αἱ πρὸ τοῦ σώματος διαταραχαὶ ἐκλείπουν, διότι αὐταὶ μὲν κινῶνται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, ἐνῶ τὸ σῶμα κινεῖται μὲ ταχύτητα μεγαλύτεραν. Ὡς ἐκ τούτου, ὁ χώρος περὶ τὸ σῶμα χωρίζεται εἰς δύο περιοχάς: τὴν πρὸ τοῦ σώματος, εἰς τὴν ὅποῃ δὲν ἔχουν διαδοθῇ οἱ διαταραχαί, καὶ εἰς τὸν ὑπόλοιπον χώρον, εἰς τὸν ὅποιον ἡ ροὴ ἔχει μεταβληθῇ ἐκ τῆς παρουσίας τοῦ σώματος. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς θέσεις, μέχρι τῶν ὁποίων φθάνουν αἱ διαταραχαὶ αὗται, θεωροῦμεν ἓν κινούμενον ὕλικόν σημεῖον εἰς τρεῖς διαδοχικὰς θέσεις 1, 2, 3 (σελ. 303), κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς 0, $t/2$ καὶ t . Ἡ διαταραχὴ, ἡ προελθούσα ἐκ τῆς διελεύσεως τοῦ κινήτου ἐκ τῆς θέσεως 1



Σχ. 303. Κύματα *Mach*, δημιουργούμενα ὑπὸ ὕλικου σημείου, κινουμένου (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) μὲ ὑπερηχητικὴν ταχύτητα.



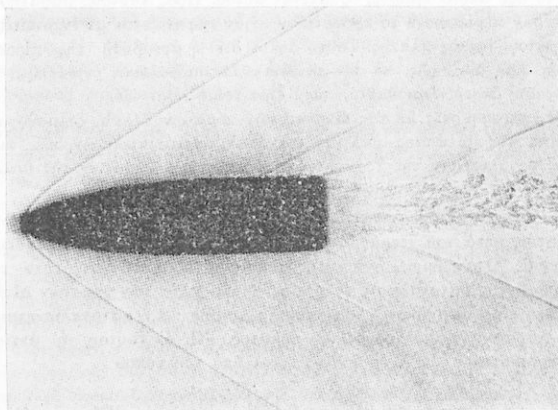
Σχ. 304. Χρονικὸν κύμα, δημιουργούμενον ὑπὸ σώματος πεπερασμένου διαστάσεων.

κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$, διαδίδεται ὑπὸ μορφήν σφαιρικοῦ κύματος (§ 227) μὲ ταχύτητα V καί, συνεπῶς, τὸ κύμα τοῦτο, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = \tau$, θὰ σχηματίζῃ σφαῖραν, ἀκτίνας $V \cdot \tau$. Ὁμοίως, τὸ κινητόν, διερχόμενον ἐκ τῆς θέσεως 2 κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = t/2$, θὰ ἔξῃ δημιουργήσει, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = \tau$, σφαιρικὸν κύμα, ἀκτίνας $V \cdot t/2$. Τέλος, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = \tau$, τὸ κινητόν εὐρίσκεται εἰς τὴν θέσιν 3. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν σφαιρικῶν κυμάτων, κατὰ τὴν στιγμὴν $t = \tau$, θὰ ἔξῃ τὸ σχῆμα κώνου. Διὰ τὴν γωνίαν α ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\eta \mu \alpha = \frac{\tau \cdot V}{\tau \cdot v} = \frac{V}{v} = \frac{1}{M}.$$

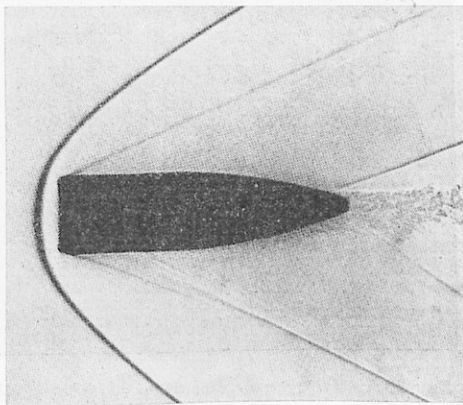
Τοιαῦτα κύματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα πάντοτε νὰ παρατηρήσωμεν, ὁσάκις κινητὸν κινεῖται μὲ ταχύτητα, μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου, καλοῦνται *κύματα Mach*.

Τ' ἀνωτέρω ἀναφέρονται εἰς κινητὸν πολὺ μικρῶν διαστάσεων. Ὅταν αἱ δια-



Σχ. 305. Κρουστικὸν κύμα, προσερχόμενον ἀπὸ δεξιῶν προωραῖον ἄκρον, ἐφάπτεται τοῦ ἄκρου τούτου.

στάσεις εἶναι μεγάλαι καὶ τὸ σῶμα ἀμβλύ, τὰ κύματα Mach δὲν ἐκκινοῦν ἐκ τοῦ προωραίου ἄκρου τοῦ κινητοῦ - τὰ κύματα, δηλ., ἔχουν ἀποσπασθῇ τοῦ σώματος (σχ. 301). Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο φαίνεται σαφῶς ὁ διαχωρισμὸς τοῦ πεδίου ροῆς εἰς δύο περιοχάς: Ἀριστερὰ τοῦ κύματος Mach ἡ ροὴ οὐδόλως ἔχει ἐπηρεασθῇ ἐκ τῆς παρουσίας τοῦ σώματος. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Mach ἐπέρχεται ἀπότομος μεταβολὴ τῆς πιέσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαῖα, ἵνα τὸ ρευστὸν τεθῇ εἰς κίνησιν καὶ δυνηθῇ νὰ παρακάμψῃ τὸ ἐμπόδιον. Ἐπειδὴ τὰ κύματα Mach, τὰ δημιουργούμενα εἰς σώματα μεγάλων διαστάσεων, ἰσοδυναμοῦν μὲ μεγάλης μεταβολῆς τῆς πιέσεως, διὰ τοῦτο καλοῦνται καὶ *κρουστικὰ κύματα*. Τὸ σχῆμα 305 εἶναι φωτογραφία τῶν κρουστικῶν κυμάτων, τῶν προσερχομένων ὑπὸ βλήματος πυροβόλου, κινουμένου μὲ ὑπερ-



Σχ. 306. Ὅταν τὸ προωραῖον ἄκρον εἶναι ἀμβλύ, τὸ κρουστικὸν κύμα ἀποσπᾶται ἐξ αὐτοῦ.

κινουμένου μὲ ὑπερ-
βλήματος πυροβόλου, κινουμένου μὲ ὑπερ-

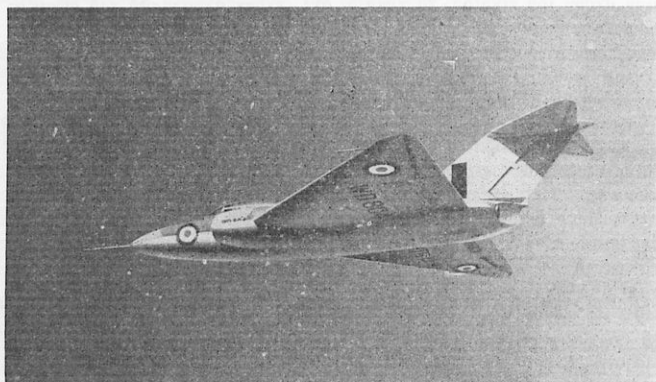
ηχητικήν ταχύτητα, ἐνῶ τὸ σχῆμα 306 εἶναι φωτογραφία κρουστικῶν κυμάτων, προερχομένων ὑπὸ ὁμοίου βλήματος, τὸ ὁποῖον, ὅμως—ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ πρῶτον—κινεῖται μὲ τὸ ἀμβλύ ἄκρον του πρὸς τὰ ἑμπρός. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ κύμα ἔχει ἀποσπασθῇ ἐκ τοῦ προωραίου ἄκρου, ἐνῶ ὅταν κινῆται μὲ τὸ ὀξύ ἄκρον ἑμπρός, ἐφάπτεται αὐτοῦ. Πρὸς τούτοις, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ κρουστικὸν κύμα ἐμφανίζεται μὲ ἐντονωτέραν ἀμαύρωσιν τῆς φωτογραφικῆς πλακός. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς πιέσεως εἶναι πολὺ μεγάλη καί, συνεπῶς, τὸ κρουστικὸν κύμα καταναλίσκει μεγαλυτέραν ἐνέργειαν, ὅταν τὸ προωραῖον ἄκρον εἶναι ἀμβλύν, παρὰ ὅταν τοῦτο εἶναι ὀξύ.

Εἰκόνες, παρεμφερεῖς μὲ τὰς εἰκόνας τῶν κυμάτων Mach, δημιουργοῦνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ὑπὸ βενζινακάτων, ἀντιτορπιλικῶν, κ.λ., κινουμένων μὲ ταχύτητα, μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος διαδόσεως τῶν κυμάτων τῆς θαλάσσης.

§ 213. Ὑπερηχητικὰ ἀεροπλάνα. Ἡ ἀντίστασις ἐνὸς ἀεροπλάνου αὐξάνεται, ὥς γνωστόν, μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος, ἐφ' ὅσον αἱ ταχύτητες εἶναι σχετικῶς μικραί. Ὅταν, ὅμως, ἡ ταχύτης πλησιάσῃ πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, ἐπέρχεται πρόσθετος καταναλώσις ἐνεργείας, διότι, πλὴν τῶν γνωστῶν αἰτίων καταναλώσεως ἐνεργείας (στροβίλων, ἐσωτερικῆς τριβῆς κ.λ.), καταναλίσκεται ἐνέργεια καὶ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ κρουστικοῦ κύματος. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ἀντίστασις T αὐξάνεται περισσότερον, ἀφ' ὅ,τι ὑπολογίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$T = c_{\text{αετ}} \cdot S_{\text{μετ}} \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \quad (\text{ἐξίσωσις (1), § 201})$$

Τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ἄλλως: Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως $c_{\text{αετ}}$ ἔχει, τώρα, τιμὴν, μεγαλυτέραν τῆς κανονικῆς. Εἰς τὰς ὑπερηχητικὰς ταχύτητας ὁ συντε-



Σχ. 307. Ὑπερηχητικὸν ἀεροπλάνον μὲ πτέρυγας δέλτα καὶ μὲ ἀκίδα εἰς τὸ προωραῖον ἄκρον τῆς ἀντάκτου.

λεστής ἀντιστάσεως ἐλαττοῦται, ἀλλ' ὑπερισχύει ἡ συνεχὴς αὔξις τοῦ ἄλλου παράγοντος v^2 , ὥστε ἡ ἀντίστασις αὐξάνεται διαρκῶς, αὐξανομένης τῆς ταχύτητος.

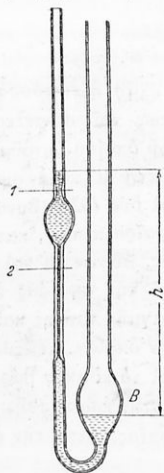
Ἐπειδὴ—καθὼς εἶδομεν καὶ ἀνωτέρω—ἡ ἐνέργεια τοῦ κρουστικοῦ κύματος ἐλαττοῦται, ἐάν τὸ προωραῖον ἄκρον εἶναι ὀξύ, διὰ τοῦτο διαμορφοῦται ἡ συνθήκη

αεροδυναμική μορφή της διατομής της πτέρυγος κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς τὸ πρῶραϊον ἄκρον νὰ σχηματίζεται ὀξεῖα ἀκμή. Τοῦτο, βεβαίως, προκαλεῖ αὐξήσιν τῶν στροβίλων καί, συνεπῶς, τῆς ἐξ αὐτῶν ἀντιστάσεως, συνολικῶς, ὅμως, ἡ ἀντίστασις παρουσιάζεται μικροτέρα. Περαιτέρω εὐρέθη ὅτι, ἐὰν εἰς τὸ πρῶραϊον ἄκρον κινου- μένον σώματος προσαρμοσθῇ ἀκίς, τὸ ὑπ' αὐτῆς δημιουργούμενον ὀρίκον στρώμα ἐλαττώνει τὴν ἐνέργειαν τοῦ χρουστικοῦ κύματος καί, συνεπῶς, ἡ ἀντίστασις, ἐν τῷ συνόλῳ, ἐλαττοῦται. Μὲ τοιαύτην ἀκίδα εἶναι ἐφωδιασμένα τὰ πρῶραϊα ἄκρα τῶν συγχρόνων ὑπερηχητικῶν ἀεροπλάνων, τὰ ὁποῖα, ἐπὶ πλέον, ἔχουν καί πτέρυγας ἰδιομόρφου σχήματος (πτέρυγες δέλτα - σχ. 307).

Ἀεροδυναμικὴ Θέρμανσις. Λόγῳ τῆς ἀδιαβατικῆς συμπίεσεως τοῦ ἀέρος εἰς τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς τοῦ πρῶραϊου ἄκρου, ἡ θερμοκρασία του αὐξάνεται. Οὕτω, εἰς ταχύτητα 610 m/sec ($M = 1,8$), ἡ θερμοκρασία αὐξάνεται κατὰ 140°C . Θέρμανσις τοῦ ἀέρος δὲν παρουσιάζεται μόνον εἰς τὸ πρῶραϊον ἄκρον, ἀλλ' ὡς εὐρέθη καί εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀεροπλάνου. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς τοῦ ὀρίκου στρώματος ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται, διὰ νὰ γίνῃ μηδὲν εἰς τὰς φλέβας, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ ἀεροπλάνου. Ὡς ἐκ τούτου, αἱ φλέβες αὗται θὰ θερμαίνονται τόσον, ὅσον καί τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς. Πρὸς τούτοις, αἱ φλέβες αὗται θερμαίνονται καί λόγῳ τοῦ ἔργου, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς εσωτερικῆς τριβῆς. Λόγῳ, ὅμως, τῶν παραγομένων στροβίλων, οἱ ὁποῖοι ἀπάγουν θερμότητα, ἡ θέρμανσις εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπολογιζομένης διὰ τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς, πάντως, ὅμως, ἡ αεροδυναμικὴ θέρμανσις ἀποτελεῖ σπουδαῖον πρόβλημα τῆς ὑπερηχητικῆς πτήσεως.

§ 214. Μέθοδοι μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ εσωτερικῆς τριβῆς υγρῶν. α) **Ἰσοδόμειρον τοῦ Ostwald.** Κατὰ τὸν τύπον (5) τῆς § 195 ἡ πα-

ροχὴ ἐνδὸς κατακορύφου σωλῆνος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ρεεῖ ἐν ὑγρὸν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ βάρους του, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πυκνότητος καὶ τοῦ συντελεστοῦ εσωτερικῆς τριβῆς αὐτοῦ. Ἡ παρουσία τῆς πυκνότητος τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν τύπον τῆς παροχῆς πρὸς ν' ἀναμένεται, καθὼς εἶναι ἐπόμενον ἐκ δύο ὑγρῶν τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ εσωτερικῆς τριβῆς, ἀλλὰ διαφόρου πυκνότητος, νὰ ρεῖ ταχύτερον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλυτέραν πυκνότητα. Κατὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸν συντελεστὴν εσωτερικῆς τριβῆς η , ἐνδὸς ὑγροῦ, παραβάλλοντες τὸν χρόνον ἐκροῆς t_1 ὀρισμένου ὄγκου V αὐτοῦ ἐκ δεδομένου κατακορύφου σωλῆνος, πρὸς τὸν χρόνον ἐκροῆς t_2 ἴσου ὄγκου ἄλλου ὑγροῦ, γνωστοῦ συντελεστοῦ εσωτερικῆς τριβῆς η_2 , τὸ ὁποῖον ρεεῖ διὰ τοῦ αὐτοῦ σωλῆνος. Πρὸς τοῦτο πληροῦμεν τὸ δοχεῖον B (σχ. 308) δι' ὀρισμένης ποσότητος τοῦ πρώτου ὑγροῦ καί, κατόπιν, δι' ἀναρροφῆσεως ἐκ τοῦ ἄλλου σωλῆνος, φέρομεν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἄνωθεν τῆς χαραγῆς 1. Ἀφήνομεν, ἀκολούθως, τὸ ὑγρὸν νὰ ρεῖ καὶ μετροῦμεν τὸν χρόνον t_1 , τὸν ἀπαιτούμενον διὰ νὰ φθάσῃ ἡ ἐλευθερὰ ἐπιφάνεια εἰς τὴν χαραγὴν 2. Κατόπιν, ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμά μετ' ἴσην ποσότητα ἐκ τοῦ



Σχ. 308. Ἰσοδόμειρον τοῦ Ostwald.

δευτέρου υγρού και μετροῦμεν τὸν χρόνον ἐκροῆς t_2 . Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, οἱ δύο χρόνοι ἐκροῆς t_1 καὶ t_2 συνδέονται μὲ τὰς πυκνότητας ϱ_1 καὶ ϱ_2 καὶ τοὺς συντελεστὰς ἐσωτερικῆς τριβῆς η_1 καὶ η_2 τῶν δύο υγρῶν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\eta_1 \cdot \varrho_2}{\eta_2 \cdot \varrho_1}.$$

Γνωρίζοντες, λοιπόν, τὰς πυκνότητας τῶν δύο υγρῶν, τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η_2 τοῦ προτύπου υγροῦ καὶ τοὺς χρόνους t_1 καὶ t_2 , οἱ ὅποιοι προέκυψαν ἐκ τῆς μετρήσεως, εὐρίσκομεν, ἐκ τοῦ ἄνω τύπου, τὸν ζητούμενον συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η_1 .

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις οἱ ὄγκοι V τῶν δύο υγρῶν εἶναι ἴσοι καὶ τὰ ἐκάστοτε ὕψη h εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα. Ἀφ' ἐτέρου, κατὰ τὰς δύο μετρήσεις, ἡ ἀκτίς R καὶ τὸ μῆκος l τοῦ τριχοειδοῦς σωλήνος, διὰ τοῦ ὁποίου ρέουν τὰ δύο υγρά, εἶναι τὰ αὐτά. Διὰ τὰς δύο μετρήσεις ἰσχύουν οἱ τύποι (βλ. § 195, ἐξίσωσις (5))

$$H_1 = \frac{V}{t_1} = \frac{\pi}{8\eta_1} \cdot \frac{\varrho_1 \cdot gh}{l} \cdot R^4$$

$$H_2 = \frac{V}{t_2} = \frac{\pi}{8\eta_2} \cdot \frac{\varrho_2 \cdot gh}{l} \cdot R^4.$$

Ἐάν διαιρέσωμεν τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν σχέσηιν

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\eta_1 \cdot \varrho_2}{\eta_2 \cdot \varrho_1} \quad \text{ὁ.ξ.δ.}$$

β) **Μέθοδος τῆς πτώσεως μικρῶν σφαιρῶν.** Ἄλλη μέθοδος μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐντὸς τοῦ υγροῦ, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς, ἀφίνομεν νὰ καταπίπτῃ μικρὰ σφαῖρα (*). Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται, ἐκτὸς τοῦ βάρους τῆς, καὶ δύο ἄλλαι δυνάμεις, ἡ ἄνωσις καὶ ἡ ἀντίστασις Stokes (§ 198). Ἡ σφαῖρα πίπτει, κατ' ἀρχάς, ἐπιταχυνομένη. Αὐξανομένης, ὅμως, τῆς ταχύτητος, αὐξάνεται καὶ ἡ ἀντίστασις, θὰ φθάσῃ δὲ στιγμῇ, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις θὰ ἰσορροπήσουν. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης καὶ ἑξῆς ἡ σφαῖρα θὰ ἀποκτήσῃ ὀρικὴν ταχύτητα v_{op} , μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ κινῆται. Ἄν καλέσωμεν r καὶ ε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς σφαίρας, ε' καὶ η τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ υγροῦ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας, κατὰ τὴν ὁποίαν

$$\text{ἀντίστασις} + \text{ἄνωσις} - \text{βάρος} = 0,$$

θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

(*) Ἡ σφαῖρα πρέπει νὰ εἶναι μικρά, διότι, ἄλλως, ἡ ροὴ περὶ αὐτὴν δὲν εἶναι στρωτή, ὥς γνωστὸν δὲ, ὁ τύπος τοῦ Stokes ἰσχύει μόνον διὰ τὴν στρωτὴν ροήν.

$$6\pi\eta \cdot r \cdot v_{oe} + \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \varepsilon' - \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \varepsilon = 0$$

$$\eta \cdot \frac{2}{9} r^2 \cdot (e - e') \cdot g = \eta \cdot v_{oe}$$

(ἐνθα e καὶ e' εἶναι αἱ πυκνότητες τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος). Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς η , λαμβάνομεν

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot (e - e')}{v_{oe}} \cdot g.$$

Ἐάν, λοιπόν, μετρήσωμεν τὴν ὀριζὴν ταχύτητα v_{oe} καὶ τὴν ἀκτῖνα r τῆς σφαίρας, γνωρίζομεν δὲ τὰς πυκνότητας e καὶ e' , δυνάμεθα ἐκ τοῦ τύπου τούτου νὰ εὑρωμεν τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ ὑγροῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἡ παροχὴ ἐνὸς ὀριζοντίου σωλήνος, διαμέτρου 6 cm καὶ μήκους 25 m , εἶναι ἴση πρὸς $15 \text{ m}^3/\text{h}$ ὕδατος. Ἡ ροὴ εἶναι στρωτὴ ἢ τυρβώδης; Διὰ τὴν λύσιν ὑπολογίζεται, πρῶτον, ἡ μέση ταχύτης. (Δίδονται: $\eta_{\text{ὕδωρ}} = 0,01 \text{ Poise}$, $R_{\text{cr}} = 1100$).

2. Εἰς τὸν πυθμένα δεξαμενῆς ὕδατος εἶναι προσηρμοσμένος ὀριζόντιος σωλήν, μήκους 20 m καὶ διαμέτρου 6 cm . Ἡ δεξαμενὴ εἶναι πλήρης μέχρις ὕψους 3 m . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν νόμον τοῦ Poiseuille διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παροχὴν; (Δίδονται: $\eta_{\text{ὕδωρ}} = 0,01 \text{ Poise}$, $R_{\text{cr}} = 1100$).

(ΑΠ: Διὰ τὴν λύσιν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Poiseuille καὶ ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν παροχὴν, ἐν συνεχείᾳ δὲ τὸν ἀριθμὸν Reynolds. Ἐὰν οὗτος διαφέρῃ πολὺ τοῦ κρισίμου ἀριθμοῦ Reynolds, εἶναι δυνατόν νὰ δοθῇ μονοσήμαντος ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα).

3. Πόση εἶναι ἡ παροχὴ τοῦ σωλήνος τοῦ σχήματος 261; (Ὅλα τὰ ἀναγκαῖα στοιχεῖα θεωροῦνται γνωστά — π.χ., τὸ ὑψόμετρον h τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας, ἡ πυκνότης ρ καὶ ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ ὑγροῦ, ἡ διάμετρος d τοῦ σωλήνος κ.λ.).

$$\left(\text{ΑΠ: } \Pi = \frac{\pi}{128\eta} \cdot \frac{\rho \cdot h}{l} \cdot d^4 \right)$$

4. Κυλινδρικὸν δοχεῖον, ἀνοικτὸν εἰς τὸ ἄνω ἄκρον, ἔχει ὕψος 20 cm καὶ διάμετρον 10 cm , φέρει δὲ εἰς τὸν πυθμένα κυκλικὴν ὀπήν, ἐμβαδοῦ 1 cm^2 . Τὸ δοχεῖον τοῦτο φέρεται κάτωθεν κρουνοῦ, ἐκ τοῦ ὁποίου ρεῖ ὕδωρ μὲ σταθεράν παροχὴν $140 \text{ cm}^3/\text{sec}$, ὅποτε παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἐλευθέρως ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Ζητεῖται τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ σταματήσῃ ἡ ἐλευθέρως ἐπιφάνεια τοῦ δοχείου. (ΑΠ: 10 cm)

5. Ἐντὸς γλυκερίνης ἀφίηται νὰ πέσῃ μία μικρὰ σφαῖρα. Νὰ ἀποδοθῇ γραφικῶς καὶ κατ' ἐλευθέραν ἐκτίμησιν α) ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς ταχύτητος τῆς σφαίρας καὶ τοῦ χρόνου καὶ β) ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς ἐπιταχύνσεως καὶ τοῦ χρόνου.

6. Μία σταγὼν ἐλαίου πίπτουσα ἐντὸς τοῦ ἀέρος μὲ σταθερὰν ταχύτητα, διανύει $0,5 \text{ cm}$ ἐντὸς $0,15 \text{ sec}$. α) Ποῖαι δυνάμεις ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῆς σφαίρας; (Ἡ ἀνωσις θεωρεῖται ἀμελητέα). β) Ἐάν ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ἀέρος εἶναι ἴσος πρὸς $1,82 \cdot 10^{-4} \text{ Poise}$, ποῖον εἶναι τὸ βάρος τῆς σταγόνος; Εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου $= 0,9 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, $g = 10 \text{ m/sec}^2$. (ΑΠ: $1,98 \cdot 10^{-5} \text{ gr}^*$)

7. Δύο ὅμοια κυλινδρικὰ δοχεῖα ἔχουν πληρωθῇ τὸ ἐν δι' ὕδατος καὶ τὸ ἄλλο δι' ὕδραργύρου μέχρι τοῦ αὐτοῦ ὕψους h . Ἐάν ἀνοιχθῇ μία μικρὰ ὀπὴ εἰς τὸ τοῖχωμα ἐκάστου δοχείου καὶ εἰς βάθος $h/2$, ποῖον ἐκ τῶν δύο ὑγρῶν θὰ ἐξέρχεται μὲ μεγαλύτεραν ταχύτητα ἐκ τῆς ὀπῆς;

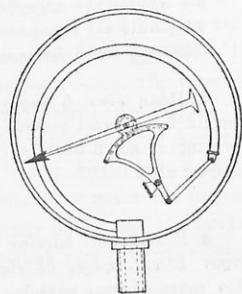
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ'

ΟΡΓΑΝΑ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

§ 215. Μανόμετρα. Τὴν πίεσιν ὑγρῶν ἢ ἀερίων μετροῦμεν διὰ τῶν *μανομέτρων*. Τούτων ὑπάρχουν διάφοροι τύποι, ἀναλόγως τῆς ἀρχῆς τῆς λειτουργίας των καὶ τοῦ μεγέθους τῆς μετρουμένης πίεσεως.

Τὰ μανόμετρα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται, εἰδικῶς, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, καλοῦνται *βαρόμετρα*, περιεγράφησαν δὲ ἀνωτέρω εἰς τὴν § 183.

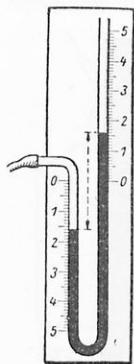
α) **Μεταλλικὰ μανόμετρα** (σχ. 309). Ἡ πίεσις μετρεῖται ἐκ τῆς παραμορφώσεως καμπύλου μεταλλικοῦ σωλήνος, ἐλλειπτικῆς διατομῆς. Ὅταν ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σωλήνος αὐξάνεται, ἡ μὲν διατομὴ τοῦ σωλήνος τείνει νὰ γίνῃ κυκλική, ὁ δὲ καμπύλος σωλήν τείνει νὰ γίνῃ εὐθύς. Τὰ μεταλλικὰ μανόμετρα χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πίεσεως ὑγρῶν ἢ ἀερίων, εἴτε μεγαλυτέρας, εἴτε μικροτέρας τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, εἶναι δὲ βαθμολογημένα εἴτε εἰς τεχνικὰς ἀτμοσφαίρας (at), εἴτε εἰς λίμπρας ἀνὰ τετραγωνικὴν ἴντζαν (lb/in^2).



Σχ. 309. Μεταλλικὸν μανόμετρον.

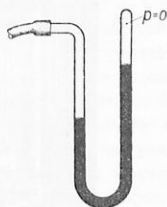
β) **Ἀνοικτὰ μανόμετρα.** Ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐξ υαλίνου σωλήνος, κεκαμμένου εἰς σχῆμα U (σχ. 310), καὶ περιέχοντος ὑγρὸν γνωστῆς πυκνότητος (Hg ἢ H_2O). Τὸ ἐν σκέλος συνδέεται μὲ τὸν χῶρον, τοῦ ὁποῖου ἡ πίε-

σις πρόκειται νὰ μετρηθῇ, ἐνῶ τὸ ἄλλο εἶναι ἀνοικτόν. Ἡ πίεσις μετρεῖται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν ἀπ' εὐθείας εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου, ἢ χιλιοστὰ στήλης ὕδατος κ.λ.



Σχ. 310. Ἀνοικτὸν μανόμετρον με ὑδράργυρον. Ἡ μετρουμένη ὑπερπίεσις εἶναι ἴση πρὸς 32 Torr.

γ) **Κλειστά μανόμετρα.** Διὰ τὴν μέτρησιν πιέσεων, μικροτέρων τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (ἀπὸ $1 \div 100$ Torr), χρησιμοποιοῦνται τὰ κλειστά μανόμετρα (σχ. 311). Ταῦτα εἶναι κλειστά εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀφαιρεθῇ ὁ ἀήρ. Ὅταν ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ὅταν ἡ μετρουμένη πίεσις δὲν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁ ὑδράργυρος εἰς τὰ δύο σκέλη λαμβάνει τὴν θέσιν, τὴν ὑποδεικνυμένην ὑπὸ τοῦ σχήματος, ὁπότε ἡ ζητουμένη πίεσις εὐρίσκεται, ἐκ τῆς μετρουμένης διαφορᾶς στάθμης, κατ' εὐθείαν εἰς Torr.



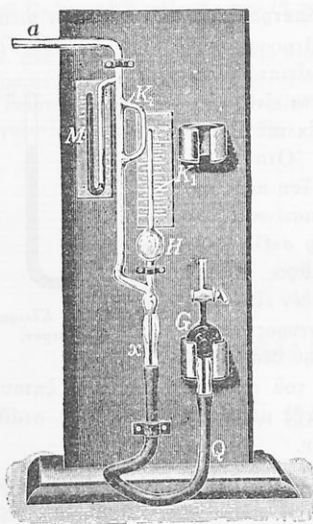
Σχ. 311. Κλειστὸν μανόμετρον.

Σημειώσεις. Εἰς τὰ μεταλλικὰ καὶ τὰ ἀνοικτὰ μανόμετρα ἡ ἔνδειξις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς μετρουμένης πίεσεως καὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Ἐπομένως, τὰ μανόμετρα ταῦτα θὰ δεικνύουν ἐνδειξιν μηδέν, ὅταν ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Ἀντιστοίχως, ὅταν δεικνύουν 1 Alm , ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι ἴση πρὸς 2 Alm . Ἀρα, αἱ ἔνδειξεις τῶν ἄνω μανομέτρων δὲν δίδουν τὴν πραγματικὴν πίεσιν (ἀπόλυτος πίεσις), ἀλλὰ τὴν *υπερπίεσιν* ἢ *υποπίεσιν*—δηλ., τὴν διαφορὰν τῆς μετρουμένης πίεσεως ἐκ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως.

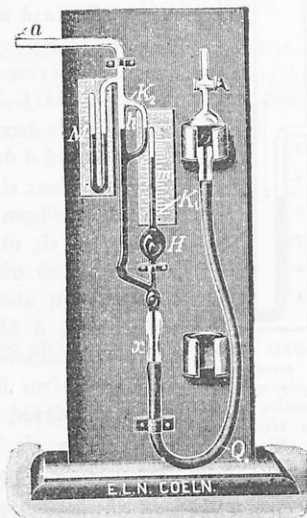
Ἀντιθέτως, εἰς τὰ κλειστά μανόμετρα ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις οὐδένα ρόλον παίζει καί, ὥς ἐκ τούτου, ταῦτα παρέχουν τὴν ἀπόλυτον πίεσιν.

δ) **Μανόμετρον MacLeod.** Διὰ πιέσεις, μικροτέρας τοῦ 1 Torr , τὰ κλειστά μανόμετρα δίδουν μεγάλα σφάλματα, λόγῳ τῆς μικρᾶς διαφορᾶς στάθμης. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας χρησιμοποιοῦνται ἄλλοι τύποι μανομέτρων, ὥς τὸ *μανόμετρον MacLeod* (σχ. 312). Ἡ ἀρχὴ τῆς λειτουργίας του εἶναι ἡ ἑξής: Ἐπειδὴ ἡ μέτρησις μικρῶν διαφορῶν στάθμης—αἱ ὁποῖαι, κατὰ τ' ἄνωτέρω, ἀντιστοιχοῦν εἰς μικρὰς πιέσεις—εἶναι ἀνακριβές, αὐξάνομεν τὴν πίεσιν κατὰ γνωστὸν παράγοντα καὶ μετροῦμεν τὴν ὑψημένην, τώρα, διαφορὰν στάθμης. Πρὸς τοῦτο συνδέομεν διὰ τοῦ σωλήνος a τὸν χῶρον, τοῦ ὁποῦ τὴν πίεσιν p_1 πρόκειται νὰ μετρήσωμεν, με δοχεῖον H γνωστοῦ ὄγκου V_1 καί, κατόπιν, δι' ἀνυψώσεως τοῦ δοχείου G , ἀναγκάζομεν τὴν στάθμην τοῦ ὑδραργύρου νὰ ἀνέλθῃ (σχ. 313), ὁπότε τὸ ἀέριον περιορίζεται ἐντὸς τοῦ σωλήνος K_1 καὶ καταλαμβάνει τὸν πολὺ μικρὸν ὄγκον V_2 . Ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου προκαλεῖ, κατὰ τὸν γνωστὸν νόμον Boyle-Mariotte, αὐξήσιν τῆς πίεσεως εἰς τὴν τιμὴν p_2 . Μετροῦντες τὴν πίεσιν ταύτην καὶ τοὺς ὄγκους V_1 καὶ V_2 , ἔχομεν τὴν ζητουμένην πίεσιν ἐκ τῆς σχέσεως $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$. Συνήθως, τὸ δο-

χεῖτον G ἀνυψοῦται μέχρις ὅτου ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια εἰς τὸν σωλήνα K_2 ἔλθῃ εἰς τὸ ὁρισμένον ὕψος h , ἐπὶ δὲ τῆς κλίμακος m ἀναγινώσκουμεν τὰς εἰς ἕκαστον ὕψος τῆς στήλης τοῦ σωλήνος K_1 ἀντιστοιχοῦσας πιέσεις. Τὸ μανόμετρον MacLeod χρη-



Σχ. 312.

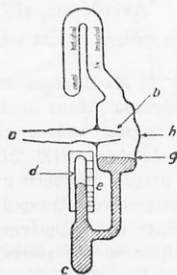


Σχ. 313.

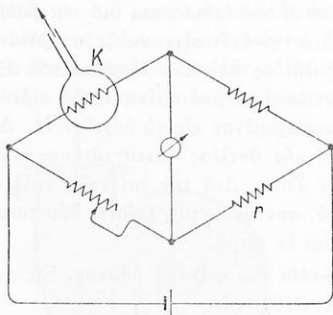
Μανόμετρον MacLeod.

σιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν πιέσεων ἀπὸ 1 Torr ἕως 10^{-5} Torr . Ὁ περιγραφεὶς τύπος μανόμετρον MacLeod ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι ἀπαιτεῖ μεγάλην ποσότητα ὑδραργύρου καὶ ὅτι ἐκάστη μέτρησις διαρκεῖ ἄρκετόν, σχετικῶς, χρόνον. Δι' αὐτὸ καὶ χρησιμοποιεῖται μόνον διὰ τὴν βαθμολογίαν ἄλλων εὐχρηστοτέρων τύπων μανομέτρων.

Παράλλαγὴν τοῦ μανόμετρον MacLeod παριστᾷ τὸ σχῆμα 314. Τὸ μανόμετρον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἑν κλειστὸν μανόμετρον καὶ ἑν ὑποτυπῶδες μανόμετρον MacLeod. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πιέσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Συνδέομεν τὸν ἐσμυρισμένον κῶνον a μὲ τὸν χώρον τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν πίεσιν. Κατόπιν, στρέφοντες τὴν συσκευὴν περὶ τὸν ἄξονα a , φέρομεν τὸν ὑδραργῦρον ἐντὸς τοῦ σωλήνος c , ὅποτε τὸ ἐντὸς αὐτοῦ πρότερον εὐρισκόμενον ἀέριον συμπιέζεται ἐντὸς τοῦ σωλήνος d . Ἡ πίεσις παρέχεται ἐπὶ κλίμακος e ἐκ τοῦ ὕψους τῆς στάθμης τοῦ ὑδραργύρου. Διὰ τοιοῦτου μανόμετρον δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν πιέσεις μέχρι 10^{-2} Torr . Διὰ στροφῆς τοῦ μανόμετρον κατὰ 180° φέρεται ὁ ὑδραργῦρος εἰς τὸ κλειστὸν μανόμετρον, ὅποτε μετροῦνται πιέσεις ἀπὸ 1 Torr ἕως 50 Torr .

Σχ. 314. Ἀπλοστεν-
μένον μανόμετρον
MacLeod.

ε) **Μανόμετρον Pirani.** Ἡ λειτουργία τοῦ μανομέτρου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς *θερμικῆς ἀγωγιμότητος* τῶν ἀερίων μετὰ τῆς πίεσεως. Τὸ μανόμετρον Pirani ἀποτελεῖται, κατ' ἀρχήν, ἐκ λεπτοῦ σύρματος, εὐρισκομένου ἐντὸς θαλάμου κώδωνος *K* (σχ. 315) καὶ τὸ ὁποῖον θερμαίνεται δι' ἡλεκτρικοῦ ρεύματος.

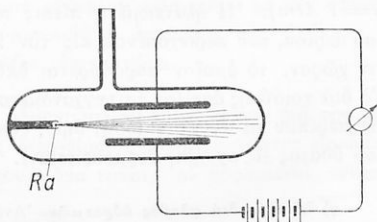


Σχ. 315. Μανόμετρον Pirani (ἀρχή).

φύρας Wheatstone), δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου. Τὸ ὄργανον τοῦτο βαθμολογεῖται διὰ συγκρίσεως πρὸς μανόμετρον MacLeod. Ἡ εὐαισθησία τῆς διατάξεως διπλασιάζεται, ἐὰν ἡ ἀντίστασις *r* εὐρίσκεται καὶ αὐτὴ ἐντὸς τοῦ κώδωνος, διότι ἡ μεταβολὴ τῆς ἀντιστάσεως δύο ἀπέναντι κλάδων τῆς γεφύρας διαταράσσει τὴν ἰσορροπίαν τῆς κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν. Αἱ μετρήσεις διὰ μανομέτρου Pirani ἔχουν τὸ πλεονέκτημα ὅτι δι' αὐτοῦ ἡ μέτρηση πίεσεως ἀνάγεται εἰς μέτρησιν ἀντιστάσεως, ἔχουν, ὁμως, καὶ τὸ μειονέκτημα ὅτι εἶναι ἐφικτὰ μόνον εἰς ὠρισμένην περιοχὴν πίεσεων (10^{-1} ἕως 10^{-4} Torr) καὶ ὅτι ἡ κλίμαξ τοῦ ὁργάνου ἰσχύει δι' ὠρισμένον μόνον ἀέριον.

ς) **Μανόμετρον ἰονισμοῦ** (σχ. 316).

Ἡ λειτουργία τοῦ ὁργάνου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τοῦ *ιονισμοῦ*, τὸν ὁποῖον ὑφίσταται ἐν ἀέριον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθεροῦ ἰονιστικοῦ αἰτίου, π.χ., σωματίων *a*. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν παρὰ γομένων ἰόντων εἶναι ἀνάλογος τῆς πίεσεως τοῦ ἀερίου, ἡ μέτρηση πίεσεως ἀνάγεται εἰς μέτρησιν τοῦ *ρεύματος ἰονισμοῦ*. Εἰς ἄλλους τύπους τοιούτων μανομέτρων χρησιμοποιεῖται ὡς ἰονιστικὸν αἶτιον, ἀντὶ σωματίων *a*, ἀκτὶς ἡλεκτρονίων, ἐκπεμπομένων ὑπὸ θερμῆς καθόδου.

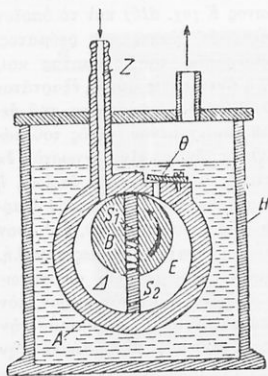


Σχ. 316. Μανόμετρον ἰονισμοῦ (ἀρχή).

§ 216. Ἀεραντλίας. Διὰ τῶν ἀεραντλιῶν εἴτε ἐλαττοῦμεν (*ἀντλίας κενοῦ*), εἴτε αὐξάνομεν (*συμπιεσταί*) τὴν πίεσιν εἰς ἓνα χῶρον, ἐνῶ διὰ τῶν *ἀνεμιστήρων* ἀπλῶς προσδίδομεν ταχύτητα εἰς ἀέρια. Σπουδαιότεροι τύποι ἀντλιῶν κενοῦ εἶναι οἱ ἑξῆς:

α) **Περιστροφικὴ ἀντλία.** Ἐντὸς κοίλου κυλινδρικοῦ τυμπάνου *A* (σχ. 317) στρέφεται μέταλλινος κύλινδρος *B* περὶ ἄξονα, μὴ συμπίπτοντα

μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τυμπάνου. Δύο σύρται S_1, S_2 πιέζονται δι' ἐλατηρίου οὕτως ὥστε νὰ ἐφάπτονται διαρκῶς τῶν τοιχωμάτων τοῦ τυμπάνου. Κατὰ

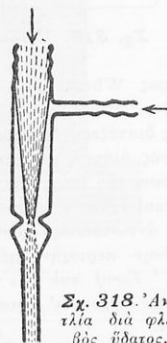


Σχ. 317. Περιστροφικὴ ἀντλία κενοῦ.

τὴν περιστροφὴν, παρασύρεται ἀέριον ἀπὸ τὸ στόμιον Z καὶ ἐκδιώκεται διὰ τῆς βαλβίδος θ . Διὰ τὴν ἐπίτευξιν καλῆς στεγανότητος τῆς βαλβίδος καὶ τῶν ἐδράνων τοῦ ἄξονος, ἡ ἀντλία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς εἰδικοῦ ἐλαίου, περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον H . Διὰ περιστροφικῆς ἀντλίας ἐπιτυγχάνομεν κενὸν μέχρι $0,1 \text{ Torr}$. Διὰ τὴν ἐπίτευξιν καλλιτέρου κενοῦ, συνδυάζονται, ἐνίοτε, δύο τοιαῦται ἀντλίας ἐν σειρᾷ.

β) Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος. Εἰς ταύ-

την (σχ. 318) ὅρει ὕδωρ μὲ μεγάλην ταχύτητα διὰ στενοῦ ἀκροφυσίου. Ἄλλος σωλήν, περιβάλλον τὸν



Σχ. 318. Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος.

γ) Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδρατμων. Ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην εἶναι καὶ ἡ κατασκευὴ τῆς ἀντλίας διὰ φλεβὸς ὕδρατμων (ejector). Εἰς ταύτην διοχετεύονται θερμοὶ ὕδρατμοι ὑπὸ πίεσιν, οἱ ὅποιοι, ἐκτονοῦμενοι εἰς τὸ ἀκροφύσιον, ψύχονται, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἀποκτοῦν μεγάλην ταχύτητα. Ἡ ψύξις εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ τάσις τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν τοῦ ὕδατος νὰ καθορίζῃ τὸ ἐπιτυγχάνομενον κενὸν εἰς 2 Torr . Συνήθως, ἡ ἀντλία αὕτη συνδυάζεται μὲ ἀντλίαν διὰ φλεβὸς ὕδατος, ἡ ὁποία δημιουργεῖ τὸ ἀναγκαῖον προκαταρκτικὸν κενόν.

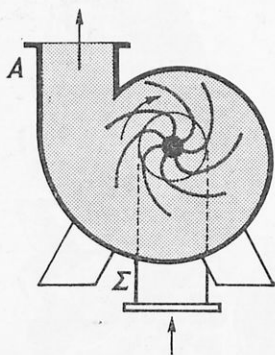
δ) Ἀντλία διαχύσεως. Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐπιτύχωμεν ἐλάττωσιν τῆς πίεσεως κάτω τῆς τιμῆς τοῦ $1 \cdot 10^{-3} \text{ Torr}$, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀντλία διαχύσεως (*).

§ 217. Ὑδραντλίας. Αἱ συνηθέστερον χρησιμοποιούμεναι ὕδραντλίας εἶναι δύο τύπων: αἱ ἐμβολοφόροι καὶ αἱ φυγοκεντρικαί. Ἡ ἀπλουστάτη ἐκ

(*) Βλ. ΘΕΡΜΟΤΗΣ, § 98.

τών ἀντλιῶν τοῦ πρώτου τύπου εἶναι ἡ **ἀναρροφητικὴ ἀντλία**. Ἐπειδὴ ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος γίνεται τῇ βοήθειᾳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πίεσεως, εἶναι ἐπόμενον αἱ ἀντλίες αὗται νὰ ἀντλοῦν τὸ ὕδωρ πρακτικῶς μέχρι, τὸ πολὺ, 8 μέτρων. Διὰ μεγαλυτέρας ἀνυψώσεις χρησιμοποιοῦνται αἱ **καταθλιπτικαὶ ἀντλίες**, αἱ ὁποῖαι τοποθετοῦνται πλησίον τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος.

Φυγοκεντρικὴ ἀντλία. Ἐπὶ ἄξονος εἶναι στερεωμένα πτερύγια (σχ. 319), τὰ ὁποῖα τίθενται εἰς περιστροφὴν διὰ τινος κινητήρος.



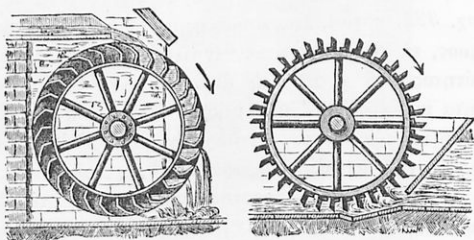
Σχ. 319. Φυγοκεντρικὴ ἀντλία.

Ὁ ἀναρροφητικὸς σωλὴν Σ καταλήγει, ἐκ τῶν πλαγίων, εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἄξονος. Ὁ ἀπαγωγὸς σωλὴν A εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ τοίχωμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κυλινδρικοῦ τοιχώματος. Διὰ νὰ λειτουργήσῃ ἡ ἀντλία, πληροῦμεν αὐτὴν πρῶτον δι' ὕδατος καί, ἀκολουθῶς, θέτομεν εἰς περιστροφὴν τὰ πτερύγια, τὰ ὁποῖα προσδίδουν εἰς τὸ ὕδωρ μίαν ταχύτητα v . Τὸ ὕδωρ, εἰσερχόμενον μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην εἰς τὸν ἀπαγωγὸν σωλῆνα, δύναται νὰ ἀνέλθῃ εἰς ὕψος h , παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ τύπου $v = \sqrt{2g \cdot h}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ λειτουργία τῆς φυγοκεντρικῆς ἀντλίας οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει μὲ τὴν «φυγοκεντρον δύναμιν», ὅπως ἀφήνει νὰ ὑπονοηθῇ ἡ ὀνομασία της. Πάντως, ὁ ὅρος «φυγοκεντρικὴ ἀντλία» ἔχει, πλέον, ἐπικρατήσει.

§ 218. Ύδροκινητήρες. Οἱ ὕδροκινητήρες χρησιμεύουν διὰ τὴν μετατροπὴν τῆς δυναμικῆς ἢ κινητικῆς ἐνεργείας ποσοτήτων ὕδατος εἰς ὠφέλιμον ἔργον. Ύδροκινητῶν ὑπάρχουν δύο τύποι: οἱ ὕδραυλικοὶ τροχοὶ καὶ οἱ ὕδροστρόβιλοι.

α) **Ύδραυλικοὶ τροχοί.** Εἰς ἓνα τύπον ἐξ αὐτῶν—εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ὕδωρ προσάγεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ τροχοῦ (σχ. 320)—ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι μέγας, φθάνων τὰ 85%, ὁ τύπος, ὅμως, οὗτος ἔχει τὸ μειονέκτημα ν' ἀπαιτῇ τροχὸν μεγάλης διαμέτρου.

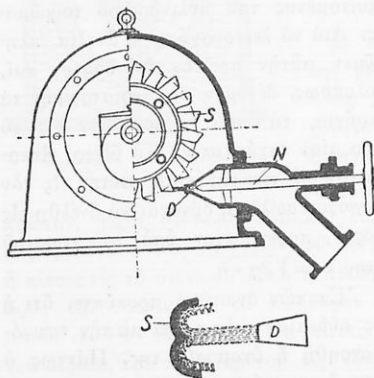


Σχ. 320 καὶ 321. Ύδραυλικοὶ τροχοί.

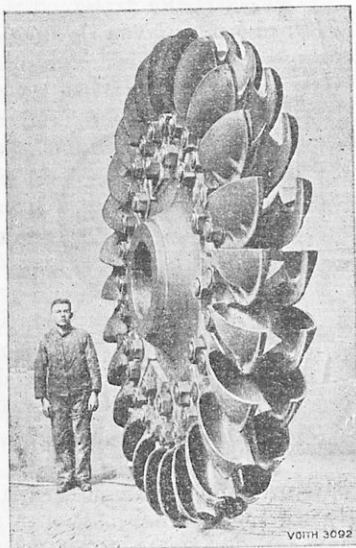
Εἰς ἄλλον τύπον (σχ. 321) σχηματίζεται, διὰ καταλλήλου φράκτου, ὕδα-

τίνῃ φλὲψ μεγάλης ταχύτητος, ἡ ὁποία καὶ προσκρούει εἰς τὰ σκαφίδια τοῦ κάτω μέρους τοῦ τροχοῦ.

β) **Ὑδροστρόβιλοι.** Τούτων ὑπάρχουν δύο, κυρίως, τύποι: οἱ ὕδροστρόβιλοι δράσεως καὶ οἱ ὕδροστρόβιλοι ἀντιδράσεως. Εἰς τοὺς ὕδροστρόβιλους δράσεως ἀνήκει ὁ **ὕδροστρόβιλος Pelton** (σχ. 322). Εἰς αὐτὸν τὸ ὕδωρ, ἐξερχόμενον μετὰ μεγάλης ταχύτητος διὰ τοῦ ἀκροφυσίου *D*, πλήττει τὰ ἐπὶ τροχοῦ στερεωμένα σκαφίδια *S* (τῶν ὁποίων ἡ πραγματικὴ μορφή φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 323) καὶ τὸν θέτει εἰς περιστροφήν.



Σχ. 322. Ὑδροστρόβιλος Pelton. Διὰ τοῦ ρυθμιστοῦ *N* ρυθμίζεται ἡ ποσότης τοῦ προσαγομένου ὕδατος.



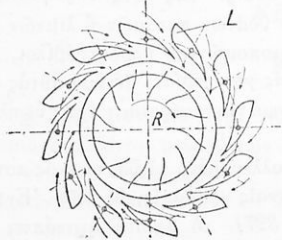
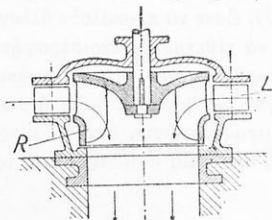
Σχ. 323. Φωτογραφία τοῦ τροχοῦ ἐνὸς ὕδροστρόβιλου Pelton.

Ἐὰν τὰ σκαφίδια ταῦτα εἶναι ἀκίνητα, τὸ ὕδωρ, προσπίπτον ἐπ' αὐτῶν, ἀλλάσσει, ἀπλῶς, τὴν φορὰν τῆς ταχύτητός του κατὰ 180° περίπου (σχ. 322, κάτω), ἐξασκουμένης, οὕτω, μιᾶς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ τροχοῦ. Ἐάν, ὅμως, τὰ σκαφίδια μετατίθενται μετὰ ταχύτητα, ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος, ἡ ἀνακαμφθεῖσα ἀκτὶς ἔχει, ὥς ἀποδεικνύεται, ταχύτητα περίπου ἴσην πρὸς μηδέν, ἡ κινητικὴ της, δηλ., ἐνέργεια ἔχει μεταδοθῇ εἰς τὸν τροχόν. Οἱ ὕδροστρόβιλοι Pelton χρησιμοποιοῦνται ἐκεῖ ὅπου διατίθενται μεγάλοι διαφοραὶ στάθμης τοῦ ὕδατος.

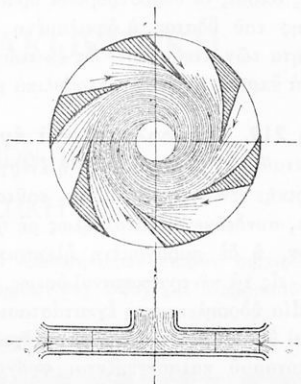
Ἐνῶ εἰς τοὺς ὕδροστρόβιλους δράσεως τὸ ὕδωρ φθάνει εἰς τὰ σκαφίδια ἀποκλειστικῶς μετὰ κινητικὴν ἐνέργειαν, δηλ., χωρὶς ὑπερπίεσιν, εἰς τοὺς ὕδροστρόβιλους ἀντιδράσεως, ἀντιθέτως, τὸ ὕδωρ προσάγεται μετὰ μικρὰν μὲν ταχύτητα, ἀλλὰ μετὰ τὴν πλήρη σχεδὸν αὐτοῦ πίεσιν, χωρὶς, δηλ., νὰ ἔχη μετατρέψῃ τὴν δυναμικὴν του ἐνέργειαν εἰς κινητικὴν. Κατὰ τὴν ῥοὴν διὰ τοῦ τροχοῦ, ἐλαττοῦται ἡ πίεσις τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον, οὕτω, ἐπιταχύνεται ἀντι-

στοίχως. Ἀκριβῶς δὲ ἡ ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος προκαλουμένη ἀντίδρασις θέτει εἰς περιστροφὴν τὸν τροχὸν τοῦ ὑδροστροβίλου.

Εἰς τοὺς ὑδροστροβίλους ἀντιδράσεως ἀνήκει ὁ ὑδροστροβίλος *Francis* (σχ. 324), ἡ ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ

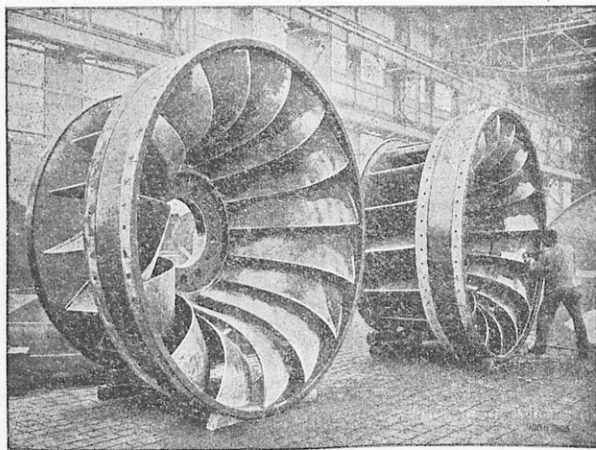


Σχ. 324. Ὑδροστροβίλος *Francis*.



Σχ. 325. Ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ μεριστοῦ. (Ὁ τροχὸς δὲν ἔχει σχεδιασθῆ).

ἐξῆς: Περὶ τὸν περιστρεφόμενον τροχὸν *R* εὐρίσκεται ὁ ἀκίνητος *μεριστής*,



Σχ. 326. Τροχοὶ ὑδροστροβίλων *Francis*.

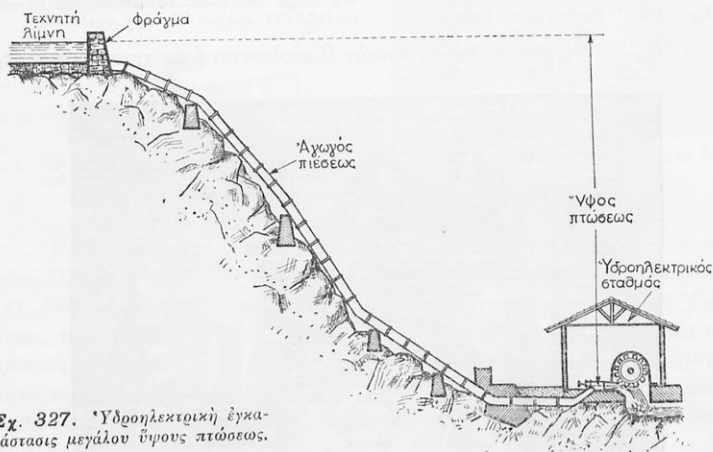
ἀριθμός, δηλ., πτερυγίων *L*, τὰ ὁποῖα κατευθύνουν τὸ ὕδωρ ἐκ τῶν πλαγίων,

οὕτως ὥστε τοῦτο, κατὰ τὴν ροὴν του πρὸς τὸν ἄξονα, ν' ἀποκτᾷ καὶ περιδίνησιν (σχ. 325). Ἐν συνεχείᾳ, τὸ ὕδωρ προσβάλλει τὰ πτερυγία τοῦ τροχοῦ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τοιαύτην μορφήν (σχ. 326), ὥστε νὰ προκαλοῦν ἀλλαγὴν τῆς φορᾶς τῆς ροῆς, μὲ ἀποτέλεσμα ὁ τροχὸς νὰ τίθεται εἰς περιστροφὴν.

Οἱ ὑδροτροβίλοι ἀντιδράσεως χρησιμοποιοῦνται εἰς μικρὰς πτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ὑδροστροβίλοι δράσεως θὰ ἦσαν ἀσύμφοροι, διότι ἡ μικρὰ ταχύτης τοῦ ὕδατος, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν μικρὰν πτώσιν, ἀπαιτεῖ μικρὰν ταχύτητα τῶν πτερυγίων, ὥς ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀναγκαῖα διάμετρος τοῦ τροχοῦ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ὑπερβολικὰ μεγάλη.

§ 219. Ὑδροηλεκτρικαὶ ἐγκαταστάσεις. Εἰς τοὺς ὑδροηλεκτρικοὺς σταθμοὺς μετατρέπεται ἡ ἐνέργεια τῶν ὑδάτων ποταμῶν ἢ λιμνῶν εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται ὑδροστροβίλοι, οἱ ὁποῖοι, συνδεόμενοι καταλλήλως μὲ ἠλεκτρικὰς γεννητρίδας, θέτουν αὐτὰς εἰς κίνησιν, ἡ δὲ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται, ὑπὸ ὑψηλῶν τάσιν, εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως.

Μία ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις, ἐκμεταλλευομένη τὰ ὕδατα ἐνὸς ποταμοῦ καὶ ὑπὸ μέγα ὕψος πτώσεως, ἔχει, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, ὡς ἑξῆς: Ἐντὸς τοῦ ποταμοῦ κατασκευάζεται φράγμα (σχ. 327), τὸ ὁποῖον ἀνακόπτει τὸ ρεῦμα, τὰ δὲ ὕδατα φέρονται δι' ἀγωγὸν πίεσεως εἰς τὸν ὑδροστροβίλον.



Σχ. 327. Ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις μεγάλου ὕψους πτώσεως.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ εἰκοσιτετραώρου ἡ ἀπορροφουμένη ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ἠλεκτρικὴ ἰσχύς παρουσιάζει αἰχμὰς, ὑπερβαίνουσας τὴν μεγίστην ἰσχύν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράσῃ ὁ ποταμὸς, κατασκευάζεται ὕδαταποθήκη, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἀποταμιεύεται τὸ ὕδωρ κατὰ τὰς φάσεις μικρᾶς ζήτησεως ἰσχύος καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὰς φάσεις τῶν αἰχμῶν.

ΜΕΡΟΣ ΕΝΑΤΟΝ

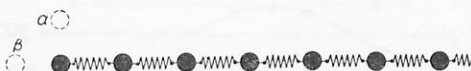
ΚΥΜΑΤΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ'

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

§ 220. Γενικά περί κυμάτων. Θεωρήσωμεν σειρὰν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των δι' ἑλατηρίων (σχ. 328) καὶ ἰσορροποῦν ὅλως ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἐὰν ἐκβάλωμεν ἀποτόμως τὴν πρώτην σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της, αὕτη θὰ ἐξασκήσῃ, διὰ μέσου



Σχ. 328. Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς παραγωγῆς ἐγκλωσίων κυμάτων (α) καὶ διαμήκων κυμάτων (β).

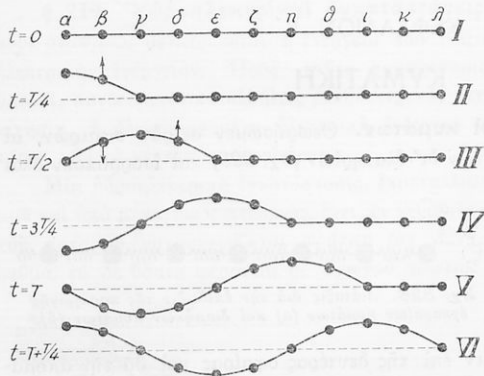
τοῦ ἑλατηρίου, μίαν δύναμιν ἐπὶ τῆς δευτέρας σφαίρας καὶ θὰ τὴν ἀπομακρύνῃ, ὡσαύτως, ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας της. Ἀκολουθῶς, ἡ δευτέρα σφαῖρα, λόγῳ τῆς μετακινήσεώς της, θὰ παρασύρῃ τὴν τρίτην σφαῖραν κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαταραχή, τὴν ὁποίαν ἐπροκαλέσαμεν εἰς τὴν πρώτην σφαῖραν, διαδίδεται ἀπὸ σφαίρας εἰς σφαῖραν, ἐξ ἄριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ. Μίαν τοιαύτην διαταραχήν, διαδιδομένην κατὰ μῆκος τῆς σειρᾶς ὅλων τῶν σφαιρῶν, καλοῦμεν **κῦμα**, τὴν ταχύτητα δὲ διαδόσεως τῆς διαταραχῆς καλοῦμεν **ταχύτητα τοῦ κύματος**.

Ἐὰν τὴν πρώτην σφαῖραν ὑποβάλλωμεν εἰς ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, ὁμοίαν ταλάντωσιν θὰ ἐκτελέσουν καὶ αἱ ἄλλαι σφαῖραι καὶ τὸ παργόμενον κῦμα θὰ εἶναι **ἁρμονικόν**.

Ἀναλόγως τῆς διενθύνσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν μετακινῶμεν τὴν πρώτην σφαῖραν, δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν δύο εἶδη κυμάτων: Ἐὰν μετακινήσωμεν τὴν πρώτην σφαῖραν καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος καὶ τὴν φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν α, καὶ ἡ δευτέρα σφαῖρα θὰ κινήθῃ καὶ αὕτη καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, διὰ τὴν θέσιν, μετ' ὀλίγον, εἰς ὁμοίαν κίνησιν τὴν τρίτην σφαῖραν κ.ο.κ. Ἐν τοιοῦτο κῦμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διεύθυνσις, κατὰ τὴν ὁποίαν κινῶνται αἱ σφαῖραι, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος, καλεῖται **ἐγκλωσίον κῦμα**.

Διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 328 δυνάμεθα νὰ προκαλέσωμεν, ἐκτὸς τῶν ἐγκάρσιων κυμάτων, καὶ ἄλλου εἶδους κύματα: Ἐὰν μετακινήσωμεν ἀποτόμως τὴν πρώτην σφαῖραν πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ τὴν φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν β, ἡ διαταραχὴ αὕτη θὰ μεταδοθῇ, ἐπίσης, ἀπὸ σφαίρας εἰς σφαῖραν, ἀλλὰ, ἐν προκειμένῳ, ἡ κίνησις θὰ γίνεται *παράλληλως* πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Τοιαῦτα κύματα καλοῦνται *διαμήκη*.

§ 221. Ἐγκάρσια κύματα. Ὡς εἴπομεν ἄνωτέρω, εἰς τὰ ἐγκάρσια κύματα ἡ κίνησις γίνεται καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύ-



Σχ. 329. Διαδοχαὶ μορφαὶ (στιγμιότυπα) ἐγκάρσιον κύματος, διαδιδόμενον πρὸς τὰ δεξιὰ. Τὰ ὑλικά σημεῖα α, β, γ... λ ταλαντοῦνται καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος.

ἐξῆς: Ὅταν τὸ πρῶτον σημεῖον α ἀρχίσῃ κινούμενον πρὸς τὰ ἄνω, θὰ παρασύρῃ, μετ' ὀλίγον, τὸ γειτονικόν του σημεῖον β, τὸ ὅποιον θ' ἀρχίσῃ καὶ αὐτὸ κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν. Ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ πρώτου σημείου α γίνῃ ἴση πρὸς τὸ πλάτος (II), ἡ ταχύτης του θὰ ἔχῃ γίνῃ μηδέν, τὸ σημεῖον, ὅμως, β ἔξακολουθεῖ κινούμενον, λόγῳ τῆς ἀδραναίας, κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους. Ὅταν τὸ σημεῖον α ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του (III), τὸ σημεῖον β θὰ ἐπιστρέφῃ καὶ αὐτὸ πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐνῶ ἄλλο σημεῖον δ θὰ κινῆται, ἀκόμη, πρὸς τὰ ἄνω. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δημιουργοῦνται «ὄρη» καὶ «κοιλιάδες», διαδιδόμεναι πρὸς τὰ δεξιὰ. Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν διάδοσιν τοῦ κύματος, τὰ διάφορα ὑλικά σημεῖα κινοῦνται περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των, χωρὶς, ὅμως, ν' ἀπομακρύνωνται αὐτῆς.

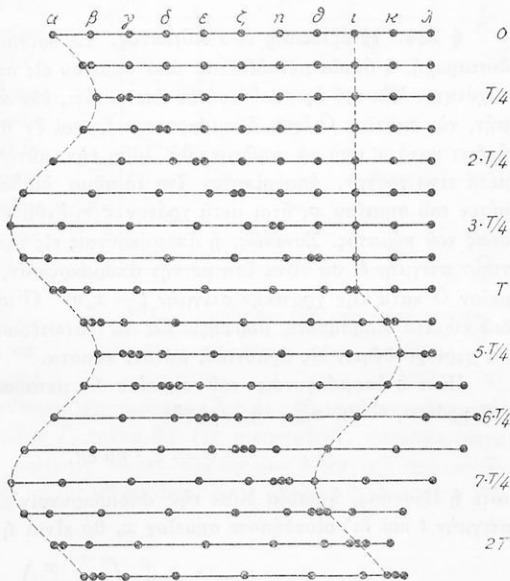
§ 222. Διαμήκη κύματα. Εἰς τὰ διαμήκη κύματα ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως συμπίπτει, ὡς εἶδομεν, μετ' τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος.

ματος. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸν μηχανισμόν, κατὰ τὸν ὅποιον διαδίδεται ἐν ἐγκάρσιον κύμα, θεωροῦμεν σειρὰν ὑλικῶν σημείων α, β, γ... λ (σχ. 329, I), ἐλαστικῶς συνδεδεμένων μεταξύ των καὶ ἰσορροπούντων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἐστὼ, ἥδη, ὅτι τὸ πρῶτον σημεῖον α ἐκτελεῖ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ἐπὶ κατακορύφου τροχιάς. Ἡ ταλάντωσις αὕτη θὰ διαδοθῇ, διαδοχικῶς, ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ὡς

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ μηχανισμοῦ τῆς παραγωγῆς καὶ διαδόσεως ἐνὸς τοιοῦτου κύματος, καταφεύγομεν εἰς εἰκονικὸν πείραμα, ἀνάλογον πρὸς τὸ προηγούμενον (σχ. 330): Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ πρῶτον ὑλικὸν σημεῖον α ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του ($l=0$), μετακινούντες αὐτὸ πρὸς τὰ

δεξιὰ, θὰ ἐλαττωθῇ ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τὸ γειτονικὸν σημεῖον β, ὁπότε δημιουργοῦνται δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγκάζουν τὸ σημεῖον τοῦτο ν' ἀρχίσῃ κινούμενον πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν. Οὕτω, εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων α καὶ β θὰ δημιουργηθῇ ἓν **πύκνωμα** ὑλικῶν σημείων. Ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ σημείου α γίνῃ ἴση πρὸς τὸ πλάτος ($l=T/4$), ἡ ταχύτης του εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, τὸ σημεῖον, ὅμως, β ἔξακολουθεῖ κινούμενον, λόγῳ τῆς ἁδρανείας, πρὸς τὰ

δεξιὰ. Ὅταν τὸ σημεῖον α ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας ($l=2\cdot T/4$), τὰ σημεῖα β, γ θὰ ἐπιστρέφουν καὶ αὐτὰ πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐνῶ ἄλλα σημεῖα (ε, ζ) θὰ κινούνται, ἀκόμη, ἀντιθέτως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πύκνωμα τῶν ὑλικῶν σημείων ἔχει μετακινηθῇ ἀπὸ τῆς περιοχῆς τῶν σημείων α, β εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων δ, ε καί, μάλιστα, ὅτι εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων α, β ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν γειτονικῶν σημείων, εἶναι, τώρα, μεγαλυτέρα τῆς κανονικῆς, ἔχει, δηλ., ἔχει δημιουργηθῇ ἓν **ἀραιώμα**. Τὰ διαμήκη κύματα, λοιπόν, ἀποτελοῦνται ἐκ διαδοχικῶν πυκνωμάτων καὶ ἀραιωμάτων, διαδομένων ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον. Παρακολουθοῦντες τὰς διαδοχικὰς θέσεις τῶν διαφόρων σημείων (π.χ., τοῦ σημείου ι), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα ταλαντοῦνται περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των, χωρὶς, ὅμως, καὶ ν' ἀπομακρύνωνται αὐτῆς.



Σχ. 330. Διαδοχικαὶ μορφαὶ διαμήκους κύματος, διαδιδόμενου πρὸς τὰ δεξιὰ. Τὰ ὑλικά σημεῖα ταλαντοῦνται παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος.

ἑκαστον ὀλικὸν σημεῖον ἐκτελεῖ ἀρμονικὴν ταλάντωσιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του καί, ὥς ἐκ τούτου, ἔχει ταχύτητα, ἡ ὁποία, ὥς γνωστόν, μεταβάλλεται ἀρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Τὴν ταχύτητα ταύτην τῶν ὀλικῶν σημείων κατὰ τὴν ταλάντωσιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των καλοῦμεν *ὠκύτητα*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ κύματος.

§ 224. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύματος. Ἐξ ὁρισμοῦ, κύμα καλεῖται πᾶσα διαταραχή, ἡ ὁποία μεταδίδεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον μὲ πεπερασμένην ταχύτητα. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ὅτι, ἐὰν κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, τὸ σημεῖον O ἔχει ἀπομάκρυνσιν ξ , καὶ ἐν ἄλλῳ σημείῳ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει κατὰ x ἀπὸ τοῦ πρώτου, θὰ λάβῃ τὴν αὐτὴν ἀπομάκρυνσιν ξ , ἀλλὰ μετὰ τινα χρόνον, ἀπαραίτητον ἵνα τὸ κύμα διαδοθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου O μέχρι τοῦ σημείου x , ἥτοι μετὰ χρόνον x/v , ἔνθα v εἶναι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος. Συνεπῶς, ἡ ἀπομάκρυνσις εἰς τὴν θέσιν x κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t , θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπομάκρυνσιν, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ σημεῖον O κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν $t - x/v$. Ὁ συλλογισμὸς οὗτος ἰσχύει διὰ κύματα οἰασδήποτε μορφῆς. Εἰς τὰ κατωτέρω, χάριν ἀπλουστεύσεως, θὰ περιορισθῶμεν εἰς ἀρμονικά, μόνον, κύματα.

Ἐὰν ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ σημείου O μεταβάλλεται ἀρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου, εἶναι, π.χ., τῆς μορφῆς

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta\mu \omega t,$$

τότε ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τὴν ἀπομάκρυνσιν εἰς οἰανδήποτε χρονικὴν στιγμήν t καὶ δι' οἰονδήποτε σημεῖον x , θὰ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta\mu \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (1)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ μέγεθος ξ_0 καλεῖται *πλάτος* τοῦ κύματος, τὸ δὲ μέγεθος $\omega(t - x/v)$ καλεῖται *φάσις* τοῦ κύματος. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ξ κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν t , χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὴν ἀπόστασιν x τοῦ σημείου.

Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), τὸ ξ ἐξαρτᾶται ἐκ *δύο* μεταβλητῶν—ἥτοι ἐκ τοῦ χρόνου t καὶ τῆς ἀποστάσεως x —δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν γραφικῶς διὰ δύο διαγραμμάτων. Τὸ πρῶτον θὰ λάβωμεν, ὅταν θεωρήσωμεν τὸ t σταθερόν, ὁπότε τὸ ξ θὰ εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις μόνον τοῦ x , τὸ δὲ δεύτερον, ὅταν θεωρήσωμεν τὸ x σταθερόν, ὁπότε τὸ ξ θὰ εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις μόνον τοῦ t .

α) Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ξ , τὰς ὁποίας ἔχουν τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ χώρου εἰς δεδομένην χρονικὴν στιγμήν t (δηλ., διὰ $t = \text{σταθ.}$), θὰ λάβωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν σχέσιν

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta\mu \left(-\frac{\omega}{v} \cdot x + \text{σταθ} \right).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $t = \text{σταθ.}$, τὸ ξ εἶναι ἡμιτονοειδὲς συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως x (σχ. 331, I). Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως ταύτης καλεῖται **στιγμιότυπον** τοῦ κύματος (*).

Τὰ σημεῖα K καὶ A εἶναι δύο σημεῖα, τῶν ὁποίων ἡ φάσις διαφέρει κατὰ 360° . Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν KA μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καί, συνεπῶς, παριστᾷ ἓν μῆκος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **μῆκος κύματος** καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ λ . Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν ἄλλο στιγμιότυπον μετὰ τινα χρόνον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ εἰκὼν θὰ ἔχῃ μετατοπισθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Ἐάν τὸ δεύτερον στιγμιότυπον ἔχῃ ληφθῇ μετὰ πάροδον χρόνου, ἴσου πρὸς τὴν περιόδον T , τοῦτο θὰ ἔχῃ προχωρήσει, ἀκριβῶς, κατὰ ἓν μῆκος κύματος λ . Τὸ πηλίκον, ὅμως, τοῦ δρόμου λ διὰ τοῦ χρόνου T , ἐντὸς τοῦ οὐλοῦ διηνύθη οὗτος, εἶναι ἀκριβῶς ἡ ταχύτης διαδόσεως v τοῦ κύματος, ὁπότε ἔχομεν

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

ἢ, κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως $T = 1/v$,

$$\boxed{v \cdot \lambda = v} \quad (2)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ τῆς σχέσεως $\omega = 2\pi v$, ἡ ἐξίσωσις (1) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς:

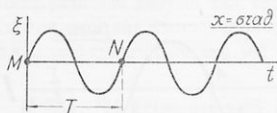
$$\xi = \xi_0 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Ἐξίσωσις τοῦ ἁρμο-} \\ \text{νικοῦ κύματος} \end{array} \quad (3)$$

β) Ἐάν ἐξετάσωμεν τὰς τιμὰς, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ ἀπομάκρυνσις ξ ἐνὸς δεδομένου σημείου συναρτήσῃ τοῦ χρόνου, (δηλ., ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $x = \text{σταθ.}$), θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθ.} \right) \quad (4)$$

(*) Ἐν στιγμιότυπον ἀποτελεῖ, π.χ., ἡ εἰκὼν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἐὰν φωτογραφήσωμεν τὰ κύματα τῆς θαλάσσης.

Επομένως, διὰ τὸ δεδομένον σημεῖον x , ἡ ἀπομάκρυνσις ξ θὰ εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις τοῦ χρόνου (σχ. 332).



Σχ. 332. Ἡ ἀπομάκρυνσις δε-
δομένου σημείου εἶναι ἡμι-
τονοειδὴς συνάρτησις τοῦ χρόνου.

Ἡ ἀπόστασις MN , μετρούμενη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων t , παρέχει τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἡ φάσις αὐ-
ξηθῇ κατὰ 360° , δηλ., ἀκριβῶς τὴν πε-
ρίοδον T .

Κατανομή τῶν φάσεων. Εἰς τὸ στιγμιό-
τυπον τοῦ κύματος τοῦ σχήματος 331, I ἔκα-
στον σημεῖον τοῦ χώρου ἔχει διάφορον φάσιν. Ἐὰν τὸ κύμα διαδίδεται πρὸς τὰ
δεξιὰ καὶ δεχθώμεν ὅτι ἡ φάσις τοῦ σημείου Σ εἶναι θ , ἡ φάσις τοῦ σημείου
 A (τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ σημείου Σ κατὰ ἓν μήκος κύματος) θὰ εἶναι ἴση πρὸς 360° ,
τοῦ σημείου K ἴση πρὸς $2 \cdot 360^\circ$ κ.ο.κ. Τὸ διάγραμμα II τοῦ σχήματος 331 παρι-
στᾷ τὴν κατανομὴν τῶν φάσεων εἰς δεδομένην χρονικὴν στιγμὴν t . Εἶναι προφανές
ὅτι, μετὰ τινα χρόνον, τὸ διάγραμμα τοῦτο θὰ ἔχῃ μετατοπισθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ
τὴν αὐτὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν μετακινεῖται τὸ στιγμιότυπον τοῦ κύματος.

Ὡκότης. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (4) τῆς § 224, ἡ ἀπομάκρυνσις ξ δεδομένου ση-
μείου εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις τοῦ χρόνου. Διαφορίζοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύ-
την ὡς πρὸς τὸν χρόνον, λαμβάνομεν τὴν ὠκύτητα. Ἦτοι εἶναι

$$\omega\kappa\acute{\upsilon}\tau\eta\varsigma = \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cdot \xi_0 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sigma\tau\alpha\theta. \right)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὠκύτης εἶναι ἀρμονικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ ἔχει πλά-
τος, ἴσον πρὸς $2\pi\xi_0/T = \omega \cdot \xi_0$.

§ 225. Διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ κύματος. Ὅταν τὸ κύμα δὲν εἶναι ἡμιτο-
νοειδές, ἀλλ' εἶναι κύμα οἰασδὴποτε μορφῆς, τὸ ξ δὲν εἶναι ἡμιτονοειδὴς συνάρτη-
σις τοῦ ὁρίσματος $(t - x/v)$ (βλέπε ἐξ. (1) § 224), ἀλλ' ἄλλη τις συνάρτησις $f(t - x/v)$.
Πάντως, ἀνεξαρτήτως τῆς μορφῆς τοῦ κύματος (δηλ. τοῦ εἶδους τῆς συναρτήσεως
 $f(t - x/v)$), θὰ ἰσχύη πάντοτε — ὡς ἐκ τοῦ διωνύμου $(t - x/v)$ — ὁ ἀρχικῶς τεθεῖς
ὁρος ὅτι ἡ ἀπομάκρυνσις εἷς τι σημεῖον x κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t θὰ εἶναι
ἴση μὲ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ σημείου O κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t - x/v$. Ἐὰν
τὴν σχέσιν $\xi = f(t - x/v)$ διαφορίσωμεν δις ὡς πρὸς τὸν χρόνον θὰ λάβωμεν

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f'' \cdot 1 \quad (1)$$

ἐνθα f'' εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τοῦ f ὡς πρὸς τὸ ὄρισμα. Ὅμοίως, ἐὰν τὴν αὐ-
τὴν σχέσιν διαφορίσωμεν δις ὡς πρὸς τὴν ἀπόστασιν x , θὰ λάβωμεν

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f'' \cdot \frac{1}{v^2}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$	Διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ κύματος	(3)
---	-----------------------------------	-----

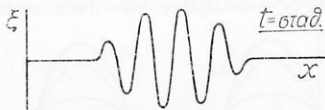
Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἰσχύει διὰ κύμα οἰασδὴποτε μορφῆς καὶ καλεῖται
διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ κύματος.

§ 226. Διασκεδάσμος. Ἐκ τῆς Ὀπτικῆς εἶναι γνωστὸν τὸ φαινόμενον τοῦ διασκεδάσμου, τὸ φαινόμενον δηλ., ἐκεῖνο κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ δείκτης διαθλάσεως ἐνὸς ὑλικοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συχνότητος τοῦ φωτός. Ἐπειδὴ, ὁ δείκτης διαθλάσεως ἐνὸς ὑλικοῦ ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός ἐντὸς τοῦ κενοῦ διὰ τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός ἐντὸς τοῦ ὑλικοῦ τούτου, ἔπεται ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός ἐντὸς ἐνὸς ὑλικοῦ δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συχνότητος.

Τὸ αὐτὸ φαινόμενον παρουσιάζεται ὅχι μόνον εἰς τὸ φῶς, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα εἶδη κυμάτων ὅπως π.χ., εἰς τὰ κύματα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Οὕτω, ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, δημιουργήσωμεν, διὰ ταχέων κινήσεων τῆς χειρὸς μας, κύματα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ κύματα τῆς θαλάσσης «προσπερνοῦν» τὰ κύματα, τὰ δημιουργηθέντα διὰ τῆς χειρὸς μας. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάτων τῆς θαλάσσης, τὰ ὁποῖα ἔχουν μέγα μήκος κύματος, εἶναι μεγαλύτερα τῆς ταχύτητος τῶν κυμάτων, τῶν δημιουργηθέντων ὑπὸ τῆς χειρὸς μας, τὰ ὁποῖα ἔχουν μικρὸν μήκος κύματος. Περισσότερα, ὁμως, περὶ τούτου εἰς τὴν § 247.

Λόγῳ τοῦ διασκεδάσμου παρουσιάζεται ἐν χαρακτηριστικὸν φαινόμενον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν, ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐνὸς ὑγροῦ δημιουργήσωμεν, καταλλήλως, ἓνα συρμὸν κυμάτων, ὁλικὸν μήκους, ἴσου πρὸς $3 \frac{1}{4}$ μήκη κύματος (σχ. 333). Τὸν συρμὸν αὐτὸν θὰ καλέσωμεν *ὁμάδα κυμάτων*. Παρακολουθοῦντες τὴν κίνησιν τῆς ὁμάδος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη κινεῖται μὲ ταχύτητα, μικροτέραν ἐκείνης, μὲ τὴν ὁποίαν κινοῦνται τὰ «ὄρη» καὶ αἱ «κοιλιάδες». Τὴν ταχύτητα ταύτην, μὲ τὴν ὁποίαν μετακινοῦνται τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων ἡ φάσις ἔχει ὀρισμένην τιμὴν (π.χ. 90° διὰ τὸ «ὄρος» ἢ 270° διὰ τὴν «κοιλιάδα»), καλοῦμεν *φασικὴν ταχύτητα* (ἀντὶ τῆς συνήθους ὀνομασίας *ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος*), ἐνῶ τὴν ταχύτητα τῆς ὁμάδος καλοῦμεν *ὁμαδικὴν ταχύτητα*. Εἰς τὰ κυματικὰ φαινόμενα, λοιπόν, πρέπει νὰ διακρίνωμεν ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν φασικὴν ταχύτητα, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν ὁμαδικὴν ταχύτητα. Μοινοῦντι ἡ φασικὴ ταχύτης εἶναι μεγάλη, ἡ ὁμάς κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος σχετικῶς βραδέως, διότι τὰ «ὄρη», ὅταν φθάνουν εἰς τὸ ἔμπροσθεν ἄκρον τῆς ὁμάδος, ἀποσβέννυνται καὶ ἐκλείπουν, ἐνῶ εἰς τὸ ὀπίσθεν ἄκρον αὐτῆς ἐμφανίζονται νέα «ὄρη». Τὸ αὐτὸ φαινόμενον δύναται νὰ παρατηρηθῇ τις εὐκόλως καὶ εἰς τὴν ὁμάδα τῶν κυμάτων, τὰ ὁποῖα παρακολουθοῦν ἐκατέρωθεν ἓν πλοῖον ἐν κινήσει.

Ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ φαινόμενον τοῦ διασκεδάσμου ἐπιδρᾷ καὶ προκαλεῖ ὁμαδικὴν ταχύτητα, διάφορον τῆς φασικῆς ταχύτητος, ἀπαιτεῖ μακρὰν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν καὶ ἐξέρχεται τῶν πλαισίων τοῦ βιβλίου τούτου.



Σχ. 333. Ὁμάς κυμάτων (στιγμιότυπον).

