σειρα Υ

βιβλιοθηκη του υποψηφιου

γεωμετρια του επιπεδου

ΔΙΟΝ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ

σειραι εκπαιδευτικων και επιστημονικων εκδοσεων

εκδοσεις σπουδη

ΣΕΙΡΑ Υ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΔΙΟΝ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΣΠΟΥΔΗ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 61
ΑΘΗΝΑΙ ΤΗΛ. 633-503

Ἀνάπτυξις τῶν οὐσιαστικῶν μερῶν τῆς ὕλης—Μεθοδικὸς συνδυασμὸς θεωρίας καὶ ἐφαρμογῶν

ΣΕΙΡΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΕΚΔΟΣΕΩΝ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΙ

Ἐφόσον δὲν ὑφίσταται ἄλλη τις ἔνδειξις θὰ σημειοῦμεν:

$ΑΒΓ_{Δ}$	καὶ θὰ ἐννοοῦμεν	τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.
(ΑΒΓ)	» » »	τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$α, β, γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ
$Α, Β, Γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$h_α$, $h_β$, $h_γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$δ_α$, $δ_β$, $δ_γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$δ'_α$, $δ'_β$, $δ'_γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$R, ρ, ρ_α$, $ρ_β$, $ρ_γ$	» » »	τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη ἀντιστοίχως τῶν ἀκτίνων τῆς περιγεγραμμένης, τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερειῶν
$\hat{Α}$	» » »	τὴν γωνίαν Α.
$1_{\llcorner}$, $2_{\llcorner}$	» » »	μίαν ἢ δύο ὀρθάς.
(Α,Β,Γ), (Ο), (Κ,ρ), (Κ,ΑΒ)	» » »	τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, τὴν περιφέρειαν κέντρου Ο, τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ρ, τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΑΒ.
$ΑΒ \perp ΓΔ$	» » »	ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἢ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.
$ΑΒ \parallel ΓΔ$	» » »	ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἢ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλα.
$ΑΒ = \parallel ΓΔ$	» » »	ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.
$\overset{\frown}{ΑΒ}$	» » »	τὸ τόξον ΑΒ.
Η	» » »	τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$Η_α$, $Η_β$, $Η_γ$	» » »	τὰ ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$Μ_α$, $Μ_β$, $Μ_γ$	» » »	τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
$Ο, Ι, Ι_α$, $Ι_β$, $Ι_γ$, $Ο_9$	» » »	τὰ κέντρα τῆς περιγεγραμμένης, τῆς ἐγγεγραμμένης, τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Euler ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.
$ΑΒΓ_{Δ} \approx ΔΕΖ_{Δ}$	» » »	ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.
$\geqslant$ ἢ $\leqslant$	» » »	μεγαλύτερον ἢ ἴσον, μικρότερον ἢ ἴσον.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

Τὸ βιβλίον (Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου), ἐφόσον ἀνήκει εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ ὑποψηφίου, δηλ. εἰς τὴν «σειρὰν Υ» τῶν βιβλίων τῆς «Σπουδῆς», ὀφείλει, ὅπως εἶναι φανερόν, νὰ ἱκανοποιήση τοὺς βασικοὺς σκοποὺς τῶν βιβλίων αὐτῆς τῆς σειρᾶς. Χρειάζεται μόνον νὰ γνωρίση ὁ συγγραφεὺς αὐτοῦ τοῦ βιβλίου εἰς τοὺς ἀναγνώστας του τὴν ὁδόν, τὴν ὁποίαν ἐπέλεξε διὰ τὴν ἀποτελεσματικὴν ἱκανοποίησιν αὐτῶν τῶν δύο σκοπῶν.

Πρωταρχικὸν ὁδηγόν του ὁ συγγραφεὺς εἶχε τὰς ἀπαιτήσεις, ὅσον ἀφορᾷ τὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας, τοῦ προσφάτως ἐκδοθέντος διατάγματος περὶ εἰσιτηρίων ἐξετάσεων τῶν ἀνωτέρων καὶ ἀνωτάτων Σχολῶν τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων. Τὰς ἀπαιτήσεις ταύτας, τὰς ὁποίας νομίζει ὁ συγγραφεὺς ἀρκετὰς διὰ νὰ φανερώσουν τὴν ἐπαρκῆ κατάρτισιν ἑνὸς ὑποψηφίου εἰς τὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας, ἐπεξειργάσθη εἰς τὰ δέκα κεφάλαια τοῦ βιβλίου του μὲ τὴν προοπτικὴν ὅπως:

1ον. Ἐκτεθῇ ὁλόκληρος ἡ εἰς αὐτὰς διαλαμβανομένη ὕλη μὲ τοιαύτην διάταξιν, ὥστε εὐκόλως νὰ συγκρατῇ ὁ ὑποψήφιος τὴν σημασίαν καὶ τὰς ἐπιπτώσεις τοῦ κάθε ἐπὶ μέρους αὐτῆς τῆς ὕλης στοιχείου εἰς ὁλόκληρον τὴν ἔκτασίν της.

2ον. Παρουσιασθῇ εἰς τὰς διαφόρους ἀποδείξεις ὁ περιορισμὸς τοῦ σχήματος εἰς τὸν ἀποκλειστικόν του ρόλον, ὁ ὁποῖος, ὡς γνωστόν, πρέπει νὰ εἶναι ἡ ὑποβοήθησις διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς συλλογιστικῆς πορείας ἐν τῇ ἀποδείξει καὶ ὄχι ἡ ὑποκατάστασις μέρους αὐτῆς.

3ον. Δικαιολογηθῇ ἑκάστοτε θεωρητικῶς ἡ μορφὴ τοῦ παρουσιαζομένου σχήματος.

4ον. Ἐπιλεγοῦν αἱ ὄντως πολυάριθμοι, συμφώνως πρὸς τὸν βασικὸν σκοπὸν τοῦ βιβλίου, ἀσκήσεις κατὰ τρόπον συμπληροῦντα τὴν ἐνδελεχῆ καὶ πλήρη θεωρητικὴν κατάρτισιν τοῦ ὑποψηφίου.

Θέλομεν νὰ πιστεύωμεν, ὅτι ὁ ἀναγνώστης αὐτοῦ τοῦ βιβλίου θὰ εὕρῃ τὴν τεθεῖσαν προοπτικὴν ὡς ἐξυπηρετηθεῖσαν.

ΔΙΟΝ. Ι. ΛΙΒΕΡΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς	Στῖχος	Ἀντὶ	Γράφε
9	7	εἶναι ἴσαι	εἶναι παραπληρωματικαὶ
9	27	πρῶτα κεφάλαια	κεφάλαια
11	6	ἀντίθετοι	συμπίπτουσαι
20	8	τὸ ὁποῖον περιέχει	τὸ ὁποῖον τὸ περιέχει
41	19	Εὐθεῖα Euler	11. Εὐθεῖα Euler
41	39	ἡ ὁποία δὲν εἰκονίζεται	ἡ ὁποία εἰκονίζεται
43	8	11	12
53	29	γεωμετρικὸν τύπον	γεωμετρικὸν τόπον
60	21	τὴν γωνὶαν	τὴν ὀξεῖαν γωνίαν
61	24	Τὰ σχήματα καὶ ὁ κύκλος	Τὰ σχήματα καὶ ἡ περιφέρεια
61	25-26	ἐγγράψιμον εἰς κύκλον	ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν
64	3	ν-ι	ν-1
72	19	Ἐπειδὴ μωςὅ	Ἐπειδὴ ὅμως
82	18	αἱ γωνίαι	αἱ πλευραὶ
85	2	σελ. 18	σελ. 19
90	7	8	8.1
125	8	δύο ἄλλων πλευρῶν	δύο ἄλλων του πλευρῶν

1 ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ *

Ὑπάρχουν δύο διακεκριμέναι μορφαὶ προτάσεων:

Τὰ θεωρήματα: προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν, ὅτι ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι χαραγμένον κατὰ ἕνα ὡρισμένον τρόπον, καθωρισμένον ἐκ τῶν προτέρων, ἱκανοποιεῖ ὡρισμένους ὅρους **

καὶ **τὰ προβλήματα:** προτάσεις, διὰ τῶν ὁποίων ζητεῖται νὰ χαραχθῆ (νὰ κατασκευασθῆ) ἕνα σχῆμα, ὥστε τοῦτο νὰ ἐκπληροῖ ὡρισμένας καὶ διδομένας συνθήκας ***.

Ἐπειδὴ ἡ λύσις τῶν προβλημάτων πρέπει νὰ διατυπωθῆ γραφικῶς, μέσῳ ἑνὸς σχήματος, πρέπει νὰ προστρέξωμεν εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν δύο γεωμετρικῶν ὀργάνων: τοῦ **κανόνος,** μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁποίου χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ δύο γνωστῶν σημείων, καὶ τοῦ **διαβήτου,** ὁ ὁποῖος μᾶς ἐπιτρέπει νὰ σχεδιάζωμεν περὶ δεδομένον κέντρον μίαν περιφέρειαν γνωστῆς ἀκτῖνος. Ἡ λύσις λοιπὸν ἑνὸς προβλήματος θὰ συντεθῆ ἐξ αὐτῶν τῶν δύο πράξεων, μίαν ἢ περισσοτέρας φορὰς ἐπαναλαμβανομένων.

Αὐτὸς ὁ περιορισμὸς ὑπηγορεύθη ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ὁ καλὸς χειρισμὸς αὐτῶν τῶν δύο ὀργάνων δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ ὑποκειμενικοὺς παράγοντας, πλὴν ὅμως ἔχει ὡς συνέπειαν, ὥστε πολλὰ προβλήματα, ἁπλᾶ κατὰ τὸ φαινόμενον, νὰ μὴ εἶναι δυνατὸν νὰ λυθοῦν. Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι, ἡ τριχοτόμησις τῆς τυχούσης γωνίας, ὁ διπλασιασμὸς δοθέντος κύβου (Δήλιον πρόβλημα), ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου κ.λ.π. Γενικῶς, ἀπεδείχθη, ὅτι αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ λογιστικὴ ἔκφρασις τοῦ ἀγνώστου στοιχείου των δὲν ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν, ἀναγομένην εἰς τοιαύτην τοῦ πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἕνα πρόβλημα εἶναι **ὑπερ-καθωρισμένον,** ὅταν τὸ ζητούμενον σχῆμα ὑπόκειται εἰς περισσοτέρας τῶν ἀπαραιτήτων πρὸς καθορισμὸν του συνθηκῶν· εἶναι

* Κάθε πρότασις συνίσταται ἐκ δύο μερῶν: **Τῆς ὑποθέσεως,** περιλαμβανούσης τὸ σύνολον τῶν συνθηκῶν, εἰς τὰς ὁποίας τοποθετούμεθα καὶ τοῦ **συμπεράσματος,** ἐκφράζοντος τὸ γεγονός, τὸ ὁποῖον μέσῳ τῶν συνθηκῶν αὐτῶν ἀναγκαίως θὰ λάβη χώραν.

Ὀνομάζομεν ἀντίστροφον πρότασιν μιᾶς ἄλλης προτάσεως μίαν δευτέραν πρότασιν, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ συμπέρασμα μορφοῦται **ὁλοκληρωτικῶς** ἢ **μερικῶς** ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς πρώτης καὶ ἀντιστρόφως.

** Πρόκειται διὰ τὰς μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ σχήματος ἀναγκαίας σχέσεις.

*** Ἡ συλλογιστικὴ πορεία, ἡ ὁδηγοῦσα εἰς τὴν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας ἑνὸς θεωρήματος, ὀνομάζεται **ἀπόδειξις** καὶ ἡ ὁδηγοῦσα εἰς τὴν χάραξιν τοῦ ὑπὸ ἑνὸς προβλήματος αἰτουμένου σχήματος ὀνομάζεται **λύσις.**

καθωρισμένον, ὅταν ἡ λύσις του ἀποδίδεται διὰ περιωρισμένου ἀριθμοῦ σχημάτων· εἶναι τέλος **ἀόριστον,** ὅταν ἡ λύσις του ἀποδίδεται δι᾽ ἀπεριορίστου ἀριθμοῦ σχημάτων.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα πρόβλημα καθωρισμένον, πρέπει:

α) νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν κατασκευὴν
β) νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι ἀκριβὴς
γ) νὰ διερευνήσωμεν τὸ πρόβλημα.

Ἡ διερεύνησις ἑνὸς προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν συνθηκῶν, ὑπὸ τὰς ὁποίας τὰ δεδομένα ἐπιτρέπουν εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα νὰ ἔχῃ καμμίαν, μίαν, δύο κ.λ.π. λύσεις.

Μεταξὺ τῶν ἀορίστων προβλημάτων, ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα καθίστανται ὡρισμένα μὲ τὴν προσθήκην μιᾶς προσέτι συνθήκης, παρουσιάζουν ἕνα ὅλως ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον. Παρὰ τὸ γεγονός, ὅτι ἕνα τοιοῦτον πρόβλημα ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων καὶ ἡ κάθε λύσις ἀνταποκρίνεται εἰς ἕνα σχῆμα, ἐντούτοις ὅλαι αὐταὶ αἱ λύσεις «συναθροίζονται» κατὰ ἕνα ἑνιαῖον τρόπον, καθοριζόμενον ἀπὸ τὰς διδομένας συνθήκας τοῦ προβλήματος. Ἔτσι, ἕνα σημεῖον εἶναι ὡρισμένον, ὅταν ὑπακούῃ εἰς δύο διδομένας συνθήκας. Ἐὰν ὅμως τοῦ ἀποδώσωμεν μόνον μίαν, καθίσταται ἀόριστον, ἀλλὰ ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν αὐτὴν τὴν μοναδικὴν συνθήκην θὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἢ ἐπὶ μιᾶς καμπύλης. Θὰ τῆς ἀποδώσωμεν τὸ ὄνομα **γεωμετρικὸς τόπος** σημείων, ἱκανοποιούντων αὐτὴν τὴν συνθήκην *. Θὰ συμβῇ τὸ αὐτὸ καὶ δι᾽ ἕνα σχῆμα, ἐφόσον διὰ τὸν καθορισμόν του λείπει μία συνθήκη. Καὶ τοῦτο, διότι γενικῶς κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος θὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν, οὕτως ὥστε, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ τὸν γεωμετρικόν του τόπον.

*** Ὀνομάζομεν γεωμετρικὸν τόπον σημείων, ἱκανοποιούντων μίαν ὡρισμένην συνθήκην, τὸ σημειοσύνολον, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα καὶ μόνον αὐτὰ ἱκανοποιοῦν αὐτὴν τὴν συνθήκην.**

Μία περιφέρεια ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἕνας γεωμετρικὸς τόπος. Ἐπίσης, ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος. Ἀκόμη, ὁ γ.τ. τῶν ἐσωτερικῶν σημείων κυρτῆς γωνίας, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι ἡ διχοτόμος της.

Γενικώτερον, διαπιστοῦται, ὅτι ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν διχοτόμων, τῶν σχηματιζομένων ἀπὸ τὰς δύο εὐθείας κυρτῶν γωνιῶν.

ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ἡ κριτικὴ ἐπὶ τοῦ γεωμετρικῶς λογίζεσθαι ὡδήγησεν κατ' ἀρχὴν εἰς τὴν διατύπωσιν τριῶν μεθόδων, αἵτινες δεικνύουν τοὺς δρόμους, τοὺς ὁποίους ἀκολουθεῖ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων ἢ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων **γενικῶς.** Κατὰ τὴν πορείαν ὅμως διὰ μέσου τῶν αἰώνων διεμορφώθησαν κατατάξεις τόσον τῶν θεωρημάτων ὅσον καὶ τῶν προβλημάτων εἰς κατηγορίας, χαρακτηριζομένας ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῶν μὲν ἢ ἡ λύσις τῶν δὲ ἐξηρτᾶτο ἀπὸ τὸ αὐτὸ κατὰ γεωμετρικὴν φύσιν αἰτούμενον. Διὰ τὰς ἐπὶ μέρους τώρα αὐτὰς κατηγορίας ἐμορφώθησαν εἰδικαὶ μέθοδοι λογισμοῦ, διευκολύνουσαι τὴν ἀνεύρεσιν τῶν ζητουμένων ἀποτελεσμάτων. Τοιουτοτρόπως, ἔχομεν δύο ὁμάδας βασικῶν μεθόδων:

Τὰς γενικὰς μεθόδους: **Σύνθεσιν, Ἀνάλυσιν, Ἀπαγωγὴν εἰς ἄτοπον.**

Τὰς εἰδικὰς μεθόδους: **Μέθοδος τῆς τομῆς τῶν γεωμετρικῶν τόπων, Μέθοδος τοῦ προσδιορισμοῦ μιᾶς εὐθείας, Μεταφορά, Στροφή, Συμμετρία, Μέθοδος τῶν ὁμοίων σχημάτων, Ὁμοιοθεσία, Ἀντιστροφὴ κ.τ.λ.**

ΑΙ ΓΕΝΙΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ἡ Συνθετικὴ μέθοδος, ὅσον ἀφορᾶ τὰ θεωρήματα, εἶναι ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας, ἐκ μιᾶς γνωστῆς προτάσεως Κ, ὁδηγούμεθα εἰς μίαν γνωστὴν πρότασιν Λ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας αὐτῆς προτάσεως Λ εἰς μίαν τρίτην Μ καὶ ἐκ τῆς τρίτης Μ εἰς μίαν τετάρτην Ν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν πρότασιν Α, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἐτέθη ὑπὸ διαπίστωσιν.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὴν Συνθετικὴν μέθοδον συνιστᾶ μία ἅλυσος ἀληθῶν προτάσεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς προηγουμένης, μὲ τελευταῖον κρίκον τὴν ὑπὸ ἀπόδειξιν πρότασιν. Εἶναι συνεπῶς μία μέθοδος αὐστηρὰ εἰς ἀκρίβειαν καὶ ἀσφαλὴς εἰς τὸ ἀποτέλεσμα, ἀλλὰ μὲ τὸ βασικὸν μειονέκτημα, νὰ προϋποθέτη γνωστοὺς τοὺς κρίκους, οἱ ὁποῖοι θὰ συστήσουν τὴν ἀπαιτουμένην ἅλυσον τῶν προτάσεων, ἀλλὰ καὶ γνωστὴν τὴν διαδοχὴν αὐτῶν τῶν κρίκων. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δὲν ἐνδείκνυται εἰς τὴν ἔρευναν.

Ὅσον ἀφορᾶ τώρα τὰ προβλήματα, ἡ Συνθετικὴ μέθοδος προϋποθέτει νὰ γνωρίζωμεν τὴν τάξιν μὲ τὴν ὁποίαν θὰ χρησιμοποιηθοῦν τὰ γνωστὰ ἐκ τῶν προτέρων στοιχεῖα τοῦ σχήματος, ἀλλὰ καὶ τοὺς συνδυασμούς, ὑπὸ τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιηθοῦν ταῦτα. Καὶ ἀπ' ἐδῶ διαπιστοῦμεν, ὅτι δὲν καλλιεργεῖ αὔτη τὴν τάσιν πρὸς δημιουργίαν.

Ἡ Ἀναλυτικὴ μέθοδος, ὅσον ἀφορᾶ τὰ θεωρήματα, εἶναι ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ μιᾶς ἀγνώστου προτάσεως Α (τῆς ὑπὸ βεβαίωσιν προτάσεως) ὁδηγούμεθα εἰς μίαν ἄλλην ἄγνωστον πρότασιν Β καὶ ἐκ τῆς Β εἰς μίαν ἄλλην ἄγνωστον Γ καὶ ἐκ τῆς Γ εἰς μίαν τετάρτην Δ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν γνωστὴν πρότασιν Κ.

Ὅσον ἀφορᾶ τὰ προβλήματα (τὰς κατασκευὰς) ἡ Ἀναλυτικὴ μέθοδος χρησιμοποιεῖται ὡς ἀκολούθως: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λυθῆ καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον σχῆμα ἔχει κατασκευασθῆ. Αὐτὸ τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον καθ' ὑπόθεσιν ἱκανοποιεῖ τοὺς ἐκ τῶν προτέρων τεθειμένους ὅρους, προσπαθοῦμεν νὰ τὸ συνδέσωμεν μὲ ἕνα ἄλλο σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ καὶ δυνατὴ θὰ εἶναι συνθετικῶς, ἀλλὰ καὶ θὰ συνδέεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον μὲ τὸ καθ' ὑπόθεσιν σχῆμα-λύσιν, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐξ αὐτῆς τῆς μεσολαβούσης καὶ δυναμῆς, ἀπὸ τοὺς τεθειμένους ὅρους κατασκευῆς, τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων διεπιστώθη, ὅτι ἡ Ἀνάλυσις καὶ ἡ Σύνθεσις ἀκολουθοῦν δρόμους ἀντιθέτους: ἐνῶ ἡ πρώτη ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ ὑπὸ διαπίστωσιν θέμα διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς ἕνα γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων θέμα, ἡ δευτέρα ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα ἐκ τῶν προτέρων γνωστὸν θέμα διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ προταθέν. Ἡ Ἀναλυτικὴ λοιπὸν μέθοδος προσφέρεται διὰ τὴν ἔρευναν, ἔχει ὅμως ἕνα μειονέκτημα, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ἀπὸ τὸ εὔλογον τοῦτο ἐρώτημα: Ὅταν ἐκκινοῦμεν ἐκ τῆς ὑπὸ ἀπόδειξιν προτάσεως, ὑποτιθεμένης ὡς ἀληθοῦς, καὶ ὁδηγούμεθα ἀναγκαίως εἰς τὴν πρότασιν Β, ἡ Β εἶναι ἱκανὴ πρότασις, ἂν ὑποτεθῆ ὅτι ἐκφράζει ἀλήθειαν, διὰ νὰ συμπεράνωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς Α; Καὶ διὰ νὰ ἐκφρασθῶμεν καθολικότερον: Αἱ ἀναγκαῖαι συνέπειαι, αἱ προκύπτουσαι κατὰ τὴν συλλογιστικὴν πορείαν τῆς ἀναλύσεως, εἶναι καὶ ἱκαναί; Δεδομένου ὅμως, ὅτι αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας δὲν εἶναι πᾶσαι ἀντιστρεπταί, εἶναι ἐπιβεβλημένον, τόσον διὰ τὰ θεωρήματα, ὅσον καὶ διὰ τὰ προβλήματα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὴν Ἀνάλυσιν, διὰ νὰ ἀνακαλύπτωμεν τὴν ἀφετηρίαν ἐκκινήσεως καὶ τὴν Σύνθεσιν, διὰ νὰ στηρίζωμεν τὴν ἀπόδειξιν ἢ νὰ οἰκοδομοῦμεν τὴν λύσιν ἐπὶ ἀκλονήτων θεμελίων. Τὴν ἀναγκαιότητα τῆς διπλῆς παρουσιάσεως τῶν ἀποδείξεων ἢ τῶν λύσεων θὰ δείξωμεν κατωτέρω διὰ χαρακτηριστικῶν παραδειγμάτων.

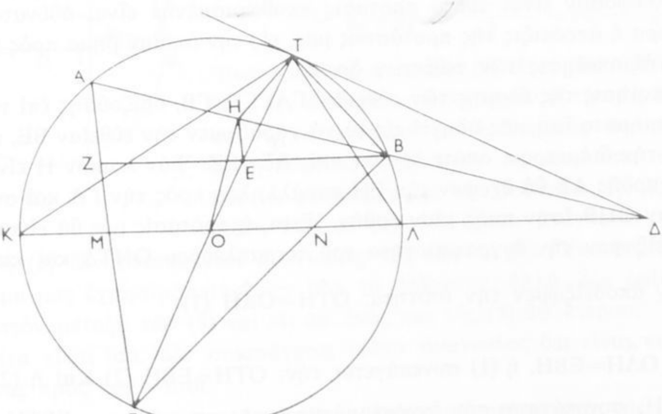
Τέλος, ἡ ἀπόδειξις ἑνὸς θεωρήματος διὰ τῆς **ἀπαγωγῆς εἰς τὸ ἄτοπον** συνίσταται εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν προσωρινῶς ὡς ἀληθῆ τὴν ἀντίθετον * πρότασιν καὶ νὰ

* Δύο προτάσεις εἶναι ἀντίθετοι, ὅταν αὗται ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν ἀλλὰ συμπεράσματα ἀντίθετα, ἢ ἀντιθέτους ὑποθέσεις καὶ τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

συναγάγωμεν μίαν ἀκολουθίαν συνεπειῶν μέχρι ἐκείνης, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἀποτέλεσμα προφανῶς ἀσυμβίβαστον μὲ γνωστὰς ἀληθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

1ον. Ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου δεδομένης περιφερείας καὶ μὲ ἀφετηρίαν τὸ κέντρον της λαμβάνομεν δύο ἰσομεγέθη ἀντίρροπα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΜ, ΟΝ μικρότερα τῆς ἀκτῖνος. Συνδέομεν δι' εὐθειῶν ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον Γ τῆς περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα Μ,Ο,Ν καὶ αἱ εὐθεῖαι αὗται ἐπανατέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α,Τ,Β, ἀντιστοίχως. Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνη τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου τοῦ θέματός μας εἰς τὸ σημεῖον Δ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΤ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας.



(Σχ. 1)

Ἀνάλυσις: Ἐὰν ἡ πρότασις ὑποτεθῇ ἀληθής, θὰ ἔχωμεν ὡς ἀναγκαίας συνεπείας τὰς ἰσότητας:

$\Lambda\hat{T}\Delta=O\hat{K}T$ (1) $O\hat{T}\Delta=K\hat{T}\Lambda$ (2) Ἡ (2) ἔχει ἐπίσης ὡς ἀναγκαίαν συνέπειαν τὴν ἰσότητα: $K\hat{T}O=\Lambda\hat{T}\Delta$ (3), ἡ ὁποία, λόγω τῆς (1), ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἰσότητα: $K\hat{T}O=O\hat{K}T$ (4), ἥτις καὶ ἐκφράζει μίαν γνωστὴν ἀλήθειαν.

Ἡ συνθετικὴ ὅμως τώρα ἀπόδειξις εἶναι ἀδύνατος. Ἡ ἀληθὴς ἐκ τῶν πραγμάτων ἰσότης (4) δὲν εἶναι ἀρκετὴ συνθήκη ὑπάρξεως τῆς (3), παρὰ ἐφόσον ὑφίσταται ὡς ἀληθὴς ἡ ἰσότης (1), δηλ. ἐφόσον ἡ ὑπὸ ἀπόδειξιν πρότασις εἶναι ἀληθής.

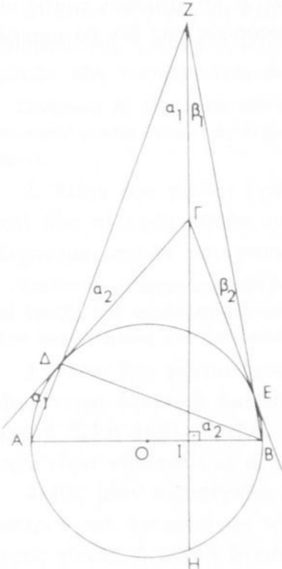
Ποῦ ὀφείλεται πραγματικὰ ἡ ἀδυναμία τῆς ἀντιστροφῆς τῆς ἀναλυτικῆς συλλογιστικῆς πορείας; Προφανῶς εἰς τὸ ὅτι ἡ συνέπεια (1) τῆς ἀρχικῆς ὑποθέσεως δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή: Ὅταν μία γωνία σχηματίζεται ὑπὸ ἐφαπτομένης καὶ χορδῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην, ἡ ὁποία ὑποτείνεται ἀπὸ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶναι ἀληθές· ἡ γωνία ΛΚΤ ἰσοῦται ἐπίσης καὶ μὲ τὴν γωνίαν τὴν συμμετρικὴν τῆς ΛΤΔ. Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι δὲν ἐχρησιμοποιήθησαν ὅλα τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ἀπουσιάζει ἐκ τῆς συλλογιστικῆς μας πορείας ἡ ἰσότης ΜΟ=ΟΝ. Αὐτὸ ὅμως δὲν σημαίνει, καὶ θὰ τὸ ἴδωμεν εἰς τὴν ἑπομένην πρότασιν, ὅτι αὐτὴ ἡ παράλειψις ἐδημιούργησε τὴν ἀνωμαλίαν. Ἐν τούτοις, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν ὅλων τῶν προϋποθέσεων τοῦ θεωρήματος, ἡ διαβεβαίωσις τῆς ἀληθείας του, ἐφόσον εἶναι τοῦτο πρότασις «καθωρισμένη» εἶναι ἀδύνατος.

Ἰδοὺ τώρα ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεώς μας, εἰς τὴν ὁποίαν βῆμα πρὸς βῆμα μᾶς ὁδηγεῖ ἡ ἀξιοποίησις τῶν τεθέντων ὅρων.

Ἡ ἀξιοποίησις τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΤ, ΓΒ, ὁριζούσης ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΚΛ τμήματα ἴσα, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ, παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον, ὁπότε ἔχομεν καί: ΒΕ=ΕΖ. Ἐὰν λοιπὸν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ θὰ ἔχωμεν τὴν ΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ καὶ συγχρόνως τὴν γωνίαν ΟΗΒ ἴσην πρὸς μίαν ὀρθήν. Ἔτσι, ἡ πρότασίς μας θὰ εἶναι ἀληθής, ἐὰν ἀποδείξωμεν τὴν ἐγγραψιμότητα τοῦ τετραπλεύρου ΟΗΤΔ καὶ κατὰ συνέπειαν, ἐὰν ἀποδείξωμεν τὴν ἰσότητα: $O\hat{T}H=O\hat{\Delta}H$ (1).

Ἐπειδὴ $O\hat{\Delta}H=E\hat{B}H$, ἡ (1) συνεπάγεται τήν: $O\hat{T}H=E\hat{B}H$ (2) Καὶ ἡ (2), ἐπειδὴ $O\hat{T}H=E\hat{T}H$, συνεπάγεται τὴν ἐγγραψιμότητα τοῦ τετραπλεύρου ΕΒΤΗ. Ἀλλ' ἡ ἐγγραψιμότης τοῦ ΕΒΤΗ εἶναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν $E\hat{H}B$ καὶ $E\hat{T}B \equiv \Gamma\hat{T}B$. Ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν $\Gamma\hat{A}B$. Ἡ Συνθετικὴ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως κατέστη προφανὴς λόγῳ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν προτάσεων.

2ον. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ ἄκρα Α καὶ Β μιᾶς διαμέτρου μὲ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ καὶ Ε τῶν δύο ἐφαπτομένων ΓΔ καὶ ΓΕ δι' εὐθειῶν, τεμνομένων εἰς τὸ Ζ, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΖ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.



(Σχ. 2)

'Ανάλυσις: "Αν ΓΖ=ΓΔ (1) ἀναγκαίως θὰ ἔχωμεν καί: ΓΖ=ΓΕ (2), ἀφοῦ ΓΔ=ΓΕ. Τῶν (1) καὶ (2) πάλιν ἀναγκαῖαι συνέπειαι εἶναι αἱ ἰσότητες: $\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2$ (3) $\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2$ (4) Καὶ ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν ἀναγκαίως $\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1=\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2$ (5)

Ἡ συνέπεια (5) εἶναι ὄντως σχέσις ἀληθής. Πράγματι,

$$\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1=\frac{\widehat{AHB}-\widehat{\Delta E}}{2}=\frac{180^0-\widehat{\Delta E}}{2}=90^0-\frac{\widehat{\Delta E}}{2}$$

$$\hat{\alpha}_2=\frac{\widehat{A\Delta}}{2},\ \hat{\beta}_2=\frac{\widehat{BE}}{2}\Longrightarrow \hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2=\frac{\widehat{A\Delta}+\widehat{BE}}{2}$$

$$\Longrightarrow \hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2=\frac{180^0-\widehat{\Delta E}}{2}=90^0-\frac{\widehat{\Delta E}}{2}$$

'Ενῶ λοιπὸν ἡ συνέπεια (5) εἶναι μία πρότασις ἀληθής, δὲν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὴν ὡς ἀφετηρίαν καὶ νὰ ἀναχθῶμεν μὲ διαδοχικὰς συνεπείας τὰς προηγουμένας ταύτης ἐν τῇ ἀναλύσει προτάσεις καὶ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1). Καὶ τοῦτο, διότι, ἐνῶ αἱ (3), (4) ἔχουν ἀναγκαίαν συνέπειαν τὴν (5), ἡ (5) δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως τὰς (3) καὶ (4). Ὑπενθυμίζομεν, ὅτι εἰς τὸ θέμα μας ἐχρησιμοποιήσαμεν ὅλα τὰ δεδομένα, ἀλλὰ δὲν ὑφίσταται τὸ ἀντιστρεπτὸν μεταξὺ τῶν (3) καὶ (4) ἀφ' ἑνὸς καὶ τῆς (5) ἀφ' ἑτέρου: "Οταν δύο ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, δὲν συνεπάγεται τοῦτο ἀναγκαίως ὅτι εἶναι καὶ οἱ ὅροι των — ἕνας πρὸς ἕνα —ἴσοι.

Θὰ δείξωμεν ἐντούτοις, ὅτι ἐδῶ ἡ (5) συμβαίνει νὰ συνεπάγεται τὰς (3) καὶ (4).

"Εστω ΓΖ > ΓΔ, ὁπότε καὶ ΓΖ > ΓΕ. Συνέπειαι: $\hat{\alpha}_1<\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_1<\hat{\beta}_2 \Longrightarrow \hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1<\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2$ δηλ. σχέσιν ἀντικειμένην πρὸς τὴν ἀληθῆ ἰσότητα (5).

"Αν πάλιν ΓΖ < ΓΔ, ὁπότε καὶ ΓΖ < ΓΕ, θὰ ἔχωμεν $\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1>\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2$, ἑπομένως συνέπειαν ἀσυμβίβαστον πρὸς τὴν (5). "Αρα: ΓΖ=ΓΔ=ΓΕ

Διὰ τὸν 2ον μέρος τῆς προτάσεώς μας παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2=A\hat{B}\Delta \text{ Καί, } A\hat{B}\Delta+\Delta\hat{A}B=1_{\llcorner}$$

$$\Longrightarrow \hat{\alpha}_1+\Delta\hat{A}B=\hat{\alpha}_1+Z\hat{A}I=1_{\llcorner}\Longrightarrow Z\hat{I}A=1_{\llcorner} \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημειοῦμεν, ὅτι ἠδυνάμεθα, ἀντὶ νὰ χαράξωμεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΕ, νὰ χαράξωμεν τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΒΔ. Καί, ἐὰν ὠνομάζετο Ζ τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν τῶν δύο τελευταίων εὐθειῶν, αἱ συνέπειαι τῆς προτάσεώς μας δὲν θὰ μετεβάλοντο.

2 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ *

1. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των, μίαν πρὸς μίαν, παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἢ παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους εἶναι ἴσαι. Μάλιστα, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν τῶν γωνιῶν εἶναι παράλληλοι.

Συνέπεια: Αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Διατί; Διότι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των, μίαν πρὸς μίαν, παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους (ἀντιθέτους).

2. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους καὶ δύο πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους εἶναι ἴσαι. Μάλιστα αἱ διχοτόμοι αὐτῶν τῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

Συνέπεια: Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι. Διατί: Διότι αἱ ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους καὶ δύο παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους (ἀντιθέτους).

3. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν καὶ εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν ὅμως ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα εἶναι παραπληρωματικαί. Μάλιστα, αἱ διχοτόμοι τῶν πρώτων εἶναι κάθετοι καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν δευτέρων εἶναι παράλληλοι.

4. Εἰς μίαν περιφέρειαν, τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (ἀρκεῖ νὰ λαμβάνεται ὡς μονὰς γωνίας ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐκλεγμένην μονάδα τόξου).

Αὐτὸ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ ὅτι: Ὁ λόγος δύο ἐπικέντρων γωνιῶν περιφερείας τινὸς (ἢ ἴσων περιφερειῶν) εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν των. Δηλ.: Τὸ τόξον περιφερείας τινὸς καὶ ἡ ἀντίστοιχος εἰς αὐτὸ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι μεγέθη εὐθέως ἀνάλογα.

Συνέπειαι: α) Τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης εἰς περιφέρειαν γωνίας ἢ μιᾶς γωνίας σχηματιζομένης ὑπὸ χορδῆς καὶ ἡμι-εφαπτομένης εἰς ἕνα τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἡμίσεος τόξου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν των. β) Μία ἐγγεγραμμένη εἰς περιφέρειαν γωνία εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα καθόσον, τὸ περιοριζόμενον ἀπὸ τὰς πλευράς

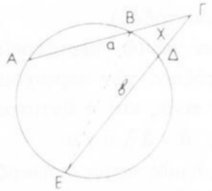
* Θὰ σᾶς ὑπενθυμίσωμεν εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα πρῶτα κεφάλαια τὴν κάθε βασικὴν πρότασιν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον γνῶσιν καὶ συνεπῶς βασικὴν προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων-θεωρημάτων. Ἀπ' αὐτὰς τὰς προτάσεις θὰ σᾶς ἀποδείξωμεν ἐκείνας, τῶν ὁποίων δὲν ἀναγράφεται εἰς τὰ συνήθη βιβλία Γεωμετρίας ἡ ἀπόδειξις ἢ διὰ τὰς ὁποίας κρίνομεν τὰς ἐδῶ διδομένας ἀποδείξεις προτιμητέας. Συγχρόνως σᾶς συνιστῶμεν νὰ ἔχετε εἰς τὰ ἀριστερά σας τὸ βιβλίον μας αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δεξιά σας χαρτί, μολύβι, διαβήτην καὶ κανόνα. Ὁποιασδήποτε προτάσεως παραθέτομεν μόνον τὴν ἐκφώνησιν θὰ κατασκευάζετε τὸ ἀντίστοιχον σχῆμα διὰ νὰ δημιουργήσετε ἐποπτικὴν ἀντίληψιν τοῦ ἀληθοῦς τῆς ὑπὸ τῆς προτάσεως ἐκφραζομένης σχέσεως.

Μὴ ἀλλάσσετε ἐδάφιον, ἐὰν δὲν μάθετε καλῶς ὅ,τι προηγεῖται. Τότε μόνον θὰ ἔχετε κάμει μίαν συστηματικὴν καὶ ἀποτελεσματικὴν ἐπανάληψιν καὶ ἴσως, χωρὶς νὰ τὸ πιστεύετε, **ταχυτάτην**.

της τόξον εἶναι μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον μιᾶς ἡμιπεριφερείας. γ) Ἐὰν Μ καὶ Μ΄ εἶναι ἀντιστοίχως δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τὰ δύο ὑπὸ τῆς αὐτῆς χορδῆς ΑΒ ὑποτεινόμενα τόξα, αἱ γωνίαι ΑΜΒ, ΑΜ΄Β εἶναι παραπληρωματικαί. Ἐκ τοῦ λόγου δὲ τούτου αἱ ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέριαν, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ μόνον ἐγγεγραμμένου ἢ ἐγγραψίμου. δ) Ἑκάστη γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ δύο διατεμνούσας μίαν περιφέρειαν, ἀγομένας ἀπό τινος ἐξωτερικοῦ σημείου μιᾶς περιφερείας, ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τοῦ κοίλου καὶ τοῦ κυρτοῦ τόξου, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. (Τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα, ὅταν ἡ μία τῶν διατεμνουσῶν ἀντικατασταθῇ ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην ἢ ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν). ε) Ἑκάστη γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὴν ἐσωτερικὸν σημεῖον μιᾶς περιφερείας, ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ τῶν πλευρῶν τῆς κατὰ κορυφήν της.* στ) Ἐὰν Α, Β εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα δύο ἴσων καὶ τεμνομένων περιφερειῶν, δημιουργοῦνται δύο ζεύγη ἴσων τόξων. Ἕκαστον ζεῦγος τόξου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὡρισμένου μεγέθους**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ***

1. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Χαράσσομεν τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ δύο χορδὰς παραλλήλους ΒΒ΄, ΓΓ΄. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β΄, Γ΄, εἶναι συνευθειακά.

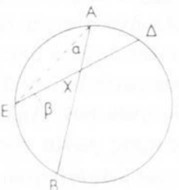


* Διὰ τὴν συνέπειαν (δ)

$$\hat{a} = \hat{x} + \hat{\beta} \Rightarrow \hat{x} = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} - \frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2}$$

(Σχ. 3)

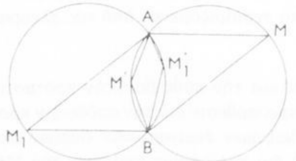


Διὰ τὴν συνέπειαν (ε)

$$\hat{x} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \Rightarrow$$

$$\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{EB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A\Delta}}{2}$$

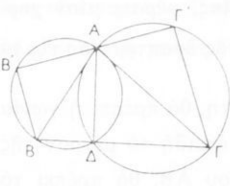
(Σχ. 4)



(Σχ. 5)

** λέγομεν τὸ σημεῖον **βλέπει** ἢ ἀπὸ τὸ σημεῖον **φαίνεται** τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, διότι τὸ σημεῖον εἶναι κορυφὴ γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΜΒ καὶ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AM_1B αὐτὰ καὶ μόνον αὐτὰ βλέπουν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὑπὸ γωνίαν μὲ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ μικροῦ τόξου ΑΒ. Ἐπίσης τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΜ΄Β καὶ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AM'_1B βλέπουν αὐτὰ καὶ μόνον αὐτὰ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὑπὸ γωνίαν μὲ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ μεγάλου τόξου ΑΒ. Τὸ ὅτι μόνον τὰ μὲν ἢ τὰ δὲ ἱκανοποιοῦν τὸ ὡρισμένον ἐπίταγμα, φαίνεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνεπειῶν (δ) καὶ (ε), ὅπου σημεῖα ἐξωτερικὰ ἢ ἐσωτερικὰ τῶν εἰρημένων ζευγῶν τόξων δὲν θὰ βλέπουν τὸ ΑΒ ὑπὸ γωνίας τοῦ αὐτοῦ μέτρου.

*** Αἱ παρατιθέμεναι ἀσκήσεις μετὰ ἀπὸ ἑκάστην θεωρητικὴν ἑνότητα ἔχουν ὡς σκοπὸν νὰ



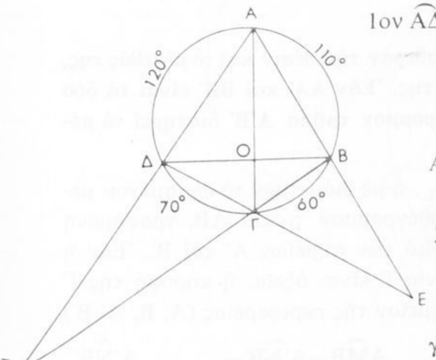
(Σχ. 6)

1ον. Αὐταὶ αἱ περιφέρειαι, προφανῶς, διέρχονται διὰ τοῦ ἴχνους τοῦ ὕψους ΑΔ

2ον $\hat{\Gamma}'=1_{\llcorner} \Longrightarrow A\Gamma' \perp \Gamma\Gamma'$, $\hat{B}'=1_{\llcorner} \Longrightarrow AB' \perp BB'$

Ἔτσι, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ΄ καὶ ΑΒ΄ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι εὐθεῖαι ἀντίθετοι.

2. Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διαδρομῆς τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}=110^0$, $\overset{\frown}{B\Gamma}=60^0$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=70^0$. Ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τὰς γωνίας τῶν διαγωνίων του καὶ τὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.



(Σχ. 7)

1ον $\overset{\frown}{A\Delta}=120^0$. 2ον $\hat{A}=\dfrac{70^0+60^0}{2}=65^0$, $\hat{B}=\dfrac{120^0+70^0}{2}=95^0$

$$\hat{\Gamma}=\frac{120^0+110^0}{2}=115^0,\quad \Delta=\frac{110^0+60^0}{2}=85^0$$

$$A\hat{O}B=\frac{110^0+70^0}{2}=90^0,\quad \hat{E}=\frac{120^0-60^0}{2}=30^0$$

$$\hat{Z}=\frac{110^0-70^0}{2}=20^0.$$

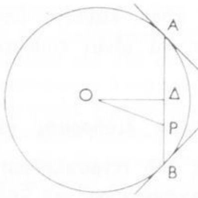
3. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ αὐτῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι.

Αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ὑποτείνουν ἴσα τόξα καὶ συνεπῶς αἱ χορδαὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων, θὰ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν αἱ πλευραί των θὰ ὁρίζουν τόξα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία ὁλόκληρος περιφέρεια. Δεδομένου ὅμως, ὅτι μία καὶ ἡ αὐτὴ χορδὴ ὑποτείνει πάντα δύο τόξα μὲ ἄθροισμα 360^0, ἕπεται, ὅτι αἱ χορδαὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι ἴσαι.

δείξουν τὴν σημασίαν τοῦ θεωρητικοῦ της περιεχομένου, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ ὑφίσταται δέσμευσις ἐπὶ τοῦ χρησιμοποιουμένου διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως θεωρητικοῦ ὑλικοῦ.

Προσπαθῆστε προηγουμένως νὰ λύετε τὰς ἀσκήσεις μόνοι σας.

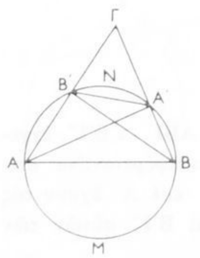
4. Διὰ διδομένου σημείου Ρ, ἐσωτερικοῦ μιᾶς περιφερείας, φέρατε μίαν χορδὴν ΑΒ τοιαύτην, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{A\Gamma B}$, ἡ μορφουμένη ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ Α καὶ Β, νὰ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατή.



(Σχ. 8)

Διὰ νὰ εἶναι ἡ γωνία Γ μεγίστη, θὰ πρέπει ἡ γωνία $\Gamma\widehat{A}B$ νὰ εἶναι ἐλαχίστη. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς $\Gamma\widehat{A}B$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ, θὰ πρέπει τὸ τόξον τοῦτο καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ χορδή του νὰ εἶναι ἡ κατὰ τὸ δυνατὸν ἐλαχίστη. Καὶ διὰ νὰ εἶναι ἡ χορδὴ ΑΒ ἐλαχίστη, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τοῦ κέντρου μεγίστη. Ἑπομένως ἀρκεῖ τὴν ἀπόστασίν της νὰ ἐκφράζῃ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΡ. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν χορδὴ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΡ ἐκ τοῦ Ρ.

5. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ διατηρεῖ σταθερὰν τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθός της, ἐνῷ ἡ γωνία Γ διατηρεῖ σταθερὸν τὸ μέγεθός της. Ἐὰν ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ εἶναι τὰ δύο ὕψη τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Α΄Β΄ διατηρεῖ τὸ μέγεθός του.



(Σχ. 9)

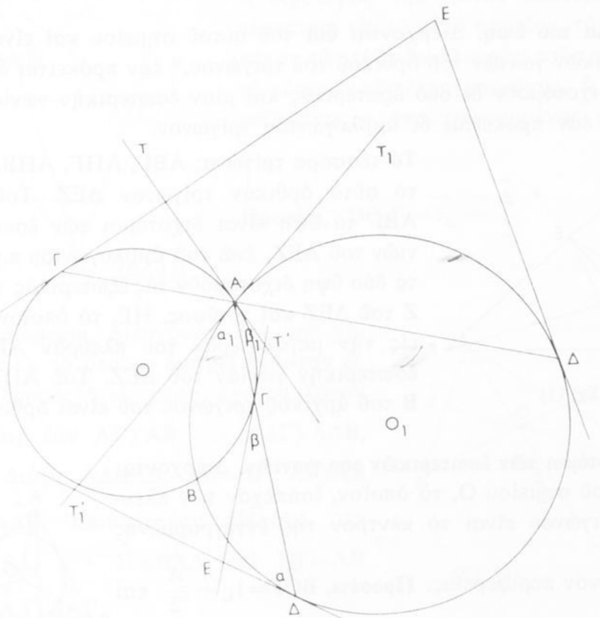
Ἀφοῦ $A\widehat{A'}B = A\widehat{B'}B = 1_{\llcorner}$, ἡ μὲ διάμετρον τὸ ὡρισμένου μεγέθους καὶ θέσεως εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, γραφομένη περιφέρεια, θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Α΄ καὶ Β΄. Ἐὰν ἡ σταθεροῦ μεγέθους γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα, ἡ κορυφή της Γ θὰ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Α, Β, Α΄ Β΄) καὶ τὸ μέτρον της θὰ εἶναι: $\dfrac{A\overset{\frown}{M}B - A'\overset{\frown}{N}B'}{2} = 90^0 - \dfrac{A'\widehat{N}B'}{2}$

Ἐπειδὴ δὲ αὐτὴ ὑπετέθη σταθεροῦ μεγέθους, θὰ εἶναι σταθεροῦ μεγέθους τὸ τόξον $A'\overset{\frown}{N}B'$ καὶ συνεπῶς καὶ ἡ χορδή του.

Ἐὰν τώρα ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀμβλεῖα ἡ κορυφή της Γ θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Α,Β,Α΄,Β΄) καὶ τὸ μέτρον της θὰ εἶναι $90^0 + \dfrac{A'\widehat{N}B'}{2}$. Ἑπομένως καὶ πάλιν τὸ τόξον $A'\overset{\frown}{N}B'$ θὰ εἶναι σταθεροῦ μεγέθους καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ χορδή του.

6. Δίδονται δύο περιφέρειαι, αἵτινες τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Διὰ τοῦ σημείου Α χαράσσομεν μίαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰ ἐξωτερικὰ τόξα εἰς τὰ Γ καὶ Δ. Δείξατε, ὅτι ἡ γωνία $\Gamma\widehat{E}\Delta$ τῶν ἐφαπτομένων ΓΕ καὶ ΔΕ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ διατηρεῖ τὸ μέγεθός της, ὅταν ἡ τέμνουσα ΓΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α. Ἂν πάλιν τὸ

ἕνα τῶν σημείων Γ καὶ Δ ἀνήκει εἰς ἐξωτερικὸν τόξον καὶ τὸ ἄλλο εἰς ἐσωτερικόν, πάλιν ἡ γωνία $Γ\hat{E}Δ$ διατηρεῖ τὸ μέγεθός της σταθερόν.



(Σχ. 10)

1ον Διὰ νὰ εἶναι ἡ $Γ\hat{E}Δ$ σταθεροῦ μεγέθους πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν γωνιῶν ΕΓΔ καὶ ΕΔΓ νὰ εἶναι σταθερόν.

Ἐὰν ΑΤ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς (Ο) καὶ AT_1 τῆς (O_1), ἔχομεν: $E\hat{Γ}Δ = Γ\hat{A}T$, $E\hat{Δ}Γ = Δ\hat{A}T_1$

$$E\hat{Γ}Δ + E\hat{Δ}Γ = Γ\hat{A}T + Δ\hat{A}T_1 = 2_{L} - T\hat{A}T_1 = C\ *$$

διότι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ Α δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῆς ΓΑΔ περὶ τὸ Α.

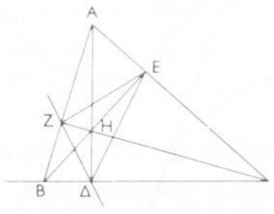
2ον. Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ Γ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον καὶ τὸ Δ ἐξωτερικόν, βλέπομεν, ὅτι ἡ γωνία α ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν γωνίαν $α_1$ καὶ ἡ γωνία β τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν $β_1$. Ἔτσι, ἡ νέα γωνία Ε εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας $T\hat{A}T_1$ δηλ. καὶ πάλιν μεγέθους σταθεροῦ.

* Διὰ τοῦ C συμβολίζεται ἡ σταθερότης ἑνὸς μεγέθους.

3 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Ἀξιοπαρατήρητοι γραμμαὶ τοῦ τριγώνου:

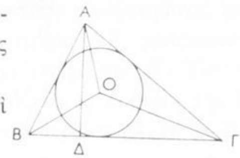
α) Τὰ τρία του ὕψη. Διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου,* ἐὰν πρόκειται δι' ὀξυγώνιον τρίγωνον· διχοτομοῦν δὲ δύο ἐξωτερικὰς καὶ μίαν ἐσωτερικὴν γωνίαν τοῦ ὀρθικοῦ του**, ἐὰν πρόκειται δι' ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.



(Σχ. 11)

Τὰ τέσσαρα τρίγωνα: ΑΒΓ, ΑΗΓ, ΑΗΒ, ΒΗΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὀρθικὸν τρίγωνον ΔΕΖ. Τοῦ ὀξυγωνίου ΑΒΓ τὰ ὕψη εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ΔΕΖ, ἐνῶ τοῦ ἀμβλυγωνίου π.χ. τοῦ ΑΗΓ, τὰ δύο ὕψη διχοτομοῦν τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Δ καὶ Ζ τοῦ ΔΕΖ καὶ τὸ ὕψος, ΗΕ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν του πλευρὰν ΑΓ, διχοτομεῖ ἐσωτερικὴν γωνίαν τοῦ ΔΕΖ. Τοῦ ΑΗΓ ἡ κορυφὴ Β τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου τοῦ εἶναι ὀρθόκεντρον***.

β) Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν του γωνιῶν. Διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον, ἰσαπέχον τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας. **Προσέτι,** $B\hat{O}\Gamma = 1_{\llcorner} + \frac{\hat{A}}{2}$ καὶ $O\hat{A}\Delta = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$, ἂν $A\Delta \perp B\Gamma$ καὶ $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ ****.



(Σχ. 12)

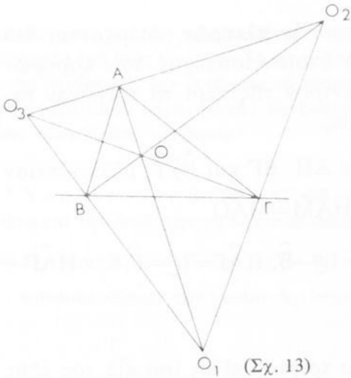
---

* Δηλ. τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ θεωρουμένου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν ὀνομάζεται ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου.

** Τὸ ὕψος τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

***Ὅπως εὐκόλως ἀντιλαμβάνεται ὁ καθείς, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ὀρθικὸν ἐκπροσωπεῖται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα-ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑποτείνουσάν του. Ὀρθόκεντρον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς του γωνίας καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου μηδενικαί.

**** Πράγματι, $B\hat{O}\Gamma = 2_{\llcorner} - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) = 1_{\llcorner} + 1_{\llcorner} - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) \Rightarrow B\hat{O}\Gamma = 1_{\llcorner} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow B\hat{O}\Gamma = 1_{\llcorner} + \frac{\hat{A}}{2}$. Ἐπίσης, $O\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma - O\hat{A}\Gamma = 1_{\llcorner} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

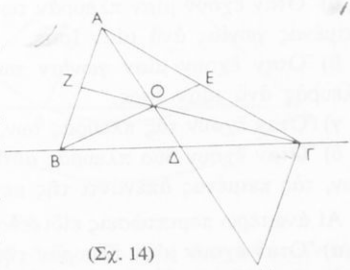


(Σχ. 13)

γ) Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν του γωνιῶν. Δύο ἐξ αὐτῶν τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης ἐσωτερικῆς γωνίας τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχον τῶν εὐθειῶν-πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐκγεγραμμένης, ἢ ἄλλως ὀνομαζομένης, παρεγγεγραμμένης περιφερείας.

Προσέτι, $B\hat{O}_1\Gamma = 1_{\llcorner} - \frac{\hat{A}}{2}$.*

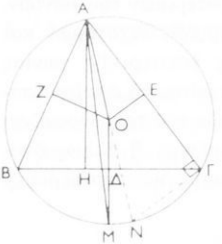
δ) Αἱ τρεῖς διάμεσοι. Διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐσωτερικῶς** εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον 2:1. **Προσέτι,** ἐὰν $A\Gamma > AB \Longrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma > A\hat{\Delta}B$, $\Delta\hat{A}B > \Delta\hat{A}\Gamma$ Διότι, $A\Delta \equiv A\Delta$, $\Delta B = \Delta\Gamma$, $A\Gamma > AB \Longrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma > A\hat{\Delta}B$. Ἐπίσης, ἐὰν $\Delta H = A\Delta \Longrightarrow \Delta\Gamma H_{\triangle} = AB\Delta_{\triangle} \Longrightarrow \hat{H} = B\hat{A}\Delta$ καὶ $H\Gamma = AB$ Ἄρα $\hat{H} = B\hat{A}\Delta > \Delta\hat{A}\Gamma$.



(Σχ. 14)

*Ὑφίστανται λοιπὸν τρεῖς παρεγγεγραμμέναι περιφέρειαι καὶ τὰ κέντρα των συνιστοῦν κορυφὰς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ. (αἱ $O_1\Gamma O_2$... εἶναι εὐθεῖαι Κεφ. 2,1). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθικὸν τοῦ $O_1O_2O_3$ ($OAO_2 = 1_{\llcorner}$ Κεφ. 2,2). Ἔτσι τὸ κέντρον Ο εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον διὰ τὸ $O_1O_2O_3$. Τέλος, $B\hat{O}_1\Gamma = 2_{\llcorner} - B\hat{O}\Gamma = 2_{\llcorner} - \left(1_{\llcorner} + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 1_{\llcorner} - \frac{\hat{A}}{2}$.

Ὅταν ἔχωμεν ἕνα **ἐσωτερικὸν σημεῖον εὐθυγράμμου τμήματος (δηλ. σημεῖον τοῦ τμήματος διάφορον τῶν ἄκρων του) διαιροῦμεν τοῦτο εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα προστιθέμενα γεωμετρικῶς συνιστοῦν αὐτὸ τὸ τμῆμα. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ τοῦ τμήματος λέγεται **ἐσωτερικὴ διαίρεσις τοῦ τμήματος** καὶ ὁ λόγος τῶν τμημάτων διαιρέσεως **ἐσωτερικὸς λόγος τομῆς.**



(Σχ. 15)

ε) Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν. Διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχον τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας.

Προσέτι, $O\hat{A}H = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, ἂν $AH \perp B\Gamma$ καὶ $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, μὲ συνέπειαν $\left(\text{Κεφ. } 3,\ 1,\ \beta\right)$ νὰ εἶναι $H\hat{A}M = M\hat{A}O$

Πράγματι, $N\hat{A}\Gamma = 1_{\llcorner} - \hat{N} = 1_{\llcorner} - \hat{B}$, $H\hat{A}\Gamma = 1_{\llcorner} - \hat{\Gamma} \Rightarrow H\hat{A}\Gamma - N\hat{A}\Gamma = H\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

2. Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων*.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα εἰς τὰς ἑξῆς **τέσσαρας** περιπτώσεις:

α) Ὅταν ἔχουν μίαν πλευράν των ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν τὴν πλευρὰν προσκειμένας γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας.

β) Ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν των ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν τὴν γωνίαν πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας.

γ) Ὅταν ἔχουν τὰς πλευράς των, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας.

δ) Ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ ἐπίσης ἴσας τὰς γωνίας των, τὰς κειμένας ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο θεωρουμένων πλευρῶν.

Αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις εἰδικεύονται εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς ἀκολούθως:

α) Ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς των γωνίας ἴσην καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν των γωνιῶν ἴσην (ἀντίστοιχος τῆς (α)).

β) Ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσάν των ἴσην καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν των γωνιῶν ἴσην (ἀντίστοιχος καὶ πάλιν τῆς (α)).

γ) Ὅταν ἔχουν τὰς καθέτους των πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας (ἀντίστοιχος τῆς (β)).

δ) Ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσάν των ἴσην καὶ μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς των γωνίας ἴσην (ἀντίστοιχος τῆς (δ)).

Σχόλιον. Αὐτὴ ἡ θεωρία τῶν περιπτώσεων ἰσότητος ἐπὶ τῶν τριγώνων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βεβαιώ-

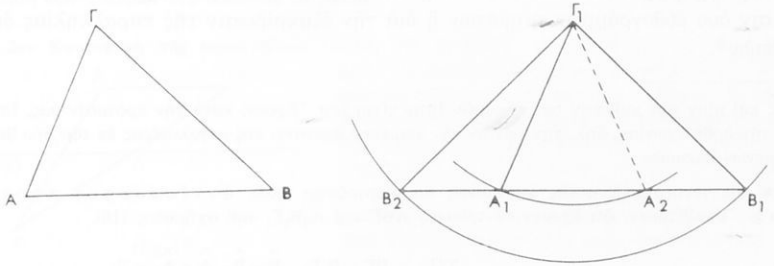
* Κατὰ τὰς ἀποδείξεις τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων ἢ κατὰ τὴν ἐπίλυσιν διαφόρων γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ διὰ νὰ ὑποβοηθήσωμεν τοὺς συλλογισμούς, φανταζόμεθα ἑκάστοτε, ὅτι ἕνα γεωμετρικὸν σχῆμα ἀλλάσσει θέσιν εἰς τὸ ἐπίπεδόν του. Αὐτὴ ἡ μεταβολὴ θέσεως φέρει γενικῶς τὸ ὄνομα **μεταφορά.** Δεχόμεθα, καὶ αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕνα «αἴτημα», ὅτι κατ᾽ αὐτὴν τὴν ἀλλαγὴν θέσεως τὸ σχῆμα μένει ἀμετάβλητον.

Δύο γεωμετρικὰ σχήματα ὀνομάζονται ἴσα, ὅταν δυνάμεθα διὰ καταλλήλου μεταφορᾶς (συμμετρίας, στροφῆς κ.τ.λ.) νὰ φέρωμεν τὸ ἕνα, ὥστε νὰ συμπέσῃ πλήρως — σημεῖον πρὸς σημεῖον — μετὰ τοῦ ἄλλου. Τὰ συμπίπτοντα ὁμώνυμα στοιχεῖα δύο ἴσων σχημάτων, πραγματοποιουμένης τῆς μεταφορᾶς των, ὀνομάζονται **ὁμόλογα.**

σωμεν, ὅτι: 1ον Δύο τρίγωνα **εἶναι ἴσα,** χωρὶς νὰ εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. **2ον Μὲ τὰ τρία στοιχεῖα ἑκάστης ὑποθέσεως, δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν παρὰ ἕνα μόνον τρίγωνον.** Μὲ βάσιν αὐτὴν τὴν τελευταίαν παρατήρησιν θὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἀπόδειξιν τῆς περιπτώσεως (δ) τῆς ἰσότητος τῶν οἱωνδήποτε τριγώνων.*

* Ὑ π ο θ έ τ ο μ ε ν, ὅτι $ΒΓ > ΑΓ$ καὶ συνεπῶς $\hat{A} > \hat{B}$. Πρόκειται τώρα, χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μας ἕνα τρίγωνον $Α_1Β_1Γ_1$, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν $Α_1Γ_1 = ΑΓ$, τὴν $Β_1Γ_1 = ΒΓ$ καὶ τὴν $\hat{A}_1 = \hat{A}$.

Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $Α_1$ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον,



(Σχ. 16)

ἐνῶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς της λαμβάνομεν τὸ μέγεθος $Α_1Γ_1 = ΑΓ$. Ἐὰν τώρα γράψωμεν τὴν περιφέρειαν ($Γ_1$, ΓΒ), θὰ ἔχωμεν μὲ τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς γωνίας $Α_1$ δύο σημεῖα τομῆς. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΓ > ΑΓ$ τὰ σημεῖα αὐτὰ τομῆς, $Β_1$, $Β_2$, θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου $Α_1$.

Ἐκ τῶν τριγώνων $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_1Γ_1Β_2$ μόνον τὸ πρῶτον ἱκανοποιεῖ τοὺς τεθέντας ὅρους καὶ συνεπῶς ἡ πρότασίς μας εἶναι ἀληθής.

Ἔστω τώρα, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ νὰ εἶναι: $Α_1Γ_1 = ΑΓ$, $Β_1Γ_1 = ΒΓ$ καὶ $\hat{B}_1 = \hat{B}$, ἐνῶ συμβαίνει νὰ εἶναι $ΒΓ > ΑΓ$.

Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $Β_1 = Β$ καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς της λαμβάνομεν τμῆμα $Β_1Γ_1 = ΒΓ$. Ἡ περιφέρεια τώρα ($Γ_1$,ΓΑ) θὰ τμήσῃ τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς γωνίας $Β_1$ εἰς δύο σημεῖα, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ $Β_1$ εὑρισκόμενα. Καὶ ἔτσι τὰ τρίγωνα $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_2Β_1Γ_1$ ἱκανοποιοῦν τὰς τεθείσας συνθήκας.

Γ ε ν ι κ ώ τ ε ρ ο ν σ υ μ π έ ρ α σ μ α: Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας καὶ τὴν γωνίαν, τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο θεωρουμένων πλευρῶν ἴσην, εἶναι ἴσα· ἐὰν ὅμως ἔχουν ἴσην τὴν γωνίαν, τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μικροτέρας ἐκ τῶν δύο θεωρουμένων πλευρῶν, εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσα, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ ἄνισα. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν αἱ γωνίαι, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαὶ (βλ. γωνίας $Β_1Α_2Γ_1$ καὶ Α).

Συνέπεια τῆς προτάσεώς μας: Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των

3. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τῶν μέσων δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου.

α) Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου φέρωμεν τὴν παράλληλον πρὸς μίαν δευτέραν του πλευράν, ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου εἰς τὸ μέσον της καὶ τὸ προκῦπτον εὐθύγραμμον τμῆμα ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι παράλληλον (αὐτὸ εἶναι τὸ τμῆμα τῶν μέσων).

β) Ἀντιστρόφως: Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην του πλευρὰν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισύ της.

Παρατήρησις: Αὐτὰ τὰ δύο θεωρήματα χρησιμοποιοῦνται συχνὰ διὰ τὴν σύγκρισιν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς παραλληλίας δύο εὐθειῶν*.

ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων των πλευρῶν ἴσην εἶναι ἴσα. Ἔχουν, κατὰ τὴν πρότασίν μας, ἴσην καὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, δηλ. τὴν γωνίαν τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο θεωρουμένων πλευρῶν.

Ἐκ τῆς γενικωτέρας αὐτῆς προτάσεως δημιουργοῦνται τρεῖς ἀντίστροφοι προτάσεις. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A_2B_1\Gamma_1$ τοῦ σχήματος (16).

1η Πρότασις	ΥΠ	$B\Gamma = B_1\Gamma_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{A} + \hat{A}_2 = 2\llcorner$
	Συμ	$A\Gamma = A_2\Gamma_1$

Ἀρκεῖ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δώσωμεν τὴν θέσιν $A_1B_1\Gamma_1$

2α Πρότασις	ΥΠ	$B\Gamma = B_1\Gamma_1$, $A\Gamma = A_2\Gamma_1$, $\hat{A} + \hat{A}_2 = 2\llcorner$
	Συμ	$\hat{B} = \hat{B}_1$

Ἀρκεῖ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δώσωμεν τὴν θέσιν $A_2B_2\Gamma_1$

3η Πρότασις	ΥΠ	$A\Gamma = A_2\Gamma_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{A} + \hat{A}_2 = 2\llcorner$
	Συμ	$B\Gamma = B_1\Gamma_1$

Ἀρκεῖ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δώσωμεν τὴν θέσιν $A_2B_2\Gamma_1$.

Ὑπενθυμίζομεν: Κάθε πρότασις συνίσταται ἐκ δύο μερῶν: Τῆς ὑποθέσεως, περιλαμβανούσης τὸ σύνολον τῶν συνθηκῶν εἰς τὰς ὁποίας τοποθετούμεθα, καὶ τοῦ συμπεράσματος, ἐκφράζοντος τὸ γεγονός, τὸ ὁποῖον μέσω τῶν συνθηκῶν αὐτῶν ἀναγκαίως θὰ λάβη χώραν.

Ὀνομάζομεν ἀντίστροφον μιᾶς προτάσεως μίαν δευτέραν πρότασιν εἰς τὴν ὁποίαν τὸ συμπέρασμα μορφοῦται ὁλοκληρωτικῶς ἢ μερικῶς ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς πρώτης καὶ ἀντιστρόφως.

*Ἰδοὺ παραδείγματα τῆς τοιαύτης χρησιμοποιήσεώς των:

1ον Ἄμεσος διαπίστωσις εἶναι ἡ πρότασις: Τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν

4. Ἀνισοτικαὶ σχέσεις εἰς τὰ τρίγωνα.

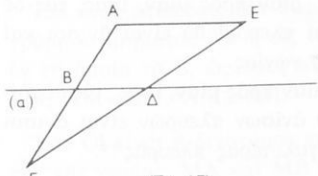
α) Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των. Ἔτσι, ἂν $\alpha>\beta>\gamma$ θὰ ἔχωμεν:

$$\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma, \quad \alpha-\gamma<\beta<\alpha+\gamma, \quad \alpha-\beta<\gamma<\alpha+\beta$$

Καὶ ἐφόσον εἶναι γνωστὴ ἡ διάταξις τῶν πλευρῶν, διὰ νὰ ἰσχύουν καὶ αἱ τρεῖς

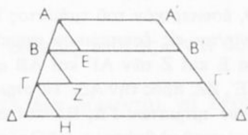
πλευρῶν τριγώνου, προσδιορίζουν τέσσαρα ἴσα τρίγωνα μὲ πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου.

2ον Κατασκευὴ τῆς παραλλήλου. Ἔστω, ὅτι πρόκειται νὰ χαράξωμεν τὴν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν (α). Συνδέομεν τὸ σημεῖον Α μὲ ἕνα τυχὸν σημεῖον Β τῆς εὐθείας (α) καὶ προεκτείνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ πέραν τοῦ Β κατὰ τμῆμα ΒΓ = ΑΒ. Κατόπιν συνδέομεν τὸ Γ μὲ ἕνα δεύτερον σημεῖον Δ τῆς εὐθείας (α) καὶ προεκτείνομεν τὸ τμῆμα ΓΔ πέραν τοῦ Δ κατὰ τμῆμα ΔΕ = ΓΔ. Φανερὸν εἶναι πλέον, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν (α).



(Σχ. 17)

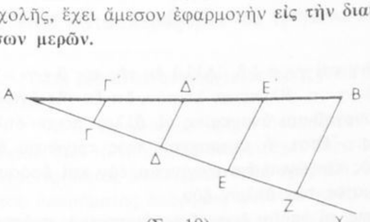
3ον Παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τμήματα ἴσα ἐπὶ τεμνούσης αὐτὰς εὐθείας. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ εἶναι παράλληλοι καὶ εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ θὰ εἶναι καί: Α′Β′ = Β′Γ′ = Γ′Δ′. Πράγματι, ἐὰν ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ εἶναι τμήματα παράλληλα πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α′Δ′, ἡ προφανὴς ἀνὰ δύο ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ. Καὶ ἐπειδή, ΑΕ = Α′Β′, ΒΖ = Β′Γ′, ΓΗ = Γ′Δ′ (διότι εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμων) θὰ εἶναι καί: Α′Β′ = Β′Γ′ = Γ′Δ′. Ὥστε: **Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ μιᾶς τεμνούσης αὐτὰς εὐθείας τμήματα ἴσα, ὁρίζουν ἐπίσης τμήματα ἴσα καὶ ἐπὶ μιᾶς τυχούσης ἄλλης εὐθείας καὶ τεμνούσης αὐτάς.** Τὸ θεώρημα αὐτό, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸν Θαλῆν, τὸν ἀρχηγὸν τῆς Ἰονίου Σχολῆς, ἔχει ἄμεσον ἐφαρμογὴν **εἰς τὴν διαίρεσιν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.**



(Σχ. 18)

Ἔτσι, ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΧ ληφθοῦν τὰ ἴσα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ἀχθῶσι τὰ παράλληλα τμήματα ΓΓ′, ΔΔ′, ΕΕ′ πρὸς τὸ τμῆμα ΖΒ, θὰ εἶναι: ΑΓ′ = Γ′Δ′ = Δ′Ε′ = Ε′Β. Τὸ τμῆμα λοιπὸν διηρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

Καὶ ἰδοὺ τώρα μιὰ ἁπλῆ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τῶν μέσων.



(Σχ. 19)

διπλαῖ ἀνισότητες, **ἀρκεῖ ἡ μεγαλυτέρα ἐξ αὐτῶν** νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο *.

β) Ἐὰν Μ εἶναι ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ΑΒΓ, ἔχομεν:

$$\text{ΜΒ}+\text{ΜΓ}<\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}$$

Καὶ γενικώτερον: Μία κυρτὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ εἶναι συντομωτέρα μιᾶς τυχούσης πολυγωνικῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν περιέχει καὶ ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα. Καὶ ἀκόμη, ἡ περίμετρος κάθε κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι συντομωτέρα τῆς περιμέτρου ἑνὸς τυχόντος πολυγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχει.

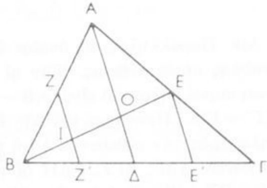
γ) Αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν μεγέθους μὲ τὰς ἀπέναντι τούτων πλευράς των. Ἐὰν ὑποτεθῇ

$$\alpha>\beta>\gamma \implies \hat{\text{Α}}>\hat{\text{Β}}>\hat{\Gamma}$$

δ) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.

ε) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας, τὰς δὲ τρίτας ἀνίσους, αἱ γωνίαι, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς**.

Τὰ σημεῖα Α καὶ Δ εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΒΕ καὶ συνεπῶς τὸ τμῆμα ΑΔ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΒΕ εἰς ἕνα σημεῖον Ο, ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΒΕ. Αἱ δύο λοιπὸν διάμεσοι τέμνονται εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου. Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ φέρομεν τὰ παράλληλα τμήματα ΕΕ', ΖΖ' πρὸς τὴν ΑΔ. Τὰ σημεῖα Ε' καὶ Ζ' θὰ εἶναι μέσα τῶν ἴσων τμημάτων ΓΔ, ΒΔ καὶ συνεπῶς: ΒΖ' = Ζ'Δ = ΔΕ' = Ε'Γ. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ: ΒΙ = ΙΟ = ΟΕ. => ΒΟ = $^2/_3$ΒΕ. Χρησιμοποιοῦντες τώρα τὰς ἐκ τῶν Δ καὶ Ζ παραλλήλους



(Σχ. 20)

πρὸς τὴν διάμεσον ΒΕ, θὰ διεπιστώναμεν, ὅτι $\text{ΑΟ}=\frac{2}{3}\text{ΑΔ}$. Καὶ ἐάν, διατηροῦντες ἐξ αὐτῶν τὴν ΑΔ, ἐχαράσσαμεν τὴν ΓΖ καὶ ἦτο Ο' τὸ κοινόν των σημεῖον, θὰ εἴχομεν ΓΟ' = $^2/_3$ΓΖ, ἀλλὰ καὶ $\text{ΑΟ}'=\frac{2}{3}\text{ΑΔ}$. Ὑφίσταται λοιπὸν κοινὸν σημεῖον καὶ τῶν τριῶν διαμέσων μὲ τὴν γνωστὴν ἰδιότητά του.

* Πράγματι, ἂν $\alpha>\beta>\gamma$ καὶ $\alpha<\beta+\gamma \implies \beta<\alpha+\gamma$ καὶ $\gamma<\alpha+\beta$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς $\alpha<\beta+\gamma \implies \alpha-\beta<\gamma$ καὶ $\alpha-\gamma<\beta$. Τέλος, ἐκ τῆς $\beta<\alpha+\gamma \implies \beta-\gamma<\alpha$. Βλέπομεν λοιπόν, **ὅτι ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha<\beta+\gamma$ καὶ μόνον,** ἐφόσον $\alpha>\beta>\gamma$, δημιουργοῦνται ἀναγκαίως αἱ ἄλλαι πέντε δηλ. δημιουργοῦνται αἱ ἀνωτέρω τρεῖς διπλαῖ ἀνισότητες. Ἔτσι, ἡ κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου ἐκ τριῶν μεγεθῶν, ἀντιπροσωπευόντων τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν καὶ ἐφόσον ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο.

** Αἱ προτάσεις (δ) καὶ (ε) εἶναι **αἱ μόναι** προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν ἀνισοτικὰς σχέσεις μεταξὺ δύο τριγώνων.

5. Κάθετος καὶ πλάγιαι.

Ἐὰν ἀπὸ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον εὐθείας χαράξωμεν τμῆμα κάθετον πρὸς αὐτὴν ὡς καὶ πλάγια τμήματα: **

α) Τὸ κάθετον τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε πλάγιον.

β) Δύο πλάγια τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου, εἶναι ἴσα.

γ) Ἀπὸ δύο πλάγια τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου, μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὸ ἴχνος ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Αὐτῶν τῶν τριῶν προτάσεων ἰσχύουν καὶ αἱ ἀντίστροφοι.

Συνέπειαι: α) Περιοχαὶ καθοριζόμεναι ἀπὸ τὴν μεσοκάθετον εὐθυγράμμου τμήματος ἢ ἀπὸ τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας.

Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐὰν ἕνα σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἢ εἰς τὴν περιοχὴν ἐν τῇ ὁποίᾳ τὸ Α ἢ εἰς τὴν περιοχὴν ἐν τῇ ὁποίᾳ τὸ Β, ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν μεσοκάθετον, ἔχομεν ἀντιστοίχως: $AM=BM$, $AM<BM$, $AM>BM$.

Ἐὰν ΟΙ εἶναι ἡ διχοτόμος κυρτῆς γωνίας $x\hat{O}y$ καὶ Μ ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς τῆς γωνίας, ΜΑ καὶ ΜΒ δὲ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς Οx καὶ Οy, ἔχομεν: $MA=MB, MA<MB, MA>MB$, καθόσον τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ἢ εἰς τὴν περιοχὴν ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα Οx ἢ εἰς τὴν περιοχὴν εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα Οy ὡς πρὸς τὴν ΟΙ.

