E 2 ϡξι

Νικολάου (Ν)

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΜΕΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Σ[ΙΑΣ]
81[Α] ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81[Α]
1931

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΜΕΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΙΑΣ
81Α ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81Α
1931

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις «ΕΛΛΑΣ» Ἀθῆναι
Ὁδὸς Μακεδονίας 10

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗΝ

ΤΗΣ ΠΟΛΥΚΛΑΥΣΤΟΥ ΠΡΩΤΟΤΟΚΟΥ

ΘΥΓΑΤΡΟΣ ΜΟΥ

ΑΝΤΙΓΟΝΗΣ

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διδάσκων ἀπὸ ἐτῶν εἰς ὑποψηφίους διὰ τὸ Ἐθνικὸν Μετσόβειον Πολυτεχνεῖον καὶ τὴν Φυσικήν, παρετήρησα τὴν ἐκ τῆς ἐλλείψεως εἰδικοῦ βιβλίου Μαθηματικῆς Φυσικῆς παρουσιαζομένην δυσχέρειαν πρὸς ἀκριβῆ ἐμβάθυνσιν εἰς τὸ μάθημα τοῦτο. Τὴν αὐτὴν δὲ δυσχέρειαν συναντῶσι καὶ οἱ μαθηταὶ τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, οἵτινες διδάσκονται πλεῖστα μέρη τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς. Ἐπιθυμῶν νὰ συντελέσω κατὰ τὸ δυνατὸν ἐμοὶ εἰς τὴν ἄρσιν τῶν δυσχερειῶν τούτων καὶ τὴν διευκόλυνσιν τῆς κατανοήσεως τοῦ σπουδαιοτάτου τούτου μαθήματος ἔγνων νὰ προβῶ εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν ὑπ᾽ ἐμοῦ διδασκομένων μαθημάτων τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς, περιοριζόμενος εἰς τὰς καθαρῶς μαθηματικὰς ἐξηγήσεις καὶ παραλείπων τὸ πειραματικὸν μέρος καὶ πᾶν ὅ,τι ἀναπτύσσουσι τὰ ἐν χρήσει βιβλία Πειραματικῆς Φυσικῆς.

Εἰς τὸ τέλος δὲ ἑκάστου κεφαλαίου παραθέτω καὶ ἀσκήσεις πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν μεμαθημένων καὶ τελειοτέραν ἐμπέδωσιν αὐτῶν.

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Η ΚΙΝΗΣΙΣ

§ **1. Κίνησις καὶ ἠρεμία.** *Κίνησις σώματος καλεῖται ἡ συνεχὴς μεταβολὴ τῆς θέσεως αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς ἄλλο ὡρισμένον σῶμα.*

Πᾶν σῶμα ἢ σημεῖον ἐν κινήσει εὑρισκόμενον καλεῖται ***κινητόν***. ***Ἠρεμία*** εἶναι κατάστασις ἀντίθετος τῆς κινήσεως. Πᾶν δὲ σῶμα ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενον καλεῖται ***ἀκίνητον***.

Ἡ κίνησις ἢ ἠρεμία σώματος λέγεται ***ἀπόλυτος*** μέν, ἂν τὸ σῶμα, πρὸς ὃ συγκρίνεται ἡ θέσις του, διατηρῇ τὴν αὐτὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν· ***σχετικὴ*** δέ, ἂν τὸ σῶμα τοῦτο κινῆται ἐν τῷ χώρῳ. Εὐνόητον ὅτι ἐν τῇ φύσει εἶναι ἀδύνατος ἡ πραγματοποίησις ἀπολύτου κινήσεως ἢ ἠρεμίας, διότι τὸ πᾶν ἐν αὐτῇ κινεῖται.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν θέσεων, δι' ὧν διέρχεται κινητόν τι, καλεῖται ***τροχιὰ*** τοῦ κινητοῦ τούτου. Ἐὰν τὸ κινητὸν εἶναι σημεῖον, ἡ τροχιὰ αὐτοῦ εἶναι γραμμή.

Ἡ κίνησις ὑλικοῦ σημείου καλεῖται ***εὐθύγραμμος*** ἢ ***καμπυλόγραμμος***, καθ' ὅσον ἡ τροχιὰ αὐτοῦ εἶναι εὐθεῖα ἢ καμπύλη γραμμή.

Εἴδη εὐθυγράμμου κινήσεως.

§ **2. Α΄. Ἰσοταχὴς κίνησις.** Κίνησίς τις καλεῖται *ἰσοταχὴς* ἢ ***ὁμαλή***, ἂν τὸ κινητὸν διανύῃ ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους, ὅσον μικροὶ καὶ ἂν ὑποτεθῶσιν οὗτοι.

Ταχύτης ἐν ἰσοταχεῖ κινήσει καλεῖται τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα.

Ἐὰν κινητὸν ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας κινῆται κίνησιν ἰσοταχῆ καὶ ἔχῃ ταχύτητα v, εἶναι φανερὸν ὅτι μετὰ δύο, τρεῖς..... t χρονικὰς μονάδας θὰ διανύσῃ διάστημα v.2, v.3,.... v.t.

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ εἰς t χρονικὰς μονάδας διανυθὲν διάστημα, θὰ εἶναι $\delta = vt,\ v = \frac{\delta}{t},\ t = \frac{\delta}{v}$. (1)

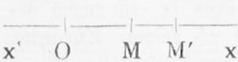
Ἐὰν δὲ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου εὑρίσκετο ἐν κινήσει καὶ εἶχε μέχρι τῆς στιγμῆς ἐκείνης διανύσει διάστημά τι δ_0, ἡ α΄ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων γίνεται

$$\delta = \delta_0 + vt,\ \text{ὅθεν}\ v = \frac{\delta - \delta_0}{t},\ t = \frac{\delta - \delta_0}{v}. \qquad (2)$$

§ **3. Β΄. Ἀνισοταχὴς κίνησις.** Ἐὰν κινητὸν εἰς ἴσους χρόνους διανύῃ ἄνισα διαστήματα, ἡ κίνησις αὐτοῦ καλεῖται ***ἀνισοταχὴς κίνησις***. Εἰς τὴν ἀνισοταχῆ κίνησιν διακρίνομεν τὰ ἀκόλουθα ἤδη ταχυτήτων.

α΄) ***Μέση ταχύτης*** κινητοῦ κατά τινα χρόνον καλεῖται ἡ ταχύτης, μεθ᾽ ἧς τοῦτο ἰσοταχῶς κινούμενον θὰ διήνυε τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

β΄) ***Ταχύτης καθ᾽ ὡρισμένην στιγμὴν χρόνου*** καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ μέση αὐτοῦ ταχύτης κατὰ χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ὡρισμένην ταύτην στιγμὴν καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Οὕτως, ἂν κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν t κινητὸν κατέχῃ τὴν θέσιν M (Σχ. 1) καὶ μετὰ ἐλάχιστον χρόνου Δt εὑρεθῇ εἰς τὴν M΄, εἶναι φανερὸν ὅτι διαρκοῦντος τοῦ χρόνου Δt ἡ μέση ταχύτης αὐτοῦ εἶναι $\frac{MM'}{\Delta t}$. Ὅταν δὲ ὁ χρόνος Δt τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μέση αὕτη ταχύτης $\frac{MM'}{\Delta t}$ τείνει πρός τι ὅριον. Τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, καθ᾽ ἣν τὸ κινητὸν εὑρίσκετο εἰς τὴν θέσιν M.



Σχ. 1.

§ **4. Νόμος τῆς κινήσεως.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι κατά τινα στιγμὴν χρόνου, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου, τὸ κινητὸν ἔχει ὡρισμένην θέσιν π. χ. O ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του. Μετὰ πάροδον χρόνου τινὸς t τὸ κινητὸν θὰ διανύσῃ διάστημά τι δ, ὅπερ προφανῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου t, καθ᾽ ὃν τοῦτο διανύεται. Εἶναι ἄρα τὸ διάστημα δ συνάρτησις τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διανύεται, ἤτοι

$$\delta = \sigma(t). \quad (1)$$

Πᾶσα τοιαύτη σχέσις, δι' ἧς συνδέεται τὸ διάστημα πρὸς τὸν χρόνον καλεῖται ***νόμος τῆς κινήσεως*** καὶ εἶναι διάφορος κατὰ τὰ διάφορα εἴδη τῆς κινήσεως. Ἡ κίνησις κινητοῦ θεωρεῖται γνωστή, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ τροχιὰ καὶ ὁ νόμος τῆς κινήσεως, δι' οὗ δυνάμεθα εἰς ἑκάστην στιγμὴν χρόνου νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του. Οὕτως εἰς τὴν ἰσοταχῆ κίνησιν ὁ νόμος τῆς κινήσεως εἶναι $\delta = \delta_0 + vt$, ἤτοι τὸ διάστημα εἶναι πρωτοβάθμιος συνάρτησις τοῦ χρόνου.

Ἐκ τοῦ νόμου τῆς κινήσεως ὁρίζεται καὶ ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ καθ' ἑκάστην στιγμὴν χρόνου καὶ τἀνάπαλιν. Οὕτως, ἂν ὁ νόμος τῆς κινήσεως εἶναι $\delta = \sigma(t)$, ἡ ταχύτης v κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν t θὰ εἶναι (§ 3 β') ἴση πρὸς ὅρ. $\dfrac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}$, ὅταν ὅρ $\Delta t = 0$, ἤτοι ἰσοῦται πρὸς τὴν παράγωγον τῆς $\sigma(t)$ πρὸς t. Π.χ, ἂν $\delta = 5t^2 - 3t + 1$, θὰ εἶναι

$$\sigma(t+\Delta t) = 5(t+\Delta t)^2 - 3(t+\Delta t) + 1 = 5t^2 + 10t\Delta t + 5(\Delta t)^2 - 3t - 3\Delta t + 1, \qquad \sigma(t) = 5t^2 - 3t + 1 \quad \text{ὅθεν}$$

$$\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t) = 10\,t.\Delta t + 5(\Delta t)^2 - 3\Delta t \;\text{καὶ}\; v = \text{ὅρ}\; \frac{10\,t.\Delta t + 5(\Delta t)^2 - 3\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \text{ὅρ}\;(10t - 3 + 5\Delta t) = 10\,t - 3.$$

Ἀντιστρόφως: Ἂν $v = 2t + 6$, τὸ διάστημα δ ὀφείλει νὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ t ἔχουσα παράγωγον $2t+6$. Τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ $t^2 + 6t + \Sigma$, ἔνθα Σ εἶναι ποσότης ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς t, ὁρίζεται δὲ ἑκάστοτε, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ εἰς ὡρισμένην τοῦ χρόνου στιγμήν. Οὕτως, ἂν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου, τὸ κινητὸν εὑρίσκηται εἰς τὴν ἀρχὴν Ο (Σχ. 1) τῆς κινήσεως, ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\delta = t^2 + 6t + \Sigma$ εὑρίσκομεν $0 = \Sigma$ διὰ $t = 0$, ὁ δὲ νόμος τῆς κινήσεως εἶναι $\delta = t^2 + 6t$.

Ὁμοίως, ἂν $v = \dfrac{2}{3}t^2 - 7t + \dfrac{3}{4}$, καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου ἀπέχῃ τῆς ἀρχῆς Ο διάστημα 2, ὁ νόμος τῆς κινήσεως εἶναι

$$\delta = \frac{2}{9}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + \frac{3}{4}t + 2.$$

§ 5. Γ'. Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη. Ἂν ἡ ταχύτης κινητοῦ αὐξάνηται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ σταθερὰν ποσότητα εἰς ἑκάστην μονάδα χρόνου, ἡ κίνησις αὕτη καλεῖται ***ὁμαλῶς μεταβαλλομένη***. Ἡ ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις καλεῖται ***ὁμαλῶς ἐπιταχυ-***

νομένη ἢ ***ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη,*** καθ' ὅσον ἡ ταχύτης βαίνει αὐξανομένη ἢ ἐλαττουμένη.

Ἡ σταθερὰ αὔξησις τῆς ταχύτητος καλεῖται ***ἐπιτάχυνσις***, ἡ δὲ σταθερὰ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος καλεῖται ***ἐπιβράδυνσις.*** Συνήθως ἡ ἐπιτάχυνσις παρίσταται διὰ τοῦ γ, ἡ δὲ ἐπιβράδυνσις διὰ τοῦ $-\gamma$.

Ἂν τὸ κινητὸν ἔχῃ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου ταχύτητα v_0, ἡ ταχύτης του μετὰ μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ εἶναι $v_0 \pm \gamma$, μετὰ 2 χρονικὰς μονάδας θὰ εἶναι $v_0 \pm 2\gamma$ καὶ μετὰ t χρονικὰς μο-νάδας θὰ εἶναι $v_0 \pm \gamma t$. Ἂν δὲ χάριν συντομίας καλέσωμεν ταύτην v, θὰ εἶναι

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν (§ 4) ὅτι:
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 \pm \gamma t \\ \delta &= v_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2 \end{aligned}\right\} \quad (1$$

Ἂν $v_0 = 0$, ἤτοι, ἂν τὸ κινητὸν ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας, αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις γίνονται: $v = \gamma t,\ \delta = \frac{1}{2}\gamma t^2$ (2)

Ἄρα: ***Ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει, ὅταν τὸ κινητὸν ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἡ μὲν ταχύτης εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον, τὸ δὲ διάστημα εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ χρόνου.***

Ἀπαλείφοντες τὸν t μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $v = v_0 + \gamma t$, $\delta = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ εὑρίσκομεν ὅτι $v^2 = v_0^2 + 2\delta\gamma$, ὅθεν: $v = \sqrt{v_0^2 + 2\delta\gamma}$. (3)

Ἐὰν δὲ ἐν αὐτῇ τεθῇ $-\gamma$ ἀντὶ γ προκύπτει $v = \sqrt{v_0^2 - 2\delta\gamma}$.

Ἂν $v_0 = 0$, ἡ α΄ τῶν ἰσοτήτων τούτων γίνεται $v = \sqrt{2\delta\gamma}$. (4)

Διὰ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) ὁρίζεται ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει ἡ ταχύτης συναρτήσει τοῦ διαστήματος.

§ **6. Μέση ἐπιτάχυνσις ἐν τυχούσῃ εὐθυγράμμῳ κινήσει. — Ἐπιτάχυνσις, καθ' οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν ἐν τυχούσῃ κινήσει.** *Καλεῖται μέση ἐπιτάχυνσις ἐπί τινα χρόνον κινητοῦ ἔχοντος εὐθύγραμμον ἀνισοταχῆ κίνησιν ἡ σταθερὰ ἐπιτάχυνσις, ἣν ἔπρεπε νὰ ἔχῃ τὸ κινητόν, ὅπως ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ προκληθῇ ἡ αὐτὴ αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ, ἂν τοῦτο εἶχε κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην.* Οὕτως, ἂν κατά τινα στιγμὴν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι v_0, μετὰ πάροδον δὲ χρόνου t γείνῃ αὕτη v, ἐπετεύχθη εἰς τὸν χρόνον t αὔξησις τῆς ταχύτητος κατὰ $v-v_0$. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ t νὰ προκληθῇ ἡ αὐτὴ αὔξησις τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ κινουμένου μὲ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην, τοῦτο πρέπει νὰ ἔχῃ ἐπιτάχυνσίν τινα γ_μ τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι

$$v=v_0+\gamma_\mu t, \text{ ὅθεν } \gamma_\mu=\frac{v-v_0}{t}.$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη γ_μ εἶναι ἡ μέση ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸν χρόνον t. Κατὰ ταῦτα ***ἡ μέση ἐπιτάχυνσις εἶναι πηλίκον τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητος διὰ τοῦ χρόνου, καθ᾽ ὃν συνετελέσθη αὕτη***, ἤτοι ***ἡ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς ταχύτητος***.

Ἐπιτάχυνσις κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν κινητοῦ ἔχοντος τυχοῦσαν κίνησιν καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ μέση αὐτοῦ ἐπιτάχυνσις κατὰ χρόνον, ὅστις ἀρχίζει ἀπὸ τῆς χρονικῆς ἐκείνης στιγμῆς καὶ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. Οὕτως, ἂν κατά τινα στιγμὴν χρόνου t ἡ ταχύτης εἶναι v, μετὰ πάροδον δὲ ἐλαχίστου χρόνου Δt ἡ ταχύτης γείνῃ $v+\Delta v$, ἡ μέση ἐπιτάχυνσις κατὰ τὸν χρόνον Δt εἶναι $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Τὸ δὲ ὅριον τοῦ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, ὅταν ὅρ $\Delta t=0$, εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν στιγμὴν t. Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ εἶναι ἡ πρὸς τὸν χρόνον παράγωγος τοῦ v, ἕπεται ὅτι: ***Ἡ ἐπιτάχυνσις κατά τινα στιγμὴν εἶναι ἡ πρὸς τὸν χρόνον παράγωγος τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην***.

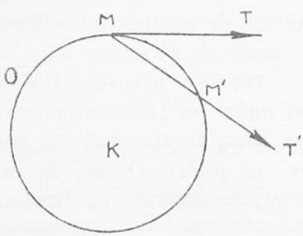
Ἐὰν λοιπὸν ὁ νόμος τῆς κινήσεως κινητοῦ εἶναι $\delta=3t^2+7t-1$, ἡ μὲν ταχύτης του θὰ εἶναι παράγωγος τοῦ δ, ἤτοι $v=6t+7$, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις παράγωγος τοῦ v, ἤτοι $\gamma=6$.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν $\gamma=t^2+1$ καὶ τὸ κινητὸν ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἤτοι εἶναι $v=0$ καὶ $\gamma=0$ διὰ $t=0$, ἐπειδὴ ἡ παράγωγος τῆς ταχύτητος εἶναι t^2+1, ἕπεται ὅτι $v=\frac{1}{3}t^3+t+\Sigma$. Ἐπειδὴ δὲ διὰ $t=0$ εἶναι $v=0$, ἕπεται ὅτι $\Sigma=0$ καὶ ἑπομένως $v=\frac{1}{3}t^3+t$. Τὸ διάστημα ἄρα ὀφείλει νὰ εἶναι συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον $\frac{1}{3}t^3+t$, ἤτοι εἶναι $\delta=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\Sigma$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\delta=0$ διὰ $t=0$, ἕπεται ὅτι $\Sigma=0$ καὶ ἑπομένως $\delta=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2$.

Κυκλικὴ κίνησις.

§ 7. **Μέση ταχύτης καθ' ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν κινητοῦ ἔχοντος κυκλικὴν κίνησιν.** Ἐὰν κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, λέγομεν ὅτι ἔχει ***κυκλικὴν*** κίνησιν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας Κ καὶ ὅτι εἰς χρόνον t διήνυσε τόξον ΟΜ=s· μετὰ πάροδον δὲ ἐλαχίστου χρόνου Δt, ὅστις ἀκολουθεῖ τὸν t διήνυσε τόξον ΜΜ΄. Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦτο θὰ ἔφθανεν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν Μ΄, ἂν ὁμαλῶς κινούμενον ἔγραφε τὴν χορδὴν ΜΜ΄ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον Δt μὲ ταχύτητα $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$. Διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τοῦτο $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$ καλοῦμεν ***μέσην ταχύτητα*** τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸν χρόνον Δt, ὅστις ἀκολουθεῖ τὸν t. Ἡ μέση αὕτη ταχύτης παρίσταται δι' ἀνύσματος ΜΜ΄Τ΄, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν Μ τῆς χορδῆς ΜΜ΄ καὶ μῆκος $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$.



Σχ. 2.

Ἐὰν ἡ αὔξησις Δt τοῦ χρόνου t τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ τελικὴ θέσις Μ΄ τοῦ κινητοῦ τείνει πρὸς Μ καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΜΜ΄ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Τὸ πηλίκον ὅμως $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$ τείνει πρὸς ὡρισμένον ἑκάστοτε ἢ ἐκ τοῦ t ἐξαρτώμενον ὅριον. Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν, καθ' ἣν λήγει ὁ χρόνος t, ἤτοι εἶναι $v=$ ὅρ. $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$, ὅταν ὅρ $\Delta t=0$. Ἐπειδὴ δε, ὅταν ὅρ $\Delta t=0$, ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄ τείνει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ, ἕπεται ὅτι ἡ ταχύτης εἰς τὸ Μ παρίσταται δι' ἀνύσματος ΜΤ, ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ καὶ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ ὅρ $\frac{(\overline{MM'})}{\Delta t}$.

Παρατηροῦντες ὅτι $\widehat{MM'}$ εἶναι αὔξησις τοῦ τόξου $s=(\widehat{OM})$ συντελεσθεῖσα εἰς χρόνον Δt, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $(\widehat{MM'})=\Delta s$. Ἐπειδὴ δὲ

$\frac{(MM')}{\Delta t} = \frac{(MM')}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ἕπεται ὅτι ὅρ $\frac{(MM')}{\Delta t}$ = ὅρ $\left(\frac{MM'}{\Delta s}\right)$. ὅρ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $\left(\frac{MM'}{\Delta s}\right) = 1$, ἕπεται ὅτι ὅρ $\frac{(MM')}{\Delta t}$ = ὅρ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ἢ v = ὅρ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Ἄρα: ***Ταχύτης κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν κινητοῦ ἔχοντος κυκλικὴν κίνησιν εἶναι ἡ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην παράγωγος τοῦ διανυθέντος τόξου πρὸς τὸν χρόνον.***

ΣΗΜ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀληθεύει διὰ πᾶσαν καμπυλόγραμμον κίνησιν.

§ **8. Ἰσοταχὴς κυκλικὴ κίνησις.** Ἡ ἁπλουστάτη κυκλικὴ κίνησις εἶναι ἡ *ἰσοταχής*, ***καθ' ἣν τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου.*** Ὁ νόμος ἄρα τῆς κινήσεως ταύτης εἶναι

$$s = \lambda t \qquad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ταχύτης v εἶναι παράγωγος τοῦ s, ἕπεται ὅτι $v = \lambda$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

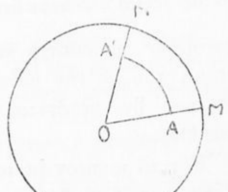
$$s = vt \qquad (2).$$

Ἐὰν εἰς ταύτην θέσωμεν $t = 1$, εὑρίσκομεν $s = v$, ἤτοι: ***ἡ ταχύτης ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κυκλικῇ κινήσει ἰσοῦται πρὸς τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον τόξον.***

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ταὐτίζεται πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει (§ 2)· ὁ δὲ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $s = vt$ παρεχόμενος νόμος τῆς κινήσεως εἶναι προφανῶς ὁ αὐτὸς περὶ τῆς εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως νόμος $\delta = vt$. Παρὰ τὰς ὁμοιότητας ὅμως ταύτας ἡ σπουδαζομένη κυκλικὴ κίνησις ἔχει πρὸς τὴν εὐθύγραμμον ἰσοταχῆ τὰς ἑξῆς οὐσιώδεις διαφοράς.

Α΄) Τὸ εἶδος τῆς τροχιᾶς καὶ Β΄) τὴν ἀδιάκοπον ἐν τῇ κυκλικῇ κινήσει ἀλλαγὴν τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητος, ἥτις ἑκάστοτε διευθύνεται κατὰ τὴν εἰς τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας, ἐν ᾧ εἰς τὴν εὐθύγραμμον κίνησιν ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος εἶναι σταθερά.

§ **9. Γωνιώδης ταχύτης.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κινητὸν διαγράφον περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος ρ εὑρίσκηται κατὰ χρόνον t εἰς θέσιν Μ· ἔστω δὲ Α σημεῖον τῆς ἀκτῖνος ΟΜ, τοιοῦτον ὥστε (ΟΑ)=1. Κινουμένου τοῦ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο,ρ) κινεῖται καὶ τὸ Α ἐπὶ ὁμοκέντρου περιφερείας ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν μονάδα μήκους.



Σχ. 3.

Ἡ τοῦ Α ταχύτης ω = ὅρ $\frac{(\widehat{AA'})}{\Delta t}$, ὅταν ὅρ $\Delta t = 0$, καλεῖται ***γωνιώδης*** ταχύτης τοῦ Μ. Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς ταχύτητος v (§ 7) τοῦ Μ ὑπάρχει ὡρισμένη σχέσις, ἥν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι $\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overset{\frown}{AA'}}=\frac{\varrho}{1}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ α' μέλους διὰ Δt, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\overset{\frown}{MM'}}{}:\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}=\varrho$. Καὶ ἂν λάβωμεν τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης, εὑρίσκομεν.

$$ὅρ\,\frac{\overset{\frown}{MM}}{\Delta t}:ὅρ\,\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}=\varrho \;\; ἢ \;\; v:\omega=\varrho, \; ὅθεν \; v=\omega\varrho. \qquad (1)$$

Ἄρα: ***Ἡ ταχύτης κινητοῦ ἔχοντος κυκλικὴν κίνησιν εἶναι γινόμενον τῆς γωνιώδους αὐτοῦ ταχύτητος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ.***

Ἐὰν ἡ κυκλικὴ κίνησις τοῦ Μ εἶναι ἰσοταχὴς καὶ ἡ κίνησις τοῦ Α θὰ εἶναι ἰσοταχής, ἤτοι τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον τόξον $\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}$ εἶναι σταθερόν, ἑπομένως ἡ ἰσότης $\omega=ὅρ\,\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}$ γίνεται $\omega=\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}$. Ἡ γωνιώδης λοιπὸν ταχύτης ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κυκλικῇ κινήσει παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ὅπερ διανύεται ὑπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overset{\frown}{AA'}}=\frac{\varrho}{1}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\varrho}=\overset{\frown}{AA'}$, ἧς τὸ α' μέλος ἐκφράζει εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον τοῦ $\overset{\frown}{MM'}$ ἢ τῆς γωνίας ΜΟΜ', ἕπεται ὅτι $\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\varrho}:\Delta t=\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\Delta t}=\omega$, ἤτοι: ἡ γωνιώδης ταχύτης ἐν τῇ ἰσοταχῇ κυκλικῇ κινήσει ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια τοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυομένου τόξου ἢ τῆς γωνίας, καθ' ἣν στρέφεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἡ ἀντίστοιχος ἀκτὶς ΟΜ.

Ἐὰν τὸ κινητὸν ἰσοταχῶς κινούμενον ἐκτελῇ ν πλήρεις στροφὰς εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ σημείου Α εἶναι 2πν. Ἀφ' ἑτέρου δὲ τοῦτο εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανύει τόξον ω, ἄρα εἶναι ω=2πν, ὅθεν

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi} \qquad (2)$$

Διὰ τούτων εὑρίσκομεν τὴν γωνιώδη ταχύτητα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν, ἃς τὸ κινητὸν ἐκτελεῖ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τῆς γωνιώδους ταχύτητος εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου συντελουμένων στροφῶν. Ἐὰν δὲ κληθῇ T ὁ χρόνος, ὅστις ἀπαιτεῖται διὰ μίαν στροφήν, θὰ εἶναι

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3}$$

$$\text{ὅθεν} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κινητὸν ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 3,6 χιλιόμετρα εἰς 5 π. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης του κατὰ δευτερόλεπτον ;

2) Κινητὸν ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 9,6 χιλιόμετρα μὲ ταχύτητα 20 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Εἰς πόσον χρόνον διέτρεξε τὸ διάστημα τοῦτο καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἔπρεπε νὰ κινηθῇ ἀκόμη, ὅπως συμπληρώσῃ διάστημα 10 χιλιομέτρων ;

3) Κινητὸν ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας λαμβάνει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν 6,40 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ 1280 μέτρα ;

4) Κινητὸν ἐκ τῆς ἠρεμίας ἀναχωροῦν λαμβάνει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν 8,60 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 32 δευτερόλεπτα ;

5) Κινητὸν ἐκ τῆς ἠρεμίας ἀναχωρῆσαν διήνυσεν μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εἰς τὰ 7 ἀρχικὰ δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του 245 μέτρα. Πόση ἦτο ἡ ἐπιτάχυνσίς του ;

6) Κινητὸν ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 160 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον σταματᾷ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἐπιβραδυντικῆς δυνάμεως μετὰ 8 δευτερόλεπτα. Πόσην ἐπιβράδυνσιν μετέδωκεν ἡ δύναμις αὕτη ;

7) Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ χρόνου ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις κινητοῦ κινουμένου κατὰ τὸν νόμον $\delta = t^3 - 3t^2 + t - 1$.

8) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νόμος τῆς κινήσεως καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις, ἂν $v = \frac{1}{2}t^2 + 5t - 3$, εἰς δὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου τὸ κινητὸν εἶχε διανύσει διάστημα 4 μέτρων.

9) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης κινητοῦ, ὅπερ κινεῖται ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 3 μονάδων μήκους καὶ ἔχει γωνιώδη ταχύτητα 1,5 μέτρου κατὰ δευτερόλεπτον.

10) Εἰς πόσον χρόνον κινητὸν ἔχον γωνιώδη ταχύτητα π διαγράφει ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν ἐφ' ἧς κινεῖται ;

11) Πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου κινητόν, ὅπερ κινεῖται ἐπὶ περιφερείας μὲ γωνιώδη ταχύτητα 6 π ;

12) Πόση εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης σημείου τινὸς τῆς Γῆς κατὰ τὴν ἡμερησίαν αὐτῆς κίνησιν ; Πόση δὲ ἡ ταχύτης σημείου τινὸς τῶν Ἀθηνῶν ; (γεωγρ. πλάτους $38^0\ 58'\ 20''$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

§ **10. Ὁρισμὸς καὶ χαρακτηριστικὰ δυνάμεως.** Τὴν κατάστασιν τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κινήσεως (μηχανικὴν κατάστασιν) τῶν σωμάτων δύνανται νὰ τροποποιήσωσιν αἴτια, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ***δυνάμεις***. Εἰς ἑκάστην δύναμιν διακρίνομεν τὰ ἀκόλουθα χαρακτηριστικά. ***Τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς, τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν ἔντασιν ἢ ἰσχὺν αὐτῆς***·

Σημεῖον ἐφαρμογῆς δυνάμεως εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ σώματος, εἰς ὃ ἐνεργεῖ ἀμέσως ἡ δύναμις.

Διεύθυνσις δυνάμεως καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἣν διαγράφει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς, ἂν ὑπόκειται εἰς μόνην τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως ταύτης. Ἐπὶ τῆς διευθύνσεως διακρίνομεν καὶ τὴν φοράν, πρὸς ἣν κινεῖ ἢ τείνει νὰ κινήσῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς καὶ ἣν καλοῦμεν ***φορὰν*** τῆς δυνάμεως.

Ἔντασις δυνάμεως καλεῖται ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς ὡρισμένην δύναμιν, ἥτις λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν δυνάμεων.

Ἑκάστην δύναμιν παριστῶμεν γραφικῶς δι᾽ ἀνύσματος, ὅπερ ἄρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς, ἔχει διεύθυνσιν καὶ φορὰν τὴν τῆς δυνάμεως και μῆκος ἔχον λόγον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, δι᾽ οὗ παρίσταται ἡ μονὰς τῶν δυνάμεων, ἴσον πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ταύτης. Φέρει δὲ εἰς τὸ πέρας αὐτοῦ τὸ ἄνυσμα τοῦτο βέλος.

§ **11. Ἰσορροποῦσαι δυνάμεις.** Ἐὰν δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ σώματος ἢ σημείου δὲν δύνανται νὰ μεταβάλλωσι τὴν πρὸ τῆς ἐνεργείας αὐτῶν κατάστασιν τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κινήσεως αὐτοῦ, λέγομεν ὅτι αὗται ***ἰσορροποῦσιν*** ἀλλήλας.

Δύο δυνάμεις ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἔντασιν, ἐὰν ἐνεργῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου κατ᾽ ἀντίθετον φοράν, ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.

Αἱ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ φορὰν ἔχουσαι δυνάμεις λέγονται ***ἴσαι***.

Αἱ δὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ ἀντίθετον φορὰν ἔχουσαι δυνάμεις λέγονται ***ἀντίθετοι*** δυνάμεις. Εἶναι εὐνόητον ὅτι αἱ ἀντίθετοι δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.

Δύναμίς τις λέγεται διπλασία, τριπλασία κ.τ.λ. ἄλλης, ἂν ἰσορροπῇ πρὸς δύο, τρεῖς κτλ. δυνάμεις ἴσας τῇ ἄλλῃ καὶ ἐνεργούσας πάσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ πάσας κατὰ φορὰν ἀντίθετον αὐτῆς.

§ **12. Ἰσορροπία σώματος ἢ σημείου.** Σῶμα ἢ σημεῖον ὑποκείμενον ἢ οὔ εἰς τὴν ἐνέργειαν δυνάμεων λέγομεν ὅτι ἰσορροπεῖ, ἂν τοῦτο εὑρίσκηται ἐν ἠρεμίᾳ.

Δεχόμεθα ὡς προφανεῖς ἢ ὡς ἀποτελέσματα πείρας τὰς ἑξῆς ἀρχάς, αἵτινες ἀποτελοῦσιν οὕτως ἀξιώματα.

α΄) *Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ ἐπὶ σημείων ἀδιασπάστως συνδεδεμένων ἰσορροπῶσιν, εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ ἀντίθετον φοράν.*

β΄) *Ἡ ἰσορροπία σώματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἓν ἢ πλείονα σημεῖα αὐτοῦ στερεωθῶσιν.*

γ΄) *Ἡ μηχανικὴ κατάστασις σώματος ἢ σημείου δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀφαιρέσωμέν τινας τῶν ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων ἢ προσθέσωμεν καὶ ἄλλας, ἀρκεῖ αὗται νὰ ἰσορροπῶσιν ἀλλήλας.*

δ΄) *Σῶμα ἢ σημεῖον ἐλεύθερον ἀδύνατον νὰ ἰσορροπῇ, ἂν ὑπόκειται εἰς τὴν ἐνέργειαν μιᾶς μόνον δυνάμεως.*

ε΄) *Ἐὰν σῶμα δύναται νὰ στραφῇ περὶ σημεῖον ἢ ἄξονα, ἀδύνατον νὰ ἰσορροπήσῃ διὰ δυνάμεως, ἧς ἡ διεύθυνσις δὲν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἢ ἄξονος στροφῆς.*

στ΄) *Ἐὰν δύναμίς τις ἰσορροπῇ πρὸς ἑκατέραν δύο ἄλλων δυνάμεων, αὗται ἔχουσι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, φορὰν καὶ ἔντασιν.*

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

§ **13. Θεώρημα I.** *Τὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεως δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς μετατεθῇ εἰς ἄλλο σημεῖον ἀδιασπάστως συνδεδεμένον μὲ τὸ πρῶτον, ἀρκεῖ ἡ δύναμις νὰ διατηρήσῃ τὴν ἔντασιν καὶ φορὰν αὐτῆς.*


Σχ. 4

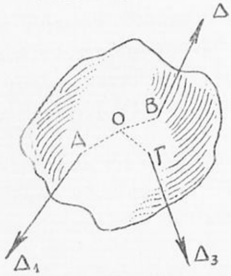
Ἔστω δύναμις Δ ἐνεργοῦσα εἴς τι σημεῖον Α καὶ Β σημεῖον ἀδιασπάστως συνδεδεμένον μὲ τὸ Α.

Ἐὰν νοήσωμεν ὅτι εἰς τὸ Β ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις Δ΄ καὶ Δ΄΄ ἀντίθετοι καὶ ἔχουσαι τὴν αὐτὴν μὲ τὴν Δ ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν, αὗται ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας· ἡ κατάστασις ἄρα τοῦ σώματος δὲν ἀλλοιοῦται (§ 12 γ΄) διὰ τῆς ἐνεργείας αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ δυνάμεις Δ καὶ Δ΄΄ ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας, ἕπεται ὅτι ἡ μηχανικὴ κατάστασις τοῦ σώματος εἶναι, οἵα θὰ ἦτο καὶ ἂν μόνον ἡ δύναμις Δ΄ ἐνήργει ἐπ᾽ αὐτοῦ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. *Ἂν ἡ διεύθυνσις δυνάμεως διέρχηται δι᾽ ἀκλονήτου σημείου*, ἡ δύναμις αὕτη ἐξουδετεροῦται.

§ **14. Θεώρημα II.** *Ἐὰν τρεῖς δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἰσορροπῶσιν, αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $Δ_1$, $Δ_2$, $Δ_3$ τρεῖς δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ σώματος καὶ ἰσορροποῦσαι. Ἂν τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β νοηθῶσι στερεωμένα, ἡ ἰσορροπία δὲν βλάπτεται. Ἀλλὰ τότε τὸ σῶμα δύναται νὰ στραφῇ περὶ ἄξονα ΑΒ καὶ ὑποκείμενον εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως $Δ_3$ ἰσορροπεῖ. Ὀφείλει ἄρα αὕτη νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος ΑΒ· ἔχουσα δὲ αὕτη μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ δύο κοινὰ σημεῖα κεῖται ἐπ' αὐτοῦ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ αἱ $Δ_1$, $Δ_2$, κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ.



Σχ. 5

Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις δυνάμεων.

§ **15. Συνισταμένη δυνάμεων.** *Συνισταμένη δυνάμεων καλεῖται ἡ δύναμις, ἥτις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ πάσας ταύτας, ἤτοι δύναται νὰ φέρῃ τὸ αὐτὸ μὲ ἐκείνας ἀποτέλεσμα.*

Ἡ εὕρεσις τῆς συνισταμένης δυνάμεων καλεῖται ***σύνθεσις*** αὐτῶν. Αἱ δυνάμεις, αἵτινες ἔχουσι δύναμίν τινα ὡς συνισταμένην καλοῦνται ***συνιστῶσαι*** αὐτῆς. Ἡ εὕρεσις δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι δοθεῖσαν συνισταμένην, καλεῖται ***ἀνάλυσις*** τῆς συνισταμένης ταύτης.

Ἕκαστον σύστημα δυνάμεων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πλείονας τῆς μιᾶς συνισταμένας. Διότι ἂν π. χ. σύστημά τι εἶχε δύο συνισταμένας, ἡ ἀντίθετος τῆς μιᾶς τούτων θὰ ἰσορρόπει ἀμφοτέρας. Ἀλλὰ τότε αὗται θὰ εἶχον (§ 12 στ΄) τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, φορὰν καὶ ἔντασιν, ἤτοι δὲν θὰ ἦσαν διακεκριμέναι ἀλλήλων.

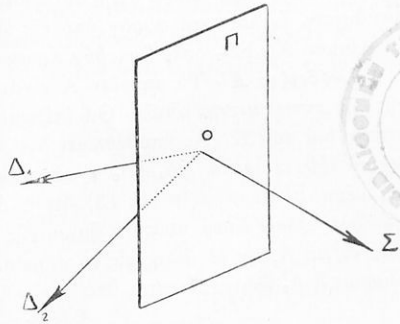
α΄. Σύνθεσις δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

§ **16. Θεώρημα I.** ***Ἡ συνισταμένη δυνάμεων, αἵτινες ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἔχει τὴν διεύθυνσιν αὐτῶν, ἔντασιν ἴσην πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν καὶ φοράν, τὴν φορὰν τῶν συνιστωσῶν, ὧν αἱ ἐντάσεις ἔχουσι τὸ μεγαλύτερον κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἄθροισμα.***

ΣΗΜ. Καλὸν εἶναι πρὸ πάσης ἄλλης ἐργασίας νὰ ὁρίζηται τὸ διευθύνον ἄνυσμα ἐπὶ τῆς διευθύνσεος ἑκάστης τῶν δυνάμεων καὶ αἱ ὁμόρροποι πρὸς αὐτὸ δυνάμεις νὰ θεωρῶνται θετικαί, αἱ δὲ ἀντίρροποι πρὸς αὐτὸ νὰ θεωρῶνται ὡς ἀρνητικαί. Ἡ δὲ ἔντασις τῶν μὲν θετικῶν δυνάμεων θὰ παρίσταται διὰ θετικοῦ ἀριθμοῦ, τῶν δὲ ἀρνητικῶν δι' ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.

§ **17. Θεώρημα II.** ***Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας αὐτῶν.***

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ συνισταμένη Σ δύο δυνάμεων Δ_1, Δ_2 ἐνεργουσῶν εἰς τὸ σημεῖον Ο κατὰ διαφόρους διευθύνσεις δὲν ἔκειτο εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Delta_1 O \Delta_2$, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ο ἐπίπεδον Π ἔχον πρὸς τὸ ἓν μέρος τὰς δυνάμεις Δ_1, Δ_2 καὶ πρὸς τὸ ἕτερον τὴν Σ. Οὕτω δὲ καθίσταται φανερὸν ὅτι αἱ μὲν Δ_1, Δ_2 θὰ ἔτεινον νὰ φέρωσι τὸ Ο, πρὸς ὃ μέρος τοῦ Π κεῖνται αὗται, ἐν ᾧ ἡ Σ θὰ ἔτεινε νὰ φέρῃ αὐτὸ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος. Δὲν θὰ ἠδύνατο ἄρα ἡ Σ νὰ εἶναι συνισταμένη τῶν Δ_1, Δ_2, ὡς μὴ φέρουσα τὸ αὐτὸ μὲ ἐκείνας ἀποτέλεσμα.

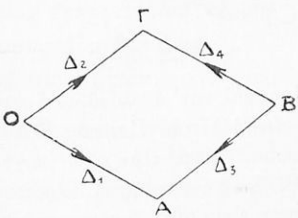


Σχ. 6.

Πόρισμα I. ***Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῶν.*** Διότι ἡ συνισταμένη κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας τῶν δυνάμεων, δὲν ὑπάρχει δὲ λόγος νὰ σχηματίζῃ μετ' αὐτῶν διαφόρους γωνίας.

Πόρισμα II. ***Τέσσαρες ἴσαι κατὰ τὴν ἔντασιν δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς ῥόμβου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.***

Τῷ ὄντι· ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1 καὶ Δ_2 ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου ΟΒ, ἡ δὲ τῶν Δ_3,Δ_4 ὁμοίως ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ἔχουσι δὲ αἱ δύο αὗται συνιστάμεναι προφανῶς ἀντίθετον φορὰν καὶ τὴν αὐτὴν ἔντασιν. Ἄρα ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.

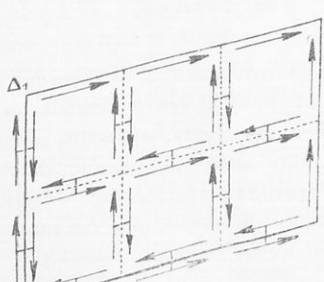


Σχ. 7.

§ **18. Θεώρημα III.** (Παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων). ***Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, αἵτινες ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, παρίσταται κατὰ διεύθυνσιν, ἔντασιν καὶ φοράν, ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει δύο προσκειμένας πλευρὰς τὰ εὐθ. τμήματα, δι' ὧν αἱ δυνάμεις αὗται παρίστανται.***

Ἔστωσαν Δ_1 καὶ Δ_2 δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ Α κατὰ διαφόρους διευθύνσεις. Λέγω ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτῶν Σ παρίσταται κατὰ διεύθυνσιν, ἔντασιν καὶ φορὰν ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΑΕ τοῦ παραλληλογράμμου $Α\Delta_1Ε\Delta_2$ ὅπερ ἔχει δύο προσκειμένας πλευρὰς $Α\Delta_1$ καὶ $Α\Delta_2$.

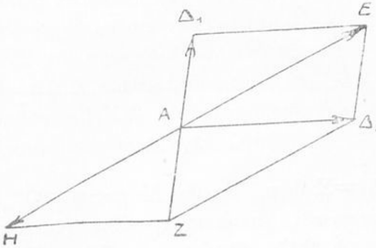
Ἀπόδειξις Α'. Τὸ σημεῖον Α εἶναι προφανῶς σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς Σ διέρχεται διὰ τοῦ Ε. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\Delta_1 : \Delta_2 = 2 : 3$ καὶ ἂς διαιρέσωμεν τὰ εὐθ. τμήματα $Α\Delta_1, Α\Delta_2$ ἀντιστοίχως εἰς 2 τὸ μὲν καὶ 3 τὸ ἄλλο ἴσα μέρη. Εἶναι φανερὸν (§ 13) ὅτι ἡ Δ_1 δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ δύο ἄλλων ἴσων πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς Δ_1 καὶ ἐνεργουσῶν τῆς μὲν μιᾶς εἰς τὸ Α, τῆς δὲ ἄλλης εἰς τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως τοῦ $Α\Delta_1$. Ὁμοίως ἡ Δ_2 ἀντικαθίσταται ὑπὸ τριῶν ἴσων πρὸς τὸ τρίτον αὐτῆς καὶ ἐνεργουσῶν εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ $Α\Delta_2$. Ἐὰν ἤδη ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως ἑκατέρου εὐθ. τμήματος $Α\Delta_1, Α\Delta_2$ φέρωμεν παραλλήλως πρὸς τὸ ἄλλο καὶ εἰς δύο ἀντικειμένας κορυφὰς ἑκάστου τῶν σχηματιζομένων ῥόμβων ἐφαρμόσωμεν, ὡς εἰς τὸ (Σχ. 8) φαίνεται, δυνάμεις ἴσας πρὸς τὰς προηγουμένας μερικὰς συνισταμένας τῶν Δ_1, Δ_2 καὶ ἀντιρρόπους, αὗται (§ 17 Πορ. II) ἰσορροποῦσιν ἀλλήλους καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ κατάστασις τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων δὲν μεταβάλλεται. Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται καταστρέφουσιν ἀλλήλας πλὴν τῶν ἐνεργουσῶν εἰς σημεῖα τῶν πλευρῶν $\Delta_1Ε$ καὶ $\Delta_2Ε$, ὧν ἡ συνισταμένη διέρχεται διὰ τοῦ Ε. Ἐπειδὴ δὲ συνισταμένη τούτων εἶναι αὐτὴ ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1 καὶ Δ_2, ἕπεται ὅτι καὶ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ Ε. Ἔχει ἄρα ἡ Σ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου ΑΕ.



Σχ. 8.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη ὅτι αἱ δυνάμεις ἔχουσι κοινὸν μέτρον δύναμίν τινα δ τοιαύτην ὥστε $\Delta_1 = 2\delta$ καὶ $\Delta_2 = 3\delta$. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ κοινὸν μέτρον ἀπαύστως σμικρυνόμενον καὶ τὰς δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2 βαθμηδὸν ἀντικαθισταμένας ὑπὸ συμμέτρων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κοινὸν μέτρον ἀντιστοίχως πρὸς τὰς διαφόρους ταύτας τιμὰς τοῦ κοινοῦ μέτρου, ἡ ἀπόδειξις ἰσχύει δι᾽ ἕκαστον τοιοῦτον ζεῦγος δυνάμεων, ἄρα ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ὁριακὸν ζεῦγος Δ_1, Δ_2 καὶ ὅταν αὗται εἶναι ἀσύμμετροι δυνάμεις.

Β΄. Ἔστω ΑΗ δύναμις ἀντίθετος τῆς Σ· ἐπειδὴ ἡ ΑΗ ἰσορροπεῖ τὴν Σ, θὰ ἰσορροπῇ καὶ τὰς συνιστώσας αὐτῆς Δ_1, Δ_2. Αἱ δυνάμεις λοιπὸν Δ_1, ΑΗ, Δ_2 ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας κατ᾽ ἀκολουθίαν μία τούτων π.χ. ἡ Δ_1 εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν ἄλλων ΑΗ καὶ Δ_2. Ἀλλ᾽ ἡ συνισταμένη τῶν ἄλλων τούτων διευθύνεται κατὰ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζομεν ἄγοντες ἐκ τοῦ ἄκρου Δ_2 παράλληλον τῇ διαγωνίῳ ΕΑ, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς $Α\Delta_1$ εἰς τὸ Ζ καὶ ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον τῇ $Α\Delta_2$, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ εἰς τὸ Η. Οὕτω τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΗ παριστᾷ τὴν ἔντασιν δυνάμεως ἀντιθέτου τῆς Σ καὶ ἐπομένως καὶ τὴν τῆς Σ ἀπολύτως. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΗ = Ζ\Delta_2 = ΑΕ$, ἕπεται ὅτι ΑΕ παριστᾷ τὴν ἔντασιν τῆς Σ. Ὥστε ἡ συνισταμένη Σ τῶν Δ_1, Δ_2 παρίσταται κατὰ διεύθυνσιν, φορὰν καὶ ἔντασιν διὰ τῆς διαγωνίου ΑΕ τοῦ ἐπ᾽ αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 9

Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο καλεῖται ***παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων.***

Σχέσεις μεταξὺ δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς ἓν σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις καὶ τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

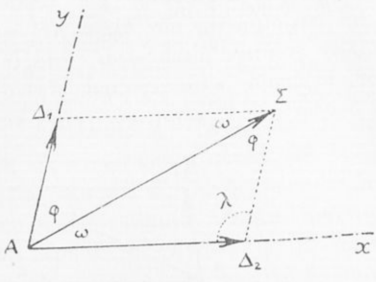
§ **19. Θεώρημα Ι.** *Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐνεργῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, ὁ λόγος ἑκάστης αὐτῶν καὶ τῆς συνισταμένης των πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῶν ἄλλων εἶναι σταθερός.*

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ τριγώνου $Α\Delta_2Σ$ ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\frac{\Delta_1}{ἡμω} = \frac{\Delta_2}{ἡμφ} = \frac{Σ}{ἡμλ}$. Ἐπειδὴ δὲ $λ + (\Delta_1 Α \Delta_2) = 2$ ὀρθαί, ἕπεται ὅτι $ἡμλ = ἡμΑ$

καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν αἱ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται $\frac{\Delta_1}{\text{ἡμ}\omega}=\frac{\Delta_2}{\text{ἡμ}\varphi}=$

$=\frac{\Sigma}{\text{ἡμ}A}$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. *Ἐὰν ἡ γωνία δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι ὀρθή, ἑκατέρα τούτων ἰσοῦται πρὸς τὴν συνισταμένην ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς συνισταμένης καὶ τῆς συνιστώσης ταύτης.*



Σχ. 10

Διότι, ἂν $A=90^0$, εἶναι ἡμ$A=1$, αἱ δὲ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται $\frac{\Delta_1}{\text{ἡμ}\omega}=\frac{\Delta_2}{\text{ἡμ}\varphi}=\Sigma$, ὅθεν $\Delta_1=\Sigma$. ἡμω, $\Delta_2=\Sigma$. ἡμφ. Ἐπειδὴ δὲ $\omega+\varphi=90^0$, ἕπεται ὅτι ἡμω=συνφ, ἡμφ=συνω καὶ ἑπομένως $\Delta_1=\Sigma$. συνφ, $\Delta_2=\Sigma$. συνω.