§ 227. Σφαιρικὰ καὶ ἐπίπεδα κύματα - Νόμος τῆς εὐθυγράμμου διαδόσεως. Εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα κυμάτων (σχ. 328) ἕκαστον ὑλικὸν σημεῖον ἔχει δύο μόνον γειτονικά σημεῖα. Εἰς πλείστας, ὁμως, περιπτώσεις (ὅπως εἰς τὰ κύματα τοῦ ἤχου), ἕκαστον σημεῖον περιβάλλεται ὑπὸ μεγάλῳ ἀριθμῷ γειτονικῶν καί, ὡς ἐκ τούτου, πᾶσα διαταραχὴ θὰ μεταδίδεται πρὸς ὅλα τὰ γειτονικά σημεῖα· τὸ κύμα, δηλ., διαδίδεται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Ἐὰν ἡ διαταραχὴ ἀρχίζῃ ἐξ ἐνὸς σημείου O , τὸ κύμα, μετὰ πάροδον ὀρισμένου χρόνου, θὰ ἔχῃ μεταδοθῇ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ἴσον ἀπέχοντα τούτου. Ὅλα τὰ σημεῖα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν καὶ κεῖνται ἐπὶ μιᾷ σφαιρικῇ ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος διαρκῶς αὐξάνεται.

Ἡ τοιαύτη σφαιρική ἐπιφάνεια καλεῖται *ισοφασική ἐπιφάνεια*, τὸ δὲ κῆμα *σφαιρικόν*. Εἶναι προφανές ὅτι μὲ κέντρον τὴν σημειακὴν πηγὴν O δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπειρίαν σφαιρικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν. Πᾶσα γραμμὴ, διαπερῶσα καθέτως τὰς ἰσοφασικὰς ἐπιφανείας, φέρεται, κυρίως εἰς τὴν Ὀπτικήν, ὑπὸ τὸ ὄνομα *ἀκτὺς*.

Αἱ ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι, αἱ προερχόμεναι ἐκ σημειακῆς πηγῆς, εὐρισκομένης εἰς πολὺν μεγάλην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, κατὰ προσέγγισιν, ἐπίπεδοι, ὁπότε τὸ κῆμα καλεῖται *ἐπίπεδον κῆμα*.

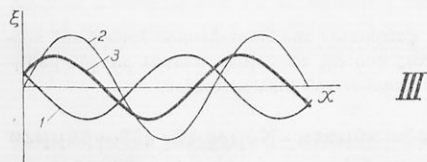
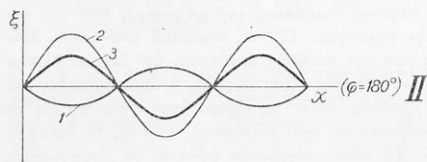
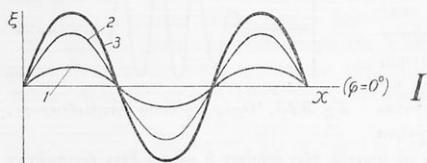
Εἶναι προφανές ὅτι τόσον εἰς τὰ σφαιρικά, ὅσον καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα κύματα, ἐφ' ὅσον ταῦτα διαδίδονται ἐλευθέρως καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα, αἱ ἀκτῖνες εἶναι εὐθεῖαι γραμμαῖ, τὸ κῆμα, δηλ., *διαδίδεται εὐθυγράμμως*.

§ 225. Συμβολὴ τῶν κυμάτων. Θεωρήσωμεν δύο κύματα, συναντῶμενα εἰς τὸν ὡρὸν. Εἰς ἕκαστον σημεῖον ἢ ὀλικὴ ἀπομάκρυνσις ξ_0 εὐρίσκεται δι' ἐπαλληλίας τῶν ἀπομακρύνσεων ξ_1 καὶ ξ_2 τῶν δύο κυμάτων. Ἦτοι θὰ εἶναι

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2.$$

Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται *συμβολή*. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς τῶν δύο αὐτῶν κυμάτων εἶναι πολὺ εὐκόλουν νὰ διερευνηθῇ εἰς ὀρισμένας περιπτώσεις.

α) *Συμβολὴ κυμάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους κύματος καὶ τῆς αὐτῆς φάσεως.* Θεωρήσωμεν τὰ στιγμιότυπα δύο κυμάτων 1 καὶ 2 (σχ. 334, I), τὰ ὅποια ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος καὶ τὴν αὐτὴν φάσιν. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν ὀλικὴν ἀπομάκρυνσιν, πρέπει, εἰς ἕκαστον σημεῖον x , νὰ προσθέσωμεν τὰς ἀπομακρύνσεις ξ_1 καὶ ξ_2 , ὁπότε, ὡς ἀποτέλεσμα, θὰ λάβωμεν τὴν παχεῖαν



Σχ. 334. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δύο κυμάτων ἐξαγγᾶται ἐκ τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαφορᾶς φάσεως.

γραμμὴν 3. Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ συμβολὴ τῶν δύο κυμάτων δίδει κῆμα μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος καὶ μὲ πλάτος, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλατῶν.

Ἐάν τὰ δύο κύματα ἔχουν διαφορὰν φάσεως 180° (II), τὸ ἐκ συμβολῆς προκύπτον κῆμα θὰ ἔχη πλάτος, ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο πλατῶν.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δύο ταῦτα κύματα ἔχουν ἴσα πλάτη, τὸ ἐκ συμβολῆς προκύπτον κύμα ἔχει πλάτος, ἴσον πρὸς μηδέν, τὰ δύο κύματα, δηλ., ἀλληλοαναιροῦνται.

Ἐάν, τέλος, τὰ δύο κύματα παρουσιάζουν τυχοῦσαν διαφορὰν φάσεως (II), τότε, προσθέτοντες — ὅπως καὶ προηγουμένως — τὰς δύο ἀπομακρύνσεις εἰς ἕκαστον σημεῖον, θὰ λάβωμεν τὴν παχείαν γραμμὴν β , ἡ ὁποία παριστᾷ καὶ αὐτὴ κύμα τοῦ αὐτοῦ μήκους κύματος μὲ τὸ μήκος κύματος τῶν δύο ἄλλων κυμάτων.

Τ' ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν καὶ δι' ὑπολογισμοῦ: Ἐστώσαν τὰ δύο κύματα

$$\xi_1 = \xi_0 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{καὶ} \quad \xi_2 = \xi_0 \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \varphi \right],$$

τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ μήκος κύματος, τὸ αὐτὸ πλάτος (χάριν ἀπλουστεύσεως) καὶ διαφορὰν φάσεως φ . Τὸ ἐκ συμβολῆς προκύπτον κύμα ὑπολογίζεται, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τῆς Τριγωνομετρίας

$$\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta = 2 \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

$$\text{εἰς} \quad \xi_{\text{ολ}} = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\varphi}{2} \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \frac{\varphi}{2} \right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς εἶναι ἓν κύμα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος $2\xi_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi/2$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς φάσεως φ . Εἰδικῶς, ὅταν $\varphi = 0^\circ$, θὰ προκύψῃ διὰ τὸ πλάτος ἡ τιμὴ $2\xi_0$, δηλ., ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλατῶν, ὅταν δὲ $\varphi = 180^\circ$, τὸ πλάτος τοῦ ἐκ συμβολῆς κύματος θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, δηλ., ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο πλατῶν.

β) **Συμβολὴ δύο κυμάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους κύματος καὶ πλατύς, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς - Στάσιμα κύματα.** Θεωρήσωμεν τὰ δύο κύματα

$$\xi_1 = \xi_0 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{καὶ} \quad \xi_2 = \xi_0 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλάτος καὶ τὸ αὐτὸ μήκος κύματος, ἀλλὰ διαδίδονται κατ' ἀντιθέτους φορᾶς. Τὸ ἐκ συμβολῆς αὐτῶν προκύπτον κύμα θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσως

$$\xi_{\text{ολ}} = \xi_0 \cdot \left\{ \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right\}.$$

Ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν γνωστὸν τύπον τῆς Τριγωνομετρίας

$$\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta = 2\eta\mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς:

$$\xi_{\text{ολ}} = 2\xi_0 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t. \quad (1)$$

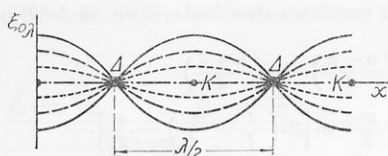
Παρατηρούμεν ὅτι ἐκ τῆς συμβολῆς τῶν δύο ἄνω κυμάτων δὲν προκύπτει τρέχον κύμα, ἀλλὰ μία ταλάντωσις, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **στασίμων κύμα**.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὅτι ἡ ἀπομάκρυνσις $\xi_{\sigma\lambda}$ ἐνὸς ὠρισμένου σημείου ($x = \text{σταθ.}$), μεταβάλλεται ἀρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου, μὲ περίοδον, ἴσην πρὸς τὴν περίοδον T τῶν δύο συνιστάντων κυμάτων. Ὅσον ἀφορᾷ τὸ πλάτος

$$2\xi_0 \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \quad (2)$$

τοῦ στασίμου κύματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως x τοῦ θεωρουμένου σημείου, μεταβαλλόμενον συνημιτονειδῶς μετὰ τοῦ x .

Ἐάν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν, ἀντὶ τοῦ t , διαφοροὺς τιμὰς, π.χ., 0, $T/12$, $2 \cdot T/12, \dots$ θὰ λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα στιγμιότυπα, τὰ ὁποῖα



Σχ. 335. Διαδοχικὰ στιγμιότυπα τοῦ στασίμου κύματος.

παριστᾷ τὸ σχῆμα 335. Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας x ὑπάρχουν ὠρισμένα σημεία, $K, K, \dots$ εἰς τὰ ὁποῖα τὸ $\xi_{\sigma\lambda}$ ἐκτελεῖ ἀρμονικὴν ταλάντωσιν, τῆς ὁποίας τὸ πλάτος, ὑπολογιζόμενον ἐκ τῆς ἐκφράσεως (2), λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν

$2\xi_0$. Ὅμοιως, ὑπάρχουν ἄλλα σημεία, $\Delta, \Delta, \dots$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἀπομάκρυνσις $\xi_{\sigma\lambda}$ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν. Τὰ σημεία ταῦτα, $\Delta, \Delta, \dots$ καλοῦνται **δεσμοί**, τὰ δὲ σημεία, $K, K, \dots$ **κοιλίαι** τοῦ στασίμου κύματος.

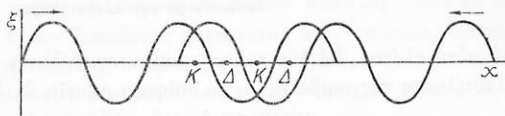
Ἄν παρακολουθήσωμεν τὰ διαδοχικὰ στιγμιότυπα τοῦ σχήματος 335, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ «ὄρη» καὶ αἱ «κοιλιάδες» δὲν μετακινοῦνται. Ἐάν, ἀφ' ἐιτέρου, ἐξετάσωμεν μόνον ἓν στιγμιότυπον (π.χ., τὸ σημειούμενον διὰ πλήρους γραμμῆς), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην, ὅλα τὰ σημεία, τὰ κείμενα μεταξὺ δύο δεσμῶν Δ, Δ , λαμβάνουν τὴν μεγίστην τῶν ἀπομάκρυνσιν. Ἀντιστοίχως, ὅλα τὰ σημεία, τὰ κείμενα ἐκεῖθεν τῶν δεσμῶν, λαμβάνουν, κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν, τὴν μεγίστην ἀρνητικὴν τιμὴν. Ἐκ τῶν συλλογισμῶν αὐτῶν συνάγομεν ὅτι, εἰς ἐκάστην χρονικὴν στιγμὴν, ἡ φάσις τῆς ἀπομακρύνσεως εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλον τὸ μεταξὺ δύο δεσμῶν διάστημα, διαφέρει δὲ κατὰ 180° εἰς τὰ ἐκαστέρωθεν ἐνὸς οὐδὲποτε δεσμοῦ περιλαμβανόμενα διαστήματα. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ τρέχοντα κύματα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ φάσεις μετακινοῦνται μὲ τὴν ἀπόδοον τοῦ χρόνου, εἰς τὰ στάσιμα κύματα δὲν ἔχομεν τοπικὴν μετακίνησιν τῶν φάσεων· τὸ κύμα, δηλ., δὲν προχωρεῖ. Εἰς τοῦτο, ἀκριβῶς, ὀφείλεται καὶ ἡ ὀνομασία του.

Ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν. Διὰ νὰ εὑρωμεν τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν, διερευνῶμεν τὴν ἐκφράσιν (2): Αὕτη μηδενίζεται, ὅταν τὸ μονώνυμον $2\pi \cdot x/\lambda$ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, ὅταν, δηλ., τὸ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $\lambda/4, 3 \cdot \lambda/4, 5 \cdot \lambda/4$. Δι' ἀφαιρέσεως δύο τοιούτων διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ x λαμβάνομεν τὴν ἀπόστα-

σιν δ μεταξὺ δύο δεσμῶν, ἡ ὁποία, κατὰ ταῦτα, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\delta = \frac{\lambda}{2}$$

Γραφικὴ διερεύνησις τῆς παραγωγῆς τῶν στασίμων κυμάτων. Τὸν μηχανισμόν τῆς παραγωγῆς τῶν στασίμων κυμάτων δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν καὶ γραφικῶς: Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰ στιγμιότυπα τῶν δύο κυμάτων τοῦ σχήματος 336, τὰ ὁποῖα διαδίδονται κατ' ἀντιθέτους φορὰς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὑπάρχουν σημεῖα K , K , εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἀπομακρύνσεις εἶναι ἴσαι καὶ εἰς τὰ ὁποῖα, συνεπῶς, ἡ ὀλικὴ ἀπομάκρυνσις θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον



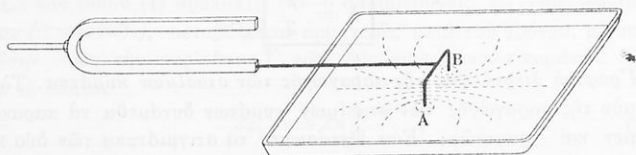
Σχ. 336. Στιγμιότυπα δύο κυμάτων, διαδιδόμενων κατ' ἀντιθέτους φορὰς. Εἰς τὰ σημεῖα A , A ἡ συνισταμένη ἀπομάκρυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

τῆς ἀπομακρύνσεως μιᾶς ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν. Ἡ ἰσότης τῶν δύο ἀπομακρύνσεων δηλοῖ ὅτι ἡ φάσις τοῦ ἑνὸς κύματος εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον καὶ κατὰ τὴν θεωρουμένην χρονικὴν στιγμὴν εἶναι ἴση πρὸς τὴν φάσιν τοῦ δευτέρου κύματος, δηλ., ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν δύο κυμάτων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐὰν σχεδιάσωμεν τὰ στιγμιότυπα τῶν δύο κυμάτων μετὰ πάροδον χρόνου τινός, τότε, ἐπειδὴ τὰ δύο κύματα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίοδον, ἡ φάσις τοῦ πρώτου κύματος εἰς τὸ σημεῖον K θὰ ἔξη ἀύξηθῇ κατὰ τι, ἀλλὰ κατὰ τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ποσὸν θὰ ἔξη ἀύξηθῇ καὶ ἡ φάσις τοῦ δευτέρου κύματος, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν δύο κυμάτων εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο K νὰ εἶναι — ὡς καὶ πρότερον — ἴση πρὸς μηδέν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι εἰς τὸ σημεῖον K ἡ διαφορὰ φάσεως θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε ἡ συνισταμένη ἀπομάκρυνσις θὰ εἶναι, διαρκῶς ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀπομακρύνσεως τοῦ ἑνὸς κύματος. Εἶναι προφανές ὅτι, κατὰ τινα χρονικὴν στιγμὴν, ἡ συνισταμένη ἀπομάκρυνσις, ἀύξανομένη, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ πλάτους. Τὸ σημεῖον K , ἐπομένως, ἀποτελεῖ μίαν κοιλίαν τοῦ στασίμου κύματος.

Ἐς ἐξετάσωμεν, τώρα, ἄλλα σημεῖα, π.χ., τὰ σημεῖα A, A , εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἀπομακρύνσεις ξ_1 καὶ ξ_2 εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἡ φάσις τοῦ ἑνὸς κύματος διαφέρει τῆς φάσεως τοῦ ἄλλου κατὰ 180° . Ὁ αὐτός, ὡς πρότερον, συλλογισμὸς ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι εἰς τὰ σημεῖα $A, A, \dots$ ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν δύο κυμάτων θὰ διατηρεῖται διαρκῶς ἴση πρὸς 180° . Ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἡ συνισταμένη ἀπομάκρυνσις θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν — δηλ., εἰς τὰ σημεῖα $A, A, \dots$ ἔχομεν δεσμούς τοῦ στασίμου κύματος.

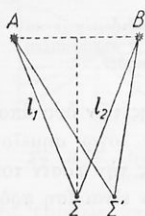
γ) Συμβολὴ δύο κυμάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους κύματος, ἀλλὰ δια-

φόρων διευθύνσεων. Θεωρήσωμεν δύο πηγές A και B (σχ. 337), αί οποίαι εκπέμπουν κύματα, τὰ ὅποια ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος κύματος καὶ



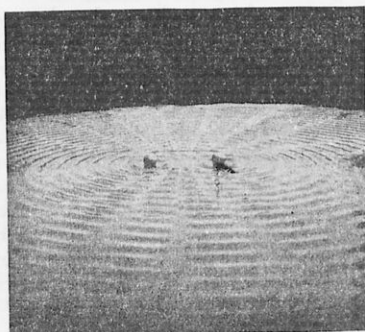
Σχ. 337. Τὰ ἐκ τῶν πηγῶν A καὶ B εκπεμπόμενα κύματα ἔκκινούν με τὴν αὐτὴν φάσιν.

τὸ αὐτὸ πλάτος. Τὰ δύο ταῦτα κύματα συμβάλλουν καὶ ἂς ζητήσωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς εἰς τὰ διάφορα σημεία $\Sigma, \Sigma' \dots$ (σχ. 338): Ἡ ἀπομάκρυνσις ξ_1 τοῦ πρώτου κύματος εἰς τὸ σημεῖον Σ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως l_1 αὐτοῦ ἀπὸ τῆς πηγῆς A . Ὁμοίως, ἡ ἀπομάκρυνσις ξ_2 τοῦ δευτέρου κύματος εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως l_2 τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς δευτέρας πηγῆς B . Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι τὰ δύο κύματα ἔκκινούν με τὴν αὐτὴν φάσιν καὶ ὅτι οἱ δύο δρόμοι l_1 καὶ l_2 εἶναι ἴσοι, τὰ κύματα ταῦτα εἰς τὸ σημεῖον Σ θὰ ἔχουν ἴσας φάσεις. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς θὰ εἶναι ἐνίσχυσις



Σχ. 338.

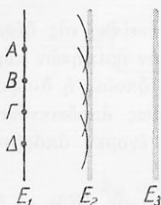
καί, συγκεκριμένως, τὸ κύμα θὰ ἔχη ἐκεῖ διπλάσιον πλάτος.



Σχ. 339 καὶ 340. Τὰ σημεία, εἰς τὰ ὅποια τὰ δύο κύματα ἀλληλοαναίρουνται, κεῖνται ἐπὶ ὑπερβολῶν.
[Κατὰ Grimsch: Lehrbuch der Physik].

Εἰς ἄλλο σημεῖον Σ' οἱ δύο δρόμοι δὲν εἶναι ἴσοι καί, ὥς ἐκ τούτου, ἐκεῖ τὰ δύο κύματα θὰ παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως. Ἐὰν ἡ διαφορὰ

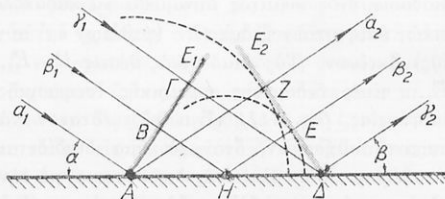
Τὰ λεχθέντα ἄνωτέρω διὰ τὰ σφαιρικά κύματα ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἐπίπεδα κύματα. Οὕτω, ἡ ἰσοφασικὴ ἐπιφάνεια E_2 (σχ. 342) εἶναι ἡ περιβάλλουσα ὅλων τῶν στοιχειωδῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὰς δευτερογενεῖς πηγὰς $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ τῆς ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας E_1 .



Σχ. 342. Ἴσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι ἐπιπέδου κύματος.

Εἰς τὰ δύο ἀναφερθέντα παραδείγματα δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀρχὴ τοῦ Huygens, καθόσον, ὥς εἶδομεν, καὶ χωρὶς αὐτὴν δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν διάδοσιν τοῦ κύματος. Κατωτέρω, ὅμως, θὰ συναντήσωμεν ὁρισμένας περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι μόνον μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens δύνανται νὰ διερευνηθοῦν.

§ 230. Ἀνάκλασις. Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον κύμα, προσπίπτον ἐπὶ ἐπιφανείας, διαχωρίζουσας δύο διάφορα μέσα (σχ. 343), ἔστωσαν δὲ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, αἱ ἀκτίνες τοῦ κύματος. Ἐν γένει ἡ διεύθυνσις τῶν ἀκτίνων αὐτῶν ἀλλάσσει, ζητοῦμεν δὲ τὰς νέας αὐτῶν διευθύνσεις $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν: Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ἰσοφασικὴν ἐπιφάνειαν E_1 , τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου A (ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτίνες $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) καὶ ζητοῦμεν τὴν θέσιν τῆς αὐτῆς ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας μετὰ χρόνον τ , ἴσον πρὸς τὸν ἀπαιτούμενον, ἵνα τὸ κύμα διατρέξῃ τὸν δρόμον $\Gamma\Delta$, δηλ., μετὰ τὸν χρόνον



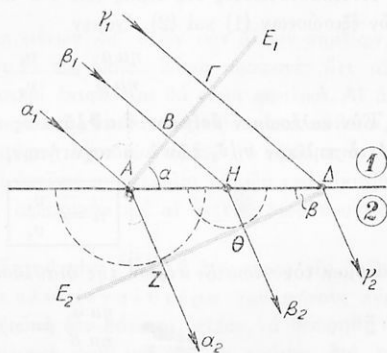
Σχ. 343. Εὐθεῖαι τοῦ νόμου τῆς ἀνακλάσεως διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens.

$$\tau = \frac{\Gamma\Delta}{v} \quad (1)$$

Τὴν ἰσοφασικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν εὐρίσκομεν ὥς τὴν «περιβάλλουσαν» ὅλων τῶν στοιχειωδῶν σφαιρικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυμάτων, τῶν ἐκπεμπομένων ἐκ τῶν δευτερογενῶν πηγῶν A, H, Δ , ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ μὲν πηγὴ A ἀρχίζει ἐκπέμπουσα τὸ κύμα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θεωρουμένου χρονικοῦ διαστήματος τ , ἡ πηγὴ Δ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ, δηλ., μετὰ καθυστέρησιν χρόνου τ , ἡ δὲ πηγὴ H , ἡ ὁποία εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως AD , μὲ καθυστέρησιν $\tau/2$. Αἱ ἀκτίνες τῶν δευτερογενῶν σφαιρῶν θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς $(v \cdot \tau), v \cdot \tau/2, 0$. Ἐπομένως, ἐὰν σχεδιάσωμεν τὰς σφαῖρας ταύτας καὶ φέρωμεν τὴν περιβάλλουσαν αὐτῶν (ἡ ὁποία, προφανῶς, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Δ), θὰ λάβω-

μεν τὴν νέαν ἰσοφασικὴν ἐπιφάνειαν E_2 . Ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον A , δηλ., ἡ ἀπόστασις AZ , εὐρέθη ἀνωτέρω ὅτι εἶναι ἴση πρὸς $v \cdot \tau$ καί, συνεπῶς, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἴση πρὸς τὴν ΓA . Ἄρα, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\Gamma A \Delta$ καὶ $\Delta Z A$ εἶναι ἴσα, ὥς ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν AA καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην. Ἐπομένως, πρέπει ἡ γωνία α νὰ εἶναι ἴση μετὰ τὴν γωνίαν β . Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν *προσπίπτσεως* καὶ *ἀνακλάσεως*, προκύπτει ὁ γνωστὸς *νόμος τῆς ἀνακλάσεως*, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ γωνία ἀνακλάσεως εἶναι ἴση μετὰ τὴν γωνίαν *προσπίπτσεως*.

§ 231. Διάθλασις. Ὄταν ἐν κύμα προσπίπτῃ ἐπὶ ἐπιφανείᾳ, ἡ ὁποία διαχωρίζει δύο μέσα, ἐντὸς τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες διάδοσεως τοῦ κύματος εἶναι διάφοροι, παρατηρεῖται ὅτι μέρος τοῦ κύματος εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ δευτέρου μέσου, ὑπὸ ταυτοχρόνον ἀλλαγὴν τῆς διεύθυνσεως. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται *διάθλασις*, ἐξηγεῖται δέ, διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens, ὥς ἑξῆς: Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον κύμα, διαδιδόμενον ἐντὸς τοῦ μέσου 1 μετὰ ταχύτητα v_1 , ἔστωσαν δὲ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ αἱ ἀκτῖνες τοῦ κύματος (σ. 344). Τὸ κύμα, εἰσερχόμενον ἐντὸς τοῦ μέσου 2, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης διάδοσεως εἶναι v_2 , διαθλάται, ζητεῖται δὲ ἡ νέα διεύθυνσις $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ τῶν ἀκτῖνων αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ἰσοφασικὴν ἐπιφάνειαν E_1 , τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου A (ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) καὶ ζητοῦμεν τὴν θέσιν τῆς αὐτῆς ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας μετὰ τὸν χρόνον τ , ἴσον πρὸς τὸν ἀπαιτούμενον ἵνα τὸ κύμα διατρέξῃ τὸν δρόμον ΓA , δηλ., τὸν χρόνον



Σχ. 344. Ἐξήγησις τοῦ νόμου τῆς διαθλάσεως διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens.

$$\tau = \frac{\Gamma A}{v_1}. \quad (1)$$

Τὴν ἰσοφασικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν εὐρίσκομεν ὥς τὴν «περιβάλλουσαν» ὅλων τῶν *στοιχειωδῶν σφαιρικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν* τῶν κυμάτων, τῶν ἐκπεπομένων ἐντὸς τοῦ μέσου 2 ἐκ τῶν δευτερογενῶν πηγῶν A, H, Δ , ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ μὲν πηγὴ A ἀρχίζει ἐκπέμπουσα τὸ κύμα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θεωρουμένου χρονικοῦ διαστήματος, ἡ πηγὴ Δ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ, δηλ., μετὰ καθυστέρησιν χρόνου τ , ἡ δὲ πηγὴ H , ἡ ὁποία εὐρί-

σκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως AD , μὲ καθυστέρησιν χρόνου $\tau/2$. Αἱ ἀκτίνες τῶν δευτερογενῶν αὐτῶν σφαιρῶν θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$AZ = v_2 \cdot \tau \quad (2), \quad H\theta = v_2 \cdot \tau/2 \quad \text{καὶ} \quad \theta.$$

Ἐπομένως, ἐὰν σχεδιάσωμεν τὰς σφαίρας ταύτας καὶ φέρωμεν τὴν περιβάλλουσαν αὐτῶν (ἢ ὁποία, ποσφανῶς, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου A), θὰ λάβωμεν τὴν νέαν ἰσοφασικὴν ἐπιφάνειαν E_2 . Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι E_1 καὶ E_2 δὲν εἶναι πλέον παράλληλοι, αἱ ἀκτίνες, ἄρα, ἔχουν διαθλασθῇ.

Διὰ τὰ εὗρωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς **γωνίας προσπίπτσεως** καὶ τῆς **γωνίας διαθλάσεως**, ὑπολογίζομεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἴσων πρὸς αὐτὰς γωνιῶν α καὶ β : Ἐκ τῶν τριγώνων $\Gamma A \Delta$ καὶ AZ λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$\Gamma A = AD \cdot \eta\mu\alpha \quad \text{καὶ} \quad AZ = AD \cdot \eta\mu\beta.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων προκύπτει ἡ σχέσις

$$\frac{\Gamma A}{AZ} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν ΓA καὶ AZ , τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἔχομεν

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Ἐὰν καλέσωμεν **δείκτην διαθλάσεως** n τοῦ μέσου 2 ὡς πρὸς τὸ μέσον 1 τὸ πηλίκον v_1/v_2 τῶν δύο ταχυτήτων, ἃν γράψωμεν δηλαδὴ

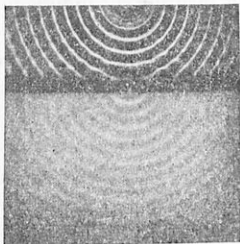
$$\boxed{n = \frac{v_1}{v_2}}$$

λαμβάνομεν τὸν γνωστὸν νόμον τῆς διαθλάσεως

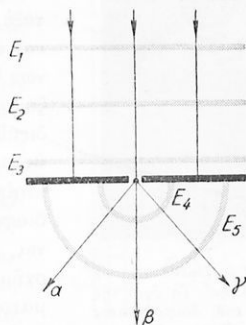
$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = n.$$

§ 232. **Περίθλασις.** α) **Περίθλασις εἰς πολὺν μικρὰν ὀπὴν.** Ἐὰν εἰς λεκάνην, περιέχουσαν ὑγρὸν, δημιουργήσωμεν, καταλλήλως, κύματα καὶ θέσωμεν ἐν διάφραγμα, φέρον μικρὸν ἄνοιγμα (σχ. 345), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ ὀπισθεν μέρος τοῦ διαφράγματος τὰ κύματα διαδίδονται ὡς ἐὰν ἐξεπέμποντο ἐκ τοῦ ανοίγματος καὶ ὄχι ἐκ τῆς πραγματικῆς πηγῆς αὐτῶν. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **περίθλασις** καὶ ἐξηγεῖται διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens ὡς ἑξῆς: Ἐστω ἐπίπεδον κύμα, τὸ ὁποῖον προσπίπτει καθέτως ἐπὶ διαφράγματος (σχ. 346), φέροντος ὀπὴν μὲ διάμετρον, πολλὴν μικροτέραν τοῦ μήκους κύματος — τὴν ὁποίαν, συνειπῶς, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς σημεῖον — ἔστωσαν δὲ E_1 , E_2 , E_3 τρεῖς ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι τοῦ προσπίπτοντος κύματος. Διὰ τὰ εὗρωμεν τὴν μορφήν μιᾶς ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας ὀπισθεν τοῦ διαφράγματος, θεωροῦμεν, κατὰ τὴν ἀρχὴν

τοῦ Huygens, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας E_3 ὡς πηγὰς δευτερογενῶν κυμάτων. Λόγω, ὅμως, τοῦ διαφράγματος ἐμποδίζεται ἡ διάδο-



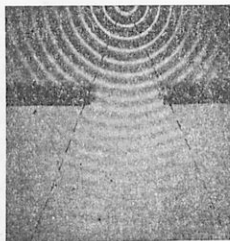
Σχ. 345. Περίθλασις εἰς μικρὰν ὀπὴν. Ἐκ τῶν ἄνω προσπίπτει ἐν ἰσχυρὸν κύμα. Τὸ ἐκ περιθλάσεως κύμα εἶναι ἀσθενές.



Σχ. 346. Ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τῆς περιθλάσεως, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens.

σις τῶν κυμάτων, τῶν ἐκπεπομένων ὑπ' ὅλων τῶν ἄλλων σημείων, πλὴν τοῦ κύματος, τοῦ προερχομένου ἐκ τῆς ὀπῆς. Εἶναι προφανές ὅτι αἱ ὀπισθεν τοῦ διαφράγματος ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι θὰ εἶναι σφαιρικοί. Αἱ ἀκτίνες α , β , γ , ὡς ἀνάγει ἐπὶ τὰς ἰσοφασικὰς ἐπιφάνειας, θὰ εἶναι εὐθεταί, ἐκκινουμέναι ἐκ τῆς ὀπῆς. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι, ἐνὸν τὸ κύμα πρὸ τοῦ διαφράγματος ἦτο ἐπίπεδον καὶ αἱ ἀκτίνες παράλληλοι μεταξύ των, ὀπισθεν τοῦ διαφράγματος τὸ κύμα εἶναι σφαιρικὸν καὶ αἱ ἀκτίνες διευθύνονται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

β) **Περίθλασις εἰς μεγάλην ὀπὴν.** Ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς ὀπῆς εἶναι



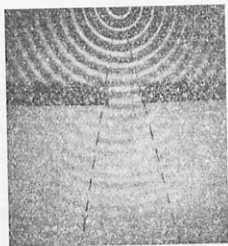
Σχ. 347. Περίθλασις εἰς μεγάλην ὀπὴν. Τὸ κύμα ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τῆς εὐθυγράμμου διαδόσεως.

[Κατὰ Pohl: Mechanik]

πολὺ μεγαλὺν τὸν μήκους κύματος, ἡ ὀπὴ δὲν δύναται, πλέον, νὰ θεωρηθῇ ὡς σημειακὴ πηγή καί, ὡς ἐκ τούτου, διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν ὀπισθεν αὐτῆς, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ δευτερογενῆ κύματα, τὰ ἐκπεπομένα ἐξ ὅλων τῶν σημείων, ἐκ τῶν ὁποίων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἡ ὀπὴ. Ὅπως ἀποδεικνύεται, αἱ ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὸ ὀπισθεν μέρος τοῦ διαφράγματος διατηροῦν τὴν μορφήν, τὴν ὅποιαν εἶχον πρὸ τοῦ διαφράγματος (σχ. 347), αἱ ἀκτίνες, δηλ., διατηροῦν τὴν ἀρχικὴν των διεύθυνσιν. Τὸ διάφραγμα, περιορίζει, ἀπλῶς, τὴν δέσμη των διερχομένων ἀκτί-

νων, χωρὶς νὰ παρουσιάζεται φαινόμενον περιθλάσεως.

γ) **Περιθλάσις εις μετρίαν όπήν.** Έάν ή διάμετρος τής όπής είναι τής τάξεως μεγέθους του μήκους κύματος, ή διάδοσις των κυμάτων όπισθεν του

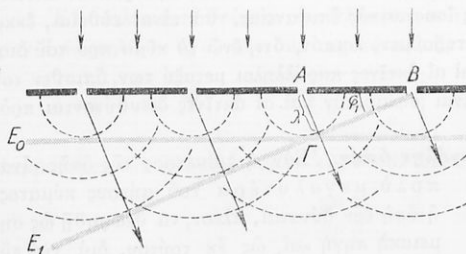


Σχ. 348. Περιθλάσις εις μετρίαν όπήν. Τα όρια τής «οκιάς» του διαφράγματος δέν είναι σαφή.

[Κατά Pohl: Mechanik]

ταύτης, τα κύματα είναι όλιγώτερον έκπεφρασμένα.

δ) **Φαινόμενα περιθλάσεως επί πολλών όπών - Φράγμα.** Θεωρήσωμεν επίπεδον κύμα, προσπίπτον καθέτως επί διαφράγματος, φέροντος σειράν μικρών όπών εις ίσας απόστάσεις (φράγμα - σχ. 349). Κατά τα προηγούμενα



Σχ. 349. Έξήγησις τής λειτουργίας του φράγματος τη βοηθεία τής άρχής του Huygens.

ρογενών κυμάτων: Μία εξ αυτών είναι και ή E_0 , ή όποία ευρίσκεται ως ή περιβάλλουσα όλων των σφαιρικών κυμάτων, τα όποια έχουν την αυτήν ακτίνα. Άφού ή ισοφασική έπιφάνεια E_0 είναι παράλληλος προς την διεύθυνσιν του φράγματος, έπεται ότι το κύμα θα διαδίδεται κατά την προέκτασιν τής προσπίπτουσής δέσμης των ακτίνων.

Έκτός τής άνωτέρω ισοφασικής έπιφανείας E_0 , δυνάμεθα νά εύρωμεν και άλλην, την E_1 , ή όποία θα είναι ή περιβάλλουσα όλων των δευτερογενών σφαιρικών ισοφασικών έπιφανειών, έκάστης των όποιών ή φάσις διαφέρει τής φάσεως τής γειτονικής της κατά 360° . Είναι σαφές ότι, έκ συμβο-

(περίπτωσης α), εις έκαστην όπήν το κύμα περιθλάται, δημιουργούμενου, ούτω, ενός δευτερογενούς σφαιρικού κύματος. Θ' αναζητήσωμεν τās όπισθεν του φράγματος ισοφασικάς έπιφανείας του κύματος, το όποιον δημιουργείται εκ συμβολής όλων αυτών των δευτε-

λῆς τοιούτων κυμάτων, θὰ προκύψῃ ἐνίσχυσις κατὰ διευθύνσιν, κάθετον ἐπὶ τὴν ἰσοφασικὴν ἐπιφάνειαν E_1 . Ὀμοίως, ἐνισχύονται ὅλα τὰ δευτερογενῆ κύματα, ὅταν ἡ φάσις τοῦ ἐνὸς κύματος διαφέρῃ τῆς φάσεως τοῦ γειτονικοῦ του κατὰ $2 \cdot 360^\circ$, δημιουργουμένης ἄλλης ἰσοφασικῆς ἐπιφανείας κ.ο.κ.

Συνοψίζοντες τ' ἀνωτέρω, διαπιστοῦμεν ὅτι ἐπίπεδον κύμα, προσπίπτον ἐπὶ φράγματος, προκαλεῖ ὀπισθεν αὐτοῦ δευτερογενῆ κύματα, τὰ ὁποῖα, συμβάλλοντα, ἐνισχύονται καὶ δίδουν ἐντατικὸν κύμα (κροσσός), μόνον πρὸς ὠρισμένας διευθύνσεις (σχ. 350). Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζονται ὀπισθεν τοῦ φράγματος, ἐκτὸς τοῦ κροσσοῦ μηδενικῆς τάξεως (δηλ., τοῦ κροσσοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται κατὰ τὴν προέκτασιν τοῦ προσπίπτοντος κύματος), καὶ ἄλλοι (κροσσὸς πρώτης τάξεως κατὰ τὴν γωνίαν φ_1 , κροσσὸς δευτέρας τάξεως κατὰ τὴν γωνίαν φ_2 κ.ο.κ.).

Τὴν γωνίαν φ_1 ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma'$ τοῦ σχήματος 349: "Ἐν τὴν ἀπόστασιν AB δύο διαδοχικῶν ὀπῶν καλέσωμεν **σταθερὰν τοῦ φράγματος** d , λαμβάνομεν

$$A\Gamma' = d \cdot \eta\mu \varphi_1.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις $A\Gamma'$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος κύματος λ , ἔχομεν

$$d \cdot \eta\mu \varphi_1 = \lambda.$$

Λι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ προκύπτει ὅτι ὁ κροσσὸς k τάξεως θὰ σχηματισθῇ πρὸς ἐκείνην τὴν διευθύνσιν φ_k , διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ σχέση

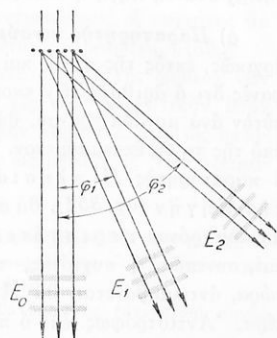
$$d \cdot \eta\mu \varphi_k = k \cdot \lambda$$

Τύπος τοῦ φράγματος

§ 233. Ἀρχὴ Ἡρώου - Fermat. Οἱ νόμοι, τοὺς ὁποίους ἀκολουθεῖ ἓν κύμα, διαδιδόμενον ἀπὸ τινος σημείου εἰς ἄλλο, ἀνευρέθησαν εἰς τὰ προηγούμενα, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τοῦ Huygens, διατυπώνται δὲ ὡς ὁ νόμος εὐθυγραμμίου διαδόσεως, ὁ νόμος ἀνακλάσεως καὶ ὁ νόμος διαθλάσεως. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι καὶ οἱ τρεῖς οὗτοι νόμοι εἶναι δυνατόν νὰ προκύψουν καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς Ἡρώου - Fermat, διατυπωμένης ὡς ἑξῆς: «Κύμα, διαδιδόμενον ἀπὸ τινος σημείου εἰς ἄλλο, ἀκολουθεῖ τοιοῦτον δρόμον, ὥστε νὰ φθάσῃ ἐντὸς τοῦ βραχυτάτου δυνατοῦ χρόνου».

Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶναι, κατὰ βάθος, θεωρημα, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται, εἰς τὰς ἀπλουστεράς περιπτώσεις, μὲ στοιχειώδη γεωμετρίαν.

§ 234. Φαινόμενον Doppler - Fizeau. Ἐὰν ἀκίνητος πηγὴ κυμάτων ἐκπέμπῃ ἓν κύμα, συχνότητος ν , τότε, προφανῶς, τὴν αὐτὴν συχνότητα



Σχ. 350. Ὅπισθεν τοῦ φράγματος τὸ ἐκ συμβολῆς κύμα διαδίδεται μόνον πρὸς ὠρισμένας διευθύνσεις.

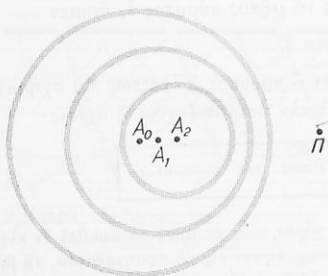
θ' αντιλαμβάνεται καὶ εἰς ἀκίνητος παρατηρητής. Τίθεται, τώρα, τὸ ἐρώτημα, ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης, τὴν ὁποίαν θ' αντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής, ὅταν ἡ πηγὴ ἢ ὁ παρατηρητής κινουῦνται.

α) **Παρατηρητής κινούμενος - πηγὴ ἀκίνητος.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι, ἀρχικῶς, ἐκτὸς τῆς πηγῆς καὶ ὁ παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος. Τότε εἶναι προφανές ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν «κοιλιάδων» ἢ «ὀρέων», τὰ ὁποῖα καταφθάνουν εἰς αὐτὸν ἀνὰ μονάδα χρόνου, θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου ὑπὸ τῆς πηγῆς ἐκπεμπόμενον. Ἐάν, ὅμως, ὁ παρατηρητής Π πλησιάζῃ πρὸς τὴν πηγὴν (σχ. 351), θὰ συναντᾷ ἀνὰ μονάδα χρόνου περισσότερα κύματα, καί, συνεπῶς, ἡ συχνότης, τὴν ὁποίαν, τώρα, αντιλαμβάνεται, θὰ εἶναι μεγαλύτερα. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὁ παρατηρητής ἀπομακρύνεται τῆς πηγῆς, θὰ συναντᾷ ὀλιγώτερα κύματα καὶ ἡ συχνότης θὰ φαίνεται μικρότερα. Ἡ φαινόμενη αὕτη μεταβολὴ τῆς συχνότητος, ἡ ὁποία παρατηρεῖται, ὅταν εἴτε ὁ παρατηρητής, εἴτε ἡ πηγὴ κινῆται, καλεῖται φαινόμενον Doppler - Fizeau.