β) Μεταξὺ ἐξωτερικοῦ σημείου μιᾶς εὐθείας καὶ τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι τρία ἴσα τμήματα.

γ) Μία περιφέρεια καὶ μία συνεπίπεδος αὐτῆς εὐθεῖα δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

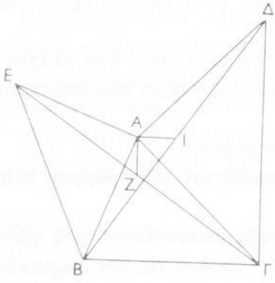
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ ὀρθογώνια εἰς τὸ Α καὶ ἰσοσκε-

* Μία εὐθεῖα εἶναι πλαγία ὡς πρὸς μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἐὰν δὲν εἶναι αὐτῆς κάθετος ἢ παράλληλος.

** Αὐτὸ τὸ κάθετον τμῆμα ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ θεωρουμένου σημείου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Καὶ τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἄκρα τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος καὶ τὸ ἴχνος ἑνὸς πλαγίου τμήματος ὀνομάζεται **ὀρθὴ προβολὴ** τοῦ πλαγίου τμήματος. Σημειοῦμεν ἀκόμη, ὅτι, ἐκτὸς τοῦ θεωρήματος ὑπάρξεως καθέτου πρὸς εὐθεῖαν ἐκ σημείου ἐξωτερικοῦ αὐτῆς ἢ ἐκ σημείου κειμένου ἐπ' αὐτῆς, ὑποθέτομεν ἀκόμη γνωστὸν καὶ τὸν τρόπον τῆς χαράξεως αὐτῶν τῶν καθέτων.

λῆ. 1ον Νὰ δειχθῆ, ὅτι ΕΓ=ΔΒ. 2ον Ἐὰν Ι,Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΒΔ καὶ ΕΓ, νὰ δειχθῆ, ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΙΖ διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. 3ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῆ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΒΓ;



(Σχ. 21)

1ον $AB\Delta_\Delta = A\Gamma E_\Delta$ ($A\Delta = A\Gamma$, $AB = AE$, $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$) $\Longrightarrow B\Delta = \Gamma E$

2ον Θὰ εἶναι ἡ πρότασις ἀληθής, ἐὰν καὶ ἐφόσον ΑΙ=ΑΖ. Ἀλλ' αὐτὸ συμβαίνει, διότι πρόκειται περὶ διαμέσων ὁμολόγων πλευρῶν ἴσων τριγώνων.

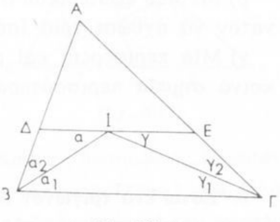
3ον. Ἐὰν δεχθῶμεν ΔΕ=ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ θὰ εἶναι ἴσα. Αἱ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Α γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ καί, λόγω τῶν διδομένων τοῦ προβλήματος, παραπληρωματικαί. Συνεπῶς, $B\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Delta = 1_{\llcorner}$.

2. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ι τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου χαράσσομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε 1ον. Νὰ δειχθῆ, ὅτι ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ. 2ον. Νὰ δειχθῆ ἡ ἀντίστροφος πρότασις.

1ον. $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} \Longrightarrow \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \Longrightarrow B\Delta = \Delta I$ (1) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΓΕ=ΙΕ (2). Ἐκ τῶν (1), (2),

$$B\Delta + \Gamma E = \Delta I + IE \Longrightarrow B\Delta + \Gamma E = \Delta E$$

2ον Ἔστω $\Delta E \parallel B\Gamma$ καὶ ΒΔ+ΓΕ=ΔΕ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι, ἐὰν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τέμνη τὴν ΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Ι, αὐτὸ τὸ Ι εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἢ ἄλλως ἡ ΙΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ.

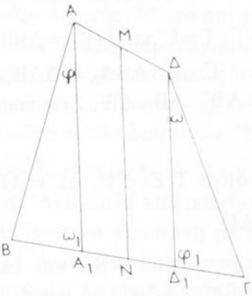


(Σχ. 22)

Ἀφοῦ $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ καὶ $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} \Longrightarrow \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \Longrightarrow B\Delta = \Delta I$. Ἄρα καὶ ΙΕ=ΕΓ. Ἡ τελευταία ἰσότης ἔχει τὴν συνέπειαν: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_2$ καὶ ἐπειδὴ $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 \Longrightarrow \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$.

3. Ἐὰν ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσαι, ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἴσας του πλευράς.

Ἐὰν $\Delta\Delta_1 \parallel MN$ καὶ $AA_1 \parallel MN$ θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $\Gamma\hat{\Delta}\Delta_1 = A_1\hat{A}B$.



(Σχ. 23)

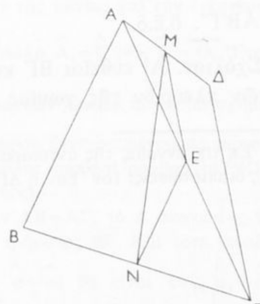
Ἀνάλυσις: Ἔστω $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$. Συνέπεια: Τὰ τρίγωνα $\Delta\Delta_1\Gamma$ καὶ AA_1B ἔχουν: $\Delta\Gamma = AB$, $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}_1 + \hat{\varphi}_1 = 2_{\llcorner}$. Συναντῶμεν λοιπὸν τὴν 1ην ἀντίστροφον πρότασιν τῆς 4ης περιπτώσεως ἰσότητος τριγώνων. Κατὰ τὴν πρότασιν ταύτην θὰ εἶναι $BA_1 = \Delta_1\Gamma$. Δηλ. συνέπεια ἀληθής;

Σύνθεσις: Ἀφοῦ $MN \parallel \Delta\Delta_1$ καὶ $MN \parallel AA_1$ καὶ M μέσον τοῦ $A\Delta$, τὸ MN θὰ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου $AA_1\Delta_1\Delta$. Ὥστε $A_1N = N\Delta_1$ καὶ ἐπειδὴ $BN = N\Gamma$ θὰ εἶναι καὶ $BA_1 = \Delta_1\Gamma$. Ἔτσι τὰ τρίγωνα ABA_1 καὶ $\Delta\Delta_1\Gamma$ ἔχουν: $AB = \Delta\Gamma$, $BA_1 = \Delta_1\Gamma$ καὶ $\hat{\omega}_1 + \hat{\varphi}_1 = 2_{\llcorner}$. Εὑρισκόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν 2αν ἀντίστροφον πρότασιν τῆς 4ης περιπτώσεως ἰσότητος τριγώνων καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι: $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$. ὅ.ἔ.δ.

2α Λύσις: Ἰδοὺ τώρα μία ἄμεσος συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματός μας.

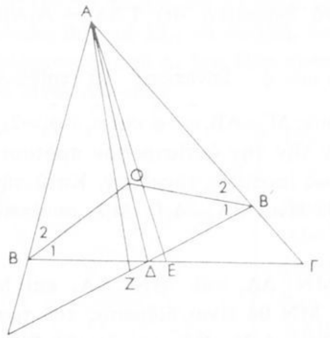
Ἐὰν $AE = E\Gamma$, ἔχομεν: $ME \parallel = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, $EN \parallel = \frac{AB}{2} \Longrightarrow$

$ME = EN$ καὶ συνεπῶς $N\hat{M}E = M\hat{N}E$ ὅ.ἔ.δ.



(Σχ. 24)

4. Ἐὰν ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λάβωμεν τμήματα ΑΓ′, ΑΒ′ ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ καὶ χαράξωμεν τὴν Β′Γ′, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ, ἔχομεν: 1ον Τὴν εὐθεῖαν ΑΔ διχοτόμον τῆς γωνίας Α. 2ον. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὴν κορυφὴν Α μὲ τὰ μέσα τῶν ΒΓ καὶ Β′Γ′, σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α. 3ον Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒ′Γ′ τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.



(Σχ. 25)

1ον. Ἔχομεν $AB\Gamma_\Delta = AB'\Gamma'_\Delta$, διότι $AB=AB'$, $A\Gamma=A\Gamma'$, $A\equiv A$. $\Longrightarrow \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$. Ὥστε: $B\Delta\Gamma'_\Delta = \Delta B'\Gamma_\Delta$, διότι $B\Gamma'=B'\Gamma$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$ καὶ $\Gamma'\hat{B}\Delta=\Delta\hat{B}'\Gamma$, ἀφοῦ $A\hat{B}\Gamma=A\hat{B}'\Gamma'$. Ἔτσι, $AB\Delta_\Delta = A\Delta B'_\Delta$, διότι $A\Delta\equiv A\Delta$, $AB=AB'$, $\Delta B=\Delta B'$. Συνέπεια: $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}B'$.

2ον $EA\Gamma_\Delta = AZ\Gamma'_\Delta$, διότι $\Gamma'Z=\Gamma E$, $A\Gamma'=A\Gamma$, $\hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma} \Longrightarrow \Gamma'\hat{A}Z=E\hat{A}\Gamma$.

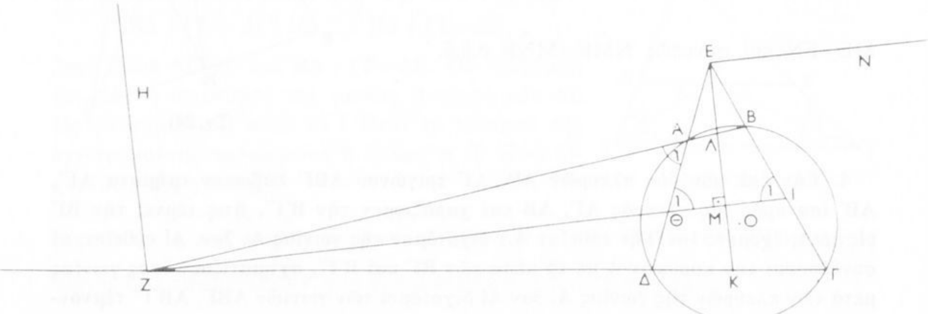
3ον. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ ἐὰν ἡ διχοτόμος της τέμνῃ τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ο, θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΒ′ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΒ′Γ′.

Ἔχομεν $ABO_\Delta = OAB'_\Delta$, διότι $OA\equiv OA$, $AB=AB'$, $B\hat{A}O=O\hat{A}B'$.

Ὥστε: $\hat{B}_2=\hat{B}'_2$ Καὶ ἐπειδὴ $\hat{B}_2=\frac{1}{2}\cdot A\hat{B}\Gamma$ καὶ $A\hat{B}\Gamma=A\hat{B}'\Gamma'$ ἕπεται, ὅτι $\hat{B}'_2=\frac{1}{2}\cdot A\hat{B}'\Gamma'$. ὅ.ἔ.δ.

Σχόλιον. Αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Β′Γ′ σχηματίζουν γωνίας ἴσας μετὰ τῶν **διαφορετικῶν** πλευρῶν τῆς γωνίας Α. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ὀνομάζονται **ἀντιπαράλληλοι** *

* Ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς ἀντιπαραλληλίας δύο εὐθειῶν ὡς πρός τινα γωνίαν ὁδηγούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς **διαπιστώσεις:** 1ον Ἐὰν ἡ ΔΓ εἶναι ἀν/λος τῆς ΑΒ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Ε, τὸ τετράπλευρον



(Σχ. 26)

ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον (θὰ εἶναι $E\hat{B}A = E\hat{\Delta}\Gamma$ καὶ συνεπῶς $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 2\llcorner$). 2ον Εἰς ἕνα ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἀν/λοι ὡς πρὸς τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Α. Ἔτσι, τὸ πρόβλημά μας μᾶς παρέχει καὶ τὸν τρόπον χαράξεως τῆς ἀντιπαραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Α: Θὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ τμῆμα ΑΒ′=ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ τμῆμα ΑΓ′=ΑΓ.

Μία ἀκόμη παρατήρησις: Ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι διάμεσος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Β′Γ′, ἀντιπαραλλήλου τοῦ ΒΓ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Α καὶ εἶναι αὔτη **συμμετρικὴ** τῆς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, δηλ. ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο αὐτῶν διαμέσων. Ἡ ΑΖ ὀνομάζεται **συμμετροδιάμεσος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

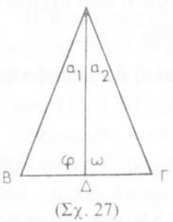
5. Δείξατε, ὅτι: *

α) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι, ἕνα του ὕψος νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν του διχοτόμον.

β) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι, ἕνα του ὕψος νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν του διάμεσον.

γ) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι, μία του διάμεσος νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν του διχοτόμον.

μορφώνουν αἱ δύο ἄλλαι του πλευραί. 3ον Δύο εὐθεῖαι ἀν/λοι ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν τρίτην εἶναι μεταξύ των παράλληλοι. 4ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν δύο ἀντιπαραλλήλων εὐθειῶν, ὡς πρός τινα γωνίαν, εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας καὶ τὴν διχοτόμον τῆς παραπληρωματικῆς της. $\left(\hat{I}_1 = \dfrac{\hat{Z}}{2} + \hat{\Gamma},\ \hat{\Theta}_1 = \dfrac{\hat{Z}}{2} + \hat{A}_1.\right.$ Ἀλλὰ $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{\Theta}_1$. Ἔτσι, τρίγωνον ΕΘΙ ἰσοσκελὲς καὶ ΕΜ ⊥ ΖΜ. κ.τ.λ.$\left.\right)$ 5ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν προεκτάσεων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν, τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, ἅτινα εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου (τὸ ΘΚΙΛ εἶναι ῥόμβος, διότι αἱ διαγώνιοί του τέμνονται δίχα καὶ καθέτως).



(Σχ. 27)

* Διὰ τὴν πρώτην πρότασιν: Ἐὰν ΑΒ=ΑΓ, τὸ Α ἀναγκαίως θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΑΔ τοῦ τμήματος ΒΓ. Καὶ τότε, ἐπειδὴ $AB\Delta_\Delta = A\Delta\Gamma_\Delta$ (ΑΔ=ΑΔ, ΒΔ=ΔΓ, $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$) θὰ εἶναι καί: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$. Ἀντιστρόφως, ἐὰν $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ καὶ $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$, θὰ εἶναι $AB\Delta_\Delta = A\Delta\Gamma_\Delta$ καὶ συνεπῶς ΑΒ=ΑΓ.

Διὰ τὴν 2αν πρότασιν: Ἐὰν ΑΒ=ΑΓ, τὸ Α ἀναγκαίως θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς πλευρᾶς ΒΓ. ὅ.ἔ.δ. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ΒΔ=ΔΓ, $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ θὰ εἶναι, ἀφοῦ ΑΔ=ΑΔ, $AB\Delta_\Delta = A\Delta\Gamma_\Delta$. Συνεπῶς, ΑΒ=ΑΓ.

Διὰ τὴν 3ην πρότασιν: Τὸ ἀναγκαῖον τῆς προτάσεως εἶναι φανερόν. Ἔστω τώρα, ὅτι ΒΔ=ΔΓ καὶ $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, ἀφοῦ ΑΔ=ΑΔ, ἔχουν δύο πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν γωνίαν, τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων των πλευρῶν ἴσην. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὴν 4ην περίπτωσιν ἰσότητος τριγώνων, θὰ εἶναι ἴσα ἢ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἡ 2α ὅμως συνέπεια ἀποκλείεται καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν καὶ ΑΒ=ΑΓ.

6. Δείξατε ὅτι:

α) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς εἶναι δύο διάμεσοι αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι.

β) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι, δύο του ὕψη νὰ εἶναι ἴσα.

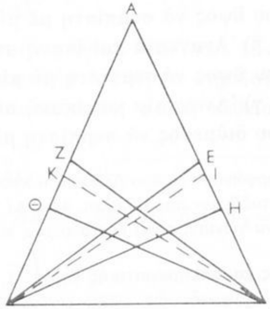
γ) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι, δύο διχοτόμοι του νὰ εἶναι ἴσαι.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν καὶ τῶν τριῶν αὐτῶν προτάσεων θὰ ἀκολουθήσωμεν ἑνιαῖον τρόπον. 1ον. Τὸ ἀναγκαῖον ἑκάστης τούτων ἀντιμετωπίζεται ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς:

Διὰ τὴν πρότασιν (α). Ἀφοῦ $AB = A\Gamma$ $\Rightarrow$ $B\Gamma E_{\Delta} = B\Gamma Z_{\Delta}$, διότι $B\Gamma \equiv B\Gamma$, $\Gamma E = BZ$, $\hat{\Gamma} = \hat{B}$. Συνέπεια: $BE = \Gamma Z$.

Διὰ τὴν πρότασιν (β). Ἀφοῦ $AB = A\Gamma$ $\Rightarrow$ $B\Gamma H_{\Delta} = B\Gamma\Theta_{\Delta}$, διότι $B\Gamma \equiv B\Gamma$, ($H = \Theta = 1_{\llcorner}$), καὶ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ Ὥστε: $BH = \Gamma\Theta$.

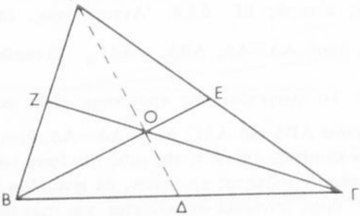
Διὰ τὴν πρότασιν (γ). Ἀφοῦ $AB = A\Gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow B\Gamma I_{\Delta} = B\Gamma K_{\Delta}$, διότι $B\Gamma \equiv B\Gamma$, $\hat{\Gamma} = \hat{B}$, $I\hat{B}\Gamma = K\hat{\Gamma}B$, ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν. Ἄρα $BI = \Gamma K$.



(Σχ. 28)

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὸ ἀρκετὸν τῶν ἀνωτέρω προτάσεων θὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν μέθοδον τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλίσεως. Δηλ. θὰ ἀποκλείσωμεν τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς νὰ ἔχη δύο διαμέσους ἴσας, ἢ δύο ὕψη ἴσα ἢ δύο διχοτόμους ἴσας. Θὰ δείξωμεν κατὰ συνέπειαν τὰς ἑξῆς τρεῖς προτάσεις:

1ον Αἱ διάμεσοι δύο ἀνίσων πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ διάμεσος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἶναι ἡ μικροτέρα.



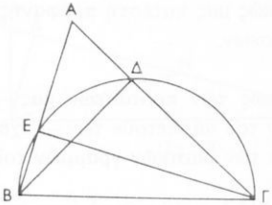
(Σχ. 29)

Υπ.	$A\Gamma > AB$
ΣΥΜ	$BE < \Gamma Z$

Ἀφοῦ $A\Gamma > AB$ (Κεφ. 3, 1, δ) $A\hat{\Delta}\Gamma > A\hat{\Delta}B$ καὶ συνεπῶς $O\Gamma > OB \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \Gamma Z > {}^{2}/_{3} \cdot BE \Rightarrow$ $\Gamma Z > BE$ ὅ.ἔ.δ.

2ον Τὰ ὕψη, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο ἀνίσους πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου εἶναι

ἄνισα καὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν εἶναι τὸ μικρότερον.



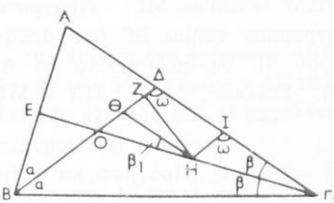
(Σχ. 30)

$$\begin{array}{c|c} \text{ΥΠ} & \text{ΑΓ} > \text{ΑΒ} \\ \hline \text{ΣΥΜ} & \text{ΒΔ} < \text{ΓΕ} \end{array}$$

Προφανῶς, ἡ μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γραφομένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν Δ καὶ Ε. Καί, ἀφοῦ $\text{ΑΓ} > \text{ΑΒ} \Rightarrow \hat{\text{Β}} > \hat{\Gamma}$ Ἄρα,

$$\widehat{\text{ΕΔΓ}} > \widehat{\text{ΒΕΔ}} \Rightarrow \text{ΓΕ} > \text{ΒΔ}.$$

3ον Αἱ διχοτόμοι δύο ἀνίσων γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ διχοτόμος τῆς μεγαλυτέρας γωνίας εἶναι ἡ μικροτέρα.



(Σχ. 31)

$$\begin{array}{c|c} \text{Υπ} & \hat{\text{Β}} > \hat{\Gamma} \\ \hline \text{ΣΥΜ} & \text{ΒΔ} < \text{ΓΕ} \end{array}$$

Ἀφοῦ $\hat{\text{Β}} > \hat{\Gamma} \Rightarrow \dfrac{\hat{\text{Β}}}{2} > \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$

δηλ. $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ καὶ συνεπῶς ΓΟ $>$ ΟΒ. (1)

Ἐπειδὴ ὅμως θέλομεν νὰ δείξωμεν, ὅτι $\text{ΒΟ} + \text{ΟΔ} < \text{ΓΟ} + \text{ΟΕ}$ ἢ ὅτι $\text{ΟΔ} - \text{ΟΕ} < \text{ΓΟ} - \text{ΟΒ}$ (2) σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (2) ἔχει τὸ δεύτερόν της μέλος θετικὸν καὶ συνεπῶς, ἐὰν τὸ 1ον μέλος της εἶναι μηδὲν ἢ ἀρνητικόν, θὰ εἶναι αὕτη μία ἀληθὴς ἀνισότης. Ἔτσι, θὰ ἀποδειχθῆ ἡ πρότασίς μας, ἐὰν ἀποδείξωμεν τὴν (1) καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\text{ΟΔ} > \text{ΟΕ}$ (3).

Δεχόμεθα λοιπὸν τὴν (3) ὡς ἀληθῆ καὶ λαμβάνομεν $\text{ΟΖ} = \text{ΟΕ}$ καὶ $\text{ΟΗ} = \text{ΟΒ}$, δημιουργοῦντες τοιουτοτρόπως τὰς διαφορὰς $\text{ΟΔ} - \text{ΟΕ} = \text{ΖΔ}$ καὶ $\text{ΟΓ} - \text{ΟΒ} = \text{ΗΓ}$. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι $\text{ΗΓ} > \text{ΖΔ}$. (4)

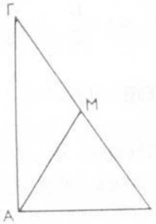
Ἡ προφανὴς ἰσότης τῶν τριγώνων ΕΒΟ καὶ ΟΗΖ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι $\text{Ο}\hat{\text{Η}}\text{Ζ} = \text{Ε}\hat{\text{Β}}\text{Ο} = \hat{\alpha} \Rightarrow \text{Ο}\hat{\text{Η}}\text{Ζ} > \text{Ο}\hat{\Gamma}\text{Δ}$. Ἐὰν λοιπὸν χαράξωμεν ἐκ τοῦ Η τὴν ΗΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ παράλληλος αὕτη, ἀφορίζουσα ἀπὸ τῆς γωνίας ΟΗΖ γωνίαν β, θὰ εἶναι ἐσωτερικὴ αὐτῆς τῆς γωνίας καὶ συνεπῶς τὸ Θ θὰ εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Ζ δηλ. εἶναι $\text{ΘΔ} > \text{ΖΔ}$. Θὰ ἀρκῆ λοιπὸν νὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (4) τὴν $\text{ΗΓ} > \text{ΘΔ}$. Ἐὰν ὅμως $\text{ΗΙ} \parallel \text{ΟΔ}$ θὰ ἀρκῆ ἀντὶ τῆς (4) νὰ εἶναι: $\text{ΗΓ} > \text{ΗΙ}$ (5).

Καὶ διὰ τὴν ἰσχὺν τῆς (5) θὰ ἤρκει καὶ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι: $\hat{\omega} > \hat{\beta}$ (6). Ἀλλὰ ἡ $\hat{\omega}$, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα μας, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς α καὶ συνεπῶς καὶ τῆς $\hat{\beta}$.

Ἀφοῦ τώρα ἐβεβαιώθη ἡ (6), ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεώς μας κατέστη προφανής, λόγω τοῦ ἀντιστρεπτοῦ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν σχέσεων.

Σημείωσις. Ὁ ἑνιαῖος αὐτὸς τρόπος ἀντιμετωπίσεως τῶν προτάσεών μας — ἠδυνάμεθα φυσικὰ νὰ ἔχωμεν καὶ ἀπευθείας ἀπόδειξιν τοῦ «ἀρκετοῦ» των — ἔχει ὡς συνέπειαν νὰ διαπιστώσωμεν μίαν κοινὴν ἰδιότητα τῶν βασικῶν γραμμῶν τοῦ τριγώνου.

7. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι, ἡ διάμεσος μιᾶς του πλευρᾶς νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς διὰ μέσου τῆς ὁποίας διέρχεται.



(Σχ. 32)

1ον. Ἐὰν $\hat{A} = 1_{\llcorner}$ => ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ. Πράγματι, ἐφόσον τὸ Α βλέπει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΒΓ θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ Α. (Κεφ. 2, Συνέπεια, β, σελ. 9). Συνεπῶς, ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ (ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς περιφερ.).

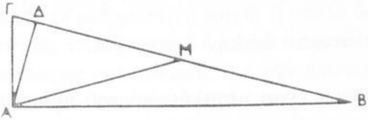
2ον. Ἐὰν ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ => $\hat{A} = 1_{\llcorner}$. Πράγματι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ περιφέρεια (Μ, ΜΒ) θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α καὶ συνεπῶς ἡ γωνία Α θὰ γίνῃ ἐγγεγραμμένη εἰς περιφέρειαν, ὑποτείνουσα τόξον 180^0.

8. Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία τῶν ὀξειῶν του γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης τότε καὶ μόνον τότε ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας τῶν καθέτων του πλευρῶν.

1ον. Ἔστω $\hat{A} = 1_{\llcorner}$ καὶ $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. (Σχ. 32) Συνεπῶς, $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$. Ἀλλὰ (προηγ. πρότασις) ΜΑ = ΜΒ, ὥστε $M\hat{A}B = 60^0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ $A\hat{M}B = 60^0$. Ἔτσι, ΒΓ = 2.ΜΑ = 2.ΑΒ.

2ον Ἐὰν ΒΓ = 2ΑΒ δηλ. ἐὰν ΜΒ = ΑΒ, ἐπειδὴ καὶ ΜΒ = ΜΑ, ἔπεται, ὅτι ΜΑ = ΑΒ = ΒΜ. Ἔτσι τὸ τρίγωνον ΑΒΜ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ $A\hat{B}M = 60^0$ => $\hat{\Gamma} = 30^0$.

9. Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία τῶν ὀξειῶν του γωνιῶν εἶναι πενταπλασία τῆς ἄλλης τότε καὶ μόνον τότε ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι τετραπλασία τοῦ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους.



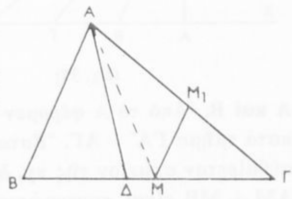
(Σχ. 33)

1ον Ἔστω $\hat{A} = 1_{\llcorner}$ καὶ $\hat{\Gamma} = 5\hat{B}$. Συνεπῶς, $5\hat{B} + \hat{B} = 90^0 \Rightarrow 6\hat{B} = 90^0 \Rightarrow \hat{B} = 15^0$, $\hat{\Gamma} = 75^0$. Ἐὰν τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης, τότε $AM = MB$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\Gamma\hat{M}A = 30^0$. Ἔτσι, θὰ εἶναι καί: $M\hat{A}\Delta = 60^0$. Κατ' ἀκολουθίαν (ἄσκ. 8) θὰ ἔχωμεν: $AM = \frac{B\Gamma}{2} = 2 \cdot A\Delta \Rightarrow B\Gamma = 4 \cdot A\Delta$.

2ον Ἔστω $B\Gamma = 4A\Delta$. Τότε, $AM = 2 \cdot A\Delta$ καὶ συνεπῶς (ἄσκ. 8) $A\hat{M}\Delta = 60^0$. Ἄρα $M\hat{B}A = 15^0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $A\hat{\Gamma}B = 75^0$.

10. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐκ τῶν δύο τμημάτων ΔΒ καὶ ΔΓ, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπ' αὐτὴν τὴν διχοτόμον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὸ μεγαλύτερον εἶναι, τὸ προσκείμενον εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Εἴδομεν (Κεφ. 3, 1, δ), ὅτι, ἐὰν $BM = M\Gamma$ καὶ $A\Gamma > AB$, $B\hat{A}M > M\hat{A}\Gamma$. Συνεπῶς, τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ θὰ εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸ Γ παρ' ὅσον τὸ Δ. Συνέπεια: $\Delta\Gamma > \Delta B$.



(Σχ. 34)

11. Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὑφίσταται ἡ διπλῆ ἀνισότης:

$$\frac{AB + A\Gamma - B\Gamma}{2} < AM < \frac{AB + A\Gamma}{2}$$

Ἔστω $A\Gamma > AB$ καὶ MM_1 τὸ τμῆμα τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ (Σχ. 34). Ἐκ τῶν τριγώνων AMM_1 καὶ $AM\Gamma$ ἀντιστοίχως λαμβάνομεν: $AM < AM_1 + MM_1$ (1) $AM > A\Gamma - M\Gamma$ (2)

Ἡ (1), κατὰ τὰ γνωστά, γίνεται: $AM < \frac{A\Gamma + AB}{2}$ (3)

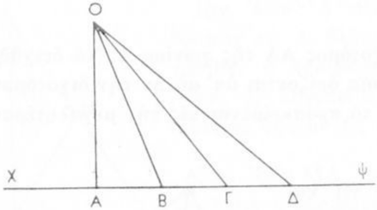
Ἡ (2) πάλιν δίδει: $AM > A\Gamma - \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow AM > \frac{2A\Gamma - B\Gamma}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $AB < A\Gamma$, ἐνισχύεται ἡ τελευταία ἀνισότης, ἐὰν γράψωμεν: $AM > \frac{AB + A\Gamma - B\Gamma}{2}$ (4).

Αἱ (3) καὶ (4) ἑνοποιοῦνται εἰς τὴν ὑπὸ διαπίστωσιν διπλῆν ἀνισότητα.

12. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς περιμέτρου του καὶ μικρότερον αὐτῆς τῆς περιμέτρου.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης.

13. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Ο, ἐξωτερικοῦ μιᾶς εὐθείας, φέρωμεν πρὸς αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν τὴν κάθετον ΟΑ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν κάθετον τὰς πλαγίας ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ . . ., συμβαίνει δὲ νὰ εἶναι: ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ =... αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, . . . βαίνουν ἐλαττούμεναι.

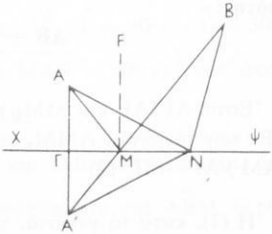


(Σχ. 35)

Ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι διάμεσος τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΟ. Συνεπῶς (Κεφ. 3, 1, δ) $A\hat{O}B > B\hat{O}\Gamma$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον: $B\hat{O}\Gamma > \Gamma\hat{O}\Delta$ κ.ο.κ.

14. Δίδονται μία εὐθεῖα xy καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς τῆς εὐθείας δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ πρὸς τὴν xy καὶ τὴν προεκτείνομεν κατὰ τμῆμα ΓΑ΄ = ΑΓ. Ἔστω Μ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας Α΄Β καὶ τῆς xy. Ἐὰν Ν εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς xy, διάφορον τοῦ Μ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ τεθλασμένος δρόμος ΑΜ + ΜΒ εἶναι συντομώτερος ἀπὸ τὸν τεθλασμένον δρόμον ΑΝ + ΝΒ.

Κατὰ τὴν πρότασιν (Κεφ. 3, 5, β) ἔχομεν ΑΜ = ΜΑ΄ καὶ συνεπῶς: ΑΜ + ΜΒ = Α΄Μ + ΜΒ = Α΄Β. Κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν: ΑΝ + ΝΒ = Α΄Ν + ΝΒ. Ἄρα: ΑΜ + ΜΒ < ΑΝ + ΝΒ.



(Σχ. 36)

Παρατήρησις. Ὅπως ἔγινε φανερὸν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, τὸ Μ (τομὴ τῶν xy καὶ Α΄Β) εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον καθορίζει τὸν συντομώτερον τεθλασμένον δρόμον, ὁ ὁποῖος ὁδηγεῖ ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B, ἐγγίζοντα τὴν xy. Ἐπειδή, ὡς εἶναι φανερόν, ἔχομεν $x\widehat{M}A = B\widehat{M}y$ θὰ ἔχωμεν καί: $A\widehat{M}F = F\widehat{M}B$, ἐὰν MF εἶναι ἡ ἐκ τοῦ M ἐπὶ τὴν XY κάθετος. Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει λοιπόν, ὅτι εἰς τὸ A ὑπῆρχε μία φωτεινὴ πηγή, ἡ ὁποία θὰ ἔριπτε τὸ φῶς της πρὸς τὴν XY διὰ νὰ φθάση εἰς τὸ B κατόπιν ἀνακλάσεως, θὰ ἐξέλεγε, οὕτως εἰπεῖν, τὸ M ὡς σημεῖον προσπτώσεως καὶ συνεπῶς διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐπιβεβαιοῦμεν μαθηματικῶς μίαν γνωστὴν ἰδιότητα τοῦ φωτός: Τὸ φῶς, μεταβαῖνον ἀπὸ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο κατόπιν ἀνακλάσεως, ἀκολουθεῖ τὸν συντομώτερον δρόμον.

4 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ *

1. Παραλληλόγραμμα.

Παραλληλόγραμμον ὀνομάζεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Καὶ ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον **ἐὰν καὶ ἐφόσον:****

α) Ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.

β) Τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

γ) Αἱ διαγώνιοί του ἔχουν κοινὸν μέσον.

δ) Ἔχει δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἴσας.

2. Τραπέζια

Τραπέζιον εἶναι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο του πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.***

---

*Εἰδικαὶ κατηγορίαι τῶν κυρτῶν τετραπλεύρων εἶναι τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ τραπέζια.

Δηλ., ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τετραπλεύρου ἱκανοποιοῦν μίαν τῶν σχέσεων (α), (β), (γ), (δ), τὸ τετράπλευρον θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ ἐφ' ὅσον ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον τὰ στοιχεῖα του θὰ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις (α) (β), (γ), (δ). Εἰδικαὶ κατηγορίαι παραλληλογράμμων εἶναι τά: **ὀρθογώνια, οἱ ρόμβοι καὶ **τὰ τετράγωνα. Ὀρθογώνιον** παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ὀρθὴ ἢ τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς ὀρθαί. **Ρόμβος** εἶναι τὸ ἰσόπλευρον παραλληλόγραμμον. **Τετράγωνον** εἶναι τὸ ἰσόπλευρον παρ/μμον μὲ τὴν μίαν του γωνίαν ὀρθήν. **Καὶ συμβαίνει:**

α) Ἕνα παραλληλόγραμμον νὰ εἶναι **ὀρθογώνιον,** ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

β) Ἕνα παραλληλόγραμμον **νὰ εἶναι ρόμβος,** ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετοι ἢ ἐὰν καὶ ἐφόσον μία τῶν διαγωνίων του εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν, τῶν κειμένων εἰς τὰ ἄκρα της (βλ. Κεφ. 3, 2., δ).

Εἰς τὸν ρόμβον δηλ. συμβαίνει αἱ διαγώνιοί του νὰ εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι καὶ ἑκάστη τούτων διχοτόμος τῶν γωνιῶν τῶν ἄκρων της. Βεβαιούμεθα ὅμως, ὅτι ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος, ἐφόσον εἶναι δεδομένον, ὅτι ἔχει τὰς διαγωνίους του καθέτους ἢ ὅτι ἡ μία μόνον διαγώνιός του εἶναι διχοτόμος τῆς μιᾶς τῶν γωνιῶν τῶν ἄκρων της.

γ) Ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι **τετράγωνον,** ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ἢ ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.

***Εἰδικαὶ κατηγορίαι τραπεζίων εἶναι τὰ **ἰσοσκελῆ,** δηλ. ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ **ὀρθογώνια,** τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ὀρθάς. Εἶναι εὔκολον δὲ νὰ δείξη κανείς, ὅτι, ὅταν ἕνα τραπέζιον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν θὰ ἔχῃ καὶ μίαν δευτέραν γωνίαν ὀρθήν. **Καὶ συμβαίνει:**

α) Ἕνα τραπέζιον νὰ εἶναι **ἰσοσκελές,** ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

β) Ἕνα τραπέζιον νὰ εἶναι **ἰσοσκελές,** ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ παρὰ τὰς βάσεις του γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Γενικώτερον μάλιστα δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι, ἐὰν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ συμβαίνῃ νὰ εἶναι $\hat{A} = \hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Πράγματι, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4_{\llcorner}$. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν θὰ εἶναι καί: $2\hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 4_{\llcorner}$ ἢ $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2_{\llcorner}$. Ὥστε, αἱ πλευραὶ

4 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Εἰς ἕνα τραπέζιον συμβαίνει ὅπως ἡ διάμεσός του:

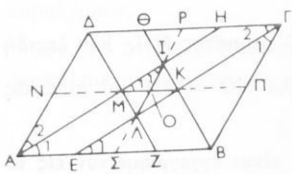
α) Εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του

β) ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του

γ) διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του. Καὶ τὸ τμῆμα αὐτῆς, τῶν μέσων τῶν διαγωνίων, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. 1ον Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παρα/μμου σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλ/μμου καὶ ἴσαι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ πλευρῶν. 2ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου συνιστοῦν ἕνα τετράγωνον.



(Σχ. 37)

Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ, ἔχουσαι δύο πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους καὶ δύο παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, ἔχουν τὰς διχοτόμους των καθέτους. Ἔτσι διαπιστοῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ΙΚΛΜ εἶναι ὀρθαὶ καὶ τὸ τετράπλευρόν μας ὀρθογώνιον παραλ/μμον.

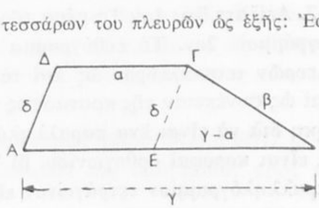
Ἀφοῦ $Γ_1 = Γ_2$ καὶ $Ε_1 = Γ_2$ θὰ εἶναι καί: $Γ_1 = Ε_1$ Ὥστε, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΒΓ ἡ διχοτόμος του ΒΚ θὰ εἶναι καὶ διάμεσος τῆς βάσεώς του. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΗ. Καὶ ἐπειδή, ὡς εἶναι φανερόν, ΕΓ = ΑΗ θὰ εἶναι καὶ ΕΚ $= \parallel$ ΑΜ. Συνεπῶς, ΜΚ $= \parallel$ ΑΕ. Ἔχομεν: $\hat{Μ}_1 = \hat{Ι}_1$, $\hat{Μ}_1 = \hat{Α}_1$, $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ Συνεπῶς, $\hat{Ι}_1 = \hat{Α}_2$. Ἄρα: ΙΛ$\parallel$ΑΔ.

Τέλος, ΜΚ = ΑΕ = ΑΒ—ΕΒ = ΑΒ—ΒΓ.

ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον τραπέζιον. Ἐφεξῆς δεικνύομεν, ὅτι εἶναι καὶ ἰσοσκελές.

γ) Ἕνα τραπέζιον νὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν καὶ ἐφόσον ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ μέσα τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὰς τὰς βάσεις.

*Ἕνα τραπέζιον κατασκευάζεται ἀπὸ τὰ μεγέθη τῶν τεσσάρων του πλευρῶν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ΓΕ$\parallel$ΔΑ, τοῦ τριγώνου ΓΕΒ γνωρίζομεν τὰ μεγέθη τῶν πλευρῶν του καὶ κατασκευάζεται, ἐφόσον ἡ μεγαλυτέρα τούτων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο. Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου εἶναι εὔκολον νὰ κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕΑΔ. Σημειοῦμεν, ὅτι ἡ χάραξις τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΔΑ διευκολύνει συχνὰ τὴν λύσιν προβλημάτων, ἀναφερομένων εἰς τὸ τραπέζιον.



(Σχ. 38)

3

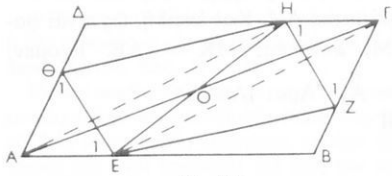
2ον. Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν παραλ/μμον εἶναι ὀρθογώνιον, ἀφοῦ ΙΛ ∥ ΑΔ καὶ ΜΚ ∥ ΑΒ θὰ εἶναι ΙΛ ⊥ ΜΚ καὶ τὸ τετράπλευρον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος, συνεπῶς τετράγωνον.

Παρατήρησις. Διεπιστώσαμεν προηγουμένως, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ἰσοσκελές. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΚΜ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΗ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευράν του ΔΗ. Θὰ διέρχεται λοιπὸν αὕτη, προεκτεινομένη, ἀπὸ τὸ μέσον Ν τῆς τρίτης του πλευρᾶς ΑΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΜΚ θὰ διέλθη καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Π τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἔτσι ἡ διαγώνιος ΜΚ τοῦ ὀρθογωνίου ΛΚΙΜ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ ἀρχικοῦ παραλ/μμου. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα, ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος ΛΙ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλ/μμου μας. Πράγματι,

Τὸ Ο, ἀφοῦ $ΜΝ = ΚΠ = \dfrac{ΑΔ}{2}$, εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΝΠ. Καὶ ἐπειδὴ ΛΙ ∥ ΑΔ, ἕπεται, ὅτι ΝΟ = ΔΡ καὶ ΟΠ = ΡΓ. Ἀλλὰ ΝΟ = ΟΠ καὶ συνεπῶς ΔΡ = ΡΓ. ὅ.ἔ.δ.

2. Δύο παραλληλογράμμων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἄλλο, αἱ διαγώνιοι ἔχουν κοινὸν μέσον.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ μία διαγώνιος τοῦ ἀρχικοῦ καὶ ἡ μία διαγώνιος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου ἔχουν κοινὸν μέσον. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΗΓΕΑ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ ΗΓ ∥ ΑΕ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν καὶ ΗΓ = ΑΕ.



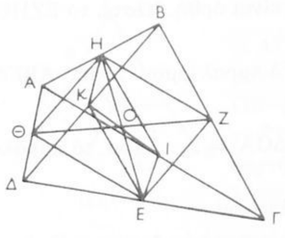
(Σχ 39)

Τὰ τρίγωνα ΗΓΖ καὶ ΑΘΕ ἔχουν: ΗΖ = ΘΕ, $\hat{Z}_1 = \hat{Θ}_1$, $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους) Ὥστε: $ΗΓΖ_Δ = ΑΘΕ_Δ$ καὶ ΗΓ = ∥ ΑΕ.

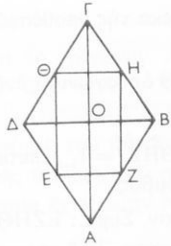
3. Δείξατε ὅτι: 1ον Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. 2ον. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ συνδέοντα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ὡς καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ἔχουν κοινὸν μέσον. Καὶ ὡς συνέπειαν τῆς προτάσεως ταύτης **δείξατε ὅτι: α) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον ρόμβος εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του νὰ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. β) Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον τετράγωνον εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του νὰ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.**

4 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

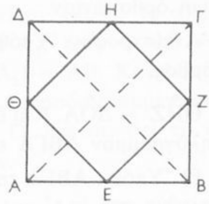
ΣΥΝΕΧΕΙΑ



(Σχ. 40)



(Σχ. 41)



(Σχ. 42)

1ον. Ἔχομεν: $\quad ΗΘ =\parallel \dfrac{ΒΔ}{2}, \quad ΕΖ =\parallel \dfrac{ΔΒ^*}{2} \Rightarrow ΗΘ =\parallel ΕΖ$. Ἄρα ΗΖΕΘ παραλ/μμον.

2ον. Τὸ ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΗΕ καὶ ΘΖ διχοτομοῦνται εἶναι ἄμεσον ἐπακόλουθον τοῦ πρώτου μέρους. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι:

$$ΚΗ =\parallel \frac{ΑΔ}{2}, \quad ΙΕ =\parallel \frac{ΑΔ}{2}$$

ἂν Κ καὶ Ι εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΔΒ καὶ ΓΑ. Συνέπεια: Τὸ τετράπλευρον ΕΙΗΚ εἶναι παραλ/μμον καὶ τὸ ΙΚ ἔχει κοινὸν μέσον μὲ τὰ τμήματα ΗΕ καὶ ΘΖ.

Σπουδαία παρατήρησις: Τὰ δύο αὐτὰ πρῶτα μέρη τῆς προτάσεώς μας φανερώνουν τὸν ὑφιστάμενον εἰς ἕνα τετράπλευρον σύνδεσμον μεταξὺ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου, τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του, τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του καὶ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του. Ἔτσι, δυνάμεθα νὰ κατασκευάζωμεν τὸ τετράπλευρον μὲ τὸ νὰ γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων τῶν κάτωθι τετράδων: 1ον Β, Κ, Ι, Θ. 2ον Η, Ζ, Θ, Κ. 3ον Α, Β, Γ, Κ. 4ον Α, Β, Γ, Ο. 5ον Α, Β, Ζ, Ε. 6ον Α, Β, Ζ, Κ. 7ον Α, Β, Ζ, Ο. 8ον Α, Β, Κ, Ο. 9ον Α, Η, Ζ, Ε. 10ον Α, Η, Ζ, Κ. 11ον. Α, Η, Ζ, Ο,. 12ον Η, Ζ, Κ, Ο.

Θὰ ὑποδείξωμεν ἐδῶ τὴν κατασκευὴν τοῦ τετραπλεύρου μὲ διδομένην τὴν 1ην τετράδα σημείων: Προεκτείνομεν τὸ ΒΚ κατὰ τὸ τμῆμα ΚΔ = ΒΚ. Ἐπίσης τὸ ΔΘ κατὰ τμῆμα ΘΑ = ΔΘ. Ἐν συνεχείᾳ τὸ ΑΙ κατὰ τμῆμα ΙΓ = ΑΙ. Ἐπροσδιορίσαμεν συνεπῶς τὴν θέσιν τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου μας.

α) Ὑπόθεσις: ΑΒΓΔ ρόμβος. Συμπ.: ΕΖΗΘ ὀρθογώνιον.

Λόγῳ τῆς ἀρχικῆς προτάσεως τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλ/μμον. Ἀλλὰ $Θ\hat{Η}Ζ = 1_{\llcorner}$, διότι αἱ πλευραί της εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι πρὸς τὰς

*Ὡς εὐθύγραμμα τμήματα τῶν μέσων δύο πλευρῶν τριγώνου.

πλευρὰς τῆς $\Delta\hat{O}A$, ἡ ὁποία ἕνεκα τῆς ὑποθέσεώς μας εἶναι ὀρθή. Ὥστε, τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀντίστροφον: Ὑπόθ.: ΕΖΗΘ ὀρθογώνιον, ἐνῶ ΑΒΓΔ παραλ/μμον. Συμπ.: ΑΒΓΔ ρόμβος.

$\Theta\hat{H}Z = \Delta\hat{O}A$. Καὶ ἐπειδὴ $\Theta\hat{H}Z = 1_{\llcorner}$, ἕπεται, ὅτι $\Delta\hat{O}A = 1_{\llcorner}$. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

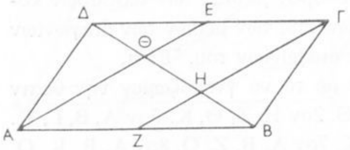
β) Ὑπόθ.: ΑΒΓΔ τετράγωνον. Συμπ.: ΕΖΗΘ τετράγωνον.

Λόγω τῆς προηγουμένης προτάσεως, ἐφόσον ἕνα τετράγωνον εἶναι καὶ ρόμβος, θὰ εἶναι τὸ ΕΖΗΘ ὀρθογώνιον. Ἀλλὰ $H\Theta = \frac{A\Gamma}{2}$ καὶ $HZ = \frac{\Delta B}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $A\Gamma = B\Delta$ θὰ εἶναι καὶ $H\Theta = HZ$. Δηλ. τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ εἶναι καὶ ρόμβος, ἄρα εἶναι τετράγωνον.

Ἀντίστροφον: Εἰς τὸ παραλ/μμον ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον τῶν μέσων εἶναι τετράγωνον, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἀρχικὸν παραλ/μμον εἶναι ἐπίσης τετράγωνον.

Ἀφοῦ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον, λόγω τοῦ ἀντιστρόφου τῆς προτάσεως (α), τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος. Καὶ ἐπειδὴ $A\Gamma = 2H\Theta$, $B\Delta = 2HZ$, ἕπεται $A\Gamma = B\Delta$. Ἔτσι αἱ διαγώνιαι τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ ὁ ρόμβος εἶναι τετράγωνον.

4. Τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν δύο ἀπέναντι κορυφὰς παραλ/μμου μὲ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι αὐτῶν τῶν κορυφῶν πλευρῶν τοῦ παραλ/μμου, τριχοτομοῦν τὴν διαγώνιον, ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς τοῦ παραλ/μμου.

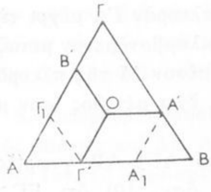


(Σχ. 43)

Ἐπειδὴ $E\Gamma = \parallel AZ \Rightarrow E\Gamma ZA$ παραλ/μμον. Ἐπειδὴ δὲ $\Delta E = E\Gamma$ θὰ εἶναι καί: $\Delta\Theta = \Theta H$ (Κεφ. 3,3) ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΓΗ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΘ λαμβάνομεν $BH = H\Theta$.

5. Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἀπὸ τὸ Ο χαράσσομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Α′ μετὰ τῆς ΒΓ, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Β′ μετὰ τῆς ΑΓ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Γ′ μετὰ τῆς ΑΒ. Δείξατε, ὅτι τὸ ἄθροισμα: ΟΑ′+ΟΒ′+ΟΓ′ ἔχει τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Ο.

Ἂν $A'A_1 \parallel O\Gamma' \Rightarrow O\Gamma' = A'A_1$ καὶ ἀκόμη $O\Gamma' = A_1B$ διότι, ὡς εἶναι φανερὸν τὸ τρίγωνον $A'A_1B$ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐπίσης, ἐὰν $\Gamma'\Gamma_1 \parallel OB'$, θὰ ἔχωμεν $\Gamma'\Gamma_1 = OB'$



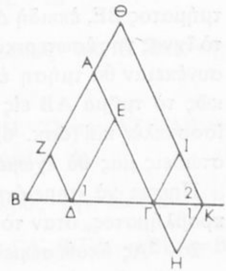
(Σχ. 44)

$= A\Gamma'$, διότι τὸ τρίγωνον $A\Gamma'\Gamma_1$ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρον. Ὥστε: $OB' = A\Gamma'$, $OA' = \Gamma'A_1$, $O\Gamma' = A_1B \Rightarrow OB' + OA' + O\Gamma' = A\Gamma' + \Gamma'A_1 + A_1B = AB$. Καὶ ἐπειδὴ τὴν τιμὴν αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος ἐπροσδιορίσαμεν **ἀνεξαρτήτως** τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο, ἔπεται, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἔχει τιμὴν σταθεράν.

6. Θεωροῦμεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ κορυφῆς Α. 1ον Ἀπὸ ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ χαράσσομεν τὸ παράλληλον τμῆμα ΔΕ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΑ μέχρι τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τὸ παράλληλον τμῆμα ΔΖ πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΑ μέχρι τῆς πλευρᾶς ΒΑ. Δείξατε, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθερόν. 2ον. Ἀπὸ ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον Κ, τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΒΓ, χαράσσομεν τὸ παράλληλον τμῆμα ΚΗ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ μέχρι τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τὸ παράλληλον τμῆμα ΚΘ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΑ μέχρι τῆς εὐθείας ΒΑ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τμημάτων ΚΗ καὶ ΚΘ εἶναι σταθερά.

1ον Ἔχομεν, λόγῳ τῶν διδομένων, $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$ καὶ ἐπειδὴ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ἔπεται $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΕΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\Delta E = \Gamma E$. Ἀλλὰ $\Delta Z = EA$. Ὥστε: $\Delta E + \Delta Z = \Gamma E + EA = \Gamma A$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ἀθροίσματος διεπιστώσαμεν **ἀνεξαρτήτως** τῆς θέσεως τοῦ Δ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ καὶ συνεπῶς εἶναι τοῦτο σταθερόν. Ἐννοοῦμεν ἀκόμη,ὅτι, διὰ τὸ σχηματιζόμενον παραλ/μμον ΑΖΔΕ, συμβαίνει τὸ περίγραμμά του νὰ ἔχῃ μέγεθος ἴσον μὲ $2 \cdot A\Gamma$ δηλ. νὰ εἶναι σταθερόν. Ἡ πρότασίς μας λοιπὸν ἠδύνατο νὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ ὡς αἴτημα.

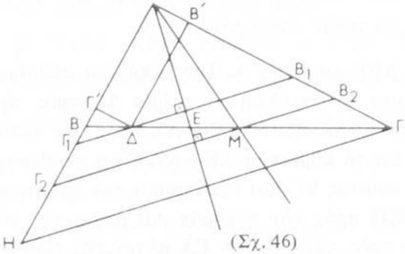


(Σχ. 45)

2ον Ἐὰν ΓΙ εἶναι τμῆμα παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΑ, τὸ παραλληλόγραμμον ΓΗΚΙ εἶναι ρόμβος, διότι $\hat{K}_1 = \hat{B}$, $\hat{K}_2 = \hat{\Gamma}$ καὶ συνεπῶς $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (Κεφ. 4, ὑποσ. β) Ὥστε : $K\Theta - KH = K\Theta - KI = I\Theta = \Gamma A$. Καὶ ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς ἐν λόγῳ διαφορᾶς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ τοῦ ΒΓ σημείου Κ, εἶναι λοιπὸν ἡ διαφορὰ μεγέθους σταθεροῦ.

7. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον συμβαίνει νὰ εἶναι ΑΓ>ΑΒ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι 1ον. Ἐὰν Δ εἶναι ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ χαράξωμεν ἐξ αὐτοῦ τὸ παράλληλον εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΒ' πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΑ μέχρι

τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ τὸ παράλληλον τμῆμα ΔΓ′ πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΑ μέχρι τὴν πλευρὰν ΒΑ, ὁ τεθλασμένος δρόμος Γ′ΔΒ′ ἔχει μέγεθος, περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. 2ον. Ἐὰν τὸ Δ εἶναι εἰδικὰ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ὁ κατὰ τὰ ἀνωτέρω μορφούμενος τεθλασμένος δρόμος, ἔχει μέγεθος ἴσον μὲ $^1/_2$ (ΑΒ + ΑΓ).



(Σχ. 46)

1ον. Ἀφοῦ ΑΓ>ΑΒ γνωρίζομεν (Κεφ. 3 ἄσκ. 10) ὅτι ΕΓ> ΜΓ, ἐὰν ΑΕ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀκόμη γνωρίζομεν, ὅτι εἰς ἕνα τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς αἱ γωνίαι ΑΕΓ καὶ ΑΕΒ εἶναι ἄνισοι, διότι ἡ μὲν πρώτη εἶναι ἴση μὲ $\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}$ ἡ δὲ ἄλλη μὲ $\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma}$.

Καὶ ἐπειδὴ Β>Γ, ἕπεται, ὅτι $A\hat{E}\Gamma > 1_{\llcorner}$. Ἔτσι, ἂν Δ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ τμήματος ΒΕ, ἐπειδὴ $\Delta\hat{E}A < 1_{\llcorner}$, ἡ ἐκ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΕΑ θὰ ἔχῃ τὸ ἴχνος της ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΕΑ καὶ ἡ προέκτασίς της κατὰ συνέπειαν θὰ τμήσῃ ἐσωτερικῶς τὸ τμῆμα ΓΑ εἰς ἕνα σημεῖον B_1 καὶ ἐξωτερικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς ἕνα σημεῖον Γ_1. Τοιουτοτρόπως, τὸ τρίγωνον $A\Gamma_1B_1$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ (ἄσκ. 6) $\Delta B' + \Delta\Gamma' = AB_1 = A\Gamma_1$. Καὶ συμφώνως πρὸς τὰς διαπιστώσεις μας θὰ ἔχωμεν: $AB < \Delta\Gamma' + \Delta B' < A\Gamma$. ὅ.ἔ.δ.

Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δὲν διαφέρουν αἱ σκέψεις καὶ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος, ὅταν τὸ Δ θὰ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος ΕΓ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

2ον Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι τὸ Δ συμπίπτει μὲ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μὲν παράλληλον τμῆμα πρὸς τὴν ΒΑ, ἀπὸ τοῦ Μ μέχρι τὴν ΑΓ (ὡς εὐθύγραμμον τμῆμα τῶν μέσων) θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΑ, τὸ δὲ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ ἐκ τοῦ Μ μέχρι τὴν ΒΑ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΓΑ. Καὶ ἔτσι ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν πρότασιν (6), δεδομένου, ὅτι τὸ τρίγωνον $A\Gamma_2B_2$ εἶναι ἰσοσκελές, συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα:

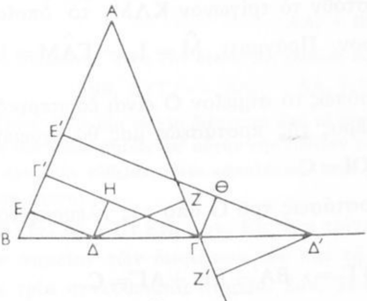
$$A\Gamma_2 = AB_2 = \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

Ἐπίσης λαμβάνομεν: $\Gamma_2H = B_2\Gamma = A\Gamma - AB_2 = A\Gamma - \frac{AB+A\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Συμπέρασμα: **Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου, ἔστω τῆς ΒΓ, φέρωμεν**

τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ κάθετος αὕτη ὁρίζει ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα καὶ τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

8. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον κορυφῆς Α. Ἐὰν Δ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς βάσεως καὶ ΔΕ, ΔΖ κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΑ, τότε 1ον. Τὸ ἄθροισμα ΒΕ+ΓΖ εἶναι σταθεροῦ μεγέθους. 2ον Τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθεροῦ μεγέθους καὶ 3ον. Ἐὰν Δ΄ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΒΓ, ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων τμημάτων Δ΄Ε΄ καὶ Δ΄Ζ΄ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως εἶναι σταθεροῦ μεγέθους.



(Σχ. 47)

1ον Ἐὰν ΔΗ εἶναι κάθετον τμῆμα ἐπὶ τὸ ὕψος ΓΓ΄, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΓΗ καὶ ΔΓΖ εἶναι ἴσα διότι: $\Delta\Gamma \equiv \Delta\Gamma$, $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\mathrm{B}}$, $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta$. Ὥστε $\Gamma\mathrm{Z} = \Delta\mathrm{H} = \mathrm{E}\Gamma'$. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\mathrm{BE}+\Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{BE}+\mathrm{E}\Gamma' = \mathrm{B}\Gamma'.$$

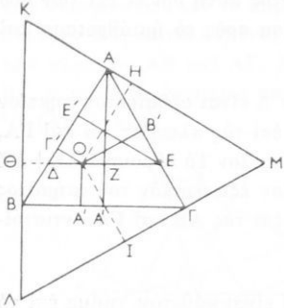
ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

2ον Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν καὶ $\Delta\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{H}$. Ὥστε: $\Delta\mathrm{Z}+\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{H}+\mathrm{H}\Gamma' = \Gamma\Gamma'$ καὶ αὐτό, διὰ τὸ **αὐθαιρέτου** θέσεως σημεῖον Δ.

3ον Ἐὰν ΓΘ εἶναι παράλληλον εὐθύγραμμον τμῆμα πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖ΄Δ΄ καὶ ΓΔ΄Θ εἶναι ἴσα διότι: $\Gamma\Delta' \equiv \Gamma\Delta'$, $\mathrm{Z}'\hat{\Gamma}\Delta' = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \hat{\mathrm{B}}$ $\Rightarrow \mathrm{Z}'\hat{\Gamma}\Delta' = \Delta'\hat{\Gamma}\Theta$ Ὥστε: $\Delta'\mathrm{E}' - \Delta'\mathrm{Z}' = \Delta'\mathrm{E}' - \Delta'\Theta = \Theta\mathrm{E}' = \Gamma\Gamma'$. Καὶ τὸν καθορισμὸν τοῦ μεγέθους τῆς ἐν λόγῳ διαφορᾶς ἐπετύχομεν δι᾽ **αὐθαίρετον** ἐξωτερικὸν σημεῖον Δ΄ τοῦ τμήματος ΒΓ.

9. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ αὐθαίρετον ἐσωτερικόν του σημεῖον Ο. Ἐὰν ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῆ: 1ον Ὅτι τὸ ἄθροισμα: ΟΑ΄+ΟΒ΄+ΟΓ΄ εἶναι σταθεροῦ μεγέθους. 2ον Ὅτι τὸ ἄθροισμα: ΒΑ΄+ΓΒ΄+ΑΓ΄ εἶναι ἐπίσης σταθεροῦ μεγέθους.

1ον. Ἐὰν ΔΟΕ εἶναι τμῆμα παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ θὰ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἑπομένως καὶ ἰσόπλευρον. Ἔτσι (ἄσκ. 8) θὰ ἔχωμεν:



(Σχ. 48)

$$O\Gamma' + OB' = EE' = AZ$$

ἀλλὰ καί: $OA' = ZA'$

$$\Rightarrow OA' + OB' + O\Gamma' = AZ + ZA' = AA'$$

Καὶ τὸ ἀντιπροσωπευόμενον μέγεθος ἀπὸ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου Ο, ἄρα σταθερόν.

2ον Ἐκ τοῦ Α ὑψοῦμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τέλος ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ. Αἱ κάθετοι αὗται συνιστοῦν τὸ τρίγωνον ΚΛΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον. Πράγματι, $\hat{M} = 1_{\llcorner} - \Gamma\hat{A}M = 1_{\llcorner} - (1_{\llcorner} - B\hat{A}\Gamma) = B\hat{A}\Gamma = 60^0$ κ.ο.κ. Τοιουτοτρόπως τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΚΛΜ καὶ κατὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεώς μας θὰ ἔχωμεν:

$$OH + O\Theta + OI = C$$

ἂν τὰ τμήματα ταῦτα ἐκπροσωποῦν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΚΛΜ. Ἐπειδὴ ὅμως:

$$OH = \Gamma'A,\ O\Theta = A'B,\ OI = B'\Gamma \Rightarrow BA' + \Gamma B' + A\Gamma' = C.$$

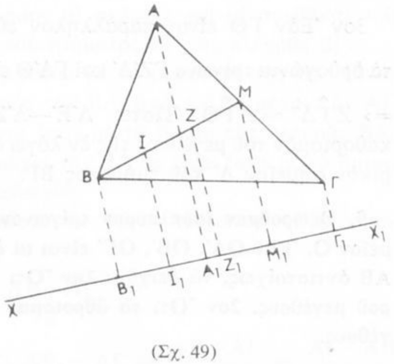
10. Εἰς ἕνα τρίγωνον ἡ ἀπόστασις τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων του ἀπὸ μιᾶς συνεπιπέδου πρὸς τὸ τρίγωνον εὐθείας καὶ ἐξωτερικῆς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπ' αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν.

Ἐὰν Ι, Ζ εἶναι τὰ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων διαιρεῖται ἡ διάμεσος ΒΜ εἰς τρία ἴσα μέρη, θὰ ἔχωμεν:

$$II_1 = \frac{BB_1 + ZZ_1}{2},\quad ZZ_1 = \frac{II_1 + MM_1}{2}$$

$$MM_1 = \frac{AA_1 + \Gamma\Gamma_1}{2}$$

$$\Rightarrow ZZ_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1}{3}$$



(Σχ. 49)

Σχόλιον. Θὰ εἶναι χρήσιμον νὰ θεωροῦμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xx_1 προσημασμένως. Συγκεκριμένως, νὰ θεωροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ZZ_1 ὡς ἴσην μὲ τὸ 1/3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὡς θετικῶν θεωρουμένων ἀποστάσεων τῶν Α,Β,Γ ἀπ' αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν, ἐφόσον καὶ αἱ τρεῖς κορυφαὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἐνῶ, ἐὰν αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου εὑρίσκονται καὶ εἰς τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, νὰ γράφωμεν: 1ον $ZZ_1 = 1/3\,(AA_1 + BB_1 - \Gamma\Gamma_1)$, ἐὰν ἡ κορυφὴ Γ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ αἱ ἄλλαι δύο κορυφαὶ εἰς τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν 2ον $ZZ_1 = 1/3\,(AA_1 + \Gamma\Gamma_1 - BB_1)$, $ZZ_1 = 1/3\,(BB_1 + \Gamma\Gamma_1 - AA_1)$ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀντιστοίχους περιπτώσεις.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα xx_1 διέρχεται δι' ἑκάστης τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$ZZ_1 = 1/3\,(BB_1 + \Gamma\Gamma_1),\quad ZZ_1 = 1/3\,(AA_1 + \Gamma\Gamma_1),\quad ZZ_1 = 1/3\,(AA_1 + BB_1).$$

Ἐὰν ἀκόμη ἡ εὐθεῖα xx_1 διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, ἡ ἀπόστασις ZZ_1 θὰ εἶναι μηδενικὴ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

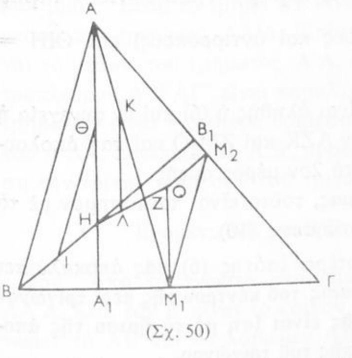
$$AA_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1 = 0.$$

δηλ. συμφώνως πρὸς τὴν θέσιν τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὰς κορυφὰς θὰ εἶναι:

$$BB_1 + \Gamma\Gamma_1 = -AA_1 \qquad AA_1 + \Gamma\Gamma_1 = -BB_1, \qquad AA_1 + BB_1 = -\Gamma\Gamma_1$$

Ὥστε: **Ἐὰν μία εὐθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπ' αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν τῶν κορυφῶν, τῶν κειμένων εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, εἶναι «ἀπολύτως» ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς τρίτης κορυφῆς ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.**

ΕΥΘΕΙΑ EULER. 1ον. Εἰς ἕνα τρίγωνον, τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων του καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων του, εἶναι τρία συνευθειακὰ σημεῖα. 2ον. Ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου σημείου ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο τελευταίων. 3ον. Τὸ προσημασμένον ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Euler αὐτοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι μηδέν.



(Σχ. 50)

Ἐκκινοῦμεν μὲ δύο ὑποθέσεις: 1ον Ὅτι ἐκ τῶν δύο πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν διάμεσον AM_1, ἡ ΑΓ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ 2ον ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι.

Ἔτσι ἐναπομένει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $\hat{A} > 1_{\llcorner}$ καὶ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $\hat{A} < 1_{\llcorner}$.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν μεσοκαθέτων καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου καὶ εἰς διαφορετικὰ ἡμιεπίπεδα ὡς πρὸς τὴν ΒΓ, ἐνῶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AM_1, θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς ταινίας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ κάθετοι AA_1 καὶ M_1O ἀφοῦ, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, θὰ εἶναι $AM_1\Gamma > 1_{\llcorner}$.

Εἰς τὴν 2αν περίπτωσιν, ἡ ὁποία δὲν εἰκονίζεται εἰς τὸ (Σχ. 50), ἐκ τῶν ὑποθέσεών μας πηγάζει ὅτι τὰ Ο καὶ Η θὰ εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AM_1, ἐσωτερικοῦ τῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν AA_1 καὶ M_1O.

Ἔτσι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΗΟ καὶ AM_1 θὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον Ζ. Ἐννοοῦμεν, ὅτι αὐτὸ ἀφορᾶ τὸ τρίγωνον εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς μορφάς του, διότι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θὰ ἀλλάσσωμεν τὴν διάμεσον.

Μετὰ τὰ ἀνωτέρω, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεώς μας, θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων ἢ ὅτι $AZ = 2 \cdot ZM_1$ (1).

Ἔτσι, ἂν Κ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΖ, θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $KZ = ZM_1$ (2). Καὶ δεδομένου, ὅτι θέλομεν νὰ διαπιστώσωμεν ἀκόμη $HZ = 2 . ZO$ (3), ἐὰν Λ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΗΖ, θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $\Lambda Z = ZO$ (4).

Ἡ διαπίστωσις τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (4) ἀπαιτεῖ ἀναγκαίως τὴν διαπίστωσιν τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΚΛΖ καὶ ZM_1O. Ἡ πλευρὰ ΛΚ τοῦ τριγώνου ΛΖΚ εἶναι, ὡς εὐθεῖα τῶν μέσων, παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΗΑ, ἑπομένως καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν M_1O. Ἔτσι, τὰ τρίγωνα ZM_1O καὶ ΛΖΚ ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ ἡ διαπίστωσις τῆς ἰσότητός των ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι $\Lambda K = M_1O$ (5).

Τὸ ΛΚ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΑ καὶ συνεπῶς ἴσον μὲ τὸ ΗΘ, ἂν Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΗΑ. Διὰ τὴν διαπίστωσιν λοιπὸν τῆς (5) χρειάζεται ἡ διαπίστωσις τῆς ἰσότητος: $H\Theta = M_1O$ (6) Καὶ διὰ τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἰσότητα ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν τὴν ἰσότητα:

$$HI\Theta_{\Delta} = OM_1M_{2\Delta} \quad (7)$$

ἂν Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΗ.

Συμβαίνει προφανῶς νὰ εἶναι: $I\Theta = 1/2\, BA$, $M_1M_2 = 1/2\, BA \Rightarrow I\Theta = M_1M_2$.

Ἀκόμη $I\hat{\Theta}H = O\hat{M}_1M_2$ (πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους) καὶ $\Theta\hat{I}H = O\hat{M}_2M_1$. Ἔτσι,

Ἡ (7) εἶναι ἰσότης ἀληθὴς μὲ συνέπειαν νὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ (6) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ (5). Ὥστε εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΛΖΚ καὶ ZM_1O καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ πρότασίς μας ὡς πρὸς τὸ 1ον καὶ τὸ 2ον μέρος αὐτῆς.

Ὅσον ἀφορᾶ τὸ 3ον μέρος τῆς προτάσεώς μας, τοῦτο εἶναι ταυτόσημον μὲ τὸ τελευταῖον συμπέρασμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως (10).

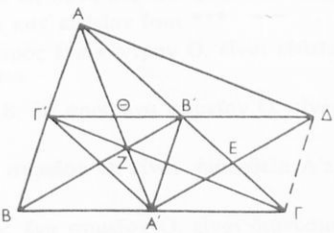
Παρατηρήσεις: 1ον Ἡ διαπιστωθεῖσα ἀνωτέρω ἰσότης (6) μᾶς ἀποκαλύπτει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἑξῆς προτάσεως: **Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τινος πλευρᾶς εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἔναντι κορυφῆς τοῦ τριγώνου.**

2ον Ἠδυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν συντομώτερον τὴν πρότασίν μας ὡς ἑξῆς: θὰ ἐλαμβάνομεν τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ τῶν διαμέσων. Θὰ ἐθεωρούσαμεν ἀκολούθως τὸ τμῆμα ΗΖ προεκτεινόμενον, ὥστε νὰ εἶναι ΗΖ = = 2. ΖΟ καὶ θὰ ἀπεδεικνύαμεν, ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας δηλ., ὅτι $M_1O \perp B\Gamma$, $M_2O \perp \Gamma A$.

Πράγματι, ἐκ κατασκευῆς θὰ εἴχομεν: $AZ = 2 \cdot ZM_1$ καὶ $HZ = 2 \cdot ZO$. Δηλ. ἐκ κατασκευῆς τὰ τρίγωνα ΗΖΑ καὶ ZM_1O θὰ ἦσαν ὅμοια, μὲ συνέπειαν νὰ ἔχωμεν: $H\hat{A}Z = Z\hat{M}_1O \Rightarrow A_1A \parallel M_1O$. Θὰ ἐλαμβάνομεν ἀκόμη ὑπ' ὄψιν τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΖΗ καὶ OM_2Z, ἐκ τῆς ὁποίας θὰ συμπεραίναμεν, ὅτι $B_1B \parallel M_2O$.

11. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνομεν τὸ τμῆμα Γ΄Β΄, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, κατὰ μῆκος Β΄Δ = Γ΄Β΄. 1ον Δείξατε, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Δ καὶ τὸ μέσον Α΄ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· καὶ ὅτι αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Δ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰ 3/4 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοίχως τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. 2ον Κατασκευάσατε ἕνα τρίγωνον ἀπὸ τὰ μεγέθη τῶν διαμέσων του.

1ον Τὸ σημεῖον Β΄ εἶναι κοινὸν μέσον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων Γ΄Δ καὶ ΓΑ. Συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΑΓ΄ΓΔ εἶναι παραλ/μμον καὶ ΔΑ = ∥ ΓΓ΄. Ἐπίσης, ἡ πλευρὰ ΑΑ΄ τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Δ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ΑΒΓ. Τέλος, Β΄Δ = Γ΄Β΄ = ∥ ΒΑ΄. Ἄρα καὶ τὸ τετράπλευρον ΒΑ΄ΔΒ΄ εἶναι παραλ/μμον καὶ Α΄Δ = ∥ ΒΒ΄.



(Σχ. 51)

Προφανῶς, τὸ Ε εἶναι μέσον τοῦ τμήματος Α΄Δ, διότι τὸ τετράπλευρον Α΄ΓΔΒ΄ εἶναι παραλ/μμον. Ἔτσι, τὸ τμῆμα ΑΕ εἶναι ἡ μία διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Δ. Ἐπίσης, τὸ Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος Α΄Α, ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον Α΄Β΄ΑΓ΄ εἶναι παραλ/μμον καὶ τὸ τμῆμα ΔΘ εἶναι ἡ δευτέρα διάμεσος τοῦ τριγώνου Α΄ΔΑ. Συνέπεια: τὸ Α΄Β΄, προεκτεινόμενον μέχρι τῆς πλευρᾶς ΔΑ, θὰ μᾶς δώση τὴν τρίτην διάμεσον τοῦ τριγώνου μας.

$$\text{Ἔχομεν: } AB' = B'\Gamma = 2 \cdot B'E \Rightarrow AE = 3/4\ A\Gamma. \text{ κ.ο.κ.}$$

2ον. Ἀπὸ τὰ γνωστὰ στοιχεῖα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΑ΄Δ. Καί, ἐὰν Β΄ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ ΑΑ΄Δ*, θὰ προεκτείνωμεν τὸ ΑΕ καὶ θὰ λάβωμεν ΑΒ΄ = Β΄Γ καὶ ἐπίσης θὰ προεκτείνωμεν τὸ ΔΘ

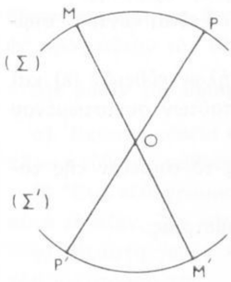
* Εἶναι ἁπλοῦν καὶ γνωστὸν γεωμετρικὸν πρόβλημα ὁ προσδιορισμὸς τοῦ μέσου γνωστοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

καὶ θὰ λάβωμεν ΔΒ΄ = Β΄Γ΄. Κατόπιν, αἱ εὐθεῖαι ΓΑ΄ καὶ ΑΓ΄ θὰ μᾶς δώσουν, ἰσχυριζόμεθα, τὴν τρίτην κορυφὴν Β τοῦ ζητουμένου τριγώνου μας. Τί ἐναπομένει; Προφανῶς, νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὡς διαμέσους τὰ γνωστὰ μεγέθη ΑΑ΄, Α΄Δ, ΔΑ. Τὸ τετράπλευρον Β΄Α΄ΓΔ εἶναι παραλ/μμον: Τὸ Ε εἶναι μέσον τοῦ Α΄Δ, ἀλλὰ καὶ μέσον τοῦ Β΄Γ, ἀφοῦ τὸ Β΄ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ ΑΑ΄Δ καὶ ἐλήφθη Β΄Γ = ΑΒ΄. Ὥστε: ΔΒ΄ = || ΓΑ΄ => Β΄Γ΄ = ΓΑ΄. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Β΄ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΓ, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ Γ΄ θὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ ἀκόμη, ὅτι ΓΑ΄ = Α΄Β = Β΄Γ΄. Ἔτσι, ΔΑ = || ΓΓ΄, Α΄Δ = || ΒΒ΄ καὶ ΑΑ΄ ≡ ΑΑ΄. ὅ.ἔ.δ.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κεντρικὴ Συμμετρία

1. Δύο σημεῖα M καὶ M΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O, **ὀνομαζόμενον κέντρον συμμετρίας,** ὅταν τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος MM΄ ἢ ὅταν τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα M καὶ M΄ συμπίπτουν μὲ τὸ O.



(Σχ. 52)

Λαμβάνοντες τὰ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (Σ) ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, δημιουργοῦμεν ἕνα σχῆμα (Σ΄), ὀνομαζόμενον **συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ (Σ)** ὡς πρὸς τὸ O.

Στρέφοντες τὸ (Σ) περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν 180^0, φέρομεν τὸ M εἰς τὸ M΄, τὸ P εἰς τὸ P΄ καὶ γενικῶς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) φέρονται εἰς σύμπτωσιν μὲ ἐκεῖνα τοῦ (Σ΄)*. Τὰ δύο σχήματα **εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἴσα.****

2. Διὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς ἕνα κέντρον O ἢ ἄλλως διὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν ἰσχύουν τὰ ἑξῆς θεωρήματα:

α) Εἰς ἕνα ἐπίπεδον δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἕνα κέντρον εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἴσα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἴσαι.***

β) Τὸ συμμετρικὸν δοθείσης εὐθείας (ε), ὡς πρὸς ἕνα κέντρον O, εἶναι εὐθεῖα (ε΄) παράλληλος πρὸς τὴν (ε).

