

Δ

2

MMI

Μηχανισμός {K}

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προ-
τύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαίδευσως.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ - ΠΑΣΣΑ - ΤΟΓΚΑ

ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α'.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
Δ. ΤΖΑΚΑ & ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ

ΙΔΡΥΘΕΙΣ ΤΩ 1876

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΒΕΝΙΖΕΛΟΥ 65

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1949

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δ 2 7771

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

*Αριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προ-
τύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Προσέβου (Αμ Δ)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΔΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ - ΠΑΣΣΑ - ΤΟΓΚΑ

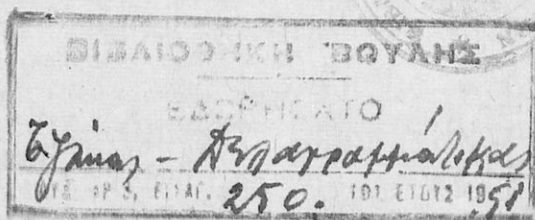
ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

100

ΕΚΔΟΣΙΣ Α'.



ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ

Δ. ΤΖΑΚΑ & ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ

ΙΔΡΥΘΕΙΣ ΤΩ 1876

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΒΕΝΙΖΕΛΟΥ 65

ΑΘΗΝΑΙ

1949
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α'. ΠΡΑΚΤΙΚΟΝ ΜΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1. Λύσις : Αί ὀκτώ ἑκατοντάδες ἀπαγγέλλονται : **Ὀκτακόσια**. Αἱ πέντε δεκάδες : **Πεντήκοντα** κ.τ.λ. Ὁ δοθεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται : **Ὀκτακόσιαι πενήκοντα ὀκτώ χιλιάδες τριακόσια**.

§ 2. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι μία χιλιάς ἀπαγγέλλεται ἀπλῶς : **Χίλια**, μία ἑκατοντὰς ἀπαγγέλλεται : **Ἐκατόν**, καὶ μία δεκάς ἀπαγγέλλεται : **Δέκα**. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν κυτρίων ἀπαγγέλλεται : **Χίλια ἑκατόν δέκα ἐννέα**.

§ 3. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι ἕξ ἑκατοντάδες ἀπαγγέλλονται : **Ἑξακόσια**, πέντε δεκάδες : **Πεντήκοντα** κ.τ.λ. Ὁ δοθεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται : **Ἐν δισεκατομμύριον ἑξακόσια πενήκοντα ἑκατομμύρια ἑπτακόσιαι χιλιάδες πέντε δραχμαί**.

§ 4. Λύσις : Ἀφ' οὗ μία ἑκατοντὰς καὶ 3 δεκάδες ἀπαγγέλλονται ἑκατόν τριάκοντα, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται : **Ἐκατόν τριάκοντα ἑκατομμύρια**.

§ 5. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι δύο μονάδες τρισεκατομμυρίων ἀπαγγέλλονται : **Δύο τρισεκατομμύρια**. Αἱ δὲ ἕξ δεκάδες δισεκατομμυρίων ἀπαγγέλλονται : **ἑξήκοντα δισεκατομμύρια**. Ὁ δοθεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται : **Δύο τρισεκατομμύρια ἑξήκοντα δισεκατομμύρια**.

§ 6. Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει μίαν χιλιάδα καὶ 940 ἀπλᾶς μονάδας. Γράφεται λοιπὸν οὕτω : **1940**.

§ 7. Λύσις : Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω : **1912**.

§ 8. Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 6 μονάδας ἑκατομμυρίων καὶ 970 χιλιάδας. Γράφεται λοιπὸν οὕτω : **6 970 000**.

§ 9. Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 452 χιλιάδας καὶ 912 ἀπλᾶς μονάδας. Γράφεται λοιπὸν οὕτω : **452 912**.

§ 10. Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 251 χιλιάδας καὶ 308 ἀπλᾶς μονάδας. Γράφεται λοιπὸν οὕτω : **251 308**.

§ 11. Νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν δαπάνην εἰς ἑκατομμύρια σημαίνει νὰ εὐρώμεν ἀπὸ πόσα τὸ ὅλον ἑκατομμύρια ἀποτελεῖται ἡ δαπάνη αὕτη. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ὅλα τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εἶναι δεξιὰ ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῶν ἑκατομμυρίων, ἥτοι τὰ 6 τελευταῖα ψηφία. Οὕτως εὐρίσκομεν 14 000 ἑκατομμύρια.

§ 12. Ἐὰν σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, εὐρίσκομεν 2 614 218 ἑκατομμύρια.

§ 13.—1ον Λύσις: Μία ἑκατοντὰς χιλιάδων γράφεται οὕτω 100 000. Διὰ νὰ εὐρώμεν δὲ πόσας ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ὅλον, ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι ἔχει 1 000 ἑκατοντάδας. Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ἔχει 10 000 δεκάδας.

2ον Λύσις: Ὁ ἀριθμὸς ἐν ἑκατομμύριον γράφεται οὕτω: 1 000 000. Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ἐννοοῦμεν ὅτι ἔχει 100 000 δεκάδας ἢ 1 000 μονάδας χιλιάδων ἢ 100 δεκάδας χιλιάδων.

3ον Κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 35 000 000 ἔχει 350 ἑκατοντάδας χιλιάδων ἢ 35 000 μονάδας χιλιάδων.

§ 14. Λύσις: Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι πενταψήφιος, τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον θὰ παριστάνῃ δεκάδας χιλιάδων. Διὰ νὰ εἶναι δὲ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς ἄλλους, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ τὰ αὐτὰ ψηφία, πρέπει τὸ ψηφίον ἐκεῖνο νὰ εἶναι 8. Διότι, ἂν ἦτο π. χ. 7 καὶ 9 ἂν ἦσαν τὰ ἄλλα ψηφία, εἶναι $79999 < 80000$ καὶ κατὰ μεγαλύτερον λόγον θὰ ἦτο π. χ. $78632 < 82367$.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον ἐξ ἀριστερῶν ψηφίων θὰ εἶναι 7, τὸ τρίτον 6, τὸ τέταρτον 3 καὶ τὸ τελευταῖον 2. Ὁ μεγαλύτερος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι 87632.

Μὲ ἀνάλογον σκέψιν ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ μικρότερος ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 23678.

§ 15. Σκέψις: Ἐπειδὴ $1198 < 1217 < 1333 < 1772 < 1925 < 1935 < 1980 < 2223 < 2375 < 2407 < 2555$, ἡ τάξις τῶν ὁρέων ἀπὸ τὸ χαμηλότερον πρὸς τὰ ὑψηλότερα εἶναι ἡ αὕτη. Ἦτοι: Ἀραχναῖον, Αἰγάλεω, Λύκαιον κ. τ. λ.

§ 16. Λύσεις: Ἐπειδὴ $2512 > 2483 > 2459 > 1924 > 1748 > 1412 > 1408 > 1371$, συμπεραίνομεν ὅτι ἀπὸ τὰ ὄρη αὐτὰ ὑψηλότερον εἶναι ἡ Γκιφῶνα, ἔπειτα κατὰ σειρὰν πρὸς τὰ χαμηλότερα ἡ Οἴτη, ὁ Παρνασσὸς κ. τ. λ.

ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΑΙ ΓΡΑΦΑΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. Πίναξ ἀντιστοιχείας τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν ἀραβικὴν καὶ τὴν παλαιὰν ἑλληνικὴν γραφὴν.

1 α'	2 β'	3 γ'	4 δ'	5 ε'	6 ς'	7 ζ'	8 η'	9 θ'
10 ι'	20 κ'	30 λ'	40 μ'	50 ν'	60 ξ'	70 ο'	80 π'	90 ι'
100 ρ'	200 σ'	300 τ'	400 υ'	500 φ'	600 χ'	700 ψ'	800 ω'	900 θ'

II. Πίναξ ἀντιστοιχείας ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων κατὰ τὴν Ῥωμαϊκὴν γραφὴν.

1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000
I,	V,	X,	L,	C,	D,	M

§ 17. α') Ὁ ἀριθμὸς $36=30+6$ ἐγράφετο διὰ τῆς παραθέσεως τῶν γραμμάτων λ καὶ ς' οὕτω: λς'. — Ὁμοίως ὁ 79 οὕτω: οθ'. Ὁ 289 οὕτω: σπθ'. Ὁ 307 οὕτω: τζ'. Ὁ 5994 οὕτω: ,εϞιδ'.

§ 17. β') Ὁ $36=10+10+10+5+1$ ἐγράφετο οὕτω: XXXVI. Ὁ $79=50+10+10+(10-1)$ ἐγράφετο: LXXIX. Ὁ $289=100+100+50+10+10+10+(10-1)$ ἐγράφετο: CCLXXXIX. Ὁ $307=100+100+100+5+2$ ἐγράφετο CCCVII. Ὁ $5994=5000+(1000-100)+(100-10)+(5-1)$ ἐγράφετο οὕτω: V̄CMXCIV.

§ 18. Ὁ ιθ' $=90+9=99$. Ὁ σοα' $=200+70+1=271$. Ὁ Ϟιθ' $=900+90+9=999$. Ὁ βωια' $=2000+800+90+1=2891$.

§ 19. — 1ον Ὁ CC $=100+100=200$. Ὁ DCLV $=500+100+100+5=655$. Ὁ DCCXL $=500+100+100+(50-10)=740$. Ὁ CMXII $=(1000-100)+10+2=912$. Ὁ MCXXXV $=1000+100+100+10+5=1135$.

2ον Ὁ MM $=1000+1000=2000$. Ὁ MCD $=1000+(500-100)=1400$. Ὁ V̄DCCV $=5000+500+100+100+5=5705$. Ὁ X̄CMLXI $=10000+(1000-100)+50+10+1=10961$.

Ὁ L̄LXXXIII $=50000+50+10+10+10+3=50083$.

3ον Ὁ MMMCCCLXXX $=1000+1000+1000+1000+100+100+100+50+10+10+10=4380$. Ὁ XX̄IDCCXIV $=22000+500+100+100+10+(5-1)=22714$. Ὁ VIĪCM $=$

7 000 000 + (1000 - 100) = 7 000 900. 'Ο $\overline{\text{LII}}$ = 51 000 000 000.

§ 20. 'Ο 274 = 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + (5 - 1) ἐγράφετο οὕτω: CCLXXIV. 'Ο 749 = 500 + 100 + 100 + (50 - 1) ἐγράφετο DCCIL. 'Ο 1658 = 1000 + 500 + 100 + 50 + 5 + 3 ἐγράφετο οὕτω: MDCLVIII. 'Ο 4375 = 4000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 5 ἐγράφετο $\overline{\text{IVCCCLXXV}}$.

'Ο 22714 = 22000 + 500 + 100 + 100 + 10 + 4 ἐγράφετο οὕτω: $\overline{\text{XXII DCCXIV}}$. 'Ο 1890 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + (100 - 10) ἐγράφετο οὕτω: MDCCCXC.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

§ 21. Α' τρόπος: Ἐπειδὴ $5 + 7 + 8 = 20$ καὶ $9 + 15 = 24$, ἐννοοῦμεν ὅτι $(5 + 7 + 8) + (9 + 15) = 20 + 24 = 44$.

Β' τρόπος: Κατὰ τὴν ιδιότητα τῆς προσθέσεως ἀθροισμάτων εἶναι $(5 + 7 + 8) + (9 + 15) = 5 + 7 + 8 + 9 + 15 = 44$.

Κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους εὐρίσκονται καὶ ἄλλα ἄθροισματα. Π. χ. $(12 + 9 + 6) + (24 + 32) = 27 + 56 = 83$ ἢ $(12 + 9 + 6) + (24 + 32) = 12 + 9 + 6 + 24 + 32 = 83$ κ. τ. λ.

§ 22. Προσθέτομεν τὰς ἀπλᾶς μονάδας ἐξ ἀριστερῶν λέγοντες: 3 καὶ 7 δέκα καὶ 8 δέκα ὀκτῶ καὶ 3 εἴκοσιν ἓνα καὶ 8 εἴκοσιν ἐννέα καὶ 4 τριάντα τρία. Γράφομεν τὰς 3 ἀπλᾶς μονάδας τοῦ 33, τὰς δὲ 3 δεκάδας προσθέτομεν μὲ τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων λέγοντες: 3 τὰ κρατούμενα καὶ 2 πέντε καὶ 8 δέκα τρία καὶ 7 εἴκοσι καὶ 5 εἴκοσι πέντε καὶ 7 τριάντα δύο καὶ 3 τριάντα πέντε. Γράφομεν ἀριστερὰ τῶν ἀπλῶν μονάδων 3 τὰς 5 δεκάδας τοῦ 35, τὰς δὲ 3 ἑκατοντάδας προσθέτομεν μὲ τὰς ἑκατοντάδας τῶν προσθετέων κ.τ.λ. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες εὐρίσκομεν ἄθροισμα 76 253.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκομεν ὅτι τὸ β' ἄθροισμα εἶναι 360 620.

§ 23. Συμπλήρωσις πίνακος:

953 200	1 645 000	3 048 700	5 646 900
875 640	2 972 700	2 854 740	4 703 180
785 945	1 248 500	2 593 780	4 628 225
693 200	2 449 675	3 000 900	6 143 775
800 675	1 875 635	2 358 480	5 034 690
987 300	2 148 750	1 975 000	5 131 050
5 095 860	10 340 360	15 831 600	31 267 820

§ 24.—1ον) 6 καὶ 3 ἐννέα· ἄρα $60+30=90$

8 καὶ 5 δέκα τρία· ἄρα $80+50=130$.

7 καὶ 6 δέκα τρία· ἄρα $70+60=130$.

2ον) 5 καὶ 7 δώδεκα· ἄρα $50+70=120$, $59+70=129$

ἢ ἀμέσως $50+70=120$ καὶ ἐννέα 129.

$40+70=110$, $40+74=114$.

$90+70=160$, $90+73=163$.

3ον) $60+40=110$, $3+5=8$ · ἄρα $63+45=118$,

$70+90=160$, $8+4=12$ · ἄρα $78+94=160+12=172$

$80+30=110$, $5+6=11$ · ἄρα $85+36=110+11=121$.

4ον) $600+90=690$, $45+3=48$ · ἄρα $645+93=690+48=738$.

$300+90=390$, $68+4=72$ · ἄρα $368+94=390+72=462$.

$500+90=590$, $43+6=49$ · ἄρα $543+96=590+49=639$.

5ον) $200+100=300$, $50+50=100$, $2+9=11$. "Αρα

$252+159=300+100+11=411$.

$200+100=300$, $70+80=150$, $2+9=11$. "Αρα

$272+189=300+150+11=450+11=461$.

$100+100=200$, $30+40=70$, $9+2=11$. "Αρα

$139+142=200+70+11=270+11=281$.

6ον) $600+300=900$, $50+20=70$, $2+5=7$. "Αρα

$4652+325=4000+900+70+7=4977$.

$800+200=1000$, $90+40=130$, $3+7=10$. "Αρα

$3893+247=3000+1000+130+10=4140$.

$600+900=1500$, $50+40=90$, $4+7=11$. "Αρα

$5654+947=5000+1500+90+11=6601$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 25. Ἀπὸ τὴν ἑναρξιν τῶν Ὀλυμπιακῶν ἀγώνων μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ ἐπέρασαν 777 ἔτη. Ἀπὸ δὲ τὴν γέννησιν τοῦ Χριστοῦ μέχρι σήμερον (1949 μ. Χ.) ἐπέρασαν ἄλλα 1949 ἔτη. Τὸ ὅλον λοιπὸν ἐπέρασαν $777+1949=2726$ ἔτη.

Σημ.—Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λογίζεται ὅτι ἐπέρασεν ὅλον τὸ ἔτος 1949.

§ 26. Ὅπως πρηγουμένως ἐννοοῦμεν ὅτι ἐπέρασαν $490+1949=2439$ ἔτη.

§ 27. Λύσις: Ἀπὸ τὴν πώλησιν πρέπει νὰ εἰσπράξη τὸ ποσὸν 836 500 τῆς ἀγορᾶς καὶ $26\,750=$ δραχ. κέρδος. Θὰ πωλήσῃ λοιπὸν τὸ ὑφασμα $836\,500+26\,750=863\,250$ δραχ.

§ 28. Λύσις: Ἀφ' οὗ διὰ τὸ ἐν τευχάκιον ἔδοκε $27\,659$ δραχ.

καὶ διὰ τὸ ἄλλο 15 370 δραχ., διὰ τὰ εὐρωμεν πόσα χρήματα ἔδωκε διὰ τὰ δύο τεμάχια, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσά. Ἔδωκε λοιπὸν διὰ τὰ δύο τεμάχια

$$27\ 659 + 15\ 370 = 43\ 029 \text{ δραχ.}$$

§ 29 Λύσις : Ἀπὸ τὴν γέννησιν τοῦ παιδίου ἕως τώρα ἐπέρασαν 17 ἔτη. Ἐπομένως ἡ μήτηρ εἶναι τώρα $27 + 17 = 44$ ἐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πατὴρ καὶ τώρα εἶναι 9 ἔτη μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν μητέρα, ὁ πατὴρ εἶναι τώρα $44 + 9 = 53$ ἐτῶν.

Β' τρόπος λύσεως : Κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ παιδίου ἡ μήτηρ ἦτο 27 ἐτῶν, ὁ δὲ πατὴρ 9 ἔτη μεγαλύτερος, ἦτοι $27 + 9 = 36$ ἐτῶν. Ἔως σήμερον ἐπέρασαν 17 ἔτη. Ἐπομένως ἡ μὲν μήτηρ εἶναι $27 + 17 = 44$ ἐτῶν, ὁ δὲ πατὴρ $36 + 17 = 53$ ἐτῶν.

§ 30. Λύσις : Ἀφ' οὗ τὸ ἕν εἶχε 36 ὀκάδας καὶ τὸ ἄλλο 49 ὀκάδας, τὰ δύο μαζὶ περιεῖχον $36 + 49 = 85$ ὀκάδας. Ἀφ' οὗ δὲ διὰ τὸν σάπωνα τοῦ α' κιβωτίου ἐπλήρωσε 261 000 δραχ. καὶ διὰ τὸν σάπωνα τοῦ β' κιβωτίου ἐπλήρωσε 407 325 δραχ. δι' ὅλον τὸν σάπωνα ἐπλήρωσε $261\ 000 + 407\ 325 = 668\ 325$ δραχμάς.

§ 31. Λύσις : Ἀφ' οὗ διὰ τὴν ἐνδυμασίαν ἐπλήρωσεν 179 350 δραχ. διὰ τὰ ὑποδήματα 125 000 δραχ. καὶ διὰ τὰς κάλτσας 8 500 δραχμάς, δι' ὅλα τὰ πράγματα ταῦτα ἐπλήρωσε $179\ 350 + 125\ 000 + 8\ 500 = 312\ 850$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ἔμειναν εἰς αὐτὸν καὶ ἄλλαι 46 350 δραχ. ἐννοοῦμεν ὅτι εἶχεν οἰκονομήσῃ τὸ ὅλον $312\ 850 + 46\ 350 = 359\ 200$ δραχμάς.

§ 32 Λύσις : Ἀφ' οὗ τὸ α' χωράφιον ἤξιζε 6 738 950 δραχμάς, τὸ δὲ β' ἦτο ἀκριβώτερον κατὰ 2 376 400 δραχ., ἔπειτα ὅτι τὸ β' ἤξιζε $6\ 738\ 950 + 2\ 376\ 400 = 9\ 115\ 350$ δραχ. Διὰ τὰ δύο λοιπὸν ἔδωσε $6\ 738\ 950 + 9\ 115\ 350 = 15\ 854\ 300$ δραχ.

Β' τρόπος : Ἄν κάθε χωράφιον ἤξιζεν, ὅσον τὸ πρῶτον, διὰ τὰ δύο θὰ ἔδιδε $6\ 738\ 950 + 6\ 738\ 950 = 13\ 477\ 900$ δραχ. Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τὸ β' χωράφιον ἔδωκεν ἄλλας 2 376 400 δραχμάς, ἔδωκεν τὸ ὅλον $13\ 477\ 900 + 2\ 376\ 400 = 15\ 854\ 300$ δραχ.

§ 33. Λύσις : Ἀφ' οὗ τὸ α' ἔλαβε 3725 ὀκ. καὶ τὸ β' 387 ὀκ. περισσότερον, τὸ β' ἔλαβε $3\ 725 + 387 = 4\ 112$ ὀκάδας. Τὸ δὲ γ' ἔλαβε 564 ὀκ. περισσότερον ἀπὸ τὸ β'. Ἐλαβε λοιπὸν τὸ γ' $4\ 112 + 564 = 4\ 676$ ὀκ. Ἐπομένως τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἦτο $3\ 725 + 4\ 112 + 4\ 676 = 12\ 513$ ὀκάδες.

Β' τρόπος : Ἄν τὸ μερίδιον ἐκάστου ἦτο 3 725 ὀκάδες, τὸ μοιρασθὲν ἄλευρον θὰ ἦτο $3\ 725 + 3\ 725 + 3\ 725 = 11\ 175$ ὀκ. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ β' ἔλαβεν ἀκόμη 387 ὀκ. καὶ τὸ γ' ἀκόμη $387 + 564 = 951$, ὅλον τὸ ἄλευρον ἦτο $11\ 175 + 387 + 951 = 12\ 513$ ὀκ.

§ 34. Λύσις: Τὸ β' πρόσωπον ἔλαβεν $427\ 650 + 36\ 750 = 464\ 400$. Τὸ δὲ γ' ἔλαβε $464\ 400 + 52\ 480 = 516\ 880$. Ἐπομένως τὰ τρία πρόσωπα ἔλαβον ὁμοῦ

$$427\ 650 + 464\ 400 + 516\ 880 = 1\ 408\ 930 \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος. Ἐν κάθε πρόσωπον ἐλάμβανεν $427\ 650$ δραχ., τὰ 3 πρόσωπα θὰ ἐλάμβανον $427\ 650 + 427\ 650 + 427\ 650 = 1\ 282\ 950$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ β' πρόσωπον ἔλαβεν ἀκόμῃ $36\ 750$ δραχ. καὶ τὸ γ' ἀκόμῃ $36\ 750 + 52\ 480 = 89\ 230$, ὅλα μαζὶ ἔλαβον $1\ 282\ 950 + 36\ 750 + 89\ 230 = 1\ 408\ 930$.

§ 35. Λύσις: Ὁ α' εἶναι 3059 , ὁ β' εἶναι $3059 + 908 = 3\ 967$ καὶ ὁ γ' $4967 + 908 = 4875$, ὁ δὲ δ' θὰ εἶναι $4\ 875 + 908 = 5\ 783$. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων εἶναι $3\ 059 + 3\ 967 + 4\ 875 + 5\ 783 = 17\ 684$.

Β' τρόπος. Ἐπειδὴ ὁ α' εἶναι 3059 , ὁ β' εἶναι $3059 + 908$, ὁ γ' εἶναι $(3059 + 908) + 908 = 3059 + 908 + 908$, ὁ δ' $(3059 + 908 + 908) + 908 = 3059 + 908 + 908 + 908$, τὸ ἄθροισμα ὅλων εἶναι $3059 + (3059 + 908) + (3059 + 908 + 908) + 3059 + (3059 + 908 + 908 + 908)$. Κατὰ δὲ τὴν ἀναλυτικὴν ιδιότητα τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι

$$3059 + 3059 + 908 + 3059 + 908 + 908 + 3059 + 908 + 908 + 908.$$

Καὶ κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα τοῦτο γίνεται

$$(3059 + 3059 + 3059 + 3059) + 908 + 908 + 908 + 908 + 908 + 908 = 12\ 236 + 5\ 448 = 17\ 684.$$

§ 36. Λύσις: α') Ἐν $\alpha = 9073$, θὰ εἶναι $42729 + \alpha = 42729 + 9073 = 51802$. β') Ἐν $\alpha = 38009$, θὰ εἶναι $842729 + \alpha = 42729 + 38\ 009 = 80\ 738$.

§ 37. Λύσις: Ἐπειδὴ $\alpha = 3\ 078$, $\beta = 4\ 069$, $\gamma = 39\ 017$, θὰ εἶναι $\alpha + \beta + \gamma = 3\ 078 + 4\ 069 + 39\ 017 = 46\ 164$.

§ 38. Λύσις: Τὸ β' γυμνάσιον εἶχε 760 καὶ ἀκόμῃ x μαθητὰς, ἤτοι $760 + x$ μαθητὰς Ἐν δὲ $x = 25$, θὰ εἶναι $760 + x = 760 + 25 = 785$ μαθητὰς εἶχε τὸ β' γυμνάσιον.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$\begin{array}{r} \text{§ 39. } \alpha') \quad \begin{array}{r} 4\ 567 \\ - 3\ 289 \\ \hline 1\ 278 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Δοκιμή} \\ + 3\ 289 \\ \hline 1\ 278 \\ + 1\ 278 \\ \hline 4\ 567 \end{array} \quad \beta') \quad \begin{array}{r} 20\ 004 \\ - 7\ 895 \\ \hline 12\ 109 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Δοκιμή} \\ + 7\ 895 \\ \hline 12\ 109 \\ + 12\ 109 \\ \hline 20\ 004 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \gamma') \quad \begin{array}{r} 13\,578 \\ - 6\,596 \\ \hline 6\,982 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Δοκιμή} \\ + 6\,596 \\ 6\,982 \end{array} \\ \hline 13\,578 \end{array} \quad \begin{array}{r} \delta') \quad \begin{array}{r} 80\,304 \\ - 25\,607 \\ \hline 54\,697 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Δοκιμή} \\ + 25\,607 \\ 54\,697 \end{array} \\ \hline 80\,304 \end{array}$$

§ 40. Λύσις : α') Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 5702—3843, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ὁμοειδεῖς μονάδας τοῦ μειωτέου λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ κρατούμενα, ἃν ὑπάρχωσιν. Οὕτω λέγομεν 3 ἀπὸ 12 ἑννέα· ἓνα τὸ κρατούμενον καὶ 4 πέντε ἀπὸ 10 πέντε· ἓνα τὸ κρατούμενον καὶ 8 ἑννέα ἀπὸ 17 ὀκτώ· ἓνα τὸ κρατούμενον καὶ 3 τέσσαρα ἀπὸ 5 ἑν. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι 5702—3843=1859.

$$\begin{array}{r} \text{Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι } 47\,932 - 8\,647 = 39\,285, \\ 13\,004 - 7\,349 = 5\,655, \quad 147\,285 - 59\,697 = 87\,588. \end{array}$$

§ 41. Λύσις : 1ον Ἐπειδὴ $40 + 25 = 65$, ἔπεται ὅτι $150 - (40 + 25) = 150 - 65 = 85$.

Β' τρόπος : Κατὰ τὸν τρόπον τῆς ἀφαίρεσεως ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμοῦ εἶναι $150 - (40 + 25) = (150 - 40) - 25$ ἢ $110 - 25 = 85$.

2ον Ὅμοίως $120 - (64 + 23 + 8) = 120 - 95 = 25$ ἢ εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $120 - 64 = 56$ · ἔπειτα $56 - 23 = 33$ καὶ τέλος $33 - 8 = 25$.

3ον Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $56 + 28 + 74 = 158$. Ἐπομένως $(56 + 28 + 74) - 30 = 158 - 30 = 128$.

Β' τρόπος : Γνωρίζομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 30 ἀπὸ ἑνὸς προσθετέου π. χ. ἀπὸ τὸν 74. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι $(56 + 28 + 74) - 30 = 56 + 28 + 44 = 128$.

$$\begin{array}{r} 4ον \text{ Ὅμοίως } (67 + 32) - 24 = 99 - 24 = 75 \text{ ἢ} \\ (67 + 32) - 24 = 67 + 8 = 75. \end{array}$$

§ 42. 1ον α'.) Ἀπὸ τὰς 12 δεκάδας τοῦ μειωτέου 120 ἀφαιροῦμεν τὰς 7 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου 70 καὶ εὐρίσκομεν 5 δεκάδας. Ἄρα $120 - 70 = 50$. Λέγομεν δὲ ἀμέσως 7 ἀπὸ 12 πέντε καὶ ἐπομένως $120 - 70 = 50$.

β') Τὴν διαφορὰν $360 - 90$ εὐρίσκομεν ταχέως προσθέτοντες 10 εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον. Εἶναι λοιπὸν $360 - 90 = 370 - 100 = 270$.

$$\gamma') \text{ Ὅμοίως } 4700 - 800 = 4900 - 1000 = 3900.$$

2ον) $548 - 35 = 553 - 40 = 513$, $679 - 84 = 685 - 90 = 695$ — $100 = 595$, $986 - 635 = 991 - 640 = (991 - 600) - 40 = 391 - 40 = (39 - 4) \text{ δεκ. } + 1 = 351$. Λέγομεν δηλ. ἀμέσως $991 - 640$,

991—600=391 πλὴν 40· ἔπειτα 39—4=35 καὶ 391—40=350
+1=351.

3ον) 78—29=79—30=49, 85—69=86—70=16,
354—99=355—100=255.

4ον) 84—11=83—10=73, 728—11=727—10=717,
349—11=348—10=338, 632—101=631—100=531,
539—101=538—100=438, 2567—101=2566—100=
=2466.

5ον) 275—92=283—100=183, 394—41=393—40=353,
845—102=843—100=743, 847—104=843—100=743,
964—96=968—100=868, 759—48=761—50=711.

6ον) 734—539=735—540=195, 964—278=956—270=
=986—300=686, 365—275=390—300=90.

7ον) 1379—279=1000+(379—279)=1100, 964—264=700,
7379—879=(7379+21)–(879+21)=7400–900=6500.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ Ἡ ΔΙΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§ 43. Ὁ Πυθαγόρας ἔζησε 572—500=72 ἔτη, ὁ Περικλῆς
490—429=491—430=61 ἔτη, ὁ Σωκράτης 470—399
=471—400=71 κ. τ. λ.

§ 44. Ἀπὸ τῆς ἐφευρέσεως τῆς πυρίτιδος μέχρι σήμερον
(1949) ἐπέρασαν 1949—1346=603. Ἀπὸ τῆς ἐφευρέσεως τῆς
τυπογραφίας ἐπέρασαν 1949—1436=513 ἔτη.

Ἀπὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς ἐπέρασαν
1949—1452=497 ἔτη κ. τ. λ.

§ 45. Ἡ Ἑλληνικὴ ἐπανάστασις ἔγινε τὸ ἔτος 1821 μ. Χ.
Ἐπομένως ἀπὸ τῆς ἀλώσεως τῆς Κ)πόλεως ἕως τὴν Ἑλλην.
ἐπανάστασιν ἐπέρασαν 1821—1453=368 ἔτη.

§ 46. Τὸ ὄρος Ἐβερεστ εἶναι ὑψηλότερον τοῦ Ὀλύμπου
κατὰ 8 840—2 918=5 922 μέτρα.

§ 47. Λύσις: Ἀπὸ τὰς 75350 δραχ., τὰς ὁποίας εἰσέπρα-
ξε, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 16450 δραχ., τὰς ὁποίας ἐκέρ-
δισεν. Ἡ ἀξία λοιπὸν τῶν ἐμπορευμάτων ἦτο 75350—16450=
=58 900 δραχ.

§ 48. Λύσις: Ἀπὸ τὰς 1378 ὀκάδας ἀφαιροῦμεν τὰς 842
ὀκάδας, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησε καὶ εὐρίσκομεν ὅτι τοῦ
ἔμειναν 1378—842=536 ὀκ.

§ 49. Λύσις: α') 'Αφ' οὗ διὰ τὰ δύο κτήματα ἔδωκε 27 545 600 δραχμάς καὶ διὰ τὸν κῆπον μόνον ἔδωκε 3 865 750 δραχ., διὰ τὴν οἰκίαν ἔδωκε $27\,545\,600 - 3\,865\,750 = 23\,679\,850$ δραχμάς.

β') 'Αφ' οὗ διὰ τὴν οἰκίαν ἔδωκε 23 679 850 δραχ., διὰ δὲ τὸν κῆπον 3 865 750 δραχ. ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ τὸν κῆπον ἔδωκε $23\,679\,850 - 3\,865\,750 = 19\,814\,100$ δραχ. ὀλιγώτερον.

§ 50. Λύσις: 'Απὸ τὸν σῖτον καὶ ἀπὸ τὰ γεώμηλα ἔλαβεν $8\,474\,900 + 5\,654\,780 = 14\,129\,680$ δραχ. 'Απὸ αὐτὰς ἔδωκε 8 652 000 δραχ. διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἵππου. 'Επομένως ἔμειναν εἰς αὐτὸν $14\,129\,680 - 8\,652\,000 = 5\,477\,680$ δραχμαί.

§ 51. Λύσις: 'Ἡ θυγάτηρ κερδίζει $350\,750 - 76\,500 = 274\,250$. 'Επομένως αἱ δύο μαζὶ κερδίζουν $350\,750 + 274\,250 = 625\,000$ δραχμάς.

Β' τρόπος: 'Αν ἡ θυγάτηρ ἐκέρδιζεν ὅσα ἡ μήτηρ, αἱ δύο μαζὶ θὰ ἐκέρδιζον $350\,750 + 350\,750 = 701\,500$ δραχ. 'Επειδὴ ὅμως ἡ θυγάτηρ ἐκέρδιζεν 76 500 δραχ. ὀλιγώτερον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτάς. Αἱ δύο λοιπὸν ἐκέρδιζαν $701\,500 - 76\,500 = 625\,000$ δραχ.

§ 52. Λύσις: 'Αν μὲ τὰς 17 450 δραχ. καὶ μὲ τὰς ἰδικάς μου ἐπλήρωνα ἀκριβῶς τὸ χρέος μου, ἦτοι 27 650 δραχ. ἔπρεπε νὰ εἶχον $27\,650 - 17\,450 = 10\,200$ δραχ. 'Επειδὴ ὅμως ἐπερίσσευσαν καὶ 3 450 δραχ. εἶχον $10\,200 + 3\,450 = 13\,650$ δραχ.

§ 53. Λύσις: 'Αν μὲ τὰ χρήματά μου καὶ 12 600 δραχμάς, ἐπλήρωνα τὸ χρέος μου, ἦτοι 37 450 δραχ. τὰ χρήματά μου θὰ ἦσαν $37\,450 - 12\,600 = 24\,850$ δραχ. 'Επειδὴ ὅμως ἔλειπον 3 250 δραχ. ἔπεται ὅτι τὰ χρήματά μου ἦσαν $24\,850 - 3\,250 = 21\,600$ δραχ.

Β' τρόπος: 'Αν μοῦ ἔδιδαν $12\,600 + 3\,250 = 15\,850$ δραχ. μὲ αὐτάς καὶ μὲ τὰ χρήματά μου θὰ ἐπλήρωνα ὅλον τὸ χρέος μου. Τὰ χρήματά μου λοιπὸν ἦσαν $37\,450 - 15\,850 = 21\,600$.

§ 54. Λύσις: 'Αφ' οὗ οἱ δύο μαζὶ ἀποτελοῦσι 3 748, ὃ δὲ ἕνας εἶναι 1 895, ὃ ἄλλος θὰ εἶναι $3\,748 - 1\,895 = 1\,859$.

§ 55. Λύσις: 'Ο μικρότερος εἶναι ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς. 'Επειδὴ δὲ αὐτὸς καὶ ἡ διαφορά 5839 ἀποτελοῦσι μαζὶ τὸν μειωτέον 14 875, ἔπεται ὅτι ὁ μικρότερος εἶναι $14\,875 - 5\,839 = 9\,036$.

§ 56. Λύσις: 'Αφ' οὗ οἱ δύο μαζὶ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2763, ὃ δὲ μικρότερος εἶναι 857, ὃ μεγαλύτερος μένει πάλιν ἀπὸ

τὸν 2763 ἀφαιρεθῇ ὁ 857. Εἶναι λοιπὸν $2763 - 857 = 1906$. Ἡ ζητούμενη λοιπὸν διαφορὰ εἶναι $1906 - 857 = 1049$.

§ 57. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ $\alpha + 53068 = 101001$, ὁ α εἶναι ὑπόλοιπον, ἂν 53068 εἶναι ἀφαιρετέος καὶ 101001 μειωτέος. Εἶναι λοιπὸν $\alpha = 101001 - 53068 = 47933$.

2ον) Πρέπει $\alpha + 10909 = 17023$ κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως. Ὅπως δὲ προηγουμένως εἶπομεν, θὰ εἶναι $\alpha = 17023 - 10909 = 6114$.

§ 58. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτο ὅτι $\alpha + \beta = 3029 + 9072 = 12101$. Ἐπειτα $(\alpha + \beta) - \gamma = 12101 - 5948 = 6153$.

Β' τροπος: Ἀφαιροῦμεν τὸν γ ἀπὸ τὸν β καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν α . Εἶναι λοιπὸν $\alpha + \beta - \gamma = 3029 + (9072 - 5948) = 3029 + 3124 = 6153$.

§ 59. Λύσις: 1ον) Ἄν ὁ 53608 εἶναι μειωτέος καὶ ὁ 4506 ἀφαιρετέος, ὁ α θὰ εἶναι ὑπόλοιπον, ὥστε $\alpha = 53608 - 4506 = 49102$.

2ον) Ὅμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\beta = 102032 - 84302 = 17730$.

3ον) $\gamma = 43628 - 37153 = 6475$.

4ον) $735200 - 537609 = 197591$.

§ 60. Λύσις: 1ον) Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5269 ἀποτελοῦσι τὸν μειωτέον 7632. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι $7632 - 5269 = 2363$.

2ον) Ὁ ζητούμενος εἶναι μειωτέος, εἶναι λοιπὸν ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου 7689 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 2037, ἥτοι $7689 + 2037 = 9726$.

3ον) Τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μειωτέου εἶναι ἄθροισμα τοῦ 6 καὶ τοῦ 2, ἥτοι εἶναι 8. Αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου μαζί με τὴν 1 δεκάδα τοῦ ὑπολοίπου πρέπει νὰ ἀποτελῶσι τὰς 7 δεκάδας τοῦ μειωτέου. Αἱ ζητούμεναι λοιπὸν δεκάδες εἶναι $7 - 1 = 6$. Αἱ δὲ ζητούμεναι ἑκατοντάδες τοῦ μειωτέου εἶναι $4 + 2 = 6$.

4ον) Τὸ τελευταῖον ζητούμενον ψηφίον τοῦ ὑπολοίπου προφανῶς εἶναι $1 - 0 = 1$. Αἱ ζητούμεναι δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου μαζί με τὰς 7 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου κάμνουσιν 9. Ἀρα αἱ ζητούμεναι εἶναι $9 - 7 = 2$. Ἐπειδὴ $5 + 6 = 11$, αἱ ζητούμεναι ἑκατοντάδες θὰ εἶναι 1· τὸ δὲ κρατούμενον 1 καὶ 2 γίνονται 3 ἀπὸ 4 μένει 1. Ὡστε εἶναι $4191 - 2521 = 1670$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 61. 1ον) $945 \times 10 = 9\,450$, $204 \times 100 = 20\,400$,
 $7\,653 \times 1\,000 = 7\,653\,000$.

2ον) $10 \times 348 = 3\,480$, $100 \times 764 = 76\,400$,
 $1\,000 \times 945 = 945\,000$.

3ον) $458 \times 8 = 3\,648$, $7\,602 \times 7 = 53\,214$, $5\,904 \times 9 = 53\,136$,
 $48\,745 \times 6 = 292\,470$.

4ον) $9 \times 657 = 5\,913$, $8 \times 4\,532 = 36\,256$, $7 \times 2\,069 = 14\,483$,
 $6 \times 2\,394 = 14\,364$.

§ 62. 1ον) $78 \times 6 = 468$, ἄρα $78 \times 600 = 46\,800$, $493 \times 7 = 3\,451$,
ἄρα $493 \times 7\,000 = 3\,451\,000$, $2\,965 \times 8 = 23\,720$, ἄρα
 $2\,965 \times 8\,000 = 23\,720\,000$.

Διάταξις τῶν πράξεων.

$$\begin{array}{r} 78 \\ 600 \\ \hline 46\,800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 493 \\ 7\,000 \\ \hline 3\,451\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,965 \\ 8\,000 \\ \hline 23\,720\,000 \end{array}$$

2ον) Ὅμοίως

$$\begin{array}{r} 345 \\ 5\,000 \\ \hline 1\,725\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 195\,6 \\ 300 \\ \hline 586\,800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ 9\,000 \\ \hline 954\,000 \end{array}$$

§ 63. 1ον,

$$\begin{array}{r} 3\,764 \\ 75 \\ \hline 18\,820 \\ 26\,348 \\ \hline 282\,300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\,793 \\ 236 \\ \hline 28\,758 \\ 14\,379 \\ \hline 95\,86 \\ \hline 1\,131\,148 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\,432 \\ 128 \\ \hline 59\,456 \\ 14\,864 \\ \hline 74\,32 \\ \hline 951\,296 \end{array}$$

2ον, $704 \times 398 = 398 \times 704 = 280\,192$,
 $2\,006 \times 847 = 847 \times 2\,006 = 1\,699\,082$.

$$\begin{array}{r} 398 \\ 704 \\ \hline 15\,92 \\ 27\,86 \\ \hline 280\,192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 847 \\ 2\,006 \\ \hline 50\,82 \\ 16\,94 \\ \hline 1\,699\,082 \end{array}$$

Ὅμοίως εὐρίσκουμεν ὅτι $8\,007 \times 309 = 2\,474\,163$.

3ον) $245 \times 35 = 8575$, επομένως $245\,000 \times 3500 = 857\,500\,000$.
Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκονται καὶ τὰ ἄλλα γινόμενα.

§ 64. Λύσεις: 1ον) Α' τρόπος: $5 + 7 + 8 = 20$, ἄρα
 $(5 + 7 + 8) \times 3 = 20 \times 3 = 60$.

Β' τρόπος: $(5 + 7 + 8) \times 3 = (5 \times 3) + (7 \times 3) + (8 \times 3) =$
 $= 15 + 21 + 24 = 60$.

Ὁμοίως $(10 + 5 + 11) \times 6 = 26 \times 6 = 156$ ἢ

$(10 + 5 + 11) \times 6 = (10 \times 6) + (5 \times 6) + (11 \times 6) = 60 + 30 + 66 = 156$.

2ον) $4 \times (8 + 9 + 6) = 4 \times 23 = 92$ ἢ

$4 \times (8 + 9 + 6) = (4 \times 8) + (4 \times 9) + (4 \times 6) = 32 + 36 + 24 = 92$.

$7 \times (25 + 13 + 9) = 7 \times 47 = 329$, ἢ

$7 \times (25 + 13 + 9) = (7 \times 25) + (7 \times 13) + (7 \times 9) = 175 + 91 + 63 = 329$.

§ 65. 1ον) Τὸ γινόμενον 78×5 εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Λέγομεν 78 ἐπὶ 10 γίνεται 780 . τὸ ἥμισυ αὐτοῦ 390 . Ὡστε $78 \times 5 = 390$. Ἡ καὶ ὡς ἑξῆς. Λέγομεν $7 \times 5 = 35$, $70 \times 5 = 350$, $8 \times 5 = 40$, $350 + 40 = 390$.

Τὸ $127 \times 3 = (100 \times 3) + (20 \times 3) + (7 \times 3) = 300 + 60 + 21 = 381$.

$329 \times 5 = (329 \times 10) : 2 = 3290 : 2 = 1645$ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς,

$329 \times 5 = (300 \times 5) + (20 \times 5) + (9 \times 5) = 1500 + 100 + 45 = 1645$.

$495 \times 9 = (495 \times 10) - 495 = 4950 - 495 = (4950 - 500) + 5 =$
 $= 4450 + 5 = 4455$. Ἡ καὶ οὕτω: $495 \times 9 = (400 \times 9) +$
 $+ (90 \times 9) + (5 \times 9) = 3600 + 810 + 45 = 4455$.

2ον) $745 \times 2 = (700 \times 2) + (40 \times 2) + (5 \times 2) = 1400 + 80 + 10 = 1490$,
ἢ $745 \times 2 = 745 + 745 = 1490$,

ἢ καὶ καὶ οὕτω: $745 \times 2 = (745 \times 10) : 5 = 7450 : 5 = 1490$.

Κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους εὐρίσκομεν ὅτι:

$623 \times 2 = 1246$, $8354 \times 2 = 16708$, $5795 \times 2 = 11590$.

3ον) $128 \times 4 = (100 \times 4) + (20 \times 4) + (8 \times 4) = 400 + 80 + 32 =$
 $= (400 + 80 + 20) + 12 = 500 + 12 = 512$, ἢ

$128 \times 4 = (128 \times 2) \times 2 = 256 \times 2 = 512$.

Κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους εὐρίσκουμεν ὅτι

$375 \times 4 = 1500$, $1567 \times 4 = 6268$.

4ον) $74 \times 9 = (70 \times 9) + (4 \times 9) = 630 + 36 = 666$ ἢ

$74 \times 9 = (74 \times 10) - 74 = 740 - 74 = 666$.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι $325 \times 9 = 2925$, $957 \times 9 = 8613$.

5ον) $27 \times 99 = (27 \times 100) - 27 = 2700 - 27 = 2673$,

$47 \times 999 = (47 \times 1000) - 47 = 47000 - 47 = 46953$,

$75 \times 999 = (75 \times 1000) - 75 = 75000 - 75 = 74925$.

6ον) $27 \times 11 = (27 \times 10) + 27 = 270 + 27 = 297$ ἢ καὶ οὕτω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$7+2=9$. Γράφομεν ἄριστερὰ τοῦ 7 τὸν 9 καὶ ἄριστερὰ τούτου τὸν 2. Οὕτως ἐγράψαμεν 297.

$48 \times 11 = (48 \times 10) + 48 = 480 + 48 = 528$ ἢ καὶ οὕτω:

Γράφομεν 8 ἔπειτα $8+4=12$ γράφομεν ἄριστερὰ 2 καὶ ἄριστερὰ τούτου $1+4=5$. Εὐρίσκομεν λοιπὸν 528. Αὐτὸς ὁ τρόπος προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον διατάξιν :

$$\begin{array}{r} 48 \\ 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

Ὅμοίως 4238×11 εὐρίσκεται οὕτω 4238

$$\begin{array}{r} 4238 \\ 4238 \\ \hline 46618 \end{array}$$

καὶ κατὰ τοὺς ἄλλους τρόπους εὐρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 7ον) $24 \times 101 = (24 \times 100) + 24 = 2400 + 24 = 2424$ ἢ καὶ διὰ τῆς ἀκολούθου διατάξεως

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 2424 \end{array}$$

$64 \times 101 = (64 \times 100) + 64 = 6400 + 64 = 6464$ κ.τ.λ.

$94 \times 1001 = (94 \times 1000) + 94 = 94000 + 94 = 94094$ ἢ καὶ διὰ τῆς διατάξεως

$$\begin{array}{r} 94 \\ 9400 \\ \hline 94094 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

§ 66. Λύσις : Ἀφ' οὗ τὸ 1 μέτρον τιμᾶται 17 500 δραχ.

τὰ 2 μέτρα τιμῶνται $17\,500 \times 2$

καὶ τὰ 12 § » $17\,500 \times 12$

$= (17\,500 \times 10) + (17\,500 \times 2) = 175\,000 + 35\,000 = 210\,000$ δραχ.

§ 67. Λύσις : Ἡ πρόσθεσις τοῦ 2600 εἰς τὸν ἑαυτὸν τοῦ 350 φορὰς εἶναι πολισμὸς τοῦ 2600 ἐπὶ 350. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον

$2600 \times 350 = (26 \times 35) \times 1000 = 910 \times 1000 = 910\,000$.

§ 68. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἰς 1 λεπτὸν κάμνει 45 στροφάς, εἰς 1 ὥραν, ἥτοι εἰς 60 λεπτά θὰ κάμῃ $45 \times 60 = (45 \times 6) \times 10 = 2700$ στροφάς.

§ 69. Λύσις : Ἀφ' οὗ ὁ ἥχος διατρέχει 340 μέτρα εἰς 1 δευτερόλεπτον, ἂν ἤκουε τὸν κρότον μετὰ 12 ἀπὸ τὴν λάμπιν

θα ἦτο 340 μέτρα μακράν, ἂν ἤκουε τὸν κρότον μετὰ 2^ο ἀπὸ τὴν λάμπιν θα ἦτο 340×2 καὶ ἐπειδὴ ἤκουσε τὸν κρότον μετὰ 15^ο, ἦτο μακράν $340 \times 15 = 5100$ μέτρα.

§ 70. Λύσις: Διὰ τὸ ἔλαιον ἔδωκε $12\,600 \times 125 = 1\,575\,000$ δραχ.

» τὰ ζυμαρικά $4\,600 \times 245 = 1\,127\,000$ »

Ἐπομένως ἔδωκε τὸ ὅλον $1\,575\,000 + 1\,127\,000 = 2\,702\,000$ »

§ 71. Λύσις: Διὰ τὸ λίπασμα ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ

$5425 \times 145 = 786\,625$ δραχ.

Ὁ σῖτος, τὸν ὅποιον ἔδωκεν ἀξίζει

$2015 \times 79 = 159\,185$

Ἐδωκε καὶ μετρητὰ $367\,290$

Ἐδωκε λοιπὸν τὸ ὅλον $526\,475$ $526\,475$

Ὡστε ὀφείλει ἀκόμη $786\,625 - 526\,475 = 260\,150$ δραχ.

§ 72. Λύσις: Διὰ τοὺς 3 ἐργάτας εἰς 1 ἡμέραν πληρώνει

$23\,000 + 25\,000 + 30\,000 = 78\,000$ δραχ. Ἐπομένως

εἰς 6 ἡμέρας πληρώνει $78\,000 \times 6 = 468\,000$ δραχ.

Β' τρόπος: Εἰς τὸν α' ἐργ. τὰς 6 ἡμ. πληρ. $23\,000 \times 6 = 138\,000$

» » β' » » 6 » » $25\,000 \times 6 = 150\,000$

καὶ » » γ' » » 6 » » $30\,000 \times 6 = 180\,000$

Εἰς ὅλους δὲ πληρώνει δραχμὰς $468\,000$

§ 73. Λύσις: Εἰς τὰς 4 πρώτας ἐργ. δίδει $18\,000 \times 4 = 72\,000$

» » 12 ἄλλας » » $13\,000 \times 12 = 156\,000$

καὶ εἰς τὰς ὑπολοίπους 12 » » $12\,000 \times 12 = 144\,000$

Ἐπομένως εἰς ὅλας δίδει τὸ ἄθροισμα, αὐτῶν ἦτοι: δραχ. 372 000

§ 74. Λύσις: Εἰς τὰς πρώτ. 27 ὥρ. διήνυσε $13 \times 27 = 351$ μίλ.

Εἰς τὰς ἄλλας $42 - 27 = 15$ » » $15 \times 15 = 225$ »

Ἐπομένως ἡ ἀπόστασις Πειραιῶς - Ἀλεξανδρείας εἶναι 576 »

§ 75. Λύσις: Ὁ α' εἰς 4 ὥρας διανύει $16 \times 4 = 64$ χιλιόμ.

ὁ δὲ β' εἰς 4 » » $12 \times 4 = 48$ »

Ἐπομένως οἱ δύο μαζί ἐπλησίασαν 112 »

Μένει δὲ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις $235 - 112 = 123$ χιλιόμ.

Β' τρόπος: Οἱ δύο μαζί εἰς μίαν ὥραν διανύουσι $16 + 12 =$

$= 28$ χιλιόμ. Εἰς 4 ὥρας διανύουσι $28 \times 4 = 112$ χιλιόμ. κ. τ. λ.

ὡς προηγουμένως.

§ 76. Λύσις: Αἱ δύο ἀγέλαδες δίδουσιν $8 \times 2 = 16$ ὄκ. γάλα-

κτος τὴν ἡμέραν. Ἀπὸ αὐτὸ λαμβάνει $3000 \times 16 = 48\,000$ δραχ.

Διὰ τὰς 2 ἀγελάδας ἐξοδεύει $8250 \times 2 = 16500$ δραχ. τὴν ἡμέραν.
Ἐπομένως κερδίζει $48\ 000 - 16\ 500 = 31\ 500$ δραχ. καὶ εἰς 1
μῆνα κερδίζει $31\ 500 \times 30 = 945\ 000$ δραχ.

Β'. τρόπος : Ἀπὸ τὰς 2 ἀγελάδας λαμβάνει τὸν μῆνα
 $16 \times 30 = 480$ ὄκ γάλακτος. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ εἰσπράττει
 $3000 \times 480 = 1\ 440\ 000$ δραχ. Διὰ τὰς 2 ἀγελάδας δαπανᾷ
 $8250 \times 2 = 16500$ δραχ. τὴν ἡμέραν καὶ εἰς 1 μῆνα δαπανᾷ
 $16500 \times 30 = 495\ 000$. Ἐπομένως ἔχει περίσσευμα
 $1\ 440\ 000 - 495\ 000 = 945\ 000$ δραχ.

§ 77. Λύσις : Ἀφ' οὗ ὁ πῆχυς ἀξίζει α δραχ., οἱ β πῆχεις
ἀξίζουσι (α×β) δραχ. Οἱ δὲ γ πῆχεις ἀξίζουσι (α×γ) δραχ.
Θὰ δώσωμεν λοιπὸν τὸ ὅλον (α+β)+(α×γ) δραχ.

Β' τρόπος : Τὰ δύο ἡμέρας ἀγοράζομεν (β+γ) πῆχεις. Δι'
αὐτοὺς δὲ θὰ δώσωμεν $\alpha \times (\beta + \gamma) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma)$ δραχμάς.

§ 78. Λύσις : 1ον) Εὐρίσκομεν ὅτι $3 \times 15 = 45$
 $19 \times 27 = 513$
 $12 \times 4 = 48$

Ἐπομένως $(3 \times 15 + (19 \times 27) + (12 \times 4)) = 606$.

2ον) Ὁμοίως $143 \times 14 = 2002$
 $18 \times 20 \times 2 = 360 \times 2 = 720$
 $12 \times 5 \times 13 = 60 \times 13 = 780$

καὶ ἐπομένως $(143 \times 14) + (18 \times 20 \times 2) + (12 \times 5 \times 13) = 3502$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 79. Λύσις: 1ον) $3 \times 2 \times 5 = 3 \times 10 = 30$, $8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$.

2ον) $8 \times 9 \times 6 \times 4 = 72 \times 6 \times 4 = 432 \times 4 = 1728$, $15 \times 7 \times 4 \times 9 =$
 $105 \times 4 \times 9 = 420 \times 9 = 3780$, $8 \times 9 \times 5 \times 10 = 72 \times 50 = 3600$.

3ον) $35 \times 403 \times 1604 = 14105 \times 1604 = 22\ 624\ 420$,
 $8 \times 12 \times 809 \times 10 = 96 \times 809 \times 10 = 809 \times 960 = 776\ 640$,
 $125 \times 4 \times 70 \times 41 = 500 \times 70 \times 41 = 35\ 000 \times 41 = 1\ 435\ 000$.

§ 80. Λύσις : 1ον) Δι' α=8, β=4, γ=5, δ=12 εἶναι
 $\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta = 8 \times 4 \times 5 \times 12 = 20 \times 96 = 1920$.

2ον) Δι' α=25, β=9, γ=4, δ=9 εἶναι
 $\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta = 25 \times 9 \times 4 \times 9 = 100 \times 81 = 8100$.

81. Λύσις : 1ον) Ἐπειδὴ $50 = 25 \times 2$ καὶ $16 = 4 \times 4$ λέγομεν
 $25 \times 4 = 100$, $100 \times 8 = 800$. Ἡ $(50 \times 2) \times 8 = 100 \times 8 = 800$.

$$25 \times 12 = 25 \times 4 \times 3 = 100 \times 3 = 300, \quad 125 \times 32 = 125 \times 8 \times 4 = 1000 \times 4 = 4000.$$

$$2\text{ον}) \quad 150 \times 12 = (150 \times 4) \times 3 = 600 \times 3 = 1800, \quad 35 \times 18 = (35 \times 2) \times 9 = 70 \times 9 = 630, \quad 120 \times 35 = (120 \times 5) \times 7 = 600 \times 7 = 4200.$$

§ 82. Λύσις: 'Αφ' οὗ 1 στρώμα ἔχει 4 σειράς,
τὰ 6 στρώματα ἔχουσι $4 \times 6 = 24$ σειράς.

'Αφ' οὗ δὲ κάθε σειρά ἔχει 5 πλάκας,
αἱ 24 σειραὶ ἔχουσι $5 \times 24 = 120$ πλάκας.

'Αφ' οὗ ἡ 1 πλάξ ἀξίζει 2000 δραχ.,
αἱ 120 πλάκες ἀξίζουσι $2000 \times 120 = 240\,000$ δραχ.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ 1 σειρά ἔχει 5 πλάκας, αἱ 4 σειραὶ τοῦ ἐνὸς στρώματος ἔχουσι $5 \times 4 = 20$ πλάκας.

'Αφ' οὗ δὲ 1 πλάξ τιμᾶται 2000 δραχ., αἱ 20 πλάκες τοῦ ἐνὸς στρώματος τιμῶνται $2000 \times 20 = 40\,000$ δραχ. Αἱ δὲ πλάκες τῶν 6 στρωμάτων θὰ τιμῶνται $40\,000 \times 6 = 240\,000$ δραχ.

§ 83. Λύσις: 'Αφ' οὗ κάθε οἰκογένεια προσέφερεν 8 ἡμερομίσθια, αἱ 80 οἰκογένειαι προσέφερον $8 \times 80 = 640$ ἡμερομίσθια. 'Αφ' οὗ δὲ τὸ 1 ἡμερομίσθιον τιμᾶται 12000 δρχ., τὰ 640 ἡμερομίσθια τιμῶνται $12\,000 \times 640 = 7\,680\,000$ δρχ.

Β' τρόπος: Τὰ 8 ἡμερομίσθια τῆς μιᾶς οἰκογενείας τιμῶνται $12\,000 \times 8 = 96\,000$ δρχ. Τὰ δὲ ἡμερομίσθια τῶν 80 οἰκογενειῶν τιμῶνται $96\,000 \times 80 = 7\,680\,000$ δρχ.

§ 84. Λύσις: Αἱ 15 πυροβολαρχίαι ἔχουσι $4 \times 15 = 60$ πυροβόλα. Ἐκαστον πυροβόλον ρίπτει 12 ὀβίδας εἰς 1 λεπτόν. Ἐπομένως τὰ 60 πυροβόλα ρίπτουσι $12 \times 60 = 720$ ὀβίδας εἰς 1 λεπτόν. Εἰς 5 δὲ λεπτὰ ρίπτουσιν $720 \times 5 = 3600$ ὀβίδες.

Β' τρόπος: Τὰ 4 πυροβόλα τῆς μιᾶς πυροβολαρχίας ρίπτουσι $12 \times 4 = 48$ ὀβίδας εἰς ἓνα λεπτόν. Εἰς 5 λεπτὰ ταῦτα ρίπτουσι $48 \times 5 = 240$ ὀβίδες. Αἱ δὲ 15 πυροβολαρχίαι βάλλουσι $240 \times 15 = 3600$ ὀβίδας.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 85. Λύσις. 1ον) Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $52 : 13 = 4$,

2ον) Ὁμοίως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $104 : 13 = 8$.

3ον) Ὁ γ' εἶναι $130 : 13 = 10$.

§ 86. Λύσις: $48 : 12 = 4$, $65 : 13 = 5$, $58 = 5 \times 11 + 3$. ἄρα τὸ πληκτικὸν τῆς διαίρεσεως $58 : 11$ εἶναι 5 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3.

$93=5 \times 18 + 3$ ἄρα τῆς $93 : 18$ πηλίκον εἶναι 5 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3.

Τῆς $50 : 15$ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 5.

$72 : 18=4$, $548 : 10$ πηλίκον 54 καὶ ὑπόλοιπον 8.

$8700 : 100=87$, $8932 : 1000$ πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 932.

§ 87. Λύσις : Ἐπειδὴ $57 : 19=3$, ἔπεται ὅτι $19 \times 3=57$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ $92 : 23=4$, ἔπεται ὅτι $23 \times 4=92$.

Ἐπειδὴ $88 : 8=11$, θὰ εἶναι $11 \times 8=88$.

§ 88. Λύσις : Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος διαιρετέος εἶναι : 1ον) $(43 \times 15) + 42=687$, 2ον) $(57 \times 143) + 6=8151$, 3ον) $(103 \times 103) + 19=10\ 628$.

§ 89. Λύσις : Ἄν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον, ἡ διαίρεσις γίνεται τελεία. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην αὐτῆς δίδει τὸν νέον διαιρετέον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν νέον τοῦτον διαιρετέον διὰ τοῦ πηλίκου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον διαιρέτην. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὐρίσκομεν ὅτι : 1ον) $(738-18) : 16=720 : 16=45$.

2ον) $(1047-27) : 12=1020 : 12=85$.

§ 90. Λύσις : 1ον) $(60 : 2) : 3=30 : 3=10$. Ἡ κατὰ γνωστὴν (§ 94) ιδιότητα $(60 : 2) : 3=60 : (2 \times 3)=60 : 6=10$.

2ον) $(80 : 4) : 10=20 : 10=2$ ἢ $(80 : 4) : 10=80 : (4 \times 10)=80 : 40=2$.

3ον) $(36 : 9) : 2=4 : 2=2$ ἢ $(36 : 9) : 2=36 : (9 \times 2)=36 : 18=2$.

§ 91. Λύσις : 1ον) $(24+36+60) : 3=120 : 3=40$. Ἡ κατὰ γνωστὴν (§ 89) ιδιότητα $(24+36+60) : 3=(24 : 3)+(36 : 3)+(60 : 3)=8+12+20=40$.

2ον) $(45+35+25) : 5=105 : 5=21$, ἢ

$(45+35+25) : 5=(45 : 5)+(35 : 5)+(25 : 5)=9+7+5=21$.

3ον) $(75+50+100) : 25=225 : 25=9$, ἢ

$(75+50+100) : 25=(75 : 25)+(50 : 25)+(100 : 25)=3+2+4=9$.

4ον) $(20+28+44) : 4=92 : 4=23$, ἢ

$(20+28+44) : 4=(20 : 4)+(28 : 4)+(44 : 4)=5+7+11=23$.

§ 92. Λύσις : 1ον) $(18-12) : 3=6 : 3=2$ ἢ κατὰ γνωστὴν (§ 90) ιδιότητα $(18-12) : 3=(18 : 3)-(12 : 3)=6-4=2$.

2ον) $(64-36) : 4=28 : 4=7$, ἢ $(64-36) : 4=(64 : 4)-(36 : 4)=16-9=7$.

3ον) $(32-24) : 8=8 : 8=1$, ἢ $(32-24) : 8=(32 : 8)-(24 : 8)=4-3=1$.

4ον) $(324-180) : 9=144 : 9=16$, ἢ $(324-180) : 9=(324 : 9)-(180 : 9)=36-20=16$.

§ 93. Λύσεις: Κατά την ιδιότητα (§ 94) ἄρκει νὰ διαιρέσωμεν ἓνα μόνον παράγοντα κ.τ.λ. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι :

$$1ον, (25 \times 36) : 9 = 25 \times 4 = 100.$$

$$2ον, (35 \times 8 \times 7) : 8 = 35 \times 7 = 245.$$

$$3ον, (21 \times 14 \times 20) : 7 = 3 \times 14 \times 20 = 52 \times 20 = 1040,$$

$$4ον, (42 \times 12 \times 7) : 42 = 12 \times 7 = 84.$$

§ 94. Λύσεις: 1ον)
$$\begin{array}{r|l} 3564 & 15 \\ 56 & 237 \\ 114 & \\ 9 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ἐπομένως :} \\ 3564 = 237 \times 15 + 9. \end{array}$$

2ον)
$$\begin{array}{r|l} 57865 & 67 \\ 426 & 863 \\ 245 & \\ 44 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ἐπομένως } 57\,865 = 863 \times 67 + 44. \end{array}$$

3ον) Ὅμοιος εὐρίσκομεν ὅτι $10\,056 = 204 \times 49 + 60.$

4ον) $47\,329 = 508 \times 93 + 85.$

§ 95. Λύσεις: 1ον) $564 : 10$ πηλίκον 56 καὶ ὑπόλοιπον 4,

$3745 : 100$ πηλίκον 37 καὶ ὑπόλοιπον 45,

$84\,965 : 1000$ πηλίκον 84 καὶ ὑπόλοιπον 965.

2ον) $648 : 2 = 324$, $746 : 2 = 373$, $5\,636 : 2 = 2\,818$,

3ον) $524 : 4 = [(524 : 2)] : 2 = 262 : 2 = 131$, $840 : 4 = 210$, $5\,760 : 4 = 1\,440$, $9\,068 : 4 = 2\,267$.

§ 96. Λύσεις: Διὰ νὰ πολλίσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 5, ἐπὶ 50, ἐπὶ 500, πολλίμεν αὐτὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι :

1ον) $34 \times 5 = 170$, $536 \times 5 = 2680$, $64 \times 50 = 3200$, $72 \times 500 = 36\,000$.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 5, διὰ 50, διὰ 500, πολλπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν ἀντιστοίχως διὰ 10, 100, 1000.

Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι: 2ον) $635 : 5 = 127$, $840 : 5 = 168$, $2356 : 50 = 47$, $12 : 2 = 6$, $69\,500 : 500 = 139$.

Διὰ νὰ πολλίμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 25, πολλίμεν αὐτὸν ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ 4. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι :

3ον) $35 \times 25 = 875$, $42 \times 25 = 1050$, $4200 : 4 = 1050$.

$$2100 : 2 = 1050, 68 \times 25 = 6800 : 4 = 3400 : 1700, 72 \times 25 = 7200 : 4 = 3600 : 2 = 1800.$$

Διὰ τὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 25, πολ]ζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι:

$$4\text{ον}) 725 : 25 = (725 \times 2 \times 2) : 100 = (1450 \times 2) : 100 = 2900 : 100 = 29, 750 : 25 = 3000 : 100 = 30, \text{ ἢ καὶ οὕτω}$$

$$750 : 25 = (25 \times 3 \times 10) : 25 = 3 \times 10 = 30.$$

$$3\ 275 : 25 = 13\ 100 : 100 = 131, 9600 : 25 = 38400 : 100 = 384 \text{ ἢ καὶ } 9600 = 96 \times 4 = 384.$$

$$\S\ 97. \text{ Λύσις : } 1\text{ον}) \begin{array}{r|l} 375(42 & 42(00 \\ 39\ 42 & 8 \end{array} \quad 2\text{ον}) \begin{array}{r|l} 80(645 & 9(000 \\ 8\ 645 & 8 \end{array}$$

$$3\text{ον}) \begin{array}{r|l} 385(00 & 6(00 \\ 25 & 64 \\ 1\ 00 & \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 98. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἰς 30 ἡμέρας ἐξοδεύει 728 550 δραχμὰς, εἰς 1 ἡμέραν θὰ ἐξοδεύῃ 30 φορὰς ὀλιγώτερον, ἦτοι :

$$728\ 550 : 30 = 24\ 285 \text{ δραχ.}$$

$$72\ 855 : 3 = 24\ 285$$

§ 99. Λύσις : Μετὰ ἓν ἔτος οἰκονομεῖ 2 370 450 δραχμὰς. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐξοικονομήσῃ ἀκόμῃ 7 111 350—2 370 450=4 740 900. Μετὰ ἄλλο ἓν ἔτος οἰκονομεῖ ἄλλας 2 370 450 δραχ. καὶ πρέπει νὰ οἰκονομήσῃ ἀκόμῃ 4 740 900—2 370 450=2 370 450. Ταύτας δὲ οἰκονομεῖ μετὰ ἄλλο ἓν ἔτος.

᾽Ωστε θὰ οἰκονομήσῃ τὸ ποσὸν αὐτὸ μετὰ 3 ἔτη. Ἀπὸ τὰς σκέψεις αὐτὰς ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ μετὰ τόσα ἔτη, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 370 450 δραχ. εἰς τὰς 7 111 350 δραχ. ἦτοι $7\ 111\ 350 : 2\ 370\ 450 = 3$ ἔτη.

Β'. τρόπος : Ἄν τὰς 2 370 450 δραχ. πολ]μεν ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ εὐρίσκομεν 7 111 350. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι $7\ 111\ 350 : 2\ 370\ 450 = 3$.

§ 100. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἰς 15 δευτ. διανύει 21 525 μέτρα, εἰς 1 δευτερόλεπτον διανύει 15 φορὰς ὀλιγώτερα μέτρα, ἦτοι :

$$21\ 525 : 15 = 1435 \text{ μέτρα.}$$

§ 101. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἰς 25 δευτ. διανύει 8 500 μέτρα, εἰς 1 δευτ. διανύει 25 φορὰς ὀλιγώτερον, ἦτοι $8\ 500 : 25 = 340$ μέτρα.

§ 102. Λύσις : Διὰ τὰ διανύσῃ τὸ φῶς 300 000 χιλιόμετρα

χρειάζεται 1 δευτ. Διὰ νὰ διανύσῃ ἄλλα 300 000 χιλιόμ. χρειάζεται ἄλλο 1 δευτ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Διὰ νὰ διανύσῃ λοιπὸν τὰ 150 000 000 χιλιόμ. χρειάζεται τόσα δευτερόλεπτα, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 300 000 χιλιόμ. εἰς τὰ 150 000 000 χιλιόμ, ἥτοι $150\,000\,000 : 300\,000 = 500$ δευτ.

§ 103. Λύσις: Α') 'Αφοῦ τὰ 8 λεμόνια ἀξίζουν 1 200 δραχ., τὸ 1 λεμόνιον θὰ ἀξίζῃ 8 φορὰς ὀλιγώτερον, ἥτοι $1\,200 : 8 = 150$ δραχ.

Β') Μὲ 3 χιλιόδραχμα, ἥτοι μὲ 3 000 δραχμὰς ἀγοράζομεν τόσα λεμόνια, ὅσας φορὰς αἱ 150 δραχ. χωροῦσιν εἰς τὰς 3 000 δραχμὰς, ἥτοι $3\,000 : 150 = 20$ λεμόνια.

§ 104. Λύσις: 'Αφ' οὗ ὅλος ὁ οἶνος ἀξίζει 692 250 δραχ. καὶ ὁ ὑπόλοιπος ἀξίζει 416 000 δραχμὰς, ἔπεται ὅτι αἱ ἐξαχθεῖσαι ὀκάδες τιμῶνται $692\,250 - 416\,000 = 276\,250$ δραχ. Ἐπομένως ἡ 1 ὀκά ἀξίζει 85 φορὰς ὀλιγώτερον, ἥτοι $276\,250 : 85 = 3\,250$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ οἶνος τοῦ βαρελίου τιμᾶται 692 250 δραχ., ἔπεται ὅτι τὸ βαρέλιον χωρεῖ τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς αἱ 3 250 δραχ. χωροῦσιν εἰς τὰς 692 250 δραχμὰς, ἥτοι $692\,250 : 3\,250 = 213$ ὀκάδας.

§ 105. Λύσις: 'Αφ' οὗ διὰ τὰ 5 μέτρα ἔδωσεν 190 χιλιόδ., διὰ τὸ 1 μέτρον ἔδωκε 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἥτοι $190 : 5 = 38$ χιλιόδρ. Ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ 11 μέτρ. ἔλαβε 495 : $11 = 45$ χιλ. Ἐπομένως ἐκέρδισεν ἀπὸ ἓν μέτρον $45 - 38 = 7$ χιλιόδ. Εἶχεν λοιπὸν ἀγοράσει τόσα μέτρα, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 7 χιλ. εἰς τὸ ὅλικόν κέρδος τοῦ 224 χιλιόδρ. ἥτοι $224 : 7 = 32$ μέτρα.

Β' τρόπος: Διὰ νὰ ἀγοράσῃ 5 μέτρα ἔδωκε 190 χιλιόδ. Ἐπομένως διὰ νὰ ἀγοράσῃ 1 μέτρον ἔδωκεν $190 : 5 = 38$ χιλ. καὶ διὰ νὰ ἀγοράσῃ 11 μέτρα ἔδωκε $38 \times 11 = 418$ χιλιόδραχμα. Ἐπειδὴ τὰ 11 μέτρα τὰ ἐπώλησεν ἀντὶ 495 χιλιόδρ., ἔπεται ὅτι ἀπὸ 11 μέτρα ἐκέρδιζεν $495 - 418 = 77$ χιλιόδρ. καὶ ἀπὸ τὸ 1 μέτρον ἐκέρδιζεν $77 : 11 = 7$ χιλιόδρ. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ὅλον τὸ τεμάχιον ἐκέρδισε 224 χιλιόδρ., τὸ τεμάχιον εἶχεν $224 : 7 = 32$ μέτρα.

§ 106. Λύσις: 'Αφ' οὗ διὰ τὰ ἐπὶ πλεόν 5 μέτρα θὰ ἐπλήρωνε περισσότερον 526 625 δραχ., ἔπεται ὅτι τὸ 1 μέτρον ἥξιζε $526\,625 : 5 = 105\,325$ δραχ. Ὅλον λοιπὸν τὸ ἀγορασθὲν ὕφασμα ἀπετελεῖτο ἀπὸ τόσους πῆχεις, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 105 325 δραχ. εἰς τὰς 1 263 900 δραχμὰς, ἥτοι

$$1\,263\,900 : 105\,325 = 12 \text{ μέτρα.}$$

§ 107. Λύσις: 'Αφ' οὗ διὰ τὰ 250 μέτρα ἐπλήρωνεν 4 500 000

δραχ, διὰ τὸ 1 μέτρον ἐπλήρωνοι 250 φορὰς ὀλιγώτερον, ἦτοι : $4\,500\,000 : 250 = 18\,000$ δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ ὁ α' ἐπλήρωσε 3 150 000 δραχ, οὗτος εἰσήγαγε τόσα μέτρα, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 18 000 δραχ. εἰς τὰς 3 150 000 ἦτοι $3\,150\,000 : 18\,000 = 175$ μέτρα. Ὁ δὲ β' εἰσήγαγε τὰ ὑπόλοιπα, ἦτοι $250 - 175 = 75$ μέτρα.

Β' τρόπος : Ἀφ' οὗ ὁ α' ἐπλήρωσε 3 150 000 δραχ, ὁ β' ἐπλήρωσε τὰ ὑπόλοιπα χρήματα, ἦτοι $4\,500\,000 - 3\,150\,000 = 1\,350\,000$ δραχ. Οὗτος δὲ εἰσήγαγεν $1\,350\,000 : 18\,000 = 175$ μέτρα. Ὁ δὲ β' εἰσήγαγεν τὰ ὑπόλοιπα, ἦτοι $250 - 175$ μέτρα. Ταῦτα δὲ εὐρίσκομεν καὶ ὡς προηγουμένως ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $3\,150\,000 : 18\,000$.

§ 108 Λύσις : Ἀφ' οὗ ἀπὸ τὰς 564 ὁκ. ἔλαβεν 1 776 600 δραχ, ἀπὸ τὴν 1 ὁκᾶν ἔλαβεν 564 φορὰς ὀλιγώτερον, ἦτοι $1\,776\,600 : 564 = 3\,150$ δραχ. Ἐπομένως τὴν κριθὴν ἐπώλησε πρὸς $3\,150 - 850 = 2\,300$ δραχ, τὴν ὁκᾶν. Καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς κριθῆς ἔλαβε 441 600 δραχ, αἱ ὁκάδες τῆς κριθῆς ἦσαν τόσαι, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 300 δραχ. εἰς τὰς 441 600 δραχμάς, ἦτοι $441\,600 : 2\,300 = 192$ ὁκάδες.

§ 109. Λύσις : Ἀφ' οὗ ἀπὸ 1 πρόβατον ἐλάμβανεν 94 825 δραχμάς, ἀπὸ τὰ 19 πρόβατα ἔλαβεν $94\,825 \times 19 = 1\,801\,675$ δραχ. Τὰ ὑπόλοιπα δὲ χρήματα τὰ ἔλαβεν ἀπὸ τὰ ἄρνια. Ἐλαβε λοιπὸν ἀπὸ τὰ 37 ἄρνια $3\,949\,340 - 1\,801\,675 = 2\,147\,665$ καὶ ἀπὸ 1 ἄρνιον ἔλαβε $2\,147\,665 : 37 = 58\,045$ δραχμάς.

§ 110. Λύσις : Εἰς μίαν ἡμέραν οἱ 10 ἀργαλιοὶ ὑφαίνουσι $208 \times 10 = 2\,080$ πήχεις. Ἐπομένως, διὰ νὰ ὑφάνωσι 52 000 πήχεις, χρειάζονται τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 080 πήχεις εἰς τὰς 52 000 πήχεις, ἦτοι $52\,000 : 2\,080 = 25$ ἡμέραι.

§ 111. Λύσις : Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πολ)μενος ἐπὶ 97 γίνεται $13\,800 + 71 = 13\,871$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $13\,871 : 97 = 143$.

§ 112. Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς 309 πολ)μενος ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν γίνεται 18 231. Ὁ ζητούμενος ἐπομένως εἶναι πηλίκον τῆς διαίρεσεως $18\,231$ διὰ 309, ἦτοι $18\,231 : 309 = 59$.

§ 113. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι : Ἄν πολ)μεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται. Ἄν λοιπὸν $\alpha : \beta = \pi$, θὰ εἶναι καὶ $(\alpha \times \gamma) : (\beta \times \gamma) = \pi$.

§ 114. Λύσις : Τὸ πηλίκον $(\alpha \times \beta + \gamma) : \gamma$ διὰ $\alpha = 15$, $\beta = 32$, $\gamma = 8$ γίνεται $(15 \times 32 + 8) : 8$. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι : Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ὅλους

τοὺς προσθετέους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσω-
μεν τὰ πηλικά. "Ωστε :

$(15 \times 32 + 8) : 8 = (15 \times 32) : 8 + (8 : 8) = (15 \times 32) : 8 + 1$. Διὰ νὰ
διαιρέσωμεν δὲ γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέ-
σωμεν ἓνα μόνον παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τοὺς δὲ
ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως εἶναι. "Ωστε :

$(15 \times 32 + 8) : 8 = (15 \times 32) : 8 + 1 = 15 \times 4 + 1 = 61$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ 4 ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 115. Λύσις : 'Αφ' οὗ ἀπὸ 1 ὁκᾶν θὰ κερδίση 300 δραχ-
μάς, ἀπὸ 265 ὁκάδας θὰ κερδίση $300 \times 265 = 79\ 500$ δραχ. 'Επο-
μένως ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ σίτου πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρή-
ματα τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ κέρδος, ἥτοι $543\ 250 + 79\ 500 = 622\ 750$
δραχμάς.

Β' τρόπος : 'Αφ' οὗ διὰ 265 ὁκ. ἔδωκε 543 250 δραχμάς
διὰ τὴν 1 ὁκᾶν ἔδωκε $543\ 250 : 265 = 2\ 050$ δραχ. Διὰ νὰ κερδί-
σῃ δὲ 300 δραχ. τὴν ὁκᾶν, πρέπει νὰ πωλῇ $2\ 050 + 300 = 2350$
δραχ. τὴν ὁκᾶν. Τὰς δὲ 265 ὁκάδας θὰ πωλήσῃ ἀντί
 $2\ 350 \times 265 = 622\ 750$ δραχ.

§ 116. Λύσις : 'Αφ' οὗ ἀπὸ 135 πήχεις θέλει νὰ κερδίση
405 χιλιόδραχμα, ἀπὸ 1 πῆχυν θὰ κερδίση 135 φορὰς ὀλιγώ-
τερα, ἥτοι $405 : 135 = 3$ χιλιόδραχμα. Πρέπει ἐπομένως νὰ πω-
λήσῃ τὸν πῆχυν $28 + 3 = 31$ χιλιόδραχμα. 'Εκ δὲ τῆς πωλήσεως
135 πήχεων θὰ εἰσπράξῃ $31 \times 135 = 4\ 185$ χιλιόδραχμα.

Β' τρόπος : 'Αφ' οὗ διὰ τὴν ἀγορὰν 1 πήχεως ἔδωκε 28
χιλιόδραχμα, διὰ τοὺς 135 πήχεως ἔδωκε $28 \times 135 = 3\ 780$ χιλιό-
δραχμα. 'Επειδὴ δὲ θέλει νὰ κερδίση 405 χιλιόδραχμα, πρέπει
ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν 135 πήχεων νὰ εἰσπράξῃ τὸ ὄλον
 $3\ 780 + 405 = 4\ 185$ χιλιόδραχμα. Πρέπει ἐπομένως νὰ πωλήσῃ
τὸν πῆχυν πρὸς $4\ 185 : 135 = 31$ χιλιόδραχμα.

§ 117. Λύσις : 'Αφ' οὗ τὸ τόπιον ἔχει 40 μέτρα, τὰ 15 τό-
πια ἔχουσι 15 φορὰς περισσότερον, ἥτοι $40 \times 15 = 600$ μέτρα.
'Αφ' οὗ δὲ δι' ἓν μέτρον ἐπλήρωσεν 22 χιλιόδραχμα, διὰ τὰ

600 μέτρα ἐπλήρωσεν $22 \times 600 = 13\,200$ χιλιοδρ.
 Ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν 250
 μέτ. εἰσέπραξεν $26 \times 250 = 6\,500$ χιλιοδρ.
 Ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν 260
 μέτ. εἰσέπραξεν $28 \times 260 = 7\,280$ »
 καὶ ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν
 ὑπολοίπων 90 μέτ. εἰσέπρ. $25 \times 90 = 2\,250$ »
 Εἰσέπραξε λοιπὸν τὸ ὅλον $16\,030$ » $16\,030$
 καὶ ἐκέρδισεν $16\,030 - 13\,200 = 2\,830$ χιλιοδρ. $2\,830$ χιλιοδρ.

Β' τρόπος: Ἀπὸ κάθε ἓν ἀπὸ τὰ 250 μέτρα ἐκέρδισεν
 $26 - 22 = 4$ χιλιοδραχμα.
 Ἐπομένως ἀπὸ τὰ 250 μέτρα ἐκέρδισεν $4 \times 250 = 1\,000$ χιλιοδρ.
 Ὅμοιως εὐρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὰ 260
 μέτρα ἐκέρδισεν $6 \times 260 = 1\,560$ »
 καὶ ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα 90 ἐκέρδισεν $3 \times 90 = 270$ »
 Τὸ ὅλον λοιπὸν ἐκέρδισεν $2\,830$ »

§ 118. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἐξοδεύη 25 χιλιοδρ. τὴν ἡμέραν, εἰς
 1 ἑβδομάδα ἐξοδεύει $25 \times 7 = 175$ χιλιοδραχμα. Ἐχει ἐπομένως
 περισσευμα $380 - 175 = 205$ χιλιοδρ. Διὰ νὰ περισσεύσῃ δὲ
 1 845 000 δραχ. ἢ 1 845 χιλιοδραχμα, πρέπει νὰ περάσῃ τό-
 σαι ἑβδομάδες, ὅσας φορὰς χωροῦσιν τὰ 205 χιλιοδρ. εἰς τὰ
 1845 χιλιοδραχμα, ἥτοι: $1845 : 205 = 9$ ἑβδομάδες.

119. Λύσις: Ἐπειδὴ δαπανᾷ 20 000 δραχ, καὶ στέλλει εἰς
 τοὺς γονεῖς τῆς 40 000, ἔπεται ὅτι ἐλαττώνεται ὁ μηνιαῖος μι-
 σθός τῆς κατὰ $20\,000 + 40\,000 = 60\,000$ δραχ. καὶ ἔχει περισ-
 σευμα $120\,000 - 60\,000 = 60\,000$ δραχ. τὸν μῆνα. Διὰ τὰ περισ-
 σεύσῃ 480 000 δραχμαί, πρέπει νὰ ἐργασθῇ τόσους μῆνας,
 ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 60 000 δραχμαί εἰς τὰς 480 000 δραχ-
 μάς, ἥτοι: $480\,000 : 60\,000 = 8$ μῆνας.

§ 120. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἐπώλησε τὰ αὐγά πρὸς 1 200 δραχ-
 μάς τὸ ζευγος, τὸ 1 αὐγὸν ἐπώλησε πρὸς $1\,200 : 2 = 600$ δραχ.
 Ἐπομένως ἀπὸ τὰ 100 αὐγά εἰσέπραξεν $600 \times 100 = 60\,000$ δραχ.
 Ἐκ τούτων ἔδωκε διὰ σάπωνα $4\,500 \times 2 = 9\,000$
 καὶ διὰ ὄρυζαν $9\,000 \times 2 = 18\,000$

Τὸ ὅλον $27\,000$ $27\,000$

Ἐπομένως ἐπερίσσευσαν εἰς αὐτὴν $60\,000 - 27\,000 = 33\,000$ δραχ.

§ 121. Λύσις: Ἀπὸ 2 000 ὀκάδας σίτου εἰσέπραξεν

1 800 × 2 000 = 3 600 000 δρχ.
 'Επλήρωσε δὲ τὸ χρέος του 650 000 δραχ.

'Εκράτησε διὰ τὰς ἀνάγκας του 1 600 000 »
 ἦτοι τὸ ὅλον $\frac{2\,250\,000}{2\,250\,000}$

'Επομένως διὰ τὰ πρόβατα ἔδωκεν 1 350 000 δρχ.

'Επειδὴ δὲ δι' ἕκαστον πρόβατον ἔδιδε 270 000 δραχμάς, μὲ 1 350 000 δραχ. ἠγόρασε τόσα πρόβατα, ὅσας φορές αἱ 270 000 δραχμαὶ χωροῦσαν εἰς τὰς 1 350 000 δραχμάς, ἦτοι:
 $1\,350\,000 : 270\,000 = 5$ πρόβατα.

§ 122. Λύσις: Εἰς τὰς 4 ἀπόρους οἰκογενείας ἔδωκεν $50\,000 \times 4 = 200\,000$. Εἰς δὲ τοὺς 10 ἀπόρους μαθητὰς ἔδωκε τὸ ὑπόλοιπον, ἦτοι $500\,000 - 200\,000 = 300\,000$ δραχ. 'Επομένως εἰς καθ' ἓνα ἔδωκεν ἀπὸ $300\,000 : 10 = 30\,000$ δραχμάς.

§ 123. Λύσις: Ὁ κτηνοτρόφος ὤφειλε τὰ ἐξῆς ποσά.
 Διὰ τὸ χόρτον $950 \times 575 = 546\,250$ δραχ.,
 διὰ τὴν κριθὴν $1\,400 \times 185 = 259\,000$ »

Ὡφειλε λοιπὸν τὸ ὅλον 805 250 δραχ.
 'Απέναντι αὐτῶν ἔδωκεν ἀξίαν βουτύρου $36\,500 \times 3 = 109\,500$ δρ.
 » τυροῦ $12\,250 \times 25 = 306\,250$ »
 Τὸ ὅλον 415 750 δρ.

'Επομένως εἰς μετρητὰ ἔδωκε τὸ ὑπόλοιπον χρέος, ἦτοι
 $805\,250 - 415\,750 = 389\,500$ δραχ.

§ 124. Λύσις: Ἐδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν τῶν ἀρνίων:
 $48\,000 \times 125 = 6\,000\,000$
 καὶ δι' ἑξοδα συντηρήσεως 310 650

'Επομένως ὅλα τὰ πρόβατα ἐκόστησαν 6 310 650

'Απὸ τὰ 18 πωληθέντα κατ' ἀρχὰς εἰσέπραξεν $52\,000 \times 18 = 936\,000$

'Απὸ τὰ ἄλλα 45 εἰσέπραξεν $53\,500 \times 45 = 2\,407\,500$

'Επειδὴ δὲ ἀπέθανον 5 ἀρνία, ἔμειναν $125 - (18 + 45 + 5) = 57$.

'Εκ τῆς πωλήσεως δὲ τούτων εἰσέπραξεν $57\,800 \times 57 = 3\,294\,600$

Εἰσέπραξε λοιπὸν τὸ ὅλον 6 638 100 δραχ.

'Επομένως ἐκέρδισε $6\,638\,100 - 6\,310\,650 = 327\,450$ δραχ.

Β' τρόπος: Ἀπὸ ἕκαστον τῶν 18 ἀρνίων ἐκέρδισε

$52\,000 - 48\,000 = 4\,000$ δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

καὶ ἀπὸ αὐτὰ τὰ 18 ἀρνία ἐκέρδισε $4\,000 \times 18 = 72\,000$ δραχ.
 Ἀπὸ ἕκαστον τῶν 45 ἄλλων ἐκέρδισεν $53\,500 - 48\,000 = 5\,500$ καὶ ἀπὸ
 τὰ 45 ἐκέρδισεν $5\,500 \times 45 = 247\,500$ δραχ.

Ἀπὸ ἕκαστον δὲ τῶν ὑπολοίπων 57 ἐκέρδισεν $57\,800 - 48\,000 = 9\,800$ καὶ
 ἀπὸ ὅλα ταῦτα ἐκέρδισεν $9\,800 \times 57 = 558\,600$ δραχ.

Ἐπομένως ὅλον τὸ κέρδος ἀπὸ τὰ
 πωληθέντα ἀρνία ἦτο 878 100 δραχ.

Πρέπει ὅμως ἀπὸ αὐτὸ τὸ ποσὸν νὰ ἀφαι-
 ρεθῇ πρῶτον ἡ δαπάνη συντηρήσεως 310 650 δραχ.
 καὶ ἡ ἀξία τῶν 5 ἀποθανόντων, ἥτοι $48\,000 \times 5 = 240\,000$ »

ἥτοι τὸ ὅλον 550 650 »

Ὡστε τὸ καθαρὸν κέρδος ἦτο $878\,100 - 550\,650 = 327\,450$ δραχ.

§ 125. Λύσις : Εἰς τὰς 6 ἡμέρας αἱ 12 γυναῖκες λαμβάνουσι $6 \times 12 = 72$ ἡμερομίσθια. Ἄν ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ἦτο ἴσον μὲ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἀνδρός, δηλ. κατὰ 4 150 δραχ. μεγαλύτερον, τὸ ὅλικόν ποσόν, τὸ ὅποιον θὰ ἐλάμβανον ὅλοι ὁμοῦ θὰ ἦτο $3\,032\,400 + (4\,150 \times 72) = 3\,032\,400 + 298\,800 = 3\,331\,200$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τότε θὰ ἦσαν $20 + 12 = 32$ ἀνδρικὰ ἡμερομίσθια, εἰς τὰς 6 ἡμέρας τὰ ἡμερομίσθια ταῦτα θὰ ἦσαν $32 \times 6 = 192$. Ἐπομένως ἕκαστον ἀνδρικὸν ἡμερομίσθιον ἀπετελεῖτο ἀπὸ $3\,331\,200 : 192 = 17\,350$ δραχ. Τὸ δὲ ἡμερομίσθιον ἐκάστης γυναικὸς ἦτο $17\,350 - 4\,150 = 13\,200$ δραχμαί.

§ 126. Λύσις : Τὴν ὁκᾶν τοῦ καφέ ἠγόρασεν ἀκριβώτερον ἀπὸ τὴν ὁκᾶν τῆς ζακχάρεως κατὰ $19\,800 - 11\,600 = 8\,200$ δραχ. Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον ἔδωκε διὰ τὸν καφφὲν 24 600 δραχμάς περισσότερα παρὰ διὰ τὴν ζάχαριν. Ἐπομένως ἠγόρασε $24\,600 : 8\,200 = 3$ ὁκάδας καφέ καὶ 3 ὁκάδας ζακχάρεως.

§ 127. Λύσις : Δι' ἓν ζεῦγος ὁκάδων ἐπλήρωσε $14\,200 + 5\,350 = 19\,550$ δραχ. Ἐπειδὴ δι' ὅλα τὰ ζεύγη ἐπλήρωσεν 136 850 δραχμάς, τὰ ζεύγη ἦσαν τόσα, ὅσας φορὰς αἱ 19 550 δραχ. χωροῦσιν εἰς τὰς 136 850 δραχ., ἥτοι $136\,850 : 19\,550 = 7$. ἠγόρασε λοιπὸν 7 ὁκάδας ἀπὸ ἕκαστον εἶδος.

§ 128. Λύσις : Ἄν ἕκαστος ἀπὸ τοὺς μεγαλυτέρους ἐπλήρωνεν, ὅσα ὁ μικρότερος, δηλ. 57 500 δραχ. ὀλιγώτερον ἕκαστος, θὰ ἐπλήρωναν χρέος $920\,500 - (57\,500 \times 2) = 920\,500 - 115\,000 = 805\,500$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τότε ἕκαστος θὰ ἐπλήρωνεν ὅσα ὁ μικρότερος, ἔπεται ὅτι ὁ μικρότερος ἐπλήρωσεν

$805\ 500 : 3 = 268\ 500$ δραχ. "Εκαστος δὲ τῶν ἄλλων ἐπλήρωσεν
 $268\ 500 + 57\ 500 = 326\ 000$ δραχ.

Β' τρόπος : "Αν ὁ μικρότερος ἐπλήρωσεν, ὅσα ἕκαστος
 τῶν ἄλλων, οἱ τρεῖς μαζί θὰ ἐπλήρωνον τὸ ὅλον $920\ 500 +$
 $57\ 500 = 978\ 000$ δραχ. "Εκαστος δὲ θὰ ἐπλήρωνεν $978\ 000 : 3 =$
 $326\ 000$ δραχ. Τόσας λοιπὸν δραχμάς ἐπλήρωσε ἕκαστος τῶν
 μεγαλυτέρων. Ἐπομένως ὁ μικρότερος ἐπλήρωσεν
 $326\ 000 - 57\ 500 = 268\ 500$ δραχ.