Σχ. 351. Ὅταν ὁ παρατηρητής Π πλησιάζῃ πρὸς τὴν πηγὴν, αντιλαμβάνεται συχνότητα, μεγαλύτεραν τῆς συχνότητος τῆς πηγῆς.

β) **Πηγὴ κινουμένη - παρατηρητής ἀκίνητος.** Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην παρατηρεῖται φαινόμενη μεταβολὴ τῆς συχνότητος. Εἰς τὸ σχῆμα 352 τὰ σημεῖα A_0, A_1, A_2 , παριστοῦν τρεῖς διαδοχικὰς θέσεις, εἰς



Σχ. 352. Ὅταν ἡ πηγὴ A πλησιάζῃ πρὸς τὸν παρατηρητὴν Π , ὁὗτος αντιλαμβάνεται συχνότητα, μεγαλύτεραν τῆς συχνότητος τῆς πηγῆς.

τάς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ κινουμένη πηγὴ κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $0, T$ καὶ $2T$, πλησιάζουσα πρὸς τὸν παρατηρητὴν Π . Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα ἔχουν σχεδιασθῇ καὶ τρεῖς ἰσοφασικαὶ ἐπιφάνειαι τῶν κυμάτων, τὰ ὁποῖα ἐξεπέμφθησαν κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς χρονικὰς στιγμὰς. Αἱ σφαιρικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι ἔχουν, προφανῶς, ὡς κέντρα τὰ σημεῖα A_0, A_1, A_2 . Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς θεωρούμεναι χρονικαὶ στιγμαὶ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν περίδον, ἔπεται ὅτι αἱ φάσεις τῶν ἀντιστοιχῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν

θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ 360° . Ἡ συχνότης, τὴν ὁποίαν αντιλαμβάνεται ὁ ἀκίνητος παρατηρητής Π , εὐρίσκεται ἐκ τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος μεσολαβεῖ μεταξύ τῆς διελεύσεως δι' αὐτοῦ δύο διαδοχικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν: Ἐπὶ τῆς εὐθείας $A_0\Pi$, ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἰσοφα-

σικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικροτέρα ἐκείνης, τὴν ὁποίαν θὰ εἶχον αὐται, ἐὰν ἡ πηγὴ ἦτο ἀκίνητος, ἐπομένως καὶ οἱ μεσολαβούντες χρόνοι θὰ εἶναι μικρότεροι ἢ συχνότης, δηλ., τὴν ὁποίαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητής, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συχνότητος τῆς πηγῆς. Ἀντιστρόφως, ἡ συχνότης θὰ ἐμφανίζεται μικρότερα, ὅταν ἡ πηγὴ ἀπομακρύνεται τοῦ παρατηρητοῦ.

Τὸ φαινόμενον Doppler - Fizeau εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς φύσεως τῶν κυμάτων καί, ὥς ἐκ τούτου, παρατηρεῖται τόσον εἰς τὴν Ἀκουστικὴν, ὅσον καὶ εἰς τὴν Ὀπτικὴν. Καὶ εἰς μὲν τὴν Ἀκουστικὴν παρουσιάζεται ὡς μεταβολὴ τοῦ ὅρους τοῦ ἤχου, ἐνῶ εἰς τὴν Ὀπτικὴν ὡς μεταβάσεις τῶν φασματικῶν γραμμῶν εἰς τὸ φάσμα.

Κατὰ τὸ φαινόμενον Doppler - Fizeau, κύματα, προσερχόμενα ἐκ πηγῆς, συχνότητος ν , γίνονται ἀντιληπτά ὡς κύματα διαφόρου συχνότητος ν' . Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο συχνότητων ν καὶ ν' ἀνευρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

α) *Παρατηρητὴς κινούμενος - πηγὴ ἀκίνητος.* Τὸ ὅπὸ τῆς (ἀκινήτου) πηγῆς ἐκτεμπόμενον κύμα ἔστω τῆς μορφῆς

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \xi_0 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{V} \right) \quad (1)$$

ἔνθα V εἶναι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος. Ὁ παρατηρητὴς πλῆσιάζει πρὸς τὴν πηγὴν με ταχύτητα v καὶ ἔστω ὅτι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t , ἔχει συντεταγμένην $x = -v \cdot t$. Ἀντικαθιστώντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν ἑξίσωσιν (1), λαμβάνομεν διὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ξ εἰς τὴν ἐκάστοτε θέσιν τοῦ παρατηρητοῦ τὴν τιμὴν

$$\xi = \xi_0 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t + \frac{v \cdot t}{V} \right) = \xi_0 \cdot \eta \mu 2\pi \left(1 + \frac{v}{V} \right) \cdot t.$$

Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ ἀπομάκρυνσις αὕτη μεταβάλλεται ἀρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου με συχνότητα ν' , ἴσην πρὸς

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v}{V} \right).$$

Ἄν, ἀντιθέτως, ὁ παρατηρητὴς ἀπομακρύνεται τῆς πηγῆς, ἡ συχνότης ν' , τὴν ὁποίαν οὗτος ἀντιλαμβάνεται, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 - \frac{v}{V} \right).$$

β) *Πηγὴ κινουμένη - παρατηρητὴς ἀκίνητος.* Ἐὰν ἡ πηγὴ ἦτο ἀκίνητος, τότε, εἰς τὸ σχῆμα 352, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὸ μῆκος κύματος λ , ἥτοι ἴση πρὸς V/ν . Ἡδὴ, ὅμως, ἐπειδὴ ἡ πηγὴ πλῆσιάζει με ταχύτητα v , ἡ ἀπόστασις θὰ εἶναι ἴση πρὸς $(V - v)/\nu$. Ἡ συχνότης ν' , τὴν ὁποίαν ἀντιλαμβάνεται ὁ παρατηρητὴς, εὐρίσκεται ὡς τὸ πηλίκον

$$\frac{\text{ταχύτης διαδόσεως}}{\text{ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν ἰσοφασικῶν ἐπιφανειῶν}}.$$

Ἦτοι

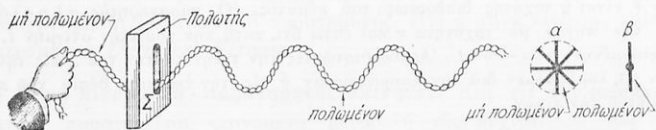
$$\nu' = \frac{V}{\frac{V-v}{\nu}} = \nu \cdot \frac{V}{V-v}.$$

“Όταν ή πηγή άπομακρύνεται, ή συχνότης, τήν όποιαν αντιλαμβάνεται ό παρατηρητής, θά είναι ίση πρός

$$v' = v \cdot \frac{V}{V + v}$$

§ 235. Πόλωση. Είς τās προηγουμένης παραγράφους ήσχολήθημεν μέ φαινόμενα, τά όποία παρουσιάζονται τόσον είς τά έγκάρσια, όσον καί είς τά διαμήκη κύματα. Είς τά κατωτέρω θ' άσχοληθώμεν μέ φαινόμενον, τό όποϊον παρουσιάζεται μόνον είς τά έγκάρσια κύματα—τό φαινόμενον τής **πολώσεως**.

Θεωρήσωμεν σχοινίον, τοῦ όποϊου τό έν άκρον είναι στερεωμένον, ένώ τό άλλο κρατοῦμεν διά τής χειρός. Ἐάν κινήσωμεν τήν χεῖρα καθ'έτως πρός τό σχοινίον καί πρός όλας τās διευθύνσεις, θά δημιουργηθῇ έν έγκάρσιον κύμα, τό όποϊον θά διαδίδεται κατά μήκος τοῦ σχοινίου. Ἐάν φέρωμεν τόν οφθαλμόν μας είς τήν προέκτασιν τοῦ σχοινίου, θά παρατηρήσωμεν ότι πᾶν σημεῖον αὐτοῦ πάλλεται καθέτως μέν επί τήν διεύθυνσιν διάδόσεως τοῦ κύματος, άλλ' έκάστοτε πρός άλλην διεύθυνσιν (σχ. 353, α). Ἐάν,

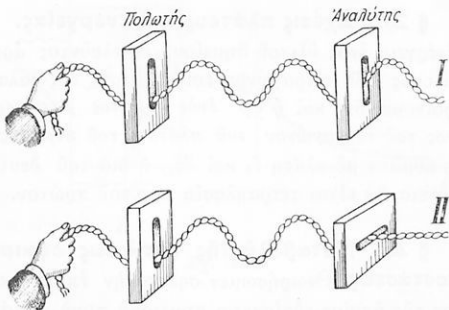


Σχ. 353. Ἡ σχισμή Σ πολώνει τό κύμα. Τό δι' αὐτῆς διελθόν κύμα πάλλεται διαρκῶς έφ' ένός έπιπέδου.

ακολουθως, αναγκάσωμεν τό σχοινίον νά διέλθῃ διά μιᾶς σχισμῆς Σ, τοῦτο θά πάλλεται, τώρα, αναγκαστικῶς έφ' ένός έπιπέδου, τό δέ κύμα, τό όποϊον θά διαδίδεται όπισθεν τής σχισμῆς, θά είναι **πολωμένον**. Πᾶν σημεῖον τοῦ σχοινίου θά πάλλεται, καί είς τήν περίπτωσιν ταύτην, καθέτως επί τήν διεύθυνσιν διάδόσεως τοῦ κύματος, άλλά θά ευρίσκεται διαρκῶς έφ' ένός έπιπέδου (σχ. 353, β)· τοῦ έπιπέδου, τοῦ όριζομένου ὑπό τής σχισμῆς καί τοῦ σχοινίου. Τό έπίπεδον τοῦτο καλεῖται **έπίπεδον πολώσεως** τοῦ κύματος. Ἐν αντιθέσει πρός τό όπισθεν τής σχισμῆς διαδιδόμενον πολωμένον κύμα, τό κύμα πρό αὐτῆς είναι μη πολωμένον. Ἡ σχισμή, ή όποία προκαλεῖ τήν πόλωσιν τοῦ κύματος, καλεῖται **πολωτής**, τό δέ έπίπεδον, τό όριζόμενον ὑπό τής σχισμῆς καί τοῦ σχοινίου, καλεῖται **χαρκτηριστικόν έπίπεδον** τοῦ πολωτοῦ.

Ἐάν, μετά τήν πρώτην σχισμίν, τοποθετήσωμεν καί δευτέραν (σχ. 354), ή κίνησις τοῦ σχοινίου όπισθεν τής δευτέρας σχισμῆς, θά έξαρτηθῇ εκ τής διευθύνσεως τοῦ χαρακτηριστικοῦ έπιπέδου αὐτῆς ὡς πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ χαρακτηριστικοῦ έπιπέδου τής πρώτης σχισμῆς. Καί εάν μέν τά χαρακτηριστικά έπίπεδα τῶν δύο σχισμῶν είναι παράλληλα (I), τό κύμα

ἐξακολουθεῖ νὰ διαδίδεται ἀκωλύτως, ἐνῶ, ὅταν ταῦτα εἶναι κάθετα (II), τὸ κῆμα δὲν διαδίδεται ὀπισθεν τῆς δευτέρας σχισμῆς. Εἰς ἐνδιάμεσον θέσιν τῆς δευτέρας σχισμῆς, τὸ κῆμα διέρχεται καὶ εἶναι πολωμένον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς, ἔχει, ὅμως, πλάτος, μικρότερον τοῦ ἀρχικοῦ. Ἡ δευτέρα σχισμή, ἡ ὁποία μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διακρίνωμεν ἂν ἐν κῆμα εἶναι πολωμένον, πρὸς τούτοις δὲ καὶ νὰ ἀναγνωρίσωμεν ποῖον εἶναι τὸ ἐπίπεδον πόλωσης καλεῖται *ἀναλύτης*.



Σχ. 354. Ὅταν τὰ χαρακτηριστικὰ ἐπίπεδα τοῦ πολωτοῦ καὶ τοῦ ἀναλύτου εἶναι παράλληλα (I), τὸ κῆμα διέρχεται, ἐνῶ, ὅταν εἶναι κάθετα (II), ἀνακόπεται.

Εἶναι προφανές ὅτι τὸ φαινόμενον τῆς πόλωσης δὲν εἶναι δυνατόν νὰ παρατηρηθῇ εἰς τὰ διαμήκη κύματα, διότι εἰς ταῦτα ἡ ταλάντωσις γίνεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Ὡς ἐκ τούτου, ἐνῶ τὰ ἡχητικὰ κύματα δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πολωθοῦν—καθόσον εἶναι διαμήκη κύματα—, τοῦτο εἶναι δυνατόν εἰς τὸ φῶς καί, ἐν γένει, εἰς τὰ ἠλεκτρομαγνητικὰ κύματα, γεγονός, τὸ ὁποῖον βεβαίωι ὅτι τὰ κύματα ταῦτα εἶναι ἐγκάρσια.

§ 236. Μεταφορὰ ἐνεργείας διὰ τοῦ κύματος. Κατὰ τὸ πείραμα, τὸ περιγραφέν εἰς τὴν § 220 (σχ. 328), ἐθέσαμεν τὴν πρώτην σφαῖραν εἰς κίνησιν, ἡ ὁποία, ἐν συνεχείᾳ, μετεδόθη καὶ εἰς τὰς ἐπομένας σφαίρας. Οὕτω, ἐκάστη σφαῖρα θὰ λαμβάνῃ ἐνέργειαν ἐκ τῆς προηγουμένης, τὴν ὁποίαν καὶ μεταδίδει εἰς τὴν ἐπομένην. Διὰ τοῦ κύματος μεταφέρεται, λοιπόν, ἐνέργεια κατὰ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος καὶ ὄχι ὕλη, καθόσον αἱ σφαῖραι ταλαντοῦνται διαρκῶς περὶ τὴν θέσιν ἰσορροπίας των.

Ἔντασις τοῦ κύματος. Ἐὰν θεωρήσωμεν τμήμα ἐπιφανείας, ἑμβαδοῦ ΔS , κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος καὶ ἡ δι' αὐτῆς ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt διερχομένη ἐνέργεια εἶναι ΔA , ὀρίζομεν ὡς *ἐντασιν* J τοῦ κύματος τὸ πηλίκον

$$J = \frac{\Delta A}{\Delta S \cdot \Delta t}$$

Ἐπειδὴ $\Delta A/\Delta t$ εἶναι ἡ ἰσχὺς, ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας, ἔπεται ὅτι ἡ ἐντασις τοῦ κύματος δύναται νὰ ὀρισθῇ καὶ ὡς τὸ πηλίκον τῆς

Ισχύος, τῆς διερχομένης διά τινος ἐπιφανείας, διὰ τοῦ ἑμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ταύτης (*).

§ 237. Σχέσεις πλάτους καὶ ἐνεργείας. Εἰς τὴν § 111 εἶδομεν ὅτι ἡ ἐνέργεια ἐνὸς ὕλικου σημείου, ἐκτελοῦντος ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ἡ ὕψ' ἐνὸς κύματος μεταφερομένη ἐνέργεια εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους τοῦ κύματος. Ἐάν, δηλ., συγκρίνωμεν δύο κύματα μὲ πλάτη ξ_0 καὶ $2\xi_0$, ἡ διὰ τοῦ δευτέρου κύματος διαδιδόμενη ἐνέργεια θὰ εἶναι τετραπλασία τῆς τοῦ πρώτου.

§ 238. Μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως σφαιρικοῦ κύματος μετὰ τῆς ἀποστάσεως. Θεωρήσωμεν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἀκτίνος r_1 , εἰς τὸ κέντρον τῆς ὁποίας εὐρίσκεται σημειακὴ πηγὴ κυμάτων. Τὸ ἐξ αὐτῆς ἐκπεμπόμενον κύμα διαδίδεται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις καί, οὕτω, ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt , διέρχεται διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς θεωρουμένης σφαίρας ἡ ἐνέργεια ΔA . Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἐνέργεια αὕτη διαδίδεται, χωρὶς νὰ μετατραπῇ εἰς ἄλλην μορφήν ἐνεργείας (π.χ., θερμότητα), εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου Δt , θὰ διέλθῃ ἡ αὕτη ἐνέργεια ΔA καὶ διὰ δευτέρας σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μεγαλυτέρας ἀκτίνος r_2 . Ἡ ἔντασις, ἐπομένως, τοῦ κύματος διὰ τὰς δύο περιπτώσεις θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς

$$J_1 = \frac{\Delta A}{4\pi r_1^2 \cdot \Delta t} \quad \text{καὶ} \quad J_2 = \frac{\Delta A}{4\pi r_2^2 \cdot \Delta t}.$$

Διαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}}$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει καὶ τὸν γνωστὸν νόμον τῆς φωτομετρίας εἰς τὴν Ὀπτικὴν, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς.

§ 239. Ἐξασθένησις τῶν κυμάτων. Κύματα, διερχόμενα διὰ τινος ὕλικου, ὑφίστανται, ἐν γένει, ἐλάττωσιν τῆς ἐντάσεως αὐτῶν (*ἐξασθένησις*), διότι μέρος τῆς ἐνεργείας των μετατρέπεται εἰς ἄλλην μορφήν ἐνεργείας (π.χ., θερμότητα). Οὕτω, κύμα, ἐντάσεως J_0 , διερχόμενον διὰ τινος ὕλικου, πάχους l , ἐξέρχεται μὲ ἡλαττωμένην ἔντασιν. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐξασθένησιν τῆς ἐντάσεως J ἐκ τοῦ πάχους l , σκεπτόμεθα ὥς ἑξῆς: Ἐστω J ἡ ἔντασις τοῦ κύματος εἰς βάθος x ἐντὸς τοῦ ὕλικου (σχ. 351, I) καὶ $J + dJ$ ἡ

(*) Εἰς τὸ Πρακτικὸν σύστημα μονὰς ἐντάσεως εἶναι τὸ 1 W/cm^2 .

έντασις αὐτοῦ εἰς βάθος $x + dx$. Ἡ μεταβολὴ dJ τῆς έντάσεως, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ κύμα, διερχόμενον διὰ τοῦ στρώματος τοῦ ὑλικοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ πάχος εἶναι dx , εἶναι ἀνάλογος τῆς έντάσεως J καὶ τοῦ πάχους dx τοῦ στρώματος. Εἶναι δηλ.,

$$dJ = -\mu \cdot J \cdot dx. \quad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς μ καλεῖται **συντελεστὴς ἐξασθενήσεως** καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑλικοῦ καὶ τῆς συχνότητος τοῦ κύματος.

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τίθεται εἰς τὸν τύπον (1), διότι ἡ έντὸς τοῦ πάχους dx ἐπερχομένη μεταβολὴ dJ τῆς έντάσεως εἶναι ἐλάττωσις.

Ὅπως δύναται ν' ἀποδειχθῇ (*), ἐκ τῆς ἐξίσωσews (1) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot l} \quad (2)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ J παριστᾷ τὴν έντασιν τοῦ κύματος μετὰ τὴν ἐξοδὸν του ἐκ τοῦ σώματος, δηλ., τὴν έντασιν τοῦ κύματος μετὰ τὴν ἐξοδὸν του ἐκ στρώματος, πάχους, ἴσου πρὸς l . Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ έντασις τοῦ κύματος ἐλαττοῦται ἐκθετικῶς μετὰ τοῦ πάχους l τοῦ ἀπορροφῶντος ὑλικοῦ.

Ἐάν παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν (2), θὰ λάβωμεν τὸ διάγραμμα *II* τοῦ σχήματος 355.

Ἐπὶ τῆς ἐξίσωσews $J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot l}$ ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὰς ἐξῆς παρατηρήσεις: 1) Ὁ ἐκθετικὸς παράγων $e^{-\mu \cdot l}$ εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς, μικρότερος τῆς μονάδος· δεδομένου ὅτι ἡ έντασις J τῆς ἀκτινοβολίας μετὰ τὴν ἐξοδὸν ἐκ τοῦ στρώματος τοῦ ὑλικοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς έντάσεως J_0 τῆς προσπιπτούσης ἐπ' αὐτοῦ.

2) Ὁ ἐκθέτης $\mu \cdot l$ εἶναι, ἐπίσης, καθαρὸς ἀριθμὸς· συνεπῶς ὁ συντελεστὴς ἐξασθενήσεως μ ἔχει διαστάσεις ἀντιστρόφου μήκους.

3) Ἐάν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν θέσωμεν $l = 0$, λαμβάνομεν $J = J_0$ · ὅπως, ἄλλως τε, δεικνύει καὶ τὸ διάγραμμα *II* τοῦ σχήματος 355.

§ 240. Κλίμαξ συγκρίσεως τῆς έντάσεως δύο κυμάτων. Ἐάν J_1 καὶ J_2 εἶναι αἱ έντάσεις δύο κυμάτων, τότε, προφανῶς, ἡ σχέσις τῶν δύο έντάσεων θὰ δίδεται ἐκ τοῦ πηλίκου J_1/J_2 . Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς έντάσεις δύο κυμάτων, δυνάμεθα, ἐπίσης, νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον (*log*) τοῦ πηλίκου τούτου

(*) Βλ. ΑΤΟΜΙΚΗ καὶ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, § 48.

$$N = \log \frac{J_1}{J_2}.$$

Ἐάν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $N=1$, λαμβάνομεν μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν 1 Bel , καὶ ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν ἐντάσεων δύο κυμάτων. Κατὰ ταῦτα, δύο κύματα διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν κατὰ 1 Bel , ὅταν ὁ λογαριθμὸς τοῦ λόγου τῶν δύο ἐντάσεων εἶναι ἴσος πρὸς 1 , ὅταν δηλ., ἡ ἔντασις τοῦ ἑνὸς κύματος εἶναι δεκαπλάσια τῆς ἐντάσεως τοῦ ἄλλου κύματος· ἤτοι, ὅταν εἶναι

$$\log \frac{J_1}{J_2} = 1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{J_1}{J_2} = 10.$$

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς Bel εἶναι μεγάλη, χρησιμοποιεῖται, ἀντ' αὐτῆς, εἰς τὴν πρᾶξιν τὸ 1 decibel (1 db) , τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$N = 10 \cdot \log \frac{J_1}{J_2}.$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον αὐτὸν $N=1$, λαμβάνομεν

$$1 = 10 \cdot \log \frac{J_1}{J_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{J_1}{J_2} = 10^{0,1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{J_1}{J_2} = 1,259.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι αἱ ἐντάσεις δύο κυμάτων διαφέρουν κατὰ 1 db , ὅταν τὸ δεκαπλάσιον τοῦ λογαρίθμου τοῦ λόγου τῶν δύο ἐντάσεων εἶναι ἴσον πρὸς 1 · ἤτοι ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ἑνὸς κύματος εἶναι κατὰ 25% , περίπου, μεγαλύτερα τῆς ἐντάσεως τοῦ ἄλλου κύματος. Ἐπειδὴ, ὡς γνωστόν, αἱ ἐντάσεις εἶναι ἀνάλογοι τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους τοῦ κύματος, ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν

$$N = 20 \cdot \log \frac{A_1}{A_2},$$

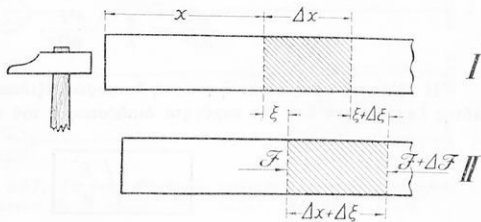
ἂν A_1 καὶ A_2 παριστοῦν τὰ πλάτη τῶν δύο κυμάτων. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει ὅτι δύο κύματα διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν κατὰ 1 db , ὅταν ὁ λόγος τῶν πλατῶν τῶν εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} = \sqrt{1,259} = 1,122,$$

ὅταν, δηλ., τὸ πλάτος τοῦ ἑνὸς κύματος εἶναι κατὰ $12,2\%$ μεγαλύτερον τοῦ πλάτους τοῦ ἄλλου κύματος.

§ 241. Διάδοσις ἐλαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν στερεῶν. Θεωρήσωμεν ράβδον ἐκ τινος ὑλικοῦ, τὴν ὁποίαν κυτλῶμεν εἰς τὴν μίαν βᾶσιν της διὰ σφυρίου. Εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο θὰ δημιουργηθῇ μία συμπύκνωσις τοῦ ὑλικοῦ, ἡ ὁποία θὰ διαδοθῇ κατὰ μῆκος τῆς ράβδου ὑπὸ μορφὴν κύματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πρόκειται περὶ διαμήκους κύματος, καθ' ὅσον ἡ κίνησις τῶν μορίων τοῦ ὑλικοῦ θὰ γίνεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν διαδόσεως τοῦ κύματος. Ἀντιθέτως, δυνάμεθα νὰ προκαλέσωμεν καὶ ἐγκάρσια κύματα εἰς τὴν ράβδον, ἐὰν κυτλήσωμεν αὐτὴν καθέτως πρὸς τὸν ἄξονά της, προκαλοῦντες κάμψιν αὐτῆς. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὰ στερεὰ εἶναι δυνατόν νὰ διαδίδωνται καὶ ἐγκάρσια καὶ διαμήκη κύματα.

§ 242. Ὑπολογισμός τῆς ταχύτητος διαδόσεως τῶν ἐλαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν στερεῶν. Προηγουμένως εἶδομεν ὅτι, ἐὰν κτυπήσωμεν τὴν βάσιν μιᾶς ράβδου, δημιουργεῖται ἐν πύκνωμα, τὸ ὁποῖον διαδίδεται κατὰ μήκος αὐτῆς. Διὰ τὴν ὑπολογισμὸν τὴν ταχύτητα διαδόσεως αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν δύο διατομὰς τῆς ράβδου εἰς τὰς θέσεις x καὶ $x + \Delta x$ (σχ. 356, I). Ἡ μᾶζα τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβανομένου τμήματος τῆς ράβδου εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 356.

$\rho \cdot S \cdot \Delta x$, ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς ράβδου καὶ ρ ἡ πυκνότης. Κατὰ τὴν διόδον τοῦ κύματος διὰ τοῦ θεωρουμένου τμήματος τῆς ράβδου, ἕκαστον σημεῖον μετακινεῖται ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας του, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, δημιουργοῦνται δυνάμεις μεταξὺ τοῦ τμήματος τούτου καὶ τῶν γειτονικῶν τμημάτων, αἱ ὁποῖαι, κατὰ τινα χρονικὴν στιγμήν, ἔστωσαν F καὶ $F + \Delta F$ (II). Ἐπομένως, ἡ ὁλικὴ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ θεωρουμένου τμήματος, εἶναι ἴση πρὸς ΔF . Ἡ πρώτη διατομὴ ἔστω ὅτι ἔχει ἀπομακρυνθῇ κατὰ ξ ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της, μετεκινήθη, δηλ., ἐκ τῆς θέσεως x εἰς τὴν θέσιν $x + \xi$. Ἀντιστοίχως, ἡ δευτέρα διατομὴ ἔστω ὅτι ἀπεμακρύνθη κατὰ $\xi + \Delta \xi$, δηλ., μετεκινήθη ἐκ τῆς θέσεως $x + \Delta x$ εἰς τὴν θέσιν $(x + \Delta x) + (\xi + \Delta \xi)$. Τὸ μήκος τοῦ θεωρουμένου τμήματος μετεβλήθη ἀπὸ Δx εἰς $\Delta x + \Delta \xi$, τὸ τμήμα, δηλ., ἐμικρύνθη κατὰ $\Delta \xi$. Ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις ε εἶναι $\Delta \xi / \Delta x$. Ὁ νόμος τοῦ Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

ἐφαρμοζόμενος ἐν προκειμένῳ, δίδει τὴν σχέσιν

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta \xi}{\Delta x}.$$

Ὅταν τὸ $\Delta \xi$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Διαφορίζοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς x , λαμβάνομεν

$$\frac{\partial F}{\partial x} = S \cdot E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$\Delta F = \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Εἰς τὴν ὁρικὴν περίπτωσιν ὁ τύπος οὗτος γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ $\partial F / \partial x$ διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), ἔχομεν

$$S \cdot E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\eta \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ γνωστὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ κύματος (§ 225). Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα διαδόσεως v τοῦ κύματος τὸν τύπον

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐξήχθη διὰ τὴν περίπτωσιν διαμήκων κυμάτων, διαδιδόμενων διὰ τῆς ράβδου, εἰς τὴν ὁποίαν παρουσιάζεται, ὡς γνωστόν, ἐγκάρσια συστολὴ καὶ διαστολὴ. Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅμως, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ μέσον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου διαδίδεται τὸ κύμα, ἔχει πρακτικῶς ἀπείρους διωστάσεις (ὁπότε δὲν εἶναι, πλέον, δυνατὴ ἡ ἐγκάρσια συστολὴ καὶ διαστολὴ), ἡ ταχύτης ὑπολογίζεται ἴση πρὸς

$$v = \sqrt{\frac{\frac{1}{\kappa} + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (3)$$

ἐνθα $1/\kappa$ εἶναι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου (§ 142) καὶ G τὸ μέτρον διατμησεως (§ 138). Ἡ περίπτωσις αὕτη παρουσιάζεται, ἀκριβῶς, κατὰ τὴν διάδοσιν τῶν διαμήκων σεισμικῶν κυμάτων εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς Γῆς (*).

Διὰ τὰ ἐγκάρσια κύματα, αἱ παραμορφώσεις προκαλοῦν διατμητικὰς τάσεις καί, ὡς ἐκ τούτου, ἀντὶ τοῦ τύπου (2), ἰσχύει ὁ τύπος

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (4)$$

Ἐάν, εἰς τὸ προηγούμενον πείραμα, κυπήσωμεν τὴν ράβδον καθέτως πρὸς τὸν ἄξονά της, αὕτη κάμπτεται καὶ ἡ παραμόρφωσις διαδίδεται ὑπὸ μορφὴν ἐγκάρσιου κύματος. Ἡ ταχύτης, ὅμως, τοῦ κύματος τούτου δὲν ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου (4), καθόσον ἡ παραμόρφωσις εἶναι καθαρὰ κάμψις (§ 136), εἰς τὴν ὁποίαν ὑπαισθέρχεται τὸ μέτρον τοῦ Young καὶ ἡ ἐπιφανειακὴ ροπὴ ἀδρανείας J καὶ ὄχι τὸ μέτρον διατμήσεως G .

Εἰς τὰς χορδὰς, τέλος, ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

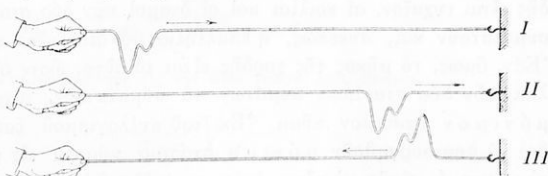
$$v = \sqrt{\frac{F}{m_l}} \quad (5)$$

ἐνθα F εἶναι ἡ δύναμις, ἡ τείνουσα τὴν χορδὴν καὶ m_l τὸ πηλίκον τῆς μάζης τῆς χορδῆς διὰ τοῦ μήκους αὐτῆς, ἢ, ἄλλως, ἡ μᾶζα ἀνὰ μονάδα μήκους (γραμμικὴ πυκνότης).

(*) Κατὰ τὴν διάδοσιν τῶν σεισμικῶν κυμάτων ἐντὸς τῆς Γῆς, παρουσιάζονται καὶ διαμήκη καὶ ἐγκάρσια κύματα.

§ 243. Μόνιμα στάσιμα ελαστικά κύματα εἰς τὰ στερεά. Ἐάν

στερεώσωμεν τὸ ἓν ἄκρον μακροῦ σχοινίου καί, κρατοῦντες τὸ ἄλλο διὰ τῆς χειρὸς, τὸ ὑποβάλλωμεν εἰς ἐγκάρσιαν ταλάντωσιν, βραχείας διαρκείας (σχ. 357, I), θὰ δημιουργηθῇ ἐν ἐγκάρσιον κύμα, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ φθάσῃ εἰς



Σχ. 357. Τὸ διὰ τῆς χειρὸς παραχθὲν κύμα (I), ἀνακλώμενον εἰς τὸ στερεωμένον ἄκρον, ἐπιστρέφει (III).

τὸ στερεωμένον ἄκρον, ἀνακλᾶται καὶ ἐπιστρέφει (III). Ἐάν ἡ κίνησις τῆς χειρὸς εἶναι ἁρμονικὴ καὶ ἐπαναλαμβάνεται διαρκῶς, τὸ προχωροῦν πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως κύμα συμβάλλει μὲ τὸ ἀνακλώμενον, δὲν δημιουργεῖται, ὅμως στάσιμον κύμα — ὡς θ' ἀνεμένετο — ἀλλὰ μία πολὺ-πλοκος ταλάντωσις. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ ἐπιστρέφον κύμα, ὅταν φθάσῃ εἰς τὴν χεῖρα μας, ἀνακλᾶται ἐπ' αὐτῆς, ὁπότε, ἀντὶ τοῦ ἐνὸς πρὸς τὰ δεξιὰ προχωροῦντος κύματος, ὑπάρχουν δύο. Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι τὰ συμβάλλοντα — προχωροῦντα καὶ ἀνακλώμενα — κύματα δὲν εἶναι πλέον δύο, ἀλλὰ περισσότερα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφόρους φάσεις. Ἐάν, ὅμως, κινήσωμεν τὴν χεῖρα μας μὲ κατὰλληλον συχνότητα, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ὥστε ἡ φάσις τοῦ εἰς τὴν χεῖρα μας ἀνακλώμενου κύματος νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν φάσιν τοῦ ὑπὸ τῆς χειρὸς παραγομένου κύματος. Ἀποτέλεσμα τούτου εἶναι νὰ δημιουργηθῇ καθ' ὅλον τὸ μήκος τοῦ σχοινίου ἐν μόνιμον στάσιμον κύμα. Ἐντελῶς ἀνάλογα φαινόμενα παρατηροῦνται κατὰ τὰς κατωτέρω περιγραφομένας ταλαντώσεις τῶν χορδῶν, τῶν ράβδων, τῶν ἀερίων στηλῶν κ.λ.

§ 244. Χορδαί. Ἐάν χορδὴν, στερεωμένην εἰς τὰ δύο ἄκρα της, κτυπήσωμεν καθέτως εἰς τι σημεῖον αὐτῆς, θὰ δημιουργηθῇ μία διαταραχή, ἡ ὁποία θὰ διαδοθῇ ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου τοῦ κτυπήματος. Θὰ ἐξετάσωμεν τὴν διάδοσιν ἐνὸς ἐκάστου κύματος ἰδιαιτέρως καὶ δι' εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαταραχή, τὴν ὁποίαν προκαλοῦμεν, εἶναι ἁρμονικὴ: Κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ, π.χ., διαδιδόμενον κύμα, ἀφοῦ φθάσῃ εἰς τὸ στερεωμένον ἄκρον, ἀνακλᾶται καί, ἐπιστρέφον, συμβάλλει μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ.



Σχ. 358. Διὰ τὰ δημιουργηθῶν μονίμως στάσιμα κύματα, πρέπει τὸ μήκος τῆς χορδῆς νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/2$.

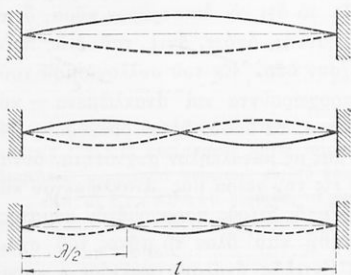
Ἐκ τῆς συμβολῆς ταύτης προκύπτει ἐν στάσιμον κύμα (σχ. 358, δεξιὰ). Τὸ

αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ κύμα, τὸ ὁποῖον διαδίδεται πρὸς τ' ἀριστερά, παραγόμενον, οὕτω, ἐνὸς δευτέρου στασίμου κύματος. Ἐὰν τὸ μήκος τῆς χορδῆς εἶναι τυχαῖον, αἱ κοιλῆαι καὶ οἱ δεσμοὶ τῶν δύο στασίμων κυμάτων δὲν συμπίπτουν καί, συνεπῶς, ἡ ἐπαλληλία θὰ δίδῃ μίαν πολὺπλοκὸν κίνησιν. Ἐάν, ὅμως, τὸ μήκος τῆς χορδῆς εἶναι τοιοῦτο, ὥστε οἱ δεσμοὶ καὶ αἱ κοιλῆαι τῶν δύο στασίμων κυμάτων νὰ συμπίπτουν, τότε δημιουργεῖται ἐν μόνιμον στάσιμον κύμα. Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ δημιουργηθοῦν μόνιμα στάσιμα κύματα εἰς μίαν χορδὴν, πρέπει τὸ μήκος l αὐτῆς νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο δεσμῶν, δηλ., τοῦ $\lambda/2$. Ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

ἐνθα n εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, λαμβάνων τὰς τιμὰς $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Κατὰ ταῦτα, εἰς χορδὴν, δεδομένου μήκους l , μόνον κύματα ὁρισμένων μεγάλων κύματος καί, συνεπῶς, ὁρισμένων συχνότητων $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu, \dots$ δύνανται νὰ σχηματίζουν στάσιμα κύματα.



Σχ. 359. Διάφοροι τρόποι ταλαντώσεως μιᾶς χορδῆς (στιγμιότυπα).

Τὸ σχῆμα 359 παριστᾷ στιγμιότυπα τῶν στασίμων κυμάτων, τῶν δημιουργουμένων εἰς χορδὴν, παλλομένην μὲ συχνότητας $\nu, 2\nu$ καὶ 3ν . Ὅπως ὑπολογίζεται κατωτέρω, ἡ θεμελιώδης συχνότης ν τῆς χορδῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς δυνάμεως, τῆς τεινύσεως τὴν χορδὴν — αὐξανόμενη μετ' αὐτῆς —, ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων — μήκος καὶ ἀκτίς — καὶ ἐκ τῆς πυκνότητος τοῦ ὑλικοῦ.

Αἱ συχνότητες, μὲ τὰς ὁποίας πάλλεται ἡ χορδή, ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς: Ὡς γνωστόν, μεταξὺ συχνότητος, ταχύτητος διαδόσεως καὶ μήκους κύματος ἰσχύει ἡ σχέση

$$\nu = \frac{v}{\lambda}.$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἑξίσωσιν ταύτην τὸ λ διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $2l/n$, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἑξίσωσως (1), ἔχομεν

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2l}.$$

Ἀντικαθιστώντες τὴν ταχύτητα v , τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (5) τῆς παραγράφου 242, ἔχομεν

$$\nu = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{m_l}}.$$

Ἡ γραμμικὴ πυκνότης m_l εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τῆς μάζης m τῆς χορδῆς διὰ τοῦ μήκους l αὐτῆς, ἄρα ἔχομεν

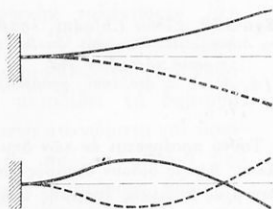
$$m_l = \frac{m}{l} = \frac{\pi r^2 \cdot l \cdot \rho}{l} = \pi r^2 \cdot \rho.$$

Ἐπομένως, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν ἄνω τύπον, λαμβάνομεν

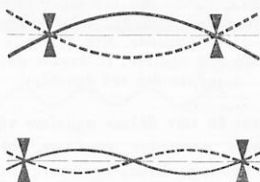
$$v = \frac{n}{2l \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \rho}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θεμελιώδης συχνότης ($n = 1$) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τεινούσης δυνάμεως, τῆς ἀκτίνος, τοῦ μήκους καὶ τοῦ ὕλικου τῆς χορδῆς.

✓ **§ 245. Ράβδοι.** Ὅπως αἱ χορδαί, οὕτω καὶ αἱ ράβδοι, καταλλήλως διεγερόμεναι, σχηματίζουν στάσιμα κύματα. Τὰ σχήματα 360 καὶ 361 παριστοῦν στιγμιότυπα μιᾶς ράβδου, παλλομένης μετὰ διαφόρους συχνότητες. Εἰς τὸ σχῆμα 360 ἡ ράβδος εἶναι πακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐνῶ τὸ ἄλλο πάλτε-



Σχ. 360. Στιγμιότυπα παλλομένης ράβδου, πακτωμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον.



Σχ. 361. Στιγμιότυπα παλλομένης ράβδου, στερεωμένης εἰς δύο σημεία.

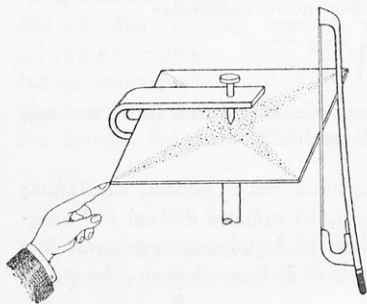
ται ἐλευθέρως. Εἰς τὸ σχῆμα 361 καὶ τὰ δύο ἄκρα τῆς ράβδου πάλλονται ἐλευθέρως, ἡ δὲ ράβδος στηρίζεται εἰς τὰ δεσμικὰ σημεία.

Αἱ ράβδοι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς χορδὰς, πάλλονται μετὰ συχνότητος, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους. Ἡ θεμελιώδης συχνότης μιᾶς ράβδου εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ μήκος αὐτῆς.

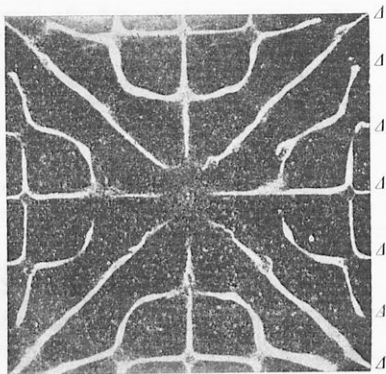
§ 246. Μεμβρᾶναι καὶ πλάκες. Μεμβράνη ὀνομάζεται φύλλον ἐκ τινος στερεοῦ ὕλικου, τοῦ ὁποῦν τὸ πάχος εἶναι πολὺ μικρόν, ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἄλλας δύο διαστάσεις καὶ τὸ ὅποτον οὐδεμίαν ἀντίστασιν προβάλλει εἰς τὴν κάμψιν. Ἡ μεμβράνη, τεινομένη ἐπὶ πλαισίον, ἀποκτᾷ μόνιμον σχῆμα, τὸ ὅποτον τείνει ν' ἀναλάβῃ, ὅταν παραμορφωθῇ. Ἀντιθέτως, αἱ πλάκες ἀντιτάσσουσιν εἰς τὴν κάμψιν ἐλαστικὰς δυνάμεις καὶ, ὡς ἐκ τούτου, ἔχουν ἴδιον σχῆμα, χωρὶς τὴν χρῆσιν πλαισίου.