γ) Τὸ συμμετρικὸν εὐθυγράμμου τμήματος AB, ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O, εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα A΄B΄ ἴσον πρὸς τὸ AB.

δ) Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας Ax, ὡς πρὸς σημεῖον O, εἶναι ἡμιευθεῖα A΄x΄ ἀντίρροπος πρὸς τὴν Ax.

ε) Τὸ συμμετρικὸν διανύσματος AB, ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον O, εἶναι διάνυσμα A΄B΄ ἀντίθετον τοῦ AB

στ) Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ εἰς μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν εἶναι τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ὁμορρόπως (κατ' εὐθεῖαν) ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

ζ) Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς περιφερείας εἰς μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν εἶναι μία ἴση περιφέρεια.

*Δεχόμεθα τὸ ἑξῆς **αἴτημα:** Δοθέντων δύο τυχόντων ἴσων τμημάτων OA καὶ OA΄, ἐχόντων κοινὴν ἀρχὴν O, ὑπάρχει μία στροφὴ περὶ τὸ O, εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν OA καὶ OA΄, ἡ ὁποία μεταφέρει τὸ τμῆμα OA εἰς τὸ τμῆμα OA΄.

**Ἴσα καὶ μὲ τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν. Ἤ, ἡ ἀντιστοιχία τῶν ὁμολόγων των στοιχείων εἰς τὴν σχέσιν τῆς ἰσότητός των νὰ ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν τοῦ ἐπιπέδου των.

***Αἱ συμμετρικαὶ των πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι.

5 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

3. Κέντρον συμμετρίας σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἕνα σχῆμα κέκτηται ἕνα κέντρον συμμετρίας, ὅταν τὸ σχῆμα αὐτὸ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του εἰς τὴν συμμετρίαν μὲ κέντρον αὐτὸ τὸ σημεῖον.

Μὲ βάσιν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον διαπιστοῦνται αἱ προτάσεις:

α) Τὸ μέσον Ο ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

β) Ἕκαστον σημεῖον μιᾶς εὐθείας (ε) εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς.

γ) Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο δύο τεμνομένων εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν συνιστωμένου σχήματος.

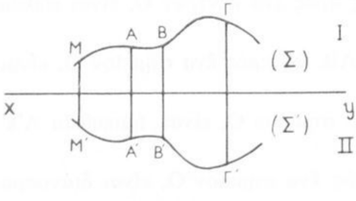
δ) Ἕκαστον σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) εἶναι κέντρον συμμετρίας, τοῦ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων συνιστωμένου σχήματος (Κεφ. 5, 2, β).

ε) Ἕνα παραλληλόγραμμον ἔχει ὡς κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

στ) Μία περιφέρεια ἔχει τὸ κέντρον της ὡς κέντρον συμμετρίας.

Ἀξονικὴ Συμμετρία

4. Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν xy, **ὀνομαζομένην ἄξονα συμμετρίας,** ὅταν ἡ εὐθεῖα xy εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ΄.



(Σχ. 53)

Λαμβάνοντες τὰ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (Σ) δημιουργοῦμεν ἕνα σχῆμα (Σ΄), ὀνομαζόμενον **συμμετρικὸν τοῦ σχήματος (Σ)** ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.

Κάμνοντες νὰ στραφῆ τὸ ἡμιεπίπεδον Ι διὰ νὰ ἀχθῆ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον ΙΙ, τὸ Μ ἔρχεται εἰς τὸ Μ΄, τὸ Α εἰς τὸ Α΄ κ.λ.π. Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) ἔρχονται νὰ συμπέσουν μὲ ἐκεῖνα τοῦ (Σ΄). Τὰ δύο σχήματα **εἶναι ἀντιστρόφως ἴσα.**

5. Διὰ τὴν ἀξονικὴν συμμετρίαν ἢ ἄλλως διὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν ἰσχύουν αἱ κάτωθι προτάσεις:

α) Ἕνα σημεῖον τοῦ ἄξονος συμμετρίας συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του.

β) Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας (ε), ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν xy, εἶναι μία εὐθεῖα (ε΄).

γ) Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα Α΄Β΄ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ. Καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α΄Β΄ τέμνουν τὸν ἄξονα συμμετρίας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

δ) Τὸ συμμετρικὸν γωνίας, ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν, εἶναι γωνία ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ (ἀντίθετος γωνία).

ε) Τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄, ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ (ἀντιρρόπως ἴσου).

6. Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἕνα σχῆμα (Σ) κέκτηται ἄξονα συμμετρίας, ὅταν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του σχῆμα ὡς πρὸς αὐτὸν τὸν ἄξονα.

Μὲ βάσιν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον διαπιστοῦνται αἱ προτάσεις:

α) Ἑκάστη εὐθεῖα (ε) κέκτηται ὡς ἄξονα συμμετρίας: 1ον τὸν ἑαυτόν της. 2ον πᾶσαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπ' αὐτήν*.

β) Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας: 1ον τὴν φέρουσαν αὐτὸ εὐθεῖαν. 2ον τὴν μεσοκάθετον ἐπ' αὐτοῦ εὐθεῖαν.

γ) Ἑκάστη γωνία κέκτηται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία φέρει τὴν διχοτόμον της.

δ) Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἔχουν ἄξονας συμμετρίας τὰς δύο καθέτους εὐθείας, αἱ ὁποῖαι φέρουν τὰς διχοτόμους τῶν σχηματιζομένων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὑπ' αὐτῶν συνιστωμένου σχήματος.

ε) Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουν τὴν μεσοπαράλληλον αὐτῶν ἄξονα συμμετρίας.

στ) Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του ὡς ἄξονα συμμετρίας. Καί,

ζ) Ἐὰν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς του Α, εἶναι τοῦτο ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν τὸ Α.

η) Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον δέχεται τρεῖς ἄξονας συμμετρίας. Καί,

θ) Ἐὰν ἕνα τρίγωνον δέχεται δύο ἄξονας συμμετρίας εἶναι ἰσόπλευρον.

ι) Ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει ἄξονας συμμετρίας τὰς δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν.

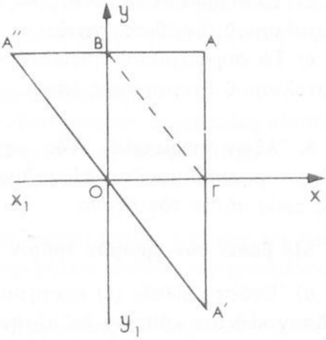
κ) Ἕνας ρόμβος ἔχει ὡς ἄξονας συμμετρίας τὰς διαγωνίους του.

λ) Ἕνα τετράγωνον ἔχει ὡς ἄξονας συμμετρίας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν καὶ τὰς διαγωνίους του.

μ) Μία περιφέρεια ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας ἑκάστην τῶν διαμέτρων της.

*Διὰ μίαν λοιπὸν εὐθεῖαν ὑφίσταται ἀπειρία ἀξόνων συμμετρίας.

ν) Ἐὰν ἕνα σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους, ἔχει τὴν τομὴν αὐτῶν τῶν ἀξόνων ὡς κέντρον συμμετρίας.



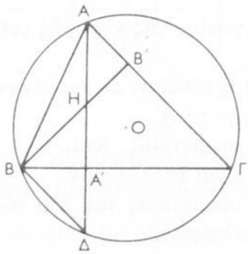
(Σχ. 54)

Ἐὰν Α εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ θεωρουμένου σχήματος, τὰ συμμετρικὰ αὐτοῦ Α', Α'', ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας x_1x καὶ y_1y ἀντιστοίχως, εἶναι σημεῖα τοῦ σχήματος. Ἔχομεν ὅμως ΑΓ = ΓΑ', ΑΒ = ΒΑ'', ΑΒ = || ΓΟ, ΑΓ = || ΒΟ => ΒΑ'' = || ΓΟ. Ἄρα καὶ ΓΒ = || ΟΑ''.

Ἐπίσης, ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἰσότητας λαμβάνομεν: ΟΒ = || Α'Γ => ΟΑ' = || ΒΓ. Ἔτσι, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ'' καὶ ΟΑ', παράλληλα καὶ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ εὐθ. τμήματα ΓΒ καὶ ΒΓ, εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ ἀντίρροπα. Συμπέρασμα: Τὸ αὐθαίρετον σημεῖον Α'' τοῦ σχήματός μας ἔχει τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ Ο, σημεῖον τοῦ αὐτοῦ σχήματος. Τὸ Ο λοιπὸν εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνὸς τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν, ὡς πρὸς ἄξονας συμμετρίας τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι σημεῖα αὐτῆς τῆς περιφερείας.



(Σχ. 55)

Δηλ. ἡ ΒΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΗΔ.

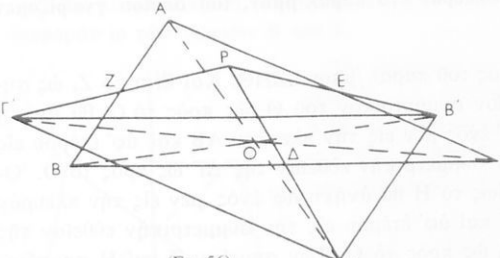
Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἢ ὅτι $B\hat{H}\Delta = B\hat{\Delta}H$ (1).

Ἔχομεν: $B\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους ἀνὰ μίαν καὶ εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι. Ἐπίσης, $B\hat{\Delta}H \equiv B\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι, ὑποτείνουσαι τὸ αὐτὸ τόξον. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) εἶναι ἀληθής.

2. ΑΒΓ εἶναι διδόμενον τρίγωνον καὶ Ρ ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Α', Β', Γ' τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ,ΑΒ. 1ον Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. 2ον Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα: ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἔχουν κοινὸν μέσον.

5 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ



(Σχ. 56)

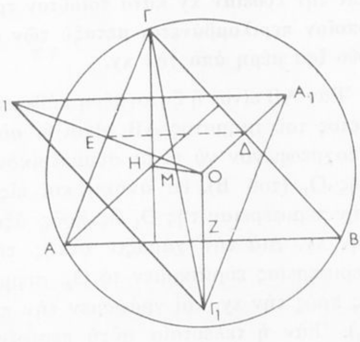
1ον Ἔχομεν: $ΖΕ = \parallel \frac{ΒΓ}{2}$

καὶ $ΖΕ = \parallel \frac{Β'Γ'}{2}$

$\Rightarrow ΒΓ = \parallel Β'Γ'$ κ.ο.κ.

2ον Τὸ τετράπλευρον $ΒΓΒ'Γ'$ εἶναι παραλ/μμον, κατόπιν τοῦ προηγουμένου συμπεράσματος. Ἄρα $ΒΒ'$ καὶ $ΓΓ'$ διχοτομοῦνται. κ.ο.κ.

3. 1ον Τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ κέντρου, τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ δοθέν. 2ον Τὸ ὀρθόκεντρον, τοῦ σχηματισθέντος τριγώνου, εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας. 3ον Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τριγώνων, διέρχονται διὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας μὲ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ δοθέντος τριγώνου.

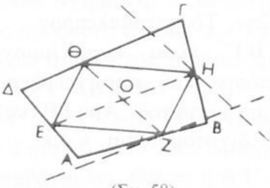


(Σχ. 57)

1ον Τὸ τμῆμα ΔΕ, ὡς τμῆμα τῶν μέσων τῶν $ΟΑ_1$ καὶ $ΟΒ_1$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ τμῆμα $Α_1Β_1$ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Ἀλλὰ $ΕΔ = \parallel 1/2\ ΑΒ$, διότι εἶναι καὶ τμῆμα τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. Ὥστε: $Α_1Β_1 = \parallel ΑΒ$ κ.ο.κ. Ἔτσι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$, ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀνὰ μίαν ἴσας, εἶναι ἴσα. 2ον Ἡ εὐθεῖα $Α_1Ο$, ἀφοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς τῆς εὐθείας δηλ. ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $Γ_1Β_1$. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν $Α_1Ο$ εἶναι ἡ φέρουσα τὸ ἕνα ὕψος τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$. Σκεπτόμενοι ὁμοίως διαπιστοῦμεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ 2ου μέρους τῆς προτάσεώς μας. 3ον Εἴδομεν (Κεφ 4 ἄσκ. 10 παρατ. 1η) ὅτι $ΟΖ = 1/2\ ΗΓ \Rightarrow ΟΓ_1 = ΓΗ$ Ἔτσι, τὸ τετράπλευρον $ΓΗΓ_1Ο$ εἶναι παραλ/μμον καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του ΗΟ καὶ $ΓΓ_1$ εἶναι κοινόν των μέσον. ὅ.ἔ.δ.

4. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα τετράπλευρον ἕνα παραλ/μμον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸ κέντρον.

Τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλ/μμου ΕΖΗΘ. Καὶ ἔτσι τὸ Ζ, ὡς σημεῖον συμμετρικὸν τοῦ Θ, ὡς πρὸς τὸ Ο, θὰ ἀνήκη ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου εἰς τὴν συμμετρικὴν εὐθεῖαν τῆς ΔΓ ὡς πρὸς τὸ Ο. Ὁμοίως τὸ Η θὰ ἀνήκη ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου εἰς τὴν συμμετρικὴν εὐθεῖαν τῆς ΑΔ ὡς πρὸς τὸ Ο. Τῶν σημείων Ζ καὶ Η προσδιορισθέντων, προσδιορίζονται ἐπίσης καὶ τὰ σημεῖα Θ καὶ Ε.



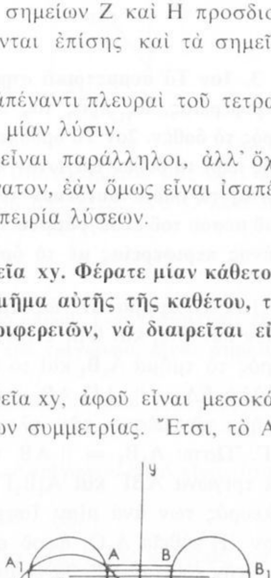
(Σχ. 58)

Διερεύνησις: Ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου δὲν εἶναι παράλληλοι, τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν λύσιν.

Ἐὰν αἱ δύο ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι, ἀλλ᾽ ὄχι ἰσαπέχουσαι τοῦ σημείου Ο, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν ὅμως εἶναι ἰσαπέχουσαι τοῦ Ο, ὑφίσταται, ὅπως εἶναι φανερόν, μία ἀπειρία λύσεων.

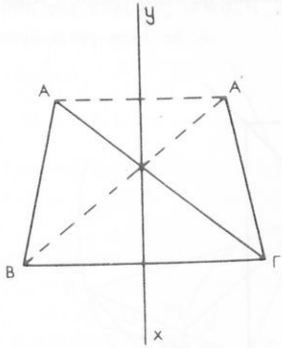
5. Δίδονται αἱ περιφέρειαι (ο,ρ), $(ο_1,ρ_1)$ καὶ μία εὐθεῖα xy. Φέρατε μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τῆς καθέτου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν θεωρουμένων περιφερειῶν, νὰ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὴν xy.

Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος, ἡ διδομένη εὐθεῖα xy, ἀφοῦ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ, εἶναι δι᾽ αὐτὸ τὸ τμῆμα ἄξων συμμετρίας. Ἔτσι, τὸ Α, ὑποχρεωμένον νὰ εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τῆς O_1 (τοῦ Β), θὰ ἀνήκη καὶ εἰς τὴν συμμετρικὴν περιφέρειαν τῆς O_1 ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν xy. Διὰ τὴν χάραξιν αὐτῆς τῆς συμμετρικῆς περιφερείας εὑρίσκομεν τὸ O_2, συμμετρικὸν τοῦ O_1 ὡς πρὸς τὴν xy, καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν $(O_2, ρ_1)$. Ἐὰν ἡ τελευταία αὐτὴ περιφέρεια τέμνη τὴν Ο καὶ εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον A_1 ἔχομεν καὶ μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματός μας. Συμπέρασμα: Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσεις, καθόσον αἱ περιφέρειαι Ο καὶ $(O_2,ρ_1)$ ἔχουν δύο, ἕνα ἢ κανένα κοινὰ σημεῖα.



(Σχ. 59)

7. Νὰ κατασκευασθῆ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευράς του β, γ καὶ τὴν διαφορὰν ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.



(Σχ. 60)

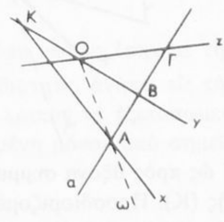
Τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον xy τοῦ τμήματος ΒΓ, εἶναι τὸ τρίγωνον Α΄ΒΓ. Τοῦ τριγώνου ΑΓΑ΄ γνωρίζομεν: τὴν ΑΓ = β, τὴν Α΄Γ = ΑΒ = γ καὶ τὴν ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων περιεχομένην γωνίαν:

$$A\hat{\Gamma}A' = B\hat{\Gamma}A' - B\hat{\Gamma}A = A\hat{B}\Gamma - B\hat{\Gamma}A = \hat{\omega}\ *$$

Ἡ συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματός μας εἶναι προφανής: Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Γ ἡ κορυφὴ Β εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τῆς κορυφῆς Γ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΑ΄ **.

8. Δίδονται αἱ εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ. Νὰ χαραχθῆ μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν Υ εἰς ἕνα της σημεῖον Β καὶ ἡ ὁποία τέμνουσα τὰς Χ καὶ Ζ εἰς τὰ Α καὶ Γ νὰ ἔχη τὸ Β μέσον τοῦ τμήματός της ΑΓ.

Ἡ Υ, ὡς μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΓ, εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Καὶ συνεπῶς, ἀφοῦ τὸ Γ ἀνήκει εἰς τὴν Ζ, τὸ συμμετρικόν του σημεῖον Α, ὡς πρὸς τὴν Υ, θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς Ζ ὡς πρὸς τὴν Υ. Δηλ. θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν ω, ἡ ὁποία θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν Ζ καὶ Υ καὶ θὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ Υ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ω καὶ Ζ. Προσδιορισθέντος λοιπὸν τοῦ Α προσδιορίζεται καὶ ἡ εὐθεῖα (α).



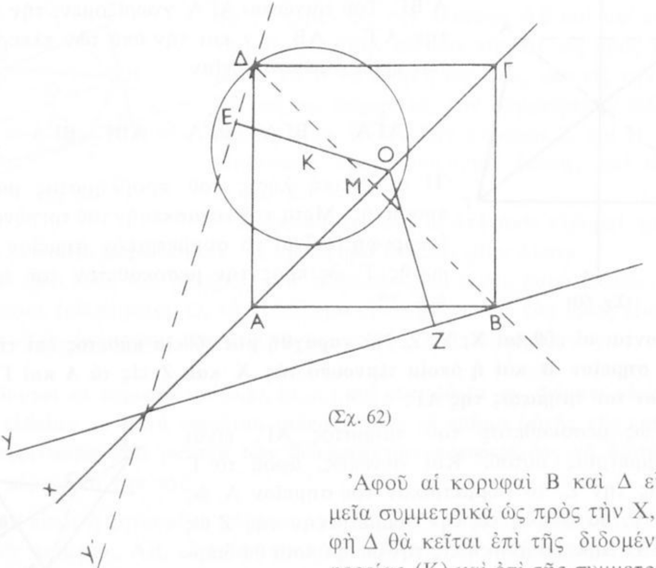
(Σχ. 61)

Διερεύνησις: Ἡ ὕπαρξις λύσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὕπαρξιν τοῦ σημείου Α. Κατὰ συνέπειαν ἡ ω δὲν πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Χ δηλ. δὲν πρέπει νὰ εἶναι $Z\hat{O}Y = Y\hat{K}X$. Ὑπάρχει ἀκόμη ἡ περίπτωσις, ἡ Χ νὰ συμπίπτη μὲ τὴν ω καὶ ἡ Υ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $Z\hat{O}X$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑφίσταται ἀπειρία λύσεων.

* Σημειώσατε καλῶς αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορισμοῦ τῆς διαφορᾶς τῶν προσκειμένων εἰς μίαν πλευρὰν τριγώνου γωνιῶν.

** Εἶναι γνωστὴ στοιχειώδης κατασκευὴ ἡ χάραξις τῆς μεσοκαθέτου γνωστοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

9. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ Α καὶ Γ νὰ εἶναι σημεῖα διδομένης εὐθείας Χ, ἡ κορυφὴ Β νὰ εἶναι σημεῖον ἄλλης διδομένης εὐθείας Υ καὶ ἡ κορυφὴ Δ νὰ εἶναι σημεῖον διδομένης περιφερείας (Κ,ρ).

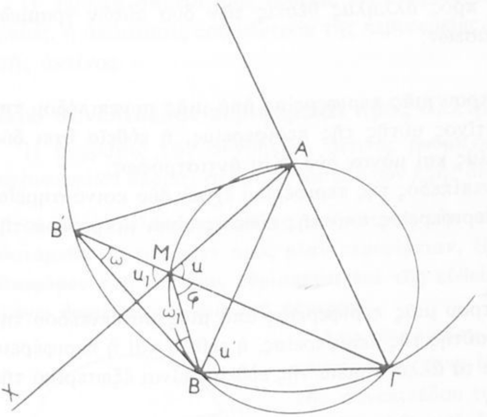


(Σχ. 62)

Ἀφοῦ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν Χ, ἡ κορυφὴ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διδομένης περιφερείας (Κ) καὶ ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς Υ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν Χ. Ἔτσι, ἡ κορυφὴ Δ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τῆς (Κ). Προσδιοριζομένου ὅμως τοῦ Δ προσδιορίζεται καὶ τὸ Β καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ, τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Δὲν ἔχομεν πλέον παρὰ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ (τομῆς τῶν Χ καὶ ΔΒ) νὰ λάβωμεν τμήματα $ΜΑ = ΜΓ = {}^1/_2$ ΒΔ.

Διερεύνησις: Ἡ ὕπαρξις λύσεως, ὅπως εἶναι φανερόν, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὕπαρξιν σημείου Δ καὶ ἑπομένως θὰ πρέπει, ἐὰν ΚΕ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τὴν Υ′, νὰ εἶναι $ΚΕ \leqq ρ$ ἢ $|ΟΕ—ΟΚ| \leqq ρ$ δηλ. $|ΟΖ—ΟΚ| \leqq ρ$. Συμπέρασμα: Ἐὰν $|ΟΖ—ΟΚ| < ρ$ θὰ ὑπάρχουν δύο Δ καὶ συνεπῶς δύο λύσεις· ἐὰν $|ΟΖ—ΟΚ| = ρ$ θὰ ὑπάρχῃ ἕνα Δ καὶ μία λύσις· ἐὰν τέλος $|ΟΖ—ΟΚ| > ρ$ δὲν θὰ ὑπάρχῃ λύσις. Ἐξυπακούεται πὼς τὸ ΟΖ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τὴν Υ. Ὅσον ἀφορᾶ τὸ σημεῖον Ο τοῦτο εἶναι τομὴ τῆς Χ μὲ τὴν ἐκ τοῦ Κ κάθετον ἐπὶ τὴν γνωστὴν διεύθυνσιν Υ′.

10. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπ' εὐθείας ΑΧ, διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς Α, λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ εἶναι ἐλάχιστον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ Μ, ὅταν ἡ ΑΧ στρέφεται περὶ τὸ Α.



(Σχ. 63)

Εἴδομεν (ἄσκ. 14 Κεφ. 3), ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι τομὴ τῆς ΑΧ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ', ἂν Β' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΑΧ. Ἔτσι, συμβαίνει νὰ εἶναι ΑΓ = ΑΒ = ΑΒ' καὶ τὰ σημεῖα Γ, Β, Β' ἀνήκουν εἰς τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΓ). Ἔχομεν λοιπόν:

$$\hat{\omega} = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2},\ \hat{\omega} = \hat{\omega}_1,\ \hat{\varphi} = \hat{\omega} + \hat{\omega}_1 = 2\hat{\omega} \Rightarrow B\hat{M}\Gamma = B\hat{A}\Gamma.$$

Τὰ σημεῖα λοιπὸν Μ βλέπουν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ ὑπὸ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν $B\hat{A}\Gamma$ καὶ συνεπῶς ἕκαστον σημεῖον Μ, μὲ τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα, ἀνήκει εἰς τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ ΑΒΓ περιφέρειαν. Ἐναπομένει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν, ἐὰν ἡ περιφέρεια (Α, Β, Γ) δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς θεωρουμένης ἰδιότητος.

Ἔστω αὐθαίρετον σημεῖον Μ τῆς περιφερείας (Α, Β, Γ).
Ἡ εὐθεῖα ΓΜ καὶ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΜ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Β'.

Προφανῶς, $\hat{u} = \hat{u}' = 1_{\llcorner} - \frac{\hat{A}}{2}$. Ἐπίσης, $\hat{\omega} = 1_{\llcorner} - \hat{u}_1$ ἢ $\hat{\omega} = 1_{\llcorner} - \hat{u} = \frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \hat{\omega} = \frac{\hat{\varphi}}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $\hat{\varphi} = \hat{\omega} + \hat{\omega}_1 \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\omega}_1$. Ἔτσι, τὸ σημεῖον Β' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΧ καὶ τὸ σημεῖον Μ, κατὰ τὰ γνωστά, ἀντιπροσωπεύει τὸ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ΜΒ + ΜΓ = ἐλάχιστον.

Συμπέρασμα: Ἡ περιφέρεια (Α, Β, Γ) συνίσταται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς προταθείσης ἰδιότητος καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα. Ἐκπροσωπεῖ λοιπὸν τὸν ζητούμενον γεωμετρικὸν τύπον.

6 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

Ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια

1. Μία εὐθεῖα καὶ μία περιφέρεια, ἀνήκουσαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δύνανται νὰ ἔχουν: Δύο κοινὰ σημεῖα· Ἕν κοινὸν σημεῖον· Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον.

Αἱ τρεῖς αὐταὶ διαφορετικαὶ πρὸς ἀλλήλας θέσεις τῶν δύο αὐτῶν γραμμῶν ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς προτάσεων:

Δύο κοινὰ σημεῖα

α) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς περιφερείας ἀπὸ μιᾶς συνεπιπέδου της εὐθείας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς τῆς περιφερείας, ἡ εὐθεῖα ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς περιφερείας καὶ μόνον δύο. Καὶ ἀντιστρόφως,

β) Ἐὰν μία εὐθεῖα καὶ μία συνεπίπεδός της περιφέρεια ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας.

Ἕν κοινὸν σημεῖον

γ) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς περιφερείας ἀπὸ μιᾶς συνεπιπέδου της εὐθείας, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς τῆς περιφερείας, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς περιφερείας*. Καὶ ἀντιστρόφως,

δ) Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ μίαν συνεπίπεδόν της περιφέρειαν, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον**. Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ὁδηγούμεθα εἰς τὰ συμπεράσματα:

ε) Δι᾽ ἑνὸς σημείου, λαμβανομένου ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ μόνον μίαν ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν.

στ) Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου εἶναι παράλληλοι. Καὶ ἀντιστρόφως,

ζ) Ἐὰν δύο ἐφαπτόμεναι εἰς μίαν περιφέρειαν εἶναι παράλληλοι, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς των εἶναι τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

η) Ὅλαι αἱ συνεπίπεδοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ ἑνὸς ὡρισμένου σημείου τοῦ ἐπιπέδου των, εἶναι ἐφαπτόμεναι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

---

* Ἕνα σημεῖον Α, τοῦ ἐπιπέδου περιφερείας τινὸς (Ο,ρ), ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τῆς περιφερείας ταύτης, ἐὰν συμβαίνῃ νὰ εἶναι $ΟΑ < ρ$, καὶ ὀνομάζεται **ἐξωτερικόν,** ἐὰν εἶναι $ΟΑ > ρ$. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς περιφερείας συνιστᾶ τὸ **ἐσωτερικὸν αὐτῆς** καὶ τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν της σημείων συνιστᾶ τὸ **ἐξωτερικὸν αὐτῆς.**

** Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία δὲν ἔχει παρὰ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον Α μετὰ μιᾶς περιφερείας εἶναι μία ἐφαπτομένη αὐτῆς τῆς περιφερείας μὲ σημεῖον ἐπαφῆς τὸ Α. Καὶ διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας (Ο,ρ) πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ Α τὴν κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ.

Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον

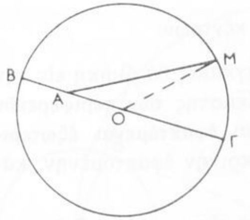
θ) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς περιφερείας ἀπὸ μιᾶς συνεπιπέδου της εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς περιφερείας. Καὶ ἀντιστρόφως,

ι) Ἐὰν τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας εἶναι ἐξωτερικὰ μιᾶς συνεπιπέδου της περιφερείας, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.

Δύο συνεπίπεδοι περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἡ ἔκφρασις τῶν συνθηκῶν, αἵτινες ρυθμίζουν τὰς μεταξὺ δύο συνεπιπέδων περιφερειῶν θέσεις, στηρίζονται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο θεωρημάτων:

α) Τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς μίαν περιφέρειαν, ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου της, διαφόρου τοῦ κέντρου, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου καὶ διὰ τοῦ κέντρου.



(Σχ. 64)

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ κέντρου καὶ εἶναι ἐξωτερικὸν ἢ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς συνεπιπέδου του περιφερείας (Ο), φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ καὶ ἕνα αὐθαίρετον τμῆμα ΑΜ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟΜ ἔχομεν:

$$OM - OA < AM < OM + OA \quad \text{ἢ}$$

$$OB - OA < AM < O\Gamma + OA$$

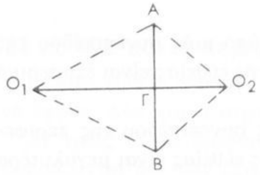
$$\Rightarrow \quad AB < AM < A\Gamma.$$

Τὸ τμῆμα λοιπὸν ΑΒ εἶναι τὸ **ἐλάχιστον** καὶ τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι τὸ **μέγιστον**, ἐξ ἐκείνων τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α εἰς τὴν περιφέρειαν. Τὸ **ἐλάχιστον** τμῆμα ΑΒ ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

β) Ὅταν δύο συνεπίπεδοι περιφέρειαι ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων των, ἔχουν ἐπίσης ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων. Ἀντιστρόφως,

γ) Ἐὰν δύο διακεκριμέναι ἀλλήλων καὶ συνεπίπεδοι περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος, τοῦ συνδέοντος αὐτὰ τὰ δύο σημεῖα, διέρχεται διὰ τῶν δύο κέντρων.

1ον Ἔστωσαν O_1 καὶ O_2 τὰ κέντρα τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι ἀλλήλων. Ἔστω Α ἓν κοινὸν σημεῖον, μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν εὐθεῖαν O_1O_2



(Σχ. 65)

καὶ ἔστω B τὸ συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν. Θὰ ἔχωμεν:

$$O_1B = O_1A \quad \text{καὶ} \quad O_2B = O_2A$$

Τὸ σημεῖον λοιπὸν B ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὰς περιφερείας (O_1), (O_2), αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλον κοινὸν σημεῖον, διότι ἄλλως θὰ συνέπιπτον.

2ον Ἐὰν δύο διακεκριμέναι περιφέρειαι ἔχουν δύο σημεῖα A καὶ B κοινά, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἶναι μία κοινὴ χορδὴ τῶν δύο περιφερειῶν καὶ ἡ μεσοκάθετός του διέρχεται διὰ τῶν δύο κέντρων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν τῶν A,B.

2.1. Δύο συνεπίπεδοι περιφέρειαι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν συμπίπτουν, δύνανται νὰ κατέχουν, ἡ μία ὡς πρὸς τὴν ἄλλην, τὰς ἑξῆς πέντε θέσεις:

α) Ὅλα τὰ σημεῖα ἑκάστης τῶν περιφερειῶν νὰ εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς ἄλλης. Αἱ περιφέρειαι ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ** ἀλλήλων. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο συνθήκη εἶναι νὰ εἶναι:

$$d > R + r. \qquad d = \text{ἀπόστασις τῶν κέντρων}$$

β) Νὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀναγκαίως θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων. Ὁποιονδήποτε ἄλλο σημεῖον ἑκάστης τῶν περιφερειῶν εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς ἄλλης. Αἱ περιφέρειαι ὀνομάζονται **ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς.** Εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των δέχονται αὗται μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην, κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων των.

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο συνθήκη εἶναι νὰ εἶναι: $d = R + r$.

γ) Νὰ ἔχουν δύο σημεῖα κοινά, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων των.

αἱ δύο περιφέρειαι ὀνομάζονται **τεμνόμεναι.**

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο συνθήκη εἶναι νὰ εἶναι:

$$R - r < d < R + r.$$

δ) Αἱ δύο περιφέρειαι νὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀναγκαίως θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων των. Καὶ κάθε ἄλλο σημεῖον τῆς περιφερείας, μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα, νὰ εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς ἄλλης, ἐνῶ κάθε ἄλλον σημεῖον τῆς ἄλλης περιφερείας νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς πρώτης.

Αἱ δύο περιφέρειαι λέγονται **ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς** καὶ δέχονται εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην, κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων.

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο συνθήκη εἶναι νὰ εἶναι:

$$d = R - r.$$

ε) Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, τῆς μεγαλυτέρας ἀκτῖνος, νὰ εἶναι ἐξωτερικὰ τῆς ἄλλης καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς δευτέρας ἐσωτερικὰ τῆς πρώτης.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι ἡ μία τῶν περιφερειῶν εἶναι **ἐσωτερικὴ** τῆς ἄλλης.

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ πρὸς τοῦτο συνθήκη εἶναι νὰ εἶναι:

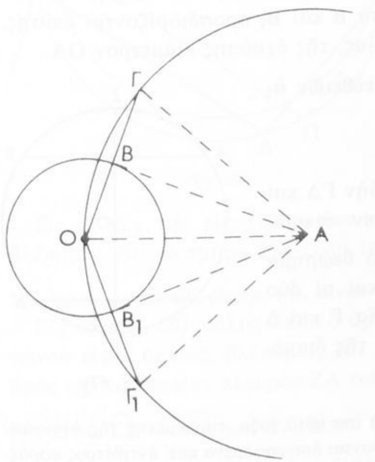
$$d < R - r$$

3. Ἐφαπτομένη πρὸς περιφέρειαν ἐξ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς σημείου.

Θεώρημα: Ἐξ ἑνὸς ἐξωτερικοῦ σημείου Α μιᾶς περιφερείας (0,ρ), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας πρὸς τὴν περιφέρειαν τούτην καὶ μόνον δύο.

1ον Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, $OA > \rho$ καὶ συνεπῶς $2OA > 2\rho$. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν τὴν περιφέρειαν (Α,ΑΟ), δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην χορδὰς

$$O\Gamma = O\Gamma_1 = 2\rho.$$



(Σχ. 66

Ἀφοῦ $O\Gamma > \rho$, τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ_1 θὰ εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τῆς (Ο,ρ) καὶ συνεπῶς θὰ ὑπάρξουν σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας ταύτης μετὰ τῶν τμημάτων ΟΓ καὶ $O\Gamma_1$. Ἐὰν εἶναι Β καὶ B_1 ἀντιστοίχως αὐτὰ τὰ σημεῖα, ἐπειδὴ $OB = OB_1 = \rho$ θὰ εἶναι καὶ $OB = B\Gamma$, $OB_1 = B_1\Gamma_1$. Ἔτσι, τὰ τμήματα ΑΒ καὶ AB_1, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΟΓ καὶ $O\Gamma_1$, θὰ εἶναι κάθετα ἐπ' αὐτὰς τὰς χορδὰς εἰς τὰ Β καὶ B_1 καὶ συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ AB_1 ἐφαπτόμεναι τῆς (Ο,ρ) εἰς αὐτὰ τὰ σημεῖα.

2ον Ἐναπομένει λοιπόν, δι' ὁλοκλήρωσιν τῆς προτάσεώς μας, νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι ἐφαπτόμεναι. Πράγματι,

Ἐὰν ἦσαν ἐφαπτόμεναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, AB_1, AB_2, AB_3. . . τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα: ΑΟΒ, AOB_1, AOB_2, AOB_3. . . θὰ ἦσαν ἴσα (ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσάν των κοινὴν καὶ μίαν κάθετον πλευράν των, $OB = OB_1 = OB_2 = \ldots$ ἴσην) καὶ θὰ εἴχομεν: $AB = AB_1 = AB_2 = AB_3 \ldots$ Ἔτσι, τὰ σημεῖα Β, B_1, B_2, B_3, . . ., τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο, ρ), θὰ ἀνήκουν καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΒ), ἐνῷ αἱ δύο αὐταὶ περιφέρειαι θὰ εἶχον κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο. Καὶ ἐπειδὴ τὸ συμπέρασμα εἶναι ἄτοπον, βεβαιούμεθα, ὅτι ὑπάρχουν μόνον δύο ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α εἰς τὴν (Ο,ρ).

Πορίσματα: 1ον Τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα, τὰ ἀγόμενα ἀπὸ ἑνὸς ἐξωτερικοῦ σημείου εἰς περιφέρειαν εἶναι ἴσα.

Τὸ πόρισμα τοῦτο εἶναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ $ΟΑΒ_1$.

Τὰ ἐφαπτόμενα αὐτὰ τμήματα θὰ τὰ καλοῦμεν ἐφεξῆς **ἐφαπτομενικὰς ἀποστάσεις** τοῦ Α ἀπὸ τὴν περιφέρειαν (Ο,ρ).

2ον Τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας μὲ ἕνα ἐξωτερικόν τους σημεῖον, εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπ' αὐτὸ τὸ σημεῖον εἰς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν, ὡς καὶ τῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

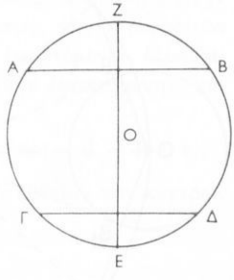
Εἶναι καὶ αὐτὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἰσότητος τῶν αὐτῶν τριγώνων.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ (Σχ. 66) αἱ γωνίαι $Ο\hat{Β}Α$ καὶ $Ο\hat{Β}_1Α$ εἶναι ὀρθαὶ καὶ δεδομένου, ὅτι τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐβεβαίωσε τὴν ὕπαρξιν δύο καὶ μόνον δύο ἐφαπτομένων ἐκ τοῦ Α, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ Β καὶ $Β_1$ προσδιορίζονται ἐπίσης, ὡς σημεῖα τομῆς τῆς (Ο,ρ) καὶ τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης διάμετρον ΟΑ.

4. Θεώρημα. Τὰ ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀποτεμνόμενα τόξα εἶναι ἴσα.

Περ. 1η. Αἱ παράλληλοι εἶναι τέμνουσαι.

Ἡ διάμετρος ΕΟΖ, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ καὶ συνεπῶς καὶ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα $\overset{\frown}{ΓΑ} = \overset{\frown}{ΔΒ}$. * Τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς παραλλήλους ἢ καὶ αἱ δύο εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἢ τὰ Α καὶ Β ταυτίζονται τότε μὲ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΕΖ.



(Σχ. 67)

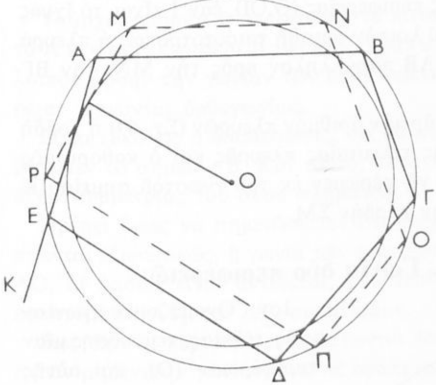
* Εἰς τὴν ἐν λόγῳ συμμετρίαν, εἶναι πρόδηλον, τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα, τηρουμένης τῆς ἀντιστοιχίας τῶν ὁμολόγων των σημείων ἐν τῇ συμμετρίᾳ, φέρονται διαγραφόμενα κατ' ἀντιθέτους φοράς. **Καὶ γεννᾶται τὸ ἐρώτημα:** Ἐὰν εἰς μίαν διδομένην περιφέρειαν ἔχομεν δύο ἴσα τόξα ΓΑ καὶ ΔΒ, μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ τὰ ὁποῖα ἀπαγγελλόμενα τοιουτοτρόπως παρουσιάζουν ἀντιθέτους φοράς, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι αἱ χορδαί, αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ ἀκραῖα ὁμόλογα, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἰσότητα τῶν τόξων, σημεῖα, εἶναι παράλληλοι;

Ἀσφαλῶς ναί, διότι ἄλλως θὰ ἠδυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν $ΓΔ_1$ χορδήν, παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἔχωμεν: $\overset{\frown}{ΓΑ} = \overset{\frown}{Δ_1Β}$ κατὰ τὸ θεώρ. Καὶ συνεπῶς νὰ ἔχωμεν καί: $\overset{\frown}{Δ_1Β} = \overset{\frown}{ΔΒ}$ δηλ. ἰσότητα συνεπαγομένην τὴν ταύτισιν τῶν σημείων Δ καὶ $Δ_1$.

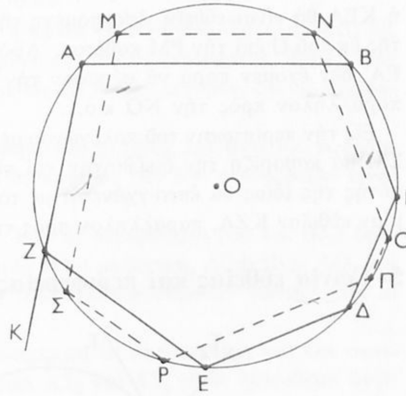
6 ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

4.1. Ἐφαρμογαί: 1ον Ἐὰν ἕνα πολύγωνον ΑΒΓΔ... εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς μίαν περιφέρειαν καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τοῦ τόξου ΑΒ φέρωμεν τὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, κατόπιν ἐκ τοῦ Ν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ χορδή, ἡ ὁποία συνδέει τὸ οὕτω προελθὸν τελευταῖον σημεῖον μὲ τὸ σημεῖον Μ, ἰσοῦται μὲ τὴν τελευταίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του εἶναι περιττὸς καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν τὴν τελευταίαν πλευράν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἄρτιος.



(Σχ. 68)



(Σχ. 69)

Εἰς τὸ (Σχ. 68) εἰκονίζεται ἕνα πολύγωνον μὲ περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ βλέπομεν, ὅτι τὸ τμῆμα ΡΜ εἶναι ἴσον μὲ τὴν τελευταίαν πλευρὰν ΕΑ. Καὶ τοῦτο, διότι, λόγῳ τοῦ θεωρ. (4), εἶναι $\widehat{EP} = \widehat{AM}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\widehat{EA} = \widehat{PM}$.

Εἰς τὸ (Σχ. 69) πάλιν, ὅπου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἄρτιος, βλέπομεν, ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα ΣΜ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τελευταίαν πλευρὰν ΖΑ τοῦ πολυγώνου. Καὶ τοῦτο, διότι, λόγῳ τοῦ θεωρ. (4), εἶναι $\widehat{\Sigma Z} = \widehat{MA}$ καὶ ἀντιθέτου φορᾶς (βλ. προηγ. ὑποσημ.).

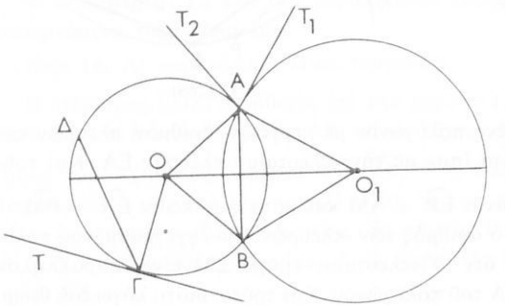
2ον Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν περιφέρειαν ἕνα πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί, πλὴν μιᾶς, νὰ εἶναι διδομένων διευθύνσεων: d_1, d_2, . ., ἐνῷ ἡ μὴ γνωστῆς διευθύνσεως πλευρὰ νὰ διέρχεται διὰ γνωστοῦ σημείου.

Διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο διακρίνομεν δύο περιπτώσεις: Τὸ ζητούμενον πολύγωνον νὰ εἶναι περιττοῦ ἢ νὰ εἶναι ἀρτίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἐὰν ΜΝ (Σχ. 68) εἶναι μία τυχοῦσα χορδή, τῆς διευθύνσεως d_1, ἡ ΝΟ τῆς διευθύνσεως d_2, ἡ ΟΠ τῆς διευθύνσεως d_3 καὶ ἡ ΠΡ τῆς διευθύνσεως d_4, ἡ ΡΜ θὰ εἶναι χορδὴ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἐφόσον πρόκειται περὶ πολυγώνου μὲ περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, μὲ τὴν τελευταίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, τὴν ἀγνώστου διευθύνσεως καὶ διερχομένην διά τινος γνωστοῦ σημείου Κ. Τὴν πλευρὰν αὐτὴν θὰ καθορίσωμεν κατὰ θέσιν, ἐὰν λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Ἐκ σημείου Κ, συνεπιπέδου διδομένης περιφερείας νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα ἐκ τῆς ὁποίας ἡ διδομένη περιφέρεια νὰ ἀποτέμνῃ χορδὴν γνωστοῦ μεγέθους.

Ἐπειδὴ αἱ ἴσαι χορδαὶ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν ἀπέχουν ἴσον τοῦ κέντρου, ἡ ΚΕΑ θὰ εἶναι εὐθεῖα, ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Ο,ΟΙ), ἐὰν Ι εἶναι τὸ ἴχνος τῆς ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΡΜ καθέτου. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁρισθῇ τοιουτοτρόπως ἡ πλευρὰ ΕΑ, δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ φέρωμεν τὴν ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΝ, τὴν ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΝΟ κ.ο.κ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πολυγώνου μὲ ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν (Σχ. 69) ἡ χορδὴ ΣΜ θὰ καθορίζῃ τὴν διεύθυνσιν καὶ τῆς τελευταίας πλευρᾶς καὶ ὁ καθορισμὸς αὐτῆς τῆς ἰδίας θὰ ἐπιτυγχάνεται μὲ τὸ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Κ μίαν εὐθεῖαν ΚΖΑ, παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν ΣΜ.

5. Γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας. Γωνία δύο περιφερειῶν.



(Σχ. 70)

1ον Ὀνομάζομεν γωνίαν μιᾶς εὐθείας, τεμνούσης μίαν περιφέρειαν (Ο), καὶ αὐτῆς τῆς περιφερείας, τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης τῆς (Ο) εἰς ἓν τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο γραμμῶν μετὰ τῆς εὐθείας. Εἰς τὸ (Σχ. 70) ἡ γωνία τῆς εὐθείας ΓΔ μετὰ τῆς περιφερείας (Ο) εἶναι ἡ γωνία $\widehat{ΤΓΔ}$.

Ἐὰν τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι διάμετρος τῆς (Ο), ἡ γωνία $\widehat{ΤΓΔ}$ θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ τότε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια τέμνονται **ὀρθογωνίως.**

2ον Ὀνομάζομεν γωνίαν δύο περιφερειῶν, ἐχουσῶν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὴν κυρτὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο περιφερειῶν εἰς τὸ Α ἢ εἰς τὸ Β. Ἡ γωνία αὕτη εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς κυρτῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὸ Α ἢ εἰς τὸ Β. Πράγματι, Θεωροῦμεν (Σχ. 70) τὸ τρίγωνον O_1AO. Ὑψοῦμεν εἰς τὸ Α τὴν κάθετον ἡμιευθεῖαν AT_1 ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AO_1 καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὴν AO_1, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει τὸ Ο. Ἐπίσης ὑψοῦμεν τὴν κάθετον AT_2 ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὴν ΑΟ, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει τὸ O_1.

Ἔχομεν τοιουτοτρόπως τὴν γωνίαν $T_1\hat{A}T_2$ ὡς γωνίαν τῶν δύο περιφερειῶν καὶ ἀκόμη:

$$O_1\hat{A}T_1 = 1_{\llcorner}, \quad O\hat{A}T_2 = 1_{\llcorner} \Rightarrow O_1\hat{A}T_1 + O\hat{A}T_2 = 2_{\llcorner}$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν καί: $O_1\hat{A}O + T_1\hat{A}T_2 = 2_{\llcorner}$. ὅ.ἔ.δ.

Ὑπάρχει προσέτι ἡ περίπτωσις νὰ εἶναι ἡ γωνία $O_1\hat{A}O$ ὀρθή. Τότε, ἡ ἀκτὶς εἰς τὸ Α ἑκάστης περιφερείας θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἄλλης περιφερείας. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ὀρθὴν τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ Α καὶ λέγομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι τέμνονται **ὀρθογωνίως.**

Εἶναι εὔκολος ἡ διαπίστωσις, ὅτι θὰ συνέβαινον τὰ αὐτά, ἐὰν ἀντὶ τοῦ Α ἐλαμβάνομεν τὸ σημεῖον Β. Καὶ τοῦτο, διότι ἡ διάκεντρος τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὅλου σχήματος.

Πρέπει ὅμως νὰ σημειώσωμεν ὅτι: 1ον Ἐὰν αἱ περιφέρειαι (Ο) καὶ (O_1) ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἡ γωνία τῶν περιφερειῶν εἶναι **μηδενική.** Αἱ ἀκτῖνες AO_1 καὶ ΑΟ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι, συνιστοῦν μίαν ἀποπλατυσμένην γωνίαν, ἐνῶ αἱ ἐφαπτόμεναι AT_1 καὶ AT_2 συμπίπτουν.

2ον Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, αἱ ἀκτῖνες O_1A καὶ ΟΑ συνιστοῦν μηδενικὴν γωνίαν, ἐνῶ αἱ ἐφαπτόμεναι AT_1 καὶ AT_2 εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντίθετοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν ἡ γωνία τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι μία **ἀποπλατυσμένη** γωνία.

6. Τὰ σχήματα καὶ ὁ κύκλος.

6.1. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον εἶναι 1ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του νὰ εἶναι παραπληρωματικαί. 2ον Δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ νὰ βλέπουν τὴν ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαν τοῦ τετραπλεύρου ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

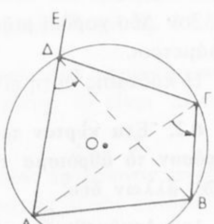
1ον Ἀναγκαῖον. Δεχόμεθα, ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 2_{\llcorner} \quad \text{ἢ} \quad E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$$

Ὅπως ἀνεφέραμεν (Κεφ. 2, 4, α)

$$A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{\widehat{AB\Gamma}}{2}, \qquad A\hat{B}\Gamma = \frac{\widehat{\Gamma\Delta A}}{2} \Rightarrow$$

$$A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = \frac{\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta A}}{2} = 180^0.$$



(Σχ 71)

Ἀκόμη, $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα.

Ἀρκετόν. Διὰ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ συμβαίνει νὰ εἶναι:

$$A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 2_{\llcorner}$$

θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια τῶν (Α, Δ, Γ) διέρχεται ἀπὸ τὸ Β. Πράγματι, ἐὰν ἡ ἐν λόγω περιφέρεια ἔτεμνε τὸ τμῆμα ΑΒ ἐσωτερικὰ ἢ ἐξωτερικά, ἡ γωνία Β θὰ ἦτο μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς παραπληρωματικῆς τῆς γωνίας ΑΔΓ. Θὰ ἐδημιουργεῖτο λοιπὸν ἀντίφασις.

Σημείωσις. Ἡ παραπληρωματικότης τῶν γωνιῶν $\hat{\Delta}$ καὶ $\hat{B}$ συνεπάγεται τὴν ἰσότητα: $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B}$. Καὶ ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν, ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον, ἐὰν καὶ ἐφόσον μία ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της καὶ ἐξωτερικήν.

2ον Ἀναγκαῖον. Δεχόμενοι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον, ἔχομεν ὡς συνέπειαν: $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Delta}B$ (Κεφ. 2, 4, α).

Ἀρκετόν. Ἐὰν διὰ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ συμβαίνει νὰ εἶναι: $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Delta}B$, ἡ περιφέρεια (Α, Β, Γ) διέρχεται διὰ τοῦ Δ. Ἄλλως, ἀφοῦ τὸ Δ θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς τῆς περιφερείας, δὲν θὰ ἔχωμεν $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B$. Ἔτσι καὶ πάλιν θὰ εἴχομεν ἀντίφασιν.

6.1.1. Πορίσματα: 1ον Ἕνα τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, ἐὰν καὶ ἐφόσον εἶναι τοῦτο ἰσοσκελὲς (βλ. Κεφ. 4, 2).

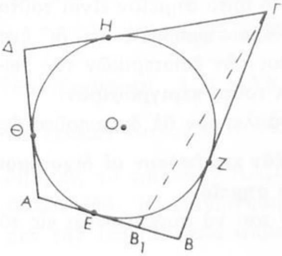
2ον Ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, ἐὰν καὶ ἐφόσον εἶναι τοῦτο ὀρθογώνιον.

3ον Δύο χορδαὶ μιᾶς περιφερείας διχοτομοῦσιν ἀλλήλας, ἐὰν καὶ ἐφόσον εἶναι διάμετροι.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ προηγουμένου πορίσματος.

6.2. Ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ περιφέρειαν, ἐὰν καὶ ἐφόσον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο.

1ον Δεχόμεθα, ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον. Ἔχομεν (Κεφ. 6,3 Πορ. 1):



(Σχ. 72)

$$ΑΕ = ΑΘ, \quad ΕΒ = ΒΖ, \quad ΓΗ = ΓΖ, \quad ΔΗ = ΔΘ$$
$$\Rightarrow (ΑΕ + ΕΒ) + (ΓΗ + ΔΗ) = (ΑΘ + ΔΘ) + (ΒΖ + ΓΖ) \Rightarrow ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ. \quad (1)$$

2ον Δεχόμεθα τώρα, ὅτι διὰ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἰσχύει ἡ σχέσις (1) καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει περιφέρεια ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸ τὸ τετράπλευρον.

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ, σχηματίζουσαι μετὰ τῆς ΑΔ γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον, ὡς εἶναι φανερὸν ἰσαπέχει τῶν εὐθειῶν-πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ. Ἔτσι, γράφεται περιφέρεια Ο, ἐφαπτομένη τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ καὶ ἄς εἶναι Ε, Θ, Η τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Προφανῶς θὰ εἶναι:

$$ΔΗ = ΔΘ, \quad ΑΕ = ΑΘ \Rightarrow ΔΗ + ΑΕ = ΑΔ \quad (2)$$

Ἡ ἰσότης (2) ἀποκλείει νὰ εἶναι ἀμφότεραι αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Β ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΔΗ καὶ ΑΕ ἀντιστοίχως. Ἄν δεχθῶμεν, ὅτι τὸ Γ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΔΗ, ἡ ἐξ αὐτοῦ 2α ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Ο) θὰ μᾶς δώσῃ τὸ περιγεγραμμένον κυρτὸν τετράπλευρον $ΑΒ_1ΓΔ$, ἂν $Β_1$ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἀχθείσης ἐφαπτομένης μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$ΑΒ_1 + ΓΔ = ΑΔ + Β_1Γ \quad (3)$$

Καὶ λόγῳ τῆς (1) θὰ εἶναι: $ΑΒ - ΑΒ_1 = ΒΓ - Β_1Γ$ (4) καθόσον τὸ $Β_1$ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ ἢ $ΑΒ_1 - ΑΒ = Β_1Γ - ΒΓ$ (5) εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν.

Ἡ ἰσότης ὅμως (4) ἢ ἡ ἰσότης (5) ἐκφράζουν μίαν ἀδυνατότητα, διότι ἐξισώνουν μίαν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν. Θὰ εἴχομεν ὅμως μίαν δυνατότητα, ἂν εἴχομεν ταύτισιν τῶν σημείων Β καὶ $Β_1$. ὅ.ἔ.δ.

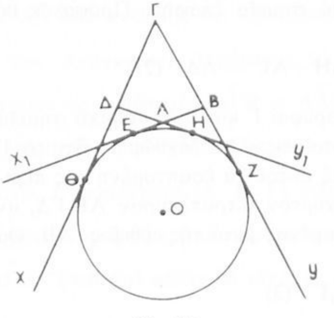
6.2.2. Πόρισμα: Ἕνα παραλ/μμον εἶναι περιγράψιμον περὶ μίαν περιφέρειαν, ἐὰν καὶ ἐφόσον εἶναι τοῦτο ῥόμβος, χωρὶς φυσικὰ νὰ ἀποκλείεται νὰ εἶναι τοῦτο τετράγωνον.

6.2.3. Παρατηρήσεις: 1ον Ἐὰν ἔχωμεν γενικὰ ἕνα κυρτὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ μίαν περιφέρειαν, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας αὐτῆς μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι τοῦτο περιγράψιμον. Μάλιστα δέ, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι δι' ἕνα κυρτὸν πολύγωνον ν πλευρῶν ἀρκεῖ αἱ ν—1 διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν του γωνιῶν νὰ συνέρχωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον διὰ νὰ εἶναι τοῦτο περιγράψιμον.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις, ὅσον ἀφορᾶ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον θὰ διετυποῦτο ὡς ἑξῆς: **Ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον, ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν του γωνιῶν συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

Ἀρκεῖ ὅμως, ὅπως εἴπομεν, αἱ **τρεῖς** τῶν διχοτόμων του νὰ συνέρχωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον διὰ νὰ εἶναι περιγράψιμον.

2ον Θὰ ὁμιλήσωμεν τώρα διὰ τὴν **ἐκγραψιμότητα** ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ὡς πρὸς μίαν περιφέρειαν ἢ ἄλλως διὰ τὴν **παρεγγραψιμότητα** μιᾶς περιφερείας ὡς πρὸς ἕνα τετράπλευρον.



(Σχ. 73)

1ον Δεχόμεθα, ὅτι ἡ περιφέρεια (Ο) εἶναι παρεγγεγραμμένη εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ δηλ. ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν του.

Ἔχομεν: $ΓΘ = ΓΔ + ΔΘ = ΓΔ + ΔΑ + ΑΗ$

$$ΓΖ = ΓΒ + ΒΖ = ΓΒ + ΒΑ + ΑΕ$$

$$\Rightarrow \quad ΓΔ - ΑΒ = ΓΒ - ΑΔ \quad (1)$$

ἐλάβομεν φυσικὰ ὑπ' ὄψιν, ὅτι $ΓΘ = ΓΖ$, $ΑΕ = ΑΗ$.

2ον Δεχόμεθα, ὅτι διὰ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἰσχύει ἡ (1) καὶ θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει περιφέρεια παρεγγεγραμμένη εἰς τὸ τετράπλευρον.

Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $x_1\hat{B}y$ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $x\hat{Γ}y$, σχηματίζουσαι μετὰ τῆς ΓΒ γωνίας μὲ ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἔτσι, ὑπάρχει περιφέρεια (Ο), ἐφαπτομένη τῶν εὐθειῶν Bx_1, By, $Γx$, $Γy$, ἡ ὁποία, ἰσχυριζόμεθα, θὰ ἐφάπτεται καὶ τῆς $Δy_1$*.

Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ $Δy_1$ δὲν ἐφάπτεται τῆς (Ο), φέρομεν ἐκ τοῦ Δ τὴν δευτέραν ἐφαπτομένην τῆς (Ο) τὴν Δω, ἡ ὁποία δεχόμεθα, ὅτι θὰ τμήσῃ τὴν Bx_1 εἰς ἕνα σημεῖον A_1. Δημιουργεῖται λοιπὸν τὸ τετράπλευρον $A_1ΒΓΔ$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν (Ο) παρεγγεγραμμένην του περιφέρειαν. Θὰ ἰσχύῃ λοιπὸν ἡ σχέσις:

$$ΓΔ - A_1B = ΓΒ - A_1Δ \quad (2)$$

* Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια (Ο) θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τῶν ΓΔx καὶ BAx_1 καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Δ θὰ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Ο).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$A_1B - AB = A_1\Delta - A\Delta \quad \text{ἢ} \quad AB - A_1B = A\Delta - A_1\Delta$$

Ἐὰν δεχθῶμεν $A_1B > AB$ ἢ $AB > A_1B$.

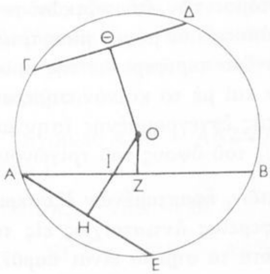
Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν καί: $AA_1 = |A_1\Delta - A\Delta|$

δηλ. εἰς τὸ τρίγωνον $AA_1\Delta$ ἡ μία πλευρά, ἡ AA_1 ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων δύο. Ἐδημιουργήθη λοιπὸν ἄτοπον, τὸ ὁποῖον αἴρεται, μόνον ἐὰν δεχθῶμεν τὴν ταύτισιν τῶν σημείων Α καὶ A_1.

6.3. Δύο χορδαὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἄνισοι, ἐὰν καὶ ἐφόσον αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπ' αὐτὰς εἶναι ἄνισοι, μάλιστα δὲ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας εἶναι ἡ μικροτέρα.

1ον Υπ $AB > \Gamma\Delta$

Συμ $O\Theta > OZ$.



(Σχ. 74)

Μὲ τὴν σύγκρισιν τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ * ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι αἱ κυρταὶ γωνίαι $A\hat{O}B$ καὶ $\Gamma\hat{O}\Delta$ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν:

$$A\hat{O}B > \Gamma\hat{O}\Delta \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}. **$$

Ἔτσι, ἡ περιφέρεια (Α,ΓΔ) θὰ μᾶς δώσῃ σημεῖον Ε ἐσωτερικὸν τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Ὥστε θὰ εἶναι

$$\widehat{AE} = \widehat{\Gamma\Delta} \Rightarrow AE = \Gamma\Delta \text{ καὶ } OH = O\Theta,$$

ἂν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΕ.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ Ο καὶ Η εἶναι σημεῖα τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ, τὸ τμῆμα ΟΗ θὰ τμήσῃ ταύτην εἰς τὸ Ι καὶ ἐπειδὴ $OI > OZ$ θὰ εἶναι καί: $OH > OZ \Rightarrow O\Theta > OZ$.

2ον Υπ $O\Theta > OZ$ | Ἐὰν $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow O\Theta = OZ$

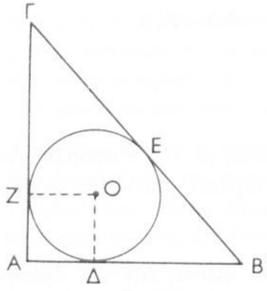
Συμ $AB > \Gamma\Delta$ | » $AB < \Gamma\Delta \Rightarrow O\Theta < OZ$

Ὥστε: $AB > \Gamma\Delta$.

* Βλ. Κεφ. 3, 4, ε.

** Ὁμιλοῦμεν διὰ τὰ μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα.

6.4. Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρὶγωνον περιφερείας.



(Σχ. 75)

Ἔχομεν: $AB = A\Delta + \Delta B = \rho + BE$

$A\Gamma = AZ + Z\Gamma = \rho + E\Gamma$

$\Longrightarrow AB + A\Gamma = 2\rho + B\Gamma = 2\rho + 2R$

6.5. Ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς ἰσόπλευρον τρὶγωνον περιφερείας εἶναι τὸ $^1/_3$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης τὰ $^2/_3$ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου.

Ὡς γνωστόν, εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν του γωνιῶν, αἱ διάμεσοι τῶν πλευρῶν του καὶ τὰ ὕψη του ἀποτελοῦν μόνον μίαν τριάδα εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ συνεπῶς τὰ κέντρα τῶν δύο περιφερειῶν τῆς προτάσεώς μας συμπίπτουν. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα συμπίπτουν καὶ μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ἔχομεν τὴν μὲν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης ἴσην μὲ τὸ $^1/_3$, τὴν δὲ ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης ἴσην μὲ τὰ $^2/_3$ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου.

6.6. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν, ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ἀχθῇ εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς περιφερείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν εἰς αὐτὰ τὰ σημεῖα εἶναι παράλληλοι.

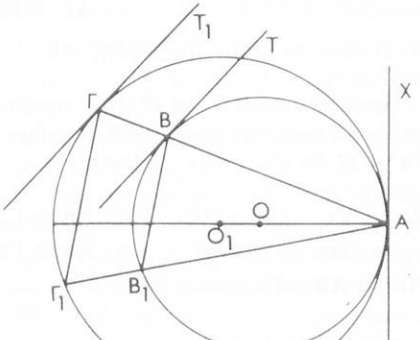
$$X\hat{A}B = T\hat{B}A = \frac{\widehat{AB}}{2},$$

$$X\hat{A}\Gamma = T_1\hat{\Gamma}A = \frac{\widehat{A\Gamma}}{2}$$

Καὶ ἐπειδὴ $\quad X\hat{A}B \equiv X\hat{A}\Gamma \quad \Longrightarrow$

$$T\hat{B}A = T_1\hat{\Gamma}A \Longrightarrow BT \parallel \Gamma T_1$$

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὴν περίπτωσιν, ὅπου αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.



(Σχ. 76)

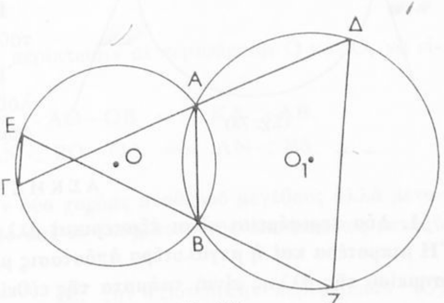
6.7. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Α τῆς ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν, ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς ἀχθῶσι εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τέμνει τὰς περιφερείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ Β καὶ Γ καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὰ $Β_1$ καὶ $Γ_1$ αἱ χορδαὶ $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπὸ τὸ (Σχ. 76) λαμβάνομεν: $Β\hat{Β}_1Α = Χ\hat{Α}Β$, $Γ\hat{Γ}_1Α = Χ\hat{Α}Γ$

Καὶ ἐπειδὴ $Χ\hat{Α}Β \equiv Χ\hat{Α}Γ \Rightarrow Β\hat{Β}_1Α = Γ\hat{Γ}_1Α \Rightarrow ΒΒ_1 \parallel ΓΓ_1$.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

6.8. Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχουν κοινὰ σημεῖα τὰ Α καὶ Β καὶ δι' ἑκάστου τῶν σημείων τούτων ἀχθῇ μία διατέμνουσα τὰς δύο περιφερείας, αἱ χορδαὶ τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ ἀκραῖα σημεῖα τῶν διατεμνουσῶν τούτων, εἶναι παράλληλοι.



(Σχ. 77)

Ἔχομεν: $Α\hat{Β}Ε = Α\hat{Δ}Ζ$ (βλ. 6, 6.1, Σημ.).

Ἐπίσης, $Α\hat{Β}Ε = Ε\hat{Γ}Α$

$\Rightarrow Ε\hat{Γ}Α \equiv Ε\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Ζ \equiv Γ\hat{Δ}Ζ$

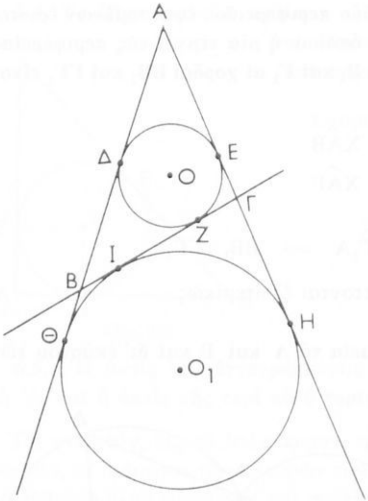
$\Rightarrow ΓΕ \parallel ΖΔ$.

6.9. Ἔκφρασις, συναρτήσει τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον περιφερειῶν.

Σημειοῦντες α, β, γ θὰ ἐννοοῦμεν τὰ μεγέθη τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἢ καὶ τὰ μήκη αὐτῶν τῶν πλευρῶν. Ἐπίσης, διὰ τοῦ 2τ θὰ σημειοῦμεν τὸ μέγεθος τοῦ περιγράμματος τοῦ τριγώνου, ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ τοῦ περιγράμματος.

Θέτομεν ἀκόμη: $ΑΔ = ΑΕ = x$, $ΒΔ = ΒΖ = y$, $ΓΕ = ΓΖ = ω$, ἐνῶ τὰ x,y,ω εἶναι μεγέθη ἢ μήκη μεγεθῶν.

1ον. $2χ + 2y + 2ω = 2τ \Rightarrow χ + y + ω = τ \Rightarrow χ = τ - (y + ω)$,
$y = τ - (χ + ω)$, $ω = τ - (χ + y) \Rightarrow χ = τ - α$, $y = τ - β$, $ω = τ - γ$.



(Σχ. 78)

2ον $\left.\begin{aligned} A\Theta &= AB + B\Theta = AB + BI \\ AH &= A\Gamma + \Gamma H = A\Gamma + \Gamma I \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$2A\Theta = 2AH = 2\tau$$

$$\Rightarrow \quad A\Theta = AH = \tau$$

3ον $\Delta\Theta = A\Theta - A\Delta \Rightarrow \Delta\Theta = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. καὶ $EH = \alpha$

4ον $B\Theta = BI = A\Theta - AB = \tau - \gamma$,
$\Gamma I = \Gamma H = AH - A\Gamma = \tau - \beta$

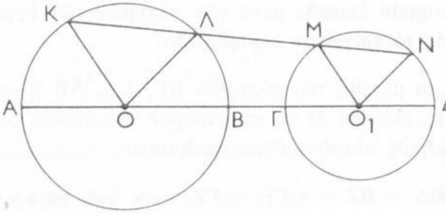
5ον $IZ = BZ - BI = \tau - \beta - (\tau - \gamma) = \gamma - \beta$

Παρατήρησις: $BI = \Gamma Z$, ἄρα τὸ μέσον τοῦ $B\Gamma$ εἶναι καὶ μέσον τοῦ IZ.

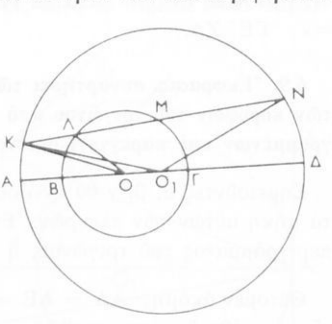
Ἐὰν φυσικὰ πρόκειται περὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ($AB = A\Gamma$) τὰ Ι καὶ Ζ συμπίπτουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο περιφέρειαι εἶναι ἐξωτερικαὶ ἀλλήλων ἢ ἡ μία ἐσωτερικὴ τῆς ἄλλης. Ἡ μικροτέρα καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις μεταξὺ ἑνὸς σημείου τῆς μιᾶς καὶ ἑνὸς σημείου τῆς ἄλλης εἶναι τμήματα τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τῶν δύο περιφερειῶν.



(Σχ. 79)



(Σχ. 80)

1ον Ἐὰν ΚΛΜΝ εἶναι τυχοῦσα διατέμνουσα, ἔχομεν:

$$OO_1 < O\Lambda + \Lambda M + MO_1 \quad (1) \qquad KN < KO + OO_1 + O_1N \quad (2)$$

Ἡ (1) γράφεται: $OB + B\Gamma + \Gamma O_1 < O\Lambda + \Lambda M + MO_1 \Rightarrow B\Gamma < \Lambda M$

Ἡ (2) γίνεται: $KN < AO + OO_1 + O_1\Delta \Rightarrow KN < A\Delta$.

Ἔτσι, τὸ μὲν τμῆμα ΒΓ ἐκφράζει τὴν μικροτέραν ἀπόστασιν μεταξὺ σημείων τῶν δύο περιφερειῶν, τὸ δὲ ΑΔ τὴν μεγαλυτέραν.

2ον Ἔχομεν (Σχ. 80), $O_1K < OO_1 + OK$, $OK < K\Lambda + \Lambda O$

$\Rightarrow O_1K < OO_1 + K\Lambda + \Lambda O \Rightarrow O_1K - OO_1 - \Lambda O < K\Lambda$

$\Rightarrow O_1A - OB - OO_1 < K\Lambda \Rightarrow AB < K\Lambda$

Ἐπίσης, $\Lambda O + OO_1 + O_1N > \Lambda N \Rightarrow BO + OO_1 + O_1\Delta > \Lambda N$

$\Rightarrow B\Delta > \Lambda N$.

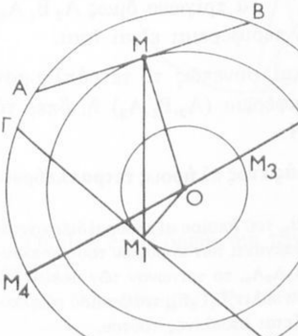
Ὥστε, τὸ ΑΒ εἶναι τὸ μικρότερον καὶ τὸ ΒΔ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν συμβῇ εἰς τὴν 2αν περίπτωσιν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ O_1 νὰ εἶναι ὁμόκεντροι, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

$K\Lambda > OK - O\Lambda \Rightarrow K\Lambda > AO - OB \Rightarrow K\Lambda > AB$.

Ἐπίσης, $\Lambda N < \Lambda O + ON \Rightarrow \Lambda N < BO + O\Delta \Rightarrow \Lambda N < B\Delta$.

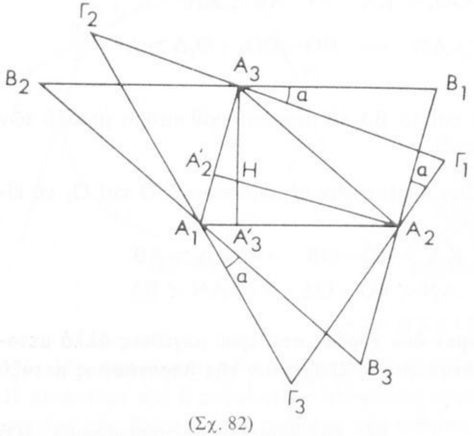
2. Εἰς μίαν περιφέρειαν χαράσσομεν δύο χορδὰς σταθεροῦ μεγέθους ἀλλὰ μεταβλητῆς θέσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν μέσων τῶν δύο χορδῶν.



(Σχ. 81)

Εἰς τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν (Ο) χαράσσομεν τὴν χορδὴν ΑΒ μεγέθους λ καὶ τὴν χορδὴν ΓΔ μεγέθους μ. Ἐφόσον αἱ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους χορδαὶ ἀπέχουν ἴσον τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, ἕπεται, ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΜ καὶ OM_1 (Μ καὶ M_1 μέσα ἀντιστοίχως τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ) εἶναι σταθεροῦ μεγέθους καὶ ἡ περιφέρεια (Ο,ΟΜ) εἶναι ὁ γ·τ τῶν Μ, ἡ δὲ (O, OM_1) ὁ γ·τ τῶν M_1. Πότε λοιπὸν θὰ ἐπιτύχωμεν τὸ μικρότερον ἢ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα M_1M; Προφανῶς, (βλ. ἄσκ. 1), ἐφόσον καθορίσωμεν τὰ σημεῖα τῶν δύο ἐσωτερικῶν περιφερειῶν μὲ τὴν μικροτέραν καὶ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόστασιν. Καί, κατὰ τὴν σημείωσιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, τὰ σημεῖα αὐτὰ θὰ εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας, φερούσης διαμέτρους τῶν δύο περιφερειῶν. Καὶ τὴν μὲν μικροτέραν ἀπόστασιν θὰ ἐκφράζῃ τμῆμα τοῦ μεγέθους M_2M_3, τὴν δὲ μεγαλυτέραν τμῆμα τοῦ μεγέθους M_3M_4.

3. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα τρίγωνον $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, ἰσοκλινὲς τοῦ ἀντισυμπληρωματικοῦ $B_1B_2B_3$ ἑνὸς γνωστοῦ τριγώνου $A_1A_2A_3$, αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι περὶ τὰ τρίγωνα $\Gamma_1A_3A_2$, $\Gamma_2A_1A_3$, $\Gamma_3A_2A_1$ εἶναι ἴσαι καὶ διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου H τοῦ τριγώνου $A_1A_2A_3$.*



(Σχ. 82)

1ον Ἐφόσον τὰ σημεῖα A_2, A_3 βλέπουν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Γ_1B_1 ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὸ τετράπλευρον $\Gamma_1B_1A_3A_2$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν. Ἔτσι, ἡ περιφέρεια (Γ_1, A_2, A_3) συμπίπτει μὲ τὴν περιφέρειαν (A_2, B_1, A_3). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια (A_1, Γ_3, A_2) συμπίπτει μὲ τὴν περιφέρειαν (A_1, B_3, A_2) καὶ ἡ περιφέρεια (A_1, A_3, Γ_2) μὲ τὴν περιφέρειαν (A_1, A_3, B_2).

Τὰ τρίγωνα ὅμως $A_2B_1A_3$, $A_1B_3A_2$, $A_3B_2A_1$ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς αἱ ἐν λόγῳ περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

2ον Αἱ γωνίαι $H\hat{A}_3B_1$ καὶ $H\hat{A}_2B_1$ εἶναι ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον $HA_2B_1A_3$ εἶναι ἐγγράψιμον. Τοιουτοτρόπως, ἡ περιφέρεια (A_2, B_1, A_3) ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ περιφέρεια (A_2, Γ_1, A_3) διέρχεται διὰ τοῦ H.

4. Σημεῖον τοῦ Miquel. 1ον Ἀπὸ τὰς ἓξ κορυφὰς ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου,**

---

* Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$, τὸ τρίγωνον $B_1B_2B_3$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διέρχονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι τῶν κορυφῶν τούτων πλευράς, ὀνομάζεται **ἀντισυμπληρωματικὸν** τοῦ $A_1A_2A_3$, ἐνῶ τὸ $A_1A_2A_3$, τὸ τρίγωνον τῶν μέσων τοῦ $B_1B_2B_3$, ὀνομάζεται **συμπληρωματικὸν** τοῦ $B_1B_2B_3$. Τὸ τρίγωνον πάλιν $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ ἐκείνας τοῦ $B_1B_2B_3$, ὀνομάζεται ἰσοκλινὲς τούτου.