§ 129. Λύσις : "Αν ἡ τιμὴ τῆς ἀγελάδος ἦτο μόνον ἐπτα-
 πλάσια ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ μόσχου, ἡ τιμὴ τῶν δύο ζώων
 θὰ ἦτο $1\ 732\ 350 - 4\ 350 = 1\ 728\ 000$ δραχ. Τὸ ποσὸν αὐτὸ ἀπο-
 τελεῖται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ μόσχου καὶ ἀπὸ τὸ ἐπταπλάσιον
 αὐτῆς, δηλ. εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τῆς τιμῆς τοῦ μόσχου. Ἡ
 τιμὴ λοιπὸν τοῦ μόσχου ἦτο $1\ 728\ 000 : 8 = 216\ 000$ δραχ. Ἐπο-
 μένως ἡ τιμὴ τῆς ἀγελάδος εἶναι $(216\ 000 \times 7) + 4\ 350 = 1\ 516\ 350$
 δραχμαί.

§ 130. Λύσις : Τὸ μερίδιον τοῦ ἀνεψιοῦ καὶ $255\ 500$ δραχ-
 μαί ἀποτελοῦσιν 8 μερίδια τοῦ ἀνεψιοῦ. Ἐπομένως αἱ $255\ 500$
 δραχμαί εἶναι 7 μερίδια τοῦ ἀνεψιοῦ. Τὸ μερίδιον λοιπὸν
 τοῦτο εἶναι $255\ 500 : 7 = 36\ 500$ δραχ. Τὸ δὲ μερίδιον τῆς ἀνε-
 ψιδᾶς εἶναι $36\ 500 + 255\ 500 = 292\ 000$ δραχμαί.

§ 131. Λύσις : "Αν ἐπλήρωναν ὅλοι οἱ μαθηταί, ἕκαστος
 θὰ ἐπλήρωνεν $216\ 000 : 30 = 7\ 200$ δραχ. Τώρα δὲ οἱ πληρώ-
 σαντες ἔδωκαν δραχ. $7\ 200 + 1\ 440 = 8\ 640$ δραχ. καὶ ἐπομένως
 ἦσαν $216\ 000 : 8\ 640 = 25$ μαθηταί. Οἱ μὴ πληρώσαντες λοιπὸν
 ἦσαν $30 - 25 = 5$ μαθηταί.

§ 132. Λύσις : Τὸ μικρότερον τεμάχιον καὶ 42 μέτρα ἀκόμη
 ἀποτελοῦσι τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον, ἥτοι τετραπλάσιον τοῦ
 μικροτέρου. Ἐπομένως μόνον τὰ 42 μέτρα εἶναι τριπλάσια
 τῶν μέτρων τοῦ μικροτέρου. Τὰ μέτρα λοιπὸν τοῦ μικροτέρου
 εἶναι $42 : 3 = 14$. Τὸ δὲ μεγαλύτερον ἦτο $14 \times 4 = 56$ μέτρα.

§ 133. Λύσις : "Αν τὸ α' ὕφασμα ἐτιμᾶτο, ὅσον τὸ β',
 ἥτοι 56 χιλιοδραχμα, δὲν θὰ ὑπῆρχεν ἡ διαφορὰ 928 χιλιο-
 δραχμα. Ἡ ὅλική τιμὴ δηλ. τοῦ α' τεμαχίου θὰ ἡλαττοῦτο κατὰ
 928 χιλιοδραχμα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐλάττωσις αὕτη προέρχεται
 ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς ἐκάστου μέτρου κατὰ $85 - 56 = 29$
 χιλιοδραχμα, ἔπεται τὰ μέτρα τοῦ α' τεμαχίου ἦσαν τόσα,
 ὅσας φορὰς τὰ 29 χιλιοδραχμα χωροῦσιν εἰς τὰ 928, ἥτοι
 $928 : 29 = 32$ μέτρα. "Ωστε ἕκαστον τεμάχιον εἶχεν ἀπὸ 32
 μέτρα.

§ 134. Λύσις : Ἐάν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ δὲν προσέθετον 20, τὸ ἐξαγόμενον θὰ ἦτο $90 - 20 = 70$. Τὸ διπλάσιον λοιπὸν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 70, ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $70 : 2 = 35$.

§ 135. Λύσις : Εἰς τὴν ἀρχὴν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ποδηλατῶν ἦτο 105 χιλιόμετρα. Μετὰ μίαν ὥραν ἡ ἀπόστασις τῶν ἐγίνε μικροτέρα κατὰ $16 + 5 = 21$ χιλίωμ. Μετὰ ἄλλην μίαν ὥραν ἡλαττώθη κατὰ ἄλλα 21 χιλίωμ. καὶ οὕτω καθεξῆς. Διὰ νὰ συναντηθῶσι λοιπὸν, ἦτοι διὰ νὰ γίνῃ 0 ἡ ἀπόστασις τῶν, πρέπει νὰ περάσωσι τόσαι ὥραι, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 21 χιλιόμετρα εἰς τὰ 105 χιλιόμετρα, ἦτοι $105 : 21 = 5$ ὥραι. Εἰς αὐτὰς τὰς 5 ὥρας ὁ α' ποδηλάτης διέτρεξεν $16 \times 5 = 80$ χιλίωμ. Ἡ συνάντησις λοιπὸν ἐγίνε εἰς ἀπόστασιν 80 χιλιομ. ἀπὸ τὴν πόλιν Α.

§ 136. Λύσις : Ἐπειδὴ ὁ ποδηλάτης διανύει 16 χιλίωμ, ὁ δὲ πεζὸς 5 χιλίωμ. τὴν ὥραν, ὁ ποδηλάτης πλησιάζει τὸν πεζὸν κατὰ $16 - 5 = 11$ χιλίωμ. τὴν ὥραν. Διὰ νὰ τὸν φθάσῃ δὲ πρέπει νὰ τὸν πλησιάσῃ τὸ ὅλον κατὰ 55 χιλίωμ. Θὰ περάσωσι λοιπὸν $55 : 11 = 5$ ὥραι. Εἰς αὐτὰς τὰς 5 ὥρας ὁ ποδηλάτης διανύει $16 \times 5 = 80$ χιλίωμ. Θὰ φθάσῃ λοιπὸν τὸν πεζὸν ὁ ποδηλάτης εἰς ἀπόστασιν 80 χιλιομέτρων ἀπὸ τὴν πόλιν Α καὶ τὴν $7 + 5 = 12$ ὥραν.

§ 137. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἰς 1 ὥραν διανύει 12 μίλια, διὰ νὰ διανύσῃ 192 μίλια, πρέπει νὰ περάσωσι τόσαι ὥραι, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 12 μίλια εἰς τὰ 192 μίλια, ἦτοι $192 : 12 = 16$ ὥραι.

Ἐάν δὲ ἀναχωρήσῃ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ τὴν 8ην π.μ. ὥραν, θὰ φθάσῃ εἰς τὸν Βόλον τὴν $8 + 16 = 24$ ὥραν, ἦτοι τὴν 12ην μ. μ. ὥραν τῆς ἰδίας ἡμέρας,

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 138. Λύσις : 1ον) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$, $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$,
 $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^4$.

2ον) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, $3 \times 3 \times 3 = 3^3$, $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$.

§ 139. Λύσις : 1ον) $11^2 = 11 \times 11 = 121$, $12^2 = 12 \times 12 = 144$,
 $13^2 = 13 \times 13 = 169$, $14^2 = 14 \times 14 = 196$, $15^2 = 15 \times 15 = 225$.

2ον) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$, $20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8\ 000$,
 $30^3 = 30 \times 30 \times 30 = 27\ 000$, $40^3 = 40 \times 40 \times 40 = 64\ 000$,
 $50^3 = 50 \times 50 \times 50 = 125\ 000$.

3ον) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

§ 140. Λύσεις: $2^1=2 \times 2 \times 2 \times 2=16$, $3^3=3 \times 3 \times 3=27$,
 $3^5=3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3=243$, $1^8=1$, $5^2=5 \times 5=25$, $8^3=8 \times 8 \times 8=512$,
 $12^3=12 \times 12 \times 12=1\ 728$, $24^2=24 \times 24=576$.

§ 141. Λύσεις: 1ον) 'Επειδή $2^3=2 \times 2 \times 2=8$, $3^2=3 \times 3=9$,
 $4^2=4 \times 4=16$, καὶ $1^5=1$, ἔπεται ὅτι $2^3+3^2+4^2+1^5=8+9+16+1=34$.

2ον) 'Επειδή $8^2=64$, $2^4=16$, $5^2=25$, $1^4=1$, ἔπεται ὅτι
 $8^2+2^4+5^2+1^4=64+16+25+1=106$.

3ον) 'Ομοίως $8^2 \times 10^2 \times 1^5=64 \times 100 \times 1=6\ 400$.

4ον) 'Ομοίως $5^3 \times 10^3 \times 2^4=25 \times 1000 \times 16=400 \times 1000=$
 $=400\ 000$.

§ 142. Λύσεις: 'Αφ' οὗ μία σειρὰ ἔχει 6 πλάκας, αἱ 6 σει-
 ραὶ τοῦ ἐνὸς στρώματος ἔχουσι 6×6 πλάκας. Τὰ δὲ 6 στρώματα
 ἐκάστου κιβωτίου ἔχουσι $6 \times 6 \times 6$ πλάκας. Καὶ τὰ 6 κιβώτια
 ἔχουσι $6 \times 6 \times 6 \times 6=1\ 296$ πλάκας.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ τὸ 1 κιβώτιον ἔχει 6 στρώματα, τὰ 6
 κιβώτια ἔχουσιν $6 \times 6=36$ στρώματα. 'Αφ' οὗ δὲ μία σειρὰ ἔχει
 6 πλάκας, αἱ 6 σειραὶ ἐκάστου στρώματος ἔχουσιν $6 \times 6=36$
 πλάκας. Ὡστε κάθε στῶμα ἔχει 36 πλάκας, τὰ δὲ 36 στῶ-
 ματα θὰ ἔχωσι $36 \times 36=1296$ πλάκας.

§ 143. Λύσεις: 'Αφ' οὗ κάθε σειρὰ ἔχει 5 κυτία, αἱ 5 σει-
 ραὶ τοῦ ἐνὸς στρώματος ἔχουσι 5×5 κυτία. Τὰ δὲ 4 στρώματα
 ἐκάστου κυτίου ἔχουσι $5 \times 5 \times 5$ κυτία. Τὰ 5 λοιπὸν κιβώτια
 ἔχουσι $5 \times 5 \times 5 \times 5=625$ κυτία.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ ἐκαστὸν κιβώτιον ἔχει 5 στρώματα,
 τὰ 5 κιβώτια ἔχουσι $5 \times 5=25$ στρώματα. 'Επειδὴ δὲ ἐκάστη
 σειρὰ ἔχει 5 κυτία, αἱ 5 σειραὶ ἐνὸς στρώματος ἔχουσι
 $5 \times 5=25$ κυτία. 'Αφ' οὗ λοιπὸν 1 στῶμα ἔχει 25 κυτία, τὰ 25
 στρώματα ὅλων τῶν κιβωτίων ἔχουσιν $25 \times 25=625$ κυτία.

§ 144. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι: Τὸ γινόμενον δυνάμεων
 τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέ-
 την τὸ ἀθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτοῦ. Θὰ εἶναι λοιπὸν:

1ον) $4^3 \times 4^2=4^{3+2}=4^5$, 2ον) $2^2 \times 2^3 \times 2^4=2^{2+3+4}=2^9$,
 3ον) $3^2 \times 3 \times 3^6=3^{2+1+6}=3^9$, 4ον) $5^3 \times 5^6 \times 5^1 \times 5^2=5^{3+6+1+2}=5^{12}$.

§ 145. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι: Ἐν γινόμενον ὑψοῦται εἰς
 δύναμιν, ἂν ὅλοι οἱ παράγοντες αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύ-
 ναμιν ταύτην. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι:

1ον) $(2 \times 3)^2=2^2 \times 3^2=4 \times 9=36$ ἢ καὶ $(2 \times 3)^2=6^2=6 \times 6=36$.

2ον) $(3 \times 4)^2=3^2 \times 4^2=9 \times 16=144$ ἢ $(3 \times 4)^2=12^2=12 \times 12=144$.

3ον) $(2 \times 3 \times 5)^2=2^2 \times 3^2 \times 5^2=4 \times 9 \times 25=9 \times 100=900$ ἢ

$(2 \times 3 \times 5)^2=30^2=30 \times 30=900$.

- 4ον) $(2 \times 3 \times 1)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 1^3 = 8 \times 27 = 116$ ἢ
 $(2 \times 3 \times 1)^3 = 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$.
 5ον) $(2 \times 5 \times 10)^3 = 2^3 \times 5^3 \times 10^3 = 8 \times 125 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ ἢ
 $(2 \times 5 \times 10)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$.
 6ον) $(5 \times 2 \times 1)^3 = 5^3 \times 2^3 \times 1^3 = 125 \times 8 \times 1 = 1\,000$ ἢ
 $(5 \times 2 \times 1)^3 = 10^3 = 1\,000$.

§ 146. Λύσις: Ἐπειδὴ $4 = 2 \times 2 = 2^2$, ἔπεται ὅτι
 $4^2 = (2^2)^2 = 2^{2 \times 2} = 2^4$. Ὀμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $9 = 3^2$, ἔπεται ὅτι
 $9^2 = (3^2)^2 = 3^4$.

§ 147. Λύσις: 1ον) Ἐπειδὴ $9 = 3^2$, ἔπεται ὅτι
 $9 \times 3^2 = 3^2 \times 3^2 = 3^4$. 2ον) $2 \times 5 \times 10^2 = 10 \times 10^2 = 10^3$.
 3ον) $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

§ 148. Λύσις: 1ον) Τὰ 5 πρῶτα πολλαπλασιασμοὶ τοῦ 3 εἶναι τὰ ἐξῆς:
 $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 4 = 12$, $3 \times 5 = 15$,

2ον) Τὰ δὲ 5 πρῶτα πολλαπλασιασμοὶ τοῦ 9 εἶναι τὰ ἐξῆς:
 $9 \times 1 = 9$, $9 \times 2 = 18$, $9 \times 3 = 27$, $9 \times 4 = 36$, $9 \times 5 = 45$.

§ 149. Λύσις: 1ον) Τρεῖς διαιρέται τοῦ 24 εἶναι π. χ. 2,
 3, 4, ἢ καὶ 6, 8, 12 ἢ 8, 12, 24 ἢ 3, 8, 24 κ.τ.λ.

2ον) Τέσσαρα ὑποπολλαπλασιασμοὶ τοῦ 36 εἶναι π. χ. 2, 3, 4,
 ἢ καὶ 6, 9, 12 ἢ καὶ 12, 18, 36 κ.τ.λ.

3ον) Δύο παράγοντες τοῦ 15 εἶναι ὁ 3 καὶ ὁ 5 ἢ ὁ 1 καὶ
 ὁ 15.

§ 150. Λύσις: Διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 28, 354,
 1600, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐκάστου διαιρεῖται ἀκριβῶς
 διὰ 2. Διὰ 5 δὲ διαιρετοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 245 καὶ 1600, διότι
 τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐκάστου διαιρεῖται διὰ 5 ἢ καὶ διότι ὁ μὲν
 245 λήγει εἰς 5, ὁ δὲ 1600 λήγει εἰς 0.

§ 151. Λύσις: 1ον) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἐκάστου
 τῶν ἀριθμῶν 248, 4560, 3968 διὰ 2 εἶναι μηδέν, διότι οὗτοι
 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐκάστου τῶν
 ἀριθμῶν 375, 3727 διὰ 2 εἶναι 1, ὅσον δηλ. τὸ ὑπόλοιπον ἐκά-
 στης τῶν διαιρέσεων $5 : 2$ καὶ $7 : 2$. Διότι π. χ. ἀπὸ τὰς 37
 δεκάδας τοῦ 375 δὲν μένει ὑπόλοιπον, ἐν δὲ ἀπὸ τὰς 5 μονά-
 δας μένει 1.

2ον) Ὑπόλοιπον ἐκάστης τῶν διαιρέσεων $375 : 5$, $4560 : 5$
 εἶναι 0, διότι αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι.

Ὑπόλοιπον δὲ τῆς διαιρέσεως ἐκάστου τῶν ἄλλων διὰ 5
 ὑπολογισθῆκε ἀπὸ τοῦ ἰνστιτούτου Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ διὰ 5. Οὕτω : Τῆς διαιρέσεως $248 : 5$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $8 : 5$ ἥτοι 3. Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τῆς διαιρέσεως $3727 : 5$ ὑπόλοιπον εἶναι 2 καὶ τῆς $3968 : 5$ εἶναι 3. Ἡ ἐξήγησις εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἐν (§ 151, 1ον) ἀναγραφείσαν.

§ 152. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι ἀπὸ δύο διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς ὁ εἷς εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός. Ἐπομένως ὁ μικρότερος ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 1. Διότι ἂν π. χ. εἰς τὸν ἄρτιον 12 προσθέσωμεν 1, εὐρίσκομεν τὸν περιττὸν 13. Ἄν δὲ ἀπὸ τὸν 12 ἀφαιρέσωμεν 1, εὐρίσκομεν τὸν περιττὸν 11.

§ 153. Λύσις : Διὰ νὰ προκύψῃ τριψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 2. Θὰ εἶναι λοιπὸν 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8.

§ 154. Λύσις : Διὰ 2 διαιροῦνται ὅλοι οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Διὰ 5 διαιροῦνται ὅλοι ἐκτὸς τοῦ 17 304. Ὅμοίως διὰ 10 καὶ διὰ 100 διαιροῦνται ὅλοι πλὴν τοῦ 17 304. Διὰ 1000 διαιροῦνται ὅλοι πλὴν τοῦ 200 καὶ τοῦ 17 304.

§ 155. Λύσις : 1ον) Π. χ. $14 + 28 = 42$, ἥτοι ἄρτιος ἀριθμός. Ὅμοίως $56 + 168 = 224$, ἥτοι πάλιν ἄρτιος.

2ον) $23 + 45 = 68$, ἥτοι ἄρτιος. Ὅμοίως $147 + 309 = 456$ ἥτοι ἄρτιος. Βλέπομεν ὅτι : Τὸ ἄθροισμα δύο ἀρτίων ἢ δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

§ 156. Λύσις : 1ον) Διὰ τοῦ 4 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ 764 καὶ 2700, διότι μόνον αὐτῶν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

2ον) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον διαιροῦνται διὰ 25 οἱ ἀριθμοὶ 3 750, 2 700, 7 625.

§ 157. Λύσις : Πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐκάστου καὶ τὸ ζητούμενον νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4. Οὕτω, διὰ νὰ εὐρωμεν ποῖον ψηφίον πρέπει νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ 32, παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς, οἱ ὅποιοι ἀρχίζουν ἀπὸ 2, διαιρετοὶ διὰ 4 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 20, 24, 28. Ἐπομένως δεξιὰ τοῦ 32 πρέπει νὰ γράψωμεν 0 ἢ 4 ἢ 8. Ὅμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι δεξιὰ τοῦ 43 πρέπει νὰ γράψωμεν 2, ἢ 6. Δεξιὰ τοῦ 65 πρέπει νὰ γράψωμεν 2 ἢ 6, δεξιὰ τοῦ 76 πρέπει νὰ γράψωμεν 0 ἢ 4 ἢ 8. Δεξιὰ δὲ τοῦ 757 πρέπει νὰ γράψωμεν 2 ἢ 6.

§ 158. Λύσις : Ἐφ' οὗ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ εἶναι 2 καὶ τὰ δύο τελευταῖα εἶναι 2. Ταῦτα δὲ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 22,

ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

§ 159. Λύσις: Διὰ νὰ γίνῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 25, πρέπει τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα θὰ γράψωμεν, νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 25. Θὰ εἶναι λοιπὸν ταῦτα 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75, διότι ἀπὸ τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς μόνον οὗτοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 25.

§ 160 Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι ἀμέσως μετὰ τὸν 26 διαιρετὸς διὰ 4 εἶναι ὁ 28. Πρέπει λοιπὸν νὰ προσθῶμεν τὸν 2. Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν τὸν 328, ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, διότι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 28, ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

§ 161 Λύσις: Ἐπειδὴ $415 = 400 + 15$, δύναται ὁ γυμναστής νὰ παρατάξῃ πρῶτον τοὺς 400 μαθητάς. Ἐπειδὴ $400 : 4 = 100$, θὰ κάμῃ ἀπὸ αὐτοὺς 100 τετράδας χωρὶς νὰ περισσεύσῃ μαθητὴς τις. Ἐπειτα θὰ παρατάξῃ τοὺς 15 μαθητάς. Ἄν δὲ παρατηρήσωμεν ὅτι $15 = 12 + 3$ ἢ $15 = (4 \times 3) + 3$, ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ κάμῃ ἄλλας 3 τετράδας καὶ θὰ περισσεύσωσι 3 μαθηταί. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι μὲ τοὺς 415 μαθητάς θὰ κάμῃ ὁ γυμναστής 103 τετράδας καὶ θὰ περισσεύσωσι 3 μαθηταί.

162 Λύσις: Προσθέτομεν τὰ ψηφία ἐκάστου καὶ εὐρίσκομεν $3 + 2 + 6 = 11$, $2 + 1 + 9 = 12$, $9 + 4 + 5 = 18$, $1 + 3 + 0 + 2 = 6$, $3 + 0 + 1 + 5 = 9$, Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ 3 εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 219, 945, 1302, 3015. Διὰ 9 δὲ οἱ ἀριθμοὶ 945 καὶ 3015.

163 Λύσις: 1ον) Διὰ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ 436, 156, 324, 564, 3024, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐκάστου εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

2ον) Διὰ νὰ ἴδωμεν ποιοὶ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3, καὶ διὰ 9, προσθέτομεν τὰ ψηφία αὐτῶν. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι: $9 + 2 + 5 = 16$, $4 + 3 + 6 = 13$, $1 + 5 + 6 = 12$, $3 + 2 + 4 = 9$, $5 + 6 + 4 = 15$, $3 + 0 + 2 + 4 = 9$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ 3 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ 156, 324, 564, 3024. Διὰ 9 δὲ οἱ ἀριθμοὶ 324 καὶ 3024.

3ον) Διὰ 4 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ 436, 156, 324, 564, 3024, διότι τὰ 2 τελευταῖα ψηφία ἐκάστου ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

4ον) Διὰ 5 δὲ διαιρεῖται μόνον ὁ 925, διότι αὐτοῦ μόνον τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5.

§ 164. Λύσις: 1ον) Διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ νὰ διαιρηθῇ ἀκριβῶς διὰ 2. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία 4 ἢ 6 ἢ 8.

2ον) Διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ καὶ τοῦ νέου ψηφίου νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3. Προσθέτομεν λοιπὸν τὰ ψηφία ἐκάστου καὶ παρατηροῦμεν ποῖον ἀκόμῃ ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 3. Οὕτως, ἐπειδὴ $7+4=11$, ἂν προσθέσωμεν 1 ἢ 7 εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως ἄθροισμα 12 ἢ 18. Ἐπομένως ἀπὸ τὸν 74 εὐρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς 741 καὶ 747, οἱ ὅποιοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3. Μὲ ὁμοίαν σκέψιν ἐννοοῦμεν ὅτι ἀπὸ τὸν 74 διαιρετὸς διὰ 9 προκύπτει μόνον ὁ 747. Ὅμοίως, ἐπειδὴ $3+5=8$, μετὰ τὸν 8 δὲ διαιρετοὶ διὰ 3 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 9, 12, 15, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ 35, τὸ ψηφίον 1 ἢ 4 ἢ 7, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3. Διὰ νὰ προκύψῃ δὲ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, πρέπει δεξιὰ τοῦ 35 νὰ γράψωμεν 1. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ μὲ τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς.

3ον) Διὰ νὰ προκύψῃ π.χ. ἀπὸ τὸν 74 ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 μαζί μὲ τὸ νέον νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4, ἥτοι νὰ ἀποτελῶσιν τὸν 40 ἢ 44, ἢ 48. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν ψηφία εἶναι 0 ἢ 4 ἢ 8.

Ἀπὸ τὸν 35 πρέπει νὰ προκύπτωσιν ἀριθμοὶ λήγοντες εἰς 52 ἢ 56. Ἐπομένως τὰ ζητούμενα ψηφία εἶναι 2 ἢ 6.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ μὲ τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς.

4ον) Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 5, πρέπει δεξιὰ ἐκάστου νὰ γράψωμεν 0 ἢ 5.

5ον) Ἀπὸ τὸν 74 οὐδεὶς τριψήφιος διαιρετὸς διὰ 25 προκύπτει, διότι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 40, 41, ... 49 οὐδεὶς εἶναι διαιρετὸς διὰ 25. Εἰς ἕκαστον δὲ τῶν ἀριθμῶν 35 καὶ 95 ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 0. Εἰς δὲ τὸν 87 πρέπει νὰ γράψωμεν 5· οὕτω προκύπτει ὁ τριψήφιος 875, ὅστις εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, διότι καὶ ὁ 75 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25.

165. Λύσις: 1ον) Τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2. Καὶ ὅλος λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

2ον) Ἀπὸ τὰ πολ/σια τοῦ 5 διαιρετὰ διὰ 3 εἶναι τὰ ἐξῆς: 5×3 , 5×6 , 5×9 , 5×12 κ.τ.λ. Ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ἂν ἔχῃ 3 ἢ 6 ἢ 9 ἢ 12 κ.τ.λ. 5. Δηλ. ἂν ὁρίθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ εἶναι πολ/σιον τοῦ 3.

3ον) Τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀποτελοῦσιν τὸν ἀριθμὸν 55. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 5, δὲν ἐκπληροῦνται οἱ ἀπαιτήσεις τοῦ 2ον καὶ 3ον.

διαίρηται διὰ 4 ὅλος ὁ ἀριθμός. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ 25.

4ον) Διαίρετὰ διὰ 9 πολ)σια τοῦ 5 εἶναι 5×9 , 5×18 , 5×27 κ.τ.λ. Ἐπομένως ὁ ἀριθμός θὰ εἶναι διαίρετός διὰ 9, ἂν ἔχη 9 ἢ 18 ἢ 27 κ.τ. λ. 5. Ἄν δηλ. ὁ ἀριθμός τῶν ψηφίων του εἶναι πολ)σιον τοῦ 9.

§ 166. Λύσις: 1ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $6+1+4=11$, ἀμέσως δὲ μετ' αὐτὸν πολ)σιον τοῦ 3 εἶναι ὁ 12, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν $12-11=1$. Οὕτως εὐρίσκομεν τὸν 615, ὁ ὁποῖος εἶναι διαίρετός διὰ 3.

2ον) Διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμός διαίρετός διὰ 4, πρέπει εἰς τὸν 14 νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν καὶ νὰ προκύπτῃ ἀριθμός διαίρετός διὰ 4. Ἐπειδὴ δὲ ἀμέσως μετὰ τὸν 14 διαίρετός διὰ 4 εἶναι ὁ 16, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν $16-14=2$. Οὕτως εὐρίσκομεν τὸν 616, ὅστις εἶναι διαίρετός διὰ 4.

3ον) Διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμός διαίρετός διὰ 5, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 νὰ γίνῃ 5. Πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν 1. Οὕτως εὐρίσκομεν τὸν 615 κ.τ.λ.

4ον) Ἐπειδὴ $6+1+4=11$, ἀμέσως δὲ μετὰ τὸν 11 διαίρετός διὰ 9 εἶναι ὁ 18, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν $18-11=7$. Οὕτως εὐρίσκομεν τὸν 621, ὅστις εἶναι διαίρετός διὰ 9.

5ον) Διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμός διαίρετός διὰ 25, πρέπει ὁ 14 νὰ γίνῃ 25. Πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν τὸν $25-14=11$. Οὕτως εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 625 κ.τ.λ.

§ 67. Λύσις: Ἀφ' οὗ ὁ ἀριθμός εἶναι διαίρετός διὰ 9, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαίρετὸν διὰ 9. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν προσθετέων του, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ νέος ἀριθμός εἶναι διαίρετός διὰ 9. Π. χ. εἶναι $468=πολ. 9$, διότι $4+6+8=18=πολ. 9$.

Καὶ ὁ ἀριθμός $684=πολ. 9$, διότι $6+8+4=18=πολ. 9$.

§ 168 Λύσις. 1ον) Ἐπειδὴ $135=130+5$, ἂν παραταχθῶσιν κατὰ дуάδας πρῶτον οἱ 130 μαθηταί, θὰ γίνωσιν $130:2=65$ дуάδες ἀκριβῶς. Ἀπὸ δὲ τοὺς ἄλλους 5 μαθητὰς θὰ γίνωσι 2 дуάδες καὶ θὰ περισσεύσῃ 1 μαθητῆς. Ὡστε ἀπὸ τοὺς 135 μαθητὰς θὰ γίνωσι $65+2=67$ дуάδες καὶ θὰ περισσεύσῃ ἓνας μαθητῆς.

2ον) Ἐπειδὴ $1+3+5=9$, ὁ 135 διατηρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3. Ἐπομένως, ἂν οἱ 135 μαθηταὶ παραταχθῶσι κατὰ τριάδας, οὐδεὶς θὰ περισσεύσῃ.

3ον) Ἐπειδὴ ὁ 135 διαίρεται ἀκριβῶς διὰ 5, οἱ 135 μα-

θηταὶ δύνανται νὰ παραταχθῶσιν εἰς πεντάδας χωρὶς νὰ περισσεύσῃ μαθητὴς τις.

§ 169 Λύσις. 1ον) Διαίρομεν διὰ 8 τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὅποιον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία ἐκάστου, διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι ἢ ὄχι: Οὕτω βλέπομεν ὅτι:

α') 012 δὲν διαιρεῖται διὰ 8, ἐπομένως καὶ 47012 δὲν διαιρεῖται διὰ 8.

β') $480 : 8 = 60$, ἐπομένως ὁ 91480 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8.

γ') $375 = 46 \times 8 + 7$. ὁ 375 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8. Ἐπομένως ὁ 5375 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 8.

δ') $024 : 8 = 3$. ἄρα ὁ 83024 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8.

ε') $250 = 31 \times 8 + 2$. ἐπομένως ὁ 250 καὶ ὁ 79 250 δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8.

2ον) Ὁμοίως διαίρομεν διὰ 125 τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὅποιον ἀποτελοῦσι τὰ 3 τελευταῖα ψηφία ἐκάστου κ.τ.λ. Εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι μόνον οἱ ἀριθμοὶ 5375 καὶ 79250 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 125.

§ 170. Λύσις. Διαίρομεν διὰ 125 τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὅποιον ἀποτελοῦσι τὰ 3 τελευταῖα ψηφία ἐκάστου. Οὕτω εὐρίσκομεν ὅτι:

α') $125 : 125 = 1$, $250 : 125 = 2$, $875 : 125 = 7$, $500 : 125 = 4$. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3125, 5250, 204875, 605500 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 125.

β') $300 = (125 \times 2) + 50$ ἐπομένως ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $62300 : 125$ εἶναι ὁ 50.

$450 = (125 \times 3) + 75$ ἐπομένως ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $105450 : 125$ εἶναι ὁ 75.

§ 171 Λύσις: 1ον) Διαίρομεν τὸν 930 διὰ 8 καὶ βλέπομεν ὅτι $930 = (116 \times 8) + 2$. Ἄν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 ἀπὸ τὸν 930, θὰ εἶναι $928 = 116 \times 8$. ἐπομένως ὁ 928 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8. Καὶ ὁ $35930 - 2 = 35928$ θὰ εἶναι ἐπίσης διαιρετὸς διὰ 8. Ἄν δὲ ἀπὸ τὸν 35928 ἀφαιρέσωμεν 8 ἢ 16 ἢ 24 κ.τ.λ. πάλιν εὐρίσκομεν διαιρετὸν διὰ 8. Ὡστε ἀπὸ τὸν δοθέντα 35930 δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 2 ἢ $8 + 2 = 10$, ἢ $16 + 2 = 18$ ἢ $24 + 2 = 26$ κ.τ.λ. μέχρι τοῦ $35928 + 2 = 35930$.

§ 172. Λύσις: 1ον). Ἐπειδὴ $242 = (30 \times 8) + 2$, πρέπει τὸ ὑπόλοιπον 2 νὰ γίνῃ διαιρετὸν διὰ 8 ἥτοι 8, 16, 24 κ.τ.λ. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν δοθέντα 7242 νὰ προσθέσωμεν 6, 14, 22

κ.τ.λ. Οὕτως εὐρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς 7248, 7256, 7264 κ.τ.λ. οἱ ὅποιοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8.

2ον). Ἐπειδὴ $242 = (125 \times 1) + 117$, πρέπει τὸ ὑπόλοιπον 117 νὰ γίνῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 125, ἥτοι 125, 250, 375 κ.τ.λ. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν 117 νὰ προσθέσωμεν $125 - 117 = 8$, ἢ $250 - 117 = 133$ ἢ $375 - 117 = 258$ κ.τ.λ.

§ 173. Λύσεις: Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $11 \times 1 = 11$, $11 \times 2 = 22$, $11 \times 3 = 33$, $11 \times 4 = 44$, $11 \times 5 = 55$, $11 \times 6 = 66$, $11 \times 7 = 77$, $11 \times 8 = 88$, $11 \times 9 = 99$.

§ 174. Λύσεις: Χωρίζομεν ἕκαστον εἰς διψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν καὶ προσθέτομεν τοὺς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένους ἀριθμοὺς. Οὕτω εὐρίσκομεν ὅτι:

1ον) $33 + 22 + 11 = 66 = 11 \times 6$, 2ον) $57 + 09 + 11 = 77 = 11 \times 7$, 3ον) $63 + 34 + 02 = 99 = 11 \times 9$, 4ον) $3 + 13 + 04 = 20 = 11 \times 1 + 9$, 5ον) $73 + 04 + 12 = 89 = 11 \times 8 + 1$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι διαιρετοὶ διὰ 11 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 332211, 570911, 633402.

§ 175. Λύσεις: 1ον) Διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ τὸν 73 ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 11, πρέπει τὸ ζητούμενον ψηφίον καὶ ὁ 73 νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 77. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ψηφίον εἶναι 4 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι 473.

2ον) Ἀπὸ τὸν 92 πρέπει νὰ προκύπτῃ ἄθροισμα 99. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ψηφίον εἶναι 7, προκύπτει δὲ ὁ 792.

3ον) Ἐπειδὴ $31 + 20 = 51$, τὸ ἄθροισμα τοῦ 51 καὶ τοῦ ζητουμένου ψηφίου πρέπει νὰ εἶναι 55. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ψηφίον εἶναι $55 - 51 = 4$, ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι 43120.

4ον) Ἐπειδὴ $5 + 14 + 37 = 56$, πρέπει τὸ ἄθροισμα τοῦ 56 καὶ τοῦ πλήθους τῶν ἀπλῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς ζητουμένας δεκάδας νὰ εἶναι 66. Αἱ δεκάδες λοιπὸν αὐταὶ θὰ εἶναι $66 - 56 = 10$. Ἐπομένως τὸ ζητούμενον ψηφίον εἶναι 1. Προκύπτει δὲ ὁ ἀριθμὸς 151437.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ. ΔΟΘΕΝΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 176. Λύσεις: 1ον) Ὁ μικρότερος 12 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν μεγαλύτερον 48. Ἄρα ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. εἶναι 12.

2ον) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 63 μ.κ.δ. εἶναι 9.

3ον) Διαιρέται τοῦ 8 εἶναι ὁ 1, 2, 4, 8. Ἀπὸ αὐτοὺς οἱ 1, 2, 4, 8

2, 4 διαιρούσι καὶ τὸν 12, Εἶναι λοιπὸν αὐτοὶ μόνον κοινοὶ διαιρέται τῶν 8 καὶ 12. Ἄρα μ.κ.δ. τούτων εἶναι ὁ 4.

4ον) Ἀπὸ τοὺς διαιρέτας 1, 5, 10 τοῦ 10 οἱ 1 καὶ 5 διαιρούσι καὶ τὸν 35. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 1 καὶ 5 μόνον εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 35. Ἐπομένως μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 5.

5ον) Διαιρέται τοῦ 28 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 4, 7, 14, 28. Ἀπὸ αὐτοὺς διαιρέται τοῦ 42 εἶναι 1, 2, 4, 7, 14. Οὗτοι λοιπὸν εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν 28 καὶ 42. Ἐπομένως μ.κ.δ. τούτων εἶναι ὁ 14.

6ον) Ἀπὸ τοὺς διαιρέτας 1, 2, 3, 6, 9, 18 τοῦ μικροτέρου 18 διαιρέται καὶ τοῦ 63 εἶναι οἱ 1, 3, 9. Αὐτοὶ λοιπὸν εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν 18 καὶ 63. Ἐπομένως μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 9.

$$\S 177. \text{Λύσις. 1ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr|rr} 156 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ & 88 & 68 & 20 & 8 & 4 \\ \hline 68 & 20 & 8 & 4 & 0 & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=4.$$

$$2\text{ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr|rr} 312 & 3 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ & 99 & 15 & 9 & 6 & 3 \\ \hline 15 & 9 & 6 & 3 & 0 & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=3.$$

$$3\text{ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr} 594 & 4 & 8 & & & \\ & 144 & 18 & & & \\ \hline 18 & 0 & & & & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=18.$$

$$4\text{ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr|rr} 609 & 2 & 3 & 1 & 10 & 2 \\ & 270 & 69 & 63 & 6 & 3 \\ \hline 69 & 63 & 6 & 3 & 0 & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=3.$$

$$5\text{ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr|rr|rr} 2226 & 1 & 8 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 986 & 240 & 66 & 42 & 24 & 18 & 6 \\ \hline 240 & 66 & 42 & 24 & 18 & 6 & 0 & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=6.$$

$$6\text{ον)} \begin{array}{r|rr|rr|rr|rr|rr} 1540 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ & 328 & 228 & 100 & 28 & 16 & 12 & 4 \\ \hline 228 & 100 & 28 & 16 & 12 & 4 & 0 & \\ 20 & & & & & & & \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=4.$$

$$\S 178. \text{Λύσις. 1ον)} \begin{array}{rrr} 24 & 72 & 108 \\ 24 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{array} \text{Ἄρα μ.κ.δ.}=12.$$

2ον)	42	63	72	
	42	21	30	
	0	21	9	"Αρα μ. κ. δ.=3.
	0	3	9	
	0	3	0	

3ον)	560	728	328	
	232	72	328	
	16	72	40	"Αρα μ. κ. δ.=8.
	16	8	8	
	0	0	8	

4ον)	3420	2610	7020	
	810	2610	1800	
	810	180	180	"Αρα μ. κ. δ.=90.
	90	0	180	
	90	0	0	

§ 179. Λύσις. Ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ περισσεύσωσι κουφέτα, πρέπει τὰ 300 δράμια καὶ τὰ 125 νὰ μοιράζωνται ἀκριβῶς εἰς τὰς μπομπουνιέρας. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τούτων πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς 300 καὶ 125. Διὰ νὰ εἶναι δὲ ὅσον τὸ δυνατόν περισσότεροι μπομπουνιέραι, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν 300 καὶ 125.

Εὐρίσκομεν δὲ αὐτὸν ὡς ἐξῆς :

300	2	2	2	
	125	50	25	"Αρα μ. κ. δ.=25. Θὰ κάμῃ λοιπὸν ἡ οἰκογένεια 25 μπομπουνιέρας καὶ κάθε μία θὰ ἔχῃ 300 : 25=12 δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ 125 : 25=5 δράμια κυανὰ κουφέτα.
50	25			

§ 180. Λύσις. Ἐπειδὴ μὲ τὸν σχηματισμὸν τῶν ὁμάδων δὲν πρέπει νὰ περισσεύῃ μουσικός τις ἀπὸ ἐκάστην ὁμάδα, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων τούτων πρέπει νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 60, 120, 40. Διὰ νὰ εἶναι δὲ αἱ ὁμάδες, ὅσον τὸ δυνατόν περισσότεροι, πρέπει ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν νὰ εἶναι μ. κ. δ. τῶν 60, 120, 40. Εὐρίσκομεν δὲ αὐτὸν ὡς ἐξῆς :

60	120	40	"Αρα κ. μ. δ.=20. Ἐπομένως θὰ γίνωσιν 20 ὁμάδες. Ἐκάστη δὲ ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 : 20=3 ὑψιφώνους, ἀπὸ 120 : 20=6 μέσους καὶ ἀπὸ 40 : 20=2 βαθυφώνους.
20	0	40	
20	0	0	

§ 180. Λύσις. Ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ περισσεύωσιν ἀντι-

κείμενα ἀπὸ κανὲν εἶδος, ὁ ἀριθμὸς τῶν οἰκογενειῶν πρέπει νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 880 000, 200, 80. Διὰ νὰ εἶναι δὲ αἱ οἰκογένειαι, ὅσον τὸ δυνατόν περισσότεραι, πρέπει ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν νὰ εἶναι μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 880 000, 200, 80. Τοῦτον δὲ εὐρίσκομεν ὡς ἑξῆς :

880 000	200	80	
0	40	80	"Αρα μ. κ. δ.=40. Αἱ οἰκογένειαι λοι-
0	40	0	πὸν εἶναι 40 καὶ ἐκάστη θὰ λάβῃ

880 000 : 40 = 22 000 δραχμᾶς, 200 : 40 = 5 ζεύγη κάλτσες καὶ 80 : 40 = 2 φανέλλας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Ε.Κ.Π. ΔΟΘΕΝΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 182. Λύσις: 1ον) $7 \times 1 = 7$, $7 \times 2 = 14$, $7 \times 3 = 21$, $7 \times 4 = 28$, $7 \times 5 = 35$.

2ον) $8 \times 1 = 8$, $8 \times 2 = 16$, $8 \times 3 = 24$, $8 \times 4 = 32$, $8 \times 5 = 40$.

§ 183. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι ἐκ τῶν ἀριθμῶν $7 \times 1 = 7$, $7 \times 2 = 14$, $7 \times 3 = 21$, $7 \times 4 = 28$ κ.τ.λ. Τὸ μικρότερον διαιρετὸν διὰ 4 εἶναι τὸ $7 \times 4 = 28$. "Ωστε ἐ. κ. π. τῶν 4 καὶ 7 εἶναι ὁ 28. Καὶ πᾶν πολῖσιον αὐτοῦ π.χ. $28 \times 2 = 56$, $28 \times 3 = 84$, $28 \times 4 = 112$ κ.τ.λ. εἶναι κοινὸν πολῖσιον τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 7.

§ 184. Λύσις: 1ον) Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 18 ὁ μεγαλύτερος 18 διαιρεῖται διὰ 6. "Αρα ἐ. κ. π. αὐτῶν εἶναι ὁ 18.

2ον) Ἀπὸ τὰ γινόμενα $12 \times 1 = 12$, $12 \times 2 = 24$, $12 \times 3 = 36$ κ.τ.λ. πρῶτον διαιρετὸν διὰ 8 εἶναι τὸ $12 \times 2 = 24$. "Αρα ἐ.κ.π. τῶν 8 καὶ 12 εἶναι ὁ 24.

3ον) Σχηματίζοντες τὰ γινόμενα $9 \times 1 = 9$, $9 \times 2 = 18$, $9 \times 3 = 27$, $9 \times 4 = 36$, $9 \times 5 = 45$ κ.τ.λ. βλέπομεν ὅτι τὸ πρῶτον διαιρετὸν διὰ 5 εἶναι τὸ $9 \times 5 = 45$. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 5 καὶ 9 ἔχουσιν ἐ.κ.π. τὸν 45.

4ον) Ἀπὸ τὰ γινόμενα $18 \times 1 = 18$, $18 \times 2 = 36$, $18 \times 3 = 54$ κ.τ.λ. πρῶτον διαιρετὸν διὰ 9 καὶ διὰ 12 εἶναι τὸ $18 \times 2 = 36$. "Αρα ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 9, 12, 18 εἶναι ὁ 36.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὐρίσκομεν καὶ ὡς κάτωθι φαίνεται.

9	12	18	2
9	6	6	2
9	3	3	3
3	1	1	

"Αρα ἐ.κ.π. $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 1 = 36$.

§ 186. Λύσις : Ἀπὸ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤχοῦσιν ὅλοι ὁμοῦ, ὁ α' κώδων κτυπᾷ μετὰ 3, 3×2 , 3×3 κ.τ.λ. ἤτοι μετὰ χρόνον, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλῖσιον τοῦ 3. Ὅμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ β' κώδων κτυπᾷ μετὰ χρόνον, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλῖσιον τοῦ 5 καὶ ὁ γ' μετὰ χρόνον πολλῖσιον τοῦ 6. Διὰ νὰ κτυπήσῃσιν λοιπὸν πάλιν μαζί πρέπει νὰ περάσῃ ἀριθμὸς πρώτων λεπτῶν, ὅστις εἶναι κοινὸν πολλῖσιον τῶν 3, 5, 6. Ὁ ἐλάχιστος δὲ ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 6, ἤτοι 30 λεπτά.

§ 187. Λύσις : Ἀπὸ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν φθάνουσιν ὁχήματα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμάς, θὰ ἔρχωνται ὁχήματα ἀπὸ τὴν 1ην γραμμὴν ἀνὰ 4, 4×2 , 4×3 κ. τ. λ. λεπτά.

»	»	2αν	»	»	8, 8×2 , 8×3	»	»
»	»	3ην	»	»	12, 12×2 , 12×3	»	»
»	»	4ην	»	»	16, 16×2 , 16×3	»	»

Διὰ νὰ φθάσῃσιν λοιπὸν ὁχήματα καὶ ἀπὸ τὰς 4 γραμμάς συγχρόνως, πρέπει νὰ περάσῃ ἀριθμὸς λεπτῶν, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι πολλῖσιον καὶ τῶν 4 ἀριθμῶν 4, 8, 12, 16, ἤτοι κοινὸν πολλῖσιον αὐτῶν. Διὰ νὰ συμβῇ δὲ ἡ πρώτη ταυτόχρονος ἀφίξις καὶ ἀπὸ τὰς 4 γραμμάς, πρέπει, πρέπει ὁ ἀριθμὸς τῶν λεπτῶν, τὰ ὁποῖα θὰ περάσῃσιν, νὰ εἶναι ἐ. κ. π. τῶν 4, 8, 12, 16. Τοῦτο δὲ εὐρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι ἐκ τῶν γινομένων $16 \times 1 = 16$, $15 \times 2 = 32$, $16 \times 3 = 48$ τὸ τελευταῖον διαιρεῖται δι' ἐκάστου τῶν ἄλλων 4, 8, 12. Εἶναι λοιπὸν ἐ. κ. π. $= 48$ καὶ ἐπομένως μετὰ 48 λεπτά θὰ φθάσῃσιν ὁχήματα καὶ ἀπὸ τὰς 4 γραμμάς μαζί.

§ 188. Λύσις : Ὁ α' διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως μετὰ 8, $8 \times 2 = 16$, $8 \times 3 = 24$, κ. τ. λ. λεπτά. Ὁ β' μετὰ 12, $12 \times 2 = 24$, $12 \times 3 = 36$ κ. τ. λ. Ὁ γ' μετὰ 15, $15 \times 2 = 30$, $15 \times 3 = 45$ κ. τ. λ. Ἐπομένως καὶ οἱ τρεῖς μαζί θὰ εὐρίσκωνται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως μετὰ ἀριθμὸν λεπτῶν, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι κοινὸν πολλῖσιον τῶν ἀριθμῶν 8, 12, 15. Διὰ πρώτην δὲ φορὰν θὰ συμβῇ τοῦτο, ἂν τὸ πολλῖσιον τοῦτο εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν 8, 12, 15. Τοῦτο δὲ εὐρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι ἐκ τῶν γινομένων $15 \times 1 = 15$, $15 \times 2 = 30$, $15 \times 3 = 45$, $15 \times 4 = 60$, $15 \times 5 = 75$, $15 \times 8 = 120$, τὸ τελευταῖον διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἐκάστου τῶν ἄλλων ἀριθμῶν 8, 12. Ἐπομένως ἐ. κ. π. $= 120$ καὶ μετὰ 120 λεπτά καὶ οἱ τρεῖς ποδηλάται διὰ πρώτην φορὰν θὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν ἀφετηρίαν.

§ 189. Λύσις : Ἄν εἰς ἓνα περιττὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον

τοῦ 1 προσθέσωμεν 1, εὐρίσκομεν ἄρτιον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ ,2 ἥτοι σύνθετον ἀριθμὸν.

σύνθετος ἀριθμὸς

§ 190. Λύσις : Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ 2. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος εἶναι ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς 1 διαιρέτης, ἔπεται ὅτι εἶναι ὁ ζητούμενος δεύτερος διαιρέτης.

2

§ 191. Λύσις : Ἀφ' οὗ ὁ ἀριθμὸς εἶναι περιττός, δὲν διαιρεῖται διὰ 2. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ εἶναι πολῶσιον τοῦ 3, ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος διαιρεῖται διὰ 3. Ὡστε ἀμέσως μετὰ τὴν 1 διαιρέτην τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 3. Οὗτος λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος δεύτερος διαιρέτης τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου.

3

§ 192. Λύσις : 1ον)

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$128=2^7$$

$$\begin{array}{r|l} 2ον) & 260 \\ & 130 \\ & 65 \\ & 13 \\ & 1 \end{array}$$

$$260=2^2 \times 5 \times 13$$

$$\begin{array}{r|l} 3ον) & 372 \\ & 186 \\ & 93 \\ & 31 \end{array}$$

$$372=2^2 \times 3 \times 31$$

$$\begin{array}{r|l} 4ον) & 840 \\ & 420 \\ & 210 \\ & 105 \\ & 35 \\ & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$840=2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

2ον) $3\ 600=36 \times 100$. Ἐπειδὴ δὲ $36=4 \times 9=2^2 \times 3^2$ καὶ $100=10 \times 10=2 \times 5 \times 2 \times 5=2^2 \times 5^2$, ἔπεται ὅτι :

$$3\ 600=2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2=2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

$$3\ 600=2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

$$9\ 720=972 \times 10=108 \times 9 \times 2 \times 5=12 \times 9 \times 9 \times 2 \times 5=$$

$$4 \times 3 \times 3^2 \times 3^2 \times 2 \times 5=2^3 \times 3^5 \times 5$$

$$9\ 720=2^3 \times 3^5 \times 5$$

$$3\ 850=385 \times 10=77 \times 5 \times 10=7 \times 11 \times 5 \times 5 \times 2=2 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

$$3\ 850=2 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

$$7\ 260 = 726 \times 10 = 363 \times 2 \times 2 \times 5 = 121 \times 3 \times 2^2 \times 5 = 11^2 \times 3 \times 2^2 \times 5.$$

$$7\ 260 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11^2$$

§ 193. Λύσις : 1ον) $320 = 32 \times 10 = 2^5 \times 2 \times 5 = 2^6 \times 5,$

$$460 = 46 \times 10 = 23 \times 2 \times 2 \times 5 = 23 \times 2^2 \times 5$$

Ἐπομένως $320 \times 460 = (2^6 \times 5) \times (2^2 \times 5 \times 23) = 2^8 \times 5^2 \times 23$
 $= 147\ 200$

$$320 \times 460 = 2^8 \times 5^2 \times 23 = 147\ 200$$

2ον) $378 = 9 \times 42 = 9 \times 6 \times 7 = 3^2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 7$

$$154 = 2 \times 77 = 2 \times 7 \times 11$$

$$166 = 2 \times 83.$$

Ἐπομένως $378 \times 154 \times 166 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 11 \times 83 = 9\ 663\ 192$

3ον) $516 = 4 \times 129 = 2^2 \times 3 \times 43,$

$$396 = 9 \times 44 = 3^2 \times 2^2 \times 11,$$

$$978 = 3 \times 326 = 3 \times 2 \times 163$$

Ἐπομένως $516 \times 396 \times 978 = 2^5 \times 3^4 \times 11 \times 43 \times 163 = 199\ 840\ 608$

§ 194. Λύσις : 1ον) $725 = 25 \times 29 = 5^2 \times 29.$ Ἐπομένως

$$725^2 = (5^2 \times 29)^2 = 5^4 \times 29^2 = 525\ 625,$$

$$725^3 = (5^2 \times 29)^3 = 5^6 \times 29^3 = 381\ 078\ 125.$$

2ον) $312 = 4 \times 78 = 4 \times 2 \times 39 = 2^3 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^3 \times 3 \times 13.$

Ἐπομένως $312^2 = (2^3 \times 3 \times 13)^2 = 2^6 \times 3^2 \times 13^2 = 97\ 344$

$$312^3 = (2^3 \times 3 \times 13)^3 = 2^9 \times 3^3 \times 13^3 = 30\ 371\ 328.$$

3ον) $2340 = 234 \times 10 = 9 \times 26 \times 2 \times 5 = 3^2 \times 2 \times 13 \times 2 \times 5 =$
 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13.$

Ἐπομένως $2340^2 = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13)^2 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 \times 13^2 = 5\ 475\ 600.$

$$2340^3 = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13)^3 = 2^6 \times 3^6 \times 5^3 \times 13^3 = 12\ 812\ 940\ 000.$$

4ον) $4560 = 456 \times 10 = 3 \times 152 \times 2 \times 5 = 3 \times 4 \times 38 \times 2 \times 5 =$
 $2^4 \times 3 \times 5 \times 19.$

Ἐπομένως $4560^2 = (2^4 \times 3 \times 5 \times 19)^2 = 2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 19^2$
 $= 20\ 793\ 600,$

$$4560^3 = (2^4 \times 3 \times 5 \times 19)^3 = 2^{12} \times 3^3 \times 5^3 \times 19^3 = 94\ 818\ 816\ 000$$

$$4560^2 = 20\ 793\ 600, 4560^3 = 94\ 818\ 816\ 000$$

5ον) $1260 = 126 \times 10 = 9 \times 14 \times 10 = 3^2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 5 =$
 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$

Ἐπομένως $1260^2 = (2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7)^2 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$

$$= 1\ 587\ 600,$$

$$1260^3 = (2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7)^3 = 2^9 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3 = 2\,000\,376\,000.$$

$$1260^2 = 1\,587\,600, \quad 1260^3 = 2\,000\,376\,000$$

$$6ον) \quad 7290 = 729 \times 10 = 9 \times 81 \times 10 = 9 \times 9 \times 9 \times 10 = 3^6 \times 2 \times 5.$$

$$\text{Ἐπομένως } 7290^2 = (3^6 \times 2 \times 5)^2 = 3^{12} \times 2^2 \times 5^2 = 53\,144\,000.$$

$$7290^3 = (3^6 \times 2 \times 5)^3 = 3^{18} \times 2^3 \times 5^3 = 387\,420\,489\,000$$

$$7290^2 = 53\,144\,100, \quad 7290^3 = 387\,420\,489\,000$$

§ 195. Λύσις: Ὁ ἀ' ἀριθμὸς $2^3 \times 5^2 \times 7$ μὴ περιέχων τὸν παράγοντα 3 τοῦ $2^2 \times 3^2 \times 5$ δὲν διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ. Οἱ ἄλλοι περιέχοντες ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ $2^2 \times 3^2 \times 5$ καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην διαιροῦνται ὑπ' αὐτοῦ.

$$\text{Εἶναι δὲ } (2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^2) : (2^2 \times 3^2 \times 5) = 3^2 \times 7^2$$

$$\text{καὶ } (2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^3) : (2^2 \times 3^2 \times 5) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^3.$$

§ 196. Λύσις: 1ον) Πρῶτον βλέπομεν ὅτι $12 = 2^2 \times 3$. Ἐπειτα $276 = 2 \times 138 = 2 \times 2 \times 69 = 2 \times 2 \times 3 \times 23 = 2^2 \times 3 \times 23$.

Οὗτος περιέχων ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ 12 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

$$\text{Εἶναι δὲ } 276 : 12 = (2^2 \times 3 \times 23) : (2^2 \times 3) = 23 \quad 276 : 12 = 23$$

$524 = 4 \times 131 = 2^2 \times 131$. Οὗτος μὴ περιέχων τὸν παράγοντα 3 τοῦ 12 δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ.

$$524 : 12 \text{ ἀτελής}$$

$780 = 78 \times 10 = 2 \times 39 \times 10 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$. Βλέπομεν δὲ ὅτι οὗτος ἔχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ 12. Ἀρα διαιρεῖται δι' αὐτοῦ. Εἶναι δὲ $780 : 12 = (2^2 \times 3 \times 5 \times 13) : (2^2 \times 3) = 5 \times 13 = 65$

$$780 : 12 = 65$$

$$2436 = 2 \times 1218 = 2 \times 2 \times 609 = 2^2 \times 3 \times 203 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 29.$$

Καὶ οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 12. Εἶναι δὲ

$$2436 : 12 = (2^2 \times 3 \times 7 \times 29) : (2^2 \times 3) = 7 \times 29 = 203$$

$$2436 : 12 = 203$$

2ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $210 = 21 \times 10 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Ἐπειτα: $2100 = 21 \times 100 = 2^2 \times 5^2 \times 3 \times 7$. Οὗτος περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ 210 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην. Ἀρα ὁ 2100 διαιρεῖται διὰ 210. Εἶναι δὲ

$$2100 : 210 = (2^2 \times 5^2 \times 3 \times 7) : (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 2 \times 5 = 10$$

$2250 = 225 \times 10 = 15 \times 15 \times 10 = 2 \times 3^2 \times 5^3$. Οὗτος δὲν περιέχει τὸν παράγοντα 7 τοῦ 210. Ἐπομένως δὲν διαιρεῖται διὰ 210.

$$2250 : 210 \text{ ἀτελής}$$

$1120 = 112 \times 10 = 4 \times 28 \times 10 = 4 \times 4 \times 7 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 5 \times 7$. Καὶ οὗτος δὲν διαιρεῖται διὰ 210, διότι δὲν ἔχει τὸν παράγοντα 3 αὐτοῦ.

$$1120 : 210 \text{ ἀτελής}$$

$13\ 230 = 1323 \times 10 = 9 \times 147 \times 2 \times 5 = 3^2 \times 3 \times 49 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 3^3 \times 7^2$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ 13 230 ἔχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ 210 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην. Ἄρα ὁ 13 230 εἶναι διαιρετὸς διὰ 210. Εἶναι δὲ

$$13220 : 210 = (2 \times 5 \times 3^3 \times 7^2) : (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 3^2 \times 7 = 63.$$

$$13230 : 210 = 63$$

§ 197. Λύσις: Ὁ μ.κ.δ. εἶναι γινόμενον τῶν κοινῶν μόνον παραγόντων μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην ἑκάστου. Τὸ δὲ ἐ.κ.π. εἶναι γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν καὶ ἑκάστου μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του.

Ἐπομένως: 1ον) Οἱ ἀριθμοὶ $2^3 \times 3 \times 5$, $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ ἔχουσι μ.κ.δ. $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ καὶ ἐ.κ.π. $2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$

$$\mu.κ.δ. \ 60, \ \epsilon.κ.π. \ 840$$

2ον) Οἱ ἀριθμοὶ $2 \times 3 \times 5 \times 11$ καὶ $3^2 \times 7 \times 11$ ἔχουσι μ.κ.δ. $3 \times 11 = 33$ καὶ ἐ.κ.π. $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 6930$

$$\mu.κ.δ. \ 33, \ \epsilon.κ.π. \ 6930$$

3ον) Οἱ ἀριθμοὶ $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ καὶ $2 \times 3 \times 5 \times 11$ ἔχουσι μ.κ.δ. $2 \times 3 \times 5 = 30$ καὶ ἐ.κ.π. $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 277200$

$$\mu.κ.δ. \ 30, \ \epsilon.κ.π. \ 277\ 200$$

§ 198. Λύσις: 1ον) $144 = 12 \times 12 = 2^4 \times 3^2$, $504 = 9 \times 56 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Ἄρα μ.κ.δ. $2^3 \times 3^2 = 72$, καὶ ἐ.κ.π. $2^4 \times 3^2 \times 7 = 1008$.

$$\mu.κ.δ. \ 72, \ \epsilon.κ.π. \ 1008$$

2ον) $226 = 2 \times 113$, $198 = 2 \times 99 = 2 \times 3^2 \times 11$, Ἄρα οὗτοι

ἔχουσι μ.κ.δ. 2 καὶ ἐ.κ.π. $2 \times 3^2 \times 11 \times 113 = 22\,374$

μ. κ. δ. 2, ἐ. κ. π. 22374

3ον) $132 = 2 \times 66 = 2 \times 6 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 11$, $252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $420 = 42 \times 10 = 2 \times 3 \times 7 \times 10 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.
 "Αρα οὗτοι ἔχουσι μ. κ. δ. $2^2 \times 3 = 12$, ἐ. κ. π. $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13\,860$.

μ. κ. δ. 12, ἐ. κ. π. 13860

4ον) $756 = 9 \times 84 = 3^2 \times 12 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 7$, $504 = 9 \times 56 = 9 \times 7 \times 8 = 2^3 \times 3^2 \times 7$, $1260 = 126 \times 10 = 9 \times 14 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.
 "Αρα οὗτοι ἔχουσι μ. κ. δ. $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$, ἐ. κ. π. $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7860$.

μ. κ. δ. 252, ἐ. κ. π. 7860

ΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 189. Λύσις : "Αν ἡ ἀκεραία μονὰς διαιρεθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἀπ' αὐτὰ λέγεται : ἔν τεταρτον. "Αν διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη, ἕκαστον λέγεται : ἔν ἑβδομον. "Αν εἰς 8, λέγεται : ἔν ὄγδοον. "Αν εἰς 15, λέγεται : ἔν δέκατον πέμπτον, εἰς 28, ἔν εἰκοστὸν ὄγδοον, εἰς 360, ἔν τριακοστὸν ἑξηκοστόν.

§ 200. Λύσις : Πρέπει ἡ ἀκεραία μονὰς νὰ διαιρεθῇ ἀντιστοίχως εἰς 3, 4, 20, 100 ἴσα μέρη.

§ 201. Λύσις : Πέντε ὄγδοα, τρία πέμπτα, δεκαπέντε εἰκοστὰ ὄγδοα, εἴκοσι τέσσαρα ἑκατοστὰ τριακοστὰ δεύτερα, πεντακόσια δύο πεντακοσιοστὰ εἰκοστὰ τέταρτα.

§ 202. Λύσις : 1ον) 1 ρούπ. $= \frac{1}{8}$ πήχεως, 2 ρούπια $= \frac{2}{8}$

πήχ, 5 ρούπ. $= \frac{5}{8}$ πήχεως.

2ον) 1 δράμ. $= \frac{10}{400}$ ὀκάς, 10 δράμ. $= \frac{10}{400}$ ὀκ, 120 δράμ.

μια $= \frac{120}{400}$ ὀκ.

3ον) 5 ἡμ. $= \frac{5}{365}$ ἔτους, 30 ἡμ. $= \frac{30}{365}$ ἔτους,

240 ἡμ. $= \frac{240}{365}$ ἔτους.

4ον) 1 λεπτὸν $= \frac{1}{60}$ ὥρας, 15 λεπ. $= \frac{15}{60}$ ὥρας,

20 λεπ. $= \frac{20}{60}$ ὥρας.

§ 203. Λύσις: Ἀφ' οὗ αἱ 6 πλάκες ἔχουσι βάρος 2 ὀκάδες, ἡ μία θὰ ἔχη βάρος 6 φορὰς ὀλιγώτερον,

ἥτοι $2 \text{ ὀκ.} : 6 = \frac{2}{6}$ τῆς ὀκάς.

§ 204. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 5 ἡμέρας ἐθέρισε 3 στρέμματα, εἰς 1 ἡμέραν ἐθέρισε 5 φορὰς ὀλιγώτερον,

ἥτοι $3 \text{ στρ.} : 5 = \frac{3}{5}$ στρέμματος.

§ 205. Λύσις: Ἡ μία ὀκά εἶναι τὸ $\frac{1}{350}$ τοῦ οἴνου. Ἐ-

πομένως: 1ον) Αἱ 12 ὀκ. $= \frac{12}{350}$ τοῦ οἴνου. 2ον) Αἱ 29 ὀκ.

$= \frac{29}{350}$ τοῦ οἴνου. 3ον) Αἱ 105 ὀκ. $= \frac{105}{350}$ τοῦ οἴνου.

§ 206. Λύσις: Ἀφ' οὗ τὸ ἄλευρον ἐμοιράσθη εἰς 15 οἰκογενείας, τὸ μερίδιον ἐκάστης ἦτο $\frac{1}{15}$ τοῦ ἀλεύρου. Αἱ δὲ 9 οἰ-

κογένειαι ἔλαβον 9 μερίδια, ἥτοι $\frac{9}{15}$ τοῦ ἀλεύρου.

§ 207. Λύσις: Τὸ χιλιόδραχμον μοιράζεται εἰς 1000 ἴσα μέρη. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνονται 1ον) 500 ἥτοι $\frac{500}{1000}$ χιλιόδρ.

2ον) 100, ἥτοι $\frac{100}{1000}$ χιλιόδ. 3ον) 50, ἥτοι $\frac{500}{1000}$ χιλιόδρ.

§ 208. Λύσις: 1ον) $\frac{5}{7} = 5 : 7$, $\frac{6}{11} = 6 : 11$, $\frac{23}{30} = 23 : 30$.

§ 209. Λύσις: 1ον) $3 : 8 = \frac{3}{8}$, $5 : 12 = \frac{5}{12}$, $4 : 25 = \frac{4}{25}$,

$48 : 250 = \frac{48}{250}$.

$$2ον) 37 : 5 = \frac{37}{5}, 43 : 7 = \frac{43}{7}, 126 : 11 = \frac{126}{11}.$$

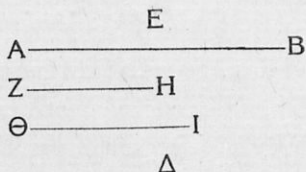
§ 210. Λύσις: 1ον) $\frac{7}{8} = 7 : 8$ ἢ $\frac{7}{8}$ εἶναι τὰ 7 ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.

2ον) $\frac{11}{18} = 11 : 18$ ἢ 11 ἀπὸ τὰ 18 ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

3ον) $\frac{17}{23} = 17 : 23$ ἢ 17 ἀπὸ τὰ 23 ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

$$§ 211. \text{ Λύσις: } \frac{2}{9}, \frac{5}{20}, \frac{15}{200}, \frac{38}{1000}, \frac{103}{2371}.$$

§ 212. Λύσις: Ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν ὅτι: Διὰ νὰ διαιρέσωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη ἓν εὐθύγραμμον τμήμα AB, γράφομεν δύο περιφερείας μὲ κέντρα A καὶ B καὶ ἀκτῖνα AB. Ἐπειτα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα Γ καὶ Δ αὐτῶν. Ἡ ΓΔ χωρίζει τὸ τμήμα AB εἰς δύο ἴσα μέρη AE καὶ EB. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἑκάστον τούτων διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑκάστον τούτων πάλιν εἰς 2 ἴσα μέρη. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ AB διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη. Ἐκαστον λοιπὸν ἀπὸ



αὐτὰ εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ AB. Μὲ τὸν διαβήτην λαμβάνομεν τμήμα ZH ἴσον μὲ τρία καὶ ΘI ἴσον μὲ 5 ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τοῦ AB.

§ 213. Λύσις: 1ον) Τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι ὅλα, ὅσα ἔχουσιν ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ 6, ἥτοι τὰ

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}.$$

2ον) Μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὅσα ἔχουσιν ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ 6. π. χ.

$$\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}$$

3ον) Μικρότερα της άκεραίας μονάδος με άριθμητήν 7 είναι όσα έχουνσιν παρονομαστήν μεγαλύτερον του 7. π. χ.

$$\boxed{\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \text{ κ.τ.λ.}}$$

4ον) Μεγαλύτερα της άκεραίας μονάδος είναι όσα έχουνσιν παρονομαστήν μικρότερον του άριθμητου 7, ήτοι τά

$$\boxed{\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{1}}$$

§ 214. Λύσις : 1ον) Μικρότερα της 1 είναι τά

$$\boxed{\frac{7}{15}, \frac{17}{42}, \frac{45}{61}}$$

2ον) Ίσα με 1 είναι τά

$$\boxed{\frac{7}{7}, \frac{25}{25}, \frac{51}{51}}$$

3ον) Μεγαλύτερα της 1 είναι τά

$$\boxed{\frac{13}{9}, \frac{35}{34}, \frac{102}{95}}$$

§ 215. Λύσις : Έπειδή $\alpha - 1 < \alpha$, τὸ κλάσμα έχει άριθμητήν

μικρότερον του παρονομαστοῦ. Είναι λοιπόν

$$\boxed{\frac{\alpha - 1}{\alpha} < 1.}$$

§ 216. Λύσις : Διὰ νά εὑρωμεν πόσα ὄγδοα ἔχει εἰς ἀριθμὸς πήχεων, πρέπει νά τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ὄγδοα. Έπομένως

$$1\text{ον}) 6 \text{ πήχ.} = \frac{6 \times 8}{8} = \frac{48}{8} \text{ πήχ.}, 10 \text{ πήχ.} = \frac{10 \times 8}{8} = \frac{80}{8} \text{ πήχ.}, \text{ καὶ } 20 \text{ πήχ.} = \frac{20 \times 8}{8} = \frac{160}{8} \text{ πήχ.}$$

$$2\text{ον}) \text{ Όμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι : } 3 \text{ ἐβδ.} = \frac{3 \times 7}{7} = \frac{21}{7} \text{ ἐβδ.}, \\ 7 \text{ ἐβδ.} = \frac{7 \times 7}{7} = \frac{49}{7}, 12 \text{ ἐβδ.} = \frac{12 \times 7}{7} = \frac{84}{7} \text{ ἐβδ.}$$

$$3\text{ον}) 16 \text{ δραχ.} = \frac{16 \times 100}{100} = \frac{1600}{100}, 23 \text{ δραχ.} = \frac{23 \times 100}{100} = \frac{2300}{100}, \\ 34 \text{ δραχ.} = \frac{34 \times 100}{100} = \frac{3400}{100} \text{ δραχ.}$$

§ 217. Λύσις : Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $3 = \frac{3 \times 15}{15} = \frac{45}{15}$.

$$5 = \frac{5 \times 20}{20} = \frac{100}{20}.$$

§ 218. Λύσις : Κατὰ τὰ προηγούμενα $\alpha = \frac{\alpha \times 2}{2}$, $\alpha = \frac{\alpha \times 5}{5}$,

$$\alpha = \frac{\alpha \times \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha}.$$

§ 219. Λύσις : $4 \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $8 \frac{7}{9} = \frac{79}{9}$, $20 \frac{1}{3} = \frac{61}{3}$, $15 \frac{3}{4} = \frac{63}{4}$,
 $15 \frac{2}{3} = \frac{47}{3}$, $8 \frac{5}{6} = \frac{53}{6}$, $9 \frac{2}{3} = \frac{29}{3}$, $12 \frac{7}{10} = \frac{127}{10}$.

§ 220. Λύσις : 1ον) $4 \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$, $12 \frac{2}{5} = \frac{62}{5}$, $20 \frac{4}{5} = \frac{104}{5}$.

2ον) $10 \frac{3}{8} = \frac{83}{8}$, $20 \frac{15}{100} = \frac{2015}{100}$.

3ον) $3 \frac{100}{400} = \frac{1300}{400}$, $15 \frac{80}{400} = \frac{6080}{400}$.

§ 221. Λύσις : 1ον) Γνωρίζομεν ὅτι $5 \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$. Ἄρα $\alpha = 23$.

2ον) $6 \frac{x}{5} = \frac{5 \times 6 + x}{5} = \frac{30 + x}{5}$.

§ 222. Λύσις : $105 \frac{7}{8} = \frac{105 \times 8 + 7}{8} = \frac{847}{8}$, $254 \frac{25}{28}$
 $= \frac{254 \times 28 + 25}{28} = \frac{7137}{28}$, $146 \frac{7}{11} = \frac{1613}{11}$, $17 \frac{80}{81} = \frac{1457}{81}$,
 $95 \frac{21}{25} = \frac{2396}{25}$, $104 \frac{52}{61} = \frac{6396}{61}$.

§ 223. Λύσις : $\frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$, $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$, $\frac{20}{5} = 4$,
 $\frac{42}{8} = 5 \frac{2}{8}$, $\frac{60}{70} < 1$, $\frac{85}{9} = 9 \frac{4}{9}$.

§ 224. Λύσις : $\frac{135}{10} = 13 \frac{5}{10}$, $\frac{525}{100} = 5 \frac{25}{100}$, $\frac{1823}{10} = 182 \frac{3}{10}$
 $\frac{4568}{100} = 45 \frac{68}{100}$, $\frac{27965}{1000} = 27 \frac{965}{1000}$, $\frac{38584}{1000} = 38 \frac{584}{1000}$.

§ 225. Λύσις : Ἄν ἔχομεν διαιρετὰς τὰ αὐτὰ διὰ τοῦ

παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός· ἄλλως γίνεται μικτός. Ἐπομένως τὸ κλάσμα $\frac{164}{2}$ γίνεται ἀκέραιος, διότι ὁ 164 διαιρεῖται διὰ 2, ἀφ' οὗ τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ κλάσμα $\frac{328}{4}$ γίνεται ἀκέραιος, διότι ὁ 328 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἀφ' οὗ ὁ 28 διαιρεῖται διὰ 4. Τὸ κλάσμα $\frac{561}{3}$ γίνεται ἀκέραιος, διότι ὁ 561 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ἀφ' οὗ τὸ ἄθροισμα $5+6+1=12$ διαιρεῖται διὰ 3. Τὸ κλάσμα $\frac{4374}{9}$ γίνεται ἀκέραιος, διότι ὁ 4374 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἀφ' οὗ $4+3+7+4=18$ διαιρεῖται διὰ 9. Ἀπὸ ἑκάστον δὲ τῶν ἄλλων γίνεται μεικτὸς ἀριθμός, διότι ὁ ἀριθμητὴς ἐκάστου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

§ 226. Λύσις : Τὰ κλάσματα $\frac{650}{25}$, $\frac{1432}{4}$, $\frac{2160}{8}$, $\frac{3322}{11}$ γίνονται ἀκέραιοι, διότι ὁ ἀριθμητὴς ἐκάστου διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὰ δὲ ἄλλα γίνονται μεικτοί, διότι ὁ ἀριθμητὴς ἐκάστου δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Π.χ. ὁ 340 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 25, διότι ὁ 40 δὲν διαιρεῖται διὰ 25. Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{340}{52}$ γίνεται μεικτὸς ἀριθμός.

§ 227. Λύσις : Ἐκαστον ἀπὸ τὰ ζητούμενα κλάσματα θὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ 15 καὶ διαιρετὸν διὰ 2. Εἶναι

λοιπὸν τὰ ἑξῆς

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{10}{2}, \frac{12}{2}, \frac{14}{2}$$

§ 228. Λύσις : Ἐκαστον ἀπὸ αὐτὰ θὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ 17 καὶ διαιρετὸν διὰ 4. Εἶναι λοιπὸν τὰ

$$\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{12}{4}, \frac{16}{4}$$

§ 229. Λύσις : 1ον) Ἀκέραιοι μεταξὺ 2 καὶ 5 εἶναι ὁ 3 καὶ 4. Ἐπομένως ζητοῦμεν ἓν κλάσμα μὲ παρονομαστήν 25 καὶ ἴσον μὲ 3 καὶ ἄλλο ἴσον μὲ 4. Εἶναι δὲ $3 = \frac{3 \times 25}{25} = \frac{75}{25}$ καὶ

$$4 = \frac{4 \times 25}{25} = \frac{100}{25}.$$

2ον) Ἀκέραιοι μεταξύ 5 καὶ 12 εἶναι οἱ 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Ἐπομένως τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι $6 = \frac{6 \times 8}{8} = \frac{48}{8}$,

$$7 = \frac{7 \times 8}{8} = \frac{56}{8}, \quad 8 = \frac{8 \times 8}{8} = \frac{64}{8}, \quad 9 = \frac{9 \times 8}{8} = \frac{72}{8}, \quad 10 = \frac{10 \times 8}{8} = \frac{80}{8}$$

$$11 = \frac{11 \times 8}{8} = \frac{88}{8}.$$

§ 230. Λύσις : Ὁ ἀκέραιος 3 ἔχει $\frac{3 \times 4}{4}$ ἢ $\frac{12}{4}$. Πρέπει λοιπὸν ὁ α νὰ παριστάνῃ τὸν 12.

§ 231. Λύσις : Ἐπειδὴ $\frac{40}{x} = 40 : x$, πρέπει νὰ εἶναι $40 : x = 8$. Ἐπειδὴ δὲ $40 : 5 = 8$, ἔπεται ὅτι ὁ x παριστάνει τὸν 5.

§ 232. Λύσις : Ἀκέραιος μεταξύ 4 καὶ 7 εἶναι ὁ 5 καὶ ὁ 6. Ἐπειδὴ $\frac{x}{9} = x : 9$, ζητοῦμεν 1ον) Τὸν διαιρετέον, ἂν 9 εἶναι διαιρέτης καὶ 5 πληκτικόν· εἶναι λοιπὸν $x = 9 \cdot 5 = 45$. 2ον) Τὸν διαιρετέον, ἂν 9 εἶναι διαιρέτης καὶ 6 πληκτικόν· εἶναι $x = 9 \cdot 6 = 54$.

§ 233. Λύσις : 1ον) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς ὄγδοα, πολομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἐπὶ $8 : 2 = 4$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

2ον) Ὅμοίως τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ πολομεν ἐπὶ $8 : 4 = 2$ καὶ εὐρίσκομεν $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. 3ον) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ $\frac{2}{16}$ εἰς ὄγδοα, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους διὰ $16 : 8 = 2$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

4ον) Ὅμοίως τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{24}$ διαιροῦμεν διὰ $24 : 8 = 3$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{6}{24} = \frac{2}{8}$.

§ 234. Λύσις : 1ον) Διὰ νὰ γίνῃ 4 ὁ 2, πρέπει νὰ πολυθῇ

ἐπὶ 2. Διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ δὲ ἡ ἀξία του, πρέπει καὶ ὁ ἀριθμητὴς νὰ πολ)σθῇ ἐπὶ 2, ὥστε $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

2ον) Διὰ νὰ γίνῃ 4 ὁ 16, πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ 4. Ἐν δὲ καὶ τὸν ἀριθμητὴν διαιρέσωμεν διὰ 4, εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

§ 235. Λύσις : Ὅπως προηγουμένως, ἐννοοῦμεν ὅτι

$$1ον) \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{9}{18}.$$

$$2ον) \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{18}{24} = \frac{24}{32}, \frac{45}{60}.$$

§ 236. Λύσις : 1ον) Ἐπειδὴ $45 = 15 \times 3$, ἔπεται ὅτι καὶ $\alpha = 9 \times 3 = 27$.

2ον) Ἐπειδὴ $63 = 9 \times 7$, ἔπεται ὅτι $\epsilon = 15 \times 7 = 105$.

3ον) Ἐπειδὴ $315 : 35 = 9$, εἶναι $315 = 35 \times 9$ καὶ $\alpha = 19 \times 9 = 171$.

4ον) Ἐπειδὴ $108 : 36 = 3$, εἶναι $108 = 36 \times 3$ καὶ $\gamma = 17 \times 3 = 51$.

5ον) Ἐπειδὴ $189 : 21 = 9$, εἶναι $189 : 9 = 21$ καὶ $\delta = 900 : 9 = 100$.

§ 237. Λύσις : $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$
 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$

§ 238. Λύσις : Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου μὲ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν.

Οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \frac{16}{40} = \frac{2}{5},$
 $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}, \frac{85}{120} = \frac{17}{24}, \frac{9}{24} = \frac{3}{8}, \frac{18}{24} = \frac{3}{4}, \frac{35}{49} = \frac{5}{7}, \frac{16}{64} = \frac{1}{4},$
 $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}.$

§ 239. Λύσις : 1ον) Ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 6 καὶ 3 εἶναι 6. Ὡστε :

$$6 : 6 = 1, 6 : 3 = 2 \text{ καὶ ἐπομένως } \frac{5}{6}, \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}.$$

$$2ον) \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}, \quad \frac{7}{5} = \frac{7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{28}{20}.$$

$$3ον) \quad \text{Ἐλ. κ. π. τῶν 4 καὶ 18 εἶναι 36. Ἐπειδὴ δὲ } 36 : 4 = 9, \\ 36 : 18 = 2, \text{ ἔπεται ὅτι } \frac{1}{4} = \frac{1 \times 9}{4 \times 9} = \frac{9}{36}, \quad \frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{18 \times 2} = \frac{14}{36}.$$

$$4ον) \quad 8 = 2^3, 18 = 2 \times 3^2. \text{ Ἐπομένως ἑ.κ.π. τῶν 8 καὶ 18 εἶναι} \\ 2^3 \times 3^2 = 72. \text{ Ἐπειδὴ δὲ } 72 : 8 = 9, \text{ ἔπεται ὅτι } \frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{45}{72}.$$

$$\text{Ἐπίσης, ἐπειδὴ } 72 : 18 = 4, \text{ εἶναι } \frac{9}{18} = \frac{9 \times 4}{18 \times 4} = \frac{36}{72}.$$

$$5ον) \quad \frac{8}{12} = \frac{8 \times 38}{12 \times 38} = \frac{304}{456}, \quad \frac{7}{38} = \frac{7 \times 12}{38 \times 12} = \frac{84}{456}.$$

$$6ον) \quad \text{Ἐ. κ. π. τῶν 14 καὶ 21 εἶναι 42 καὶ } 42 : 14 = 3, 42 : 21 \\ = 2. \text{ Ἐπομένως } \frac{5}{14} = \frac{5 \times 3}{14 \times 3} = \frac{15}{42}, \quad \frac{8}{21} = \frac{8 \times 2}{21 \times 2} = \frac{16}{42}.$$

$$\S \text{ 240. Λύσις : } 1ον) \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{12}. \text{ Ἐ. κ. π. 60. Ἐπομένως}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 12}{5 \times 12} = \frac{24}{60}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 10}{6 \times 10} = \frac{50}{60}, \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}.$$

$$2ον) \quad \text{Ἐ. κ. π. 20. Ἐπομένως } \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}, \quad \frac{7}{10} = \frac{7 \times 2}{10 \times 2} \\ = \frac{14}{20}, \quad \frac{8}{20}$$

$$3ον) \quad \text{Ἐ. κ. π. 72. Ἐπομένως } \frac{4}{6} = \frac{4 \times 12}{6 \times 12} = \frac{48}{72}, \quad \frac{6}{9} = \frac{6 \times 8}{9 \times 8} = \frac{48}{72}, \\ \frac{12}{8} = \frac{12 \times 9}{8 \times 9} = \frac{108}{72}, \quad \frac{24}{36} = \frac{24 \times 2}{36 \times 2} = \frac{48}{72}.$$

$$4ον) \quad \text{Ἐ. κ. π. 100. Ἐπομένως } \frac{7}{10} = \frac{7 \times 10}{10 \times 10} = \frac{70}{100}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100}.$$

§ 241. Λύσις : Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{6} < 1$, ὁ ἀριθμητὴς α πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{6}$ ἀνάγωγον, πρέπει ὁ α νὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 6. Ὡστε ὁ α δύναται νὰ εἶναι 1 ἢ 5.

§ 242. Λύσις : Ἄν σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, ἐν-
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

νοούμεν ότι ο x παριστάνει ἄριθμὸν μικρότερον τοῦ 8 καὶ πρῶτον πρὸς αὐτόν. Ὡστε ὁ x δύναται νὰ παριστάνῃ τὸν 1, ἢ τὸν 3 ἢ τὸν 5 ἢ τὸν 7.

§ 243. Λύσις: Ἐπειδὴ $6 < \alpha$, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{6} > 1, \frac{6}{\alpha} < 1$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha < \alpha + 6$, εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha+6} < 1$.

§ 244. Λύσις: Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου τῶν τριῶν πρῶτων μὲ τὸν κοινὸν διαιρέτην α αὐτῶν. Οὕτω $\frac{5 \times \alpha}{9 \times \alpha} = \frac{5}{9}$,
 $\frac{\alpha}{2 \times \alpha} = \frac{1}{2}$, $\frac{6 \times \alpha}{8 \times \alpha} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{\alpha \times \alpha}{3 \times \alpha} = \frac{\alpha}{3}$. Τοὺς δὲ ὅρους τοῦ τελευταίου διαιροῦμεν διὰ 6 καὶ εὐρίσκομεν $\frac{2 \times 6^2}{5 \times 6} = \frac{2 \times 6}{5}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 245. Λύσις: $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$, $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9} = \frac{15}{9}$
 $= 1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$, $\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

§ 246. Λύσις: $\frac{7+9}{13} = \frac{7}{13} + \frac{9}{13}$, $\frac{8+11+17}{23} = \frac{8}{23} + \frac{11}{23} + \frac{17}{23}$,
 $\frac{16+35+18+1}{101} = \frac{16}{101} + \frac{35}{101} + \frac{18}{101} + \frac{1}{101}$.

§ 247. Λύσις: $\frac{3}{4} + \frac{4}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
 $\frac{2}{6} + \frac{5}{9} + \frac{7}{18} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{14}{36} + \frac{1}{36} = \frac{47}{36} = 1\frac{11}{36}$.
 $\frac{2}{24} + \frac{3}{36} + \frac{5}{12} + \frac{6}{9} = \frac{6}{72} + \frac{6}{72} + \frac{30}{72} + \frac{48}{72} = \frac{90}{72} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

§ 248. Λύσις: 1ον) $5\frac{3}{4} + 12 = (5+12) + \frac{3}{4} = 17\frac{3}{4}$ ἢ

$$5\frac{3}{4} + 12 = \frac{23}{4} + \frac{48}{4} = \frac{71}{4} = 17\frac{3}{4}.$$

$$4\frac{2}{9} + 6 = (4+6) + \frac{2}{9} = 10\frac{2}{9} \quad \text{ἢ} \quad 4\frac{2}{9} + 6 = \frac{38}{9} + \frac{54}{9} = \frac{92}{9} = 10\frac{2}{9}.$$

$$10\frac{1}{5} + 5 = 15\frac{1}{5} \quad \eta \quad 10\frac{1}{5} + 5 = \frac{51}{5} + \frac{25}{5} = \frac{76}{5} = 15\frac{1}{5}.$$

$$6\frac{4}{7} + 10 = 16\frac{4}{7} \quad \eta \quad 6\frac{4}{7} + 10 = \frac{46}{7} + \frac{70}{7} = \frac{116}{7} = 16\frac{4}{7}.$$

$$2ov) \quad 1\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{6}{5} + \frac{3}{4} = \frac{24+15}{20} = 1\frac{19}{20} \quad \eta$$

$$1\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{4+15}{20} = 1\frac{19}{20}.$$

$$5\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{28}{5} + \frac{1}{6} = \frac{168+5}{30} = \frac{173}{30} = 5\frac{23}{30} \quad \eta$$

$$5\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = 5 + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\right) = 5 + \frac{18+5}{30} = 5\frac{23}{30}.$$

$$10\frac{5}{9} + \frac{2}{7} = \frac{95}{9} + \frac{2}{7} = \frac{665+18}{63} = \frac{683}{63} = 10\frac{53}{63} \quad \eta$$

$$10\frac{5}{9} + \frac{2}{7} = 10 + \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{7}\right) = 10 + \frac{35+18}{63} = 10\frac{53}{63}.$$

$$16\frac{3}{10} + \frac{7}{12} = \frac{163}{10} + \frac{7}{12} = \frac{978}{60} + \frac{35}{60} = \frac{1013}{60} = 16\frac{53}{60} \quad \eta$$

$$16\frac{3}{10} + \frac{7}{12} = 16 + \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{12}\right) = 16 + \frac{18+35}{60} = 16\frac{53}{60}.$$

$$3ov) \quad 2\frac{1}{5} + 4\frac{3}{4} = (2+4) + \left(\frac{4}{20} + \frac{15}{20}\right) = 6\frac{19}{20},$$

$$7\frac{1}{2} + 3\frac{5}{8} = (7+3) + \left(\frac{4}{8} + \frac{5}{8}\right) = 10 + 1\frac{1}{8} = 11\frac{1}{8},$$

$$11\frac{1}{4} + 3\frac{5}{6} = (11+3) + \left(\frac{3}{12} + \frac{10}{12}\right) = 14 + \frac{13}{12} = 15\frac{1}{12}.$$

$$4ov) \quad 6\frac{1}{5} + 3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{5} = (6+3+1) + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = 10 + \frac{6+10}{15}$$

$$= 11\frac{1}{15},$$

$$5\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4} + 1\frac{5}{6} = (5+4+1) + \left(\frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{10}{12}\right) = 10 + \frac{21}{12}$$

$$= 10 + 1\frac{9}{12} = 11\frac{3}{4},$$

$$10\frac{1}{9} + 4\frac{1}{8} + 6\frac{5}{6} = (10+4+6) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6}\right)$$

$$= 20 + \left(\frac{8}{72} + \frac{9}{72} + \frac{60}{72}\right) = 20 + \frac{77}{72} = 21\frac{5}{12}.$$

τὰς ὀκάδας, τὰς ὁποίας ἡγόρασεν ἀπὸ τοὺς δύο παντοπώλας.

$$\begin{aligned} \text{"Ὡστε ἡγόρασε τὸ ὄλον } 5\frac{3}{4} + 3\frac{5}{8} &= (5+3) + \left(\frac{6}{8} + \frac{5}{8}\right) = 8 + \frac{11}{8} \\ &= 8 + 1\frac{3}{8} = 9\frac{3}{8} \text{ ὀκάδας.} \end{aligned}$$

§ 250. Λύσις : Τὸ τεμάχιον ἀποτελεῖτο ἀπὸ ὄλους τοὺς πήχεις, τοὺς ὁποίους ἐπώλησε καὶ ἀπὸ τοὺς πήχεις, οἱ ὅτιοι ἔμειναν. Εἶχε λοιπὸν $4\frac{1}{4} + 8\frac{5}{8} + 6\frac{3}{4} + 30\frac{6}{8} = (4+8+6+30) + \left(\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{6}{8}\right) = 48 + \frac{19}{8} = 48 + 2\frac{3}{8} = 50\frac{3}{8}$ πήχ.

§ 251. Λύσις : Τὸ βαρέλιον εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸν ὅποιον ἐπώλησε καὶ ἐκεῖνον, ὃ ὁποῖος ἔμεινε μετὰ. Εἶχε λοιπὸν $12\frac{3}{4} + 8\frac{1}{8} + 4\frac{3}{4} = (12+8+4) + \left(\frac{6}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right) = 24 + \frac{13}{8} = 24 + 1\frac{5}{8} = 25\frac{5}{8}$ ὀκάδας.

§ 252. Λύσις : Πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς ὁποίας ἐξώδευσε τοὺς τρεῖς μῆνας. Ἐξώδευσε λοιπὸν $22\frac{1}{4} + 18\frac{5}{8} + 24\frac{3}{4} = (22+18+24) + \left(\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}\right) = 64 + \frac{13}{8} = 64 + 1\frac{5}{8} = 65\frac{5}{8}$ ὀκάδας.

253. Λύσις : Τὴν γ' ἡμέραν διήνυσσε $30\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 33$ χιλίόμε. Ἐπομένως τὰς τρεῖς ἡμέρας διήνυσεν $28\frac{3}{4} + 30\frac{1}{2} + 33 = (28+30+33) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) = 91\frac{5}{4} = 92\frac{1}{4}$ χιλίόμε,

B' Τρόπος : Εἶναι φανερόν ὅτι τὰς τρεῖς ἡμέρας διήνυσεν $28\frac{3}{4} + 30\frac{1}{2} + \left(30\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) = 28\frac{3}{4} + 30\frac{1}{2} + 30\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$ κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ιδιότητα τῆς προσθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ $28\frac{3}{4} + 30\frac{1}{2} + 30\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = (28+30+30+2) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right) = 90 + \frac{9}{4} = 90 + 2\frac{1}{4} = 92\frac{1}{4}$ χιλίόμε.

§ 254. Λύσις : Τὸ β' κιβώτιον ζυγίζει $145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8}$
 $= (145 + 10) + (\frac{16}{40} + \frac{5}{40}) = 155 \frac{21}{40}$ ὁκ. Τὸ δὲ γ' ζυγίζει
 $155 \frac{21}{40} + 15 \frac{5}{8} = (155 + 15) + (\frac{21}{40} + \frac{25}{40}) = 170 + \frac{46}{40}$
 $= 170 + 1 \frac{6}{40} = 171 \frac{3}{20}$ ὁκ.

“Ὅλον τὸ βάρος εἶναι λοιπὸν $145 \frac{2}{5} + 155 \frac{21}{40} + 171 \frac{3}{20}$
 $= (145 + 155 + 171) + (\frac{16}{40} + \frac{21}{40} + \frac{6}{40}) = 471 + \frac{43}{40} = 472 \frac{3}{40}$
 κάδας.