Ἡ μελέτη τῶν ταλαντώσεων μιᾶς τεταμένης μεμβράνης εἶναι ἐπέκτασις τοῦ προβλήματος τῆς χορδῆς εἰς δύο διαστάσεις, ἐνῶ, ἀντιστοίχως, ἡ πλάξ εἶναι ἐπέκτασις τοῦ προβλήματος τῆς ράβδου. Συνήθως ἐνδιαφέρουν αἱ ἐγκάρσιαι ταλαντώσεις τῶν μεμβρανῶν καὶ πλακῶν, κατὰ τὰς ὁποίας σχηματίζονται στάσιμα κύματα. Οὕτω, ἐὰν στερεώσωμεν μίαν τετραγωνικὴν πλάκα εἰς τὸ κέντρον (σχ. 362) καὶ, ἀφοῦ ρί-

ψωμεν ἐπ' αὐτῆς λεπτὴν ἄμμον, τὴν διεγείρομεν καταλλήλως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἄμμος συναθροίζεται ἐφ' ὠρισμένων γραμμῶν (*δεσμικαὶ γραμμαὶ*), ἐνῶ ἐκ-



Σχ. 362. "Όταν διὰ τοῦ τόξου διεγείρωμεν τὴν πλάκα, ἡ ἄμμος συγκεντρώνεται εἰς τὰς δεσμικὰς γραμμάς. Μία ἐξ αὐτῶν διέσχεται διὰ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀκίνητο ποιοῦμεν διὰ τοῦ δακτύλου.



Σχ. 363. Εἰκὼν Chladni, ληφθεῖσα διὰ τῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 362.
(Δ, Δ . . . = δεσμικαὶ γραμμαὶ).

δίδωκεται ἐκ τῶν ἄλλων σημείων τῆς ἐπιφανείας. Τοῦτο προέρχεται ἐκ τῶν δημιουργουμένων στασίμων κυμάτων, τὰ ὁποῖα εἰς ἄλλας θέσεις δίδουν δεσμούς καὶ εἰς ἄλλας κοιλίας. Εἶναι προφανές ὅτι τὰ ἐκατέρωθεν μιᾶς δεσμικῆς γραμμῆς τμήματα τῆς πλακὸς θὰ πάλλωνται μὲ διαφορὰν φάσεως 180° , δηλ., ὅταν τὸ ἐν ἀνέρχεται, τὸ ἄλλο θὰ κατέρχεται. Ἀναλόγως τοῦ τρόπου τῆς διεγέρσεως, αἱ δεσμικαὶ γραμμαὶ λαμβάνουν διαφόρους μορφὰς (*εἰκόνες Chladni*, σχ. 363).

§ 247. Διάδοσις ἐλαστικῶν κυμάτων εἰς τὰ ὑγρά. Ὅπως εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, εἰς τὰ στερεὰ δύναται νὰ δημιουργηθοῦν καὶ διαμήκη καὶ ἐγκάρσια ἐλαστικὰ κύματα. Ἀντιθέτως, ἐν τῶν ὑγρῶν (καθὼς καὶ ἐντὸς τῶν αερίων - βλ. § 248) παράγονται μόνον διαμήκη κύματα. Ἡ διαφορὰ αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἐνῶ εἰς τὰ στερεὰ δημιουργοῦνται διατμητικαὶ τάσεις, εἰς τὰ ὑγρά καὶ τὰ αέρια μόνον κάθετοι τάσεις (δηλ., πιέσεις) δύναται ν' ἀναπτυχθοῦν.

Κύματα ἐπιφανείας. Ἐγκάρσια κύματα εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθοῦν εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἐνὸς ὑγροῦ (*κύματα ἐπιφανείας*). Τοιαῦτα κύματα εἶναι, π.χ., τὰ κύματα τῆς θαλάσσης. Τὰ κύματα ἐπιφανείας δὲν εἶναι, ἀκριβῶς, ἐγκάρσια κύματα. Τοῦτο διαπιστοῦμεν, ἐὰν παρακολουθήσωμεν τὴν τροχίαν ἐνὸς τεμαχίου φελλοῦ, ἐπιπλέοντος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ἡ κίνησις εἶναι πολύπλοκος, ὁμοιάζουσα μὲ κίνησιν ἐπὶ κύκλου, ὃ ὁποῖος μετακινεῖται βραδέως. Αὐτό, ἀκριβῶς, εἶναι τὸ αἷτιον, λόγῳ τοῦ ὁποίου τὰ κύματα τῆς θαλάσσης ἐκβράζουν διάφορα ἐπιπλέοντα ἀντικείμενα εἰς τὴν ἀκτὴν.

Οὐσιώδη ρόλον εἰς τὴν διάδοσιν τῶν κυμάτων ἐπιφανείας παίζει ἡ βαρὺτης. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάτων ἐπιφανείας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

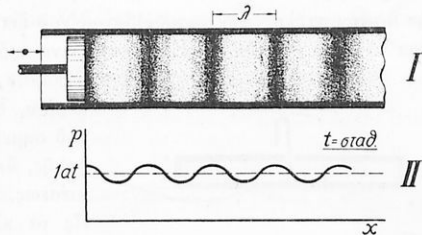
$$v = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

ἐνθα λ εἶναι τὸ μῆκος κύματος καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρὺτης. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης διαδόσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μῆκους κύματος, παρουσιάζεται, δηλ., διασκεδασμός (§ 226).

Ὅταν τὸ βάθος h εἶναι μικρόν, ἐν σχέσει πρὸς τὸ μῆκος κύματος, ὁ ἄνω τύπος μετατρέπεται εἰς τὸν ἑξῆς:

$$v = \sqrt{g \cdot h}.$$

§ 248. Διάδοσις ελαστικῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν ἀερίων. Θεωρήσωμεν σωλῆνα ἀπεριόριστον, ὁ ὁποῖος περιέχει ἀέρα καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ἕν ἄκρον του (ἀριστερῶν) κλείεται δι' ἐμβόλον, ἐκτελοῦντος ἁρμονικὴν ταλάντωσιν (σχ. 364, I). Ὁ ἀέρας, συμπιεζόμενος περιοδικῶς ὑπὸ τοῦ ἐμβόλου, μεταδίδει τὰ δημιουργούμενα πυκνώματα καὶ ἀραιώματα πρὸς τὰ δεξιὰ ὑπὸ μορφὴν διαμήκους κύματος. Εἰς τὸ σχῆμα 364, II ἀποδίδεται ἕν στιγμιότυπον τοῦ κύματος.



Σχ. 364. Παραγωγὴ κύματος πίεσεως εἰς τὸν ἀέρα (I) καὶ στιγμιότυπον τοῦ κύματος (II).

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ὁρισμένα σημεῖα ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἡ πίεσις p εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, ἐνῶ εἰς ἄλλα μικροτέρα. Ἡ μεταβολὴ Δp τῆς πίεσεως εἰς ἄλλα σημεῖα εἶναι θετικὴ (ὑπερπίεσις εἰς τὸ πύκνωμα) καὶ εἰς ἄλλα σημεῖα ἀρνητικὴ (ὑποπίεσις εἰς τὸ ἀραίωμα). Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πυκνωμάτων ἢ ἀραιωμάτων εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος κύματος λ .

Ὅταν τὸ κύμα τῆς πίεσεως ἔχῃ συχνότητα τοιαύτην, ὥστε νὰ δύναται νὰ γίνῃ ἀντιληπτὸν διὰ τοῦ ὠτός, καλεῖται ἤχος.

Λόγῳ τῶν περιοδικῶν μεταβολῶν τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος, ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ μεταβάλλεται καὶ αὐτὴ περιοδικῶς καί, συγκεκριμένως, εἰς τὰ πυκνώματα αὐξάνεται, ἐνῶ εἰς τὰ ἀραιώματα ἑλαττοῦται. Ροὴ θερμότητος ἐκ σημείων μεγαλυτέρας θερμοκρασίας εἰς σημεῖα μικροτέρας θερμοκρασίας δὲν λαμβάνει χώραν, ἀφ' ἐνὸς μὲν, διότι εἰς τοὺς συνήθεις ἤχους ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο τοιούτων σημείων εἶναι μεγάλη, ἀφ' ἑτέρου δέ, διότι ὁ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενος χρόνος εἶναι, σχετικῶς, βραχύς (*).

(*) Εἰς τοὺς συνήθεις ἤχους—π.χ., συχνότητος 1000 Hz—, ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι, περίπου, 0,34 m, ὁ δὲ χρόνος $1 \cdot 10^{-8}$ sec.

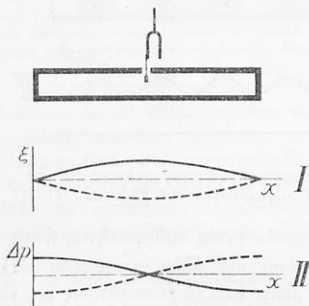
Αἱ περιοδικαὶ μεταβολαὶ τῆς πίεσεως—αἱ ὁποῖαι καὶ ἀποτελοῦν, ὡς εἴδομεν, τὸν ἤχον—διαδίδονται μὲ ὠρισμένην ταχύτητα, ἡ ὁποία καλεῖται **ταχύτης τοῦ ἤχου**. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς ἐνὸς αερίου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς πίεσεως καὶ τῆς πυκνότητος αὐτοῦ, ἐξαρτώμενη μόνον ἐκ τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς φύσεως τοῦ αερίου.

Θεωρητικῶς ἀποδεικνύεται (*) ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου παρέχεται ἐκ τοῦ τύπου

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot \gamma}{m_{Mol}} \cdot T}$$

ἐνθα R εἶναι ἡ παγκοσμία σταθερὰ τῶν τελείων αερίων, γ ὁ λόγος c_p/c_v τῶν εἰδικῶν θερμοτήτων τοῦ αερίου, m_{Mol} ἡ μᾶζα ἐνὸς γραμμομορίου τοῦ αερίου καὶ T ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία αὐτοῦ.

§ 249. Στάσιμα ἐλαστικὰ κύματα εἰς τὰ ἀέρια. Α. Θεωρήσωμεν τὴν αέριον στήλην, τὴν περιλαμβανομένην ἐντὸς σωλῆνος, κλειστοῦ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα (σχ. 365). Ἐάν, κατὰ τινα τρόπον, δημιουργήσωμεν μίαν πε-



Σχ. 365. Στάσιμον κῶμα ἐντὸς σωλῆνος, κλειστοῦ καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα (θεμελιώδης ταλάντωσις).

ριοδικὴν διαταραχὴν τῆς πυκνότητος τοῦ αερίου, αὕτη θὰ διαδοθῇ ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς δημιουργίας τῆς διαταραχῆς, ὑπὸ τὴν μορφήν δύο κυμάτων πίεσεως. Τὰ κύματα ταῦτα φθάνουν εἰς τὰ κλειστὰ ἄκρα καί, ἀνακλόμενα, ἐπιστρέφουν καὶ συμβάλλουν μὲ τὰ ἀρχικά, σχηματιζομένων, οὕτω, δύο στασίμων κυμάτων. Τὰ δύο ταῦτα στάσιμα κύματα δίδουν (ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὰς χορδὰς) μίαν πολύπλοκον κίνησιν. Ἐάν, ὁμως, τὸ μήκος τῆς αερίου στήλης εἶναι τοιοῦτο, ὥστε οἱ δεσμοὶ (καὶ αἱ κοιλίαι) τῶν δύο κυμάτων νὰ συμπίπτουν, δημιουργεῖται ἓν μόνιμον στάσιμον κῶμα. Ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο κλειστὰ ἄκρα τοῦ σωλῆνος εἶναι ἀδύνατος οἰαδήποτε ταλάντωσις τῶν μορίων τοῦ αερίου, ἔπεται ὅτι ἐκεῖ ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτῶν θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν. Εἰς τὰ (κλειστὰ) ἄκρα, λοιπόν, τοῦ σωλῆνος ἔχομεν δεσμοὺς τῆς κινήσεως. Ἀντιθέτως, εἰς τὰ αὐτὰ σημεία δημιουργοῦνται *κοιλίαι τῆς πίεσεως*, δηλ., ἡ μεταβολὴ Δp τῆς πίεσεως εἶναι ἐκεῖ μεγίστη (**).

(*) Βλ. ΘΕΡΜΟΤΗΣ, § 117.

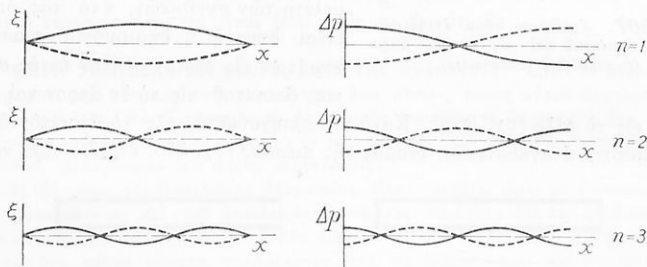
(**) Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Ὄταν ἐν πύκνωμα ἀνακλᾶται εἰς τὸ κλειστὸν ἄκρον καί, ἐπιστρέφον, συμβάλῃ μὲ τὸ πρῶτον, προκαλεῖ ἐκεῖ πολὺ μεγάλην αὐξήσιν τῆς πίεσεως, ἴσην πρὸς $2\Delta p$. Ὁμοίως, ὅταν εἰς τὸ αὐτὸ ἄκρον ἀνακλᾶται ἐν ἀραίωμα ($-\Delta p$), δημιουργεῖται ἐκεῖ πολὺ μεγάλη ἐλάττωσις τῆς πίεσεως, ἴση πρὸς $-\Delta p$. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὰ κλειστὰ ἄκρα ἡ μεταβολὴ τῆς πίεσεως εἶναι μεγίστη—εἰς τὰ σημεία ταῦτα, δηλ., ἔχομεν κοιλίας τῆς πίεσεως.

Τὸ διάγραμμα *I* τοῦ σχήματος 365 παριστᾷ στιγμιότυπα τῆς κατανομῆς τῆς ἀπομακρύνσεως ξ κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος δημιουργεῖται κοιλία τῆς ἀπομακρύνσεως (εἰς τὸ σημεῖον, δηλ., τοῦτο ἢ ἀπομακρύνσεις λαμβάνει τὴν μεγίστην τῆς τιμὴν), ἐνῶ εἰς τὰ ἄκρα αὕτη εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν.

Τὸ διάγραμμα *II* παριστᾷ στιγμιότυπα τῆς μεταβολῆς Δp τῆς πίεσεως. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος δημιουργεῖται δεσμός τοῦ Δp : Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ μεταβολὴ τῆς πίεσεως εἶναι, διαρκῶς, ἴση πρὸς μηδέν· ἡ πίεσις, δηλ., παραμένει σταθερὰ (καὶ ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν).

Ἐκ συγκρίσεως τῶν διαγραμμάτων *I* καὶ *II* προκύπτει ὅτι εἰς τοὺς δεσμοὺς τῆς κινήσεως ἀντιστοιχοῦν κοιλίαί τῆς πίεσεως καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκτὸς τῆς περιγραφείσης περιπτώσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀέριος στήλη πάλλεται μὲ τὴν θεμελιώδη συχνότητα, εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθοῦν καὶ στάσιμα κύματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ταλαντώσεις μεγαλυτέρας συχνότητος. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 366 ἀποδίδονται στιγμιότυπα τῆς ἀπο-



Σχ. 366. Διάφοροι τρόποι ταλαντώσεως τῆς ἀερίου στήλης, τῆς περιεχομένης ἐντὸς σωλῆνος, κλειστοῦ καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα.

μακρύνσεως ξ καὶ τῆς μεταβολῆς Δp τῆς πίεσεως, ὅταν ἡ ἀέριος στήλη πάλλεται μὲ διαφόρους συχνότητας. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ δημιουργηθοῦν μονίμως στάσιμα κύματα εἰς μίαν ἀέριον στήλην, πρέπει τὸ μῆκος l αὐτῆς νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο δεσμῶν (ἢ δύο κοιλιῶν), δηλ., ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/2$. Ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

ἔνθα n εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, λαμβάνων τὰς τιμὰς 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ὡς γνωστόν, εἶναι

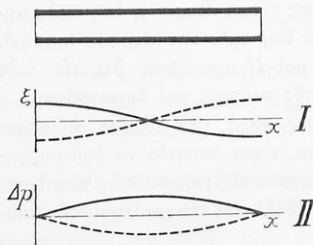
$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ λ διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1), ἔχομεν

$$v = n \cdot \frac{v}{2l}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὅτι ἐντὸς ἀερίου στήλης, δεδομένου μήκους l , μόνον ὠρισμένης συχνότητος στάσιμα κύματα δύνανται νὰ δημιουργηθοῦν.

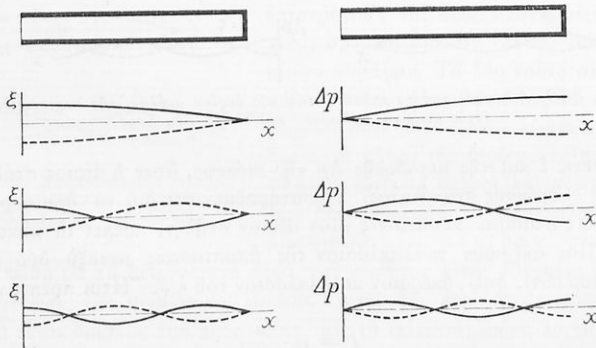
Β. Μὲ τὰς αὐτὰς, ἀκριβῶς, συχνότητας πάλλεται ἀέριος στήλη ἐντὸς σωλῆνος, ἀνοικτοῦ καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα (σχ. 367), μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὰ ἐλεύθερα ἄκρα θὰ πρέπει ἡ πίεσις νὰ εἶναι διαρκῶς σταθερὰ (ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν) καὶ, συνεπῶς, ἐκεῖ θὰ σχηματίζονται δεσμοὶ τῆς πίεσεως (σχ. 367, II) καὶ, ἀντιστοίχως, κοιλίαι τῆς κινήσεως (I).



Σχ. 367. Στάσιμον κύμα ἐντὸς σωλῆνος, ἀνοικτοῦ καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα (θεμελιώδης ταλάντωσις).

Γ. Ἐνδιαφέροντα εἶναι, ἐπίσης, ἡ μελέτη τῶν συνθηκῶν, ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ δημιουργία στασίμων κυμάτων εἰς ἀέριον στήλην ἐντὸς σωλῆνος, ἀνοικτοῦ εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ κλει-

στοῦ εἰς τὸ ἄλλο (σχ. 368). Κατὰ τὰ προηγούμενα, εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον θὰ ὑπάρχῃ, ἀναγκαστικῶς, δεσμὸς τῆς πίεσεως (σχ. 368, δεξιὰ)—ἄρα κοιλία



Σχ. 368. Διάφοροι τρόποι ταλάντωσεως τῆς ἀερίου στήλης, τῆς περιεχομένης ἐντὸς σωλῆνος, ἀνοικτοῦ εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ κλειστοῦ εἰς τὸ ἄλλο.

τῆς κινήσεως (σχ. 368, ἀριστερὰ) — ἐνῶ εἰς τὸ κλειστὸν ἄκρον θὰ δημιουργηθῇ κοιλία τῆς πίεσεως—ἄρα δεσμὸς τῆς κινήσεως.

Ὅπως καὶ εἰς τὰς προηγούμενας περιπτώσεις, οὕτω καὶ ἐν προκειμένῳ ἡ ἀέριος στήλη δύναται νὰ πάλλεται καὶ εἰς ἀνωτέρας ἀρμονικὰς, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εὗρισκονται ὡς ἑξῆς: Ἐὰν καλέσωμεν L τὸ μήκος

τῆς στήλης, τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον ἢ πρὸς $\lambda/4$ ἢ πρὸς $3 \cdot \lambda/4$ ἢ πρὸς $5 \cdot \lambda/4$ καί, ἐν γένει, ἴσον πρὸς περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/4$ (σχ. 368). Ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{4},$$

ἐνθα n εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος λαμβάνει τὰς περιττὰς τιμὰς 1, 3, 5, 7...

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν $r = v/\lambda$, τὸ λ διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως, ἔχομεν διὰ τὴν συχνότητα ν τὴν σχέσιν

$$r = n \cdot \frac{\nu}{4L}.$$

Ἐπειδὴ, ὡς εἶδομεν, ὁ ἀριθμὸς n μόνον τὰς περιττὰς τιμὰς 1, 3, 5, 7... δύναται νὰ λάβῃ, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ συχνότητες, μὲ τὰς ὁποίας θὰ ἀλλελεῖται ἡ ἀέριος στήλη, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ν , 3ν , 5ν , 7ν ...

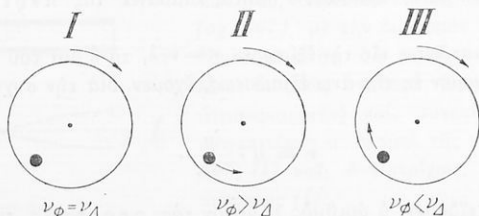
§ 250. Μεταβολή της φάσεως κατά την ανάκλασιν. Ὅταν ἐν κύμα προσπίπτῃ ἐπὶ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας δύο μέσων, μέρος αὐτοῦ ἀνακλᾶται καὶ μέρος διαθλάται. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ ἀνακλωμένου κύματος, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὑπομάκρυνσιν τοῦ προσπίπτοντος. Διακρίνομεν δύο ἄκρας περιπτώσεις:

1) Ἡ φύσις τῆς ἀνακλώσεως ἐπιφανείας εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀπομακρύνσεις τοῦ προσπίπτοντος καὶ τοῦ ἀνακλωμένου κύματος νὰ ἔχουν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὸ αὐτὸ ἀλγεβρικὸν σημεῖον - δηλ., τὰ δύο κύματα νὰ εἶναι ἐν φάσει. Εἶναι προφανές ὅτι τὰ δύο ταῦτα κύματα, συμβάλλοντα ἐκεῖ, θὰ δίδουν κύμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπομάκρυνσις θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπομακρύνσεων τῶν δύο κυμάτων. Τὸ οὕτω δημιουργούμενον στάσιμον κύμα θὰ ἔχῃ, λοιπόν, ἐπὶ τῆς ἀνακλώσεως ἐπιφανείας κοιλίαν τῆς ἀπομακρύνσεως. Τοιαύτην περίπτωσιν συνηντήσαμεν εἰς τὰ ἐλεύθερα ἄκρα ἐγκαρσίως παλλομένων ράβδων (σχ. 360, 361), εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐγκαρσία κίνησις παρουσιάζει κοιλίαν, καθὼς καὶ εἰς τὰ ἀνοικτὰ ἄκρα ἡχητικῶν σωλήνων (σχ. 367), εἰς τὰ ὁποῖα σχηματίζεται κοιλία κινήσεως.

2) Ἡ φύσις τῆς ἀνακλώσεως ἐπιφανείας εἶναι τοιαύτη, ὥστε εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀνακλάσεως αἱ ἀπομακρύνσεις τοῦ προσπίπτοντος καὶ τοῦ ἀνακλωμένου κύματος νὰ ἔχουν ἀντίθετον ἀλγεβρικὸν σημεῖον - δηλ., τὰ δύο κύματα νὰ παρουσιάζουν ἐκεῖ διαφορὰν φάσεως 180° . Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς θὰ εἶναι ἐν στάσιμον κύμα μὲ δεσμόν τῆς ἀπομακρύνσεως ἐπὶ τῆς ἀνακλώσεως ἐπιφανείας. Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μεταβολῆς τῆς φάσεως κατὰ 180° εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀνακλάσεως ἔχομεν εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 357, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαταραχή, ἡ διαδιδόμενη κατὰ μήκος τοῦ σχοινίου, ἀλλάσσει ἀλγεβρικὸν σημεῖον κατὰ τὴν ἀνάκλασιν. Ἐνεκα τοῦ φαινομένου τούτου, ἀκριβῶς, σχηματίζονται δεσμοὶ τῆς ἀπομακρύνσεως εἰς τὰ στερεωμένα ἄκρα μίας μονίμως παλλομένης χορδῆς (σχ. 359).

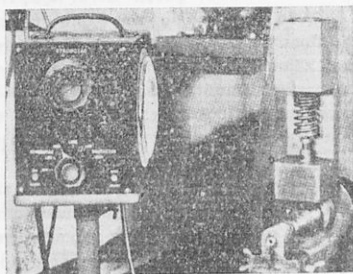
§ 251. Στροβοσκοπικὴ παρατήρησις. Διὰ τὴν παρακολούθησιν ταχέως παλλομένων σωμάτων μεταχειρίζομεθα τὴν *στροβοσκοπικὴν παρα-*

τήρησιν, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχὴ εἶναι ἡ ἐξῆς: Θεωρήσωμεν δίσκον, φέροντα κηλίδα καὶ φωτιζόμενον διὰ φωτός, σταθερᾶς ἐντάσεως. Ἐάν ὁ δίσκος τεθῇ εἰς ταχείαν περιστροφὴν, ἡ κηλὶς δὲν θὰ φαίνεται πλέον. Ἐάν, ὅμως, φωτίσωμεν τὸν δίσκον μὲ ἀναλαμπάς, βραχείας διαρκείας καὶ ἐπαναλαμβανομένας μὲ συχνότητα φωτισμοῦ ν_ϕ , ἴσην, ἀκριβῶς, μὲ τὴν συχνότητα ν_Δ τοῦ δίσκου, ἡ κηλὶς θὰ φαίνεται ἀκίνητος εἰς τὴν θέσιν τῆς (σχ. 369, I). Ἐάν,



Σχ. 369. Ὅταν ὁ στρεφόμενος δίσκος φωτίζεται στροβοσκοπικῶς καὶ ἡ συχνότης τοῦ φωτισμοῦ εἶναι, ἀκριβῶς, ἴση πρὸς τὴν συχνότητα περιστροφῆς τοῦ δίσκου, ἡ κηλὶς φαίνεται ἀκίνητος (I), ἐνῶ, όταν ἡ συχνότης φωτισμοῦ εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερα ἢ ὀλίγον μικροτέρα τῆς συχνότητος τοῦ δίσκου, ἡ κηλὶς φαίνεται κινουμένη βραδέως (II), (III).

τόρα, ἡ συχνότης φωτισμοῦ γίνῃ ὀλίγον μεγαλύτερα τῆς συχνότητος τοῦ δίσκου, ἡ κηλὶς φαίνεται κινουμένη βραδέως πρὸς τὴν φορὰν τοῦ βέλους τοῦ σχήματος 369, II, ἐνῶ, ὅταν αὕτη γίνῃ ὀλίγον μικροτέρα, ἡ κηλὶς φαίνεται κινουμένη ἀντιστρόφως (III).



Σχ. 370. Ἐλατήριοι στρεφόμενης μηχανῆς, φωτιζόμενον διὰ στροβοσκοπικοῦ προβολέως (στροβοσκόπιον).

κινούμενον βραδέως, καθισταμένης, οὕτω, δυνατῆς τῆς παρακολουθήσεως τῆς παραμορφώσεώς του.

Τὸν στροβοσκοπικὸν φωτισμὸν χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν Ἀκουστικὴν διὰ τὴν παρακολούθησιν τῆς παραμορφώσεως ἑνὸς ταχέως παλλομένου σώματος, π.χ., διαπασῶν, χορδῶν κ.λ. Ὅσαύτως, τὰ στροβοσκόπια χρησιμοποιοῦνται καὶ εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν παρακολούθησιν ταχέων περιοδικῶν φαινομένων. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 370 τὸ ἐλατήριο τῆς βαλβίδος μιᾶς μηχανῆς, εὐρισκομένης ἐν λειτουργίᾳ, φωτιζόμενον στροβοσκοπικῶς καὶ μὲ κατάλληλον συχνότητα, φαίνεται

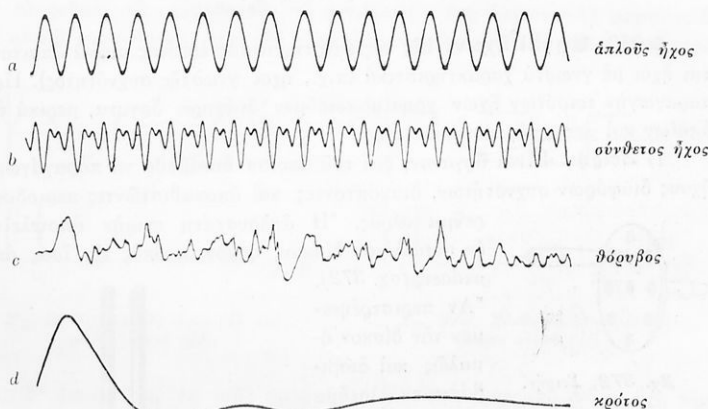
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ΄

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

§ 252. Γενικά περί ἤχων. Ὡς γνωστόν, ἤχους καλοῦμεν περιοδικὰς μεταβολὰς τῆς πίεσεως τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι ἱκανὴ νὰ ἐρεθίσῃ τὸ αἰσθητήριον τῆς ἀκοῆς καὶ νὰ προκαλῇ τὸ ἀντίστοιχον αἶσθημα. Γενικώτερον, ὡς ἤχους δυνάμεθα νὰ χαρακτηρίσωμεν καὶ τὰ ἐλαστικὰ κύματα, τὰ διαδιδόμενα ἐντὸς στερεῶν καὶ ὑγρῶν, ἀρκεῖ ἡ συχνότης τῶν νὰ ἐμπίπτῃ εἰς τὴν ἀκουστὴν περιοχὴν συχνότητων. Τὰ φαινόμενα, τὰ σχετικὰ μὲ τοὺς ἤχους, ἐξετάζει ἡ Ἀκουστική.

Ἐκ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς διαδόσεως τῶν κυμάτων ἐντὸς τῶν αερίων (§ 248), προκύπτει ὅτι οἱ ἤχοι ἐντὸς αὐτῶν εἶναι διαμήκη κύματα.

Τοὺς ἤχους διακρίνομεν εἰς ἀπλοὺς καὶ σύνθετους. Καὶ εἰς μὲν τὸν ἀπλοῦν ἤχον ἡ μεταβολὴ τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος εἶναι ἀρμονικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου (σχ. 371, α), ἐνῶ εἰς τὸν σύνθετον ἤχον ἡ μεταβολὴ τῆς



Σχ. 371. Παλμογραφήματα ἤχων.

πίεσεως εἶναι μὲν περιοδική, ὄχι, ὅμως, ἀρμονικὴ (b). Ὁ σύνθετος ἤχος, ἀναλυόμενος κατὰ Fourier, εὐρίσκεται ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν ἀπλῶν ἤχων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους συχνότητος. Εἰς τοὺς ἤχους δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν τοὺς θορύβους καὶ τοὺς κρότους. Εἰς τὸν θόρυβον ἡ μεταβολὴ τῆς πίεσεως δὲν εἶναι περιοδική (c), ἐνῶ ὁ κρότος προέρχεται ἐξ ἀποτόμου μεταβολῆς τῆς πίεσεως (d).

Ἐκαστος ἀπλοῦς ἤχος χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς *συχνότητος* αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ *πλάτους* τῆς περιοδικῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως. Ἀντιστοιχῶς, ὁ σύνθετος ἤχος χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς *συχνότητος* καὶ τοῦ *πλάτους* ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἀρμονικῶν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ, ὡς εἶδομεν εἰς τὴν § 236, τὸ πλάτος ἐνὸς κύματος καθορίζει τὴν ἔντασιν αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωροῦμεν, ἀντὶ τοῦ πλάτους, τὴν *έντασιν*.

Εἰς τ' ἀνωτέρω «ἀντικειμενικά» χαρακτηριστικά (θεμελιώδης *συχνότης*, *πλάτος* τοῦ θεμελιώδους καὶ *πλάτος* ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἀνωτέρων ἀρμονικῶν) ἀντιστοιχοῦν καὶ «ὑποκειμενικά» γνωρίσματα, τὰ ὅποια ἔχουν σχέσιν μὲ τὸ αἰσθητήριον τῆς ἀκοῆς, περιγράφονται δὲ κατωτέρω εἰς τὴν § 262.

Σχέσις ἐντάσεως κύματος καὶ πλάτους. Ἡ σχέση, ἡ συνδέουσα τὸ πλάτος Δp_0 τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως καὶ τὴν ἔντασιν J τοῦ κύματος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

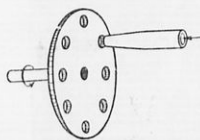
$$J = \frac{1}{2\rho \cdot v} \cdot (\Delta p_0)^2,$$

ἐνθα ρ εἶναι ἡ *πυκνότης* τοῦ ἀερίου καὶ v ἡ *ταχύτης* διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς αὐτοῦ. Ἀντὶ τοῦ πλάτους Δp_0 τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ πλάτος ξ_0 , τῆς ἀπομακρύνσεως, ὁπότε ἡ ἔντασις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$J = 2\pi^2 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot v \cdot \xi_0^2.$$

§ 253. Πηγαὶ ἤχων. Εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς ἐρεῦνας συχνὰ ἀπαιτοῦνται ἤχοι μὲ γνωστὰ χαρακτηριστικά (π.χ., ἤχοι γνωστῆς *συχνότητος*). Πρὸς παραγωγὴν τοιούτων ἤχων χρησιμοποιοῦμεν διάφορα ὄργανα, μερικά τῶν ὁποίων καὶ περιγράφομεν κατωτέρω.

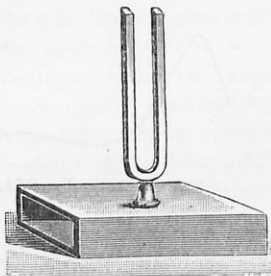
1) **Σειρήν.** Εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν ἤχους διαφόρων *συχνοτήτων*, διακόπτοντες καὶ ἀποκαθιστῶντες περιοδικῶς ρεῦμα ἀέρος. Ἡ ἀπλουστάτη σειρήν ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλίνου δίσκου, φέροντος ὁπὸς εἰς ἴσας ἀποστάσεις (σχ. 372).



Σχ. 372. Σειρήν.

Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸν δίσκον ὁμαλῶς καὶ διαβιβάσωμεν ρεῦμα ἀέρος διὰ τοῦ ἀκροφυσίου, θὰ παραχθῇ ἤχος, τοῦ ὁποίου ἡ *συχνότης* θὰ εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁπῶν καὶ τῆς *συχνότητος* περιστροφῆς τοῦ δίσκου.

2) **Διαπασῶν.** Ἐὰν μίαν χαλυβδίνην εὐθείαν κάμψωμεν εἰς σχῆμα U, λαμβάνομεν τὸ *διαπασῶν* (σχ. 373), τὸ ὁποῖον, καταλλήλως διεγείρομενον, πάλλεται, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 374. Κατὰ τὴν ταλάντωσιν τοῦ διαπασῶν σχημα-



Σχ. 373. Διαπασῶν μετὰ τοῦ ἀντηχείου του.

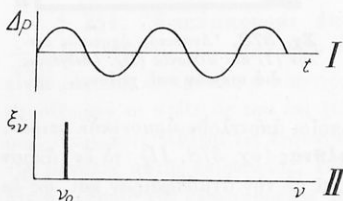
τίζεται πάντοτε κοιλία εἰς τὴν καμπὴν αὐτοῦ. Ἡ συχνότης τῶν διαπασῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν διαστάσεων αὐτῶν. Οὕτω, τὰ βραχύτερα καὶ παχύτερα διαπασῶν πάλλονται μὲ μεγαλυτέραν συχνότητα.

Αἱ ταλαντώσεις τῶν διαπασῶν εἶναι σχεδὸν ἀπληλαγμέναι ἀνωτέρων ἀρμονικῶν καί, ὥς ἐκ τούτου, οἱ ἐξ αὐτῶν ἐκπεμπόμενοι ἤχοι δύνανται νὰ θεωρηθῶν ὡς ἄπλοϊ ἤχοι. Εἰς τὰ διαπασῶν, τὰ χρησιμοποιούμενα διὰ μετρήσεις, ἡ συχνότης εἶναι ἀναγεγραμμένη ἐπ' αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὁ ὑπὸ τῶν διαπασῶν ἐκπεμπόμενος ἤχος εἶναι ἀσθενής, προσαρμόζονται ταῦτα ἐπὶ καταλήλων ξυλίνων κιβωτίων, ἀνοικτῶν κατὰ τὸ ἐν μέρος (σχ. 373), ὁπότε ἡ ἐκπεπομένη ἰσχὺς εἶναι μεγαλυτέρα. Αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις τῶν κιβωτίων ἐκλέγονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ἐντὸς αὐτῶν στήλη τοῦ ἀέρος νὰ πάλεται ἐν συντονισμῷ πρὸς τὸ διαπασῶν (ἀντηχεῖα, βλ. κατωτέρω).

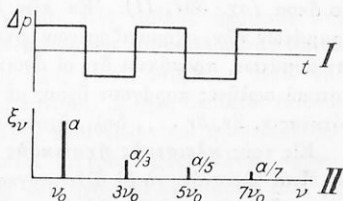


Σχ. 374. Συγμύτυπα παλλόμενον διαπασῶν.

3) **Μεγάφωνον.** Σύγχρονος διάταξις παραγωγῆς ἤχων, γνωστῆς συχνότητος, ἀποτελεῖται ἐκ *μεγαφώνου* (*), τροφοδοτουμένου δι' ἐναλλασσομένου ρεύματος, γνωστῆς συχνότητος. Ἀναλόγως τῆς μορφῆς τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, εἶναι δυνατόν νὰ παραχθῇ ἤχος ἁπλοῦς ἢ σύνθετος. Οὕτω, ἐὰν τὸ ρεῦμα, τὸ τροφοδοτοῦν τὸν μεγάφωνον, ἔχῃ ἡμιτονοειδῆ μορφήν, ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος ἤχος θὰ εἶναι ἁπλοῦς (σχ. 375, I) - τὸ φάσμα του,



Σχ. 375. Ἀπλοῦς ἤχος (I) καὶ φάσμα αὐτοῦ (II).



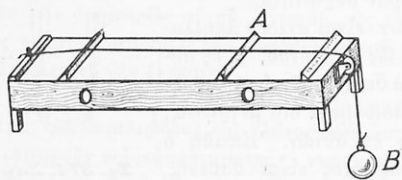
Σχ. 376. Σύνθετος ἤχος (I) καὶ φάσμα αὐτοῦ (II).

δηλ., θ' ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς γραμμῆς (II). Ἄν, ὅμως, τὸ ρεῦμα ἔχῃ τὴν μορφήν τοῦ σχήματος 376, I, ὁ παραγόμενος ἤχος θὰ εἶναι σύνθετος, διότι τὸ ρεῦμα τοῦτο, ἀναλυόμενον κατὰ Fourier, δίδει μίαν θεμελιώδη συχνότητα καὶ ἀνωτέρας ἀρμονικὰς (II).

4) **Χορδαί.** Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 243, αἱ χορδαί, καταλήλως διεγείρονται, πάλλονται μὲ (θεμελιώδη) συχνότητα, ἐξαρτωμένην ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων αὐτῶν, τῆς πυκνότητος τοῦ ὕλικου καὶ τῆς τεινούσης δυνάμεως. Σηριζόμεναι ἐπὶ καταλήλου ξυλίνου κιβωτίου (σχ. 377), ἀποτε-

(*) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 234.

λοῦν πηγὰς ἤχων, τῶν ὁποίων τὴν συχνότητα δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν εἴτε διὰ μεταβολῆς τῆς τεινούσης δυνάμεως, εἴτε διὰ μετακινήσεως τῆς κινή-
 τῆς ἀκμῆς *A*, ὁπότε μεταβάλλεται τὸ μῆκος τοῦ παλλομένου τμήματος τῆς χορδῆς. Τὸ ὑπόλοιπον τμήμα τῆς χορδῆς τὸ ἐμποδίζομεν νὰ πάλλεται δι' ἐπιθέσεως π.χ., τῆς χειρὸς.



Σχ. 377. Μονόχορδον.

κοὶ σωλῆνες. Οὗτοι εἶναι σωλῆνες, κυλινδρικοὶ ἢ πρισματικοὶ, ἐφωδιασμένοι διὰ καταλλήλου διατάξεως, διὰ τῆς ὁποίας ὁ ἐντὸς αὐτῶν περιεχόμενος ἀὴρ διεγείρεται εἰς ταλάντωσιν, σχηματιζομένων, οὕτω, μονίμων στασίμων κυμάτων. Οἱ ἤχοι, οἱ ὁποῖοι παράγονται διὰ τῶν ἤχητικῶν σωλῆνων, ἔχουν συχνότητα, ὑπολογιζομένην διὰ τῶν τύπων τῆς § 249.

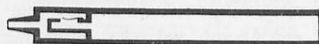
Εἰς τοὺς **ἀνοικτοὺς ἤχητικοὺς σωλῆνας** (σχ. 378, I) καὶ τὰ δύο ἄκρα των συγκοινωνοῦν μὲ τὴν ἀτμόσφαιραν καί, συνεπῶς, κατὰ τὴν διέγερσιν αὐτῶν, παράγονται στάσιμα κύματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πάντοτε δεσμοὺς πίεσεως εἰς τὰ δύο ἄκρα (σχ. 367, II). Ἐκ τῶν διαγραμμάτων τῶν σχηματιζομένων στασίμων κυμάτων, προκύπτει ὅτι οἱ ἀνοικτοὶ ἤχητικοὶ σωλῆνες παράγουν ἤχους μὲ συχνότητας ν , 2ν , 3ν . . . , δηλ., ἤχους, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν *ἁρμονικὴν σειράν*.



Σχ. 378. Ἀνοικτὸς ἤχητικὸς σωλὴν (I) καὶ κλειστὸς (II). (Διέγερσις διὰ στομίον καὶ χεῖλους).

Εἰς τοὺς **κλειστοὺς ἤχητικοὺς σωλῆνας** (σχ. 378, II) τὸ ἐν ἄκρον των εἶναι κλειστόν, τὸ δὲ ἄλλο συγκοινωνεῖ μὲ τὴν ἀτμόσφαιραν καί, ὥς ἐκ τούτου, ὅταν διεγερθοῦν, θὰ σχηματίζωνται στάσιμα κύματα μὲ δεσμὸν πίεσεως εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον καὶ κοιλίαν πίεσεως εἰς τὸ κλειστὸν (σχ. 368, δεξιὰ). Ἐκ τῶν διαγραμμάτων τούτων προκύπτει ὅτι εἰς τοὺς κλειστοὺς ἤχητικοὺς σωλῆνας δημιουργοῦνται στάσιμα κύματα *περιττῆς*, μόνον, τάξεως, ὁπότε οἱ ὑπ' αὐτῶν παραγόμενοι ἀνώτεροι ἁρμονικοὶ ἤχοι εἶναι οἱ *περιττῆς* τάξεως ἁρμονικοὶ ν , 3ν , 5ν . . .