** Τέσσαρες εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε τρεῖς ἐξ αὐτῶν οἱαιδήποτε νὰ μὴ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁρίζουν ἕνα **πλῆρες τετράπλευρον**, μορφούμενον ἐκ τεσσάρων εὐθειῶν **πλευρῶν** καὶ ἐξ ἓξ σημείων **κορυφῶν**, τὰ ὁποῖα καθορίζονται ἀπ' αὐτὰς τὰς εὐθείας, θεωρουμένας ἀνὰ δύο.

Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς εὑρίσκονται τρεῖς κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου· εἰς ἑκάστην κορυφὴν

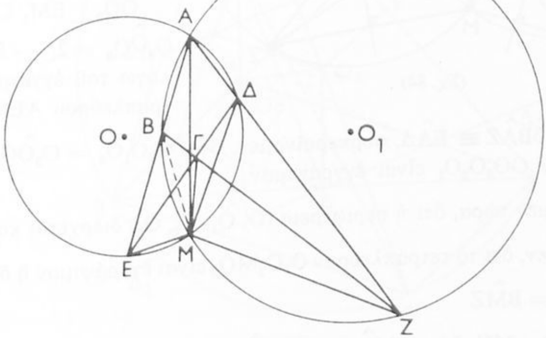
θεωρουμένας ἀνὰ τρεῖς, μορφοῦνται τέσσαρα τρίγωνα. 1ον Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι περὶ αὐτὰ τὰ τέσσαρα τρίγωνα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὀνομαζομένου σημείου τοῦ Miquel.

2ον. Ἐὰν αἱ τέσσαρες κορυφαὶ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου συνιστοῦν κυρτὸν τετράπλευρον, ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, τὸ σημεῖον τοῦ Miquel ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ τρίτον ζεῦγος τῶν ἀπέναντι κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου.

1ον Αἱ περιφέρειαι (Α,Ε,Δ) καὶ (Α,Β,Ζ), ἐφόσον εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τρίγωνα μὲ κοινὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα, θὰ ἔχουν ἐκτὸς ἀπὸ τὸ Α καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον τὸ Μ. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὰ τετράπλευρα ΕΜΓΒ καὶ ΜΖΔΓ εἶναι ἐγγράψιμα.

Πράγματι, $\quad M\hat{E}\Gamma = M\hat{A}\Delta \quad \text{καὶ} \quad M\hat{B}\Gamma = M\hat{A}Z$

Ἐπειδὴ ὅμως $M\hat{A}\Delta \equiv M\hat{A}Z$, συμπεραίνομεν, ὅτι: $M\hat{E}\Gamma = M\hat{B}\Gamma$ καὶ συνεπῶς, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΜΓΒ εἶναι ἐγγράψιμον.



(Σχ. 83)

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν διαπίστωσιν τῆς ἐγγραψιμότητος τοῦ τετραπλεύρου ΜΖΔΓ.

2ον Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

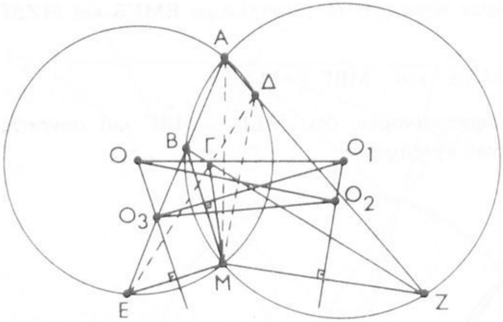
ἀντιστοιχεῖ μία ἀπέναντι κορυφή, ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὰς δύο πλευράς, αἱ ὁποῖαι δὲν διέρχονται ἀπὸ τὴν πρώτην κορυφήν. Ἔχομεν ἔτσι τρία ζεύγη ἀπέναντι κορυφῶν, τὰ ὁποῖα καθορίζουν τρεῖς εὐθείας (ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων συνδέει δύο σημεῖα ἑνὸς ζεύγους), αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται **διαγώνιοι** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

Προφανῶς, $\hat{AMZ} = \hat{ABZ}$ καὶ $\hat{AME} = \hat{A\Delta E}$

$$\Rightarrow \hat{AMZ} + \hat{AME} = \hat{ABZ} + \hat{A\Delta E} = 2_{\llcorner}.$$

λόγω τῆς ὑποθέσεως. Ἔτσι, αἱ ἡμιευθεῖαι ΜΕ καὶ ΜΖ εἶναι ἀντίθετοι.

5. Περιφέρεια τοῦ Miquel. Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου, εἶναι σημεῖα μιᾶς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ τὸ σημεῖον τοῦ Miquel.



(Σχ. 84)

Ο, O_1, O_2, O_3 εἶναι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν (Α, Δ, Ε), (Α, Β, Ζ), (Δ, Γ, Ζ), (Β, Γ, Ε). Ἔχομεν: $O_1O_2 \perp MZ$, $O_1O_3 \perp MB \Rightarrow O_3\hat{O}_1O_2 = 2_{\llcorner} - \hat{BMZ} = \hat{BAZ}$, λόγω τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΜΖ. Ἐπίσης,

$OO_3 \perp EM$, $OO_2 \perp M\Delta \Rightarrow O_3\hat{O}O_2 = 2_{\llcorner} - \hat{EM\Delta} = \hat{EA\Delta}$, λόγω τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΕΜΔ.

Ἐπειδὴ μως ὅ$\hat{BAZ} \equiv \hat{EA\Delta}$, συμπεραίνομεν, ὅτι: $O_3\hat{O}_1O_2 = O_3\hat{O}O_2$. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $OO_3O_2O_1$ εἶναι ἐγγράψιμον.

Διὰ νὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ περιφέρεια (Ο, O_1, O_2, O_3) διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Μ, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον $O_1O_2MO_3$ εἶναι ἐγγράψιμον ἢ ὅτι $O_3\hat{M}O_2 = 2_{\llcorner} - O_3\hat{O}_1O_2 = \hat{BMZ}$

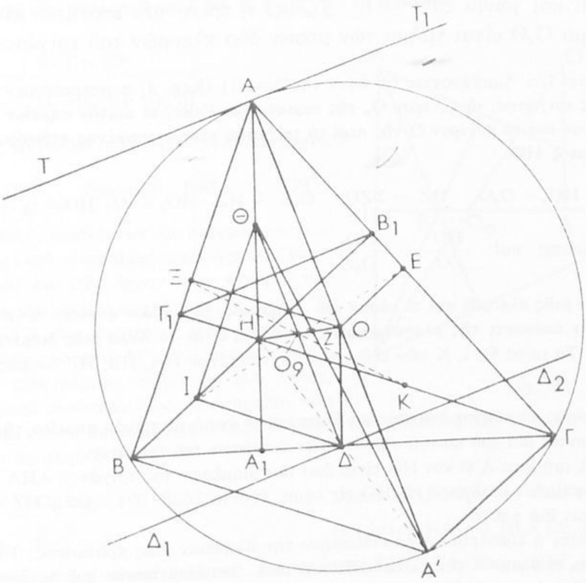
Ἔχομεν: $O_2O_3 \perp M\Gamma$. Ἄρα $M\hat{O}_2O_3 = \hat{MZ\Gamma}$ (ἡ πρώτη εἶναι ἐπίκεντρος καὶ ἡ δευτέρα ἐγγεγραμμένη τῆς περιφερείας (Δ, Γ, Μ,Ζ), ἀλλὰ ἡ πρώτη βαίνει ἐπὶ τοῦ ἡμίσεος ἐκείνου τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ἡ δευτέρα).

Καὶ πάλιν, λόγω τῆς περιφερείας (Β, Ε, Μ, Γ), διαπιστοῦμεν, ὅτι $M\hat{O}_3O_2 = \hat{MB\Gamma}$. Ἔτσι, τὰ τρίγωνα O_3MO_2 καὶ ΒΜΖ εἶναι ὁμοιογώνια καὶ θὰ εἶναι λοιπὸν καί: $O_3\hat{M}O_2 = \hat{BMZ}$ ὅ.ἔ.δ. Ἡ περιφέρεια: (Ο,O_3,Μ,O_2,O_1) ὀνομάζεται περιφέρεια τοῦ **Miquel.**

6. Ἡ περιφέρεια τοῦ Euler. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν αὐτοῦ καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου εἶναι σημεῖα τῆς αὐτῆς περιφερείας, ὀνομαζομένης περιφερείας τοῦ Euler. Κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τοῦ συνδέοντος τὸ ὀρθόκεντρον μὲ τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἀκτὶς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς τῆς περιφερείας.

Εἰς τὴν ἄσκ. 11 (Κεφ. 4) — εὐθεῖα Euler — διεπιστώθη, ὅτι:

$$O\Delta = \parallel \Theta H$$



(Σχ. 85)

ἂν Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΗΑ. Ἔτσι, τὸ τετράπλευρον ΟΔΗΘ εἶναι παραλ/μμον καὶ τὰ τμήματα ΘΔ καὶ ΗΟ ἔχουν τὸ κοινὸν των σημεῖον O_9 καὶ κοινόν των μέσον.

Διαπιστοῦμεν λοιπόν, ὅτι $O_9\,\Delta = O_9\,\Theta$.

Μὲ τὴν αὐτὴν σκέψιν διαπιστοῦμεν ἐπίσης, ὅτι:

$O_9\,I = O_9\,E$, $\quad O_9\,K = O_9\,\Xi$, $\quad$ ὅπου Ι, Κ μέσα τῶν τμημάτων ΗΒ καὶ ΗΓ

Τί χρειάζεται ὅμως διὰ τὴν διαπίστωσιν τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεώς μας ἐν τῷ συνόλῳ της; Νὰ δείξωμεν τὰς ἰσότητας:

$$O_9 I = O_9 \Delta, \quad O_9 A_1 = O_9 \Delta, \quad O_9 \Theta = 1/2\ OA.$$

Ἡ δευτέρα τῶν ἰσοτήτων εἶναι φανερά, ἐφόσον τὸ τμῆμα A_1O_9 εἶναι διάμεσος τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Theta A_1 \Delta$. Ἡ πρώτη πάλιν ἰσότης διὰ νὰ εἶναι ἀληθὴς ἀρκεῖ νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι $\Delta\hat{I}\Theta = 1_{\llcorner}$.

Καὶ πράγματι, $\Delta I \parallel \Gamma\Gamma_1$, $I\Theta \parallel BA$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι $\Gamma\Gamma_1$ καὶ BA εἶναι κάθετοι, εἶναι καὶ γωνία $\Delta\hat{I}\Theta = 1_{\llcorner}$. Τέλος, ἡ τρίτη τῶν ἰσοτήτων εἶναι ἀληθής, ἀφοῦ τὸ τμῆμα $O_9\Theta$ εἶναι τμῆμα τῶν μέσων δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου HOA.

Παρατηρήσεις: 1ον Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκ. 11 (Κεφ. 4) συμπεραίνομεν ὅτι: **τὸ ὀρθόκεντρον H ἑνὸς τριγώνου, τὸ κέντρον O_9 τῆς περιφερείας Euler, τὸ κοινὸν σημεῖον Z τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου καὶ τὸ κέντρον O τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι σημεῖα τοῦ τμήματος HO.**

Ἔχομεν δέ: $HO_9 = O_9O$, $HZ = 2 \cdot ZO$, $O_9Z = HZ - HO_9 = {}^2/_3\ HO - {}^1/_2\ HO \Rightarrow O_9Z = {}^1/_6 \cdot HO$. Ἐπομένως καί: $\dfrac{HO}{ZO} = \dfrac{HO_9}{O_9Z}$

2ον **Τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς καὶ τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου μὲ τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς αὐτῆς κορυφῆς, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τῆς περιφερείας Euler.** Τὰ μέσα Θ, I, K τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων HA, HB, HΓ ὀνομάζονται σημεῖα τοῦ Euler.

3ον **Τὰ τμήματα, μὲ πέρατα ἕνα σημεῖον Euler καὶ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς, διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.**

Πράγματι, τὰ τμήματα A΄Θ καὶ HO εἶναι δύο τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου AHA΄ καὶ συνεπῶς τὸ κοινόν των σημεῖον θὰ διαιρῇ τὸ HO εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον 2/1. Ἀλλὰ $HZ = 2 \cdot ZO$, ὥστε τὸ A΄Θ διέρχεται διὰ τοῦ Z.

Ἐδῶ μᾶς δίδεται ἡ εὐκαιρία νὰ προσθέσωμεν τὴν ἀλήθειαν μιᾶς προτάσεως: **Τὸ ὀρθόκεντρον H ἑνὸς τριγώνου, τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς BΓ καὶ τὸ A΄, ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ A, εἶναι σημεῖα συνευθειακά, τοῦ δὲ τμήματος HA΄ τὸ Δ εἶναι μέσον.** Πράγματι, τὸ τετράπλευρον BHΓA΄ εἶναι παραλ/μμον, διότι αἱ BH καὶ A΄Γ, κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AΓ, εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπίσης, αἱ ΓH καὶ A΄B εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB. Ἔτσι, τὸ HΔA΄ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ μέσον τὸ Δ.

4ον **Ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Euler εἰς τὸ Δ εἶναι ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν BΓ.**

Ἐὰν TT_1 εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O) εἰς τὸ A, ἐπειδὴ $T_1\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$, ἕπεται, ὅτι ἡ TT_1 εἶναι ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν BΓ, ὡς πρὸς τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου μας. Ἐπειδὴ προσέτι ἡ διάμετρος $\Delta O_9 \Theta$ τῆς περιφερείας Euler εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα OA, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη $\Delta_1\Delta_2$ εἰς τὸ Δ τῆς περιφερείας Euler εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν TT_1 καὶ συνεπῶς ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν BΓ.

5ον Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα τῆς περιφερείας Euler, τὸ καθοριζόμενον ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Ἔχομεν: $A_1\hat{\Theta}\Delta = A_1\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ $(\hat{B} > \hat{\Gamma})$ (βλ. Κεφ. 3, 1, ε).

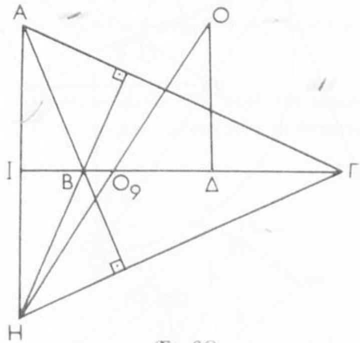
Σημειοῦμεν, ὅτι θὰ ἔχωμεν καί: $\Delta_2\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

6ον Τὰ Τρίγωνα ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν Euler.

Πράγματι, ἡ περιφέρεια Euler τοῦ ΗΒΓ π.χ. εἶναι ἡ περιφέρεια (Ι,Δ,Κ).

7ον Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ O_9 εἶναι σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι, ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ ($\hat{B} - \hat{\Gamma}$, ἂν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$) νὰ εἶναι 90^0.

1ον		
	Υπ	$\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^0$
	Συμ	O_9 σημεῖον τῆς ΒΓ.



(Σχ. 86)

Ἡ ὑπόθεσις $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^0$ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι $AB\Gamma_\Delta = HB\Gamma_\Delta$. Πράγματι, $H\hat{B}\Gamma = 1_{\llcorner} + B\hat{\Gamma}A$ καὶ $B\hat{H}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους ἀνὰ μίαν καὶ εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι. Ἔτσι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΗΒΓ ἔχουν μίαν πλευράν των ἴσην καὶ δύο τῶν γωνιῶν των, ἀνὰ μίαν, ἴσας. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΓΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΗ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΗ καὶ συνεπῶς μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΗΑ. Ἔτσι, ΟΔ=ΗΙ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΙΔ καὶ ΗΟ εἶναι κοινὸν των μέσον καὶ ἐπειδὴ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΗΟ εἶναι τὸ O_9, ἡ πρότασίς μας ἐλέγχεται ὡς ἀληθής.

2ον		
	Υπ.	O_9 σημ. τῆς ΒΓ
	Συμ.	$\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^0$

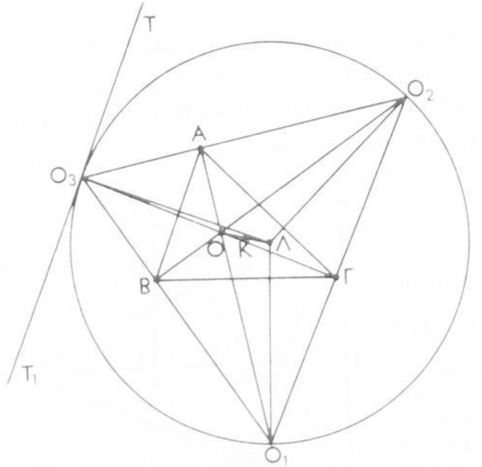
Ἀφοῦ $OO_9 = O_9H \Rightarrow O\Delta = IH$. Καὶ ἐπειδή, $O\Delta = 1/2\ HA \Rightarrow HI = IA$. Εἰς τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΓΗ τὸ ὕψος εἶναι καὶ διάμεσος καὶ συνεπῶς ΓΗ = ΓΑ. Ἔτσι, $HB\Gamma_\Delta = AB\Gamma_\Delta$, ἐνῷ $H\hat{B}\Gamma = 1_{\llcorner} + A\hat{\Gamma}B$. Θὰ εἶναι λοιπὸν καί: $A\hat{B}\Gamma = H\hat{B}\Gamma = 1_{\llcorner} + A\hat{\Gamma}B$ ὅ.ἔ.δ.

Δὲν ἀνεφέραμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, τόσον τοῦ «ἀναγκαίου» ὅσον καὶ τοῦ «ἀρκετοῦ» τῆς προτάσεώς μας, ὅτι ἡ ὑπόθεσις ἐτοποθετοῦσε τὰ σημεῖα Ο καὶ Η ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ.

7. Θεωρήματα τοῦ Nagel. 1ον Αἱ ἀκτῖνες τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθικοῦ του.

2ον Τὸ κέντρον Ο, τῆς εἰς τρίγωνον ἐγγεγραμμένης περιφερείας, τὸ κέντρον Κ, τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης καὶ τὸ κέντρον Λ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμ-

μένης περὶ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἐνῷ τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΛ.



(Σχ. 87)

1ον Θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Εἶναι γνωστὸς ὁ τρόπος καθορισμοῦ τῶν κέντρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς ἕνα τρίγωνον.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι AO_1 καὶ O_3AO_2 διχοτομοῦν ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας, ἕπεται, ὅτι:

$$O_1\hat{A}O_2 = 1_{\llcorner}$$

Συμπεράσματα: α) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι **ὀρθικὸν** τοῦ $O_1O_2O_3$. β) Ἡ περιφέρεια (Α,Β,Γ) εἶναι **ἡ περιφέρεια Euler** διὰ τὸ $O_1O_2O_3$. γ) Τὰ μέσα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα: O, O_1, O_2, O_3, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, εἶναι **συμπεριφερειακά.** (Θεώρημα Mention).

Πράγματι, αὐτὴ ἡ περιφέρεια εἶναι ἡ περιφέρεια Euler τοῦ $O_1O_2O_3$ δηλ. ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ ΑΒΓ.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν ἐφαπτομένην T_1O_3T τῆς περιφερείας (Λ). Προφανῶς,

$$T\hat{O_3}O_2 = O_3\hat{O_1}O_2 \tag{1}$$

Ἀλλά, ἐφόσον τὰ σημεῖα Β καὶ Α βλέπουν τὸ τμῆμα O_1O_2 ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, τὸ τετράπλευρον O_1BAO_2 εἶναι ἐγγράψιμον καὶ συνεπῶς

$$B\hat{A}O_3 = O_3\hat{O_1}O_2 \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν, ὅτι: $T\hat{O_3}O_2 = B\hat{A}O_3 \implies$

$$T_1T \parallel BA.$$

Ἔτσι, ἡ $ΛO_3$, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν T_1T, εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλόν της δηλ τὴν ΑΒ, τὴν πλευρὰν τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ $O_1O_2O_3$. Τὸ πρῶτον λοιπὸν θεώρημα τοῦ Nagel ἀπεδείχθη.

2ον Ἡ ἀλήθεια τῆς 2ας προτάσεως τοῦ Nagel εἶναι προφανής: Τὸ Ο εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $O_1O_2O_3$, τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Euler διὰ τὸ $O_1O_2O_3$ καὶ τὸ Λ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας (O_1,O_2,O_3). Καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Euler εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΛ.

Παρατήρησις: Τὸ γεγονός, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $ΛO_1, ΛO_2, ΛO_3$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν τῆς ἑξῆς προτάσεως: Ἐὰν ἐκ τῶν κέντρων O_1, O_2, O_3, τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὰς γωνίας Α,Β,Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ περιφερειῶν, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, αἱ κάθετοι αὗται **διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Λ,** κέντρου τῆς περιφερείας (O_1,O_2,O_3).

8. Εὐθεῖα Simson - Wallace. **Τὰ ἴχνη τῶν ἔκ τινος σημείου τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἀγομένων καθέτων, εἶναι σημεῖα συνευθειακά.**

Ἀνάλυσις. Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ εἶναι συνευθειακά, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι:

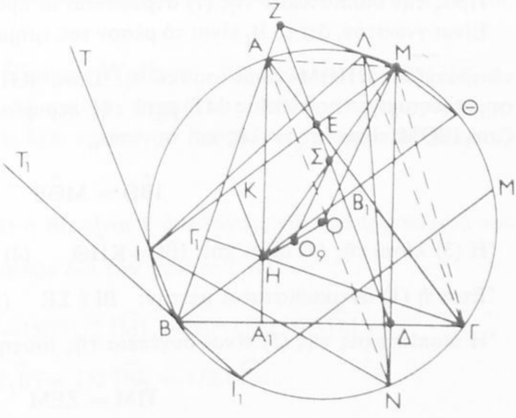
$$M\hat{E}Δ + M\hat{E}Z = 2_{\llcorner} \quad (1)$$

Ἀφοῦ τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ βλέπουν τὸ τμῆμα ΓΜ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, τὸ τετράπλευρον ΓΜΕΔ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ συνεπῶς

$$M\hat{E}Δ + M\hat{Γ}B = 2_{\llcorner} \quad (2)$$

Ἔτσι, ἐκ τῶν (1), (2) ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἀναγκαῖον τῆς ὑπάρξεως τῆς ἰσότητος:

$$M\hat{E}Z = M\hat{Γ}B \quad (3)$$



(Σχ. 88)

Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΖΑΕΜ ($\hat{Z}, \hat{E}$ γωνίαι ὀρθαὶ) λαμβάνομεν:

$$M\hat{E}Z = Z\hat{A}M \quad (4)$$

Ἀλλὰ
$$Z\hat{A}M = M\hat{Γ}B \quad (5)$$
λόγῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΜΑΒΓ.

Σύνθεσις: Αἱ ἀληθεῖς ἰσότητες (5) καὶ (4) συνεπάγονται τὴν ἀλήθειαν τῆς (3), ἡ ὁποία, λόγω τοῦ ἀληθοῦς τῆς (2), μᾶς δίδει τὴν (1).

Παρατήρησις: Τὰ τετράπλευρα ΖΑΕΜ, ΜΖΒΔ, ΜΕΔΓ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς περιφερείας διαμέτρων ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ καὶ συνεπῶς: **Αἱ μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ὅπου Μ αὐθαίρετον σημεῖον τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ), γραφόμεναι περιφέρειαι, ἔχουν τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς των (ἐκτὸς τοῦ Μ) σημεῖα συνευθειακά.** Πρόκειται προφανῶς διὰ τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ τῆς εὐθείας Simson - Wallace.

9. Θεώρημα Steiner. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΗ, ὅπου Μ αὐθαίρετον σημεῖον τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, διχοτομεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Simson - Wallace, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ Μ.

᾿Ανάλυσις: Ἔστω, ὅτι τὸ Σ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΜΗ. Ἐὰν τώρα ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΜΕ (Σχ 88) λάβωμεν ΜΕ=ΕΚ, θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\text{ΕΣ} \parallel \text{ΚΗ} \qquad (1)$$

Πρὸς τὴν διαπίστωσιν τῆς (1) στρέφονται αἱ προσπάθειαί μας.

Εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ Β_1 εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΗΘ καὶ ὅτι κατὰ συνέπειαν τὸ τραπέζιον ΚΗΘΜ εἶναι ἰσοσκελές. Ἔτσι, $\text{Κ}\hat{\text{Η}}\text{Θ} = \text{Μ}\hat{\text{Θ}}\text{Β}$ (2). Ἐὰν Ι εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας ΜΕ μετὰ τῆς περιφερείας, τὸ ἐγγεγραμμένον τραπέζιον ΙΒΘΜ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς,

$$\text{Ι}\hat{\text{Β}}\text{Θ} = \text{Μ}\hat{\text{Θ}}\text{Β} \qquad (3)$$

Ἡ (3) λόγω τῆς (2) δίδει καί: $\text{Ι}\hat{\text{Β}}\text{Θ} = \text{Κ}\hat{\text{Η}}\text{Θ}$ (4) => ΒΙ ∥ ΗΚ

Ἔτσι ἡ (1) ἀντικαθίσταται μὲ τὴν: ΒΙ ∥ ΣΕ (5).

Ἡ διαπίστωσις τῆς (5) εἶναι συνέπεια τῆς ἰσότητος:

$$\text{Τ}\hat{\text{Ι}}\text{Μ} = \text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Μ} \qquad (6)$$

Εἶναι ὅμως $\text{Τ}\hat{\text{Ι}}\text{Μ} = \text{Μ}\hat{\Gamma}\text{Β}$ ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΙΒΓΜ καὶ $\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Μ} = \text{Μ}\hat{\Gamma}\text{Β}$, ὡς διεπιστώσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Σύνθεσις. Τὸ τραπέζιον ΜΚΗΘ, ἔχον τὴν εὐθεῖαν τῶν μέσων τῶν βάσεών του κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις του, εἶναι ἰσοσκελές. Ἔτσι ἰσχύει ἡ ἰσότης (2). Καὶ ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ (3), θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ (4). Ἀλλὰ ἡ (6) ἀπεδείχθη ὡς ἀληθής, συνεπῶς ΒΤ ∥ ΔΕΖ, ἄρα καὶ ΕΣ ∥ ΚΗ. ὅ.ἔ.δ.

Παρατηρήσεις: 1ον Ἡ εὐθεῖα ΒΙ ἀντιπροσωπεύει τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας Simson - Wallace τοῦ Μ. **Ἔτσι, ἐάν, τὴν ἔκ τινος σημείου Μ τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν π.χ. ΑΓ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, προεκτείνωμεν, μέχρις ὅτου τμήση τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Ι, ἡ εὐθεῖα ΒΙ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας Simson - Wallace τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ ΑΒΓ.** 2ον Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον ΗΟΜ καὶ τὸ O_9 (κέντρον τῆς περιφ. Euler) ἔχομεν, ὅτι $O_9\Sigma=1/2OM$, δηλ. ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τοῦ O_9 εἶναι ὅσον ἡ ἀκτὶς Euler. Ὥστε: **Τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΗΜ** (Η ὀρθόκεντρον τοῦ τριγ. ΑΒΓ καὶ Μ σημεῖον τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ)) **εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας Euler.**

3ον Ἐὰν Λ,Ι,Ν εἶναι τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ καθέτων μετὰ τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ), τὸ τρίγωνον ΛΙΝ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Πράγματι, ἀφοῦ κατὰ τὴν 1ην παρατήρησιν αἱ εὐθεῖαι ΒΙ, ΝΑ, ΓΛ εἶναι παράλληλοι, τὰ τετράπλευρα ΑΙΒΝ, ΛΙΒΓ, ΛΑΝΓ εἶναι ἰσοσκελῆ τραπέζια καὶ ἔτσι: ΑΒ=ΙΝ, ὡς διαγώνιοι τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν τῶν τραπεζίων, ΒΓ=ΙΛ, ὡς μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ δευτέρου ἐξ αὐτῶν, καὶ ΓΑ=ΝΛ, ὡς διαγώνιοι τοῦ τρίτου ἐξ αὐτῶν.

10. Ἡ γωνία δύο εὐθειῶν Simson-Wallace· **Ἡ ὀξεῖα γωνία δύο εὐθειῶν Simson - Wallace τῶν σημείων Μ καὶ Μ′, ἀνηκόντων εἰς τὴν περιγεγραμμένην περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιφέρειαν, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ μικροτέρου ἡμιπεριφερείας τόξου $\widehat{MM'}$.**

Κατὰ τὰ προηγούμενα (Σχ 88) ἡ BI_1 εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς εὐθείας Simson τοῦ Μ′, ἐὰν $M'I_1 \perp A\Gamma$. Πρόκειται λοιπὸν διὰ τὴν γωνίαν $T_1\hat{B}T$.

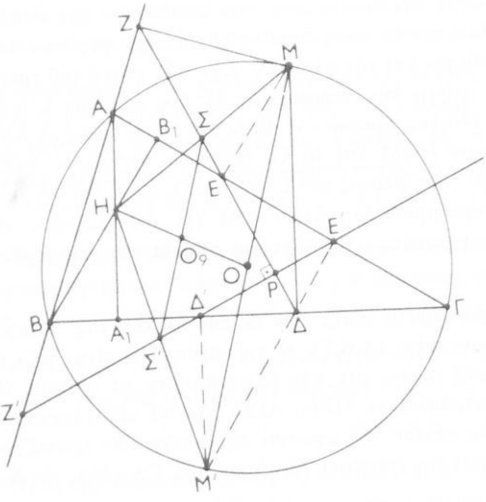
$$T_1\hat{B}T=180^0-\hat{I}BI_1=180^0\text{-}1/2\ \widehat{IMI_1}=180^0\text{-}1/2\ (360^0\text{-}\widehat{IBI_1})$$

$$\Rightarrow \quad T_1\hat{B}T=1/2\ \widehat{IBI_1}=1/2\ \widehat{MM'}.$$

Πόρισμα: Αἱ εὐθεῖαι Simson - Wallace δύο ἀντιδιαμετρικῶν σημείων εἶναι κάθετοι καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των εἶναι σημεῖον τῆς περφερείας Euler.

Ἀφοῦ, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, μέτρον τῆς γωνίας $\hat{P}$ (Σχ. 89) θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $\widehat{MM'}$, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία $\hat{P}$ εἶναι ὀρθή.

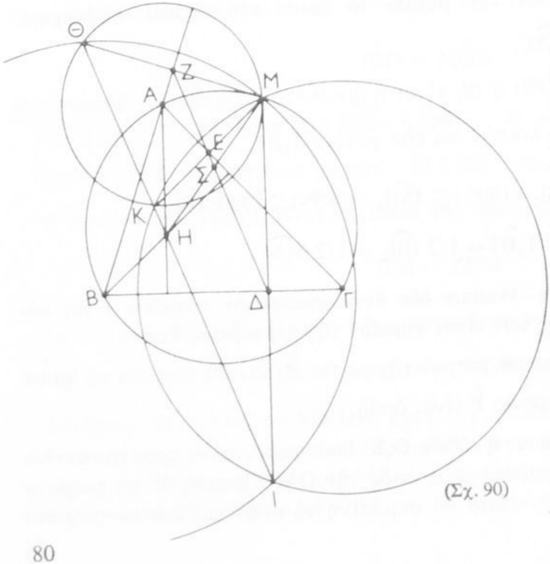
Κατὰ τὸ θεώρημα πάλιν Steiner, ἡ εὐθεῖα $O_9\Sigma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΜ καὶ ἡ $O_9\Sigma'$ εἶναι ἐπίσης παράλληλος πρὸς τὴν ΟΜ′. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τμήματα ΟΜ καὶ ΟΜ′ εἶναι τμήματα ἀντίθετα θὰ συμβαίνη τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ τμήματα



(Σχ. 89)

$O_9\Sigma$ καί $O_9\Sigma'$. Ἔτσι, τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ′ εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Euler διὰ τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ Ρ, τὸ ὁποῖον βλέπει τὸ τμῆμα Σ′Σ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, ἀνήκει εἰς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν.

Σημείωσις: Ἡ τελευταία διαπίστωσις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα: Ἐὰν μία διάμετρος Μ′Μ, μιᾶς περιγεγραμμένης περὶ γνωστὸν τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας, στρέφεται περὶ τὸ κέντρον αὐτῆς τῆς περιφερείας, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν Simson - Wallace, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ Μ καὶ Μ′, γράφουν τὴν περιφέρειαν Euler τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου.



(Σχ. 90)

11. Θεώρημα Salmon. **Ἐὰν Μ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ), ὅπου ΑΒΓ διδόμενον τρίγωνον, τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΜ), (Β, ΒΜ), (Γ, ΓΜ) εἶναι σημεῖα μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.**

Ἡ διάκεντρος ΑΒ τῶν περιφερειῶν (Α,ΑΜ) καὶ (Β,ΒΜ) εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς των χορδῆς ΜΘ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΒΓ εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΜΙ καὶ ἡ ΓΑ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΜΚ. Ἔτσι, τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ εἶναι ἴχνη τῶν ἐκ τοῦ Μ εἰς τὰς πλευρὰς ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ, ἀγομένων καθέτων καὶ συνιστοῦν τὴν εὐθεῖαν Simson - Wallace διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ Δ,Ε,Ζ εἶναι καὶ μέσα τῶν τμημάτων ΜΙ, ΜΚ, ΜΘ, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ τὰ Ι,Κ,Θ εἶναι σημεῖα συνευθειακά, συνιστῶντα τὴν εὐθεῖαν Salmon.

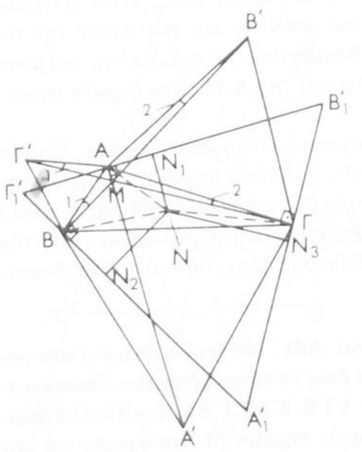
Εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ τμήματος ΗΜ καὶ τῆς εὐθείας Simson εἶναι μέσον αὐτοῦ τοῦ τμήματος. Ἔτσι, ἡ εὐθεῖα ΚΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΣ δηλ. πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ εὐθεῖα ΚΗ καὶ ἡ εὐθεῖα Salmon ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον Κ καὶ συγχρόνως εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν συμπίπτουν. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν Salmon διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.

12. Τὸ σημεῖον Steiner. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου οὐδεμία τῶν γωνιῶν του ὑπερβαίνει τὰς 120^0. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τοιούτου τριγώνου κατασκευάζομεν ἐξωτερικὰ αὐτοῦ τρία ἰσόπλευρα τρίγωνα: Α΄ΓΒ, Β΄ΑΓ, Γ΄ΒΑ. 1ον Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν κοινὸν σημεῖον Μ, ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ὀνομαζόμενον σημεῖον Steiner. Τὸ σημεῖον αὐτὸ Μ, εἶναι κοινὸν τῶν περιφερειῶν (Α΄,Β,Γ), (Β΄,Γ,Α), (Γ΄,Α,Β). 2ον Αἱ περὶ τὸ Μ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι 3ον Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως συνιστοῦν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. 4ον Τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ εἶναι ἐλάχιστον. 5ον Εἶναι τὸ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ἱκανοποιοῦνται αἱ ἰσότητες: ΜΑ΄=ΜΒ+ΜΓ, ΜΒ΄=ΜΑ+ΜΓ, ΜΓ΄=ΜΑ+ΜΒ.

1ον Ἡ γωνία ΒΑΒ΄ εἶναι, λόγῳ ὑποθέσεως, μικροτέρα τῶν 180^0 καὶ συνεπῶς τὸ τμῆμα ΒΒ΄ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $A\hat{B}\Gamma$. Ἐπίσης, ἡ γωνία $\Gamma\hat{A}\Gamma'$ εἶναι μικροτέρα τῶν 180^0 καὶ τὸ τμῆμα ΓΓ΄ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $A\hat{\Gamma}B$. Ἔτσι, τὰ τμήματα ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ θὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν καὶ τῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ κατὰ συνέπειαν ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Γεννᾶται λοιπὸν τὸ ἐρώτημα, ἐὰν τὰ σημεῖα Α,Μ,Α΄ εἶναι συνευθειακά. Ἡ τοιαύτη διαπίστωσις ἀπαιτεῖ νὰ ὑφίσταται ἡ ἰσότης: $A\hat{M}B'=B\hat{M}A'$ (1). Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΒΒ΄ καὶ Γ΄ΓΑ προκύπτουν αἱ ἰσότητες: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1'$ $\quad \hat{\Gamma}_2=\hat{B}_2'$

αἱ ὁποῖαι δικαιολογοῦν τὴν ἐγγραψιμότητα τῶν τετραπλεύρων Γ΄ΒΜΑ καὶ ΜΓΒ΄Α, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἔχωμεν:

$$A\hat{M}\Gamma'=\Gamma'\hat{B}A=60^0 \quad A\hat{M}B'=A\hat{\Gamma}B'=60^0 \quad (2)$$



(Σχ. 91)

Ὥστε εἶναι καί: $\Gamma'\hat{M}B'=B\hat{M}\Gamma=120^0$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἰσότητα, δεδομένου, ὅτι $B\hat{A}'\Gamma=60^0$, συμπεραίνομεν τὴν ἐγγραψιμότητα τοῦ τετραπλεύρου ΒΜΓΑ′, ἡ ὁποία καὶ συνεπάγεται τὴν ἰσότητα:

$B\hat{M}A'=B\hat{\Gamma}A'=60^0$ (3)

Ἡ 2α τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ ἡ ἰσότης (3) βεβαιώνουν τὴν ἀλήθειαν τῆς (1) καὶ δεδομένου, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα Α′ΓΑ καὶ ΒΓΒ′ εἶναι ἴσα, συμπεραίνομεν τὴν πλήρη ἀλήθειαν τοῦ πρώτου μέρους τῆς προτάσεώς μας.

2ον. Τὸ δεύτερον αὐτὸ μέρος εἶναι συνέπεια τοῦ πρώτου μέρους καὶ ἀκόμη σημειοῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ, εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου οὐδεμία τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὑπερβαίνει τὰς 120^0, εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου μας ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου φαίνονται ὑπὸ γωνίαν 120^0.

3ον. Ἐὰν $A_1'B_1'\Gamma_1'$ εἶναι τὸ σχηματιζόμενον κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τρίγωνον, ἡ προφανὴς ἐγγραψιμότης τῶν τετραπλεύρων: $A_1'\Gamma MB$, $B_1'AM\Gamma$, $\Gamma_1'BMA$ δίδει: $A_1'=B'_1=\Gamma'_1=60^0$.

4ον. Δεδομένου, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον, $A_1'B_1'\Gamma_1'$, τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἐκφράζουν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $A_1'B_1'\Gamma_1'$, ἔχομεν, ὡς γνωστόν, $MA+MB+M\Gamma=h$, ὅπου h ἀντιπροσωπεύει τὸ μέγεθος τοῦ ὕψους αὐτοῦ τοῦ τριγώνου. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν αὐθαίρετον σημεῖον Ν, ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ συνεπῶς καὶ ἐσωτερικὸν τοῦ $A_1'B_1'\Gamma_1'$, εἶναι δὲ NN_1, NN_2, NN_3 αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $A_1'B_1'\Gamma_1'$ θὰ ἔχωμεν προφανῶς: $NN_1 < NA$, $NN_2 < NB$, $NN_3 < N\Gamma$ καὶ ἐπειδὴ $MA+MB+M\Gamma=NN_1+NN_2+NN_3$ συμπεραίνομεν ὅτι:

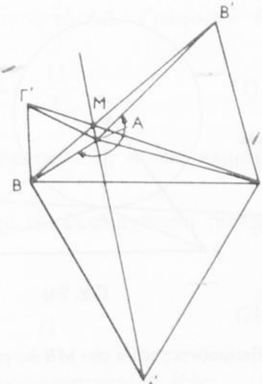
$$MA+MB+M\Gamma < NA+NB+N\Gamma \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

5ον. Τὸ πέμπτον μέρος τῆς προτάσεώς μας εἶναι συνέπεια τοῦ ἑξῆς θεωρήματος: **Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ Μ αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ**

τόξου ΒΓ, τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν γωνίαν Α, ἰσχύει ἡ ἰσότης: ΜΑ=ΜΒ+ΜΓ*.

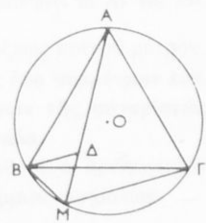
Ἔτσι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τετράπλευρον Γ΄ΒΜΑ, ἔχομεν τὸ Γ΄ΒΑ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ Μ σημεῖον τοῦ τόξου ΒΑ, τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν γωνίαν Γ΄. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν: ΜΓ΄=ΜΑ+ΜΒ. Ἐκ τῶν τετραπλεύρων ἐπίσης ΜΓΒ΄Α καὶ ΜΒΑ΄Γ διαπιστοῦμεν καὶ τὰς ἰσότητας: ΜΒ΄=ΜΑ+ΜΓ, ΜΑ΄=ΜΒ+ΜΓ.

Παρατηρήσεις: Ἃς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μίαν τῶν γωνιῶν του, ἔστω τὴν Α, μεγαλυτέραν τῶν 120^0. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ γωνία $B\hat{A}B'$ **, ἡ ὁποία εἰς τὴν ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν ἦτο κυρτή, εἶναι μὴ κυρτὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΒ΄ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς κυρτῆς γωνίας $B\hat{A}B'$, ἀλλ' ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Σκεπτόμενοι ὁμοίως διαπιστοῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΓ΄ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς κυρτῆς γωνίας $\Gamma\hat{A}\Gamma'$, ἀλλ' ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔτσι, τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν τμημάτων ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ θὰ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ συγκεκριμένως ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας $\Gamma'\hat{A}B'$, τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς ὁποίας εἶναι κοινὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν **κυρτῶν** γωνιῶν $B\hat{A}B'$ καὶ $\Gamma\hat{A}\Gamma'$.



(Σχ. 93)

Εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι: 1ον Τὸ σημεῖον Μ βλέπει τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου ὑπὸ γωνίαν 60^0 καὶ μόνον τὴν μεγαλυτέραν του πλευρὰν ὑπὸ γωνίαν 120^0 καὶ 2ον ἰσχύουν αἱ ἰσότητες: ΜΒ΄=ΜΓ-ΜΑ, ΜΓ΄=ΜΒ-ΜΑ, ΜΑ΄=ΜΒ+ΜΓ.



(Σχ. 92)

* Ἐφόσον τὸ τόξον $\widehat{MBA}$ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 120^0, θὰ ἔχωμεν τὴν χορδὴν ΜΑ μεγαλυτέραν τῶν χορδῶν ΜΒ καὶ ΜΓ. Ἔτσι, ἐὰν ΜΔ=ΜΒ, θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΑ=ΜΓ. (1)

Ἀφοῦ $B\hat{M}\Delta = B\hat{\Gamma}A = 60^0$, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΒΔ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ΜΒ=ΒΔ Ἔχομεν δέ, $B\Delta A_\Delta = BM\Gamma_\Delta$ διότι, ΑΒ=ΒΓ, ΒΔ=ΒΜ καὶ $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}M$, διότι εἶναι διαφοραὶ ἴσων γωνιῶν. Ἔχομεν λοιπὸν καί: ΔΑ=ΜΓ.

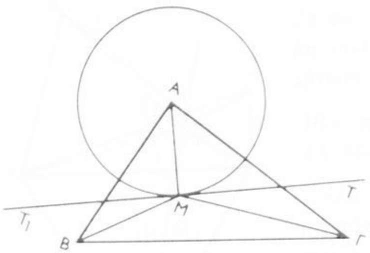
** Τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν $B\hat{A}B'$ σημειοῦμεν εἰς τὸ (Σχ. 93) μὲ τόξον.

Ὁ καθεὶς ἐπίσης ἐννοεῖ, ὅτι, ἐὰν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶναι 120^0, τὸ Μ συμπίπτει μὲ τὸ Α.

Ἐνδιαφέρουσα σημείωσις. Τὸ πρόβλημα: **Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον, ἐσωτερικὸν διδομένου τριγώνου καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι ἐλάχιστον.**

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τοῦ ὁποίου ἀνωτέρω ὑπεδείξαμεν μίαν λύσιν ἐπροτάθη ἀπὸ τὸν Fermat πρὸς τὸν Torricelli, ὁ ὁποῖος καὶ τὸ ἔλυσε. Τὸ ἔλυσαν καὶ ἄλλοι, ὅπως οἱ Cavalieri καὶ Viviani, ἡμεῖς ὅμως ἐδῶ θὰ ἀναφέρωμεν τὴν λύσιν Lhuilier δοθεῖσαν τὸ 1811 εἰς τὸ Annales de Gergonne.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ εὑρέθη. Καὶ δεχόμενοι τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ τὸ Α ὡρισμένην, ἀντιλαμβανόμεθα, ὅτι πρόκειται διὰ τὸ σημεῖον ἐκεῖνο τῆς περιφερείας (Α,ΑΜ) διὰ τὸ ὁποῖον συμβαίνει νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα ΜΒ+ΜΓ ἐλάχιστον. Ἐὰν T_1T εἶναι ἡ εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας, ὡρισμένη καὶ αὐτὴ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας, ἔχομεν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς T_1T καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ ἱκανοποιοῦν τὸ ἐπίταγμα: ΜΒ+ΜΓ = ἐλάχιστον. Ἐξετάσαντες τὸ πρόβλημα τοῦτο διεπιστώσαμεν, ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς T_1T διὰ τὸ ὁποῖον $\widehat{\Gamma M T}=\widehat{T_1 M B}$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ $\widehat{AMT}=\widehat{AMT_1}$, θὰ εἶναι καί: $\widehat{AM\Gamma}=\widehat{AMB}$.



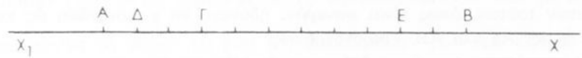
(Σχ. 94)

Θεωροῦντες τώρα τὴν ΜΒ ὡς γνωστὴν ἀπόστασιν θὰ διεπιστώναμεν, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{\Gamma MB}=\widehat{BMA}$.

Τὸ σημεῖον λοιπόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν λύσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος, εἶναι τὸ σημεῖον Steiner καὶ ὑφίσταται, ὅπως διερευνήσαμεν ἀνωτέρω, ἐὰν καὶ ἐφόσον οὐδεμία τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ὑπερβαίνει τὰς 120^0.

7 ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΜΕΓΕΘΩΝ – ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

1.



(Σχ. 95)

Εἰς τὸ (Σχ. 95) παρουσιάζεται τὸ τμῆμα ΑΒ διηρημένον εἰς 11 ἴσα τμήματα (βλ. διαίρ. τμήματος σελ. 18). Τὸ ἕνα ἀπ' αὐτὰ τὰ 11 τμήματα, τὸ ΑΔ π.χ., βλέπομεν, ὅτι ἐπαναλαμβανόμενον 11 φοράς, κατὰ τὸν ἐμφανιζόμενον εἰς τὸ σχῆμα τρόπον, δημιουργεῖ τὸ ΑΒ. Αὐτὸ τὸ ΑΔ ὀνομάζεται **κοινὸν μέτρον** τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ καὶ ὁ ἀριθμὸς 11 ὀνομάζεται **λόγος** τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΔ. Γράφομεν δέ,

$$AB = 11 \cdot A\Delta \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A\Delta} = 11 = \frac{11}{1} \qquad (1)$$

ἐνῶ οἱ ἀριθμοί* 11 καὶ 1 ἐκφράζουν πόσας φορὰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν περιέχει τὸ κοινόν των μέτρον.

Ἀπὸ τὸ αὐτὸ (σχῆμα 95) εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, νὰ συναγάγωμεν τὰς ἰσότητας:

$$A\Gamma = \frac{3}{11} AB \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{11} \qquad (2)$$

Τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ κατὰ συμφωνίαν τὰς ἀναγιγνώσκομεν ὡς ἑξῆς:

Τὸ ΑΒ εἶναι τὸ **γινόμενον** τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 11
Τὸ ΑΓ » » » ΑΒ » » » 3/11 ἢ
Ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 11
Ὁ » » ΑΓ » » ΑΒ » » 3/11.

Καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ ΑΔ εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον, κατὰ τὸν τρόπον τοῦ (Σχ. 95), 3 καὶ 11 φορὰς δημιουργεῖ τὰ ΑΓ καὶ ΑΒ.

Τὰ τμήματα, ΑΒ καὶ ΑΔ ἢ τὰ ΑΓ καὶ ΑΒ, λόγῳ τῆς ὑπάρξεως κοινοῦ μέτρου, ὀνομάζονται **σύμμετρα** μεταξύ των τμήματα. Ἔτσι, **ὁ λόγος δύο συμμέτρων εὐθ. τμημάτων εἶναι ὁ λόγος τῶν μέτρων των δηλ. τῶν ἐξαγομένων τῆς συγκρίσεώς των πρὸς τὸ κοινόν των μέτρον ἢ πρὸς τὸ κοινὸν τμῆμα -μονάδα.**

Γίνεται λοιπὸν φανερόν, ὅτι προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν ἕνα ἀριθμητικὸν λόγον, δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν καὶ εἰς ἕνα λόγον εὐθυγράμμων τμημάτων.

*Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τοὺς ὁποίους θὰ ὁμιλῶμεν ἐφεξῆς, ἐκτὸς ἐναντίας ἐνδείξεως, θὰ νοοῦνται θετικοί.

2. **Παρατήρησις.** Ἐὰν τὸ ΑΔ τὸ διαιροῦσαμεν εἰς ἕνα τυχόντα ἀριθμὸν ἴσων τμημάτων, ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων, ὅπως εἶναι φανερόν, ἠδύνατο νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ ἢ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ. Τοιουτοτρόπως,

Δι' ἕνα ζεῦγος συμμέτρων τμημάτων ὑφίσταται ἀπειρία κοινῶν μέτρων.

3. Γεννᾶται τώρα τὸ ἐρώτημα: Δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων Μ καὶ Α ὑφίσταται **ἀναγκαίως** ῥητὸς ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $M = \frac{\mu}{\nu} A$;

Ἐδόθη ἀρνητικὴ θεωρητικῶς ἀπάντησις εἰς τὸ θέμα. Διεπιστώθη δηλ. ἡ ὕπαρξις εὐθ. τμημάτων καὶ γενικώτερον ὁμοειδῶν μεγεθῶν διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑφίσταται κοινὸν μέτρον (ὁμοειδὲς μέγεθος) τοῦ ὁποίου ταῦτα νὰ εἶναι πολλαπλάσια. Τὰ τοιαῦτα μεγέθη ἐχαρακτηρίσθησαν ὡς ἀσύμμετρα, διότι ὡδηγήθημεν θεωρητικῶς εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν ὡς λόγον των ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

Ἡ θεωρητικὴ δικαιολόγησις τῶν ἀνωτέρω θὰ γίνῃ μὲ συγκεκριμένον παράδειγμα εἰς τὴν κατάλληλον περίστασιν.

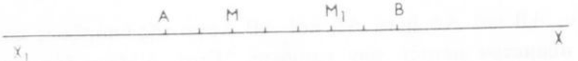
4. **Ἐνδιαφέρουσα σημείωσις.** Ὅταν τὰ εὐθ. τμήματα εἶναι προσανατολισμένα καὶ φέρονται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἄξονα, δὲν ἔχομεν νὰ μεταβάλωμεν καθόλου τὰ ἀνωτέρω παρὰ μόνον νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν προσανατολισμὸν τῶν τμημάτων. Ἔτσι (Σχ. 95),

$$\frac{(AB)}{(\Gamma E)} = \frac{11}{6} \qquad \frac{(AB)}{(E\Gamma)} = -\frac{11}{6}\ ^{*}$$

5. Ὁ λόγος τομῆς διδομένου εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Ἐὰν Α, Β εἶναι δύο ὡρισμένα σημεῖα μιᾶς εὐθείας καὶ Μ ἕνα τρίτον, ὡρισμένον ἐπίσης, σημεῖον τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ ἔχουν ἕνα λόγον, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται λόγος τομῆς τοῦ ΑΒ ὑπὸ τοῦ Μ.

Ὅταν τὸ Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ΑΒ λέγομεν, ὅτι τὸ Μ διαιρεῖ **ἐσωτερικῶς** τὸ τμῆμα ΑΒ, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι τὸ Μ διαιρεῖ τὸ τμῆμα ΑΒ **ἐξωτερικῶς.**



(Σχ. 96)

(Σχ. 97)

*Γράφοντες (ΑΒ) ἐννοοῦμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ διανύσματος $\overline{AB}$ μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς μεταλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς.

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{MA}{MB} = K$, ὅπου $K \neq 1$, ὑφίστανται δύο καὶ μόνον δύο σημεῖα Μ, ἱκανοποιοῦντα τὸ θέμα: τὸ ἕνα Μ, ἐσωτερικὸν τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ἄλλο ἐξωτερικόν. Τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν μαζὶ μὲ τὴν διαπίστωσιν, ὅτι τὰ δύο σημεῖα - λύσεις εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ μᾶς παρέχει, ὁ ὑποδεικνυόμενος εὐθὺς ἀμέσως γεωμετρικὸς καθορισμὸς τῶν Μ, ὅπως καὶ ἐκεῖνοι οἱ δύο τρόποι, τοὺς ὁποίους εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ὑποδείξωμεν.*

Ἔστω π.χ. $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}$. Δεδομένου, ὅτι $\frac{MA}{MA+MB} = \frac{2}{7} \Rightarrow MA = \frac{2}{7}AB$ καὶ $MB = \frac{5}{7}AB$. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸ ΑΒ εἰς $7=2+5$ ἴσα μέρη καὶ καθορίζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ (Σχ.96), ὅσον ἀφορᾶ τὴν ἐσωτερικὴν διαίρεσιν τοῦ τμήματος· ἀκόμη, ἐπειδὴ $\frac{MA}{MB-MA} = \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow MA = \frac{2}{3}AB$ καὶ $MB = \frac{5}{3}AB$, διαιροῦμεν τὸ ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διαίρεσις τοῦ ΑΒ ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ Μ΄, ἐὰν $M'A = 2/3AB$ (Σχ. 97).

Ἐὰν ἐδίδετο $\frac{MA}{MB} = \frac{5}{2}$ θὰ εἴχομεν $\frac{MA}{MA+MB} = \frac{5}{7}$ δηλ. $MA = 5/7\ AB$ καὶ τὸ σημεῖον M_1 (Σχ. 96) θὰ ἦτο ἡ ἐσωτερικὴ λύσις· ἐπίσης, θὰ εἴχομεν $\frac{MA-MB}{MB} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow MB = 2/3\ AB$, ὁπότε τὸ M_1' (Σχ. 97) θὰ ἦτο ἡ ἐξωτερικὴ λύσις.

Διεπιστώθη λοιπόν, ὅτι, ὅταν τὸ $K<1$, τὰ σημεῖα διαιρέσεως εἰς λόγον Κ εἶναι μόνον δύο καὶ ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται ἀριστερὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐνῶ, ὅταν $K>1$, τὰ σημεῖα καὶ πάλιν διαιρέσεως εἶναι μόνον δύο καὶ εὑρίσκονται δεξιὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἐὰν **προσανατολίσωμεν** τὴν εὐθεῖαν x_1x, δυνάμεθα νὰ θεωροῦμεν τὰ διανύσματα ΜΑ, ΜΒ, Μ΄Α, Μ΄Β, ὁπότε

$$\frac{(MA)}{(MB)} = -\frac{2}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(M'A)}{(M'B)} = \frac{2}{5}$$

* Τὸν ἕνα τρόπον εἰς αὐτὸ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν ἄλλον εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

Ἔτσι, ὅταν $K=\frac{2}{5}$, εἰς τὴν προσανατολισμένην εὐθεῖαν, μόνον τὸ M΄ ἀποτελεῖ λύσιν· καὶ ὅταν $K=-\frac{2}{5}$ μόνον τὸ M εἶναι λύσις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι τὰ διανύσματα λαμβάνονται μὲ ἀρχὴν τό σημεῖον διαιρέσεως M. **Συμπέρασμα:** Ἐὰν ἀναφερόμεθα εἰς προσανατολισμένην εὐθεῖαν καὶ φυσικὰ ἡ τιμὴ τοῦ λόγου τομῆς θεωρεῖται προσημασμένη, ἔχομεν ἕνα μόνον σημεῖον - λύσιν, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀριθμητικῆς θεωρήσεως τοῦ λόγου (μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς) ἔχομεν δύο σημεῖα - λύσεις διὰ τὸ τμῆμα AB, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται **συζυγῆ ἁρμονικὰ** ἀλλήλων ὡς πρὸς τὰ A,B.

Σημειοῦμεν, ὅτι, ὅταν K=1, τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον διαιρέσεως εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB, ἀλλὰ προφανῶς δὲν ὑφίσταται ἐξωτερικὸν συζυγὲς ἁρμονικὸν τούτου.

6. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα: $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}=K$

λαμβάνομεν καὶ τὴν ἰσότητα: $\frac{AM}{AM'}=\frac{BM}{BM'}=K'\ (K'\neq K)$

ἡ ὁποία μᾶς λέγει, ὅτι καὶ τὰ A,B εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὰ M,M΄ μὲ λόγον τομῆς $K'\neq K$ καὶ τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν θὰ ἐκφράσωμεν διὰ τοῦ K.

Ἐὰν K<1, εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὰ M καὶ M΄ εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB. Ἔτσι, λαμβάνομεν:

$$\frac{MA}{MB}=K \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB}=\frac{K}{1+K} \Rightarrow \frac{MA}{AB}=\frac{K}{1+K} \quad (1)$$

Ἐπίσης, $$\frac{M'A}{M'B}=K \Rightarrow \frac{M'A}{M'B-M'A}=\frac{K}{1-K} \Rightarrow \frac{M'A}{AB}=\frac{K}{1-K} \quad (2)$$

Καὶ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{MA}{M'A}=\frac{1-K}{1+K} \Rightarrow \frac{AM}{AM'}=\frac{BM}{BM'}=\frac{1-K}{1+K} \quad (3)$$

Ἐὰν K>1, γνωρίζομεν, ὅτι τὰ M καὶ M΄ εἶναι δεξιὰ τοῦ μέσου τοῦ AB. Ὥστε:

$$\frac{MA}{MB}=K \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB}=\frac{MA}{AB}=\frac{K}{1+K} \quad (4)$$

Καί, $$\frac{M'A}{M'B}=K \Rightarrow \frac{M'A}{M'A-M'B}=\frac{M'A}{AB}=\frac{K}{K-1} \quad (5)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν (4), (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{MA}{M'A} = \frac{K-1}{K+1} \Rightarrow \frac{AM}{AM'} = \frac{BM}{BM'} = \frac{K-1}{K+1}$$

7. Τμήματα ἀνάλογα. Τὰ τμήματα: ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ... ὀνομάζονται ἀνάλογα πρὸς τὰ τμήματα: Α΄Β΄, Γ΄Δ΄, Ε΄Ζ΄, Η΄Θ΄, ... ἀντιστοίχως, ἐὰν τὰ μέτρα τῶν πρώτων, πραγματοποιουμένων μὲ τὸ αὐτὸ τμῆμα-μονάδα V εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μέτρα τῶν δευτέρων, πραγματοποιουμένων μὲ τὸ αὐτὸ τμῆμα-μονάδα V΄, χωρὶς βέβαια νὰ ἀποκλείεται νὰ εἶναι $V = V'$. Θὰ γράφωμεν λοιπόν:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{EZ}{E'Z'} = \frac{H\Theta}{H'\Theta'} = \ldots$$

καὶ θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι ὑφίσταται ἡ ἀναλογία:

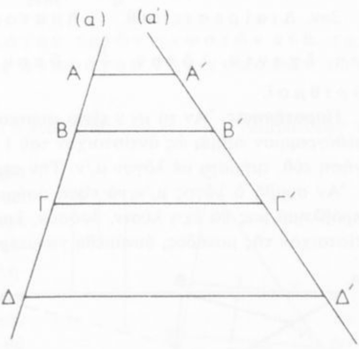
$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\delta}{\delta'} = \ldots$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ εἶναι τὰ μέτρα ἀντιστοίχως τῶν θεωρουμένων τμημάτων, πραγματοποιουμένων μὲ διαφορετικὰ ἢ μὲ τὰ αὐτὰ μοναδιαῖα τμήματα. Ἔτσι, ὅταν γράφωμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τμημάτων, ἐννοοῦμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν μέτρων των. Ἐκ τοῦ λόγου δὲ τούτου, **ἡ τετάρτη ἀνάλογος, ἡ τρίτη ἀνάλογος,** μεταξὺ εὐθ. τμημάτων ὁρίζονται ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν, τὸ αὐτὸ δὲ γίνεται καὶ διὰ τὸ **μέσον ἀνάλογον** τμῆμα δύο διδομένων εὐθ. τμημάτων, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ἐπίσης «μέσον γεωμετρικόν».

8. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Ὁσαιδήποτε παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνουν δύο εὐθείας, ὁρίζουν ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν εὐθειῶν ὁμόλογα τμήματα ἀνάλογα*.

Ἔτσι, ἐὰν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ τέμνουν τὰς εὐθείας (α) καὶ (α΄) συμβαίνει νὰ εἶναι:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'}$$



(Σχ. 98)

*Ὁμόλογα τμήματα ὀνομάζονται, τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.
Τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἀπεδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα (σελ. 19) εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῶν ἴσων τμημάτων.

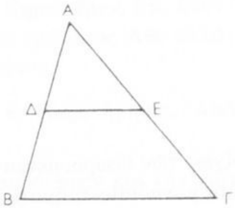
Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἰσχύει μὲ τὴν ἑξῆς διατύπωσιν: Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ δύο ὑπ' αὐτῶν τεμνομένων εὐθειῶν ὁμόλογα τμήματα ἀνάλογα καὶ αἱ δύο τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι παράλληλοι, τότε καὶ ἡ τρίτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἄλλας δύο.

Ἔτσι, ἂν (Σχ.98) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ καὶ ΑΑ΄ ∥ ΔΔ΄ τότε καὶ ΓΓ΄ ∥ ΑΑ΄.

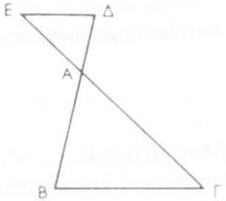
Δεικνύεται μὲ τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγήν.

8. Ἐφαρμογαὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

1ον. *Ἡ παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου ὁρίζει μετ' αὐτῆς τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν-πλευρῶν τοῦ τριγώνου ὁμόλογα τμήματα ἀνάλογα.*



(Σχ. 99)



(Σχ. 100)

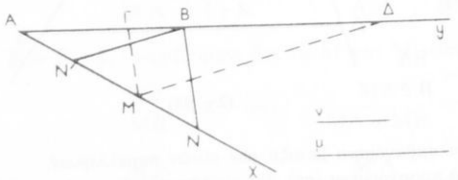
Δηλ. ΑΔ/ΑΕ = ΔΒ/ΕΓ = ΑΒ/ΑΓ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις: τοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος ΔΕ (Σχ. 99) καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τμήματος ΔΕ (Σχ. 100).

Ἡ ἀλήθεια τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἐκφράζει ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ μὲ τὸ νὰ δεχθῶμεν ὑπάρχουσαν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΒΓ.

2ον. *Διαίρεσις εὐθ. τμήματος ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς μέρη ἔχοντα λόγον $\dfrac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί.*

Παρατήρησις. Ἂν τὰ μ, ν εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ λάβωμεν ἓν αὐθαίρετον εὐθύγραμμον τμῆμα ὡς ἀντίστοιχον τοῦ 1 καὶ ἡ ἐπανάληψίς του μ καὶ ν φορὰς νὰ μᾶς δημιουργήσῃ εὐθ. τμήματα μὲ λόγον μ/ν. Τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀντιμετωπίσαμεν ἤδη (Κεφ. 7, 5).

Ἂν συμβῇ ὁ λόγος μ/ν νὰ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἢ λόγος δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τὸ πρόβλημά μας θὰ ἔχῃ λύσιν, ἐφόσον, λαμβάνοντες ἕνα αὐθαίρετον εὐθύγραμμον τμῆμα ὡς ἀντίστοιχον τῆς μονάδος, δυνάμεθα γεωμετρικῶς (δηλ. μὲ τὴν ἀποκλειστικὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου) νὰ ἔχωμεν εὐθ. τμήματα μὲ ἀριθμητικὰς τιμὰς μ, ν ἀντιστοίχως.



(Σχ. 101)

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ μᾶς δοθῇ ἡ εὐκαιρία νὰ ὑποδείξωμεν τὴν κατασκευὴν εὐθ. τμημάτων μὲ ἀριθμητικὴν ἐκπροσώπησιν ἄρρητον καὶ θὰ γίνωμεν περισσότερον ἀντιληπτοί. *Ἰδοὺ τώρα ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος.*

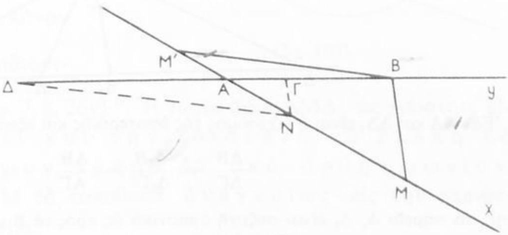
Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α χαράσσομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Αx. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ταύτης λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΜ ἴσον πρὸς τὸ γνωστὸν τμῆμα μ καὶ κατόπιν ἑκατέρωθεν τοῦ Μ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας λαμβάνομεν τμήματα ΜΝ καὶ ΜΝ′ ἴσα πρὸς τὸ ν.

Τώρα, ἐκ τοῦ Μ χαράσσομεν, κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον, τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας ΝΒ καὶ Ν′Β, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι τὰ σημεῖα-λύσεις δηλ. τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β μὲ λόγον τομῆς μ/ν. Πράγματι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν:

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΜ}{ΜΝ} = \frac{μ}{ν} \quad \text{καὶ} \quad \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΑΜ}{Ν'Μ} = \frac{μ}{ν}$$

Καὶ αὐτὸς ὁ τρόπος διαιρέσεως τοῦ ΑΒ φανερώνει τὴν μοναδικότητα τοῦ ζεύγους.

Ἐὰν μᾶς ἐζητεῖτο νὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ν}{μ}$ θὰ ἐργαζόμεθα ὁμοίως: Θὰ ἐλαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Αx τμῆμα ΑΝ = ν καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ν τμήματα ΝΜ = ΝΜ′ = μ. Κατόπιν, αἱ παράλληλοι ἐκ τοῦ Ν πρὸς τὰς εὐθείας ΜΒ καὶ ΒΜ′ θὰ μᾶς ἔδιδον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ ΑΒ εἰς λόγον $\frac{ν}{μ}$.

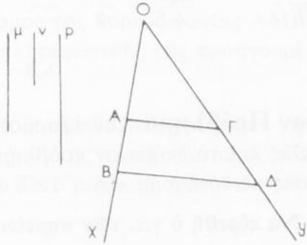


(Σχ. 102)

$$\text{Πράγματι,} \quad \frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΝ}{ΝΜ} = \frac{ν}{μ} \quad \text{καὶ} \quad \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΑΝ}{ΝΜ'} = \frac{ν}{μ}.$$

3ον. Κατασκευὴ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τριῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων μ, ν, ρ ἢ κατασκευὴ τῆς τρίτης ἀναλόγου δύο γνωστῶν τμημάτων μ καὶ ν.

Ζητοῦμεν τὸ τμῆμα x, διὰ τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖται ἡ ἀναλογία: $\frac{μ}{ν} = \frac{ρ}{x}$. Λαμβάνομεν τυχοῦσαν γωνίαν $x\hat{O}y$. Ἐπὶ τῆς Οx λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ ἴσον μὲ τὸ μ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὸ ν. Ἐπὶ τῆς Οy πάλιν λαμβάνομεν τμῆμα ΟΓ ἴσον μὲ τὸ ρ. Ἐὰν χαραχθῇ ἐκ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ εἶναι Δ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς παραλλήλου ταύτης μὲ τὴν Οy τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι τὸ ἄγνωστον τμῆμα x. Πράγματι, ἐὰν θεωρήσωμεν ὑφισταμένην τὴν ἐκ τοῦ Ο παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Θαλοῦ.



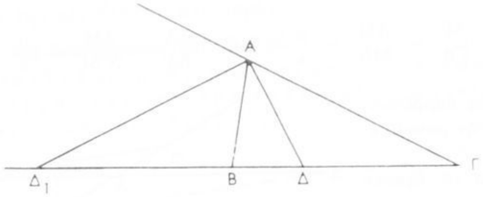
$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ} = \frac{ΟΓ}{ΓΔ} \quad \text{δηλ.} \quad \frac{μ}{ν} = \frac{ρ}{ΓΔ} \quad \Longrightarrow \quad ΓΔ = x$$

(Σχ. 103)

Ἔστω τώρα ἡ ἰσότης: $μ^2 = ν \cdot x$, ὅπου μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα. Ἡ ἰσότητά μας γράφεται:

$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\mu}{x}$ καὶ τὸ ἄγνωστον τμῆμα x ὀνομάζεται τρίτη ἀνάλογος τῶν ν, μ ἢ τετάρτη τῶν ν, μ, μ. Ἡ κατασκευή του γίνεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

4ον Τὸ θεώρημα τῶν διχοτόμων. Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐσωτερικῆς ἢ μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας ταύτης πλευράν, ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.



(Σχ. 104)

Ἐὰν ΑΔ καὶ $ΑΔ_1$ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{Δ_1Β}{Δ_1Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \qquad (1)$$

δηλ. τὰ σημεῖα Δ, $Δ_1$ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ μὲ λόγον τομῆς $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

5ον Πρόβλημα. Ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τῆς διχοτόμου ἔχομεν εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Ἐὰν Δ, $Δ_1$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα: ΔΒ, ΔΓ, $Δ_1Β$, $Δ_1Γ$.

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας (1) τοῦ θεωρ. τῶν διχοτόμων λαμβάνομεν:

1ον $$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{γ}{β} \Rightarrow \frac{ΔΒ}{γ} = \frac{ΔΓ}{β} = \frac{ΔΒ + ΔΓ}{β + γ} = \frac{α}{β + γ} \Rightarrow$$

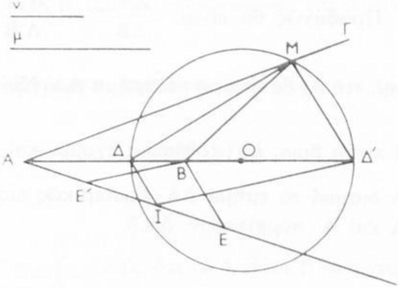
$$ΔΒ = \frac{αγ}{β + γ} \qquad ΔΓ = \frac{αβ}{β + γ}$$

2ον $$\frac{Δ_1Β}{Δ_1Γ} = \frac{γ}{β} \Rightarrow \frac{Δ_1Β}{γ} = \frac{Δ_1Γ}{β} = \frac{Δ_1Γ - Δ_1Β}{β - γ} = \frac{α}{β - γ} \Rightarrow$$

$$Δ_1Β = \frac{αγ}{β - γ} \qquad Δ_1Γ = \frac{αβ}{β - γ}$$ μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι $β > γ$.

6ον Πρόβλημα. 2αν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρ. τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα γ. τ. ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς μαθηματικοὺς μὲ τὸ ὄνομα «Ἀπολλώνιος περιφέρεια».

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο γνωστὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν γνωστὸν λόγον $\frac{μ}{ν}$ (μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί).



(Σχ. 105)

Ἐὰν Μ εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ ζητουμένου γ·τ καὶ ΜΔ, ΜΔ΄ αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta' A}{\Delta' B}=\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$$

Ἔτσι, τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ΄ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ Α, Β μὲ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ ὁ γεωμετρικός των προσδιορισμὸς ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ (Κεφ. 7, 8, 2ον) *. Ἡ γωνία ὅμως ΔΜΔ΄, ὡς γνωστόν, εἶναι ὀρθὴ καὶ ἔτσι τὸ Μ *ἔχει καὶ τὴν ἰδιότητα νὰ βλέπῃ τὸ ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα* ΔΔ΄ *ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν*. Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰδιότης τοῦ Μ τὸ τοποθετεῖ *ἀναγκαίως* εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΔΔ΄. Συμπέρασμα:

Κάθε σημεῖον Μ, συνεπίπεδον τῶν Α καὶ Β, ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$, ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΔΔ΄. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια συνίσταται μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος. Ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως εὑρίσκονται τὰ σημεῖα Α, Β, τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ τούτων Δ, Δ΄ μὲ λόγον τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΔΔ΄. Ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης λαμβάνομεν αὐθαίρετον σημεῖον Μ καὶ θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$. (1)

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1) *ἀρκεῖ* νὰ εἶναι ἡ ΜΔ διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $A\widehat{M}B$, διότι τότε θὰ εἶναι καὶ ἡ ΜΔ΄ διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς τῆς προηγουμένης, τῆς $B\widehat{M}\Gamma$, ἀφοῦ $\Delta\widehat{M}\Delta'=1_{\llcorner}$.

Ἐὰν ἡ ΜΔ δὲν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $A\widehat{M}B$ δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΜΑ΄ καὶ νὰ καταστήσωμεν τὴν ΜΔ διχοτόμον τῆς κυρτῆς γωνίας Α΄ΜΒ, ὁπότε ἡ ΜΔ΄ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας ΒΜΓ΄, ὅπου ἡ ἡμιευθεῖα ΜΓ΄ εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς ΜΑ΄.

---

*Εἰς τὸ (Σχ. 105) ἐλήφθη τὸ ΑΙ ἴσον μὲ τὸ μ καὶ τὰ τμήματα ΙΕ καὶ ΙΕ΄ ἴσα μὲ τὸ ν.

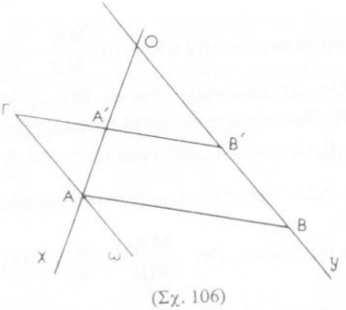
Προφανῶς θὰ εἶναι: $\frac{ΔΑ'}{ΔΒ} = \frac{Δ'Α'}{Δ'Β} \Rightarrow \frac{Α'Δ}{Α'Δ'} = \frac{ΒΔ}{ΒΔ'}$

δηλ. τὸ Α′ θὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΔΔ′ ἐξωτερικῶς εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον $\frac{ΒΔ}{ΒΔ'}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ $\frac{ΑΔ}{ΑΔ'} = \frac{ΒΔ}{ΒΔ'}$ δηλ ἔχομεν, ὅτι καὶ τὸ Α διαιρεῖ τὸ τμῆμα ΔΔ′ ἐξωτερικῶς εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ Α καὶ Α′ συμπίπτουν. ὅ.ἔ.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ὁρίσατε ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν Οx, Οy μιᾶς γνωστῆς γωνίας xΟy δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ἔχωμεν: $\frac{ΟΑ}{ΟΒ} = \frac{μ}{ν}$ (μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοὶ) καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ νὰ εἶναι γνωστοῦ μεγέθους λ.



(Σχ. 106)

Ἀνάλυσις. Ἔστω, ὅτι ὡρίσθησαν τὰ Α καὶ Β, τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰ δύο ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν Α′Β′ εἶναι τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΟΑ'}{ΟΒ'} = \frac{ΟΑ}{ΟΒ} = \frac{μ}{ν}$$

Καὶ ἔτσι **δι' αὐθαίρετον** τμῆμα ΟΑ′ ὑφίσταται **ὡρισμένον** τμῆμα ΟΒ′, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα: $\frac{μ}{ν} = \frac{ΟΑ'}{ΟΒ'}$ (βλ. Κεφ 7, 8, 3ον). Ἐννοοῦμεν, ὅτι δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσιν τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ὅτι δὲν ἐναπομένει παρὰ ὁ καθορισμὸς τῆς θέσεώς του.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν Οy, αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν εὐθεῖαν Β′Α′ εἰς ἕνα σημεῖον Γ καὶ θὰ εἶναι Β′Γ=ΒΑ=λ.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν αὐθαίρετον τμῆμα ΟΑ′ καὶ καθορίζομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ τμῆμα ΟΒ′. Ἐπὶ τῆς Β′Α′ λαμβάνομεν τμῆμα Β′Γ=λ καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν Οy. Ἐὰν ἡ ἐν λόγῳ παράλληλος τμήσῃ τὴν Οx εἰς τὸ

Α τὸ παράλληλον τμῆμα ΑΒ(Σχ. 106) πρὸς τὸ Α΄Β΄ ἱκανοποιεῖ προφανῶς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

2. Ἐὰν α, β, γ, α΄, β΄ εἶναι γνωστὰ εὐθύγραμμα τμήματα, προσδιορίσατε τὸ τμῆμα $x = \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\alpha' \cdot \beta'}$

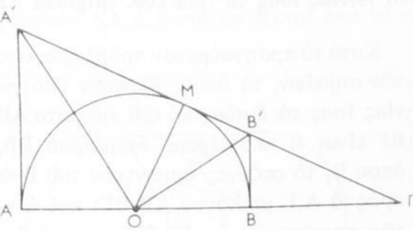
Ἡ ἰσότης μας γράφεται: $x = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha'} \cdot \dfrac{\gamma}{\beta'} \cdot (1)$

Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha'} = \lambda$, ἔχομεν καί: $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\lambda}$ δηλ. ὅτι τὸ λ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων: α΄, α, β. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γράφεται:

$$x = \lambda \cdot \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\lambda}{x}$$

καὶ τὸ τμῆμα x παρουσιάζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων: β,γ,λ.*

3. ΑΒ εἶναι ὡρισμένη διάμετρος γνωστῆς περιφερείας (Ο) καὶ x,y αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς αὐθαίρετον σημεῖον Μ τῆς περιφερείας (Ο) τέμνει ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας x,y, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ. Δείξατε, ὅτι τὰ σημεῖα Γ,Μ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικά, ὡς πρὸς τὰ Α΄ καὶ Β΄.