Β' Τρόπος : Τὸ α' ζυγίζει $145 \frac{2}{5}$, τὸ β' ζυγίζει $(145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8})$
 τὸ γ' $(145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8}) + 15 \frac{5}{8} = 145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8} + 15 \frac{5}{8}$.

Ἐπομένως ὅλον τὸ βάρος εἶναι

$145 \frac{2}{5} + (145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8}) + (145 \frac{2}{5} + 10 \frac{1}{8} + 15 \frac{5}{8})$
 $= (145 + 145 + 10 + 145 + 10 + 15) + (\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{8} + \frac{2}{5} + \frac{6}{8})$
 $= 470 + (\frac{6}{5} + \frac{7}{8}) = 470 + \frac{48 + 35}{40} = 470 + 2 \frac{3}{40} = 472 \frac{3}{40}$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 255. Λύσις : $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{8}{15} - \frac{3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$,

$\frac{19}{25} - \frac{11}{25} = \frac{8}{25}$, $\frac{37}{30} - \frac{7}{30} = \frac{30}{30} = 1$, $\frac{55}{50} - \frac{15}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$,

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{6} - \frac{7}{12} = \frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12}$,

$\frac{9}{10} - \frac{4}{15} = \frac{27}{30} - \frac{8}{30} = \frac{19}{30}$, $\frac{6}{8} - \frac{2}{6} = \frac{18}{24} - \frac{8}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$,

$\frac{17}{20} - \frac{11}{30} = \frac{51}{60} - \frac{22}{60} = \frac{29}{60}$.

§ 256. Λύσις : Ἀφ' οὗ εἶχε νὰ σκάψῃ τὰ $\frac{7}{8}$ καὶ ἔσκαψε

τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀμπέλου, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ σκαφὲν μέρος τῆς ἀμπέλου ἀπὸ τὸ μέρος, τὸ ὅποῖον ἔπρεπε νὰ σκάψῃ, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον μέρος μένει ἀκόμῃ, διὰ νὰ σκάψῃ.

$$\text{Μένει λοιπὸν } \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8} \text{ τῆς ἀμπέλου}$$

§ 257. Λύσις : Εἰς μίαν ἡμέραν ὁ μὲν πατήρ ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ υἱὸς τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτοῦ. Ἐκτελεῖ λοιπὸν ὁ πατήρ περισσότερον ἀπὸ τὸν υἱὸν $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5}{60} - \frac{3}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ τοῦ ἔργου εἰς 1 ἡμέραν.

§ 258. Λύσις : Ἡ α', ἀφ' οὗ εἰς 12 ἡμέρας ἔπλεξε 15 μέτρα, εἰς 1 ἡμέραν ἔπλεξε $15 : 12 = \frac{15}{12}$ μέτρ. καὶ ἡ β' $\frac{18}{14}$ μέτρ. Διὰ νὰ ἴδωμεν λοιπὸν ποῖα ἔπλεξε περισσότερον, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὰ κλάσματα $\frac{15}{12}$, $\frac{18}{14}$ εἰς ὁμώνυμα.

$$\text{Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι } \frac{15}{12} = \frac{15 \times 7}{12 \times 7} = \frac{105}{84}, \quad \frac{18}{14} = \frac{18 \times 6}{14 \times 6} = \frac{108}{84}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{18}{14} > \frac{15}{12}$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ β' ἔπλεξε περισσότερον ἀπὸ τὴν α'. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσον περισσότερον ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν $\frac{18}{14} - \frac{15}{12}$. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{18}{14} - \frac{15}{12} = \frac{108}{84} - \frac{105}{84} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$ μέτρου.

$$\begin{aligned} \text{§ 259. Λύσις : 1ον) } 1 - \frac{3}{5} &= \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \quad 12 - \frac{7}{8} = \frac{96}{8} - \frac{7}{8} = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8} \text{ ἢ } 12 - \frac{7}{8} = 11\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = 11 + \left(\frac{8}{8} - \frac{7}{8}\right) = \\ &= 11\frac{1}{8}, \quad 69 - \frac{3}{11} = 68\frac{11}{11} - \frac{3}{11} = 68\frac{8}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2ον) } 3 - 2\frac{1}{4} &= 2\frac{4}{4} - 2\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ ἢ } 3 - 2\frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}, \\ 9 - 4\frac{3}{5} &= 8\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5}, \quad 18 - 7\frac{9}{10} = 17\frac{10}{10} - 7\frac{9}{10} = 10\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{3ον) } 8\frac{4}{9} - 3\frac{5}{9} = 5\frac{4}{9} \text{ καὶ } 12\frac{1}{5} - 6\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} \text{ ἢ } 12\frac{1}{5} - 6\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - 6\frac{4}{5} = 6\frac{1-4}{5} = 6\frac{3}{5} = 6\frac{3}{5}$$

$$4ον) \ 5\frac{5}{9} - 4\frac{1}{9} = (5-4) + \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{9}\right) = 1\frac{4}{9}, \ 9\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{1}{2}, \ 18\frac{4}{5} - 9\frac{3}{5} = 9\frac{1}{5}.$$

$$\S \ 260. \ \text{Λύσις: } 1ον) \ 6\frac{5}{12} - \frac{3}{24} = 6 + \left(\frac{10}{24} - \frac{3}{24}\right) = 6\frac{7}{24}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 6\frac{7}{24} + \frac{3}{24} = 6\frac{10}{24} = 6\frac{5}{12}.$$

$$3\frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 3\frac{2}{9}. \ \text{Δοκιμή: } 3\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 3\frac{4}{9}.$$

$$25\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = 24 + \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\right) = 24 + \left(\frac{28}{20} - \frac{15}{20}\right) = 24\frac{13}{20}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 24\frac{13}{20} + \frac{3}{4} = 24 + \left(\frac{13}{20} + \frac{15}{20}\right) = 24 + \frac{28}{20} = 24 + 1\frac{8}{20} = 25\frac{8}{20} = 25\frac{2}{5}.$$

$$2ον) \ 10\frac{4}{5} - 5\frac{3}{10} = 5 + \left(\frac{8}{10} - \frac{3}{10}\right) = 5\frac{5}{10} = 5\frac{1}{2}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 5\frac{1}{2} + 5\frac{3}{10} = (5+5) + \left(\frac{5}{10} + \frac{3}{10}\right) = 10\frac{8}{10} = 10\frac{4}{5}.$$

$$15\frac{4}{7} - 10\frac{2}{5} = 5 + \left(\frac{4}{7} - \frac{2}{5}\right) = 5 + \left(\frac{20}{35} - \frac{14}{35}\right) = 5\frac{6}{35}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 5\frac{6}{35} + 10\frac{2}{5} = (5+10) + \left(\frac{6}{35} + \frac{14}{35}\right) = 15\frac{20}{35} = 15\frac{4}{7}.$$

$$40\frac{5}{6} - 8\frac{5}{9} = 32 + \left(\frac{15}{18} - \frac{10}{18}\right) = 32\frac{5}{18}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 32\frac{5}{18} + 8\frac{5}{9} = 40 + \left(\frac{5}{18} + \frac{10}{18}\right) = 40\frac{15}{18} = 40\frac{5}{6}.$$

$$3ον) \ 5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = 4\frac{3}{2} - 3\frac{3}{4} = 1 + \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) = 1\frac{3}{4}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 1\frac{3}{4} + 3\frac{3}{4} = 4 + \frac{6}{4} = 5\frac{2}{4} = 5\frac{1}{2}.$$

$$18\frac{2}{5} - 10\frac{5}{6} = 7 + \left(\frac{7}{5} - \frac{5}{6}\right) = 7 + \left(\frac{42}{30} - \frac{25}{30}\right) = 7\frac{17}{30}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 7\frac{17}{30} + 10\frac{5}{6} = 17 + \frac{17+25}{30} = 17 + \frac{42}{30} = 18 + \frac{12}{30} = 18\frac{2}{5}.$$

$$28\frac{4}{9} - 16\frac{7}{8} = 27\frac{13}{9} - 16\frac{7}{8} = 11 + \left(\frac{13}{9} - \frac{7}{8}\right) = 11 + \frac{104-63}{72} = 11\frac{41}{73}.$$

$$\text{Δοκιμή: } 11\frac{41}{72} + 16\frac{7}{8} = (11+16) + \left(\frac{41}{72} + \frac{63}{72}\right) = 27 + \frac{104}{72} = 27 + 1\frac{32}{72} = 28\frac{4}{9}.$$

§ 261. Λύσις: 1ον) 'Ο ζητούμενός και $\frac{11}{23}$ αποτελοῦσι $\frac{45}{46}$. "Αν λοιπὸν ἀπὸ $\frac{45}{46}$ ἀφαιρέσωμεν $\frac{11}{23}$, εὐρίσκομεν τὸν ζητούμενον. Εἶναι δὲ οὗτος $\frac{45}{46} - \frac{11}{23} = \frac{45}{46} - \frac{22}{46} = \frac{23}{46}$.

"Η ἰσότης λοιπὸν συμπληρώνεται οὕτω:

$$\frac{11}{23} + \frac{23}{46} = \frac{45}{46}$$

2ον) 'Ομοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος εἶναι $\frac{73}{75} - \frac{19}{25}$
 $= \frac{73}{75} - \frac{57}{75} = \frac{16}{75}$. "Η δὲ ἰσότης συμπληρώνεται οὕτω:

$$\frac{16}{75} + \frac{19}{25} = \frac{73}{75}$$

3ον) 'Ομοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος εἶναι
 $29 \frac{19}{26} - 5 \frac{7}{13} = 24 + \left(\frac{19}{26} - \frac{14}{26} \right) = 24 \frac{5}{26}$. "Η ἰσότης λοιπὸν συμπληρώνεται οὕτω

$$5 \frac{7}{13} + 24 \frac{5}{26} = 29 \frac{19}{26}$$

§ 262. Λύσις: 'Απὸ ὅλον τὸ βάρος δοχείου καὶ βουτύρου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος τοῦ δοχείου. Χωρεῖ λοιπὸν
 $6 \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = 5 \frac{7}{4} - \frac{7}{8} = 5 + \left(\frac{14-7}{8} \right) = 5 \frac{7}{8}$ ὀκ. βουτύρου

§ 263. Λύσις: 'Απὸ τὸ βάρος $12 \frac{7}{8}$ ὀκ. τοῦ δοχείου καὶ τοῦ ἐλαίου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος $3 \frac{5}{12}$ ὀκ. τοῦ δοχείου. Χωρεῖ λοιπὸν $12 \frac{7}{8} - 3 \frac{5}{12} = 9 + \left(\frac{21}{24} - \frac{10}{24} \right) = 9 \frac{11}{24}$ ὀκ. ἐλαίου.

§ 264. Λύσις: Αἱ ὀκάδες, τὰς ὁποίας ἔφαγον καὶ αἱ $12 \frac{4}{5}$ ὀκάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, αποτελοῦσι τὰς $22 \frac{3}{10}$, τὰς ὁποίας ἠγόρασεν. "Εφαγον λοιπὸν $22 \frac{3}{10} - 12 \frac{4}{5} = 21 \frac{13}{10} - 12 \frac{4}{5}$
 $= 9 + \left(\frac{13}{10} - \frac{8}{10} \right) = 9 \frac{5}{10} = 9 \frac{1}{2}$ ὀκάδας.

§ 265. Λύσις: Εἶναι φανερόν ὅτι πρέπει ἀπὸ ὅλον τὸ βάρος νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος $1 \frac{2}{5}$ ὀκ. τοῦ σάκκου. "Ωστε

$$\begin{aligned} \text{ἠγόρασεν } 40 \frac{3}{4} - 1 \frac{2}{5} &= 39 + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) = 39 + \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} \right) \\ &= 39 \frac{7}{20} \text{ ὀκάδας ἀνθράκων.} \end{aligned}$$

§ 266. Λύσις : Πρέπει ἀπὸ $10 \frac{1}{10}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $8 \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Χρειάζεται λοιπὸν } 10 \frac{1}{10} - 8 \frac{1}{3} &= \left(9 \frac{11}{10} - 8 \frac{1}{3} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{11}{10} - \frac{1}{3} \right) = 1 + \left(\frac{33}{30} - \frac{10}{30} \right) = 1 \frac{23}{30} \text{ ὥρας.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{§ 267. Λύσις : Τὰς τρεῖς ἡμέρας ἐπώλησεν } 8 \frac{1}{2} + 12 \frac{3}{4} \\ + 16 \frac{1}{8} &= (8 + 12 + 16) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right) = 36 + \left(\frac{4}{8} + \frac{6}{8} + \frac{1}{8} \right) \\ &= 36 + \frac{11}{8} = 37 \frac{3}{8} \text{ πήχεις. Ἐμείναν λοιπὸν} \end{aligned}$$

$$50 - 37 \frac{3}{8} = 49 \frac{8}{8} - 37 \frac{3}{8} = 12 \frac{5}{8} \text{ πήχεις.}$$

$$\begin{aligned} \text{§ 268. Λύσις : Τὴν β' ἡμέραν διήνυσε } 35 \frac{3}{4} - 5 \frac{2}{5} \\ &= 30 + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) = 30 + \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} \right) = 30 \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐπομένως τὰς δύο ἡμέρας διήνυσε } 35 \frac{3}{4} + 30 \frac{7}{20} \\ &= 65 + \left(\frac{15}{20} + \frac{7}{20} \right) = 65 + \frac{22}{20} = 66 \frac{2}{20} = 66 \frac{1}{10} \text{ χιλ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Μένουσι λοιπὸν ἀκόμη διὰ νὰ διανύσῃ τὴν γ' ἡμέραν} \\ 100 - 66 \frac{1}{10} = 99 \frac{10}{10} - 66 \frac{1}{10} = 33 \frac{9}{10} \text{ χιλιόμε.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{§ 269. Λύσις : Ἀφ' οὗ τὰ τρία μαζί ζυγίζουσιν } 127 \frac{5}{8} \text{ ὀκ.} \\ \text{καὶ τὰ δύο βαρύτερα } 94 \frac{3}{4} \text{ ὀκ, τὸ γ', τὸ ἐλαφρότερον ζυγί-} \\ \text{ζει } 127 \frac{5}{8} - 94 \frac{3}{4} = 126 \frac{13}{8} - 94 \frac{6}{8} = 32 \frac{7}{8} \text{ ὀκ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ζυγίζει } 10 \frac{1}{10} \text{ ὀκ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ} \\ \text{μεσαῖον, ἔπεται ὅτι τὸ μεσαῖον ζυγίζει } 32 \frac{7}{8} + 10 \frac{1}{2} = \\ 42 + \left(\frac{7}{8} + \frac{4}{8} \right) = 42 + \frac{11}{8} = 43 \frac{3}{8} \text{ ὀκάδας. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο} \\ \text{καὶ τὸ βαρύτερον ζυγίζουσι μαζί } 94 \frac{3}{4} \text{ ὀκάδας, τὸ βαρύτερον} \end{aligned}$$

ζυγίζει $94 \frac{3}{4} - 43 \frac{3}{8} = 51 + \left(\frac{6}{8} - \frac{3}{8} \right) = 51 \frac{3}{8}$ ὀκάδας.

§ 270. Λύσις : 'Ο β' ἔλαβε $12 \frac{3}{5} - 2 \frac{2}{3} = 11 \frac{8}{5} - 2 \frac{2}{3}$
 $= 9 + \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{3} \right) = 9 \frac{14}{15}$. 'Ο δὲ γ' ἔλαβε $9 \frac{14}{15} - 2 \frac{5}{8}$
 $= 7 + \left(\frac{112}{120} - \frac{75}{120} \right) = 7 \frac{37}{120}$. "Ολον λοιπὸν τὸ τεμάχιον εἶχε μη-
 κος $12 \frac{3}{5} + 9 \frac{14}{15} + 7 \frac{37}{120} = (12 + 9 + 7) + \left(\frac{72}{120} + \frac{112}{120} + \frac{37}{120} \right)$
 $= 28 + \frac{221}{120} = 28 + 1 \frac{101}{120} = 29 \frac{101}{120}$ μέτρα.

§ 271. Λύσις : Εἰς μίαν ὥραν ὁ α' κρουνὸς γεμίζει τὸ $\frac{1}{8}$
 τῆς δεξαμενῆς, ὁ β' τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτῆς καὶ ὁ γ' ἀδειάζει τὸ $\frac{1}{15}$
 αὐτῆς.

'Επομένως οἱ δύο πρῶτοι εἰς μίαν ὥραν γεμίζουν $\frac{1}{8} + \frac{1}{12}$
 $= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{5}{24}$ τῆς δεξαμενῆς. 'Επειδὴ ὅμως κατὰ τὴν ὥραν
 ταύτην ὁ γ' κρουνὸς ἀδειάζει τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς δεξαμενῆς, μένει γε-
 μάτον τὸ $\frac{5}{24} - \frac{1}{15} = \frac{25}{120} - \frac{8}{120} = \frac{17}{120}$ τῆς δεξαμενῆς

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 272. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι : "Αν πολῖμεν ἓνα κλάσμα
 ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμητὴν του. Καὶ
 ὅτι : "Αν πολῖμεν ἓνα κλάσμα ἐπὶ ἓν πολλαπλάσιον τοῦ παρο-
 νομαστοῦ, εὐρίσκομεν τὸ ἰσοπολῖσιον τοῦ ἀριθμητοῦ. 'Επομέ-

νως : 1ον) $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, $\frac{5}{6} \times 6 = 5$, $\frac{7}{12} \times 12 = 7$, $\frac{9}{14} \times 14 = 9$.

2ον) $\frac{3}{4} \times 8 = 6$, $\frac{4}{5} \times 15 = 12$, $\frac{1}{8} \times 72 = 9$, $\frac{7}{12} \times 60 = 35$.

§ 273. Λύσις : $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{6} = 2 \frac{1}{2}$, ἢ
 $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$, $\frac{7}{9} \times 4 = \frac{28}{9} = 3 \frac{1}{9}$, $\frac{4}{6} \times 8 = \frac{32}{6} = 5 \frac{1}{3}$,
 $\frac{1}{8} \times 20 = \frac{20}{8} = 2 \frac{1}{2}$.

§ 274. Λύσις : 1ον) 'Αφ' οὗ τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμη-

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

τής, πρέπει νὰ πολὺμεν τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστήν 8.
2ον) Διὰ νὰ εὕρωμεν 10 δηλ. διπλάσιον τοῦ ἀριθμητοῦ,
πρέπει νὰ πολὺμεν τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ παρονο-
μαστοῦ, ἥτοι ἐπὶ 16. 3ον) Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ 15 δηλ. 5×3 , πρέ-
πει νὰ τὸ πολὺμεν ἐπὶ $8 \times 3 = 24$.

§ 275. Λύσις: 1ον) 'Αφ' οὗ τὸ $\frac{3}{4}$ πολὺμενον ἐπὶ α γίνεται ὁ
ἀριθμητὴς 3, ἔπεται ὅτι ὁ α εἶναι παρονομαστής, ἥτοι 4.

2ον) 'Αφ' οὗ τὸ $\frac{\alpha}{5}$ πολὺμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν διδὲι
4, οὗτος πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμητὴς, ἥτοι $\alpha = 4$.

3ον) 'Αφ' οὗ τὸ γινόμενον $\frac{4}{7} \times \alpha$ εἶναι 8 δηλ. διπλάσιον
τοῦ ἀριθμητοῦ, ἔπεται ὅτι ὁ α εἶναι διπλάσιος τοῦ παρονομα-
στοῦ 7, ἥτοι 14.

§ 276. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ἑσπέραν καίει $\frac{3}{8}$ ὁκάς, εἰς 30
ἑσπέρας τοῦ μηνὸς θὰ καύσῃ 30 φορές τὰ $\frac{3}{8}$, ἥτοι:

$$\frac{3}{8} \times 30 = \frac{90}{8} = 11 \frac{2}{8} = 11 \frac{1}{4} \text{ ὁκάδας.}$$

§ 277. Λύσις: Τὸ βαρέλιον ἔχει τόσον οἶνον, ὅσον χωροῦ-
σιν αἱ 360 φιάλαι. Ἐπειδὴ ἡ 1 φιάλη χωρεῖ $\frac{3}{4}$ ὁκάς, αἱ 360 τοι-
αῦται φιάλαι χωροῦσι $\frac{3}{4} \times 360 = \frac{3}{4} \times (4 \times 90) = 3 \times 90 = 270$ ὁκάδ.

§ 278. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἡ 1 πλευρὰ ἔχει μῆκος $\frac{3}{10}$ μέτ., αἱ 4
πλευραὶ αὐτοῦ ἔχουσι μῆκος $\frac{3}{10} \times 4 = \frac{12}{10} = 1 \frac{2}{10} = 1 \frac{1}{5}$ μέτ.

§ 279. Λύσις: Τὰ εἶδη ἐνὸς ἀπόρου ἤξιζον $3 \frac{1}{2} + 8 \frac{1}{2} = 12$ χι-
λιόδρ. Ἄρα τὰ εἶδη τῶν 155 ἀπόρων ἤξιζον 155 φορές τὰ 12
χιλιόδραχμα, ἥτοι $12 \times 156 = 1872$ χιλιόδραχμα.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ ἡ μία ὁκά τοῦ διανεμηθέντος ἀλεύρου ἤξιζε
 $3 \frac{1}{2}$ χιλιόδρ., αἱ 156 ὁκάδες αὐτοῦ ἤξιζον 156 φορές τὰ $3 \frac{1}{2}$ χιλιόδρ.,
ἥτοι $3 \frac{1}{2} \times 156 = 468 + 78 = 546$ χιλιόδρ.

Ὁμοίως εὐνοοῦμεν ὅτι αἱ 156 ὀκ. τοῦ κρέατος ἤξιζον

$$8 \frac{1}{2} \times 156 = 1248 + 78 = 1326 \text{ χιλιάδ.}$$

Ἐπομένως ἡ ἀξία ὅλων τῶν εἰδῶν ἦτο $546 + 1326 = 1872$ χιλιάδρ.

§ 280 Λύσις : 1ον) Πολλίμεν καὶ τὰ δύο κλάσματα ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 15 τῶν παρονομαστῶν καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{3}{5} \times 15 = 3 \times 3 = 9 \text{ καὶ } \frac{9}{15} \times 15 = 9. \text{ Ἐπομένως } \frac{3}{5} = \frac{9}{15}.$$

Β' τρόπος : Ἀπλοποιούντες τὸ κλάσμα $\frac{9}{15}$ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Γ' τρόπος : Τρέποντες τὰ $\frac{3}{5}$ εἰς δέκατα πέμπτα εὐρίσκομεν ὅτι

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}.$$

2ον) Ὁμοίως $\frac{7}{9} \times 36 = 7 \times 4 = 28$, $\frac{28}{36} \times 36 = 28$. Ἐπομένως $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$. Εὐκόλως δὲ ἐφαρμόζομεν καὶ τοὺς ἄλλους δύο προηγούμενους τρόπους.

3ον) $\frac{8}{11} \times 44 = 8 \times 4 = 32$, $\frac{32}{44} \times 44 = 32$. Ἄρα $\frac{8}{11} = \frac{32}{44}$ κτ.λ.

§ 281. Λύσις : 1ον) Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{14} \times 14 = \alpha$ καὶ $\frac{4}{7} \times 14 = 4 \times 2 = 8$, συμπεραίνομεν ὅτι $\alpha = 8$.

2ον) Ἐπειδὴ $\frac{6}{27} \times 27 = 6$ καὶ $\frac{5}{9} \times 27 = 5 \times 3 = 15$, συμπεραίνομεν ὅτι $\delta = 15$.

3ον) Ἐπειδὴ $24 = 6 \times 4$, ἔπεται ὅτι καὶ $\gamma = 11 \times 4 = 44$.

3ον) Ἐπειδὴ $35 = 7 \times 5$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $20 = \alpha \times 5$, ἐπομένως $\alpha = 4$.

§ 282. Λύσις : 1ον) $\frac{4}{15} < \frac{7}{15} < \frac{9}{15} < \frac{12}{15}$.

2ον) $\frac{5}{12} < \frac{5}{9} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$, διότι ταῦτα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον παρονομαστήν.

§ 283. Λύσις : 1ον) Πολλίμεν ταῦτα ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 24 τῶν παρονομαστῶν καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{5}{8} \times 24 = 5 \times 3 = 15$, $\frac{8}{12} \times 24 = 16$, $\frac{11}{24} \times 24 = 11$.

Ἐπειδὴ δὲ $11 < 15 < 16$ συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{11}{24} < \frac{5}{8} < \frac{8}{12}$.

Β' Τρόπος : Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ εὐρίσκομεν

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}, \quad \frac{8}{12} = \frac{16}{24}, \quad \frac{11}{24}. \text{ Ἐπειδὴ δὲ } \frac{11}{24} < \frac{15}{24} < \frac{16}{24}, \text{ ἔπεται ὅτι } \frac{11}{24} < \frac{5}{8} < \frac{8}{12}.$$

2ον) Πολλίμεν ταῦτα ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. 40 τῶν παρονομαστῶν καὶ εὐρίσκομεν $\frac{4}{5} \times 40 = 32$, $\frac{9}{10} \times 40 = 36$, $\frac{7}{8} \times 40 = 35$, $\frac{3}{4} \times 40 = 30$. Ἐπειδὴ δὲ $30 < 32 < 35 < 36$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{9}{10}$.

§ 284. Λύσις: Πολλίμεν τὰ κλάσματα ταῦτα ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. 60 τῶν παρονομαστῶν καὶ εὐρίσκομεν ὅτι:

$\frac{7}{15} \times 60 = 7 \times 4 = 28$, $\frac{5}{12} \times 60 = 5 \times 5 = 25$. Ἐπειδὴ δὲ $28 > 25$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{7}{15} > \frac{5}{12}$. Ἐπομένως ὁ υἱὸς ἔλαβε περισσότερον ἀπὸ τὸν Ἑθνικὸν στόλον.

§ 285. Λύσις: Πολλίμεν τὰ κλάσματα ἐπὶ 45 καὶ εὐρίσκομεν $\frac{23}{45} \times 45 = 23$, $\frac{5}{9} \times 45 = 25$. Ἐπειδὴ δὲ $25 > 23$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{5}{9} > \frac{23}{45}$. Ἐπομένως τὸ α' αὐτοκίνητον διέτρεξε περισσότερον δρόμον.

§ 286. Λύσις: 1ον) $\frac{1}{2} \times 2 = 1$, $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$, $\frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7}$, $\frac{8}{9} \times 2 = \frac{16}{9}$.

2ον) $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$, $\frac{3}{22} \times 3 = \frac{9}{22}$, $\frac{5}{23} \times 3 = \frac{15}{23}$, $\frac{8}{15} \times 3 = \frac{24}{15}$.

§ 287. Λύσις: 1ον) $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$, $\frac{4}{7} : 2 = \frac{2}{7}$, $\frac{10}{12} : 2 = \frac{5}{12}$, $\frac{18}{26} : 2 = \frac{9}{26}$.

2ον) $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$, $\frac{6}{8} : 3 = \frac{2}{8}$, $\frac{12}{5} : 3 = \frac{4}{5}$, $\frac{24}{30} : 3 = \frac{8}{30}$.

§ 288. Λύσις: Ἀφ' οὗ δι' ἐν μανδήλιον χρειάζονται $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, διὰ τὰ 24 μανδήλια χρειάζονται 24 φορὰς τὰ $\frac{3}{8}$, ἥτοι $\frac{3}{8} \times 24 = 3 \times 3 = 9$ πήχεις.

§ 289. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 3 ὥρας διέτρεξε τὰ $\frac{6}{9}$ τῆς

όδοῦ, εἰς 1 ὥραν διέτρεξε 3 φορές ὀλιγώτερον δρόμον, ἤτοι $\frac{6}{9} : 3 = \frac{2}{3}$ τῆς ὁδοῦ.

§ 290. Λύσις : Ἀφ' οὗ οἱ 4 ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ κτήματος, ὁ 1 θὰ ἐκληρονόμησε 4 φορές ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$ τοῦ κτήματος.

§ 291. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστής πολ-
λαπλασιασθῇ ἐπὶ ἓνα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ
αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπομένως :

$$1ον) \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}, \frac{5}{4} : 2 = \frac{5}{8}, \frac{7}{10} : 2 = \frac{7}{20}, \frac{9}{12} : 2 = \frac{9}{24}.$$

$$2ον) \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}, \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}, \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}, \frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{18}.$$

§ 292. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστής διαι-
ρεθῇ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα πολ/ται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν
τοῦτον. Ἐπομένως :

$$1ον) \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}, \frac{5}{8} \times 2 = \frac{5}{4}, \frac{7}{12} \times 2 = \frac{7}{6}, \frac{6}{10} \times 2 = \frac{6}{5}.$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 291) εἶναι :

$$2ον) \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{21}, \frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{12}, \frac{8}{9} : 3 = \frac{8}{27}, \frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{30}.$$

$$\S 293. \text{Λύσις : } 1ον) \frac{17}{20} \times 2 = \frac{34}{20} \text{ ἢ } \frac{17}{20} \times 2 = \frac{17}{10},$$

$$\frac{17}{20} \times 3 = \frac{51}{20}, \frac{17}{20} \times 4 = \frac{68}{20} \text{ ἢ } \frac{17}{20} \times 4 = \frac{17}{5}.$$

$$2ον) \frac{35}{42} \times 2 = \frac{70}{42} \text{ ἢ } \frac{35}{42} \times 2 = \frac{35}{21}, \frac{35}{42} \times 3 = \frac{105}{42} \text{ ἢ}$$

$$\frac{35}{42} \times 3 = \frac{35}{14}, \frac{35}{42} \times 4 = \frac{140}{42}.$$

$$3ον) \frac{58}{120} \times 2 = \frac{116}{120} \text{ ἢ } \frac{58}{120} \times 2 = \frac{58}{60}, \frac{58}{120} \times 3 = \frac{174}{120}, \text{ ἢ}$$

$$\frac{58}{120} \times 3 = \frac{58}{40}, \frac{58}{120} \times 4 = \frac{232}{120} \text{ ἢ } \frac{58}{120} \times 4 = \frac{58}{30}.$$

$$4ον) \frac{103}{360} \times 2 = \frac{206}{360} = \frac{103}{180}, \frac{103}{360} \times 3 = \frac{309}{360} = \frac{103}{120},$$

$$\frac{103}{360} \times 4 = \frac{412}{360} = \frac{103}{90}.$$

$$5ον) \frac{200}{1200} \times 2 = \frac{400}{1200} = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}, \quad \frac{200}{1200} \times 3 = \frac{600}{1200} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{200}{1200} \times 4 = \frac{800}{1200} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

ΣΗΜ. Ἀπλούστερον εὐρίσκομεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα, ἂν πρῶτον ἀπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{200}{1200}$. Οὕτως εἶναι $\frac{200}{1200} \times 2 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ κτλ.

§ 294. Λύσεις : 1ον) $13\frac{1}{2} \times 5 = \frac{27}{2} \times 5 = \frac{135}{2} = 67\frac{1}{2}$ ἢ

$$13\frac{1}{2} \times 5 = (13 \times 5) + \left(\frac{1}{2} \times 5\right) = 65 + 2\frac{1}{2} = 67\frac{1}{2}.$$

2ον) $27\frac{1}{4} \times 8 = \frac{109}{4} \times 8 = \frac{872}{4} = 218$ ἢ

$$27\frac{1}{4} \times 8 = (27 \times 8) + \left(\frac{1}{4} \times 8\right) = 216 + 2 = 218.$$

3ον) $16\frac{1}{5} \times 4 = \frac{81}{5} \times 4 = \frac{324}{5} = 64\frac{4}{5}$ ἢ

$$16\frac{1}{5} \times 4 = (16 \times 4) + \left(\frac{1}{5} \times 4\right) = 64\frac{4}{5}.$$

4ον) $29\frac{5}{8} \times 3 = \frac{237}{8} \times 3 = \frac{711}{8} = 88\frac{7}{8}$ ἢ

$$29\frac{5}{8} \times 3 = (29 \times 3) + \left(\frac{5}{8} \times 3\right) = 87 + \frac{15}{8} = 88\frac{7}{8}.$$

5ον) $24\frac{3}{5} \times 16 = \frac{123}{5} \times 16 = \frac{1968}{5} = 393\frac{3}{5}$ ἢ

$$24\frac{3}{5} \times 16 = (24 \times 16) + \left(\frac{3}{5} \times 16\right) = 384 + \frac{48}{5} = 393\frac{3}{5}.$$

6ον) $150\frac{1}{3} \times 20 = \frac{451}{3} \times 20 = \frac{9020}{3} = 3006\frac{2}{3}$ ἢ

$$150\frac{1}{3} \times 20 = (150 \times 20) + \left(\frac{1}{3} \times 20\right) = 3000 + 6\frac{2}{3} = 3006\frac{2}{3}.$$

§ 295. Λύσεις : Ἀφ' οὗ εἰς ἓνα μῆνα δαπανᾷ $6\frac{3}{4}$ ὀκάδας, εἰς 12 μῆνας δαπανᾷ 12 φορές τὰς $6\frac{3}{4}$ ὀκάδας, ἥτοι :

$$6\frac{3}{4} \times 12 = (6 \times 12) + \left(\frac{3}{4} \times 12\right) = 72 + 9 = 81 \text{ ὀκάδας.}$$

§ 296. Λύσεις : Ἀφ' οὗ εἰς 1 μῆνα καίει $265\frac{5}{8}$ ὀκάδας, εἰς 3 μῆνας καίει 3 φορές τὰς $265\frac{5}{8}$ ὀκάδας ἥτοι :

$$265\frac{5}{8} \times 3 = (265 \times 3) + \left(\frac{5}{8} \times 3\right) = 795 + \frac{15}{8} = 796\frac{7}{8} \text{ ὀκ.}$$

§ 297. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν διανύει $4\frac{3}{4}$ χιλίον, εἰς 8 ὥρας θὰ διανύῃ 8 φορὰς τὰ $4\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα, ἤτοι:

$$4\frac{3}{4} \times 8 = (4 \times 8) + \left(\frac{3}{4} \times 8\right) = 32 + 6 = 38 \text{ χιλίον.}$$

§ 298. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἔκαμε 10 ὥρας δι' ὅλον τὰ ταξείδιον, ἀλλὰ κατὰ 2 ὥρας δὲν ἐκινεῖτο, ἔπεται ὅτι τὴν γραμμὴν Πειραιῶς—Πατρῶν διήνυσεν εἰς $10 - 2 = 8$ ὥρας. 'Αφ' οὗ δὲ εἰς 1 ὥραν διήνυσεν $23\frac{3}{4}$ χιλίον., εἰς 8 ὥρας διήνυσεν 8 φορὰς τὰ $23\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα ἤτοι:

$$23\frac{3}{4} \times 8 = (23 \times 8) + \left(\frac{3}{4} \times 8\right) = 184 + 6 = 190 \text{ χιλιόμετρα.}$$

$$\S 299. \text{ Λύσις: } 3 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}, \quad 8 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6,$$

$$10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5, \quad 25 \times \frac{2}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}.$$

§ 300. Λύσις: 1ον) Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 18 εἶναι $18 : 3 = 6$, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ εἶναι $6 \times 2 = 12$. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 24 εἶναι $24 : 3 = 8$, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ εἶναι $8 \times 2 = 16$. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 54 εἶναι $54 : 3 = 18$, τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ εἶναι $18 \times 2 = 36$.

2ον) Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 20 εἶναι $20 : 4 = 5$, τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶναι $5 \times 3 = 15$. Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 60 εἶναι $60 : 4 = 15$, τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶναι $15 \times 3 = 45$. Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 104 εἶναι $104 : 4 = 26$, τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶναι $26 \times 3 = 78$.

§ 301. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς μίαν ὥραν διανύῃ 25 χιλίον. εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας διανύει $25 \times \frac{4}{5} = \frac{100}{5} = 20$ χιλίον.

§ 302. Λύσις: Τὸ πληρωθὲν ποσὸν εἶναι $600\,000 \times \frac{3}{4} = \frac{600\,000}{4} \times 3 = 150\,000 \times 3 = 450\,000$ δραχ. Ἐπομένως χρεωστεῖ ἀκόμη $600\,000 - 450\,000 = 150\,000$ δραχμάς.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χρέους τοῦ χρεωστεῖ ἀκόμη τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ χρέους του, ἤτοι $600\,000 \times \frac{1}{4} = 150\,000$ δραχμάς.

§ 303. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν διανύει 24 χιλιομ., εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας διανύει τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν 24 χιλιομ., ἥτοι $24 \times \frac{5}{6} = \frac{24}{6} \times 5 = 4 \times 5 = 20$ χιλιομ.

§ 304. Λύσις: $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$,
 $\frac{6}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6 \times 2}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{6} = \frac{3 \times 4}{4 \times 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

§ 305. Λύσις: 1ον) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$, $\frac{9}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24}$.

2ον) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$, $\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, $\frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$,

$$\frac{12}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

3ον) $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\frac{9}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$,

$$\frac{12}{17} \times \frac{2}{3} = \frac{12 \times 2}{17 \times 3} = \frac{8}{17}.$$

§ 306. Λύσις: "Εκαστος ἀδελφὸς ἐκληρονόμησε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀμπέλου. Ἡ προῖξ λοιπὸν ἦτο τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀμπέλου ἥτοι $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ τῆς ἀμπέλου.

§ 307. Λύσις: Τὸ μερίδιον ἐκάστου εἶναι $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ. Τὸ πωληθὲν μέρος εἶναι λοιπὸν $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{3}$ ἥτοι $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ τοῦ ἀγροῦ. Ἐπομένως ἔμεινεν εἰς αὐτὸν $\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ τοῦ ἀγροῦ.

Β' εἰσόδος: 'Αφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου του, ἔμειναν εἰς αὐτὸν τὰ ἄλλα $\frac{3}{5}$ τοῦ μεριδίου του, ἥτοι $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ τοῦ ἀγροῦ.

§ 308. Λύσις: 'Αφ' οὗ ὅλη ἡ φιάλη χωρεῖ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὁκάς, τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς φιάλης θὰ χωροῦσι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὁκάς, ἥτοι $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ τῆς ὁκάς.

§ 309. Λύσις: 1ον) Τὸ ἥμισυ τοῦ 4 εἶναι 2· τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{1}{3}$ · Ἀρα τὸ ἥμισυ τοῦ 4 $\frac{2}{2}$ εἶναι $2\frac{1}{3}$.

Β' τρόπος: $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

2ον) Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $6\frac{1}{2}$ εἶναι $2\frac{1}{6}$ · ἄρα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $6\frac{1}{2}$ εἶναι $2\frac{1}{6} \times 2 = 4\frac{2}{6} = 4\frac{1}{3}$.

Β' τρόπος: $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$. τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{13}{6}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{13 \times 2}{6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$.

§ 310. Λύσις: 1ον) $2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{3 \times 4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ ἢ $2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = (2 \times \frac{3}{4}) + (\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}) = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

$5\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{27}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2}$ ἢ

$5\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = (5 \times \frac{5}{6}) + (\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}) = \frac{25}{6} + \frac{2}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$

$7\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{31}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{31 \times 2}{4 \times 5} = \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10}$ ἢ

$7\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = (7 \times \frac{2}{5}) + (\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}) = \frac{14}{5} + \frac{3}{10} = \frac{28+3}{10} = \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10}$.

2ον) $(2+3\frac{1}{5}) \times \frac{5}{7} = (2 \times \frac{5}{7}) + (3 \times \frac{5}{7}) + (\frac{1}{5} \times \frac{5}{7})$
 $= \frac{10}{7} + \frac{15}{7} + \frac{1}{7} = \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$ ἢ

$(2+3\frac{1}{5}) \times \frac{5}{7} = (\frac{10}{5} + \frac{16}{5}) \times \frac{5}{7} = \frac{26}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$.

$(6+3\frac{2}{3}) \times \frac{6}{8} = (6 \times \frac{6}{8}) + (3 \times \frac{6}{8}) + (\frac{2}{3} \times \frac{6}{8}) = \frac{36}{8} + \frac{18}{8} + \frac{4}{8}$
 $= \frac{58}{8} = 7\frac{2}{8} = 7\frac{1}{4}$, ἢ

$(6+3\frac{2}{3}) \times \frac{6}{8} = (\frac{18}{3} + \frac{11}{3}) \times \frac{6}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{29 \times 6}{3 \times 8} = \frac{29 \times 2}{8} = \frac{58}{8}$
 $= 7\frac{1}{4}$.

$(\frac{8}{9} + \frac{4}{5}) \times \frac{3}{4} = (\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}) + (\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}) = \frac{8 \times 3}{9 \times 4} + \frac{4 \times 3}{5 \times 4}$
 $= \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$, ἢ

$$\left(\frac{8}{9} + \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \left(\frac{40}{45} + \frac{36}{45}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{76}{45} \times \frac{3}{4} = \frac{76 \times 3}{45 \times 4} = \frac{76}{15 \times 4}$$

$$= \frac{19}{15} = 1 \frac{4}{15}.$$

§ 311. Λύσις: 'Αφ' οὗ ὅλον τὸ βάρος ἦτο $8 \frac{5}{8}$ ὀκάδες, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ ἦτο $8 \frac{5}{8} \times \frac{1}{8} = \left(8 \times \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{1}{8} = 1 + \frac{5}{64} = 1 \frac{5}{64}\right)$ ὀκ. Ἐπομένως καθαρὸν βούτυρον ἦτο $8 \frac{5}{8} - 1 \frac{5}{64}$

$$= (8-1) + \left(\frac{40}{64} - \frac{5}{64}\right) = 7 \frac{35}{64} \text{ ὀκάδες.}$$

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ τὸ $\frac{1}{8}$ ἦσαν ξένη οὐσία, καθαρὸν βούτυρον ἦσαν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ὅλου βάρους ἦτοι:

$$8 \frac{5}{8} \times \frac{7}{8} = \left(8 \times \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{7}{8}\right) = 7 \frac{35}{64} \text{ ὀκ.}$$

§ 312. Λύσις: Ὁ ἀραβόσιτος εἶναι τὰ $\frac{15}{100}$ τῶν $50 \frac{5}{6}$ ὀκάδων, ἦτοι $50 \frac{5}{6} \times \frac{15}{100} = \left(50 \times \frac{15}{100}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{15}{100}\right) = \frac{15}{2} + \frac{15}{6 \times 20}$

$$\frac{15}{2} + \frac{5}{2 \times 20} = \frac{15 \times 20}{2 \times 20} + \frac{5}{2 \times 20} = \frac{305}{40} = 7 \frac{25}{40} = 7 \frac{5}{8} \text{ ὀκ. Ἐπομένως τὸ σιτάλευρον εἶναι } 50 \frac{5}{6} - 7 \frac{5}{8} = (50-7) + \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right)$$

$$= 43 + \left(\frac{20-15}{24}\right) = 43 \frac{5}{24} \text{ ὀκάδες.}$$

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{15}{100}$ τοῦ βάρους εἶναι ἀραβόσιτος, σιτάλευρον εἶναι τὰ ὑπόλοιπα $\frac{100}{100} - \frac{15}{100} = \frac{85}{100}$ τοῦ βάρους ἦτοι $50 \frac{5}{6} \times \frac{85}{100}$

$$= \left(50 \times \frac{85}{100}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{85}{100}\right) = \frac{85}{2} + \frac{85}{120} = \frac{85 \times 60}{120} + \frac{85}{120} =$$

$$\frac{5100+85}{120} = \frac{5185}{120} = \frac{1037}{24} = 43 \frac{5}{24} \text{ ὀκάδες.}$$

§ 313. Λύσις: Τὸ ἀπόβαρον ἦτο $\frac{3}{20}$ τοῦ ὅλου βάρους $6 \frac{2}{5}$, ἦτοι $6 \frac{2}{5} \times \frac{3}{20} = \left(6 \times \frac{3}{20}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{20}\right) = \frac{18}{20} + \frac{6}{100} = \frac{96}{100} \text{ ὀκ.}$

$$\begin{aligned} \text{Ἐπομένως τὸ βάρος τῶν ἐλαίων ἦτο } 6 \frac{2}{5} - \frac{96}{100} = \frac{32}{5} - \frac{96}{100} \\ = \frac{640}{100} - \frac{96}{100} = \frac{544}{100} = 5 \frac{44}{100} = 5 \frac{11}{25} \text{ ὀκάδες.} \end{aligned}$$

Β' τρόπος: Ἀφ' οὗ τὸ ἀπόβαρον ἦτο τὰ $\frac{3}{20}$ τοῦ ὅλου βάρους, τὸ βάρος τῶν ἐλαίων ἦτο τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ ὅλου βάρους, ἦτοι

$$\begin{aligned} \frac{20}{20} - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \text{ τῶν } 6 \frac{2}{5} \text{ ὀκ. Δηλ. } 6 \frac{2}{5} \times \frac{17}{20} = \frac{32}{5} \times \frac{17}{20} = \frac{8 \times 17}{5 \times 5} \\ = \frac{136}{25} = 5 \frac{11}{25} \text{ ὀκάδες.} \end{aligned}$$

§ 314. Λύσις: Κόνις καὶ ὕδωρ ἦτο τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ ὅλου βάρους, ἦτοι $4 \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{9}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ὀκάς. Ἐπομένως τὸ βάρος τῶν καθαρῶν ἀνθράκων ἦτο

$$4 \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = 3 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5} \right) = 3 \frac{9}{10} \text{ ὀκάδες,}$$

Β' Τρόπος: Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ ὅλου βάρους ἦσαν κόνις καὶ ὕδωρ, καθαροὶ ἀνθρακες ἦσαν τὰ ὑπόλοιπα $\frac{13}{15}$ τοῦ ὅλου βάρους, ἦτοι

$$4 \frac{1}{2} \times \frac{13}{15} = \frac{9}{2} \times \frac{13}{15} = \frac{9 \times 13}{2 \times 15} = \frac{3 \times 13}{2 \times 5} = \frac{39}{10} = 3 \frac{9}{10} \text{ ὀκ.}$$

§ 315. Λύσις: 1ον) $4 \times 2 \frac{1}{2} = 4 \times \frac{5}{2} = 5 \times 2 = 10$ ἢ

$$4 \times 2 \frac{1}{2} = (4 \times 2) + \left(4 \times \frac{1}{2} \right) = 8 + 2 = 10.$$

$$6 \times 2 \frac{1}{3} = 6 \times \frac{7}{3} = 7 \times 2 = 14 \text{ ἢ } 6 \times 2 \frac{1}{3} = 6 \times \frac{7}{3} = 7 \times 2 = 14.$$

$$10 \times 3 \frac{2}{5} = 10 \times \frac{17}{5} = 17 \times 2 = 34 \text{ ἢ } 10 \times 3 \frac{2}{5} = (10 \times 3) + \left(10 \times \frac{2}{5} \right) = 30 + 4 = 34.$$

$$2ον) \frac{2}{3} \times 4 \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{2 \times 9}{3 \times 2} = 3 \text{ ἢ}$$

$$\frac{2}{3} \times 4 \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$\frac{2}{5} \times 3 \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{22}{15} = 1 \frac{7}{15} \text{ ἢ } \frac{2}{5} \times 3 \frac{2}{3} =$$

$$\left(\frac{2}{5} \times 3 \right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{6}{5} + \frac{4}{15} = \frac{18 + 4}{15} = \frac{22}{15} = 1 \frac{7}{15}.$$

$$\frac{4}{7} \times 1\frac{1}{4} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{7} \quad \eta \quad \left(\frac{4}{7} \times 1\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4}{7} \times 1\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{1}{4}\right) \\ = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}.$$

$$3ον) \quad 1\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{13}{4} = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16} \quad \eta$$

$$1\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{4} = (1 \times 3) + \left(\frac{1}{4} \times 3\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \\ = 3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 4\frac{1}{16}.$$

$$3\frac{1}{8} \times 2\frac{8}{9} = \frac{25}{8} \times \frac{26}{9} = \frac{25 \times 26}{8 \times 9} = \frac{25 \times 13}{4 \times 9} = \frac{325}{36} = 9\frac{1}{36} \quad \eta$$

$$3\frac{1}{8} \times 2\frac{8}{9} = (3 \times 2) + \left(\frac{1}{8} \times 2\right) + \left(3 \times \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} \times \frac{8}{9}\right) \\ = 6 + \frac{2}{8} + \frac{24}{9} + \frac{1}{9} = 6 + \left(\frac{2}{8} + \frac{25}{9}\right) = 6 + \frac{18+200}{72} = 6 + \frac{218}{72} \\ = 6 + 3\frac{2}{72} = 9\frac{1}{36}.$$

$$5\frac{2}{3} \times 4\frac{3}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{23}{5} = \frac{391}{15} = 26\frac{1}{15} \quad \eta$$

$$5\frac{2}{3} \times 4\frac{3}{5} = (5 \times 4) + \left(\frac{2}{3} \times 4\right) + \left(5 \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\right) = 20 \\ + \frac{8}{3} + 3 + \frac{2}{5} = 23 + 2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) = 25 + \frac{16}{15} = 26\frac{1}{15}.$$

§ 316. Λύσεις: 1ον) 'Αφ' οὗ ὁ 1 πήχυς ἔχει 8 ρούπια, οἱ 10 $\frac{3}{4}$ πήχεις ἔχουσι $8 \times 10\frac{3}{4} = 80 + 6 = 86$ ρούπια.

2ον) 'Αφ' οὗ ἡ 1 δραχμὴ ἔχει 100 λεπτὰ, αἱ 60 $\frac{2}{3}$ δραχμαὶ ἔχουσιν $100 \times 60\frac{2}{3} = 6000 + \left(100 \times \frac{2}{3}\right) = 6000 + \frac{200}{3} \\ = 6000 + 66\frac{2}{3} = 6066\frac{2}{3}$ λεπτὰ.

3ον) 'Αφ' οὗ ἡ 1 ὀκά ἔχει 400 δράμια, αἱ 5 $\frac{3}{20}$ ὀκάδες θὰ ἔχωσι $400 \times 5\frac{3}{20} = (400 \times 5) + \left(400 \times \frac{3}{20}\right) = 2000 + 60 = 2060$ δράμ.

4ον) 'Αφ' οὗ ὁ 1 στατῆρ ἔχη 44 ὀκάδας, οἱ 2 $\frac{1}{4}$ στατῆρες ἔχουσι $44 \times 2\frac{1}{4} = (44 \times 2) + \left(44 \times \frac{1}{4}\right) = 88 + 11 = 99$ ὀκ.

Β' τρόπος: 1ον) Δυνάμεθα ἀπὸ μνήμης νὰ εἰπώμεν: Οἱ 10 πήχεις ἔχουσι $8 \times 10 = 80$ ρούπια. Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως ἔχει 2 ρούπια καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως ἔχουσι $2 \times 3 = 6$ ρούπια. Ὡστε οἱ $10 \frac{3}{4}$ πήχεις ἔχουσι $80 + 6 = 86$ ρούπια.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ εἰς τὰς τρεῖς ἄλλας περιπτώσεις.

§ 317. Λύσις: Ἀφ' εἰς 1 ὥραν γράφει $8 \frac{1}{2}$ σελίδας, εἰς $5 \frac{4}{5}$ ὥρας γράφει $8 \frac{1}{2} \times 5 \frac{4}{5} = \frac{17}{2} \times \frac{29}{5} = \frac{493}{10} = 49 \frac{3}{10}$ σελίδας.

Β' τρόπος: Εἰς 5 ὥρας γράφει $8 \frac{1}{2} \times 5 = 40 + \frac{5}{2} = 42 \frac{1}{2}$ σελίδας. Εἰς δὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας γράφει $8 \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5} + \frac{2}{5} = \frac{34}{5} = 6 \frac{4}{5}$. Ἐπομένως εἰς $5 \frac{4}{5}$ ὥρας γράφει $42 \frac{1}{2} + 6 \frac{4}{5} = 48 + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} \right) = 48 + \frac{13}{10} = 48 + 1 \frac{3}{10} = 49 \frac{3}{10}$ σελίδας.

§ 318. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 1 ὥραν στοιχειοθετεῖ $3 \frac{1}{2}$ σελίδας εἰς $5 \frac{5}{12}$ ὥρας στοιχειοθετεῖ $3 \frac{1}{2} \times 5 \frac{5}{12} = \frac{7}{2} \times \frac{65}{12} = \frac{455}{24} = 18 \frac{23}{24}$ σελίδας.

Β' τρόπος: Εἰς 5 ὥρας στοιχειοθετεῖ $3 \frac{1}{2} \times 5 = 15 + \frac{5}{2} = 17 \frac{1}{2}$ σελ. Εἰς $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας στοιχειοθετεῖ $3 \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{24} = 1 \frac{11}{24}$ σελ. Ἐπομένως εἰς $5 \frac{5}{12}$ ὥρας στοιχειοθετεῖ $17 \frac{1}{2} + 1 \frac{11}{24} = 18 + \left(\frac{12}{24} + \frac{11}{24} \right) = 18 \frac{23}{24}$ σελίδας.

§ 319. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 1 ὥραν στοιχειοθετεῖ $\frac{8}{9}$ σελίδος εἰς $6 \frac{2}{3}$ ὥρας στοιχειοθετεῖ $\frac{8}{9} \times 6 \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{20}{3} = \frac{160}{27} = 5 \frac{25}{27}$ σελίδος.

§ 320. Λύσις: Ἀπὸ $7 \frac{1}{2}$ ὥρας π. μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας εἶναι $12 - 7 \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2}$ ὥρες. Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἄφ' οὗ δὲ εἰς 1 ὥραν ὑφαίνει $5\frac{3}{8}$ πήχεις, εἰς $4\frac{1}{2}$ ὥρας
 θὰ ὑφαίνει $5\frac{3}{8} \times 4\frac{1}{2} = \frac{43}{8} \times \frac{9}{2} = \frac{387}{16} = 24\frac{3}{16}$ πήχ.

Β' τρόπος: Εἰς 4 ὥρας ὑφαίνει $5\frac{3}{8} \times 4 = 20 + \frac{3}{2} = 21\frac{1}{2}$ πήχεις.
 Εἰς $\frac{1}{2}$ ὥρας ὑφαίνει $5\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{16} = \frac{43}{16} = 2\frac{11}{16}$ πήχεις.
 Ἐπομένως εἰς $4\frac{1}{2}$ ὥρας ὑφαίνει $21\frac{1}{2} + 2\frac{11}{16} = 23 + (\frac{8+11}{16})$
 $= 23 + 1\frac{3}{16} = 24\frac{3}{16}$ πήχεις.

§ 321. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι ἀπὸ $8\frac{1}{4}$ ὥρας π.
 μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας εἶναι $12 - 8\frac{1}{4} = 11\frac{4}{4} - 8\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$
 ὥραι. Ἀπὸ δὲ 2 μ. μ. ἕως $4\frac{3}{4}$ μ. μ. εἶναι $4\frac{3}{4} - 2 = 2\frac{3}{4}$ ὥραι.
 Ἐργάζεται λοιπὸν ὅλην τὴν ἡμέραν

$$3\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} = 5 + \frac{6}{4} = 6\frac{1}{2} \text{ ὥρας.}$$

Ἄφ' οὗ δὲ εἰς 1 ὥραν πλέκει 3 ζεύγη, εἰς $6\frac{1}{2}$ ὥρας πλέ-
 κει $3 \times 6\frac{1}{2} = 18 + \frac{3}{2} = 19\frac{1}{2}$ ζεύγη.

Β' τρόπος: Πρὸ μεσημβρίας πλέκει $3 \times 3\frac{3}{4} = 9 + \frac{9}{4} = 9 + 2\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$
 ζεύγη. Μετὰ μεσημβρίαν πλέκει $3 \times 2\frac{3}{4} = 6 + \frac{9}{4} = 6 + 2\frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}$ ζεύγη.
 Ἐπομένως ὅλην τὴν ἡμέραν πλέκει $11\frac{1}{4} + 8\frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$ ζεύγη.

§ 322. Λύσις: Ἄφ' οὗ ὁ 1 πήχυς ἀξιζει 145 000 δραχ. οἱ $4\frac{2}{8}$
 πήχεως ἀξιζουσιν $145000 \times 4\frac{2}{8} = (145000 \times 4) + (145000 \times \frac{2}{8})$
 $= 580000 + 18125 =$ 598125 δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ραπτικά εἶναι 280000 »
 ἡ ἐνδυμασία κοστίζει 878125 δραχμάς.

§ 323, Λύσις: $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}$. Ἐπειδὴ $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$,

ἀντίστροφος αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{3}{5}$. Ἐπίσης ἐκ τῆς $3 \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ ἐννοοῦμεν ὅτι ἀντίστροφος αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{5}{17}$. Ὁμοίως ἐπειδὴ ὁ $5 \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$, ἀντίστροφος αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{4}{21}$.

§ 324. Λύσις: 1ον) $5 + 2\frac{1}{4} = 7\frac{1}{4} = \frac{29}{4}$. Ἄρα ἀντίστροφος αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{4}{29}$.

2ον) $3\frac{2}{9} - 1 = 2\frac{2}{9} = \frac{20}{9}$, ἀντίστροφος δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{9}{20}$.

3ον) $5\frac{1}{6} \times 3\frac{5}{6} = \frac{31}{6} \times \frac{23}{6} = \frac{31 \times 23}{36}$, ἀντίστροφος δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{36}{31 \times 23} = \frac{36}{713}$.

§ 325. Λύσις: 1ον) $3 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5}$, $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times 40 = \frac{40}{8} = 5$, $\frac{2}{7} \times 24 \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{5} = 2 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

2ον) $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{16}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$

3ον) $3\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times 5 = \frac{7}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} \times 1 = 3$
 $8 \times 2\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{5} = 2\frac{3}{4}$.

§ 326. Λύσις: Τὴν α' ἡμέραν διέτρεξε τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 92 χιλιομέτρων, ἥτοι $92 \times \frac{1}{4}$. Τὴν β' τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν $92 \times \frac{1}{4}$ χιλιομ., ἥτοι $92 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$. Τὴν δὲ γ' τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν προηγουμένων ἥτοι $92 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = 92 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{92}{15} = 6\frac{2}{15}$.

§ 327. Λύσις: Τὴν α' ἡμέραν διήνυσσε $60 \times \frac{2}{5}$. Τὴν β' τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν προηγουμένων χιλιομέτρων, ἥτοι $60 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$. Τὴν δὲ γ' τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν χιλιομέτρων τούτων, ἥτοι

$60 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = 60 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = 20 \times \frac{2}{5} = 8$ χιλ.

§ 328. Λύσις: Ἀπὸ τὸν μεσαῖον ὄροφον εἰσπράττει $50000 \times \frac{4}{5}$. Ἀπὸ δὲ τὸν κάτω ὄροφον τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ προηγουμένου ποσοῦ ἦτοι $50000 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = 50000 \times \frac{3}{5} = 30000$ δραχ.

§ 329. Λύσις: Διὰ τὸ κάτω πάτωμα ἐξώδευσε $560\,000 \times \frac{4}{5}$.

Διὰ δὲ τὸ ὑπόγειον τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ προηγουμένου ποσοῦ, ἦτοι $560\,000 \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = 560\,000 \times \frac{1}{2} = 280\,000$ δραχ.

§ 330. Λύσις: Ἀπὸ 75 ὀκάδας σίτου γίνεται ἄλευρον τὰ $\frac{11}{12}$ αὐτῶν, ἦτοι $75 \times \frac{11}{12}$ ὀκ. Καὶ ἀπὸ αὐτὸ τὸ ἄλευρον λαμβάνομεν ἄρτον τὰ $\frac{13}{10}$ αὐτοῦ, ἦτοι

$$75 \times \frac{11}{12} \times \frac{13}{10} = 15 \times \frac{11}{12} \times \frac{13}{2} = 5 \times \frac{11}{4} \times \frac{13}{2} = \frac{715}{8} = 89 \frac{3}{8} \text{ ὀκ.}$$

§ 331. Λύσις: $\frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5}$. Δοκιμή: $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}. \text{ Δοκιμή: } 3 \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$\frac{12}{7} : 4 = \frac{3}{7}. \text{ Δοκιμή: } 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7}.$$

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}. \text{ Δοκιμή: } 2 \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{6 \times 3} = \frac{5}{18}. \text{ Δοκιμή: } 3 \times \frac{5}{18} = \frac{3 \times 5}{18} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{7}{9} : 5 = \frac{7}{9 \times 5} = \frac{7}{45}. \text{ Δοκιμή: } 5 \times \frac{7}{45} = \frac{5 \times 7}{45} = \frac{7}{9}.$$

§ 332. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{4}{5}$, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

2ον) Ἀφ' οὗ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου εἶναι $\frac{5}{9}$, ὁ ἄλλος εἶναι $\frac{5}{9} : 8 = \frac{5}{72}$.

§ 333. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ $\frac{2}{9}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{8}{9} : x$, ὁ διαιρετέος $\frac{8}{9}$ θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου x ἐπὶ τὸ πηλίκον $\frac{2}{9}$, ἵνα $\frac{8}{9} = x \times \frac{2}{9}$. Ἐπομένως, ἂν

$\frac{8}{9}$ εἶναι διαιρετέος καὶ $\frac{2}{9}$ διαιρέτης, ὁ x θὰ εἶναι πηλίκον,
ἥτοι $x = \frac{8}{9} : \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Β' Τρόπος. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{8}{9} : x = \frac{8 : x}{9}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{8}{9} : x = \frac{2}{9}$,
πρέπει νὰ εἶναι $\frac{8 : x}{9} = \frac{2}{9}$ καὶ ἐπομένως $8 : x = 2$, ἄρα $x = 4$.

2ον) Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου
ἐπὶ τὸ πηλίκον, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{9} = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$ καὶ ἐπομένως $\alpha = 3$.

Β' τρόπος : Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{9} : 3 = \frac{\alpha : 3}{9}$ καὶ $\frac{\alpha}{9} : 3 = \frac{1}{9}$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha : 3}{9} = \frac{1}{9}$
καὶ ἐπομένως $\alpha : 3 = 1$ καὶ ὁ διαιρετέος α πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν
διαιρέτην, ἥτοι $\alpha = 3$.

§ 334 Λύσεις: $2\frac{2}{5} : 2 = 1\frac{1}{5}$, $4\frac{6}{9} : 2 = 2\frac{3}{9}$, $3\frac{6}{7} : 3 = 1\frac{2}{7}$.

§ 335. Λύσεις: $8\frac{4}{5} : 4 = 2\frac{1}{5}$ ἢ $8\frac{4}{5} : 4 = \frac{44}{5} : 4 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

$6\frac{3}{7} : 3 = 2\frac{1}{7}$, ἢ $6\frac{3}{7} : 3 = \frac{45}{7} : 3 = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

$4\frac{2}{5} : 2 = 2\frac{1}{5}$, ἢ $4\frac{2}{5} : 2 = \frac{22}{5} : 2 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

§ 336. Λύσεις: Ἀφ' οὗ μὲ τὰ 5 δελτία ἔλαβε $7\frac{1}{2}$ ὀκάδας,
μὲ 1 δελτίον θὰ ἐλάμβανε τὸ πέμπτον τῶν $7\frac{1}{2}$ ὀκάδων ἥτοι
 $7\frac{1}{2} : 5 = \frac{15}{2} : 5 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ὀκάδας.

§ 337. Λύσεις: Ἀφ' οὗ τοὺς 3 μῆνας θὰ ἐξοδεύσῃ $22\frac{1}{2}$
ὀκάδας, τὸν 1 μῆνα θὰ ἐξοδεύσῃ 3 φοράς ὀλιγώτερον, ἥτοι
 $22\frac{1}{2} : 3 = \frac{45}{2} : 3 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ ὀκάδας.

§ 338. Λύσεις: Ἀφ' οὗ τὰ 8 στρέμματα ἀπέδωκαν $1050\frac{1}{2}$
ὀκάδας, τὸ 1 στρέμμα ἀπέδωκεν 8 φοράς ὀλιγώτερον, ἥτοι
 $1050\frac{1}{2} : 8 = \frac{2101}{2} : 8 = \frac{2101}{16} = 131\frac{5}{16}$ ὀκάδας.

§ 339 Λύσεις: $6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = 4 \times 2 = 8$, $8 : \frac{2}{5} = 8 \times \frac{5}{2}$
 $= 5 \times 4 = 20$, $10 : \frac{5}{6} = 10 \times \frac{6}{5} = 6 \times 2 = 12$, $3 : \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = 6$,

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς
N. Δ. Νικολάου. Λύσεις τῶν ἀσκήσεων τῆς ἐγχειριμένης Ἀριθμητικῆς του. 6

$$5:\frac{2}{3}=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}, 9:\frac{4}{3}=9\times\frac{3}{4}=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4},$$

$$2\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}\times 3=6+1=7.$$

§ 340. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξεν 18 χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν θὰ διέτρεχε $18:\frac{3}{4}=18\times\frac{4}{3}=4\times 6=24$ χιλιόμετρα.

§ 341. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας διατρέχει 10 χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν διατρέχει $10:\frac{5}{12}=10\times\frac{12}{5}=2\times 12=24$ χιλιόμετρα.

§ 342. Λύσις: 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κιβωτίου χωροῦσι $10\frac{3}{4}$ ὀκάδας, τὸ 1 κιβώτιον ὁλόκληρον χωρεῖ $10\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{43}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{43\times 2}{5}=\frac{86}{5}=17\frac{1}{5}$ ὀκάδας.

§ 343. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ βαρελίου ἔμειναν τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτοῦ. Τὰ $\frac{7}{10}$ λοιπὸν τοῦ βαρελίου χωροῦσι $19\frac{3}{5}$ ὀκάδας, τὸ δὲ 1 ὁλόκληρον βαρέλιον χωρεῖ $19\frac{3}{5}:\frac{7}{10}=\frac{98}{5}\times\frac{10}{7}=\frac{980}{35}=28$ ὀκάδας.

§ 344. Λύσις: 1ον) $1:1\frac{3}{4}=1:\frac{7}{4}=1\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}, 3:2\frac{3}{5}=3:\frac{13}{5}=3\times\frac{5}{13}=\frac{15}{13}=1\frac{2}{13}, 12:5\frac{2}{5}=12:\frac{27}{5}=12\times\frac{5}{27}=\frac{4\times 5}{9}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}.$

2ον) $\frac{2}{5}:2\frac{1}{2}=\frac{2}{5}:\frac{5}{2}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}, \frac{5}{8}:3\frac{1}{4}=\frac{5}{8}:\frac{13}{4}=\frac{5}{8}\times\frac{4}{13}=\frac{5}{2\times 13}=\frac{5}{26}, \frac{7}{9}:2\frac{1}{3}=\frac{7}{9}:\frac{7}{3}=\frac{7}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$

3ον) $3\frac{1}{4}:2\frac{3}{5}=\frac{13}{4}:\frac{13}{5}=\frac{13}{4}\times\frac{5}{13}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}, 7\frac{1}{2}:3\frac{5}{6}=\frac{15}{2}:\frac{23}{6}=\frac{15}{2}\times\frac{6}{23}=\frac{15}{1}\times\frac{3}{23}=\frac{45}{23},$

$10\frac{3}{4}:3\frac{1}{5}=\frac{43}{4}:\frac{16}{5}=\frac{43}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{215}{16}=13\frac{7}{16}.$

§ 345. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἀπὸ $27\frac{3}{4}$ ὀκάδας εἰσέπραξεν 277500 δραχμάς, τὴν 1 ὀκᾶν θὰ ἐπώλει $27\frac{3}{4}$ φορὰς ὀλιγώτερον, ἥτοι $277500 : 27\frac{3}{4} = 277500 : \frac{111}{4} = 277500 \times \frac{4}{111} = \frac{1110000}{111} = 10000$ δραχμάς.

§ 346. Λύσις: "Ὅπως προηγουμένως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸν πῆχυν ἠγόρασε πρὸς $455000 \times : 4 \frac{1}{4} = 455000 : \frac{17}{4} = 455000 \times \frac{4}{17} = \frac{1820000}{17} = 107058 \frac{14}{17}$.

§ 347. Λύσις: 'Αφ' οὗ εἰς $15 \frac{1}{2}$ ὥρας μένει ὀπίσω $\frac{60}{60}$, εἰς μίαν ὥραν θὰ μένη ὀπίσω $\frac{7}{60} : 15 \frac{1}{2} = \frac{7}{60} : \frac{31}{2} = \frac{7}{60} \times \frac{2}{31} = \frac{14}{186}$ τῆς ὥρας.

§ 348. Λύσις: "Ὅπως προηγουμένως ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς 1 ὥραν καθυστέρησε $\frac{8}{9} : 14\frac{3}{4} = \frac{8}{9} : \frac{59}{4} = \frac{32}{531}$ ὥρας.

§ 349. Λύσις: "Αν ἀπὸ τὸ τεμάχιον κόψωμεν $4\frac{2}{8}$ πῆχεις, κάμνομεν μίαν ἐνδυμασίαν. "Αν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον κόψωμεν ἄλλους $4\frac{2}{8}$ πῆχεις, κάμνομεν ἄλλην μίαν ἐνδυμασίαν. "Αν ἐξακολουθήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐννοοῦμεν ὅτι μὲ $63\frac{6}{8}$ πῆχεις κάμνομεν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαίρῃσωμεν $4\frac{2}{8}$ πῆχεις ἀπὸ τὸ τεμάχιον καὶ ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, ἥτοι ὅσας φορὰς οἱ $4\frac{2}{8}$ πῆχεις χωροῦσιν εἰς τοὺς $63\frac{6}{8}$ πῆχεις. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν ἐνδυμασιῶν εἶναι $63\frac{6}{8} : 4\frac{2}{8} = \frac{510}{8} : \frac{34}{8} = \frac{510}{8} \times \frac{8}{34} = \frac{510}{34} = \frac{30}{2} = 15$.

§ 350 Λύσις. "Αν σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ παράθυρα ἦσαν $13\frac{1}{2} : 3\frac{3}{8} = \frac{27}{2} : \frac{27}{8} = \frac{27}{2} \times \frac{8}{27} = \frac{8}{2} = 4$.

$$\S \text{ 351 Λύσις. 1ον) } \frac{\frac{5}{6}}{3} = \frac{5}{6} : 3 = \frac{6}{18} \text{ ἢ } \frac{\frac{5}{6}}{3} = \frac{\frac{5}{6} \times 6}{3 \times 6} = \frac{5}{18},$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{8} = \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{32} \text{ ἢ } \frac{\frac{3}{4}}{8} = \frac{\frac{3}{4} \times 4}{8 \times 4} = \frac{3}{32}. \text{ Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι}$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{12} = \frac{1}{60}, \quad \frac{\frac{7}{10}}{3} = \frac{7}{30}.$$

$$2\text{ον) } \frac{\frac{3}{4}}{9} = 3 : \frac{4}{9} = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}, \text{ ἢ } \frac{\frac{3}{4}}{9} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{6} = 1 : \frac{5}{6} = 1 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \text{ ἢ } \frac{\frac{1}{5}}{6} = \frac{1 \times 6}{5 \times 6} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι } \frac{\frac{7}{1}}{2} = 14, \quad \frac{\frac{3}{5}}{8} = \frac{24}{5}$$

$$3\text{ον) } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2}{1 \times 5} = \frac{4}{5} \text{ ἢ}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{3} \times 6}{\frac{5}{6} \times 6} = \frac{4}{5}, \quad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{1} = 4 \text{ ἢ}$$

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{5} \times 5}{\frac{1}{5} \times 5} = \frac{4}{1} = 4.$$

$$\text{Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι : } \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{6}.$$

$$4\text{ον) } \frac{\frac{5}{2\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}} = 5 : \frac{5}{2} = 5 \times \frac{2}{5} = 2 \text{ ἢ } \frac{\frac{5}{2\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}} = \frac{5 \times 2}{2\frac{1}{2} \times 2} = \frac{5 \times 2}{5} = 2,$$

$$\frac{3\frac{1}{4}}{13} = \frac{13}{4} : 13 = \frac{1}{4} \text{ ἢ } \frac{3\frac{1}{4}}{13} = \frac{3\frac{1}{4} \times 4}{13 \times 4} = \frac{13}{13 \times 4} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\frac{5}{8}}{2\frac{1}{4}} = \frac{5}{8} : \frac{9}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{18} \text{ ἢ } \frac{\frac{5}{8}}{2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{8} \times 8}{2\frac{1}{4} \times 8} = \frac{5}{18}.$$

$$\frac{3\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}} = 3\frac{1}{5} : 2\frac{4}{5} = \frac{16}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}, \text{ ἢ}$$

$$\frac{3\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}} = \frac{3\frac{1}{5} \times 5}{2\frac{4}{5} \times 5} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}.$$

§ 352. Λύσις. 1ον) Ἐπειδὴ $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$ καὶ

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}, \text{ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15},$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}. \text{ Ἐπομένως τὸ ζητού-}$$

μενον ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $\frac{8}{15} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} = \frac{96+135+80}{180} = \frac{311}{180}.$

3ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4},$

$$\frac{\frac{4}{5}}{2\frac{2}{5}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{13} = \frac{10}{13}. \text{ Ἐπομένως τὸ ζητούμε-}$$

νον ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ $\frac{9}{4} + \frac{1}{3} + \frac{10}{13} = \frac{351+52+120}{156} = \frac{523}{156} = 3\frac{55}{156}.$

4ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{2}{1} = 12 \text{ καὶ}$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \text{ Ἐπομένως ἡ ζητούμενη διαφορὰ εἶναι}$$

ἴση μὲ $12 - \frac{1}{6} = 11\frac{5}{6}.$

5ον) Ἐπειδὴ $\frac{\frac{8}{9}}{2} = \frac{8}{9} : 2 = \frac{4}{9}$ καὶ $\frac{\frac{7}{10}}{2\frac{1}{9}} = \frac{7}{10} \times \frac{9}{19} = \frac{63}{190},$

ή ζητούμενη διαφορά είναι ίση με $\frac{4}{9} - \frac{63}{190} = \frac{760-567}{1710} = \frac{193}{1710}$.

$$\text{6ον) 'Επειδή } \frac{4\frac{1}{5}}{2\frac{3}{10}} = \frac{4\frac{1}{5} \times 10}{2\frac{3}{10} \times 10} = \frac{42}{23} \text{ και } \frac{1\frac{2}{5}}{3\frac{1}{10}} = \frac{1\frac{2}{5} \times 10}{3\frac{1}{10} \times 10}$$

$$= \frac{14}{33}, \text{ ή ζητούμενη διαφορά ισοϋται με } \frac{42}{23} - \frac{14}{33} = \frac{1386-422}{759}$$

$$= \frac{964}{759} = 1\frac{205}{759}.$$

§ 353. Λύσις: 1ον) 'Επειδή $\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{20}$ και $\frac{6}{\frac{3}{4}} = 6 \times \frac{4}{3}$

$$\frac{24}{3} = 8, \text{ τὸ ζητούμενον γινόμενον ισοϋται με } \frac{1}{20} \times 8 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

'Επειδή $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{1} = 2$ και $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{24}$, τὸ ζη-

τούμενον γινόμενον ισοϋται με $2 \times \frac{35}{24} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$.

'Επειδή $\frac{6\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}} = \frac{13}{2} \times \frac{3}{11} = \frac{39}{22}$ και $\frac{3}{4\frac{6}{6}} = 3 \times \frac{6}{25} = \frac{18}{25}$,

τὸ ζητούμενον γινόμενον ισοϋται με $\frac{39}{22} \times \frac{18}{25} = \frac{39}{11} \times \frac{9}{25}$

$$= \frac{351}{275} = 1\frac{76}{275}.$$

2ον) 'Επειδή $\frac{5}{\frac{1}{8}} = 5 \times \frac{8}{1} = 40$ και $\frac{\frac{3}{4}}{2\frac{5}{8}} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{21} = \frac{3 \times 2}{21}$

$$= \frac{2}{7}, \text{ τὸ ζητούμενον πηλίκον είναι } 40 : \frac{2}{7} = 40 \times \frac{7}{2} = 140,$$

'Επειδή $\frac{4\frac{1}{9}}{2\frac{1}{3}} = \frac{37}{21}$ και $\frac{\frac{7}{9}}{3\frac{2}{3}} = \frac{7}{33}$, τὸ ζητούμενον πηλί-

κον είναι $\frac{37}{21} : \frac{7}{33} = \frac{37}{21} \times \frac{33}{7} = \frac{1221}{147} = 8\frac{45}{147} = 8\frac{15}{49}$.

'Επειδή δὲ $\frac{8}{3\frac{1}{4}} = \frac{32}{13}$ και $\frac{5\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{31}{7}$, τὸ ζητούμενον πη-

λίκον ἰσοῦται με $\frac{32}{13} : \frac{31}{7} = \frac{32 \times 7}{13 \times 31} = \frac{224}{403}$.

§ 354. Λύσις: Ἐπειδὴ $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$ καὶ $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$
 $= \frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$, τὸ α' σύνθετον κλάσμα ἰσοῦται με $\frac{19}{12} : \frac{2}{9}$
 $= \frac{19}{12} \times \frac{9}{2} = \frac{171}{24}$.

Ἐπίσης εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{5} - \frac{5}{9} = \frac{27-25}{45} = \frac{2}{45}$ καὶ
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$. Τὸ β' λοιπὸν σύνθετον κλάσμα ἰσοῦται με
 $\frac{2}{45} : \frac{5}{6} = \frac{2}{45} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{225}$.

Ἐπειδὴ $7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{15}{2} : \frac{7}{4} = \frac{15}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{15 \times 2}{7} = \frac{30}{7}$ καὶ
 $\frac{2}{5} \times \frac{10}{11} = \frac{4}{11}$, τὸ γ' σύνθετον κλάσμα ἰσοῦται με $\frac{30}{7} : \frac{4}{11}$
 $= \frac{30}{7} \times \frac{11}{4} = \frac{330}{28}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

§ 355. Λύσις: α') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 20 εἶναι 4, ἐπομένως τὰ $\frac{4}{5}$
τοῦ 20 εἶναι $4 \times 4 = 16$. β') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 40 εἶναι 8, τὰ δὲ $\frac{4}{5}$
τοῦ 40 εἶναι $8 \times 4 = 32$. γ') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 60 εἶναι 12, τὰ δὲ $\frac{4}{5}$
τοῦ 60 εἶναι $12 \times 4 = 48$. δ') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 80 εἶναι 16, τὰ δὲ $\frac{4}{5}$
αὐτοῦ εἶναι $16 \times 4 = 64$. ε') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 100 εἶναι 20, τὰ δὲ $\frac{4}{5}$
εἶναι $20 \times 4 = 80$. στ') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 200 εἶναι 40 καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι
 $40 \times 4 = 160$.

Τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 5, 10, 15,
20, 25, 50. Ἐπομένως τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $5 \times 3 = 15$,
 $10 \times 3 = 30$, $15 \times 3 = 45$, $20 \times 3 = 60$, $25 \times 3 = 75$, $50 \times 3 = 150$.

§ 356. Λύσεις: 1ον) 'Αφ' οὗ ὅλος ὁ ἀριθμός, ἦτοι τὰ $\frac{6}{6}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2}{3}$, τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 6 φορές ὀλιγώτερον, ἦτοι $\frac{2}{3 \times 6}$ καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 5 φορές περισσότερον, ἦτοι $\frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

2ον) 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{9}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $5 \frac{2}{7}$,

τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $5 \frac{2}{7}$

καὶ τὰ $\frac{4}{9}$ » » » $5 \frac{2}{7} \times 4 = 5 \frac{2}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{37}{7} \times \frac{4}{9}$
 $= \frac{148}{63} = 2 \frac{22}{63}$.

§ 357. Λύσεις: Προφανῶς ἔχει νὰ διατρέξῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 90 χιλιομ. 'Αφ' οὗ δὲ τὰ $\frac{5}{5}$ εἶναι 90 χιλ, τὸ $\frac{1}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{90}{5}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{90}{5} \times 2 = 18 \times 2 = 36$ χιλιόμ.

Β' τρόπος: Διέτρεξε τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν 90 χιλ, ἦτοι $\frac{90}{5} \times 3 = 18 \times 3 = 54$ χιλ.
 *Επομένως ἔχει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη $90 - 54 = 36$ χιλιόμ.

§ 358. Λύσεις: Τὴν γραμμὴν Πειραιῶς - Κορίνθου διανύει εἰς $2 \frac{3}{4}$ ὥρας. Ἐπειδὴ δὲ εἰς 1 ὥραν διανύει 36 χιλιόμ, εἰς $2 \frac{3}{4}$ ὥρας διανύει $36 \times 2 \frac{3}{4} = 72 + 27 = 99$ χιλιόμ.

§ 359. Λύσεις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν, ἦτοι εἰς $\frac{6}{6}$ τῆς ὥρας πλέκει $3 \frac{1}{5}$ ὁκ, εἰς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας πλέκει $\frac{3 \frac{1}{5}}{6}$ ὁκ. καὶ εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας πλέκει $\frac{3 \frac{1}{5}}{6} \times 5 = \frac{16}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$ ὁκάδας.

§ 360 Λύσεις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν, ἦτοι εἰς $\frac{3}{3}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει $2 \frac{1}{4}$ πήχ. εἰς $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει $\frac{2 \frac{1}{4}}{3} = \frac{9}{12}$ καὶ εἰς

$$5 \frac{2}{3} \text{ ἢ } \frac{17}{3} \text{ ὥρας ὑφαίνει } \frac{9}{12} \times 17 = \frac{153}{12} = 12 \frac{9}{12} = 12 \frac{3}{4} \text{ πῆχ.}$$

§ 361. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἡ ἀξία τοῦ πῆχεως, ἦτοι τὰ $\frac{100}{100}$ αὐτοῦ ἦτο 120 χιλιοδραχμα, τὸ $\frac{1}{100}$ αὐτῆς ἦτο $\frac{120}{100}$ χιλιοδρ. καὶ τὰ $\frac{12}{100}$ αὐτῆς ἦτο $\frac{120}{100} \times 12 = \frac{1440}{100}$ χιλιοδρ. $= \frac{1440}{100} \times 1000 = 14\,400$ δραχμαί. Ἐπομένως ἐπλήρωσεν 120 000—14 400 = 105 600 δραχμάς.

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ ἐγένεν ἑκπτώσις ἴση μὲ $\frac{12}{100}$ τῆς ἀξίας ἐπλήρωσε

$$\frac{100}{100} - \frac{12}{100} = \frac{88}{100} \text{ τῆς ἀξίας.}$$

'Αφ' οὗ δὲ τὰ $\frac{100}{100}$ τῆς ἀξίας ἦσαν 120 χιλιοδραχ.

τὸ $\frac{1}{100}$ » » ἦτο $\frac{120}{100}$ »

τὰ $\frac{88}{100}$ » » ἦσαν $\frac{120}{100} \times 88 = \frac{6}{5} \times 88 =$

$$\frac{528}{5} \text{ χιλιοδραχ.} = \frac{528}{5} \times 1000 = 105\,600 \text{ δραχμάς.}$$

§ 362. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἐγένεν ἑκπτώσις τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀξίας τοῦ πῆχεως, ἐπλήρωσε δι' ἑκάστον πῆχυν τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς ἀξίας του, ἦτοι $\frac{95}{10} \times 9$ χιλιοδρ. $= \frac{95}{10} \times 9000 = 85\,500$ δραχ. Ἐπομένως διὰ 4 $\frac{2}{8}$ πῆχεως ἐπλήρωσεν $85\,500 \times 4 \frac{2}{8} = 85\,500 \times 4 \frac{1}{4} = 342\,000 + 21\,375 = 363\,375$ δρχ.

Β' τρόπος. Οἱ 4 $\frac{2}{8}$ πῆχεις ἵξισον $95\,000 \times 4 \frac{2}{8} = 380\,000 + 23\,750 = 403\,750$ δραχ. Ἡ ἑκπτώσις ἦτο $\frac{1}{10}$ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἦτοι $403\,750 : 10 = 40\,375$. Ἐπομένως ἐπλήρωσεν $403\,750 - 40\,375 = 363\,375$ δραχμάς.

§ 363. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8+15}{20} = \frac{23}{20}$ καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὥς ἐξῆς.

'Αφ' οὗ τὰ $\frac{23}{20}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 23,

τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{23}{23}$ καὶ

τὰ $\frac{20}{20}$ αὐτοῦ, ἥτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι

$$\frac{23}{23} \times 20 = 20.$$

§ 364. Λύσις : Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$
καὶ ἔπεται σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς :

Ἐφ' οὗ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 2.

τὰ $\frac{12}{12}$, ἥτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $2 \times 12 = 24$.

§ 365. Λύσις. Τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$. Λοιπὸν
τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $46\frac{2}{3}$, τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ εἶναι
 $\frac{46\frac{2}{3}}{3} = \frac{140}{9}$, καὶ τὰ $\frac{10}{10}$, ἥτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι
 $\frac{140}{9} \times 10 = \frac{1400}{9} = 155\frac{5}{9}$.

§ 366. Λύσις. Ἐφ' οὗ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὁκάς ἐπωλοῦντο 4800 δρχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ » » ἐπωλεῖτο $\frac{4800}{3} = 1600$

καὶ ἡ 1 ὁκά ἥτοι τὰ $\frac{5}{5}$ » » » $1600 \times 5 = 8000$

§ 367. Λύσις :

Ἐφ' οὗ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς φιάλης χωροῦσι $\frac{3}{8}$ τῆς ὁκάς,

τὸ $\frac{1}{4}$ » » χωρεῖ $\frac{\frac{3}{8}}{3} = \frac{1}{8}$ ὁκ.

καὶ ὅλη ἡ φιάλη, ἥτοι τὰ $\frac{4}{4}$ » » » $\frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$ ὁκ.

§ 368. Λύσις : Ἐφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ τεμαχίου, ἔμει-
ναν $\frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ τοῦ τεμαχίου.

Ἐφ' οὗ λοιπὸν τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ τεμαχίου εἶναι $39\frac{1}{2}$ πήχεις,

τὸ $\frac{1}{10}$ » » » $\frac{39\frac{1}{2}}{7}$

$$\begin{aligned} \text{καὶ ὅλον τὸ τεμάχιον ἦτοι τὰ } \frac{10}{10} \text{ αὐτοῦ εἶναι } \frac{39 \frac{1}{2}}{7} \times 10 \\ = \frac{390+5}{7} = \frac{395}{7} = 56 \frac{3}{7} \text{ πῆχεις.} \end{aligned}$$

§ 369. Λύσις :

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κτήματος ἔξιζον 3 645 000 δραχ.,

τὸ $\frac{1}{8}$ » » ἔξιξε $\frac{3\,645\,000}{5}$ » καὶ

$$\begin{aligned} \text{ὅλον τὸ κτῆμα ἦτοι τὰ } \frac{8}{8} \text{ τοῦ κτήματος ἔξιζον } \frac{3\,645\,000}{5} \times 8 \\ = 729\,000 \times 8 = 5\,832\,000 \text{ δραχμάς.} \end{aligned}$$

§ 370. Λύσις : Ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς καὶ τὰ $\frac{5}{12}$ τῆς τιμῆς

ταύτης ἀποτελοῦσι $\frac{12}{12} + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς.

Ὡστε τὰ $\frac{17}{12}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς ἦσαν 6 324 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{12}$ » » » » ἦτο $\frac{6\,324\,000}{17}$ καὶ

τὰ $\frac{12}{12}$ » » » » ἦσαν $\frac{6\,324\,000}{17} \times 12$

$$= 4\,464\,000 \text{ δραχ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 371. Λύσις : 1ον) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

2ον) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

3ον) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10\,000}$, $\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{1^3}{100^3} = \frac{1}{1\,000\,000}$,

$$\left(\frac{1}{1000}\right)^2 = \frac{1^2}{1000^2} = \frac{1}{1\,000\,000}.$$

4ον) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$, $\left(2\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{8^3}{3^3}$

$$= \frac{512}{27} = 18\frac{26}{27}, \left(2\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16} = 39\frac{1}{16}.$$

$$\S 372. \text{ Λύσις: } \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^9.$$

§ 373. Λύσις: Κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν θὰ ἀνυψωθῇ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου, ἥτοι εἰς ὕψος, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου: Ἐπειδὴ δὲ πίπτει ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὕψος, κατὰ τὴν β' ἀναπήδησιν θὰ ἀνυψωθῇ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, ἥτοι εἰς ὕψος $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου. Καὶ ἐπειδὴ πίπτει ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὕψος, κατὰ τὴν γ' ἀναπήδησιν θὰ ἀνυψωθῇ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, ἥτοι εἰς ὕψος $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$ μέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 374. Λύσις: Κατὰ τὴν παραλαβὴν ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν 3 200 000 δραχ., ἥτοι $3\,200\,000 \times \frac{3}{8} = 400\,000 \times 3 = 1\,200\,000$ δραχ. Μετὰ ταῦτα ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 1 200 000 δραχ. ἥτοι $1\,200\,000 \times \frac{3}{4} = 300\,000 \times 3 = 900\,000$. Ἐπομένως ἐπλήρωσε τὸ ὅλον $1\,200\,000 + 900\,000 = 2\,100\,000$ δραχ. καὶ ὀφείλει ἀκόμη $3\,200\,000 - 2\,100\,000 = 1\,100\,000$ δραχ.

Β' τρόπος: Ἡ β' δόσις εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{3}{8}$ τῆς ἀξίας, ἥτοι $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$. Ἐπομένως ἐπλήρωσε τὸ ὅλον $\frac{3}{8} + \frac{9}{32} = \frac{21}{32}$ τῆς ἀξίας καὶ ἐπομένως χρεωστεῖ ἀκόμη $\frac{32}{32} - \frac{21}{32} = \frac{11}{32}$ τῶν 3 200 000, ἥτοι $3\,200\,000 \times \frac{11}{32} = 100\,000 \times 11 = 1\,100\,000$ δραχμάς.

§ 375. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας ἢ εἰς $60 \times 2\frac{1}{4} = 120 + 15 = 135$ πρῶτα λεπτά ὁ κρουνοὸς χύνει $\frac{3}{5} \times 135 = 3 \times 27 = 81$ ὀκ ὕδατος. Ὡστε τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ὕδαταποθῆ-

κης χωροῦσιν 81 ὀκάδας, τὸ $\frac{1}{5}$ χωρεῖ $\frac{81}{4}$ καὶ ὅλη ἡ ὕδα-
τοαποθήκη, ἥτοι τὰ $\frac{15}{15}$ αὐτῆς χωροῦσι $\frac{81}{4} \times 15 = 303\frac{3}{4}$ ὀκ.

Β' τρόπος: Τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ἀποθήκης γεμίζουν εἰς $2\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{9}{4}$ ὥρας,

τὸ $\frac{1}{15}$ » » » » $\frac{9}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$ ὥρας

καὶ τὰ $\frac{15}{15}$ » » » » $\frac{9}{16} \times 15 = \frac{135}{16}$ ὥρας

ἢ εἰς $60 \times \frac{135}{16} = 15 \times \frac{135}{4}$ πρῶτα λεπτά. Ἐπειδὴ εἰς 1 λεπτὸν χύνεται εἰς

τὴν ἀποθήκην $\frac{3}{5}$ ὀκ. εἰς $15 \times \frac{135}{4}$ λεπτά χύνονται $\frac{3}{5} \times 15 \times \frac{135}{4}$

$$= \frac{9 \times 135}{4} = \frac{9 \times 9 \times 15}{4} = \frac{81 \times 15}{4} = 303\frac{3}{4} \text{ ὀκάδες.}$$

§ 376. Λύσις: Τὸ β' βαρέλιον εἶχε τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν 250 ὀκάδων,

ἥτοι $250 \times \frac{4}{5} = 50 \times 4 = 200$ ὀκάδας. Ἐπομένως τὰ 2 βαρέλια

εἶχον $250 + 200 = 450$ ὀκ. Αὐταὶ αἱ ὀκάδες ἐκόστιζον 540 000

δραχ. καὶ ἐπομένως ἡ ὀκὰ ἐκόστιζεν $\frac{540000}{450} = 1200$ δραχ. Τὸ $\frac{1}{100}$

αὐτῶν εἶναι $\frac{1200}{100} = 12$ δραχ. καὶ τὰ $\frac{20}{100}$ εἶναι $12 \times 20 = 240$

δραχ. Πρέπει λοιπὸν νὰ πωλῇ τὴν ὀκὰν $1200 + 240 = 1440$ δραχμάς.

Β' τρόπος: Ἀπὸ ὅλον τὸν οἶνον πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὴν ἀξίαν

τοῦ 540 000 δραχ. καὶ τὰ $\frac{20}{100}$ τῶν 540 000 δραχ. ἥτοι

$$540\,000 + 540\,000 \times \frac{20}{100} = 540\,000 + 108\,000 = 648\,000 \text{ δραχ.}$$

Θὰ πωλῇ λοιπὸν τὴν ὀκὰν πρὸς $648\,000 : 450 = 1440$ δραχ.