§ **20. Θεώρημα ΙΙ.** *Τὸ τετράγωνον τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συνιστωσῶν ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν πολ)σθὲν καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζομένης γωνίας.*

Ἀπόδειξις. Εἶναι γνωστὸν (§ 110 Γ΄ Εὐθ. Τριγωνομετρίας μου) ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου $A\Delta_2\Sigma$ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\Sigma^2=\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2-2\Delta_1\Delta_2$συν $A\Delta_2\Sigma$. Ἐπειδὴ δὲ $A\Delta_2\Sigma+A=2$ ὀρθαί, ἕπεται ὅτι —συν $A\Delta_2\Sigma=$συν A καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\Sigma^2=\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2+2\Delta_1\Delta_2 \text{ συν}A. \quad \text{ὅ. ἔ. δ} \tag{1}$$

Παρατήρησις. Διὰ τῆς ἰσότητος ταύτης ὁρίζεται ἡ Σ ἐκ τῶν Δ_1, Δ_2 καὶ τῆς γωνίας A. Μεθ᾽ ὃ ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\Delta_1}{\text{ἡμ}\omega}=\frac{\Delta_2}{\text{ἡμ}\varphi}=\frac{\Sigma}{\text{ἡμ}A}$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡμω$=\frac{\Delta_1}{\Sigma}$ἡμA, ἡμφ$=\frac{\Delta_2}{\Sigma}$ἡμA, δι᾽ ὧν ὁρίζονται καὶ αἱ γωνίαι ω καὶ φ τῶν δυνάμεων μετὰ τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

Πόρισμα Ι. *Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον σχηματίζωσιν ὀρθὴν γωνίαν, τὸ τετράγωνον τῆς συνισταμένης αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων* *τῶν δυνάμεων τούτων*. Τῷ ὄντι ἂν $A=90^0$, θὰ εἶναι συν $A=0$ καὶ ἡ προηγουμένως ἀποδειχθεῖσα ἰσότης γίνεται $\Sigma^2=\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2$.

Πόρισμα II. *Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον σχηματίζωσι γωνίαν O^0 ἢ 180^0, ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν αὐτῶν*. Τῷ ὄντι ἂν $A=0^0$, θὰ εἶναι συν$A=1$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Sigma^2=\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2+2\Delta_1\Delta_2=(\Delta_1+\Delta_2)^2$, ὅθεν $\Sigma=\Delta_1+\Delta_2$. Ἂν δὲ $A=180^0$, θὰ εἶναι συν $A=-1$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\Sigma^2=\Delta_1{}^2+\Delta_2{}^2-2\Delta_1\Delta_2=(\Delta_1-\Delta_2)^2, \text{ ὅθεν } \Sigma=\Delta_1-\Delta_2.$$

§ **21. Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς δύο ἄλλας.** *Α΄. Περίπτωσις. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις Σ (Σχ. 10) εἰς δύο συνιστώσας ἐν τῷ αὐτῷ μετὰ τῆς Σ ἐνεργούσας ἐπιπέδῳ καὶ ἐχούσας διευθύνσεις Ax καὶ Ay*. Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον $A\Delta_1\Sigma\Delta_2$ ἔχον διαγώνιον ΑΣ καὶ προσκειμένας πλευρὰς ἐπὶ τῶν Ax,Ay. Πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἐκ τοῦ Σ παραλλήλους πρὸς τὰς Ax,Ay καὶ ὁρίζεται τὸ παραλληλόγραμμον $A\Delta_1\Sigma\Delta_2$, οὗ αἱ πλευραὶ $A\Delta_1$, $A\Delta_2$ παριστῶσι κατὰ φοράν, διεύθυνσιν καὶ ἔντασιν τὰς ζητουμένας συνιστώσας.

Λογιστικῶς τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τριγώνου $A\Delta_1\Sigma$, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΣ καὶ τὰς γωνίας ω καὶ φ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ $\frac{\Delta_1}{\etaμω}=\frac{\Delta_2}{\etaμφ}=\frac{\Sigma}{\etaμ(ω+φ)}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta_2=\frac{\Sigma\etaμφ}{\etaμ(ω+φ)}$ καὶ $\Delta_1=\frac{\Sigma\etaμω}{\etaμ(ω+φ)}$.

Β΄. Περίπτωσις. Νὰ ἀναλυθῇ δοθεῖσα δύναμις Σ εἰς δύο ἄλλας, ὧν δίδονται αἱ ἐντάσεις Δ_1 καὶ Δ_2 καὶ αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἐν τῷ αὐτῷ μετὰ τῆς Σ ἐπιπέδῳ.

Προφανῶς ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $A\Sigma\Delta_2$ ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ $\Sigma\Delta_2$. Οὕτως ὁρίζεται ἡ διεύθυνσις Ax, Ay ἑκατέρας τῶν συνιστωσῶν. Λογιστικῶς ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ω καὶ φ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του.

Γ΄ Περίπτωσις. Νὰ ἀναλυθῇ δοθεῖσα δύναμις Σ εἰς δύο συνιστώσας ἐν τῷ αὐτῷ μετ᾽ αὐτῆς ἐνεργούσας ἐπιπέδῳ καὶ ὧν μία (ἡ Δ_1 π.χ.) δίδεται κατὰ διεύθυνσιν, ἔντασιν καὶ φοράν. Ἐὰν φέρωμεν τὴν $\Delta_1\Sigma$, ὁρίζομεν τὴν ἔντασιν, διεύθυνσιν καὶ φορὰν τῆς ἑτέρας συνιστώσης Δ_2.

Λογιστικῶς ἀρκεῖ νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ τρίγωνον $A\Delta_1\Sigma$, οὗ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

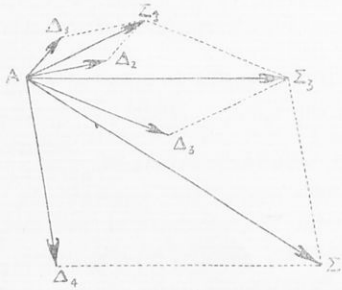
Δ΄. Περίπτωσις. Νὰ ἀναλυθῇ δοθεῖσα δύναμις Σ εἰς δύο ἄλλας $Δ_1$, $Δ_2$ ἐν τῷ αὐτῷ μετὰ τῆς Σ ἐνεργούσας ἐπιπέδῳ καὶ ὧν ἡ μὲν $Δ_1$ ἔχει γνωστὴν ἔντασιν, ἡ δὲ $Δ_2$ ἔχει δεδομένην διεύθυνσιν Αx.

Ἡ μὲ κέντρον τὸ ἄκρον τῆς Σ καὶ ἀκτῖνα τὸ εὐθ. τμῆμα, δι᾽ οὗ παρίσταται ἡ ἔντασις τῆς $Δ_1$ γραφομένη περιφέρεια τέμνη τὴν Αx ἔστω εἰς τὸ σημεῖον $Δ_2$. Τὸ εὐθ. τμῆμα $ΑΔ_2$ παριστᾷ οὕτω τὴν ἔντασιν τῆς $Δ_2$ ἡ δὲ πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα $Δ_2Σ$ παράλληλος Αy εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς $Δ_1$.

Λογιστικῶς τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τριγώνου $ΑΔ_1Σ$ ἐκ δύο πλευρῶν, ΑΣ, $ΑΔ_1$ καὶ τῆς γωνίας ω, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς $ΑΔ_1$.

ΣΗΜ. Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ μία δύναμις $Δ_2$ δύο τοιαῦται διάφοροι ἀλλήλων καὶ οὐδεμία (ὅρα ἡμετέραν Εὐθ. Τριγωνομετρίαν § 114 Γ΄).

§ **22. Σύνθεσις πολλῶν δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις.** Ἔστωσαν $Δ_1$,$Δ_2$,$Δ_3$,$Δ_4$ τοιαῦται δυνάμεις καὶ Α τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῶν. Αἱ $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ ἔχουσι συνισταμένην $Σ_1$· αἱ $Σ_1$ καὶ $Δ_3$ ἔχουσι συνισταμένην $Σ_3$· αἱ δὲ $Σ_3$ καὶ $Δ_4$ ἔχουσι συνισταμένην Σ, ἥτις εἶναι ἡ τελικὴ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $Δ_1$, $Δ_2$, $Δ_3$, $Δ_4$. Παρατηροῦντες ὅτι $Δ_1Σ_1$, $Σ_1$ $Σ_3$, $Σ_3$ Σ εἶναι εὐθ. τμήματα παράλληλα καὶ ἴσα πρὸς τὰ παριστῶντα τὰς δυνάμεις $Δ_2$,$Δ_3$,$Δ_4$, συμπεραίνομεν ὅτι: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ διαφόρους διευθύνσεις ἄγομεν ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς α΄ ἄνυσμα ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ παριστῶν τὴν β΄ δύναμιν, ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ ἄγομεν ἄνυσμα ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ παριστῶν τὴν γ΄ δύναμιν καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων τούτων καὶ πέραν τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν ἀνυσμάτων τούτων, παριστᾷ τὴν ζητουμένην συνισταμένην.***

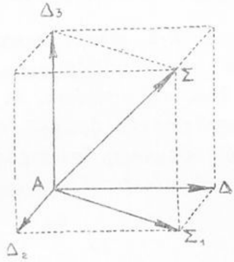


Σχ. 11.

Τὸ σχῆμα $ΑΔ_1Σ_1Σ_3Σ$ καλεῖται ***πολύγωνον*** τῶν δυνάμεων $Δ_1$,$Δ_2$,$Δ_3$,$Δ_4$.

Πόρισμα. ***Ἵνα δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἰσορροπῶσι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πολύγωνον αὐτῶν νὰ κλείῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν.*** Διότι πρέπει ἡ συνισταμένη αὐτῶν νὰ ἔχῃ ἔντασιν μηδέν, ὅτε τὸ παριστῶν αὐτὴν ἄνυσμα ἀνάγεται εἰς σημεῖον, τὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων. Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ, αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦσι, διότι τὸ τὴν συνισταμένην παριστῶν ἄνυσμα γίνεται σημεῖον, ἄρα αὕτη ἔχει ἔντασιν μηδέν.

§ **23. Σύνθεσις τριῶν δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.** Ἔστωσαν $ΑΔ_1$, $ΑΔ_2$, $ΑΔ_3$ τρεῖς τοιαῦται δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ Α. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλεπίπεδον, οὗ τρεῖς συντρέχουσαι ἀκμαὶ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα, δι' ὧν παρίστανται αἱ ῥηθεῖσαι δυνάμεις, βλέπομεν ὅτι $Σ_1$ εἶναι συνισταμένη τῶν $Δ_1, Δ_2$ καὶ ΑΣ εἶναι συνισταμένη τῶν $Σ_1$ καὶ $Δ_3$. Ἄρα:



Σχ. 12.

Θεώρημα I. *Ἐὰν τρεῖς δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ δὲν κεῖνται πᾶσαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἡ συνισταμένη αὐτῶν παρίσταται κατὰ διεύθυνσιν, φορὰν καὶ ἔντασιν ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς ἀγομένης διαγωνίου τοῦ ἐπ' αὐτῶν κατασκευαζομένου παραλληλεπιπέδου.* Ἡ γραμμὴ $ΑΔ_1Σ_1Σ$ εἶναι τὸ πολύγωνον τῶν δυνάμεων τούτων, ὅπερ εἶναι προφανῶς *στρεβλόν*.

Πόρισμα I. *Τρεῖς δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι ἀδύνατον νὰ ἰσορροπῶσιν, ἂν δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.* Διότι ἡ διαγώνιος τοῦ ἐπ' αὐτῶν κατασκευαζομένου παραλληλεπιπέδου οὐδέποτε ἀνάγεται εἰς σημεῖον.

Θεώρημα II. *Ἐὰν αἱ διευθύνσεις τριῶν δυνάμεων σχηματίζωσι τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν, τὸ τετράγωνον τῆς συνισταμένης αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου $ΑΣΣ_1$ εἶναι

$$(ΑΣ)^2=(ΑΣ_1)^2+(ΣΣ_1)^2=(ΑΣ_1)^2+Δ_3^2.$$

Ἕνεκα δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου $ΑΔ_1Σ_1$ εἶναι $(ΑΣ_1)^2=Δ_1^2+Δ_2^2$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ προηγουμένη ἰσότης γωνίας $(ΑΣ)^2=Δ_1^2+Δ_2^2+Δ_3^2$. ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα III. *Ἐὰν αἱ διευθύνσεις τριῶν δυνάμεων σχηματίζωσι τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν, ἑκάστη τούτων εἶναι προβολὴ τῆς συνισταμένης ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἡ ἕδρα π.χ. $ΣΔ_1Σ_1$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $ΑΔ_1$, ἄρα ἡ $ΣΔ_1$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $ΑΔ_1$. Εἶναι ἄρα ἡ $ΑΔ_1$ προβολὴ τῆς ΑΣ ἐπὶ τὴν $A\Delta_1$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας δυνάμεις.

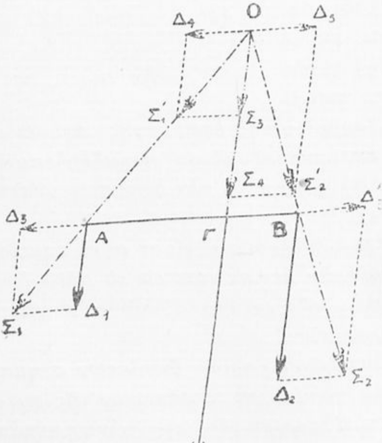
Ἐὰν δὲ α, β, γ εἶναι αἱ γωνίαι τῶν Δ_1, Δ_2, Δ_3 μετὰ τῆς συνισταμένης, θὰ εἶναι $\Delta_1 = \Sigma$. συνα, $\Delta_2 = \Sigma$ συνβ, $\Delta_3 = \Sigma$συνγ (εὐθ. Τριγ. § 50).

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων προκύπτει ὅτι $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \Sigma^2$ (συν^{2}α+συν^{2}β+συν^{2}γ). Ἐπειδὴ δὲ $\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$, ἕπεται ὅτι συν^{2}α+συν^{2}β+συν^{2}γ=1.

Σύνθεσις παραλλήλων δυνάμεων.

§ **24. Θεώρημα Ι.** *Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων εἶναι παράλληλος, ὁμόρροπος πρὸς αὐτὰς καὶ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων ἐφαρμογῆς αὐτῶν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς δυνάμεις ταύτας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Δ_1, Δ_2 δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἐφηρμοσμέναι εἰς σημεῖα Α καὶ Β ἀδιασπάστως συνδεδεμένα. Ἐὰν εἰς ταῦτα ἐφαρμόσωμεν τὰς ἴσας καὶ ἀντιρρόπους δυνάμεις Δ_3 καὶ Δ'_3 οὐδεμία ἐπέρχεται μεταβολὴ εἰς τὴν ἐνέργειαν καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2. Αἱ Δ_1 καὶ Δ_3 ἔχουσι συνισταμένην Σ_1, αἱ δὲ Δ_2 καὶ Δ'_3 ἔχουσι συνισταμένην Σ_2. Τὰς δυνάμεις δὲ Σ_1 καὶ Σ_2 δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν (§ 13) εἰς τὸ Ο ὡς Σ_1' καὶ Σ_2' ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς Σ_1, Σ_2. Ἤδη τὴν Σ_1' ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας Σ_3 καὶ Δ_4, ὧν ἡ α′ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῶν

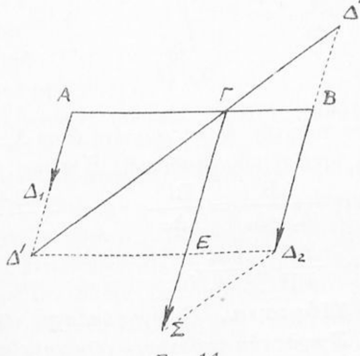


Σχ. 13.

ἀρχικῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2, ἡ δὲ β′ εἶναι ἴση καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν Δ_3. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων $A\Delta_3\Sigma_1$ καὶ $O\Delta_4\Sigma_1'$ προκύπτει ὅτι $O\Sigma_3 = \Delta_3\Sigma_1 = A\Delta_1$, ἄρα $\Sigma_3 = \Delta_1$. Ὁμοίως ἀναλύοντες τὴν Σ_2' εἰς τὰς συνιστώσας Σ_4 καὶ $\Delta_5 = \Delta_3'$, ἀποδεικνύομεν ὅτι $\Sigma_4 = \Delta_2$. Ἐπειδὴ δὲ Δ_4 καὶ Δ_5 εἶναι ἴσαι τὴν ἔντασιν (ὡς ἴσας πρὸς τὰς $\Delta_3 = \Delta_3'$) καὶ ἀντίρροποι, ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας. Μένουσιν ἄρα αἱ Σ_3 καὶ Σ_4, ὧν ἡ συνισταμένη ἔχει διεύθυνσιν τὴν τῆς ΟΓ παράλληλον τῆς Δ_1 καὶ Δ_2 καὶ ἰσοῦται πρὸς $\Sigma_3+\Sigma_4$ ἢ $\Delta_1+\Delta_2$. Ταύτης δὲ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς Ο δύναται νὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ Γ (§ 13), εἰς ὃ ἡ ΟΓ τέμνει τὴν ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\mathrm{O}\Sigma_1'\Sigma_3$, ΟΑΓ προκύπτει $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta_3}=\frac{\mathrm{O}\Gamma}{\Delta_1}$, ἐκ δὲ τῶν $\mathrm{O}\Sigma_4\Sigma_2'$, ΟΓΒ προκύπτει $\frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Delta_3}=\frac{\mathrm{O}\Gamma}{\Delta_2}$ ἕπεται διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη ὅτι $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. Ὥστε ἡ συνισταμένη ΓΣ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῶν Δ_1, Δ_2 τὴν αὐτὴν φοράν, ἔντασιν $\Delta_1+\Delta_2$, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς Γ διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς δυνάμεις. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. *Ὁ λόγος ἑκάστης τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων Δ_1, Δ_2, καὶ τῆς συνιστωμένης αὐτῶν Σ πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄλλων εἶναι σταθερὸς δι᾽ ὅλας.* Τῷ ὄντι ἐκ τῆς $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\Delta_1}{\mathrm{B}\Gamma}=\frac{\Delta_2}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{\mathrm{A}\Gamma+\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\Sigma}{\mathrm{AB}}$.

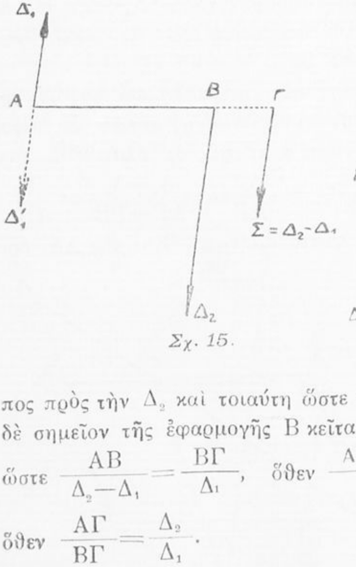
Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς συνισταμένης. Ἐπὶ τῆς $\mathrm{A}\Delta_1$ ὁρίζομεν τμῆμα ΑΔ΄ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ $\mathrm{B}\Delta_2$ καὶ ἐπὶ τῆς $\mathrm{B}\Delta_2$ ὁρίζομεν τὸ ΒΔ΄΄ ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς τὸ $\mathrm{A}\Delta_1$. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν Δ΄Δ΄΄, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης. Πράγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔ΄Γ, ΒΓΔ΄΄ προκύπτει ὅτι ΑΓ:ΓΒ=ΑΔ΄ : ΒΔ΄΄ ἢ $\mathrm{A}\Gamma:\Gamma\mathrm{B}=\Delta_2:\Delta_1$. Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν $\mathrm{B}\Delta_2$ καὶ τὴν $\Delta_2\Sigma$ παράλληλον πρὸς τὴν Δ΄΄Δ΄, ὁρίζομεν τὸ τμῆμα ΓΣ, ὅπερ παριστᾷ τὴν σύνισταμένην Σ. Τῷ ὄντι ΓΣ=ΓΕ+ΕΣ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΓΒΔ΄΄, $\Delta_2\mathrm{E}\Sigma$ εἶναι ἴσα ($\Delta_2\Sigma=\Gamma\Delta''$, $\Delta_2\mathrm{E}=\mathrm{B}\Gamma$, $\widehat{\mathrm{E}\Delta_2\Sigma}=\widehat{\mathrm{B}\Gamma\Delta''}$), ἕπεται ὅτι $\mathrm{E}\Sigma=\mathrm{B}\Delta''=\Delta_1$. Ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται $\Gamma\Sigma=\Delta_1+\Delta_2$.



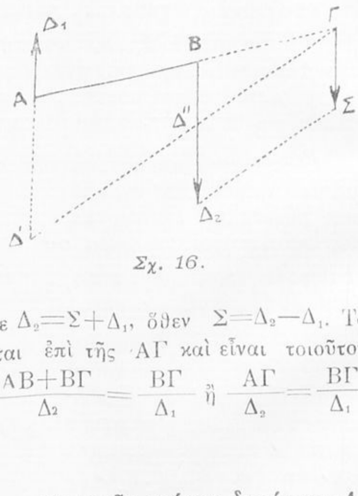
Σχ. 14.

§ **25. Θεώρημα II.** *Ἡ συνισταμένη δύο ἀνίσων, παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς, ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν καὶ ἔχει τὴν φορὰν τῆς* *μεγαλυτέρας. Τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν καὶ ἀπέχει ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεις ἀντιστρόφως ἀναλόγους πρὸς τὰς ἀντιστοίχους δυνάμεις.*

Ἔστωσαν Δ_1 καὶ Δ_2 δύο τοιαῦται δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ $\Delta_2 > \Delta_1$. Ἡ δύναμις Δ_2 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων πρὸς αὐτὴν δυνάμεων Δ_1' καὶ Σ, ὧν ἡ α΄ εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν Δ_1, ἡ δὲ β΄ εἶναι ὁμόρρο-



Σχ. 15.



Σχ. 16.

πος πρὸς τὴν Δ_2 καὶ τοιαύτη ὥστε $\Delta_2 = \Sigma + \Delta_1$, ὅθεν $\Sigma = \Delta_2 - \Delta_1$. Τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ εἶναι τοιοῦτον

ὥστε $\dfrac{AB}{\Delta_2 - \Delta_1} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta_1}$, ὅθεν $\dfrac{AB + B\Gamma}{\Delta_2} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta_1}$ ἢ $\dfrac{A\Gamma}{\Delta_2} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta_1}$

ὅθεν $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

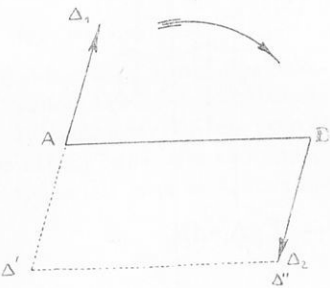
Πόρισμα. *Ὁ λόγος ἑκάστης τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων Δ_1, Δ_2, Σ πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δύο ἄλλων εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας.* Ἐκ τῆς ἰσότητος $\dfrac{A\Gamma}{\Delta_2} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta_1}$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{A\Gamma}{\Delta_2} = \frac{B\Gamma}{\Delta_1} = \frac{A\Gamma - B\Gamma}{\Delta_2 - \Delta_1} = \frac{AB}{\Sigma}, \text{ ὅθεν } \frac{\Delta_2}{A\Gamma} = \frac{\Delta_1}{B\Gamma} = \frac{\Sigma}{AB}.$$

Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς συνισταμένης. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς διευθύνσεως $A\Delta_1$ ἄνυσμα $A\Delta'$ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ $B\Delta_2$ καὶ ἐπὶ τῆς $B\Delta_2$ ἄνυσμα $B\Delta''$ ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς τὸ $A\Delta_1$. Ἡ εὐθεῖα $\Delta'\Delta''$ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον ἐφαρμογῆς

$Γ$ τῆς συνισταμένης. Πράγματι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΓΑΔ'$, $ΓΒΔ''$ προκύπτει ὅτι $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{ΑΔ'}{ΒΔ''}$ ἢ $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}=\frac{Δ_2}{Δ_1}$. Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἐκ τοῦ $Δ_2$ παράλληλον πρὸς τὴν $Δ'Δ''$ καὶ ἐκ τοῦ $Γ$ παράλληλον πρὸς τὴν $Δ_2$, ὁρίζομεν τὸ ἄνυσμα $ΓΣ$, ὅπερ παριστᾷ τὴν συνισταμένην τῶν $Δ_1,Δ_2$. Τῷ ὄντι ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $ΓΔ''Δ_2Σ$ προκύπτει ὅτι $ΓΣ=Δ''Δ_2=ΒΔ_2-Β''=Δ_2-Δ_1$.

§ **26. Ζεῦγος δυνάμεων.** Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην κατασκευὴν εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἔντασιν, βλέπομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα $Δ'Δ''$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΒ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον $Γ$ ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι καὶ $Σ=Δ_2-Δ_1=0$. Δὲν ἔχουσι λοιπὸν αἱ τοιαῦται δυνάμεις συνισταμένην καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προκαλέσωσιν αὗται μεταφορικὴν κίνησιν οὐδὲ νὰ ἰσορροπηθῶσιν ὑπὸ μιᾶς ἄλλης δυνάμεως. Τὸ ὑπὸ δύο τοιούτων δυνάμεων ἀποτελούμενον σύστημα καλεῖται ***ζεῦγος δυνάμεων*** ἢ ἁπλῶς ***ζεῦγος***.

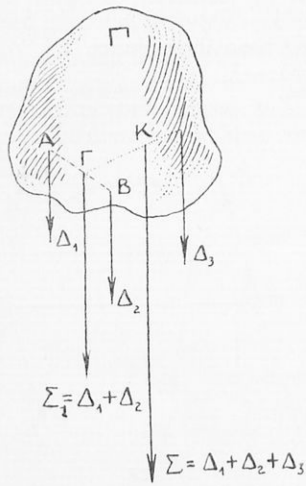


Σχ. 17.

Ἕκαστον ζεῦγος δύναται ἢ τείνει νὰ προκαλέσῃ περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ σώματος, ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ. Καὶ ἂν μὲν αἱ δυνάμεις διατηρῶσιν ἀμεταβλήτους τὰς γωνίας αὐτῶν μετὰ τῆς $ΑΒ$, τὸ ζεῦγος κινεῖται διαρκῶς, ἂν δὲ αἱ γωνίαι αὗται μεταβάλλωνται, τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ὅταν αἱ δυνάμεις λάβωσι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, διότι τότε ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας. Τοῦτο π.χ. συμβαίνει εἰς τὴν μαγνητικὴν βελόνην.

§ **27. Σύνθεσις πολλῶν παραλλήλων δυνάμεων.** Ἐὰν εἰς διάφορα σημεῖα σώματος ἐνεργῶσι δυνάμεις παράλληλοι, συνθέτομεν ταύτας κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους. Α') Συνθέτομεν τὰς δύο πρώτας, ἔπειτα συνθέτομεν τὴν εὑρεθεῖσαν μερικὴν συνισταμένην αὐτῶν μετὰ τρίτης· τὴν νέαν μερικὴν συνισταμένην μετὰ τῆς δ' καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ συντεθῶσι πᾶσαι αἱ δυνάμεις.

Β') Ἐὰν αἱ παράλληλοι δυνάμεις δὲν εἶναι πᾶσαι ὁμόρροποι, δυνάμεθα νὰ συνθέσωμεν πρῶτον ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὴν μίαν φορὰν καὶ ἔπειτα ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὴν ἄλλην φοράν. Τέλος δὲ συνθέτομεν τὰς εὑρεθησομένας δύο μερικὰς συνισταμένας. Ἐκ τοῦ τρόπου τούτου τῆς συνθέσεως εὐνοοῦμεν ὅτι : α΄) Ἐὰν αἱ δύο μερικαὶ συνισταμέναι εἶναι ἄνισοι, ὑπάρχει τελικὴ συνισταμένη ἴση πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν δοθεισῶν δυνάμεων, παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἔχουσα φορὰν τὴν φορὰν τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὴν μεγαλυτέραν μερικὴν συνισταμένην. β΄) Ἐὰν αἱ δύο μερικαὶ συνισταμέναι εἶναι ἴσαι καὶ ἐνεργῶσιν εἰς διάφορα σημεῖα ἀποτελοῦσι ζεῦγος καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις δὲν ἔχουσι συνισταμένην. γ΄) Ἐὰν δὲ αἱ ρηθεῖσαι μερικαὶ συνισταμέναι εἶναι ἴσαι καὶ ἐνεργῶσι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ συνισταμένη τῶν δοθεισῶν δυνάμεων εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως αὗται ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.



Σχ. 18.

§ **28. Κέντρων παραλλήλων δυνάμεων.** Ἐὰν αἱ παράλληλοι δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Δ_3 ἀλλάξωσι πᾶσαι διεύθυνσιν, διατηρήσωσιν ὅμως τὴν παραλληλίαν, φοράν, ἔντασιν καὶ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῶν, τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται. Τῷ ὄντι ἡ θέσις τοῦ Γ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως ΑΒ καὶ τοῦ λόγου $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, ἅτινα δὲν μεταβάλλονται. Ὁμοίως ἡ θέσις τοῦ Κ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λόγου $\frac{\Delta_3}{\Sigma_1}$ καὶ τῆς ἀποστάσεως ΓΖ, ἅτινα δὲν μεταβάλλονται.

Ὁμοίως πειθόμεθα περὶ τούτου καὶ ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι περισσότεραι.

Ἂν ἔτι αἱ δυνάμεις λάβωσι νέας ἐντάσεις ἀναλόγους πρὸς τὰς πρώτας, ἡ θέσις τοῦ Κ μένει ἀμετάβλητος. Διότι $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{\lambda\Delta_2}{\lambda\Delta_1}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ἤτοι ἡ θέσις τοῦ Γ δὲν ἀλλάσσει. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{ΓΚ}{ΚΖ}=\frac{\lambda\Delta_3}{\lambda\Delta_1+\lambda\Delta_2}=\frac{\Delta_3}{\Delta_1+\Delta_2}=\frac{\Delta_3}{\Sigma_1}$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ θέσις τοῦ Κ εἶναι ἀμετάβλητος.

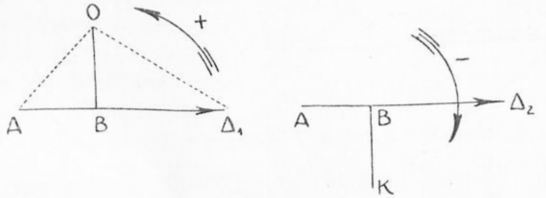
Καὶ ὅταν αἱ δυνάμεις διατηροῦσαι τὴν παραλληλίαν αὐτῶν ἀλλάξωσι κατεύθυνσιν καὶ αἱ ἐντάσεις των γίνωσιν ἀνάλογοι πρὸς τὰς πρώτας, ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν εἶναι ἀμετάθετος.

Τὸ σταθερὸν τοῦτο σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης παραλλήλων δυνάμεων καλεῖται κ έ ν τ ρ ο ν τῶν παραλλήλων τούτων δυνάμεων.

Ροπαὶ Δυνάμεων

Α΄. Ροπή δυνάμεως πρὸς σημεῖον.

§ **29. Ὁρισμὸς ροπῆς δυνάμεως πρὸς σημεῖον.** Ἔστω δύναμις $Δ_1$ ἐνεργοῦσα εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ Ο τυχὸν ἄλλο σημεῖον. Ἐὰν νοήσωμεν τὴν δύναμιν $Δ_1$ ἐνεργοῦσαν εἰς τὸν πόδα Β τῆς ἐπ' αὐτὴν καθέτου ΟΒ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ διεύθυνσιν καὶ φοράν, βλέπομεν ὅτι τείνει νὰ στρέψῃ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΒ περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν



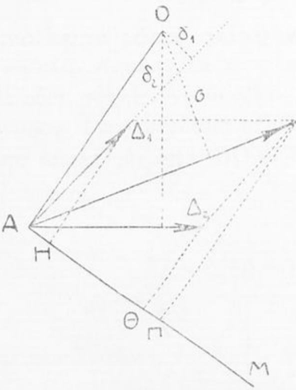
Σχ. 19.

θετικὴν φοράν. Ἐν ᾧ ἡ δύναμις $Δ_2$ τείνει νὰ στρέψῃ τὸ ΚΒ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Τὸ γινόμενον $+ (Δ_1). (ΟΒ)$ ὀνομάζομεν ***ροπὴν*** τῆς $Δ_1$ πρὸς τὸ σημεῖον Ο, τὸ δὲ γινόμενον$-(Δ_2). (ΚΒ)$ καλεῖται ***ροπὴ*** τῆς $Δ_2$ πρὸς τὸ Κ. Τὸ Ο καλεῖται κέντρον ροπῆς, ἡ δὲ ἀπόστασις ΟΒ καλεῖται ***βραχίων τῆς ροπῆς***. Κατὰ ταῦτα ***ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ροπῆς δυνάμεως πρὸς σημεῖον εἶναι γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ταύτης ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως ταύτης***, ἤτοι τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΑΟΔ_1$. Προτάσεται δὲ τοῦ γινομένου τούτου τὸ + ἢ —, καθ' ὅσον ἡ δύναμις τείνει νὰ στρέψῃ τὸν βραχίονα κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φορὰν περὶ τὸ κέντρον τῆς ροπῆς.

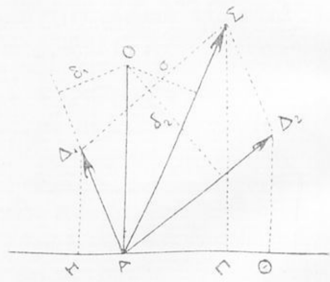
ΣΗΜ. Ἡ ροπὴ δυνάμεως πρὸς σημεῖον εἶναι μηδέν, ἂν ἡ διεύθυνσις αὐτῆς διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου ροπῆς, ἢ ἂν ἡ δύναμις μηδενισθῇ.

§ **30. Θεώρημα τοῦ** Varignon. ***Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ἀπόδειξις. Α΄. Περίπτωσις. Ἔστωσαν δύο δυνάμεις Δ_1, Δ_2 ἐνεργοῦσαι εἴς τι σημεῖον Α καὶ Ο τὸ κέντρον ῥοπῆς κείμενον ἐκτὸς τῆς γωνίας $\Delta_1 A \Delta_2$ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ταύτης. Ἐὰν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τῶν διευθύνσεων τῶν Δ_1, Δ_2, Σ παραστήσωμεν διὰ δ_1, δ_2, σ, θὰ εἶναι $P(\Delta_1) = +\Delta_1 \delta_1 = +2\ (AO\Delta_1)$, $P(\Delta_2) = +\Delta_2 . \delta_2 = +2\ (AO\Delta_2)$ καὶ $P(\Sigma) = +\Sigma . \sigma = 2\ (AO\Sigma)$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ΑΟ ὡς κοινὴν βάσιν τῶν



Σχ. 19.



Σχ. 20.

τριγώνων $AO\Delta_1$, $AO\Delta_2$, ΑΟΣ, τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς προβολὰς ΑΗ, ΑΘ, ΑΠ τῶν δυνάμεων Δ_1, Δ_2, Σ ἐπὶ τὴν ΟΜ κάθετον πρὸς τὴν ΑΟ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΠ=ΑΘ+ΘΠ καὶ ΘΠ=ΑΗ, ἕπεται ὅτι ΑΠ=ΑΘ+ΑΗ. Ἄρα (ΟΑ)(ΑΠ)=(ΟΑ)(ΑΘ)+(ΟΑ)(ΑΗ), ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι $P(\Sigma) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$. ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Περίπτωσις. (Σχ. 20) Ἐὰν τὸ κέντρον ῥοπῆς Ο κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $\Delta_1 A \Delta_2$, θὰ εἶναι $P(\Delta_1) = -\Delta_1 . \delta_1 = -2\ (AO\Delta_1)$, $P(\Delta_2) = \Delta_1 . \delta_2 = +2\ (AO\Delta_2)$ καὶ $P(\Sigma) = +\Sigma . \sigma = +2\ (AO\Sigma)$.

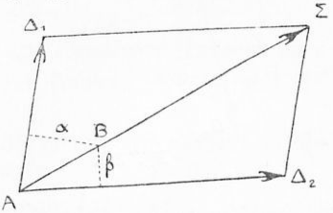
Ἐπειδὴ δὲ $2\ (AO\Delta_1) = (AO) . (AH)$, $2\ (AO\Delta_2) = (AO) . (A\Theta)$, $2\ (AO\Sigma) = (AO) . (A\Pi)$ καὶ $(A\Pi) = (A\Theta) - (\Pi\Theta) = (A\Theta) - (AH)$, ἕπεται ὅτι $2\ (AO\Sigma) = (AO)\ (A\Theta) - (AO)\ (AH) = 2\ (AO\Delta_2) - 2\ (AO\Delta_1)$ ἢ $P(\Sigma) = P(\Delta_2) + P(\Delta_1)$, ὅ. ἔ. δ.

Γ΄. Περίπτωσις (γενική). Ἔστωσαν 4 δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4

ἐνεργοῦσαι εἴς τι σημεῖον Α καὶ P_1, P_2, P_3, P_4 αἱ ῥοπαὶ αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἐὰν Σ_1 εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1, Δ_2, καὶ Σ_2 ἡ συνισταμένη τῶν Σ_1, Δ_3 καὶ Σ ἡ συνισταμένη τῶν Σ_2 καὶ Δ_4, ἡ Σ θὰ εἶναι ἡ τελικὴ συνισταμένη τῶν Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Ἐπειδή, ὡς ἀπεδείχθη προηγουμένως εἶναι $P_{(\Sigma)}=P(\Sigma_2)+P_4$, $P(\Sigma_2)=P(\Sigma_1)+P_3$, καὶ $P(\Sigma_1)=P_1+P_2$, ἕπεται ὅτι $P_{(\Sigma)}=P(\Sigma_1)+P_3+P_4=P_1+P_2+P_3+P_4$. ὅ. ἔ. δ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρας δυνάμεις ἐνεργούσας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Πόρισμα I. *Αἱ ῥοπαὶ δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον πρὸς κέντρον κείμενον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι.* Διότι $P_1+P_2=P_{(\Sigma)}=0$.

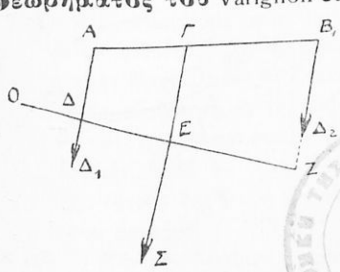
Πόρισμα II. *Αἱ ἀποστάσεις σημείου Β τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης Σ δύο δυνάμεων ἐνεργουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀπὸ τῶν διευθύνσεων τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐντάσεις αὐτῶν.* Ἐὰν κληθῶσιν α καὶ β αἱ ἀποστάσεις τοῦ Β ἀπὸ τῶν διευθύνσεων τῶν Δ_1, Δ_2 θὰ εἶναι $P(\Delta_1)=-\Delta_1\,\alpha$, $P(\Delta_2)=+\Delta_2\beta$. Ἄρα $P(\Delta_1)+P(\Delta_2)=-\Delta_1\alpha+\Delta_2\beta$. Ἐπειδὴ δὲ $P(\Delta_1)+P(\Delta_2)=P_{(\Sigma)}=0$, ἕπεται ὅτι $-\Delta_1\alpha+\Delta_2\beta=0$, ὅθεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 21.

§ 31. Ἐπέκτασις τοῦ Θεωρήματος τοῦ Varignon εἰς παραλλήλους δυνάμεις.

Α′. Ἔστωσαν Δ_1 καὶ Δ_2 (Σχ. 22) δύο παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις καὶ Ο τυχὸν κέντρον ῥοπῆς κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν. Ἐὰν καλέσωμεν δ_1, δ_2, σ τὰς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς διευθύνσεις τῶν Δ_1, Δ_2 καὶ τῆς συνισταμένης Σ αὐτῶν θὰ εἶναι $P(\Delta_1)=-\Delta_1\,\delta_1$ $P(\Delta_2)=-\Delta_1\delta_2$ καὶ $P_{(\Sigma)}=-\Sigma.\sigma$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΟΖ καὶ ΑΒ τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Gamma B}$. Καὶ ἐπειδὴ



Σχ. 22.

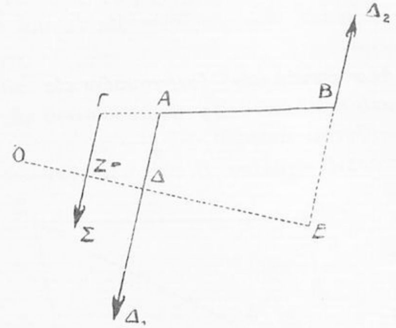
$\Delta E = \sigma - \delta_1$, $EZ = \delta_2 - \sigma$ καὶ $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\dfrac{\sigma - \delta_1}{\delta_2 - \sigma} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ὅθεν $-\delta_1\Delta_1 - \delta_2\Delta_2 = -(\Delta_1 + \Delta_2)\,\sigma = -\,\Sigma\sigma$.

Ἄρα $\qquad P(\Delta_1) + P(\Delta_2) = P(\Sigma)$.

B′. Ἐὰν αἱ δυνάμεις Δ_1, Δ_2 εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι (Σχ. 23), θὰ εἶναι $P(\Delta_1) = -\Delta_1\delta_1$, $P(\Delta_2) = +\Delta_2\delta_2$ καὶ $P(\Sigma) = -\Sigma.\sigma$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{Z\Delta}{ZE} = \dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$ καὶ $Z\Delta = \delta_1 - \sigma$, $ZE = \delta_2 - \sigma$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\delta_1 - \sigma}{\delta_2 - \sigma} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ὅθεν

$$\delta_2\Delta_2 - \delta_1\Delta_1 = \sigma\Delta_2 - \sigma\Delta_1 = \sigma(\Delta_2 - \Delta_1) = -\sigma\Sigma$$

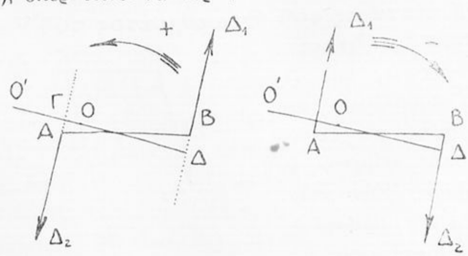
ἢ $P(\Delta_1) + P(\Delta_2) = P(\Sigma)$.



Σχ. 23.

Ἐὰν δὲ αἱ παράλληλοι δυνάμεις εἶναι περισσότεραι τῶν δύο, ἐργαζόμενοι, ὡς καὶ διὰ τὰς τεμνομένας δυνάμεις (§ 30 Γ′) βεβαιούμεθα ὅτι $P(\Sigma_1) = P(\Delta_2) + P(\Delta) + \ldots + P(\Delta_\nu)$. Ἰσχύει λοιπὸν τὸ θεώρημα τοῦ Varignon καὶ δι' ὁσασδήποτε παραλλήλους δυνάμεις.

§ **32. Ροπὴ ζεύγους.** Ἔστω ζεῦγος δυνάμεων Δ_1, Δ_2 (Σχ. 24 α′), ὅπερ τείνει νὰ στραφῇ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Θεωρήσωμεν δὲ τὰς πρὸς κέντρον O τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ροπὰς τῶν Δ_1, Δ_2.



Σχ. 24.

οὕτως εἶναι $P(\Delta_1) = +(\Delta_1\,(O\Delta)$, $P(\Delta_2) = +\Delta_2(O\Gamma)$, ὅθεν εὑρίσκομεν ὅτι $P(\Delta_1) + P(\Delta_2) = +\Delta_1(O\Gamma + O\Delta) = +\Delta_1(\Gamma\Delta)$. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὰς πρὸς τὸ κέντρον O′ ροπὰς τῶν αὐτῶν δυνάμεων, εὑρίσκομεν ὅτι $P(\Delta_1) = +(\Delta_1)\ (O'\Delta), P(\Delta_2) = -\Delta_2 (O'\Gamma)$, ὅθεν $P(\Delta_1) + P(\Delta_2) = +\Delta_1 (\Gamma\Delta)$. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως διὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ζεύγους τοῦ σχήματος (24 β΄), ὅπερ τείνει νὰ στραφῇ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν εὑρίσκομεν ὅτι $P(\Delta_1) + P(\Delta_2) = -\Delta_2\ (\Gamma\Delta)$. Εἰς πᾶσαν λοιπὸν περίστασιν ***τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων ζεύγους ἰσοῦται κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως μιᾶς τῶν δυνάμεων τούτων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν διευθύνσεων αὐτῶν, ἤτοι πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τούτων κατασκευαζομένου παραλληλογράμμου.***

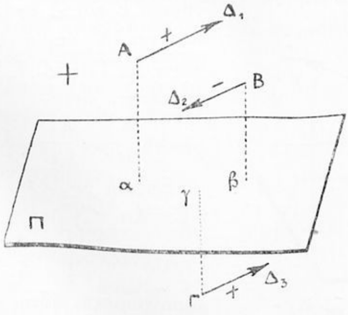
Ἐὰν πρὸ τοῦ ῥηθέντος γινομένου θέσωμεν τὸ + ἢ —, καθ᾽ ὅσον τὸ ζεῦγος τείνει νὰ στραφῇ κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν, προκύπτει ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὅν καλοῦμεν ***ῥοπὴν τοῦ ζεύγους***. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι:

α΄) ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων ζεύγους πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ζεύγους ἰσοῦται πρὸς τὴν ῥοπὴν τοῦ ζεύγους τούτου.***

β΄) ***Ἡ ῥοπὴ ζεύγους εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ κέντρον ῥοπῆς, οὐδ᾽ ἀναφέρεται εἰς τοιοῦτον κέντρον.***

β΄) Ῥοπὴ δυνάμεως πρὸς ἐπίπεδον.

§ **33. Ὁρισμοί.** Ἔστω δύναμις Δ_1 ἐνεργοῦσα εἴς τι Α καὶ τυχὸν ἐπίπεδον Π. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τὸν χῶρον εἰς δύο μέρη. Κατὰ συνθήκην τὰς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἑνὸς μέρους θεωροῦμεν θετικάς, τοῦ δὲ ἄλλου ἀρνητικάς. Οὕτως, ἂν τὴν ἀπόστασιν Αα θεωρήσωμεν ὡς θετικήν, ἡ Ββ θὰ εἶναι ἐπίσης θετική, ἐν ᾧ ἡ Γγ θὰ εἶναι ἀρνητική.



Σχ. 25.

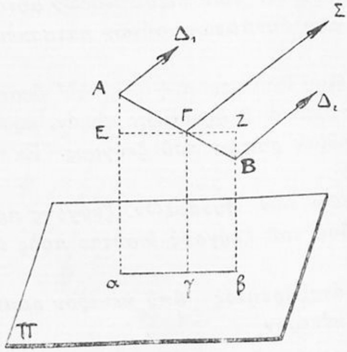
Ἐὰν τὴν δύναμιν Δ_1 θεωρήσωμεν ὡς θετικήν, πᾶσα ἄλλη ὁμόρροπος πρὸς αὐτὴν θὰ εἶναι θετική, πᾶσα δὲ ἀντίρροπος πρὸς αὐτήν, ὡς ἡ Δ_2, θὰ εἶναι ἀρνητική.

Τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπὸ ἐπιπέδου καλεῖται ῥοπὴ τῆς δυνάμεως ταύτης πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

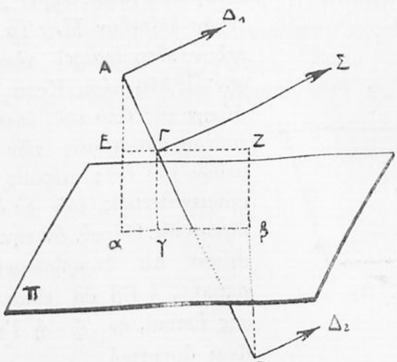
Εἶναι δὲ ἡ ροπὴ αὕτη θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ᾽ ὅσον οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι. Οὕτως ἡ ροπὴ (Αα). Δ_1 τῆς Δ_1 εἶναι θετική, ἡ ροπὴ (Ββ). Δ_2 τῆς Δ_2 εἶναι ἀρνητική· ἐπίσης ἀρνητικὴ εἶναι καὶ ἡ ροπὴ (Γγ) Δ_3 τῆς Δ_3.

Χρῆσις τῆς ροπῆς ταύτης γίνεται συνήθως διὰ παραλλήλους, δυνάμεις, δι᾽ ἃς ἀποδεικνύομεν κατωτέρω τὸ θεώρημα τοῦ Varignon.

§ **34. Θεώρημα.** *Ἡ πρὸς ἐπίπεδον ροπὴ τῆς συνισταμένης παραλλήλων δυνάμεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ροπῶν τῶν δυνάμεων τούτων.*



Σχ. 26



Σχ. 27

Ἔστωσαν Δ_1, Δ_2 δύο δυνάμεις ὁμόρροποι ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ Γ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν. Αἱ προβολαὶ α, γ, β τῶν Α, Γ, Β κεῖνται ἀπ᾽ εὐθείας αγβ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν παράλληλον πρὸς αὐτὴν τέμνουσαν τὰς προβαλλούσας Αα, Ββ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΓΖ, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι

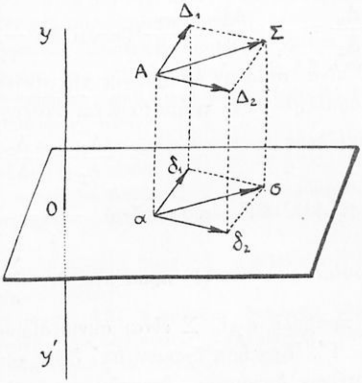
$$\frac{ΑΕ}{ΒΖ}=\frac{ΑΓ}{ΓΒ}. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ (Σχ. 26) ΑΕ=Αα — Γγ, ΒΖ = Γγ—Ββ καὶ $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{Αα-Γγ}{Γγ-Ββ}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ὅθεν $(Αα)\Delta_1+(Ββ)\Delta_2=(\Delta_1+\Delta_2)\,(Γγ)=\Sigma(Γγ)$, ἤτοι $P(A_1)+P(A_2)=P_{(\Sigma)}$. Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ (Σχ. 27) εἶναι (ΒΖ)= (Ββ) + (Γγ), ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $\frac{Αα-Γγ}{Ββ+Γγ}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ὅθεν $\Delta_1(Αα)+[-(Ββ)\Delta_2]=(Γγ)\ (\Delta_1+\Delta_2)=(Γγ)\Sigma$ ἢ

$P(\Delta_1)+P(\Delta_2)=P(\Sigma)$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντίρροποι. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὡς καὶ ἐν (§ 30 Γ′) βεβαιούμεθα ὅτι τὸ Θεώρημα ἀληθεύει δι' ὁσασδήποτε παραλλήλους δυνάμεις.