(Σχ. 107)

Πρέπει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{\Gamma A'}{\Gamma B'}$$

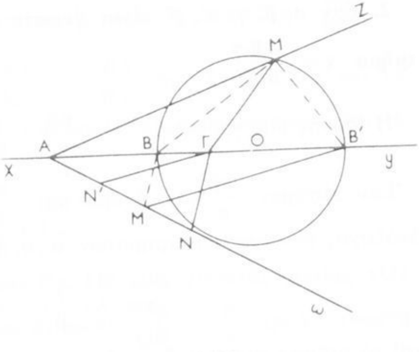
Τὰ τμήματα ΟΒ΄ καὶ ΟΑ΄ εἶναι ἀντιστοίχως διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΜΟΓ καὶ ΜΟΑ καὶ συνεπῶς (Κεφ. 7, 8, 4ον)

$$\frac{B'M}{B'\Gamma} = \frac{A'M}{A'\Gamma} \Rightarrow \frac{MA'}{MB'} = \frac{\Gamma A'}{\Gamma B'}$$

(Κεφ. 7, 6). ὅ.ἔ.δ.

*Ἡ ὑποδειχθεῖσα γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ τμήματος x δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ὁδηγὸς διὰ παρομοίας κατασκευάς. Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ συνθέτωμεν τὸ 2ον μέλος μὲ προσδιορισμοὺς τμημάτων, παρουσιαζομένων ἑκάστοτε ὡς τετάρτων ἀναλόγων τριῶν γνωστῶν τμημάτων. Ἔτσι, ἡ ἔκφρασις: $x = \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma^2}{\mu \cdot \nu \cdot \lambda}$ γράφεται: $x = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\mu} \cdot \dfrac{\gamma}{\nu} \cdot \dfrac{\gamma}{\lambda} \Rightarrow x = \sigma \cdot \dfrac{\gamma}{\nu} \cdot \dfrac{\gamma}{\lambda} \Rightarrow$ $x = \theta \cdot \dfrac{\gamma}{\lambda} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{\gamma} = \dfrac{\theta}{x}$, ὅπου τὰ α, β, γ, μ, ν, λ εἶναι γνωστὰ τμήματα καὶ τὰ σ, θ, x προσδιοριζόμενα κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

4. Ἂν Α,Β,Γ εἶναι ὡρισμένα διαδοχικὰ σημεῖα γνωστῆς εὐθείας xy, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ φαίνονται ὑπὸ γωνίας ἴσας.

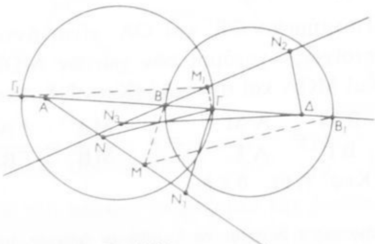


(Σχ. 108)

Ἐὰν Μ εἶναι ἕνα τῶν σημείων τοῦ ζητουμένου τόπου καὶ ΜΒ΄ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΒ, τὰ τμήματα ΜΒ,ΜΒ΄ θὰ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{AM\Gamma}$, $\widehat{\Gamma MZ}$ καὶ συνεπῶς τὰ Β,Β΄, θὰ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὰ Α,Γ μὲ λόγον τομῆς $\frac{AB}{B\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ ἀναγκαίως εἶναι $\frac{MA}{M\Gamma}=\frac{AB}{B\Gamma}$ (1), τὰ σημεῖα Μ εἶναι τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα συνιστοῦν τὴν Ἀπολλώνιον περιφέρειαν τῶν Α,Γ μὲ λόγον $\frac{AB}{B\Gamma}$. (Κεφ. 7, 8, 6ον).

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἐλήφθησαν ἐπὶ τῆς αὐθαιρέτου ἡμιευθείας Αω τὰ τμήματα $AM=AB$, $MN=MN'=B\Gamma$.

5. Ἂν Α,Β,Γ,Δ εἶναι σημεῖα διαδοχικὰ μιᾶς γνωστῆς εὐθείας xy, νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα νὰ φαίνωνται ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰ τρία εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.



(Σχ. 109)

Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὁ γ.τ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα βλέπουν ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰ διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου BB_1, ὅπου B_1 τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὰ Α,Γ μὲ λόγον $AB/B\Gamma$· καὶ ὁ γ.τ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα βλέπουν τὰ διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα ΒΓ καὶ ΓΔ ὑπὸ ἴσας γωνίας εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου $\Gamma_1\Gamma$, ὅπου Γ_1 τὸ συζυγὲς τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ Β,Δ μὲ λόγον $B\Gamma/\Gamma\Delta$.

Εἰς τὸ σχῆμα μας ἔχουν ληφθῆ: $AM=AB$, $MN=MN_1=B\Gamma$, $BM_1=B\Gamma$, $M_1N_2=$ $=M_1N_3=\Gamma\Delta$.

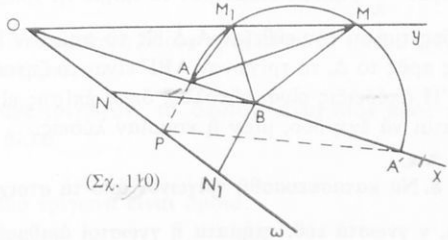
Τὰς δύο λύσεις λοιπὸν τοῦ προβλήματος δίδουν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἀνωτέρω περιφερειῶν, ἐφόσον φυσικὰ αὐταὶ αἱ περιφέρειαι τέμνωνται.

6. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox γνωστῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ θεωροῦμεν δύο σημεῖα A καὶ B (OB > OA). Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον M ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy, τοιοῦτον, ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα AM νὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $O\widehat{M}B$.

Προφανῶς τὸ σημεῖον M θὰ ἱκανοποιῇ δύο ἐπιτάγματα: Ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ εἶναι σημεῖον τῆς Oy καὶ ἀφ' ἑτέρου θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν Ἀπολλώνιον περιφέρειαν τῶν O καὶ B μὲ λόγον τομῆς $\frac{OA}{AB}$.

Εἰς τὸ (Σχ. 110) ἐλάβομεν OP = OA, $PN = PN_1 = AB$ καὶ ἀφοῦ ἐπροσδιωρίσαμεν τὸ A΄, συζυγὲς τοῦ A ὡς πρὸς τὰ O, B, ἐγράψαμεν περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα AA΄.

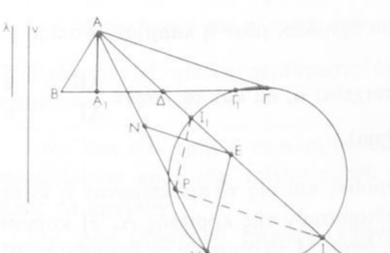
Τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας αὐτῆς μὲ τὴν Oy, ἐφόσον ὑπάρχουν, ἀντιπροσωπεύουν τὰς ζητουμένας λύσεις.



(Σχ. 110)

7. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ στοιχεῖα: h_α, μ_α καὶ τὸν λόγον $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\nu}$ (λ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί).

Ἀνάλυσις. Ἔστω, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατεσκευάσθη. Προφανῶς, τὸ τρίγωνον $AA_1\Delta$ κατασκευάζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του: $AA_1 = h_\alpha$ καὶ $A\Delta = \mu_\alpha$.



(Σχ. 111)

Ἐννοοῦμεν λοιπόν, ὅτι διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς κατασκευῆς τοῦ ΑΒΓ μᾶς χρειάζεται ὁ προσδιορισμὸς μιᾶς τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου: τῆς Γ ἢ τῆς B.

Ἡ κορυφὴ Γ ἱκανοποιεῖ ἤδη τὸ ἐπίταγμα, νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν $A_1\Delta$ καὶ τοιουτοτρόπως ὁ προσδιορισμός της ἀπαιτεῖ νὰ τῆς ἀναγνωρίσωμεν τὴν ἱκανότητα εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν μιᾶς ἀκόμη συνθήκης. Πράγματι,

Ἂν προεκτείνωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ λάβωμεν ΔΕ = ΑΔ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΓ (μὴ χαραγμένον) ὁπότε εἶναι ΓΕ = ΑΒ καὶ συνεπῶς

$\frac{ΓΑ}{ΓΕ} = \frac{ΓΑ}{ΑΒ} = \frac{ν}{λ}$. Ἔτσι τὸ Γ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν Ἀπολλώνιον περιφέρειαν τῶν Α,Ε μὲ λόγον $\frac{ν}{λ}$.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΑ_1Δ$ μὲ τὰ διδόμενα στοιχεῖα καὶ ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Ι, $Ι_1$ συζυγῆ ἁρμονικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὰ Α,Ε μὲ λόγον $\frac{ν}{λ}$, καὶ μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα $Ι_1Ι$ γράφομεν περιφέρειαν. Ἐὰν ἡ περιφέρεια αὕτη τμήση τὴν εὐθεῖαν $Α_1Δ$ εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ Β εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ Δ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολος, ὅπως ἐπίσης εἶναι προφανές, ὅτι τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἔχη δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσεις.

8. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: α, hα καὶ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν}$ (μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί).

Ἀφοῦ μᾶς δίδεται ἡ πλευρὰ ΒΓ, γνωρίζομεν τοῦ ζητουμένου τριγώνου δύο κορυφάς. Ἡ κατασκευή του λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς κορυφῆς Α. Ἡ κορυφὴ τώρα Α ἱκανοποιεῖ δύο ἐπιτάγματα: 1ον Ἀπέχει ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν $h_α$ καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἀπόστασιν. 2ον Ἀπέχει ἀπὸ τὰ Β,Γ ἀποστάσεις μὲ ὡρισμένον λόγον καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν Ἀπολλώνιον περιφέρειαν τῶν Β,Γ μὲ λόγον $\frac{μ}{ν}$. Ἐφεξῆς ἡ λύσις εἶναι ἁπλῆ ὡς καὶ ἡ διαπίστωσις, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχη δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσεις.

9. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: α, δα καὶ τὸ λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν}$ (μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί).

Ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὁμοίως καὶ εἰς τὸ προκείμενον ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς κορυφῆς Α. Ἡ κορυφὴ Α: 1ον ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν (Μ, δα), ὅπου Μ τὸ σημεῖον τὸ δαιροῦν τὸ ΒΓ εἰς λόγον $\frac{μ}{ν}$. 2ον ἀνήκει εἰς τὴν Ἀπολλώνιον περιφέρειαν τῶν Β,Γ μὲ λόγον τομῆς $\frac{μ}{ν}$ κ.λ.π.

ΟΜΟΙΟΤΗΣ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΑΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Τρίγωνα ὅμοια.

1. Δύο τρίγωνα **ὀνομάζονται ὅμοια,** ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους.*

Συμπεράσματα: Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων συμπεραίνομεν ὅτι:

1ον. Δύο ἴσα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

2ον. Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὸ αὐτὸ τρίτον τρίγωνον, εἶναι μεταξύ των ὅμοια. Καὶ ἑπομένως:

Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, κάθε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἄλλο.

2. Περιπτώσεις ὁμοιότητος. Δύο τρίγωνα **εἶναι** ὅμοια:

1ον. Ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των, μίαν πρὸς μίαν, ἴσας.**

2ον. Ὅταν μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι περιέχουν αὐτὰς τὰς γωνίας, εἶναι ἀνάλογοι.

3ον. Ὅταν ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους.

4ον. Ὅταν ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου.

5ον. Ὅταν ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου.

3. Σχόλιον. Ἡ πρώτη περίπτωσις ὁμοιότητος μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

1ον. Ἕνα εὐθ. τμῆμα, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην αὐτοῦ πλευράν, δημιουργεῖ ἕνα τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

2ον. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἔχοντα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς των ἴσην ἢ τὰς παρὰ τὰς βάσεις των γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, εἶναι ὅμοια.

*Ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι, αἱ συνδέουσαι κορυφὰς ἴσων γωνιῶν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ λέγωμεν καὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, ἐφόσον πρόκειται δι' ὁμοιότητα τ ρ ι γ ώ ν ω ν.

**Ἡ περίπτωσις αὐτη ὁμοιότητος εἶναι ἡ συνηθέστερον χρησιμοποιουμένη. Διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων ἀρχίζομεν μὲ τὴν ἀναζήτησιν ἴσων γωνιῶν εἰς αὐτὰ τὰ δύο τρίγωνα.

3ον Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

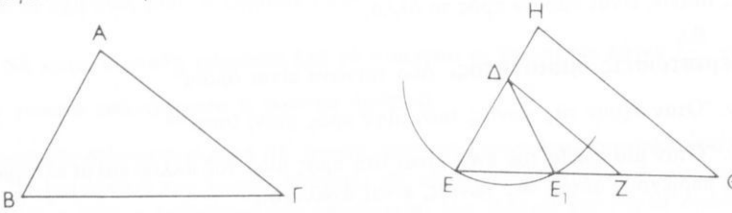
4ον Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν τῶν ὀξειῶν των γωνιῶν ἴσην, εἶναι ὅμοια.

4. Εἰδικὴ περίπτωσις ὁμοιότητος. Ἡ εἰς τὴν (σελ. 16) ἀναφερομένη τετάρτη περίπτωσις ἰσότητος τριγώνων ὁδηγεῖ εἰς μίαν ἀκόμη περίπτωσιν ὁμοιότητος, ἔχουσαν ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν διὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ συμβαίνει νὰ εἶναι:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \quad (1) \qquad \hat{B} = \hat{E} \text{ καὶ } A\Gamma > AB.$$

τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.



(Σχ. 112)

Δεχόμεθα ΑΒ>ΔΕ καὶ συνεπῶς δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΕΔ, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΕΗ=ΒΑ. Ἐὰν τώρα ἀχθῇ τὸ ΗΘ ∥ ΔΖ, θὰ ἔχωμεν:

$$H E \Theta_\Delta \approx \Delta E Z_\Delta \quad (2). \quad \text{Συνεπῶς,}$$

$$\frac{HE}{\Delta E} = \frac{H\Theta}{\Delta Z} \Rightarrow H\Theta = A\Gamma \quad \text{λόγῳ τῆς (1)}$$

Διὰ τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΗΕΘ συμβαίνει νὰ εἶναι:

$$AB = HE, \quad A\Gamma = H\Theta, \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \text{καὶ} \quad A\Gamma > AB$$

Ὥστε (Κεφ. 3, 2, δ) $AB\Gamma_\Delta = HE\Theta_\Delta$. Καὶ λόγῳ τῆς (2) $AB\Gamma_\Delta \approx \Delta E Z_\Delta$

Σχόλιον. Ἐὰν γράψωμεν τὴν περιφέρειαν (Δ, ΔΕ), ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ΔΖ > ΔΕ, θὰ ἔχωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ τὸ σημεῖον E_1, ὥστε νὰ εἶναι $\Delta E_1 = \Delta E$ καὶ μάλιστα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ζ μετὰ τοῦ Ε. Ἔτσι, ἡ ἰσότης (1) ἰσχύει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $\Delta E_1 Z$, ἐφόσον τὴν θεωρήσωμεν ἰσχύουσαν διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Διὰ τὰ τρίγωνα ὅμως ΑΒΓ καὶ $\Delta E_1 Z$ ἰσχύει, ὅπως εἴπομεν, ἡ (1), ἔχομεν $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, ἀλλὰ ἔχομεν καί: $A\hat{B}\Gamma + \Delta\hat{E}_1 Z = 2\llcorner$.

Συμπέρασμα: Ἐὰν διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ συμβαίνει νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z},\quad \hat{\Gamma}=\hat{Z}\ \text{ καὶ }\ A\Gamma > AB.$$

τότε, δυνατὸν νὰ εἶναι ὅμοια, δυνατὸν ὅμως καὶ νὰ μὴ εἶναι ὅμοια. Θὰ εἶναι ὅμοια, ἐφόσον πρόκειται διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος καὶ δὲν θὰ εἶναι ὅμοια, ἐφόσον πρόκειται διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $\Delta E_1 Z$. Εἰς τὴν 2αν αὐτὴν περίπτωσιν συμβαίνει νὰ ἔχωμεν:

$$A\hat{B}\Gamma + \Delta\hat{E}_1 Z = 2_{\llcorner}.$$

Συνέπειαι: 1ον. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα διὰ τὰ ὁποῖα ὁ λόγος δύο καθέτων πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑποτεινουσῶν των εἶναι ὅμοια.

Ἔχουν τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ τὴν ὀρθήν των γωνίαν, δηλ. τὴν γωνίαν τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας τῶν θεωρουμένων πλευρῶν, ἴσην.

2ον. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν πρότασιν δημιουργοῦνται αἱ κάτωθι δύο ἀντίστροφοι προτάσεις, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $\Delta E_1 Z$.

Υπ	$\frac{AB}{\Delta E_1}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z},\ \hat{B}+\hat{E}_1=2_{\llcorner}$
Συμ	$\hat{\Gamma}=\hat{Z}$

Υπ	$\hat{B}+\hat{E}_1=2_{\llcorner},\quad \hat{\Gamma}=\hat{Z}$
Συμ	$\frac{AB}{\Delta E_1}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

Διὰ τὴν 1ην πρότασιν.

Ἀφοῦ $\hat{B}+\hat{E}_1=2_{\llcorner}$ μία τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἀμβλεία καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι ἡ $\hat{E}_1$. Ἔτσι, ἡ περιφέρεια $(\Delta, \Delta E_1)$ θὰ μᾶς δώση ἐπὶ τῆς ZE_1 ἀκόμη τὸ σημεῖον Ε καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ζ μετὰ τοῦ E_1. Θὰ ἰσχύουν λοιπὸν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z},\ \hat{B}=\hat{E}\ \text{ καὶ }\ A\Gamma > AB,\ \text{ἀφοῦ }\ \Delta Z > \Delta E$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν (Κεφ. 8,4) θὰ εἶναι $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ μὲ συνέπειαν νὰ εἶναι $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$. ὅ.ἔ.δ.

Διὰ τὴν 2αν πρότασιν

Σκεπτόμενοι ὅπως προηγουμένως, λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τοῦ ὁποίου δύο γωνίαι αἱ $\hat{Z}$ καὶ $\hat{E}$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας $\hat{\Gamma}$ καὶ $\hat{B}$ τοῦ ΑΒ.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος λοιπὸν τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχομεν:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E_1} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

5. Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων τριγώνων.

1ον Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων στοιχείων (ὑψῶν, διχοτόμων, διαμέσων, ἀκτίνων περιφερειῶν: ἐγγεγραμμένων, περιγεγραμμένων κλπ) δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητός των δηλ. μὲ τὸν λὸγον δύο ὁμολόγων των πλευρῶν.

2ον. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

6. Ἐφαρμογαὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

Ὀνομάζομεν **ἐπίπεδον κεντρικὴν δέσμην** εὐθειῶν ἕν σύνολον συνεπιπέδων εὐθειῶν καὶ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης ὀνομάζεται **κέντρον αὐτῆς** καὶ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ὀνομάζεται **ἀκτὶς** τῆς δέσμης.

Χρησιμοποιοῦντες τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἀποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῆς ἐπιπέδου κεντρικῆς δέσμης:

1ον. Μία ἐπίπεδος κεντρικὴ δέσμη εὐθειῶν ὁρίζει ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὁμόλογα τμήματα ἀνάλογα*.

Καὶ χρησιμοποιοῦντες τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγὴν ἀποδεικνύομεν τὴν ἀντίστροφον πρότασιν:

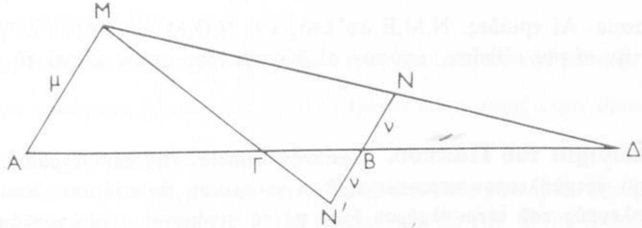
2ον. Ἐὰν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,... εἶναι τμήματα ὁμόρροπα μιᾶς διδομένης εὐθείας(α) καὶ Α΄Β΄, Β΄Γ΄,Γ΄Δ΄,... τμήματα ἐπίσης ὁμόρροπα ὄχι ὅμως ἀναγκαίως ὁμόρροπα πρὸς τὰ πρῶτα, μιᾶς ἄλλης ἀκόμη διδομένης εὐθείας (α΄), παραλλήλου πρὸς τὴν (α), εἶναι δέ, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \ldots$ τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ ΔΔ΄,... διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ ἄλλως εἶναι ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου κεντρικῆς δέσμης.

Ἐφιστῶμεν τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Πρέπει νὰ εἶναι καθωρισμένη ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἄκρων

*Ὀνομάζομεν **ὁμόλογα** τμήματα τὰ ἔχοντα ἄκρα ὁμόλογα σημεῖα δηλ. σημεῖα, ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα τῆς δέσμης.

τῶν ἀναλόγων τμημάτων κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτιθέμενον τρόπον διὰ νὰ εἴμεθα βέβαιοι διὰ τὰς δυάδας τῶν ὁμολόγων σημείων.*

3ον. Δυνάμεθα, χρησιμοποιοῦντες τὴν ὁμοιότητα, νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἁρμονικὴν διαίρεσιν διδομένου εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, εὐκολώτερον παρὰ διὰ τῶν ἐκτεθέντων τρόπων εἰς τὸ (Κεφ. 7).



(Σχ. 113)

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἐχαράχθη ἐκ τοῦ Α μὲ αὐθαίρετον διεύθυνσιν τμῆμα ΑΜ ἴσον μὲ τὸ γνωστὸν τμῆμα μ καὶ ἐκ τοῦ Β ἐχαράχθησαν ἑκατέρωθεν τοῦ Β τμήματα ἴσα μὲ τὸ γνωστὸν τμῆμα ν καὶ μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ΑΜ. Αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ ΜΝ΄ μᾶς δίδουν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἐξωτερικὸν σημεῖον Δ καὶ τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον Γ τῆς ἁρμονικῆς διαιρέσεως τοῦ ΑΒ. Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΜ καὶ ΒΔΝ ἀφ' ἑνὸς καὶ τὰ ΑΓΜ καὶ ΓΝ΄Β ἀφ' ἑτέρου.

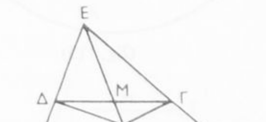
4ον. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἐπιπέδου κεντρικῆς δέσμης εὐθειῶν ὁδηγοῦν εἰς μίαν ἀξιοσημείωτον ἰδιότητα τοῦ τραπεζίου:

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων εὐθειῶν - πλευρῶν ἑνὸς τραπεζίου, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ τὰ μέσα τῶν βάσεών του εἶναι τέσσαρα συνευθειακὰ σημεῖα.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ν, Μ, Ε εἶναι συνευθειακά.

Ἔχομεν: $\frac{\Delta M}{AN} = \frac{M\Gamma}{NB}$

ἀφοῦ τὰ Μ καὶ Ν εἶναι ἀντιστοίχως μέσα τῶν πλευρῶν ΔΓ καὶ ΑΒ. Συνεπῶς (Θεωρ. Κεφ. 8, 6, 2ον) αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΝΜ καὶ ΒΓ, αἱ συνδέουσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. ὅ.ἔ.δ.



(Σχ. 114)

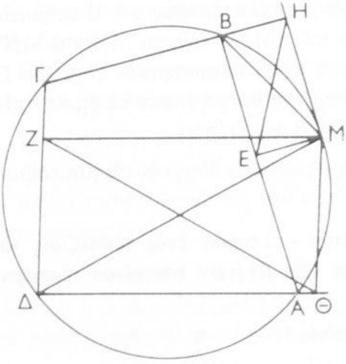
*Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀρχικῆς προτάσεως στηρίζεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὰ σχηματιζόμενα ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, τῆς δὲ ἀντιστρόφου προτάσεως ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ Ν, Ο, Μ εἶναι συνευθειακά.

Ἔχομεν: $\frac{ΔΜ}{ΒΝ} = \frac{ΜΓ}{ΝΑ}$ καὶ συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι: ΔΒ, ΜΝ, ΓΑ, συμφώνως καὶ πάλιν μὲ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα τῆς δέσμης, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. ὅ.ἔ.δ.

Συμπέρασμα: Αἱ τριάδες: Ν,Μ,Ε ἀφ' ἑνὸς καὶ Ν,Ο,Μ ἀφ' ἑτέρου ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἐφόσον αἱ δύο τριάδες ἔχουν κοινὰ τὰ δύο των σημεῖα.

5ον Θεώρημα τοῦ Πάππου. Ἕκαστον σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἕνα γνωστὸν τετράπλευρον περιφερείας ἔχει γινόμενον ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου.



(Σχ. 115)

Θὰ δείξωμεν λοιπὸν ὅτι:
$ΜΕ \cdot ΜΖ = ΜΗ \cdot ΜΘ$ (1). Ἡ (1) γράφεται:
$\frac{ΜΕ}{ΜΗ} = \frac{ΜΘ}{ΜΖ}$ (2) καὶ ἡ (2) θὰ εἶναι ἀληθής, ἐὰν ἀποδειχθῇ ἡ ὁμοιότης:

$$ΜΕΗ_Δ \approx ΜΖΘ_Δ \quad (3)$$

Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΜΗΒΕ λαμβάνομεν:

$$Μ\hat{Η}Ε = Μ\hat{Β}Ε$$

Καὶ ἐπειδὴ $Μ\hat{Β}Ε \equiv Μ\hat{Β}Α = Μ\hat{Δ}Α$

καὶ $Μ\hat{Δ}Α = Μ\hat{Ζ}Θ$ (ἐκ τοῦ ἐγγρ. τετραπλεύρου ΜΖΔΘ)

ἕπεται: $$Μ\hat{Η}Ε = Μ\hat{Ζ}Θ$$

Ἀκόμη, $$Ε\hat{Μ}Η = Ζ\hat{Μ}Θ$$

διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἀντιστοίχως παραπλήρωμα τῶν ἴσων γωνιῶν $Η\hat{Β}Α$ καὶ $Γ\hat{Δ}Α$.

Ἡ ὁμοιότης λοιπὸν (3) ἀπεδείχθη.

7. Πολύγωνα Όμοια

Δύο πολύγωνα, τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, ὀνομάζονται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας αὐτῶν, μίαν τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου, ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους.*

Συμπεράσματα: Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος μεταξὺ δύο πολυγώνων συμπεραίνομεν ὅτι:

1ον Δύο πολύγωνα ἴσα εἶναι ὅμοια μὲ λόγον ὁμοιότητος τὴν μονάδα.

2ον Δύο πολύγωνα ὅμοια πρὸς τὸ αὐτὸ τρίτον εἶναι μεταξύ των ὅμοια.

8. Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων πολυγώνων.

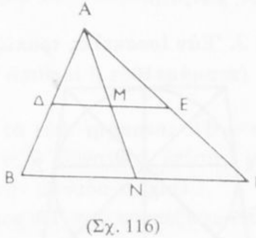
1ον Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁμοίων τριγώνων, ἕνα τοῦ ἑνὸς πρὸς ἕνα τοῦ ἄλλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν διάταξιν. Ἀντιστρόφως,

2ον Ἐὰν δύο πολύγωνα συντίθενται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁμοίων τριγώνων, ἕνα τοῦ ἑνὸς πρὸς ἕνα τοῦ ἄλλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν διάταξιν, εἶναι ὅμοια.

3ον Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ·τ τῶν μέσων τῶν εὐθ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἶναι παράλληλα ἢ ἀντιπαράλληλα πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



(Σχ. 116)

1ον Ἔστω ΔΕ παράλληλον εὐθ. τμῆμα πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον του.

Ἐκ τοῦ θεωρ. τῆς ἐπιπέδου δέσμης τῶν εὐθειῶν ΑΒ,ΑΝ,ΑΓ (Σχ. 116) λαμβάνομεν: $\frac{ΔΜ}{ΒΝ} = \frac{ΜΕ}{ΝΓ}$

Καὶ ἐπειδὴ ΔΜ = ΜΕ θὰ εἶναι καὶ ΒΝ = ΝΓ. Ὥστε: Ἕκαστον σημεῖον Μ, τῆς ἰδιότητος τοῦ

*Οἱ ὁρισμοὶ συμπίπτουν μὲ ἐκείνας τῶν ὁμοίων τριγώνων.

προβλήματος, ἀνήκει **ἀναγκαίως** εἰς τὴν διάμεσον ΑΝ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ διάμεσος ΑΝ συνίσταται μόνον ἀπὸ σημεῖα Μ τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος;

Ἔστω Μ αὐθαίρετον σημεῖον τῆς διαμέσου ΑΝ. Ἐὰν ἀχθῇ τὸ ΔΜΕ τμῆμα παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν ΑΒ,ΑΝ,ΑΓ:

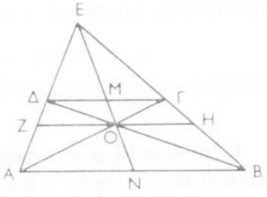
$$\frac{\Delta M}{BN} = \frac{ME}{N\Gamma} \Rightarrow \Delta M = ME$$

ἐφόσον εἶναι ΒΝ=ΝΓ.

Συμπέρασμα: Ὁ γ.τ. τῶν Μ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ διάμεσος ΑΝ ἐφόσον αὕτη συνίσταται ἀπὸ **τὰ** σημεῖα αὐτῆς τῆς ἰδιότητος καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα.

2ον Τὰ ἀντιπαράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα πρὸς τὸ ΒΓ, ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Α, εἶναι (Κεφ. 3 ἄσκ. 4, Σχόλιον) παράλληλα πρὸς τὸ ἀντιπαράλληλον πρὸς τὸ ΒΓ εὐθ. τμῆμα Β΄Γ΄. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὸ 1ον μέρος τῆς προτάσεώς μας ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν θεωρουμένων τμημάτων θὰ εἶναι ἡ διάμεσος, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν Β΄Γ΄ τοῦ τριγώνου ΑΒ΄Γ΄. Καὶ ὅπως ἐξετέθη εἰς τὸ σχόλιον (ἄσκ. 4 Κεφ. 3) ἡ ἐν λόγῳ διάμεσος εἶναι ἡ συμμετροδιάμεσος τοῦ ΑΒΓ, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α. (βλ. Σχ. 25).

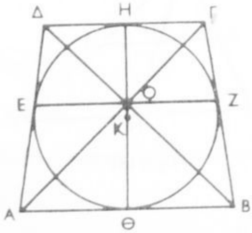
2. Εἰς ἕνα τραπέζιον τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του, διέρχεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων του καὶ περιορίζεται ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του, ἔχει τὸ Ο ὡς μέσον του.



(Σχ. 117)

Ἐὰν ΖΗ ∥ ΑΒ, θὰ ἔχωμεν ΖΟ=ΟΗ, λόγῳ τῆς διαπιστωθείσης δέσμης (Κεφ 8, 6, 4ον) τῶν εὐθειῶν ΕΑ, ΕΝ, ΕΒ.

3. Ἐὰν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ διδομένην περιφέρειαν, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι σημεῖα εὐθείας, παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.



(Σχ. 118)

Πρόκειται λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα: Ε, Ο, Ζ ἀνήκουν εἰς εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΔΓ.

Εἴδομεν (Κεφ. 8, 6, 4ον), ὅτι τὰ σημεῖα: Η, Ο, Θ (Η, Θ μέσα τῶν βάσεων) εἶναι συνευθειακὰ καὶ ἀκόμη γνωρίζομεν (Κεφ. 4, 2., γ), ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις. Ἐκ τῆς προφανοῦς ὁμοιότητος: $ΔΟΗ_Δ \approx ΟΘΒ_Δ$ λαμβάνομεν:

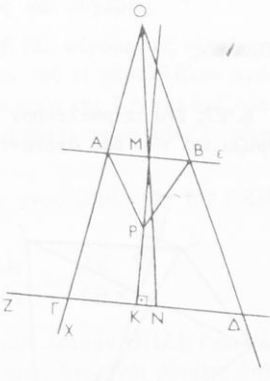
$$\frac{ΗΟ}{ΟΘ} = \frac{ΔΗ}{ΘΒ} \Rightarrow \frac{ΗΟ}{ΟΘ} = \frac{ΔΕ}{ΕΑ} \quad (\text{Κεφ. 6, 3., Πορ. 1ον})$$

Ὥστε: αἱ εὐθεῖαι ΔΗ,ΕΟ,ΑΘ ὁρίζουν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΔΑ καὶ ΗΘ τμήματα ἀνάλογα καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι (ἀντ. θεωρ. Θαλοῦ) θὰ εἶναι καὶ ἡ τρίτη ἀπ᾽ αὐτάς, ἡ ΕΟ παράλληλος πρὸς τὰς δύο ἄλλας.

Χρησιμοποιοῦντες τώρα τὴν ὁμοιότητα: $ΗΟΓ_Δ \approx_Δ ΑΘΟ$ θὰ διεπιστώναμεν τὴν παραλληλίαν τῶν ΟΖ καὶ ΗΓ. Συμπέρασμα: Αἱ εὐθεῖαι: ΕΟ καὶ ΟΖ συμπίπτουν.

4. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν διδομένης γωνίας $x\hat{O}y$ δίδεται σημεῖον Ρ. Εἶναι γνωστὴ ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μιὰ εὐθεῖα Ζ. Ζητεῖται νὰ χαραχθῆ εὐθεῖα ε, παράλληλος πρὸς τὴν Ζ καὶ ἡ ὁποία, τέμνουσα τὰς x,y εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα ΡΑ, ΡΒ ἴσα.

Ἀφοῦ ΡΑ = ΡΒ, ἡ ἐκ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ε θὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν Ζ. Συνεπῶς, ἡ εὐθεῖα ΡΜ εἶναι γνωστῆς θέσεως. Ἐπίσης, ἡ εὐθεῖα ΟΜ (ἀσκ. 1) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΔ, τοῦ ὁριζομένου ἐπὶ τῆς Ζ ὑπὸ τῶν Οx καὶ Οy. Ἔτσι, τὸ Μ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὡρισμένης θέσεως εὐθειῶν ΡΚ καὶ ΟΝ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος πρὸς τὴν Ζ δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν.

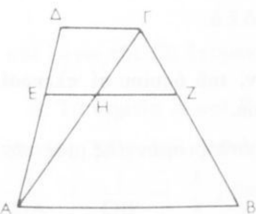


(Σχ. 119)

5. Θεωροῦμεν τραπέζιον ΑΒΓΔ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ διαιρεῖ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του ΑΔ καὶ ΒΓ ἔτσι, ὥστε:

$$\frac{ΑΕ}{ΕΔ} = \frac{ΒΖ}{ΖΓ} = \frac{μ}{ν}. \text{ (μ, ν ἀριθμοὶ ἢ εὐθ. τμήματα)}$$

Νὰ ἐκφρασθῆ τὸ ΕΖ ἀπὸ τὰ εὐθ. τμήματα: ΑΒ = α, ΓΔ = β καὶ τὰ μ, ν. (Τὰ α, β δύνανται ἐπίσης νὰ εἶναι καὶ μέτρα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα-τμῆμα).



(Σχ. 120)

Ἐὰν χαραχθῆ ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ τραπεζίου, ἀπὸ τὰς ὁμοιότητας:

$$ΑΗΕ_Δ \approx ΑΓΔ_Δ \qquad ΓΗΖ_Δ \approx ΓΑΒ_Δ$$

λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\frac{EH}{\beta} = \frac{AE}{A\Delta}, \quad \frac{HZ}{\alpha} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma B} \quad (1)$$

Ἀλλὰ $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \frac{AE}{AE+E\Delta} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \Rightarrow \frac{AE}{A\Delta} = \frac{\mu}{\mu+\nu}$ (2)

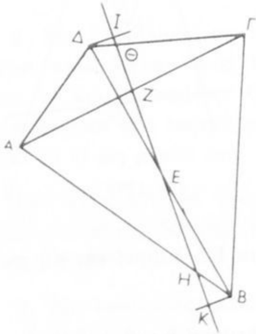
Ἐπίσης, $\frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{ZB} = \frac{\nu}{\mu} \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{\Gamma Z+ZB} = \frac{\nu}{\mu+\nu} \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{\Gamma B} = \frac{\nu}{\mu+\nu}$. (3)

Ἔτσι, αἱ (1), λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) γίνονται:

$$\frac{EH}{\beta} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \Rightarrow EH = \frac{\mu\beta}{\mu+\nu} \quad \text{καὶ} \quad \frac{HZ}{\alpha} = \frac{\nu}{\mu+\nu} \Rightarrow HZ = \frac{\nu\alpha}{\mu+\nu}$$

Συνεπῶς, $$EH + HZ = EZ = \frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}.$$

6. Εἰς ἕνα τετράπλευρον ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, ὁρίζει ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν τμήματα ἀνάλογα.



(Σχ. 121)

Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι: $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{BH}{HA}$ (1)

ἂν E, Z εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν διαγωνίων BΔ καὶ AΓ.

Ἐὰν ΔI καὶ KB εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν AΓ, ἐκ τῶν προφανῶν ὁμοιοτήτων:

$$\Delta\Theta I_\Delta \approx \Theta Z\Gamma_\Delta \qquad HKB_\Delta \approx ZAH_\Delta$$

λαμβάνομεν: $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Delta I}{Z\Gamma} \qquad \frac{BH}{HA} = \frac{KB}{AZ}$ (2)

Ἐπειδὴ τώρα ἐκ τῆς ἰσότητος: $\Delta EI_\Delta = EKB_\Delta$ ἔχομεν $\Delta I = KB$, τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς: $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{BH}{HA}$ ὅ.ἔ.δ.

7. Ἐγγράψατε εἰς δεδομένον τετράπλευρον ἕνα ῥόμβον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

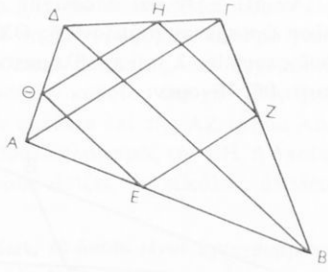
Ὅπως ἐννοοῦμεν ἡ ἐγγραφὴ τοῦ ῥόμβου ἀπαιτεῖ τὸν καθορισμὸν τῆς μιᾶς τῶν κορυφῶν του.

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta A} = \frac{\Theta H}{A\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Theta}{A\Delta} = \frac{\Theta E}{\Delta B} \qquad (1)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν ἰσοτήτων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta A} = \frac{\Delta B}{A\Gamma} \qquad (2)$$



(Σχ. 122)

Δηλ. τὸ σημεῖον Θ διαιρεῖ τὸ γνωστὸν τμῆμα ΔΑ ἐσωτερικῶς εἰς γνωστὸν λόγον. Ἔτσι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ Θ (βλ. Κεφ. 8, 6, 3ον) εἶναι δυνατὸς καὶ εὐχερής.

Σύνθεσις. Προσδιορισθέντος τοῦ Θ, ὥστε νὰ ἰσχύη ἡ (2), φέρομεν ἐξ αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ὁρίζομεν τὸ Η· κατόπιν ἐκ τοῦ Η παράλληλον πρὸς τὴν ΔΒ καὶ ὁρίζομεν τὸ Ζ. Τέλος ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ καὶ ὁρίζομεν τὸ Ε. Καὶ τώρα πρέπει νὰ ἐξακριβώσωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΘΗΖΕ εἶναι ρόμβος.

Πρῶτον θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι παραλ/μμον, διότι δὲν γνωρίζομεν, ἂν ΕΘ ∥ ΖΗ. Πράγματι, ἐκ τῶν διδομένων ἔχομεν:

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{\Gamma H}{H\Delta} = \frac{\Gamma Z}{ZB} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{AE}{EB}$$

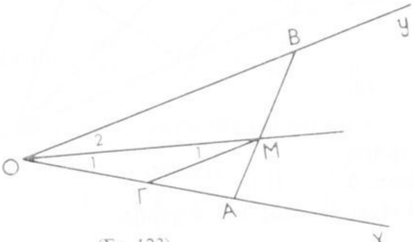
ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει νὰ εἶναι ΕΘ ∥ ΒΔ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΘΗΖΕ ἔχει τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους. Τώρα θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι ρόμβος δηλ. ὅτι: ΘΗ=ΘΕ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις (2) ἐχρησιμοποιήθη καὶ ἑπομένως ὑφίσταται. Ἐπίσης ὑφίστανται αἱ (1) λόγω τῶν ἐν τῇ Συνθέσει ἐνεργειῶν μας. Ἐκ τῶν (1), διὰ διαιρέσεώς των κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta A} = \frac{\Theta H}{A\Gamma} \cdot \frac{\Delta B}{\Theta E}$$

καὶ λόγω τῆς (2) ἔχομεν: $\frac{\Theta H}{A\Gamma} \cdot \frac{\Delta B}{\Theta E} = \frac{\Delta B}{A\Gamma} \Rightarrow \Theta H = \Theta E.$

8. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β κινοῦνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ, Οy γνωστῆς γωνίας $\widehat{XOy}$ καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda}$, ὅπου λ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα. Δείξατε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας εἰς ὡρισμένον της σημεῖον Μ.

Ἂν ΜΓ ∥ Οy καὶ ἀποδειχθῆ, ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ὅτι τὸ Γ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τῆς ΟΧ δηλ. σημεῖον ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ σταθεροῦ στοιχείου λ τοῦ προβλήματος, τότε ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεώς μας θὰ ἔχῃ διαπιστωθῆ. Ἔχομεν:



(Σχ. 123)

$$\hat{O}_1=\hat{O}_2,\ \hat{O}_2=\hat{M}_1 \Rightarrow O_1=M_1 \Rightarrow$$
$$\text{ΟΓ} = \text{ΓΜ}.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{\text{ΓΜ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΑ} - \text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} \Rightarrow$$

$$\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΒ}} = 1 - \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} \Rightarrow$$

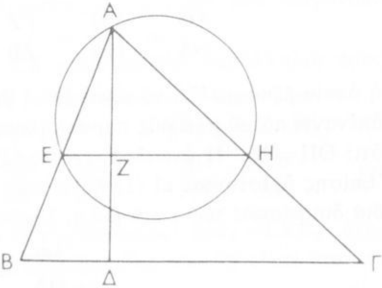
$$\text{ΟΓ}\left(\frac{1}{\text{ΟΑ}} + \frac{1}{\text{ΟΒ}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{ΟΑ}} + \frac{1}{\text{ΟΒ}} = \frac{1}{\text{ΟΓ}}$$ Δηλ. ΟΓ = λ. ὅ.ἔ.δ.

9. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν γωνίαν του Α, τὸ ὕψος του ΑΔ καὶ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ. (μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα ἢ γνωστοὶ ἀριθμοί).

Ἀνάλυσις. Ἀξιολογοῦντες τὰ δεδομένα στοιχεῖα, βλέπομεν, ὅτι ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου μας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν καθορισμὸν τῆς διευθύνσεως τῆς ΒΓ καὶ μόνον. Κατόπιν τούτου χαράσσομεν τὴν τυχοῦσαν παράλληλον ΕΗ πρὸς τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\mu}{\nu}$$



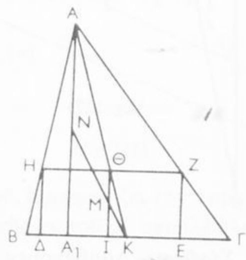
(Σχ. 124)

Τὸ τρίγωνον ΑΕΗ μὲ αὐθαίρετον τὴν βάσιν του ΕΗ δύναται νὰ κατασκευασθῇ βάσει τῶν διδομένων. Ἡ κατασκευὴ κατόπιν τοῦ ζητουμένου, καθὼς θὰ ἴδωμεν, εἶναι ἁπλῆ*.

*Τὸ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἕνα τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ. Τοιουτοτρόπως, θὰ ὁδηγηθῶμεν πρὸς τὴν ζητουμένην κατασκευὴν διὰ μέσου ὁμοίου σχήματος. Ἀποτελεῖ τὸ γεγονὸς τοῦτο χρησιμοποίησιν εἰδικῆς μεθόδου, καλουμένης μεθόδου τῶν ὁμοίων σχημάτων (βλ. σελ. 3). Ἀκόμη πρέπει νὰ εἴπωμεν εἰς τὸν ἀναγνώστην μας τὸ ἑξῆς: συμβαίνει διὰ τὰ τρίγωνα

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν αὐθαίρετον εὐθ. τμῆμα ΕΗ, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν εἰς τὸν γνωστὸν λόγον μὲ τὸ σημεῖον Ζ. Μὲ χορδὴν τὸ ΕΗ γράφομεν, κατὰ τὸ γνωστὸν γεωμετρικὸν πρόβλημα, τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τοῦ δεχομένου γωνίαν τοῦ διδομένου μεγέθους καὶ ἐκ τοῦ Ζ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΗ, ἥτις τέμνει τὸ ἐν λόγῳ τόξον εἰς τὸ Α*. Λαμβάνομεν κατόπιν ἐπὶ τῆς ΑΖ τμῆμα ΑΔ, ἴσον μὲ τὸ γνωστὸν ὕψος καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΗ, ἡ ὁποία, τέμνουσα τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΑΗ εἰς τὰ Β καὶ Γ, μᾶς ὁρίζει, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

10. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν μίαν των πλευρὰν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου.



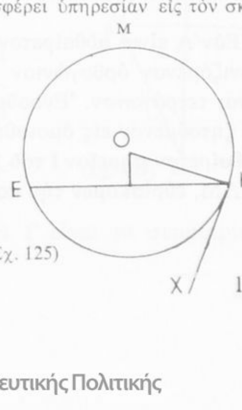
(Σχ. 126)

Τὸ κέντρον ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι καὶ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τῶν μέσων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του καὶ διὰ τὸ σχῆμα μας τὸ μέσον Μ τοῦ ΙΘ.

Ὁ γ.τ. τοῦ Θ εἶναι (ἄσκ. 1) ἡ διάμεσος ΑΚ. Ἔτσι, ὁ γ.τ τοῦ Μ, συμπίπτει μὲ τὸν γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΙΘ, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν $ΑΑ_1$ (τὸ $ΑΑ_1$ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) τοῦ ὀρθ. τριγώνου $ΑΑ_1Κ$. Συνεπῶς, κατὰ τὴν (ἄσκ. 1), ὁ ζητούμενος γ.τ εἶναι τὸ τμῆμα ΚΝ, ἂν Ν εἶναι τὸ μέσον τοῦ ὕψους $ΑΑ_1$.

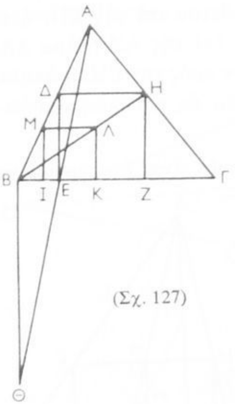
ΑΕΗ καὶ ΑΒΓ νὰ δυνάμεθα νὰ τὰ θεωροῦμεν: 1ον μὲ τὰ σημεῖα των ἀντιστοιχοῦντα ἓν τοῦ ἑνὸς πρὸς ἓν τοῦ ἄλλου, ἐνῷ αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων (τῶν Ε καὶ Β, τῶν Ζ καὶ Δ, τῶν Η καὶ Γ κ.λ.π.) νὰ συνέρχωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ 2ον μὲ τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου αὐτοῦ συνδρομῆς ἀπὸ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα νὰ ἔχουν σταθερὸν λόγον. Τὰ τοιαῦτα τρίγωνα λέγονται ὁμοιόθετα καὶ τὸ σημεῖον Α κέντρον ὁμοιοθεσίας. Ἡ ὁμοιοθεσία πάλιν ἀποτελεῖ μίαν εἰδικὴν μέθοδον διὰ τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἐπειδὴ τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα τῶν εἰσιτηρίων ἐξετάσεων δὲν κάμνει μνείαν εἰδικῶν μεθόδων, μὲ τὸν σκοπὸν τῆς ἀμέσου ἐξυπηρετήσεως τοῦ ἀναγνώστου, θὰ ὑποδεικνύωμεν τὸν τρόπον χρησιμοποιήσεως αὐτῶν τῶν μεθόδων, ὁσάκις τοῦτο προσφέρει ὑπηρεσίαν εἰς τὸν σκοπόν, ἀλλὰ χωρὶς νὰ παραθέσωμεν θεωρητικὰς ἀναπτύξεις τῶν εἰδικῶν μεθόδων.

*Ὑπομιμνήσκομεν τὴν χάραξιν τοῦ τόξου: Χαράσσομεν τὴν χορδὴν ΕΗ τοῦ τμήματος καὶ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{ΕΗΧ}$ ἴσην μὲ τὴν διδομένην $\widehat{Α}$. Ἐὰν Ο εἶναι ἡ τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Η καθέτου ἐπὶ τὴν ΗΧ καὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΕΗ, ἡ περιφέρεια (Ο,ΟΗ) μᾶς δίδει τὸ ζητούμενον τόξον $\widehat{ΕΜΗ}$.



(Σχ. 125)

11. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς γνωστὸν τρίγωνον ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.



(Σχ. 127)

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΔΕΖΗ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἐννοοῦμεν, ὅτι, προσδιοριζομένης τῆς θέσεως μιᾶς κορυφῆς, τὸ πρόβλημα εἶναι λελυμένον. Μία κορυφὴ ὅμως εἶναι ἕνα σημεῖον καὶ ἕνα σημεῖον δίδεται ὡς τομὴ δύο γραμμῶν.

Ἔτσι, χαράσσομεν τὴν ΑΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν εἰς τὸ Β κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Θ. Ἐὰν ὁρισθῇ τὸ Θ, τὸ Ε θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΑΘ.

Ἔχομεν προφανῶς: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ}{ΒΘ}$ (1), $\quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΗ}{ΒΓ}$ (2)

$$\Longrightarrow \frac{ΔΕ}{ΒΘ}=\frac{ΔΗ}{ΒΓ} \ (3) \quad \Longrightarrow \quad ΒΘ=ΒΓ.$$

ἀφοῦ ὑπεθέσαμεν ΔΕ = ΔΗ.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ΒΘ=ΒΓ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ χαράσσομεν τὴν ΑΘ. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΒΓ καὶ ΑΘ, φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὴν ΔΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τέλος τὴν ΗΖ κάθετον πρὸς τὴν ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΔΕΖΗ εἶναι τετράγωνον. Ἔχομεν ἐκ τῶν χαράξεών μας ἰσχυούσας τὰς (1) καὶ (2), συνεπῶς ἰσχύουσαν καὶ τὴν (3). Ἀλλ' ἐκ τῆς (3) συμπεραίνομεν ὅτι: ΔΕ=ΔΗ, διότι ἐλάβομεν ΒΘ=ΒΓ. ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις. Ὑπενθυμίζομεν ἐνταῦθα, ὅτι τὸ τετράγωνον μὲ διαδοχικὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΒΘ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν ὑποσημείωσιν τῆς ἀσκήσεως (9), ὁμοιόθετον τοῦ ζητουμένου εἰς ὁμοιοθεσίαν μὲ κέντρον τὸ Α. Τοιουτοτρόπως ἐδῶ ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημά μας μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ὁμοιοθέτου τετραγώνου πρὸς τὸ ζητούμενον, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ τμῆμα ΒΓ.

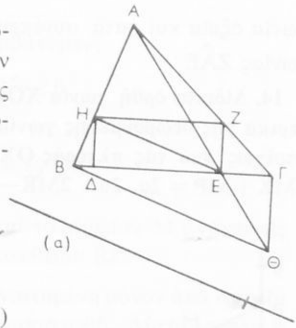
Ἐὰν Λ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ τμήματος ΒΗ καὶ κατασκευάσωμεν τὸ εἰκονιζόμενον ὀρθογώνιον ΙΚΛΜ, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον. Ἐνοοῦμεν, πῶς αὐτὸ τὸ τετράγωνον θὰ εἶναι ὁμοιόθετον πρὸς τὸ ζητούμενον εἰς ὁμοιοθεσίαν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β. Ὥστε: ὑψοῦντες ἀπὸ αὐθαίρετον σημεῖον Ι τοῦ ΒΓ τὴν κάθετον ΙΜ καὶ κατασκευάζοντες τὸ τετράγωνον ΙΚΛΜ, εὑρίσκομεν τὴν κορυφὴν Η ὡς τομὴν τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΒΛ κ.τ.λ.

12. Νὰ ἐγγραφῆ εἰς γνωστὸν τρίγωνον ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ μία τῶν διαγωνίων του νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς γνωστὴν εὐθεῖαν (α).

Ἀνάλυσις. Ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸν μόνον τῆς μιᾶς κορυφῆς τοῦ ὀρθογωνίου, ἔστω τῆς Ε. Ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν γνωστὴν εὐθεῖαν (α) τέμνεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ εἰς ἕνα σημεῖον Θ. Καὶ ἔχομεν:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AE}{A\Theta} \quad (1) \qquad \frac{AH}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma} \quad (2)$$

Καὶ ἐκ τῶν (1), (2) λαμβάνομεν: $\dfrac{AE}{A\Theta} = \dfrac{AZ}{A\Gamma}$ (3)



(Σχ. 128)

ἡ ὁποία, κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, ἐξασφαλίζει τὴν παραλληλίαν τῶν ΖΕ καὶ ΓΘ. Ἔτσι, τὸ Θ εἶναι καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Β παραλλήλου πρὸς τὴν (α) καὶ τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἡ συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματος κατέστη πλέον προφανής.

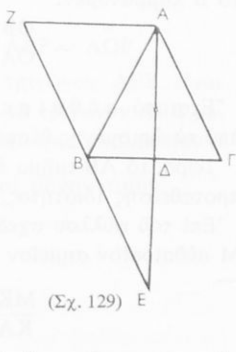
13. Νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἀπὸ τὴν γωνίαν του $\hat{A}$ καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha + h_\alpha$.

Ἀνάλυσις. Προεκτείνομεν τὸ $A\Delta = h_\alpha$ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα $\Delta E = B\Gamma$. Ὥστε $AE = \alpha + h_\alpha$. Ἡ εὐθεῖα ΕΒ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ εἰς τὸ Ζ. Καὶ ἔχομεν:

$$\frac{AZ}{AE} = \frac{\Delta B}{\Delta E} = \frac{1}{2} \Rightarrow AZ = \tfrac{1}{2}\, AE.$$

Ἔτσι, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΖΕ κατασκευάζεται.

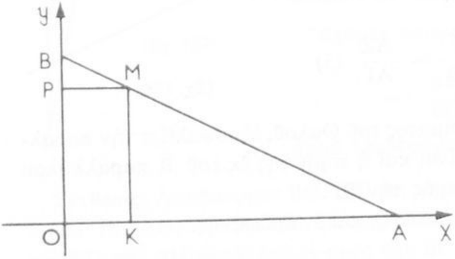
Σύνθεσις. Μὲ καθέτους πλευρὰς $AE = \alpha + h_\alpha$ καὶ $AZ = \tfrac{1}{2}(\alpha + h_\alpha)$ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΖΕ. Καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὸ τμῆμα ΑΕ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην μὲ $\dfrac{\hat{A}}{2}$. Ἂν ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς $\dfrac{\hat{A}}{2}$ τέμνη τὸ τμῆμα ΖΕ εἰς τὸ Β καὶ Γ εἶναι τὸ συμμετρικὸν



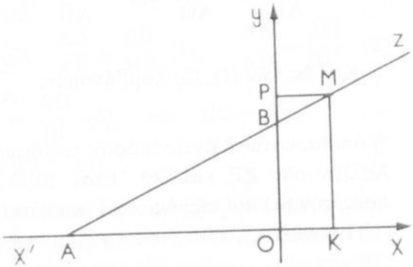
(Σχ. 129)

τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΑΕ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, τὸ ζητούμενον. Σημειοῦμεν μόνον, ὅτι ἡ $\frac{\hat{A}}{2}$ ὡς ἥμισυ γωνίας τριγώνου θὰ εἶναι γωνία ὀξεῖα καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἑτέρα της πλευρὰ ΑΒ θὰ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $Z\hat{A}E$.

14. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $X\hat{O}y$. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ, ἅτινα εἶναι ἐσωτερικὰ τῆς θεωρουμένης γωνίας καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΜΚ καὶ ΜΡ ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΟΧ καὶ Οy ἱκανοποιοῦν τὴν μίαν τῶν σχέσεων: 1ον $2MK+MP=2\alpha$. 2ον. $2MK-MP=2\beta$, ὅπου α, β γνωστὰ εὐθύγραμμα τμήματα.



(Σχ. 130)



(Σχ. 131)

1ον Ἔστω Μ αὐθαίρετον σημεῖον, τοῦ ζητουμένου γ.τ. Ἐὰν ΚΑ=2ΜΚ, θὰ ἔχωμεν ΟΑ=ΟΚ+ΚΑ=ΡΜ+2ΜΚ=2α. Καί, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΜ τέμνη τὴν Οy εἰς τὸ Β λαμβάνομεν:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{KM}{KA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad OB = \tfrac{1}{2}\, OA.$$

Ἔτσι, τὸ αὐθαίρετον σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ ὡρισμένης θέσεως σημεῖα Α καὶ Β.

Τώρα, τὸ ΑΒ τμῆμα δύναται νὰ θεωρηθῆ συνιστάμενον μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς προταθείσης ἰδιότητος;

Ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως ὑφίσταται τὸ ΑΒ μὲ $OA=2\alpha$ καὶ $OB=\alpha$. Ἐὰν Μ αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ ΑΒ, λαμβάνομεν:

$$\frac{MK}{KA} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad MK = \tfrac{1}{2}\, KA$$

Ὥστε: ΟΚ+ΚΑ=ΡΜ+2ΜΚ=2α.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν γεωμ. τόπος εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

2ον Ἔστω καὶ πάλιν Μ (Σχ. 131) αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ ζητουμένου γεωμετρικοῦ τόπου.

Ἐπὶ τῆς ΟΧ′ λαμβάνομεν ΚΑ = 2ΚΜ καὶ ἔτσι λαμβάνομεν:

$$ΟΑ = ΚΑ - ΚΟ = 2ΚΜ - ΜΡ = 2β.$$

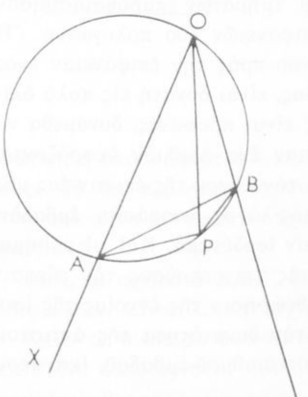
Ἀκόμη λαμβάνομεν:

$$\frac{ΟΒ}{ΟΑ} = \frac{ΚΜ}{ΚΑ} = \frac{1}{2} \Longrightarrow ΟΒ = \tfrac{1}{2}\, ΟΑ$$

Ἔτσι, τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὡρισμένης θέσεως καὶ τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ΑΒ, πέραν τοῦ Β δηλ. εἰς τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΖ.

Τὸ ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἡμιευθεῖα δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ. Αὐτὴ λοιπὸν ἡ ἡμιευθεῖα εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

15. Δίδεται γωνία $X\hat{O}y$ καὶ σημεῖον Ρ ἐσωτερικὸν αὐτῆς τῆς γωνίας. Μὲ χορδὴν τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΡ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Δείξατε, ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΡΑ}{ΡΒ}$ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς γραφείσης περιφερείας.



(Σχ. 132)

Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραλεύρου ΟΑΡΒ λαμβάνομεν:

$$Β\hat{Α}Ρ = Ρ\hat{Ο}Β, \qquad Α\hat{Β}Ρ = Α\hat{Ο}Ρ$$

Συνεπῶς, αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΡΒ εἶναι ὡρισμένου μεγέθους. Ἔτσι, τὸ τρίγωνον ΑΡΒ μένει ὅμοιον ἑαυτῷ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ὁ λόγος $\frac{ΡΑ}{ΡΒ}$ διατηρεῖ μίαν καὶ μόνην τιμήν.

9 ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

1. Ἡ ἔννοια «Ἐμβαδὸν»

Αἱ ἀνάγκαι τοῦ πρακτικοῦ ἀνθρωπίνου βίου ὡδήγησαν εἰς τὴν ἀναγκαιότητα τῆς συγκρίσεως τῶν διαφόρων εὐθ. τμημάτων μεταξύ των. Ἡ ἀπευθείας ὅμως σύγκρισίς των ἢ ἄλλως ἡ μέτρησις τοῦ ἑνὸς μὲ μονάδα συγκρίσεως τὸ ἄλλο εἰς πλείστας περιπτώσεις καθίστατο ἐξαιρετικὰ δυσχερὴς καὶ ὄχι σπανίως ἀδύνατος.* Δεδομένου ἀκόμη, ὅτι ἡ γεωμετρία ἐργάζεται ἐπὶ στοιχείων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀφηρημέναι ἔννοιαι ἤ, πλέον συγκεκριμένως, λογικαὶ κατασκευαὶ (σημεῖα, γραμμαί, ἐπιφάνειαι), ἐφευρέθησαν καθαρῶς θεωρητικαὶ γεωμετρικαὶ μέθοδοι διὰ τῶν ὁποίων διεπιστώθη, ὅτι εἰς κάθε εὐθ. τμῆμα δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν (ρητὸν ἢ ἄρρητον), ὁ ὁποῖος ὠνομάσθη **μῆκος** αὐτοῦ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος. Ὁ ἀριθμὸς-μῆκος (βλ. Κεφ. 7) ἱκανοποιεῖ δύο συνθῆκας:

1ον. Δύο ἴσα εὐθ. τμήματα νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεώς των εἰς τὸν χῶρον.

2ον Τὸ εὐθ. τμῆμα Α, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων εὐθ. τμημάτων Β καὶ Γ, νὰ ἔχῃ μῆκος τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν Β καὶ Γ.**

Αἱ δυσχέρειαι τῆς ἀπευθείας συγκρίσεως δύο εὐθ. τμημάτων ἐπαρουσιάσθησαν ἐπηυξημέναι διὰ τὴν ἀπευθείας σύγκρισιν τῶν ἐπιφανειῶν δύο πολυγώνων. Ἡ ἀπευθείας σύγκρισις τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ἄλλου πολυγώνου, ὀνομαζομένης μονάδος ἐπιφανείας, εἶναι δυνατὴ εἰς πολὺ ὀλίγας περιπτώσεις. Εἰς αὐτὰς τὰς περιπτώσεις, ὅπως εἶναι προφανές, δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, εἰς τὴν ὑπὸ σύγκρισιν ἐπιφάνειαν ἕνα ἀριθμὸν ἐκφράζοντα, ὅπως καὶ προκειμένου περὶ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸν λόγον τῆς ἐπιφανείας μας πρὸς τὴν μοναδιαίαν ἐπιφάνειαν. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς-λόγος ὠνομάσθη **ἐμβαδόν.** Δύο δὲ πολύγωνα μὲ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ὠνομάσθησαν **ἰσοδύναμα.** Καὶ οἱ μαθηματικοὶ ἐκκινοῦντες ἀπὸ τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις, τὰς ἐπιτρεπούσας τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ διά τινα πολύγωνα, ἐπέτυχον, μὲ τὴν θεώρησιν τῆς ἐννοίας τῆς ἰσοδυναμίας, διὰ θεωρητικῶν γεωμετρικῶν μεθόδων τὴν δυνατότητα τῆς ἀντιστοιχίσεως εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου πολυγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ-ἐμβαδοῦ, ἱκανοποιοῦντος τὰς συνθῆκας:

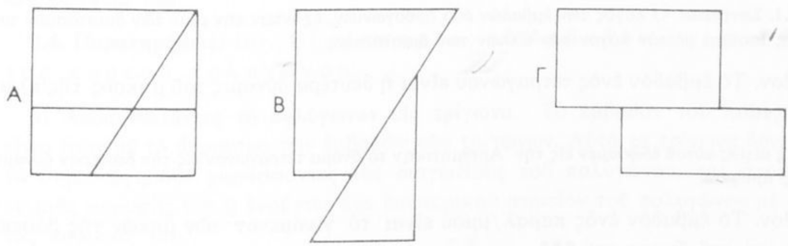
*Ὅπως π.χ. ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀπροσίτων σημείων.

** Αὐταὶ αἱ συνθῆκαι συνεπάγονται καὶ τοῦτο: Ἐὰν π.χ. οἱ ἀριθμοί: $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots$ καὶ $\beta_0 + \frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{7^2} + \dots$ ἐκφράζουν τὸ μῆκος ἑνὸς εὐθ. τμήματος διὰ συγκρίσεώς του μὲ διαφορετικοὺς τρόπους πρὸς τὸ αὐτὸ εὐθ. τμῆμα-μονάδα, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι. Καὶ αὐτό, διότι καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ θὰ ἱκανοποιοῦν τὰς δύο προαναφερθείσας συνθῆκας, ἀφοῦ εἶναι καὶ οἱ δύο ἀποτέλεσμα ἐφαρμογῆς τῶν θεωρητικῶν μεθόδων, τῶν ὁδηγουσῶν εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς μήκους.

1ον Δύο πολύγωνα ἴσα νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ὁποιαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις των εἰς τὸν χῶρον.

2ον Τὸ πολύγωνον Π, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων πολυγώνων Π΄, Π΄΄ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν Π΄ καὶ Π΄΄.

Φανερὸν εἶναι, ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται ἐξασφαλίζουν, ὅπως ἐξαγόμενα συγκρίσεως μιᾶς ἐπιφανείας μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν-μονάδα, ἀλλὰ μὲ διαφορετικοὺς τρόπους, εἶναι ἴσοι, διότι καὶ οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἱκανοποιοῦν τὰς ἀνωτέρω δύο συνθῆκας, ἐφόσον προῆλθον μὲ ἐφαρμογὴν τῶν θεωρητικῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἔγινε φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῶν λέξεων «ἐπιφάνεια» καὶ «ἐμβαδὸν» ὑφίσταται ἡ διαφορὰ



(Σχ. 133)

ἐκείνη, ἡ ὁποία ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν λέξεων «εὐθύγραμμον τμῆμα» καὶ «μῆκος». Τὰ ἴσα πολύγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἀλλὰ δύο πολύγωνα δύνανται νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν χωρὶς νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν*.

Ἔτσι, τὰ σχήματα Α,Β,Γ, ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἀλλὰ δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν. Εἶναι λοιπὸν σχήματα «ἰσοδύναμα».

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου δύναται νὰ ὁρισθῇ κατὰ ἕνα ἀπεριόριστον ἀριθμὸν τρόπων, ἐφόσον δυνάμεθα νὰ ἀλλάσσωμεν τὴν μονάδα ἐμβαδοῦ**. Εἰς πᾶσαν ὅμως περίπτωσιν λαμβάνομεν ὡς μονάδα ἐμβαδοῦ τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰν τὴν ἐκλεγμένην «μονάδα μήκους»***.

*Εἰς τὴν συνήθη φρασεολογίαν χρησιμοποιοῦνται αἱ λέξεις «ἐπιφάνεια» καὶ «ἐμβαδὸν» ἐν πολλοῖς ταυτοσήμως.

**Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ὡρισμένου πολυγώνου ἀντιστοιχοῦμεν κατὰ συνθήκην τὸν ἀριθμὸν (1) καὶ τὴν ὀνομάζομεν «μονάδα ἐμβαδοῦ».

***Πρόκειται καὶ ἐδῶ δι᾽ ἐκεῖνο τὸ εὐθ. τμῆμα εἰς τὸ ὁποῖον κατὰ συνθήκην ἀντιστοιχοῦμεν τὸν ἀριθμὸν (1).

1.1. Παρατήρησις: Δυνάμεθα, ὡς ὁ καθεὶς ἀντιλαμβάνεται, νὰ θεωρήσωμεν ὡς προφανεῖς τὰς προτάσεις:

1ον. Τὰ ἀθροίσματα ἢ αἱ διαφοραὶ ἰσοδυνάμων σχημάτων εἶναι σχήματα ἰσοδύναμα.

2ον Τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια καὶ τὰ αὐτὰ ὑποπολλαπλάσια ἰσοδυνάμων σχημάτων εἶναι σχήματα ἰσοδύναμα.

2. Ἐκφράσεις Ἐμβαδῶν*

1ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν διαστάσεών του.**

2.1. Συνέπεια: Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, ἐχόντων τὴν μίαν τῶν διαστάσεών των ἴσην, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἄλλων των διαστάσεων.

2ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του.

Ἐξ αἰτίας αὐτοῦ ἐδώσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τὸ ὄνομα τετράγωνον εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ.

3ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλ/μμου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ὕψους του.***

---

*Ὀνομάζομεν **βάσιν ἑνὸς ὀρθογωνίου** τὴν μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του· **ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου** ὀνομάζομεν τὴν πλευράν του, τὴν κάθετον εἰς τὴν βάσιν του.

Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου ὀνομάζονται **διαστάσεις** αὐτοῦ.

Ὀνομάζομεν **βάσιν ἑνὸς παραλ/μμου** τὴν μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του· **ὕψος τοῦ παραλ/μμου** ὀνομάζομεν τὴν ἀπόστασιν τῆς βάσεώς του ἀπὸ τὴν ἀπέναντι ταύτης πλευράν.

Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι αἱ παράλληλοι πλευραί του· **τὸ ὕψος του** εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο του βάσεων.

Εἰς ἕνα **τρίγωνον** δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν **ὡς βάσιν** τὴν ὁποιανδήποτε πλευράν του· **τὸ ὕψος του** εἶναι ἡ ἀπόστασις αὐτῆς τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν τοῦ τριγώνου.

**Καὶ ἀφοῦ τὰ μήκη τῶν διαστάσεών του εἶναι οἱ λόγοι αὐτῶν τῶν διαστάσεων πρὸς τὴν ἐκλεγμένην μονάδα μήκους, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ἐν λόγῳ μονάδα μήκους, καὶ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁποίας, ὅπως εἴπομεν ἀνωτέρω, ἀποδίδομεν τὸν ἀριθμὸν (1).

***Ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι κάθε παραλ/μμον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ ἐντεῦθεν ἡ διατυπωθεῖσα ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ του. Ἔχομεν λοιπὸν καὶ πάλιν τὸν λόγον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλ/μμου πρὸς τὴν μοναδιαίαν ἐπιφάνειαν ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς-ἐμβαδὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς μονάδων ἐπιφανείας, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλ/μμου.

Ἐφεξῆς πρέπει νὰ μεταφράζωμεν τὸν ἀριθμὸν-ἐμβαδὸν ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν.

4ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν μηκῶν τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ὕψους του.

2.2. Συνέπειαι: 1ον. Δύο τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. Τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν μηκῶν τῶν βάσεών των μὲ τὰ ὕψη των.

3ον. Τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως ἢ τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ μήκη τῶν ὑψῶν των ἢ ὡς τὰ μήκη τῶν βάσεών των. Αὐτὰ τὰ συμπεράσματα εἶναι σημεῖον πρὸς σημεῖον ἐφαρμόσιμα καὶ εἰς τὰ παραλ/μμα.

5ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

2.3 Συνέπεια: Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς διαμέσου του καὶ τοῦ ὕψους του.

2.4. Παρατηρήσεις: 1ον. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τυχόντος κυρτοῦ πολυγώνου:

α) **Ἀποσυνθέτοντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα.** Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων. Αὐτὰ τὰ τρίγωνα δύνανται νὰ δημιουργηθοῦν χαράσσοντες τὰς διαγωνίους τοῦ πολυγώνου, τὰς ἀγομένας ἐκ μιᾶς κορυφῆς του ἢ ἑνοῦντες ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου μὲ ὅλας τὰς κορυφάς του.

β) Ἀποσυνθέτοντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἢ ὀρθογώνια τραπέζια.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν χαράσσομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον τοῦ πολυγώνου καὶ φέρομεν ἐξ ἑκάστης τῶν κορυφῶν του κάθετα εὐθ. τμήματα ἐπ' αὐτὴν τὴν διαγώνιον καὶ μέχρις αὐτῆς.

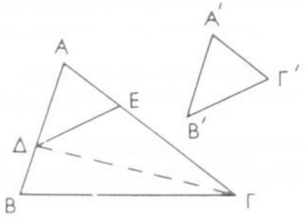
2ον Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, περιγεγραμμένου μιᾶς περιφερείας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιγινόμενον τῆς περιμέτρου του καὶ τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς τῆς περιφερείας.

3. Σχέσεις μεταξὺ τῶν Ἐμβαδῶν

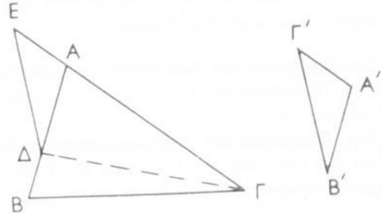
1ον. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν των γωνίαν ἴσην ἢ δύο γωνίας των παραπληρωματικάς, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν αὐτὰς τὰς γωνίας.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν των γωνίαν ἴσην (Σχ. 134) ἢ τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας των παραπληρωματικὰς (Σχ. 135).

Ἐὰν (Σχ. 134) λάβωμεν ΑΔ=Α΄Β΄, ΑΕ=Α΄Γ΄, ἐφόσον ἔχομεν $\hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\Delta E_\Delta =$



(Σχ. 134)



(Σχ. 135)

$A'B'\Gamma'_{\Delta}$. Ἐπίσης, ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ (Σχ. 135) λάβωμεν $AE = A'\Gamma'$ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τμῆμα $A\Delta = A'B' \Rightarrow A\Delta E_{\Delta} = A'B'\Gamma'_{\Delta}$, ἐὰν ἔχωμεν $B\hat{A}\Gamma + \hat{A}' = 2_{\llcorner}$.

Χαράσσομεν εἰς ἀμφότερα τὰ σχήματα τὸ τμῆμα ΓΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουν ἐμβαδὰ μὲ λόγον τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν βάσεών των:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{(AB)}{(A\Delta)} \qquad (1)$$

Ἐπίσης, τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΔΕ ἔχουν ἐμβαδὰ μὲ λόγον τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν βάσεών των ΑΓ καὶ ΑΕ. Ὥστε:

$$\frac{(A\Delta\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{(A\Gamma)}{(AE)} \qquad (2)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{(AB)\cdot(A\Gamma)}{(A\Delta)\cdot(AE)} \cdot \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{(AB)\cdot(A\Gamma)}{(A'B')\cdot(A'\Gamma')}$$

3.1. Συνέπειαι: 1ον Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν των γωνίαν ἴσην ἢ δύο γωνίας των παραπληρωματικὰς εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν τὰ γινόμενα τῶν μηκῶν, τῶν περιεχουσῶν αὐτὰς τὰς γωνίας πλευρῶν, εἶναι ἴσα.

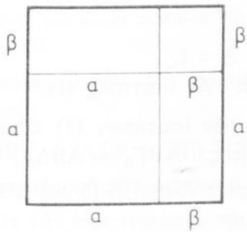
2ον. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητός των.

3ον Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητός των*.

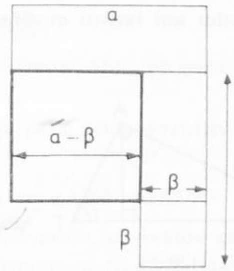
*Δύο ὅμοια πολύγωνα, ὅπως ἀνεφέραμεν (Κεφ. 8, 8) δύνανται νὰ συντεθοῦν ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁμοίων τριγώνων, ἑνὸς πρὸς ἕνα, καὶ ὁμοίως τοποθετημένων.

3.2. Τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο εὐθ. τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων ηὐξημένον ἢ ἐλαττωμένον κατὰ τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον μὲ διαστάσεις αὐτὰ τὰ δύο τμήματα*.

Δὲν ἔχει κανεὶς παρὰ νὰ παρατηρήσῃ τὰ παρατιθέμενα σχήματα (136) καὶ (137).



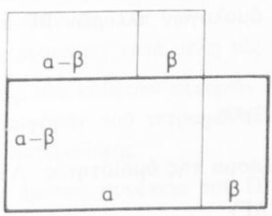
(Σχ. 136)



(Σχ. 137)

3.3. Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ κατασκευαζόμενον μὲ διαστάσεις τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν δύο εὐθ. τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο αὐτῶν τμημάτων.

Μίαν ἀπευθείας ἀπόδειξιν αὐτῆς τῆς προτάσεως λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ (Σχ. 138).



(Σχ. 138)

*Διὰ τὴν συντόμευσιν τῆς ἐκφράσεως θὰ λέγωμεν:

α) Πλευρὰ ἑνὸς σχήματος καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς πλευρᾶς.

β) Τὸ γινόμενον τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

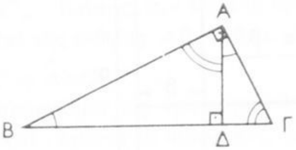
γ) Τὸ τετράγωνον τοῦ τάδε εὐθ. τμήματος καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐν λόγῳ τετραγώνου.

4. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα

1. Ἐὰν ΑΔ εἶναι ὕψος ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἶναι τὸ Δ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, αἱ ἰσότητες:

α) $(AB)^2 = (B\Gamma)(\Delta B)$, $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$ (1) β) $(A\Delta)^2 = (\Delta B)(\Delta\Gamma)$ (2)

εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι διὰ νὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.



(Σχ. 139)

Ὑπόθεσις: $\widehat{A} = 1_{\llcorner}$

Συμπέρασμα: Αἱ ἰσότητες (1).*

Ἡ πρώτη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι συνέπεια τῆς ὁμοιότητος: $AB\Gamma_{\Delta} \approx AB\Delta_{\Delta}$. Ἡ δευτέρα τῶν (1) εἶναι συνέπεια τῆς ὁμοιότητος $AB\Gamma_{\Delta} \approx A\Delta\Gamma_{\Delta}$.

Ὑπόθεσις: $(AB)^2 = (B\Gamma)(\Delta B)$

Συμπέρασμα: $\widehat{A} = 1_{\llcorner}$.

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν: $\dfrac{(AB)}{(\Delta B)} = \dfrac{(B\Gamma)}{(AB)} \Rightarrow AB\Gamma_{\Delta} \approx AB\Delta_{\Delta}$, ἐφόσον τὰ ἐν λόγῳ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν Β κοινήν. Ὥστε: $\widehat{A} = B\widehat{\Delta}A$, διότι εἶναι γωνίαι κείμεναι ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΒ.

Ὑπόθεσις: $\widehat{A} = 1_{\llcorner}$.

Συμπέρασμα: ἡ ἰσότης (2)**

Ἡ ἰσότης (2) εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ὁμοιότητος: $AB\Delta_{\Delta} \approx A\Delta\Gamma_{\Delta}$

Ὑπόθεσις: $(A\Delta)^2 = (\Delta B)(\Delta\Gamma)$

Συμπέρασμα: $\widehat{A} = 1_{\llcorner}$.

---

*Δηλ.: Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης του καὶ τῆς προβολῆς της εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

**Τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα τὴν διαιρεῖ.

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν: $\frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΔΒ})} = \frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΔ})} \Rightarrow \text{ΑΒΔ}_\Delta \approx \text{ΑΔΓ}_\Delta$, διότι

$\text{Β}\hat{\Delta}\text{Α} = \text{Α}\hat{\Delta}\Gamma = 1_{\llcorner}$. Ὥστε καί: $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\text{Α}$, $\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Delta$, $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta + \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma + \text{Β}\hat{\Gamma}\text{Α} \Rightarrow \hat{\text{Α}} = 1_{\llcorner}$.

1.1. Παρατήρησις: Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θεωρηθῇ προσανατολισμένη καὶ εἶναι τὸ ἴχνος Δ τοῦ ὕψους ΑΔ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, λέγομεν:

Ἡ ἰσότης: $(\text{ΑΔ})^2 = -(\text{ΔΒ})(\Delta\Gamma)$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. (βλ. Κεφ. 7 σελ. 87).

1.2. Συνέπειαι: 1ον. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) (ἐδ. 4, 1.) λαμβάνομεν:

$$(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ})\,[(\text{ΒΔ}) + (\Delta\Gamma)] \Rightarrow (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ})^2 \quad (1)$$

Δηλ.: Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσάν του εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν καθέτων του πλευρῶν **(Πυθαγόρειον θεώρημα).**

Θὰ δείξωμεν μεταγενεστέρως, ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ **ἀντίστροφος πρότασις** καὶ συνεπῶς θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ (1) ἀποτελεῖ καὶ αὐτὴ **ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην διὰ νὰ εἶναι ἕνα τρίγωνον ὀρθογώνιον.**

2ον. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὰ τετράγωνα, τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς του γωνίας εἶναι μεταξύ των ὅπως αἱ προβολαὶ αὐτῶν τῶν πλευρῶν εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ διαιρέσεωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) τοῦ (ἐδ. 4, 1.).

3ον. Τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

4ον. $\frac{1}{(\text{ΑΒ})^2} + \frac{1}{(\text{ΑΓ})^2} = \frac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$, ὅπου ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ κάθετοι πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

Πράγματι, $(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ})^2 \quad (\text{ΑΒ})^2 \cdot (\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΒΓ})^2 \cdot (\text{ΑΔ})^2 \, * \Rightarrow$

* Ἡ ἰσότης: (ΑΒ)(ΑΓ) = (ΒΓ)(ΑΔ) ἐκφράζει κατὰ δύο διαφορετικοὺς τρόπους τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

$$\frac{(AB)^2+(A\Gamma)^2}{(AB)^2\cdot(A\Gamma)^2}=\frac{(B\Gamma)^2}{(B\Gamma)^2(A\Delta)^2} \Rightarrow \frac{1}{(AB)^2}+\frac{1}{(A\Gamma)^2}=\frac{1}{(A\Delta)^2}$$ ὅ.ἔ.δ.

5ον. Μία χορδὴ περιφερείας τινὸς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἕνα της ἄκρον καὶ τῆς ὀρθῆς προβολῆς της εἰς αὐτὴν τὴν διάμετρον.

6ον. Εἰς μίαν περιφέρειαν, τὸ ἐξ ἑνὸς σημείου της κάθετον εὐθ. τμῆμα ἐπί τινα διάμετρόν της, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἴχνος αὐτοῦ τοῦ καθέτου τμήματος διαιρεῖ αὐτὴν τὴν διάμετρον.

Αὐταὶ αἱ τελευταῖαι προτάσεις εἶναι ἄλλαι ἐκφράσεις τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) (Κεφ. 9, 4., 1.).

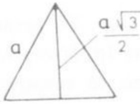
1.3 Ἐνδιαφέρουσα σημείωσις: Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν εἰς ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του ἢ ἡ διαγώνιος δ τετραγώνου πλευρᾶς α, εἶναι $\alpha\sqrt{2}$. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\delta=\alpha\sqrt{2}$$

(Σχ. 140)

καὶ λέγομεν τότε, ὅτι ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου καὶ ἡ διαγώνιός του εἶναι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ α μεταξύ των εὐθ. τμήματα. Εἰς αὐτὴν δηλ. τὴν περίπτωσιν δὲν ὑφίσταται εὐθ. τμῆμα-μονάς, τὸ ὁποῖον, ἐπαναλαμβανόμενον εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν, νὰ μᾶς δώσῃ τὰ α καὶ δ. Ἂν ὑπῆρχε τοιοῦτον εὐθ. τμῆμα τότε ὁ λόγος των (βλ. Κεφ. 7, 1.) θὰ ἦτο ἀριθμὸς σύμμετρος, διότι θὰ ἦτο ὁ λόγος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος θὰ ἐξέφραζε τὸ μῆκος ἑκάστου τούτων ὡς πρὸς τὴν κοινὴν μονάδα. Ὁ λόγος τῶν δ καὶ α εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{2}$. *

Ἐπίσης, ἐὰν ἔχωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α, τὸ ὕψος του, εἶναι $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$. Δηλ. $h=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$.



(Σχ. 141)

Ἔτσι, τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι μεταξύ των εὐθ. τμήματα ἀσύμμετρα. Ὁ λόγος των εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3.1 Ὑπενθυμίζομεν, ὅτι $\sqrt{2}=1{,}414$ καὶ $\sqrt{3}=1{,}732$ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ. Δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως, ἐφόσον διαρκεῖ ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος, νὰ ἀντικαθίστανται αἱ ρίζαι αὐται μὲ τὰς προσεγγιστικάς των τιμάς. Ἐπιτρέπεται τοῦτο μόνον εἰς τὸ τέλος τοῦ προβλήματος καὶ ἐφόσον ζητεῖται νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἀποτέλεσμα μὲ προσεγγιστικὴν ἀριθμητικὴν τιμήν.

**Ἰδοὺ λοιπὸν θεωρητικὸς τρόπος (ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος) ἀποδεικνύων τὴν ὕπαρξιν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, τὴν ὁποίαν ἀνηγγείλαμεν εἰς τὸ ἐδ. 3 τοῦ Κεφ. 7.

5. Μετρικαὶ σχέσεις ἐπὶ τῶν οἱωνδήποτε τριγώνων

1. Εἰς ἕνα τρίγωνον, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι μιᾶς ὀξείας γωνίας, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς μιᾶς τούτων ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

2. Εἰς ἕνα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβείας του γωνίας, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς μιᾶς τούτων ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

3. **Σχόλιον.** Αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις μαζὶ μὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα συνιστοῦν μίαν τριάδα προτάσεων ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο ἐξασφαλίζουν τὴν ἰσχὺν τῆς ἀντιστρόφου τῆς τρίτης ἐξ αὐτῶν.

Ἔτσι, ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν:

$$(\text{ΒΓ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2$$

ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή. Διότι, ἐὰν ἦτο ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, συμφώνως πρὸς τὰς προηγουμένας προτάσεις, θὰ εἴχομεν τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΒΓ μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι διαπιστοῦμεν τὴν ἰσχὺν τῶν ἀντιστρόφων τῶν δύο ἄλλων προτάσεων.*

4. Συμπέρασμα: **Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἕνα τρίγωνον ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον ἢ ὀρθογώνιον, εἶναι, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας του πλευρᾶς νὰ εἶναι μικρότερον, μεγαλύτερον ἢ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

5. Σημειοῦμεν ἐπίσης, ὅτι αἱ ἀνωτέρω προτάσεις (1), (2) παρέχουν **τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ μήκους τῆς προβολῆς μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἰς μίαν ἄλλην του πλευράν.**

*Ἐὰν τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν, ἡ πλευρὰ αὐτὴ κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας. Διότι, ἐὰν ἔκειτο ἀπέναντι ὀξείας ἢ ὀρθῆς γωνίας, τὸ τετράγωνόν της θὰ ἦτο μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν. Καί,

Ἐὰν τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν, ἡ πλευρὰ αὕτη κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας. Διότι, ἐὰν ἔκειτο ἀπέναντι ἀμβλείας ἢ ὀρθῆς γωνίας, τὸ τετράγωνόν της θὰ ἦτο μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τατραγώνων τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν.

6. **Τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου.** Εἰς ἕνα τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο του πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης του πλευρᾶς ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτὴν τὴν τρίτην του πλευρὰν

Ἔτσι, ἔχομεν τὴν ἔκφρασιν:

$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=2(AM)^2+\frac{(B\Gamma)^2}{2} \quad \text{ἤ} \quad \beta^2+\gamma^2=2\mu^2_\alpha+\frac{\alpha^2}{2}$$

ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.*

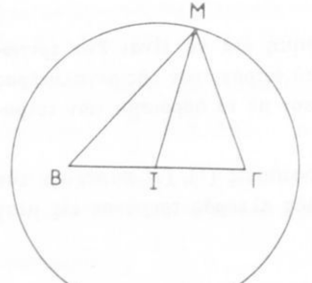
Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ τελευταία ἔκφρασις ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἰσότητα:

$$\mu_\alpha=\frac{\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}}{2}$$

ἐκφράζουσαν τὸ μῆκος τῆς διαμέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου μας συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.

Εἰς ἐφαρμογὴν τοῦ πρώτου θεωρ. τῆς διαμέσου ἐκθέτομεν εὐθὺς ἀμέσως ἕνα πρόβλημα γεωμετρικοῦ τόπου καὶ ἕνα θεώρημα.

6.1. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ δύο σταθεὰ σημεῖα αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερὸν K^2, ὅπου Κ γνωστὸν εὐθύγραμμον τμῆμα.**



(Σχ. 142)

Ἔστωσαν Β καὶ Γ δύο ὡρισμένα σημεῖα τῶν ὁποίων τὴν ἀπόστασιν χαρακτηρίζομεν μὲ τὸ α. Καὶ ἔστω Μ ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον, τοῦ ζητουμένου γ.τ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΒΓ λαμβάνομεν:

$$MB^2+M\Gamma^2=2MI^2+\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$$

$$2MI^2+\frac{\alpha^2}{2}=K^2 \Rightarrow MI=\frac{\sqrt{(K\sqrt{2})^2-\alpha^2}}{2} \quad (1)$$

ἂν Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΓ.

*Σημειοῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου εἶναι τὸ μόνον θεώρημα, τὸ ὁποῖον καθορίζει τὸ ἰσοδύναμον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου.

**Εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα θὰ διατηρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν ἐκπροσώπησιν τῶν ἀναφερομένων μεγεθῶν.

Ἡ ἔκφρασις (1) μᾶς λέγει, ὅτι κάθε σημεῖον, ἐκ τῆς ἰδιότητος τὴν ὁποίαν ἔχει εἰς τὸ πρόβλημα, ἀπέκτησε καὶ τὴν ἰδιότητα: νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ ὡρισμένον σημεῖον Ι ἀπόστασιν, ἐκφραζομένην εἰς μέγεθος μὲ τὸ 2ον μέλος τῆς (1). Ἀνήκει λοιπὸν τοῦτο **ἀναγκαίως** εἰς τὴν περιφέρειαν $\left(\text{I}, \dfrac{\sqrt{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}}{2}\right)$

Θεωροῦμεν τώρα ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως τὰ σημεῖα Β,Γ, τὴν περιφέρειαν $\left(\text{I}, \dfrac{\sqrt{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}}{2}\right)$ καὶ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας αὐθαίρετον σημεῖον Μ. Τὸ Ι φυσικὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΒΓ.

Ἀφοῦ τὸ εὐθ. τμῆμα ΙΜ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΜΒΓ, ἔχομεν:

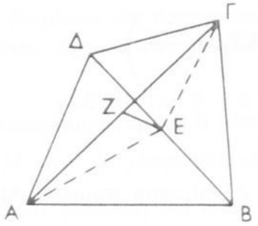
$$(\text{MB})^2+(\text{M}\Gamma)^2=2(\text{MI})^2+\frac{(\text{B}\Gamma)^2}{2}=2.\frac{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$$
$$(\text{MB})^2+(\text{M}\Gamma)^2=\text{K}^2$$

Τὸ αὐθαίρετον λοιπὸν σημεῖον Μ τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας ἱκανοποιεῖ τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ προβλήματος. Καὶ ἀφοῦ ἡ περιφέρεια $\left(\text{I}, \dfrac{\sqrt{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}}{2}\right)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα, ἐκπροσωπεῖ τὸν ζητούμενον γεωμετρικὸν τόπον.

6.1.1. Σημείωσις. Τὸ εὐθ. τμῆμα: $\text{R}=\dfrac{\sqrt{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}}{2}$ εἶναι κατασκευάσιμον: 1ον. Τὸ $\text{K}\sqrt{2}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τετραγώνου πλευρᾶς Κ (Κεφ. 9, 1.3)· τὸ $\sqrt{(\text{K}\sqrt{2})^2-\alpha^2}$ εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὸ $\text{K}\sqrt{2}$ καὶ μὲ ἑτέραν κάθετον πλευρὰν τὸ τμῆμα α. Τέλος, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ τοῦ τελευταίου τμήματος εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ διαπιστωθέντος γεωμετρικοῦ τόπου.

Εἶναι φανερὸν πὼς ἡ δυνατότης τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι: $\text{K}\sqrt{2} \geq \alpha$.

6.2. Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἑνὸς τυχόντος τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ εὐθ. τμήματος, τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα αὐτῶν τῶν διαγωνίων.



(Σχ. 143)

Μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου εἰς τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΒΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$(\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{AB})^2 = 2(\mathrm{AE})^2 + \left(\frac{\Delta\mathrm{B}}{2}\right)^2$$

$$(\Gamma\Delta)^2 + (\Gamma\mathrm{B})^2 = 2(\Gamma\mathrm{E})^2 + \left(\frac{\Delta\mathrm{B}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{B}\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta\mathrm{A})^2 =$$

$$2.\left[(\mathrm{AE})^2 + (\Gamma\mathrm{E})^2\right] + (\Delta\mathrm{B})^2 =$$

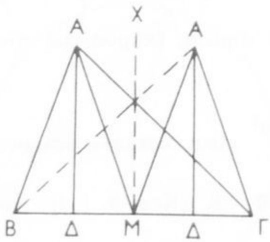
$$2.\left[2(\mathrm{EZ})^2 + 2\left(\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}\right)^2\right] + (\Delta\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}\Gamma)^2 + (\Delta\mathrm{B})^2 + 4(\mathrm{EZ})^2.$$

Ἐφηρμόσαμεν ἐνδιαμέσως τὸ πρῶτον θεώρ. τῆς διαμέσου καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ.

6.2.1. Πόρισμα: Εἰς ἕνα παραλ/μμον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

Εἰς τὸ παραλ/μμον τὰ σημεῖα Ε,Ζ συμπίπτουν.

7. Τὸ δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς τρίτης του πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς εἰς αὐτὴν τὴν πλευρὰν ἀντιστοιχούσης διαμέσου ἐπὶ ταύτην.



(Σχ. 144)

Ὥστε, ὑφίσταται ἡ ἔκφρασις:

$$\left|(\mathrm{AB})^2 - (\mathrm{A}\Gamma)^2\right| = 2(\mathrm{B}\Gamma)\cdot(\mathrm{M}\Delta).$$

Τὰ εἰκονιζόμενα εἰς τὸ (Σχ. 144) δύο τρίγωνα ΑΒΓ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον ΜΧ τοῦ τμήματος ΒΓ.*

Εἰς ἐφαρμογὴν τοῦ 2ου θεωρήματος τῆς διαμέσου ἐκθέτομεν τὸ ἑπόμενον πρόβλημα γεωμετρικοῦ τόπου:

*Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως: $(\mathrm{A}\Gamma)^2 = (\mathrm{A}\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2$ $(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A}\Delta)^2 + (\Delta\mathrm{B})^2 \Rightarrow (\mathrm{A}\Gamma)^2 - (\mathrm{AB})^2 = (\Delta\Gamma)^2 - (\Delta\mathrm{B})^2$ $(\mathrm{A}\Gamma > \mathrm{AB})$. Ἔτσι, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται καὶ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν των εἰς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

9 ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

7.1. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου των εἶναι σταθερά.*

Ἔτσι, (Σχ. 144), ζητοῦμεν τὸν γ.τ. τῶν σημείων Α διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίσταται ἡ ἰσότης:

$$\left| AB^2 - A\Gamma^2 \right| = K^2 \qquad (1)$$

ὅπου Κ ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα.

Κατὰ τὸ 2ον θεώρ. τῆς διαμέσου ἡ (1) γράφεται:

$$2.B\Gamma.M\Delta = K^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2.B\Gamma}{K} = \frac{K}{M\Delta} \qquad (2)$$

Τὸ ΜΔ λοιπὸν παρουσιάζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων 2.ΒΓ, Κ, Κ καὶ κατασκευάζεται (βλ. Κεφ. 7, σελ. 91, 3ον)

Τί διεπιστώθη λοιπόν; Ὅτι ἕνα σημεῖον Α, συνεπίπεδον τῶν Β, Γ καὶ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ προβλήματος, προβάλλεται εἰς τὸ **ὡρισμένον** σημεῖον Δ τῆς εὐθείας ΒΓ, τῆς θέσεως τοῦ Δ καθοριζομένης ἐκ τῆς (2). Ἀνήκουν λοιπὸν τὰ Α εἰς τὴν αὐτὴν προβάλλουσαν, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Δύναται ὅμως ἡ ἐκ τοῦ σημείου Δ, τοῦ ἐκ τῆς ἰσότητος (2) καθοριζομένου, κάθετος, νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα Α τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος;

Ἐὰν λοιπὸν Α εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ καθέτου, ἐκ τοῦ 2ου θεωρ. τῆς διαμέσου λαμβάνομεν:

$$\left| AB^2 - A\Gamma^2 \right| = 2.B\Gamma.M\Delta \quad \text{ἢ}$$

καί: $$\left| AB^2 - A\Gamma^2 \right| = 2.B\Gamma.\frac{K^2}{2.B\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \left| AB^2 - A\Gamma^2 \right| = K^2$$

ἐξ αἰτίας τῆς (2).

Συμπέρασμα: Αἱ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, αἱ ὑψούμεναι ἐκ τῶν συμμετρικῶν σημείων Δ ὡς πρὸς τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΒΓ, συνίστανται ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα Α, τὰ ἔχοντα τὴν ἰδιότητα τοῦ προβλήματος καὶ δύνανται νὰ θεωροῦν-

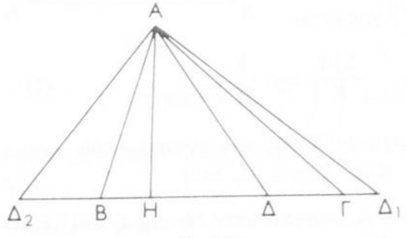
*Εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα θεωροῦμεν τὰ χρησιμοποιούμενα εἰς τὰς σχέσεις μεγέθη μὲ τὴν γεωμετρικήν των ἐκπροσώπησιν.

ται συνιστάμεναι μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα. Αὐταὶ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ἱκανοποιοῦν τὸ πρόβλημά μας.

8. Θεώρημα τοῦ Stewart. Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ συνδέῃ τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΒΓ σημεῖον Δ, ὑφίσταται ἡ κατωτέρω σχέσις τοῦ Stewart:

$$\beta^2\cdot(\text{Β}\Delta)+\gamma^2(\Delta\Gamma)=\alpha\left[(\text{Α}\Delta)^2+(\text{Β}\Delta)(\Delta\Gamma)\right] \quad (1)$$

Χαράσσομεν τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου: Τὸ πλάγιον τώρα εὐθ. τμῆμα ΑΔ, ὅπως εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ, θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῶν τμημάτων ΔΒ, ΔΓ τοῦ ΒΓ ἀνίσους γωνίας. Τὸ σχῆμα μας παρουσιάζει ὀξεῖαν τὴν γωνίαν ΒΔΑ καὶ ἀμβλεῖαν τὴν γωνίαν ΑΔΓ καὶ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΔ ἐφαρμόζομεν ἀντιστοίχως τὰς προτάσεις (2) καὶ (1) τοῦ ἐδ. 5 τοῦ Κεφ. 9. Ὥστε:



(Σχ. 145)

$$\beta^2=(\text{Α}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2+2(\Delta\Gamma)(\Delta\text{Η})$$
$$\gamma^2=(\text{Α}\Delta)^2+(\text{Β}\Delta)^2-2(\text{Β}\Delta)(\Delta\text{Η})$$

Τὰς ἰσότητας ταύτας πολλαπλασιάζομεν ἀντιστοίχως ἐπὶ (ΒΔ) καὶ (ΔΓ) καὶ τὰς προσθέτομεν:

$$\beta^2(\text{Β}\Delta)+\gamma^2(\Delta\Gamma)=(\text{Α}\Delta)^2\left[(\text{Β}\Delta)+(\Delta\Gamma)\right]+(\text{Β}\Delta)(\Delta\Gamma)\left[(\text{Β}\Delta)+(\Delta\Gamma)\right] \Rightarrow$$

$$\beta^2(\text{Β}\Delta)+\gamma^2(\Delta\Gamma)=\alpha\left[(\text{Α}\Delta)^2+(\text{Β}\Delta)(\Delta\Gamma)\right]$$

8.1. Σημείωσις: Ἐὰν τὸ θεωρούμενον σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι ἐξωτερικὸν αὐτῆς δηλ. ἐὰν πρόκειται διὰ τὸ σημεῖον Δ_1 ἢ τὸ σημεῖον Δ_2, ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διαπιστοῦμεν τὰς ἀκολούθους διατυπώσεις τῆς σχέσεως Stewart.

$$\beta^2\cdot(\text{Β}\Delta_1)-\gamma^2\cdot(\Gamma\Delta_1)=\alpha\left[(\text{Α}\Delta_1)^2-(\Gamma\Delta_1)(\text{Β}\Delta_1)\right] \quad (2)$$

$$\gamma^2(\Delta_2\Gamma)-\beta^2(\Delta_2\text{Β})=\alpha\left[(\text{Α}\Delta_2)^2-(\Delta_2\text{Β})(\Delta_2\Gamma)\right] \quad (3)$$

Μ ν η μ ο ν ι κ ὸ ς κ α ν ώ ν. Τὸ σημεῖον Δ_1 διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὸ τμῆμα ΒΓ εἰς τὰ τμήματα $\text{Β}\Delta_1$ καὶ $\Gamma\Delta_1$, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ($\text{Β}\Delta_1-\Gamma\Delta_1=\text{ΒΓ}$) μᾶς δίδουν τὸ τμῆμα ΒΓ. Ἐπίσης τὸ Δ_2 διαιρεῖ τὸ τμῆμα ΓΒ ἐξωτερικῶς εἰς τὰ τμήματα $\Gamma\Delta_2$, $\text{Β}\Delta_2$ τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ($\Gamma\Delta_2-\text{Β}\Delta_2=\Gamma\text{Β}$) μᾶς δίδουν τὸ τμῆμα ΓΒ.

Εἰς τὰς ἀνωτέρω λοιπὸν ἐκφράσεις τῆς σχέσεως Stewart λαμβάνεται ὡς μειωτέος ὁ ὅρος ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς παράγοντα τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων διαιρέσεως τοῦ ΒΓ ἢ τοῦ ΓΒ.

8.2. Ἐφαρμογαὶ τοῦ θεωρήματος Stewart. Τὸ θεώρημα τοῦ Stewart προσφέρεται διὰ πολυαρίθμους ἐφαρμογάς. Ἐὰν ἡ θέσις τοῦ Δ ἀποδίδη εἰς τὸ ΑΔ μίαν ἰδιότητα ὡς πρὸς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ σχέσις Stewart ἐπιτρέπει νὰ ἔχωμεν μίαν ἰδιότητα αὐτοῦ τοῦ ἰδίου τριγώνου ἢ μίαν ἰδιότητα ἑνὸς σχήματος, τὸ ὁποῖον συνδέεται μὲ τὸ τρίγωνον. Θὰ ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα μερικὰς ἐξ αὐτῶν τῶν ἐφαρμογῶν.

Ἐφαρμογὴ 1η. Ἐὰν τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΒΓ, ἡ σχέσις Stewart μετασχηματίζεται εἰς τὴν σχέσιν μὲ τὴν ὁποίαν διατυποῦται τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου. Ἡ διαπίστωσις τοῦ γεγονότος εἶναι ἁπλῆ.

Ἐφαρμογὴ 2α. Ἐὰν τὸ Δ εἶναι τὸ ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου, ἡ σχέσις Stewart μᾶς δίδει τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας ἔχομεν: $\dfrac{(\text{Β}\Delta)}{\gamma} = \dfrac{(\Delta\Gamma)}{\beta} = \dfrac{(\text{Β}\Delta)+(\Delta\Gamma)}{\beta+\gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$

Ὥστε: $$(\text{Β}\Delta) = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}, \quad (\Delta\Gamma) = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}.$$

Καὶ θέτοντες $(\text{Α}\Delta) = \delta\alpha$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1) τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου (8).

$$\beta^2 \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \gamma^2 \cdot \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} = \alpha\left[\delta^2_\alpha + (\text{Β}\Delta)(\Delta\Gamma)\right] \Rightarrow$$

$$\delta^2_\alpha = \beta\gamma - (\text{Β}\Delta)(\Delta\Gamma) \qquad (1) \quad \Rightarrow$$

$$\delta^2_\alpha = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} \quad \Rightarrow \quad \delta^2_\alpha = \frac{\beta\gamma[(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2]}{(\beta+\gamma)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\delta^2_\alpha = \frac{\beta\gamma\,(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}{(\beta+\gamma)^2} \quad \Rightarrow \quad \delta^2_\alpha = \frac{4\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}{(\beta+\gamma)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau\,(\tau-\alpha)} \qquad (2)$$

Ἐθέσαμεν: $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$ καὶ συνεπῶς, $\alpha+\beta+\gamma-2\alpha = 2\tau-2\alpha \quad \Rightarrow$
$\beta+\gamma-\alpha = 2(\tau-\alpha)$.

Ἐξυπακούεται, ὅτι αἱ ἐκφράσεις:

$$\delta_\beta = \frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\gamma\tau(\tau-\beta)} \qquad \delta_\gamma = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}$$

ἀφοροῦν τὰ μήκη τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) ὁδηγεῖ εἰς τὴν διατύπωσιν μιᾶς ἀξιοσημειώτου προτάσεως: **Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου ἐσωτερικῆς γωνίας τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι τὴν περιέχουν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ ὑπὸ τοῦ ἴχνους αὐτῆς τῆς διχοτόμου.**

Ἐφαρμογὴ 3η. Ἐὰν τὸ Δ_2 εἶναι τὸ ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἔκφρασις (3) τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου (8.1) θὰ μᾶς δώση τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας ἔχομεν:

$$\frac{(\Delta_2\Gamma)}{\beta} = \frac{(\Delta_2 B)}{\gamma} = \frac{(\Delta_2\Gamma)-(\Delta_2 B)}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta-\gamma} \implies (\Delta_2\Gamma) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma},\ (\Delta_2 B) = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$$

Καὶ θέτοντες $(A\Delta_2) = \delta'_\alpha$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (3) τοῦ (8.1):

$$\gamma^2 \cdot \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma} - \beta^2 \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma} = \alpha\left[\delta'^2_\alpha - (\Delta_2 B)(\Delta_2\Gamma)\right]$$

$$\implies \quad \delta'^2_\alpha = (\Delta_2 B)(\Delta_2\Gamma) - \beta\gamma \qquad (1) \qquad \implies$$

$$\delta'^2_\alpha = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \beta\gamma = \beta\gamma \cdot \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^2} = \beta\gamma \cdot \frac{(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2} \implies$$

$$\delta'^2_\alpha = \frac{4\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2} \implies \delta'_\alpha = \frac{2}{\beta-\gamma}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ἐνῶ ἐθέσαμεν $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$ καὶ ἐθεωρήσαμεν $\beta > \gamma$.

Ἐξυπακούεται, ὅτι αἱ ἐκφράσεις:

$$\delta'_\beta = \frac{2}{|\alpha-\gamma|}\sqrt{\alpha\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)} \qquad \delta'_\gamma = \frac{2}{|\alpha-\beta|}\sqrt{\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$$

ἀφοροῦν τὰ μήκη τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι καὶ ἐδῶ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) ὁδηγεῖ εἰς τὴν διατύπωσιν μιᾶς ἀξιοσημειώτου προτάσεως: **Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διχοτόμος αὕτη διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς τῆς γωνίας πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

Ἐφαρμογὴ 4η. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΔ, $ΑΔ_1$, $ΑΔ_2$ ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἀπὸ τὸν λόγον τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ,ν γνωστοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τοῦ τμήματος ΒΓ ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Δ, $Δ_1$, $Δ_2$.

Ἔχομεν:

$$\frac{(ΒΔ)}{\mu}=\frac{(ΔΓ)}{\nu}=\frac{(ΒΔ)+(ΔΓ)}{\mu+\nu}=\frac{\alpha}{\mu+\nu}\Rightarrow (ΒΔ)=\frac{\alpha\mu}{\mu+\nu},\ (ΔΓ)=\frac{\alpha\nu}{\mu+\nu}$$

Καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος (1) τοῦ Stewart λαμβάνομεν:

$$(ΑΔ)^2=\frac{\mu\beta^2+\nu\mu^2}{\mu+\nu}-\frac{\mu\nu\alpha^2}{(\mu+\nu)^2}$$

Μὲ τὴν ὑπόθεσιν: $\frac{(ΒΔ_1)}{\mu}=\frac{(ΓΔ_1)}{\nu}$, ἐργαζόμενοι, ὅπως ἀνωτέρω, λαμβάνομεν:

$$(ΑΔ_1)^2=\frac{\mu\beta^2-\nu\gamma^2}{\mu-\nu}+\frac{\alpha^2\mu\nu}{(\mu-\nu)^2},\ \text{ἐξυπακούεται: } \mu>\nu$$

Τέλος, μὲ τὴν ὑπόθεσιν: $\frac{(Δ_2Β)}{\mu}=\frac{(Δ_2Γ)}{\nu}$, εὑρίσκομεν:

$$(ΑΔ_2)^2=\frac{\gamma^2\nu-\beta^2\mu}{\nu-\mu}+\frac{\alpha^2\mu\nu}{(\nu-\mu)^2},\ \text{ἐξυπακούεται: } \nu>\mu$$

9. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου. Θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 145), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία Β παρουσιάζεται ὡς ὀξεῖα. Ἔχομεν προφανῶς ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν προτάσεων (Κεφ. 9, 5, 1) καὶ (Κεφ. 9, 4, 1.2, 3ον).

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot(ΒΗ) \qquad (ΑΗ)^2=h^2_\alpha=\gamma^2-(ΒΗ)^2\Rightarrow$$

$$h^2_\alpha=\gamma^2-\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}\right)^2=\frac{4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}\Rightarrow$$

$$h_\alpha^2 = \frac{(2\alpha\gamma+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)(2\alpha\gamma-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2)}{4\alpha^2} = \frac{\left[(\alpha+\gamma)^2-\beta^2\right]\left[\beta^2-(\alpha-\gamma)^2\right]}{4\alpha^2} \Rightarrow$$

$$h_\alpha^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha^2} \Rightarrow$$

$$h\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ἐνῶ ἐθέσαμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$.

Ἐὰν ἡ γωνία Β ἦτο ἀμβλεῖα, θὰ εἴχομεν, ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν (Κεφ. 9, 5, 2), $\quad (BH) = \dfrac{\beta^2-\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha}$

ἀλλὰ ἡ ἰσότης, ἡ ἐκφράζουσα τὸ h_α^2, δὲν θὰ μετεβάλετο, διότι χρησιμοποιεῖται εἰς αὐτὴν τὸ τετράγωνον τοῦ (ΒΗ). Σημειοῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο του ἐκφράσεις τὸ (ΒΗ) εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς (βλ. Κεφ. 9, 5, 4).

9.1. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου. Ἔχομεν, ὡς γνωστόν,

$$E_\Delta = \frac{\alpha}{2}\cdot h_\alpha = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad \text{(Τύπος τοῦ Ἥρωνος)}$$

10. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τραπεζίου. Εἰς τὸ (Σχ. 38) ὑπολογίζομεν τὸ ὕψος $h_{\gamma-\alpha}$ τοῦ τριγώνου ΓΕΒ συναρτήσει τῶν πλευρῶν του καὶ λαμβάνομεν, κατὰ τὸν προηγουμένως διαπιστωθέντα τύπον:

$$h_{\gamma-\alpha} = \frac{1}{2(\gamma-\alpha)}\sqrt{(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\gamma+\delta-\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-\delta)} \Rightarrow$$

$$h_{\gamma-\alpha} = \frac{2}{\gamma-\alpha}\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)(\tau-\alpha-\beta)(\tau-\alpha-\delta)} \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$$

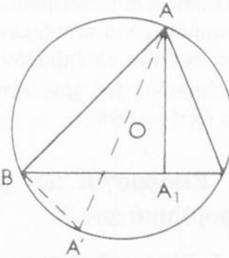
Ἔτσι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τοῦ (Σχ. 38), συναρτήσει τῶν πλευρῶν του, εἶναι

$$E = \frac{\gamma+\alpha}{\gamma-\alpha}\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)(\tau-\alpha-\beta)(\tau-\alpha-\delta)}$$

11. Ἡ ἀκτὶς τῆς περὶ τρίγωνον περιγεγρ. περιφερείας. Ἐὰν τὸ AA_1 εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α΄ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α, ἐκ τῆς προφανοῦς ὁμοιότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων $AA_1\Gamma$ καὶ ΑΑ΄Β, λαμβάνομεν:

$$\frac{\beta}{2R} = \frac{h_\alpha}{\gamma} \Rightarrow \beta\gamma = 2Rh_\alpha \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad R = \frac{\beta\gamma}{2h_\alpha} \quad (2)$$



(Σχ. 146)

Ἡ (1) βεβαιώνει τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως:
Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἰσότης πάλιν (2) παρέχει τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγρ. περὶ τρίγωνον περιφερείας συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου:

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \Rightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E_\Delta}$$

12. Αἱ ἀκτῖνες τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τρίγωνον περιφερειῶν.

Εἰς τὸ (Σχ. 147) Ο, Ι εἶναι ἀντιστοίχως τὸ κέντρον ἐγγεγραμμένης καὶ τὸ κέντρον τῆς παρεγγεγραμμένης εἰς τὴν γωνίαν Α περιφερείας, εἶναι δὲ φανεραὶ αἱ ἰσότητες:

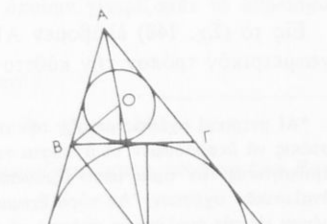
$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΒΟ}) + (\text{ΟΒΓ}) + (\text{ΟΓΑ}) \Rightarrow$$

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΒΙ}) + (\text{ΑΙΓ}) - (\text{ΒΙΓ})$$

$$E_\Delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cdot \rho, \qquad E_\Delta = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \cdot \rho_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad E_\Delta = \tau \cdot \rho, \qquad E_\Delta = (\tau-\alpha) \cdot \rho_\alpha$$

ὅπου ρ, ρ_α αἱ ἀκτῖνες τῶν προαναφερθεισῶν περιφερειῶν.



(Σχ. 147)

Ἐὰν τὰς ἰσότητας: $E_\Delta = \tau \cdot \rho$, $E_\Delta = (\tau-\alpha)\rho_\alpha$, $E_\Delta = (\tau-\beta)\rho_\beta$, $E_\Delta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$, πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$E^4_\Delta = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\rho\,\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma \Rightarrow E^2_\Delta = \rho\,\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma .$$

Ἔχομεν τοιουτοτρόπως σχέσεις, ἐκφραζούσας τὰ μήκη τῶν ἀκτίνων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν συναρτήσει τῶν πλευρῶν του, ἐφόσον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκφράζεται συναρτήσει πλευρῶν, ἀλλὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκφραζόμενον συναρτήσει τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ἐν λόγω ἀκτίνων του.

6. Ἐφαρμογαὶ τῶν μετρικῶν σκέσεων εἰς τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων.*

1. Ἐὰν α, β εἶναι γνωστὰ εὐθύγραμμα τμήματα, νὰ κατασκευασθῆ εὐθ. τμῆμα χ, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει μία τῶν ἰσοτήτων:

$$\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad \chi^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Τὸ μὲν χ τῆς πρώτης ἰσότητος εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β, τὸ δὲ χ τῆς δευτέρας ἰσότητος** εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὸ α καὶ μὲ ἑτέραν κάθετον πλευρὰν τὸ β.

2. Νὰ κατασκευασθῆ τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἀνάλογον τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων α καὶ β.

Ζητοῦμεν λοιπὸν τὴν κατασκευὴν τοῦ τμήματος χ, τοῦ ἱκανοποιοῦντος τὴν ἰσότητα: $\chi^2 = \alpha \cdot \beta$.

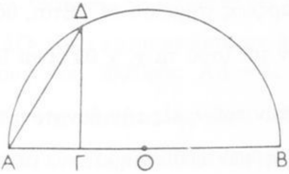
1ος Τρόπος.

Εἰς τὸ (Σχ. 148) ἐλάβομεν $AB = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ καὶ ὑψώσαμεν κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον τὴν κάθετον ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ

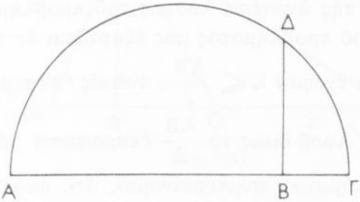
*Αἱ μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν διαφόρων πολυγώνων μᾶς ἐπιτρέπουν πλειστάκις νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ἄγνωστα γεωμετρικὰ μεγέθη εἰς ἕνα γεωμετρικὸν πρόβλημα μὲ τὰς ἀριθμητικάς των τιμὰς μέσω ἐξισώσεων ἀλγεβρικῶν ἢ τριγωνομετρικῶν ἢ γενικώτερον μέσω ἀναλυτικῶν σχέσεων. Ἂν τώρα ἔχωμεν τὸν τρόπον τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν ἐγκλειομένων εἰς τὰς ἀναλυτικὰς σχέσεις μὲ τὰς ἀριθμητικάς των τιμὰς εὐθ. τμημάτων, ἐπιτυγχάνομεν δι' ἀναλυτικῆς ὁδοῦ (δηλ. ἀλγεβρικῶς ἢ τριγονωμετρικῶς) τὴν γεωμ. λύσιν τοῦ ἑκάστοτε προβλήματός μας. Ἀξίζει νὰ διευκρινίσωμεν, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν δι' ἀναλυτικῆς ὁδοῦ λύσιν ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος μεσολαβήση ἔκφρασις, περιέχουσα καὶ τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, πρέπει, ἑρμηνευόμενοι οὗτοι γεωμετρικῶς νὰ ἀντικαθίστανται μὲ λόγους γνωστῶν εὐθ. τμημάτων. Ἡ τριγωνομετρικὴ ἔκφρασις ἑνὸς ἀγνώστου στοιχείου θὰ γίνη ἀποκλειστικῶς πρὸς διευκόλυνσιν, καὶ ἡ λύσις θὰ ἔχη γεωμετρικὴν ἀξίαν, ἐφόσον μεσολαβήση γεωμετρικὴ ἔκφρασις ὅλων τῶν ἀγνώστων στοιχείων.

**Μᾶς ἐδόθη καὶ προγενεστέρως ἡ αἰτία νὰ ὁμιλήσωμεν δι' αὐτὴν τὴν κατασκευήν.

σημεῖον τομῆς τῆς ἐν λόγῳ καθέτου καὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΒ, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ δίδει τὴν λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα (Κεφ. 9, 4, 1.2, 5ον).



(Σχ. 148)



(Σχ. 149)

2ος τρόπος

Εἰς τὸ (Σχ. 149) ἐλάβομεν $ΑΓ = α + β$, $ΑΒ = α$ καὶ ὑψώσαμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ μέχρι τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΓ. Τὸ ΒΔ εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματός μας (Κεφ. 9, 4, 1.2, 6ον).

3. Νὰ κατασκευασθῆ τὸ εὐθ. τμῆμα χ, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα: $χ = α\sqrt{μ}$, ὅπου τὸ α εἶναι γνωστὸν εὐθ. τμῆμα καὶ τὸ μ ρητὸς ἀριθμός.

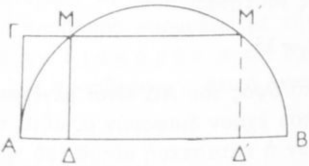
Ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης γίνεται: $χ^2 = μα^2 = μα \cdot α$ καὶ ἔτσι τὸ χ εἶναι τὸ μέσον ἀνάλογον εὐθ. τμῆμα τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων μα καὶ α.

4. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον.

Ζητοῦμεν δηλ. τὰ εὐθ. τμήματα χ,y διὰ τὰ ὁποῖα:

$$χ + y = α \quad \text{καὶ} \quad χ \cdot y = μ \cdot ν \quad \text{ἢ} \quad χ \cdot y = λ^2$$

ὅπου α, μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα. Τὸ λ προσδιορίζεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω 2ον πρόβλημα.



(Σχ. 150)

Χαράσσομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὸ α καὶ μὲ αὐτὸ ὡς διάμετρον γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. ΑΓ εἶναι εὐθ. τμῆμα κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ καὶ ἴσον μὲ λ. Ἡ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τέμνει ἐν γένει τὴν γραφεῖσαν ἡμιπεριφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′. Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ

Μ ἐπὶ τοῦ ΑΒ, τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ, ὡς εἶναι φανερόν, ἱκανοποιοῦν τὸ πρόβλημά μας. Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὰ τμήματα Δ΄Β καὶ ΑΔ΄, ἂν Δ΄ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Μ΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω λύσεως τοῦ προβλήματός μας ἔγινε φανερὸν πῶς ἡ δυνατότης τοῦ προβλήματός μας ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὑπάρξεως σημείου Μ. Ἔτσι, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν $\lambda \leqslant \frac{AB}{2}$, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἴσου τὰ χ, y θὰ εἶναι ἴσα μὲ $\frac{AB}{2}$. Ἀφοῦ ὅμως τὸ $\frac{AB}{2}$ ἐκπροσωπεῖ τὸ μέγιστον τοῦ λ εἰς τὴν δυνατότητα τοῦ προβλήματος, συμπεραίνομεν, ὅτι, ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν εὐθ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τὸ μεγαλύτερον γινόμενον τὸ ἔχουν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ζεῦγος ἴσων εὐθ. τμημάτων.

Δὲν θὰ δυσκολευθῆ ὁ καθεὶς νὰ ἀντιληφθῆ, ὅτι τὰ χ, y εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\omega^2 - \alpha\omega + \lambda^2 = O$ καὶ νὰ θεωρήση τὸν ἀνωτέρω τρόπον προσσδιορισμοῦ τῶν χ, y γεωμετρικὴν λύσιν αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι, ἄν, ἡ δι' ἀναλυτικῆς ὁδοῦ λύσις ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος, ὁδηγήση εἰς τὴν ἀναζήτησιν δύο εὐθ. τμημάτων μὲ γνωστὸν ἄθροισμα καὶ γινόμενον, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις θὰ εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος καὶ ὁ ὑποδειχθεὶς γεωμετρικὸς τρόπος προσδιορισμοῦ τῶν χ, y θὰ ἀποτελῆ τὴν γεωμετρικήν του λύσιν.

Σ η μ ε ι ο ῦ μ ε ν ἀ κ ό μ η, ὅτι δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν τύπον τῆς 2ου ἐξισώσεως. Ἔχομεν τότε:

$$\omega = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (2\lambda)^2}}{2}$$

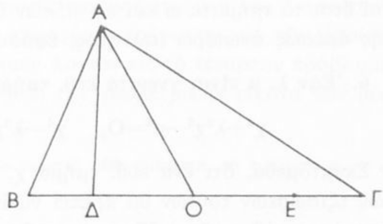
Τὸ τμῆμα $\sqrt{\alpha^2 - (2\lambda)^2}$ κατασκευάζεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω 1ον πρόβλημα καὶ συνεπῶς ἔχομεν ἕνα νέον τρόπον γεωμετρικῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως.

5. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν διαφορὰν α καὶ τὸ γινόμενον των λ^2 (α, λ γνωστὰ εὐθ. τμήματα).

Ζητοῦμεν λοιπὸν τὰ χ, y, τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰς ἰσότητας:

$$\chi - y = \alpha \qquad \chi \cdot y = \lambda^2$$

Ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 151) τὸ ὕψος του ΑΔ εἶναι μεγέθους λ καὶ τὰ τμήματα ΔΓ καὶ ΒΔ τῆς ὑποτεινούσης του ἔχουν διαφορὰν α, αὐτὰ τὰ τμήματα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ χ, y. Ζητεῖται λοιπὸν ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.



(Σχ. 151)

Ἂν ΕΓ = ΒΔ $\Rightarrow$ ΔΕ = ΔΓ—ΒΔ = ΔΕ = α καὶ ἀκόμη τὸ μέσον τοῦ ΒΓ θὰ εἶναι καὶ μέσον τοῦ ΔΕ. Ὥστε ΔΟ = $\frac{\alpha}{2}$ καὶ συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΟ εἶναι κατασκευάσιμον ἀπὸ τὰς καθέτους του πλευρὰς ΑΔ = λ, ΔΟ = $\frac{\alpha}{2}$. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τώρα τοῦ ΑΔΟ συνάγεται εὐκόλως ἡ κατασκευὴ τοῦ ΑΒΓ.

Σημείωσις: Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω σύστημα λαμβάνομεν:

$$\chi + (-y) = \alpha \qquad \chi(-y) = -\lambda^2$$

καὶ συνεπῶς τὰ τμήματα χ καὶ —y εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\omega^2 - \alpha\omega - \lambda^2 = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτη ἔχει τὴν μίαν ρίζαν της ἀρνητικὴν καὶ τὰ ἀνωτέρω εὑρεθέντα τμήματα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἐκπροσωποῦντα τὴν γεωμετρικήν της λύσιν, ἂν τὰ θεωρήσωμεν προσανατολισμένα: θετικὸν τὸ τμῆμα ΔΓ = χ καὶ ἀρνητικὸν τὸ τμῆμα ΔΒ = — y. (βλ. Κεφ. 9, 4, 1.1).

Ἐπίσης, ἐκ τοῦ τύπου τῆς 2ου ἐξισώσεως ἔχομεν:

$$\omega = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + (2\lambda)^2}}{2}$$

Βλέπομεν τώρα, ὅτι $\sqrt{\alpha^2 + (2\lambda)^2} > \alpha$ καὶ συνεπῶς, ὅτι ἡ μία ρίζα ἀνταποκρίνεται εἰς εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἐχαρακτηρίζετο ὡς ἀρνητικόν. Δεδομένου ὅμως ὅτι:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + (2\lambda)^2} + \alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + (2\lambda)^2} - \alpha}{2} = \alpha$$

δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς χ τὸν μειωτέον καὶ ὡς y τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἔτσι τὸ πρόβλημα παραμένει μὲ τὴν ἀρχικήν του διατύπωσιν: δηλ. τὰ τμήματα χ, y ἔχουν διαφορὰν α καὶ ὄχι τὰ τμήματα χ καὶ —y ἔχουν ἄθροισμα α*.

Ἂς προσθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται:

$$\omega(\omega - \alpha) = \lambda^2$$

*Ὁ χαρακτηρισμὸς δηλ. τοῦ y ὡς ἀρνητικοῦ τμήματος εἰσέρχεται μὲ τὴν ἔννοιαν «διαφορά».

καὶ ἔτσι τὰ τμήματα ω καὶ ω—α, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι λ^2, εἶναι τὰ χ, y τῆς ἀμέσως ἀνωτέρω ἰσότητος, ἐφόσον ἔχομεν ω—(ω—α) = α.*

6. Ἐὰν λ, μ εἶναι γνωστὰ εὐθ. τμήματα, νὰ λυθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ἐξισώσεις:

$$\chi^4+\lambda^2\chi^2-\mu^4=0, \quad \chi^4-\lambda^2\chi^2-\mu^4=0, \quad \chi^4-\lambda^2\chi^2+\mu^4=0$$

Σκεπτόμεθα, ὅτι ἕνα εὐθ. τμῆμα χ, τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο γεωμετρικὴ λύσις μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τούτων θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἰσότητα: $\chi^2=\lambda\cdot\omega$, ὅπου ω ἄγνωστον εὐθ. τμῆμα. Ἔτσι, προσδιοριζομένου τοῦ ω θὰ ἐπροσδιορίζετο τὸ χ.

Μετὰ μίαν τοιαύτην ἀντικατάστασιν αἱ ἐξισώσεις γίνονται:

$$\lambda^2\omega^2+\lambda^3\omega=\mu^4, \quad \lambda^2\omega^2-\lambda^3\omega=\mu^4 \quad \lambda^2\omega^2-\lambda^3\omega=-\mu^4$$

$$\Rightarrow \quad \omega(\omega+\lambda)=\frac{\mu^4}{\lambda^2}, \quad \omega(\omega-\lambda)=\frac{\mu^4}{\lambda^2}, \quad \omega(\lambda-\omega)=\frac{\mu^4}{\lambda^2}$$

Ἐὰν τώρα θέσωμεν: $\frac{\mu^4}{\lambda^2}=\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu^2}{\lambda}=\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{\mu}{\theta}$, βλέπομεν,

ὅτι τὸ θ προσδιορίζεται γεωμετρικῶς καὶ ὅτι αἱ τελευταῖαι ἐξισώσεις γράφονται:

$$\omega(\omega+\lambda)=\theta^2, \quad \omega(\omega-\lambda)=\theta^2, \quad \omega(\lambda-\omega)=\theta^2$$

Μὲ τὴν πρώτην ζητοῦμεν τὰς διαστάσεις (ω, ω+λ) ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλ/μμου ἰσοδυνάμου πρὸς γνωστὸν τετράγωνον καὶ τῶν ὁποίων διαστάσεων ἡ διαφορὰ (ω+λ—ω = λ) εἶναι λ. Ἀνήχθημεν δηλ. εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὁ ἐνδελεχὴς τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ἐσπουδάσαμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα (5) ἐπιτρέπει νὰ ἑρμηνεύσῃ ὁ καθεὶς τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας, τὰ προσδιορισθησόμενα ω καὶ ω+λ, διὰ μέσου τῆς ἰσότητος $\chi^2=\lambda\omega$ δίδουν τὰ χ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῶν δύο πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

Μὲ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἔχομεν καὶ πάλιν τὸ αὐτὸ πρόβλημα μὲ τὴν τυπικὴν

*Διὰ τῶν προβλημάτων (4) καὶ (5) ἀνήχθημεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ω, τῶν ἱκανοποιούντων ἀντιστοίχως τὰς ἰσότητας: $\omega(\alpha-\omega)=\lambda^2$ καὶ $\omega(\omega-\alpha)=\lambda^2$. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλ/μμου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του, τὰ προβλήματα αὐτὰ ἐκφωνοῦνται ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς: Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλ/μμου ἰσοδυνάμου πρὸς γνωστὸν τετράγωνον καὶ τῶν ὁποίων διαστάσεων τὸ ἄθροισμα εἶναι γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.

Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλ/μμου ἰσοδυνάμου πρὸς γνωστὸν τετράγωνον καὶ τῶν ὁποίων διαστάσεων ἡ διαφορὰ εἶναι γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.

Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον θὰ δώσωμεν καὶ ἄλλον ἐνδιαφέροντα τρόπον γεωμετρικῆς λύσεως τῶν 2ων ἐξισώσεων.

διαφορὰν ὅτι $\omega-(\omega-\lambda)=\lambda$. Μὲ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν ζητοῦμεν τὰς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλ/μμου ἰσοδυνάμου πρὸς γνωστὸν τετράγωνον καὶ τῶν ὁποίων διαστάσεων τὸ ἄθροισμα εἶναι λ. Ἀνήχθημεν λοιπὸν εἰς τὸ τέταρτον πρόβλημα καὶ τὰ ω καὶ λ—ω μᾶς δίδουν διὰ τῆς $\chi^2=\lambda\omega$ τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῶν δύο θετικῶν λύσεων τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

7. **Ἐνδιαφέρουσα σημείωσις.** Ἐὰν α, β εἶναι δύο γνωστὰ εὐθ. τμήματα, τὰ τμήματα χ, y, z, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὰς ἰσότητας:

$$\chi=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y=\sqrt{\alpha\cdot\beta} \qquad \frac{2}{z}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὁρολογίαν τῆς ἀριθμητικῆς, ὀνομάζονται: μέσον ἀριθμητικόν, μέσον γεωμετρικόν, μέσον ἁρμονικὸν τῶν εὐθ. τμημάτων α καὶ β.

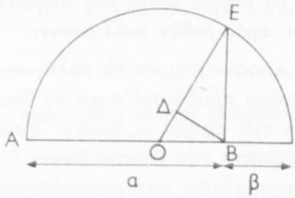
Ὁ γεωμετρικὸς προσδιορισμὸς τῶν τριῶν αὐτῶν «μέσων» ὑπαγορεύεται ἀπὸ τὰς ἰδίας ἐκφράσεις των καὶ εἶναι γνωστὸς εἰς ὅλους. Ἰδοὺ ὅμως μία χαρακτηριστικὴ γεωμετρικὴ παρουσίασίς των:

Τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ β· τὸ ΒΕ κάθετον εὐθ. τμῆμα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὸ Β μέχρι τῆς μὲ διάμετρον τὸ ΑΓ γραφομένης περιφερείας· τὸ ΒΔ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΕ. Ἔχομεν ὅτι:

$$\chi=\mathrm{OE}, \qquad y=\mathrm{BE}, \qquad z=\Delta\mathrm{E}$$

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ ΔΕ λαμβάνομεν: $\mathrm{BE}^2=\mathrm{OE}\cdot\Delta\mathrm{E}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha\cdot\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\Delta\mathrm{E} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{\Delta\mathrm{E}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$



(Σχ. 152)

1. Μετασχηματισμὸς πολυγώνου εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Λ ῆ μ μ α. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς γνωστὸν τρίγωνον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἢ τὸ ὕψος νὰ εἶναι διδόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἐὰν αἱ διαστάσεις τοῦ γνωστοῦ τριγώνου χαρακτηρισθοῦν διὰ τῶν α καὶ h καὶ αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου καὶ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ γνωστὸν α΄ καὶ h΄, θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὴν ἰσότητα:

$$\tfrac{1}{2}\alpha\cdot h=\tfrac{1}{2}\alpha'\cdot h' \quad \Longrightarrow \quad \alpha\cdot h=\alpha'\cdot h'. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἐκ τῶν τεσσάρων τμημάτων τῆς (1) εἶναι ἄγνωστον τὸ h΄, γράφομεν:

$$\frac{\alpha'}{h}=\frac{\alpha}{h'}$$

δηλ. τὸ h΄ εἶναι τὸ τέταρτον μετὰ τριῶν γνωστῶν τμημάτων εἰς μίαν ἀναλογίαν καὶ τὴν κατασκευήν του ἔχομεν ἤδη ὑποδείξει.

Χαράσσοντες τώρα τὸ τμῆμα α΄ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὸ εὐθεῖαν εἰς ἀπόστασιν h΄, κάθε σημεῖον αὐτῆς τῆς τελευταίας εὐθείας εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ (αἱ δύο ἄλλαι εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ α΄) τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ γνωστὸν τρίγωνον.

Τὸ πρόβλημά μας λοιπὸν ἔχει ἀπεριόριστον ἀριθμὸν λύσεων.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ὑπετίθετο γνωστὸν τὸ h΄, θὰ ἐγράφομεν τὴν ἰσότητα ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{h'}{\alpha} = \frac{h}{\alpha'}$$

καὶ θὰ ἐπροσδιορίζομεν τὸ α΄ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἔτσι, θὰ ἀντιμετωπίζομεν καὶ πάλιν τὴν αὐτὴν κατασκευήν.

Τὸ λῆμμα τοῦτο μᾶς ἀποδεικνύει τὸ δυνατὸν τῆς ὑπάρξεως τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν πολύγωνον:

Ἀποσυνθέτομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα (βλ. Κεφ. 9, 2, 2.4) δι᾽ ἕκαστον τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου του, ἀλλὰ τοῦ ἔχοντος ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα ὡς βάσιν. Ἐννοοῦμεν λοιπόν, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ὡς βάσιν τὴν κοινὴν βάσιν ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων καὶ ὡς ὕψος τὸ ἄθροισμα τῶν κατασκευασθέντων ὑψῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τῶν τριγώνων δηλ. πρὸς τὸ θεωρούμενον πολύγωνον.

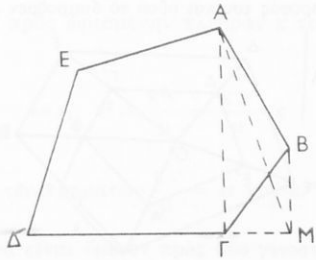
Ἡ κατασκευὴ ὅμως τριγώνου, ἰσοδυνάμου πρὸς γνωστὸν πολύγωνον, δύναται νὰ ἁπλοποιηθῆ μεγάλως, ἐὰν ἐκκινήσωμεν ἀπὸ τὴν ἑξῆς παρατήρησιν: **Δεδομένου ἑνὸς πολυγώνου ν πλευρῶν δυνάμεθα νὰ ἀναχθῶμεν εἰς ἓν πολύγωνον ἰσοδύναμον μὲ ν — 1 πλευράς.**

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ. . . Θεωροῦμεν π.χ. τὴν γωνίαν του $\widehat{ΑΒΓ}$, τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι μία διαγώνιός του.

Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ τμήσῃ τὴν πλευρὰν ΔΓ, προεκτεινομένην*, εἰς τὸ σημεῖον $Μ_1$ καὶ ἀχθῆ τὸ τμῆμα $ΑΜ_1$, τὰ τρί-

*Τρεῖς διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α,Β,Γ ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι κορυφαὶ τριγώνου τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται εἰς τὸ ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἐνῶ τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ πολυγώνου εὑρίσκονται εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς αὐτήν. Ἔτσι, ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν τὰ σημεῖα τοῦ ΑΒΓ, διότι ἄλλως θὰ ἔτεμνε τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν τομῆς τῆς παραλλήλου ταύτης μετὰ τῆς ἑπομένης εὐθείας-πλευρᾶς ΓΔ τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΔΓ.

γωνα ΑΒΓ καὶ $ΑΜ_1Γ$ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ τμῆμα ΑΓ καὶ τὰς κορυφάς των Β καὶ $Μ_1$ ἐπ' εὐθείας παραλήλλου πρὸς τὴν κοινὴν των βάσιν. Ἔχουν λοιπὸν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔτσι δυνάμεθα εἰς τὸ θεωρούμενον πολύγωνον ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ θέσωμεν τὸ ἰσοδύναμόν του τρίγωνον $ΑΜ_1Γ$, ἐπιτυγχάνοντες συγχρόνως νὰ ὑποκαταστήσωμεν τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ πολυγώνου μας μὲ μίαν μόνον πλευράν, τὴν $ΑΜ_1$, τοῦ ἰσοδυνάμου του $ΑΜ_1ΔΕ$... Αὐτὴ αὕτη ἄλλως τε ἡ ἀπαγγελία τοῦ νέου πολυγώνου μαρτυρεῖ, ὅτι, ἀντὶ τῶν δύο κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ, τῶν Β, Γ, ἔχομεν μόνον τὴν κορυφὴν $Μ_1$ τοῦ νέου πολυγώνου.



(Σχ. 153)

Ἐννοοῦμεν λοιπόν, ὅτι, ἐφαρμόζοντες αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πολυγώνου εἰς τὸ ἑπόμενόν του, θὰ ὁδηγηθῶμεν ἐξ ἑνὸς πολυγώνου τῶν ν πλευρῶν εἰς ἕνα πολύγωνον μὲ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν πλευρῶν δηλ. μὲ τρεῖς πλευράς.

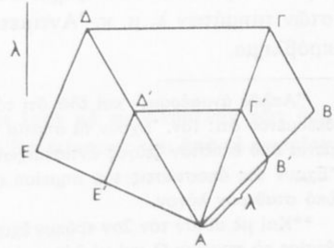
9. Νὰ κατασκευασθῆ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα γνωστὸν πολύγωνον.

Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου θὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν ἀντιστοίχως τὴν βάσιν καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν ἀνωτέρω γεωμετρικὸν τρόπον θὰ δημιουργηθῆ ὡς ἰσοδύναμον τοῦ πολυγώνου μας.

10. Νὰ κατασκευασθῆ ἕνα πολύγωνον ὅμοιον πρὸς ἕνα γνωστὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ, ὡς ὁμόλογον πλευρὰν μιᾶς ὡρισμένης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος, γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.

1ος Τρόπος. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα λ εἶναι ὁμόλογος πλευρὰ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

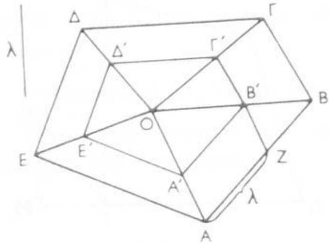
Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τμῆμα ΑΒ΄ ἴσον πρὸς τὸ λ καὶ ἐκ τοῦ Β΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Γ΄. Ἐκ τοῦ Γ΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΔ εἰς τὸ Δ΄ καὶ τέλος φέρομεν ἐκ τοῦ Δ΄ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΕ τοῦ ἀρχικοῦ πολυγώνου εἰς τὸ Ε΄. Εἶναι πολὺ εὔκολος ἡ διαπίστωσις, ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒ΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικὸν



(Σχ. 154)

δηλ. ὅτι τὰ δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους των πλευρὰς ἀναλόγους.*

2ος Τρόπος. Συνδέομεν ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου μὲ τὰς κορυφάς του καὶ οὕτω τὸ διαιροῦμεν εἰς ἰσάριθμα μὲ τὰς πλευράς του τρίγωνα. Ἐὰν ΑΖ = λ, ΖΒ′ ∥ ΟΑ καὶ Β′Α′ ∥ ΒΑ ⟹ Α′Β′ = λ.



(Σχ. 155)

Ἐφεξῆς, φέρομεν: Β′Γ′ ∥ ΒΓ, Γ′Δ′ ∥ ΓΔ, Δ′Ε′ ∥ ΔΕ. Εἶναι εὔκολον δὲ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἀναγκαίως θὰ εἶναι Ε′Α′ ∥ ΕΑ καὶ ἐπίσης νὰ συμπεράνωμεν τὴν ὁμοιότητα τῶν δύο πολυγώνων. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα: Τὸ πολύγωνον ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ τοῦ σχήματος (154) εἶναι ἴσον μὲ τὸ πολύγωνον Α′Β′Γ′Δ′Ε′ τοῦ σχήματος (155);**

Προφανῶς τὰ δύο αὐτὰ πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ ἀκόμη ὁ λόγος ὁμοιότητος ἑκάστου τούτων πρὸς τὸ ἀρχικὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ λόγου λ/ΑΒ, ὥστε ἔχουν καὶ τὰς πλευράς των ἀνὰ μίαν ἴσας.

10.1. Σημείωσις. Ἂν ἀντὶ τοῦ τμήματος λ μᾶς ἐδίδετο ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων ὡς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν μᾶς ἔλεγον, ὅτι ἡ πλευρὰ χ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου ἔχει πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ λόγον τὸν ἀριθμὸν μ, τότε τὸ τμῆμα μ . ΑΒ θὰ ἦτο, ὅπως ὁ καθεὶς τὸ ἐννοεῖ, τὸ γνωστὸν τμῆμα λ καὶ ἐφεξῆς τὸ πρόβλημα θὰ ἀντιμετωπίζετο ὡς ἀνωτέρω.

11. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον Π, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς γνωστὸν πολύγωνον Π_1 καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ἄλλο γνωστὸν πολύγωνον Π_2.

Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα (9) προσδιορίζομεν τὰς πλευρὰς λ, μ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων πρὸς τὰ γνωστὰ πολύγωνα Π_1, Π_2 καὶ ἐὰν χ ὀνομασθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ Π, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν ὡρισμένην πλευρὰν κ τοῦ Π_1, θὰ ἔχωμεν:***

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\kappa^2}{\chi^2} \implies \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\kappa^2}{\chi^2} \implies \frac{\lambda^2}{\mu^2} = \frac{\kappa^2}{\chi^2} \implies \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\kappa}{\chi}$$

δηλ. τὸ ἄγνωστον εὐθ. τμῆμα χ εἶναι τὸ τέταρτον ἐν τῇ ἀναλογίᾳ μετὰ τῶν γνωστῶν τμημάτων λ, μ, κ. Ἀντιμετωπίζομεν λοιπὸν τώρα τὸ ἀμέσως προηγούμενον πρόβλημα.

*Ἁπλῶς ἀναφέρομεν καὶ ἐδῶ, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὁμοιόθετα, δεδομένου ὅτι: 1ον. Ἔχουν τὰ σημεῖα των ἀντιστοιχοῦντα ἓν πρὸς ἕν, ἐνῷ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων, συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α· καὶ 2ον. Ἔχουν τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου αὐτοῦ συνδρομῆς ἀπὸ δύο ἀντίστοιχα (ὁμόλογα) σημεῖα ὑπὸ σταθερὸν λόγον.

**Καὶ μὲ αὐτὸν τὸν 2ον τρόπον ἔχομεν κατασκευὴν ὁμοιοθέτου πολυγώνου μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Ο καὶ μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας λ/ΑΒ.

***Διὰ τοῦ κ ἐκπροσωποῦμεν τὸ εὐθ. τμῆμα-πλευράν.

12. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον Π, ὅμοιον πρὸς γνωστὸν πολύγωνον Π_1, ἐνῶ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο γνωστῶν εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν.

Ἐὰν x ὀνομασθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ Π, ἡ ὁμόλογος πρὸς ὡρισμένην πλευρὰν κ τοῦ γνωστοῦ πολυγώνου, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\kappa^2}{x^2}, \quad \frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\mu}{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\kappa^2}{x^2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{\kappa^2\nu}{\mu} = \frac{\kappa\,\nu}{\mu}\cdot\kappa$$

Τό x λοιπὸν παρουσιάζεται ὡς μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων $\frac{\kappa\,\nu}{\mu} = \sigma$ καὶ κ.*

13. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς δύο γνωστὰ καὶ ὅμοια μεταξύ των πολύγωνα καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων.

Ἔστω x ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Π ἡ ὁμόλογος πρὸς τὰς ὁμολόγους μεταξύ των πλευρὰς λ, μ τῶν γνωστῶν πολυγώνων Π_1, Π_2. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\lambda^2}{x^2}, \qquad \frac{\Pi_2}{\Pi} = \frac{\mu^2}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\Pi_1+\Pi_2}{\Pi} = \frac{\lambda^2+\mu^2}{x^2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Pi_1-\Pi_2}{\Pi} = \frac{\lambda^2-\mu^2}{x^2}$$

Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην περίπτωσιν ὁ λόγος τῶν δύο ἰσοτήτων θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν: $x^2 = \lambda^2+\mu^2$ ἢ $x^2 = \lambda^2-\mu^2$

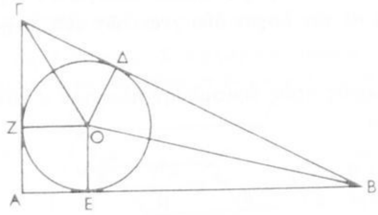
Ἔτσι ἀναγόμεθα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ x καὶ εἰς τὸ πρόβλημα (10) διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ ὑποτείνουσά του ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

---

*Ἐκ τοῦ $\frac{\kappa\nu}{\mu} = \sigma \Longrightarrow \frac{\mu}{\kappa} = \frac{\nu}{\sigma}$.



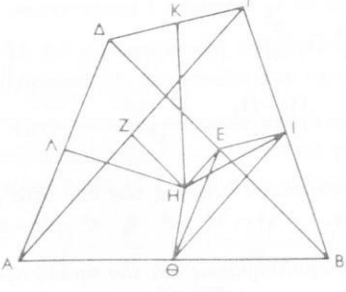
(Σχ. 156)

Εἶναι γνωστὴ ἡ ἰσότης: $2(\text{ΑΒΓ})$

$$= (\text{ΑΒ})(\text{ΑΓ}) = [\rho + (\text{ΕΒ})].[\rho + (\text{ΖΓ})]$$
$$= [\rho + (\text{ΒΔ})].[\rho + (\text{ΔΓ})] =$$
$$\rho^2 + (\text{ΒΔ})\rho + \rho(\text{ΔΓ}) + (\text{ΒΔ})(\text{ΔΓ}) =$$
$$(\text{ΑΕΟΖ}) + (\text{ΕΒΔΟ}) + (\text{ΓΖΟΔ}) + (\text{ΒΔ})(\text{ΔΓ})$$
$$= (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΒΔ})(\text{ΔΓ}) \Rightarrow$$
$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΒΔ})(\text{ΔΓ})$$

Σημειώνομεν, ὅτι $(\text{ΒΔ})\rho = 2(\text{ΟΒΔ}) = (\text{ΕΒΔΟ})$ καὶ $(\text{ΔΓ})\rho = 2.(\text{ΟΔΓ}) = (\text{ΓΖΟΔ})$.

2. Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον ἑκάστης διαγωνίου κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην του διαγώνιον καὶ ἐὰν χαράξωμεν τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν τῶν παραλλήλων μὲ τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ τετράπλευρόν μας θὰ διαιρεθῆ εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.



(Σχ. 157)

Πρέπει δηλ. νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ἕκαστον τῶν τετραπλεύρων: ΗΘΒΙ, ΗΙΓΚ, ΗΚΔΛ, ΛΑΘΗ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ΑΒΓΔ.

Τὰ τετράπλευρα: ΗΘΒΙ καὶ ΕΘΒΙ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι τὰ μὴ κοινά των τμήματα ΗΘΙ καὶ ΕΘΙ εἶναι τρίγωνα μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν ΘΙ καὶ μὲ τὰς κορυφάς των Η καὶ Ε εἰς εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν των. Καὶ τοῦτο, διότι τὸ ΘΙ εἶναι τὸ τμῆμα τῶν μέσων τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔχομεν ὅμως:

$$(\text{ΕΘΒΙ}) = (\text{ΕΘΒ}) + (\text{ΕΒΙ})$$

Καί, $\dfrac{(\text{ΕΘΒ})}{(\text{ΑΒΔ})} = \dfrac{(\text{ΒΕ})^2}{(\text{ΒΔ})^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow (\text{ΕΘΒ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΔ})$

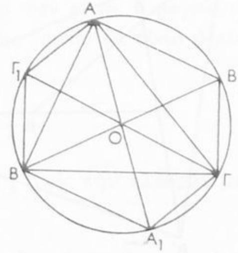
$$\Rightarrow$$

$$\frac{(\text{ΕΒΙ})}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{(\text{ΒΙ})^2}{(\text{ΒΓ})^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow (\text{ΕΒΙ}) = \frac{1}{4}(\text{ΔΒΓ})$$

$$(\text{ΕΘΒ}) + (\text{ΕΒΙ}) = \frac{1}{4}[(\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΔΒΓ})] \Rightarrow (\text{ΕΘΒΙ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$$

3. Ἐὰν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ὀξυγωνίου

τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τὰς διαμέτρους, αἵτινες συναντοῦν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου $A\Gamma_1 B A_1 \Gamma B_1$ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.



(Σχ. 158)

Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη, ἐφόσον τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ὥστε: $(ABO) = (AOB_1)$, $(AO\Gamma) = (OA_1\Gamma)$, $(B\Gamma O) = (O\Gamma B_1)$.

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων συνιστοῦν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ δεύτερα μέλη των τὸ τετράπλευρον $AA_1\Gamma B_1$. Δεδομένου, ὅτι τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας εἰς τὴν περιφέρειαν, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ τὸ τετράπλευρον $A\Gamma_1 B A_1$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον. Ἐννοοῦμεν πλέον, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραπλεύρων δηλ. τὸ ἑξάγωνον $A\Gamma_1 B A_1 \Gamma B_1$ εἶναι διπλάσιον εἰς ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

4. Ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν δύο ἀνίσων πλευρῶν τριγώνου προσθέσωμεν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν ὕψος, τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα θὰ τὸ σχηματίσωμεν μὲ τὴν μεγαλυτέραν πλευράν.

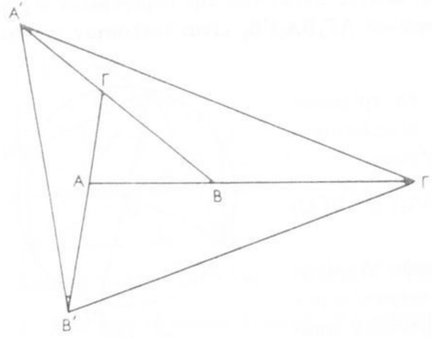
Ἐὰν α, β εἶναι αἱ δύο πλευραὶ τριγώνου καὶ h_1, h_2, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὰς ὕψη τοῦ τριγώνου, εἶναι δὲ $\alpha > \beta$, θὰ δείξωμεν, ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνισότης: $\alpha + h_1 > \beta + h_2$.

Ἔχομεν $\alpha \cdot h_1 = \beta \cdot h_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{\alpha - h_2}{\beta - h_1}$, ἐνῶ οἱ ὅροι τοῦ τελευταίου λόγου, ὡς εἶναι φανερόν, εἶναι θετικοί. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\dfrac{\alpha}{\beta}$ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, θὰ ἔχωμεν καί: $\alpha - h_2 > \beta - h_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha + h_1 > \beta + h_2$.

5. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ προεκταθοῦν κατὰ τὴν φοράν, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἕνα κινητόν, ὅταν διαγράφη τὸ περίγραμμά του καὶ τόσον, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $B\Gamma A' = \lambda . B\Gamma$, $\Gamma A B' = \mu . \Gamma A$, $A B \Gamma' = \nu . AB$ (ὅπου λ, μ, ν εἶναι γνωστοὶ θετικοὶ ἀριθμοί), νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης: $(A'B'\Gamma') = (AB\Gamma)(1 - \lambda - \mu - \nu + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda)$.

Προφανῶς,

$$(A'B'\Gamma') = (AB\Gamma) + (AB'\Gamma') + (B\Gamma'A') + (\Gamma A'B'). \qquad (1)$$



(Σχ. 159)

Ἀλλὰ (Κεφ. 9, 3, 1ον)

$$\frac{(AB'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{(AB')\,(A\Gamma')}{(AB)(\Gamma A)} = \frac{\nu(\mu-1)\,(AB)\,(\Gamma A)}{(AB)\,(\Gamma A)} = \nu\,(\mu-1) \quad \Rightarrow$$

$$(AB'\Gamma') = \nu(\mu-1)(AB\Gamma).$$

Κατ᾽ ἀναλογίαν εὑρίσκομεν: $(B\Gamma'A') = \lambda(\nu-1)(AB\Gamma)$, $(\Gamma A'B') = \mu(\lambda-1)\,(AB\Gamma)$. Καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τοὺς ὅρους ἀπὸ τὰς εὑρεθείσας τιμάς των, δημιουργοῦμεν τὴν ὑπὸ ἀπόδειξιν ἰσότητα.

6. 1ον. Ἐὰν α, β εἶναι τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > \beta$ ὑπάρχει τρίγωνον μὲ μήκη πλευρῶν τριγώνου α, β, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$;

2ον Νὰ καθορισθῇ εἰς μοίρας ἡ γωνία, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς τρίτης τῶν ἀνωτέρω πλευρῶν.