§ 377. Λύσις: Ἀπὸ τὸ πωληθὲν ἔλαιον εἰσέπραξεν 1 260 000 δραχμάς πρὸς 12 000 τὴν ὀκὰν. Τὸ πωληθὲν λοιπὸν ἔλαιον ἦτο $1\,260\,000 : 12\,000 = 1260 : 12 = 105$ ὀκάδες. Ἐπει-

δὴ δὲ ἔμειναν τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ οἴνου τοῦ βαρελίου, ἐπωλήθησαν τὰ

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} \text{ τοῦ βαρελίου. Ὡστε:}$$

τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ οἴνου ἦσαν 105 ὀκάδες.

τὸ $\frac{1}{10}$ » » ἦτο $\frac{105}{3}$ καὶ

τὰ $\frac{10}{10}$ » » ἦσαν $\frac{105}{3} \times 10 = 35 \times 10 = 350$ ὀκάδες.

Β' τρόπος: Ἀπὸ τὰ πωληθέντα $\frac{3}{4}$ τοῦ οἴνου εἰσέπραξεν 1260000δρ

» τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ οἴνου θὰ εἰσέπραττε $\frac{1\ 260\ 000}{3}$

καὶ » τὰ $\frac{10}{10}$ » » » » $\frac{1\ 260\ 000}{3} \times 10$

= 4 200 000 δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ οἶνος ἐπωλεῖτο πρὸς 12 000 τὴν ὀκᾶν, ὅλος ὁ οἶνος ἦτο $4\ 200\ 000 : 12\ 000 = 4\ 200 : 12 = 350$ ὀκάδες.

§ 378. **Λύσις:** Ἀφ' οὗ μία ὀκᾶ ἀπορροφᾷ $\frac{55}{100}$ τῆς ὀκᾶς ὕδωρ αἰ $85 \frac{3}{4}$ ὀκάδες ἀπορροφῶσιν $\frac{55}{100} \times 85 \frac{3}{4} = \frac{11}{20} \times \frac{343}{4} = \frac{3773}{80} = 47 \frac{13}{80}$ ὀκάδ. ὕδωρ. Ἡ ζύμη λοιπὸν ἔχει βάρος $85 \frac{3}{4} + 47 \frac{13}{80} = 132 \frac{73}{80}$ ὀκάδας.

Β' τρόπος: Ἀπὸ τὴν 1 ὀκᾶν ἀλεύρου γίνεσθαι ζύμη $1 + \frac{55}{100} = \frac{155}{100}$ ὀκ. καὶ ἐπομένως ἀπὸ $85 \frac{3}{4}$ ὀκ. ἀλεύρου γίνεσθαι ζύμη $\frac{155}{100} \times 85 \frac{3}{4} = \frac{31}{20} \times \frac{343}{4} = \frac{10633}{80} = 132 \frac{73}{80}$ ὀκάδων.

§ 379. **Λύσις:** Κατὰ τὰ προηγούμενα ἀπὸ 100 ὀκ. ἀλεύρου γίνεσθαι ζύμη $\frac{155}{100} \times 100 = 155$ ὀκάδων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ζύμη κατὰ τὴν ἔψηνσιν χάνει τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ βάρους τῆς, αἰ 155 ὀκάδες χάνουσιν $155 \times \frac{1}{40} = \frac{155}{40} = 3 \frac{35}{40} = 3 \frac{7}{8}$ ὀκ. Ὁ ἄρτος λοιπὸν ἔχει βάρος $155 - 3 \frac{7}{8} = 154 \frac{8}{8} - 3 \frac{7}{8} = 151 \frac{1}{8}$ ὀκάδων.

Β τρόπος: Ἡ 1 ὀκᾶ ἀλεύρου μετὰ τὸ ὕδωρ γίνεσθαι $\frac{155}{100}$ ὀκᾶς. Κατὰ τὴν ἔψηνσιν χάνεται τὸ $\frac{1}{40}$ αὐτῆς, ἦτοι $\frac{155}{100} \times \frac{1}{40} = \frac{155}{4000}$ καὶ ἐπομένως μένει $\frac{155}{100} - \frac{155}{4000} = \frac{155 \cdot 40 - 155}{4000} = \frac{6045}{4000}$ ὀκ. Ἀπὸ δὲ 100 ὀκάδας ἀλεύρου θὰ μείνωσιν $\frac{6045}{4000} \times 100 = \frac{6045}{40} = 1209 \frac{1}{4}$ ὀκάδες ἄρτου.

§ 380. Λύσις : Κατὰ τὴν α' πώλησιν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ τυροῦ, κατὰ δὲ τὴν β' ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν $\frac{3}{7}$, ἥτοι $\frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{9}{49}$.

Ἐπώλησεν λοιπὸν τὸ ὅλον $\frac{3}{7} + \frac{9}{49} = \frac{30}{49}$ καὶ ἔμειναν

$\frac{49}{49} - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$ ὅλου τοῦ τυροῦ. Αὐτὰ δὲ ἦσαν $10 \frac{6}{7} = \frac{76}{7}$ ὅκ.

Ἄφ' οὗ λοιπὸν τὰ $\frac{19}{49}$ εἶναι $\frac{76}{7}$ ὀκάδος,

τὸ $\frac{1}{49}$ » $\frac{76}{7 \times 19}$

καὶ τὰ $\frac{49}{49}$ » $\frac{76}{7 \times 19} \times 49 = 4 \times 7 = 28$ ὅκ.

§ 381. Λύσις : Ἀπὸ τὸ α' ἐκ τῶν ἄνω πάτωμα εἰσπράττει $\frac{6}{6}$ τοῦ ἐνοικίου τούτου ἀπὸ τὸ β' τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ, ἥτοι $\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος. Ἀπὸ τὸ γ' τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ προηγουμένου, ἥτοι $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ τοῦ α' καὶ ἀπὸ τὸ δ' τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{25}{36}$, ἥτοι $\frac{25}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$. Ἐπομένως εἰσπράττει τὸ ὅλον $\frac{6}{6} + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} = \frac{671}{216}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος.

Ἐπομένως τὰ $\frac{671}{216}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος εἶναι

$$279583 \frac{1}{3} = \frac{838750}{3},$$

τὸ $\frac{1}{216}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος εἶναι $\frac{838750}{3 \times 671}$

καὶ τὰ $\frac{216}{216}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος εἶναι $\frac{838750}{3 \times 671} \times 216 = \frac{838750}{671} \times 72 = 90\ 000$ δρχ.

Ὡστε ἀπὸ τὸ α' πάτωμα εἰσπράττει 90 000 δρ.

» » β' » » $90\ 000 \times \frac{5}{6} = 75\ 000$ »

» » γ' » » $75\ 000 \times \frac{5}{6} = 62\ 500$ »

καὶ » » δ' » » $62\ 500 \times \frac{5}{6} = 52\ 083 \frac{1}{3}$ »

§ 382. Λύσις: Ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ὀρειβάτου ἕως τὴν κορυφὴν τοῦ Ὀλύμπου εἶναι $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ τοῦ ὕψους τοῦ Ὀλύμπου. Ἐπομένως ὁ ὀρειβάτης ἀνῆλθεν εἰς τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὕψους τοῦ Ὀλύμπου. Ὡστε τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι $1\,750 \frac{1}{5} = \frac{8751}{5}$ μέτρα.

$$\text{τὸ } \frac{1}{5} \gg \frac{8751}{5 \times 3}$$

καὶ ὅλον τὸ ὕψος ἦτοι τὰ $\frac{5}{5} \gg \frac{8751}{5 \times 3} \times 5 = 2917$ μέτρα.

§ 383. Λύσις: Ἀφ' ὃ ἀρχικὸς πληθυσμὸς ἠυξήθη κατὰ τὰ $\frac{5}{16}$ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἐγένεν $\frac{16}{16} + \frac{5}{16} = \frac{21}{16}$ τοῦ ἑαυτοῦ του.

Ὡστε τὰ $\frac{21}{16}$ τοῦ ζητουμένου πληθυσμοῦ εἶναι 74025,

$$\text{τὸ } \frac{1}{16} \gg \gg \gg \gg \frac{74025}{21}$$

$$\text{καὶ τὰ } \frac{16}{16} \gg \gg \gg \gg \frac{74025}{21} \times 16$$

$$= \frac{24675}{7} \times 16 = 3525 \times 16 = 56\,400 \text{ κάτ.}$$

§ 384. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἀπὸ τὰ $\frac{3}{7}$ ἢ $\frac{6}{14}$ εἰσέπραξεν 854 000

$$\text{δραχ. ἀπὸ τὸ } \frac{1}{14} \text{ εἰσπράττει } \frac{854000}{6}$$

$$\text{καὶ } \gg \text{ τὰ } \frac{9}{14} \text{ θὰ εἰσέπραττε } \frac{854000}{6} \times 9$$

$$854000 \times \frac{3}{2} = 427000 \times 3 = 1\,281\,000 \text{ δραχμάς.}$$

Β' τρόπος: Ἀφ' οὗ ἀπὸ τὰ $\frac{6}{14}$ εἰσέπραξεν 854000, ἀπὸ τὰ $\frac{3}{14}$ θὰ εἰσέπραττε $\frac{854000}{2} = 427\,000$.

Ἐπομένως ἀπὸ τὰ $\frac{9}{14}$ θὰ εἰσέπραττε $854000 + 427000 = 1\,281\,000$ δρχ.

Γ' τρόπος: Ἀφ' οὗ ἀπὸ τὰ $\frac{3}{7}$ εἰσέπραξεν 854 000 δραχ., ἀπὸ τὸ

$$\frac{1}{7} \text{ θὰ εἰσέπραττεν } \frac{854\,000}{3} \text{ δραχ.}$$

$$\text{ἀπὸ τὰ } \frac{7}{7} \text{ ἢ } \frac{14}{14} \text{ θὰ εἰσέπραττεν } \frac{854\,000}{3} \times 7$$

$$\text{ἀπὸ τὸ } \frac{1}{14} \text{ θὰ εἰσέπραττεν } \frac{854\,000}{3 \times 14} \times 7$$

καὶ ἀπὸ τὰ $\frac{9}{14}$ θὰ εἰσέπραττεν $\frac{854\,000}{3 \times 14} \times 7 \times 9 = \frac{854\,000}{2} \times 3$
1 281 000 δραχ.

§ 385. Λύσις: α') 'Αφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ὑφάσματος, ἔμειναν τὰ $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ τοῦ ὑφάσματος. Αὐτὰ λοιπὸν τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι 27 μέτρα, ἐπομένως τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι $\frac{27}{3} = 9$ μέτρα καὶ ὅλον τὸ ὑφάσμα, ἥτοι τὰ $\frac{8}{8}$ εἶναι $9 \times 8 = 72$ μέτρα.

β) 'Απὸ αὐτὰ εἰσέπραξεν $68 \times 72 = 4896$ χιλιόδρ.

§ 386. Λύσις: 'Η β' καὶ ἡ γ' δόσις μαζὶ ἀποτελοῦσιν $16\,500 + 26\,250 = 42\,750$ δραχ. 'Επειδὴ δὲ αἱ τρεῖς δόσεις μαζὶ ἀποτελοῦσιν 72 750, δραχ. ἔπεται ὅτι ἡ α' δόσις εἶναι $72\,750 - 42\,750 = 30\,000$ δραχ.

"Ωστε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ χρέους ἦσαν 30 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » ἦτο $\frac{30\,000}{3}$

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ » » » $\frac{30\,000}{3} \times 8 = 80\,000$ δραχ.

§ 387. Λύσις: 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς κληρονομίας εἶναι 876 000 δραχ, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{876\,000}{3}$ καὶ ὅλη ἡ κληρονομία, ἥτοι τὰ $\frac{8}{8}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{876\,000}{3} \times 8 = 292\,000 \times 8 = 2\,336\,000$ δραχμαί.

'Ο β' λοιπὸν ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 2 336 000 δραχμῶν, ἥτοι $2\,336\,000 \times \frac{2}{5} = 934\,400$ δραχ.

'Ο α' καὶ ὁ β' ἔλαβον $876\,000 + 934\,400 = 1\,810\,400$. 'Επομένως ὁ γ' ἔλαβεν $2\,336\,000 - 1\,810\,400 = 525\,600$ δραχ.

Β' τρόπος: Εὐρίσκομεν, ὅπως προηγουμένως ὅτι ὅλη ἡ κληρονομία ἦτο 2 336 000 δραχ. καὶ ὅτι ὁ β' ἔλαβεν 934 000 δραχ. "Επειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ α' καὶ ὁ β' ἔλαβον $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{31}{40}$ τῆς κληρονομίας. 'Ο γ' λοιπὸν ἔλαβε τὰ $\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$ τῆς κληρονομίας, ἥτοι $2\,336\,000 \times \frac{9}{40} = 58\,400 \times 9 = 525\,600$ δραχ.

§ 388. Λύσις: Εύρίσκομεν ὅτι $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5+6+2}{15} = \frac{13}{15}$
τοῦ χρέους του. Ὡστε:

Τὰ $\frac{13}{15}$ τοῦ χρέους του ἦσαν 78 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{15}$ » » » » $\frac{78\,000}{13}$

καὶ τὰ $\frac{15}{15}$ » » » » $\frac{78\,000}{13} \times 15 = 90\,000$.

Ὡστε τὸ χρέος του ἦτο 90 000 δραχ. καὶ ὀφείλει ἀκόμη
90 000 — 78 000 = 12 000 δραχμάς.

Σημ.: Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ὀφείλει ἀκόμη εὐρίσκομεν καὶ ὡς ἐξῆς:
Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφ' οὗ ἐπλήρωσε τὰ $\frac{13}{15}$ τοῦ χρέους του, ὀφείλει ἀκόμη
 $\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$ τοῦ χρέους του, ἦτοι $90\,000 \times \frac{2}{15} = 12\,000$ δραχ.

§ 389. Λύσις: Ἡ τιμὴ τῶν προβάτων καὶ τῶν βοῶν εἶναι
τὰ $\frac{27}{27} + \frac{19}{27} = \frac{46}{27}$ τῆς τιμῆς τῶν προβάτων. Ἐπομένως

τὰ $\frac{46}{27}$ τῆς τιμῆς τῶν προβάτων ἦσαν 7 912 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{27}$ » » » » ἦτο $\frac{7\,912\,000}{46}$ καὶ

τὰ $\frac{27}{27}$ » » » » ἦσαν $\frac{7\,912\,000}{46} \times 27 = 4\,644\,000$
δραχμαί.

Τὰ 54 πρόβατα λοιπὸν ἥξιζον 4 644 000 καὶ ἐπομένως τὸ 1
πρόβατον ἐπώλησε $4\,644\,000 : 54 = 86\,000$ δραχ.

Τοὺς δὲ 2 βόας ἐπώλησε $7\,912\,000 - 4\,644\,000 = 3\,268\,000$
δραχ. καὶ ἕκαστον ἐπώλησεν ἀντὶ $3\,268\,000 : 2 = 1\,634\,000$ δρχ.

§ 390. Λύσις: Τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς ἀγορᾶς εἶναι $\frac{8\,256\,000}{15} = 550\,400$
δρχ. Ἐπομένως ὁ κτηνοτρόφος ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 86—6
= 80 προβάτων πρέπει νὰ εἰσπράξῃ $8\,256\,000 + 550\,400 = 8\,806\,400$
δραχ. Πρὸς τοῦτο δε πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον πρόβατον
ἀντὶ $8\,806\,400 : 80 = 110\,080$ δραχμῶν.

Β' τρόπος: Ἀφ' οὗ θέλει νὰ κερδίσῃ τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς ἀγορᾶς τῶν προ-
βάτων, πρέπει ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 80 προβάτων νὰ εἰσπράξῃ τὰ
 $\frac{15}{15} + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$ τῆς ἀγορᾶς, δηλ. τῶν 8 256 000 δραχ., ἦτοι $8\,256\,000 \times \frac{16}{15}$

$$= 2\,752\,000 \times \frac{16}{5} = 550\,400 \times 16 \text{ δραχ.} \text{ 'Επομένως ἕκαστον πρόβατον θὰ πωλήσῃ ἀντὶ } \frac{550\,400 \times 16}{80} = \frac{550\,400}{5} = 110\,080 \text{ δραχμῶν.}$$

§ 391. Λύσις: Τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 120 μέτρων εἶναι $120 : 4 = 30$ μέτρα.

Τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 120 μέτρων εἶναι $120 : 5 = 24$ μέτ. Τὰ δὲ ὑπόλοιπα μέτρα εἶναι $120 - (30 + 24) = 66$ μέτρα.

Εἰσέπραξε δὲ ἀπὸ τὰ 30 μέτρα $45\,000 \times 30 = 1\,350\,000$ δραχ.
 » » 24 » $54\,000 \times 24 = 1\,296\,000$ »
 » » 66 « $48\,000 \times 66 = 3\,168\,000$ »

Ἐπομένως εἰσέπραξε τὸ ὅλον $5\,814\,000$ δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγόρασεν ἀντὶ $5\,520\,000$ δραχ., ἔπεται ὅτι ἐκέρδισεν $5\,814\,000 - 5\,520\,000 = 294\,000$ δραχ.

Β' τρόπος: Ἀπὸ ἕκαστον τῶν 24 μέτρων ἐκέρδισεν $54\,000 - 46\,000 = 8\,000$ δραχ. Ἐπομένως ἀπὸ αὐτὰ τὰ 24 μέτρα ἐκέρδισεν $8\,000 \times 24 = 192\,000$ δραχ.

Ἀπὸ ἕκαστον τῶν 66 μέτρων ἐκέρδισεν $48\,000 - 46\,000 = 2\,000$ δραχ. καὶ ἀπὸ αὐτὰ τὰ 66 μέτ. ἐκέρδισεν $2\,000 \times 66 = 132\,000$ »

Ἀπὸ αὐτὰ λοιπὸν τὰ μέτρα ἐκέρδισε τὸ ὅλον $324\,000$ »

Ἀπὸ τὸ ποσὸν ὅμως αὐτὸ πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ζημίαν, τὴν ὁποίαν ἔπαθεν ἀπὸ τὰ 30 μέτρα, ἦτοι:
 $(46\,000 - 45\,000) \times 30 = 30\,000$ »

Ἐπομένως τὸ καθαρὸν κέρδος ἦτο $294\,000$ »

§ 392. Λύσις: Ὁ α' ἐργάτης εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ

ἔργου, ὁ δὲ β' ἐργάτης εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου.

Οἱ δύο λοιπὸν μαζί εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελοῦσι τὸ $\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40}$ τοῦ ἔργου. Ὡστε οἱ 2 μαζί

διὰ τὰ $\frac{13}{40}$ τοῦ ἔργου πρέπει νὰ ἐργασθῶσι 1 ἡμέραν

» τὸ $\frac{1}{40}$ » » » » $\frac{1}{13}$ ἡμέρας

» τὰ $\frac{40}{40}$ » » » » $\frac{1}{13} \times 40 = 3 \frac{1}{13}$ ἡμ.

§ 393. Λύσις: Ἀφ' οὗ ὁ α' ἐργάτης εἰς 9 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου, εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελεῖ τὰ $\frac{2}{3 \times 9} = \frac{2}{27}$ τοῦ

ἔργου. Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ὁ β' ἐργάτης εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελεῖ
 τὸ $\frac{5}{8 \times 5} = \frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου. Ἐπομένως οἱ δύο μαζὶ εἰς 1 ἡμέραν
 ἐκτελοῦσι $\frac{2}{27} + \frac{1}{8} = \frac{16+27}{216} = \frac{43}{216}$ τοῦ ἔργου.

Ὡστε οἱ δύο μαζὶ

διὰ τὰ $\frac{43}{216}$ τοῦ ἔργου πρέπει νὰ ἐργασθῶσι 1 ἡμέραν

» τὸ $\frac{1}{216}$ » » » » $\frac{1}{43}$ ἡμέρας

» τὰ $\frac{216}{216}$ » » » » $\frac{1}{43} \times 216 =$

$$= \frac{216}{43} = 5\frac{1}{43} \text{ τῆς ἡμέρας.}$$

§ 394 Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$ καὶ ἐν-
 νοοῦμεν ὅτι τὰ $\frac{17}{12}$ τῆς ἡλικίας εἶναι 68 ἔτη.

τὸ $\frac{1}{12}$ » » » $\frac{68}{17}$ »

καὶ τὰ $\frac{12}{12}$ » » » $\frac{68}{17} \times 12 = 4 \times 12 = 48$ ἐτῶν.

§ 395. Λύσις: Ὁ ἀφαιρούμενος οἶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$
 τοῦ οἴνου ὅλου τοῦ βαρελίου, ἥτοι $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. Μένουσιν.
 ἐπομένως $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ τοῦ οἴνου τοῦ βαρελίου. Ὡστε τὸ
 $\frac{1}{2}$ τοῦ βαρελίου χωρεῖ 280, ἐπομένως ὅλον τὸ βαρέλιον χω-
 ρεῖ $280 \times 2 = 560$ ὀκ.

Β' Τρόπος: Ἀφοῦ ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$, μένουσι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν
 $\frac{3}{4}$, ἥτοι $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ κ.λ.π. ὡς προηγουμένως.

§ 396. Λύσις: Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ α' ἀριθμοῦ εἶναι 362

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ » $\frac{362}{3}$

καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἥτοι τὰ $\frac{5}{5}$ » εἶναι $\frac{362}{3} \times 5 = \frac{1810}{3}$.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ὁ β' ἀριθμὸς εἶναι $\frac{248}{3} \times 4 = \frac{992}{3}$.

Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι

$$\frac{1810}{3} + \frac{992}{3} = \frac{2802}{3} = 934.$$

§ 397. Λύσις : Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶ-

ναι $\frac{5}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ὡστε :

τὰ $\frac{6}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 720 δραχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ » » » $\frac{720}{6}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ » » » $\frac{720}{6} \times 5 = 120 \times 5 = 600$

§ 398. Λύσις : Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}$.

Ἐπομένως τὰ $\frac{17}{24}$ τοῦ ποσοῦ εἶναι 1 700

τὸ $\frac{1}{24}$ » » $\frac{1700}{17}$

καὶ τὰ $\frac{24}{24}$ » » $\frac{1700}{17} \times 24 = 2400.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 399. Λύσις : Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (§ 223 Ἀριθμη-
τικῆς) καὶ εὐρίσκομεν : $\frac{3}{10} = 0,3$, $\frac{25}{100} = 0,25$, $\frac{32}{1000} = 0,032$,
 $\frac{248}{1000} = 0,248$, $\frac{45}{10000} = 0,0045.$

§ 400. Λύσις : Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τῆς (§ 224 Ἀριθ-
μητικῆς) καὶ εὐρίσκομεν $0,470 = \frac{470}{1000}$, $0,758 = \frac{758}{1000}$, $0,4235 = \frac{4235}{10000}$,
 $0,03012 = \frac{3012}{100\,000}$, $2,43 = \frac{243}{100}$, $45,72 = \frac{4572}{100}$, $8,654 = \frac{8654}{1000}$,
 $125,3 = \frac{1253}{10}.$

§ 401. Λύσις : 3 ἑκατοστὰ $= \frac{3}{100} = 0,03$, 2002 χιλιοστὰ
 $= \frac{2002}{1000} = 2,002$, 564 δεκάκις χιλιοστὰ $= \frac{564}{10\,000} = 0,0564$, 4 ἄ-
κέραιος καὶ 75 χιλιοστὰ $= 4 \frac{75}{1000} = 4,075$, 125 ἀκέραιος καὶ
3 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ $= 125,00003$, 368 ἀκέραιος καὶ 12 ἑκα-
τομμυριοστὰ $= 368,000012.$

$$\S 402. \text{ Λύσεις: } 1\text{ον}) \quad 2,5 = \frac{25}{10} = \frac{2500}{1000} = \frac{25\,000}{10\,000}.$$

$$2\text{ον}) \quad 0,605 = \frac{605}{1000} = \frac{605\,000}{1\,000\,000}.$$

$$\S 403. \text{ Λύσεις: } 1\text{ον}) \quad 6,375 \times 100 = 637,5, \quad 0,094 \times 1000 = 94, \\ 0,3 \times 10\,000 = 3\,000.$$

$$2\text{ον}) \quad 0,008 \times 100 = 0,8 \quad 325,07 \times 1000 = 325\,070, \\ 4,02 \times 10\,000 = 40\,200, \quad (\text{βλέπε κανόνα } \S 227 \text{ 'Αριθ.}).$$

$$\S 404. \text{ Λύσεις: } 5 = 5,0. \quad 49 = 49,0, \quad 607 = 607,0.$$

$$\S 405. \text{ Λύσεις: } 1\text{ον}) \quad 45,7 : 10 = 4,57, \quad 125,75 : 100 = 1,2575, \\ 4706,5 : 1000 = 4,7065.$$

$$2\text{ον}) \quad 0,78 : 10 = 0,078, \quad 348,09 : 100 = 3,4809, \\ 0,4874 : 1000 = 0,000\,4874.$$

$\S 406.$ Λύσεις: Προκύπτει ό 355 ή 355,0. Μετατίθεται λοιπόν ή ύποδιαστολή μίαν θέσιν πρός τά δεξιά. Έπομένως ό άριθμός πολίζεται επί 10.

$\S 407.$ Λύσεις: 'Αφ' ού τά 1000 πορτοκάλια τιμώνται 129 χιλιάδρ. τó 1 πορτοκάλιον τιμᾶται $\frac{129}{1000}$ χιλιάδρ. = 0,129 χιλιάδ.

Τά 10 πορτοκάλια τιμώνται $0,129 \times 10 = 1,29$ χιλιάδ.

Τά 100 » » $0,129 \times 100 = 12,9$ »

$\S 408.$ Λύσεις: 'Αφ' ού τó 1 χιλιόμετρον ἔχει 1000 μέτρα τά 18,5 χιλίóm. ἔχουσι $1000 \times 18,5$ μέτρα = 18 500.

$\S 409.$ Λύσεις: Λέγομεν 47 καί 52 γίνονται 99· ἔπειτα 3 δέκατα καί 9 δέκατα γίνονται 12 δέκατα = 1,2. Έπομένως τó ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $99 + 1,2 = 100,2$.

Όμοίως λήγομεν 142 καί 35 γίνονται 177· ἔπειτα 8 δέκατα καί 1 δέκατον γίνονται 9 δέκατα. Έπειτα 177,9.

Όμοίως $453 + 18 = 463 + 8 = 471$ · ἔπειτα $0,6 + 0,4 = 1$ · Έπομένως $471 + 1 = 472$.

Όμοίως $120 + 40 = 160$ · $0,25 + 0,6 = 0,25 + 0,60 = 0,85$. Έπομένως 160,85 κ.τ.λ.

$$\S 410 \text{ Λύσεις: } \begin{array}{r} 1\text{ον}) \quad 72,804 \\ \quad \quad 0,0487 \\ \quad \quad 3,252 \\ \quad \quad 356,4 \\ \quad 1\,800, \\ \hline 2\,232,5047 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2\text{ον}) \quad 504,18 \\ \quad \quad 503,81 \\ \quad \quad 85,17 \\ \quad \quad 48,97 \\ \quad \quad 49,001 \\ \hline 1191,131 \end{array} \right\}$$

§ 411. Λύσις: Τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι
 $250,5 + 236,8 + 480,5 = 967,8$ χιλιόμετρα.

§ 412. Λύσις: Ἠγόρασε $28,5 + 14,75 + 43,80 = 87,05$ μέτ.
 καὶ ἔδωκε $845,75 + 560 + 790,50 = 2196,25$ χιλίοδραχμα.

§ 413. Λύσις: Διὰ τὴν ἀγορὰν τῶν εἰδῶν τούτων ἔδωκε
 $328,95 + 2\,756,50 + 504,8 = 3590,05$ χιλίοδραχμα. Τὸ κέρ-
 δος θὰ εἶναι $3590,05 : 10 = 359,005$ χιλίοδρ. Ἐπομένως ἀπὸ
 τὴν πώλησιν τῶν εἰδῶν αὐτῶν πρέπει νὰ εἰσπράξῃ
 $3590,05 + 359,005 = 3949,055$ χιλίοδρ.

Β' τρόπος: Τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ζάκχαριν εἶναι $328,75 : 10 = 32,875$
 χιλ. Ἐπομένως ἀπὸ τὴν πώλησιν τῆς ζακχαρέως θὰ εἰσπράξῃ
 $328,75 + 32,875 = 361,625$ χιλ.

Τὸ κέρδος ἀπὸ τὸ ἔλαιον εἶναι $2\,756,50 : 10 = 275,65$ χιλίοδραχ.
 καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὴν πώλησιν αὐτοῦ θὰ εἰσπράξῃ
 $2\,756,50 + 275,65 = 3032,15$ χιλίοδρ.

Τὸ δὲ κέρδος ἀπὸ τὰ ὄσπρια εἶναι $504,8 : 10 = 50,48$ χιλίοδρ.
 ἐπομένως ἀπὸ τὴν πώλησιν αὐτῶν θὰ εἰσπράξῃ
 $504,8 + 50,48 = 555,28$ χιλίοδ.

Θὰ εἰσπράξῃ λοιπὸν τὸ ὅλον
 $361,625 + 3032,15 + 555,28 = 3949,055$ χιλίοδ

§ 414. Λύσις: 1ον) 30 ἑκατ. ἀπὸ 85 ἑκατ. = 0,55· 2 ἀπὸ 4
 μένουσι 2· 10 ἑκατ. ἀπὸ 25 ἑκατ. μένουσι 15 ἑκτ. Ὡστε
 $4,25 - 2,10 = 2,15$. Ἐπίσης $25 - 12 = 13$ καὶ $0,75 - 0,60 = 0,15$,
 Ὡστε $25,75 - 12,60 = 13,15$.

2ον) $6 - 2 = 4$ · 75 ἑκατ. — 30 ἑκ. = 45 ἑκατ. Ὡστε $6,75 - 2,30$
 = 4,45· 75 ἑκατ. ἀπὸ 135 ἑκατ. μένουσι 60 ἑκατ. 2 ἀπὸ 6 τέσ-
 σαρα. Ὡστε :
 $7,35 - 2,75 = 4,60$. Τέλος $12 - 9,05 = 11 + 1,00 - 9,05 = 2,95$.

§ 415. Λύσις: 1ον) $\left. \begin{array}{r} 375,00 \\ 148,90 \\ \hline 226,10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 1764,00 \\ 895,45 \\ \hline 868,55 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 7,000 \\ 6,375 \\ \hline 0,625 \end{array} \right\}$

2ον) $85,40 + 75,65 = 161,05$ · $18,45 + 104,95 = 123,40$
 Ἐπομένως $(85,40 + 75,65) - (18,45 + 104,95) = 161,05 - 123,40$
 = 37,65

§ 416. Λύσις:
 Τὰ 3 χαρτονομίσματα ἀξίζουσι $20 \times 3 = 60$ χιλίοδ.
 Ἡ τιμὴ τῶν ἐμπορευμάτων ἦτο $36,40 + 18,75 = 55,15$
 Ἐπομένως θὰ λάβῃ ὑπόλοιπον $60 - 55,15 = 4,85$ χιλ.
 = $1\,000 \times 4,85 = 4\,850$ δραχμάς.

§ 417. Λύσις: Ὁ Γεώργιος εἶχε $15,60 - 4,75 = 10,85$ χιλιοδ.
ὁ δὲ Πέτρος $3,45 + 8,90 = 12,35$. Ὁ Πέτρος λοιπὸν εἶχε περισ-
σότερα $12,35 - 10,85 = 1,50$ χιλιοδραχμα = 1500 δραχμάς.

§ 418. Λύσις:

×	354
8,2	
708	
2832	
2902,8	

×	4506
0,75	
22530	
31542	
3379,50	

×	90,007
18,208	
768056	
192014	
768056	
96007	
17480,95456	

×	1,25
4,009	
1125	
500	
5,01125	

Ὁμοίως εὐρίσκονται καὶ τὰ ἄλλα γινόμενα.

§ 419. Λύσις: Ἀφ' οὗ τὸ 1 μέτρον τιμᾶται 14,5 χιλιοδρ.
τὰ 15,4 μέτρα τιμῶνται $14,5 \times 15,4 = 223,30$ χιλιοδρ.

§ 420. Λύσις: Τὰ 25 δέματα ἐξύγιζον $48 \times 25 = 1200$ ὁκάδ.
Αὐταὶ δὲ αἱ ὁκάδες τιμῶνται $1,60 \times 1200 = 1920$ χιλιοδρ.

§ 421. Λύσις: Ἐδωκεν ἀπέναντι 20 000 δρχ. ἢ 20 χιλιοδ.

Αἱ 3 ὁκάδες ἐτιμῶντο $6,4 \times 3 = 19,2$ χιλιοδ. 19,20 »

Ἐλαβε λοιπὸν ὑπόλοιπον $20 - 19,20 = 0,80$ ἢ
 $1000 \times 0,80 = 800$ δραχ.

§ 422. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 1 ὥραν διέτρεχε 25,6 χιλιομ.
εἰς 5,6 ὥρας διέτρεξεν $25,6 \times 5,6 = 143,36$ χιλιομ.

§ 423. Λύσις:

Διὰ τὸ α' ὕφασμα ὀφείλει $24,50 \times 12,60 = 308,70$ χιλ.
καὶ διὰ τὸ β' » $14,5 \times 4,25 = 61,625$ »
Ἐπομένως διὰ τὰ δύο μαζί ἐπλήρωσεν 370,325 »

§ 424. Λύσις: Διὰ τὸ ὕφασμα μιᾶς ἡμέρας λαμβάνει
 $8,75 \times 3,25 = 28,4375$ χιλιοδρ. Καὶ διὰ τὸ ὕφασμα τῶν 25 ἡμε-
ρῶν λαμβάνει $28,4375 \times 25 = 710,9375$.

Β' τρόπος: Εἰς 25 ἡμέρας ὑφαίνει $3,25 \times 25 = 81,25$ μέτρα. Δι' αὐτὰ
λαμβάνει $8,75 \times 81,25 = 710,9375$ χιλιοδραχ.

§ 425 Λύσεις :

Εἰς τοὺς 18 ἄνδρας πληρώνει $35,40 \times 18 = 673,20$ χιλιόδρ.
καὶ εἰς τὰς 12 γυναῖκας » $18,75 \times 12 = 225$ »

Τὸ ὅλον λοιπὸν πληρώνει $673,20 + 225 = 862,20$ »

§ 426. Λύσεις : $520,60 : 4 = 130,15$, $256,06 : 39 = 6,565641$
κατὰ προσέγγισιν 0,000001. $1046,24 : 204 = 5,128627$ κατὰ
προσέγγισιν 0,000001.

$(3,4 \times 10 + 25,637 \times 100) : 40 = (34 + 2563,7) : 40 = 2597,7 : 40 =$
 $= 64,9425$

$(56,35 \times 10 - 7,45 \times 5) : 80 = (563,5 - 37,25) : 80 = 526,25 : 80 =$
 $= 6,578125.$

§ 427. Λύσεις : Ἐξακολουθοῦμεν ἐκάστην διαίρεσιν, ἕως ὅ-
του εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἐκατοστῶν τοῦ πηλίκου. Εὕρισκο-
μεν λοιπὸν ὅτι : $1724,50 : 235 = 7,33$,
 $749,5 : 125 = 5,99$, $32,725 : 48 = 0,68$

§ 428. Λύσεις : Ἐξακολουθοῦμεν τὰς διαιρέσεις μέχρις οὗ
εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν τοῦ πηλίκου. Οὕτως εὕρι-
σκομεν ὅτι $7653, 27 : 354 = 21,619$
 $1,235 : 427 = 0,002$ $45,03 : 124 = 0,363$,

§ 429. Λύσεις : Ἀφ' οὗ εἰς 5 ὥρας ρέουσι 1441,40 χιλιόγρ.,
εἰς 1 ὥραν ρέουσι $1441,40 : 5 = 288,28$ χιλ.

§ 430. Λύσεις : Αἱ 4 ὥραι ἔχουσιν $60 \times 4 = 240$ πρῶτα λεπτά.
Ἀφ' οὗ λοιπὸν εἰς 240 πρῶτα λεπτά ρέουσι 3560,40 χιλιόγρ.,
εἰς 1 π. λ. ρέουσι $3560,40 : 240 = 14,835$ χιλιόγρ.

Β' τρόπος : Ἀφ' οὗ εἰς 4 ὥρας ρέουσι 3560,40 χιλιόγρ., εἰς 1 ὥραν
ρέουσι $3560,40 : 4 = 890,10$ χιλ. καὶ εἰς 1 π. λ. ρέουσιν $890,10 : 60 = 14,835$
χιλιόγραμμα.

§ 431. Λύσεις : Ἀφ' οὗ εἰς 17 στρέμ. ἔρριψεν 212,5 χιλιόγρ.,
εἰς 1 στρέμ. ἔρριψεν $212,5 : 17 = 12,5$ χιλιόγρ.

§ 432. Λύσεις : Ἀφ' οὗ τὰ 35 μέλη ἔλαβον 23644,60 χιλιόγρ.
τὸ 1 μέλος ἔλαβεν $23644,60 : 35 = 675,56$ χιλιόγρ.

§ 433. Λύσεις : $675 : 0,05 = 67500 : 5 = 13500$,
 $345 : 0,15 = 34500 : 15 = 2300$, $135 : 0,045 = 135000 : 45 = 3000$,
 $2,88 : 0,9 = 28,8 : 9 = 3,2$, $444,64 : 0,56 = 44464 : 56 = 794$,
 $2400,4 : 5,4 = 24004 : 34 = 706.$

§ 434. Λύσεις : Ἀφοῦ κάμωμεν τὸν διαιρέτην ἀκέραιον
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ το Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὗρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν τοῦ πηλίκου. Οὕτως εὐρίσκομεν :

$$28,8 : 2,05 = 2880 : 205 = 14,04,$$

$$644,32 : 0,64 = 64432 : 64 = 1006,75 \text{ ἀκριβὲς πηλίκον,}$$

$$117,67 : 2,43 = 11767 : 243 = 48,42, \quad 4,742 : 3,25 = 1,45,$$

$$48,76 : 8,2 = 487,6 : 82 = 5,94, \quad 2375,49 : 15,4 = 23754,9 : 154 = 154,25$$

§ 435. Λύσις : Ἄν ἀπὸ τὰ 68,75 μέτ. κόψη 2,75 μ., κάμνει 1 ἐνδυμασίαν· μεῖ ἄλλα 2,75 μ. κάμνει ἄλλην μίαν ἐνδυμασίαν καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς. Μετὰ 68,75 μ. θὰ κάμῃ λοιπὸν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς τὰ 2,75 μ. χωροῦσιν εἰς τὰ 68,75 μ. ἦτοι $68,75 : 2,75 = 6875 : 275 = 25$ ἐνδυμασίας.

§ 436. Λύσις : Διὰ νὰ διανύσῃ 16,3 χιλ. χρειάζεται 1 ὥραν. Δι' ἄλλα 16,3 χιλ. χρειάζεται ἄλλην μίαν ὥραν καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς. Διὰ τὰ 21,19 χιλ. χρειάζεται λοιπὸν τόσας ὥρας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 16,3 χιλ. εἰς τὰ 21,19 χιλ. ἦτοι :

$$21,19 : 16,3 = 211,9 : 163 = 1,3 \text{ ὥρας.}$$

§ 437. Λύσις : Ἄν σκεφθῶμεν, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ κιβώτιον ἔχει :

$$30,72 : 0,256 = 30720 : 256 = 120 \text{ πλάκας,}$$

§ 438. Λύσις : Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι περνᾷ 11,52 : 2,88 = 1152 : 288 = 4 ἐβδομάδας,

§ 439. Λύσις : Διὰ νὰ διανύσῃ 1,80 μ., πρέπει νὰ κάμῃ 1 στροφὴν. Δι' ἄλλα 1,80 μ. πρέπει νὰ κάμῃ ἄλλην μίαν στροφὴν καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς. Διὰ νὰ διανύσῃ λοιπὸν 25740 μέτρα, πρέπει νὰ κάμῃ τόσας στροφάς, ὅσας φορὰς τὰ 1,80 μ. χωροῦσιν εἰς τὰ 25740 μ. ἦτοι :

$$25740 : 1,80 = 257400 : 18 = 14300 \text{ στροφάς.}$$

$$§ 440. \text{ Λύσις : } 12,25 \times \frac{4}{5} = \frac{12,25 \times 4}{5} = \frac{49}{5} = 9,8.$$

$$15,16 : \frac{2}{5} = 15,16 \times \frac{5}{2} = \frac{15,16 \times 5}{2} = \frac{75,80}{2} = 37,90.$$

$$5,124 \times 3\frac{1}{4} = 5,124 \times \frac{13}{4} = \frac{5,124 \times 13}{4} = \frac{66,612}{4} = 17,653,$$

$$20,85 : 2\frac{2}{3} = 20,85 : \frac{8}{3} = 20,85 \times \frac{3}{8} = \frac{62,55}{8} = 7,81875.$$

§ 441. Λύσις :

Ἄφ' οὗ εἰς 1 ὥραν διανύει 24,60 χιλιόμε.

$$\begin{array}{llll} \text{εἰς } \frac{1}{4} & » & » & \frac{24,60}{4} \\ \text{καὶ εἰς } \frac{3}{4} & » & » & \frac{24,60}{4} \times 3 = 6,15 \times 3 = 18,45 \text{ χιλ.} \end{array}$$

§ 442. Λύσις : 'Αφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ τυροῦ, ἔμειναν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Λοιπὸν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ τυροῦ ἦσαν 12,85 χιλ.

$$\text{τὸ } \frac{1}{5} \quad » \quad » \quad \text{ἦτο } \frac{12,85}{2} \quad »$$

$$\text{καὶ ὅλος ὁ τυρός, ἦτοι τὰ } \frac{5}{5} \quad » \quad » \quad \frac{12,85}{2} \times 5 = 32,125$$

§ 443. Λύσις : 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν χύνονται 2,35 χιλιόγρ, εἰς 5 $\frac{1}{4}$ ὥρας χύνονται $2,35 \times 5 \frac{1}{4} = 2,35 \times \frac{21}{4} = \frac{49,35}{4} = 2,33715$ χιλ. ἢ $2,35 \times 5 \frac{1}{4} = (2,35 \times 5) + (2,35) \times \frac{1}{4} = 11,75 + 0,5875 = 12,3375$ χιλιόγρ.

§ 444. Λύσις : Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 238 'Αριθμητ.) τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς. 'Επίσης, ἐπεὶ δὲ $4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$, $25=5^2$, τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{19}{25}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς. 'Επεὶ δὲ $9=3^2$, $12=2^2 \times 3$, $18=2 \times 3^2$, τὰ κλάσματα $\frac{5}{9}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{27}{18}$ δὲν τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀκριβῶς.

§ 445. Λύσις : Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἐκάστου ἢ καὶ ὡς ἑξῆς : $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$,

$$\begin{array}{ll} \frac{8}{25} = \frac{8 \times 4}{25 \times 4} = 0,32, & \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125} = 0,625, \\ \frac{21}{48} = \frac{7}{16} = \frac{7 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{7 \times 625}{(2 \times 5)^4} = \frac{4375}{10000} = 0,4375, & \frac{25}{64} = \frac{25}{2^6} = \frac{25 \times 5^6}{2^6 \times 5^6} = \\ = \frac{390625}{10^6} = 0,390625. & \frac{12}{75} = \frac{4}{25} = \frac{4 \times 4}{25 \times 4} = 0,16. \end{array}$$

§ 446. Λύσις : Διαιροῦμεν τὸ ἀριθμητὴν ἐκάστου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, μέχρις οὗ εὗρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν τοῦ πηλίκου. Οὕτως εὗρισκομεν ὅτι $\frac{3}{7} = 0,42$, $\frac{3}{11} = 0,27$, $\frac{7}{9} = 0,77$, $\frac{5}{24} = 0,20$, $\frac{5}{13} = 0,38$, $\frac{17}{60} = 0,28$.

$$\S 447. \text{Λύσεις: } 1) \frac{3}{4} + 0,85 + 2\frac{1}{2} = 0,75 + 0,85 + 2,5 = 4,10.$$

$$2\text{ov}) \frac{4}{5} - 0,724 = 0,800 - 0,724 = 0,076$$

$$3\text{ov}) \frac{5}{8} \times 4,5 = \frac{5 \times 4,5}{8} = \frac{22,5}{8} = 2,8125$$

$$4\text{ov}) 3\frac{1}{8} \times 9,25 = \frac{25}{8} \times 9,25 = \frac{25 \times 9,25}{8} = \frac{231,25}{8} = 28,90625$$

$$5\text{ov}) 5\frac{4}{25} - 3,75 = 5,16 - 3,75 = 1,41$$

$$6\text{ov}) 1,04 : \frac{2}{5} = 1,04 \times \frac{5}{2} = 0,52 \times 5 = 2,60.$$

§ 448. Λύσεις: 1ov) Ἐπειδὴ $7 + \frac{1}{10} = 7,1$, ἔπεται ὅτι $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} = 3 + \frac{1}{7,1}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{7,1} = \frac{10}{71} = 0,14$ κατὰ προσέγγυ-
γισιν 0,01, ἔπεται ὅτι ἡ ζητούμενη τιμὴ εἶναι $3 + 0,14 = 3,14$
κατὰ προσέγγυγισιν 0,01.

2ov) Ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{13 \times 4}{7 \times 5} - \frac{2}{7} = \frac{52 - 10}{35} = \frac{42}{35} = \frac{6}{5}$. Ὁ δὲ παρονομαστὴς ἰσοῦται πρὸς $\frac{30}{8} - \frac{6}{35} = \frac{1050 - 48}{280} = \frac{1002}{280}$. Ἐπομένως τὸ σύνθετον κλάσμα ἰσοῦται
πρὸς $\frac{6}{5} : \frac{1002}{280} = \frac{6}{5} \times \frac{280}{1002} = \frac{6 \times 56}{1002} = \frac{56}{167} = 0,33$.

§ 449. Λύσεις: 1ov) $56 \times 0,5 = 56 \times \frac{1}{2} = 28$, $75 : 0,5 = 75 : \frac{1}{2} = 75 \times 2 = 150$, $46 \times 0,05 = 46 \times \frac{5}{100} = 46 \times \frac{5}{10} \times \frac{1}{10} = (46 \times \frac{1}{2}) : 10 = 2,3$, $73 : 0,05 = 73 \times \frac{100}{5} = (73 \times 2) \times 10 = 146 \times 10 = 1460$.

2ov) $44 \times 0,25 = 44 \times \frac{1}{4} = 11$, $15 : 0,25 = 15 \times 4 = 60$,
 $24 \times 2,5 = \frac{24}{4} \times (2,5 \times 4) = \frac{24}{4} \times 10 = 60$,
 $19 : 2,5 = (19 \times 4) : (2,5 \times 4) = 76 : 10 = 7,6$.

3ov) $13,5 \times 0,1 = 13,5 \times \frac{1}{10} = 13,5 : 10 = 1,35$
 $3,7 \times 0,01 = 3,7 \times \frac{1}{100} = 3,7 : 100 = 0,037$
 $5,7 : 0,1 = (5,7 \times 10) : (0,1 \times 10) = 5,7 \times 10 : 1 = 57$
 $6,5 : 0,01 = (6,5 \times 100) : (0,01 \times 100) = 650$.

4ον) $0,01 \times 0,1 = 0,01 : 10 = 0,001$, $0,1 \times 0,01 = 0,1 : 100 = 0,001$
 $0,01 : 0,1 = (0,01 \times 10) : (0,1 \times 10) = 0,1 : 1 = 0,1$
 $0,01 : 0,001 = (0,01 \times 1000) : (0,001 \times 1000) = 10 : 1 = 10.$

ΣΗΜ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξηγοῦνται αἱ συντομίαι (τῆς § 239 τῆς Ἀριθμητικῆς).

§ 450. Λύσεις : $0,777... = \frac{7}{9}$, $0,1616... = \frac{16}{99}$, $0,564564... = \frac{564}{999}$.

$5,666... = \frac{56-5}{9} = \frac{51}{9}$, $12,345345... = \frac{12345-12}{999} = \frac{12333}{999}$,

$4,14555... = \frac{4145-414}{900} = \frac{3731}{900}$, $15,23147147... = \frac{1523147-1523}{99900}$

$= \frac{1521624}{99900}$.

§ 451. Λύσεις : 1ον) Γνωρίζομεν ὅτι $0,2323... = \frac{23}{99}$,

$0,5858... = \frac{58}{99}$, $0,1515... = \frac{15}{99}$. Ἐπομένως

$0,2323... + 0,5858... + 0,1515... = \frac{23}{99} + \frac{58}{99} + \frac{15}{99} = \frac{96}{99} = 0,9696...$

2ον) $\frac{15}{11} - 0,6767... = \frac{15}{11} - \frac{67}{99} = \frac{15 \times 9}{99} - \frac{67}{99} = \frac{68}{99} = 0,6868...$

$0,7272... \times 99 = \frac{72}{99} \times 99 = 72$, $2,136136... \times 999 = \frac{2136-2}{999} \times 999 = 2134.$

§ 452. Λύσεις : Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ $0,2424...$ εἶναι $0,2424... \times \frac{3}{4}$

$= \frac{24}{99} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \times 3}{99} = \frac{2}{11}$. Τὰ $\frac{11}{5}$ τοῦ $0,1515...$ εἶναι

$0,1515... \times \frac{11}{5} = \frac{15}{99} \times \frac{11}{5} = \frac{3}{9}$. Τὰ $\frac{9}{2}$ τοῦ $3,0707...$ εἶναι

$3,0707... \times \frac{9}{2} = \frac{307-3}{99} \times \frac{9}{2} = \frac{304 \times 9}{99 \times 2} = \frac{152}{11}.$

§ 453. Λύσεις : Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{4}{9}$ εἶναι $0,888... = \frac{8}{9}$,

τὸ $\frac{1}{9}$ εἶναι $\frac{8}{9 \times 4}$ καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ εἶναι $\frac{8 \times 9}{9 \times 4} = 2.$

§ 454. Λύσεις : Τὸ μέτρον ἡγόρασε πρὸς $942,5 : 65 = 14,5$ χιλιόδ. καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς $52,50 : 5 = 10,50$ χιλιόδ. Ἐπομένως ἀπὸ κάθε μέτρον ἔχασεν $14,50 - 10,50 = 4$ χιλιόδ.

§ 455. Λύσεις : Ὁ ὀφειλέτης ἔδωκε μετρητὰ $145 + 217,5 + 275 = 637,5$ χιλιόδ. Ἐπομένως μὲ τὸν οἶνον ἐπλήρωσε $816,7 - 637,5 = 179,2$ χιλιόδ. Ἐδωκεν ἐπομένως $179,2 : 3,20 = 56$ ὀκ. οἶνου.

§ 456. Λύσεις : Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{9}{9}$ στρεμμάτα ἔδωκαν

4632,20 χιλιόδ, διὰ 1 στρέμμα ἔδωκαν $4632,2 : 9,5 = 487,60$ χιλιόδ. Ὁ α' ἐπομένως διὰ τὰ 5,60 στρέμματα ἔδωκεν $487,60 \times 5,60 = 2730,56$ χιλιόδ, ὁ δὲ β' τὰ ὑπόλοιπα, ἦτοι $4632,20 - 2730,56 = 1901,64$ χιλιόδ.

Β' τρόπος: Ὅπως προηγουμένως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ 1 στρέμμα ἤξιζε 487,60 χιλιόδ. καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ μὲν α' διὰ τὰ 5,6 στρέμ. ἔδωκε 2730,56 χιλιόδ, ὁ δὲ β' διὰ τὰ 9,5—5,6=3,9 στρέμ, ἔδωκε $487,6 \times 3,9 = 1901,64$ χιλιόδ.

§ 457 Λύσις: Τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο $1612,50 : 25 = 64,5$ χιλιόδ. Ἐπομένως εἰς τὰς $25 + 24 + 20 = 69$ ἡμέρας ἔλαβεν $64,5 \times 69 = 4450,5$ χιλιόδ.

Β' τρόπος: Εἰς τὰς 25 ἡμέρας ἔλαβε 1612,50 χιλιόδ.
 » » 24 « » $64,5 \times 24 = 1548$ »
 Εἰς τὰς ἄλλας 20 » » $64,5 \times 20 = 1290$ »
 Ἐπομένως ἔλαβε τὸ ὅλον 4450,50 χιλιόδ.

§ 458. Λύσις: Τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο $592,5 : 25 = 23,7$ χιλιόδ. Ὁ β' ἔλαβε $1042,8 - 592,5 = 450,3$ καὶ εἰργάσθη $450,3 : 23,7 = 19$ ἡμέρας.

§ 459. Λύσις: Ἐδωκε $10 \times 2 = 20$ χιλιόδ. Ἐπειδὴ δὲ ἔλαβεν ὀπίσω 1,25 χιλιόδ. τὰ αὐτὰ ἤξιζον, $20 - 1,25 = 18,75$ χιλιόδ. Ἐπειδὴ τὸ 1 αὐτὸν ἤξιζε $7,5 : 10 = 0,75$ χιλιόδ., τὰ αὐτὰ ἦσαν $18,75 : 0,75 = 25$.

§ 460. Λύσις: Τὰ 12,60 μέτρα τιμῶνται $18 \times 12,60 = 226,8$ χιλ. Ὡστε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του ἦσαν 226,8 χιλιόδ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » ἦτο $\frac{226,8}{3}$ »
 καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ » » ἦσαν $\frac{226,8}{3} \times 4 = 302,4$ χιλ.

§ 461. Λύσις: Ἀφ' οὗ διὰ 12,5 ὁκάδας δίδει 103,75 χιλιόδ. διὰ 1 ὁκᾶν δίδει $103,75 : 12,5 = 8,3$ χιλιόδ. Οἰκονομεῖ λοιπὸν $9,8 - 8,3 = 1,5$ χιλιόδ. ἀπὸ 1 ὁκᾶν. Ἐπομένως ἀπὸ 2 ὁκάδας οἰκονομεῖ $1,5 \times 2 = 3$ χιλιόδ.

§ 462 Λύσις: Τὸ μέτρον τοῦ α' ὑφάσματος ἐκόστιζεν $2689,375 : 82,75 = 32,5$ χιλιόδ. Ἐπομένως τὸ μέτρον τοῦ β' ὑφάσματος ἐκόστιζεν $32,5 - 4,25 = 28,25$ χιλιόδ. Μὲ 497,2 χιλιόδ. ἠγόρασεν ἐξ αὐτοῦ $497,2 : 28,25 = 17,6$ μέτρα.

§ 463. Λύσις: Τὸ μέτρον ἠγόρασε πρὸς $219 : 6 = 36,5$ χιλ. καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς $364,80 : 8 = 46,6$ χιλιόδ. Ἐπομένως ἀπὸ

κάθε μέτρον ἐκέρδιζεν $45,6 - 36,5 = 9,1$ χιλιόδ. Ἐπειδὴ δὲ ὅλον τὸ κέρδος ἦτο $318,50$ χιλιόδ., ἡγόρασε $318,50 : 9,1 = 35$ μέτρα.

§ 464. Λύσις: Διὰ τὰς 150 ὀκ. ἔδωκε $2,3 \times 150 = 345$ χιλ. Ὁ παραχθείς σῖτος ἦτο $150 \times 14 = 2100$ ὀκάδες. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ ἔλαβε $2,5 \times 2100 = 5250$ χιλιόδ. Ἀπὸ τὸ ποσὸν τοῦτο πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ 345 χιλιόδ. τῆς ἀγορᾶς καὶ τὰ ἔξοδα καλλιεργείας $5250 : 5 = 1050$ χιλ: ἦτοι τὸ ὅλον $345 + 1050 = 1395$ χιλιόδ. Ἐκέρδισε λοιπὸν $5250 - 1395 = 3855$ χιλιόδ.

§ 465. Λύσις: Διὰ τὰς 18 πετσέτας χρειάζεται $0,875 \times 18 = 15,75$ μέτρα. Ἐπομένως ἡγόρασεν $15,75 - 1,25 = 14,5$ μέτρα δι' αὐτὰ ἔδωκεν $92,8$ χιλιόδ. Ἐπομένως τὸ μέτρον ἡγόρασε πρὸς $92,8 : 14,5 = 6,4$ χιλιόδ.

§ 466 Λύσις: Διὰ τὸ β' ὕφασμα ἔδωκε περισσότερον $239,2 - 161 = 78,2$ χιλιόδ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν εἶναι ἡ ἀξία τῶν $2,125$ μέτρων. Ἐπομένως ἕκαστον μέτρον ἥξιζεν $78,2 : 2,125 = 36,8$ χιλιόδρ. Τὸ α' ὕφασμα λοιπὸν εἶχε $161 : 36,8 = 4,375$ μέτρα, τὸ δὲ β' ἦτο $4,375 + 2,125 = 6,5$ μέτρα.

§ 467. Λύσις: Διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ σάπωνος ἔδωκε $7,8 \times 75,50 = 588,90$ χιλιόδρ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκέρδισε $25,2$ χιλιόδρ. ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν ὑπολοίπων $75,50 - 8,75 = 66,75$ ὀκάδων εἰσέπραξεν $588,90 + 25,2 = 614,10$ χιλιόδρ. Ἐπομένως ἐπώλησε τὴν ὁκᾶν πρὸς $614,10 : 66,75 = 9,2$ χιλιόδ.

§ 468. Λύσις: Ἐσάπισαν $360 : 9 = 40$ ὀκάδες. Ἐπομένως ἐπώλησεν $360 - 40 = 320$ ὀκάδας. Ἀπὸ αὐτὰς δὲ εἰσέπραξεν $1,4 \times 320 = 448$ χιλιόδ. Ἐπειδὴ δὲ ἐζημιώθη $34,4$ χιλιόδ., ἔδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν $448 + 34,4 = 482,4$ χιλιόδρ. Ἠγόρασε λοιπὸν τὴν ὁκᾶν πρὸς $482,4 : 360 = 1,34$ χιλιόδρ.

§ 469. Λύσις: Διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ὑφάσματος ἔδωκεν $64,50 \times 45 = 2902,5$ χιλιόδ. Ἐπειδὴ δὲ θέλει νὰ κερδίσῃ $369,9$ χιλιόδρ., πρέπει ἐκ τῆς πωλήσεως νὰ εἰσπράξῃ τὸ ὅλον $2902,5 + 369,9 = 3272,4$ χιλιόδρ. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ὑφάσματος εἶναι $45 : 5 = 9$ μέτρα καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι $9 \times 3 = 27$ μέτρα. Αὐτὰ τὰ ἐπώλησε πρὸς 75 χιλιόδρ. ἕκαστον· ἐπομένως εἰσέπραξεν $75 \times 27 = 2025$ χιλιόδ. Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα λοιπὸν $45 - 27 = 18$ μέτρα πρέπει νὰ εἰσπράξῃ $3272,4 - 2025 = 1247,4$ χιλιόδ. Ἄρα πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρον πρὸς $1247,4 : 18 = 69,30$ χιλιόδ.

Β' τρόπος: Ἐπώλησε πρῶτον τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν 45 μέτρων, ἥτοι 27 μέτ. μὲ κέρδος $75 - 64,50 = 10,50$ χιλιοδ. τὸ μέτρον. Ἐπομένως ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέτρα ἐκέρδισε $10,50 \times 27 = 283,5$ χιλιοδ. Ἀπὸ τὰ ἄλλα λοιπὸν $46 - 27 = 18$ μέτρα πρέπει νὰ κερδίσῃ $369,9 - 283,5 = 86,4$. Ἄρα ἀπὸ κάθε μέτρον πρέπει νὰ κερδίξῃ $86,4 : 18 = 4,8$ χιλιοδρ. Πρέπει δὲ πρὸς τοῦτο νὰ πωλῇ ρὸς $64,50 + 4,8 = 69,3$ χιλιοδ. τὸ μέτρον.

§ 470. Λύσις: Ὁ σῖτος ἦτο $820,8 : 2,8 = 342$ ὀκάδες. Τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν ἦτο $342 : 4 = 85,5$ ὀκ. καὶ ὁ ὑπόλοιπος ἦτο $342 - 85,5 = 256,5$ ὀκ.

Ἀπὸ τὰς 85,5 ὀκ. εἰσέπραξεν $2,40 \times 85,5 = 205,20$ χιλ. Τὰς ὑπολοίπους 256,5 ὀκ. ἐπώλησε μέ ζημίαν 0,25 χιλιοδ. τὴν ὀκᾶν ἥτοι πρὸς $2,40 - 0,25 = 2,15$ χιλιοδ. τὴν ὀκᾶν. Ἀπὸ αὐτὰς εἰσέπραξε λοιπὸν $2,15 \times 256,5 =$

551,475 »

Τὸ ὅλον λοιπὸν εἰσέπραξεν $205,2 + 551,475 =$

756,675 »

§ 471. Ἡ λύσις ἀναγράφεται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν.

§ 472. Λύσις: Ἄν ἐπώλῃ ὅλα τὰ αὐγά πρὸς 0,75 χιλιοδ. θὰ ἐλάμβανεν $0,75 \times 69 = 51,75$ χιλιοδ., ἥτοι ὀλιγώτερα κατὰ $55,35 - 51,75 = 3,60$ χιλιοδ. Αὐτὴ ἡ μείωσις ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ πρὸς 0,9 πωληθέντα, ὑπελογίσθησαν ὡς πωληθέντα πρὸς 0,75, ἥτοι κατὰ $0,9 - 0,75 = 0,15$ ὀλιγώτερον. Ἐπομένως ταῦτα ἦσαν $3,60 : 0,15 = 24$ αὐγά, τὰ δὲ πρὸς 0,75 πωληθέντα ἦσαν $69 - 24 = 45$ αὐγά.

§ 473. Λύσις: Ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς καὶ τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτῆς ἀποτελοῦσι $\frac{9}{9} + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς.

Ὡστε τὰ $\frac{11}{9}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς εἶναι 990 χιλιοδ.

τὸ $\frac{1}{9}$ » » » » » $\frac{990}{11}$

καὶ τὰ $\frac{9}{9}$, ἥτοι ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς εἶναι $\frac{990}{11} \times 9 = 810$ χιλιοδ.

Ἠγόρασε λοιπὸν τὸ μέτρον πρὸς 810 χιλιοδ.

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων.

Β' Τρόπος: Ἀπὸ τὰ 67,5 μέτρα εἰσέπραξεν $990 \times 67,5 = 66825$ χιλιοδ. Αὐτὸ τὸ πρῶτον ἀποτελεῖται ἀπὸ τοῦτο ἐκαστοῦ τῶν ἀπὸ τοῦ

κέρδος, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς ἀγορᾶς. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο τὰ $\frac{11}{9}$ τῆς ἀγορᾶς ἐπομένως τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{66825}{11}$ καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ ἦτοι τὸ πο-
σὸν τῆς ἀγορᾶς εἶναι $\frac{66825}{11} \times 9 = 54675$ χιλιάδ. 'Αφ' οὗ λοιπὸν τὰ 67,5
μέτρα ἠγόρασε 54675 χιλιάδ., τὸ 1 μέτρον ἠγόρασεν $54675 : 67,5 = 810$
χιλιάδ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΤΕΤ. ΡΙΖΗΣ.

§ 474. Λύσεις:
$$\begin{array}{r|l} 4\overline{)41} & 21 \\ 04\overline{)1} & 41 \end{array}, \text{ ἦτοι } \sqrt{441} = 21.$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 0 \quad 41 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 27\overline{)04} & 52 \\ 20\overline{)4} & 102 \end{array}. \text{ Ἄρα } \sqrt{2704} = 52.$$

$$\begin{array}{r} 20\overline{)4} \\ 0 \quad 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 70\overline{)56} & 84 \\ 65\overline{)6} & 164 \end{array}, \text{ ἄρα } \sqrt{7056} = 84.$$

$$\begin{array}{r} 65\overline{)6} \\ 0 \quad 656 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 69\overline{)72} & 25 \\ 57\overline{)2} & 163 \\ 48\overline{)9} & 3 \end{array} \begin{array}{l} 835 \\ 1665 \\ 5 \end{array}, \text{ ἄρα } \sqrt{697225} = 835.$$

$$\begin{array}{r} 8\overline{)32} \\ 8\overline{)32} \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 489 \\ 8325 \end{array}$$

§ 475. Λύσεις:
$$\begin{array}{r|l} 51\overline{)79} & 71 \\ 27\overline{)9} & 141 \end{array}, \sqrt{5179} = 71 \text{ κατὰ προσέγγισιν}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ 138 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 141 \end{array} \text{ ἄκεραίας μονάδος.}$$

$$\begin{array}{r|l} 57\overline{)41} & 75 \\ 84\overline{)1} & 145 \end{array}, \sqrt{5741} = 75 \text{ κατὰ προσ. ἄκεραίας μονάδος.}$$

$$\begin{array}{r} 7\overline{)25} \\ 116 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 725 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5\overline{)74} & 82 \\ 17\overline{)4} & 43 \\ 12\overline{)9} & 3 \end{array} \begin{array}{l} 239 \\ 469 \\ 9 \end{array}, \sqrt{57482} = 239 \text{ κατὰ προσ. ἄκερ. μον.}$$

$$\begin{array}{r} 45\overline{)82} \\ 42\overline{)21} \\ 361 \end{array} \begin{array}{l} 129 \\ 4221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 8|26|09 & 287 & \\ \hline 42|6 & 48 & 567, \\ \hline 384 & 8 & 7 \\ \hline 420|9 & 384 & 3969 \\ \hline 3969 & & \\ \hline 240 & & \end{array}, \sqrt{82609} = 287 \text{ κατὰ προσ. ἄκερ. μον.}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετ. ρίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἄκερ. μον. ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τοιαύτην ρίζαν τοῦ ἄκεραίου μέρους. Οὕτω $50|39 \begin{array}{r|r} 70 & \\ \hline 13|9 & 140, \end{array} \sqrt{5039,47} = 70 \text{ κ. τ. λ.}$

$$\begin{array}{r|rr} 4|37 & 20 & \\ \hline 03|7 & 40 & \end{array}, \sqrt{437,89} = 20 \text{ κ.τ.λ.}$$

$$\begin{array}{r|rr} 9|92|25 & 315 & \\ \hline 09|2 & 61 & 625, \\ \hline 61 & 1 & 5 \\ \hline 3125 & 61 & 3125 \\ \hline 3125 & & \\ \hline 0 & & \end{array}, \sqrt{99225,08} = 315 \text{ κ.τ.λ.}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1|23|24 & 111 & \\ \hline 23 & 21 & 221, \\ \hline 21 & 1 & 1 \\ \hline 224 & 21 & 221 \\ \hline 221 & & \\ \hline 3 & & \end{array}, \sqrt{12324,8} = 111 \text{ κ.τ.λ.}$$

§ 476. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $5 \times 10^3 = 500$.

Ἔπειτα $\begin{array}{r|rr} 500 & 22 & \\ \hline 10|0 & 42 & \\ \hline 84 & 2 & \end{array}$ καὶ ἐπομένως $\sqrt{5} = 2,2$ κατὰ προσ. 0,1.

Ὀμοίως $7 \times 10^3 = 700$ $\begin{array}{r|rr} 700 & 26 & \\ \hline 30|0 & 46 & \\ \hline 276 & 6 & \\ \hline 24 & & \end{array}, \sqrt{7} = 2,6$ προσ. 0,1.

$11 \times 10^3 = 1100$ $\begin{array}{r|rr} 11|00 & 33 & \\ \hline 20|0 & 63 & \\ \hline 189 & 3 & \\ \hline 11 & & \end{array}, \sqrt{11} = 3,3$ προσ 0,1.

$$13 \times 10^2 = 1300 \quad \begin{array}{r} 13 \overline{) 00} \quad \left| \begin{array}{l} 35 \\ 65 \end{array} \right. \\ 40 \overline{) 0} \\ 325 \quad 5 \\ \hline 75 \end{array} \quad \sqrt[3]{13} = 3,5 \text{ προσ. } 0,1.$$

$$437 \times 10^2 = 43700 \quad \begin{array}{r} 4 \overline{) 3700} \quad \left| \begin{array}{l} 209 \\ 409 \end{array} \right. \\ 03 \overline{) 7} \\ 370 \overline{) 0} \quad 9 \\ 3681 \quad \hline 3681 \\ \hline 19 \end{array} \quad \sqrt[3]{437} = 20,9 \text{ προσ. } 0,01.$$

$$57,98 \times 10^2 = 5798 \quad \begin{array}{r} 57 \overline{) 98} \quad \left| \begin{array}{l} 79 \\ 146 \end{array} \right. \\ 89 \overline{) 3} \\ 876 \quad 6 \\ \hline 22 \quad 776 \end{array} \quad \sqrt[3]{57,98} = 7,6 \text{ προσ. } 0,1.$$

$$457,63 \times 10^2 = 45763 \quad \begin{array}{r} 4 \overline{) 5763} \quad \left| \begin{array}{l} 213 \\ 41 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 423 \\ 3 \end{array} \right. \\ 05 \overline{) 7} \\ 41 \quad 1 \\ \hline 166 \overline{) 3} \quad 41 \quad \left| \begin{array}{l} 1269 \\ 1269 \\ \hline 394 \end{array} \right. \end{array} \quad \sqrt[3]{457,63} = 21,3 \text{ προσ. } 0,1.$$

$$69,560 \times 10^2 = 6956. \quad \begin{array}{r} 69 \overline{) 56} \quad \left| \begin{array}{l} 83 \\ 163 \end{array} \right. \\ 55 \overline{) 6} \\ 489 \quad 3 \\ \hline 67 \quad 489 \end{array} \quad \sqrt[3]{69,560} = 8,3 \text{ προσ. } 0,1.$$

§ 477. Λύσεις: $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}, \quad \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9},$
 $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}, \quad \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}, \quad \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10}.$

§ 478. Λύσεις: $\frac{12}{81} \times 100^2 = \frac{120000}{81} = 1481,48...$

$\sqrt{1481} = 38 \text{ προσ. άκ. μον.} \quad \sqrt{\frac{12}{81}} = 0,38 \text{ πρ. } 0,01,$

$\frac{24}{25} \times 100^2 = 24 \times 4 \times 100 = 9600...$

$\sqrt{9600} = 97 \text{ προσ. άκ. μον.} \quad \sqrt{\frac{24}{25}} = 0,97 \text{ πρ. } 0,01,$

$$\frac{55}{49} \times 10^2 = \frac{550000}{49} = 11224,489...$$

$$\sqrt{11224} = 105 \text{ προσ. } \acute{\alpha}\kappa. \text{ μον. } \sqrt{\frac{56}{49}} = 1,05 \text{ προσ. } 0,01,$$

$$\frac{47}{100} \times 100^2 = 4700, \sqrt{4700} = 68 \text{ προσ. } \acute{\alpha}\kappa. \text{ μον. } \sqrt{\frac{47}{100}} = 0,68.$$

$$\frac{912}{1849} \times 100^2 = 4932,39...$$

$$\sqrt{4932} = 70 \text{ προσ. } \acute{\alpha}\kappa. \text{ μον. } \sqrt{\frac{912}{1849}} = 0,70 \text{ προσ. } 0,01,$$

$$\frac{174}{1026} \times 100^2 = 1697,5...$$

$$\sqrt{1697} = 41 \text{ προσ. } \acute{\alpha}\kappa. \text{ μον. } \sqrt{\frac{174}{1026}} = 0,41 \text{ προσ. } 0,01.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

- § 479 Λύσις : α) Τὰ 8 ρούπια εἶναι 0,648 μέτ,
 τὸ 1 ρούπιον » 0,648 : 8 = 0,081 μέτ.
 β) Τὰ 0,648 μέτ. ἔχουσι 8 ρούπια,
 τὸ 1 μέτ. ἔχει 8 : 0,648 = 12,345... ρούπια.

- § 480. Λύσις : 1ον) 1 πήχυς ἔχει 0,648 μέτ.
 οἱ 48 πήχ. ἔχουσι 0,648 × 48 = 28,704 μέτ.

- 2ον) Τὰ 0,648 μέτ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 1 πήχυν,
 τὸ 1 » » » $\frac{1}{0,648}$ »

$$\text{καὶ τὰ } 25,80 \text{ » » » } \frac{1}{0,648} \times 25,80 = 39,8148 \text{ πήχεις.}$$

$$\text{Ὅμοίως τὰ } 0,914 \text{ μέτ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 1 ὑάρδαν}$$

$$\text{τὸ 1 » » » } \frac{1}{0,914} \text{ »}$$

$$\text{καὶ τὰ } 25,80 \text{ » » » } \frac{1}{0,914} \times 25,80 = 28,227... \text{ ὑάρδας.}$$

- 3ον) Ἡ 1 ὑάρδα ἔχει 0,914 μέτ,
 αἱ 58 ὑάρδαι ἔχουσι 0,914 × 58 = 53,012 μέτ.

$$\text{Τὸ 1 μέτρον ἔχει } \frac{1}{0,648} \text{ πήχ.}$$

καὶ αἱ 58 ὑάρ. ἢ 53,012 μέτ. ἔχουσι $\frac{1}{0,648} \times 53,012 = 81,808...$
πῆχεις.

§ 481. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ τὸ 1 μέτρον τιμᾶται 24 000 δραχ.
ὁ 1 πῆχυς, ἦτοι τὰ 0,648 τοῦ μέτρου τιμῶνται $24\,000 \times 0,648 = 15552$ δραχ.

3ον) Ἡ 1 ὑάρδα, ἦτοι τὰ 0,914 μέτ. τιμῶνται
 $24\,000 \times 0,914 = 21936$ δραχ.

§ 482. Λύσις: Ἀφ' οὗ 1 ὑάρ, ἦτοι 0,914 μέτ. τιμῶνται
8 400 δραχ. τὸ 1 μέτρον τιμᾶται $8\,400 : 0,914 = 9190,37...$ δραχ.

2ον) Ἀφ' οὗ τὰ 0,914 μέτ. τιμῶνται 8400 δραχ.,

τὸ 1 μέτ. τιμᾶται $\frac{8400}{0,914}$ δραχ. καὶ ὁ 1 πῆχυς,

ἦτοι 0,648 » » $\frac{8400}{0,914} \times 0,648 = \frac{8400 \times 648}{914} = 59,55$ δραχ.

§ 483. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ ὁ 1 πῆχυς, ἢ 0,648 μέτ. τιμῶνται
7 800 δραχ. τὸ 1 μέτρον τιμᾶται $7\,800 : 0,648 = 12037,03...$
δραχ.

2ον) Ἀφ' οὗ 0,648 μέτρ. τιμῶνται 7800 δραχ.

τὸ 1 » » $\frac{7800}{0,648}$ »

καὶ τὰ 0,914 μέτρ. = 1 ὑάρ. » $\frac{7800}{0,648} \times 0,914 = 11001,85$ δραχ.

§ 484 Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ 1 τ. τ. π. εἶναι $\frac{9}{16}$ τ. μέτρ., οἱ
130 τ. τ. π. εἶναι $\frac{9}{16} \times 130 = 73,125$ τ. μέτ.

2ον) Ἀφ' οὗ $\frac{9}{16}$ τ. μ. εἶναι 1 τ.τ.π., τὸ 1 τ. μ. εἶναι

$1 : \frac{9}{16} = \frac{16}{9}$ τ.τ.π. καὶ τὰ 400 τ. μ. εἶναι $\frac{16}{9} \times 400 = 711,11... \tau.\tau.\pi.$

§ 485 Λύσις: Ὁ 1 τ.τ.π. εἶναι $\frac{9}{16}$ τοῦ τ. μέτ., οἱ δὲ 420
τ.τ.π. εἶναι $\frac{9}{16} \times 420 = 236,25$ τ.μέτ.

Ταῦτα δὲ τιμῶνται $25000 \times 236,25 = 5\,906\,250$ δραχ.

Β' τρόπος: Ἀφ' οὗ τὸ 1 τ. μ. ἢ $\frac{16}{9}$ τ.τ.π. τιμῶνται 25000 ὁ 1 τ. τ. π.

τιμᾶται $25000 : \frac{16}{9} = \frac{25000 \times 9}{16}$ καὶ οἱ 420 τ.τ.π. τιμῶνται

$\frac{25000 \times 9}{16} \times 420 = 5\,906\,250$ δραχ.

§ 486 Λύσις: 'Αφ' οὗ 1 τ. μ. ἔχει $\frac{16}{9}$ τ. τ. π, τὰ 560 τ. μ. ἔχουσι $\frac{16}{9} \times 560$ τ.τ.π. Οὗτοι δὲ τιμῶνται

$$42000 \times \frac{16}{9} \times 560 = 41813333,33... \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ 1 τ.τ.π. ἢ $\frac{9}{16}$ τ. μ. τιμῶνται 42000, τὸ 1 τ.μ. τιμᾶται $42000 : \frac{9}{16} = 42000 \times \frac{16}{9}$ καὶ τὰ 560 τ. μέτ. τιμῶνται

$$42000 \times \frac{16}{9} \times 560 = 41813333,33... \text{ δραχ.}$$

§ 487. Λύσις: Τὸ οἰκόπεδον ἀποτελεῖτο ἀπὸ
14 400 000 : 36 000 = 400 τ. μέτρα.

Ταῦτα δὲ ἔχουσι $\frac{16}{9} \times 400 = 711,11... \text{ τ. τ. π.}$

Β' τρόπος: 'Αφ' οὗ 1 τ. μ. ἢ $\frac{16}{9}$ τ. τ. π. τιμᾶται 36000 δραχ.

Ὁ 1 τ.τ.π. τιμᾶται $36000 : \frac{16}{9} = 36000 \times \frac{9}{16}$ δραχ. = $\frac{81000}{4}$ δρχ. Ἐπομένως

τὸ οἰκόπεδον εἶχε $14\,400\,000 : \frac{81000}{4} = \frac{14\,400\,000 \times 4}{81000} = 711,11... \text{ τ.τ.π.}$

§ 488. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι 1 κυβ. μέτ. ἔχει 10 κιλά, ἐπομένως τὰ 2000 κυβ. μέτρα χωροῦσι $10 \times 2000 = 20000$ κιλά σίτου.

§ 489. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι 2,85 κυβ. μέτ. εἶναι 1 τόν. Ἐπομένως 5700 κ. μ. εἶναι $5700 : 2,85 = 2000$ τόν.

§ 490. Λύσις: 1ον) 'Αφ' οὗ 1 κ. μ. κατέχει χῶρον 1000 λίτρων, τὰ 3,025 κ. μ. κατέχουσι $1000 \times 3,025 = 3025$ λίτ.

2ον) 1 κ. μ. ἔχει 10 κιλά, τὰ 175,400 κ. μ. ἔχουσι $10 \times 175,4 = 1754$ κιλά.

3ον) Ἡ 1 ὀκά ἔχει 1,28 χιλιόγρ. αἱ 15 ὀκ. ἔχουσι $1,28 \times 15 = 19,20$ χιλιόγρ.

4ον) 'Αφ' οὗ 1,28 χιλιόγρ. ἀποτελοῦσι 1 ὀκᾶν, τὰ 25,4 χιλιόγρ. ἀποτελοῦσι $25,4 : 1,28 = 2540 : 128 = 19,843... \text{ ὀκάδας.}$

§ 491. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἢ 1 ὀκά ἢ 1,28 χιλιόγρ. τιμῶνται 14 800, τὸ 1 χιλ. τιμᾶται $14\,800 : 1,28 = 11562,5$ δραχ.

§ 492. Λύσις: 'Αφ' οὗ 1 χιλ. τιμᾶται 18 000 δραχ. ἢ 1 ὀκά, ἦτοι 1,28 χιλ. τιμῶνται $18\,000 \times 1,28 = 23\,040$ δραχ.

§ 493. Λύσις: Τὰ 74 κ. μ. ἔχουσι $1000 \times 74 = 74\,000$ κυβ.

παλάμας ἢ 74 000 λίτρας. Ἐπειδὴ δὲ ἐχύθησαν 4500 λίτραι, ἔμεινεν ὕδωρ $7400 - 4500 = 69500$ κυβ. παλαμῶν. Τοῦτο δὲ τὸ ὕδωρ ἔχει βάρος 69500 χιλιόχρ. ἢ $69500 : 1,28 = 54296,875$ ὀκ.

Β' τρόπος: Αἱ 4500 λίτραι τοῦ χυθέντος ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον 4500 κυβ. παλ. $= 4500 : 1000 = 4,5$ κυβ. μέτρα. Ἐμείναν ἐπομένως $74 - 4,5 = 69,5$ κυβ. μέτρα ὕδατος. Τὸ ὕδωρ τοῦτο ἔχει βάρος $69,5$ τόννους ἢ $781 \frac{1}{4} \times 69,5 = 54296,875$ ὀκ.

§ 494. Λύσις: 1ον) Ἡ 1 ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Τὸ 1 π. λ. ἔχει 60 δευτερόλεπτα, ἐπομένως τὰ 60 π. λ. ἔχουσιν $60 \times 60 = 3600$ δευτ.

2ον) Ἀφ' οὗ ἡ 1 ὥρα ἔχει 3600 δευτ, ἡ 1 ἡμέρα ἦτοι αἱ 24 ὥραι ἔχουσι $3600 \times 24 = 86400$ δευτ.

§ 495. Λύσις: 1ον) Ἡ μοῖρα ἔχει 60', τὸ δὲ 1' ἔχει 60". Ἐπομένως ἡ μοῖρα ἔχει $60'' \times 60 = 3600''$.

2ον) Μία περιφέρεια ἔχει 360° , ἦτοι $3600'' \times 360 = 1296000''$.

§ 496. Λύσις: 1ον) Ἀφ' οὗ περιφέρεια ἔχει 360° ἢ 400° , τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς ἔχει $360^\circ : 4 = 90^\circ$ ἢ $400^\circ : 4 = 100^\circ$.

2ον) Τὸ $\frac{1}{2}$ περιφερείας ἔχει $360^\circ : 2 = 180^\circ$ ἢ $400^\circ : 2 = 200^\circ$

3ον) Τὰ $\frac{3}{4}$ περιφερείας ἔχουσι $360^\circ \times \frac{3}{4} = 270^\circ$

ἢ $400^\circ \times \frac{3}{4} = 300^\circ$.

§ 497. Λύσις: Ἡ χαρτίνη Ἀγγλικὴ λίρα ἢ τὰ 20 σελίνια ἔχουσι 42 000 δραχ. Ἐπομένως τὸ σελίνιον ἔχει $42 000 : 20 = 2100$ δραχ. Ἡ δὲ πέννα ἦτοι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ σελινίου ἔχει $210 : 12 = 175$ δραχ.

ΣΗΜ. Ἡ νόμιμος τιμὴ τῆς χαρτίνης Ἀγγλικῆς λίρας ἀπὸ τοῦ Σβρίου τοῦ 1949 ὠρίσθη εἰς 42 000 δραχ., τοῦ δὲ δολλαρίου εἰς 15 000 δραχμάς.

§ 498. Λύσις: Τὸ σέντς εἶναι $\frac{1}{100}$ τοῦ δολλαρίου. Ἐχει ἐπομένως $15 000 : 1000 = 150$ δραχ.

§ 499. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἡ 1 λίρα ἔχει 42 000 δραχ. αἱ 25 λίραι ἔχουσι $42 000 \times 25 = 1 050 000$ δραχ.

§ 500. Λύσις: Διὰ τοὺς τοιοῦτους εἰσαγωγεῖς τὸ δολλάριον ὑπολογίζεται 10 000 δραχ. Δι' ἐν λοιπὸν δολλάριον θὰ
 ἠφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς.

πληρώση $10\ 000 + 4990 = 4990 = 14990$. Διὰ δὲ τὰ 1400 δολλάρια θὰ πληρώση $14\ 900 \times 1400 = 20\ 986\ 000$ δραχ.

§ 501. Λύσις : Δι' ἐκάστην λίραν θὰ δώσῃ τὴν παλαιὰν νόμιμον τιμὴν 20 000 δραχ. καὶ 22 000 δραχ. τὴν ἀξίαν τοῦ μπόν, ἥτοι τὸ ὅλον $42\ 000$ δραχ. Ἐπομένως διὰ τὰς 500 λίρας θὰ δώσῃ $42\ 000 \times 500 = 21\ 000\ 000$ δραχ.

ΣΗΜ. Ἡ τιμὴ τοῦ Μπόν πρέπει νὰ διορθωθῇ εἰς 22 000 δραχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 502. Λύσις : 1ον) Γνωρίζομεν ὅτι 1 πήχυς ἔχει 8 ρούπια. Ἐπομένως 10 πήχεις ἔχουσι $8 \times 10 = 80$ ρούπια. Ἄρα (10 πήχ. 3 ρούπ.) $= 80 + 3 = 83$ ρούπια.

2ον) Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι : 5 στ. 35 ὀκ. 240 δράμ. $= 102240$ δράμ.

3ον) $5 \text{ ὄρ. } 12^{\pi} \text{ } 25^{\delta} = 18745^{\delta}$.

4ον) $(20^{\circ} 40' 35'') = 74435''$.

4 λίρ. 8 σελ. 6 πέν. 2 φαρ. $= 4250$ φαρ.

§ 503. Λύσις : 1ον) Ὅπως προηγουμένως εὐρίσκομεν ὅτι : 2 στ. 25 ὀκ. 200 δραμ. $= 45400$ δράμ.

2ον) $(925 \text{ πήχ. } 4 \text{ ρούπ.}) = 7404$ ρούπ.

3ον) 2 λίρ. 15 σελ. 10 πέν. 3 φαρ. $= 2683$ φαρ.

4ον) $2 \text{ ὄρ. } 15^{\pi} \text{ } 50^{\delta} = 8158^{\delta}$

§ 504. Λύσις : 1ον) Τὰ 6 ρούπ. εἶναι $\frac{6}{8}$ πήχ. Ἐπομένως $(8 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρ.}) = 8 - \frac{6}{8} \text{ πήχ.} = \frac{70}{8} \text{ πήχ.}$

Β' τρόπος : $(8 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρ.}) = 64 + 6 = 70 \text{ ρ.} = \frac{70}{8} \text{ πήχ. κ.τ.λ.}$

2ον Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι : $(3 \text{ στ. } 40 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρ.}) = 69050 \text{ δρ.}$
Ἐπειδὴ δὲ $1 \text{ δρ.} = \frac{1}{400} \text{ ὀκ.}$ τὰ 69050 δράμ. $= \frac{69050}{400} \text{ ὀκ.}$ Ἐπειτα εὐρίσκομεν ὅτι $1 \text{ στατ.} = 400 \times 44 = 17600 \text{ δράμ.}$ Ἐπομένως $1 \text{ δράμ.} = \frac{1}{17600} \text{ στατ.}$ καὶ τὰ 69050 δράμ. $= \frac{69050}{17600} \text{ στατ.}$

Ὡστε $3 \text{ στ. } 40 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρ.} = \frac{69050}{17600} \text{ στατ.} = \frac{69050}{400} \text{ ὀκ.}$

3ον Εὐρίσκομεν πρῶτον, ὡς εἰς προηγούμενα ὅτι :
 $(3 \text{ λίρ. } 15 \text{ σελ. } 8 \text{ πέν. } 3 \text{ φαρ.}) = 3635 \text{ φαρ.}$

Ἐπειτα ὅτι 1 σελ. = 12 πέν. = $4 \times 12 = 48$ φαρ. Ἐπομένως 1 φαρ. = $\frac{1}{48}$ σελ. καὶ 3635 φαρ. = $\frac{3635}{48}$ σελ.

Ἐπίσης 1 λίρ. = 20 σελ. = $48 \times 20 = 960$ φαρ. Τὸ 1 φαρ. εἶναι λοιπὸν $\frac{1}{960}$ λίρας. Τὰ δὲ 3635 φαρ. εἶναι $\frac{3635}{960}$ λίρ. Ὡστε :

3 λίρ 15 σελ. 8. πέν. 3 φαρ. = $\frac{3633}{960}$ λίρ. = $\frac{3635}{48}$ σελ.

4ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $(25^\circ 30' 40'') = 91840''$.

Ἐπειδὴ δὲ $1' = 60''$, τὸ $1'' = \frac{1'}{60}$ καὶ τὰ $91840'' = \left(\frac{91840}{60}\right)'$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ $1^\circ = 60 \times 60 = 3600''$, τὸ $1''$ εἶναι $\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ καὶ τὰ $91840''$ εἶναι $\left(\frac{91840}{3600}\right)^\circ$. Ὡστε :

$$(25^\circ 30' 40'') = \left(\frac{91840}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{91840}{60}\right)'$$

5ον) $(2 \text{ ἡμ. } 12 \text{ ὥρ. } 20^\pi 40^\delta) = 217240^\delta = \frac{217240 \pi}{60} = \frac{217240}{360} \text{ ὥρ.}$

§ 505 Λύσις: Ὅπως προηγουμένως (ἄσκ. 502, 503) εὐρίσκομεν ὅτι: 1ον) Ἡ ἀτμομηχανὴ χρειάζεται 22320^δ.

2ον) Τὸ ἀεροπλάνον χρειάζεται 5100^δ.

3ον) Τὸ αὐτοκίνητον χρειάζεται 29760^δ.

§ 506 Λύσις: 29 ἡμ. 12 ὥρ. = 42523^π.

§ 507 Λύσις: 27 ἡμ. 7 ὥρ. 43 ^π = 2360580^δ.

§ 508. Λύσις: 1ον) 194 ρούπ. = $194 : 8 = 24$ πήχ. 2 ρ.

6705 ρούπ. = $6705 : 8 = 838$ πήχ. 1 ρ.

10480 ρούπ. = $10480 : 8 = 1310$ πήχ. (ἀπλοῦς ἀριθ.).

2ον) 5760 δράμ. = $5760 : 400 = 14$ ὀκ. 160 δρ.

43680 δράμ. = $43680 : 400 = 109$ ὀκ. 80 δρ.

109 ὀκ. = $109 : 44 = 2$ στ. 21 ὀκ. Ὡστε :

43 680 δράμ. 2 στ. 21 ὀκ. 80 δρ.

678 000 δράμ. = $678 000 : 400 = 1695$ ὀκ. = $1695 : 44 = 38$ στατ. 23 ὀκ.

3ον) $3754^\delta = 3754 : 60 = 62^\pi 34^\delta = 1$ ὥρ. $2^\pi 34^\delta$.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι $18645^\delta = 5$ ὥρ. $10^\pi 45^\delta$, $887590^\delta = 10$ ἡμ. 6 ὥρ. $33^\pi 10^\delta$.

4ον $15740 = 4^\circ 22' 20''$, $74560'' = 20$ ὥρ. $42' 40''$,

$900 300'' = 10$ ἡμ. 10 ὥρ. 5'.

5ον) 5670 σελ. = 5670 : 20 = 283 λίρ. 10 σελ.,

37400 φαρ. = 39 λίρ. 10 πέν., 748564 πέν. = 3119 λίρ. 4 π.

§ 509. Λύσεις: 1ον) Τὰ $\frac{5}{8}$ στατ. = $44 \times \frac{5}{8} = 27$ όκ. 200 δρ.

Ἐπομένως $12 \frac{5}{8}$ στ. = 12 στατ. 27 όκ. 200 δράμ.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ότι: $5 \frac{4}{11}$ στατ. = 5 στατ. 16 όκ.,

$108 \frac{7}{25}$ στατ. = 108 στατ. 12 όκ., 128 δράμ.

2ον) $\frac{3}{4}$ ύάρ. = $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2$ πόδ. 3 δάκ. Ὡστε:

$68 \frac{3}{4}$ ύάρ. = 68 ύάρ., 2 πόδ., 3 δάκ. Ὅμοίως εὐρίσκομεν ότι

$508 \frac{7}{8}$ ύάρ. = 508 ύάρ., 2 πόδ., 7,5 δακ.

$270 \frac{15}{26}$ ύάρ. = 270 ύάρ. 1 ποὺς 8,769... δακ.

§ 510. Λύσεις: Τὰ 0,2422 ήμ. = $24 \times 0,2422 = 5,7128$ ὥρ.

Τὰ 0,7128 ὥρας = $60 \times 0,7128 = 42,768$ καὶ τὰ 0,768

= $60 \times 0,768 = 46,8$ 08.

Ὡστε 365,2422 ήμ. = 365 ήμ. 5 ὥρ. 42^{π} 46,8 08.

§ 511. Λύσεις:

1ον)	8 στ.	14 όκ.	300 δράμ.	2ον)	25 πήχ.	8 ρούπ.
	5 στ.	38 όκ.	275 δράμ.		18 πήχ.	4 ρούπ.
		30 όκ.	325 δράμ.		49 πήχ.	7 ρούπ.
	15 στ.	5 όκ.	100 δράμ.		94 πήχ.	3 ρούπ.
		7 ὥρ.	40^{π} 50^{δ}		15 λίρ.	12 σελ. 9 πέν.
3ον)	3 ήμ.	0	25^{π} 40^{δ}	4ον)	27 »	15 » 8 »
		8 ὥρ.	45^{π}		18 »	0 » 3 φαρ.
	3 ήμ.	16 ὥρ.	51^{π} 30^{δ}		44 λίρ.	6 σελ. 5 πέν. 3 φαρ.

§ 512. Λύσεις: 1ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ότι:

$15 \frac{5}{8}$ στατ. = 15 στατ. 27 όκ. 200 δράμ. καὶ $12 \frac{2}{5}$ στατηήρες

= 12 στατ. 17 όκ. 240 δράμ. Καὶ ἔπειτα ότι:

3 στατ. 18 όκ. 340 δράμ. + 15 στατ. 27 όκ. 200 δρ. + 12 στατ. 17 όκ. 240 δρ. = 31 στατ. 19 όκ. 380 δράμ.

2ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ότι:

$24 \frac{5}{8}$ λίρ. = 24 λίρ. 12 σελ. 6 πέν. καὶ

$16 \frac{3}{4}$ σελ. = 16 σελ. 9 πέν. "Επειτα δὲ εὐρίσκομεν ὅτι:

15 λίρ. 10 σελ. 8 πέν. + 24 λίρ. 12 σελ. 6 πέν. + 16 σελ.
9 πέν. = 40 λίρ. 19 σελ. 11 πέν.

§ 513. Λύσις: Προφανῶς ἐξώδευσε τὸ ἄθροισμα:
1 στατ. 10 ὀκ. 20 δράμ. + 1 στ. 25 ὀκ. 300 δρ. + 1 στ. 30 ὀκ.
100 δράμ. = 4 στατ. 22 ὀκ. 20 δράμ.

§ 514. Λύσις: Ἡ ἡλικία τοῦ β' εἶναι:
12 ἔτ. 3 μην. 20 ἡμ. + 1 ἔτ. 8 μην. 15 ἡμ. = 14 ἔτ. 0 μ. 5 ἡμ

§ 515. Λύσις: Ἡ ἡλικία τοῦ συζύγου εἶναι
28 ἔτ. 5 μην. 15 ἡμ. + 6 ἔτ. 4 μην. 10 ἡμ. = 34 ἔτ. 9 μην. 25 ἡμ

§ 516. Λύσις: $35^{\circ} 20' 12'' + 42^{\circ} 48' 50'' + 56^{\circ} 28' 35''$
= $134^{\circ} 37' 37''$.

§ 517. Λύσις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι:
 $\frac{7}{25}$ πέρ. = $360^{\circ} \times \frac{7}{25} = 100^{\circ} 48'$ καὶ $\left(\frac{7}{8}\right)^0 = 60' \times \frac{7}{8} = 52' 30''$.
"Επειτα δὲ τὸ ἄθροισμα:
 $100^{\circ} 48' + 52' 30'' + 25^{\circ} 40' 10'' = 127^{\circ} 20' 40''$.

§ 518 Λύσις:

		13 ὄρ. =	
1ον)	5 ὄρ. $25^{\pi} 40^{\delta}$	2ον)	12 ὄρ. $59^{\pi} 60^{\delta}$
	— 3 ὄρ. $40^{\pi} 50^{\delta}$		— 8 ὄρ. $25^{\pi} 48^{\delta}$
	1 ὄρ. $44^{\pi} 50^{\delta}$		4 ὄρ. $34^{\pi} 12^{\delta}$
	180° =		3 στατ. 25 ὀκ. =
3ον)	179° 59' 60''	4ον)	2 στ. 68 ὀκ. 400 δρ.
	— 149° 30' 58''		— 2 στ. 38 ὀκ. 250 δρ.
	30° 29' 2''		30 ὀκ. 150 δρ.

§ 519. Λύσις: 1ον) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι:

$8 \frac{3}{4}$ στατ. = 8 στατ. 26 ὀκ. 160 δρ. καὶ ἔπειτα
8 στατ. 26 ὀκ. 160 δρ. — 3 στατ. 40 ὀκ. 200 δράμ. =
7 στατ. 69 ὀκ. 560 δρ. — 3 στατ. 40 ὀκ. 200 δράμ. =
4 στατ. 29 ὀκ. 360 δρ.

2ον) Εὐρίσκομεν ὅτι $8 \frac{7}{8}$ λίρ. = 8 λίρ. 17 σελ. 6 πέν. καὶ
ἔπειτα 15 λ. 17 σελ. 12 π. — 8 λ. 17 σελ. 6 πέν. = 7 λίρ. 6 πέν.

§ 520. Λύσις: Σήμερον εἶναι π.χ. 25 Δεκ. 1949. Παρατη-
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ροῦμεν ὅτι ὁ Δεκέμβριος εἶναι 12ος μῆν, ὁ δὲ Ὀκτώβριος 10ος. Ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ μέχρι τῆς 25 Δεκεμβρίου 1949 παρῆλθον 1948 ἔτη 11 μῆνες 24 ἡμ. Μέχρι δὲ τῆς 28ης Ὀκτωβρίου 1940 παρῆλθον 1939 ἔτ. 9 μῆνες, 27 ἡμ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν χρόνος εἶναι

1948 ἔτ. 11 μῆν. 24 ἡμ.—1939 ἔτ. 9 μῆν. 27 ἡμ.

Ἄν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προσθέσωμεν 1 ἔτ. 1 μῆν. 1 ἡμ., ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται. Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι :

1949 ἔτ. 12 μῆν. 25 ἡμ.—1940 ἔτ. 10 μῆν. 28 ἡμ.=9 ἔτ. 1 μῆν. 27 ἡμ.

§ 521. Λύσις: Τὸ ἀρχικὸν βάρος ἦτο 15 στ. 25 ὀκ. 250 δρ. Ἐμειναν ἐπομένως 15 στ. 25 ὀκ. 250 δρ.—20 ὀκ. 300 δρ. ἢ 15 στατ. 24 ὀκ. 650 δρ.—20 ὀκ. 300 δρ.=15 στ. 4 ὀκ. 350 δρ.

§ 522. Λύσις: Σήμερον εἶναι π.χ. 22 Ἰανουαρίου 1950. Ἡ δὲ ἡλικία τοῦ παιδίου εἶναι

1950 ἔτ. 1 μῆν. 22 ἡμ.—1937 ἔτ. 3 μῆν. 16 ἡμ.

ἢ 1949 ἔτ. 13 μῆν. 22 ἡμ.—1937 ἔτ. 3 μῆν. 16 ἡμ.

= 12 ἔτ. 10 μῆν. 6 ἡμ.

§ 523. Λύσις: Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν πρακτικὴν Γεωμετρίαν ὅτι τὸ δοθὲν τόξον καὶ τὸ συμπληρωματικὸν του ἔχουσιν ἄθροισμα 90°. Τὸ συμπληρωματικὸν ἐπομένως εἶναι

90° — 35° 24' 40'' ἢ 89° 59' 60'' — 35° 24' 40'' = 54° 35' 20''.

§ 524. Λύσις: Τὸ δοθὲν καὶ τὸ παραπληρωματικὸν του ἀποτελοῦσιν 180° ἢ 179° 59' 60''. Τὸ παραπληρωματικὸν ἐπομένως εἶναι: 179° 59' 60'' — 75° 15' 48'' = 104° 44' 12''.

§ 525. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἐδανείσθη 850 λίρ. ἢ 849 λίρ. 19 σελ. 11 πέν. 4 φαρ. χρεωστεῖ ἀκόμη 849 λίρ. 19 σελ. 11 πέν. 4 φαρ.—335 λίρ. 15 σελ. 8 πέν. 2 φαρ. = 494 λίρ. 4 σελ. 3 πέν. 2 φαρ.

§ 526. Λύσις: Αἱ 252 200 δραχ. ἀποτελοῦσι 252 000 : 20 000 = 12 λίρ. 12 σελ. Ἐπομένως χρεωστεῖ ἀκόμη 25 λίρ. 14 σελ. 6 πέν.—12 λίρ. 12 σελ.= 13 λίρ. 2 σελ. 6 πέν.

§ 527. Λύσις: $4\frac{3}{4}$ στατ.= 4 στατ. 26 ὀκ. 160 δράμ. Ἐκαύσε λοιπὸν 3 στατ. 20 ὀκ. + 4 στατ. 26 ὀκ. 160 δράμ. = 8 στατ. 2 ὀκ. 160 δράμ. καὶ ἔμειναν 20 στατ. 34 ὀκ. 400 δράμ.—8 στατ. 2 ὀκ. 160 δράμ. = 12 στατ. 32 ὀκ. 240.

§ 528 **Λύσεις**: Εύρίσκομεν πρῶτον ὅτι :

$$A+B=48^{\circ} 35' 40'' - 69^{\circ} 56' 30'' = 118^{\circ} 32' 10''.$$

Ἐπομένως $\Gamma = 180^{\circ} - 118^{\circ} 32' 10''$ ἢ

$$179^{\circ} 59' 60'' - 118^{\circ} 32' 40'' = 61^{\circ} 27' 20''.$$

§ 529. **Λύσεις**: Εύρίσκομεν πρῶτον ὅτι :

$$60^{\circ} 35' + 58^{\circ} 45'' = 118^{\circ} 35' 45''. \text{ Τὸ δὲ } \frac{1}{8} \text{ τῆς περιφερείας εἶ-}$$

$$\text{ναι } 360^{\circ} : 8 = 45^{\circ}. \text{ Τὸ ζητούμενον ἐπομένως εἶναι :}$$

$$118^{\circ} 35' 45'' - 45^{\circ} = 73^{\circ} 35' 45''.$$

§ 530. **Λύσεις**: Ἀπὸ 8 ὥρ. 24^{π} ἕως τὴν μεσημβρίαν εἶναι :

$$12 \text{ ὥρ.} - 8 \text{ ὥρ. } 24^{\pi} \text{ ἢ } 11 \text{ ὥρ. } 60^{\pi} = 8 \text{ ὥρ. } 24^{\pi} = 3 \text{ ὥρ. } 36^{\pi}.$$

Ὅλος λοιπὸν ὁ χρόνος εἶναι

$$3 \text{ ὥρ. } 36^{\pi} + 6 \text{ ὥρ. } 45^{\pi} = 10 \text{ ὥρ. } 21^{\pi} = 37260^{\delta}.$$

Χύνονται γὰρ $3 \times 37260 = 111780$ σταγόνες.

Αὗται ἔχουσιν ὄγκον $111780 : 25 = 4471,2$ κυβ. ἐκατ. ἢ $4471,2 : 1000 = 4,4712$ κυβ. παλ. Πληροῖ δὲ οὗτος ὁ οἶνος δο-
χεῖον χωρητικότητος 4,4712 λιτρῶν.

§ 531. **Λύσεις**: 1ον) Τὸ θέρος εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνοι-
ξεως κατὰ 93 ἡμ. 14 ὥρ. — 92 ἡμ. 21 ὥρ. = 17 ὥρας.

2ον) Τὸ φθινόπωρον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χειμῶνος
κατὰ 89 ἡμ. 19 ὥρ. — 89 ἡμ. = 19 ὥρας.

3ον) Ἡ ἀνοιξις καὶ τὸ θέρος ἔχουσιν :

$$92 \text{ ἡμ. } 21 \text{ ὥρ.} + 93 \text{ ἡμ. } 14 \text{ ὥρ.} = 186 \text{ ἡμ. } 11 \text{ ὥρ.} \text{ Τὸ δὲ φθινόπω-}$$

$$\text{ρον καὶ ὁ χειμὼν ἔχουσιν } 89 \text{ ἡμ. } 19 \text{ ὥρ.} + 89 \text{ ἡμ.} = 178 \text{ ἡμ. } 19 \text{ ὥρ.}$$

$$\text{Τὸ ζητούμενον ἐπομένως εἶναι } 186 \text{ ἡμ. } 11 \text{ ὥρ.} - 178 \text{ ἡμ. } 19 \text{ ὥρ.}$$

$$= 7 \text{ ἡμ. } 16 \text{ ὥρ.}$$

§ 532. **Λύσεις**: Πρέπει νὰ προμηθευθῇ

$$\begin{array}{r} 2 \text{ πῆχ.} \quad 5 \text{ ρούπ.} \\ 10 \end{array}$$

$$\frac{\quad}{20 \text{ πῆρ.} - 50 \text{ ρούπ.}} = 26 \text{ πῆχ. } 2 \text{ ρούπ.}$$

§ 533. **Λύσεις**: Εἰς 5^{π} διατρέχει $3^{\circ} 25' 30''$

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \hline 15^{\circ} 125' 150'' = 17^{\circ} 7' 30''. \end{array}$$

§ 534. **Λύσεις**: Τὸν Ἰανουάριον ἔκαυσεν

$$(5 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δράμ.}) \times 31 = 174 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ. ἢ } 3 \text{ στ. } 42 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ.}$$

§ 535. **Λύσεις**: Ἐκάστος σάκκος εἶχε 38 ὀκ. 250 δρ. — 350 δρ.
= 37 ὀκ. 650 δράμ. — 350 δράμ. = 37 ὀκ. 300 δράμ. ἀνθράκων.

Ἐπομένως οἱ 5 σάκκοι εἶχον 37 ὀκ. 300 δράμ.

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \hline 185 \text{ ὀκ. } 1500 \text{ δρ.} = 188 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρ.} \end{array}$$

Β' τρόπος: Τὸ μεικτὸν βάρος τῶν 5 σάκκων ἦτο (38 ὀκ. 250 δράμ.)
 $\times 5 = 193 \text{ ὀκ. } 50 \text{ δρ.}$ Τὸ δὲ ἀπόβαρον τῶν 5 σάκκων ἦτο $350 \times 5 = 1750 \text{ δρ.}$
 $= 4 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ.}$ Οἱ ἀνθράκες λοιπὸν ἐξυγιζον $193 \text{ ὀκ. } 50 \text{ δρ.} - 4 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ.}$
 $= 192 \text{ ὀκ. } 450 \text{ δρ.} - 4 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ.} = 188 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}$

§ 536 Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 6 ὥρας μένει ὀπίσω $8^{\pi} 30^{\delta}$, εἰς
 1 ὥραν μένει 6 φορές ὀλιγώτερον, ἦτοι $(8^{\pi} 30^{\delta}) : 6 = 1^{\pi} 25^{\delta}$.

§ 537. Λύσις: Τὴν ἐπομένην μεσημβρίαν ἔπρεπε νὰ δει-
 κνύη 12 ὥρας. Ἐμεινεν λοιπὸν ὀπίσω 12 ὥρ.—11 ὥρ $50^{\pi} 30^{\delta}$
 ἢ $(11 \text{ ὥρ. } 59^{\pi} 60^{\delta}) - (11 \text{ ὥρ. } 50^{\pi} 30^{\delta}) = 9^{\pi} 30^{\delta}$ εἰς 24 ὥρας.

Ἐπομένως τὴν ὥραν ἔμεινεν ὀπίσω

$$(9^{\pi} 30^{\delta}) : 24 = 570_{\delta} : 24 = 23_{\delta}, 75.$$

§ 538. Λύσις: Ἀφ' οὗ διὰ 5 ὑάρδ. ἔδωκεν 13 λ. 18 σ. 6 π.
 2 φ, διὰ 1 ὑάρδαν ἔδωκε 5 φορές ὀλιγώτερον, ἦτοι:

$$(13 \text{ λίρ. } 18 \text{ σελ. } 6 \text{ πέν. } 2 \text{ φαρ.}) : 5 = 2 \text{ λίρ. } 15 \text{ σ. } 8 \text{ πέν. } 2 \text{ φ.}$$

§ 539. Λύσις: Ἐκαστος ἀδελφὸς ἔλαβε
 $(17 \text{ λίρ. } 9 \text{ σελ.}) : 3 = 5 \text{ λίρ. } 16 \text{ σελ. } 4 \text{ πέν.}$

§ 540. Λύσις: Ἀφ' οὗ ἡ ἀποθήκη χωρεῖ 20 στατ. 25 ὀκ.
 τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς χωρεῖ $\frac{20 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς ἔχουσι

$$\frac{20 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}}{4} \times 3 = \frac{60 \text{ στατ. } 75 \text{ ὀκ.}}{4} = 15 \text{ στατ. } 18 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρ.}$$

§ 541. Λύσις: Τὸ $\frac{1}{9}$ τῶν (5 στατ. 18 ὀκ.) εἶναι
 $(5 \text{ στατ. } 18 \text{ ὀκ.}) : 9 = 238 \text{ ὀκ.} : 9 = 26 \text{ ὀκ. } 177 \frac{7}{9} \text{ δράμ.}$

Τὸ καθαρὸν λοιπὸν βάρος ἦτο:

$$(5 \text{ στατ. } 18 \text{ ὀκ.}) - (26 \text{ ὀκ. } 177 \frac{7}{9} \text{ δράμ.}) \text{ ἢ}$$

$$(4 \text{ στατ. } 61 \text{ ὀκ. } 400 \text{ δράμ.}) - (26 \text{ ὀκ. } 177 \frac{7}{9} \text{ δράμ.})$$

$$= 4 \text{ στατ. } 35 \text{ ὀκ. } 222 \frac{2}{9} \text{ δράμ.}$$

B' τρόπος: 'Αφ' οὗ τὸ $\frac{1}{9}$ τῶν (5 στ. 18 ὀκ.) ἦτο κόνις, καθαροὶ ἄνθρακες ἦσαν τὰ $\frac{8}{9}$ τῶν (5 στ. 18 ὀκ.), ἥτοι:

$$(5 \text{ στ. } 18 \text{ ὀκ.}) \times \frac{8}{9} = \frac{43 \text{ στ. } 12 \text{ ὀκ.}}{9} = \text{στ. } 35 \text{ ὀκ. } 222 \frac{2}{9} \text{ δράμ.}$$

§ 542 Λύσις: Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν (4 πήχ. 2 ρ.)
Χρειαζονται λοιπὸν $(4 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρ.}) \times \frac{5}{8} = \frac{21 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρούπ.}}{8}$
 $= 2 \text{ πήχ. } 5 \frac{1}{4} \text{ ρούπ.}$

§ 543. Λύσις: 'Αφ' οὗ ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{8}$ ἔμειναν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ
ὕφασματος, ἥτοι $(48 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρ.}) \times \frac{3}{8} = \frac{146 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρούπ.}}{8}$
 $= 18 \text{ πήχ. } 2 \frac{1}{4} \text{ ρούπ.}$

B' τρόπος: Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ὕφασματος εἶναι:
 $(48 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}) \times \frac{5}{8} = \frac{243 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}}{8} = 30 \text{ πήχ. } 3 \frac{3}{4} \text{ ρούπ.}$

Ἐμειναν λοιπὸν $(48 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.} - 30 \text{ πήχ. } 3 \frac{3}{4} \text{ ρούπ.})$
 $= 18 \text{ πήχ. } 2 \frac{1}{4} \text{ ρούπ.}$

§ 544. Λύσις: 'Αφ' οὗ δι' 1 στρ. χρειάζεται 2 ἡμ. 5 ὥρ,
διὰ $6 \frac{3}{5}$ στρ. χρειάζεται $(2 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.}) \times 6 \frac{3}{5}$
 $= (2 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.}) \times \frac{33}{5} = \frac{86 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.}}{5} = 17 \text{ ἡμ. } 2 \text{ ὥρ. } 36\pi.$

Σημ. Ἡ ἐργασίαμος ἡμέρα ἔχει 8 ὥρας.

B' τρόπος: $(2 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.}) \times 6 \frac{3}{5} = (2 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.}) \times 6 + (2 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὥρ.})$
 $\times \frac{3}{5} = (15 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὥρ.}) + 1 \text{ ἡμ. } 4 \text{ ὥρ. } 36\pi = 17 \text{ ἡμ. } 2 \text{ ὥρ. } 36\pi.$

§ 545. Λύσις: 'Αφ' οὗ τὸ 1 χιλιόμ. διατρέχει εἰς $2^\pi 30^s$ τὰ
 $20 \frac{5}{8}$ χιλμ. διατρέχει εἰς $(2^\pi 30^s) \times 20 \frac{5}{8} = 51^\pi 33^s \frac{3}{4}.$

§ 546. Λύσις: Ἡ κοιλότης χωρεῖ τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον χύ-
νεται ἀπὸ τὴν κρήνην εἰς $3 \frac{4}{5}$ ὥρας, ἥτοι:

$$(2 \text{ στ. } 24 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δράμ.}) \times 3 \frac{4}{5} = (2 \text{ στ. } 24 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρ.}) \times 3$$

$$+ \frac{(2 \text{ στ. } 24 \text{ όκ. } 150 \text{ δρ.}) \times 4}{5} = 9 \text{ στ. } 31 \text{ όκ. } 10 \text{ δράμ.}$$

§ 547. Λύσεις: 'Αφ' οὗ εἰς 1 ὥραν χύνονται 12 όκ. 340 δρ.
εἰς $6 \frac{2}{5}$ ὥρας χύνονται $(12 \text{ όκ. } 340 \text{ δρ.}) \times 6 \frac{2}{5}$
 $= (12 \text{ όκ. } 340 \text{ δρ.}) \times \frac{32}{5} = 1 \text{ στ. } 38 \text{ όκ. } 96 \text{ δράμ.}$

§ 548 Λύσεις: 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ τεμαχίου εἶναι
45 πήχ. 5 ρούπ, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{45 \text{ πήχ. } 5 \text{ ρούπ.}}{5}$
 $= 9 \text{ πήχ. } 1 \text{ ρούπ.}$ Τὰ δὲ $\frac{8}{8}$ εἶναι $(9 \text{ πήχ. } 1 \text{ ρ.}) \times 8 = 73 \text{ πήχ.}$

§ 549. Λύσεις: 'Αφ' οὗ τὰ $3 \frac{2}{5}$ τεμ. ἔχουσι
145 πήχ. 4 ρούπ, τὸ 1 τεμ. ἔχει $(145 \text{ πήχ. } 4 \text{ ρ.}) : 3 \frac{2}{5}$
 $= (145 \text{ πήχ. } 4 \text{ ρ.}) \times \frac{5}{17} = 42 \text{ πήχ. } 6 \frac{6}{17} \text{ ρούπ.}$

§ 550. Λύσεις: 'Αφ' οὗ τὰ $5 \frac{3}{4}$ κιβώτια χωροῦσι 4 στατ.
15 όκ, τὸ 1 κιβώτιον χωρεῖ $(4 \text{ στ. } 15 \text{ όκ.}) : 5 \frac{3}{4} = (4 \text{ στ. } 15 \text{ όκ.})$
 $: \frac{23}{4} = (4 \text{ στ. } 15 \text{ όκ.}) \times \frac{4}{23} = \frac{17 \text{ στ. } 16 \text{ όκ.}}{23} = 33 \text{ όκ. } 189 \frac{3}{23} \text{ δράμ.}$

§ 551. Λύσεις: 'Αφ' οὗ τὰ $\frac{5}{8}$ εἶναι $50^{\circ} 12' 55''$, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐ-
τοῦ εἶναι $\frac{50^{\circ} 12' 55''}{5}$ καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἥτοι ὅλον τὸ τόξον εἶναι
 $\frac{52^{\circ} 12' 55''}{5} \times 8 = 80^{\circ} 20' 40''$.

§ 552. Λύσεις: 'Αφ' οὗ εἰς $5 \frac{2}{3}$ πρῶτα λεπτὰ διέτρεξεν
 $72^{\circ} 40' 20''$, εἰς 1 π. λ. διέτρεξεν $(72^{\circ} 40' 20'') : 5 \frac{2}{3}$
 $= (72^{\circ} 40' 20'') : \frac{17}{3} = (72^{\circ} 40' 20'') \times \frac{3}{17} = 12^{\circ} 49' 28'' \frac{4}{17}$.

§ 553. Λύσεις: Παραλείπεται ἡ ἀπὸ μνήμης, ὡς λίαν εὐ-
κολος.

Διάταξις. 1 ὀκ. τιμᾶται 40 000 δραχ.

$$\begin{array}{lcl}
 150 \text{ δράμ.} & \left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ δράμ.} = \frac{1}{4} \text{ ὀκ. τιμῶνται} \\ 50 \text{ » } = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 100 \text{ δράμ. τιμῶνται} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 10\,000 \\ 5\,000 \\ \hline 15\,000 \text{ δραχ.} \end{array}
 \end{array}$$

§ 554. Λύσις: Διάταξις. 1 ὀκᾶ τιμᾶται 16 000 δραχ.

$$\begin{array}{lcl}
 300 \text{ δράμ.} & \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ δραχ.} = \frac{1}{2} \text{ ὀκ. τιμῶνται} \\ 100 \text{ » } = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 200 \text{ δρασμ.} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 8\,000 \text{ δρχ.} \\ 4\,000 \\ \hline 12\,000 \text{ δρχ.} \end{array}
 \end{array}$$

§ 555. Λύσις: Διάταξις.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ἀξία} & 2 \text{ ὀκάδων} & 8\,000 \times 2 = 16\,000 \text{ δρχ.} \\
 150 \text{ δράμ.} & \left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ δράμ.} = \frac{1}{4} \text{ ὀκ.} \\ 50 \text{ » } = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 100 \text{ δρασμ.} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 2\,000 \text{ »} \\ 1\,000 \text{ »} \\ \hline \text{Τὸ ὅλον} \quad 19\,000 \text{ δρχ.} \end{array}
 \end{array}$$

§ 556. Λύσις: Ἀφ' οὗ εἰς 1 μέλος ἔδωκε 5 στ. 24 ὀκ. 250 δρ.
εἰς 120 μέλη ἔδωκε (5 στ. 24 ὀκ. 250 δρασμ.) $\times 120$

Διάταξις:

$$\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{r} 5 \text{ στ. } 24 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρμ.} \\ \times \quad 120 \\ \hline \end{array} \\
 \text{ἀπὸ } 5 \text{ στατ.} & & 600 \text{ στ.} \\
 \text{ἀπὸ } 24 \text{ ὀκ.} & \left\{ \begin{array}{l} 22 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{2} \text{ στ.} \quad 60 \text{ »} \\ 2 \text{ » } = \frac{1}{11} \text{ τῶν } 22 \quad 5 \text{ » } 20 \text{ »} \end{array} \right. \\
 \text{ἀπὸ } 250 \text{ δρμ.} & \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ δρμ.} = \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \quad 1 \text{ » } 16 \text{ »} \\ 50 \text{ » } = \frac{1}{4} \text{ τῶν } 200 \quad 0 \text{ » } 15 \text{ »} \end{array} \right. \\
 \text{Τὸ ὅλον} & & \hline 667 \text{ στατ. } 7 \text{ ὀκ.}
 \end{array}$$

§ 557. Λύσις: Προφανώς απέκóμισε

$$\left(2 \text{ στ. } 30 \text{ όκ. } 200 \text{ δρám.} \right)$$

$$\times 12 \frac{3}{4}$$

άπόδοσις 12 στρεμμ.

άπό 2 στατ. έκαστον

24 στ.

6 »

$$\left. \begin{array}{l} \text{άπό 30 όκ.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 22 \text{ όκ.} = \frac{1}{2} \text{ στ.} \\ 4 \text{ »} = \frac{1}{11} \text{ »} \\ 4 \text{ »} = \frac{1}{11} \text{ »} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

1 » 4 όκ.

1 » 4 »

άπό 200 δρám. = $\frac{1}{2}$ όκ.

0 » 6 »

$$\left. \begin{array}{l} \text{άπόδ. } \frac{3}{4} \text{ στρ.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

0 » 29 » 250 δρám.

0 » 29 » 250 »

0 » 29 » 250 »

34 στ. 14 όκ. 350 δρám.

§ 558. Λύσις: 'Αφ' οὗ διὰ 7 πήχ. 2 ρούπ. ἢ διὰ $7 \frac{2}{8}$ πήχ.

ἔδωκε 362 500 δραχ., διὰ 1 πήχυν ἔδωκεν $7 \frac{2}{8}$ φορές ὀλιγώ-

τερον, ἦτοι $362\,500 : 7 \frac{2}{8} = 362\,500 : \frac{58}{8} = 362\,500 \times \frac{8}{58}$

= 50 000 δραχ.

§ 559. Λύσις: 'Αφ' οὗ διὰ 2 πήχ. 3 ρούπ. ἢ διὰ 19 ρούπ. ἔδωκε 11 400 δραχ., διὰ 1 ρούπιον ἔδωκε 19 φορές ὀλιγώτερον, ἦτοι $11\,400 : 19 = 600$ δραχ.

§ 560. Λύσις: Εὐρίσκομε. πρῶτον ὅτι: $4 \text{ ὥρ. } 40^{\pi} 30^{\delta} = \frac{1683}{360}$

ώρας καὶ σκεπτόμεθα ὥς ἐξῆς: 'Αφ' οὗ εἰς $\frac{1630}{360}$ ώρας διέτρεξε

94 χιλμ. 175 μέτ., εἰς 1 ὥραν διέτρεξε (94 χιλ. 175 μ.) : $\frac{1683}{360}$

= (94 χιλ. 175 μ.) $\times \frac{360}{1683} = 20$ χιλμ. 144,385 μέτ.

§ 561. Λύσις: 'Αφ' οὗ μετὰ 2 ἡμέρ. 6 σελ. ἠγόραζεν 1 πήχυν,

μέ 5 λίρ. 15 σελ. ἠγόρασε τόσους πήχεις, ὅσας φορές χωροῦσιν αἱ 2 λίρ. 6 σελ. εἰς τὰς 5 λίρ. 15 σελ., ἦτοι :

$$(5 \text{ λίρ. } 15 \text{ σελ.}) : (2 \text{ λίρ. } 6 \text{ σελ.}) = 115 \text{ σελ.} : 46 \text{ σελ.} = 2 \text{ π. } 4 \text{ ρ.}$$

§ 562. Λύσις: Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ὕφασμα ἔφθασε διὰ τόσα παράθυρα, ὅσας φορές οἱ 3 πήχ. 2 ρούπ. χωροῦσιν εἰς τοὺς 9 πήχ. 6 ρούπ., ἦτοι :

$$(9 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}) : (3 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρούπ.}) = 78 \text{ ρ.} : 26 \text{ ρ.} = 3 \text{ παράθ.}$$

§ 563. Λύσις: Εἶχε τόσα δελτία, ὅσας φορές τὰ 350 δρᾶμ. χωροῦσιν εἰς τὰς 4 ὀκ. 150 δρᾶμ., ἦτοι :

$$(4 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δρᾶμ.}) : 350 \text{ δρμ.} = 1750 \text{ δρμ.} : 350 \text{ δρμ.} = 5 \text{ δελτία.}$$

§ 564. Λύσις: Τὴν ἐπώλησεν εἰς τὴν ἡμέραν ὅσας φορές αἱ 25 ὀκ. 250 δρμ. χωροῦσιν εἰς τὰς 281 ὀκ. 350 δρμ., ἦτοι :

$$(281 \text{ ὀκ. } 350 \text{ δρμ.}) : (25 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρμ.}) = 11 \text{ ἡμέρας.}$$

§ 565. Λύσις: Ἡ φιάλη χωρεῖ (2 ὀκ. 370 δρμ.) — 320 δρμ.

$$= 2 \text{ ὀκ. } 50 \text{ δρᾶμ. ἢ } 2 \frac{1}{8} \text{ ὀκ. ἐλαίου. Δι' αὐτὸ ἐπλήρωσε } 17\,000$$

$$\text{δρχ. Ἐπομένως διὰ } 1 \text{ ὀκᾶν ἐπλήρωσε } 17\,000 : 2 \frac{1}{8} = 17\,000 : \frac{17}{8}$$

$$\text{ἢ } 17\,000 \times \frac{8}{17} = 8\,000 \text{ δρᾶχ.}$$

§ 566. Λύσις: Τὰ δύο μαζί ἔχουσι $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ τοῦ α'.

Ὡστε τὰ $\frac{7}{4}$ τοῦ α' εἶναι 22 στ. 12 ὀκ. 280 δρᾶμ. τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ

α' εἶναι $\frac{22 \text{ στ. } 12 \text{ ὀκ. } 280 \text{ δρᾶμ.}}{7}$ καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ α' εἶναι

$$\frac{22 \text{ στ. } 12 \text{ ὀκ. } 280 \text{ δρᾶμ.}}{7} \times 4 = 12 \text{ στ. } 32 \text{ ὀκ. } 160 \text{ δρᾶμ. Τὸ δὲ β'}$$

εἶχε τὸν ὑπόλοιπον οἶνον, ἦτοι :

$$(22 \text{ στ. } 12 \text{ ὀκ. } 280 \text{ δρᾶμ.}) - (12 \text{ στ. } 32 \text{ ὀκ. } 160 \text{ δρᾶμ.})$$

$$= 9 \text{ στ. } 24 \text{ ὀκ. } 120 \text{ δρᾶμ.}$$

§ 567. Λύσις: Εὐρίσκομεν ὅτι ἐπώλησε $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$ τοῦ

ὕφασματος. Ἐπειὶ οὖν ἠθροίσθησαν ἀπὸ τὸν ἑαυτοῦ πωληθέντα 7 ὀκ. 20 δρᾶμ.

“Ὡστε τὰ $\frac{7}{20}$ εἶναι 39 πήχ. 6. ρούπ.

τὸ $\frac{1}{20}$ » $\frac{39 \text{ πήχ. 6 ρούπ.}}{7}$

καὶ τὰ $\frac{20}{20}$ » $\frac{39 \text{ πήχ. 6 ρούπ.}}{7} \times 20 = 113 \text{ πήχ. 4 } \frac{4}{7} \text{ ρούπ.}$

§ 568. Λύσις : Διὰ τοὺς 6 πήχ. 4 ρούπ. ἢ $6\frac{1}{2}$ πήχ. ἔδωκε
 $60\,000 \times 6\frac{1}{2} = 390\,000$ δραχ. Ἐπομένως διὰ τὸ β' ἔδωκε
 $770\,000 - 390\,000 = 380\,000$ πρὸς $60\,000 + 20\,000 = 80\,000$ δραχ.
 Ὑγόρασε λοιπὸν ἀπὸ αὐτὸ $380\,000 : 80\,000 = 4$ πήχ. 6 ρούπ.

§ 569. Λύσις : Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἀναχωρήσεως μέχρι
 τῆς ἀφίξεως εἰς Πάτρας ἐπέρασαν (6 ὥρ. 10_π) — (3 ὥρ. 19_π) =
 2 ὥρ. 51_π. Ἐπειδὴ δὲ ἔμεινεν ἀκίνητος 8_π, τὰ 131 χιλ. διέτρεξεν εἰς
 (2 ὥρ. 51_π) — 8_π = 2 ὥρ. 43_π ἢ $2\frac{43}{60}$ ὥρας. Ἐπομένως εἰς 1 ὥρ,
 διέτρεχε $131 : 2\frac{43}{60} = 48$ χιλμ. 220,858... μέτ.

§ 570. Λύσις : Ἀφ' οὗ ἡ ὑάρδα ἢ 0,914 μέτ. πωλεῖται 2
 λίρ. 8 σελ, τὸ 1 μέτ. πωλεῖται (2 λίρ. 8 σελ.): 0,914
 = 48 σελ. : 0,914 = 48000 : 914 = 52 σελ. 6 πέν. $\frac{360}{457}$ φαρ.

$$= 2 \text{ λίρ. 12 σελ, 6 πέν. } \frac{360}{457} \text{ φαρ.}$$

§ 571. Λύσις : Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀεροδρομίου ἀπὸ τῶν
 ἐχθρικῶν θέσεων διηνύθη εἰς 45_π ἢ $\frac{3}{4}$ ὥρας μὲ ταχύτητα 90
 χιλμ. τὴν ὥραν. Ἐπομένως αὕτη εἶναι $90 \times \frac{3}{4} = \frac{270}{4}$ χιλιόμετ.
 Αὐτὰ τὰ χιλιόμετρα τὰ διέτρεξε κατὰ τὴν ἐπιστροφήν μὲ τα-
 χύτητα 120 χιλμ. τὴν ὥραν. Ἐχρειάσθη λοιπὸν $\frac{270}{4} : 120 = \frac{9}{16}$
 ὥρας. Ἡ ὅλική πτήσις διήρκεσε λοιπὸν $\frac{3}{4} + \frac{12}{60} + \frac{9}{16}$
 $= \frac{180 + 48 + 135}{240} = \frac{363}{240}$ ὥρας = 1 ὥρα 30_π 45_δ. Ἐπομένως ἔφθα-
 σεν εἰς τὸ ἀεροδρόμιον τὴν 6 ὥρ. 15_π + 1 ὥρ. 30_π 49_δ
 = 7 ὥρ. 45_π 45_δ.

§ 572. Λύσις : Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 150 χιλιομ. εἶναι $150 \times \frac{2}{3}$
 = 100 χιλμ. Αὐτὰ τὰ χιλμ. διέτρεξεν εἰς $100 : 40 = 2\frac{1}{2}$ ὥρας.

Τὰ ὑπόλοιπα 50 χιλμ. διέτρεξεν εἰς $50:10=5$ ὥρας. Ἐπομένως ὅλην τὴν ἀπόστασιν διέτρεξεν εἰς $2\frac{1}{2}+5=7\frac{1}{2}$ ὥρας. Τὸ αὐτοκίνητον χρειάζεται $150:3=5$ ὥρας. Θὰ φθάσῃ λοιπὸν τοῦτο ἐνωρίτερον κατὰ $7\frac{1}{2}-5=2\frac{1}{2}$ ὥρας.

§ 573. Λύσις: Ὁ α' διανύει τὰ 54 χιλ. εἰς $54:16=3$ ὥρ. $22^{\pi} 30^{\delta}$. Ἐπειδὴ δὲ ἀνεχώρησε τὴν 8ην πρωΐνὴν ἔφθασεν εἰς τὸν θεῖον. του εἰς 8 ὥρ. $+(3 \text{ ὥρ. } 22^{\pi} 30^{\delta})=11 \text{ ὥρ. } 22^{\pi} 30^{\delta} \text{ π. μ.}$ Ὁ β' διανύει τὰ 54 χιλμ. εἰς $54:36=1$ ὥρ. 30^{π} . Ἐπομένως, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὰς 11 ὥρ. $22^{\pi} 30^{\delta}$, πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ τὴν $(11 \text{ ὥρ. } 22^{\pi} 30^{\delta})-(1 \text{ ὥρ. } 30^{\pi})=9 \text{ ὥρ. } 52^{\pi} 30^{\delta} \text{ π. μ.}$

Β' τρόπος: Εὖρομεν ὅτι ὁ μὲν α' διανύει τὴν ἀπόστασιν εἰς 3 ὥρ. $22^{\pi} 30^{\delta}$, ὁ δὲ β' εἰς 1 ὥρ. 30^{π} . Ἐπομένως ὁ β' διανύει τὴν ἀπόστασιν εἰς $(3 \text{ ὥρ. } 22^{\pi} 30^{\delta})-(1 \text{ ὥρ. } 30^{\pi})=1 \text{ ὥρ. } 52^{\pi} 30^{\delta}$ ὀλιγώτερον. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναχωρήσῃ 1 ὥρ. $52^{\pi} 30^{\delta}$ ἀργότερον, ἤτοι τὴν $8 \text{ ὥρ. } +1 \text{ ὥρ. } 52^{\pi} 30^{\delta}=9 \text{ ὥρ. } 52^{\pi} 30^{\delta} \text{ π. μ.}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

§ 574. Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τοὺς κανόνες (§ 278 Ἀριθμητικῆς) καὶ εὐρίσκομεν:

$$1\text{ον}) \quad x = \frac{7 \times 12}{28} = 3, \quad x = \frac{16 \times 2}{4} = 8, \quad x = \frac{16 \times 12}{8} = 24.$$

$$2\text{ον}) \quad x = \sqrt{16} = 4, \quad x = \frac{15 \times 5}{25} = 3, \quad x = \frac{27 \times 9}{8,1} = \frac{27 \times 90}{81} \\ = \frac{3 \times 9 \times 9 \times 10}{81} = 3 \times 10 = 30$$

ΑΣΚΗΣΑΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

§ 575. Λύσις: Ἀπὸ τὴν εἰκόνα (15 σελ. 267 Ἀριθμητικῆς) βλέπομεν ὅτι ἡ μεταλλευτικὴ παραγωγή τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1945 μόλις ἦτο τὸ $\frac{1}{100:8} = \frac{1}{12,5}$ τῆς προπολεμικῆς παραγωγῆς τοῦ 1939 ἔνεκα τῶν καταστροφῶν τοῦ πολέμου.

Κατὰ τὸ 1946 ἔγινεν $\frac{14}{8} = 1\frac{3}{4}$ φορές μεγαλυτέρα τὸ 1947 ἔγινε $\frac{15,5}{14} = 1,1...$ φορές μεγαλυτέρα κ. τ. λ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σπουδάζομεν καὶ τὰς ἄλλας εἰκόνας.

§ 576. Λύσις : Ἀφ' οὗ σημειώσωμεν τὰς θερμοκρασίας κατὰ διαφόρους ἡμέρας, ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς (§ 285 σελ. 252 Ἀριθμητικῆς.

§ 577. Λύσις : Ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως.

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 578. Λύσις : (Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα).

Ἀφ' οὗ μὲ 100 ὀκ. ἐλαίων κάμνομεν 25 ὀκ. ἐλαίου,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & & \times & & \times & & \\ & & 100 & & 25 & & \end{array}$$

$$\text{καὶ } \begin{array}{ccccccc} & & 1300 & & & & \\ & & \times & & & & \\ & & 100 & & 25 & & \end{array} \times 1300 = 325 \text{ ὀκ. ἐλαίου.}$$

Κατάταξις. Μὲ 100 ὀκ. » 25 ὀκ.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & & \times \\ & & 1300 \end{array}$$

χ. Παρατηροῦντες ὅτι τὰ ποσὰ

$$\text{εἶναι ἀνάλογα εὐρίσκομεν } x = 25 \times \frac{1300}{100} = 325 \text{ ὀκ.}$$

Β' Τρόπος : Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος 100 : 1300 ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον 25 : x, ἥτοι 100 : 1300 = 25 : x. Ἐπομένως

$$x = \frac{25 \times 1300}{100} = 325$$

§ 579. Λύσις : Αἱ 100 ὀκ. δίδουσιν 140 ὀκ. ἄρτου

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha\iota & 35 & & & & & \\ & \times & & & \times & & \end{array}$$

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, εἶναι $x = 140 \times \frac{35}{100} = 49$ ὀκ.

§ 580. Λύσις : Οἱ 80° Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦσι μὲ 100° Κελσίου

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha\iota & 35^\circ & & & & & \\ & \times & & & \times & & \end{array}$$

$$\text{ὅθεν } x = 100 \times \frac{35}{80} = 43,75 \text{ Κελσίου.}$$

§ 581. Λύσις : Ἄν ἡ σκιά εἶναι 1,80 μέτ., τὸ ὕψος εἶναι 1,20 μέτ.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 15 & & \\ & & & & \times & & \end{array}$$

$$\text{ὅθεν } x = 1,20 \times \frac{15}{1,80} = 12 \times \frac{15}{18} = 2 \times \frac{15}{3} = 10 \text{ μέτρα.}$$

§ 582. *Λύσις*: Τὰ 8,25 μέτρα τιμώνται 99000

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0,25 & & & x, & \\ \text{ὅθεν } x=99000 \times & \frac{0,25}{8,25} & =99000 \times \frac{25}{825} & =99000 \times \frac{1}{33} & =3000 \text{ δραχ.} \end{array}$$

§ 583. *Λύσις*: 1 μέτρον χάρτου παριστᾷ 100 000 μέτ. ἐδάφους

$$\begin{array}{ccccccc} 0,025 & & & & & x & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\text{ὅθεν } x=100\,000 \times \frac{0,25}{1} = 2500 \text{ μέτρα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.}$$

§ 584. *Λύσις*:

"Αν διδῇ 45 ὁκ. τὸ λεπτὸν, γεμίζει εἰς 12 ὥρας τὴν δεξαμενὴν.

"Αν » 1 » » » » 12×45 » » »

"Αν » 54 » » » » $\frac{12 \times 45}{54} = 10$ ὥρας.

Κατάταξις. "Αν διδῇ 45 ὁκ. γεμίζει εἰς 12 ὥρας τὴν δεξαμενὴν.

"Αν » 54 » » » X » » »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, θὰ εἶναι $x=12 \times \frac{45}{54} = 10$ ὥρας.

Β' Τρόπος: Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος $\frac{45}{54}$ εἶναι ἴσος με $\frac{x}{12}$, ἤτοι $\frac{45}{54} = \frac{x}{12}$, ὅθεν $x = \frac{45 \times 12}{54} = 10$ ὥραι.

§ 585. *Λύσις*: Αἱ τροφαὶ φθάνουν 6 μῆνας εἰς 400 στρατ.

» » » 8 » » X »

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἐπομένως

$$x=400 \times \frac{6}{8} = 50 \times 6 = 300 \text{ στρατιῶται}$$

§ 586. *Λύσις*: Ὄταν διανύῃ 4,6 χιλ. τὴν ὥραν χρειάζεται $5\frac{3}{4}$ ὥρ.

» » 8,2 » » » » X »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, εἶναι

$$x=5\frac{3}{4} \times \frac{4,6}{8,2} = \frac{23}{4} \times \frac{46}{82} = \frac{23 \times 23}{4 \times 41} = 3 \text{ ὥρ. } 13\pi \text{ } 32\delta, 195.$$

§ 587. *Λύσις*: Ἀφ' οὗ ἀπεχώρησαν 3 ἐργάται, τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ ἔργου θὰ γίνῃ ἀπὸ 12 ἐργάτας.

"Ωστε 15 ἐργάται ἐκτελοῦσι τὸ $\frac{1}{2}$ ἔργου εἰς 20 ἡμέρας

12 » » » » » » x »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, εἶναι $x=20 \times \frac{15}{12} = 25$ ἡμέρ.

§ 588 Λύσις: Διὰ τὴν στρώσιν εἰς 14 ἡμ. χρειάζεται 44 ἐργάτας
 » » » » 11 » » » »

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἐπομένως $X = 44 \times \frac{14}{11} = 56$ ἐργάται.

Πρέπει ἐπομένως νὰ προσλάβῃ ἀκόμη $56 - 44 = 12$ ἐργάτας.

§ 589 Λύσις: Οἱ 8 πῆχ. κοστίζουν 173 600 δραχ.

$$\begin{array}{r} \text{Οἱ } 15\frac{3}{8} \text{ » » » } X \text{ » } \\ \hline 15\frac{3}{8} \end{array}$$

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ ἐπομένως $X = 173\,600 \times \frac{15\frac{3}{8}}{8}$.

$$= 173\,600 \times \frac{123}{64} = 2712,5 \times 123 = 333\,637,50 \text{ δραχ.}$$

§ 590 Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι 1 λίρ. 6 σέλ. = $1\frac{6}{20} = \frac{26}{20}$ λίρ.

καὶ 15 λίρ. 10 σελ. 8 πέν. = $\frac{3728}{248}$ λίρ. Ἐπομένως

μὲ $\frac{26}{20}$ λίρ. ἀγοράζομεν 3,5 μέτρα

μὲ $\frac{3728}{240}$ » » » » X » , ὅθεν

$$X = 3,5 \times \frac{\frac{3728}{240}}{\frac{26}{20}} = 3,5 \times \frac{3728}{240} \times \frac{20}{26} = 3,5 \times \frac{3728}{24} \times \frac{1}{13} = 3,5 \times \frac{932}{6 \times 13}$$

$$= 3,5 \times \frac{466}{39} = 41,82... \text{ μέτρα.}$$

§ 591 Λύσις: Αἱ 7 ὀκ. 200 δράμ. = $7\frac{1}{2}$ ὀκ. Οἱ 3 στ. 33 ὀκ. 300 δρμ.

$$= 165\frac{3}{4} \text{ ὀκ. Ἐπομένως } 7\frac{1}{2} \text{ ὀκ. κοστίζουν 12 900 δραχ.}$$

$$\begin{array}{r} \text{αἱ } 165\frac{3}{4} \text{ » » » } X \text{ » } \\ \hline 165\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{ὅθεν } X = 12\,900 \times \frac{165\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2}} = 12\,900 \times \frac{663}{30} = 285\,090 \text{ δραχ.}$$

§ 592. Λύσις: Ἄν τὸ πλάτος εἶναι $1\frac{2}{8}$ πῆχ. χρειάζεται 6 πῆχ.

$$\begin{array}{r} \text{» » » » } 1\frac{1}{2} \text{ » » » } X \text{ » } \\ \hline \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἐπομένως

$$X = 6 \times \frac{1\frac{2}{8}}{1\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{10}{12} = \frac{10}{2} = 5 \text{ πῆχεις.}$$

§ 593. *Λύσις*: "Αν τὸ πλάτος εἶναι 1,50 μέτ. χρειάζονται 24 μέτ.
 » » » » 1,20 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 24 \times \frac{1,50}{1,20} = 24 \times \frac{15}{12} = 2 \times 15 = 30 \text{ μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

§ 594. *Λύσις*: Δι' ἐνοίκιον 100 πληρώνει φόρον 32,5
 » » 350 000 » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 32,5 \times \frac{350\,000}{100} = 113\,750 \text{ δραχ.}$$

§ 595. *Λύσις*: Διὰ 1000 δραχ. τὰ ασφάλιστρα εἶναι 2 δραχ.
 » 50 000 000 » » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 2 \times \frac{50\,000\,000}{1000} = 100\,000 \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος: (Ἀπὸ μνήμης). Αἱ 50 000 000 δραχ. εἶναι 50 000 χιλιάδραχμα. Ἐπομένως τὰ ασφάλιστρα εἶναι $2 \times 50\,000 = 100\,000$ δραχ.

§ 596. *Λύσις*: Εἰς 100 κυβ. μέτρα περιέχεται ἄηρ 21 κ. μ.

» 90 » » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 21 \times \frac{90}{100} = 2,1 \times 9 = 18,9 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

§ 597. *Λύσις*: Αἱ 200 ὀκ εἶναι διπλάσιαι τῶν 100 ὀκ. Περιέχεται λοιπὸν εἰς αὐτάς διπλάσιαι ὀκάδες ἀπὸ ἑκάστον εἶδος, ἥτοι $8 \times 2 = 16$ ὀκ. ποτάσσας, $42 \times 2 = 84$ ὀκ. λιπαρῶν οὐσιῶν καὶ $50 \times 2 = 100$ ὀκ. ὕδατος.

§ 598. *Λύσις*: Ἀπὸ 100 ὀκ. σίτου λαμβάνομεν 75 ὀκ. ἄλευρον
 » 380 » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 75 \times \frac{380}{100} = 7,5 \times 38 = 285 \text{ ὀκ. ἄλεουρου.}$$

§ 599. *Λύσις*: Εἰς ἀξίαν 100 δραχ. ἡ ἔκπτωσις εἶναι 18 δραχ.
 » » 125 000 » » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 18 \times \frac{125\,000}{100} = 18 \times 1250 = 22\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἐπομένως θὰ εἰσπράξη $125\,000 - 22\,500 = 102\,500$ δραχ.

Β' τρόπος: Ἀπὸ ἀξίαν 100 δραχ. εἰσπράττει $100 - 18 = 82$ δραχ
 » » 125 000 » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 82 \times \frac{125\,000}{100} = 82 \times 1250 = 102\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἐπομένως ἡ ἔκπτωσις εἶναι $125\,000 - 102\,500 = 22\,500$ δραχ.

§ 600 *Λύσις*: Εἰς μεικτὸν βάρος 100 ὀκ. εἶναι 3 ὀκ. ἀπόβαρον
 » » » 240 » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 3 \times \frac{240}{100} = 7 \text{ ὀκ. 80 δράμια.}$$

§ 601. Λύσις: Α' Έκ τῶν 100 τ. χιλμ. τὰ 20 καλλιεργοῦνται
 » » 130199 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 20 \times \frac{130199}{100} = 26039,8 \text{ τετ. χιλιδμ.}$$

Όμοίως εὐρίσκομεν ὅτι: Β') Δάση εἶναι $18 \times \frac{130199}{100} = 23435,82$ τετ. χιλμ.

Γ') ἀκαλλιέργητα $27 \times \frac{130199}{100} = 35153,73$ τετ. χιλ. καὶ βοσκαὶ εἶναι

$$35 \times \frac{130199}{100} = 45569,65 \text{ χιλμ.}$$

§ 602. Λύσις: "Αν ἔσδιδε 34 δραχ. ὥφειλεν 100 δραχ.
 » » 578000 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{578000}{34} = 1\,700\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 603. Λύσις: "Αν ἐλάμβανε 2 δραχ. θὰ ἐπωλεῖτο 1000 δραχ.
 τώρα ἔλαβε 75000 » ἐπωλήθη X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{75000}{2} = 37\,500\,000 \text{ δραχμάς.}$$

§ 604. Λύσις: Ζημία 15 δραχ. προέρχεται ἀπὸ ἀγορὰν 100 δραχ.
 » 10500 » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{105000}{15} = 100 \times 7000 = 700\,000 \text{ δρχ}$$

§ 605. Λύσις: "Αν ἡ ἀμοιβὴ εἶναι 1,5 δραχ., ἡ ἀξία εἶναι 100 δρχ.
 Τώρα » » 423 000 » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{423\,000}{1,5} = 100 \times 282\,000 = 28\,200\,000 \text{ δρχ.}$$

§ 606. Λύσις: 2,5 ὁκ. ἄλλοτος περιέχονται εἰς 100 ὁκ. ὕδατος
 1 » » » » X » »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{1}{2,5} = 100 \times \frac{10}{25} = 100 \times \frac{2}{5} = 40 \text{ ὁκ. ὕδατος.}$$

§ 607. Λύσις: "Αν εἰσπράττη 130 δραχ., ἡ ἀξία εἶναι 100 δραχ.
 Τώρα » 910 000 » » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{910\,000}{130} = 100 \times 7000 = 700\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 608. Λύσις: Αἱ 100 ὁκάδες καβουρδιζόμεναι γίνονται $100 - 22 = 78$ ὁκ.
 "Ωστε θὰ ἔχωμεν 78 ὁκ. ἀπὸ 100

» » 39 » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{39}{78} = 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ ὁκ.}$$

§ 609. Λύσις: Α') $100 - 90 = 10$, Β') Εἰς 200 ἐκπίπτει 20, ἄρα εἰς

100 ἐκπίπτει 10, Γ') Εἰς 300 ἐκπίπτει $300 - 210 = 90$. ἄρα εἰς 100 ἐκπίπτει $90 : 3 = 30$.

§ 610. *Λύσις*: α') $18 : 2 = 9\%$. β') Εἰς μεικτὸν βάρος 50 ὀκ. τὸ ἀντίβαρον εἶναι εἶναι $12 : 3 = 4$ "Αρα τὸ ἀντίβαρον εἶναι $4 : 2 = 8\%$.

§ 611. *Λύσις*: Τὸ ὀλικὸν κέρδος εἶναι $20\,736\,000 - 17\,280\,000 = 3\,456\,000$ δραχ.

Ὡστε ἀπὸ
 $17\,280\,000$ δραχ. ἐκέρδισε $3\,456\,000$ δραχ.
 ἀπὸ 100 » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 3\,456\,000 \times \frac{100}{17\,280\,000} = 20\%$$

§ 612. *Λύσις*: Ἡ ὀλικὴ ἔκπτωσις εἶναι

$$36\,215\,000 - 32\,412\,425 = 3\,802\,575 \text{ δραχ.}$$

Ὡστε εἰς $36\,215\,000$ δραχ. ἔγινε ἔκπτωσις $3\,802\,575$ δραχ.

» 100 » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 3\,802\,575 \times \frac{100}{36\,215\,000} = 20,5\%$$

§ 613. *Λύσις*: Ἐπρεπε νὰ δώσῃ :

$$\alpha') \text{ Διὰ τὴν Ζάκχαριν } 6400 \times 84 = 537\,600 \text{ δραχ.}$$

$$\beta') \text{ Διὰ τὸν σάπωνα } 7200 \times 45 = 324\,600 \text{ »}$$

Τὸ ὅλον ἔπρεπε νὰ δώσῃ $861\,600$ »

Ἐγινε λοιπὸν ἔκπτωσις $861\,000 - 730\,654 = 130\,946$ δραχ.

Ὡστε εἰς $861\,600$ δρ. ἡ ἔκπτωσις ἦτο $130\,946$

» 100 » » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 130\,946 \times \frac{100}{861\,600} = 15,198\ldots\%$$

§ 614. *Λύσις*: α') Εἰς 450 γραμ. εἶναι 270 γραμ. ἄμμος

εἰς 100 » » X » »

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 270 \times \frac{100}{450} = 60\% \text{ ἄμμος.}$$

β') Εἰς 450 γραμ. εἶναι 150 γραμ. ἄργυλος

» 100 » » X » »

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 150 \times \frac{100}{450} = 33\frac{1}{3}\% \text{ ἄργυλος.}$$

Τὸ ὑπόλοιπον χῶμα εἶναι $450 - (270 + 150) = 30$ δρ.

Ἐπομένως εἰς τὸ χῶμα ἔχει $30 : 3 = 10$ γραμ. ἀσβεστολίθου καὶ $10,2 = 20$ γραμ. γόνιμον χῶμα.

γ') Ἐπομένως εἰς 450 γραμ. ὑπάρχουσι 10 γραμ. ἀσβεστολίθου

εἰς 100 » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu\ X = 10 \times \frac{100}{450} = 2\frac{2}{9}\%$$

δ') Τὸ δὲ ποσοστὸν τοῦ γόνιμου εἶναι διπλάσιον τοῦ προηγουμένου.

$$\eta\tau\omicron\iota\ 2\frac{2}{9} \times 2 = 4\frac{4}{9}\%$$

§ 615. *Λύσις*: Διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ὑφάσματος ἐπλήρωσε $4560 \times 325 = 1482\,000$ δραχ. Τὸ δὲ κέρδος εἶναι $14\,820 \times 20 = 296\,400$ δραχ. Ἐπομένως ἐκ τῆς πωλήσεως ὅλου τοῦ ὑφάσματος πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὸ ὅλον $1482\,000 + 296\,400 = 1\,778\,400$ δραχ.

Ἐπώλησε δὲ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ὑφάσματος, $325 : 5 = 65$ μέτρα καὶ εἰσέπραξε $5\,000 \times 65 = 325\,000$ δραχμάς.

Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα λοιπὸν $325 - 65 = 260$ μέτρα, πρέπει νὰ εἰσπράξῃ $1\,778\,400 - 325\,000 = 1\,453\,400$ δραχ. Ἐπομένως πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρον πρὸς $1\,453\,400 : 260 = 5\,590$ δραχμάς.

§ 616. *Λύσις*: Διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ὑφάσματος ἔδωκε $3\,250 \times 120 = 390\,000$ δραχ. Ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ, ἥτοι ἀπὸ $120 : 3 = 40$ μέτρα εἰσέπραξεν $3\,500 \times 40 = 140\,000$ δραχ. Ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, ἥτοι ἀπὸ $120 : 4 = 30$ μέτρα εἰσέπραξε $3\,750 \times 30 = 112\,500$ δραχ. καὶ ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα 50 μέτρα εἰσέπραξεν $3\,450 \times 50 = 172\,500$. Εἰσέπραξε λοιπὸν τὸ ὅλον $140\,000 + 112\,500 + 172\,500 = 425\,000$ δραχ. καὶ ἐκέρδισεν $425\,000 - 390\,000 = 35\,000$ δραχ.

Ὡστε: Ἀπὸ 390 000 δραχ. ἐκέρδισε 35 000 δραχ.

» 100 » » X

$$\text{ὅθεν } X = 35\,000 \times \frac{100}{390\,000} = 8,97\%.$$

Β' τρόπος: Ἀπὸ τὰ 40 μέτρα ἐκέρδισεν $250 \times 40 = 10\,000$ δραχ.

» » 30 » » $500 \times 30 = 15\,000$ »
καὶ » » 50 » » $200 \times 50 = 10\,000$ »

Ὅλον λοιπὸν τὸ κέρδος ἦτο $35\,000$ δραχ.

§ 617. *Λύσις*: Ἀφ' οὗ τὰ 1000 ποτήρια ἠγόρασε $1\,500\,000$ δραχ. τὸ 1 ἠγόρασε $1\,500\,000 : 1000 = 1500$ δραχ. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων ἐπωλήθη μὲ κέρδος 20 % ἐπὶ τῆς τιμῆς 1500 δραχ., ἥτοι εἰς 100 τὸ κέρδος εἶναι 20 δραχ.

εἰς 1500 » » » X »

ὅθεν $X = 20 \times \frac{150}{100} = 30$ δραχ. Ἐπομένως ἐπώλησεν ἕκαστον πρὸς $1500 + 30 = 1530$ δραχμάς.

Σημ. Ὅπως βλέπομεν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων ποτηρίων καὶ τῶν πωληθέντων δὲν ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὥς τοῦτο διευτυπώθη. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα θὰ ἐχρειάζοντο, ἂν ἡ διατύπωσις ἦτο ὡς ἐξῆς. «... Ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ τῶν ὑπολοίπων προέκυψεν κέρδος 20 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς ὅλων...»

§ 618. *Λύσις*: Τὰ ἔξοδα κινήσεως διὰ 18 ἡμέρας εἶναι $12\,000 \times 18 = 216\,000$ δραχ. Ἐπομένως διὰ προμήθειαν ἔλαβε

1 620 000 — 216 000 = 1 404 000 δραχμάς. Τώρα σκεπτόμεθα ως εξής :

"Αν ἐλάμβανε 2,5 δραχ. τὰ πωληθέντα ἥξιζον 100 δραχ.
 ἀφ' οὗ ἔλαβε 1 404 000 « » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 100 \times \frac{1\,404\,000}{2,4} = 56\,160\,000 \text{ δραχμάς.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 617. *Λύσις* : Διὰ 300 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν 15 χιλ. λαμβάνει 67 500 δρχ.
 » 1500 » » » 25 » » X »

Ἐπειδὴ ἡ ἀμοιβὴ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ βάρος καὶ πρὸς τὴν ἀπόστασιν, εἶναι $X = 67\,500 \times \frac{1500}{300} \times \frac{25}{15} = 67\,500 \times 5 \times \frac{5}{3} = 22\,500 \times 25 = 2\,250\,000 : 4 = 562\,500 \text{ δραχ.}$

§ 620. *Λύσις* : Διὰ μῆκος 360 μέτ., πλάτος 12 μέτ. 450 κ. μ.
 » » 560 » » 10 » X »

Ἐπειδὴ τὰ χαλίκια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὸ μῆκος καὶ πρὸς τὸ πλάτος τῆς ὁδοῦ, θὰ εἶναι

$$X = 450 \times \frac{560}{360} \times \frac{10}{12} = 450 \times \frac{14}{9} \times \frac{5}{6} = 50 \times 7 \times \frac{5}{3} = 583\frac{1}{3} \text{ κυβ. μ.}$$

§ 621. *Λύσις* : Εἰς 7 ἡμ. ἐπὶ 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν δίνει 7560 ὀκ.
 » 9 » » 8 » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 7560 \times \frac{9}{7} \times \frac{8}{12} = 1080 \times 6 = 6480 \text{ ὀκάδας.}$$

Β' Τρόπος : Κατ' ἀρχὰς ἡ κρήνη ρεεῖ 12 X 7 ὥρας καὶ ἔπειτα 8 X 9 = 72 ὥρ. Ὥστε :

εἰς 84 ὥρας δίδει 7560 ὀκ.
 » 72 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 7560 \times \frac{72}{84} = 7560 \times \frac{6}{7} = 1080 \times 6 = 6480 \text{ ὀκ.}$$

§ 622. *Λύσις* : Δεξαμενὴ ἔχουσα
 μῆκος 4 μέτ., πλάτος 3 μέτ., βάθος 3,50 μέτ. γεμίζει εἰς 6 ὥρας
 » 5,6 » » 2,5 » » 2 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 6 \times \frac{5,6}{4} \times \frac{2,5}{3} \times \frac{2}{3,50} = \frac{5,6 \times 2,5}{3,50} = \frac{56 \times 25}{350} = \frac{56}{14} = 4 \text{ ὥραι.}$$

§ 623. *Λύσις* : Διὰ τοῖχον, ὃ ὁποῖος ἔχει
 μῆκος 15 μέτ., πάχος 0,80 μέτ., ὕψος 2 μέτ. πληρώνεται 1 200 000
 » 10 » » 1,20 » » 3 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 1\,200\,000 \times \frac{10}{15} \times \frac{1,20}{0,80} \times \frac{3}{2} = 1\,200\,000 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{12}{8}$$

$$= 1\,200\,000 \times \frac{3}{4} = 600\,000 \times 3 = 1\,800\,000 \text{ κυβ. μ.}$$

§ 624. Δύσεις : Με ύφασμα

μήκους 42,5 πήχ. και πλάτους 1,2 μέτ. γίνονται 10 ένδυμ.

» 51 » » » 0,04 » » X

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ένδυμασιῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ μήκος καὶ πρὸς τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$X = 10 \times \frac{51}{42,5} \times \frac{0,04}{1,2} = 10 \times \frac{510}{425} \times \frac{40}{120}$$

$$= 10 \times \frac{102}{85} \times \frac{1}{3} = \frac{10 \times 34}{85} = 5 \text{ ένδυμασίαι.}$$

§ 625. Δύσεις : Ἐν σιδηρᾷ πλάξ ἔχῃ

μήκους 0,20 μέτ, πλάτος 0,04 μέτ, πάχος 0,02 μέτ. ἔχει βάρος 1248 γραμ.

» 1,5 » » 0,80 » » 0,01 » » » X

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 1248 \times \frac{1,5}{0,20} \times \frac{0,80}{0,04} \times \frac{0,01}{0,02}$$

$$= 1248 \times \frac{15}{2} \times \frac{80}{4} \times \frac{1}{2} = 1248 \times \frac{15}{2} \times 20 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1248 \times 15 \times 5 = 93\,600 \text{ γραμμάρια} = 93,6 \text{ χιλιόγρ.}$$

§ 626. Δύσεις : 2 έργ. εἰς 3 ἡμ. πρὸς 5 ὥρ. θερ. 7,5 στρέμμ.

X 2 ἡμ. » 8 » » 12 »

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν έργατῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν έργασίμων ἡμερῶν καὶ τῶν καθ' ἑκάστην έργασίμων ὥρῶν καὶ ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔκτασιν τοῦ ἀγροῦ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$X = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{12}{7,5} = 3 \times \frac{5}{8} \times \frac{120}{75} = 3 \times \frac{15}{15} = 3 = \text{ἐργάται.}$$

§ 627. Δύσεις : Διὰ νὰ διανύσῃ

120 χιλ. χρειάζεται 3 ἡμ. πρὸς 8 ὥρας τὴν ἡμέραν

180 » » X » » 6 » » »

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόστασιν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὰς ὥρας, τὰς ὁποῖας βαδίζει τὴν ἡμέραν.

$$\text{Εἶναι λοιπὸν } X = 3 \times \frac{180}{120} \times \frac{8}{6} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 3 \times 2 = 6 \text{ ἡμέραι.}$$

§ 628. Δύσεις : Ἐὰν διανύῃ τὴν ὥραν

30 χιλμ. διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀποστάσεως χρειάζεται 25π

5 « » τὸ $\frac{1}{4}$ » » » X

Ὁ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα καὶ ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόστασιν. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$X = 25\pi \times \frac{30}{5} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = 25 \times 6 \times \frac{1}{3} = 50\pi.$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 629. Δύσεις: Ἡ ἀπόστασις ἦτο $42 \times 9 = 378$ χιλμ. Τὰ ὑπολοιπόμενα εἶναι $378 - 126 = 252$ χιλμ. Διὰ 126 χιλμ. ἐχρειάσθη $126 : 42 = 3$ ὥρας. Ὑπολείπονται λοιπὸν ἄλλαι $9 - 3 = 6$ ὥραι. Ἐπειδὴ ὅμως θὰ σταματήσῃ $\frac{3}{4}$ ὥρας θὰ βαδίζῃ $6 - \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$ ὥρας. Ὡστε διὰ νὰ διανύσῃ 378 χιλμ. χρειάζεται 9 ὥρας μὲ ταχύτητα 42 χιλμ.

$$\begin{array}{ccccccc} & 252 & & & 5\frac{1}{4} & & \\ & \times & & \times & \times & & \times \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Ἡ ταχύτης εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόστασιν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον κ.τ.λ. Εἶναι λοιπὸν

$$x = 42 \times \frac{252}{378} \times \frac{9}{5\frac{1}{4}} = 42 \times \frac{126}{189} \times \frac{36}{21} = 2 \times \frac{14}{21} \times 36 = 3 \times \frac{2}{3} \times 36 = 48 \text{ χιλ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

§ 630. Δύσεις: Ἀφ' οὗ τὸ χιλιόγ. τιμᾶται 3 σελ. = $\frac{3}{20}$ λίρ, ἢ 1 ὀκᾶ, ἦτοι 1,28 χιλιόγ. τιμᾶται $\frac{3}{20} \times 1,28$ λίρας καὶ ὁ στατήρ τιμᾶται $\frac{3}{20} \times 1,28 \times 44$ λίρας. Αὗται δὲ ἔχουσι $230\,000 \times \frac{3}{20} \times 1,28 \times 44$ δραχμάς.

Διάταξις

x δραχ. = 1 στατ.

1 στατ. = 44 ὀκ.

1 ὀκ. = 1,28 χιλιόγ.

1 χιλιόγ. = 3 σελ.

20 σελ. = 1 λίρα

1 λίρα = 230 000 δραχ.

$$x = \frac{44 \times 1,28 \times 3 \times 230\,000}{20} = 1\,943\,040 \text{ δραχ.}$$

§ 631. Δύσεις: Ὁ 1 τόννος ἢ 781,25 ὀκ. τιμῶνται ἐν Λονδίνῳ 35 χαρτίνας λίρας ἢ $42\,000 \times 35$ δραχμάς. Αὗται μέχρι Πειραιῶς ἐπιβαρύνονται μὲ $12 \times 420 \times 35$ δραχ. Ἐπομένως αἱ 781,25 ὀκ. κοστίζουν εἰς Πειραιᾶ $42\,000 \times 35 + 12 \times 420 \times 35 = 420 \times 35 \times (100 + 12)$
 $= 420 \times 35 \times 112 \text{ δραχ.}$

ἢ δὲ 1 ὀκᾶ στοιχίζει $\frac{420 \times 35 \times 112}{781,25} = 2\,107,392 \text{ δραχ.}$

Διάταξις

Εἰς Πειραιᾶ x δραχ. = 1 ὀκᾶ

781,25 ὀκ. = 35 στερλ.

1 στερλ. = 42 200 δραχ.

Ἐν Λονδίνῳ 100 δραχ. = 112 δραχ. ἐν Πειραιεῖ

$$x = \frac{35 \times 42\,000 \times 112}{781,25 \times 100} = 2\,107,392 \text{ δραχ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

§ 632. *Λύσεις :*

A') 8 000 δραχ. = 80 εκατοστάρικα — Τόκος αὐτῶν 80 δραχ.
 90 000 » = 900 » — » » 900 »
 1 600 000 » = 16 000 » — » » 16 000 »

B') 5 000 δραχ. = 50 ἑκατ. — Τόκος αὐτῶν $4 \times 50 = 200$ δραχ.
 60 000 » = 600 » — » » $4 \times 600 = 2 400$ »
 1 200 000 » = 12 000 » — » » $4 \times 12 000 = 48 000$ »

Γ') 4 000 » = 40 » — » » $5 \times 40 = 200$ »
 120 000 » = 1 200 » — » » $5 \times 1 200 = 6 000$ »
 3 000 000 » = 30 000 » — » » $5 \times 30 000 = 150 000$ »

§ 633. *Λύσεις :* A') $T = \frac{157 000 \times 5 \times 4,5}{100} = 354 375$ δραχ.

B') 3 ἔτη 4 μῆνες = 40 μῆνες. Ἐπομένως
 $T = \frac{180 000 \times 40 \times 5}{1 200} = 30 000$ δραχ.

Γ') 3 ἔτη 2 μῆνες 29 ἡμ. = 1160 ἡμέραι. Ἐπομένως
 $T = \frac{1863000 \times 1160 \times 8}{36000} = \frac{1863 \times 1160 \times 8}{36} = \frac{207 \times 1160 \times 8}{4}$
 $= 207 \times 1160 \times 2 = 480 240$ δραχ.

§ 634. *Λύσεις :* $T\alpha \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ τῶν 2 434 500 δραχ. εἶναι $\frac{2434 500}{5} \times 3 =$
 $= 1 460 700$ δραχ. Ὁ δὲ ἐτήσιος τόκος αὐτῶν εἶναι $\frac{1 460 700 \times 5}{100} =$
 $= 73035$ δραχ. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $2 434 500 - 1 460 700 = 973 800$ καὶ
 ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτῶν εἶναι $\frac{973800 \times 4,5}{100} = 43821$ δραχ. Θὰ λάβῃ λοι-
 πὸν τόκον $73035 + 43821 = 116856$ δραχ.

§ 635. *Λύσεις :* Ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 35 000 000 δραχ. εἶναι
 $350 000 \times 6 = 2 100 000$ δραχ. Ἐπομένως αἱ πρόσοδοι ἠυξήθησαν κατὰ
 $2 100 000 - 1 200 000 = 900 000$ δραχ.

§ 636. *Λύσεις :* Τὸ δάνειον διήρκεσε
 (1949 ἔτ. 1 μῆν. 20 ἡμ.) — (1948 ἔτ. 12 μῆν. 12 ἡμ.) = 1 μῆν. 8 ἡμ. = 38 ἡμ.
 Εἰς τὸν χρόνον τοῦτον ὁ τόκος τῶν 650 000 δραχμῶν εἶναι
 $\frac{650 000 \times 38}{4 000} = 6 175$ δραχ. Ἐπλήρωσε λοιπὸν τὸ ὄλον $650 000 + 6 175$
 $= 656 175$ δραχ.

§ 637. *Λύσεις :* Τὸ ἥμισυ τῶν 380 000 δραχ. εἶναι $380 000 : 2 = 190 000$
 δραχ. Αἰτᾷ εἰς 5 ἔτη πρὸς $4,50\%$ φέρουσι τόκον
 $\frac{190 000 \times 5 \times 4,50}{100} = 1900 \times 22,5 = 42 750$ δραχ. Πρὸς $4,75\%$ δὲ φέρουσι
 τόκον $\frac{190 000 \times 5 \times 4,75}{100} = 1900 \times 23,75 = 45 125$ δραχ. Θὰ λάβῃ λοιπὸν τὸ
 ὄλον $42 750 + 45 125 = 87 875$ δραχ.

§ 638. *Δύσεις*: Α') $K = \frac{1200 \times 100}{4} = 300 \times 100 = 30\,000$ δραχμάς. Λέγομεν λοιπὸν τὸ τέταρτον τοῦ 1200 εἶναι 300 καὶ $300 \times 100 = 30\,000$ δραχ.

Β') Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 6000 εἶναι 1200 καὶ $1200 \times 100 = 120\,000$ δραχ.

Γ') Τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἰς $4 \times 3 = 12$ μῆνας φέρει τόκον $5\,000 \times 3 = 15\,000$ δραχ. Τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ εἶναι 5000 καὶ $5000 \times 100 = 500\,000$ δρ.

§ 639. *Δύσεις*: 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες = 42 μῆνες. Ἐπομένως $K = \frac{30\,240 \times 1200}{42 \times 8} = 108\,000$ δραχ.

§ 640. *Δύσεις*: 4 ἔτ. 9 μῆν. 10 ἡμ. = 1720 ἡμέρ. Ἐπομένως $K = \frac{489\,000 \times 36\,000}{9 \times 1720} = \frac{48\,900 \times 4\,000}{172} = \frac{48\,900 \times 1\,000}{43} = 1\,137\,209,3$ δρχ.

§ 641. *Δύσεις*: 1 ἔτ. 3 μῆν. = 15 μῆνες. Ἐπομένως $K = \frac{3000 \times 1200}{12 \times 15} = 200 \times 104 = 20\,000$ δραχ.

§ 642. *Δύσεις*: Αἱ 9375 δραχ. εἶναι ὁ τόκος τῆς ἀρχικῆς τιμῆς εἰς 3 μῆνας πρὸς 5% ἐτησίως. Ἐπομένως

$K = \frac{9375 \times 1200}{5 \times 3} = 1875 \times 400 = 750\,000$ δραχ. Ἐκόστισε λοιπὸν ἡ ἐνδυμασία $750\,000 - 9375 = 759\,375$ δραχ.

§ 643. *Δύσεις*: Τὸ α' κεφάλαιον εἶναι $\frac{950 \times 36\,000}{4} = 8\,500\,000$ δραχ. Ἀπὸ τὸ β' κεφάλαιον λαμβάνει κατὰ μῆνα τόκον $9\,900 : 3 = 3\,300$ δραχ.

Ἐπομένως τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι $\frac{3300 \times 1200}{4} = 3800 \times 300 = 990\,000$ δρχ.

§ 644. *Δύσεις*: Τὰ κατατεθέντα χρήματα ἦσαν $\frac{4050000 \times 100}{5 \times 3} = 1\,350\,000 \times 20 = 27\,000\,000$ δραχμαί.

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀξίας ἦσαν $27\,000\,000$ δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » ἦτο $\frac{27\,000\,000}{3} = 9\,000\,000$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ » » ἦσαν $9\,000\,000 \times 4 = 36\,000\,000$ δραχ.

Β' Τρόπος: Ἀφ' οὗ ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ ἔλαβε τόκον 4050000 δραχ. ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ ἐλάμβανε $\frac{4050000}{3}$ καὶ ἀπὸ τὰ $\frac{4}{4}$ θὰ ἐλάμβανε $\frac{4050\,000}{3} \times 4 = 5\,400\,000$ δραχ. Ὅλον λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ἦτο $\frac{5\,400\,000 \times 100}{3 \times 5} = 1\,800\,000 \times 20 = 36\,000\,000$ δραχ.

§ 645. *Δύσεις*: Αἱ 382200 δραχ. τόκος προέρχονται ἀπὸ κεφάλαιον ὑφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς Ν. Α. Νικολάου. Λύσεις τῶν ἀσκήσεων τῆς ἐγχειριμένης Ῥοιθητηζιῆς του. 10

$$\frac{382\,200 \times 100}{4,5} = 8\,493\,333\frac{1}{3} \text{ δραχ.} \text{ Το ποσόν τοῦτο εἶναι τὸ } \frac{1}{5} \text{ τῶν}$$

χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε κατ' ἀρχάς. Ἐπομένως εἶχε $8\,493\,333\frac{1}{3} \times 5$

$$= 42\,466\,666\frac{2}{3} \text{ δραχ.}$$

Β' Τρόπος: Ἀπὸ ὅλα τὰ χρήματά του θὰ ἐλάμβανε τόκον

$$382\,200 \times 5 = 1\,911\,000 \text{ δραχ.} \text{ Ἐπομένως ὅλον τὸ κεφάλαιον θὰ ἦτο}$$

$$\frac{1\,911\,000 \times 100}{4,5} = 42\,466\,666\frac{2}{3} \text{ δραχ.}$$

§ 646. **Λύσις:** Τὸ α' κεφάλαιον φέρει ἐτήσιον τόκον $\frac{2\,500\,000 \times 4}{100}$

$$= 100\,000 \text{ δραχ.} \text{ Ἐπομένως τὸ β' κεφάλαιον φέρει ἐτήσιον τόκον}$$

$$266\,500 - 100\,000 = 166\,500 \text{ δραχ.} \text{ Εἶναι δὲ τὸ κεφάλαιον τοῦτο}$$

$$\frac{166\,500 \times 100}{4,5} = 3\,700\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 647. **Λύσις:** Α') Εἰς 1 ἔτος ἀπὸ 40 000 δραχ. λαμβάνομεν τόκον

$$400 \times 4 = 1\,600. \text{ Ἐπομένως } 3\,200, \text{ ἦτοι τὸ διπλάσιον ποσόν λαμβάνομεν}$$

εἰς 2 ἔτη.

Β') Εἰς 1 ἔτος αἱ 60 000 δραχ. φέρουσι τόκον $600 \times 5 = 3\,000$ διπλα-

σίας δραχ. θὰ φέρωσιν εἰς 2 ἔτη.

§ 648. **Λύσις:** Α') $X = \frac{28\,500 \times 100}{190\,000 \times 5} = \frac{285}{19 \times 5} = \frac{57}{19} = 3 \text{ ἔτη.}$

Β') $X = \frac{75\,120 \times 100}{250\,400 \times 5} = \frac{75\,120}{2\,504 \times 5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ ἔτη.}$

Γ') $X = \frac{128\,250 \times 100}{900\,000 \times 4,5} - \frac{12\,825}{90 \times 46} = \frac{1425}{10 \times 45} = \frac{475}{10 \times 15} = \frac{95}{30} = \frac{19}{6} =$

$$= 3\frac{1}{6} \text{ ἔτη} = 3 \text{ ἔτη } 2 \text{ μῆνες.}$$

§ 649. **Λύσις:** Ὁ τόκος εἶναι $400\,000 - 360\,000 = 40\,000$. Ἐπομέ-

νως $X = \frac{40\,000 \times 100}{360\,000 \times 4,5} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2 \text{ ἔτη, } 9 \text{ μῆνες, } 10 \text{ ἡμέραι.}$

§ 650. **Λύσις:** Διὰ νὰ διπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιον, πρέπει ὁ τόκος

του νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον Κ. Ὡστε

$$X = \frac{K \times 100}{K \times 8} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = \text{ἔτη καὶ } 6 \text{ μῆνες.}$$

§ 651. **Λύσις:** Ἄν Κ εἶναι κεφάλαιον, ὁ τόκος εἶναι $\frac{3 \times K}{4}$.

Ἐπομένως $X = \frac{\frac{3 \times K}{4} \times 100}{K \times 12} = \frac{3 \times K \times 100}{4 \times K \times 12} = \frac{100}{4 \times 4} = \frac{25}{4} = 6 \text{ ἔτ. καὶ } 3 \text{ μῆν.}$

Σημ. Πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅτι εἰς τὰ δύο προηγούμενα προβλή-
ματα ὁ ζητούμενος χρόνος δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον, ἀλλὰ μό-
νον ἀπὸ τὸ ἐτήσιον

ἠρπαστήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 652. *Λύσις*: Ὁ τόκος ἦτο $884\,000 - 850\,000 = 34\,000$ δραχ.

$$\text{Ἐπομένως } X = \frac{34\,000 \times 100}{850\,000 \times 6} = \frac{340}{85 \times 6} = \frac{68}{17 \times 6} = \frac{4}{6} \text{ ἔτους} = 8 \text{ μῆνες.}$$

§ 653. *Λύσις*: Α') 2 ἔτη, 4 μῆν, 20 ἡμ. = 860 ἡμέραι. Ἐπομένως

$$E = \frac{42\,570 \times 36\,000}{396\,000 \times 860} = \frac{4257 \times 36}{396 \times 86} = \frac{473 \times 36}{44 \times 86} = \frac{43 \times 36}{4 \times 85} = \frac{36}{4 \times 2} = \frac{9}{2} = 4,5 \% \text{ ἑτησίως.}$$

$$B') T = \frac{42\,960 \times 100}{537\,000 \times 2} = \frac{4296}{537 \times 2} = \frac{2148}{537} = 4 \% \text{ ἑτησίως.}$$

$$\text{§ 654. } \text{Λύσις: } E = \frac{7680 \times 1200}{256\,600 \times 4} = \frac{768 \times 3}{256} = \frac{256 \times 3 \times 3}{256} = 9 \% \text{ ἑτησίως.}$$

§ 655. *Λύσις*: Ὁ τόκος θὰ εἶναι $208\,840 - 184\,000 = 24\,840$ δραχ. 4 δὲ ἔτη καὶ 6 μῆνες = 54 μῆνες. Ἐπομένως

$$E = \frac{24\,840 \times 1\,200}{184\,000 \times 54} = \frac{2484 \times 12}{185 \times 54} = \frac{276 \times 12}{184 \times 6} = \frac{276 \times 2}{184} = \frac{276}{92} = 3 \% \text{ ἑτησίως.}$$

§ 656. *Λύσις*: Ἄν τὸ κεφάλαιον ἦτο K δραχμαί, ὁ τόκος τοῦ θὰ ἦτο $\frac{K}{16}$ δραχμαί. Ἐπομένως

$$E = \frac{\frac{K}{16} \times 1200}{K \times 15} = \frac{K \times 1200}{K \times 16 \times 15} = \frac{1200}{16 \times 15} = \frac{300}{4 \times 15} = \frac{20}{4} = 5 \% \text{ ἑτησίως.}$$

§ 657. *Λύσις*: Διὰ νὰ διπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιον K , πρέπει ὁ τόκος τοῦ νὰ εἶναι K . Ἐπομένως: $E = \frac{K \times 100}{K \times 20} = \frac{100}{20} = 5 \% \text{ ἑτησίως.}$

§ 658. *Λύσις*: Ἀπὸ τὸν σῖτον ἔλαβε $2400 \times 3500 = 8\,400\,000$ δραχ.

$$\text{Ἐπομένως } T = \frac{8\,400\,000 \times 3}{100} = 672\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 659. *Λύσις*: Αὐ 360 000 δραχ. εἰς 5 ἔτη καὶ 10 μῆνας, ἦτοι εἰς

$$70 \text{ μῆνας φέρουσι τόκον } \frac{360\,000 \times 70 \times 3}{1200} = \frac{3600 \times 70 \times 3}{12} = 300 \times 70 \times 3 = 63\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{Ἐπομένως } K = \frac{63\,000 \times 100}{4 \times 3} = 5\,250 \times 100 = 525\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 660. *Λύσις*: Αὐ 250 000 δραχ. εἰς 1 ἔτος καὶ 8 μῆνας, ἦτοι εἰς 20

$$\text{μῆνας φέρουσι } T = \frac{250\,000 \times 20 \times 6}{1200} = \frac{2500 \times 20 \times 6}{12} = 2500 \times 10 = 25\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{Ἐπομένως } X = \frac{25\,000 \times 100}{750\,000 \times 4} = \frac{25 \times 10}{75 \times 4} = \frac{10}{3 \times 4} = \frac{10}{12} \text{ ἔτους} = 10 \text{ μῆνες.}$$

§ 661. *Λύσις*: Ἀπὸ τὰς 250 000 δραχ. λαμβάνει ἐτήσιον τόκον $2500 \times 5 = 12\,500$ δραχ. Ἀπὸ δὲ τὰς 150 000 δραχ. λαμβάνει $1500 \times 4,5 = 6\,750$ δραχ. Ὁλοῦν ὁ τόκος εἶναι $12\,500 + 6\,750 = 19\,250$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $19\,250 \times \frac{4}{5} = 3\,850 \times 4 = 15\,400$ δραχ. Ἐπομένως

$$E = \frac{15\,400 \times 100}{400\,000} = \frac{154}{40} = \frac{77}{20} = 3,85\% \text{ ἐτησίως.}$$

§ 662. *Λύσις*: $K = \frac{157\,500 \times 100}{6} = 2\,625\,000$ δραχ. Τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ εἶναι

$2\,625\,000 \times \frac{3}{4} = 656\,250 \times 3 = 1\,968\,750$ δραχ. Λοιπὸν διὰ τὰ 131,25 μέτρα ἔδωκε $1\,968\,750$ δραχ., ἐπομένως τὸ μέτρον ἡγόρασε πρὸς

$$\frac{1\,968\,750}{131,25} = \frac{196\,875\,000}{13\,125} = 15\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 663. *Λύσις*: Ἡ ἀξία τοῦ κήπου εἶναι $135\,000 \times 1,76 = 237\,600$ δραχ. Ἐπλήρωσεν ἀμέσως $237\,600 : 2 = 118\,800$ δραχ. Αἱ ἄλλαι $118\,800$ εἰς 6

μῆνας ἔφερον τόκον $\frac{118\,800 \times 4,5 \times 6}{1200} = \frac{1\,188 \times 4,5}{2} = 2\,673$ δραχ. Ἐπλή-

ρωσε λοιπὸν ἐν ὅλῳ $118\,800 + 118\,800 + 2\,673 = 240\,273$ δραχ.

Β' τρέπος: Ἄν ἐχρεώσται ὅλην τὴν ἀξίαν τοῦ κήπου. Θὰ ἐπλήρωνε τόκον $\frac{237\,600 \times 6 \times 4,5}{1200} = \frac{2\,376 \times 4,5}{2} = 5\,346$ δραχ. Τὸ ἡμῖσι λοιπὸν τῆς ἀξίας ἔφερε τόκον $5\,346 : 2 = 2\,673$ δραχ. Ἐπομένως ἐπλήρωσε τὸ ὅλον $237\,600 + 2\,673 = 240\,273$ δραχ.

§ 664. *Λύσις*: Ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ σίτου εἰσέπραξε $1\,300 \times 560 = 728\,000$ δραχ. Αὐτὸ τὸ κεφάλαιον μὲ τὸν τόκον τοῦ ἔγινεν $946\,400$ δραχ. Ἐπομένως ὁ τόκος ἦτο $946\,400 - 728\,000 = 218\,400$ δραχ. Ἐπομένως

$$X = \frac{218\,400 \times 100}{728\,000 \times 9} = \frac{2\,184 \times 10}{728 \times 9} = \frac{3 \times 10}{9} = \frac{10}{3} = 3 \text{ ἔτη } 4 \text{ μῆνες}$$

§ 665. *Λύσις*: $K = \frac{89\,280 \times 100}{2} = 2\,232\,000$ δραχ. Θὰ πωλήσῃ λοιπὸν $2\,232\,000 : 1860 = 1200$ ὀκάδας.

§ 666. *Λύσις*: Ἄν τὴν ἐνοικίασιν θὰ λαμβάνῃ ἐνοίκιον $180\,000 \times 12 = 2\,160\,000$ δραχ. τὸ ἔτος. Ἄν τὴν πωλήσῃ $25\,000\,000$ δραχ. θὰ λαμβάνῃ ἀπὸ αὐτὰς ἐτήσιον τόκον $25\,000\,000 \times 8 = 2\,000\,000 < 2\,160\,000$. Ἐπομένως εἶναι προτιμότερον νὰ ἐνοικιάσῃ αὐτήν.

Σημ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἶναι ἀληθές, ἐφ' ὅσον τὰ βάρη τῆς οἰκίας (φόροι, ἐπισκευαὶ) εἶναι μικρότερα τῶν $160\,000$ δραχ.

§ 667. *Λύσις*: Διὰ τὴν ἀγοράν τοῦ οἰκοπέδου ἐπλήρωσε $17\,500 \times 350 = 6\,125\,000$ δραχ. Ἐπειδὴ δέ, διὰ νὰ κτίσῃ τὴν οἰκίαν ἐδαπάνησε $32\,500\,000$ δραχ., ἡ ὅλική δαπάνη ἦτο $6\,125\,000 + 32\,500\,000 = 38\,625\,000$ δραχ. Θέλει δέ νὰ εἰσπράττῃ 5% ἐτησίως ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἦτοι $386\,250 \times 5 = 1\,931\,250$ δραχ. Πρέπει νὰ ἐνοικιάσῃ αὐτὴν πρὸς $1\,931\,250 : 12 = 160\,937,50$ δραχ. τὸν μῆνα.

§ 668. *Λύσις*: Ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς 8 ἔτη εἶναι $4 \times 8 = 32$ δραχ. Ὡστε 100 δραχ. γίνονται 132 δραχ. Ἀπλ.

*Από 132 δραχ. τόκον+κεφ. είναι 100 δραχ. κεφ. και 32 δραχ. τόκος
 » 1 056 000 » » » » X » » » y » »

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad X = 100 \times \frac{1\,056\,000}{132} = 100 \times \frac{264\,000}{33} = 100 \times \frac{88\,000}{11} = 100 \times 8000$$

= 800 000 δραχ. κεφάλαιον.

$$\text{και } y = 32 \times \frac{1\,560\,000}{132} = 32 \times 8000 = 256\,000 \text{ δραχ. τόκος.}$$

§ 669. *Λύσις* : Αί 100 δραχ. εις 20 ἔτη φέρουσι τόκον 80 δραχ. και γίνονται με αὐτὸν 180 δραχ. "Ωστε

180 δραχ. τόκος και κεφ. προέρχονται ἀπὸ 100 δραχ. κεφάλ.
 4 500 000 » » » » » X » »

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad X = 100 \times \frac{4\,500\,000}{180} = 100 \times \frac{450\,000}{18} = 100 \times \frac{500\,000}{2} = 2\,500\,000 \text{ δρ.}$$

§ 670. *Λύσις* : Αί 100 δραχ. εις 2 ἔτη και 6 μῆνας φέρουσι τόκον 15 δραχ. και γίνονται 115 δραχ. "Ωστε :

115 δραχ. προέρχονται ἀπὸ κεφάλαιον 100 δραχ
 10 925 000 » » » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad X = 100 \times \frac{10\,925\,000}{115} = 100 \times 95\,000 = 9\,500\,000 \text{ δραχ.}$$

*Απὸ τὰ 950 τετ. μέτρα ἔλαβε λοιπὸν 9 500 000 δραχ.

και ἀπὸ τὸ 1 » » » 9 500 000 : 950 = 10 000 δραχ.

§ 671. *Λύσις* : Τρέποντες τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{5}$ εις ὁμώνυμα

εὐρίσκομεν $\frac{5}{15}$ και $\frac{6}{15}$. "Ωστε ἐτόκισε πρὸς 5 % τὰ $\frac{5}{15}$ τοῦ κε-

φαλαίου, πρὸς 4,5 % τὰ $\frac{6}{15}$ και πρὸς 4 % τὸ ὑπόλοιπον, ἦτοι τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ

κεφαλαίου. "Ας λάβωμεν 300 δραχ. ὡς βοηθητικὸν κεφάλαιον και ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο τοκίζεται με τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

*Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{15}$ τῶν 300 εἶναι 20 δραχ., ἐδάνεισε $20 \times 5 = 100$ δραχ.