γ′. Ροπὴ δυνάμεως πρὸς ἄξονα.

§ **35. Ὁρισμός.** ***Ροπὴ δυνάμεως πρὸς ἄξονα καλεῖται ἡ ροπὴ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα πρὸς κέντρον ροπῆς τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.***

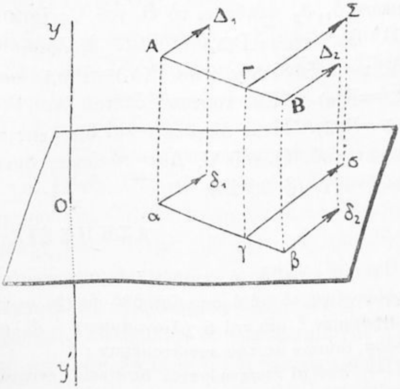


Σχ. 28.

Οὕτω τῆς δυνάμεως Δ_1 ροπὴ πρὸς τὸν ἄξονα yy′ εἶναι ἡ πρὸς κέντρον O ροπὴ τῆς δ_1, ἥτις εἶναι προβολὴ τῆς Δ_1 ἐπὶ ἐπίπεδον Π, ὅπερ τέμνει καθέτως τὸν y′y.

Ἵνα δυνηθῶμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὰς πρὸς ἄξονα ροπὰς τὸ Θεώρημα τοῦ Varignon ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὸ ἀκόλουθον Θεώρημα.

§ **36. Θεώρημα.** ***Ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ ἐπίπεδον προβολῶν δυνάμεων εἶναι προβολὴ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων τούτων.***



Σχ. 29.

Ἀπόδειξις. Α′. Ἔστωσαν πρῶτον Δ_1, Δ_2 δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ σημεῖον A, δ_1, δ_2 αἱ ἐπὶ ἐπιπέδου Π προβολαὶ αὐτῶν καὶ Σ ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1, Δ_2. Ἐὰν α εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ A, εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δ_1, δ_2 ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ α. Ἐπειδὴ δὲ τῶν παραλλήλων εὐθ. τμημάτων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμήματα παράλληλα, ἕπεται ὅτι ἡ προβολὴ $\alpha\delta_1\sigma\delta_2$ τοῦ $A\Delta_1\Sigma\Delta_2$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Εἶναι λοιπὸν συνισταμένη τῶν δ_1, δ_2 ἡ $\alpha\sigma$, ἥτις εἶναι προβολὴ τῆς $A\Sigma$. ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Ἐὰν αἱ Δ_1, Δ_2 (Σχ. 29) εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{\alpha\gamma}{\gamma\beta}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha\gamma}{\gamma\beta}=\frac{\delta_2}{\delta_1}$, ἤτοι ἡ προβολὴ γ τοῦ Γ εἶναι σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν δ_1, δ_2. Ἐπειδὴ δὲ παράλληλα εὐθ. τμήματα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολάς των, ἕπεται ὅτι

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{\Delta_2}{\delta_2}=\frac{\Sigma}{\sigma}. \qquad (1)$$

Ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου εἶναι $\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{\Delta_2}{\delta_2}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{\delta_1+\delta_2}=\frac{\Sigma}{\delta_1+\delta_2}$. Ἐκ τούτων καὶ τῶν (1) προκύπτει ὅτι $\frac{\Sigma}{\sigma}=\frac{\Sigma}{\delta_1+\delta_2}$, ὅθεν $\sigma=\delta_1+\delta_2$. Ἄρα ἡ προβολὴ σ τῆς Σ εἶναι συνισταμένη τῶν δ_1, δ_2. ὅ.ἔ.δ.

Γ΄. Ἐὰν ἤδη ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὸν τρόπον τῆς συνθέσεως περισσοτέρων δυνάμεων, ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἀληθεύει τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ διὰ δυνάμεις περισσοτέρας τῶν δύο.

§ **37. Θεώρημα τοῦ** Varignon **διὰ ῥοπὰς πρὸς ἄξονα.** Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὰς πρὸς τὸ κέντρον Ο ῥοπὰς τῶν δυνάμεων δ_1, δ_2 ἀληθεύει τὸ Θ. τοῦ Varignon, ἤτοι $P(\delta_1)+P(\delta_2)=P(\sigma)$. Ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου $P(\delta_1)$ ἰσοῦται ἐξ ὁρισμοῦ πρὸς τὴν ῥοπὴν τῆς Δ_1 πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$, ἤτοι $P(\Delta_1)=P(\delta_1)$· ὁμοίως εἶναι $P(\Delta_2)=P(\delta_2)$ καὶ $P(\Sigma)=P(\sigma)$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $P(\Delta_1)+P(\Delta_2)=P(\delta_1)+P(\delta_2)=P(\sigma)=P(\Sigma)$. Ἤτοι ἀληθεύει καὶ διὰ τὰς πρὸς ἄξονας ῥοπὰς δύο δυνάμεων τοῦ Θ. τοῦ V. Διὰ πλείονας δυνάμεις ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως καὶ ἐν (§ 30 Γ΄).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἔχουσιν ἐντάσεις 8 χιλιογράμμων ἡ μία καὶ 6 χιλιογράμμων ἡ ἄλλη. Πόσην γωνίαν σχηματίζει ἑκατέρα τούτων μὲ τὴν συνισταμένην ;

14) Ἐὰν αἱ προηγούμεναι δυνάμεις ἐνεργῶσιν ὑπὸ γωνίαν 45^0, πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν ; Τίνες δὲ αἱ γωνίαι αὐτῶν καὶ τῆς συνισταμένης ;

15) Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις $6\sqrt{2}$ χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας ἐν τῷ

αὐτῷ μετ' αὐτῆς ἐνεργούσας ἐπιπέδῳ καὶ ὧν ἑκατέρα σχηματίζει μετ' αὐτῆς γωνίαν 45°.

16) Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 10 χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ μετ' αὐτῆς ἐπιπέδῳ καὶ ἡ μὲν μία ἔχει ἔντασιν 8 χιλιογράμμων ἡ δὲ ἄλλη 6 χιλιογράμμων.

17) Εἰς σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων 3 μέτρα ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ὧν ἡ μὲν ἔχει ἔντασιν 20 χιλιογράμμων ἡ δὲ 30 χιλιογράμμων. Νὰ καθορισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

18) Δύο σημεῖα Α, καὶ Β τοῦ αὐτοῦ σώματος ἀπέχουσι 10 μέτρα. Εἰς τὸ Α ἐνεργεῖ δύναμις 24 χιλιογράμμων, εἰς ἄλλο δὲ σημεῖον τῆς ΑΒ ἀπέχον τοῦ Α 6μ. ἐνεργεῖ δύναμις 60 χιλιογράμμων παράλληλος καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν πρώτην. Νὰ καθορισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

19) Εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ἐνεργοῦσι τρεῖς δυνάμεις παράλληλοι, ὁμόρροποι καὶ ἴσαι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτῶν.

20) Εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ἐνεργοῦσι δυνάμεις 2 χιλιογγράμμων, 3 χιλιογράμμων, 4 χιλιογράμμων παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτῶν.

21) Εἰς τὰς κορυφὰς τραπεζίου ἐνεργοῦσι δυνάμεις παράλληλοι, ἴσαι καὶ ὁμόρροποι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτῶν.

22) Εἰς τὰς κορυφὰς ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ἐνεργοῦσι δυνάμεις 2 χιλ., 1 χιλ., 1 χιλ., ὧν ἡ πρώτη ἐνεργοῦσα εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτῶν.

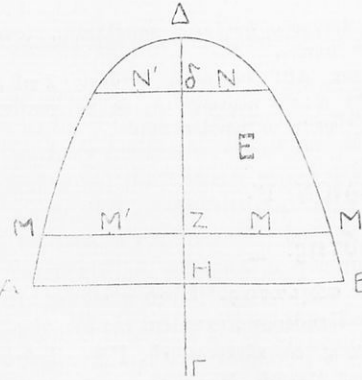
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Βαρύτης.

§ **38. Κέντρον βάρους σώματος.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἕκαστον ὑλικὸν σημεῖον ἀφιέμενον ἐλεύθερον πίπτει ἐπὶ τῆς Γῆς ἀκολουθοῦν κατεύθυνσιν καὶ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Τοῦτο δὲ συμβαίνει, διότι ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργεῖ ἑλκτικὴ δύναμις κατευθυνομένη πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν σῶμά τι, αἱ ἐπὶ τῶν μορίων αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι καὶ ἐκ τῆς Γῆς προερχόμεναι δυνάμεις διευθύνονται μὲν πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς, δύνανται ὅμως νὰ θεωρηθῶσι παράλληλοι ἕνεκα τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς Γῆς σχετικῶς πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ θεωρουμένου σώματος. Αἱ παράλληλοι αὗται δυνάμεις ἔχουσι συνισταμένην παράλληλον πρὸς αὐτάς, ἥτις λέγεται ***βάρος*** τοῦ σώματος τούτου. Τὸ σημεῖον δὲ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ταύτης καλεῖται ***κέντρον βάρους*** τοῦ σώματος τούτου. Ἐνθυμούμενοι ὅσα εἴπομεν περὶ τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων (§ 28) κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος ἔχει ὡρισμένην ἐπ' αὐτοῦ θέσιν μὴ ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σώματος τούτου ἐν σχέσει πρὸς τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου, οὐδὲ ἀλλάσσει θέσιν, ὅταν τὸ σῶμα μετατίθηται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος καὶ ἐκ τοῦ τρόπου τῆς ἐν αὐτῷ διανομῆς τῆς ὕλης αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ ὕλη τοῦ σώματος εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένη καθ᾽ ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ, ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

§ 39. Ἀρχαί, ἐφ᾽ ὧν στηρίζεται ἡ ἀναζήτησις τοῦ κέντρου βάρους ὁμοιομερῶν σωμάτων. *Α΄. Ἐὰν γραμμὴ ἢ ἐπιφάνεια ἔχῃ διάμετρον, τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω π.χ. ἐπιφάνεια Ε, ἧς ἡ ΓΔ εἶναι διάμετρος, ἤτοι γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ὡρισμένην εὐθεῖαν π.χ. ΑΒ. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας ταύτης φέρωμεν παράλληλον τῇ ΑΒ, αὕτη τέμνει τὴν διάμετρον ΓΔ εἰς σημεῖον Ζ. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης τμῆμα ΖΜ΄ ἴσον πρὸς ΖΜ, τὸ Μ΄ εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας. Τῶν εἰς τὰ σημεῖα δὲ Μ καὶ Μ΄ ἐνεργουσῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων τῆς Γῆς ἡ συνισταμένη ἐνεργεῖ εἰς τὸ Ζ. Ὁμοίως τῶν εἰς τὰ Ν καὶ Ν΄ ἐνεργουσῶν ἡ συνισταμένη ἐνεργεῖ εἰς τὸ δ. Τῶν δὲ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, δ. κ.τ.λ. τῆς ΓΔ ἐνεργουσῶν δυνάμεων ἡ συνισταμένη ἐνεργεῖ εἰς σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἐφ᾽ ἧς καὶ τὰ Ζ, δ κτλ. κεῖνται. Ἀλλ᾽ ἡ συνισταμένη τῶν τοιούτων δυνάμεων εἶναι ἡ τελικὴ συνισταμένη ὅλων τὰ εἰς τὰ σημεῖα τῆς Ε ἐνεργουσῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων τῆς Γῆς καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς, ὅπερ, ὡς εἴπομεν, κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ. ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 30.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ γραμμὴν ἔχουσαν διάμετρον.

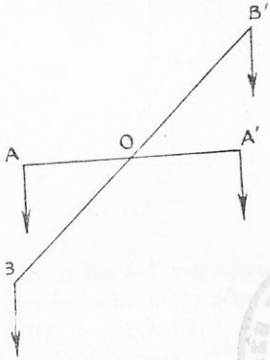
Β΄. ***Ἐὰν σῶμα ἢ ἐπιφάνεια ἔχῃ διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος ἢ τῆς ἐπιφανείας ταύτης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.***

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην.

Γ΄. *Ἐὰν σῶμα, ἢ ἐπιφάνεια, ἢ γραμμὴ ἔχῃ κέντρον συμ*

μετρίας τοῦτο εἶναι κέντρον βάρους τοῦ σώματος ἢ τῆς ἐπιφανείας ἢ τῆς γραμμῆς ταύτης.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κέντρον σώματος. Τῶν σημείων Α, Β κ. τ. λ. τοῦ σώματος τὰ συμμετρικὰ Α′, Β′, κ. τ. λ. πρὸς κέντρον Ο εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σώματος. Ἡ συνισταμένη ἄρα τῶν εἰς τὰ Α καὶ Α′ ἐνεργουσῶν δυνάμεων ἐνεργεῖ εἰς τὸ Ο· ὁμοίως εἰς τὸ Ο ἐνεργεῖ καὶ ἡ συνισταμένη τῶν εἰς τὰ Β καὶ Β′ ἐνεργουσῶν δυνάμεων καὶ οὕτω καθ᾿ ἑξῆς. Κατὰ ταῦτα αἱ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ σώματος ἐνεργοῦσαι δυνάμεις ἔχουσι μερικὰς συνισταμένας ἐνεργούσας πάσας εἰς Ο. Καὶ ἡ συνισταμένη δὲ τούτων, ἥτις εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος, ἐνεργεῖ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. ὅ. ἔ. δ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ ἐπιφάνειαν ἢ γραμμὴν ἔχουσαν κέντρον συμμετρίας.



Σχ. 31.

Γ′. ***Ἐὰν σῶμα ἢ ἐπιφάνεια ἢ γραμμὴ ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας, τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου.***

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην.

Παραδείγματα. 1ον). Κέντρον βάρους παραλληλογράμμου εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, διότι τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

2ον) Κέντρον βάρους κύκλου εἶναι τὸ γεωμ. κέντρον αὐτοῦ, διότι τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

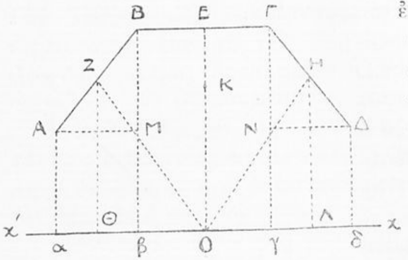
3ον Κέντρον βάρους ὁμοιομεροῦς εὐθ. τμήματος εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ.

4ον) Κέντρον βάρους κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ γεωμ. κέντρον αὐτοῦ, διότι τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

5ον) Κέντρον βάρους σφαίρας, ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γεωμ. κέντρον αὐτῶν.

§ 40. Κέντρον βάρους κανονικῆς τεθλ. γραμμῆς.

Ἔστω ΑΒΓΔ κανονικὴ τεθλασμένη γραμμή, λ τὸ μῆκος αὐτῆς, Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὴν περιφερείας καὶ x′x διάμετρος ταύτης παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΔ, ἥτις ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Δ τῆς γραμμῆς ταύτης καὶ Ε τὸ μέσον τῆς γραμμῆς ταύτης· Τὸ κέντρον τοῦ βάρους Κ τῆς γραμμῆς ταύτης κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας ΟΕ τῆς γραμμῆς ταύτης· ἔστω δὲ (ΟΚ)= χ. Τὰ βάρη τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐνεργοῦσι προφανῶς εἰς τὰ μέσα Ζ, Ε, Η. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ Θ. τοῦ Varignon διὰ τὰς ῥοπὰς αὐτῶν καὶ τῆς συνισταμένης των πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΕ εἰς τὸ Ο καὶ



Σχ. 32.

παραστήσωμεν διὰ τοῦ β τὸ βάρος εὐθ. τμήματος τῆς τεθλ. γραμμῆς ἴσου πρὸς τὴν μονάδα μήκους, εὑρίσκομεν

$$\beta.\ (AB).\ (Z\Theta)+\beta\ (B\Gamma).\ (OE)+\beta(\Gamma\Delta)\ (H\Lambda)=\beta\cdot\lambda.(OK),$$

ὅθεν $$\lambda\chi=(AB)\ (Z\Theta)+(B\Gamma)\ (OE)+(\Gamma\Delta)\ (H\Lambda). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ, τὰ δὲ τρίγωνα ΟΖΘ, ΑΒΜ εἶναι ὅμοια, ἔπεται ὅτι $\frac{AB}{OZ}=\frac{AM}{Z\Theta}$, ὅθεν $(AB)(Z\Theta)=(AM)\ (OZ)=(\alpha\beta)\ (OE)$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΗΛ, ΓΝΔ προκύπτει ὅτι

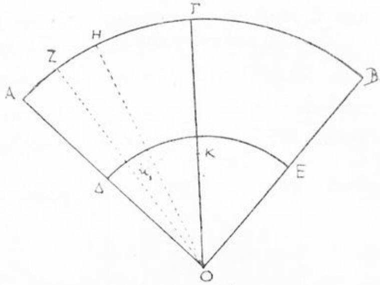
$$(\Gamma\Delta)\ (H\Lambda)=(\gamma\delta)\ (OE).$$ Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται

$$\lambda\ \chi=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta).\ (OE)=(\alpha\delta)\ (OE),$$

ὅθεν. $$\chi=\frac{(\alpha\delta).\ (OE)}{\lambda}. \qquad (2)$$

§ **41. Κέντρον βάρους κυκλικοῦ τόξου.** Ἐπειδὴ ἡ ἀκτίς, ἥτις καταλήγει εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, τὸ ζητούμενον κέντρον βάρους αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ταύτης. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὸ τόξον ὡς ὅριον κανονικῆς τεθλ. γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει τοῦ γεωμ. κέντρου Λ τῆς περιφερείας ἀπόστασιν $\chi=\frac{\alpha.\,\delta}{\mu}$, ἔνθα α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, δ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς καὶ μ τὸ μῆκος τοῦ τόξου. Διὰ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἡ ἀπόστασις αὕτη γίνεται $\frac{\alpha.\,2\alpha}{\pi\alpha}=\frac{2\alpha}{\pi}$.

§ **42. Κέντρον βάρους κυκλικοῦ τομέως.** Ἡ ἀκτὶς ΟΓ, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου τοῦ τομέως, εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τομέως καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ ταύτης. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν τὸ τόξον ΑΓΒ διῃρημένον εἰς ἐλάχιστα ἴσα μέρη, ὡς τὸ ΖΗ καὶ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, διαιρεῖται ὁ δοθεὶς κυκλικὸς τομεὺς εἰς ἀπειροελαχίστους κυκλικοὺς τομεῖς. Ἐὰν ἐξομοιώσωμεν ἕκαστον τούτων πρὸς τρίγωνον, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Ο ἀγομένης διαμέσου καὶ εἰς ἀπόστασιν Οκ $\frac{2}{3}$ ΟΑ. (Τὸ κ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ).



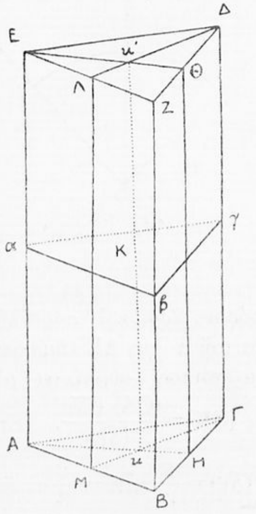
Σχ. 33.

Οὕτως ἀγόμεθα νὰ συνθέσωμεν διαφόρους ἴσας καὶ παραλλήλους δυνάμεις ἐνεργούσας εἰς διάφορα σημεῖα τοῦ τόξου ΔΕ ὁμοιομερῶς ἐπ᾽ αὐτοῦ διανεμημένα. Τὸ κέντρον ἄρα τούτων συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον Κ τοῦ τόξου ΔΕ καὶ ἑπομένως $(ΟΚ)=\frac{(ΟΔ)\,(\overline{ΔΕ})}{(\widehat{ΔΕ})}$. Ἐπειδὴ δὲ $ΟΔ=\frac{2}{3}\,(ΟΑ)=\frac{2}{3}α$, $\overline{ΔΕ}=\frac{2}{3}\overline{ΑΒ}$, $(\widehat{ΔΕ})=\frac{2}{3}\,(\widehat{ΑΒ})=\frac{2}{3}μ$, ἕπεται ὅτι $(ΟΚ)=\frac{\frac{2}{3}α.\ \frac{2}{3}(\overline{ΑΒ})}{\frac{2}{3}μ.}=\frac{2}{3}α.\ \frac{(\overline{ΑΒ})}{μ.}$, ἔνθα $(\overline{ΑΒ})$ δηλοῖ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ μ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒΓ τοῦ τομέως.

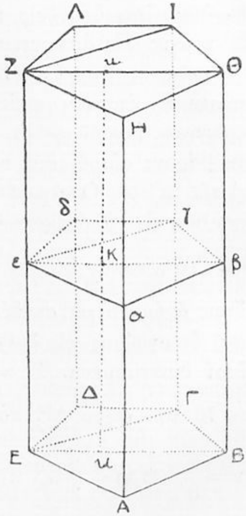
Διὰ ἡμικύκλιον ἡ προηγουμένη ἀπόστασις γίνεται $\frac{2}{3}α.\ \frac{2α}{πα}=\frac{4α}{3π}$.

§ **43. Κέντρον βάρους πρίσματος.** Α΄. Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν ΑΗ εἶναι διάμεσος τῆς βάσεως ΑΒΓ, τὸ ἐπίπεδον ΕΑΗ τέμνει τὴν ἄλλην βάσιν ΖΕΔ κατὰ τὴν διάμεσον ΕΘ, εἶναι δὲ καὶ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ πρίσματος. Ἑπομένως τὸ κέντρον βάρους τοῦ πρίσματος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΛΔΓΜ, ἂν ΓΜ, ΔΛ εἶναι διάμεσοι τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος. Κεῖται ὅθεν τὸ κέντρον βάρους ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν κκ΄, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὰ κ, κ κέντρα βάρους τῶν βάσεων. Ἐὰν δὲ φέρωμεν διὰ τοῦ μέσου α ἀκμῆς ΑΕ τομὴν αβγ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν κκ′ εἰς τὸ μέσον Κ. Ἐπειδὴ δὲ αβγ εἶναι καὶ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ πρίσματος, τὸ κέντρον βάρους ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπ᾽ αὐτοῦ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ τομὴ Κ ταύτης καὶ τῆς κκ′, ἤτοι τὸ μέσον τῆς κκ′.

Β′. Τὸ πολυγωνικὸν πρίσμα ΕΙ διαιρεῖται διὰ τῶν ἐπιπέδων ΖΕΒ, ΖΕΓ εἰς τρία τριγωνικὰ πρίσματα, ὧν τὰ κέντρα βάρους κεῖνται ἀντι-



Σχ. 34.



Σχ. 35.

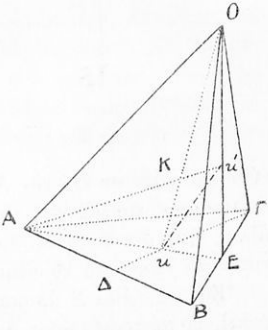
στοίχως ἐπὶ τῶν τριγώνων εαβ, εβγ εγδ, ὧν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος καὶ διχοτομεῖ τὴν πλευρὰν ΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ, εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις των· καὶ τὰ βάρη δὲ αὐτῶν ἀνάλογα ὄντα πρὸς τοὺς ὄγκους αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις των ἢ πρὸς τὰ τρίγωνα εαβ, εβγ, εγδ. Ὥστε εἰς τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων εαβ, εβγ, εγδ ἐνεργοῦσι δυνάμεις ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν. Διὰ τοῦτο τὸ κέντρον αὐτῶν ταὐτίζεται μὲ τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου αβγδε. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον τοῦτο κεῖται προφανῶς καὶ ἐπὶ τῆς κκ′, ἕπεται ὅτι κεῖται εἰς τὴν τομὴν Κ τῆς κκ′ καὶ τοῦ αβγδε, ἤτοι εἰς τὸ μέσον τῆς κκ′.

Ἄρα: ***Κέντρον βάρους παντὸς πρίσματος εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων βάρους τῶν βάσεων αὐτοῦ.***

§ **44. Κέντρον βάρους πυραμίδος.** Ἔστω ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ καὶ ΑΕ, ΓΔ δύο διάμεσοι τῆς βάσεως, ἧς κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐπίπεδα ΟΑΕ, ΟΓΔ εἶναι διαμετρικά, τὸ κέντρον βάρους Κ τῆς πυραμίδος κεῖται εἰς τὴν τομὴν Οκ αὐτῶν Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τοῦτο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Ακ′, ἔνθα κ′ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῆς ἕδρας ΟΒΓ. Εἶναι ἄρα τὸ κέντρον βάρους Κ τομὴ τῶν Οκ καὶ Ακ′. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κκ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ, τὰ τρίγωνα ΑΚΟ καὶ Κκκ′ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως $\frac{OK}{K\kappa}=\frac{OA}{\kappa\kappa'}$. Εἶναι ὅμως καὶ $\frac{OA}{\kappa\kappa'}=3$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\frac{OK}{K\kappa}=\frac{3}{1}$, ὅθεν $\frac{OK}{O\kappa}=\frac{3}{4}$.

Ἄρα: *Το κέντρον βάρους τριγωνικῆς πυραμίδος κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ κορυφὴ καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς βάσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἴσην πρὸς τά $^3/_4$ τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.*

Ἐὰν τυχοῦσαν πολυγωνικὴν πυραμίδα χωρίσωμεν εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως προηγουμένως διὰ τὰ πολυγωνικὰ πρίσματα, βεβαιούμεθα ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πυραμίδα.



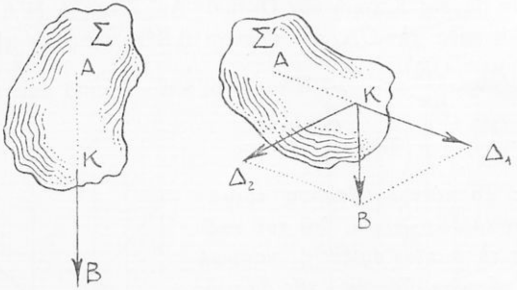
Σχ. 36

Ἰσορροπία τῶν σωμάτων.

§ **45. Ἰσορροπία σώματος στρεφομένου περὶ ἄξονα.** ***Σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα καὶ ὑποκείμενον μόνον εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν μόνον, εἰς ἣν θέσιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτοῦ ἀγομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τούτου·***

Ἀπόδειξις. Ἂν Α εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος στροφῆς καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου βάρους Κ ἀγομένης κατακορύφου, νοηθῇ δὲ τὸ βάρος μεταφερόμενον εἰς τὸ Α, τὸ ἀποτέλεσμα αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται (§ 13). Ἀλλὰ τότε ἡ δύναμις αὐτη ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος· κατ' ἀκολουθίαν τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, ὡς ἂν οὐδεμία ἐπ' αὐτοῦ ἐνήργει δύναμις.

'Εὰν ἡ διὰ τοῦ Κ ἀγομένη κατακόρυφος δὲν διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ δύναμις Β δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας Δ_1 καὶ Δ_2 κατευθυνομένας τὴν μὲν μίαν κατὰ τὴν ΑΚ, τὴν δὲ ἄλλην κατὰ δι-



Σχ. 37.

εύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ. Ἡ α' τούτων ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ σῶμα ὑφίσταται τὴν ἐνέργειαν τῆς ἄλλης, ἥτις δὲν διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος. Εἶναι λοιπὸν (§ 12 ε') ἀδύνατον νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ταύτην.

'Εὰν τὸ σῶμα Σ ἀπομακρύνωμεν ὀλίγον τῆς θέσεως, εἰς ἣν ἰσορροπεῖ, τὸ κέντρον βάρος ἀνέρχεται, ἂν δὲ ἀναλύσωμεν τὸ βάρος, ὡς προηγουμένως εἰς δύο συνιστώσας, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὴ ἐξουδετερουμένη τούτων τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Λαμβάνει δὲ πράγματι ταύτην μετά τινας ταλαντώσεις περὶ ταύτην. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἰσορροπίας καλεῖται **εὐσταθὴς ἰσορροπία.** Κατ' αὐτὴν τὸ κέντρον βάρους κεῖται ὑπὸ τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς.

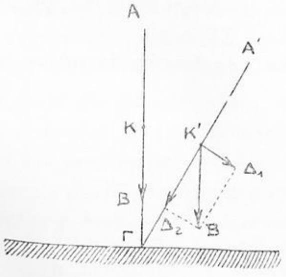
'Εὰν τὸ κέντρον κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος στροφῆς, ἀπομακρυνθῇ δὲ τὸ σῶμα τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας καὶ εἶτα ἀφεθῇ ἐλεύθερον, δὲν ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Διότι, ἂν ἀναλυθῇ πάλιν τὸ βάρος εἰς δύο συνιστώσας, ὡς προηγουμένως, ἡ μὴ ἐξουδετερουμένη ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος συνιστῶσα κινεῖ τὸ σῶμα κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ φέρει αὐτὸ εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, ἣν λαμβάνει μετά τινας ταλαντώσεις περὶ ταύτην.

Ἡ ἰσορροπία αὕτη λέγεται **ἀσταθὴς** ἰσορροπία.

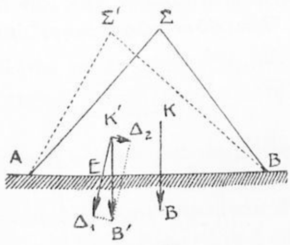
Ἐὰν ὁ ἄξων στροφῆς διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου βάρους, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ εἰς πᾶσαν θέσιν, (12 ε΄). Λέγεται δὲ ἡ ἰσορροπία αὕτη ***ἀδιάφορος*** ἰσορροπία.

§ **46. Β΄ Ἰσορροπία σωμάτων στηριζομένων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.** α΄.) Ἔστω σῶμα ΑΓ στηριζόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ Κ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Εἰς ἣν θέσιν ἡ κατακόρρυφος ΚΒ διέρχεται διὰ τοῦ Γ, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, διότι προφανῶς τὸ βάρος ΚΒ αὐτοῦ ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου. Εἶναι δὲ ἡ τοιαύτη ἰσορροπία ***ἀσταθής***. Τῷ ὄντι ἂν τὸ σῶμα στραφὲν ὀλίγον περὶ τὸ Γ λάβῃ νέαν θέσιν ΓΑ΄, τὸ βάρος Β ἀναλύεται εἰς τὰς δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2, ὧν ἡ Δ_2 καταστρέφεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ Δ_1 ἀνατρέπει τὸ σῶμα.

β΄) Ἔστω σῶμα ΑΣΒ στηριζόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ δύο σημείων Α καὶ Β καὶ Κ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Εἰς ἣν θέσιν ἡ κατακόρυφος ΚΒ διέρχεται διὰ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὅπερ ὁρίζουσι τὰ σημεῖα στηρίξεως Α καὶ Β, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, διότι τὸ βάρος ΚΒ ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου. Εἶναι



Σχ. 38.



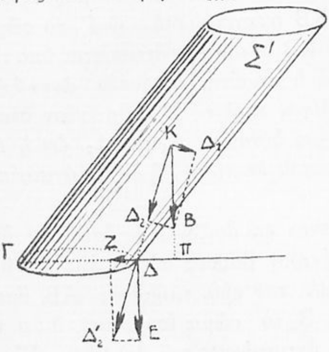
Σχ. 39.

δὲ ἡ τοιαύτη ἰσορροπία ἀσταθής. Τῷ ὄντι ἂν τὸ σῶμα μετακινηθῇ ὀλίγον τῆς θέσεως ταύτης εἰς ἄλλην Σ΄, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν Κ΄. Ἂν δὲ τὸ βάρος Κ΄Β΄ ἀναλυθῇ εἰς τὰς δυνάμεις Δ_1, Δ_2, ὧν ἡ α΄ διευθύνεται κατὰ τὴν Κ΄Ε κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ἄλλη κατὰ διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὴν Κ΄Ε, γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ μὲν Δ_1 καταστρέφεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου στηρίξεως, ἡ δὲ Δ_2 ἀνατρέπει τὸ σῶμα.

γ΄). Ἔστω σῶμα στηριζόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ

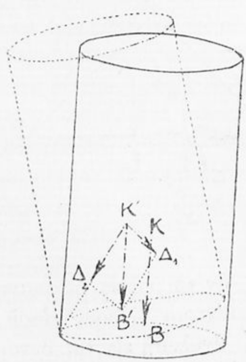
διὰ πολλῶν σημείων, ὧν τόπος ἡ βάσις ΑΓ αὐτοῦ. Εἰς ἣν θέσιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους Κ διερχομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τῆς βάσεως, τὸ βάρος ΚΒ αὐτοῦ ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ.

Ἔστω ἤδη σῶμα Σ΄, ἔχον τοιαύτην θέσιν, ὥστε (Σχ. 40) ἡ κατακόρυφος ΚΒ νὰ μὴ διέρχηται διὰ τῆς βάσεως ΓΔ αὐτοῦ. Τὸ βάρος ΚΒ αὐτοῦ ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας $Δ_1$, $Δ_2$, ὧν ἡ $Δ_2$ διευθύνεται κατὰ τὴν ΚΔ (Δ εἶναι τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ πόδα Π σημεῖον τῆς βάσεως), ἡ δὲ $Δ_1$ κατὰ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν $ΚΔ_2$. Ἡ $Δ_2$ μεταφερομένη εἰς τὸ Δ ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας Ε καὶ Ζ. Ὥστε τὸ βάρος ΚΒ ἀντικαθίσταται ὑπὸ τριῶν δυνάμεων $Δ_1$, Ε, Ζ. Τούτων ἡ Ε ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου, ἡ $Δ_1$ ἀνατρέπει τὸ σῶμα, ἡ δὲ Ζ ἀναγκάζει αὐτὸ νὰ ὀλισθήσῃ κατὰ τὴν ἀνατροπὴν πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΖΓ.

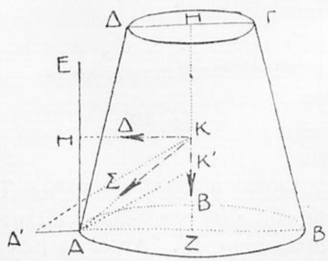


Σχ. 40.

Ἵνα ὅθεν σῶμα στηριζόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἰσορροπῇ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἀγομένη κατακόρυφος νὰ διέρχηται διὰ τῆς βάσεως, δι' ἧς τὸ σῶμα τοῦτο στηρίζεται.



Σχ. 41.



Σχ. 42.

Εἶναι δὲ ἡ ἰσορροπία αὕτη εὐσταθής. Τῷ ὄντι ἂς στρέψωμεν τὸ σῶμα Σ (Σχ. 41) περὶ τὸ Α, μέχρις οὗ τὸ Κ ἔλθῃ εἰς ἄλλην θέσιν Κ', τοιαύτην ὥστε ἡ κατακόρυφος Κ'Β' νὰ πίπτῃ πάλιν ἐπὶ τῆς βάσεως. Ἂν τὸ βάρος Κ'Β' ἀναλύσωμεν εἰς τὰς Δ_1, Δ_2, γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ Δ_2 ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπιπέδου στηρίξεως, ἡ δὲ Δ_1 ἐπαναφέρει εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τὸ σῶμα, ἂν τοῦτο ἀφεθῇ ἐλεύθερον·

Ἡ εὐστάθεια αὕτη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς βάσεως καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους ἀπ' αὐτῆς. Οὕτω, διὰ νὰ ἀνατραπῇ τὸ σῶμα ΑΒΓΔ διὰ στροφῆς περὶ τὸ Α, πρέπει ἡ ΑΚ νὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς ΕΑΚ ἢ τῆς ἴσης αὐτῇ γωνίας ΑΚΖ, διότι τότε ἡ διὰ τοῦ κέντρου βάρους διερχομένη κατακόρυφος δὲν διέρχεται διὰ τῆς βάσεως.

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ὅτι τοῦ κέντρου βάρους Κ ὄντος ἀμεταθέτου ἡ βάσις ΑΒ γίνεται μεγαλυτέρα Α'Β ἡ ΑΚΖ γίνεται Α'ΚΖ, ἤτοι μεγαλυτέρα. Ἵνα λοιπὸν ἀνατραπῇ, τὸ σῶμα, πρέπει νὰ στραφῇ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν μεγαλυτέραν ἢ πρότερον.

Ἄρα : α') ***Ἡ εὐστάθεια σώματος στηριζομένου ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ σημείων περισσοτέρων τῶν δύο εἶναι μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ βάσις εἶναι μεγαλυτέρα.***

Διὰ τοῦτο οἱ παλαισταί, οἱ ναῦται κ.τ.λ. ἀνοίγουσι τὰ σκέλη, οἱ γέροντες λαμβάνουσι ράβδον.

Ἐὰν δὲ τῆς βάσεως οὔσης ἀμεταβλήτου τὸ Κ κατέλθῃ εἰς θέσιν Κ', ἵνα τὸ σῶμα ἀνατραπῇ, πρέπει νὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν ΑΚ'Ζ, ἥτις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΚΖ.

Ἄρα : β') ***Ἡ εὐστάθεια σώματος στηριζομένου ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ σημείων περισσοτέρων τῶν δύο εἶναι μεγαλυτέρα, ὅταν τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.***

Διὰ τοῦτο τὰ ἔπιπλα, κηροπήγια κ.τ.λ. καθίστανται εὐσταθέστερα, ἂν καταβιβασθῇ τὸ κ. β. αὐτῶν διὰ προσθήκης εἰς τὴν βάσιν μολύβδου, ἄμμου κ.τ.λ.

Εἰς τὰ προηγούμενα συμπεράσματα καταλήγομεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Νοήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα ΑΒΓΔ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως Δ ἐνεργούσης εἰς τὸ Κ καὶ καθέτως ἐπὶ τὴν ΗΖ καὶ τοῦ βάρους Β ἰσορροπεῖ στηριζόμενον εἰς τὸ Α. Ἕνεκα τῆς ἰσορροπίας ταύτης ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο τούτων δυνάμεων διέρχεται διὰ τοῦ Α, διότι ἄλλως (§ 12ε') τὸ σῶμα δὲν θὰ εὑρίσκετο ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἐὰν ἤδη ἐφαρμόσωμεν τὸ Θεώρημα τοῦ Varignon πρὸς κέντρον ῥοπῆς Α, εὑρίσκομεν ὅτι $$P(\Delta)+P(B)=P(\Sigma). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $P(\Delta)=\Delta.(AH)$, $P(B)=-B(AZ)$ καὶ $P(\Sigma)=0$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Delta(AH)-B(AZ)=0$, ὅθεν

$$\Delta=\frac{B(AZ)}{(AH)}=\frac{B(AZ)}{(KZ)}=\frac{B(AB)}{2(KZ)}. \qquad (2)$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι :

α΄) ***Ἡ δύναμις Δ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν βάσιν.***

β΄) ***Ἡ δύναμις Δ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΚΖ.***

Διὰ νὰ ἀνατραπῇ λοιπὸν τὸ σῶμα πρέπει νὰ καταβληθῇ α΄) ***Δύναμις μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ βάσις εἶναι μεγαλυτέρα καὶ β΄) Δύναμις ἐπίσης μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ ἀπόστασις ΚΖ εἶναι μικροτέρα.*** Κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὐστάθεια εἶναι μεγαλυτέρα, α΄) ***Ὅταν ἡ βάσις εἶναι μεγαλυτέρα καὶ β΄) ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι μικροτέρα.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23) Νὰ εὑρεθῇ τό κέντρον βάρους ὁμοιομεροῦς περιμέτρου τριγώνου.

24) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους ὁμοιομεροῦς τριγώνου.

25) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους ὁμοιομεροῦς περιμέτρου κανονικοῦ ἡμιεξαγώνου πλευρᾶς α.

26) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τόξου 60^0.

27) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου κυκλικοῦ τομέως 60^0 καὶ ἀκτῖνος 2μ. ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ.

28) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κέντρον βάρους κυλίνδρου εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

29) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον βάρους κώνου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Δυναμική.

§ **47. Σκοπὸς τῆς Δυναμικῆς.** Δυναμικὴ καλεῖται τὸ μέρος τῆς Μηχανικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων λαμβάνον ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι παράγουσιν αὐτάς. Ἀναλυτικώτερον ἡ Δυναμικὴ λύει τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα :

α΄) ***Ἐὰν αἱ ἐπὶ σώματος ἐνεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι γνωσταί, νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, ἣν αὗται μεταδίδουσιν εἰς αὐτό.***

β') Ἐὰν εἶναι γνωστὴ ἡ κίνησις σώματος νὰ ὁρισθῶσιν αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι παράγουσιν αὐτήν.

Οἱ νομοι τῆς Δυναμικῆς στηρίζονται ἐπὶ τεσσάρων θεμελιωδῶν ἀρχῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξήχθησαν διὰ τῆς παρατηρήσεως καὶ ἐπιβεβαιοῦνται διὰ τῆς συμφωνίας τῶν ἐξ αὐτῶν ἐξαγομένων λογικῶν συμπερασμάτων πρὸς τὰς παρατηρουμένας κινήσεις. Αἱ ἀρχαὶ αὗται εἶναι αἱ ἀκόλουθοι.

§ **48. Α'. Ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας.** ***Πᾶν ὑλικὸν σημεῖον διατηρεῖ τὴν κατάστασιν τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς εὐθυγράμμου καὶ ὁμαλῆς κινήσεώς του, ἐφ᾿ ὅσον δὲν ἐνεργεῖ ἐπ᾿ αὐτοῦ δύναμίς τις, ἥτις νὰ ἀναγκάσῃ αὐτὸ νὰ ἀλλάξῃ κατάστασιν.***

Ἡ ἀρχὴ αὕτη διατυποῦται καὶ ἡ ἑξῆς.

Πᾶν ὑλικὸν σημεῖον ἀδυνατεῖ ἄνευ ἐνεργείας δυνάμεως νὰ μεταβῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας εἰς τὴν κίνησιν καὶ τἀνάπαλιν ἢ νὰ τροποποιήσῃ τὴν κίνησίν του.

Τὸ α΄ μέρος εὐκόλως παραδεχόμεθα, διότι εἶναι σύμφωνον πρὸς ὅ,τι καθ᾿ ἑκάστην προσπίπτει εἰς τὴν ἀντίληψίν μας. Τὸ β΄ κατανοοῦμεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ κίνησις σώματος ἐπὶ ἐπιφανείας διαρκεῖ περισσότερον, ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι περισσότερον λεία. Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἕπονται αἱ ἑξῆς συνέπειαι.

α') Ἐὰν ὑλικὸν σημεῖον κινῆται, ὑφίσταται ἢ ὑπέστη προηγουμένως τὴν ἐνέργειαν ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

β') Ἐὰν κινητὸν δὲν ὑφίσταται τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως, τοῦτο κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς. Καὶ ἀντιστρόφως.

γ') Ἐὰν ἡ προκαλοῦσα τὴν κίνησιν δύναμις παύσῃ ἐνεργοῦσα τὸ κινητὸν ἐξακολουθεῖ κινούμενον ἰσοταχῶς καὶ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς του εἰς τὸ σημεῖον, εἰς ὃ εὑρίσκεται τὴν στιγμήν, καθ᾿ ἣν παύει νὰ ἐνεργῇ ἡ δύναμις. Ἔχει δὲ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τὴν ταχύτητα, ἣν εἶχε τὴν στιγμήν, καθ᾿ ἣν ἔπαυσεν ἡ ἐνέργεια τῆς δυνάμεως.

ΣΗΜ. Διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας ἐξηγοῦνται διάφορα φαινόμενα.

§ **49. Β'. Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.** ***Ἐὰν ὑλικόν τι σημεῖον ἐξασκῇ ἐπὶ ἄλλου δρᾶσίν τινα, καὶ τοῦτο ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἀντίδρασιν ἴσην καὶ ἀντιθέτου φορᾶς.*** Οὕτω πιέζοντες διὰ τοῦ δακτύλου τράπεζαν αἰσθανόμεθα τὴν ἐπ᾿ αὐτοῦ ἀντίδρασιν τῆς τραπέζης.

Ἐὰν ἐκ λέμβου ἐξασκῶμεν διὰ σχοινίου ἕλξιν ἐπὶ ἀμεταθέτου σημείου τῆς ἀκτῆς, ἡ λέμβος πλησιάζει πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἂν εἵλκετο ἐκ τούτου διὰ δυνάμεως ἴσης πρὸς τὴν ἕλξιν ἡμῶν καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Ἡ δύναμις αὕτη, ἥτις φαίνεται προερχομένη ἐκ τοῦ ἑλκομένου σταθεροῦ σημείου, εἶναι ἡ ἀντίδρασις αὐτοῦ.

§ 50 Γ′. **Ἀρχὴ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν ἀποτελεσμάτων δυνάμεως ἀπὸ τῆς μηχανικῆς καταστάσεως τοῦ σημείου, ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ.** *Τὸ ἀποτέλεσμα, ὅπερ ἐπιφέρει δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς προτέρας αὐτοῦ μηχανικῆς καταστάσεως.* Εἶναι δηλ. *τὸ αὐτὸ εἴτε τὸ σῶμα εὑρίσκετο προηγουμένως ἐν ἠρεμίᾳ, εἴτε εἶχε κίνησίν τινα.*

Οὕτω λίθος ὠθούμενος ἐπὶ τοῦ καταστρώματος πλοίου λαμβάνει κίνησιν ἐν σχέσει πρὸς τὰ παρακείμενα σώματα, ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ εἴτε τὸ πλοῖον κινεῖται, εἴτε ἠρεμεῖ, εἴτε τουτέστιν ὁ λίθος ἠρέμει προηγουμένως ἢ ἐκινεῖτο μετὰ τοῦ πλοίου.

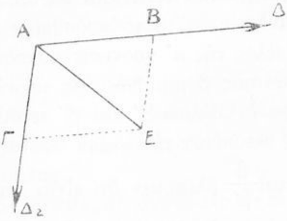
Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἕπονται αἱ ἀκόλουθοι ἀναγκαῖαι συνέπειαι.

α′) ***Σταθερὰ δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ ἐλευθέρου σημείου ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς ἠρεμίας μεταδίδει εἰς αὐτὸ κίνησιν εὐθύγραμμον καὶ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην.*** Τῷ ὄντι ἂν τὸ κινητὸν ὑφιστάμενον τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως ἀποκτᾷ εἰς τὸ τέλος τῆς α′ χρονικῆς μονάδος ταχύτητα v, ὑφιστάμενον τὴν αὐτὴν ἐνέργειαν καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς β′ χρονικῆς μονάδος θέλει ἀποκτήσει ἔτι ταχύτητα v, ὅσην δηλ. καὶ ἂν ἀνεχώρει ἐκ τῆς ἠρεμίας· ἡ ταχύτης του ἄρα εἰς τὸ τέλος τῆς β′ χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι 2v. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς γ′ χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι 3v καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Αὐξάνεται ἄρα ἡ ταχύτης αὐτοῦ καθ' ὡρισμένην ποσότητα εἰς ἑκάστην χρονικὴν μονάδα, ἤτοι ἡ κίνησις εἶναι ***ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.*** Ἐπειδὴ δὲ ἡ δύναμις ἔχει σταθερὰν διεύθυνσιν, τὸ κινητὸν κινεῖται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτης, ἤτοι ***εὐθυγράμμως.***

β′) ***Ἐὰν ὑλικὸν σημεῖον ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα ὑποβληθῇ εἰς τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως σταθερᾶς καὶ ἐχούσης διεύθυνσιν συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην.*** Τῷ ὄντι ἐὰν v_0 εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ γ ἡ ἕνεκα τῆς ἐνεργείας τῆς σταθερᾶς δυνάμεως ἀποκτωμένη ταχύτης καθ' ἑκάστην χρονικὴν μονάδα, εἰς τὸ τέλος τῆς α′ χρονικῆς μονάδος ἡ ταχύτης θὰ εἶναι $v^0 \pm \gamma$, εἰς τὸ τέλος τῆς β′ θὰ εἶναι $v^0 \pm 2\gamma$ κτλ.

γ′) ***Ἐὰν κινητὸν ἔχῃ κίνησιν εὐθύγραμμον καὶ ὁμαλῶς μεταβαλλομένην, ὑπόκειται εἰς τὴν ἐνέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ἐνεργούσης κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως ταύτης·*** Τὸ κινητὸν ὑπόκειται εἰς τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως, διότι ἄλλως θὰ ἐκινεῖτο ἰσοταχῶς ἢ θὰ ἠρέμει. Εἶναι δὲ ἡ δύναμις αὕτη σταθερά, διότι ἄλλως ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ηὔξανεν ἢ θὰ ἐλαττοῦτο μετὰ τῆς δυνάμεως. Ἐὰν τέλος ἡ δύναμις αὕτη ἐνήργει εἴς τινα στιγμὴν κατὰ διεύθυνσιν διάφορον τῆς διευθύνσεως τῆς κινήσεως, τὸ κινητὸν θὰ ἐκινεῖτο κατὰ τὴν συνισταμένην τῶν δύο τούτων κινήσεων· δὲν θὰ ἐκινεῖτο ἄρα εὐθυγράμμως.

§ **51 Δ'. Ἀρχὴ τῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ ἀποτελέσματος τῶν δυνάμεων ἐκ τοῦ συγχρονισμοῦ ἢ μὴ τούτων.** *Ἐὰν ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου ἐνεργῶσιν ἐπί τινα χρόνον πλείονες τῆς μιᾶς δυνάμεις, ἑκάστη παράγει τὸ ἀποτέλεσμα, ὅπερ θὰ παρῆγεν, ἂν ἐνήργει μόνη ἐπ᾽ αὐτοῦ καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον.*



Σχ. 43.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου καὶ εἰς χρόνον t εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ παρῆγον αὗται, ἂν διαδοχικῶς ἐνήργουν καὶ ἑκάστη εἰς χρόνον t. Οὕτως, ἂν δύναμις Δ_1 μεταφέρῃ σημεῖον Α εἰς τὸ Β, ἑτέρα δὲ δύναμις Δ_2 μεταφέρει αὐτὸ εἰς χρόνον t ἀπὸ τοῦ Β εἰς τὸ Ε, ἀμφότεραι ἐνεργοῦσαι συγχρόνως ἐπὶ χρόνον t μεταφέρουσιν αὐτὸ εἰς τὸ Ε, ἀναγκάζουσι δηλ. αὐτὸ νὰ διαγράψῃ τὴν διαγώνιον ΑΕ.

Σχέσεις δυνάμεων πρὸς τὰς ἐπιταχύνσεις.

§ **52. Θεώρημα I.** ***Δύο σταθεραὶ δυνάμεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἐπιταχύνσεις, ἃς κεχωρισμένως ἐνεργοῦσαι μεταδίδουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα.***

Ἔστωσαν Δ καὶ Δ′ δύο σταθεραὶ δυνάμεις καὶ γ, γ′ αἱ ἐπιταχύνσεις, ἃς αὗται μεταδίδουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα κεχωρισμένως ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι. Λέγω ὅτι $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δυνάμεις εἶναι σύμμετροι καὶ ἔστω δ κοινὸν μέτρον αὐτῶν, ἤτοι $\Delta=\delta.\lambda$ καὶ $\Delta'=\delta.\lambda'$, εἶναι δὲ ἡ δ δύναμις σταθερά. Ἐὰν ἡ δ μεταδίδῃ εἰς τὸ σῶμα ἐπιτάχυνσιν θ, ἡ δύναμις Δ ἢ δ.λ θὰ μεταδώσῃ εἰς αὐτὸ κατὰ τὴν προηγουμένην ἀρχὴν ἐπιτάχυνσιν $\vartheta+\vartheta+\vartheta+\ldots+\vartheta=\vartheta.\lambda$, διότι ἑκάστη τῶν δυνάμεων δ παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα εἴτε χωριστά, εἴτε μετὰ τῶν ἄλλων ἐνεργεῖ. Ὥστε $\gamma=\vartheta\lambda$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\gamma'=\vartheta\lambda'$. Κατ᾽ ἀκολουθίαν $\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\vartheta\lambda}{\vartheta\lambda'}=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\Delta}{\Delta'}$.

Ἐὰν αἱ δυνάμεις εἶναι ἀσύμμετροι, θεωροῦμεν τῆς μὲν Δ τὰς κατὰ προσέγγισιν τιμὰς Δ_1, Δ_2, Δ_3 . . . . , ὧν ὅριον εἶναι ἡ Δ καὶ καὶ τῆς Δ′ τὰς Δ_1', Δ_2' Δ_3' . . . , ὧν ὅριον εἶναι ἡ Δ′ καὶ εἶναι τοιαῦται ὥστε αἱ δυνάμεις ἑκάστου ζεύγους νὰ εἶναι σύμμετροι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Θεώρημα ἀληθεύει διὰ τὰς δυνάμεις ἑκάστου ζεύγους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὰ ὅρια αὐτῶν Δ καὶ Δ′.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ πειραματικῶς διὰ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood, ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν Β τὸ βάρος ἑκάστου τῶν κυλίνδρων καὶ β τὸ πρόσθετον βάρος. Μετροῦντες τὴν ταχύτητα εἰς τὸ τέλος τῆς α′ χρονικῆς μονάδος εὑρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, ἣν ἡ δύναμις β μεταδίδει εἰς τὸ σύστημα $2B+\beta$. Ἤδη ἀλλάσσομεν τὰ βάρη δι᾽ ἄλλων Β′ καὶ β′ τοιούτων ὥστε νὰ εἶναι $2B'+\beta'=2B+\beta$ καὶ μετροῦμεν τὴν νέαν ἐπιτάχυνσιν γ′. Συγκρίνοντες τοὺς λόγους $\frac{\gamma}{\gamma'}$ καὶ $\frac{\beta}{\beta'}$ βλέπομεν ὅτι εἶναι ἴσοι. Ἄρα αἱ δυνάμεις β καὶ β′ μεταδίδουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα (διότι $2B+\beta=2B'+\beta'$) ἐπιταχύνσεις ἀναλόγους πρὸς τὰς δυνάμεις ταύτας.

Πόρισμα. ***Αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἐνεργοῦσαι σταθεραὶ δυνάμεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐπιταχύνσεις, ἃς μεταδίδουσιν εἰς αὐτό.***

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, $\frac{\Delta}{\Delta''}=\frac{\gamma}{\gamma''}$, $\frac{\Delta}{\Delta'''}=\frac{\gamma}{\gamma'''}$ κτλ. Ἄρα $\frac{\Delta}{\gamma}=\frac{\Delta'}{\gamma'}=\frac{\Delta''}{\gamma''}=\frac{\Delta'''}{\gamma'''}$ κ.τ.λ.

§ **53. Μᾶζα σώματος.** *Ὁ λόγος δυνάμεως πρὸς τὴν **ἐπιτάχυνσιν**, ἣν αὕτη **μεταδίδει** εἴς τι σῶμα, **καλεῖται** μᾶζα **τοῦ σώματος τούτου**.*

Ὥστε $\frac{\Delta}{\gamma}=\mu$, ὅθεν $\Delta=\mu\gamma$. (1)

Ἐὰν κληθῇ Β τὸ βάρος σώματος καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις, ἣν μεταδίδει εἰς αὐτὸ ἡ βαρύτης, θὰ εἶναι $\frac{B}{g}=\mu$, ὅθεν $B=g\mu$ καὶ $\mu=\frac{B}{g}$.

Ἐὰν $\Delta=1$ καὶ $\gamma=1$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\mu=1$, ἤτοι:

Μονὰς μάζης λαμβάνεται ἡ μᾶζα, ἐφ' ἧς ἐνεργοῦσα ἡ μονὰς τῶν δυνάμεων μεταδίδει αὐτῇ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μάζης τὸ γράμμον, δηλ. τὴν μᾶζαν ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ 4°Κ, ὡς μονάδα δὲ ἐπιταχύνσεως τὸν δάκτυλον, ἡ ἀντίστοιχος μονὰς τῶν δυνάμεων καλεῖται dyne. Κατὰ ταῦτα: dyne *εἶναι ἡ δύναμις. ἥτις ἐνεργοῦσα ἐπὶ μάζης ἑνὸς γράμμου μεταδίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν ἑνὸς δακτύλου.*

Ἡ δυναμις dyne εἶναι πολὺ μικρά. Οὕτως ἐν Παρισίοις βάρος ἑνὸς γραμμαρίου ἔχει 980,99 dynes (περίπου 981 dyn.), ἤτοι $1 \text{ dyne} = \frac{1}{981}$ γραμμαρίου. Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, δι' ὧν ἐκφράζονται εἰς dynes αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων, μεταχειρίζονται ἑτέραν μονάδα, τὴν mega-dyne, ἥτις περιέχει 1000000 dynes. Κατὰ ταῦτα βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου ἰσοδυναμεῖ πρὸς δύναμιν 980990 dynes ἢ 0,98099 mega-dynes.

Κατὰ ταῦτα βάρος Βγρμ. ἰσοδυναμεῖ πρὸς Bg dynes. ἡ δὲ ἀνωτέρω ἰσότης (1) γίνεται $Bg = \mu g$, ὅθεν $B = \mu$. Ἄρα: *Ὁ ἀριθμός, ὅστις δηλοῖ εἰς γραμμάρια τὸ βάρος τοῦ σώματος, δηλοῖ εἰς γράμμα καὶ τὴν μᾶζαν τοῦ αὐτοῦ σώματος.*

§ **54. Θεώρημα ΙΙ.** *Δύο σταθεραὶ δυνάμεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν μαζῶν, εἰς ἃς ἐνεργοῦσιν, ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἐπιταχύνσεις, ἃς μεταδίδουσιν εἰς τὰς μάζας ταύτας.*

Τῷ ὄντι ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\Delta = \mu\gamma$, $\Delta' = \mu'\gamma'$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\mu\gamma}{\mu'\gamma'}. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα. *Αἱ ἐπιταχύνσεις, ἃς δύναμις σταθερὰ μεταδίδει εἰς δύο διαφόρους μάζας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μαζῶν τούτων.*

Ἂν $\Delta = \Delta'$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $1 = \frac{\mu\gamma}{\mu'\gamma'}$, ὅθεν $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\gamma}{\gamma'}$.

Νόμοι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων.

§ **55. Α΄ Νόμος.** *Πάντα τὰ σώματα πίπτουσιν ἐν τῷ κενῷ μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος.*

Τὸν νόμον τοῦτον συνεπέρανεν ὁ Γαλλιλαῖος ἀφήνων νὰ πίπτωσιν ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ κεκλιμένου πύργου τῆς Πίζης σφαίρας διαφόρου ὕλης. Ἀπέδειξε δὲ πειραματικῶς αὐτὸν τὸ πρῶτον ὁ Stevin θέσας ἐπὶ δίσκου σώματα διαφόρου ὕλης καὶ μάζης ἀφήσας δὲ τὸν δίσκον νὰ πέσῃ ὁριζοντίως παρετήρησεν ὅτι τὰ ἐπ' αὐτοῦ σώματα ἔφθασαν συγχρόνως εἰς τὸ ἔδαφος. Τὸ πείραμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν ἐν σμικρῷ καὶ προχείρως κρατοῦντες μεταλλικὸν νόμισμα ὁριζοντίως καὶ θέτοντες ἐπ' αὐτοῦ χάρτινον κύκλον ἰσομεγέθη. Ἐὰν ἀφήσωμεν τὸ νόμισμα νὰ πέσῃ, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο καὶ ὁ χάρτινος κύκλος φθάνουσι συγχρόνως εἰς τὸ ἔδαφος. Βραδύτερον ὁ Νεύτων ἀπέδειξε τὸν νόμον τοῦτον διὰ τοῦ γνωστοῦ σωλῆνος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφήρεσε τὸν ἀέρα.

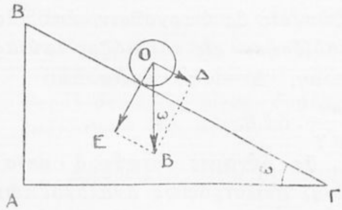
Ἐν τῷ ἀέρι τὰ σώματα πίπτουσιν μὲ διαφόρους ταχύτητας, διότι εἰς τὴν πτῶσιν αὐτῶν ἀνθίσταται ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ, ὅστις ἐπιβραδύνει περισσότερον τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουσι ὑπὸ μεγάλην ἔκτασιν μικρὰν μᾶζαν.

§ 56. Β'. Νόμος τῶν διαστημάτων. ***Τὰ διανυόμενα διαστήματα ὑπὸ σώματος πίπτοντος ἐν τῷ κενῷ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων, καθ' οὓς διανύονται.***

Τὸν νόμον τοῦτον ἀπέδειξεν ὁ Γαλλιλαῖος διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, δι' οὗ κατορθοῦται νὰ ἐλαττοῦται ἡ ταχύτης τοῦ πίπτοντος σώματος χωρὶς νὰ παύσωσιν ἰσχύοντες οἱ κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν νόμοι.

Πράγματι ἂν τὸ βάρος Β τοῦ κατερχομένου σώματος ἀναλύσωμεν εἰς τὰς συνιστώσας Δ καὶ Ε, βλέπομεν ὅτι ἡ μὲν Ε πιέζουσα καθέτως τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καταστρέφεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως αὐτοῦ, ἡ δὲ Δ κινεῖ τὸ σῶμα κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΟΒΔ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, εἶναι $\frac{\Delta}{B}=\frac{AB}{B\Gamma}=$ ἡμ ω

ὅθεν $\Delta=B.$ ἡμ ω (1)



Σχ. 44.

Ἐπειδὴ ἡμω<1, ἕπεται ὅτι $\Delta<B$, ἤτοι ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι μέρος τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Ἐὰν δὲ μ εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σωματος, g ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν καὶ γ ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου κίνησιν, θὰ εἶναι (§ 52) $\frac{\gamma}{g}=\frac{\Delta}{B}=$ ἡμω, ὅθεν

$$\gamma=g \text{ ἡμω} \qquad (2)$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $\gamma<g$, ἤτοι ἡ κίνησις εἶναι βραδυτέρα ἢ κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν. Ἕνεκα δὲ τῆς βραδύτητος τῆς κινήσεως κατορθοῦται ἡ μέτρησις τῶν διανυομένων διαστημάτων κατὰ τὰς διαφόρους μονάδας τοῦ χρόνου· οὕτω δὲ ἐπιβεβαιοῦται ὅτι, ἂν τῆς κλίσεως

ούσης ω τὸ σῶμα εἰς τὴν πρώτην μονάδα τοῦ χρόνου διανύῃ διάστημα δ, εἰς τὰς δύο πρώτας μονάδας τοῦ χρόνου διανύει 4δ, εἰς τὰς τρεῖς διανύει 9δ κ.τ.λ. Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως αὐξάνοντες βαθμηδὸν τὴν κλίσιν, βεβαιούμεθα ὅτι ἑκάστοτε διατηρεῖται ἡ αὐτὴ μεταξὺ τῶν διανυομένων διαστημάτων σχέσις. Συμπεραίνομεν ὅθεν ὅτι κατ᾽ ἀναλογίαν θὰ ἰσχύῃ αὕτη καὶ ὅταν ω=90°, ἤτοι καὶ κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν.

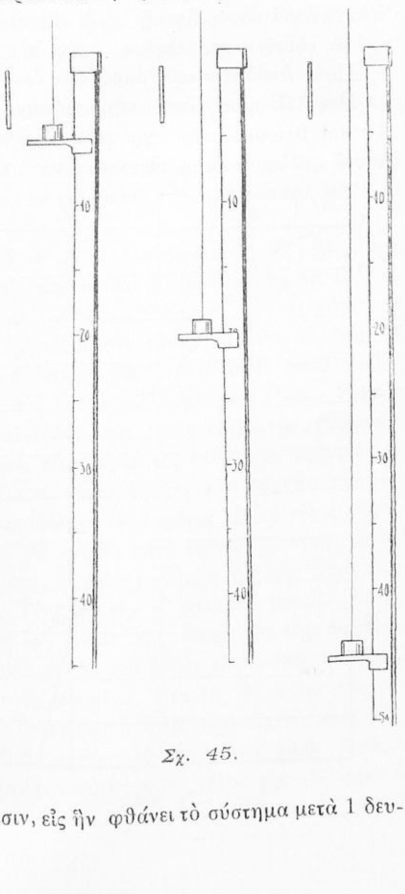
Μηχανή τοῦ Atwood. Ἐπιβράδυνσιν τῆς κινήσεως κατὰ τὴν κατακόρυφον πτῶσιν ἐπιτυγχάνομεν διὰ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἧς τὴν περιγραφὴν παραλείπομεν, διότι ὅλαι αἱ στοιχειώδεις Φυσικαὶ περιέχουσιν αὐτήν. Πράγματι τὸ πρόσθετον βάρος β προκαλεῖ τὴν κίνησιν μάζης 2Μ+μ καὶ μεταδίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν γ. Ἡ αὐτὴ δύναμις β κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν μεταδίδει εἰς μᾶζαν μ ἐπιτάχυνσιν g. Ἄρα (§ 54 Π) εἶναι

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{\mu}{2M+\mu},$$

ὅθεν $\gamma=g.\frac{\mu}{2M+\mu}$. Ἐπειδὴ δὲ $\mu=\frac{\beta}{g}$ καὶ $M=\frac{B}{g}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\gamma=g.\frac{\beta}{2B+\beta} \qquad (3)$$

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι $\beta<2B+\beta$ συμπεραίνομεν ὅτι $\gamma<g$, ἤτοι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι μικροτέρα τῆς κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἀποδείξωμεν διὰ τῆς μηχανῆς ταύτης τὸν νόμον τῶν διαστημάτων. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.



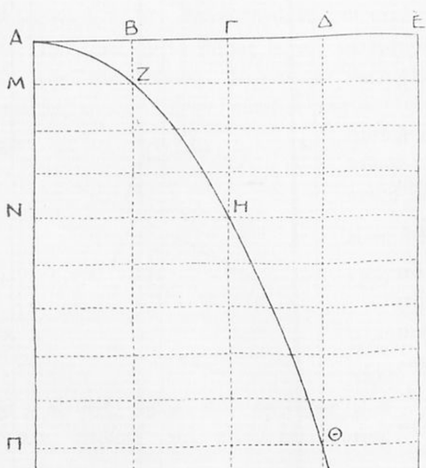
Σχ. 45.

Τοποθετοῦμεν τὸ πρόσθετον βάρος μετὰ τοῦ κυλίνδρου εἰς τὸ 0 τῆς κλίμακος καὶ μετὰ δοκιμὰς εὑρίσκομεν τὴν διαίρεσιν, εἰς ἣν φθάνει τὸ σύστημα μετὰ 1 δευτερόλεπτον. Εἶτα θέτομεν τὸν πλήρη δίσκον εἰς τετραπλασίαν ἐννεαπλασίαν κ.τ.λ. ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ O καὶ παρατηροῦμεν ὅτι φθάνει εἰς αὐτὸν τὸ σύστημα μετὰ 2, 3 κτλ. δευτερόλεπτα.

Μηχανὴ τοῦ Morin. Κύλινδρος κατακόρυφος ἐξ ἐλαφροῦ ξύλου λαμβάνει διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ ὁμαλὴν περιστροφικὴν κίνησιν περὶ τὸν ἄξονά του. Ἔμπροσθεν τοῦ κυλίνδρου τούτου κινεῖται κατακορύφως κυλινδροκωνικὸν βάρος Μ φέρον ὁριζόντιον γραφίδα ἁπτομένην τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ὁ κύλινδρος στρέφηται, τὸ δὲ βάρος Μ ἠρεμεῖ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γραφὶς γράφει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου περιφέρειαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν δὲ ὁ κύλινδρος ἠρεμῇ, τὸ δὲ βάρος Μ κατέρχηται, ἡ γραφὶς αὐτοῦ γράφει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ νόμου τῶν διαστημάτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Περιβάλλομεν ἅπαξ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν διὰ φύλλου χάρτου καὶ θέτομεν τὴν γραφίδα εἰς ἐπαφὴν μὲ ὡρισμένον σημεῖον Α τοῦ φύλλου τούτου. Θέτομεν ἔπειτα τὸν κύλινδρον εἰς ὁμαλὴν περιστροφικὴν κίνησιν ἐπὶ ἐλάχιστον χρόνου (π. χ. 0,1 τοῦ δευτερολέπτου), τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα χρόνου, μεθ' ὃ ἀναπτύσσομεν τὸ φύλλον καὶ προεκτείνοντες τὴν χαραχθεῖσαν ἐπ' αὐτοῦ γραμμὴν ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς διαδοχικὰ τμήματα ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ κτλ. ἴσα πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς γραφίδος γραφὲν ΑΒ. Γράφομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ φύλλου καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΕ ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε κτλ. καὶ περιτυλίσσομεν πάλιν, ὡς προηγουμένως περὶ τὸν κύλινδρον. Φέρομεν δὲ τὴν γραφίδα εἰς τὴν θέ-



Σχ. 46.

σιν Α καὶ τὴν αὐτὴν στιγμὴν θέτομεν τὸν κύλινδρον εἰς ὁμαλὴν περιστροφικὴν κίνησιν καὶ ἀφίνομεν τὸ βάρος Μ ἐλεύθερον. Μετὰ πάροδον χρονικῶν τινων μονάδων σταματῶμεν τὸν κύλινδρον καὶ ἀναπτύσσοντες τὸ φύλλον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραφὶς ἔγραψεν ἐπ' αὐτοῦ καμπύλην ΑΖΗΘ. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῆς περιστροφῆς τοῦ κυλίνδρου εἰς 1, 2, 3 κ.τ.λ. χρονικὰς μονάδας ἡ γραφὶς εὑρίσκεται εἰς τὰς θέσεις Β, Γ, Δ κ.τ.λ. ἕνεκα δὲ τῶν δύο κινήσεων εὑρίσκεται εἰς τὰς θέσεις Ζ, Η, Θ κ.τ.λ. ἕπεται ὅτι ἕνεκα τῆς πτώσεως μόνης ἡ πίπτουσα γραφὶς διανύει κατὰ τὴν α' μονάδα διάστημα ἴσον πρὸς ΒΖ, κατὰ τὰς δύο πρώτας ἴσον πρὸς ΓΗ, κατὰ τὰς τρεῖς πρώτας ἴσον πρὸς ΔΘ κ.τ.λ. Συγκρίνοντες ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι (ΓΗ)=4 (ΒΖ), (ΔΘ)=9 (ΒΖ) κ.τ.λ. Αἱ σχέσεις αὗται δεικνύουσι τὴν ἀλήθειαν τοῦ νόμου τῶν διαστημάτων.

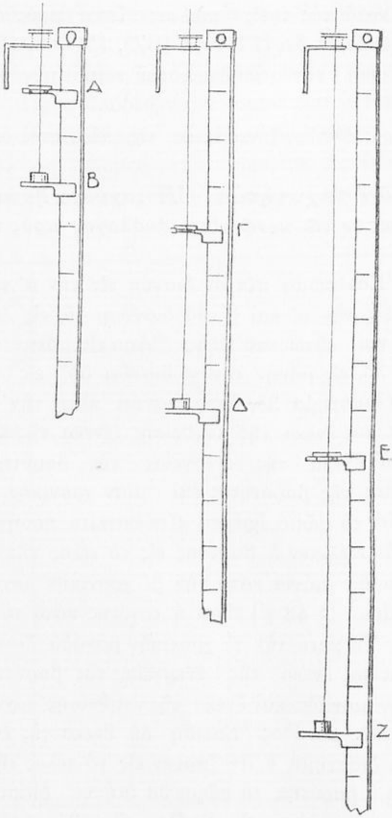
ΣΗΜ. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λογίζεται ἕνεκα τῆς ἐλαχίστης διαρκείας τῆς κινήσεως.

§ **57. Γ' Νόμος τῶν ταχυτήτων.** ***Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως ἐν τῷ κενῷ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον τῆς πτώσεως.***

Θεωρητικὴ ἀπόδειξις. Ἐὰν σῶμα πῖπτον διανύῃ εἰς τὴν α' χρονικὴν μονάδα διάστημα δ, εἰς τὴν α' καὶ β' θὰ διανύσῃ 4δ, εἰς τὴν α', β' καὶ γ' θὰ διανύσῃ 9δ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄρα εἰς μόνην τὴν β' χρονικὴν μονάδα διανύει 3δ, εἰς μόνην τὴν γ' διανύει 5δ, εἰς τὴν δ' μόνην 7δ κ.τ.λ. Ἀλλὰ τὸ διάστημα 3δ, ὅπερ διανύει κατὰ τὴν β' χρονικὴν μονάδα, τὸ διανύει καὶ ἕνεκα τῆς κτηθείσης (ἕνεκα τῆς προτέρας κινήσεως) ταχύτητος καὶ ἕνεκα τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος ἐπὶ μίαν χρονικὴν μονάδα διανύει διάστημα δ, εἴτε τὸ σῶμα ἠρέμει, εἴτε ἐκινεῖτο προηγουμένως (§ 50), ἕπεται ὅτι, ἂν ἐξέλιπεν ἡ βαρύτης εἰς τὸ τέλος τῆς α' χρονικῆς μονάδος, τὸ σῶμα θὰ διήνυε κατὰ τὴν β' χρονικὴν μονάδα διάστημα 3δ—δ=2δ· τόση ἄρα (§ 48 γ') εἶναι ἡ ταχύτης κατὰ τὸ τέλος τῆς α' χρονικῆς μονάδος. Τὸ κατὰ τὴν γ' χρονικὴν μονάδα διανυόμενον διάστημα 5δ διανύεται καὶ ἕνεκα τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος κατὰ τὴν γ' ταύτην χρονικὴν μονάδα καὶ ἕνεκα τῆς κτηθείσης ταχύτητος εἰς τὸ τέλος τῆς β' χρονικῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος διανύει διάστημα δ, ἂν ἔπαυεν εἰς τὸ τέλος τῆς β' χρονικῆς μονάδος νὰ ἐνεργῇ ἡ βαρύτης, τὸ σῶμα θὰ διήνυε διάστημα 5δ—δ=4δ. Τόση ἄρα εἶναι ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τῆς β' χρονικῆς μονάδος. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς γ' χρονικῆς μονάδος ἡ ταχύτης εἶναι 6δ, εἰς τὸ τέλος τῆς δ΄ εἶναι 8δ κ.τ.λ. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν 2δ=τ, ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τῆς α΄, β΄, γ΄, δ΄ κ.τ.λ. χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι ἀντιστοίχως τ, 2τ, 3τ, 4τ κ.τ.λ., ἤτοι εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον τῆς πτώσεως. ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς α΄ χρονικῆς μονάδος ἡ ταχύτης εἶναι διπλασία τοῦ διανυθέντος διαστήματος κατὰ τὴν α΄ χρονικὴν μονάδα.

Πειραματικὴ ἀπόδειξις διὰ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν διαίρεσιν λ εἰς ἣν φθάνει τὸ σύστημα εἰς τὸ τέλος τῆς α΄ χρονικῆς μονάδος. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην (Α) θέτομεν τὸν δακτύλιον, τὸν δὲ πλήρη δίσκον θέτομεν εἰς τὴν διαίρεσιν 3λ (Β) καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος φθάνει εἰς τοῦτον εἰς τὸ τέλος τῆς β΄ χρονικῆς μονάδος. Ἄρα κατὰ τὴν β΄ χρονικὴν μονάδα διήνυσεν ἄνευ τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος διάστημα (ΑΒ)= 2 λ. Ἡ ταχύτης λοιπὸν εἰς τὸ τέλος τῆς α΄ χρονικῆς μονάδος εἶναι 2 λ.



Σϐ. 47.

Θέτομεν ἔπειτα τὸν δακτύλιον εἰς τὴν διαίρεσιν 4 λ. (Γ), εἰς ἣν φθάνει τὸ σύστημα εἰς τὸ τέλος τῆς β΄ χρονικῆς μονάδος, τὸν δὲ πλήρη δίσκον εἰς τὴν διαίρεσιν 8λ (Δ) Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος φθάνει εἰς τὸ Δ εἰς τὸ τέλος τῆς γ΄ χρονικῆς μονάδος· ἤτοι διανύει κατὰ τὴν γ΄ χρονικὴν μονάδα ἄνευ τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος διάστημα ΓΔ=4λ. Τόση ἄρα εἶναι ἡ ταχύνης εἰς τὸ τέλος τῆς β΄ χρονικῆς μονάδος. Θέτομεν πάλιν τὸν δακτύλιον εἰς τὴν διαίρεσιν 9λ (Ε), εἰς ἣν φθάνει τὸ σύστημα εἰς τὸ τέλος τῆς γ΄ χρονικῆς μονάδος, τὸν δὲ πλήρη δίσκον εἰς τὴν διαίρεσιν 15λ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος φθάνει ἐκεῖ εἰς τὸ τέλος τῆς δ΄ χρονικῆς μονάδος.

Διανύει ὅθεν κατὰ τὴν δ΄ χρονικὴν μονάδα διάστημα (ΕΖ)=6λ. Τόση ἄρα εἶναι ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τῆς γ΄ χρονικῆς μονάδος. Καταλήγομεν οὕτως εἰς τὰ αὐτὰ καὶ προηγουμένως συμπεράσματα.

§ **58. Τύποι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων.** Ἐκ τῶν προηγουμένων νόμων ἕπεται ὅτι ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων ἐν τῷ κενῷ εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἡ δὲ βαρύτης εἶναι δύναμις σταθερὰ (§ 50 γ΄). Κατ᾿ ἀκολουθίαν ἰσχύουσι δι᾿ αὐτὴν οἱ τύποι τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως (§ 5), ἤτοι $v=gt$, $\delta=\frac{1}{2}gt^2$, $v=\sqrt{2g\delta}$ (1) ἂν τὸ πῖπτον σῶμα ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας. Ἂν δὲ τοῦτο ὠθεῖται πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0, ἀληθεύουσιν οἱ τύποι

$$v=v_0+gt,\quad \delta=v_0t+\frac{1}{2}gt^2,\quad v=\sqrt{v_0^2+2g\delta}. \qquad (2)$$

Ἐὰν τέλος τὸ σῶμα ῥίπτηται πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0, ἡ βαρύτης ἐνεργεῖ ἀντιθέτως πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα καὶ ὡς δύναμις σταθερὰ μεταδίδει εἰς τὸ σῶμα κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνουμένην. Ἀληθεύουσιν ἄρα αἱ ἰσότητες

$$v=v_0-gt,\qquad \delta=v_0t-\frac{1}{2}gt^2,\qquad v=\sqrt{v_0^2-2g\delta}. \qquad (3)$$

§ **59. Διάρκεια ἀνόδου καὶ καθόδου κινητοῦ.** Σῶμα ὠθούμενον πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως παύει ἀνερχόμενον τὴν στιγμήν, καθ᾿ ἣν ἡ ταχύτης του γείνῃ μηδὲν ἤτοι μετὰ πάροδον χρόνου t δι᾿ ὃν εἶναι

$$v_0-gt=0,\quad \text{ὅθεν}\quad t=\frac{v_0}{g}. \qquad (1)$$

Τὸ δὲ ὕψος εἰς ὃ ἀνέρχεται εἶναι $\delta=v_0\frac{v_0}{g}-\frac{1}{2}g.\frac{v_0^2}{g^2}$ ἢ $\delta=\frac{v_0^2}{2g}$ (2)

Ἵνα δὲ ἐκ τοῦ ὕψους τούτου κατέλθῃ χρειάζεται χρόνον t', δι᾿ ὃν εἶναι $\frac{v_0^2}{2g}=\frac{1}{2}gt'^2$, ὅθεν $t'^2=\frac{v_0^2}{g^2}$ καὶ $t'=\frac{v_0}{g}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $t=t'$. Ἤτοι: *Ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου κινητοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸν τῆς καθόδου εἰς τὸ σημεῖον της ἀναχωρήσεως.*

§ **60. Ταχύτης κινητοῦ ἀνερχομένου ἢ κατερχομένου εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς τροχιᾶς.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κινητὸν ἀνέρχεται κατακορύφως συνεπείᾳ ἀρχικῆς ταχύτητος v_0 καὶ ὅτι μετὰ χρόνον $\lambda < \frac{v_0}{g}$ φθάνει εἴς τι σημεῖον Β. Ἡ εἰς αὐτὸ ταχύτης εἶναι $v = v_0 - \lambda g$, τὸ δὲ διανυθὲν διάστημα ΑΒ εἶναι $v_0\lambda - \frac{1}{2}g\lambda^2$. Κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ διάστημα ΒΓ εἶναι $\frac{v_0^2}{2g} - v_0\lambda + \frac{1}{2}g\lambda^2$. Τὸ κινητὸν φθάσαν εἰς τὸ Γ ἄρχεται κατερχόμενον καὶ εἰς τὸ Β ἔχει ταχύτητα v', ἣν ὑπολογίζομεν κατὰ τὸν τύπον

$$v = \sqrt{2g\delta}, \text{ ἤτοι: } v' = \sqrt{2g\left(\frac{v_0^2}{2g} - v_0\lambda + \frac{1}{2}g\lambda^2\right)} =$$

$$\sqrt{v_0^2 - 2gv_0\lambda + g^2\lambda^2} = \sqrt{(v_0 - \lambda g)^2} = v_0 - \lambda g.$$ Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $v = v_0 - \lambda g$, ἕπεται ὅτι $v = v'$. Ἄρα: ***Κινητὸν ἀνερχόμενον ἐλευθέρως καὶ κατακορύφως ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του ταχύτητα ἴσην μὲ ἐκείνην, ἣν ἔχει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅταν κατέρχηται.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30) Πόση δύναμις μεταδίδει εἰς μᾶζαν 8 γράμμων ἐπιτάχυνσιν 1 μέτρου κατὰ δευτερόλεπτον ;

31) Πόσην δύναμιν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς μᾶζαν 4 κιλογγράμμων, ὅπως ἀναγκάσωμεν αὐτὴν ἀπὸ τῆς ἠρεμίας νὰ διανύσῃ 10 μέτρα εἰς ἓν δευτερόλεπτον ;

32) Μᾶζα 49 γράμμων διανύει διάστημα $\delta = (100t^2 + 10t + 1)$ δακτύλων. Πόση ἡ ἐπ᾽ αὐτῆς ἐνεργοῦσα δύναμις ;

33) Ἀεροπόρος ρίπτει πρὸς τὴν Γῆν βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 40μ κατὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔχῃ τοῦτο ταχύτητα 138 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον καὶ πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ;

34) Σῶμα ριπτόμενον κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω φθάνει εἰς ὕψος 510,22 μέτρων. Πόση ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ ;

35) Εἰς πόσον χρόνον σῶμα διανύει 300 μέτρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως 10^0 ;

36) Κινητὸν ὠθεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως 30^0 ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 60 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσον διάστημα θέλει διανύσει ἀνερχόμενον ;

37) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει βάρος 200 γραμμαρίων, τὸ δὲ πρόσθετον βάρος εἶναι 5 γραμμαρίων. Πόσον διάστημα διανύει τὸ σύστημα εἰς τὰ 2 ἀρχικὰ δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του ;

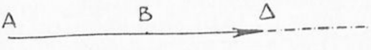
38) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει βάρος 40 γραμμαρίων. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πρόσθετον βάρος, ὅπως τὸ σύστημα εἰς τὸ τέλος τοῦ 9ου δευτερολέπτου ἀποκτήσῃ ταχύτητα 81 δακτύλων κατὰ δευτερόλεπτον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε′.

Περὶ ἔργου καὶ ἐνεργείας.

§ 61. Ἔργον δυνάμεως.—Α′. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐργάτης ἀνύψωσεν 20 χιλιόγραμμα εἰς ὕψος 1 μέτρου. Οὗτος ἔφερεν ἓν ἀποτέλεσμα, ἤτοι παρήγαγεν ἓν ἔργον. Ἂν ἄλλος ἐργάτης ἀνύψωσεν εἰς ἓν μέτρον 40 χιλιόγραμμα, οὗτος ἔφερε διπλάσιον ἀποτέλεσμα, ἤτοι παρήγαγε διπλάσιον ἔργον τοῦ πρώτου. Ὁμοίως, ἂν ἐργάτης ὑψώσῃ 20 χιλιόγραμμα εἰς ὕψος 2 μέτρων, φέρει καὶ αὐτὸς διπλάσιον ἀποτέλεσμα τοῦ πρώτου. Κατὰ ταῦτα τὸ ἔργον (Ε) δυνάμεως (Δ), ἥτις μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτῆς διεύθυνσιν, εἶναι ἀνάλογον οὐ μόνον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ταύτης, ἀλλὰ καὶ τοῦ διανυθέντος διαστήματος (δ) ὑπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς. Εἶναι ἄρα τὸ ἔργον ἀνάλογον καὶ πρὸς τὸ γινόμενον Δ.δ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι Ε=Κ.Δ.δ, ἔνθα Κ εἶναι τυχὸν συντελεστὴς τοῦ ἔργου. Ἂν δὲ θέλωμεν ἡ μονὰς τῶν δυνάμεων μεταθέτουσα τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν μονάδα τοῦ διαστήματος νὰ παραγάγῃ τὴν μονάδα τοῦ ἔργου, πρέπει νὰ εἶναι 1=Κ.1.1, ἢ Κ=1, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται Ε=Δ.δ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι:

Ἔργον δυνάμεως, ἥτις μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτῆς διεύθυνσιν, καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ διανυθέντος διαστήματος ἐπὶ τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ταυτης.



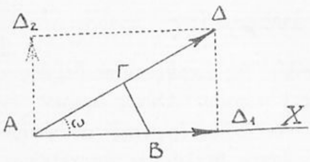
Σχ. 48.

Οὕτως, ἂν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Α δυνάμεως Δ μετατεθῇ ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β, ἡ δύναμις Δ παρήγαγεν ἔργον Ε=(ΑΒ).Δ.

Ἐὰν ἡ μετάθεσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς γίνηται κατὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως, τὸ ἔργον καλεῖται ***θετικὸν*** ἢ ***κινητήριον***, ἡ δὲ δύναμις καλεῖται ***κινητήριος δύναμις***. Ἐὰν δὲ ἡ μετάθεσις γίνηται κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς δυνάμεως, τὸ παραγόμενον ἔργον καλεῖται ***ἀρνητικὸν*** ἢ ἔργον ***ἀντιστάσεως***, ἡ δὲ δύναμις καλεῖται ***ἀντίστασις***.

Οὕτως, ὅταν ἀνυψῶμεν λίθον, τὸ παραγόμενον ἔργον ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἐνεργούσης ἐπ᾽ αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικὸν ἔργον, ἐν ᾧ τὸ τῆς κινούσης δυνάμεως εἶναι κινητήριον ἢ θετικὸν ἔργον.

Β′. Ἔστω δύναμις Δ (Σχ. 49), ἥτις μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β κατὰ διεύθυνσιν ΑΧ διάφορον τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως ταύτης. Ἂν ἀναλύσωμεν τὴν ΑΔ εἰς τὰς συνιστώσας Δ_1 καὶ Δ_2, παρατηρήσωμεν δὲ ὅτι ἡ Δ_2 οὐδὲν ἔργον παράγει, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ παραχθὲν ἔργον ὡς ἔργον τῆς συνιστώσης Δ_1 εἶναι ἄρα κατὰ τὰ προηγούμενα $E=\Delta_1$. (AB). Ἐπειδὴ δὲ $\Delta_1=\Delta$. συνω, ἕπεται ὅτι $E=\Delta.(AB)$ συνω. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι:



Σχ. 49.

Ἔργον δυνάμεως, ἥτις μεταθέτει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς κατὰ διεύθυσιν διάφορον τῆς ἰδίας αὐτῆς διευθύνσεως· καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ταύτης ἐπὶ τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως καὶ τῆς διευθύνσεως, καθ' ἣν γίνεται ἡ κίνησις.

Ἂν ΑΓ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ διανυθέντος διαστήματος AB ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, θὰ εἶναι $(A\Gamma)=(AB)$ συνω, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $E=(A\Gamma)$. Δ.

Ἄρα : ***Τὸ ἔργον εἶναι γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἐπ' αὐτὴν προβολὴν τοῦ διανυθέντος διαστήματος.***

Ἂν $\omega=0$, θὰ εἶναι συνω$=1$, ὁ δὲ τύπος $E=\Delta$. (AB) συνω γίνεται $E=\Delta$. (AB), ἤτοι ἐπανευρίσκομεν τὸν πρῶτον ὁρισμὸν ὡς μερικὴν περίπτωσιν τοῦ δευτέρου.

Τὸ ἔργον Δ. (AB) εἶναι μηδὲν εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

α΄) Ὅταν $\Delta=0$, ἤτοι,ὅταν οὐδεμία δύναμις ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ σημείου.

β΄) Ὅταν$(AB)=0$,ἤτοι ὅταν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς μένῃ ἀκίνητον.

γ΄) Ὅταν συνω$=0$ ἢ $\omega=90^0$, ἤτοι, ὅταν ἡ δύναμις ἐνεργῇ καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ. Οὕτως ἄνεμος πνέον καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως πλοίου οὐδὲν ἔργον παράγει. Ἐὰν $\omega<90^0$, θὰ εἶναι συνω>0 καὶ $E>0$ ἤτοι τὸ E εἶναι κινητήριον ἔργον. Ἐὰν δὲ $\omega>90^0$, θὰ εἶναι συνω<0 καὶ $E<0$, ἤτοι τὸ E εἶναι ἔργον ἀντιστάσεως.

§ **62. Μονάδες ἔργου.**— Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι $E=\Delta$ (AB) θέσωμεν $\Delta=1$ καὶ $(AB)=1$, εὑρίσκομεν $E=1$.

Ἄρα : ***Μονὰς ἔργου εἶναι τὸ ἔργον, ὅπερ παράγει ἡ μονὰς τῶν δυνάμεων μεταθέτουσα τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.***

Ἂν $\Delta=1$ dyne καὶ $(AB)=$ 1 δάκτυλος, τὸ παραγόμενον ἔργον καλεῖται 1 erg. Ἂν δὲ $\Delta=1$ χιλιόγραμμον καὶ $(AB)=1$ μέτρον, τὸ παραγόμενον ἔργον καλεῖται 1 χιλογραμμόμετρον.

Ἐπειδὴ 1 γραμμάριον ἰσοῦται πρὸς 981 dynes, ἕπεται ὅτι 1 χιλιόγραμμον ἰσοῦται πρὸς 981000 dynes. Δύναμις ἄρα 1 χιλιογράμμου ἤτοι 981000 dynes μετακινοῦσα τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ 1 δάκτυλον παράγει ἔργον 981000 ergs· ἐὰν δὲ μετακινήσῃ αὐτὸ κατὰ 1 μέτρον, ἤτοι κατὰ 100 δακτύλους, θὰ παραγάγῃ ἔργον $981000 \times 100 = 98100000$ ergs. Ὥστε ἓν χιλιογραμμόμετρον ἔχει 98100000 ergs.

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς erg εἶναι πολὺ μικρά, μεταχειρίζονται ἐν τῇ πράξει τὴν μονάδα Joule, ἥτις ἔχει $10000000 = 10^7$ ergs. Κατὰ ταῦτα 1 χιλιογραμμόμετρον ἔχει $98100000 : 10000000 = 9{,}81$ Joules, κατ' ἀκολουθίαν 1 Joule $\frac{1}{9{,}81} = \frac{100}{981}$ τοῦ χιλιογραμμομέτρου.

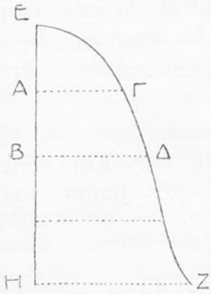
§ **63. Μονάδες δυνάμεως μηχανῶν.** Εἶναι εὐνόητον ὅτι μηχανή τις εἶναι μᾶλλον χρήσιμος, ὅταν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον παράγῃ περισσότερον ἔργον. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἰσχὺς ἢ ἡ δύναμις μηχανῆς ἐκτιμᾶται ἐκ τοῦ ἔργου ὅπερ παράγει εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Ὡς μονὰς τῆς ἰσχύος ταύτης λαμβάνεται ἡ δύναμις, ἥτις εἰς ἓν δευτερόλεπτον παράγει ἔργον ἑνὸς erg. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μονὰς αὕτη εἶναι πολὺ μικρά, μεταχειρίζονται ἐν τῇ πράξει τὰς ἀκολούθους μονάδας.

α') *Τὸ* Watt, ὅπερ εἶναι ἰσχὺς μηχανῆς, ἥτις παράγει εἰς ἓν δευτερόλεπτον ἔργον ἑνὸς Joule ἢ 10^7ergs. Τοῦ watt εἶναι ἐν χρήσει καὶ τὰ πολλαπλάσια hectowatt=100 watt καὶ τὸ kilowatt=1000 watt.

β') Τὸν ἀτμόϊππον, ὅστις εἶναι ἰσχὺς μηχανῆς, ἥτις παράγει εἰς ἓν δευτερόλεπτον ἔργον 75 χιλιογραμμομέτρων. Ἐπειδὴ τὰ 75 χιλιογραμμόμετρα ἔχουσι $9{,}81 \times 75 = 735{,}75$ Joules, ἕπεται ὅτι 1 ἀτμόϊππος ἰσοδυναμεῖ πρὸς 735,75 watt.

γ') Ἐν Ἀγγλίᾳ μεταχειρίζονται ἰδιαιτέραν μονάδα, ἥτις καλεῖται horse-power (HP). Εἶναι δὲ αὕτη ἰσχὺς μηχανῆς, ἥτις εἰς ἓν δευτερόλεπτον παράγει ἔργον 75,9 χιλιογραμμομέτρων.

§ **64. Ἔργον τῆς βαρύτητος.** Ἐὰν σῶμα βάρους Β κινῆται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος μεταβαῖνον ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β, τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι Β (ΑΒ), ἂν ΑΒ εἶναι ὁ ὑπὸ τοῦ κέντρου βάρους διανυθεὶς δρόμος. Ἐὰν τὸ σῶμα κινῆται ἐπὶ τυχούσης γραμμῆς ΕΖ, κατὰ τὴν μετάβασίν του ἀπὸ σημείου Γ εἰς ἄλλο Δ ἐγγύτατον αὐτῷ τόσον, ὥστε τὸ μέρος ΓΔ τῆς τροχιᾶς νὰ θεωρῆται εὐθύγραμμον, τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι Β. (ΑΒ), ἤτοι γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ διανυθέντος διαστήματος ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως (δηλ. ἐπὶ τυχοῦσαν κατακόρυφον) (§ 61 Β). Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει δι' ἕκαστον ἐλάχιστον τμῆμα τῆς τροχιᾶς ΕΖ. ἕπεται ὅτι τὸ ὁλικὸν ἔργον κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ σώματος ἐκ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι Β.(ΕΗ), ἤτοι ***ὅσον θὰ παρήγετο κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν τοῦ σώματος ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.*** Οὕτως, ἂν σῶμα κυλίηται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ ἐδάφους, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἔργον εἶναι γινόμενον τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.



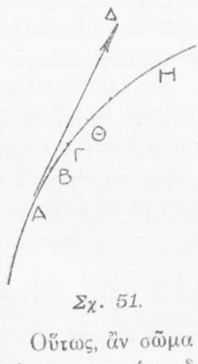
Σχ. 50.

§ **65. Ἔργον δυνάμεως ἐνεργούσης κατὰ τὴν ἐφαπτομένην εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς τροχιᾶς κινητοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κινητὸν ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως, ἥτις διατηρεῖ τὴν αὐτὴν ἔντασιν, ἀλλὰ διευθύνεται καθ' ἑκάστην στιγμὴν κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ, μεταβαίνει ἐκ σημείου Α εἰς ἄλλο Β ἐγγύτατα αὐτῷ κείμενον, οὕτως ὥστε τὸ τόξον ΑΒ νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην του. Τὸ παραχθὲν ἔργον τῆς δυνάμεως εἶναι Δ. (ΑΒ).

Ὁμοίως κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Γ τὸ ἔργον εἶναι Δ. (ΒΓ) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὸ ὁλικὸν ὅθεν ἔργον, ὅπερ παράγεται κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Η, εἶναι

$$Δ.(ΑΒ+ΒΓ+...+ΘΗ) \text{ ἢ } Δ.(ΑΗ).$$

Ἄρα : ***Τὸ ἔργον τοιαύτης δυνάμεως εἶναι γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς διανυθείσης τροχιᾶς.***



Σχ. 51.

Οὕτως, ἂν σῶμα γράφῃ περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ δακτύλων ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοιαύτης δυνάμεως Δ dynes, τὸ ἔργον, ὅταν διαγραφῇ ὅλη ἡ περιφέρεια, θὰ εἶναι Ε=Δ.2πρ ergs. Ἂν δὲ διανυθῇ τόξον $ω^0$, ἤτοι μήκους $\frac{2πρω}{360}=\frac{πρω}{180}$, τὸ ἔργον θὰ εἶναι $Ε=Δ.\frac{πρω}{180}$ ergs.

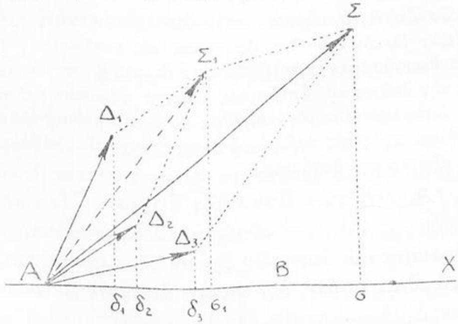
Ἐπειδὴ δὲ $\frac{πω}{180}$ παριστᾷ εἰς ἀκτίνια α τὴν γωνίαν στροφῆς $ω^0$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται Ε=Δ.α.ρ ergs.

Παρατηροῦντες ὅτι Δ.ρ εἶναι ἡ ροπὴ Ρ τῆς δυνάμεως Δ πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, εὑρίσκομεν ὅτι Ε=Ρ.α ἢ $Ε=Ρ\cdot\frac{πω}{180}$.

§ **66. Σχέσις ἔργου δυνάμεων πρὸς τὸ ἔργον τῆς συνισταμένης αὐτῶν.** Ἔστωσαν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ δυνάμεις, Σ ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ $A\delta_1, A\delta_2, A\delta_3$, $A\sigma$ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΧ, ἐφ' ἧς κινεῖται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Α αὐτῶν.

Ἐπειδή, ὡς εἶναι γνωστόν, εἶναι $(A\delta_1)+(\delta_1\sigma_1)+(\sigma_1\sigma)=(A\sigma)$, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν $A, \delta_1, \sigma_1, \sigma$ καὶ $(\delta_1\sigma_1)=(A\delta_2)$, $(\sigma_1\sigma)=(A\delta_3)$ ὡς προβολαὶ ὁμορρόπως ἴσων ἀνυσμάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι $(A\delta_1)+(A\delta_2)+(A\delta_3)=(A\sigma)$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ διανυθέντος ὑπὸ τοῦ Α διαστήματος ΑΒ, εὑρίσκομεν ὅτι

$$(A\delta_1)(AB)+(A\delta_2)(AB)+(A\delta_3)(AB)=(A\sigma)(AB).$$



Σχ. 52.

Ἐὰν δὲ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ γωνίαι τῶν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta$ μετὰ τῆς ΑΧ, θὰ εἶναι

$$(A\delta_1)=\Delta_1.\sigma\upsilon\nu\omega_1,\ (A\delta_2)=\Delta_2\sigma\upsilon\nu\omega_2,\ (A\delta_3)=\Delta_3\sigma\upsilon\nu\omega_3,\ (A\sigma)=\Sigma.\sigma\upsilon\nu\omega,$$

ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\Delta_1(AB)\sigma\upsilon\nu\omega_1+\Delta_2(AB)\sigma\upsilon\nu\omega_2+\Delta_3(AB)\sigma\upsilon\nu\omega_3=\Sigma(AB)\sigma\upsilon\nu\omega \text{ ἢ}$$

$$(\text{ἔργ}\Delta_1)+(\text{ἔργ}\Delta_2)+(\text{ἔργ}\Delta_3)=(\text{ἔργ}\Sigma), \text{ ἤτοι :}$$

Τὸ ἔργον τῆς συνισταμένης δυνάμεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων αὐτῶν.

§ **67. Δυνατὴ μετατόπισις σημείου. Δυνατὸν ἔργον.** *Καλεῖται δυνατὴ μετατόπισις σημείου ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκομένου πᾶσα ὑποθετικὴ καὶ αὐθαίρετος αὐτοῦ μετατόπισις ἐπιτρεπομένη ὑπὸ τῶν συνδέσμων ἢ τῶν συνθηκῶν, ὑφ' ἃς τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται.*

Ἐὰν π. χ. σημεῖόν τι εὑρίσκηται ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας, ὥστε μένει πάντοτε ἐπὶ ὡρισμένης καμπύλης, εἶναι δυνατὴ μετατόπισις αὐτοῦ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς του, ἐὰν συγχρόνως ἡ μετατόπισίς του θεωρεῖται καὶ ἀπείρως μικρά.

Τὸ κατὰ δυνατὴν μετατόπισιν σημείου ὑπὸ δυνάμεως Δ παραγόμενον ἔργον καλεῖται δυνατὸν ἔργον. Οὕτως, ἂν ἡ δυνατὴ μετατόπισις εἶναι ε καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς σχηματίζῃ γωνίαν ω μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως Δ, τὸ δυνατὸν ἔργον εἶναι Δ.ε.συνω.

Τὸ δυνατὸν ἔργον διαφέρει τοῦ πραγματικοῦ ἔργου κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι τὸ μὲν εἶναι ὄντως ***πραγματικόν***, τὸ δὲ εἶναι ***ὑποθετικόν***, ἀλλὰ δυνάμενον νὰ πραγματοποιηθῇ. Διὰ τοῦτο πᾶν ὅτι ἐλέχθη περὶ τοῦ πραγματικοῦ ἔργου ἰσχύει καὶ περὶ τοῦ δυνατοῦ ἔργου. Οὕτω: ***Τὸ δυνατὸν ἔργον συνισταμένης δυνάμεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δυνατῶν ἔργων τῶν δυνάμεων τούτων*** (§ 66).

ΣΗΜ. Ἐὰν ὑλικὸν σημεῖον ὑπόκειται εἰς συνδέσμους (ἄνευ τριβῆς), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸ ἐλεύθερον ἄνευ δηλ. συνδέσμων, ἀλλ' ὑποκείμενον εἰς τὴν ἐνέργειαν δυνάμεων, αἵτινες φέρουσιν ἐπ' αὐτοῦ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὅπερ καὶ οἱ σύνδεσμοι. Τὰς δυνάμεις ταύτας καλοῦμεν *ἐσωτερικάς*, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργούσας καὶ ἔξωθεν προερχομένας, ἃς καλοῦμεν *ἐξωτερικὰς* δυνάμεις.

§ **68. Ἀρχὴ τῶν δυνατῶν ἔργων.** ***Ἵνα σύστημα ἐλεύθερον*** (ἄνευ δηλ. συνδέσμων) ***εὑρίσκηται ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνατῶν ἔργων τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων νὰ εἶναι μηδέν, διὰ πᾶσαν δυνατὴν μετατόπισιν αὐτοῦ.***

Ἔστωσαν $Δ_1$ $Δ_2$.... $Δ_ν$ αἱ ἐπὶ ὑλικοῦ συστήματος ἐνεργοῦσαι δυνάμεις καὶ Σ ἡ συνισταμένη αὐτῶν. Ἔστω δὲ ε δυνατὴ μετάθεσις κατὰ διεύθυνσιν, ἥτις σχηματίζει γωνίαν ω μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς Σ. Τὸ δυνατὸν ἔργον τῆς Σ εἶναι τότε Σ.ε.συνω. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δυνατὸν τοῦτο ἔργον εἶναι ἄθροισμα τῶν δυνατῶν ἔργων τῶν συνιστωσῶν, ἐὰν κληθῇ $Ε_ν$ τὸ δυνατὸν ἔργον τῆς $Δ_ν$, θὰ εἶναι

$$Σ \cdot ε \cdot συνω = E_1 + E_2 + ... + E_ν. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύστημα ἰσορροπῇ, θὰ εἶναι $Σ=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $E_1+E_2+...+Eν=0$.

Ἀντιστρόφως: Ἂν $E_1+E_2+...+Eν=0$, θὰ εἶναι καὶ Σ. ε.συνω $=0$. Ἐπειδὴ δὲ ε καὶ συνω εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, ἕπεται ὅτι τὸ $Σ=0$, ἤτοι τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ σύστημα ὑπόκειται εἰς συνδέσμους. Διότι, ὡς εἴπομεν, δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ἀντικαθισταμένους τοὺς συνδέσμους δι' ἐσωτερικῶν δυνάμεων, ὧν ἔστω σ ἡ συνισταμένη. Ἐὰν δὲ Σ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἵνα τὸ σύστημα ἰσορροπῇ, πρέπει κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἔργου τῆς Σ καὶ τοῦ ἔργου τῆς σ μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ ἀποδεικνύεται εἰς διαφόρους περιπτώσεις ὅτι τὸ ἔργον τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν δυνατὴν μετατόπισιν, ἕπεται ὅτι τὸ ἔργον τῆς Σ εἶναι μηδέν, ὅθεν $E_1 + E_2 + ... + E_\nu = 0$.

Πόρισμα. *Τὸ δυνατὸν ἔργον δυνάμεως Δ ἐνεργούσης ἐπὶ ὑλικοῦ συστήματος ἐν ἰσορροπίᾳ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν μὲ τὸ ἔργον τῆς ἀντιστάσεως Α.*

Διότι, ἀφ' οὗ τὸ σύστημα ἰσορροπῆ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἀρχήν, εἶνε ἔργον τῆς Δ + ἔργον τῆς Α = 0, ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ ἔργον τῆς Δ εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἔργου τῆς Α καὶ κατ' ἀκολουθίαν $|\text{ἔργ. }\Delta| = |\text{ἔργ }A|$

Περὶ ἐνεργείας.

§ **69. Δρῶσα ἢ ζῶσα δύναμις κινητοῦ.** *Δρῶσα ἢ ζῶσα δύναμις κινητοῦ κατά τινα στιγμὴν καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς μάζης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος αὐτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην.*

Οὕτω κινητὸν ἔχον μᾶζαν μ ἔχει δρῶσαν δύναμιν μv^2 τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἔχει ταχύτητα v.

Τὸ ἥμισυ τῆς ζώσης δυνάμεως κινητοῦ κατά τινα στιγμὴν καλεῖται ῥύμη ἢ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ κινητοῦ τούτου κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην.

Τὴν ῥύμην κινητοῦ σημειοῦμεν διὰ τοῦ W. Οὕτω διὰ κινητὸν μάζης μ εἶναι $w = \frac{1}{2}\mu v^2$, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἔχει ταχύτητα v.

Ὅταν τὸ κινητὸν διανύσῃ διάστημα δ, γνωρίζομεν ὅτι παράγεται ἔργον $E = \Delta.\delta$. Ἐὰν δὲ ἡ Δ εἶναι σταθερά, εἶναι $\Delta = \mu\gamma$ καὶ $v = \sqrt{2\gamma\delta}$, ὅθεν $W = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu.\,2\gamma\delta = \mu\gamma\delta = \Delta.\delta$ Ἄρα $W = E$, ἤτοι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια κινητοῦ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ἔργον. Διὰ τοῦτο μετρεῖται μὲ τὰς αὐτὰς καὶ τὸ ἔργον μονάδας (§ 62).

§ **70. Θεώρημα τῆς ῥύμης.** *Εἰς πᾶσαν κίνησιν ἡ μεταβολὴ τῆς ῥύμης κινητοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ παραγόμενον ἢ καταναλισκόμενον ἔργον.*

Ἐὰν δηλ. κινητὸν μάζης μ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως Δ ἔχῃ κατά τινα στιγμὴν ταχύτητα v_0, μετὰ δὲ χρόνον t ἔχῃ ταχύτητα v, τὸ παραχθὲν ἢ καταναλωθὲν ἔργον ἐν τῷ χρόνῳ t εἶναι $\frac{1}{2}\mu(v^2 - v_0^2)$.

Οὕτω διὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν εἶναι $v = v_0 + \gamma t$ καὶ

$\delta = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, ἄρα $\frac{1}{2}\mu(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\mu\left[(v_0+\gamma t)^2 - v_0^2\right] =$

$\frac{1}{2}\mu\ (2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2) = \mu\gamma(v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2) = \mu\gamma\delta = \Delta.\delta = E$ (§ 61 Α΄).

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{1}{2}\mu\,(v^2 - v_0^2) = E$ συνάγεται ὅτι: ὅταν ἡ ρύμη αὐξάνηται ($v^2 > v_0^2$), τὸ Ε εἶναι θετικὸν ἤτοι δαπανᾶται ἔργον. Ὅταν δὲ ἡ ρύμη ἐλαττοῦται ($v^2 < v_0^2$), τὸ Ε εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι παράγεται ἔργον ὠφέλιμον. Πᾶσα ἄρα μεταβολὴ τῆς ρύμης συνοδεύεται ὑπὸ ἰσοδυνάμου ἔργου.

§ **71. Ἀμοιβαία μετατροπὴ τῆς ῥύμης καὶ τοῦ ἔργου.** Ὅταν βλῆμα βάλληται ὁριζοντίως ἐναντίον π. χ. λόφου, κινοῦσα δύναμις εἶναι ἡ ἐλαστικὴ τάσις τῶν ἐντὸς τοῦ ὅπλου ἀναπτυσσομένων ἀερίων καὶ ἧς ἔστω Δ ἡ ἰσχὺς κατὰ μέσον ὅρον, μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἡ σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸ στόμιον τῆς κάνης, ἥτις ἔστω ὅτι ἔχει μῆκος λ. Εὐνόητον ὅτι ἡ δύναμις Δ κατηνάλωσεν ἔργον Δ. λ, τὸ δὲ βλῆμα ἀπὸ τῆς ἐξόδου τῆς κάνης τρέχει μὲ σταθερὰν ταχύτητα v, ἣν ἔχει τὴν στιγμὴν τῆς ἐξόδου καὶ ἥτις εἶναι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς 0 εἰς v καὶ ὁρίζεται κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{1}{2}\mu v^2 = \Delta\lambda$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν στιγμὴν πέραν τοῦ στομίου τῆς κάνης ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος εἶναι v καὶ ἡ ῥύμη τοῦ κινητοῦ εἶναι $\frac{1}{2}\mu v^2$, ἕπεται ὅτι τὸ ἔργον Δλ τῆς δυνάμεως Δ μετασχηματίσθη εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ βλήματος.

Ὅταν τὸ βλῆμα προσκρούσῃ ἐπὶ ἐμποδίου, τείνει νὰ εἰσχωρήσῃ εἰς αὐτό, ἀλλὰ τοῦτο ἀνθίσταται διὰ δυνάμεώς τινος Δ΄. Τὸ βλῆμα ὑπερνικὸν τὴν ἀντίστασιν ταύτην εἰσδύει ἐντὸς κατὰ μῆκος λ΄, μέχρις οὗ ἡ ταχύτης του μηδενισθῇ, ὅτε καὶ ἡ w αὐτοῦ καταστρέφεται. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῆς ῥύμης κατὰ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τὸ βλῆμα διέτρεξε τὸ μῆκος λ΄ εἶναι $\frac{1}{2}\mu v^2 - 0 = \frac{1}{2}\mu v^2$, ἕπεται ὅτι

$\frac{1}{2}\mu v^2 = \Delta'.\ \lambda'$, ἤτοι ἡ ἀφανισθεῖσα ρύμη ἰσοῦται πρὸς τὸ παραχθὲν ἔργον. Μετετράπη λοιπὸν ἡ ρύμη εἰς ἔργον. Ἐὰν τὸ βλῆμα πέσῃ ἐπὶ θώρακος, ὃν ἀδυνατεῖ νὰ διατρυπήσῃ, ἡ ρύμη μεταβάλλεται εἰς θερμότητα ἢ καὶ φῶς, εἰς ἄλλας δηλ. μορφὰς ἐνεργείας.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ σώματα ἐν κινήσει εὑρισκόμενα ἔχουσιν ἱκανότητά τινα, ἥτις ἐκδηλοῦται εἴτε ὡς ἔργον, εἴτε ὡς ῥύμη ἢ κινητικὴ ἐνέργεια. Τὴν ἱκανότητα ταύτην καλοῦμεν *ἔργῳ ἐνέργειαν ἢ κινητικὴν ἐνέργειαν*.

§ **72. Δυναμικὴ ἐνέργεια.** Ἡ ἐνέργεια δύναται νὰ ὑπάρξῃ καὶ ὑπὸ ἄλλην οἱονεὶ κεκρυμένην μορφήν. Οὕτω σῶμα βάρους Β εὑρισκόμενον ἐπὶ ὑποστηρίγματος εἰς ὕψος υ ὑπὲρ τὸ ἔδαφος δὲν διατελεῖ ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἀπὸ ἀπόψεως ἐνεργείας μὲ σῶμα ἠρεμοῦν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Διότι, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑποστήριγμα, τὸ σῶμα πίπτει καὶ ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν $(\frac{1}{2}\mu\nu^2)$, ἥτις βαίνει αὐξανομένη καὶ γίνεται ἴση πρὸς Βυ, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος, ὡς ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = B\upsilon$ καὶ $E = \frac{1}{2}\mu\nu^2 - 0 = \frac{1}{2}\mu\nu^2$ προκύπτει. Ὥστε τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, ἂν καὶ ἀκίνητον, ἐνέκρυπτεν ἐνέργειαν, ἥτις ἐξεδηλώθη κατὰ τὴν πτῶσίν του. Τὴν τοιαύτην ἐνέργειαν καλοῦμεν ***λανθάνουσαν*** ἢ ***δυνάμει*** ἢ ***δυναμικὴν ἐνέργειαν***.

Ὁμοίως τὸ ἐν δεξαμενῇ κεκλεισμένον ὕδωρ ἐγκλείει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἥτις ἐμφανίζεται ὡς κινητικὴ ἐνέργεια, ὅταν ἀφήσωμεν αὐτὸ νὰ ἐκρέῃ (ἐνέργεια θέσεως).

Περιεστραμμένον ἐλατήριον ὡρολογίου ἐγκλείει ἐν τῇ καταστάσει ταύτῃ δυνάμει ἐνέργειαν, ἥτις μετασχηματίζεται βραδέως εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, ἐφ' ὅσον τὸ ἐλατήριον τεῖνον νὰ ἐξελιχθῇ κινεῖ τοὺς τροχοὺς τοῦ ὡρολογίου (ἐνέργεια μορφῆς).

Πυρῖτις ξηρὰ εὑρισκομένη ἐν δοχείῳ ἐγκλείει ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της ἐν τῇ καταστάσει ταύτῃ δυνάμει ἐνέργειαν, ἥτις μετατρέπεται εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, ἂν ἀναφλεχθῇ (ἐνέργεια φύσεως).

Ὁ ἐν λέβητι ἀτμομηχανῆς ἐγκεκλεισμένος ἀτμὸς ἐγκλείει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἥτις μετατρέπεται εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, ὅταν διαβιβασθῇ εἰς τὸν κύλινδρον, ἔνθα μετατρέπεται εἰς ἔργον, διότι κινεῖ τὸ ἔμβολον.

Κατὰ ταῦτα ἡ δυνάμει ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς ἔργῳ ἐνέργειαν, ἥτις δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἔργον. Μέτρον δὲ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας εἶναι τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἢ καὶ τοῦ ἔργου, εἰς ὃ δύναται νὰ μετατραπῇ.

§ **73. Ἀμοιβαῖαι τῶν εἰδῶν τῆς ἐνεργείας μετατροπαί.** Νοήσωμεν σῶμα ἔχον μᾶζαν μ καὶ βάρος Β ριπτόμενον ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0. Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεώς του ἐκέκτητο κινητικὴν ἐνέργειαν $W=\frac{1}{2}\mu v_0^2$. Ὅταν δὲ ἀνῆλθεν εἰς ὕψος $\upsilon=\frac{v_0^2}{2g}$, ἡ ταχύτης του ἐκμηδενίσθη (§ 59), κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ W ἔγεινε μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{\mu v_0^2 g}{2g}=$ $\mu g\upsilon=B\upsilon=E$, ἕπεται ὅτι W=E, ἤτοι ἡ ἀπολεσθεῖσα κινητικὴ ἐνέργεια ἰσοῦται μὲ τὸ συντελεσθὲν ἔργον. Εἰς τὸ ὕψος δὲ υ τὸ κινητὸν ἐγκλείει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπολεσθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν. Τῷ ὄντι τὸ σῶμα πῖπτον ἐκ νέου εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν λαμβάνει πάλιν ταχύτητα v_0 (§ 60) καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{1}{2}\mu v_0^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{1}{2}\mu v_0^2-0=B.\upsilon$, ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, ἣν ἐνέκλειεν εἰς ὕψος $\frac{v_0^2}{2g}$ εἶναι Bυ, ἴσον δηλ. πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀπολεσθείσης κινητικῆς ἐνεργείας. Ὥστε τὸ κινητὸν ἀνελθὸν εἰς ὕψος $\frac{v_0^2}{2g}$ ἔχασεν ὅλην τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν αὑτοῦ, ἀπέκτησεν ὅμως ἴσην δυναμικὴν ἐνέργειαν. Κατελθὸν δὲ ἐκ τοῦ ὕψους ἐκείνου εἰς ὕψος 0 ἔχασεν ὅλην τὴν δυναμικήν του ἐνέργειαν, ἀπέκτησεν ὅμως ἴσην κινητικὴν ἐνέργειαν.

Καθ' ἣν στιγμὴν τὸ κινητὸν κατερχόμενον εὑρίσκεται εἰς ὕψος τι $\upsilon'<\upsilon$, ἔχει ταχύτητα $v=\sqrt{2g(\upsilon-\upsilon')}$ καὶ $W=\frac{1}{2}\mu.2g(\upsilon-\upsilon')=\mu g(\upsilon\text{-}\upsilon')$ $=B(\upsilon-\upsilon')$. Ἀλλ' ἐν τῇ θέσει ταύτῃ δηλ. εἰς ὕψος υ΄ ἐγκλείει καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν Bυ΄· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἐνεργειῶν αὐτοῦ εἶναι $B(\upsilon-\upsilon')+B\upsilon'=B\upsilon$, ἤτοι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἀρχικὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν εἰς ὕψος υ. Μέρος λοιπὸν τῆς δυναμικῆς ταύτης ἐνεργείας μετετράπη εἰς κινητὴν ἐνέργειαν, ἥτις μετὰ τῆς ὑπολειφθείσης δυναμικῆς ἐνεργείας ἀποτελεῖ ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὴν ἀρχικὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν.

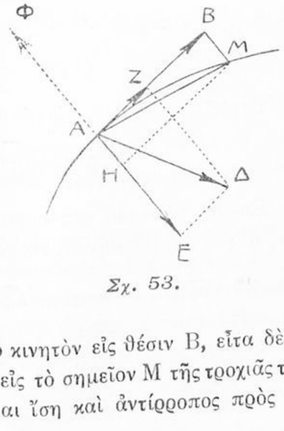
Ἡ ἐνέργεια λόιπὸν δὲν καταστρέφεται, ἀλλὰ μετατρέπεται ἐκ τοῦ ἑνὸς εἴδους εἰς ἄλλο. Ἐνίοτε ὅμως φαίνεται ὅτι καὶ ἡ ἔργῳ καὶ ἡ δυνάμει ἐνέργεια χάνονται, ἀλλὰ τότε ἐμφανίζονται ἄλλα φαινόμενα, οἷον φῶς, θερμότης, ἠλεκτρισμὸς κτλ. ἅτινα εἶναι ἄλλαι μορφαὶ ἐνεργείας. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐνέργεια εἶναι ἀμετάβλητος, ἤτοι ἡ διαθέσιμος ἐν τῇ φύσει ἐνέργεια οὔτε αὐξάνεται οὔτε ἐλαττοῦται. Εἰς τοῦτο δὲ συνίσταται ἡ ***ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας***.

Φυγόκεντρος δύναμις

§ **74. Κεντρομόλος καὶ φυγόκεντρος δύναμις.** Ἄς προσδέσωμεν εἰς τὸ ἄκρον νήματος σῶμα Α, τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον ἂς κρατῶμεν διὰ τῆς χειρός μας. Ἂν δόσωμεν εἶτα εἰς τὸ νῆμα τοῦτο περιστροφικὴν κίνησιν περὶ τὸ ἄκρον, δι' οὗ κρατοῦμεν αὐτό, τὸ σῶμα Α ἕνεκα τῆς ἀδρανείας τείνει καθ' ἑκάστην στιγμὴν νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς του καὶ νὰ ἐκφύγῃ τοῦ κέντρου. Συγκρατεῖται ὅμως εἰς τὴν τροχιάν του ὑπὸ δυνάμεως, ἥτις ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ διὰ μέσου τοῦ νήματος καὶ ἥτις διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς. Ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται ***κεντρομόλος***. Κατὰ δὲ τὴν ἀρχὴν τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως ἀναπτύσσεται καὶ ἄλλη δύναμις ἴση καὶ ἀντίρροπος, ἥτις τείνει νὰ ἀπομακρύνῃ τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς καὶ ἥτις καλεῖται ***φυγόκεντρος*** δύναμις. Κατὰ ταῦτα ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀκολούθημα τῆς κεντρομόλου, ὑφίσταται, ἐφ' ὅσον καὶ ἡ κεντρομόλος ὑφίσταται, ἐκλείπει δὲ εὐθὺς ὡς αὕτη ἐκλείψῃ.

Ἐὰν π. χ. κόψωμεν τὸ νῆμα, ἀμφότεραι αἱ δυνάμεις αὗται ἐκλείπουσι, τὸ δὲ σῶμα Α ἕνεκα τῆς κτηθείσης ταχύτητος αὐτοῦ κινεῖται κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς του κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας.

Γενικῶς: Ἐὰν ἡ τροχιὰ σώματος εἶναι καμπύλη, ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις Δ, διότι ἄλλως τὸ σῶμα θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως. Ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο συνιστώσας Ζ καὶ Ε, ὧν ἡ μία διευθύνεται κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς εἰς τὸ Α, ἡ δὲ ἄλλη κατὰ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς ἐκείνην. Τούτων ἡ Ε συγκρατεῖ τὸ κινητὸν ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του ἐμποδίζουσα αὐτὸ νὰ ἀκολουθήσῃ τὴν ἐφαπτομένην. Τῷ ὄντι ἂν νοήσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ Α ἐνεργεῖ πρῶτον ἡ συνιστῶσα Ζ καὶ φέρει μετά τινα χρόνον τὸ κινητὸν εἰς θέσιν Β, εἶτα δὲ εἰς ἴσον χρόνον ἡ Ε, αὕτη θὰ φέρῃ αὐτὸ εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς τροχιᾶς του.

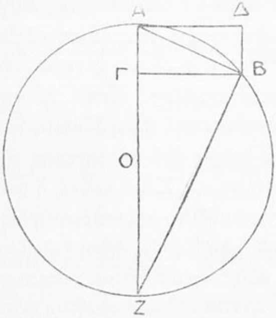


Σχ. 53.

Ἡ δὲ φυγόκεντρος δύναμις Φ εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν Ε, ἤτοι $|\Phi| = |E|$.

Ἐὰν ἡ κίνησις εἶναι ἰσοταχής, ἡ Ε συμπίπτει μετὰ τῆς Δ, διότι ἄλλως αὕτη θὰ ἀνελύετο εἰς τὰς Ζ καὶ Ε, ὧν ἡ Ζ θὰ μετέβαλλε τὴν ταχύτητα. Ὥστε, ὅταν σῶμα γράφῃ ἰσοταχῶς περιφέρειαν, ἐνεργεῖ ἐπ᾿ αὐτοῦ δύναμις Δ σταθερά, ἥτις διευθύνεται πάντοτε πρὸς τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος, ἡ δὲ φυγόκεντρος δύναμις, ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἀλλ᾿ ἀντίθετον φοράν.

§ **75. Ἔντασις καὶ νόμοι φυγοκέντρου δυνάμεως.** Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐντάσεως τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν τῆς κεντρομόλου, διότι αὗται εἶναι ἀπολύτως ἴσαι.



Σχ. 54.

Ἔστω κινητὸν, ὅπερ διαγράφει περιφέρειαν Ο μὲ ταχύτητα v· Ἐὰν τοῦτο μετὰ χρόνον ἐλάχιστον Δt μεταβῇ ἐκ θέσεως Α εἰς ἄλλην Β, θὰ εἶναι $(\widehat{AB}) = v.\Delta t$. Ἀλλ᾿ ἂν κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΓΒΔ, ὅπερ ἔχει διαγώνιον τὴν χορδὴν ΑΒ, βλέπομεν ὅτι τὸ κινητὸν θὰ ἔφθανεν εἰς τὸ Β, ἂν πρῶτον ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς κεκτημένης ταχύτητος μετέβαινεν εἰς χρόνον Δt εἰς τὸ Δ καὶ εἶτα ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς κεντρομόλου δυνάμεως διήνυε τὸν δρόμον ΔΒ εἰς ἴσον χρόνον. Ὥστε ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς κεντρομόλου δυνάμεως διανύει διάστημα ΔΒ ἢ ΑΓ εἰς χρόνον Δt. Εἶναι ἄρα

$$(\text{ΑΓ}) = \frac{1}{2}\gamma(\Delta t)^2 \qquad (1)$$

Ἕνεκα δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΖ εἶναι

$$(\overline{\text{ΑΒ}})^2 = (\text{ΑΓ}).\,2\rho, \text{ ὅθεν } (\text{ΑΓ}) = \frac{(\overline{\text{ΑΒ}})^2}{2\rho}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῆς σμικρότητος τοῦ τόξου ΑΒ, ἡ μεταξὺ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς του διαφορὰ εἶναι ἐλαχίστη, δυνάμεθα ἀντὶ $(\overline{AB})$ νὰ θέσωμεν $(\widehat{AB})$ ἢ $v.\Delta t$. Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται

$$\frac{v^2\Delta t^2}{2\rho} = \frac{1}{2}\gamma(\Delta t)^2, \text{ ὅθεν } \gamma = \frac{v^2}{\rho}.$$

Ἤτοι ἡ κεντρομόλος δύναμις μεταδίδει εἰς τὸ κινητὸν ἐπιτάχυνσιν

$\frac{v^2}{\varrho}$. Ἂν δὲ μ εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ κινητοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι $\frac{\mu v^2}{\varrho}$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι καὶ

$$\Phi = \frac{\mu v^2}{\varrho} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπονται οἱ ἀκόλουθοι νόμοι.

α΄). Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ κινητοῦ.

β΄). Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ.

γ΄). Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς.

Διὰ τοὺς λόγους τούτους ἐλαττοῦσιν, οἱ μηχανοδηγοὶ τὴν ταχύτητα τῶν ἁμαξοστοιχιῶν, ὅταν αὗται διέρχωνται διὰ καμπύλων γραμμῶν. Κατὰ τὴν χάραξιν τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν, ὁσάκις εἶναι ἀναπόφευκτος ἡ κατασκευὴ καμπύλου τμήματος αὐτῆς, λαμβάνεται φροντίς, ὅπως τοῦτο ἔχῃ μείζονα ἀκτῖνα καμπυλότητος. Τέλος ἡ ἐξωτερικὴ γραμμὴ κατασκευάζεται ὑψηλοτέρα τῆς ἐσωτερικῆς κατὰ τὰ καμπύλα μέρη· οὕτω δὲ ἡ ἁμαξοστοιχία κλίνουσα πρὸς τὰ ἔσω ἐξουδετεροῖ διὰ τοῦ βάρους της τὴν φυγόκεντρον δύναμιν καὶ ἀποφεύγεται οὕτως ὁ ἐκτροχιασμὸς αὐτῆς.

Ἐὰν τὸ κινητὸν εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ διαγράψῃ εἰς ὡρισμένον χρόνον t ὁλόκληρον περιφέρειαν ἀκτῖνος ϱ, θὰ εἶναι $vt = 2\pi\varrho$, ὅθεν $v = \frac{2\pi\varrho}{t}$ καὶ ἡ ἰσότης (2) γίνεται $\Phi = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{4\pi^2\varrho^2}{t^2}$ ἢ

$$\Phi = \frac{4\pi^2\mu\varrho}{t^2} \qquad (3)$$

Ἄρα : δ΄)· ***Ὅταν ὁ χρόνος τῆς περιστροφῆς εἶναι ὁ αὐτός, ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς.***

Οὕτως εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ἰσημερινοῦ ἀναπτύσσεται μείζων φυγόκεντρος δύναμις ἢ εἰς τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Διότι τὰ ἄλλα ταῦτα σημεῖα γράφουσιν εἰς μίαν ἀστρικὴν ἡμέραν περιφερείας μικροτέρας ἀκτῖνος. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἡ Γῆ διετέλει ἐν ρευστῇ καταστάσει, τὰ περὶ τὸν ἰσημερινὸν σημεῖα ἀπεμακρύνθησαν τοῦ κέντρου περισσότερον τῶν ἄλλων σημείων καὶ οὕτως ἡ Γῆ ἔλαβε σχῆμα ἐξωγκωμένον περὶ τὸν ἰσημερινὸν καὶ πεπιεσμένον περὶ τοὺς πόλους.

Ἐὰν τὸ κινητὸν ἔχῃ γωνιώδη ταχύτητα ω, κάμνῃ δὲ ν στροφὰς εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου θὰ εἶναι $\omega=2\pi\nu$, ὁ δὲ χρόνος t μιᾶς πλήρους περιστροφῆς θὰ εἶναι $\frac{1}{\nu}$. Κατ' ἀκολουθίαν $\frac{4\pi^2}{t^2}=\frac{\omega^2}{\nu^2}\cdot\nu^2=\omega^2$, ἡ δὲ ἰσότης (3) γίνεται $\Phi=\mu\rho\omega^2$. (4)

Ἐὰν δὲ ἐν αὐτῇ ἀντὶ ω^2 θέσωμεν $4\pi^2\nu^2$, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\Phi=4\pi^2\nu^2\mu\rho \qquad (5)$$

Περὶ ἐκκρεμοῦς.

§ 76. Ὁρισμός.—Κίνησις ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. *Καλεῖται γενικῶς ἐκκρεμὲς πᾶν βαρὺ σῶμα δυνάμενον νὰ στραφῇ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ,*

Τὸ ***ἁπλοῦν*** ἢ ***μαθηματικὸν*** ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἐκ βαρέος σημείου, ὅπερ εἶναι ἀνηρτημένον ἐξ ἀκινήτου σημείου διὰ νήματος ἀβαροῦς ἀνεκτάτου καὶ στρεπτοῦ περὶ τὸ ἀκίνητον σημεῖον, εἰς ὃ προσδένεται.

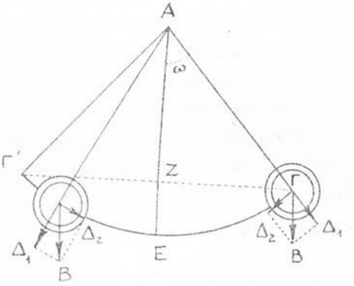
Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ πραγματοποίησις τοιούτου ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀδύνατος. Μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα ἐξηρτημένη διὰ λεπτοτάτου νήματος ἀποτελεῖ ἐκκρεμὲς προσεγγίζον πρὸς τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμές, τόσῳ μᾶλλον, ὅσῳ ἡ σφαῖρα εἶναι μικροτέρα καὶ τὸ νῆμα λεπτότερον καὶ ἐλαφρότερον.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως ἀπὸ τοῦ βαρέος σημείου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς καλεῖται ***μῆκος*** τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου. Ἐν τῇ πραγματικότητι ἕνεκα τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ σημείου διὰ σώματος, μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς καλεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως τοῦ νήματος ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος.

Τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ἰσορροπεῖ, εἰς θέσιν ΑΕ, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ διὰ τοῦ κέντρου βάρους ἀγομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, διότι τότε τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος. Εἶναι δὲ ἡ ἰσορροπία αὕτη εὐσταθής. Τῷ ὄντι· ἂν ἀπομακρύνωμεν τὸ σῶμα ἐκ τῆς θέσεως Ε εἰς ἄλλην Γ καὶ ἀναλύσωμεν τὸ βάρος Β αὐτοῦ εἰς τὰς συνιστώσας Δ_1 καὶ Δ_2, βλέπομεν ὅτι ἡ μὲν Δ_1 ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος, ἡ δὲ Δ_2 διευθυνομένη καθέτως πρὸς ἐκείνην τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.

Ἡ συνιστῶσα αὕτη Δ_2 ἰσοῦται πρὸς Β ἡμω καὶ κατ' ἀκολουθίαν βαίνει ἐλαττουμένη μετὰ τῆς γωνίας ω. Ἐπειδὴ ὅμως ἐνεργεῖ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως αὐξάνει συνεχῶς ἀλλ᾽ οὐχὶ ὁμαλῶς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Οὕτω τὸ κινητὸν κατέρχεται ἐκ τοῦ Γ διαγράφον τόξον ΓΕ μὲ κίνησιν ἐπιταχυνομένην μὲν ἀλλ᾽ οὐχὶ ὁμαλῶς. Εἰς τὴν θέσιν Ε ἡ Δ_2 μηδενίζεται, τὸ κινητὸν ὅμως ἐξακολουθεῖ κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, διότι εἰς τὸ Ε τὸ κινητὸν ἐγκλείει κινητικὴν ἐνέργειαν, ἴσην πρὸς τὸ συντελεσθὲν ἔργον τῆς βαρύτητος, ἤτοι Β (ΕΖ).

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν φάσιν ταύτην τῆς κινήσεως ἡ συνιστῶσα Δ_2 εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὴν κίνησιν καὶ βαίνει αὐξανομένη μετὰ τῆς γωνίας ω, ἡ κίνησις τοῦ σώματος εἶναι ἐπιβραδυνομένη· θὰ ἐξακολουθήσῃ δὲ μέχρις οὗ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια Β (ΕΖ) μετατραπῇ εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν, ὅπερ γίνεται, ὅταν τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ΄ συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν κατακόρυφον ΑΕ. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης τὸ σῶμα κατέρχεται πάλιν διαγράφον τὸ Γ΄Ε καὶ εἶτα ἀνερχόμενον διαγράφει τὸ ΕΓ καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Κατὰ ταῦτα θεωρητικῶς ἔπρεπε τὸ σῶμα νὰ κινῆται ἐπ᾽ ἄπειρον μεταβαῖνον ἐκ τῆς θέσεως Γ εἰς τὴν Γ΄ καὶ τἀνάπαλιν. Ἡ κατὰ τὸν ἄξονα ὅμως τῆς ἐξαρτήσεως τριβὴ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος συντελοῦσιν εἰς τὴν βαθμιαίαν ἐλάττωσιν τῆς γωνίας ΓΑΓ΄ καὶ τελικῶς εἰς τὴν παῦσιν τῆς κινήσεως.



Σχ. 55.

Ἡ μετάβασις τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τῆς θέσεως ΟΓ εἰς τὴν ΟΓ΄ καλεῖται ***ἁπλῆ αἰώρησις*** ἢ ***ἁπλοῦς παλμός***.

Ἡ δὲ μετάβασις ἀπὸ τῆς ΟΓ εἰς τὴν ΟΓ΄ καὶ ἡ ἐκεῖθεν ἐπιστροφὴ εἰς τὴν ΟΓ καλεῖται ***πλήρης αἰώρησις*** ἢ ***πλήρης παλμός***. Ἡ γωνία ΓΑΓ΄ λέγεται ***πλάτος*** ἢ ***εὖρος*** τῆς αἰωρήσεως.

§ **77. Νόμοι τοῦ ἐκκρεμοῦς.** Ἡ θεωρητικὴ μηχανικὴ ἀποδεικνύει ὅτι ὁ χρόνος t μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$t=\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \eta\mu^2\frac{\omega}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \eta\mu^4\frac{\omega}{2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \eta\mu^6\frac{\omega}{2}+\ldots\right]$$

ἔνθα μ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, π ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ω τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως.

Ὅταν αἱ αἰωρήσεις εἶναι μικροῦ πλάτους (2^0 ἕως 3^0), δυνάμεθα ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος νὰ παραλείψωμεν τοὺς περιέχοντας τὰ ἡμίτονα τοῦ $\frac{\omega}{2}$ ὅρους, ὁ δὲ προηγούμενος τύπος γίνεται $t=\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$. (2)

Ἐντεῦθεν ἕπονται οἱ ἑξῆς νόμοι:

α΄) ***Αἱ μικροῦ πλάτους αἰωρήσεις εἶναι ἰσόχρονοι.***

β΄) ***Ἡ διάρκεια τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μήκους αὐτοῦ.***

Ἂν δηλ. τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς πολ)σθῇ ἐπί τινα ἀριθμὸν λ ἡ διάρκεια τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\sqrt{\lambda}$. Οὕτως, ἂν τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς γείνῃ τετραπλάσιον, ἐνneαπλάσιον, δεκαεξαπλάσιον κ.τ.λ. ἡ διάρκεια τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων γίνεται ἀντιστοίχως διπλασία, τριπλασία τετραπλασία κτλ.

γ΄) ***Ἡ διάρκεια τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος.***

Οὕτως, εἰς ὃν τόπον ἡ ἔντασις εἶναι g, ἡ διάρκεια t εἶναι $\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$, ἐν ᾧ εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔντασις εἶναι gλ ἡ ἔντασις εἶναι

$\pi\sqrt{\frac{\mu}{g\lambda}}=\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$, ἤτοι πολλαπλασιαζομένης τῆς ἐντάσεως ἐπὶ λ ἡ διάρκεια τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων διαιρεῖται διὰ $\sqrt{\lambda}$.

§ **78. Χρήσεις τοῦ ἐκκρεμοῦς.** ***Α΄. Ἐκκρεμῆ ὡρολόγια.*** Ἕνεκα τοῦ ἰσοχρόνου τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς χρησιμοποιεῖται τοῦτο ἀπὸ τοῦ 1657 (Huyghens) εἰς τὴν διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ ῥύθμισιν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τῶν ἐκκρεμῶν ὡρολογίων.

Β΄. Ρυθμόμετρον. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπίσης ἰδιότητος τοῦ ἐκκρεμοῦς στηρίζεται ἡ λειτουργία ***τοῦ ρυθμομέτρου*** τοῦ Maelzel. Τοῦτο σύγκειται ἐκ στελέχους στρεπτοῦ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, ὑφ᾽ οὗ διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κατωτέρου μέρους στερεοῦται μόνιμος μολυβδίνη μᾶζα εἰς δὲ τὸ ἀνώτερον μέρος φέρει μεταθετὸν βάρος. Φέρει δὲ τὸ ἄνω τοῦτο μέρος διαιρέσεις, ὧν ἑκάστη δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐκτελουμένων αἰωρήσεων εἰς ἓν πρῶτον λεπτόν, ὅταν τὸ μεταθετὸν βάρος κοχλιωθῇ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ g. Τὸ ἐκκρεμὲς χρησιμοποιεῖται καὶ πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ g εἰς τοὺς διαφόρους τόπους τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Τῷ ὄντι· ἐκ τοῦ τύπου $t=\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι $g=\frac{\pi^2\mu}{t^2}$. Ἐὰν ἑπομένως μετρήσωμεν τὸν χρόνον t μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ g, διότι π εἶναι γνωστὸν καὶ μ δύναται νὰ μετρηθῇ μετ' ἀκριβείας. Δι' ἀκριβεστάτων πειραμάτων γενομένων ὑπὸ τοῦ στρατηγοῦ Defforges εὑρέθη ὅτι ἐν Παρισίοιν εἶναι g=980,991 δάκτυλοι κατὰ δευτερόλεπτον. Ἐξαρτᾶται δὲ ἡ τιμὴ τοῦ g ἐκ τοῦ πλάτους τοῦ τόπου, διότι ἕνεκα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς σχήματος τῆς Γῆς καὶ τῆς περὶ ἄξονα στροφῆς αὐτῆς, ἡ τιμὴ αὕτη βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ (978 δάκ.) πρὸς τοὺς πόλους (983,21). Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ πλάτος ἡ τιμὴ τοῦ g μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης οὖσα μικροτέρα διὰ τὰ ὑψηλότερον κείμενα σημεῖα, διότι ταῦτα ἀπώτερον κείμενα τοῦ κέντρου τῆς Γῆς ἕλκονται ὑπ' αὐτῆς ἀσθενέστερον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39) Ἐργάτης ἀνεβίβασεν ἐκ βάθους 12 μέτρων ἓν κυβικὸν μέτρον ὕδατος. Πόσον ἔργον παρήγαγεν ;

40) Σῶμα βάρους 350 χιλιογράμμων διέτρεξεν ἐκ τῆς κορυφῆς τὸ μῆκος 250 μέτρων κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως 30°. Πόσον τὸ παραχθὲν ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἔργον ;

41) Σῶμα μάζης 294 κιλογράμμων ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ἀποκτᾷ μετὰ 2 λεπτὰ ταχύτητα 72 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἣν κέκτηται εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου.

42) Σῶμα βάρους 10 χιλιογράμμων ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 50 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν θὰ χάσῃ μετὰ 3 δευτερόλεπτα ;

43) Εἰς τὸ ἄκρον νήματος μήκους 1,50 μέτρων προσδένομεν μικρὸν δοχεῖον πλῆρες ὕδατος καὶ ὁλικοῦ βάρους 3 χιλιογράμμων· θέτομεν δὲ αὐτὸ εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ περὶ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ νήματος. Πόσας στροφὰς πρέπει νὰ κάμῃ τὸ δοχεῖον εἰς ἓν δευτερόλεπτον, ὅπως μὴ πίπτῃ τὸ ὕδωρ ;

44) Ἐκκρεμὲς μήκους 0,995 μέτρου κάμνει ἐν τόπῳ μίαν αἰώρησιν εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ ;

45) Ἐκ τίνος ὕψους πίπτει σῶμα, καθ' ὃν χρόνον ἐκκρεμὲς μήκους 0,50 μέτρου ἐκτελεῖ 4 ἁπλᾶς αἰωρήσεις ;

46) Ἐκκρεμὲς μήκους 1 μ. ἐκτελεῖ μίαν ἁπλῆν αἰώρησιν εἰς 1 δευτερόλεπτον. Πόσος εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ ὁ χρόνος μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς μήκους δύο μέτρων ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Ἁπλαῖ μηχαναί.

§ **79. Μηχανή.** *Μηχανὴ καλεῖται πᾶν ὄργανον τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα διὰ δυνάμεών τινων νὰ ὑπερνικήσωμεν ὡρισμένας ἀντιστάσεις ἢ νὰ μεταθέσωμεν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς αὐτῶν.*

Ἡ διὰ τῶν μηχανῶν μετάδοσις τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν δυνάμεων γίνεται διὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν, τὰ ὁποῖα συνδέονται καταλλήλως πρὸς ἄλληλα.

Ἑκάστη ἁπλῆ μηχανὴ σύγκειται ἐξ ἑνὸς ὀργάνου ἐξ ἐλαχίστων στοιχείων, τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένους συνδέσμους.

Εἶναι δὲ κυριώτεραι ἁπλαῖ μηχαναὶ αἱ ἑξῆς: Ὁ μοχλός, ἡ τροχαλία, τὸ βαροῦλκον, τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὁ σφὴν καὶ ὁ κοχλίας.

Περὶ μοχλῶν.

§ **80. Μοχλὸς καὶ στοιχεῖα αὐτοῦ.** *Μοχλὸς καλεῖται πᾶν στερεὸν καὶ ἄκαμπτον σῶμα (συνήθως ράβδος), κινητὸν περὶ ὡρισμένον ἑκάστοτε καὶ ἀκίνητον σημεῖον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι τείνουσι νὰ στρέψωσιν αὐτὸν ἀντιθέτως.*

Τὸ σταθερὸν σημεῖον, περὶ ὃ δύναται νὰ κινεῖται ὁ μοχλός, καλεῖται ***ὑπομόχλιον***.

Αἱ ἀποστάσεις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπὸ τῶν διευθύνσεων τῶν δυνάμεων καλοῦνται ***μοχλοβραχίονες*** τῶν δυνάμεων τούτων.

Ἐὰν τὸ ὑπομόχλιον κεῖται μεταξὺ δυνάμεως καὶ ἀντιστάσεως, ὁ μοχλὸς καλεῖται ***πρωτογενὴς ἢ πρώτου εἴδους***.

Ἐὰν ἡ ἀντίστασις κεῖται μεταξὺ δυνάμεως καὶ ὑπομοχλίου, ὁ μοχλὸς καλεῖται ***δευτερογενὴς ἢ δευτέρου εἴδους***.

Ἐὰν τέλος ἡ δύναμις κεῖται μεταξὺ ἀντιστάσεως καὶ ὑπομοχλίου, ὁ μοχλὸς καλεῖται ***τριτογενὴς ἢ τρίτου εἴδους***. Ἡ ψαλλὶς π. χ. εἶναι πρωτογενὴς μοχλός, ὁ καρυοθραύστης εἶναι δευτερογενὴς καὶ ἡ πυράγρα τριτογενὴς μοχλός.

§ **81. Συνθῆκαι ἰσορροπίας μοχλοῦ.** Ἵνα μοχλὸς ἰσορροπῇ πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

α΄) Ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ὑπομοχλίου.

β') Αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις, ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ τὸ ὑπομόχλιον νὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

γ') Αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς μοχλοβραχίονας αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἵνα αἱ δυνάμεις Δ_1, Δ_2 ἰσορροπῶσι, πρέπει ἡ συνισταμένη αὐτῶν Σ, ἥτις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ ταύτας, νὰ καταστρέφηται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὑπομοχλίου· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ διέρχηται δι' αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς δυνάμεις $\Delta_1, \Delta_2, \Sigma$ ἰσορροποῦσιν ἕπεται (§ 14) ὅτι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ.

Ἐὰν τέλος ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Varignon πρὸς κέντρον ροπῆς Γ καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι

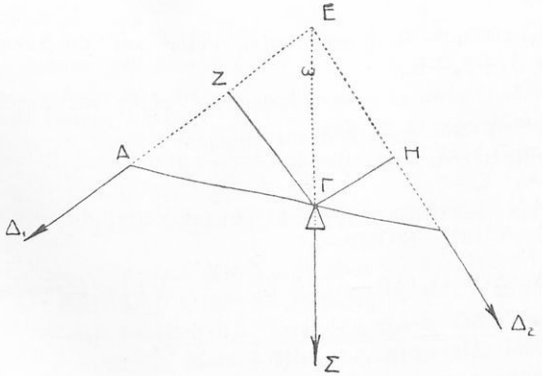
(ροπὴ Δ_1)$=\Delta_1$ (ΓΖ), (ροπὴ Δ_2)$=-\Delta_2$ (ΓΗ) καὶ (ροπὴ Σ)$=0$,

εὑρίσκομεν ὅτι Δ_1 (ΓΖ)$-\Delta_2$(ΓΗ)$=0$, ὅθεν

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Gamma H}{\Gamma Z}. \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (1), θὰ εἶναι καὶ Δ_1(ΓΖ)$-\Delta_2$(ΓΗ)$=0$, ἢ (ροπὴ Σ)$=0$. Διέρχεται ἄρα ἡ Σ διὰ τοῦ Γ· ἐπειδὴ δὲ ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ.

§ **82. Πίεσις ἐπὶ τοῦ ὑπομοχλίου.** Ἐὰν ὁ μοχλὸς ὑπο-



Σχ. 56.

τεθῇ ἀβαρής, ἡ ἐπὶ τοῦ ὑπομοχλίου ἐξασκουμένη πίεσις Π ἰσοῦται πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης Σ τῶν Δ_1, Δ_2. Ἐπειδὴ δὲ

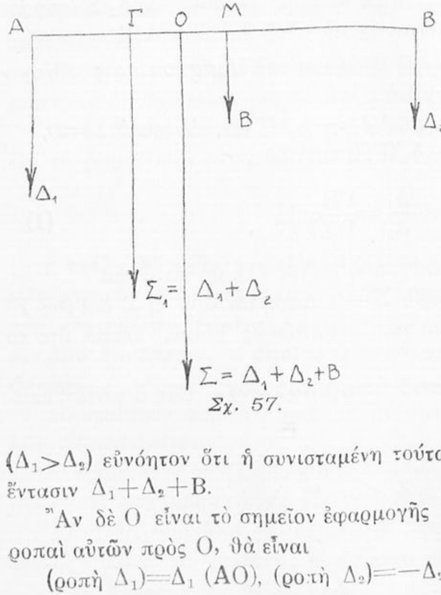
$\Sigma^2 = \Delta_1^{\,2} + \Delta_2^{\,2} + 2\Delta_1\Delta_2$ συν ω, ἕπεται ὅτι $\Pi = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \text{συν}\,\omega}$.

Ἐὰν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, θὰ εἶναι $\omega = 0$ καὶ συν $\omega = 1$. Ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται

$$\Pi = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Ἐὰν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι, θὰ εἶναι $\omega = 180^0$, συν $\omega = -1$ καὶ $\Pi = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2} = \Delta_1 - \Delta_2$.

§ **83. Συνθήκη ἰσορροπίας βαρέος μοχλοῦ.** Ἐν τῇ πραγματικότητι ὁ μοχλὸς οὐδέποτε εἶναι ἀβαρής. Ἑπομένως πρέπει νὰ λαμβάνηται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ βάρος του, ὅπερ ἐπιδρᾷ εἰς τὴν ἰσορροπίαν τοῦ μοχλοῦ. Πρὸς τοῦτο ἐπειδὴ ὁ μοχλὸς εἶναι συνήθως ὁμοιογενής, τὸ βάρος λογίζεται ὡς δύναμις κατακόρυφος ἐνεργοῦσα εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.



Σχ. 57.

Οὕτως, ἂν εἰς τὰ ἄκρα μοχλοῦ ΑΒ ἐνεργῶσιν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω αἱ κατακόρυφοι δυνάμεις Δ_1, Δ_2 $(\Delta_1 > \Delta_2)$ εὐνόητον ὅτι ἡ συνισταμένη τούτων καὶ τοῦ βάρους Β ἔχει ἔντασιν $\Delta_1 + \Delta_2 + B$.

Ἂν δὲ Ο εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς καὶ ληφθῶσιν αἱ ῥοπαὶ αὐτῶν πρὸς Ο, θὰ εἶναι

(ῥοπὴ Δ_1) $= \Delta_1$ (ΑΟ), (ῥοπὴ Δ_2) $= -\Delta_2$(ΟΒ), (ῥοπὴ Β) $= -$Β (ΟΜ) καὶ (ῥοπὴ Σ) $= 0$.

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ Θεώρημα τοῦ Varignon, εὑρίσκομεν ὅτι

$\Delta_1(AO) - \Delta_2(BO) - B(OM) = 0$,

ὅθεν $\Delta_1\,(AO) = \Delta_2\,(AB - AO) + B\left(\dfrac{AB}{2} - AO\right)$, ἐξ ἧς εὐκόλως προκύπτει ὅτι

$$\frac{AO}{AB} = \frac{2\,\Delta_2 + B}{2\,(\Delta_1 + \Delta_2 + B)} = \frac{2\,\Delta_2 + B}{2\,\Sigma}.$$

Τροχαλίαι καὶ πολύσπαστα.

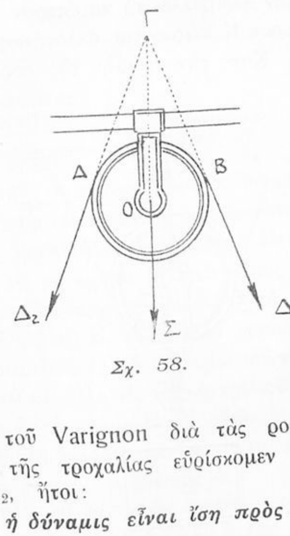
§ **84. Ὁρισμὸς καὶ εἴδη τροχαλιῶν.** *Τροχαλία εἶναι κυκλικὸς δίσκος στρεπτὸς περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ* *κέντρου αὐτοῦ καὶ κάθετον ἐπ᾽ αὐτόν. Φέρει δὲ ὁ δίσκος οὗτος κατὰ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ αὔλακα, ἧς μέρος περιβάλλεται ὑπὸ νήματος ἢ ἁλύσσου, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ὁποίων ἐνεργεῖ ἡ δύναμις καὶ ἡ ἀντίστασις.*

Πολλάκις ὁ ἄξων τῆς τροχαλίας εἶναι στερεῶς μετ᾽ αὐτῆς προσηρμοσμένος, ὅτε ὁ ἄξων οὗτος στηρίζεται εἰσδύων ἐντός ὀπῶν κειμένων ἐπὶ τῶν σκελῶν τροχαλιοθήκης καὶ δύναται νὰ στρέφηται ἐντὸς αὐτῶν.

Ἐὰν στρεφομένης τῆς τροχαλίας περὶ τὸν ἄξονά της οὗτος μένῃ ἀμετάθετος ἐν τῷ χώρῳ, ἡ τροχαλία καλεῖται ***παγία***. Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ἀλλάσσῃ θέσιν ἐν τῷ χώρῳ, ἐν ᾧ ἡ τροχαλία στρέφεται περὶ αὐτόν, ἡ τροχαλία καλεῖται ***ἐλευθέρα***.

§ **85. Συνθήκη ἰσορροπίας παγίας τροχαλίας.** Ἐὰν παγία τροχαλία Ο ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν δυνάμεων Δ_1, Δ_2 ἰσορροπῇ, ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων ὡς ἐξουδετερουμένη διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ δὲ τρεῖς δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Σ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (§ 14).

Ἀντιστρόφως: Ἂν ἡ Σ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος, αὕτη ἐξουδετεροῦται ὑπ᾽ αὐτοῦ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ τροχαλία ἰσορροπῇ.



Σχ. 58.

Ὥστε: ***Ἵνα παγία τροχαλία ἰσορροπῇ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ συνισταμένη αὐτῶν νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς.***

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὸ θεώρημα τοῦ Varignon διὰ τὰς ῥοπὰς τῶν Δ_1, Δ_2, Σ πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta_2\,(OA)-\Delta_1\,(OB)=0$, ὅθεν $\Delta_1=\Delta_2$, ἤτοι:

Ἂν παγία τροχαλία ἰσορροπῇ, ἡ δύναμις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀντίστασιν.

Ἀντιστρόφως: Ἂν εἶναι $\Delta_1=\Delta_2$, θὰ εἶναι καὶ $\Delta_1\,(OB)=\Delta_2(OA)$, ὅθεν $\Delta_2(OA)-\Delta_1(OB)=0$ ἢ (ῥοπὴ Δ_1)+(ῥοπὴ Δ_2)=0. Ἐπειδὴ δὲ (ῥοπὴ Δ_1)+(ῥοπὴ Δ_2)=(ῥοπὴ Σ), ἕπεται ὅτι (ῥοπὴ Σ)=0 καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ Σ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ δὲ τροχαλία ἰσορροπεῖ.

Ἄρα: ***Ἂν ἡ δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστασιν, ἡ παγία τροχαλία ἰσορροπῇ.***

§ **86. Πίεσις τοῦ ἄξονος παγίας τροχαλίας.** Ἡ πίεσις Π, ἣν ὁ ἄξων παγίας τροχαλίας ἰσορροπούσης ὑφίσταται, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης τῶν ὑπ᾽ αὐτῆς ἐνεργουσῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστὸν (§ 20), εἶναι

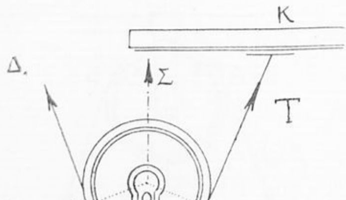
$$\Sigma=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2\,\text{συν}\,\Gamma}=\sqrt{2\Delta_1^2(1+\text{συν}\,\Gamma)}=2\Delta_1\,\text{συν}\frac{\Gamma}{2},$$ ἕπεται ὅτι καὶ

$$\Pi=2\Delta_1\,\text{συν}\frac{\Gamma}{2}$$

Ἐὰν τὰ νήματα, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ὁποίων ἐνεργεῖ ἡ δύναμις καὶ ἡ ἀντίστασις εἶναι παράλληλα, θὰ εἶναι $\Gamma=0$, $\text{συν}\frac{\Gamma}{2}=1$ καὶ $\Pi=2\Delta_1$.

§ **87. Ἐλευθέρα τροχαλία καὶ συνθήκη ἰσορροπίας αὐτῆς.** Ἡ τροχαλιοθήκη ἐλευθέρας τροχαλίας φέρει ἄγκιστρον, δι᾽ οὗ κρέμαται τὸ βάρος, ἤτοι ἡ πρὸς ὑπερνίκησιν ἀντίστασις· τὸ δὲ σχοινίον περιβάλλει τὸ κατώτερον μέρος τοῦ λαιμοῦ αὐτῆς καὶ τὸ μὲν ἄκρον Κ στερεοῦται ἀκλονήτως, εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἐνεργεῖ ἡ δύναμις.

Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἰσορροπίας τὸ νῆμα ΑΚ ὑφίσταται τάσιν, ἣν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς δύναμιν Τ ἐνεργοῦσαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΚ. Αἱ δυνάμεις δὲ Δ, Τ, Α κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ τέμνει τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας εἴς τι σημεῖον Ο.



Σχ. 59.

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν πρὸς στιγμὴν τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας ἀκίνητον, ἡ τροχαλία μεταβάλλεται εἰς παγίαν χωρὶς ἡ ἰσορροπία αὐτῆς νὰ διαταραχθῇ. Ἀλλὰ τότε ἡ συνισταμένη Σ τῶν Δ καὶ Τ ἐξουδετερουμένη ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως Α ἔχει ἔντασιν ἴσην πρὸς τὴν Α, ἀντίθετον φορὰν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος· διὰ τὸν τελευταῖον δὲ λόγον ἡ ῥοπὴ αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ (ῥοπή. Δ) $=-\Delta(OB)$, (ῥοπή. Τ) $=T(OA)$, ἕπεται, κατὰ τὸ Θεώρημα τοῦ Varignon, ὅτι

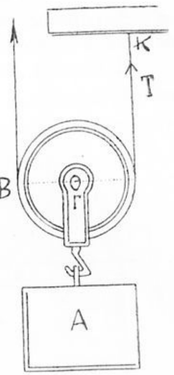
$$-\Delta\,(OB)+T\,(OA)=0, \text{ ὅθεν } \Delta=T.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Sigma^2=\Delta^2+T^2+2\Delta T\,\text{συν}\,\omega=2\Delta^2(1+\text{συν}\,\omega)=4\Delta^2\text{συν}^2\frac{\omega}{2}$,

ἕπεται ὅτι $\Sigma=2\Delta\,\text{συν}\frac{\omega}{2}$, ὅθεν καὶ $A=2\Delta\,\text{συν}\frac{\omega}{2}$.

Ἐὰν τὰ νήματα ΒΔ, ΑΚ εἶναι παράλληλα, εἶναι $\omega=0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}=1$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $A=2\Delta$.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τοῦ Varignon διὰ τὰς ῥοπὰς πρὸς κέντρον Κ. Οὕτω (ῥοπ. Δ)$=-\Delta.$ (ΒΓ), (ῥοπὴ Α)$=$Α(ΟΓ) καὶ (ῥοπ. Τ)$=0$· ἄρα $-\Delta(\text{ΒΓ})+A(\text{ΟΓ})=0$, ὅθεν $A(\text{ΟΓ})=2\Delta(\text{ΟΓ})$ καὶ $A=2\Delta$ [1].



Σχ. 60.

Ὅταν λοιπὸν τὰ νήματα εἶναι παράλληλα, ἡ ἰσορροπουμένη ἀντίστασις εἶναι διπλασία τῆς δυνάμεως, δι' ἧς ἐπιτυγχάνεται ἡ ἰσορροπία.

ΣΗΜ. Εἶναι εὐνόητον ὅτι μετὰ τῆς ἀντιστάσεως Α θεωρεῖται συνηνωμένον καὶ τὸ βάρος τῆς τροχαλίας μετὰ τῆς τροχαλιοθήκης αὐτῆς.

Ἡ ἐλευθέρα τροχαλία σπανίως χρησιμοποιεῖται μόνη· συνηθέστατα συνδυάζεται μετὰ παγίας τροχαλίας.

§ **88. Πολύσπαστα.** Διὰ τὴν ὑπερνίκησιν μεγάλων ἀντιστάσεων, ἰδίᾳ διὰ τὴν ἀνύψωσιν βαρέων σωμάτων διὰ μικρῶν σχετικῶς δυνάμεων χρησιμοποιοῦμεν τὰ ***πολύσπαστα,*** ἅτινα εἶναι ὄργανα σχηματιζόμενα διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ ἐλευθέρων καὶ παγίων τροχαλιῶν. Οὕτως εἰς τὸ σχῆμα (61) τὸ βάρος Α κρέμαται ἐκ τῆς τροχαλιοθήκης πρώτης ἐλευθέρας τροχαλίας Ο· τὸ ἓν ἄκρον τοῦ νήματος ταύτης στερεοῦται εἰς τὸ **Ε**, τὸ δὲ ἄλλο προσδένεται εἰς τὴν τροχαλιοθήκην δευτέρας τροχαλίας Ο΄· τὸ ἓν ἄκρον τοῦ νήματος ταύτης προσδένεται εἰς τὸ Ζ, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὴν τροχαλιοθήκην τρίτης ἐλευθέρας τροχαλίας Ο΄΄, ἧς τὸ νῆμα ὂν προσδεδεμένον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου εἰς τὸ Η διαπερᾷ τὸν λαιμὸν παγίας τροχαλίας Π. Εἰς τὸ ἐλεύθερον δὲ ἄκρον αὐτοῦ ἐνεργεῖ ἡ δύναμις Δ.

Ἐὰν τὰ νήματα εἶναι ὅλα παράλληλα, αἱ τάσεις Δ_1 ἑκατέρου τῶν νημάτων τῆς τροχαλίας Ο εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ $2\Delta_1=A$, ἕπεται ὅτι $\Delta_1=\frac{A}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δύναμις $\Delta_1=\frac{A}{2}$ ἐνεργεῖ ὡς ἀντίστασις εἰς τὴν τροχαλίαν Ο΄, ἕπεται ὅτι $\Delta_2=\frac{A}{2 \cdot 2}=\frac{A}{2^2}$. Ἐπειδὴ τέλος ἡ Δ_2 ἐνεργεῖ ὡς ἀντίστασις εἰς τὴν Ο΄΄, ἕπεται ὅτι $\Delta=\frac{A}{2^3}$.

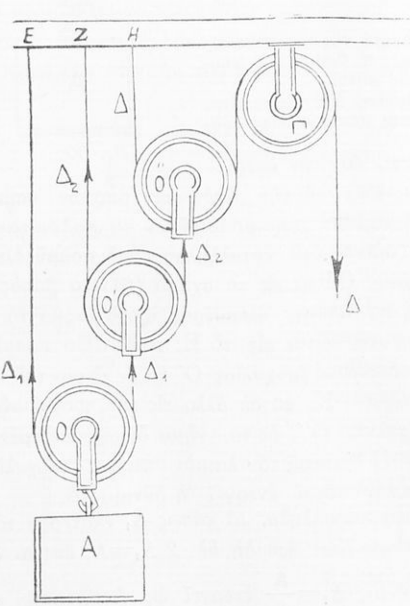
---

(1) Ὁ ἀναγινώσκων παρακαλεῖται νὰ θέσῃ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ δίσκου καὶ τῆς ΤΚ τὸ γράμμα Γ.

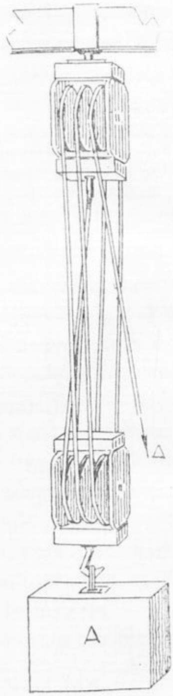
῾Ομοίως βεβαιούμεθα ὅτι, ἂν αἱ ἐλεύθεραι τροχαλίαι εἶναι ν, θὰ εἶναι $\Delta = \frac{A}{2^{\nu}}$, ἤτοι:

῾Η δύναμις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀντίστασιν διαιρουμένην διὰ τῆς δυνάμεως τοῦ 2, ἥτις ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν.

῾Η τοιαύτη ὅμως διάταξις σπανίως ἐφαρμόζεται ἐν τῇ πράξει ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῆς ἐξευρέσεως πολλῶν ἀκλονήτων σημείων προσδέσεως τῶν νημάτων. Συνηθεστέρα ἐν τῇ πράξει εἶναι ἡ ἀκόλουθος διά-

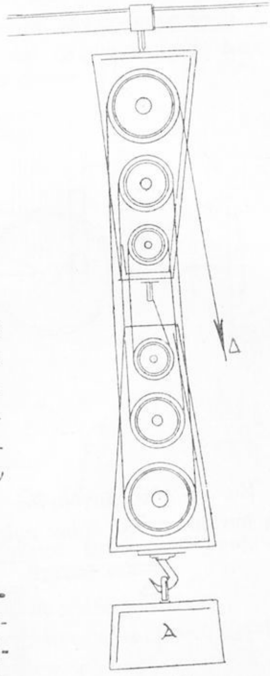


Σχ. 61.



Σχ. 62.

ταξις. Ἐν παγίᾳ τροχαλιοθήκῃ (Σχ. 62) ὑπάρχουσιν ἴσαι τροχαλίαι περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα στρεφόμεναι καὶ ἰσάριθμοι ἐν ἄλλῃ ἐλευθέρᾳ τροχαλιοθήκῃ, ἥτις φέρει ἄγκιστρον, ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος. Τὸ νῆμα στερεούμενον εἰς σημεῖον τῆς παγίας τροχαλιοθήκης καὶ κατερχόμενον περιβάλλει τὸν λαιμὸν τῆς α΄ τροχαλίας τῆς ἐλευθέρας τροχαλιοθήκης· εἶτα ἀνερχόμενον περιβάλλει τὸν λαιμὸν τῆς α΄ παγίας τροχαλίας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν ἑκάστη τροχαλιοθήκη ἔχει ν τροχαλίας, τὰ τμήματα τοῦ νήματος, ἅτινα ἐνεργοῦσι διὰ τῆς τάσεώς των ἐπὶ τῶν τροχαλιῶν εἶναι 2ν. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι ἐξ ἴσου τεταμένα, ἡ δὲ τὴν τάσιν προκαλοῦσα αἰτία εἶναι ἡ ἀντίστασις Α, ἕπεται ὅτι ἡ τάσις ἑκάστου εἶναι $\frac{A}{2\nu}$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ δύναμις Δ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τάσιν ἑνὸς τῶν σχοινίων τούτων εἶναι $\frac{A}{2\nu}$, ἤτοι $\Delta = \frac{A}{2\nu}$.



Σχ. 63.

Ἐνίοτε σχ. (63) αἱ τροχαλίαι ἑκατέρας τροχαλιοθήκης εἶναι ἄνισοι καὶ στρέφονται περὶ διαφόρους ἀλλὰ παραλλήλους ἄξονας. Καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἰσχύει ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα συνθήκη ἰσορροπίας καὶ εὑρίσκεται πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

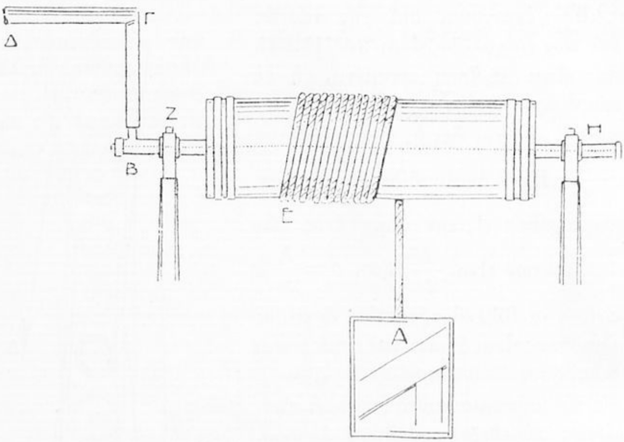
Βαροῦλκα.

§ **89. Κοινὸν βαροῦλκον.** Τὸ κοινὸν βαροῦλκον ἀποτελεῖται ἐκ κυλίνδρου ξυλίνου ἢ μεταλλικοῦ. Κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τούτου διαπερᾷ αὐτὸν σιδηρᾶ ῥάβδος, ἥτις στηρίζεται ἑκατέρωθεν ἐπὶ ἀκλονήτων ὑποστηριγμάτων, περὶ τὰ ὁποῖα δύναται νὰ στρέφηται. Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου περιελίσσεται νῆμα οὗ τὸ μὲν ἓν ἄκρον προσδένεται στερεῶς εἴς τι σημεῖον Ε τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου ἄκρου κρέμαται τὸ βάρος Α.

Εἰς τὸ ἄκρον στροφάλου ΒΓ καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐνεργεῖ ἡ δύναμις Δ καθέτως πρὸς τὸ στρόφαλον. Ὅταν στρεφομένου τοῦ κυλίνδρου τὸ νῆμα περιελίσσηται περὶ αὐτόν, τὸ βάρος Α ἀνέρχεται.

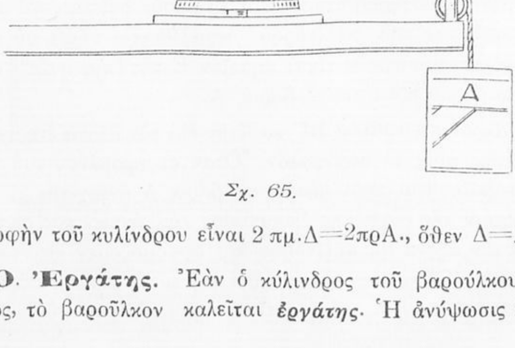
Πρὸς εὕρεσιν τῆς συνθήκης ἰσορροπίας εὑρίσκομεν τὰς ῥοπὰς τῶν Δ καὶ Α πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐφαρμόζομεν εἶτα τὸ θεώρημα τοῦ Varignon. Οὕτω παριστῶντες διὰ τοῦ μ τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου ΒΓ καὶ διὰ ρ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν ὅτι:

(ῥοπὴ Δ)=Δ μ, (ῥοπὴ Α)=—Α.ρ καὶ (ῥοπὴ Σ)=0. Κατ' ἀκολουθίαν δὲ τοῦ Θεωρήματος του Varignon εἶναι Δμ=Αρ, ὅθεν $Δ=Α\cdot\frac{ρ}{μ}$.



Σχ. 64.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταλήγομεν ἐκφράζοντες ὅτι τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἔργον τῆς ἀντιστάσεως. Οὕτω διὰ

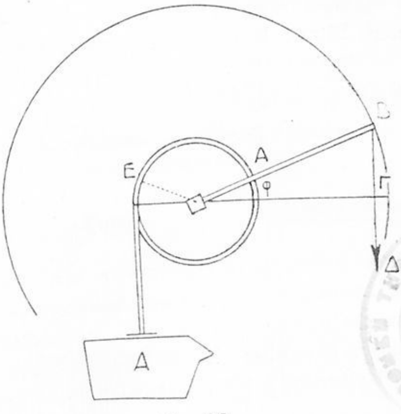


Σχ. 65.

μίαν στροφὴν τοῦ κυλίνδρου εἶναι 2 πμ.Δ=2πρΑ., ὅθεν $Δ=Α\cdot\frac{ρ}{μ}$.

§ **90. Ἐργάτης.** Ἐὰν ὁ κύλινδρος τοῦ βαρούλκου εἶναι κατακόρυφος, τὸ βαροῦλκον καλεῖται ***ἐργάτης***. Ἡ ἀνύψωσις δὲ βαρέων σωμάτων διὰ τοῦ ἐργάτου γίνεται παρεντιθεμένης παγίας τροχαλίας, ὡς τὸ σχῆμα (65) δεικνύει.

§ **91. Βαροῦλκον ὀρυχείων.** Τοῦτο διαφέρει τοῦ κοινοῦ βαρούλκου, διότι εἰς τὸν ἄξονά του στερεοῦται μέγας τροχὸς ἔχων τὸ κέντρον του ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου καὶ φέρων κατὰ τὴν περιφέρειάν του βαθμίδας, ἐφ᾽ ὧν ἀναρριχώμενοι ἐργάται στρέφουσι διὰ τοῦ βάρους των τὸν τροχὸν καὶ μετ᾽ αὐτοῦ τὸν κύλινδρον τοῦ βαρούλκου.



Σχ. 66.

Τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ βαρούλκου τούτου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ διήκουσα μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, ρ ἡ ἀκτὶς του κυλίνδρου καὶ φ ἡ γωνία ὁριζοντίου διαμέτρου τοῦ τροχοῦ μετὰ τῆς ἀκτῖνος OB, εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἐργάτας βάρους Δ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἰσορροπίας.

Ἐπειδὴ πρὸς ἄξονα ῥοπῆς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου εἶναι $(\text{ροπὴ } A) = \rho A$, $(\text{ροπὴ } \Delta) = -\Delta.(O\Gamma) = -\Delta R \text{συν}\,\varphi$ καὶ $(\text{ροπὴ } \Sigma) = 0$, ἕπεται ὅτι $A\rho - \Delta R \text{συν}\,\varphi = 0$, ὅθεν $A\rho = \Delta R \text{συν}\,\varphi$.

§ **92. Διαφορικὸν βαροῦλκον.** Τὸ διαφορικὸν βαροῦλκον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κυλίνδρους διαφόρου πάχους καὶ ἔχοντας κοινὸν ἄξονα στροφῆς. Τοῦ σχοινίου ἀμφότερα τὰ ἄκρα εἶναι στερεῶς προσδεδεμένα ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν κυλίνδρων τούτων καὶ διατίθεται τοῦτο οὕτως ὥστε στρεφομένου τοῦ κυλίνδρου ἓν μέρος νὰ περιτυλίσσηται περὶ τὸν παχύτερον κύλινδρον, ἕτερον δὲ νὰ ἐξελίσσηται ἀπὸ τὸν λεπτότερον. Τὸ ἐλεύθερον δὲ τμῆμα τοῦ νήματος διαπερᾷ τὸ κατώτερον μέρος τοῦ λαιμοῦ ἐλευθέρας τροχαλίας, ἐκ τῆς τροχαλιοθήκης τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος.

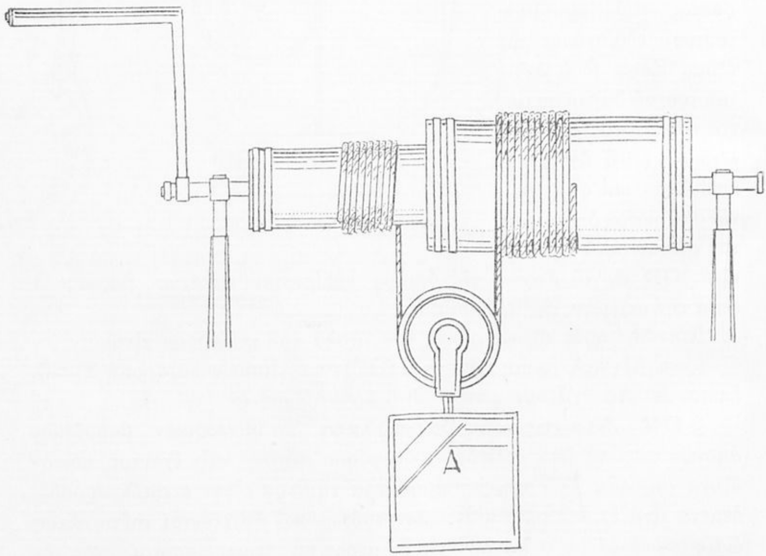
Τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ βαρούλκου τούτου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Θεωροῦμεν τὰ ἐλεύθερα μέρη τοῦ νήματος ὡς ἔγγιστα παράλληλα καὶ τεινόμενον ἕκαστον ὑπὸ δυνάμεως $\frac{A}{2}$. Ἐὰν δὲ P εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ παχυτέρου κυλίνδρου, ρ ἡ τοῦ λεπτοτέρου καὶ μ τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου μέχρι τοῦ κοινοῦ ἄξονος καὶ λάβωμεν τὰς ροπὰς πρὸς τὸν κοινὸν ἄξονα τῶν κυλίνδρων, εὑρίσκομεν

ὅτι: (ροπὴ Δ)=Δ. μ, $\left(\text{ροπὴ}\ \frac{A}{2}\right)=\frac{A}{.2}\cdot\rho$, $\left(\text{ροπὴ}\ \frac{A}{2}\right)=-\frac{A}{2}P$ καὶ

(ροπὴ Σ)=0. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα τοῦ Varignon εἶναι

$$\Delta\mu+\frac{A}{2}(\rho-P)=0, \text{ ὅθεν } \Delta=\frac{(P-\rho)A}{2\mu}.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταλήγομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ὅταν τὸ στρό-



Σχ. 67.

φαλον ἐκτελέσῃ μίαν στροφήν, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς Δ γράφει περιφέρειαν μήκους 2 πμ. Τὸ δὲ σχοινίον ἑλίσσεται μὲν εἰς τὸν μέγαν κύλινδρον κατὰ μῆκος 2πP, ἐξελίσσεται δὲ ἀπὸ τὸν μικρὸν κατὰ μῆκος 2πρ˙ ὥστε τὸ ἐλεύθερον τμῆμα τοῦ σχοινίου βραχύνεται κατὰ 2π (P — ρ), ἤτοι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως ἀνυψοῦται κατὰ π (P—ρ).

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἔργον τῆς μὲν δυνάμεως εἶναι $2\pi\mu\Delta$, τῆς δὲ ἀντιστάσεως $A\pi\,(P-\varrho)$, ἕπεται ὅτι $2\pi\mu\Delta = A\pi\,(P-\varrho)$, ὅθεν $\Delta = \frac{A(P-\varrho)}{2\mu}$.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι διὰ τοῦ διαφορικοῦ βαρούλκου ὡρισμένην ἀντίστασιν Α ἰσορροποῦμεν διὰ δυνάμεως Δ, ἥτις εἶναι κλάσμα τῆς Α τόσῳ μικρότερον, ὅσῳ ἡ διαφορὰ $P-\varrho$ εἶναι μικροτέρα, τὸ δὲ μ μεγαλύτερον.

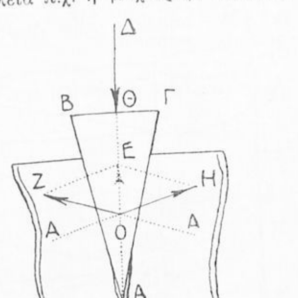
Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι $P-\varrho<P$ καὶ $2\mu>\mu$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{P-\varrho}{2\mu}<\frac{P}{\mu}$ καὶ ἑπομένως $A.\frac{P-\varrho}{2\mu}<A.\frac{P}{\mu}$. Ἄρα: Ὡρισμένην ἀντίστασιν Α ἰσορροποῦμεν διὰ τοῦ διαφορικοῦ βαρούλκου μὲ δύναμιν μικροτέραν ἢ διὰ κοινοῦ βαρούλκου ἀκτῖνος Ρ καὶ μήκους στροφάλου μ.

Σφήν.

§ 93. Περιγραφὴ καὶ συνθήκη ἰσορροπίας σφηνός.

Ὁ σφὴν εἶναι ὀξὺ τριγωνικὸν πρίσμα συνήθως ἰσοσκελές. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀξείας ἀκμῆς ἕδρα τοῦ σφηνὸς καλεῖται ***κεφαλὴ*** αὐτοῦ, ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτῆς δίεδρος γωνία καλεῖται γωνία αὐτοῦ.

Σφῆνες εἶναι τὰ διάφορα τμητικὰ ἐργαλεῖα π.χ. ἡ μάχαιρα, ὁ πέλεκυς κτλ. Χρησιμεύει δὲ διὰ τὸν ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀποχωρισμὸν τῶν μερῶν στερεοῦ σώματος.



Σχ. 68.

Ἵνα εἰσαχθῇ ἐντὸς στερεοῦ ὁ σφήν, πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ καθέτως ἐπὶ τὴν κεφαλήν του δύναμις Δ. Εἰς ταύτην ἀντιτάσσεται ἡ ἐκ μέρους τοῦ στερεοῦ ἐξασκουμένη ἀντίστασις, ἥτις ἐκδηλοῦται διὰ δύο δυνάμεων Α καθέτων ἐπὶ τὰ εἰσχωρήσαντα μέρη τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας τοῦ σφηνός.

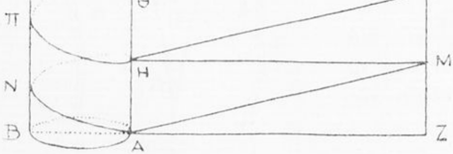
Ἵνα δὲ ὑπάρξῃ ἰσορροπία, πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν ἴσων δυνάμεων Α νὰ ἐξουδετερώνῃ τὴν δύναμιν Δ· θὰ κεῖνται ἄρα αἱ δύο δυνάμεις Α καὶ ἡ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἂν δὲ μεταφέρωμεν αὐτὰς εἰς τὸ σημεῖον Ο, καθ᾽ ὃ ἕνεκα τῆς συμμετρίας αἱ διευθύνσεις αὐτῶν τέμνουσι τὸ ὕψος τῆς τριγωνικῆς τομῆς ΑΒΓ καὶ συνθέσωμεν ταύτας, εὑρίσκομεν συνισταμένην ΟΕ, ἡ ὁποία, ὡς ἰσορροποῦσα τὴν Δ, εἶναι ἀντίρροπος καὶ ἴση τὴν ἔντασιν πρὸς αὐτήν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΟΖΕ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως εἶναι $\frac{ΟΕ}{ΒΓ}=\frac{ΟΖ}{ΑΓ}$ ἢ $\frac{Δ}{ΒΓ}=\frac{Α}{ΑΓ}$, ὅθεν $Δ=Α\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΘΓ προκύπτει ὅτι $(ΘΓ)=(ΑΓ)ἡμ\frac{ω}{2}$ καὶ ἑπομένως $ΒΓ=2\,(ΑΓ)\,ἡμ\frac{ω}{2}$. Ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται:

$$Δ=2Α\;ἡμ\frac{ω}{2}.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι: ***Ἡ πρὸς εἴσδυσιν τοῦ σφηνὸς ἀπαιτουμένη δύναμις εἶναι μικροτέρα· ὅταν ἡ γωνία ω αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα, ἤτοι ὅταν ὁ σφὴν εἶναι ὀξύτερος.***

Κοχλίας.

§ **94**. **Στερεὰ ἕλιξ.** Ἔστω ΑΒΓΔ κύλινδρος καὶ ΑΔΕΖ ὀρθογώνιον φύλλον χάρτου ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ ἔχον βάσιν ΑΖ ἴσην πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Νοήσωμεν τὸ ὕψος ΑΔ διῃρημένον εἰς ἴσα μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΔ καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἂς φέρωμεν εὐθείας ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ, ΔΕ παραλλήλους τῇ βάσει ΑΖ τοῦ ὀρθογωνίου· ἂς φέρωμεν δὲ καὶ τὰς διαγωνίους ΑΜ, ΗΛ, ΘΚ, ΙΕ τῶν ὀρθογωνίων, εἰς ἃ οὕτω διῃρέθη τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΖ.



Σχ. 69.

Ἤδη ἂς τοποθετήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον φύλλον χάρτου οὕτως ὥστε τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ μιᾶς γεννετείρας τοῦ κυλίνδρου καὶ ἂς περιτυλίξωμεν εἶτα αὐτὸ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΖ αὐτοῦ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἑκάστη δὲ τῶν παραλλήλων αὐτῇ εὐθειῶν ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ, ΔΕ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ περιφερειῶν τομῶν τοῦ κυλίνδρου παραλλήλων τῇ βάσει ΑΒ αὐτοῦ. Ἕνεκα τούτου τὰ σημεῖα Μ, Λ, Κ, Ε θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τῶν Η, Θ, Ι, Δ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ διαγώνιοι ΑΜ, ΗΛ, ΘΚ, ΙΕ θὰ περιελιχθῶσι κατὰ τὴν καμπύλην γραμμὴν ΑΝΗΠΘΡΙΣΔ, ἥτις εἶναι συνεχής· διότι ἡ εὐθεῖα ΑΜ ἑλίσσεται κατὰ τὴν ΑΝΗ, ἥτις λήγει εἰς τὸ Η, ὁπόθεν ἄρχεται τὸ μέρος ΗΠΘ, καθ' ὃ ἑλίσσεται ἡ ΗΛ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

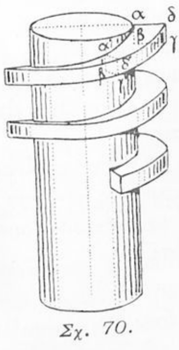
Ἡ καμπύλη ΑΝΗ . . . ΙΣΔ θὰ παρήγετο καὶ ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΗΛ, ΘΚ, ΙΕ ἔκειντο διαδοχικῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΜ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον φύλλον περιελίσσετο τετράκις περὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Καλεῖται δὲ ἡ καμπύλη αὕτη ***στερεὰ ἕλιξ***.

Ἕκαστον τῶν τόξων ΑΝΗ, ΗΠΘ, ΘΡΙ ΙΣΔ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς αὐτῆς γεννετείρας, καλεῖται δὲ ***σπεῖρα*** τῆς ἕλικος.

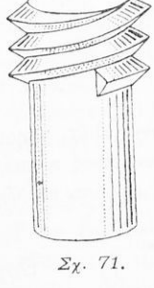
Ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων ἑκάστης σπείρας καλεῖται ***βῆμα*** τῆς ἕλικος.

§ **95. Γέννεσις καὶ συνθήκη ἰσορροπίας κοχλίου.** Νοήσωμεν μικρὸν ὀρθογώνιον φύλλον αβγδ, οὗ μία πλευρὰ αβ ἐφαρμόζει ἐπὶ μιᾶς γεννετείρας ὀρθοῦ κυλίνδρου, οὕτως ὥστε τὸ ἐπίπεδον αβγδ τοῦ ὀρθογωνίου νὰ περιέχῃ τὸν ἄξονα ΚΛ τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν τὸ αβγδ κινῆται οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἐπίπεδον αὐτοῦ νὰ περιέχῃ τὸν ἄξονα ΚΛ, τὰ δὲ σημεῖα του νὰ διαγράφωσιν ἕλικας τοῦ αὐτοῦ βήματος, τὸ ὀρθογώνιον αβγδ γράφει στερεὸν αβγδα'β'γ'δ', ὅπερ μετὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖ τὸν κοχλίαν. Ὁ τοιοῦτος κοχλίας καλεῖται ***τετραγωνικός***.

Ἐὰν τὸ κινούμενον ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον οὗ ἡ



Σχ. 70.



Σχ. 71.

βάσις ἐφαρμόζει ἐπὶ μιᾶς γεννετείρας τοῦ κυλίνδρου, ὁ κοχλίας καλεῖται ***τριγωνικός*** (σχ. 71).

Τὸ σταθερὸν βῆμα ἑκάστης τῶν ἑλίκων, ἃς διαγράφουσι τὰ σημεῖα τοῦ κινουμένου ἐπιπέδου, καλεῖται καὶ ***βῆμα*** τοῦ κοχλίου. Ὁ κοχλίας κινεῖται συνήθως ἐντὸς ἑτέρου κοχλίου, ὅστις κατασκευάζεται ἐντὸς τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ἴσου πρὸς τὸν πρῶτον κυλίνδρου καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ βῆμα. Ὁ δεύτερος οὗτος κοχλίας καλεῖται ἰδιαιτέρως ***περικόχλιον***.

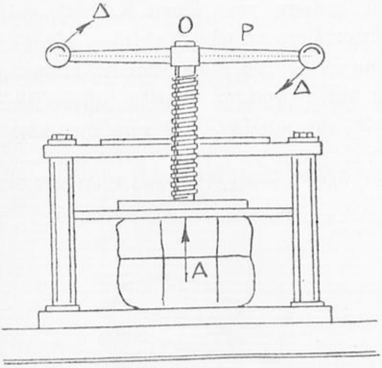
Γίνεται δὲ ἡ κίνησις τοῦ κοχλίου ἐντὸς τοῦ περικοχλίου διὰ στροφῆς τῇ βοηθείᾳ στροφάλου περὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ.

Ἐνίοτε ὁ κοχλίας ἐργάζεται ἄνευ περικοχλίου, ὅτε εἰσδύει ἐντὸς τοῦ ξύλου καὶ σκάπτει ἐντὸς αὐτοῦ ἀντίστοιχον περικόχλιον.

Τὴν συνθήκην τῆς ἰσορροπίας κοχλίου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ὁ βραχίων ΟΒ στραφῇ ὁλόκληρον στροφήν, ὁ κοχλίας στρεφόμενος ἐπίσης ὁλόκληρον στροφὴν προχωρεῖ ἐντὸς τοῦ περικοχλίου κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς τὸ βῆμα β τοῦ κοχλίου. Καὶ τὸ σημεῖον δὲ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως Α ὠθούμενον ὑπὸ τοῦ κοχλίου διανύει μῆκος β. Κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ μὲν ἔργον τῆς δυνάμεως Δ εἶναι $2\pi\rho\Delta$, τὸ δὲ τῆς ἀντιστάσεως εἶναι $A\beta$. Ἵνα δὲ ὑπάρχῃ ἰσορροπία πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $2\pi\rho\Delta = A\beta$, ὅθεν

$$\Delta = A \cdot \frac{\beta}{2\pi\rho}.$$



Σχ. 72.

Κατὰ ταῦτα ἡ πρὸς ὑπερνίκησιν ἀντιστάσεως Α ἀπαιτουμένη δύναμις Δ εἶναι μικροτέρα, ἂν τὸ βῆμα εἶναι μικρότερον καὶ ἂν τὸ μῆκος ρ τοῦ στροφάλου εἶναι μεγαλύτερον.

Ὁ κοχλίας εἶναι χρησιμώτατον ὄργανον, διότι χρησιμοποιοῦμεν αὐτὸν πρὸς σύνδεσιν διαφόρων ἀντικειμένων, πρὸς πίεσιν, πρὸς ἐλαφρὰν μετατόπισιν βαρέων σωμάτων, πρὸς μέτρησιν μικρῶν ἀποστάσεων κτλ.

Ὄργανα σταθμίσεως.

§ 96 Ζυγός. Ὁ λόγος τοῦ βάρους σώματος πρὸς ὡρισμένον καὶ γνωστὸν βάρος, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς, καλεῖται ***σχετικὸν βάρος*** τοῦ σώματος ἐκείνου.

Ὁ ζυγὸς εἶναι ὄργανον, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰ σχετικὰ βάρη τῶν σωμάτων.

Ὁ κοινὸς ζυγὸς σύγκειται ἀπὸ πρωτογενῆ μοχλὸν ΑΒ δύσκαμπτον, ὁ ὁποῖος καλεῖται ***φάλαγξ***. Ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς φάλαγγος ἐξαρτῶνται τὰ τάλαντα ἢ οἱ δίσκοι Π, Π΄. Ἡ φάλαγξ διαπερᾶται εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως ὑπὸ χαλύβδίνου πρίσματος, οὗτινος ἡ ἀκμὴ πρὸς τὰ κάτω φερομένη στηρίζεται ἐπὶ δύο ἐπιπέδων ἐκ χάλυβος ἢ ἀχάτου φερομένων ἐπὶ κατακορύφου ὑποστηρίγματος. Οὕτως ἡ ἀκμὴ αὕτη ἀποτελεῖ ὁριζόντιον ἄξονα, περὶ τὸν ὁποῖον ἡ φάλαγξ δύναται νὰ στρέφηται ἐλευθέρως.

Εἰς ἑκάτερον δὲ τῶν ἄκρων της φέρει ἡ φάλαγξ πρίσμα ἐκ χάλυβος μὲ τὴν ἀκμὴν πρὸς τὰ κάτω καὶ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς τῆς φάλαγγος. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ τούτων ἐξαρτῶνται δι᾽ ἀγκίστρων τὰ τάλαντα. Πρέπει δὲ τὰ δύο σημεῖα ἐξαρτήσεως τῶν δίσκων καὶ τὸ μέσον τῆς κεντρικῆς ἀκμῆς νὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ ἰσορροπία τῆς φάλαγγος.

Αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων ἀκμῶν ἀπὸ τῆς κεντρικῆς ἀκμῆς καλοῦνται ***βραχίονες τῆς φάλαγγος***.

Εἰς τὸ μέσον τῆς φάλαγγος στερεοῦται καθέτως πρὸς αὐτὴν βελόνη ἡ ὁποία στρέφεται ἔμπροσθεν διῃρημένου τόξου. Ὅταν ἡ βελόνη δεικνύῃ τὴν διαίρεσιν 0, ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως.

Τὸ ὑποστήριγμα, ἐφ᾽ οὗ ἐρείδεται ἡ μεσαία ἀκμὴ τῆς φάλαγγος στηρίζεται ἐπὶ ἰσοπεδωτικῶν κοχλιῶν, ὥστε νὰ δύναται νὰ κατασταθῇ ἀκριβῶς κατακόρυφον.

Ὁ ζυγὸς ὀφείλει νὰ ἔχῃ τὰς ἑξῆς ἀρετάς. α΄) Νὰ εἶναι ***ἀκριβής***, β΄) Νὰ εἶναι ***εὐαίσθητος*** καὶ γ΄) Νὰ εἶναι ***πιστὸς*** ἢ ***ἔμμονος***.

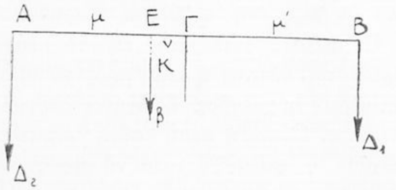
§ **97. Συνθῆκαι ἀκριβείας ζυγοῦ.** Ὁ ζυγὸς λέγεται ***ἀκριβής***, ἂν διὰ μιᾶς σταθμίσεως παρέχῃ τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος, Εὐνόητον ὅτι ἡ φάλαγξ τοιούτου ζυγοῦ πρέπει νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως, ὅταν ἀφαιρεθῶσιν οἱ δίσκοι, ὅταν οὗτοι εἶναι κενοὶ καὶ ὅταν φέρωσιν ἴσα βάρη.

Τὰς συνθήκας τῆς ἀκριβείας ζυγοῦ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν μ καὶ μ' οἱ βραχίονες ζυγοῦ, Γ τὸ ὑπομόχλιον, β τὸ βάρος τῆς φάλαγγος, ν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς φάλαγγος ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ Γ διερχομένης κατακορύφου, ὅταν ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ καὶ Δ_1, Δ_2 τὰ ἴσα βάρη, τὰ ὁποῖα φέρουσιν οἱ δίσκοι.

Λαμβάνοντες τὰς ῥοπὰς τῶν Δ_1, Δ_2, β πρὸς τὸν ἄξονα στηρίξεως τῆς φάλαγγος εὑρίσκομεν ὅτι (ροπ. Δ_1)$=\Delta_1\mu$, (ροπ. β)$=\beta\nu$, (ροπ. Δ_2)$=-\Delta_2$ (ΓΒ)$=-\Delta_1\mu'$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μοχλὸς ἰσορροπεῖ, ειναι (ροπὴ Σ)$=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν.

$$\Delta_1\mu+\beta\nu-\Delta_1\mu'=0, \text{ ὅθεν } \Delta_1 (\mu-\mu')+\beta\nu=0.$$



Σχ. 73.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὀφείλει νὰ ἀληθεύῃ, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ Δ_1, ἕπεται ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\mu-\mu'=0$ καὶ $\beta\nu=0$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\mu=\mu'$ καὶ $\nu=0$. Ἄρα διὰ νὰ εἶναι ὁ ζυγὸς ἀκριβής, πρέπει:

α') *Οἱ βραχίονες αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσοι.*

β') ***Ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος ἀγομένη κατακόρυφος πρέπει νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος τῆς στηρίξεως τῆς φάλαγγος.***

Ἐπειδὴ δὲ ἡ φάλαγξ πρέπει νὰ ἰσορροπῇ καὶ μετὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν δίσκων κενῶν, ἕπεται ὅτι:

γ') ***Οἱ δίσκοι πρέπει νὰ εἶναι ἰσοβαρεῖς.***

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν ζυγός τις εἶναι ἀκριβής, παρατηροῦμεν πρῶτον, ἂν ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως ἄνευ δίσκων καὶ μὲ τοὺς δίσκους κενούς. Τούτου ἐκπληρουμένου ἡ κατακόρυφος τοῦ κέντρου βάρους τῆς φάλαγγος διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος στηρίξεως τῆς φάλαγγος καὶ οἱ δίσκοι εἶναι ἰσοβαρεῖς, ἤτοι ἐκπληροῦνται οἱ δυο ὅροι τῆς ἀκριβείας.

Θέτομεν ἔπειτα ἐπὶ τῶν δίσκων σώματα, οὕτως ὥστε ἡ φάλαγξ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως καὶ ἀντιμεταθέτομεν ταῦτα ἐπὶ τῶν δίσκων. Ἐὰν πάλιν ἡ ἰσορροπία τηρῆται, θὰ εἶναι $B\mu=B'\mu'$ καὶ $B'\mu=B\mu'$, ἐξ ὧν $BB'\mu^2=BB'\mu'^2$ καὶ $\mu=\mu'$, ἤτοι ἐκπληροῦται καὶ ὁ ἄλλος ὅρος τῆς ἀκριβείας.

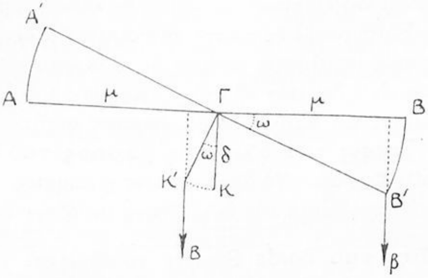
§ **98. Συνθῆκαι εὐπαθείας ζυγοῦ.** Ὁ ζυγὸς λέγεται ***εὐπαθής***, ὅταν ἡ φάλαγξ κλίνῃ ὑπὸ αἰσθητὴν γωνίαν προστιθεμένου ἐλαχίστου ἐπὶ πλέον βάρους ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δίσκου.

Τὰς συνθήκας τῆς εὐπαθείας ἀκριβοῦς ζυγοῦ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Ἔστω ΑΒ ἡ θέσις τῆς φάλαγγος ἰσορροπούσης ὁριζοντίως, μ τὸ μῆκος ἑκατέρου τῶν βραχιόνων ΑΓ καὶ ΓΒ, δ ἡ ἀπόστασις ΚΓ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος ἀπὸ τοῦ Γ καὶ Β τὸ βάρος τῆς φάλαγγος.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον Β προσθέσωμεν μικρόν τι βάρος β, ἡ φάλαγξ κλίνει καταλαμβάνουσα τὴν θέσιν Α'Β', ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ἀρχικῆς γωνίαν ω, τὸ δὲ κέντρον Κ ἀνέρχεται εἰς θέσιν Κ' τοιαύτην ὥστε εἶναι

$K\Gamma K' = B'\widehat{\Gamma}B = \omega$. Ἐὰν ἤδη εὕρωμεν τὰς ῥοπὰς τῶν B καὶ β πρὸς Γ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Varignon, εὑρίσκομεν ὅτι [1]

$$B\,(\Delta\Gamma) - \beta\,(\Gamma Z) = 0, \text{ ὅθεν } B\,(\Delta\Gamma) = \beta\,(\Gamma Z). \qquad (1)$$



Σχ. 74.

Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta\Gamma) = (\Gamma K')\eta\mu\omega = \delta\ \eta\mu\omega$ καὶ $(\Gamma Z) = (\Gamma B')\sigma\upsilon\nu\omega = \mu\sigma\upsilon\nu\omega$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $B\,\delta\eta\mu\omega = \beta\ \mu\sigma\upsilon\nu\omega$, ὅθεν προκύπτει ὅτι

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta\mu}{B\delta}. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ εφω αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται μετὰ τῆς ω διότι $\omega < 1$ ὀρθῆς, συμπεραίνομεν ἐκ τῆς ἰσότητος (2) ὅτι:

***α')* Ὁ ζυγὸς εἶναι περισσότερον εὐπαθής, ἂν τὸ μῆκος μ ἑκατέρου τῶν βραχιόνων εἶναι μεγαλύτερον.**

***β')* Ὁ ζυγὸς εἶναι εὐπαθέστερος, ἂν δ εἶναι μικρότερον, ἤτοι ἂν τὸ κέντρον τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος αὐτοῦ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸν ἄξονα στηρίξεως Γ.**

***γ')* Ὁ ζυγὸς εἶναι εὐπαθέστερος, ἂν ἡ φάλαγξ αὐτοῦ εἶναι ἐλαφροτέρα.**

Διὰ νὰ συμβιβασθῇ ὁ α' καὶ γ' τῶν ὅρων τούτων ἐκσκάπτουσι μέρος τῆς φάλαγγος προσέχοντες νὰ μὴ μειώσωσι τὴν δυσκαμψίαν αὐτῆς. Εὐνόητον ὅτι πλὴν τῶν ὅρων τούτων συντελεῖ εἰς τὴν μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν εὐπάθειαν τοῦ ζυγοῦ καὶ ἡ μείζων ἢ ἐλάσσων τριβὴ κατὰ τὰ σημεῖα στηρίξεως τῆς φάλαγγος. Ὁ ζυγὸς δηλ. εἶναι εὐπαθέστερος, ἂν ἡ τριβὴ αὕτη εἶναι ὅσῳ τὸ δυνατὸν μικροτέρα. Διὰ τοῦτο ἡ φάλαγξ στηρίζεται πάντοτε δι' ὀξείας ἀκμῆς καὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν αὕτη στηρίζεται πρέπει νὰ εἶναι πολὺ σκληρὰ (χάλυψ, ἀχάτης λίθος).

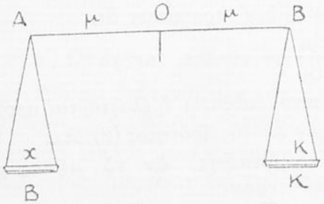
§ **99. Πίστις ζυγοῦ.** Ὁ ζυγὸς λέγεται ***πιστὸς*** ἢ ***ἔμμονος***,

(1) Ὁ ἀναγινώσκων παρακαλεῖται νὰ θέσῃ τὸ γράμμα Δ εἰς τὴν τομὴν τῆς ΑΓ καὶ ΒΚ', τὸ δὲ Ζ εἰς τὴν τομὴν τῆς ΓΒ καὶ βΒ'.

ὅταν διατηρῇ τὴν εὐαισθησίαν καὶ ἀκρίβειαν αὐτοῦ καὶ μετὰ τὴν χρῆσίν του. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πρέπει ἡ φάλαγξ νὰ εἶναι δύσκαμπτος, ἂν δὲ κατὰ τὴν ζύγισιν κάμπτηται ὀλίγον, πρέπει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν βαρῶν συνεπείᾳ τῆς ἐλαστικότητος αὐτῆς νὰ ἐπαναλαμβάνῃ τὸ ἀρχικόν της σχῆμα. Εὐνόητον δὲ ἐκ τούτου καθίσταται ὅτι δὲν πρέπει νὰ ζυγίσωμεν βάρη πολὺ μεγαλύτερα ἐκείνων, δι᾽ ἃ ἐκ κατασκευῆς προορίζεται. Διότι ἄλλως εἶναι δυνατὸν νὰ γείνῃ ὑπέρβασις τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος τῆς φάλαγγος καὶ μόνιμος παραμόρφωσις αὐτῆς.

§ **100. Εὕρεσις τοῦ ἀληθοῦς βάρους τοῦ σώματος δι' ἀνακριβοῦς ζυγοῦ.** Τὸ ἀληθὲς βάρος χ σώματος εὑρίσκομεν καὶ δι᾽ ἀνακριβοῦς ζυγοῦ κατὰ τὰς ἀκολούθους μεθόδους διπλῆς σταθμήσεως.

α΄) Μέθοδος τοῦ Borda. Θέτομεν τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δίσκων ζυγοῦ, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄλλου θέτομεν ἄμμον ἢ χόνδρους μολύβδου, μέχρις οὗ ἡ φάλαγξ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ σῶμα καὶ θέτομεν εἰς τὴν θέσιν του σταθμά, δι᾽ ὧν ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ πάλιν ὁριζοντίως. Τὰ σταθμὰ ταῦτα Β παριστῶσι τὸ βάρος τῆς φάλαγγος. Τῷ ὄντι ἂν Κ εἶναι τὸ βάρος τῆς ἄμμου, ἕνεκα τῆς α΄ ἰσορροπίας εἶναι $\chi\mu = K\mu'$, ἕνεκα δὲ τῆς β΄ εἶναι $B\mu = K\mu'$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\chi\mu = B\mu$, ὅθεν $\chi = B$.



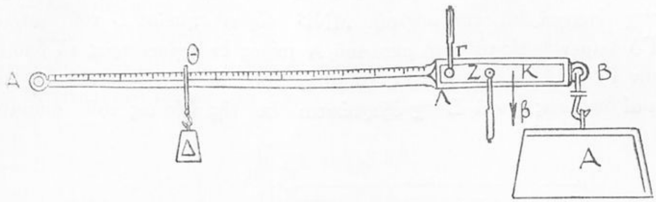
Σχ. 75.

β΄). Θέτομεν τὸ σῶμα εἰς τὸν ἕνα δίσκον τοῦ ζυγοῦ, εἰς δὲ τὸν ἄλλον σταθμὰ Β δι᾽ ὧν ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως. Θέτομεν ἔπειτα τὸ σῶμα εἰς τὸν ἄλλον δίσκον, ἀφ᾽ οὗ ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτοῦ τὰ σταθμά, καὶ εἰς τὸν ἄλλον σταθμὰ Β΄ δι᾽ ὧν πάλιν ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως. Ἕνεκα τῆς α΄ ἰσορροπίας εἶναι $\chi\mu = B\mu'$, ἕνεκα δὲ τῆς β΄ ἰσορροπίας εἶναι $\chi\mu' = B'\mu$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\chi^2\mu\mu' = B'B\mu\mu'$, ὅθεν $\chi^2 = BB'$ καὶ $\chi = \sqrt{BB'}$.

§ **101. Στατήρ.** Ὁ στατὴρ σύγκειται ἐκ μεταλλικῆς εὐθείας φάλαγγος ΑΓΒ, ἥτις στρέφεται περὶ ἄξονα Γ ἐξαρτώμενον διὰ δακτυλίου ἐξ ὡρισμένου σημείου. Ἡ φάλαγξ ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἄνισα μέρη ΑΛ καὶ ΛΒ, ὧν τὸ ἐπιμηκέστερον ΑΛ εἶναι λεπτότερον. Ἐκ τοῦ ἄκρου Β κρέμαται ἄγκιστρον ἢ δίσκος, ἐφ᾽ οὗ τίθεται τὸ σταθμητέον σῶμα, ἐν ᾧ κατὰ μῆκος τοῦ ΛΑ κινεῖται ὡρισμένον βάρος Δ, τὸ ὁποῖον κοινῶς λέγεται ***βαρίδι*** καὶ λαμβάνει καθ᾽ ἑκάστην ζύγισιν τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ἰσορροπῇ ἡ φάλαγξ ὁριζοντίως.

Φέρει δὲ τὸ τμῆμα ΑΛ τῆς φάλαγγος διαιρέσεις, αἱ ὁποῖαι χαράσσονται ὡς ἑξῆς. Κατὰ πρῶτον κανονίζεται τὸ βαρίδιον Δ οὕτως ὥστε ἡ φάλαγξ νὰ ἰσορροπῇ, ὅταν τὸ βαρίδιον εἶναι εἰς τὸ Λ καὶ οὐδὲν σῶμα κρέμαται ἐκ τοῦ Β. Μετὰ ταῦτα κρεμῶμεν ἐκ τοῦ Β ὡρισμένον βάρος 100, 200, 300, 400... δραμίων καὶ εἰς τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τοῦ βαριδίου κατὰ τὴν ἰσορροπίαν χαράσσομεν σημεῖον δηλοῦν τὸ ἀντίστοιχον τῶν ῥηθέντων βαρῶν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσορροπίας τοῦ στατῆρος ἐργαζό-



Σχ. 76.

μεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν εἶναι β τὸ βάρος τοῦ στατῆρος, Κ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Varignon πρὸς κέντρον ῥοπῆς Γ, εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta(\Theta\Gamma)=\beta(\Gamma K)+A(\Gamma B)$ (1)

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν οὐδὲν κρέμαται ἐκ τοῦ στατῆρος βάρος, εἶναι $\Delta(\Gamma\Lambda)=\beta(K\Gamma)$, ἕπεται δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ὅτι

$$\Delta(\Theta\Lambda)=A(\Gamma B),\quad \text{ὅθεν}\quad \Delta=A.\frac{\Gamma B}{\Theta\Lambda}.$$

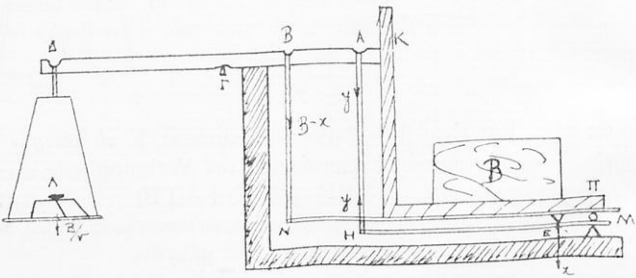
Ἐὰν ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ, ὅταν τὸ βαρίδιον κρέμαται ἐκ τοῦ ἄκρου Α τοῦ βραχίονος, τὸ κρεμάμενον βάρος Α΄ ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $\Delta=A'\,\frac{\Gamma B}{A\Lambda}$.

Διὰ βάρη μεγαλύτερα τοῦ Α΄ ἀντιστρέφομεν τὴν φάλαγγα καὶ ἐξαρτῶμεν αὐτὴν ἀπὸ ἄλλο σημεῖον πλησιέστερον πρὸς τὸ Β. Ἡ ἤδη δὲ ὑπεράνω ἕδρα τῆς φάλαγγος φέρει ἄλλας διαιρέσεις ὁμοίως χαρασσομένας.

102. Πλάστιγξ ἢ ζυγὸς τοῦ Quintenz. Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν πλάκα Π, ἐφ' ἧς τίθεται τὸ σταθμητέον σῶμα καὶ μεθ' ἧς συνάπτεται ἑτέρα κατακόρυφος πλὰξ Κ. Ἡ πλὰξ Π διὰ τοῦ μοχλοῦ ΜΝΒ κρέμαται ἐκ τοῦ σημείου Β ἑτέρου πρωτογενοῦς μοχλοῦ ΑΓΔ (Γ ὑπομόχλιον) καὶ ἀφ' ἑτέρου δι' ἀκμῆς Ε στηρίζεται ἐπὶ ἑτέρου δευτερογενοῦς μοχλοῦ ΟΕΗ, ὅστις διὰ στελέχους ΗΑ τέμνοντος αὐτὸν καθέτως ἐνεργεῖ εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ μοχλοῦ ΑΓΔ. Τέλος ἐκ τοῦ ἄκρου

Λ τοῦ αὐτοῦ μοχλοῦ κρέμαται δίσκος, ἐφ᾽ οὗ τίθενται τὰ σταθμά. Οταν ἡ πλάστιγξ εἶναι κενή, ἰσορροπεῖ οὕτως ὥστε οἱ μοχλοὶ ΟΗ καὶ ΑΔ νὰ εἶναι ὁριζόντιοι, τὰ δὲ στελέχη ΗΑ, ΝΒ νὰ εἶναι κατακόρυφα.

῞Ας ζητήσωμεν ἤδη τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ ἐκπληρῶνται, ὅπως βάρος Β τιθέμενον ἐπὶ τῆς πλακὸς Π ἰσορροπῆται διὰ βάρους $\frac{B}{\nu}$ τεθειμένου ἐπὶ τοῦ δίσκου Λ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι μέρος χ τοῦ βάρους Β ἐνεργεῖ εἰς τὸ Ε ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ ΟΗ καὶ δι᾽ αὐτοῦ εἰς τὸ ἄκρον Α τοῦ μοχλοῦ ΑΓΔ· τὸ δὲ ὑπολειπόμενον μέρος Β—χ ἐνεργεῖ διὰ τοῦ μοχλοῦ ΜΝΒ εἴς τι σημεῖον Β τοῦ μοχλοῦ ΑΓΔ κείμενον εἰς τὸ αὐτὸ μετὰ τοῦ Α μέρος ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὑπομόχλιον Γ, ἀλλ᾽ ἐγγύτερον πρὸς τοῦτο ἢ πρὸς τὸ Α. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι αἱ δυνάμεις χ καὶ Β—χ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σώματος



Σχ. 77.

ἐπὶ τῆς πλακὸς Π, ἤτοι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰ Ε καὶ Ν.

῞Οταν ἡ πλάστιγξ ἰσορροπῇ, οἱ μοχλοὶ ΟΗ καὶ ΑΔ κρατοῦνται ὁριζόντιοι διὰ δυνάμεων y ἴσων καὶ ἀντιρρόπων, ἤτοι ὁ ΑΔ ἕλκεται κατὰ τὸ Α πρὸς τὰ κάτω διὰ δυνάμεως y, ἐν ᾧ ὁ ΟΗ ἕλκεται κατὰ τὸ Η πρὸς τὰ ἄνω δι᾽ ἴσης ἀντιδράσεως y. ᾽Εφαρμόζοντες ἤδη τὸ θεώρημα τοῦ Varignon πρὸς κέντρον ῥοπῆς Γ εὑρίσκομεν

$$y\,(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{B}-\chi)(\mathrm{B\Gamma})=\frac{\mathrm{B}}{\nu}(\Gamma\Delta).$$

᾽Αλλ᾽ ἕνεκα τῆς ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ ΟΗ εἶναι $y\,(\mathrm{OH})=\chi(\mathrm{OE})$.
᾽Εξαλείφοντες μεταξὺ τούτων τὸν y εὑρίσκομεν

$$\chi\cdot\frac{(\mathrm{OE})}{(\mathrm{OH})}(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{B}-\chi)\,(\mathrm{B\Gamma})=\frac{\mathrm{B}}{\nu}(\Gamma\Delta),\quad \text{ὅθεν}$$

$$\nu\chi(OE)\,(A\Gamma)+\nu B(B\Gamma)\,(OH)-\nu\chi(B\Gamma)\,(OH)=B(\Gamma\Delta)\,(OH) \text{ ἢ}$$
$$[(OE)\,(A\Gamma)-(B\Gamma)\,(OH)]\;\nu\chi+B(OH)[\nu(B\Gamma)-(\Gamma\Delta)]=0.$$

Ἵνα δὲ αὕτη ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ καὶ B, πρέπει νὰ εἶναι $(OE)\,(A\Gamma)=(B\Gamma)(OH)$ καὶ $\nu\,(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)$, ὅθεν

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{OH}{OE} \text{ καὶ } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{\nu}.$$

Κατὰ τὴν κατασκευὴν λοιπὸν λαμβάνεται πρόνοια, ὅπως οἱ βραχίονες ΑΓ καὶ ΒΓ ὦσιν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ΟΗ καὶ ΟΕ, ὁ δὲ ΒΓ εἶναι, ὅσας θέλομεν φοράς, μικρότερος τοῦ ΓΔ. Ἐὰν $\nu=10$, ἡ πλάστιγξ ἰσορροπεῖ διὰ σταθμῶν τινων δεκαπλάσιον βάρος καὶ λέγεται ***δεκατεύουσα***. Ἐὰν $\nu=100$, ἰσορροπεῖ βάρος ἑκατονταπλάσιον τῶν σταθμῶν καὶ λέγεται ***ἑκατοστεύουσα*** κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47) Ράβδος ὑποτιθεμένη ἀβαρὴς διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὑπομοχλίου εἰς 2 μέρη, ὧν τὸ ἓν διπλάσιον τοῦ ἄλλου. Εἰς τὸ ἄκρον δὲ τοῦ μικροτέρου βραχίονος ἐνεργεῖ βάρος 30 χιλιογράμμων. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ὅπως ἡ ράβδος ἰσορροπῇ; Πόσην δὲ τότε ὑφίσταται πίεσιν τὸ ὑπομόχλιον;

48) Ράβδος ΑΒ ὑποτιθεμένη ἀβαρὴς διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὑπομοχλίου Ο οὕτως ὥστε ΟΑ : ΟΒ = 1 : 2. Ἐὰν εἰς τὸ Α ἐνεργῇ βάρος 30 χιλιογράμμων, πόσην δύναμιν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς διευθύνσεως τοῦ βάρους γωνίαν 60° πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ Β, ὅπως ἡ ράβδος ἰσορροπῇ; Πόσην δὲ πίεσιν δέχεται τότε τὸ ὑπομόχλιον;

49) Μοχλὸς ὁμοιομερὴς ΑΒ βάρους 4 χιλιογράμμων καὶ μήκους 1 μέτρου στηρίζεται εἰς σημεῖον Ο ἀπέχον 0,33 μ. τοῦ Α. Ἐὰν εἰς τὸ Β ἐνεργῇ βάρος 100 χιλιογράμμων, πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ Α, ὅπως ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ;

50) Ράβδος ΑΒ στηριζομένη εἴς τι σημεῖον Γ αὐτῆς ἰσορροπεῖ, ἂν εἰς μὲν τὸ Α ἐνεργῇ βάρος 27 χιλιογράμμων, εἰς δὲ τὸ Β κρέμαται σῶμα Σ. Ἂν μεταφέρωμεν τὸ Σ εἰς τὸ Α, ἀρκεῖ πρὸς τήρησιν τῆς ἰσορροπίας νὰ ἐξαρτήσωμεν ἐκ τοῦ Β βάρος 12 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ Σ.

51) Διὰ παγίας τροχαλίας ἰσορροποῦμεν βάρος 100 χιλιογράμμων. Πόσην πίεσιν δέχεται ὁ ἄξων αὐτῆς, ἂν τὸ νῆμα περιβάλλῃ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας αὐτῆς;

52) Μὲ πόσην δύναμιν ἰσορροποῦμεν βάρος $30\sqrt{2}$ χιλιογράμμων διὰ μέσου ἐλευθέρας τροχαλίας, ἂν τὰ νήματα σχηματίζωσιν ὀρθὴν γωνίαν;

53) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου κοινοῦ βαρούλκου εἶναι 0,10 μ, τὸ δὲ μῆκος τοῦ στροφάλου λογιζόμενον μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦ βαρούλκου εἶναι 0,66 μ. Ἐὰν τὸ νῆμα εἶναι κυλινδρικὸν διαμέτρου 0,03μ, κρέμαται δὲ ἐξ αὐτοῦ βά-

ρος 120 χιλιογράμμων ἐνεργοῦν κατὰ τὸν ἄξονα τοῦ νήματος, πόση δύναμις σορροπεῖ τὸ βάρος τοῦτο;

54) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου βαρούλκου ὀρυχείων εἶναι 0,20 μ, ἡ δὲ τοῦ τροχοῦ αὐτοῦ 2 μέτρα. Ἐργάτης βάρους 75 χιλιογράμμων στηρίζεται ἐπὶ τῆς βαθμίδος, ἥτις κεῖται εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἥτις σχηματίζει γωνίαν 45° μετὰ τῆς ὁριζοντίου διαμέτρου. Πόσον βάρος ἰσορροπεῖ οὗτος;

55) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία σφηνός, ὅπως οὗτος ἰσορροπῇ διὰ δυνάμεως ἴσης πρὸς τὴν ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας αὐτοῦ ἐξασκουμένην πίεσιν;

56) Ἐὰν τὸ στρόφαλον κοχλίου ἔχῃ μῆκος 0,5 μέτρου, ἰσορροποῦμεν διὰ δυνάμεως χιλιοπλασίαν ἀντίστασιν. Πόσον εἶναι τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου;

57) Ὁ μεγαλύτερος βραχίων ἀνακριβοῦς ζυγοῦ εἶναι $\frac{101}{100}$ τοῦ μικροτέρου ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου βάρους τῆς φάλαγγος ἀγομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος στηρίξεως αὐτῆς. Ἔμπορος ἔκαμε δι' αὐτοῦ 100 σταθμήσεις θέτων κατὰ τὰς 50 τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δίσκου καὶ κατὰ τὰς ἄλλας ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ἐὰν πᾶσαι αἱ σταθμήσεις αὗται ἔδιδον βάρος τῶν ζυγιζομένων σωμάτων ἀνὰ 1 χιλιόγραμμον, ἔχασεν ἢ ἐκέρδισεν ὁ ἔμπορος καὶ πόσον;

58) Σῶμα τιθέμενον εἰς τὸν ἕνα δίσκον ζυγοῦ ἰσορροπεῖ διὰ βάρους Β χιλιογράμμων. Ἐὰν δὲ τεθῇ εἰς τὸν ἄλλον δίσκον, ἰσορροπεῖ διὰ βάρους (Β+β) χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος καὶ ὁ λόγος τῶν βραχιόνων, ἂν ἡ διὰ τοῦ κέντρου βάρους τῆς φάλαγγος ἀγομένη κατακόρυφος διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος στηρίξεως τῆς φάλαγγος.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

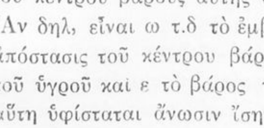
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ **103. Πίεσις ὑγροῦ ἐπὶ ἐπιφανείας βεβυθισμένης ἐντὸς αὐτοῦ.** Πειραματικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒ βεβυθισμένη ἐντὸς ἠρεμοῦντος ὑγροῦ δέχεται ἄνωσιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχει βάσιν μὲν τὴν πιεζομένην ταύτην ἐπιφάνειαν, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἂν δηλ. εἶναι ω τ.δ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας, υ δακ. ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ ε τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ τούτου, αὕτη ὑφίσταται ἄνωσιν ἴσην πρὸς ω.υ.ε. γραμμάρια ἢ 981ωυε dynes.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια ΑΒ ἰσορροπεῖ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, ἕπεται ὅτι δέχεται καὶ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω πίεσιν ἴσην πρὸς τὴν ῥηθεῖσαν ἄνωσιν.

§ **104. Θεμελιῶδες θεώρημα.** *Ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων δύο ἴσων ἐπιφανειῶν κειμένων εἰς διάφορα βάθη ἐντὸς ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχει βάσιν μίαν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ὕψος δὲ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν αὐτῶν.*

Ἂν ἑκατέρα τῶν ἐπιφανειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχῃ ἐμβαδὸν ω καὶ κληθῶσι Π, Π΄ αἱ πιέσεις, ἃς αὗται ὑφίστανται, θὰ εἶναι Π=ω.υ.ε καὶ Π΄=ω.υ΄ε, ὅθεν Π−Π΄=ω(υ−υ΄).ε ἢ Π−Π΄=ω.h.ε, ἔνθα h εἶναι ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ε δὲ τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ.



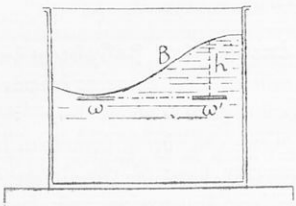
Σχ. 78.

Πόρισμα I. *Ἐντὸς ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἴσας ἐπιφανείας κειμένας εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον*

Διότι διὰ τοιαύτας ἐπιφανείας εἶναι h=0 καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται Π—Π′=0, ὅθεν Π=Π′.

Πόρισμα ΙΙ. ***Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὑγροῦ μακρὰν τῶν τοιχωμάτων δοχείου εἶναι ἐπίπεδον ὁριζόντιον.***

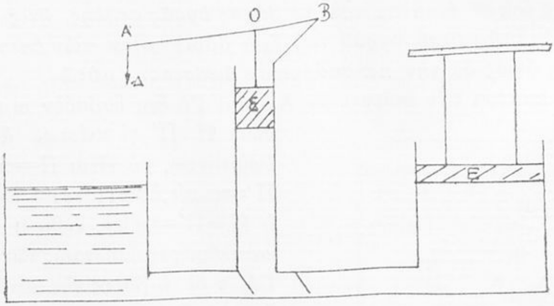
Ἐὰν αὕτη εἶχε σχῆμα ΑΒΓ διάφορον ὁριζοντίου ἐπιπέδου, δύο ἴσα στοιχεῖα ω καὶ ω′ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ τὸ μὲν ἓν εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τὸ δὲ ἄλλο εἰς βάθος h, θὰ ἐδέχοντο πιέσεις Π=ω.ε.0=0, Π′=ω.h.ε. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι Π=Π′, θὰ ἦτο ω.h.ε=0, ὅθεν h=0. Θὰ ἦτο ἄρα καὶ τὸ ω′ εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ἥτις οὕτω θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅπερ περιέχει τὸ ω.



Σχ. 79.

§ 105. Ἀρχὴ τοῦ Pascal. *Πᾶσα πίεσις ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὑγροῦ μεταδίδεται δι᾽ αὐτοῦ κατὰ πάσας τὰς διευθύνσεις ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου μέρους τῶν τοιχωμάτων μετ᾽ ἀναλόγου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἐντάσεως.*

Ἐὰν δηλ. ἐπὶ ἐπιφανείας Ε ἐπιφέρωμεν πίεσιν Π, πᾶν ἐπίπεδον μέρος τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου ἔχον ἐπιφάνειαν Ε′ δέχεται πίεσιν Π′. Τοιαύτην ὥστε Π : Π′=Ε : Ε′. Ἐὰν ὅθεν Ε=Ε′, θὰ εἶναι



Σχ. 80.

καὶ Π=Π′. Ἡ ἀλήθεια τῆς ἀρχῆς ταύτης ἀποδεικνύεται πειραματικῶς.

§ 106. Θεωρία ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μοχλοβραχίων ΑΒ τῆς δυνάμεως Δ εἶναι $\nu^{\text{πλάσιος}}$ τοῦ μοχλοβραχίονος ΟΒ τῆς ἀντιστάσεως. Καθ' ἣν στιγμὴν ὑπάρχει ἰσορροπία, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐν τῷ μικρῷ κυλίνδρῳ δέχεται πίεσιν Π_1 τοιαύτην ὥστε $\Delta : \Pi_1 = OB : AB$, ὅθεν $\Pi_1 = \Delta \cdot \frac{AB}{OB} = \Delta . \nu$.

Ἐὰν δὲ $E = \varepsilon . \mu$, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου ἐμβολέως δέχεται πίεσιν $\Pi = \Pi_1 . \mu$, ὅθεν $\Pi = \Delta \nu \mu$.

Ἐὰν π.χ. $\Delta = 10$ χιλιόγραμμα, $(AB) = 5(OB)$ καὶ $E = 40\varepsilon$, θὰ εἶναι $\Pi = 10.5.40 = 2000$ χιλιογράμμων.

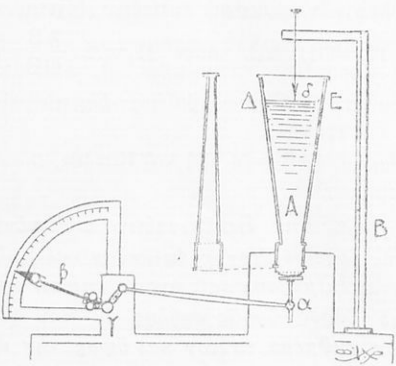
§ **107. Πίεσις ὑγροῦ ἐπὶ ὁριζοντίου πυθμένος.** ***Ἐὰν ὑγρὸν ἰσορροπῇ ἐντὸς δοχείου ἔχοντος ἐπίπεδον καὶ ὁριζόντιον πυθμένα, οὗτος δέχεται ἐκ μέρους τοῦ ὑγροῦ πίεσιν κατακόρυφον καὶ ἴσην πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ, ἥτις ἔχει βάσιν τὸν πυθμένα τοῦτον καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν τοῦ πυθμένος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.***

Ἀπόδειξις. Στοιχεῖόν τι τοῦ πυθμένος ἔχον ἐμβαδὸν ω_1 καὶ ἕτερον ἴσον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας δέχονται πιέσεις π_1 καὶ π τοιαύτας ὥστε (§ 104) νὰ εἶναι $\pi_1 - \pi = \omega_1 . \upsilon . \varepsilon$. Ἐπειδὴ δὲ $\pi = 0$, ἕπεται ὅτι $\pi_1 = \omega_1 . \upsilon . \varepsilon$. Ὁμοίως ἕτερον στοιχεῖον ω_2 τοῦ πυθμένος δέχεται πίεσιν $\omega_2 \upsilon \varepsilon$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ ὁλικὴ ἄρα πίεσις τοῦ πυθμένος Ε εἶναι $\Pi = \pi_1 + \pi_2 + .. + \pi_\nu = (\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_\nu) \upsilon \varepsilon$ ἢ $\Pi = E \upsilon \varepsilon$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐπιφερομένη πίεσις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σχήματος καὶ τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου, ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἐκ τῆς ἐκτάσεως τοῦ πυθμένος, ἐκ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑγροῦ. Πειραματικῶς βεβαιούμεθα περὶ τούτου διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ Haldat καὶ τῆς τοῦ Masson, ὧν περιγράφομεν δι' ὀλίγων τὴν δευτέραν.

Συσκευὴ Masson. Μικρὸς κύλινδρος Κ φέρει εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον του κοχλίαν, ὅστις δύναται νὰ εἰσδύῃ εἰς τὸ περικόχλιον διαφόρων δοχείων Α, Β, Γ, ὧν ἕκαστον δύναται ἐκ περιτροπῆς νὰ ἀποτελέσῃ ἓν δοχεῖον μετὰ τοῦ κυλίνδρου Κ. Τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ κυλίνδρου τούτου κλείεται διὰ τεταμένης μεμβράνης, ἥτις ἀποτελεῖ τὸν πυθμένα αὐτοῦ καὶ ἐρείδεται ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ μεγαλυτέρου βραχίονος ἐπικαμποῦς μοχλοῦ αγβ. Τὸ ἕτερον δὲ ἄκρον β τοῦ μοχλοῦ τούτου κινεῖται ἔμπροσθεν διῃρημένου τόξου, ὅταν ὁ μοχλὸς στρέφηται περὶ τὸ ὑπομόχλιον. Ἐπὶ κατακορύφου τέλος ἄξονος Β κινεῖται δείκτης δ, ὅστις τῇ βοηθείᾳ πιεστικοῦ κοχλίου στερεοῦται, εἰς οἵαν θέλομεν θέσιν. Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Κοχλιοῦμεν μετὰ τοῦ κυλίνδρου Κ δοχεῖον Α, καὶ ρίπτομεν ἐντὸς ὑγρὸν μέχρι τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΔΕ, εἰς τὴν θέσιν τοῦ ὁποίου στερεοῦμεν τὸν δείκτην δ. Οὕτω δὲ κατερχομένου ἕνεκα τῆς πιέσεως τοῦ ἄκρου α τοῦ μοχλοῦ, τὸ ἕτερον ἄκρον β στρέφεται ἔμπροσθεν τοῦ τόξου καὶ σταματᾷ πρὸ διαιρέσεώς τινος, ἣν σημειοῦμεν. Χύνομεν ἔπειτα τὸ ὑγρὸν καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ δοχείου Α κοχλιοῦμεν ἕτερον δοχεῖον Β διαφόρου σχήματος. Ἐὰν δὲ ρίψωμεν ἐντὸς αὐτοῦ ὑγρὸν τῆς αὐτῆς καὶ προηγουμένως φύσεως καὶ μέχρι τῆς θέσεως τοῦ δείκτου δ, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄκρον β ἵσταται πάλιν πρὸ τῆς αὐτῆς καὶ πρότερον διαιρέσεως. Τοῦτο συμβαίνει καὶ μὲ τρίτον, τέταρτον κτλ. δοχεῖον διαφόρων σχημάτων. Εἰς πάσας λοιπὸν τὰς περιπτώσεις ὁ μεμβρανώδης πυθμὴν ὑπέστη τὴν αὐτὴν πίεσιν, εἰ καὶ τὸ σχῆμα καὶ ἡ χωρητικότης τῶν δοχείων ἦτο διάφορος εἰς τὰς διαφόρους περιστάσεις.



Σχ. 81.

§ 108. Πιέσεις ἐπὶ τῶν παρειῶν δοχείου καὶ ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τοιχωμάτων αὐτοῦ. Ἡ θεωρητικὴ Μηχανικὴ ἀποδεικνύει ὅτι:

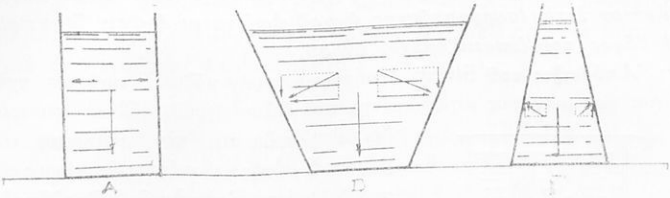
α'). Ἐὰν ὑγρὸν ἰσορροπῇ ἐν δοχείῳ, πᾶν ἐπίπεδον μέρος τῶν παρειῶν δέχεται πιέσεις, αἵτινες ἔχουσιν συνισταμένην κάθετον ἐπ᾽ αὐτὸ καὶ ἴσην πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ, ἥτις ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὸ πιεζόμενον τοῦτο μέρος τῶν παρειῶν καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὰ βαθύτερον κείμενα μέρη τῶν παρειῶν πιέζονται ἰσχυρότερον τῶν ὑψηλότερον κειμένων, τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ρηθείσης πιέσεως (κέντρον πιέσεως) κεῖται χαμηλότερον τοῦ κέντρου βάρους τοῦ πιεζομένου μέρους.

β') Ἐὰν ὑγρὸν ἰσορροπῇ ἐν δοχείῳ, ἐπιφέρει ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τοιχωμάτων του πιέσεις, ὧν ἡ συνισταμένη εἶναι δύ-

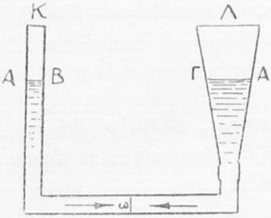
ναμις κατακόρυφος διευθυνομένη ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐμπεριεχομένου ὑγροῦ, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μορφὴ τοῦ δοχείου. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ πειραματικῶς τῇ βοηθείᾳ τοῦ ζυγοῦ.

§ **109. Ὑδροστατικὸν παράδοξον.** Θεωρήσωμεν τρία δοχεῖα Α, Β, Γ ἔχοντα ἴσους ὁριζοντίους πυθμένας καὶ πεπληρωμένα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ μέχρι τοῦ αὐτοῦ ὕψους υ. Ἕκαστος τῶν πυθμένων



Σχ. 82.

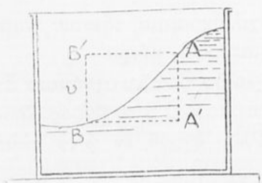
νων τούτων δέχεται πίεσιν ἴσην πρὸς ωυε, ἂν ω εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ ε τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ. Θὰ ἐνόμιζέ τις λοιπὸν ὅτι ἕκαστον τούτων τιθέμενον ἐπὶ τοῦ δίσκου ζυγοῦ θὰ ἰσορροπεῖτο διὰ βάρους ωυε ηὐξημένον κατὰ τὸ βάρος τοῦ δοχείου κενοῦ Τοῦτο ὅμως ἀληθεύει μόνον διὰ τὸ δοχεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι κυλινδρικόν. Τὸ Β ἰσορροπεῖται διὰ μείζονος βάρους καὶ τὸ Γ δι᾽ ἐλάσσονος, ἕκαστον δὲ διὰ βάρους ἴσου πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου ὑγροῦ ηὐξημένου κατὰ τὸ βάρος τοῦ δοχείου κενοῦ. Εἰς τοῦτο συνίσταται τὸ καλούμενον ***ὑδροστατικὸν παράδοξον***. Δὲν εἶναι ὅμως πράγματι παράδοξον, ἀλλ᾽ ἀναγκαία συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Τῷ ὄντι ἐπὶ τοῦ δίσκου τοῦ ζυγοῦ δὲν ἐπιδρᾷ μόνον ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐπιφερομένη πίεσις, ἀλλὰ καὶ αἱ ἐπὶ τῶν παρειῶν τοιαῦται. Αὗται ὅμως διὰ μὲν τὸ δοχεῖον Α ἐξουδεροῦσιν ἀλλήλας, διότι εἰς ἑκάστην τούτων ἀντιστοιχεῖ μία ἀντίρροπος καὶ ἴση· ἐπὶ τοῦ δίσκου λοιπὸν τοῦ ζυγοῦ ἐνεργεῖ μόνον ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος πίεσις ωυε. Διὰ τοῦτο αὕτη ἰσορροπεῖται δι᾽ ἴσου πρὸς ωυε βάρους. Ἑκάστη δὲ τῶν καθέτως ἐπὶ τῶν παρειῶν τοῦ Β ἐνεργουσῶν πιέσεων ἀναλύεται εἰς μίαν ὁριζόντιον καὶ μίαν κατακόρυφον συνιστῶσαν, ἥτις ἐνεργεῖ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἑκάστην ὁριζόντιον συνιστῶσαν ἀντιστοιχεῖ μία ἴση καὶ ἀντίρροπος, αὗται ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας· οὕτω δὲ μένουσιν αἱ κατακόρυφοι συνιστῶσαι, αἵτινες μετὰ τῶν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δοχεῖα ταῦτα, ἡ τομὴ αὕτη δέχεται ἀντιστοίχως πιέσεις Π=ωυε καὶ Π′=ωυ′ε, ἂν ε εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τομὴ ω ἰσορροπεῖ, εἶναι Π=Π′ καὶ ἑπομένως ωυε=ωυ′ε, ὅθεν υ=υ′. Κεῖται ἄρα εἰς ἀμφότερα τὰ δοχεῖα ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τῆς τομῆς ω. Ἐὰν δὲ τὸ κέντρον τοῦτο ἀπέχῃ τοῦ πυθμένος τοῦ σωλῆνος ἀπόστασιν α, αἱ ἐπιφάνειαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἀπέχουσι ἀπὸ τοῦ πυθμένος υ+α. Ἄρα: ***Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἐντὸς συγκοινωνούντων ἀγγείων κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.***



Σχ. 84.

§ 115. Ἰσορροπία ὑπερκειμένων ὑγρῶν ἐν δοχείῳ.

Ἐὰν ἐντὸς δοχείου θέσωμεν ὑγρὰ διαφόρου πυκνότητος, μὴ ἐπιδεκτικὰ μίξεως, μηδὲ διαλυόμενα ἐντὸς ἀλλήλων, ταῦτα ἐν ἰσορροπίᾳ διατίθενται συμφώνως μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ τὴν τάξιν τῆς πυκνότητος αὐτῶν, ἤτοι τὸ πυκνότερον κεῖται βαθύτερον, τὸ εὐθὺς ὀλιγώτερον πυκνὸν κεῖται ἄνωθεν αὐτοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

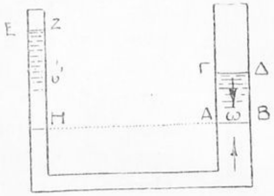


Σχ. 85.

Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ χωρισμοῦ δύο ὑπερκειμένων ὑγρῶν εἶναι ἐπίπεδον ὁριζόντιον.

Τῷ ὄντι: Ἔστωσαν ε καὶ ε′ τὰ εἰδ. βάρη ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ΒΑ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χωρισμοῦ δύο ὑγρῶν. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο ἴσα στοιχεῖα ἐμβαδοῦ ω ἕκαστον κείμενα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ χωρισμοῦ πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΑΒ′ δέχονται τὴν αὐτὴν πίεσιν Π καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Α′Β δέχονται ὁμοίως τὴν αὐτὴν πίεσιν Π′. Ἐπειδὴ δὲ τὰ στοιχεῖα Β καὶ Β′ κεῖνται ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ ὑπερκειμένου ὑγροῦ, θὰ εἶναι (§ 104)Π′—Π=ωευ. Ὁμοίως διὰ τὰ στοιχεῖα Α′ καὶ Α θὰ εἶναι Π′—Π=ωυε′. Θὰ εἶναι ἄρα ωευ=ωυε′, ὅθεν υ(ε′—ε)=0. Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι ε′—ε≠0, ἕπεται ὅτι υ=0, ἤτοι τὰ στοιχεῖα Α καὶ Β κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει δι' ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ χωρισμοῦ συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἐπίπεδον ὁριζόντιον.

§ **116. Ἰσορροπία δύο ἑτερογενῶν ὑγρῶν ἐντὸς συγκοινωνούντων ἀγγείων.** Ἔστω ΑΒ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χωρισμοῦ δύο ἑτερογενῶν ὑγρῶν, ε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ, ὅπερ ὑπέρκειται αὐτῆς καὶ υ ἡ ἀπόστασις ΑΓ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ΓΔ τοῦ ὑπερκειμένου ὑγροῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν ω εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ΑΒ, δέχεται ἐκ μέρους τοῦ ὑπερκειμένου ὑγροῦ πίεσιν ωυε. Ἂν δὲ ε′ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἄλλου ὑγροῦ καὶ υ′ ἡ ἀπόστασις ΖΗ τῆς ἐλευθέρας αὐτοῦ ἐπιφανείας ἀπὸ τῆς ΑΒ, αὕτη δέχεται καὶ ἐκ μέρους τοῦ ὑγροῦ τούτου πίεσιν ἀντίρροπον πρὸς τὴν προηγουμένην, καὶ ἴσην πρὸς ωυ′ε′. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι ωυε=ωυ′ε′, ὅθεν



Σχ. 86.

$$\frac{υ}{υ'}=\frac{ε'}{ε}.$$

Ἄρα: ***Αἱ ἀποστάσεις τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν δύο ἑτερογενῶν ὑγρῶν ἰσορροπούντων ἐντὸς συγκοινωνούντων ἀγγείων ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ χωρισμοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν.***

§ **117. Ἀραιόμετρα σταθεροῦ βάρους.** Τὰ ἀραιόμετρα τοῦ Nicholson καὶ Fahrenheit, ὧν τὴν περιγραφὴν καὶ χρῆσιν παραλείπομεν ὡς περιεχομένην εἰς ὅλα τὰ στοιχειώδη βιβλία Φυσικῆς, ἔχουσι σταθερὸν ὄγκον καὶ μεταβλητὸν βάρος, διότι ἀναγκάζομεν ταῦτα διὰ καταλλήλων προσθέτων βαρῶν νὰ καταδύωνται πάντοτε μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου. Πλὴν τούτων ὑπάρχουσι καὶ ἀραιόμετρα σταθεροῦ βάρους καὶ μεταβλητοῦ ὄγκου. Ταῦτα βυθίζονται ἑκάστοτε ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἀραιομέτρου. Κατ᾽ ἀκολουθίαν βυθίζονται περισσότερον εἰς τὰ ἀραιότερα καὶ ὀλιγώτερον εἰς τὰ πυκνότερα ὑγρά.

Ἕκαστον τούτων ἀποτελεῖται ἐξ ὑαλίνου σφαιρικοῦ ἢ κυλινδρικοῦ πλωτῆρος, ὅστις πρὸς τὰ ἄνω καταλήγει εἰς κυλινδρικὸν στέλεχος, εἰς δὲ τὸ κατώτερον μέρος φέρει σφαιρικὴν ἐξόγκωσιν περιέχουσαν ὑδράργυρον πρὸς ἑρματισμόν.

Ἀξιοσημείωτα τῶν ἀραιομέτρων τούτων εἶναι τὰ ἀκόλουθα.

α′) ***Πυκνόμετρον.*** Τοῦτο εἶναι ἀραιόμετρον, ὅπερ δι᾽ ἁπλῆς ἀναγνώσεως παρέχει τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου βυθίζεται. Πρὸς βαθμολογίαν αὐτοῦ ἐργάζονται ὡς ἑξῆς. Βυθίζουσιν αὐτὸ εἰς δύο ὑγρὰ γνωστοῦ εἰδικοῦ βάρους ε καὶ ε′, εἰς δὲ τὰ σημεῖα ἐπιπολῆς θέτουσι τὰ γράμματα Β καὶ Α. Συνήθως τὸ ἓν τῶν ὑγρῶν τούτων ἔχει εἰδ. βάρος περίπου ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον εἰδικὸν βάρος, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ δείξῃ τὸ ὄργανον, τὸ δὲ ἄλλο ἴσον πρὸς τὸ ἐλάχιστον. Εὑρίσκουσιν ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν x τοῦ Β ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδ. βάρος Ε ὡς ἑξῆς. Ἐὰν Θ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κατωτέρου μέρους τοῦ ὀργάνου ἀπὸ τοῦ Β καὶ κάτω, τὸ βάρος Β θὰ εἶναι $\Theta.\varepsilon$, διότι $\Theta\varepsilon$ εἶναι καὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπισθέντος ὑγροῦ κατὰ τὴν πρώτην βύθισιν. Ἐὰν δὲ μ εἶναι τὸ μῆκος ΒΑ καὶ ω ἡ τομὴ τοῦ στελέχους, ὁ μὲν ὄγκος τοῦ ΒΑ εἶναι $\omega\mu$, ὁ δὲ ὄγκος τοῦ ὀργάνου ἐκ τῶν κάτω μέχρι τοῦ Α θὰ εἶναι $\Theta+\omega\mu$· εἶναι ἄρα $B=(\Theta+\omega\mu)\varepsilon'$.

Σχ. 87.

Ἐὰν δὲ εἰς ὑγρὸν εἰδ. βάρους Ε βυθισθῇ μέχρις ἀποστάσεως x ἀπὸ τοῦ Β, ὁ ἐκτοπιζόμενος ὄγκος θὰ εἶναι $\Theta+\omega x$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $B=(\Theta+\omega x)E$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\Theta\varepsilon=(\Theta+\omega\mu)\varepsilon'=(\Theta+\omega x)E$. Ἐκ τῆς $\Theta\varepsilon=(\Theta+\omega\mu)\varepsilon'$ εὑρίσκομεν ὅτι $\Theta(\varepsilon-\varepsilon')=\omega\mu\varepsilon'$, ἐκ δὲ τῆς $\Theta\varepsilon=(\Theta+\omega x)E$ εὑρίσκομεν ὅτι $\Theta(\varepsilon-E)=\omega x E$. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς νέας ταύτας ἰσότητας εὑρίσκομεν

ὅτι $\dfrac{\varepsilon-E}{\varepsilon-\varepsilon'}=\dfrac{Ex}{\mu\varepsilon'}$, ὅθεν $x=\dfrac{(\varepsilon-E)\mu\varepsilon'}{E(\varepsilon-\varepsilon')}$.

β΄) ***Ἀραιόμετρα μὲ αὐθαίρετον βαθμολογίαν*** (Baumé). Τοιούτων ὑπάρχουσι δύο εἴδη· ἓν μὲν διὰ τὰ πυκνότερα τοῦ ὕδατος ὑγρά ἕτερον δὲ διὰ τὰ ἀραιότερα αὐτοῦ. Τὸν τρόπον τῆς βαθμολογίας αὐτῶν παραλείπομεν διότι ἀναγράφουσιν αὐτὸν πάντα τὰ ἐν χρήσει στοιχειώδη βιβλία Φυσικῆς.

γ΄) Ἀραιόμετρον σταθεροῦ βάρους καὶ μεταβλητοῦ ὄγκου εἶναι καὶ τὸ οἰνοπνευματόμετρον τοῦ Gay-Lussac, δι' οὗ ἐκτιμᾶται ἡ εἰς οἰνόπνευμα περιεκτικότης τῶν οἰνοπνευματούχων ὑγρῶν. Καὶ τούτου τὴν περιγραφὴν παραλείπομεν, δι' οὓς λόγους καὶ τῶν προηγουμένων.

§ 118. Πτῶσις σώματος ἐν ὑλικῷ μέσῳ. Ὅταν σῶμα πίπτῃ ἐντὸς ὑλικοῦ μέσου, τοῦτο παρεμβάλλει εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος ἀντίστασιν, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δύναμις ἐνεργοῦσα κατακορύφως καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Οἱ νόμοι τῆς ἀντιστάσεως τῶν ὑλικῶν τούτων μέσων δὲν εἶναι ἀκριβῶς γνωστοί. Παραδέχονται γενικῶς ὅτι ἡ ἀντίστασις αὕτη αὐξάνει μετὰ τῆς ταχύτητος καὶ δὴ, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι μικρά, ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος· ὅταν δὲ ἡ ταχύτης εἶναι μεγάλη (ταχύτης βλημάτων πυραβόλων ὅπλων) ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος πρὸς μεγαλυτέραν δύναμιν τῆς ταχύτητος.

Ὅταν σῶμα πίπτῃ ἐν τῷ ἀέρι ἐξ ἱκανοῦ ὕψους, ἡ ἀντίστασις αὐξανομένη μετὰ τῆς ταχύτητος εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς δὲ ταύτης τὸ σῶμα κινεῖται ἰσοταχῶς, διότι ἡ τὴν κίνησιν προκαλοῦσα δύναμις ἐξέλιπεν.

Διὰ τὰς βραχυχρονίους κινήσεις σμικρῶν σωμάτων δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀντίστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τὴν ἄνωσιν τῶν σωμάτων· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ πτῶσις τοῦ σώματος εἶναι τότε ὡς ἔγγιστα κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Οὕτω σῶμα ἔχον ὄγκον Θ καὶ εἰδ. βάρος Ε τιθέμενον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ὑγροῦ εἰδ. βάρους ε ($\varepsilon < E$) κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ΘΕ—Θε ἢ Θ (Ε—ε). Ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ g′ εἶναι τοιαύτη, ὥστε

$$\frac{g'}{g}=\frac{\Theta(E-\varepsilon)}{\Theta E}, \text{ ὅθεν } g'=g\cdot\frac{E-\varepsilon}{E}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

59) Πόσην πίεσιν εἰς dynes ἐξασκεῖ ἐπὶ ἐπιφανείας 1 τ. δ. στήλη ὑδραργύρου ὕψους 1 μέτρου ;

60) Δοχείου κωνικοῦ ὁ πυθμὴν ἔχει ἐμβαδὸν 1 τετρ. παλάμης, ὁ ὄγκος δὲ αὐτοῦ εἶναι 1 κυβ. παλάμη. Ἐὰν τοῦτο εἶναι πλῆρες ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ, πόσην πίεσιν εἰς dynes δέχεται ὁ πυθμὴν αὐτοῦ ;

61) Κυκλικὸς δίσκος διαμέτρου 1,6 παλαμῶν εἶναι βυθισμένος ἐντὸς ὑδραργύρου, τὸ δὲ κέντρον του ἀπέχει 25 δακτύλους ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας. Πόσην πίεσιν εἰς dynes δέχεται οὗτος ;

62) Αἱ διάμετροι τῶν δύο κυλίνδρων ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου εἶναι ὡς 1:5. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ αὐτοῦ, ὅπως δύναμις 8 χιλιογράμμων μεταδίδῃ εἰς τὸν μέγαν ἐμβολέα πίεσιν 1000 χιλιογράμμων ;

63) Τὸ βάρος σώματος ἐν τῷ ἀέρι εἶναι 60 γραμμαρίων, ἐν ὕδατι δὲ (ἀπ. 4°Κ) ἰσορροπεῖται διὰ 56 γραμ. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ ;

64) Σῶμα βυθιζόμενον ἐν τῷ ὕδατι ὑφίσταται ἄνωσιν 45 γραμμαρίων. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

65) Σῶμα ἔχει βάρος ἐν τῷ ἀέρι 25 γραμμάρια καὶ φιάλη πλήρης ὕδατος ἔχει βάρος 220 γραμμάρια. Ἐὰν εἰσαχθῇ τὸ σῶμα ἐντὸς τῆς φιάλης καὶ σπογγισθῇ τὸ ἐκχυθησόμενον ὕδωρ, ἡ φιάλη ἔχει βάρος 235 γραμμάρια. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σώματος τούτου ;

66) Φιάλη κενὴ ἔχει βάρος 40 γραμ., πλήρης δὲ ὕδατος 360 γραμ. καὶ

πλήρης ἄλλου ὑγροῦ 322 γραμ. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἄλλου τούτου ὑγροῦ ;

67) Σῶμα ἔχον βάρος 7,55 γραμ. ἐν τῷ ἀέρι ἰσορροπεῖται διὰ 5,17 γραμ. ἐν τῷ ὕδατι καὶ διὰ 5,35 γραμ. ἐν ἄλλῳ ὑγρῷ. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σώματος καὶ τοῦ ἄλλου ὑγροῦ ;

68) Σῶμα ἔχον βάρος 24 γραμ. ἐν τῷ ἀέρι ἰσορροπεῖται διὰ 20 γραμ. ἐν τῷ ὕδατι. Μὲ πόσον βάρος ἰσορροπεῖται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδ. βάρους 0,75 ;

69) Ράβδος ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἔχουσα ἐν τῷ ἀέρι βάρος 50 γραμμαρίων ἰσορροπεῖται βεβυθισμένη ἐντὸς ὕδατος διὰ 470 γραμμαρίων. Πόσον χρυσὸν (εἰδ. β.19,3) καὶ πόσον ἄργυρον (εἰδ. β. 10,5) περιέχει ;

70) Ἀραιόμετρον τοῦ Fahrenheit ἔχει βάρος 100 γραμ. Ἐν θέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ 30 γραμ. βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς. Ἐὰν δὲ θέσωμεν μόνον 12 γραμμάρια βυθίζεται μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς ἄλλο ὑγρόν. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἄλλου τούτου ὑγροῦ ;

71) Ἀραιόμετρον τοῦ Nicholson βάρους 50 γραμμαρίων βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς, ἂν θέσωμεν ἐπὶ τοῦ δίσκου αὐτοῦ τεμάχιον σώματος βάρους 10 γραμμαρίων. Ἐὰν δὲ τὸ σῶμα τοῦτο τεθῇ ἐντὸς τοῦ κώνου τοῦ ἀραιομέτρου, πρέπει νὰ θέσωμεν ἀκόμη ἐπὶ τοῦ δίσκου 2 γραμμάρια, ὅπως τὸ ἀραιόμετρον βυθισθῇ μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σώματος τούτου ;

72) Δύο κατακόρυφοι κύλινδροι συγκοινωνοῦντες δι' ὁριζοντίου σωλῆνος περιέχουσι μέχρις ὕψους τινὸς ὕδωρ. Ἐὰν ρίψωμεν ἐντὸς τοῦ ἑνὸς ἔλαιον, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ μὲν ἐλαίου ἀπέχει 3,75 δακτύλους, τοῦ δὲ ὕδατος 3 δακ. ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ χωρισμοῦ. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἐλαίου ;

73) Σῶμα μικρῶν διαστάσεων ἀφιέμενον εἰς τὸν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ὕδατος δοχείου διανύει 2 μέρα εἰς 1,5 δευτερόλεπτα. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Ἀεροστατική

§ **119. Πιέσεις τῶν ἐν ἰσορροπίᾳ ἀερίων.** Ἀφ' οὗ τὰ ἀέρια ἔχουσι βάρος, τὰ ἀνώτερα στρώματα πιέζουσι διὰ τοῦ βάρους αὐτῶν τὰ κατώτερα στρώματα ἀερίου ἰσορροποῦντος ἐντὸς δοχείου. Ἰσχύουσι δὲ καὶ περὶ τῶν πιέσεων τούτων πάντα ὅσα περὶ τῶν ὑπὸ τῶν ὑγρῶν ἐπιφερομένων πιέσεων εἴπομεν. Οὕτως : ***Ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων δύο ἴσων στοιχείων ἐντὸς ἰσορροποῦντος ἀερίου ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος στήλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀερίου, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν πιεζομένην ἐπιφάνειαν καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστα-***

σιν τῶν στοιχείων τούτων. Ἂν δηλ. ω εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας ἑκατέρου στοιχείου, ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀερίου καὶ υ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν στοιχείων τούτων, θὰ εἶναι $\Pi-\Pi'=\omega\upsilon\varepsilon$. Ἐὰν ε εἶναι πολὺ μικρόν, ἡ διαφορὰ $\Pi-\Pi'$ διὰ στοιχεῖα κείμενα ἐντὸς δοχείου, ἔνθα υ εἶναι πολὺ μικρόν, εἶναι ἀνεπαίσθητος καὶ σχεδὸν μηδαμινή. Διὰ τοῦτο εἰς πολλὰ ζητήματα θεωροῦμεν $\Pi=\Pi'$, ὅπου δήποτε τοῦ δοχείου καὶ ἂν κεῖνται αἱ πιεζόμεναι ἐπιφάνειαι. Ἂν ὅμως υ εἶναι ἀρκετὰ μέγα, ἡ διαφορὰ $\Pi-\Pi'$ εἶναι αἰσθητῶς διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ $\Pi\neq\Pi'$. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ π. χ. πίεσις εἶναι διάφορος εἰς τὴν κορυφὴν καὶ εἰς τὰς ὑπωρείας ὄρους.

§ **120. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους.—Βαροσκόπιον.** ***Πᾶν σῶμα βεβυθισμένον ἐντὸς ἀερίου ὑφίσταται ἄνωσιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀερίου.***

Ἡ ὕπαρξις τῆς ἀνώσεως ταύτης ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ βαροσκοπίου· τὸ δὲ μέτρον αὐτῆς εὑρίσκεται διὰ συσκευῆς ἀναλόγου πρὸς ἐκείνην, ἧς γίνεται χρῆσις διὰ τὰ ὑγρὰ καὶ δι' ἧς πειραματίζονται μὲ βαρύτερα τοῦ ἀέρος ἀέρια π. χ. μὲ διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος.

Τὴν ἐξίσωσιν δὲ τῆς ἰσορροπίας τοῦ βαροσκοπίου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Ἔστω B τὸ βάρος τῆς σφαίρας, β τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου, Θ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ϑ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου καὶ ε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος. Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ὑφίσταται ἄνωσιν Θε, ὁ δὲ κύλινδρος ϑε, αἱ εἰς τὰ ἄκρα τῆς φάλαγγος ἐνεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι $B-\Theta\varepsilon$ ἡ μία καὶ $\beta-\vartheta\varepsilon$ ἡ ἄλλη. Ἐπειδὴ δὲ οἱ βραχίονες τῆς φάλαγγος εἶναι ἴσοι καὶ ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι $B-\Theta\varepsilon=\beta-\vartheta\varepsilon$, ὅθεν

$$B-\beta-\varepsilon\,(\Theta-\vartheta)=0. \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι, ἐὰν δι' ἀφαιρέσεως μέρους τοῦ ἀέρους τὸ ε γίνῃ μικρότερον π. χ. ε' θὰ εἶναι

$$B-\beta-\varepsilon\,(\Theta-\vartheta)<B-\beta-\varepsilon'(\Theta-\vartheta).$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $B-\beta-\varepsilon'\,(\Theta-\vartheta)>0$ καὶ $B-\Theta\varepsilon'>\beta-\varepsilon'\vartheta$. Ἡ φάλαγξ ἄρα κλίνει πρὸς τὸ μέρος τῆς σφαίρας.

Ἂν δὲ διὰ συμπιέσεως ἀέρος τὸ ε γείνῃ μεγαλύτερον π. χ. ε'', θὰ εἶναι $B-\beta-\varepsilon(\Theta-\vartheta)>B-\beta-\varepsilon''\,(\Theta-\vartheta)$ ἄρα καὶ $B-\beta-\varepsilon''\,(\Theta-\vartheta)<0$, ὅθεν $B-\varepsilon''\Theta<\beta-\varepsilon''\vartheta$. Ἡ φάλαγξ ἄρα κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

§ **121. Διόρθωσις τῶν ἐν τῷ ἀέρι σταθμήσεων.** Ἔστω B τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐν τῷ ἀέρι, E τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ, χ τὸ βάρος αὐτοῦ ἐν τῷ κενῷ, Σ τὸ βάρος τῶν σταθμῶν ἐν τῷ κενῷ καὶ ε τὸ εἰδ. βάρος τῆς ὕλης αὐτῶν.

Τὸ σῶμα ἔχει ὄγκον $\frac{\chi}{E}$ καὶ ὑφίσταται ἄνωσιν $\frac{\chi}{E}\cdot\alpha$ (ἂν α εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος πρὸς τὸ ὕδωρ). Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἄρα ἄκρου τῆς φάλαγγος ἐνεργεῖ δύναμις $\chi\left(1-\frac{\alpha}{E}\right)$.

Τὰ σταθμὰ ἔχουσιν ὄγκον $\frac{\Sigma}{\varepsilon}$ καὶ ὑφίστανται ἄνωσιν $\frac{\Sigma}{\varepsilon}\cdot\alpha$, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς φάλαγγος ἐνεργοῦσα δύναμις εἶναι $\Sigma\left(1-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$.

Ἕνεκα δὲ τῆς ἰσορροπίας τῆς φάλαγγος θὰ εἶναι

$$\chi\left(1-\frac{\alpha}{E}\right)=\Sigma\left(1-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right),\ \text{ὅθεν}$$

$$\chi=\frac{\Sigma\left(1-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)}{1-\frac{\alpha}{E}}=B\,\frac{\left(\varepsilon-\alpha\right)E}{\left(E-\alpha\right)\varepsilon}$$

Σημ. Πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ ὑπὸ τῶν σταθμῶν δηλούμενα βάρη εἶναι ἀνηγμένα εἰς τὸ κενόν.

§ **122. Νόμος** Boyle-Mariotte. ***Οἱ ὄγκοι ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων πιέσεων.***

Ἐὰν δηλαδὴ Θ καὶ Θ΄ εἶναι οἱ ὄγκοι ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου ὑπὸ πιέσεις ἀντιστοίχως Π καὶ Π΄ καὶ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, θὰ εἶναι $\frac{\Theta}{\Theta'}=\frac{\Pi'}{\Pi}$

Ἡ ἀλήθεια τοῦ νόμου τούτου ἀποδεικνύεται πειραματικῶς.

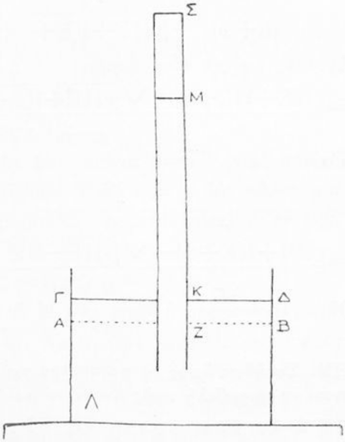
Ἐφαρμογαί. α΄) Ἔστω ὅτι ε εἶναι τὸ εἰδ. βάρος ἢ ἡ πυκνότης ἀερίου ὑπὸ πίεσιν Π καὶ ὄγκον Θ, ε΄ δὲ τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ ὑπὸ πίεσιν Π΄ καὶ ὄγκον Θ΄.

Κατὰ τὸν νόμον Boyle-Mariotte εἶναι $\frac{\Theta}{\Theta'}=\frac{\Pi'}{\Pi}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος τῆς ὡρισμένης ταύτης ποσότητος ἀερίου εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον πρὸς Θε ἢ Θ΄ε΄, ἕπεται ὅτι Θε=Θ΄ε΄, ὅθεν $\frac{\Theta}{\Theta'}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἕπεται ὅτι $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{\Pi'}{\Pi}$, ἤτοι:

Τὰ εἰδ. βάρη ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς πιέσεις, τὰς ὁποίας τοῦτο ὑφίσταται.

β′) Γνωρίζοντες τὸν ὄγκον Θ ἀερίου ὑπὸ πίεσιν Π εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον $Θ_0$ ὑπὸ τὴν κανονικὴν πίεσιν ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὸν νόμον Boyle-Mariotte εἶναι $\frac{Θ_0}{Θ}=\frac{Π}{760}$, ὅθεν $Θ_0=Θ.\frac{Π}{760}$. (Ἡ πίεσις Π λογίζεται εἰς χιλιοστόμετρα ὑδραργυρικῆς στήλης).

123. Βαθμολογία κλειστοῦ μανομέτρου. Ἔστω ὅτι ὑπὸ πίεσιν Η μιᾶς ἀτμοσφαίρας ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῇ λεκάνῃ Λ καὶ ἐν τῷ σωλῆνι Σ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ΓΔ καὶ ὅτι (ΚΣ)=λ. Ἔστω δὲ ω ἡ τομὴ τοῦ Σ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς δακτυλιοειδοῦς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῇ λεκάνῃ. Οὕτως ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ ἔχει ὄγκον ωλ καὶ πίεσιν Η.



Σχ. 88.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἐπιφέρομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῇ λεκάνῃ πίεσιν νΗ ἤτοι ν ἀτμοσφαιρῶν καὶ ὅτι ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται ἐν τῷ σωλῆνι κατὰ ὕψος (ΚΜ)=χ. Ὁ ἐν τῷ σωλῆνι ἀὴρ ἔχει τότε ὄγκον (λ—χ)ω καὶ πίεσιν νΗ ἠλαττωμένην κατὰ τὸ βάρος τῆς ἐν τῷ σωλῆνι στήλης τοῦ ὑδραργύρου. Τὸ ὕψος τῆς στήλης ταύτης εὑρίσκομεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ὁ εἰς τὸν σωλῆνα εἰσχωρήσας ὑδράργυρος ἔχει ὄγκον ωχ, προῆλθεν δὲ οὗτος ἐκ τῆς λεκάνης, εἰς τὴν ὁποίαν κατ᾽ ἀκολουθίαν κατῆλθεν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια κατὰ ὕψος ΚΖ, τοιοῦτον ὥστε

$$ωχ=Ε(ΚΖ),\ \text{ὅθεν}\ (ΚΖ)=\frac{ω}{Ε}.χ.$$

Τὸ ὕψος λοιπὸν ΖΜ τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ἐν τῷ σωλῆνι εἶναι

$$χ+\frac{ω}{Ε}.χ\ \text{ἢ}\ χ\left(1+\frac{ω}{Ε}\right).$$

῾Η πίεσις ὅθεν τοῦ ἐν τῷ σωλῆνι ἀέρος εἶναι $\nu H - \chi\left(1+\frac{\omega}{E}\right)$.

᾿Επειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ ποσότης ἀέρος ὑπὸ πίεσιν Η εἶχεν ὄγκον ωλ, ἤδη δὲ ὑπὸ πίεσιν $\nu H - \chi\left(1+\frac{\omega}{E}\right)$ ἔχει ὄγκον ω(λ—χ), ἕπεται κατὰ τὸν νόμον Boyle-Mariotte ὅτι:

$$H\omega\lambda = \omega(\lambda-\chi)\left[\nu H - \chi\left(1+\frac{\omega}{E}\right)\right], \text{ ὅθεν}$$

$$(E+\omega)\chi^2 - [\nu HE + \lambda(E+\omega)]\chi + (\nu-1)HE\lambda = 0.$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{\nu HE + \lambda(E+\omega) \pm \sqrt{[\nu HE + \lambda(E+\omega)]^2 - 4(E+\omega)(\nu-1)HE\lambda}}{2(E+\omega)}$$

᾿Επειδὴ δὲ διὰ ν=1 πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν χ=0, ἕπεται ὅτι ἐκ τῶν δύο τιμῶν τοῦ χ ἁρμόζει ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ τύπου τούτου, ὅταν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ θέσωμεν τὸ σημεῖον —, ἤτοι:

$$\chi = \nu HE + \lambda(E+\omega) - \sqrt{[\nu HE + \lambda(E+\omega)]^2 - 4(E+\omega)(\nu-1)HE\lambda}$$

Οὕτως εὑρίσκεται ἡ θέσις τοῦ Μ ἐν τῷ σωλῆνι, ὅπου σημειοῦται ὁ ἀριθμὸς ν.

ΣΗΜ. Συνήθως ὅμως τὰ μανόμετρα ταῦτα διὰ τὸ συντομώτερον βαθμολογοῦνται ἐν παραβολῇ πρὸς ἀνοικτὸν μανόμετρον.

§ **124. Βαρομετρικὴ ὑψομετρία.** ᾿Εὰν ἀνέλθωμεν ἀπό τινος τόπου Α εἰς ἄλλον ὑψηλότερον Β, εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπέρκεινται ἡμῶν ὀλιγώτερα στρώματα ἀέρος καὶ ἑπομένως ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι μικροτέρα εἰς τὸν Β ἢ εἰς τὸν Α. Εἶναι ἄρα δυνατὸν τῇ βοηθείᾳ τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος, εἰς ὃ ἀνήλθομεν.

᾿Εὰν ὁ ἀὴρ ἦτο ἰσόπυκνος καθ᾿ ὅλην τὴν μεταξὺ τῶν τόπων Α καὶ Β στήλην, θὰ εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ὑψῶν Y_α καὶ Y_β ὡς ἑξῆς.

᾿Επειδὴ ὁ ἀὴρ εἶναι 10526 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὑδραργύρου, ἂν ἀνυψωθῶμεν κατὰ 10526 χιλιοστόμετρα, ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ εἰς τὸν βαρομετρικὸν σωλῆνα κατὰ ἓν χιλιοστόμετρον, ἂν δὲ ἀνυψωθῶμεν κατὰ $Y_\beta - Y_\alpha$ χιλιοστόμετρα, ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ κατὰ $\frac{Y_\beta - Y_\alpha}{10526}$ χιλιοστόμετρα. ᾿Εὰν δὲ εἰς τὸν τόπον Α ἡ πίεσις ἦτο H_α, εἰς δὲ τὸν Β εἶναι H_β, ὁ ὑδράργυρος κατῆλθε κατὰ $H_\alpha - H_\beta$ χιλιοστόμετρα. Πρέπει ἄρα νὰ εἶναι

$H_\alpha - H_\beta = \frac{Y_\beta - Y_\alpha}{10526}$, ὅθεν $Y_\beta - Y_\alpha = 10526\,(H_\alpha - H_\beta)$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ἐλαττοῦται μετὰ τοῦ ὕψους καὶ ἡ θερμοκρασία εἰς τοὺς δύο τόπους κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως δὲν εἶναι ἡ αὐτή, ὁ τύπος οὗτος ἐφαρμόζεται μόνον διὰ ὕψη ὀλίγων δεκάδων μέτρων.

Διὰ μεγαλύτερα ὕψη μέχρι 1000 μέτρων γίνεται χρῆσις τῶν ἀκολούθων τύπων τοῦ Babinet, εἰς τὸν α΄ τῶν ὁποίων εἰσέρχονται καὶ αἱ θερμοκρασίαι ϑ καὶ ϑ' τῶν τόπων Α καὶ Β

$$Y_\beta - Y_\alpha = 16000000 \text{ χιλ. } \left(\frac{H_\alpha - H_\beta}{H_\alpha + H_\beta}\right)\left(1 + \frac{2(\vartheta + \vartheta')}{1000}\right) \qquad (1)$$

$$Y_\beta - Y_\alpha = 16000000 \text{ χιλ. } \frac{H_\alpha - H_\beta}{H_\alpha - H}. \qquad (2)$$

(ἔνθα H εἶναι ἡ κανονικὴ πίεσις).

Ὁ Halley ἔδωκε τὸν ἀκόλουθον τύπον, ὅστις ἐφαρμόζεται καὶ διὰ ὕψη μεγαλύτερα τῶν 1000 μέτρων:

$$Y_\beta - Y_\mu = 18400000 \text{ χιλ. } \text{λογ.} \frac{H_\alpha}{H_\beta}. \qquad (3)$$

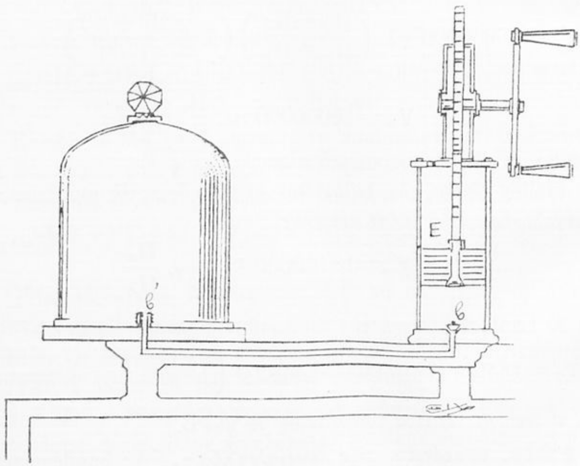
Ὁ δὲ Laplace ἔδωκε τὸν ἀκόλουθον πολυπλοκώτερον τύπον

$Y_\beta - Y_\alpha = 18405^\mu\,(1 + 0{,}002552 \text{ συν}2\lambda)\left(1 + 2\,\frac{\vartheta + \vartheta'}{1000}\right) \text{λογ} \frac{H_\beta}{H_\alpha}$, ἔνθα λ εἶναι τὸ γεωγρ. πλάτος τῶν τόπων Α καὶ Β.

§ **125. Θεωρία τῆς ἀεραντλίας.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἐμβολεὺς Ε κατέχει τὴν κατωτάτην ἐν τῷ κυλίνδρῳ θέσιν αὐτοῦ. Ὁ ἐν τῷ κώδωνι τότε ἀὴρ ἔχει ὄγκον Θ καὶ πίεσιν H_0. Ὅταν ὁ ἐμβολεὺς ἀνέρχηται, ἡ βαλβὶς β΄ ἀνοίγει καὶ μέρος τοῦ ἀέρος τοῦ κώδωνος εἰσρέει εἰς τὸν κύλινδρον. Ὅταν δὲ ὁ ἐμβολεὺς φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος ἐν τῷ κυλίνδρῳ, ὁ ἀὴρ τοῦ κώδωνος καταλαμβάνει καὶ τὸν χῶρον τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ πίεσίς του ἐλαττοῦται εἰς H_1. Ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τὸν ἐμβολέα κατέχοντα τὴν ἀνωτάτην ταύτην θέσιν ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ϑ, ὁ ἀὴρ κατέχει ἤδη ὄγκον $\Theta + \vartheta$ καὶ κατὰ τὸν νόμον τοῦ Boyle-Mariotte εἶναι

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{\Theta}{\Theta + \vartheta}, \text{ ὅθεν } H_1 = \frac{\Theta}{\Theta + \vartheta} H_0. \qquad (1)$$

Εὐθὺς δὲ ὡς ἀρχίσῃ νὰ κατέρχηται ὁ ἐμβολεὺς Ε, ἡ βαλβὶς β΄ κλείει καὶ αὐξανομένης τῆς πιέσεως τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀέρος ἡ βαλβὶς β (1) ἀνοίγει καὶ ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀὴρ ἐκφεύγει εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν. Οὕτω δὲ ἔμεινεν ἐν τῷ κώδωνι ἀὴρ ὄγκου Θ καὶ πιέσεως H_1. Ἐὰν ἀνασύρωμεν πάλιν τὸν ἐμβολέα μέχρι τοῦ ἀνωτάτου ὕψους, ὁ ἀὴρ οὗτος καταλαμβάνει ὄγκον $Θ+ϑ$, ἡ δὲ πίεσίς του γίνεται H_2, δι' ἣν ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\frac{H_2}{H_1}=\frac{Θ}{Θ+ϑ}$, ὅθεν $H_2=\frac{Θ}{Θ+ϑ}\cdot H_1$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι $H_2=H_0\cdot\left(\frac{Θ}{Θ+ϑ}\right)^2$. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν οὕτως, εὑρίσκομεν ὅτι μετὰ ν ἀνόδους τοῦ ἐμβολέως, ὁ



Σχ. 89.

ἐν τῷ κώδωνι ἀὴρ θὰ ἔχῃ πίεσιν $H\nu=H o\left(\frac{Θ}{Θ+ϑ}\right)^{\nu}$.

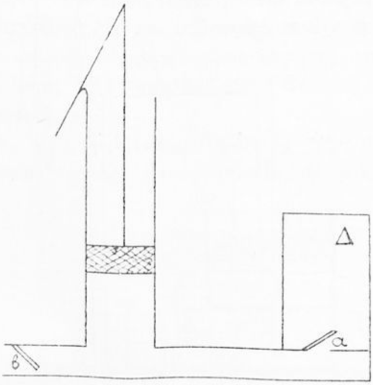
Ἐπειδὴ $\frac{Θ}{Θ+ϑ}<1$, θὰ εἶναι ὅρ $\left(\frac{Θ}{Θ+ϑ}\right)^{\nu}=0$ καὶ ὅρ $H\nu=0$, ὅταν ν ἀπαύστως αὐξάνῃ. Οὐδέποτε ὅμως γίνεται $H\nu=0$ ἕνεκα τῆς μὴ τελείας ἐφαρμογῆς τῶν βαλβίδων κλπ. καὶ τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος.

§ **126. Θεωρία τῆς καταθλιπτικῆς ἀντλίας.** Ἔστω Θ

(1) Ἡ βαλβὶς β νὰ νοηθῇ εἰς τὸ ἔμβολον Ε ἀνοίγουσα ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω.

ὁ ὄγκος τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ Δ ἀέρος καὶ H_0 ἡ πίεσις αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ἔτι θ ὁ ὄγκος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀέρος, ὅταν ὁ ἐμβολεὺς εὑρίσκηται εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος αὐτοῦ καὶ Η ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις.

Ὅταν ὁ ἐμβολεὺς ἀνελκυσθῇ ἐκ τῆς κατωτάτης εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν αὐτοῦ, ἡ βαλβὶς β ἀνοίγει καὶ ὁ κύλινδρος πληροῦται ἀέρος ὑπὸ πίεσιν Η καὶ ὄγκον θ. Ὅταν ὁ ἐμβολεὺς κατέρχηται ἡ βαλβὶς β κλείει καὶ οὕτω παρακωλύεται ἡ ἔξοδος τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος πιεζόμενος ἀποκτᾷ ἐλαστικότητα μείζονα, ἀνοίγει τὴν βαλβίδα α καὶ ὁλόκληρος εἰσέρχεται εἰς τὸ δοχεῖον Δ. Οὕτω δὲ ἐν τῷ δοχείῳ Δ συνηνώθη ἀὴρ ὄγκου Θ καὶ πιέσεως H_0 μὲ ἀέρα, ὅστις, ἂν μόνος



Σχ. 90.

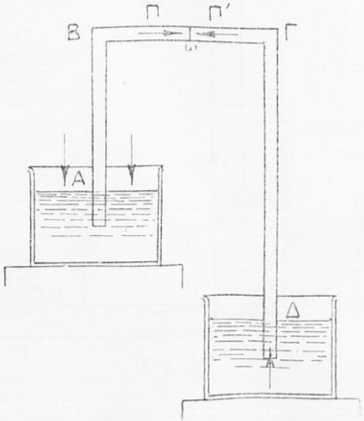
εἶχεν ὄγκον Θ, θὰ εἶχεν πίεσιν x, δι᾽ ἣν εἶναι $x : H = \vartheta : \Theta$, ὅθεν $x = H . \frac{\vartheta}{\Theta}$. Ἐπειδὴ ὁ προηγούμενος ἀὴρ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὄγκον Θ εἶχε πίεσιν H_0, ἕπεται ὅτι πίεσις H_1 τοῦ μίγματος ἰσοῦται πρὸς $H_0 + H . \frac{\vartheta}{\Theta}$, ἤτοι $H_1 = H_0 + H . \frac{\vartheta}{\Theta}$ (1)

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν β΄ κάθοδον τοῦ ἐμβολέως ὁ εἰς τὸ δοχεῖον Δ συνωθούμενος ἀὴρ ἔχει πίεσιν $H_2 = H_0 + 2H . \frac{\vartheta}{\Theta}$ καὶ κατὰ τὴν νυοστὴν θὰ ἔχῃ πίεσιν

$$H\nu = H_0 + \nu H \frac{\vartheta}{\Theta}.$$

᾿Επειδὴ δέ, ὅταν ὅρ $\nu=\infty$, εἶναι καὶ ὅρ $H\nu = H_0 + H.\frac{\vartheta}{\Theta}$. ὅρ. $\nu=\infty$, ἕπεται ὅτι θεωρητικῶς ἡ πίεσις αὕτη δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶν ὅριον. ᾿Εν τῇ πράξει ὅμως τὸ τοιοῦτον εἶναι ἀδύνατον καὶ ἂν ἀκόμη ἡ ἀντοχὴ τῶν ἀγωγῶν καὶ τοῦ δοχείου ἦτο μεγίστη, ἕνεκα τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος. ῾Ο ἐν αὐτῇ τῷ ὄντι πυκνούμενος ἀὴρ ἔρχεται στιγμή, καθ' ἣν ἀδυνατεῖ νὰ ἀνοίξῃ τὴν βαλβίδα α ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως τῶν πιέσεων τοῦ ἑκατέρωθεν ἀέρος.

§ **127. Θεωρία τοῦ σίφωνος.** ῎Εστω ω τὸ ἐμβαδὸν καθέτου τομῆς τοῦ σωλῆνος κατὰ τὸ ὑψηλότερον μέρος αὐτοῦ. ῾Η τομὴ αὕτη δέχεται ἑκατέρωθεν πιέσεις, ὧν Π ἔστω ἡ ἐκ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μεγαλύτερον βραχίονα ἐνεργοῦσα καὶ Π′ ἡ ἑτέρα. Προφανῶς ἡ



Σχ. 91.

πίεσις Π ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ἠλαττωμένης κατὰ τὸ βάρος τῆς στήλης ΑΒ ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ ὑπὸ μετάγγισιν ὑγροῦ. ᾿Εὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀτμ. πίεσις ἰσορροπεῖ στήλην ἐκ τοῦ ὑγροῦ τούτου ὕψους Η, ἡ ἐπὶ ἐπιφανείας ω ἀτμ. πίεσις θὰ εἶναι ω.Η. ε, ἔνθα ε εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ τούτου. Κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι

$$\Pi = \omega H\varepsilon - \omega(AB)\varepsilon$$

῾Ομοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\Pi' = \omega H\varepsilon - \omega(\Gamma\Delta)\varepsilon$.

᾿Επειδὴ δὲ $(\Gamma\Delta) > (AB)$, ἕπεται ὅτι $\omega(\Gamma\Delta)\varepsilon > \omega(AB)\varepsilon$ καὶ ἑπομένως $\Pi > \Pi'$. ῾Η συνισταμένη ἄρα τῶν δύο τούτων πιέσεων ἔχει τὴν φορὰν τῆς Π καὶ ἰσοῦται πρὸς $\Pi - \Pi' = \omega\varepsilon(\Gamma\Delta - AB)$.

Τὸ ὑγρὸν λοιπὸν ἐκρέει ἐκ τοῦ βραχυτέρου πρὸς τὸ ἐπιμηκέστερον σκέλος ὑπεῖκον εἰς τὴν δύναμιν ωε(ΓΔ—ΑΒ), ἥτις εἶναι ***πίεσις ἴση πρὸς τὸ βάρος στήλης ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ καὶ ἐχούσης βάσιν μὲν κάθετον τοῦ σωλῆνος τομήν, ὕψος δὲ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τοῦ ἄκρου Δ τοῦ ἐπιμηκεστέρου σωλῆνος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐν τῷ δοχείῳ.***

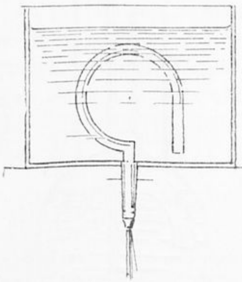
Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

α') ***Ἡ ἐκροὴ τοῦ ὑγροῦ εἶναι ταχυτέρα, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐν τῷ δοχείῳ εἶναι μεγαλυτέρα.***

β') ***Ὁ σίφων δὲν λειτουργεῖ ἐν τῷ κενῷ.***

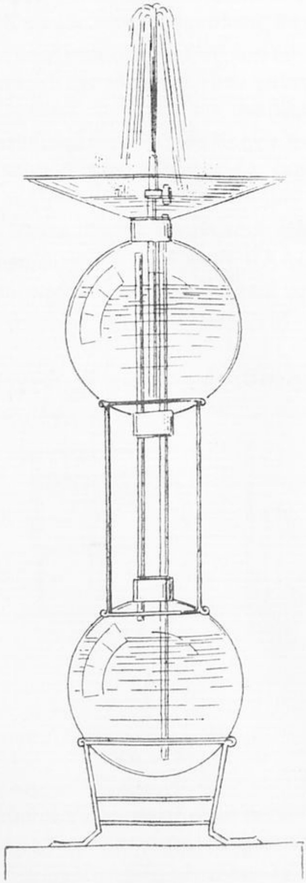
γ') Ἐὰν τὸ ὕψος ΑΒ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὕψος τῆς ὑπὸ τῆς ἀτμ. πιέσεως ἰσορροπουμένης ὑδατίνης στήλης (10^{μ} περίπου), μετάγγισις ὕδατος δὲν γίνεται. Διότι τότε ἡ πίεσις Π θὰ εἶναι μηδὲν ἢ ἀρνητική.

§ **128. Περιοδικὸς σίφων ἢ ἀγγεῖον τοῦ Ταντάλου.** Ὁ σίφων οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ σωλῆνος, ὅστις κατὰ τὸ ἓν



Σχ. 92.

ἄκρον διαπερᾷ τὸν πυθμένα δοχείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται τὸ ἄλλο μέρος τοῦ σωλῆνος. Τὸ μέρος τοῦτο καμπυλοῦται ἐπὶ τοσοῦτον ὥστε τὸ ἄκρον του εὑρίσκεται εἰς μικρὰν ἀπὸ τοῦ πυθμένος ἀπόστασιν. Ὁλόκληρον δὲ τὸ μέρος τοῦτο τοῦ σωλῆνος δύναται νὰ καλυφθῇ ὑπὸ ὕδατος ἢ ἄλλου ὑγροῦ, ὅπερ ρίπτομεν ἐντὸς τοῦ δοχείου. Ἄρχεται δὲ ἡ λειτουργία τοῦ σίφωνος, ἀφ' ἧς στιγμῆς ὁλόκληρος ὁ ἐν τῷ δοχείῳ σωλὴν καλυφθῇ ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ. Διότι, ὡς εἰς τὸν κοινὸν σίφωνα, ἡ ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω ἐπιφερομένη πίεσις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐκ τῶν ἔξω πρὸς τὰ ἔσω. Παύει δέ, εὐθὺς ὡς τὸ ἐν τῷ δοχείῳ ἄκρον τοῦ σωλῆνος ἀποκαλυφθῇ καὶ ἀρχίζει πάλιν νὰ λειτουργῇ, ὅταν ρίψωμεν ὑγρόν, μέχρις οὗ καλυφθῇ πάλιν ἐξ ὁλοκλήρου ὁ ἐν τῷ δοχείῳ σωλήν.



Σχ. 93.

§ **129. Κρήνη τοῦ Ἥρωνος** (1). Ἡ κρήνη αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ δύο κλειστῶν σφαιρῶν, ὧν τὰ ἀνώτερα μέρη συγκοινω-

(1) Ἐξ Ἀλεξανδρείας (120 π. Χ.).

νοῦσι διὰ σωλῆνος καὶ ὧν ἡ μία κεῖται ὑπεράνω τῆς ἄλλης. Ὑπὲρ τὴν ἀνωτέραν σφαῖραν εὑρίσκεται λεκάνη, ἥτις διαπερᾶται ὑπὸ σωλῆνος. Οὗτος διαπερᾷ ἐπίσης τὴν ἀνωτέραν σφαῖραν καὶ καταλήγει διὰ τοῦ ἀνοικτοῦ ἄκρου του μέχρι σχεδὸν τοῦ πυθμένος τῆς σφαίρας ταύτης.

Τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ σωλῆνος τοῦτο ἀνέρχεται ὑπὲρ τὴν λεκάνην καὶ δύναται νὰ κλείηται ἢ νὰ ἀνοίγηται κατὰ βούλησιν. Ἄλλος σωλὴν ἀνοικτὸς κατ' ἀμφότερα τὰ ἄκρα ἄρχεται ἀπὸ τοῦ πυθμένος τῆς λεκάνης, διαπερᾷ τὴν ἀνωτέραν σφαῖραν χωρὶς νὰ συγκοινωνήσῃ μετ' αὐτῆς καὶ εἰσερχόμενος εἰς τὴν κατωτέραν σφαῖραν καταλήγει εἰς μικρὰν ἀπὸ τοῦ πυθμένος αὐτῆς ἀπόστασιν.

Ἡ λειτουργία τῆς κρήνης ταύτης γίνεται ὡς ἑξῆς. Διὰ τοῦ σωλῆνος ῥίπτομεν ὕδωρ, μέχρις οὗ σχεδὸν πληρωθῇ ἡ ἀνωτέρα σφαῖρα. Ἔπειτα κλείομεν τὴν στρόφιγγα τοῦ σωλῆνος τούτου καὶ ῥίπτομεν ὕδωρ ἐντὸς τῆς λεκάνης, μέχρις οὗ πληρωθῇ ὁ σωλὴν καὶ ἡ λεκάνη. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι διὰ τοῦ σωλῆνος εἰσέρχεται καὶ ἐντὸς τῆς κατωτέρας σφαίρας ποσότης ὕδατος, ἥτις ἐξωθεῖ τὸν ἐντὸς αὐτῆς ἀέρα πρὸς τὰ ἀνώτερα μέρη τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦ σωλῆνος καὶ εἰς τὴν ἀνωτέραν σφαῖραν.

Ἡ πίεσις τοῦ ἐντὸς τῶν σφαιρῶν ἀέρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀτμ. πιέσεως. Διότι ἰσορροπεῖ ταύτην μεταδιδομένην διὰ τοῦ σωλῆνος καὶ τὸ βάρος τῆς ἐν τῷ σωλῆνι ὑδατίνης στήλης ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ ἐν τῇ λεκάνῃ. Ἐὰν ἑπομένως ἀνοίξωμεν τὴν στρόφιγγα, τὸ ὕδωρ τῆς σφαίρας ἐκπηδᾷ διὰ τοῦ σωλῆνος σχηματίζον πίδακα καὶ πίπτει ἐντὸς τῆς λεκάνης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

74) Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν πειράματος τῆς κυστορραγίας, ὑπελείφθη ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀὴρ ἔχων πίεσιν 2 δακτύλων. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς μεμβράνης ἦτο 4 δακτύλων καὶ ἡ ἀτμ. πίεσις 0,76 μ, πόσην πίεσιν δέχεται ἡ μεμβράνη ;

75) Ἐὰν γείνῃ τὸ πείραμα τοῦ Torricelli δι' ἐλαίου, τοῦτο αἰωρεῖται ἐν τῷ σωλῆνι μέχρις ὕψους 11.68 μ, ἐὰν κατὰ στιγμὴν τοῦ πειράματος ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι 0,76 μ. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἐλαίου τούτου ;

76) Ἡ διάμετρος βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἶναι 2 δακτύλων, ἡ δὲ λεκάνη του κυκλικὴ οὖσα ἔχει διάμετρον 4 δακτύλων. Πόσον θὰ ὑψωθῇ ἐν τῇ λεκάνῃ ὁ ὑδράργυρος, ὅταν ἐν τῷ σωλῆνι κατέλθῃ κατὰ 0,005μ ;

77) Ποσότης ἀέρος πληροῖ σφαῖραν ἀκτῖνος 2 δακτύλων. Ἐὰν ἅπας ὁ ἀὴρ οὗτος διοχετευθῇ εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 5 δακτύλων, πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀρχικῆς πρὸς τὴν νέαν τάσιν αὐτοῦ ;

78) Ὑάλινος κύλινδρος ἀνοικτὸς ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ περιέχων ἀέρα εἶναι βεβυθισμένος ἐντὸς ὑδραργύρου οὕτως ὥστε 15 δάκτυλοι ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ εἶναι ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου καὶ 10 δάκτυλοι ἐκτός. Ἐὰν βυθίσωμεν αὐτὸν κατὰ 17 δακτύλους εἰς τὸν ὑδράργυρον, ὁ ἐντὸς ἀὴρ ἀποκτᾷ πίεσιν ἴσην πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πειράματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πίεσις αὕτη.

79) Σφαῖρα ἀεροστάτου πεπληρωμένη ὑδρογόνου ἔχει ὄγκον 200 κυβικῶν μέρων. Τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ἀέρος εἶναι 1,3 γραμμάρια, τὸ βάρος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι τὰ 0,0688 τοῦ βάρος τοῦ ἀέρος καὶ τὸ βάρος τῶν ἐξαρτημάτων τοῦ ἀεροστάτου εἶναι 60 χιλιόγραμμα. Πόσον βάρος δύναται νὰ ἀνυψώσῃ τὸ ἀερόστατον κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως ;

80) Ράβδος ἐκ πλατίνης εἰδ. βάρος 22 ἰσορροπεῖται ἐν τῷ ἀέρι (0^0Κ καὶ πίεσις 0,76) διὰ σταθμῶν 100 γραμ. ἐξ ὀρειχάλκου εἰδ. βάρους 8,4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῆς ράβδου ταύτης ἐν τῷ κενῷ.

81) Τεμάχιον μετάλλου ἔχει ἐν τῷ ἀέρι βάρος 50 γραμ. Ἐν δὲ ὕδατι 0^0Κ καὶ εἰδ. βάρος 0,99987 ἰσορροπεῖται διὰ 42 γραμμαρίων ἐξ ὀρειχάλκου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μετάλλου τούτου.

82) Ἓν λίτρον ἀέρος τάσεως 76 δακ. ἔχει βάρος 1,293 γραμ. Πόσον βάρος ἔχει ἓν λίτρον ἀέρος τάσεως 77 δακτύλων ;

83) Βαρομετρικὸς σωλὴν ἔχει τομὴν 1 τ. δ. καὶ παρουσιάζει κενὸν 10 δακ., καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι 76 δακτύλων. Πόσον ὄγκον ἀέρος τάσεως 76 δακ. πρέπει νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὸν βαρομετρικὸν θάλαμον, ὅπως αἰωρεῖται ἐν τῷ σωλῆνι στήλη ὑδραργύρου ὕψους 50 δακτύλων ;

84) Δοχεῖον περιέχον πεπιεσμένον ἀέρα τίθεται εἰς συγκοινωνίαν μετὰ μανομέτρου, καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι 0,875. Οὕτω δὲ ὁ ὑδράργυρος αὐτοῦ εὑρίσκεται κατὰ 570 χιλιοστόμετρα ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῇ λεκάνῃ, ἥτις θεωρεῖται ἀμετάβλητος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικὴ τάσις τοῦ πεπιεσμένου ἀέρος.

85) Μετὰ τέσσαρας ἀνόδους καὶ καθόδους τοῦ ἐμβολέως ἀεραντλίας ἡ τάσις τοῦ ἐν τῷ κώδωνι ὑπολειφθέντος ἀέρος εἶναι $\frac{81}{256}$ τῆς ἀρχικῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς χωρητικότητος τοῦ κώδωνος πρὸς τὴν χωρητικότητα τοῦ κυλίνδρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

86) Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ $5^δ$ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου δευτερολέπτου παύει νὰ ἐνεργῇ ἐπ' αὐτοῦ ἡ κινητήριος δύναμις καὶ τὸ κινητὸν ἰσοταχῶς κινούμενον διήνυσεν 450 μέτρα εἰς τὰ ἀκόλουθα 18 δευτερόλεπτα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὰ 5 ἀρχικὰ δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του.

87) Κινητὸν ἔχον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν καὶ ἐπιτάχυνσιν 2 μέ-

τρα κατὰ δευτερόλεπτον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 25 μέτρων ἀπὸ ὡρισμένου σημείου O τῆς τροχιᾶς του κατὰ τὸν χρόνον 3 δευτερόλεπτα καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν στιγμὴν ταχύτητα 10 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ O ἀπόστασις κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου.

88) Κινητὸν ἔχον κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην διήνυσε εἰς χρόνον t διάστημα δ καὶ εἰς χρόνον t′ διάστημα δ′. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ.

89) Δύναμις ἐντάσεως 20 χιλιογράμμων καὶ ἄλλη 15 χιλιογράμμων ἐνεργοῦσιν εἰς σημεῖον A ὑπὸ γωνίαν 60^0. Νὰ καθορισθῇ ἡ δύναμις ἥτις δύναται νὰ ἰσορροπήσῃ ταύτας.

90) Εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου ἐνεργοῦσι δυνάμεις παράλληλοι, ὁμόρροποι καὶ ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτῶν.

91) Εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ ἐνεργοῦσι δυνάμεις ἴσαι, παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Τετάρτης δὲ δυνάμεως ἴσης, παραλλήλου καὶ ἀντιρρόπου πρὸς ἐκείνας τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς κινεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν τεσσάρων τούτων δυνάμεων.

92) Σῶμα ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 100 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, ὅπως ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν ;

93) Σῶμα βάρους 500 χιλιογράμμων κινεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους 5 μέτρων καὶ ὕψους 3 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κινοῦσα αὐτὸ δύναμις καὶ ἡ πιέζουσα τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον δύναμις.

94) Σῶμα πίπτει ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐξ ὕψους 250 μέτρων. Πόσον διάστημα διανύει κατὰ τὸ τελευταῖον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του ;

95) Νὰ μερισθῇ βάρος 18 χιλιογράμμων εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε, ἂν ἐξαρτήσωμεν ταῦτα (ἀνὰ ἓν) ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ νήματος τῆς μηχανῆς Atwood τὸ σύστημα νὰ ἔχῃ ἐπιτάχυνσιν 1,09 μέτρων εἰς τόπον, ὅπου $g=9{,}81$ μ.

96) Εἰς τὸ ἄκρον B κυλινδρικῆς ξυλίνης ῥάβδου μήκους 1 μέτρου καὶ βάρους 60 γραμμαρίων προσαρμόζεται σφαῖρα ἀκτῖνος δύο δακτύλων καὶ βάρους 100 γραμμαρίων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἀποτελουμένου συστήματος.

97) Ἐκ τῆς τροχαλιοθήκης ἐλευθέρας τροχαλίας κρέμαται βάρος, ὅπερ μετὰ τοῦ βάρους τῆς τροχαλίας ἀνέρχεται εἰς 80 χιλιόγραμμα. Τὸ νῆμα αὐτῆς διαπεράσαν τὸν λαιμόν της διαπερᾷ καὶ τὸν λαιμὸν παγίας τροχαλίας καὶ φέρει εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον βάρος 80 χιλιογράμμων. Ἐὰν οὕτω τὸ σύστημα ἰσορροπῇ, πόση εἶναι ἡ γωνία τῶν νημάτων τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας ;

98) Ἂν ἡ γωνία σφηνὸς εἶναι 30^0, πόσον μέρος τῆς ἀντιστάσεως εἶναι ἡ δύναμις, καθ' ἣν στιγμὴν ἰσορροπεῖ ;

99) Σῶμα εἰδικοῦ βάρους E ἀφήνεται ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ὑγροῦ ὕψους υ καὶ εἰδικοῦ βάρους ε ($ε < E$). Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα ;

100) Εἰς δοχεῖον περιέχονται 5 λίτραι ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 100 δακτύλων. Ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐξ αὐτοῦ ἀέρα κατέχοντα ὑπὸ πίεσιν 76 δακτύλων ὄγκου 2 λιτρῶν, πόση εἶναι ἡ ἐλαστικότης τοῦ μένοντος ἀέρος ;

101) Τρίγωνον ὁμοιομερὲς ΑΒΓ κρέμαται διὰ νήματος ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ἐκ δὲ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ κρέμανται ἀντιστοίχως βάρη Β καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς πλευρᾶς ΒΓ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

102) Εἰς τὸν θάλαμον σιφωνοειδοῦς βαρομέτρου ὑπάρχει ἀὴρ καταλαμβάνον 10 δακ., καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο δεικνύει πίεσιν 75 δακ. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ὀλίγον ὑδράργυρον, τοῦτο δεικνύει 75,2 δακ., ἐν ᾧ τὸ μῆκος τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου γίνεται 10,8 δακ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀτμ. πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πειράματος.

103) Δύο σώματα τίθενται ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν ταλάντων ἀνακριβοῦς ζυγοῦ καὶ ἰσορροποῦσιν, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ μὲν 36 γραμ. ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄλλο 45 γραμ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ β΄, ὥστε προσθέτοντες αὐτὸ εἰς τὸ α΄ νὰ ἐπιτύχωμεν ἰσορροπίαν ; (Ἡ διὰ τοῦ κ. β. τῆς φάλαγγος ἀγομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ ὑπομοχλίου).

104) Κύβος ἐκ μολύβδου (εἰδ. β. 11,36) ἀκμῆς 4 δακτύλων προσκολλᾶται εἰς σφαῖραν ἐκ φελλοῦ (εἰδ. β. 0,24). Πόσην διάμετρον πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ σφαῖρα, ὅπως τὸ σύστημα αἰωρεῖται ἐντὸς ὕδατος ;

105) Κοίλη σφαῖρα ἀκτῖνος 0,030 μέτρου τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς ἀπόστασιν 0,015 μέτρου ἀπὸ τοῦ κέντρου. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου, ὃν χωρεῖ τὸ μεγαλύτερον τῶν οὕτω σχηματισθέντων δοχείων ;

ΤΕΛΟΣ

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1. **Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων. *Ἡ συντομωτέρα καὶ μεθοδικωτέρα ὅλων.*

2. **Στοιχειώδης Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων. Τὸ βιβλίον τοῦτο διακρίνεται καὶ ἐξαιρετικῶς ἐπῃνέθη διὰ *τοὺς ἐπιτυχεῖς καὶ μεθοδικωτάτους νεωτερισμούς, τὴν μεθοδικὴν διάταξιν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιτυχῶν καὶ καταλλήλως διατεταγμένων ἀσκήσεων.*

3. **Στοιχεῖα Εὐθ. Τριγωνομετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων *συντεταγμένη κατὰ τὰς τελευταίας ἀπαιτήσεις τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς διδακτικῆς.*

4. **Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία** (μεγάλη), πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν Μαθηματικῶν, Φυσικῶν κ.τ.λ. *Μοναδικὸν παρ' ἡμῖν εἰς τὸ εἶδός του τὸ βιβλίον τοῦτο* εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολάς.

5. **Συμπλήρωμα Γεωμετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ πάντων τῶν περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀσχολουμένων. *Πρώτην φορὰν ἐκδίδεται παρ' ἡμῖν τοιοῦτον βιβλίον.*

6. **Στοιχειώδης ἐπίπεδος Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν σπουδαστῶν τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν Ἐπιστημῶν. Τὸ βιβλίον τοῦτο διακρίνεται *διὰ τὴν μεθοδικότητα, ἁπλότητα καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιτυχῶν καὶ καταλλήλως διατεταγμένων ἀσκήσεων.* Ἐξετάζει δὲ συμφώνως πρὸς τὸ Πρόγραμμα τὰς κωνικὰς τομὰς καὶ ἀπὸ καθαρῶς γεωμετρικῆς ἀπόψεως.

7. **Κοσμογραφία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων *μεθοδικωτάτη καὶ ἁπλουστάτη* μετ' ἀρκετῶν ἐπιτυχῶν ἀσκήσεων. *Ἡ μόνη ἐγκεκριμένη.*

8. **Πρακτικὴ Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Ἡμιγυμνασίων καὶ τῶν κατωτέρων τάξεων τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων. Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι *μεθοδικώτατον, ἁπλούστερον καὶ συντομώτερον* ὅλων τῶν ὁμοίων του. Εἶναι δὲ συντεταγμένον κατὰ τρόπον διευκολύνοντα τὴν διδασκαλίαν κατὰ τὴν νέαν μέθοδον *τοῦ σχολείου ἐργασίας.*

9. **Λύσεις** τῶν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς Τριγωνομετρίαις καὶ τῇ Κοσμογραφίᾳ περιεχομένων ἀσκήσεων.

10. **Λύσεις** τῶν ἐν τῇ Στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ περιεχομένων 840 ἀσκήσεων.

ΤΙΜΑΤΑΙ ΔΡΧ. 100