1ον. Ἐμάθομεν (Κεφ. 3, 4, (α)), ὅτι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι μήκη πλευρῶν τριγώνου, εἶναι, ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο. Ἀφοῦ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως $\alpha > \beta$, θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν καὶ $\alpha > \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$. Ὁ καθεὶς βεβαίως γνωρίζει, ὅτι ἡ ἔκφρασις $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta = \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2$ παριστᾶ, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, ἕνα ἀριθμὸν θετικὸν καὶ ἑπομένως, ὅτι ἡ θεωρουμένη ἔκφρασις ἔχει νόημα. Ἔτσι, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης εἶναι ἰσοδυνάμως πρὸς τὴν ἀνισότητα: $\alpha^2 > \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta \Rightarrow \beta^2-\alpha\beta < 0 \Rightarrow \beta(\beta-\alpha) < 0$, ἡ ὁποία καὶ εἶναι ἀληθὴς λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας. Τὸ πρῶτον λοιπὸν ἐρώτημα τοῦ θέματός μας ἀπαιτεῖ νὰ γνωρίσωμεν, ἂν ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης:

$$\alpha < \beta + \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} \Rightarrow \alpha-\beta < \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης, μὲ τὰ μέλη της θετικοὺς ἀριθμούς, εἶναι ἰσοδυνάμως πρὸς τήν: $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta < \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta \Rightarrow -\alpha\beta < 0$, ἥτις εἶναι ἀληθής.

2ον. Ἐσημειώσαμεν (Κεφ. 9, 5, 5), ὅτι ἡ πρότασις (Κεφ. 9, 5, 1) χρησιμεύει καὶ διὰ νὰ προσδιορίζωμεν τὸ μῆκος τῆς προβολῆς μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἰς μίαν ἄλλην του πλευράν, ἀρκεῖ μόνον νὰ γνωρίζωμεν, ἂν ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου κεῖται ἀπέναντι ὀξείας ἢ ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας τριγώνου.

Ἐν προκειμένῳ, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ μήκους $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$ δὲν εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἕπεται, ὅτι ἡ ἀπέναντί της γωνία θὰ εἶναι ὀξεῖα. Καὶ συνεπῶς,

$$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}\right)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\chi$$

ὅπου χ εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς μήκους β εἰς τὴν πλευρὰν μήκους α.

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δίδει: $\chi = \frac{1}{2}\cdot\beta$. Ἔτσι ὑφίσταται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, μὲ ὑποτείνουσαν μήκους β καὶ μὲ τὴν μίαν τῶν καθέτων του πλευρῶν μήκους $\frac{1}{2}\cdot\beta$. Ἡ ἀπέναντι λοιπὸν τῆς τελευταίας πλευρᾶς γωνία εἶναι 30^0 καὶ ἡ προσκειμένη πρὸς αὐτὴν δηλ. ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς μήκους $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$ εἶναι 60^0.

7. 1ον Ὑπὸ ποίας συνθήκας πρέπει νὰ διατελῇ τὸ α, ὥστε αἱ ἐκφράσεις: $\alpha^2+\alpha+1$, α^2-1, $2\alpha+1$ νὰ εἶναι ἐκφράσεις μηκῶν πλευρῶν τριγώνου; 2ον. Προσδιορίσατε εἰς μοίρας τὴν γωνίαν, τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

1ον. Διὰ νὰ εἶναι αἱ θεωρούμεναι ἐκφράσεις μήκη πλευρῶν τριγώνου πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ἀντιπροσωπεύουν θετικοὺς ἀριθμούς. Ἔτσι πρέπει νὰ εἶναι:

$$\begin{array}{ll} \alpha^2-1 > 0 & 2\alpha+1 > 0 \\ (\alpha+1)(\alpha-1) > 0 & 2\alpha > -1 \\ \alpha < -1 \text{ ἢ } \alpha > 1 & \text{καὶ } \alpha > -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Καὶ αἱ ἀνισότητες αὗται συναληθεύουν, ἂν $\alpha > 1$.

Ὑπενθυμίζομεν, ὅτι ἡ ἔκφρασις: $\alpha^2+\alpha+1 = \left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ἀντιπροσωπεύει ἀριθμὸν θετικὸν διὰ πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α. Πρέπει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν ποῖος τῶν ἀνωτέρω τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ μεγαλύτερος.

Ἔχομεν: $\alpha^2+\alpha+1-(\alpha^2-1) = \alpha+2$ καὶ δι' $\alpha>1$ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι θετική.

Ἐπίσης, $\alpha^2+\alpha+1-(2\alpha+1) = \alpha^2-\alpha = \alpha(\alpha-1)$ δηλ. καὶ πάλιν ἡ διαφορὰ εἶναι θετική. Ἔτσι, αἱ θεωρούμεναι ἐκφράσεις θὰ εἶναι ἐκφράσεις πλευρῶν τριγώνου, ἐὰν ἀκόμη ἔχωμεν:

$$\alpha^2+\alpha+1<(\alpha^2-1)+(2\alpha+1) \Rightarrow \alpha>1.$$

Συμπέρασμα: Οἱ ἀριθμοί: $\alpha^2+\alpha+1$, α^2-1, $2\alpha+1$ εἶναι ἐκφράσεις μηκῶν πλευρῶν τριγώνου ἐὰν καὶ ἐφόσον $\alpha>1$.

2ον. Τί εἴδους γωνία εἶναι ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς μήκους $\alpha^2+\alpha+1$;

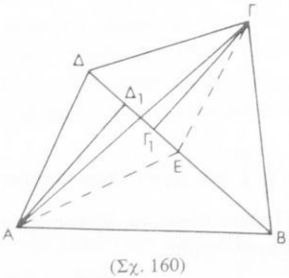
Ἔχομεν: $(\alpha^2+\alpha+1)^2>(\alpha^2-1)^2+(2\alpha+1)^2$, ὡς εὐκόλως βεβαιοῦται, ἄρα πρόκειται δι' ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Καὶ συνεπῶς:

$$(\alpha^2+\alpha+1)^2=(\alpha^2-1)^2+(2\alpha+1)^2+2(2\alpha+1)\cdot\chi$$

ὅπου χ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς μήκους α^2-1 εἰς τὴν πλευρὰν μήκους $2\alpha+1$.
Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα εὑρίσκομεν: $\chi=\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$.

Συμπέρασμα: Δημιουργεῖται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν μήκους α^2-1 καὶ μὲ τὴν μίαν τῶν καθέτων μήκους $\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$. Ὥστε, ἡ προσκειμένη γωνία πρὸς αὐτὴν τὴν κάθετον πλευράν, ἥτις εἶναι ἡ παραπληρωματική, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς μήκους $\alpha^2+\alpha+1$, εἶναι 60^0. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία εἶναι 120^0.

8. Εἰς ἕνα τετράπλευρον, ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τῆς μιᾶς διαγωνίου καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἄλλης διαγωνίου εἰς τὴν πρώτην ἐξ αὐτῶν.



(Σχ. 160)

Ἐὰν ΒΓ > ΓΔ, ἀπὸ τὸ 2ον θεώρ. τῆς διαμέσου λαμβάνομεν:

$$(B\Gamma)^2-(\Gamma\Delta)^2=2(B\Delta)\,(E\Gamma_1) \qquad (1)$$

ὅπου $E\Gamma_1$ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος-διαμέσου ΕΓ εἰς τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου μας.

Ἐὰν ἐπίσης ΑΒ > ΔΑ, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ:

$$(AB)^2-(A\Delta)^2=2\cdot(B\Delta)\,(E\Delta_1) \qquad (2)$$

ὅπου $E\Delta_1$ ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος-διαμέσου ΕΑ εἰς τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) ἀφαιρέσωμεν τὴν ἰσότητα (1), λαμβάνομεν:

$$[(AB)^2+(\Gamma\Delta)^2]-[(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2]=2(B\Delta)[(E\Delta_1)-(E\Gamma_1)]=2(B\Delta)(\Gamma_1\Delta_1). \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις: Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω τετράπλευρον συνέβαινε νὰ εἶναι ΑΔ>ΑΒ, τότε τὰ σημεῖα Γ_1 καὶ Δ_1 θὰ ἦσαν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Ε τῆς διαγωνίου ΒΔ, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) θὰ εἶχε ὡς πρῶτον μέλος τὴν διαφορὰν $(ΑΔ)^2—(ΑΒ)^2$ καὶ συνεπῶς θὰ ἐχρειάζετο αἱ ἰσότητές μας νὰ προστεθοῦν κατὰ μέλη.

9. Δείξατε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν ὑψῶν του διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{1}{E_\Delta}=\sqrt{\left(\frac{1}{h_\alpha}+\frac{1}{h_\beta}+\frac{1}{h_\gamma}\right)\left(\frac{1}{h_\alpha}+\frac{1}{h_\beta}-\frac{1}{h_\gamma}\right)\left(\frac{1}{h_\alpha}+\frac{1}{h_\gamma}-\frac{1}{h_\beta}\right)\left(\frac{1}{h_\beta}+\frac{1}{h_\gamma}-\frac{1}{h_\alpha}\right)}$$

Ἔχομεν: $\alpha h_\alpha=\beta\cdot h_\beta=\gamma\cdot h_\gamma \implies \dfrac{\alpha}{\frac{1}{h_\alpha}}=\dfrac{\beta}{\frac{1}{h_\beta}}=\dfrac{\gamma}{\frac{1}{h_\gamma}}$

Ἔτσι, τὸ τρίγωνον μὲ μήκη πλευρῶν α,β,γ δηλ. τὸ διδομένον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ἔχον μήκη πλευρῶν: $\dfrac{1}{h_\alpha}, \dfrac{1}{h_\beta}, \dfrac{1}{h_\gamma}$. Τὰ ἐμβαδὰ λοιπὸν τῶν ὁμοίων αὐτῶν τριγώνων ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα:

$$\frac{E'_\Delta}{E_\Delta}=\frac{\frac{1}{h_\alpha^2}}{\alpha^2}=\frac{1}{(h_\alpha\cdot\alpha)^2}=\frac{1}{4E_\Delta^2} \implies \frac{1}{E_\Delta}=4E'_\Delta.$$

Καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ Ἥρωνος (Κεφ. 9, 5, 9) διὰ τὸ E'_Δ διαπιστοῦμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ὑπὸ ἀπόδειξιν ἰσότητος.

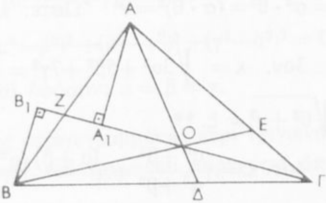
10. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ σημεῖον 0. Χαράσσομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΟΔ, ΒΟΕ, ΓΟΖ. Δείξατε, ὅτι:

$$\frac{(AO)}{(O\Delta)}=\frac{(AZ)}{(ZB)}+\frac{(AE)}{(E\Gamma)}$$ **θεωρ. τοῦ Van Aubel.**

Ἔχομεν: $\dfrac{(AO)}{(O\Delta)}=\dfrac{(AO\Gamma)}{(O\Delta\Gamma)}=\dfrac{(ABO)}{(B\Delta O)}=$

$$\frac{(AO\Gamma)+(ABO)}{(B\Delta O)+(O\Delta\Gamma)}=\frac{(AO\Gamma)+(ABO)}{(B\Gamma O)}\ * \qquad (1)$$

Ἐπίσης, $\dfrac{(AO\Gamma)}{(B\Gamma O)}=\dfrac{(AZ)}{(ZB)},\quad \dfrac{(ABO)}{(B\Gamma O)}=\dfrac{(AE)}{(E\Gamma)}$



(Σχ. 161)

Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΓΟ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΓΟ καὶ συνεπῶς ὁ λόγος τῶν ἐμβα-

*Τὰ τμήματα ΑΟ, ΟΔ εἶναι βάσεις ἀφ' ἑνὸς μὲν τῶν ἰσοϋψῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΟΔΓ καὶ ἀφ' ἑτέρου τῶν ἐπίσης ἰσοϋψῶν τριγώνων ΑΒΟ καὶ ΟΒΔ.

δῶν των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των AA_1 καὶ BB_1. Ὁ λόγος ὅμως $\frac{(AA_1)}{(BB_1)}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{(AZ)}{(ZB)}$, ὡς γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων AZA_1 καὶ B_1BZ. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον διαπιστοῦμεν τὴν ἀλήθειαν καὶ τῆς τρίτης ἰσότητος.

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας, λαμβάνομεν:

$$\frac{(AO\Gamma)+(ABO)}{(B\Gamma O)}=\frac{(AZ)}{(ZB)}+\frac{(AE)}{(E\Gamma)} \qquad (2)$$

Ἔτσι τώρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) βεβαιοῦται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως Van Aubel.

11. Ἐὰν α, β, γ εἶναι γνωστὰ εὐθ. τμήματα, νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς τὰ εὐθ. τμήματα χ, τὰ ὁποῖα παρέχονται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἰσότητας:

$$x=\sqrt{\alpha^2+\sqrt{\beta^4-\gamma^4}} \qquad x=\sqrt{\alpha^2-\sqrt{\beta^4+\gamma^4}} \qquad x=\sqrt{3\alpha^2+5\beta^2+7\gamma^2}$$

$$x=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} \qquad x=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^3+\beta^3} \qquad x=\alpha+\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}\ ^*$$

1ον. $\beta^4-\gamma^4=(\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)=\lambda^2\cdot\mu^2 \Rightarrow \sqrt{\beta^4-\gamma^4}=\lambda\cdot\mu \Rightarrow \sigma^2=\lambda\cdot\mu$

Ὥστε: $\chi=\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}$ καὶ ἔτσι τὸ χ προκύπτει ὡς ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου μὲ καθέτους α καὶ σ, ἐνῶ τὸ σ εἶναι τμῆμα μέσον ἀνάλογον τῶν γνωστῶν τμημάτων λ, μ.

2ον. $\beta^4+\gamma^4=(\beta^2+\gamma^2)^2-2\beta^2\gamma^2=(\lambda^2)^2-(\beta\gamma\sqrt{2})^2=\lambda^4-\mu^4=(\lambda^2+\mu^2)(\lambda^2-\mu^2)$ $=\sigma^2\cdot\theta^2=(\sigma\cdot\theta)^2=\nu^4$ Ὥστε: $x=\sqrt{\alpha^2-\sqrt{\beta^4+\gamma^4}}=\sqrt{\alpha^2-\nu^2}=\kappa$

3ον. $x=\sqrt{3\alpha^2+5\beta^2+7\gamma^2}=\sqrt{(\alpha\sqrt{3})^2+(\beta\sqrt{5})^2+(\gamma\sqrt{7})^2}=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}=$ $\sqrt{\theta^2+\nu^2}=\xi$. **

4ον. $x=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)}{\lambda^2}=\frac{\mu(\nu^2-\theta^2)}{\lambda^2}=\frac{\mu\cdot\sigma^2}{\lambda^2}=\frac{\mu\cdot\sigma}{\lambda}\cdot\frac{\sigma}{\lambda}$

*Εἶναι πολὺ εὔκολον ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐξηγῇ ποῖα ἐκ τῶν προβλημάτων (Κεφ. 9, 6) χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν μετάβασίν μας ἀπὸ ἔκφρασιν εἰς ἔκφρασιν. Σημειοῦμεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο τμῆμα ἡ χρησιμοποίησις τῶν αὐτῶν συμβόλων δὲν σημαίνει ἰσότητα τμημάτων.

**Βλ. Κεφ. 9, 6, 3.

Ἀλλά, ἐὰν θέσωμεν $\frac{\mu \cdot \sigma}{\lambda} = \xi$, ἔχομεν: $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sigma}{\xi}$ δηλ. τὸ ξ κατασκευάζεται καὶ συνεπῶς $x = \xi \cdot \frac{\sigma}{\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\xi}{x}$ καὶ ἔτσι καὶ τὸ x κατασκευάζεται.

5ον. $x = \frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^3+\beta^3} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} = \frac{\lambda^4 - (\alpha\beta\sqrt{2})^2}{\mu(\nu^2-\theta^2)} = \frac{\lambda^4-\kappa^4}{\mu \cdot \sigma^2} =$

$$\frac{(\lambda^2+\kappa^2)(\lambda^2-\kappa^2)}{\mu\,\sigma^2} = \frac{\rho^2 \cdot \eta^2}{\mu\,\sigma^2} = \frac{\rho^2}{\mu} \cdot \frac{\eta}{\sigma} \cdot \frac{\eta}{\sigma} = \xi \cdot \frac{\eta}{\sigma} \cdot \frac{\eta}{\sigma} = \varphi \cdot \frac{\kappa}{\sigma}$$

6ον. $x = \alpha + \sqrt{\alpha\beta - \gamma^2} = \alpha + \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2} = \alpha + \eta.$

12. Ἐὰν τὰ μήκη μ_α, μ_β, μ_γ τῶν διαμέσων τῶν πλευρῶν γνωστοῦ τριγώνου συνδέωνται μὲ τὴν ἰσότητα: $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3E\sqrt{3}$, ὅπου E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἐκ τοῦ πρώτου θεωρ. τῶν διαμέσων λαμβάνομεν:

$$2\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad 2\mu_\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2 - \frac{\beta^2}{2}, \quad 2\mu_\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \Rightarrow 3E\sqrt{3} = \frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \Rightarrow$$

$$3E^2 = \frac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 \Rightarrow 3\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = \frac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{16} \cdot (\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 \Rightarrow$$

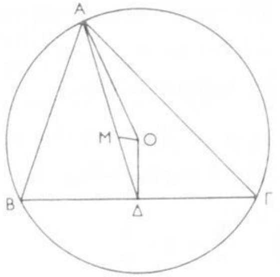
$$-3\,[\gamma^2 - (\alpha+\beta)^2]\,[\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2] = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 \Rightarrow$$

$$2\alpha^4 + 2\beta^4 + 2\gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2 = 0 \Rightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 + (\beta^2-\gamma^2)^2 + (\gamma^2-\alpha^2)^2 = 0$$

Ἀλλ' ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι δυνατή, ἐὰν καὶ ἐφόσον: $\alpha = \beta = \gamma$.

13. Δείξατε, ὅτι ἡ ἀπόστασις D τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου παρέχεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα: $D^2 = R^2 - \frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΟ, ὅπου Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων του, ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρ. τοῦ Stewart. Ἔχομεν λοιπόν: $(AO)^2\,(M\Delta) + (O\Delta)^2\,(AM) =$



(Σχ. 162)

$$(Α\Delta).\left[(OM)^2+(AM)(M\Delta)\right] \Rightarrow$$

$$R^2\cdot {}^1\!/_3\,(Α\Delta)+\left(R^2-\frac{\alpha^2}{4}\right)\cdot {}^2\!/_3\cdot(Α\Delta)=$$

$$(Α\Delta)\left[(OM)^2+\frac{2}{9}\cdot(Α\Delta)^2\right] \Rightarrow$$

$$(OM)^2=D^2=R^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{9}$$

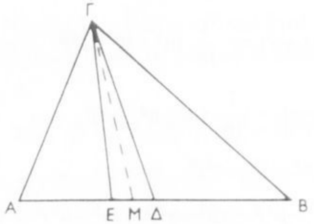
μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $(Α\Delta)^2$ μὲ τὴν τιμήν του.

14. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ συμμετροδιάμεσος μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου καὶ μόνον αὐτὴ διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι τὴν περιέχουν.

Εἰς τὴν σελίδα 25 (ἄσκ. 4) ἐμιλήσαμεν διὰ τὴν συμμετροδιάμεσον δηλ. διὰ τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ συμμετρικὸν τῆς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον, τὴν ἀγομένην ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

1ον. Δεχόμεθα, ὅτι τὸ ΓΕ εὐθ. τμῆμα εἶναι συμμετροδιάμεσος τοῦ τριγώνου μας καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀρκεῖ αὐτὸ διὰ νὰ εἶναι:

$$\frac{(ΑΕΓ)}{(ΕΒΓ)}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$



(Σχ. 163)

Ἔχομεν: $\dfrac{(ΑΕΓ)}{(\Delta ΒΓ)}=\dfrac{(ΓΑ)\,(ΓΕ)}{(Γ\Delta)\,(ΓΒ)}$,

$$\frac{(Α\Delta Γ)}{(ΕΒΓ)}=\frac{(ΓΑ)\,(Γ\Delta)}{(ΓΕ)\,(ΓΒ)} \qquad (Κεφ.\ 9,\ 3).$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{(ΑΕΓ)}{(ΕΒΓ)}=\frac{(ΓΑ)^2}{(ΓΒ)^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{διότι} \quad (\Delta ΒΓ)=(Α\Delta Γ).$$

2ον. Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ἰσχύει ἡ (1). Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀναγκαίως τὸ ΓΕ τμῆμα εἶναι συμμετροδιάμεσος τοῦ τριγώνου μας.

Ἐὰν τὸ ΓΕ δὲν ἦτο συμμετροδιάμεσος θὰ ἦτο συμμετροδιάμεσος ἕνα ἄλλο εὐθ. τμῆμα $ΓΕ_1$ καὶ κατὰ προηγούμενα θὰ εἴχομεν: $\dfrac{(ΑΕ_1Γ)}{(Ε_1ΒΓ)}=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ (2)

Ἀλλὰ θὰ εἴχομεν ἀκόμη: $\frac{(\text{ΑΕΓ})}{(\text{ΕΒΓ})} = \frac{(\text{ΑΕ})}{(\text{ΕΒ})}$ καὶ $\frac{(\text{ΑΕ}_1\text{Γ})}{(\text{Ε}_1\text{ΒΓ})} = \frac{(\text{ΑΕ}_1)}{(\text{Ε}_1\text{Β})}$

Καὶ λόγω τῶν (1) καὶ (2) θὰ συνέβαινε νὰ εἶναι: $\frac{(\text{ΑΕ})}{(\text{ΕΒ})} = \frac{(\text{ΑΕ}_1)}{(\text{Ε}_1\text{Β})}$ δηλ. νὰ ὑπῆρχαν δύο σημεῖα, τὰ Ε, Ε_1, διαιροῦντα ἐσωτερικῶς τὸ ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο εἶναι ἄτοπον, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ Ε, Ε_1, συμπίπτουν.

15. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν συμμετροδιαμέσων τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρ. Stewart (Σχ. 163) λαμβάνομεν:

$$\beta^2 \cdot (\text{ΕΒ}) + \alpha^2 (\text{ΑΕ}) = \gamma \left[(\text{ΓΕ})^2 + (\text{ΑΕ}) \cdot (\text{ΕΒ}) \right] \qquad (1)$$

Ἀλλὰ (ἄσκ. 14), $\frac{(\text{ΑΕ})}{\beta^2} = \frac{(\text{ΕΒ})}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow (\text{ΑΕ}) = \frac{\beta^2\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$,

$(\text{ΕΒ}) = \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\alpha^2\beta^2\gamma}{\alpha^2+\beta^2} = \gamma \left[(\text{ΓΕ})^2 + \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \right] \Rightarrow$$

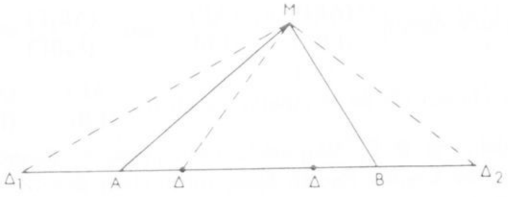
$$(\text{ΓΕ}) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}.$$

16. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α καὶ Β τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου συνδέονται μὲ τὴν σχέσιν: $\mu\text{ΜΑ}^2 \pm \nu\text{ΜΒ}^2 = \text{Κ}^2$, ὅπου τὰ μ, ν εἶναι γνωστοὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ Κ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.

Ὁ καθεὶς ἀντιλαμβάνεται, ὅτι πρόκειται περὶ γενικευμένης μορφῆς τῶν προβλημάτων (Κεφ. 9, 5, 6.1, 7.1). Ἀντιμετωπίζομεν κατὰ πρῶτον τὸν γ.τ. τῶν Μ διὰ τὰ ὁποῖα: $\mu\text{ΜΑ}^2 + \nu\text{ΜΒ}^2 = \text{Κ}^2$. (1)

Ἡ συσχέτισις τῆς ἰσότητος Stewart μὲ τὴν (1) μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΑΒ ἐσωτερικῶς εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον $\frac{\nu}{\mu}$. Ἔστω δηλ., ὅτι

$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\nu}{\mu}$. Τότε λαμβάνομεν:



(Σχ. 164)

$$MA^2 \cdot \Delta B + MB^2 \cdot A\Delta = AB \cdot [\, M\Delta^2 + A\Delta \cdot \Delta B \,] \qquad (2)$$

Ἀλλά, $\frac{A\Delta}{\nu} = \frac{\Delta B}{\mu} = \frac{AB}{\mu+\nu} \Rightarrow A\Delta = \frac{\nu \cdot AB}{\mu+\nu}, \quad \Delta B = \frac{\mu \cdot AB}{\mu+\nu}$ (3)

Καὶ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) γίνεται:

$$MA^2 \cdot \frac{\mu \cdot AB}{\mu+\nu} + MB^2 \cdot \frac{\nu \cdot AB}{\mu+\nu} = AB \cdot \left[M\Delta^2 + \frac{\mu\nu \cdot AB^2}{(\mu+\nu)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\mu \cdot MA^2 + \nu \cdot MB^2 = (\mu+\nu) \cdot M\Delta^2 + \frac{\mu\nu \cdot AB^2}{\mu+\nu} \qquad (4)$$

Καὶ λόγῳ τῆς (1), ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν:

$$M\Delta = \frac{\sqrt{(K\sqrt{\mu+\nu})^2 - (AB\sqrt{\mu\nu})^2}}{\mu+\nu} \qquad (5)$$

Καὶ δεδομένου, ὅτι ὁ τρόπος κατασκευῆς τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΔ εἶναι γνωστός, συμπεραίνομεν: Ἕνα σημεῖον Μ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου, ἱκανοποιοῦν τὴν (1), ἀνήκει ἀναγκαίως εἰς τὴν περιφέρειαν (Δ, ΜΔ), ὅπου τὸ Δ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{\nu}{\mu}$ καὶ τὸ ΜΔ ἔχει τὸ μέγεθος (5). Καὶ ἐναπομένει τὸ ἐρώτημα: Ἡ περιφέρεια (Δ, ΜΔ) δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα ἱκανοποιοῦντα τὴν (1);

Ἐὰν Μ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας, θὰ ἔχωμεν ἰσχύουσαν τὴν ἰσότητα (2) καὶ λόγῳ τῶν (3) θὰ ἔχωμεν ἰσχύουσαν τὴν (4). Ἐὰν ὅμως ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (4) τὸ ΜΔ μὲ τὴν τιμήν του (5), λαμβάνομεν ἐκ τῆς (5) τὴν (1). Ὥστε:

Ὁ γ.τ. τῶν Μ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ περιφέρεια (Δ, ΜΔ) μὲ τὸ Δ ἱκανοποιοῦν τὰς (3) καὶ τὸ ΜΔ τὴν (5).*

Θὰ ζητήσωμεν τώρα τὸν γ.τ. τῶν Μ διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης: $\mu MA^2 - \nu MB^2 = K^2$. (6)

Καὶ πάλιν, ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὴν ἰσότητα Stewart, ὁρίζομεν τὸ Δ, ὥστε νὰ διαιρῇ ἐξωτερικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον $\frac{\nu}{\mu}$. Ὑποθέτομεν τὸ πρῶτον, ὅτι $\mu > \nu$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$\frac{\Delta_1 A}{\nu} = \frac{\Delta_1 B}{\mu} = \frac{AB}{\mu - \nu} \implies \Delta_1 A = \frac{\nu AB}{\mu - \nu}, \quad \Delta_1 B = \frac{\mu AB}{\mu - \nu} \tag{7}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος Stewart (Κεφ. 9, 5, 8.1) ἔχομεν:

$$MA^2 \cdot \Delta_1 B - MB^2 \cdot \Delta_1 A = AB\left[M\Delta_1^2 - \Delta_1 A \cdot \Delta_1 B\right] \tag{8}$$

Καὶ λόγῳ τῶν ἰσοτήτων (7) λαμβάνομεν:

$$MA^2 \cdot \frac{\mu AB}{\mu - \nu} - MB^2 \cdot \frac{\nu AB}{\mu - \nu} = AB\left[M\Delta_1^2 - \frac{\mu\nu AB^2}{(\mu - \nu)^2}\right] \implies \tag{9}$$

$$M\Delta_1 = \frac{\sqrt{(K\sqrt{\mu - \nu})^2 + (AB\sqrt{\mu\nu})^2}}{\mu - \nu} \tag{10}$$

Καὶ δεδομένου, ὅτι ἡ κατασκευὴ τοῦ τμήματος $M\Delta_1$ εἶναι γνωστὴ καὶ δυνατὴ λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\mu > \nu$, τὰ Μ, τὰ ἱκανοποιοῦντα τὴν (6), ἀνήκουν ἀναγκαίως εἰς τὴν περιφέρειαν (Δ_1, $M\Delta_1$). Εἶναι ὅμως ἀρκετὸν νὰ ἀνήκῃ ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν σημείων Α,Β εἰς τὴν περιφέρειαν (Δ_1, $M\Delta_1$) αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου διὰ νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἰσότητα (6);

Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, δίδομεν καταφατικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημά μας καὶ ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια ἀποτελεῖ τὸν γ.τ. τῶν σημείων Μ τοῦ προβλήματος.

---

*Ἐκ τῆς ἰσότητος (5) διαπιστοῦμεν, ὅτι ἡ δυνατότης ὑπάρξεως τμήματος ΜΔ ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι: $K\sqrt{\mu + \nu} > AB\sqrt{\mu\nu}$. Καὶ τῆς συνθήκης ταύτης πληρουμένης, ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος ἔχει ὑπόστασιν ἀνεξαρτήτως ἂν $\mu > \nu$ ἢ $\mu < \nu$. Αἱ τελευταῖαι αὐταὶ ἀνισότητες ἀφοροῦν ἁπλῶς τὴν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ: θὰ εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ δεξιὰ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Πρέπει ἀκόμη νὰ σημειώσωμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ μ,ν δὲν ὑπόκεινται εἰς ἄλλον περιορισμὸν ἐκτὸς τοῦ νὰ ἐπιτρέπουν τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν τοῦ τμήματος ΜΔ.

Ὑ π ο θ έ τ ο μ ε ν τ ώ ρ α, ὅ τ ι $\mu<\nu$ δηλ. ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ ἐξωτερικὸν σημεῖον Δ_2 διαιρέσεως τοῦ ΑΒ εἶναι δεξιὰ τοῦ Β. Ἔτσι, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{A\Delta_2}{\nu}=\frac{B\Delta_2}{\mu}=\frac{A\Delta_2-B\Delta_2}{\nu-\mu}=\frac{AB}{\nu-\mu} \quad \Rightarrow$$

$$A\Delta_2=\frac{\nu\cdot AB}{\nu-\mu},\quad B\Delta_2=\frac{\mu\, AB}{\nu-\mu} \qquad (11)$$

Ἡ ἰσότης Stewart εἰς τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσιν θὰ μᾶς δώση:

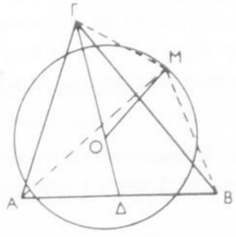
$$MB^2\cdot A\Delta_2-MA^2\cdot B\Delta_2=AB\,[\,M\Delta_2^2-A\Delta_2\cdot B\Delta_2\,]$$

καὶ λόγῳ τῶν ἰσοτήτων (11) θὰ λάβωμεν τελικά:

$$M\Delta_2=\frac{\sqrt{(AB\sqrt{\mu\nu})^2-(K\sqrt{\nu-\mu})^2}}{\nu-\mu}$$

Ἡ δυνατότης κατασκευῆς τοῦ $M\Delta_2$ ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι: $AB\sqrt{\mu\nu}>K\sqrt{\nu-\mu}$ καὶ ταύτης πληρουμένης, βεβαιοῦμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ $\nu>\mu$ ὡς γ.τ. τῶν Μ τὴν περιφέρειαν (Δ_2, $M\Delta_2$).

17. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τρία γνωστὰ καὶ μὴ συνευθειακὰ σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι K^2, ὅπου Κ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.



(Σχ. 165)

Ἐκ τοῦ πρώτου θεωρήματος τῶν διαμέσων λαμβάνομεν:

$$MA^2+MB^2=2M\Delta^2+\frac{AB^2}{2} \qquad (1)$$

Καὶ ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὸν γ.τ. τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2=K^2 \qquad (2)$$

συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ Μ θὰ ἱκανοποιοῦν ἀ ν α γ κ α ί ω ς τὴν ἰσότητα:

$$M\Gamma^2+2M\Delta^2=K^2-\frac{AB^2}{2}=K^2-\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2=N^2 \qquad (3)$$

Ἀνήχθημεν λοιπὸν εἰς τὸν προηγουμένως σπουδασθέντα γεωμετρικὸν τύπον. Κατ' ἀκολουθίαν, διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΓΔ εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 2:1 καὶ ἡ ἀπόστασις ΜΟ, ὅπου Ο τὸ σημεῖον διαιρέσεως, παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$MO = \frac{\sqrt{(N\sqrt{3})^2-(\Gamma\Delta\sqrt{2})^2}}{3} \quad (4) \quad (\beta\lambda.\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\nu\ 5\ \pi\rho\beta\lambda.\ 16)$$

Εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι τὰ Μ, τὰ ἱκανοποιοῦντα τὴν (4), ἱκανοποιοῦν τὴν (2). Πράγματι, κατὰ τὰ θεωρ. Stevart ἔχομεν:

$$M\Gamma^2 \cdot O\Delta + M\Delta^2 \cdot \Gamma O = \Gamma\Delta[MO^2 + \Gamma O \cdot O\Delta] \Rightarrow$$

$$M\Gamma^2 \cdot {}^1/_3\Gamma\Delta + M\Delta^2 \cdot \frac{2}{3}\Gamma\Delta = \Gamma\Delta\left[\frac{3N^2-2\Gamma\Delta^2}{9} + \frac{2}{9}\Gamma\Delta^2\right] \Rightarrow$$

$$3M\Gamma^2 + 6M\Delta^2 = 3N^2 - 2\Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta^2 \Rightarrow MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = K^2$$

ἀφοῦ ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν ἰσχύουσαν ἔκφρασιν (1) καὶ τὴν τιμὴν τοῦ N^2.

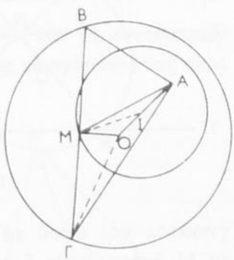
Συμπέρασμα: Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι ἡ περιφέρεια (Ο, ΜΟ).

18. Ὀρθὴ γωνία Α στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφήν της, ἡ ὁποία εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον γνωστῆς περιφερείας. Ἐὰν αἱ πλευραί της τέμνουν τὴν ἐν λόγῳ περιφέρειαν ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν οὕτως ὁριζομένων χορδῶν ΒΓ.

$$MO^2 = R^2 - M\Gamma^2 = R^2 - MA^2 \quad (AM = BM = M\Gamma)$$

Ὥστε: $MO^2 + MA^2 = R^2 \Rightarrow 2MI^2 + \frac{OA^2}{2} = R^2 \Rightarrow$

$$MI = \frac{\sqrt{(R\sqrt{2})^2 - OA^2}}{2} \quad (1)$$



(Σχ. 166)

ὅπου Ι τὸ μέσον τοῦ ΟΑ. Δηλ. τὰ Μ ἀναγκαίως ἀνήκουν εἰς τὴν περιφέρειαν (Ι, ΜΙ). Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας (Ο,R) ἱκανοποιεῖ τὴν (1), θὰ ἀνήκῃ εἰς τὰ σημεῖα Μ τοῦ προβλήματος;

Εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ καὶ ἐὰν Β,Γ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καθέτου ταύτης μετὰ τῆς περιφερείας (Ο,R), θὰ δείξωμεν, ὅτι $B\hat{A}\Gamma = 1_{\llcorner}$. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$4MI^2 = 2R^2 - OA^2 \Rightarrow 2MI^2 = R^2 - \frac{OA^2}{2} \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου πάλιν ΑΜΟ λαμβάνομεν:

$$MO^2 + MA^2 = 2MI^2 + \frac{OA^2}{2} \qquad (3)$$

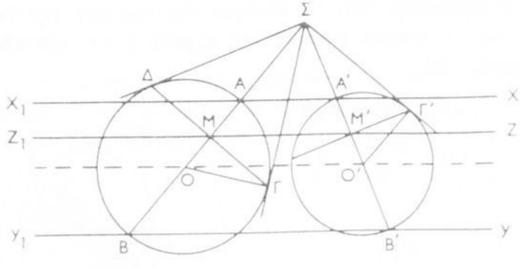
Καὶ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν (2), (3) προκύπτει:

$$MO^2 + MA^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - MO^2 = MA^2 \Rightarrow O\Gamma^2 - MO^2 = MA^2$$

Καὶ ἐπειδή, $O\Gamma^2 - MO^2 = M\Gamma^2$ συμπεραίνομεν, ὅτι $MA = M\Gamma$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $BM = MA = M\Gamma$.

Συμπέρασμα: Ἡ περιφέρεια (Ι, ΜΙ) συνίσταται ἀπὸ τὰ σημεῖα Μ τοῦ προβλήματος καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα, συνιστᾷ λοιπὸν τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον.

19. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῶν. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν κινητὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς παραλλήλους εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν πρὸς τὴν ὁποίαν φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ἐκ τοῦ Σ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ, τομῆς τῶν εὐθειῶν ΣΑΒ καὶ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν.



(Σχ. 167)

Ἔχομεν τὴν ὁμοιότητα:

$$\Sigma O\Gamma_\Delta \approx OM\Gamma_\Delta$$

Ἄρα: $\dfrac{O\Gamma}{O\Sigma} = \dfrac{OM}{O\Gamma} \Rightarrow$

$$\frac{OB}{O\Sigma} = \frac{OM}{OA}$$

Ὅμως ὁ λόγος $\dfrac{OB}{O\Sigma}$ εἶναι σταθερὸς καὶ γνωστός, συνεπῶς ὁ λόγος $\dfrac{OM}{OA}$ εἶναι γνωστὸς καὶ ἀφοῦ τὰ Α ἀνήκουν εἰς ὡρισμένην εὐθεῖαν x_1x ἀναγκαίως τὰ Μ ἀνήκουν εἰς ὡρισμένην παράλληλον z_1z πρὸς τὴν x_1x.* Καὶ τώρα, ἡ z_1z

*Τί σημαίνει ὁ λόγος $\dfrac{OB}{O\Sigma}$ εἶναι σταθερὸς καὶ γνωστός; Προφανῶς, ὅτι τὰ ὁριζόμενα τμήματα ΟΒ, ΟΣ, τὰ ὁποῖα θὰ δημιουργηθοῦν ἐπί τινος τεμνούσης ΣΑΒ τὰς δύο παραλλήλους, θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ δημιουργηθοῦν καὶ ἐπὶ τῆς τυχούσης ἄλλης τοιαύτης τεμνούσης. Ἂς σημειωθῇ, ὅτι ὁ γ.τ. τῶν Ο εἶναι ἡ μεσοπαράλληλος τῶν x_1x καὶ y_1y. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν χάραξιν τῆς z_1z δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ καθορίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν θέσιν ἑνὸς τῶν σημείων Μ, μὲ τὴν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\dfrac{OM}{OA}$, καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν x_1x.

δύναται νὰ θεωρηθῆ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα Μ τοῦ προβλήματος;

Ἐὰν Μ΄ εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τῆς z_1z, χαράσσομεν τὴν ΣΜ΄ καὶ εὑρίσκομεν τὰ Α΄, Β΄ ἐπὶ τῶν x_1x καὶ y_1y ἀντιστοίχως. Μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα Α΄Β΄ γράφομεν περιφέρειαν πρὸς τὴν ὁποίαν φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΓ΄. Ἐὰν ἡ Γ΄Μ΄ ἀποδειχθῆ κάθετος ἐπὶ τὴν Α΄Β΄, τὸ Μ΄ προφανῶς ἀνήκει εἰς τὰ Μ τοῦ προβλήματος.

Ἔχομεν: $$\frac{OM}{OA} = \frac{O'M'}{O'A'} \Rightarrow \frac{OM}{O\Gamma} = \frac{O'M'}{O'\Gamma'} \qquad (1)$$

Ἐπίσης, $$\frac{OA}{O\Sigma} = \frac{O\Gamma}{O\Sigma}, \qquad \frac{OA}{O\Sigma} = \frac{O'A'}{O'\Sigma} = \frac{O'\Gamma'}{O'\Sigma}$$

Ὥστε: $\dfrac{O\Gamma}{O\Sigma} = \dfrac{O'\Gamma'}{O'\Sigma}$. (2) Καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{OM}{O\Gamma} = \dfrac{O\Gamma}{O\Sigma}$, θὰ εἶναι, λόγω τῶν

(1) καὶ (2), $$\frac{O'M'}{O'\Gamma'} = \frac{O'\Gamma'}{O'\Sigma}. \qquad (3)$$

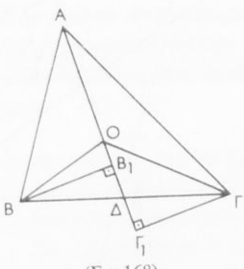
Ἔτσι, λόγω τῆς (3), τὰ τρίγωνα Ο΄Μ΄Γ΄ καὶ Ο΄ΣΓ΄ ἔχουν τὴν γωνίαν των $\hat{O}'$ κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν τὴν γωνίαν πλευρὰς ἀναλόγους. Εἶναι λοιπὸν ὅμοια καὶ συνεπῶς, $O'\hat{M}'\Gamma' = O'\hat{\Gamma}'\Sigma$. Καὶ ἐπειδὴ $O'\hat{\Gamma}'\Sigma = 1_L$, εἶναι καὶ $O'\hat{M}'\Gamma' = 1_L$ ὅ.ἔ.δ.

20. Νὰ ὁρισθῆ ἐσωτερικὸν σημεῖον ἑνὸς τριγώνου, τὸ ὁποῖον, ἐὰν τὸ συνδέσωμεν μὲ τὰς κορυφάς του δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, νὰ διαιρῆται τὸ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Δεχόμεθα, ὅτι (ΑΒΟ) = (ΟΒΓ) = (ΟΓΑ). Ἔτσι, $\frac{1}{2}(AO)(BB_1) = \frac{1}{2}(AO)(\Gamma\Gamma_1)$ $(BB_1 \perp AO,\ \Gamma\Gamma_1 \perp AO)$

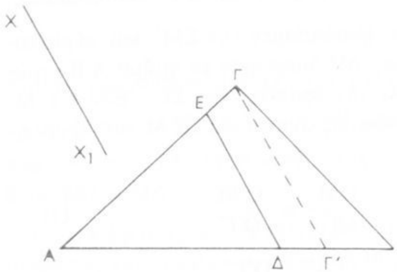
Ὥστε: $(BB_1) = (\Gamma\Gamma_1) \Rightarrow B\Delta B_{1\Delta} = \Delta\Gamma_1\Gamma_\Delta \Rightarrow$ $B\Delta = \Delta\Gamma$.

Δεχόμενοι λοιπόν, ὅτι τὸ Ο ἱκανοποιεῖ τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματός μας, τὸ εὑρίσκομεν νὰ ἀνήκῃ ἀ ν α γ κ α ί ω ς εἰς τὰς διαμέσους τῶν πλευρῶν του. Τὸ Ο συνεπῶς εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων.



(Σχ. 168)

21. Νὰ διαιρεθῆ γνωστὸν τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη διὰ τμήματος παραλλήλου πρὸς μίαν γνωστὴν εὐθεῖαν.



(Σχ. 169)

Ἔστω, ὅτι τὸ ΔΕ ∥ x_1x καὶ ὅτι (ΑΔΕ) = (ΔΒΓΕ). Χρειάζεται προφανῶς νὰ καθορισθῇ τὸ Ε ἢ τὸ Δ.

Ἐκ τοῦ θεωρ. (Κεφ. 9, 3, 1ον) ἔχομεν:

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{(\text{ΑΔ})\,(\text{ΑΕ})}{(\text{ΑΒ})\,(\text{ΑΓ})} = \tfrac{1}{2} \qquad (1).$$

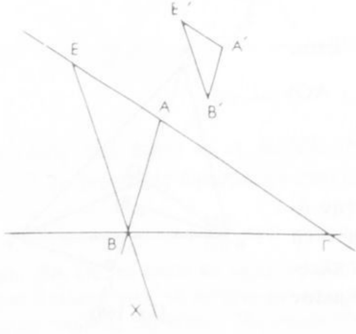
Ἐὰν ὅμως ΓΓ΄ ∥ xx_1, λαμβάνομεν:

$\dfrac{(\text{ΑΕ})}{(\text{ΑΓ})} = \dfrac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΓ}')}$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{(\text{ΑΔ})^2}{(\text{ΑΓ}')\,(\text{ΑΒ})} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{ΑΔ}^2 = \frac{\text{ΑΓ}'}{2}\,.\,\text{ΑΒ} \qquad (2)$$

Ἔτσι, ἡ (2), εἰς τὴν ὁποίαν τὰ τμήματα παρουσιάζονται ὡς γεωμετρικαὶ ὀντότητες, ἀπαιτεῖ ὅπως τὸ ἄγνωστον τμῆμα ΑΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν γνωστῶν τμημάτων $\dfrac{\text{ΑΓ}'}{2}$ καὶ ΑΒ.

22. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Α τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον τὰ μεγέθη β, γ τῶν πλευρῶν του ΑΓ, ΑΒ συνδέονται μὲ τὴν ἰσότητα: $\dfrac{\beta}{\mu} + \dfrac{\gamma}{\nu} = 1$, ὅπου μ, ν γνωστὰ εὐθ. τμήματα.



(Σχ. 170)

Ἀνάλυσις. Ἐκ τῆς διδομένης σχέσεως λαμβάνομεν $\mu = \beta + \dfrac{\mu\gamma}{\nu}$.

Ἔτσι, ἐπὶ τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ἱκανοποιοῦντος τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος σχήματος καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΑ ὑποθέτομεν, ὅτι λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ μεγέθους $\dfrac{\mu\gamma}{\nu}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὸ τμῆμα ΓΕ ἴσον μὲ τὸ γνωστὸν τμῆμα μ. Τοῦ σχηματισθέντος τριγώνου ΓΕΒ γνωρίζομεν: τὴν πλευρὰν ΓΕ, τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὴν γωνίαν του Ε. Πράγματι, τοῦ τριγώνου ΑΕΒ γνωρίζομεν τὴν γωνίαν του ΒΑΕ, ὡς παραπληρωματικὴν τῆς Α, καὶ τὸν λόγον τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν

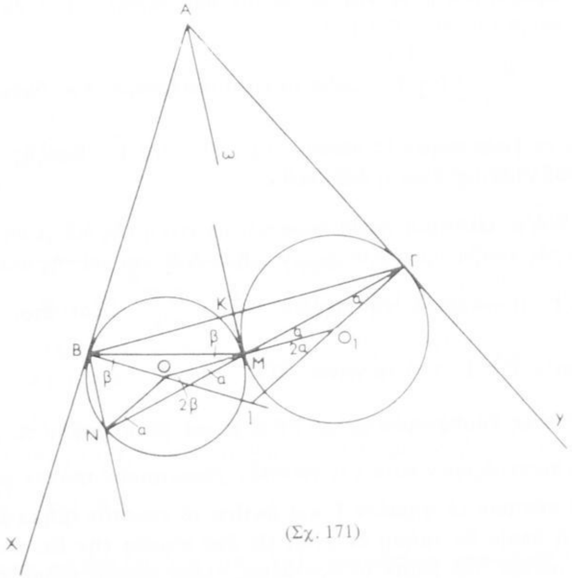
$$\frac{AE}{AB} = \frac{\frac{\mu\gamma}{\nu}}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$ Ἔτσι, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ὅμοιον πρὸς αὐτὸ τρίγωνον καὶ νὰ γνωρίσωμεν ἐξ αὐτοῦ τὸ μέγεθος τῆς $\hat{E}$. Ἐφεξῆς ἡ Συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Σύνθεσις. $B'\hat{A}'E'$ εἶναι μία γωνία παραπληρωματικὴ τῆς διδομένης $\hat{A}$. Ἐπὶ τῆς μιᾶς της πλευρᾶς λαμβάνομεν αὐθαίρετον τμῆμα $A'B'$ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης της πλευρᾶς τμῆμα $A'E'$, ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν: $\frac{\mu}{\nu} = \frac{A'B'}{A'E'}$. Καὶ ἔτσι μᾶς γίνεται γνωστὴ ἡ γωνία $\hat{E} = \hat{E}'$ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ.

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΓΕ = μ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Ε καὶ πλευρὰν τὸ ΕΓ κατασκευάζομεν κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον γωνίαν $\Gamma\hat{E}x = \hat{E}'$. Τώρα, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα τὸ γνωστὸν τμῆμα ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ τμήσῃ ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα τὴν Ex. καὶ ἔστω Β ἓν τῶν σημείων τούτων. Μὲ βάσιν τὸ ὡρισμένης πλέον θέσεως τμῆμα ΒΓ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, δεχομένου γωνίαν Α καὶ ἂν Α εἶναι ἡ τομὴ τοῦ τόξου τούτου μὲ τὸ τμῆμα ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εἶναι φανερόν, ἱκανοποιεῖ τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Σημειοῦμεν, ὅτι τὸ πρόβλημά μας ἐκ τῆς ὑπάρξεως δύο, ἑνὸς ἢ οὐδενὸς σημείου Β δύναται νὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσεις.

23. Δίδονται δύο τεμνόμεναι ἡμιευθεῖαι Αx, Αy καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ τῶν εὐθειῶν Αx, Αy εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ ἀντιστοίχως, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀκτίνων των νὰ εἶναι μ/ν, ὅπου μ,ν γνωστὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἀνάλυσις. Ἐὰν αἱ ζητούμεναι περιφέρειαι εἶναι αἱ (O, R) καὶ (O_1, R_1) θὰ ἔχουν ἀντιστοίχως τὰ κέντρα των ἐπὶ τῶν καθέτων τῶν Αx καὶ Αy εἰς τὰ Β καὶ Γ. Ἔτσι, ἡ δυνατότης χαράξεως τῶν περιφερειῶν τούτων χρειάζεται τὸν καθορισμὸν τῶν Ο καὶ O_1, ὁ ὁποῖος ἐπιτυγχάνεται, ὅπως εἶναι φανερόν, ἐὰν μεσολαβήσῃ ὁ καθορισμὸς τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ. Θὰ πρέπει τώρα νὰ ἀναγνωρίσωμεν εἰς τὸ Μ τὴν ὑποχρεωτικὴν ὑπ' αὐτοῦ ἱκανοποίησιν δύο ἐπιταγμάτων. Θὰ ἀποδείξωμεν πρῶτον, ὅτι τὸ Μ βλέπει τὸ ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα ΒΓ ὑπὸ γωνίαν ὡρισμένου μεγέθους.



(Σχ. 171)

Ἡ γραμμὴ OMO_1 εἶναι εὐθεῖα. Συνεπῶς ἡ γωνία Ι εἶναι παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος $2\hat{\alpha}+2\hat{\beta}$. Ἀλλά, $\hat{I}=2_{\llcorner}-\hat{A}$, ἕνεκα τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΙΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $2\hat{\alpha}+2\hat{\beta}=\hat{A} \Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}=\frac{\hat{A}}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ $B\hat{M}\Gamma=2_{\llcorner}-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}) \Rightarrow B\hat{M}\Gamma=2_{\llcorner}-\frac{\hat{A}}{2}$. Τὸ Μ λοιπὸν ἀνήκει εἰς τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τοῦ γραφομένου μὲ βάσιν τὸ ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν $2_{\llcorner}-\frac{\hat{A}}{2}$.

Ἀναζητοῦμεν τώρα τὸ 2ον ἐπίταγμα τοῦ Μ.

Ἡ χορδὴ ΓΜ, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρειαν (O, R) εἰς τὸ Ν καὶ ὡς εἶναι φανερὸν $ON \parallel \Gamma O_1$. Ἔτσι, $NO \perp Ay$ καὶ $B\hat{O}N=\hat{A} \Rightarrow xB\hat{N}=\frac{1}{2}B\hat{O}N=\frac{1}{2}\hat{A}$. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΝ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον Αω τῆς γωνίας $\hat{A}$. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΜΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον Αω θὰ ἔχωμεν: $\frac{ΓΚ}{ΚΒ}=\frac{ΓΜ}{ΜΝ}=\frac{ΓΟ_1}{ΟΝ}=\frac{R_1}{R}=\frac{\nu}{\mu}$. $(ΓΜΟ_{1Δ} \approx ΟΝΜ_Δ)$.

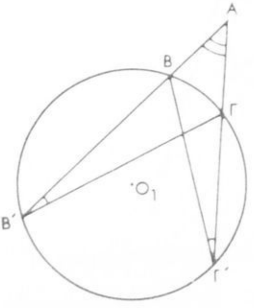
Τὸ σημεῖον λοιπὸν Κ ἐπὶ τοῦ ΓΒ εἶναι ὡρισμένον καὶ τὸ Μ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ Κ παράλληλος πρὸς τὴν Αω. Ὁριζομένου ὅμως τοῦ Μ, ὁρίζονται τὰ Ο καὶ $Ο_1$, ἀγομένων καὶ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων ΒΜ καὶ ΓΜ.

10 ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

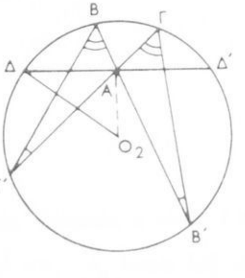
Ἐγγεγραμμένα εἰς περιφέρειαν σχήματα

1. 1ον. Ἐὰν ἐκ σημείου Α, συνεπιπέδου περιφερείας τινός, φέρωμεν τεμνούσας τὴν περιφέρειαν, τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τῆς τυχούσης τεμνούσης μὲ τὴν περιφέρειαν εἶναι σταθερόν.

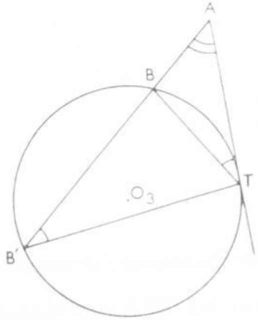
2ον. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐξωτερικοῦ καὶ συνεπιπέδου περιφερείας τινὸς φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν τέμνουσαν τῆς περιφερείας, ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν περιφέρειαν ἔχει μῆκος μέσον ἀνάλογον τῶν μηκῶν τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῆς τεμνούσης μὲ τὴν περιφέρειαν.



(Σχ. 172)



(Σχ. 173)



(Σχ. 174)

Τὸ 1ον μέρος τῆς προτάσεως βεβαιοῦται ἐκ τῆς εὐκόλως διαπιστουμένης ὁμοιότητος: $AB\Gamma'_\Delta \approx AB'\Gamma_\Delta$ (Σχ. 172, 173), καὶ τὸ 2ον ἐκ τῆς ὁμοιότητος $ABT_\Delta \approx AB'T_\Delta$. Καὶ εὑρίσκομεν:

$$(AB)(AB') = (A\Gamma)(A\Gamma'), \qquad (AT)^2 = (AB)(AB')$$

Τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἰσχύει καὶ ἡ **ἀντίστροφος:**

1ον. Ἐὰν ἐπὶ δύο εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, λάβωμεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Β,Β΄ καὶ Γ,Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν $(AB)(AB') = (A\Gamma)(A\Gamma')$, ἐνῶ τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν καὶ τῶν δύο τμημάτων ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄, αὐτὰ τὰ τέσσαρα σημεῖα εἶναι συμπεριφερειακά.

2ον. Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς ἡμιευθείας Αx λάβωμεν, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΒ΄ καὶ ἐπὶ μιᾶς ἄλλης ἡμιευθείας Αy λάβωμεν τμῆμα ΑΤ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι: $(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{AB})(\mathrm{AB'})$, ἡ περιφέρεια (B, B΄, Γ) ἐφάπτεται τῆς Aγ εἰς τὸ Γ.

Ἡ ἀλήθεια καὶ τῶν δύο μερῶν τῆς προτάσεώς μας ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Σημειοῦμεν, ὅτι διὰ τοῦ 1ου μέρους τῆς ἀνωτέρω προτάσεως μᾶς παρέχεται ἕνα ἀκόμη μέσον διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς ἐγγραψιμότητος ἑνὸς τετραπλεύρου.

2. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς περιφέρειαν. Ὀνομάζομεν **δύναμιν** ἑνὸς σημείου A, συνεπιπέδου γνωστῆς περιφερείας ἀκτῖνος R, ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν, τὸ σταθερὸν γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν ἀποστάσεων τοῦ A ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς μιᾶς εὐθείας, ἀγομένης ἐκ τοῦ A, καὶ αὐτῆς τῆς περιφερείας.

Ἐὰν τὸ σημεῖον A εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, κατὰ τὸ 2ον μέρος τῆς προτάσεως (Κεφ. 10, 1.), τὸ σταθερὸν γινόμενον $(\mathrm{AB}).(\mathrm{AB'})$ ἐκπροσωπεῖται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν $(\mathrm{A\Gamma})^2$, ὁ ὁποῖος, λόγω τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\mathrm{AO_3\Gamma}$, ἰσοῦται μὲ $(\mathrm{AO_3})^2 - R^2 = d^2 - R^2$, ὅπου d ὠνομάσαμεν τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου A ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς θεωρουμένης περιφερείας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου τῆς περιφερείας, θεωροῦμεν (Σχ. 173) τὴν χορδὴν ΔΔ΄, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $\mathrm{O_2A}$ εἰς τὸ A καὶ κατὰ τὸ 1ον μέρος τῆς προτάσεως (Κεφ. 10, 1.), τὸ γινόμενον $(\mathrm{AB}).(\mathrm{AB'})$ ἐκπροσωπεῖται καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον $(\mathrm{A\Delta}).(\mathrm{A\Delta'}) = (\mathrm{A\Delta})^2$, τὸ ὁποῖον, λόγω τοῦ ὀρθ. τριγώνου $\mathrm{\Delta O_2A}$, ἰσοῦται μὲ $R^2 - (\mathrm{O_2A})^2 = R^2 - d^2$, ὅπου $d = (\mathrm{O_2A})$.

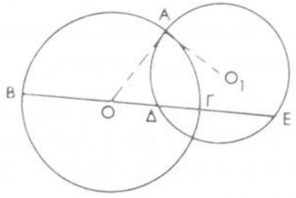
Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράφωμεν: $\pm (d^2 - R^2)$ καὶ νὰ ἐννοοῦμεν ἀντιστοίχως τὴν δύναμιν ἐξωτερικοῦ ἢ ἐσωτερικοῦ σημείου A, συνεπιπέδου περιφερείας (O, R), ὅπου $d = (\mathrm{OA})$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον A ἀνήκῃ εἰς τὴν περιφέρειαν (O,R) θὰ εἶναι $(\mathrm{OA}) = d = R$ καὶ ἡ δύναμίς του, ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν, θὰ εἶναι μηδέν.*

*Σημειοῦμεν, ὅτι, ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ συνεπιπέδου τῆς περιφερείας (O, R) σημείου A, γράφουν τὴν δύναμιν τοῦ A ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν $d^2 - R^2$, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ αὕτη ἔκφρασις τῆς δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν, ἐφόσον τὸ A εἶναι ἐξωτερικόν, ἐσωτερικὸν ἢ σημεῖον αὐτῆς τῆς περιφερείας.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰ τμήματα AB καὶ AB΄, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου A, εἶναι ὁμόρροπα, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου A εἶναι ἀντίρροπα. Ἔτσι, ἂν θεωρήσωμεν τὰ τμήματα προσανατολισμένα, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου A (Σχ. 173) πρέπει νὰ γράψωμεν: $(\mathrm{A\Delta})(\mathrm{A\Delta})' = -(\mathrm{A\Delta})^2 = -(R^2 - d^2) = d^2 - R^2$ καὶ συνεπῶς ἡ διαφορὰ $d^2 - R^2$ χαρακτηρίζεται ἀφ' ἑαυτῆς ὡς ἀρνητικὸς ἀριθμός.

2.1. Παρατήρησις: **Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶναι, ἡ δύναμις τοῦ κέντρου ἑκάστης τῶν περιφερειῶν ὡς πρὸς τὴν ἄλλην τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς πρώτης.**



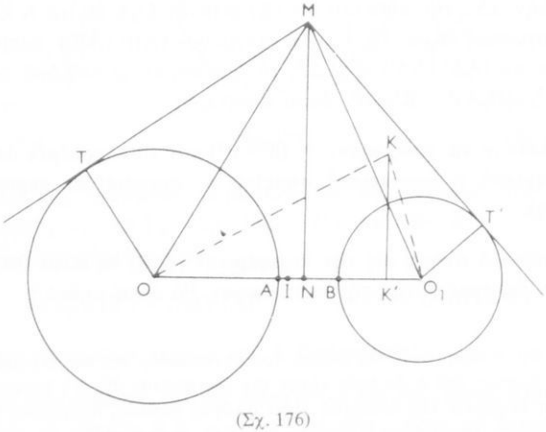
(Σχ. 175)

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἡ ἀκτὶς OA θὰ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ A τῆς (O_1) καὶ συνεπῶς ἡ δύναμις τοῦ O ὡς πρὸς τὴν (O_1) θὰ εἶναι $(OA)^2$.

Ἐὰν τώρα ἡ δύναμις τοῦ O ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (O_1) εἶναι (OA^2), αὐτὸ συνεπάγεται ἡ ἀκτὶς OA νὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O_1) καὶ συνεπῶς αἱ ἀκτῖνες OA καὶ O_1A νὰ εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας ἢ ἄλλως αἱ (O) καὶ (O_1) περιφέρειαι νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως.

3. Ριζικὸς ἄξων καὶ Ριζικὸν κέντρον.

3.1. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δύο περιφερείας αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου.



(Σχ. 176)

Ἐὰν ἕνα σημεῖον M, συνεπίπεδον δύο περιφερειῶν (O, R) καὶ (O_1, R_1) ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας, σημαίνει, ὅτι τοῦτο εἶναι συγχρόνως ἐξωτερικὸν ἢ ἐσωτερικὸν ἢ ἀνήκει καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς περιφερείας. Ἡ ἐξήγησις τοῦ γεγονότος παρέχεται ἀπὸ τὸ ἀμέσως προηγούμενον ἐδάφιον (2), ὅπου δικαιολογεῖται λεπτομερῶς τὸ προσημασμένον τῆς ἀριθμητικῆς ἐκφράσεως τῆς «δυνάμεως» ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς τινα περιφέρειαν.

Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ περιφέρειαι (O, R), (O_1, R_1) καὶ ἕνα σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου των, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα:

$$(MO)^2 - R^2 = (MO_1)^2 - R_1^2 \tag{1}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) λαμβάνομεν: $(MO)^2 - (MO_1)^2 = R^2 - R_1^2$ (2)

καὶ τοιουτοτρόπως διαπιστοῦμεν, ὅτι κάθε σημεῖον M, τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος, ἔχει καὶ τὴν ἰδιότητα: Νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ ὡρισμένα σημεῖα O καὶ O_1 ἀποστάσεις τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων εἶναι σταθερά.

Ἀλλὰ τὸν γ.τ. τῶν σημείων τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰδιότητος ἐπραγματεύθημεν (Κεφ. 9, 5, 7.1). Καὶ ἔχομεν λόγῳ τῆς (2):

$$2(OO_1) \cdot (IN) = R^2 - R_1^2 \tag{3}$$

ἐὰν I εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος OO_1 καὶ N ἡ προβολὴ τοῦ M εἰς τὴν εὐθεῖαν OO_1. Ὥστε: $(IN) = \dfrac{R^2 - R_1^2}{2(OO_1)}$ (4)

Δηλ.: Κάθε σημεῖον M τῆς ἰδιότητος, τῆς ἐκφραζομένης διὰ τῆς (1), προβάλλεται εἰς τὴν εὐθεῖαν OO_1, εἰς τὸ σημεῖον της N, τοῦ ὁποίου ἡ θέσις δύναται νὰ καθορισθῇ διὰ τῆς (4).* Ἔτσι τὰ M τοῦ προβλήματος ἀνήκουν εἰς τὴν κάθετον τῆς εὐθείας OO_1 καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς N.

Ἡ κάθετος ὅμως αὔτη δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος;

Ἂν ἐπὶ τῆς ἀναφερθείσης καθέτου λάβωμεν αὐθαίρετον σημεῖον M, ἐκ τοῦ 2ου θεωρ. τῆς διαμέσου ἔχομεν:

$$(MO)^2 - (MO_1)^2 = 2(OO_1) \cdot (IN)$$

Καὶ ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ (4), λαμβάνομεν: $(MO)^2 - (MO_1)^2 = R^2 - R_1^2 \Rightarrow$

$$(MO)^2 - R^2 = (MO_1)^2 - R_1^2$$

---

*Ἡ (4), ἐφόσον τὰ R, R_1, OO_1 τὰ θεωρήσωμεν μὲ τὴν γεωμετρικήν των ἐκπροσώπησιν, μᾶς δίδει τὸ IN, κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον, ὡς εὐθύγραμμον τμῆμα: Σημειοῦντες $K^2 = R^2 - R_1^2$ ἔχομεν τὸ K ὡς κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν R καὶ ἑτέραν κάθετον R_1· καὶ ἐκ τῆς $IN = \dfrac{K^2}{2OO_1} \Rightarrow \dfrac{2OO_1}{K} = \dfrac{K}{IN}$ ἔχομεν τὸ IN ὡς τετάρτην ἀνάλογον τῶν τμημάτων: $2.OO_1$, K, K.

Ὥστε: Ἡ κάθετος εἰς τὸ Ν, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν (4), περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος, ἐνῷ συγχρόνως ἡ ἐν λόγῳ κάθετος δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα. **Αὐτὴ ἡ κάθετος ὀνομάζεται ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν.**

3.1. Παρατηρήσεις: **1ον Ὁ ριζικὸς ἄξων εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον τῆς μικροτέρας περιφερείας παρὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς μεγαλυτέρας.**

Τὸ σημεῖον Ν ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(NO)^2 - R^2 = (NO_1)^2 - R_1^2 \quad \Rightarrow \quad (NO)^2 - (NO_1)^2 = R^2 - R_1^2$$

Καί, ἐὰν εἶναι $R > R_1$, θὰ ἔχωμεν $(NO)^2 > (NO_1)^2 \quad \Rightarrow$

$$(NO) > (NO_1) \quad \text{ἢ καί: } NO > NO_1$$

2ον Ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν μεγαλυτέραν περιφέρειαν παρὰ πρὸς τὴν μικροτέραν.

Διὰ τὸ ἴχνος Ν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἰσχύει προφανῶς ἡ σχέσις:

$$NO^2 - R^2 = NO_1^2 - R_1^2 \quad \Rightarrow \quad \left| NO^2 - R^2 \right| = \left| NO_1^2 - R_1^2 \right|$$

$$\left| NO - R \right| \left(NO + R \right) = \left| NO_1 - R_1 \right| \left(NO_1 + R_1 \right)$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν $NO > NO_1$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ $R > R_1$, ἕπεται ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος:

$$\left| NO - R \right| < \left| NO_1 - R_1 \right|$$

Ἑκάστη ὅμως τῶν διαφορῶν τούτων ἐκφράζει ἀντιστοίχως καὶ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν (διότι δὲν γνωρίζομεν, ἐὰν τὸ σημεῖον Ν εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν τῶν δύο περιφερειῶν) τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ν ἀπὸ τῆς περιφερείας (O, R) καὶ τῆς περιφερείας (O_1, R_1). Εἰς τὸ (Σχ. 176) ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$AN < NB$$

3ον. Ὁ ριζικὸς ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκάστου τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δύο περιφερειῶν ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς.

Πράγματι, αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις ἑκάστου τῶν σημείων-μέσων καὶ ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς καὶ τὰ μέτρα τῶν ἀποστάσεων τούτων εἶναι ἴσα ἢ τὰ τετράγωνα αὐτῶν τῶν μέτρων δηλ. αἱ δυνάμεις αὐτῶν τῶν σημείων.

4ον. Ἐὰν ἡ μία ἐκ δύο διδομένων περιφερειῶν περιορισθῇ εἰς τὸ κέντρον της, δηλ., ἐὰν πρόκειται διὰ τὰς περιφερείας (O, R) καὶ (O_1, O), ζητοῦμεν δὲ τὸν γ.τ τῶν σημείων Μ, τῶν ἱκανοποιούντων τὴν ἰσότητα:

$$(MO)^2 - R^2 = (MO_1)^2 \implies (MO)^2 - (MO_1)^2 = R^2$$

θὰ ἔχωμεν τὸ πρόβλημα (Κεφ. 9, 5, 7.1) καὶ θὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ὁ γ.τ. τῶν Μ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας OO_1 διὰ τὸ ὁποῖον $(IN) = \dfrac{R^2}{2(OO_1)}$, ἐνῶ Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος OO_1. Ὥστε:

Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ἡ δύναμις ὡς πρὸς μίαν συνεπίπεδόν των περιφέρειαν (O, R) ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεώς των ἀπὸ ὡρισμένου σημείου O_1 τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OO_1.

Δυνάμεθα φυσικὰ αὐτὴν τὴν κάθετον νὰ τὴν θεωροῦμεν **ριζικὸν ἄξονα** τῶν περιφερειῶν (O,R) καὶ (O_1,O).

5ον. Ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν δὲν ὑφίσταται.

Δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν διατηροῦν τὸ μέγεθός των καὶ τὰ κέντρα των πλησιάζουν ἄλληλα ἀπεριορίστως, ἐνῶ τὸ μέσον Ι τοῦ τμήματος OO_1 διατηρεῖ τὴν θέσιν του, ἐκ τῆς γνωστῆς ἐκφράσεως:

$$(IN) = \frac{R^2 - R_1^2}{2(OO_1)}$$

βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἴχνους Ν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἀπὸ τοῦ σημείου Ι αὐξάνει ἀπεριορίστως καὶ συνεπῶς δὲν δυνάμεθα εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

6ον. Καθόσον δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἢ ἐφάπτονται, ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, εἰς τὸ σημεῖον Α ἢ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ὁ ριζικός των ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἢ ἡ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν εἰς τὸ Α ἢ μία εὐθεῖα ἐξωτερικὴ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἡ παρατήρησίς μας αὐτὴ δικαιολογεῖται ἀμέσως ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἕνα κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιφερειῶν ἔχει δύναμιν μηδὲν ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ὁ ὁποῖος καὶ εἶναι εὐθεῖα

Ὥστε: Ἡ κάθετος εἰς τὸ N, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν (4), περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματος, ἐνῶ συγχρόνως ἡ ἐν λόγῳ κάθετος δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα. **Αὐτὴ ἡ κάθετος ὀνομάζεται ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν.**

3.1. Παρατηρήσεις: **1ον Ὁ ριζικὸς ἄξων εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον τῆς μικροτέρας περιφερείας παρὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς μεγαλυτέρας.**

Τὸ σημεῖον N ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(NO)^2 - R^2 = (NO_1)^2 - R_1^2 \quad \Rightarrow \quad (NO)^2 - (NO_1)^2 = R^2 - R_1^2$$

Καί, ἐὰν εἶναι $R > R_1$, θὰ ἔχωμεν $(NO)^2 > (NO_1)^2 \quad \Rightarrow$

$$(NO) > (NO_1) \quad \text{ἢ καί: } NO > NO_1$$

2ον Ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν μεγαλυτέραν περιφέρειαν παρὰ πρὸς τὴν μικροτέραν.

Διὰ τὸ ἴχνος N τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἰσχύει προφανῶς ἡ σχέσις:

$$NO^2 - R^2 = NO_1^2 - R_1^2 \quad \Rightarrow \quad |NO^2 - R^2| = |NO_1^2 - R_1^2|$$

$$|NO - R|\left(NO + R\right) = |NO_1 - R_1|\left(NO_1 + R_1\right)$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν $NO > NO_1$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ $R > R_1$, ἕπεται ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος:

$$|NO - R| < |NO_1 - R_1|$$

Ἑκάστη ὅμως τῶν διαφορῶν τούτων ἐκφράζει ἀντιστοίχως καὶ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν (διότι δὲν γνωρίζομεν, ἐὰν τὸ σημεῖον N εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν τῶν δύο περιφερειῶν) τὴν ἀπόστασιν τοῦ N ἀπὸ τῆς περιφερείας (O, R) καὶ τῆς περιφερείας (O_1, R_1). Εἰς τὸ (Σχ. 176) ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$AN < NB$$

3ον. Ὁ ριζικὸς ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκάστου τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δύο περιφερειῶν ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς.

Πράγματι, αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις ἑκάστου τῶν σημείων-μέσων καὶ ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς καὶ τὰ μέτρα τῶν ἀποστάσεων τούτων εἶναι ἴσα ἢ τὰ τετράγωνα αὐτῶν τῶν μέτρων δηλ. αἱ δυνάμεις αὐτῶν τῶν σημείων.

4ον. Ἐὰν ἡ μία ἐκ δύο διδομένων περιφερειῶν περιορισθῇ εἰς τὸ κέντρον της, δηλ., ἐὰν πρόκειται διὰ τὰς περιφερείας (Ο, R) καὶ (O_1, O), ζητοῦμεν δὲ τὸν γ.τ τῶν σημείων Μ, τῶν ἱκανοποιούντων τὴν ἰσότητα:

$$(MO)^2 - R^2 = (MO_1)^2 \implies (MO)^2 - (MO_1)^2 = R^2$$

θὰ ἔχωμεν τὸ πρόβλημα (Κεφ. 9, 5, 7.1) καὶ θὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ὁ γ.τ. τῶν Μ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας OO_1 διὰ τὸ ὁποῖον $(IN) = \dfrac{R^2}{2(OO_1)}$, ἐνῶ Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος OO_1. Ὥστε:

Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ἡ δύναμις ὡς πρὸς μίαν συνεπίπεδόν των περιφέρειαν (Ο, R) ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεώς των ἀπὸ ὡρισμένου σημείου O_1 τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OO_1.

Δυνάμεθα φυσικὰ αὐτὴν τὴν κάθετον νὰ τὴν θεωροῦμεν **ριζικὸν ἄξονα** τῶν περιφερειῶν (O,R) καὶ (O_1,O).

5ον. Ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν δὲν ὑφίσταται.

Δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν διατηροῦν τὸ μέγεθός των καὶ τὰ κέντρα των πλησιάζουν ἄλληλα ἀπεριορίστως, ἐνῶ τὸ μέσον Ι τοῦ τμήματος OO_1 διατηρεῖ τὴν θέσιν του, ἐκ τῆς γνωστῆς ἐκφράσεως:

$$(IN) = \frac{R^2 - R_1^2}{2(OO_1)}$$

βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἴχνους Ν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἀπὸ τοῦ σημείου Ι αὐξάνει ἀπεριορίστως καὶ συνεπῶς δὲν δυνάμεθα εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

6ον. Καθόσον δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἢ ἐφάπτονται,
ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, εἰς τὸ σημεῖον Α ἢ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ὁ ριζι-
κός των ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἢ ἡ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν εἰς τὸ Α ἢ μία
εὐθεῖα ἐξωτερικὴ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἡ παρατήρησίς μας αὕτη δικαιολογεῖται ἀμέσως ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἕνα
ἔχει δύναμιν μηδὲν ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς
κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιφερειῶν ... ὁ ὁποῖος καὶ εἶναι εὐθεῖα
περιφερείας καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ὁ ὁποῖος καὶ εἶναι εὐθεῖα

κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν δέ, ὅπου αἱ περιφέρειαι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον ὁ ριζικὸς ἄξων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μετὰ μιᾶς τῶν περιφερειῶν. Ἕνα τοιοῦτον σημεῖον θὰ εἶχε τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας καὶ συνεπῶς θὰ ἦτο καὶ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιφερειῶν.

7ον. Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν ἢ τὸ ὀλιγώτερον τὸ τμῆμα αὐτοῦ τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ τῶν δύο περιφερειῶν, εἶναι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς δύο γνωστὰς περιφερείας ὀρθογωνίως.

Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν (Ο) καὶ (O_1) (Σχ. 176), θὰ ἔχωμεν ΜΤ = ΜΤ΄, ἂν ΜΤ καὶ ΜΤ΄ εἶναι αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας. Ἔτσι, ἂν γράψωμεν τὴν περιφέρειαν (Μ, ΜΤ) αὕτη θὰ τέμνῃ τὰς δύο περιφερείας μας ὀρθογωνίως. Ἂν πάλιν Μ εἶναι τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας (Ο) καὶ (O_1) ὀρθογωνίως, τότε, κατὰ τὴν παρατήρησιν (Κεφ. 10, 2, 2.1), τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας καὶ συνεπῶς θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο περιφερειῶν.

8ον. Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν περιφερειῶν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Διότι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἐξ αὐτῶν, ἐὰν ὑφίσταται, ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς περιφερείας· ἀνήκει λοιπὸν τοῦτο καὶ εἰς τὸν τρίτον ριζικὸν ἄξονα.

Αὐτὸ τὸ σημεῖον ὀνομάζεται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τριῶν περιφερειῶν καὶ ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι τοῦτο σημεῖον ἐξωτερικὸν καὶ τῶν τριῶν περιφερειῶν εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας, τεμνούσης καὶ τὰς τρεῖς περιφερείας ὀρθογωνίως (Παρατ. 7η).