Οἱ ἤχητικοὶ σωλῆνες διεγείρονται, συνήθως, κατὰ δύο τρόπους· εἴτε διὰ στομίον καὶ χεῖλους, εἴτε διὰ γλωσσίδος. Εἰς τὴν διέγερσιν διὰ στομίον καὶ χεῖλους (σχ. 378),

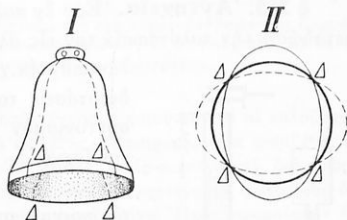


Σχ. 379. Ἐχνητικὸς σωλὴν μὲ γλωσσίδα.

τὸ ρεῦμα τοῦ ἀέρος, προσκρούον ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, δημιουργεῖ στροβίλους, παραγομένης, οὕτω, πολυπλόκου διαταραχῆς τοῦ ἀέρος (*συναγμός*). Ἐξ ὧων των συχνότητων, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ συναγμός οὗτος, ἐνισχύονται μόνον ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν μὲ τὰς ἰδιοσυχνότητας τῆς ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀερίου στήλης. Ἡ γλώσσις (σχ. 379), στερεωμένη κατὰ τὸ ἐν ἄκρον, τίθεται διὰ τοῦ ρεύματος

τοῦ ἀέρος εἰς ταλάντωσιν, ὁρισμένης ἰδιοσυχνότητος. Ὅταν, ὅμως, συνδέεται μὲ ἡχητικὸν σωλῆνα, αἱ ταλαντώσεις τῆς ἐπιρρεάζονται ἐκ τῶν ταλαντώσεων τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος καὶ ἡ γλωσσίς ταλαντοῦται μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα, κυρίως, τῆς ἀερίου στῆλης.

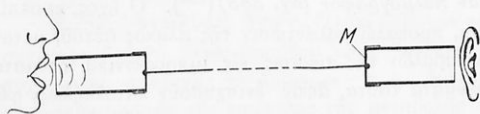
6) **Κώδωνες.** Ὁ κώδων (σχ. 380, I) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κοίλη πλάξ, ἀνομοιομεροῦς πάχους. Ὅταν, διὰ κτυπήματος, ὁ κώδων διεγείρεται, παραμορφοῦται οὕτως ὥστε μία διατομή, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονά του, ἡ ὁποία ἀρχικῶς εἶναι κυκλική, λαμβάνει σχῆμα ἐλλείψεως. Εἰς τὸ σχῆμα 380, II ἀποδίδονται στιγμιότυπα τῆς ταλάντωσης τῆς διατομῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι δεσμοὶ δημιουργοῦνται εἰς τέσσαρα σημεῖα *A*. Ἐπειδὴ τοῦτο συμβαίνει δι' ὅλας τὰς διατομὰς, σχηματίζονται τέσσαρες *δεσμικαὶ γραμμαὶ* (I).



Σχ. 380. Κώδων (I) καὶ ἐγκαρσία διατομὴ αὐτοῦ (II). *A, A...* = δεσμικαὶ γραμμαί.

Ἐκτὸς τῆς περιγραφείσης ταλάντωσης τοῦ κώδωνος, κατὰ τὴν ὁποίαν παράγεται ὁ θεμελιώδης ἦχος, εἶναι δυνατόν οὗτος νὰ ἐκτελέσῃ ταλαντώσεις καὶ μὲ ἄλλας συχνότητας, αἱ ὁποῖαι, ὅμως, δὲν ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν σειράν.

§ 254. Ἐκπέμπουσαι ἐπιφάνειαι. Εἰς πολλὰς ἡχητικὰς πηγὰς — ὅπως π.χ. εἰς τὸ διαπασῶν — ἐνῶ ἡ ἐνέργεια τοῦ παλλομένου σώματος εἶναι μεγάλη, ἐν τούτοις ὁ παραγόμενος ἦχος εἶναι ἀσθενής. Ἐάν, ὅμως, στηρίζωμεν τὸ στέλεχος του ἐπὶ ξυλίνης σανίδος, ὁ ἦχος ἀκούεται ἐντονότερος, διότι τότε τίθεται εἰς ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν καὶ ἡ σανὶς, λόγῳ δὲ τῆς μεγάλης αὐτῆς ἐπιφανείας, ἐκπέμπεται ἰσχυρὸς ἦχος. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ αἰθέσις τῆς ἐκπεμπομένης ἰσχύος τοῦ ἤχου θὰ συνοδεύεται ἀπὸ ταχύτεραν κατανάλωσιν τῆς ἐνεργείας τοῦ παλλομένου διαπασῶν, τὸ ὁποῖον, οὕτω, θὰ παύσῃ παλλόμενον μετὰ βραχύτερον χρόνον. Τὰ αὐτὰ μέτρα λαμβάνονται, προκειμένου νὰ ἐκπεμφθῇ ἰσχυρὸς ἦχος, παραγόμενος ὑπὸ χορδῶν, ὅπως, π.χ., εἰς τὸ μονόχορδον τοῦ σχήματος 377.



Σχ. 381. Τηλέφωνον διὰ νήματος.

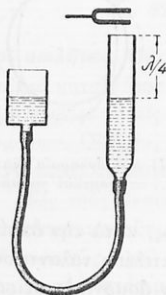
Εἰς τὸ *τηλέφωνον* διὰ νήματος (σχ. 381), τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται χάριν παιδιᾶς, ἡ ὁμιλία μεταδίδεται διὰ τοῦ τεταμένου νήματος.

Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ ὑπάρχῃ ἐκπέμπουσα ἐπιφάνεια — ἡ μεμβράνη *M* —, διότι, ἄλλως, ἡ ταλάντωσις τοῦ νήματος δὲν δύναται νὰ μεταδοθῇ εἰς τὸν ἀέρα.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς, ἀκριβῶς, λόγους καὶ ἡ βελόνη τῶν γραμμοφώνων συνδέεται μὲ λεπτὴν πλάκα (διάφραγμα).

Ἀντιθέτως, ὅταν ἐπιζητῇται νὰ μὴ ἐκπέμπεται ὁ ἦχος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τινος παλλομένου σώματος (ὅπως, π.χ., ὁ βόμβος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ πυρῆνος τῶν μετασχηματιστῶν), λαμβάνεται πρόνοια ὥστε τὸ σῶμα τοῦτο νὰ μὴ ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν μὲ ἐκπεμπούσας ἐπιφανείας.

✕ § 255. Ἀντηχειά. Ἐὰν ἔν παλλόμενον σύστημα—π.χ., ἔν διαπασῶν—μεταδώσῃ τὴν ταλάντωσίν του εἰς ἄλλο σύστημα, δυνάμενον καὶ αὐτὸ νὰ τα-



Σχ. 382. Ὅταν τὸ μῆκος τῆς ἀέριου στήλης εἶναι ἴσον πρὸς $\lambda/4$, ἡ στήλη αὐτῆς δορεῖ ὡς ἀντηχείων.

λαντῶθῃ (π.χ., εἰς ἀέριον στήλην), ἐκλεγοὺν δὲ αἱ διαστάσεις του οὕτως ὥστε νὰ εὐρίσκεται τοῦτο εἰς συντονισμόν μὲ τὸ πρῶτον, ὁ ἐκπεμπόμενος ἦχος εἶναι ἰσχυρός. Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος: Ἐὰν πλησιάσωμεν παλλόμενον διαπασῶν εἰς τὸ ἄνοιγμα σωλήνος, περιέχοντος ὕδωρ, τοῦ ὁποίου τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν δυνάμεθα ν' ἀνυψώσωμεν ἢ νὰ καταβιβάσωμεν κατὰ βούλησιν (σχ. 382), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ἦχος ἀκούεται ἐντονώτατος εἰς ἐκείνην τὴν θέσιν τῆς στάθμης, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀέριος στήλη πάλλεται ἐν συντονισμῷ μὲ τὸ διαπασῶν. Εἰς τὸ φαινόμενον τοῦτο, ἀκριβῶς, στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῶν ἀντηχειῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι κοιλότητες, καταλλήλων διαστάσεων καὶ πλήρεις ἀέρος, χρησιμεύουσαι εἰς τὴν καλὴν ἐκπομπὴν τῶν ἡχων. Μὲ ἀντηχειὰ εἶναι ἐφωδιασμένα πολλὰ μου-

σικὰ ὄργανα, εἰς τὰ ὁποῖα, ὅμως, δίδεται τοιοῦτο σχῆμα, ὥστε ταῦτα νὰ συντονίζωνται μὲ περισσοτέρας τῆς μιᾶς συχνότητος. Εἰς ἀντηχειὰ εἶναι, συνήθως, στερεωμένα καὶ τὰ διαπασῶν (σχ. 373) (*). Ἀντιθέτως, εἰς ἄλλας περιπτώσεις τὰ ἀντηχειὰ κατασκευάζονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ συντονίζωνται μὲ μίαν, μόνον, συχνότητα.

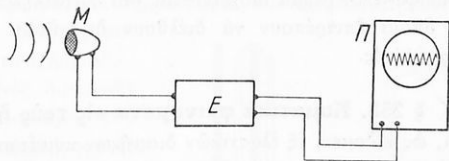
✕ § 256. Ἀνίχνευσις ἡχων. Διὰ τὴν ἀνίχνευσιν καὶ παρατήρησιν τῆς μορφῆς τῶν ἡχων χρησιμοποιοῦνται, κυρίως, μικροφῶνα (**), συνδεδεμένα καταλλήλως μὲ ἡλεκτρονικὸν παλμογράφον (σχ. 383) (***). Ὁ ἦχος, προσπίπτων ἐπὶ τοῦ μικροφώνου, προκαλεῖ ταλάντωσιν τῆς πλακὸς αὐτοῦ, μετατρεπομένων, οὕτω, τῶν μεταβολῶν τῆς πίεσεως εἰς μικροφωνικὰ ρεῦματα ἀντιστοίχου μορφῆς. Τὰ ρεῦματα ταῦτα, ἀφοῦ ἐνισχυθῶν καταλλήλως, φέ-

(*) Ὅταν τὰ ἀντηχειὰ τῶν διαπασῶν πάλλωνται, ἐκπέμπουν, λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀνοίγματος αὐτῶν, ἰσχυρὸν ἦχον καί, ὡς ἐκ τούτου, παρουσιάζουν ἀπόσβεσιν. Ὡς γνωστόν, ὅμως, (§ 117), σύστημα μὲ ἀπόσβεσιν δὲν παρουσιάζει ὀξὺν συντονισμόν—δύναται, δηλ., νὰ χρησιμοποιηθῇ δι' εὐρείαν περιοχὴν συχνότητων.

(**) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 231.

(***) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 185.

ρονται εἰς τὸν παλμογράφον Π καὶ δίδουν ἐπὶ τοῦ φθοριζόντος διαφράγματος τὴν εἰκόνα τῆς μεταβολῆς $\Delta\rho$ τῆς πιέσεως συναρτήσῃ τοῦ χρόνου (σχ. 371).



Σχ. 383. Λιάξεις διὰ τὴν παρακολούθησιν τῆς μορφῆς ἐνὸς ἤχου. M = μικροφώνον, E = ενισχυτής, Π = ηλεκτρονικός παλμογράφος.

Παλαιότερον, οἱ ἤχοι ἀνιχνεύοντο ἐκ τῆς διαπλάτύνσεως, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται μία λεπτή φλόξ φωταερίου, ὅταν εὗρεθῇ ἐντὸς τοῦ ἡχητικοῦ πεδίου (ἐνδείκθῃσι φλόγες). Διὰ τὸν αὐτὸν σκοπὸν ἐχρησιμοποιοῦντο καὶ αἱ καλούμεναι *μανομετρικαὶ φλόγες*, αἱ ὁποῖαι παράγονται ὡς ἑξῆς: Σφαιρική κάψα χωρίζεται δι' ἐλαστικῆς μεμβράνης εἰς δύο θαλάμους. Ἐξ αὐτῶν ὁ εἰς συγκοινωνεῖ διὰ χοάνης μετὰ τῆς ἀτμοσφαιρας, ὁ δὲ ἄλλος φέρει δύο σωλῆνας. Διοχετεύομεν φωταερίον διὰ τοῦ ἐνὸς καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου ἀνάπτομεν μίαν φλόγα. Ἦχος, προσπίπτων ἐπὶ τῆς χοάνης, ἀναγκάζει τὴν μεμβράνην νὰ ἀλλάτῃται, ὅποτε δημιουργοῦνται αὐτομειώσεις τῆς πιέσεως τοῦ ἐντὸς τῆς κάψης φωταερίου καί, συνεπῶς, ἀντίστοιχοι μεταβολαὶ τοῦ ὕψους τῆς φλογός.

Ἡ λειτουργία τῶν διατάξεων, αἱ ὁποῖαι περιεγράφησαν ἀνωτέρω, στηρίζεται εἰς τὰς μεταβολὰς τῆς πιέσεως, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸν ἤχον. Ἐπειδὴ, ὁ ἦχος συνοδεύεται καὶ ὑπὸ ἄλλων φαινομένων (π.χ. ἀπὸ ταλάντωνσιν τῶν μορίων τοῦ ἀέρος περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των, περιοδικὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας εἰς τὰ πυκνώματα καὶ ἀραιώματα κ.λ.), εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθοῦν ὄργανα, τῶν ὁποίων ἡ λειτουργία νὰ στηρίζεται, ἀκριβῶς, ἐπὶ τῶν φαινομένων τούτων. Οὕτω, δύο μικραὶ σφαῖραι ἔλκονται, ὅταν τεθοῦν ἐντὸς τοῦ ἡχητικοῦ πεδίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῖμα ἀέρος, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται μετὰ τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὸ ὁποῖον, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, δημιουργεῖ ἐκεῖ ὑποπίεσιν. Ἐπίσης, διὰ *θερμοστοιχείου* (*) πολὺ μικρᾶς θερμοχωρητικότητος (ἀποτελουμένου ἐκ λεπτοτάτων συρμάτων) δυνάμεθα νὰ πιστοποιήσωμεν τὴν ὑπαρξιν ἐνὸς ἤχου ἐκ τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας.

Ἠχογράφειαι. Εἰς τὸν ὁμιλοῦντα κινηματογράφον ἢ ἐγγράφῃ τῶν ἤχων ἐπὶ τῆς κινηματογραφικῆς ταινίας γίνεται ὑπὸ μορφὴν ζώνης εἴτε μεταβλητῆς ἀμαυρώσεως, εἴτε μεταβλητοῦ πλάτους (**).

Ἡ ἐγγράφῃ τῶν ἤχων δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἐπὶ δίσκων (γραμμόφωνον) ἢ ἐπὶ χαλυβδίνου σύρματος ἢ ταινίας ὑπὸ μορφὴν περιοχῶν μεταβλητῆς μαγνητίσεως (*μαγνητόφωνον*) (***) .

§ 257. Ἀνάλυσις ἤχων. Ὅταν θέλωμεν νὰ διαπιστώσωμεν, ἂν ἐντὸς συνθέτου ἤχου ἢ ἐντὸς θορύβου τινὸς ὑπάρχῃ συνιστώσα μιᾶς ὠρισμένης συχνότητος, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν—π. χ., διὰ μικροφώνου καὶ παλμογράφου—τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως συναρτήσῃ τοῦ χρόνου καὶ ν' ἀναλύσωμεν αὐτὴν κατὰ Fourier. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἤχων γί-

(*) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 192.

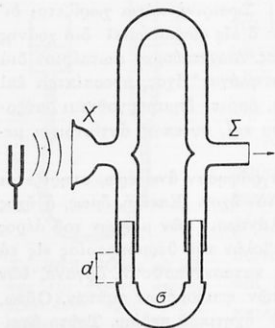
(**) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 245.

(***) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 246.

νεται, συνήθως, δι' ηλεκτρικῆς μεθόδου, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἀντίστοιχον μικροφωνικὸν ρεῦμα διοχετεύεται διὰ καταλλήλων *ηλεκτρικῶν φίλτρων* (*), τὰ ὁποῖα ἐπιτρέπουν νὰ διέλθουν δι' αὐτῶν ρεύματα ὠρισμένης μόνον συχνότητος.

✕ § 258. **Κυματικὰ φαινόμενα εἰς τοὺς ἤχους.** Οἱ ἤχοι ἀποτελοῦνται, ὡς εἶδομεν, ἐξ ἐλαστικῶν διαμήκων κυμάτων ἐντὸς τοῦ ἀέρος καί, ὡς ἐκ τούτου, πρέπει εἰς τοὺς ἤχους νὰ παρατηροῦνται ὅλα τὰ φαινόμενα, τὰ περιγραφέντα εἰς τὴν Κυματικὴν, πλὴν τοῦ φαινομένου τῆς πολώσεως, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, παρουσιάζεται μόνον εἰς τὰ ἐγκάρσια κύματα.

Συμβολὴ ἤχων. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμβολῆς δύο ἤχων τῆς αὐτῆς συ-



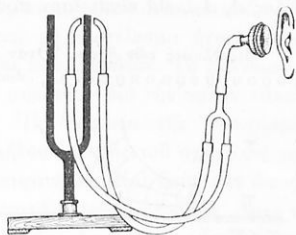
Σχ. 384. Συσκευὴ Quincke.

χνότητος δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τῆς *συσκευῆς τοῦ Quincke* (σχ. 384): Ἐνῶπιον τῆς χοάνης *X* παράγουμεν ἤχον (π.χ., διὰ διαπασῶν). Ὁ ἤχος οὗτος, εἰσερχόμενος εἰς τὴν συσκευὴν, διχάζεται καὶ ἀκολουθεῖ δύο δρόμους. Οἱ δύο ἤχοι ἐκκινοῦν ἐκ τῆς χοάνης μὲ τὴν αὐτὴν φάσιν καί, συναντώμενοι εἰς τὸν σωλῆνα *Σ*, συμβάλλουν. Ἄν οἱ δύο δρόμοι εἶναι ἴσοι, τὰ δύο συμβάλλοντα κύματα ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν καί, ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὸν σωλῆνα *Σ* θὰ ἀκούσωμεν ἰσχυρὸν ἤχον. Ἄν, τώρα, αὐξήσωμεν ὀλίγον τὸν ἓνα δρόμον, μετακινούντες τὸν σωλῆνα *σ* κατὰ τὴν ἀπόστασιν *d* (ὁπότε, λόγῳ τοῦ σχήματος τοῦ σωλῆνος *σ*, ὁ δρόμος αὐξάνεται κατὰ $2d$), οἱ δύο ἤχοι θὰ συμβάλλουν μὲ διαφορὰν φάσεως καί, συνεπῶς, θὰ ἔχωμεν ἐξασθένησιν τοῦ ἤχου. Ἄν ἡ ἐπιμήκυνσις γίνῃ τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δύο δρόμων νὰ εἶναι ἴση πρὸς $\lambda/2$, ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν δύο κυμάτων θὰ εἶναι ἴση πρὸς 180° καὶ ὁ ἤχος εἰς τὸν σωλῆνα *Σ* θὰ παύσῃ νὰ ἀκούεται. Ἐάν, ἐν συνεχείᾳ, μετακινήσωμεν τὸν σωλῆνα *σ*, οὕτως ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δύο δρόμων νὰ γίνῃ ἴση πρὸς λ , ἡ διαφορὰ φάσεως τῶν δύο κυμάτων θὰ γίνῃ ἴση πρὸς 360° καὶ ὁ ἤχος θ' ἀκούεται, ἐκ νέου, ἔντονος. Οὕτω, πᾶσα αὐξησης τῆς διαφορᾶς τῶν δύο δρόμων κατὰ $\lambda/2$ θὰ ὑπείσῃ διαφορὰν φάσεως 180° εἰς τὰ δύο κύματα καί, ὡς ἐκ τούτου, θὰ ἔχωμεν, ἐναλλάξ, ἐνίσχυσιν καὶ ἀπόσβεσιν τοῦ ἤχου.

Εἰς τὸ προηγούμενον πείραμα τὰ δύο κύματα εἶχον ἐκκινήσει μὲ τὴν αὐτὴν φάσιν. Ἄς ἐξετάσωμεν, τώρα, τὴν περίπτωσιν δύο ἡχητικῶν κυμάτων τῆς αὐτῆς συχνότητος καὶ τοῦ αὐτοῦ πλάτους, τὰ ὁποῖα, ὅμως, ἐκ κί-

(*) Βλ. *ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ*, § 110.

νοῦν μὲ διαφορὰν φάσεως 180° : Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ κύματα ταῦτα, διατρέχοντα ἴσους δρόμους καὶ συμβάλλοντα, θὰ ἀλληλοαναιροῦνται. Τοῦτο δεικνύομεν εὐκόλως διὰ τῆς συσκευῆς, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 385: Ἐκατέρωθεν τοῦ σκέλους ἑνὸς διαπασῶν εὐρίσκονται δύο ἐλαστικοὶ σωλήνες τοῦ αὐτοῦ μήκους, οἱ ὁποῖοι καταλήγουν εἰς χοάνην. Ὄταν τὸ σκέλος τοῦ διαπασῶν πάλτεται, δημιουργεῖται, εἰς δεδομένην χρονικὴν στιγμήν, πύκνωμα μὲν εἰς τὴν μίαν πλευρὰν του, ἀραιώμα δὲ εἰς τὴν ἄλλην. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ δύο κύματα θὰ φθάνουν εἰς τὴν χοάνην μὲ διαφορὰν φάσεως 180° . Ἐκεῖ ἕκ συμβολῆς θὰ ἀλληλοαναιροῦνται καὶ δὲν θ' ἀκούεται ἤχος εἰς τὴν χοάνην. Ἐάν, ὅμως, συμπίεζοντες τὸν ἕνα σωλήνα, ἀποκλείσωμεν τὴν διάδοσιν τοῦ ἑνὸς κύματος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ἤχος ἀκούεται ἔντονος.



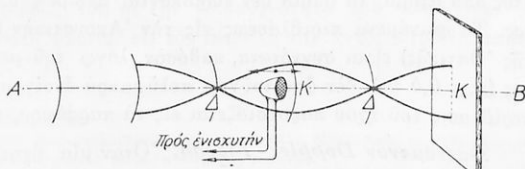
Σχ. 385. Τὰ ἐκατέρωθεν τοῦ σκέλους τοῦ διαπασῶν ἐκπεμπόμενα κύματα ἐκκινῶν μὲ διαφορὰν φάσεως 180° .

Διακροτήματα. Ἄλλο ἀποτέλεσμα συμβολῆς δύο ἤχων εἶναι καὶ τὰ διακροτήματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται, ὅταν αἱ συχνότητες τῶν δύο ἤχων διαφέρουν ὀλίγον μεταξύ των. Διακροτήματα παράγονται, π.χ., ὅταν συμβάλουν οἱ ἤχοι, οἱ προερχόμενοι ἐκ δύο ἡχητικῶν σωλήνων, τῶν ὁποίων τὰ μήκη διαφέρουν ὀλίγον, ὅπότε ἀντιλαμβάνομεθα ἤχον τῆς αὐτῆς, περίπου, συχνότητος μὲ τὴν συχνότητα τῶν συμβαλλόντων ἤχων, τοῦ ὁποίου, ὅμως, ἡ ἔντασις θὰ μεταβιβάζεται περιοδικῶς μετὰ τοῦ χρόνου. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον παρατηροῦμεν, ὅταν δύο αὐτοκίνητα κινοῦνται παραλλήλως καὶ μὲ τὴν αὐτὴν, περίπου, ταχύτητα: Ἐκ συμβολῆς τῶν ἤχων, τῶν προερχομένων ἐκ τῶν ἐκρήξεων τῶν κινήτων, προκαλοῦνται σαφεῖς διακροτήματα. Ἐντελῶς ἀνάλογον φαινόμενον παρατηρεῖται καὶ ὅταν κινοῦνται δύο ἀεροπλάνα.

Στάσιμα ἡχητικὰ κύματα. Διὰ νὰ δημιουργήσωμεν στάσιμα ἡχητικὰ κύματα, λαμβάνομεν μίαν ἡχητικὴν πηγὴν καὶ εἰς ἀπόστασιν μερικῶν μέτρων ἀπ' αὐτῆς θέτομεν μίαν ἀνακλῶσαν ἐπιφάνειαν· π.χ., ἓν ἐπίπεδον διάφραγμα (σχ. 386).

Ὁ ὑπὸ τῆς πηγῆς ἐκπεμπόμενος ἤχος συμβάλλει μὲ τὸν ἀνακλῶμενον καί, οὕτω, σχηματίζονται **στάσιμα ἡχητικὰ κύματα**.

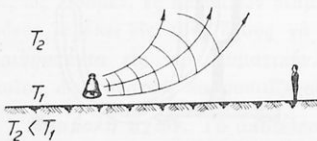
Ἐάν, λοιπόν, μετακινῶμεν κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας AB μίαν ἀνιχνευτικὴν διάταξιν (π.χ. ἓν μικρόφωνον, συνδεδεμένον μὲ ἐνισχυτὴν καὶ μεγάλφωνον), θὰ παρατηρήσω-



Σχ. 386. Εἰς τοὺς δεσμούς A, Δ ἡ πίεσις διατηρεῖται σταθερὰ καί, συνεπῶς, δὲν παράγονται μικροφωνικὰ ρεύματα.

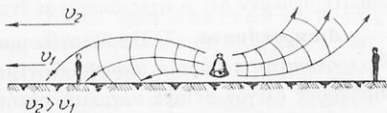
μεν ὅτι εἰς ἄλλας θέσεις $K, K \dots$ τὸ διαρρέον τὸ μικρόφωνον ἐναλλασσόμενον ρεῦμα (μικροφωνικὸν ρεῦμα) θὰ εἶναι ἰσχυρὸν (κοιλία πίεσεως), ἐνῶ εἰς ἄλλας $\Delta, \Delta \dots$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν (δυσμενίαι πίεσεως).

Διάθλασις τῶν ἤχων. Ὅταν ὁ ἤχος διαδίδεται ἐντὸς στρωμάτων ἀέρος, διαφόρου θερμοκρασίας, διαθλάται, καθόσον ἡ ταχύτης διαδόσεως ἐξαρτᾶται,



Σχ. 387. Αἱ διαφοραὶ θερμοκρασίας προκαλοῦν μεταβολὰς τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου καί, συνεπῶς, διάθλασιν αὐτοῦ.

εἶναι διάφορος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα βῆς, ὁ ἄνεμος εἰς τὰ κατώτερα στρώματα ἔχει μικροτέραν ταχύτητα παρὰ εἰς τὰ ἀνώτερα. Ὡς ἐκ τούτου, ἤχος, διαδιδόμενος κατὰ τὴν φορὰν τοῦ ἀνέμου, γίνεται ἀκουστός ἀκόμη καὶ εἰς μεγάλας ἀποστάσεις (σχ. 388, ἀριστερῇ), ἐνῶ, κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν διαθλάται πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀποτέλεσμα ὁ ἤχος οὕτως νὰ μὴ γίνεταί ἀκουστός ὑπὸ παρατηρητοῦ, εὐρισκομένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς.



Σχ. 388. Ἀναλόγως τῆς φορᾶς τοῦ ἀνέμου, ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς κανονικῆς.

Περίθλασις τῶν ἤχων. Οἱ ἤχοι, ὡς κύματα, παρουσιάζουν καὶ τὸ φαινόμενον τῆς περιθλάσεως. Οὕτω, ἤχος γίνεται ἀκουστός ὑπὸ παρατηρητοῦ τινος, ἔστω καὶ ἂν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῆς πηγῆς παρεμβάλλωνται ἑμποδία, τὰ ὁποῖα αποκλείουν τὴν ἀπ' εὐθείας διάδοσιν τοῦ ἤχου. Τοῦτο παρουσιάζεται, π.χ., ὅταν ἤχος, προερχόμενος ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς αἰθούσης, περιθλάται εἰς ἓν ἄνοιγμα αὐτῆς (π.χ., παράθυρον) καὶ γίνεται ἀκουστός ἀπὸ αἶμα, τὰ ὁποῖα δὲν εὐρίσκονται ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ ανοίγματος. Τὰ φαινόμενα περιθλάσεως εἰς τὴν Ἀκουστικὴν (ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ τῆς Ὀπτικῆς) εἶναι συχνότατα, καθόσον, λόγῳ τοῦ μεγάλου μήκους κύματος (π.χ. 0,5 m), δὲν ἀπαιτοῦνται πολὺ μικρὰ ανοίγματα καί, ὡς ἐκ τούτου, περίθλασις τοῦ ἤχου παρουσιάζεται εἰς τὰ παράθυρα, τὰς θύρας κ.λ.

Φαινόμενον Doppler - Fizeau. Ὅταν μία ἡχητικὴ πηγὴ (π.χ., σειρὴν αὐτοκινήτου ἢ σφυρίκτρα σιδηροδρόμου) μετακινῆται ὡς πρὸς ἓνα παρατηρητήν, οὗτος ἀντιλαμβάνεται ἤχον μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας συχνότητος, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ πηγὴ πλησιάζῃ ἢ ἀπομακρύνεται αὐτοῦ.

Ἡχὸν καὶ μετέηχσις. Ἐὰν ἔμπροσθεν μιᾶς ἐπιφανείας ὑπάρχῃ μία

ἡχητική πηγή, εἶναι προφανές ὅτι, ἐκτός τοῦ ἀπ' εὐθείας ἤχου, θ' ἀκούσωμεν καὶ τὸν ἐξ ἀνακλάσεως προερχόμενον, ὁ ὁποῖος καλεῖται *ἡχος*.

Ἐντὸς κλειστῶν χώρων, περιοριζομένων ὑπὸ μεγάλων ἀνακλαστικῶν ἐπιφανειῶν, παρατηρεῖται πολλαπλὴ ἀνάκλασις, με ἀποτέλεσμα ἡχος, μικρᾶς διαρκείας (π.χ., μία συλλαβή), νὰ ἀκούεται ἐπὶ πολὺν χρόνον. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται *μετήχησις* καὶ ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὴν καλὴν «ἀκουστικὴν» αἰθουσῶν διαλέξεων, θεάτρων κ.λ. Ἡ διάρκεια τῆς μετήχησεως εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μικροτέρα, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τοῦ σχήματος τοῦ χώρου καὶ τῶν ὑλικῶν τῶν ἀνακλαστικῶν ἐπιφανειῶν. Καὶ ὅσον μὲν ἀφορᾷ τὸν χρόνον, πρέπει οὗτος νὰ διαμορφωθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ μὴ παρουσιάζονται, κατὰ τὸ δυνατόν, παρᾶλληλοι ἐπιφάνειαι, ὁπότε ἀποφεύγεται ἡ δημιουργία μονίμων στασίμων κυμάτων. Αἱ ἀνακλαστικά, ἀφ' ἐτέρου, ἐπιφάνειαι πρέπει νὰ προκαλοῦν ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλυτέραν ἀπορρόφησιν τοῦ ἡχου κατὰ τὴν ἀνάκλασιν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται φέρουν πολλὰς προεξοχὰς ἢ ὅπας ἢ ἀποτελοῦνται ἐκ πορῶδων ὑλικῶν. Μεγάλην ἀπορρόφησιν προκαλοῦν τάπητες, παραπετάσματα, πλῆθος συνηθροισμένων ἀνθρώπων κ.λ.

§ 259. Ὑπέρηχοι. Καλοῦμεν *ὑπερήχους* τοὺς ἡχους ἐκείνους, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 20 000 Hz καί, οἱ ὁποῖοι, ὡς ἐκ τούτου, δὲν γίνονται ἀντιληπτοὶ διὰ τοῦ ὠτός.

Ὑπέρηχοι, κατ' ἀρχήν, δύνανται νὰ παραχθοῦν, ἐὰν δημιουργηθοῦν στάσιμα κύματα ἐντὸς ράβδων ἢ ἀερίων στηλῶν, ἀρκεῖ αἱ διαστάσεις των νὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε τὸ μήκος κύματος νὰ εἶναι πολὺ μικρὸν (κάτω τοῦ ἐνὸς χιλιοστομέτρου). Αἱ σύγχρονοι συσκευαὶ παραγωγῆς ὑπερήχων στηρίζονται ἐπὶ τῆς *ηλεκτροσυστολῆς* (*), δηλ., τοῦ φαινομένου κατὰ τὸ ὁποῖον πλακίδιον χαλαζίου (**), τετμημένον καθ' ὠρισμένας κρυσταλλογραφικὰς διευθύνσεις καὶ φερόμενον ἐντὸς ἐναλλασσομένου ηλεκτρικοῦ πεδίου, ἀρχίζει νὰ συστέλλεται καὶ νὰ διαστέλλεται, ἐκτελοῦν, οὕτω ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν. Τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως ταύτης γίνεται, ὡς γνωστόν, μέγιστον εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ, ὅταν, δηλ., ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου πεδίου εἶναι, ἀκριβῶς, ἴση μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα τοῦ πλακιδίου. Αἱ ταλαντώσεις αὗται, διαδιδόμεναι εἰς τὸν ἀέρα (ἢ καὶ ἐντὸς ὑγρῶν), ἀποτελοῦν τοὺς ὑπερήχους (**).

(*) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 38.

(**) Πλὴν τοῦ χαλαζίου χρησιμοποιοῦνται σήμερον καὶ ἄλλα ὕλικά, ὅπως τὸ ἄλας Seignette (ἢ Rochelle) καθὼς καὶ εἰδικὰ κεραμικὰ ὑλικά, περιέχοντα τιτάνιον.

(**) Ὁμοίως, δύνασθαι νὰ παραγάγωμεν ὑπερήχους, ἐὰν ἐκμεταλλευθῶμεν τὸ φαινόμενον τῆς μαγνητοσυστολῆς (βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 99): Ράβδος ἐκ νικελίου, τιθεμένη ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου, παραλλήλου πρὸς τὸν ἀξονά της, βραχύνεται. Ἄν τὸ μαγνητικὸν πεδίου εἶναι ἐναλλασσόμενον καὶ ἡ συχνότης των συμπίπτῃ μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα τῆς ράβδου, τότε ἡ ράβδος αὕτη πλάττειται ἐν συντονισμῷ. Ἐάν, πρὸς τοῦτους, ἡ ράβδος ἔχῃ μήκος μερικῶν ἐκατοστομέτρων, ἡ ἰδιοσυχνότης αὐτῆς εἶναι πολὺ μεγάλη καὶ οὕτω παράγονται ὑπέρηχοι, οἱ ὁποῖοι ἐκπέμπονται εἰς τὸν περιβάλλοντα ἀέρα διὰ τῶν ταλαντώσεων τῆς βάσεως τῆς ράβδου.

Οἱ πομποὶ ὑπερήχων δύνανται νὰ δώσουν ἐντὸς ὑγρῶν κύματα μεγάλης ἐντάσεως, πολὺ μεγαλυτέρας ἐκείνης τῶν κυμάτων, τῶν ἐκπεμπομένων ὑπὸ τῶν πηγῶν τῶν συνήθων ἤχων (*). Ἐνεκα τούτου, οἱ ὑπέρηχοι ἀποκτοῦν χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας, λόγῳ τῶν ὁποίων καὶ εὐρίσκουν πολλὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς. Οὕτω, οἱ ὑπέρηχοι χρησιμοποιοῦνται πολλαπλῶς εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν παραγωγὴν ὁμοιομερῶν γαλακτωμάτων μεταξὺ δυσκόλως μειγνυομένων ὑγρῶν, διὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ἀερίων ἐκ τηγμάτων μετάλλων, διὰ τὴν κατακρήμνισιν ἀεροσολίων κ. λ.

Εἰς περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας χρειάζονται στεναὶ ἡχητικαὶ δέσμαι, ἀντὶ τῶν ἀκουστῶν ἤχων, χρησιμοποιοῦνται ὑπέρηχοι, καθόσον ἡχητικοὶ προβολεῖς μὲ κάτοπτρα, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος νὰ εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα τοῦ μήκους κύματος, μόνον δι' ὑπερήχους δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν, λόγῳ τοῦ μικροῦ μήκους κύματος αὐτῶν. Τοιούτου εἵδους ἡχητικοὶ προβολεῖς χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν ἐντοπισμὸν διαφόρων ἀντικειμένων ἐντὸς τῆς θαλάσσης (π.χ., σμήνους ἰχθύων, ὑφάλων, παγοβούνων, ὑποβρυχίων κ.λ.). Οἱ ὑπέρηχοι χρησιμοποιοῦνται, ἐπίσης, διὰ τὴν βυθομέτησιν. Πρὸς τοῦτο δι' ἡχοβολιστικῶν μηχανημάτων ἐκπέμπεται κατακορύφως ἐντὸς τῆς θαλάσσης ὑπέρηχος βραχείας διαρκείας, ὁ ὁποῖος, ἀνακλόμενος ἐπὶ τοῦ πυθμένος, ἐπιστρέφει καὶ προσπίπτει ἐπὶ τοῦ πλακιδίου τοῦ χαλαζίου. Λόγῳ τοῦ πιεζοηλεκτρικοῦ φαινομένου, ἀναπτύσσεται εἰς αὐτὸ ἐναλλασσόμενη ἡλεκτρεγερτικὴ δύναμις βραχείας διαρκείας. Διὰ μετρήσεως τοῦ χρόνου μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς τοῦ ἡχητικοῦ σήματος καὶ γνωστῆς τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος προσδιορίζεται τὸ βάθος τῆς θαλάσσης.

Οἱ ὑπέρηχοι, διαδιδόμενοι ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ἀπορροφῶνται ἰσχυρῶς καί, ὥς ἐκ τούτου, ἔχουν μικρὰν ἐμβέλειαν, περιορίζουσιν τὰς πρακτικὰς αὐτῶν ἐφαρμογὰς κυρίως ἐντὸς τῶν ὑγρῶν. Οἱ ὑπέρηχοι χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καὶ διὰ τὴν συγκόλλησιν τεμαχίων ἐξ ἀργιλίου: Τὰ συνήθη κασσιτεροῦχα ὑλικά (καλάϊ) δὲν προσφύονται ἐπὶ τοῦ ἀργιλίου, λόγῳ λεπτοῦ στρώματος ἐξ ὀξειδίου τοῦ ἀργιλίου, τὸ ὁποῖον ἐπικαλύπτει αὐτό. Ὡς εὐρέθη, ὁμως, συσκευὴ ὑπερήχων, τοποθετημένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς λαβῆς τῶν ἡλεκτρικῶν συγκολλητῶν, θέτει αὐτοὺς εἰς ταλάντωσιν, ἡ ὁποία καὶ διασπᾷ τὸ στρώμα τοῦ ὀξειδίου.

Εἰς τὴν ἐπιστήμην χρησιμοποιοῦνται στάσιμα κύματα ἐξ ὑπερήχων ὡς ὀπτικά φράγματα: Οἱ σχηματιζόμενοι δεσμοὶ καὶ κοιλίαι παριστοῦν περιοδικὰ μεταβολὰς τοῦ δείκτου διαθλάσεως, λόγῳ δὲ τοῦ μικροῦ μήκους κύματος τῶν ὑπερήχων, ἡ σταθερὰ τοῦ ὅττω δημιουργουμένου φράγματος εἶναι τῆς τάξεως μεγέθους τοῦ μήκους κύματος τοῦ φωτός. Ἐκ τῆς περιθλάσεως φωτός γνωστοῦ μήκους κύματος ἐπὶ τοιούτων φραγμάτων, εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις τοῦ μήκους κύματος ἐνὸς ὑπερήχου, καί, ἐκ τούτου, ἡ εὐρεσις τῆς ταχύτητος αὐτοῦ ἐντὸς ἐνὸς ὑγροῦ.

Τελευταίως εὐρέθη ὅτι αἱ νυκτερίδες χρησιμοποιοῦν τοὺς ὑπερήχους διὰ νὰ ἐντοπίζουσιν τὰ διάφορα ἐμπόδια κατὰ τὴν πτήσιν των εἰς τὸ σκότος. Αὗται ἐκβάλλουν

(*) Οἱ πιεζοηλεκτρικοὶ πομποὶ ἐκπέμπουν ὑπερηχητικὰ κύματα, ἐντάσεως 10 W/cm^2 , δηλ. 10^{10} φορές μεγαλυτέρας τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου συνήθους μεγαφώνων.

υπερήχους και παρακολουθούν την ήχώ, ή όποία προκαλείται έξ ανακλάσεως επί των έμποδιών (*).

§ 260. Μέτρησης συχνότητας, μήκους κύματος και ταχύτητας των ήχων. Τά τρία μεγέθη, συχνότης ν , μήκος κύματος λ και ταχύτης διάδοσεως ν , συνδέονται διά της γνωστής σχέσεως

$$\nu \cdot \lambda = \nu.$$

Έάν, λοιπόν, τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν εἶναι γνωστὸν καὶ μετρηθῇ τὸ ἄλλο, εὐρίσκειται, δι' ὑπολογισμοῦ, τὸ τρίτον.

Κατωτέρω περιγράφομεν τοὺς τρόπους ἀμέσου μετρήσεως ἑνὸς ἐκάστου τῶν τριῶν αὐτῶν μεγεθῶν.

α) **Μέτρησης συχνότητας.** Αὕτη γίνεται διά συγκρίσεως τῆς συχνότητος τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν ἤχου πρὸς ἄλλον ἤχον γνωστῆς συχνότητος, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν εἴτε διὰ σειρήνος, εἴτε διὰ μεγαφώνου, τροφοδοτουμένου δι' ἐναλλασσομένου ρεϊμάτος, γνωστῆς συχνότητος. Ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν συχνότητα τοῦ δευτέρου τούτου ἤχου καὶ πλησιάζωμεν πρὸς τὴν συχνότητα τοῦ πρώτου, θ' ἀκούσωμεν διακροτήματα, τὰ ὁποῖα ἐξαφανίζονται, ὅταν αἱ δύο συχνότητες γίνουν, ἀκριβῶς, ἴσαι.

β) **Μέτρησις μήκους κύματος.** Συνήθως, αἱ μέθοδοι μετρήσεως τοῦ μήκους κύματος στηρίζονται ἐπὶ τῆς δημιουργίας στασίμων κυμάτων καὶ τῆς μετρήσεως τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο δεσμῶν, ἡ ὁποία, ὡς γνωστὸν, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda/2$.

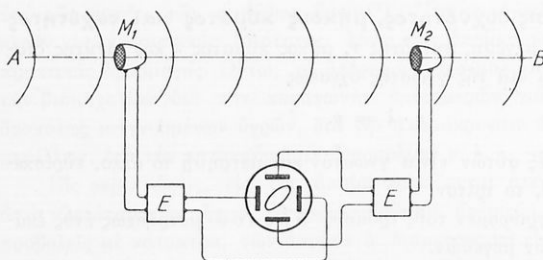
Ἐομοίως, τὸ μήκος κύματος δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ Quincke (σχ. 384): Μετακινούμεν τὸν σωλῆνα σ καὶ προσδιορίζομεν δύο διαδοχικὰς θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἤχος εἰς τὸν σωλῆνα Σ ἀποσβέννυται. Ἡ μετακίνησις αὕτη θ' ἀντιστοιχῇ εἰς αὐξήσιν τοῦ δρόμου τοῦ κύματος εἰς τὸν σωλῆνα σ κατὰ ἓν μήκος κύματος. Διὰ μετρήσεως τῆς μετακινήσεως ταύτης εὐρίσκεται τὸ μήκος κύματος (**).

Ἡ Σύγχρονος μέθοδος μετρήσεως τοῦ μήκους κύματος στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν δύο σημείων κατὰ τὴν διεύθυνσιν διάδοσεως τοῦ κύματος, τῶν ὁποίων αἱ φάσεις νὰ διαφέρουν κατὰ 360° . Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ἡ ἐξῆς διάταξις: Κατὰ μήκος τῆς διευθύνσεως AB τοῦ διαδιδομένου κύματος (σχ. 389) τοποθετοῦμεν δύο μικρόφωνα M_1 καὶ M_2 . Τὸ μικροφωνικὸν ρεῦμα τοῦ ἑνὸς μικροφώνου, ἐνισχυόμενον καταλλήλως, προκαλεῖ τὴν ὀριζοντίαν ἀπόκλισιν τῆς κηλίδος ἑνὸς ἡλεκτρονικοῦ παλμογράφου. Ἀντιστοιχῶς, τὸ ρεῦμα τοῦ ἄλλου μικροφώνου προκαλεῖ τὴν κατακόρυφον ἀπόκλισιν. Ἐκαστον μικρόφωνον, διεγείρομενον ὑπὸ τοῦ ἤχου, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος κύματος ζητοῦμεν,

(*) Συχνότης 120 kHz διὰ τὸν ἀκριβῆ ἐντοπισμὸν καὶ 50 ἕως 70 kHz διὰ τὴν διερεύνησιν τοῦ περιβάλλοντος.

(**) Λόγῳ τοῦ κεκαμμένου σωλῆνος σ , μετακινήσεις αὐτοῦ κατὰ d αὐξάνει τὸν δρόμον κατὰ $2d$.

προκαλεί ἁρμονικὴν ταλάντωσιν τῆς κηλίδος. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως τῶν δύο ταλαντώσεων — τῆς ὀριζοντίας καὶ τῆς κατακορύφου — θὰ ἐξαρτᾶται, ὡς γνωστόν,



Σχ. 389. Ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο μικροφῶνων εἶναι ἴση πρὸς ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μήκους κύματος λ , ἐμφανίζεται εἰς τὸν παλμογράφον εὐθεῖα γραμμὴ. (E, E = ἐνισχυταί).

ἐκ τῆς διαφορᾶς φάσεως αὐτῶν. Οὕτω, ἐὰν κρατήσωμεν ἀκίνητον τὸ μικρόφωνον M_1 καὶ μετακινῶμεν τὸ δεύτερον μικρόφωνον M_2 κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας AB , θὰ παρατηροῦμεν εἰς τὸν παλμογράφον

ἄλλοτε εὐθεῖαν γραμμὴν, ἄλλοτε ἔλλειψιν καὶ ἄλλοτε κύκλον. Ἡ αὐτὴ εὐθεῖα γραμμὴ θὰ παρουσιάζεται, ὅσάκις τὰ δύο μικροφωνικὰ ρεύματα ἔχουν διαφορὰν φάσεως, ἴσην πρὸς 360° (ἢ ἀκέραιον πολλαπλάσιον αὐτῶν). Ἡ ἀπόστασις, ὅμως, μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τοιούτων σημείων εἶναι, ἐξ ὀρισμοῦ, ἴση πρὸς τὸ μῆκος κύματος. Ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν θέσεων, εἰς τὰ ὁποίας ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα γραμμὴ, εὐρίσκομεν τὸ μῆκος κύματος.

γ) **Μέτρησις τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου.** Τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα προσδιορίζομεν, δι' ἡλεκτρικῆς μεθόδου, ὡς ἑξῆς: Τοποθετοῦμεν δύο μικρόφωνα εἰς γνωστὴν ἀπόστασιν μεταξύ των. Κατόπιν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας, τῆς ἐνούσης αὐτά, καὶ εἰς μεγάλην ἀπόστασιν, προκαλοῦμεν μίαν ἔκρηξιν καὶ μετροῦμεν τὸν χρόνον, ὅστις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διανύσῃ ὁ ἤχος τὸ μεταξὺ τῶν δύο μικροφῶνων διάστημα, ὁπότε ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου προκύπτει ὡς τὸ πηλίκον τοῦ διαστήματος τούτου διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου (*).

Τὰς αὐτάς, κατ' ἀρχήν, μεθόδους χρησιμοποιοῦμεν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Δι' ἄλλα, ὅμως, ἀέρια ἢ ὑγρά καθὼς καὶ διὰ τὰ στερεὰ καταφεύγομεν, ἀναγκαστικῶς, εἰς ἐμμέσους μεθόδους, κατὰ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὸ μῆκος κύματος (π.χ., διὰ τῆς συσκευῆς Quincke κ.λ.), ὁπότε, ἐὰν εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ συχνότης τοῦ ἤχου, εὐρίσκεται ἡ ταχύτης, τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως $v \cdot \lambda = v$.

(*) Ἡ παλαιὰ μέθοδος μετρήσεως τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου διὰ μετρήσεως τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν βλέπομεν τὴν λάμπιν τῆς ἐκρήξεως, μέχρι τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἀκούομεν τὸν κρότον, ὑστερεῖ εἰς ἀκρίβειαν, διότι, ὡς εὐρέθη, ἡ ταχύτης διαδόσεως μεγάλων μεταβολῶν πίεσεως—ὅπως εἶναι τὸ κύμα πίεσεως εἰς τὴν περιοχὴν μίᾳς ἐκρήξεως—εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου.

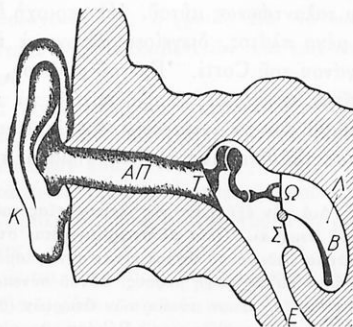
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ'

ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

§ 261. Τὸ οὖς. Τὸ ὄργανον τοῦτο μετατρέπει τοὺς ἤχους εἰς τὸ ἀντίστοιχον αἶσθημα. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν περιγραφὴν τοῦ ὠτός καὶ τῆς λειτουργίας του, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως, κυρίως, τῶν μηχανικῶν φαινομένων.

Τὸ οὖς ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη: τὸ ἔξω οὖς, τὸ μέσον οὖς καὶ τὸ ἔσω οὖς. Τὸ ἔξω οὖς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κόγχην K (σχ. 390)

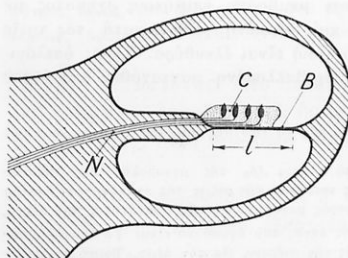
καὶ τὸν ἀκουστικὸν πόρον $ΑΠ$, ὁ ὁποῖος φράσσεται διὰ τοῦ τυμπάνου T . Τὸ μέσον οὖς εἶναι κοιλότης πλήρης ἀέρος, χωριζομένη ἀπὸ μὲν τοῦ ἔξω ὠτός διὰ τοῦ τυμπάνου, ἀπὸ δὲ τοῦ ἔσω ὠτός διὰ μεμβρανῶν, αἱ ὁποῖαι κλείουν δύο θυρίδας, τὴν στρογγύλην θυρίδα Σ καὶ τὴν ὠοειδῆ θυρίδα Ω . Ἐντὸς τῆς κοιλότητος ταύτης, ὑπάρχουν τὰ ἀκουστικά ὀστέα—σφύρα, ἄκμων, ἄναβολεύς—τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν σύστημα μοχλῶν καὶ συνδέουν τὸ τυμπάνον μὲ τὴν ὠοειδῆ θυρίδα. Τέλος, διὰ τῆς εὐσταχιανῆς σάλπιγγος E ἡ κοιλότης αὕτη συγκοινωνεῖ μετὰ τῆς κοιλότητος τοῦ στόματος καί, οὕτω, ἐκατέρωθεν τοῦ τυμπάνου ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι ἡ αὐτή.



Σχ. 390. Σχηματικὴ παράστασις τοῦ ὠτός. Ὁ κοχλίας A καὶ ὁ βασικὸς ὕμν B ἔχουν σχεδιασθῇ ἐν ἀναπτύξει.

Τὸ ἔσω οὖς ἔχει πολυπλοκωτέραν μορφήν καὶ εἶναι πλήρες ὕγρου. Τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ἐν προκειμένῳ, εἶναι ὁ κοχλίας A , ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ τὸ σπουδαιότερον τμήμα τοῦ ὁργάνου τῆς ἀκοῆς.

Ἀποτελεῖται ἐκ σωλήνος, περιελιγμένου εἰς σχῆμα κοχλίου, πλήρους ὕγρου καὶ χωριζομένου κατὰ μήκος εἰς δύο μέρη διὰ τοῦ βασικοῦ ὕμνου B , σχεδὸν μέχρι τοῦ πέρατος τοῦ κοχλίου. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀφίεται ἄνοιγμα, διὰ τοῦ ὁποῖου ἐξισοῦται ἡ πίεσις εἰς τὰ δύο ἡμίση



Σχ. 391. Ἐγκαρσία τομὴ τοῦ κοχλίου (σχηματικὴ παράστασις).

τοῦ σωλήνος. Ὁ βασικὸς ὕμν B (σχ. 391) ἔχει σχῆμα τραπεζοειδές, ἔχει, δηλ., μικρὸν πλάτος l εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ, τὸ εὐρισκόμενον πλησίον τῶν θυ-

ρίδων, εϋρύνεται δὲ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Ἐπὶ τοῦ ὑμέρος τούτου εὐρίσκεται τὸ ἐκ μαλακῶν ἰσθῶν ἀποτελούμενον *ὄργανον τοῦ Corti C*, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ καταλήγουν αἱ ἱνὲς τῶν ἀκουστικῶν νεύρων *N*.

Λειτουργία τοῦ ὠτός. Ὁ ἦχος διαδίδεται εἰς τὸ ἔσω οὖς διὰ τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ μέσον διὰ τῶν ὀσταρίων καὶ εἰς τὸ ἔσω διὰ τοῦ πληροῦντος αὐτὸ ὑγροῦ (*). Αἱ μεταβολαὶ τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος θέτουν τὸ τύμπανον εἰς ταλαντώσεις, αἱ ὁποῖαι μεταδίδονται διὰ τῶν ὀσταρίων καὶ τῆς ὠοειδοῦς θυρίδος εἰς τὸ ὕγρὸν τοῦ ἔσω ὠτός (**). Αἱ ταλαντώσεις αὗται θέτουν εἰς ἐξαναγκασμένην ταλάντωσιν τὸν βασικὸν ὑμένα, ὁ ὁποῖος πάλλεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς ἐκάστην συχνότητα ν' ἀντιστοιχῇ ἄλλη περιοχὴ ἐντόνου ταλαντώσεως αὐτοῦ. Ἡ περιοχὴ ἐκείνη τοῦ ὑμέρος, ἡ ὁποία πάλλεται μὲ μέγα πλάτος, διεγείρει μόνον τὰ ἐπ' αὐτῆς εὐρισκόμενα κύτταρα τοῦ ὄργανου τοῦ Corti. Ἐκ τοῦ συνόλου, λοιπόν, τῶν νευρικῶν ἱνῶν μόνον ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ κύτταρα τῆς διεγειρομένης περιοχῆς, διαβιβάζουν τὰ ἀντίστοιχα ἑρεθίσματα εἰς τὸν ἐγκέφαλον, προκαλουμένου, οὕτω, τοῦ ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος τοῦ ὕψους τοῦ ἤχου.

Διὰ τὴν ἐξήγησιν τῆς λειτουργίας τοῦ ὠτός ἐπροτάθησαν, κατὰ καιροῦς, διάφοροι θεωρίαι. Ὅλαι αἱ θεωρίαι αὗται στηρίζονται ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τὸ αἶσθημα δεδομένου ὕψους εἶναι συνυφασμένον μὲ ὠρισμένην περιοχὴν τοῦ κοχλίου, καθότις καταστrophὴ μέρους αὐτοῦ συνεπάγεται κώφωσιν δι' ὠρισμένους μόνον συχνότητας. Ἐξ ὅλων αὐτῶν τῶν θεωριῶν (θεωρία τοῦ συντονισμοῦ τοῦ Helmholtz, θεωρία τῶν στροβίλων τοῦ Békésy, θεωρία τῶν ἡχητικῶν εἰκόνων τοῦ Ewald) ἐπικρατεστέρα φαίνεται νὰ εἶναι ἡ θεωρία τῶν Koch-Gildemeister, ἡ ὁποία εἶναι παραλλαγὴ τῆς θεωρίας τοῦ Ewald: Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἡχητικῶν κυμάτων, ὁ βασικός ὕμην ταλαντοῦται ὁλόκληρος, ὡς μία μεμβράνη. Συνήθως, κατὰ τὴν ταλάντωσιν τῶν μεμβρανῶν (§ 246) σχηματίζονται εἰς αὐτὰς στάσιμα κύματα δι' ὠρισμένης μόνον συχνότητος, παρουσιάζονται δὲ δεσμικαὶ γραμμαὶ πολυπλόκου σχήματος (ἀναλόγου πρὸς τὰ σχήματα τῶν εἰκόνων Chladni-σχ. 363), μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχουν καὶ αἱ κοιλίαι. Τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν διὰ μεμβράνην, τεινομένην ἐξ ὅλων τῶν πλευρῶν της. Ὁ βασικός, ὅμως, ὕμην εἶναι μεμβράνη ἐπιμήκους σχήματος, μὲ τὰς ἐπιμήκεις πλευρὰς τῆς μὴ παραλλήλους καὶ τεταμένης μόνον κατὰ τὰς τρεῖς πλευράς, ἐνῶ ἡ τετάρτη (εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κοχλίου) εἶναι ἐλευθέρα. Ὅπως ὑπελόγισεν ὁ Gildemeister, μία τοιαύτη μεμβράνη, περιβαλλομένη πανταχόθεν ὑπὸ ὑγροῦ

(*) Κατὰ μικρὸν ποσοστὸν ὁ ἦχος διαδίδεται εἰς τὸ ἔσω οὖς καί, ἀπ' εὐθείας, διὰ τῶν ὀσθῶν τῆς κεφαλῆς.

(**) Κατὰ τὸν τύπον $J = (A\rho_0)^2/2\rho \cdot v$ (§ 251) τὸ πλάτος $A\rho_0$ τῆς μεταβολῆς τῆς πίεσεως δύο ἡχων, τῆς αὐτῆς ἐντάσεως J , εἶναι ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς πυκνότητος. Ἐπειδὴ τὸ ὕγρὸν τοῦ ἑσωτερικοῦ ὠτός ἔχει πυκνότητα 800 φορὰς μεγαλυτέραν τῆς πυκνότητος τοῦ ἀέρος, θὰ πρέπει τὸ πλάτος $A\rho_0$ τῆς μεταβολῆς τῆς πίεσεως ἐντὸς τοῦ ὕγρου νὰ εἶναι $\sqrt{800} = 30$, περίπου, φορὰς μεγαλύτερον τοῦ πλάτους τῆς μεταβολῆς τῆς πίεσεως εἰς τὸν ἀέρα. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, κατὰ προσέγγισιν, διὰ τοῦ τυμπάνου, τῶν ὀσταρίων καὶ τῆς ὠοειδοῦς θυρίδος ὡς ἐξῆς: Τὰ ὀστάρια ἀποτελοῦν σύστημα μοχλῶν τοιοῦτον, ὥστε τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ τυμπάνου νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ὠοειδῇ θυρίδα ἡλαττωμένον εἰς τὸ τρίτον, ὁπότε, ἀντιστοίχως, ἡ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένη δύναμις, τριπλασιάζεται. Ἐπειδὴ, πρὸς τοῦτοις, τὸ ἐμβαδὸν τῆς θυρίδος ταύτης εἶναι 15 φορὰς, περίπου, μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τυμπάνου, ἔπεται ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῆς πίεσεως ἐντὸς τοῦ ὕγρου τοῦ ὠτός θὰ εἶναι 45 φορὰς, περίπου, μεγαλύτεροι τῶν μεταβολῶν τῆς πίεσεως εἰς τὸν ἀέρα.

καὶ διεγειρομένη εἰς ταλάντωσιν πλησίον τοῦ ἐνὸς αὐτῆς ἄκρου (πλησίον τῆς ὠοειδοῦς θυρίδος), σχηματίζει στάσιμα κύματα διὰ πᾶσαν συχνότητα. Ἐπὶ πλέον οὗτος εὗρεν ὅτι εἰς ἐκάστην συχνότητα δημιουργεῖται μία μόνον κοιλία κινήσεως, τῆς ὁποίας, μάλιστα, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ὠοειδοῦς θυρίδος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διεγείρουσας συχνότητος.

§ 262. Ὑποκειμενικά χαρακτηριστικά τῶν ἤχων. Ὡς γνωστὸν (§ 252), τὰ ἀντικειμενικά χαρακτηριστικά ἐνὸς ἀπλοῦ ἤχου εἶναι ἡ συχνότης καὶ ἡ ἔντασις αὐτοῦ, ἐνῶ πᾶς σύνθετος ἤχος ἔχει καὶ τρίτον γνώρισμα - τὴν ἔντασιν ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἀνωτέρων ἀρμονικῶν. Ἐνταῦθα θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰ αἰσθήματα, τὰ ὁποῖα προκαλοῦνται ὑπὸ τῶν ἤχων. Τὰ αἰσθήματα ταῦτα χαρακτηρίζονται ἐκ τριῶν ὑποκειμενικῶν γνωρισμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ὕψος, ἡ ἀκουστότης καὶ ἡ χροιά. Εἰς τὰ κατωτέρω θ' ἀναζητήσωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ὑποκειμενικῶν καὶ τῶν ἀντικειμενικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν ἤχων.

α) **Ὑψος.** Ἡ ἔννοια τοῦ ὕψους εἶναι ἐμπειρική, μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῇ δι' ἄλλων ἐννοιῶν (*). Ἐν τούτοις, πᾶς ἄνθρωπος ἔχει τὸ αἶσθημα τοῦ ὕψους, δυνάμενος νὰ κρίνῃ μεταξὺ δύο ἤχων ποῖος εἶναι ὁ ὀξύτερος. Ὅπως εὐρίσκεται, τὸ ὕψος ἐνὸς ἤχου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συχνότητος τῆς προκαλούσης αὐτὸν περιοδικῆς μεταβολῆς, καί, μάλιστα, ὅσον ἡ συχνότης εἶναι μεγαλύτερα, τόσον ὀξύτερος φαίνεται ὁ ἤχος.

Οἱ θόρυβοι καὶ οἱ κρότοι στεροῦνται, συνήθως, τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ὕψους. Εἷς τινες, ὅμως, περιπτώσεις οὔτοι, προσεκτικῶς ἐξεταζόμενοι, παρουσιάζουν τὸ στοιχεῖον τοῦτο. Οὕτω, εἰς τὸ μουσικὸν ὄργανον, τὸ καλοῦμενον *ξυλόφωνον*, κτυπήματα ἐπὶ συστήματος σανίδων, διαφόρων διαστάσεων, παράγουν κρότους, οἱ ὁποῖοι, ὅμως, συγκρινόμενοι μεταξὺ τῶν, μᾶς παρέχουν τὸ αἶσθημα τοῦ ὕψους.

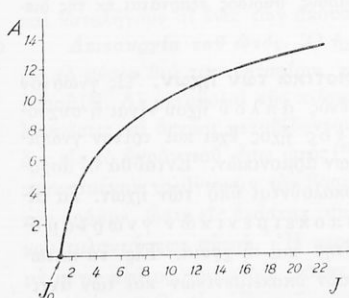
Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐλαχίστην διάρκειαν ἐνὸς ἤχου, τὴν ἀναγκαίαν ἵνα διαμορφωθῇ τὸ αἶσθημα τοῦ ὕψους, εὐρέθῃ ὅτι ἀρκοῦν πρὸς τοῦτο δύο περίοδοι. Τὸ αἶσθημα, ὅμως, τοῦ ὕψους ἐντὸς τοῦ βραχυτάτου τούτου χρόνου δὲν ἔχει διαμορφωθῇ τελείως· πρὸς τοῦτο ἀπαιτοῦνται περισσότεραι περίοδοι (5 ἕως 10).

β) **Ἀκουστότης.** Δύο ἀπλοὶ ἤχοι, τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ διαφόρου ἐντάσεως, διεγείρουν εἰς ἡμᾶς τὴν ἐντύπωσιν δύο ἤχων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀλλὰ διάφορον *ἀκουστότητα* (ἢ ἔντασιν τοῦ ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος).

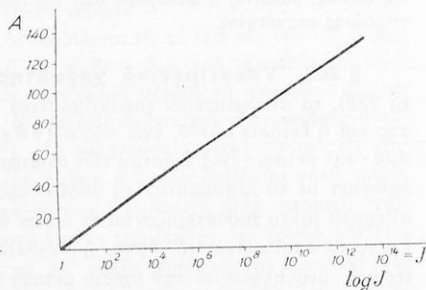
Πειραματικῶς εὐρέθῃ ὅτι ἡ ἀκουστότης A , τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἤχος τις εἰς ἕνα παρατηρητὴν, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐντάσεως J τοῦ ἤχου, ὅπως παριστᾷ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 392. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ἤχου εἶναι μικροτέρα μιᾶς τιμῆς J_0 , ἡ ἀκουστότης εἶναι ἴση πρὸς μη-

(*) Ἀνάλογος περίπτωσις παρουσιάζεται εἰς τὴν Ὀπτικήν, προκειμένου νὰ ὁρισθῇ ἡ ἔννοια τοῦ χρώματος.

δέν, δηλ., ὁ ἥχος δὲν εἶναι ἀκουστός. Τὴν ἔντασιν ταύτην J_0 καλοῦμεν **κατωφλίον ἀκουστότητας**. Ἡ μορφή τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος 392 δει-



Σχ. 392. Ἡ σχέσις μεταξύ τῆς ἀκουστότητας A καὶ τῆς ἐντάσεως J τοῦ ἤχου εἶναι λογαριθμική.



Σχ. 393. Ἡ σχέσις μεταξύ τῆς ἀκουστότητας καὶ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου εἶναι γραμμική.

κνύει ὅτι ἡ σχέσις μεταξύ τῆς ἀκουστότητας A καὶ τῆς ἐντάσεως J τοῦ ἤχου εἶναι **λογαριθμική**, παρέχεται δὲ ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης

$$A = C \cdot \log \frac{J}{J_0} \quad (1)$$

ἐνθα C εἶναι μία σταθερά, ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς ἰδιοσυγκρασίας τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τῆς συχνότητος τοῦ ἤχου.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 392 (*) προκύπτει ὅτι διὰ νὰ εἶναι μεγάλη ἡ ἀκουστότης, πρέπει ἡ ἔντασις τοῦ ἤχου νὰ εἶναι πολὺν μεγαλυτέρα τῆς ἐντάσεως τοῦ κατωφλίου. Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰς πολὺν ἰσχυρὸς ἥχος δύναται νὰ ἔχῃ ἔντασιν κατὰ 10^{13} φορὰς μεγαλυτέραν τῆς ἐντάσεως τοῦ κατωφλίου. Εἶναι, λοιπόν, προφανὲς ὅτι διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν τόσον εὐρείας περιοχῆς ἐντάσεων καὶ ἀκουστοτήτων δὲν εἶναι κατάλληλον, πλεόν, τὸ χρησιμοποιηθὲν σχῆμα, οἰανδήποτε καὶ ἂν ἐκλέξωμεν τὴν κλίμακα τῶν ἐντάσεων. Ἐνεκα τούτου, εἰς τὰς τοιαύτας περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖται, ὅπως εὐρεῖα περιοχὴ τιμῶν περιληφθῇ εἰς δεδομένον μῆκος ἄξονος, χρησιμοποιεῖται **λογαριθμικὴ κλίμαξ**, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ 10 εὐρίσκονται εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις. Τοιαύτην, ἀκριβῶς, κλίμακα χρησιμοποιοῦμεν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 393: Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων λαμβάνομεν μῆκη, ἀνάλογα πρὸς τὸν $\log J$, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων μῆκη, ἀνάλογα τοῦ A . Ἐπειδὴ, ἡ ἐξίσωσις (1), ἡ συνδέουσα τὸ A καὶ

(*) Εἰς τὸ σχῆμα 392 τόσον τὸ A , ὅσον καὶ τὸ J λαμβάνονται εἰς αἰθαιρέτους μονάδας. Κατωτέρω, εἰς τὴν § 265, θὰ δρῶσιν αἱ χρησιμοποιούμεναι μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν ἀκουστότητας, ἐνθ' αἱ μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν ἐντάσεως ἀνεφέρθησαν, ἥδη, εἰς τὴν § 236.

τὸν $\log J$ εἶναι ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, θὰ προκύψῃ εἰς τὸ διάγραμμα τοῦτο εὐθεῖα γραμμή. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῆς χρήσεως τῆς λογαριθμικῆς κλίμακος ἡδυνήθημεν νὰ περιλάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐντάσεων τὴν εὐρυτάτην περιοχὴν τῶν ἐντάσεων μεταξὺ τῶν μόλις ἀκουστῶν ἤχων καὶ τῶν ἰσχυροτάτων ἤχων.

Ἡ λογαριθμικὴ σχέσις μεταξὺ τῆς ἀκουστότητος καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ προκαλοῦντος αὐτὴν ἤχου ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τοῦ *ψυχοφυσικοῦ νόμου τῶν Weber - Fechner*, ὁ ὁποῖος συνδέει, γενικῶς, τὴν ἔντασιν οἰουδήποτε ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος μετὰ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἀντιστοίχου ἐρεθίσματος, π.χ., τῆς ὑποκειμενικῆς ἐντάσεως τοῦ φωτός, ἐκτιμωμένης διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτεινοῦ κύματος.

Τὴν ἐξίσωσιν (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὑπὸ διαφορικὴν μορφήν ὡς ἑξῆς :

$$dA = C \cdot \frac{dJ}{J}.$$

Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι, δι' ἤχους οἰαοδήποτε ἐντάσεως, ἡ ἐλαχίστη διαφορὰ δύο ἀκουστοτήτων, ἡ ὁποία δύναται νὰ γίνῃ ἀκόμη ἀντιληπτή, εἶναι σταθερὰ καὶ καλέσωμεν αὐτὴν $\Delta J_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$, θὰ λάβωμεν ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως

$$\Delta J_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{1}{C} \cdot A J_{\epsilon\lambda\alpha\chi} \cdot J.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη αἰσθητὴ διαφορὰ $\Delta J_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$ τῶν ἐντάσεων δύο ἤχων εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐντάσεως J τοῦ ἤχου.

Τὸ ἀνάλογον, ἀκριβῶς, φαινόμενον παρουσιάζεται καὶ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἰσχύει ὁ νόμος Weber - Fechner, ὅπως, π.χ., κατὰ τὴν ὑποκειμενικὴν ἐκτίμησιν μεγθῶν καὶ βαρῶν. Οὕτω, κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο βαρῶν διὰ τῶν χειρῶν μας, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη αἰσθητὴ διαφορὰ βάρους εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ ἐκτιμώμενον βάρος. Ἐάν, π.χ., θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὴν διαφορὰν δύο βαρῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν, περίπου 100 gr, εὐρίσκομεν πειραματικῶς ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη πρέπει νὰ εἶναι 20 gr*. Ἐάν, ὁμως, ἕκαστον τῶν δύο βαρῶν ἔχῃ μᾶζαν, περίπου, ἴσην πρὸς 1 kg, ἡ διαφορὰ βάρους πρέπει νὰ εἶναι, περίπου, ἴση πρὸς 200 gr*.

γ) **Χροιά.** Δύο ἤχοι, διεγείροντες εἰς ἡμᾶς τὸ αὐτὸ αἰσθημα ὕψους καὶ τὴν αὐτὴν ἀκουστότητα (ἐντασιν ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος), ἀλλὰ προσερχόμενοι ἐκ δύο διαφορετικῶν μουσικῶν ὀργάνων, προκαλοῦν διαφορετικὰ αἰσθήματα, ἐκ τῶν ὁποίων, ἀκριβῶς, εἶναι δυνατόν νὰ κρίνωμεν περὶ τοῦ ὀργάνου, ἐκ τοῦ ὁποίου οἱ δύο οὗτοι ἤχοι προέρχονται. Τὸ τρίτον αὐτὸ ὑποκειμενικὸν γνώρισμα, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται εἰς τοὺς συνθέτους ἤχους, καλεῖται **χροιά**. Ὅπως εὐρέθῃ, ἡ **χροιά** ἐνὸς συνθέτου ἤχου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λόγου a_1/a_2 τοῦ πλάτους a_1 ἐκάστης ἀνωτέρας ἀρμονικῆς i διὰ τοῦ πλάτους a_2 τῆς θεμελιώδους.

Ἡ μορφή τῆς καμπύλης μᾶς ταλαντώσεως, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ συνθέσεως μᾶς θεμελιώδους ταλαντώσεως καὶ τῶν ἀνωτέρων αὐτῆς ἀρμονικῶν, ἐξαρτᾶται ἐκ

τῶν σχέσεων τῶν φάσεων αὐτῶν - ὅπως σαφῶς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σχημάτων 149 καὶ 150. Θ' ἀνεμένετο, λοιπόν, διὰ δεδομένον θεμελιώδη ἤχον καὶ δεδομένα πλάτη τῶν ἀνωτέρων ἀρμονικῶν νὰ παρουσιάζωνται διαφοραὶ εἰς τὴν χροιάν, ἀναλόγως τῶν τιμῶν τῶν φάσεων. Ἐν τούτοις, ὅμως, εὐρέθη ὅτι αἱ φάσεις τῶν ἀρμονικῶν δὲν ἔχουν καμμίαν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς χροιάς (*νόμος τοῦ Ohm*).

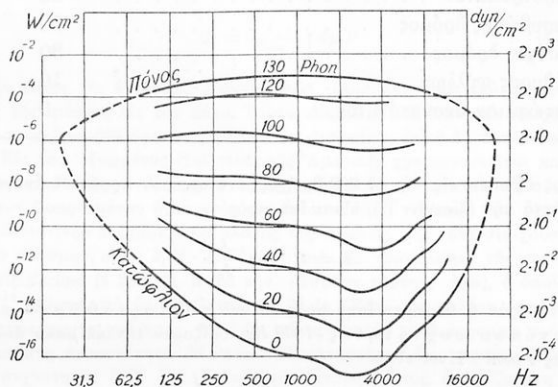
§ 263. Προσδιορισμὸς τῆς διευθύνσεως, ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ὁ ἤχος. Τὴν διευθύνσιν, ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ὁ ἤχος, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν—ὅταν ἀκούωμεν διὰ τοῦ ἐνός, μόνον, ὠτὸς—ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς ἀκουστότητος, ἡ ὁποία προκύπτει λόγῳ τῆς θέσεως τοῦ ὠτὸς εἰς τὴν ἡχητικὴν σκιὰν τῆς κεφαλῆς. Ὅταν ἀκούωμεν καὶ διὰ τῶν δύο ὠτων, ἡ διευθύνσις ἀναγνωρίζεται, κυρίως, ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ χρόνου ἀφίξεως τοῦ κύματος εἰς τὰ δύο ὠτα.

§ 264. Ἀκουστότης τῶν ἤχων καὶ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὴν συχνότητα. Θεωρήσωμεν ἤχον δεδομένης συχνότητος καὶ τόσον μικρᾶς ἐντάσεως, ὥστε νὰ μὴ γίνεταί ἀντιληπτὸς διὰ τοῦ ὠτὸς. Ἄν, τώρα, ἀρχίσωμεν ν' αὐξάνωμεν τὴν ἔντασίν του, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἀπὸ τινος τιμῆς τῆς ἐντάσεως, ὁ ἤχος οὗτος ἀρχίζει νὰ γίνεταί ἀκουστός. Ἡ ἐλαχίστη αὕτη τιμὴ τῆς ἐντάσεως καλεῖται (ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὴν § 262) **κατώφλιον ἀκουστότητος**. Ἐὰν συνεχίσωμεν αὐξάνοντες τὴν ἔντασιν τοῦ ἤχου, οὗτος θὰ δημιουργῇ ὁλονὲν ἔντονωτέραν ἀκουστότητα, θὰ φθάσῃ δὲ στιγμὴ, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀκουστότης θὰ εἶναι τόσον μεγάλη ὥστε νὰ προκαλεῖται πόνος. Λέγομεν, τώρα, ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ἤχου ἔφθασε τὸ **ὄριον πόνου**. Ὅπως εὐρίσκεται πειραματικῶς, ἡ ἔντασις τόσον εἰς τὸ κατώφλιον ἀκουστότητος, ὅσον καὶ εἰς τὸ ὄριον πόνου, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συχνότητος—ὅπως παριστᾷ καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 394. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐαίσθησις τοῦ ὠτὸς εἶναι μεγίστη εἰς τὴν περιοχὴν τῶν 2000 Hz—εἰς τὴν περιοχὴν, δηλ., ταύτην τῶν συχνότητων ἀρκεῖ μικρά, σχετικῶς, ἔντασις διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὸς ὁ ἤχος. Ἐκατέρωθεν τῆς περιοχῆς ταύτης ἡ εὐαίσθησις εἶναι μικροτέρα. Εἰς τὰ 16 Hz καὶ εἰς τὰ 20 000 Hz παρατηροῦμεν ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ κατωφλίου ἀκουστότητος καὶ ἡ καμπύλη τοῦ ὁρίου πόνου τέμνονται. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ γίνουν ἀκουστοὶ οἱ βαρύτεροι ἢ οἱ ὀξύτεροι ἤχοι, πρέπει νὰ ἔχουν τοιαύτην ἔντασιν, ὥστε μόλις γίνονται ἀκουστοί, νὰ δημιουργοῦν καὶ τὸ αἶσθημα πόνου. Ὅταν ἡ συχνότης ἐνὸς ἤχου εἶναι μικροτέρα τῶν 16 Hz ἢ μεγαλυτέρα τῶν 20 000 Hz, ὁ ἤχος δὲν γίνεταί ἀντιληπτὸς ἀπὸ τὸ ἀνθρώπινον οὖς (*). Κατὰ ταῦτα, τὸ πεδίον τοῦ σχήματος 394 ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ἀκουστῆς περιοχῆς (ἡ ὁποία περιορίζεται ὑπὸ τῶν καμπυλῶν τοῦ κατωφλίου ἀκουστότητος καὶ τοῦ ὁρίου

(*) Ἐννοεῖται ὅτι ἡ περιοχὴ 16 ἕως 20000 Hz δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλους τοὺς παρατηρητάς, οὔτε κἂν ἡ αὐτὴ διὰ τὸν αὐτὸν παρατηρητὴν εἰς διαφόρους ἡλικίας.

πόνου), ἐνῶ κάτωθεν τῆς πρώτης καμπύλης καὶ ἄνωθεν τῆς δευτέρας ὑπάρχει ἡ περιοχὴ σιγῆς καὶ ἡ περιοχὴ πόνου.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 394 προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἔντασις ἔχει πρὸς τὴν μεγίστην λόγον $1:10^{13}$, τὸ οὗς, δηλ., εἶναι ὄργανον,



Σχ. 394. Διὰ νὰ εἶναι ἀκουστός εἰς ἦχος, πρέπει νὰ ἔχῃ ἔντασιν καὶ συχνότητα τοιαύτην, ὥστε νὰ ἐμπίπτῃ εἰς τὴν περιοχὴν, τὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῆς καμπύλης τοῦ κατωφλίου ἀκουστότητος καὶ τῆς καμπύλης τοῦ ὁρίου πόνου.

ἱκανὸν ν' ἀκούῃ ἤχους, τῶν ὁποίων ἡ ἔντασις κυμαίνεται μεταξὺ εὐρυτάτων ὁρίων. Εἶναι προφανές ὅτι τοῦτο δὲν θὰ ἦτο δυνατόν ἐάν, ἀντὶ τῆς λογαριθμικῆς σχέσεως τοῦ νόμου Weber · Fechner, ἡ ἀκουστότης ἦτο εὐθέως ἀνάλογος τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Ἔνεκα τῆς μεγάλης ταύτης περιοχῆς τῶν ἀκουστῶν ἐντάσεων μεταχειριζόμεθα εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 394 λογαριθμικὴν κλίμακα εἰς τὸν (κατακόρυφον) ἄξονα τῶν ἐντάσεων. Λογαριθμικὴν κλίμακα χρησιμοποιοῦμεν, ἐπίσης, καὶ εἰς τὸν (ὀριζόντιον) ἄξονα τῶν συχνότητων.

§ 265. Κλίμαξ ἀκουστότητος. Διὰ τὴν μέτρησιν ἀκουστοτήτων χρησιμοποιοῦμεν τὴν μονάδα 1 Phon , ἡ ὁποία ὁρίζεται κατωτέρω καὶ ἡ ὁποία λαμβάνεται τοιαύτη ὥστε, ἦχος, μὲν ὅλις ἀκουστός, νὰ προκαλῇ ἀκουστότητα μηδὲν Phon καὶ ἦχος τοιαύτης ἐντάσεως, ὥστε νὰ προκαλῇ πόνον, νὰ προκαλῇ ἀκουστότητα 130 Phon .

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δίδονται, εἰς μονάδας Phon , αἱ τιμαὶ διαφόρων ἀκουστοτήτων ἐκ τῶν παρουσιαζομένων εἰς περιπτώσεις τοῦ καθ' ἡμέραν βίου.

ΠΙΝΑΞ ΑΚΟΥΣΤΟΤΗΤΩΝ

Λεβητοποιεῖον (ὄριον πόνου)	130	Phon
Κινητὴρ ἀεροπλάνου εἰς ἀπόστασιν 4 m	120	»
Ἀεροτρίπانون	90	»
Θορυβώδης δρόμος	50	»
Ἦσυχος δρόμος	30	»
Ψίθυρος φύλλων	10	»
Κατώφλιον ἀκουστότητος	0	»

Ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 262 β, ἡχος, ἐντάσεως J , προκαλεῖ ἀκουστότητα A , ἣ ὅποια, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), εἶναι ἴση πρὸς

$$A = C \cdot \log \frac{J}{J_0}.$$

Ἄν τὴν σταθερὰν C θέσωμεν ἴσην πρὸς 10 καὶ περιορισθῶμεν εἰς ἡχον τῆς προτύπου συχνότητος 1000 Hz, ὀρίζομεν τὴν κλίμακα ἀκουστότητος εἰς μονάδας Phon. Ἦτοι εἶναι

$$A_{\text{Phon}} = 10 \cdot \log \frac{J}{J_0}. \quad (1)$$

Ὡὲν, ἡχος, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι δεκαπλασία τῆς ἐντάσεως τοῦ κατώφλιου, προκαλεῖ ἀκουστότητα 10 Phon.

Ἐάν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν $A = 1$, θὰ λάβωμεν

$$\log \frac{J}{J_0} = 0,1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{J}{J_0} = 1,259.$$

Ἀκουστότητα, λοιπόν, ἐνὸς Phon προκαλεῖ ἐκεῖνος ὁ ἡχος, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι 1,259 φορές μεγαλυτέρα τῆς ἐντάσεως τοῦ κατώφλιου.

Πειραματικῶς εὐρέθη ὅτι δύο ἡχοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκουστότητες, διαφέρουν κατὰ 1 Phon, μὲν εἶναι δυνατόν νὰ διακριθῶν.

Ἐκ τοῦ σχήματος 394 προκύπτει ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ἡχου εἰς τὸ κατώφλιον ἀκουστότητος εἶναι ἴση πρὸς 10^{-16} W/cm², εἰς δὲ τὸ ὄριον πόνου ἴση πρὸς 10^{-8} W/cm². Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ἡχου εἰς τὸ ὄριον πόνου εἶναι 10^{18} φορές μεγαλυτέρα τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ κατώφλιον ἀκουστότητος, ὅποτε ὁ τύπος (1) παρέχει διὰ τὸ ὄριον πόνου ἀκουστότητα 130 Phon. Κατὰ τὸν νόμον Weber-Fechner, ἡ ἀκουστότης εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ ἐρεθίσματος· θὰ πρέπει, λοιπόν, εἰς τὴν λογαριθμικὴν κλίμακα τοῦ σχήματος 394 ἡχοι, διαφέροντες κατὰ σταθερὰς ἀκουστότητας (π.χ. 20 Phon), νὰ παρίστανται διὰ σημείων, ἴσον μεταξύ των ἀπεχόντων.

Ὁ δοθεὶς ὁρισμὸς τῆς μονάδος Phon ἰσχύει διὰ τὴν πρότυπον συχνότητα 1000 Hz. Δι' ἡχους ἄλλων συχνότητων ἡ ἀκουστότης, εἰς Phon, ὀρίζεται διὰ συγκρίσεως πρὸς ἡχον τῆς προτύπου συχνότητος 1000 Hz καὶ ὁ ὁποῖος παράγει τὴν αὐτὴν ἀκουστότητα, τὴν ὁποίαν παράγει ὁ θεωρούμενος ἡχος. Ὡὲν εὐρέθη ὅτι ἡχος, συχνότητος 125 Hz καὶ ἐντάσεως 10^{-10} W/cm² προκαλεῖ τὴν αὐτὴν ἀκουστότητα, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ ἡχος, συχνότητος 1000 Hz καὶ ἐντάσεως 10^{-12} W/cm², δηλ., παράγει ἀκουστότητα 40 Phon (βλ. καὶ σχῆμα 394). Κατόπιν πειραμάτων εὐρέθησαν αἱ ἐντάσεις,

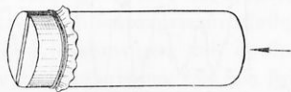
αἱ προκαλοῦσαι τὴν αὐτὴν ἀκουστότητα, δι' ὅλας τὰς ἀκουστάς συχνότητες. Αὗται ἀποδίδονται εἰς τὸ σχῆμα 394 ὑπὸ μορφὴν καμπυλῶν ἴσης ἀκουστότητος.

§ 266. Κλίμαξ ἀπολύτου ἐντάσεως τῶν ἤχων. Εἰς τὴν § 236 ὁρίσθη ἡ ἔντασις τοῦ κύματος ὡς πηλίκον ἰσχύος δι' ἐμβαδοῦ, δυναμένη νὰ μετρηθῇ, π.χ., εἰς W/cm^2 . Κατὰ τὸν τύπον, ὅμως,

$$J = \frac{I}{2\rho v} \cdot (A\rho_0)^2 \quad (\S 252)$$

εἰς ἐκάστην τιμὴν τῆς ἐντάσεως J ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη τιμὴ τοῦ πλάτους $A\rho_0$ τῆς μεταβολῆς τῆς πίεσεως εἰς τὸν ἀέρα. Τοῦτο, ἀκριβῶς, μᾶς ἐπέτρεψε νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα 394 ἀριστερῇ μὲν ἄξονα ἐντάσεων, δεξιᾷ δὲ ἄξονα «πλάτους τῆς πίεσεως». Εἰς τὰς Ἑνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς χρησιμοποιεῖται καὶ ἄλλη μέθοδος καθορισμοῦ τῆς ἐντάσεως ἐνὸς ἤχου, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς σύγκρισιν τῆς ἐντάσεως τοῦ θεωρουμένου ἤχου πρὸς τὴν ἔντασιν $10^{-10} W/cm^2$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ἀκουστικὴν σιᾶθμιν. Τὸ πλάτος τῆς πίεσεως, τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς τὴν ἀκουστικὴν σιᾶθμιν, εἶναι $2,04 \cdot 10^{-4} dyn/cm^2$. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συγκρίσεως ἐκφράζεται εἰς *decibel* (§ 240) (*). Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην, ἡχος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἔντασιν $10^{-14} W/cm^2$, θὰ ὑπολογίζεται εἰς 20 db. Ἐάν, ἐπὶ πλέον, πρόκειται περὶ ἤχου τῆς προτύπου συχνότητος 1000 Hz, οὗτος—κατὰ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 394—θὰ παράγῃ ἀκουστότητα 20 Phon. Παρατηροῦμεν ὅτι, προκειμένου περὶ τῆς προτύπου συχνότητος 1000 Hz, ἡ τιμὴ τῆς ἀκουστότητος, ἐκφραζομένη εἰς Phon, συμπίπτει ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν τιμὴν τῆς ἀπολύτου ἐντάσεως, ἐκφραζομένην εἰς db. Τοῦτο εἶναι συμπτωματικὸν καὶ ἰσχύει μόνον διὰ τὴν πρότυπον συχνότητα 1000 Hz, ἐνῶ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ δι' οἰανδήποτε ἄλλην συχνότητα. Οὕτω, (κατὰ τὸ σχῆμα 394) ἡχος, συχνότητος 125 Hz, διὰ νὰ δημιουργήσῃ ἀκουστότητα 40 Phon, πρέπει νὰ ἔχῃ ἔντασιν 60 db ($10^{-10} W/cm^2$).

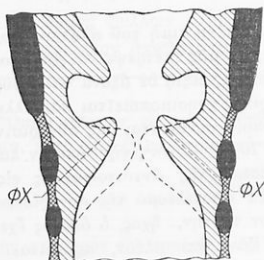
§ 267. Ἀνθρωπίνη φωνή. Ἐάν καλύψωμεν τὸ στόμιον ἐνὸς σωλῆνος διὰ δύο μεμβρανῶν, αἱ ὁποῖαι, ὅμως, ν' ἀφίουν εἰς τὸ κέντρον μίαν λεπτὴν σχισμὴν (σχ. 395) καὶ φυσήσωμεν ἄερα, αὗται θὰ ἀρχίσουν νὰ πᾶλλωνται, τὸ δὲ πλάτος τῆς σχισμῆς θὰ μεταβάλλεται περιοδικῶς, ἐνῶ ταυτοχρόνως, λόγφ τῶν περιοδικῶν μεταβολῶν τῆς πίεσεως τοῦ ἀέρος, θὰ δημιουργηθῇ εἰς σύνθετος ἡχος. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἀκριβῶς, ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ παραγωγή τῆς ἀνθρωπίνης φωνῆς: Ὁ λάρυγξ φέρει πτυχάς—τὰς καλουμένας *φωνητικὰς χορδὰς* ΦΧ (σχ. 396 καὶ 397)—αἱ ὁποῖαι, τεινόμεναι κατὰ τὴν ὀμίλιαν δι' εἰδικῶν μυῶν, ἀφίουν μεταξύ των λεπτὴν σχισμὴν. Ὁ ἐκ τῶν πνευμόνων προερχόμενος ἀήρ θέτει τὰς φωνητικὰς χορδὰς εἰς ταλάντωσιν καὶ παρὰγει, οὕτω, τὴν φωνήν, ἡ ὁποία εἶναι εἰς σύν-



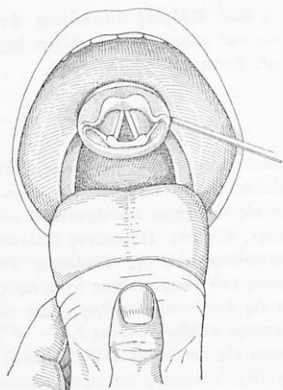
Σχ. 395. Ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ λάρυγγος.

(*) Ἐνῶ τὸ *decibel* ὁρίσθη διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν ἐντάσεων δύο κυμάτων, ἐνταῦθα χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀπόλυτον μέτρησιν τῆς ἐντάσεως ἐνὸς ἤχου.

θετος ἦχος (σχ. 398) μὲ μεγάλον ἀριθμὸν ἀρμονικῶν (σχ. 399). Ἡ συχ-
της τοῦ θεμελιώδους ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ τῶν διαστάσεων τῶν φωνητικῶν
χορδῶν καί, ἐν μέρει, ἐκ τῆς τάσεως
αὐτῶν. Ἀφ' ἐτέρου, ἡ χοροὶ ἐξαρτᾶ-
ται, κυρίως, ἐκ τῶν διαστάσεων τοῦ
φάρυγγος καὶ τῆς στοματικῆς καὶ ρι-



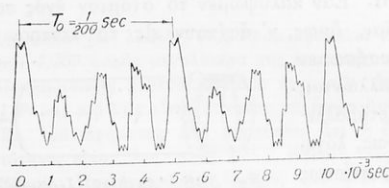
Σχ. 396. Σχηματικὴ παράστασις τοῦ λάρυγγος κατὰ τὴν ἀναπνοήν. Ἐστὶν γνηθὺ γραμμὴ: Θέσις τῶν φωνητικῶν χορδῶν κατὰ τὴν ὁμιλίαν.



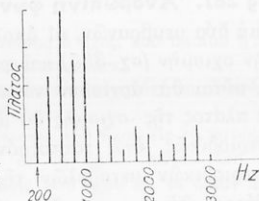
Σχ. 367. Λάρυγξ, παρατηρούμενος διὰ κατόπτρου (λαρυγγοσκοπίον). Θέσις τῶν φωνητικῶν χορδῶν κατὰ τὴν ἀναπνοήν.

νικῆς κοιλότητος, αἱ ὁποῖαι δροῦν ὡς ἀντηχεῖον, ἐνισχύονται ὀρισμέναις ἀρ-
μονικᾶς περισσότερον τῶν ἄλλων.

Ἡ παιδικὴ καὶ ἡ γυναικεῖα φωνὴ ἀποτελεῖται ἐκ θεμελιωδῶν μὲ ὑψη-



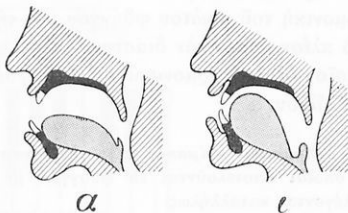
Σχ. 398. Τὸ φωνήεν α, ἐκφωνούμενον μὲ θεμελιώδη συχνότητα 200 Hz.



Σχ. 399. Φάσμα συχνοτήτων τοῦ ἤχου τοῦ προηγουμένου σχήματος.

λάς, σχετικῶς, συχνότητος, καθόσον αἱ διαστάσεις τῶν χορδῶν εἶναι τοιαῦ-
ται ὥστε νὰ σχηματίζεται σχισμὴ μικροῦ μήκους, ἐνῶ, τοῦναντίον, εἰς τὴν
ἀνδρικήν φωνὴν ὁ θεμελιώδης ἔχει μικράν, σχετικῶς, συχνότητα. Διὰ μετα-
βολῆς τῆς τάσεως τῶν φωνητικῶν χορδῶν, μεταβάλλεται, ὡς ἐλέχθη, ἡ συχ-
της τοῦ θεμελιώδους, ἐνῶ διὰ μεταβολῆς τῶν διαστάσεων τῆς στοματικῆς
κοιλότητος (διὰ καταλλήλου θέσεως τῆς γλώσσης καὶ τῆς κάτω σιαγόνας -
σχ. 400) μεταβάλλεται ἡ χοροὶ.

Διὰ τὴν πιστὴν μετάδοσιν τῆς ἀνθρωπίνης φωνῆς δι' ἡλεκτρικῶν μεθόδων εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν τὰς συχνότητας τῶν ἀνωτέρων ἁρμονικῶν. Τὰ *φωνήεντα*, ἀναλυόμενα κατὰ Fourier, παρέχουν φάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχουν ἁρμονικαὶ πολὺ μεγάλης συχνότητος. Οὕτω, εἰς τὸ φωνήεν α, ἐκφωνούμενον μεθεμιλιώδη συχνότητα 200 Hz, ἡ μεγαλύτερα συχνότης τῶν ἁρμονικῶν φθάνει τὰ 3000 Hz (σχ. 392 καὶ σχ. 399). Ἀντιθέτως, ὠρισμένα σύμφωνα (θ, σ, ζ, ...) ἀποτελοῦνται, κυρίως, ἐξ ἁρμονικῶν εἰς τὴν περιοχὴν τῶν 6000 Hz. Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται διατί, διὰ τοῦ τηλεφώνου, τὰ φωνήεντα μεταδίδονται εὐκρινέστερον ἢ τὰ σύμφωνα (*).



Σχ. 400. Διαμόρφωσις τῆς στοματικῆς κοιλότητος ἀνθρώπου, ἄδοντος τὰ φωνήεντα α καὶ ε μετὰ τὴν αὐτὴν θεμελιώδη συχνότητα.

§ 268. Φυσική θεωρία της Μουσικής - Μουσικά διαστήματα.

Ἐὰν ἀκούσωμεν συγχρόνως δύο ἤχους διαφόρων συχνότητων, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὑποκειμενικὸν συναίσθημα τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν συχνότητων τῶν δύο ἤχων, ἀλλ' ἐκ τοῦ πηλίκου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον καλεῖται (μουσικὸν) **διάστημα**. Ἐπὶ πλέον εὗρίσκεται ὅτι τὸ ὑποκειμενικὸν τοῦτο συναίσθημα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀπολύτων συχνότητων τῶν δύο ἤχων, εἶναι δηλ., τὸ αὐτὸ δι' οἰαδήποτε ζεύγη ἤχων, ἀρκεῖ οἱ ἤχοι οὗτοι νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ διάστημα. Τοῦτο ἀποδεικνύεται πειραματικῶς διὰ σειρῆνος, ὁμοίας πρὸς τὴν τοῦ σχήματος 372, ἀλλὰ μὲν πολλὰς σειρὰς ὁπῶν. Ἐὰν ἀκούσωμεν συγχρόνως τοὺς ἤχους, τοὺς παραγομένους ἐκ διαφόρων σειρῶν ὁπῶν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὑποκειμενικὸν αἶσθημα τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στοφῶν τῆς σειρῆνος, διότι τὸ πηλίκον τῶν συχνότητων τῶν δύο ἤχων παραμένει σταθερὸν (καὶ ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁπῶν τῶν δύο σειρῶν).

Ἀρμονία. Εἰς τὴν Μουσικὴν ὀρίζομεν ὡς **φθόγγον** ἓνα σύνθετον ἤχον, ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς ἰσχυροῦ θεμελιώδους καὶ ἐξ ἀνωτέρων ἁρμονικῶν. Τὸ ὕψος ἑνὸς φθόγγου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συχνότητος τοῦ θεμελιώδους.

Ἐὰν ἀκούσωμεν συγχρόνως ἢ διαδοχικῶς δύο φθόγγους, τὸ παραγόμενον αἶσθημα εἶναι εἴτε εὐάρεστον (*ἁρμονία*), εἴτε δυσάρεστον (*παρᾶφωνία*), ἀναλόγως τοῦ διαστήματος. Ὡς εὗρεθῇ ὑπὸ τοῦ Helmholtz—εἰς τὸν ὁποῖον κυρίως ὀφείλεται ἡ φυσικὴ θεωρία τῆς Μουσικῆς—ἔχομεν ἁρμονίαν, ὅταν πολλοὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρων ἁρμονικῶν τοῦ ἑνὸς φθόγγου συμπίπτουν μετὰ ἄλλους ἀνωτέρους ἁρμονικοὺς τοῦ δευτέρου φθόγγου. Τοῦτο, προφανῶς, συμ-

(*) Βλ. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, § 233.

βαίνει, όταν τὸ διάστημα εἶναι ἴσον πρὸς κλάσμα μικρῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οὕτω ἁρμονικὸν εἶναι τὸ διάστημα 3:2, διότι πολλὰ ἀνώτερα ἁρμονικὰ τοῦ πρώτου φθόγγου συμπίπτουν μὲ ἁρμονικὰς τοῦ δευτέρου (π.χ., ἡ τρίτη ἁρμονικὴ τοῦ πρώτου φθόγγου μὲ τὴν δευτέραν τοῦ δευτέρου φθόγγου). Τὸ πλεόν ἁρμονικὸν διάστημα εἶναι, προφανῶς, τὸ διάστημα 2:1, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλοι οἱ ἁρμονικοὶ τοῦ ἐνὸς φθόγγου συμπίπτουν μὲ τοὺς ἁρμονικοὺς τοῦ ἄλλου.

Μουσικαὶ κλίμακες. Εἰς τὴν Μουσικὴν χρησιμοποιοῦνται *μουσικαὶ κλίμακες*, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἐκ φθόγγων μὲ προκαθορισμένα διαστήματα, τὰ ὅποια ἐκλέγονται καταλλήλως.

Διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς κλίμακος, ἐκλέγεται εἰς ἀρχικὸς φθόγγος (πρώτη βαθμὴς) καί, ἀκολουθῶς, οἱ ὑπόλοιποι, κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ παρουσιάξουν ὀρισμένα διαστήματα ὡς πρὸς αὐτόν. Εἰς ὅλας τὰς κλίμακας ἐκλέγεται ἐν διάστημα—τὸ διάστημα ὀγδόης—ἴσον πρὸς 2:1. Μεταξὺ τῶν δύο οὕτω καθοριζομένων φθόγγων ὑπάρχουν οἱ ἄλλοι, διὰ τοὺς ὁποῖους τὸ διάστημα ἔχει τιμὰς μεταξὺ 1:1 καὶ 2:1.

Ἀναλόγως τῆς κλίμακος, τὰ διαστήματα ἐκλέγονται κατὰ διάφορον, ἐκάστοτε, τρόπον. Ἐκ τῶν διαφόρων κλιμάκων, αἱ ὁποῖαι κατὰ καιροὺς ἐχρησιμοποιήθησαν (*). θὰ περιορισθῶμεν ἐνταῦθα εἰς τὴν ἐπικρατήσαν εἰς τὴν σύγχρονον μουσικὴν *συγκεκριμένην κλίμακα*. Εἰς ταύτην τὸ διάστημα τῆς ὀγδόης χωρίζεται εἰς 12 ἴσα διαστήματα—τὰ *συγκεκριμένα ἡμιτόνια*—καθοριζομένων, οὕτω, 12 φθόγγων. Τὸ διάστημα τοῦ ἡμιτονίου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ δωδέκατον τοῦ διαστήματος τῆς ὀγδόης,

δηλ., ἴσον πρὸς $\sqrt[12]{2} = 1,0594$. Ἐκ τῶν οὕτω καθορισθέντων 12 φθόγγων ἐκλέγονται, διὰ λόγους ἱστορικοὺς καὶ αἰσθητικoὺς, ὁ πρῶτος, ὁ τρίτος, ὁ πέμπτος, ὁ ἕκτος, ὁ ὀγδοος, ὁ δέκατος καὶ ὁ δωδέκατος, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν καλουμένην *μείζονα συγκεκριμένην κλίμακα*. Οἱ ἑπτὰ ὅστοι φθόγγοι φέρουν τὰς ὀνομασίας

do, re, mi, fa, sol, la, si.

Κατόπιν τῆς ἐκλογῆς ταύτης, τὰ διαστήματα τῶν διαφόρων φθόγγων ἀπὸ τὸν πρῶτον (τὸ *do*) θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2, \left(\sqrt[12]{2}\right)^4, \left(\sqrt[12]{2}\right)^5, \left(\sqrt[12]{2}\right)^7, \left(\sqrt[12]{2}\right)^9, \left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$$

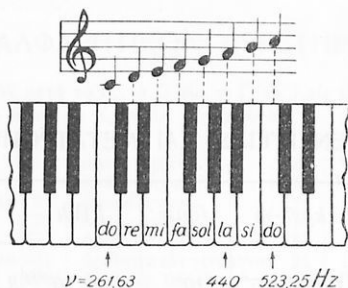
καὶ καλοῦνται *διαστήματα δευτέρας, τρίτης . . . ἑβδόμης*, κλείει δὲ ἡ κλίμαξ μὲ τὸ ἄνω *do* - τὸν κατὰ ὀγδόην ὑψηλότερον τῆς 1ης βαθμίδος φθόγγον.

Ὁ ὀγδοος φθόγγος (ἄνω *do*) ἔχει διάστημα ἀπὸ τὸ πρῶτον *do*, ἴσον πρὸς $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$ - διάστημα, τὸ ὁποῖον εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐκλήθη διάστημα ὀγδόης.

Ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 401, εἰς τὸ κλειδοκύμβαλον οἱ ἑπτὰ φθόγγοι τῆς κλίμακος *do* παράγονται διὰ τῶν λευκῶν πλήκτρων, ἐνῶ διὰ τῶν μαύρων πλήκτρων παράγονται φθόγγοι κατὰ ἐν ἡμιτόνιον ὑψηλότεροι ἢ χαμηλότεροι τοῦ φθόγγου τοῦ ἀμέσως γειτονικοῦ λευκοῦ πλήκτρου. Ὁ κατὰ ἐν ἡμιτόνιον ὑψηλότερος φθόγγος τινὸς φθόγγος, π.χ. τοῦ *sol*, ὀνομάζεται *sol δίσεις*, ὁ δὲ κατὰ ἐν ἡμιτόνιον χαμηλότερος τοῦ *sol* φθόγγος ὀνομάζεται *sol ὕφσεις*. Εἰς τὴν συγκεκριμένην κλίμακα ὁ φθόγγος *sol* δίσεις εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν φθόγγον *la* ὕφσεις, ὅπως ὁ φθόγγος *si* δίσεις εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν φθόγγον *do*. Οἱ φθόγγοι ἐξακολουθοῦν ἐκατέρωθεν τῆς

(*) Πυθαγόρειος κλίμαξ, φυσικὴ κλίμαξ, χρωματικὴ κλίμαξ.

πρώτης και της όγδοης με τὰ αὐτὰ ὀνόματα, ἀλλὰ με συχνότητας 2, 4, 8, 16 φορές μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας τῶν συχνότητων τῶν φθόγγων τῆς μεσαίας ὀγδός.



Σχ. 401. Ἡ μεσαία ὀγδὴ ἐπὶ τῶν πλήκτρων τοῦ κλειδοκυμβάλου.

Αἱ συχνότητες τῶν φθόγγων αὐτῶν εἶναι, ἐντελῶς, καθωρισμέναι, ἐὰν ὀρίσωμεν τὴν συχνότητα ἑνὸς οἰουδήποτε φθόγγου. Ὡς τοιοῦτος ἐκλέγεται ὁ φθόγγος *la*, εἰς τὸν ὅποιον δίδεται ἡ συχνότης 440 Hz (*).

Ἐπειδὴ τὰ διαστήματα τῆς συγκεκριμένης κλίμακος εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καί, συνεπῶς, δὲν εἶναι πηλικά ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἡ κλίμαξ αὕτη εἶναι παράφωνος (**), χωρὶς, ὅμως, καὶ νὰ γίνεται τοῦτο ἀντιληπτὸν ἀπὸ μὴ ἐξησκημένον οὖς. Οὕτω

τὸ διάστημα τῆς πέμπτης εἶναι $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1,4983$, τὸ ὅποιον, ὅμως, εἶναι πολὺ πλησίον τῆς τιμῆς $3:2 = 1,50$ καί, ὥς ἐκ τούτου, ἡ παραφωνία δὲν γίνεται ἀντιληπτή.

(*) Διεθνὲς συνέδριον, 1939.

(**) Ἡ συγκεκριμένη κλίμαξ, μολονότι παράφωνος, πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀναγκαῖον κανὼν, διότι, ἂνεν αὐτῆς, ἡ ἐξέλιξις τῆς εὐρωπαϊκῆς μουσικῆς θὰ ἦτο ἀδύνατος.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΥΤΩΝ

	<i>erg</i>	<i>kgr[*]·m</i>	<i>Joule</i>	<i>kWh</i>	<i>cal</i>	<i>Btu</i>
<i>1 erg</i>	<i>1</i>	$1,019 \cdot 10^{-8}$	10^{-7}	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$9,48 \cdot 10^{-11}$
<i>1 kgr[*]·m</i>	$9,81 \cdot 10^7$	<i>1</i>	<i>9,81</i>	$2,72 \cdot 10^{-6}$	<i>2,343</i>	$9,3 \cdot 10^{-8}$
<i>1 Joule</i>	10^7	<i>0,102</i>	<i>1</i>	$2,78 \cdot 10^{-7}$	<i>0,2389</i>	$9,48 \cdot 10^{-4}$
<i>1 kWh</i>	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,67 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^6$	<i>1</i>	$8,6 \cdot 10^5$	<i>3413</i>
<i>1 cal</i>	$4,186 \cdot 10^7$	<i>0,427</i>	<i>4,186</i>	$1,162 \cdot 10^{-6}$	<i>1</i>	$3,97 \cdot 10^{-8}$
<i>1 Btu</i>	$1,055 \cdot 10^{10}$	<i>10,756</i>	<i>1055</i>	$2,93 \cdot 10^{-4}$	<i>252</i>	<i>1</i>

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΝ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

[Θὰ ξητηθῇ τὸ V, W μετὰ τὸ B, τὸ G εἰς τὸ Γ, τὸ J εἰς τὸ Ι, τὸ C εἰς τὸ Κ, τὸ Q μετὰ τὸ Π, τὸ H εἰς τὸ Χ, τὸ U, Y εἰς τὸ Υ].

Α

Ἀδιάφορος ἰσορροπία 95
 ἀεικίνητον 70
 ἀεραντία 277
 ἀεροδυναμικὸν σχῆμα 251
 ἀερόστατα 226
 ἀκίνητος πολιτικὸς κώ-
 νος 108
 ἀκουστότης 337
 ἀκρίβεια (ξυγοῦ) . . . 126
 ἀκτίδιον 7
 ἀκτίς 290
 ἀληγεῖς (ἀνεμοί) . . . 199
 ἀμείωτος ταλάντωσις 134
 ἀναγωγή δυνάμεως ὡς
 πρὸς σημεῖον 88
 ἀνάγκαις 296
 ἀνάγκουσις 116
 ἀνάλυσις κατὰ Fourier 143
 ἀναλυτής 305
 ἀνεμοστῆρ 277
 ἀνηγμένη μήκυνσις . . 162
 ἀνηγμένον μήκος . . . 155
 ἀνοικτὸν μανόμετρον . 274
 ἀνταληγεῖς (ἀνεμοί) . 199
 ἀντηχείον 326
 ἀντίστασις ἐκ κυμάτων 253
 — πίεσεως 253
 — τριβῆς 253
 ἀντιστρεπτὸν ἔκκρεμῆς 156
 ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕ-
 δατος 278
 — — — ὕδρα-
 τῶν 278
 ἄνυσμα 2
 ἀνωματικὸν ἄθροισμα 22
 — γινόμενον 24
 — μέγεθος 2
 — πεδίου 186
 ἄνωσις 207
 — δυναμικῇ 259
 ἀνωστικὸς στρόβιλος 263
 ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας 52
 — διατηρήσεως
 τῆς ἐνεργείας 69
 — τῆς δράσεως
 καὶ ἀντιδράσεως . . 47
 ἄξων 73
 — στροφορμῆς . . . 106
 ἀπεριοδικὴ ταλάντωσις 135

ἀπλὴ μηχανή 122
 ἀπλοῦς ἦχος 321
 ἀπομάκρυνσις 128
 ἀραιόμετρα 210
 ἀραίωμα 285
 ἀριθμητικὸν γινόμενον 24
 ἀριθμὸς Mach 268
 — ὀλισθήσεως . . . 265
 — Reynolds 248, 250
 ἁρμονικὴ ταλάντωσις 129
 ἁρμονικὸν κῆμα 283
 ἀρχὴ Ἀρχιμήδους 207, 226
 — ἐπαλληλίας 41
 — Ἡρώων - Fer-
 mat 301
 — Pascal 204, 222
 — συγκοινωνούν-
 των δοχείων 206
 — Huygens 295
 Ἀρχιμήδους ἀρχὴ 207, 226
 ἀσταθὴς ἰσορροπία . . 95
 — πλεῖσις 187
 ἀστροβόλον πεδίου . . 257
 ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 226
 αὐλαξ 246, 247

Β

Βαθμὶς ταχύτητος . . 241
 βαθμὸς 7
 — Baume 211
 — ἐλευθερίας . . . 26, 75
 — Engler 240
 — σταθερότητος 96, 105
 βαλλιστικὸν ἔκκρεμῆς 121
 βαρόμετρα 228
 βαρομετρικὸς τύπος . . 222
 βάρος 89, 185
 βάτ 65
 βέλγηκες 43
 βέλος κάμψεως . . . 165
 βερνιέρος 9
 — κυκλικὸς 13
 βεντουρίμετρον . . . 233
 βῆμα κοιλίου 124
 βλητικὴ τροχιά . . . 44
 Baume - βαθμὸς . . . 211
 Bel 308
 Bernoulli - νόμος . . . 231
 Bunsen - λύχνος . . . 234
 Watt (μονὸς ἰσχύος) . 65

Watt - ρυθμιστὴς . . . 195
 Van der Waals - δυνά-
 μεις 212

Γ

Γεωμετρίαι 112
 γραμμάριον 5
 γραμμικὴ ἁρμονικὴ τα-
 λάντωσις 129
 γραμμοτόμον 6
 γραμμομόριον 6
 γραφικὴ παράστασις
 φαινομένου 15
 γυροσκοπικὴ πυξίς . . 110
 γωνία διατήσεως . . . 167
 — ὀλισθήσεως . . . 265
 — προσβολῆς . . . 265
 — στρέψεως 166
 — συνεπαφῆς 220
 — τριβῆς 177
 γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις . 32
 — ταχύτης 31
 — — μεταπτώ-
 σεως 109
 γωνιώμετρον ἐπαφῆς . 13

Δ

d'Alembert - δύναμις 190
 δείκτης διαθλάσεως . 298
 decibel 308
 δεσμός 292
 διάγραμμα Lilienthal 265
 διάθλασις 297
 διακροτήματα 141
 διάμνηες κῆμα 284
 διαπασών 322
 διασκεδασμός 289
 διαστάσεις φυσικοῦ
 μεγέθους 4
 διάστημα (μουσικόν) . 345
 διαστημιόμετρον . . . 8
 διατηρητικὴ δύναμις . 167
 — τάσις 167
 διαφορά δυναμικοῦ . 188
 — φάσεως 129
 διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ
 κύματος 288
 διαφορικὸν 20
 διπλὴ ξύγισις 126

Doppler · Fizeau · φαινόμενον	301
δυνάμεις συναφείας	212
— Van der Waals	212
δυναμική ἄνωσις	259
— ἐνέργεια	66
— πίσεις	231
δυναμικὸν	188
δύναμις	45
— ἀδρανείας	192
— Coriolis	196
— d'Alembert	190
— ἐπαναφορᾶς	131
δυναμόμετρον	48
δύνη	53

E

Ἐγκάρσιον κύμα	283
εἰδικὸν βάρος	91
ἐκκρεμῆς	133
ἐκλειπτική	112
ἐκλέπτυνσις	163
ἐλαστική ἀδράνεια	170
— παραμόρφωσις	161
ἐλευθερά ἀρμονική τάλαντωσις	132
ἐλεύθεροι ἄξονες	103
ἐλεύθερον ἄνυσμα	2
ἐλιξ	266
ἐλκυσμὸς	162
ἐνέργεια	66
ἐντασις κύματος	305
— τοῦ πεδίου βαρύτητος	187
— ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος	337
ἐξασθένεισις	306
ἐξηναγκασμένη ταλάντωσις	137
ἐπιβατική ἀκτίς	2
ἐπιβράδυνσις	30
ἐπίπεδον κύμα	290
ἐπιτάχυνσις	29
— βαρύτητος	186
— γωνιακή	32
— ἐπιτρόχιος	30
— κεντρομόλος	30
ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις	30
ἐπιφανειακή ροπή ἁδρανείας	165
— τάσις	214
ἐργον	65
ἐργον	63
ἐσωτερικαὶ δυνάμεις	114
ἐσωτερική τριβὴ	240
ἔτος φωτὸς	5
εὐαισθησία (ξυγοῦ)	125
εὐθραυστον ὕλικόν	164
εὐσταθὴς ἰσορροπία	94
ἐφαπτομένη (γωνίας)	17
ἐφαρμοστὸν ἄνυσμα	2

Z

Zeugos δυνάμεων	86
ζυγὸς	124

H

Ἡλεκτρονικὸν βόλτ	68
ἡμίτονον	16
ἡχητικοὶ σωλήνες	324
ἡχογράφησις	327
ἡχος	315, 321
ἡχῶ	331

Θ

Θεμελιώδης μονάς	2
— νόμος τῆς Μηχανικῆς	51
— τῆς στροφικῆς κινήσεως	97
— τῆς Ὑδροστατικῆς	204
θεοδόλιχος	13
θερμὴς	66
θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας	69
— τῆς ὁρμῆς	116
— τῆς στροφορμῆς	118
— τῶν ἐμβαδῶν	159
— τοῦ κέντρου παρὰ ἀλλήλων δυνάμεων	86
— κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους	102
— τοῦ κέντρου βάρους ἐνδὸς συστήματος	115
— περιστροφῆς περὶ τὸ κέντρον βάρους	102
— τῶν ροπῶν	83
— Sreiner	78
— Torricelli	235
θεωρία Koch · Gilde-meister	336
— τοῦ πεδίου	189
θλίψις	163
θόρυβος	321

I

Ἰδανικὸν ρευστὸν 201, 229	
ἰδιοπερίοδος	132
ἰδιοσυχνότης	132
ἰσοδόμετρον Ostwald	271
ἵππος	66
ἰσοφασιική ἐπιφάνεια	290
ἰσχύς	64
Joule (μονάς)	65

K

Καθαρὸς ἀριθμὸς	4
---------------------------	---

κάθετος δύναιμις	172
κάμψις	165
κατευθύνουσα δύναιμις	131
— ροπή	151
κατώφλιον ἀκουστότητας	338
κεκλιμένον ἐπίπεδον	122
κεντρική κίνησις	157
— κρούσις	120
κεντρομόλος δύναιμις	58
— ἐπιτάχυνσις	30
κέντρον αἰωρήσεως	155
— ἀνώσεως	208
— βάρους	89
— ἐπιταχύνσεως	157
— παραλλήλων δυνάμεων	86
Kepler · νόμοι	160
κιλοβάτ	65
κιλοβατόριον	65
κινητική ἐνέργεια	68
κινούμενος πολικὸς κῶνος	108
κλειστὸν μανόμετρον	275
κλίμαξ ἀκουστότητας	342
— Brinell	171
— Vickers	171
— μουσική	346
— Mohs	170
— Rockwell	171
κλίσις (καμπύλης)	12
κλόνησις	107
κοιλία	292
κόμβος	29
κοχλίας	124
κρίσιμος ἀριθμὸς Reynolds	248
— ταχύτης	248
κροσσὸς	301
κρότος	321
κρούσις	119
κρουστικὰ κύματα	269
κυκλική ἰδιοσυχνότης	132
— συχνότης	129
κυκλικὸς βερνιέρος	13
κύκλος ἀνά δευτερόλεπτον	38
κυκλοφορία	257
κυκλὼν	199
κύμα	283
— ἐπιφανείας	313
— Mach	269
κύριοι ἄξονες ἀδρανείας	79
κώδων	325
κῶνος κλονήσεως	108
Cavendish · μέθοδος	185
Coriolis · δύναιμις	196
Corti · ὄργανον	336

Λ

Lilienthal · διάγραμμα	265
λογαριθμική μείωσις	136

λόγος ἀποσβέσεως . . .	135
λυγισμός	166
λύχνος Bunsen	234

M

MacLeod - μονόμετρον	275
Mach - ἀριθμός	268
Magnus - φαινόμενον	259
μάζα	51
μαθηματικὸν ἔκκρεμὲς	133
μανόμετρον	274
— ἰονισμοῦ	277
— MacLeod	275
— Pirani	277
μέγαβατ	65
μεγάκλυκος	39
μέθοδος τοῦ πολυγώνου	22
μεῖζων συγκεκαρμένη κλίμαξ	346
μεμβράνη	313
μεριστής	281
μέση ταχύτης	27
μετάκεντρον	209
μεταλλικὸν μονόμετρον	274
μετάπτωσης	109
μεταφορικὴ κίνησις	72
μετρίχησις	331
μέτρον διαμήσεως	167
— ἐλαστικότητος	162
— ὄγκου	169
— στρέψεως	167
— Young	162
μετωπικὴ ἐπιφάνεια	251
μῆκος κύματος	287
μηχανή	122
μηχανικὴ ἐνέργεια	69
— ὁμοιότης	249
μικροBar	203
μικρόμετρον	9
μικρόν (μονὰς πίεσεως)	203
μόνιμος παραμόρφωσις	161
μονόμετρον μέγεθος	2
μουσικὴ κλίμαξ	346
μουσικὸν διάστημα	345
μογλὸς	123
Mohs - κλίμαξ	170

N

Ναυτικὸν μίλιον	5
Newton (μονὰς δυνάμεως)	53
νόμοι τοῦ Kepler	160
νόμος τοῦ Bernoulli	231
— Νεύτωνος	184
— Ohm	340
— Poiseuille	241
— συνεχείας	231
— Hooke	161

O

Ὀλισθαῖνον ἄνυσμα	2
ὁμαδικὴ ταχύτης	289
ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις	32
— κυκλικὴ κίνησις	37
ὁμαλὴς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις	33
ὁμάς κυμάτων	289
ὄργανον τοῦ Corti	336
ὄρικόν στρώμα	245
ὄριον ἐλαστικότητος	163
— θραύσεως	163
— πόνου	340
ὄρη	60
οὐδέτερα Ις	165
οὖς	335
Ohm - νόμος	340

Π

Παραβολὴ ἀσφαλείας	44
παράγωγος	20
— μονὰς	3
παροχή	230
Parsec	5
Pascal - ἀρχή	204, 222
πεδίον	186
— ἀνυσματικόν	186
— ἀστροβίλον	187
— βαρύτητος	187
— δυνάμεων	186
— ροῆς	228
— στροβίλόν	187
— ταχυτήτων	186, 229
πείραμα Torricelli	226
Pelton-ὕδροστροβίλος	280
περίθλασις	298
περιοδικὴ κίνησις	128
περίοδος	38, 128
περιστροφικὴ ἀντλία	277
περισμέτρον	212
πίεσις	201
Pirani - μονόμετρον	277
πλάξ	313
πλάτος (κύματος)	286
— (ταλαντώσεως)	128
πλευρικὸς στρόβιλος	263
πλευσίς	209
Poise	240
Poiseuille-νόμος	241
πολωμένον κύμα	304
πόλωσις	304
πολωτής	304
πραγματικὸν ρευστόν	229
πρότυπον μέτρον	4
πτέρυξ ἀεροπλάνου	261
πυκνόμετρα	210
πυκνότης	91
πύκνωμα	285
πύραυλος	117, 267

Phon	341
Quincke-συσκευή	328

P

Ράβδος	313
ρευματικὴ γραμμὴ	229
ρευστόν	201
Reynolds-ἀριθμός	248, 250
— , κρίσιμος ἀριθμός	248
ροπή ἀδρανείας	76
— δυνάμεως	81
— ἐπαναφορᾶς	151
— ζεύγους	87
— , κατευθύνουσα	151
ρυθμιστής Watt	195

Σ

Σαγκατοειδεῖς ἐπιφανείαι	218
σειρήν	322
σημεῖον ἀνακοπῆς	236
— καμπῆς	20
σίφων	213
σιφώνιον	227
σκληρότης	170
σταθερὰ ἀποσβέσεως	135
— παγκοσμίας ἐλξεως	184
— φράγματος	301
στάσιμον κύμα	291
στατικὴ πίεσις	231
— τριβῆς	175
Steiner - θεώρημα	78
στεροακτίνιον	8
στερεὰ γωνία	7
στιγματὰ ταχύτης	27
στιγματῶς ἄξων περιστροφῆς	74
στιγματότυπον	287
Stokes - τύπος	247
στρεπτικὴ ροπή	166
στρέψις	166
στροβιλὸν πεδίον	187, 257
στροβίλος	254, 257
— , ἀνωστικός	263
— ἐκκινήσεως	263
— , πλευρικός	263
στροβός	106
στροβοσκοπικὴ παρατήρησις	319
στροβοσκοπίον	320
στροφικὴ κίνησις	73
— ταλάντωσις	151
στροφορμή	61, 99
στροφὴ ροῆς	229
συγγραμμικά ἀνύσματα	2
συγκεκαρμένη κλίμαξ	346
συγκροτήσεις	142
συμβολή	290
συμπιεστής	277

συμπιεστότης	169
συνάρκεια	212
συνεξευγμένα ταλαν- νώσεις	147
συνεχές φάσμα	145
συνημίτονον	17
σύνθεσις δυνάμεων	48
σύνθετος ἥχος	321
— κίνησις	73
συνοχή	212
συντελεστής ἀντιστά- σεως	251, 261
— ἀνώσεως	261
— ἀποδόσεως (μη- χανῆς)	122
— ἑλξεως	181
— ἐξασθενήσεως	306
— ἐπιφανειακῆς τά- σεως	214
— ἐσωτερικῆς τρι- βῆς	239
— κατευθύνσεως	19
— τριβῆς	174
— κυλίσεως	179
συντονισμός	138
συσκευὴ Quinke	328
σύστημα C.G.S.	3
— M.K.S.	3
—, τεχνικὸν	3
συστηματικὸν σφάλμα	14
συχρότης	38
—, κυκλική	129
σφαιρικὸν κύμα	290
σφόνδυλος	98
σχετικὴ ταχύτης	41
σωλήν Pitot	238

Τ

Ταλάντωσις —, ἀμείω- τος	134
—, ἀπεριόδικη	135
—, ἀρμονικὴ γραμ- μικὴ	129
—, —, στροφικὴ	151
—, ἐλευθέρα	132
—, ἐξηναγκασμένη	137
—, φθίνουσα	134
τάσις	162
— θραύσεως	163

ταχύτης	27
—, γωνιακὴ	32
— ἤχου	316
— κύματος	283
—, μέση	27
—, στιγμιαία	27
—, σχετικὴ	41
τελείως ἐλαστικὴ κρούσις	120
— πλαστικὴ κρού- σις	120
τεχνητὸς δορυφόρος	158
τεχνικὴ ἀτμόσφαιρα	203
— μονὰς μάξης	6, 53
τεχνικὸν σύστημα μο- νάδων	3
Torr	203
Torricelli - θεώρημα	235
—, πείραμα	226
τριβὴ	172
—, ἐσωτερικὴ	240
—, κυλίσεως	179
—, ὀλισθήσεως	173
—, στατικὴ	175
τριχοειδὴ φαινόμενα	219
τροχαλία	124
τροχιά	26
τύπος τοῦ Stokes	247
τυχαῖον σφάλμα	14

Υ

Υάρδα	8
ὕδραυλικὸς τροχός	279
ὕδροστροφίλος Pelton	280
— Francis	281
ὕλικὸν σημεῖον	1
ὕμνιον ἐλαχίστου ἐμ- βαδοῦ	218
ὕπερηχος	331
ὕψομετρικὴ πίεσις	231
ὕψος (ἤχου)	337

Φ

Φαινόμενον Doppler - Fizeau	301
— Magnus	259
φασικὴ ταχύτης	289

φάσις	128
— κύματος	286
φάσμα γραμμικὸν	145
— συνεχές	145
— συχνοτήτων	145
φθίνουσα ταλάντωσις	134
φθόγγος	345
φλέψ	230
φρενὺς (ἀνύσματος)	2
Fourier - ἀνάλυσις	143
φράγμα	300
Francis - ὑδροστροβί- λος	281
φυγοκεντρικὴ ἀντλία	279
φυγόκεντρος δύνα- μις	58, 198
φυσικὴ ἀτμόσφαι- ρα	203, 227
φυσικὸν ἐκκρεμές	154
— μέγεθος	1
φωνητικαὶ χορδαί	343

Χ

Χαρακτηριστικὸν ἐπί- πεδον πλωτοῦ	304
Hertz	39
χιλιόγραμμα-μέτρον	65
χιλιόγραμμα	6
— βάρους	53
χιλιόκυκλος	39
Hooke - νόμος	161
χορδὴ	311, 323
χορδιά	339
Huygens - ἀρχή	295

Ψ

Ψευκαστήρ	235
ψυχοφυσικὸς νόμος τῶν Fechner - Weber	339

Ω

ᾠθησις δυνάμεως	62
— ροπῆς	101
ὠκύντης	285
ὄριαιος ἵππος	66
ὀρισμένον ὁλοκλήρωμα	22

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ἐξεδόθησαν μέχρι τοῦδε οἱ ἐξῆς τόμοι :

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

(Ἔκδοσις Γ')

(Σελίδες 368, σχήματα 455)



ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

(Ἔκδοσις Β')

(Σελίδες 213, σχήματα 183)



ΤΟΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

(Σελίδες 246, σχήματα 180)

ΤΥΠΟΙΣ : ΣΩΤ. ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΣΟΛΩΝΟΣ 83 - ΤΗΛΕΦ. 612.769