πρὸς 5 % και ἔλαβεν ἀπὸ αὐτὰς $5 \times 2 = 10$ δραχ. τόκον εις 2 ἔτη.

*Ἐδάνεισεν $20 \times 6 = 120$ δραχ. πρὸς 4,5 % και ἔλαβε τόκον 10,80 δραχ.

εις 2 ἔτη. Τέλος ἐδάνεισεν $20 \times 4 = 80$ δραχ. πρὸς 4 % και ἔλαβε τό-

κον 6,40 δραχ. "Ωστε ὁ ὅλικός τόκος εἶναι $10 + 10,80 + 6,40 = 27,20$ δρχ.

"Ωστε : τόκος 27,20 δραχ. προέρχεται ἀπὸ κεφ. 300 δραχ.
 » 408 000 » » » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu \quad X = 300 \times \frac{408\,000}{27,2} = 300 \times 15\,000 = 4\,500\,000 \text{ δραχ.}$$

*Ἐπομένως πρὸς 5 % ἐτόκισε $\frac{4\,500\,000}{15} \times 5 = 300\,000 \times 5 =$

$= 1\,500\,000$ δραχ.. πρὸς 4,5 % ἐτόκισε $300\,000 \times 6 = 1\,800\,000$ και

πρὸς 5 % ἐτόκισε $300\,000 \times 4 = 1\,200\,000$ δραχ.

§ 672. *Λύσις* : "Εστω 400 δραχ βοηθητικὸν κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον

υποθέτομεν ὅτι δανείζεται ὑπὸ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ, ἦτοι ἀπὸ 300 δραχ. προέρχεται ἐτήσιος τόκος $5 \times 3 = 15$ δραχ. Ἀπὸ τὰς ἄλλας 100 ἄλλαι 4,5 δραχ. Ὁ τόκος λοιπὸν θὰ ᾔητο τὸ ὅλον $15 + 4,5 = 19,5$. Ἀπὸ τὰς 400 δραχ. πρὸς 5% προέρχεται ἐτήσιος τόκος $5 \times 4 = 20$ δραχ., ἦτοι ἐπὶ πλέον $20 - 19,5 = 0,5$ δραχ.

Ὡστε τόκος μεγαλύτερος κατὰ 0,5 δραχ. ἀπὸ 400 δραχ.

» » » 52 000 » » X »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 400 \times \frac{52\ 000}{0,5} = 400 \times \frac{520\ 000}{5} = 80 \times 520\ 000 = 41\ 600\ 000 \text{ δραχ.}$$

§ 673. Λύσις : Ἐστῶσαν 700 δραχ. βοηθητικὸν κεφάλαιον. Τὰ $\frac{5}{7}$ αὐτοῦ, ἦτοι 500 δραχ. φέρουσι ἐτήσιον τόκον $3 \times 5 = 15$ δραχ. Αἱ ὑπόλοιποι 200 δραχ. φέρουσι $4 \times 2 = 8$ δραχ. ἦτοι 7 δραχ. ὀλιγώτερον.

Ὡστε διαφορὰ 7 δραχ. προέρχεται ἀπὸ 700 δραχ. κεφάλαιον

» 42 000 » » » X » »

$$\delta\theta\epsilon\nu X = 700 \times \frac{42\ 000}{9} = 4\ 200\ 000 \text{ δραχ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 674. Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις Ε εἶναι τόκος τῶν 240 000 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 9% ἐτησίως, ἦτοι :

$$E = \frac{240\ 000 \times 3 \times 9}{200} = 5\ 400 \text{ δραχ. Ἐπομένως ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι}$$

$$Π = 240\ 000 - 5\ 400 = 234\ 600 \text{ δραχ.}$$

§ 675. Λύσις : Ἐπειδὴ ὁ Αὐγούστος εἶναι 3ος μῆν, ὁ δὲ Ἰούnius 6ος, τὸ γραμμάτιον τοῦτο προεξωφλήθη (8 μῆν. 10 ἡμ.) — (6 μῆνες 20 ἡμ.) = 1 μῆν. 20 ἡμ. = 50 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του. Ζητοῦμεν λοιπὸν πόσον κεφάλαιον εἰς 50 ἡμέρας φέρει τόκον 15 000 δραχ. πρὸς 6% Εὐρίσκομεν

$$\delta\epsilon \delta\tau\iota K = \frac{15\ 000 \times 36\ 000}{50 \times 6} = 1\ 800\ 000 \text{ δραχ.}$$

§ 676. Λύσις : Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς 3 μῆνας φέρουσι τόκον 2,25 δραχ. ἔταρτον τῶν 9 δραχ., ἦτοι $9 : 4 = 2,25$ δραχ. Ἐπομένως, ἂν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ᾔητο 100 δραχ. ἡ παροῦσα ἀξία θὰ ᾔητο $100 - 2,25 = 97,75$ δραχ.

Ἄν λοιπὸν

ἡ παροῦσα ἀξία ᾔητο 97,75 δραχ. ἡ ὀνομαστικὴ θὰ ᾔητο 100 δραχ.

« » » 175 950 » » » » X »

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα εὐρίσκομεν ὅτι

$$X = 100 \times \frac{175\ 950}{97,75} = 180\ 000 \text{ δραχ.}$$

§ 677. Λύσις : Προφανῶς ἐζητεῖται πρὸς πόσον ἐπιτόκιον αἱ

1 720 000 δραχ. εἰς 36 ἡμέρας φέρουσι τόκον 13 760 δραχ. Εἶναι λοιπὸν

$$E = \frac{13\,760 \times 36\,000}{1\,720\,000 \times 36} = 8\%.$$

§ 678. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 240 000—230 000=10 000 δραχ. Αἱ 240 000 δραχ. λοιπὸν εἰς 5 μῆνας ἔφερον τόκον 10 000 δραχ. Ἐπομένως ἐτοκίσθησαν πρὸς $\frac{10\,000 \times 1\,200}{240\,000 \times 5} = 10\%$ ἔτη.

§ 679. *Λύσις*: Εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον αἱ 180 000 δραχ. πρὸς 6% ἔφερον τόκον 27 000 δραχ. Εἶναι λοιπὸν $X = \frac{27\,000 \times 100}{180\,000 \times 5} = 2\frac{1}{2}$ ἔτη.

§ 680. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 120 000—118 650=1 350 δραχ. Ἐπομένως ἐξωφλήθη εἰς χρόνον $\frac{1\,350 \times 1\,200}{120\,000 \times 5} = 2$ μῆν. 21 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἐπομένως ἔληγε 2 μῆν. καὶ 21 ἡμ μετὰ τὴν 1ην Αὐγούστου, ἥτοι τὴν 21ην Ὀκτωβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους.

§ 681. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον τοῦτο μετεβιβάσθη εἰς τὴν Τράπεζαν 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἄν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του ἦτο 100 δραχ. ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ ἦτο ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς 2 μῆνας, ἥτοι 2 δραχμαί, ἡ δὲ παροῦσα ἀξία 98 δραχμαί.

Ὡστε εἰς παροῦσαν ἀξίαν 98 δραχ. ἀντιστοιχεῖ ὄνομ. ἀξία 100 δραχ.
 » » » 735 000 » » » » X »

Παρατηροῦντες ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα εὐρίσκόμεν ὅτι

$$X = 100 \times \frac{735\,000}{98} = 750\,000 \text{ δραχ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 682. *Λύσις*: Γνωρίζομεν (§ 320 Ἀριθμητ.) ὅτι ἡ ζητούμενη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις υ εἶναι τόκος τῶν 1 240 000 δραχμῶν εἰς 3 μῆνας πρὸς 9% ἑτησίως, ἥτοι:

$$u = \frac{1\,240\,000 \times 3 \times 9}{1\,200} = \frac{1\,240 \times 3 \times 9}{12} = \frac{1\,240 \times 9}{4} = 310 \times 9 = 27900 \text{ δραχ.}$$

Ἡ δὲ ὀνομαστικὴ ἀξία ἦτο 1 240 000+27 900=1 267 900 δραχ.

§ 683. *Λύσις*: Ἡ προεξόφλησις ἔγινε (7 μῆν. 15 ἡμ.)—(4 μῆν. 20 ἡμ.) =2 μῆν. 25 ἡμ.=85 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως. Ἐπομένως ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ εἶναι τόκος τῶν 480 000 δραχμῶν εἰς 85 ἡμέρας πρὸς 12% ἑτησίως, ἥτοι:

$$u = \frac{480\,000 \times 12 \times 85}{36\,000} = \frac{480 \times 85}{3} = 160 \times 85 = 13\,600 \text{ δραχ.}$$

Ἡ δὲ ὀνομαστικὴ ἀξία ἦτο 480 000+13 600=493 600 δραχ.

§ 684. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 494 400—480 000=14 400 δραχ. Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι τόκος τῶν 480 000 δραχ. πρὸς 9% εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον X. Εἶναι λοιπὸν

$$X = \frac{14\,400 \times 100}{480\,000 \times 9} = \frac{144}{48 \times 9} = \frac{1}{3} \text{ ἔτους} = 4 \text{ μῆνες.}$$

§ 685. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 1 218 000—1 200 000=18 000 δραχ. Ἐπομένως αἱ 1 200 000 δραχ. ἔφερον τόκον 18 000 δραχ. πρὸς 6 % εἰς $X = \frac{18\,000 \times 1\,200}{1\,200\,000 \times 6} = 3$ μῆνας. Ἡ προεξόφλησις λοιπὸν ἔγινε 3 μῆνας πρὸ τῆς 20 Αὐγούστου, ἥτοι τὴν 20ην Μαΐου τοῦ ἰδίου ἔτους.

§ 686. *Λύσις*: Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 373 500—360 000=13 500 δραχμάς. Ζητεῖται λοιπὸν πρὸς πόσον ἐπιτόκιον εἰς 3 μῆνας φέρουσι τόκον 13 500. Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ εἶναι $\epsilon = \frac{13\,500 \times 1\,200}{360\,000 \times 3} = \frac{135}{9} = 15 \%$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΟΙΝΗΣ ΛΗΞΕΩΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

§ 687. *Λύσις*: Τὸ α' γραμμάτιον πάσχει ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν τὸν τόκον τῶν 6 000 000 δραχμῶν εἰς 30 ἡμέρας πρὸς 6 % ἐτησίως, ἥτοι $\frac{6\,000\,000 \times 30 \times 6}{36\,000} = 30\,000$ δραχ. Ἐχει ἐπομένως παροῦσαν ἀξίαν

5 970 000 δραχ. Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ β' γραμμάτιον πάσχει ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν $\frac{900\,000 \times 60 \times 6}{36\,000} = 9\,000$ καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν

900 000—900=891 000 δραχ. Τὸ δὲ γ' γραμμάτιον πάσχει ἐξ. ὑφαίρεσιν $\frac{1\,000\,000 \times 90 \times 6}{36\,000} = 15\,000$ δραχμῶν καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν

1 000 000—15 000=985 000. Ἐπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ νέου γραμματίου εἶναι 5 970 000+891 000+985 000=7 846 000 δραχ.

Εἰς 60 ἡμ. αἱ 100 δραχ. φέρουσι τόκον 1 δραχ. Ὡστε ὀνομαστικὴ ἀξία 100 δραχ. ἀντιστοιχεῖ εἰς παροῦσαν 99

X » » » » 7 846 000,

Ὅθεν $X = 100 \times \frac{7\,846\,000}{99} = 7\,925\,252,52$

§ 688. *Λύσις*: Τὴν ἐξ. ὑφαίρεσιν τῶν γραμματίων τούτων εὐρίσκομεν καὶ διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου, ὅστις εἶναι 36 000 : 6=6 000. Οὕτω

τὸ α' γραμμάτιον πάσχει ἐξ. ὑφαίρεσιν $\frac{200\,000 \times 10}{6\,000} = 333 \frac{2}{3}$ δραχ. καὶ

ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 200 000—333 $\frac{2}{3}$ =199 666 $\frac{2}{3}$ δραχμάς. Τὸ β' πάσχει

ἐξ. ὑφ. $\frac{150\,000 \times 20}{6\,000} = 500$ καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 150 000—500=149 000

δραχ. Τὸ γ' πάσχει ἐξ. ὑφ. $\frac{180\,000 \times 35}{6\,000} = 30 \times 35 = 1\,050$ δραχ. καὶ ἔχει

παροῦσαν ἀξίαν 180 000—1 050=178 950 δραχ. Τὸ δὲ δ' πάσχει ἐξ. ὑφ.

$\frac{240\,000 \times 60}{6\,000} = 2\,400$ δραχμάς καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 240 000—2 400

= 237 600 δραχ. Τὸ νέον λοιπὸν γραμμάτων θὰ ἔχη παροῦσαν ἀξίαν
 $199\,666\frac{2}{3} + 149\,500 + 178\,950 + 237\,600 = 765\,716\frac{2}{3}$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ
 νέον γραμμάτων θὰ ἔχη ὀνομαστικὴν ἀξίαν 770 000 δραχ. καὶ παροῦσαν
 $765\,796\frac{2}{3}$, ἡ ἐξ. ὑφ. αὐτοῦ θὰ εἶναι $770\,000 - 765\,716\frac{2}{3} = 4\,283\frac{1}{3}$ δραχ.
 Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι τόκος τῶν 770 000 δραχ. πρὸς 6 % εἰς τὸν ζητού-
 μενον χρόνον X. Εἶναι λοιπὸν

$$X = \frac{4\,283\frac{1}{3} \times 1\,200}{770\,000 \times 6} = \frac{12\,850 \times 1\,200}{770\,000 \times 18} = 1 \text{ μὴν. } 3 \text{ ἡμ. περίπου.}$$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 689. *Λύσις* : Ἀφ' οὗ εἰς 100 δραχ. γίνεται ἔκπτωσις 4, εἰς 860 000
 ἢ 8 600 ἑκατοστάρικα γίνεται ἔκπτωσις $4 \times 8\,600 = 34\,400$ δραχ. Ἐπομένως
 θὰ πληρῶσῃ σήμερον $860\,000 - 34\,400 = 825\,600$ δραχ.

Β' τρόπος : Ἄν ὀφείλεν 100 θὰ ἐπλήρωνεν 96 δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ ὀφείλει 860 000 » » X »

$$X = 96 \times \frac{860\,000}{100} = 825\,600.$$

Ἐπομένως ἡ ἔκπτωσις εἶναι $860\,000 - 825\,600 = 34\,400$ δραχ.

§ 690. *Λύσις* : Τὸ ὑφασμα ἀξίζει $2\,460 \times 165 = 405\,900$ δραχ. Ἡ δὲ
 ἔκπτωσις εἶναι ὁ τόκος τοῦ ποσοῦ τούτου πρὸς 5 % ἐτησίως εἰς 15 μῆ-

νας, ἥτοι $\frac{405\,900 \times 5 \times 15}{1\,200} = 25\,368,75$ δραχ. Θὰ πληρῶσῃ ἐπομένως
 $405\,900 - 25\,368,75 = 380\,531,25$ δραχ.

§ 691. *Λύσις* : Ἄν τὸ α' γραμμάτων πληρωθῇ σήμερον, θὰ πάθῃ

ἐξ. ὑφ. $\frac{160\,000 \times 15 \times 6}{1\,200} = 12\,000$ δραχ. Ἐπομένως ἔχει παροῦσαν ἀξίαν
 $160\,000 - 12\,000 = 148\,000$ δραχ. Ὁμαίως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ β' πάσχει

ἐξ. ὑφ. $\frac{152\,000 \times 6 \times 6}{1\,200} = 4\,560$ δραχμάς καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν
 $152\,000 - 4\,560 = 147\,440$ δραχ. Ἐζημιώθημεν λοιπὸν

$148\,000 - 147\,440 = 560$ δραχμάς.

§ 692. *Λύσις* : Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι οἱ 100 δραχ. εἰς 15 μῆνας
 φέρουσι τόκον 5 δραχ. καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἄν ἐπλήρωνεν 95 δραχ. θὰ ἐχρεώσται 100 δραχ.

τώρα ἐπλήρωσε 570 000 » » χρεωστῇ X »

$$\text{καὶ εὐρίσκομεν } X = 100 \times \frac{570\,000}{95} = 600\,000 \text{ δραχ.}$$

Β' Τρόπος: Εἰς πληρωμὴν 95 δραχ. ἀντιστοιχεῖ ἔκπτωσης 5

»	570 000	»	»	»	X
---	---------	---	---	---	---

καὶ εὐρίσκομεν $X = 5X \frac{570\,000}{95} = 30\,000 \text{ δραχ.}$ Ἐχρεώσται λοιπὸν

$$570\,000 + 30\,000 = 600\,000 \text{ δραχμάς.}$$

§ 693. Λύσις: Αἱ 247 000 δραχμαὶ ἔπρεπε νὰ πληρωθῶσιν 8 μῆνας μετὰ τὴν ἀγορὰν ἄνευ τόκου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ χρέος τοῦτο ἐπληρώθη 5 μῆνας μετὰ τὴν ἀγορὰν, ἔπεται ὅτι προεξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἔπαθε λοιπὸν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν

$$E = \frac{247\,200 \times 6 \times 3}{1200} = 3\,708 \text{ δραχ.}$$

Ἐπλήρωσεν ἐπομένως $247\,200 - 3\,708 = 243\,492 \text{ δραχ.}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

§ 694. Λύσις: Αἱ 280 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 12, 15. Τὸ μερίδιον τοῦ α' εἶναι λοι-

πὸν $\frac{280\,000 \times 8}{8+12+15} = \frac{280\,000 \times 8}{35} = \frac{56\,000}{7} \times 8 = 8000 \times 8 = 64\,000 \text{ δραχ.}$

Τὸ μερίδιον τοῦ β' εἶναι $\frac{280\,000 \times 12}{35} = 8000 \times 12 = 96\,000 \text{ »}$

Τὸ « γ' » $\frac{280\,000 \times 15}{35} = 8000 \times 15 = 120\,000 \text{ »}$

§ 695. Λύσις: Αἱ 360 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 120, 110, 220.

Θὰ πληρῶσῃ λοιπὸν ὁ α' $\frac{360\,000 \times 120}{120 \times 110 \times 220} = \frac{360\,000 \times 120}{450} = 800 \times 120$

$$= 96\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὁ β' θὰ πληρῶσῃ $800 \times 110 = 88\,000 \text{ »}$

καὶ ὁ γ' » $800 \times 220 = 176\,000 \text{ »}$

Σημ. Τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα εὐρίσκομεν καὶ ἂν μερίσωμεν τὰς 360 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 11, 22 (§ 329 Ἀριθμητ.).

§ 696. Λύσις: Τὴν δαπάνην τῶν 32 450 000 δραχ. πρέπει νὰ τὴν μερίσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 565, 735, 1650 ἢ πρὸς $565 : 5 = 113$, $735 : 5 = 147$, $1650 : 5 = 330$. Θὰ δώσῃ λοιπὸν

τὸ α' χωρίον $\frac{32\,450\,000 \times 113}{113+147+330} = \frac{32\,450\,000}{590} \times 113 = 550\,000 \times 113$

$$= 6\,215\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{τὸ β' θὰ δώσῃ } \frac{32\,450\,000}{590} \times 147 = 55\,000 \times 147 = 8\,085\,000 \quad \gg$$

$$\text{καὶ τὸ γ' } \gg \gg \frac{32\,450\,000}{590} \times 330 = 55\,000 \times 330 = 18\,150\,000 \quad \gg$$

§ 697. *Λύσις*: Τὸ ποσὸν τῶν 225 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 250 000, 1 850 000, 1 150 000 ἢ πρὸς τοὺς $1\,250\,000 : 50\,000 = 25$, $1\,850\,000 : 50\,000 = 37$, $1\,150\,000 : 50\,000 = 23$. Θὰ δώσῃ λοιπὸν εἰς τὸν ὑπηρέτην

$$\text{ὁ α' } \frac{255\,000 \times 25}{25+37+23} = 3000 \times 25 = 75\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ β' } 3000 \times 37 = 111\,000 \quad \gg$$

$$\text{καὶ ὁ γ' } 3000 \times 23 = 69\,000 \quad \gg$$

§ 698. *Λύσις*: Αἱ 1425 ὀκ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 840 000, 960 000, 1 050 000 ἢ πρὸς τοὺς $840\,000 : 30\,000 = 28$, $960\,000 : 30\,000 = 32$ καὶ $1\,050\,000 : 30\,000 = 35$. Θὰ λάβῃ λοιπὸν

$$\text{ὁ α' } \frac{1425 \times 28}{28+32+35} = 15 \times 28 = 420, \text{ ὁ β' } 15 \times 32 = 480 \text{ καὶ ὁ γ' } 15 \times 35 = 525 \text{ δραχ.}$$

§ 698. *Λύσις*: Ὁ γ' ἐπλήρωσεν 15 000 000 — (6 200 000 + 3 500 000) = 15 000 000 — 9 700 000 = 5 300 000 δραχ. Αἱ 4 500 000 δραχ. πρέπει λοιπὸν νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 6 200 000, 3 500 000, 5 300 000 ἢ πρὸς τοὺς 62, 35, 53. Θὰ λάβῃ λοιπὸν

$$\text{ὁ α' } \frac{4\,500\,000 \times 62}{62+35+53} = \frac{4\,500\,000}{150} \times 62 = 30\,000 \times 62 = 1\,860\,000,$$

$$\text{ὁ β' } 30\,000 \times 35 = 1\,050\,000 \quad \text{καὶ ὁ γ' } 30\,000 \times 53 = 1\,590\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 700 *Λύσις*: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ τρεῖς μαζὶ ἐχρειάσθησαν ἡμέρας, διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον. Ἐπειδὴ

ὁ α' εἰς 25 ἡμέρας ἐκτελεῖ 1 ὁλόκληρον ἔργον

$$\gg 1 \text{ ἡμέραν } \gg \frac{1}{25} \text{ τοῦ ἔργου}$$

$$\text{καὶ } \gg \text{ ἡ ἡμέρας } \gg \frac{1}{25} \times \eta = \frac{\eta}{25} \text{ τοῦ ἔργου.}$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς η ἡμέρας ὁ β' ἐκτελεῖ $\frac{\eta}{30}$ καὶ

ὁ γ' $\frac{\eta}{35}$. Τὸ ποσὸν λοιπὸν 1 710 000 δραχ. πρέπει νὰ διανεμηθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\eta}{25}, \frac{\eta}{30}, \frac{\eta}{35} \text{ ἢ πρὸς τοὺς } \frac{1}{25}, \frac{1}{30}, \frac{1}{35}.$$

Πολύζοντες τούτους ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 1050 τῶν παρονομαστῶν βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ μερίωμεν τοὺς 1 710 000 δραχ. ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{25} \times 1050 = 42$, $\frac{1}{30} \times 1050 = 35$, $\frac{1}{35} \times 1050 = 30$. Θὰ λάβῃ

$$\text{λοιπὸν ὁ α'} \frac{1\,710\,000 \times 42}{42+35+30} = \frac{1\,710\,000 \times 42}{107} = 671\,214,953... \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ β'} \frac{1\,710\,000 \times 35}{107} = 559\,345,794... \text{ δραχ.}$$

$$\text{καὶ ὁ γ'} \frac{1\,710\,000 \times 30}{107} = 479\,439,252... \text{ δραχ.}$$

§ 701. *Λύσις*: Ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὰ 5628 στρέμματα ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{5} \times 5 \times 3 \times 4 = 12$, $\frac{2}{3} \times 5 \times 3 \times 4 = 40$,

$$\frac{1}{4} \times 5 \times 3 \times 4 = 15. \text{ Θὰ λάβῃ λοιπὸν}$$

$$\text{ὁ α'} \frac{5628 \times 12}{12+40+15} = 84 \times 12 = 1008 \text{ στρέμ.}$$

$$\text{ὁ β'} 84 \times 40 = 3360 \text{ στρέμ.} \quad \text{ὁ γ'} 84 \times 15 = 1260 \text{ στρέμ.}$$

§ 702. *Λύσις*: Ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὰς 12 200 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4} \times 4 \times 3 = 9$, $2 \times 4 \times 3 = 24$, $2 \times \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 28$.

Θὰ λάβῃ λοιπὸν τὸ Δημοτικὸν Σχολεῖον $\frac{12\,200\,000 \times 9}{9+24+28} = 200\,000 \times 9 = 1\,800\,000$ δραχ., τὸ Γυμνάσιον $200\,000 \times 24 = 4\,800\,000$ δραχ. καὶ ὁ Φιλανθρωπικὸς σύλλογος $200\,000 \times 28 = 5\,600\,000$ δραχ.

§ 703. *Λύσις*: Νὰ μερισθῶσιν αἱ 5 400 000 δραχ. εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 18, 12, 9 σημαίνει νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων, ἥτοι πρὸς τοὺς $\frac{1}{18}$,

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{9}.$$

Δι' εὐκολίαν μερίζομεν τὸ ἄνω ποσὸν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{18} \times 36 = 2$, $\frac{1}{12} \times 36 = 3$, $\frac{1}{9} \times 36 = 4$. Θὰ λάβῃ λοιπὸν :

$$\text{'Ο α'} \frac{5\,400\,000 \times 2}{9} = 600\,000 \times 2 = 1\,200\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ β'} 600\,000 \times 3 = 1\,800\,000, \quad \text{ὁ γ'} 600\,000 \times 4 = 2\,400\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 704. *Λύσις*: Ὁ ἐτήσιος τόκος ὅλης τῆς καταθέσεως εἶναι $\frac{7\,500\,000 \times 3,5}{100} = 262\,500$ δραχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν πρέπει νὰ μερίζηται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 3 καὶ 5. Θὰ λαμβάνῃ λοιπὸν κατ' ἔτος :

$$\text{Τὸ Δημ. Σχολεῖον} \frac{262\,500 \times 3}{8} = 32\,812,50 \times 3 = 98\,437,50 \text{ δραχ.}$$

$$\text{τὸ δὲ Γυμνάσιον} 32\,812,50 \times 5 = 164\,062,50 \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος. Μερίζομεν τὸ κεφάλαιον 7 500 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 5. Εὐρίσκομεν δὲ ὅτι τὸ α' μερίδιον εἶναι

$$\frac{7\,500\,000 \times 3}{8} = 937\,500 \times 3 = 2\,812\,500 \text{ δραχ.}$$

$$\text{καὶ τὸ β'} 937\,500 \times 5 = 4\,687\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἐπομένως τὸ Δημ. Σχολεῖον θὰ λαμβάνῃ τὸν εἰρήσιον τόκον τῶν
2 812 500 δραχ., ἥτοι $\frac{2\ 812\ 500 \times 3,5}{100} = 98\ 437,50$ δραχ.

καὶ τὸ Γυμνάσιον $\frac{4\ 687\ 500 \times 3,5}{100} = 164\ 062,50$ δραχ.

§ 705. *Λύσις*: Τὸ ζητούμενον ποσὸν ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα
πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{9}{4}$, $\frac{37}{5}$, $\frac{17}{2}$ ἢ πρὸς τοὺς $\frac{9}{4} \times 20 = 45$,

$\frac{37}{5} \times 20 = 148$, $\frac{17}{2} \times 20 = 170$, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄθροισμα 363. Ὁ γ'

ἔλαβε $34\ 000 \times 12 = 408\ 000$ δραχ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ λάβῃ ὁ γ' 170 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσι 363 δραχ.

Διὰ νὰ λάβῃ 408 000 » » » » X »

Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι $X = 363 \times \frac{408\ 000}{170} = 871\ 200$ δραχ.

Ὁ α' λοιπὸν ἔλαβεν $\frac{871\ 200 \times 45}{363} = 2\ 400 \times 45 = 108\ 000$ δραχ.

καὶ ὁ β' $2\ 400 \times 148 = 355\ 200$ δραχ.

§ 706. *Λύσις*: Ἄν διὰ τὴν βοσκὴν 1 προβάτου ἐπὶ 1 ἡμέραν πρέ-
πει νὰ πληρωθῶσι 8 δραχμαί, διὰ τὴν βοσκὴν 200 προβάτων ἐπὶ 25 ἡμέ-
ρας πρέπει νὰ πληρωθῶσι $8 \times (200 \times 25)$.

Ὅμοίως διὰ τὴν βοσκὴν 150 προβάτων ἐπὶ 30 ἡμέρας πρέπει νὰ πλη-
ρωθῶσι $8 \times (150 \times 30)$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ μερίδια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς
 200×25 καὶ 150×30 . Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερίδια πρέπει νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα
τὸ ὅλον ἐνοίκιον 1 425 000 δραχ., το ποσὸν τοῦτο, πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς
μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς

$$200 \times 25 = 5000$$

$$150 \times 30 = 4500$$

$$\text{Ἄθροισμα} = 9500$$

Ὁ α' λοιπὸν θὰ πληρῶσῃ $\frac{1\ 425\ 000 \times 5\ 000}{9\ 500} = 150 \times 5000 = 750\ 000$ δραχ

ὁ δὲ β' » » » $= 150 \times 4500 = 675\ 000$ »

§ 707. *Λύσις*: Ἐπειδὴ μία ἀγέλας τρώγει, ὅσον 15 πρόβατα, αἱ 5
ἀγέλαδες τρώγουσιν, ὅσον $15 \times 5 = 75$ πρόβατα. Εἶναι λοιπὸν τὸ ἴδιον,
ὡς νὰ ἔβοσκεν ὁ α' 75 καὶ ὁ β' 120 πρόβατα. Ἐπομένως τὸ ἐνοίκιον
975 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῇ ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 75 καὶ
120. Ὡστε θὰ πληρῶσῃ

ὁ α' $\frac{975\ 000 \times 75}{75 + 120} = 5000 \times 75 = 375\ 000$ δραχ.

καὶ ὁ β' $5000 \times 120 = 600\ 000$ »

Β' Τρόπος: Τὰ 120 πρόβατα τρώγουσιν, ὅσον $120 : 15 = 8$ ἀγέλα-
δες. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ μερισθῶσιν τὰς 975 000 δραχ. εἰς 8 ἀνάλογα

μέρη ανάλογα πρὸς αὐτοὺς ἢ πρὸς τοὺς $1 \times 12 = 12$, $\frac{2}{3} \times 12 = 8$, $\frac{5}{12} \times 12 = 5$,

$\frac{2}{12} \times 12 = 2$. Θὰ λάβῃ λοιπὸν ἡ α' $\frac{7254 \times 12}{27} = 102 \times 12 = 1224$ ὀκ, ἡ β'

$102 \times 8 = 816$ ὀκ, ἡ γ' $102 \times 5 = 510$ ὀκ. καὶ ἡ δ' $102 \times 2 = 204$ ὀκ.

§ 713. *Λύσις*: "Αν τὸ Σχολεῖον λάβῃ X δραχ., τὸ Νοσοκομεῖον θὰ

λάβῃ $2X$ καὶ τὸ Ὀρφανότροφειον $(X+2 \cdot X) \cdot \frac{4}{3} = X \cdot (1+2) \cdot \frac{4}{3} = 4 \cdot X$.

Τὰ μερίδια λοιπὸν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4. Ἐπομένως

θὰ λάβῃ τὸ Σχολεῖον $\frac{3500\,000 \times 1}{7} = 500\,000$, τὸ Νοσοκομεῖον

$500\,000 \times 2 = 1\,000\,000$ καὶ τὸ Ὀρφανότροφειον $500\,000 \times 4 = 2\,000\,000$ δραχ.

§ 714. *Λύσις*: "Αν ὁ β' καὶ ὁ γ' λάβωσιν ἀπὸ X δραχ., ὁ α' θὰ

λάβῃ $\frac{5 \cdot X}{7}$. Τὰ μερίδια λοιπὸν θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς

$\frac{5}{7}$, 1, $\frac{1}{7}$ ἢ πρὸς τοὺς 5, 7, 7. "Ωστε θὰ λάβῃ ὁ α' $\frac{9\,500\,000 \times 5}{19}$
 $= 500\,000 \times 5 = 2\,500\,000$ καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων ἀπὸ $500\,000 \times 7 = 3\,500\,000$
 δραχμᾶς.

§ 715. *Λύσις*: "Αν ὁ β' ἐλάμβανε 3, ὁ γ' ἔπρεπε νὰ λάβῃ 4 καὶ ὁ
 α' $3+4=7$. Τὰ μερίδια λοιπὸν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς

7, 3, 4. Ἐπομένως θὰ λάβῃ ὁ α' $\frac{12\,600}{14} \times 7 = 900 \times 7 = 6300$, ὁ β' 900×3
 $= 2700$ καὶ γ' $900 \times 4 = 3600$ στρέμματα.

§ 716. *Λύσις*: Ἐπειδὴ $7+6+5=18$, κατὰ τὴν α' διανομὴν θὰ ἐλάμ-
 βανεν ὁ α' τὰ $\frac{7}{18}$, ὁ β' τὰ $\frac{6}{18}$ καὶ ὁ γ' τὰ $\frac{5}{18}$ τῆς περιουσίας. Ὁμοί-
 ως ἐννοοῦμεν ὅτι κατὰ τὴν β' διανομὴν ἔλαβεν ὁ α' τὰ $\frac{6}{15}$ ὁ β' τὰ $\frac{5}{15}$

καὶ ὁ γ' τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς αὐτῆς περιουσίας. Ἐπειδὴ οἱ παρονομασται 18 καὶ

15 ἔχουσιν ἑ. κ. π. 90, εἶναι $\frac{7}{18} = \frac{35}{90}$, $\frac{6}{18} = \frac{30}{90}$, $\frac{5}{18} = \frac{25}{90}$.

καὶ $\frac{6}{15} = \frac{36}{90}$, $\frac{5}{15} = \frac{30}{90}$, $\frac{4}{15} = \frac{24}{90}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ α' ὠφελήθη ἐκ τῆς ἀνταλλαγῆς, διότι $\frac{36}{90} > \frac{35}{90}$.

Περὶσσότερον δὲ μερίδιον ἔλαβεν ὁ α' μόνον καὶ τὸ ἐπὶ πλέον εἶναι
 $\frac{1}{90}$ τῆς περιουσίας. Ἡ περιουσία λοιπὸν ἦτο $1\,200\,000 \times 90 = 108\,000\,000$ δρ.

"Ελαβε δὲ ὁ α' $1\,200\,000 \times 36 = 43\,200\,000$ δραχ.

ὁ β' $1\,200\,000 \times 30 = 36\,000\,000$ »

καὶ ὁ γ' $1\,200\,000 \times 24 = 28\,800\,000$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

§ 717. *Λύσις*: "Αν ὁ α' δὲν κατέθετε τὰς ἐπὶ πλέον 120 000 δραχ., ἡ ὅλική κατάθεσις θὰ ἦτο 1 230 000—120 000=1 110 000 καὶ ἕκαστος θὰ κατέθετεν 1 110 000 : 2=555 000 δραχ. Τώρα κατέθεσεν ὁ μὲν α' 555 000 +120 000=675 000 δραχ., ὁ δὲ β' 555 000 δραχ.

Ἐπομένως ἀπὸ τὸ κέρδος θὰ λάβῃ ὁ μὲν

$$\alpha' \frac{4\,305\,000 \times 675\,000}{1\,230\,000} = 35 \times 67\,500 = 2\,362\,500 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ δὲ } \beta' \quad 35 \times 55\,500 = 1\,942\,500 \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος. Τὸ κεφάλαιον 1 230 000 ἔφερε κέρδος 4 305 000
 » 120 000 » » X

$$\text{"Οθεν } X = \frac{4\,305\,000 \times 120\,000}{1\,230\,000} = 420\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὁ α' λοιπὸν καταθέσας ἐπὶ πλέον 120 000 δραχ. πρέπει νὰ λάβῃ 420 000 δραχ. περισσότερον κέρδος. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 305 000—420 000 = 3 885 000 θὰ μοιρασθῇ εἰς δύο ἕξ ἴσου. Ὡστε ὁ β' θὰ λάβῃ 3 885 000 : 2 = 1 942 500 καὶ ὁ α' ἀκόμη 420 000, ἦτοι 1 942 500 + 420 000 = 2 362 500 δρ.

§ 718. *Λύσις*: "Αν ὁ β' κατέθετε X δραχ. ὁ α' κατέθεσε $\frac{2 \cdot X}{3}$

Αἱ καταθέσεις λοιπὸν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{2}{3}$, ἢ πρὸς τοὺς $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, $1 \times 3 = 3$. Ἐπομένως αἱ 7 340 000 δραχ. θὰ μοιρασθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3. Θὰ λάβῃ λοιπὸν

$$\text{ὁ μὲν } \alpha' \frac{7\,340\,000 \times 2}{5} = 1\,468\,000 \times 2 = 2\,936\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ δὲ } \beta' \quad 1\,468\,000 \times 3 = 4\,404\,000 \quad \gg$$

§ 719. *Λύσις*: Κέρδος 520 000 δραχ. προέρχεται ἀπὸ 4 160 000 δρ.

$$\begin{array}{ccccccc} & 640\,000 & & & & & \\ & \ll & & \gg & & \gg & \\ & & & & & & X \end{array}$$

$$X = 4\,160\,000 \times \frac{640\,000}{520\,000} = 4\,160\,000 \times \frac{16}{13} = 320\,000 \times 16 = 5\,120\,000 \text{ δραχ.}$$

Β' τρόπος: Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ κέρδη θὰ εἶναι X : 4 160 000 = 640 000 : 520 000. Πολλοὶ μὲν λοιπὸν τοὺς δύο μέσους καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου. Ἐπομένως

$$X = \frac{4\,160\,000 \times 640\,000}{520\,000} = 5\,120\,000 \text{ δραχ.}$$

§ 720. *Λύσις*: Ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ κέρδη, τὸ ὅλικόν κεφάλαιον 10 500 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη, ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 125 000, 1 875 000 ἢ πρὸς τοὺς 1 125, 1 845 ἢ πρὸς τοὺς 1 125 : 25=45, 1 875 : 25=75 ἢ πρὸς τοὺς 45 : 15=3,

$$75 : 15=5. \text{ Κατέθεσε λοιπὸν ὁ μὲν } \alpha' \frac{10\,500\,000 \times 3}{8} = 1\,312\,500 \times 3 = 3\,937\,500$$

δραχ., ὁ δὲ β' $1\,312\,500 \times 5 = 6\,562\,500 \text{ δραχ.}$

§ 721. *Λύσεις*: Ἡ δαπάνη 2 400 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5,6, 7,4 καὶ 7. Ἐπομένως θὰ πληρώ-

$$\sigma\eta \ \acute{\alpha} \ \mu\acute{\epsilon}\nu \ \alpha' \frac{2400000 \times 5,6}{5,6+7,4+7} = \frac{2400000 \times 5,6}{20} = 120\,000 \times 5,6 = 672\,000.$$

$$\acute{\alpha} \ \beta' \ 120\,000 \times 7,4 = 888\,000, \ \acute{\alpha} \ \gamma' \ 120\,000 \times 7 = 840\,000.$$

§ 722. *Λύσεις*: Ὁ γ' κατέθεσεν 45 000 000 — (8 500 060 + 12 500 000) = 24 000 000 δραχ.

Τὸ εἰσόδημα ἦτο $1800 \times 8600 = 15\,480\,000$ δραχ. καὶ πρέπει νὰ μερισθῇ ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8 500 000, 12 500 000 καὶ 24 000 000 ἢ πρὸς τοὺς 85, 125, 240 ἢ πρὸς τοὺς $85 : 5 = 17$, $125 : 5 = 25$, $240 : 5 = 48$.

$$\Theta\acute{\alpha} \ \lambda\acute{\alpha}\beta\eta \ \lambda\omicron\iota\pi\acute{\omicron}\nu \ \acute{\alpha} \ \frac{15\,480\,000 \times 17}{17+25+48} = \frac{15\,480\,000 \times 17}{90} = 172\,000 \times 17 = 2\,924\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\acute{\alpha} \ \beta' \ 172\,000 \times 25 = 4\,300\,000 \text{ καὶ } \acute{\alpha} \ \gamma' \ 172\,000 \times 48 = 8\,256\,000 \text{ δραχμάς.}$$

§ 723. *Λύσεις*: Τὸ κέρδος θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 11, 9, 5. Ἐὰν λάβῃ λοιπὸν

$$\acute{\alpha} \ \frac{7\,200\,000 \times 11}{25} = 288\,000 \times 11 = 3\,168\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\acute{\alpha} \ \beta' \quad 288\,000 \times 9 = 2\,592\,000 \quad \gg$$

$$\text{καὶ } \acute{\alpha} \ \gamma' \quad 288\,000 \times 5 = 1\,440\,000 \quad \gg$$

§ 724. *Λύσεις*: Τὸ κεφάλαιον τοῦ α' ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν $12 \times 2 = 24$ μῆνας, τοῦ β' $24 - 8 = 16$ μῆνας καὶ τοῦ γ' $16 - 5 = 11$ μῆνας. Ἡ ζημία θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 24, 16, 11. Ἀνα-

$$\lambda\omicron\gamma\epsilon\acute{\iota} \ \lambda\omicron\iota\pi\acute{\omicron}\nu \ \zeta\eta\mu\acute{\iota}\alpha \ \epsilon\acute{\iota}\varsigma \ \tau\acute{\omicron}\nu \ \acute{\alpha} \ \frac{2\,550\,000 \times 24}{51} = 50\,000 \times 24 = 1\,200\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\epsilon\acute{\iota}\varsigma \ \tau\acute{\omicron}\nu \ \beta' \ 50\,000 \times 16 = 800\,000 \text{ δραχ. καὶ } \epsilon\acute{\iota}\varsigma \ \tau\acute{\omicron}\nu \ \gamma' \ 50\,000 \times 11 = 550\,000.$$

§ 725. *Λύσεις*: Τὸ κεφάλαιον τοῦ β' συνεταιρίου ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 12 μῆνας, τοῦ δὲ α' 18 μῆνας. Τὸ κέρδος λοιπὸν θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 12 ἢ πρὸς τοὺς $18 : 6 = 3$ καὶ $12 : 6 = 2$.

$$\text{Ἐπομένως θὰ λάβῃ } \acute{\alpha} \ \frac{1\,560\,000 \times 3}{5} = 312\,000 \times 3 = 936\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{καὶ } \acute{\alpha} \ \beta' \quad 312\,000 \times 2 = 624\,000 \quad \gg$$

§ 726. *Λύσεις*: Τὸ κεφάλαιον τοῦ α' ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν $4+5+10=19$ μῆνας, τοῦ β' $5+10=15$ μῆνας καὶ τοῦ γ' 10 μῆνας. Τὸ δὲ κέρδος θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $19 \times 6\,500\,000$, $15 \times 7\,500\,000$, $10 \times 10\,000\,000$ ἢ πρὸς τοὺς 19×65 , 15×75 , 10×100 ἢ πρὸς τοὺς $19 \times 65 : 5 = 19 \times 13 = 247$, $15 \times 75 : 5 = 15 \times 25 = 225$, $10 \times 102 : 5 = 200$,

$$\Theta\acute{\alpha} \ \lambda\acute{\alpha}\beta\eta \ \lambda\omicron\iota\pi\acute{\omicron}\nu \ \acute{\alpha} \ \frac{13\,440\,000 \times 247}{672} = 20\,000 \times 247 = 4\,940\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\acute{\alpha} \ \beta' \quad 20\,000 \times 225 = 4\,500\,000 \quad \gg$$

$$\acute{\alpha} \ \gamma' \quad 20\,000 \times 200 = 4\,000\,000 \quad \gg$$

§ 727. *Λύσεις*: Τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἦτο $3\,000\,000 + 9\,200\,000$

= 12 200 000 δραχ. "Ωστε τὰ $\frac{40}{100}$ τοῦ ὅλου κεφαλαίου ἦσαν 12 200 000 δραχ.

$$\text{τὸ } \frac{1}{100} \gg \gg \gg \frac{12\,200\,000}{40} \gg$$

καὶ ὅλον τὸ κεφάλαιον ἦτο $\frac{12\,200\,000}{40} \times 100 = 30\,500\,000$ δραχ. Αὐτὸ τὸ κεφάλαιον πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κέρδη, ἥτοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3 000 000 καὶ 9 200 000 ἢ πρὸς τοὺς 30 καὶ 92 ἢ πρὸς τοὺς 15 καὶ 46. Κατέθεσε λοιπὸν

$$\text{ὁ μὲν α'} \frac{30\,500\,000 \times 15}{61} = 500\,000 \times 15 = 7\,500\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ δὲ β'} \quad 500\,000 \times 46 = 23\,000\,000 \gg$$

B' Τρόπος: Τὰ $\frac{40}{100}$ τοῦ α' κεφαλαίου εἶναι 3 000 000 δραχ.

$$\text{τὰ δὲ } \frac{100}{100} \text{ αὐτοῦ εἶναι } \frac{3\,000\,000 \times 100}{40} = 7\,500\,000 \gg$$

$$\text{τὰ δὲ } \frac{100}{100} \text{ τοῦ β' εἶναι } \frac{9\,200\,000 \times 100}{40} = 23\,000\,000 \gg$$

§ 728. *Δύοις:* Αἱ 2 400 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 200 000, 1 300 000, 1 500 000 ἢ πρὸς τοὺς 12, 13, 15. Θὰ λάβῃ λοιπὸν

$$\text{ὁ α'} \frac{2\,400\,000 \times 12}{40} = 60\,000 \times 12 = 720\,000 \text{ δραχ.}$$

$$\text{ὁ β'} \quad 60\,000 \times 13 = 780\,000 \gg$$

$$\text{ὁ γ'} \quad 60\,000 \times 15 = 900\,000 \gg$$

Τὸ ὅλικόν χρέος ἦτο $1\,200\,000 + 1\,300\,000 + 1\,500\,000 = 4\,000\,000$ δραχ. Ἀντ' αὐτῶν οἱ πιστωταὶ ἔλαβον 2 400 000 δραχ. καὶ ἐπομένως, ἐζημίωσαν $4\,000\,000 - 2\,400\,000 = 1\,600\,000$ δραχ.

"Ωστε ἀπὸ 4 000 000 δραχ. ἐπῆλθε ζημία 1 600 000

$$\frac{\text{« } 100 \text{ » » » X}}{\text{« } 100 \text{ » » » X}}$$

$$\text{ὅθεν } X = \frac{100}{4\,000\,000} = 40 \text{ ‰.}$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ἐζημιώθη ἕκαστος πιστωτής, ἔπεται ὅτι ἕκαστος τούτων ἐζημιώθη 40 ‰ ἐπὶ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε δανείσει.

§ 729. *Δύοις:* Γνωρίζομεν ὅτι τὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοὺς ὁμωνύμους χρόνους. Ἀν λοιπὸν ὁ β' κατέθεσε X δραχμάς, θὰ εἶναι $600\,000 : 1\,687\,500 = 4\,000\,000 \times 6 : 9.X$. Πρέπει λοιπὸν νὰ πολὺωμεν τοὺς δύο μέσους καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

$$\text{"Ωστε: } 9.X = \frac{1\,687\,500 \times 4\,000\,000 \times 6}{600\,000} = 11\,250\,000 \times 6 \text{ καὶ}$$

$$X = \frac{11\,250\,000 \times 6}{9} = 1\,250\,000 \times 6 = 7\,500\,000 \text{ δραχμάς.}$$

§ 730. Δύσεις: "Όλον τὸ χρέος (παθητικόν) τοῦ πτωχεύσαντος ἦτο 7 500 000+5 000 000+12 500 000=25 000 000 δραχ. Μεταξὺ τῶν δανειστών

θὰ διατεθῶσι τὰ $\frac{40}{100}$ ἢ ἀπαιτῶμενα κατὰ τὰ ἔξοδα $\frac{5}{100}$, ἦτοι τὰ $\frac{35}{100}$

αὐτοῦ, δηλ. $25\,000\,000 \times \frac{35}{100} = 8\,750\,000$ δραχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν πρέπει νὰ διανεμηθῇ εἰς τοὺς πιστωτὰς ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7 500 000, 5 000 000, 12 500 000 ἢ πρὸς τοὺς 75, 50, 125 ἢ πρὸς τοὺς 3, 2, 5. Θὰ λάβῃ

λοιπὸν ὁ α' $\frac{8\,750\,000 \times 3}{10} = 875\,000 \times 3 = 2\,625\,000$ δραχ.

ὁ β' $875\,000 \times 2 = 1\,750\,000$ »

καὶ ὁ γ' $875\,000 \times 5 = 4\,375\,000$ »

Σημ. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν καθορίζεται, ἂν τὰ ἔξοδα εἶναι 5% ἐπὶ τοῦ παθητικοῦ ἢ ἐπὶ τοῦ ἐνεργητικοῦ. Κατὰ τὴν προηγουμένην λύσιν ἐλογίσθησαν τὰ ἔξοδα ἐπὶ τοῦ παθητικοῦ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

§ 731. Δύσεις: $X = (85,400 + 96,500 + 84,700 + 88) : 4$

$= 21,350 + 24,125 + 21,175 + 22 = 88,65$
ἢ $(85,400 + 96,500 + 84,700 + 88) : 4 = 354,60 : 4 = 88,65$.

§ 732. Δύσεις: $X = (6,4 + 12,8) : 2 = 3,2 + 6,4 = 9,6$.

§ 733. Δύσεις: $X = (15 + 18 + 17 + 19 + 15) : 5 = 84 : 5 = 16,8$

§ 734. Δύσεις: $X = (157\,000\,000 + 152\,000\,000) : 2$
 $= 78\,500\,000 + 76\,000\,000 = 154\,500\,000$ χιλμ.

§ 735. Δύσεις: $X = (75 + 63 + 105 + 84 + 60 + 45) : 6 = 432 : 6 = 72$ θάνατοι.

§ 736. Δύσεις: Οἱ δύο ἄγροι εἶχον ἐμβαδὸν $12 + 8 = 20$ στρέμματα καὶ παρήγαγον $2300 + 1500 = 3800$ ὀκ. σίτου. Κατὰ μέσον ὅρον λοιπὸν ἔκαστον στρέμμα παρήγαγεν $3800 : 20 = 190$ ὀκ.

§ 937. Δύσεις: $\tau = (344 + 338,5 + 342,10 + 338,4) : 4$
 $= 86 + 84,625 + 85,525 + 84,6 = 340,75$ ἢ $\tau = 1363 : 4 = 340,75$ μέτ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

§ 738. Δύσεις: Τὸ α' εἶδος ἀξίζει $2880 \times 150 = 432\,000$ δραχ.
τὸ β' » » $2550 \times 180 = 459\,000$ »

"Ὡστε αἱ $150 + 180 = 330$ ὀκ. τοῦ μείγ. τιμῶνται 891 000 »
ἢ δὲ 1 ὀκᾶ τιμᾶται $891\,000 : 330 = 2700$ δραχ.

§ 739. Δύσεις: "Αν τὸ βαρέλιον ἔχη X ὀκ, ἡ ἀξία τοῦ μείγματος θὰ εἶναι $\left(2250 \cdot \frac{3}{4}X + 1950 \cdot \frac{X}{4} \right)$ δραχ. Ἡ μίξα λοιπὸν ὀκᾶ ἀξίζει

$$\left(2250 \cdot \frac{3}{4} \cdot X + 1950 \cdot \frac{X}{4} \right) : X = 2250 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1950}{4} = \frac{6750 + 1950}{2} = \frac{8700}{2} = 2175 \text{ δραχ.}$$

§ 740. Λύσις: Τὸ λίπος ἀξίζει $16\,000 \times 80 = 1\,280\,000$ δραχ.
 τὸ βούτυρον » $40\,000 \times 20 = 800\,000$ »

Ἐπομένως αἱ 100 ὀκ. τοῦ μείγματος τιμῶνται $= 2\,080\,000$ »

ἡ δὲ 1 ὀκ. τοῦ μείγματος τιμᾶται $2\,080\,000 : 100 = 20\,800$ δραχ.

Τὸ κέρδος δὲ ἀπὸ ἐκάστην ὀκᾶν τοῦ μείγματος θὰ εἶναι $208 \times 25 = 5200$ δραχ. Ἐπομένως πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν $20\,800 + 5200 = 26\,000$ δραχμάς.

Β' Τρόπος: Ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ μείγματος πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὴν ἀξίαν του $2\,080\,000$ δραχ. καὶ τὰ $\frac{25}{100}$ αὐτῆς ὡς κέρδος, ἦτοι

$2\,080\,000 + 2\,080\,000 \times \frac{25}{100} = 2\,080\,000 + 520\,000 = 2\,600\,000$ δραχ. Ἐπομένως πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν $2\,600\,000 : 100 = 26\,000$ δραχ.

§ 741. Λύσις: Τὸ α' εἶδος τῶν ἐλαίων ἔχει $16\,000 \times 50 = 800\,000$
 τὸ β' » » » » $12\,000 \times 25 = 300\,000$

Ἐπομένως τὸ μείγμα τιμᾶται $1\,100\,000$

Ἄν τὸ πωλήσῃ πρὸς $16\,280$ δραχ. τὴν ὀκᾶν, θὰ εἰσπράξῃ $16\,280 \times 75 = 1\,221\,000$ δραχ. καὶ θὰ κερδίσῃ $1\,221\,000 - 1\,100\,000 = 121\,000$ δραχμάς.
 Ὡστε: Ἀπὸ $1\,100\,000$ κερδίζει $121\,000$ δραχ.

» $\frac{100}{100}$ » X » ὅθεν,

$$X = 121\,000 \times \frac{100}{1\,100\,000} = \frac{121}{11} = 11\, \%,$$

§ 742. Λύσις: Τὸ α' εἶδος ἀξίζει $24\,000 \times 5 = 120\,000$ δραχ.

τὸ β' » » $20\,000 \times 3 = 60\,000$ »

τὸ γ' » » $30\,000 \times 2 = 60\,000$ »

Τὸ δὲ μείγμα ἔχει βάρος 10 ὀκ. καὶ ἀξίζει $240\,000$ »

Μὲ τὸ καβουρδισμα ἔχασε $10 \times \frac{1}{10} = 1$ ὀκᾶ καὶ ἔμειναν 9 ὀκάδες.
 Ὡστε: α') Ἄν δὲν θέλῃ νὰ κερδίσῃ, ἀπὸ τὰς 9 ὀκ. πρέπει νὰ εἰσπράξῃ

$240\,000$ δραχ. Ἐπομένως θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν $240\,000 : 9 = 26\,666 \frac{2}{3}$ δραχ.

β') Ἄν θέλῃ νὰ κερδίσῃ $20\, \%$, ὅλον τὸ κέρδος του θὰ εἶναι

$240\,000 \times \frac{20}{100} = 48\,000$ καὶ πρέπει νὰ εἰσπράξῃ $240\,000 + 48\,000 = 288\,000$

δραχ. Θὰ πωλῇ λοιπὸν τὴν ὀκᾶν $288\,000 : 9 = 32\,000$ δραχ.

§ 743. Λύσις: Ἀπὸ 1 ὀκᾶν τοῦ α' εἶδους κερδίζει $3200 - 2240 = 960$,
 δραχ., ἐν ᾧ ἀπὸ 1 ὀκᾶν τοῦ β' εἶδους χάνει $3680 - 3200 = 480$ δραχ. Ἄν
 λοιπὸν θέσῃ 480 ὀκ. ἀπὸ τὸ α', θὰ κερδίσῃ 960×480 δραχ. Καὶ ἂν θέσῃ
 960 ὀκ. ἀπὸ τὸ β' εἶδος θὰ χάσῃ 480×960 . Ἐπειδὴ δὲ $960 \times 480 = 480 \times 960$

ἀπὸ τοιοῦτον μείγμα οὔτε χάνει, οὔτε κερδίζει. Ὡστε ἡ ἀνάμιξις πρέπει νὰ γίνη μὲ τὴν ἀναλογίαν 480 ὀκ. τοῦ α' εἶδους

μὲ 960 » » β' »

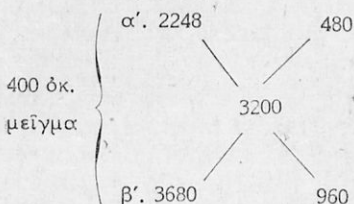
Πρέπει λοιπὸν νὰ μερίσωμεν τὰς 400 ὀκ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 480 καὶ 960 ἢ πρὸς τοὺς $480:480=1$, $960:480=2$. Πρέπει

λοιπὸν νὰ θέσῃ ἐκ τοῦ α' $\frac{400 \times 1}{3} = 133 \frac{1}{3}$ ὀκ.

καὶ » » β' $\frac{400 \times 2}{3} = 266 \frac{2}{3}$ ὀκ.

Διάταξις τῆς πράξεως

ἀξ. 1 ὀκ.



Ἀναλογία μείξεως

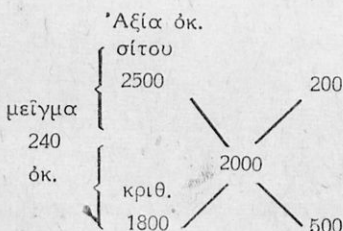
480 ὀκ. ἢ 1 α'

μὲ μὲ
960 » $\frac{2}{3}$ β'

Ἐκ τοῦ α' $\frac{400 \times 1}{3} = 133 \frac{1}{3}$ ὀκ.

» » β' $\frac{400 \times 2}{3} = 266 \frac{2}{3}$ ὀκ.

§ 744. Λύσις : Ἀφ' οὗ αἱ 240 ὀκ. τοῦ μείγματος ἀξίζουσι 480 000 δραχ., ἡ 1 ὀκᾶ αὐτοῦ ἀξίζει $480\,000 : 240 = 2\,000$ δραχ. Ἄν δὲ σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, καταρτίζομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν.



Ἀναλογία μείξεως

σίτου 260 ὀκ. 2

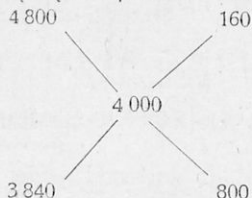
μὲ ἢ
κριθὴν 500 » $\frac{5}{7}$

Θὰ λάβῃ λοιπὸν σίτον $\frac{240 \times 2}{7} = 68 \frac{4}{7}$ ὀκ.

καὶ κριθὴν $\frac{2400 \times 5}{7} = 171 \frac{3}{7}$ ὀκ.

§ 745. Λύσις : Ἀπὸ ἐκάστην ὀκᾶν τοῦ λίπους θὰ κερδίζῃ $24\,000 - 20\,000 = 4\,000$ δραχ., ἐν ᾧ ἀπὸ ἐκάστην ὀκᾶν τοῦ βουτύρου θὰ χάνῃ $36\,000 - 24\,000 = 12\,000$ δραχ. Ἄν λοιπὸν θέσῃ 12 000 ὀκ. λίπος, θὰ ἔχῃ κέρδος $4000 \times 12\,000$ δραχ. Ἄν δὲ θέσῃ 4000 ὀκ. βουτύρου, θὰ ἔχῃ ζημίαν $12\,000 \times 4000$ δραχ. Οὕτω δὲ οὔτε κερδίζει οὔτε χάνει. Ὡστε ἡ ἀναλο-

Ἡδη κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν.



Ἀναλογία μείξεως

160 α' εἶδους

μὲ

800 β' εἶδους

ἢ $160 : 160 = 1$ α' μὲ $800 : 160 = 5$ β' εἶδους.

Θὰ λάβῃ λοιπὸν ἐκ τοῦ α' εἶδους $\frac{1200 \times 1}{6} = 200$ ὀκ.

καὶ ἐκ τοῦ β' $200 \times 5 = 1000$ ὀκ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

§ 751. Δύσις : Τὸ α' κράμα ἔχει καθαρὸν ἄργυρον

$$0,850 \times 30 = 25,500 \text{ γραμ.}$$

τὸ δὲ β' $0,880 \times 12 = 10,560$ »

$$\underline{42} \quad \underline{36,060}$$

Ἐπομένως τὰ 42 γραμ. τοῦ κράματος, ἔχουσι 36,060 γραμ. καθαρὸν ἀργύρου, τὸ δὲ 1 γραμ. τοῦ κράματος ἔχει $36,060 : 42 = 0,85857 \dots$

§ 752. Δύσις : Γνωρίζομεν (σελ. Ἀριθμ. 228) ὅτι ἡ χρυσοῦ λίρα Ἀγγλίας ἔχει βάρος 7,988 γραμ. καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916. Ἐπομένως αὕτη ἔχει καθαρὸν χρυσὸν $0,916 \times 7,988 = 7,317 \text{ 008 γραμ.}$ Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λατίνικῆς νομισματικῆς συμβάσεως ἐκανονίσθη οὕτως ὥστε εἰς βάρος 5 γραμ. νὰ ἀντιστοιχῇ ἀξία 1 ἀργυρᾶς δραχμῆς, ἔπεται ὅτι τὸ βάρος τοῦ κοσμήματος εἶναι $7,988 + 5 = 12,988$ γραμ. καὶ καθαρὸς χρυσὸς αὐτοῦ $7,317 \text{ 008 γραμ.}$ Ἐπομένως ὁ βαθμὸς καθαρότητος αὐτοῦ εἶναι $7,317 \text{ 008} : 12,988 = 0,56336 \dots$

§ 753. Δύσις : Ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ α' εἶδους θὰ περισσεύῃ εἰς τὸ κράμα $0,900 - 0,890 = 0,010$ γραμ. καθαρὸς ἄργυρος, ἐν δὲ ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ β' εἶδους θὰ λείπῃ $0,890 - 0,870 = 0,020$ γραμ. Ἄν λοιπὸν λάβῃ 20 γραμ. ἀπὸ τοῦ α' εἶδος, θὰ ὑπάρχῃ περίσσευμα καθαρὸ ἀργύρου $0,010 \times 20$. Ἄν δὲ λάβῃ ἀπὸ τοῦ β' 10 γραμ. θὰ λείπωσι $0,020 \times 10$ γραμ. Ἐπειδὴ δὲ $0,010 \times 20 = 0,020 \times 10$, οὔτε περισσεύει οὔτε λείπει καθαρὸς ἄργυρος. Ἡ ἀναλογία λοιπὸν εἶναι 20 μὲ 10 ἢ 2 μὲ 1. Ἐπομένως ἀπὸ τοῦ α' εἶδος θὰ

λάβῃ $\frac{50 \times 2}{3} = 33 \frac{1}{3}$ γραμ.

καὶ ἀπὸ τοῦ β' εἶδος $\frac{50 \times 1}{3} = 16 \frac{2}{3}$ γραμ.

§ 754. Δύσις : Ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ α' εἶδους περισσεύει εἰς τὸ κράμα $0,920 - 0,9125 = 0,0075$ γραμ. καθαρὸς ἄργυρος καὶ ἀπὸ τὰ 50 γραμ. περισσεύουσι $0,0075 \times 50 = 0,3750$ γραμ. Αὐτὰ καλύπτουσι τὸ ἔλλειμα ἀπὸ τοῦ β' εἶδος. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ 1 γραμ. αὐτοῦ λείπει καθαρὸς ἄργυρος $0,9125 - 0,910 = 0,0125$, ἔπεται ὅτι ἀπὸ τοῦ β' ἔβαλε

$$0,3750 : 0,0125 = 30 \text{ γραμ.}$$

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1. *Λύσεις* : 'Αφ' οὗ $X=y$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha X=\alpha y$ (§ 351 'Αριθ.), 'Επομένως καὶ $\alpha X+\beta=\alpha y+\beta$ (§ 347 'Αριθ.).

§ 2 *Λύσεις* : Γνωρίζομεν ὅτι ὁ μειωτέος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀφαιρετέον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, ἥτοι $X=3+7=10$.

§ 3. *Λύσεις* : "Αν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $X+2=8$ ἀφαιρέσωμεν 2, εὐρίσκομεν $X=6$.

§ 4. *Λύσεις* : 'Εκ τῆς $X=y$ ἔπεται ὅτι $\mu X=\mu y$. 'Εκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\alpha=\beta$, ἔπεται ὅτι $\mu X-\alpha=\mu y-\beta$ (§ 350 'Αριθ.).

§ 5. *Λύσεις* : 'Απὸ τὴν ἰσότητα $X=y$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\alpha X=\alpha y$. 'Εκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $\alpha X+\beta=\alpha y+\beta$.

§ 6. *Λύσεις* : "Οπως εἰς τὰ προηγούμενα, εὐρίσκομεν κατὰ σειράν $\alpha X=\alpha y$, $\alpha X+\gamma=\alpha y+\delta$.

§ 7. *Λύσεις* : Α') Κατὰ τὴν ιδιότητα τῆς (§ 357 'Αριθ.). 'Εκ τῆς $X>y$ ἔπεται ὅτι $\alpha X>\alpha y$. ἐκ δὲ τῆς $\alpha>\beta$ ἔπεται ὅτι $\alpha y>\beta y$. Κατὰ μείζονα λοιπὸν λόγον εἶναι $\alpha X>\beta y$.

Β') 'Απὸ τὰς ἀνισότητας $\alpha X>\beta y$ καὶ $\gamma>\delta$, ἔπεται ὅτι $\alpha X+\gamma>\beta y+\delta$ (§ 354 'Αριθμητ.).

ΙΔΙΟΤΗΤΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 8. *Λύσεις* : Διὰ νὰ μὴ ἀναγκαζώμεθα νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος τῶν μονάδων μιᾶς στήλης, ὅταν ἀπὸ τὴν ἀμέσως δεξιὰν αὐτῆς στήλην προκύπτῃ κρατούμενον. 'Επομένως, ἂν δὲν προκύπτῃ κρατούμενον ἀπὸ ὅλας τὰς στήλας, εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ ποίαν στήλην θὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν, ἀρκεῖ νὰ μὴ παραλείψωμεν τινα.

§ 9. *Λύσεις* : Κατὰ τὴν ιδιότητα (§ 361 'Αριθ.) ὁ 12 προστιθέμενος εἰς τὸν προσθετέον 18 προστίθεται εἰς ὅλον τὸ ἄθροισμα. 'Ομοίως καὶ ὁ 8 προστίθεται εἰς ὅλον τὸ ἄθροισμα $18+27+32$. 'Επομένως τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται μεγαλύτερον κατὰ $12+8$ ἥτοι κατὰ 20.

§ 10. *Ἀπὸδείξεις* : Γνωρίζομεν (§ 361 'Αριθ.) ὅτι ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν 7 εἰς ἕνα προσθετέον π. χ. τὸν 14. Εἶναι λοιπὸν

$$(14+19+32)+7=21+19+32.$$

$$21+19+32=21+19+30+2$$

ιδιότητα, ἔπεται ὅτι (§ 346 'Αριθ.)

$$(14+19+32)+7=21+19+30+2$$

$$21+19+30+2=70+2, \text{ ἔπεται ὅτι}$$

$$(14+19+32)+7=70+2. \text{ δ. ἔ. δ.}$$

'Επειδὴ δὲ

κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν

καὶ ἐπειδὴ

§ 11. *Ἀπόδειξις*: Ἐπειδὴ $21+19=40$ καὶ $45+12+23=80$, κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα εἶναι $45+12+21+19+23=40+80$. δ. ξ. δ.

§ 12. *Λύσις*: Ἐπειδὴ $32+3=35$ καὶ $14+11=25$, κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα εἶναι $32+14+3+11=35+25$.

§ 13. *Ἀπόδειξις*: Ἐφαρμόζομεν πρῶτον τὴν ἀναλυτικὴν ιδιότητα καὶ εὐρίσκομεν ὅτι

$$(13+28)+(35+22+9)+(7+3)=13+28+35+22+9+7+3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $13+35+7=55$ καὶ $28+22+9+3=62$, κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα εἶναι $13+28+35+22+9+7+3=55+62$, ἐπομένως καὶ

$$(13+28)+(35+22+9)+(7+3)=55+62. \delta. \xi. \delta.$$

§ 4. *Λύσις*: Ἄν σκεθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν ἄσκ. 9, ἐννοῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 5 ἀριθμῶν γίνεται μεγαλύτερον κατὰ

$$11+12+24+47+65=150.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 15. *Ἀπόδειξις*: Ἄν εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς $(\alpha-\beta)-\gamma$ προσθέσωμεν τὸν β , ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται (§ 367 Ἀριθ.). Ἐπομένως εἶναι $(\alpha-\beta)-\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]-(\beta+\gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$, δ. ξ. δ.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι: *Διὰ τὰ ἀφαιρέσωμεν δοθέντα ἀριθμὸν ἀπὸ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, ἀρκεῖ εἰς τὸν ἀφαιρετέον αὐτῆς νὰ προσθέσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μειωτέον τῆς διαφορᾶς.*

Β' τρόπος. Κατὰ τὴν ιδιότητα (§ 365 Ἀριθ.) εἶναι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$ ἢ καὶ $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta$. Ἐπομένως $(\alpha-\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)-\beta$.

§ 16. *Λύσις*: 1ον) $75-(40+20)=75-60=15$ ἢ

$$75-(40+20)=(75-40)-20=35-20=15.$$

2ον) $100-(40-25)=100-15=85$ ἢ κατὰ τὴν ιδ. (§ 368).

$$100-(40-25)=(100+25)-40=125-40=85$$

3ον) $(12+45)-(10+18)=57-28=29$ ἢ κατὰ τὴν ιδ. (§ 365)

$$(12+45)-(10+18)=[(12+45-10)]-18. \text{ Ἐπειδὴ } (12+45)-10=2+45=47, \text{ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται } (12+45)-(10+18)=47-18=29.$$

Σημ. Ἡ διαφορὰ $10-18$ πρέπει νὰ διορθωθῇ εἰς $10+18$.

4ον) $(58-35)+(75-64)=23+11=34$ ἢ ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 366) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι: $(58-35)+(75-64)=(58+75)-(35+64)=133-99=34$.

5ον) $(87-66)-(35-18)=21-17=4$ ἢ ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 368) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι: $(87-66)-(35-18)=[(87-66)+18]-35$

$$=(21+18)-35=39-35=4.$$

Κατὰ τοὺς αὐτοὺς τρόπους ἐκτελοῦμεν καὶ τὰς εἰς τὴν β' στήλην τῆς Ἀριθμητικῆς σημειωμένας πράξεις.

§ 17. *Λύσις*: Ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 363) καὶ εὐρίσκομεν $(12+18)-9=12+9=21$, $(74+35+63)-57=17+35+63=115$ κ.τ.λ.

§ 18. *Λύσις*: Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐννοοῦμεν ὅτι $345=300+40+5$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Οὕτω δὲ πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $478-(300+40+5)$ καὶ πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 365) περὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἄθροισμα-τος ἀπὸ ἀριθμοῦ.

§ 19. *Ἀπόδειξις*: Γνωρίζομεν (§ 367) ὅτι: "Ἀν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον διαφορᾶς, αὕτη δὲ μεταβάλλεται. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον:

1ον) Προσθέτοντες 1 εὐρίσκομεν ὅτι $789-43=790-54$.

2ον) » 3 » » $2886-997=3889-1000$.

3ον) "Ἀν δὲ προσθέσωμεν 1 εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς $3764-1000$, εὐρίσκομεν ὅτι $3764-1000=3765-1001$ ἢ $3765-1001=3764-1000$.

§ 20. *Λύσις*: 1ον) Γνωρίζομεν ὅτι (§ 363) π.χ. $(12+\mu)-8=(12-8)+\mu$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐξάνεται κατὰ μ μονάδας.

2ον) Γνωρίζομεν (§ 365) ὅτι $12-(8+\mu)=(12-8)-\mu$, ἥτοι τὸ ὑπόλοι-πον ἐλαττοῦται κατὰ μ .

3ον) Γνωρίζομεν (§ 365) ὅτι $12-(\mu+8)=(12-\mu)-8$ ἢ $(12-\mu)-8=12-(\mu+8)$, ἥτοι ἡ ἐλάττωσις τοῦ μειωτέου κατὰ μ εἶναι αὐξησις τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ μ . Ἐπομένως κατὰ τὴν προηγουμένην 2αν περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον ἐλαττοῦται κατὰ μ .

4ον) Γνωρίζομεν (§ 368) ὅτι $12-(8-\mu)=(12+\mu)-8$, ἥτοι ἡ ἐλάττωσις τοῦ ἀφαιρέου κατὰ μ εἶναι αὐξησις τοῦ μειωτέου κατὰ μ . Ἐπομένως κατὰ τὴν προηγουμένην 1ην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον αὐξάνεται κατὰ μ .

5ον) Γνωρίζομεν (§ 367) ὅτι $12-8=(12+\mu)-(8+\mu)$, ἢ $(12+\mu)-(8+\mu)=12-8$, ἥτοι ἡ διαφορὰ δὲν βλάπτεται.

§ 21. *Λύσις*: Ζητεῖται δηλ. τὸ ἄθροισμα $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν $(\alpha-\beta)$ τὸν β καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα $(\alpha-\beta)+\beta$ ἢ α προσθέτομεν τὸν α καὶ εὐρίσκομεν $\alpha+\alpha$ ἢ $\alpha \cdot 2$. Ὡστε: $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)=\alpha \cdot 2$ ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ μειωτέου.

§ 22. *Λύσις*: Τὴν διαφορὰν $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὴν ιδ. (§ 368) προσθέτομεν εἰς τὸν $(\alpha+\beta)$ τὸν ἀφαιρετέον β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)+\beta$ ἢ $\alpha+\beta+\beta$ ἀφαιρούμεν τὸν α . Οὕτω δὲ (§ 364) εὐρίσκομεν $\beta+\beta$ ἢ $\beta \cdot 2$. Ὡστε: $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=\beta \cdot 2$, ἥτοι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀφαιρετέου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

§ 23. *Λύσις*: Κατὰ τὴν θεμελιώδη ιδιότητα εἶναι $8 \times 1=1 \times 8$. Ἀλλὰ 1×8 σημαίνει νὰ ἐπαναληφθῇ 8 φορές ἡ 1· γίνεται λοιπὸν 8. Ὡστε: $8 \times 1=1 \times 8=8$.

§ 24. *Λύσις*: 1ον) Ἐπειδὴ $9=8+1$, εἶναι $25 \times 9=25 \times (8+1)$. Κατὰ δὲ τὴν ιδ. (§ 372) $25 \times (8+1)=(25 \times 8)+25$. Ἐπομένως καὶ $25 \times 9=(25 \times 8)+25$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον 25×9 εἶναι κατὰ 25 μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ 25×8 .

2ον) Ἐπειδὴ $15=13+2$, εἶναι $50 \times 15 = 50 \times (13+2)$. Ἐπειδὴ δὲ $50 \times (13+2) = 50 \times 13 + (50 \times 2)$, ἔπεται ὅτι καὶ $50 \times 15 = (50 \times 13) + 50 \times 2$. Ὡστε τὸ γινόμενον 50×15 ὑπερβαίνει τὸ 50×13 κατὰ 50×2 , ἥτοι κατὰ 100.

§ 25. *Δύσεις*: 1ον) Ἐξάγομεν τὸν κοινὸν παράγοντα 3 καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $21+15+39=(7+5+13) \times 3$.

Ὁμοίως $14+35+42=(2+5+6) \times 7$ καὶ
 $9+18+45=(1+2+5) \times 9$.

2ον) Οἱ προσθετοὶ τῶν ἀθροισμάτων τούτων ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν λ τὸ α', τὸν μ τὸ β' καὶ τὸν α.τὸ γ'. Ἐξάγοντες τούτους ἐκτὸς παρενθέσεως εὐρίσκομεν ὅτι α. λ+β. λ+γ. λ=(α+β+γ). λ, κ. μ+β. μ+ρ. μ=(κ+β+ρ). μ, 3. α+4. α+β. α=(3+4+β). α.

§ 26. *Δύσεις*: Ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα καὶ εὐρίσκομεν ὅτι :

1ον) $17.3-9.3=(17-9) \cdot 3$, $45.2-27.2=(45-27) \cdot 2$,
 $125.8-67.8=(125-67) \cdot 8$.

2ον) α.μ-β.μ=(α-β). μ, π.λ-β.λ=(π.-β). λ,
α.γ-γ.β=(α-γ). β.

§ 27. *Δύσεις*: Ἐφαρμόζομεν τὰς ιδιότητες περὶ τοῦ πολλαπλασμοῦ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν, ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα. Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι :

1ον) (α+β). μ=α. μ+β. μ, (X+y+ω). α=α.X+α.y+α.ω,
(α+δ+β). 3=3. α+3. δ+3. β.

2ον) (α-β). ν=α.ν-β.ν, (μ-ν). X=μ. X-ν. X,
(β-α). 3=3. β-3. α.

3ον) X. (α+β+γ)=α. X+β. X+γ.X, 5. (X+y+ω)=5.X+5.y+5.ω,
α. (3+β+δ)=3. α+α. β+α. δ.

4ον) (X+y). (φ+ω)=X.φ+y.φ+X.ω+y.ω,
(δ+α). (β+2)=δ.β+α.β+2.δ+2.α,
(α+β). (3+5)=3.α+3β+5.α+5β ἢ
(α+β). (3+5)=(α+β). 8=α.8+β.8.

§ 28. *Ἀπόδειξις*: 1ον) Παρατηροῦμεν ὅτι $669=700-1$ καὶ ἐπομένως $345 \times 699 = 345 \times (700-1)$.

Ἐπειδὴ δὲ $345 \times (700-1) = 345 \times 700 - 345 \times 1$, θὰ εἶναι καὶ $345 \times 699 = 345 \times 700 - 345$. Ἐπειδὴ $700 = 100 \times 7$, εἶναι $345 \times 700 = 345 \times 100 \times 7 = 34500 \times 7$ καὶ ἐπομένως $345 \times 699 = 34500 \times 7 - 345$. δ. ξ. δ.

2ον) Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $6039-639=(6000+39)-(39+600)=6000-600$ (§ 367) καὶ ὅτι $6000-600=600 \times (10-1)=600 \times 9$. Ἐπομένως καὶ $6039-639=9 \times 600$,

3ον) Ἐπειδὴ $27+35+36=98=100-2$, θὰ εἶναι $15 \times (27+35+36) = 15 \times (100-2) = 1500-30$. δ. ξ. δ.

§ 29 *Δύσεις*: 1ον) $3.X+3.y+3.ω=(X+y+ω) \cdot 3$,

$$\alpha X - \beta X = (\alpha - \beta) \cdot X, \quad 2\alpha X + 3\beta X = (2\alpha + 3\beta) \cdot X.$$

2ον) $5 \cdot X + 6 \cdot X + 7 \cdot X = (5 + 6 + 7) \cdot X, \quad 15 \cdot \alpha - 12 \cdot \alpha = (15 - 12) \cdot \alpha,$

$$5Xy - 5Xy = (1 - 1) \cdot 5Xy.$$

§ 30. *Λύσεις* : "Αν ὁ πολλαπλῆς εἶναι α, ἔπρεπε νὰ εὕρῃ τὸ γινόμελον 80 . α. 'Αντ' αὐτοῦ εὔρε τὸ 8 . α, ἥτοι μικρότερον κατὰ 80 . α - 8 . α ἢ $(80 - 8)\alpha = 72 \cdot \alpha$, εἶναι λοιπὸν $72 \cdot \alpha = 7992$ καὶ ἐπομένως $\alpha = 7992 : 72 = 111$.

§ 31. *Λύσεις* : Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι οἱ προσθετοὶ τοῦ ἀθροίσματος $4700 + 470 + 47$ διαιροῦνται διὰ 47 καὶ εἶναι

$$4700 + 470 + 47 = 47 \cdot 100 + 47 \cdot 10 + 47 \cdot 1.$$

"Αν δὲ ἐξαγάγωμεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα 47, εὐρίσκομεν ὅτι $4700 + 470 + 47 = (100 + 10 + 1) \cdot 47 = 111 \cdot 47$. 'Ο ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι 111.

§ 32. *Λύσεις* : 1ον) "Αν ὁ α αὐξηθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον α.β γίνεται $(\alpha + 1) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \beta$, Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον ἔγινε μεγαλύτερον κατὰ β.

2ον) "Αν ὁ β αὐξηθῇ κατὰ 1; τὸ γινόμενον γίνεται $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$, ἥτοι μεγαλύτερον κατὰ α. Κατὰ ταῦτα : "Αν ὁ εἷς ἀπὸ τῶν δύο παράγοντας γινομένου αὐξηθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον γίνεται μεγαλύτερον κατὰ τὸν ἄλλον παράγοντα.

§ 33. *Λύσεις* : "Αν ὁ παράγων α τοῦ α.β ἐλαττωθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον γίνεται $(\alpha - 1) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta - \beta$, ἥτοι μικρότερον τοῦ α.β κατὰ β. "Αν δὲ ὁ β ἐλαττωθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον γίνεται $\alpha \cdot (\beta - 1) = \alpha \cdot \beta - \alpha$, ἥτοι μικρότερον τοῦ α.β κατὰ α. "Ωστε : "Αν ὁ εἷς ἀπὸ τῶν δύο παράγοντας γινομένου ἐλαττωθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸν ἄλλον παράγοντα.

§ 34. *Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα εἶναι $8 \times 9 \times 2 = 16 \times 9$. 'Επειδὴ δὲ $9 = 10 - 1$, ἔπεται ὅτι $8 \times 9 \times 2 = (10 - 1) \times 16 = 160 - 16$. δ. ε. δ.

§ 35. *Ἀπόδειξις* : 'Ομοίως $7 \times 2 \times 99 = 14 \times 99$ καὶ $99 = 100 - 1$. 'Επομένως $7 \times 2 \times 99 = (100 - 1) \times 14 = 1400 - 14$. δ. ε. δ.

§ 36. *Ἀπόδειξις* : 'Ομοίως εἶναι

$$9 \times 3 \times 8 \times 111 = 999 \times 24 \text{ καὶ } 999 = 1000 - 1.$$

'Επομένως $9 \times 3 \times 8 \times 111 = (1000 - 1) \times 24 = 24 \cdot 000 - 24$.

§ 37. *Ἀπόδειξις* : 'Ομοίως $2 \times 9 \times 5 \times 111 = 999 \times 10 = (1000 - 1) \times 10$.

'Επειδὴ δὲ $(1000 - 1) \times 10 = 10 \cdot 000 - 10$, ἔπεται ὅτι καὶ

$$2 \times 9 \times 5 \times 111 = 10 \cdot 000 - 10 \text{ δ. ε. δ.}$$

§ 38. *Ἀπόδειξις* : 'Ομοίως $3 \times 5 \times 11 = 55 \times 3$. 'Επειδὴ δὲ $55 = 50 + 5$, θὰ εἶναι $3 \times 5 \times 11 = (50 + 5) \times 3 = (50 \times 3) + (5 \times 3)$. δ. ε. δ.

§ 39. *Λύσεις* : "Αν π. χ. ὁ 5 γίνῃ $(5 + 1)$, τὸ γινόμενον $3 \times 5 \times 8$ γίνεται $3 \times (5 + 1) \times 8$ ἢ $(5 + 1) \times (3 \times 8) = (3 \times 5 \times 8) + (3 \times 8)$.

Γενίκευσις : "Αν π. χ. ὁ α' γίνῃ $\alpha + 1$, τὸ γινόμενον γίνεται $(\alpha + 1) \times \beta \times \gamma = (\alpha + 1) \times (\beta \times \gamma)$ ἢ $(\alpha \times \beta \times \gamma) + (\beta \times \gamma)$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι : "Αν εἷς παράγων γινομένου πολλῶν παραγόντων αὐξηθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον γίνεται μεγαλύτερον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ.

§ 40. *Λύσεις*: "Αν π. χ. ὁ 7 γίνη (7—1), τὸ γινόμενον γίνεται $(7-1) \times 5 \times 6 = (7-1) \times (5 \times 6)$ ἢ $[7 \times (5 \times 6)] - (5 \times 6)$. Κατὰ δὲ τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα $7 \times (5 \times 6) = 7 \times 5 \times 6$ καὶ ἐπομένως $(7-1) \times 5 \times 6 = (7 \times 5 \times 6) - (5 \times 6)$. Γίνεται λοιπὸν τὸ γινόμενον μικρότερον τοῦ $7 \times 5 \times 6$ κατὰ 5×6 .

Γενίκευσις. "Αν π. χ. ὁ β' γίνη β—1 τὸ γινόμενον α.β.γ. γίνεται α.(β—1).γ ἢ (β—1).(α.γ)=β.(α.γ)—(α.γ). 'Επειδὴ β.(α.γ)=β.α.γ.=α.β.γ, ἔπεται ὅτι α.(β—1).γ=(α.β.γ)—α.γ. 'Εκ τούτων βλέπομεν ὅτι :

"Αν εἰς παράγων γινομένου πολλῶν παραγόντων ἐλαττωθῇ κατὰ 1, τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ.

Σημ. Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο καὶ εἰς τὸ προηγούμενον φθάνομεν, ἂν τὸ δοθὲν γινόμενον τρέψωμεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὸ τὰ παρίσματα τῶν ἀσκήσεων 33 καὶ 32.

§ 41. *Λύσεις*: 'Εφαρμόζομεν τὴν ἰδ. (§ 383) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι : (α. α). (2. β). (4. γ)=3. α. 2. β. 4. γ. "Επειτα εἰς τὸ 2ον μέλος ἐφαρμόζομεν τὴν συνθετικὴν ἰδιότητα καὶ εὐρίσκομεν ὅτι 3. α. 2. β. 4. γ=24.α.β.γ.

§ 42. *Λύσεις*: 'Ομοίως (2. α) . (7. β) . (5. γ)=2. α . 7 . β . 5 . γ =10 . 7 . α . β . γ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 43. *Λύσεις*: 'Εφαρμόζομεν τὴν ἰδ. (§384) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι : $(18+6) : 6 = (18 : 6) + (6 : 6) = 3 + 1 = 4$.

Γενίκευσις. 'Ομοίως $(\alpha + \delta) : \delta = (\alpha : \delta) + 1$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι : "Αν ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως αὐξηθῇ κατὰ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον αὐξάνεται κατὰ 1.

§ 44. *Λύσεις*: 'Εφαρμόζομεν τὴν ἰδ. (§ 385) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $(28-4) : 4 = 7 - 1 = 6$.

Γενίκευσις. 'Ομοίως $(\alpha - \delta) : \delta = (\alpha : \delta) - 1$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι : "Αν ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ 1.

§ 45. *Λύσεις*: "Αν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς $48 = (5 \times 9) + 3$ ἀφαιρέσωμεν τὸν 3, εὐρίσκομεν ὅτι : $48 - 3 = 5 \times 9$. 'Απὸ αὐτὴν ἐννοοῦμεν ἀμέσως ὅτι : $(48 - 3) : 5 = 9$ καὶ $(48 - 3) : 9 = 5$.

§ 46. *Λύσεις*: "Ετω Δ διαιρετέος, δ διαιρέτης, π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον. Γνωρίζομεν ὅτι $\Delta = (\delta \cdot \pi) + \upsilon$. "Αν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὸν υ, εὐρίσκομεν ὅτι $\Delta - \upsilon = \delta \cdot \pi$. 'Εξ αὐτῆς δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ διαίρεσις $(\Delta - \upsilon) : \delta$ εἶναι τελεία καὶ τὸ πηλίκον εἶναι πάλιν π. "Ωστε : "Αν ἀπὸ τὸν διαιρετὸν ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἡ δὲ διαίρεσις γίνεται τελεία.

§ 47. *Λύσεις*: Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πηλίκον 6, ἀλλὰ καὶ μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην 8. Θὰ εἶναι λοιπὸν 7 τὸ ὑπόλοιπον, ὃ δὲ διαιρετέος $(6 \times 8) + 7 = 55$.

§ 48. *Λύσεις*: 'Εφαρμόζομεν τὴν ἰδ. (§ 386) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $(15 \times 6) : 3 = 5 \times 6 = 30$.

Γενίκευσις: Ὁμοίως $(\Delta \cdot \mu) : \delta = (\Delta : \delta) \cdot \mu$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: *Ἄν μόνον ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως πολ/σθῇ ἐπὶ ἓνα ἀριθμὸν καὶ τὸ πηλίκον πολ/σεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.*

§ 49 *Ἀπόδειξις*: Ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 387) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $(13 \times 9 \times 7) : 7 = 13 \times 9$.

Ἐπειδὴ δὲ $9 = 10 - 1$, ἔπεται ὅτι $13 \times 9 = (10 - 1) \times 13 = 130 - 13$. Ἐπομένως $(13 \times 9 \times 7) : 7 = 130 - 13$.

§ 50. *Ἀπόδειξις*: Ἐφαρμόζομεν πρῶτον τὰς ιδ. (§ 388 καὶ 387) καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $(5 \times 9 \times 8 \times 11 \times 4) : (4 \times 10) = (5 \times 9 \times 8 \times 11) : 10$.

Ἐπειδὴ δὲ $5 \times 9 \times 8 \times 11 = 40 \times 99$, ἔπεται ὅτι $(5 \times 9 \times 8 \times 11) : 10 = (40 \times 99) : 10 = 4 \times 99$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι $(5 \times 9 \times 8 \times 11 \times 4) : (4 \times 10) = 4 \times 99$. Ἐπειδὴ δὲ $4 \times 99 = (100 - 1) \times 4 = 400 - 4$, ἔπεται ὅτι $(5 \times 9 \times 8 \times 11 \times 4) : (4 \times 10) = 400 - 4$. ἔ. ἔ. δ.

Σημ. Ἡ διαφορὰ $400 - 4$ νὰ διορθωθῇ εἰς $400 - 4$.

§ 51. *Λύσις*: Διαιροῦμεν διὰ 5 τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $5 \cdot y = 20 \cdot 3$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $y = (20 \cdot 3) : 5 = 4 \cdot 3 = 12$.

§ 52. *Λύσις*: Διαιροῦμεν διὰ 6 τὰ μέλη τῆς ἰσότητος καὶ εὐρίσκομεν $\alpha = 5 \times 3 = 15$.

§ 53. *Λύσις*: Ἐπειδὴ $3 \times 4 = 12$ καὶ $6 \times 2 = 12$, κατὰ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα ἡ δοθεῖσα ἰσότης γίνεται $\beta \cdot 12 = 8 \cdot 12$ καὶ ἐπομένως $\beta = 8$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 54. *Λύσις*: 1ον) $2^3 \times 2^5 \times 2^4 = 2^{12}$, $12 \times 12^4 \times 12^2 = 12^7$, $7 \times 7^3 \times 7^5 = 7^9$.
2ον) $3^4 \times 3 \times 3^5 = 3^9$, $5^3 \times 5^6 \times 5^2 = 5^{11}$, $4^3 \times 4 \times 4^6 = 4^{10}$.

§ 55. *Λύσις*: 1ον) $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$, $(7 \times 8 \times 6)^2 = 7^2 \times 8^2 \times 6^2 = 49 \times 64 \times 36$.

2ον) $(8 \times 7 \times 3)^2 = 8^2 \times 7^2 \times 3^2 = 64 \times 49 \times 9$, $(5 \times 2 \times 4 \times 5 \times 8)^2 = 5^2 \times 2^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 8^2 = 5^2 \times 8^4$, ἢ $(5 \times 2 \times 4 \times 5 \times 8)^2 = (5^2 \times 8^2)^2 = 5^4 \times 8^4$.

§ 56. *Λύσις*: 1ον) $(5 \times 6 \times 4)^3 = 5^3 \times 6^3 \times 4^3$, $(2 \times 3 \times 4 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3$, $(x \cdot y \cdot \omega)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot \omega^3$.

2ον) $(2 \times 3 \times 1)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 1^3$, $(10 \times 5 \times 2)^3 = 10^3 \times 5^3 \times 2^3$,
 $(3 \cdot \alpha \cdot \gamma)^3 = 3^3 \cdot \alpha^3 \cdot \gamma^3$.

§ 57. *Λύσις*: 1ον) Ἐπειδὴ $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$, εἶναι $4 \cdot 8 \cdot 64 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{11}$. Ὁμοίως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $25 = 5^2$, $125 = 5^3$. ἔπεται ὅτι $25 \cdot 125 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 5^7$.

2ον) Ἐπειδὴ $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, θὰ εἶναι $3 \cdot 27 \cdot 81 = 3 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^8$. Ἐπειδὴ δὲ $16 = 2^4$, $4 = 2^2$, $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$, θὰ εἶναι $16 \cdot 2^3 \cdot 4^2 = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{11}$.

§ 58. *Λύσις*: 1ον) Ἀναλύομεν τοὺς παράγοντας ἐκάστου γινομένου εἰς πρῶτους παράγοντας καὶ εὐρίσκομεν: 1ον) $18 = 2 \times 3^2$, $27 = 3^3$, $32 = 2^5$, $81 = 3^4$, ἐπομένως $18 \cdot 27 \cdot 32 \cdot 81 = 2 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3^4 = 2^6 \cdot 3^9$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $64 = 2^6$, εἶναι $27 \cdot 64 \cdot 81 = 3^3 \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 2^6 \cdot 3^7$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ἴνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

2ον) $25=5^2$, $8=2^3$, $125=5^3$, $32=2^5$ καὶ ἐπομένως $25 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 32 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5 = 2^8 \cdot 5^5$.

9=3², 25=5², 27=3³, 625=5⁴ καὶ ἐπομένως $9 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 625 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = 3^5 \cdot 5^6$.

• § 59. Λύσεις : 1ον) $2 \cdot 27 \cdot 16 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$.
81 · 16 · 625 = 3⁴ · 2⁴ · 5⁴ = (3 · 2 · 5)⁴ = 30⁴.

2ον) $8 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 125 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3$,

$27 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 243 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 3^5 = 2^8 \cdot 3^8 = (2 \cdot 3)^8 = 6^8$.

§ 60. Ἀπόδειξις : Π. χ. $30^2 = 30 \cdot 30$. Διὰ τὸ νὰ εὐρώμεν δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο, γράφομεν δεξιά τοῦ γινομένου 3×3 τὰ παραλειφθέντα δύο μηδενικά.

Β' τρόπος. Ἐπειδὴ $30 = 3 \times 10$, ἔπεται ὅτι $30^2 = (3 \times 10)^2 = 9 \times 100$ κλπ.

§ 61. Ἀπόδειξις : Ἀπὸ τὸν πολυμοὺν ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν του, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγει εἰς τὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν ἀπλῶν μονάδων του, ἥτοι τὸ τετράγωνον ἑνὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ, Ἐπειδὴ δὲ οὐδενὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2, 3, 7, 8, ἔπεται ὅτι οὐδενὸς ἀκεραίου τετράγωνον λήγει εἰς ἓν ἀπὸ τὰ ψηφία ταῦτα, ὅ. ἔ. δ.

§ 62. Ἀπόδειξις : 1ον) Τὸ τετραπλάσιον τοῦ 3² εἶναι 4 · 3². Ἐπειδὴ δὲ $4 = 2^2$. Ἐπεται ὅτι $4 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$. Γενικῶς : $4 \cdot \alpha^2 = 2^2 \cdot \alpha^2 = (2 \cdot \alpha)^2$.

2ον) Τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ α^3 εἶναι 8 · α^3 . Ἐπειδὴ δὲ $8 = 2^3$, ἔπεται ὅτι $8 \cdot \alpha^3 = 2^3 \cdot \alpha^3 = (2 \cdot \alpha)^3$.

§ 63. Ἀπόδειξις : 1ον) Γνωρίζομεν (§ 391) ὅτι $2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2$. Ἐπειδὴ δὲ $2^2 = 4$, ἔπεται ὅτι $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

2ον) Ὅμοίως $3^{n+3} = 3^n \cdot 3^3 = 27 \cdot 3^n$.

§ 64. Ἀπόδειξις : 1ον) Γνωρίζομεν (§ 394) ὅτι $5^{n-2} = 5^n : 5^2$ καὶ ἐπομένως $5^{n-2} = 5^n : 25$.

2ον) Κατὰ τὴν ιδ. (§ 392) εἶναι $2^{3n} = (2^3)^n$. Καὶ ἐπειδὴ $2^3 = 8$, ἔπεται ὅτι $2^{3n} = 8^n$.

3ον) Ὅμοίως $(5^3)^n = 5^{3n}$ καὶ $(5^n)^3 = 5^{3n}$, ἐπομένως $(5^3)^n = (5^n)^3$.

§ 65. Λύσεις : 1ον) Κατὰ τὴν ιδ. (§ 383) εἶναι $(2 \cdot \alpha^2) \cdot (3\alpha^3) \cdot 4\alpha = 2 \cdot \alpha^2 \cdot 3\alpha^3 \cdot 4\alpha$.

Κατὰ δὲ τὴν συνθετικὴν ιδιότητα εἶναι

$$2 \cdot \alpha^2 \cdot 3\alpha^3 \cdot 4\alpha = (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (\alpha^2 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha) = 24\alpha^6.$$

2ον) Ὅμοίως $(5X^2) \cdot (2X^3) \cdot (3X^4) = (5 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (X^2 X^3 X^4) = 30X^9$

§ 66. Λύσεις : 1ον) Ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 388) καὶ εὐρίσκομεν $9\alpha\beta^2 : (3\alpha) = (9\alpha\beta^2 : 3) : \alpha$. Κατὰ δὲ τὴν ιδ. (§ 386) εἶναι $9\alpha\beta^2 : 3 = 3\alpha\beta^2$ καὶ $3\alpha\beta^2 : \alpha = 3\beta^2$. Ἐπομένως $9\alpha\beta^2 : 3\alpha = 3\beta^2$.

2ον) Ὅμοίως $12\alpha^2\beta^3 : (4\alpha\beta) = [(12\alpha^2\beta^3 : 4) : \alpha] : \beta$

$$= [(3\alpha^2\beta^3) : \alpha] : \beta = 3\alpha\beta^3 : \beta = 3\alpha\beta^2.$$

3ον) $8\alpha^4 : 4 = 2\alpha^4$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

§ 67. *Δύσεις*: Διαιρούμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $3 \times 12 = 4 \times 9$ δι' ἐκά-
στου τῶν γινομένων 3×4 , 12×4 , 3×9 , 12×9 , ἑκαστον τῶν ὁποίων ἔχει
ἓνα παράγοντα ἀπὸ τὸ α' καὶ ἓνα ἀπὸ τὸ β' μέλος. Εὐρίσκομεν δὲ κατὰ
σειράν τὰς ἑξῆς ἀναλογίας $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$.

B' Τρόπος: 'Αφ' οὗ εὐρωμεν μίαν ἀναλογίαν π. χ. τὴν $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$
ἐφαρμόζομεν διαδοχικῶς καταλλήλους ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω
κατὰ τὴν ἰδ. (§ 401, I) εὐρίσκομεν $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ καὶ ἐξ αὐτῆς κατὰ τὴν ἰδ.
(§ 401, II) εὐρίσκομεν $\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$ κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην (§ 401, I) ἰδιό-
τητα ἐκ τῆς $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ εὐρίσκομεν $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$.

§ 68. *Δύσεις*: "Αν ὁ τέταρτος εἶναι X, ἡ ἀναλογία θὰ εἶναι $2:5=8:X$
καὶ ἐπομένως (§ 399, Iον) εἶναι $X = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$.

§ 69. *Δύσεις*: Διαιρούμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\gamma^2 = \alpha\beta$ διὰ τοῦ γινο-
μένου $\alpha\gamma$ καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$. "Αν δὲ τὰ ἴδια μέλη
διαιρέσωμεν διὰ $\beta\gamma$, εὐρίσκομεν $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Σημ. 'Η β' ἀναλογία προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς α' κατὰ τὴν ἰδ.
(§ 401, II).

§ 70. *Δύσεις*: 'Εφαρμόζομεν τοὺς κανόνας τῆς (§ 399) καὶ εὐρίσκομεν
1ον) $X = \frac{8 \cdot 9}{36} = 2$, $X = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2$, $X = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{8} = 2,025$.

2ον) $X = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{5 \cdot 4} = 5^2 = 25$, $X = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{2 \cdot 5}$

$X = \sqrt{45 \cdot 125} = \sqrt{3^2 \cdot 5 \cdot 4} = 3 \cdot 5^2 = 75$.

§ 71. *Δύσεις*: 1ον) "Αν μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 24, ἡ ἀναλογία θὰ
εἶναι $\frac{12}{24} = \frac{24}{X}$ καὶ ἐπομένως $X = \frac{24 \cdot 24}{12} = 48$.

"Αν δὲ μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 12, ἡ ἀναλογία θὰ εἶναι $\frac{24}{12} = \frac{12}{X}$
καὶ ἐπομένως $X = \frac{12 \cdot 12}{24} = 6$.

2ον) 'Ομοίως δυνατόν νὰ εἶναι $3:27=27:X$ καὶ $X = \frac{27 \cdot 27}{3}$
 $= 9 \cdot 27 = 243$ ἢ $27:3=3:X$ καὶ $X = \frac{3 \cdot 3}{27} = \frac{1}{3}$.

3ον) Ἐπίσης $12:36=36:X$ καὶ $X=\frac{36 \cdot 36}{12}=3 \cdot 36=108$.

ἢ $36:12=12:X$ καὶ $X=\frac{12 \cdot 12}{36}=4$.

§ 72. *Λύσεις*: "Αν τὸ β' οἰκόπεδον ἔχη ἐμβαδὸν x τετ. μέτρα, θὰ εἶναι $5:8=240,56:X$, ὅθεν $X=\frac{240,56 \cdot 8}{5}=384,896$ τετ. μέτρα. Ἐπομένως τὰ δύο οἰκόπεδα ἔχουσιν ἐμβαδὸν $240,56+384,896=625,456$ τετ. μέτρα.

Β' Τρόπος: Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{5}=\frac{X}{240,56}$ ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ.
(§402) καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{13}{5}=\frac{240,56+X}{240,56}$ καὶ ἐπομένως $240,56+X=\frac{13 \cdot 240,56}{5}=625,456$ τετ. μέτ.

§ 73. *Λύσεις*: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $17^{\circ}21'45''=62505''$ καὶ $11^{\circ}27'3''=41223''$. Ἐπομένως $\frac{17^{\circ}21'45''}{11^{\circ}27'3''}=\frac{62505}{41223}=\frac{20835}{13741}$.

§ 74. *Ἀπόδειξις*: 1ον) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, ἔπεται ὅτι $\alpha \cdot \delta=\beta \cdot \gamma$. "Αν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ δ^2 , εὐρίσκομεν $\alpha:\delta=\beta\gamma:\delta^2$, ὁ. ἔ. δ.

2ον) Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ διὰ τοῦ α καὶ εὐρίσκομεν $\frac{1}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha\delta}$ ἢ $1:\beta=\gamma:\alpha\delta$.

3ον) Πολλῶς ἐπὶ $\frac{\mu}{\nu}$ τὰ μέλη τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ εὐρίσκομεν $\frac{\alpha\mu}{\nu\beta}=\frac{\mu\gamma}{\nu\delta}$ ἢ $\mu\alpha:\nu\beta=\mu\gamma:\nu\delta$.

4ον) Ἐπειδὴ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, ἔπεται ὅτι $\alpha \cdot \delta=\beta \cdot \gamma$. "Αν δὲ πολλώσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ β , εὐρίσκομεν ὅτι $\alpha \cdot \beta \cdot \delta=\beta^2 \cdot \gamma$. "Αν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν $\beta \cdot \delta$, εὐρίσκομεν $\alpha \cdot \beta \cdot \delta-\beta \cdot \delta=\beta^2\gamma-\beta\delta$ καὶ μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν κοινῶν παραγόντων ἐκτὸς παρενθέσεως εὐρίσκομεν $(\alpha-1) \cdot \beta\delta=\beta(\beta\gamma-\delta)$. ὅθεν $(\alpha-1):\beta=(\beta\gamma-\delta):\beta\delta$.

§ 75. *Ἀπόδειξις*: 1ον) Γνωρίζομεν ὅτι οἱ ἀντίστροφοι τῶν λόγων τῆς ἀναλογίας $\alpha:\beta=\beta:\gamma$ εἶναι ἴσοι, ἥτοι $\beta:\alpha=\gamma:\beta$ ἢ $\gamma:\beta=\beta:\alpha$.

2ον) Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $\alpha:\beta=\beta:\gamma$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\alpha \cdot \gamma=\beta^2$. "Αν δὲ τὰ μέλη αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ γ^2 , εὐρίσκομεν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta^2}{\gamma^2}$ ἢ $\alpha:\gamma=\beta^2:\gamma^2$.

3ον) Ἀπὸ τὴν $\alpha \cdot \gamma=\beta^2$ εὐρίσκομεν ὅτι $\alpha \cdot \gamma-1=\beta^2-1$. Ἐπειδὴ δὲ $(\beta+1)(\beta-1)=\beta^2-1$, ἔπεται ὅτι $(\alpha\gamma-1)-1=(\beta+1)(\beta-1)$ καὶ ἐπομένως $(\alpha\gamma-1):(\beta-1)=(\beta+1):1$. ὁ. ἔ. δ.

§ 76. *Ἀπόδειξις*: Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἐφαρμόζομεν

τὴν ιδ. (§ 401, I) καὶ εὐρίσκομεν $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$. Ἐκ ταύτης δὲ κατὰ τὴν ιδ.

(§ 405) εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ ἢ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$.

2ον) Προηγουμένως ἀπεδείχθη ὅτι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$,

3ον) Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 401, i)

καὶ εὐρίσκομεν $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$. Εἰς αὐτὴν δὲ ἐφαρμόζομεν τὴν ιδ. (§ 404)

καὶ εὐρίσκουμεν $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} = \frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$.

4ον) Ἀπὸ τὴν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτουσιν εὐκόλως καὶ κατὰ σειρὰν

αἱ ἀναλογίαι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, $\frac{3\alpha}{4\gamma} = \frac{3\beta}{4\delta}$. Ἐκ ταύτης δὲ κατὰ τὴν προηγου-

μένην περίπτωσιν ἔπεται ὅτι $\frac{3\alpha+4\gamma}{3\alpha-4\gamma} = \frac{3\beta+4\delta}{3\beta-4\delta}$. ὁ. ἔ. δ.

Γ' ΜΕΡΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Λύσεις: 1ον. Κάθε ὄψις φύλλου τετραδίου εἶναι ἐπίπεδον, διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἐπὶ τῆς ὀψews ταύτης. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἂν γράψωμεν ἐπὶ τῆς ὀψews ταύτης τυχούσαν εὐθεῖαν γραμμὴν, αὕτη ὁλόκληρος κεῖται ἐπάνω εἰς αὐτήν.

2ον. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς κασσετίνας, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς κασσετίνας τεθλασμένη ἢ πολυεδρική ἐπιφάνεια.

§ 2. Λύσεις: 1ον. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς βόλου εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια, διότι δὲν ἔχει ἐπίπεδα μέρη.

2ον. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τεμαχίου σωλῆνος θερμάστρας εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

§ 3. Λύσεις: "Εν κυτίον μὲ μολύβια ἔχει τεθλασμένην ἢ πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν. "Εν μεταλλικὸν νόμισμα ἔχει μεικτὴν ἐπιφάνειαν. "Εν ῥὸν ἔχει καμπύλην ἐπιφάνειαν.

§ 4. Λύσεις: Ἡ γραμμὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα. Εἶναι λοιπὸν αὕτη τεθλασμένη γραμμὴ.

§ 5. Λύσεις: Τὸ Δ καὶ τὸ Σ σχηματίζει τεθλασμένην γραμμὴν. Τὸ Ο σχηματίζει καμπύλην καὶ τὸ Ω μεικτὴν γραμμὴν.

§ 6. Λύσεις: Τὸ νῆμα σχηματίζει καμπύλην γραμμὴν.

§ 7. Λύσεις: Τὸ μελανοδοχεῖον καὶ ὁ κονδυλοφόρος εἶναι στερεὰ σχήματα. Διότι, ὅταν θέτῳμεν αὐτὰ π.χ. ἐπὶ τῆς τραπέζης μας, βλέπομεν ὅτι δὲν κεῖνται εἰς αὐτὴν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν.

§ 8. Λύσεις: "Όλα τὰ σημεῖα τοῦ Δ καὶ τοῦ Π εὐρίσκονται εἰς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγράφησαν. Εἶναι λοιπὸν τὸ Δ καὶ τὸ Π ἐπίπεδα σχήματα.

§ 9. Λύσις: "Αν θέσωμεν ἐν μεταλλικὸν νόμισμα ἐπὶ τῆς τραπέζης μας, βλέπομεν ὅτι ἡ ἄνω ὀψις καὶ τὸ μεταξύ τῶν δύο ὀψεων μέρος αὐτοῦ εὐρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς τραπέζης. Τὸ μεταλλικὸν λοιπὸν νόμισμα εἶναι στερεὸν σχῆμα.

§ 10. Λύσις: 1ον. Εἰς μαθητῆς δύναται νὰ δεῖξη τὴν ὀροφήν, τὸ πάτωμα, τὴν δεξιάν του πλευράν, τὴν ἀριστεράν, τὴν ἐμπροσθεν καὶ τὴν ὀπισθὲν του πλευράν. Τὸ ὅλον ἔξεδρας τῆς αἰθούσης.

2ον. "Άλλος μαθητῆς δεικνύει ἀνὰ μίαν, μίαν τέσσαρας κορυφὰς εἰς τὴν ὀροφήν καὶ ἄλλας 4 εἰς τὸ πάτωμα. Τὸ ὅλον 8 κορυφὰς τῆς αἰθούσης.

3ον. Τρίτος μαθητῆς δεικνύει 4 ἄκμᾶς ἐπάνω εἰς τὸ πάτωμα, ἄλλας 4 εἰς τὴν ὀροφήν καὶ ἄλλας 4 μεταξύ τοῦ πατώματος καὶ τῆς ὀροφῆς. Τὸ ὅλον 12 ἄκμᾶς τῆς αἰθούσης.

§ 11. Λύσις: 1ον. Εἰς μαθητῆς κρατῶν εἰς χεῖράς του τὸ κυτίον δεικνύει καὶ ἀριθμεῖ τὴν ἄνω, τὴν κάτω, τὴν δεξιάν, τὴν ἀριστεράν ἔδραν καὶ τὰς ἔδρας μεταξύ τῆς δεξιᾶς καὶ ἀριστερᾶς. Τὸ ὅλον 6 ἔδρας τοῦ κυτίου.

2ον. "Ο αὐτὸς μαθητῆς δεικνύει καὶ ἀριθμεῖ τὰς 4 κορυφὰς, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται εἰς τὴν κάτω ἔδραν καὶ ἄλλας 4 εἰς τὴν ἄνω ἔδραν. Τὸ ὅλον 8 κορυφὰς τοῦ κυτίου.

3ον. Τέλος κάμνει τὸ ἴδιον διὰ τὰς 4 ἄκμᾶς τῆς κάτω ἔδρας, ἄλλας 4 τῆς ἄνω ἔδρας καὶ ἄλλας 4 μεταξύ τῶν ἑδρῶν τούτων. Τὸ ὅλον 12 ἄκμᾶς τοῦ κυτίου.

§ 12. Λύσις: "Ο κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅπως τὸ κυτίον μὲ τὰς κιμωλίας. Τὰ προηγούμενα λοιπὸν συμπεράσματα ἀληθεύουσιν καὶ διὰ τὸν κύβον. "Ητοι: "Ο κύβος ἔχει 6 ἔδρας, 8 κορυφὰς, 12 ἄκμᾶς.

§ 13. Λύσις: 1ον. Εἰς μαθητῆς δεικνύει καὶ ἀριθμεῖ τὴν ἔδραν δ καὶ τρεῖς ἄλλας τῆς πυραμίδος Δ (Σχ. 7 τῆς Γεωμετρίας). "Επειτα 3 κορυφὰς ἐπὶ τῆς ἔδρας δ καὶ μίαν ἀπέναντι αὐτῆς. Τέλος 3 ἄκμᾶς ἐπὶ τῆς ἔδρας δ καὶ ἄλλας 3, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν κορυφήν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ἔδρας δ. "Η πυραμὶς Δ ἔχει λοιπὸν 4 ἔδρας, 4 κορυφὰς καὶ 6 ἄκμᾶς.

2ον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκομεν ὅτι ἡ πυραμὶς Ε (σχῆμα 7 Γεωμετρίας) ἔχει 5 ἔδρας, 5 κορυφὰς καὶ 8 ἄκμᾶς.

§ 14. Λύσις: Θέτομεν τὸν κηρὸν ἐπὶ τῆς τραπέζης μας καὶ μὲ μίαν ἐπίπεδον λεπίδα κάθετον ἐπὶ τὴν τράπεζαν κάμνομεν δύο παραλλήλους τομὰς αὐτοῦ καὶ ἄλλας δύο καθέτους πρὸς τὰς πρώτας. "Επειτα γυρίζομεν τὸν κηρὸν καὶ στηρίζομεν αὐτὸν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας τομὰς καὶ κάμνομεν ἄλλας δύο τομὰς καθέτους εἰς τὰς ἄλλας.

§ 15. Λύσις: τὸ στερεὸν π.χ. Κ (σχῆμα 8 Γεωμετρίας) εἶναι κύλινδρος. "Ο μαθητῆς δεικνύει τὰς δύο βάσεις Α καὶ Β

αὐτοῦ καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξύ τῶν βάσεων. Νοεῖ δὲ καὶ τὸ ὕψος AB αὐτοῦ.

§ 16. Λύσις: Τὸ στερεὸν Λ (σχῆμα 8 Γεωμετρίας) εἶναι κῶνος μετὰ βᾶσιν Γ , κορυφὴν A καὶ μεταξύ αὐτῶν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἐντὸς δὲ αὐτοῦ νοεῖται τὸ ὕψος AG .

Τὸ στερεὸν M (σχ. 8 Γεωμετρίας) εἶναι κόλουρος κῶνος. B καὶ βεῖναι αἱ δύο βάσεις τοῦ καὶ μεταξύ αὐτῶν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ἐντὸς δὲ αὐτοῦ νοεῖται καὶ τὸ ὕψος τοῦ BB αὐτοῦ.

§ 17. Λύσις: Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι μία εὐθεῖα τοῦ κανόνος ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου κατὰ μίαν διεύθυνσιν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ. Ἐπίσης ἐφαρμόζει καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου κατὰ μίαν διεύθυνσιν.

§ 18. Βλέπομεν ὅτι τὸ νῆμα τότε ἀποτελεῖ καμπύλην γραμμὴν.

§ 19. Λύσις: Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν κυλίνδρων, κώνων καὶ κολ. κώνων εἶναι στερεὰ σχήματα. Διότι, ἂν μίαν ἀπὸ αὐτὰς στηρίξωμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης μας, βλέπομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς τραπέζης ταύτης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α' — ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

§ 20. Λύσις: Ἀφ' οὗ μετὰ δύο τελείας στιγμὰς ὀρίσωμεν δύο σημεῖα A καὶ B , γράφομεν τὴν εὐθεῖαν AB μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 10 τῆς Γεωμετρίας.

§ 21. Λύσις: Ἀφ' οὗ χρωματίζωμεν τὸ νῆμα μετὰ τὴν κόνιν τῆς κιμωλίας. τεντώνομεν αὐτοῦ ἐπάνω εἰς τὸ πάτωμα καὶ συνεχίζομεν, ὅπως εἰς τὴν (§ 13 Β') τῆς Γεωμετρίας ἀναγράφεται.

§ 22. Λύσις: Εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ χαρακωμένου τετραδίου μετὰ δύο τελείας στιγμὰς ὀρίζομεν δύο σημεῖα A καὶ B . Ἐπειτα δὲ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης ὀρίζομεν ὁμοίως ἓνα ἄλλο σημεῖον Γ . Ἐπειτα μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος γράφομεν τὰς εὐθείας AB , $B\Gamma$, GA , ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 10 τῆς Γεωμετρίας.

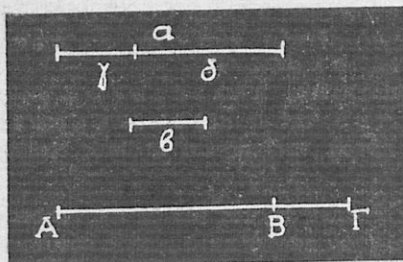
§ 23. Λύσις: Γράφομεν δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β (σχ. 1) καὶ μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου βλέπομεν ὅτι $\alpha > \beta$.

1) Ἐπειτα εἰς μίαν εὐθεῖαν AD ὀρίζομεν ἐν τμήμα $AB = \alpha$ καὶ ἄλλο $B\Gamma = \beta$. Εἶναι δὲ προφανῶς $\alpha + \beta = AG$.

2) 'Από δὲ τὸ ἐν ἄκρον τοῦ α ὀρίζομεν ἐπ' αὐτοῦ τμήμα $\gamma = \beta$.

"Αν νοήσωμεν ὅτι ἀποκόπτομεν τοῦτο, μένει ἓνα τμήμα δ. Εἶναι δὲ

$$\alpha - \beta = \alpha - \gamma = \delta.$$



Σχ. 1.

§ 24. Λύσεις. Γρά-

φομεν τυχὸν εὐθ. τμήμα ΑΒ. ἔπειτα ἄλλο τμήμα ΒΓ=ΑΒ.2 καὶ ἄλλο ΓΔ=ΑΒ.3 προσέχοντες τὰ 3 ταῦτα τμήματα νὰ ἀποτελῶσι μίαν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ. Ἐπειτα ἐπὶ μιᾷς εὐθείας ΕΛ ὀρίζομεν μὲ τὸν διαβήτην κατὰ σειρὰν

τμήματα ΕΖ = ΑΒ, ΖΗ = ΒΓ, ΗΘ = ΓΔ. Τὸ τμήμα ΕΘ εἶναι τὸ ἄθροισμα, τῶν πλευρῶν ἦτοι ἡ περίμετρος αὐτῆς.

§ 25. Λύσεις: Προφανῶς ΑΒ+ΒΓ=ΕΗ. Διὰ δὲ τοῦ διαβήτου βλέπομεν ὅτι ΕΗ=ΓΔ. Ἐπομένως ΑΒ+ΒΓ=ΓΔ.

§ 26. Λύσεις: Διὰ τοῦ διαβήτου βεβαιούμεθα ὅτι τὸ ΒΔ χωρεῖ δυὸ φορές εἰς τὸ ΓΕ. Εἶναι λοιπὸν ΓΕ=ΒΔ×2.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

§ 27. Λύσεις: Ἐπειδὴ 1 μέτρ.=10 παλ.=100 δακτ.=1000 γραμ., ἔπειτα ὅτι τὰ 7 μέτρα ἔχουσι $10 \times 7 = 70$ παλ., $100 \times 7 = 700$ δακ., $1000 \times 7 = 7000$ γραμ. Τὰ 12 μέτρα ἔχουσι $10 \times 12 = 120$ παλ., $100 \times 12 = 1200$ δακ., $1000 \times 12 = 12000$ γραμ. Τὰ δὲ 3,45 μέτρα ἔχουσιν $10 \times 3,45 = 34,5$ παλ., $100 \times 3,45 = 345$ δακ., $1000 \times 3,45 = 3450$ γραμμᾶς.

§ 28. Λύσεις. Ἐπειδὴ 1 παλ.=10 ἑκατοστόμετρα = 100 χιλιοστόμ., αἱ 8,4 παλ. ἔχουσι $10 \times 8,4 = 84$ ἑκατοστόμ. καὶ $100 \times 8,4 = 840$ χιλιοστόμ.

§ 29. Λύσεις: Ἐπειδὴ 10 παλ. ἀποτελοῦσιν 1 μέτρον, αἱ 30 παλ. ἀποτελοῦσι τόσα μέτρα, ὅσας φορές χωροῦσιν αἱ 10 παλ. εἰς τὰς 30 παλ., ἦτοι $30 : 10 = 3$ μέτρα,

Ὁμοίως αἱ 15 παλ. ἀποτελοῦσι $15 : 10 = 1,5$ μέτρα.

§ 30. Λύσεις: Ἐπειδὴ 100 ἑκατοστόμετρα ἀποτελοῦσιν 1 μέτρον, τὰ 500 ἑκατοστόμετρα ἀποτελοῦσι $500 : 100 = 5$ μέτρα,

Ὁμοίως τὰ 425 ἑκατοστ. ἀποτελοῦσι $425 : 100 = 4,25$ μέτρα καὶ τὰ 3167,4 ἑκατοστ. ἀποτελοῦσι $3167,4 : 100 = 31,674$ μέτρα.

§ 31. Λύσεις. Ἐπειδὴ 1 παλ.=100 χιλιοστ., τὰ 800 χιλιοστ. ἀποτελοῦσιν $800 : 100 = 8$ παλάμας.

Τὰ 64 χιλιοστ. ἀποτελοῦσιν $64 : 100 = 0,64$ παλ. καὶ τὰ 7 χιλιοστ. ἀποτελοῦσιν $7 : 100 = 0,07$ παλ.

§ 32. Λύσεις: Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον ὀρίζομεν τμῆμα ΑΒ μήκους 5 ἑκατοστομ, ἄλλο ΒΓ μήκους 120 χιλιοστ. $= 120 : 10 = 12$ ἑκατ. καὶ ἄλλο ΓΔ μήκους 1,3 παλ. $= 1,3 \times 10 = 13$ ἑκατοστ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Α' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 33 - 34. Αἱ μετρήσεις αὐταὶ γίνονται μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον.

§ 35 - 38. Αἱ μετρήσεις αὐταὶ γίνονται μὲ τὴν ταινίαν.

§ 39. Λύσεις: Ἡ α' πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,05 μέτ, ἡ β' $0,05 \times 2 = 0,10$ μέτ. καὶ ἡ γ' $0,05 \times 3 = 0,15$ μ. Ἐπομένως τὸ μῆκος τῆς τεθλ. γραμμῆς εἶναι $0,05 + 0,10 + 0,15 = 0,30$ μέτρ.

§ 40. Λύσεις: Ἡ α' πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,60 μέτ, ἡ β' $0,60 : 4 = 0,15$ μέτ, ἡ γ' $0,60 : 3 = 0,20$ μέτ. καὶ ἡ δ' 0,60 μέτ. Ἐπομένως ἡ περίμερος αὐτῆς εἶναι $0,60 + 0,15 + 0,20 + 0,60 = 1,55$ μέτ.

§ 41. Λύσεις: Ἀφ' οὗ αἱ 3 πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 56 ἑκατοστ, ἡ δὲ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μῆκος 30 ἑκατ., αἱ δύο ἄλλαι μαζὶ ἔχουσι μῆκος $56 - 30 = 26$ ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη ἔχει μῆκος $26 : 2 = 13$ ἑκατ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΩΝ ἢ ΠΛΑΓΙΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 42. Λύσεις: Ἀφ' οὗ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν ΑΒ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ ΑΓ τὴν ἄλλην καὶ μέσα εἰς τὴν γωνίαν πλησίον τῆς κορυφῆς γράφομεν ἓν μικρὸν γράμμα, π.χ. τὸ ω. Ὀνομάζομεν δὲ τὴν γωνίαν ταύτην Α ἢ ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ ἢ ω.

§ 43. Λύσεις: Ἐγγίζομεν ἓν ἄκρον τοῦ ἑνὸς εἰς ἓν ἄκρον τοῦ ἄλλου σύρματος προσέχοντες νὰ μὴ ἀποτελῶσι ταῦτα εὐθείαν γραμμὴν.

§ 44. Λύσεις: Τὸ σημεῖον σὺν (+) σχηματίζεται ἀπὸ καθέτους εὐθείας. — Τὸ δὲ ἐπὶ X καὶ τὸ σημεῖον ἀνισότητος (< ἢ >) σχηματίζονται ἀπὸ πλαγίας εὐθείας.

§ 45. Λύσεις: Τὰ γράμματα Γ, Ε, Η, Π, Τ ἔχουσι καθέτους εὐθείας. — Τὰ δὲ Α, Δ, Ζ, Λ, Μ, Ν, Χ ἔχουσι πλαγίας εὐθείας.

§ 46. Λύσεις: Αἱ γωνίαι τῶν ὑαλοπινάκων τῶν παραθύρων εἶναι ὀρθαί. Βεβαιούμεθα δὲ περὶ αὐτοῦ μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς φύλλου τοῦ τετραδίου μας.

§ 47. Λύσεις: Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ πατώματος εἶναι ὀρθαί.

§ 48. Λύσεις: Αἱ κατασκευαὶ αὐταὶ γίνονται μὲ τὴν βοήθειαν

τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 17 τῆς Γεωμετρίας (§ 24 Γεωμ.).

§ 49. Λύσεις: Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος κατὰ τὰ γνωστά (§ 24 Γεωμ.).

§ 50. Λύσεις: Εὐθεῖαι ὡς αἱ AB, ΓΔ (σχ. 16 Γεωμ.) εἶναι κάθετοι. Ἄλλαι δέ, ὡς αἱ EZ, ΗΘ εἶναι πλάγαι. Περὶ τούτων εὐκόλως βεβαιούμεθα μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος.

§ 51. Λύσεις: Τὰς καθέτους εὐθείας γράφομεν μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος. Ἐπειτα δὲ τὰ ἴσα τμήματα OA, OB ὀρίζομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου. Ἄν δὲ τὸ Γ εὐρίσκηται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β, μετὰ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι $GA > GB$. Ἄν δὲ εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α, βλέπομεν ὅτι $GB > GA$.

§ 52. Λύσεις: Ἄν εἶναι Α ἡ κορυφή τῆς γωνίας, Δ τὸ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον, μετὰ τὸν κανόνα καὶ τὸν γνώμονα γράφομεν εὐθεῖαν ΔΒ κάθετον εἰς τὴν μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας καὶ εὐθεῖαν ΔΓ κάθετον εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν. Αὗται αἱ κάθετοι δὲν σχηματίζουν μίαν εὐθεῖαν, διότι, ἂν συνέβαινε τοῦτο, ἀπὸ τοῦ σημείου Α θὰ ἦγοντο δύο κάθετοι AB καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Τοῦτο δὲ εἶναι ἄτοπον (§ 25 Α' Γεωμετρ.).

§ 53. Λύσεις: Γράφομεν μίαν εὐθεῖαν, ἣ ὁποία νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ τοῦ ὀρισθέντος σημείου Α. Ἐπάνω δὲ εἰς αὐτὴν ὀρίζομεν ἓν τμήμα AB μήκους 5 ἑκατοστομέτρων μετὰ τὸ ὑποδεκάμετρον. Ἐπειτα γράφομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ νὰ περνᾷ ἀπὸ τοῦ Β. Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

§ 54. Λύσεις: Εὐθεῖαι, ὡς αἱ AB, ΓΔ (σχ. 16 Γεωμετρ.), σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας. Εὐθεῖαι δέ, ὡς αἱ EZ, ΗΘ (σχ. 16 Γεωμ.) σχηματίζουν δύο ὀξείας γωνίας EKH, ΘΚΖ καὶ δύο ἀμβλείας ΕΚΘ, ΗΚΖ. Περὶ τούτων βεβαιούμεθα, ἂν εἰς κάθε μίαν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ γνώμονος.

§ 55. Λύσεις: Ἡ γωνία τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς πλευράς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ὀρθή, ὡς διὰ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα.

§ 56. Λύσεις: Ἄν ἡ γωνία εἶναι ὀξεία, ἡ γωνία τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀμβλεία, διότι ἡ ὀρθὴ γωνία τοῦ γνώμονος καλύπτει ἓν μέρος αὐτῆς.

§ 57. Λύσεις: Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς ὀρισθείσης εὐθείας, π.χ. ΒΔ (σχῆμα 22 Γεωμετρ.), φέρομεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΒΑ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος εὐθεῖαν ΒΓ, Αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΔΒΓ εἶναι ἐφεξῆς μετὰ κοινὴν πλευρὰν ΒΔ.

§ 58. Λύσεις: Ἄν EZ, ΗΘ εἶναι αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι (σχ. 16 Γεωμετρ.), αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι:

1) ΕΚΘ, ΘΚΖ, 2) ΘΚΖ, ΖΚΗ, 3) ΖΚΗ, ΗΚΕ καὶ 4) ΗΚΕ, ΕΚΘ.

Ἡ ἐκδόσις τοῦ βιβλίου ἐγένετο ἐκ τῆς ἐπιμέλειας τοῦ Ἰνστιτούτου Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 59. Λύσεις: Αἱ γωνίαι ΕΚΘ, ΘΚΖ, ΖΚΗ, ΗΚΕ λέγονται διαδοχικαὶ γωνίαι, διότι κάθε μία καὶ ἡ ἐπομένη ἢ ἡ προηγούμενη εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι (§ 28 Β' Γεωμετρ.)

§ 60. Λύσεις: Αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΔΕΗ (σχ. 21 Γεωμετρ.) δὲν εἶναι ἐφεξῆς. Διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΕΖ, ΕΗ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΕΔ.

§ 61. Λύσεις: "Αν π.χ. σχηματίσωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΛΗΜ (σχῆμα 23 α' Γεωμ.), πρέπει νὰ φέρωμεν εὐθεΐαν ΗΙ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΗΛ. Ἡ γωνία ΙΗΛ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ΛΗΜ. Διότι $\hat{\Lambda}\hat{H}M + \hat{I}\hat{H}M = 1$ ὀρθή.

§ 62. Προφανῶς ἡ συμπληρωματικὴ τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι 1 ὀρθ. $-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

§ 63. Λύσεις: "Αν σχηματίσωμεν τὴν ΛΗΜ (σχ. 21 α' Γεωμ.), πρέπει νὰ προεκτείνωμεν πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς μίαν πλευρὰν, π.χ. τὴν ΗΜ. Ἡ προέκτασις ΗΖ καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΗΛ σχηματίζουν τὴν ζητούμενην γωνίαν ΖΗΛ. Διότι $\hat{M}\hat{H}\Lambda + \hat{\Lambda}\hat{H}Z = 2$ ὀρθ. (§ 29 Β' Γεωμ.).

§ 64. Λύσεις: Ἡ ζητούμενη καὶ $\frac{3}{8}$ ὀρθ. ἀποτελοῦσι 2 ὀρθ. Ἐπομένως ἡ ζητούμενη εἶναι 2 ὀρθ. $-\frac{3}{8}$ ὀρθ. $= 1\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 1\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$ ὀρθῆς.

§ 65. Λύσεις: "Ὅπως προηγουμένως, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ζητούμενη γωνία εἶναι $2 - 1\frac{3}{8} = 1\frac{8}{8} - 1\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ ὀρθῆς.

§ 66. Λύσεις: Ἡ ζητούμενη γωνία καὶ ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα ἀποτελοῦσι μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Μόνη λοιπὸν ἡ ζητούμενη εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἥτοι εἶναι ὀξεῖα γωνία.

§ 67. Λύσεις: 1) "Αν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι ὀξεῖα, δηλ. μικροτέρα ὀρθῆς, πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὴν μεγαλυτέρα ὀρθῆς, διὰ νὰ γίνῃ ἄθροισμα 2 ὀρθῶν γωνιῶν. Ἡ παραπληρωματικὴ ὀξείας γωνίας εἶναι λοιπὸν ἀμβλεία γωνία. Π.χ. τῆς ὀξείας ΜΗΛ παραπληρωματικὴ εἶναι ἡ ἀμβλεία γωνία ΛΗΖ (σχ. 23 α' Γεωμ.). 2) Εἰς δὲ ἀμβλείαν γωνίαν πρέπει νὰ προστεθῇ γωνία μικροτέρα ὀρθῆς, διὰ νὰ γίνῃ ἄθροισμα 2 ὀρθῶν γωνιῶν. Ἡ παραπληρωματικὴ ἀμβλείας γωνίας εἶναι λοιπὸν ὀξεῖα. Π.χ. τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΚΓ παραπληρωματικὴ εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία ΓΚΒ (σχῆμα 23 β' Γεωμ.).

§ 68. Λύσεις: Γνωρίζομεν (§ 29 Β' Γεωμ.) ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθ. "Αν δὲ εἶναι ἴσαι, κάθε μία θὰ εἶναι 2 ὀρθ. $: 3 = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας.

§ 69. Λύσις: "Αν ή μία είναι $\frac{3}{8}$ όρθ., αϊ άλλαι δύο θα έχω-
σιν άθροισμα 2 όρθ. $-\frac{3}{8}$ όρθ. $= 1\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 1\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$ όρθης γω-
νίας. "Αν δέ αῖται είναι ίσαι, κάθε μία θα είναι $\frac{13}{8} : 2 = \frac{13}{16}$ όρθ.

§ 70. Λύσις: Γνωρίζομεν (§ 29 Β' Γεωμ.) ότι αϊ τρεις αῖται
γωνίαι έχουσιν άθροισμα 4 όρθάς γωνίας. "Αν δέ είναι ίσαι, έκάστη
θα είναι 4 όρθ. : 3 $= \frac{4}{3}$ όρθ. $= 1\frac{1}{3}$ όρθ.

§ 71. Λύσις: "Αφ' οῦ σχηματίζωμεν μιαν γωνίαν, π.χ. την η
(σχήμα 24 Γεωμ.), προεκτείνωμεν τὰς πλευράς αὐτῆς πέραν τῆς κορυ-
φῆς. Αἱ προεκτάσεις αῖται σχηματίζουνσι μιαν γωνίαν θ, ή οποία είναι
ίση πρὸς την η, διότι είναι κατὰ κορυφήν αὐτῆς (§ 32 Γεωμ.).

§ 72. Λύσις: Γνωρίζομεν (§ 32 Γεωμ.) ότι πᾶσα γωνία είναι
ίση μετὴν κατὰ κορυφήν της. "Επομένως ή κατὰ κορυφήν ὀξείας γωνίας
είναι ὀξεία γωνία, ὀρθῆς δέ είναι ὀρθή καὶ ἀμβλείας είναι
ἀμβλεία γωνία.

§ 73. Λύσις: "Αφ' οῦ μία είναι $\frac{1}{2}$ όρθ, ή κατὰ κορυφήν
αὐτῆς είναι επίσης $\frac{1}{2}$ όρθ., διότι είναι ίση πρὸς ἐκείνην. Αἱ δύο λοι-
πὸν αῖται έχουσιν άθροισμα $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ όρθ. "Επειδὴ δέ αἱ 4 γωνίαι
έχουσιν άθροισμα 4 όρθ. αἱ άλλαι δύο κατὰ κορυφήν γωνίαι έχουσιν
άθροισμα $4-1=3$ όρθ. "Επειδὴ δέ είναι ίσαι, έκάστη είναι 3 όρθ. : 2 $=$
 $= \frac{3}{2}$ όρθ. $= 1\frac{1}{2}$ όρθ.

§ 74. Λύσις: "Επειδὴ ή η είναι ίση μετὴν θ ὡς κατὰ κορυ-
φήν αὐτῆς, ή η θα ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς θ. Καὶ ἀφ' οῦ ή πλευρὰ ΒΔ θα
ἀφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΕ, ή πλευρὰ ΒΑ θα ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ (σχ. 24
Γεωμετρ.).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Β' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 75. Λύσις: "Απὸ τὸ σημεῖον Γ π.χ. φέρομεν εὐθεῖαν ΓΔ
κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ (σχ. 18 γ' Γεωμ.). "Επειτα μετροῦμεν μετὸ
ὕποδεκάμετρον τὸ τμήμα ΓΔ αὐτῆς.

§ 76. Λύσις: "Αν Ο είναι τὸ κοινὸν σημεῖον δύο καθέτων
εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, εἰς τὴν ΑΒ π.χ. μετὴν βοήθειαν τοῦ ὕποδεκαμέ-
τρου ὀρίζομεν ἐν τμήμα ΟΕ μήκους 3 ἑκατοστομ. καὶ ἄλλο ΟΖ ἴσον
μετὸ ΟΕ. Τὰ σημεία Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ ζητούμενα.

§ 77. Λύσις: Τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ θέλομεν νὰ ἀπέχη
ἴσον ἀπὸ τὰ σημεία Α καὶ Γ. Πρέπει λοιπὸν νὰ κείται ἐπὶ τῆς εὐ-
ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

θείας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τμήμα ΑΓ εἰς τὸ μέσον Β αὐτοῦ. Γράφομεν λοιπὸν τὴν κάθετον ταύτην ἂν δὲ αὕτη τέμνῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς ἓν σημεῖον Δ, τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον,

Σ η μ. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, βλέπομεν ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ δὲν συναντᾷ τὴν ἄλλην πλευρὰν. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν σημεῖον Δ, ἥτοι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεία γωνία, τὸ Δ κείται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

§ 78. Λύσις: Ἐὰν π.χ. σχηματίσωμεν ἀμβλείαν γωνίαν ΑΒΔ (σχ. 22 β' Γεωμ.), φέρομεν ἐντὸς αὐτῆς εὐθείαν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν πλευρὰν ΑΒ τῆς γωνίας. Οὕτω δὲ σχηματίζεται ἐντὸς αὐτῆς ἡ ὀρθή γωνία ΑΒΕ. Εἶναι δὲ ΑΒΔ—ΑΒΕ=φ, ἥτοι φ εἶναι ἡ ζητούμενη διαφορὰ.

§ 79. Λύσις: Ἐὰν ἡ γωνία εἶναι $\frac{1}{5}$ ὀρθ, ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς εἶναι $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ ὀρθ. Ἐπομένως ἡ ζητούμενη διαφορὰ εἶναι $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ ὀρθῆς.

§ 80. Λύσις: Ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ ἡ παραπληρωματικὴ τῆς, ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι διπλασία τῆς παραπληρωματικῆς, τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τριπλάσιον τῆς παραπληρωματικῆς. Ἐπομένως ἡ παραπληρωματικὴ εἶναι 2 ὀρθ.: $3 = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Ἡ δὲ δοθεῖσα εἶναι $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$ ὀρθ.

§ 81. Λύσις: Ἐὰν ἡ μία γωνία εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθ, ἡ παραπληρωματικὴ τῆς εἶναι 2 ὀρθ. $-\frac{3}{4}$ ὀρθ. $= 1\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ὀρθ. Ἡ δὲ ζητούμενη διαφορὰ εἶναι $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

§ 82. Λύσις: Εὐκόλως διακρίνομεν ὅτι καὶ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀξεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 83. Λύσις: Αἱ παράλληλοι αὗται γράφονται κατὰ τὰ γνωστὰ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος (§ 34 Γεωμ.).

§ 84. Λύσις: Ἐὰν ὀρίσωμεν μὲ τελείας στιγμὰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποία νὰ μὴ κείνται εἰς μίαν εὐθείαν, γράφομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἐπειτα γράφομεν μίαν εὐθείαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ση. Α· ἔπειτα εὐθείαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ

Β και τέλος παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Γ (§ 34 Γεωμ.).

§ 85. Λύσεις: "Αν ἐργασθῶμεν, ὅπως ἀναγράφεται εἰς τὴν (§ 36 Γεωμ.), βεβαιούμεθα ὅτι: Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξὺ τῶν πα-
ράλληλοι.

§ 86. Λύσεις: "Εστω ὅτι ἐγράψαμεν τὸ τμήμα ΑΔ (σχῆμα 29 Γεωμ.). Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὸ μέσον αὐτοῦ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Φέρο-
μεν ἀπὸ τὸ ἐν ἄκρον αὐτοῦ, π.χ. ἀπὸ τὸ Α, μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΑΒ καὶ
μὲ τὸν διαβήτην ὀρίζομεν εἰς αὐτὴν δύο ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα ΑΖ
καὶ ΖΗ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΗΔ καὶ ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον πρὸς
αὐτήν. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Μὲ τὸν
διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ΑΓ=ΓΔ. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι λοιπὸν τὸ μέ-
σον τοῦ ΑΔ.

§ 87. Λύσεις: Εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ ὀρίζομεν τμήμα ΓΖ ἴσον
μὲ τὸ ΑΓ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΖΒ καὶ ἀπὸ τὸ Γ παράλληλον
πρὸς αὐτήν. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ ζητού-
μενον σημεῖον Δ. Πράγματι μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι ΑΔ=ΔΒ.
Ἐπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς αὐτήν.
Βλέπομεν δὲ μὲ τὸν διαβήτην ὅτι ΑΕ=ΕΓ. Τὸ Ε λοιπὸν εἶναι τὸ μέσον
τοῦ ΑΓ.

§ 88. Λύσεις: Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι τὸ τμήμα ΔΕ
χωρεῖ δύο φορές εἰς τὸ ΒΓ. "Αν δὲ ἐργασθῶμεν, ὅπως ἀναγράφεται
εἰς τὴν (§ 36 Γεωμ.), βεβαιούμεθα ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΔΕ εἶναι πα-
ράλληλοι.

§ 89. Λύσεις: "Αν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι δύο εὐθεῖαι τοῦ τετρα-
δίου (σχ. 30 Γεωμ.) γράφομεν τὸ τμήμα ΙΚ κάθετον ἐπ' αὐτάς καὶ τὸ
μετροῦμεν διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου.

§ 90. Λύσεις: Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμο-
νος γράφομεν δύο παραλλήλους εὐθείας κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 34 Γεωμ.).
Τὴν δὲ ἀπόστασιν αὐτῶν γράφομεν καὶ μετροῦμεν, ὅπως εἰς τὸ προη-
γούμενον πρόβλημα εἴπομεν.

§ 91. Λύσεις: 'Αφ' οὗ γράψωμεν μίαν εὐθεῖαν μὲ τὸν κα-
νόνα, φέρομεν ἀπὸ ἐν σημεῖον Α αὐτῆς εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν πρῶ-
την. Ἐπειτα ἐπάνω εἰς αὐτήν τὴν κάθετον ὀρίζομεν ἐν τμήμα ΑΒ μή-
κους 3 ἑκατοστ. Ἀπὸ δὲ τὸ Β φέρομεν εὐθεῖαν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν
ΑΒ. Ἡ ΒΓ εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

Σημ. "Αν τὸ τμήμα ΑΒ λάβωμεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς πρώτης εὐ-
θείας, γράφομεν καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς αὐτήν εἰς ἀπόστασιν 3 ἑκατοστ.
Τὸ πρόβλημα ἔχει λοιπὸν δύο λύσεις.

§ 92. Λύσεις: 'Αφοῦ γράψωμεν τὰς δύο παραλλήλους εὐ-
θείας, φέρομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ αὐτῶν. Ἐπειτα ὀρίζομεν τὸ μέσον
ἡφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ἴνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Γ τοῦ ΑΒ καὶ φέρομεν εὐθεΐαν ΓΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ΓΖ εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεΐα.

§ 93. Λύσεις: Ἀφοῦ $\alpha = \frac{1}{2}$ ὀρθ. καὶ $\alpha = \gamma = \varepsilon = \theta$ (§ 40 Γεωμ.), ἔπεται ὅτι καὶ $\gamma = \varepsilon = \theta = \frac{1}{2}$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha + \beta = 2$ ὀρθ. ἢ $\frac{1}{2}$ ὀρθ. + $\beta = 2$ ὀρθ., ἔπεται ὅτι $\beta = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\beta = \delta = \eta = \iota$, θὰ εἶναι καὶ $\delta = \eta = \iota = 1\frac{1}{2}$ ὀρθ.

§ 94. Λύσεις: Ἄν π. χ. $\beta = 1\frac{1}{4}$ ὀρθ. (Σχήμα 31 Γεωμ.). θὰ εἶναι καὶ $\delta = \eta = \iota = 1\frac{1}{4}$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\beta + \alpha = 2$ ἢ $1\frac{1}{4} + \alpha = 2$ ὀρθ., θὰ εἶναι $\alpha = 2$ ὀρθ. $- 1\frac{1}{4}$ ὀρθ. $= 1\frac{4}{4} - 1\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ὀρθ. Ἐπομένως καὶ $\gamma = \varepsilon = \theta = \frac{3}{4}$ ὀρθ.

§ 95. Ἄν π. χ. $\beta = \alpha \times 2$ (Σχ. 31 Γεωμ.), θὰ εἶναι $\alpha \times 2 + \alpha = 2$ ὀρθ. Ἐπομένως $\alpha = 2$ ὀρθ. $: 3 = \frac{2}{3}$ ὀρθ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\alpha = \gamma = \varepsilon = \theta = \frac{2}{3}$ ὀρθ. καὶ $\beta = \delta = \eta = \iota = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$ ὀρθ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Γ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

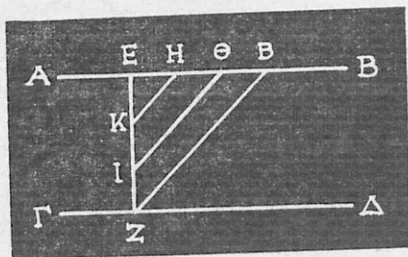
§ 96. Λύσεις: Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος γράφομεν παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειτα δὲ γράφομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Ε αὐτῆς. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ ΕΖ τέμνει καὶ τὴν ΓΔ εἰς ἓν σημεῖον Ζ καὶ μὲ τὸν γνώμονα βεβαιούμεθα ὅτι αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθαί. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΕΖ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι.

§ 97. Λύσεις: Ἡ παράλληλος γράφεται, ὅπως εἰς τὴν (§ 34 Γεωμ.) ἀναγράφεται.

§ 98. Λύσεις: Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ γράφομεν εὐθεΐαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπάνω δὲ εἰς τὴν κάθετον ταύτην ὀρίζομεν δύο τμήματα ΑΓ, ΑΕ μήκους 4 ἑκατοστ. ἕκαστον. Ἐπειτα δὲ γράφομεν δύο εὐθείας ΓΔ καὶ ΕΖ καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν ΓΕ. Αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι αἱ ζητούμεναι.

§ 99. Λύσεις: Ἀπόστασις τῶν προηγουμένων εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι τὸ τμήμα ΓΕ. Εἶναι δὲ $(ΓΕ) = (ΓΑ) + (ΑΕ) = 4 + 4 = 8$ ἑκατοστ.

§ 100. Λύσεις: Τὰς παραλλήλους εὐθείας AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 2) γράφομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 34 Γεωμ.). Ἐπειτα γράφομεν τὴν EZ κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἐπομένως κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$. Τὸ τμήμα EZ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων AB καὶ $\Gamma\Delta$, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν (§ 39 Γεωμ.). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ αὐτὴν εἰς 3 ἴσα τμήματα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Μὲ τὸν διαβήτην ὀρίζομεν τρία ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα EH , $H\Theta$, ΘB . Ἐπειτα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν BZ καὶ παραλλήλους πρὸς αὐτὴν τὰς ΘI , HK . Οὕτω δὲ μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι $EK=KI=IZ$.



Σχ. 2

§ 101. Λύσεις: Ἐπειδὴ αἱ ὀξεῖαι αὗται γωνίαι εἶναι ὅσαι ἴσαι καὶ αἱ ἀμβλείαι ἐπίσης ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν μίαν τυχούσαν ὀξεῖαν καὶ μίαν τυχούσαν ἀμβλείαν ἀπὸ αὐτάς. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha + \beta = 2$ ὀρθ. (§ 29 Β'), ἔπεται ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι.

§ 102. Λύσεις: Ἄν π.χ. $\alpha = 0,4$ ὀρθῆς (σχ. 31 Γεωμ.), θὰ εἶναι καὶ $\gamma = \epsilon = \theta = 0,4$ ὀρθῆς. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha + \beta = 2$ ὀρθ., ἔπεται ὅτι $0,4 + \beta = 2$ ὀρθ., καὶ ἐπομένως $\beta = 2 - 0,4 = 1,6$ ὀρθ. καὶ $\delta = \eta = \iota = 1,6$ ὀρθ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

§ 103. Λύσεις: Τὴν περιφέρειαν γράφομεν μὲ τὸν διαβήτην κατὰ τὰ γνωστὰ. Ἡ δὲ διάμετρος ἔχει μῆκος $4 \times 2 = 8$ ἑκατοστ.

§ 104. Λύσεις: Ὅμοίως γράφεται ἡ περιφέρεια. Ἡ δὲ διάμετρος ἔχει μῆκος $0,3 \times 2 = 0,6$ μέτρ.

§ 105. Λύσεις: Ἄν ἡ ἀκτίς εἶναι $K\Gamma$, βλέπομεν μὲ τὸν διαβήτην ὅτι $KA < K\Gamma$ καὶ $KB > K\Gamma$.

§ 106. Λύσεις: Γράφομεν μίαν διάμετρον καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον κάθετον ἐπ' αὐτήν. Τὰ τόξα τοῦ σχήματος 32 γράφονται μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων τούτων καὶ ἀκτίνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Αἱ δὲ χορδαὶ γράφονται εὐκόλως.

§ 107. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι ἀπὸ δύο σημεῖα διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα. Ἐπομένως καὶ ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα. Ἄρα ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν.

§ 108. Λύσεις: Ἄφ' οὗ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν, στερεώνομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν αὐτοῦ νὰ ἀπέχωνιν 6 ἑκατοστ. Ἐπειτα στηρίζομεν τὸ ἑν ἄκρον εἰς ἑν σημεῖον

Δ τῆς περιφερείας, (Σχ. 34 Γεωμ.) καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον πάλιν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἔστω εἰς ἓν σημεῖον Β. Φέρομεν ἔπειτα τὴν χορδὴν $\Delta\text{Β}$, ἥτις εἶναι ἡ ζητούμενη.

§ 109. Λύσεις: Ὁ κύκλος χωρίζεται εἰς 4 κυκλικοὺς τομεῖς.

§ 110. Λύσεις: Εἰς μίαν περιφέρειαν γράφομεν μίαν χορδὴν, π.χ. $\Lambda\Gamma$ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΛ (σχ. 31 Γεωμ.). Ἐπειτα φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΛ , ΚΓ καὶ σχηματίζεται ὁ ζητούμενος κυκλικὸς τομεὺς $\Lambda\text{ΚΓ}$.

§ 111. Λύσεις: Ἡ χορδὴ μιᾶς ἡμιπεριφερείας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Εἶναι ἐπομένως διπλασία τῆς ἀκτίνος.

§ 112. Λύσεις: Γράφομεν μίαν χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου βλέπομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἔχει 6 τοιαῦτα τόξα.

§ 113. Λύσεις: Γράφομεν μίαν τυχούσαν χορδὴν καὶ μετὰ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ἄλλην χορδὴν ἴσην πρὸς αὐτήν. Φέρομεν ἔπειτα καθετοὺς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς χορδὰς καὶ μετὰ τὸν διαβήτην βεβαιούμεθα ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὰς ἴσας χορδὰς εἶναι ἴσαι.

§ 114. Λύσεις: Μετὰ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι τὸ μικρότερον τόξον ΑΒ ἔχει μικροτέραν χορδὴν,

§ 115. Λύσεις: Ἐστω Θ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ὠρίσθη (σχ. 36 Γεωμ.). Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΘ καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον Θ φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΘ . Ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.

§ 116. Λύσεις: Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἄρα εἶναι παράλληλοι.

§ 117. Λύσεις: Ὀρίζομεν τὴν ἀπόστασιν ΚΓ τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μετὰ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΓ . Αὕτῃ ἡ περιφέρεια εἶναι ἡ ζητούμενη.

§ 118. Λύσεις: Φέρομεν ἀπὸ τὸ Γ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης ὀρίζομεν δύο τμήματα $\Gamma\text{Κ}$, $\Gamma\Lambda$ μήκους 2 ἑκατοστ. ἕκαστον. Ἐπειτα γράφομεν μίαν περιφέρειαν μετὰ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΓ καὶ ἄλλην μετὰ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα $\Lambda\Gamma$. Αὗται αἱ περιφέρειαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.

§ 119. Λύσεις: Βλέπομεν ὅτι ὁ εἰς κύκλος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου χωρὶς αἱ περιφέρειαι νὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

§ 120. Λύσεις: Βλέπομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται.

§ 121. Λύσεις: Ἐπὶ τῆς ὀρισθείσης εὐθείας ὀρίζομεν ἓν τμήμα ΑΚ μήκους 1 παλάμης καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ὀρίζομεν ἄλλο τμήμα ΑΛ μήκους 5 ἑκατοστ. Ἐπειτα γράφομεν περιφέρειαν μετὰ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ καὶ ἄλλην μετὰ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα $\Lambda\text{Α}$. Αὗται αἱ περιφέρειαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.

§ 122. Λύσεις: Βλέπομεν ὅτι ὁ πρῶτος κύκλος κεῖται μέσα εἰς τὸν δεῦτερον κύκλον, αἱ δὲ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντὸς εἰς τὸ Α.

§ 123. Λύσεις: Ἀφ' οὗ γράψωμεν ἓνα τμήμα ΑΒ, ὀρίζομεν τὸ μέσον Δ αὐτοῦ (σχῆμα Γεωμ. 40). Ἐπειτα γράφομεν περιφέρειαν με κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΑ. Αὕτῃ ἡ περιφέρεια εἶναι ἡ ζητούμενη.

§ 124. Λύσεις: Διαιροῦμεν τὸ εὐθ. τμήμα εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ πάλιν εἰς δύο ἴσα μέρη.

§ 125. Λύσεις: Ἐστω ΒΓΑ τὸ τόξον καὶ Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας του (σχ. 41 Γεωμ.). Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ τοῦ τόξου καὶ κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἐκ τοῦ Κ. Αὕτῃ τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ μέσον Γ αὐτοῦ. Φέρομεν ἔπειτα τὰς χορδὰς ΒΓ, ΓΑ τῶν δύο τόξων ΒΓ, ΓΑ καὶ ἐκ τοῦ Κ καθετοὺς ἐπ' αὐτάς. Οὕτω κάθε τόξα ἀπὸ αὐτὰ διαιρεῖται εἰς 2 ἴσα μέρη, ἐπομένως τὸ ΒΓΑ διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα τόξα.

§ 126. Λύσεις: Ἐστω ὅτι σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ (σχῆμα 44 Γεωμ.) καὶ Α, Γ τὰ ὀρισθέντα σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Διὰ τὰ γράψωμεν τὴν ζητούμενην περιφέρειαν, ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὴν (§ 51 Γεωμ.) ἀναγράφεται.

§ 127. Λύσεις: Ἀφ' οὗ ὀρίσωμεν τμήμα (ΑΒ)=4 ἑκατοστ. καὶ (ΑΓ)=3 ἑκατοστ. γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ὅπως προηγουμένως. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι κέντρον αὐτῆς εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἐπομένως ΒΓ εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας ταύτης καὶ διὰ τοῦτο διπλασία τῆς ἀκτίνος.

§ 128. Λύσεις: Σχηματίζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας, ὅπως εἰς τὴν (§ 55 Γεωμ.) ἀναγράφεται. Κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτάς εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

§ 129. Λύσεις: Διαιροῦμεν πρῶτον τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας καὶ κάθε μίαν ἀπὸ αὐτάς πάλιν εἰς δύο ἴσας γωνίας,

§ 130. Λύσεις: Σχηματίζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς 4 ἴσας γωνίας. Τρεῖς διαδοχικαὶ ἀπὸ αὐτάς ἔχουσιν ἄθροισμα μίαν γωνίαν ἢ ὅποια εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς.

§ 131. Λύσεις: Ἡ μέτρησις θὰ γίνῃ μετὰ τὸ μοιρογνωμόνιον, ὅπως εἰς τὴν (§ 57 Γεωμ.) διδάσκεται.

§ 132. Λύσεις: Ὅπως προηγουμένως.

§ 133. Λύσεις: Ἄν μίαν ὀρθὴν γωνίαν γίνῃ ἐπίκεντρος, τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας, ἢ τόξον 90° . Καὶ τὸ μέτρον λοιπὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 90° . Ἐπομένως τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχει μέτρον $90^\circ:2=45^\circ$, τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς ἔχει μέτρον $90^\circ:3=30^\circ$.

§ 134. Λύσεις: 1) 'Αφ' οὗ 1 ὀρθὴ ἔχει 90° , τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς θὰ ἔχῃ μέτρον $\frac{90^\circ}{5}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ θὰ ἔχῃσι $\frac{90^\circ}{5} \times 2 = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$.

2) Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $1\frac{5}{8}$ ὀρθ. = $\frac{13}{8}$ ὀρθ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς. 'Αφ' οὗ 1 ὀρθὴ ἔχει 90° , τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς θὰ ἔχῃ $\frac{90^\circ}{8}$ καὶ τὰ $\frac{13}{8}$ θὰ ἔχῃσι $\frac{90^\circ}{8} \times 13 = \frac{1170^\circ}{8} = \left(146\frac{1}{4}\right)^\circ = 146^\circ 15'$.

Β' τρόπος. 'Η 1 ὀρθὴ ἔχει 90° , τὸ $\frac{1}{8}$ ἔχει $\frac{90^\circ}{8}$ καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ ἔχουσι $\frac{90^\circ}{8} \times 5 = \frac{450^\circ}{8} = \left(56\frac{1}{4}\right)^\circ$. 'Επομένως $1\frac{5}{8}$ ὀρθ. ἔχουσι $90^\circ + \left(56\frac{1}{4}\right)^\circ = \left(146\frac{1}{4}\right)^\circ$.

§ 135. Λύσεις: 1) 'Αφ' οὗ 90° κάμουσιν 1 ὀρθήν, ἡ 1° εἶναι $\frac{1}{90}$ ὀρθῆς καὶ 40° εἶναι $\frac{1}{90} \times 40 = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$ ὀρθῆς.

2) Αἱ 65° εἶναι $\frac{1}{90} \times 65 = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$ ὀρθῆς.

3) Αἱ 120° εἶναι $\frac{1}{90} \times 120 = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}$ ὀρθῆς.

§ 136. Λύσεις: 'Επειδὴ $30' = \frac{1}{2}$ μοίρας, αἱ $50^\circ 36'$ εἶναι $\left(50\frac{1}{2}\right)^\circ$. 'Επειδὴ δὲ $1^\circ = \frac{1}{90}$ ὀρθῆς, αἱ $\left(50\frac{1}{2}\right)^\circ$ εἶναι $\frac{1}{90} \times 50\frac{1}{2} = \frac{101}{2} \cdot \frac{1}{90} = \frac{101}{180}$ ὀρθ.

§ 137. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς ἓν τεταρτημόριον περιφερείας εἶναι 1 ὀρθὴ ἢ 90° . 'Επειδὴ δὲ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπίκεντρος, ἔπεται ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη αὕτη ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς ἢ 45° .

§ 138. Λύσεις: 1) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἔχει τὸ ἴδιον μέτρον μὲ τὸ ἀντίστοιχον τόξον, ἥτοι $42^\circ 38'$. 'Επομένως ἡ ἐγγεγραμμένη ἔχει μέτρον $(42^\circ 38') : 2 = 21^\circ 19'$.

2) 'Ομοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον μέτρον εἶναι $(54^\circ 24' 40'') : 2 = 27^\circ 12' 20''$.

§ 139. Λύσεις: 'Η ἐπίκεντρος γωνία ἔχει μέτρον

$$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \text{ ὀρθῆς} = 1\frac{1}{3} \text{ ὀρθ.} \quad \eta \quad 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Β' τ ρ ό π ο ς . Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{90^\circ}{3} \times 2 = 60^\circ$, ἐπο-
μένως ἡ ἐπίκεντρος εἶναι $60^\circ \times 2 = 120^\circ$.

§ 140. Λ ύ σ ι ς : Ἡ ἐπίκεντρος ἔχει μέτρον $(25^\circ 30') \times 2 = 51^\circ$.
Ἐπειδὴ δὲ $1^\circ = \frac{1}{90}$ ὀρθῆς, αἱ 51° εἶναι $\frac{1}{90} \times 51 = \frac{51}{90} = \frac{17}{30}$ ὀρθ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Δ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 141. Λ ύ σ ι ς : Ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα ἀφαιροῦμεν τὴν
μικροτέραν καὶ εὐρίσκομεν $5 - 2 = 3$ ἑκατοστ.

§ 142. Λ ύ σ ι ς : Ἡ ζητούμενη ἀπόστασις εἶναι ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία
καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Ἐπομένως ἔχει μῆκος $0,60 : 2 = 0,30$ μ.

§ 143. Λ ύ σ ι ς : Ὅταν γράψωμεν τὰς περιφερείας ταύτας, θὰ
ἴδωμεν ὅτι ἡ μικροτέρα περιφέρεια θὰ εἶναι ὅλη μέσα εἰς τὸν μεγα-
λύτερον κύκλον καὶ θὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρον Κ.

§ 144. Λ ύ σ ι ς : Ἄν Α καὶ Γ εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ τόξου (σχ. 44
Γεωμ.), ὀρίζομεν καὶ ἓν ἄλλο σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ τόξου καὶ γράφομεν
τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἐπειτα δὲ γράφομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ
μέσα τῶν χορδῶν τούτων. Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον
Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον (βλέπε καὶ § 51 Γεωμ.).

§ 145. Λ ύ σ ι ς : Ἀπὸ τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου, γράφομεν δύο
τμήματα ΚΑ, ΚΒ ἴσα καὶ μικρότερα τῆς ἀκτίνος. Ἐπειτα γράφομεν
χορδὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΑ εἰς τὸ ἄκρον Α αὐτοῦ καὶ ἄλλην κάθετον
ἐπὶ τὸ ΚΒ εἰς τὸ ἄκρον Β αὐτοῦ. Αὗται αἱ χορδαὶ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ
τὸ κέντρον. Ἄν δὲ μὲ τὸν διαβήτην συγκρίνωμεν αὐτάς, βλέπομεν
ὅτι εἶναι ἴσα.

§ 146. Λ ύ σ ι ς : Ἐστω ΖΕΑ τὸ μεγαλύτερον καὶ ΑΒ τὸ μικρό-
τερον τόξον (σχ. 45 Γεωμ.). Ἄν εἰς τὸ ΖΕΑ ὀρίσωμεν τόξον ΖΕ ἴσον
μὲ τὸ ΑΒ, τὸ Ε θὰ κεῖται μεταξὺ Ζ καὶ Α. Ἄν δὲ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα
ΚΕ, αὕτη θὰ κεῖται μέσα εἰς τὴν γωνίαν ΖΚΑ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι
 $\angle \hat{ZKE} < \angle \hat{ZKA}$. Ἐπειδὴ δὲ $\angle \hat{ZKE} = \angle \hat{AKB}$, θὰ εἶναι καὶ $\angle \hat{AKB} < \angle \hat{ZKA}$. Βλέπομεν
λοιπὸν ὅτι εἰς τὸ μικρότερον τόξον βαίνει μικροτέρα ἐπίκεντρος γω-
νία καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον μεγαλυτέρα,

§ 147. Λ ύ σ ι ς : Γράφομεν χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα μὲ τὴν
βοήθειαν τοῦ διαβήτος. Ἐπειτα δὲ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα
τῆς χορδῆς ταύτης. Ἄν μετρήσωμεν τὴν γωνίαν αὐτῶν μὲ τὸ μοιρο-
γνῳμόνιον, εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη εἶναι 60° . Τοῦτο ἐννοοῦμεν καὶ χω-
ρὶς μέτρησιν, ἂν ἐνθυμηθῶμεν (ἀσκ. 112) ὅτι τὸ ἀντίστοιχον τόξον χω-
ρεῖ 6 φορές εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἐπομένως τὸ τόξον τοῦτο εἶναι
 $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Καὶ ἡ ἐπίκεντρος λοιπὸν γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς αὐτὸ
εἶναι 60° .

§ 148. Λύσεις: Ἡ ἐπικέντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἔχει μέτρον $(18^{\circ} 38' 35'') \times 2 = 37^{\circ} 17' 10''$. Καὶ τὸ τόξον λοιπὸν ἔχει μέτρον $37^{\circ} 17' 10''$.

§ 149. Λύσεις: Τὰς παραλλήλους χορδὰς γράφομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 34 Γεωμ.). Ἐπειτα καθιστῶμεν τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἐπικέντρους εἰς ἴσους κύκλους. Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τοῦ διαβήτου βεβαιούμεθα ὅτι βαίνουνσιν ἐπὶ ἴσων τόξων, Αἱ γωνίαι λοιπὸν αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

§ 150. Λύσεις: Βλέπομεν ὅτι αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ ἀποτελοῦσιν εὐθεΐαν γραμμὴν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 151. Λύσεις: Μετροῦμεν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ εὐρίσκομεν $(\text{ΗΘ})=0,02$ μέτ., $(\text{ΘΙ})=0,017$ μέτ., $(\text{ΙΚ})=0,02$ μέτ., $(\text{ΚΗ})=0,019$ μέτ. Ἐπομένως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $0,02+0,017+0,02+0,019=0,076$ μέτ.

§ 152. Λύσεις: Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκόλως.

§ 153. Λύσεις: Ἐπίσης καὶ τοῦτο λύεται εὐκόλως.

§ 154. Λύσεις: Ἡ κατασκευὴ γίνεται, ὅπως εἰς τὴν (§ 61 Γεωμ.) ἀναγράφεται. Ἡ δὲ περίμετρος εἶναι $3 \times 3 = 9$ ἑκατοστ.

§ 155. Λύσεις: Ἡ κατασκευὴ γίνεται, ὅπως ἡ κατασκευὴ τοῦ ΔΕΖ (σχήμα 55 Γεωμ.). Αἱ δὲ γωνίαι τοῦ εἶναι ὀξεῖαι.

§ 156. Λύσεις: Ἡ κατασκευὴ γίνεται εὐκόλως. Ἄν δὲ μετρήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν, εὐρίσκομεν ὅτι ἔχει μῆκος 5 ἑκατ.

§ 157. Λύσεις: Κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος $182,25 : 3 = 60,75$ μέτ.

§ 158. Λύσεις: Αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα $36,75 \times 2 = 73,50$ μέτ. Ἐπομένως ἡ βάσις τοῦ ἔχει μῆκος $93,80 - 73,50 = 20,30$ μέτρα.

§ 159. Λύσεις: Ἐνα τρίγωνον ἔχει τρεῖς ὕψη καὶ τρεῖς διαμέσους.

§ 160. Λύσεις: Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εὐρίσκομεν ὅτι $(\text{ΑΔ})=2$ ἑκατ. καὶ $(\text{ΑΜ})=2,1$ ἑκατ. περίπου.

§ 161. Λύσεις: Τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ διάμεσος ΑΜ εἶναι πλαγία πρὸς αὐτήν. Ἄρα $\text{ΑΔ} < \text{ΑΜ}$ (§ 25 Γ' Γεωμ.).

§ 162. Λύσεις: Μετὰ τὴν κατασκευὴν ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὀρίζομεν τὸ μέσον Δ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ, ὅπως ἐμάθομεν (§ 37 ἢ § 49 Γεωμ.). Ἐπειτα δὲ μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι ἡ διάμεσος ΑΔ χωρεῖ 2 φορές εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ἡ διάμεσος λοιπὸν αὕτη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας.

§ 163. Λύσεις: Ἀφ' οὗ αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 180° καὶ ἡ Α εἶναι 90° , αἱ ἄλλαι δύο ἔχουσιν ἄθροισμα $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, ἥτοι $B + \Gamma = 90^\circ$. Ἐπομένως $B < 90^\circ$, $\Gamma < 90^\circ$, ἥτοι αὐταὶ εἶναι ὀξεαὶ γωνίαι.

§ 164. Λύσεις: Εὐρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{4}{5} \text{ ὀρθ.} = 90^\circ \times \frac{4}{5} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, ἥτοι $B = 72^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $B + \Gamma = 90^\circ$, ἔπεται ὅτι $\Gamma = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

§ 165. Λύσεις: Ὅμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\Gamma = 90^\circ - (38^\circ 15' 20'')$

$$\begin{array}{r} 90^\circ = 89^\circ 59' 60'' \\ B = 38^\circ 15' 20'' \\ \hline \Gamma = 51^\circ 44' 20'' \end{array}$$

§ 166. Λύσεις: Ἀφ' οὗ $A + B + \Gamma = 180^\circ$ καὶ $A = 46^\circ 18' 20''$, ἔπεται ὅτι $B + \Gamma = 180^\circ - (46^\circ 18' 20'')$

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ = 179^\circ 59' 60'' \\ A = 46^\circ 18' 20'' \\ \hline B + \Gamma = 133^\circ 41' 40'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ἐπειδὴ δὲ } B = \Gamma, \text{ κάθε μία εἶναι} \\ 133^\circ 41' 40'' : 2 = 66^\circ 50' 50''. \end{array}$$

§ 167. Λύσεις: 1) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι $(4 \times 2) - 4 = 4$ ὀρθαὶ γωνίαι. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀρθὴ ἔχει 90° , αἱ 4 ὀρθαὶ ἔχουσιν $90^\circ \times 4 = 360^\circ$.

2) Αἱ γωνίαι ἑνὸς πενταγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα $(5 \times 2) - 4 = 6$ ὀρθάς. Ἐπομένως $90^\circ \times 6 = 540^\circ$.

§ 168. Λύσεις: 1) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι $(6 \times 2) - 4 = 8$ ὀρθαὶ $= 90^\circ \times 8 = 720^\circ$.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀκταγώνου εἶναι $(8 \times 2) - 4 = 12$ ὀρθαὶ $= 90^\circ \times 12 = 1080^\circ$.

3) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς δεκαγώνου εἶναι $(10 \times 2) - 4 = 16$ ὀρθαὶ $= 90^\circ \times 16 = 1440^\circ$.

§ 169. Λύσεις: Ἄν εἰς τὰς 10 ὀρθὰς προσθέσωμεν 4 ὀρθάς, εὐρίσκομεν 14 ὀρθάς. Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του. Ἐχει λοιπὸν τοῦτο $14 : 2 = 7$ πλευράς.

§ 170. Λύσεις: Αὐτὰ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (§ 65 Α' Γεωμετρ.). Ἐπομένως ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κεῖνται ἴσαι πλευραί. Ἦτοι αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα καὶ ἂν συγκρίνωμεν αὐτὰς μὲ τὸν διαβήτην.

§ 171. Λύσεις: Ἄμα γίνῃ ἡ κατασκευή, μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι $B\Gamma = \Delta E$. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα καὶ ὥς ἑξῆς: Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta E$ ἔχουσιν $AB = A\Delta$, $A\Gamma = AE$ καὶ τὰς γωνίας BAG , ΔAE ἴσας ὥς κατὰ κορυφήν. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα (§ 65 Α' Γεωμ.) καὶ ἐπομένως $B\Gamma = \Delta E$.

§ 172. Λύσις: Ἐπειδὴ τὰ τόξα AB καὶ BΓ εἶναι ἴσα καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΚΒ, ΒΚΓ εἶναι ἴσα (§ 65 Γ' Γεωμετρ.).

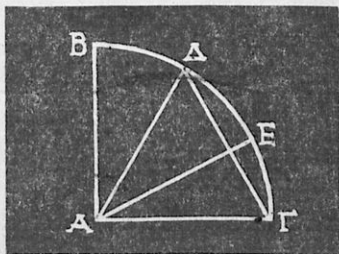
§ 173. Λύσις: Τὴν διχοτόμον ΑΔ κατασκευάζομεν, ὅπως ἐμάθομεν εἰς (§ 55 Γεωμ.). Ἄν δὲ μὲ τὸν διαβήτην συγκρίνωμεν τὰ τμήματα ΔΒ, ΔΓ, βλέπομεν ὅτι $\Delta B = \Delta \Gamma$.

Περὶ τοῦτου βεβαιούμεθα καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ (§ 65 Α' Γεωμ.).

§ 174. Λύσις: 1) Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Κάθε γωνία αὐτοῦ εἶναι 60° .

2) Διχοτομοῦμεν μίαν γωνίαν 60° .

§ 175. Λύσις: Κάμνομεν τὴν ὀρθὴν γωνία Α ἐπικέντρον καὶ ἔστω ΒΓ τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον ΒΓ εἰς ἓν σημεῖον Δ. Ἄν φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ, ΓΔ, σχηματίζεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΔΓ. Ἐπομένως ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι 60° , ἡ δὲ ΒΑΔ εἶναι $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Ἄν δὲ μὲ τὸν διαβήτην ὀρίσωμεν τόξον ΔΕ=ΒΔ, θὰ εἶναι $\Delta B = \Delta E = \Delta \Gamma = 30^\circ$. Ἐπομένως $\widehat{B\Delta D} = \widehat{\Delta\Delta E} = \widehat{E\Delta\Gamma} = 30^\circ$.



Σχ. 3

§ 176. Λύσις: Ἀφ' οὗ σχηματίζομεν ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΖ ὅπως εἰς τὴν (§ 61 Γεωμ.) ἐμάθομεν, καθιστῶμεν τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας Δ καὶ Ε ἐπικέντρους εἰς ἴσους κύκλους. Ἄν δὲ μὲ τὸν διαβήτην συγκρίνωμεν τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν, βλέπομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι αἱ ἀπέναντι τῶν ἰσῶν πλευρῶν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

§ 177. Λύσις: 1) Σχηματίζομεν μίαν γωνίαν $A = 30^\circ$, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν ἄσκησιν 174. Ἐπειτα εἰς τὰς πλευράς αὐτῆς ὀρίζομεν μὲ τὸν διαβήτην δύο ἴσα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, καὶ γράφομεν τὸ τμήμα ΒΓ.

2) Ἀφ' οὗ $A + B + \Gamma = 180^\circ$ καὶ $A = 30^\circ$, ἔπεται ὅτι $B + \Gamma = 150^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, κάθε μία εἶναι $150^\circ : 2 = 75^\circ$.

§ 178. Λύσις: Ἀπέναντι τῶν ἰσῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ κεῖνται ἴσαι γωνίαι Γ καὶ Α. Εἶναι $\Gamma = A$. Ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = 180^\circ$ καὶ $B = 40^\circ$, θὰ εἶναι $A + \Gamma = 180 - 40 = 140^\circ$ καὶ $A = \Gamma = 140^\circ : 2 = 70^\circ$.

§ 176. Λύσις: Σχηματίζομεν μίαν γωνίαν $B = 30^\circ$, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν ἄσκησιν 174. Ἐπειτα ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ τῆς μιᾶς πλευρᾶς φέρομεν εὐθείαν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν. Ἄν δὲ μὲ

τὸν διαβήτην συγκρίνωμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ μετὰ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, βλέπομεν ὅτι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

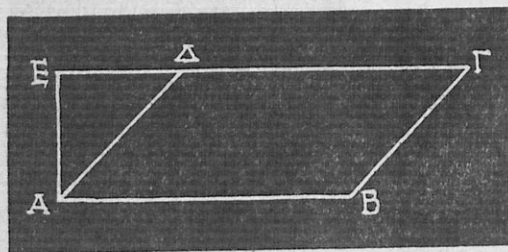
§ 180. Λύσις: Ἐπειδὴ $ΑΒ = ΒΓ$, κατὰ τὸ συμπέρασμα τῆς ἀσκήσεως 176, θὰ εἶναι $Α = Γ = 50^\circ$. Ἐπομένως $Α + Γ = 50^\circ \times 2 = 100^\circ$ καὶ $Β = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

§ 181. Λύσις: Αὐτὰ τὰ σχήματα γίνονται, ὅπως εἰς τὴν (§ 67 Γεωμ.) διδάσκεται.

§ 182. Λύσις: Σχηματίζομεν γωνίαν $Α = 60^\circ$, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀσκήσιν 174. Ἐπειτα εἰς τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς ὀρίζομεν ἐν τμήμα $ΑΒ = 4$ ἑκατοστ. καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἐν τμήμα $ΑΔ = 2$ ἑκατοστ. Ἀπὸ δὲ τὸ ἄκρον Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Γ. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

§ 183. Λύσις: Σχηματίζομεν κατὰ γνωστὰ (ἀσκ. 174) γωνίαν

$Α = 30^\circ$ καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς ὀρίζομεν τμήμα $(ΑΒ) = 2$ παλ $= 20$ ἑκατ. Ἐπειτα ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὀρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμήμα $(ΑΕ) = 12$ ἑκατοστ. Ἐκ δὲ τοῦ Ε φέρομεν εὐθεῖαν ΕΔΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ καὶ ἐκ τοῦ Β εὐθεῖαν ΒΓ παράλληλον πρὸς



Σχ. 4

τὴν ΑΔ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

§ 184. Λύσις: Σχηματίζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρίζομεν τμήμα $(ΑΒ) = 8$ ἑκατοστ., εἰς δὲ τὴν ἄλλην τμήμα $(ΑΔ) = 2$ ἑκατ. Ἐπειτα ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν (ΔΓ) $= 4$ ἑκατ. καὶ φέρομεν τὸ τμήμα ΒΓ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

§ 185. Λύσις: Τὸ τετράγωνον καὶ ὁ ρόμβος ὁμοιάζουσι, διότι ὅλαι αἱ πλευραὶ ἑκάστου εἶναι ἴσαι.

2) Διαφέρουσι δὲ κατὰ τὸ ὅτι τοῦ μὲν τετραγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ὁ δὲ ρόμβος δὲν ἔχει ὀρθὰς γωνίας.

§ 186. Λύσις: 1) Τὰ ὀρθογώνια (μὴ τετράγωνα) καὶ τὰ ρομβοειδῆ ὁμοιάζουσι κατὰ τὸ ὅτι αἱ πλευραὶ ἑκάστου δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

2) Διαφέρουσι δὲ κατὰ τὸ ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ μὲν ὀρθογωνίου εἶναι ὅλαι ὀρθαί, τὸ δὲ ρομβοειδὲς δὲν ἔχει ὀρθὰς γωνίας.

§ 187. Λύσεις: 1) Εἰς ρόμβος καὶ ἐν ρομβοειδὲς ὁμοιάζουσι κατὰ τὸ ὅτι καὶ τὰ δύο δὲν ἔχουσιν ὀρθὰς γωνίας.

2) Διαφέρουσι δὲ κατὰ τὸ ὅτι τοῦ μὲν ρόμβου ὅλαι αἱ πλευраὶ εἶναι ἴσαι, τοῦ δὲ ρομβοειδοῦς δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

§ 188. Λύσεις: Ταῦτα διαφέρουσι κατὰ τὰ ἑξῆς. 1) Ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, ἐν δὲ τοῦ ραμβοειδοῦς αἱ πλευραὶ δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

2) Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθαί, τὸ δὲ ρομβοειδὲς δὲν ἔχει ὀρθὰς γωνίας.

Ὅμοιάζουσι δὲ μόνον, διότι εἶναι παραλληλόγραμμα.

§ 189. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι $(ΓΔ) = (ΑΒ) = 0,35$ μέτ. καὶ $(ΑΔ) = (ΒΓ) = 0,12$ μέτ. Ἐπομένως

$$(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΑΔ) = 0,35 \times 2 + 0,12 \times 2 = 0,70 + 0,24 = 0,94 \text{ μέτ.}$$

§ 190. Λύσεις: Ἡ βάσις καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπομένως θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα $7 + 7 = 14$ ἑκατ. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν εἶναι $24 - 14 = 10$ ἑκατ. καὶ ἐκάστη τούτων εἶναι $10 : 2 = 5$ ἑκατ. Μετὰ ταῦτα ἡ κατασκευὴ γίνεται εὐκόλως.

§ 191. Λύσεις: Ἡ βάσις καὶ ἡ ἀπέναντι πλευρὰ ἔχουσιν ἄθροισμα $25,40 \times 2 = 50,80$ μέτ. Ἐπομένως τὸ ὕψος καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ἔχουσιν ἄθροισμα $87,20 - 50,80 = 36,40$ μέτ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, τὸ ὕψος εἶναι $36,40 : 2 = 18,20$ μέτ.

§ 192. Λύσεις: Ἡ περίμετρος αὐτῆς εἶναι $68,80 \times 2 + 24,20 \times 2 = 137,60 + 48,40 = 186$ μέτ, Ἐπειδὴ δὲ ἡ περίφραξις τοῦ 1 μέτρου στοιχίζει 20000 δραχμάς, τῶν 186 μέτρων θὰ στοιχίσῃ $20000 \times 186 = 3720000$ δρχ.

§ 193. Λύσεις: Σχηματίζομεν μίαν γωνίαν π. χ. $K = 45^\circ$, ὅπως εἰς τὴν ἄσκησιν 128 ἐμάθομεν. Εἰς δὲ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ὀρίζομεν τμήματα $(ΚΛ) = (ΚΙ) = 4$ ἑκατ. (σχῆμα 65 Γεωμ.) καὶ φέρομεν εὐθεῖαν ΑΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΙ καὶ ἄλλην ΙΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΛ. Τοιουτοτρόπως σχηματίζεται ὁ ζητούμενος ρόμβος ΚΛΜΙ, Ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $4 \times 4 = 16$ ἑκατοστ. Ἡ γωνία $M = K = 45^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $K + \Lambda + M + I = 4$ ὀρθ. $= 360^\circ$, θὰ εἶναι $\Lambda + I = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ καὶ ἐπομένως $\Lambda = I = 270^\circ : 2 = 135^\circ$.

§ 194. Λύσεις: Ἀφ' οὗ ὀρίσωμεν τὸ τμήμα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ, φέρομεν τὸ τμήμα ΒΓ καὶ ἐκ μὲν τοῦ Γ εὐθεῖαν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἐκ δὲ τοῦ Α ἄλλην εὐθεῖαν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

§ 195. Λύσεις: Σχηματίζομεν μίαν γωνίαν $E = 45^\circ$ καὶ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς αὐτὰς πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς. Ἐπειτα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων ὀρίζομεν τμήματα $(ΕΑ) = (ΕΓ) = 6$ ἑκατ. καὶ $(ΕΒ) = (ΕΔ) = 4$ ἑκατοστ. Ἀν δὲ γράψωμεν τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, σχηματίζεται τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (§ 71 Β' Γεωμ.).

§ 196. Λύσεις: Μὲ τὸν διαβήτην βεβαιούμεθα ὅτι: Αἱ διαγώνιοι ἐνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσαι. Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βεβαιούμεθα ὅτι: Αἱ διογώνιοι ἐνὸς τετραγώνου εἶναι κάθετοι.

§ 197. Λύσεις: Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι: Αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ρόμβου εἶναι κάθετοι καὶ ἄνισοι.

§ 198. Λύσεις: 1) Αἱ διαγώνιοι τετραγώνου εἶναι κάθετοι καὶ τοῦ ρόμβου ἐπίσης.

2) Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, τοῦ δὲ ρόμβου ἄνισοι.

§ 199. Λύσεις: Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Μὲ τὸν κανόνα δὲ καὶ γνώμονα βεβαιούμεθα ὅτι αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι (βλέπε § 36 Γεωμ.). Ἐχει λοιπὸν τὸ τετράπλευρον τοῦτο δύο πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 71 Α' Γεωμ.). Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βεβαιούμεθα ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Β' τρόπος. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 71 Β' Γεωμ.).

§ 200. Λύσεις: Ὅπως προηγουμένως, βεβαιούμεθα ὅτι καὶ τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον μὴ ὀρθογώνιον.

§ 201. Λύσεις: Φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους καὶ διαιροῦμεν μὲ αὐτὰς τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ (§ 54 Γεωμ.). Ἐπειτα φέρομεν τὰς χορδὰς αὐτῶν. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας, διότι αὗται εἶναι χορδαὶ ἰσῶν τόξων (§ 45 Γεωμ.). Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν τετράγωνον.

§ 202. Λύσεις: Διαιροῦμεν, ὅπως προηγουμένως, τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα καὶ ἀπὸ τὰ σημεία Α, Β, Γ, Δ φέρομεν ἑφαπτομένας. Ὅπως δὲ προηγουμένως, βλέπομεν ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

§ 203. Λύσεις: 1) Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ὀκταγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα $(8 \times 2) - 4 = 12$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη εἶναι

$$12 : 8 = \frac{12}{8} \text{ ὀρθ.} = 1\frac{1}{2} \text{ ὀρθ.} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

2) Αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα $(6 \times 2) - 4 = 8$ ὀρθ.

Ἐκάστη δὲ εἶναι $8 : 6 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ ὀρθ.} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$

§ 204. Λύσεις: Ἐγγράφομεν πρῶτον ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅπως ἐμάθομεν εἰς § 75 Γεωμ.). Ἐπειτα δὲ ἀπὸ τὰς κορυφῶν αὐτοῦ φέρομεν ἑφαπτομένας τῆς περιφέρειας. Ἀπὸ αὐτὰς δὲ σχηματίζεται ἓν τρίγωνον. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βεβαιούμεθα ὅτι αὐτὸ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον. Μὲ τὸν διαβήτην ἐπίσης βεβαιούμεθα ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου χωρεῖ δύο φορές εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ

περιγεγραμμένου. Ὡστε: Ἡ πλευρὰ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

§ 205. Λύσεις: Ἀφ' οὗ σχηματίζωμεν τὰ δύο σχήματα, ὅπως εἰς τὰς (§ 74 καὶ 75 Γεωμ.) ἐμάθομεν, φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου μίαν κάθετον ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐξαγώνου καὶ ἄλλην κάθετον ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου μέχρι τῶν πλευρῶν τούτων. Ἐπειτα μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐξαγώνου ἢ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐξαγώνου εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

§ 206. Λύσεις: Διαιροῦμεν καὶ τὰς δύο περιφερείας εἰς 6 ἴσα μέρη (§ 74 Γεωμ.). Ἐπειτα διὰ τὸ ἀριστερόν σχῆμα γράφομεν μέσα εἰς τὸν κύκλον 6 τόξα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Εἰς τὸν ἄλλον κύκλον ἐγγράφομεν εὐκόλως δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα. Τὸν χρωματισμὸν θὰ κάμῃ κάθε μαθητὴς, ὅπως θέλει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Ε' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 207. Λύσεις: Γράφομεν ἓνα εὐθ. τμήμα (ΒΓ)=3 ἑκατ. Ἐπειτα γράφομεν δύο περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 2 ἑκατ. καὶ κέντρα Β καὶ Γ. Αὗται τέμνονται καὶ ἔστω Α τὸ ἐν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Φέρομεν ἔπειτα τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓ καὶ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ τὸν γνώμονα βεβαιούμεθα ὅτι ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ἀμβλεία, αἱ δὲ ἄλλαι Β καὶ Γ ὀξεῖαι.

§ 208. Λύσεις: Σχηματίζομεν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον π.χ. τὸ ΚΛΙ (σχῆμα 65 Γεωμ.) μὲ πλευρὰν 3 ἑκατοστ. Αὐτὸ ἔχει $K=60^\circ$. Ἐπειτα φέρομεν εὐθεῖαν ΛΜ παράλληλον πρὸς ΚΙ καὶ ἄλλην ΙΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΛ. Τὸ ΚΛΜΙ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος.

Ἀπὸ τὴν κατάσκευσιν εἶναι (ΛΙ)=3 ἑκατ. Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον δὲ εὐρίσκομεν ὅτι (ΚΜ)=5,19 ἑκατ. περίπου.

Διὰ τὰς γωνίας γνωρίζομεν ὅτι $M=K=60^\circ$ καὶ $K+L+M+I=4$ ὅρθ. $=360^\circ$. Ἐπομένως $L+I=360^\circ-120^\circ=240^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $L=I$ ἔπεται ὅτι $L=I=240^\circ:2=120^\circ$.

§ 209. Λύσεις: Αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ τοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα $63,40-18,60=49,80$ μέτ. Κάθε μία λοιπὸν εἶναι $49,80:2=24,90$ μέτ.

§ 210. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 180° . Ἐπομένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα

$$\left. \begin{aligned} 180^\circ &= (86^\circ 20' 18'') = 93^\circ 39' 42'' \\ \delta \epsilon \alpha \upsilon \tau \alpha \iota \epsilon \iota \nu \alpha \iota \iota \varsigma \alpha \iota \quad (\acute{\alpha} \sigma \kappa \eta \sigma \iota \varsigma \ 176), \text{ \textbf{k} \acute{\alpha} \theta \epsilon} \\ \mu \iota \alpha \ \epsilon \iota \nu \alpha \iota \quad (93^\circ \ 39' \ 42'') : 2 = 46^\circ \ 49' \ 51'', \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 180^\circ &= 179^\circ \ 59' \ 60'' \\ A &= 86^\circ \ 20' \ 18'' \\ B + \Gamma &= 93^\circ \ 39' \ 42'' \end{aligned}$$

§ 211. Λύσεις: Γράφομεν δύο καθέτους εὐθείας καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν τομὴν Ο τέσσαρα τμήματα ΟΑ, ΟΓ, ΟΒ, ΟΔ μήκους 3 ἑκατ. ἕκαστον. Φέρομεν ἔπειτα τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι· μὲ τὸν γνῶμονα δὲ βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ εἶναι ὀρθαί. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο τετράγωνον μὲ διαγώνιον $3 \times 2 = 6$ ἑκατ.

§ 212. Λύσεις: Γράφομεν δύο καθέτους εὐθείας καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἀπὸ τὴν τομὴν Ο ὀρίζομεν τμήμα ΟΑ = 0,8 : 2 = 0,4 καὶ ἄλλο (ΟΓ) = (ΟΑ). Ὅμοιως ἐπὶ τῶν ἄλλων ὀρίζομεν τμήμα (ΟΒ) = 0,3 ἑκατ. καὶ ἄλλο (ΟΔ) = (ΟΒ). Ἄν φέρωμεν ἔπειτα τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι καὶ μὲ τὸν γνῶμονα βλέπομεν ὅτι δὲν ἔχει ὀρθὰς γωνίας. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο ρόμβος μὲ διαγώνιους (ΑΓ) = $0,4 \times 2 = 0,8$ μέτ. καὶ (ΒΔ) = $0,3 \times 2 = 0,6$ μέτ.

§ 213. Λύσεις: Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν, ὅπως εἰς (§ 55 Γεωμ.) ἐμάθομεν. Ἀπὸ δὲ τυχόν σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου φέρομεν μέχρι τῶν πλευρῶν καθέτους ΔΒ, ΔΓ ἐπὶ τὰς πλευράς. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ΔΒ = ΔΓ.

§ 214. Λύσεις: Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ κάθε μίαν τῶν ἄλλων πλευρῶν (§ 25 Γ' Γεωμ.). Ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι διάφορος ἐκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ. Κάθε λοιπὸν τρίγωνον ἀπὸ αὐτὰ δὲν ἔχει ἴσας ὅλας τὰς πλευράς τοῦ. Ἐπομένως δὲν εἶναι κανονικὸν σχῆμα.

§ 215. Λύσεις: Γνωρίζομεν (§ 69 Β' καὶ Γ') ὅτι κάθε ρόμβος καὶ κάθε ρομβοειδὲς ἔχει 2 ὀξείας καὶ 2 ἀμβλείας γωνίας. Ἐπομένως αἱ γωνίαι ἐκάστου δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι. Ἐπομένως αὐτὰ δὲν εἶναι κανονικὰ σχήματα.

§ 216. Λύσεις: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα μὲ δύο καθέτους διαμέτρους. Ἐπειτα κάθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ τόξα τὸ διαιροῦμεν εἰς 2 ἴσα τόξα. Ἐπειτα φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν 8 ἴσων τόξων.

§ 217. Λύσεις: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα τόξα καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐφαπτομένας.

§ 218. Λύσεις: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δωδεκαγώνου εἶναι $(12 \times 2) - 4 = 20$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἐκάστη εἶναι

$$20 : 12 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \text{ ὀρθ.} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 219. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $E = \beta \times \upsilon$ εἶναι
 $E = 25,40 \times 10 = 254$ τετ. μέτρα.

§ 220. Λύσεις: Ὅμοιως εἶναι $E = 32,25 \times 100 = 3225$ τετ. μέτρα.

§ 221. Λύσεις: Ὅμοιως $E = 204 \times 33 = 6732$ τ. μ.

§ 222. Λύσεις: Τὸ πλάτος ἐπὶ 30 πρέπει νὰ εἶναι 600. Τὸ πλάτος λοιπὸν θὰ εἶναι $600 : 30 = 20$ μέτ.

§ 223. Λύσεις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ εἶναι $50 \times 30 = 1500$ τετ. μέτρα = 1,5 βασιλ. στρέμματα. Ἐπειδὴ δὲ διὰ 1 β. στρ. ἔδωκε 1350000 διὰ τὰ 1,5 β. στρ. ἔδωκε $1350\,000 \times 1,5 = 2\,025\,000$ δρχ.

§ 224. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $E = \alpha^2$ εἶναι $E = 16,40^2 = 268,96$ τ.μ.

§ 225. Λύσεις: Ἡ πλευρὰ αὐτῆς εἶναι $209,50 : 4 = 52\,375$ μέτρα. Ἐπομένως $E = 52,375^2 = 2743,140625$ τ. μ.

§ 226. Λύσεις: Ἡ αἰθουσα ἔχει $E = 5 \times 4 = 20$ τ. μ. Καὶ τὸ ὕψος λοιπὸν πρέπει νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 20 τ. μ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἔχει πλάτος 2 μέτρα, τὸ μῆκός του θὰ εἶναι $20 : 2 = 10$ μέτ.

§ 227. Λύσεις: Ἐπειδὴ $E = \beta \times \upsilon$, θὰ εἶναι
 $E = 12,5 \times 5,7 = 71,25$ τετρ. μέτρα.

§ 228. Λύσεις: Ὅμοιως $E = 56,4 \times 23,70 = 1336,68$ τ. μέτ.

§ 229. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· ἑκάστη λοιπὸν εἶναι $28,45 : 2 = 14,225$ μέτ. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος εἶναι 8,5 μέτ. ἔπεται ὅτι $E = 14,225 \times 8,5 = 120,9125$ τ. μέτρα.

§ 230. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι $E = 5$ β. στρ. = $1000 \times 5 = 5000$ τ.μ. Πρέπει τὸ ὕψος ἐπὶ 100 νὰ γίνηται 5000. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\upsilon = 5000 : 100 = 50$ μέτρα.

§ 231. Λύσεις: Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ εἰς τὴν μίαν πλευράν της ὀρίζομεν τμῆμα (ΑΒ) = 4 ἑκατ., εἰς δὲ τὴν ἀλλήν τμῆμα (ΑΓ) = 3 ἑκατ. Ἐπειτα φέρομεν τὸ τμῆμα ΒΓ καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν 4 καὶ ὕψος 3 ἑκατ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ τοῦτο ἔχει $E = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ τετ. ἑκατοστά.

§ 232. Λύσεις: $E = \frac{0,3 \times 0,15}{2} = \frac{0,045}{2} = 0,0225$ τ. μέτρα.

§ 233. Λύσεις: Τοῦτο ἔχει $E = \frac{40,80 \times 28,60}{2} = 583,44$ τ. μέτρα.

Ἐπειδὴ 1 τ. μέτ. ἔξετιμήθη 25000 δρχ., τὰ 583,44 τ. μέτ. ἀξίζουσιν $25000 \times 583,44 = 14\,586\,000$ δρχ.

§ 234. Λύσεις: Ὅρίζομεν εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 5 ἑκατοστ. καὶ γράφομεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς αὐτὸ εἰς ἀπόστασιν 2

έκατοστ. ἀπὸ αὐτό. Ἐπὶ αὐτῆς δὲ ὀρίζομεν τμήμα ΔΓ μήκους 3 ἑκατ. Φέρομεν ἔπειτα τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ σχηματίζομεν τραπέζιον ΑΒΓΔ.

Κατὰ δὲ τὸν τύπον $E = \frac{B+\beta}{2} \times u$ εἶναι $E = \frac{5+3}{2} \times 2 = 8$ τ. μέτ.

§ 235. Λύσεις: Ὁμοίως $E = \frac{85+62,5}{2} \times 20 = 147,5 \times 10 = 1475$ τ. μ.
 $= 1475 : 1000 = 1,475$ β. στρέμ.

§ 236. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι 1,265 βασ. στρ. = $1000 \times 1,265 = 1265$ τετρ. μέτρα καὶ ὅτι τὸ ὕψος ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων πρέπει νὰ εἶναι 1265. Ἐπειδὴ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων εἶναι $\frac{60,40+40,80}{2} = \frac{101,20}{2} = 50,6$, θὰ εἶναι $u = 1265 : 50,6 = 12650 : 506 = 25$ μ.

§ 237. Λύσεις: Τοῦτο ἔχει $E = \frac{40+30}{2} \times 20 = 70 \times 10 = 700$ τετρ. μέτρα = $700 : 1000 = 0,700$ βασ. στρέμ. Ἀξίζει λοιπὸν $18000 \times 0,7 = 12600$ δραχμάς.

§ 238. Λύσεις: Ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα μὲ κοινὴν βάσιν τὴν διαγώνιον ταύτην καὶ ὕψος 5 μέτρα τὸ ἓν καὶ 35 μέτρα τὸ ἄλλο. Τὸ α' τρίγωνον ἔχει ἔμβαδὸν $\frac{80 \times 5}{2} = 40 \times 5 = 200$ τ. μέτ. καὶ τὸ β' $\frac{80 \times 35}{2} = 40 \times 35 = 1400$ τ. μετ.
 Ὁ ἀγρὸς λοιπὸν ἔχει ἔμβαδὸν $200 + 1400 = 1600$ τ. μέτρα.

§ 239. Λύσεις: Ἄν φέρωμεν ἀκτίνας εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου, τοῦτο διαιρεῖται εἰς τρίγωνα. Ἐκαστον ἀπὸ αὐτὰ ἔχει $E = \frac{0,30 \times 0,26}{2} = 0,15 \times 0,26 = 0,039$ τ. μέτ. Τὸ ἑξάγωνον ἐπομένως ἔχει ἔμβαδὸν $0,039 \times 6 = 0,234$ τ. μέτρα.

§ 240. Λύσεις: Φέρομεν μίαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἐπειτα φέρομεν δύο ἄλλας ἐφαπτομένας μὴ παραλλήλους πρὸς τὰς πρώτας ἐκατέρωθεν τῆς γραφείσης διαμέτρου. Ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ταύτας σχηματίζεται ἓν περιγεγραμμένον τραπέζιον μὲ ὕψος τὴν διάμετρον, ἥτοι 8 ἑκατ. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἔμβαδὸν μετροῦμεν τὰς βάσεις του καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E = \frac{B \times \beta}{2} \times 8$.

§ 241. Λύσεις: Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας εἶναι $12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$. Ἐπομένως ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $\sqrt{225} = 15$ μέτρα.

§ 242. Λύσεις: Τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς εἶναι $20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$. Ἡ ἄλλη λοιπὸν κάθετος πλευρὰ εἶναι $\sqrt{144} = 12$ ἑκατοστά.

§ 243. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ 20 εἶναι 150. Ἐπομένως τὸ γινόμενον

τοῦτο εἶναι $150 \times 2 = 300$. Ἡ ἄλλη λοιπὸν κάθετος πλευρὰ εἶναι $300 : 20 = 15$ μέτ. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν τῆς ὑποτείνουσας εἶναι $20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα εἶναι $\sqrt{625} = 25$ μέτρα.

§ 244. Λύσις: Τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου 25 ἐπὶ τὴν ζητούμενην ἀπόστασιν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἥτοι 150 τ. μέτρα. Τὸ γινόμενον λοιπὸν τοῦτο εἶναι $150 \times 2 = 300$, ἡ δὲ ἀπόστασις αὕτη εἶναι $300 : 25 = 12$ μέτρα.

§ 245. Λύσις: Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν $B = 30^\circ$ καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς ὀρίζομεν τμήμα ΒΓ μήκους 10 ἑκατ. Ἐπειτα ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄν μετρήσωμεν τὴν πλευράν ΑΓ, εὐρίσκομεν ὅτι ἔχει μήκος 5 ἑκατ. Διὰ τὴν ὑπολογίσωμεν τὸ μήκος ΑΒ, ἐνθυμούμεθα ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι $10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$. Ἐπομένως $(AB) = \sqrt{75} = 8,66$ ἑκατοστ. κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. Τὸ τρίγωνον τοῦτο ἔχει $E = \frac{8,66 \times 5}{2} = 21,65$ τετ. ἑκατοστ.

Ἄν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν. Αὐτὸ δὲ τὸ γινόμενον θὰ εἶναι διπλάσιον ἐμβαδόν, δηλ. $21,65 \times 2 = 43,3$. Ἐπομένως τὸ ὕψος θὰ εἶναι $43,30 : 10 = 4,33$ ἑκατοστά.

§ 246. Λύσις: Ἄν π.χ. ΒΓ εἶναι μία χορδὴ μήκους 18 ἑκατ. εἰς κύκλον Κ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα ΚΒ μήκους 15 ἑκατ. καὶ φέρωμεν τὴν ΚΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὁ πὺς Α θὰ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ. Ἐπομένως $(BA) = 9$ ἑκατ. Ἀπὸ δὲ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΚΑΒ βλέπομεν ὅτι $(KA)^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$ καὶ $(KA) = \sqrt{144} = 12$ ἑκατοστά.

§ 247. Λύσις: Ἄν π.χ. $(BG) = 24$ ἑκατ. θὰ εἶναι $(BA) = 12$ ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ $(KA) = 16$ ἑκατ. θὰ εἶναι $(KB)^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$ καὶ $(KB) = \sqrt{400} = 20$ ἑκατοστά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

§ 248. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Gamma = \delta \times 3,14$ εἶναι $\Gamma = 1 \times 3,14 = 3,14$ μέτρα.

§ 249. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Gamma = 2 \times 2 \times 3,14$ εἶναι $\Gamma = 2 \times 0,8 \times 3,14 = 5,044$ μέτρα.

§ 250. Λύσις: Τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ 3,14 εἶναι 15,70 μέτρα. Ἐπομένως ἡ διάμετρος δ εἶναι $\delta = 15,70 : 3,14 = 5$ μέτρα καὶ $\alpha = 5 : 2 = 2,5$ μέτρα.

§ 251. Λύσις: Ἀφ' οὗ μὲ μίαν στροφὴν διανύει 2,512 μέτρα,

τὸ μήκος τῆς περιφερείας εἶναι 2,512 μέτρα. Ἐπομένως $\delta = 2,512 : 3,14 = 0,8$ μέτρα καὶ $\alpha = 0,8 : 2 = 0,4$ μέτρα.

§ 252. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $\tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}$ εἶναι

$$\tau = 48 \times \frac{15}{360} = 2 \times \frac{15}{15} = 2 \text{ μέτρα.}$$

§ 253. Λύσεις: Ὁλὴ ἡ περιφέρεια ἔχει μήκος $2 \times 3,14 \times 2,5 = 15,70$ μέτρα. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}$ εἶναι

$$\tau = 15,70 \times \frac{28}{360} = 1,221... \text{ μέτρα.}$$

§ 254. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $\tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}$ θὰ εἶναι $2 = \Gamma \times \frac{35}{360}$.

Ἐπομένως $\Gamma = 2 : \frac{35}{360} = 2 \times \frac{360}{35} = 2 \times \frac{72}{7} = \frac{144}{7} = 20 \frac{4}{7}$ μέτρα.

§ 255. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $E = \alpha^2 \times 3,14$ εἶναι
 $E = 3^2 \times 3,14 = 9 \times 3,14 = 28,26$ τετ. μέτρα.

§ 256. Λύσεις: Ὁμοίως $E = 5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,5$ τετ. μέτρα.

§ 257. Λύσεις: Ἀφ' οὗ ἡ περιφέρεια ἔχει μήκος 15,70 μέτ., ἡ διάμετρος ἔχει μήκος $15,70 : 3,14 = 5$ μέτ. Ἡ ἀκτίς λοιπὸν ἔχει μήκος $5 : 2 = 2,5$ μέτ. καὶ $E = 2,5^2 \times 3,14 = 19,625$ τετρ. μέτρα.

§ 258. Λύσεις: 1ον) Κατὰ τὸν τύπον $\Gamma = \delta \times 3,14$ εἶναι $\Gamma = 19,61 \times 3,14 = 61,5754$ μέτρα. 2ον) Ἡ ἀκτίς εἶναι $19,61 : 2 = 9,805$ μέτρα. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $E = \alpha^2 \times 3,14$ εἶναι $E = 9,805^2 \times 3,14 = 96,138025$ τ. μέτ.

§ 259. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $\epsilon \times E = \frac{\mu}{360}$ εἶναι

$$\epsilon = 28,16 \times \frac{100}{360} = \frac{2816}{360} = 7,822 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

§ 260. Λύσεις: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, ἡ γωνία Α τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι 60° . Ὁ δὲ κύκλος ὅλος ἔχει ἔμβασδὸν $E = 3^2 \times 3,14 = 9 \times 3,14 = 28,26$ τετρ. ἑκατοστά.

Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\epsilon = E \times \frac{\mu}{360}$, ὁ κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἔμβασδὸν

$$\epsilon = 28,26 \times \frac{60}{360} = \frac{28,26}{6} = 4,71 \text{ τετρ. ἑκατοστά.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

§ 261. Λύσεις: Ἐπειδὴ τὸ δάπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E = B \times \upsilon$ καὶ εὐρίσκομεν

$$E = 69,51 \times 30,86 = 21\,450\,786 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

§ 262. Λύσις: Ὁμοίως τὸ Θησεῖον ἔχει $E = 31,77 \times 13,73 = 436,2021$ τετρ. μέτρα.

§ 263. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὕψος ἐπὶ 100 γίνεται 3675,6. Ἐπομένως τὸ ὕψος εἶναι $3675,6 : 100 = 36,756$ μέτρα.

§ 264. Λύσις: Ὁ διάδρομος ἔχει ἐμβαδὸν $E = 8 \times 5 = 40$ τ. μέτ. Ἐκάστη δὲ πλάξ εἶναι τετράγωνον μὲ πλευράν 2 παλαμῶν ἢ 0,2 μέτ. Ἐπομένως ἔχει ἐμβαδὸν $0,2^2 = 0,04$ τετ. μέτρα. Ὁ διάδρομος λοιπὸν ἔχει $40 : 0,04 = 4000 : 4 = 1000$ πλάκας.

Β' τρόπος: Γνωρίζομεν ὅτι 1 τ. μέτ. = 100 τετρ. παλάμαι, ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διαδρόμου εἶναι $100 \times 40 = 4000$ τετρ. παλάμαι. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη πλάξ ἔχει ἐμβαδὸν $2 \times 2 = 4$ τετρ. παλ., ὁ διάδρομος ἔχει $4000 : 4 = 1000$ πλάκας.

§ 265. Λύσις: Τὸ οἰκόπεδον ἔχει ἐμβαδὸν $150 \times 63 = 9450$ τετρ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{9}{16}$ τετ. μέτ. ἀποτελοῦσι 1 τεκτ. τετρ. πῆχ., τὰ 9450 τετρ. μέτρα ἀποτελοῦσι τόσους τεκτ. πῆχεις, ὅσας φορές τὰ $\frac{9}{16}$ χωροῦσιν εἰς τὰ 9450, ἥτοι $9450 : \frac{9}{16} = 9450 \times \frac{16}{9} = 1050 \times 16 = 16800$ τεκτ. τετρ. πῆχεις.

Ἀφ' οὗ δὲ 1 τεκτ. τετρ. πῆχυς δηλ. τὰ $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτ. τιμᾶται 30000 δρχ. τὸ $\frac{1}{16}$ τετ. μέτ. τιμᾶται $\frac{30000}{9}$ δρχ., τὰ $\frac{16}{16}$ τ. μετ. τιμῶνται $\frac{30000}{9}$ $\times 16$ καὶ τὰ 9450 τ. μ. τιμῶνται $\frac{30000}{9} \times 16 \times 9450 = 504\,000\,000$ δραχμ.

§ 266. Λύσις: Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι $EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$ καὶ μὲ τὸν γνώμονα βλέπομεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ $EZH\Theta$ εἶναι ὅλαι ὀρθαί. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο τετράγωνον καὶ ἔχει ἐμβαδὸν $E = (EZ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $(EB) = (BZ) = 2$ ἑκατ. κατὰ τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα εἶναι $(EZ)^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Ἀρα $E = 8$ τετρ. ἑκατοστομέτρα.

ΣΗΜ.: Παρατηροῦντες ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ ἔχει ἐμβαδὸν $4^2 = 16$ τετ. ἑκ. συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τετράγωνον $EZH\Theta$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

§ 267. Λύσις: Τὸ ἀλώνιον ἔχει ἐμβαδὸν $3,5^2 \times 3,14 = 38,465$ τ.μ. Ἐπειδὴ δὲ δι' 1 τ. μ. ἐξοδεύει 10 000 δρχ. διὰ τὰ 38,465 τ. μ. θὰ πληρῶσιν $10\,000 \times 38,465 = 384\,650$ δρχ.

§ 268. Λύσις: Ὁ μεγαλύτερος κύκλος ἔχει ἐμβαδὸν $5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,50$ τετ. ἑκατ., ὁ δὲ μικρότερος $3^2 \times 3,14 = 9 \times 3,14 = 27,26$ τετ. ἑκατ. Ἡ δὲ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $78,50 - 27,26 = 51,24$ τετρ. ἑκατ.

§ 269. Λύσις: Τὸ δωμάτιον ἔχει ἐμβαδὸν $3,60 \times 5 = 18$ τ. μέτ., ἑκάστη δὲ σανὶς $1,80 \times 0,25 = 0,45$ τ. μέτ. Θὰ χρειασθῶσι λοιπὸν τόσαι σανίδες, ὅσας φορές τὰ 0,45 χωροῦσιν εἰς τὰ 18 τ. μ. ἥτοι $18 : 0,45 = 1800 : 45 = 40$ σανίδες.

§ 270. Λύσις: Τὸ μήκος τῆς περιφέρειας 1000 φορές κάμνει τὸ διανυθὲν διάστημα, ἥτοι 3140 μέτρα. Τὸ μήκος λοιπὸν τῆς περιφέρειας εἶναι $3140 : 1000 = 3,14$ μέτρα. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Gamma = \delta \times 3,14$ θὰ εἶναι $3,14 = \delta \times 3,14$, ἐπομένως ἡ διάμετρος δ εἶναι 1 μέτρον, ἡ δὲ ἀκτίς $1 : 2 = 0,50$ μέτρα.

§ 271. Λύσις: Οἱ 8 ἄνθρωποι καταλαμβάνουσιν ὅλην τὴν περιφέρειαν, ἥτοι $1,95 \times 3,14 = 6,123$ μέτ. Εἰς ἕκαστον λοιπὸν ἀναλογουσι $6,123 : 8 = 0,765$ μέτρα.

§ 272. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $E = \frac{B+\beta}{2} \times u$, ἡ ἄμπελος ἔχει ἔμβαδὸν $E = \frac{36+30}{2} \times 45 = 33 \times 45 = 1485$ τ. μέτρ. ἢ $1485 : 1000 = 1,485$ βασ. στρέμματα. *Εδῶκε λοιπὸν $620.000 \times 1,485 = 920.700$ δρχ.

§ 273. Λύσις: 1ον) *Ὁλη ἡ περιφέρεια ἔχει μήκος $\Gamma = 2 \times 0,25 \times 3,14 = 1,57$ μέτ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}$, ἡ βάσις τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἔχει μήκος $\tau = 1,57 \times \frac{150}{360} = 1,57 \times \frac{5}{12} = 0,654$ μέτ.
2ον) *Ὁλος ὁ κύκλος ἔχει ἔμβαδὸν $E = 0,25^2 \times 3,14 = 0,19625$ τετ. μέτ.
Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\varepsilon = E \times \frac{\mu}{360}$ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ἔχει $\varepsilon = 0,19625 \times \frac{150}{360} = 0,19625 \times \frac{5}{12} = 0,08177$ τ. μέτ. ἢ $100 \times 0,08177 = 8,177$ τετ. παλάμας.

§ 274. Λύσις: Ἡ α' περιφέρεια ἔχει μήκος $2 \times 0,25 \times 3,14 = 1,57$ μέτ. Ἡ δὲ β' ἔχει μήκος $2 \times 0,50 \times 3,14 = 3,14$ μέτρα. Βλέπομεν δὲ ὅτι $3,14 = 1,57 \times 2$, ἥτοι ἡ β' περιφέρεια εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν α'.

ΣΗΜ.: Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἐννοοῦμεν χωρὶς νὰ κάμωμεν τὰς πράξεις ὡς ἐξῆς: Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ γινόμενον $2 \times 0,25 \times 3,14$ ὁ παράγων 0,25 γίνε διπλασίος εἰς τὸ γινόμενον $2 \times 0,50 \times 3,14$, οἱ δὲ ἄλλοι ἔμειναν ἀμετάβλητοι. Γνωρίζομεν δὲ ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν ὅτι καὶ τὸ γινόμενον διπλασιάζεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

§ 275. Λύσις: Αἱ πλευραὶ τῆς ὀροφῆς εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ πάτωμα. Αἱ πλευραὶ τῆς δεξιᾶς π.χ. πλευρᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἀριστερὰν πλευρὰν· αἱ πλευραὶ τῆς ἔμπροσθεν πλευρᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ὀπισθεν πλευρὰν τῆς αἰθούσης.

§ 276. Λύσις: Ἀρκεῖ νὰ τευνώσωμεν τὸ νῆμα παράλληλον πρὸς μίαν οἰανδήποτε εὐθεῖαν τοῦ πατώματος ἢ τῆς πλευρᾶς τῆς αἰθούσης.

§ 277. Λύσις: 1ον) Ἀρκεῖ νὰ τοποθετήσωμεν τὸν γνώμονα, οὕτως ὥστε ἡ ὑποτείνουσα νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ πίνακος.

2ον) Τοποθετούμεν τὸν γνῶμονα, οὕτως ὥστε ἡ ὑποτείνουσα νὰ κατευθύνηται πρὸς τὸν πίνακα.

§ 278. Λύσεις: Αἱ πλευραὶ τῶν τοίχων τῆς αἰθούσης τέμνουσι τὸ πάτωμα. Κάθε δὲ πλευρὰ τοῦ πατώματος τέμνει δύο πλευρὰς τῆς αἰθούσης. Ἐπίσης μία πλευρὰ τῆς αἰθούσης τέμνεται ἀπὸ τὰς τομὰς τῆς ὀροφῆς καὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τῆς αἰθούσης ἐκτὸς τῆς ἀπέναντι ἐκείνης.

§ 279. Λύσεις: Αἱ πλευραὶ τῶν τοίχων, αἱ ὁποῖαι φέρονται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ πάτωμα. Αἱ πλευραὶ π.χ. τοῦ πατώματος καὶ τῆς ὀροφῆς, αἱ ὁποῖαι φέρονται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν δεξιὰν πλευρὰν τῆς αἰθούσης.

§ 280. Λύσεις. 1ον) Ἀρκεῖ π.χ. νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν εἰς μίαν πλευρὰν ἐνὸς τοίχου, ἡ ὁποία φέρεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω.

2ον) Ἀπὸ ἐν σημεῖον Α τοῦ πίνακος φέρομεν εἰς αὐτὸν δύο εὐθείας π.χ. ΑΓ, ΑΔ (σχῆμα 83 Γεωμ.) εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι ὁ πίναξ εἶναι τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐπειτα στηρίζομεν τὸ ἐν ἄκρον τῆς ὑποτείνουσας τοῦ γνῶμονος, οὕτως ὥστε αὕτη νὰ σχηματίσῃ ὀρθὴν γωνίαν μὲ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ. Βεβαιούμεθα δὲ περὶ τούτου μὲ τὴν βοήθειαν δευτέρου γνῶμονος, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 83 Γεωμετρίας φαίνεται.

§ 281. Λύσεις: Ἡ τοποθέτησις αὕτη εἶναι εὐκολος.

§ 282. Λύσεις: Ἐν ζευγος παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἡ ὀροφή καὶ τὸ πάτωμα. Ἄλλο ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ πλευρὰ τῆς αἰθούσης καὶ τρίτον ἡ ἔμπροσθεν καὶ ὀπίσθεν πλευρὰ τῆς αἰθούσης.

§ 283. Λύσεις: Τοποθετούμεν τὸν γνῶμονα πρῶτον ὀριζοντίως καὶ ἔπειτα κατακορύφως, οὕτως ὥστε μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτει μὲ τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

§ 284. Λύσεις: Αἱ πλευραὶ τοῦ πατώματος, τῆς ὀροφῆς καὶ αἱ κατακόρυφοι πλευραὶ τῶν τοίχων εἶναι αἱ 12 ἄκμαι τῆς αἰθούσης. Κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι καὶ ἄκμη μιᾶς διέδρου γωνίας.

§ 285. Λύσεις: Μία τοιαύτη διέδρος γωνία εἶναι π.χ. ἐκείνη, ἡ ὁποία ἔχει ἄκμην ΑΓ (σχῆμα 83 Γεωμ.). Ἀντίστοιχος δὲ ἐπίπεδος γωνία εἶναι ἡ ΒΑΔ.

§ 286. Λύσεις: Τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφή εἶναι ὀριζόντια ἐπίπεδα. Αἱ πλευραὶ τῆς αἰθούσης εἶναι κατακόρυφα ἐπίπεδα. Τὸ πάτωμα καὶ μιὰ οἰαδήποτε πλευρὰ τῆς αἰθούσης εἶναι κάθετα ἐπίπεδα. Ἐπίσης ἡ ὀροφή καὶ μιὰ πλευρὰ εἶναι κάθετα ἐπίπεδα. Καὶ δύο τεμνόμεναι πλευραὶ τῆς αἰθούσης εἶναι κάθετα ἐπίπεδα.

§ 287. Λύσεις: 1ον) Τοποθετούμεν τὸν γνῶμονα, οὕτως ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

2ον) Στηρίζομεν τὸν γνῶμονα μὲ μίαν πλευράν του ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ τὰς ἄλλας πλαγίας πρὸς αὐτόν.

§ 288. Λύσεις: Τέσσαρες στερεαὶ γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ τὴν ὀροφὴν καὶ κάθε μία ἀπὸ δύο κατακορύφους πλευρὰς τῆς αἰθοῦσης. Ἄλλαι 4 σχηματίζονται ἀπὸ τὸ πάτωμα καὶ κάθε μία ἀπὸ δύο κατακορύφους πλευρὰς.

§ 289. Λύσεις: Αὗται εἶναι ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ, ΔΚΑ (σχ. 85 Γεωμ.).

§ 290. Λύσεις: 1ον Διέδροι γωνίαι εἶναι αἱ ΑΚΒΓ (ἢ ἀπλῶς ΚΒ), ΒΚΓΔ (ἢ ΚΓ), ΓΚΔΑ (ἢ ΚΔ) καὶ ΔΚΑΒ (ἢ ΚΑ) (σχ. 85 Γεωμ.).

2ον) Ἀκμαὶ δὲ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ.

§ 291. Λύσεις: Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα Π (σχ. 84 Γεωμ.) ἔχει 3 κορυφὰς ἐπὶ τῆς μιᾶς βάσεως ΑΒΓ καὶ 3 ἐπὶ τῆς ἄλλης βάσεως ΔΕΖ. Τὸ ὅλον $3 \times 2 = 6$ κορυφὰς. Ὅμοίως βλέπομεν ὅτι τὸ τετραγωνικὸν πρίσμα Σ (σχῆμα 86 Γεωμ.) ἔχει $4 \times 2 = 8$ κορυφὰς. Ἐνα πενταγωνικὸν, ἑξαγωνικὸν κτλ. ἔχει $5 \times 2 = 10$, $6 \times 2 = 12$ κτλ. Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν ἐνὸς πρίσματος, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μιᾶς βάσεως αὐτοῦ.

§ 292. Λύσεις: Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα Π (σχ. 84 Γεωμ.) ἔχει ἄκμὰς τὰς 3 πλευρὰς τῆς μιᾶς βάσεως, τὰς 3 πλευρὰς τῆς ἄλλης βάσεως καὶ ἄλλας 3 πλευρὰς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτοῦ. Τὸ ὅλον $3 \times 3 = 9$ ἄκμὰς. Ὅμοίως βλέπομεν ὅτι τὸ τετραγωνικὸν πρίσμα Σ (σχ. 86 Γεωμ.) ἔχει $4 \times 3 = 12$ ἄκμὰς, ἐν πενταγωνικὸν ἔχει $5 \times 3 = 15$ ἄκμὰς κτλ.

Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἄκμῶν ἐνὸς πρίσματος, τριπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μιᾶς βάσεως αὐτοῦ.

§ 293. Λύσεις: Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα Π (σχ. 84) ἐκτὸς τῶν δύο βάσεων ἔχει καὶ 3 παραπλεύρους ἑδρας, ἢ $3 + 2 = 5$ ἑδρας. Τὸ τετραπλευρικὸν ἔχει 4 παραπλεύρους ἑδρας καὶ 2 βάσεις, τὸ ὅλον $4 + 2 = 6$ ἑδρας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν ἐνὸς πρίσματος, αὐξάνομεν κατὰ 2 τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μιᾶς βάσεως αὐτοῦ.

§ 294. Λύσεις: Ὅλοι αἱ παράπλευροι ἑδραι ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι ὀρθογώνια. Ἐπομένως τοῦτο εἶναι ὕρθον πρίσμα.

§ 295. Λύσεις: Ἡ βάση του δύναται ὀρθογώνιον ἢ ῥόμβος, ἢ ρομβοειδές. Εἰς τὴν α' περίπτωσιν εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, οὐχὶ ὅμως καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις,

§ 296. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 12 ἴσας ἄκμὰς, καὶ 3 ἴσας διαστάσεις. Ἄν δὲ ἡ μία εἶναι 5 ἑκατ. τὸ ἄθροισμα τῶν 3 εἶναι $5 \times 3 = 15$ ἑκατοστά.

§ 297. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 12 ἴσας ἀκμάς. Ἄν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 0,60 μέτ., ἐκάστη ἔχει μήκος $0,60:12=0,05$ μέτ.

§ 298. Λύσις: Ἐπάνω εἰς ἓν τεμάχιον χαρτονίου σχηματίζομεν σχῆμα, ὅπως τὸ 90 Γεωμ. Ἐπειτα κρατοῦμεν ἀκίνητον τὸ τετράγωνον 1, τὰ δὲ ἄλλα ἀνεγείρομεν ὥστε νὰ γίνωσι κάθετα ἐπ' ἐκεῖνο. Ἐπειτα κάμπτομεν τὸ 6 ὥστε νὰ γίνῃ παράλληλον πρὸς τὸ 1.

§ 299. Λύσις: Ἐπάνω εἰς ἓν τεμάχιον χαρτονίου σχηματίζομεν σχῆμα, ὅπως τὸ 91 Γεωμ. Ἐπειτα κρατοῦμεν ἀκίνητον τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ὀρθογώνιον καὶ συνεχίζομεν, ὅπως προηγουμένων.

§ 300. Λύσις: Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς Π (σχῆμα 92β Γεωμ.) ἔχει κορυφὰς τὴν Κ καὶ τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β, Γ τῆς βάσεως. Ἐχει λοιπὸν τὸ ὅλον $3+1=4$ κορυφὰς. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓΔ (σχῆμα 92γ Γεωμ.) ἔχει $4+1=5$ κορυφὰς, ἡ ἑξαγωνικὴ ΚΑΒΓΔΕ ἔχει $6+1=7$ κορυφὰς κτλ.

Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν μιᾶς πυραμίδος, προσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως αὐτῆς.

§ 301. Λύσις: Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς Π (σχ. 92 Γεωμ.) ἔχει 3 παραπλεύρους ἑδρας καὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ. Ἐχει λοιπὸν τὸ ὅλον $3+1=4$ ἑδρας. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓΔ ἔχει $4+1=5$ ἑδρας, ἡ ἑξαγωνικὴ ΚΑΒΓΔΕ ἔχει $6+1=7$ ἑδρας κτλ.

Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν μιᾶς πυραμίδος, προσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς.

§ 302. Λύσις: Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς Π (σχῆμα 92β Γεωμ., ἔχει ἀκμάς τὰς 3 πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τῆς βάσεως καὶ 3 ἄλλας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως. Τὸ ὅλον ἔχει λοιπὸν $3 \times 2=6$ ἀκμάς. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓΔ (σχῆμα 92 γ Γεωμ.) ἔχει $4 \times 2=8$ ἀκμάς, ἡ ΚΑΒΓΔΕ, ἔχει $6 \times 2=12$ κτλ.

Ὡστε: Διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν μιᾶς πυραμίδος, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς.

§ 303. Λύσις: Θέτομεν μέσα εἰς ἓν κυτίον μίαν οἰανδήποτε πυραμίδα τῆς συλλογῆς τοῦ Σχολείου μας, π. χ. τὴν ΚΑΒΓΔ (σχῆμα 92γ Γεωμ.) οὕτως ὥστε ἡ βάσις ΑΒΓΔ τῆς πυραμίδος νὰ πέσῃ εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυτίου καὶ ἡ ἀκμὴ ΑΒ νὰ ἔλθῃ ἑπάνω εἰς μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως τοῦ κυτίου. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ διέδρος γωνία ΚΑΒΓ καταλαμβάνει ἓνα μέρος τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας τοῦ κυτίου. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΚΑΒΓ ὁξεία διέδρος γωνία.

§ 304. Λύσις: Τοῦτο δὲν ἀρκεῖ, διότι, ἂν τὸ ὕψος τῆς πυρα-

μίδος δὲν συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον τῆς, ἢ πυραμὶς δὲν εἶναι κανονικὴ.

§ 305. Λύσεις: Μὲ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι.

§ 306. Λύσεις: Ὅμοίως βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ ἄκμαὶ ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι.

§ 307. Λύσεις: Γνωρίζομεν ὅτι ἓν κανονικὸν τετραέδρον ἔχει 6 ἴσας ἄκμας. Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 0,30 μέτ., ἐκάστη ἔχει μήκος $0,30 : 6 = 0,05$ μέτ.

§ 308. Λύσεις: Εἰς ἓνα τεμάχιον χαρτονίου σχηματίζομεν σχῆμα, ὅπως τὸ 93 Γεωμ. Ἐπειτα κρατοῦμεν τὸ τετράγωνον ἀκίνητον καὶ ἀνεγείρομεν τὰ πέριξ αὐτοῦ τρίγωνα, μέχρις ὅτου αἱ κινήσεις κορυφαὶ αὐτῶν συναντηθῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

§ 309. Λύσεις: Ἡ βάση αὐτῆς ἔχει περίμετρον $\Pi = 4 \times 4 = 16$ ἑκατ. καὶ ἐμβαδὸν $\beta = 4^2 = 16$ τετρ. μέτ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον

$E = (\Pi \times Y) + (\beta \times 2)$ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν $E = (16 \times 7) + (16 \times 2) = 144$ τετρ. ἑκατ.

§ 310. Λύσεις: Ἡ βάση τοῦ ἔχει περίμετρον $\Pi = 6 + 4 + 6 + 4 = 20$ ἑκτ. καὶ ἐμβαδὸν $\beta = 6 \times 4 = 24$ τετρ. ἑκατ. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν $E = (20 \times 5) + (24 \times 2) = 148$ τετρ. ἑκατοστά.

§ 311. Λύσεις: Ἡ βάση τῆς στήλης ταύτης ἔχει περίμετρον $0,50 \times 4 = 2$ μέτ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $E = \Pi \times Y$ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς ἔχει ἐμβαδὸν $E = 2 \times 2,5 = 5$ τετρ. μέτ. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν ὑδροχρωματισμὸν 1 τετρ. μέτ. πληρώνονται 1600 δρχ., διὰ τὰ 5 τετρ. μέτρα θὰ πληρωθῶσι $1600 \times 5 = 8000$ δρχ.

§ 312. Λύσεις: Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ 4 ὀρθογώνια μὲ ὕψος 5 ἑκατοστ. ἑκαστον. Βάσιν δὲ τὸ ἓν ἔχει 2 ἑκατ. τὸ ἄλλο 4 ἑκατ., τὸ γ' 2 καὶ τὸ δ' 3 ἑκατ. Ἐὰν καλύψωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ἀκριβῶς καὶ μίαν φορὰν μὲ ἓν φύλλον χάρτου, αὐτὸ διαιρεῖται μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος εἰς 4 ὀρθογώνια ἴσα, ἓν πρὸς ἓν, μὲ τὰ προηγούμενα. Ἐὰν δὲ ἔπειτα τεντώσωμεν αὐτὸ τὸ φύλλον, βλέπομεν ὅτι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ ὕψος 5 ἑκατ. καὶ βάσιν $2 + 4 + 2 + 3 = 11$ ἑκατ. Αὐτὸ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, κατασκευάζεται δὲ καὶ ἀμέσως χωρὶς προηγουμένως νὰ καλύψωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

§ 313. Λύσεις: Ἡ αἶθουσα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta = \alpha \times \beta \times \gamma$ ἔχει ὄγκον $\Theta = 6 \times 4 \times 5 = 120$ κυβ. μέτρα. Χωρεῖ λοιπὸν 120 κ. μ. ἀέρος.

§ 314. Λύσεις: Ὅμοίως τὸ κυτίον ἔχει ὄγκον $\Theta = 20 \times 9,5 \times 8,5 = 161,5$ κυβ. ἑκατοστῶν.

§ 315. Λύσεις: Ἡ δεξαμενὴ ἔχει ὄγκον $\Theta = 3 \times 5 \times 3,5 = 52,5$ κυβ. μέτ. Χωρεῖ λοιπὸν 52,5 κυβ. μέτρα ὕδατος.

§ 316. Λύσεις: Τὰ σκύρα αποτελοῦσιν ἓνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὕψους 0,30 μέτ. καὶ μὲ βάσιν $80^2=6400$ τετ. ἑκατ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta=B \times Y$ ταῦτα ἔχουσιν ὄγκον $\Theta=6400 \times 0,30=1920$ κυβ. μέτρα.

§ 317. Λύσεις: Ἡ ἀποθήκη ἔχει ὄγκον $\Theta=6 \times 4 \times 3=72$ κυβ. μέτ. Χωρεῖ λοιπὸν σίτον 72 κυβ. μέτρων. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{10}$ κυβ. μέτ. ἀποτελεῖ ἓν κοιλόν, τὰ 72 κυβ. μέτρα ἀποτελοῦσι τόσα κοιλὰ, ὅσας φορὰς τὸ $\frac{1}{10}$ χωρεῖ εἰς τὸν 72, ἥτοι $72 : \frac{1}{10} = 72 \times 10 = 720$ κοιλὰ.

§ 318. Λύσεις: Ὁ ἀῆρ τῆς αἰθούσης ἔχει ὄγκον $6 \times 5,5 \times 5=165$ κυβ. μέτρα. Ἐπομένως ἀναλογοῦσι εἰς κάθε μαθητὴν $165 : 40 = 4,125$ κυβ. μέτρα ἀέρος.

§ 319. Λύσεις: Τὸ ὕδωρ ἔχει ὄγκον $10 \times 8 \times 15=1200$ κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ 1 κυβ. ἑκατ. ὕδατος ἔχει βάρος 1 γραμμάριον, τὰ 1200 κυβ. ἑκατοστὰ ἔχουσι βάρος 1200 γραμμάρια.

§ 320. Λύσεις: Ἀφ' οὗ ὕδαταποθήκη θὰ χωρῇ 960 χιλιόγραμμα, θὰ ἔχη ὄγκον 960 κυβ. παλάμας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει ἔμβαδὸν $1,20 \times 0,80=0,96$ τετρ. μέτρα $=96$ τετρ. παλ. τὸ βάθος πρέπει νὰ εἶναι $960 : 96 = 10$ παλάμας $=1$ μέτρον.

§ 321. Λύσεις: Ἀφ' οὗ χωρεῖ 4,5 χιλιόγρ. ὕδατος, ἔχει ὄγκον 4,5 κυβ. παλάμας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις ἔχει ἔμβαδὸν $15^2=225$ τετ. ἑκατ. ἡ $225 : 100 = 2,25$ τετ. παλ. τὸ βάθος θὰ εἶναι $4,5 : 2,25 = 450 : 225 = 2$ παλάμαι.

§ 322. Λύσεις: Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι $0,5^3=0,125$ κυβ. μέτ. ἡ $1000000 \times 0,125 = 125000$ κυβ. ἑκατ. Ὁ δὲ ὕδράργυρος ἔχει εἰδικὸν βάρος 13,59 καὶ κατὰ τὸν τύπον $B = \Theta \times \epsilon$ ἔχει βάρος $B=125000 \times 13,59$ γραμμάρια ἢ $125000 \times 13,59 : 1000 = 125 \times 13,59 = 1698,75$ χιλιόγραμμα.

§ 323. Λύσεις: Τὸ βάθρον ἔχει ὄγκον $1,5 \times 1 \times 0,5=0,75$ κυβ. μέτ. καὶ εἰδικὸν βάρος 2,65. Ἐχει ἐπομένως $B=0,75 \times 2,65=1,9375$ τόννους ἢ $1000 \times 1,9375 = 1937,5$ χιλιόγραμμα.

§ 324. Λύσεις: Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις τῆς αἰθούσης καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς εὐρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ περιεχομένου ἀέρος. Τὸν ὄγκον δὲ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ἀέρος. Τὸν ὄγκον δὲ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ἀέρος. Ἀν π.χ. ἡ αἰθουσα ἔχη διαστάσεις 9, 6, 5 0,0013 τοῦ ἀτμοσφ. ἀέρος. Ἀν π.χ. ἡ αἰθουσα ἔχη διαστάσεις 9, 6, 5 0,0013 τοῦ ἀτμοσφ. ἀέρος. αὐτῆς εἶναι $9 \times 6 \times 5=270$ κυβ. μέτρα καὶ τὸ βάρος τοῦ εἶναι $270 \times 0,0013=0,351$ τόννοι $=1000 \times 0,351=351$ χιλιόγραμ.

§ 325. Λύσεις: Ἡ ἐλάτη ἔχει εἰδ. βάρος 0,56. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta=B \times \epsilon$, ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\Theta=26,8 : 0,56 = 47 \frac{6}{7}$ κυβ. ἑκατοστ.

§ 326. Λύσεις: Ὁ κύβος ἔχει ὄγκον $2^3=8$ κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ ὁλόκληρος βυθίζεται εἰς τὸ ἔλαιον, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ, ἔχει ὄγκον

8 κυβ. έκατ. *Επειδή δέ τὸ εἶδ. βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,92, τὸ βάρος του εἶναι $8 \times 0,92 = 7,36$ γραμμάρια.

§ 327. Λύσις: Τὸ δοχεῖον ἔχει ὄγκον $4^3 = 64$ κυβ. έκατοστ. *Ο ὄγκος οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ εἶδ. βάρος τοῦ οἴνου πρέπει νὰ γίνηται 60,8 γραμ. Τὸ εἶδ. βάρος θὰ εἶναι λοιπὸν $60,8 : 64 = 608 : 640 = 0,95$.

§ 328. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = B \times \upsilon$ εἶναι $\Theta = 20 \times 10,5 = 210$ κυβ. έκατοστ.

§ 329. Λύσις: *Επειδὴ τοῦτο ἔχει βάσιν $4^2 = 16$ τ. μέτ. καὶ ὕψος 3 μέτ, ὁ ὄγκος του εἶναι $16 \times 3 = 48$ κυβ. μέτ.

§ 330. Λύσις: Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2} \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$ τετ. μέτ. *Επομένως ὁ ὄγκος του εἶναι $0,125 \times 2,5 = 0,3125$ κυβ. μέτ. *Επειδὴ δέ τὸ εἶδ. βάρος τοῦ μαρμάρου εἶναι 2,65, τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι $0,3125 \times 2,65 = 0,828125$ τόννοι ἢ $1000 \times 0,828125 = 828,125$ χιλιόγραμμα. Τὸ ἔδαφος λοιπὸν πιέζεται μὲ βάρος 828,125 χιλιογρ.

§ 331. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι 1 κυβ. παλ. ἔχει 1000 κυβ. έκατ. *Επομένως ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $1000 \times 250 = 250000$ κυβ. έκατ. *Ο ὄγκος οὗτος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως 1000 τετ. έκατ. ἐπὶ τὸ ὕψος. Τὸ ὕψος λοιπὸν εἶναι $250000 : 1000 = 250$ έκατ. ἢ 2,5 μέτρα.

Β' τρόπος. Αἱ 250 κυβ. παλάμαι εἶναι $250 : 1000 = 0,250$ κ. μέτ. Τὰ δέ 1000 τ. έκατ. εἶναι $1000 : 10000 = 0,10$ τετ. μέτ. Τὸ ὕψος λοιπὸν θὰ εἶναι $0,250 : 0,10 = 25 : 10 = 2,5$ μέτρα.

§ 332. Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος 10 έκατ. πρέπει νὰ γίνηται 34,5 κυβ. έκατ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $B = 34,5 : 10 = 3,45$ τετ. έκατοστ.

§ 333. Λύσις: Ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $B = 0,12 \times 0,30 = 0,036$ τ. μέτ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta = \frac{B \times \upsilon}{3}$ ἡ πυραμὶς ἔχει ὄγκον $\Theta = \frac{0,036 \times 0,20}{3} = 0,012 \times 0,20 = 0,0024$ κυβ. μέτρα.

§ 334. Λύσις: Ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $0,6^2 = 0,36$ τ. μέτ. *Επομένως ἡ πυραμὶς ἔχει ὄγκον $\Theta = \frac{0,36 \times 1,5}{3} = 0,36 \times 0,5 = 0,18$ κυβ. μέτ.

§ 335. Λύσις: Ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $B = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ τ. έκατ. Ἡ πυραμὶς λοιπὸν ἔχει ὄγκον $\Theta = \frac{6 \times 6}{3} = 12$ κυβ. έκατ. *Επειδὴ δέ τὸ εἶδ. βάρος τῆς ἐλάτης εἶναι 0,56, ἡ πυραμὶς ἔχει βάρος $12 \times 0,56 = 6,72$ γραμμάρια.

§ 336. Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν 20 τ. έκατ. ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 3

πρέπει νὰ γίνηται 50' ἐπομένως τὸ γινόμενον 20 ἐπὶ τὸ ὕψος πρέπει νὰ εἶναι $50 \times 3 = 150$. Τὸ ὕψος λοιπὸν θὰ εἶναι $150 : 20 = 7,5$ ἑκατ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Β' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 337. Λύσεις: Εἰς ἓνα τεμάχιον χαρτονίου κάμνομεν ἓνα σχῆμα, ὅπως τὸ σχῆμα 98 τῆς Γεωμετρίας καὶ ἀποχωρίζομεν τὸ περίξ αὐτοῦ μέρος τοῦ χαρτονίου. Ἐπειτα κρατοῦμεν ἀκίνητον τὸ μεσαῖον ὀρθογώνιον καὶ ἀνεγείρομεν τὰ ἄλλα σχήματα ἕως ὅτου γίνωσι κάθετα ἐπὶ ἐκεῖνο.

§ 338. Λύσεις: Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος κατὰ τὸν τύπον $\epsilon = \Pi \times Y$ (§ 101 Γεωμ.). Πρὸς τοῦτο εὐρίσκομεν ὅτι ἡ βάσις ἔχει περίμετρον $\Pi = 0,40 \times 4 = 1,60$ μέτ. Ἐπομένως $\epsilon = 1,60 \times 2,50 = 4$ τετ. μέτρα. Τὸ ὕψασμα λοιπὸν, τὸ ὁποῖον θὰ καλύψῃ αὐτὴν θὰ ἔχη ἐμβαδὸν 4 τετρ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πλάτος του εἶναι 0,40, τὸ μῆκος του πρέπει νὰ εἶναι $4 : 0,40 = 40 : 4 = 10$ μέτρα.

§ 339. Λύσεις: Διὰ νὰ χωρῇ 3,5 τόννους ὕδατος, πρέπει νὰ ἔχη ὄγκον 3,5 κυβ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει ἐμβαδὸν $3,5 \times 2,5 = 8,75$ τετ. μέτρα, τὸ βάθος πρέπει νὰ εἶναι $3,4 : 8,75 = 350 : 875 = 0,4$ μέτρα.

§ 340. Λύσεις: Τὸ κυβώτιον ἔχει ὄγκον $2,20 \times 0,70 = 1,54$ κυβ. μέτρα. Ἐκάστη δὲ πλάξ ἔχει ὄγκον $0,14 \times 0,05 \times 0,05 = 0,00035$ κυβ. μέτρ. Ἐπομένως τὸ κιβώτιον χωρεῖ τόσας πλάκας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 0,00035 κυβ. μέτρα εἰς τὰ 1,54 κυβ. μέτρα, ἥτοι $1,54 : 0,00035 = 154000 : 35 = 4400$ πλάκας.

§ 341. Λύσεις: Ὁ κύβος ἔχει ὄγκον $\Theta = 3^3 = 27$ κυβ. ἑκατοστά. Ἐπομένως τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ ἔχει ὄγκον 27 κυβ. ἑκατ. καὶ βάρος 27 γραμμάρια.

§ 342. Λύσεις: Ἡ σκαφεῖσα τάφος ἔχει ὄγκον $40 \times 0,80 \times 2 = 64$ κυβ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ διὰ 1 κυβ. μέτ. ἐλάμβανον 10.000 δραχμάς, διὰ τὰ 64 κυβ. μέτρα ἔλαβον $10000 \times 64 = 640\,000$ δραχ.

§ 343. Λύσεις: Ἀφ' οὗ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ ξύλον καὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ βάρος, ἔπεται ὅτι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ βάσεις αὐτῶν ὡς ἰσοδύναμοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν Β, ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $B \times 3$ καὶ τῆς πυραμίδος ἐπίσης $B \times 3$. Ἄν δὲ Y εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $B \times \frac{Y}{3}$. Πρέπει

λοιπὸν νὰ εἶναι $B \times 3 = B \times \frac{Y}{3}$. Διὰ νὰ συμβαίῃ δὲ τοῦτο, πρέπει

νὰ εἶναι $\frac{Y}{3} = 3$ καὶ ἐπομένως $Y = 9$ μέτρα.

§ 344. Λύσις: Παρατηρούμεν πρῶτον ὅτι ἐκ παραδρομῆς παρελείφθη ὅτι πρόκειται περὶ ἐξαγωνικῆς πυραμίδας. Ἡ βάσις λοιπὸν ἔχει περίμετρον $2 \times 6 = 12$ ἑκατοστά, Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\varepsilon = \frac{\pi \times u}{2}$ (§ 102 Γεωμ.) θὰ εἶναι $14,4 = \frac{12 \times u}{2}$ ἢ $14,4 = 6 \times u$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $u = 14,4 : 6 = 2,4$ ἑκατοστά.

§ 345. Λύσις: Ἡ δεξαμενὴ ἔχει ὄγκον $3,5 \times 3 \times 2,5 = 26,25$ κ. μέτ. ἢ $1000000 \times 26,25 = 26250000$ κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κρουνὸς δίδει 2 κ. ἑκατ. κατὰ δευτερόλεπτον, διὰ νὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενὴ, πρέπει νὰ περάσωσι τόσα δευτερόλεπτα, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 2 κ. ἐκ. εἰς τὰ 26250000 κ. ἐκ., ἥτοι $26250000 : 2 = 13125000$ δευτερόλεπτα. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὥρα ἔχει $60 \times 60 = 3600$ δευτερόλεπτα, τὰ 1312500, δευτερόλεπτα ἀποτελοῦσι $13125000 : 3600 = 3465$ ὥρ. 50^π.

§ 346. Λύσις: Εὖρομεν ὅτι ἡ προηγουμένη δεξαμενὴ χωρεῖ 26,25 κυβ. μέτρα ὕδατος. Τοῦτο δὲ κοστίζει $3000 \times 26,25 = 78750$ δραχμάς.

§ 347. Λύσις: Τὸ θεῖον ἔχει εἰδικὸν βάρος $\varepsilon = 2,07$, κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta = B : \varepsilon$, τὸ τεμάχιον θὰ ἔχῃ ὄγκον $\Theta = 28,84 : 2,07 = 12$ κυβ. παλαμῶν.

§ 348. Λύσις: Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἔχει μῆκος $2 \times 2 \times 3,14 = 12,56$ ἑκατ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\varepsilon = \gamma \times u$ ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $\varepsilon = 12,56 \times 8 = 100,48$ τετ. ἑκατοστ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκάστη βάσις τοῦ ἔχει ἐμβαδὸν $2^2 \times 3,14 = 12,56$, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν $E = 12,56 + (12,56) \times 2 = 37,68$ τετ. ἑκατ.

§ 349. Λύσις: Θὰ εὖρωμεν πρῶτον πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς στήλης ταύτης. Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon = 2 \times \alpha \times 3,14 \times u$ αὕτη ἔχει ἐμβαδὸν $\varepsilon = 2 \times 0,30 \times 3,14 \times 2,50 = 4,71$ τετ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὑδροχρωματισμὸς 1 τετ. μέτρου στοιχίζει 1600 δραχμάς ὁ ὑδροχρωματισμὸς ὅλης τῆς στήλης θὰ στοιχίσῃ $1600 \times 4,71 = 7536$ δραχμάς.

§ 350. Λύσις: Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἔχει μῆκος $2 \times 5 \times 3,14 = 31,4$ ἑκατ. Τὸ μῆκος τοῦτο ἐπὶ τὸ ὕψος δίδει 314. Ἐπομένως τὸ ὕψος εἶναι $314 : 3,14 = 3140 : 3,14 = 10$ ἑκατοστά.

§ 351. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon = 2 \times 3,14 \times u$ ἢ $\varepsilon = \delta \times 3,14 \times u$ ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πύργου τούτου εἶναι $\varepsilon = 7,40 \times 3,14 \times 2,80 = 65,0608$ τετ. μέτρα.

§ 352. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = \alpha^2 \times 3,14 \times u$ ὁ κύλινδρος οὗτος ἔχει ὄγκον $\Theta = 2,4^2 \times 3,14 \times 4 = 72,3456$ κυβ. μέτρα.

§ 353. Λύσις: Τὸ δοχεῖον ἔχε βάσιν μὲ ἀκτῖνα $20 : 2 = 10$ ἑκατ. καὶ ἐμβαδὸν $\beta = 10^2 \times 3,14 = 314$ τετ. ἑκατοστά. Ὁ ὄγκος ἐπομένως τοῦ ἐσωτερικοῦ αὐτοῦ εἶναι $\Theta = 314 \times 20 = 6280$ κυβ. ἑκατ. Τὸ ἔλαιον λοιπὸν, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἔχει ὄγκον 6280 κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,92, τὸ ἔλαιον τοῦ δοχείου ἔχει βάρος $6280 \times 0,92 = 5777,60$ γραμμάρια = 5777,60 χιλιόγραμμα.

§ 354. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἔμβαδὸν 7,85 τετ. παλ. ἐπὶ τὸ ὕψος εἰς παλάμας δίδει τὸν ὄγκον 70,65 κυβ. παλ. Τὸ ὕψος λοιπὸν εἶναι $70,65 : 7,85 = 70,65 : 785 = 9$ παλάμαι, ἥτοι 0,9 μέτρα.

§ 355. Λύσις: Ὁ φελλὸς ἔχει ὄγκον $\Theta = 1,5^3 \times 3,14 \times 3 = 21,195$ κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ φελλοῦ εἶναι 0,24, τὸ βάρος του εἶναι $21,195 \times 0,24 = 5,08668$ γραμμάρια.

§ 356. Λύσις: Ὁ πυθμὴν ἔχει ἀκτῖνα $\alpha = 1,20 : 2 = 0,60$ μέτ. καὶ ἔμβαδὸν $0,60^2 \times 3,14 = 1,13$ τετ. μέτρα. Ὁ δὲ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι $1,13 \times 2,30 = 2,599$ κυβ. μέτρα.

§ 357. Λύσις: Τὸ πρόσθετον ὕδωρ θὰ ἔχη σχῆμα κυλίνδρου μὲ νοητὴν βάσιν ἴσην πρὸς τὸν πυθμὲνα δηλ. 1,13 τετ. μέτ. καὶ ὄγκον 5,65 κυβ. μέτρα. Τὸ ὕψος του ἐπομένως θὰ εἶναι $5,65 : 1,13 = 565 : 113 = 5$ μέτρα.

§ 358. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\epsilon = \alpha \times 3,14 \times \lambda$ εἶναι
 $\epsilon = 5 \times 3,14 \times 10 = 157$ τετ. ἑκατ.

§ 359. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $E = 3,14 \times \alpha \times (\alpha + \lambda)$ εἶναι
 $E = 3,14 \times 30 \times (30 + 50) = 3,14 \times 30 \times 80 = 7536$ τετ. ἑκατοστά.

§ 360. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\epsilon = 3,14 \times \alpha \times \lambda$ εἶναι
 $31,4 = 3,14 \times 2 \times \lambda$ ἢ $3,14 = 6,28 \times \lambda$. Εἶναι λοιπὸν $\lambda = 31,4 : 6,28 = 5$ παλάμαι.

§ 361. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = \frac{B \times u}{3}$ εἶναι
 $\Theta = \frac{28,26 \times 1,2}{3} = 13,304$ κυβ. παλάμαι.

§ 362. Λύσις: Τὸ γινόμενον τῆς βάσεως 28,29 τετ. παλ. ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους γίνεται 94,2 κυβ. παλάμαι. Τὸ τρίτον τοῦ ὕψους εἶναι λοιπὸν $94,2 : 28,26 = \frac{9420}{2826}$ καὶ ὅλον τὸ ὕψος εἶναι $\frac{9420}{2836} \times 3 = 10$ παλάμαι.

§ 363. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = \frac{3,14 \times \alpha^2 \times u}{3}$
ὁ κῶνος οὗτος ἔχει ὄγκον $\Theta = \frac{3,14 \times 0,02^2 \times 0,04}{3} = 0,000016746$ κυβ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,79, ὁ κῶνος οὗτος ἔχει βάρος $0,000016746 \times 7,79 = 0,00013045...$ τόννους ἢ $1000 \times 0,00013045... = 0,13045...$ χιλιόγρ. ἢ 130,45 γραμμάρια.

Β' τρόπος. Ὑπολογίζομεν ἀρχικῶς τὸν ὄγκον εἰς κυβικὰ ἑκατοστόμετρα. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha = 2$ ἑκατ. καὶ $u = 4$ ἑκατ. Ἐπομένως $\Theta = \frac{3,14 \times 2^2 \times 4}{3} = 16,746$ κυβ. ἑκατ. Τὸ βάρος λοιπὸν εἶναι $16,746 \times 7,79 = 130,45$ γραμμάρια.

§ 364. Λύσις: Ὁ μόλυβδος ἔχει εἰδικὸν βάρος 11,35. Κατὰ δὲ

τὸν τύπον $\Theta = B : \varepsilon$ εἶναι $\Theta = 23843 : 11,35 = 2100,7$ κυβ. ἑκατοστά.
Ἐπειδὴ δὲ $\alpha = 20 : 2 = 10$ ἑκατ., ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $3,14 \times 10^2 = 314$ τετ. ἑκατ.

Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta = \frac{B \times u}{3}$ εἶναι $2100 = \frac{314 \times u}{3}$ καὶ
 $2100,7 \times 3 = 314 \times u$ ἢ $63021 = 314 \times u$ ἄρα $u = 63021 : 314 = 20,07 \dots$ ἑκατοστά.

§ 365. Λύσεις: Κατὰ τὸν τύπον $\Gamma = \delta \times 3,14$ εἶναι $25,12 = \delta \times 3,14$
ἐπομένως $\delta = 25,12 : 3,14 = 2512 : 314 = 8$ παλ. Ἡ βάσις λοιπὸν τοῦ κώ-
νου ἔχει ἀκτῖνα $8 : 2 = 4$ παλάμαι. Ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι

$$\Theta = \frac{3,14 \times 4^2 \times 2}{3} = 16,746 \text{ κυβ. παλάμαι.}$$

§ 366. Λύσεις: 1ον) Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon = (A + \alpha) \times \lambda \times 3,14$ εἶναι
 $\varepsilon = (12 + 3) \times 5 \times 3,14 = 235,50$ τετ. ἑκατοστά.

2ον) Ἡ μία βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $12^2 \times 3,14$ ἡ δὲ ἄλλη $3^2 \times 3,14$. Ἐ-
πομένως αἱ δύο βάσεις ἔχουσιν ἐμβαδὸν $(12^2 \times 3,14) + (3^2 \times 3,14)$ ἢ
 $(144 + 9) \times 3,14 = 480,42$ τετ. ἑκατ. Ὅλη λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν
 $E = 235,50 + 480,42 = 715,92$ τετρ. ἑκατοστά.

§ 367. Λύσεις: Οὗτος ὁ κόλινρος κῶνος ἔχει $A = 60$ ἑκατ.,
 $\alpha = 30$ ἑκατ., $u = 40$ ἑκατ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον

$$\Theta = \frac{1}{3} \times (A^2 + A \cdot \alpha + \alpha^2) \times u \text{ ἔχει ὄγκον}$$

$$\Theta = \frac{1}{3} \times (60^2 + 60 \cdot 30 + 30^2) \times 40 = 84,000 \text{ κυβ. ἑκατοστά.}$$

§ 368. Λύσεις: Ὁ κουβᾶς ἔχει σχῆμα κολούρου κῶνου μὲ
 $A = 6 : 2 = 3$ παλ., $\alpha = 2 : 2 = 1$ παλ. καὶ $u = \frac{4}{3}$ παλ. Ἐπομένως κατὰ

τὸν τύπον $\Theta = \frac{1}{3} \times (A^2 + A \cdot \alpha + \alpha^2) \times u$ τὸ ὕδωρ ἔχει ὄγκον

$$\Theta = \frac{1}{3} \times (3^2 + 3 \cdot 1 + 1^2) \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times 13 \times \frac{4}{3} = \frac{52}{9} = 5,777 \text{ κυβ. παλά-}$$

μας. Τὸ δὲ βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι 5,777 χιλιόγραμμα ἢ
 $1000 \times 5,777 = 5777,7$ γραμμάρια.

§ 369. Λύσεις: 1ον) Κατὰ τὸν τύπον $E = 4 \times 3,14 \times \alpha^2$ ἡ ἐπιφά-
νεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν $E = 4 \times 3,14 \times 10^2 = 1256$ τετρ. ἑκατοστά.

2ον) Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\Theta = \frac{4}{3} \times 3,14 \times \alpha^3$ ἡ σφαῖρα αὕτη ἔχει
ὄγκον $\Theta = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 10^3 = 4186,66$ κυβικ. ἑκατοστά.

§ 370. Λύσεις: Ἡ σφαῖρα αὕτη ἔχει ὄγκον

$\Theta = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 30^3 = 113040$ κυβ. ἑκατοστά. Τὸ δὲ βάρος αὐτῆς
εἶναι $113040 \times 11,35 = 1283004$ γραμ. ἢ 1283,004 χιλιόγραμμα.

§ 371. Ἡ σφαῖρα ἔχει ὄγκον $\frac{4}{3} \times 3,14 \times 1^3 = 4,186$ κυβ. ἑκατοστά.
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Καὶ τὸ ἔλαιον λοιπὸν τὸ ὁποῖον θὰ ἐκτοπισθῇ ἀπὸ αὐτὴν καὶ θὰ χυθῇ ἔχει ὄγκον 4,186 κυβ. ἑκατ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἔλαιον ἔχει εἰδικὸν βάρος 0,92, τὸ ἔλαιον, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ ἔχει βάρος $4,86 \times 0,92 = 3,85112$ γραμ.

§ 372. Λύσις: Ὁ κύλινδρος οὗτος ἔχει ὕψος $u = 0,2$ μέτ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως $a = 0,2 : 2 = 0,1$ μέτ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον

$$E = 2 \times 3,14 \times a \times (a + u) \text{ ἢ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἔμβαδὸν}$$

$$E = 2 \times 3,14 \times 0,1 \times (0,1 + 0,2) = 0,1884 \text{ τετ. μέτρα.}$$

§ 373. Λύσις: Ὁ κύλινδρος ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν $2 \times 0,1 \times 3,14 \times 0,2 = 0,1256$ τετ. μέτ. Ὁ δὲ κῶνος ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν $3,14 \times 0,1 \times 0,2 = 0,0628$ τετ. μέτ. Εἶναι δὲ $0,0528 \times 2 = 0,1256$, ἥτοι ὁ κύλινδρος ἔχει διπλασίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὸν κῶνον.

ΣΗΜ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὰ γινόμενα $2 \times 0,1 \times 3,14 \times 0,2$ καὶ $3,14 \times 0,1 \times 0,2$.

§ 374. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι 1 ὀκᾶ ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,28 χιλιογράμμα. Ἐπομένως ὁ κάδος θὰ χωρῇ $1,28 \times 5000 = 6400$ χιλιογράμμα = 6,4 τόνους. Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ ὕδατος τούτου θὰ εἶναι 6,4 κυβ. μέτρα. Καὶ ὁ κάδος λοιπὸν θὰ ἔχη ὄγκον 6,4 κ. μ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις τοῦ ἔχει ἔμβαδὸν 3,2 τετ. μέτ., τὸ ὕψος τοῦ θὰ εἶναι $6,4 : 3,2 = 2$ μέτρα.

§ 375. Λύσις: Ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ κώνου εἶναι $a = 0,85 : 2 = 0,425$ μέτ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύλινδρος καὶ ὁ κῶνος ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος 0,15 μέτ. ὁ ὄγκος τοῦ μὲν κυλίνδρου εἶναι

$$\Theta = 3,14 \times 0,425^2 \times 0,15 = 0,085074375 \text{ κυβ. μέτρα. Τοῦ δὲ κώνου}$$

$$\Theta' = \frac{1}{3} \times 3,14 \times 0,425^2 \times 0,15 = \frac{0,085074375}{3} = 0,028358125. \text{ Ἐπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι } \Theta - \Theta' = 0,0567165 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

§ 376. Λύσις: Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ γράψῃ κύλινδρον μὲ ἀκτῖνα βάσεως (ΑΒ) = 2 ἑκατ. καὶ ὕψος (ΑΔ) = 4 ἑκατ. Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου τούτου θὰ εἶναι $\Theta = 3,14 \times 2^2 \times 4 = 50,24$ κυβ. ἑκατ. Τὸ δὲ ἡμικύκλιον ΑΕΔΑ θὰ γράψῃ σφαῖραν μὲ διάμετρον (ΑΔ) = 4 ἑκατ. καὶ ἀκτῖνα 2 ἑκατ. Ὁ ὄγκος λοιπὸν αὐτῆς εἶναι $\Sigma = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 2^3 = 33,49$ κυβ. ἑκατ. Τὸ δὲ στερεόν, τὸ ὁποῖον θὰ γράψῃ τὸ σκιασμένον μέρος τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει ὄγκον $\Theta - \Sigma = 50,24 - 33,49 = 16,75$ κυβ. ἑκατ.

§ 377. Λύσις: Ἐστω Ο ἡ βάσις καὶ Α ἡ κορυφή τοῦ κώνου (σχ. 110 Γεωμετρίας). Ἐπειδὴ (ΟΑ) = (ΟΤ) = 10 ἑκ. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι $\Theta = \frac{3,14 \times 10^2 \times 10}{3} = \frac{3140}{3} = 1046,66$ κυβ. ἑκατ.

§ 378. Λύσις: Ἐστω ὅτι βάσις τοῦ κώνου εἶναι ὁ κύκλος Ζ (σχ. 110 Γεωμετρίας), ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα (ΖΕ) = 8 ἑκατ. Ὁ κῶνος ἔχει πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα (ΟΕ) = 15 ἑκατ. Ἐπομένως ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν $\epsilon = 3,14 \times 8 \times 15 = 376,8$ τετ. ἑκατ.

§ 379. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\epsilon = 3,14 \times (Α + α) \lambda$ εἶναι $\epsilon = 3,14 \times (24 + 12) \times 15 = 1695,6$ τετ. ἑκατ.

§ 380. Λύσις: Πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ μήκος τῆς ἀκτίνος ΑΒ

τοῦ μικροῦ κύκλου Α (σχ. 107 Γεωμετρίας). Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΣΑΒ. Οὕτως εἶναι $(ΣΒ)^2 = (ΣΑ)^2 + (ΑΒ)^2$ ἢ $100 = 36 + (ΣΑ)^2$. Ἐπομένως $(ΣΑ)^2 = 100 - 36 = 64$ καὶ $(ΣΑ) = 8$ ἑκατ. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν ἔχει μῆκος $2 \times 3,14 \times 8 = 75,36$ ἑκατ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 381. Λύσεις: 1ον) Ἐργαζόμεθα, ὅπως εἴπομεν εἰς τὴν (§ 126) τῆς Γεωμετρίας. Μόνον ἕκαστον ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ... (σχ. 113 Γεωμετρίας), παριστάνει εὐθ. τμήμα μήκους $0,01 \times 100 = 1$ μέτρον. Δι' αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, ... Ἐπίσης τὸ τμήμα ΑΜ ἔχει μῆκος 0,01 μέτ. ἕκαστον δὲ τῶν ἴσων μερῶν παριστᾷ εὐθ. τμήμα μήκους $1 \times \frac{1}{10} = 0,1$ μέτρου.

2ον) Ἄν ἡ ἀριθμητικὴ κλίμαξ εἶναι 1 : 10000, ἕκαστον τὸν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, κτλ. παριστάνει εὐθ. τμήμα μήκους $0,01 \times 10000 = 100$ μέτ. Δι' αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 0, 100, 200, 300 κτλ. Ἐκαστον δὲ τμήμα τοῦ ΑΜ παριστᾷ τμήμα $100 \times \frac{1}{10} = 10$ μέτ.

§ 382. Λύσεις: Τὸ τμήμα τοῦτο θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ σχέδιον εἰς τμήμα μήκους $200 : 10000 = 0,02$ μέτ. Στηρίζομεν λοιπὸν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἐνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου εἰς τὸ Ο τῆς προηγουμένως κατασκευασθείσης γραφικῆς κλίμακος· τὴν τοῦ ἄλλου σκέλους εἰς τὸ Β καὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν αἰχμῶν τούτων μεταφέρομεν εἰς τὸ σχέδιόν μας.

§ 383. Λύσεις: Μετροῦντες τὸ τμήμα αβ εὐρίσκομεν μῆκος 0,035 μέτ. Ἐπομένως $(ΑΒ) = 0,035 \times 1000 = 35$ μέτρα.

§ 384. Λύσεις: Ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἐν ἰσοπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν $1200 : 1000 = 1,2$ μέτ.

§ 385. Λύσεις: Μετροῦντες εὐρίσκομεν $(ΒΓ) = 0,03$ μέτρ. καὶ $(ΑΔ) = 0,02$ μέτ. Ἐπομένως ἡ ἄμπελος ἔχει βάσιν $0,03 \times 100 = 3$ μέτ. ὕψος $0,02 \times 100 = 2$ μέτ. καὶ ἐμβαδὸν $3 \times 2 = 6$ τετ. μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

§ 386. Λύσεις: Ἡ μία γωνία καὶ ἡ συμπληρωματικὴ τῆς ἔχουσιν ἄθροισμα 90° κατὰ δὲ τὴν ἐκφώνησιν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τριπλάσιον τῆς συμπληρωματικῆς τῆς, Ἡ συμπληρωματικὴ λοιπὸν αὕτη εἶναι $90^\circ : 3 = 30^\circ$. Ἐπομένως ἡ διπλασία ταύτης εἶναι 60° .

§ 387. Λύσεις: Ἐστω ΑΟΓ μία ὀρθή γωνία (σχ. 18 α' Γεωμε-

τρίας). Διχοτομοῦμεν αὐτὴν καὶ μίαν ἀπὸ τὰ δύο ἡμίση αὐτῆς. Ἐστω δὲ ΟΕ ἡ διχοτόμος ταύτης, εἶναι φανερόν ὅτι $\Gamma Ο Ε = \frac{1}{4}$ ὀρθῆς. Ἡ γωνία $Ε Ο Β = Ε Ο Γ + Γ Ο Β = 1 \frac{1}{4}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ $Ε Ο Δ = Ε Ο Α + Α Ο Δ = 1 \frac{3}{4}$ ὀρθῆς.

§ 388. Λύσεις: Φέρομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ (§ 24 καὶ § 50 Γεωμ.) Ἐπὶ δὲ τῆς εὐθείας ΒΓ ὀρίζομεν 4 τμήματα ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ καὶ ἄγομεν τὴν ΘΑ. Ἐκ δὲ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΘΑ. Αὗται τέμνουσι τὴν ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ καὶ διὰ τοῦ διαβήτου βλέπομεν ὅτι $ΑΛ = ΑΚ = ΚΙ = ΙΔ$. Τέλος ἄγομεν τὴν ΑΕ πλάγιαν πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εὐθείας ΑΜ, ΚΝ, ΙΠ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν ΑΕ εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, Π. Διὰ τοῦ διαβήτου δὲ βλέπομεν ἐπίσης ὅτι $ΑΜ = ΜΝ = ΝΠ = ΠΕ$.

§ 389. Λύσεις: Ἀφ' οὗ γράψωμεν τὰς περιφερείας, δύο ἀκτῖνας τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι ἡ χορδὴ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν τόξου τῆς μικροτέρας περιφερείας χωρεῖ δύο φορές εἰς τὴν χορδὴν τοῦ ἄλλου τόξου.

Ἡ χορδὴ λοιπὸν τοῦ μεγαλυτέρου τόξου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν χορδὴν τοῦ μικροτέρου τόξου.

§ 390. Λύσεις: Κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 36 Γεωμετρίας) τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι αἱ χορδαὶ αὗται εἶναι παράλληλοι.

§ 391. Λύσεις: Φέρομεν δύο καθετοὺς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΓ καὶ διχοτομοῦμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΚΓ, ἔστω δὲ ΚΒ ἡ διχοτόμος αὐτῶν. Ἡ γωνία ΑΚΒ εἶναι λοιπὸν 45°. Ἐπειτα φέρομεν εὐθεῖαν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ εἰς τὸ ἄκρον Α αὐτῆς καὶ εὐθεῖαν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΒ εἰς τὸ Β. Μετροῦντες τὴν γωνίαν Δ εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη εἶναι 45°. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι $ΔΑ = ΔΒ$.

§ 392. Λύσεις: Ἡ εὐθεῖα ΚΓ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς 2 σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἀπὸ αὐτὰ φέρομεν καθετοὺς ΔΖ, ΕΗ ἐπὶ τὴν ΚΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΗ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας (§ 46 Γεωμετρίας) καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ, ὅπως βεβαιούμεθα κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 36 Γεωμετρίας).

§ 393. Λύσεις: Ἡ διχοτόμος γίνεται κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 55 Γεωμετρίας). Ἄν δὲ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων, εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη εἶναι 90°.

§ 394. Λύσεις: Θὰ εὐρώμεν πρῶτον ἀπὸ πόσους τεκτ. τετρ. πῆχεις ἀποτελεῖται τὸ οἰκόπεδον τοῦτο. Πρὸς τοῦτο δὲ ἐργαζόμεθα ὡς ἔξῃ. Ἐπειδὴ ἡ περίμετρος εἶναι 122 μέτρα, ἡ πλευρά του εἶναι $122 : 4 = 30,5$ μέτρα. Τὸ δὲ ἐμβαδόν του εἶναι $E = 30,5^2 = 930,25$ τετρ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ 1 τεκτ. πῆχυς εἶναι $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου, τὰ 930,25 τετρ. μέτρα ἀποτελοῦσι τόσους τεκτ. τετρ. πῆχεις, ὅσας φορές τὰ $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτρα χωροῦσιν εἰς τὰ 930,25 τετ. μ., ἥτοι $930,25 : \frac{9}{16} =$

$930,25 \times \frac{16}{9} = 1653,77$ τεκτ, τετρ. πήχεις. Ἡ ἀξία του λοιπὸν εἶναι
 $18000 \times 1653,78 = 29\,768\,040$ δραχμάς.

§ 395. Λύσις: Ἐκαστον ἀπὸ τὰ δύο τρίγωνα ἔχει βάσιν $6:2=3$ ἑκατ. καὶ ὕψος 4 ἑκατ. Ἐχει λοιπὸν ἕκαστον ἔμβαδὸν $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ τετ. ἑκατ. Ἐπομένως ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

§ 396. Λύσις: Γράφομεν δύο παραλλήλους εὐθείας AB, ZH εἰς ἀπόστασιν (AZ) = 4 ἑκατ. Ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων ὀρίζομεν τμήμα (AB) = 6 ἑκατ. καὶ ἔπειτα διχοτομοῦμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ZAB. Ἡ διχοτόμος αὐτῆς τέμνει τὴν εὐθεῖαν ZH εἰς ἓν σημεῖον Δ. Ἐπειτα φέρομεν ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ· ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν ZH εἰς ἓν σημεῖον Γ. Τοιοῦτοτρόπως σχηματίζεται τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄν φέρωμεν τὸ ὕψος ΔΕ, βλέπομεν ὅτι (ΔΕ) = (AZ) = 4 ἑκατ. Τὸ ΑΒΓΔ ἔχει ἔμβαδὸν $E = (AB) \times (ΔΕ) = 6 \times 4 = 24$ τετρ. ἑκατοστὰ. Τὸ δὲ τρίγωνον ΑΔΕ ἔχει ἔμβαδὸν $E' = \frac{(ΑΕ) \times (ΔΕ)}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΔΑΕ καὶ ΑΔΕ εἶναι 45° καθε μία, θὰ εἶναι (ΑΕ) = (ΔΕ) = 4 ἑκατοστὰ καὶ ἐπομένως $E' = \frac{4 \times 4}{2} = 8$ τετραγωνικὰ ἑκατοστὰ.

§ 397. Λύσις: Ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{225} = 15$ μέτρα καὶ ἡ περίμετρος $15 \times 4 = 60$ μέτρα. Ἐστοίχισε λοιπὸν ἡ περίφραξις $30000 \times 60 = 1\,800\,000$ δραχμάς.

§ 398. Λύσις: Ἡ ἄμπελος ἔχει ἔμβαδὸν $E = \frac{127 \times 40}{2} = 2540$ τετρ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ 1270 τετρ. μέτρα ἀποτελοῦσιν 1 παλ. στρέμ. θὰ εἶναι $E = 2540 : 1270 = 2$ παλ. στρέμματα. Ἐπωλήθη λοιπὸν $1\,200\,000 \times 2 = 2\,400\,000$ δραχμάς.

§ 399. Λύσις: Τὸ οἰκόπεδον ἔχει ἔμβαδὸν $E = 25 \times 8,20 = 205$ τετρ. μέτρα ἢ $E = 205 : \frac{9}{16} = 205 \times \frac{16}{9} = 364,45$ τεκτ. τετρ. πήχεις. (§ 394). Ἡ ἀξία του λοιπὸν εἶναι $38500 \times 364,45 = 14\,031\,325$ δραχμαί.

§ 400. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι $3,14 \times \alpha^2 = 113,04$. Ἐπομένως $\alpha^2 = 113,04 : 3,14 = 36$ καὶ $\alpha = \sqrt{36} = 6$ μέτρα. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν ἔχει μῆκος $\Gamma = 2 \times 3,14 \times 6 = 37,68$ μέτρα.

§ 401. Λύσις: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα καὶ γράφομεν τὰ τόξα με κέντρα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ἐκάστου τῶν τόξων τούτων. Ὁ χρωματισμὸς γίνεται εὐκόλως.

§ 402. Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι κοιλὸν εἶναι $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβ. μέτρου· ἐπομένως τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἀποθήκης ἔχει ὄγκον $810 \times \frac{1}{10} = 81$ κυβ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶναι 4 μέτρα, ἡ βᾶσις ἔχει ἔμβαδὸν

$E = 81 : 4 = 20,25$ τετρ. μέτρα καὶ πλευρὰν $a = \sqrt{20,25} = 4,5$ μέτρα.

§ 403. Λύσις: Τὸ σκιροκονίαμα ἔχει ὄγκον $4,5 \times 3,5 \times 0,20 = 3,15$ κυβ. μέτρα. Ἐπομένως ἔστοίχισε $500\,000 \times 3,15 = 1\,575\,000$ δραχμάς.

§ 404. Λύσις: Τὸ τεμάχιον τοῦτο ἔχει ὄγκον $0,06 \times 1,2 = 0,072$ κυβ. μέτρα $= 72$ κυβ. παλ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πάγος ἔχει εἰδ. βάρος $0,9167$, τὸ τεμάχιον ἔχει βάρος $72 \times 0,9167 = 66,0024$ χιλιόγραμμα.

§ 405. Λύσις: Μετροῦντες τὰς διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος τούτου εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μία εἶναι $6,2$ ἑκατ. καὶ ἡ ἄλλη $2,9$, αἱ δὲ πραγματικαὶ εἶναι $6,2 \times 10 = 62$ ἑκατ. καὶ $2,9 \times 10 = 29$ ἑκατ. Ἐπομένως $E = 62 \times 29 = 1798$ τετ. ἑκατ.

§ 406. Λύσις: Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐκαλύφθη μὲ ὕφασμα μήκους $6,28$ μέτ. καὶ πλάτους 1 μ. Ἐχει ἐπομένως ἐμβαδὸν $6,28 \times 1 = 6,28$ τετ. μέτρων. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος εἶναι 2 μέτ. ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι $6,28 : 2 = 3,14$, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῆς εἶναι $3,14 : 3,14 = 1$ μέτρον καὶ $a = 0,5$ μέτ. Ὁ ὄγκος λοιπὸν εἶναι $\Theta = 3,14 \times 0,5 \times 2 = 1,57$ κυβ. μέτρα.

§ 407. Λύσις: Ἡ πλάξ ἔχει ὄγκον $1 \times 0,80 \times 0,02 = 0,016$ κυβ. μέτρα $= 16$ κυβ. παλ. καὶ βάρος $16 \times 2,65 = 42,40$ χιλιόγραμμα.

§ 408. Λύσις: Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = \frac{1}{3} \times 3,14 \times (A^2 + Aa + a^2) \times u$ ὁ κόλ. κῶνος ἔχει ὄγκον $\Theta = \frac{1}{3} \times 3,14 \times (36 + 18 + 9) \times 4 = 263,76$ κυβ. ἑκ. Ὁ δὲ κύλινδρος ἔχει ὄγκον $\Theta' = 3,14 \times 3^2 \times 4 = 113,04$ κυβ. ἑκατ. Ἐπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\Theta - \Theta' = 263,76 - 113,04 = 150,72$ κυβ. ἑκατ.

§ 409. Λύσις: Διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου εὐρίσκομεν ὅτι $(\alpha\beta) = 3$ ἑκατ. καὶ $(\alpha\delta) = 2,1$ ἑκατ. Ἐπομένως αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως εἶναι $3 \times 10 = 30$ ἑκατ. καὶ $2,1 \times 10 = 21$ ἑκατ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $30 \times 21 = 630$ τετ. ἑκατ. Μετροῦντες τὴν ἐξ εὐρίσκομεν $3,8$ ἑκατ. Τὸ ὕψος λοιπὸν τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου εἶναι $3,8 \times 10 = 38$ ἑκατ. Ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ εἶναι $\Theta = 630 \times 38 = 23940$ κυβ. ἑκατ.

§ 410. Λύσις: Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εὐρίσκομεν ὅτι $(\alpha\beta) = 2,3$ ἑκατ. Ἐπομένως ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι $2,3 \times 10 = 23$ ἑκατ. Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει ἐπιφάνειαν $23^2 \times 6 = 3174$ τετ. ἑκατ. καὶ ὄγκον $23^3 = 12167$ κυβ. ἑκατ.

§ 411. Λύσις: Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εὐρίσκομεν ὅτι $(\alpha\beta) = 2,3$ ἑκατ. Ἡ βάσις λοιπὸν τῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν $2,3 \times 5 = 11,5$ ἑκατ. ἐμβαδὸν $11,5^2 = 132,25$ τετ. ἑκατ. Μετροῦντες τὴν ἀπόστασιν τοῦ ζ ἀπὸ τὴν ἐξ εὐρίσκομεν $3,2$ ἑκατ. Ἐκάστη λοιπὸν παράπλευρος ἑδρα τῆς πυραμίδος ἔχει ὕψος $u = 3,2 \times 5 = 16$ ἑκατ. Κατὰ δὲ τὸν τύπον $\varepsilon = \Pi \times \frac{u}{2}$ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $\varepsilon = (2,3 \times 4) \times \frac{16}{2} = 9,2 \times 8 = 73,6$ τετ. ἑκατ. Ἡ πυραμὶς λοιπὸν ἔχει ὅλικὴν ἐπιφάνειαν $132,25 + 73,60 = 205,85$ τετ. ἑκατ.

§ 412. Λύσεις: Ὁ κύκλος Κ ἔχει διάμετρον 2,5 ἑκατ. καὶ ἀκτίνα $\alpha = 2,5 : 2 = 1,25$. Ἐπομένως ἡ βάση τοῦ κυλίνδρου ἔχει ἀκτίνα $1,25 \times 100 = 125$ ἑκατ. Ἡ περίμετρος λοιπὸν τῆς βάσεως εἶναι $2 \times 3,14 \times 125 = 785$ ἑκατ., τὸ δὲ ἔμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $3,14 \times 125^2 = 49062,50$ τετρ. ἑκατοστά. Μετροῦντες τὴν αδ εὐρίσκομεν 3,5 ἑκατοστά. Ἐπομένως ὁ κύλινδρος ἔχει ὕψος $3,5 \times 100 = 350$ ἑκατοστά. Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια ἔχει ἔμβαδὸν $E = 785 \times 350 = 274750$ τετρ. ἑκατοστά. Ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\Theta = 49062,5 \times 350 = 17\,171\,875$ κυβ. ἑκατ. = 17,171875 κυβικὰ μέτρα.

§ 413. Λύσεις: Ἐστω Α τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (σχ. 107 Γεωμετρίας) καὶ (ΣΑ)=12 μέτρα. Ἡ ἀκτὶς ΑΒ ἔχει μῆκος $56,52 : 3,14 \times 2 = 9$ μέτρα. Ἀπὸ δὲ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΣΑΒ βλέπομεν ὅτι $(\Sigma\text{Β})^2 = 12^2 + 9^2 = 225$ καὶ ἔπομένως ἡ σφαῖρα ἔχει ἀκτίνα $(\Sigma\text{Β}) = \sqrt{225} = 15$ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος αὐτῆς ἔχει ἀκτίνα 15 μέτρα, θὰ ἀπεικονισθῇ μὲ κύκλον ἀκτίνος $15 : 100 = 15$ ἑκατοστομέτρων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ Πρακτικῶν Λυκείων. Ἔκδοσις Ε'—1945.
2. ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως, τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους. Ἔκδοσις Ε'—1948.
3. ΜΕΓΑΛΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως, τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους. Ἔκδοσις Δ'—1947.
4. ΜΕΓΑΛΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως, τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους. Ἔκδ. ΣΤ'—1948.
5. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως, τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους.
6. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ Πρακτικῶν Λυκείων.
7. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ Πρακτικῶν Λυκείων.
8. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ Πρακτικῶν Λυκείων.
9. ΛΥΣΕΙΣ τῶν εἰς τὰς νεωτέρας ἐκδόσεις περιεχομένων ἀσκήσεων τῆς *Μεγάλης Γεωμετρίας* καὶ τοῦ *Συμπληρώματος*, τῆς *Μεγάλης Ἀλγέβρας* καὶ τῆς *Μεγάλης Τριγωνομετρίας*.
10. ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ. Τεύχος Α' καὶ Β'. Τὸ Β' τεύχος περιέχει τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τοῦ Α' τεύχους.—Ἀμφότερα χρησιμώτατα εἰς τοὺς Φοιτητὰς τῶν Μαθηματικῶν καὶ τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους.
11. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ μετὰ ὁδηγίων καὶ πλείστων πινάκων.—Ἔκδοσις 1949.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΟΙΚΟΥ ΤΖΑΚΑ - ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς



0020638006

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