Ἡ τελευταία αὐτὴ πρότασις ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἄμεσον διαπίστωσιν τῆς ἀληθείας τῶν ἑξῆς δύο προτάσεων:

α) Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο, αἱ τρεῖς ἐφαπτόμεναί των εἰς τὰ κοινά των σημεῖα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

β) Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, αἱ κοιναί των χορδαὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

γ) Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τριῶν περιφερειῶν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, παράλληλοι, εἶναι, τὰ κέντρα τῶν τριῶν περιφερειῶν νὰ εἶναι συνευθειακά.

Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν ἢ πρόκειται περὶ τριῶν ἀξόνων διαφόρων ἀλλήλων, ὁπότε δὲν ὑφίσταται ριζικὸν κέντρον ἢ πρόκειται περὶ ἀξόνων συμπιπτόντων εἰς ἕνα μόνον. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, κάθε σημεῖον τοῦ ἑνὸς καὶ μόνου ριζικοῦ ἄξονος εἶναι ριζικὸν κέντρον καὶ τῶν τριῶν περιφερειῶν. Πρέπει δὲ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ συμπίπτουν οἱ δύο τῶν ἀξόνων διὰ νὰ συμπίπτη μετ' αὐτῶν καὶ ὁ τρίτος ριζικὸς ἄξων. Ὁ καθεὶς ἐννοεῖ, ὅτι πρόκειται διὰ τρεῖς περιφερείας ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ διὰ τρεῖς περιφερείας, διερχομένας διὰ δύο ὡρισμένων σημείων. Εἰς αὐτὰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ὑπάρχει ἀπεριόριστος ἀριθμὸς περιφερειῶν, τεμνουσῶν καὶ τὰς τρεῖς περιφερείας ὀρθογωνίως.

4. Δύο ἀξιοσημείωτα θεωρήματα

1ον Ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων οἱουδήποτε σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου, ὡς πρὸς δύο περιφερείας αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ τοῦ σημείου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς διακέντρου τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἔστω Κ (Σχ. 176) αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο περιφερειῶν καὶ Κ΄ ἡ προβολή του εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων των. Ἡ διαφορὰ D τῶν δυνάμεων τοῦ Κ ὡς πρὸς τὰς δύο περιφερείας παρέχεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$D=(KO)^2-R^2-\left[(KO_1)^2-R_1^2\right]=(KO)^2-(KO_1)^2-(R^2-R_1^2)$$

Ἔχομεν ὅμως:

$(KO)^2-(KO_1)^2=(2OO_1)(IK'),\quad R^2-R_1^2=2(OO_1)(IN)$ (Κεφ. 10, 3, 3.1, τύπος 3)

Ὥστε: $D=2(OO_1)\left[(IK')-(IN)\right]=2(OO_1)(NK')$

2ον. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ τυχοῦσα διάμετρος μιᾶς περιφερείας τέμνεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης περιφερείας, εἶναι, αἱ δύο θεωρούμεναι περιφέρειαι νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως.

1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι (Ο), (O_1), (Σχ. 175) τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἀναγκαίως λοιπὸν ἔχομεν: $OA^2=BO^2=OΔ.\ OE \Rightarrow$

$$\frac{BO}{OΔ}=\frac{OE}{BO}\Rightarrow\frac{BO+OΔ}{BO-OΔ}=\frac{BO+OE}{OE-BO}\Rightarrow\frac{BO+OΔ}{OΓ-OΔ}=\frac{BO+OE}{OE-OΓ}\Rightarrow$$

$$\frac{BΔ}{ΔΓ}=\frac{BE}{ΓE}\qquad(1)$$

Ἀλλὰ ἡ (1) δεικνύει, ὅτι τὰ Δ, Ε διαιροῦν τὸ ΒΓ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς μέρη ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον. Τὰ Δ, Ε λοιπὸν εἶναι συζηγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ Β, Γ.

2ον. Θεωροῦμεν τὰς τεμνομένας περιφερείας (Ο) καὶ (O_1) καὶ ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διάμετρος ΒΓ τῆς (Ο) τέμνεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς περιφερείας (O_1). Ἔτσι, ἡ (1) ὑφίσταται. Ἀλλά, ΒΔ = ΒΟ + ΟΔ, ΔΓ = ΟΓ—ΟΔ = ΒΟ—ΟΔ, ΒΕ = ΒΟ + ΟΕ, ΓΕ = ΟΕ—ΟΓ = ΟΕ—ΒΟ. Ὥστε:

$$\frac{\text{ΒΟ}+\text{ΟΔ}}{\text{ΒΟ}-\text{ΟΔ}} = \frac{\text{ΒΟ}+\text{ΟΕ}}{\text{ΟΕ}-\text{ΒΟ}} \Rightarrow \frac{2.\text{ΒΟ}}{2.\text{ΟΔ}} = \frac{2.\text{ΟΕ}}{2.\text{ΒΟ}} \Rightarrow$$

$$\text{ΒΟ}^2 = \text{ΟΔ} \cdot \text{ΟΕ} \Rightarrow \text{ΟΑ}^2 = \text{ΟΔ} \cdot \text{ΟΕ}$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης βεβαιοῖ, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (O_1) εἰς τὸ Α δηλ., ὅτι αἱ περιφέρειαι (Ο), (O_1) τέμνονται ὀρθογωνίως.

5. Πρόβλημα. **Νὰ χαραχθῇ ὁ ριζικὸς ἄξων δύο διδομένων περιφερειῶν.**

1ον. Ἐὰν αἱ δύο περοφέρειαι τέμνωνται, χαράσσομεν τὴν κοινήν των χορδήν.

2ον. Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς χαράσσομεν τὴν κοινήν των ἐφαπτομένην.

3ον. Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κοινόν τι σημεῖον τὰς τέμνομεν ἀπὸ μίαν τυχοῦσαν περιφέρειαν. Αἱ κοιναὶ χορδαὶ τῶν τριῶν πλέον περιφερειῶν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον, ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τὰς τρεῖς περιφερείας, ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν ἀρχικῶν περιφερειῶν. Διὰ μιᾶς ἀκόμη βοηθητικῆς περιφερείας, τεμνούσης τὰς ἀρχικὰς περιφερείας, ὁρίζομεν ἕνα ἀκόμη σημεῖον τοῦ ριζικοῦ των ἄξονος καὶ συνεπῶς καὶ τὸν ριζικόν των ἄξονα. Δυνάμεθα ἐπίσης, ἀντὶ νὰ προσδιορίσωμεν 2ον σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος, νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ πρώτου εὑρεθέντος τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων κατὰ τὸν γνωστὸν φυσικὰ γεωμετρικὸν τρόπον.

6. Τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς ἢ ἡ διαίρεσις γνωστοῦ εὐθ. τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

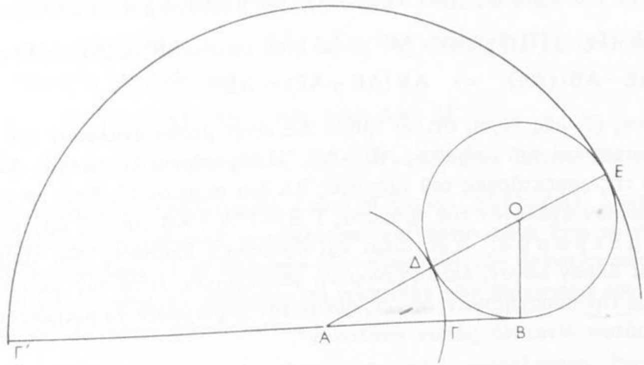
Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ τοῦτο, ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, εἰς δύο τμήματα, ὥστε τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον αὐτοῦ τούτου τοῦ τμήματος καὶ τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν τμημάτων τῆς διαιρέσεώς του.

Ἐὰν ΑΒ εἶναι τὸ διδόμενον τμῆμα καὶ ΓΑ, ΓΒ τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεώς του τμήματα, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΓΑ}^2 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΒ} \qquad (1)$$

10 ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ



(Σχ. 177)

1ον. Ἔ σ τ ω ἡ δ ι α ί ρ ε σ ι ς τ ο ῦ ΑΒ ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ή. Ἔχομεν:

$\Gamma A^2 = AB\,(AB - \Gamma A) \Rightarrow \Gamma A^2 + AB\,.\,\Gamma A = AB^2 \Rightarrow \Gamma A\,(\Gamma A + AB) = AB^2$ (2)

Ἡ (2) λέγει: Ζητοῦνται δύο εὐθ. τμήματα τὰ ΓΑ, ΓΑ + ΑΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν τὸ γνωστὸν τμῆμα ΑΒ καὶ γινόμενον AB^2.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐκτίθεται εἰς τὸ (Κεφ. 9, 6, 5), ἐδῶ ὅμως θὰ ὑποδείξωμεν ἕνα 2ον τρόπον λύσεώς του, τὸν ὁποῖον μάλιστα εἰς τὴν ὑποσημείωσιν τοῦ αὐτοῦ ἐδ. (σελ. 139) ἔχομεν προαναγγείλει.

Εἰς τὸ πέρας Β τοῦ τμήματος ΑΒ ὑψοῦμεν, κατὰ τὸν γνωστὸν γεωμετρικὸν τρόπον, κάθετον ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμῆμα $BO = \dfrac{AB}{2}$ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΒ). Ἡ εὐθεῖα ΑΟ διαπερᾶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα Δ, Ε. Ἔχομεν προφανῶς: $AB^2 = A\Delta(A\Delta + AE)$ καὶ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τῆς ἰσότητος πρὸς τὴν (2) συμπεραίνοεν, ὅτι $A\Gamma = A\Delta$. Δὲν ἔχομεν δηλ. παρὰ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ΑΒ τμῆμα $A\Gamma = A\Delta$ καὶ νὰ ἔχωμεν διαιρέσει τὸ τμῆμα ἐσωτερικῶς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

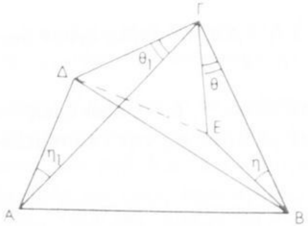
Σχόλιον. Ἡ ἰσότης (2), ἱκανοποιηθεῖσα διὰ τοῦ ἀνωτέρου γεωμετρικοῦ τρόπου, ἐξασφαλίζει νὰ εἶναι $\Gamma A < AB$. Καὶ ἀκόμη ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν: $\Gamma A^2 + \Gamma A\,.\,AB = AB^2 \Rightarrow \Gamma A^2 = AB(AB - \Gamma A)$. Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma A < AB$ ἀναγκαίως θὰ εἶναι $\Gamma A > AB - \Gamma A \Rightarrow \Gamma A > \Gamma B$. Σ υ μ π έ ρ α σ μ α: Ἡ διαίρεσις ἐσωτερικῶς ἑνὸς εὐθ. τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον σημαίνει, ὅτι τὸ μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ν ἐκ τῶν τμημάτων του εἶναι μέσον ἀνάλογον αὐτοῦ τοῦ ἰδίου καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματός του.

2ον. Ἔστω τώρα ἡ διαίρεσις τοῦ ΑΒ ἐξωτερική

Ἐκ τοῦ (Σχ. 177) ἔχομεν: $AB^2 = A\Delta \,.\, AE \Rightarrow AB^2 = (AE - \Delta E)\,.\, AE \Rightarrow$
$AB^2 = (AE - AB)(AE) \Rightarrow AB(AB + AE) = AE^2$ (3)

Ἡ ἰσότης (3) μᾶς λέγει, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΕ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος καὶ τοῦ τμήματος ΑΒ + ΑΕ. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν (Α, ΑΕ) θὰ μᾶς δώσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΒΑ ἕνα σημεῖον Γ΄, ὥστε τὸ τμῆμα Γ΄Α νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ τμήματος Γ΄Β = Γ΄Α + ΑΒ καὶ τοῦ ἀρχικοῦ τμήματος. Συμπέρασμα: Ὑφίσταται καὶ ἐξωτερικὴ διαίρεσις εὐθ. τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἐπιτυγχανομένη γεωμετρικῶς κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον καὶ μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι, εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, τὸ μικρότερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων εἶναι τὸ μέσον ἀνάλογον*.

7. Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, εἶναι, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν.



(Σχ. 178)

Ἔστω τὸ μὴ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ συνεπῶς $\Delta\hat{A}\Gamma \neq \Delta\hat{B}\Gamma$.

Μὲ πλευρὰν τὸ τμῆμα ΒΓ καὶ κορυφὰς ἀντιστοίχως Β καὶ Γ κατασκευάζομεν γωνίας μεγέθους $\Delta\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{\Gamma}A$ καὶ τοιουτοτρόπως σχηματίζεται τὸ τρίγωνον $EB\Gamma_\Delta \approx \Delta A\Gamma_\Delta$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$\frac{EB}{\Delta A} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow EB\,.\,A\Gamma = \Delta A\,.\,B\Gamma \quad (1)$$

Ἀκόμη ἡ ἰσότης: $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma} = \dfrac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}$, μαζὶ μὲ τὸ δεδομένον ὅτι

$\Delta\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}B$, ἐξασφαλίζει τὴν ὁμοιότητα: $\Delta E\Gamma_\Delta \approx AB\Gamma_\Delta$. Ὥστε:

$$\frac{\Delta E}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow \Delta E\,.\,A\Gamma = AB\,.\,\Gamma\Delta \quad (2)$$

*Ὑπεδείξαμεν ἀνωτέρω ἐξ αἰτίας τοῦ προβλ. τῆς χρυσῆς τομῆς τὸν 2ον τρόπον λύσεως τῆς 2ου ἐξ. $x(x+\alpha) = \alpha^2$, ἂν θέσωμεν ΑΒ = α. Ἐὰν τώρα ἔχωμεν τὴν 2ον. ἐξ. $x(x-\alpha) = \alpha^2$, εἰς τὴν προηγουμένην λύσιν δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ x, ὅπως εἶναι φανερόν, μὲ τὸ τμῆμα ΑΕ.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν: $ΑΓ(ΔΕ+ΕΒ)=ΑΒ\,.\,ΓΔ+ΔΑ\,.\,ΒΓ$ (3)

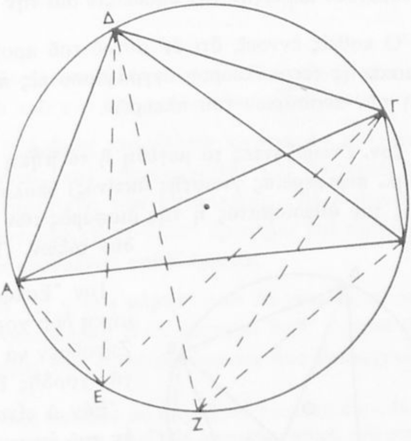
Ἀλλὰ ἡ ὑπόθεσίς μας τοποθετεῖ τὸ Ε ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΔ καὶ συνεπῶς $ΔΕ+ΕΒ>ΔΒ$. Ἔτσι, ἡ (3) δίδει καί:

$$ΑΓ\,.\,ΔΒ<ΑΒ\,.\,ΓΔ+ΔΑ\,.\,ΒΓ$$

θὰ ἔδιδε δὲ ἰσότητα μόνον ἐὰν $ΔΕ+ΕΒ=ΔΒ$ δηλ. μόνον ἐὰν τὸ Ε ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΒΔ, ὁπότε θὰ ἦτο καί: $Δ\hat{Β}Γ=Δ\hat{Α}Γ$. Συμπέρασμα: **Τὸ ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν τετράπλευρον καὶ μόνον αὐτὸ ἔχει τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν. Εἰς τὸ μὴ ἐγγράψιμον συμβαίνει τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἐν λόγῳ ἀθροίσματος.**

7.1. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν, ἰσοῦται μὲ τὸ λόγον τῶν ἀθροισμάτων τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἵτινες τὰς περιέχουν.

Ἔστω ΑΒ ἡ μεγαλυτέρα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Εἰς τὸ μικρότερον ἐκ τῶν δύο ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ὑποτεινομένων τόξων λαμβάνομεν χορδὴν $ΑΕ=ΒΓ$ καὶ χορδὴν $ΒΖ=ΔΑ$.



(Σχ. 179)

Διὰ τὰ ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΓΔ καὶ ΔΖΒΓ, συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$ΑΓ\,.\,ΕΔ=ΕΓ\,.\,ΔΑ+ΑΕ\,.\,ΓΔ$$
$$ΒΔ\,.\,ΖΓ=ΖΒ\,.\,ΓΔ+ΒΓ\,.\,ΔΖ \quad (1)$$

Εἶναι εὔκολος ἡ διαπίστωσις τῶν ἰσοτήτων: $ΕΔ=ΖΓ$, $ΕΓ=ΔΖ=ΑΒ$ καὶ συνεπῶς αἱ ἰσότητες (1) γίνονται:

$$ΑΓ\,.\,ΖΓ=ΑΒ\,.\,ΔΑ+ΒΓ\,.\,ΓΔ$$
$$ΒΔ\,.\,ΖΓ=ΔΑ\,.\,ΓΔ+ΒΓ\,.\,ΑΒ \quad (2)$$

Καί, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς (2) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΒ\,.\,ΔΑ+ΒΓ\,.\,ΓΔ}{ΔΑ\,.\,ΓΔ+ΒΓ\,.\,ΑΒ}$$

7.2. Προβλήματα: **1ον. Γνωρίζοντες τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου εἰς περιφέρειαν τετραπλεύρου νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του.**

Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ χ, y τὰ ἄγνωστα μεγέθη ἢ μήκη τῶν διαγωνίων του ΑΓ, ΒΔ, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου καὶ τοῦ ἐξ αὐτοῦ πορίσματος, λαμβάνομεν:

$$\chi . y = \alpha\gamma + \beta\delta \qquad \frac{\chi}{y} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$$

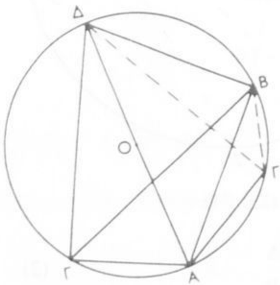
Καὶ συνεπῶς:

$$\chi^2 = \frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\gamma + \beta\delta)}{\alpha\beta + \gamma\delta} \qquad y^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

Αἱ γενόμεναι εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ὑποδείξεις ἐπὶ τῆς κατασκευῆς τμημάτων καθιστοῦν περιττὴν τὴν ὑπόδειξιν διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν εὐθ. τμημάτων χ καὶ y.

Ὁ καθεὶς ἐννοεῖ, ὅτι δι' αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ὑπεδείχθη καὶ ὁ τρόπος κατασκευῆς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς περιφέρειαν, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μεγέθη τῶν τεσσάρων του πλευρῶν.

2ον. Γνωρίζοντες τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη δύο χορδῶν μιᾶς γνωστῆς περιφερείας (δηλ. περιφερείας γνωστῆς ἀκτῖνος) ὑπολογίσατε τὸ μέγεθος ἢ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ὑπὸ τῶν χορδῶν τούτων ὑποτεινομένων δύο τόξων. (Τὸ πρόβλημα τῶν τριῶν χορδῶν).



(Σχ. 180)

1ον Ἔστωσαν ΑΒ = α, ΓΑ = β τὰ μεγέθη ἢ τὰ μήκη δύο χορδῶν τῆς γνωστῆς περιφερείας (Ο, R). Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μέγεθος ἢ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΓΒ.

Ἐὰν Δ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α, ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΔΓ λαμβάνομεν: ΑΔ . ΓΒ = ΑΒ . ΔΓ + ΓΑ.ΒΔ $\Rightarrow$

$$2R \,.\, \Gamma B = \alpha \,.\, \sqrt{4R^2 - \beta^2} + \beta \,.\, \sqrt{4R^2 - \alpha^2} \Rightarrow$$

$$\Gamma B = \frac{\alpha\sqrt{4R^2 - \beta^2} + \beta\sqrt{4R^2 - \alpha^2}}{2R} \qquad (1)$$

2ον. Ἐὰν ΑΓ΄ = ΓΑ = β, θὰ ζητήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μέγεθος ἢ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς Γ΄Β. Ὑπονοεῖται, ὅτι εἶναι α > β.

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρ. τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΓ΄ΒΔ λαμβάνομεν: $AB \cdot \Gamma'\Delta = \Delta A \cdot \Gamma'B + A\Gamma' \cdot B\Delta \implies$

$\Delta A \cdot \Gamma'B = AB \cdot \Gamma'\Delta - A\Gamma' \cdot B\Delta \implies 2R \cdot \Gamma'B = \alpha \cdot \sqrt{4R^2 - \beta^2} - \beta \cdot \sqrt{4R^2 - \alpha^2} \implies$

$$\Gamma'B = \frac{\alpha\sqrt{4R^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{4R^2 - \alpha^2}}{2R} \qquad (2)$$

2. Κανονικὰ πολύγωνα

1. Ἕνα κυρτὸν πολύγωνον $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ ὀνομάζεται κανονικόν, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἤδη ἔχομεν συναντήσει δύο τοιαῦτα πολύγωνα: τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον. Ὑφίστανται λοιπὸν κανονικὰ πολύγωνα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου τῶν ν πλευρῶν εἶναι $2\nu - 4 \llcorner$ καὶ συνεπῶς εἰς ἕνα κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον ἑκάστη τῶν γωνιῶν θὰ ἔχη μέτρον $\frac{2\nu - 4}{\nu} \llcorner = 2 - \frac{4}{\nu} \llcorner$

Ἔτσι, ἡ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνει μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μάλιστα δὲ ἀπὸ τοῦ $\nu = 5$ ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.

2. Τίθεται τώρα τὸ ἐρώτημα τῆς ὑπάρξεως καὶ ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναφερθέντων, καὶ δημιουργεῖται κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρόβλημα τῆς δυνατότητος τῆς γεωμετρικῆς των κατασκευῆς. Τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα δίδουν καταφατικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ τεθὲν ἐρώτημα καὶ καθορίζουν τὸν στόχον διὰ τὴν λύσιν τοῦ δημιουργουμένου προβλήματος.

2.1. Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῆ εἰς ν ἴσα μέρη:* 1ον Αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως εἶναι πλευραὶ ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. 2ον Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς δύο διαδοχικὰ ση-

*Τὸ σύνολον τῶν σημείων: $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ ἑνὸς ἐπιπέδου (π) ὀνομάζεται διατεταγμένον, ἐὰν ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία (ἑνὸς πρὸς ἕνα) τῶν στοιχείων αὐτοῦ τοῦ συνόλου καὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots \nu\}$ τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Θεωροῦμεν τὸ διατεταγμένον σύνολον σημείων $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\nu$ ἐπὶ μιᾶς γνωστῆς περιφερείας. Δύο οἱαδήποτε τόξα ὡς τά: $\overset{\frown}{A_{\mu-1}A_\mu}$, $\overset{\frown}{A_\mu A_{\mu+1}}$, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πέρατα δύο τῶν θεωρουμένων σημείων καὶ διὰ τὰ ὁποῖα τὸ πέρας τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου ὀνομάζονται δ ι α δ ο χ ι κ ά. Ἐὰν ἀπὸ τὰ τόξα: $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3} \ldots \overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$, $\overset{\frown}{A_\nu A_1}$ δύο οἱαδήποτε διαδοχικὰ δὲν ἔχουν δεύτερον κοινὸν σημεῖον, τότε λέγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα: $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ δ ι α ι ρ ο ῦ ν τὴν περιφέρειαν εἰς ν μέρη (τόξα).

μεῖα διαιρέσεως εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἀντιστρόφως, κάθε κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς μίαν περιφέρειαν καὶ περιγράψιμον εἰς μίαν ἄλλην περιφέρειαν.

2.2. Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἀναχωροῦντες ἀπὸ ἕνα σημεῖον διαιρέσεως χαράσσομεν, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, τὰς χορδάς, αἵτινες ὑποτείνουν (καλύπτουν) λ τόξα ($\lambda < \nu$), συνιστῶμεν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν τῶν ν πλευρῶν. (Τὸ μὴ κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον ὀνομάζεται ἀστεροειδές).*

*Θεωροῦμεν μίαν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς ν ἴσα μέρη ἀπὸ ἕνα διατεταγμένον σύνολον σημείων, χαρακτηριζομένων διὰ τῶν ἀριθμῶν: $0, 1, 2, \ldots \nu-1$. Ἐὰν τώρα, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ σημείου 0 καὶ διατρέχοντες τὸ ἐν λόγῳ σύνολον, ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεως, χαρακτηρίζομεν τοῦτο τώρα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ν καὶ ἐφεξῆς τὰ ἑπόμενα τούτου σημεῖα, εἰς τὴν ἀνωτέρω διάταξιν, διὰ τῶν ἀριθμῶν $\nu+1, \nu+2, \ldots 2\nu-1$. Τοιουτοτρόπως, τὸ ἴδιο σημεῖον δύναται νὰ χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ: $\lambda, \nu+\lambda, 2\nu+\lambda, \ldots \mu.\nu+\lambda, \ldots$ ($\lambda < \nu$).

Οἱ ἀριθμοί: $0, 1, 2, \ldots \nu-1$, οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν διὰ νὰ ἀριθμοῦν τὰ ν πρῶτα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τὸ $1/\nu$ τῆς περιφερείας, εἶναι συγχρόνως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τοῦ κάθε μικροτέρου τοῦ ν φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ν. Ἐὰν δηλ. μ εἶναι ἕνας μικρότερος τοῦ ν φυσικὸς ἀριθμός, ἔχομεν: $\mu = \nu \,.\, 0 + \mu$ καὶ συγχρόνως διὰ τοῦ μ χαρακτηρίζεται τὸ μ τάξεως τόξον εἰς τὴν θεωρουμένην νιάδα τόξων.

Ἔστω τώρα, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημά μας, ὅτι χαράσσομεν τὰς χορδάς, αἵτινες καλύπτουν λ διαιρέσεις ($\lambda < \nu$ καὶ λ, ν πρῶτα πρὸς ἄλληλα) καὶ ἔστω 0 τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως. Ἔτσι, θὰ διέλθωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα, τὰ χαρακτηριζόμενα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots \nu\lambda$, ἀλλὰ τὰ ἴδια αὐτὰ σημεῖα χαρακτηρίζονται καὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots \nu\lambda$ διὰ ν. Τὰ ν αὐτὰ ὑπόλοιπα εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ των. Πράγματι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\theta_1\lambda$, $\theta_2\lambda$ ($\theta_1, \theta_2 \leqq \nu$) μᾶς ἔδιδον, διαιρούμενοι διὰ ν, ὑπόλοιπα ἴσα, θὰ εἴχομεν:

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1\lambda = \nu \,.\, \pi_1 + \upsilon \\ \theta_2\lambda = \nu \,.\, \pi_2 + \upsilon\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda(\theta_1-\theta_2) = \nu\,(\pi_1-\pi_2)$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν λ, θὰ πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἀριθμὸν $\theta_1-\theta_2$, ἐνῷ $\theta_1-\theta_2 < \nu$. Συμπέρασμα: Τὰ ἐν λόγῳ ν ὑπόλοιπα εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ των καὶ οὐδὲν τούτων ὑπερβαίνει τὸν $\nu-1$, εἶναι λοιπὸν τά: $0, 1, 2, \ldots \nu-1$. Ἔτσι, ἐκ τῶν ἀριθμῶν: $\lambda, 2\lambda, \ldots \nu\lambda$ ὁ ἕνας, διαιρούμενος διὰ ν, θὰ μᾶς δώσῃ ὑπόλοιπον 0 καὶ αὐτὸς εἶναι προφανῶς ὁ $\nu \,.\, \lambda$, ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τὸ σημεῖον ἀφετηρία.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν διεπιστώσαμεν:

1ον. Ὅτι τὸ προκῦψαν πολύγωνον εἶναι ν πλευρῶν.

2ον. Ὅτι εἶναι κανονικόν, ἐφόσον ἑκάστη του πλευρὰ εἶναι χορδὴ τόξου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\frac{\lambda}{\nu}$ μέρος τῆς περιφερείας.

Παρατήρησις: Ἐὰν οἱ λ καὶ ν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ δ εἶναι ὁ μέγιστος κοινός των διαιρέτης, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς $\frac{\nu}{\delta}$ ἴσα μέρη καὶ ὅτι

10 ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

3. Ἡ κατασκευὴ τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Μὲ τὴν ἐν ὑποσημειώσει παράθεσιν τῆς ἀποδείξεως τοῦ προηγουμένου θεωρήματος διεπιστώσαμεν, ὅτι διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου κυρτοῦ ἢ ἀστεροειδοῦς εἶναι ἀ ρ κ ε τ ὸ ν νὰ γνωρίζωμεν τὸν τρόπον διαιρέσεως μιᾶς περιφερείας εἰς ν ἴσα μέρη. Δεδομένου δέ, ὅτι κάθε κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς μίαν περιφέρειαν καὶ περιγράψιμον εἰς μίαν ἄλλην (θεώρ. 2.1.), ἐνοοῦμεν, ὅτι ἡ κ α τ α σ κ ε υ ὴ ἑ ν ὸ ς π ο λ υ γ ώ ν ο υ ε ἶ ν α ι μ ο ν ο τ ρ ο π ι κ ή: **Προϋποθέτει καὶ ἀπαιτεῖ τὴν κατασκευὴν τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς τῆς περιφερείας.**

Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἕκαστον κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ προκύψη κατὰ δύο διαφορετικοὺς τρόπους: διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου εἶναι χορδὴ καλύπτουσα λ ἴσα τόξα ἐκ τῶν ν, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει διαιρεθῆ ἡ περιφέρεια, συγχρόνως ἡ πλευρὰ αὕτη εἶναι καὶ χορδὴ καλύπτουσα ν—λ ἴσα τόξα. Ἔτσι, συμπεραίνομεν ὅτι: **ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\lambda < \frac{\nu}{2}$ καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου, ὅτι ὑπάρχουν τόσα εἴδη κανονικῶν πολυγώνων τῶν ν πλευρῶν, ὅσοι εἶναι οἱ πρῶτοι πρὸς τὸν ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ $\frac{\nu}{2}$.** Τοιουτοτρόπως:

Δὲν ὑπάρχει παρὰ μ ό ν ο ν ἕ ν α ε ἶ δ ο ς κανονικῶν πολυγώνων τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν, τ ε σ σ ά-
ρ ω ν κ α ὶ ἓ ξ π λ ε υ ρ ῶ ν. Αὐτὰ εἶναι πολύγωνα κυρτά. Ὑπάρχουν δ ύ ο ε ἴ δ η κανονικῶν
πενταγώνων: τὸ κυρτὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ὑποτείνει τὸ $^1/_5$ τῆς περιφερείας
καὶ τὸ ἀστεροειδὲς πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ὑποτείνει τὰ $^2/_5$ τῆς περιφερείας.
Ὑπάρχουν δ ύ ο ε ἴ δ η κανονικοῦ δεκαγώνου: Τὸ κυρτὸν δεκάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ
ὑποτείνει τὸ $^1/_{10}$ τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἀστεροειδὲς δεκάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ὑποτείνει
τὰ $^3/_{10}$ τῆς πριφερείας.
Ὑπάρχουν τ έ σ σ α ρ α ε ἴ δ η κανονικῶν δεκαπενταγώνων: τὸ κυρτὸν κανονικὸν δεκαπεν-
τάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ὑποτείνει τὸ $^1/_{15}$ τῆς περιφερείας καὶ τὰ τρία ἀστεροειδῆ δεκα-
πεντάγωνα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ὑποτείνουν ἀντιστοίχως τὰ $^2/_{15}$, $^4/_{15}$, $^7/_{15}$ τῆς περιφερείας.
Κ έ ν τ ρ ο ν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ
περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ καὶ περὶ αὐτὸ περιφερείας. Καί, ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης ὀνο-
μάζεται ἀ κ τ ὶ ς τ ο ῦ κ α ν ο ν ι κ ο ῦ π ο λ υ γ ώ ν ο υ, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης ἀ π ό-
σ τ η μ α τ ο ῦ κ α ν ο ν ι κ ο ῦ π ο λ υ γ ώ ν ο υ.
Ὅλαι αἱ πλευραὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μή, φαίνονται ἐκ τοῦ κέντρου του ὑπὸ
γωνίας ἴσας. Ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν μία πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου φαίνεται ἐκ τοῦ
κέντρου του ὀνομάζεται ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς τ ο ῦ π ο λ υ γ ώ ν ο υ.
Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μὴ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γω-
νίας τοῦ πολυγώνου.

χαράσσομεν τὰς χορδάς, αἵτινες καλύπτουν $\frac{\lambda}{\delta}$ ἴσα τόξα. Καὶ ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\lambda}{\delta}$, $\frac{\nu}{\delta}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ ὑποθέτωμεν εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τοὺς ἀριθμοὺς ν καὶ λ πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

Ἔτσι, ἂν ἔχωμεν ἕνα κυρτὸν πολύγωνον τῶν ν πλευρῶν ἡ ἐπίκεντρος γωνία του εἶναι $\frac{4}{\nu}\llcorner$ καὶ ἡ γωνία τοῦ πολυγώνου $2-\frac{4}{\nu}\llcorner$· ἂν ὅμως ἔχωμεν ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν ν πλευρῶν του καλύπτει λ ἴσα τόξα, ἡ μὲν ἐπίκεντρός του γωνία εἶναι $\frac{4\lambda}{\nu}\llcorner$ ἡ δὲ γωνία του $2-\frac{4\lambda}{\nu}\llcorner$.

3.1. Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν εἶναι ὅμοια. Ὁ λόγος ὁμοιότητός των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων των.

3.1.1. Πρόβλημα. Δεδομένου ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς μίαν περιφέρειαν (Ο), νὰ περιγραφῇ περὶ αὐτὴν τὴν περιφέρειαν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ ἀντιστρόφως.

Δύο τρόποι λύσεως τοῦ προβλήματος ὑφίστανται:

Διὰ τὴν περιγραφήν,

1ον. Φέρομεν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ἐφαπτομένας τῆς (Ο).

2ον. Φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς (Ο) εἰς τὰ μέσα τῶν ὑπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ὑποτεινομένων τόξων.

Διὰ τὴν ἐγγραφήν,

1ον. Συνδέομεν κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ θεωρουμένου περιγεγραμμένου πολυγώνου.

2ον. Χαράσσομεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ θεωρουμένου περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀκτίνων τούτων μετὰ τῆς ἀρχικῆς περιφερείας (Ο) εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου.

3. Ἐγγραφὴ καὶ περιγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο,R) *

1ον. Ἐγγραφὴ τετραγώνου. Προκύπτει τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο, R), ἐὰν συνδέσωμεν τὰ πέρατα δύο καθέτων διαμέτρων αὐτῆς τῆς περιφερείας. Διαπιστοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \qquad\qquad \alpha_4 = \tfrac{1}{2} R\sqrt{2}.$$

3.1. Παρατήρησις. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν νὰ διαιροῦμεν ἕνα τόξον περιφερείας

* Θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἔκθεσιν τοῦ τρόπου ἐγγραφῆς τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖ τὸ πρόσφατον διάταγμα τῶν εἰσιτηρίων ἐξετάσεων. Ἡ περιγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα τοιαῦτα θὰ γίνεται κατὰ τὸ πρόβλημα (3.1.1.) τοῦ προηγουμένου ἐδ. 3 καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν των θὰ στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα (3.1) τοῦ αὐτοῦ ἐδαφίου 3. Θὰ σημειοῦμεν διὰ τῶν λ_ν, λ'_ν, α_ν, α'_ν, ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ ἀποστήματα τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τῶν ν πλευρῶν.

Θὰ δώσωμεν ἀκόμη τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος παρέχει τὸ $\lambda_{2\nu}$ ἀπὸ τὸ λ_ν διὰ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν:

εἰς δύο ἴσα μέρη, δυνάμεθα, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, νὰ διαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὴν περιφέρειαν εἰς 8, 16,. . . 2^ν ἴσα μέρη. Γνωρίζομεν λοιπὸν νὰ ἐγγράφωμεν εἰς γνωστὴν περιφέρειαν πολύγωνα τῶν 2^ν πλευρῶν.

2ον. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, $A\hat{O}B = 60^0$ καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Συνεπῶς $\lambda_6 = R$.

3ον. Ἐγγραφὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο δι᾿ εὐθ. τμημάτων τὰ μὴ διαδοχικὰ σημεῖα, ἔχομεν τὸ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Διαπιστοῦται εὐκόλως, ὅτι:

$$\lambda_3 = R\sqrt{3}\,^*$$

3.2. Παρατήρησις. Ἀφοῦ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 3 ἴσα μέρη δυνάμεθα νὰ τὴν διαιρέσωμεν διαδοχικῶς εἰς 6, 12, 24,. . . 3.2^ν ἴσα μέρη. Γνωρίζομεν λοιπὸν νὰ ἐγγράφωμεν κανονικὰ πολύγωνα τῶν 3.2^ν πλευρῶν.

4ον. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἐὰν $A\hat{O}B$ εἶναι ἡ ἐπίκεντρος τοῦ πολυ-

---

$A\hat{O}B$ εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ πολυγώνου τῶν ν πλευρῶν καὶ πλευρᾶς ΑΒ, ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο, R). Ἐὰν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $A\hat{O}B$ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Δ, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΓ:

$$A\Gamma^2 = \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - 2R\cdot O\Delta = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{2\nu} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\right)} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ἐπίσης: $\lambda_\nu = \dfrac{\lambda_{2\nu}}{R}\sqrt{4R^2 - \lambda_{2\nu}^2}$ (2)

καὶ ἔχομεν διὰ τῆς ἰσότητος (2) ἀντιστρόφως τὸ λ_ν ἐκ τοῦ $\lambda_{2\nu}$. Σημειοῦμεν τέλος τὸν εὐκόλως διαπιστούμενον τύπον τοῦ ἀποστήματος: $\alpha_\nu = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\lambda_\nu^2}$ (3)

Παρακαλεῖται ὁ ἀναγνώστης νὰ χαράσσῃ μόνος του τὰ διὰ λόγους παιδαγωγικοὺς εἰς τὸ ἐδάφιον τοῦτο παραλειπόμενα σχήματα.

* Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου καὶ ΑΓ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο, R) ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὸ τετράπλευρον ΟΑΒΓ εἶναι ρόμβος καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν διαγώνιον ΟΒ. Συνεπῶς ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἡ μεσοκάθετος χορδὴ τῆς ἀκτῖνος

γώνου, ἔχομεν: $A\hat{O}B = 36^0$, $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72^0$. Καί, ἐὰν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ διχοτομῆ τὴν γωνίαν $O\hat{A}B$, ἔχομεν:

$$O\Gamma = A\Gamma = AB.$$

Καὶ λόγω τοῦ θεωρ. τῆς διχοτόμου: $\frac{O\Gamma}{\Gamma B} = \frac{OA}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma B} = \frac{OB}{AB}$ δηλ. τὸ ΑΒ εἶναι τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (βλ. Κεφ. 10, 6.). Ἔτσι, λαμβάνομεν: $\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$

5ον. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ πενταγώνου. Ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο, R) τὸ κανονικὸν δεκάγωνον, ἑνοῦμεν ἀνὰ δύο δι᾽ εὐθ. τμημάτων τὰς μὴ διαδοχικάς του κορυφὰς καὶ λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (2) τῆς ὑποσημειώσεως τοῦ ἐδ. 4 λαμβάνομεν:

$$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

6ον. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Ἔχομεν: $^1/_6 - {}^1/_{10} = {}^1/_{15}$ δηλ., ἐὰν ἀπὸ τὸ $^1/_6$ περιφερείας τινὸς ἀφαιρέσωμεν τὸ $^1/_{10}$ αὐτῆς τῆς περιφερείας εὑρίσκομεν τὸ $^1/_{15}$ αὐτῆς τῆς περιφερείας. Ἔτσι, λαμβάνοντες χορδὴν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν χορδὴν ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἔχομεν τὸ τόξον $\overparen{\Gamma B}$ ἴσον μὲ τὸ $^1/_{15}$ τῆς περιφερείας καὶ τὴν χορδὴν ΓΒ, ἀντιπροσωπεύουσαν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Ἀνήχθημεν λοιπὸν εἰς τὸ γνωστὸν πρόβλημα (Κεφ. 10, 7, 7.2, 2ον) τῶν τριῶν χορδῶν. Ἔτσι, ἀπὸ τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν:

$$\lambda_{15} = {}^1\!/_4\, R \left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$$

3.3. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Δυνάμεθα ἕνα κανονικὸν πολύγωνον τῶν ν πλευρῶν νὰ τὸ ἀποσυνθέσωμεν εἰς ν ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημά του. Ἔτσι, τὸ ἐμβαδὸν E_ν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου τῶν ν πλευρῶν γράφεται:

$$E_\nu = {}^1\!/_2\, \nu \cdot \alpha_\nu \lambda_\nu \Rightarrow E_\nu = {}^1\!/_2\, \nu \cdot \lambda_\nu \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\lambda_\nu^2}$$

συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τὸν παρέχοντα τὸ ἀπόστημα.

3.4. Συγκεντρωτικὸς πίναξ πλευρῶν καὶ ἀποστημάτων κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν (O,R).

(1). Τρίγωνον : $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ $\qquad \alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

(2). Τετράγωνον : $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ $\qquad \alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

(3). Πεντάγωνον : $\lambda_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $\qquad \alpha_5 = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$

(4). Ἑξάγωνον : $\lambda_6 = R$ $\qquad \alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

(5). Δεκάγωνον : $\lambda_{10} = R\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\qquad \alpha_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

(6). Δεκαπεντάγωνον : $\lambda_{15} = \dfrac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]$

$$\alpha_{15} = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\right]$$

Ὅσον ἀφορᾶ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὰ ἀποστήματα τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων καὶ τοῦ αὐτοῦ μὲ τὰ προηγούμενα πολύγωνα ἀριθμοῦ πλευρῶν, ὅπως εἰς τὴν ὑποσημείωσιν τοῦ ἐδ. 3 ἀναφέρομεν, θὰ στηριχθῶμεν εἰς τὴν «ὁμοιότητα» τῶν μὲν πρὸς τὰ δέ, τῆς ὁποίας μάλιστα ὁμοιότητος γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ λόγου: Τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀναγράφεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς θεωρουμένης περιφερείας.

3.5. Σημείωμα ἐπὶ τῆς δυνατότητος τῆς ἐγγραφῆς ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων διεπιστώθη, ὅτι ἡ δυνατότης ἐγγραφῆς εἰς μίαν περιφέρειαν ἑνὸς κανονικοῦ, κυρτοῦ κατ' ἀρχήν, νιπλεύρου σημαίνει τὴν δυνατότητα τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς του ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς τῆς περιφερείας καὶ ὅτι ἡ δυνατότης ἐγγραφῆς τοῦ κυρτοῦ συνεπάγεται τὴν δυνατότητα ἐγγραφῆς καὶ ὅλων τῶν ἄλλων νιπλεύρων κανονικῶν πολυγώνων.

Ἐὰν λ, μ εἶναι δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους γνωρίζομεν νὰ ἐγγράψωμεν τὰ πολύγωνα μὲ λ.μ πλευράς, ἐὰν γνωρίζωμεν νὰ ἐγγράφωμεν κανονικὰ πολύγωνα μὲ λ πλευρὰς καὶ μὲ μ πλευράς.

Πράγματι, λαμβάνομεν κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν χορδὰς ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ λ πλευρὰς καὶ μ πλευράς. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν, ὅτι τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ θὰ εἶναι τὸ $1/\lambda$ τῆς περιφερείας, τὸ τόξον $\overset{\frown}{B\Gamma}$ τὸ $1/\mu$ αὐτῆς καὶ τὸ τόξον $\overset{\frown}{A\Gamma}$ τὸ $1/\lambda + 1/\mu = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}$ τῆς ἰδίας περιφερείας. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΑΓ καλύπτει $\lambda+\mu$ διαιρέσεις τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι διηρημένη εἰς λ.μ μέρη. Ἐπειδὴ τώρα οἱ ἀριθμοὶ λ+μ καὶ λ.μ εἶναι πρῶτοι* πρὸς ἀλλήλους τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ εἶναι πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῶν λ.μ πλευρῶν.

Ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς ν ἴσα μέρη ὑπῆρξε τὸ ἀντικείμενον ἐρευνῶν τῶν ἀρχαίων. Ἀπὸ τὸ ἀπώτερον παρελθὸν ἦτο γνωστὴ ἡ λύσις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, ὅταν τὸ ν ἦτο ἕνας τῶν ἀριθμῶν 2^μ, 3, 5 ἢ ὡρισμένα κοινά των πολλαπλάσια.

Εἰς τὸ ἔργον του Disquisiones Arithimetica ὁ γερμανὸς γεωμέτρης Gauss ηὔξησε τὸν ἀριθμὸν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διὰ τοὺς ὁποίους ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι δυνατὴ ἀποδεικνύων, ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὴ διὰ πάντα πρῶτον τῆς μορφῆς $2^\nu+1$ καὶ ὅτι εἶναι ἀδύνατος δι' ὅλους τοὺς ἄλλους πρώτους ἀριθμοὺς καὶ τὰς δυνάμεις των**.

Ἔτσι, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ τρίγωνον καὶ τὸ πεντάγωνον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν καὶ τὰ πολύ-γωνα. τὰ ὁποῖα ἔχουν $17=4^2+1$, $257=2^8+1$ πλευρὰς κ.λ.π.

Ἐὰν τώρα συνδυάσωμεν αὐτὴν τὴν πρότασιν μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως, ἀφοῦ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν καὶ πολύγωνα μὲ 2^ν πλευράς, συμπεραίνομεν, ὅτι, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι: $2^\nu \cdot \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_\nu$, ἐὰν λ_1, $\lambda_2 \cdots \lambda_\nu$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι διάφοροι μεταξύ των καὶ ἔχουν τὴν μορφὴν τῶν ἀριθμῶν τοῦ Gauss Ἔτσι, τὸ κανονικὸν πολύγωνον τῶν 170 πλευρῶν ($170=2\cdot5\cdot17$) δύναται νὰ ἐγγραφῆ, ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ ἐγγραφῆ τὸ πολύγωνον τῶν ἐννέα πλευρῶν: ὁ ἀριθμὸς 9, ἐνῶ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ Gauss ($9=2^3+1$) δὲ εἶναι πρῶτος καὶ ἐπίσης οἱ πρῶτοι, οἵτινες τοῦ εἶναι παράγοντες, ($9=3.3$), εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ Gauss, ἀλλὰ δὲν εἶναι διάφοροι μεταξύ των.

4. Μήκη τόξων περιφερείας καὶ ἐμβαδὰ κυκλικὰ***

1. Ὀνομάζομεν **μῆκος μιᾶς περιφερείας** τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου αὐξάνει ἀπεριορίστως καθ' οἱονδήποτε τρόπον. Ἀποδεικνύεται, ὅτι **τὸ ὅριον αὐτὸ ὑφίσταται** καὶ ὅτι εἶναι **ἕνα καὶ μόνον,** ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ νόμος συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Αἱ τελευταῖαι διαπιστώσεις ὡδήγησαν εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι: Τὰ μήκη δύο περιφερειῶν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες των δηλ. ὅτι: **Ὁ λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς περιφερείας.**

*Πράγματι, ἐὰν ἀριθμός τις πρῶτος διαιροῦσε τὸν λ.μ θὰ ἦτο διαιρέτης τοῦ λ ἢ τοῦ μ. Ἐὰν τώρα ὁ αὐτὸς πρῶτος διαιροῦσε καὶ τὸν λ+μ θὰ διαιροῦσε καὶ ἕνα ἕκαστον χωριστά, ὁπότε οἱ λ, μ δὲν θὰ ἦσαν πρῶτοι.

**Ἀποδεικνύεται, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὁ φυσικὸς $2^\nu+1$ πρῶτος, πρέπει τὸ ν νὰ εἶναι μία δύναμις τοῦ 2 ἀλλ' ἡ συνθήκη αὕτη δὲν εἶναι ἀρκετή.

***Τὸ πρόσφατον διάταγμα τῶν εἰσιτηρίων ἐξετάσεων ζητεῖ **μόνον** «ἐφαρμογὰς ἐπὶ τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου». Ἐκ τοῦ λόγου τούτου θὰ περιορισθῶμεν ἀποκλειστικῶς εἰς τὰς ἐκφράσεις τῶν μηκῶν τόξων περιφερείας καὶ κυκλικῶν ἐμβαδῶν.

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος εἰκονίζεται μὲ τὸ Ἑλληνικὸν γράμμα π. Ἔτσι, ἐὰν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας ἀκτῖνος R παρασταθῇ μὲ τὸ C, ἔχομεν:

$$\frac{C}{2R} = \pi \qquad \Rightarrow \quad C = 2\pi R$$

Δύο προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τοῦ π καὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν συνήθως εἰς τὸν λογισμὸν εἶναι: $\pi = {}^{22}/_{7}$ καὶ $\pi = 3{,}14159$.*

Ὁ ἀριθμὸς π, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ ἀσυγκρίτου εἰς τοὺς αἰῶνας Ἕλληνος μαθηματικοῦ Ἀρχιμήδους ἐπροσδιωρίσθη διὰ διαφόρων μεθόδων καὶ προσφάτως δι' ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, εἶναι **ὑπερβατικός.****

2. Ὀνομάζομεν **ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου** τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου αὐξάνει ἀπεριορίστως καὶ κατ' αὐθαίρετον τρόπον.

Ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ὅριον αὐτὸ ὑφίσταται καὶ ὅτι εἶναι ἓν καὶ μόνον καὶ ὅτι ἔχει τὴν ἔκφρασιν:

$$E_K = \pi . R^2 \qquad (E_K = \text{ἐμβαδὸν κύκλου})$$

3. Ἀποδεικνύεται: 1ον Ὅτι **τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου περιφερείας** ἰσοῦται
μὲ τὸ τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας πολλαπλασιασμένον
ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἐπικέντρου γωνίας, ἐκπεφρασμένης εἰς
μοίρας. 2ον. Ὅ**τι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως** ἰσοῦται μὲ τὸ τριακοσιοστὸν
ἑξηκοστὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς γω-
νίας τοῦ τομέως, ἐκπεφρασμένης εἰς μοίρας. 3ον. **Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος**
εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἀντιστοίχου κυ-
κλικοῦ τομέως καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν χορδὴν τοῦ

---

* Εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$. Ἔτσι, πηλίκον ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ
π σημαίνει πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ 0,3183.

**Ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ
ἀκεραίους συντελεστὰς δηλ. ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $f(x) = O$, ὅπου $f(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον
μὲ ἀκεραίους συντελεστάς. Ὁ ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀσύμμετρος, ἀλλὰ δὲν συμβαίνει ἕνας
ἀσύμμετρος νὰ εἶναι ἀναγκαίως ὑπερβατικός. Τὸ τόσον γνωστὸν πρόβλημα τοῦ τετραγωνι-
σμοῦ τοῦ κύκλου ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς εὐθ. τμήματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος
νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος περιφερείας γνωστῆς ἀκτῖνος. Εἶναι ἀδύνατον νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλη-
μα αὐτὸ μὲ τὴν ἀποκλειστικὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Αὐτὴ ἡ ἀδυναμία
ὀφείλεται εἰς τὴν ὑπερβατικότητα τοῦ π καὶ τὸ ἀδύνατον αὐτῆς τῆς κατασκευῆς ἀπεδείχθη ἀπὸ
τὸν γερμανὸν μαθηματικὸν Lindemann εἰς τὸ 1882 μὲ τὴν γενίκευσιν θεωρημάτων, ὀφειλομένων
εἰς τὸν μεγάλον Γάλλον Μαθηματικὸν Hermite.

τμήματος καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον, καθόσον τὸ τόξον τοῦ τμήματος εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον περιφερείας.

Ἔτσι, ἂν εἶναι μ°, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἕνα τόξον περιφερείας ἐπίκεντρος γωνία, τὸ μῆκος του l παρέχεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$l=\frac{2\pi R}{360}\cdot\mu \quad\Rightarrow\quad l=\frac{\pi R}{180}\cdot\mu$$

Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν: $\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}=\frac{\alpha}{\pi}$, ὅπου β, α εἶναι τὰ μέτρα τῆς γωνίας εἰς βαθμοὺς καὶ εἰς ἀκτίνια, ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις τοῦ μήκους l εἶναι ἰσοδύναμος καὶ μὲ τὰς ἐκφράσεις: $l=\frac{\pi R\cdot\beta}{200}$ $\quad l=R\cdot\alpha$

Ἐπίσης, διὰ τὸ E_T, ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, ἔχομεν τὰς ἐκφράσεις:

$$E_T=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\mu, \qquad E_T=\frac{\pi R^2}{400}\cdot\beta, \qquad E_T=\frac{1}{2}\alpha R^2$$

καθόσον ἡ γωνία τοῦ τομέως εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς μοίρας, βαθμοὺς ἢ ἀκτίνια.

Τέλος, τὸ ἐμβαδὸν $E_{\tau\mu}$. κυκλικοῦ τμήματος παρέχεται ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν:

$$E_{\tau\mu}=\frac{1}{2}\alpha R^2-R^2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

ὅπου α εἶναι τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τοῦ ἐ λ ά σ σ ο ν ο ς τόξου ἐκ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ἂν πρόκειται περὶ τμήματος μικροτέρου τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ τοῦ μ ε γ α λ υ τ έ ρ ο υ τόξου ἐκ τῶν ὑποτεινομένων ἀπὸ τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ἂν πρόκειται περὶ τμήματος μεγαλυτέρου τοῦ ἡμικυκλίου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀφαιρουμένου ἢ προστιθεμένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι

$$\tfrac{1}{2}R^2\eta\mu\alpha=R^2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \text{ ἢ } \tfrac{1}{2}R^2\eta\mu(2\pi-\alpha)=-\tfrac{1}{2}R^2\eta\mu\alpha=-R^2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

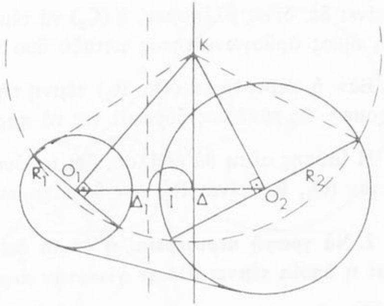
1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἵτινες τέμνουν δύο γνωστὰς περιφερείας (O_1, R_1), (O_2, R_2) κατὰ διάμετρον (διαμετρικῶς).

Ἐὰν ὀνομάσωμεν K καὶ R ἀντιστοίχως τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα μιᾶς τῶν περιφερειῶν, αἵτινες τέμνουν τὰς γνωστὰς περιφερείας διαμετρικῶς, θὰ ἔχωμεν προφανῶς:

$$R^2 = KO_1^2 + R_1^2 = KO_2^2 + R_2^2 \quad \Longrightarrow$$

$$KO_1^2 - KO_2^2 = R_2^2 - R_1^2 \qquad (1)$$

Ἔτσι, ἂν Ι εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος O_1O_2 καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ Κ ἐπὶ τῆς εὐθείας O_1O_2, λαμβάνομεν:



(Σχ. 181)

$$2O_1O_2 \,.\, I\Delta = R_2^2 - R_1^2 \quad \Longrightarrow \quad I\Delta = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2O_1O_2} \qquad (2)$$

Ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον Κ προβάλλεται εἰς ὡριμένον σημεῖον Δ τῆς εὐθείας O_1O_2 καὶ συνεπῶς ἀνήκει τοῦτο εἰς τὴν κάθετον τῆς εὐθείας O_1O_2 καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Δ, τοῦ ὁποίου ἡ θέσις καθορίζεται ἐκ τῆς (2). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι ἡ κάθετος αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ συνισταμένη μόνον ἀπὸ σημεῖα τῆς ἰδιότητος τοῦ προβλήματός μας, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ κάθετος εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων Κ.

Σχόλιον. Ἐὰν ἐζητούσαμεν διὰ τὰς θεωρουμένας περιφερείας τὸν γ.τ. τῶν σημείων Κ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὰς δύναμιν, θὰ ἐλαμβάνομεν:

$$KO_1^2 - R_1^2 = KO_2^2 - R_2^2 \quad \Longrightarrow \quad KO_1^2 - KO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 \qquad (3)$$

Καὶ ἡ ἰσότης (3) δὲν θὰ διέφερε ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω (1) παρὰ μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ δευτέρου της μέλους. Συνεπῶς, ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς γ.τ. εἶναι εὐθεῖα συμμετρικὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν ὡς πρὸς τὸ μέσον Ι τῆς διακέντρου O_1O_2. Ἐκ τοῦ λόγου τούτου δυνάμεθα νὰ ὀνομάζωμεν τὸν εὑρεθέντα τόπον **ψευδοριζικὸν ἄξονα** τῶν δύο θεωρουμένων περιφερειῶν.

Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἰσχύει, ὅπως καὶ προκειμένου διὰ τὸν ριζικὸν ἄξονα, καὶ ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς περιφερείας περιορισθῇ εἰς τὸ κέντρον της δηλ. ὅταν ἡ ἀκτὶς αὐτῆς μηδενισθῇ· ὁ εὑρεθησόμενος τότε γεωμ. τύπος εἶναι ὁ ψευδοριζικὸς ἄξων τῆς περιφερείας (O_1, O) καὶ τῆς περιφερείας (O_2, R_2).

Δὲν εἶναι χωρὶς σημασίαν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι μερικοὶ συγγραφεῖς, ὅταν μία περιφέρεια (C_1) τέμνη μίαν ἄλλην περιφέρειαν (C_2) κατὰ διάμετρον (διαμετρικῶς) γράφουν, ὅτι ἡ (C_1) τέμνει τὴν (C_2) ψ ε υ δ ο ο ρ θ ο γ ω ν ί ω ς. Δὲν συμβαίνει δέ, ὅπως βλέπομεν, ἡ (C_2) νὰ τέμνη τὴν (C_1) ἐπίσης διαμετρικῶς, ἡ συνθήκη ὅμως ὀρθογωνιότητος μεταξὺ δύο περιφερειῶν εἶναι ἀμοιβαία.

Ἐὰν ἡ περιφέρεια (O_1, R_1) τέμνη τὴν περιφέρειαν (O_2, R_2) ψευδοορθογωνίως ἔχομεν, ὡς εὐκόλως δύναταί τις νὰ παρατηρήση: $R_1^2 - O_2O_1^2 = R_2^2$

Ἡ ἰσότης αὕτη θὰ ἐδήλου, ὅτι ἡ δύναμις τοῦ σημείου O_2 ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (O_1, R_1) εἶναι R_2^2, ἐὰν θὰ εἴχομεν: $R_2^2 = O_2O_1^2 - R_1^2$.

2. Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο γνωστὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἡ ὁποία τέμνει ἄλλην γνωστὴν περιφέρειαν ψευδοορθογωνίως.

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΒ, τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ ἀνήκη ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὸν γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἵτινες τέμνουν δύο γνωστὰς περιφερείας ψευδοορθογωνίως (ἄσκ. 1).

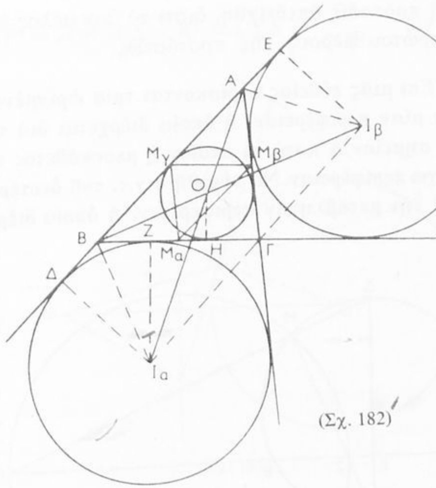
3. Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως ἢ ψευδοορθογωνίως τρεῖς γνωστὰς περιφερείας.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματός μας εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο περιφερειῶν: νὰ εἶναι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἵτινες τέμνουν δύο γνωστὰς περιφερείας ὀρθογωνίως· εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα τοῦ ψευδοριζικοῦ ἄξονος δύο περιφερειῶν, τὴν ἐκφραζομένην διὰ τῆς (ἀσκ. 1).

4. Θεωροῦμεν τὴν ἐγγεγραμμένην καὶ τὰς τρεῖς παρεγγεγραμμένας περιφερείας ἑνὸς γνωστοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ περιφέρειαι αὗται, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, ὁρίζουν ἓξ ριζικοὺς ἄξονας. Δείξατε, ὅτι οἱ ριζικοὶ αὐτοὶ ἄξονες εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ μεσοτριγώνου τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Ἄς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν Ο καὶ τὴν παρεγγεγραμμένην I_α. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μέσον M_α τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τὰς περιφερείας Ο καὶ I_α. Οὕτω τὸ σημεῖον M_α ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν τῶν περιφερειῶν, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{M}_\alpha$ τοῦ μεσοτριγώνου $M_\alpha M_\beta M_\gamma$. Ἔτσι, διεπιστώθη, ὅτι οἱ ριζικοὶ ἄξονες, οἵτινες ὁρίζονται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο καὶ ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς περιφερείας I_α, I_β, I_γ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ μεσοτριγώνου.

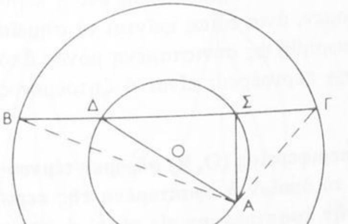
Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὰς περιφερείας I_α, I_β. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ M_γ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν τῶν περιφερειῶν, ὁ ὁποῖος, ὡς εὐθεῖα κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν $I_\alpha I_\beta$, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ἢ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας M_γ τοῦ μεσοτριγώνου. Καὶ ἀφοῦ αὐτὸς ὁ ριζικὸς ἄξων διέρχεται ἀπὸ τὸ M_γ θὰ συμπίπτη μὲ αὐτὴν τὴν τελευταίαν διχοτόμον. Τὸ θεώρημά μας λοιπὸν ὁλοκληρώθη.



(Σχ. 182)

5. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Σ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας χαράσσομεν τὴν χορδὴν ΣΑ αὐτῆς τῆς περιφερείας καὶ τὴν χορδὴν ΒΣΓ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΣΑ. Δείξατε, ὅτι, ἐὰν ἡ χορδὴ ΣΑ στρέφεται περὶ τὸ Σ, ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων: $ΣΑ^2+ΣΒ^2+ΣΓ^2$ καὶ $ΑΒ^2+ΑΓ^2+ΒΓ^2$ διατηρεῖ τιμὴν ὡρισμένην.

1ον. Προφανῶς ἔχομεν: $ΣΑ^2 = 4R^2—ΣΔ^2$ (1), ἂν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας.



(Σχ. 183)

Ἡ (1) γράφεται: $ΣΑ^2= 4R^2—(ΣΒ—ΔΒ)^2 =$
$4R^2—ΣΒ^2+2ΣΒ\,.\,ΔΒ—ΔΒ^2 \Rightarrow$
$ΣΑ^2+ΣΒ^2+ΔΒ^2 = 4R^2+2\,.\,ΣΒ\,.\,ΔΒ \Rightarrow$
$ΣΑ^2+ΣΒ^2+ΣΓ^2 = 4R^2+2\,.\,ΣΒ\,.\,ΣΓ.$

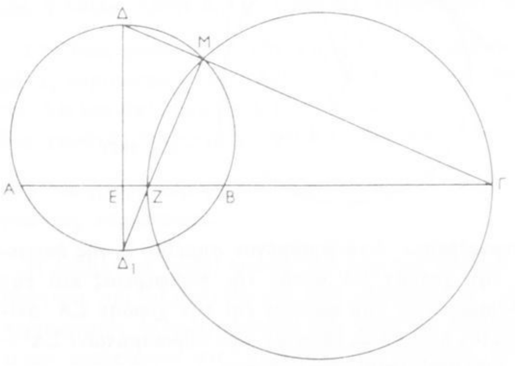
Καὶ τοῦτο, διότι ΒΔ = ΣΓ. Τὸ 2ον μέλος τῆς (2) ἐκφράζει μίαν σταθεράν, διότι ΣΒ . ΣΓ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν.

2ον. $ΑΒ^2 = ΑΣ^2+ΣΒ^2$, $ΑΓ^2 = ΑΣ^2 + ΣΓ^2$,
$ΒΓ^2 = (ΣΒ+ΣΓ)^2$

Ὥστε: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΣ^2 + 2ΣΒ^2+2ΣΓ^2+2\,.\,ΣΒ\,.\,ΣΓ$

Καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη, διότι τὸ 2ον μέλος ἐκφράζει μίαν σταθερὰν ἐξ αἰτίας τοῦ πρώτου μέρους τῆς προτάσεως.

6. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας εὑρίσκονται τρία ὡρισμένα κατὰ θέσιν σημεῖα Α,Β,Γ. Γράφομεν μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ συνδέομεν τὸ Γ μὲ τὸ σημεῖον Δ κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ τέμνει τὴν ἐν λόγῳ περιφέρειαν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ τῆς εὐθείας ΓΔ μὲ τὴν μεταβλητὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β.



(Σχ. 184)

Ἐὰν $Δ_1$ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ Δ, τὸ τμῆμα $Δ_1Μ$ θὰ εἶναι κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν ΓΜΔ καί, ἐὰν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΓΒΑ καὶ $Δ_1Μ$, θὰ ἔχωμεν:

$ΓΜ \,.\, ΓΔ = ΓΒ \,.\, ΓΑ$ καὶ

$ΓΜ \,.\, ΓΔ = ΓΖ \,.\, ΓΕ$

διότι τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΜ, ἔχον δύο ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας ὀρθάς, εἶναι ἐγγράψιμον. Ὥστε: $ΓΒ \,.\, ΓΑ = ΓΖ \,.\, ΓΕ \Rightarrow$

$$\frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΓΒ}{ΓΖ}$$

δηλ. τὸ ΓΖ προσδιορίζεται καὶ τὸ σημεῖον Μ βλέπει τὸ ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΖ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἐπειδὴ εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΓΖ, ἐπὶ τῆς ὁποίας, ὅπως εἴδομεν, ἀναγκαίως κεῖνται τὰ σημεῖα Μ τοῦ προβλήματος, δύναται συγχρόνως νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη μόνον ἀπὸ τοιαῦτα σημεῖα, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

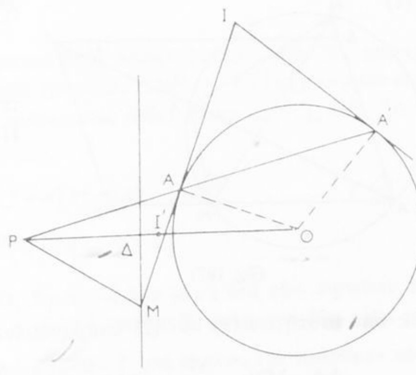
6. Ἐξ ἑνὸς σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου γνωστῆς περιφερείας (Ο, R) φέρομεν τέμνουσαν ΡΑΑ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ Α τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α′, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ρ.

Ἔχομεν: $ΜΑ^2 = ΜΟ^2 - R^2 \Rightarrow ΜΡ^2 = ΜΟ^2 - R^2 \Rightarrow ΜΟ^2 - ΜΡ^2 = R^2$ (1)

διότι, λόγῳ τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος, ἔχομεν: $ΜΑ = ΜΡ$.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν: $MO^2 - MP^2 = 2OP \cdot I'\Delta = R^2 \Rightarrow I'\Delta = \dfrac{R^2}{2OP}$ (2)

ὅπου Ι΄ τὸ μέσον τοῦ ΟΡ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ Μ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΡ. Ἔτσι, τὰ σημεῖα Μ ἀνήκουν ἀναγκαίως εἰς τὴν ἔκ τοῦ Δ, τοῦ ὁριζομένου διὰ τῆς (2), κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΡ. Τὸ ὅτι εἶναι ἀρκετὸν νὰ εἶναι ἕνα σημεῖον Μ σημεῖον αὐτῆς τῆς καθέτου διὰ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ προβλήματος ἀποδεικνύεται εὐκόλως καὶ διαπιστοῦται τοιουτοτρόπως, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ κάθετος εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

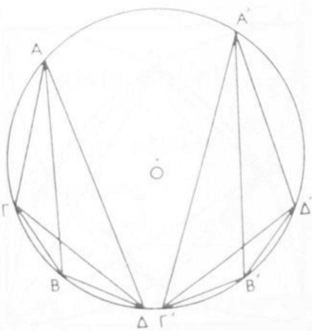


(Σχ. 185)

7. Ἀπὸ τὸ ἄκρον μιᾶς χορδῆς περιφερείας τινὸς χαράσσομεν δύο ἄλλας χορδάς, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν πρώτην. Ἀπὸ ἕνα δεύτερον σημεῖον τῆς περιφερείας χαράσσομεν παραλλήλους χορδὰς πρὸς τὰς τρεῖς χορδάς, τὰς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης γωνίας ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς δευτέρας γωνίας, ὅποιον λόγον ἔχουν αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι αὐτῶν τῶν γωνιῶν (Θεώρ. Maclaurin).

Κατὰ τὸ (Σχ. 186) θέλομεν νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{A\Gamma + A\Delta}{A'\Gamma' + A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (1)$$



(Σχ. 186)

Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρ. τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὰ τετράπλευρα: ΑΓΒΔ καὶ Α΄Γ΄Β΄Δ΄. Τότε,

$$\begin{aligned} AB \cdot \Gamma\Delta &= A\Gamma \cdot B\Delta + A\Delta \cdot \Gamma B \\ A'B' \cdot \Gamma'\Delta' &= A'\Gamma' \cdot B'\Delta' + A'\Delta' \cdot \Gamma'B' \end{aligned} \quad (2)$$

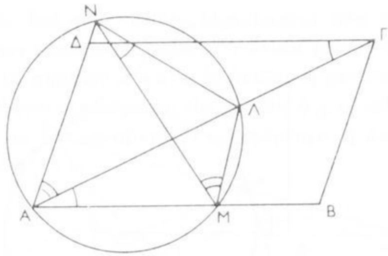
Ἀλλά, ἐκ τῶν ἐπιταγμάτων τῆς προτάσεώς μας γίνεται φανερὰ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

$$\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta', \quad \Gamma B = B\Delta,$$
$$\Gamma'B' = B'\Delta', \quad \Gamma B = \Gamma'B'$$

Καὶ ἔτσι, διὰ διαιρέσεως τῶν ἰσοτήτων (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν ὑπὸ βεβαίωσιν ἰσότητα (1).

8. Ὅταν μία περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α ἑνὸς παραλ/μμου, τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ,Ν,Λ ἀντιστοίχως ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$ΑΓ \,.\, ΑΛ = ΑΒ \,.\, ΑΜ + ΑΔ \,.\, ΑΝ$$



(Σχ. 187)

Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΜΛΝ τὸ θεώρ. τοῦ Πτολεμαίου καὶ λαμβάνομεν:

$$ΑΛ \,.\, ΜΝ = ΜΛ \,.\, ΑΝ + ΑΜ \,.\, ΛΝ \quad (1)$$

Ἔχομεν προφανῶς $ΝΜΛ_Δ \approx ΑΓΔ_Δ$ καὶ συνεπῶς:

$$\frac{ΑΓ}{ΜΝ} = \frac{ΑΔ}{ΜΛ} = \frac{ΔΓ}{ΛΝ} \quad (2)$$

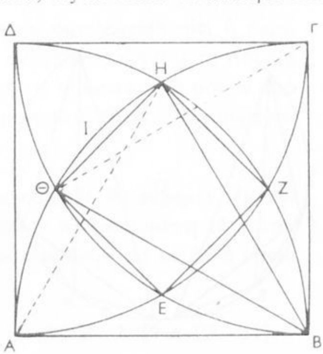
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$ΑΛ \,.\, ΜΝ \,.\, \frac{ΑΓ}{ΜΝ} = ΜΛ \,.\, ΑΝ \,.\, \frac{ΑΔ}{ΜΛ} + ΑΜ \,.\, ΛΝ \,.\, \frac{ΔΓ}{ΛΝ} \quad \Rightarrow$$

$$ΑΛ \,.\, ΑΓ = ΑΝ \,.\, ΑΔ + ΑΜ \,.\, ΔΓ \quad \Rightarrow \quad ΑΛ \,.\, ΑΓ = ΑΝ \,.\, ΑΔ + ΑΜ \,.\, ΑΒ \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

9. Μὲ κέντρον ἑκάστην κορυφὴν ἑνὸς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευράν του γράφομεν τέσσαρας περιφερείας. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τεσσάρων τόξων, τεμνομένων ἀνὰ δύο.

Τὸ καμπυλόγραμμον τετράπλευρόν μας συνίσταται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τετράγωνον ΕΖΗΘ καὶ ἀπὸ τέσσαρα κυκλικὰ τμήματα, ὡς τὸ ΘΙΗ. Ἡ πλευρὰ ΘΗ τοῦ εὐθ. τετραγώνου εἶναι χορδὴ τόξου 30^0 εἰς τὴν περιφέρειαν (Β, α), ἂν α ὀνομασθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου. Πράγματι, τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς $Α\widehat{Β}Η = 60^0$. Ἔτσι, τὸ τόξον $\widehat{ΗΓ} = 30^0$. Ἐπίσης, τὸ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς $\widehat{ΑΘ} = 30^0$. Ὥστε καὶ $\widehat{ΘΗ} = 30^0$. Τὸ εὐθ. λοιπὸν τμῆμα ΘΗ ἀντιπροσωπεύει τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος α καὶ συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1) τῆς ὑποσημειώσεως τοῦ (ἐδ. 3) τοῦ παρόντος κεφαλαίου λαμβάνομεν:



(Σχ. 188)

$$\lambda_{12} = \sqrt{\alpha\,(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - \lambda_6^2})} = \alpha\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

(1)

Ἔχομεν λοιπὸν $E_{EZH\Theta} = \alpha^2(2 - \sqrt{3})$

Ὅσον ἀφορᾶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ΘΙΗ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν χαραχθῇ τὸ τμῆμα ΘΓ, δυνάμεθα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΘΒΗ νὰ τὸ ἐκφράσωμεν ὡς τὸ $\frac{1}{4}\,BH \cdot \Theta\Gamma = \frac{1}{4}\,\alpha^2$, ἐνῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ΘΒΗ εἶναι τὸ $\frac{1}{12}\pi\alpha^2$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἐμβαδὸν S εἶναι:

$$S = \alpha^2(2 - \sqrt{3}) + 4\left[\frac{1}{12}\pi\alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha^2\right]$$

$$S = \frac{1}{3}\alpha^2\left[\pi + 3(1 - \sqrt{3})\right]$$

10. Διαιροῦμεν μίαν περιφέρειαν (Ο, R) εἰς ἓξ ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Α,Β, Γ,Δ,Ε,Ζ Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα R γράφομεν δύο τόξα περιφερείας $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma OE}$. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν τὸ τόξον ΑΕ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας.

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν S παρέχεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$S = \text{τμ. AKE} + \text{Τρ. OAE} - (\text{τμ. AMO} + \text{τμ. ONE})$$

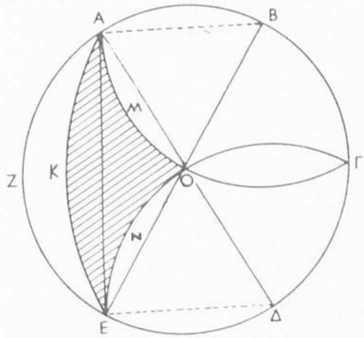
$$\text{τμ.AKE} = \text{τομ.ΓAKE} - \text{τρ.AEΓ} =$$

$$\frac{1}{6}\pi(R\sqrt{3})^2 - \frac{1}{4}(R\sqrt{3})^2\sqrt{3} =$$

$$\frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$(OAE)_\Delta = \frac{1}{2}\,R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{τμ. AMO} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$



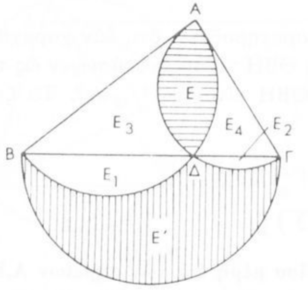
(Σχ. 189)

Καὶ τελικῶς,

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - 2\cdot\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{6}$$

11. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ Α. Γράφομεν ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου ΒΓ καὶ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ ἡμιπεριφερείας διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΓ. Αἱ δεύτεραι ἡμιπεριφέρειαι ἀφαιροῦν ἀπὸ τὸ διὰ τῆς πρώ-

της περιφερείας ὁριζόμενον ἡμικύκλιον δύο κυκλικὰ τμήματα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τμήματα τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τοῦ τριγώνου. Αἱ αὐταὶ πάλιν ἡμιπεριφέρειαι ὁρίζουν ἐσωτερικῶς τοῦ τριγώνου κοινὸν μέρος τῶν ὑπ᾿ αὐτῶν μορφουμένων ἡμικυκλίων. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τελευταίου αὐτοῦ μέρους, αὐξανόμενον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μᾶς κάμνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς προηγουμένης ἐπιφανείας.



(Σχ. 190)

Προφανῶς αἱ ἡμιπεριφέρειαι διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴχνος Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Λόγῳ τώρα τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν:

$$\frac{\pi B\Gamma^2}{8} = \frac{\pi AB^2}{8} + \frac{\pi A\Gamma^2}{8}$$

Καὶ συνεπῶς: $E' + E_1 + E_2 = (E_1 + E_3 + E) + (E + E_4 + E_2) \Rightarrow$

$$E' = E + (E + E_3 + E_4) \Rightarrow E' = E + (AB\Gamma) \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΤΕΛΟΣ