80

Σ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΟΠΤΙΚΗ · ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ · ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ε 2 ΦΣΚ

Περιστεράκης (Σ.Γ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ε 2 ΦΕΚ

ΣΑΛΤΕΡΗ Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ

Δ^ΡΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.
ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΜΕΤΣΟΒΙΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

Περιστεράκης (Σαλτέρης Γ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΝ ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

247

ΤΟΜΟΣ II

ΟΠΤΙΚΗ • ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ • ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ 393 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ ΛΕΛΥΜΕΝΑΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΑΙ 1000 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ
ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΤΑ 170 ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΟΔΟΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 (ΡΟΥΖΒΕΛΤ) ΑΘΗΝΑΙ
1958

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Η «ΕΣΤΙΑ» Κ. ΓΙΑΚΑΛΟΥ & Ε. ΚΟΝΤΟΥ. ΑΓ. ΠΑΥΛΟΥ 28, ΑΘΗΝΑΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβάνει μίαν νέαν πλήρη συλλογὴν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Φυσικῆς, ἀναφερομένων κυρίως εἰς θέματα τῆς στοιχειώδους Φυσικῆς, τῶν ὁποίων ἡ θεωρία ἀναγράφεται εἰς τὰ βιβλία ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς». Ὡς ἐκ τούτου τὸ βιβλίον τοῦτο ἀνταποκρίνεται τελείως πρὸς τὰς ἐπιδιώξεις τῶν ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ καθίσταται πολύτιμον ἐφόδιον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου κατεβλήθη μεγάλη προσπάθεια νὰ περιληφθοῦν εἰς αὐτὸ ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὑποδειγματικά, μὲ σαφῆ, σύντομον καὶ τελείαν διατύπωσιν, ταξινομημένα εἰς κατηγορίας, συμφώνως πρὸς τὰς κοινὰς ὁμοιότητας τὰς ὁποίας παρουσιάζουν ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται καὶ ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς λύσεώς των.

Τὰ προβλήματα Φυσικῆς ἀποτελοῦν οὐσιῶδες στοιχεῖον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς διδασκομένης ὕλης τῆς Φυσικῆς καὶ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα, τόσον τῆς διδασκαλίας ὅσον καὶ τῆς μελέτης τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, πρὸς τελείαν ἐκμάθησιν αὐτῆς.

Εἶναι ὄντως ἀναμφισβήτητον ὅτι διὰ τῆς ἐπιλύσεως πολλῶν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς ὅλα ἐν γένει τὰ κεφάλαια τῆς Φυσικῆς, οἱ σπουδασταὶ εὑρίσκουν τὴν εὐκαιρίαν ὄχι μόνον νὰ ἐπαναλαμβάνουν τὴν ὕλην ἑκάστου κεφαλαίου ἀλλά, πρὸς τούτοις, νὰ συνηθίζουν εἰς τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῶν φυσικῶν νόμων, εἰς τὴν ὀρθὴν ἐφαρμογὴν τῶν διαφόρων τύπων, ὡς καὶ τῶν συστημάτων μονάδων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ἡ Φυσική, ἐπὶ πλέον δὲ ἐξοικειοῦνται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὀρθῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

Ἐξ ἄλλου — καὶ τοῦτο ἔχει κεφαλαιώδη σημασίαν — διὰ τῆς ἐπιλύσεως προβλημάτων Φυσικῆς οἱ σπουδασταὶ κατανοοῦν τὴν μεγίστην πρακτικὴν σημασίαν τοῦ μαθήματος τούτου καὶ εἰς αὐτὸν ἀκόμη τὸν καθ' ἡμέραν βίον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ἀναμφιβόλως, συντελεῖ σπουδαίως εἰς τὴν διέγερσιν τῆς ἀγάπης αὐτῶν πρὸς τὴν Φυσικὴν καὶ τοῦ ζήλου των πρὸς ἀπόκτησιν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρων γνώσεων.

Τὸ σύνολον τῶν προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ὑποδιαιρεῖται εἰς τέσσαρας κατηγορίας.

Ἡ πρώτη περιλαμβάνει προβλήματα, τῶν ὁποίων παρέχεται ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ὡς καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ ἐνδιατρίψῃ μετ' ἐπιμονῆς καὶ ἐπιμελείας, διὰ νὰ κατανοήσῃ καλῶς τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθῇ κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Φυσικῆς. Εἰς τὸ μέρος τοῦτο παρατίθενται καὶ ἀρκεταὶ βοηθητικαὶ γνώσεις, ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ὀρθὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Αἱ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων τούτων θὰ περιέχωνται εἰς τὰς νεωτέρας ἐκδόσεις τῶν βιβλίων ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς».

Ἡ δευτέρα κατηγορία περιλαμβάνει τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ τὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καταλήξῃ ὁ σπουδαστής, ἐὰν ἔλυσεν ὀρθῶς ταῦτα. Καὶ ἡ δευτέρα κατηγορία προβλημάτων ἔχει σπουδαιοτάτην σημασίαν, διότι δίδει εἰς τὸν σπουδαστὴν τὴν εὐκαιρίαν νὰ δοκιμάσῃ κατὰ πόσον κατέστη ἱκανὸς νὰ ἐπιλύῃ μόνος προβλήματα Φυσικῆς, χωρὶς οὐδεμίαν ἄλλην βοήθειαν. Ἡ διαρκὴς *ἄλλως τε παράθεσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων εἶναι καὶ ἀντιπαιδαγωγική, διότι ἀποκλείει τὴν αὐτενέργειαν τοῦ σπουδαστοῦ.*

Ἡ τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει μόνον τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ ἀπευθύνεται πρὸς σπουδαστὰς ἐξοικειωθέντας ἤδη εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης καὶ δευτέρας κατηγορίας, ἐπαφίεται δὲ εἰς αὐτοὺς ὅπως, διὰ καταλλήλου βασάνου, συμπεράνουν περὶ τῆς ὀρθότητος τοῦ ἀποτελέσματος εἰς τὸ ὁποῖον κατέληξαν.

Ἐν τούτοις εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ νὰ εἶναι βέβαιος ὁ σπουδαστὴς διὰ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἀσκήσεων, παραθέτομεν τὰς λύσεις τούτων εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου.

Ἡ τετάρτη τέλος κατηγορία, ἡ ὁποία παρατίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου, περιλαμβάνει προβλήματα Φυσικῆς ἀνωτέρας συνθέσεως καί, ἐπομένως, δυσκολώτερα τῶν τριῶν προηγουμένων κατηγοριῶν, ἀπευθύνεται δὲ πρὸς ἐκείνους ἐκ τῶν σπουδαστῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπιθύμουν ν' ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν λύσιν συνθετωτέρων προβλημάτων.

Ἐθεωρήθη σκόπιμος ἡ παράθεσις, κατὰ τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης, εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον χαρακτηριστικῶν τινων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ παρελθὸν ἔχουν δοθῇ ὡς θέματα εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Οὕτω οἱ ὑποψήφιοι θὰ εἶναι εἰς θέσιν διὰ τῆς λύσεως τούτων νὰ ἐκτιμήσουν τὰς ἱκανότητάς των.

Τὸ βιβλίον συμπληροῦται καὶ διὰ καταλλήλου συλλογῆς πινάκων φυσικῶν σταθερῶν, εἰς τοὺς ὁποίους οἱ σπουδασταὶ δύνανται ν' ἀναζητοῦν ὡρισμένας σταθεράς, ἀπαραιτήτους διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν περιέχονται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

Παρὰ τὴν συστηματικὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐξαγομένων τῶν προβλημάτων, ὡς καὶ τὴν καταβληθεῖσαν ἐπιμέλειαν καὶ μεγάλην προσοχὴν κατὰ τὴν διόρθωσιν τῶν δοκιμίων, εἶναι πιθανόν, λόγῳ τῆς φύσεως τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου, νὰ παρεισέφρησαν ἀβλεψίαι· ὡς ἐκ τούτου παρακαλοῦμεν θερμῶς τοὺς ἀναγνώστας, καὶ τοὺς συναδέλφους καθηγητάς, ἐὰν τυχὸν ἤθελον παρατηρήσει τοιαύτας, ὅπως μᾶς πληροφορήσουν περὶ αὐτῶν, ἵνα τὰς ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, θὰ τοὺς εἴμεθα δὲ ἐξαιρετικῶς ὑπόχρεοι.

Παραδίδοντες τὸ βιβλίον τοῦτο εἰς τὴν δημοσιότητα, πιστεύομεν, ὅτι θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν ἐξύψωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῶν γνώσεων Φυσικῆς τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, ἐὰν δὲ τοῦτο ἤθελεν ἐπιτευχθῇ, θ' ἀπετέλει δι' ἡμᾶς ὑψίστην ἠθικὴν ἱκανοποίησιν.

Τὰς πλείστας τῶν ἀσκήσεων ἔλυσεν ὁ Φυσικὸς κ. **Μηνᾶς Μακρόπουλος**, *μέρος δὲ τούτων ὁ φοιτητὴς τοῦ Φυσικοῦ Τμήματος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ.* **Νικ. Γαρυφάλου**, *τοὺς ὁποίους εὐχαριστῶ θερμῶς καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἐπίσης ἐκφράζω τὰς εὐχαριστίας μου εἰς τὸν βοηθὸν τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κ.* **Χ. Μηλιαροκατερινάκην**, *ὡς καὶ τὸν φοιτητὴν τοῦ Φυσικοῦ τμήματος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ.* **Δημ. Λεωνίδου**, *οἱ ὁποῖοι μὲ ἐβοήθησαν εἰς τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης.*

Ἀθῆναι, Αὔγουστος 1958,

Σ. Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΟΠΤΙΚΗ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΣΥΜΒΟΛΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ὡς ταῦτα κατὰ προτίμησιν χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ βιβλίον

ΟΠΤΙΚΗ

α = ἀπόστασις ἀντικειμ. ἀπὸ κατόπτρου
α = γωνία προσπτώσεως
A = μέγεθος ἀντικειμένου
A = διαθλαστικὴ γωνία
Å = Ångström
β = ἀπόστασις εἰδώλου ἀπὸ κατόπτρου
β = γωνία ἀνακλάσεως, — διαθλάσεως
c = ταχύτης φωτὸς
δ = διάμετρος, ἀπόστασις, γωνία
δ = ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως
d = διάμετρος
Δ = ἀπόστασις
ε = γωνία ἐκτροπῆς
$\varepsilon_{\varepsilon\lambda}$ = γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς
E = μέγεθος εἰδώλου, φωτισμὸς
F = ἑστιακὴ ἀπόστασις συστήματος φακῶν
f = ἑστιακὴ ἀπόστασις
h = ὕψος, ὥρα
Hz = Hertz
H = ὕψος
θ = γωνία
J = ἰσχὺς φωτεινῆς πηγῆς
λ = μῆκος κύματος, ὁρικὴ γωνία
l = μῆκος, ἀπόστασις
Lm = Lumen
μ = μικρὸν (= 10^{-4} cm)
M = μεγέθυνσις
min = λεπτὸν
ν = συχνότης
n = συχνότης, δείκτης διαθλάσεως
NK = Νέον κηρίον
P = ἰσχὺς
r = μῆκος
rad = ἀκτίνιον
R = ἀκτὶς καμπυλότητος
s = διάστημα
S = ἐπιφάνεια, ἐμβαδὸν
φ = γωνία
Φ = φωτεινὴ ῥοὴ
x = μῆκος, ἀπόστασις
ω = γωνιακὴ ταχύτης
W = Watt

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

α = γωνία, ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον
α = θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως
α = ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος
A = Ἀμπέρ, ἐνέργεια, ἀτομικὸν βάρος
A = ἐνέργεια πυκνωτοῦ
Ah = ἀμπερώριον
B = βάρος, μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ
γ = ἐπιτάχυνσις
c = εἰδικὴ θερμότης
c/sec = κύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον
cal = calorie (θερμὶς)
C = χωρητικότης
Cb = Coulomb
CV = ἀτμόϊππος
δ = διάμετρος
d = ἀπόστασις, διάμετρος
ε = εἰδικὸν βάρος
ε = διηλεκτρικὴ σταθερὰ
E = ἐνέργεια
$\mathscr{E}$ = ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου
e = φορτίον ἠλεκτρονίου
eV = ἠλεκτρονικὸν βόλτ
erg = ἔργιον
Z = ἀτομικὸς ἀριθμὸς
ΗΕΔ = ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις
F = δύναμις, σταθερὰ τοῦ Faraday
g = ἐπιτάχυνσις βαρύτητος
grad = βαθμὸς
η = συντελεστὴς ἀποδόσεως
ΗΣΜ = ἠλεκτροστατικὴ μονὰς
ΗΣΜ = ἠλεκτροστατ. σύστημα μονάδων
ΗΜΜ = ἠλεκτρομαγνητικὴ μονάς,
ΗΜΜ = ἠλεκτρομαγνητ. σύστ. μονάδων
H = Henry
$\mathscr{H}$ = ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου
h = ὥρα, ὕψος, πάχος
h = σταθερὰ δράσεως Planck
θ = γωνία, θερμοκρασία
Θ = ῥοπὴ ἀδρανείας
i = ἔντασις ῥεύματος
j = πυκνότης ῥεύματος
J = μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος
q = φορτίον
Q = ποσὸν θερμότητος
°K = βαθμοὶ Kelvin (ἀπόλυτοι)
kW = κιλοβὰτ (= 10^3 Watt)
kWh = κιλοβατώριον
λ = θερμικὸς συντελεστ. γραμμικῆς διαστολῆς
L = αὐτεπαγωγή, συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς
μ = μαγνητικὴ διαπερατότης
M = ῥοπὴ
M* = μαγνητικὴ ῥοπὴ διπόλου
Mx = Maxwell
m = μαγνητικὴ ποσότης, μᾶζα, μέτρον
ν = συχνότης
N = ἰσχύς, ἀριθμὸς σπειρῶν, Βορρᾶς (Nord)
N = ἀριθμὸς Loschmidt
n = σθένος
ρ = εἰδικὴ ἀντίστασις, πυκνότης
r = ἀπόστασις, ἐσωτερικὴ ἀντίστασις, ἀκτὶς
rad = ἀκτίνιον
R = ἀντίστασις
σ = ἠλεκτρικὴ πυκνότης
s = διάστημα
S = ἐπιφάνεια, Νότος (Sud)
T = περίοδος, ἀπόλυτος θερμοκρασία
t = χρόνος
υ = ταχύτης
U = διαφορὰ δυναμικοῦ (τάσις)
V = Volt, ὄγκος
Φ = μαγνητικὴ ῥοὴ
ω = κυκλικὴ συχνότης
Ω = Ohm
W = Watt

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

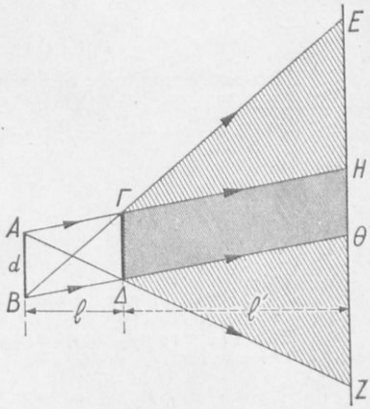
ΟΠΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ
ΤΑΧΥΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΕΩΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1. Δύο δίσκοι τῆς αὐτῆς διαμέτρου d **εἶναι παράλληλοι μεταξύ των ὡς καὶ παράλληλοι πρὸς λευκὸν πέτασμα. Ἡ μεταξὺ τῶν δίσκων ἀπόστασις εἶναι** l **καὶ ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸ πέτασμα δίσκος ἀπέχει ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν** l'. **Ποῖον τὸ πάχος τῆς παρασκιᾶς, ἐὰν ὁ πλησιέστερος δίσκος πρὸς τὸ πέτασμα θεωρηθῇ ἀδιαφανὴς καὶ ὁ ἀπώτερος θεωρηθῇ ὡς φωτεινὴ πηγή. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Δίδονται:** $d = \mathbf{1{,}5}$ cm, $l' = \mathbf{5}$ cm, **καὶ** $l = \mathbf{2{,}5}$ cm.



Λύσις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΗΓ καὶ ΑΒΓ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$\frac{(\text{EH})}{d} = \frac{l'}{l}$$

Συνεπῶς ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς (ΕΗ) (πάχος τῆς παρασκιᾶς) λαμβάνομεν

$$\underline{(\text{EH}) = d \cdot \frac{l'}{l}} \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν

$$\underline{(\text{EH}) = 3 \text{ cm.}}$$

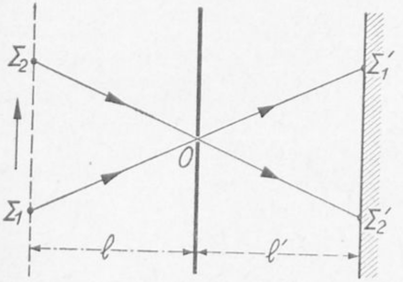
2. Διάφραγμα φέρον μικρὰν ὀπὴν ἀπέχει ἀπὸ πέτασμα ἀπόστασιν l' **καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτό. Ἡ ὀπὴ φωτίζεται ὑπὸ σημειακῆς φωτεινῆς πηγῆς ἐξ ἀποστάσεως** l **καὶ οὕτω σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος ἕνα μικρὸν φωτεινὸν εἴδωλον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν ἡ σημειακὴ φωτεινὴ πηγὴ κινῆται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸ διάφραγμα, τότε καὶ τὸ εἴδωλον κινεῖται ἐπίσης μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην.**

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ σημειακὴ φωτεινὴ πηγὴ Σ_1, μετὰ πάροδον χρόνου t εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Σ_2· τότε καὶ τὸ εἴδωλον αὐτῆς Σ_1' θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Σ_2'. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$(\Sigma_1 \Sigma_2) = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (1)$$

ὅπου υ_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ Σ_1.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Sigma'_1 \Sigma'_2 O$ καὶ $\Sigma_1 \Sigma_2 O$ ἔχομεν



$$(\Sigma'_1\,\Sigma'_2) = \frac{l'}{l}\cdot(\Sigma_1\,\Sigma_2) \qquad (2)$$

ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως (1)

$$(\Sigma'_1\,\Sigma'_2) = \frac{l'}{l}\cdot\left(\upsilon_0\cdot t + \frac{1}{2}\gamma\cdot t^2\right)$$

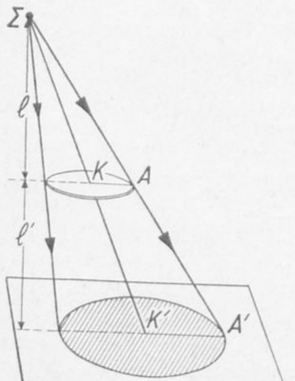
ἢ

$$(\Sigma'_1\,\Sigma'_2) = \left(\frac{l'}{l}\cdot\upsilon_0\right)\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l'}{l}\cdot\gamma\right)\cdot t^2 \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὅμως l'/l εἶναι πηλίκον σταθερόν, θὰ εἶναι $\frac{l'}{l}\cdot\upsilon_0$ σταθερόν, καθὼς καὶ $\frac{l'}{l}\cdot\gamma$ ἐπίσης σταθερόν.

Συνεπῶς τὸ εἴδωλον Σ'_2, ὡς ἔχον σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $\gamma' = \frac{l'}{l}\cdot\gamma$, θὰ ἔχῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ἡ δὲ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ θὰ εἶναι $\upsilon' = \frac{l'}{l}\cdot\upsilon_0$.

3. Ἀδιαφανὴς κυκλικὸς δίσκος εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν l' ἀπὸ πετάσματος καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό. Ἐὰν ὁ δίσκος φωτίζεται ἀπὸ σημειακὴν φωτεινὴν πηγὴν Σ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δι' οἱανδήποτε θέσιν τῆς φωτεινῆς πηγῆς Σ, ἀπεχούσης τοῦ δίσκου ἀπόστασιν l, ἡ σκιὰ ἐπὶ τοῦ πετάσματος εἶναι ἐπίσης κύκλος.



Λύσις. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ σκιὰ εἶναι κύκλος ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τυχὸν σημεῖον Α' τῆς περιμέτρου αὐτῆς ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ΣΚ), ὅπου Κ τὸ κέντρον τοῦ δίσκου, ἡ ὁποία τέμνει τὸ πέτασμα εἰς τὸ σημεῖον Κ'.

Ἐπειδὴ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα (ΑΚ) καὶ (Α'Κ') εἶναι παράλληλα, τὰ τρίγωνα ΣΑ'Κ' καὶ ΣΑΚ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(A'K')}{(AK)} = \frac{l+l'}{l} \quad \text{ἢ} \quad (A'K') = (AK)\cdot\frac{l+l'}{l}$$

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΚ), l καὶ l' εἶναι σταθερά, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα (Α'Κ') εἶναι ἐπίσης σταθερόν.

Ἄρα τὸ σημεῖον Α', τὸ ὁποῖον εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου, ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου Κ' καὶ ἑπομένως ἡ περίμετρος τῆς σκιᾶς εἶναι περιφέρεια κύκλου.

4. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Fizeau χρησιμοποιεῖται τροχὸς ὅστις φέρει 500 ὀδόντας καὶ 500 διάκενα. Τὸ πλάτος τοῦ ὀδόντος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλάτος τοῦ διακένου. Τὸ ἀνακλῶν κάτοπτρον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 9000 m. Παρατηρεῖται οὕτω ὅτι ἡ πρώτη ἔκλειψις τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος συμβαίνει ὅταν ὁ τροχὸς κάμνῃ 16,6 στρ./sec. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν l τὴν ἀπόστασιν τοῦ κατακορύφου κατόπτρου ἀπὸ τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ καὶ t τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα τὸ φῶς διανύσῃ τὸ διάστημα $s = 2l$. Ἡ ταχύτης c τοῦ φωτὸς θὰ εἶναι

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2l}{t} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ τροχὸς φέρῃ N ὀδόντας καὶ περιστρέφεται μὲ συχνότητα n, τότε εἰς χρόνον μιᾶς περιόδου, ἤτοι εἰς χρόνον $1/n$ θὰ ἐκτελῇ μίαν πλήρη περιστροφὴν καὶ συνεπῶς θὰ στρέφεται κατὰ N ὀδόντας.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ πείραμα τὸ φῶς διέρχεται διὰ κενοῦ διαστήματος καὶ ἐπιστρέφον προσπίπτει ἐπὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὀδόντος, ἕπεται ὅτι εἰς χρόνον t γίνεται ἀντικατάστασις ἑνὸς κενοῦ διαστήματος ὑπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὀδόντος, δηλαδὴ εἰς χρόνον t στρέφεται ὁ τροχὸς κατὰ 1/2 ὀδόντας.

Ἄρα ἐφ' ὅσον εἰς χρόνον $1/n$ στρέφεται κατὰ N ὀδόντας, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὅτι διὰ νὰ στραφῇ κατὰ 1/2 ὀδόντος ἀπαιτεῖται χρόνος

$$t = \frac{1}{2n \cdot N} \qquad (2)$$

Οὕτω λόγῳ τῆς σχέσεως (2) ἡ (1) γράφεται

$$\underline{c = 4l \cdot n \cdot N} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $l = 9$ km, $n = 16{,}6$ στρ./sec, $N = 500$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{c = 298\,800 \text{ km/sec.}}$$

5. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Fizeau, χρησιμοποιεῖται τροχὸς φέρων 500 ὀδόντας καὶ 500 διάκενα. Τὸ ἀνακλῶν κάτοπτρον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 7500 m ἀπὸ τοῦ τροχοῦ. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ δευτερόλεπτον τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελῇ ὁ τροχός, ἵνα παρατηρηθῇ διὰ πρώτην φορὰν ἔκλειψις τῆς ἀνακλωμένης δέσμης.

Λύσις. Ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ ἰσχύσῃ ὁ τύπος

$$c = 4l \cdot n \cdot N \qquad (1)$$

Λύοντες ὡς πρὸς n λαμβάνομεν

$$\underline{n = \frac{c}{4l \cdot N}} \qquad (2)$$

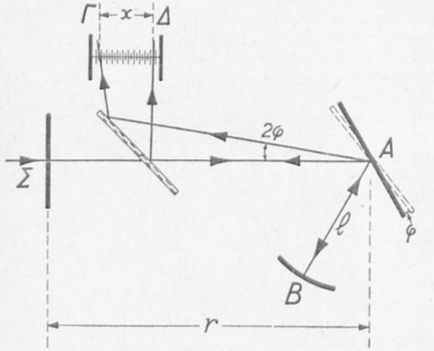
Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ σύμβολα διὰ τῶν τιμῶν $c = 300\,000$ km/sec, $l = 7{,}5$ km, $N = 500$ εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 20 \text{ στρ./sec.}}$$

6. Διὰ τῆς μεθόδου Foucault, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ φωτός, παρατηρεῖται ὅτι ἡ μετατόπισις τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ὡς πρὸς τὴν προσπίπτουσαν εἶναι $x = 2$ mm ὅταν τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον στρέφεται ὑπὸ συχνότητα $n = 600$ στρ./sec καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἀπὸ τοῦ κοίλου εἶναι $l = 5$ m, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἀπὸ τοῦ κανόνος ἐπὶ τοῦ ὁποίου μετρῶνται αἱ μετατοπίσεις εἶναι $r = 8$ m. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα.

Λύσις. Καθ' ὃν χρόνον τὸ φῶς διανύει τὸ διάστημα $2 \cdot (AB) = 2l$ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον στρέφεται κατὰ γωνίαν ἔστω φ, ἐνῷ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΒΑ, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας, στρέφεται κατὰ γωνίαν 2φ.

Ἐξ ἄλλου ἂν ἡ γωνία στροφῆς φ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἀντιστοιχῇ εἰς χρόνον t, τότε ἡ γωνιώδης ταχύτης περιστροφῆς ω τοῦ κατόπτρου θὰ εἶναι $\omega = \varphi/t$, καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν



$$t = \frac{\varphi}{\omega} \tag{1}$$

καὶ ἐπειδὴ $\omega = 2\pi . n$, λαμβάνομεν

$$t = \frac{\varphi}{2\pi \cdot n} \tag{2}$$

Συνεπῶς ἡ ταχύτης $c = s/t$ τοῦ φωτὸς θὰ δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$c = \frac{2l}{t} = \frac{4\pi . l \cdot n}{\varphi} \tag{3}$$

Ἡ γωνία ὅμως 2φ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς μετατοπίσεως(ΓΔ) $= x$, ἥτις μετρᾶται ἐπὶ τοῦ κανόνος, διὰ τῆς ἀποστάσεως r. Ἤτοι

$$2\varphi = \frac{x}{r} \tag{4}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (4) ὡς πρὸς φ λαμβάνομεν $\varphi = x/2r$ καὶ οὕτω ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος

$$\underline{c = \frac{8\pi . l . n \cdot r}{x}} \tag{5}$$

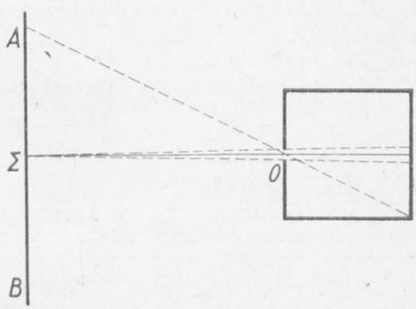
Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $l = 5$ m, $n = 600$ στρ./sec, $r = 8$ m, $x = 2$ mm $= 2 \cdot 10^{-3}$ m καὶ εὑρίσκομεν

$\underline{c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}$ (περίπου)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

7. Φωτεινὴ σφαῖρα ἀκτῖνος 1 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ πετάσματος. Σφαῖρα σκιερὰ ἀκτῖνος 1 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ πετάσματος καὶ 1 m ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς. Ζητεῖται : α) νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς σκιᾶς καὶ παρασκιᾶς, β) ποία μετατόπισις καθέτως πρὸς τὸ διάφραγμα πρέπει νὰ δοθῇ εἰς τὴν φωτεινὴν πηγήν, οὕτως ὥστε ἡ ἀκτὶς τῆς παρασκιᾶς νὰ γίνῃ διπλασία τῆς προηγουμένης.

(Ἀπ. α′ Σκιὰ 3 cm, πάχος παρασκιᾶς 2 cm. β′ 20 cm.)



8. Σκοτεινὸς θάλαμος ἔχει σχῆμα κύβου ἀκμῆς 30 cm. Εἰς μίαν ἐκ τῶν κατακορύφων αὐτοῦ ἑδρῶν φέρει εἰς τὸ κέντρον ὀπὴν Ο, διαμέτρου 0,5 mm (βλ. σχῆμα). Ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Ο εἰς τὴν ἕδραν αὐτοῦ, εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Σ καὶ εἰς ἀπόστασιν 6 m ἀπὸ τοῦ Ο. Πόση ἡ διάμετρος τῆς φωτεινῆς κηλῖδος τῆς σχηματιζομένης εἰς τὸ βάθος τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ΟΣ, ἀπὸ τοῦ σημείου Σ, πρέπει νὰ μετατεθῇ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Σ, ἵνα φωτισθῇ τὸ ἄκρον τῆς ἀπέναντι τῆς ὀπῆς Ο ἕδρας. (Ἀπ. 0,525 mm, 600 cm.)

9. Ἐπὶ διαφράγματος ὑπάρχει κυκλικὴ ὀπὴ διαμέτρου 4 cm, φωτίζεται δὲ αὕτη ἰσχυρῶς διὰ λαμπτῆρος τοποθετουμένου πλησίον τῆς ὀπῆς, θεωρουμένης οὕτω τῆς ὀπῆς ὡς φωτεινῆς πηγῆς. Κυκλικὸν τεμάχιον μετάλλου διαμέτρου 2 cm, τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 6 cm ἀπὸ τῆς κυκλικῆς φωτεινῆς ὀπῆς κατὰ τρόπον ὥστε νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διάφραγμα, τὸ δὲ κέντρον του νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ διάφραγμα διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς. Ἐὰν ἡ κυκλικὴ σκιὰ τοῦ μετάλλου σχηματίζεται ἐπὶ πετάσματος, ποία ἡ ὁρικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ μετάλλου, πέραν τῆς ὁποίας δὲν δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ πετάσματος σκιά. (Ἀπ. 6 cm.)

10. Φωτεινὴ πηγὴ κυκλική, διαμέτρου 4 cm, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ ἀδιαφανῆ δίσκον διαμέτρου 20 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς σκιᾶς καὶ τῆς παρασκιᾶς, ἐπὶ πετάσματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 1 m ὄπισθεν τοῦ σκιεροῦ δίσκου. (Ἀπ. Ἡ σκιὰ εἶναι κύκλος διαμ. 52 cm, ἡ παρασκιὰ ἔχει πάχος 8 cm.)

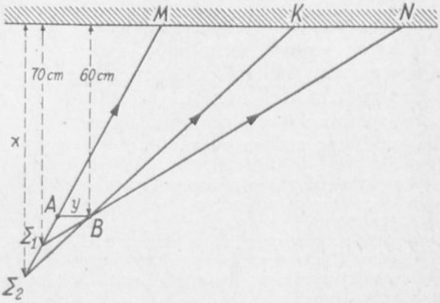
11. Ἐπίπεδον κάτοπτρον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ φωτεινὸν σημεῖον καὶ στρέφεται τὸ κάτοπτρον περὶ τὸν ἄξονά του ὑπὸ συχνότητα 10 στρ./sec. Ἐξετάζοντες τὸ εἴδωλον τοῦ φωτεινοῦ σημείου, ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου, παρατηροῦμεν ὅτι δύο διαδοχικαὶ εἰκόνες αὐτοῦ ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 12,5 cm. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ συχνότης τῆς ἐμφανίσεως τῆς παρατηρουμένης εἰκόνος. (Ἀπ. 500 sec^{-1}.)

12. Εἰς τὴν διάταξιν τῆς μεθόδου Fizeau, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός, ἡ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου ἀπὸ τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ εἶναι 32 km, ὁ δὲ τροχὸς φέρει 300 ὀδόντας. Μὲ ποίαν συχνότητα πρέπει νὰ στρέφεται ὁ τροχός, ἵνα ἡ ἐπιστρέφουσα ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὀδόντος. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς $c = 297\,000$ km/sec. (Ἀπ. 15,5 sec^{-1}.)

13. Φωτεινὴ δέσμη ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μέσου τῶν διακένων τροχοῦ φέροντος 500 ὀδόντας καὶ 500 διάκενα, τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀνακλᾶται ἐν μέρει ἐπὶ κατόπτρου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 2 km καὶ ἐν μέρει ἐπὶ ἑτέρου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 6 km. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τὰς ὁποίας θὰ ἐκτελῇ ὁ τροχὸς ἵνα ἐκλείψουν συγχρόνως αἱ ἀνακλώμεναι φωτειναὶ δέσμαι.
(Ἀπ. 75, 225, 375, ..., $(2k+1)\cdot 75$ στρ./sec.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ΄

14. Δύο μεταλλικὰ στελέχη Α καὶ Β (σχῆμα) εὑρίσκονται ἀμφότερα εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ κατακορύφου πετάσματος. Φωτεινὴ πηγὴ τοποθετουμένη εἰς ἀπόστασιν 70 cm ἀπὸ τοῦ πετάσματος δίδει σκιὰς ἀπεχούσας κατὰ 84 cm. Ζητεῖται : α) Τί γίνεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σκιῶν, ἐὰν μετατοπισθῇ ἡ φωτεινὴ πηγὴ παραλλήλως πρὸς τὸ πέτασμα. β) Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἡ φωτεινὴ πηγὴ οὕτως ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σκιῶν νὰ εἶναι 42 cm. γ) Πόση ἡ ἀπόστασις τῶν δύο στελεχῶν μεταξύ των.



15. Φωτίζεται σκιερὸν τετράγωνον πλευρᾶς 4 cm ὑπὸ σημειώδους φωτεινῆς πηγῆς Σ, εὑρισκομένης ἐπὶ τῆς καθέτου ἥτις ἄγεται εἰς τὸ μέσον τοῦ τετραγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπ' αὐτοῦ. Ζητεῖται : α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τῆς σχηματιζομένης σκιᾶς καὶ τῆς τομῆς αὐτῆς ὑπὸ πετάσματος παραλλήλου πρὸς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 80 cm ὄπισθεν αὐτοῦ. β) Πῶς μεταβάλλεται ἡ σκιὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ πετάσματος, ἐὰν ἀντικατασταθῇ ἡ πηγὴ Σ δι' εὐθυγράμμου φωτεινοῦ νήματος μήκους 2 cm, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέσον εἰς τὸ Σ καὶ εἶναι τοποθετημένον παραλλήλως πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

16. Ἓν φωτεινὸν φαινόμενον ἀναπαράγεται 435 φορὰς ἀνὰ δευτερόλεπτον. Σπουδάζει τις τοῦτο παρατηρῶν τὰ διαδοχικά του εἴδωλα ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς, ἐνῷ τὸ κάτοπτρον περιστρέφεται ὑπὸ συχνότητα 5 στρ./sec. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ἡ ὁποία χωρίζει δύο διαδοχικὰ εἴδωλα τοῦ φαινομένου.

17. Εἰς διάταξιν τῆς μεθόδου Fizeau, ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς ἔχει 600 ὀδόντας καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κατακορύφου κατόπτρου εἶναι 15 km. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν ἀνὰ δευτερόλεπτον τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ, ἵνα τὸ φῶς διερχόμενον διά τινος διακένου κατὰ τὴν ἔξοδον διακόπτεται ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὀδόντος κατὰ τὴν ἐπιστροφήν.

18. Εἰς διάταξιν τῆς μεθόδου Fizeau, τὸ ἐντονώτερον φῶς φαίνεται κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ τροχὸς ἐκτελεῖ 10 στροφὰς ἀνὰ δευτερόλεπτον. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κατόπτρου εἶναι 25 km, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων 600. Ὑπολογίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. (Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Ὀδοντιατρικόν, 1954.)

19. Φωτεινὴ δέσμη ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μέσου διακένου τροχοῦ φέροντος 500 ὀδόντας καὶ 500 διάκενα, τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀνακλᾶται ἐν μέρει ἐπὶ κατόπτρου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 4 km καὶ ἐν μέρει ἐπὶ κατόπτρου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 12 km. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τὰς ὁποίας θὰ πρέπῃ νὰ ἐκτελῇ ὁ τροχός, ἵνα ἐκλείψουν συγχρόνως αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

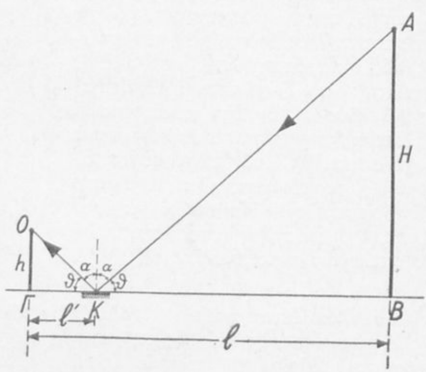
ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Α΄ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

20. Παρατηρητὴς ἵσταται εἰς ἀπόστασιν 42 m ἀπὸ πύργου. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς ὕψος 1,6 m ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους καὶ παρατηρεῖ ἐντὸς μικροῦ ἐπιπέδου κατόπτρου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπ' αὐτοῦ, τὸ εἴδωλον τῆς κορυφῆς τοῦ πύργου. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

Λύσις. Διὰ νὰ βλέπῃ ὁ παρατηρητὴς τὴν κορυφὴν Α τοῦ πύργου πρέπει ἡ ἀκτὶς ΑΚ προερχομένη ἐκ τοῦ Α καὶ ἀνακλωμένη ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐπιπέδου κατόπτρου Κ νὰ εἰσέρχεται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν Ο αὐτοῦ. Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΟΓΚ εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν



$$\frac{(AB)}{(O\Gamma)} = \frac{(KB)}{(K\Gamma)} \quad \text{καὶ} \quad (AB) = (O\Gamma) \cdot \frac{(KB)}{(K\Gamma)} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν H τὸ ὕψος (AB) τοῦ πύργου, h τὸ ὕψος (ΟΓ) εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ὀφθαλμὸς ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, l τὴν ἀπόστασιν (ΒΓ) τοῦ πύργου ἀπὸ τὸν παρατηρητὴν καὶ l' τὴν ἀπόστασιν (ΚΓ) τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

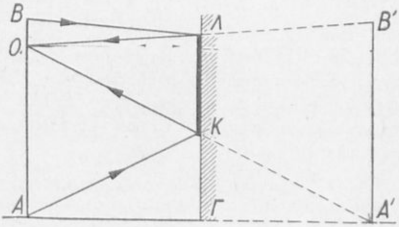
$$\underline{H = h \cdot \frac{l - l'}{l'}}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $h = 1{,}6$ m, $l = 42$ m καὶ $l' = 2$ m, εὑρίσκομεν

$$\underline{H = 32 \text{ m}.}$$

21. Πόσον εἶναι τὸ ἐλάχιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὑρίσκεται τὸ κατώτερον ἄκρον ἐπιπέδου κατακορύφου κατόπτρου, ὥστε ἄτομον τοῦ ὁποίου τὸ ἀνάστημα εἶναι 1,75 m νὰ δύναται νὰ βλέπῃ τὸν ἑαυτόν του ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ὁλόκληρον. Πόσον εἶναι τὸ ἐλάχιστον ὕψος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ κάτοπτρον τοῦτο. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1,65 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους.

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι τὸ κάτοπτρον εἶναι ἀπεριορίστου ὕψους. Ὅταν ὁ παρατηρητὴς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν (ΑΒ), τότε τὸ εἴδωλόν του θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν συμμετρικὴν ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον θέσιν (Α'Β'). Ὁ ὀφθαλμὸς Ο τοῦ παρατηρητοῦ θὰ βλέπῃ τὴν κορυφὴν Β' τοῦ εἰδώλου του κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΒ' καὶ τὴν βάσιν Α' κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΑ'. Ἐφ' ὅσον ὁ ὀφθαλμὸς βλέπῃ τὸ Β' τὸ ὁποῖον εἶναι εἴδωλον τοῦ Β, ἕπεται ὅτι δέχεται ἐκ τοῦ κατόπτρου τὴν ἀκτῖνα ΛΟ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀνακλωμένη τῆς προσπιπτούσης ἀκτῖνος ΒΛ, τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ σημείου Β.



Ὁμοίως ἐφ' ὅσον βλέπῃ τὸ Α', ἕπεται ὅτι δέχεται τὴν ἀκτῖνα ΚΟ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀνακλωμένη τῆς ΑΚ τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ σημείου Α.

Οὕτω ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι τὸ ἐλάχιστον ὕψος τοῦ κατόπτρου τὸ ἀπαιτούμενον ἵνα ὁ παρατηρητὴς βλέπῃ ὁλόκληρον τὸ εἴδωλόν του εἶναι τὸ (ΚΛ) καὶ ὅτι πρέπει τοῦτο νὰ εὑρίσκεται εἰς ὕψος (ΓΚ) ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Τὸ ὕψος (ΓΚ) ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τριγώνου Α'ΟΑ διότι ἡ (ΓΚ) ἐπειδὴ ἑνώνει τὰ μέσα Γ καὶ Κ τῶν πλευρῶν (Α'Α) καὶ (Α'Ο), θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς (ΑΟ). Ἤτοι:

$$\underline{(\text{ΓΚ}) = \frac{(\text{ΑΟ})}{2} = \frac{1{,}65}{2} = 0{,}825 \text{ m}.}$$

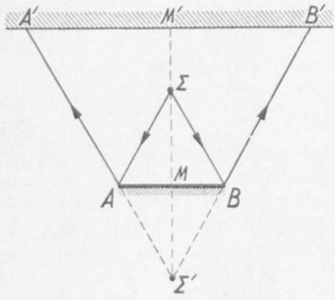
Ὁμοίως τὸ ἐλάχιστον ὕψος (ΚΛ) τοῦ κατόπτρου ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τριγώνου Α'ΟΒ' ὅτι εἶναι

$$\underline{(\text{ΚΛ}) = \frac{(\text{Α'Β'})}{2} = \frac{(\text{ΑΒ})}{2} = \frac{1{,}75}{2} = 0{,}875 \text{ m}.}$$

διότι ἡ (ΚΛ) ἑνώνει τὰ μέσα Κ καὶ Λ τῶν πλευρῶν (ΟΑ') καὶ (ΟΒ') τοῦ τριγώνου Α'ΟΒ'.

22. Ὀρθογώνιον ἐπίπεδον κάτοπτρον εὑρισκόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἔχει διαστάσεις 6 cm × 9 cm. Ἐπὶ τῆς κατακορύφου ἥτις ἄγεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κατόπτρου, καὶ εἰς ὕψος 3 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Σ ἐκπέμπον φωτεινὰς ἀκτῖνας πρὸς τὸ ἔδαφος. Πόση εἶναι ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια ἐπὶ ὀροφῆς εὑρισκομένης εἰς ὕψος 5 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Νὰ εὑρεθῇ πῶς μεταβάλλεται ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια, ὅταν τὸ κάτοπτρον ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Λύσις. Ἔστω Σ τὸ φωτεινὸν σημεῖον καὶ Σ' τὸ συμμετρικὸν εἴδωλον αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον. Αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἐκ τοῦ Σ, ἀνακλώμεναι ἐπὶ τοῦ κατόπτρου (ΑΒ) καὶ προεκτεινόμεναι θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ Σ', ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ μέγεθος τῆς φωτεινῆς ἐπιφανείας τῆς ὀροφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν τὰς ἀκραίας ἀκτῖνας (ΣΑ) καὶ (ΣΒ), αἵτινες μετὰ τὴν ἀνάκλασιν των προσπίπτουν ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον Α' καὶ Β' τῆς ὀροφῆς. Ἐπειδὴ ἡ ὀροφὴ καὶ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον εἶναι παράλληλα, ἕπεται ὅτι τὸ σχῆμα τοῦ φωτεινοῦ μέρους θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ κατόπτρου. Δηλαδὴ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ θὰ ἔχῃ διαστάσεις αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς σχέσεως



$$\frac{(\mathrm{A'\,B'})}{(\mathrm{AB})} = \frac{(\Sigma'\mathrm{M'})}{(\Sigma'\mathrm{M})} = \frac{(\Sigma'\mathrm{M}) + (\mathrm{MM'})}{(\Sigma'\mathrm{M})} = \frac{8}{3}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$(\mathrm{A'B'}) = \frac{8}{3} \cdot (\mathrm{AB})$$

Ὁπότε, δεδομένου ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου εἶναι 6 cm καὶ 9 cm αἱ διαστάσεις τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

16 cm καὶ 24 cm.

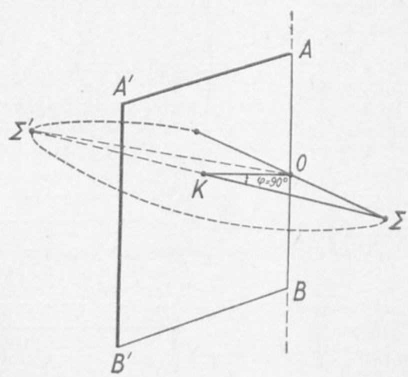
Ἐξ ἄλλου ὅταν τὸ κάτοπτρον ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὁ λόγος $(\Sigma'\mathrm{M'})/(\Sigma'\mathrm{M}) = 8/3$ δὲν μεταβάλλεται καὶ συνεπῶς αἱ διαστάσεις τῆς φωτεινῆς ἐπιφανείας παραμένουν πάντοτε αἱ αὐταί, ἤτοι

16 cm × 24 cm.

23. Ὀρθογώνιον ἐπίπεδον κάτοπτρον ΑΒΒ'Α' δύναται νὰ στρέφεται περὶ τὴν κατακόρυφον αὐτοῦ πλευρὰν (ΑΒ). Εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τὴν (ΑΒ) εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον Σ. Τί εἴδους καμπύλην διαγράφει τὸ εἴδωλον τοῦτο, ὅταν στρέφεται τὸ κάτοπτρον περὶ τὴν (ΑΒ).

Λύσις. Ἔστω Σ τὸ φωτεινὸν σημεῖον καὶ Σ' τὸ εἴδωλον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ (ΣΣ') εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κατόπτρου, ἡ (ΟΚ) θὰ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΣΟΣ' καὶ ἐπειδὴ (ΣΚ)=(ΚΣ') θὰ εἶναι ἡ (ΟΚ) καὶ διάμεσος τοῦ ἰδίου τριγώνου. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΣΟΣ' εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ προκύπτει ὅτι (ΟΣ)=(ΟΣ').

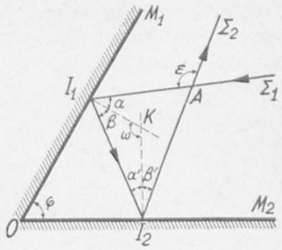
Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ Σ' ἀπέχει σταθερὰν πάντοτε ἀπόστασιν (ΟΣ) = 40 cm ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ συνεπῶς ὁ γεωμετρικὸς τόπος τούτου, ὅταν τὸ κάτοπτρον περιστρέφεται, θὰ εἶναι τόξον περιφερείας μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα (ΟΣ')=40 cm. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΒ'Α' ἔχει τὴν μίαν μόνον ὄψιν αὐτοῦ κατοπτρικήν, ἕπεται ὅτι ἡ τροχιὰ τοῦ Σ', δηλ. ὁ γεωμετρικὸς τόπος αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἡ ἡμιπεριφέρεια (– – – –).



24. Δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα M_1 καὶ M_2 ἔχοντα τὰς ἀνακλαστικὰς αὐτῶν ἐπιφανείας ἔναντι ἀλλήλων, σχηματίζουν ὀξεῖαν γωνίαν φ. Φωτεινὴ ἀκτὶς εὑρισκομένη εἰς ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμήν, ἀνακλᾶται διαδοχικῶς ἅπαξ ἐπὶ ἑκάστου κατόπτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε τῆς τελικῶς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος καὶ νὰ δοθῇ ἡ τιμὴ αὐτῆς, ὅταν φ=45°.

Λύσις. Ἡ γωνία ἐκτροπῆς ὁρίζεται ὡς ἡ γωνία ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῆς ἀρχικῆς καὶ τὴν φορὰν τῆς τελικῆς ἀκτῖνος. Οὕτω εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ἡ γωνία ε, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προσπίπτουσαν $\Sigma_1 I_1$ καὶ τὴν τελικῶς ἀνακλωμένην $I_2 \Sigma_2$. Ἔστω (KI_1) ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ κάτοπτρον M_1 καὶ (KI_2) ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ κάτοπτρον M_2. Τότε θὰ εἶναι

$$\alpha = \beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha' = \beta' \tag{1}$$



Ἐκ τοῦ τριγώνου AI_1I_2 ἔχομεν

$$\varepsilon = (\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') \qquad (2)$$

ἢ λόγῳ τῶν σχέσεων (1) ἔχομεν

$$\varepsilon = 2\alpha' + 2\beta = 2(\alpha' + \beta) \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha' + \beta = 180^0 - \omega$ ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$\varepsilon = 2(180^0 - \omega) \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου τὸ τετράπλευρον KI_1OI_2 εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἕνεκα τούτου ἔχομεν

$$\varphi = 180^0 - \omega \qquad (5)$$

Οὕτω λόγῳ τῆς (5) ἡ (4) γράφεται

$$\underline{\varepsilon = 2\varphi} \qquad (6)$$

Ἤτοι ἡ γωνία ἐκτροπῆς εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῶν δύο κατόπτρων.

Εἰς τὴν ἄσκησιν δίδεται $\varphi = 45^0$ καὶ συνεπῶς εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (6) ὅτι

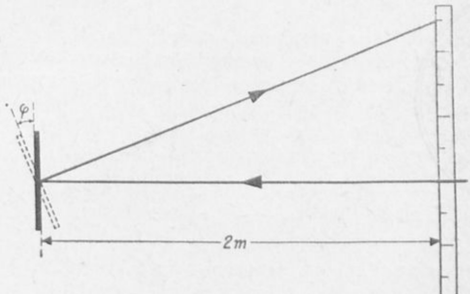
$$\underline{\varepsilon = 2 \cdot 45^0 = 90^0}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

25. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως φωτεινῆς ἀκτῖνος, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζῃ αὕτη ἴσας γωνίας μὲ τὸ κάτοπτρον καὶ μὲ τὴν ἀνακλωμένην ἀκτῖνα.
(Ἀπ. 30^0.)

26. Συγκλίνουσα φωτεινὴ δέσμη συναντᾷ ἐπίπεδον κάτοπτρον. Αἱ ἀκραῖαι ἀκτῖνες τῆς δέσμης σχηματίζουν γωνίας 45^0 καὶ 30^0 μετὰ τοῦ κατόπτρου, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀκραίων ἀκτίνων, μετρουμένη ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, εἶναι 3 cm. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων τῆς προσπιπτούσης καὶ ἀνακλωμένης δέσμης καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου.
(Ἀπ. 4,1 cm.)

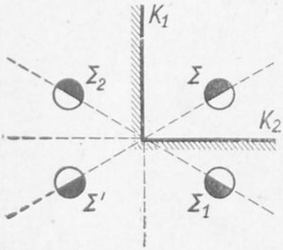
27. Λεπτὴ δέσμη φωτὸς προσπίπτουσα ἐπὶ κατόπτρου ἀνακλᾶται, ὡς εἰς τὸ σχῆμα, ἐπὶ εὐθυγράμμου κλίμακος, ἀπεχούσης 2 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Ἐὰν ἡ κλῖμαξ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κάτοπτρον καὶ στραφῇ τοῦτο κατὰ γωνίαν $\varphi = 7{,}5^0$, πόση θὰ εἶναι ἡ μετακίνησις τῆς φωτεινῆς κηλῖδος ἐπὶ τῆς κλίμακος.
(Ἀπ. 53,6 cm.)



28. Κηρίον ἀνημμένον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 1,5 m ἀπὸ κάτοπτρον ἱματιοθήκης (ντουλάπας), στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονά του. Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ κάτοπτρον κατὰ γωνίαν 60^0 περὶ τὸν ἄξονα τοῦ O, ζητεῖται 1) Τί τροχιὰν θὰ διαγράψῃ τὸ εἴδωλον κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κατόπτρου. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς τροχιᾶς τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ εἴδωλον. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον εἰς τὴν νέαν θέσιν τοῦ κατόπτρου. Τὸ πλάτος τοῦ κατόπτρου εἶναι 1 m.

('Απ. 1' Τὸ εἴδωλον Σ μετατίθεται ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος (ΟΣ) = 1,50 m. 2' Τὸ εἴδωλον διαγράφει τόξον κύκλου μὲ ἐπίκεντρον γωνίαν 120^0 καὶ μῆκος τόξου 3,31 m . 3' 0,634 m.)

29. Μεταξὺ δύο καθέτων ἐπιπέδων κατόπτρων τοποθετεῖται σφαῖρα τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι χρωματισμένη μὲ λευκὸν καὶ μαῦρο χρῶμα, τὰ δὲ δύο χρωματισμένα μέρη τῆς ἐπιφανείας χωρίζονται ἀπὸ ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγάλου τούτου κύκλου διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν τομῆς τῶν δύο κατόπτρων καὶ σχηματίζει γωνίαν 30^0 μετὰ τοῦ ἑνὸς κατόπτρου (σχῆμα). Νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ θέσις τῶν οὕτω σχηματιζομένων εἰδώλων.



('Απ. Σχηματίζονται 3 εἴδωλα τὰ ὁποῖα μετὰ τοῦ ἀντικειμένου εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ὀρθογωνίου.)

30. Δύο ἐπίπεδα καὶ κατακόρυφα κάτοπτρα, τῶν ὁποίων αἱ ἀνακλῶσαι ἐπιφάνειαι εἶναι ἔναντι ἀλλήλων, σχηματίζουν γωνίαν 60^0. Κατακόρυφον φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἐκ τῶν κατόπτρων τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὑπὸ τῶν κατόπτρων σχηματιζομένης γωνίας. α) Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ὑπὸ τῶν κατόπτρων σχηματιζόμενα εἴδωλα. β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἑκάστου εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου σχηματίζεται.

('Απ. Τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τοῦ κατόπτρου Κ εἴδωλα, εὑρίσκονται εἰς ἀποστάσεις 10 cm, 5 cm, 5 cm ἀπ' αὐτοῦ. Τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τοῦ Κ', εὑρίσκονται εἰς ἀποστάσεις 5 cm, 5 cm, 10 cm ἀπ' αὐτοῦ.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

31. 'Ακτῖνες ἡλιακοῦ φωτός, ἀφοῦ ἀνακλασθοῦν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος, φθάνουν εἰς παρατηρητὴν ἱστάμενον παρὰ τὴν ὄχθην τῆς δεξαμενῆς. 'Εὰν αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες φθάνουν εἰς τὸν παρατηρητὴν ἀπὸ μίαν διεύθυνσιν 30^0 κάτωθεν τοῦ ὁρίζοντος, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν κατὰ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παρατηρηθῇ ὁ Ἥλιος ἄνωθεν τοῦ ὁρίζοντος. Ποία ἡ γωνία προσπτώσεως τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποία ἡ γωνία ἀνακλάσεως.

32. Φωτεινὴ δέσμη ἀνακλᾶται ἐπὶ μικροῦ ἐπιπέδου κατόπτρου, ἐν συνεχείᾳ δὲ προσπίπτει καθέτως ἐπὶ κλίμακος εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 6,30 m ἀπ' αὐτοῦ. 'Εὰν τὸ κάτοπτρον περιστραφῇ κατά τινα γωνίαν, ἡ ἀπόκλισις τῆς φωτεινῆς δέσμης μετρουμένη ἐπὶ τῆς κλίμακος εἶναι 2,70 m. Κατὰ ποίαν γωνίαν ἐστράφη τὸ κάτοπτρον.

33. Μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων κατόπτρων, τῶν ὁποίων αἱ ἀνακλῶσαι ἐπιφάνειαι εἶναι ἔναντι ἀλλήλων, εὑρίσκεται μικρὸν ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν δ ἐκ τοῦ κατόπτρου Κ καὶ δ' ἐκ τοῦ Κ'. α) Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ὑπὸ τῶν δύο κατόπτρων σχηματιζόμενα εἴδωλα. β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἑκάστου εἰδώλου ἀπὸ τὸ κάτοπτρον τὸ ὁποῖον τὸ ἐσχημάτισε.

34. Δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 30^0. Τοποθετήσατε γραφικῶς τέσσαρα ἐκ τῶν εἰδώλων φωτεινοῦ σημείου Α, τιθεμένου μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω δύο κατόπτρων.

35. Κυκλικὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον, ἐπιφανείας $S = 10\ cm^2$, τοποθετεῖται ἔμπροσθεν κατακορύφου τοίχου καὶ εἰς ἀπόστασιν 3 m ἀπ' αὐτοῦ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια S' τοῦ κυκλικοῦ μέρους τοῦ τοίχου, τὴν ὁποίαν βλέπει ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ, εὑρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἥτις ἄγεται εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ. Πῶς μεταβάλλεται ἡ ἐπιφάνεια S' τοῦ παρατηρουμένου κυκλικοῦ μέρους ἐντὸς τοῦ κατόπτρου, συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως δ τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ τῆς ἐπιφανείας S τοῦ κατόπτρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Β' ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

36. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 80 cm πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ἵνα ἔχωμεν εἴδωλον δύο φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ εἴδωλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου, ἕπεται ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι εἴτε πραγματικὸν εἴτε φανταστικόν. Ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, R τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου, Α τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου καὶ Ε τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, θὰ ἰσχύουν οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \qquad (1)$$

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐφ' ὅσον $E = 2A$ λαμβάνομεν $\beta = 2\alpha$ καὶ ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ β θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) προκύπτει

$$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{R} \qquad (3)$$

Λύομεν τὸν τύπον (3) ὡς πρὸς α καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = \frac{(2 \pm 1)}{4} \cdot R} \qquad (4)$$

ὁπότε βάσει τοῦ δεδομένου $R = 80$ cm εὑρίσκομεν δύο τιμάς

$$\underline{\alpha_1 = 60\ cm} \quad \text{καὶ} \quad \underline{\alpha_2 = 20\ cm.}$$

Ἡ τιμὴ $\alpha_1 = 60$ cm ἀντιστοιχεῖ εἰς εἴδωλον πραγματικὸν καὶ ἡ τιμὴ $\alpha_2 = 20$ cm εἰς εἴδωλον φανταστικόν.

37. Φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως f εἰς ἀπόστασιν 10 f ἀπ' αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν σχηματίζεται τὸ εἴδωλον αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου εἶναι 10 f, ἤτοι $\alpha = 10\,f$, ὁ γνωστὸς τύπος $1/\alpha + 1/\beta = 1/f$ τῶν κοίλων κατόπτρων δύναται νὰ γραφῇ

$$\frac{1}{10\,f} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου θὰ ἔχωμεν

$$\underline{\beta = \frac{10}{9}\,f\,.}$$

38. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, τὸ ὁποῖον δίδει εἴδωλον ἴσον πρὸς τὸ 1/6 τοῦ μεγέθους ἀντικειμένου τιθεμένου 140 cm πρὸ τοῦ κατόπτρου.

Λύσις. Διὰ τὸ κοῖλον κάτοπτρον ἰσχύουν, ὡς γνωστόν, οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $E = \frac{1}{6}A$ καὶ εὑρίσκομεν $\beta = \frac{1}{6}\alpha$. Ἀκολούθως τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ β θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = \frac{1}{f} \quad (3)$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς f ἔχομεν

$$\underline{f = \frac{\alpha}{7}} \quad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (4) $\alpha = 140$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{f = 20\ \text{cm}.}$$

39. Ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 50 cm. Ποῖαι αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου.

Λύσις. Ἄς καλέσωμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀντιστοίχως ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Ἐπειδὴ τὸ κάτοπτρον εἶναι κυρτὸν θὰ ἰσχύῃ ὁ γνωστὸς τύπος

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{R} \quad (1)$$

ὁ ὁποῖος δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς β δίδει

$$\underline{\beta = -\frac{\alpha \cdot R}{2\alpha + R}} \quad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $\alpha = 100$ cm, $R = 50$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -20\ \text{cm}.}$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον σχηματίζεται ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ εἶναι φανταστικόν. Ὡς γνωστὸν δὲ ἐκ τῆς θεωρίας, εἶναι ὀρθὸν καὶ μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου.

40. Ἀντικείμενον ὕψους 4 cm εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 15 cm πρὸ κυρτοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθος αὐτοῦ.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν τὰ κυρτὰ σφαιρικὰ κάτοπτρα παρέχουν μόνον φανταστικὰ εἴδωλα. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κυρτῶν κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f} \tag{1}$$

λύοντες ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha + f}} \tag{2}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $\alpha = 15$ cm, $f = 5$ cm ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = 3{,}75 \text{ cm}}.$$

Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου δίδεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $A = 4$ cm, $\alpha = 15$ cm ὡς ἐπίσης καὶ $\beta = 3{,}75$ cm εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{E = 1 \text{ cm}}.$$

41. Κυρτὸν κάτοπτρον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm, δίδει εἴδωλον τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὕψους τοῦ ἀντικειμένου. Εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ τούτου κατόπτρου εὑρίσκονται τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ εἴδωλον.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha}{4} \tag{2}$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀπόστασις α εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἀντικείμενον πρὸ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f} \tag{3}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3) τὴν τιμὴν τοῦ β ἐκ τοῦ τύπου (2) καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς α προκύπτει

$$\alpha = 3f$$

Ὅθεν διὰ $f = 50$ cm εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{\alpha = 150 \text{ cm}}.$$

Ἤτοι τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 150 cm πρὸ τοῦ κατόπτρου.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ τύπου

$$\beta = \frac{\alpha}{4}$$

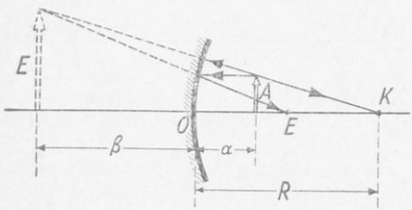
διὰ $\alpha = 150$ cm προκύπτει ὅτι

$$\underline{\beta = 37{,}5 \text{ cm.}}$$

Τὸ εἴδωλον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 37,5 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ εἶναι φανταστικόν.

42. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm πρὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 80 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου του.

Λύσις. Ἔστω α,β ἀντιστοίχως αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κοίλου κατόπτρου καὶ Α,Ε ἀντιστοίχως τὰ μήκη τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου. Θὰ ἰσχύουν προφανῶς οἱ τύποι



$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot R}{2\alpha - R}}$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $\alpha = 25$ cm, $R = 80$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἴδωλον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ἀπόστασιν

$$\underline{\beta = -66{,}7 \text{ cm}\,\cdot}$$

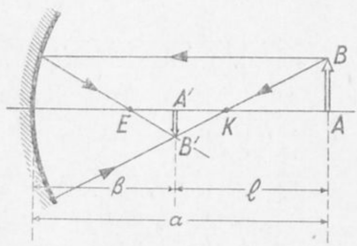
Ἤτοι τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ ἑπομένως ὀρθόν, σχηματιζόμενον ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου εἰς ἀπόστασιν 66,7 cm.

Ἐπίσης ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς Ε καὶ θέσωμεν $\beta = 66{,}7$ cm, $\alpha = 25$ cm εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{E = 2{,}67\, A\,\cdot}$$

Ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου εἶναι 2,67 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου.

43. Κοῖλον κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 2 m. Φωτεινὸν βέλος(ΑΒ) τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ ἴσην πρὸς 3 m καὶ καθέτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον.



Λύσις. Καλοῦμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, l δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θὰ ἔχωμεν $\beta = \alpha - l$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R}$$

τῶν κοίλων κατόπτρων γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - l} = \frac{2}{R} \qquad (1)$$

Λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς l καὶ λαμβάνομεν

$$l = \frac{2\alpha \cdot (\alpha - R)}{2\alpha - R} \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $\alpha = 3m$ καὶ $R = 2\,m$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$l = 1{,}5\,m \cdot$$

44. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 80 cm πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ἵνα λάβωμεν εἴδωλον δύο φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ εἴδωλον εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου τὸ κάτοπτρον θὰ εἶναι ἢ κοῖλον καὶ τὸ εἴδωλον πραγματικὸν ἢ κυρτὸν καὶ τὸ εἴδωλον φανταστικόν.

α) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ κάτοπτρον εἶναι κοῖλον ἰσχύουν οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐὰν θέσωμεν $E = A/2$ λαμβάνομεν $\beta = \alpha/2$ καὶ οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} = \frac{2}{R} \qquad (3)$$

Ἐὰν τώρα λύσωμεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς α ἔχομεν

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot R \qquad (4)$$

καὶ θέτοντες $R = 80$ cm εὑρίσκομεν

$$\alpha = 120\text{ cm.}$$

β) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ κάτοπτρον εἶναι κυρτὸν ἰσχύουν οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{R} \quad (5) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (6)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (6) διὰ $E = A/2$ λαμβάνομεν $\beta = \alpha/2$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (5) γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} = -\frac{2}{R} \qquad (7)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (7) ὡς πρὸς α ὅτε προκύπτει

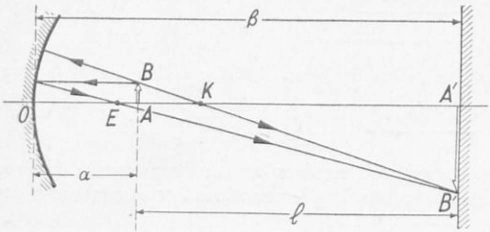
$$\alpha = \frac{R}{2}$$

καὶ διὰ $R = 80$ cm εὑρίσκομεν

$$\alpha = 40\text{ cm.}$$

45. Πρόκειται νὰ ἀπεικονίσωμεν τὸ εἴδωλον λαμπτῆρος μεγεθυσμένον 5 φορὰς ἐπὶ τοίχου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 3,6 m. Ποῖον εἶδος σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀπαιτεῖται καὶ ποία ἡ θέσις του.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον πρόκειται νὰ ἀπεικονίσωμεν τὸ εἴδωλον ἐπὶ τοῦ τοίχου, θὰ εἶναι τὸ εἴδωλον πραγματικὸν καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν κοῖλον κάτοπτρον. Ἔστω λοιπὸν ὅτι τοποθετοῦμεν τὸ κάτοπτρον εἰς ἀπόστασιν (ΟΑ') ἀπὸ τοῦ τοίχου· τότε ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔχομεν·



$$OA = \alpha \quad \text{καὶ} \quad OA' = \beta$$

Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους τῶν κοίλων κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Λύομεν τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς α καὶ θέτοντες $E = 5A$, $\beta = 3{,}6\ \text{m} = 360\ \text{cm}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 72\ \text{cm}}\cdot$$

Ἄρα τὸ κάτοπτρον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 72$ cm ἀπὸ τὸν λαμπτῆρα.

Ἐπίσης λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς f, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\underline{f = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}}$$

καὶ διὰ $\alpha = 72$ cm, $\beta = 360$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{f = +\,60\ \text{cm}}\cdot$$

Ἄρα πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν κοῖλον κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 120$ cm.

46. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος R. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μικρὸν ἀντικείμενον, κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου εἶναι n φορὰς μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ἀντικειμένου.

Λύσις. Ἔστω α ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου καὶ β ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ κοῖλον κάτοπτρον. Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \tag{1}$$

Διότι τὸ εἴδωλον ἀφοῦ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου θὰ εἶναι ἢ πραγματικὸν ἢ φανταστικόν.

Ἐπίσης ἔστω S_A τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντικειμένου καὶ S_E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰδώλου. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$n = \frac{S_E}{S_A} = \frac{E}{A} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (2) ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \sqrt{n}\,.\,\alpha \tag{3}$$

(τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὡς μὴ ἔχοντος νόημα, διότι ἤδη ἐθέσαμεν εἰς τὸν τύπον (1) σὺν ἢ πλήν).

Οὕτω ὁ τύπος (1) λόγῳ τῆς σχέσεως (3) δύναται νὰ γραφῇ

$$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{n}.\alpha} = \frac{2}{R} \tag{4}$$

ἢ

$$\frac{\sqrt{n} \pm 1}{\sqrt{n}\,.\,\alpha} = \frac{2}{R} \tag{5}$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\sqrt{n} \pm 1}{2\sqrt{n}} \cdot R$$

Ἡ τιμὴ $\alpha = \frac{\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n}} \cdot R$ ἀντιστοιχεῖ εἰς πραγματικὸν εἴδωλον διότι

$$\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{2}$$

καὶ συνεπῶς

$$\alpha > \frac{1}{2} \cdot R \quad \text{ἢ} \quad \alpha > f$$

Ἡ τιμὴ $\alpha = \frac{\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} \cdot R$ ἀντιστοιχεῖ εἰς φανταστικὸν εἴδωλον διότι

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

καὶ συνεπῶς :

$$\underline{\alpha < \frac{1}{2} R} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\alpha < f}$$

47. Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ πετάσματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχηματίζεται τὸ εἴδωλον αὐτοῦ ὑπὸ κοίλου κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm. α) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον. β) Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον εἶναι μικρὸν ὀρθογώνιον, πλευρῶν 2 cm καὶ 3 cm, πόση ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰδώλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον προβάλλεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος θὰ εἶναι πραγματικόν. Ἔστω ὅτι $(AA') = l$, θὰ εἶναι $\alpha = (OA)$ καὶ $\beta = (OA') = \alpha + l$, (βλ. σχῆμα Ἀσκήσεως 45). Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + l} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Ἐὰν καλέσωμεν $(A'B')$ καὶ (AB) δύο ὁμόλογα μήκη τοῦ εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου ὡς καὶ S_E καὶ S_A τὰ ἐμβαδὰ ἀντιστοίχως αὐτῶν, τότε ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀντικείμενον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{S_E}{S_A} = \frac{(A'B')^2}{(AB)^2}$$

ἢ ἐπειδὴ

$$\frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha + l}{\alpha} \tag{2}$$

ἔχομεν

$$\frac{S_E}{S_A} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{(\alpha + l)^2}{\alpha^2} \tag{3}$$

Ἡ σχέσις (1) δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων δίδει τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\alpha^2 - (2f - l) - l \cdot f = 0 \tag{4}$$

καὶ οὕτω λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{2f - l \pm \sqrt{4f^2 + l^2}}{2} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ δὲ $4f^2 + l^2 > 0$, ἕπεται ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ α εἶναι πάντοτε πραγματικαί.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $\sqrt{4f^2 + l^2} > 2f^2 - l$ ἡ μία τιμὴ θὰ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική. Ἡ ἀρνητικὴ δὲ τιμὴ ὡς μὴ ἀνταποκρινομένη εἰς τὴν πραγματικότητα ἀπορρίπτεται καὶ ἔχομεν μόνον τὴν θετικὴν τιμήν

$$\alpha = \frac{2f - l + \sqrt{4f^2 + l^2}}{2} \tag{6}$$

ὁπότε διὰ $f = 40$ cm καὶ $l = 60$ cm εὑρίσκομεν

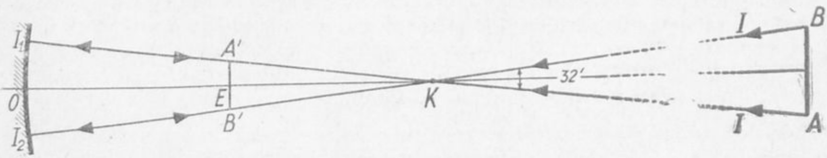
$$\alpha = 60 \text{ cm.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰδώλου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ σύμβολα διὰ τῶν τιμῶν $S_A = 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$, $\alpha = 60$ cm καὶ $l = 60$ cm. Οὕτω εὑρίσκομεν

$$S_E = 24 \text{ cm}^2.$$

48. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τοῦ Ἡλίου σχηματιζομένου ὑπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 2,50 m, τοῦ ὁποίου ὁ ὀπτικὸς ἄξων διευθύνεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου. Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 32′.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ ἐκ τῶν σημείων A καὶ B τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου αὐτοῦ (καθέτου ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα), προσπίπτουν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου αἱ ἀκτῖνες AI_1 καὶ BI_2, αἱ ὁποῖαι ἀμφότεραι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου καμ-



πυλότητος K. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου καμπυλότητος, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των θὰ διέρχωνται ἐπίσης διὰ τοῦ κέντρου καμπυλότητος, καὶ ἐπειδὴ ἡ AI_1 προέρχεται ἐκ τοῦ A, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ A′ καὶ ἡ BI_2 ἐκ τοῦ B, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ B′.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ ὁ ἥλιος εὑρίσκεται πολὺ μακρὰν τὸ εἴδωλον αὐτοῦ θὰ εἶναι σχεδὸν ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας E καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$(A'B') = 2(EK) \cdot \text{εφ } 16' = R \cdot \text{εφ } 16' \tag{1}$$

Ἡ γωνία ὅμως 16′ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας τὴν ἰδίαν τὴν γωνίαν εἰς ἀκτίνια. Οὕτω ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ

$$(A'B') = R \cdot \frac{16\pi}{180 \cdot 60} \tag{2}$$

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν (2) $R = 2{,}5 \text{ m} = 250$ cm εὑρίσκομεν

$$(A'B') = 0{,}0115 \text{ m} = 1{,}15 \text{ cm.}$$

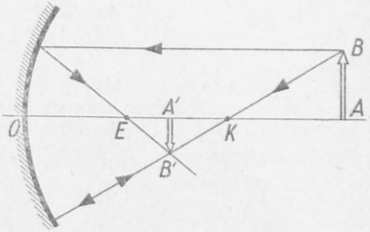
49. Φωτεινὴ πηγὴ (ΑΒ) εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 200 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. Τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Πόση ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου.

Λύσις. Ἔστω ἡ φωτεινὴ πηγὴ (ΑΒ) καὶ τὸ εἴδωλον (Α'Β') αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(\mathrm{OA'}) = (\mathrm{OA}) - (\mathrm{A'A}) \qquad (1)$$

ἢ ἐὰν συμβολίσωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἀντιστοίχως διὰ τῶν β, α, l, θὰ ἔχωμεν

$$\beta = \alpha - l \qquad (2)$$



Θέτομεν τώρα τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ β εἰς τὸν γνωστὸν τύπον τῶν κοίλων κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \qquad (3)$$

καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - l} = \frac{2}{R} \qquad (4)$$

Δι' ἐκτελέσεως δὲ τῶν πράξεων εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος ἔχομεν

$$\frac{2\alpha - l}{\alpha(\alpha - l)} = \frac{2}{R} \qquad (5)$$

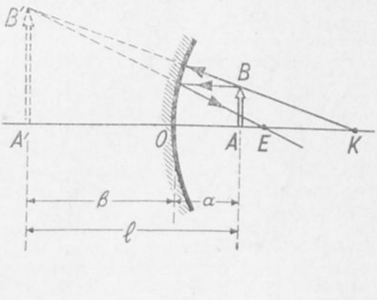
Λύομεν τὴν (5) ὡς πρὸς R καὶ προκύπτει ὁ τύπος

$$R = \frac{2\alpha(\alpha - l)}{2\alpha - l} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $\alpha = 200$ cm καὶ $l = 80$ cm εὑρίσκομεν

$$R = 150 \text{ cm}.$$

50. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον παρέχει εἴδωλον ὀρθὸν 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου εἶναι 80 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτοῦ.



Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ εἴδωλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου καὶ ὀρθόν, ἕπεται ὅτι εἶναι τοῦτο φανταστικόν.

Ἐὰν καλέσωμεν λοιπὸν α τὴν ἀπόστασιν (ΟΑ) τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, β τὴν ἀπόστασιν (Α'Ο) ἐπίσης ἀπὸ τὸ κάτοπτρον καὶ l τὴν ἀπόστασιν (ΑΑ') τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸ εἴδωλον, τότε θὰ εἶναι $\beta = l - \alpha$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{l - \alpha} = \frac{1}{f} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{A} = \frac{l - \alpha}{\alpha} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἐὰν θέσωμεν $E = 5A$ λαμβάνομεν

$$5 = \frac{l - \alpha}{\alpha} \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{l}{6} \quad (4)$$

ὁπότε διὰ τοῦ $l = 80$ cm εὑρίσκομεν

$$\alpha = 13{,}3 \text{ cm.}$$

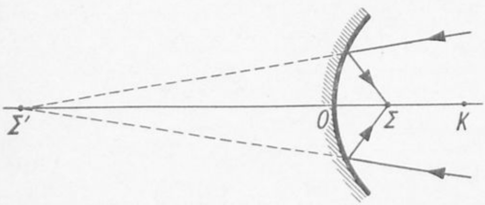
Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως f λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς f καὶ λαμβάνομεν

$$f = \frac{\alpha\,(l-\alpha)}{l-2\alpha}$$

Οὕτω διὰ $l = 80$ cm, $\alpha = 13{,}3$ cm εὑρίσκομεν

$$f = 16{,}5 \text{ cm.}$$

51. Ἐπὶ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm προσπίπτουν φωτειναὶ ἀκτῖνες, τῶν ὁποίων αἱ προεκτάσεις συναντῶνται εἰς σημεῖον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος 1 m ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου συναντῶνται μετὰ τὴν ἀνάκλασιν αἱ ἀκτῖνες.



Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Σ' ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον.

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \qquad (1)$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha \,.\, R}{2\alpha + R} \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $\alpha = 1$ m $= 100$ cm, $R = 40$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta = +\,16{,}7 \text{ cm.}$$

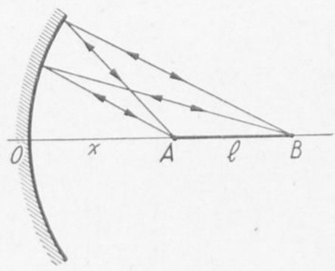
Ἤτοι αἱ ἀκτῖνες συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Σ' ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ ἴσην πρὸς 16,7 cm.

52. Διάπυρον σύρμα μήκους l τοποθετεῖται κατὰ μῆκος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου νὰ συμπίπτουν πρὸς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σύρματος ἀπὸ τοῦ κατόπτρου.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ ἄκρον Α τοῦ σύρματος ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κατόπτρου ἀπόστασιν x. Ἐπειδὴ τὰ ἄκρα τοῦ εἰδώλου συμπίπτουν μὲ τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος, ἕπεται ὅτι τὸ εἴδωλον τοῦ ἄκρου Α θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἄκρον τοῦ σύρματος Β καὶ τὸ εἴδωλον τοῦ Β μὲ τὸ ἄκρον τοῦ σύρματος Α.

Συνεπῶς ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀντικείμενον τὸ Α, τὸ εἴδωλον τούτου θὰ εἶναι τὸ Β καὶ θὰ ἔχωμεν

$$x = (\text{OA}) = \alpha,\ \beta = (\text{OB}) = (\text{OA}) + (\text{AB}) = x + l$$



Οὕτω ὁ τύπος τῶν κοίλων κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

γράφεται

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+l} = \frac{1}{f}$$

καὶ δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$x^2 - (2f - l)\cdot x - f \cdot l = 0$$

Ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$x = \frac{2f - l \pm \sqrt{(2f-l)^2 + 4fl}}{2} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{2f - l \pm \sqrt{4f^2 + l^2}}{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐπειδὴ $2f < \sqrt{4f^2 + l^2}$ ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $2f - l < \sqrt{4f^2 + l^2}$

Ἄρα ἡ τιμή:

$$x = \frac{2f - l - \sqrt{4f^2 + l^2}}{2}$$

ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται.

53. Φωτεινὸν βέλος μήκους 5 cm, τοποθετημένον καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m καὶ εἰς ἀπόστασιν 37,5 cm ἀπὸ ἐπιπέδου κατόπτρου, τοποθετημένου ἐπίσης καθέτως εἰς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ζητοῦνται : α) ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου, β) τὸ μέγεθος αὐτοῦ καὶ γ) αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ συνθέτου τούτου προβλήματος, ἀγνοοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὴν ὕπαρξιν τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου MN καὶ λύομεν πρόβλημα κοίλου κατόπτρου. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸν τύπον τῶν κοίλων κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

καὶ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ τὴν ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου :

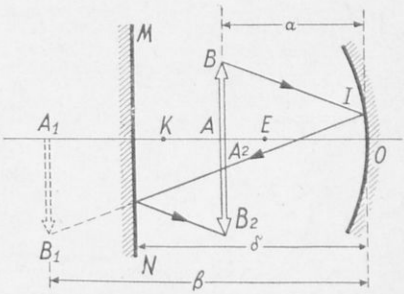
$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (3)$$

λαμβάνομεν

$$E = A \cdot \frac{\beta}{\alpha} \qquad (4)$$



Ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (4) βάσει τῶν δεδομένων α = 75 cm, f = 50 cm, εὑρίσκομεν

$$\beta = +150 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad E = 10 \text{ cm}$$

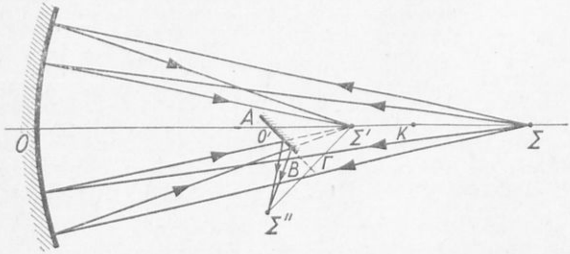
Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος μᾶς δίδει ὡς ἀποτέλεσμα εἴδωλον πραγματικόν, ἑπομένως τὸ εἴδωλον θὰ εἶναι ἀνεστραμμένον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἀντικειμένου.

Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο ($A_1 B_1$) ἐπὶ τοῦ σχήματος εἰς ἀπόστασιν 150–(75+37,5) = 37,5 cm ὄπισθεν τῆς θέσεως τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων. Τὸ πραγματικὸν τοῦτο εἴδωλον πρέπει νὰ παίξῃ ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον. Διὰ τῆς τοποθετήσεως ὅμως ἐπὶ τοῦ σχήματος τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου MN τὸ εἴδωλον ($A_1 B_1$) παύει νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὅτι παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Λύομεν ἀκολούθως πρόβλημα ἐπιπέδου κατόπτρου μὲ φανταστικὸν ἀντικείμενον καὶ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ δώσῃ τοῦτο εἴδωλον πραγματικὸν εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, ἤτοι 37,5 cm, ὀρθόν, ἰσομέγεθες ὡς πρὸς τὸ ($A_1 B_1$) καὶ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου. Τοποθετοῦμεν τὸ δεύτερον εἴδωλον ($A_2 B_2$) ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὰς ἀνακλωμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ συνέρχωνται εἰς τὸ σημεῖον B_2 τὸ ὁποῖον εἶναι εἴδωλον τοῦ B_1.

Ἄρα τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν ἰδίαν θέσιν ὅπου τὸ ἀρχικὸν ἀντικείμενον, εἶναι δὲ πραγματικόν, ἰσομέγεθες καὶ ἀνεστραμμένον ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον (AB).

54. Φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 80 cm εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπ' αὐτοῦ. Ἀκολούθως τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τοῦ πρώτου κατόπτρου καὶ ὑπὸ κλίσιν 45° ὡς πρὸς τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κοίλου κατόπτρου. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ δευτέρου εἰδώλου τοῦ φωτεινοῦ σημείου.

Λύσις. Καλοῦμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου του Σ' ἀπὸ τὸ κοῖλον κάτοπτρον καὶ λύομεν τὴν ἄσκησιν ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχε τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον



$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{R}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει

$$\beta=\frac{\alpha \cdot R}{2\alpha - R}$$

καὶ διὰ $\alpha = 100$ cm καὶ $= 80$ cm εὑρίσκομεν :

$$\beta = +\,66{,}6 \text{ cm}\cdot$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 66,6 cm ἀπὸ τὸ κοῖλον κάτοπτρον.

Ἀκολούθως τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος τὸ εἴδωλον Σ' καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων. Βλέπομεν οὕτω ὅτι ὡρισμέναι ἀκτῖνες δὲν φθάνουν εἰς τὸ Σ', ἀλλὰ ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου (ΑΒ) καὶ συνεπῶς τὸ Σ' δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀντικείμενον φανταστικόν. Τὸ φανταστικὸν τοῦτο ἀντικείμενον δίδει εἴδωλον Σ'' πραγματικὸν καὶ συμμετρικὸν τοῦ Σ' ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν (Σ''Γ) = (Σ'Γ).

Ἡ ἀπόστασις (Σ''Γ) = (Σ'Γ) εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Σ'Ο'Γ ὅτι εἶναι

$$(\Sigma''\Gamma) = (\Sigma'\Gamma) = (O'\Sigma') \cdot \eta\mu\, 45^{0}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Ο'Σ') = (ΟΣ') – (ΟΟ') = 66,6 cm – 60 cm = 6,6 cm καὶ ημ $45^0 = \sqrt{2}/2$ εὑρίσκομεν

$$(\Sigma''\Gamma) = 4{,}6 \text{ cm} \quad (\text{περίπου})$$

55. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον τοποθετεῖται πλησίον σφαιρικοῦ κυρτοῦ κατόπτρου τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατόπτρων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἑστιακὴν αὐτῶν ἀπόστασιν, εἰς τὸ μέσον δὲ μεταξὺ αὐτῶν τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα εὐθύγραμμον ἀντικείμενον. Ποῖος ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν τῶν δύο εἰδώλων.

Λύσις. Καλοῦμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου (ΑΒ) ἀπὸ τὸ κοῖλον κάτοπτρον καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου του (Α'Β') ἐπίσης ἀπὸ τὸ κοῖλον κάτοπτρον. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{f} \quad \text{ἐξ οὗ προκύπτει} \quad \beta=\frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}$$

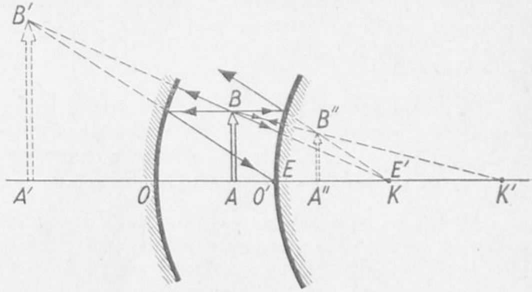
καὶ διὰ $\alpha = (OA) = f/2$ εὑρίσκομεν

$$\beta = -f$$

Ἀκολούθως ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως $\frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{\beta}{\alpha}$, θέτοντες $\beta = f$ καὶ $\alpha = f/2$ προκύπτει ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου (Α'Β') εἶναι

$$(A'B') = 2\,(AB)$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν α' τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου (ΑΒ) ἀπὸ τὸ κυρτὸν κάτοπτρον καὶ β' τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου (Α''Β'') ἀπὸ τὸ ἴδιον κάτοπτρον θὰ ἔχωμεν



$$\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = -\frac{1}{f}$$

ἐξ οὗ $$\beta' = -\frac{\alpha' \cdot f}{\alpha' + f}$$

καὶ διὰ $\alpha' = (O'A) = f/2$ εὑρίσκομεν

$$\beta' = -\frac{f}{3}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως $\dfrac{(A''\,B'')}{(AB)} = \dfrac{\beta'}{\alpha'}$, θέτοντες $\beta' = \dfrac{f}{3}$ καὶ $\alpha' = \dfrac{f}{2}$ προκύπτει ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου (Α''Β'') εἶναι

$$(A''\,B'') = \frac{2}{3} \cdot (AB)$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{(A'\,B')}{(A''\,B'')} = 3.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

56. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 4 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν, τὸ μέγεθος καὶ τὸ εἶδος τοῦ εἰδώλου (ὀρθόν ἢ ἀνεστραμμένον, πραγματικόν ἢ φανταστικόν). Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 33,3 cm, 2,67 cm.)

57. Ἀντικείμενον ὕψους 4 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Εὕρετε τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. –20 cm, 8 cm.)

58. Ὅταν φωτεινὸν ἀντικείμενον τοποθετῆται εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, σχηματίζεται πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Εὕρετε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 13,33 cm, 26,67 cm.)

59. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον διὰ νὰ σχηματίσῃ πραγματικὸν εἴδωλον, ἔχον διαστάσεις τὰς ἡμισείας γραμμικὰς διαστάσεις τοῦ ἀντικειμένου. Ἡ ἀκτὶς τοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου δίδεται ἴση πρὸς 180 cm. (Ἀπ. $\alpha = 270$ cm.)

60. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 120 cm, πρέπει νὰ σταθῇ ἄνθρωπος ἵνα ἴδῃ ὀρθὸν εἴδωλον τοῦ προσώπου του κατὰ τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον τοῦ φυσικοῦ μεγέθους. (Ἀπ. $\alpha = 45$ cm.)

61. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 1,2 m. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον διὰ νὰ λάβωμεν τὸ εἴδωλον αὐτοῦ 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.
(Ἀπ. 1' $\alpha = 72$ cm, $\beta = 360$ cm, εἴδωλον πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον. 2' $\alpha = 48$ cm, $\beta = -240$ cm, εἴδωλον φανταστικὸν καὶ ὀρθόν.)

62. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm δέον νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ἵνα παρέχῃ α) φανταστικὸν εἴδωλον διπλασίου μεγέθους, β) πραγματικὸν εἴδωλον διπλασίου μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου.

('Απ. α′ $\frac{f}{2}$ · β′ $\frac{3}{2}$ f.)

63. Λυχνία τίθεται εἰς ἀπόστασιν 90 cm ἀπὸ λευκοῦ πετάσματος καὶ κοῖλον κάτοπτρον σχηματίζει εἰς τὸ πέτασμα εἴδωλον τῆς λυχνίας 4 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὕψος τῆς λυχνίας. Εὕρετε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ κατόπτρου καὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κατόπτρου ἀπὸ τὴν λυχνίαν. ('Απ. 24 cm, 30 cm.)

64. Ἔμπροσθεν κοίλου κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm, τοποθετεῖται φωτεινὸν ἀντικείμενον σχήματος ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ (ΑΒ) ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ κατόπτρου. Δίδονται (ΟΑ) = 90 cm, (ΟΒ) = 120 cm, (ΟΓ) = (ΑΔ) = 8 cm. Ζητεῖται: 1) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ εἴδωλον Α′Β′Γ′Δ′ τοῦ ἀντικειμένου καὶ νὰ καθορισθῇ τὸ σχῆμα του. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας S_E τοῦ εἰδώλου.

('Απ. 1′. Τὸ εἴδωλον εἶναι ὀρθογώνιον τραπέζιον (Α′Β′) = 12cm, (Β′Γ′) = 4 cm, (Α′Γ′) = 6,4 cm. 2′ S_E = 62,4 cm².)

65. Ἔμπροσθεν κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου 30 cm τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, φωτεινὸν βέλος (ΑΒ) ὕψους 10 cm. Ζητεῖται ἡ φύσις, ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου (Α′Β′). Νὰ γίνῃ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς πορείας τῶν ἀκτίνων.

('Απ. Εἴδωλον φανταστικόν, ὀρθόν, 18,75 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου, ὕψους 6,25 cm.)

66. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον, διὰ νὰ δώσῃ ἐντὸς κυρτοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m, εἴδωλον πραγματικὸν 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. ('Απ. 40 cm πρὸ τοῦ κατόπτρου.)

67. Ὑπολογίσατε τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τοῦ Ἡλίου εἰς σφαιρικὸν κοῖλον κάπτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 3 m. Δίδεται ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου ἴση πρὸς 32′. ('Απ. 1,40 cm.)

68. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ κυρτὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Εὕρετε τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου. Σχεδιάσατε διάγραμμα διὰ νὰ διασαφηνίσητε τὸν σχηματισμὸν τοῦ εἰδώλου.

('Απ. 12 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου, Μ = 0,4.)

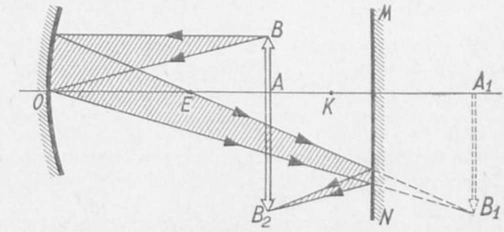
69. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 4 cm τοποθετεῖται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Εὕρετε τὴν θέσιν, τὸ μέγεθος καὶ τὸ εἶδος τοῦ εἰδώλου. Σχεδιάσατε διάγραμμα τῆς πορείας τῶν ἀκτίνων. ('Απ. –14,3 cm, 1,14 cm.)

70. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm πρέπει νὰ τοποθετηθῇ φωτεινὸν ἀντικείμενον διὰ νὰ δώσῃ εἴδωλον ἔχον ὕψος τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ ἀντικειμένου. ('Απ. 20 cm.)

71. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 1,2 m. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ πρέπει νὰ τεθῇ εὐθύγραμμον μικρὸν ἀντικείμενον, κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου ἵνα ἔχωμεν : 1) εἴδωλον ἀνεστραμμένον 5 φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου, 2) εἴδωλον ἀνεστραμμένον 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου, 3) εἴδωλον ὀρθὸν 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου, 4) εἴδωλον ὀρθὸν 5 φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου.

('Απ. 1' $\alpha = 360$ cm, $\beta = 72$ cm. 2' $\alpha = 72$ cm, $\beta = 360$ cm. 3' $\alpha = 48$ cm, $\beta = -240$ cm. 4' $\alpha = -240$ cm, $\beta = 48$ cm.)

72. Πρὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος R, τίθεται ἀντικείμενον (βέλος) καθέτως ἐπὶ τὸν ὀπτικὸν ἄξονα τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ (βλ. σχῆμα). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπίπεδον κάτοπτρον, καθέτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κοίλου κατόπτρου, ἵνα τὸ τελικῶς σχηματιζόμενον εἴδωλον εὑρίσκεται εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου μὲ τὸ πραγματικὸν ἀντικείμενον. 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή : R = 60 cm, α = 50 cm. ('Απ. 62,5 cm.)



73. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm καὶ κυρτὸν σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 30 cm τίθενται εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπ' ἀλλήλων, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὀπτικοὶ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μεταξὺ αὐτῶν ἀντικείμενον, ἵνα τὸ ὑπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου παρεχόμενον φανταστικὸν εἴδωλον εἶναι 10 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ὑπὸ τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου παρεχομένου τοιούτου. ('Απ. 3,93 cm.)

74. Εἰς τὴν διάταξιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κατόπτρων εἶναι 4 m. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ἑκάστου κατόπτρου εἶναι ἴση πρὸς 72 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου πρέπει νὰ τεθῇ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα ἀντικείμενον, ἵνα σχηματισθοῦν δύο ἰσομεγέθη εἴδωλα. ('Απ. 2,36 m.)

75. Κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως f καὶ ἐπίπεδον κάτοπτρον τοποθετοῦνται εἰς ἀπόστασιν δ τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο μὲ τὰς ἀνακλαστικὰς ἐπιφανείας των ἀπέναντι ἀλλήλων. Τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον εἶναι κάθετον εἰς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ, μεταξὺ τῶν δὺο κατόπτρων, ἓν φωτεινὸν σημεῖον Σ, ὥστε αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ νὰ ἐπανέρχωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μετὰ δύο ἀνακλάσεις. Διερευνήσατε τὸ πρόβλημα. 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογὴ $\delta = 200$ cm, $f = 40$ cm.

('Απ. 'Απόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ ἐπιπέδου κατόπτρου $x = \sqrt{\delta\,(\delta - 2f)}$. Διερεύνησις: $x > 2f$. $x = 155$ cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

76. 'Αντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἔμπροσθεν κοίλου κατόπτρου καὶ τὸ εἴδωλόν του σχηματίζεται ἀνεστραμμένον καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ κατόπτρου.

77. 'Αντικείμενον 1 cm ὕψους τίθεται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ σφαιρικὸν κάτοπτρον. Τὸ εἴδωλόν του εἶναι ὕψους 3 cm καὶ ὀρθόν. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ κατόπτρου. Εἶναι τὸ κάτοπτρον κοῖλον ἢ κυρτόν.

78. 'Αντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm πρὸ κοίλου κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 30 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου καὶ τὴν μεγέθυνσιν. Εἶναι τὸ εἴδωλον πραγματικὸν ἢ φανταστικόν.

79. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 36 cm, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον, διὰ νὰ σχηματίσῃ πραγματικὸν εἴδωλον 1/9 τοῦ μεγέθους του.

80. Ἀντικείμενον ὕψους 7 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 15 cm πρὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 45 cm. Περιγράψατε τὸ εἴδωλόν του.

81. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον παρέχει εἴδωλον ἀνεστραμμένον καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις εἶναι 2. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ὡς καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου.

82. Ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 50 cm. Ποῖαι αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου.

83. Ὑπολογίσατε τὴν θέσιν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ εἰδώλου τῆς Σελήνης, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ ἐστιλβωμένης σφαίρας διαμέτρου 20 cm. Ἡ διάμετρος τῆς Σελήνης εἶναι 2200 μίλια καὶ ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τὴν Γῆν περίπου 240 000 μίλια. (1 μίλιον = 1609 m.)

84. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 0,40 m πρέπει νὰ τοποθετηθῇ φωτεινὸν ἀντικείμενον ἵνα τὸ εἴδωλον σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Ποίας ἰδιότητας ἔχει τὸ εἴδωλον τοῦτο.

85. Φωτεινὸν βέλος μήκους A τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, εἰς ἀπόστασιν 4 f ἀπ' αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ α) τὸ μέγεθος καὶ β) ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου.

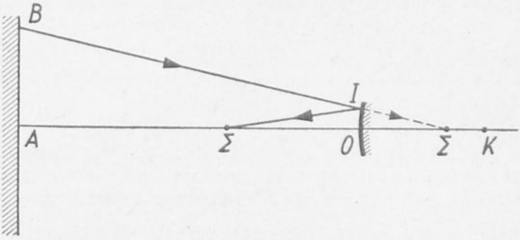
86. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως f πρέπει νὰ τοποθετηθῇ, ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, μικρὸν ἀντικείμενον, ἵνα παρέχῃ πραγματικὸν εἴδωλον, α) τριπλασίου μεγέθους, β) τέσσαρας φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου.

87. Ἀντικείμενον ὕψους 6 cm, τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 30 cm πρὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου του.

88. Κυρτὸν σφαιρικὸν κάτοπτρον παρέχει εἴδωλον 8 φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου εἶναι 80 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτοῦ.

89. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἔμπροσθεν κυρτοῦ κατόπτρου καὶ τὸ εἴδωλόν του εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.

90. Ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ Σ τοποθετεῖται 50 cm ἔμπροσθεν μικροῦ κυρτοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 25 cm καὶ διαμέτρου 4 cm. Πόση ἡ ἀκτὶς τῆς ἐπιφανείας, ἥτις δύναται νὰ εἶναι ὁρατὴ ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ τούτου, ἐπὶ ἐπιπέδου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. (βλ. σχῆμα.)



91. Εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ πετάσματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχηματίζεται τὸ πραγματικὸν εἴδωλον φωτεινοῦ ἀντικειμένου, θέτομεν σφαιρικὸν κάτοπτρον τὸ ὁποῖον ἐμποδίζει τὸν σχηματισμὸν τοῦ εἰδώλου τούτου καὶ τὸ ὁποῖον δίδει νέον πραγματικὸν εἴδωλον τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπὶ πετάσματος τοποθετημένου εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τὸ πρῶτον. Ζητεῖται ἡ φύσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου.

92. Δύο κοῖλα σφαιρικὰ κάτοπτρα τίθενται εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπ' ἀλλήλων, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ πρώτου εἶναι 20 cm. Εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ πρώτου κατόπτρου τοποθετεῖται ἀντικείμενον. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου κατόπτρου, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτοῦ πραγματοποιούμενον εἴδωλον τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου κατόπτρου παρεχομένου εἰδώλου, συμπίπτῃ πρὸς τὸ ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου κατόπτρου τοποθετηθὲν ἀντικείμενον.

93. Δύο σφαιρικὰ κάτοπτρα, τὸ ἓν κοῖλον καὶ τὸ ἕτερον κυρτόν, τοποθετοῦνται ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν, ἔχουσι δὲ ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος πρὸς 1,60 m καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 m μεταξύ των. Εἰς ἀπόστασιν 1,20 m ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου εὑρίσκεται φωτεινὸν ἀντικείμενον κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τῶν σχηματιζομένων εἰδώλων διὰ διπλῆς ἀνακλάσεως ἐπὶ τῶν κατόπτρων. Ποῖαι αἱ ἰδιότητες τῶν εἰδώλων·

94. Κοῖλον κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονά του καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὴν ἀνακλῶσαν ἐπιφάνειαν τοῦ κοίλου κατόπτρου. Φωτεινὸν βέλος μήκους 1 cm, κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα, τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν δύο κατόπτρων, εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κοίλου κατόπτρου ἴσην πρὸς 55 cm. Αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὸ φωτεινὸν βέλος ἀνακλῶνται κατ' ἀρχὰς ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου, ἀκολούθως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου καὶ τελικῶς σχηματίζουν ἓν εἴδωλον. Ζητοῦνται 1) Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατόπτρων. 2) Ἡ φύσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. 3) Νὰ σχεδιασθῇ ἡ φωτεινὴ δέσμη ἡ προερχομένη ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦ φωτεινοῦ βέλους τοῦ εὑρισκομένου ἐκτὸς τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ διερχομένου, μετὰ τὰς δύο ἀνακλάσεις, διὰ τοῦ ἄκρου τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ εἰδώλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

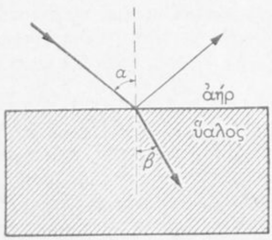
ΠΛΑΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

95. Ἀκτὶς φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας στεφανυάλου ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 50°. Νὰ καθορισθοῦν αἱ διευθύνσεις τῆς ἀνακλωμένης καὶ τῆς διαθλωμένης ἀκτῖνος. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου εἶναι 1,5.

Λύσις. Ὅταν τὸ φῶς προσπέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς στεφανυάλου, ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ὑποστῇ ἀνάκλασιν καὶ ἀφ' ἑτέρου διάθλασιν.

Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν γωνίαν προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος, τότε ἡ γωνία ἀνακλάσεως, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς ἀνακλάσεως, θὰ εἶναι ἐπίσης α καὶ συνεπῶς ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς θὰ σχηματίσῃ μὲ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν γωνίαν



$$α = 50^0.$$

Ἐξ ἄλλου ἂν καλέσωμεν β τὴν γωνίαν διαθλάσεως καὶ n τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως, θὰ ἔχωμεν

$$n = \frac{ημ\ α}{ημ\ β} \quad ἢ \quad ημ\ β = \frac{ημ\ α}{n} \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $α = 50^0$ καὶ $n = 1{,}5$ εὑρίσκομεν

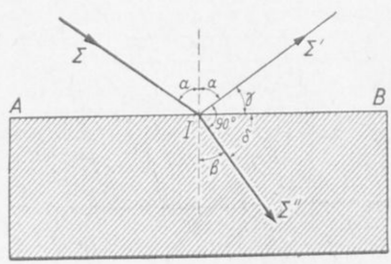
$$ημ\ β = \frac{ημ\ 50^0}{1{,}5}$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι

$$\underline{β = 30{,}7^0.}$$

96. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει πλαγίως ἐπὶ ἐπιπέδου ὑαλίνης πλακός, δείκτου διαθλάσεως 1,5. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως, ἵνα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διαθλωμένην.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τὴν ἀνακλωμένην ΙΣ' καὶ τὴν διαθλωμένην ΙΣ'' εἶναι ὀρθή. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως καὶ βάσει τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν



$$α + β = 90^0 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως ἔχομεν

$$\frac{ημ\ α}{ημ\ β} = n \qquad (2)$$

Ἀλλὰ λόγῳ τῆς σχέσεως (1), δυνάμεθα νὰ θέσωμεν εἰς τὴν (2), ημ β = συν α καὶ νὰ λάβωμεν τὸν τύπον

$$\underline{εφ\ α = n.} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) τὴν τιμὴν $n = 1{,}5$, εὑρίσκομεν

$$\underline{α = 56^0\ 20'.}$$

97. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου καὶ πυριτυάλου εἶναι ἀντιστοίχως 1,5 καὶ 1,66. Πόση εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ φῶς ὅταν διέρχεται ἐκ τῆς στεφανυάλου εἰς τὴν πυριτύαλον.

Λύσις. Ἔστω n_1, n_2 ἀντιστοίχως οἱ δεῖκται διαθλάσεως στεφανυάλου καὶ πυριτυάλου καὶ c_1, c_2 ἀντιστοίχως αἱ ταχύτητες τοῦ φωτὸς ἐντὸς αὐτῶν. Θὰ ἔχωμεν

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad n_2 = \frac{c_0}{c_2} \quad (2)$$

ὅπου c_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν.

Λύομεν τὰς (1) καὶ (2) ὡς πρὸς c_1 καὶ c_2 καὶ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad c_2 = \frac{c_0}{n_2} \quad (4)$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (3) καὶ (4) προκύπτει

$$c_1 - c_2 = \frac{c_0}{n_1} - \frac{c_0}{n_2} \quad (5)$$

ἢ

$$c_1 - c_2 = c_0 \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 \cdot n_1} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (6) $c_0 = 300\,000$ km/sec, $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}66$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ Δc τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς εἶναι

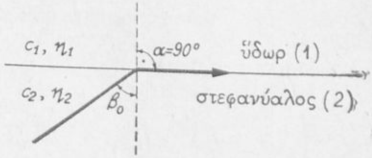
$$\Delta c = c_1 - c_2 = 19\,277 \text{ km/sec.}$$

98. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος (ὡς πρὸς τὸν ἀέρα) εἶναι 1,33 καὶ τῆς στεφανυάλου (ὡς πρὸς τὸν ἀέρα) 1,54. Ὑπολογίσατε α) τὸν σχετικὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ, β) τὴν ὁρικὴν γωνίαν μεταξὺ στεφανυάλου καὶ ὕδατος.

Λύσις. α) Ἔστω c_1 ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ ὕδωρ (1) καὶ c_2 ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὴν στεφανύαλον (2). Θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι

$$n_{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \quad (1)$$

Ἐπίσης ἔστω n_1 ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος, n_2 ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου καὶ c_0 ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα. Θὰ ἔχωμεν



$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} \qquad \text{καὶ} \qquad n_2 = \frac{c_0}{c_2}$$

ἢ

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad c_2 = \frac{c_0}{n_2} \quad (3)$$

Οὕτω βάσει τῶν (2) καὶ (3) ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$n_{\frac{1}{2}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4)$$

ὁπότε διὰ $n_2 = 1{,}45$ καὶ $n_1 = 1{,}33$ εὑρίσκομεν

$$n_{\frac{1}{2}} = 1{,}16.$$

β) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σχετικοῦ δείκτου διαθλάσεως ἔχομεν

$$n_{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{ημ}\,\beta} \quad (5)$$

καὶ διὰ $\alpha = 90^0$, $\beta = \beta_0$ (ὁρικὴ γωνία), λαμβάνομεν

$$n_2^1 = \frac{1}{\eta\mu\, \beta_0} \qquad \ddot{\eta} \qquad \eta\mu\, \beta_0 = \frac{1}{n_2^1} \tag{6}$$

Ἡ σχέσις ὅμως (6) λόγῳ τῆς (4) δύναται νὰ γραφῇ

$$\eta\mu\, \beta_0 = \frac{1}{\dfrac{n_2}{n_1}} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (7) τὰς τιμὰς $n_1 = 1{,}33$ καὶ $n_2 = 1{,}54$ εὑρίσκομεν ημ $\beta_0 = 0{,}864$, ἐξ οὗ προκύπτει

$$\beta_0 = 59{,}8^0 .$$

99. Φωτεινὴ ἀκτὶς διέρχεται ἀπὸ διθειάνθρακα (δείκτου διαθλάσεως 1,66) προσπίπτουσα ἐντὸς ὕδατος (δείκτου διαθλάσεως 1,33). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁρικὴ γωνία προσπτώσεως.

Λύσις. Ἐὰν συμβολίσωμεν διὰ τοῦ n_2^1 τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ διθειάνθρακος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ καὶ β_0 τὴν ὁρικὴν γωνίαν, τότε ὡς γνωστὸν (βλ. προηγουμένην Ἄσκησιν) θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$\eta\mu\, \beta_0 = \frac{1}{n_2^1} \tag{1}$$

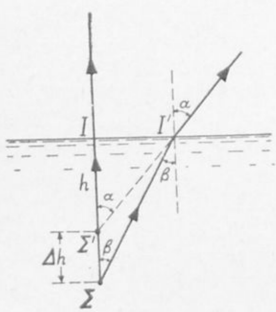
Καὶ ἐπειδὴ $n_2^1 = n_2/n_1$, ὅπου n_2 καὶ n_1 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως τοῦ διθειάνθρακος καὶ τοῦ ὕδατος, ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\eta\mu\, \beta_0 = \frac{n_1}{n_2} \tag{2}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως $n_1 = 1{,}33$ καὶ $n_2 = 1{,}66$ εὑρίσκομεν ὅτι ημ $\beta_0 = 0{,}8$, ἐξ οὗ προκύπτει

$$\beta_0 = 53^0\, 8'.$$

100. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις φωτεινοῦ σημείου ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν διάθλασιν διὰ μέσου μιᾶς ἐπιπέδου διαχωριστικῆς ἐπιφανείας, ὅταν τὸ σημεῖον ὁρᾶται κατακορύφως.



Λύσις. Διὰ νὰ ἴδῃ ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ τὸ σημεῖον Σ, δέχεται ἐκ τοῦ σημείου Σ μίαν δέσμην λεπτὴν ἀποκλίνουσαν, ἡ ὁποία ἐξερχομένη ἐκ τοῦ ὕδατος καθίσταται ἔτι περισσότερον ἀποκλίνουσα. Οὕτω ὁ παρατηρητὴς νομίζει ὅτι τὸ σημεῖον Σ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Σ', ὑψηλότερον τοῦ Σ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν φαινομένην ἀνύψωσιν (ΣΣ') ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρός

$$(\Sigma\Sigma') = (\Sigma I) - (\Sigma' I) \tag{1}$$

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΙΙ' καὶ Σ'ΙΙ' ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$(II') = (\Sigma I) \cdot \varepsilon\varphi\, \beta \quad \text{καὶ} \quad (II') = (\Sigma' I) \cdot \varepsilon\varphi\, \alpha$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ αὐτῶν προκύπτει ὅτι

$$(\Sigma' I) = (\Sigma I) \cdot \frac{\varepsilon\varphi\, \beta}{\varepsilon\varphi\, \alpha} \tag{2}$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι β καὶ α εἶναι πολὺ μικραὶ καθ' ὅσον ἡ κόρη τοῦ ὀφθαλμοῦ εἶναι πολὺ μικροῦ ἀνοίγματος, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\frac{\text{εφ } \beta}{\text{εφ } \alpha} = \frac{\text{ημ } \beta}{\text{ημ } \alpha}$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$(\Sigma' \mathrm{I}) = (\Sigma \mathrm{I}) \cdot \frac{\text{ημ } \beta}{\text{ημ } \alpha} \tag{3}$$

Ἡ σχέσις (1) ἑπομένως βάσει τῆς (3) δίδει

$$(\Sigma\Sigma') = (\Sigma \mathrm{I}) \cdot \left(1 - \frac{\text{ημ } \beta}{\text{ημ } \alpha}\right) \quad (4) \qquad \text{ἢ} \qquad (\Sigma\Sigma') = (\Sigma \mathrm{I}) \cdot \left(1 - \frac{1}{n_2^1}\right) \quad (5)$$

διότι ὡς γνωστὸν

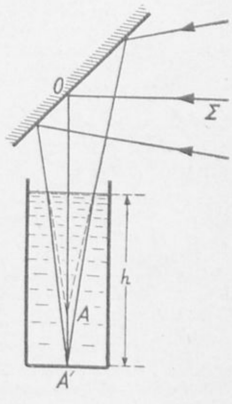
$$\frac{\text{ημ } \alpha}{\text{ημ } \beta} = n_2^1$$

Τελικῶς ἐὰν συμβολίσωμεν τὸ βάθος (Σ Ι) διὰ τοῦ h καὶ τὴν ἀνύψωσιν (Σ Σ') διὰ τοῦ Δh, προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος τῆς ἀνυψώσεως

$$\Delta h = h \cdot \left(1 - \frac{1}{n_2^1}\right)$$

101. Τῇ βοηθείᾳ ὀργάνου σχηματίζεται συγκλίνουσα δέσμη μεσαίας ἀκτῖνος (ΣΟ). Μικρὸν ἐπίπεδον κάτοπτρον στέλλει ταύτην κατὰ τὸν ἄξονα κατακορύφου δοκιμαστικοῦ σωλῆνος καὶ οὕτω συγκλίνει αὕτη εἰς τὸ σημεῖον Α εὑρισκόμενον εἰς ὕψος 3 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ρίψωμεν ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος ἵνα τὸ σημεῖον συγκλίσεως τῆς δέσμης ταύτης ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ πυθμένος (n = 1,33).

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον συγκλίσεως τῶν ἀκτίνων, ὅταν ὁ δοκιμαστικὸς σωλὴν εἶναι κενός, εἶναι τὸ σημεῖον Α καὶ ὅταν εἶναι πλήρης ὕδατος εἶναι τὸ σημεῖον Α' τοῦ πυθμένος. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, ὅτι ἡ ἀπόστασις (ΑΑ') εἶναι ἡ φαινομένη ἀνύψωσις καὶ συνεπῶς ἂν καλέσωμεν h τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον ρίπτομεν ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος, θὰ ἔχωμεν (βλέπε προηγουμένην Ἄσκησιν)



$$(\mathrm{AA'}) = h \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν

$$h = \frac{(\mathrm{AA'})}{1 - \frac{1}{n}} = (\mathrm{AA'}) \cdot \frac{n}{n-1} \tag{2}$$

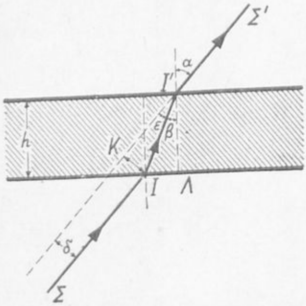
Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (ΑΑ') = 3 cm, n = 1,33 καὶ εὑρίσκομεν

$$h = 12 \text{ cm.}$$

102. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράλληλος μετατόπισις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται φωτεινὴ ἀκτίς, ὅταν διέρχεται μίαν διαφανῆ πλάκα μὲ παραλλήλους ἕδρας.

Λύσις. Ὡς εἶναι γνωστόν, ὅταν μία ἀκτὶς (μονόχρους) διέρχεται πλαγίως πρὸς ὀπτικὸν πλακίδιον, ὑφίσταται μόνον παράλληλον μετατόπισιν. Βάσει τοῦ σχήματος θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράλληλον μετατόπισιν δ = (Ι Κ) τῆς προσπιπτούσης ἀκτῖνος Σ Ι.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΙΛΙ' καὶ ΙΚΙ' τοῦ διαγράμματος ἔχομεν τὰς σχέσεις:



$$h = (\mathrm{II}') \cdot \text{συν}\ \beta \quad \text{καὶ} \quad \delta = (\mathrm{II}') \cdot \text{ημ}\ (\alpha - \beta)$$

ὁπότε διὰ συνδυασμοῦ αὐτῶν προκύπτει ὁ τύπος

$$\delta = h \cdot \frac{\text{ημ}\ (\alpha - \beta)}{\text{συν}\ \beta}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν:

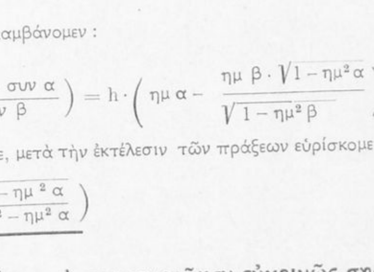
$$\delta = h \cdot \frac{\text{ημ}\ \alpha \cdot \text{συν}\ \beta - \text{ημ}\ \beta \cdot \text{συν}\ \alpha}{\text{συν}\ \beta} = h \cdot \left(\text{ημ}\ \alpha - \frac{\text{ημ}\ \beta \cdot \text{συν}\ \alpha}{\text{συν}\ \beta}\right) = h \cdot \left(\text{ημ}\ \alpha - \frac{\text{ημ}\ \beta \cdot \sqrt{1 - \text{ημ}^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \text{ημ}^2 \beta}}\right)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι ημ α/ημ β=n καὶ ημ β=ημ α/n ὁπότε, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν

$$\delta = h \cdot \text{ημ}\ \alpha \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \text{ημ}^2 \alpha}{n^2 - \text{ημ}^2 \alpha}}\right)$$

103. Μικροσκόπιον ρυθμίζεται οὕτως ὥστε νὰ παρατηροῦμεν εὐκρινῶς σημεῖον. Ὅταν ὑαλίνη πλὰξ μὲ παραλλήλους ἕδρας καὶ πάχους 4,8 mm τοποθετῆται ἄνωθεν τοῦ σημείου, τὸ μικροσκόπιον πρέπει νὰ ὑψωθῇ κατὰ 1,8 mm διὰ νὰ ἐπαναρρυθμισθῇ. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ὀπτικὸν πλακίδιον λαμβάνει χώραν μόνον παράλληλος μετατόπισις τῶν διερχομένων ἀκτίνων, ἕπεται βάσει τοῦ σχήματος, ὅτι ἡ ἀνύψωσις (ΑΑ') τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σημεῖον Α, εἶναι ἴση πρὸς (ΓΔ), (τὸ Α'Α ΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον).



Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μικροσκοπίου αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν πολὺ πλησίον τῆς καθέτου ΚΑ καὶ συνεπῶς ἡ (ΓΔ) θὰ εἶναι ἡ φαινομένη ἀνύψωσις καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ σχέσις (βλ. Ἄσκησιν 100)

$$(\mathrm{AA}') = \Delta h = h \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς τὸν δείκτην διαθλάσεως n καὶ λαμβάνομεν

$$n = \frac{h}{h - \Delta h} \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μικροσκόπιον δι' εὐκρινῆ παρατήρησιν πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ ἐπίσης κατὰ (ΑΑ') = Δh καὶ ἑπομένως ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (2) Δh = 1,8 mm καὶ h = 4,8 mm εὑρίσκομεν

$$n = 1{,}6.$$

104. Μικρὸν φωτεινὸν σῶμα εὑρισκόμενον εἰς τὸν πυθμένα δεξαμενῆς ὕδατος (n=1,33) βάθους 100 cm, ἐκπέμπει ἀκτῖνας πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς πάσας τὰς διευθύνσεις. Εἷς φωτεινὸς κύκλος σχηματίζεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὑπὸ τῶν ἀκτίνων αἵτινες διαθλῶνται ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Πέραν τοῦ κύκλου τού-

του αἱ ἀκτῖνες ἀνακλῶνται πρὸς τὰ ὀπίσω ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Καθορίσατε τὴν ἀκτῖνα r τοῦ κύκλου τούτου.

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΟΒ τοῦ σχήματος ἔχομεν τὴν σχέσιν

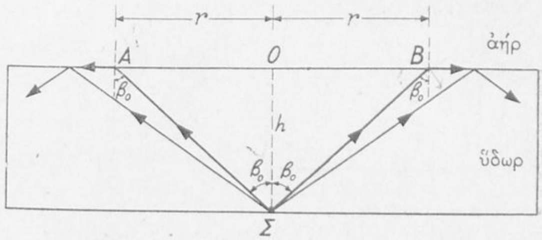
$$r = h \cdot \text{εφ}\ \beta_0 = h \cdot \frac{\text{ημ}\ \beta_0}{\text{συν}\ \beta_0} \quad (1)$$

ἢ ἐπειδὴ

$$\text{συν}\ \beta_0 = \sqrt{1-\text{ημ}^2\beta_0}$$

λαμβάνομεν

$$r = h \cdot \frac{\text{ημ}\ \beta_0}{\sqrt{1-\text{ημ}^2\beta_0}} \quad (2)$$



Ὡς εἶναι ὅμως γνωστόν, ημ $\beta_0 = 1/n$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται

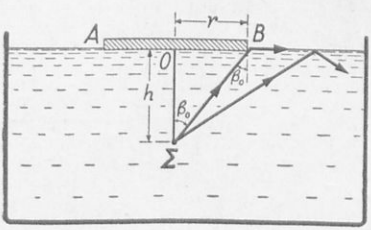
$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \quad (3)$$

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν (3) $h = 100$ cm καὶ $n = 1{,}33$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς εἶναι:

$$r = 113 \text{ cm}.$$

105. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς r τοῦ δίσκου, συναρτήσει τοῦ μήκους h τῆς καρφίτσας ἡ ὁποία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς ὑγροῦ δείκτου διαθλάσεως n, οὕτως ὥστε οὐδεμία ἀκτὶς προερχομένη ἐκ τῆς καρφίτσας νὰ ἐξέρχεται τοῦ ὑγροῦ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: h = 5 cm, n = 1,33.

Λύσις. Ἵνα μὴ ἐξέρχωνται τοῦ ὑγροῦ αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὴν καρφίτσαν, πρέπει αἱ γωνίαι προσπτώσεως τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τῆς ἀκαλύπτου ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ὁρικῆς. Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο πρέπει ἡ ἀκτὶς ΣΒ, ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ κάτω ἄκρου τῆς καρφίτσας, νὰ προσπίπτῃ ὑπὸ γωνίαν ὄχι μικροτέραν τῆς ὁρικῆς.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΣΒ ἔχομεν

$$r = h \cdot \text{εφ}\ \beta_0 = h \cdot \frac{\text{ημ}\ \beta_0}{\text{συν}\ \beta_0} = h \cdot \frac{\text{ημ}\ \beta_0}{\sqrt{1-\text{ημ}^2\ \beta_0}} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ημ $\beta_0 = 1/n$, ἕπεται ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι

$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \quad (2)$$

Ἐφαρμογή. Διὰ $h = 5$ cm καὶ $n = 1{,}33$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι

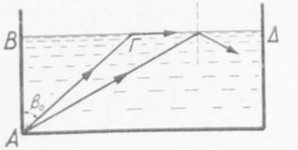
$$r = 5{,}67 \text{ cm}.$$

106. Ὀρθογώνιον δοχεῖον μὲ ἀδιαφανῆ τοιχώματα καὶ ὁριζόντιον πυθμένα, πληροῦται μέχρις ὕψους (AB)=2,645 cm μὲ ὑγρὸν τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλά-

σεως εἶναι 1,333. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον μῆκος (ΒΓ) τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὅπου πρέπει νὰ καλύψωμεν δι' ἀδιαφανοῦς πλακὸς, ὥστε ἡ ἀκμὴ Α νὰ εἶναι ἀόρατος ἀπὸ οἱονδήποτε σημεῖον.

(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν. Τμῆμα Φυσικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1955).

Λύσις. 'Εὰν εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, φωτεινὴ ἀκτὶς προερχομένη ἐκ τοῦ σημείου Α προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὁρικὴν β_0, τότε ἡ ἀκτὶς αὕτη θὰ ἐξέλθῃ παραλλήλως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Πᾶσα δὲ ἄλλη ἀκτὶς προερχομένη ἐκ τοῦ Α καὶ προσπίπτουσα εἰς ἄλλο σημεῖον πέραν τοῦ Γ, ἐπειδὴ θὰ προσπίπτῃ ὑπὸ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς ὁρικῆς, θὰ ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ μὴ εἶναι ὁρατόν, ἐφ' ὅσον τὸ μέρος (ΒΓ) τῆς ἐπιφανείας εἶναι κεκαλυμμένον.



'Εκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ σχήματος ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(\text{ΒΓ}) = (\text{ΑΒ}) \cdot \text{εφ}\,\beta_0 = (\text{ΑΒ}) \cdot \frac{\text{ημ}\,\beta_0}{\text{συν}\,\beta_0} = (\text{ΑΒ}) \cdot \frac{\text{ημ}\,\beta_0}{\sqrt{1-\text{ημ}^2\beta_0}} \qquad (1)$$

'Επειδὴ ὅμως ημ $\beta_0 = 1/n$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$(\text{ΒΓ}) = \frac{(\text{ΑΒ})}{\sqrt{n^2-1}} \qquad (2)$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι (ΑΒ) = 2,645 cm καὶ n = 1,333 εὑρίσκομεν

$$\text{ΒΓ} = 3\ \text{cm} \quad (\text{περίπου})$$

107. 'Υαλίνη σφαῖρα, κειμένη ἐπὶ τραπέζης, ἀκτῖνος r καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁρικὴ γωνία εἶναι β_0, φωτίζεται διὰ δέσμης φωτός, παραλλήλου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς σφαίρας-τραπέζης συναντᾷ ἡ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς σφαίρας ἐφαπτομενικῶς εἰσχωροῦσα ἐντὸς αὐτῆς ὁριακὴ ἀκτὶς τῆς δέσμης τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης.

Λύσις. Βάσει τοῦ διαγράμματος τῆς πορείας τῆς ἀκτῖνος Ι Α, ἡ ὁποία προσπίπτει ἐφαπτομενικῶς εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον Α τῆς σφαίρας, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις x εἶναι ἡ (ΒΔ). Εἶναι ὅμως (ΒΔ)=(ΔΓ) καὶ συνεπῶς ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΚΔ ἔχομεν

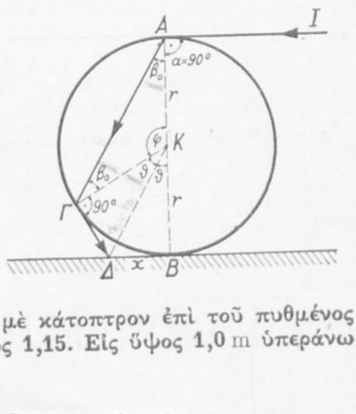
$$x = (\text{ΓΔ}) = r \cdot \text{εφ}\,\theta \qquad (1)$$

'Αλλὰ ἐπειδὴ ἡ γωνία 2θ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΚ, θὰ εἶναι $2\theta = 2\beta_0$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν

$$\theta = \beta_0 \qquad (2)$$

Ἄρα ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$x = r \cdot \text{εφ}\,\beta_0 \,.$$

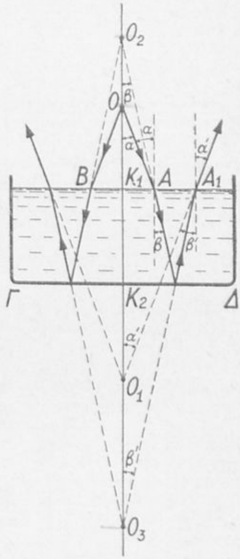


108. Λεκάνη βάθους 0,5 m ἐφωδιασμένη μὲ κάτοπτρον ἐπὶ τοῦ πυθμένος αὐτῆς, πληροῦται μὲ ὑγρὸν δείκτου διαθλάσεως 1,15. Εἰς ὕψος 1,0 m ὑπεράνω

τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του εἰς τὸ κάτοπτρον τοῦ πυθμένος. Ζητεῖται ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαὶ: Χημικῶν Μηχανικῶν, Μεταλλειολόγων, Ἀρχιτεκτόνων, Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1948).

Λύσις. Α΄ Μέθοδος. Αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ Ο ὑφίστανται διάθλασιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καὶ προσπίπτουσαι ἐπὶ τοῦ κατόπτρου φαίνονται ὅτι προέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον O_2. Ἀκολούθως ἀνακλῶνται ἐπὶ τοῦ κατόπτρου καὶ αἱ προεκτάσεις των διέρχονται διὰ τοῦ O_3, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ O_2 ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον ΓΔ, ἤτοι $(K_2O_2) = (K_2O_3)$.



Ἐν συνεχείᾳ αἱ ἀκτῖνες διαθλώμεναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰσέρχονται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ καὶ δίδουν εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ εἰς τὸ σημεῖον O_1.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OK_1A καὶ O_2K_1A ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$(K_1A) = (K_1O) \cdot \text{εφ}\, \alpha \quad \text{καὶ} \quad (K_1A) = (K_1O_2) \cdot \text{εφ}\, \beta \tag{1}$$

ὁπότε διὰ συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν

$$(K_1O_2) = (K_1O) \cdot \frac{\text{εφ}\, \alpha}{\text{εφ}\, \beta} \tag{2}$$

ἢ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι πολὺ μικραί,

$$(K_1O_2) = (K_1O) \cdot \frac{\text{ημ}\, \alpha}{\text{ημ}\, \beta} = (K_1O) \cdot n \tag{3}$$

Ἄρα
$$(K_2O_2) = (K_1K_2) + (K_1O) \cdot n \tag{4}$$

ὅπου n ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ.

Ἀλλὰ $(K_1O_3) = (K_1K_2) + (K_2O_3) = (K_1K_2) + (K_2O_2)$ καὶ λόγῳ τῆς (4) ἔχομεν

$$(K_1O_3) = 2 \cdot (K_1K_2) + (K_1O) \cdot n \tag{5}$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν τριγώνων $K_1O_1A_1$ καὶ $K_1O_3A_1$ ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$(K_1A_1) = (K_1O_1) \cdot \text{εφ}\, \alpha' \quad \text{καὶ} \quad (K_1A_1) = (K_1O_3) \cdot \text{εφ}\, \beta' \tag{6}$$

ὁπότε διὰ συνδυασμοῦ αὐτῶν λαμβάνομεν

$$(K_1O_1) = (K_1O_3) \cdot \frac{\text{εφ}\, \beta'}{\text{εφ}\, \alpha'} = (K_1O_3) \cdot \frac{\text{ημ}\, \beta'}{\text{ημ}\, \alpha'} \tag{7}$$

ἢ
$$(K_1O_1) = (K_1O_3) \cdot \frac{1}{n} \tag{8}$$

Ἡ σχέσις (8) βάσει τῆς (5) γράφεται

$$(K_1O_1) = \left[\, 2\,(K_1K_2) + (K_1O) \cdot n \,\right] \cdot \frac{1}{n}$$

ἢ
$$(K_1O_1) = \frac{2\,(K_1K_2)}{n} + (K_1O) \tag{9}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τὸ εἴδωλόν του εἶναι:

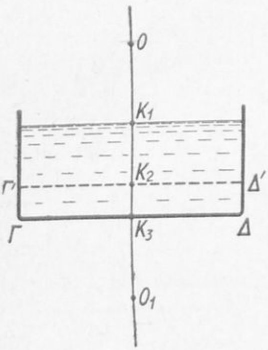
$$(OO_1) = (K_1O) + (K_1O_1) = (K_1O) + \frac{2\,(K_1K_2)}{n} + (K_1O)$$

ἢ
$$\underline{(OO \;= 2\left[\, (K_1O) + \frac{(K_1K_2)}{n} \,\right]} \tag{10}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (10) διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, $(OK_1) = 1\,m$, $(K_1 K_2) = 0{,}5\,m$, $n = 1{,}5$ λαμβάνομεν

$$\underline{(O O_1) = 2{,}87\ m}\ .$$

Β' Μέθοδος. Λόγῳ φαινομένης ἀνυψώσεως, τὸ σημεῖον K_3 τοῦ κατόπτρου ΓΔ θὰ φαίνεται ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον K_2 καὶ συνεπῶς μία μικρὰ ἐπιφάνεια τοῦ κατόπτρου ΓΔ περὶ τὸ σημεῖον K_3, θὰ φαίνεται ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γ'Δ'. Οὕτω ὁ ὀφθαλμὸς Ο θὰ βλέπῃ νὰ κατοπτρίζεται εἰς τὴν φαινομενικὴν ταύτην θέσιν τοῦ κατόπτρου καὶ συνεπῶς τὸ εἴδωλόν του O_1 νὰ σχηματίζεται εἰς συμμετρικὸν σημεῖον ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Γ'Δ'. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν



$$(O O_1) = 2 \cdot (O K_2) = 2 \left[(O K_1) + (K_1 K_2) \right]$$

Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν (βλ. Ἄσκησιν 100) εἶναι

$$(K_1 K_2) = \frac{(K_1 K_3)}{n}$$

καὶ οὕτω λαμβάνομεν

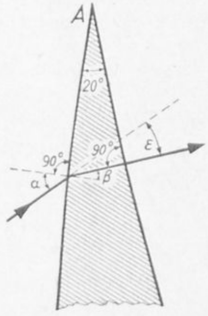
$$\underline{(O O_1) = 2 \left[(O K_1) + \frac{(K_1 K_3)}{n} \right]}$$

ὁπότε διὰ $(OK_1) = 1\,m$ εἶναι $(K_1\ K_3) = 0,5\,m$ καὶ $n = 1{,}15$ ὅτε εὑρίσκομεν

$$\underline{(O O_1) = 2{,}87\ m.}$$

109. Φωτεινὴ ἀκτὶς ἐξέρχεται καθέτως πρὸς τὴν δευτέραν ἕδραν πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 20^0. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος διὰ τὸ χρησιμοποιηθὲν φῶς, ἐὰν ἡ γωνία προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος εἶναι 30^0.

Λύσις. Ἐκ τοῦ διαγράμματος τῆς πορείας τῶν ἀκτίνων προκύπτει ὅτι



$$\beta = A$$

ἄρα
$$n = \frac{\eta\mu\ \alpha}{\eta\mu\ \beta} = \frac{\eta\mu\ \alpha}{\eta\mu\ A} \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα $\alpha = 30^0$, $A = 20^0$ λαμβάνομεν

$$n = \frac{\eta\mu\ 30^0}{\eta\mu\ 20^0} \qquad (2)$$

ὁπότε ἐπειδὴ $\eta\mu\ 30^0 = 0{,}5$ καὶ $\eta\mu\ 20^0 = 0{,}342$ εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 1{,}46}\ .$$

110. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος δείκτου διαθλάσεως 1,60 καὶ ὑφίσταται μετὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ πρίσματος ἐκτροπὴν 30^0. Ποία ἡ διαθλαστικὴ γωνία αὐτοῦ.

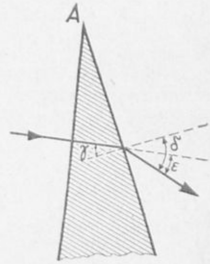
Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\eta\mu\ \delta}{\eta\mu\ \gamma} = n \qquad (1)$$

ἢ ἐπειδὴ $\gamma = A$, λαμβάνομεν

$$\frac{\eta\mu\ \delta}{\eta\mu\ A} = n \qquad (2)$$

Εἶναι ὅμως $\delta = \gamma + \varepsilon = A + \varepsilon$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται



$$\frac{\eta\mu\,(A+\varepsilon)}{\eta\mu\,A} = n$$

ἢ
$$\frac{\eta\mu\,A \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varepsilon + \eta\mu\,\varepsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\,A}{\eta\mu\,A} = n \qquad (3)$$

ἢ
$$\sigma\upsilon\nu\,\varepsilon + \eta\mu\,\varepsilon \cdot \sigma\varphi\,A = n$$

ἢ
$$\sigma\varphi\,A = \frac{n - \sigma\upsilon\nu\,\varepsilon}{\eta\mu\,\varepsilon}$$

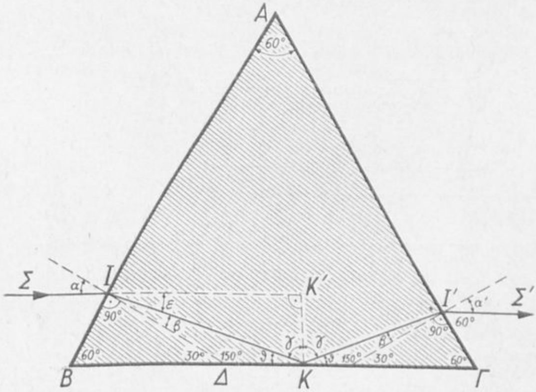
ἢ
$$\varepsilon\varphi\,A = \frac{\eta\mu\,\varepsilon}{n - \sigma\upsilon\nu\,\varepsilon} = \frac{\eta\mu\,\varepsilon}{n - \sqrt{1 - \eta\mu^2\varepsilon}} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) $\varepsilon = 30^0$ καὶ $n = 1{,}6$ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\,A = 0{,}68$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 34^0\ 10'}$$

111. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ πρίσματος, δείκτου διαθλάσεως 1,60, προσπίπτει φωτεινὴ ἀκτὶς πλησίον τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτήν. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον ἐξόδου αὐτῆς.

Λύσις. Ἡ ἀκτὶς ΣΙ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν (ΒΓ) θὰ προσπίπτῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας (ΑΒ) ὑπὸ γωνίαν $\alpha = 30^0$ καὶ ἐπειδὴ εἰσέρχεται εἰς σῶμα ὀπτικῶς θλαστικώτερον θὰ εἶναι $\beta < \alpha = 30^0$ καθὼς καὶ $\varepsilon < 30^0$.



Οὕτω ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΚΚ′ προκύπτει ὅτι

$$\gamma = 90 - \varepsilon > 60^0 \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον τώρα ἡ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἕδρας (ΒΓ) ἀπὸ μέσον ὀπτικῶς θλαστικώτερον, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν ἂν ἡ γωνία προσπτώσεως γ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τῆς ὁρικῆς. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸν γνωστὸν τύπον

$$\eta\mu\,\beta_0 = \frac{1}{n}$$

ὁπότε διὰ $n = 1{,}6$ εὑρίσκομεν

$$\beta_0 < 60^0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συνάγομεν λοιπὸν ὅτι

$$\gamma > \beta_0$$

Ἑπομένως ἡ ἀκτὶς ὑφίσταται ἐπὶ τῆς (ΒΓ) ὁλικὴν ἀνάκλασιν ὑπὸ γωνίαν ἀνακλάσεως γ καὶ προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἕδρας (ΑΓ) ὑπὸ γωνίαν β, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Ἀπὸ τὸν τύπον ὅμως τοῦ δείκτου διαθλάσεως ἔχομεν

$$n = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,\beta} = \frac{\eta\mu\,\alpha'}{\eta\mu\,\beta}$$

ἄρα $\quad \eta\mu\,\alpha = \eta\mu\,\alpha' \quad$ καὶ $\quad \underline{\alpha = \alpha'}$

Οὕτω ἡ ἀκτὶς ἐξερχομένη τοῦ πρίσματος σχηματίζει μετὰ τῆς (ΑΓ) γωνίαν 60^0 καὶ συνεπῶς εἰ-ναι παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν (ΒΓ) καὶ τὴν ἀρχικὴν ἀκτῖνα ΣΙ, ἐνῷ ἐξ ἄλλου ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη μεταξὺ τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος καὶ τῆς καθέτου εἶναι :

$$\underline{\alpha' = 30^0.}$$

112. Ἐὰν φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας Α καὶ δείκτου διαθλάσεως n ὑπὸ γωνίαν α, ποία ἡ γωνία δ τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου.

Λύσις. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πρισμάτων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$n = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,\beta} = \frac{\eta\mu\,\delta}{\eta\mu\,\gamma} \tag{1}$$

καὶ

$$A = \beta + \gamma \tag{2}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν

$$\eta\mu\,\delta = n \cdot \eta\mu\,\gamma \tag{3}$$

καὶ ἐκ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν

$$\gamma = A - \beta \tag{4}$$

Ἡ σχέσις (3) βάσει τῆς σχέσεως (4) γράφεται :

$$\eta\mu\,\delta = n \cdot \eta\mu\,(A-\beta) = n \cdot (\eta\mu\,A \cdot \sigma\upsilon\nu\,\beta - \eta\mu\,\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\,A)$$

ἢ

$$\eta\mu\,\delta = n \cdot \left(\eta\mu\,A \cdot \sqrt{1-\eta\mu^2\beta} - \eta\mu\,\beta \cdot \sqrt{1-\eta\mu^2 A}\right) \tag{5}$$

Ἐκ τοῦ τύπου ὅμως (1) ἔχομεν $\eta\mu\,\beta = \eta\mu\,\alpha/n$ καὶ συνεπῶς ἡ (5) γράφεται

$$\eta\mu\,\delta = n \cdot \left(\eta\mu\;A \cdot \sqrt{1-\frac{\eta\mu^2\,\alpha}{n^2}} - \frac{\eta\mu\;\alpha}{n} \cdot \sqrt{1-\eta\mu^2 A}\right) \tag{6}$$

καὶ τελικῶς

$$\underline{\eta\mu\,\delta = \eta\mu\,A \cdot \sqrt{n^2-\eta\mu^2 A} - \eta\mu\,\alpha \cdot \sqrt{1-\eta\mu^2 A}\,.}$$

113. Πρῖσμα (1) διαθλαστικῆς γωνίας Α $= 60^0$ καὶ δείκτου διαθλάσεως $n_1 = \sqrt{3}$ εἶναι προσκεκολλημένον ἐπὶ ἑτέρου πρίσματος (2) δείκτου διαθλάσεως $n_2 = \sqrt{3/2}$ καὶ θλαστικῆς γωνίας 45^0. Φωτεινὴ ἀκτὶς διαπερᾷ τὸ σύστημα προσπίπτουσα καθέτως ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἕδρας (ΓΒ) τοῦ πρίσματος. Ζητεῖται : 1) νὰ δειχθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων, 2) νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκτροπή.

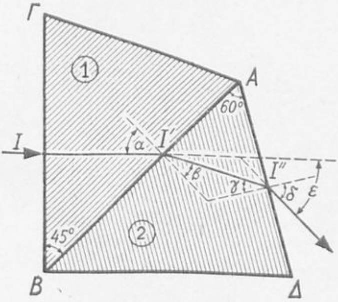
Λύσις. Εὐκόλως ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι $\alpha = 45^0$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τῆς (ΑΒ) ἀπὸ ὀλιγώτερον θλαστικὸν μέσον πρὸς περισσότερον θλαστικόν, ἔπεται ὅτι θὰ διέλθῃ διὰ τῆς ἐπιφανείας σχηματίζουσα γωνίαν β μικροτέραν τῆς α. Ἐὰν καλέσωμεν n_1^2 τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ μέσου (1) ὡς πρὸς τὸ μέσον (2), τότε συμφώνως πρὸς τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν

$$n_1^2 = \frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,\beta} = \frac{n_1}{n_2} \tag{1}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς ημ β λαμβάνομεν

$$\eta\mu\,\beta = \frac{n_2}{n_1} \cdot \eta\mu\,\alpha \tag{2}$$

καὶ διὰ $n_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $n_1 = \sqrt{3}$, $\alpha = 45^0$, λαμβάνομεν



$$ημ\ \beta = \frac{1}{2} \qquad καὶ \qquad \beta = 30^0$$

Ἐπίσης ὑπολογίζεται εὐκόλως ὅτι εἶναι $\gamma = 30^0$ καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς ὁρικῆς β_0 $\left(ημ\ \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ἡ ἀκτὶς θὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς ἕδρας (ΑΔ) ὑπὸ γωνίαν δ, ἥτις ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$n_1 = \frac{ημ\ \delta}{ημ\ \gamma}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν

$$ημ\ \delta = n_1 \cdot ημ\ \gamma$$

ὁπότε διὰ $\gamma = 30^0$, $n_1 = \sqrt{3}$, ἔχομεν $ημ\ \delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ

$$\underline{\delta = 60^0.}$$

Ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε, ὡς γνωστόν, εἶναι ἡ γωνία ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῆς ἀρχικῆς καὶ τὴν φορὰν τῆς τελικῆς ἀκτῖνος καὶ βάσει τοῦ σχήματος ὑπολογίζεται εὐκόλως ὅτι εἶναι

$$\underline{\varepsilon = 45^0.}$$

114. Πρῖσμα ἐξ ὑάλου διαθλαστικῆς γωνίας $A = 1^0$ δέχεται καθέτως ἐπὶ τὴν ἕδραν (ΑΒ) λεπτὴν δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων, ἥτις φθάνει τὴν ἑτέραν ἕδραν, ὅπου μέρος μὲν διαθλώμενον ἐξέρχεται, τὸ ὑπόλοιπον δὲ μέρος ἀνακλᾶται πρὸς τὴν πρώτην ἕδραν ἐπὶ τῆς ὁποίας ὑφίσταται νέαν ἀνάκλασιν καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐξέρχεται. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν δύο ἐξερχομένων δεσμῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,5.

Λύσις. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι ἡ γωνία προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τῆς ἕδρας (ΑΓ) τὴν πρώτην φορὰν εἶναι $\alpha = 1^0$ καὶ τὴν δευτέραν φορὰν εἶναι $3\alpha = 3^0$.

Λόγῳ τῶν μικρῶν γωνιῶν προσπτώσεως εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις καὶ αἱ γωνίαι διαθλάσεως β καὶ γ θὰ εἶναι ἐπίσης μικραὶ καὶ δυνάμεθα ἀντὶ

$$n = \frac{ημ\ \beta}{ημ\ \alpha} = \frac{ημ\ \gamma}{ημ\ 3\alpha}$$

νὰ γράψωμεν

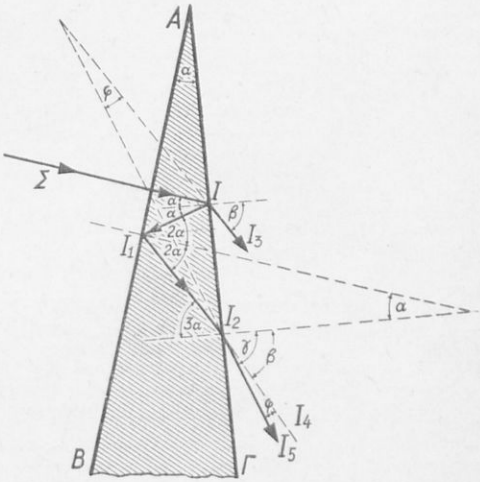
$$n = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{3\alpha}$$

ὅτε λαμβάνομεν

$$\beta = n \cdot \alpha \quad καὶ \quad \gamma = n \cdot 3\alpha$$

Συνεπῶς διὰ $\alpha = 1^0$ καὶ $n = 1,5$ εὑρίσκομεν

$$\beta = 1,5^0 \quad καὶ \quad \gamma = 4,5^0$$



Εὐκόλως τώρα ὑπολογίζεται βάσει τοῦ διαγράμματος ὅτι ἡ σχηματιζομένη γωνία μεταξὺ τῶν ἀκτίνων $(I I_3)$ καὶ $(I_2 I_5)$ εἶναι

$$\underline{\varphi = \gamma - \beta = 3^0}$$

115. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν διαθλαστικῶν γωνιῶν A_1 καὶ A_2 δύο λεπτῶν πρισμάτων ἵνα, ἐὰν τὸ πρῶτον πρῖσμα παρουσιάζῃ δείκτην διαθλάσεως n_1 διὰ τὸ κυανοῦν φῶς καὶ τὸ δεύτερον δείκτην διαθλάσεως n_2 διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς, ἐπιτυγχάνεται εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἡ αὐτὴ γωνία ἐκτροπῆς.

Λύσις. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν λεπτῶν πρισμάτων γνωρίζομεν ὅτι ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε εἶναι

$$\varepsilon = A \cdot (n-1) \tag{1}$$

ὅπου A ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ λεπτοῦ πρίσματος καὶ n ὁ δείκτης διαθλάσεως αὐτοῦ.

Ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) εἰς τὰς ἀναφερομένας δύο περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ γωνία ἐκτροπῆς πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἔχομεν

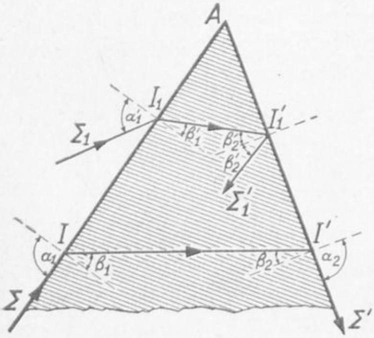
$$\varepsilon = A_1 \cdot (n_1 - 1) \tag{2}$$

$$\varepsilon = A_2 \cdot (n_2 - 1) \tag{3}$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι

$$\underline{\frac{A_1}{A_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}}$$

116. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία A, πρίσματος δείκτου διαθλάσεως n, ἵνα πᾶσα ἀκτὶς διαπερῶσα τὸ πρῖσμα διὰ μιᾶς τῶν ἑδρῶν του μὴ ἐξέρχεται ἐκ τῆς ἑτέρας ἕδρας.



Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ ἀναδυομένη ἀκτὶς Ι'Σ' ἐξέρχεται ὑπὸ γωνίαν διαθλάσεως, $\alpha_2 = 90^0$. Τότε ἡ γωνία β_2 εἶναι ἡ ὁρικὴ γωνία ἤτοι $\beta_2 = \beta_0$ καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ $\beta_1 = \beta_0$, ἕπεται ὅτι $\alpha_1 = 90^0$, ἤτοι ἡ γωνία προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος ΣΙ εἶναι 90^0.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ὅτι τυχοῦσα ἀκτὶς $\Sigma_1 I_1$ προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν $\alpha'_1 < 90^0$. Τότε $\beta'_1 < \beta_0$, ἤτοι $\beta'_1 < \beta_1$ καὶ ἐπειδὴ $A = \beta'_1 = \beta'_2$ ἕπεται ὅτι $\beta'_2 > \beta_2$ ἤτοι $\beta'_2 > \beta_0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πᾶσα ἀκτὶς ἡ ὁποία προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν μικροτέρων 90^0 ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν καὶ συνεπῶς ἵνα μὴ ἐξέρχεται ἡ ἀκτὶς ἐκ τῆς ἄλλης ἕδρας τοῦ πρίσματος πρέπει νὰ εἶναι

$$\underline{A = \beta_1 + \beta_2 \geqslant 2\beta_0.}$$

117. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαθλαστικὴ γωνία πρίσματος ἐκ πυριτυάλου δείκτου διαθλάσεως 1,75, ἵνα τὸ φῶς ἀνακλᾶται ὁλικῶς ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας αὐτοῦ.

Λύσις. Ἵνα πᾶσα ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ πρίσματος ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας αὐτοῦ πρέπει (βλ. Ἄσκησιν 116) νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$A > 2\beta_0 \tag{1}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\frac{A}{2} > \beta_0 \quad (2) \qquad \text{καθὼς καὶ} \qquad \eta\mu\,\frac{A}{2} > \eta\mu\,\beta_0 \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ὡς γνωστόν

$$\eta\mu\, \beta_o = \frac{1}{n} \qquad (4)$$

ὁπότε ἡ σχέσις (3), λόγῳ τῆς (4) γράφεται

$$\eta\mu \frac{A}{2} > \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν (4) $n = 1{,}75$ λαμβάνομεν

$$\eta\mu \frac{A}{2} > 0{,}57 \qquad (6)$$

Ἐξ οὗ εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

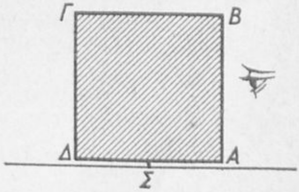
$$\underline{A > 69^0\, 42'}.$$

118. Ἐπὶ φύλλου σημειοῦται σημεῖον Σ καὶ τίθεται ἄνωθεν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ ἐγγίζῃ αὐτό, ὑάλινος κύβος δείκτου διαθλάσεως 1,5, ὅστις καλύπτει τὸ σημεῖον Σ. Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁρατὸν τὸ σημεῖον τοῦτο διὰ μέσου μιᾶς τῶν κατακορύφων ἑδρῶν τοῦ κύβου.

Λύσις. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἴδωμεν τὸ σημεῖον Σ μέσῳ μιᾶς κατακορύφου ἕδρας τοῦ κύβου, π.χ. τῆς AB, εἶναι ὡς νὰ βλέπωμεν τοῦτο μέσῳ τοῦ πρίσματος ΒΑΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει θλαστικὴν γωνίαν $A = 90^0$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\eta\mu\, \beta_o = \frac{1}{n}$, ἔχομεν $\eta\mu\, \beta_o = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}666$ καὶ $\beta_o = 42^0$ περίπου.

Ἄρα

$$A = 90^0 > 2\,\beta_o = 84^0$$



Συνεπῶς ἐπειδὴ $A > 2\beta_o$ ἕπεται ὅτι οὐδεμία ἀκτὶς ἐξέρχεται ἐκ τῆς κατακορύφου ἕδρας AB (βλ. σχῆμα) καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Σ δὲν εἶναι ὁρατόν.

Σημείωσις. Ἡ συνθήκη ἵνα οὐδεμία ἀκτὶς ἐξέρχεται τοῦ πρίσματος εἶναι

$$A \geqslant 2\beta_o$$

119. Πρίσμα τοῦ ὁποίου ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι 60^0 δίδει, διά τινα ἀκτῖνα μονοχρωματικοῦ φωτός, γωνίαν ἐλαχίστης ἐκτροπῆς 48^0. Ὑπολογίσατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ πρίσματος διὰ τὸ ἀνωτέρω μῆκος κύματος.

Λύσις. Λαμβάνομεν τοὺς τύπους τῶν πρισμάτων

$$n = \frac{\eta\mu\, \alpha}{\eta\mu\, \beta} = \frac{\eta\mu\, \delta}{\eta\mu\, \gamma} \qquad (1)$$

$$A = \beta + \gamma \qquad (2)$$

$$\varepsilon = \alpha + \delta - A \qquad (3)$$

Ἐφ' ὅσον τὸ πρῖσμα εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς θὰ εἶναι $\varepsilon = \varepsilon_{\varepsilon\lambda}$, $\alpha = \delta$ καὶ $\beta = \gamma$.

Συνεπῶς οἱ τύποι (2) καὶ (3) γράφονται ἀντιστοίχως

$$A = 2\,\beta \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad \varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 2\,\alpha - A \quad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) λοιπὸν ἔχομεν

$$\beta = \frac{A}{2} \quad (6) \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha = \frac{A + \varepsilon_{\varepsilon\lambda}}{2} \quad (7)$$

καὶ οὕτω ὁ τύπος (1) βάσει τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) δίδει

$$n = \frac{\eta\mu \dfrac{A + \varepsilon_{\varepsilon\lambda}}{2}}{\eta\mu \dfrac{A}{2}} \tag{8}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (8) $\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 48^0$, $A = 60^0$ καὶ εὑρίσκομεν

$$n = \frac{\eta\mu\, 54^0}{\eta\mu\, 30^0} = \frac{0{,}809}{0{,}500} \tag{9}$$

ἄρα

$$\underline{n = 1{,}62.}$$

120. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ δείκτου διαθλάσεως τῆς πυριτυάλου κατασκευάζομεν ἐξ αὐτῆς πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 45⁰. Προσδιορίζεται ἡ ἐλαχίστη ἐκτροπὴ καὶ εὑρίσκεται 25⁰. Πόσος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς πυριτυάλου διὰ τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτὸς μὲ τὸ ὁποῖον ἔγινεν ὁ πειραματισμός.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $\varepsilon_{\varepsilon\lambda}$ τὴν ἐλαχίστην γωνίαν ἐκτροπῆς, A τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν τοῦ πρίσματος, β καὶ γ τὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας ἐντὸς τοῦ πρίσματος, α τὴν γωνίαν προσπτώσεως καὶ δ τὴν γωνίαν ἀναδύσεως, τότε ὡς γνωστὸν θὰ ἰσχύουν οἱ τύποι

$$A = \beta + \gamma \tag{1}$$

$$\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = \alpha + \delta - A \tag{2}$$

Ὅταν ὅμως τὸ πρῖσμα εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης γωνίας ἐκτροπῆς, εἶναι $\alpha = \delta$ καὶ $\beta = \gamma$. Συνεπῶς οἱ τύποι (1) καὶ (2) γράφονται

$$A = 2\,\beta \tag{3}$$

$$\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 2\,\alpha - A \tag{4}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

$$\beta = \frac{A}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha = \frac{A + \varepsilon_{\varepsilon\lambda}}{2}$$

καὶ οὕτω ἐκ τοῦ τύπου τοῦ δείκτου διαθλάσεως

$$n = \frac{\eta\mu\ \alpha}{\eta\mu\ \beta} \tag{5}$$

λαμβάνομεν

$$n = \frac{\eta\mu \dfrac{A + \varepsilon_{\varepsilon\lambda}}{2}}{\eta\mu \dfrac{A}{2}} \tag{6}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6) $A = 45^0$, $\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 25^0$ καὶ εὑρίσκομεν

$$n = \frac{\eta\mu\ 35^0}{\eta\mu\ 22{,}5^0} \tag{7}$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$\underline{n = 1{,}5.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

121. Δέσμη ἀκτίνων φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 60°. Καθορίσατε τὰς διευθύνσεις τῆς ἀνακλωμένης καὶ τῆς διαθλωμένης ἀκτῖνος. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι 1,33. (Ἀπ. 60°, 40,6°.)

122. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος εἶναι $n = 2{,}42$. Ποία ἡ ὁρικὴ γωνία ὅταν τὸ φῶς εἰσχωρῇ ἐκ τοῦ ἀδάμαντος εἰς τὸν ἀέρα. (Ἀπ. 24,4°.)

123. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ γωνίαι διαθλάσεως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς γωνίας προσπτώσεως: 15°, 30°, 45°, 60°, 75° καὶ 90°, ἐπὶ ἐπιφανείας διαχωριζούσης ἀέρα καὶ ὕαλον. Νὰ γίνῃ γραφικὴ κατασκευὴ τῶν διαθλωμένων ἀκτίνων. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 1,5.
(Ἀπ. 9° 56', 19° 28', 28° 8', 35° 16', 40° 5', 41° 50'.)

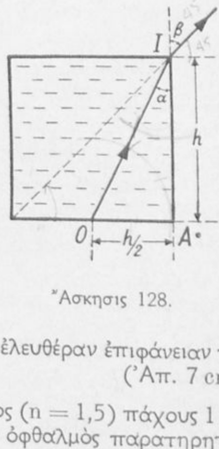
124. Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὴν ὕαλον, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι 1,5. (Ἀπ. $2 \cdot 10^{10}$ cm/sec.)

125. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόκλισις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑάλου καὶ ὑπὸ γωνίας προσπτώσεως: 15°, 30°, 45°, 60°, 75° καὶ 90°. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 1,5.
(Ἀπ. 5° 4', 10° 32', 16° 52', 24° 44', 34° 55', 48° 10'.)

126. Ποία ἡ ὁρικὴ γωνία διὰ τὴν περίπτωσιν ὁρικῆς ἐπιφανείας μεταξὺ πυριτυάλου ($n = 1{,}7$) καὶ ὕδατος ($n = 1{,}33$). (Ἀπ. 51° 40'.)

127. Φωτεινὴ ἀκτὶς εἰσέρχεται ἐντὸς διαθλαστικῆς σφαίρας, ἀνακλᾶται ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας καὶ ἐξέρχεται ἐκ τῆς πρώτης ὄψεως. Ποία συνθήκη πρέπει νὰ ὑφίσταται ἵνα ἡ ἀναδυομένη ἀκτὶς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν.
(Ἀπ. $\sqrt{2} < n < 2$.)

128. Εἰς τὸ κέντρον πυθμένος δοχείου μὲ σκιερὰ τοιχώματα, 25 cm διαμέτρου καὶ 25 cm ὕψους, τοποθετεῖται νόμισμα, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι ἀνάγεται εἰς σημεῖον. Ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ τοποθετεῖται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε αἱ ἀκτῖνες ὁράσεως, ἐφαπτόμεναι τοῦ ἀνωτέρου χείλους τοῦ δοχείου, νὰ καταλήγουν εἰς τὸ κατώτερον χεῖλος. Ποῖος ὁ ἐλάχιστος δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ ἐντὸς τοῦ δοχείου ἵνα ὁ ὀφθαλμὸς βλέπῃ τὸ νόμισμα. (Ἀπ. 1,58.)



Ἄσκησις 128.

129. Δεξαμενὴ ὕδατος ($n = 1{,}33$) ἔχει βάθος 1,83 m. Ποῖον τὸ φαινόμενον βάθος αὐτῆς ὅταν ὁρᾶται καθέτως μέσῳ τοῦ ἀέρος. (Ἀπ. 137,2 cm.)

130. Στρῶμα βενζίνης ($n = 1{,}50$) πάχους 6 cm ἐπιπλέει ὕδατος ($n = 1{,}33$) πάχους 4 cm. Καθορίσατε τὴν φαινομένην ἀπόστασιν τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τῆς βενζίνης, ὅταν οὗτος ὁρᾶται καθέτως μέσῳ τοῦ ἀέρος. (Ἀπ. 7 cm.)

131. Κάτοπτρον εἶναι κατασκευασμένον ἐξ ὑαλίνης πλακὸς ($n = 1{,}5$) πάχους 1 cm καὶ ἐπαργυρωμένης κατὰ τὴν ὀπισθίαν αὐτῆς ἐπιφάνειαν. Ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ ἀπέχει 50 cm ἀπὸ τὴν ἐμπροσθίαν ἐπιφάνειαν τοῦ κατόπτρου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ὄπισθεν τῆς ἐμπροσθίας ἐπιφανείας τοῦ κατόπτρου θὰ ἐμφανίζεται τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του. (Ἀπ. 51,33 cm.)

132. Εὐθεῖα ράβδος, μερικῶς βυθισμένη ἐντὸς ὕδατος ($n = 1,33$) φαίνεται ὅτι εἶναι κεκλιμένη 45^0 ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, ὅταν ὁρᾶται καθέτως ἐκ τῶν ἄνω. Ποία ἡ πραγματικὴ κλίσις τῆς ράβδου. (Ἀπ. 53^0.)

133. Δοχεῖον περιέχει ὕδωρ καὶ βενζόλιον. Τὸ στρῶμα ὕδατος πάχους 16 cm καλύπτεται ὑπὸ στρώματος βενζολίου πάχους 9 cm. Παρατηρητὴς προσβλέπει τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου κατὰ τὴν κατακόρυφον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν διακρίνει τὸν πυθμένα. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ βενζολίου εἶναι ἀντιστοίχως 1,33 καὶ 1,5. (Ἀπ. 18 cm.)

134. Σχεδιάσατε τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων φωτὸς τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ πλακὸς παραλλήλων ἑδρῶν ἐξ ὑάλου, πάχους 5 cm. Ἡ γωνία προσπτώσεως τῶν ἀκτίνων τοῦ φωτὸς εἶναι 60^0. Ὑπολογίσατε τὴν παράλληλον μετατόπισιν τῶν ἀκτίνων. (Διὰ τὴν ὕαλον $n = 1,5$.) (Ἀπ. 2,56 cm.)

135. Γλυκερίνη τίθεται εἰς ὑάλινον δοχεῖον μέχρις ὕψους 10 cm. Παρατηροῦντες κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς γλυκερίνης τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου φαίνεται ὅτι ὑψώνεται 3,2 cm. Εὕρατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς γλυκερίνης. (Ἀπ. 1,47.)

136. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράλληλος μετατόπισις τὴν ὁποίαν ἐπιφέρει ὑαλίνη πλὰξ (δείκτου διαθλάσεως 1,5) καὶ πάχους 5 cm εἰς φωτεινὴν ἀκτῖνα, διὰ γωνίας προσπτώσεως: 0^0, 30^0, 60^0, 90^0. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 0 cm, 0,95 cm, 2,6 cm, 5 cm.)

137. Ἀκτὶς φωτὸς προσπίπτει μέσῳ τοῦ ἀέρος ὑπὸ γωνίαν 30^0 ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑαλίνης πλακὸς πάχους 4 cm καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,523. Ἡ ἀναδυομένη ἐκ τῆς ὑάλου ἀκτὶς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προσπίπτουσαν καὶ μετατοπισμένη παραλλήλως ὡς πρὸς ταύτην. Ποῖον τὸ μέγεθος τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 0,796 cm.)

138. Ἐντὸς δοχείου τίθενται μέχρις ὕψους 16 cm ὕδωρ καὶ ἀκολούθως βενζόλιον στρώματος πάχους 12 cm. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας φαίνεται ὅτι εὑρίσκεται ὁ πυθμὴν τοῦ δοχείου. Δίδονται: Ἀπόλυτος δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος 1,33 καὶ τοῦ βενζολίου 1,5. (Ἀπ. 20 cm.)

139. Πῶμα ἐπίπεδον καὶ κυκλικὸν διαμέτρου 12 cm ἐπιπλέει ἐπὶ ὕδατος, δείκτου διαθλάσεως 1,33. Φέρει στέλεχος στερεωμένον κατακορύφως εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ καὶ πρὸς τὰ κάτω. Νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς τὸ τμῆμα αὐτοῦ τοῦ στελέχους τοῦ ὁρατοῦ διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ἀέρος. (Ἀπ. Ὁρατὸν μῆκος 5,3 cm.)

Ἄσκησις 140.

140. Λεκάνη ἔχουσα σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν ὀρθογώνιον τοποθετεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ κυρία ἐσωτερικὴ τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (βλ. σχῆμα) τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ = 10 cm καὶ τὸ ὕψος ΑΔ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ὑπὸ τοὺς ἀκολούθους ὅρους. Ὁ ὀφθαλμὸς Ο τοποθετεῖται εἰς τρόπον ὥστε τὸ διερχόμενον ἐπίπεδον διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ νὰ διέρχεται ὁμοίως καὶ ἀπὸ τὴν ἀντίθετον κορυφὴν Α. Τοῦ ὀφθαλμοῦ παραμένοντος ἀκινήτου εἰς τὴν θέσιν Ο, πληροῦται τὸ δοχεῖον ὕδατος, ὁπότε διακρίνει κατὰ τὴν προέκτα σιν τῆς εὐθείας ΟΓ φωτεινὸν σημεῖον Κ, τοποθετημένον εἰς τὸν πυθμένα τῆς λεκάνης καὶ εἰς ἀπόστασιν (ΑΚ) = 4 cm. Δίδεται ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα n = 1,33. (Ἀπ. ΑΔ = 8,82 cm.)

141. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πυθμένος δοχείου μὲ ἀδιαφανῆ τοιχώματα διαμέτρου 25 cm καὶ ὕψους 25 cm τοποθετεῖται νόμισμα τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι ἀνάγεται εἰς σημεῖον. Ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ τοποθετεῖται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ ἀνωτέρω χείλους (ἄκρον) τοῦ δοχείου καταλήγουν εἰς τὸ κατώτερον χεῖλος (ἄκρον). Μέχρι ποίου ὕψους πρέπει νὰ τεθῇ διθειάνθραξ ἐντὸς τοῦ δοχείου ἵνα ὁ ὀφθαλμὸς βλέπῃ τὸ νόμισμα. Δίδεται ὁ δείκτης διαθλάσεως διθειάνθρακος n = 1,66. (Ἀπ. 23,5 cm.)

142. Ποία ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ δείκτου διαθλάσεως πρίσματος, καθέτου τομῆς ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου (πρῖσμα ὁλικῆς ἀνακλάσεως), τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως δέσμης παραλλήλων ἀκτίνων κατόπιν ὁλικῆς ἀνακλάσεως κατὰ 90°. (Ἀπ. 1,414.)

143. Πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 46° ἐπιφέρει ἐλαχίστην ἐκτροπὴν 32° εἰς μονοχρωματικὴν δέσμην φωτός. Ὑπολογίσατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ πρίσματος διὰ τὴν ἀνωτέρω μονοχρωματικὴν δέσμην. (Ἀπ. 1,61.)

144. Ποία ἡ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ τὸ φῶς τὸ ὁποῖον διέρχεται μέσῳ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 60°. (Ἀπ. 51,8°.)

145. Ποία ἡ γωνία προσπτώσεως ἥτις δίδει ἐλαχίστην ἐκτροπὴν εἰς τὴν περίπτωσιν πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 60°. (Ἀπ. 55,9°.)

146. Ποία ἡ γωνία ἐκτροπῆς ὅταν φῶς προσπίπτῃ ὑπὸ γωνίαν 50° ἐπὶ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 60°, ἐκ πυριτυάλου. (Ἀπ. 52,7°.)

147. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα καθέτως ἐπὶ τῆς πρώτης ἕδρας πρίσματος, διαθλαστικῆς γωνίας Α, ἐξέρχεται ἐκ τῆς δευτέρας ὑπὸ γωνίαν δ. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος. (Ἀπ. n = ημ δ/ημ Α.)

148. Ἡ διαθλαστικὴ γωνία ὑαλίνου πρίσματος δείκτου διαθλάσεως 1,5 εἶναι 60°. Διὰ ποίαν γωνίαν προσπτώσεως ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας ἐξέρχεται τοῦ πρίσματος συμμετρικῶς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς διαθλαστικῆς γωνίας. (Ἀπ. 48° 35′.)

149. Ἡ κυρία τομὴ ὑαλίνου πρίσματος δείκτου διαθλάσεως 1,50 καὶ διαθλαστικῆς γωνίας 50° εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἀκτὶς φωτὸς προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ ἐξέρχεται ἐκ τῆς βάσεως καθέτως πρὸς αὐτήν. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς πορείας τῆς ἀκτῖνος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία προσπτώσεως ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἕδρας. (Ἀπ. 22° 50′.)

150. Ὑάλινον πρῖσμα δείκτου διαθλάσεως 1,7 ἔχει διαθλαστικὴν γωνίαν 60° Διὰ ποίας γωνίας προσπτώσεως δὲν εἶναι δυνατὴ περαιτέρω ἡ ἔξοδος φωτεινῆς ἀκτῖνος ἐκ τῆς δευτέρας ἕδρας τοῦ πρίσματος. (Ἀπ. $\alpha \leqslant 43°\,40'$.)

151. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ προσπέσῃ ἐπὶ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 60° καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,50 φωτεινὴ ἀκτίς, ἵνα ἡ γωνία ἐκτροπῆς εἶναι ἐλαχίστη. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἐκτροπῆς ταύτης. (Ἀπ. α′ 48° 35′, β′ 37° 10′.)

152. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 30° προσπίπτει καθέτως φωτεινὴ ἀκτίς. Ὄπισθεν τοῦ πρίσματος καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐξόδου τῆς ἀκτῖνος ἐκ τοῦ πρίσματος εὑρίσκεται κλῖμαξ παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην ἕδραν αὐτοῦ. Ἡ ἀπόκλισις τῆς ἀκτῖνος, μετρουμένη ἐπὶ τῆς κλίμακος εὑρίσκεται ἴση πρὸς 35 cm. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος διὰ τὸ χρησιμοποιηθὲν φῶς. (Ἀπ. 1,52.)

153. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 20^0 ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 30^0 καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,50. Ζητεῖται α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον ἐξόδου, ὡς καὶ ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ αὐτῆς. β) Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς ἐκτροπῆς συναρτήσει τῆς γωνίας προσπτώσεως διὰ διαφόρους τιμὰς διαφερούσας κατὰ 10^0.

(Ἀπ. α′ $25^0\,45'$, β′ $15^0\,45'$.)

154. Διὰ γωνιομέτρου προσδιορίζομεν εἰς πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 58^0 τὴν γωνίαν ἐλαχίστης ἐκτροπῆς τῆς ἀκτῖνος ἴσην πρὸς 48^0. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος διὰ τὸ χρησιμοποιηθὲν φῶς. (Ἀπ. 1,65.)

155. Ἡ διαθλαστικὴ γωνία ὀρθογωνίου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 60^0. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας καὶ εἰσδύουσα ἐντὸς αὐτοῦ ἀνακλᾶται ὁλικῶς ἐπὶ τῆς μικροτέρας καθέτου ἕδρας. Ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ τῆς ἀκτῖνος, μετὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ πρίσματος εἶναι 80^0. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος διὰ τὸ χρησιμοποιηθὲν φῶς. (Ἀπ. 1,53.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ′

156. Ἀκτὶς φωτός, μέσῳ τοῦ ἀέρος, προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 30^0. Πόση εἶναι ἡ γωνία διαθλάσεως. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.

157. Ὁ δείκτης διαθλάσεως ὡρισμένου τύπου ὑάλου εἶναι 1,52. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $3 \cdot 10^8$ m/sec, ὑπολογίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἰς τὴν ὕαλον.

158. Ποία ἡ ὁρικὴ γωνία ὅταν τὸ φῶς διέρχεται ἀπὸ τῆς ὑάλου εἰς τὸν ἀέρα. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,50.

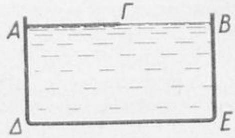
159. Οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος καὶ τῆς στεφανυάλου εἶναι 2,5 καὶ 1,5 ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε α) τὸν σχετικὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος ὡς πρὸς τὴν στεφανύαλον καὶ β) τὴν ὁρικὴν γωνίαν τοῦ ἀδάμαντος ὡς πρὸς τὴν ὕαλον.

160. Ἀκτὶς φωτός, μέσῳ τοῦ ὕδατος, προσπίπτει ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 30^0. Ποία ἡ γωνία διαθλάσεως εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ γωνία προσπτώσεως ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὅταν ἡ γωνία διαθλάσεως εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 90^0. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. Ποία ἡ ὁρικὴ γωνία διὰ τὸ ὕδωρ.

161. Ἀβαθὲς δοχεῖον μὲ ἐπίπεδον ὑάλινον πυθμένα περιέχει διθειάνθρακα. Ἀκτὶς φωτός, ἐκ τοῦ ἀέρος, προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ διθειάνθρακος ὑπὸ γωνίαν 45^0. Ἐὰν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,517, εὕρατε τὴν γωνίαν διαθλάσεως τοῦ φωτὸς ἐντὸς τῆς ὑάλου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.

162. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ δείκτου διαθλάσεως n καὶ τῆς γωνίας προσπτώσεως α ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε τὴν ὁποίαν ὑφίσταται φωτεινὴ ἀκτὶς διερχομένη ὑπὸ μικρὰν γωνίαν προσπτώσεως ἀπὸ μέσου ὀλιγώτερον θλαστικοῦ εἰς μέσον περισσότερον θλαστικόν. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : $n = 1,33$, $\alpha = 3^0$.

163. Ἐντὸς δοχείου μὲ σκιερὰς πλευρὰς τίθεται ὑγρὸν τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν δείκτην διαθλάσεως. Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἐπιπλέει ἐπίπεδος δίσκος λεπτός, κυκλικός, ἀκτῖνος 10 cm διαπερώμενος εἰς τὸ κέντρον του ἀπὸ κατακόρυφον βελόνην (βλ. Ἄσκησιν 105). Διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ ἄκρον Σ τῆς βελόνης αὐτῆς παύει νὰ εἶναι ὁρατὸν διὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δοχείου ὅταν τὸ μῆκος (ΟΣ), τὸ βυθιζόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, εἶναι μικρότερον ἀπὸ 8,8 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ.



164. Δοχεῖον ὀρθογώνιον ὁριζοντίου πυθμένος καὶ μὲ σκιερὰ τοιχώματα εἶναι πλῆρες μέχρι τοῦ ὕψους (ΔΑ)=5,29 cm, μὲ ὑγρὸν τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλάσεως ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 1,33. Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον μῆκος (ΑΓ) τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καλυφθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, οὕτως ὥστε ἡ ἀκμὴ Δ νὰ μὴ εἶναι ὁρατὴ λόγῳ τοῦ φαινομένου τῆς διαθλάσεως.

165. Μεγάλη καὶ παχεῖα ὑαλίνη πλάξ, δείκτου διαθλάσεως 1,650, ἔχει μικρὰν ἀέριον φυσαλίδα ὀλίγον κάτωθεν τῆς ἄνω ἐπιφανείας της. Ἕνα νόμισμα, διαμέτρου 1,75 cm, τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας τῆς ὑάλου. Τὸ μέγεθος τοῦ νομίσματος εἶναι ἀκριβῶς τοιοῦτον ὥστε νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ βλέπωμεν τὴν ἀέριον φυσαλίδα μέσῳ τῆς ἄνω ἐπιφανείας. Ποία ἡ ἀπόστασις τῆς φυσαλίδος ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας.

166. Μικροσκόπιον μὲ μικρομετρικὸν κοχλίαν προσαρμόζεται ὥστε νὰ εἶναι ὁρατοὶ εὐκρινῶς κόκκοι κόνεως εὑρισκόμενοι ἐπὶ τῆς ἀντικειμενοφόρου πλακός. Τίθεται τότε ἐπὶ τῆς ἀντικειμενοφόρου λεπτὴ ὑαλίνη πλὰξ μὲ παραλλήλους ἕδρας. Ἵνα γίνῃ ὁρατὴ εὐκρινῶς ἡ κόνις πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ τὸ μικροσκόπιον κατὰ 0,666 mm. Παρατηρεῖται ἐν συνεχείᾳ ἡ ἄνω ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς αὐτῆς καὶ πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ ἀνυψωθῇ τὸ μικροσκόπιον κατὰ 1,334 mm. Πόσον τὸ πάχος τῆς πλακὸς καὶ πόσος ὁ δείκτης διαθλάσεως αὐτῆς.

167. Εἰς τὸ μέσον τῆς ἄνω ἐπιφανείας ὑαλίνου κύβου ἀκμῆς 2α καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,658 προσπίπτει φωτεινὴ ἀκτὶς ὑπὸ γωνίαν 56^{0}. Τὸ ἐπίπεδον προσπτώσεως εἶναι παράλληλον πρὸς μίαν πλευρικὴν ἕδραν τοῦ κύβου. α) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς πορείας τῆς ἀκτῖνος. β) Εἰς ποῖον ὕψος h ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως συναντᾷ ἡ ἀκτὶς τὴν πλευρικὴν ἕδραν. γ) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως. Ποία ἡ ἐκτροπὴ τῆς ἀκτῖνος μετὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ κύβου.

168. Ἀκτὶς φωτὸς εἰσχωρεῖ ἐκ τοῦ ἀέρος ἐντὸς ὡρισμένου ὑλικοῦ μέσου, ἀκολούθως ἐντὸς δευτέρου μέσου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐξέρχεται πάλιν εἰς τὸν ἀέρα. Αἱ διαχωριστικαὶ ἐπιφάνειαι τῶν μέσων εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ἡ γωνία προσπτώσεως τυχοῦσα. Ποίαν γωνίαν σχηματίζει ἡ ἐκ τοῦ δευτέρου μέσου εἰς τὸν ἀέρα ἐξερχομένη ἀκτὶς μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου.

169. Στρῶμα διθειάνθρακος ($n_1 = 1{,}51$) ἐπιπλέει ἐπὶ στρώματος ὕδατος ($n_2 = 1{,}33$), τοῦτο δὲ ἐπὶ στρώματος βενζόλης ($n_3 = 1{,}64$). Τὸ πάχος ἑκάστου τῶν τριῶν στρωμάτων εἶναι ἀνὰ 1 cm. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τοῦ πρώτου στρώματος ὑπὸ γωνίαν 60^{0}. α) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς καθέτου εἰς τὰ σημεῖα προσπτώσεως αὐτῆς ἐπὶ τῶν διαδοχικῶν στρωμάτων καὶ νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς πορείας τῆς ἀκτῖνος. β) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ὁριζόντιον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου προσπτώσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ στρώματος ἐκ διθειάνθρακος συναντᾷ αὕτη τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τοῦ στρώματος τῆς βενζόλης.

170. Λεκάνη ἐκ λευκοσιδήρου ἔχει ὕψος α, πλάτος β καὶ μῆκος γ. Παρατηρητής, θέτει τὸν ὀφθαλμόν του ἀκριβῶς ὑπεράνω τοῦ ἀνωτέρω χείλους τῆς λεκάνης, μήκους δ, καὶ παρατηρεῖ καθέτως πρὸς αὐτὸ τὸ ἔναντι τοίχωμα τῆς λεκάνης ὑπὸ γωνίαν 30^0 πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Μέχρι ποίου ὕψους πρέπει νὰ πληρωθῇ ἡ λεκάνη δι' ὕδατος ($n = 1,33$), ἵνα ὁ παραμένων ἀκίνητος εἰς τὴν προηγουμένην θέσιν ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ἴδῃ τὴν ἀντικειμένην ἀκμὴν τοῦ πυθμένος (μήκους γ).

171. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ δείκτου διαθλάσεως τοῦ διθειάνθρακος βυθίζεται ἐντὸς αὐτοῦ καρφίτσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας εἶναι στερεωμένος δίσκος ἀκτῖνος 6 cm. Τοποθετεῖται ὁ ὀφθαλμὸς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διαχωρισμοῦ ἀὴρ-διθειάνθραξ. Προσδιορίζεται τὸ ὕψος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δοθῇ εἰς τὴν καρφίτσαν ἵνα μὴ τὴν βλέπῃ πλέον ὁ παρατηρητής, εὑρίσκεται δὲ τοῦτο ἴσον πρὸς 8 cm. Πόσος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ διθειάνθρακος.

172. Κύβος ὑάλινος, δείκτου διαθλάσεως n, στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίας καὶ ἀδιαφανοῦς ἐπιφανείας. Ἐπὶ τῆς κατωτέρας βάσεως αὐτοῦ τίθεται σταγὼν ἐλαίου, ἥτις παρατηρεῖται διὰ μέσου τῆς κατακορύφου ἕδρας τοῦ κύβου τῆς εὑρισκομένης πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος ἀπὸ τὴν φωτιζομένην. Διὰ βαθμιαίας κλίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐκ τῆς κατακορύφου εἰς τὴν ὁριζόντιον, καθίσταται ἡ σταγὼν αἰφνιδίως λίαν φωτεινή. Μετρᾶται ἡ γωνία α τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς μετὰ τῆς κατακορύφου. Ζητεῖται ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου. Ἐφαρμογή : $n = 1,6$, $\alpha = 60^0$.

173. Ἀκτὶς φωτὸς ὑφίσταται ἀπόκλισιν $1^0\,52'$ διερχομένη διὰ πρίσματος γωνίας διαθλάσεως 3^0. Εὕρατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ τοῦ πρίσματος.

174. Μονοχρωματικὴ ἀκτὶς φωτὸς πίπτει ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 45^0 ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ πρίσματος. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος ἵνα ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒ, πόση ἡ γωνία ἐξόδου ἐκ τοῦ πρίσματος. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος 1,66.

175. Δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων μονοχρωματικοῦ φωτὸς πίπτει ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος δείκτου διαθλάσεως $n = \sqrt{2}$ καὶ διαθλαστικῆς γωνίας $A = 60^0$. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: α) γωνία προσπτώσεως $\alpha = 45^0$, β) $\alpha = 90^0$. 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία προσπτώσεως ἵνα ἡ γωνία ἀναδύσεως $\delta = 90^0$ καὶ 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία α ἵνα ἡ ἐκτροπὴ εἶναι ἐλαχίστη.

176. Πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 60^0 ἀποτελεῖται ἐξ οὐσίας δείκτου διαθλάσεως $n = \sqrt{2}$. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ προσπίπτει ἀκτὶς ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 45^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκτροπὴ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη γωνία προσπτώσεως ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὴ ἡ ἔξοδος τῆς ἀκτῖνος ἐκ τοῦ πρίσματος.

177. Πρῖσμα τοῦ ὁποίου ἡ κυρία τομὴ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, περιορίζεται ἀπὸ λεπτὰς ὑαλίνους πλάκας καὶ περιέχει ἀέρα, εἶναι δὲ βυθισμένον ἐντὸς ὕδατος δείκτου διαθλάσεως 1,33. Πόση ἡ ἐκτροπὴ τὴν ὁποίαν ὑφίσταται φωτεινὴ ἀκτὶς ἥτις διέρχεται τὸ πρῖσμα παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.

178. Πρῖσμα Α ἐκ πυριτυάλου τοῦ ὁποίου ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι 25^0 καὶ ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι 1,5 καὶ ἕτερον πρῖσμα Β ἐκ στεφανυάλου μὲ διαθλαστικὴν γωνίαν 25^0 καὶ δείκτην διαθλάσεως 1,66 εἶναι συνηνωμένα εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἀκμαὶ αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 30^0 ἐπὶ τοῦ πρίσματος Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ γωνία ἐξόδου καὶ ἡ ἐκτροπή.

179. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 90^0 περίπου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ πρίσματος. Ἐξέρχεται δὲ ἐκ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ὑπὸ γωνίαν ἀναδύσεως δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{n^2 - 1} = \dfrac{\text{συν}\,A + \text{ημ}\,\delta}{\text{ημ}\,A}$, ὅπου A καὶ n παριστοῦν ἀντιστοίχως τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν καὶ τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ πρίσματος.

180. Δύο ὀρθογώνια πρίσματα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν εἰς τὸ A, διατίθενται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε φωτεινὴ ἀκτὶς πίπτουσα καθέτως ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB τοῦ πρώτου πρίσματος ἐξέρχεται καθέτως ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB τοῦ δευτέρου πρίσματος. Πόση ἡ ἐκτροπὴ τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ φωτεινὴ ἀκτίς.

181. Εἰς ὑάλινον ὀρθογώνιον τριγωνικὸν πρῖσμα δείκτου διαθλάσεως 1,50 ἡ μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 75^0. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει καθέτως πρὸς τὴν μικροτέραν κάθετον ἕδραν τοῦ πρίσματος. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία μεταξὺ τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου.

182. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 60^0 ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 50^0 καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,50. Ἐν ἐπαφῇ μετὰ τούτου εὑρίσκεται ἓν δεύτερον πρῖσμα, δείκτου διαθλάσεως 1,60, τοῦ ὁποίου ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὴν βάσιν τοῦ πρώτου. Ἡ ἀκτὶς εἰσερχομένη ἐντὸς τοῦ πρίσματος τούτου ὑφίσταται ἐλαχίστην ἐκτροπήν. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ δευτέρου πρίσματος, β) ἡ γωνία μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου, γ) ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ τῆς ἀκτῖνος.

183. Ὀρθογώνιον πρῖσμα ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως $n = 1{,}620$ καὶ διαθλαστικῆς γωνίας 10^0 συνενοῦται μετὰ πλακὸς μὲ παραλλήλους ἕδρας κατὰ τρόπον ὥστε μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας τοῦ πρίσματος καὶ τῆς πλακὸς νὰ παραμείνῃ κενὸς χῶρος σχήματος σφηνός. Ἡ πλὰξ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν κάθετον ἕδραν τοῦ πρίσματος. Ποίαν ἐκτροπὴν ὑφίσταται φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα καθέτως ἐπὶ τῆς πλακός, ἐὰν ὁ σφηνοειδὴς χῶρος μεταξὺ πρίσματος καὶ πλακὸς εἶναι πλήρης ἀέρος ἢ ἐὰν εἶναι πλήρης ἐλαίου, δείκτου διαθλάσεως 1,6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΦΑΚΟΙ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

184. Συγκλίνων φακὸς ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἀκτῖνος καμπυλότητος 20 cm καὶ κοίλην ἐπιφάνειαν ἀκτῖνος καμπυλότητος 40 cm. Ὑπολογίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ τούτου, ἐὰν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,54.

Λύσις. Εἰς τοὺς συγκλίνοντας φακοὺς ἰσχύει ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

ὅπου f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, n ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ φακοῦ ὡς πρὸς τὸ περιβάλλον μέσον καὶ R_1, R_2 αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ φακοῦ.

Ὅταν ὁ φακὸς ἔχῃ καὶ τὰς δύο ἐπιφανείας κυρτάς, λαμβάνομεν τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος R_1, R_2 ἀμφοτέρας θετικάς, ἐνῷ ὅταν ὁ φακὸς ἔχῃ καὶ τὰς δύο ἐπιφανείας κοίλας, τὰς λαμβάνομεν ἀρνητικάς. Ἤτοι πάντοτε θεωροῦμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὴν ἀκτῖνα κυρτῆς ἐπιφανείας θετικὴν καὶ τὴν ἀκτῖνα κοίλης ἐπιφανείας ἀρνητικήν.

Εἰς τοὺς συγκλίνοντας μηνίσκους ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἔχει μικροτέραν ἀκτῖνα καμπυλότητος ἀπὸ τὴν κοίλην, δηλαδὴ ἐὰν R_1 εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς καὶ R_2 ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κοίλης, θὰ εἶναι $R_1 < R_2$ καὶ $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (1) δίδει

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0 \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $R_1 = 20\,\text{cm}$, $R_2 = 40\,\text{cm}$, $n = 1{,}54$ καὶ εὑρίσκομεν

$$f = +\ 74{,}1\ \text{cm}.$$

185. Ἐπιπεδόκοιλος φακὸς ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς σφαιρικῆς του ἐπιφανείας 12 cm καὶ ἑστιακὴν ἀπόστασιν −22,2 cm. Ὑπολογίσατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῶν κατασκευαστῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

ὅπου f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις καὶ R_1, R_2 αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ φακοῦ. Ἐπειδὴ ἡ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτῆς θὰ εἶναι ἄπειρος καὶ θέτομεν $R_1 = \infty$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ἄλλη ἐπιφάνεια εἶναι κοίλη, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτῆς θὰ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ θέτομεν $R_2 = -R$. Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{R}\right) \qquad (2)$$

Λύομεν ἀκολούθως τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς n, ὁπότε προκύπτει

$$n = \frac{f-R}{f} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $f = -22{,}2\,\text{cm}$, $R = 12\,\text{cm}$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (3) ὅτι

$$n = 1{,}54.$$

186. Ἰσχὺς φακοῦ P=5 διοπτρίαι (m^{-1}) νὰ μετατραπῇ εἰς τὸ σύστημα C. G. S. (cm^{-1}).

Λύσις. Ἔχομεν $P = 5\ m^{-1} = \frac{5}{1\ m} = \frac{5}{100\,\text{cm}}$

ἢ

$$P = +0{,}05\ \text{cm}^{-1}$$

187. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς συγκλίνοντος φακοῦ ἐκ στεφανυάλου, δείκτου διαθλάσεως 1,5, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι 25 cm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R_1 καὶ R_2 τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τοῦ φακοῦ καὶ n τὸν δείκτην διαθλάσεως, τότε, ὡς γνωστόν, ἡ ἰσχὺς P τοῦ φακοῦ, ἥτις εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως, δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$P = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $R_1 = R_2 = R$ ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται

$$P = (n-1) \cdot \frac{2}{R} \qquad (2)$$

Οὕτω διὰ $R = 25$ cm $= 0,25$ m καὶ $n = 1,5$ εὑρίσκομεν

$$P = +4\,m^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

188. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀμφικύρτου φακοῦ, δείκτου διαθλάσεως 1,50 καὶ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm, εἶναι 15 cm. Πόση ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R_1, R_2 τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τοῦ φακοῦ, n τὸν δείκτην διαθλάσεως καὶ f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

ἢ

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} \qquad (2)$$

καὶ

$$\frac{n-1}{R_2} = \frac{1}{f} - \frac{n-1}{R_1} = \frac{R_1 - f \cdot (n-1)}{f \cdot R_1} \qquad (3)$$

$$R_2 = \frac{(n-1) \cdot f \cdot R_1}{R_1 - f\,(n-1)} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4): $R_1 = 15$ cm, $n = 1,5$, $f = 10$ cm εὑρίσκομεν

$$R_2 = 7,5 \text{ cm.}$$

189. Ἀμφίκυρτος φακὸς ἐξ ὑάλου, δείκτου διαθλάσεως ὡς πρὸς τὸν ἀέρα 3/2, ἔχει ἀκτῖνας καμπυλότητος 40 cm. Ζητεῖται ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ὅταν οὗτος περιβάλλεται ὑπὸ ὕδατος. Δείκτης διαθλάσεως ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα 4/3.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. Καλοῦμεν n_2 τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, n_1 τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα καὶ $n_{\frac{1}{2}}$ τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν φακῶν ἔχομεν

$$\frac{1}{f} = (n_{\frac{1}{2}} - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

ἐπειδὴ

$$n_{\frac{1}{2}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{καὶ} \qquad R_1 = R_2 = R,$$

θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \frac{2}{R} \quad \text{καὶ} \quad f = \frac{R}{2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)} \qquad (2)$$

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν σχέσιν (2) $n_2 = 3/2$, $n_1 = 4/3$ καὶ $R = 40$ cm, εὑρίσκομεν

$$f = +160 \text{ cm.}$$

190. Ὑάλινος φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ὑπολογίσατε τὴν ἑστιακήν του ἀπόστασιν εἰς τὸ ὕδωρ. Δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου 3/2, τοῦ ὕδατος 4/3.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν n_2, n_1 τοὺς ἀπολύτους δείκτας διαθλάσεως ἀντιστοίχως τῆς ὑάλου καὶ τοῦ ὕδατος καὶ $n\frac{1}{2}$ τὸν σχετικὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ. Θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$n\tfrac{1}{2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

Ἐὰν συνεπῶς ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον τῶν κατασκευαστῶν φακῶν διὰ τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ φακὸς εἶναι εἰς τὸν ἀέρα (δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἀέρος 1), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)$$

καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ φακὸς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{fx} = \left(n\tfrac{1}{2} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (3)$$

Διαιροῦμεν τοὺς τύπους (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{fx}{f} = \frac{n_2 - 1}{n\frac{1}{2} - 1} \qquad (4)$$

ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν

$$\frac{fx}{f} = \frac{n_2 - 1}{\frac{n_2}{n_1} - 1} = \frac{n_1(n_2 - 1)}{n_2 - n_1} \qquad (5)$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἑστιακὴν ἀπόστασιν fx προκύπτει

$$\underline{fx = f\cdot\frac{n_1\cdot(n_2 - 1)}{n_2 - n_1}} \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6) $f = 10\,\text{cm}$, $n_2 = 3/2$, $n_1 = 4/3$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{fx = +\,40\,\text{cm}.}$$

191. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἔμπροσθεν φακοῦ ἰσχύος −5 διοπτριῶν.

Λύσις. Θὰ ἰσχύσουν ὡς γνωστὸν οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = P \quad (1) \qquad\qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha\cdot P - 1}$$

καὶ θέτοντες $\alpha = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}$, $P = -5\,\text{m}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -\,0{,}15\ \text{m} = -\,15\ \text{cm}.}$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ ὀρθόν, εὑρισκόμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἀντικειμένου εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τὸν φακόν.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγέθους τοῦ εἰδώλου θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $\beta = 15$ cm, $\alpha = 60$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$E = \frac{1}{4} \cdot A$$

Ἄρα τὸ μέγεθος (ὕψος) τοῦ εἰδώλου εἶναι τὸ 1/4 τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου.

192. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος (αἱ ἰδιότητες) τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ἀντικείμενον εὑρισκόμενον 60 cm ἔμπροσθεν φακοῦ συγκεντρωτικοῦ, ἰσχύος 5 διοπτριῶν.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ, β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου, P τὴν ἰσχὺν τοῦ φακοῦ, A τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου καὶ E τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου, τότε ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύσουν οἱ τύποι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = P \qquad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha \cdot P - 1}\ .$$

καὶ διὰ $\alpha = 60$ cm $= 0,6$ m καὶ $P = 5\ \text{m}^{-1}$ εὑρίσκομεν

$$\beta = +0,3\ \text{m} = +30\ \text{cm}\,.$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ὄπισθεν τοῦ φακοῦ.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγέθους τοῦ εἰδώλου θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $\alpha = 60$ cm καὶ $\beta = 30$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$E = \frac{1}{2} \cdot A$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον ἔχει μῆκος τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τοῦ ἀντικειμένου.

193. Περιγράψατε πλήρως τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου τινός, ὕψους 10 cm, τὸ ὁποῖον τίθεται 28 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 7 cm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακόν, A καὶ E τὰ ὕψη ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου, ἐφ' ὅσον ὁ φακὸς εἶναι ἀποκλίνων, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f} \qquad (1) \qquad\qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (2)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = -\frac{\alpha \cdot f}{\alpha + f} \qquad (3)$$

Οὕτω διὰ $\alpha = 28$ cm, $f = 7$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta = -5,6\ \text{cm}\,.$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν, ὀρθὸν καὶ σχηματίζεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀντικειμένου εἰς ἀπόστασιν 5,6 cm ἀπὸ τὸν φακόν.

Ἐπίσης ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς E καὶ θέσωμεν $A = 10$ cm, $\beta = 5,6$ cm, $\alpha = 28$ cm, εὑρίσκομεν

$$E = 2\ \text{cm}.$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου καὶ ἔχει ὕψος 2 cm.

194. Φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως f προβάλλει ἐπὶ ὀθόνης τὸ εἴδωλον ἑνὸς φωτεινοῦ ἀντικειμένου μεγεθυσμένον Μ φοράς. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὴν ὀθόνην εἶναι f· (M + 1).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν l τὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ ἀπὸ τὴν ὀθόνην, εἶναι φανερὸν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἡ ἀπόστασις β τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν φακόν. Συνεπῶς οἱ τύποι $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$ καὶ $M = \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$ τῶν συγκλινόντων φακῶν γίνονται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad M = \frac{E}{A} = \frac{l}{\alpha} \quad (2)$$

Λύοντες τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς α λαμβάνομεν $\alpha = l/M$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) προκύπτει

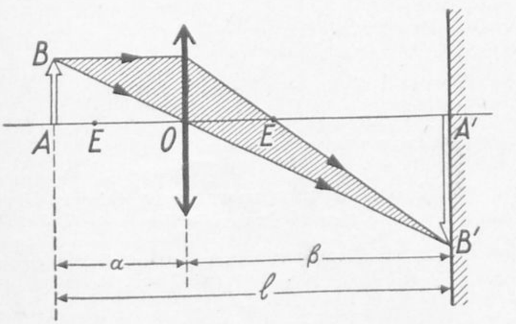
$$\frac{M+1}{l} = \frac{1}{f} \qquad (3)$$

Ἐν συνεχείᾳ λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς l καὶ εὑρίσκομεν

$$l = f \cdot (M+1).$$

195. Ἐπὶ διαφράγματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 54 cm ἀπὸ φωτεινῆς πηγῆς θέλει τις νὰ σχηματίσῃ διὰ συγκλίνοντος φακοῦ τὸ εἴδωλον τῆς πηγῆς αὐτῆς κατὰ δύο φορὰς μεγαλύτερον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ τούτου καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις του.

Λύσις. Ἔστω α ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς, β ἡ ἀπόστασις τοῦ διαφράγματος (εἰδώλου) ἀπὸ τοῦ φακοῦ καὶ l ἡ ἀπόστασις τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀπὸ τοῦ διαφράγματος. Οὕτω θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις



$$\alpha + \beta = l \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν τύπων τῶν φακῶν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \; (2) \quad \text{καὶ} \quad M = \frac{\beta}{\alpha} \; (3)$$

καὶ ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν τύπον (1) προκύπτει ὁ τύπος

$$f = \frac{M \cdot l}{M^2 + 2M + 1} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $M = 2$ καὶ $l = 54$ cm, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ θὰ εἶναι

$$f = 12 \text{ cm}.$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (3) προκύπτει

$$\alpha = \frac{f \cdot (M+1)}{M}$$

Διὰ $f = 12$ cm καὶ $M = 2$ εὑρίσκομεν

$$\alpha = 18 \text{ cm}.$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $\alpha = 18$ cm καὶ $l = 54$ cm, εὑρίσκομεν

$$\beta = 36 \text{ cm}.$$

196. Ὑπολογίσατε α) τὴν θέσιν καὶ β) τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν συγκλίνοντος φακοῦ διὰ τοῦ ὁποίου γίνεται προβολὴ τῆς εἰκόνος λαμπτῆρος, μεγεθυσμένη κατὰ 4 φορὰς ἐπὶ διαφράγματος τοποθετουμένου 10 m ἀπὸ τοῦ λαμπτῆρος.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ὁ φακὸς τοποθετεῖται εἰς τὴ θέσιν Ο καὶ εἰς ἀπόστασιν (ΑΟ) ἀπὸ τοῦ λαμπτῆρος καὶ ὅτι ὁ λαμπτὴρ ἀπέχει ἀπὸ τὸ διάφραγμα ἀπόστασιν (ΑΑ′) = l (βλ. σχῆμα Ἀσκήσεως 195).
Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον προβάλλεται ἐπὶ τοῦ πετάσματος θὰ εἶναι πραγματικὸν καὶ θὰ ἔχωμεν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος, (ΟΑ) = α, (ΟΑ′) = β = $l - \alpha$.

Συνεπῶς ὁ τύπος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$ τῶν συγκλινόντων φακῶν γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{l-\alpha} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Ε = 4Α, ὁ τύπος $\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$ τῆς μεγεθύνσεως δίδει

$$4 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{l-\alpha}{\alpha} \tag{2}$$

α) Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς α, λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = \frac{l}{5}} \tag{3}$$

καὶ διὰ l = 10 m εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 2\text{ m}.}$$

Ἤτοι ὁ φακὸς ἀπέχει ἀπὸ τὸν λαμπτῆρα ἀπόστασιν α = 2 m .

β) Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς f λαμβάνομεν

$$\underline{f = \frac{\alpha(l-\alpha)}{l}} \tag{4}$$

καὶ διὰ α = 2 m καὶ l = 10 m, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι

$$\underline{f = 1{,}6\text{ m}.}$$

197. Φακὸς προβολέως ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 m, σχηματίζει τὸ εἴδωλον σχισμῆς διαστάσεων 2 cm × 3 cm ἐπὶ ὀθόνης εὑρισκομένης 30 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ὑπολογίσατε τὰς διαστάσεις τοῦ εἰδώλου.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν διατύπωσιν τῆς ἀσκήσεως, τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ ἀπέχει ἀπόστασιν β = 30 m ἀπὸ τὸν φακόν. Οὕτω ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\beta \cdot f}{\beta - f} \tag{2}$$

καὶ διὰ β = 30 m, f = 1 m εὑρίσκομεν

$$\alpha = \frac{30}{29}\text{ m} \tag{3}$$

Ἀκολούθως ἐκ τοῦ τύπου τῆς γραμμικῆς μεγεθύνσεως

$$M = \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{4}$$

ἐὰν θέσωμεν $\alpha = 30/29$ m, $\beta = 30$ m, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις εἶναι

$$\underline{M = 29.}$$

Συνεπῶς αἱ διαστάσεις τοῦ εἰδώλου τῆς σχισμῆς θὰ εἶναι $(2\cdot 29)$ cm $\times$ $(3\cdot 29)$ cm, ἤτοι

$$\underline{58 \text{ cm} \times 87 \text{ cm}}$$

198. Πίναξ ἐμβαδοῦ 1 m² τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ ὅστις σχηματίζει εἴδωλον πραγματικὸν ἐμβαδοῦ 1 m² τοῦ πίνακος. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ θὰ πρέπῃ νὰ τοποθετηθῇ ὁ πίναξ οὗτος ἵνα σχηματισθῇ εἴδωλον πραγματικὸν ἐμβαδοῦ 9 m².

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον ἔχει τὸ αὐτὸ μέγεθος πρὸς τὸ ἀντικείμενον, ἕπεται ὅτι τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 2f ἀπὸ τὸν φακόν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$2\,f = 2 \text{ m} \quad \text{ἢ} \quad f = 1 \text{ m} \tag{1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐπιφανειακῆς μεγεθύνσεως

$$\frac{S_E}{S_A} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \tag{2}$$

ἐὰν θέσωμεν $S_A = 1\text{ m}^2$ καὶ $S_E = 9\text{ m}^2$ λαμβάνομεν

$$\beta = 3\alpha \tag{3}$$

Θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}\right)$

ἔχομεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = \frac{1}{f} \quad \text{ἢ} \quad \frac{4}{3\alpha} = \frac{1}{f} \tag{4}$$

Λύομεν ἀκολούθως ὡς πρὸς α, ὅτε λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{4}{3}\,f \tag{5}$$

καὶ διὰ $f = 1$ m εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 1{,}33 \text{ m}\,.}$$

199. Ὁ λόγος $f_1 : f_2$ τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων δύο ἀμφικύρτων φακῶν εἶναι 1 : 8. Εἰς ἀπόστασιν $10f_2$ ἐξ ἑκάστου φακοῦ τοποθετεῖται ἀνὰ ἓν ἀντικείμενον. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν σχηματιζομένων εἰδώλων.

Λύσις. Ἔστω α_1, β_1 αἱ ἀποστάσεις ἀντιστοίχως τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ πρώτου φακοῦ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{f_1} \tag{1}$$

Ἔστω ἐπίσης α_2, β_2 αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν δεύτερον φακόν. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{f_2} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \cdot f_1}{\alpha_1 - f_1} \tag{3}$$

καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2 \cdot f_2}{\alpha_2 - f_2} \tag{4}$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (4) ὁπότε προκύπτει

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 \cdot f_1 \cdot (\alpha_2 - f_2)}{\alpha_2 \cdot f_2 \cdot (\alpha_1 - f_1)} \tag{5}$$

Οὕτω διὰ $\alpha_1 = \alpha_2 = 10\, f_2$ λαμβάνομεν

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{10\, f_2 \cdot f_1 \cdot (10\, f_2 - f_2)}{10\, f_2 \cdot f_2 \cdot (10\, f_2 - f_1)} = \frac{9\, f_1}{10\, f_2 - f_1} \tag{6}$$

καὶ διὰ $f_1 / f_2 = 1/8$ ἢ $f_2 = 8\, f_1$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{9}{79}}$$

200. Ἐπὶ ἀμφικοίλου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm προσπίπτει φωτεινὴ δέσμη, συγκλίνουσα πρὸς σημεῖον κείμενον ὄπισθεν τοῦ φακοῦ, ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπ' αὐτοῦ. Ποία ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων μετὰ τὴν δίοδον διὰ τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Τὸ σημεῖον Σ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, ὁπότε ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν (ΣΟ), τὸ εἴδωλον τοῦ Σ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸν φακὸν ἀπόστασιν β, ἥτις πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἀπὸ τὸν τύπον

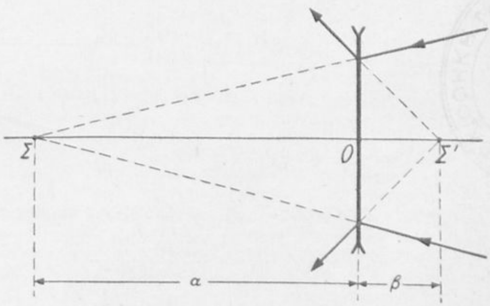
$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f}$$

Οὕτω ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = \frac{f \cdot \alpha}{f - \alpha}}$$

καὶ διὰ $f = 20$ cm, $\alpha = 100$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -25 \text{ cm.}}$$



Τὸ ἀποτέλεσμα –25 cm σημαίνει ὅτι τὸ εἴδωλον Σ' εἶναι φανταστικόν, ἑπομένως θὰ εὑρίσκεται πρὸ τοῦ φακοῦ (ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα) καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπ' αὐτόν. Ἄρα αἱ ἀκτῖνες θὰ φαίνωνται ὡς προερχόμεναι ἐκ τοῦ Σ'.

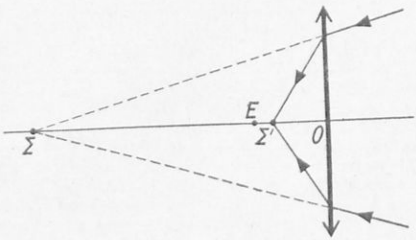
201. Ἐπὶ ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm προσπίπτει φωτεινὴ δέσμη, συγκλίνουσα πρὸς σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς ἀπόστασιν 60 cm ὄπισθεν τοῦ φακοῦ. Ποῦ συγκλίνει ἡ δέσμη μετὰ τὴν δίοδον διὰ τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, τὸ σημεῖον Σ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{f \cdot \alpha}{f + \alpha}$$



καὶ διὰ $f = 15$ cm καὶ $\alpha = 60$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta = +\ 12\,\text{cm}.$$

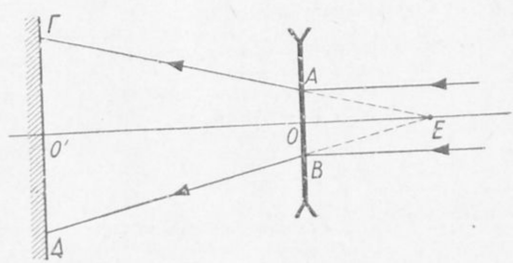
Ἄρα τὸ σημεῖον συγκλίσεως τῆς δέσμης εὑρίσκεται εἰς τὸ Σ', εἰς ἀπόστασιν 12 cm ὄπισθεν τοῦ φακοῦ.

202. Κυλινδρικὴ φωτεινὴ δέσμη, ὡρισμένης διαμέτρου, προσπίπτει ἐπὶ ἀμφικοίλου φακοῦ παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ. Εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 16 cm ἀπ' αὐτοῦ, τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα διάφραγμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχηματίζεται φωτεινὸς κύκλος διαμέτρου τριπλασίας τῆς φωτεινῆς δέσμης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΓΔΕ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{(OE)}{(O'E)} = \frac{f}{(O'E)}$$

ἐξ οὗ $\quad f = (O'E) \cdot \dfrac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}$



Ἐπειδὴ ὅμως $\dfrac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \dfrac{1}{3}$

λαμβάνομεν

$$f = \frac{1}{3}\,(O'E)$$

Θέτοντες ἀκολούθως $(O'E) = (OO') + f$ λαμβάνομεν

$$f = \frac{(OO')}{3} + \frac{f}{3} \qquad ἢ \qquad f = \frac{(OO')}{2}$$

καὶ διὰ $(OO') = 16$ cm εὑρίσκομεν

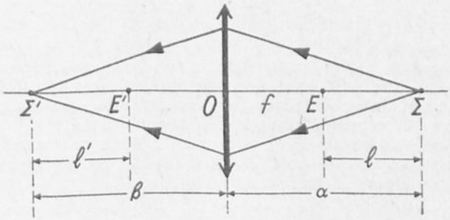
$$f = 8\ \text{cm}.$$

203. Συγκλίνων φακὸς πλησιάζει πρὸς φωτεινὸν σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος αὐτοῦ, ὁπότε παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἀπόστασις ἡ ὁποία χωρίζει τὸ φωτεινὸν σημεῖον ἀπὸ τὸ πραγματικόν του εἴδωλον διέρχεται ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς 80 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν l καὶ l' ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὰς ἑστίας Ε καὶ Ε' τοῦ φακοῦ. Ἐπίσης α καὶ β τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ καὶ f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν. Θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = f + l \quad (1) \qquad καὶ \qquad \beta = f + l' \quad (2)$$

Ἑπομένως ὁ τύπος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$ τῶν συγκλινόντων φακῶν γράφεται ὡς ἀκολούθως



$$\frac{1}{f + l} + \frac{1}{f + l'} = \frac{1}{f} \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις ἔχομεν

$$f^2 = l \cdot l' \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $l \cdot l'$ εἶναι σταθερὸν καὶ συνεπῶς ἵνα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ἤτοι τὸ $l + l'$, εἶναι ἐλάχιστον, πρέπει νὰ εἶναι $l = l'$ καὶ οὕτω βάσει τῆς σχέσεως (4) λαμβάνομεν καὶ $f = l$.

Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις μεταξὺ Σ καὶ Σ'

$$(\Sigma\Sigma') = 2f + l + l'$$

γίνεται

$$(\Sigma\Sigma') = 2f + 2l = 4f \qquad (5)$$

Λύοντες ἀκολούθως τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς f λαμβάνομεν

$$f = \frac{(\Sigma\Sigma')}{4} \qquad (6)$$

καὶ διὰ $(\Sigma\Sigma') = 80\ \mathrm{cm} = 0{,}8\ \mathrm{m}$ εὑρίσκομεν

$$f = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

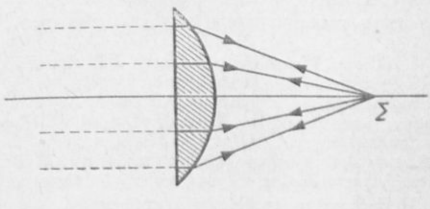
Ἄρα ἡ ἰσχὺς P τοῦ φακοῦ θὰ εἶναι

$$P = \frac{1}{f} = 5\ \mathrm{m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

204. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ εἶναι ἐπαργυρωμένη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ, δεδομένου ὅτι φωτεινὸν σημεῖον, τιθέμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τὸν φακὸν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, δίδει εἴδωλον συμπῖπτον μὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον.

Λύσις. Ἵνα τὸ εἴδωλον σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ πρέπει αἱ ἀκτῖνες νὰ ἐπιστρέψουν εἰς τὸ Σ, διὰ τοῦ ἰδίου δρόμου, ἀνακλώμεναι ἐπὶ τῆς ἐπαργυρωμένης ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ. Συνεπῶς αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν καθέτως ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπαργυρωμένης ἐπιφανείας. Ἄν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη δὲν ἦτο ἐπαργυρωμένη θὰ ἐξήρχοντο αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες ἄνευ ἐκτροπῆς καὶ θὰ ἦσαν παράλληλοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει μόνον ἂν τὸ φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἑστίας τοῦ φακοῦ.

Ἄρα ἡ ἀπόστασις 50 cm τοῦ φωτεινοῦ σημείου εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ καὶ ἡ ζητουμένη ἰσχὺς θὰ εἶναι



$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\ \mathrm{cm}} = 0{,}02\ \mathrm{cm}^{-1}$$

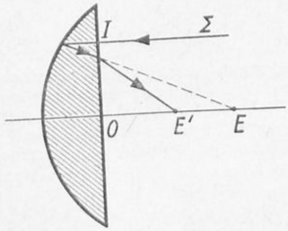
ἤτοι

$$P = 2\ \mathrm{m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

205. Ἐπιπεδόκυρτος φακὸς ἔχει ἐπαργυρωμένην τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἴδωλον ἑνὸς λίαν μικροῦ βέλους τὸ ὁποῖον τοποθετεῖται

καθέτως ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτὸν α = 80 cm. Δίδεται ἀκτὶς καμπυλότητος κυρτῆς ἐπιφανείας R = 50 cm καὶ δείκτης διαθλάσεως n = 1,5.

Λύσις. Ἔστω ἡ ἀκτὶς ΣΙ προσπίπτουσα καθέτως ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Ἐὰν ἔμπροσθεν τῆς ἐπαργυρωμένης ἐπιφανείας δὲν ὑπῆρχεν ὕαλος, ἡ ἀκτὶς θὰ ἀνεκλᾶτο καὶ θὰ ἔτεμνε τὸν κύριον ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ε τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο ἡ ἑστία τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της, ἡ ἀκτὶς διαθλᾶται ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας καὶ τέμνει τὸν κύριον ἄξονα εἰς ἕτερον σημεῖον Ε'.



Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι προφανῶς ἡ ἑστία τοῦ συστήματος κατόπτρου-ὑάλου καὶ ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (βλ. Ἄσκησιν 100)

$$(\mathrm{OE'}) = \frac{(\mathrm{OE})}{n} \quad \text{ἢ} \quad f' = \frac{f}{n} \tag{1}$$

ὅπου n ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου.

Ὥστε τὸ σύστημα συμπεριφέρεται ὡς κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f' = f/n$, ὅπου f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κοίλου κατόπτρου, ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ὕαλος. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{n}{f} \tag{2}$$

Λύοντες ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha \cdot n - f} \tag{3}$$

καὶ ἐπειδὴ $f = R/2$ (ὅπου R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας), ἔχομεν

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot R}{2\alpha \cdot n - R}} \tag{4}$$

καὶ διὰ $\alpha = 80$ cm, $R = 50$ cm καὶ $n = 1{,}5$ εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = +\ 44{,}4 \text{ cm.}}$$

Ἄρα τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον καὶ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 44,4 cm ἔμπροσθεν τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

206. Φακὸς ἐπιπεδόκυρτος εἶναι ἐπαργυρωμένος κατὰ τὴν ἐπίπεδον αὐτοῦ ἕδραν, καὶ τοποθετεῖται πρὸ αὐτοῦ μικρὸν εὐθύγραμμον φωτεινὸν ἀντικείμενον, καθέτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ καὶ ὕψους 1 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ, μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ πάχους τοῦ φακοῦ. Ἐφαρμογή: Ἀκτὶς καμπυλότητος φακοῦ 15 cm, δείκτης διαθλάσεως ὑάλου φακοῦ 1,5, ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν 50 cm.

Λύσις. Ἔστω τυχοῦσα ἀκτὶς ΣΙ, προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ φακοῦ παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ. Αὐτὴ ὑφίσταται διάθλασιν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀκολούθως ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ἐπαργυρωμένης ἐπιφανείας ΑΒ καὶ ἀφοῦ τελικῶς ὑποστῇ νέαν διάθλασιν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τέμνει τὸν κύριον ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ε. Παρατηροῦμεν δηλαδή, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ὡς προσπίπτουσαι παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, τελικῶς διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου Ε καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα συμπεριφέρεται ὡς κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = (\mathrm{EO})$. Διὰ τὴν λύσιν συνεπῶς τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν (ΕΟ).

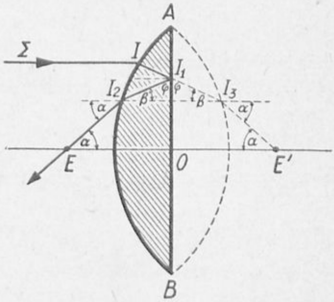
Πρὸς τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ΑΒ δὲν εἶναι ἐπαργυρωμένη καὶ ὅτι ὁ φακὸς εἶναι ἀμφίκυρτος μὲ δύο ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀκτὶς θὰ ἠκολούθει τὴν πορείαν $\Sigma I I_1 I_3 E'$ καὶ θὰ ἔτεμνε τὸν κύριον ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ε', τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν ΑΒ. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἑστιακὴ ἀπόστασις θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ τούτου. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν φακὸν εἶναι $\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \frac{2}{R}$ θὰ ἔχωμεν

$$f = \frac{R}{2 \cdot (n-1)}$$

ὅπου R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν.

Οὕτω διὰ $n = 1{,}5$ καὶ $R = 15$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος (ἐπαργυρωμένος φακὸς) εἶναι

$$f = 15 \text{ cm}.$$



Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ἐξ ὧν $\quad \beta = \dfrac{\alpha \cdot f}{\alpha - f} \quad (1) \quad$ καὶ $\quad E = A \cdot \dfrac{\beta}{\alpha} \quad (2)$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἐὰν θέσωμεν $\alpha = 50$ cm καὶ $f = 15$ cm, εὑρίσκομεν

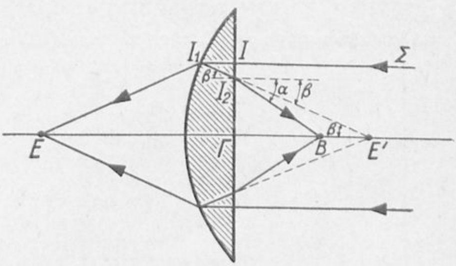
$$\underline{\beta = +\,42 \text{ cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{E = 0{,}84 \text{ cm}.}$$

Ἤτοι τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον, μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου καὶ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 42 cm ἔμπροσθεν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

207. Ἔστω ἐπιπεδόκυρτος φακὸς λεπτοῦ πάχους, ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου προσπίπτει δέσμη παραλλήλων φωτεινῶν ἀκτίνων. Ἀποδεικνύεται πειραματικῶς ὅτι πλὴν τῆς γνωστῆς λαμπρᾶς κηλῖδος εἰς τὴν ἑστίαν E τοῦ φακοῦ, ἐμφανίζεται καὶ ἑτέρα κατὰ πολὺ ἀσθενεστέρας ἐντάσεως φωτεινὴ κηλίς, εἰς τὸ σημεῖον B, καὶ τοῦτο ἐξ αἰτίας τῆς ἀνακλάσεως τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ. Δίδεται ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις $f = 50$ cm καὶ ἡ ἀπόστασις (ΒΓ) = 10 cm. Ζητοῦνται ὁ δείκτης διαθλάσεως n καὶ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος R τοῦ φακοῦ.

(Ε.Μ.Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ἔστω ἡ τυχοῦσα ἀκτὶς ΣΙ τῆς παραλλήλου φωτεινῆς δέσμης. Αὕτη ἐὰν ὑποστῇ διάθλασιν ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας θὰ διέλθῃ διὰ τῆς ἑστίας E τοῦ φακοῦ, ἐὰν δὲ ὑποστῇ ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ἰδίας ἐπιφανείας καὶ ἐν συνεχείᾳ διάθλασιν, ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου B τοῦ κυρίου ἄξονος.



Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $I_2ΓE'$ καὶ $I_2ΓB$ ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$(ΓI_2) = (ΓE') \cdot \text{εφ}\,\beta \qquad (1)$$

καὶ

$$(ΓI_2) = (ΓB) \cdot \text{εφ}\,\alpha \qquad (2)$$

ὁπότε διὰ συνδυασμοῦ αὐτῶν λαμβάνομεν

$$(ΓE') \cdot \text{εφ}\,\beta = (ΓB) \cdot \text{εφ}\,\alpha$$

καὶ

$$(ΓE') = (ΓB) \cdot \frac{\text{εφ}\,\alpha}{\text{εφ}\,\beta} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ φακὸς εἶναι λεπτός, αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι μικραὶ καὶ δυνάμεθα ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν νὰ λάβωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ οὕτω ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$(ΓE') = (ΓB) \cdot \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{ημ}\,\beta} \qquad (4)$$

Ἀλλὰ ημ α / ημ β = n, (ὅπου n ὁ δείκτης διαθλάσεως), καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$(ΓE') = (ΓB) \cdot n \qquad \text{καὶ} \qquad n = \frac{(ΓE')}{(ΓB)} \qquad (5)$$

Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος ἡ ἀπόστασις (ΓΕ′) εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου ἀνακλᾶται ἡ ἀκτὶς (ΣΙ), καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι

$$(\Gamma E') = \frac{R}{2} \tag{6}$$

ὅπου R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Ἐξ ἄλλου ἐὰν f εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\frac{1}{R} \tag{7}$$

ὁπότε, βάσει τῶν σχέσεων (6) καὶ (7), ἡ σχέσις (5) γράφεται

$$n = \frac{R}{2\cdot(\Gamma B)} = \frac{f\cdot(n-1)}{2\,(\Gamma B)} \tag{8}$$

καὶ λύοντες ὡς πρὸς n λαμβάνομεν

$$\underline{n = \frac{f}{f - 2\cdot(\Gamma B)}} \tag{9}$$

Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τὴν (9) $f = 50$ cm καὶ $(\Gamma B) = 10$ cm εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 1{,}67}$$

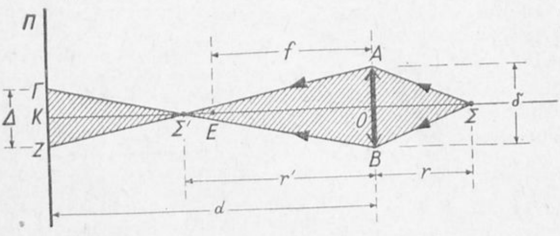
Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως (8) εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 33{,}5 \text{ cm.}}$$

208. Φακὸς συγκλίνων ἔχει διάμετρον 5 cm καὶ ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm. Ὄπισθεν αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm, τοποθετεῖται γαλακτόχρουν ἡμιδιαφανὲς διάφραγμα Π. Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ κινεῖται φωτεινὸν σημεῖον Σ, τὸ εἴδωλον τοῦ ὁποίου σχηματίζει φωτεινὴν κηλῖδα διαμέτρου Δ ἐπὶ τοῦ διαφράγματος Π. Ζητεῖται ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς διαμέτρου Δ τῆς φωτεινῆς κηλῖδος, συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως r τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ, μεταξὺ r = ∞ καὶ r = 0.

(Ε.Μ.Πολυτεχνεῖον.Σχολὴ Μηχανολόγων-Ἠλεκτρολόγων.Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Δ τὴν διάμετρον (ΓΖ) τῆς φωτεινῆς κηλῖδος ἐπὶ τοῦ διαφράγματος Π, καὶ δ τὴν διάμετρον (ΑΒ) τοῦ φακοῦ, τότε ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΖΣ′ καὶ ΑΒΣ′ θὰ ἔχωμεν



$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{(K\Sigma')}{(O\Sigma')}$$

$$\text{ἐξ οὗ: } \Delta = \delta\cdot\frac{(K\Sigma')}{(O\Sigma')} \tag{1}$$

Ἔστω τώρα $(OK) = d$ καὶ $(O\Sigma') = r'$. Θὰ ἔχωμεν

$$(K\Sigma') = d - r'$$

καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) γράφεται

$$\Delta = \delta\cdot\frac{d - r'}{r'} \tag{2}$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} \qquad (\text{ἔνθα } (O\Sigma) = r)$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς r′ λαμβάνομεν

$$r' = \frac{r \cdot f}{r - f} \tag{3}$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) δίδει

$$\Delta = \delta \cdot \left(\frac{d}{f} - \frac{d}{r} - 1\right) \tag{4}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) ἐὰν θέσωμεν

$r = \infty$ εὑρίσκομεν $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{d}{f} - 1\right)$

$r = 6f$ » $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{5d}{6f} - 1\right)$

$r = 4f$ » $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{3d}{4f} - 1\right)$

$r = 3f$ » $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{2d}{3f} - 1\right)$

$r = \frac{5f}{2}$ » $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{3d}{5f} - 1\right)$

$r = 2f$ εὑρίσκομεν : $\Delta = \delta \cdot \left(\frac{d}{2f} - 1\right)$

$r = f$ » $\Delta = -\delta$

$r = \frac{f}{2}$ » $\Delta = \delta\left(-\frac{d}{f} - 1\right)$

$r = 0$ » $\Delta = -\infty$

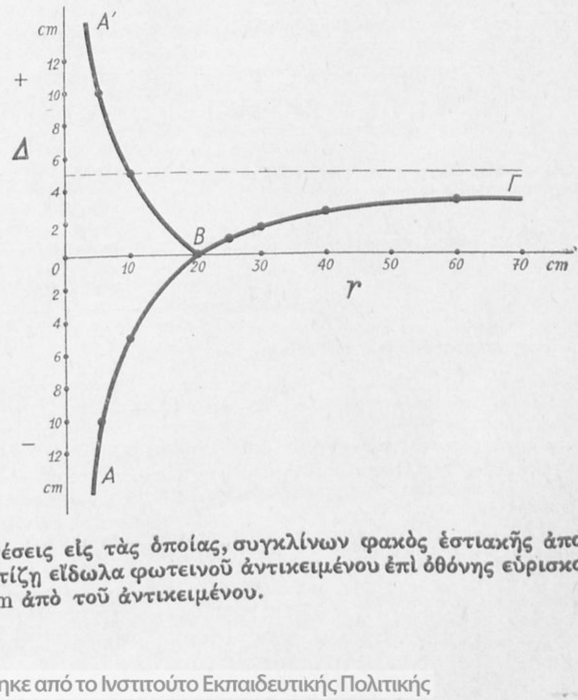
καὶ διὰ $\delta = 5$ cm, $d = 20$ cm, $f = 10$ cm, λαμβάνομεν τὸν κάτωθι πίνακα

r_{cm}	∞	60	40	30	25	20	10	5	0
Δ_{cm}	5	3,33	2,5	1,65	1	0	–5	–10	$-\infty$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν λαμβάνομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς διαμέτρου Δ τῆς φωτεινῆς κηλῖδος, συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως r τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ καμπύλη ΑΒΓ.

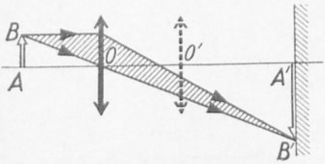
Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς διάμετρον Δ ὅταν τὸ εἴδωλον Σ′ εἶναι φανταστικόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐπέρχεται ἀντιστροφὴ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν φωτεινὴν κηλῖδα.

Ἐὰν ὅμως ἀρκεσθῶμεν εἰς τὰς ἀπολύτους τιμὰς τοῦ Δ, λαμβάνομεν ἀντὶ τῆς ΑΒΓ τὴν καμπύλην Α′ΒΓ.



209. Ποῖαι αἱ δύο θέσεις εἰς τὰς ὁποίας, συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 7,5 cm, θὰ σχηματίζῃ εἴδωλα φωτεινοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ ὀθόνης εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ συγκλίνων φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον (Α'Β') ἐπὶ τῆς ὀθόνης, ἕπεται ὅτι τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ ὁ φακὸς τοποθετεῖται μεταξὺ τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου (ΑΒ) καὶ τῆς ὀθόνης εἴς τινα θέσιν Ο, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον ἀπόστασιν (ΟΑ).



Ἐὰν θέσωμεν (ΟΑ) = α, (ΑΑ') = δ, καὶ (ΟΑ' = β), τότε προκύπτει ὅτι $\beta = \delta - \alpha$.

Συνεπῶς ὁ τύπος τῶν συγκλινόντων φακῶν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta - \alpha} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Ἐὰν ἀκολούθως ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$\alpha^2 - \delta \cdot \alpha + \delta \cdot f = 0 \tag{2}$$

Ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = \frac{\delta}{2} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\delta . f}}{2}} \tag{3}$$

Διερεύνησις. Ἡ διακρίνουσα $\delta^2 - 4\,\delta \cdot f$, δύναται νὰ εἶναι : α) $\delta^2 - 4\,\delta \cdot f < 0$, β) $\delta^2 - 4\,\delta \cdot f = 0$, γ) $\delta^2 - 4\,\delta \cdot f > 0$·

Α') Εἰς τὴν περίπτωσιν (α), ὁπότε $\delta < 4\,f$, οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν ἔχει ὁ ἄγνωστος α καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει οὐδεμία θέσις τοῦ φακοῦ.

Β') Εἰς τὴν περίπτωσιν (β), ὁπότε $\delta = 4\,f$, ὑπάρχει μία τιμὴ καὶ αὕτη εἶναι

$$\alpha = \frac{\delta}{2}$$

ἤτοι ὁ φακὸς τοποθετεῖται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δ καὶ ἐπειδὴ συμβαίνει νὰ εἶναι καὶ $\beta = \delta/2$, ἕπεται ὅτι $E = A$.

Γ') Εἰς τὴν περίπτωσιν (γ), ὁπότε $\delta > 4\,f$, ὑπάρχουν δύο τιμαὶ τοῦ α θετικαὶ καὶ αὗται εἶναι

$$\alpha_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\,\delta \cdot f}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2 = \frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\,\delta \cdot f}}{2}$$

ἤτοι, ὁ φακὸς δύναται νὰ τοποθετηθῇ εἰς δύο θέσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δ.

Ὅταν ὁ φακὸς τοποθετηθῇ εἰς τὴν ἀπόστασιν $\alpha_1 = \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\sqrt{\delta^2 - 4\,\delta \cdot f}}{2}$, τότε ἔχομεν

$$\beta_1 = \delta - \alpha_1 = \frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\delta \cdot f}}{2}$$

καὶ ὅταν τοποθετηθῇ εἰς ἀπόστασιν α_2, τότε ἔχομεν

$$\beta_2 = \delta - \alpha_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4\delta \cdot f}}{2}$$

Ἤτοι συνάγομεν ὅτι: $\alpha_1 = \beta_2$ καὶ $\alpha_2 = \beta_1$.

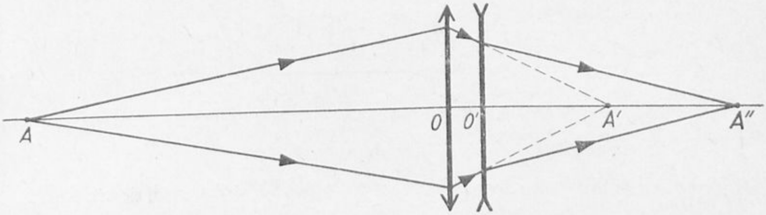
Ἐπειδὴ $\alpha_1 > \beta_1$ ἕπεται ὅτι διὰ τὴν θέσιν ταύτην τοῦ φακοῦ τὴν ἀπωτέραν πρὸς τὸ ἀντικείμενον εἶναι $E < A$ (σμίκρυνσις) καὶ ἐπειδὴ $\alpha_2 < \beta_2$ ἕπεται ὅτι, διὰ τὴν πλησιεστέραν θέσιν τοῦ φακοῦ εἶναι $E > A$ (μεγέθυνσις).

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Εἰς τὴν ἄσκησίν μας ἔχει δοθῇ $\delta = 40\,\text{cm} > 4\,f = 4 \cdot 7{,}5\,\text{cm}$ καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (3) δύο τιμὰς

$$\underline{\alpha_1 = 30\ \text{cm}} \cdot \quad \text{καὶ} \quad \underline{\alpha_2 = 10\ \text{cm}} \cdot$$

210. Δύο φακοὶ ἑστιακῶν ἀποστάσεων $+ 6$ cm καὶ -10 cm ἀντιστοίχως, ἀπέχουν κατὰ 1,5 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου ἑνὸς πολὺ μικροῦ ἀντικειμένου εὑρισκομένου 30 cm πρὸ τοῦ φακοῦ τῶν $+6$ cm ἑστιακῆς ἀποστάσεως.

Λύσις. Πρὸς λύσιν τῆς συνθέτου ταύτης ἀσκήσεως ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁ ἀποκλίνων φακός. Ἔστω α ἡ ἀπόστασις τοῦ μικροῦ ἀντικειμένου Α ἀπὸ τὸν συγκλίνοντα φακὸν Ο,



καὶ β ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου Α' τὸ ὁποῖον θὰ ἔδιδε ὁ φακὸς οὗτος ἐὰν δὲν ὑπῆρχε ὁ ἀποκλίνων φακὸς Ο'. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f} \quad (2)$$

ὁπότε διὰ $\alpha = 30$ cm καὶ $f = 6$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta = +\ 7{,}5 \text{ cm}.$$

Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος $\beta = +\ 7{,}5$ cm προκύπτει ὅτι ὁ φακὸς Ο δίδει εἴδωλον πραγματικὸν εἰς ἀπόστασιν 7,5 cm (ἐὰν ἐννοεῖται δὲν ὑπάρχῃ ἀποκλίνων φακός). Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο Α', τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης μικρόν, ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

Τὸ πραγματικὸν τοῦτο εἴδωλον πρέπει νὰ παίξῃ ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν. Ὅταν ὅμως τοποθετήσωμεν τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, προφανῶς τὸ Α' δὲν σχηματίζεται καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον.

Ἐπειδὴ τὸ ἀντικείμενον Α' εἶναι φανταστικόν, ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν θὰ εἶναι ἀρνητική, ἔστω α', καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις β' τοῦ εἰδώλου του Α'' θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$-\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = -\frac{1}{f'} \qquad (3)$$

ὅπου f' εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ.

Οὕτω λύοντες ὡς πρὸς β' λαμβάνομεν

$$\underline{\beta' = \frac{\alpha' \cdot f'}{\alpha' + f'}} \qquad (4)$$

καὶ διὰ $\alpha' = (\text{OA}') - (\text{OO}') = 6$ cm, $f' = -\ 10$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta' = +\ 15 \text{ cm}.}$$

Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τούτου, $\beta' = +\ 15$ cm, προκύπτει ὅτι τὸ εἴδωλον Α'', τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀποκλίνων φακός, εἶναι πραγματικὸν καὶ ὀρθόν, εὑρίσκεται δὲ πρὸς τὸ μέρος τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν 15 cm. Τοποθετοῦμεν τὸ τελικὸν τοῦτο εἴδωλον Α'' ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὴν πραγματικὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

211. Προτιθέμεθα νὰ προβάλωμεν τὸ εἴδωλον φωτεινοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ πετάσματος, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου, διὰ χρησιμοποιήσεως λεπτοῦ φακοῦ. Πόση εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἔχῃ ὁ φακός. Πόση εἶναι ἡ μεγέθυνσις ἡ λαμβανομένη κατὰ τὴν ὁρικὴν αὐτὴν περίπτωσιν.

Λύσις. Ἡ θέσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ καθορίζουν τὸν σχηματισμὸν τοῦ εἰδώλου ἐπὶ τοῦ πετάσματος.

Ἔστω ὅτι ὁ φακὸς ἀπέχει ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\delta - x} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$x = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\,\delta\,f}}{2} \qquad (2)$$

1) Ἐὰν ἡ διακρίνουσα $\delta^2 - 4\,\delta\,f < 0$, τότε $f > \frac{\delta}{4}$, καὶ δὲν ὑπάρχει λύσις καθ' ὅσον ἔχομεν φανταστικὰς τιμὰς τοῦ x.

2) $\delta^2 - 4\,\delta\,f > 0$, τότε $f < \frac{\delta}{4}$, καὶ δύναται ὁ φακὸς νὰ τοποθετηθῇ εἰς δύο θέσεις.

3) $\delta^2 - 4\,\delta\,f = 0$, τότε $f = \frac{\delta}{4}$. Εἶναι φανερὸν ὅτι αὐτη εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ f.

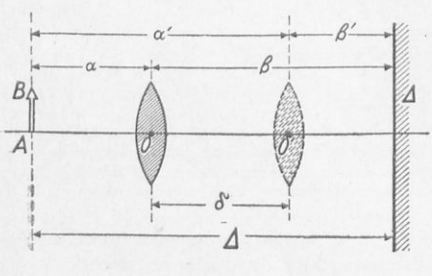
Κατὰ τὴν ὁρικὴν ταύτην περίπτωσιν, ὅταν δηλ. $f = \frac{\delta}{4}$, ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι $x = \frac{\delta}{2}$, ἐφ' ὅσον ἡ διακρίνουσα εἶναι μηδέν.

Ἄρα $\alpha = \frac{\delta}{2} = 1\,\mathrm{m}$ καὶ $\beta = 1\,\mathrm{m}$, ἡ δὲ μεγέθυνσις εἶναι

$$M = \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

212. Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν Δ ἀπὸ πετάσματος. Συγκλίνων φακὸς τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων συμπίπτει μὲ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ ἀντικειμένου πρὸς τὸ πέτασμα, δίδει ἐπὶ τοῦ πετάσματος εὐκρινὲς εἴδωλον τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου εἰς δύο θέσεις ἀπεχούσας μεταξύ των κατὰ δ. Ποία ἡ σχέσις ἥτις δίδει τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν f συναρτήσει τῶν Δ καὶ δ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : Δ = 2,5 m, δ = 50 cm.

Λύσις. Α' Μέθοδος. Ἐὰν ὁ φακὸς ἔχῃ τοποθετηθῇ εἰς τὴν θέσιν Ο, θὰ ἔχωμεν βάσει τοῦ σχήματος



$$\beta = \Delta - \alpha \qquad (1)$$

καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τῶν συγκλινόντων φακῶν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

γράφεται

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\Delta - \alpha} = \frac{1}{f} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta}{\alpha\,(\Delta - \alpha)} = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἐὰν ὁ φακὸς ἔχῃ τοποθετηθῇ εἰς τὴν θέσιν Ο' θὰ ἔχωμεν

$$\beta' = \Delta - \alpha' \quad (3) \qquad \text{καὶ} \quad \alpha' = \alpha + \delta \quad (4)$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$\beta' = \Delta - \alpha - \delta \qquad (5)$$

Συνεπῶς διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ τύπος $\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{f}$ γράφεται

$$\frac{1}{\alpha+\delta}+\frac{1}{\Delta-\alpha-\delta}=\frac{1}{f} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta}{(\alpha+\delta)\,(\Delta-\alpha-\delta)}=\frac{1}{f} \tag{6}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (6) συνάγομεν ὅτι

$$\alpha\cdot(\Delta-\alpha)=(\alpha+\delta)\,(\Delta-\alpha-\delta) \tag{7}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (7) ὡς πρὸς α καὶ λαμβάνομεν

$$\alpha=\frac{\Delta-\delta}{2} \quad \text{καὶ βάσει τῆς (1)} \quad \beta=\frac{\Delta+\delta}{2} \tag{8}$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν

$$\beta'=\frac{\Delta-\delta}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha'=\frac{\Delta+\delta}{2} \tag{9}$$

Ἄρα $\alpha=\beta'$ καὶ $\beta=\alpha'$.

Ἐὰν θέσωμεν τώρα τὴν τιμὴν $\alpha=\dfrac{\Delta-\delta}{2}$ εἰς τὴν (2) καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς f, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\underline{f=\frac{\Delta^2-\delta^2}{4\Delta}} \quad \text{(Τύπος τοῦ Bessel)} \tag{10}$$

Συνεπῶς διὰ $\Delta=250$ cm, $\delta=50$ cm, λαμβάνομεν

$$\underline{f=60 \text{ cm.}}$$

Β' Μέθοδος. Ἔστω ὅτι τοποθετοῦμεν τὸν φακὸν εἴς τινα θέσιν Ο καὶ ἐπιτυγχάνομεν εὐκρινῆ προβολὴν τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τοῦ πετάσματος. Τότε $\beta=\Delta-\alpha$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τῶν συγκλινόντων φακῶν $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{f}$ γίνεται

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\Delta-\alpha}=\frac{1}{f} \tag{1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων λαμβάνομεν

$$\alpha^2-\Delta\cdot\alpha-\Delta\cdot f=0 \tag{2}$$

Λύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς α καὶ εὑρίσκομεν

$$\alpha=\frac{\Delta}{2}\pm\frac{\sqrt{\Delta^2-4\Delta f}}{2} \tag{3}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) συνάγομεν ὅτι:

1) Ἐὰν ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta^2-4\Delta f<0$, τότε $\Delta<4f$, καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ α εἶναι φανταστικαί, συνεπῶς δὲ οὐδεμία θέσις ὑπάρχει διὰ τὸν φακὸν πρὸς προβολὴν τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τοῦ πετάσματος.

2) Ἐὰν ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta^2-4\Delta f=0$, τότε $\Delta=4f$, καὶ $\alpha=\Delta/2$, συνεπῶς ὑπάρχει μία μόνον θέσις διὰ προβολήν, ἥτις εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως Δ.

3) Ἐὰν ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta^2-4\Delta f>0$, τότε $\Delta>4f$, καὶ ὑπάρχουν δύο θέσεις συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ μέσον, ἀπέχουσαι μεταξύ των ἀπόστασιν

$$\delta=\sqrt{\Delta^2-4\Delta f} \tag{4}$$

Εἰς τὴν ἄσκησίν μας ἔχομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο θέσεων τοῦ φακοῦ εἶναι δ. Ἄρα

$$\delta=\sqrt{\Delta^2-4\Delta f} \tag{5}$$

Ὑψώνοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λύοντες ὡς πρὸς f εὑρίσκομεν

$$\underline{f=\frac{\Delta^2-\delta^2}{4\Delta}}$$

καὶ ἐκ τῶν δεδομένων εὑρίσκομεν συνεπῶς πάλιν

$$\underline{f=60 \text{ cm.}}$$

213. Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ διαφράγματος. Μεταξὺ αὐτῶν τοποθετεῖται φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 72 cm εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε οὗτος νὰ σχηματίζῃ εὐκρινῶς ἐπὶ τοῦ διαφράγματος εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου μεγαλύτερον αὐτοῦ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ φακὸς ἵνα ἐπὶ τοῦ διαφράγματος προκύψῃ εἴδωλον μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου.

Λύσις. Ἵνα προκύψῃ εἴδωλον μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου ὁ φακὸς πρέπει νὰ μετακινηθῇ κατὰ ἀπόστασιν x, τοιαύτην ὥστε τὸ ἀντικείμενον νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ διπλασίου τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως. Ἐὰν Δ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ πετάσματος καὶ f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, πρέπει νὰ μετατοπισθῇ ὁ φακὸς πρὸς τὸ μέρος τοῦ πετάσματος κατὰ

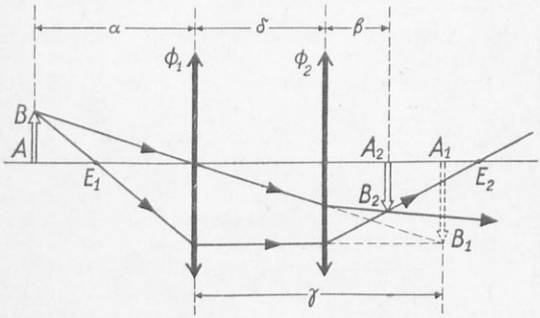
$$x = \sqrt{\Delta^2 - 4\Delta f} \qquad (1)$$

(βλ. Ἄσκησιν 212), ὁπότε διὰ $\Delta = 4$ m καὶ $f = 0,72$ m εὑρίσκομεν

$$x = 2,12 \text{ m}.$$

214. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν συνενωθοῦν δύο συγκλίνοντες φακοί, τὸ σύστημα ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἕνα συγκλίνοντα φακόν, τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἰσχύων τῶν συνιστώντων τούτων φακῶν.

Λύσις. Θεωρήσωμεν τὸν συνδυασμὸν δύο φακῶν εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν δ μεταξύ των. Διὰ τὸν φακὸν Φ_1 θὰ ἰσχύσῃ ἡ σχέσις



$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{f_1} \qquad (1)$$

ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ Φ_1 καὶ γ ἡ ἀπόστασις τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου (A_1B_1) ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ φακοῦ. Ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Φ_2 ἀπὸ τοῦ εἰδώλου (A_1B_1) τὸ ὁποῖον χρησιμεύει ὡς ἀντικείμενον φανταστικὸν διὰ τὸν φακὸν Φ_2 εἶναι $-(\gamma-\delta)$ καὶ ἔχομεν ὡς τελικὸν εἴδωλον τὸ (A_2B_2) τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ φακοῦ Φ_2 κατὰ β.

Δι' ἐφαρμογῆς πάλιν τοῦ τύπου τῶν φακῶν ἔχομεν

$$\frac{1}{-(\gamma-\delta)} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_2} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) ὑπολογίζομεν τὴν ἀπόστασιν β. Ἡ συνολικὴ μεγέθυνσις M_o εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο μεγεθύνσεων γ/α καὶ $\beta/\gamma-\delta$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$M_o = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\gamma-\delta} \qquad (3)$$

Ἐὰν οἱ δύο φακοὶ εἶναι ἐν ἐπαφῇ, τότε $\delta = 0$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} \qquad (4)$$

ἤτοι οἱ δύο φακοὶ εἶναι ἰσότιμοι πρὸς ἕνα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως F, ὅπου f_1 καὶ f_2 δύνανται νὰ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (4) προκύπτει, ὅτι ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν εἶναι

$$P = \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad (5)$$

215. Αἱ διαστάσεις μιᾶς εἰκόνος κινηματογραφικῆς ταινίας εἶναι 18 mm ὕψος καὶ 24 mm πλάτος. Ὁ διαθέσιμος κινηματογραφικὸς προβολεὺς εἶναι ἐφωδιασμένος μὲ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑνὸς προσθέτου φακοῦ, ὅστις ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸν ὑπάρχοντα ἐπιτρέπει τὴν προβολὴν εἰκόνος πλάτους 7 m, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς ὀθόνης καὶ τῆς κινηματογραφικῆς ταινίας εἶναι ἀκριβῶς 20 m.

(Ε.Μ.Πολυτεχνεῖον.Σχολὴ Μηχανολόγων-Ἠλεκτρολόγων.Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1954).

Λύσις. Ἔστω fx ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ τὸν ὁποῖον θὰ θέσωμεν πολὺ πλησίον τοῦ πρώτου φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, ἵνα ἐπιτύχωμεν τὴν προβολήν. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συστήματος θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{fx} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τῆς ταινίας ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν φακῶν, β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου της ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν φακῶν καὶ δ τὴν ἀπόστασιν τῆς ταινίας ἀπὸ τὸ εἴδωλον αὐτῆς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{F} \quad (2) \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha + \beta = \delta \quad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὰς (3) καὶ (4) $E = 700$ cm, $A = 2{,}4$ cm, $\delta = 2\,000$ cm, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων

$$\alpha = \frac{3000}{439}\ \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{875\,000}{439}\ \text{cm}$$

Ἀκολούθως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

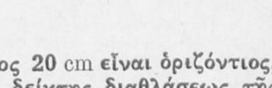
$$\frac{1}{fx} + \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (5) τὰ μεγέθη διὰ τῶν τιμῶν των $f = 10$ cm, $\alpha = 3\,000/439$ cm καὶ $\beta = 875\,000/439$, εὑρίσκομεν τελικῶς τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ προσθέτου φακοῦ ἴσην πρὸς

$$fx = 21{,}36\ \text{cm}.$$

216. Ἐπιπεδόκοιλος φακὸς ἀκτῖνος καμπυλότητος 20 cm εἶναι ὁριζόντιος, καὶ τὸ κοῖλον μέρος αὐτοῦ εἶναι πλῆρες ὕδατος. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 3/2 καὶ ὁ τοῦ ὕδατος 4/3. Ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον φωτεινοῦ σημείου εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς κατακορύφου ἥτις ἄγεται εἰς τὸ κέντρον τῆς ὑάλου καὶ εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπ' αὐτοῦ.

Λύσις. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο φακούς, ἕνα ἐπιπεδόκυρτον ἐξ ὕδατος, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος R καὶ ἕνα ἐπιπεδόκοιλον ἐξ ὑάλου, τοῦ ὁποίου ἡ κοίλη ἐπιφάνεια ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ἐπίσης R.



Ἐὰν καλέσωμεν $n_{υδ}$ τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὕδατος καὶ $f_{υδ}$ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ ὑδατίνου φακοῦ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f_{υδ}} = (n_{υδ} - 1)\cdot\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right] = (n_{υδ} - 1)\cdot\frac{1}{R} \quad (1)$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν $n_{υαλ}$ τὸν δείκτην διαθλάσεως τῆς ὑάλου καὶ $f_{υαλ}$ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ ὑαλίνου φακοῦ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f_{υαλ}} = (n_{υαλ} - 1)\cdot\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right] = -(n_{υαλ} - 1)\cdot\frac{1}{R} \qquad (2)$$

Ὡς γνωστὸν ὅμως ἡ ἰσχὺς ἑνὸς ὁμοαξονικοῦ συστήματος φακῶν οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἰσχύων τοῦ φακοῦ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_{υδ}} + \frac{1}{f_{υαλ}} = \frac{1}{R}\left(n_{υδ} - n_{υαλ}\right) \tag{3}$$

ὅπου F ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) προκύπτει

$$F = \frac{R}{n_{υδ} - n_{υαλ}} \tag{4}$$

Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα: $R = 20$ cm, $n_{υδ} = 4/3$ καὶ $n_{υαλ} = 3/2$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος εἶναι

$$F = -120 \text{ cm.}$$

Συνεπῶς ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{F} \tag{5}$$

ἐξ οὗ

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot F}{\alpha - F}} \tag{6}$$

Ὁπότε διὰ $\alpha = 50$ cm, καὶ $F = -120$ cm εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -35{,}3 \text{ cm.}}$$

Ἤτοι τὸ εἴδωλον σχηματίζεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἀντικειμένου, εἶναι δὲ φανταστικόν.

217. Δύο λεπτοὶ φακοί, τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι +9 cm καὶ −6 cm ἀντιστοίχως, τίθενται ἐν ἐπαφῇ. Ὑπολογίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συστήματος.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (5) τῆς ἀσκήσεως 214 ἔχομεν

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{1}$$

ὅπου F ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος καὶ f_1, f_2 αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν ἐν ἐπαφῇ φακῶν. Δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς f προκύπτει

$$\underline{F = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}} \tag{2}$$

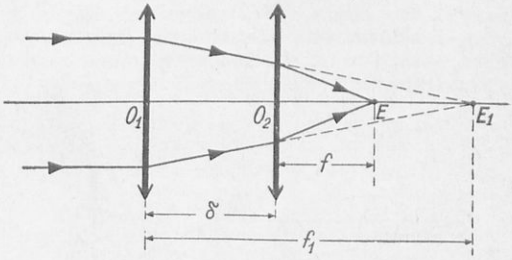
Θέτομεν $f_1 = 9$ cm, $f_2 = -6$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{F = -18 \text{ cm.}}$$

Ἤτοι τὸ σύστημα τῶν φακῶν συμπεριφέρεται ὡς ἀποκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 18 cm.

218. Δύο λεπτοὶ ἐπιπεδόκυρτοι φακοὶ ἑστιακῶν ἀποστάσεων 10 cm καὶ 6 cm, τίθενται εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπ' ἀλλήλων, κατὰ τρόπον ὥστε οἱ κύριοι ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐπίσης ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις διὰ διαφόρους τιμὰς τῆς μεταξὺ τῶν δύο φακῶν ἀποστάσεως καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς αὕτη ὡς συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως ταύτης.

Λύσις. Ἔστω οἱ φακοὶ O_1 καὶ O_2 οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἀπόστασιν δ μεταξύ των καὶ ὅτι παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τῶν φακῶν προσπίπτει παράλληλος δέσμη ἀκτίνων, ἥτις συγκεντρώνεται εἰς ἓν σημεῖον E τὸ ὁποῖον προφανῶς θὰ εἶναι ἡ ἑστία τοῦ συστήματος.



Ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ὁ δεύτερος φακὸς O_2, αἱ ἀκτῖνες θὰ συνήρχοντο εἰς τὸ σημεῖον E_1 (ἑστία τοῦ φακοῦ O_1), τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο θεωρεῖται ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον διὰ τὸν φακὸν O_2.

Καλοῦμεν f_1, f_2 τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν καὶ f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συστήματος μετρουμένην ἀπὸ τοῦ O_2. Τότε θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν φακὸν O_2 ὅτι $\alpha = f_1 - \delta$ καὶ $\beta = f$ καὶ ἑπομένως ὁ τύπος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$ δύναται νὰ γραφῇ

$$-\frac{1}{f_1 - \delta} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2} \tag{1}$$

Λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς f καὶ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

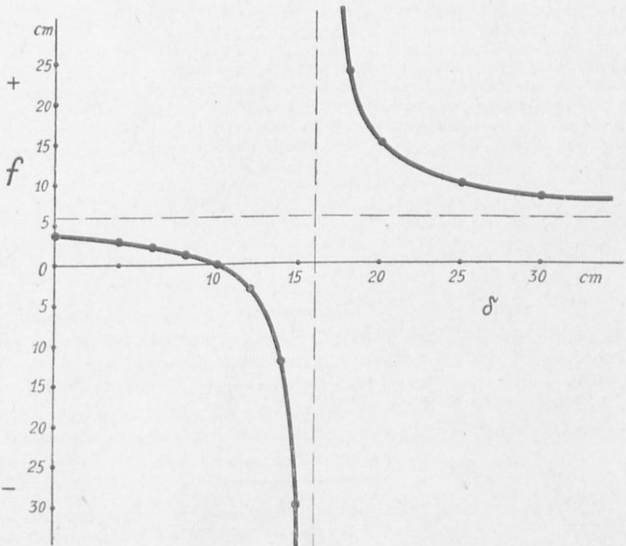
$$f = \frac{f_2 \cdot (f_1 - \delta)}{f_1 + f_2 - \delta} \tag{2}$$

Θέτομεν ἀκολούθως εἰς τὴν (2) $f_1 = 10$ cm, $f_2 = 6$ cm, $\delta = 4$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$f = 3$ cm.

Δίδοντες καταλλήλους τιμὰς εἰς τὸ δ λαμβάνομεν τὸν κατωτέρω πίνακα:

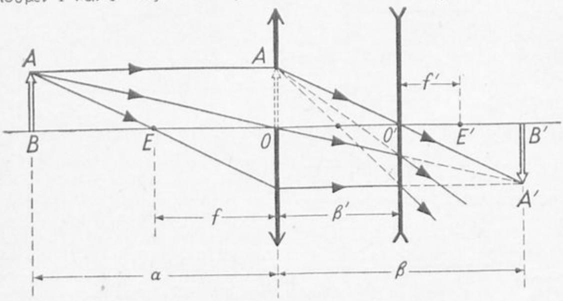
δ_{cm}	0	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	25	30	∞
f_{cm}	3,75	3	2,4	1,5	0	−3	−12	−30	−∞	24	15	10	8,5	6



καὶ οὕτω χαράσσομεν τὴν καμπύλην ὡς δεικνύεται εἰς τὴν ὡς ἄνω γραφικὴν παράστασιν.

219. Δίδεται συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως f καὶ φωτεινὸν βέλος (ΑΒ) εὑρισκόμενον ἔμπροσθεν αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ. Εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ καὶ εἰς τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀντικειμένου μέρος εὑρίσκεται ἀποκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f' = f/2$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ φύσις, ἡ θέσις, ἡ φορὰ καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ νὰ χαραχθῇ τὸ ὀπτικὸν διάγραμμα.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ὑποθέτομεν κατ' ἀρχάς, ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁ ἀποκλίνων φακός. Καλοῦμεν f καὶ f' τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν, α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ Ο καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου ἐπίσης ἀπὸ τὸν φακόν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν



$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f} \quad (2)$$

Ἀκολούθως θέτομεν $\alpha = 2f$ καὶ προκύπτει

$$\underline{\beta = 2f}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(A'B')}{(AB)} \quad (3)$$

θέτοντες $\beta = 2f$, $\alpha = 2f$ λαμβάνομεν

$$\underline{(A'B') = (AB)}$$

Ἤτοι τὸ λαμβανόμενον εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἀντικείμενον. Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο ἐπὶ τοῦ σχεδίου καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

Ἐὰν ἤδη τοποθετήσωμεν τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν Ο' εἰς ἀπόστασιν f ἀπὸ τὸν συγκλίνοντα Ο, τὸ (Α'Β') δὲν σχηματίζεται καὶ ἕνεκα τούτου τὸ θεωροῦμεν ὡς φανταστικὸν ἀντικείμενον διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακὸν καὶ λύομεν οὕτω πρόβλημα φακοῦ ἀποκλίνοντος μὲ φανταστικὸν ἀντικείμενον.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = -\frac{1}{f'} \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad \beta' = \frac{f' \cdot \alpha'}{f' - \alpha'} \quad (5)$$

θέτομεν $f' = f/2$, $\alpha' = f$ καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{\beta' = -f.}$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως

$$\frac{E'}{A'} = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{(A''B'')}{(A'B')} \quad (6)$$

θέτοντες $\beta' = f$, $\alpha' = f$, προκύπτει

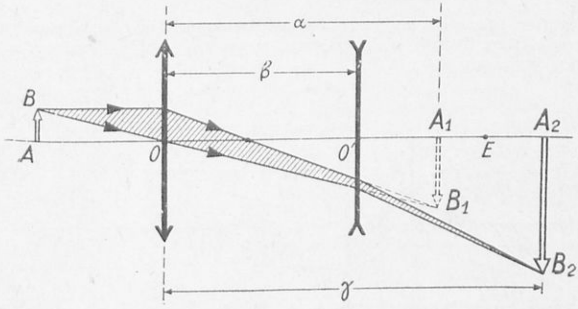
$$\underline{(A''B'') = (A'B')}$$

Ἤτοι τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν, συνεπῶς κεῖται πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν f ἀπ' αὐτόν, δηλ. ἐπὶ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ φανταστικὸν ἀντικείμενον, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἀντικείμενον (ΑΒ).

Τέλος τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον (Α''Β'') ἐπὶ τοῦ σχεδίου καὶ εἰς τὴν θέσιν (ΑΟ), καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

220. Συγκλίνων φακός, ὀπτικοῦ κέντρου Ο, δίδει εἴδωλον (A_1B_1) εὐθυγράμμου ἀντικειμένου (ΑΒ), καθέτως τοποθετημένου ἐπὶ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τοῦ φακοῦ, εἰς ἀπόστασιν $(OA_1) = \alpha$ ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Παρεμβάλλεται μεταξὺ εἰδώλου (A_1B_1) καὶ φακοῦ Ο ἕτερος ἀποκλίνων φακὸς τοῦ αὐτοῦ κυρίου ἄξονος καὶ ὀπτικοῦ κέντρου Ο′, τοιοῦτος ὥστε $(OO') = \beta$. Διὰ τιμὴν τοῦ β καταλλήλως ἐκλεγεῖσαν, σχηματίζεται νέον εἴδωλον (A_2B_2), πραγματικὸν καὶ ὀρθὸν ὡς πρὸς (A_1B_1), εὑρίσκεται δὲ εἰς ἀπόστασιν $(OA_2) = \gamma$. Ζητεῖται 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις f τοῦ δευτέρου φακοῦ. 2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $(A_2B_2)/(A_1B_1)$.

Λύσις. α) Διὰ νὰ δίδῃ ὁ ἀποκλίνων φακὸς Ο′ εἴδωλον $(A_2 B_2)$ πραγματικόν, πρέπει τὸ εἴδωλον $(A_1 B_1)$ τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς Ο, νὰ σχηματίζεται πραγματικὸν καὶ ὄπισθεν τοῦ Ο′, μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ ὀπτικοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τὸ εἴδωλον τοῦτο $(A_1 B_1)$ νὰ παίζῃ ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου.



Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν εἶναι $(OO') = \beta$, $(OA_1) = \alpha$, $(OA_2) = \gamma$, ἐὰν δὲ ἐπίσης θέσωμεν καὶ $(O'A_1) = \alpha - \beta$ ὡς καὶ $(O'A_2) = \gamma - \beta$, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ἀποκλίνοντα φακόν, ἐπειδὴ οὗτος ἔχει ἑστίαν φανταστικὴν καὶ δίδει εἴδωλον πραγματικὸν διὰ φανταστικὸν ἀντικείμενον, τὴν σχέσιν

$$-\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\gamma-\beta} = -\frac{1}{f} \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἑστιακὴν ἀπόστασιν f καὶ λαμβάνομεν

$$f = \frac{(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\beta)}{\gamma-\alpha} \qquad (2)$$

β) Ἡ μεγέθυνσις Μ τοῦ φακοῦ Ο′ θὰ εἶναι

$$M = \frac{(A_2 B_2)}{(A_1 B_1)} = \frac{(O'A_2)}{(O'A_1)} = \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} \qquad (3)$$

Ἡ μεγέθυνσις αὕτη εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, διότι ἐκ τῆς (1) παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{1}{\alpha-\beta} > \frac{1}{\gamma-\beta}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\alpha-\beta < \gamma-\beta$.

221. Ἀμφίκυρτος φακός, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι 40 cm, τίθεται μεταξὺ ἐπιπέδου κατόπτρου, καθέτου ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ, καὶ φωτεινοῦ βέλους καθέτου ὡσαύτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ εἶναι 60 cm καὶ ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ φακοῦ καὶ κατόπτρου εἶναι 20 cm, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ φακοῦ καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. Ποῖαι τέλος αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ συνθέτου τούτου προβλήματος ἀγνοοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὴν ὕπαρξιν τοῦ κατόπτρου καὶ λύομεν πρόβλημα συγκλίνοντος φακοῦ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τοὺς γνωστοὺς τύπους τῶν συγκλινόντων φακῶν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς β ὅτε προκύπτει

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f} \tag{3}$$

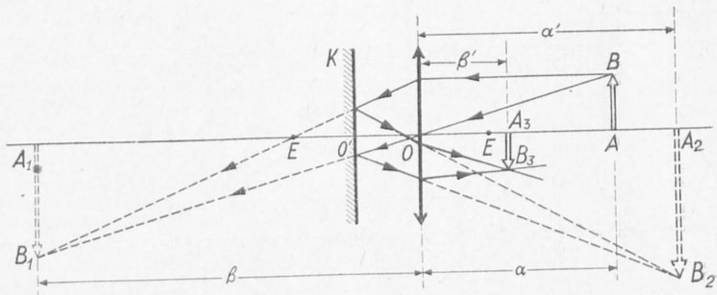
καὶ θέτοντες $\alpha = 60$ cm καὶ $f = 40$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta = 120 \text{ cm}.$$

Ἀκολούθως ἐκ τοῦ τύπου (2) θέτοντες $\beta = 120$ cm καὶ $\alpha = 60$ cm εὑρίσκομεν

$$E = 2A.$$

Τὸ προκῦπτον εἴδωλον θὰ εἶναι ἑπομένως πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον καὶ θὰ εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ φακοῦ εἰς ἀπόστασιν 120 cm. Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο ($A_1 B_1$) ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.



Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τοποθετοῦμεν τὸ κάτοπτρον K. Προφανῶς τὸ εἴδωλον ($A_1 B_1$) θὰ παίζῃ ρόλον ἀντικειμένου. Ἐπειδὴ ὅμως ἔπαυσε νὰ ὑπάρχῃ μὲ τὴν τοποθέτησιν τοῦ κατόπτρου, δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἀντικείμενον φανταστικόν. Τὸ φανταστικὸν τοῦτο ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου 100 cm καὶ θὰ δώσῃ εἴδωλον πραγματικόν, ὀρθόν, ἰσομέγεθες καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐπίσης 100 cm ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁ φακός. Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον ($A_2 B_2$) καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀνακλωμένων ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ἀκτίνων.

Εἶναι φανερὸν ἤδη ὅτι τὸ εἴδωλον τοῦτο δὲν ὑπάρχει, διότι ἠγνοήσαμεν τὴν ὕπαρξιν τοῦ φακοῦ. Ἄρα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι παίζει ρόλον φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν φακόν. Οὕτω ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ λύσωμεν πρόβλημα φακοῦ συγκλίνοντος διὰ φανταστικὸν ἀντικείμενον.

Χρησιμοποιοῦμεν τοὺς τύπους

$$-\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{f} \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{E'}{2A} = \frac{\beta'}{\alpha'} \quad (5)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (4) δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς β′ προκύπτει

$$\beta' = \frac{\alpha' \cdot f}{\alpha' + f} \tag{6}$$

καὶ θέτοντες $\alpha' = 80$ cm, $f = 40$ cm εὑρίσκομεν

$$\beta' = 26{,}7 \text{ cm}.$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ τύπου (5) θέτοντες $\beta' = 26{,}7$ cm καὶ $\alpha' = 80$ cm, εὑρίσκομεν

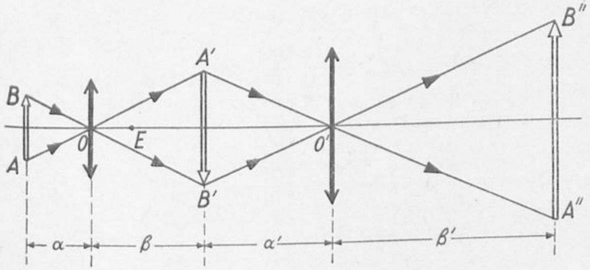
$$E' = \frac{2}{3} A$$

Τὸ εἴδωλον τοῦτο εἶναι πραγματικόν, θὰ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου καὶ θὰ εἶναι ὀρθὸν ὡς πρὸς τὸ ($A_2 B_2$).

Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο (A_3B_3) ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν πλέον τὴν πραγματικὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων μέσῳ τοῦ φακοῦ.

222. Δύο συγκλίνοντες φακοί, ἑστιακῶν ἀποστάσεων + 2 cm καὶ + 5 cm ἀντιστοίχως, ἀπέχουν κατὰ 14 cm. Ἀντικείμενον (ΑΒ) τοποθετεῖται 3 cm πρὸ τοῦ ἔχοντος ἑστιακὴν ἀπόστασιν + 2 cm φακοῦ. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ τελικοῦ εἰδώλου (Α′′Β′′), τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν φακῶν.

Λύσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ συνθέτου τούτου προβλήματος ἀγνοοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὸν δεύτερον φακόν.



Καλοῦμεν α, β ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸν πρῶτον φακὸν Ο καὶ f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ τούτου. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

καὶ

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}$$

ὁπότε διὰ α = 3 cm καὶ f = 2 cm, εὑρίσκομεν

$$\beta = 6\,\text{cm}.$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου $\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$ τῆς μεγεθύνσεως ἔχομεν

$$(A'B') = (AB) \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

καὶ διὰ β = 6 cm, α = 3 cm εὑρίσκομεν

$$(A'B') = 2\,(AB)$$

Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων β = 6 cm καὶ (Α′Β′) = 2 (ΑΒ) προκύπτει ὅτι τὸ εἴδωλον (Α′Β′) θὰ εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον καὶ διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου (ΑΒ) καὶ εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ φακοῦ εἰς ἀπόστασιν 6 cm. Οὕτω τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον τοῦτο ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

Τὸ εἴδωλον (Α′Β′) παίζει προφανῶς ρόλον πραγματικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν δεύτερον φακὸν Ο′ καὶ ἀπέχει ἀπὸ αὐτὸν ἀπόστασιν 8 cm.

Καλοῦμεν α′ τὴν ἀπόστασιν τοῦ (Α′Β′) ἀπὸ τὸν φακὸν Ο′ καὶ β′ τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς οὗτος. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{f'} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{\beta' = \frac{\alpha' \cdot f'}{\alpha' - f'}}$$

ὅπου f′ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου φακοῦ Ο′. Ὁπότε διὰ α′ = 8 cm καὶ f′ = 5 cm εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta' = 13{,}3\,\text{cm}.}$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου Ε′/Α′ = β′/α′ τῆς μεγεθύνσεως λαμβάνομεν

$$\underline{(A''B'') = (A'B') \cdot \frac{\beta'}{\alpha'}}$$

καὶ διὰ (Α′Β′) = 2(ΑΒ), β′ = 13,3 cm, α′ = 8 cm, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{(A''B'') = 3{,}3 \cdot (AB).}$$

Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων β′ = 13,3 cm, (Α′′Β′′) = 3,3 (ΑΒ) προκύπτει ὅτι τὸ τελικὸν εἴδωλον

(Α''Β'') εἶναι πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, 3,3 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον (ΑΒ) καὶ ἀπέχει 13,3 cm ἀπὸ τὸν δεύτερον φακόν.

Τοποθετοῦμεν τὸ εἴδωλον (Α''Β'') ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ χαράσσομεν τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

223. Ἀντικείμενον ὕψους 4 cm, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm πρὸ λεπτοῦ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 12 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου του. (Ἀπ. 30 cm, 6 cm.)

224. Ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 5 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 7,5 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου του. (Ἀπ. –15 cm, 3.)

225. Ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ σχηματίζεται ἀνεστραμμένον καὶ εἰς ἀπόστασιν 45 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ. (Ἀπ. 18 cm.)

226. Καθορίσατε τὴν φύσιν, τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ λεπτοῦ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 100 cm, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι α) 150 cm, β) 75 cm.
(Ἀπ. α' Πραγματικὸν ἀνεστραμμένον, 300 cm πέραν τοῦ φακοῦ, $M = 2$.
β' Φανταστικόν, ὀρθόν, 300 cm πρὸ τοῦ φακοῦ, $M = 4$.)

227. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φακοῦ ἀμφικύρτου τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι 50 cm καὶ 40 cm ἀντιστοίχως καὶ ὁ δείκτης διαθλάσεως $n = 1{,}52$. (Ἀπ. $f = 42{,}7$ cm.)

228. Συγκλίνων φακὸς ἐξ ὑάλου, δείκτου διαθλάσεως 1,50, ἔχει εἰς τὸν ἀέρα ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, δείκτου διαθλάσεως 1,33. (Ἀπ. 80 cm.)

229. Αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν ἀμφικύρτου φακοῦ εἶναι 20 cm καὶ 30 cm. Ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις εἶναι 24 cm. Ποῖος εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου. (Ἀπ. $n = 1{,}5$.)

230. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 4 cm τοποθετεῖται πλησίον τοῦ κυρίου ἄξονος λεπτοῦ συγκλίνοντος φακοῦ, εἰς ἀπόστασιν 33,3 cm ἀπ' αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι 20 cm, εἰς ποῖον σημεῖον θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθός του. Σχεδιάσατε τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων.
(Ἀπ. 50 cm, 6 cm.)

231. Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm. Καθορίσατε τὰς θέσεις τῶν σχηματιζομένων εἰδώλων, ὅταν μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον τοποθετῆται εἰς τὰς ἀκολούθους θέσεις : 25 cm, 20 cm, 15 cm, 10 cm καὶ 5 cm.
(Ἀπ. + 16,7 cm, + 20 cm, + 30 cm, ∞ , – 10 cm.)

232. Μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 10 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ ὑπολογίσατε τὸν λόγον τοῦ μεγέθους τοῦ εἰδώλου πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 20 cm πρὸ τοῦ φακοῦ, 2.)

233. Χρησιμοποιεῖται συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 25$ cm. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον διὰ νὰ δώσῃ εἴδωλον (πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν) 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 30 cm, 20 cm.)

234. Ἀντικείμενον καὶ διάφραγμα εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 3 m. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ διαφράγματος τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου κατὰ 5 φορὰς μεγαλύτερόν του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, χρησιμοποιοῦντες συγκλίνοντα φακὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις. (Ἀπ. $\alpha = 50$ cm, $\beta = 250$ cm, $f = 41{,}7$ cm.)

235. Συγκλίνων φακὸς δίδει εἴδωλον ἀντικειμένου εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ φακοῦ, πραγματικὸν καὶ εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ τούτου. (Ἀπ. $f = 30$ cm.)

236. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀμφικοίλου φακοῦ εἶναι 12 cm. Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ ἐμφανίζεται τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου καὶ ποία ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις.
(Ἀπ. 7,5 cm, 8 : 3.)

237. Ἀντικείμενον, ὕψους 9 cm, εὑρίσκεται 27 cm πρὸ ἀμφικοίλου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 18 cm. Καθορίσατε τὴν θέσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου.
(Ἀπ. –10,8 cm, 3,6 cm.)

238. Ἀμφίκυρτος φακός, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι 50 cm, ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 45 cm δι' ὡρισμένον εἶδος φωτός. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου διὰ τὸ φῶς τοῦτο. Πόση ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, ὅταν καταστήσωμεν ἐπίπεδον τὴν μίαν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.
(Ἀπ. 1,555, $f = 90$ cm.)

239. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 16 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ τὸ εἴδωλον εὑρίσκεται ὅτι εἶναι εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ. (Ἀπ. 16 cm.)

240. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως f πρέπει νὰ τεθῇ ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλον εἶναι κατὰ 3 φορὰς μεγαλύτερον αὐτοῦ.
(Ἀπ. $\beta_1 = 4/3\ f$, $\beta_2 = 2/3\ f$.)

241. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 100 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Εὕρατε ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον. (Ἀπ. –16,7 cm.)

242. Πρόκειται δι' ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm νὰ προβληθῇ ἐπὶ διαφράγματος προβολῆς ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπ' αὐτοῦ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου πρέπει νὰ τεθῇ ὁ φακός.
(Ἀπ. $\alpha_1 = 1{,}45$ m, $\alpha_2 = 0{,}55$ m.)

243. Δι' ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm σχηματίζομεν τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου ὕψους 50 cm ἐπὶ διαφράγματος προβολῆς κειμένου εἰς ἀπόστασιν 1,80 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου. Ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.
(Ἀπ. $E_1 = 25$ cm ἢ $E_2 = 100$ cm.)

244. Ποῖαι αἱ δύο θέσεις εἰδώλου ἀντικειμένου τινὸς εἰς τὰς ὁποίας τὸ εἴδωλον εἶναι 8 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου, ὅταν χρησιμοποιῆται φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως + 4 cm.
(Ἀπ. α' 4,5 cm ἀπὸ τὸν φακόν, εἴδωλον πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον. β' 3,5 cm ἀπὸ τὸν φακόν, εἴδωλον φανταστικὸν καὶ ὀρθόν.)

245. Εἴδωλον τοῦ Ἡλίου σχηματίζεται ὑπὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 m. Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 32'. Ποία ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. (Ἀπ. 1,10 cm.)

246. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 2 cm εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ διαφράγματος. Συγκλίνων φακὸς τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου καὶ δίδει εὐκρινὲς εἴδωλον αὐτοῦ ἐπὶ διαφράγματος. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. 2) Τοῦ διαφράγματος παραμένοντος εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον, ὑπάρχει ἄλλη θέσις τοῦ φακοῦ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ εἴδωλον σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ διαφράγματος; Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τούτου. ('Απ. 1′ $f = 64$ cm, 8 cm. 2′ $\alpha = 320$ cm, 0,5 cm.)

247. Φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς εἶναι φακὸς συγκλίνων 10 διοπτριῶν. Θέλει τις νὰ φωτογραφήσῃ ἄνθρωπον 1,70 m ὕψους, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 6 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τῆς φωτογραφικῆς πλακὸς καὶ πόσον εἶναι τότε τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. ('Απ. $\beta = 10{,}17$ cm, $E = 2{,}88$ cm.)

248. Συσκευὴ προβολῆς ἔχει φακὸν συγκλίνοντα 4 διοπτριῶν. 'Αντικείμενον ὕψους 5 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 26 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ διάφραγμα καὶ ποῖον τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου.

('Απ. $\beta = 650$ cm, $E = 125$ cm.)

249. 'Αμφίκυρτος φακὸς ἔχει ἐπιφανείας ἀκτίνων καμπυλότητος 18 cm καὶ 20 cm· Ὅταν ἀντικείμενον τίθεται 24 cm πρὸ τοῦ φακοῦ, τὸ πραγματικὸν εἴδωλον αὐτοῦ σχηματίζεται 32 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Καθορίσατε α) τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ καὶ β) τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ τοῦ φακοῦ. ('Απ. α′ 13,7 cm, β′ 1,69.)

250. Λεπτὸς συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm καὶ λεπτὸς ἀποκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm τίθενται ἐν ἐπαφῇ. Εὕρατε α) τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ β) τὴν ἰσχὺν τοῦ συνδεδυασμένου τούτου συστήματος φακῶν.

('Απ. 40 cm, + 2,5 διοπτρίαι.)

251. Δύο λεπτοὶ φακοὶ ἰσχύων + 10 διοπτριῶν καὶ − 6 διοπτριῶν ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται ἐν ἐπαφῇ καὶ σχηματίζουν οὕτω συγκλίνοντα φακόν. Καθορίσατε τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συστήματος.

('Απ.+ 4 διοπτρίαι,+25 cm.)

252. Δύο συγκλίνοντες φακοί, ἑστιακῶν ἀποστάσεων 40 cm καὶ 50 cm ἀντιστοίχως, τίθενται ἐν ἐπαφῇ. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος καὶ ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος. ('Απ. 22,2 cm, 4,5 διοπτρίαι.)

253. Δύο λεπτοὶ φακοί, ἑστιακῶν ἀποστάσεων +12 cm καὶ −30 cm ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται ἐν ἐπαφῇ. Ὑπολογίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν ἰσχὺν τοῦ συστήματος. ('Απ. + 20 cm, + 5 διοπτρίαι.)

254. 'Επιπεδόκυρτος φακὸς ἐκ πυριτυάλου καὶ ἕτερος ἐπιπεδόκοιλος ἐκ στεφανυάλου τίθενται ἐν ἐπαφῇ διὰ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ἐπιφανειῶν. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως, δι' ὡρισμένον μονοχρωματικὸν φῶς, εἶναι ἀντιστοίχως 1,75 καὶ 1,52. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ εἶναι 20 cm καὶ τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 60 cm. Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ.

('Απ. $R_2 = \dfrac{f \cdot R_1\,(n_2 - 1)}{R_1 - f\,(n_1 - 1)}$, − 25 cm.)

255. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ τοποθετοῦνται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπ' ἀλλήλων. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ πρώτου εἶναι 20 cm καὶ τοῦ δευτέρου 30 cm. 'Εὰν ἓν μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον τεθῇ 40 cm πρὸ τοῦ πρώτου φακοῦ, εἰς ποῖον σημεῖον θὰ σχηματισθῇ τὸ τελικὸν εἴδωλον. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.

('Απ. 15 cm ὄπισθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ.)

256. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm καὶ χωρίζονται δι' ἀποστάσεως 10 cm μεταξύ των. Θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὸ πραγματικὸν εἴδωλον ἀντικειμένου κατὰ 5 φορὰς μεγαλύτερόν του. Ποῦ πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ πέτασμα ὅπου θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον.

('Απ. 2 cm ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου φακοῦ, 50 cm ὄπισθεν τοῦ δευτέρου.)

257. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ Φ_1 καὶ Φ_2, τῶν ὁποίων αἱ ἰσχεῖς εἶναι ἀντιστοίχως 4 διοπτρίαι καὶ 2 διοπτρίαι, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 75 cm μεταξύ των. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 5 cm, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν δύο φακῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ Φ_1, πλησιάζει τοῦτον μέχρις ἀποστάσεως 25 cm. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ μεταβολὴ τῆς θέσεως καὶ ἡ μεταβολὴ τοῦ μεγέθους τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν σχηματιζομένου εἰδώλου.

('Απ. 175 cm ἀπὸ Φ_1, 250 cm ἀπὸ Φ_2. 75 cm ἀπὸ Φ_1 καὶ 150 cm ἀπὸ Φ_2. $E_1 = 10$ cm, $E_2 = 10$ cm.)

258. Δύο φακοὶ ὁ εἷς Φ_1 συγκλίνων, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm, ὁ ἕτερος Φ_2 ἀποκλίνων, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 25 cm, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 m μεταξύ των. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 5 cm καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν κοινὸν κύριον ἄξονα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἔμπροσθεν τοῦ Φ_1. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ νὰ καθορισθοῦν αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

('Απ. Φανταστικόν, ἀνεστραμμένον, ἴσον πρὸς 3,33 cm, ἀπέχον τοῦ Φ_2 κατὰ 16,7 cm καὶ 183,3 cm τοῦ Φ_1.)

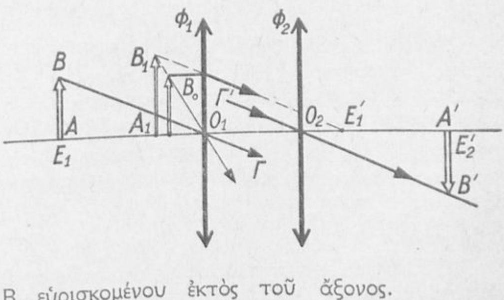
259. Ὑάλινος ἀμφίκυρτος φακός, δείκτου διαθλάσεως 1,50, ἔχων ἀκτῖνας καμπυλότητος ἴσας πρὸς 10 cm ἑκάστην, συνδυάζεται πρὸς ἐπιπεδόκοιλον φακὸν ἐκ τῆς αὐτῆς ὑάλου κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ σύστημα φακῶν. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κοίλης ἐπιφανείας τοῦ ἐπιπεδοκοίλου φακοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ πρώτου, ὥστε ὁ δεύτερος φακὸς νὰ ἐφαρμόζῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἀμφικύρτου διὰ τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος.

('Απ. 20 cm.)

260. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ Φ_1 καὶ Φ_2, τῶν ὁποίων αἱ ἰσχεῖς εἶναι ἀντιστοίχως 4 διοπτρίαι καὶ 2 διοπτρίαι, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 25 cm μεταξύ των. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὕψους 5 cm καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἔμπροσθεν τοῦ Φ_1. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ νὰ καθορισθοῦν αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

('Απ. Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ὕψους 2 cm καὶ ἀπέχον 10 cm ἀπὸ τοῦ Φ_2 καὶ 35 cm ἀπὸ τοῦ Φ_1.)

261. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ Φ_1 καὶ Φ_2 ἔχουν ἕκαστος ἑστιακὴν ἀπόστασιν 30 cm καὶ ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 20 cm. Εὐθύγραμμον φωτεινὸν ἀντικείμενον AB, κάθετον ἐπὶ τὸν κοινὸν κύριον ἄξονα, εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου τοῦ Φ_1. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἴδωλον A′B′ τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ συστήματος. 2) Εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τεθῇ τὸ AB ἵνα τὸ εἴδωλόν του σχηματισθῇ εἰς τὸ ἄπειρον. 3) Νὰ δοθῇ ἡ τελικὴ διεύθυνσις τῶν ἀκτίνων τῶν προερχομένων ἐκ τοῦ σημείου B, εὑρισκομένου ἐκτὸς τοῦ ἄξονος.



('Απ. 1′ Ἰσομέγεθες πρὸς τὸ ἀντικείμενον. 2′ 7,5 cm.)

262. Δύο φακοὶ συγκλίνοντες Φ_1 καὶ Φ_2, ἐστιακῶν ἀποστάσεων f_1 καὶ f_2, ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν α cm μεταξύ των. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου τοῦ Φ_1 τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς Φ_2 καὶ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου τοῦ Φ_2 τὸ ὁποῖον δίδει ὁ φακὸς Φ_1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εἰδώλων καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α ἵνα τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο εἰδώλων συμπέσουν. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : $f_1 = 20$ cm, $f_2 = 5$ cm.

('Απ. $\dfrac{\alpha\,(f_1 \cdot f_2 - \alpha^2)}{(\alpha + f_2)\cdot(f_1 - \alpha)}$, $\alpha = 0$, $\alpha = 10$ cm.)

263. Δύο ὅμοιοι ἀμφίκυρτοι φακοί, ἐστιακῆς ἀποστάσεως f, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2f ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἔχουν κοινὸν κύριον ἄξονα. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος. β) Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς τὰ εἴδωλα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς διαφόρους θέσεις φωτεινοῦ ἀντικειμένου τοποθετουμένου πρὸ τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν. γ) Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν διαγραμμάτων νὰ ἐξαχθῇ σχέσις συνδέουσα τὰς ἀποστάσεις ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου. δ) Ποία ἡ μεγέθυνσις τοῦ συστήματος. ('Απ. α' $f_\sigma = \infty$. γ' $\beta = 2f - \alpha$. δ' $M = 1 : 1$.)

264. Πρὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἐστιακῆς ἀποστάσεως f τίθεται ἀμφίκυρτος φακὸς τῆς αὐτῆς ἐστιακῆς ἀποστάσεως, εἰς ἀπόστασιν 3 f ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 7f ἀπὸ τοῦ κατόπτρου εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος φωτεινὸν ἀντικείμενον. α) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀπτικὸν διάγραμμα. β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος καὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν σχηματιζομένων εἰδώλων ἀπὸ τοῦ κατόπτρου.

('Απ. $\beta_1 = 5/3$ f, πραγματικόν, $\beta_2 = 5/2$ f, πραγματικόν, $\beta_3 = 2$ f, φανταστικόν.)

265. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 40 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἐστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Εἰς ἀπόστασιν 30 cm πέραν τοῦ φακοῦ τοποθετεῖται κοῖλον κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 30 cm. Εὕρατε : α) γραφικῶς καὶ β) λογιστικῶς, τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου ἡ ὁποία σχηματίζεται μετὰ τὴν ἀνάκλασιν εἰς τὸ κάτοπτρον. ('Απ. 6 cm ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου.)

266. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται ἔμπροσθεν λεπτοῦ φακοῦ ἀμφικύρτου, ἐστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm, τοῦ ὁποίου ἡ ὀπισθία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπαργυρωμένη καὶ ἀποτελεῖ κάτοπτρον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀντικειμένου καὶ φακοῦ εἶναι 60 cm, νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου. Νὰ καθορισθοῦν αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου.

('Απ. Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ἴσον κατὰ μέγεθος πρὸς 1/5 τοῦ ἀντικειμένου καὶ εἰς ἀπόστασιν 12 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ.)

267. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται ἔμπροσθεν λεπτοῦ ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ ἐστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι ἐπαργυρωμένη. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀντικειμένου καὶ φακοῦ εἶναι 60 cm, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου.

('Απ. Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ἴσον κατὰ μέγεθος πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντικειμένου καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

268. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 10 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἐστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου καὶ σχεδιάσατε τὴν πορείαν τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων.

269. Ποία ἡ φύσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φακοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζει πραγματικὸν εἴδωλον, ἔχον ὕψος τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὕψους ἀντικειμένου εὑρισκομένου 9 cm ἀπὸ τὸν φακόν.

270. Ὑπολογίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν φακοῦ ὁ ὁποῖος δίδει ὀρθὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ εἶναι : α) 200 cm, β) πολὺ μεγάλη.

271. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ἀπέχει ἀπὸ διαφράγματος 12,5 m. Ποία ἡ θέσις καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φακοῦ ὁ ὁποῖος δίδει εἴδωλον ἐπὶ τοῦ διαφράγματος, ἀντικειμένου τινός, μεγεθυσμένον κατὰ 24 φοράς.

272. Ἀμφίκυρτος φακὸς ἐκ στεφανυάλου δείκτου διαθλάσεως 1,517, ἔχει ἐπιφανείας μὲ ἀκτῖνας καμπυλότητος 40 cm καὶ 50 cm ἀντιστοίχως. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.

273. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ ἐκ στεφανυάλου, δείκτου διαθλάσεως 1,517, ἵνα ὁ φακὸς ἔχῃ ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm.

274. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 10 cm. Ποία εἶναι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις ὅταν εἶναι βυθισμένος ἐντὸς ὕδατος. (δ. διαθλάσεως ὕδατος = 1,33, ὑάλου = 1,5.)

275. Αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν ἀμφικύρτου φακοῦ εἶναι 20 cm καὶ 30 cm, ἡ δὲ ἑστιακή του ἀπόστασις 24 cm. Ποῖος εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου τοῦ φακοῦ.

276. Ὅταν μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον τοποθετῆται 20 cm πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ, τὸ πραγματικὸν εἴδωλον αὐτοῦ σχηματίζεται ἐπὶ διαφράγματος τεθέντος εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Εὕρατε τὴν ἰσχὺν τοῦ φακοῦ εἰς διοπτρίας.

277. Κηρίον τοποθετεῖται εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν l ἀπὸ πετάσματος. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κηρίου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, ἵνα σχηματισθῇ εὐκρινὲς τὸ εἴδωλον τοῦ κηρίου. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $l = 1$ m, f = 16 cm.

278. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν καὶ μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου. Εἶναι τὸ εἴδωλον πραγματικὸν ἢ φανταστικόν.

279. Φακὸς εὑρισκόμενος εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ εὐθυγράμμου φωτεινοῦ ἀντικειμένου, καθέτου ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα αὐτοῦ, δίδει πραγματικὸν εἴδωλον ὕψους 2,5 cm. Μετατιθέμενος εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου, δίδει ἀκόμη πραγματικὸν εἴδωλον ἴσον πρὸς τὰ 2/3 τοῦ ἀντικειμένου. Πόση εἶναι α) ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ, β) τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου.

280. Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 30 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον διὰ νὰ ληφθῇ φανταστικὸν εἴδωλον 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ διάγραμμα τῶν ἀκτίνων.

281. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται ἔμπροσθεν λεπτοῦ ἀμφικοίλου φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 cm, τοῦ ὁποίου ἡ ὀπισθία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπαργυρωμένη καὶ σχηματίζει κάτοπτρον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀντικειμένου καὶ φακοῦ εἶναι ἴση πρὸς 30 cm, νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου καὶ νὰ καθορισθοῦν αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

282. Ἀντικείμενον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 8 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 8 cm. Εἷς συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm, τοποθετεῖται ὄπισθεν τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ σχηματίζει ἓν τελικὸν εἴδωλον εἰς τὸ ἄπειρον. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φακῶν. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.

283. Πρὸ ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπ' αὐτοῦ ἀντικείμενον ὕψους 2 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

284. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 24 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου καὶ τὴν μεγέθυνσιν. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ γραμμικὴ πορεία τῶν ἀκτίνων.

285. Φωτεινὸν ἀντικείμενον σχήματος ὀρθογωνίου, ὕψους 4 cm καὶ πλάτους 1 mm, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 6/5 f ἀπὸ τοῦ μέσου ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως f. Πόση ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου.

286. Εἰκὼν ἐπὶ διαφανοῦς φίλμ, ἐπιφανείας 6 cm², προβάλλεται ἐπὶ πετάσματος τῇ βοηθείᾳ συγκλίνοντος φακοῦ. Ἐὰν ἡ προβαλλομένη εἰκὼν εἶναι ἐπιφανείας 180 cm² καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ φὶλμ καὶ τοῦ πετάσματος εἶναι 372 cm, ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ καὶ ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ προβαλλομένου φὶλμ ἀπὸ τὸν φακόν.

287. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς εἶναι 2 διοπτρίαι, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ἵνα ληφθῇ εἴδωλον δύο φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου.

288. Συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 20 cm πρὸ κυρτοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm. Ἓν κηρίον τοποθετεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως φακοῦ—κατόπτρου. Ποῦ πρέπει νὰ τεθῇ διάφραγμα διὰ νὰ σχηματίσῃ τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τῆς φλογὸς τοῦ κηρίου. Ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. Εἶναι τὸ εἴδωλον ὀρθὸν ἢ ἀνεστραμμένον; Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων.

289. Ὁ φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἔχει ἰσχὺν 5 διοπτριῶν. Ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ σχηματίζει εὐκρινὲς εἴδωλον ἐπὶ πετάσματος. Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον μετατοπίζεται κατὰ 0,5 m, πόσον πρέπει νὰ μετατοπισθῇ τὸ πέτασμα ἵνα διατηρηθῇ εὐκρινὲς τὸ εἴδωλον.

290. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ φακοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν 2 διοπτρίας πρέπει νὰ τεθῇ ἀντικείμενον, ἵνα λάβωμεν εἴδωλον δύο φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου

291. Διὰ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 m πρόκειται νὰ ἀπεικονισθῇ ἐπὶ πετάσματος προβολῆς τὸ εἴδωλον κατακορύφου ἐπιφανείας, εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 204 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν 1 cm² τῆς ἀπεικονιζομένης ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ διαφράγματος.

292. Φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 12$ cm. Ἡ συσκευὴ εἶναι ρυθμισμένη ἀρχικῶς δι' ἀντικείμενα πολὺ μεμακρυσμένα. Ἀκολούθως ἐπιθυμεῖ τις νὰ φωτογραφήσῃ ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 3 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Πῶς καὶ κατὰ ποίαν φορὰν πρέπει νὰ κάμῃ νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς πλακὸς ἀπὸ τοῦ φακοῦ, ὅστις εἶναι σταθερός, διὰ νὰ ληφθῇ εἴδωλον τελείως εὐκρινές.

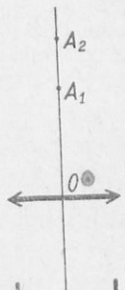
293. Πόση ἡ ἰσχὺς ἀποκλίνοντος φακοῦ ἐκ πυριτυάλου (δείκτου διαθλάσεως 1,6) τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι 30 cm. Πόσον τὸ μέγεθος καὶ ποία ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ποῖαι αἱ ἰδιότητες τοῦ εἰδώλου τούτου.

294. Συγκλίνων φακὸς Α ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm καὶ ἀποκλίνων Β ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 5 cm. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο φακῶν, ὅταν παράλληλος δέσμη ἀκτίνων προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ Α ἐξέρχεται τοῦ Β ὡς παράλληλος δέσμη καὶ ἀντιστρόφως. (Δηλ. προσπίπτουσα παράλληλος δέσμη ἐπὶ τοῦ Β ἐξέρχεται παραλλήλως ἐκ τοῦ Α.)

295. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰδώλου τοῦ Ἡλίου, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἐκ στεφανυάλου (δείκτου διαθλάσεως 1,5). Ὁ φακὸς περατοῦται εἰς δύο ἐπιφανείας, ἀκτῖνος καμπυλότητος 20 mm. Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 32′.

296. Ἀντικείμενον καὶ διάφραγμα εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2,5 m. Μετακινοῦντες μεταξὺ αὐτῶν φακὸν συγκλίνοντα, εὑρίσκομεν δύο θέσεις, εἰς ἀπόστασιν 60 cm μεταξύ των, εἰς τὰς ὁποίας τὸ εἴδωλον εἶναι εὐκρινὲς ἐπὶ τοῦ διαφράγματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις καὶ ἡ μεγέθυνσις εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις.

297. Λεπτὸς συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm τοποθετεῖται ἄνωθεν κυλινδρικοῦ δοχείου (βλ. σχῆμα). Ὁ κύριος ἄξων τοῦ φακοῦ εἶναι κατακόρυφος καὶ συναντᾷ τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου εἰς τὸ σημεῖον Α, τοῦ ὁποίου ὁ φακὸς σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A_1 εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε $AA_1 = 80$ cm. Ρίπτεται ἐντὸς τοῦ δοχείου ὕδωρ μέχρι ὕψους 30 cm. Τὸ πραγματικὸν εἴδωλον A_2 τοῦ Α ἀπομακρύνεται τότε κατὰ 12 cm. Πόσος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος.



Ἄσκησις 297.

298. Συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm τοποθετεῖται πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 cm. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φακῶν, ἐὰν παράλληλοι ἀκτῖνες προσπίπτουσαι ἐπὶ τοῦ πρώτου φακοῦ, ἐξέρχονται παραλλήλως ἐκ τοῦ δευτέρου.

299. Σύστημα φακῶν ἀποτελεῖται ἐκ δύο συγκλινόντων φακῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων + 4 cm καὶ + 8 cm ἀντιστοίχως, καὶ ἀπέχουν ὁ εἷς ἀπὸ τοῦ ἄλλου κατὰ 16 cm. Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ τελικοῦ εἰδώλου μικροῦ ἀντικειμένου, τιθεμένου 12 cm πρὸ τοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως + 4 cm.

300. Δύο φακοὶ εἶναι ὁμοαξονικοί. Ὁ πρῶτος φακὸς εἶναι συγκλίνων ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, ὁ δεύτερος εἶναι ἀποκλίνων ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm. Ὁ ἀποκλίνων φακὸς τίθεται εἰς ἀπόστασιν 5 cm ὄπισθεν τοῦ συγκλίνοντος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος.

301. Δύο φακοί, ὁ εἷς Φ_1 συγκλίνων ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm, ὁ ἕτερος Φ_2 ἀποκλίνων ἑστιακῆς ἀποστάσεως 25 cm, ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 25 cm. Φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 5 cm, καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν κοινὸν κύριον ἄξονα, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ Φ_1. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ νὰ καθορισθοῦν αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

302. Δύο συγκλίνοντες φακοὶ Φ_1 καὶ Φ_2, τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι 50 cm καὶ 25 cm ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 m μεταξύ των.

Φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 5 cm, καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν κοινὸν κύριον ἄξονα, εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἔμπροσθεν τοῦ Φ_1. Νὰ προσδιορισθοῦν ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος σχηματιζομένου εἰδώλου καὶ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.

303. Δύο φακοὶ τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι f καὶ f′ εἶναι ὁμοαξονικοὶ καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν D μεταξύ των. Ποία εἶναι, ὡς πρὸς τὸν πρῶτον φακόν, ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ φωτεινὸν ἀντικείμενον ἵνα τὸ εἴδωλον αὐτοῦ σχηματισθῇ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν ὅπου εἶναι τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον.

304. Συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_1 = 20$ cm καὶ ἀποκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_2 = 5$ cm, ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 16 cm μεταξύ των. Ἀντικείμενον ΑΒ μεμακρυσμένον, φαινομένης διαμέτρου 1^0, στέλλει ἀκτῖνας ἐπὶ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φύσις, ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τοῦ διδομένου ὑπὸ τοῦ συστήματος τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων.

305. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ τεθοῦν δύο συγκλίνοντες φακοὶ μεταξύ των, ἑστιακῶν ἀποστάσεων f καὶ f′, ἵνα εἶναι τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν ἄνευ ἑστίας, δηλαδή, ἓν σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ ἀντικειμένου.

306. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀμφικύρτου φακοῦ προσδιωρίσθη διὰ μετρήσεως καὶ εὑρέθη ἴση πρὸς 40 cm. Ἐὰν συνδυάσωμεν τὸν φακὸν τοῦτον πρὸς ἕτερον ἀμφίκοιλον φακόν, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ σύστημα φακῶν, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος εὑρίσκεται διὰ μετρήσεως ἴση πρὸς 90 cm. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀμφικοίλου φακοῦ.

307. Ἀμφίκυρτος φακὸς ἐκ πυριτυάλου ($n = 1{,}75$) τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 12,5 cm ἀπὸ ἀμφικοίλου φακοῦ ἐκ στεφανυάλου ($n = 1{,}50$) κατὰ τρόπον ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 20 m ἀπὸ τοῦ ἀμφικύρτου φακοῦ. Ποία ἡ θέσις καὶ τὸ εἶδος τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν σφαιρικῶν ὁρικῶν ἐπιφανειῶν τῶν φακῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 60 cm, 40 cm, 50 cm καὶ 75 cm.

308. Δίδεται κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος R, καὶ εἰς ἀπόστασιν R ἀπ' αὐτοῦ ἀμφίκυρτος φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως R/2. Ἐὰν κατευθύνωμεν τὸν ἄξονα τοῦ συστήματος πρὸς τὸ μέσον τοῦ ἡλιακοῦ δίσκου, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου σχηματίζεται ἓν εἴδωλον τοῦ Ἡλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′

ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ. ΟΦΘΑΛΜΟΣ

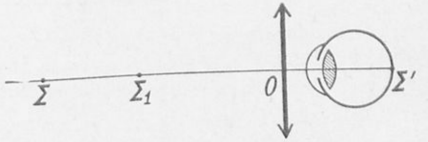
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α′

309. Ὀφθαλμὸς ἐμμέτρωψ (ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm), ὁπλίζεται μὲ φακοὺς ἰσχύος 2 διοπτριῶν. Πόση γίνεται ἡ ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως.

Λύσις. Α′ Μέθοδος. Ἂς καλέσωμεν f_0 τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ τοῦ ὀφθαλμοῦ, α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου Σ ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ σχηματιζομένου ἐπὶ τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς χιτῶνος εἰδώλου Σ', ἐπίσης ἀπὸ τοῦ φακοῦ τοῦ ὀφθαλμοῦ. Θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_0} \qquad (1)$$

Ἔστω τώρα ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς ὁπλίζεται μὲ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως f. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν θὰ εἶναι $\frac{1}{f} + \frac{1}{f_0}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἀντικείμενον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς ἄλλην θέσιν Σ_1, ἵνα σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς τὸ εἴδωλον Σ'. Ἂν καλέσωμεν x τὴν νέαν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_0} \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀπὸ τὴν (2) καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f} = P \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν (3) ὡς πρὸς x, ὁπότε προκύπτει

$$\underline{x = \frac{\alpha}{\alpha \cdot P + 1}} \qquad (4)$$

Δι' ἐφαρμογῆς εἰς τὸν τύπον (4) τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $\alpha = 25$ cm $= 0{,}25$ m καὶ $P = 2\,m^{-1}$ εὑρίσκομεν

$$\underline{x = 0{,}167 \text{ m} = 16{,}7 \text{ cm}.}$$

Β' Μέθοδος. Ἔστω ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως α. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ νὰ ἀναγιγνώσκῃ ἀνέτως ἔντυπον πρέπει νὰ τὸ κρατῇ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του. Ἐὰν ὅμως ὁ ὀφθαλμὸς ὁπλισθῇ μὲ φακὸν ἰσχύος P, τότε ὁ φακὸς πρέπει νὰ δίδῃ εἴδωλον φανταστικὸν τοῦ ἐντύπου, εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν α, ἵνα ὁ ὀφθαλμὸς δύναται διὰ μέσου τοῦ φακοῦ νὰ ἀναγιγνώσκῃ ἀνέτως πάλιν τὸ ἔντυπον. Συνεπῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, πρέπει νὰ θέσῃ τὸ ἔντυπον εἰς ἄλλην ἀπόστασιν x, εἰς τρόπον ὥστε ὁ φακὸς νὰ δίδῃ φανταστικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν α. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha} = P \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν

$$\underline{x = \frac{\alpha}{\alpha \cdot P + 1}} \qquad (2)$$

Ὅτε εὑρίσκομεν πάλιν

$$\underline{x = 16{,}7 \text{ cm}.}$$

310. Ὑπολογίσατε φακὸν δι' ὀφθαλμὸν τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 3 m, ὥστε νὰ διακρίνῃ μετὰ λεπτομερειῶν εἰς ἀπόστασιν 10 cm μόνον. (Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ὁ φακὸς τὸν ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσῃ πρέπει νὰ δίδῃ εἴδωλα φανταστικά, εἰς ἀπόστασιν $\beta = 3$ m, ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 10$ cm. Οὕτω ἐὰν ὁ φακὸς ἔχῃ ἑστιακὴν ἀπόστασιν f πρέπει νὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

ὅτε διὰ $\alpha = 10$ cm καὶ $\beta = 300$ cm, εὑρίσκομεν

$$f = 10{,}3 \text{ cm}.$$

Ἤτοι θὰ χρησιμοποιῇ φακὸν συγκλίνοντα ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10,3 cm.

Ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ τούτου διὰ $f = 10{,}3 \text{ cm} = 0{,}103$ m θὰ εἶναι

$$P = \frac{1}{f} = 10 \text{ m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι, περίπου)}$$

311. Μυωπικὸς ὀφθαλμὸς δὲν δύναται νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα εὑρισκόμενα πέραν τῶν 50 cm. Ποία ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ χρησιμοποιῇ, ἵνα βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα λίαν μεμακρυσμένα.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν μεγίστην ἀπόστασιν εἰς τὴν ὁποίαν βλέπει ὁ μύωψ, τότε διὰ νὰ βλέπῃ εἰς μεμακρυσμένην ἀπόστασιν, δηλ. εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, πρέπει οἱ φακοὶ τοὺς ὁποίους θὰ φέρῃ πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν του νὰ ἔχουν τοιαύτην ἰσχὺν P, ὥστε βλέπων διὰ μέσου τῶν φακῶν ἕνα μεμακρυσμένον ἀντικείμενον, νὰ τὸ βλέπῃ εἰς τὴν ἀπόστασιν α. Ἤτοι οἱ φακοὶ πρέπει νὰ σχηματίζουν φανταστικὸν εἴδωλον, εἰς τὴν ἀπόστασιν α, ἀντικειμένου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον ($\alpha = \infty$).

Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\alpha} = P$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος διὰ $\alpha = 50 \text{ cm} = 0{,}5$ cm δίδει

$$P = -2 \text{ m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

312. Μύωψ δὲν δύναται νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα εὑρισκόμενα πέραν τῶν 80 cm ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ. Ποία ἡ ἰσχύς, εἰς διοπτρίας, τῶν διορθωτικῶν φακῶν οἱ ὁποῖοι θὰ τὸν καταστήσουν ἱκανὸν νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς μεμακρυσμένα ἀντικείμενα.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ μύωψ ἔχει μεγίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως β καὶ θέλει νὰ βλέπῃ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, πρέπει οἱ διορθωτικοὶ φακοὶ τοὺς ὁποίους θὰ φέρῃ πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν του, νὰ δίδουν εἴδωλον φανταστικὸν εἰς ἀπόστασιν β, παντὸς ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\beta} = P$$

Οὕτω διὰ $\beta = 80 \text{ cm} = 0{,}8$ cm εὑρίσκομεν

$$P = -1{,}25 \text{ m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

313. Πρεσβύωψ δὲν δύναται νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα εὑρισκόμενα πλησιέστερον ἀπὸ 75 cm πρὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ αὐτοῦ. Καθορίσατε τὴν ἰσχὺν τῶν διορθωτικῶν φακῶν οἱ ὁποῖοι θὰ καταστήσουν αὐτὸν ἱκανὸν νὰ ἀναγιγνώσκῃ ἔντυπον εἰς ἀπόστασιν 25 cm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν εἰς τὴν ὁποίαν θέλει νὰ ἀναγιγνώσκῃ ὁ πρεσβύωψ εὐκρινῶς καὶ β τὴν ἀπόστασιν εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος πράγματι δύναται νὰ ἀναγιγνώσκῃ εὐκρινῶς, τότε, οἱ φακοὶ τοὺς ὁποίους θὰ φέρῃ, πρέπει νὰ δίδουν εἴδωλον φανταστικὸν εἰς τὴν ἀπόστασιν β, παντὸς ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν α.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = P, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad P = \frac{\beta - \alpha}{\beta \cdot \alpha}$$

Συνεπῶς διὰ $\beta = 75 \text{ cm} = 0{,}75$ m, $\alpha = 25 \text{ cm} = 0{,}25$ m, εὑρίσκομεν

$$P = 2{,}67 \text{ m}^{-1} \quad \text{(διοπτρίαι)}$$

314. Ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς εἶναι 2,5 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτοῦ, ὅταν προσαρμόζεται διὰ νὰ βλέπῃ ἀντικείμενα εὑρισκόμενα α) εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπ' αὐτοῦ, β) μεμακρυσμένα ἀντικείμενα.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν β τὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς καὶ α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν φακὸν τοῦ ὀφθαλμοῦ, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \tag{1}$$

Λύομεν ὡς πρὸς f, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\underline{f = \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta + \alpha}} \tag{2}$$

Οὕτω διὰ $\beta = 2,5$ cm καὶ $\alpha = 25$ cm εὑρίσκομεν

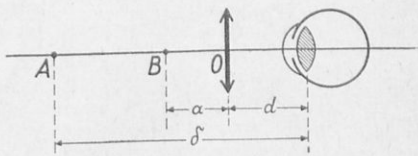
$$\underline{f = 2,27 \text{ cm}.}$$

β) Ἐφ' ὅσον ὁ ὀφθαλμὸς θὰ βλέπῃ μεμακρυσμένα ἀντικείμενα θὰ εἶναι $\alpha = \infty$, $1/\alpha = 0$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (1) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{f = \beta = 2,5 \text{ cm}.}$$

315. Ὀφθαλμὸς παρουσιάζει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm. Ἐὰν πρὸ αὐτοῦ τοποθετηθῇ φακὸς συγκλίνων, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm καὶ εἰς ἀπόστασιν 6 cm, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἔντυπον ἵνα ὁ ὀφθαλμὸς βλέπῃ τοῦτο εὐκρινῶς.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι δ, ἕπεται ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς ἀναγιγνώσκει ἀνέτως ἓν ἔντυπον ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀπόστασιν δ. Ἐὰν ἤδη ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ τοποθετηθῇ φακὸς συγκλίνων καὶ εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, καθίσταται προφανὲς ὅτι, πρέπει νὰ μετακινηθῇ τὸ ἔντυπον καὶ νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν τινὰ α ἀπὸ τὸν φακόν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ εἴδωλον τοῦ ἐντύπου νὰ σχηματίζεται ἀπὸ τὸν ὀφθαλμὸν εἰς τὴν ἀπόστασιν δ εἰς τὴν ὁποίαν, ὡς εἴδομεν, βλέπει ὁ ὀφθαλμὸς εὐκρινῶς. Συνεπῶς βάσει τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀπόστασις (OB) = α θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις (OA) = δ–d θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ φανταστικοῦ εἰδώλου καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν



$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\delta - d} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Λύοντες τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

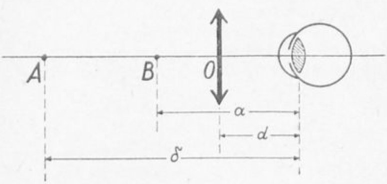
$$\underline{\alpha = \frac{(\delta - d) \cdot f}{\delta - d + f}} \tag{2}$$

Ὁπότε διὰ $\delta = 25$ cm, $d = 6$ cm καὶ $f = 10$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἔντυπον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀπὸ τὸν φακὸν εἰς ἀπόστασιν

$$\underline{\alpha = 6,55 \text{ cm}.}$$

316. Πρεσβύωψ ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 40 cm. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του πρέπει νὰ θέσῃ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, ἵνα ἀναγιγνώσκῃ εὐκρινῶς ἔντυπον εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του.

Λύσις. 'Εφ' ὅσον ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως δ, πρέπει τὸ εἴδωλον νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν δ ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, ἵνα ἀναγιγνώσκη τοῦτο ἀνέτως. 'Εὰν ὅμως πρὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοποθετήση τὸν συγκλίνοντα φακὸν εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ αὐτόν, τότε πρέπει τὸ ἔντυπον νὰ τὸ θέση εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ δίδη ὁ φακὸς εἴδωλον φανταστικὸν εἰς τὴν ἀπόστασιν δ, ὥστε νὰ δύναται ὁ ὀφθαλμὸς νὰ τὸ ἀναγιγνώσκη ἀνέτως. Συνεπῶς βάσει τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν



$$\frac{1}{\alpha - d} - \frac{1}{\delta - d} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

ἢ $$d^2 - (\alpha + \delta) \cdot d + \alpha (\delta + f) - \delta \cdot f \tag{2}$$

Λύοντες ὡς πρὸς d λαμβάνομεν

$$d = \frac{\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\alpha(\delta + f) + 4\delta f}}{2} \tag{3}$$

Θέτοντες $\delta = 40$ cm, $f = 20$ cm, $\alpha = 30$ cm, εὑρίσκομεν: $d_1 = 50$ cm καὶ $d_2 = 20$ cm. Ἡ τιμὴ $d_1 = 50$ cm προφανῶς ἀπορρίπτεται, διότι εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 30 cm καὶ συνεπῶς πρέπει νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν μόνον ἡ ἑτέρα, ἤτοι πρέπει νὰ τοποθετηθῆ ὁ φακὸς εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ

$$d_2 = 20 \text{ cm}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

317. Πρεσβύωψ δὲν δύναται νὰ βλέπη εὐκρινῶς ἀντικείμενα πλησιέστερα ἀπὸ 60 cm ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ αὐτοῦ. Καθορίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν ἰσχὺν τῶν διορθωτικῶν φακῶν οἱ ὁποῖοι θὰ τὸν καταστήσουν ἱκανὸν νὰ ἀναγιγνώσκη βιβλίον εἰς ἀπόστασιν 25 cm. ('Απ. + 42,9 cm, + 2,33 διοπτρίαι.)

318. 'Εὰν εἷς ἄνθρωπος χρειάζεται διορθωτικοὺς φακοὺς ἰσχύος + 2 διοπτριῶν διὰ νὰ ἴδη εὐκρινῶς ἀντικείμενον εὑρισκόμενον 25 cm πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν του, ποία ἡ μικροτέρα ἀπόστασις εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος δύναται νὰ βλέπη ἀντικείμενον ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν διορθωτικῶν φακῶν. ('Απ. 50 cm.)

319. Λίαν μικρὸν φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν l ἀπὸ παρατηρητήν. Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῆ ἡ γωνία ὁράσεως, ὅταν τὸ ἀντικείμενον τοποθετηθῆ εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεώς του. ('Απ. $\varphi_2 = 2\varphi_1$.)

320. Ὑπερμέτρωψ δὲν βλέπει εὐκρινῶς ἀντικείμενα εἰ μὴ μόνον εἰς ἀπόστασιν 0,75 m. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιήση ἵνα ἐπανέλθη ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἰς 25 cm. Ποία ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως. ('Απ. 2,66 διοπτρίαι, 37,5 cm.)

321. Μύωψ ὁ ὁποῖος ἔγινε πρεσβύωψ διακρίνει σημεῖον εὑρισκόμενον πλησίον καὶ εἰς ἀπόστασιν 100 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του καὶ σημεῖον εὑρισκόμενον μακρὰν καὶ εἰς ἀπόστασιν 300 cm. Εὕρατε τὴν ἰσχὺν τῶν φακῶν ἐξ ὑάλου, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται: α) διὰ νὰ διακρίνη ἀπομακρυσμένα ἀντικείμενα, β) διὰ τὴν ἀνάγνωσιν βιβλίου εἰς ἀπόστασιν 25 cm. ('Απ. – 0,33 διοπτρίαι, + 3 διοπτρίαι.)

322. 'Οφθαλμὸς βλέπει εὐκρινῶς τὰ ἀντικείμενα τὰ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων 15 cm καὶ 50 cm. α) Ποῖος φακὸς θὰ τοῦ ἐπιτρέπη νὰ βλέπη ἀντικείμενα λίαν μεμακρυσμένα. β) Ποῖαι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ φακοῦ, ἐὰν οὗτος εἶναι συμμετρικὸς καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὕαλον δείκτου διαθλάσεως 1,5. γ) Πόση εἶναι, διὰ τὸν ὡπλισμένον ὀφθαλμὸν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως.

('Απ. α' f = –50 cm, –2 διοπτρίαι. β' 50 cm. γ' 21,4 cm περίπου.)

323. Ὁ ὀφθαλμὸς πρεσβύωπος ἔχει ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 1 m. Εὕρατε τὴν ἰσχὺν φακοῦ ἐξ ὑάλου ἡ ὁποία θὰ μεταβάλῃ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως εἰς φυσιολογικήν. ('Απ. +3 διοπτρίαι.)

324. Μύωψ δὲν δύναται νὰ διακρίνῃ ἀντικείμενα εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῶν 3 m ἀπ' αὐτόν. Εὕρατε τὴν ἰσχὺν φακοῦ ἐξ ὑάλου, ἡ ὁποία θὰ καταστήσῃ αὐτὸν ἱκανὸν νὰ διακρίνῃ ἀπομεμακρυσμένα ἀντικείμενα.

('Απ. –0,33 διοπτρίαι.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

325. Μύωψ δὲν δύναται νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα πέραν τῶν 50 cm ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ του. Καθορίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν ἰσχὺν τῶν διορθωτικῶν φακῶν οἱ ὁποῖοι θὰ τὸν καταστήσουν ἱκανὸν νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς μεμακρυσμένα ἀντικείμενα.

326. Μυωπικὸς ὀφθαλμὸς δὲν βλέπει εὐκρινῶς παρὰ μεταξὺ 5 cm καὶ 25 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν τῶν ὀμματοϋαλίων του, ἵνα βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενα λίαν μεμακρυσμένα. Πόση ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως.

327. Κοῖλον κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m, χρησιμοποιεῖται κατὰ τὸ ξύρισμα. Μέχρι ποίας ἐλαχίστης ἀποστάσεως εἶναι δυνατὸν νὰ πλησιάσῃ τις τὸ πρόσωπόν του ἵνα βλέπῃ τοῦτο εὐκρινῶς, ὅταν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 25 cm.

328. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ διαχωρισθοῦν μεταξύ των διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, ὑπὸ παρατηρητοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 20 cm. Ἡ διαχωριστικὴ ἱκανότης τοῦ ὀφθαλμοῦ εἶναι 1'.

329. Μεταξὺ ποίων ὁρίων μεταβάλλεται ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἄπειρον καὶ 20 cm. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὴν θέσιν ἠρεμίας (ἄνευ προσαρμογῆς) τοῦ ὀφθαλμοῦ δύναται οὗτος νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 mm.

330. Μύωψ ἔχει ὅρια ὁράσεως 1 m καὶ 10 cm. Ποῖος διορθωτικὸς φακὸς θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ νὰ βλέπῃ καθαρῶς ἀπομεμακρυσμένα ἀντικείμενα ἄνευ κοπώσεως. Πόση γίνεται ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐν συνδυασμῷ μὲ ὀμματοϋάλια εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 1 cm ἀπὸ τῶν ὀφθαλμῶν του.

331. Κανονικὸς ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος ἀπὸ τῆς ἀποστάσεως 25 cm μέχρι τοῦ ἀπείρου. Μεταξὺ ποίων ἀποστάσεων δύναται νὰ προσαρμόζεται ὁ ὀφθαλμὸς οὗτος ὅταν χρησιμοποιήσῃ φακὸν ἰσχύος 5 διοπτριῶν.

332. Ὀφθαλμὸς ὑπερμέτρωψ δὲν δύναται νὰ διακρίνῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενον, εἰ μὴ μόνον ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 40 cm. Ποίαν ἰσχὺν πρέπει νὰ ἔχῃ συγκλίνων φακὸς ἵνα ὁ ὀφθαλμὸς βλέπῃ τὸ ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν 25 cm. Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ εἰς τὴν περίπτωσιν μυωπικοῦ ὀφθαλμοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 15 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

ΟΠΤΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

333. Ποία ἡ μεγέθυνσις συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως + 2 cm, ὅταν χρησιμοποιῆται οὗτος ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον. Ὁ φακὸς κρατεῖται πλησίον τοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ ἡ φανταστικὴ εἰκὼν σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, ἤτοι 25 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ δ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, τότε ἡ μεγέθυνσις Μ τοῦ φακοῦ, ὅταν χρησιμοποιῆται οὗτος ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον, εἶναι

$$\underline{M = 1 + \frac{\delta}{f}}$$

Θέτομεν λοιπὸν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον $\delta = 25$ cm, $f = 2$ cm καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 13{,}5.}$$

334. Δίδεται ἁπλοῦν μικροσκόπιον (φακὸς) ἰσχύος 20 διοπτριῶν καὶ ζητεῖται εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας αὐτοῦ πρέπει νὰ τεθῇ ἀντικείμενον, διὰ κανονικὸν ὀφθαλμὸν βλέποντα μεταξὺ ἀπείρου καὶ 20 cm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν δ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως καὶ P τὴν ἰσχὺν τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου, τότε, ὡς γνωστόν, ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$M = 1 + \delta \cdot P \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου ἡ μεγέθυνσις ἑνὸς φακοῦ δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$M = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{ἢ} \qquad M = \frac{\delta}{\alpha} \tag{2}$$

διότι τὸ εἴδωλον εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου σχηματίζεται εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως δ.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν

$$1 + \delta \cdot P = \frac{\delta}{\alpha} \tag{3}$$

καὶ δι᾽ ἐπιλύσεως ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\delta}{1 + \delta \cdot P} \tag{4}$$

Συνεπῶς διὰ $\delta = 20$ cm καὶ $P = 20\ m^{-1} = 0{,}2\ cm^{-1}$ εὑρίσκομεν

$$\alpha = 4\ cm$$

Ἐπειδὴ δὲ $[f = \frac{1}{0{,}2\ cm^{-1}} = 5$ cm, ἡ ἀπόστασις l ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας ὅπου πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον θὰ εἶναι $l = f - \alpha$, ἤτοι

$$\underline{l = 1\ cm.}$$

335. Παρατηρεῖται ἀντικείμενον μήκους 1 mm διὰ μέσου ἁπλοῦ μικροσκοπίου ἰσχύος 100 διοπτριῶν. Τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. α) Πόση ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου, β) ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ παρα-

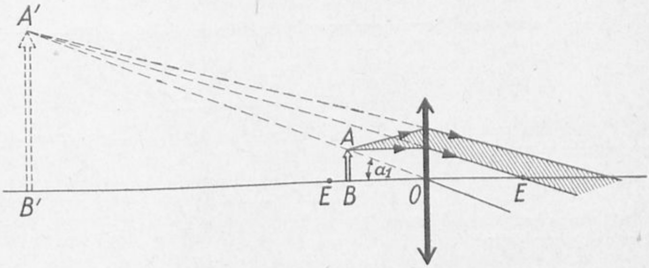
τηρουμένου εἰδώλου, γ) πόση ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ ἀντικείμενον διὰ μέσου τοῦ μικροσκοπίου.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν δ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως καὶ P τὴν ἰσχὺν τοῦ ἁπλοῦ μικροσκοπίου (μεγεθυντικοῦ φακοῦ), τότε ὡς γνωστόν, ἡ μεγέθυνσις M αὐτοῦ δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$\underline{M = 1 + \frac{\delta}{f} = 1 + \delta \cdot P} \qquad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) $\delta = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$, $P = 100\,\mathrm{m}^{-1}$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 26 \cdot}$$



β) Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι

$$\underline{M = \frac{E}{A}}$$

καὶ ἑπομένως διὰ $M = 26$ καὶ $A = 1\,\mathrm{mm}$ εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 26\,\mathrm{mm}}$$

ἤτοι τὸ μέγεθος τοῦ παρατηρουμένου εἰδώλου εἶναι ἴσον πρὸς 26 mm.

γ) 1. Ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι τοποθετημένος πλησίον τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου O, τότε ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ ἀντικείμενον μέσῳ τοῦ φακοῦ εἶναι ἡ α_1 (βλ. σχῆμα) καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\text{εφ}\ \alpha_1 = \frac{(A'B')}{(B'O)} \qquad (2)$$

ἢ ἐπειδὴ ἡ γωνία α_1 εἶναι πολὺ μικρὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\underline{\alpha_1 = \frac{(A'B')}{(B'O)}} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3), $(A'B') = 26\,\mathrm{mm}$, $(B'O) = \delta = 250\,\mathrm{mm}$ καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν γωνίαν εἰς ἀκτίνια ἴσην πρὸς

$$\underline{\alpha_1 = 0{,}1\ \mathrm{rad}} \qquad \text{(περίπου)}$$

2. Ἐπίσης ἡ γωνία α δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς μικροσκοπίου εἶναι τὸ πηλίκον τῆς γωνίας α_1 ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν διὰ μέσου τοῦ φακοῦ τὸ ἀντικείμενον διὰ τοῦ μήκους (AB) τοῦ ἀντικειμένου, ἤτοι

$$P = \frac{\alpha_1}{(AB)} \qquad (4)$$

Λύοντες τὸν τύπον (4) ὡς πρὸς α_1 λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha_1 = P \cdot (AB)} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα $P = 100$ διοπτρίαι $= 100\,\mathrm{m}^{-1}$, $(AB) = 1\,\mathrm{mm} = 10^{-3}\,\mathrm{m}$ καὶ εὑρίσκομεν πάλιν

$$\underline{\alpha_1 = 0{,}1\ \mathrm{rad}}$$

336. Δίδεται συγκεντρωτικὸς φακὸς ἐξ ὑάλου, δείκτου διαθλάσεως $n = 1{,}6$, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι $R_1 = 5\,\mathrm{cm}$ καὶ $R_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις ὅταν συνδυάζεται ὁ φακὸς 1) μὲ κανονικὸν ὀφθαλμόν, (ἀπόστασις

εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm, 2) μὲ μύωπα (ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 10 cm), 3) μὲ πρεσβύωπα (ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 40 cm).

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης. Γεωπονικὴ Σχολή. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ δίδεται, ὡς γνωστόν, ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1}$$

ὁπότε διὰ $n = 1{,}6$, $R_1 = 5$ cm καὶ $R_2 = 6$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι

$$f = 4{,}54 \text{ cm}$$

Ἡ μεγέθυνσις φακοῦ λειτουργοῦντος ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{M = 1 + \frac{\delta}{f}} \tag{2}$$

1) Διὰ τὸν κανονικὸν ὀφθαλμὸν δίδονται $f = 4{,}54$ cm καὶ $\delta = 25$ cm, ὅτε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν

$$\underline{M = 6{,}5.}$$

2) Διὰ τὸν μύωπα δίδονται $f = 4{,}54$ cm καὶ $\delta = 10$ cm, ὅτε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν

$$\underline{M = 3{,}2.}$$

3) Διὰ τὸν πρεσβύωπα δίδονται $f = 4{,}54$ cm καὶ $\delta = 40$ cm, ὅτε πάλιν λαμβάνομεν

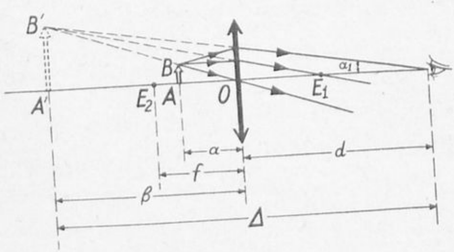
$$\underline{M = 9{,}8.}$$

337. Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν f καὶ κρατεῖται εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν. Νὰ εὑρεθῇ πῶς μεταβάλλεται ἡ μεγέθυνσις τοῦ ἁπλοῦ τούτου μικροσκοπίου συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως d.

Λύσις. Ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τοῦ φακοῦ, τότε, βάσει τοῦ σχήματος, ἡ γωνιακὴ μεγέθυνσις θὰ εἶναι

$$M = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tag{1}$$

ὅπου α_1 εἶναι ἡ γωνία ὁράσεως τοῦ εἰδώλου ἐξ ἀποστάσεως Δ καὶ α_2 ἡ γωνία ὁράσεως τοῦ ἀντικειμένου διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ ἐξ ἀποστάσεως δ (ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως). Βάσει τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν



$$\varepsilon\varphi\, \alpha_1 = \alpha_1 = \frac{E}{\Delta} \tag{2}$$

Ἐπίσης εἶναι $\varepsilon\varphi\, \alpha_2 = \alpha_2 = \dfrac{A}{\delta}$ (3)

Ἄρα ὁ τύπος (1) γράφεται

$$M = \frac{E}{A}\cdot\frac{\delta}{\Delta} \tag{4}$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς σπουδῆς τοῦ φακοῦ γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta = \Delta - d$, ὁ τύπος (5) δίδει

$$\frac{E}{A} = \frac{\Delta - d}{\alpha}$$

καὶ οὕτω ὁ τύπος (4) γράφεται

$$M = \frac{\Delta - d}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{\Delta} \qquad (6)$$

Ἐκ τοῦ τύπου $1/\alpha - 1/\beta = 1/f$, τῶν συγκλινόντων φακῶν, διὰ φανταστικὸν εἴδωλον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\Delta - d} = \frac{1}{f} \qquad (\beta = \Delta - d)$$

καὶ συνεπῶς λαμβάνομεν

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\Delta - d} \qquad (7)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ $1/\alpha$ εἰς τὸν τύπον (6) λαμβάνομεν μετὰ τὰς σχετικὰς πράξεις τὸν γενικὸν τύπον

$$\underline{M = \frac{\delta}{f} \cdot \left(1 - \frac{d}{\Delta}\right) + \frac{\delta}{\Delta}} \qquad (8)$$

338. Ἀντικείμενον 2 mm παρατηρεῖται διὰ μέσου ἁπλοῦ μικροσκοπίου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 cm. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ μικροσκοπίου. Τὸ εἴδωλον σχηματίζεται ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν, εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 27 cm. Ζητεῖται α) Πόσον τὸ μέγεθος τοῦ παρατηρουμένου εἰδώλου καὶ β) πόση ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ ἀντικείμενον διὰ μέσου τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν θὰ ἰσχύσῃ ὁ γενικὸς τύπος (8) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἤτοι

$$M = \frac{\delta}{f} \cdot \left(1 - \frac{d}{\Delta}\right) + \frac{\delta}{\Delta} \qquad (1)$$

ὅπου M ἡ μεγέθυνσις, δ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, d ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τοῦ φακοῦ, Δ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον εἴδωλον καὶ f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ (συγκλίνοντος) φακοῦ.

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ὅπου $d = f$, $\Delta = \delta$ καὶ $M = E/A$ λαμβάνομεν

$$\frac{E}{A} = \frac{\delta}{f} \cdot \left(1 - \frac{f}{\delta}\right) + 1 \qquad (2)$$

ἐξ οὗ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς E ἔχομεν

$$E = A \cdot \frac{\delta}{f} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3) $A = 0{,}2$ cm, $\delta = 27$ cm, $f = 2$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ παρατηρουμένου εἰδώλου εἶναι

$$\underline{E = 2{,}7 \text{ cm.}}$$

β) Ἐφ' ὅσον τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\delta = 27$ cm, ἡ γωνία ὁράσεως αὐτοῦ, ὡς πολὺ μικρά, θὰ εἶναι

$$\alpha_1 = \frac{E}{\delta} = \frac{2{,}7}{27} = 0{,}1 \text{ rad}$$

Ἦτοι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ ἀντικείμενον διὰ μέσου τοῦ φακοῦ εἶναι

$$\underline{\alpha_1 = 0{,}1 \text{ rad.}}$$

339. Τῇ βοηθείᾳ φωτεινοῦ θαλάμου τοποθετουμένου ἐπὶ μικροσκοπίου, παρατηρεῖ τις συγχρόνως βαθμολογημένην ὑαλίνην κλίμακα εἰς 1/100 mm, τιθεμένην ἐπὶ τῆς ἀντικειμενοφόρου πλακός, καὶ διῃρημένον κανόνα εἰς mm, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ. Διαπιστοῦται τότε ὅτι 12 διαιρέσεις τοῦ κανόνος καλύπτουν 3 διαιρέσεις τῆς κλίμακος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου.

Λύσις. Αἱ 12 διαιρέσεις τοῦ κανόνος εἶναι 12 mm καὶ συνεπῶς αἱ 3 διαιρέσεις τῆς κλίμακος εἶναι 0,03 mm. Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως τὸ μῆκος 0,03 mm, ὅταν τὸ βλέπωμεν διὰ μέσου τοῦ μικροσκοπίου φαίνεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm (ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως) ὅτι εἶναι 12 mm.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἀντικείμενον ἔχει μῆκος 0,03 mm, ἤτοι A = 0,03 mm, καὶ τὸ εἴδωλον τὸ παρατηρούμενον μέσῳ τοῦ μικροσκοπίου ἔχει μῆκος 12 mm, ἤτοι E = 12 mm.

Ἄρα ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου εὑρίσκεται ὅτι εἶναι

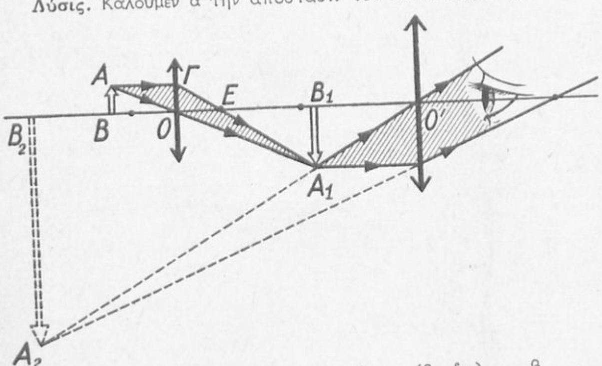
$$M = \frac{E}{A} = \frac{12}{0,03}$$

ἤτοι

$$\underline{M = 400.}$$

340. Εἰς σύνθετον μικροσκόπιον, ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχουν ἑστιακὰς ἀποστάσεις + 0,8 cm καὶ + 2,5 cm ἀντιστοίχως. Τὸ πραγματικὸν εἴδωλον (A′B′) τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εὑρίσκεται 16 cm ἀπ' αὐτοῦ. Καθορίσατε τὴν ὁλικὴν μεγέθυνσιν, ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς κρατῆται πλησίον τοῦ προσοφθαλμίου καὶ βλέπῃ τὸ φανταστικὸν εἴδωλον (A″B″) εἰς ἀπόστασιν 25 cm.

Λύσις. Καλοῦμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακὸν καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ εἰδώλου ἐπίσης ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Ἰσχύει ὁ τύπος



$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_\alpha} \; ($$

ὅπου f_α εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ, ὁπότε ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\beta \cdot f_\alpha}{\beta - f_\alpha} \qquad (2)$$

Ἤτοι ἡ μεγέθυνσις M_α τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι

$$M_\alpha = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(\beta - f_\alpha)}{f_\alpha} = \frac{\beta}{f_\alpha} - 1$$

Ἡ μεγέθυνσις M_π, ὡς γνωστόν, τοῦ προσοφθαλμίου, ἐφ' ὅσον οὗτος λειτουργεῖ ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον, εἶναι

$$M_\pi = 1 + \frac{\delta}{f_\pi} \qquad (4)$$

ὅπου δ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως καὶ f_π ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου.

Ἄρα ἡ μεγέθυνσις τοῦ συνθέτου μικροσκοπίου θὰ εἶναι

$$M = M_\alpha \cdot M_\pi = \left(\frac{\beta}{f_\alpha} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{\delta}{f_\pi}\right) \qquad (5)$$

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$M = \frac{(\beta - f_\alpha)\cdot(\delta + f_\pi)}{f_\alpha \cdot f_\pi} \tag{6}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $\beta = 16\,\text{cm}$, $f_\alpha = 0{,}8\,\text{cm}$, $f_\pi = 2{,}5\,\text{cm}$, $\delta = 25\,\text{cm}$, εὑρίσκομεν τὴν μεγέθυνσιν Μ τοῦ μικροσκοπίου ἴσην πρὸς

$$\underline{M = 209.}$$

341. Μικροσκόπιον ἔχει ἀντικειμενικὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 mm καὶ προσοφθάλμιον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 mm. Ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἀπὸ τὴν ἑστίαν τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι 15 cm. Πόση ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου.

Λύσις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΓΕ καὶ EA_1B_1 (βλ. σχῆμα Ἀσκήσεως 340), προκύπτει ὅτι

$$\frac{(A_1B_1)}{(O\Gamma)} = \frac{(EB_1)}{(OE)} \tag{1}$$

Ἢ ἐὰν θέσωμεν $(OE) = f_\alpha$, ἐπειδὴ $(O\Gamma) = (AB)$ καὶ (EB_1), εἶναι περίπου ἡ ἀπόστασις d τῶν δύο ἑστιῶν τοῦ μικροσκοπίου, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$M_\alpha = \frac{(A_1B_1)}{(AB)} = \frac{d}{f_\alpha} \tag{2}$$

ὅπου M_α εἶναι ἡ μεγέθυνσις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$M = M_\alpha \cdot M_\pi \tag{3}$$

ὅπου M_π ἡ μεγέθυνσις τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (3) λόγῳ τῆς (2) γίνεται

$$M = \frac{d}{f_\alpha}\cdot M_\pi$$

ἢ ἐπειδὴ ὡς γνωστὸν $M_\pi = 1 + \delta/f_\pi$, λαμβάνομεν

$$M = \frac{d}{f_\alpha}\cdot\left(1 + \frac{\delta}{f_\pi}\right) \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (4) $d = 15\,\text{cm}$, $f_\alpha = 0{,}5\,\text{cm}$, $f_\pi = 2\,\text{cm}$, $\delta = 25\,\text{cm}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 405.}$$

342. Μικροσκόπιον ἔχει προσοφθάλμιον καὶ ἀντικειμενικὸν φακὸν μὲ ἰσχεῖς ἀντιστοίχως 50 διοπτριῶν καὶ 250 διοπτριῶν. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 4,1 mm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ μεγέθυνσις καὶ β) ἡ ἀπόστασις ἥτις χωρίζει τὸν ἀντικειμενικὸν ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Τὸ εἴδωλον εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, ἤτοι 25 cm.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν Μ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ συνθέτου μικροσκοπίου, M_α τὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ M_π τὴν μεγέθυνσιν τοῦ προσοφθαλμίου, τότε ἰσχύει, ὡς γνωστόν, ὁ τύπος τῆς μεγεθύνσεως

$$M = M_\alpha \cdot M_\pi \tag{1}$$

Εὕρεσις τοῦ M_α. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν συγκλινόντων φακῶν ἔχομεν τὸν τύπον $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_\alpha} = P_\alpha$ καὶ ἐξ αὐτοῦ

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha \cdot P_\alpha - 1} \tag{2}$$

Ἄρα ἡ μεγέθυνσις τοῦ ἀντικειμενικοῦ θὰ εἶναι

$$M\alpha = \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot P\alpha - 1} \qquad (3)$$

Εὕρεσις τοῦ $M\pi$. Ἐὰν καλέσωμεν δ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως καὶ $P\pi$ τὴν ἰσχὺν τοῦ προσοφθαλμίου, τότε ἔχομεν ὡς γνωστὸν

$$M\pi = 1 + \delta \cdot P\pi \qquad (4)$$

Συνεπῶς βάσει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ὁ τύπος (1) γράφεται

$$M = \frac{1 + \delta \cdot P\pi}{\alpha \cdot P\alpha - 1} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5) $\alpha = 4{,}1\,mm = 4{,}1 \cdot 10^{-3}\,m$, $\delta = 25\,cm = 25 \cdot 10^{-2}\,m$, $P\alpha = 250\,m^{-1}$ καὶ $P\pi = 50\,m^{-1}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεγέθυνσις εἶναι

$$M = 500.$$

β) Ἡ ἀπόστασις l ἥτις χωρίζει τοὺς δύο φακοὺς προκύπτει ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως συνθέτου μικροσκοπίου

$$M = \frac{l \cdot \delta}{f\alpha \cdot f\pi} = l \cdot \delta \cdot P\alpha \cdot P\pi \qquad (6)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (6) ὡς πρὸς l λαμβάνομεν

$$l = \frac{M}{\delta \cdot P\alpha \cdot P\pi} \qquad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (7) $M = 500$, $\delta = 25 \cdot 10^{-2}\,m$, $P\alpha = 250\,m^{-1}$ καὶ $P\pi = 50\,m^{-1}$, εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν ἀντικειμενικοῦ-προσοφθαλμίου ἴσην πρὸς

$$l = 0{,}16\ m = 16\ cm.$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ὁ τύπος (6) ἰσχύει μόνον κατὰ προσέγγισιν, ἡ τιμὴ $l = 16\,cm$ ἔχει εὑρεθῆ καὶ αὐτὴ κατὰ προσέγγισιν. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πραγματικῆς τιμῆς, ὑπολογίζομεν τὴν ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ προσθέτομεν καὶ τὴν ἀπόστασιν α′ τοῦ εἰδώλου τούτου ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον. Ἤτοι

$$l = \beta + \alpha' \qquad (8)$$

Ἡ ἀπόστασις α′ εὑρίσκεται, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ εἴδωλον τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύνθετον μικροσκόπιον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\beta' = \delta$ ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Συνεπῶς ἔχομεν

$$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\delta} = P\pi \qquad (9)$$

καὶ

$$\alpha' = \frac{\delta}{\delta \cdot P\pi + 1} \qquad (10)$$

Ὁ τύπος (10) συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως δίδει: $\alpha' = 1{,}8\,cm$ καὶ ὁ τύπος (2) $\beta = 16{,}4\,cm$. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (8) θὰ ἔχωμεν

$$l = \beta + \alpha' = 18{,}2\,cm.$$

343. Φωτογραφικὴ μηχανὴ δίδει εἰκόνα φυσικοῦ μεγέθους ἑνὸς ἄνθους, ὅταν ὁ φακὸς εὑρίσκεται 50 cm ἀπὸ τὴν πλάκα. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ φακοῦ καὶ πλακὸς ὅταν φωτογραφίζεται σμῆνος πτηνῶν ἱπτάμενον ἀρκετὰ ὑψηλά.

Λύσις. Ὅταν ὁ φακὸς τῆς φωτογραφικῆς μηχανῆς δίδει εἴδωλον τοῦ ἄνθους ἐπὶ τῆς πλακὸς κατὰ τὸ αὐτὸ μέγεθος, τότε αἱ ἀποστάσεις εἰδώλου καὶ ἄνθους ἀπὸ τὸν φακὸν εἶναι ἴσαι, ἤτοι:

$\alpha = \beta$, καὶ συνεπῶς ἐκ τοῦ τύπου $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$, θέτοντες $\alpha = \beta$ λαμβάνομεν

$$f = \frac{\beta}{2} \tag{1}$$

Ὅταν ἀκολούθως φωτογραφίζεται τὸ σμῆνος τῶν πτηνῶν, ἐπειδὴ αὐτὰ εὑρίσκονται πολὺ μακράν, θὰ εἶναι $\alpha' = \infty$, $1/\alpha' = 0$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος $\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{f}$ τῶν φακῶν γράφεται

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\beta'} \tag{2}$$

ἐξ οὗ προκύπτει $\beta' = f$ καὶ βάσει τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν

$$\beta' = \frac{\beta}{2}$$

ὁπότε, διὰ $\beta = 50$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πλὰξ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸν φακὸν ἀπόστασιν

$$\underline{\beta' = 25 \text{ cm.}}$$

344. Φωτογραφικὴ μηχανὴ δίδει εὐκρινὲς εἴδωλον μεμακρυσμένου τοπίου, ὅταν ὁ φακὸς εὑρίσκεται 8 cm πρὸ τῆς πλακός. Ποία ρύθμισις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ λάβωμεν φωτογραφίαν χάρτου τοποθετουμένου 72 cm πρὸ τοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ φωτογραφικὴ μηχανὴ δίδει εἴδωλον μεμακρυσμένου ἀντικειμένου εἰς ἀπόστασιν 8 cm, ἕπεται ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ εἶναι $f = 8$ cm.

Ἐὰν συνεπῶς ὑποθέσωμεν ὅτι μετακινοῦμεν τὸν φακόν, κατὰ δ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ χάρτου, ἵνα λάβωμεν φωτογραφίαν αὐτοῦ, θὰ εἶναι προφανῶς $\alpha = 72 - \delta$ καὶ $\beta = 8 + \delta$.

Οὕτω ἐκ τοῦ τύπου τῶν συγκλινόντων φακῶν ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{72 - \delta} + \frac{1}{8 + \delta} = \frac{1}{8}$$

Λύοντες λοιπὸν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς δ, εὑρίσκομεν δύο τιμὰς ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ μικροτέρα εἶναι παραδεκτή, ἤτοι

$$\underline{\delta = 1 \text{ cm.}}$$

Ἄρα, ὁ φακὸς δέον νὰ ἀπομακρυνθῇ κατὰ 1 cm τῆς πλακός.

345. Ὑπολογίσατε τὴν μεγέθυνσιν τηλεσκοπίου, ἔχοντος ἀντικειμενικὸν καὶ προσοφθάλμιον φακὸν μὲ ἑστιακὰς ἀποστάσεις +60 cm καὶ +3 cm ἀντιστοίχως, ὅταν τοῦτο εἶναι ρυθμισμένον διὰ τὴν παρατήρησιν μεμακρυσμένων ἀντικειμένων.

Λύσις. Ὁ τύπος τῆς μεγεθύνσεως M τηλεσκοπίου, ὡς γνωστόν, εἶναι

$$M = \frac{f_\alpha}{f_\pi}$$

ὅπου f_α εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ f_π ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου διὰ $f_\alpha = 60$ cm καὶ $f_\pi = 3$ cm εὑρίσκομεν τὴν μεγέθυνσιν

$$\underline{M = 20.}$$

346. Διοπτρικὸν τηλεσκόπιον δίδει μεγέθυνσιν 150, ὅταν ρυθμίζεται διὰ τὴν παρατήρησιν μεμακρυσμένου ἀντικειμένου καὶ χρησιμοποιῇ προσοφθάλμιον ἑστιακῆς ἀποστάσεως + 5,2 cm. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη διὰ παρατήρησιν μεμακρυσμένου ἀντικειμένου, θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος τῆς μεγεθύνσεως

$$M = \frac{f_\alpha}{f_\pi} \quad (1)$$

ὅπου f_α εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ f_π ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου.

Συνεπῶς λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς f_α λαμβάνομεν

$$f_\alpha = f_\pi \cdot M \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) $f_\pi = 5{,}2\,\text{cm}$, $M = 150$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι

$$\underline{f_\alpha = 780\,\text{cm} = 7{,}8\,\text{m}.}$$

347. Εἰς ἀστρονομικὴν διόπτραν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ εἶναι 2,4 m. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου, ἵνα ἡ μεγέθυνσις τοῦ τηλεσκοπίου εἶναι 100. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ὀργάνου.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ὁ τύπος τῆς μεγεθύνσεως M τηλεσκοπίου, εἶναι

$$M = \frac{f_\alpha}{f_\pi}$$

ὅπου f_α εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ f_π ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς f_π λαμβάνομεν

$$f_\pi = \frac{f_\alpha}{M}$$

καὶ διὰ $f_\alpha = 2{,}4\,\text{m}$, $M = 100$, εὑρίσκομεν

$$\underline{f_\pi = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}.}$$

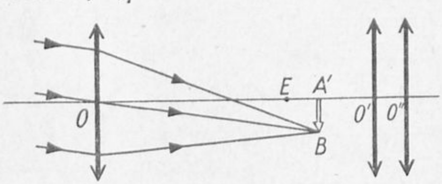
Ἐξ ἄλλου τὸ μῆκος l τῆς ἀστρονομικῆς διόπτρας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἑστιακῶν ἀποστάσεων, ἤτοι

$$\underline{l = f_\alpha + f_\pi}$$

Οὕτω διὰ $f_\alpha = 2{,}4\,\text{m}$ καὶ $f_\pi = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$ εὑρίσκομεν

$$\underline{l = 2{,}424\,\text{m}.}$$

348. Ἀστρονομικὴ διόπτρα εἶναι ἀρχικῶς ρυθμισμένη εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἐν συνεχείᾳ παρατηρεῖται μέσῳ αὐτῆς ἀντικείμενον. Ἵνα παρατηρηθῇ τὸ ἀντικείμενον εὐκρινῶς πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος κατὰ 1 cm ὡς πρὸς τὸν ἀντικειμενικόν. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον. Πόση ἡ μεγέθυνσις τῆς ἀστρονομικῆς διόπτρας. Δίδονται $f_\alpha = 120\,\text{cm}$, $f_\pi = 3\,\text{cm}$.



Λύσις. Ὅταν ἀρχικῶς ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ εἴδωλον τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς σχηματίζεται ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας E τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἀκολούθως, ὅταν παρατηρῆται ὄχι μεμακρυσμένον ἀντικείμενον τὸ εἴδωλον (A'B) σχηματίζεται πέραν τῆς κυρίας ἑστίας εἰς ἀπόστασιν (EA') = δ ἀπὸ αὐτὴν καὶ συνεπῶς δι' εὐκρινῆ παρατήρησιν τοῦ εἰδώλου τούτου, μέσῳ τοῦ προσοφθαλμίου, πρέπει ὁ προσοφθάλμιος νὰ ἀπομακρυνθῇ κατὰ τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν δ.

Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν, τότε ἡ ἀπόστασις β τοῦ εἰδώλου (A′ B) ἀπὸ αὐτόν, θὰ εἶναι $\beta = f_\alpha + \delta$ (ὅπου f_α ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{f_\alpha + \delta} = \frac{1}{f_\alpha} \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς α λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{f_\alpha (f_\alpha + \delta)}{\delta} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) διὰ $f_\alpha = 120$ cm καὶ $\delta = 1$ cm, εὑρίσκομεν

$$\alpha = 14520 \text{ cm} = 145,2 \text{ m}.$$

Ἡ μεγέθυνσις τῆς ἀστρονομικῆς διόπτρας ὅταν αὕτη εἶναι ρυθμισμένη εἰς ἄπειρον, δίδεται ὡς γνωστὸν ὑπὸ τοῦ τύπου

$$M = \frac{f_\alpha}{f_\pi}.$$

Οὕτω διὰ $f_\alpha = 120$ cm καὶ $f_\pi = 3$ cm εὑρίσκομεν

$$M = 40.$$

349. Ἀστρονομικὸν τηλεσκόπιον ἔχον ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως + 80 cm, ρυθμίζεται διὰ τὴν παρατήρησιν μεμακρυσμένων ἀντικειμένων. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος πρὸς τὰ ὀπίσω ἵνα ρυθμισθῇ δι' εὐκρινῆ παρατήρησιν ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 40 m.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ τηλεσκόπιον εἶναι ρυθμισμένον διὰ τὴν παρατήρησιν μεμακρυσμένων ἀντικειμένων, θὰ δίδῃ τὸ εἴδωλον τῶν ἀντικειμένων τούτων αἰσθητῶς ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν $f_\alpha = 80$ cm. Ὅταν ὅμως τοῦτο χρησιμοποιῆται διὰ τὴν παρατήρησιν ἀντικειμένου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 40$ m, θὰ δίδῃ εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν β, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f_\alpha}$, τῶν συγκλινόντων φακῶν ὅτι εἶναι

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f_\alpha}{\alpha - f_\alpha}$$

ὁπότε ἐὰν θέσωμεν $\alpha = 40$ m $= 4000$ cm καὶ $f_\alpha = 80$ cm, εὑρίσκομεν

$$\beta = 81,63 \text{ cm}.$$

Ἄρα, ὅταν παρατηρῆται ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 40 m, τότε τὸ εἴδωλον σχηματίζεται πέραν τῆς κυρίας ἑστίας καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὴν

$$x = \beta - f_\alpha = 1,63 \text{ cm}.$$

Δηλαδὴ πλησιάζει πρὸς τὸν προσοφθάλμιον κατὰ 1,63 cm. Ἵνα ἑπομένως γίνῃ τώρα εὐκρινὴς παρατήρησις, πρέπει ὁ προσοφθάλμιος φακὸς νὰ ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον εἴδωλον κατὰ τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν καὶ ἑπομένως νὰ μετακινηθῇ ἀπὸ τὴν θέσιν του κατὰ

$$x = 1,63 \text{ cm}.$$

350. Εἰς διόπτραν Γαλιλαίου ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm καὶ ὁ προσοφθάλμιος 2,5 cm. α) Πόση ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν ὅταν παρατηρῆται ἀντικείμενον λίαν μεμακρυσμένον τοῦ ὁποίου τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. β) Ποία μεταβολὴ ἐπέρχεται εἰς τὸ εἴδωλον τοῦτο ὅταν ἐξαχθῇ τοῦ σωλῆνος ὁ προσοφθάλμιος κατὰ 5 mm.

Λύσις. α) Ἐφ' ὅσον τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν $\delta = 25$ cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, ἕπεται ὅτι ὁ ἀντικειμενικὸς δίδει εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, τὸ ὁποῖον ἐπέχει θέσιν φανταστικοῦ ἀντικειμένου δι' αὐτόν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{f_\pi} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{f_\pi \cdot \delta}{f_\pi - \delta}$$

Θέτοντες λοιπὸν $f_\pi = 2{,}5$ cm καὶ $\delta = 25$ cm εὑρίσκομεν ὅτι

$$\alpha = -\,2{,}77 \text{ cm}.$$

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ τὸ παρατηρούμενον ἀντικείμενον εἶναι λίαν μεμακρυσμένον, ἕπεται ὅτι ὁ ἀντικειμενικὸς δίδει εἴδωλον (τὸ ὁποῖον ἐπέχει θέσιν φανταστικοῦ ἀντικειμένου διὰ τὸν προσοφθάλμιον) εἰς ἀπόστασιν $f_\alpha = 10$ cm. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη ἀπόστασις l τῶν δύο φακῶν εἶναι

$$l = f_\alpha + \alpha$$

ὁπότε διὰ $f_\alpha = 10$ cm καὶ $\alpha = -2{,}77$ cm εὑρίσκομεν

$$\underline{l = 7{,}23 \text{ cm}.}$$

β) Ἐὰν ὁ προσοφθάλμιος ἐξέλθῃ τοῦ σωλῆνος κατὰ d, τότε οὗτος θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου ἀπόστασιν α − d καὶ θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{1}{\alpha - d} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{f_\pi}$$

Λύοντες ὡς πρὸς x λαμβάνομεν

$$\underline{x = \frac{f_\pi\,(\alpha - d)}{f_\pi - \alpha + d}}$$

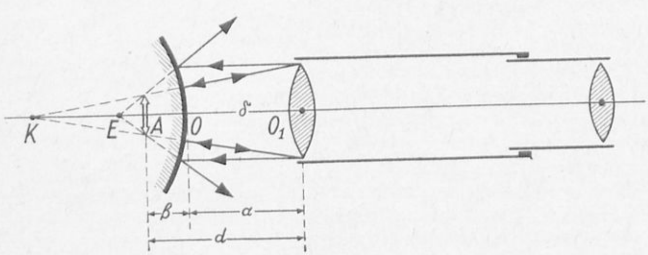
καὶ θέτοντες $f_\pi = 2{,}5$ cm, $\alpha = 2{,}77$ cm, $d = 5$ mm $= 0{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{x = +\,24{,}6 \text{cm}.}$$

Ἤτοι τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 24,6 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου καὶ ἔμπροσθεν αὐτοῦ.

351. Παρατηρητὴς ρυθμίζει διόπτραν ἵνα βλέπῃ εὐκρινῶς ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $d = 1{,}50$ m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ αὐτῆς. Μὴ μεταβαλλομένης πλέον τῆς ρυθμίσεως τῆς διόπτρας, διευθύνεται αὕτη κατὰ τὸν ἄξονα μικροῦ κυρτοῦ κατόπτρου. Ὅταν τὸ κάτοπτρον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\delta = 1{,}20$ m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῆς διόπτρας, παρατηρεῖται εὐκρινῶς ἐντὸς τῆς διόπτρας τὸ εἴδωλον τοῦ περιφερειακοῦ δακτυλίου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακόν. Ἐφ' ὅσον ἡ διόπτρα κατευθύνεται πρὸς τὸ κυρτὸν κάτοπτρον καὶ βλέπομεν μέσῳ αὐτῆς εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον τοῦ περιφερειακοῦ δακτυλίου τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, ἕπεται ὅτι τὸ κυρτὸν κάτοπτρον δίδει εἴδωλον τοῦ ἀντικειμενικοῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικόν· δηλαδὴ εἰς τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο προηγουμένως καὶ τὸ ἀντικείμενον.



Βάσει τοῦ σχήματος ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου (ἀντικειμενικὸς φακὸς) ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, εἶναι $\alpha = \delta$, ὅπου δ ἡ ἀπόστασις διόπτρας–κατόπτρου καὶ ἡ ἀπόστασις β τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τὸ κάτοπτρον εἶναι $\beta = d - \delta$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{\delta} - \frac{1}{d-\delta} = -\frac{1}{f} \tag{1}$$

Λύοντες ὡς πρὸς f λαμβάνομεν

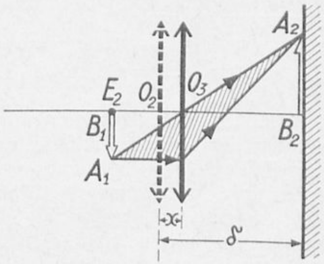
$$f = \frac{\delta\,(d-\delta)}{2\,\delta - d} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) $\delta = 1{,}20\,\text{m}$, $d = 1{,}50\,\text{m}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου εἶναι

$$f = 0{,}4\,\text{m}.$$

352. Παρατηρητὴς βλέπει ἀστέρα διὰ μέσου ἀστρονομικῆς διόπτρας τῆς ὁποίας αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου φακοῦ εἶναι ἀντιστοίχως 1 m καὶ 5 cm, ρυθμίζει δὲ ταύτην εἰς τρόπον ὥστε τὸ εἴδωλον νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἐπιθυμῶν νὰ λάβῃ μεγεθυσμένην φωτογραφίαν τοῦ ἀστέρος, τοποθετεῖ πρὸς τοῦτο εὐπαθῆ φωτογραφικὴν πλάκα εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετατεθῇ ὁ προσοφθάλμιος.

Λύσις. Ἔστω δ ἡ ἀπόστασις τῆς φωτογραφικῆς πλακὸς ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ O_2, ὅταν ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη ὥστε τὸ εἴδωλον νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ εἴδωλον (A_1B_1) τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ τὸ ὁποῖον παίζει ρόλον ἀντικειμένου διὰ τὸν προσοφθάλμιον θὰ σχηματίζεται ἐπὶ τῆς ἑστίας τοῦ προσοφθαλμίου καὶ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ αὐτὸν ἀπόστασιν f. Ὅταν θέλωμεν ὅμως νὰ πραγματοποιήσωμεν φωτογράφησιν τοῦ εἰδώλου, πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὸν προσοφθάλμιον πρὸς τὰ δεξιὰ εἰς τὴν θέσιν O_3, ἵνα λάβωμεν εἴδωλον πραγματικόν. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν πρὸς εὐκρινῆ σχηματισμὸν τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου, μετατοπίζεται ὁ προσοφθάλμιος κατὰ x, τότε μετατοπίζεται καὶ ἡ ἑστία του ἐπίσης κατὰ x καὶ ἑπομένως τὸ (A_1B_1) θὰ ἀπέχῃ τώρα ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον κατὰ $\alpha = f + x$, ἐνῷ τὸ εἴδωλον (A_2B_2) θὰ ἀπέχῃ ἀπ' αὐτοῦ κατὰ $\beta = \delta - x$.



Οὕτω ἐκ τοῦ τύπου $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$ τῶν συγκλινόντων φακῶν ἔχομεν

$$\frac{1}{f+x} + \frac{1}{\delta - x} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$x^2 - (\delta - f)\,x + f^2 = 0 \tag{2}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$x = \frac{\delta - f \pm \sqrt{(\delta - f)^2 - 4f^2}}{2} \tag{3}$$

καὶ διὰ $\delta = 50\,\text{cm}$ καὶ $f = 5\,\text{cm}$, εὑρίσκομεν δύο τιμὰς

$$x_1 = 44{,}5\,\text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad x_2 = 0{,}565\,\text{cm}.$$

Ἐκ τῶν δύο εὑρεθεισῶν τιμῶν, ἐπειδὴ μόνον ἡ μικροτέρα ἀντιστοιχεῖ εἰς μεγέθυνσιν, ἡ τιμὴ $x_1 = 44{,}5\,\text{cm}$ ἀπορρίπτεται καὶ ἔχομεν μόνον τὴν τιμὴν

$$x_2 = 0{,}565\,\text{cm}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

353. Συγκλίνων φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 1 cm. Ἐὰν ὁ φακὸς οὗτος πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ἁπλοῦν μικροσκόπιον, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν φακὸν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἀντικείμενον, ἵνα τὸ μεγεθυσμένον φανταστικὸν εἴδωλον σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Ποία ἡ μεγέθυνσις τοῦ φακοῦ τούτου. ('Απ. 0,962 cm, 26.)

354. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἁπλοῦ μικροσκοπίου διὰ νὰ ἔχῃ μεγέθυνσιν 20, ὅταν τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ.

('Απ. 1,32 cm, 1,25 cm.)

355. Χαράκτης χρησιμοποιεῖ φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 8 cm, τὸν ὁποῖον κρατεῖ πλησίον τοῦ ὀφθαλμοῦ του. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἐργασίαν του πρέπει νὰ εὑρίσκεται ὁ φακὸς διὰ νὰ τοῦ δίδῃ μεγέθυνσιν 4. ('Απ. 6 cm.)

356. Παρατηρεῖ τις ἀντικείμενον ὕψους 1 mm μὲ φακὸν ἀναγνώσεως ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2,5 cm. Ὁ παρατηρητὴς ἔχει τοὺς ὀφθαλμούς του προσηρμοσμένους εἰς τὸ ἄπειρον. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν βλέπει τὸ εἴδωλον. ('Απ. 0,04 rad ἢ $2^0\ 18'$.)

357. Παρατηρεῖ τις ἀντικείμενον διὰ μέσου φακοῦ ἀναγνώσεως, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 6 cm. Ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος εἰς 20 cm καὶ τοποθετημένος εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ζητεῖται 1) Ποία ἡ θέσις τοῦ ἀντικειμένου. 2) Ποία ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ καὶ ποία ἡ μεγέθυνσις, ἐὰν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 15 cm. 3) Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ ὅρασις εἶναι ρυθμισμένη εἰς ἄπειρον, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις τοῦ φακοῦ.

('Απ. 1'. $\alpha = 4{,}5$ cm. 2' $P = 20$ διοπτρίαι. $M = 3$. 3' 16,7 διοπτρίαι. $M = 4{,}2$.)

358. Διὰ μικροσκοπίου, ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 mm καὶ προσοφθαλμίου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 mm, προβάλλομεν διαφανῆ μικρομετρικὴν κλίμακα ἐπὶ πετάσματος τιθεμένου εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ προσοφθαλμίου καὶ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ εἶναι 150 mm. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ πετάσματος ἀπόστασις δύο ὑποδιαιρέσεων τῆς κλίμακος, αἵτινες ἐπ' αὐτῆς ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 0,01 mm. Ποία ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις.

('Απ. α' 9,2 cm. β' 9240.)

359. Εἰς σύνθετον μικροσκόπιον, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ εἶναι 1 cm καὶ τοῦ προσοφθαλμίου 5 cm. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο φακῶν εἶναι 20 cm. Ἐὰν ὁ παρατηρητὴς τοποθετῇ τὸ τελικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν ὀφθαλμόν του, ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακόν. Ποία ἡ μεγέθυνσις. ('Απ. 1,07 cm, 89.)

360. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς συνθέτου μικροσκοπίου ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 0,5 cm καὶ ὁ προσοφθάλμιος 2 cm. Ποία ἡ μεγίστη μεγέθυνσις τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ὅταν οἱ φακοὶ ἀπέχουν 10 cm. ('Απ. 206.)

361. Εἰς σύνθετον μικροσκόπιον, αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου εἶναι +0,5 cm καὶ +2 cm ἀντιστοίχως. Τὸ ὄργανον ρυθμίζεται διὰ τὴν εὐκρινῆ παρατήρησιν ἀντικειμένου ἀπέχοντος 0,52 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ. Ὑπολογίσατε τὴν μεγέθυνσιν τοῦ μικροσκοπίου, ἐὰν τὸ εἴδωλον γίνεται ὁρατὸν ὑπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ εἰς ἀπόστασιν 25 cm. ('Απ. 338.)

362. Φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ φακοῦ καὶ φωτογραφικῆς πλακὸς (φὶλμ) ὅταν τὸ ἀντικείμενον τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ φωτογραφηθῇ ἀπέχῃ 2 m ἀπὸ τὸν φακόν. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. ('Απ. 10,5 cm.)

363. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς διαφανοῦς εἰκόνος διασκοπικοῦ προβολέως καὶ τῆς ὀθόνης εἶναι 4 m. Ἐὰν ὁ φακὸς προβολῆς ἔχῃ ἑστιακὴν ἀπόστασιν 36 cm, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς διαφανοῦς εἰκόνος καὶ τοῦ φακοῦ. ('Απ. 40 cm.)

364. Εἰς μικρὸν τηλεσκόπιον ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι 28,4 cm. Ἐὰν ἡ μεγέθυνσις τοῦ τηλεσκοπίου τούτου εἶναι 20, ὅταν παράλληλοι ἀκτῖνες εἰσέρχωνται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ, εὕρατε τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις τοῦ προσοφθαλμίου καὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. ('Απ. 27 cm, 1,35 cm.)

365. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς διόπτρας τῶν ἐπιγείων ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 80 cm καὶ ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ εἶναι 20, ὅταν ρυθμίζεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε παράλληλοι ἀκτῖνες νὰ εἰσέρχωνται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ. Ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑκάστου φακοῦ τοῦ ἀνορθωτικοῦ συστήματος εἶναι 18 cm, ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τοῦ τηλεσκοπίου. Νὰ σχεδιασθῇ διάγραμμα τῆς πορείας τῶν ἀκτίνων. ('Απ. 156 cm.)

366. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἀστρονομικῆς διόπτρας κανονικῶς ρυθμισμένης δι' ἐμμέτρωπα ὀφθαλμόν, τίθεται ἀντικείμενον μήκους 2,5 cm, ὅπερ φωτίζεται ἰσχυρῶς. Λαμβάνεται ἐπὶ πετάσματος τιθεμένου ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου, εἴδωλον πραγματικόν, μήκους 0,5 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγέθυνσις τῆς διοπτρίας. ('Απ. 50.)

367. Διόπτρα Γαλιλαίου τῆς ὁποίας ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχουν ἑστιακὴν ἀπόστασιν $f_1 = 8$ cm καὶ $f_2 = -2$ cm εἶναι ἀνεστίαστος, δηλ. τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ ἀντικειμένου (ἀστιγματικὸν σύστημα). Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν ἵνα ληφθῇ εἴδωλον πραγματικὸν τοῦ Ἡλίου ἐπὶ πετάσματος ἀπέχοντος 20 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Πόση ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τούτου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 32'. ('Απ. Αὔξησις τῆς ἀποστάσεως κατὰ 0,18 cm, διάμετρος εἰδώλου 0,82 cm.)

368. Ἀστρονομικὴ διόπτρα συνίσταται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm καὶ διαμέτρου 5 cm καὶ προσοφθάλμιον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 cm καὶ διαμέτρου 1 cm, εἶναι δὲ ρυθμισμένη εἰς τὸ ἄπειρον. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας. β) Ἡ θέσις καὶ ἡ διάμετρος τοῦ προσοφθαλμίου κύκλου (εἴδωλον τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἐντὸς τοῦ προσοφθαλμίου).

('Απ. α' Μ = 50. β' 1,02 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου, 1 mm διαμέτρου.)

369. Διόπτρα Γαλιλαίου συνίσταται ἀπὸ προσοφθάλμιον καὶ ἀντικειμενικὸν φακὸν τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι ἀντιστοίχως 10 cm καὶ 2 cm. Μυωπικὸς ὀφθαλμὸς τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 10 cm παρατηρεῖ ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 10 m. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον φακόν, καὶ πόση ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ.

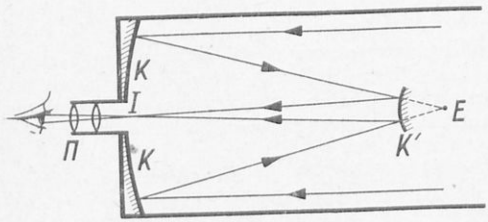
('Απ. 7,6 cm, 4.)

370. Τὰ δεδομένα διόπτρας εἶναι τὰ ἀκόλουθα: Ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀντικειμενικοῦ 1,20 m, διάμετρος ἀντικειμενικοῦ 10 cm, ἑστιακὴ ἀπόστασις προσοφθαλμίου 4 cm, διάμετρος προσοφθαλμίου 1,5 cm. Ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη εἰς τὸ ἄπειρον.

Νὰ ὑπολογισθοῦν 1) Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν. 2) Ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ προσοφθαλμίου κύκλου.

(Ἀπ. 1' M=30, 124 cm. 2' 1,33 mm ὄπισθεν ἑστιακοῦ ἐπιπέδου προσοφθαλμίου, 3,33 mm.)

371. Εἰς κατοπτρικὸν τηλεσκόπιον (βλ. σχῆμα) παράλληλος δέσμη φωτὸς προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου ΚΚ συγκλίνει σχηματίζουσα τὴν ἑστίαν εἰς σημεῖον Ε. Πρὸ τῆς ἑστίας τοποθετεῖται κυρτὸν κάτοπτρον Κ', οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζεται πραγματικὸν εἴδωλον εἰς σημεῖον Ι εὑρισκόμενον εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ἐὰν τὸ κοῖλον κάτοπτρον ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 400 cm, τὸ δὲ κυρτὸν κάτοπτρον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὴν ἑστίαν, πόση εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κυρτοῦ κατόπτρου. (Ἀπ. –10,26 cm.)



ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

372. Φακὸς ἀναγνώσεως, ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 4 cm. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ. Νὰ ὑπολογισθοῦν 1) Ἡ ἰσχὺς καὶ ἡ μεγέθυνσις. 2) Ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν διὰ μέσου τοῦ φακοῦ ἀντικείμενον 1 mm μήκους κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς rad καὶ πρῶτα λεπτά.

373. Φακὸς ἀναγνώσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν 1) ἡ ἰσχύς, 2) ἡ μεγέθυνσις, 3) ἡ μεγέθυνσις διὰ μυωπικὸν ὀφθαλμὸν τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 10 cm.

374. Παρατηροῦμεν ἀντικείμενον μήκους 4 mm διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ ἀκολούθως διὰ μεγεθυντικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 mm. Τὸ ἀντικείμενον ἔχει τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτόν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ὁράσεως διὰ παρατήρησιν α) Διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ, τοῦ ἀντικειμένου τιθεμένου εἰς ἀπόστασιν 270 mm ἀπ' αὐτοῦ. β) Διὰ τοῦ μεγεθυντικοῦ φακοῦ, τοῦ ὀφθαλμοῦ προσηρμοσμένου εἰς τὸ ἄπειρον. γ) Διὰ τοῦ αὐτοῦ φακοῦ καὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ προσηρμοσμένου ὥστε νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς εἰς ἀπόστασιν 270 mm. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ φακοῦ καὶ ὀφθαλμοῦ εἶναι 20 mm.

375. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γραμμικὴ καὶ ἐπιφανειακὴ μεγέθυνσις μεγεθυντικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως f δι' ὀφθαλμὸν τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι δ.

376. Ἀντικείμενον ὁρᾶται διὰ μέσου μεγεθυντικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 6 cm καὶ τὸ εἴδωλον σχηματίζεται 25 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Εὕρατε τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου.

377. Μικροσκόπιον συνίσταται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1 cm καὶ προσοφθάλμιον φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 cm. 1) Ἀντικείμενον τοποθετεῖται 1,1 cm ἔμπροσθεν τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ προσοφθάλμιος διὰ νὰ λάβωμεν εἴδωλον εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄπειρον. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ὀργάνου ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας. 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγέθυνσις διὰ παρατηρητὴν τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 20 cm.

378. Σύνθετον μικροσκόπιον ἔχει ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 mm καὶ προσοφθάλμιον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 48 mm. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο φακῶν εἶναι 192 mm. Ζητεῖται α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ ἄπειρον. β) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ ἀντικειμενικός, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου ἀπόστασις, ἐὰν ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος δι' εὐκρινῆ ὅρασιν εἰς ἀπόστασιν 250 mm καὶ τὸ ὀπτικὸν κέντρον αὐτοῦ συμπίπτει πρὸς τὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Ποία ἡ μεγέθυνσις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

379. Τὸ ἀντικειμενικὸν σύστημα συνθέτου μικροσκοπίου ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 2 cm καὶ τὸ προσοφθάλμιον ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 3 cm. Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον τοποθετῆται εἰς ἀπόστασιν 2,5 cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν καὶ τὸ τελικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, ποία ἡ μεγέθυνσις.

380. Φακοὶ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 3 cm καὶ 6,25 cm χρησιμοποιοῦνται ἀντιστοίχως εἰς τὸ ἀντικειμενικὸν καὶ προσοφθάλμιον σύστημα μικροσκοπίου, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ὀπτικῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι 26 cm. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 3,5 cm ἀπὸ τὸν ἀντικειμενικὸν φακόν. Εὕρατε τὴν θέσιν καὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ εἰδώλου καὶ ἀποδώσατε διάγραμμα τῆς πορείας τῶν ἀκτίνων.

381. Ὁ προσοφθάλμιος καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς μικροσκοπίου ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν 20 cm. Ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 5 mm καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἰσχὺν 50 διοπτριῶν, πρόκειται δὲ δι' αὐτῶν νὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου ἐπὶ πετάσματος, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. 1) Πόση ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ καὶ πόση μεγέθυνσις ἐπιτυγχάνεται διὰ ταύτης τῆς διατάξεως προβολῆς. 2) Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἐὰν τὸ μικροσκόπιον χρησιμοποιῆται ὑπὸ ὀφθαλμοῦ προσηρμοσμένου εἰς τὸ ἄπειρον.

382. Ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ προσοφθάλμιος μικροσκοπίου ἔχουν ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις 5 mm καὶ 25 mm, τοποθετεῖται δὲ ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν 5,15 mm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ζητεῖται : α) Πόση ἡ μεγέθυνσις τοῦ ἀντικειμενικοῦ. β) Ποία ἡ θέσις τοῦ ὑπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου. γ) Ὅταν σχηματισθῇ εὐκρινὲς εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου, πόσον εἶναι τότε τὸ μῆκος τοῦ μικροσκοπίου. δ) Πόση εἶναι τότε ἡ μεγέθυνσις.

383. Σύνθετον μικροσκόπιον συνίσταται ἀπὸ προσοφθάλμιον καὶ ἀντικειμενικὸν τῶν ὁποίων αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις εἶναι 20 mm καὶ 8 mm ἀντιστοίχως. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν α) Ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου. β) Ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ. γ) Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ ἀντικειμένου καὶ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κυρίων ἑστιῶν προσοφθαλμίου καὶ ἀντικειμενικοῦ εἶναι 20 cm. Τὸ εἴδωλον εὑρίσκεται εἰς ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως 20 cm.

384. Ἡ ἐμπροσθία ἐπιφάνεια τοῦ συναγωγοῦ προβολέως εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 6 m ἀπὸ πετάσματος προβολῆς. Προκειμένου νὰ ἐκτελέσωμεν δι' αὐτοῦ διασκοπικὴν προβολὴν διαφανοῦς εἰκόνος διαστάσεων 8,5 cm × 8,5 cm ἐπὶ τοῦ πετάσματος, ζητεῖται α) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ συναγωγοῦ πρέπει νὰ τεθῇ ἁπλοῦς φακὸς προβολῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm, ἵνα πραγματοποιήσωμεν ἐπὶ τοῦ πετάσματος εὐκρινὲς εἴδωλον τῆς εἰκόνος. β) Ποία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰδώλου.

385. Τηλεφωτογραφικὸς φακὸς συνίσταται ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως 6 cm τοποθετημένον εἰς ἀπόστασιν 4 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 2,5 cm. α) Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου ἑνὸς μεμακρυσμένου ἀντικειμένου. β) Συγκρίνατε τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τοῦ σχηματιζομένου ὑπ' αὐτοῦ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν φακῶν μὲ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παραχθῇ ἀπὸ τὸν συγκλίνοντα φακὸν μόνον.

386. Διὰ διόπτρας Γαλιλαίου παρατηροῦμεν ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 15 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ εἶναι 7,2 cm καὶ ὁ παρατηρητὴς ἔχει ρυθμίσει τὸ μῆκος τῆς διόπτρας διὰ τὴν παρατήρησιν εἰς 9 cm. Ποία ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ παρατηρητοῦ.

387. Παρατηρεῖται ὁ Ἥλιος διὰ μέσου ἀστρονομικῆς διόπτρας τῆς ὁποίας ὁ προσοφθάλμιος καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχουν ἀντιστοίχως ἰσχεῖς 1 διοπτρίας καὶ 50 διοπτριῶν. Λαμβάνεται εὐκρινὲς εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἐκ τοῦ προσοφθαλμίου. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ προσοφθαλμίου καὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ.

388. Μὲ διόπτραν τοῦ Γαλιλαίου, τῆς ὁποίας ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχουν ἑστιακὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως 20 cm καὶ 4 cm, παρατηρητὴς ἐξετάζει ἀντικείμενον λίαν μεμακρυσμένον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν καὶ ἡ μεγέθυνσις εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις. 1) Διὰ παρατηρητὴν προσβλέποντα εἰς τὸ ἄπειρον. 2) Διὰ παρατηρητὴν προσβλέποντα εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ.

389. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου καὶ ἀντικειμενικοῦ διόπτρας τοῦ Γαλιλαίου εἶναι ἀντιστοίχως $f_1 = 15$ cm καὶ $f_2 = -5$ cm. Ἡ διόπτρα εἶναι ἀνεστίαστος, δηλ. τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ ἀντικειμένου (ἀστιγματικὸν σύστημα). 1) Ποῖον τὸ μῆκος της. 2) Ποία ἡ μεγέθυνσίς της. 3) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ὁρᾶται δίσκος διαμέτρου 10 cm, τοποθετημένος εἰς ἀπόστασιν 10 m.

390. α) Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ διόπτραν Γαλιλαίου μὲ μεγέθυνσιν 4. Τὸ μῆκος τῆς διόπτρας (ἀπόστασις μεταξὺ ἀντικειμενικοῦ καὶ προσοφθαλμίου) εἶναι ἴσον πρὸς 0,15 m. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου καὶ πόση τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ. Οἱ ὑπολογισμοὶ νὰ γίνουν διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὁράσεως εἰς τὸ ἄπειρον ἑνὸς κανονικοῦ ὀφθαλμοῦ. β) Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς καὶ ὁ προσοφθάλμιος ἔχουν τὴν μίαν ὄψιν ἐπίπεδον καὶ τὴν ἄλλην σφαιρικήν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,5. γ) Μὲ τὴν οὕτω κατασκευαζομένην διόπτραν, παρατηρεῖ τις ἀντικείμενον τοποθετημένον εἰς ἀπόστασιν 6 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ προσοφθάλμιος.

390α. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἀστρονομικῆς διόπτρας ἀποτελεῖται ἀπὸ συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως F. Ὁ προσοφθάλμιος εἶναι συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 2$ cm. 1) Ἡ μεγέθυνσις ἡ λαμβανομένη διὰ παρατηρητὴν προσβλέποντα εἰς τὸ ἄπειρον εἶναι ἴση πρὸς 45. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ F. 2) Λαμβάνεται εἴδωλον τελικόν, ὀρθὸν καὶ φανταστικόν, ἀντικαθιστῶντες τὸν προηγούμενον προσοφθάλμιον ἀπὸ σύστημα δύο συγκεντρωτικῶν φακῶν Φ_1 καὶ Φ_2. Ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν ἀντικειμενικὸν Φ_1 ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $f_1 = 4$ cm καὶ ὁ ἕτερος $f_2 = 2$ cm. Ἡ ἀπόστασις Φ_1 καὶ Φ_2 τῶν δύο φακῶν εἶναι 10 cm. Ἡ διόπτρα εἶναι ρυθμισμένη εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρεῖ εἰς τὸ ἄπειρον διὰ μέσῳ τοῦ Φ_2. Ποῖον εἶναι τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς διόπτρας καὶ ποία ἡ μεγέθυνσις αὐτῆς.

('Απ. 1' F = 90 cm. 2' 108 cm, M = 45.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

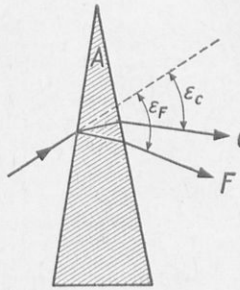
ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

391. Ποία ἡ γωνία μεταξὺ τῶν φασματικῶν γραμμῶν C (ἐρυθρὰ περιοχὴ) καὶ F (κυανὴ περιοχὴ) ἡ παραγομένη ὑπὸ λεπτοῦ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου τοῦ ὁποίου ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι 2^0. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς πυριτυάλου διὰ τὰς γραμμὰς C καὶ F εἶναι 1,644 καὶ 1,664 ἀντιστοίχως.

Λύσις. Ὁ τύπος τοῦ λεπτοῦ πρίσματος ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὴν γωνίαν ἐκτροπῆς ε εἶναι

$$\varepsilon = A \cdot (n-1) \qquad (1)$$



ὅπου A εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος καὶ n ὁ δείκτης διαθλάσεως αὐτοῦ.

Ἐὰν καλέσωμεν n_F καὶ n_C τοὺς δείκτας διαθλάσεως τοῦ πρίσματος διὰ τὰς φασματικὰς γραμμὰς F καὶ C, τότε ἡ γωνία ἐκτροπῆς διὰ τὰς ἀνωτέρω γραμμὰς θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\varepsilon_F = A \cdot (n_F - 1) \quad (2) \qquad \varepsilon_C = A \cdot (n_C - 1) \quad (3)$$

καὶ ἑπομένως ἡ γωνία μεταξὺ τῶν δύο φασματικῶν γραμμῶν θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon_F - \varepsilon_C = A \cdot (n_F - n_C) \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) $A = 2^0$, $n_F = 1{,}664$, $n_C = 1{,}644$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{\varepsilon_F - \varepsilon_C = 0{,}04^0.}$$

392. Πρῖσμα ἐκ πυριτυάλου γωνίας 60^0 ἔχων δείκτην διαθλάσεως $n_D = 1{,}6222$ διὰ τὴν D γραμμὴν καὶ $n_F = 1{,}6320$ διὰ τὴν F γραμμήν, τίθεται εἰς τὴν θέσιν ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ τὴν D γραμμήν. Εὕρατε τὰς ἐκτροπὰς διὰ τὰς γραμμὰς D καὶ F, ὅταν ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς εἶναι δέσμη παραλλήλων ἡλιακῶν ἀκτίνων.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ πρῖσμα εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ τὴν D γραμμήν, θὰ εἶναι β = γ, καὶ συνεπῶς ἐκ τοῦ τύπου A = β + γ λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{A}{2} \qquad (1)$$

καὶ οὕτω ὁ τύπος τοῦ δείκτου διαθλάσεως διὰ τὴν D γραμμὴν γράφεται

$$n_D = \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{ημ}\,\dfrac{A}{2}} \qquad (2)$$

ὅπου α εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως. Λύοντες τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς ημ α λαμβάνομεν

$$\text{ημ}\,\alpha = n_D \cdot \text{ημ}\,\frac{A}{2} \qquad (3)$$

καὶ διὰ $n_D = 1{,}6222$, $A = 60^0$, προκύπτει

$$\underline{\alpha = 54^0\ 12'.}$$

Ἡ γωνία ἐκτροπῆς $\varepsilon_{\varepsilon\lambda}$ εἶναι ἴση πρὸς $\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = \alpha + \delta - A$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha = \delta$ ἔχομεν

$$\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 2\alpha - A$$

ὁπότε θέτοντες $\alpha = 54^0\ 12'$ καὶ $A = 60^0$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη γωνία ἐκτροπῆς διὰ τὴν γραμμὴν D εἶναι

$$\underline{\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = 48^0\ 24'.}$$

Ἡ γωνία προσπτώσεως διὰ τὴν F γραμμὴν θὰ εἶναι προφανῶς ἡ αὐτή, ἤτοι $\alpha = 54^0\ 12'$. Οὕτω ἐκ τοῦ τύπου

$$n_F = \frac{\eta\mu\ \alpha}{\eta\mu\ \beta'}$$

τοῦ δείκτου διαθλάσεως διὰ τὴν F γραμμήν, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς ημ β′ λαμβάνομεν

$$\eta\mu\ \beta' = \frac{\eta\mu\ \alpha}{n_F}$$

καὶ θέτοντες $\alpha = 54^0\ 12'$, $n_F = 1{,}632$, εὑρίσκομεν $\beta' = 29^0\ 48'$.

Γνωστοῦ δὲ ὄντος ὅτι $A = \beta' + \gamma'$, λαμβάνομεν $\gamma' = 30^0\ 12'$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου

$$n_F = \frac{\eta\mu\ \delta}{\eta\mu\ \gamma'}$$

λύοντες ὡς πρὸς ημ δ ἔχομεν

$$\eta\mu\ \delta = n_F \cdot \eta\mu\ \gamma'$$

καὶ διὰ $n_F = 1{,}632$, $\gamma' = 30^0\ 12'$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\delta = 55^0\ 11'.}$$

Ἄρα ἡ γωνία ἐκτροπῆς, ἐπειδὴ θὰ εἶναι $\varepsilon = \alpha + \delta - A$, εὑρίσκεται ἴση πρὸς

$$\underline{\varepsilon = 49^0\ 23'.}$$

393. Πρόκειται νὰ συνδυασθῇ πρῖσμα λεπτὸν ἐκ στεφανυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 3^0 πρὸς πρῖσμα λεπτὸν ἐκ πυριτυάλου, ὥστε νὰ παρέχῃ ἀχρωματικὸν πρῖσμα διὰ τὴν ἐρυθρὰν γραμμὴν C καὶ τὴν κυανὴν F. Ζητεῖται α) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου. β) Ποία ἡ ὑπὸ τοῦ ἀχρωματικοῦ πρίσματος παραγομένη ἐκτροπὴ διὰ τὴν κιτρίνην γραμμὴν D (θεωροῦμεν ὅτι εἶναι ἡ μέση ἀκτὶς μεταξὺ τῶν γραμμῶν C καὶ F). Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου διὰ τὰς γραμμὰς C, D, F, εἶναι $n_C = 1{,}514$, $n_D = 1{,}517$, $n_F = 1{,}523$, ἐνῷ τοῦ ἐκ πυριτυάλου πρίσματος: $n'_C = 1{,}644$, $n'_D = 1{,}650$, $n'_F = 1{,}664$.

Λύσις. α) Ἔστω Α ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου καὶ n_F, n_C, οἱ δεῖκται διαθλάσεως αὐτοῦ διὰ τὰς γραμμὰς F καὶ C ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὸ πρῖσμα εἶναι λεπτόν, αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι ἐκτροπῆς διὰ τὰς ἐν λόγῳ γραμμὰς θὰ εἶναι

$$\varepsilon_F = A \cdot (n_F - 1) \qquad (1) \qquad\qquad \varepsilon_C = A \cdot (n_C - 1) \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἐὰν Α′ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου καὶ n'_F, n'_C, οἱ δεῖκται διαθλάσεως αὐτοῦ διὰ τὰς γραμμὰς F καὶ C ἀντιστοίχως, τότε αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι ἐκτροπῆς θὰ εἶναι

$$\varepsilon'_F = A' \cdot (n'_F - 1) \qquad (3) \qquad\qquad \varepsilon'_C = A' \cdot (n'_C - 1) \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, τὴν γωνίαν ἡ ὁποία σχηματίζεται μεταξὺ τῶν γραμμῶν F καὶ C, κατόπιν διαθλάσεως μέσῳ τοῦ πρίσματος ἐκ στεφανυάλου, ἤτοι

$$\varepsilon_F - \varepsilon_C = A \cdot (n_F - n_C) \qquad (5)$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν γωνίαν ἡ ὁποία σχηματίζεται μεταξὺ τῶν γραμμῶν F καὶ C, κατόπιν διαθλάσεως μέσῳ τοῦ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου, ἤτοι

$$\varepsilon'_F - \varepsilon'_C = A' \cdot (n'_F - n'_C) \qquad (6)$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως τὸ σύστημα τῶν πρισμάτων ἀχρωματικὸν πρέπει νὰ εἶναι

$$\varepsilon_F - \varepsilon_C = \varepsilon'_F - \varepsilon'_C \qquad (7)$$

καὶ συνεπῶς προκύπτει ἡ σχέσις

$$A \cdot (n_F - n_C) = A' \cdot (n'_F - n'_C) \qquad (8)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (8) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην γωνίαν A' καὶ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον

$$\underline{A' = A \cdot \frac{n_F - n_C}{n'_F - n'_C}} \qquad (9)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (8) $A = 3^0$, $n_F = 1{,}523$, $n_C = 1{,}514$, $n'_F = 1{,}664$, $n'_C = 1{,}644$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{A' = 1{,}35^0.}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν n_D καὶ n'_D τοὺς δείκτας διαθλάσεως ἀντιστοίχως τῶν πρισμάτων ἐκ στεφανυάλου διὰ τὴν γραμμὴν D θὰ ἔχωμεν

$$\varepsilon_D = A \cdot (n_D - 1) \quad (10) \qquad \text{καὶ} \qquad \varepsilon'_D = A' \cdot (n_D - 1) \quad (11)$$

Ἑπομένως ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε τῆς γραμμῆς D, κατόπιν διαθλάσεως μέσῳ τῶν δύο πρισμάτων (αἱ διαθλαστικαὶ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντιθέτως τοποθετημέναι), θὰ εἶναι

$$\varepsilon = \varepsilon_D - \varepsilon'_D = A \cdot (n_D - 1) - A' \, (n'_D - 1) \qquad (12)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (12), $A = 3^0$, $A' = 1{,}35^0$, $n_D = 1{,}517$, $n'_D = 1{,}650$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{\varepsilon = 0{,}674^0.}$$

394. Συνενοῦνται πρὸς σχηματισμὸν ἀχρωματικοῦ συστήματος δύο φακοί, ὁ εἷς συγκλίνων ἐκ στεφανυάλου ($n_{\iota\omega\delta} = 1{,}54$, $n_{\varepsilon\rho} = 1{,}52$) ἴσων ἀκτίνων καμπυλότητος R, ὁ ἕτερος ἀποκλίνων ἐκ πυριτυάλου ($n'_{\iota\omega\delta} = 1{,}65$, $n'_{\varepsilon\rho} = 1{,}61$) τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια ἥτις ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ εἶναι ἀκτῖνος καμπυλότητος R. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῆς δοθείσης ἀκτῖνος καμπυλότητος ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος R' τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ.

Λύσις. Ἐκ τῆς συνενώσεως τῶν δύο φακῶν θὰ προέλθῃ σύστημα φακῶν τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἑστιακὰς ἀποστάσεις $F_{\iota\omega\delta}$ διὰ τὸ ἰῶδες καὶ $F_{\varepsilon\rho}$ διὰ τὸ ἐρυθρόν.

Ἵνα τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀχρωματικόν, πρέπει ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος νὰ εἶναι ἄπειρος καὶ συνεπῶς ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ μηδέν. Ἤτοι

$$\frac{1}{F_{\iota\omega\delta}} - \frac{1}{F_{\varepsilon\rho}} = 0 \qquad (1)$$

Καλοῦμεν $n_{\iota\omega\delta}$, $n_{\varepsilon\rho}$ τοὺς δείκτας διαθλάσεως τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ διὰ τὸ ἰῶδες καὶ ἐρυθρὸν φῶς ἀντιστοίχως καὶ R τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς κοινῆς κυρτῆς ἐπιφανείας. Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f_{\iota\omega\delta}} = (n_{\iota\omega\delta} - 1) \cdot \frac{2}{R} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{f_{\varepsilon\rho}} = (n_{\varepsilon\rho} - 1) \cdot \frac{2}{R} \quad (3)$$

'Επίσης καλοῦμεν $n'_{\iota\omega\delta}$, $n'_{\epsilon\rho}$, τοὺς δείκτας διαθλάσεως τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ διὰ τὸ ἰῶδες καὶ ἐρυθρὸν ἀντιστοίχως καὶ R' τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς κοίλης αὐτοῦ ἐπιφανείας. Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f'_{\iota\omega\delta}} = (n'_{\iota\omega\delta} - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{f'_{\epsilon\rho}} = (n'_{\epsilon\rho} - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad (5)$$

'Επειδὴ ὅμως πρόκειται περὶ συστήματος φακῶν ἐν ἐπαφῇ θὰ εἶναι

$$\frac{1}{f_{\iota\omega\delta}} - \frac{1}{f'_{\iota\omega\delta}} = \frac{1}{F_{\iota\omega\delta}} \quad \text{ἢ} \quad (n_{\iota\omega\delta} - 1)\cdot\frac{2}{R} - (n'_{\iota\omega\delta} - 1)\cdot\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{F_{\iota\omega\delta}} \quad (6)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{1}{f_{\epsilon\rho}} - \frac{1}{f'_{\epsilon\rho}} = \frac{1}{F_{\epsilon\rho}} \quad \text{ἢ} \quad (n_{\epsilon\rho} - 1)\cdot\frac{2}{R} - (n'_{\epsilon\rho} - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{F_{\epsilon\rho}} \quad (7)$$

Λόγῳ ὅμως τῆς σχέσεως (1) θὰ ἔχωμεν

$$(n_{\iota\omega\delta} - n_{\epsilon\rho})\cdot\frac{2}{R} - (n'_{\iota\omega\delta} - n'_{\epsilon\rho})\cdot\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = 0 \quad (8)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R' λαμβάνομεν

$$\underline{R' = R\cdot\frac{(n'_{\iota\omega\delta} - n'_{\epsilon\rho})}{2\cdot(n_{\iota\omega\delta} - n_{\epsilon\rho}) - (n'_{\iota\omega\delta} - n'_{\epsilon\rho})}} \quad (9)$$

'Εὰν εἰς τὸν τύπον (9) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $n'_{\iota\omega\delta}$, $n'_{\epsilon\rho}$, $n_{\iota\omega\delta}$ καὶ $n_{\epsilon\rho}$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{R' = \infty}$$

Συνεπῶς ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ εἶναι ἐπίπεδος.

395. Παράλληλος δέσμη ἀκτίνων λευκοῦ φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ συγκλίνοντος φακοῦ, αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ ὁποίου εἶναι + 32 cm καὶ + 48 cm. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως διὰ τὰς φασματικὰς γραμμὰς A (ἐρυθρὰ) καὶ H (ἰώδης) εἶναι 1,578, καὶ 1,614 ἀντιστοίχως. Καθορίσατε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν ἑστιῶν τῶν ἐρυθρῶν καὶ τῶν ἰωδῶν ἀκτίνων.

Λύσις. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις f ἑνὸς φακοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

'Εὰν καλέσωμεν $f_{\epsilon\rho}$ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ διὰ τὴν ἐρυθρὰν ἀκτινοβολίαν καὶ $n_{\epsilon\rho}$ τὸν δείκτην διαθλάσεως αὐτοῦ διὰ τὴν ἰδίαν ἀκτινοβολίαν, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται

$$\frac{1}{f_{\epsilon\rho}} = (n_{\epsilon\rho} - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $f_{\epsilon\rho}$ λαμβάνομεν

$$f_{\epsilon\rho} = \frac{R_1\cdot R_2}{(n_{\epsilon\rho} - 1)\cdot(R_1 + R_2)} \quad (3)$$

'Επίσης ἐὰν καλέσωμεν $f_{\iota\omega\delta}$ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ διὰ τὴν ἰώδη ἀκτινοβολίαν καὶ $n_{\iota\omega\delta}$ τὸν δείκτην διαθλάσεως διὰ τὴν ἰδίαν ἀκτινοβολίαν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{f_{\iota\omega\delta}} = (n_{\iota\omega\delta} - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad f_{\iota\omega\delta} = \frac{R_1 \cdot R_2}{(n_{\iota\omega\delta} - 1) \cdot (R_1 + R_2)} \quad (5)$$

᾿Αφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (5) προκύπτει

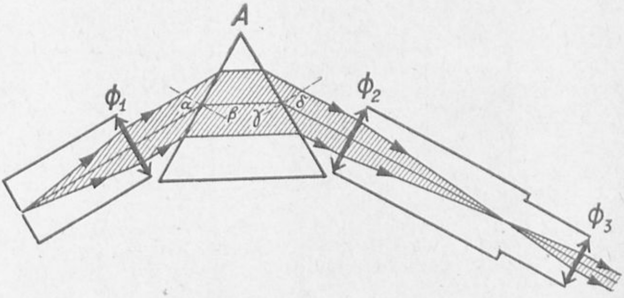
$$f_{\iota\omega\delta} - f_{\epsilon\rho} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(\frac{1}{n_{\iota\omega\delta} - 1} - \frac{1}{n_{\epsilon\rho} - 1}\right) \quad (6)$$

᾿Αντικαθιστῶμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (6) τὰ μεγέθη διὰ τῶν μέτρων των ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $R_1 = 32$ cm, $R_2 = 48$ cm, $n_{\epsilon\rho} = 1{,}578$, $n_{\iota\omega\delta} = 1{,}614$ καὶ εὑρίσκομεν

$$f_{\iota\omega\delta} - f_{\epsilon\rho} = 1{,}95 \text{ cm.}$$

396. Φασματοσκόπιον ἀποτελεῖται α) ἀπὸ πρῖσμα γωνίας $A = 60^\circ$, β) ἀπὸ κατευθυντῆρα μὲ σχισμὴν ἔχουσαν πλάτος $d = 1/20$ mm καὶ εὑρισκομένην εἰς τὴν ἑστίαν φακοῦ Φ_1 ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_1 = 20$ cm, γ) ἀπὸ διόπτραν μὲ ἀντικειμενικὸν φακὸν Φ_2 καὶ προσοφθάλμιον φακὸν Φ_3 μὲ ἑστιακὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως $f_2 = 40$ cm καί $f_3 = 5$ cm. Τὸ πρῖσμα τοποθετεῖται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ μονοχρωματικὸν φῶς μὲ τὸ ὁποῖον φωτίζεται ἡ σχισμὴ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι 1,5. Ζητεῖται 1) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχῆμα καὶ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία προσπτώσεως ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, ὡς καὶ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. 3) Τὸ πλάτος τοῦ πραγματικοῦ εἰδώλου τῆς σχισμῆς τὸ λαμβανόμενον εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ Φ_2. 4) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ἐκπεφρασμένην εἰς πρῶτα λεπτὰ φαίνεται ἡ εἰκὼν αὕτη ἀπὸ παρατηρητὴν προσβλέποντα διὰ μέσου διόπτρας ρυθμισμένης εἰς τὸ ἄπειρον. 5) Ὁ προηγούμενος παρατηρητὴς ἀντικαθίσταται ἀπὸ μύωπα, βλέποντα εὐκρινῶς εἰς ἀπόστασιν 1 m. Κατὰ πόσον καὶ κατὰ ποίαν φορὰν μετατοπίζεται τότε ὁ προσοφθάλμιος.

Λύσις. 1) Τὸ σχῆμα δεικνύει τὴν πορείαν τῶν ἀκτίνων εἰς τὸ φασματοσκόπιον.



2) Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\alpha = \delta \quad (1)$$

καὶ $\beta = \gamma \quad (2)$

᾿Εκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $A = \beta + \gamma$ ἔχομεν

$$\beta = \gamma = \frac{A}{2} \quad (3)$$

καὶ ἐκ τοῦ τύπου

$$\eta\mu\, \alpha / \eta\mu\, \beta = n$$

ἔχομεν ἐπίσης

$$\eta\mu\, \alpha = n \cdot \eta\mu\, \beta \quad (4)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (3), ἡ (4) γράφεται

$$\eta\mu\, \alpha = n \cdot \eta\mu \frac{A}{2} \quad (5)$$

᾿Εκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $n = 1{,}5$ καὶ $A = 60^0$, προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (5) ὅτι $\eta\mu\, \alpha = 0{,}75$ καὶ

$$\alpha = 48^0\ 30'.$$

᾿Εκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῶν πρισμάτων $\varepsilon = \alpha + \delta - A$ καὶ λόγῳ τῆς (1) προκύπτει

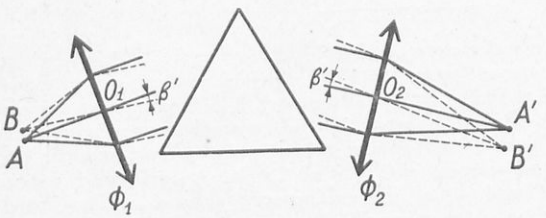
$$\varepsilon = 2\alpha - A$$

Δι᾿ ἐφαρμογῆς τῶν δεδομένων ἔχομεν

$$\varepsilon = 2 \cdot 48^0\ 30' - 60^0 = 37^0.$$

3) Αἱ ἀκτῖνες αἱ προερχόμεναι ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα χείλη A καὶ B τῆς σχισμῆς διαμορφοῦνται ἀπὸ τὸν φακὸν Φ_1 εἰς δύο δέσμας παραλλήλων ἀκτίνων αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν β′ ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς

$$\beta' = \frac{d}{f_1}$$



Εἰς τὴν ἔξοδον τοῦ πρίσματος αἱ δύο φωτειναὶ δέσμαι σχηματίζουν μεταξύ των τὴν αὐτὴν γωνίαν β′. Εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ φακοῦ Φ_2 τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τῆς σχισμῆς θὰ ἔχῃ εὖρος l ἴσον πρὸς

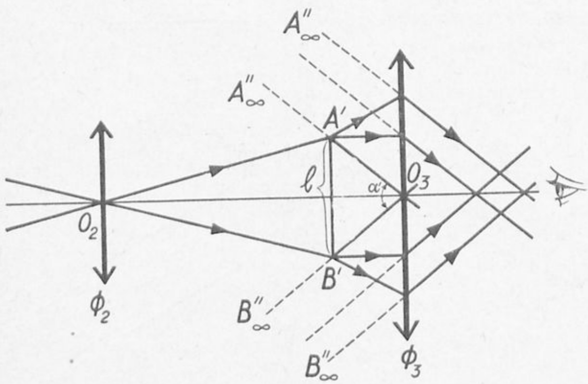
$$l = f_2 \cdot \beta' = d \cdot \frac{f_2}{f_1}$$

Διὰ $f_1 = 20$ cm, $f_2 = 40$ cm καὶ $d = 1/20$ mm προκύπτει

$$l = 0{,}1 \text{ mm}.$$

4) Τὸ εἴδωλον (A″ B″) σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον (βλ. σχῆμα) καὶ ὁ παρατηρητὴς ὅστις βλέπει διὰ μέσου τῆς διόπτρας, τῆς ὁποίας ὁ προσοφθάλμιος ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $f_3 = 50$ mm, παρατηρεῖ τὸ εἴδωλον (A′ B′) τῆς σχισμῆς ὑπὸ τὴν πολὺ μικρὰν γωνίαν α′, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς

$$\alpha' = \frac{l}{f_3}$$



Διὰ $l = 0{,}1$ mm καὶ $f_3 = 50$ mm προκύπτει

$$\alpha' = \frac{1}{500} \text{ rad} = 6'\ 40''.$$

5) Θὰ ἐφαρμόσωμεν διὰ τὸν προσοφθάλμιον φακὸν τὸν γνωστὸν τύπον τῶν φακῶν $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$, ὅπου διὰ $\beta = 100$ cm καὶ $f = 5$ cm, προκύπτει

$$\alpha = 4{,}76 \text{ cm}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὁράσεως εἰς τὸ ἄπειρον, ὁ προσοφθάλμιος εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ ἑστιακὸν αὐτὸ ἐπίπεδον γίνεται τώρα ἴση πρὸς 4,76 cm. Πρέπει λοιπὸν νὰ πλησιάσῃ ὁ προσοφθάλμιος πρὸς τὸν ἀντικειμενικὸν κατὰ διάστημα

$$s = 5 - 4{,}76 = 0{,}24 \text{ cm}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

397. Θέλομεν νὰ συνδυάσωμεν πρῖσμα ἐκ στεφανυάλου 12^0 πρὸς πρῖσμα ἐκ πυριτυάλου, τοιοῦτον ὥστε ὁ συνδυασμὸς νὰ παράγῃ μὲν διασκεδασμόν, ἀλλὰ χωρὶς ἐκτροπὴν τῆς μέσης (κιτρίνης) γραμμῆς D. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου καὶ τῆς πυριτυάλου διὰ τὴν D γραμμὴν εἶναι ἀντιστοίχως 1,520 καὶ 1,650. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ ἐκ πυριτυάλου πρίσματος. ('Απ. $9{,}6^0$.)

398. Δέσμη λευκοῦ φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ὑπὸ γωνίαν 60^0. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τοῦ ὕδατος διὰ τὰς γραμμὰς Α (ἐρυθρὰ περιοχὴ) καὶ Η (ἰώδης περιοχὴ) εἶναι 1,330 καὶ 1,344 ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῶν διαθλωμένων ἀκτίνων Α καὶ Η. ('Απ. $0{,}50^0$ ἢ 30'.)

399. Ἀκτὶς λευκοῦ φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ πρίσματος ἐκ στεφανυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 60^0. Αἱ ἰώδεις ἀκτῖνες, μετὰ τὴν δίοδον διὰ τοῦ πρίσματος, ἐξέρχονται ὑπὸ τὴν ἐλαχίστην αὐτῶν ἐκτροπήν. Ποία ἡ γωνία μεταξὺ τῶν ἐρυθρῶν καὶ τῶν ἰωδῶν ἀκτίνων μετὰ τὴν ἔξοδον αὐτῶν ἐκ τοῦ πρίσματος. Ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς εἶναι 1,524, διὰ τὸ ἰῶδες 1,543. ('Απ. 1^0 41' 22''.)

400. Ἐπὶ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 53^0 προσπίπτει ἀκτὶς λευκοῦ φωτὸς ὑπὸ γωνίαν 40^0 30'. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐκτροπὴ τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐρυθροῦ καὶ τοῦ ἰώδους φωτός. (Δείκτης διαθλάσεως δι' ἐρυθρὸν φῶς τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα 1,6, δι' ἰῶδες φῶς 1,64). ('Απ. $\varepsilon_{\epsilon\rho} = 38^0$ 29', $\varepsilon_{\iota\omega\delta} = 41^0$ 46' 27''.)

401. Ἀκτὶς λευκοῦ φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 36^0, κατὰ τρόπον ὥστε αἱ ἐρυθραὶ ἀκτῖνες νὰ ἐξέρχωνται καθέτως πρὸς τὴν δευτέραν ἕδραν τοῦ πρίσματος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐκτροπὴ τῶν ἰωδῶν ἀκτίνων. Ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς εἶναι 1,602, διὰ τὸ ἰῶδες 1,634. ('Απ. 35^0 39' 8''.)

402. Ἀχρωματικὸς φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 0,5 m ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ἀμφικύρτου φακοῦ ἐκ στεφανυάλου καὶ ἑνὸς ἐπιπεδοκοίλου ἐκ πυριτυάλου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν μίαν ἀκτῖνα R_1 τοῦ ἀμφικύρτου φακοῦ. Ποῖαι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος R_1 καὶ R_2 τοῦ ἀμφικύρτου φακοῦ. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως διὰ τὸ ἐρυθρὸν καὶ τὸ ἰῶδες φῶς εἶναι διὰ τὴν στεφανύαλον 1,526 καὶ 1,547 ἀντιστοίχως, διὰ δὲ τὴν πυριτύαλον 1,628 καὶ 1,671. ('Απ. $R_1 = 21{,}4$ cm, $R_2 = 22{,}5$ cm.)

403. Εἰς σύστημα δύο λεπτῶν πρισμάτων, ποίαν συνθήκην πρέπει νὰ πληροῦν αἱ διαθλαστικαὶ γωνίαι αὐτῶν A_1 καὶ A_2, ἵνα δύο ἀκτῖνες διαφόρου χρώματος (π.χ. ἐρυθροῦ καὶ ἰώδους), διὰ τὰς ὁποίας οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῶν δύο πρισμάτων εἶναι $n_{1\epsilon\rho}$, $n_{1\iota\omega\delta}$, $n_{2\epsilon\rho}$, $n_{2\iota\omega\delta}$, ἐξέρχωνται μετὰ τὴν δίοδον ἐκ τοῦ πρίσματος παραλλήλως.

('Απ. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{n_{2\iota\omega\delta} - n_{2\epsilon\rho}}{n_{1\iota\omega\delta} - n_{1\epsilon\rho}}$)

404. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ δευτέρου πρίσματος ἐκ πυριτυάλου, ἐὰν ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρώτου πρίσματος ἐκ στεφανυάλου εἶναι 15^0 καὶ οἱ δεῖκται διαθλάσεως εἶναι $n_{1\epsilon\rho} = 1{,}526$, $n_{1\iota\omega\delta} = 1{,}547$, $n_{2\epsilon\rho} = 1{,}628$, $n_{2\iota\omega\delta} = 1{,}671$. ('Απ. 7^0 20'.)

405. Συγκλίνων φακὸς ἐκ στεφανυάλου καὶ ἀποκλίνων φακὸς ἐκ πυριτυάλου σχηματίζουν συγκλίνοντα ἀχρωματικὸν φακόν, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm. Εὕρατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν ἑκάστου φακοῦ διὰ τὰς γραμμὰς C, D καὶ F. Δίδονται $n_{C\,\sigma\tau\epsilon\varphi} = 1{,}5145$, $n_{D\,\sigma\tau\epsilon\varphi} = 1{,}5170$, $n_{F\,\sigma\tau\epsilon\varphi} = 1{,}5230$, $n_{C\,\pi\upsilon\rho} = 1{,}6444$, $n_{D\,\pi\upsilon\rho} = 1{,}6499$, $n_{F\,\pi\upsilon\rho} = 1{,}6637$.
('Απ. Διὰ τὴν στεφανύαλον: $f_C = +22{,}16$ cm, $f_D = +22{,}65$ cm, $f_F = +21{,}79$ cm.
Διὰ τὴν πυριτύαλον: $f_C = -40{,}2$ cm, $f_D = -39{,}8$ cm, $f_F = -39{,}0$ cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

406. Εὕρατε τὰς γωνίας ἐλαχίστης ἐκτροπῆς ὑπὸ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 60^0, διὰ φῶς μήκους κύματος τῶν C καὶ F γραμμῶν. (Δείκτης διαθλάσεως πυριτυάλου $\lambda_C = 1{,}622$, $\lambda_F = 1{,}639$).

407. Φακὸς ἐκ πυριτυάλου ἔχει ἐστιακὴν ἀπόστασιν 50 cm διὰ τὴν γραμμὴν D τοῦ νατρίου. Ποία ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ διὰ τὰς γραμμὰς C καὶ F. (Δείκτης διαθλάσεως πυριτυάλου $\lambda_C = 1{,}622$, $\lambda_F = 1{,}639$.)

408. Πρῖσμα ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 60^0 ἐκτρέπει καὶ ἀναλύει δέσμην λευκοῦ φωτός. Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς αἱ γωνίαι ἐκτροπῆς τῶν ἐρυθρῶν καὶ ἰωδῶν ἀκτίνων εἶναι ἀντιστοίχως $51^0\,10'$ καὶ $54^0\,20'$. Ποῖοι εἶναι οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς πυριτυάλου διὰ τὰ ἀκραῖα χρώματα τοῦ ὁρατοῦ φάσματος. Πόση εἶναι ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις διὰ τὰς ἰώδεις ἀκτῖνας φακοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις διὰ τὰς ἐρυθρὰς ἀκτῖνας εἶναι 25 cm.

409. Δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων λευκοῦ φωτὸς διέρχεται πρῖσμα ἐκ στεφανυάλου (δείκτου διαθλάσεως διὰ τὰς ἐρυθρὰς ἀκτῖνας $n_{\varepsilon\rho} = 1{,}52$ καὶ διὰ τὰς ἰώδεις $n_{\iota\omega\delta} = 1{,}56$) διαθλαστικῆς γωνίας 60^0. Στρέφεται τοῦτο ἕως ὅτου ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Αἱ διαθλώμεναι ἀκτῖνες συλλέγονται ὑπὸ διόπτρας ἥτις φέρει ἀχρωματικὸν φακὸν 5 διοπτριῶν, λειτουργοῦντα ὡς ἀντικειμενικὸς καὶ προσοφθάλμιον 50 διοπτριῶν. Τὸ εἴδωλον τοῦ φάσματος σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Πόσον εἶναι τὸ φαινόμενον μῆκος τοῦ ὁρατοῦ φάσματος.

410. Κατακόρυφος στενὴ σχισμὴ ἀφίνει νὰ διέλθουν ἡλιακαὶ ἀκτῖνες αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ πρῖσμα ἐκ πυριτυάλου (δεῖκται διαθλάσεως $n_{\varepsilon\rho} = 1{,}64$, $n_{\iota\omega\delta} = 1{,}68$) διαθλαστικῆς γωνίας 60^0 καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ ἀχρωματικὸν φακὸν ἰσχύος 5 διοπτριῶν. Τὸ πρῖσμα προσανατολίζεται εἰς τὴν θέσιν ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Ὁ φακὸς τίθεται ἀμέσως μετὰ τὸ πρῖσμα, ἔχει δὲ τὸν κύριον ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν μέσην διεύθυνσιν τῆς διαθλωμένης δέσμης. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ὁρατοῦ φάσματος, ὅπερ σχηματίζεται ἐπὶ πετάσματος καθέτου ἐπὶ τὴν μέσην διεύθυνσιν τῆς διαθλωμένης δέσμης. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων τῆς σχισμῆς καὶ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ εἶναι 40 cm.

411. Ἐπὶ πρίσματος ἐκ πυριτυάλου διαθλαστικῆς γωνίας 30^0 προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 45^0 φωτεινὴ ἀκτὶς προερχομένη ἐκ μιᾶς λυχνίας βολταϊκοῦ τόξου, ἥτις δίδει συνεχὲς φάσμα. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος δι' ἐρυθρὸν φῶς εἶναι 1,739, δι' ἰῶδες δὲ φῶς 1,792. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκτροπὴ τῶν ἀνωτέρω δύο διαφόρου χρώματος ἀκτίνων καὶ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των αἱ ἀκτῖνες μετὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ πρίσματος.

412. Φασματογράφος ἀποτελεῖται ἀπὸ πρῖσμα γωνίας $A = 60^0$. Διά κατευθυντῆρος μετὰ σχισμῆς καὶ φακοῦ ἀντικειμενικοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 25 cm, προσπίπτουν φωτειναὶ ἀκτῖνες καὶ ἐξέρχονται ἐκ τοῦ πρίσματος. Τὸ πρῖσμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ὕαλον, τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλάσεως ἔχει τὰς ἀκολούθους τιμάς : διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς 1,602, διὰ τὸ κίτρινον φῶς 1,612 καὶ διὰ τὸ ἰῶδες 1,640. Ὁ φασματογράφος εἶναι ρυθμισμένος εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐλαχίστη ἀπόκλισις νὰ πραγματοποιῆται διὰ τὸ κίτρινον φῶς. 1) Νὰ παρασταθῇ σχηματικῶς ἡ πορεία τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων διὰ μέσου τοῦ ὀργάνου. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόκλισις διὰ τὸ κίτρινον φῶς. 3) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἀναδύσεως διὰ τὰς ἐρυθρὰς καὶ ἰώδεις ἀκτῖνας. 4) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλικὸν μῆκος τοῦ ὁρατοῦ φάσματος τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ἐπὶ πετάσματος ὅταν φωτίζεται διὰ λευκοῦ φωτός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

413. Πόσα Lumen προσπίπτουν ἐπὶ ἐπιφανείας 5 m² ὅταν ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἶναι 12 Lux.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ φωτισμοῦ

$$E = \frac{\Phi}{S} \tag{1}$$

ὅπου E ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον δέχεται ἡ ἐπιφάνεια S, καὶ Φ ἡ φωτεινὴ ροὴ ἡ προσπίπτουσα ἐπ' αὐτῆς, ἐὰν λύσωσεν ὡς πρὸς Φ λαμβάνομεν

$$\Phi = E \cdot S \tag{2}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) διὰ τῶν δεδομένων $E = 12$ Lux καὶ $S = 5$ m², εὑρίσκομεν

$$\underline{\Phi = 60 \text{ Lm.}}$$

414. Ποία ἡ ἰσχὺς φωτεινῆς πηγῆς, ἥτις ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων προκαλεῖ ἐπὶ ἐπιφανείας, κειμένης εἰς ἀπόστασιν 6 m ἀπ' αὐτῆς, φωτισμὸν 20 Lux.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ὁ κάθετος φωτισμὸς E δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$E = \frac{J}{r^2} \tag{1}$$

ὅπου J εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς φωτεινῆς πηγῆς καὶ r ἡ ἀπόστασις τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν πηγήν.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς J λαμβάνομεν

$$J = E \cdot r^2 \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα $E = 20$ Lux καὶ $r = 6$ m, εὑρίσκομεν

$$\underline{J = 720 \text{ NK.}}$$

415. Ποῖος ὁ ἐπὶ μικρᾶς ἐπιφανείας φωτισμὸς E, ὁ προερχόμενος ἐκ λυχνίας φωτεινῆς ἰσχύος 126 NK, τῆς ἐπιφανείας εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 6 m κάτωθεν ἀκριβῶς τῆς λυχνίας.

Λύσις. Ὁ φωτισμὸς E τὸν ὁποῖον δέχεται μία ἐπιφάνεια, ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων, ἀπὸ φωτεινὴν πηγὴν ἰσχύος J, εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ὡς γνωστὸν

$$E = \frac{J}{r^2}$$

Θέτομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον $J = 126$ NK, $r = 6$ m καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 3{,}5 \text{ Lm/m}^2} \quad \text{ἢ} \quad \underline{E = 3{,}5 \text{ Lux.}}$$

416. Ὑπολογίσατε τὸν φωτισμὸν E μικρᾶς ἐπιφανείας ἀπεχούσης 120 cm ἀπὸ λυχνίας 72 NK, α) ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κάθετος ὡς πρὸς τὴν φωτεινὴν ροὴν καὶ β) ἐὰν ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν σχηματίζει γωνίαν 30° μὲ τὰς φωτεινὰς ἀκτῖνας.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς φωτομετρίας

$$E = \frac{J}{r^2}$$

ὅπου Ε εἶναι ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον δέχεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν, J ἡ ἰσχὺς τῆς φωτεινῆς πηγῆς καὶ r ἡ ἀπόστασις μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐὰν θέσωμεν $J = 72$ ΝΚ καὶ $r = 120$ cm $= 1,2$ m εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 50 \text{ Lux} = 50 \text{ Lm/m}^2.}$$

β) Ὅταν αἱ ἀκτῖνες τοῦ φωτὸς προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν α ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τότε, ὡς γνωστόν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\underline{E = \frac{J}{r^2} \cdot \text{συν}\, \alpha}$$

Οὕτω διὰ $J = 72$ ΝΚ, $r = 1,2$ m καὶ $\alpha = 30^0$ (συν $\alpha = 0,866$), εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 43,3 \text{ Lux}} \quad \text{(περίπου)}$$

417. Λαμπτήρ τις ρίπτει ἐπὶ μεμακρυσμένης ἐπιφανείας 0,5 m² φωτεινὴν ροὴν 5 Lumen. Ποῖος εἶναι ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἰς Lux καὶ ποῖος θὰ ἦτο ὁ φωτισμὸς τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, ἐὰν ὁ λαμπτὴρ ἐτοποθετεῖτο εἰς τετραπλασίαν ἀπὸ αὐτῆς ἀπόστασιν, ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἑνούσης τὸ κέντρον τῆς ἐπιφανείας μετὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως τοῦ λαμπτῆρος.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν Φ τὴν φωτεινὴν ροὴν καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τότε ὁ φωτισμὸς Ε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \frac{\Phi}{S} \tag{1}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰς τιμὰς $\Phi = 5$ Lm, $S = 0,5$ m² εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 10 \text{ Lux.}}$$

β) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐὰν καλέσωμεν α τὴν γωνίαν προσπτώσεως, J τὴν ἰσχὺν τῆς φωτεινῆς πηγῆς καὶ r τὴν ἀπόστασίν της ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν θὰ ἔχωμεν

$$E = \frac{J}{r^2} \cdot \text{συν}\, \alpha \tag{2}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἐπειδὴ ἡ γωνία προσπτώσεως παραμένει ἡ αὐτὴ καὶ ἡ ἀπόστασις γίνεται 4 r θὰ ἔχωμεν

$$E' = \frac{J}{(4\,r)^2} \cdot \text{συν}\, \alpha \tag{3}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) προκύπτει

$$E' = \frac{1}{16} \cdot E \tag{4}$$

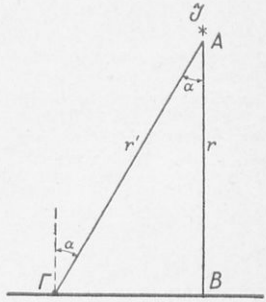
Δίδονται $E = 10$ Lux, ὅτε ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{E' = 0,625 \text{ Lux.}}$$

418. Φωτεινὴ πηγὴ προκαλεῖ ἐπὶ δαπέδου καὶ ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων φωτισμὸν E = 80 Lux. Νὰ εὑρεθῇ ὁ φωτισμὸς E′ εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ δαπέδου εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν α = 60°.

Λύσις. Βάσει τοῦ σχήματος ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας Ε εἰς τὸ σημεῖον Β, ἐφ' ὅσον προέρχεται ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν, εἶναι

$$E = \frac{J}{r^2} \qquad (1)$$



Ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Γ ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως τῶν ἀκτίνων α, εἶναι

$$E' = \frac{J}{r'^2} \cdot \text{συν}\ \alpha \qquad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (1) λαμβάνομεν

$$\frac{E'}{E} = \frac{r^2}{r'^2} \cdot \text{συν}\ \alpha \quad \text{ἢ} \quad E' = E \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \text{συν}\ \alpha \qquad (3)$$

καὶ ἐπειδὴ $r/r' = \text{συν}\ \alpha$, ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$\underline{E' = E\,\text{συν}^3\ \alpha.}$$

Οὕτω διά $\alpha = 60^0$, καὶ ἐπειδὴ συν $60^0 = 1/2$, εὑρίσκομεν

$$\underline{E' = 10\ \text{Lux.}}$$

419. Πόση φωτεινὴ ροή, εἰς Lumen, προσπίπτει ἐπὶ ἐπιφανείας 2 m × 4 m τῆς ὁποίας ὁ ὁμοιόμορφος φωτισμὸς εἶναι 6 Lux.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Φ τὴν φωτεινὴν ροὴν ἡ ὁποία προσπίπτει ὁμοιομόρφως ἐπί τινος ἐπιφανείας S, τότε, ὡς γνωστόν, ὁ φωτισμὸς Ε τὸν ὁποῖον δέχεται ἡ ἐπιφάνεια εἶναι

$$E = \frac{\Phi}{S} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου, λύοντες ὡς πρὸς Φ, λαμβάνομεν

$$\underline{\Phi = E \cdot S} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) $E = 6$ Lux, $S = 8\ \text{m}^2$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη φωτεινὴ ροὴ εἶναι

$$\underline{\Phi = 48\ \text{Lm.}}$$

420. Ὑπολογίσατε τὴν φωτεινὴν ροὴν τὴν ἐκπεμπομένην ὑπὸ σημειώδους πηγῆς, ἡ ὁποία δίδει φωτισμὸν 8 Lux, εἰς ἀπόστασιν 2 m.

Λύσις. Ἡ ἐκπεμπομένη ὁλικὴ φωτεινὴ ροὴ $\Phi_{o\lambda}$, δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Phi_{o\lambda} = 4\,\pi \cdot J \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι ὁ φωτισμὸς Ε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \frac{J}{r^2} \qquad (2)$$

Λύοντες λοιπὸν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς J καὶ θέτοντες τὴν προκύπτουσαν τιμὴν εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$$\underline{\Phi_{o\lambda} = 4\pi \cdot E \cdot r^2} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) $E = 8$ Lux καὶ $r = 2$ m εὑρίσκομεν

$$\underline{\Phi_{o\lambda} = 405\ \text{Lm.}}$$

421. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ κατέλθῃ λαμπτὴρ διὰ νὰ διπλασιασθῇ ὁ φωτισμὸς μικρᾶς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν r ἀκριβῶς κάτωθεν αὐτοῦ καὶ φωτίζεται καθέτως.

Λύσις. Ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον δέχεται ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἐξ ἀποστάσεως r θὰ εἶναι

$$E = \frac{J}{r^2} \qquad (1)$$

ὅπου J ἡ ἰσχὺς τῆς φωτεινῆς πηγῆς καὶ r ἡ ἀπόστασις τῆς πηγῆς ἀπὸ τὴν φωτιζομένην ἐπιφάνειαν.

Ἐὰν θέλωμεν τώρα νὰ διπλασιασθῇ ὁ φωτισμὸς πρέπει νὰ πλησιάσωμεν τὴν φωτεινὴν πηγὴν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἀπόστασιν ἔστω r′, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$2E = \frac{J}{r'^2} \qquad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως ἀκολούθως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{1}{2} = \frac{r'^2}{r^2} \quad (3) \qquad \text{ἢ} \qquad \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{r'}{r} \qquad (4)$$

Λύομεν τὴν (4) ὡς πρὸς r′ καὶ λαμβάνοντες μόνον τὴν θετικὴν τιμὴν ἔχομεν

$$r' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$$

Ἄρα πρέπει νὰ πλησιάσωμεν τὴν φωτεινὴν πηγὴν κατὰ

$$\underline{r - r' = r - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot r}$$

422. Λαμπτὴρ ἀγνώστου φωτεινῆς ἰσχύος τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 90 cm ἀπὸ φωτομετρικοῦ διαφράγματος καὶ δίδει τὸν αὐτὸν φωτισμὸν μὲ λαμπτῆρα 32 NK τοποθετούμενον 60 cm πρὸ τοῦ διαφράγματος. Ὑπολογίσατε τὴν φωτεινὴν ἰσχὺν J_1 τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν λαμπτῆρος.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν J_1 τὴν ἰσχὺν τοῦ πρώτου λαμπτῆρος καὶ r_1 τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ διαφράγματος, ὡς καὶ J_2 τὴν ἰσχὺν τοῦ δευτέρου λαμπτῆρος καὶ r_2 τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ διαφράγματος, τότε ἐπειδὴ ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον προκαλοῦν οἱ λαμπτῆρες εἶναι ὁ αὐτός, θὰ ἔχωμεν

$$E = \frac{J_1}{r_1^2} = \frac{J_2}{r_2^2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) τοῦ ἰσοφωτισμοῦ ὡς πρὸς J_1 καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{J_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot J_2.} \qquad (2)$$

Θέτοντες $r_1 = 90$ cm, $r_2 = 60$ cm $J_2 = 32$ NK, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἰσχὺς τοῦ πρώτου λαμπτῆρος εἶναι

$$\underline{J_1 = 72 \text{ NK}.}$$

423. Δύο λυχνίαι διαφόρου φωτεινῆς ἰσχύος εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 6 m μεταξύ των. Εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τῆς ἀσθενεστέρας λυχνίας τοποθετεῖται διάφραγμα καθέτως ἐπὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰς δύο πηγὰς εὐθεῖαν, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἐκ μέρους τῶν δύο λυχνιῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἰσχύων αὐτῶν.

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ἰσοφωτισμοῦ

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

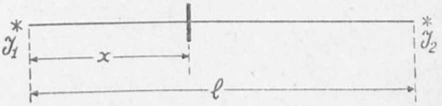
Θέτοντες $r_1 = 2$ m καὶ $r_2 = 4$ m λαμβάνομεν

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{4}$$

424. Δύο λαμπτῆρες 20 ΝΚ καὶ 40 ΝΚ ἀπέχουν 10 m. Εἰς ποῖον σημεῖον μεταξὺ αὐτῶν πρέπει νὰ θέσωμεν λευκὸν πέτασμα ἵνα ὁ παραγόμενος φωτισμὸς ὑπὸ ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι ὁ αὐτός.

Λύσις. Ἔστω ὅτι οἱ λαμπτῆρες ἰσχύων J_1 καὶ J_2 ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν l. Ἐὰν διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἰσοφωτισμὸν θέσωμεν τὸ πέτασμα εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τὴν πηγὴν ἰσχύος J_1, τότε συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ ἰσοφωτισμοῦ $J_1/J_2 = r_1^2/r_2^2$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{x^2}{(l-x)^2} \qquad (1)$$



Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$(J_2 - J_1) \cdot x^2 + 2\, J_1 \cdot l \cdot x - J_1 \cdot l^2 = 0$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν :

$$x = \frac{-J_1 \cdot l \pm l\sqrt{J_1 \cdot J_2}}{J_2 - J_1}$$

Οὕτω διὰ $J_1 = 20$ ΝΚ, $J_2 = 40$ ΝΚ, $l = 10$ m, εὑρίσκομεν δύο τιμὰς

$$x_1 = -\,24{,}15 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = 4{,}15 \text{ m}$$

Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ὡς μὴ ἀνταποκρινομένη πρὸς τὰ δεδομένα, διότι τὸ πέτασμα πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μεταξὺ τῶν φωτεινῶν πηγῶν, ἀπορρίπτεται.

Συνεπῶς πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ πέτασμα εἰς ἀπόστασιν $x = 4{,}15$ m ἀπὸ τὴν πηγὴν ἰσχύος J_1.

425. Δύο φωτειναὶ πηγαὶ εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας (ΑΒ) καὶ ἔχουν ἰσχεῖς J_1 καὶ J_2. Εἰς σημεῖον Γ, χωρίζον τὴν ΑΒ εἰς δύο τμήματα (ΑΓ) = α καὶ (ΒΓ) = β, φέρομεν κάθετον (ΓΣ) καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Σ τοποθετοῦμεν μικρὰν σφαῖραν. Ἐὰν ἡ μικρὰ σφαῖρα φωτίζεται ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν φωτεινῶν πηγῶν ποία ἡ ἀπόστασις (ΓΣ) = x. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $J_1 = 100$ ΝΚ, $J_2 = 80$ ΝΚ, α = 5,5 m, β = 4 m.

Λύσις. Ἐὰν ἡ μικρὰ σφαῖρα δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἀπὸ τὰς δύο φωτεινὰς πηγὰς εὑρισκομένας εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\Phi = \frac{J_1}{r_1^2} = \frac{J_2}{r_2^2} \qquad (1)$$

καθ' ὅσον τὸ φῶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ ἀπὸ τὰς δύο φωτεινὰς πηγάς.

Εἶναι ὅμως $r_1^2 = x^2 + \alpha^2$ καὶ $r_2^2 = x^2 + \beta^2$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{J_1}{x^2 + \alpha^2} = \frac{J_2}{x^2 + \beta^2} \qquad (2)$$

Δι' ἐπιλύσεως ἀκολούθως τῆς (2) πρὸς x εὑρίσκομεν

$$x = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot J_2 - \beta^2 \cdot J_1}{J_1 - J_2}} \qquad (3)$$

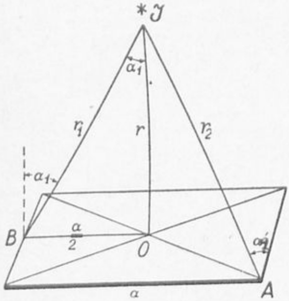
Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) $J_1 = 100$ ΝΚ, $J_2 = 80$ ΝΚ α = 5,5 m, β = 4 m εὑρίσκομεν

$$x = 6{,}4 \text{ m.}$$

426. Τετραγωνικὸν τεμάχιον χάρτου πλευρᾶς α εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ σημειώδους φωτεινῆς πηγῆς ἰσχύος J. Ἡ φωτεινὴ πηγὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ φωτισμοί : α) εἰς τὸ μέσον τοῦ τετραγώνου, β) εἰς τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς καὶ γ) εἰς μίαν γωνίαν αὐτοῦ.

Λύσις. α) Εἰς τὸ μέσον τοῦ τετραγώνου τοῦ τεμαχίου τοῦ χάρτου ὁ φωτισμὸς εἶναι

$$E = \frac{J}{r^2}$$



β) Εἰς τὸ μέσον B τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου θὰ εἶναι

$$E_1 = \frac{J}{r_1^2} \cdot \text{συν}\, \alpha_1 \qquad (1)$$

ἢ ἐπειδή, συν $\alpha_1 = r/r_1$,

$$E_1 = \frac{J \cdot r}{r_1^3} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ

$$r_1 = \left(r^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

καὶ οὕτω τελικῶς λαμβάνομεν

$$E_1 = \frac{J \cdot r}{\left(r^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4)$$

γ) Ὁ φωτισμὸς εἰς τὴν κορυφὴν A τοῦ τετραγώνου θὰ εἶναι

$$E_2 = \frac{J}{r_2^2} \cdot \text{συν}\, \alpha_2 \qquad (5)$$

ἢ ἐπειδὴ συν $\alpha_2 = r/r_2$

$$E_2 = \frac{J \cdot r}{r_2^3} \qquad (6)$$

Εἶναι ὅμως

$$r_2 = \left(r^2 + (OA)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(r^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

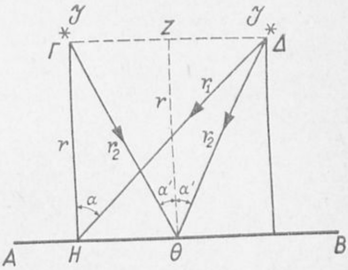
καὶ οὕτω τελικῶς λαμβάνομεν

$$E_2 = \frac{J \cdot r}{\left(r^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (8)$$

427. Τράπεζα ἐργασίας (AB) φωτίζεται ὑπὸ δύο λυχνιῶν Γ καὶ Δ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει φωτεινὴν ἰσχὺν (ἔντασιν) 100 κηρίων καὶ εἶναι ἐξηρτημέναι ἐξ ὕψους 2 m ἀπὸ τῆς τραπέζης, ἀπέχουν δὲ ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 2 m. Ζητοῦνται α) ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον προκαλοῦν αἱ λυχνίαι εἰς σημεῖον H τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀμέσως κάτωθι τῆς λυχνίας Γ, καὶ β) ὁ φωτισμὸς εἰς σημεῖον Θ τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν τράπεζαν, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως (ΓΔ) τῶν δύο λυχνιῶν.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) Ὁ φωτισμὸς E τῆς ἐπιφανείας AB εἰς τὸ σημεῖον H θὰ προέρχεται ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ τῆς πηγῆς Γ, τοῦ φωτὸς προσπίπτοντος καθέτως, καὶ ἀφ' ἑτέρου ὑπὸ τῆς πηγῆς Δ, τοῦ φωτὸς προσπίπτοντος πλαγίως. Ἄρα θὰ ἔχωμεν



$$E = \frac{J}{r^2} + \frac{J}{r_1^2} \cdot \text{συν}\ \alpha \qquad (1)$$

ὅπου J εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς (ἔντασις) ἑκάστης πηγῆς.
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΗΓΔ ἔχομεν

$$r_1^2 = 2\,r^2 \qquad \text{καὶ} \qquad \text{συν}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ὁπότε ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) γράφεται

$$\underline{E = \frac{J}{r^2} + \frac{J}{2\,r^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{J}{r^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $r = 2$ m, $J = 100$ NK, εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 33{,}8 \text{ Lux.}}$$

β) Ὁ φωτισμὸς E' τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Θ προέρχεται καὶ ἀπὸ τὰς δύο πηγὰς Γ καὶ Δ, τοῦ φωτὸς προσπίπτοντος πλαγίως. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$E' = 2 \cdot \frac{J}{r_2^2} \cdot \text{συν}\ \alpha' \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΘΖ ἔχομεν

$$r_2^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5}{4} \cdot r^2 \qquad \text{καὶ} \qquad \text{συν}\ \alpha' = \frac{r}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5},$$

ὁπότε ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\underline{E' = \frac{16\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{J}{r^2}}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $r = 2$ m, $J = 100$ NK, εὑρίσκομεν

$$\underline{E' = 35{,}2 \text{ Lux.}}$$

428. Δύο φωτειναὶ πηγαὶ τοποθετημέναι εἰς Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχως ἰσχεῖς (ἐντάσεις) J_1 καὶ J_2 τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι $J_1/J_2 = \sqrt{3}$. Περὶ τὸ σημεῖον Ο, μέσον τῆς (ΑΒ), περιστρέφεται στέλεχος μήκους (ΟΓ) = (ΟΑ), εἰς τὸ ἄκρον Γ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται λευκὸν διάφραγμα, τὸ ὁποῖον παραμένει πάντοτε κάθετον πρὸς τὴν (ΑΒ). Ζητεῖται ἡ γωνία ω = ΓΟΒ διὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ὄψεις τοῦ διαφράγματος τούτου, θὰ φωτίζωνται ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν δύο πηγῶν.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. Ἡ ζητουμένη γωνία ω ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΟΓ θὰ εἶναι

$$\omega = 2\,\theta_1 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐὰν καλέσωμεν E_1 τὸν φωτισμὸν τοῦ διαφράγματος τὸν ὁποῖον προκαλεῖ ἡ πηγὴ Α καὶ E_2 τὸν φωτισμὸν τὸν ὁποῖον προκαλεῖ ἡ πηγὴ Β, ἔχομεν

$$E_1 = \frac{J_1}{(\text{ΑΓ})^2} \cdot \text{συν}\ \theta_1 \quad , \quad E_2 = \frac{J_2}{(\text{ΒΓ})^2} \cdot \text{συν}\ \theta_2 \qquad (2)$$

ἡ ἐπειδὴ $E_1 = E_2$ ἐξ ὑποθέσεως, λαμβάνομεν

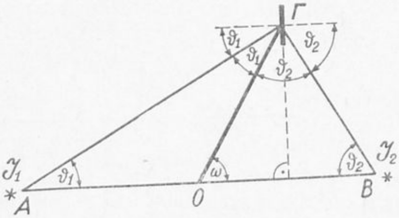
$$\frac{J_1}{(A\Gamma)^2}\cdot \sigma\upsilon\nu\ \theta_1 = \frac{J_2}{(B\Gamma)^2}\cdot \sigma\upsilon\nu\ \theta_2 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{(A\Gamma)^2}{(B\Gamma)^2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\ \theta_2}{\sigma\upsilon\nu\ \theta_1} \qquad (4)$$

καὶ ἐπειδὴ $J_1/J_2 = \sqrt{3}$ ἔχομεν

$$\left(\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\right)^2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\ \theta_2}{\sigma\upsilon\nu\ \theta_1} = \sqrt{3} \qquad (5)$$



Τὸ τρίγωνον ὅμως ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι (ΑΟ) = (ΟΒ) = (ΟΓ) καὶ $\theta_1 + \theta_2 = 90^0$, ὥστε δυνάμεθα νὰ θέσωμεν συν θ_2 = ημ θ_1.

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ἰδίου ὀρθογωνίου τριγώνου δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} = \sigma\varphi\ \theta_1$$

Οὕτω ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν

$$\sigma\varphi\ \theta_1 = \sqrt{3} \qquad (6)$$

Ἐξ οὗ προκύπτει $\theta_1 = 30^0$. Θέτοντες τελικῶς εἰς τὸν τύπον (1) $\theta_1 = 30^0$ εὑρίσκομεν

$$\underline{\omega = 2\cdot 30^0 = 60^0.}$$

429. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόδοσις ἠλεκτρικοῦ λαμπτῆρος ὁ ὁποῖος ἐκπέμπει φωτεινὴν ροὴν 850 Lumen καὶ καταναλίσκει ἠλεκτρικὴν ἰσχὺν 75 W.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἡ ἀπόδοσις α ἑνὸς λαμπτῆρος εἶναι τὸ πηλίκον τῆς ἐκπεμπομένης ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος φωτεινῆς ροῆς Φ διὰ τῆς ἰσχύος Ν τὴν ὁποίαν καταναλίσκει οὗτος, ἤτοι

$$\alpha = \frac{\Phi}{N}$$

Συνεπῶς διὰ Φ = 850 Lm καὶ Ν = 75 W, εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 11{,}33\ \mathrm{Lm/W}.}$$

430. Λυχνία πυρακτώσεως βολφραμίου, ἠλεκτρικῆς ἰσχύος 60 W, ἔχει φωτεινὴν ἰσχὺν 66,5 ΝΚ. α) Ποία ἡ φωτεινὴ ροὴ εἰς Lumen, τὴν ὁποίαν ἀκτινοβολεῖ ἡ λυχνία. β) Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς λυχνίας.

Λύσις. α) Ἐὰν ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τοῦ λαμπτῆρος εἶναι J, τότε ἡ ἐκπεμπομένη ὑπ' αὐτοῦ ὁλικὴ φωτεινὴ ροὴ $\Phi_{o\lambda}$ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\Phi_{o\lambda} = 4\pi\cdot J \qquad (1)$$

Διὰ J = 66,5 NK εἶναι

$$\underline{\Phi_{o\lambda} = 835\ \mathrm{Lm}.}$$

β) Καλοῦμεν ἀπόδοσιν α φωτεινῆς πηγῆς τὸ πηλίκον τῆς ἐκπεμπομένης ὁλικῆς φωτεινῆς ροῆς $\Phi_{o\lambda}$ ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος διὰ τῆς ἰσχύος Ν τὴν ὁποίαν καταναλίσκει οὗτος. Ἤτοι

$$\alpha = \frac{\Phi_{o\lambda}}{N} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $\Phi_{o\lambda}$ = 835 Lm, N = 60 W καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 13{,}9\ \mathrm{Lm/W}.}$$

431. Φωτεινὴ πηγὴ ἔχει ἰσχὺν 800 NK καὶ καταναλίσκει 500 W. Πόση ἡ φωτεινὴ ροὴ εἰς Lumen καὶ ἡ ἀπόδοσις αὐτῆς.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἡ ὁλικὴ φωτεινὴ ροὴ $\Phi_{ολ}$ ἡ ἐκπεμπομένη ὑπὸ φωτεινῆς πηγῆς εἶναι

$$\Phi_{ολ} = 4\,\pi \cdot J$$

ὅπου J εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς φωτεινῆς πηγῆς. Ἄρα διὰ J = 800 NK εὑρίσκομεν

$$\underline{\Phi_{ολ} = 10\,050 \text{ Lm.}}$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἀπόδοσις α φωτεινῆς πηγῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{\alpha = \frac{\Phi_{ολ}}{N}}$$

ὅπου $\Phi_{ολ}$ ἡ ἐκπεμπομένη ὁλικὴ φωτεινὴ ροὴ ὑπὸ τῆς πηγῆς καὶ N ἡ καταναλισκομένη ὑπ' αὐτῆς ἰσχύς.

Συνεπῶς διὰ $\Phi_{ολ} = 10\,050$ Lm καὶ N = 500 W, εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 20{,}1 \text{ Lm/W.}}$$

432. Λαμπτήρ, ἠλεκτρικῆς ἰσχύος λειτουργίας 40 W, ἔχει ἀπόδοσιν 11 Lm/W. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ λαμπτῆρος ὁ φωτισμὸς εἶναι 5 Lux.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ φωτισμοῦ $E = J/r^2$ λαμβάνομεν

$$r = \sqrt{\frac{J}{E}} \qquad (1)$$

ὅπου r ἡ ἀπόστασις τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, J ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς πηγῆς καὶ E ὁ φωτισμός. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸν τύπον τῆς ἀποδόσεως

$$\alpha = \frac{\Phi}{N} \qquad (2)$$

ὅπου Φ ἡ φωτεινὴ ροὴ ἡ ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος καὶ N ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπ' αὐτοῦ.

Ἐὰν θέσωμεν $\Phi = 4\,\pi \cdot J$ ἔχομεν

$$\alpha = \frac{4\,\pi \cdot J}{N} \quad \text{ἢ} \quad J = \frac{\alpha \cdot N}{4\,\pi} \qquad (3)$$

καὶ συνεπῶς βάσει τῆς σχέσεως (1) ἡ σχέσις (3) δύναται νὰ γραφῇ

$$\underline{r = \sqrt{\frac{\alpha \cdot N}{4\,\pi \cdot E}}} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) τὰς τιμὰς α = 11 Lm/W, N = 40 W καὶ E = 5 Lux, εὑρίσκομεν

$$\underline{r = 7{,}2 \text{ m.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

433. Εὕρατε τὴν φωτεινὴν ροὴν τὴν προερχομένην ὑπὸ λαμπτῆρος φωτεινῆς ἰσχύος 20 NK. (Ἀπ. 251 Lm.)

434. Δι' ἐκτέλεσιν ὡρισμένης ἐργασίας ἐπὶ τραπέζης ἐργαστηρίου ἀπαιτεῖται φωτισμὸς 100 Lux. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς λυχνίας, εὑρισκομένης εἰς κάθετον ἀπόστασιν 1,5 m καὶ εἰς ὁριζοντίαν 2 m ἀπὸ τῆς περιοχῆς τῆς ἐργασίας, διὰ νὰ προκαλέσῃ τὸν ἀνωτέρω φωτισμόν. ('Απ. 1042 ΝΚ.)

435. Λυχνία ἠλεκτρικὴ ἰσχύος 16 ΝΚ εὑρίσκεται εἰς ὕψος 1 m ἀπὸ τραπέζης. Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ τοποθετηθῇ λυχνία ἰσχύος 50 ΝΚ, διὰ νὰ προκαλῇ διπλάσιον φωτισμόν. ('Απ. 1,25 m.)

436. Αἱ ἐπιφάνειαι δύο φωτεινῶν πηγῶν ἔχουν λόγον $S_1 : S_2 = 3 : 4$, αἱ δὲ ἰσχεῖς αὐτῶν $J_1 : J_2 = 9 : 8$. Ποῖος ὁ λόγος $\Phi_1 : \Phi_2$ τῶν φωτεινῶν ροῶν αὐτῶν. ('Απ. $\Phi_1 : \Phi_2 = S_1 J_1 : S_2 J_2 = 27 : 32$.)

437. Ὑπολογίσατε τὸν φωτισμὸν ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν, εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ πηγῆς 200 ΝΚ. ('Απ. 8 Lux.)

438. Πόση ἡ ἰσχὺς φωτεινῆς πηγῆς, προκαλούσης φωτισμὸν 25 Lux ἐπὶ διαφράγματος, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 8 m ἀπ' αὐτοῦ. Ποία ἡ φωτεινὴ ροὴ ἡ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ διαφράγματος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 0,5 m². ('Απ. 1600 ΝΚ, 12,5 Lm.)

439. Φωτεινὴ πηγὴ μικρῶν διαστάσεων (σημειακή), εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ διαφράγματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπάρχει κυκλικὴ ὀπὴ διαμέτρου 10 cm. Τὸ διάφραγμα τέμνει καθέτως τὴν γραμμὴν ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον τῆς ὀπῆς καὶ τὴν πηγήν. Εὑρέθη ὅτι 0,05 Lm φωτεινῆς ροῆς διέρχονται μέσῳ τῆς ὀπῆς. α) Ποία ἡ στερεὰ γωνία, εἰς στερεακτίνια, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ὀπῆς καὶ τῆς πηγῆς. β) Ποία ἡ ἰσχὺς τῆς πηγῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὀπῆς. γ) Ἐὰν ἡ πηγὴ ἀκτινοβολῇ ὁμοιομόρφως καθ' ἁπάσας τὰς διευθύνσεις, εὕρατε τὴν ὁλικὴν φωτεινὴν ροὴν τὴν ὁποίαν αὕτη ἐκπέμπει. δ) Ἡ συνολικὴ ἀπόδοσις τῆς πηγῆς εἶναι 20 Lm/W. Ποία ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ἀπὸ τῆς πηγῆς.

('Απ. α' 0,00197 στερεακτίνια. β' 25,4 ΝΚ. γ' 319 Lm. δ' 16 W.)

440. α) Δι' ἄνετον ἐκτέλεσιν ἐργασίας ἐπὶ τραπέζης ἀπαιτεῖται φωτισμὸς 120 Lux. Ζητεῖται πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς φωτεινῆς πηγῆς εὑρισκομένης εἰς ὕψος 2,5 m ἄνωθεν τῆς τραπέζης. β) Ἐὰν ἡ φωτεινὴ πηγὴ ἐφωδιασθῇ δι' ἀνακλαστῆρος αὐξάνοντος τὴν εἰς φωτεινὴν ἐνέργειαν ἀπόδοσιν κατὰ 25 %, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς αὐτή. γ) Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τῆς τραπέζης πρέπει νὰ ἀναρτηθῇ ἡ πρώτη λυχνία μετὰ τοῦ ἀνακλαστῆρος, ἵνα ὁ φωτισμὸς παραμείνῃ 120 Lux.

('Απ. α' 750 ΝΚ. β' 600 ΝΚ. γ' 2,8 m.)

441. Εἰς ποῖον ὕψος ἄνωθεν τραπέζης πρέπει νὰ τοποθετηθῇ λυχνία φωτισμοῦ 60 W, ἵνα ὁ φωτισμὸς ἐπ' αὐτῆς εἶναι 300 Lux. ('Απ. 0,505 m.)

442. Ἡ συνολικὴ φωτεινὴ ροὴ φωτιστικῆς λυχνίας 60 W, προσπίπτει μέσῳ ἀνακλαστῆρος ἀποδόσεως 80 %, ἐπὶ κυκλικῆς ἐπιφανείας 7 m², εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 100 m ἀπ' αὐτῆς. Ποῖος ὁ προκαλούμενος φωτισμός. ('Απ. B = 109,7 Lux.)

443. Δύο λαμπτῆρες, 5 ΝΚ καὶ 20 ΝΚ ἀντιστοίχως, ἀπέχουν κατὰ 150 cm. Εἰς ποῖον σημεῖον μεταξὺ αὐτῶν ὁ ὑπὸ ἑκάστου λαμπτῆρος παραγόμενος φωτισμὸς θὰ εἶναι ὁ αὐτός. ('Απ. 50 cm ἀπὸ τὸν λαμπτῆρα 5 ΝΚ.)

444. Συγκρίνατε τὸν φωτισμὸν τὸν προερχόμενον ἀπὸ ἕνα λαμπτῆρα φωτεινῆς ἰσχύος 16 ΝΚ, ἐξ ἀποστάσεως 2 m, πρὸς τὸν φωτισμὸν τὸν προερχόμενον ἀπὸ λαμπτῆρα φωτεινῆς ἰσχύος 50 ΝΚ, ἐξ ἀποστάσεως 3 m. ('Απ. 1,39 : 1.)

445. Αἱ ἀκτῖνες φωτεινῆς πηγῆς προσπίπτουν ἐπὶ δύο μικρῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εὑρισκομένων ἡ μία εἰς ἀπόστασιν 90 cm καὶ ἡ ἄλλη εἰς ἀπόστασιν 100 cm.

Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐπιφανείας αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν 10^0 καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐπιφανείας ὑπὸ γωνίαν 0^0. Ποῖος ὁ λόγος $B_1 : B_2$ τῶν φωτισμῶν τῶν δύο ἐπιφανειῶν. (Ἀπ. $B_1 : B_2 = 1{,}216 : 1$.)

446. Λαμπτὴρ στιγμιαίας ἀναλαμπῆς (φωτογραφικῆς μηχανῆς) ἔχει φωτεινὴν ἰσχὺν περίπου $5 \cdot 10^6$ ΝΚ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ ἐπιφανείας τινὸς εἷς τοιοῦτος λαμπτὴρ θὰ παράγῃ τὸν αὐτὸν φωτισμὸν μὲ τὸν μέγιστον φωτισμὸν τὸν ὁποῖον παράγει ὁ Ἥλιος, ἤτοι 100 000 Lux. (Ἀπ. 7,08 m.)

447. Λαμπτὴρ βολφραμίου, ἰσχύος 75 W, προκαλεῖ φωτεινὴν ροὴν 850 Lm. Ποία ἡ ἀπόδοσις τοῦ λαμπτῆρος. (Ἀπ. 11,3 Lm/W.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ′

448. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑνὸς ἐπιπέδου εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 120 cm ἀπ' ἀλλήλων. Ἄνωθεν τῶν δύο σημείων καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων δι' αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 60 cm καὶ 90 cm ἀντιστοίχως, δύο φωτειναὶ πηγαὶ ἰσχύων 75 ΝΚ καὶ 50 ΝΚ ἀντιστοίχως. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου Β καὶ μεταξὺ τῆς πηγῆς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ πέτασμα ἵνα δέχεται ἴσους φωτισμούς.

449. Φωτεινὴ πηγὴ ἔχει ἰσχὺν (ἔντασιν) 100 ΝΚ. Ζητεῖται α) Ποία ἡ συνολικὴ ροὴ τὴν ὁποίαν προκαλεῖ, β) πόσος ὁ φωτισμὸς τὸν ὁποῖον αὕτη προκαλεῖ εἰς ἀπόστασιν 1,23 cm, ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν καὶ ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 60^0.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1954.)

450. Λαμπτὴρ 50 ΝΚ τοποθετεῖται 30 cm ἀπὸ τοῦ διαφράγματος φωτομέτρου Lummer - Brodhun. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φωτομέτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ λαμπτὴρ 100 ΝΚ, ἵνα ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ τοῦ διαφράγματος δέχωνται τὸν αὐτὸν φωτισμόν. Ὑπολογίσατε τὸν φωτισμὸν τοῦ διαφράγματος εἰς $\mathrm{Lm/m^2}$.

451. Αἱ ἀκτῖνες φωτεινῆς πηγῆς προσπίπτουν ἐπὶ δύο μικρῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 5 m ἡ μία καὶ 15 m ἡ ἄλλη ἀπὸ τῆς πηγῆς. Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐπιφανείας αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν 45^0. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐπιφανείας, εἰς τρόπον ὥστε ὁ φωτισμὸς τῶν δύο ἐπιφανειῶν νὰ εἶναι ὁ αὐτός.

452. Φωτεινὴ πηγή, διὰ κάθετον πρόσπτωσιν, προκαλεῖ ἐπὶ ἐπιφανείας, ἀπεχούσης κατὰ 2 m, φωτισμὸν 40 Lux. Ἐὰν αὕτη πρέπει νὰ προκαλῇ τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἐπὶ ἐπιφανείας ἀπεχούσης κατὰ 3 m καὶ ὑπὸ πρόσπτωσιν 60^0, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς λυχνίας εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις.

453. Λυχνία 10 ΝΚ καὶ ἑτέρα 32 ΝΚ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2,5 m μεταξύ των. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ διάφραγμα μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν οὕτως ὥστε νὰ φωτίζωνται ἐξ ἴσου ἀμφότεραι αἱ ἐπιφάνειαί του.

454. Δύο φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2,5 m ἀπ' ἀλλήλων. Ὁ λόγος τῶν ἰσχύων αὐτῶν εἶναι $J_1 : J_2 = 16 : 49$. Ζητεῖται εἰς ποίαν ἀπόστασιν δέον νὰ τοποθετηθῇ διάφραγμα καθέτως πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰς δύο πηγὰς εὐθεῖαν, ἵνα τοῦτο δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμόν.

455. Δύο λυχνίαι παρέχουν ἴσον φωτισμὸν ὅταν τοποθετοῦνται εἰς ἀποστάσεις 60 cm καὶ 70 cm ἀπὸ τινος φωτομέτρου. Ὅταν παρεντίθεται ὑαλίνη λεπτὴ πλὰξ μεταξὺ τῆς ἐντονωτέρας λυχνίας καὶ τοῦ φωτομέτρου, ἡ ἀσθενεστέρα λυχνία πρέπει νὰ μετακινηθῇ τότε κατὰ 3 cm μακρύτερον διὰ νὰ ἀποδώσῃ τὸν ἴδιον φωτισμόν. Ὑπολογίσατε τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς ἐπὶ τοῖς $^0/_0$ τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ὑάλου.

456. α) Λαμπτὴρ τοῦ ὁποίου ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς εἶναι 100 NK, τοποθετεῖται 1 m ὑπεράνω ὁριζοντίας τραπέζης. Πόσος εἶναι ὁ φωτισμὸς εἰς ἓν σημεῖον τῆς τραπέζης ἀκριβῶς κάτωθεν τοῦ λαμπτῆρος. β) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ λαμπτήρ, κατὰ ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, ἵνα ὁ φωτισμὸς εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς του.

457. Αἱ ἀκτῖνες φωτεινῆς πηγῆς προσπίπτουν ἐπὶ δύο μικρῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 36 cm ἡ μία καὶ εἰς ἀπόστασιν 48 cm ἡ ἄλλη. Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐπιφανείας αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν 60°. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐπιφανείας, εἰς τρόπον ὥστε ὁ φωτισμὸς τῶν δύο ἐπιφανειῶν νὰ εἶναι ὁ αὐτός.

458. Λαμπτὴρ ἔχει φωτεινὴν ἰσχὺν 50 NK καὶ συνολικὴν ἀπόδοσιν 12 Lm/W. Πόση ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἰς Watt παρέχεται εἰς τὴν λυχνίαν.

459. Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν φωτομέτρου Bunsen, εἰς λαμπτὴρ 40 NK τοποθετεῖται εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος φωτομετρικῆς τραπέζης μήκους 1 m καὶ εἰς ἀγνώστου ἰσχύος λαμπτήρ, εἰς τὰ 100 cm τῆς κλίμακος. Ὅταν τὸ διάφραγμα εὑρίσκεται εἰς τὰ 70 cm ἔχομεν τὸν αὐτὸν φωτισμόν. Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν λαμπτῆρος.

460. Δίδονται μία φωτεινὴ πηγὴ ἐντάσεως (ἰσχύος) 2 μονάδων καὶ ἑτέρα ἐντάσεως 10 μονάδων, ἀμφότεραι δὲ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ἑνὸς φωτομετρικοῦ διαφράγματος ἢ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Ζητοῦνται αἱ ἀποστάσεις (φωτεινὴ πηγὴ - διάφραγμα) εἰς τὰς δύο ἄνω περιπτώσεις, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τούτων εἶναι 60 cm καὶ ὅτι τὸ φωτομετρικὸν διάφραγμα δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν φωτεινῶν πηγῶν. Ἀναφέρατε γραφικῶς — προχείρως μόνον — τὰς δύο λύσεις, λαμβάνοντες ὡς θετικὴν φορὰν τὴν διεύθυνσιν ἀπὸ τὸ διάφραγμα πρὸς τὴν ἰσχυροτέραν τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1954.)

461. Λαμπτὴρ ἰσχύος 60 W παράγει ἐπὶ διαφράγματος, εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπ' αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν φωτισμὸν μὲ πρότυπον λυχνίαν ἐντάσεως 16 NK, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ διαφράγματος. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς λυχνίας τῶν 60 W.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΦΥΣΙΚΗ (ΚΥΜΑΤΙΚΗ) ΟΠΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

462. Τὸ μῆκος κύματος ἐρυθρᾶς γραμμῆς τοῦ καδμίου εἶναι εἰς τὸν ἀέρα 6438 Å. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος ταύτης ἐντὸς ὑάλου, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ τὸ φῶς τῆς ὡς ἄνω φασματικῆς γραμμῆς εἶναι 1,747.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν λ_o τὸ μῆκος κύματος τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ν τὴν συχνότητα αὐτῆς καὶ c_o τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ ἀέρος, θὰ ἔχωμεν

$$c_o = \lambda_o \cdot \nu \qquad \text{ἢ} \qquad \lambda_o = \frac{c_o}{\nu} \tag{1}$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς ἐντὸς τῆς ὑάλου καὶ c τὴν ἀντίστοιχον ταχύτητα, ἐπειδὴ ἡ συχνότης ν παραμένει ἡ αὐτή, θὰ ἔχωμεν

$$c = \lambda \cdot \nu \quad \text{ἢ} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \tag{2}$$

Διαιροῦμεν τὴν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{c_o}{c} \quad \text{ἢ} \quad \lambda = \frac{c}{c_o} \cdot \lambda_o \tag{3}$$

ἢ ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ c_o/c εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως n τῆς ὑάλου, προκύπτει ὅτι

$$\underline{\lambda = \lambda_o/n.} \tag{4}$$

Θέτομεν : $\lambda_o = 6438$ Å, $n = 1{,}747$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 3685 \text{ Å}.}$$

463. Ἡ ταχύτης διαδόσεως πρασίνης ἀκτινοβολίας ἐν τῷ κενῷ εἶναι 300 000 km/sec, τὸ δὲ μῆκος κύματος αὐτῆς 0,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης. Ἐὰν ἡ ἰδία ἀκτινοβολία διαδοθῇ ἐντὸς ὑγροῦ ἀπολύτου δείκτου διαθλάσεως 1,5, νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα ταχύτης ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ νέον μῆκος κύματος.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Ἰατρικὴ Σχολή. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956.)

Λύσις. α) Εὕρεσις τῆς συχνότητος. Ἐὰν καλέσωμεν λ_o τὸ μῆκος κύματος τῆς πρασίνης ἀκτινοβολίας εἰς τὸ κενὸν καὶ ν τὴν συχνότητα αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν τὸν γνωστὸν τύπον

$$c_o = \lambda_o \cdot \nu$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν

$$\nu = \frac{c_o}{\lambda_o}$$

Οὕτω διὰ $c_o = 300\,000$ km/sec $= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, $\lambda_o = 0{,}5$ μ $= 5 \cdot 10^{-5}$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}.}$$

β) Εὕρεσις τῆς ταχύτητος τῆς ἀκτινοβολίας ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Καλοῦμεν c τὴν ταχύτητα τῆς ἀκτινοβολίας καὶ λ τὸ μῆκος κύματος αὐτῆς ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Τότε συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀπολύτου δείκτου διαθλάσεως θὰ ἔχωμεν

$$n = \frac{c_o}{c} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad c = \frac{c_o}{n}$$

Οὕτω διὰ $n = 1{,}5$ καὶ $c_o = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec εὑρίσκομεν

$$\underline{c = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}}$$

γ) Εὕρεσις τοῦ μήκους κύματος ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ μῆκος κύματος, ἐπειδὴ ἡ συχνότης ν τῆς ἀκτινοβολίας παραμένει σταθερά, θὰ ἔχωμεν

$$c = \lambda \cdot \nu$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν

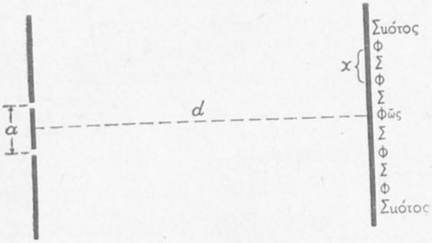
$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Οὕτω διὰ $c = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ sec^{-1}, εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 33 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 0{,}33 \text{ μ}.}$$

464. Φωτεινὴ πηγή, τῆς ὁποίας τὸ φῶς διηθεῖται ὑπὸ κυανῆς ὑάλου, φωτίζει δύο παραλλήλους σχισμάς, πολὺ λεπτάς, ἀπεχούσας κατὰ 0,1 mm μεταξύ των. Παρατηρεῖται ἐπὶ πετάσματος τιθεμένου εἰς ἀπόστασιν 2 m καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν σχισμῶν, ὅτι τὸ μέσον τοῦ κεντρικοῦ φωτεινοῦ κροσσοῦ ἀπέχει κατὰ 0,5 cm ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ πρώτου σκοτεινοῦ κροσσοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τοῦ κυανοῦ φωτός.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ κεντρικοῦ φωτεινοῦ κροσσοῦ καὶ τὸ Α εἶναι τὸ μέσον τοῦ πστοῦ σκοτεινοῦ κροσσοῦ.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Φ_1 ΑΒ (βλ. σχῆμα ἀσκήσεως 465) θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$r_1^2 = d^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 \qquad (1)$$

καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Φ_2 ΑΒ ὅτι

$$r_2^2 = d^2 + \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$r_1^2 - r_2^2 = \left(d^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2\right) - \left(d^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - x\right)^2\right)$$

ἢ

$$r_1^2 - r_2^2 = 2\,\alpha \cdot x. \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) γράφεται $(r_1 + r_2)\cdot(r_1 - r_2) = 2\,\alpha \cdot x$, ἢ ἐπειδὴ ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $r_1 = r_2 = d$, λαμβάνομεν

$$r_1 - r_2 = \frac{\alpha \cdot x}{d} \qquad (4)$$

Ἐὰν εἰς τὸ Α ἐμφανίζεται ὁ πστὸς σκοτεινὸς κροσσός, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι

$$r_1 - r_2 = (2\,n - 1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

ὅπου λ εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτός, καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος εὑρέσεως τοῦ μήκους κύματος

$$\underline{\lambda = \frac{2\,\alpha \cdot x}{(2\,n - 1)\cdot d}} \qquad (5)$$

Θέτοντες $\alpha = 10^{-2}$ cm, $d = 2 \cdot 10^2$ cm, $x = 5 \cdot 10^{-1}$ cm καὶ $n = 1$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm} = 5\,000\ \text{Å}}$$

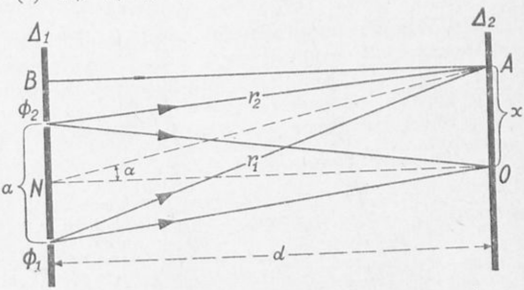
Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν Α ἐμφανίζεται ὁ πστὸς φωτεινὸς κροσσός, τότε $r_1 - r_2 = n \cdot \lambda$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\underline{\lambda = \frac{2\,\alpha \cdot x}{n \cdot d}} \qquad (6)$$

465. Πηγὴ κυανοῦ φωτὸς φωτίζει δύο πολὺ στενὰς σχισμὰς Φ_1 καὶ Φ_2 εὑρισκομένας ἐπὶ διαφράγματος Δ_1, εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των 0,5 mm. Ἐπὶ πετάσματος Δ_2 παραλλήλου πρὸς τὸ Δ_1 καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπ' αὐτοῦ, παρατηρεῖται ὅτι τὸ μέσον τοῦ κεντρικοῦ φωτεινοῦ κροσσοῦ ἀπέχει 0,9 mm ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ πρώτου σκοτεινοῦ κροσσοῦ. α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τοῦ

κυανοῦ φωτός. β) Ἀντικαθίσταται τὸ κυανοῦν φῶς δι' ἐρυθροῦ, συχνότητος $4 \cdot 10^{14}\,sec^{-1}$. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις ἥτις χωρίζει τὸ μέσον τοῦ κεντρικοῦ φωτεινοῦ κροσσοῦ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ πρώτου σκοτεινοῦ τοιούτου.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου (5) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, διὰ $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ cm, $x = 9 \cdot 10^{-2}$ cm, $d = 2 \cdot 10^{2}$ cm καὶ $n = 1$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ κύματος τοῦ κυανοῦ φωτὸς εἶναι



$$\lambda = 45 \cdot 10^{-6}\ \text{cm} = 4\,500\ \text{Å}$$

β) Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (5) θέσωμεν $\lambda = c/\nu$ καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς x, λαμβάνομεν

$$x = \frac{(2n-1)\,d \cdot c}{2\alpha \cdot \nu}$$

Οὕτω διὰ $n = 1$, $d = 2 \cdot 10^{2}$cm, $\nu = 4 \cdot 10^{14}\,sec^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος σκοτεινὸς κροσσὸς διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς ἀπέχει ἀπὸ τὸν κεντρικὸν φωτεινὸν κροσσὸν ἀπόστασιν

$$x = 0{,}15\ \text{cm}.$$

466. Μονοχρωματικὸν φῶς, ἐκ σημειακῆς πηγῆς, φωτίζει δύο παραλλήλους καὶ στενὰς σχισμὰς τὰ κέντρα τῶν ὁποίων ἀπέχουν 0,8 mm. Οὕτω κροσσοὶ ἐκ συμβολῆς σχηματίζονται ἐπὶ διαφράγματος παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν σχισμῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπ' αὐτοῦ. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο γειτονικῶν φωτεινῶν κροσσῶν εἶναι 0,304 mm. Ὑπολογίσατε τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ φωτός.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο σχισμῶν, d τὴν ἀπόστασιν τοῦ διαφράγματος ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν σχισμῶν, x τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν φωτεινῶν κροσσῶν καὶ λ τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτός. Τότε (βλ. Ἄσκησιν 464) ἐπειδὴ $r_1 - r_2 = \lambda$, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot x}{d}$$

Οὕτω διὰ $\alpha = 0{,}8\ \text{mm} = 8 \cdot 10^{-2}$ cm, $x = 0{,}304\ \text{mm} = 304 \cdot 10^{-4}$ cm, $d = 50$ cm, προκύπτει

$$\lambda = 4\,860 \cdot 10^{-8}\,\text{cm} = 4\,860\ \text{Å}.$$

467. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης τῶν ἀκτινοβολιῶν, ἐρυθρᾶς, πορτοκαλλιόχρου, κυανῆς καὶ ἰώδους, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ ἀντίστοιχα μήκη κύματος αὐτῶν εἶναι 7500 Å, 6000 Å, 4500 Å καὶ 4000 Å.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν ν τὴν συχνότητα τῆς ἀκτινοβολίας καὶ λ τὸ μῆκος κύματος αὐτῆς, τότε ἡ ταχύτης διαδόσεως τῆς ἀκτινοβολίας (φωτὸς) θὰ εἶναι

$$c = \lambda \cdot \nu \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς ν εὑρίσκομεν

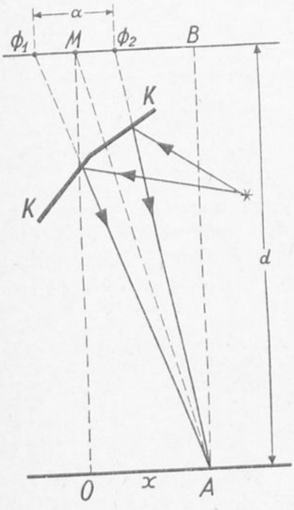
$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ διαδοχικῶς $\lambda = 7\,500$ Å, $6\,000$ Å, $4\,500$ Å, $4\,000$ Å, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$$\underline{\nu = 400 \cdot 10^{12}\,\text{sec}^{-1}} \quad \underline{\nu = 500 \cdot 10^{12}\,\text{sec}^{-1}} \quad \underline{\nu = 667 \cdot 10^{12}\,\text{sec}^{-1}} \quad \underline{\nu = 750 \cdot 10^{12}\,\text{sec}^{-1}}.$$

468. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εἰδώλων τὰ ὁποῖα δίδουν δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα διατάξεως Fresnel εἶναι 1 mm. Τὸ πέτασμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχηματίζονται οἱ κροσσοὶ συμβολῆς ἀπέχουν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο εἴδωλα 1 m. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κεντρικοῦ φωτεινοῦ κροσσοῦ θὰ σχηματισθῇ ὁ φωτεινὸς κροσσὸς 4ης τάξεως. Τὸ μῆκος κύματος τοῦ χρησιμοποιουμένου φωτὸς εἶναι 5896 Å.

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἰς τὸ Α σχηματίζεται ὁ φωτεινὸς κροσσὸς nης τάξεως καὶ εἰς τὸ Ο ὁ κεντρικὸς φωτεινὸς κροσσός. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Φ_1AB θὰ ἔχωμεν



$$(\Phi_1 A)^2 = d^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2$$

ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Φ_2AB θὰ ἔχωμεν

$$(\Phi_2 A)^2 = d^2 + \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν

$$(\Phi_1 A)^2 - (\Phi_2 A)^2 = \left(d^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + x\right)^2\right) - \left(d^2 + \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = 2\,\alpha \cdot x$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$(\Phi_1 A + \Phi_2 A) \cdot (\Phi_1 A - \Phi_2 A) = 2\,\alpha \cdot x$$

καὶ ἂν τεθῇ ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος $\Phi_1 A = \Phi_2 A = d$, τότε ἔχομεν

$$\Phi_1 A - \Phi_2 A = \frac{\alpha \cdot x}{d}$$

Ἐφ' ὅσον ὅμως εἰς τὸ Α λαμβάνομεν τὸν nστὸν φωτεινὸν κροσσόν, θὰ εἶναι προφανῶς $\Phi_1 A - \Phi_2 A = n \cdot \lambda$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$n \cdot \lambda = \frac{\alpha \cdot x}{d}$$

καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{x = \frac{n \cdot \lambda \cdot d}{\alpha}}$$

Θέτοντες $n = 4$, $\lambda = 5896$ Å $= 5896 \cdot 10^{-8}$ cm, $d = 10$ cm καὶ $\alpha = 0{,}1$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{x = 0{,}236 \text{ cm.}}$$

469. Ἡ ἐξέτασις τοῦ φάσματος ἀστέρος δεικνύει ὅτι ἡ κεντρικὴ γραμμὴ τοῦ νατρίου ($\lambda = 5892$ Å) εὑρίσκεται μετατοπισμένη κατὰ 6 Å πρὸς τὸ ἄκρον τῶν μεγάλων μηκῶν κύματος τοῦ φάσματος. Ποία ἡ συνιστῶσα τῆς ταχύτητος τοῦ ἀστέρος κατὰ τὴν διεύθυνσιν παρατηρήσεως.

Λύσις. Ἐὰν μία φωτεινὴ πηγὴ ἀπομακρύνεται ἀπὸ παρατηρητὴν ὑπὸ ταχύτητα υ καὶ ἐκπέμπει ἀκτινοβολίαν συχνότητος ν, τότε διὰ τὸν παρατηρητήν, ἡ ἐκπεμπομένη ἀκτινοβολία φαίνεται ὅτι εἶναι συχνότητος ν', μικροτέρα τῆς ν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον

$$\nu' = \nu \cdot \frac{c}{c+\upsilon} \quad \text{(τύπος Doppler – Fizeau)} \qquad (1)$$

ὅπου c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

Ἐπειδὴ ὅμως ὡς γνωστὸν εἶναι $\nu' = c/\lambda'$ καὶ $\nu = c/\lambda$, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται

$$\lambda' = \lambda \cdot \frac{c+\upsilon}{c} \qquad (2)$$

Συνεπῶς θὰ λαμβάνῃ χώραν μετατόπισις τῆς φασματικῆς γραμμῆς τοῦ νατρίου πρὸς τὸ ἐρυθρὸν καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \cdot \frac{c+\upsilon}{c} - \lambda \quad \text{ἢ} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda \cdot \upsilon}{c} \qquad (3)$$

Ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς υ λαμβάνομεν

$$\upsilon = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (4) $\Delta\lambda = 6$ Å, $\lambda = 5892$ Å, $c = 300\,000$ km/sec καὶ εὑρίσκομεν

$$\upsilon = 305 \text{ km/sec.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

470. Ἡ ἐρυθρὰ γραμμὴ τοῦ καδμίου, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος κύματος 0,000 064 38 cm, ἔχει θεσπισθῆ ὡς ἡ στοιχειώδης σταθερὰ μήκους κύματος. Ἐκφράσατε τὸ μῆκος τοῦ κύματός της εἰς μ, mμ καὶ Å. (Ἀπ. 0,6438 μ, 643,8 mμ, 6438 Å.)

471. Ἡ κυανὴ γραμμὴ F τοῦ φάσματος τοῦ ὑδρογόνου ἔχει μῆκος κύματος 486,1 mμ. α) Ἐκφράσατε τὸ μῆκος τοῦτο εἰς cm, μ καὶ εἰς Angström (Å). β) Ποία ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης. Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. (Ἀπ. 0,000 048 61 cm, 0,4861 μ, 4861 Å, $6{,}17 \cdot 10^{14}$ sec^{-1}.)

472. Τὸ μῆκος κύματος μονοχρωματικοῦ φωτὸς εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\lambda = 590$ mμ. Πόσον τὸ μῆκος κύματος ἐντὸς ὑάλου, δείκτου διαθλάσεως $n = 1{,}5$.
(Ἀπ. $\lambda_1 = 393{,}3$ mμ.)

473. Εἰς τὴν περιθλαστικὴν εἰκόνα λεπτῆς σχισμῆς πλάτους 0,5 mm, πραγματοποιουμένην ἐπὶ διαφράγματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς 3 m, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν πρώτων σκοτεινῶν κροσσῶν ἑκατέρωθεν τῆς σχισμῆς εἶναι 8 mm, ὅταν ἡ σχισμὴ φωτίζεται δι' ἐρυθροῦ φωτὸς καὶ 5,6 mm, ὅταν φωτίζεται διὰ κυανοῦ φωτός. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἐρυθροῦ καὶ τοῦ κυανοῦ φωτός.
(Ἀπ. 667 mμ, 467 mμ.)

474. Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ ὕδωρ εἶναι τὰ 3/4 τῆς ταχύτητος αὐτοῦ εἰς τὸν ἀέρα. Ποῖον τὸ ἀποτέλεσμα ἐπὶ τῆς συχνότητος καὶ τοῦ μήκους κύματος τοῦ φωτός, ὅταν τοῦτο μέσῳ τοῦ ἀέρος εἰσέρχεται εἰς τὸ ὕδωρ. Ὑπολογίσατε τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὕδατος.
(Ἀπ. Ἡ συχνότης παραμένει ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέσα, τὸ δὲ μῆκος κύματος εἰς τὸ ὕδωρ ἰσοῦται πρὸς τὰ 3/4 τοῦ μ. κύματος εἰς τὸν ἀέρα. $n = 1{,}33$.)

475. Εἰς διάταξιν κατόπτρων Fresnel ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο γειτονικῶν κροσσῶν συμβολῆς, παρατηρουμένων τῇ βοηθείᾳ μεγεθυντικοῦ φακοῦ ἑστιακῆς αποστάσεως 5 cm, φαίνεται ἴση πρὸς 3 mm. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο συμφώνων φωτεινῶν κέντρων εἶναι 4 mm, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ διαφράγματος ὅπου σχηματίζονται οἱ κροσσοὶ ἀπὸ τῶν δύο κέντρων εἶναι 4 m. Ποία ἡ συχνότης τοῦ χρησιμοποιουμένου φωτός. Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 25 cm.

('Απ. $600 \cdot 10^{12}$ Hz.)

476. Ἐρυθρὸν φῶς μήκους κύματος 6438 Å, ἐκπέμπεται ἀπὸ σημειακὴν πηγήν, διέρχεται μέσῳ δύο παραλλήλων καὶ στενῶν σχισμῶν αἵτινες ἀπέχουν 1 mm. Καθορίσατε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῆς κεντρικῆς λαμπρᾶς περιοχῆς καὶ τῆς τρίτης ἐκ συμβολῆς σκοτεινῆς περιοχῆς, αἵτινες σχηματίζονται ἐπὶ διαφράγματος παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν σχισμῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπ' αὐτῶν. ('Απ. 0,161 cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

477. Φωτεινὴ πηγὴ Φ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος κύματος εἶναι 6 000 Å εἰς τὸν ἀέρα, φωτίζει δύο στενὰς σχισμὰς ἀπεχούσας μεταξύ των κατὰ 1 mm εὑρισκόμενας ἐπὶ πετάσματος $Δ_1$. Ἕτερον πέτασμα $Δ_2$ παράλληλον πρὸς τὸ $Δ_1$ τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπ' αὐτοῦ. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν σχηματιζομένων κροσσῶν ἐκ συμβολῆς, τοὺς ὁποίους παρατηρεῖ τις ἐπὶ τοῦ πετάσματος $Δ_2$, ἐὰν ὁ χῶρος μεταξὺ τῶν δύο πετασμάτων πληροῦται α) δι' ἀέρος καὶ β) δι' ὕδατος. Δίδεται δείκτης διαθλάσεως ὕδατος 4/3.

478. Φωτεινὴ πηγὴ κιτρίνου φωτός, μήκους κύματος 5600 Å, φωτίζει δύο στενὰς σχισμὰς $Φ_1$ καὶ $Φ_2$ εὑρισκομένας ἐπὶ διαφράγματος Δ. Εἰς τὸν δρόμον τῶν ἀκτίνων τῶν προερχομένων ἐκ τῆς $Φ_2$, παρεμβάλλεται παραλλήλως πρὸς τὸ διάφραγμα Δ λεπτὴ διαφανὴς ὑαλίνη πλὰξ δείκτου διαθλάσεως 1,56. Ὁ κεντρικὸς φωτεινὸς κροσσὸς ἐκτρέπεται καὶ καταλαμβάνει τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν εἶχε πρὸ τῆς παρεμβολῆς τῆς ὑαλίνης πλακὸς ὁ 12ος κροσσός. Πόσον τὸ πάχος τῆς πλακός. Ἀντικαθίσταται τὸ κίτρινον φῶς δι' ἑτέρου ἀγνώστου μήκους κύματος καὶ παρατηρεῖται ὅτι ὁ κεντρικὸς κροσσὸς καταλαμβάνει τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν κατεῖχε ὁ τέταρτος κροσσός. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτὸς ὅπερ ἀντικατέστησε τὸ κίτρινον φῶς.

479. Δύο σύμφωνοι φωτειναὶ δέσμαι πίπτουν ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως α ἐπὶ στρώματος ἀέρος περιοριζομένου ἑκατέρωθεν ὑπὸ ὑάλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ πορείας ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς φωτεινῆς δέσμης τῆς ὑφισταμένης ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς διαχωριζούσης ἐπιφανείας ἀὴρ - ὕαλος καὶ τῆς δέσμης τῆς ἀνακλωμένης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς διαχωριζούσης ὕαλον - ἀέρα.

480. Δύο φωτειναὶ δέσμαι σύμφωνοι πίπτουν ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως α ἐπὶ ὑγροῦ στρώματος (δείκτου διαθλάσεως n), περιοριζομένου ἑκατέρωθεν ὑπὸ ἀέρος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ πορείας ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ τῆς φωτεινῆς δέσμης ἥτις, μεταξὺ δύο διαθλάσεων, ὑφίσταται δύο ἀνακλάσεις καὶ τῆς δέσμης ἥτις, μεταξὺ τῶν δύο ἀνακλάσεων, δὲν ὑφίσταται οὐδεμίαν ἀνάκλασιν.

481. Λαμβάνονται τῇ βοηθείᾳ κατόπτρων τοῦ Fresnel ἐκ μονοχρωματικοῦ φωτὸς συχνότητος $5 \cdot 10^{14}$ Hz κροσσοὶ συμβολῆς. Πόση εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ κάτοπτρα, ἐὰν ὁ κεντρικὸς φωτεινὸς κροσσὸς εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀμέσως γειτονικοῦ του φωτεινοῦ κροσσοῦ 4 mm. Τὸ πέτασμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1,75 m ἀπὸ τὰ κάτοπτρα, ἐνῶ ἡ φωτεινὴ πηγὴ ἀπέχει κατὰ 25 cm ἀπὸ αὐτά.

482. Αἱ γραμμαὶ D_1 καὶ D_2 τοῦ νατρίου ἔχουν μήκη κύματος ἀντιστοίχως 5896 Å καὶ 5890 Å. Συγκρίνεται τὸ φάσμα ἀστέρος δίδοντος τὰς γραμμὰς τοῦ νατρίου πρὸς τὸ ἡλιακὸν φάσμα. Παρατηρεῖται ὅτι αἱ δύο γραμμαὶ τοῦ νατρίου μετατίθενται εἰς τὸ φάσμα τοῦ ἀστέρος πρὸς τὸ ἰῶδες, εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ 1/6 ἐκείνης ἥτις χωρίζει τὴν μίαν ἀπὸ τὴν ἄλλην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἀστέρος.

483. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος τῶν χρωμάτων: ἐρυθροῦ, πορτοκαλλιόχρου, κυανοῦ καὶ ἰώδους, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ μήκη κύματος αὐτῶν εἰς κενὸν εἶναι ἀντιστοίχως: 7500 Å, 6000 Å, 4500 Å, καὶ 4000 Å. Δείκτης διαθλάσεως ὕδατος 4/3.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ. ΓΗΙΝΟΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

484. Δύο σημειακαὶ μαγνητικαὶ ποσότητες $m_1 = 50$ **μονάδες** C.G.S. **καὶ** $m_2 = 100$ **μονάδες** C.G.S. **εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 10** cm **μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀσκουμένη δύναμις ὅταν αὗται εὑρίσκωνται ἐν τῷ κενῷ.**

Λύσις. Ἐὰν δύο σημειακαὶ μαγνητικαὶ ποσότητες m_1, m_2 εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν r μεταξύ των, τότε κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἡ ἐξασκουμένη μεταξὺ αὐτῶν δύναμις θὰ εἶναι

$$F = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ὅπου μ συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς φύσεως τοῦ μέσου τὸ ὁποῖον παρεμβάλλεται μεταξὺ αὐτῶν καὶ καλεῖται μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ μέσου. Διὰ τὸν κενὸν χῶρον ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον $m_1 = 50$ μονάδες C.G.S., $m_2 = 100$ μονάδες C.G.S., $r = 10$ cm καὶ $\mu = 1$ εὑρίσκομεν

$$F = 50 \text{ dyn.}$$

485. Δύο ὅμοιαι μαγνητικαὶ ποσότητες ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην κατὰ 10 cm **καὶ ἀπωθοῦνται, εἰς τὸν ἀέρα, μετὰ δυνάμεως 400** dyn. **Πόση ἡ τιμὴ ἑκάστης μαγνητικῆς ποσότητος.**

Λύσις. Ἡ δύναμις F ἡ ὁποία ἐξασκεῖται μεταξὺ δύο μαγνητικῶν ποσοτήτων m_1, m_2, εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου τῶν μαγνητικῶν ποσοτήτων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως r αὐτῶν. Ἤτοι

$$F = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ὅπου μ συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἀπὸ τὴν φύσιν τῆς ἐνδιαμέσου ὕλης καὶ καλεῖται μαγνητικὴ διαπερατότης.

Ἐφ' ὅσον ὅμως αἱ μαγνητικαὶ ποσότητες εἶναι ἴσαι, θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον $m_1 = m_2 = m$ καὶ λύοντες ὡς πρὸς m λαμβάνομεν

$$m = r \cdot \sqrt{\mu \cdot F}$$

Οὕτω διὰ $F = 400$ dyn, $r = 10$ cm καὶ $\mu = 1$ εὑρίσκομεν

$$\underline{m = 200 \text{ μονάδες C.G.S.}}$$

486. Δύο ἴσαι μαγνητικαὶ ποσότητες, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι 500 μονάδες C.G.S., **ἕλκονται εἰς τὸ κενὸν μετὰ δυνάμεως 2500** dyn. **Εἰς πόσην ἀπόστασιν εὑρίσκονται αὗται μεταξύ των.**

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m ἑκάστην μαγνητικὴν ποσότητα, r τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν καὶ μ τὸν συντελεστὴν μαγνητικῆς διαπερατότητος, τότε ἡ δύναμις F ἡ ἐξασκουμένη μεταξὺ αὐτῶν εἶναι

$$F = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m^2}{r^2}$$

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς r λαμβάνομεν

$$\underline{r = \frac{m}{\sqrt{\mu \cdot F}}}$$

Οὕτω διὰ $\mu = 1$, $m = 500$ μονάδες C.G.S., $F = 2500$ dyn, εὑρίσκομεν

$$\underline{r = 10 \text{ cm.}}$$

487. Δύο ὅμοιοι πόλοι ἀπωθοῦνται μετὰ δυνάμεως 2 500 dyn, **ὅταν εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 8** cm. **Ποία εἶναι ἡ μαγνητικὴ ποσότης ἑκάστου πόλου εἰς τὸ κενόν.**

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μαγνητικὴν ποσότητα ἑκάστου πόλου καὶ r τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν, τότε ἡ δύναμις F, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἰς τὸ κενόν, θὰ εἶναι

$$F = \frac{m^2}{r^2} \qquad (1)$$

Λύομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς m καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{m = r \cdot \sqrt{F}} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) $r = 8$ cm, $F = 2\,500$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν

$$\underline{m = 400 \text{ μονάδες C.G.S.}}$$

488. Δύο πόλοι εὐθυγράμμου μαγνήτου μήκους 20 cm, **ἔχουν μαγνητικὰς ποσότητας ἴσας πρὸς 42 μονάδας** C.G.S. **Κατὰ τὴν προέκτασιν τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου καὶ εἰς ἀπόστασιν 10** cm **ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου, εὑρίσκεται ἕτερος βόρειος πόλος τοῦ ὁποίου ἡ μαγνητικὴ ποσότης εἶναι ἴση πρὸς 75 μονάδας** C.G.S. **Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐξασκουμένης δυνάμεως ὑπὸ τοῦ μαγνήτου ἐπὶ τοῦ πόλου τούτου εἰς τὸ κενόν.**

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μαγνητικὴν ποσότητα ἑκάστου πόλου τοῦ μαγνήτου, τότε ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ βορείου πόλου ἐπὶ τῆς πλησίον βορείας εὑρισκομένης μαγνητικῆς ποσότητος m εἰς ἀπόστασιν r ἀπ' αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἀπωστικὴ καὶ ἴση πρὸς

$$F_1 = \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (1)$$

Ἡ μαγνητικὴ ὅμως ποσότης m θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸν νότιον πόλον τοῦ μαγνήτου $r + l$, ὅπου l τὸ μῆκος τοῦ μαγνήτου καὶ θὰ δέχεται ἑλκτικὴν δύναμιν ἴσην πρὸς

$$F_2 = \frac{M \cdot m}{(r + l)^2} \qquad (2)$$

Συνεπῶς ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ μαγνήτου ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς ποσότητος m θὰ εἶναι ἀπωστικὴ καὶ ἴση πρὸς

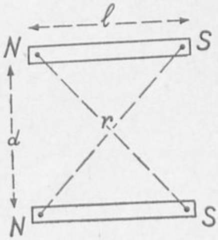
$$F = F_1 - F_2 = \frac{M \cdot m}{r^2} - \frac{M \cdot m}{(r+l)^2} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) M = 42 μονάδες C.G.S., m = 75 μονάδες C.G.S., r = 10 cm καὶ $l = 20$ cm, εὑρίσκομεν

$$F = 28 \text{ dyn.}$$

489. Μαγνήτης μήκους 6 cm, **ἔχων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ πόλους μαγνητικῶν ποσοτήτων 20 μονάδων** C.G.S., **ἐξαρτᾶται ὁριζοντίως καὶ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου μὲ ὅμοιον μαγνήτην, κείμενον κάτωθεν αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 8** cm **ἀπ' αὐτοῦ. Ὑπολογίσατε τὴν κατακόρυφον δύναμιν ἥτις ἀναπτύσσεται μεταξὺ τῶν δύο μαγνητῶν.**

Λύσις. Θὰ ἔχωμεν τὰς ἀπωστικὰς δυνάμεις F'_α καὶ F''_α, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ τῶν ὁμωνύμων πόλων, καὶ τὰς ἑλκτικὰς F'_ε καὶ F''_ε, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ τῶν ἑτερωνύμων πόλων. Οὕτω ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μαγνητικὴν ποσότητα ἑκάστου πόλου, l τὸ μῆκος τοῦ μαγνήτου, d τὴν ἀπόστασιν τῶν μαγνητῶν καὶ r τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν ἑτερωνύμων πόλων, θὰ ἔχωμεν



$$F_\alpha = \frac{m^2}{d^2} + \frac{m^2}{d^2} = \frac{2m^2}{d^2} \tag{1}$$

καὶ

$$F_\varepsilon = \frac{m^2}{r^2} + \frac{m^2}{r^2} = \frac{2m^2}{r^2} = \frac{2m^2}{d^2+l^2} \tag{2}$$

Ἀλλὰ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀπωστικῆς δυνάμεως θὰ εἶναι

$$F'_\varepsilon = \frac{2\,m^2}{d^2+l^2} \cdot \text{ημ}\,\alpha \tag{3}$$

ὅπου α εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διαγώνιος r μὲ τὸν ἄξονα l τοῦ ἑνὸς μαγνήτου.

Ἐπειδὴ ημ α = d/r, ὁ τύπος (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$F'_\varepsilon = \frac{2\,m^2}{d^2+l^2} \cdot \frac{d}{r} \tag{4}$$

Θέτομεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (1) καὶ (4) m = 20 μονάδες C.G.S., $l = 6$ cm, d = 8 cm καὶ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$$F_\alpha = 12{,}5 \text{ dyn} \qquad \text{καὶ} \qquad F_\varepsilon = 6{,}4 \text{ dyn.}$$

Ἄρα ἡ ἐξασκουμένη δύναμις μεταξὺ τῶν μαγνητῶν θὰ εἶναι ἀπωστικὴ καὶ ἴση πρὸς $F = F_\alpha - F_\varepsilon$, ἤτοι

$$F = 6{,}1 \text{ dyn.}$$

490. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου πεδίου εἰς ἀπόστασιν 15 cm **ἀπὸ πόλου, ὑποτιθεμένου σημειακοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ μαγνητικὴ ποσότης εἶναι 450 μονάδες** C.G.S.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ σημειακὴν μαγνητικὴν ποσότητα m καὶ εἰς τὸ κενὸν εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{m}{r^2}$$

Θέτοντες m = 450 μονάδες C.G.S. καὶ r = 15 cm εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 2 \text{ Gauss.}$$

491. Εὐθύγραμμος μαγνήτης τοῦ ὁποίου οἱ δύο πόλοι ἀπέχουν κατὰ 20 cm, **ἔχει μαγνητικὴν ροπὴν 520 μονάδες** C.G.S. **Ποία ἡ μαγνητικὴ ποσότης ἑκάστου πόλου τοῦ μαγνήτου τούτου.**

Λύσις. Ὡς γνωστόν, καλοῦμεν μαγνητικὴν ροπὴν M^* ἑνὸς μαγνητικοῦ διπόλου τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς μαγνητικῆς ποσότητος m αὐτοῦ ἐπὶ τὸ μῆκος l τοῦ διπόλου, ἤτοι

$$M^* = m \cdot l \qquad (1)$$

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς m λαμβάνομεν

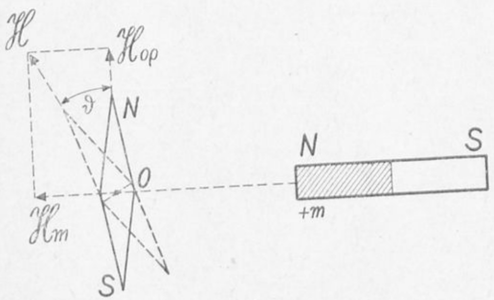
$$\underline{m = \frac{M^*}{l}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) $M^* = 520$ μονάδες C.G.S., $l = 20$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{m = 26 \text{ μονάδες C.G.S.}}$$

492. Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη περιστρέφεται εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον περὶ σημεῖον Ο. Ἐπὶ τῆς καθέτου διευθύνσεως αὐτῆς Ο$\mathcal{H}_{op}$ καὶ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας αὐτῆς τοποθετεῖται μαγνητισμένη ράβδος, παρατηρεῖται δὲ τότε, ὅτι ἡ βελόνη στρέφεται κατὰ γωνίαν 30⁰. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἀπὸ τὴν ράβδον. Ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου $\mathcal{H}_{op}$ = 0,2 Gauss.

Λύσις. Ἡ βελόνη θὰ ἰσορροπῇ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων· τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς, ὁριζοντίας συνιστώσης ἐντάσεως $\mathcal{H}_{op}$ καὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς μαγνητισμένης ράβδου ἐντάσεως $\mathcal{H}_m$.



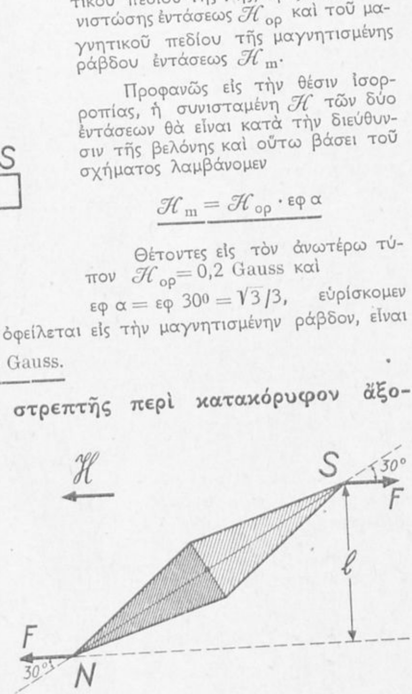
Προφανῶς εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἡ συνισταμένη $\mathcal{H}$ τῶν δύο ἐντάσεων θὰ εἶναι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς βελόνης καὶ οὕτω βάσει τοῦ σχήματος λαμβάνομεν

$$\underline{\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_{op} \cdot \text{εφ}\,\alpha}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss καὶ εφ α = εφ $30^0 = \sqrt{3}/3$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν μαγνητισμένην ράβδον, εἶναι

$$\underline{\mathcal{H}_m = 0{,}115 \text{ Gauss.}}$$

493. Ὁ ἄξων μαγνητικῆς βελόνης στρεπτῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα, κρατεῖται εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 30⁰ πρὸς τὴν διεύθυνσιν μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}$ = 500 Gauss. **Ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς βελόνης εἶναι ἴση πρὸς 100 μονάδας** C.G.S. **Ποία ἡ ἐξασκουμένη ροπὴ ἐπὶ τῆς βελόνης κατὰ τὴν στιγμὴν ὅπου θὰ παύσῃ νὰ κρατῆται ἀκίνητος.**



Λύσις. Ἡ ροπὴ Μ ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς βελόνης θὰ εἶναι

$$M = F \cdot l \qquad (1)$$

'Αλλὰ ἐὰν καλέσωμεν $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ m τὴν μαγνητικὴν ποσότητα ἑκάστου πόλου τῆς βελόνης, τότε θὰ ἔχωμεν

$$F = \mathcal{H} \cdot m \tag{2}$$

Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$M = \mathcal{H} \cdot m \cdot l \tag{3}$$

Εἶναι ὅμως $l = (SN) \cdot ημ\, 30^0$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (3) δίδει

$$M = \mathcal{H} \cdot m \cdot (SN).\ ημ\, 30^0. \tag{4}$$

'Εξ ἄλλου $M^* = m \cdot (SN)$, ὅπου M^* ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τῆς βελόνης, καὶ συνεπῶς δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (4) προκύπτει

$$\underline{M = M^* \cdot \mathcal{H} \cdot ημ\, 30^0.} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $M^* = 100$ μονάδες C.G.S., $\mathcal{H} = 500$ Gauss, $ημ\, 30^0 = 0{,}5$, εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 25\,000\ \text{dyn} \cdot \text{cm}.}$$

494. Πεταλοειδὴς μαγνήτης ἔχει δύο παραλλήλους πολικὰς ἐπιφανείας 7 cm² ἑκάστη, διαχωριζομένας ὑπὸ ἀερίου διακένου. Μεταξὺ τῶν πολικῶν ἐπιφανειῶν ὑπάρχει ὁλικὴ ροὴ 14 000 Maxwell καὶ τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ὁμοιομόρφως κατανεμημένον. Καθορίσατε τὴν δύναμιν ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ πόλου ποσότητος 25 μονάδων C.G.S., τοποθετουμένου ἐντὸς τοῦ πεδίου τούτου.

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν πόλων καὶ S τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου πόλου, τότε ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ, ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἐπιφανείας S, θὰ εἶναι

$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S \tag{1}$$

'Εκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν

$$\mathcal{H} = \frac{\Phi}{S} \tag{2}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται μεταξὺ τῶν πόλων, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν F τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ εἷς πόλος ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἔντασιν $\mathcal{H}'$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἀπὸ τὸν ἕνα πόλον ἐπὶ τὴν μαγνητικὴν ποσότητα m τοῦ ἄλλου, ἤτοι

$$F = \mathcal{H}' \cdot m \tag{3}$$

Εἶναι ὅμως $\mathcal{H}' = \mathcal{H}/2$, διότι οἱ δύο πόλοι ὁμοῦ πραγματοποιοῦν μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως $\mathcal{H}$, καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (3) γράφεται

$$F = \frac{\mathcal{H}}{2} \cdot m \tag{4}$$

'Εν συνεχείᾳ βάσει τῶν τύπων (2) καὶ (4) λαμβάνομεν

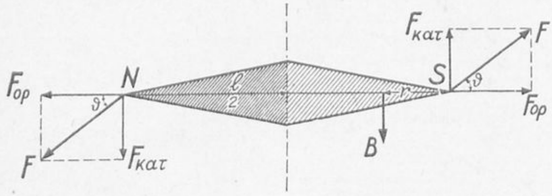
$$\underline{F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi}{S} \cdot m} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (5), $\Phi = 14\,000$ Gauss · cm² (Mx), $S = 7$ cm² καὶ $m = 25$ μονάδες C.G.S. εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 25\,000\ \text{dyn}.}$$

495. Μαγνητικὴ βελόνη μήκους $l = 10$ cm εἶναι στρεπτὴ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς. Ἵνα ἐπαναφέρωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ὁριζοντίαν αὐτῆς θέσιν, εὑρισκομένην εἰς τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον, πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ἀπόστασιν $r = 2$ cm ἀπὸ τοῦ νοτίου πόλου αὐτῆς φορτίον 50 mgr*. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ μαγνητικὸν πεδίον τῆς Γῆς ἔχει ἔντασιν 0,467 Gauss καὶ ὅτι ἡ ἔγκλισις τῆς βελόνης εἶναι 66⁰, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ ποσότης ἑκάστου πόλου τῆς βελόνης.

Λύσις. Ἐπὶ ἑκάστου πόλου τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐπὶ τὴν μαγνητικὴν ποσότητα m τοῦ πόλου, ἤτοι



$$F = \mathcal{H} \cdot m \qquad (1)$$

καὶ τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς βελόνης. Διὰ νὰ ἔλθῃ ἡ βελόνη εἰς θέσιν ὁριζοντίαν, ἔστω ὅτι ἐφαρμόζομεν εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸν πόλον S τὸ βάρος B.

Πρὸς λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν τῶν ἐξασκουμένων δυνάμεων. Οὕτω ἔχομεν

$$F_{\kappa\alpha\tau} \cdot \frac{l}{2} + F_{\kappa\alpha\tau} \cdot \frac{l}{2} - B\left(\frac{l}{2} - r\right) = 0 \quad \text{ἤ} \quad F_{\kappa\alpha\tau} \cdot l - B\left(\frac{l}{2} - r\right) = 0 \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν ὅτι $F_{\kappa\alpha\tau} = F \cdot \eta\mu\, \theta$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$F \cdot l \cdot \eta\mu\, \theta - B\left(\frac{l}{2} - r\right) = 0 \qquad (3)$$

καὶ τελικῶς λόγῳ τῆς (1) ἐκ τῆς σχέσεως (4) λαμβάνομεν

$$\mathcal{H} \cdot m \cdot l \cdot \eta\mu\, \theta - B\left(\frac{l}{2} - r\right) = 0 \qquad (4)$$

Λύοντες ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην μαγνητικὴν ποσότητα m, προκύπτει

$$m = \frac{B \cdot \left(\frac{l}{2} - r\right)}{\mathcal{H} \cdot l \cdot \eta\mu\, \theta} \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (5) τὰ μεγέθη διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι $B = 50\ mgr^* = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 981$ dyn, $r = 2$ cm, $l = 10$ cm, $\mathcal{H} = 0{,}467$ Gauss, $\theta = 66^0$, εὑρίσκομεν

$$m = 35 \text{ μονάδες C.G.S.}$$

496. Μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως ἀπομακρυνομένη ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἐντὸς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐπανέρχεται εἰς αὐτὴν ἀφοῦ ἐκτελέσῃ ταλαντώσεις μὲ συχνότητα 2 sec^{-1}. Τοποθετοῦμεν αὐτὴν ἐν συνεχείᾳ εἰς τὴν προέκτασιν μαγνητικῆς ράβδου, εἰς τρόπον ὥστε τὸ κέντρον τῆς βελόνης νὰ εὑρίσκεται εἰς σημεῖον Ο, ἀπέχον κατὰ 20 cm ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου τῆς ράβδου. Ἡ βελόνη ἵνα ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας ἐκτελεῖ ταλαντώσεις μὲ συχνότητα 4 sec^{-1}. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ εἰς τὸ Ο ἡ μαγνητικὴ ράβδος. β) Αἱ μαγνητικαὶ ποσότητες τῶν πόλων τῆς ράβδου. γ) Ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς βελόνης, ἐὰν αὕτη ἐφέρετο εἰς σημεῖον Ο′ ἀπέχον κατὰ 10 cm ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου τῆς ράβδου. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss.

Λύσις. α) Ἡ περίοδος ταλαντώσεως Τ τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἐντὸς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathcal{H}_{op} \cdot M^*}} \qquad (1)$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς βελόνης, $\mathcal{H}_{op}$ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ M^* ἡ μαγνητικὴ ροπὴ αὐτῆς.

Ἐπίσης ἡ περίοδος ταλαντώσεως T′ τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἐντὸς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς ράβδου εἶναι

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{(\mathcal{H}_{op}+\mathcal{H})\cdot M^*}} \tag{2}$$

ὅπου $\mathcal{H}$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς ράβδου. Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) καὶ ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς προκυπτούσης σχέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{\mathcal{H}_{op}}{\mathcal{H}_{op}+\mathcal{H}} \tag{3}$$

Λύοντες τὴν (3) ὡς πρὸς $\mathcal{H}$ λαμβάνομεν

$$\underline{\mathcal{H} = \mathcal{H}_{op}\cdot\left(\frac{T^2}{T'^2}-1\right)} \tag{4}$$

καὶ διὰ $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss, $T = 1/2$ sec, $T' = 1/4$ sec εὑρίσκομεν

$$\underline{\mathcal{H} = 0{,}6 \text{ Gauss.}}$$

β) Ἡ μαγνητικὴ ποσότης m_1 τοῦ βορείου πόλου τῆς ράβδου εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐντάσεως

$$\mathcal{H} = \frac{m_1}{d^2} \tag{5}$$

ὅπου d ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸν βόρειον πόλον τῆς ράβδου, ὅτι εἶναι

$$\underline{m_1 = \mathcal{H}\cdot d^2}$$

Οὕτω διὰ $\mathcal{H} = 0{,}6$ Gauss καὶ $d = 20$ cm εὑρίσκομεν (6)

$$\underline{m_1 = 240 \text{ μονάδες C.G.S.}}$$

γ) Ἡ περίοδος T″ ταλαντώσεως τῆς βελόνης εἰς τὸ σημεῖον Ο′ θὰ εἶναι

$$T'' = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\Theta}{(\mathcal{H}_{op}+\mathcal{H}')\,M^*}} \tag{7}$$

καὶ διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (7) λαμβάνομεν

$$T'' = T\cdot\sqrt{\frac{\mathcal{H}_{op}}{\mathcal{H}_{op}+\mathcal{H}'}} \tag{8}$$

ὅπου $\mathcal{H}'$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ο′ τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὸν βόρειον πόλον τῆς ράβδου. Ἐπειδὴ δὲ $\mathcal{H}' = \frac{m_1}{d^2}$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$\underline{T'' = d\cdot T\cdot\sqrt{\frac{\mathcal{H}_{op}}{d^2\,\mathcal{H}_{op}+m_1}}} \tag{9}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (9) $T = 1/2$ sec, $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss, $d = 10$ cm καὶ $m_1 = 240$ μονάδες C.G.S., εὑρίσκομεν

$$\underline{T'' = 0{,}139 \text{ sec}^{-1}.}$$

497. Ἐκκρεμὲς ἀποτελούμενον ἀπὸ μὴ ἐκτατὸν νῆμα καὶ σιδηρὰν σφαῖραν μάζης 1 gr, ἐκτελεῖ μίαν ταλάντωσιν ἀνὰ δευτερόλεπτον, εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἶναι 981 dyn/gr. Ἐὰν ὑφίσταται συγχρόνως μὲ τὴν ἕλξιν τῆς βαρύτητος καὶ τὴν ἕλξιν ἑνὸς μαγνήτου, ὅστις εὑρίσκεται κατακορύφως κάτωθεν αὐτοῦ, τότε τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ τρεῖς ταλαντώσεις ἐντὸς δύο δευτερολέπτων. Πόση εἶναι ἡ ἕλξις τοῦ μαγνήτου ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας.

Λύσις. Ἡ περίοδος T τοῦ ἐκκρεμοῦς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

ὅπου l τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ g ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος.

Ἐὰν ὅμως ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας καὶ τὸ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ μαγνήτου, τότε ἡ περίοδος εἶναι

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+\gamma}} \tag{2}$$

ὅπου γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν προσδίδει ἡ δύναμις F, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

καὶ ὁ τύπος (2) γράφεται

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + \frac{F}{m}}} \tag{3}$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g+\frac{F}{m}}{g}} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{T^2}{T'^2} = 1 + \frac{F}{m \cdot g} \tag{4}$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς F, προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος

$$\underline{F = m \cdot g \cdot \left(\frac{T^2}{T'^2} - 1\right)} \tag{5}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (5) τὰ μεγέθη διὰ τῶν τιμῶν των, ἤτοι $m = 1$ gr, $g = 981$ dyn/gr, $T = 1$ sec, $T' = 2/3$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 1\,226 \text{ dyn.}}$$

498. Μαγνητικὴ ράβδος μήκους 25 cm φέρει εἰς ἕκαστον πόλον μαγνητικὴν ποσότητα 100 μονάδων C.G.S. Ποία μαγνητικὴ ροπὴ ἀπαιτεῖται ἵνα συγκρατήσωμεν τὸν μαγνήτην τοῦτον, ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὰς μαγνητικὰς γραμμάς, εἰς πεδίον ἐντάσεως 4 Gauss. Ἐὰν ὁ μαγνήτης οὗτος στρέφεται περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, ποία δύναμις ἀπαιτεῖται ὅπως ἐνεργῇ ἐξ ἀποστάσεως 8 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ καθέτως πρὸς τὴν μαγνητικὴν ράβδον, διὰ νὰ διατηρῇ αὐτὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω θέσιν.

Λύσις. α) Ἡ μαγνητικὴ ροπὴ M* τοῦ μαγνήτου εἶναι

$$M^* = m \cdot l \tag{1}$$

ὅπου m ἡ μαγνητικὴ ποσότης τοῦ ἑνὸς πόλου καὶ l ἡ μεταξὺ τῶν πόλων ἀπόστασις (μῆκος μαγνητικοῦ διπόλου).

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $m = 100$ μονάδες C. G. S., $l = 25$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{M^* = 2\,500 \text{ μονάδες C. G. S.}}$$

β) Ἡ ροπὴ M ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ὅπως συγκρατήσωμεν τὸν μαγνήτην εἰς τὴν ἀναφερομένην θέσιν πρέπει νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ροπὴν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ μαγνήτου ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄρα

$$M = F \cdot l \cdot \text{ημ}\,\theta \tag{2}$$

ὅπου F εἶναι ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ θ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ μαγνήτης (μαγνητικὴ ῥάβδος) μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐπειδὴ ὅμως

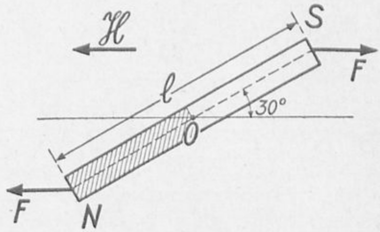
$$F = m \cdot \mathcal{H} \qquad (3)$$

ὅπου $\mathcal{H}$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$M = m \cdot l \cdot \mathcal{H} \cdot \text{ημ}\,\theta \qquad (4)$$

καὶ βάσει τῆς σχέσεως (1) προκύπτει τελικῶς ὅτι

$$M = M^* \cdot \mathcal{H} \cdot \text{ημ}\,\theta \qquad (5)$$



Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5), $M^* = 2\,500$ μονάδες C. G. S., $\mathcal{H} = 4$ Gauss, $\theta = 30^0$ (ημ $30^0 = 0{,}5$) εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 5\,000 \text{ dyn} \cdot \text{cm}.}$$

γ) Ἐὰν καλέσωμεν F′ τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐνεργῇ ἐξ ἀποστάσεως d ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ καθέτως πρὸς τὴν μαγνητικὴν ῥάβδον, ἵνα διατηρῇ τὸν μαγνήτην εἰς τὴν ἀναφερομένην θέσιν, τότε θὰ ἔχωμεν

$$M = F' \cdot d \qquad \text{καὶ} \qquad F' = \frac{M}{d} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6), $M = 5\,000$ dyn·cm καὶ $d = 8$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{F' = 625 \text{ dyn}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

499. Δύο βόρειοι πόλοι μαγνητικῶν ποσοτήτων 20 καὶ 40 μονάδων C. G. S. εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 5 cm ὁ εἷς τοῦ ἄλλου, ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ὑπολογίσατε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀναπτυσσομένην ἀπωστικὴν δύναμιν. (Ἀπ. 32 dyn.)

500. Δύο ἑτερώνυμοι μαγνητικοὶ πόλοι εὑρίσκονται 4 cm ὁ εἷς τοῦ ἄλλου ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ ἕλκονται μεταξύ των διὰ δυνάμεως 20 dyn. Ἐὰν ἡ ποσότης μαγνητισμοῦ τοῦ ἑνὸς πόλου εἶναι 24 μονάδες C. G. S., καθορίσατε τὴν ποσότητα τοῦ ἑτέρου πόλου. (Ἀπ. 13 μονάδες C. G. S.)

501. Μαγνητικὴ ῥάβδος μήκους 15 cm ἔχει πόλους μαγνητικῶν ποσοτήτων 200 μονάδων C. G. S. Ὑπολογίσατε τὸ μέτρον καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς μονάδος βορείου μαγνητικοῦ πόλου ἐντὸς τοῦ ἀέρος εἰς ἓν σημεῖον Σ ἀπέχον 10 cm ἐξ ἑκάστου πόλου. (Ἀπ. 3 dyn, N S.)

502. Μαγνητικὴ ῥάβδος μήκους 16 cm ἔχει πόλους μαγνητικῶν ποσοτήτων 80 μονάδων C. G. S. Εὕρατε τὸ μέγεθος καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ νοτίου μαγνητικοῦ πόλου 20 μονάδων C. G. S., τοποθετουμένου ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἴς τι σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου καὶ εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπὸ τοῦ βορείου μαγνητικοῦ πόλου αὐτοῦ. (Ἀπ. 96 dyn.)

503. Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μῆκος 10 cm, ἕκαστος δὲ τῶν δύο πόλων αὐτοῦ S καὶ N ἔχει μαγνητικὴν ποσότητα ἴσην πρὸς 50 μονάδας C. G. S. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου μαγνητικοῦ πεδίου ἀπὸ τὸν μαγνήτην, 1) εἰς σημεῖον Α εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας SN καὶ εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τοῦ μέσου Ο τοῦ μαγνήτου SN, 2) εἰς σημεῖον Β εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Ο ἐπὶ τὴν εὐθείαν SN καὶ εἰς ἀπόστασιν 8 cm ἀπὸ τὸ Ο.

(Ἀπ. 1′ 5,26 Gauss, 2′ 0,60 Gauss.)

504. Μαγνητικὸς πόλος ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην πρὸς 300 μονάδας C. G. S. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ τὸν πόλον τοῦτον. (Ἀπ. 12 Gauss.)

505. Ἐπὶ μαγνητικοῦ πόλου ἐξασκεῖται δύναμις 120 dyn, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς πεδίου ἐντάσεως 0,8 Gauss. Ποία ἡ ποσότης μαγνητισμοῦ τοῦ πόλου. (Ἀπ. 150 μονάδες C. G. S.)

506. Καθορίσατε τὴν μαγνητικὴν ροπήν μαγνητικῆς ράβδου, ἐχούσης πόλους μαγνητικῶν ποσοτήτων 40 μονάδων C. G. S., ὅταν οἱ πόλοι ἀπέχουν 20 cm. (Ἀπ. 800 μονάδες C.G.S.)

507. Ὑπολογίσατε τὴν ἀπαιτουμένην ροπὴν πρὸς συγκράτησιν μαγνήτου, μαγνητικῆς ροπῆς 400 μονάδων C. G .S., ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 5 Gauss, ὑπὸ γωνίαν 60^0 ὡς πρὸς τὰς μαγνητικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Ἐὰν ὁ μαγνήτης δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του, πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐνεργῇ εἰς ἀπόστασιν 7 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. (Ἀπ. 1700 dyn · cm, 250 dyn.)

508. Μαγνητικὴ βελόνη ἔχει μῆκος 4 cm, ἕκαστος δὲ τῶν πόλων της ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην πρὸς 50 μονάδας C. G. S. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς βελόνης. 2) Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς βελόνης, ὅταν αὕτη τοποθετῆται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 50 Gauss. (Ἀπ. $M = 200$ μονάδες C. G. S., 2′ 10 000 dyn · cm.)

509. Μαγνητικὴ βελόνη στρεπτὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα κρατεῖται εἰς τρόπον ὥστε ἡ διεύθυνσις αὐτῆς νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἔντασιν μαγνητικοῦ πεδίου $\mathcal{H} = 800$ Gauss τοῦ ὁποίου αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ εἶναι κατακόρυφοι. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς βελόνης εἶναι 120 μονάδες C. G. S. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ζεύγους τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς βελόνης. (Ἀπ. 96 000 dyn · cm.)

510. Πόλος ποσότητος 200 μονάδων C. G. S. τοποθετεῖται εἰς τὸ κέντρον φανταστικῆς σφαίρας ἀκτῖνος 5 cm. Ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν μαγνητικὴν ροήν, ὡς καὶ τὴν πυκνότητα ροῆς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. (Ἀπ. 800π Mx, 8 Mx/cm^2 ἤτοι 8 Gauss.)

511. Πόση ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἡ ὀφειλομένη εἰς βόρειον μαγνητικὸν πόλον ποσότητος 60 μονάδων C.G.S. Ποία ἡ πυκνότης τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τὸν πόλον αὐτόν. (Ἀπ. 754 Mx, 15 Mx/cm^2 ἤτοι 15 Gauss.)

512. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς κατακορύφου συνιστώσης $\mathcal{H}_{κατ}$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ πεδίου τούτου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα εἶναι $\mathcal{H}_{οp} = 0{,}2$ Gauss καὶ ὅτι ἡ ἔγκλισις εἶναι 64^0. (Ἀπ. 0,41 Gauss, 0,46 Gauss.)

513. Μαγνητικὴ βελόνη στρεπτὴ εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι προσανατολισμένη. Ὅταν ἐνεργήσῃ ἐπ᾽ αὐτῆς μαγνητικὸν πεδίον ὁριζοντίας ἐντάσεως 0,346 Gauss καὶ κάθετον πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ βελόνη ἀποκλίνει κατὰ 60^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. (Ἀπ. 0,20 Gauss.)

514. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἴς τι σημεῖον εἶναι 0,4 Gauss καὶ ἡ ἔγκλισις 45^0. Ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν ἔντασιν καὶ τήν κατακόρυφον συνιστῶσαν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. (Ἀπ. 0,57 Gauss, 0,4 Gauss.)

515. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς πυξίδος ἑνὸς ἀεροπλάνου ἐὰν ἡ κατεύθυνσίς του εἶναι βορειο-δυτική, μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ ἀνέμου καὶ δοθέντος ὅτι ἡ ἀπόκλισις εἶναι 10^0 'Ανατολική. ('Απ. 305^0 ἢ 55^0 δυτικῶς τοῦ Βορρᾶ.)

516. Ὁ ἄξων τῆς πυξίδος ἐγκλίσεως καταλήγει εἰς δύο ὁριζόντια αἰχμηρὰ ἄκρα τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν καὶ ἡ βελόνη σχηματίζει γωνίαν 38^0 μὲ τὴν κατακόρυφον. Παραδεχόμενοι ὅτι τὸ κέντρον βάρους τῆς βελόνης εἶναι ἀκριβῶς εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἄξονος, ὑπολογίσατε τὸν λόγον τῆς κατακορύφου συνιστώσης τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου τῆς Γῆς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν. ('Απ. εφ 52^0 ἢ 1,28.)

517. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα $\mathcal{H}_{op}$ τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἴς τι σημεῖον εἶναι 0,2 Gauss, ἡ δὲ ἔγκλισις 60^0. Ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν ἔντασιν $\mathcal{H}$ ὡς καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν $\mathcal{H}_{\kappa\alpha\tau}$ τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. ('Απ. 0,4 Gauss, 0,35 Gauss.)

518. Ἡ ἔντασις τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἴς τι σημεῖον εἶναι 0,8 Gauss καὶ ἡ ἔγκλισις 60^0. Ὑπολογίσατε τὴν ὁριζοντίαν ὡς καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. ('Απ. 0,4 Gauss, 0,69 Gauss.)

519. Ἡ ὁριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἴς τι σημεῖον εἶναι 0,3 Gauss καὶ 0,4 Gauss ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν καὶ τὴν ἔγκλισιν. ('Απ. 0,5 Gauss, 53^0.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

520. Δύο ὅμοιοι πόλοι μαγνητικῆς ποσότητος ἕκαστος ἴσης πρὸς 200 μονάδας C.G.S. εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 5 cm. Πόση ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως ἀπωθήσεως μεταξύ των.

521. Δύο ὅμοιοι πόλοι μαγνητικῆς ποσότητος ἕκαστος 350 μονάδων C.G.S. ἀπωθοῦνται μετὰ δυνάμεως 2 500 dyn. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ἡ ὁποία χωρίζει τοὺς δύο πόλους.

522. Οἱ πόλοι εὐθυγράμμου μαγνήτου μήκους 20 cm ἔχουν μαγνητικὰς ποσότητας ἕκαστος 40 μονάδας C.G.S. Εἰς σημεῖον ἀπέχον 20 cm ἀπὸ ἑκάστου τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου εὑρίσκεται βόρειος πόλος μαγνητικῆς ποσότητος 50 μονάδων C.G.S. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἐξασκουμένης δυνάμεως ὑπὸ τοῦ μαγνήτου ἐπὶ τοῦ πόλου. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχῆμα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς διευθύνσεως καὶ φορᾶς τῆς δυνάμεως.

523. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον, εἰς gr*, τῆς ἐξασκουμένης δυνάμεως ἐπὶ μαγνητικῆς ποσότητος 36 μονάδων C.G.S., ὅταν αὕτη τίθεται ἐντὸς πεδίου 218 Gauss.

524. Οἱ δύο πόλοι εὐθυγράμμου μαγνήτου ἔχουν ἕκαστος μαγνητικὴν ποσότητα 24 μονάδων C.G.S , καὶ ἡ ἀπόστασις ἡ ὁποία χωρίζει τοὺς δύο πόλους εἶναι 15 cm. Πόση ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου τούτου.

525. Μαγνητικὴ ποσότης ἴση πρὸς 40 μονάδας C.G.S. ὑφίσταται δύναμιν 10 000 dyn, ὅταν τοποθετῆται εἰς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως $\mathcal{H}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

526. Μαγνητικὴ βελόνη κόπτεται εἰς τὸ μέσον της καὶ οὕτω αἱ προκύπτουσαι δύο μαγνητικαὶ βελόναι τοποθετοῦνται παραλλήλως ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm μεταξύ των, οἱ δὲ ἑτερώνυμοι πόλοι εὑρίσκονται ἔναντι ἀλλήλων. Ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ἕλξεως εἶναι 5 000 dyn. Ζητεῖται πόση θὰ εἶναι ἡ μαγνητικὴ ποσότης ἑκάστου πόλου.

527. Μαγνητικὴ ράβδος NS ἔχει μῆκος 10 cm καὶ πόλους μαγνητικῆς ποσότητος 200 μονάδων C.G.S ἕκαστος. Ἡ μονὰς τῆς βορείας μαγνητικῆς ποσότητος τοποθετεῖται εἴς τι σημεῖον Σ ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ὅπου ἡ γωνία $N\Sigma S = 90^0$ καὶ $\Sigma N = \Sigma S$. Ὑπολογίσατε τὸ μέτρον καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως τὴν ὁποίαν α) ὁ βόρειος πόλος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς βορείας μαγνητικῆς ποσότητος εἰς τὸ σημεῖον Σ, β) ὁ νότιος πόλος (S) ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς βορείας μαγνητικῆς ποσότητος εἰς τὸ σημεῖον Σ. γ) Ποῖον τὸ μέτρον καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς βορείας μαγνητικῆς ποσότητος εἰς τὸ Σ. δ) Ποία ἡ ἔντασις καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Σ.

528. Μαγνητικὴ ράβδος μήκους 20 cm ἔχει πόλους μὲ μαγνητικὴν ποσότητα 100 μονάδων C.G.S. ἕκαστος. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου εἰς τὸν ἀέρα, εἰς σημεῖον τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ τὸν βόρειον πόλον. Ποῖον τὸ μέτρον καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ βορείου μαγνητικοῦ πόλου ποσότητος 30 μονάδων C.G.S., τιθεμένου εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον.

529. Μαγνητικὴ ράβδος μήκους 25 cm ἔχει πόλους μὲ μαγνητικὴν ποσότητα 300 μονάδων C.G.S. ἕκαστος. Αὕτη τοποθετεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ὑπὸ γωνίαν 45^0 ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. Ἡ ροπὴ τοῦ ἐπὶ τοῦ μαγνήτου ἀναπτυσσομένου ζεύγους εἶναι 90 000 dyn · cm. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

530. Ἡ μαγνητικὴ ἔγκλισις εἰς δύο τόπους Α καὶ Β εἶναι $\varepsilon_1 = 66^0$ καὶ $\varepsilon_2 = 68^0$ Εἰς τοὺς τόπους αὐτοὺς ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως ἐκτελεῖ $n_1 = 54$ καὶ $n_2 = 60$ ταλαντώσεις ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν ἀντιστοίχως. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων $\mathcal{H}_1$ καὶ $\mathcal{H}_2$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τοὺς δύο τόπους.

531. Μαγνητικὴ ράβδος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως. Ἐὰν ἀφεθῇ αὕτη νὰ ἐκτελέσῃ ταλαντώσεις ἐντὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐκτελεῖ 25 τοιαύτας ἐντὸς ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, ἐνῷ ἐντὸς ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν ἐκτελεῖ 38 ταλαντώσεις ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου. Ποία ἡ μαγνητικὴ ἔγκλισις.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΡΕΥΜΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

532. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τὸ ὁποῖον διέρχεται ἠλεκτρολυτικὴν συσκευήν, ὅταν αὕτη διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A ἐπὶ 2 ὥρας.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον q δίδεται ἐξ ὁρισμοῦ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{q = i \cdot t}$$

ὅπου i εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ t ὁ χρόνος διελεύσεως αὐτοῦ.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $i = 5$ A, $t = 2\,h = 7\,200$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 36\,000 \text{ Cb.}}$$

√ **533. Διά τινος ἀγωγοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 1 A. Πόσα ἠλεκτρόνια διέρχονται διά τινος διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ τούτου εἰς χρόνον 8 min.**

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἰς χρόνον t διὰ τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ διέρχονται n ἠλεκτρόνια. Ἐὰν καλέσωμεν e τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου, τὸ ὁλικῶς διερχόμενον εἰς χρόνον t φορτίον q, θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$q = n \cdot e \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος $i = q/t$, λαμβάνομεν διὰ τὸ εἰς χρόνον t διερχόμενον διὰ τῆς διατομῆς φορτίον

$$q = i \cdot t \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει

$$n \cdot e = i \cdot t \qquad (3)$$

καὶ λύοντες ὡς πρὸς n λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\underline{n = \frac{i \cdot t}{e}} \qquad (4).$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $i = 1$ A, $t = 8$ min $= 480$ sec καὶ δεδομένου ὅτι τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου ἰσοῦται πρὸς $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, προκύπτει ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν διερχομένων ἠλεκτρονίων εἶναι

$$\underline{n = 3 \cdot 10^{21} \text{ ἠλεκτρόνια.}}$$

√ **534. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβῃ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς γραμμῆς τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 8 Ω, ἵνα ἡ πτῶσις τάσεως κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι 12 V.**

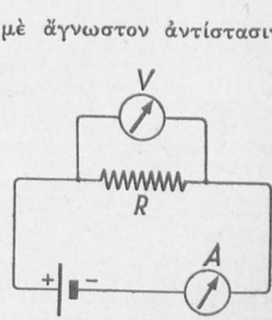
Λύσις. Ἡ πτῶσις τάσεως κατὰ μῆκος μιᾶς ἀντιστάσεως εἶναι ἡ τάσις ἡ ἐπικρατοῦσα εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. Συνεπῶς ἐὰν ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι R καὶ ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς ὑπάρχῃ διαφορὰ δυναμικοῦ U, τότε ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος θὰ δίδεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm

$$\underline{i = \frac{U}{R}}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον διὰ τῶν δεδομένων, $U = 12$ V, $R = 8\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 1{,}5 \text{ A.}}$$

√ **535. Ἀμπερόμετρον (A) συνδεόμενον ἐν σειρᾷ μὲ ἄγνωστον ἀντίστασιν δεικνύει 0,3 A. Ἐὰν συνδέσωμεν ἐν παραλλήλῳ μὲ τὴν ἀντίστασιν ταύτην βολτόμετρον (V), τοῦτο δεικνύει 1,5 V. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως.**



Λύσις. Ἐφ' ὅσον διὰ τῆς ἀντιστάσεως R διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως i καὶ εἰς τὰ ἄκρα της ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ U, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm

$$\underline{R = \frac{U}{i}} \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $U = 1{,}5$ V καὶ $i = 0{,}3$ A εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 5\,\Omega.}$$

√ **536. Πόση ἡ ἀντίστασις χαλκίνου σύρματος ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως 2 A, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐφαρμοσθῇ τάσις 160 V.**

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν

$$R = \frac{U}{i}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ, U ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $U = 160$ V, $i = 2$ A, εὑρίσκομεν

$$R = 80\ \Omega.$$

√ **537. Πόση τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ ἄκρα μεταλλικοῦ σύρματος ἵνα διέλθῃ δι' αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως 5 A, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διέρχεται ρεῦμα 0,5 A, ὅταν ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα του εἶναι 10 V. Πόση ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος.**

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R ἐφαρμόζομεν τάσιν U_1 καὶ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως i_1. Θὰ ἔχωμεν

$$U_1 = R \cdot i_1 \tag{1}$$

Ἐὰν ἤδη ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ αὐτοῦ ἀγωγοῦ τάσιν U_2, θὰ διέλθῃ ρεῦμα ἐντάσεως i_2 καὶ θὰ ἔχωμεν

$$U_2 = R \cdot i_2 \tag{2}$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{i_1}{i_2} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $U_2 = 10$ V, $i_1 = 5$ A, $i_2 = 0{,}5$ A, εὑρίσκομεν

$$U_1 = 100\ \text{V}.$$

Ἡ ἀντίστασις R τοῦ ἀγωγοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς R καὶ θέσωμεν $U = 100$ V, $i_1 = 5$ A, ὁπότε λαμβάνομεν

$$R = 20\ \Omega.$$

√ **538. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις σύρματος ἐκ χαλκοῦ τομῆς 1 mm² καὶ μήκους 50 m, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι 1,6 μΩ · cm.**

Λύσις. Ὅταν ὁ ἀγωγὸς εἶναι ὑπὸ μορφὴν σύρματος, τομῆς S καὶ μήκους l, τότε ἡ ἀντίστασις R αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ὅπου ρ εἶναι συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς φύσεως τοῦ σύρματος καὶ καλεῖται εἰδικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $\rho = 1{,}6\ \mu\Omega \cdot \text{cm}$, $l = 50\ \text{m} = 50 \cdot 10^2\ \text{cm}$ καὶ $S = 1\ \text{mm}^2 = 10^{-2}\ \text{cm}^2$ εὑρίσκομεν

$$R = 0{,}8 \cdot 10^6\ \mu\Omega = 0{,}8\ \Omega.$$

√ **539. Ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα σύρματος ἐκ σιδήρου, μήκους 100 m καὶ τομῆς 0,25 mm², τάσις 120 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σιδήρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι 2,75 A.**

Λύσις. Ἔστω l τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σιδήρου, S ἡ τομὴ καὶ R ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ. Θὰ ἔχωμεν

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad \text{ἢ} \qquad \rho = \frac{R \cdot S}{l}$$

Ἐπειδὴ δὲ $R = U/i$, ὅπου U ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτὸ ρεύματος, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$\rho = \frac{U \cdot S}{i \cdot l}$$

Οὕτω, διὰ $U = 120$ V, $S = 0{,}25\ mm^2 = 0{,}25 \cdot 10^{-2}\ cm^2$, $i = 2{,}75$ A καὶ $l = 100\ m = 100 \cdot 10^2$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\rho = 10{,}9 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm = 10{,}9\ \mu\Omega \cdot cm.}$$

✓ **540. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πτῶσις τάσεως κατὰ μῆκος χαλκίνου σύρματος ($\rho = 1{,}6\ \mu\Omega \cdot cm$) μήκους 5 km καὶ τομῆς 20 mm^2, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A.**

Λύσις. Ἡ πτῶσις τῆς τάσεως U κατὰ μῆκος μιᾶς ἀντιστάσεως R εἶναι

$$U = R \cdot i. \tag{1}$$

ὅπου i ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος. Ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τοῦ χαλκοῦ, l τὸ μῆκος τοῦ σύρματος καὶ S τὴν τομὴν αὐτοῦ, τότε θὰ ἔχωμεν

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \tag{2}$$

καὶ οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\underline{U = \frac{\rho \cdot l \cdot i}{S}} \tag{3}$$

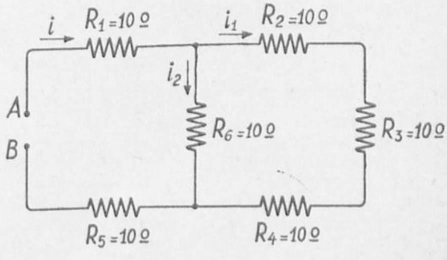
Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3), $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$, $l = 5 \cdot 10^5$ cm, $i = 10$ A, $S = 20 \cdot 10^{-2} cm^2$, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 40\ V.}$$

✓ **541. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, ὅταν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ὑπάρχῃ ἠλεκτρικὴ πηγή.**

Λύσις. Αἱ ἀντιστάσεις R_2, R_3, R_4, εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ, διότι διαρρέονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ρεύματος i_1. Ἄρα ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R αὐτῶν θὰ εἶναι

$$R = R_2 + R_3 + R_4 \tag{1}$$



Ἡ εὑρεθεῖσα ἀντίστασις R μὲ τὴν R_6 εἶναι ἐν παραλλήλῳ, διότι εἰς τὰ ἄκρα των ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ. Ἄρα ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R′ αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R} \tag{2}$$

ὅτι εἶναι

$$R' = \frac{R_6 \cdot R}{R_6 + R} \tag{3}$$

Ἂν θέσωμεν δὲ τὴν τιμὴν τῆς R ἐκ τῆς (1) εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν

$$R' = \frac{R_6 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}{R_6 + R_2 + R_3 + R_4} \tag{4}$$

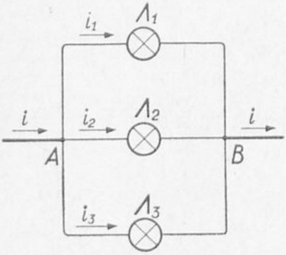
Ἐπίσης ἡ εὑρεθεῖσα ἀντίστασις R' καὶ αἱ ἀντιστάσεις R_1, R_5 εἶναι ἐν σειρᾷ, διότι διαρρέονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ρεύματος i. Ἄρα ἡ ὀλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τοῦ κυκλώματος εἶναι

$$\underline{R_{ολ} = R_1 + \frac{R_6 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}{R_6 + R_2 + R_3 + R_4} + R_5} \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (5) τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστάσεων, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{ολ} = 27{,}5\ \Omega.}$$

542. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β κυρίου κυκλώματος διαρρεομένου ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐντάσεως i = 2 A, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ 3 λυχνίαι $Λ_1$, $Λ_2$, $Λ_3$. Ἡ ἔντασις εἶναι 10/11 A εἰς τὴν $Λ_1$ καὶ 6/11 A εἰς τὴν $Λ_2$. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἰς τὴν λυχνίαν $Λ_3$.



Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον Α ἔχομεν

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$\underline{i_3 = i - (i_1 + i_2)}$$

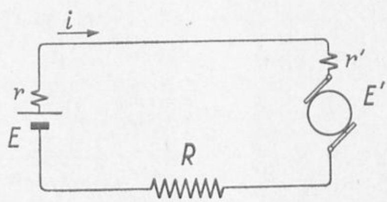
Ἄρα, διὰ i = 2 A, $i_1 = 10/11$ A καὶ $i_2 = 6/11$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{i_3 = \frac{6}{11}\ \text{A} = 0{,}545\ \text{A}.}$$

543. Γεννήτρια ἔχει ΗΕΔ 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,15 Ω, τροφοδοτεῖ δὲ γραμμὴν εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὁποίας εἶναι συνδεδεμένος κινητὴρ ἀντι-ΗΕΔ 96 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,10 Ω. Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι 7,75 Ω. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτῆς διερχομένου ρεύματος.

Λύσις. Ἐὰν Ε εἶναι ἡ ΗΕΔ τῆς γεννητρίας, τότε ἡ ἀντι-ΗΕΔ Ε' τοῦ κινητῆρος θὰ ἐμφανίζεται εἰς τὸ κύκλωμα ἀντιθέτως τῆς ΗΕΔ τῆς γεννητρίας.

Καλοῦμεν r τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τῆς πηγῆς (γεννητρίας), r' τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ κινητῆρος καὶ R τὴν ἀντίστασιν τῆς γραμμῆς.



Ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα θὰ ἔχωμεν

$$E - E' = i\,(R + r + r') \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν i τοῦ ρεύματος προκύπτει

$$\underline{i = \frac{E - E'}{R + r + r'}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, E = 120 V, E' = 96 V, R = 7,75 Ω, r = 0,15 Ω καὶ r' = 0,1 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 3\ \text{A}.}$$

544. Ξηρὸν στοιχεῖον ἔχει ΗΕΔ 1,2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,8 Ω. Εὕρατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ὅταν οἱ ἀκροδέκται του συνδέονται διὰ σύρματος ἀμελητέας ἀντιστάσεως.

Λύσις. Ἔστω E ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ καὶ R ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{E}{R + r}$$

Θέτοντές εἰς τὸν τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $E = 1{,}2$ V, $R = 0\,\Omega$, $r = 0{,}8\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$i = 1{,}5 \text{ A}.$$

545. Ἠλεκτρικὴ πηγὴ παρέχει ΗΕΔ 40 V. Ὅταν δίδῃ ρεῦμα ἐντάσεως 20 A ἡ τάσις τῶν πόλων της εἶναι 38,5 V. Ὑπολογίσατε τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τῆς πηγῆς.

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$i = \frac{E}{R + r} \tag{1}$$

ὅπου E ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς καὶ R ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς E, λαμβάνομεν

$$E = i \cdot R + i \cdot r \tag{2}$$

καὶ ἐπειδὴ $i \cdot R$ εἶναι ἡ τάσις U εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R, ἑπομένως καὶ εἰς τοὺς πόλους τῆς πηγῆς, προκύπτει

$$E = U + i \cdot r \tag{3}$$

Ἐπιλύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς r λαμβάνομεν

$$r = \frac{E - U}{i} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $E = 40$ V, $U = 38{,}5$ V, $i = 20$ A, εὑρίσκομεν

$$r = 0{,}075\ \Omega.$$

546. Γεννήτρια τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι 160 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις 0,2 Ω τροφοδοτεῖ 200 λυχνίας τῶν 160 Ω, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς γραμμῆς τροφοδοτήσεως τῶν λυχνιῶν, β) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐπὶ ἑκάστης λυχνίας καὶ γ) ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῆς γεννητρίας.

Λύσις. α) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς γραμμῆς θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ Ohm

$$i = \frac{E}{R + r} \tag{1}$$

ὅπου E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς πηγῆς, R ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς πηγῆς.

Καλοῦμεν R′ τὴν ἀντίστασιν ἑκάστης λυχνίας καὶ n τὸν ἀριθμὸν τῶν λυχνιῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν λυχνιῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \text{ὅτι εἶναι} \quad R = \frac{R'}{n} \tag{2}$$

Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$i = \frac{E}{\frac{R'}{n} + r} = \frac{n \cdot E}{R' + n \cdot r} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν σχέσιν (3), $n = 200$, $E = 160$ V, $R' = 160\,\Omega$, $r = 0{,}2\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$i = 160 \text{ A}.$$

β) Ἡ ἔντασις i' τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' ἑκάστης λυχνίας εὑρίσκεται ἐκ τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$n \cdot i' = i \qquad \text{ἢ} \qquad i' = \frac{i}{n}$$

Ἐξ οὗ διὰ $i = 160$ A καὶ $n = 200$, προκύπτει

$$\underline{i' = 0{,}8 \text{ A.}}$$

γ) Ἡ τάσις U εἰς τὰ ἄκρα τῆς γεννητρίας θὰ εἶναι ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης λυχνίας. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\underline{U = R' \cdot i'}$$

ὁπότε διὰ $R' = 160\ \Omega$ καὶ $i' = 0{,}8$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 128 \text{ V.}}$$

547. Γεννήτρια τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι 120 V ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,18 Ω, παρέχει δὲ ρεῦμα ἐντάσεως 50 A εἰς κύκλωμα καταναλώσεως. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας.

Λύσις. Ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους μιᾶς πηγῆς, ὅταν αὕτη παρέχῃ ρεῦμα, εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ΗΕΔ E τῆς πηγῆς κατὰ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως i τοῦ ρεύματος ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r τῆς πηγῆς, ἤτοι

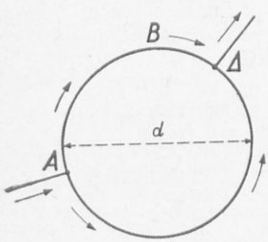
$$\underline{U = E - r \cdot i}$$

Θέτοντες $E = 120$ V, $r = 0{,}18\ \Omega$ καὶ $i = 50$ A εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπικρατοῦσα τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς πηγῆς εἶναι

$$\underline{U = 111 \text{ V.}}$$

548. Κάμπτεται μεταλλικὸν σύρμα εἰς σχῆμα κύκλου διαμέτρου d, ἡ ἀντίστασις δὲ τοῦ σύρματος τούτου εἶναι r κατὰ μονάδα μήκους. Ρεῦμα ἐντάσεως i εἰσέρχεται διὰ τοῦ σημείου A καὶ ἐξέρχεται ἐκ τοῦ Δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῶν τμημάτων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, παριστῶντες διὰ l τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ ΑΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον r εἶναι ἡ ἀντίστασις ἀνὰ μονάδα μήκους καὶ l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒΔ, ἔπεται ὅτι ἡ ἀντίστασις R_1 αὐτοῦ εἶναι



$$R_1 = l \cdot r \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ μῆκος ὅλου τοῦ κυκλικοῦ σύρματος εἶναι $\pi \cdot d$, ὅπου d ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ θὰ εἶναι $\pi \cdot d \cdot r$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος ΑΓΔ θὰ εἶναι

$$R_2 = (\pi \cdot d - l) \cdot r \tag{2}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$ τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{3}$$

καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{l \cdot r} + \frac{1}{(\pi \cdot d - l) \cdot r} \tag{4}$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$\underline{R_{ολ} = \frac{(\pi \cdot d - l) \cdot l}{\pi \cdot d} \cdot r}$$

549. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β συνδέονται ἐν παραλλήλῳ δύο ἀντιστάσεις R καὶ 2 R. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσοδύναμος πρὸς αὐτὰς ἀντίστασις καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ἐξ ἑκάστης ἀντιστάσεως διερχομένου ρεύματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον φθάνει εἰς τὸ Α εἶναι i.

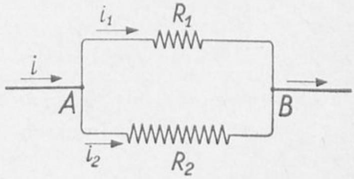
Λύσις. α) Ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις $R_{ολ}$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $R_1 = R$ καὶ $R_2 = 2\,R$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2\,R} = \frac{3}{2\,R}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $R_{ολ}$ εὑρίσκομεν



$$R_{ολ} = \frac{2\,R}{3} \qquad (2)$$

β) Ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ἔχομεν

$$0 = R \cdot i_1 - 2\,R \cdot i_2 \qquad (3)$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{2\,R}{R} = 2 \quad ἢ \quad i_1 = 2\,i_2 \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff ἔχομεν $i = i_1 + i_2$ ἢ $i_2 = i - i_1$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις (4) δίδει $i_1 = 2\,(i - i_1)$ καὶ $3\,i_1 = 2\,i$, ὅτε τελικῶς λαμβάνομεν

$$i_1 = \frac{2\,i}{3} \quad καὶ \quad i_2 = \frac{i}{3}$$

550. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἠλεκτρικῆς στήλης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι παρέχει ἐπὶ κυκλωμάτων ἐξωτερικῶν ἀντιστάσεων 2,5 Ω καὶ 1 Ω ἀντιστοίχως, ἐντάσεις ρεύματος 0,5 A καὶ 1 A.

Λύσις. Ἔστω E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς. Ἂν ἡ στήλη παρέχῃ εἰς ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν R_1 ρεῦμα ἐντάσεως i_1, καὶ εἰς ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν R_2 ρεῦμα ἐντάσεως i_2, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως

$$E = R_1 \cdot i_1 + r \cdot i_1 \quad (1) \qquad καὶ \qquad E = R_2 \cdot i_2 + r \cdot i_2 \quad (2)$$

Ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$R_1 \cdot i_1 + r \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 + r \cdot i_2 \qquad (3)$$

Λύοντες ἀκολούθως ὡς πρὸς r προκύπτει

$$r = \frac{R_1 \cdot i_1 - R_2 \cdot i_2}{i_2 - i_1} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (4) $R_1 = 2{,}5\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $i_1 = 0{,}5$ A, $i_2 = 1$ A, εὑρίσκομεν

$$r = 0{,}5\ \Omega.$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν θέσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν μεγεθῶν, ὅτι εἶναι

$$E = 1{,}5\ V.$$

551. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ὅπερ παρέχει ἐπὶ ἀντιστάσεως 2 Ω στήλη, τῆς ὁποίας ἡ Η Ε Δ εἶναι 1,5 V καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι 0,4 Ω.

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν

$$\underline{i = \frac{E}{R + r}} \qquad (1)$$

ὅπου i εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς πηγῆς (στήλης), R ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς πηγῆς.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) $E = 1{,}5$ V, $R = 2\ \Omega$ καὶ $r = 0{,}4\ \Omega$ εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}625\ \text{A.}}$$

552. Ἠλεκτρικὸν ὄργανον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 20 Ω καὶ λειτουργεῖ μὲ ρεῦμα 50 m A. α) Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ξηρὸν στοιχεῖον Η Ε Δ 1,2 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,4 Ω, ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ μὲ τὸ ὄργανον καὶ τὸ στοιχεῖον ἵνα περιορίσῃ τὸ ρεῦμα εἰς 50 m A. β) Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὀργάνου.

Λύσις. α) Ἔστω R ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ὀργάνου καὶ R′ ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν ἐν σειρᾷ ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι i (50 m A.) Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{E}{R + R' + r}$$

ὅπου E ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς R′ λαμβάνομεν

$$\underline{R' = \frac{E}{i} - R - r}$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δεδομένων $E = 1{,}2$ V, $i = 50$ m A $= 50 \cdot 10^{-3}$ A, $R = 20\ \Omega$, $r = 0{,}4\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R' = 3{,}6\ \Omega.}$$

β) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὀργάνου θὰ εἶναι

$$\underline{U = R \cdot i}$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δεδομένων, $R = 20\ \Omega$ καὶ $i = 50 \cdot 10^{-3}$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 1\ \text{V.}}$$

553. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως, ἥτις συνδεομένη ἐν παραλλήλῳ μὲ ἀντίστασιν 12 Ω, δίδει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ} = 4\ \Omega$.

Λύσις. Ἔστω R_1 ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ συνδέσωμεν ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὴν ἀντίστασιν R_2 διὰ νὰ ἔχωμεν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς συνδέσεως ἀντιστάσεων ἐν παραλλήλῳ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R_1 προκύπτει

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R_{ολ}}{R_2 - R_{ολ}} \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, $R_2 = 12\ \Omega$ καὶ $R_{ολ} = 4\ \Omega$ εὑρίσκομεν

$$\underline{R_1 = 6\ \Omega.}$$

554. Συσσωρευτής ἔχει ΗΕΔ ἴσην πρὸς 4 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,05 Ω. Ὑπολογίσατε τὴν τάσιν αὐτοῦ, α) ὅταν παρέχῃ ρεῦμα ἐντάσεως 10 Α καὶ β) ὅταν φορτίζεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 Α.

Λύσις. Ἔστω E καὶ r ἀντιστοίχως ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ συσσωρευτής. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{E}{R + r} \qquad \text{καὶ} \qquad E = i \cdot R + i \cdot r \qquad (1)$$

Τὸ γινόμενον ὅμως $i \cdot R$ εἶναι ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τοῦ συσσωρευτοῦ, δηλ. ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους αὐτοῦ ὅταν παρέχῃ ρεῦμα. Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$E = U + i \cdot r \qquad \text{ἢ} \qquad U = E - i \cdot r \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $E = 4$ V, $i = 10$ A καὶ $r = 0{,}05\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 3{,}5 \text{ V}.}$$

β) Ὅταν ὁ συσσωρευτὴς φορτίζεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i καὶ ὑπὸ τάσιν U′, τότε κατὰ τὴν φόρτισιν ἀναπτύσσεται εἰς τὸν συσσωρευτὴν ἀντὶ-ΗΕΔ E′ ἴση πρὸς E, καὶ θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{U' - E'}{r} \qquad \text{ἢ} \qquad U' = E' + i \cdot r \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $E' = 4$ V, $i = 10$ A καὶ $r = 0{,}05\ \Omega$ εὑρίσκομεν

$$\underline{U' = 4{,}5 \text{ V}.}$$

555. Βολτόμετρον δεικνύει τάσιν $U_1 = 4{,}5$ V, ὅταν τὸ κύκλωμα μὲ τὸ ὁποῖον συνδέεται εἶναι ἀνοικτόν. Κατόπιν τὸ κύκλωμα κλείει μὲ ἀμπερόμετρον, ὅτε τὸ βολτόμετρον δεικνύει τάσιν $U_2 = 1{,}5$ V, τὸ δὲ ἀμπερόμετρον ἔντασιν $i = 0{,}03$ A. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς πηγῆς καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτῆς.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Φυσιογνωστικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως, ἡ ΗΕΔ E θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξις U_1 τοῦ βολτομέτρου ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν. Ἄρα

$$\underline{E = U_1 = 4{,}5 \text{ V}.} \qquad (1)$$

β) Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm $i = E/R + r$, ἔχομεν

$$i = \frac{E - R \cdot i}{r} \qquad \text{ἢ} \qquad i = \frac{E - U_2}{r} \qquad (2)$$

ὅπου U_2 εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς πηγῆς καὶ R ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς r, λαμβάνομεν

$$\underline{r = \frac{E - U_2}{i}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $E = 4{,}5$ V, $U_2 = 1{,}5$ V, $i = 0{,}03$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{r = 100\ \Omega.}$$

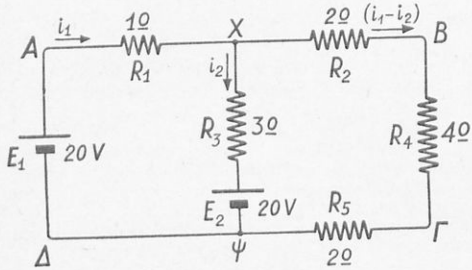
556. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸν κλάδον (ΧΨ) εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος. Δίδονται $E_1 = 20$ V, $E_2 = 20$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$.

Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ δευτέρου κανόνος τοῦ Kirchhoff $\Sigma E = \Sigma i \cdot R$ εἰς τὸ κύκλωμα ΑΧΨΔΑ, ἔχομεν

$$E_1 - E_2 = i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_3 \qquad (1)$$

Ἐπίσης δι' ἐφαρμογῆς τοῦ δευτέρου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ΑΒΓΔΑ, ἔχομεν

$$E_1 = i_1 \cdot R_1 + (R_2 + R_4 + R_5) \cdot (i_1 - i_2) \qquad (2)$$



Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἐὰν θέσωμεν $E_1 = 20$ V, $E_2 = 20$ V, $R_1 = 1\ \Omega$ καὶ $R_3 = 3\ \Omega$, λαμβάνομεν

$$0 = i_1 + 3\, i_2 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἐὰν θέσωμεν $E_1 = 20$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$, προκύπτει

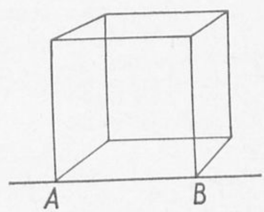
$$20 = 9\, i_1 - 8\, i_2 \qquad (4)$$

Δι' ἐπιλύσεως τέλος τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν

$$i_2 = -\frac{4}{7}\ \text{A} = -0{,}57\ \text{A}.$$

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον (—) σημαίνει ὅτι τὸ ρεῦμα ἔχει φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς ἡ ὁποία ἔχει παρασταθῆ εἰς τὸ σχῆμα.

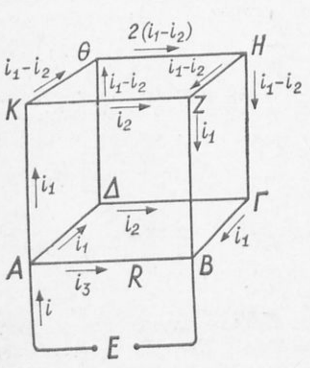
557. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασιν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τοῦ σκελετοῦ τοῦ κατασκευασμένου ἐκ δώδεκα συρμάτων, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, ἑκάστου ἔχοντος ἀντίστασιν 1 Ω.



Λύσις. Λόγῳ συμμετρίας τοῦ κυκλώματος αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων περιορίζονται εἰς τὰς i_1, i_2, i_3, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 2ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ΑΒΓΔΑ ἔχομεν

$$i_3 - 2\, i_1 - i_2 = 0 \qquad (1)$$



Ἐπίσης δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 2ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ΚΖΗΘΚ ἔχομεν

$$i_2 - 4 \cdot (i_1 - i_2) = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν

$$i_2 = \frac{4}{5} \cdot i_1 \qquad (3)$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

$$i_1 = \frac{5}{14} \cdot i_3 \qquad (4)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 2ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν πηγὴν καὶ τὸ ρεῦμα ἐντάσεως i_3 θὰ ἔχωμεν

$$E = i_3 \cdot R \qquad (5) \qquad \text{ἐξ οὗ} \qquad i_3 = \frac{E}{R} \qquad (6)$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β θὰ εἶναι

$$R_{ολ} = \frac{E}{i} = \frac{E}{2\,i_1 + i_3} \qquad (7)$$

διότι, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον Α εἶναι $i = 2\,i_1 + i_3$. Ἡ λόγῳ τῆς (4) ἔχομεν

$$R_{ολ} = \frac{E}{2\cdot\frac{5}{14}\,i_3 + i_3} = \frac{14\,E}{24\,i_3} = \frac{7\,E}{12\,i_3} \qquad (8)$$

Ἀλλὰ ἡ σχέσις (8) λόγῳ τῆς (6) γράφεται

$$R_{ολ} = \frac{7}{12}\cdot R \qquad (9)$$

Θέτοντες τέλος εἰς τὴν σχέσιν (9), $R = 1\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$R_{ολ} = \frac{7}{12}\ \Omega.$$

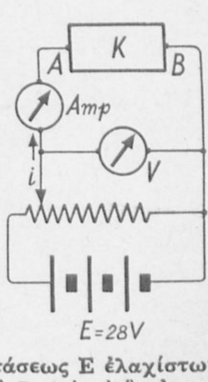
558. Ἐπὶ ἐσφραγισμένου κιβωτίου Κ (βλ. σχῆμα), οὗτινος ἀγνοεῖται τὸ περιεχόμενον, εὑρίσκονται δύο ἀκροδέκται Α καὶ Β. Ἵνα ἐξακριβωθῇ τὸ περιεχόμενον τοῦ κιβωτίου, ἐφηρμόσθησαν διαδοχικῶς διάφοροι τάσεις Ε ἐπὶ τῶν ἀκροδεκτῶν καὶ ἐμετρήθησαν αἱ ἑκάστοτε προκύπτουσαι ἐντάσεις ρεύματος i, ὡς ἀναγράφονται αὗται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

E_{Volt}	28	24	20	16	12	8	4	0
$i_{Amp.}$	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3

Ζητεῖται ἡ ἁπλουστέρα δυνατὴ ἐσωτερικὴ συνδεσμολογία ἐντὸς τοῦ κιβωτίου Κ, ὁμοῦ μετὰ τῶν σχετικῶν τιμῶν.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαί: Χημικῶν Μηχανικῶν, Μεταλλειολόγων, Ἀρχιτεκτόνων, Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1948).

Λύσις. Ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος 0 V καὶ −3 A προκύπτει ὅτι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὑπάρχει ἠλεκτρικὴ πηγή, ἡ ὁποία παρέχει εἰς ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν μηδέν, ἔντασιν ρεύματος 3 A. Ἐκ τῶν τιμῶν 12 V καὶ 0 A τοῦ πίνακος προκύπτει ὅτι ἡ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὑπάρχουσα ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἔχει τάσιν 12 V, ἡ ὁποία ἀντισταθμίζει τὴν ἐξωτερικὴν τάσιν τῶν 12 V. Δηλ. ὁ θετικὸς πόλος τῆς ἐφαρμοζομένης πηγῆς συνδέεται μὲ τὸν ἀρνητικὸν ἀκροδέκτην τοῦ κιβωτίου καὶ ὁ ἀρνητικὸς πόλος τῆς πηγῆς συνδέεται μὲ τὸν ἀρνητικὸν ἀκροδέκτην. Ἐπίσης ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος 28 V καὶ 4 A προκύπτει ὅτι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὑπάρχει ἀντίστασις $(28-12)/4 = 4\ \Omega$.

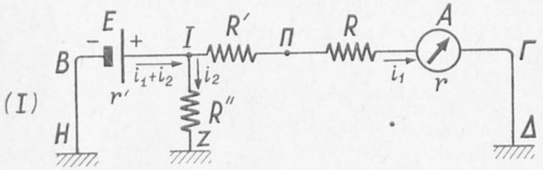


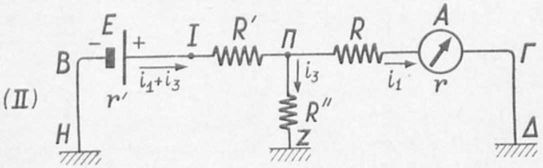
Ὡς παρατηροῦμεν ἐξ ὅλων τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τάσεως καὶ ἐντάσεως, προκύπτει πάντοτε τιμὴ ἀντιστάσεως 4 Ω. Π.χ. $(20-12)/2 = 4\ \Omega$. Αἱ προκύπτουσαι ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῆς ἐντάσεως ἀντιστοιχοῦν προφανῶς εἰς ἀλλαγὴν φορᾶς τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἶναι μικροτέρα τῶν 12 V τῆς πηγῆς τοῦ κιβωτίου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὑπάρχει ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 12 V, ἡ ὁποία ἔχει θετικὸν πόλον τὸν ἀκροδέκτην Α καὶ ἀρνητικὸν πόλον τὸν ἀκροδέκτην Β, ὡς καὶ ὅτι ἡ συνολικὴ ἀντίστασις ἐντὸς τοῦ κιβωτίου εἶναι 4 Ω.

559. Ὁ θετικὸς πόλος μιᾶς ἠλεκτρικῆς συστοιχίας Ε, τάσεως Ε ἐλαχίστων μόνον βόλτ, συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ δύο ἀντιστάσεις R′ καὶ R καὶ μὲ ἓν ἀμπερόμετρον Α. Ὁ ἀρνητικὸς πόλος τῆς συστοιχίας καὶ ὁ ἕτερος ἀκροδέκτης τοῦ

ἀμπερομέτρου εἶναι προσγειωμένοι. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαφόρων μετρήσεων ὁ πειραματιστὴς παρετήρησεν ὅτι, ὁσάκις ἤγγιζε διὰ τῆς χειρὸς τὰ σημεῖα Ι καὶ Π τῆς συνδεσμολογίας, ἡ ἀρχικὴ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου ἐμειοῦτο εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μονάδων τῆς κλίμακος τοῦ ὀργάνου τούτου. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r′ τῆς συστοιχίας, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι R = 10 Ω, ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τοῦ ἀμπερομέτρου ἰσοῦται μὲ 1 Ω καὶ ὅτι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὑπ' ὄψιν πειράματος, ὁ πειραματιστὴς ἵσταται ἐπὶ ὑγροῦ ἐδάφους, δηλαδὴ ἠλεκτρικῶς οὐχὶ καλῶς μεμονωμένου.





(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1954. Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων. Εἰσαγωγικαὶ Ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ μείωσις τῆς ἐνδείξεως τοῦ ὀργάνου εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ κατὰ τὰς δύο μετρήσεις, ἕπεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος i_1 εἶναι ἐπίσης ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

Ἂς καλέσωμεν R_1 τὴν ἀντίστασιν τὴν ὁποίαν παρουσιάζει τὸ σῶμα τοῦ ἀνθρώπου καὶ i_2, i_3 τὰς ἐντάσεις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ σώματος αὐτοῦ ἀντιστοίχως κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (I) ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὰ κυκλώματα ΒΗΖΙΒ καὶ ΒΗΖΔΓΙΒ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

$$E = R''\cdot i_2 + r'(i_1 + i_2) \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad E = (R' + R + r)\cdot i_1 + r'(i_1 + i_2) \quad (2)$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν (II) ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὰ κυκλώματα ΒΗΖΠΒ καὶ ΒΗΖΔΓΠΒ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

$$E = R''\cdot i_3 + (R' + r')\cdot(i_1 + i_3) \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad E = (R + r)\, i_1 + (i_1 + i_3)\cdot(R' + r') \quad (4)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν

$$R''\cdot i_2 = (R + r)\cdot i_1 + R'\cdot i_1 \tag{5}$$

Ἐπίσης ἀφαιροῦμεν τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν

$$R''\cdot i_3 = (R + r)\cdot i_1 \tag{6}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἀφαιροῦμεν τὰς (5) καὶ (6) κατὰ μέλη, ὅτε προκύπτει

$$R''\cdot(i_2 - i_3) = R'\cdot i_1 \tag{7}$$

Ἀφαιροῦμεν τέλος τὰς (1) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν

$$r'\cdot(i_2 - i_3) + R''\cdot(i_2 - i_3) = R'\cdot i_1 + R'\cdot i_3 \tag{8}$$

καὶ λόγῳ τῆς (7) λαμβάνομεν

$$r'\cdot(i_2 - i_3) = R'\cdot i_3 \tag{9}$$

Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν τὰς ἐξισώσεις (7) καὶ (9) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\frac{R''}{r'} = \frac{i_1}{i_3} \tag{10}$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ΠΖΔΓΠ λαμβάνομεν

$$0 = (R + r)\cdot i_1 - R''\cdot i_3 \quad \text{ἢ} \quad \frac{R''}{R + r} = \frac{i_1}{i_3} \tag{11}$$

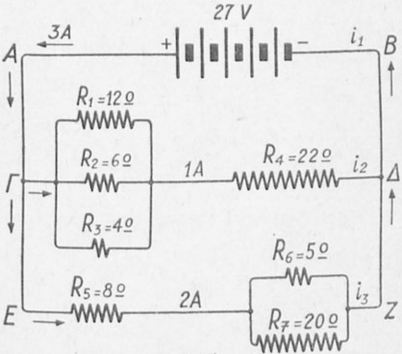
Ἐκ τῶν σχέσεων (10) καὶ (11) τέλος λαμβάνομεν

$$\frac{R''}{r'} = \frac{R''}{R + r} \quad \text{ἢ} \quad \underline{r' = R + r}$$

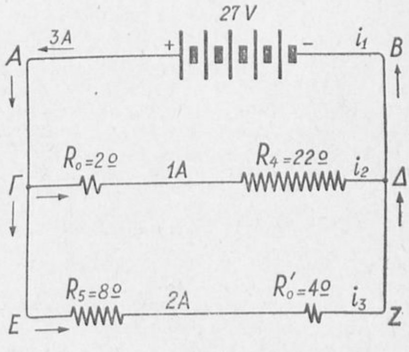
καὶ διὰ $R = 10\,\Omega$, $r = 1\,\Omega$ εὑρίσκομεν

$$\underline{r' = 11\,\Omega.}$$

560. Στήλη τῶν 27 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω δίδει ρεῦμα εἰς ἀντιστάσεις, ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα Ι. Ὑπολογίσατε α) Τὴν ἀντίστασιν ἑκάστης ὁμάδος παραλλήλων ἀντιστάσεων. β) Τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ στήλη. γ) Τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν κλάδων (ΓΔ) καὶ (ΕΖ). δ) Τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τοὺς κλάδους (ΓΔ) καὶ (ΕΖ).



(I)



(II)

Λύσις. α) Ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_o τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2, R_3 εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (1) \qquad \text{ὅτι εἶναι} \quad R_o = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (2)$$

Θέτοντες $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_o = 2\Omega.}$$

Ἐπίσης ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R'_o τῶν ἀντιστάσεων R_6, R_7 εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R'_o} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \quad (3) \qquad \text{ὅτι εἶναι:} \quad \underline{R'_o = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7}} \quad (4)$$

Θέτοντες $R_6 = 5\,\Omega$ καὶ $R_7 = 20\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R'_o = 4\,\Omega.}$$

Οὕτω τὸ κύκλωμα (I) ἀνάγεται εἰς τὸ κύκλωμα (II).

β) Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$i_1 = \frac{E}{R + r} \quad (5)$$

ὅπου R εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν R_o, R_4, R_5 καὶ R'_o

Αἱ ἀντιστάσεις R_o καὶ R_4, ἐπειδὴ εἶναι ἐν σειρᾷ δίδουν ὁλικὴν ἀντίστασιν

$$R' = R_o + R_4 \tag{6}$$

καὶ αἱ ἀντιστάσεις R_5 καὶ R'_o, ἐπειδὴ εἶναι ἐπίσης ἐν σειρᾷ, δίδουν ὁλικὴν ἀντίστασιν

$$R'' = R_5 + R'_o \tag{7}$$

Συνεπῶς ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις τῶν παραλλήλων ἀντιστάσεων R' καὶ R'' εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \quad (8) \quad \text{ὅτι εἶναι} \quad R = \frac{R' \cdot R''}{R' + R''} = \frac{(R_o + R_4)\cdot(R_5 + R''_o)}{R_4 + R_5 + R_o + R'_o} \quad (9)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (9) τὰς τιμάς: $R_o = 2\,\Omega$, $R_4 = 22\,\Omega$, $R_5 = 8\,\Omega$, $R'_o = 4\,\Omega$ λαμβάνομεν

$$R = 8\Omega.$$

Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τὸν τύπον (5) $E = 27$ V, $R = 8\,\Omega$ καὶ $r = 1\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i_1 = 3 \text{ A.}}$$

γ) Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ U εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ καθὼς καὶ εἰς τὰ ἄκρα Ε καὶ Ζ λύομεν τὸν τύπον (5) ὡς πρὸς Ε καὶ λαμβάνομεν, $E = i_1 R + i_1 r$ καὶ ἐπειδὴ $i \cdot R = U$, ἔχομεν

$$E = U + i_1 \cdot r \tag{10}$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ τύπου (10) ὡς πρὸς r προκύπτει

$$U = E - i_1 \cdot r \tag{11}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (11) τὰς τιμάς, $E = 27$ V, $i_1 = 3$ A, $r = 1\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 24 \text{ V.}}$$

δ) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος i_2 εἰς τὸν κλάδον (ΓΔ) θὰ εἶναι

$$i_2 = \frac{U}{R'} = \frac{U}{R_o + R_4}$$

ὁπότε διὰ $U = 24$ V, $R_o = 2\,\Omega$ καὶ $R_4 = 22\,\Omega$ εὑρίσκομεν

$$\underline{i_2 = 1 \text{ A.}}$$

Τέλος εἰς τὸν κλάδον (ΕΖ) ἡ ἔντασις i_3 τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι

$$\underline{i_3 = i_1 - i_2 = 2 \text{ A.}}$$

561. Ἡ ἀντίστασις νήματος ἐκ βολφραμίου λυχνίας φωτισμοῦ εἶναι 162 Ω εἰς κατάστασιν λειτουργίας. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ νῆμα φθάνει τὴν θερμοκρασίαν 2 000° C καὶ ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως διὰ τὸ βολφράμιον εἶναι $\alpha = 1/250$ grad^{-1}, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ νήματος εἰς 0° C.

Λύσις. Ἡ ἀντίστασις R_θ ἑνὸς ἀγωγοῦ εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ° C εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$R_\theta = R_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \tag{1}$$

ὅπου R_o εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ εἰς θερμοκρασίαν 0° Κελσίου καὶ α ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς R_o λαμβάνομεν

$$\underline{R_o = \frac{R_\theta}{(1 + \alpha \cdot \theta)}} \tag{2}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2) τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δοθεισῶν τιμῶν των, $R_o = 162\ \Omega$, $\theta = 2000^0$ C καὶ $\alpha = 1/250\ \mathrm{grad}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_o = 18\ \Omega.}$$

562. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τηλεγραφικῆς γραμμῆς μήκους 30 km ἡ ὁποία συνδέει δύο πόλεις, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος εἶναι 0,2 cm καὶ ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι $1{,}57 \cdot 10^{-6}\ \Omega$. cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ἀντιστάσεως ἥτις ἐπέρχεται εἰς τὴν γραμμήν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν -12^0 καὶ 48^0 C καὶ ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς τῆς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\alpha = 0{,}00428\ \mathrm{grad}^{-1}$.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν l τὸ μῆκος τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ρ τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τοῦ χαλκοῦ καὶ S τὴν τομὴν αὐτοῦ, τότε ἡ ἀντίστασις R θὰ εἶναι

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ἢ ἐπειδὴ $S = \pi \cdot d^2/4$ (ὅπου d ἡ διάμετρος τῆς τομῆς) ἔχομεν

$$R = \frac{4\rho \cdot l}{\pi \cdot d^2} \qquad (1)$$

Ἐὰν τώρα μεταβληθῇ ἡ θερμοκρασία κατὰ Δθ βαθμοὺς Κελσίου, ἡ ἀντίστασις R θὰ μεταβληθῇ, ὡς γνωστόν, κατὰ

$$\Delta R = \alpha \cdot R \cdot \Delta\theta \qquad (2)$$

ὅπου α εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι

$$\underline{\Delta R = \alpha \cdot \frac{4\rho \cdot l}{\pi d^2} \cdot \Delta\theta}$$

καὶ διὰ $\rho = 1{,}57 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{cm}$, $l = 30\ \mathrm{km} = 30 \cdot 10^5\ \mathrm{cm}$, $d = 0{,}2\ \mathrm{cm}$, $\Delta\theta = 48 - (-12) = 60^0$ C καὶ $\alpha = 0{,}00428\ \mathrm{grad}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\Delta R = 38{,}5\ \Omega.}$$

563. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R_θ εἰς θ^0 C μεταλλικοῦ σύρματος τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἰς 0^0 C εἶναι R_o, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου εἶναι λ καὶ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως εἶναι α.

Λύσις. 1) Ἐὰν καλέσωμεν d_o τὴν διάμετρον τοῦ σύρματος εἰς 0^0 C, τότε ἡ τομὴ αὐτοῦ S_o θὰ εἶναι

$$S_o = \frac{\pi \cdot d_o^2}{4} \qquad (1)$$

2) Ἐὰν καλέσωμεν ρ_o τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν καὶ l_o τὸ μῆκος τοῦ σύρματος εἰς 0^0 C, τότε ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ R_o θὰ εἶναι

$$R_o = \rho_o \cdot \frac{l_o}{\frac{\pi \cdot d_o^2}{4}} = \frac{4\rho_o \cdot l_o}{\pi \cdot d_o^2} \qquad (2)$$

3) Ἐὰν καλέσωμεν λ τὸν θερμικὸν συντελεστὴν τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σύρματος, τότε ἡ τομὴ S_θ εἰς θερμοκρασίαν θ^0 C θὰ εἶναι

$$S_\theta = \frac{\pi \cdot d_o^2 \cdot (1 + \lambda \cdot \theta)^2}{4} \qquad (3)$$

καὶ ἡ ἀντίστασις R_θ αὐτοῦ

$$R_\theta = \rho_\theta \frac{l_\theta}{\frac{\pi \cdot d^2_o \cdot (1+\lambda\theta)^2}{4}} \qquad (4)$$

ὅπου $\rho_\theta = \rho_o \cdot (1+\alpha\theta)$ καὶ $l_\theta = l_o \cdot (1+\lambda\theta)$. Ἑπομένως ἡ σχέσις (4) γράφεται

$$R_\theta = \frac{4\rho_o \cdot l_o}{\pi d^2_o} \cdot \frac{1+\alpha\cdot\theta}{1+\lambda\cdot\theta} \quad (5) \qquad \text{ἢ λόγῳ τῆς (2)} \quad \underline{R_\theta = R_o \cdot \frac{1+\alpha\cdot\theta}{1+\lambda\cdot\theta}} \quad (6)$$

Σημείωσις. Διὰ μικρὰν τιμὴν τοῦ θ, ἐπειδὴ τὸ λ εἶναι πολὺ μικρόν, ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι περίπου

$$\frac{1}{1+\lambda\cdot\theta} = 1 - \lambda\cdot\theta$$

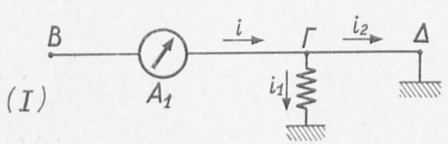
καὶ ἡ σχέσις (6) δίδει

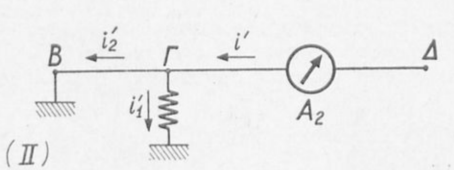
$$R_\theta = R_o \cdot (1+\alpha\cdot\theta)\cdot(1-\lambda\cdot\theta) \qquad \text{ἢ} \qquad R_\theta = R_o\left[1+(\alpha-\lambda)\cdot\theta - \alpha\cdot\lambda\cdot\theta^2\right] \quad (7)$$

Ἐάν, ὡς ἐλέχθη, ἡ τιμὴ τοῦ θ εἶναι μικρά, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\lambda$ εἶναι πολὺ μικρόν, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ $\alpha\cdot\lambda\cdot\theta^2$, καὶ τελικῶς λαμβάνομεν

$$\underline{R_\theta = R_o\left[1+(\alpha-\lambda)\cdot\theta\right]}$$

564. Μεμονωμένος χάλκινος ἀγωγὸς (καλώδιον) ἠλεκτροφόρος (ΒΓΔ) τομῆς ἐμβαδοῦ 2,5 mm² ἔχει ὁλικὸν μῆκος (ΒΔ) = 12,5 km. Εἰς τὸ σημεῖον Γ, τοῦ ἀγωγοῦ, λόγῳ φθορᾶς τῆς μονώσεως, ἔχει δημιουργηθῇ κατάστασις τοιαύτη, ὡς ἐὰν τὸ σημεῖον Γ εἶχε συνδεθῇ μὲ τὴν Γῆν μέσῳ ἀντιστάσεως πεπερασμένου μεγέθους. Ἀγνοοῦμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Γ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ μέγεθος τῆς ἀντιστάσεως, τὴν ὁποίαν παρεμβάλλει ἡ φθαρεῖσα μόνωσις, μεταξὺ τοῦ σημείου Γ τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τῆς Γῆς. Χρησιμοποιοῦμεν ἀμπερόμετρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 15 Ω καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς δύο μετρήσεις. Μέτρησις (Ι). Παρεμβάλλομεν τὸ ἀμπερόμετρον εἰς τὴν θέσιν A_1 τοῦ ἀγωγοῦ, προσγειοῦμεν τὸ ἄκρον Δ τοῦ ἀγωγοῦ καὶ θέτομεν τὸ ἄκρον Β τοῦ ἀγωγοῦ ὑπὸ σταθερὰν τάσιν 220 V σχετικῶς πρὸς τὴν Γῆν, ὁπότε μετροῦμεν, διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου, ἔντασιν ρεύματος 3 Α. Μέτρησις (ΙΙ). Παρεμβάλλομεν τὸ ἀμπερόμετρον εἰς τὴν θέσιν A_2 τοῦ ἀγωγοῦ. Προσγειώνομεν τὸ ἄκρον Β τοῦ ἀγωγοῦ καὶ θέτομεν τὸ ἄκρον Δ αὐτοῦ ὑπὸ σταθερὰν τάσιν 220 V σχετικῶς πρὸς τὴν Γῆν, ὁπότε μετροῦμεν, διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου, ἔντασιν ρεύματος 4 Α. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δύο μετρήσεων, δεχόμενοι ὡς τιμὴν τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκοῦ 0,017 Ω · mm²/m προσδιορίσατε τὸ μῆκος (ΒΓ). Ἐπίσης προσδιορίσατε τὸ μέγεθος τῆς ὑπὸ τῆς φθαρείσης μονώσεως παρεμβαλλομένης ἀντιστάσεως μεταξὺ τοῦ σημείου Γ τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τῆς Γῆς.





(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) Προσδιορισμὸς τῆς ἀντιστάσεως μεταξὺ σημείου Γ καὶ Γῆς. Ἔστω ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ, l τὸ μῆκος τοῦ καλωδίου καὶ S ἡ τομὴ αὐτοῦ. Θὰ ἔχωμεν

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ καλωδίου. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν

$$R = 85\,\Omega.$$

Ἐπίσης ἔστω R_1 ἡ ἀντίστασις ἡ ὁποία παρεμβάλλεται μεταξὺ τοῦ σημείου Γ καὶ τῆς Γῆς, λόγῳ φθορᾶς τῆς μονώσεως, R_2 ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος (ΓΔ) καὶ R_3 ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος (ΒΓ).

Ἐπειδὴ τὸ ρεῦμα κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν διακλαδίζεται εἰς τὸ σημεῖον Γ, αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 εἶναι παράλληλοι καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{καὶ} \qquad R_o = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Ohm καὶ λαμβάνομεν

$$U = i \cdot \left(R_3 + r + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right) \tag{1}$$

ὅπου U ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_3 εἶναι ἐπίσης παράλληλοι καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$U = i' \cdot \left(R_2 + r + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}\right) \tag{2}$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

$$R = R_2 + R_3 \tag{3}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ χαλκίνου ἀγωγοῦ (ΒΔ).

Θέτοντες εἰς τὰς (1), (2) καὶ (3), $U = 220\,V$, $i = 3\,A$, $i' = 4\,A$, $r = 15\,\Omega$ καὶ $R = 85\,\Omega$, λαμβάνομεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$220 = 3 \cdot \left(R_3 + 15 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right) \tag{4}$$

$$220 = 4 \cdot \left(R_2 + 15 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}\right) \tag{5}$$

$$85 = R_2 + R_3 \tag{6}$$

Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν

$$220 \cdot R_1 + 220 \cdot R_2 = 3\,R_1 \cdot R_3 + 3\,R_2 \cdot R_3 + 45\,R_1 + 45\,R_2 + 3\,R_1 \cdot R_2 \tag{7}$$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν $R_2 = 85 - R_3$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (7) προκύπτει, κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πράξεων

$$3\,R_3^2 - 430 \cdot R_3 - 80 \cdot R_1 + 14\,875 = 0 \tag{8}$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς (5) δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων καὶ θέτοντες $R_2 = 85 - R_3$ λαμβάνομεν

$$R_3^2 - 45 \cdot R_3 - 45 \cdot R_1 = 0 \tag{9}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (9) ὡς πρὸς R_1 ἔχομεν

$$R_1 = \frac{R_3^2 - 45\,R_3}{45}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) λαμβάνομεν

$$3\,R_3^2 - 430 \cdot R_3 - 80 \cdot \frac{R_3^2 - 45\,R_3}{45} + 14\,875 = 0 \tag{10}$$

Δι' ἐκτελέσεως ἐν συνεχείᾳ τῶν πράξεων προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$11\,R_3^2 - 3\,150\,R_3 + 133\,875 = 0 \qquad (11)$$

Ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (11) προκύπτει

$$R_3 = \frac{3\,150 \pm \sqrt{9\,922\,500 - 5\,890\,500}}{22} \quad \text{ἢ} \quad R_3 = \frac{3\,150 \pm 2\,008}{22} \qquad (12)$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὰς τιμὰς

$$R'_3 = 234{,}4\,\Omega \qquad R''_3 = 52\,\Omega.$$

Προφανῶς ἡ τιμὴ 234,4 Ω ὡς μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς 85 Ω ἀπορρίπτεται καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος (ΒΓ) εἶναι $R_3 = 52\,\Omega$.

Θέτοντες ἤδη τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς R_3 εἰς τὴν σχέσιν (9), προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως μεταξὺ τοῦ σημείου Γ καὶ Γῆς

$$\underline{R_1 = 8\,\Omega} \text{ (περίπου)}$$

β) Προσδιορισμὸς τοῦ μήκους (ΒΓ). Καλοῦμεν l' τὸ μῆκος (ΒΓ) καὶ ἔχομεν

$$R_3 = \rho \cdot \frac{l'}{S} \qquad (13)$$

Ἐξ ἄλλου ὡς ἀνεφέραμεν, ἡ ἀντίστασις τοῦ καλωδίου (ΒΔ) εἶναι

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad (14)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (13) καὶ (14) λαμβάνομεν

$$\underline{l' = l \cdot \frac{R_3}{R}} \qquad (15)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (15), $l = 12{,}5$ km, $R_3 = 52\,\Omega$, $R = 85\,\Omega$ λαμβάνομεν

$$\underline{l' = 7{,}6 \text{ km.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

565. Πόσαι ὧραι ἀπαιτοῦνται ἵνα 36 000 Cb διέλθουν μέσῳ ἠλεκτρολυτικοῦ λουτροῦ, ὅταν τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ λουτρὸν εἶναι 5 Α. (Ἀπ. 2 ὧραι.)

566. Συσσωρευτὴς κατὰ τὴν φόρτισίν του διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 Α ἐπὶ 3 h. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τὸ ὁποῖον καταναλίσκεται κατὰ τὴν φόρτισιν. (Ἀπ. 21 600 Cb.)

567. Διὰ τοῦ νήματος λυχνίας ραδιοφώνου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 300 mA. Πόσα ἠλεκτρόνια διέρχονται διά τινος διατομῆς αὐτοῦ εἰς χρόνον 1 sec (φορτίον ἠλεκτρονίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb). (Ἀπ. $1{,}875 \cdot 10^{18}$ ἠλεκτρόνια.)

568. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἀντίστασιν 55 Ω, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα συνδέονται μὲ τάσιν 110 V. (Ἀπ. 2 Α.)

569. Ἠλεκτρικὴ θερμάστρα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 Α, ὅταν τάσις 110 V ἐφαρμόζεται εἰς τοὺς ἀκροδέκτας της. Καθορίσατε τὴν ἀντίστασίν της. (Ἀπ. 22 Ω.)

570. Ροοστάτης ἔχει μεγίστην ἀντίστασιν 2,1 Ω καὶ ἐλαχίστην ἀντίστασιν

0,4 Ω. Ὑπολογίσατε τὰς τάσεις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ροοστάτου κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτὸν εἶναι 20 A.
(Ἀπ. 42 V, 8 V.)

571. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις σύρματος ἐξ ἀργιλλίου, ἔχοντος διάμετρον 1 mm καὶ μῆκος 5 m. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀργιλλίου εἶναι 2,5 μΩ·cm.
(Ἀπ. 0,159 Ω.)

572. Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ ἀντίστασιν 20 Ω διὰ σύρματος νεαργύρου ἔχοντος 0,15 mm διάμετρον. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος αὐτῆς, ἐὰν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ νεαργύρου εἶναι 30 μΩ·cm.
(Ἀπ. 118 cm.)

573. Σύρμα μαγγανίνης μήκους 4 m, ἔχει ἀντίστασιν 2,5 Ω. Ποία ἡ τομὴ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος. Εἰδικὴ ἀντίστασις μαγγανίνης 42 μΩ·cm.
(Ἀπ. $S = 0{,}672$ mm², $d = 0{,}925$ mm.)

574. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς μΩ·cm ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις ὑλικοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι σύρμα ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τούτου 1 m μήκους καὶ 0,2 mm διαμέτρου ἔχει ἀντίστασιν 15 Ω.
(Ἀπ. 47,1 μΩ·cm.)

575. Ρεῦμα ἐντάσεως 0,5 A διαρρέει ἠλεκτρικὴν συσκευὴν ἀντιστάσεως 30 Ω ὡς καὶ μίαν λυχνίαν ἀντιστάσεως 190 Ω. Καθορίσατε τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης.
(Ἀπ. 15 V, 95 V.)

576. Ποῖον τὸ μῆκος σύρματος ἐκ χαλκοῦ, διαμέτρου 1 mm καὶ ἀντιστάσεως 1Ω καὶ ποῖον τὸ βάρος αὐτοῦ. Εἰδικὴ ἀντίστασις χαλκοῦ 0,017 Ω·mm²/m, εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ 8,9 gr*/cm³.
(Ἀπ. 46,2 m, 323 gr*.)

577. α) Ποία ἡ ἀντίστασις καὶ τὸ βάρος σύρματος ἐκ χαλκοῦ, μήκους 6 km καὶ διαμέτρου 6 mm. β) Ποία ἡ διάμετρος καὶ τὸ βάρος σύρματος ἐξ ἀργιλλίου τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς ἀντιστάσεως. Δίδονται, εἰδικὴ ἀντίστασις ἀργιλλίου 0,027 Ω·mm²/m, εἰδικὸν βάρος ἀργιλλίου 2,7 gr*/cm³.
(Ἀπ. α′ 3,61 Ω, $1{,}51 \cdot 10^3$ kgr*, β′ 7,56 mm, 726 kgr*.)

578. Σύρμα ἐκ χαλκοῦ διαμέτρου $d = 3$ mm πρόκειται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἑτέρου σύρματος ἐκ σιδήρου, ἔχοντος τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν πρὸς τὸ πρῶτον. Ἐὰν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\rho = 0{,}017$ Ω·mm²/m, τοῦ δὲ σιδήρου $\rho' = 0{,}107$ Ω·mm²/m, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ δευτέρου σύρματος.
(Ἀπ. $d' = 7{,}5$ mm.)

579. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πτῶσις τάσεως κατὰ χιλιόμετρον μήκους, εἰς σύρμα ἐξ ἀργιλλίου ($\rho = 2{,}5$ μΩ·cm), μήκους 2,5 km καὶ τομῆς 25 mm² διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος 20 A.
(Ἀπ. 20 V.)

580. Ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν ἑνὸς σύρματος ἀντιστάσεως 0,6 Ω καὶ ἑτέρου 0,2 Ω συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ.
(Ἀπ. 0,15 Ω.)

581. Καθορίσατε τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τριῶν λαμπτήρων τῶν 45 Ω συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ.
(Ἀπ. 15 Ω.)

582. Πηνίον ἀντιστάσεως 5 Ω εὑρίσκεται ἐν σειρᾷ μὲ λαμπτῆρα καὶ συνδέεται μὲ πηγὴν τῶν 100 V. Καθορίσατε τὴν ἀντίστασιν τοῦ λαμπτῆρος, ἐὰν τὸ ρεῦμα εἰς τὸ κύκλωμα εἶναι 4 A.
(Ἀπ. 20 Ω.)

583. Τρεῖς ἀντιστάσεις τῶν 8 Ω, 12 Ω καὶ 24 Ω, εὑρίσκονται συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ, ἐνῷ ὁλικὸν ρεῦμα ἐντάσεως 20 A διαρρέει τὸ κύκλωμα. Ὑπολογίσατε τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων ἀντιστάσεων καὶ τὸ ρεῦμα εἰς ἑκάστην ἀντίστασιν. ('Απ. 80 V, 10A, 6,7A, 3,3 A.)

584. Πόσαι λυχνίαι πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 800 Ω δύναται νὰ συνδεθοῦν παραλλήλως πρὸς τάσιν 220 V, ὅταν τὸ κύκλωμα ἔχει ἀσφάλειαν 6 A. ('Απ. 21.)

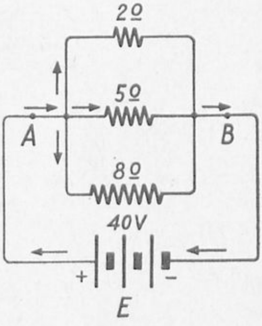
585. Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡρισμένου κυκλώματος ὑφίσταται ἡ ἑξῆς συνδεσμολογία. 'Εκ τοῦ Α ἐκκινοῦν δύο παραλλήλως συνδεδεμένοι ἀγωγοί, ἕκαστος ἀντιστάσεως R, οἵτινες ἑνοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τοῦτο εἶναι συνδεδεμένον πρὸς τὸ σημεῖον Β, μέσῳ ἀντιστάσεως R. 'Αφ' ἑτέρου ὑφίσταται καὶ ἄμεσος σύνδεσις τῶν σημείων Α καὶ Β μέσῳ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R. Ποία ἡ τιμὴ R τῶν ἐπὶ μέρους ἀντιστάσεων, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Α τὸ ρεῦμα εἶναι 5A, ἡ δὲ τάσις μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι 12V. ('Απ. 4 Ω.)

586. 'Εφαρμόζεται ἡ αὐτὴ τάσις εἰς τὰ ἄκρα σύρματος ἐκ νεαργύρου, μήκους 5 m καὶ τομῆς 0,5 mm^2, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄκρα σύρματος ἐξ ἀργύρου, μήκους 10 m καὶ τομῆς 0,1 mm^2. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι ἀντιστοίχως 1 A καὶ 2 A διὰ τὰ δύο σύρματα, κατὰ πόσας φορὰς ἡ ἀντίστασις τοῦ νεαργύρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ἀργύρου. ('Απ. 20 φοράς.)

587. Ἡ ἀντίστασις τῆς συνολικῆς περιελίξεως ΑΒ μεταβλητῆς ἀντιστάσεως εἶναι 200 Ω. Μεταξὺ τοῦ ἄκρου Α καὶ τοῦ δρομέως Γ ὑφίσταται διακλάδωσις ἀντιστάσεως 12 Ω, ἡ ὁποία διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 0,06 A, ὅταν τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὑρίσκονται ὑπὸ τάσιν 2 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R_3 τοῦ τμήματος ΓΒ. ('Απ. 20 Ω.)

588. Τρεῖς ἀντιστάσεις τῶν 2 Ω, 5 Ω καὶ 8 Ω συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, μὲ διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συνδυασμοῦ 40 V (βλ. σχῆμα). Ὑπολογίσατε τὸ ρεῦμα εἰς ἑκάστην ἀντίστασιν, ὡς καὶ τὸ ὁλικὸν ρεῦμα. ('Απ. 20 A, 8 A, 5 A, 33 A.)

589. 'Αγωγὸς ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἰσοπαχῶν καὶ ἰσομήκων συρμάτων ἐκ διαφόρων μετάλλων, τὰ ὁποῖα ἔχουν συγκολληθῆ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῶν. Ὁ ἀγωγὸς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος σταθερᾶς ἐντάσεως καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶναι 25 V. Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου σύρματος, ἐὰν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου τοῦ πρώτου σύρματος εἶναι $\rho_1 = 0{,}02\ \Omega \cdot mm^2/m$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου $\rho_2 = 0{,}21\ \Omega \cdot mm^2/m$. ('Απ. $U_1 = 2{,}17$ V, $U_2 = 22{,}83$ V.)



Ἄσκησις 588.

590. Πέντε λυχνίαι πυρακτώσεως, ἑκάστη ἀντιστάσεως R = 54 Ω, εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ καὶ δι' αὐτῶν διέρχεται ρεῦμα 0,8 A. Ἡ συνολικὴ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν συνδέσεως εἶναι R' = 5 Ω. Ποία ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς, ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ τὰς λυχνίας. ('Απ. 220 V.)

591. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη συρμάτων ἐξ ἀργύρου ($\rho = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$), χαλκοῦ ($\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$), νεαργύρου ($\rho = 30 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$), σιδερονικελίου ($\rho = 80 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$), τῶν ὁποίων ἡ τομὴ εἶναι 0,5 mm^2 καὶ τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν ἀντίστασιν 1Ω. ('Απ. 33,33 m, 31,25 m, 1,67 m, 0,625 m.)

592. Εἰς λυχνίαν πυρακτώσεως μὲ νῆμα ἄνθρακος, ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ νήματος εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\theta = 1600^0$ C, ἐὰν τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι $l = 0{,}18$ m, ἡ διάμετρος $d = 0{,}6$ mm, ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἄνθρακος $\rho = 39{,}6\ \Omega \cdot mm^2/m$ καὶ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως αὐτοῦ $\alpha = -0{,}0003\ grad^{-1}$. (Ἀπ. 13,1 Ω.)

593. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ἡ ἀντίστασις στήλης ὑδραργύρου μήκους 1m καὶ τομῆς $1\ mm^2$ εἶναι 1Ω. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\alpha = 0{,}0009\ grad^{-1}$. (Ἀπ. 70° C.)

594. Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β κυκλώματος ὑφίσταται ἡ ἀκόλουθος συνδεσμολογία. Ἐκ τοῦ Α ἀναχωροῦν δύο ἀγωγοὶ ἀντιστάσεως R ἕκαστος, συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ οἱ ὁποῖοι ἀπολήγουν εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον συνδέεται πρὸς τὸ Β δι᾽ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R. Πρὸς τοῦτο καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β συνδέονται δι᾽ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R. Ἐὰν εἰς Α εἰσχωρῇ ρεῦμα 5 Α ἡ δὲ τάσις μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι 12 V, πόση ἡ ἀντίστασις R. (Ἀπ. 4 Ω.)

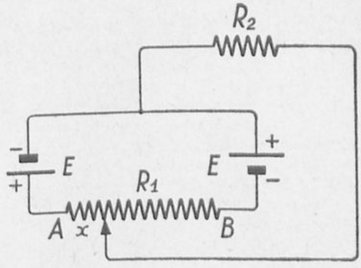
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1955.)

595. Πόση εἶναι ἡ ΗΕΔ γεννητρίας ἐχούσης ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,8 Ω, ἡ ὁποία παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 0,02 Α, εἰς κύκλωμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 69,2 Ω. (Ἀπ. 1,4 V.)

596. Τρεῖς ἀντιστάσεις $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ καὶ $R_3 = 60\ \Omega$ συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τὸ προκῦπτον σύστημα συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς ἑτέραν ἀντίστασιν $R_4 = 16\ \Omega$. Τὸ ὅλον σύστημα τροφοδοτεῖται ὑπὸ πηγῆς ΗΕΔ 220 V, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ζητοῦνται α) ἡ συνολικὴ ἔντασις ρεύματος εἰς τὸ κύκλωμα, β) ἡ ἔντασις εἰς ἑκάστην τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ὅλου συστήματος, γ) ἡ πτῶσις τάσεως κατὰ μῆκος τοῦ συστήματος τῶν R_1, R_2, R_3 καὶ κατὰ μῆκος τῆς R_4.
(Ἀπ. α′ 10 Α, β′ 6 Α, 3 Α καὶ 1 Α, γ′ 60 V, 160 V.)

597. Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος, ἔστω $R_1 = 20\ \Omega$ ἡ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, $R_2 = 2\ \Omega$, $E = 4$ V ἡ ΗΕΔ ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν καὶ x ἡ μεταβαλλομένη ἀντίστασις μεταξὺ τοῦ ἄκρου Α τῆς R_1 καὶ τοῦ δρομέως. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν R_2 ὡς συνάρτησις τοῦ x καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ ἀποτέλεσμα.

$$\left(\text{Ἀπ. } i_2 = \frac{E \cdot (R_1 - 2x)}{x\,(R_1 - x) + R_1 \cdot R_2},\ + 2\text{ A ἕως } -2\text{ A.}\right)$$

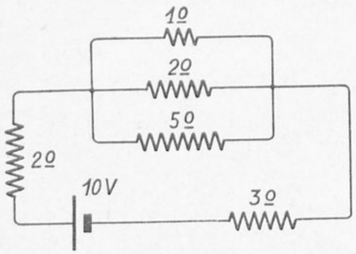


598. Ἠλεκτρικὴ ἐγκατάστασις ἀποτελεῖται ἀπὸ συστοιχίαν συσσωρευτῶν ΗΕΔ 50 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 10 Ω, σύρματος γραμμῆς ἀντιστάσεως 100 Ω καὶ ἀποδέκτην ἀντιστάσεως 5 Ω. Λόγῳ τυχαίου γεγονότος σημεῖον τι τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς τίθεται εἰς συγκοινωνίαν μετὰ τῆς Γῆς, παρατηρεῖται δὲ τότε ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν θέσιν ἀποστολῆς πίπτει κατὰ 0,75 Α καὶ εἰς τὴν θέσιν λήψεως πίπτει κατὰ 0,095 Α. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ θέσις προσγειώσεως καὶ β) ἡ ἀντίστασις συνδέσεως μεταξὺ σύρματος καὶ Γῆς.
(Ἀπ. Εἰς τὸ μέσον τῆς γραμμῆς, 7,63 Ω.)

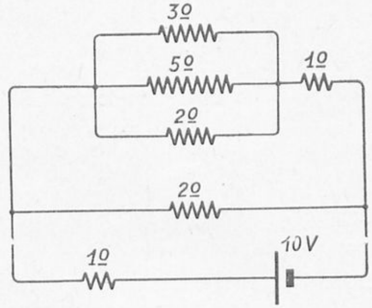
599. Δώδεκα εὐθέα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων παρουσιάζει ἀντίστασιν R Ω, συνδέονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ σχηματίσουν κύβον. Ἠλεκτρικὴ πηγὴ

ΗΕΔ 5 V συνδέεται πρὸς δύο κορυφὰς τοῦ κύβου, εὑρισκομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς διαγωνίου. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ πηγή.
(Ἀπ. $i = 6/R$ A.)

600. Διὰ τὸ εἰς τὸ σχῆμα δεικνυόμενον κύκλωμα ὑπολογίσατε τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν παραλλήλων ἀντιστάσεων καὶ τὸ ρεῦμα εἰς τὸ κυρίως κύκλωμα.
(Ἀπ. 1,05 V, 1,79 A.)



Ἄσκησις 600.



Ἄσκησις 601.

601. Ὑπολογίσατε τὸ ὑπὸ τοῦ συσσωρευτοῦ παρεχόμενον ρεῦμα εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος.
(Ἀπ. 5,02 A.)

602. Ἕξ ἴσα εὐθέα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων παρουσιάζει ἀντίστασιν 2 Ω συνδέονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ σχηματίσουν τετράεδρον. Ἐὰν εἰς τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ συνδεθῇ πηγὴ ὡρισμένης ΗΕΔ, ἡ ἔντασις τοῦ δι᾿ αὐτῆς διερχομένου ρεύματος εἶναι 4 A. Ζητοῦνται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ὅλους τοὺς κλάδους ὡς καὶ ἡ συνολικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος μεταξὺ τῶν σημείων εἰσόδου καὶ ἐξόδου τοῦ ρεύματος.
(Ἀπ. Ἀνὰ 2 A εἰς τὴν πρώτην καὶ τὴν τελευταίαν ἀκμήν, ἀνὰ 1 A εἰς τὰς λοιπάς. R=1,5 Ω.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ′

603. Ἀπὸ ἠλεκτρολυτικὴν συσκευὴν πρέπει νὰ διέλθουν 54 000 Cb εἰς 5 ὥρας. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος.

604. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἄκρων σύρματος τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 5 Ω, οὕτως ὥστε 720 Cb νὰ τὸ διαρρέουν ἀνὰ πρῶτον λεπτόν.

605. Λαμπτὴρ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 1,6 A, ὅταν συνδέεται μὲ πηγὴν τάσεως 112 V. Ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος.

606. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ μεταλλικοῦ σύρματος, ὅταν ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶναι 125 V, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ὅπερ διέρχεται δι᾿ αὐτοῦ εἶναι 0,5 A, ὅταν ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶναι 50 V. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος.

607. Πόση ἀντίστασις πρέπει νὰ παρεμβληθῇ μεταξὺ δύο μεταλλικῶν ἀκροδεκτῶν, ὅπου πρέπει νὰ τηρηθῇ σταθερὰ τάσις, ἵνα λάβωμεν ρεῦμα 2 A, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀντίστασις 250 Ω διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 0,4 Α. Πόση ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἰς τοὺς μεταλλικοὺς ἀκροδέκτας.

608. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασιν χαλκίνου σύρματος μήκους 5 m, διαμέτρου 2 mm καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως $1{,}57 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm.

609. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\rho = 0{,}017$ Ω·mm²/m. Ποία ἡ ἀντίστασις ἀγωγοῦ ἐκ χαλκοῦ μήκους $l = 6\,200$ m καὶ διαμέτρου d = 4 mm.

610. Ἀγωγὸς ἐκ σιδήρου μήκους $l = 105$ km παρουσιάζει ἀντίστασιν R = 580 Ω. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σιδήρου εἶναι $\rho = 0{,}1$ Ω·mm²/m. Ποία ἡ διάμετρος τοῦ ἀγωγοῦ. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σιδήρου εἶναι $\rho = 0{,}1$ Ω·mm²/m.

611. Εἰς λυχνίαν πυρακτώσεως μὲ νῆμα ἄνθρακος, ἡ διάμετρος τοῦ νήματος εἶναι d = 0,32 mm, τὸ μῆκος $l = 0{,}15$ m καὶ ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ R = 75 Ω. Ποία ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἄνθρακος.

612. Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα στήλης ὑδραργύρου μήκους $l =$ 53,15 cm καὶ τομῆς S = 2 mm², ἐὰν δι' αὐτῆς διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως i = 2,4 A. Ποία ἡ πτῶσις τάσεως ἀνὰ ἑκατοστόμετρον εἰς τὴν στήλην τοῦ ὑδραργύρου.

613. Δέκα λαμπτῆρες ἕκαστος ἀντιστάσεως 100 Ω εὑρίσκονται ἐν παραλλήλῳ καὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ μὲ μίαν ὁμάδα ἐκ δύο ἐν παραλλήλῳ ἀντιστάσεων τῶν 12 Ω καὶ 36 Ω. Τὸ σύστημα τοῦτο ἐν συνεχείᾳ συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ μίαν ἀντίστασιν τῶν 21 Ω καὶ μὲ πηγὴν τῶν 120 V. Ὑπολογίσατε α) τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 21 Ω. β) Τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὸ σύστημα τῶν παραλλήλων λαμπτήρων. γ) Τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐν παραλλήλῳ ἀντιστάσεων 12 Ω καὶ 36 Ω. δ) Τὴν πτῶσιν τάσεως κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστάσεως τῶν 21 Ω. ε) Τὸ ρεῦμα εἰς ἕκαστον λαμπτῆρα. στ) Τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 12 Ω.

614. Τρεῖς ἀντιστάσεις τῶν 40 Ω, 60 Ω καὶ 120 Ω, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ ἡ ὁμὰς αὐτὴ συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ δύο ἀντιστάσεις τῶν 15 Ω καὶ 25 Ω. Τὸ ὅλον σύστημα συνδέεται μὲ πηγὴν τῶν 120 V. Καθορίσατε α) τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 25 Ω, β) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν παράλληλον ὁμάδα, γ) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὰ 25 Ω, δ) τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 60 Ω, ε) τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 40 Ω.

615. Ἐφαρμόζεται ἡ αὐτὴ τάσις εἰς τὰ ἄκρα σύρματος ἐκ σιδηρονικελίου μήκους 10 m καὶ τομῆς 5 mm² καὶ σύρματας ἐκ χαλκοῦ 50 m μήκους καὶ τομῆς 2 mm², αἱ δὲ ἐντάσεις τοῦ διὰ τῶν συρμάτων διερχομένου ρεύματος εἶναι ἀντιστοίχως 1,5 A καὶ 6 A. Πόσας φορὰς ἡ ἀντιστασις τοῦ σιδηρονικελίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τοῦ χαλκοῦ.

616. Συμβολίζομεν διὰ τῶν Α καὶ Β τὰ ἄκρα ἀντιστάσεως R = 45 Ω, διὰ δὲ τῶν Γ καὶ Δ δύο σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὴν R εἰς τρία τμήματα τῆς αὐτῆς ἀντιστάσεως. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 300 Ω, συνδεδεμένον παραλλήλως πρὸς τὸ τμῆμα (ΑΓ) ἢ (ΑΔ) ἢ (ΑΒ), ἐὰν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς R εἶναι 6 V.

617. Στήλη παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 1Α ὅταν οἱ πόλοι της συνδέονται δι' ἀντιστάσεως 1 Ω. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις αὐτὴ ἀντικατασταθῇ δι' ἑτέρας ἀντιστάσεως 4 Ω, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται 0,4 A. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ΗΕΔ τῆς στήλης.

618. Ἠλεκτρολυτικὴ συσκευὴ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1,2 Ω καὶ ἀντι-ΗΕΔ 3,4 V καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 3 A. Πόση ἡ τιμὴ τῆς τάσεως ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς συσκευῆς.

619. Ἡ ἀντίστασις πηνίου ἐκ χαλκοῦ εἶναι 3,35 Ω εἰς 0° C. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασίν του εἰς 50° C. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκίνου σύρματος εἶναι 0,00426 grad^{-1}.

620. Σύρμα παρουσιάζει ἀντίστασιν 12,64 Ω εἰς 30° C καὶ 11,22 Ω εἰς 0° C. Ὑπολογίσατε τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀντιστάσεως.

621. Τὸ ρεῦμα διεγέρσεως τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου κινητῆρος εἰς 20° C ἦτο κατ' ἀρχὰς 1,7 A καὶ μετὰ 6 ὥρας λειτουργίας ὑπὸ πλῆρες φορτίον ἠλαττώθη ἡ ἔντασίς του εἰς 1,5 A. Ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν πηνίων τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου ἦτο 230 V καὶ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 0,00428 grad^{-1}, ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τῶν πηνίων.

622. Ἡ ἀντίστασις ἠλεκτρικῆς θερμάστρας εἶναι 19,6 Ω. Ὅταν ἡ θερμάστρα συνδέεται μὲ πηγὴν τάσεως 230 V, διαρρέεται ἡ ἀντίστασις αὐτῆς ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 3,95 A. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι 700° C, εὕρατε τὸν μέσον θερμικὸν συντελεστὴν τοῦ ὑλικοῦ τῆς ἀντιστάσεως. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 15° C.

623. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους στήλης ἀνοικτοῦ κυκλώματος εἶναι ἴση πρὸς 1,85 V. Κλείεται ἡ στήλη εἰς κύκλωμα ἔχον ἀντίστασιν 7 Ω, ὅτε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ γίνεται 1,45 V. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

624. Γεννήτρια ἔχει ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,1 Ω. Τὰ ἄκρα της συνδέονται δι' ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως x, ἐνῷ ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι 4 A. Ζητοῦνται: 1) Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως x. 2) Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς γεννητρίας. 3) Ποία ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ γεννήτρια.

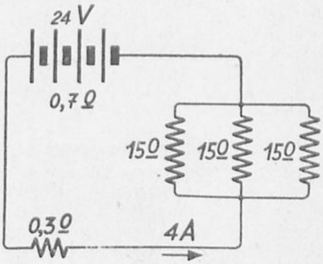
625. Οἱ πόλοι ἠλεκτρικῆς στήλης τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ. εἶναι 1,5 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $r = 10\ \Omega$ συνδέονται μὲ ἀντίστασιν $R = 5\ \Omega$. Ζητεῖται 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ 2) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς στήλης.

626. Ὑπολογίσατε τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἠλεκτρικῆς γεννητρίας ἡ ὁποία ἔχει ΗΕΔ 120 V καὶ τάσιν εἰς τοὺς πόλους της 110 V, ὅταν δίδει ρεῦμα ἐντάσεως 20 A.

627. Δύο ἀντιστάσεις, 12 Ω καὶ 2,4 Ω, συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ ἐν συνεχείᾳ συνδέονται μὲ τοὺς ἀκροδέκτας ἠλεκτρικῆς γεννητρίας. Ἡ γεννήτρια παράγει ΗΕΔ 75 V καὶ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,6 Ω. Ὑπολογίσατε α) Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, β) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν γεννήτριαν, γ) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν ἀντίστασιν 2,4 Ω, δ) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν ἀντίστασιν 12 Ω, ε) τὴν πολικὴν τάσιν τῆς γεννητρίας ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν, στ) τὴν ἔνδειξιν βολτομέτρου συνδεομένου μὲ τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἰς ἀνοικτὸν κύκλωμα.

628. Ἡ ἔνδειξις βολτομέτρου εἶναι 12 V ὅταν τοῦτο συνδέεται μὲ τοὺς ἀκροδέκτας συσσωρευτοῦ εἰς ἀνοικτὸν κύκλωμα. Ἡ ἔνδειξίς του εἶναι 10 V ὅταν ὁ συσσωρευτὴς συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν 9 Ω. Ὑπολογίσατε τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ συσσωρευτοῦ.

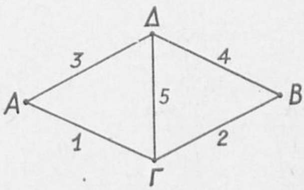
629. Συστοιχία συσσωρευτῶν ΗΕΔ 24 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,7 Ω συνδέεται μὲ τὰ ἄκρα τριῶν ἀντιστάσεων τῶν 15 Ω, αἱ ὁποῖαι ἔχουν συνδεθῆ ἐν παραλλήλῳ. Μία ἀντίστασις τῶν 0,3 Ω συνδέεται ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Ὑπολογίσατε: α) τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος. β) Τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸ κύκλωμα, γ) τὸ ρεῦμα εἰς ἕκαστον τῶν παραλλήλων κλάδων. δ) Τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὁμάδος τῶν παραλλήλων ἀντιστάσεων, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως τῶν 0,3 Ω. ε) Τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας• ὅταν αὕτη τροφοδοτῇ ρεῦμα εἰς τὸ κύκλωμα.



Ἄσκησις 629.

630. Δύο πηνία ἀντιστάσεων 4 Ω καὶ 12 Ω ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται ἐν παραλλήλῳ καὶ συνδέονται μὲ συσσωρευτὴν ΗΕΔ 10 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω. Ὑπολογίσατε α) τὸ ὁλικὸν ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύστημα, β) τὸ ρεῦμα μέσῳ τοῦ πηνίου τῶν 4 Ω, γ) τὸ ρεῦμα μέσῳ τοῦ πηνίου τῶν 12 Ω, δ) τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων ἀντιστάσεων.

631. Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος οἱ κλάδοι 1, 2 καὶ 5 παριστοῦν τρεῖς ἀγωγοὺς ἀντιστάσεων R_1, R_2 καὶ R_5. Ὁ κλάδος 3 τροφοδοτεῖται ὑπὸ πηγῆς ΗΕΔ E_3, ὁ θετικὸς πόλος τῆς ὁποίας εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ, ὁ δὲ κλάδος 4 ὑπὸ πηγῆς ΗΕΔ E_4, μὲ τὸν θετικὸν πόλον πρὸς τὸ Β. Ἐὰν ἡ R_5 δὲν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν R_1, R_2, E_3, καὶ E_4.



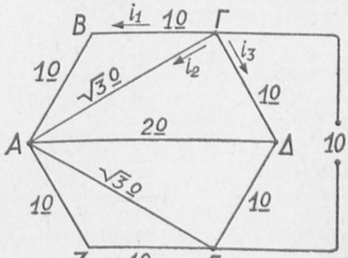
Ἄσκησις 631.

631 α. Ἕκαστος τῶν 5 κλάδων τῆς προηγουμένης διατάξεως παρουσιάζει ἀντίστασιν 10 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνολικὴ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν ἄκρων Γ καὶ Δ τοῦ κυκλώματος, ὡς καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

632. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις στήλης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αὕτη χορηγεῖ ἔντασιν ρεύματος 0,75 Α ἐπὶ ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως 1,5 Ω καὶ ὅτι ἔχει ΗΕΔ 1,5 V. Νὰ προσδιορισθῇ ὡσαύτως ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κλειστοῦ κυκλώματος.

633. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνολικὴ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος τῆς ἀσκήσεως 631, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων ἑκάστου κλάδου, ἐὰν πρὸς τὰ Α καὶ Β συνδεθῇ ἠλεκτρικὴ πηγὴ ΗΕΔ 26 V καὶ ὁ κλάδος ΓΒ παρουσιάζει ἀντίστασιν 2 Ω, οἱ λοιποὶ δὲ 1 Ω ἕκαστος.

634. Ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖΑ συνίσταται ἀπὸ ἓξ ἀγωγούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων παρουσιάζει ἀντίστασιν 1 Ω. Σύρματα διαγωνίως συνδέουν τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ, Α καὶ Δ, Α καὶ Ε, ἔχουν δὲ τὰ σύρματα ταῦτα τὴν αὐτὴν τομὴν μὲ τὰ σύρματα τοῦ ἑξαγώνου. Διαφορὰ δυναμικοῦ 10 V ἐφαρμόζεται μεταξὺ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Ε. Εὕρατε τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἕκαστον κλάδον τοῦ δικτύου καὶ τὴν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν μεταξὺ Γ καὶ Ε.



Ἄσκησις 634.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

635. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει λυχνίαν φωτισμοῦ, δοθέντος ὅτι τὸ νῆμα τῆς λυχνίας παρουσιάζει ἀντίστασιν 200 Ω καὶ καταναλίσκει ἰσχὺν 72 W.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τῆς λυχνίας καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτήν, τότε ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς θὰ δίδεται, εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N = R \cdot i^2 \qquad (1)$$

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς i λαμβάνομεν

$$\underline{i = \sqrt{\frac{N}{R}}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), N = 72 W καὶ R = 200 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}6 \text{ A}.}$$

636. Πόση ἡ ἰσχὺς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς ἡ ὁποία παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 20 A ὑπὸ ΗΕΔ 80 V.

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς N τὴν ὁποίαν παρέχει ἠλεκτρικὴ πηγὴ ΗΕΔ E ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, δίδεται, εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{N = E \cdot i}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, E = 80 V καὶ i = 20 A, εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ ἰσχὺς τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι

$$\underline{N = 1600 \text{ W}.}$$

637. Πηγὴ ρεύματος (συσσωρευτὴς) ΗΕΔ 6 V παρέχει εἰς κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως 2 A ἐπὶ χρόνον 45 min. Πόση ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια ἡ χορηγουμένη ὑπὸ τῆς πηγῆς ταύτης.

Λύσις. Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια A τὴν ὁποίαν δίδει ἠλεκτρικὴ πηγὴ ΗΕΔ E ὅταν αὐτὴ παρέχῃ ρεῦμα ἐντάσεως i ἐπὶ χρόνον t, δίδεται, εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{A = E \cdot i \cdot t.} \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, E = 6 V, i = 2 A καὶ t = 45 min = = 2 700 sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 32400 \text{ Joule}.}$$

638. Μετὰ πόσον χρόνον λυχνία, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 160 Ω, ὅταν διέρχεται δι' αὐτῆς ρεῦμα ἐντάσεως 0,68 A, καταναλίσκει ἐνέργειαν ἴσην πρὸς 1 kWh.

Λύσις. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια A ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τῆς λυχνίας εὑρίσκεται, εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων, ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\underline{A = R \cdot i^2 \cdot t} \qquad (1)$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις τοῦ νήματος τῆς λυχνίας, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ t ὁ χρόνος διελεύσεως τοῦ ρεύματος.

Λύοντες ὡς πρὸς τὸν χρόνον t, λαμβάνομεν

$$t = \frac{A}{R \cdot i^2} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, A = 1 000 Wh, R = 160 Ω, i = 0,68 A, εὑρίσκομεν

$$\underline{t = 13{,}52\ \text{h.}}$$

639. Ἠλεκτρικὴ λυχνία φωτισμοῦ, ἰσχύος 60 W λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 120 V. Εἰς πόσον χρόνον κατὰ τὴν λειτουργίαν αὐτῆς, διέρχονται διά τινος διατομῆς τοῦ νήματος αὐτῆς $3 \cdot 10^{10}$ ἠλεκτρόνια.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ N τὴν ἰσχὺν καὶ διὰ U τὴν τάσιν λειτουργίας τῆς λυχνίας, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὴν λυχνίαν ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $N = U \cdot i$, ἴση πρὸς

$$i = \frac{N}{U} \tag{1}$$

Ὁ τύπος (1), ἐὰν θέσωμεν $i = q/t$, δύναται νὰ γραφῇ

$$\frac{q}{t} = \frac{N}{U} \qquad \text{ἐξ οὗ} \qquad t = \frac{q \cdot U}{N} \tag{2}$$

Ἐὰν διὰ e παραστήσωμεν τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου καὶ n τὸν ἀριθμὸν τῶν ἠλεκτρονίων τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ, θὰ ἔχωμεν $q = n \cdot e$ καὶ οὕτω ὁ τύπος (2) δίδει

$$\underline{t = \frac{n \cdot U \cdot e}{N}}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $n = 3 \cdot 10^{10}$ ἠλεκτρόνια, U = 120 V, N = 60 W καὶ δεδομένου ὅτι τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ χρόνος τῆς διόδου $3 \cdot 10^{10}$ ἠλεκτρονίων ἰσοῦται πρὸς

$$\underline{t = 96\ \text{sec.}}$$

640. Λυχνία πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 200 Ω συνδέεται εἰς δίκτυον συνεχοῦς τάσεως 110 V. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ διὰ τῆς λυχνίας διερχομένου ρεύματος καὶ πόση ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ φαινόμενον Joule.

Λύσις. Ἐὰν εἶναι R ἡ ἀντίστασις τῆς λυχνίας καὶ U ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς αὐτὴν τάσις, τότε ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{i = \frac{U}{R}} \tag{1}$$

Θέτοντες, U = 110 V, R = 200 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}55\ \text{A.}}$$

Ἡ ἰσχὺς N ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν θέρμανσιν τοῦ νήματος τῆς λυχνίας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{N = U \cdot i} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), U = 110 V, i = 0,55 A, εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 60{,}5\ \text{W.}}$$

641. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασιν σύρματος, ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαρμόζεται τάσις 20 V καὶ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι 800 cal/sec.

Λύσις. Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτό. Ἡ ἰσχὺς N τὴν ὁποίαν καταναλίσκει τὸ σύρμα θὰ εἶναι

$$N = \alpha \cdot i^2 \cdot R \qquad \text{ἢ} \qquad N = \alpha \cdot \frac{U^2}{R} \tag{1}$$

ὅπου α τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος καὶ U ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς R, λαμβάνομεν

$$R = \alpha \cdot \frac{U^2}{N} \tag{2}$$

Οὕτω, διὰ $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $U = 20$ V καὶ $N = 800$ cal/sec, εὑρίσκομεν

$$R = 0{,}12\ \Omega.$$

642. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος σύρματος ἐκ μολύβδου χρησιμοποιουμένου ὡς ἀσφάλεια, ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου ρεύματος μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ 10 A. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μολύβδου, τὴν ὁποίαν θὰ ὑποθέσωμεν σταθερὰν μεταξὺ τῆς θερμοκρασίας περιβάλλοντος καὶ τῆς θερμοκρασίας τήξεως, εἶναι $3 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$ cm. Ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ μολύβδου εἶναι 330 °C. Τὸ μέρος τῆς θερμότητος τὸ ἀκτινοβολούμενον ἀνὰ grad καὶ ἀνὰ cm² εἶναι 1/3300 τῆς ἀναπτυσσομένης ἰσχύος, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule.

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς N, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule, θὰ εἶναι

$$N = \alpha \cdot i^2 \cdot R = \alpha \cdot i^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{4\alpha \cdot i^2 \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot d^2} \tag{1}$$

ὅπου α τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, R ἡ ἀντίστασις τῆς ἀσφαλείας, l τὸ μῆκος καὶ d ἡ διάμετρος τῆς τομῆς τοῦ σύρματος. Ἡ ἰσχὺς N' ἡ ὁποία ἀκτινοβολεῖται θὰ εἶναι

$$N' = k \cdot S' \cdot \theta \tag{2}$$

ὅπου k σταθερὰ ($k = 1/3\,300$), S' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σύρματος καὶ θ ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) θέσωμεν $S' = \pi \cdot d \cdot l$, λαμβάνομεν

$$N' = k \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot \theta \tag{3}$$

Ἵνα ὅμως ὑπάρχῃ θερμικὴ ἰσορροπία, πρέπει νὰ εἶναι $N = N'$, δηλαδὴ

$$\frac{4\alpha \cdot i^2 \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot d^2} = k \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot \theta \tag{4}$$

Λύοντες τὴν (4) ὡς πρὸς d, λαμβάνομεν

$$d = \sqrt[3]{\frac{4\,\alpha \cdot i^2 \cdot \rho}{k \cdot \pi^2 \cdot \theta}} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5), $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $i = 10$ A, $\rho = 3 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$ cm, $\theta = 330^0$ C, $k = 1/3\,300$ W/cm² · grad, εὑρίσκομεν

$$d = 0{,}066 \text{ cm} = 0{,}66 \text{ mm}.$$

643. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ ἐργάζεται τῇ βοηθείᾳ περιστρεφομένου τροχοῦ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὑδατοπτώσεως, παροχῆς ὕδατος 7,5 m³/min, ἐξ ὕψους 6 m. Ἡ μηχανικὴ ἀπόδοσις τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι 50 %, ἡ δὲ ἀπόδοσις τῆς

δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι 81,5 %. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ὑπὸ τῆς μηχανῆς χορηγουμένη ἰσχὺς εἰς kW, β) ὁ ἀριθμὸς τῶν λυχνιῶν τῶν 50 W τὰς ὁποίας δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ ἡ μηχανή.

Λύσις. α) Ἔστω B τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον πίπτει ἐξ ὕψους h εἰς χρόνον t. Ἡ ἰσχὺς N τοῦ ὑδροστροβίλου, λόγῳ τῆς ὑδατοπτώσεως, θὰ εἶναι

$$N = \eta_1 \cdot \frac{A}{t} = \eta_1 \cdot \frac{B \cdot h}{t} \tag{1}$$

ὅπου η_1 ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ ὑδροστροβίλου. Ὁ ἀνωτέρω τύπος, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $B = \varepsilon \cdot V$, γράφεται

$$N = \eta_1 \cdot \frac{\varepsilon \cdot V \cdot h}{t} \tag{2}$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν η_2 τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς, τότε ἡ ἰσχὺς N′ αὐτῆς θὰ εἶναι

$$\underline{N' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\varepsilon \cdot V \cdot h}{t}} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως $\eta_1 = 0{,}5$, $\eta_2 = 0{,}815$, $\varepsilon = 1\,000$ kgr*/m³, $V = 7{,}5$ m³, $h = 6$ m, $t = 60$ sec, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{N' = 2\,292 \text{ kgr*m/sec} = 3\,000 \text{ W}} \quad (\text{περίπου})$$

β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν λυχνιῶν n, τὰς ὁποίας δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ, θὰ εἶναι

$$\underline{n = \frac{3\,000 \text{ W}}{50 \text{ W}} = 60.}$$

644. Ἠλεκτρικὸς βραστὴρ περιέχει 1 000 gr ὕδατος ὑπὸ θερμοκρασίαν 10° C. Ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 41,8 Ω καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 3 A. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἵνα ἀχθῇ τὸ ὕδωρ εἰς τὴν θερμοκρασίαν 100° C, ἐὰν ὅλη ἡ θερμότης χρησιμοποιεῖται πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ἵνα ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν ὕδατος μάζης m ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς Κελσίου, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$Q = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1) \tag{1}$$

ὅπου c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῆς θερμότητος προσφέρεται ὑπὸ τοῦ βραστῆρος καί, βάσει τοῦ νόμου τοῦ Joule, θὰ εἶναι

$$Q = \alpha \cdot R \cdot i^2 \cdot t \tag{2}$$

ἔνθα α τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, R ἡ ἀντίστασις τοῦ βραστῆρος, i ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος καὶ t ὁ χρόνος διελεύσεως αὐτοῦ.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τύπων (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$\alpha \cdot R \cdot i^2 \cdot t = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1) \tag{3}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς τὸν χρόνον t προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{t = \frac{c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{\alpha \cdot R \cdot i^2}} \tag{4}$$

Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τὸν τύπον (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $c = 1$ cal/gr · grad, $m = 1000$ gr, $\theta_2 - \theta_1 = 90^0$ C, $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $R = 41{,}8\ \Omega$, $i = 3$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{t = 1\,000 \text{ sec.}}$$

645. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἐπὶ ἀντιστάσεως 2,4 Ω στήλη τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι 2 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις 0,1 Ω. Ζητεῖται ὡσαύτως νὰ προσδιορισθῇ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόδοσις τῆς στήλης.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν R τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν, r τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τῆς στήλης καὶ E τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν αὐτῆς. Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, θὰ εἶναι

$$i = \frac{E}{R + r}$$

Θέτοντες, E = 2 V, R = 2,4 Ω, r = 0,1 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}8 \text{ A.}}$$

Ἡ ἀπόδοσις η τῆς στήλης θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\eta = \frac{N_{\alpha\pi}}{N_{\kappa\alpha\tau}}$$

ὅπου $N_{\alpha\pi}$ εἶναι ἡ ἀποδιδομένη ἰσχὺς ὑπὸ τῆς στήλης εἰς τὴν κατανάλωσιν ἀντιστάσεως R, καὶ $N_{\kappa\alpha\tau}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ τῆς πηγῆς.

Ἔχομεν ὅμως, εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων, ὅτι $N_{\alpha\pi} = i^2 \cdot R$ καὶ $N_{\kappa\alpha\tau} = E \cdot i$ καὶ συνεπῶς προκύπτει

$$\underline{\eta = \frac{i^2 \cdot R}{E \cdot i} = \frac{i \cdot R}{E}}$$

Θέτοντες, i = 0,8 A, R = 2,4 Ω, E = 2 V, εὑρίσκομεν

$$\underline{\eta = 0{,}96.}$$

646. Ποσότης $8 \cdot 10^{25}$ ἠλεκτρονίων διέρχονται εἰς χρόνον 2 min δι' ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 5 Ω ἐμβαπτισμένου ἐντὸς 1700 gr ὕδατος. Ποία ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν διὰ n τὸν ἀριθμὸν τῶν ἠλεκτρονίων τὰ ὁποῖα διέρχονται διά τινος διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ εἰς χρόνον t καὶ e τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου, τότε τὸ ὁλικῶς διελθὸν φορτίον εἰς χρόνον t, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$q = n \cdot e \tag{1}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $i = q/t$, τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, ἀντικαταστήσωμεν τὸ q διὰ τῆς τιμῆς του ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἔχομεν ὅτι

$$i = \frac{n \cdot e}{t} \tag{2}$$

Τὸ ρεῦμα τοῦτο διερχόμενον ἐπὶ χρόνον t διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ἔχοντος ἀντίστασιν R, ἀναπτύσσει ἐντὸς αὐτοῦ ποσὸν θερμότητος ἴσον πρὸς

$$Q_1 = \alpha \cdot i^2 \cdot R \cdot t \tag{3}$$

ὅπου α παριστᾷ τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν

$$Q_1 = \frac{\alpha \cdot n^2 \cdot e^2 \cdot R}{t} \tag{4}$$

Ἡ θερμότης αὐτὴ παραλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ ὕδατος καὶ θερμαίνει τὸ ὕδωρ.

Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ c ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι θ_2, τότε ἡ θερμότης ἥτις ἀπερροφήθη διὰ νὰ θερμανθῇ τὸ ὕδωρ ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2^0 C θὰ εἶναι

$$Q_2 = m \cdot c\,(\theta_2 - \theta_1) \tag{5}$$

Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, πρέπει νὰ εἶναι $Q_1 = Q_2$ καὶ ἑπομένως λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha \cdot n^2 \cdot e^2 \cdot R}{t} = m \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_1) \tag{6}$$

Διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ὡς πρὸς $(\theta_2 - \theta_1)$ προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\alpha \cdot n^2 \cdot e^2 \cdot R}{m \cdot c \cdot t}} \tag{7}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (7) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $n = 8 \cdot 10^{25}$ ἠλεκτρόνια, $R = 5\ \Omega$, $m = 1\ 700$ gr, $c = 1$ cal/gr · grad, $t = 2$ min $= 120$ sec καὶ δεδομένου ὅτι $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι

$$\underline{\theta_2 - \theta_1 = 9{,}52^0\ C.}$$

647. Σίδηρον σιδερώματος φέρει ἐπὶ τῆς πλακός του τὰς ἐνδείξεις: 360 W, 120 V. α) Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου δι' αὐτοῦ κατὰ τὴν κανονικὴν λειτουργίαν. β) Πόση ἡ ἀντίστασίς του ἐν θερμῷ. γ) Πόση ἡ δαπάνη λειτουργίας ἐπὶ 2 ὥρας ὅταν τὸ 1 kWh τιμᾶται 1,50 δραχμάς. δ) Ἡ ἀντίστασις θερμάνσεως εἶναι ταινία ἐπίπεδος ἀπὸ χρωμονικελίνην, εἰδικῆς ἀντιστάσεως 110 μ Ω · cm καὶ τομῆς 0,99 mm². Πόσον εἶναι τὸ μῆκος της.

Λύσις. α) Ὑπὸ κανονικὴν λειτουργίαν ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν στοιχείων λειτουργίας U καὶ N τοῦ ἠλεκτρικοῦ σιδήρου. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν

$$N = U \cdot i \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{i = \frac{N}{U}} \quad (2)$$

Οὕτω διὰ $N = 360$ W καὶ $U = 120$ V, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 3\ A.}$$

β) Ἡ ἀντίστασις R τοῦ ἠλεκτρικοῦ σιδήρου κατὰ τὴν λειτουργίαν αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$\underline{R = \frac{U}{i}}$$

ὁπότε, διὰ $U = 120$ V καὶ $i = 3$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 40\ \Omega.}$$

γ) Ἡ δαπανωμένη ἐνέργεια θὰ εἶναι

$$\underline{A = N \cdot t}$$

Ἄρα διὰ $N = 360$ W $= 0{,}36$ kW καὶ $t = 2$ h, λαμβάνομεν

$$\underline{A = 0{,}72\ kWh.}$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ 1 kWh εἶναι 1,50 δραχμαί, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι ἡ δαπάνη εἰς δραχμὰς ἀνέρχεται

$$\underline{0{,}72 \cdot 1{,}5 = 1{,}08\ \text{δραχμαί.}}$$

δ) Τὸ μῆκος l τοῦ σύρματος θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις, ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις καὶ S ἡ τομὴ αὐτοῦ.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς l, λαμβάνομεν

$$\underline{l = \frac{R \cdot S}{\rho}}$$

Οὕτω διὰ $R = 40\ \Omega$, $S = 0{,}99\ mm^2 = 0{,}99 \cdot 10^{-2}\ cm^2$ καὶ $\rho = 110\ \mu\Omega \cdot cm = 110 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$, εὑρίσκομεν

$$\underline{l = 3\,600\ cm = 36\ m.}$$

648. Τὸ ρεῦμα μιᾶς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω, τροφοδοτεῖ ἐγκατάστασιν φωτισμοῦ περιλαμβάνουσαν 150 λυχνίας πυρακτώσεως, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ, καταναλίσκουσα ἑκάστη ἰσχὺν 33 W. Ἑκάστη λυχνία λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 110 V. Ζητοῦνται α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει ἑκάστην λυχνίαν, β) ἡ ἀντίστασις ἐν θερμῷ ἑκάστης λυχνίας, γ) ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συνόλου τῶν λυχνιῶν.

Λύσις. α) Ἐὰν N εἶναι ἡ ἰσχὺς ἑκάστης λυχνίας καὶ U ἡ τάσις ὑπὸ τὴν ὁποίαν αὕτη λειτουργεῖ, θὰ ἔχωμεν

$$\underline{i = \frac{N}{U}}$$

ὁπότε, διὰ $N = 33\ W$ καὶ $U = 110\ V$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}3\ A.}$$

β) Ἡ ἀντίστασις R ἑκάστης λυχνίας εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{R = \frac{U}{i}}$$

Ἐὰν θέσωμεν $U = 110\ V$ καὶ $i = 0{,}3\ A$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 366{,}66\ \Omega.}$$

γ) Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τῶν λυχνιῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς συνδέσεως ἀντιστάσεων ἐν παραλλήλῳ, ἤτοι

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \frac{n}{R}$$

ὅτι εἶναι

$$R_{ολ} = \frac{R}{n}$$

Θέτοντες, $R = 366{,}66\ \Omega$ καὶ $n = 150$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{ολ} = 2{,}44\ \Omega.}$$

649. Μία λυχνία πομποῦ χρειάζεται διὰ τὴν λειτουργίαν της τάσιν 42 V καὶ ἔντασιν 22 A. Τὸ δίκτυον τροφοδοτήσεως εἶναι 80 V. Ζητεῖται α) Ἡ ἀπαιτουμένη προστατευτικὴ ἀντίστασις R. β) Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ τῆς λυχνίας. γ) Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀναπτύσσεται εἰς τὴν προστατευτικὴν ἀντίστασιν διὰ χρόνον λειτουργίας τοῦ πομποῦ 3 ὡρῶν.

(Σχολὴ Ἰκάρων. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. α) Ἡ προστατευτικὴ ἀντίστασις R πρέπει νὰ ἐπιφέρῃ πτῶσιν τάσεως ἴσην πρὸς $U = 80 - 42 = 38$ V, ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως $i = 22$ A. Ἑπομένως ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm $R = U/i$, ἐὰν θέσωμεν $U = 38$ V καὶ $i = 22$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 1{,}73\ \Omega.}$$

β) Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς N ὑπὸ τῆς λυχνίας θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως U_1 ἐπ' αὐτῆς, ἐπὶ τὴν ἔντασιν i τοῦ διερχομένου ρεύματος. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\underline{N = U_1 \cdot i}$$

καὶ διὰ $U_1 = 42$ V, $i = 22$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 924\ \text{W}.}$$

γ) Τὸ ἀναπτυσσόμενον ποσὸν θερμότητος Q εἰς τὴν προστατευτικὴν ἀντίστασιν R ἐπὶ χρόνον t, θὰ εἶναι

$$\underline{Q = \alpha \cdot i^2 \cdot R \cdot t}$$

ὁπότε διὰ $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $i = 22$ A, $R = 1{,}73\ \Omega$ καὶ $t = 3 \cdot 3\,600$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{Q = 2\,170\,333\ \text{cal} = 2\,170\ \text{kcal}} \quad \text{(περίπου)}$$

650. Ἠλεκτρικὸς κλίβανος θερμαίνεται δι' ἀντιστάσεων 60 Ω καὶ 30 Ω, αἱ ὁποῖαι συνδέονται πρῶτον ἐν σειρᾷ καὶ δεύτερον ἐν παραλλήλῳ, πρὸς δίκτυον 220 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ὡς καὶ ἡ δαπάνη διὰ τὴν ἐπὶ 5 ὥρας λειτουργίαν, κατὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι μεγαλυτέρα ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς, ὅταν ἓν κιλοβατώριον τιμᾶται 1 000 δραχμάς.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Ἰατρικὴ Σχολή. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1953).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν U τὴν τάσιν καὶ R τὴν ἀντίστασιν, τότε ἡ ἰσχὺς N δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N = \frac{U^2}{R} \tag{1}$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν R_1, R_2 τὰς δύο ἀντιστάσεις, τότε ἡ ἐν σειρᾷ σύνδεσις δίδει

$$R_o = R_1 + R_2$$

καὶ ἡ ἐν παραλλήλῳ σύνδεσις

$$R'_o = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Συνεπῶς, διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ τύπου (1) ἰσχὺν

$$\underline{N_1 = \frac{U^2}{R_1 + R_2}}$$

καὶ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἰσχύν

$$\underline{N_2 = \frac{U^2 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2}}$$

Ἄρα διὰ $U = 220$ V, $R_1 = 60\ \Omega$ καὶ $R_2 = 30\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$N_1 = 538\ \text{W} = 0{,}538\ \text{kW} \qquad \text{καὶ} \qquad N_2 = 2\,420\ \text{W} = 2{,}42\ \text{kW}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δαπάνην κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅπου ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι μεγαλυτέρα, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν καταναλισκομένην ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς κιλοβατώρια (kWh). Ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια A εἶναι

$$A = N \cdot t$$

ὁπότε διὰ $N = 2{,}42$ kW καὶ $t = 5$ h, εὑρίσκομεν

$$A = 12{,}1 \text{ kWh}$$

καὶ συνεπῶς ἡ δαπάνη διὰ τὴν ἀνωτέρω ἠλεκτρικὴν θέρμανσιν θὰ εἶναι

$$\underline{12{,}1 \cdot 1\,000 = 12\,100 \text{ δραχμαί.}}$$

651. Μεμονωμένη ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις 2778 Ω εἶναι βυθισμένη ἐντὸς δοχείου περιέχοντος 600 gr **ὕδατος καὶ ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται ἀπὸ 25°** C **εἰς 65°** C. **Νὰ εὑρεθῇ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς** Watt **καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ τάσις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. (4,2** Joule $=$ **1** cal.**)**

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Ὀδοντιατρικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα θερμανθῇ ὕδωρ μάζης m ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς Κελσίου, εἶναι

$$E = J \cdot c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

ὅπου c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος καὶ J τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, ἡ τιμὴ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς μονάδας μετρήσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας καὶ τῆς θερμότητος.

Συνεπῶς ἡ ἰσχὺς N, ὡς πηλίκον τῆς ἐνεργείας E διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t, θὰ εἶναι

$$\underline{N = \frac{J \cdot c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{t}}$$

ὁπότε διὰ $J = 4{,}2$ Joule/cal, $c = 1$ cal/gr. grad, $m = 600$ gr, $\theta_1 = 25^0$ C, $\theta_2 = 65^0$ C καὶ $t = 1$ h $= 3\,600$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 28 \text{ W.}}$$

β) Ἡ τάσις U ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως R καὶ ἡ ὁποία καταναλίσκει ἰσχὺν N εὑρίσκεται, ὡς γνωστόν, ἐκ τοῦ τύπου

$$N = \frac{U^2}{R}$$

Συνεπῶς δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς U λαμβάνομεν

$$\underline{U = \sqrt{N \cdot R}}$$

καὶ διὰ $N = 28$ W, $R = 2778$ Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 279 \text{ V.}}$$

652. Πηγὴ συνεχοῦς ρεύματος ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως E = 12 V **καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, τροφοδοτεῖ μέσῳ δύο ἀγωγῶν, ἑκάστου ἀντιστάσεως 0,5 Ω, ἠλεκτρομαγνήτην μὲ περιέλιξιν ἀντιστάσεως 5 Ω. Ζητοῦνται α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ κυκλώματος εἰς** Ampère. **β) Ἡ ἰσχὺς εἰς** Watt. **γ) Ἡ ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς** Watt **καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς περιελίξεώς του. δ) Ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν θὰ παράσχῃ ἡ πηγὴ εἰς κιλοβατώρια ἐπὶ 3 ὥρας καὶ τὸ ποσὸν τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἰς** Coulomb **τὸ ὁποῖον θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κυκλώματος εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα.**

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R_1 τὴν ἀντίστασιν ἑκάστου ἀγωγοῦ καὶ R_2 τὴν ἀντίστασιν τῆς περιελίξεως τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, τότε καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἀγωγοὶ θὰ παρουσιάζουν ἀντίστασιν $2R_1$

καὶ τὸ κύκλωμα συνολικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ} = 2R_1 + R_2$. Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἔχομεν

$$\underline{i = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{2R_1 + R_2}}$$

ὁπότε διὰ $E = 12$ V, $R_1 = 0{,}5\,\Omega$ καὶ $R_2 = 5\,\Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 2 \text{ A.}}$$

β) Ἡ ἰσχὺς N ἡ παρεχομένη ὑπὸ τῆς πηγῆς θὰ εἶναι $N = U \cdot i$, ὅπου U ἡ πολικὴ τάσις. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι μηδέν, ἔχομεν $U = E$.

Οὕτω ἡ σχέσις ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τὴν ἰσχὺν διὰ $U = E$, γίνεται

$$\underline{N = E \cdot i}$$

καὶ διὰ $E = 12$ V, $i = 2$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 24 \text{ W.}}$$

γ) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τὰ ἄκρα τῆς περιελίξεως ἀντιστάσεως R_2, θὰ εἶναι

$$U = R_2 \cdot i$$

καὶ διὰ $R_2 = 5\,\Omega$, $i = 2$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 10 \text{ V.}}$$

Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς N′ ὑπὸ τῆς περιελίξεως, θὰ εἶναι

$$\underline{N' = U \cdot i}$$

καὶ διὰ $U = 10$ V, $i = 2$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{N' = 20 \text{ W.}}$$

δ) Ἡ ἐνέργεια A τὴν ὁποίαν θὰ παρέχῃ ἡ πηγὴ ἐπὶ χρόνον $t = 3$ h, εἶναι

$$\underline{A = N \cdot t}$$

καὶ διὰ $N = 24$ W $= 0{,}024$ kW, $t = 3$ h, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 0{,}072 \text{ kWh.}}$$

Τὸ ποσὸν Q τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τὸ ὁποῖον θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κυκλώματος εἰς χρόνον t, εἶναι

$$\underline{Q = i \cdot t}$$

καὶ διὰ $i = 2$ A, $t = 3 \cdot 3\,600$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{Q = 21\,600 \text{ Cb.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

653. Σίδηρον σιδηρώματος διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 3 A καὶ ἔχει ἀντίστασιν 40 Ω. Ποία ἡ δαπανωμένη ἐνέργεια ὑπὸ τοῦ σιδήρου τούτου εἰς 1 h. Τὸ ἀποτέλεσμα νὰ δοθῇ εἰς Joule καὶ kWh. (Ἀπ. 1 296 000 Joule, 0,36 kWh.)

654. Γραμμὴ τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 10 Ω διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 A. Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς θὰ εἶναι 1 kWh. (Ἀπ. 25 h.)

655. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις ρεύματος δέκτου ραδιοφώνου ἀντιστάσεως 40 Ω, ἵνα ἡ ἀπορροφουμένη ἰσχὺς ὑπ' αὐτοῦ εἶναι 250 W. ('Απ. 2,5 A.)

656. Πηγὴ ρεύματος τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι 40 V, παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 50 A εἰς κύκλωμα. Πόσος ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα ἡ ὁλικὴ παραγομένη ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς 2 000 kJoule. ('Απ. 16 min 40 sec.)

657. 'Ηλεκτρικὴ θερμάστρα συνδέεται μὲ τάσιν 115 V καὶ ἡ ἀντίστασις αὐτῆς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 3,5 A. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα ὑπὸ τῆς συσκευῆς εἰς 15 min. ('Απ. 362 250 Joule.)

658. 'Ηλεκτρικὴ λυχνία λειτουργεῖ ὑπὸ ἔντασιν ρεύματος 1,25 A. Πόσα ἠλεκτρόνια θὰ διέλθουν διά τινος διατομῆς τοῦ νήματος αὐτῆς, ἐὰν ἡ λυχνία λειτουργήσῃ συνεχῶς ἐπὶ μίαν ἡμέραν. ('Απ. $6,75 \cdot 10^{23}$ ἠλεκτρόνια.)

659. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τάσις μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν κινητῆρος, ὅστις ἀπορροφᾶ ὁλικὴν ἐνέργειαν 0,96 kWh εἰς 36 min, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 20 A. ('Απ. 80 V.)

660. Εἰς τὰ ἄκρα ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 10 000 Ω ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 100 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς ἡμίσειαν ὥραν. ('Απ. 0,01 A, 1800 Joule.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν. 'Ιατρικὴ Σχολή, 1955.)

661. Πόσους λαμπτῆρας τῶν 16 κηρίων (NK), ἐξ ὧν ἕκαστος λειτουργῶν ὑπὸ τάσιν 110 V καταναλίσκει 0,5 A, δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ γεννήτρια ἰσχύος ἑνὸς ἵππου. ('Απ. 13.)
(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης. 'Ιατρικὴ Σχολή, 1957.)

662. 'Ηλεκτρικὸν ρεῦμα διερχόμενον διὰ σταθερᾶς ἀντιστάσεως 10 Ω θερμαίνει 2 kgr ὕδατος κατὰ $28,8^0$ C ἐπὶ 1 min. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως. (1 Joule = 0,24 cal.) ('Απ. 200 V.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν. 'Ιατρικὴ Σχολή, 1956.)

663. 'Επὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέλθῃ ρεῦμα 3,60 A εἰς ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 30 Ω διὰ νὰ ἀχθῇ 1 λίτρον ὕδατος εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ βρασμοῦ. 'Η ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι 16^0 C καὶ ὅλον τὸ ποσὸν θερμότητος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος. ('Απ. 903 sec.)

664. Θερμιδόμετρον ἐξ ὀρειχάλκου βάρους 192 gr* (εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου 0,09 cal/gr·grad) περιέχει 500 gr πετρελαίου (εἰδικὴ θερμότης πετρελαίου 0,5 cal/gr·grad) εἰς τὴν θερμοκρασίαν $17,3^0$ C. Εἰς τὸ πετρέλαιον βυθίζεται σπεῖρα σιδηρονικελίου ἀντιστάσεως 12,5 Ω, ἐκ τῆς ὁποίας διέρχεται ρεῦμα 1 A ἐπὶ 3 min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ πετρελαίου. ('Απ. $19,3^0$ C.)

665. 'Ηλεκτρικὸς θερμαντὴρ ἔχει ἀντίστασιν 12,5 Ω καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 8 A. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ θερμάνῃ 2 λίτρα ὕδατος ἀπὸ 10^0 C εἰς 100^0 C. Θεωροῦνται ἀμελητέαι αἱ ἀπώλειαι θερμότητος. Τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος εἶναι J = 4,2 Joule/cal. ('Απ. 15 min 40 sec.)

666. Θερμιδόμετρον περιέχει 300 gr ὕδατος καὶ 100 gr πάγου 0^0C. 1) Ποῖον εἶναι τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ἵνα τακῇ ὁ πάγος καὶ φθάσῃ τὸ ὅλον ὕδωρ εἰς 10^0C. 2) Πραγματοποιεῖται ἡ τῆξις καὶ ἡ θέρμανσις αὐτή, βυθίζοντες ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 10 Ω διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος 3 A. 'Επὶ πόσον χρόνον διέρχεται τὸ ρεῦμα. Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr. Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος 4,18 Joule/cal.
('Απ. 1) 12 000 cal. 2) 557 sec ἢ 9 min 17 sec.)

667. Σπεῖρα νεαργύρου μήκους 3 m καὶ τομῆς 2 mm^2 βυθίζεται ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐξ ὀρειχάλκου, βάρους 180 gr, περιέχοντος 200 gr ὕδατος καὶ 12 gr πάγου εἰς 0^0 C. Νὰ ὑπολογισθῇ 1) Ἡ ἀντίστασις τῆς σπείρας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὅμοιον σύρμα μήκους 1 m καὶ 1 mm^2 τομῆς ἔχει ἀντίστασιν 0,3 Ω. 2) Ἡ διάρκεια τῆς διόδου τοῦ ρεύματος ἐντάσεως 4 Α, διὰ νὰ ἀχθῇ εἰς 5^0C τὸ θερμιδόμετρον. Εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου 0,1 cal/gr·grad καὶ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.
('Απ. 1' 4,5 Ω. 2' 122 sec ἢ 2 min 2 sec.)

668. Τρεῖς ἀντιστάσεις 4 Ω, 5 Ω καὶ 20 Ω συνδέονται α) ἐν σειρᾷ, β) ἐν παραλλήλῳ, καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις 14,5 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑκάστοτε συνολικῶς καταναλισκομένη ἐνέργεια διὰ λειτουργίαν 5 min.
('Απ. 520 cal, 7540 cal.)

669. Ἀγωγὸς ἀντιστάσεως 5 Ω ἐμβαπτίζεται ἐντὸς δοχείου περιέχοντος 2 kgr ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 15^0C. Διὰ τοῦ ἀγωγοῦ διαβιβάζεται ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως, λόγῳ δὲ τῆς ἐκλυομένης θερμότητος ἐντὸς 4 min ἐξατμίζονται 50 gr ὕδατος. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ παραμένει σταθερά, ἐνῷ ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 460 Torr. ('Απ. 26,2 Α.)

670. Ἐπιθυμεῖ τις ἐντὸς 5 min νὰ θερμάνῃ 1 λίτρον ὕδατος ἀπὸ 15^0 C εἰς 40^0 C μέσῳ μεταλλικοῦ σύρματος βυθιζομένου ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τομή του εἶναι 0,01 mm^2 καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων του εἶναι 110 V. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τὸ ὁποῖον θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σύρματος. (Δίδονται 1 Joule = 0,25 cal καὶ $\rho = 11 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm. ('Απ. 330 cm, 910 Cb.)

671. Ἠλεκτρικὴ ἐγκατάστασις τροφοδοτουμένη ἐκ δικτύου 110 V περιλαμβάνει 15 λυχνίας, 50 W ἑκάστην, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τό ὁποῖον διαρρέει ἑκάστην λυχνίαν καὶ ἡ ἀντίστασις αὐτῆς. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἡ παρεχομένη εἰς τὸ σύνολον τῆς ἐγκαταστάσεως. 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὡριαία δαπάνη διὰ τὸ σύνολον τῆς ἐγκαταστάσεως ὅταν τὸ 1 kWh τιμᾶται 1,50 δραχμάς.
('Απ. 1' 0,455 Α, 242 Ω. 2' 6,82 Α. 3' 1,12 δρχ.)

672. Ἀγωγὸς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 Α καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 110 V. Βυθίζεται ὁλόκληρος ὁ ἀγωγὸς ἐντὸς 1 kgr ὑγροῦ εἰδικῆς θερμότητος 0,643 cal/gr·grad. Ἐὰν δὲν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἀπώλειαι θερμότητος, λόγῳ ἀκτινοβολίας καὶ ἀγωγιμότητος, ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέρχεται τὸ ρεῦμα διὰ νὰ ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ ἀπὸ 15^0 C εἰς 60^0 C. Τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος εἶναι 4,18 Joule/cal. ('Απ. 220 sec.)

673. Θέλει τις νὰ θερμάνῃ 1 λίτρον ὕδατος ἀπὸ 15^0 C εἰς 40^0 C, μέσω σπειρώματος σιδηρονικελίου, βυθιζομένου ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 Α. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σπειρώματος εἶναι 110 V. Ζητοῦνται: 1) Ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ σπειρώματος. 2) Ποία ποσότης θερμότητος ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ ὕδατος. 3) Πόσον χρόνον διαρκεῖ τὸ πείραμα. 4) Πόσον εἶναι εἰς Coulomb τὸ ὁλικόν φορτίον, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σπείρωμα. Τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος εἶναι 4,18 Joule/cal.
('Απ. 1' 22 Ω. 2' 25 000 cal ἢ 104 500 Joule. 3' 190 sec. 4' 950 Cb.)

674. Προτίθεταί τις νὰ θερμάνῃ δι' ἠλεκτρικοῦ ρεύματος συσκευὴν ἐπιτρέπουσαν νὰ ἀποστάξῃ 900 gr αἰθέρος καθ' ὥραν. Διατίθεται πηγὴ σταθερᾶς τάσεως 220 V καὶ σύρμα θερμάνσεως 0,3 mm διαμέτρου καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως 1100 μΩ·cm, ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας. Δεχόμεθα ὅτι ὅλη ἡ θερμότης ἀτμοποιήσεως

τοῦ αἰθέρος εἶναι 91 cal. Νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ τῆς συσκευῆς. 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως. 3) Τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, ($\rho = 0{,}72$ gr*/cm^3).
('Απ. 1' 95 W. 2' 0,43 A. 3' 328 cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

675. Τὸ νῆμα λυχνίας πυρακτώσεως διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,68 A παρουσιάζον οὕτω ἀντίστασιν 160 Ω. Πόσην ἐνέργειαν καταναλίσκει ἡ λυχνία εἰς 1 h.

676. 'Αντίστασις 10 Ω διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 8 A. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐκλυόμενον ποσὸν θερμότητος ἐντὸς 10 min.

677. Εἰς δίκτυον φωτισμοῦ 220 V, λειτουργοῦν 1 500 λυχνίαι πυρακτώσεως, ἑκάστη ἀντιστάσεως 2 000 Ω. Ποία ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς.

678. 'Επὶ πόσον χρόνον κινητὴρ καταναλίσκει ἐνέργειαν 1,2 kWh, γνωστοῦ ὄντος ὅτι μεταξὺ τῶν ἄκρων αὐτοῦ ὑφίσταται σταθερὰ τάσις 100 V καὶ ὅτι τροφοδοτεῖται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 20 A.

679. Λυχνία πυρακτώσεως, ἰσχύος 100 W, λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 225 V. Πόσα ἠλεκτρόνια διέρχονται ἀνὰ δευτερόλεπτον διά τινος διατομῆς τοῦ νήματος τῆς λυχνίας.

680. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις θερμαντικῆς σπείρας, ἡ ὁποία θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ νὰ ἀνυψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν 500 gr ὕδατος ἀπὸ 28° C εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως ἐντὸς 2 min, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι 25% τῆς θερμότητος ἀπόλυνται. Ὁ θερμαντὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 110 V.

681. Ποῖον εἶναι τὸ κόστος ἀνὰ ὥραν, διὰ τὴν ἠλεκτρικὴν θέρμανσιν δωματίου, ὅταν χρειάζεται τὸ δωμάτιον τοῦτο διὰ νὰ θερμανθῇ 1 kgr καθ' ὥραν, ἀνθρακίτου, θερμότητος καύσεως 8 000 cal/gr. Δίδεται ὅτι τὸ 1 kWh στοιχίζει 4 δραχμάς.

682. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις ρεύματος τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ κινητῆρα τοῦ ὁποίου ἡ ΗΕΔ εἶναι 100 V, ἵνα ἡ μετασχηματιζομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἰς μηχανικὴν τοιαύτην εἶναι 1800 kJoule εἰς 30 min.

683. Τί μῆκος σύρματος πρέπει νὰ ληφθῇ διὰ τὴν κατασκευὴν ἠλεκτρικῆς ἀντιστάσεως, ἡ ὁποία ὑπὸ τάσιν 220 V νὰ καταναλίσκῃ 600 W, ἐὰν τὸ κατάλληλον δι' αὐτὴν σύρμα παρουσιάζει ἀντίστασιν 10 Ω ἀνὰ μέτρον καὶ ποία ἔντασις ρεύματος θὰ διέρχεται δι' αὐτοῦ. 'Εὰν ἡ ἀντίστασις αὕτη βυθισθῇ ἐντὸς δοχείου περιέχοντος 400 gr ὕδατος θερμοκρασίας 20° C, μετὰ πόσον χρόνον θὰ βράσῃ τὸ ὕδωρ καὶ ποία δαπάνη θὰ ἀπαιτηθῇ πρὸς τοῦτο, δοθέντος ὅτι ἡ ἀξία 1 kWh εἶναι 2 500 δρχ.
(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης. Ἰατρικὴ Σχολή, 1953.)

684. Εἴκοσι πέντε ἠλεκτρικοὶ λαμπτῆρες, ἕκαστος ἀντιστάσεως 250 Ω, εἶναι διατεταγμένοι ἐν παραλλήλῳ. Ἡ διαφορὰ τάσεως εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι 220 V. (Ἡ ἀντίστασις τῶν ἠλεκτροφόρων συρμάτων δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς ὁλόκληρον τὸ πρόβλημα). 'Εὰν ἀντὶ 25 ληφθοῦν 50 λαμπτῆρες συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ, ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου λαμπτῆρος πίπτει κατὰ 5 V. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς χορηγούσης τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα συστοιχίας, ὡς καὶ ἡ ὡριαία κατανάλωσις ἐνεργείας εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων—'Ηλεκτρολόγων, 1948.)

685. 'Ηλεκτρικὴ θερμάστρα ἔχει ρυθμισθῇ ὥστε νὰ λειτουργῇ ὑπὸ ἰσχὺν 100 W εἰς τὸ κανονικὸν δυναμικόν της τῶν 220 V. Αὕτη μεταφέρεται εἰς ἐπαρχίαν, ὅπου τὸ δίκτυον διαρρέεται ὑπὸ τάσιν 110 V. Πῶς πρέπει νὰ ἀποκόψωμεν τὴν ἀντίστασιν τῆς θερμάστρας εἰς δύο μέρη, ὥστε ἂν συνδέσωμεν αὐτὰ ἐν παραλλήλῳ, αὕτη νὰ λειτουργῇ ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἰσχύν.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα, Φυσιογνωστικόν, 1955.)

686. Κύκλωμα περιλαμβάνει ἐν σειρᾷ στήλην ΗΕΔ 10 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω, ἄγνωστον ἀντίστασιν R καὶ ἀμπερόμετρον ἀμελητέας ἀντιστάσεως. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει ρεῦμα ἐντάσεως 1 A, ζητοῦνται: 1) ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R, 2) τὸ ἐλευθερούμενον ποσὸν θερμότητος ἀνὰ min ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως, 3) ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς εἰς Watt τῆς στήλης.

687. Γεννήτρια ΗΕΔ E 60 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω παρέχει ρεῦμα εἰς μεταβλητὴν ἀντίστασιν R. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ἡ ἀντίστασις R, οὕτως ὥστε ἡ χρησιμοποιουμένη ἰσχὺς πρὸς θέρμανσιν τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς νὰ εἶναι 100 W. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἐκ τῶν δύο λύσεων τοῦ προβλήματος θὰ ληφθῇ ἐκείνη ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν ἔντασιν.

688. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἀντιστάσεως ἠλεκτρικοῦ βραστῆρος λειτουργοῦντος ὑπὸ τάσιν 220 V χρησιμοποιοῦμεν σύρμα τομῆς 0,5 mm^2 καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως 0,40 $\Omega \cdot mm^2/m$. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος αὐτοῦ, ἵνα εἶναι δυνατὸν νὰ θερμάνωμεν διὰ τοῦ βραστῆρος 1 λίτρον ὕδατος 20^0 C μέχρι τοῦ σημείου βρασμοῦ, ἐντὸς 2 min.

689. Εἰς γραμμὴν μεταφορᾶς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ σταθμοῦ παραγωγῆς καὶ τῆς καταναλώσεως εἶναι 50 km. Ἡ τομὴ ἑκάστου ἐκ τῶν δύο ἀγωγῶν ἐκ χαλκοῦ τῆς γραμμῆς εἶναι 0,5 cm^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἡ τάσις εἰς τὴν κατανάλωσιν καὶ τὸ ποσὸν τῆς λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule μετατρεπομένης ἰσχύος ἐν τῇ γραμμῇ, ἂν ὁ σταθμὸς παραγωγῆς παρέχει ἰσχὺν 3 000 kW ὑπὸ τάσιν 50 000 V.

690. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας σύρματος ἐκ χαλκοῦ, μήκους 10 m καὶ 0,1 cm^2 τομῆς, ὅπερ βραχυκυκλώνει δύο ἀκροδέκτας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ 130 V καὶ τὸ βραχυκύκλωμα διαρκεῖ 0,1 sec. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,9 gr^*/cm^3, ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,1 cal/gr. grad, ἡ δὲ εἰδικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ εἶναι $1{,}58 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot cm$.

691. Ἠλεκτρικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει γεννήτριαν ΗΕΔ 50 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 2 Ω. Συνδέονται τὰ ἄκρα της πρὸς ἀντίστασιν x. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις x, οὕτως ὥστε ἡ δαπανωμένη ἰσχύς, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule, ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως, νὰ εἶναι μεγίστη. Πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

692. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα τάσεως 110 V παρέχεται εἰς κατοικίαν μέσῳ μετρητοῦ ἔχοντος ἀσφάλειαν 5 A. 1) Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ἰσχὺς ἡ ὁποία διατίθεται εἰς τὸ κύκλωμα. 2) Συνδέει τις εἰς τὸ κύκλωμα ἀνεμιστῆρα 300 W. Πόσαι λυχνίαι τῶν 30 W δύνανται ἐπιπροσθέτως νὰ χρησιμοποιηθοῦν. 3) Ποία εἶναι ἡ δαπάνη καθ' ὥραν λειτουργίας τοῦ ἀνεμιστῆρος, ὅταν τὸ 1 kWh τιμᾶται 1,50 δραχμάς. 4) Τί θὰ γίνῃ, ἐὰν καθ' ὃν χρόνον λειτουργεῖ ὁ ἀνεμιστήρ, συνδεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα καὶ σίδηρον σιδηρώματος ἰσχύος 300 W.

693. Εἰς οἰκίαν συνδέονται πρὸς τὸ δίκτυον, τάσεως 220 V, καὶ λειτουργοῦν συγχρόνως α) 2 λυχνίαι πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 605 Ω, β) 3 λυχνίαι πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 1210 Ω, γ) 1 θερμαντὴρ ἰσχύος 50 W, δ) 1 ἠλεκτρικὸς βραστὴρ ἰσχύος 800 W καὶ ε) 1 ἠλεκτρικὸν μαγειρεῖον, λειτουργοῦν ὑπὸ ἔντασιν 4,5 A. 1) Κατὰ ποῖον τρόπον εἶναι συνδεδεμέναι πρὸς τὸ δίκτυον αἱ ἀνωτέρω συσκευαί. 2) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τοὺς ἀγωγοὺς τοὺς συνδέοντας τὴν οἰκίαν πρὸς τὸ ἠλεκτρικὸν δίκτυον. 3) Ποία ἡ ἐντὸς 2 ὡρῶν ἐκλυομένη εἰς τὸν θερμαντῆρα θερμότης.

694. Θερμαντικὸν σπείρωμα, λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν 220 V, θερμαίνει ὕδωρ 500 gr εὑρισκόμενον ἐντὸς ἀνοικτοῦ ὑαλίνου ποτηρίου, ἐπὶ 2 min, χωρὶς νὰ ληφθῇ πρόνοια διὰ τὴν ἀποφυγὴν ἀπωλειῶν εἰς θερμότητα. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θερμάνσεως εἶναι 2,96 A, ἡ ἀρχικὴ δὲ καὶ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος 16,3° C καὶ 50,5° C. Ποία θὰ ἦτο ἡ τελικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ ἄνευ τῶν ἀνωτέρω ἀπωλειῶν καὶ ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσις τῆς συσκευῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΥΓΡΩΝ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΥΣΙΣ. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

695. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ χρησιμοποιηθησομένου ρεύματος ἵνα ἐλευθερωθῇ 1 gr ὑδρογόνου ἐντὸς βολταμέτρου λειτουργοῦντος ἐπὶ 3 ὥρας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν q τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον καὶ t τὸν χρόνον διελεύσεως αὐτοῦ, τότε ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$i = \frac{q}{t}$$

Ὡς γνωστόν, τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τὸ ἀπαιτούμενον ἵνα ἐλευθερωθῇ 1 gr ὑδρογόνου, δηλ. 1 γραμμοϊσοδύναμον αὐτοῦ, εἶναι 96 500 Cb. Οὕτω, θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, q = 96 500 Cb καὶ t = 3 h = 10 800 sec, εὑρίσκομεν

$$i = 8{,}93 \text{ A.}$$

696. Τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι 1,6·10⁻¹⁹ Cb καὶ ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday 96 500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ Loschmidt.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν μὲ φορτίον ἴσον πρὸς τὴν σταθερὰν τοῦ Faraday, ἠλεκτρολύεται τὸ γραμμοϊσοδύναμον παντὸς ἰόντος. Ἀλλὰ τὸ γραμμοϊσοδύναμον περιέχει N/n ἰόντα, ὅπου N ὁ ἀριθμὸς Loschmidt καὶ n τὸ σθένος τοῦ στοιχείου. Ἑπομένως ἡ σταθερὰ F τοῦ Faraday θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰόντων N/n ἐπὶ τὸ φορτίον n · e ἑκάστου ἰόντος (ὅπου e τὸ φορτίον ἑνὸς μονοσθενοῦς ἰόντος, δηλ. τὸ φορτίον ἑνὸς ἠλεκτρονίου). Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$F = \frac{N}{n} \cdot n \cdot e = N \cdot e$$

Λύοντες ὡς πρὸς N λαμβάνομεν

$$N = \frac{F}{e}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον, F = 96 500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, εὑρίσκομεν

$$N = 6 \cdot 10^{23} \text{ μονοσθενῆ ἰόντα/γραμμοϊσοδύναμον.}$$

697. Ὑπολογίσατε τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἀργιλλίου. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργιλλίου εἶναι 26,97 καὶ τὸ σθένος του 3.

Λύσις. Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον α ἑνὸς στοιχείου, εἶναι τὸ πηλῖκον τοῦ γραμμοϊσοδυνάμου αὐτοῦ διὰ τῆς σταθερᾶς F τοῦ Faraday. Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργιλλίου καὶ n τὸ σθένος αὐτοῦ, τότε τὸ γραμμοϊσοδύναμον εἶναι

$$\frac{A}{n}\ \mathrm{gr}$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον εὑρίσκεται ἴσον πρὸς

$$\underline{\alpha = \frac{A}{n \cdot F}\ \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{Cb}}}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $A = 26{,}97$, $n = 3$ καὶ $F = 96\,500$ Cb, εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 9{,}32 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{gr/Cb}.}$$

698. Πόση ἔντασις ρεύματος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐναπόθεσιν ἐπὶ τῆς καθόδου 5 gr χρυσοῦ εἰς μίαν ὥραν. Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χρυσοῦ εἶναι 0,000 681 gr/Cb.

Λύσις. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ χρυσοῦ, ἡ ὁποία ἠλεκτρολύεται διὰ ρεύματος ἐντάσεως i καὶ ἐπὶ χρόνον t. Θὰ ἔχωμεν

$$m = \alpha \cdot i \cdot t \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χρυσοῦ. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς i, λαμβάνομεν

$$\underline{i = \frac{m}{\alpha \cdot t}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $m = 5$ gr, $\alpha = 0{,}000\,681$ gr/Cb, $t = 1$ h $= 3\,600$ sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 2{,}04\ \mathrm{A}.}$$

699. Εἰς βολτάμετρον διὰ χαλκοῦ, πόσα ἀμπερώρια ἀπαιτοῦνται πρὸς πλήρη διάλυσιν τοῦ ἐκ χαλκοῦ ἠλεκτροδίου, μάζης 15 gr. (α = 31,68/96 500 gr/Cb.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν q τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον διὰ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ἠλεκτρόλυσις, τότε ἡ μᾶζα m τοῦ χαλκοῦ ἡ ὁποία διαλύεται, θὰ εἶναι

$$m = \alpha \cdot q \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς q, λαμβάνομεν

$$\underline{q = \frac{m}{\alpha}} \qquad (2)$$

Θέτοντες, $m = 15$ gr, $\alpha = 31{,}68/96\,500$ gr/Cb $= 31{,}68/96500$ gr/A · sec $= 31{,}68 \cdot 3\,600/96500$ gr/Ah, εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 12{,}7\ \mathrm{Ah}.}$$

700. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ διαλύματος νιτρικοῦ ἀργύρου καὶ ἐναποθέτει ἐντὸς 15 min ἐπὶ τῆς καθόδου 2,165 gr ἀργύρου. (Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου 107,88, Σθένος 1.)

Λύσις. Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν λύσιν τὴν ὁποίαν ἀνεφέραμεν εἰς τὰς προηγουμένας ἀσκήσεις, παρόμοιαι ἀσκήσεις τῆς ἠλεκτρολύσεως δύνανται νὰ λυθοῦν καὶ ὡς ἀκολούθως:

Ἐκ τοῦ νόμου τῆς ἠλεκτρολύσεως τοῦ Faraday γνωρίζομεν ὅτι διὰ νὰ ἀποτεθῇ τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ ἀργύρου, ἤτοι A/n gr ἀργύρου (ὅπου A τὸ ἀτομικὸν βάρος καὶ n τὸ σθένος), ἀπαιτεῖται ἠλεκτρικὸν φορτίον F Cb (ὅπου F εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday). Συνεπῶς διὰ νὰ ἀποτεθοῦν m gr ἀργύρου ἀπαιτεῖται ἠλεκτρικὸν φορτίον q ἴσον πρὸς

$$q = \frac{m \cdot F}{A/n} = \frac{m \cdot F \cdot n}{A} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $i = q/t$, λαμβάνομεν

$$i = \frac{m \cdot F \cdot n}{A \cdot t} \qquad (2)$$

Θέτοντες, $m = 2{,}165$ gr, $F = 96\,500$ Cb/γραμμοϊσοδύναμον, $n = 1$, $A = 107{,}88$, $t = 15 \cdot 60 = 900$ sec, εὑρίσκομεν

$$i = 2{,}15 \text{ A.}$$

701. Εἰς βολτάμετρον τὸ ὁποῖον περιέχει ὀξυνισθὲν ὕδωρ μετὰ θειϊκοῦ ὀξέος ἐπιθυμοῦμεν νὰ συλλέξωμεν 36 λίτρα ὑδρογόνου ἐντὸς 24 h. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ἀπαιτουμένου ρεύματος. Πυκνότης ὑδρογόνου 0,089 882 gr/lt.

Λύσις. Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἠλεκτρολύσεως

$$m = \frac{A}{n \cdot F} \cdot i \cdot t \qquad (1)$$

ὅπου A τὸ ἀτομικὸν βάρος καὶ n τὸ σθένος τοῦ ὑδρογόνου, m ἡ μᾶζα αὐτοῦ, t ὁ χρόνος ἠλεκτρολύσεως καὶ F ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς i λαμβάνομεν

$$i = \frac{m \cdot n \cdot F}{A \cdot t} \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τοῦ ὑδρογόνου καὶ ρ τὴν πυκνότητα αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$m = \rho \cdot V$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$i = \frac{\rho \cdot V \cdot n \cdot F}{A \cdot t} \qquad (3)$$

Θέτοντες, $\rho = 0{,}089\,882$ gr/lt, $V = 36$ lt, $n = 1$, $F = 96\,500$ Cb/γραμμοϊσοδύναμον, $A = 1$, $t = 24$ h $= 86\,400$ sec, εὑρίσκομεν

$$i = 3{,}65 \text{ A.}$$

702. Ἐπιφάνεια 100 cm² ἐπιχαλκοῦται ἐντὸς καταλλήλου ἠλεκτρολυτικοῦ λουτροῦ, διὰ διαβιβάσεως ρεύματος 0,5 A. Μετὰ πόσα λεπτὰ θὰ ἀποτεθῇ ἐπ᾽ αὐτῆς στοιβὰς χαλκοῦ πάχους 0,005 cm (ἀτομικὸν βάρος Cu = 63,6, πυκνότης Cu = 8,5 gr/cm³, F = 96 500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον). Ἐὰν ἡ ἠλεκτρόλυσις γίνεται ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ 4 V, πόση θὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.

(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).

Λύσις. Ἡ μᾶζα m τοῦ χαλκοῦ ἡ ὁποία ἀποτίθεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, δίδεται ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἠλεκτρολύσεως

$$m = \frac{A}{n \cdot F} \cdot i \cdot t \qquad (1)$$

ὅπου A τὸ ἀτομικὸν βάρος καὶ n τὸ σθένος τοῦ χαλκοῦ, F ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ t ὁ χρόνος ἠλεκτρολύσεως.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς t λαμβάνομεν

$$t = \frac{m \cdot n \cdot F}{A \cdot i} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν S τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, h τὸ πάχος τοῦ ἀποτιθεμένου ἐπ' αὐτῆς χαλκοῦ καὶ ρ τὴν πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ, τότε θὰ ἔχωμεν

$$m = \rho \cdot S \cdot h \tag{3}$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$t = \frac{\rho \cdot S \cdot h \cdot n \cdot F}{A \cdot i} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4), $\rho = 8{,}5$ gr/cm³, $S = 100$ cm², $h = 0{,}005$ cm, $n = 2$, $F = 96\,500$ Cb/γραμμοϊσοδύναμον, $A = 63{,}6$, $i = 0{,}5$ A, εὑρίσκομεν

$$t = 25\,794 \text{ sec} = 430 \text{ min.}$$

β) Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ὅτι εἶναι

$$R = \frac{U}{i} \tag{5}$$

ὅπου U ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὴν ὁποίαν λαμβάνει χώραν ἡ ἠλεκτρόλυσις καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $U = 4$ V, $i = 0{,}5$ A, εὑρίσκομεν

$$R = 8\ \Omega.$$

703. Βολτάμετρον, περιέχον θειϊκὸν χαλκόν, καὶ ἀντίστασις R, συνδέονται ἐν σειρᾷ. Ἀκολούθως διαβιβάζεται ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως καὶ οὕτω αὐξάνει τὸ βάρος τῆς καθόδου κατὰ 0,791 gr* ἐντὸς 40 min. Ἂν ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι 20 V, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R. Τὸ χημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ εἶναι 31,68.
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Χημικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1954).

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν

$$R = \frac{U}{i} \tag{1}$$

ὅπου R ἡ ἀντίστασις, U ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀντιστάσεως καὶ τοῦ βολταμέτρου.

Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἠλεκτρολύσεως

$$m = \alpha \cdot i \cdot t \tag{2}$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ ἀποτιθεμένου χαλκοῦ ἐπὶ τῆς καθόδου, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, t ὁ χρόνος ἠλεκτρολύσεως καὶ α τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ.

Λύοντες τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς i λαμβάνομεν

$$i = \frac{m}{\alpha \cdot t} \tag{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) προκύπτει

$$R = \frac{U \cdot \alpha \cdot t}{m} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $U = 20$ V, $\alpha = 31{,}68/96\,500$ gr/Cb, $t = 40$ min $= 2\,400$ sec, $m = 0{,}791$ gr, εὑρίσκομεν

$$R = 19{,}91\ \Omega.$$

704. Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα γεννητρίας ΗΕΔ 32 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω τίθεται 1) Ροοστάτης ἀντιστάσεως R′ = 1 Ω, 2) Ἀντίστασις 2 Ω, ἥτις βυθιζομένη ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 100 gr ὕδατος ἀνυψώνει

τὴν θερμοκρασίαν αὐτοῦ κατὰ 9⁰ C εἰς 3 min καὶ 30 sec. 3) Βολτάμετρον διὰ νιτρικοῦ ἀργύρου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου βυθίζονται δύο ἀδιάλυτα ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ἠλεκτρόδια (ἡ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου εἶναι 6 Ω). Ζητεῖται α) ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος, β) ἡ ἐναποτιθεμένη μᾶζα ἀργύρου μετὰ 3 min καὶ 30 sec, γ) ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ βολταμέτρου, δ) ἐὰν ἀντικατασταθοῦν τὰ ἀδιάλυτα ἠλεκτρόδια δι' ἑτέρων ἐξ ἀργύρου, πόση θὰ εἶναι ἡ νέα ἔντασις ρεύματος. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, 1 Joule = 0,24 cal, 96500 Cb ἐλευθερώνουν ἕνα γραμμοϊσοδύναμον τοῦ μετάλλου καὶ ὅτι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 108.

Λύσις. α) Ἡ θερμότης Q ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἵνα ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία μάζης m ὕδατος ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς Κελσίου εἶναι

$$Q = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1) \qquad (1)$$

ὅπου c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος. Ἡ θερμότης ὅμως Q θὰ προέρχεται ἀπὸ τὴν δαπανωμένην ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν καὶ θὰ εἶναι, βάσει τοῦ νόμου τοῦ Joule, ἴση πρὸς

$$Q = \alpha \cdot R \cdot i^2 \cdot t \qquad (2)$$

ὅπου R εἶναι ἡ θερμαινομένη ἀντίστασις, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, t ὁ χρόνος καὶ α τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\alpha \cdot R \cdot i^2 \cdot t = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς i προκύπτει

$$i = \sqrt{\frac{c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{\alpha \cdot R \cdot t}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $\alpha = 0{,}24$ cal/Joule, $c = 1$ cal/gr·grad, $m = 100$ gr, $\theta_2 - \theta_1 = 9^0$ C, $R = 2\ \Omega$ καὶ $t = 3$ min 30 sec = 210 sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 3\ A} \text{ (περίπου)}$$

β) Ἡ μᾶζα m τοῦ ἀργύρου θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν τύπον

$$m = \frac{A}{n\,F} \cdot i \cdot t$$

ὅπου A/n τὸ χημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἀργύρου, F ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ t ὁ χρόνος διελεύσεως τοῦ ρεύματος.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, A/n = 108/1, F = 96 500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον, i = 3 A, t = 3 min 30 sec = 210 sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{m = 0{,}704\ gr.}$$

γ) Ἡ ΗΕΔ E' τοῦ βολταμέτρου θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$E - E' = (R' + R + r + r') \cdot i \qquad (5)$$

ὅπου E εἶναι ἡ ΗΕΔ τῆς γεννητρίας, R' ἡ τιμὴ τῆς ρυθμιστικῆς ἀντιστάσεως (ροοστάτου), R ἡ ἀντίστασις ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας καὶ r' ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου.

Λύοντες τὸν τύπον (5) ὡς πρὸς E' λαμβάνομεν

$$E' = E - (R' + R + r + r') \cdot i$$

καὶ διὰ E = 32 V, i = 3 A, R' = 1 Ω, R = 2 Ω, r = 1 Ω, r' = 6 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{E' = 2\ V}$$

δ) Ὅταν τὰ ἀδιάλυτα ἠλεκτρόδια ἀντικατασταθοῦν δι' ἑτέρων ἐξ ἀργύρου, τότε ἡ ΗΕΔ E' θὰ εἶναι μηδὲν καὶ θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{E}{R' + R + r + r'}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $E = 32$ V, $R' = 1\ \Omega$, $R = 2\ \Omega$, $r = 1\ \Omega$ καὶ $r' = 6\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$i = 3{,}2 \text{ A.}$$

705. Διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν ΗΕΔ δύο στηλῶν Ε καὶ Ε', τῶν ὁποίων αἱ ἀντιστάσεις εἶναι ἄγνωστοι, συνδέονται αὗται εἰς κύκλωμα μετὰ γαλβανομέτρου τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι ὡσαύτως ἄγνωστος. Δι' ἐκτελέσεως τοῦ πρώτου πειράματος, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ στῆλαι συνδέονται ἐν σειρᾷ, ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ἀποκλίνει κατὰ n_1 διαιρέσεις, ἐνῷ δι' ἐκτελέσεως ἑνὸς δευτέρου πειράματος, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ στῆλαι συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ἀποκλίνει κατὰ n_2 διαιρέσεις. Θεωροῦντες ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο ΗΕΔ, Ε καὶ Ε'. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $n_1 = 45$ διαιρέσεις, $n_2 = 15$ διαιρέσεις.

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ὁλικὴ ΗΕΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ΗΕΔ Ε καὶ Ε' τῶν στηλῶν καὶ ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποκλίσεως τοῦ δείκτου τοῦ γαλβανομέτρου, θὰ ἔχωμεν

$$E + E' = k \cdot n_1 \qquad (1)$$

Εἰς τὴν δευτέραν ὅμως περίπτωσιν, ἡ ὁλικὴ ΗΕΔ θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ΗΕΔ Ε καὶ Ε' τῶν στηλῶν καὶ ἐπειδὴ πάλιν αὕτη θὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποκλίσεως τοῦ δείκτου τοῦ γαλβανομέτρου, θὰ ἔχωμεν

$$E - E' = k \cdot n_2 \qquad (2)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$2E = k \cdot (n_1 + n_2) \qquad (3)$$

Ἐπίσης δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$2E' = k \cdot (n_1 - n_2) \qquad (4)$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (4), ὅτε προκύπτει

$$\frac{E}{E'} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν (5) τὰ n_1 καὶ n_2 διὰ τῶν τιμῶν των, $n_1 = 45$, $n_2 = 15$, λαμβάνομεν

$$\frac{E}{E'} = 2.$$

706. Μετάλλινος δίσκος διαμέτρου 12 cm καὶ πάχους 1,5 cm πρόκειται νὰ ἐπιστρωθῇ διὰ στρώματος νικελίου πάχους 0,2 mm. Ἂν ληφθῇ ὡς πυκνότης ρεύματος 0,25 A κατὰ τετραγωνικὸν ὑποδεκάμετρον, ζητεῖται: α) Τὸ ποσὸν τοῦ νικελίου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐλευθερωθῇ, β) Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ φαινομένου, γ) Ἡ καταναλισκομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, δεδομένου ὅτι ἐργαζόμεθα ὑπὸ τάσιν 3,5 V. Ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον νικελίου $\alpha = 1{,}0944$ gr/Ah. Πυκνότης νικελίου $\rho = 7{,}8$ gr/cm^3.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Χημικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1952.)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν πυκνότητα τοῦ νικελίου καὶ V τὸν ὄγκον αὐτοῦ, τότε ἡ μᾶζα τοῦ νικελίου, ἥτις θ' ἀποτεθῇ, εἶναι

$$m = \rho \cdot V. \qquad (1)$$

Ὁ ὄγκος V τοῦ νικελίου εὑρίσκεται ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν τελικὸν ὄγκον V_2 τοῦ δίσκου τὸν ἀρχικὸν ὄγκον αὐτοῦ V_1, ἤτοι

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi\,(\delta + 2\,l)^2}{4} \cdot (h + 2\,l) - \frac{\pi\,\delta^2}{4} \cdot h$$

ἢ

$$V = \frac{\pi}{4}\left((\delta + 2\,l)^2 \cdot (h + 2\,l) - \delta^2 \cdot h \right) \qquad (2)$$

ὅπου δ ἡ διάμετρος τοῦ δίσκου, h τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ l τὸ πάχος ἐπιστρώσεως τοῦ νικελίου.

Συνεπῶς ὁ τύπος (1) λόγῳ τῆς σχέσεως (2) γράφεται

$$m = \rho \cdot \frac{\pi}{4}\left((\delta + 2\,l)^2 \; (h + 2\,l) - \delta^2 \cdot h \right) \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3), $\delta = 12$ cm, $h = 1{,}5$ cm καὶ $l = 0{,}02$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{m = 49{,}433 \text{ gr.}}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἠλεκτρολύσεως

$$m = \alpha \cdot i \cdot t.$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ ἀποτιθεμένου ἐπὶ τῆς καθόδου νικελίου, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, t ὁ χρόνος ἠλεκτρολύσεως καὶ α τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ νικελίου, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς t λαμβάνομεν

$$t = \frac{m}{\alpha \cdot i} \qquad (4)$$

Ὡς γνωστὸν ἡ πυκνότης τοῦ ρεύματος j δίδεται ὑπὸ τοῦ πηλίκου

$$j = \frac{i}{S} \qquad (5)$$

ὅπου i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ S ἡ ἐπιφάνεια διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται τὸ ρεῦμα. Ὁ τύπος (5) δίδει

$$i = j \cdot S \qquad (6)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (4) λαμβάνομεν

$$t = \frac{m}{\alpha \cdot j \cdot S} \qquad (7)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δίσκου, θὰ ἔχωμεν

$$S = \pi \cdot \delta \cdot h + 2 \cdot \frac{\pi \cdot \delta^2}{4} = \pi \cdot \delta \cdot \left(h + \frac{\delta}{2}\right) \qquad (8)$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (7) δίδει

$$\underline{t = \frac{m}{\alpha \cdot j \cdot \pi \cdot \delta \cdot \left(h + \frac{\delta}{2}\right)}} \qquad (9)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (9), $m = 49{,}433$ gr, $\alpha = 1{,}0944$ gr/Ah, $j = 0{,}25$ A/dm^2 $= 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ A/cm^2, $\delta = 12$ cm καὶ $h = 1{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{t = 18{,}486 \text{ h} = 66520 \text{ sec.}}$$

γ) Ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια A δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = U \cdot i \cdot t \qquad (10)$$

ὅπου U εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐργαζόμεθα, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ t ὁ χρόνος τῆς ἠλεκτρολύσεως.

Ὁ τύπος (10) λόγῳ τῶν (6) καὶ (8), γίνεται

$$A = U \cdot j \cdot \pi \cdot \delta \cdot \left(h + \frac{\delta}{2}\right) \cdot t \qquad (11)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (11) $U = 3{,}5$ V, $j = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ A/cm², $t = 66520$ sec, $\delta = 12$ cm καὶ $h = 1{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$A = 5921{,}54 \text{ Joule.}$$

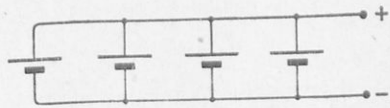
707. Συνδέονται ἐν παραλλήλῳ 4 ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ἔχοντα ἕκαστον ΗΕΔ 1,08 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης καὶ β) ἡ ΗΕΔ αὐτῆς.

Λύσις. α) Αἱ ἐσωτερικαὶ ἀντιστάσεις r τῶν στοιχείων εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ καὶ ἑπομένως ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $r_{ολ}$ αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{r_{ολ}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{4}{r} \qquad (1)$$

ὅτι εἶναι

$$r_{ολ} = \frac{r}{4} \qquad (2)$$



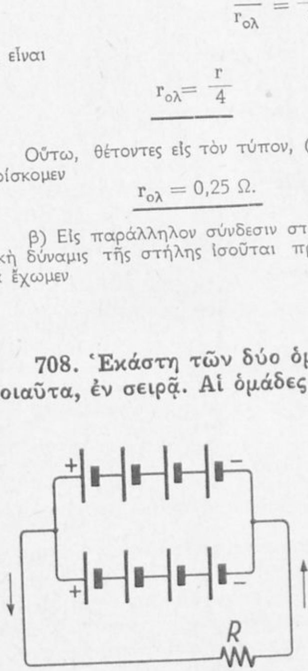
Οὕτω, θέτοντες εἰς τὸν τύπον, (2) $r = 1\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$r_{ολ} = 0{,}25\ \Omega.$$

β) Εἰς παράλληλον σύνδεσιν στοιχείων τῆς αὐτῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως e, ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς στήλης ἰσοῦται πρὸς τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν τοῦ ἑνὸς στοιχείου. Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$E = e = 1{,}08 \text{ V.}$$

708. Ἑκάστη τῶν δύο ὁμάδων στοιχείων τοῦ σχήματος περιέχει τέσσαρα τοιαῦτα, ἐν σειρᾷ. Αἱ ὁμάδες συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, ἕκαστον δὲ στοιχεῖον ἔχει ΗΕΔ 1,2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 0,5 Ω. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι R = 0,6 Ω. Ὑπολογίσατε τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 0,6 Ω.



Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν e τὴν ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου τῆς ὁμάδος, r τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ στοιχείου καὶ n τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τῆς ὁμάδος, τότε ἡ ΗΕΔ E′ ἑκάστης ὁμάδος εἶναι

$$E' = n \cdot e \qquad (1)$$

καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r′ αὐτῆς

$$r' = n \cdot r \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν m τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁμάδων, ἡ ΗΕΔ E τῆς προκυπτούσης στήλης θὰ εἶναι

$$E = E' = n \cdot e \qquad (3)$$

καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r_o αὐτῆς

$$r_o = \frac{r'}{m} = \frac{n \cdot r}{m} \qquad (4)$$

Συνεπῶς ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm, θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{E}{R + r_o} = \frac{n \cdot e}{R + \dfrac{n \cdot r}{m}} \qquad (5)$$

ἢ
$$i = \frac{m \cdot n \cdot e}{m \cdot R + n \cdot r} = \frac{N \cdot e}{m \cdot R + n \cdot r} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $N = 8$, $e = 1{,}2$ V, $n = 4$, $m = 2$, $R = 0{,}6\ \Omega$, $r = 0{,}5\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$i = 3 \text{ A}.$$

709. Δώδεκα ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα συνδέονται μικτῶς ὥστε νὰ ἀποτελοῦν τρεῖς ὁμάδας συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει 4 στοιχεῖα. Ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,5 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ἀντίστασις 3 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ΗΕΔ τῆς στήλης.

Λύσις. Ἔστω e ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ, n ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων ἑκάστης ὁμάδος καὶ m ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων.

Ἡ ΗΕΔ ἑκάστης ὁμάδος θὰ εἶναι προφανῶς $n \cdot e$ καὶ ἐπειδὴ τώρα αἱ ὁμάδες ἔχουν τὴν αὐτὴν ΗΕΔ καὶ εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ, ἕπεται ὅτι ἡ ΗΕΔ τῶν m ὁμάδων θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ αὐτή, ἤτοι

$$E = n \cdot e \qquad (1)$$

Ἡ ἀντίστασις ἑκάστης ὁμάδος, ἐπειδὴ περιλαμβάνει n στοιχεῖα ἐν σειρᾷ, θὰ εἶναι $n \cdot r$ καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀντιστάσεις αὗται $(n \cdot r)$ εἶναι ἐν ὅλῳ m καὶ ἔχουν συνδεθῆ ἐν παραλλήλῳ μεταξύ των, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον

$$\frac{1}{r_o} = \frac{1}{n \cdot r} + \frac{1}{n \cdot r} + \ldots + \frac{1}{n \cdot r} = \frac{m}{n \cdot r}$$

ὅτι ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις r_o αὐτῶν εἶναι

$$r_o = \frac{n \cdot r}{m} \qquad (2)$$

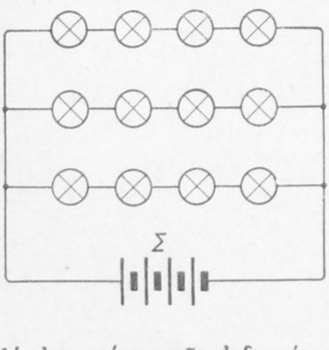
Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐὰν θέσωμεν, $n = 4$ καὶ $e = 1{,}5$ V, εὑρίσκομεν

$$E = 6 \text{ V}.$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐὰν θέσωμεν, $n = 4$, $r = 3\ \Omega$, $m = 3$, εὑρίσκομεν

$$r_o = 4\ \Omega.$$

710. α) Δώδεκα λυχνίαι πυρακτώσεως διατίθενται εἰς τρεῖς σειρὰς λυχνιῶν καὶ αἱ τρεῖς αὗται σειραὶ συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ἡ ἀντίστασις ἑκάστης λυχνίας εἶναι 6 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ἀγωγοῦ. β) Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο διαβιβάζεται τὸ ρεῦμα τὸ παρεχόμενον ὑπὸ στοιχείων συνδεσμολογημένων ἐν σειρᾷ. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,8 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις 0,2 Ω. Πόσα στοιχεῖα πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἵνα τὸ ρεῦμα τὸ διερχόμενον ἐξ ἑκάστης λυχνίας μὴ εἶναι ἐντάσεως μικροτέρας τῶν 1,2 A. γ) Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα τῶν στοιχείων τούτων ἵνα τὸ ρεῦμα εἶναι ἀκριβῶς 1,2 A. (Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἐνδιαμέσων ἀγωγῶν εἶναι ἀμελητέαι).



(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαὶ Χημικῶν Μηχανικῶν καὶ Ἀρχιτεκτόνων. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957.)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν ἑκάστης λυχνίας, τότε ἡ ἀντίστασις μιᾶς σειρᾶς ν λυχνιῶν θὰ εἶναι $\nu \cdot R$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀντίστασις R_o τῶν μ σειρῶν εἰς παράλληλον σύνδεσιν θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{\nu R} + \frac{1}{\nu R} + \frac{1}{\nu R} = \frac{\mu}{\nu R}$$

Δι' ἐπιλύσεως λοιπὸν ὡς πρὸς R_o λαμβάνομεν

$$R_o = \frac{\nu R}{\mu}$$

καὶ ἐπειδὴ $R = 6\ \Omega$, $\nu = 4$ καὶ $\mu = 3$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_o = 8\ \Omega.}$$

β) Ἐφ' ὅσον ἐξ ἑκάστης λυχνίας πρέπει νὰ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως ὄχι μικροτέρας ἀπὸ 1,2 A, ἔπεται ὅτι τὸ ἴδιον ρεῦμα θὰ διέρχεται καὶ ἐξ ἑκάστης σειρᾶς. Συνεπῶς τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον θὰ παρέχῃ ἡ στήλη, συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ Kirchhoff, θὰ εἶναι

$$i \geqslant 3 \cdot 1{,}2 = 3{,}6\ \text{A}.$$

Ἡ πηγὴ ἐξ ἄλλου ἐὰν πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ n στοιχεῖα ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r θὰ παρουσιάζῃ ἀντίστασιν $r_o = n \cdot r$ καὶ ἐὰν καλέσωμεν e τὴν ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου, τότε ἡ ΗΕΔ τῆς στήλης θὰ εἶναι $E = n \cdot e$. Ἄρα δι' ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$n\,e = (R_o + n \cdot r) \cdot i = R_o \cdot i + n \cdot r \cdot i$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς n λαμβάνομεν

$$n = \frac{R_o \cdot i}{e - r \cdot i}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, $R_o = 8\ \Omega$, $e = 1{,}8\ V$, $r = 0{,}2\ \Omega$ καὶ $i \geqslant 3{,}6$ A, εὑρίσκομεν ὅτι

$$n \geqslant 26{,}6$$

καὶ δεδομένου ὅτι μόνον ἀκέραιος ἀριθμὸς στοιχείων ὑπάρχει, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων εἶναι

$$\underline{n = 27.}$$

γ) Ἔστω ὅτι ἡ προστιθεμένη ἐν σειρᾷ ἀντίστασις πρέπει νὰ εἶναι R′. Ἵνα τὸ διερχόμενον ρεῦμα ἐξ ἑκάστης λυχνίας εἶναι ἀκριβῶς 1,2 A καὶ συνεπῶς τὸ παρεχόμενον ὑπὸ τῆς πηγῆς εἶναι $i = 3{,}6$ A, θὰ ἔχωμεν

$$n\,e = R_o \cdot i + n \cdot r \cdot i + R' \cdot i$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R′ λαμβάνομεν

$$R' = \frac{n \cdot e}{i} - R_o - n \cdot r$$

Οὕτω θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, $n = 27$, $E = 1{,}8\ V$, $R_o = 8\ \Omega$ καὶ $r = 0{,}2\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R' = 0{,}1\ \Omega.}$$

711. Εἴκοσι ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ὅμοια συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ τίθενται εἰς κύκλωμα κλειστὸν μὲ σταθερὰν ἀντίστασιν 8 Ω καὶ μεταβλητὴν ἀντίστασιν R′. Θέτομεν εἰς τὸ κύκλωμα ἀμπερόμετρον ἀμελητέας ἀντιστάσεως, τὸ ὁποῖον ὅταν R′ = 8 Ω, δεικνύει 1 A. Συνδέονται ἐν συνεχείᾳ τὰ στοιχεῖα εἰς δύο σει-

ρὰς τῶν 10 στοιχείων, αἱ ὁποῖαι συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ὅταν $R' = 23\ \Omega$ τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 0,5 Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου.

Λύσις. Ἔστω N στοιχεῖα, ἕκαστον ΗΕΔ e καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r, συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, θὰ ἔχωμεν

$$i_1 = \frac{N \cdot e}{R_1 + N \cdot r} \qquad (1)$$

ὅπου i_1 ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ $R_1 = R + R'$ ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις

Ἐὰν ἀκολούθως τὰ N στοιχεῖα τὰ συνδέομεν εἰς m σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει n στοιχεῖα, τότε ἡ ἀντίστασις ἑκάστης σειρᾶς θὰ εἶναι $n \cdot r$ καὶ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις r_o τῶν m σειρῶν

$$r_o = \frac{n \cdot r}{m}$$

Ἐπίσης ἡ ὁλικὴ ΗΕΔ τῆς σχηματιζομένης στήλης θὰ εἶναι $n \cdot e$ καὶ συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm θὰ ἔχωμεν

$$i_2 = \frac{n \cdot e}{R_2 + \frac{n \cdot r}{m}} = \frac{m \cdot n \cdot e}{m \cdot R_2 + n \cdot r} = \frac{N \cdot e}{m \cdot R_2 + n \cdot r} \qquad (2)$$

ὅπου $R_2 = R + R'$ ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις καὶ $N = m \cdot n$. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$i_1 \cdot R_1 + i_1 \cdot N \cdot r = i_2 \cdot m \cdot R_2 + i_2 \cdot n \cdot r \qquad (3)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς r, προκύπτει

$$r = \frac{i_2 \cdot m \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1}{i_1 \cdot N - i_2 \cdot n} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4), $m = 2$, $N = 20$, $n = 10$, $R_1 = 8\ \Omega + 8\ \Omega = 16\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega + 23\ \Omega = 31\ \Omega$, $i_1 = 1$ A, $i_2 = 0{,}5$ A, εὑρίσκομεν

$$r = 1\ \Omega.$$

Ἀκολούθως ἐκ τῆς σχέσεως (1) εὑρίσκομεν

$$E = 1{,}8\ V.$$

712. Συστοιχία συσσωρευτῶν, ΗΕΔ 20 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}1\ \Omega$ πρόκειται νὰ φορτισθῇ εἰς δίκτυον τῶν 110 V. Ποία ἀντίστασις R πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐν σειρᾷ μὲ τὴν συστοιχίαν ὅπως περιορίσῃ τὸ ρεῦμα εἰς 15 Α.

Λύσις. Ἔστω U ἡ τάσις τοῦ δικτύου, E ἡ ΗΕΔ τῆς συστοιχίας, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος φορτίσεως καὶ R ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν. Κατὰ τὴν φόρτισιν ἡ συστοιχία θὰ ἀναπτύξῃ ἀντιηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E' = E$ καὶ συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{U - E'}{R + r} \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R, προκύπτει

$$R = \frac{U - E'}{i} - r \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $U = 110$ V, $E' = 20$ V, $i = 15$ A καὶ $r = 0{,}1\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$R = 5{,}9\ \Omega.$$

713. Συστοιχία συσσωρευτῶν ἔχει χωρητικότητα 20 Ah. Πόσα Ἀμπὲρ δύναται νὰ χορηγήσῃ, ἐὰν ἡ ἐκφόρτισις διαρκῇ 10 h.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης ἑνὸς συσσωρευτοῦ εἶναι τὸ φορτίον q τὸ ὁποῖον δύναται οὗτος ν' ἀποδώσῃ ἐκφορτιζόμενος. Ἐὰν ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφόρτισιν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι i καὶ διαρκεῖ αὕτη ἐπὶ χρόνον t, θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{q}{t}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον, $q = 20$ A h καὶ $t = 10$ h, εὑρίσκομεν

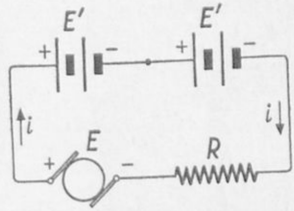
$$i = 2 \text{ A.}$$

714. Δύο συσσωρευταί, ἕκαστος ΗΕΔ 12 V, χωρητικότητος 150 Ah καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, συνδέονται ἐν σειρᾷ ἵνα φορτισθοῦν ὑπὸ γεννητρίας, τάσεως 110 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ζητεῖται α) ἡ ἀντίστασις ἡ ὁποία πρέπει νὰ παρεντεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα ἵνα ἡ φόρτισις γίνῃ ὑπὸ τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην ἔντασιν, β) ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων πυρακτώσεως ἰσχύος 300 W καὶ τάσεως λειτουργίας 110 V, οἱ ὁποῖοι συνδεόμενοι ἐν παραλλήλῳ δύνανται νὰ ἀντικαταστήσουν τὴν ἀντίστασιν ταύτην.

Λύσις. Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν καὶ E ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς.

Κατὰ τὴν φόρτισιν ἕκαστος συσσωρευτὴς ἀναπτύσσει ἀντι-ΗΕΔ E′, ἡ ὁποία εἶναι ἡ δοθεῖσα ΗΕΔ αὐτοῦ 12 V.

Ἐπίσης ἡ μεγίστη ἐπιτρεπομένη ἔντασις φορτίσεως, εἰς Ampère, ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/10 τῶν ἀμπερωρίων του καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι



$$i = \frac{150}{10} = 15 \text{ A.}$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 2ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα τοῦ σχήματος λαμβάνομεν

$$E - 2E' = i \cdot R \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R, προκύπτει

$$R = \frac{E - 2E'}{i} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2), $E = 110$ V, $E' = 12$ V καὶ $i = 15$ A, εὑρίσκομεν

$$R = 5{,}73\ \Omega.$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν R′ τὴν ἀντίστασιν ἑκάστου λαμπτῆρος καὶ U τὴν τάσιν λειτουργίας τούτου, τότε ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος $N = U^2/R'$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$R' = \frac{U^2}{N} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ λαμπτῆρες συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ πρέπει νὰ δίδουν ὁλικὴν ἀντίστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀντίστασιν R, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} + \cdots + \frac{1}{R'} = \frac{x}{R'} \qquad (4)$$

ὅπου x ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τύπων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$x = \frac{U^2}{N \cdot R} \qquad (5)$$

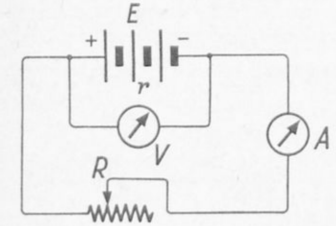
Θέτοντες, $U = 110$ V, $N = 300$ W, $R = 5{,}73\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$x = 7 \text{ λαμπτῆρες.}$$

715. Συστοιχία ἐκ τριῶν συσσωρευτῶν συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς ρυθμιζομένην ἀντίστασιν καὶ ἀμπερόμετρον, ἐνῷ εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας συνδέεται βολτόμετρον. Δίδομεν εἰς τὴν ρυθμιζομένην ἀντίστασιν ὡρισμένην τιμήν, ὅτε βλέπομεν ὅτι τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 1 A καὶ τὸ βολτόμετρον 3,8 V. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ρυθμιζομένην ἀντίστασιν ἄλλην τιμήν, τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 6,0 A καὶ τὸ βολτόμετρον 3,2 V. Ζητεῖται ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου συσσωρευτοῦ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαὶ Χημικῶν καὶ Μεταλλειολόγων Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1955).

Λύσις. Ἔστω E ἡ ΗΕΔ ἑκάστου συσσωρευτοῦ, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ, R_1 ἡ τιμὴ τῆς ρυθμιζομένης ἀντιστάσεως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ R_2 εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.



Οὕτω θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$n \cdot E = i_1 \cdot (R_1 + n \cdot r) = i_1 \cdot R_1 + i_1 \cdot n \cdot r \qquad (1)$$

εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν

$$n \cdot E = i_2 \cdot (R_2 + n \cdot r) = i_2 \cdot R_2 + i_2 \cdot n \cdot r \qquad (2)$$

ἢ λόγῳ τῆς (1) $n \cdot E = U_1 + i_1 \cdot n \cdot r$ (3)

καὶ λόγῳ τῆς (2) $n \cdot E = U_2 + i_2 \cdot n \cdot r$ (4)

ὅπου U_1 καὶ U_2 εἶναι αἱ τάσεις εἰς τὰ ἄκρα τῆς συστοιχίας κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις.

Ἀφαιροῦντες τὴν (3) ἀπὸ τὴν (4) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$0 = U_2 - U_1 + n \cdot r \cdot (i_2 - i_1)$$

ἐξ οὗ, δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς r, προκύπτει

$$r = \frac{U_1 - U_2}{n \cdot (i_2 - i_1)} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $U_1 = 3{,}8$ V, $i_1 = 1$ A, $U_2 = 3{,}2$ V, $i_2 = 6$ A καὶ $n = 3$, εὑρίσκομεν

$$r = 0{,}04\ \Omega.$$

Ἀκολούθως ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν

$$E = \frac{U_1 + i_1 \cdot n \cdot r}{n} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6) τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν, εὑρίσκομεν

$$E = 1{,}307 \text{ V.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

716. Πόσα γραμμάρια νιτρικοῦ ἀργύρου ἀποσυντίθενται ὑπὸ ρεύματος 1 A ἐντὸς μιᾶς ὥρας. Ἀτομικὸν βάρος O = 16, N = 14. (Ἀπ. 6,3 gr.)

717. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ὅπως, ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,5 A, ἀποτεθῇ στρῶμα ἀργύρου πάχους 0,02 cm ἐπὶ ἐπιφανείας 200 cm². Εἰδικὸν βάρος ἀργύρου 10,5 gr*/cm³. (Ἀπ. 20 h 52 min)

718. Πόσα γραμμάρια κασσιτέρου καὶ πόσα ψευδαργύρου θὰ ἀποτίθενται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ Coulomb, ὅταν τὰ ἀνωτέρω Coulomb ἀποθέτουν 2 gr ἀργύρου. Δίδονται: Χημικὸν ἰσοδύναμον ἀργύρου 107,88, κασσιτέρου 59,35, ψευδαργύρου 32,69. ('Απ. 1,10 gr Sn, 0,61 gr Zn.)

719. 'Ηλεκτρικὴ συσκευὴ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου βυθίζονται δύο ἠλεκτρόδια ἐκ χαλκοῦ, αἱ μᾶζαι τῶν ὁποίων εἶναι ἀρχικῶς ἴσαι. Διαβιβάζεται δι' αὐτῶν ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως. Μετὰ μίαν ὥραν αἱ μᾶζαι τῶν ἠλεκτροδίων διαφέρουν κατὰ 3,16 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἐὰν τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 63,6 (δισθενὲς εἰς τὸν $CuSO_4$). 'Υπενθυμίζεται ὅτι 96 500 Cb ἐλευθεροῦν 1 gr ὑδρογόνου. ('Απ. 1,33 A.)

720. 'Ηλεκτρικὸν ρεῦμα διέρχεται ἐπὶ μίαν ὥραν ἀπὸ δύο βολτάμετρα νιτρικοῦ ἀργύρου καὶ θειϊκοῦ νατρίου, συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ καὶ ἐναποτίθενται 1,25 gr ἀργύρου. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) 'Ο ὄγκος τῶν ἐκλυομένων εἰς τὰ ἠλεκτρόδια ἀερίων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα συλλέγονται ὑπὸ τὸ ὕδωρ, εἰς τὴν θερμοκρασίαν 18° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 765 Torr. β) Αἱ μᾶζαι τῶν ἐλευθερουμένων ἀερίων. 'Η τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἰς 18° C εἶναι 15,3 Torr.

('Απ. α' $O_2 = 70$ cm³, $H_2 = 140$ cm³. β) $O_2 = 0{,}0925$ gr, $H_2 = 0{,}0115$ gr.)

721. Διὰ κυκλώματος τροφοδοτοῦντος βολτάμετρον διὰ διαλύματος θειϊκοῦ ψευδαργύρου διέρχονται εἰς ὡρισμένον χρόνον $4 \cdot 10^{25}$ ἠλεκτρόνια. Πόσα γραμμάρια ψευδαργύρου ἐλευθεροῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν κάθοδον. 'Ατομικὸν βάρος ψευδαργύρου 65,38, σθένος 2. ('Απ. 2156 gr.)

722. 'Επὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 1,4 A ἀπὸ διάλυμα θειϊκοῦ νικελίου ($NiSO_4$) διὰ νὰ ἀποτεθῇ ἐπὶ τεμαχίου ἐπιφανείας 2,8 dm² στρῶμα 0,2 mm πάχους. Εἰδικὸν βάρος νικελίου 8,6 gr*/cm³ καὶ ἀτομικὸν βάρος 59.

('Απ. t = 112 528 sec ἢ 31 h 15 min 28 sec.)

723. Δύο βολτάμετρα συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ διαρρέονται ὑπὸ ρεύματος 0,3 A. Τὸ πρῶτον ἔχει ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου καὶ περιέχει διάλυμα ἐκ καυστικοῦ νατρίου, τὸ δεύτερον ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκὸν καὶ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ προϊόντα τῆς ἠλεκτρολύσεως καὶ νὰ καθορισθοῦν αἱ ποσότητες, ὅταν τὸ ρεῦμα διέρχεται ἐπὶ χρόνον 35 min. 'Ατομικὸν βάρος χαλκοῦ 63,5.

('Απ. 73 cm³ H_2, 36,5 cm³ O_2, 0,207 gr Cu.)

724. Εἰς βολτάμετρον διὰ θειϊκοῦ χαλκοῦ, μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ χαλκοῦ, ἐντὸς 4 ὡρῶν ἐναποτίθενται 11,86 gr χαλκοῦ ἐπὶ τῆς καθόδου. 1) Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον διέρχεται διὰ τῆς συσκευῆς καὶ πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. 2) 'Η συσκευὴ ἔχει ἀντίστασιν 3 Ω. Ποῖον εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἐκλυόμενον κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος. 'Υπενθυμίζεται ὅτι 96 500 Cb ἐλευθεροῦν 1 γραμμοϊσοδύναμον. 'Ατομικὸν βάρος χαλκοῦ 63,6.

('Απ. 1' q = 36 000 Cb, i = 2,5 A. 2' Q = 64,6 kcal.)

725. Τετραγωνικὴ ὀρειχαλκίνη πλὰξ πλευρᾶς 5 cm δέον νὰ περικαλυφθῇ, δι' ἠλεκτρολυτικῆς ὁδοῦ, ὑπὸ στρώματος νικελίου πάχους 0,2 mm. 'Η χρησιμοποιουμένη ἔντασις ρεύματος εἶναι 1,1 A. 'Επὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διαβιβάζεται τὸ ρεῦμα. (Σθένος Ni 2, ἀτομικὸν βάρος 58,69, πυκνότης 8,8 gr/cm³.)

('Απ. 7 h 18 min.)

726. Εἰς δύο παραλλήλως συνδεδεμένας ἠλεκτρολυτικὰς συσκευὰς ἀποχωρίζονται εἰς τὴν πρώτην μὲν χαλκός, ἐκ διαλύματος θειϊκοῦ χαλκοῦ, εἰς τὴν δευτέραν δὲ μόλυβδος, ἐκ διαλύματος ὀξεικοῦ μολύβδου. "Εν βολτάμετρον διὰ νιτρικοῦ ἀργύρου εἶναι συνδεδεμένον ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ σύστημα τῶν προηγουμένων συσκευῶν. Ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀποτίθενται 3,560 gr ἀργύρου καὶ 0,685 gr χαλκοῦ. Πόσος μόλυβδος ἀποχωρίζεται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. (Ἀπ. 1,186 gr.)

727. Εἰς ἠλεκτρολυτικὴν συσκευὴν θειϊκοῦ χαλκοῦ ($CuSO_4$), χρησιμοποιεῖται ρεῦμα ἐντάσεως 2000 A διὰ τὴν παραγωγὴν καθαροῦ χαλκοῦ. Ὑπολογίσατε τὴν ἐτησίαν παραγωγὴν εἰς τόννους, ἐὰν ἡ συσκευὴ ἐργάζεται κατὰ μέσον ὅρον 100 ὥρας κατὰ ἑβδομάδα. Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ὑδρογόνου εἶναι 0,000 010 44, τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 63,6 καὶ ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ 8,9 gr/cm^3. (Ἀπ. 12,24 τόννοι.)

728. Ρεῦμα διέρχεται μέσῳ δύο βολταμέτρων συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Τὸ ἓν ἔχει ἠλεκτρόδια ἐξ ἀργύρου καὶ διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου, τὸ ἕτερον ἠλεκτρόδια ἐκ χαλκοῦ καὶ διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ. Μετὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος, ἔχουν ἀποτεθῆ 3,6 gr ἀργύρου. Πόσος χαλκὸς ἔχει ἐναποτεθῆ εἰς τὸ ἕτερον βολτάμετρον. Ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἀργύρου = 0,001 118, τοῦ ὑδρογόνου = 0,000 010 44, ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63,6. (Ἀπ. 1,07 gr.)

729. Πόση ἡ ἐναποτιθεμένη μᾶζα ἀργύρου εἰς 10 min ἐπὶ τῆς καθόδου κατὰ τὴν διέλευσιν ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, διὰ διαλύματος νιτρικοῦ ἀργύρου, ὅπερ χορηγεῖται ὑπὸ δύο συσσωρευτῶν συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. α) Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἠλεκτρόδια εἶναι ἐκ λευκοχρύσου. β) Ὅταν τὰ ἠλεκτρόδια εἶναι ἐξ ἀργύρου. Ἡ ἀντίστασις ἠλεκτρολύτου καὶ ἠλεκτροδίων εἶναι 0,5 Ω, ἡ ἀντίστασις συσσωρευτῶν μηδὲν καὶ ἡ ΗΕΔ ἑκάστου συσσωρευτοῦ 2 V, ἡ δὲ ΗΕΔ ἐκ πολώσεως 1,4 V. (Ἀπ. α′ 3,488 gr. β′ 5,366 gr.)

730. Ἕκαστον ἐκ πέντε στοιχείων ἔχει ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,6 Ω. Πόσον ρεῦμα παρέχουν εἰς ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν 17 Ω, α) ὅταν συνδέωνται ἐν σειρᾷ, β) ὅταν συνδέωνται ἐν παραλλήλῳ. (Ἀπ. α′ 0,5 A, β′ 0,117 A.)

731. Δέκα στοιχεῖα, ἕκαστον ΗΕΔ 1,6 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1,2 Ω, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 1,88 Ω. α) Ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος, τὴν ΗΕΔ τῆς συστοιχίας καὶ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν. β) Ἐὰν τὰ δέκα στοιχεῖα εὑρίσκωνται ἐν σειρᾷ καὶ συνδεθοῦν ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν 1,88 Ω, ὑπολογίσατε τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος, τὴν ὁλικὴν ΗΕΔ, καὶ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος. (Ἀπ. α′ 2 Ω, 1,6 V, 0,8 A. β′ 13,9 Ω, 16 V, 1,15 A.)

732. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον δύναται νὰ ἀποδώσῃ στήλη, τῆς ὁποίας ὁ ἀρνητικὸς πόλος εἶναι ράβδος ἐκ ψευδαργύρου βάρους 50 gr*. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ψευδαργύρου εἶναι 65,4, τὸ σθένος 2 καὶ τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον 96 500 gr/Cb. Ἡ στήλη ὑποτίθεται μὴ πολωμένη, ΗΕΔ 1,14 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 2 Ω. Ζητεῖται ποία εἶναι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον. Ὑποθέτοντες ὅτι ἔχομεν 12 ὁμοίας στήλας πρὸς τὴν ἀνωτέρω, πῶς πρέπει αὗται νὰ συνδεθοῦν διὰ νὰ ληφθῆ ἡ μεγίστη ἔντασις εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως 1,5 Ω. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μεγίστου τούτου ρεύματος καὶ πόσον χρόνον θὰ διαρκέσῃ.

(Ἀπ. 1′ $q = 147600$ Cb $= 41$ A h, 2′ $i_{\mu\varepsilon\gamma} = 0{,}57$ A, $t = 72$ h,
3′ 4 σειραὶ τῶν 3 στοιχείων ἑκάστη, $i = 1{,}14$ A, $t = 1{,}44$ h.)

733. Συνδέονται 20 ὅμοια στοιχεῖα στήλης. Ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,8 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις 1 Ω. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιέχει γαλβανόμετρον ἔχον ἀντίστασιν 8 Ω μεταξὺ τῶν ἄκρων τῶν πόλων τοῦ ὁποίου παρεμβάλλεται διακλάδωσις ἀντιστάσεως 8/9 Ω. Ζητεῖται 1) Νὰ προσδιορισθῆ ὁ τρόπος συνδέσεως τῶν στοιχείων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπόκλισις τοῦ γαλβανομέτρου νὰ εἶναι μεγίστη. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως, ἡ ὁποία διέρχεται τότε τὸ γαλβανόμετρον. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων συνδέσεως θεωροῦνται ἀμεληταί.

('Απ. 1' 5 σειραὶ τῶν 4 στοιχείων ἑκάστη. 2' 0,45 A.)

734. Συστοιχία ἐκ n στοιχείων ἑκάστη, ΗΕΔ 1,8 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,1 Ω, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ, τροφοδοτεῖ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀποτελούμενον ἐξ 8 λυχνιῶν συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ, ἑκάστη τῶν ὁποίων λειτουργεῖ ὑπὸ ἔντασιν 1 A καὶ ἔχει ἀντίστασιν 50 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ n. ('Απ. n = 50.)

735. Δύο ξηρὰ στοιχεῖα ΗΕΔ 2,00 V καὶ 1,98 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,20 Ω καὶ 0,03 Ω ἀντιστοίχως, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ ἀκολούθως κλείονται εἰς κύκλωμα πρὸς ἀντίστασιν 0,8 Ω. α) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν ἀντίστασιν, ὡς καὶ εἰς ἓν ἕκαστον στοιχεῖον. β) Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως ἓν μόνον ἐκ τῶν δύο στοιχείων παρέχει εἰς αὐτὴν ρεῦμα.

('Απ. α' 2,4 A, 0,4 A, 2 A. β' 19,8 Ω, i = 0,1 A.)

736. Ἔχει τις 6 στοιχεῖα ἔχοντα ἕκαστον ΗΕΔ E = 1,5 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 0,5 Ω. Συνδέονται 3 σειραὶ τῶν δύο στοιχείων ἑκάστη. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα. 2) Τὸ βάρος τοῦ ψευδαργύρου τὸ δαπανώμενον εἰς τὸ σύνολον τῶν στοιχείων, ἀνὰ 1 h λειτουργίας. Ἀτομικὸν βάρος ψευδαργύρου 65,4.

('Απ. 1' 2,25 A. 2' 5,49 gr*.)

737. Στήλη φανοῦ τσέπης σχηματίζεται ἀπὸ τρία ὅμοια στοιχεῖα συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Βολτόμετρον συνδεδεμένον εἰς τὰ ἄκρα τῆς στήλης δεικνύει 4,5 V. Ἐὰν ἡ στήλη τροφοδοτῇ λυχνίαν φωτισμοῦ ἔχουσαν ἀντίστασιν 17,5 Ω, τὸ βολτόμετρον δεικνύει τότε 3,5 V. Ζητεῖται: α) Πόση εἶναι ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑνὸς ἑκάστου στοιχείου τῆς στήλης. 2) Πόση εἶναι ἡ ἔκλυσις θερμότητος εἰς τὴν λυχνίαν καὶ τὸ βάρος τοῦ ἠλεκτρολυομένου ψευδαργύρου, τὸ χρησιμοποιούμενον ἀπὸ ἕκαστον στοιχεῖον, μετὰ 5 h λειτουργίας τῆς λυχνίας. 3) Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ στήλη αὐτή. Ἀτομικὸν βάρος ψευδαργύρου 65,4. Ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον 96 500 gr/Cb.

('Απ. 1' 1,5 V, 1,67 Ω. 2' 3 kcal, 1,22 gr*. 3' 2,02 W.)

738. Τέσσαρες ὁμάδες στοιχείων, ἑκάστη περιέχουσα 5 στοιχεῖα ἐν σειρᾷ, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ἕκαστον στοιχεῖον ἔχει ΗΕΔ 1,8 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,8 Ω. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 2 Ω. Ὑπολογίσατε τὴν ΗΕΔ τοῦ συστήματος τῶν στοιχείων, τὴν ἀντίστασιν τοῦ συστήματος τῶν στοιχείων, τὸ ρεῦμα εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 2 Ω καὶ τὸ ρεῦμα εἰς ἕκαστον στοιχεῖον.

('Απ. 9 V, 1 Ω, 3 A, 0,75 A.)

739. Δύο ξηρὰ στοιχεῖα, ἕκαστον ΗΕΔ 1,2 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,4 Ω, συνδέονται οὕτως, ὥστε νὰ παρέχουν μέγιστον ρεῦμα εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα. Κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ συνδεθοῦν τὰ στοιχεῖα, ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι α) 0,3 Ω, β) 2 Ω. ('Απ. α' ἐν παραλλήλῳ, β' ἐν σειρᾷ.)

740. Ὀκτὼ συσσωρευταὶ τῶν 2 V, συνδεδεμένοι ἐν σειρᾷ, πρόκειται νὰ φορτισθοῦν διὰ πηγῆς τῶν 120 V. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι 0,02 Ω καὶ τὸ φορτίζον ρεῦμα πρέπει νὰ εἶναι 25 A. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τοὺς συσσωρευτάς. ('Απ. 4 Ω.)

741. Δύο ξηρὰ στοιχεῖα ΗΕΔ 1,5 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,6 Ω πρέπει νὰ παρέχωσι μέγιστον ρεῦμα εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως 0,5 Ω. Ζητεῖται:

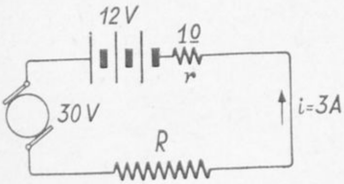
α) Πῶς πρέπει νὰ συνδεθοῦν τὰ στοιχεῖα καὶ β) πόση ἡ ἔντασις τοῦ μεγίστου ρεύματος.
(᾽Απ. ᾽Εν παραλλήλῳ. 1,87 A.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ ᾽Αρχιτεκτόνων, 1954.)

742. Φορτίζει τις συσσωρευτὴν ἀντιστάσεως 0,04 Ω μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 5 A ἐπὶ 18 ὥρας. ῾Η διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα εἶναι 2,2 V. ᾽Εκφορτίζεται ἐν συνεχείᾳ καὶ παρέχει ρεῦμα 1,5 A ἐπὶ 54 ὥρας. ῾Η διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα εἶναι 1,94 V. 1) Ποία εἶναι ἡ ἀντι-ΗΕΔ κατὰ τὴν φόρτισιν καὶ πόση εἶναι ἡ ἀπορροφουμένη ἐνέργεια. 2) Ποία εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ, λειτουργοῦντος ὡς γεννήτρια.
(᾽Απ. 1΄ 2 V, 648 000 Joule. 2΄ 2 V.)

743. Ρεῦμα ἐντάσεως 40 A, ἐκ γεννητρίας προερχόμενον, φορτίζει συστοιχίαν συσσωρευτῶν τῶν 12 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,04 Ω. ᾽Αντίστασις τῶν 2 Ω συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ τὴν συστοιχίαν. ῾Υπολογίσατε α) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν ἀντίστασιν τῶν 2 Ω, β) τὴν πτῶσιν τάσεως εἰς τὴν συστοιχίαν, τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν, γ) τὴν ἔνδειξιν βολτομέτρου συνδεδεμένου εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας ὅταν φορτίζεται αὕτη, δ) ποία ἡ ἔνδειξις βολτομέτρου τιθεμένου εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας ὅταν ἐκφορτίζεται, παρέχουσα 20 A.
(᾽Απ. α΄ 80 V. β΄ 1,6 V. γ΄ 13,6 6 V. δ΄ 11,2 V.)

744. Συστοιχία συσσωρευτῶν, τάσεως 24 V φορτίζεται ἀπὸ ἠλεκτρικὴν πηγὴν τάσεως 110 V διὰ παρεμβολῆς ἀντιστάσεως. ῾Η ἔντασις εἶναι 10 A. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπὸ τῆς συστοιχίας παραλαμβανόμενον ἔργον εἰς κιλοβατώρια διὰ λειτουργίαν 4 ὡρῶν καὶ τὸ ποσὸν τοῦ καταστρεφομένου ἔργου εἰς θερμίδας. ῎Αν ἡ τιμὴ τοῦ κιλοβατωρίου εἶναι 0,60 δραχμαί, πόση ἡ εἰς δραχμὰς ὁλικὴ δαπάνη διὰ τὴν φόρτισιν τῆς συστοιχίας.
(᾽Απ. 0,96 kWh, $2{,}88 \cdot 10^3$ kcal, 2,64 δρχ.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

745. Κύκλωμα περιλαμβάνει γεννήτριαν συνεχοῦς ρεύματος 30 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως καὶ ἐν σειρᾷ συσσωρευτὴν 12 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω, τὸν ὁποῖον φορτίζει μέσῳ ἀντιστάσεως R, συνδεδεμένης ἐν σειρᾷ εἰς τὸ κύκλωμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος φορτίσεως νὰ εἶναι 3 A. Ποῖον ποσὸν τῆς ὑπὸ τῆς γεννητρίας παρεχομένης ἰσχύος καταναλίσκεται ἀνωφελῶς.
(᾽Απ. 5 Ω. 36 W.)



(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

746. Συσσωρευτὴς ΗΕΔ 6,5 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,02 Ω συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς ἀντίστασιν x καὶ ἀκολούθως κλείεται ἐν σειρᾷ πρὸς δίκτυον ὑπὸ τάσιν 110 V. Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον παρέχεται τότε εἰς τὸν συσσωρευτὴν εἶναι ἐντάσεως 4 A κατὰ μέσον ὅρον. Οὕτως ὁ συσσωρευτὴς πληροῦται εἰς 15 h. Ζητεῖται α) ἡ ἀντίστασις x, β) ἡ δαπάνη διὰ τὴν πλήρωσιν τοῦ συσσωρευτοῦ, δεδομένου ὅτι τὸ κιλοβατώριον παρέχεται πρὸς 800 δραχμὰς καὶ γ) τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας τὸ ὁποῖον καταναλίσκεται εἰς τὴν ἀντίστασιν x.
(᾽Απ. α΄ 25,85 Ω, β΄ 4968 δρχ. γ΄ $22{,}35 \cdot 10^6$ Joule.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων-᾽Ηλεκτρολόγων, 1950.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

747. Πόσα γραμμάρια ψευδαργύρου ἀποτίθενται ἠλεκτρολυτικῶς ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A εἰς 30 min. Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ψευδαργύρου εἶναι 0,000 338 7 gr/Cb.

748. Ἡ κάθοδος βολταμέτρου διὰ χαλκοῦ αὐξάνει κατὰ 1,53 gr χαλκοῦ ἐντὸς 30 min. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος. Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,000 329 2 gr/Cb.

749. Δύο βολτάμετρα, τὸ ἓν διὰ νιτρικοῦ ἀργύρου καὶ τὸ ἕτερον δι' ὀξεικοῦ μολύβδου, συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ δι' αὐτῶν διοχετεύεται συνεχὲς ἠλεκτρικὸν ρεῦμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐλευθερουμένων μαζῶν ἀργύρου καὶ μολύβδου.

750. Ρεῦμα ἐντάσεως 0,5 A διέρχεται διὰ βολταμέτρου ὀξινισθέντος ὕδατος καὶ διὸ βολταμέτρου νιτρικοῦ ἀργύρου. 1) Πόσος θὰ εἶναι ὁ ὁλικὸς ὄγκος τοῦ ἐκλυομένου ἀερίου εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ὥρας. 2) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέλθῃ τὸ ρεῦμα ἵνα ἐλευθερωθοῦν 3,24 gr ἀργύρου.

751. Ρεῦμα 0,5 A διέρχεται ἐπὶ χρόνον 25 min ἀπὸ ἀραιὸν διάλυμα θειϊκοῦ ὀξέος, μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι ὑδρογόνου καὶ ὀξυγόνου οἱ ὁποῖοι συλλέγονται εἰς τὰ ἠλεκτρόδια, μετρηθέντες εἰς 20^0 C καὶ 750 Torr πίεσιν.

752. Προτίθεταί τις νὰ ἐπιμεταλλώσῃ ἐξάρτημα αὐτοκινήτου ἔχον ἐπιφάνειαν 1500 cm^2, δι' ἐναποθέσεως στρώματος χρωμίου πάχους 0,04 mm. 1) Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ διέλθῃ μέσῳ τοῦ βολταμέτρου. 2) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος, ἐὰν θέλῃ τις νὰ πραγματοποιήσῃ τὴν χρωμίωσιν εἰς χρόνον 10 ὡρῶν. Πυκνότης χρωμίου 6,92 gr/cm^3, Ἀτομικὸν βάρος χρωμίου 52, Σθένος 3.

753. Δύο βολτάμετρα περιέχουν, τὸ πρῶτον διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου καὶ τὸ δεύτερον διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ εἰς τὸ αὐτὸ κύκλωμα. Μετὰ πάροδον 26 min καὶ 48 sec ἐναπετέθησαν 3,6 gr ἀργύρου ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου νιτρικοῦ ἀργύρου. Ζητοῦνται 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, 2) Τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ τὸ ἐναποτιθέμενον ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ δευτέρου βολταμέτρου. Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου 108 καὶ χαλκοῦ 63,6.

754. Ἐπιθυμεῖ τις νὰ καλύψῃ ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν πλακὸς σχήματος τετραγώνου, πλευρᾶς 1 dm καὶ πάχους 1 cm ἀπὸ στρῶμα χαλκοῦ 0,1 mm πάχους. Διαθέτει πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν 6 στοιχεῖα Daniell. Ἡ ἀντίστασις r ἑκάστου στοιχείου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀντίστασιν τοῦ χρησιμοποιουμένου κυκλώματος. Ποία θὰ εἶναι ἡ μέθοδος συνδέσεως ἡ πλέον συμφέρουσα καὶ πόση θὰ εἶναι ἡ διάρκεια λειτουργίας. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ 63, πυκνότης χαλκοῦ 8,9 gr/cm^3, ΗΕΔ στοιχείου 1,1 V καὶ $r = 1\ \Omega$.

755. Τὸ αὐτὸ ρεῦμα διαρρέει βολτάμετρα μὲ ἠλεκτρόδια ἀπὸ λευκόχρυσον καὶ περιέχοντα: α) ὀξινισθὲν ὕδωρ β) νιτρικὸν ἄργυρον, γ) διχλωριοῦχον σίδηρον καὶ δ) τριχλωριοῦχον σίδηρον. Ὅταν διακοπῇ τὸ ρεῦμα ἔχουν ἀποτεθῇ 2 gr ἀργύρου. Πόσαι εἶναι αἱ μᾶζαι τῶν ἄλλων στοιχείων αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐλευθερωθῇ. Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου 108, σιδήρου 56, χλωρίου 35,5, ὀξυγόνου 16. Σθένη: νιτρικὸς ἄργυρος = 1, διχλωριοῦχος σίδηρος = 2, τριχλωριοῦχος σίδηρος = 3.

756. Δέκα στοιχεῖα Bunsen ΗΕΔ 1,9 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,3 Ω συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ τροφοδοτοῦν ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀποτελούμενον ἐκ δύο ἀντιστάσεων $R_1 = 5\ \Omega$ καὶ $R_2 = 6\ \Omega$, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

757. Πῶς πρέπει νὰ συνδεθοῦν 48 στοιχεῖα Bunsen, ἕκαστον ΗΕΔ 1,9 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,2 Ω, ἵνα παρέχουν μέγιστον ρεῦμα ἐπὶ ἀντιστάσεως 2,4 Ω.

758. Δεκαπέντε στοιχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,4 Ω ὑποδιαιροῦνται εἰς τρεῖς ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 5 στοιχεῖα συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Αἱ 3 ὁμάδες συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τροφοδοτοῦν ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 6 Ω, ὑπὸ ἔντασιν 0,5 Α. Πόση ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου.

759. Ἀμπερόμετρον καὶ ρυθμιζομένη ἀντίστασις R συνδέονται πρὸς τοὺς πόλους ξηροῦ στοιχείου. Διὰ τιμὴν τῆς ρυθμιζομένης ἀντιστάσεως R = 1,55 Ω ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου εἶναι 1 Α, ἐνῷ διὰ R = 3,35 Ω ἡ ἔνδειξις εἶναι 1/2 Α. Ζητεῖται ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου.

760. Ἀμπερόμετρον Α καὶ ρυθμιζομένη ἀντίστασις R συνδέονται ἐν σειρᾷ πρὸς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας ἐκ 3 συσσωρευτῶν Edison. Πρὸς τοὺς πόλους αὐτῆς συνδέεται ἐπίσης καὶ βολτόμετρον V. Δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς R αἱ ἐνδείξεις τῶν ὡς ἄνω ὀργάνων εἶναι 1,0 Α καὶ 3,80 V, δι' ἑτέραν δὲ 6,0 Α καὶ 3,60 V. Ζητοῦνται ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας.

761. Τέσσαρα στοιχεῖα Daniell ὅμοια, ΗΕΔ 1,1 V ἕκαστον καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 3 Ω, συνδέονται ἐν σειρᾷ πρὸς βολτάμετρον μὲ ὀξινισθὲν ὕδωρ, ἀντι-ΗΕΔ 1,6 V καὶ ἀντιστάσεως 2 Ω. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ κυκλώματος ἔχει ἀμελητέαν ἀντίστασιν. 1) Μετὰ 8 min καὶ 20 sec συλλέγεται ὄγκος V ὑδρογόνου, ὅστις ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ. 2) Ταξινομοῦνται τὰ στοιχεῖα εἰς 2 σειρὰς συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ληφθῇ ὁ αὐτὸς ὄγκος V. 3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος μαζῶν τοῦ διαλυομένου ψευδαργύρου εἰς τὰ δύο πειράματα. Ὑπενθυμίζεται ὅτι 1 Cb ἐλευθεροῖ 0,116 cm^3 ὑδρογόνου.

762. Κύκλωμα περιλαμβάνει δύο ὁμοίας στήλας ἐν σειρᾷ καὶ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν 3 Ω. Ἑκάστη στήλη ἔχει ΗΕΔ 1,4 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,5 Ω. Ὅταν προσθέσῃ τις εἰς τὸ κύκλωμα στήλην Σ ἐν σειρᾷ μὲ τὰς δύο πρώτας, τὸ ρεῦμα δὲν ἀλλάσσει ἔντασιν· ὅταν τὴν συνδέσῃ μὲ τοὺς ὁμωνύμους πόλους ἡ ἔντασις γίνεται 3 φορὰς μικροτέρα. Πόση εἶναι ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης ταύτης.

763. Συνδέονται 10 στοιχεῖα τῶν ὁποίων ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι 1,5 V καὶ 4 Ω, ἵνα δύναται νὰ διέλθῃ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα μέσῳ κυκλώματος ἀντιστάσεως 20 Ω. Ποία εἶναι μεταξὺ τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν ἡ πλέον πλεονεκτικὴ σύνδεσις.

764. Συνδέονται μὲ τοὺς ἀντιθέτους πόλους μία σειρὰ ἀποτελουμένη ἀπὸ 5 στοιχεῖα (ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,2 Ω) μὲ μίαν σειρὰν ἀποτελουμένην ἀπὸ τρία στοιχεῖα (ΗΕΔ 1,5 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1,2 Ω). Κλείεται ἡ σύνδεσις δι' ἀντιστάσεως ἐξωτερικῆς 6,4 Ω. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος.

765. Διατίθεται μεγάλος ἀριθμὸς ὁμοίων στοιχείων ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,1 Ω καὶ ΗΕΔ 1,9 V. Ποῖος ἀριθμὸς στοιχείων πρέπει νὰ συνδεθῇ εἰς μίαν σειρὰν (εἰς 3 διαδοχικὰ τμήματα), οὕτως ὥστε τρεῖς ἐξωτερικαὶ ἀντιστάσεις, ἡ πρώτη 3 Ω, τοποθετημένη ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ πρῶτον τμῆμα, ἡ δευτέρα 7 Ω, τοποθετημένη ἐν παραλλήλῳ ἐπὶ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, ἡ τρίτη 11 Ω, τοποθετημένη ἐν παραλλήλῳ ἐπὶ τῶν τριῶν τμημάτων, νὰ διαρρέωνται ὑπὸ ρευμάτων μὲ τιμὰς περίπου 5 Α.

766. 1) Ἠλεκτρικὸν κύκλωμα κλειστὸν περιλαμβάνει τὰς ἀκολούθους συσκευὰς συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ. α) Στοιχεῖον Daniell ΗΕΔ 1,08 V, β) Ἀντίστασιν 1 Ω καὶ γ) Ἀμπερόμετρον ἀντιστάσεως 0,5 Ω. Τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 0,12 A. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς στήλης. 2) Ποῖος ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς στοιχείων Daniell ΗΕΔ 1,08 V τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν ἐν σειρᾷ, ὥστε τὸ κύκλωμα κλειόμενον μὲ ἀντίστασιν 100 Ω νὰ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,1 A.

767. Δίδονται δύο στῆλαι μὲ ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις 42 V καὶ 14 V καὶ ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις ἀντιστοίχως 7 Ω καὶ 4 Ω. Δίδεται καὶ ἀντίστασις $R = 5\ \Omega$. Κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ συνδέσωμεν αὐτάς, ἵνα ἐπιτύχωμεν ρεῦμα μεγίστης ἐντάσεως. Εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ δύο στῆλαι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ἢ καὶ ἡ μία μόνον.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Μαθηματικόν, 1954.)

768. Στήλη συνίσταται ἀπὸ 20 στοιχεῖα Daniell διατιθέμενα εἰς δύο ὁμάδας ἀπὸ 10 στοιχεῖα ἑκάστη. Συνδέει τις τοὺς δύο πόλους A καὶ B τῆς στήλης ταύτης μὲ δύο σύρματα α καὶ β συνδεδεμένα ἐν παραλλήλῳ. Τὰ δύο ταῦτα σύρματα ἔχουν συνολικὴν ἀντίστασιν 7,5 Ω. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα α ἔχει ἔντασιν 0,3375 A, ζητεῖται 1) Ἡ ΗΕΔ τῆς συστοιχίας καὶ ἡ ἀντίστασίς της. 2) Ἡ ἀντίστασις ἑκάστου τῶν συρμάτων α καὶ β. 3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους A καὶ B. 4) Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἐλευθερούμενον εἰς 1 h, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule, εἰς τὸ σύρμα α. Ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου Daniell εἶναι 1,08 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ἀντίστασις 0,10 Ω.

769. Στοιχεῖα ὅμοια $N = m \cdot n$ συνδέονται εἰς m παραλλήλους σειράς, ἑκάστη δὲ σειρὰ περιλαμβάνει n στοιχεῖα συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι r Ω καὶ ἡ ΗΕΔ e Volt, εὕρατε τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως R Ω. Δείξατε ἐπίσης ὅτι τὸ ρεῦμα εἶναι μέγιστον ὅταν $R = n \cdot r / m$, ἔχει δὲ τοῦτο ἔντασιν $e \cdot n / 2R$ A.

770. Πόσοι συσσωρευταί, ἔχοντες ἕκαστος ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,015 Ω, πρέπει νὰ συνδεθοῦν ἐν σειρᾷ, ἵνα διὰ τῆς συστοιχίας τροφοδοτηθοῦν 10 λυχνίαι πυρακτώσεως, τάσεως λειτουργίας 110 V καὶ ἀντιστάσεως 440 Ω, συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ. Ποῖον ποσὸν θερμότητος (εἰς cal, erg καὶ kgr*m) ἐκλύεται ἀνὰ δευτερόλεπτον εἰς τὰς λυχνίας καὶ ποία ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς αὐτῶν εἰς PS.

771. Συστοιχία συσσωρευτῶν πρόκειται νὰ φορτισθῇ ἀφοῦ συνδεθῇ πρὸς δίκτυον τάσεως 110 V. Ἡ κανονικὴ τιμὴ τοῦ ρεύματος φορτίσεως εἶναι 2,4 A, ἡ δὲ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας πρὸ τῆς φορτίσεως 1,8 V. α) Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτήν. β) Ποία ἡ διάρκεια τῆς φορτίσεως, ἐὰν ἡ χωρητικότης ἑκάστου στοιχείου εἶναι 48 ἀμπερώρια καὶ ἡ ἀπόδοσις 80 %.

772. Ἀντίστασις 200 Ω συνδέεται πρὸς τοὺς πόλους συσσωρευτοῦ ΗΕΔ 2 V. Πρὸς δύο σημεῖα αὐτῆς, εὑρισκόμενα εἰς τὰ ἄκρα τμήματος ἀντιστάσεως 1 Ω, συνδέεται μέσῳ ἑτέρας ἀντιστάσεως 10^6 Ω γαλβανόμετρον. Πόσα ἀμπερώρια διέρχονται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ κύκλωμα τοῦ ὀργάνου κλείεται ἐπὶ 1/100 sec καὶ 1/5 sec ἀντιστοίχως.

773. Εἴκοσι συσσωρευταί, ἕκαστος ΗΕΔ 2 V, κατανέμονται εἰς 5 ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων συνίσταται ἐκ 4 στοιχείων συσσωρευτῶν συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ. Αἱ 5 ὁμάδες συνδέονται ἐν σειρᾷ. Ὅταν ἡ συστοιχία παρέχῃ ρεῦμα εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως 24,75 Ω, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων αὐτῆς εἶναι 9,9 V. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ὡς καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου συσσωρευτοῦ.

774. Εἰς συσσωρευτὴν διὰ μολύβδου σχηματίζεται κατὰ τὴν φόρτισιν αὐτοῦ 1 gr ὀξειδίου τοῦ μολύβδου ἐντὸς 1 min. α) Ποῖον εἶναι τὸ ρεῦμα φορτίσεως, β) πόσα γραμμάρια μολύβδου σχηματίζονται εἰς τὴν κάθοδον ἐντὸς 1 min καὶ γ) κατὰ πόσα γραμμάρια αὐξάνεται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ ἐντὸς τοῦ διαλύματος περιεχομένη ποσότης θειϊκοῦ ὀξέος.

775. Τρεῖς συσσωρευταί, ἕκαστος ΗΕΔ 2 V, 2 V καὶ 1,95 V καὶ ἐσωτερικῶν ἀντιστάσεων 0,02 Ω, 0,01 Ω καὶ 0,01 Ω ἀντιστοίχως, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ τρίτου συσσωρευτοῦ, ἐὰν οὐδὲν ἐξωτερικὸν κύκλωμα εἶναι συνδεδεμένον πρὸς τὴν συστοιχίαν καὶ αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν συνδέσεως τῶν συσσωρευτῶν εἶναι ἀμελητέαι. β) Ἡ αὔξησις τῆς ἐντὸς τοῦ διαλύματος τοῦ τρίτου συσσωρευτοῦ περιεχομένης ποσότητος θειϊκοῦ ὀξέος, ἐντὸς 10 min.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΦΟΡΤΙΟΝ. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

Α΄ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΦΟΡΤΙΟΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

776. Δύο μικρὰ ἴσα σφαιρίδια ἐξ ἐντεριώνης ἀκτέας, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπ' ἀλλήλων, ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ φέρουν φορτία τῶν + 8 ΗΣΜ καὶ — 20 ΗΣΜ, ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν ἕλξεως. Ἐὰν τὰ σφαιρίδια ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν καὶ κατόπιν ἀποχωρισθοῦν, ὥστε ἡ ἀπόστασίς των νὰ εἶναι 3 cm, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἐξασκουμένη δύναμις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν q_1, q_2 τὰ φορτία τῶν σφαιριδίων ἀντιστοίχως, ε τὴν διηλεκτρικὴν σταθερὰν τοῦ ἀέρος καὶ r τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν, τότε ἡ ἐξασκουμένη δύναμις F μεταξὺ αὐτῶν θὰ εἶναι εἰς τὸ ΗΣΜ

$$\underline{F = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}} \qquad (1)$$

Θέτοντες, $q_1 = 8$ ΗΣΜ - φορτίου, $q_2 = 20$ ΗΣΜ - φορτίου, $\varepsilon = 1$, $r = 4$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 10 \text{ dyn.}}$$

β) Ἐὰν τὰ σφαιρίδια ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν ἐπέρχεται ἀνακατανομὴ τῶν φορτίων καὶ ἐπειδὴ εἶναι ταῦτα ἴσα, θὰ ἀποκτήσουν καὶ ἴσα ἠλεκτρικὰ φορτία. Οὕτω, ἐὰν καλέσωμεν q τὸ φορτίον ἑκάστου σφαιριδίου, μετὰ τὴν ἐπαφὴν θὰ εἶναι

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2} \qquad (2)$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξασκουμένη δύναμις F', ὅταν αὐτὰ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν r' μεταξύ των, θὰ εἶναι

$$\underline{F' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q^2}{r'^2} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{4\, r'^2}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $q_1 = 8$ ΗΣΜ - φορτίου, $q_2 = -20$ ΗΣΜ - φορτίου, $\varepsilon = 1$, $r' = 3$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι ἀπωθοῦνται μετὰ δυνάμεως

$$\underline{F' = 4 \text{ dyn.}}$$

777. Δύο ὅμοιαι μεταλλικαὶ σφαῖραι ἠλεκτρικῶς φορτισμέναι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα ἀπέχουν κατὰ 10 cm, ἀπωθοῦνται μετὰ δυνάμεως 2400 dyn. Ἀφοῦ ἔλθουν αὗται εἰς ἐπαφὴν διατίθενται ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ ἀπέχουν κατὰ 25 cm, ὅτε ἀπωθοῦνται μετὰ δυνάμεως 400 dyn. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀρχικὰ φορτία ἅτινα ἔφερον αἱ δύο σφαῖραι.

Λύσις. Ἂν πρὸ τῆς ἐπαφῆς τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι q_1, q_2 καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ αὐτῶν r_1, τότε ἡ ἐξασκουμένη δύναμις μεταξὺ αὐτῶν εἰς τὸ ΗΣΜ, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι

$$F_1 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1^2} \tag{1}$$

ὅπου ε συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν, καὶ καλεῖται διηλεκτρικὴ σταθερά.

Μετὰ τὴν ἐπαφήν, ἐφ' ὅσον αἱ σφαῖραι εἶναι ἐντελῶς ὅμοιαι, θὰ ἐπέλθῃ ἰσοκατανομὴ τοῦ φορτίου καὶ οὕτω ἑκάστη σφαῖρα θὰ ἔχῃ φορτίον $q = q_1 + q_2/2$.

Συνεπῶς εἰς τὴν νέαν ἀπόστασιν r_2 θὰ ἐξασκῆται μεταξὺ αὐτῶν δύναμις

$$F_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{4\, r_2^2} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς $q_1 \cdot q_2$ καὶ θέσωμεν $\varepsilon = 1$, $F_1 = 2400$ dyn, $r_1 = 10$ cm, λαμβάνομεν

$$q_1 \cdot q_2 = 240\,000 \ (\text{ΗΣΜ})^2 \tag{3}$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν $\varepsilon = 1$, $F_2 = 400$ dyn, $r_2 = 25$ cm, λαμβάνομεν

$$q_1 + q_2 = 1\,000 \ \text{ΗΣΜ - φορτίου.} \tag{4}$$

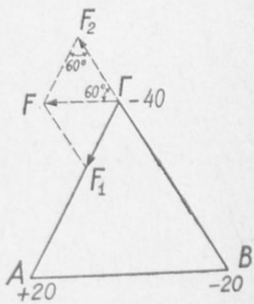
Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) δίδει

$$\underline{q_1 = 600 \ \text{ΗΣΜ - φορτίου,}} \qquad \underline{q_2 = 400 \ \text{ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

778. Τρία φορτία + 20 ΗΣΜ, — 20 ΗΣΜ καὶ — 40 ΗΣΜ - φορτίου εὑρίσκονται εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 10 cm. Ποῖον τὸ μέτρον καὶ ἡ φορὰ τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπὶ τοῦ — 40 ΗΣΜ - φορτίου.

Λύσις. Ἡ δύναμις F_1 ἡ ἐξασκουμένη μεταξὺ τῶν φορτίων +20 ΗΣΜ - φορτίου καὶ — 40 ΗΣΜ - φορτίου θὰ εἶναι ἑλκτικὴ καὶ τὸ μέτρον αὐτῆς θὰ εἶναι

$$F_1 = \frac{20 \cdot 40}{10^2} = 8 \text{ dyn}$$



Ἐπίσης ἡ δύναμις F_2 ἡ ἐξασκουμένη μεταξὺ τῶν φορτίων — 20 ΗΣΜ - φορτίου καὶ — 40 ΗΣΜ - φορτίου θὰ εἶναι ἀπωστικὴ καὶ τὸ μέτρον αὐτῆς εἶναι ἐπίσης

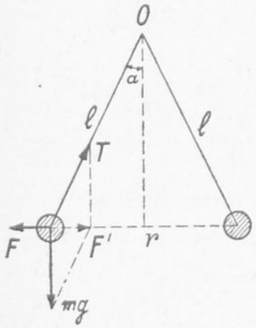
$$F_2 = \frac{20 \cdot 40}{10^2} = 8 \text{ dyn}$$

Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου δὲ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι ῥόμβος, μὲ γωνίας αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται ἐπὶ τοῦ σχήματος, καὶ εὐκόλως ἐξάγεται ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις F αὐτῶν, εἶναι

$$\underline{F = F_1 = F_2 = 8 \text{ dyn.}}$$

779. Δύο ἐξ ἴσου φορτισμένα σφαιρίδια, ἕκαστον μάζης 0,1 gr ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νημάτων μήκους 13 cm. Τὰ σφαιρίδια ἰσορροποῦν εἰς ἀπόστασιν 10 cm μεταξύ των, λόγῳ τῆς ἀπώσεως. Ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ ἑκάστου σφαιριδίου ὑπάρχον φορτίον q. Δίδεται $g = 980$ cm/sec².

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν q τὸ φορτίον ἑκάστου σφαιριδίου, l τὸ μῆκος τοῦ νήματος καὶ r τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν σφαιριδίων, ὅταν αὐτὰ ἰσορροποῦν.



Ἐπὶ ἑκάστου σφαιριδίου θὰ ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, ἤτοι ἡ δύναμις T, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὸ νῆμα καὶ τὸ βάρος $m \cdot g$ τοῦ σφαιριδίου. Ἕκαστον σφαιρίδιον θὰ ἰσορροπῇ ὅταν ἡ συνισταμένη δύναμις F' αὐτῶν εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν Coulomb F. Ἐκ τοῦ διαγράμματος λαμβάνομεν ὅτι

$$F = F' = m \cdot g \cdot \text{εφ}\, \alpha \quad \text{ἢ} \quad F = m \cdot g \cdot \frac{\text{ημ}\, \alpha}{\sqrt{1 - \text{ημ}^2 \alpha}} \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb εἶναι $F = q^2/r^2$, προκύπτει

$$\frac{q^2}{r^2} = m \cdot g \cdot \frac{\text{ημ}\, \alpha}{\sqrt{1 - \text{ημ}^2 \alpha}} \qquad (2)$$

Εἶναι ὅμως $\text{ημ}\, \alpha = \frac{r/2}{l}$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{q^2}{r^2} = m \cdot g \cdot \frac{r}{\sqrt{4l^2 - r^2}} \qquad (3)$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς q προκύπτει

$$\underline{q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r^3}{\sqrt{4\, l^2 - r^2}}}} \qquad (4)$$

Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τὸν τύπον (4) τὰς τιμάς, $m = 0{,}1$ gr, $g = 980$ cm/sec², $r = 10$ cm, $l = 13$ cm, εὑρίσκομεν

$\underline{q = 64 \text{ ΗΣΜ - φορτίου.}}$

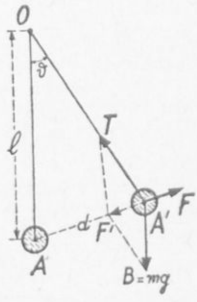
780. Ἠλεκτρόμετρον συνίσταται ἀπὸ δύο ὁμοίας σφαίρας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ἑτέρα κινητή, μάζης m καὶ προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον νήματος (ἀμελητέου βάρους) μήκους l. Διὰ ποῖον φορτίον q ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ἀντιστοιχεῖ γωνία ἀποκλίσεως θ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m = 1{,}5$ gr, $l = 10$ cm, $\theta = 45^0$.

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἰς γωνίαν ἀποκλίσεως θ ἀντιστοιχεῖ ἀπόκλισις d. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb θὰ ἔχωμεν

$$F = \frac{q^2}{d^2} \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς q, εὑρίσκομεν

$$q = d \cdot \sqrt{F} \qquad (2)$$



Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα A' ἰσορροπεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους $B = m \cdot g$ αὐτῆς καὶ τῆς τάσεως τοῦ νήματος T, ἕπεται ὅτι ἡ δύναμις F θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης F' τῶν B καὶ T. Ἤτοι

$$F = F' \qquad (3)$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι

$$F' = 2\, m \cdot g \cdot \text{ημ}\, \frac{\theta}{2} \qquad (4)$$

καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$F = 2\, m \cdot g \cdot \text{ημ}\, \frac{\theta}{2} \qquad (5)$$

'Εξ ἄλλου ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΑ' ἔχομεν

$$d = 2\,l \cdot \eta\mu\,\frac{\theta}{2} \tag{6}$$

Οὕτω λόγῳ τῆς (5) καὶ (6), ἡ (2) γράφεται

$$q = 2\,l \cdot \eta\mu\,\frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{2\,m \cdot g \cdot \eta\mu\,\frac{\theta}{2}} = 2\,l \cdot \sqrt{2\,m \cdot g \cdot \eta\mu^3\,\frac{\theta}{2}} \tag{7}$$

'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή. Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (7), $l = 10$ cm, $\theta = 45^0$, $m = 1{,}5$ gr, $g = 981$ cm/sec², εὑρίσκομεν

$$q = \pm\,257 \text{ ΗΣΜ - φορτίου.}$$

781. Ποία ἡ ἀπωστικὴ δύναμις μεταξὺ δύο ἠλεκτρονίων εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 1 Å ἀπ' ἀλλήλων.

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν F τὴν ἀσκουμένην μεταξὺ τῶν δύο ἠλεκτρονίων ἄπωσιν, r τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν καὶ e τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου, τότε συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb, θὰ ἔχωμεν, εἰς τὸ ΗΣΜ καὶ διὰ τὸ κενόν, ὅτι

$$F = \frac{e \cdot e}{r^2} \quad \text{ἢ} \quad F = \frac{e^2}{r^2} \tag{1}$$

Δίδεται $r = 1$ Å $= 10^{-8}$ cm, τὸ δὲ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου, ὡς γνωστόν, εἶναι $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb $= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9$ ΗΣΜ - φορτίου $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1), εὑρίσκομεν

$$F = 2{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ dyn.}$$

782. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου. Δίδονται: φορτίον ἠλεκτρονίου $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, μᾶζα ἠλεκτρονίου $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ ἀπόστασις ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸν πυρῆνα (πρωτόνιον) $r = 1$ Å.

Λύσις. 'Επὶ τοῦ περιστρεφομένου ἠλεκτρονίου ἐξασκεῖται ἡ δύναμις Coulomb F_C, ἡ ὁποία ἐπειδὴ περιστρέφει τοῦτο, θὰ εἶναι καὶ ἡ κεντρομόλος δύναμις F_K.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$F_K = F_C \tag{1}$$

Εἶναι ὅμως

$$F_K = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} \tag{2}$$

ὅπου υ ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ

$$F_C = \frac{e^2}{r^2} \tag{3}$$

διότι τὸ φορτίον τοῦ πυρῆνος (πρωτόνιον) εἶναι ἴσον, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, μὲ τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου. Οὕτω ἡ σχέσις (1), λόγῳ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) γράφεται

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \tag{4}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς υ λαμβάνομεν

$$\upsilon = \frac{e}{\sqrt{m \cdot r}} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5), $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ – φορτίου, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $r = 1$ Å $= 10^{-8}$ cm, εὑρίσκομεν

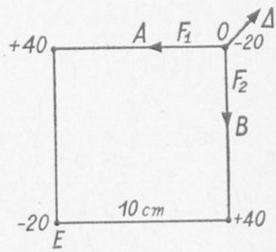
$$\upsilon = 16 \cdot 10^7 \text{ cm/sec} = 1600 \text{ km/sec.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

783. Δύο ἐξ ἴσου φορτισμένα σφαιρίδια ἐξ ἐντεριώνης ἀκτέας εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπ' ἀλλήλων, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, καὶ ἀπωθοῦνται ἀμοιβαίως διὰ δυνάμεως 5 dyn. Ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ ἑκάστου σφαιριδίου φορτίον.
('Απ. 6 ΗΣΜ - φορτίου.)

784. Δύο μικρὰ ἴσα σφαιρίδια ἐξ ἐντεριώνης ἀκτέας, φέρουν φορτία + 20 καὶ − 4 ΗΣΜ - φορτίου ἀντιστοίχως καὶ ἀπέχουν κατὰ 2 cm, ἐντὸς τοῦ ἀέρος. α) Ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν ἕλξεως. β) Ἐὰν φέρωμεν εἰς ἐπαφὴν τὰ σφαιρίδια καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰ ἀπομακρύνωμεν κατὰ 2 cm, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἐξασκουμένη δύναμις.
('Απ. α' 20 dyn β' 16 dyn.)

785. Ἐπὶ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραγώνου, πλευρᾶς 10 cm, (βλ. σχῆμα) ὑπάρχουν φορτία τῶν + 40, − 20, + 40 καὶ − 20 ΗΣΜ - φορτίου ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὸ μέτρον καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης δυνάμεως ἐπὶ ἑνὸς τῶν — 20 ΗΣΜ - φορτίου.
('Απ. 9,3 dyn.)



Ἄσκησις 785.

786. Δύο μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν 1 gr καὶ φέρει φορτίον 1 ΗΣΜ - φορτίου, ἐξαρτῶνται ἀπὸ κοινοῦ σημείου δι' ἰσομήκων μεμονωμένων νημάτων. Ἐὰν ἡ ἠλεκτρικὴ ἄπωσις συγκρατῇ αὐτὰς εἰς τρόπον ὥστε τὰ κέντρα των νὰ ἀπέχουν κατὰ 1 cm, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῶν νημάτων.
('Απ. 490,5 cm.)

787. Θετικὸν φορτίον 15 ΗΣΜ - φορτίου, εὑρίσκεται ἐπὶ μικρᾶς σφαίρας τιθεμένης 16 cm ἀπὸ ὁμοίας σφαίρας, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία φέρει ἀρνητικὸν φορτίον 15 ΗΣΜ - φορτίου. Ὑπολογίσατε τὴν μεταξὺ τῶν σφαιρῶν ἀναπτυσσομένην δύναμιν εἰς δύνας.
('Απ. 0,88 dyn.)

788. Ἠλεκτρόνιον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 6 mm ἀπὸ τινος θετικοῦ φορτίου ἕλκεται ὑπ' αὐτοῦ διὰ δυνάμεως 2 mgr*. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ θετικοῦ φορτίου. $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου.
('Απ. 0,4933 Cb.)

789. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι, εὑρισκόμεναι εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπ' ἀλλήλων, φέρουν ἴσα ἀρνητικὰ φορτία καὶ ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν 10^{-14} dyn. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἠλεκτρονίων τῶν εὑρισκομένων ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας.
('Απ. 625 ἠλεκτρόνια.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

790. Ποία ἡ ἀπωστικὴ δύναμις μεταξὺ δύο ὁμοίων σωμάτων εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν $l = 100$ cm ἀπ' ἀλλήλων καὶ φερόντων ἕκαστον φορτίον $q = 0{,}001$ Cb.

791. Δύο ἴσα θετικὰ φορτία, εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 10 cm, ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν 2500 dyn. Νά ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος ἑκάστου φορτίου καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀπωστικῆς δυνάμεως, α) ὅταν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φορτίων εἶναι 5 cm ἢ 2,5 cm καὶ β) ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου φορτίου ἐλαττωθῇ εἰς τὸ 1/2 τῆς ἀρχικῆς, τοῦ δευτέρου εἰς τὸ 1/4 καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 5 cm.

792. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ἡ ἀσκουμένη μεταξὺ δύο ἑτερωνύμων φορτίων τῆς αὐτῆς ἀπολύτου τιμῆς, ἴσης πρὸς 1 Cb, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 10 m.

793. Μεταλλικὸν σφαιρίδιον βάρους 5 gr*, ἐξαρτᾶται ἐκ μονωτικοῦ νήματος μήκους 5 m, φέρει δὲ φορτίον 10 ΗΣΜ - φορτίου. Κατὰ πόσον μετατοπίζεται τοῦτο ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὅταν εἰς τὴν θέσιν ταύτην τεθῇ ἕτερον σφαιρίδιον φέρον φορτίον ἴσον πρὸς τὸ προηγούμενον.

794. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι Α καὶ Β, ἀπέχουν κατὰ 50 cm καὶ φέρουν ἀντιστοίχως 2500 ΗΣΜ θετικοῦ φορτίου καὶ 250 ΗΣΜ ἀρνητικοῦ φορτίου. Εἰς ποῖον σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν πρέπει νὰ τεθῇ σφαῖρα Γ, φέρουσα 100 ΗΣΜ θετικοῦ φορτίου, ἵνα ἡ σφαῖρα Β μένῃ ἀκίνητος.

795. Δύο μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι, ἑκάστη βάρους 1 gr*, ἐξαρτῶνται ἀπὸ κοινοῦ σημείου διὰ μεμονωμένων νημάτων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι $l = 490{,}5$ cm. Αἱ σφαῖραι φορτίζονται μὲ τὸ αὐτὸ θετικὸν φορτίον ἑκάστη, ἡ ἠλεκτροστατικὴ ἄπωσις συγκρατεῖ αὐτὰς οὕτως, ὥστε τὰ κέντρα των νὰ ἀπέχουν κατὰ 1 cm. Ποῖον τὸ φορτίον q ἑκάστης σφαίρας.

796. Δύο σφαῖραι Α καὶ Β φέρουν ἀντιστοίχως φορτία 20 ΗΣΜ καὶ 5 ΗΣΜ. Φέρεται ἀκολούθως κινητὴ σφαῖρα Γ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν 33,3 cm ἀπὸ τὴν Α καὶ 16,75 cm ἀπὸ τὴν Β. Πόσον εἶναι τὸ φορτίον τὸ ὁποῖον φέρει ἡ σφαῖρα Γ, ἐὰν ἀφιεμένη ἐλευθέρα διατηρῇ τὴν θέσιν της.

Β' ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

797. Πόσον τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον διὰ νὰ μεταφέρωμεν φορτίον 2 ΗΣΜ-φορτίου, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος 50 cm ἀπὸ φορτίον 100 ΗΣΜ - φορτίου, εἰς σημεῖον ἀπέχον 5 cm ἀπ' αὐτοῦ.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν q τὸ φορτίον τὸ ὁποῖον παράγει τὸ πεδίον καὶ r_1, r_2 ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις τῶν δύο σημείων. Τὰ δυναμικὰ εἰς τὰ δύο σημεῖα θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$U_1 = \frac{q}{r_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad U_2 = \frac{q}{r_2} \quad (2)$$

καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξύ των θὰ εἶναι :

$$(U_1 - U_2) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} = q \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3)$$

Συνεπῶς τὸ ἔργον Α τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετακίνησιν ἑνὸς φορτίου q_1 ἀπὸ τὸ ἕνα σημεῖον εἰς τὸ ἄλλο, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ, θὰ εἶναι

$$\underline{A = q_1 \cdot (U_1 - U_2) = q_1 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $q_1 = 2$ ΗΣΜ - φορτίου, $q = 100$ ΗΣΜ - φορτίου, $r_1 = 50$ cm καὶ $r_2 = 5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 36 \text{ erg.}}$$

798. Δι' ἠλεκτρικῆς πηγῆς φορτίζομεν σφαιρικὸν ἀγωγὸν διαμέτρου 20 cm, ὥστε οὗτος ν' ἀποκτήσῃ δυναμικὸν 300 V. Ἀπομακρύνομεν ἐκ τῆς πηγῆς τὸν ἀγωγὸν καὶ συνδέομεν τοῦτον πρὸς ἠλεκτρόμετρον τὸ ὁποῖον τότε δεικνύει τάσιν 200 V. Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ ἠλεκτρομέτρου.

Λύσις. Ἔστω C_1 ἡ χωρητικότης τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ καὶ U_1 τὸ δυναμικόν του. Τὸ φορτίον q τὸ ὁποῖον θὰ περιέχῃ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$q = C_1 \cdot U_1 \qquad \text{ἢ} \qquad q = r \cdot U_1 \tag{1}$$

διότι ἡ χωρητικότης σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ εἰς τὸ ΗΣΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Ὅταν ὁ σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ ἠλεκτρόμετρον, τότε προστίθεται εἰς τὴν χωρητικότητα αὐτοῦ καὶ ἡ χωρητικότης C τοῦ ἠλεκτρομέτρου καὶ ὡς ἀποτέλεσμα ἔχομεν τὴν πτῶσιν τοῦ δυναμικοῦ τοῦ συστήματος, ἔστω εἰς U_2. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τώρα τὴν σχέσιν

$$q = (r + C) \cdot U_2 \tag{2}$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει

$$r \cdot U_1 = (r + C) \cdot U_2 \tag{3}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς C λαμβάνομεν

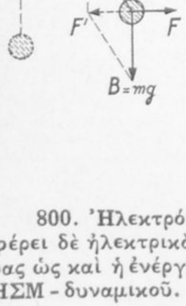
$$C = \frac{r \cdot (U_1 - U_2)}{U_2} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $r = 10$ cm, $U_1 = 300$ V $= 1$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ καὶ $U_2 = 200$ V $= 2/3$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν

$$C = 5 \text{ ΗΣΜ - χωρητικότητος} = 5 \text{ cm.}$$

799. Τὸ σφαιρίδιον ἠλεκτρικοῦ ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα εἶναι $m = 25$ mgr φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $q = 10$ ΗΣΜ, τιθέμενον δὲ ἐντὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὁριζοντίας ἐντάσεως σχηματίζει γωνίαν $\theta = 12^0$ μετὰ τῆς κατακορύφου. Πόση ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Δίδεται ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος $g = 980$ cm/sec^2.

Λύσις. Τὸ σφαιρίδιον θὰ ἰσορροπῇ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἑξῆς δυνάμεων. Τοῦ βάρους $B = m \cdot g$ αὐτοῦ, τῆς τάσεως τοῦ νήματος T καὶ τῆς ὁριζοντίας δυνάμεως F, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἡ δύναμις F θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης F' τῶν δυνάμεων B καὶ T. Οὕτω ἔχομεν



$$F = F' = m \cdot g \cdot \text{εφ}\, \theta \tag{1}$$

ἢ ἐπειδὴ $F = q \cdot \mathcal{E}$ λαμβάνομεν

$$q \cdot \mathcal{E} = m \cdot g \cdot \text{εφ}\, \theta \tag{2}$$

Λύοντες τὴν (2) ὡς πρὸς $\mathcal{E}$, προκύπτει

$$\mathcal{E} = \frac{m \cdot g \cdot \text{εφ}\, \theta}{q} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $m = 25$ mgr $= 25 \cdot 10^{-3}$ gr, $g = 980$ cm/sec^2, $q = 10$ ΗΣΜ καὶ $\theta = 12^0$ (εφ $\theta = 0{,}213$), εὑρίσκομεν

$$\mathcal{E} = 0{,}52 \text{ ΗΣΜ - ἐντάσεως.}$$

800. Ἠλεκτρόνιον ἐξομοιοῦται πρὸς σφαῖραν ἀκτῖνος $r = 1{,}1 \cdot 10^{-13}$ cm, φέρει δὲ ἠλεκτρικὸν φορτίον $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Cb. Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας ὡς καὶ ἡ ἐνέργεια εἰς erg. Δίδεται ὅτι 1 Cb $= 3 \cdot 10^9$ ΗΣΜ—καὶ 1 Volt $= 1/300$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμήματα Φυσικὸν καὶ Φυσιογνωστικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1953).

Λύσις. Τὸ δυναμικὸν U σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ ἀκτῖνος r φορτισμένου μὲ φορτίον q δίδεται εἰς τὸ ΗΣΜ, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$U = \frac{q}{r}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Cb $= 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{9}$ ΗΣΜ καὶ $r = 1{,}1 \cdot 10^{-13}$ cm, εὑρίσκομεν

$$U = 4{,}37 \cdot 10^{3} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

ἢ ἐπειδὴ 1 ΗΣΜ - δυναμικοῦ = 300 V, ἔχομεν

$$\underline{U = 1311 \cdot 10^{3} \text{ V}}$$

Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια Α σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει φορτίον q καὶ εὑρίσκεται εἰς δυναμικὸν U, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = \frac{1}{2} q \cdot U$$

Θέτοντες, $q = 4{,}806 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ καὶ $U = 4{,}37 \cdot 10^{3}$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 10{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ erg.}}$$

801. Μεταλλικὴ σφαῖρα διαμέτρου 20 cm φέρει φορτίον ὑπὸ δυναμικὸν 72 kV. Ποία ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ.

Λύσις. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια Α φορτισμένου ἀγωγοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \qquad (1)$$

ὅπου C ἡ χωρητικότης καὶ U τὸ δυναμικὸν αὐτοῦ. Ἡ χωρητικότης ὅμως σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ εἰς τὸ ΗΣΜ, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα r αὐτοῦ ἤτοι, C = r. Συνεπῶς ὁ τύπος (1) γράφεται

$$A = \frac{1}{2} r \cdot U^2 \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), r = 10 cm, U = 72 kV = 72 000 · 1/300 = 240 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 2{,}88 \cdot 10^{5} \text{ erg.}}$$

802. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι 2,5 cm καὶ 5 cm εἶναι ἠλεκτρισμέναι θετικῶς. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι 10 cm καὶ ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως 225 dyn. Ἀφοῦ συνδεθοῦν μεταξύ των διὰ μακροῦ καὶ λεπτοῦ νήματος, τοποθετοῦνται ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν νὰ εἶναι 10 cm, ὅτε ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως 200 dyn. Πόσα εἶναι τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν.

Λύσις. Ἔστω q_1, q_2 τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς ἐπαφῆς. Θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ ΗΣΜ ὅτι

$$F_1 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1^2} \qquad (1)$$

ὅπου ε ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ καὶ r_1 ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν. Ὅταν αἱ σφαῖραι ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν μέσῳ τοῦ σύρματος, ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U καὶ ἐπέρχεται ἀνακατανομὴ τῶν φορτίων. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἡ σφαῖρα ἀκτῖνος R_1 ἀποκτᾷ φορτίον q'_1 καὶ ἡ σφαῖρα ἀκτῖνος R_2 φορτίον q'_2. Θὰ ἔχωμεν

$$U = \frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2} = \frac{q'_1 + q'_2}{R_1 + R_2} \qquad (2)$$

Ὡς γνωστὸν ὅμως οὐδεμία μεταβολὴ ἐπέρχεται εἰς τὸ συνολικὸν φορτίον τῶν σφαιρῶν. Ἄρα

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2} = \frac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) λαμβάνομεν

$$q'_1 = \frac{R_1 \cdot (q_1 + q_2)}{R_1 + R_2} \qquad \text{καὶ} \qquad q'_2 = \frac{R_2 \cdot (q_1 + q_2)}{R_1 + R_2}$$

Εἰς τὴν νέαν ἀπόστασιν r_2 τῶν σφαιρῶν, ἡ ἐξασκουμένη δύναμις μεταξὺ αὐτῶν θὰ εἶναι

$$F_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q'_1 \cdot q'_2}{r_2^2} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot (q_1 + q_2)^2}{(R_1 + R_2)^2 \cdot r_2^2} \tag{4}$$

Λύοντες τὴν (1) ὡς πρὸς $q_1 \cdot q_2$, λαμβάνομεν

$$q_1 \cdot q_2 = \varepsilon \cdot F \cdot r_1^2 \tag{5}$$

καὶ τὴν (4) ὡς πρὸς $q_1 + q_2$, λαμβάνομεν

$$q_1 + q_2 = r_2 \cdot (R_1 + R_2) \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot F_2}{R_1 \cdot R_2}} \tag{6}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5), $\varepsilon = 1$, $F = 225$ dyn καὶ $r_1 = 10$ cm, εὑρίσκομεν

$$q_1 \cdot q_2 = 225 \cdot 10^2 \ (\text{ΗΣΜ})^2 \tag{7}$$

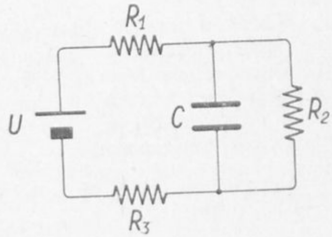
καὶ εἰς τὴν (6), $\varepsilon = 1$, $R_1 = 2{,}5$ cm, $R_2 = 5$ cm, $r_2 = 10$ cm, $F_2 = 200$ dyn, εὑρίσκομεν

$$q_1 + q_2 = 300 \ \text{ΗΣΜ} \tag{8}$$

Τελικῶς ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$\underline{q_1 = 150 \ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}, \qquad \underline{q_2 = 150 \ \text{ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

803. Νὰ εὑρεθῇ τὸ φορτίον πυκνωτοῦ χωρητικότητος $C = 100\ \mu F$, ὅταν εἰς τὸ κύκλωμα (βλ. σχῆμα) παρεντίθενται ἀντιστάσεις $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$ καὶ ἡ ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἔχει τάσιν $U = 120$ V.



Λύσις. Τὸ φορτίον q τοῦ πυκνωτοῦ θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς σχέσεως

$$q = C \cdot U \tag{1}$$

ὅπου U εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἶναι

$$U = i \cdot R_2 \tag{2}$$

ὅπου i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀντιστάσεως R_2 καὶ εἶναι αὐτὴ τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ στήλη. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3}$$

Βάσει τῆς σχέσεως (3), ἡ σχέσις (2) δίδει

$$U = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{4}$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται

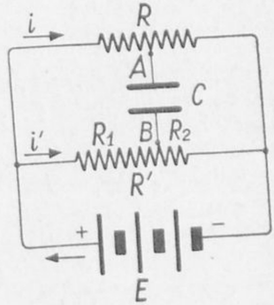
$$q = C \cdot \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $C = 100 \cdot 10^{-6}$ F, $U = 120$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$q = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Cb.}$$

804. Δύο ἀγωγοὶ ἀντιστάσεων R καὶ R′ συνδέονται διὰ τῶν ἄκρων των πρὸς τοὺς πόλους μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν ὁλικῆς ΗΕΔ E καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἀμελητέας. Ὁ εἷς τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ χωρητικότητος C συνδέεται δι' ἀγωγοῦ μὲ τὸ μέσον τῆς ἀντιστάσεως R καὶ ὁ ἄλλος ὁπλισμὸς μὲ σημεῖον τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R′ εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι x. Ζητεῖται 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις i καὶ i′ τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διατρέχουν τοὺς δύο ἀγωγούς. 2) Νὰ μελετηθῇ πῶς μεταβάλλεται τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ συναρτήσει τοῦ x. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $R = 100\ \Omega$, $R' = 150\ \Omega$, $E = 40$ V, $C = 1\ \mu$F, $x = 3/4$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις i, i′ καὶ τὸ φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956).



Λύσις. α) Βάσει τοῦ σχήματος θὰ εἶναι

$$i = \frac{E}{R} \qquad \text{καὶ} \qquad i' = \frac{E}{R'} \qquad (1)$$

β) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος τοῦ πυκνωτοῦ προκύπτει ὅτι

$$q = C \cdot (U_A - U_B) \qquad (2)$$

ὅπου $U_A - U_B$ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ.

Τὸ δυναμικὸν ὡς πρὸς τὸν θετικὸν πόλον τῆς πηγῆς εἰς τὸ σημεῖον A εἶναι

$$U_A = \frac{R}{2} \cdot i$$

καὶ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου B ὡς πρὸς τὸν θετικὸν πόλον τῆς πηγῆς εἶναι

$$U_B = R_1 \cdot i' \qquad (3)$$

ἢ ἐπειδὴ $\frac{R_1}{R_2} = x$, $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{x}{x+1}$, $\frac{R_1}{R'} = \frac{x}{x+1}$ καὶ $R_1 = \frac{R' \cdot x}{x+1}$ θὰ εἶναι

$$U_B = R' \cdot \frac{x}{x+1} \cdot i'$$

Συνεπῶς προκύπτει ὅτι

$$U_A - U_B = \frac{R}{2} \cdot i - R' \cdot \frac{x}{x+1} \cdot i'$$

καὶ βάσει τῶν σχέσεων (1) λαμβάνομεν

$$U_A - U_B = E \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1}\right) \qquad (4)$$

Οὕτω ἡ σχέσις (2) βάσει τῆς (4) γράφεται

$$q = C \cdot E \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1}\right) \qquad (5)$$

Διὰ διερευνήσεως δὲ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει

1) Διὰ $x = \frac{R_1}{R_2} = 1$, ὅτι $q = 0$, ἤτοι ὁ πυκνωτὴς μένει ἀφόρτιστος καθ' ὅσον ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα του εἶναι μηδέν.

2) Διὰ $x = \frac{R_1}{R_2} = 0$, δηλ. $R_1 = 0$ ὅτι $q = 20 \cdot 10^{-6}$ Cb.

3) Διὰ $x = \frac{R_1}{R_2} = \infty$, δηλ. $R_2 \to 0$ ὅτι $q = -20 \cdot 10^{-6}$ Cb.

4) Διὰ $x = \frac{R_1}{R_2} < 1$, δηλ. $R_1 < R_2$ ὅτι q εἶναι θετικόν.

5) Διὰ $x = \frac{R_1}{R_2} > 1$, δηλ. $R_1 > R_2$ ὅτι q εἶναι ἀρνητικόν.

Σημείωσις. Τὸ θετικὸν σημεῖον τοῦ φορτίου σημαίνει ὅτι ὁ ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ ὁ συνδεόμενος μὲ τὸ Α ἔχει θετικὸν φορτίον καὶ τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ φορτίου σημαίνει ὅτι ὁ ὁπλισμὸς μὲ τὸ Α ἔχει ἀρνητικὸν φορτίον.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) τῆς ἐρωτήσεως (α), ἐὰν θέσωμεν $E = 40$ V, $R = 100\ \Omega$ καὶ $R' = 150\ \Omega$, εὑρίσκομεν

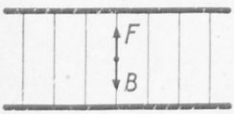
$$\underline{i = 0{,}4 \text{ A} \quad \text{καὶ} \quad i' = 0{,}206 \text{ A}.}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) τῆς ἐρωτήσεως (β) ἐὰν θέσωμεν, $C = 1\ \mu F = 1 \cdot 10^{-6}$ F, $E = 40$ V καὶ $x = 3/4$, εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 2{,}857 \cdot 10^{-6} \text{ Cb}.}$$

805. Σταγὼν ἐλαίου μάζης 10^{-12} gr ἔχουσα φορτίον ἴσον πρὸς τὸ φορτίον 2 ἠλεκτρονίων αἰωρεῖται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ, τοῦ ὁποίου οἱ ὁπλισμοὶ εἶναι ὁριζόντιοι καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 2 cm. Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ. Δίδεται φορτίον ἠλεκτρονίου $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ $g = 980$ dyn/gr.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς σταγόνος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις. Ἡ δύναμις F ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον καὶ τὸ βάρος B τῆς σταγόνος, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἀπὸ τὸ πεδίον βαρύτητος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ σταγὼν ἰσορροπεῖ, πρέπει αἱ δυνάμεις αὗται νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ἤτοι



$$F = B \tag{1}$$

Εἶναι ὅμως $B = m \cdot g$ καὶ ἐὰν καλέσωμεν q τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σταγόνος καὶ $\mathscr{E}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, θὰ ἔχωμεν καὶ $F = \mathscr{E} \cdot q$. Οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\mathscr{E} \cdot q = m \cdot g \tag{2}$$

Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $\mathscr{E} = U/l$, ὅπου U ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ καὶ l ἡ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἀπόστασις. Ἄρα ἡ σχέσις (2) γίνεται

$$\frac{U}{l} \cdot q = m \cdot g \tag{3}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς U λαμβάνομεν

$$U = \frac{m \cdot g \cdot l}{q} \tag{4}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχει δοθῆ $q = 2e$, ἡ σχέσις (4) γράφεται

$$\underline{U = \frac{m \cdot g \cdot l}{2e}} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5), $m = 10^{-12}$ gr, $g = 980$ dyn/gr, $l = 2$ cm, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 2{,}04 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{U = 2{,}04 \cdot 300 = 612 \text{ V.}}$$

806. Πυκνωτὴς ἀέρος παρουσιάζει χωρητικότητα 50 cm. Καθορίσατε τὴν χωρητικότητα αὐτοῦ ὅταν μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν του τίθεται ὕαλος τῆς ὁποίας ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ εἶναι $\epsilon = 6$.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν S τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου ὁπλισμοῦ καὶ l τὴν μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἀπόστασιν, τότε ἡ χωρητικότης C τοῦ ἐπιπέδου πυκνωτοῦ, εἰς τὸ ΗΣΜ εἶναι

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l} \tag{1}$$

ὅπου ε εἶναι ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ μέσου τὸ ὁποῖον παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν.

Ὅταν ὅμως ὁ πυκνωτὴς εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα, τότε $\varepsilon = 1$, καὶ θὰ ἔχωμεν

$$C_o = \frac{S}{4\pi \cdot l} \tag{2}$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{C}{C_o} = \varepsilon \tag{3}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς C τοῦ τύπου (3), προκύπτει

$$\underline{C = \varepsilon \cdot C_o} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $\varepsilon = 6$, $C_o = 50$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{C = 300 \text{ cm.}}$$

807. Ἡ χωρητικότης πυκνωτοῦ εἶναι 30 ΗΣΜ - χωρητικότητος. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν εἶναι 5 ΗΣΜ - δυναμικοῦ. Ποῖον τὸ ἐπὶ ἑκάστου ὁπλισμοῦ φορτίον, ὅταν ὁ πυκνωτὴς ἔχει ὡς διηλεκτρικὸν τὸν ἀέρα.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης C πυκνωτοῦ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ φορτίου q τὸ ὁποῖον ἔχει ὁ εἷς ὁπλισμὸς διὰ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ U, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν, ἤτοι

$$C = \varepsilon \cdot \frac{q}{U} \tag{1}$$

ὅπου ε ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ μέσου τὸ ὁποῖον παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς q λαμβάνομεν

$$\underline{q = \frac{1}{\varepsilon} \cdot C \cdot U} \tag{2}$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα, $\varepsilon = 1$ (ἀήρ), $C = 30$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, $U = 5$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 150 \text{ ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

808. Οἱ δύο ὁπλισμοὶ ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 mm ἀπ' ἀλλήλων, ὁ μεταξὺ δὲ αὐτῶν χῶρος πληροῦται δι' ὑάλου διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\epsilon = 5$. Ποία ἡ ἐπιφανειακὴ πυκνότης τοῦ φορτίου, ἐὰν ὁ μὴ προσγειωθεὶς ὁπλισμὸς εὑρίσκεται ὑπὸ δυναμικὸν 240 V.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης C ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εἰς τὸ ΗΣΜ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l} \tag{1}$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ, l ἡ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἀπόστασις καὶ ε ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ παρεμβαλλομένου διηλεκτρικοῦ.

Ἐὰν ὅμως καλέσωμεν U τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ καὶ q τὸ φορτίον τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ τοῦ πυκνωτοῦ, τότε εἰς τὸ ΗΣΜ θὰ ἔχωμεν

$$C = \frac{q}{U} \tag{2}$$

καὶ ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\frac{q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l} \tag{3}$$

Ὁ τύπος (3) δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς q/S δίδει

$$\frac{q}{S} = \varepsilon \cdot \frac{U}{4\pi \cdot l} \,. \tag{4}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ πηλῖκον q/S εἶναι ἡ ἐπιφανειακὴ πυκνότης σ, λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\sigma = \varepsilon \cdot \frac{U}{4\pi \cdot l} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), U = 240 V = 24/300 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, l = 2 mm = 0,2 cm καὶ ε = 5, εὑρίσκομεν

σ = 1,591 ΗΣΜ - φορτίου/cm².

809. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης σφαίρας, ἀκτῖνος 10 cm, βυθισμένης ἐντὸς καθαροῦ ὕδατος (διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε = 80) εἶναι 250 ΗΣΜ/cm², νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς σημεῖα εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 0 cm, 10 cm, 20 cm,... 10n cm ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης σ δίδεται εἰς τὸ ΗΣΜ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi \cdot r^2} \tag{1}$$

ὅπου q τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σφαίρας, S ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐμβαδοῦ $4\pi r^2$, r ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου λαμβάνομεν

$$q = 4\pi r^2 \cdot \sigma \tag{2}$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{(r+d)^2} \tag{3}$$

εὑρίσκομεν βάσει τῆς σχέσεως (2) ὅτι

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{4\pi r^2 \cdot \sigma}{(r+d)^2} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4), ε = 80, r = 10 cm, σ = 250 ΗΣΜ/cm², εὑρίσκομεν, διὰ τὴν ἑκάστοτε ἀπόστασιν d τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου εἰς τὰς ζητουμένας θέσεις, ἤτοι

α) διὰ d = 0 cm $\mathcal{E}$ = 39,25 ΗΣΜ - ἐντάσεως

β) διὰ d = 10 cm $\mathcal{E}$ = 9,81 »

γ) διὰ d = 20 cm $\mathcal{E}$ = 4,36 »

δ) διὰ d = 10n cm $\mathcal{E} = \dfrac{39,25}{(n+1)^2}$ »

810. α) Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα πυκνωτοῦ συνισταμένου ἐκ δύο παραλλήλων πλακῶν διαχωριζομένων ὑπὸ στρώματος ἀέρος πάχους 0,4 cm. Ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης πλακὸς εἶναι 202 cm². β) Ἐὰν ὁ πυκνωτὴς συνδεθῇ μὲ πηγὴν 500 V, ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ φορτίον. γ) Ὑπολογίσατε τὴν ἐνέργειαν ἥτις ἀποταμιεύεται εἰς τὸν πυκνωτήν. δ) Ἐὰν φύλλον μαρμαρυγίου (μίκας), πάχους 0,4 cm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 6, εἰσαχθῇ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ πλέον φορτίον τὸ ὁποῖον θὰ προσλάβῃ ὁ πυκνωτής.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν S τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου ὁπλισμοῦ καὶ l τὸ πάχος τοῦ διηλεκτρικοῦ, τότε ἡ χωρητικότης C, εἰς τὸ ΗΣΜ καὶ τὸ κενόν, θὰ εἶναι

$$C = \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad (1)$$

Θέτοντες, $S = 202\ cm^2$, $l = 0{,}4$ cm, εὑρίσκομεν, $C = 40{,}2$ ΗΣΜ - χωρητικότητος

ἢ
$$C = \frac{40{,}2}{9 \cdot 10^{11}} = 4{,}47 \cdot 10^{-11}\ F.$$

β) Ὅταν ὁ πυκνωτὴς συνδεθῇ μὲ πηγὴν τάσεως U, θὰ λάβῃ φορτίον q καὶ θὰ ἔχωμεν

$$q = C \cdot U \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $C = 4{,}47 \cdot 10^{-11}$ F καὶ $U = 500$ V, εὑρίσκομεν

$$q = 2{,}23 \cdot 10^{-8}\ Cb.$$

γ) Ἡ ἐνέργεια A ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται εἰς τὸν πυκνωτὴν θὰ εἶναι

$$A = \frac{1}{2} q \cdot U \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $q = 2{,}23 \cdot 10^{-8}$ Cb, $U = 500$ V, εὑρίσκομεν

$$A = 5{,}58 \cdot 10^{-6}\ Joule.$$

δ) Ὅταν ὁ πυκνωτὴς περιέχῃ ὡς διηλεκτρικὸν τὸν μαρμαρυγίαν, τότε ἡ χωρητικότης του θὰ εἶναι

$$C' = \varepsilon \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad \text{ἢ} \qquad C' = \varepsilon \cdot C$$

καὶ τὸ φορτίον του

$$q' = C' \cdot U = \varepsilon \cdot C \cdot U \qquad (4)$$

Ἄρα ἡ αὔξησις Δq τοῦ φορτίου εὑρίσκεται ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (4), ὅτι εἶναι

$$\Delta q = q' - q = \varepsilon \cdot C \cdot U - C \cdot U = (\varepsilon - 1) \cdot C \cdot U$$

ἢ
$$\Delta q = (\varepsilon - 1) \cdot q \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $\varepsilon = 6$ καὶ $q = 2{,}23 \cdot 10^{-8}$ Cb, εὑρίσκομεν

$$\Delta q = 1{,}12 \cdot 10^{-7}\ Cb.$$

811. Κατασκευάζονται διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς Ἀσυρμάτου Τηλεγραφίας συστοιχίαι πυκνωτῶν ἀέρος μεταβλητῆς χωρητικότητος, ἀποτελούμεναι ἀπὸ δύο σειρὰς μεταλλικῶν πλακῶν ὥστε, διὰ τῆς κινήσεως ἑνὸς κομβίου δύναταί τις νὰ κάμῃ νὰ εἰσχωρῇ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἡ μία σειρὰ ἐντὸς τῆς ἑτέρας, χωρὶς νὰ ἔρχωνται εἰς ἐπαφήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης μεταλλι-

κῆς πλακός, ὅταν ὁ πυκνωτὴς παρουσιάζῃ μεγίστην χωρητικότητα 0,001 μF καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 10 πλάκας, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν πλακῶν εἶναι 0,5 mm.

Λύσις. Τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν πλακῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς 19 πυκνωτὰς (ἐπιπέδους) συνδεδεμένους ἐν παραλλήλῳ. Συνεπῶς ἡ χωρητικότης (τοῦ συστήματος) θὰ εἶναι

$$C = 19 \cdot \varepsilon \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l}$$

ὅπου ε ἡ διηλεκτρικὴ σταθερά, S ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης πλακὸς καὶ l ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πλακῶν.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς S, λαμβάνομεν

$$\underline{S = \frac{4\pi \cdot l \cdot C}{19 \cdot \varepsilon}}$$

Θέτοντες, $\varepsilon = 1$, $l = 0{,}5$ mm $= 0{,}05$ cm, $C = 0{,}001$ μF $= 0{,}001 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{S = 30 \text{ cm}^2} \text{ (περίπου)}$$

812. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἰς Joule καὶ θερμίδας, ἡ συσσωρευμένη ἐντὸς πυκνωτοῦ χωρητικότητος 1 μF, καὶ ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ 25 000 V.

Λύσις. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια A πυκνωτοῦ, παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

ὅπου C ἡ χωρητικότης καὶ U ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ τῶν ὁπλισμῶν του.

Θέτοντες, $C = 1$ μF $= 10^{-6}$ F καὶ $U = 25000$ V, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 312{,}5 \text{ Joule.}}$$

Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, 1 Joule = 0,24 cal, θὰ εἶναι

$$\underline{A = 75 \text{ cal.}}$$

813. Ὑπολογίσατε τὴν ἐνέργειαν ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται εἰς πυκνωτήν, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 40 ΗΣΜ - χωρητικότητος καὶ φορτίζεται ὑπὸ τάσιν 5 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.

Λύσις. Ἔστω C ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ U ἡ τάσις ἥτις ἐπικρατεῖ εἰς τοὺς ὁπλισμούς του. Τότε ἡ ἐνέργεια A τοῦ πυκνωτοῦ θὰ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{A = \frac{1}{2} C \cdot U^2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, C = 40 ΗΣΜ - χωρητικότητος, U = 5 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 500 \text{ erg.}}$$

814. Ἐκφορτίζεται πυκνωτὴς 150 μF ἐπὶ ἀντιστάσεως, ὅτε διαπιστοῦται ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως ἀνάπτυξις θερμότητος 0,2 cal. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ φορτισμένου πυκνωτοῦ. Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος J = 4,2 Joule/cal.

Λύσις. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

ὅπου C ἡ χωρητικότης αὐτοῦ καὶ U ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ὁπλισμούς του. Κατὰ τὴν ἐκφόρτισιν τοῦ πυκνωτοῦ μέσῳ τῆς ἀντιστάσεως, ἡ ἐνέργεια αὕτη μετατρέπεται εἰς θερμότητα Q, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2} C \cdot U^2 = J \cdot Q \qquad (2)$$

ὅπου J τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Λύοντες τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς U, λαμβάνομεν

$$\underline{U = \sqrt{\frac{2 J \cdot Q}{C}}} \qquad (3)$$

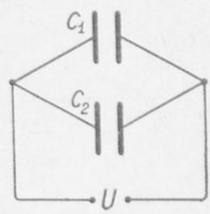
Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), J = 4,2 Joule/cal, Q = 0,2 cal, $C = 150 \cdot 10^{-6}$ F, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 105 \text{ V.}}$$

815. Δύο ὅμοιοι πυκνωταί, ἔχοντες ἕκαστος χωρητικότητα 0,1 μF, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ἀποκαθίσταται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν αὐτῶν διαφορὰ δυναμικοῦ 4000 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος. Εἰς ἕνα δεύτερον πείραμα οἱ πυκνωταὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ἐφαρμοζομένη μεταξὺ τῶν ἄκρων ὁπλισμῶν, ἵνα ἡ ἀποταμιευομένη ἐνέργεια εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν προηγουμένην.

Λύσις. Ἔστω C ἡ χωρητικότης ἑκάστου πυκνωτοῦ. Ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης $C_{ολ}$ τοῦ συστήματος τῶν δύο πυκνωτῶν, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$C_{ολ} = C_1 + C_2$. Ἐπειδὴ δὲ $C_1 = C_2 = C$, ἔχομεν $C_{ολ} = 2C$



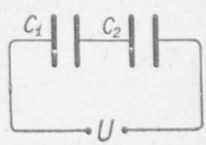
(α)

Ἐὰν καλέσωμεν U τὴν τάσιν, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν πυκνωτῶν, ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$\underline{A = \frac{1}{2} C_{ολ} \cdot U^2 = C \cdot U^2}$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ F καὶ U = 4000 V, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 1,6 \text{ Joule.}}$$



(β)

Ὅταν συνδέσωμεν τοὺς πυκνωτὰς ἐν σειρᾷ, ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης $C_{ολ}$ τοῦ συστήματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $C_1 = C_2 = C$, ἔχομεν $C_{ολ} = C/2$ καὶ συνεπῶς ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι

$$A = \frac{1}{2} C \cdot U'^2$$

ὅπου U′ ἡ ἐφαρμοζομένη νέα διαφορὰ δυναμικοῦ. Λύοντες ἀκολούθως τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην διαφορὰν δυναμικοῦ U′, εὑρίσκομεν

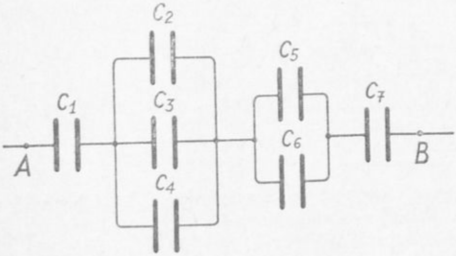
$$\underline{U' = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{C}}}$$

Θέτοντες, $A = 1,6$ Joule καὶ $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ F, εὑρίσκομεν

$$\underline{U' = 8000 \text{ V.}}$$

816. Εὕρατε τὴν συνολικὴν χωρητικότητα μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν A καὶ B τοῦ κυκλώματος, ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Δίδονται $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 3\ \mu F$, $C_5 = 4\ \mu F$, $C_6 = 3\ \mu F$, $C_7 = 5\ \mu F$.

Λύσις. Οἱ πυκνωταὶ χωρητικοτήτων C_2, C_3, C_4 εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ συνεπῶς ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότητος C' αὐτῶν, θὰ εἶναι



$$C' = C_2 + C_3 + C_4 \quad (1)$$

Ἐπίσης οἱ πυκνωταὶ χωρητικοτήτων C_5, C_6 εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης C'' αὐτῶν θὰ εἶναι

$$C'' = C_5 + C_6 \quad (2)$$

Τέλος οἱ πυκνωταὶ χωρητικοτήτων C_1, C', C'', C_7 εἶναι συνδεδεμένοι ἐν σειρᾷ καὶ ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης $C_{ολ}$ αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \frac{1}{C_7}$$

ὅτι εἶναι

$$C_{ολ} = \frac{C_1 \cdot C' \cdot C'' \cdot C_7}{C' \cdot C'' \cdot C_7 + C_1 \cdot C'' \cdot C_7 + C_1 \cdot C' \cdot C_7 + C_1 \cdot C' \cdot C''} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐὰν θέσωμεν $C_2 = 1\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 3\ \mu F$, λαμβάνομεν $C' = 6\ \mu F$. Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν $C_5 = 4\ \mu F$, $C_6 = 3\ \mu F$, λαμβάνομεν $C'' = 7\ \mu F$. Καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (3), ἐὰν θέσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν C_1, C', C'', C_7, εὑρίσκομεν

$$\underline{C_{ολ} = 0,991\ \mu F.}$$

817. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης φορτισμένου πυκνωτοῦ ἔχοντος τάσιν $U = 2$ V καὶ ἐνέργειαν τόσην ὅση ἀπαιτεῖται ἵνα 2 gr πάγου 0^0 C μεταβληθοῦν εἰς ὕδωρ 5^0 C. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr, 4,2 Joule = 1 cal.
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Μαθηματικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ὅταν ἕνας πυκνωτὴς ἔχῃ χωρητικότητα C καὶ τάσιν U εἰς τοὺς ὁπλισμούς του, τότε ἡ ἐνέργεια A τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι

$$A = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ θερμότης Q_1, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἵνα τακῇ πάγος μάζης m εἰς τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, εἶναι

$$Q_1 = J \cdot \lambda \cdot m \quad (2)$$

ὅπου λ εἶναι ἡ θερμότης τήξεως καὶ J τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, ἡ τιμὴ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως.

Ἡ θερμότης Q_2, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἵνα τὸ ὕδωρ μάζης m, τὸ προερχόμενον ἐκ τῆς τήξεως, θερμανθῇ ἀπὸ 0^0 C εἰς θ^0 C, εἶναι

$$Q_2 = J \cdot c \cdot m \cdot \theta$$

ὅπου c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὴν διατύπωσιν τῆς ἀσκήσεως, ὅτι $A = J \cdot (Q_1 + Q_2)$, ὅτε

$$\frac{1}{2} C \cdot U^2 = J \cdot m \cdot (\lambda + c \cdot \theta) \tag{3}$$

καὶ

$$C = \frac{2 J \cdot m \cdot (\lambda + c \cdot \theta)}{U^2} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $J = 4{,}2$ Joule/cal, $m = 2$ gr, $\lambda = 80$ cal/gr, $\theta = 5^0$ C, $c = 1$ cal/gr · grad καὶ $U = 2$ V, εὑρίσκομεν

$$C = 357 \text{ F.}$$

818. Εἰς ἐπίπεδον πυκνωτὴν οἱ δύο κυκλικοὶ ὁπλισμοί, διαμέτρου 40 cm, εὑρισκόμενοι εἰς ἀπόστασιν 15 mm ἀπ' ἀλλήλων, ἕλκονται μὲ δύναμιν 2,33 gr*. Ἐκ τῶν δεδομένων τούτων νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ χωρητικότης καὶ β) ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις. α) Ἔστω S ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου ὁπλισμοῦ καὶ l ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις. Ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ εἰς τὸ κενὸν καὶ εἰς τὸ ΗΣΜ θὰ εἶναι

$$C = \frac{S}{4\pi \cdot l} \tag{1}$$

ἢ ἐπειδὴ $S = \pi \cdot \delta^2/4$, ὅπου δ ἡ διάμετρος τοῦ κυκλικοῦ ὁπλισμοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$C = \frac{\delta^2}{16\, l} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $\delta = 40$ cm, $l = 1{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$C = 66{,}7 \text{ cm.}$$

β) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια A τοῦ πυκνωτοῦ δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = \frac{1}{2} q \cdot U \tag{3}$$

Εἶναι ὅμως, ὡς γνωστόν, $U = \mathcal{E} \cdot l$, ὅπου $\mathcal{E}$ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (3) γράφεται

$$A = \frac{1}{2} q \cdot \mathcal{E} \cdot l \quad (4) \qquad \text{ἢ} \qquad A = \frac{1}{2} F \cdot l \quad (5)$$

(διότι $F = q \cdot \mathcal{E}$). Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $F = 2{,}33\ \text{gr}^* = 2{,}33 \cdot 981$ dyn καὶ $l = 1{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$A = 1714{,}3 \text{ erg.}$$

819. Δύο ἀγωγοὶ χωρητικοτήτων C_1 καὶ C_2, φέρουν ἀντιστοίχως ἠλεκτρικὰ φορτία q_1 καὶ q_2, συνδέονται δὲ δι' ἀγωγοῦ σύρματος, ἀμελητέας χωρητικότητος. Πόση ἡ μεταβολὴ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία ἐπέρχεται.

Λύσις. Πρὸ τῆς συνδέσεως ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια καὶ τῶν δύο ἀγωγῶν θὰ εἶναι

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} \right) \tag{1}$$

Μετὰ τὴν σύνδεσιν ἔστω q'_1, q'_2 ἀντιστοίχως, τὰ φορτία τῶν ἀγωγῶν. Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τώρα θὰ εἶναι

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q'^2_1}{C_1} + \frac{q'^2_2}{C_2} \right) \tag{2}$$

Τὰ φορτία q'_1, q'_2 δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ὡς ἑξῆς. Ὅταν οἱ ἀγωγοὶ ἔρχωνται εἰς ἐπαφήν, τότε οὗτοι ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U καὶ ἐπέρχεται ἀνακατανομὴ τῶν φορτίων. Ἔστω δὲ q'_1, q'_2 τὰ νέα φορτία αὐτῶν. Θὰ ἔχωμεν

$$U = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} \qquad ἢ \qquad \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q'_1 + q'_2}{C_1 + C_2} \tag{3}$$

ἤ, ἐπειδὴ δὲν ἐπέρχεται μεταβολὴ τοῦ ὁλικοῦ φορτίου, ἤτοι $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$, ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$\frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \tag{4}$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$q'_1 = \frac{C_1 \cdot (q_1 + q_2)}{C_1 + C_2} \qquad καὶ \qquad q'_2 = \frac{C_2 \cdot (q_1 + q_2)}{C_1 + C_2} \tag{5}$$

Ἡ σχέσις (2), βάσει τῶν σχέσεων (5), γράφεται

$$A' = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1 \cdot (q_1 + q_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2 \cdot (q_1 + q_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{C_1 + C_2} \tag{6}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (6), δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν μεταβολὴν ΔA τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, ἤτοι

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{(q_1 + q_2)^2}{C_1 + C_2} \right) \tag{7}$$

ἢ

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q_1^2 \cdot C_2 \cdot (C_1 + C_2) + q_2^2 \cdot C_1 \cdot (C_1 + C_2) - (q_1 + q_2)^2 \, C_1 \cdot C_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot (C_1 + C_2)} \right) \tag{8}$$

ἢ

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q_1^2 \cdot C_2^2 + q_2^2 \cdot C_1^2 - 2\, q_1 \cdot q_2 \cdot C_1 \cdot C_2}{C_1 \cdot C_2 \, (C_1 + C_2)} \right) \tag{9}$$

καὶ τελικῶς

$$\underline{\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(q_1 \cdot C_2 - q_2 \cdot C_1)^2}{C_1 \cdot C_2 \cdot (C_1 + C_2)} \right)} \tag{10}$$

820. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς χωρητικότητος πυκνωτοῦ χρησιμοποιοῦμεν ἕτερον πυκνωτὴν γνωστῆς χωρητικότητος (10^{-4} μF), τὸν ὁποῖον φορτίζομεν. Ἡ τάσις τοῦ πυκνωτοῦ τούτου καθορίζεται ἀκολούθως δι' ἠλεκτρομέτρου χωρητικότητος 50 cm, φέροντος ἀβαθμολόγητον κλίμακα, γραμμικῶς ὑποδιῃρημένην. Μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ πυκνωτοῦ τούτου ἐκ τῆς πηγῆς, συνδέομεν ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸν τὸν πρῶτον πυκνωτήν. Εἰς τὸ συνδεδεμένον πρὸς τὸ σύστημα ἠλεκτρόμετρον παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ τάσις ἐλαττοῦται εἰς τὰ 5/8 τῆς ἀρχικῆς του τιμῆς. Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις. Ἔστω U_1 ἡ τάσις τοῦ πυκνωτοῦ τῆς γνωστῆς χωρητικότητος, C_1 καὶ C_2 ἡ χωρητικότης τοῦ ἠλεκτρομέτρου. Τὸ φορτίον τοῦ συστήματος θὰ εἶναι

$$q = (C_1 + C_2) \cdot U_1 \tag{1}$$

Ἐὰν τώρα συνδέσωμεν παραλλήλως πρὸς αὐτόν, τὸν πυκνωτὴν τῆς ἀγνώστου χωρητικότητος C, τὸ φορτίον τοῦ συστήματος θὰ εἶναι πάλιν q (Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τοῦ φορτίου), ἐνῷ ἡ χωρητικότης θὰ αὐξηθῇ κατὰ C. Συνεπῶς θὰ παρατηρηθῇ πτῶσις τῆς τάσεως, καὶ ἐὰν ἡ νέα τάσις εἶναι U, θὰ ἔχωμεν

$$q = (C + C_1 + C_2) \cdot U \tag{2}$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τύπων (1) καὶ (2), προκύπτει

$$(C_1 + C_2) \cdot U_1 = (C + C_1 + C_2) \cdot U \quad (3)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς C, λαμβάνομεν

$$C = \frac{(C_1 + C_2) \cdot (U_1 - U)}{U} \quad (4)$$

καὶ ἐπειδὴ ἔχει δοθῇ ὅτι $U = 5/8\ U_1$, ἔχομεν ὅτι

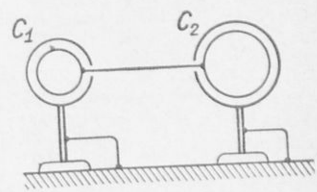
$$\underline{C = \frac{3}{5}(C_1 + C_2)} \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $C_1 = 10^{-4}\ \mu F = 90$ cm καὶ $C_2 = 50$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{C = 84 \text{ cm.}}$$

821. Δύο σφαιρικοὶ πυκνωταὶ ἔχουν χωρητικότητας 0,6 μF καὶ 1 μF, οἱ ἐσωτερικοὶ ὁπλισμοὶ αὐτῶν ἔχουν ἀντιστοίχως δυναμικὰ 50 V καὶ 100 V, ἐνῷ οἱ ἐξωτερικοὶ ὁπλισμοὶ εἶναι προσγειωμένοι. Συνδέονται οἱ ἐσωτερικοὶ ὁπλισμοὶ τῶν πυκνωτῶν δι' ἀγωγοῦ ἀμελητέας χωρητικότητος. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος μετὰ τὴν σύνδεσιν.

Λύσις. Ἔστω C_1 ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνὸς πυκνωτοῦ καὶ C_2 ἡ χωρητικότης τοῦ ἄλλου. Ἐπίσης ἔστω q_1 καὶ q_2 τὰ φορτία ἀντιστοίχως αὐτῶν πρὸ τῆς συνδέσεως. Τὸ φορτίον q_1 τοῦ ἑνὸς πυκνωτοῦ θὰ εἶναι



$$q_1 = C_1 \cdot U_1 \quad (1)$$

ὅπου U_1 ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν αὐτοῦ.

Τὸ φορτίον q_2 τοῦ ἑτέρου πυκνωτοῦ θὰ εἶναι

$$q_2 = C_2 \cdot U_2 \quad (2)$$

ὅπου U_2 ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὸ συνολικὸν φορτίον $q_{ολ}$, τὸ ὁποῖον ἔχουν ὁμοῦ οἱ δύο, ἤτοι

$$q_{ολ} = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 \quad (3)$$

Μετὰ τὴν σύνδεσιν τῶν ἐσωτερικῶν ὁπλισμῶν τῶν σφαιρικῶν πυκνωτῶν, τὸ φορτίον τοῦ συστήματος θὰ παραμείνῃ σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $q_{ολ}$, ἐνῷ ἡ χωρητικότης $C_{ολ}$ τοῦ συστήματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐν παραλλήλῳ συνδέσεως, ὅτι εἶναι

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 \quad (4)$$

Ἡ ἐνέργεια Α τοῦ συστήματος τῶν πυκνωτῶν μετὰ τὴν σύνδεσιν, θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν,

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2_{ολ}}{C_{ολ}} \quad (5)$$

ἢ λόγῳ τῶν (3) καὶ (4)

$$\underline{A = \frac{1}{2} \cdot \frac{(C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2)^2}{C_1 + C_2}} \quad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6), $C_1 = 0{,}6\ \mu F = 0{,}6 \cdot 10^{-6}$ F, $C_2 = 1\ \mu F = 1 \cdot 10^{-6}$ F, $U_1 = 50$ V, $U_2 = 100$ V, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος μετὰ τὴν σύνδεσιν εἶναι

$$\underline{A = 5281{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ Joule.}}$$

822. Δύο πυκνωταὶ χωρητικοτήτων $C_1 = 3$ ΗΣΜ καὶ $C_2 = 6$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ φορτίζονται ὑπὸ τάσιν 150 ΗΣΜ - δυναμικοῦ. Ὑπολογίσατε α) τὴν χωρητικότητα C τοῦ συστήματος, β) τὸ ὁλικὸν φορτίον τοῦ συστήματος, γ) τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἑκάστου τῶν δύο πυκνωτῶν.

Λύσις. α) Ἡ χωρητικότης $C_{ολ}$ τοῦ συστήματος τῶν πυκνωτῶν, ὅταν οὗτοι συνδέωνται ἐν σειρᾷ, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \qquad (1)$$

ὅτι εἶναι

$$\underline{C_{ολ} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $C_1 = 3$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, $C_2 = 6$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, εὑρίσκομεν

$$\underline{C_{ολ} = 2 \text{ ΗΣΜ - χωρητικότητος.}}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου $C = q/U$ τῆς χωρητικότητος φορτισμένου πυκνωτοῦ μὲ φορτίον q καὶ ἔχοντος τάσιν εἰς τοὺς ὁπλισμούς του U, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς q, λαμβάνομεν

$$\underline{q = C \cdot U} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3), $C = 2$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, $U = 150$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ φορτίον τοῦ συστήματος εἶναι

$$\underline{q = 300 \text{ ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

γ) Ἐὰν καλέσωμεν U_1 τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ, χωρητικότητος C_1, θὰ ἔχωμεν

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1} \qquad \text{καὶ} \qquad U_1 = \frac{q_1}{C_1} \qquad (4)$$

Εἶναι ὅμως $q_1 = q$, διότι οἱ πυκνωταὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ συνεπῶς θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $q_1 = 300$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ $C_1 = 3$ ΗΣΜ - χωρητικότητος, εὑρίσκομεν

$$\underline{U_1 = 100 \text{ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ.}}$$

Τέλος, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U_2 εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ, χωρητικότητος C_2, θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ

$$\underline{U - U_1 = 50 \text{ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ.}}$$

823. Συνδέονται μικροὶ πυκνωταὶ συνιστάμενοι ἕκαστος ἀπὸ δύο πλάκας κασσιτέρου, ἐπιφανείας 25 cm^2 κεχωρισμένοι μεταξύ των διὰ παραφινωμένου χάρτου, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 2 καὶ πάχους 0,02 cm. Πόσοι πυκνωταὶ θὰ πρέπει νὰ συνδεθοῦν ἐν παραλλήλῳ, ἵνα ἀποτελεσθῇ πυκνωτὴς χωρητικότητος 0,01 μF.

Λύσις. Ἔστω S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ ἑκάστου πυκνωτοῦ, l ἡ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἀπόστασις καὶ ε ἡ διηλεκτρικὴ σταθερά.

Ἐὰν καλέσωμεν n τὸν ἀριθμὸν τῶν πυκνωτῶν, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ συνδεθοῦν ἐν παραλλήλῳ ἵνα δώσουν χωρητικότητα $C_{ολ}$, τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τῆς ἐν παραλλήλῳ συνδέσεως, θὰ ἔχωμεν

$$C_{ολ} = n \cdot C \qquad (1)$$

ὅπου C ἡ χωρητικότης ἑκάστου πυκνωτοῦ. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν

$$C = ε \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (1) γράφεται

$$C_{ολ} = n \cdot \varepsilon \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad (3)$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ τύπου τούτου ὡς πρὸς n, προκύπτει

$$n = \frac{4\pi \cdot l \cdot C_{ολ}}{\varepsilon \cdot S} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $l = 0{,}02$ cm, $C_{ολ} = 0{,}01\ \mu F = 0{,}01 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{11}$ ΗΣΜ-χωρητικότητος, $\varepsilon = 2$, $S = 25\ cm^2$, εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 45.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

824. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, τοῦ ὀφειλομένου εἰς φορτίον 100 ΗΣΜ-φορτίου, εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ τὸ φορτίον.
('Απ. 4 ΗΣΜ - ἐντάσεως.)

825. α) Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δύο φορτίων + 20 ΗΣΜ καὶ − 5 ΗΣΜ, ἥτις εἶναι 10 cm. Ποία ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ φορτίου + 4 ΗΣΜ, τοποθετουμένου εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο φορτίων. β) Ἐάν, ἀντὶ τοῦ φορτίου − 5 ΗΣΜ, ἔχομεν φορτίον + 5 ΗΣΜ, ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου ὡς καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως ἐπὶ φορτίου + 4 ΗΣΜ.
('Απ. α' 1 ΗΣΜ - ἐντάσεως, 4 dyn. β' 0,6 ΗΣΜ - ἐντάσεως, 2,4 dyn.)

826. Ποῖον τὸ δυναμικόν, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπὸ φορτίου 200 ΗΣΜ - φορτίου.
('Απ. 40 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.)

827. Ὑπολογίσατε τὸ δυναμικόν, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δύο φορτίων ἀπεχόντων κατὰ 10 cm, ὅταν τὰ φορτία εἶναι α) + 100 ΗΣΜ καὶ − 100 ΗΣΜ - φορτίου, β) + 100 ΗΣΜ καὶ + 100 ΗΣΜ - φορτίου, γ) + 100 ΗΣΜ καὶ − 90 ΗΣΜ - φορτίου.
('Απ. α' 0 ΗΣΜ - δυναμικοῦ. β' 40 ΗΣΜ - δυναμικοῦ. γ' 2 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.)

828. Εἰς τὴν μίαν κορυφὴν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου 3 cm × 4 cm, τοποθετεῖται φορτίον − 20 ΗΣΜ καὶ εἰς τὰς δύο γειτονικὰς κορυφὰς τοποθετοῦνται φορτία + 10 ΗΣΜ. Ὑπολογίσατε τὸ δυναμικὸν εἰς τὴν τετάρτην κορυφήν.
('Απ. 1,8 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.)

829. Τὸ δυναμικὸν ἀγωγοῦ εἶναι 50 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, ὅταν φορτίζεται μὲ 10 ΗΣΜ - φορτίου. Εὕρατε τὴν χωρητικότητα τοῦ ἀγωγοῦ.
('Απ. 0,2 ΗΣΜ - χωρητικότητος.)

830. Μονωμένος σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἀκτῖνος 10 cm, φορτίζεται μὲ 50 ΗΣΜ - φορτίου. Ποῖον τὸ δυναμικόν του.
('Απ. 5 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.)

831. Δύο ὅμοιαι μεταλλικαὶ σφαῖραι ἠλεκτρικῶς φορτισμέναι, τὰ κέντρα τῶν ὁποίων ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 20 cm, ἕλκωνται μετὰ δυνάμεως 600 dyn. Αὗται, ἀφοῦ ἔλθουν εἰς ἐπαφήν, διαχωρίζονται ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ ἀπέχουν κατὰ 10 cm, ὅτε ἡ δύναμις ἀπωθήσεως εἶναι 100 dyn. Πόσον τὸ ἀρχικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον τὸ ὁποῖον ἔφερε ἑκάστη σφαῖρα.
('Απ. 600 ΗΣΜ - φορτίου, 400 ΗΣΜ - φορτίου.)

832. Ἐκκρεμὲς τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα συνίσταται ἀπὸ μεταλλικὴν σφαῖραν 5 gr, ἠλεκτρισμένην, ἐκτελεῖ 1 ταλάντωσιν ἀνὰ sec. Ὑπὸ τὴν σύγχρονον ἐπίδρασιν τῆς ἕλξεως τῆς βαρύτητος καὶ μεταλλικῆς σφαίρας εὑρισκομένης κατακορύφως κάτωθεν αὐτῆς, τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ 3 ταλαντώσεις ἀνὰ sec. Πόση εἶναι ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς ἡ κάτωθεν αὐτοῦ φερομένη ἠλεκτρισμένη σφαῖρα.
(Ἀπ. 40 gr*.)

833. Τὸ σφαιρίδιον ἠλεκτρικοῦ ἐκκρεμοῦς, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα εἶναι 0,1 gr, φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον 20 ΗΣΜ, τοποθετούμενον ἐντὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὁριζοντίας ἐντάσεως. Τὸ ἐκκρεμὲς διαγράφει γωνίαν 15^0. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Δίδεται ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος $g = 981$ cm/sec². (Ἀπ. 1,32 ΗΣΜ, ἐντάσεως.)

834. Φορτίον 0,1 μCb εἶναι κατανεμημένον ἐπὶ ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 5 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν 1) Ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. 2) Τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας, ἐκφραζόμενον εἰς βόλτ. 3) Ἡ δύναμις ἥτις ἐξασκεῖται ὑπὸ τῆς σφαίρας ταύτης ἐπὶ φορτίου 90 ΗΣΜ, εὑρισκομένου εἰς τὸν ἀέρα εἰς ἀπόστασιν α) 25 cm ἀπὸ τῆς σφαίρας, β) ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ γ) εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.
(Ἀπ. 0,95 ΗΣΜ - φορτίου/cm², 18000 V, 30 dyn, 1080 dyn, 0 dyn.)

835. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἔχει ἀκτῖνα 10 cm καὶ δυναμικὸν 22500 V καὶ ἡ ἑτέρα ἀκτῖνα 20 cm καὶ δυναμικὸν 37500 V συνδέονται στιγμιαίως διὰ μακροῦ καὶ λεπτοῦ σύρματος. Αὗται φέρονται ἐν συνεχείᾳ εἰς ἀπόστασιν 40 cm μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκοντο αἱ σφαῖραι πρὸ τῆς ἐπαφῆς καὶ ἡ ἐξασκουμένη δύναμις μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν. (Ἀπ. 30000 V καὶ 1250 dyn.)

836. Σφαῖρα ἀκτῖνος 50 cm φέρεται εἰς τὸ δυναμικὸν τῶν 15000 V. Ἀγωγὸς ὅστις εὑρίσκεται εἰς δυναμικὸν 6000 V, συνδέεται ἐκ τοῦ μακρόθεν μὲ τὴν σφαῖραν, ὅτε ἔχομεν δυναμικὸν ἰσορροπίας 9000 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγωγοῦ.
(Ἀπ. 1/9000 μF.)

837. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης πυκνωτοῦ μὲ ἐπιπέδους ὁπλισμούς, τοῦ ὁποίου οἱ ὁπλισμοί, ἔχουν ἐπιφάνειαν 100 cm² ἕκαστος καὶ χωρίζονται ἀπὸ ὑαλίνην πλάκα ($\varepsilon = 5{,}5$) πάχους 2 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τῆς αὐτῆς χωρητικότητος. (Ἀπ. 0,00024 μF, 2,18 m.)

838. Δύο πυκνωταὶ χωρητικοτήτων $C_1 = 200$ ΗΣΜ καὶ $C_2 = 600$ ΗΣΜ, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ φορτίζονται μὲ 8000 ΗΣΜ - φορτίου. Ὑπολογίσατε α) Τὴν χωρητικότητα C καὶ τὸ δυναμικὸν U τοῦ συστήματος. β) Τὸ φορτίον ἐπὶ ἑκάστου πυκνωτοῦ.
(Ἀπ. α′ C = 800 ΗΣΜ - χωρητικότητος, U = 10 ΗΣΜ - δυναμικοῦ,
β′ 2000 ΗΣΜ - φορτίου, 6000 ΗΣΜ - φορτίου.)

839. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 1 μF συνδέεται μὲ πηγὴν διαφορᾶς δυναμικοῦ 100 V. Ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ φορτίον εἰς Cb. (Ἀπ. 10^{-4} Cb.)

840. Πυκνωτὴς ἀέρος ἔχει χωρητικότητα 3 ΗΣΜ. Ποία ἡ χωρητικότης του ὅταν μαρμαρυγίας, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 6, εἰσαχθῇ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν του.
(Ἀπ. 18 ΗΣΜ - χωρητικότητος.)

841. Καθορίσατε τὸ φορτίον ἑκάστης πλακὸς πυκνωτοῦ, χωρητικότητος 50 ΗΣΜ, ὅταν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πλακῶν εἶναι 2 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.
(Ἀπ. 100 ΗΣΜ - φορτίου.)

842. Ποία ἡ ἐπὶ πυκνωτοῦ ἀποταμιευθεῖσα ἐνέργεια, ὅταν ἡ χωρητικότης του εἶναι 50 ΗΣΜ καὶ φορτίζεται μὲ 40 ΗΣΜ - φορτίου. ('Απ. 16 erg.)

843. Τρεῖς πυκνωταί, ἕκαστος χωρητικότητος 300 ΗΣΜ, φορτίζονται ἕκαστος εἰς δυναμικὸν 20 ΗΣΜ καὶ ἐν συνεχείᾳ συνδέονται ἐν σειρᾷ. Ὑπολογίσατε α) τὴν χωρητικότητα τοῦ συστήματος, β) τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ τῶν ἀκραίων ὁπλισμῶν, γ) τὸ ἐπὶ ἑκάστου πυκνωτοῦ φορτίον καὶ δ) τὴν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἀποταμιευθεῖσαν ἐνέργειαν.

('Απ. 100 ΗΣΜ - χωρητικότητος, 60 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, 6000 ΗΣΜ - φορτίου, 180000 erg.)

844. Δύο πυκνωταὶ χωρητικοτήτων 700 ΗΣΜ καὶ 300 ΗΣΜ ἀντιστοίχως, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ ἐν συνεχείᾳ φορτίζονται μὲ 6000 ΗΣΜ - φορτίου. Ὑπολογίσατε α) τὴν χωρητικότητα καὶ τὸ δυναμικὸν τοῦ συστήματος καὶ β) τὸ ἐπὶ ἑκάστου πυκνωτοῦ φορτίον.

('Απ. 1000 ΗΣΜ - χωρητικότητος, 6 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, β) 4200 ΗΣΜ - φορτίου, 1800 ΗΣΜ - φορτίου.)

845. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 4 mμF συνδέεται μὲ πηγὴν διαφορᾶς δυναμικοῦ 120 V. Ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ φορτίον. ('Απ. $48 \cdot 10^{-8}$ Cb.)

846. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα πυκνωτοῦ συνισταμένου ἐκ δύο παραλλήλων πλακῶν διακεχωρισμένων ὑπὸ στρώματος παραφίνης, πάχους 0,5 cm τῆς ἐπιφανείας ἑκάστης πλακὸς οὔσης 80 cm². Ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τῆς παραφίνης εἶναι $\varepsilon = 2$. β) Ἐὰν ὁ πυκνωτὴς συνδεθῇ μὲ πηγὴν 100 V, ὑπολογίσατε τὸ ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ φορτίον. γ) Ὑπολογίσατε τὴν ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ ἀποταμιευθεῖσαν ἐνέργειαν.

('Απ. α' 25 ΗΣΜ - χωρητικότητος ἢ $2{,}8 \cdot 10^{-11}$ F ἢ 0,028 mμF. β' 8,3 ΗΣΜ - φορτίου ἢ $2{,}8 \cdot 10^{-9}$ Cb ἢ $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ μCb. γ' 1,4 erg.)

847. Πυκνωτής, ἔχων διαστάσεις 25 cm × 18 cm, ἀποτελεῖται ἐκ δύο μεταλλικῶν πλακῶν, αἱ ὁποῖαι διαχωρίζονται ὑπὸ ὑαλίνης πλακὸς πάχους $d = 0{,}2$ cm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\varepsilon = 2{,}4$. Ποία ἡ χωρητικότης αὐτοῦ. ('Απ. $4{,}8 \cdot 10^{-4}$ μF.)

848. Δίδονται ἓξ πυκνωταί, χωρητικοτήτων 10μF, 5μF, 4μF, 3μF, 2μF καὶ 1μF ἀντιστοίχως. Ποία ἡ μεγίστη καὶ ποία ἡ ἐλαχίστη χωρητικότης, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ τῶν πυκνωτῶν.

('Απ. 25μF, 0,42μF.)

849. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 4 ΗΣΜ φορτίζεται ὑπὸ τάσεως 1000 ΗΣΜ. Ποία ἡ ἐκλυομένη θερμότης ὑπὸ σπινθῆρος, ὁ ὁποῖος ἐκφορτίζει πλήρως τὸν πυκνωτήν. Ὑποθέτομεν ὅτι 1 cal εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς 4,17 Joule. ('Απ. 0,048 cal.)

850. Πυκνωτὴς συνίσταται ἐκ δύο ἐπιπέδων πλακῶν ἐπιφανείας 3 cm², διαχωριζομένων ὑπὸ φύλλου μαρμαρυγίου πάχους 1,5 mm. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ, ἐὰν ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ μαρμαρυγίου εἶναι $\varepsilon = 6$. Ἐὰν ἐν συνεχείᾳ ἡ μία πλὰξ τοῦ πυκνωτοῦ μετακινηθῇ διὰ νὰ σχηματίσῃ ἀέριον διάκενον εὔρους 0,3 mm μεταξὺ μαρμαρυγίου καὶ ὁπλισμοῦ, ὑπολογίσατε κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ χωρητικότης.

('Απ. 9,55 ΗΣΜ - χωρητικότητος, 5,21 ΗΣΜ - χωρητικότητος.)

851. Πυκνωταὶ χωρητικοτήτων 50 ΗΣΜ καὶ 100 ΗΣΜ φορτίζονται ὑπὸ τάσεων 400 ΗΣΜ καὶ 200 ΗΣΜ ἀντιστοίχως καὶ συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Εὕρατε τὸ νέον δυναμικὸν τῶν πυκνωτῶν καὶ ὑπολογίσατε τὸ κλάσμα τῆς ἀρχικῆς ἐνεργείας τὸ ὁποῖον ἀπωλέσθη κατὰ τὴν σύνδεσιν. ('Απ. 266,7 ΗΣΜ, 1/9.)

852. Πυκνωτὴς ἔχει παραλλήλους πλάκας ὡς ὁπλισμούς, ἐπιφανείας 1000 cm^2 ἀπεχούσας μεταξύ των κατὰ 0,5 mm. Τὸ διηλεκτρικὸν εἶναι σύνθετον, συνιστάμενον ἐξ ἑνὸς φύλλου πάχους 0,2 mm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 2, ἑνὸς φύλλου πάχους 0,2 mm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 3 καὶ ἑνὸς φύλλου πάχους 0,1 mm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 6. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ.
('Απ. 4,325 ΗΣΜ - χωρητικότητος.)

853. Δύο κοῖλαι συγκεντρικαὶ σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι ἔχουν ἀκτίνας 20 cm καὶ 10 cm ἀντιστοίχως καὶ χωρίζονται διά τινος μέσου, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 3. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα τοῦ συστήματος. ('Απ. 60 cm.)

854. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικότητα εἰς μF μεμονωμένης σφαίρας, ἀκτῖνος 10 cm, ἡ ὁποία περιβάλλεται ὑπὸ μέσου, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 1. Ἐὰν ἡ σφαῖρα περιβάλλεται ὑπὸ μέσου διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 3, ὑπολογίσατε τὴν νέαν χωρητικότητα. ('Απ. 10 cm, 30 cm.)

855. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν πυκνωτὴν, χωρητικότητος 1,5 μF. Τὸ ὑλικὸν τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμεύσῃ ὡς διηλεκτρικὸν εἶναι χάρτης πάχους 0,2 mm, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 2,1. Ὑπολογίσατε τὴν ἐπιφάνειαν τῶν ὁπλισμῶν ἐκ φύλλου κασσιτέρου. ('Απ. 16,16 m^2.)

856. Φορτία τῶν + 10 ΗΣΜ, + 20 ΗΣΜ καὶ − 15 ΗΣΜ τοποθετοῦνται εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου, πλευρᾶς 6 cm. Ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ μέσου εἶναι 3. Εὕρατε τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου. Ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ φορτίου τοποθετῆται εἰς τὸ κέντρον, ὑπολογίσατε τὸ μέγεθος καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως τῆς ἐπενεργούσης ἐπ' αὐτό.
('Απ. 1,44 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, 0,718 dyn. σχηματίζουσα γωνίαν 16^0 51' μὲ τὴν γραμμὴν τὴν ἑνοῦσαν τὰ φορτία + 20 καὶ − 15.)

857. Οἱ ὁπλισμοὶ πυκνωτοῦ ἀπέχουν 0,4 cm καὶ ἔχουν ἕκαστος ἐπιφάνειαν 5,03 cm^2. Ὁ χῶρος μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πληροῦται ὑπὸ φύλλου διηλεκτρικοῦ, σταθερᾶς 6, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀφαιρῆται χωρὶς νὰ μετακινήσωμεν τοὺς ὁπλισμούς. Ὁ πυκνωτὴς φορτίζεται διὰ συνδέσεως τῶν ἀκροδεκτῶν του μὲ διαφορὰν δυναμικοῦ 2 ΗΣΜ. Ὑπολογίσατε τὸ παραχθὲν ἔργον κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ διηλεκτρικοῦ, ἐὰν α) οἱ ὁπλισμοὶ εἶναι συνδεδεμένοι μὲ τὴν πηγὴν κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν, β) οἱ ὁπλισμοὶ ἔχουν ἀποσυνδεθῇ πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ φύλλου τοῦ διηλεκτρικοῦ.
('Απ. 10 erg, 60 erg.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

858. Ὑπολογίσατε τὸ δυναμικόν, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπὸ φορτίου 240 ΗΣΜ.

859. α) Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δύο φορτίων τῶν − 25 ΗΣΜ καὶ + 5 ΗΣΜ, ἥτις εἶναι 20 cm. Ποία ἡ ἐπὶ φορτίου + 2 ΗΣΜ ἐξασκουμένη δύναμις, ὅταν τοῦτο τίθεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο φορτίων. β) Ἐὰν ἀντὶ τοῦ φορτίου + 5 ΗΣΜ ἔχωμεν φορτίον τῶν − 5 ΗΣΜ - φορτίου, ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου ὡς καὶ τὴν ἐπὶ τοῦ φορτίου τῶν + 2 ΗΣΜ δύναμιν.

860. Ὑπολογίσατε τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον ἵνα μεταφέρωμεν φορτίον 5 ΗΣΜ ἀπὸ σημείου, ἐντὸς τοῦ κενοῦ, ἀπέχοντος 20 cm ἀπὸ φορτίον 60 ΗΣΜ, εἰς σημεῖον ἀπέχον 4 cm ἀπ' αὐτοῦ.

861. Ὑπολογίσατε τὸ δυναμικόν, ἐντὸς τοῦ κενοῦ, εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως δύο φορτίων ἥτις εἶναι 20 cm, ὅταν τὰ φορτία εἶναι α) $+80$ ΗΣΜ καὶ -80 ΗΣΜ, β) $+80$ ΗΣΜ καὶ $+80$ ΗΣΜ, γ) $+80$ ΗΣΜ καὶ -60 ΗΣΜ-φορτίου.

862. Ποῖον τὸ δυναμικὸν μεμονωμένου σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, διαμέτρου 10 cm, ὅταν φορτίζεται μὲ 100 ΗΣΜ-φορτίου.

863. Ὁ λόγος τῶν φορτίων δύο μεμονωμένων σφαιρῶν, ἀκτίνων r καὶ r′ εἶναι $q : q' = 5 : 6$. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων εἶναι $r : r' = 10 : 9$. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἠλεκτρικῶν πυκνοτήτων αὐτῶν.

864. Ποῖον τὸ δυναμικὸν τῆς γηΐνης σφαίρας, ὅταν αὕτη φέρῃ φορτίον 1 Cb. Ἀκτὶς τῆς Γῆς 6370 km.

865. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἔχει σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἀκτῖνος $r = 5$ cm, φέρων φορτίον $q = 0{,}145$ μCb.

866. Σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἀκτῖνος $r = 12$ cm εἶναι φορτισμένος, ὥστε ἡ πυκνότης τοῦ φορτίου του νὰ εἶναι $5 \cdot 10^{-12}$ Cb/cm². Ποῖον τὸ δυναμικὸν αὐτοῦ.

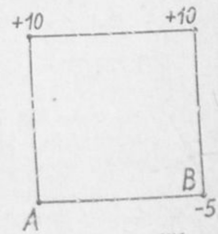
867. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ παραλλήλων πλακῶν, ἵνα ἐπὶ φορτίου $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ Cb τιθεμένου μεταξὺ αὐτῶν, ἐξασκῆται δύναμις 100 mgr*.

868. Ποία ἡ ἑλκτικὴ δύναμις F μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ, ἑκάστου ἐπιφανείας $S = 48$ cm², ἐὰν οὗτοι εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν $d = 0{,}4$ cm ἀπ' ἀλλήλων, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 1000 V.

869. Οἱ κυκλικοὶ ὁπλισμοὶ ἐπιπέδου πυκνωτοῦ, ἀκτῖνος $r = 11$ cm, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 9 mm ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἕλκονται μὲ δύναμιν 10 gr*. Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν.

870. Ἠλεκτροστατικὸν βολτόμετρον ἔχει δύο λεπτὰς παραλλήλους πλάκας, ἑκάστη ἐπιφανείας 12 cm². Ἐὰν αἱ πλάκες εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 5 mm ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν ἕλξεως εἰς dyn, ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 2000 V.

871. Τρία σημειακὰ φορτία τῶν $+10$ ΗΣΜ, $+10$ ΗΣΜ καὶ -5 ΗΣΜ τοποθετοῦνται εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου, πλευρᾶς 5 cm, ὡς εἰς τὸ σχῆμα δεικνύεται. Ὑπολογίσατε τὸ δυναμικὸν εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν Α. Ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ φορτίου τοποθετῆται εἰς τὸ Α, ὑπολογίσατε τὸ μέγεθος καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπ' αὐτὸ ἐπενεργούσης δυνάμεως.



Ἄσκησις 871.

872. Φορτισμένη σταγὼν ἐλαίου ἀκτῖνος 0,0003 cm τίθεται εἰς τὸν μεταξὺ δύο παραλλήλων καὶ μεμονωμένων πλακῶν χῶρον, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 5000 V. Ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,9 gr/cm³. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς σταγόνος ἀσκουμένη δύναμις ἐξουδετερώνει τὸ βάρος αὐτῆς καὶ ἡ σταγὼν δὲν πίπτει. Ποῖον τὸ φορτίον αὐτῆς.

873. Πυκνωτὴς ἀποτελεῖται ἐκ δύο κοίλων συγκεντρικῶν σφαιρικῶν ἀγωγῶν, ἀκτίνων $r_1 = 10$ cm καὶ $r_2 = 12$ cm ἀντιστοίχως. Ὁ ἐσωτερικὸς ἀγωγὸς φέρει φορτίον q Cb, ἐνῷ ὁ ἐξωτερικὸς προσγειοῦται. Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ, ἐὰν τὸ διάκενον μεταξὺ τῶν ἀγωγῶν πληροῦται ὑπὸ πετρελαίου διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\varepsilon = 2{,}1$.

874. Δύο σφαιρικοὶ ἀγωγοί, ἀκτίνων 0,5 cm καὶ 1,0 cm ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται ὑπὸ δυναμικὸν 12000 V. Ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι 10 cm. Μὲ ποίαν δύναμιν ἀπωθοῦνται.

875. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, τοῦ δημιουργουμένου ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ διπόλου (φορτία $+e$ καὶ $-e$ εἰς ἀπόστασιν l), ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο φορτία ὡς καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν, ἐὰν ἡ ἀπόστασις r τῶν θεωρουμένων σημείων τοῦ πεδίου ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τῶν φορτίων εἶναι μεγάλη ἐν σχέσει πρὸς τὸ μῆκος τοῦ διπόλου.

876. Σφαιρίδιον ἐκ μολύβδου μάζης 0,5 gr, φέρον φορτίον 50 ΗΣΜ - φορτίου, ἐξαρτᾶται διὰ μεμονωμένου νήματος μεταξὺ τῶν κατακορύφως διατεταγμένων καὶ εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπ' ἀλλήλων εὑρισκομένων ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ. Ποία διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν, ὥστε τὸ νῆμα νὰ ἀποκλίνῃ κατὰ 10^0 ἐκ τῆς κατακορύφου.

877. Πυκνωτὴς δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς δύο μεταλλικὰ φύλλα χωρισμένα ἀπὸ μονωτικόν, πάχους 0,25 mm καὶ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 4. Ἡ ὠφέλιμος ἐπιφάνεια τῶν μεταλλικῶν πυκνωτῶν εἶναι 25 m^2. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ. Συνδέοντες 10 ὁμοίους πυκνωτὰς ἐν παραλλήλῳ, ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ συστήματος.

878. Δίδονται δύο σφαιρικοὶ πυκνωταί, τῶν ὁποίων οἱ ἐξωτερικοὶ ὁπλισμοὶ εἶναι συνδεδεμένοι μὲ τὸ ἔδαφος. Ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνὸς εἶναι 0,3 μF τοῦ δὲ ἑτέρου 0,8 μF. Ὁ πρῶτος φορτίζεται ὑπὸ δυναμικὸν 15 V, ὁ δὲ δεύτερος ὑπὸ δυναμικὸν 26 V. α) Νά εὑρεθῇ τὸ φορτίον ἑκάστου. β) Ἐὰν συνδέσωμεν τοὺς ἐσωτερικοὺς ὁπλισμοὺς δι' ἀγωγοῦ ἄνευ χωρητικότητος, νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταταβολὴ τοῦ δυναμικοῦ καὶ ἡ μεταβολὴ τοῦ φορτίου.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Φαρμακευτικόν, 1955.)

879. Συνδέονται ἐν σειρᾷ 5 πυκνωταί, ἔχοντες ἕκαστος χωρητικότητα 5 μF καὶ ἡ προκύπτουσα συστοιχία φέρεται εἰς δυναμικὸν 5000 V. Ἐκφορτίζεται ἐν συνεχείᾳ ἡ συστοιχία διὰ μέσου σύρματος ἐκ σιδήρου, μήκους 10 cm καὶ τομῆς 0,5 mm^2. Πόση ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐνέργεια τῆς ἐκφορτίσεως χρησιμεύει μόνον ἵνα ἀνυψοῖ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ νήματος. Ἡ πυκνότης καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σιδήρου εἶναι ἀντιστοίχως 7,85 gr/cm^3 καὶ 0,113 cal/gr·grad.

880. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ ἀέρος, σχηματιζομένου ἀπὸ δύο μεταλλικὰς πλάκας ἐπιφανείας 1 m^2 καὶ εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 0,5 cm εἶναι 6000 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Τὸ φορτίον τῶν ὁπλισμῶν. β) Ἡ μέση δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου. γ) Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ δαπανηθῇ, ἵνα φέρωμεν εἰς ἀπόστασιν 5 cm τοὺς ὁπλισμούς. δ) Τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν εἰς τὴν ἀπόστασιν 5 cm. ε) Τὴν μεταβολὴν τῆς ἐνεργείας, ἥτις ἐπέρχεται ἐκ τῆς μεταθέσεως τῶν ὁπλισμῶν. στ) Τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἥτις ἐπέρχεται συνεπείᾳ τῆς μεταθέσεως τῶν ὁπλισμῶν.

881. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ ἀέρος, σχηματιζομένου ἀπὸ δύο μεταλλικάς πλάκας ἐπιφανείας 0,5 m^2 καὶ ἀποστάσεως 1 cm, εἶναι 9000 V. Πόσον τὸ φορτίον τῶν ὁπλισμῶν. Πόση ἡ δύναμις ἕλξεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ εἷς ὁπλισμὸς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν. Ἀντικαθίσταται ὁ ἀὴρ ἀπὸ ὑαλίνην πλάκα διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 7,5. Πόση ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν. Πόση ἡ δύναμις ἕλξεως τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν.

882. Ὁ ἐσωτερικὸς καὶ ὁ ἐξωτερικὸς ὁπλισμὸς λαγήνου ἔχουν ὁ εἷς δυναμικὸν 6000 V καὶ ὁ ἕτερος τὸ δυναμικὸν τῆς Γῆς. Συνδέεται ἐν συνεχείᾳ ὁ ἐσωτερικὸς ὁπλισμὸς τῆς λαγήνου πρὸς ἕνα τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ χωρητικότητος 0,01 μF, τοῦ ὁποίου ὁ ἐξωτερικὸς ὁπλισμὸς εἶναι προσγειωμένος. Διαπιστοῦται τότε δυναμικὸν ἰσορροπίας 2000 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ χωρητικότης τῆς λαγήνου, β) ἡ ἐνεργὸς ἐπιφάνεια τῆς λαγήνου ταύτης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὕαλος, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 8, ἔχει πάχος 1 mm, γ) ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς λαγήνου πρὸ τῆς συνδέσεως, δ) ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος λάγηνος - πυκνωτὴς μετὰ τὴν σύνδεσιν.

883. Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ πυκνωτὴς ἐκ δύο κυκλικῶν μεταλλικῶν πλακῶν, ὅστις, ἄνευ διηλεκτρικοῦ καὶ δι' ἀπόστασιν 1 mm μεταξὺ τῶν πλακῶν, φορτιζόμενος ὑπὸ τάσιν 100 V, νὰ προσλαμβάνῃ φορτίον 300 ΗΣΜ. α) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῶν πλακῶν. β) Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ. γ) Προκειμένου νὰ αὐξηθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἰς 0,1 μF διὰ παρεμβολῆς μεταξὺ τῶν πλακῶν παραφινωμένου χάρτου διηλεκτρικῆς σταθερᾶς $\varepsilon = 4$ καὶ προσεγγίσεως τῶν πλακῶν ὥστε νὰ ἐφάπτωνται τοῦ χάρτου, πόσον πρέπει νὰ ἐκλεγῇ τὸ πάχος τοῦ χάρτου.

884. Μὲ ποῖον φορτίον πρέπει νὰ φορτίσωμεν σφαιρικὸν ἀγωγὸν ἀκτῖνος 6 cm ἵνα φέρωμεν αὐτὸν εἰς δυναμικὸν 1000 V καὶ ποῖον τὸ δυναμικὸν ἐντὸς τοῦ ὑπ' αὐτοῦ δημιουργουμένου ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια δύο φύλλων ἐκ κασσιτέρου, ὥστε ταῦτα τιθέμενα ἐπὶ πλακὸς μαρμαρυγίου (μίκα) πάχους 0,1 mm ν' ἀποτελοῦν πυκνωτὴν τῆς αὐτῆς χωρητικότητος μὲ τὴν τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ ($\varepsilon = 6$).

885. α) Ἐπίπεδος πυκνωτὴς ἀέρος, δεδομένων διαστάσεων, συνδέεται πρὸς ἠλεκτρικὴν πηγὴν ὡρισμένης τάσεως, ἀφοῦ δὲ φορτισθῇ ἀπομακρύνομεν αὐτὸν τῆς πηγῆς καὶ διπλασιάζομεν τὴν μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν αὐτοῦ ἀπόστασιν. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ χωρητικότης, τὸ φορτίον, ἡ τάσις καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ, νὰ εὑρεθῇ δὲ ποῖον ἐκ τῶν μεγεθῶν τούτων μετεβλήθη καὶ ποία ἡ τιμὴ τῆς μεταβολῆς. β) Ὁ πυκνωτὴς εἶναι συνδεδεμένος πρὸς τὴν πηγὴν κατὰ τὸν διπλασιασμὸν τῆς μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἀποστάσεως. Πῶς μεταβάλλονται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ προηγούμενα μεγέθη.

886. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 20 μF φορτίζεται ὑπὸ τάσιν 3000 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ ἐντὸς αὐτοῦ ἐναποθηκευομένη ἐνέργεια. β) Ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐντάσεως καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν (ἄνευ ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων) ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ μέσῳ σπινθῆρος, τοῦ ὁποίου ἡ διάρκεια θὰ ληφθῇ ἴση πρὸς 1/1 000 000 sec.

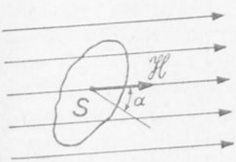
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ´

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α´

887. Ποία ἐπιφάνεια πρέπει νὰ δοθῇ εἰς κυκλικὴν σπεῖραν, ὥστε νὰ διέρχεται ροὴ 2000 Maxwell, **ὅταν αὕτη τίθεται καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 16** Gauss.

Λύσις. Ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ ἡ διερχομένη δι' ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ S, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}$, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου



$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S \cdot \text{συν}\, \alpha \qquad (1)$$

ὅπου α ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μὲ τὴν κάθετον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς S λαμβάνομεν

$$S = \frac{\Phi}{\mathcal{H} \cdot \text{συν}\, \alpha} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $\Phi = 2000$ Mx, $\mathcal{H} = 16$ Gauss καὶ $\alpha = 0^0$, εὑρίσκομεν

$$S = 125 \text{ cm}^2.$$

888. Κυκλικὴ σπεῖρα ἐπιφανείας 1500 cm^2, **τοποθετεῖται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 600** Gauss. **Ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς σπείρας, οὕτως ὥστε ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ διερχομένη διὰ τῆς σπείρας, νὰ εἶναι ἴση πρὸς 450 000** Mx.

Λύσις. Ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ ἡ διερχομένη δι' ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ S, ἡ ὁποία τοποθετεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}$, εἶναι

$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S \cdot \text{συν}\, \alpha \qquad (1)$$

ὅπου, α ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν S.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς συν α, λαμβάνομεν

$$\text{συν}\, \alpha = \frac{\Phi}{\mathcal{H} \cdot S} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $\Phi = 450\,000$ Mx, $\mathcal{H} = 600$ Gauss καὶ $S = 1500 \text{ cm}^2$, εὑρίσκομεν συν $\alpha = 0{,}5$ καὶ

$$\alpha = 60^0.$$

889. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον ἀπέχον 4 cm **ἀπὸ εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ μεγάλου μήκους, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 12 Α.**

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ εὐθύγραμμον ἀγωγὸν μεγάλου μήκους καὶ ὁ ὁποῖος διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,i}{r}$$

ἔνθα τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ $\mathcal{H}$ καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ HMM καὶ τὸ i μετρᾶται εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα ('Αμπέρ).

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $i = 12$ A, $r = 4$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 0{,}6 \text{ Gauss.}$$

890. Ροὴ 60 000 Mx παράγεται ἐντὸς τοῦ σιδηροῦ πυρῆνος σωληνοειδοῦς. Ὅταν ἀφαιρῆται ὁ σιδηροῦς πυρήν, ἡ ροὴ εἶναι 24 Mx ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς. Ποία ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου.

Λύσις. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης μ ἑνὸς ὑλικοῦ, εἶναι τὸ πηλῖκον τῆς μαγνητικῆς ροῆς Φ_1, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχῃ ὡς πυρὴν τὸ ἐν λόγῳ ὑλικόν, διὰ τῆς μαγνητικῆς ροῆς Φ_2, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχῃ ἀήρ. Ἤτοι

$$\mu = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $\Phi_1 = 60000$ Mx, $\Phi_2 = 24$ Mx, εὑρίσκομεν

$$\mu = 2500.$$

891. Σωληνοειδὲς μήκους 1 m περιέχει συνολικῶς 500 σπείρας. Ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 13,09 Ω καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ τάσις 20 V. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σωληνοειδοῦς μεγάλου μήκους l, τὸ ὁποῖον διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, ὅταν ἔχῃ N σπείρας, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4\pi \cdot i \cdot N}{l} \tag{1}$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι ὁ συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται ἵνα, ὅταν μετρῶμεν τὰ μεγέθη $\mathcal{H}$ καὶ l εἰς τὸ HMM, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μετρᾶται εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα, δηλαδὴ εἰς 'Αμπέρ.

'Εξ ἄλλου ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν

$$i = \frac{U}{R} \tag{2}$$

ὅπου U ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ R ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ. Βάσει τοῦ τύπου (2), ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4\pi \cdot U \cdot N}{l \cdot R} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $U = 20$ V, $R = 13{,}09\ \Omega$, $l = 100$ cm καὶ $N = 500$, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 9{,}6 \text{ Gauss.}$$

892. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, εἰς τὸ κέντρον σωληνοειδοῦς ἀπείρου μήκους, φέροντος 10 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους καὶ διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 A.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς σωληνοειδοῦς ἀπείρου μήκους, τὸ ὁποῖον ἔχει N σπείρας ἀνὰ μονάδα μήκους καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος i, εἶναι εἰς τὸ HMM,

$$\mathcal{H} = 4\pi \cdot i \cdot N \tag{1}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $i = 2\text{A} = 0{,}2$ HMM - ἐντάσεως καὶ $N = 10$ σπεῖραι/cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 25{,}12 \text{ Gauss.}$$

893. Πηνίον μήκους 25 cm καὶ τομῆς 15 cm² φέρει 200 σπείρας καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2,5 A. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου, β) ἡ μαγνητικὴ ροὴ μέσῳ τοῦ πηνίου.

Λύσις. Ἔστω i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, l τὸ μῆκος αὐτοῦ καὶ N ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἰς τὸ HMM, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi \cdot i \cdot N}{l}$$

καὶ διὰ $i = 2,5$ A $= 0,25$ HMM - ἐντάσεως, $N = 200$ καὶ $l = 25$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 25,12 \text{ Gauss.}$$

Ἐπίσης, ἐὰν S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σωληνοειδοῦς, τότε ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ ἡ διερχομένη δι' αὐτοῦ, θὰ εἶναι

$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S$$

ὁπότε, διὰ $\mathcal{H} = 25,12$ Gauss καὶ $S = 15$ cm², εὑρίσκομεν

$$\Phi = 376,8 \text{ Mx.}$$

894. Τίθεται εἰς τὸ μέσον σωληνοειδοῦς μήκους 50 cm καὶ 250 σπειρῶν ὁ βόρειος πόλος ἐπιμήκους μαγνητικῆς βελόνης, φέρων μαγνητικὴν ποσότητα 50 μονάδων C.G.S. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ πόλου ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ τοῦ σωληνοειδοῦς, ὅταν δι' αὐτοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 20 A.

Λύσις. Ἐὰν m εἶναι ἡ μαγνητικὴ ποσότης τοῦ πόλου καὶ $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ πόλος, τότε ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ δύναμις εἶναι

$$F = \mathcal{H} \cdot m$$

Ἡ ἔντασις ὅμως $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ προερχομένη ἀπὸ τὸ σωληνοειδὲς εἰς τὸ HMM εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi \cdot i \cdot N}{l}$$

ὅπου i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σωληνοειδές, N ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ l τὸ μῆκος αὐτοῦ. Ἄρα

$$F = \frac{4\pi \cdot i \cdot N}{l} \cdot m$$

Θέτοντες, $i = 20$ A $= 2$ HMM - ἐντάσεως, $N = 250$, $l = 50$ cm καὶ $m = 50$ C.G.S., εὑρίσκομεν

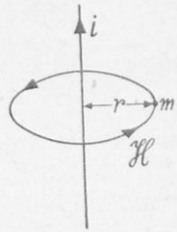
$$F = 6280 \text{ dyn (περίπου)}$$

895. Εὐθύγραμμον σύρμα μεγάλου μήκους διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 18 A. α) Ποῖον τὸ ἔργον κατὰ τὴν μεταφορὰν μαγνητικοῦ πόλου, μαγνητικῆς ποσότητος 5 μονάδων C.G.S., κατὰ μῆκος κλειστῆς κυκλικῆς διαδρομῆς πέριξ τοῦ σύρματος, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τέμνῃ καθέτως τὸν ἀγωγόν, οὕτως ὥστε οὗτος νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον ἀπέχον r ἀπὸ εὐθύγραμμον ἀγωγὸν μεγάλου μήκους, ὁ ὁποῖος διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2i}{r}$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καί τίθεται, διότι τὰ $\mathcal{H}$ καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ i εἰς τὸ πρακτικόν. Ἑπομένως τὸ ἔργον A κατὰ τὴν μεταφορὰν τῆς μαγνητικῆς ποσότητος m ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ κυκλικῆς τροχιᾶς μήκους s καὶ ἀκτῖνος r, θὰ εἶναι



$$A = F \cdot s = \mathcal{H} \cdot m \cdot s = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,i}{r} \cdot m \cdot 2\,\pi \cdot r \quad \text{ἢ} \quad A = \frac{1}{10} \cdot 4\,\pi \cdot i \cdot m.$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $i = 18$ A, $m = 5$ μονάδας C.G.S., εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 113{,}04 \text{ erg.}}$$

896. Σωληνοειδὲς ἐξ 20 σπειρῶν σύρματος ἀμελητέας τομῆς, ἔχει διάμετρον 24 cm. Πόσον ρεῦμα πρέπει νὰ διέλθῃ μέσῳ τοῦ σωληνοειδοῦς, διὰ νὰ παράγῃ πεδίον ἐντάσεως 2 Gauss εἰς τὸ κέντρον του.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον σωληνοειδοῦς N σπειρῶν καὶ ἀκτῖνος r, ὅταν τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,\pi \cdot i \cdot N}{r}$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ $\mathcal{H}$ καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ i εἰς τὸ πρακτικόν. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς i, λαμβάνομεν

$$\underline{i = \frac{5\,\mathcal{H} \cdot r}{\pi \cdot N}}$$

Θέτοντες, $\mathcal{H} = 2$ Gauss, $r = 12$ cm, $N = 20$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 1{,}91 \text{ A.}}$$

897. Ἐντὸς πηνίου μήκους 1 m, ὅπερ φέρει 2500 σπείρας ἀπὸ σύρμα διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 1,6 A εἰσάγεται ράβδος ἐκ χυτοσιδήρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγή. Διὰ τὸν χυτοσίδηρον εἶναι $\mu = 240$.

Λύσις. Ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ B δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$B = \mu \cdot \mathcal{H} \qquad (1)$$

ὅπου μ εἶναι ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τῆς ράβδου καὶ $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς εἰς τὸν ἀέρα.

Ἐὰν καλέσωμεν l τὸ μῆκος τοῦ σωληνοειδοῦς, i τὴν ἔντασιν τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου ρεύματος καὶ N τὸν ἀριθμὸν τῶν σπειρῶν, τότε

$$\mathcal{H} = \frac{4\,\pi \cdot i \cdot N}{l} \qquad (2)$$

καὶ οὕτω ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν

$$\underline{B = \mu \cdot \frac{4\,\pi \cdot i \cdot N}{l}}$$

Θέτοντες, $\mu = 240$, $i = 1{,}6$ A $= 0{,}16$ ΗΜΜ-ἐντάσεως, $N = 2500$, $l = 100$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{B = 12\,000 \text{ Gauss.}}$$

898. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ μήκους 10 cm, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 15 A, ὅταν οὗτος εὑρί-

σκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 3000 Gauss, **τοῦ ὁποίου αἱ μαγνητικαὶ γραμμαὶ σχηματίζουν γωνίαν 45^0 μετὰ τοῦ ἀγωγοῦ.**

Λύσις. Ἡ ἐξασκουμένη δύναμις F ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ, δίδεται εἰς τὸ ΗΜΜ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{F = \mathcal{H} \cdot i \cdot l \cdot \eta\mu\,\alpha}$$

ὅπου, $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγόν, l τὸ μῆκος αὐτοῦ καὶ α ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἀγωγὸς μὲ τὰς δυναμικὰς γραμμάς.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $\mathcal{H} = 3000$ Gauss, $i = 1{,}5$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $l = 10$ cm, $\alpha = 45^0$, εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 31815 \text{ dyn.}}$$

899. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον ὅπερ ἀναπτύσσεται κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τροχοῦ τοῦ Barlow, **διαμέτρου 25** cm, **κινουμένου ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 800** Gauss, **τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνσις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ, ὅστις διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 Α.**

Λύσις. Τὸ παραγόμενον ἔργον Α θὰ εἶναι

$$A = F \cdot s \qquad (1)$$

ὅπου F εἶναι ἡ ἐξασκουμένη δύναμις εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτῖνος r τοῦ τροχοῦ καὶ s ἡ μετατόπισις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως. Ἄρα

$$A = F \cdot \pi \cdot r \qquad (2)$$

διότι ὡς s λαμβάνεται ἡ μετατόπισις τοῦ μέσου τῆς ἀκτῖνος.

Ἐὰν καλέσωμεν $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τότε ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ, μήκους r εἰς τὸ ΗΜΜ, εἶναι

$$F = \mathcal{H} \cdot i \cdot r \qquad (3)$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

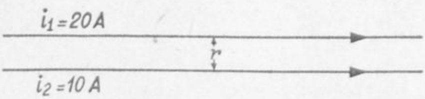
$$\underline{A = \mathcal{H} \cdot i \cdot \pi \cdot r^2} \qquad (4)$$

Θέτοντες, $\mathcal{H} = 800$ Gauss, $i = 10$ A $= 1$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $r = 12{,}5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 392\,400 \text{ erg.}}$$

900. Δύο εὐθύγραμμοι ἀγωγοί, ἕκαστος μήκους $l = 1$ m, **εἶναι παράλληλοι καὶ διαρρέονται ὑπὸ ὁμορρόπων ρευμάτων, ἐντάσεων $i_1 = 20$ Α καὶ $i_2 = 10$ Α. Ποία ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται μεταξὺ τῶν ἀγωγῶν, ὅταν οὗτοι ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν $r = 2$** cm.

Λύσις. Ὁ δεύτερος ἀγωγός, εὑρισκόμενος εἰς τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως $\mathcal{H}$, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ πρῶτος ἀγωγός, θὰ ὑφίσταται δύναμιν, κατὰ Laplace, ἴσην πρὸς



$$F = \frac{1}{10}\, i_2 \cdot l \cdot \mathcal{H} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ πρῶτος ἀγωγός, εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,i_1}{r} \qquad (2)$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ $\mathcal{H}$, l καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ i εἰς τὸ πρακτικόν. Οὕτω ὁ τύπος (1) βάσει τοῦ τύπου (2), γράφεται

$$F = \frac{1}{100} \cdot \frac{2\,i_1 \cdot i_2 \cdot l}{r} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $i_1 = 20$ A, $i_2 = 10$ A, $l = 100$ cm, $r = 2$ cm, εὑρίσκομεν

$$F = 200 \text{ dyn.}$$

901. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκωνται δύο εὐθύγραμμοι καὶ παράλληλοι ἀγωγοὶ μήκους 20 cm, διαρρεόμενοι ὑπὸ ρευμάτων τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἐντάσεων 25 A καὶ 10 A, καὶ εὑρισκόμενοι μεταξύ των εἰς ἀπόστασιν 2 cm.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος ἀγωγὸς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i_1. Τότε θὰ παράγῃ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ εἰς ἀπόστασιν r θὰ εἶναι εἰς τὸ ΗΜΜ

$$\mathcal{H} = \frac{2\,i_1}{r} \tag{1}$$

Ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τούτου εὑρίσκεται ὁ δεύτερος ἀγωγὸς καὶ ἑπομένως θὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτοῦ δύναμις εἰς ΗΜΜ

$$F = \mathcal{H} \cdot i_2 \cdot l \tag{2}$$

ὅπου i_2 εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν δεύτερον ἀγωγὸν καὶ l τὸ μῆκος αὐτοῦ. Ἄρα ὁ τύπος (2) βάσει τοῦ (1) γράφεται

$$F = \frac{2\,i_1 \cdot i_2 \cdot l}{r} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $i_1 = 2{,}5$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $i_2 = 1$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $l = 20$ cm, $r = 2$ cm, εὑρίσκομεν

$$F = 50 \text{ dyn.}$$

902. Ἠλεκτρικὸν φορτίον $4 \cdot 10^{-6}$ Cb κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 100 m/sec ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 2000 Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Ποία ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ φορτίου δύναμις.

Λύσις. Ἡ δύναμις F ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ ἠλεκτρικοῦ φορτίου q, τὸ ὁποῖον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα υ, ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}$ καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$F = \frac{1}{10} \cdot q \cdot \upsilon \cdot \mathcal{H}$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ F, υ καὶ $\mathcal{H}$ μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ q εἰς τὸ πρακτικόν.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Cb, $\upsilon = 100$ m/sec $= 10^4$ cm/sec, καὶ $\mathcal{H} = 2\,000$ Gauss, εὑρίσκομεν

$$F = 8 \text{ dyn.}$$

903. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς τὸ Παρίσι ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ἐγκλίσεως εἶναι 65° καὶ ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι

0,2 Gauss, **ποία θὰ εἶναι εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἡ τιμὴ τῆς κατακορύφου συνιστώσης τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.**

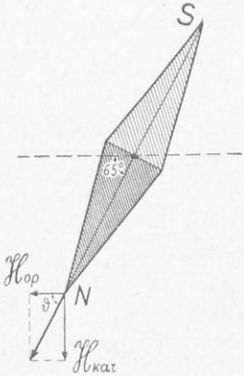
Λύσις. Ἐκ τοῦ ἔναντι σχήματος ἔχομεν, ὅτι ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα $\mathcal{H}_{\kappa\alpha\tau}$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι

$$\mathcal{H}_{\kappa\alpha\tau} = \mathcal{H}_{o\rho} \cdot \varepsilon\varphi\, \theta \qquad (1)$$

ὅπου $\mathcal{H}_{o\rho}$ εἶναι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ θ ἡ ἔγκλισις.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $\mathcal{H}_{o\rho} = 0{,}2$ Gauss καὶ $\theta = 65^0$ ($\varepsilon\varphi\, 65^0 = 2{,}1445$), εὑρίσκομεν

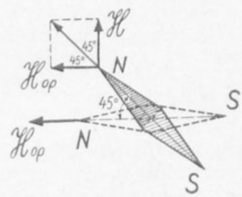
$$\mathcal{H}_{\kappa\alpha\tau} = 0{,}429 \text{ Gauss.}$$



904. Εὐθύγραμμος ἀγωγὸς ἀπείρου μήκους, τοποθετημένος καθέτως πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 Α. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀγωγοῦ αὐτοῦ, εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεσημβρινοῦ, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μαγνητικὴ βελόνη κινητὴ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἵνα αὕτη ἀποκλίνῃ κατὰ 45⁰, ὅταν ἀποκατασταθῇ τὸ ρεῦμα. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss.

Λύσις. Ὅταν ἡ μαγνητικὴ βελόνη στραφῇ κατὰ 45^0 ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης $\mathcal{H}_{o\rho}$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ τῆς ἐντάσεως $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος, τότε, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, θὰ ἔχωμεν

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{o\rho} \qquad (1)$$



Ἐξ ἄλλου ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τοῦ εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ εἰς ἀπόστασιν r ἀπ' αὐτοῦ, ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος i, εἶναι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,i}{r} \qquad (2)$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται, διότι τὰ $\mathcal{H}$ καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ i εἰς τὸ πρακτικόν.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς r καὶ θέτοντες $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{o\rho}$, λαμβάνομεν

$$r = \frac{2\,i}{10\,\mathcal{H}_{o\rho}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), i = 5 Α, $\mathcal{H}_{o\rho} = 0{,}2$ Gauss, εὑρίσκομεν

$$r = 5 \text{ cm.}$$

905. Ὁ ἄξων πηνίου 25 cm **μήκους, ὅπερ φέρει 200 σπείρας, εἶναι κάθετος πρὸς τὸν γήϊνον μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου ἐξαρτᾶται μαγνητικὴ βελόνη, τῆς ὁποίας οἱ πόλοι φέρουν μαγνητικὴν ποσότητα ἴσην πρὸς 10 μονάδας** C.G.S. **Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διέλθῃ ρεῦμα ἐντάσεως 0,02 Α, πόση θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὑπὸ τοῦ ρεύματος δημιουργουμένου μαγνητικοῦ**

πεδίου καὶ κατὰ ποίαν γωνίαν στρέφεται ἡ μαγνητικὴ βελόνη. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς σωληνοειδοῦς, δίδεται εἰς τὸ ΗΜΜ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi \cdot i \cdot N}{l}$$

Θέτοντες, $i = 0{,}002$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $N = 200$, $l = 25$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 0{,}2 \text{ Gauss.}$$

Ἡ βελόνη ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς ἐντάσεως $\mathcal{H}$ καὶ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ἔστω ὅτι ἰσορροπεῖ, σχηματίζουσα γωνίαν θ μὲ τὴν ἀρχικὴν θέσιν (βλ. σχῆμα Ἀσκήσεως 904).

Εἰς τὴν θέσιν ταύτην θὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τῆς βελόνης ἡ δύναμις F, προερχομένη ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ ἡ δύναμις F_{op} προερχομένη ὑπὸ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}_{op}$ (ὁριζοντία συνιστῶσα). Θὰ πρέπει δὲ ἡ συνισταμένη τούτων νὰ εἶναι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς βελόνης, συνεπῶς

$$\text{εφ}\ \theta = \frac{F}{F_{op}}$$

Εἶναι ὅμως $F_{op} = \mathcal{H}_{op} \cdot m$, καὶ $F = \mathcal{H} \cdot m$, ὅπου m ἡ μαγνητικὴ ποσότης τοῦ πόλου τῆς βελόνης καὶ συνεπῶς λαμβάνομεν

$$\text{εφ}\ \theta = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_{op}}$$

Θέτοντες, $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss, $\mathcal{H} = 0{,}2$ Gauss, λαμβάνομεν εφ $\theta = 1$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\theta = 45^0.$$

906. Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἀκτῖνος $r = 4\pi$ cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 20 Α. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου πεδίου, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς σπείρας εἶναι κάθετον πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.

Λύσις. Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἀκτῖνος r, δημιουργεῖ ὡς γνωστὸν εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ δίδεται εἰς τὸ ΗΜΜ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi \cdot i}{r} \tag{1}$$

ὅπου i εἶναι ἔντασις τοῦ ρεύματος. Θέτοντες $i = 2$ ΗΜΜ - ἐντάσεως, $r = 4\pi$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 1 \text{ Gauss.}$$

Ἡ συνισταμένη λοιπὸν ἔντασις $\mathcal{H}_{ολ}$ καὶ τῶν δύο πεδίων εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ, θὰ εἶναι

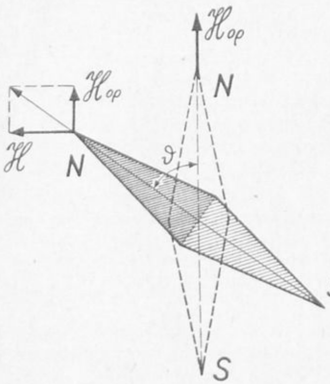
$$\mathcal{H}_{ολ} = \frac{2\pi i}{r} \pm \mathcal{H}_{op} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $r = 4\pi$ cm, $i = 20$ A $= 2$ ΗΜΜ - ἐντάσεως καὶ $\mathcal{H}_{op} = 0{,}2$ Gauss, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H}_{ολ} = 1{,}2 \text{ Gauss} \quad \text{ἢ} \quad \mathcal{H}_{ολ} = 0{,}8 \text{ Gauss.}$$

907. Προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ἑνὸς τόπου διὰ τῶν ἀκολούθων μετρήσεων. α) Μετρᾶται ἡ μεγίστη γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως καὶ εὑρίσκεται 65⁰. β) Τίθεται ἐντὸς μεταλλικῆς σπείρας πυξίδος τῶν ἐφαπτομένων, ἥτις ἔχει διάμετρον 20 cm, καὶ διαβιβάζεται δι' αὐτῆς ρεῦμα ἐντάσεως 5 A. Μετρᾶται ἡ γωνία καθ' ἣν στρέφεται ἡ βελόνη καὶ εὑρίσκεται 57⁰ 40'. Πόση ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τῆς σπείρας θὰ εἶναι



$$\mathcal{H} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi i}{r} \qquad (1)$$

ὅπου τὸ 1/10 εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ $\mathcal{H}$ καὶ r μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ i εἰς τὸ πρακτικόν.

Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα $\mathcal{H}_{op}$ τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου θὰ εἶναι (βλ. σχῆμα)

$$\mathcal{H}_{op} = \frac{\mathcal{H}}{\text{εφ}\,\theta} \qquad (2)$$

ὅπου θ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ βελόνη μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὅταν αὕτη εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς σπείρας.

Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}'$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου θὰ εἶναι

$$\mathcal{H}' = \frac{\mathcal{H}_{op}}{\text{συν}\,\varepsilon} \qquad (3)$$

ὅπου ε εἶναι ἡ ἔγκλισις. Ὁ τύπος (3) τελικῶς, λόγῳ τῶν τύπων (1) καὶ (2), γράφεται

$$\underline{\mathcal{H}' = \frac{2\pi \cdot i}{10\,r \cdot \text{εφ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\varepsilon}}$$

ὁπότε διά, $i = 5$ A, $r = 10$ cm, $\theta = 57^0\ 40'$ καὶ $\varepsilon = 65^0$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\mathcal{H}' = 0{,}471 \text{ Gauss.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

908. Κυκλικὴ σπεῖρα, ἐπιφανείας $S = 1500$ cm², τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὴν ἔντασιν μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 800 Gauss. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς σπείρας ταύτης. (Ἀπ. 1 200 000 Mx.)

909. Εὐθύγραμμος ἀγωγός, ὑποτιθέμενος ἀπείρου μήκους, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A. Πόση ἡ τιμὴ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ σύρματος. (Ἀπ. 0,02 Gauss.)

910. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς κυκλικὴν σπεῖραν ἀκτῖνος $r = 2\pi$ cm, ὅταν τὸ δημιουργούμενον μαγνητικὸν πεδίον εἰς τὸ κέντρον τῆς σπείρας εἶναι ἐντάσεως 0,2 Gauss. (Ἀπ. 2 A.)

911. Κύκλωμα περιλαμβάνει ἐν σειρᾷ δύο στοιχεῖα, ἕκαστον ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω, καὶ ἐπίπεδον σπείρωμα ἀντιστάσεως 8 Ω, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 50 σπείρας, διαμέτρου 20 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ σπειρώματος. ('Απ. 0,4 A, 0,4 π Gauss.)

912. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ φέρῃ ἐπίμηκες σωληνοειδές, οὕτως ὥστε ρεῦμα ἐντάσεως 3 A νὰ δημιουργῇ εἰς τὸ κέντρον του μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 30 Gauss. ('Απ. 8 σπεῖραι.)

913. Εὐθύγραμμον σύρμα, μήκους 10 cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 9,81 A καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss καθέτου πρὸς τὸ σύρμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ καὶ νὰ καθορισθῇ ἡ φορά της. ('Απ. 10 gr*. Κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὸ σύρμα καὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.)

914. Δύο στελέχη ἐκ χαλκοῦ, παράλληλα, εὑρισκόμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 10 cm. Ἐπὶ τῶν δύο αὐτῶν στελεχῶν τίθεται καθέτως κυλινδρικὸς ἀγωγός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ μετατίθεται ἐντὸς κατακορύφου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 600 Gauss, ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 8 A. Ποῖον τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἐπὶ τοῦ κινητοῦ ἀγωγοῦ, ὅταν οὗτος, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, μετακινεῖται κατὰ 5 cm. ('Απ. 0,0024 Joule.)

915. Τροχὸς Barlow, ἀποτελεῖται ἀπὸ δίσκον μεταλλικὸν ἀκτῖνος 10 cm. Οὗτος δύναται νὰ περιστρέφεται, ἄνευ τριβῶν, περὶ ὁριζόντιον ἄξονα παράλληλον πρὸς ὁμογενὲς πεδίον ἐντάσεως 2000 Gauss. Πόσον τὸ ἔργον τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων διὰ 100 στροφὰς τοῦ δίσκου, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 10 A. ('Απ. 3,14 Joule.)

916. Ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 400 Gauss, εὑρίσκεται ὀρθογώνιον πλαίσιον κινητὸν περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Τὸ πλαίσιον τοῦτο φέρει μίαν σπεῖραν ἀπὸ σύρμα, διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος 20 A καὶ ὁρίζει ἐπιφάνειαν 1600 cm². Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων, διὰ ἡμίσειαν στροφὴν τῆς σπείρας ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας. ('Απ, 0,256 Joule.)

917. Σωληνοειδές, ἔχον 12 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A. α) Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ σωληνοειδοῦς. β) Ποῖον τὸ ἔργον κατὰ τὴν μεταφορὰν μαγνητικοῦ πόλου ἐντάσεως 3 μονάδων, δι' ἀπόστασιν 4 cm, κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ πλησίον τοῦ μέσου τοῦ μήκους του. ('Απ. α' 24 π Gauss. β' 288 π erg.)

918. Δύο παράλληλα μακρὰ σύρματα A καὶ B, ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 10 cm καὶ διαρρέονται ὑπὸ ρευμάτων ἐντάσεων 40 A καὶ 20 A ἀντιστοίχως καὶ κατ' ἀντιθέτους φοράς. α) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου πεδίου εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. β) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου πεδίου εἰς ἓν σημεῖον Σ, ἀπέχον 8 cm πέραν τοῦ A καὶ κείμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν συρμάτων. ('Απ. α' 2,4 Gauss. β' 0,78 Gauss.)

919. Πηνίον 20 σπειρῶν ἔχει ἀκτῖνα 16 cm. Τοῦτο στηρίζεται οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ εἶναι κατακόρυφον καὶ παράλληλον μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν, εἴς τινα τόπον ὅπου ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,18 Gauss. Ποῖον ρεῦμα διαρρέει τὸ πηνίον, ἐὰν μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ἀποκλίνῃ κατὰ 52°. ('Απ. 0,29 A.)

920. Ὑπολογίσατε τὴν ροπὴν ἥτις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ κρατήσῃ κατακόρυφον πλαίσιον σχήματος ὀρθογωνίου, ὕψους 12 cm καὶ πλάτους 10 cm, φέροντος 30 σπείρας σύρματος, ὅταν τὸ πλαίσιον ἐξαρτᾶται ἐντὸς ὁμογενοῦς ὁριζοντίου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 50 Gauss καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 A. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου εἶναι παράλληλον μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. (Ἀπ. 36000 dyn · cm.)

921. Σωληνοειδὲς ἐξ 25 σπειρῶν καὶ ἀκτῖνος 10 cm διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 4 A. Ὑπολογίσατε τὴν ἐπὶ μαγνητικοῦ πόλου τοποθετουμένου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου, ποσότητος 20 μονάδων, ἐξασκουμένην δύναμιν. (Ἀπ. 40 π dyn.)

922. Σωληνοειδὲς μήκους 50 cm καὶ διαμέτρου 2 cm ἀποτελεῖται ἐκ 4000 σπειρῶν. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ σωληνοειδοῦς, ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως 0,25 A διαρρέῃ τὴν περιέλιξιν. (Ἀπ. 8 π Gauss.)

923. Δύο μακρὰ παράλληλα σύρματα ἀπέχουν κατὰ 4 cm καὶ διαρρέονται ὑπὸ ρευμάτων ἐντάσεων 2 A καὶ 6 A ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν μεταξὺ τῶν συρμάτων ἀναπτυσσομένην δύναμιν ἀνὰ μονάδα μήκους σύρματος. (Ἀπ. 0,06 dyn/cm.)

924. Σύρμα μήκους 40 cm εὑρίσκεται καθέτως ὡς πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 6000 Gauss. α) Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ σύρματος ἀναπτυσσομένη δύναμις, ὅταν τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 3 A. β) Ποία ἡ δύναμις ἐὰν τὸ σύρμα σχηματίζῃ γωνίαν 30⁰ μὲ τὸ πεδίον. (Ἀπ. α) 72000 dyn, β) 36000 dyn.)

925. Πηνίον 20 σπειρῶν ἔχει ἀκτῖνα 10 cm. Στηρίζεται οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ εἶναι κατακόρυφον καὶ νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν τόπου, ὅπου ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,20 Gauss. Ποῖον τὸ ρεῦμα εἰς τὸ πηνίον, ἐὰν μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ἀποκλίνῃ κατὰ 45⁰. (Ἀπ. 0,16 A.)

926. Σωληνοειδὲς μήκους 40 cm καὶ διαμέτρου 2,4 cm ἀποτελεῖται ἐκ 420 σπειρῶν σύρματος. α) Ποῖον ρεῦμα διαρρέον τὸ σωληνοειδές, θὰ παράγῃ πεδίον ἐντάσεως 8 Gauss εἰς τὸ κέντρον του. β) Ἐὰν τὸ σωληνοειδὲς ἔχῃ σιδηροῦν πυρῆνα μαγνητικῆς διαπερατότητος 1500, ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν ὡς καὶ τὴν ὁλικὴν ροὴν εἰς τὸν πυρῆνα. (Ἀπ. α′ 0,61 A. β′ 12000 Gauss, 54000 Mx.)

927. Πόσαι ἀμπεροστροφαὶ ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν ροῆς 20000 Mx εἰς σιδηροῦν δακτύλιον μέσης περιφερείας 100 cm καὶ καθέτου τομῆς 5 cm². Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι 500. (Ἀπ. 637 ἀμπεροστροφαί.)

928. Πόσας σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους ἔχει σωληνοειδὲς ἀπείρου μήκους, ἐὰν δι' ἔντασιν ρεύματος 12,5 A ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εἶναι 40 π Gauss. (Ἀπ. 8 σπεῖραι ἀνὰ cm.)

929. Ὁ ἄξων ἐπιμήκους σωληνοειδοῦς, ἔχοντος 10 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους καὶ διάμετρον μικράν, ἐν σχέσει πρὸς τὸ μῆκος αὐτοῦ, εἶναι κάθετος πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ σωληνοειδοῦς τοποθετεῖται μαγνητικὴ βελόνη στηριζομένη ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος. Διὰ ποίαν ἔντασιν ρεύματος ἡ βελόνη ἀποκλίνει κατὰ 30⁰. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss. (Ἀπ. 9,2 mA.)

930. Σύρμα χαλκοῦ κάμπτεται ὥστε νὰ σχηματισθῇ κύκλος διαμέτρου 30 cm τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει πρὸς τὸ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ καὶ διαβιβάζεται δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἐντάσεως 7,78 Α. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὑπάρχει μικρὰ καὶ εὐαίσθητος μαγνητικὴ βελόνη, ἡ ὁποία δεικνύει ἀπόκλισιν 60^0. Ζητεῖται ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. ('Απ. 0,188 Gauss.)

931. Εὐθὺς ἀγωγὸς μήκους 8 cm ἐξαρτᾶται ὁριζοντίως ἐκ τῆς φάλαγγος ζυγοῦ, διὰ δύο κατακορύφων συρμάτων, τὰ ὁποῖα συνδέονται πρὸς πηγὴν χωρὶς ἐκ τούτου νὰ ἐμποδίζωνται αἱ κινήσεις τοῦ ζυγοῦ. Ὁ ἀγωγὸς τίθεται ἐν συνεχείᾳ εἰς τὸ μέσον ὁριζοντίου ἐπιμήκους σωληνοειδοῦς, καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Ποῖον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου τοῦ ζυγοῦ πρὸς ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας, ἐὰν τὸ σωληνοειδὲς ἔχει 1118 σπείρας ἀνὰ 60 cm καὶ δι' αὐτοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 Α, ἐνῷ διὰ τοῦ ἀγωγοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 5Α. ('Απ. περίπου 1 gr*.)

932. Σωληνοειδὲς μήκους 50 cm καὶ διαμέτρου 10 cm φέρει 500 σπείρας, διαβιβάζεται δὲ δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἐντάσεως 10 Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν, α) ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς, β) ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς, γ) ἡ δύναμις ἥτις ἐξασκεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς ἐπὶ τῶν πόλων μαγνητικῆς βελόνης ἥτις φέρει μαγνητικὴν μᾶζαν 40 μονάδων C.G.S. ('Απ. 125 Gauss, 9812,5 Mx, 5,1 gr*.)

933. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τροχοῦ τοῦ Barlow, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 30 cm καὶ στρέφεται μὲ συχνότητα 25 στρ./sec ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 2000 Gauss, τοῦ ὁποίου αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ. Τὸ ρεῦμα ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ κυκλώματος ἔχει ἔντασιν 20 Α. ('Απ. 7,065 W ἢ 0,0095 CV.)

934. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σωληνοειδοῦς μήκους 30 cm, φέροντος 600 σπείρας, καὶ διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 25 Α, εὑρίσκεται μικρὸν πηνίον κυκλικοῦ σχήματος 100 σπειρῶν καὶ ἐπιφανείας 10 cm^2. Τὸ ἐπίπεδον τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σπειρῶν τοῦ σωληνοειδοῦς σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν. Ρεῦμα ἐντάσεως 0,5 Α διέρχεται διὰ τοῦ πηνίου. Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον διὰ τὸν προσανατολισμὸν τοῦ πηνίου. ('Απ. 31250 erg.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

935. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παράγει μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 30 Gauss εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σωληνοειδοῦς, πολὺ μεγάλου μήκους, περιλαμβάνον 12 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους.

936. Ἡ μέση τομὴ δακτυλίου ἐκ σιδήρου, ἔχει μῆκος 1 m. Ἐπὶ τοῦ δακτυλίου εἶναι περιτυλιγμένον σύρμα μονωμένον, διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος. Προσδιορίζεται ὅτι ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ ἐντὸς τοῦ δακτυλίου εἶναι ἴση πρὸς 10000 Gauss διὰ $i \cdot n = 170$ ἀμπεροστροφαί. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν δεδομένων αὐτῶν ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου.

937. Ἡ μέση τομὴ ἠλεκτρομαγνήτου, σχήματος πεταλοειδοῦς, εἶναι 60 cm. Τὰ πηνία φέρουν 1200 σπείρας καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ σπείρωμα, εἶναι 5 Α. Ὁ πυρὴν ἔχει κάθετον τομὴν κυκλικὴν διαμέτρου 4 cm. Ἡ μαγνητικὴ αὐτοῦ διαπερατότης εἶναι 136. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς φερούσης δυνάμεως.

938. Κινητὸν πλαίσιον γαλβανομέτρου, τοποθετεῖται εἰς ὁριζόντιον μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 1000 Gauss. Τὸ κατακόρυφον ὕψος τοῦ πλαισίου εἶναι 4 cm καὶ τὸ πλάτος του 3 cm, καὶ φέρει 200 σπείρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸ πλαίσιον, ὅταν τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 1 mA.

939. Κυλινδρικὸν πηνίον, ἀκτῖνος 5 cm, ἀποτελεῖται ἐκ 200 σπειρῶν καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 A. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.

940. Δύο εὐθέα παράλληλα σύρματα, τὰ ὁποῖα διαρρέονται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 50 A, τῆς αὐτῆς φορᾶς, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπ' ἀλλήλων. Πόση ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀσκουμένη δύναμις.

941. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις μετὰ τῆς ὁποίας ἀπωθοῦνται δύο εὐθύγραμμοι παράλληλοι ἀγωγοί, μήκους 50 cm, διαρρεόμενοι ὑπὸ ρευμάτων ἀντιθέτου φορᾶς, ἐντάσεων 40 A καὶ 20 A, καὶ εὑρισκόμενοι εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπ' ἀλλήλων.

942. Ἐντὸς πηνίου, μήκους 50 cm καὶ τομῆς 25 cm^2, τὸ ὁποῖον φέρει 500 σπείρας, διαρρεομένας ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A, εἰσάγεται ράβδος ἐκ χάλυβος, τομῆς 10 cm^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἐντὸς τῆς ράβδου. Ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς διαπερατότητος τοῦ χάλυβος εἶναι 150.

943. Σωληνοειδές, μήκους 50 cm καὶ ἐπιφανείας 10 cm^2, φέρει 250 σπείρας. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου ρεύματος, ἵνα τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ ἔχῃ ἔντασιν 10 Gauss. Πόση εἶναι ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη μαγνητικὴ ροή.

944. Ὀρθογώνιον πλαίσιον ἐξ ἀγωγοῦ σύρματος, διαστάσεων 20 cm $\times$ 30 cm, διατίθεται ἐντὸς ὁμοιομόρφου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως $\mathcal{H} = 3000$ ἀμπεροστροφαί/cm, ἐπενεργοῦντος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y, ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων κατὰ τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων x τοῦ συστήματος νὰ εἶναι κάθετος εἰς τὰ μέσα τῶν βραχυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν διὰ τοῦ πλαισίου διαβιβασθῇ ρεῦμα ἐντάσεως 5 A, ποία ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ ἑκάστης ἐκ τῶν δύο παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα x πλευρῶν τοῦ πλαισίου, ὡς καὶ ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη ροπή.

945. Ἡ ἔντασις δύο μαγνητικῶν πεδίων εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ πρῶτον πεδίον δημιουργεῖται ὑπὸ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10^{-4} A, ἐνῷ τὸ δεύτερον ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ φορτίου, περιστρεφομένου μὲ συχνότητα 1000 sec^{-1} ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου ἀγωγοῦ. Ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ φορτίου.

946. Δύο κυκλικὰ πηνία, μὲ ἀκτῖνας α καὶ β cm, ἔχουν ἕκαστον m καὶ n σπείρας ἀντιστοίχως. Ἕκαστον ἐξ αὐτῶν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i A. Τὰ πηνία τίθενται παραλλήλως τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε οἱ ἄξονές των νὰ συμπίπτουν, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ αὐτῶν νὰ εἶναι $(\alpha + \beta)/2$ cm. Ὑπολογίσατε τὸ μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον παράγουν τὰ πηνία εἰς ἓν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἀπέχον $\alpha/2$ cm ἀπὸ τὸ πρῶτον πηνίον καὶ $\beta/2$ cm ἀπὸ τὸ δεύτερον.

947. Ὅταν πηνίον, μήκους 40 cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A, ἡ ἔντασις τοῦ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ δημιουργουμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι ἴση πρὸς 200 Gauss. α) Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου. β) Ἐὰν τὸ σύρμα τῆς περιελίξεως τοῦ πηνίου ἔχῃ διάμετρον 2,5 mm αἱ δὲ σπεῖραι αὐτοῦ εἶναι συνεχόμεναι, ἐκ πόσων στρωμάτων σπειρῶν ἀποτελεῖται ἡ περιέλιξις.

948. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διέλθῃ μέσῳ πηνίου

50 σπειρῶν, τοῦ ὁποίου ἡ μέση διάμετρος εἶναι 40 cm, διὰ νὰ παραγάγῃ μαγνητικὸν πεδίον εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ, ἐντάσεως 5 Gauss.

949. Εὐθύγραμμος ἀγωγός, διαρρεόμενος ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 150 A, τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 4000 Gauss. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ, τοῦ εὑρισκομένου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου εἶναι 25 cm, ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν εἰς δύνας, τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ.

950. Ὄργανον κινητοῦ πλαισίου, ἔχει ἀντίστασιν 15000 Ω καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τάσεις μέχρι 230 V. Τὸ πλαίσιον ἔχει 60 σπείρας, ἐνεργὸν μῆκος 3 cm καὶ εὖρος 2,6 cm. Κατὰ τὴν πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου, ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι ἀνηρτημένον τὸ πλαίσιον, ροπὴ μεγέθους 0,5 gr*·cm. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται τὸ πλαίσιον.

951. Δύο πηνία, τίθενται τὸ ἓν παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, κατὰ τρόπον ὥστε οἱ ἄξονές των νὰ συμπίπτουν. Ἕκαστον πηνίον φέρει 50 σπείρας. Ἡ μέση διάμετρος τῶν σπειρῶν ἑκάστου πηνίου εἶναι 200 cm. Ἡ μέση ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σπειρῶν τοῦ ἑνὸς πηνίου καὶ τοῦ ἑτέρου εἶναι 8 cm. Ρεῦμα 100 A διαρρέει ἕκαστον πηνίον, ἀλλὰ ἡ διεύθυνσις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἓν πηνίον εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου πηνίου. Ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν ἀπώσεως εἰς gr*, τὴν ἐξασκουμένην μεταξὺ τῶν πηνίων, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι μεγάλη ὡς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν δύο πηνίων ἀπόστασιν.

952. Ἠλεκτρικὸς κινητήρ, ἔχων 500 ὀρθογωνίους σπείρας, ἀποτελουμένας ἀπὸ ἀγωγοὺς σύρματος μήκους 20 cm, εὑρίσκεται σταθερῶς τοποθετημένος ἐντὸς πεδίου ἐντάσεως 10000 Gauss. Ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν τούτων διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A. Ποία εἶναι ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἰς τὸ κινητὸν σύστημα.

953. Ὀρθογώνιον πλαίσιον, μήκους 50 cm καὶ εὔρους 40 cm, εἶναι κινητόν, ἄνευ τριβῆς, περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, διερχόμενον ἀπὸ τὸ μέσον τῶν μικρῶν πλευρῶν. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως $\mathcal{H} = 500$ Gauss. Ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ πλαισίου εἶναι περιτυλιγμέναι 25 σπεῖραι ἀγωγοῦ μονωμένου σύρματος, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 4 A. Τὸ πλαίσιον ἰσορροπεῖ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον ἵνα στραφῇ τοῦτο 1) κατὰ 1/4 στροφῆς καὶ 2) κατὰ μίαν πλήρη στροφήν.

954. Κοῖλος κύλινδρος, διαμέτρου 4 cm, ἐπὶ μήκους 40 cm φέρει 1600 σπείρας κανονικῶς περιτυλιγμένας. Ὅταν τὸ ρεῦμα εἶναι ἐντάσεως 0,5 A, ποία εἶναι ἡ ροὴ ἡ διερχομένη διὰ μέσου τῆς μέσης τομῆς, α) ὅταν ὁ κύλινδρος εἶναι κενὸς μαγνητικοῦ ὑλικοῦ, β) ὅταν περιέχῃ πυρῆνα χυτοσιδήρου $\mu = 80$, γ) ὅταν περιέχῃ πυρῆνα μαλακοῦ σιδήρου $\mu = 1000$.

955. Ἐπὶ κυκλικοῦ ἐπιπέδου πλαισίου, περιτυλίσσονται 100 σπεῖραι ἀπὸ λεπτὸν σύρμα. Τὸ πλαίσιον εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ γηίνου μεσημβρινοῦ. Μικρὰ πυξὶς κινητὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, στηρίζεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου. Ποία ἔντασις ρεύματος πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ μέσου τοῦ σύρματος, διὰ νὰ στραφῇ ἡ βελόνη α) 0,01 rad, β) 45^0. Ἡ διάμετρος τοῦ πλαισίου εἶναι 20 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ΄

ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ, ΤΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

956. Τὸ κινητὸν πλαίσιον βολτομέτρου ἔχει ἀντίστασιν 75 Ω. Ἡ πρόσθετος ἀντίστασις εἶναι 29925 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ὀργάνου μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν αὐτοῦ.

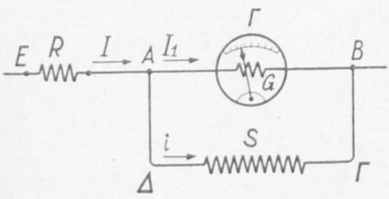
Λύσις. Ἡ πρόσθετος ἀντίστασις τοῦ βολτομέτρου συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτό. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν R_1 τὴν πρόσθετον ἀντίστασιν καὶ R_2 τὴν ἀντίστασιν τοῦ πλαισίου τοῦ βολτομέτρου, θὰ ἔχωμεν

$$\underline{R = R_1 + R_2}$$

Οὕτω, διὰ $R_1 = 29925\ \Omega$ καὶ $R_2 = 75\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 30\,000\ \Omega.}$$

957. Ὅπως μετρηθῇ ρεῦμα διαρρέον κύκλωμα ὁλικῆς ἀντιστάσεως R, παρεμβάλλεται εἰς σημεῖόν τι τοῦ κυκλώματος τούτου γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως G μετὰ διακλαδωτῆρος ἀντιστάσεως S. 1) Πῶς δυνάμεθα ἐκ τοῦ ρεύματος I_1 τοῦ διαρρέοντος τὸ γαλβανόμετρον, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ρεῦμα I τὸ διαρρέον τὸ κύκλωμα. 2) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ S καὶ G, ἵνα $I/I_1 = m$. 3) Ποῖος ὁ λόγος I'/I μεταξὺ τοῦ ρεύματος I' τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα R πρὸ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ γαλβανομέτρου μετὰ τοῦ διακλαδωτῆρος του. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Διὰ $R = 80\ \Omega$, $G = 39{,}96\ \Omega$, $m = 1000$, $i = 0{,}00012$ A. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ S, I καὶ I΄.



(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1953).

Λύσις. 1) Ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κύκλωμα ΑΒΓΔΑ, λαμβάνομεν

$$0 = I_1 \cdot G - i \cdot S$$

ἐξ οὗ

$$i = I_1 \cdot \frac{G}{S} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον Α ἔχομεν

$$I = I_1 + i$$

καὶ βάσει τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸ κύκλωμα εἶναι

$$\underline{I = I_1\left(1 + \frac{G}{S}\right)} \qquad (2)$$

2) Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν

$$\frac{I}{I_1} = 1 + \frac{G}{S}$$

καὶ συνεπῶς ἵνα $I/I_1 = m$ πρέπει νὰ εἶναι

$$m = 1 + \frac{G}{S} \quad \text{καὶ} \quad G = S \cdot (m-1).$$

3) Ἔστω U ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα E καὶ B τῆς ἀντιστάσεως R. Πρὸ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ γαλβανομέτρου θὰ εἶναι

$$I' = \frac{U}{R} \tag{3}$$

Ἐνῷ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ γαλβανομέτρου θὰ εἶναι

$$I = \frac{U}{R_{ολ}} \tag{4}$$

ὅπου $R_{ολ}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτοῦ.

Εὐκόλως προκύπτει ὅτι $R_{ολ} = R + \frac{G \cdot S}{G+S}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις (4) γράφεται

$$I = \frac{U}{R + \frac{G \cdot S}{G+S}} \tag{5}$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, προκύπτει ὅτι

$$\underline{\frac{I'}{I} = 1 + \frac{G \cdot S}{R \cdot (G+S)}} \tag{6}$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Ἐκ τῆς εὑρεθείσης σχέσεως $m = 1 + \frac{G}{S}$ τῆς δευτέρας ἐρωτήσεως, λαμβάνομεν

$$S = \frac{G}{m-1}$$

καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῶν δεδομένων εὑρίσκομεν

$$\underline{S = 0{,}04\ \Omega.}$$

Ἐκ τῆς εὑρεθείσης σχέσεως $I = I_1\left(1 + \frac{G}{S}\right)$ τῆς πρώτης ἐρωτήσεως καὶ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν

$$\underline{I = 0{,}12\ \text{A}.}$$

Τέλος ἐκ τῆς σχέσεως (6) λαμβάνομεν

$$\underline{I' = 0{,}120\ \text{A}.}$$

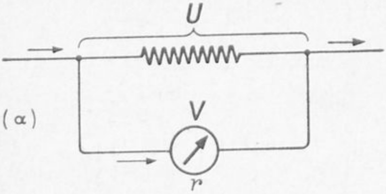
958. Βολτόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν 4000 Ω καὶ δεικνύει 1 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος. Ποία ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὄργανον νὰ δεικνύῃ 10 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν τῆς κλίμακος.

Λύσις. Ὅταν τὸ βολτόμετρον δεικνύῃ ἔνδειξιν εἴτε 10 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος εἴτε 1 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος, πρέπει προφανῶς καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις νὰ διαρρέεται μὲ τὸ αὐτὸ ρεῦμα. Καλοῦμεν r τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ βολτομέτρου καὶ U τὴν μετρουμένην τάσιν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον θὰ διαρρέῃ τὸ βολτόμετρον, εἶναι

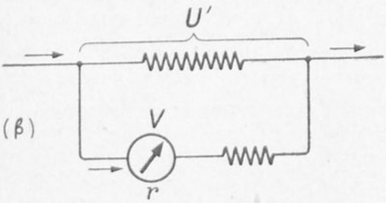
$$i = \frac{U}{r} \tag{1}$$

Ἐὰν θέσωμεν ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ βολτόμετρον ἀντίστασιν R, ἡ μετρουμένη τάσις θὰ εἶναι ἔστω U′ καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἴση πάλιν πρὸς i. Συνεπῶς εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν

(α)



(β)



$$i = \frac{U'}{R + r} \qquad (2)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{U'}{R + r} = \frac{U}{r}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R, προκύπτει

$$R = r \cdot \left(\frac{U'}{U} - 1\right) \qquad (3)$$

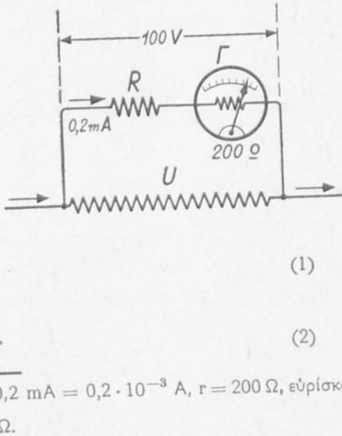
Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $U = 1$ V, $U' = 10$ V, $r = 4000\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$R = 36000\ \Omega.$$

959. Γαλβανόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν $r = 200\ \Omega$ καὶ δύναται νὰ μετρήσῃ ρεῦμα μέχρι 0,2 mA. Ζητεῖται πόση ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ γαλβανόμετρον, ἵνα τοῦτο δύναται νὰ μετρᾷ τάσιν ἀπὸ 0 V ἕως 100 V.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ὅταν τὸ γαλβανόμετρον διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,2 mA, τότε ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου ἀποκλίνει καὶ δεικνύει τὴν μεγίστην ἔνδειξιν. Προφανῶς ὅμως καὶ ὅταν τὸ γαλβανόμετρον μετρᾷ 100 V, πρέπει πάλιν ὁ δείκτης αὐτοῦ νὰ δεικνύῃ τὴν μεγίστην ἔνδειξιν καὶ συνεπῶς θὰ διαρρέεται μὲ τὸ αὐτὸ ρεῦμα ἐντάσεως 0,2 A.



Ἔστω i ἡ μεγίστη ἔντασις τὴν ὁποίαν δύναται νὰ μετρήσῃ τὸ γαλβανόμετρον, r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ καὶ R ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν θὰ συνδέσωμεν ἐν σειρᾷ, ἵνα μετρήσωμεν τὴν μεγίστην τάσιν U. Θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, ὅτι

$$i = \frac{U}{R + r} \qquad (1)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς R λαμβάνομεν

$$R = \frac{U}{i} - r \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $U = 100$ V, $i = 0{,}2\ \text{mA} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ A, $r = 200\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$R = 499\,800\ \Omega.$$

960. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου A καὶ τοῦ βολτομέτρου V τῆς κάτωθι συνδεσμολογίας (βλ. σχῆμα), ὅπου ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι 1 A καὶ ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου εἶναι 160 V. Ἡ συστοιχία τῶν συσσωρευτῶν ἔχει τάσιν $E = 171$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν πρακτικῶς μηδὲν Ohm.

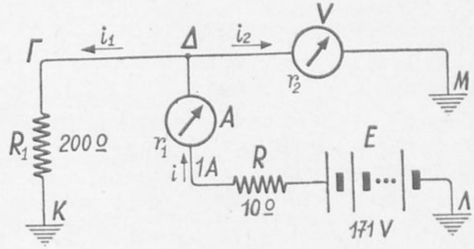
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀγρονόμων καὶ Τοπογράφων Μηχανικῶν καὶ Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1951).

Λύσις. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff $\Sigma E = \Sigma R \cdot i$ εἰς τὸ κύκλωμα ΚΓΔΑΕΛΚ θὰ ἔχωμεν

$$E = R \cdot i + r_1 \cdot i + R_1 \cdot i_1 \quad (1)$$

καὶ εἰς τὸ κύκλωμα ΜΔΑΕΛΜ θὰ ἔχωμεν

$$E = R \cdot i + r_1 \cdot i + r_2 \cdot i_2 \quad (2)$$



Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι

$$R_1 \cdot i_1 = r_2 \cdot i_2 = U \quad (3)$$

ὅπου $U = r_2 \cdot i_2$ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως r_2 (ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου), ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$E = R \cdot i + r_1 \cdot i + U \quad (4)$$

Λύοντες τὴν (4) ὡς πρὸς r_1, λαμβάνομεν

$$r_1 = \frac{E - U}{i} - R$$

καὶ διὰ $E = 171$ V, $U = 160$ V, $i = 1$ A, $R = 10\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{r_1 = 1\ \Omega.}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r_2, λύομεν τὴν (3) ὡς πρὸς r_2, ὅτε λαμβάνομεν

$$r_2 = \frac{U}{i_2} \quad (5)$$

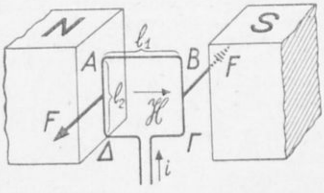
καὶ ἐπειδὴ ἐκ τοῦ πρώτου κανόνος τοῦ Kirchhoff $\Sigma i = 0$, ἔχομεν $i_2 = i - i_1$ ἢ βάσει τῆς (3) $i_2 = i - \frac{U}{R_1}$, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5), ὅτε προκύπτει

$$\underline{r_2 = \frac{U \cdot R_1}{i R_1 - U}} \quad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6), $U = 160$ V, $R_1 = 200\ \Omega$, $i = 1$ A, εὑρίσκομεν

$$\underline{r_2 = 800\ \Omega.}$$

961. 1) Τὸ κινητὸν πλαίσιον γαλβανομέτρου συνίσταται ἀπὸ 100 σπείρας μεταλλικοῦ σύρματος περιελισσομένου εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔΑ. Τὸ μῆκος τῶν ὁριζοντίων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι 2,5 cm, τὸ μῆκος τῶν κατακορύφων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΔΑ εἶναι 4 cm. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 100 Gauss καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ σύρμα τοῦ πλαισίου εἶναι 1 μA. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ πλαισίου. 2) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ τομὴ τοῦ μεταλλικοῦ σύρματος εἶναι 0,001 mm² καὶ ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ εἶναι $1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$cm. Θεωρεῖται ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἁπλῶς ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως τῆς διακλαδώσεως ἡ ὁποία πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν, ἵνα ἡ εὐαισθησία γίνῃ 10 φορὰς μικροτέρα.



Λύσις 1) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ πλαισίου θὰ ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι δυνάμεις, F καὶ F, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτὰς καὶ ἀποτελοῦν ζεῦγος. Ἐὰν καλέσωμεν l_1 τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ Ν τὸν ἀριθμὸν τῶν σπειρῶν τοῦ πλαισίου, τότε ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους θὰ εἶναι

$$M = N \cdot F \cdot l_1 \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου ἡ δύναμις F θὰ εἶναι

$$F = \frac{1}{10} \cdot l_2 \cdot i \cdot \mathcal{H} \tag{2}$$

ὅπου l_2 τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ ΑΔ, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πλαίσιον, $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ τὸ 1/10 συντελεστὴς μονάδων.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$M = \frac{1}{10} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot i \cdot \mathcal{H} \cdot N$$

Ἐκ τῶν δεδομένων, $l_1 = 2{,}5$ cm, $l_2 = 4$ cm, $i = 1\ \mu A = 10^{-6}$ A, $\mathcal{H} = 100$ Gauss, $N = 100$, εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 0{,}01\ \text{dyn} \cdot \text{cm}.}$$

β) Ἡ ἀντίστασις R τοῦ πλαισίου θὰ εἶναι

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot N \qquad \text{ἢ} \qquad R = \rho \cdot \frac{2(l_1 + l_2)}{S} \cdot N \tag{3}$$

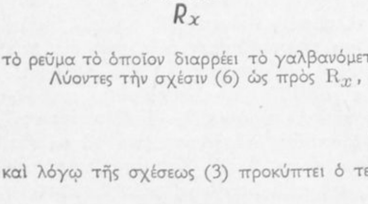
ὅπου ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ὑλικοῦ, S ἡ τομὴ αὐτοῦ καὶ l ἡ περίμετρος τοῦ πλαισίου.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τοποθετοῦμεν ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ γαλβανόμετρον ἀντίστασιν R_x, ἐφαρμόζοντες τὸν 2ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα (βλ. σχῆμα), θὰ ἔχωμεν

$$i_1 \cdot R - i_2 \cdot R_x = 0 \tag{4}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς R/R_x καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{R}{R_x} = \frac{i_2}{i_1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{R + R_x}{R_x} = \frac{i_2 + i_1}{i_1} \tag{5}$$



Ἐπειδὴ ὅμως ἐκ τοῦ 1ου κανόνος τοῦ Kirchhoff εἶναι $i_1 + i_2 = i$, ἔχομεν

$$\frac{R + R_x}{R_x} = \frac{i}{i_1} = n \tag{6}$$

Τὸ πηλῖκον $i/i_1 = n$ ἐκφράζει προφανῶς πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτερον τὸ ὑπὸ μέτρησιν ρεῦμα ἀπὸ τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ γαλβανόμετρον καὶ καλεῖται «εὐαισθησία τοῦ ὀργάνου».

Λύοντες τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς R_x, λαμβάνομεν

$$R_x = \frac{R}{n - 1} \tag{7}$$

καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος τῆς ζητουμένης ἀντιστάσεως

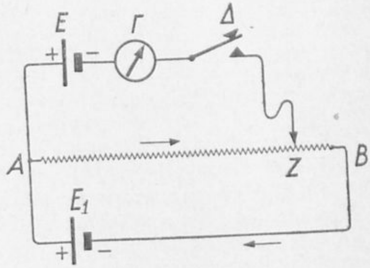
$$\underline{R_x = \frac{2\rho \cdot (l_1 + l_2)}{(n-1) \cdot S} \cdot N} \tag{8}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (8), $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$, $l_1 = 2{,}5$ cm, $l_2 = 4$ cm, $n = 10$, $N = 100$ καὶ $S = 0{,}001 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}^2$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_x = 23{,}1\ \Omega.}$$

962. Διὰ τῆς ποτενσιομετρικῆς μεθόδου μετρᾶται ἡ ΗΕΔ στοιχείου Bunsen. **Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον συνδέεται ἐν διακλαδώσει μὲ τοὺς ὁμωνύμους πόλους συσσωρευτὴς καὶ εὑρίσκεται ὅτι, τὸ μέρος (ΑΖ) τοῦ σύρματος ὅπερ ἀποτελεῖ τὴν γέφυραν εἶναι 18** cm. **Ἀντικαθίσταται τὸ στοιχεῖον** Bunsen **ἀπὸ ἕτερον στοιχεῖον ΗΕΔ 2** V, **ὅτε τὸ τμῆμα (ΑΖ) εἶναι 20** cm. **Πόση ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου** Bunsen.

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην συνδεσμολογίαν ἡ ΗΕΔ Ε τοῦ στοιχείου Bunsen ἀντισταθμίζεται ὑπὸ τῆς τάσεως ἡ ὁποία ἐπικρατεῖ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Ζ. Ἡ τάσις ὅμως αὕτη εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους l_1 τοῦ σύρματος (ΑΖ) καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν



$$E = k \cdot l_1 \qquad (1)$$

ὅπου k συντελεστὴς ἀναλογίας. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν ὁμοίως ἀντιστάθμισιν τῆς ΗΕΔ E_1 τοῦ ἑτέρου στοιχείου, ἀλλὰ τὸ μῆκος (ΑΖ) τώρα θὰ εἶναι ἔστω l_2 καὶ θὰ ἔχωμεν

$$E_1 = k \cdot l_2 \qquad (2)$$

Οὕτω διὰ συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$E = E_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} \qquad (3)$$

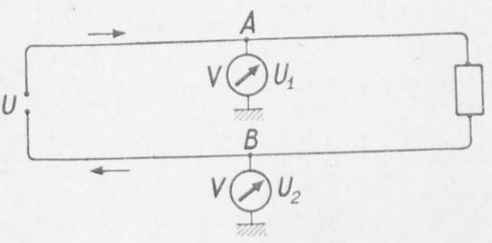
Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $E_1 = 2$ V, $l_1 = 18$ cm καὶ $l_2 = 20$ cm, εὑρίσκομεν

$$E = 1{,}8 \text{ V}.$$

963. Βολτόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 10 000 Ω χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἠλεκτρικῆς μονώσεως δύο ἀγωγῶν ἐναερίου δικτύου διανομῆς συνεχοῦς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ὁ εἷς ἀκροδέκτης τοῦ βολτομέτρου προσγειοῦται, ὁ δὲ ἕτερος ἀκροδέκτης συνδέεται διαδοχικῶς μετὰ τῶν δύο ἀγωγῶν τοῦ ὑπὸ τάσιν U = **220** V **εὑρισκομένου δικτύου. Ἔστωσαν** $U_1 = 1$ V **καὶ** $U_2 = 2$ V **αἱ ἀντίστοιχοι ἐνδείξεις τοῦ βολτομέτρου. Ζητεῖται ἡ εἰς** Ohm **μόνωσις τῶν δύο ἀγωγῶν, δηλ. ἡ ἀντίστασις μεταξὺ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τῆς Γῆς.**

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. Ἔστω U_A τὸ δυναμικὸν τοῦ ἑνὸς ἀγωγοῦ ὡς πρὸς τὴν Γῆν καὶ U_1 ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r. Διὰ συνδέσεως τοῦ βολτομέτρου θὰ διέλθῃ ρεῦμα ἐντάσεως $i_1 = U_1/r$. Προφανῶς τὸ ἴδιον ρεῦμα θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῆς ζητουμένης ἀντιστάσεως R τῆς μονώσεως καὶ συνεπῶς δυνάμεθα, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Ohm, νὰ γράψωμεν



$$U_A = (r + R) \cdot i_1 = U_1 + \frac{U_1}{r} \cdot R \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἔστω U_B τὸ δυναμικὸν τοῦ ἄλλου ἀγωγοῦ ὡς πρὸς τὴν Γῆν καὶ U_2 ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου. Διὰ συνδέσεως τοῦ βολτομέτρου θὰ διέλθῃ ρεῦμα ἐντάσεως $i_2 = U_2/r$ καὶ θὰ ἔχωμεν

$$U_B = (r + R) \cdot i_2 = U_2 + \frac{U_2}{r} \cdot R \qquad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$U_B - U_A = U_2 - U_1 + (U_2 - U_1) \cdot \frac{R}{r}$$

ἢ

$$U = U_2 - U_1 + (U_2 - U_1) \cdot \frac{R}{r} \qquad (3)$$

καθ' ὅσον $U_B - U_A$ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U (τάσις) μεταξὺ τῶν δύο ἀγωγῶν.

Δι' ἐπιλύσεως τῆς (3) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

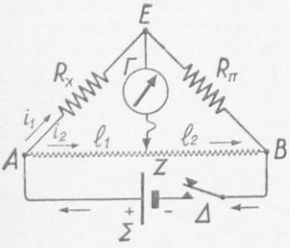
$$R = \frac{(U + U_1 - U_2) \cdot r}{U_2 - U_1} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $U = 220$ V, $U_1 = 1$ V, $U_2 = 2$ V, $r = 10\,000\ \Omega$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς μονώσεως εἶναι

$$R = 2\,190\,000\ \Omega = 2{,}19\ M\Omega.$$

964. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ νεαργύρου, συνδέονται ἐν διακλαδώσει δύο κυκλώματα. Τὸ ἓν ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα ἐκ νεαργύρου μήκους 6 m, τομῆς 0,03 cm² καὶ ἀπὸ ἓν κιβώτιον ἀντιστάσεων, ἐνῷ τὸ ἄλλο ἀποτελεῖται ἀπὸ χάλκινον σύρμα μήκους 1 m. Τὸ ρεῦμα δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κλάδου τοῦ γαλβανομέτρου τῆς γεφύρας ἥτις συνδέει τὰ δύο ἐν διακλαδώσει κυκλώματα, ὅταν τὸ κιβώτιον ἀντιστάσεων δεικνύῃ 0,75 Ω καὶ ὅταν ἡ γέφυρα διαιρῇ τὸ χάλκινον σύρμα εἰς δύο μέρη $l_1 = AZ = 40$ cm καὶ $l_2 = BZ = 60$ cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ νεαργύρου.

Λύσις. Ὅταν ἡ γέφυρα ἰσορροπῇ, τὸ γαλβανόμετρον Γ δεικνύει ἔνδειξιν μηδὲν καὶ τότε τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικόν. Ἄρα μεταξὺ τῶν σημείων ΑΕ καὶ ΑΖ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν



$$R_x \cdot i_1 = R_1 \cdot i_2 \quad ἢ \quad \frac{R_x}{R_1} = \frac{i_2}{i_1} \qquad (1)$$

Ἐπίσης μεταξὺ τῶν σημείων ΕΒ καὶ ΖΒ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$R_\pi \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 \quad ἢ \quad \frac{R_\pi}{R_2} = \frac{i_2}{i_1} \qquad (2)$$

Ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_\pi}{R_2} \quad ἢ \quad \frac{R_x}{R_\pi} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 εἶναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ καὶ τῆς αὐτῆς τομῆς, ἔχομεν

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} \qquad (4)$$

καὶ οὕτω ἡ (3) γράφεται

$$\frac{R_x}{R_\pi} = \frac{l_1}{l_2} \quad ἢ \quad R_x = R_\pi \cdot \frac{l_1}{l_2} \qquad (5)$$

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ μῆκος καὶ ἡ τομὴ τοῦ νεαργύρου εἶναι ἀντιστοίχως l καὶ S καὶ ὅτι οὗτος ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν ρ. Θὰ ἔχωμεν

$$R_x = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

καὶ συνεπῶς ἡ (5) γράφεται

$$\rho \cdot \frac{l}{S} = R_\pi \cdot \frac{l_1}{l_2} \qquad (6)$$

Λύοντες τὴν (6) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην εἰδικὴν ἀντίστασιν ρ τοῦ νεαργύρου, λαμβάνομεν

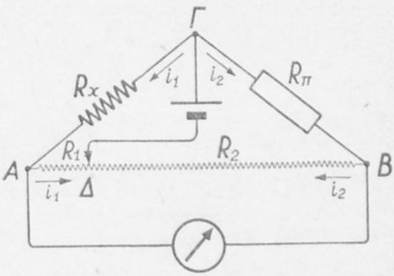
$$\underline{\rho = \frac{R_\pi \cdot l_1 \cdot S}{l \cdot l_2}} \qquad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (7), $R_\pi = 0{,}75\ \Omega$, $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 60$ cm, $S = 0{,}03$ cm^2 καὶ $l = 6$ m $= 6 \cdot 10^2$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\rho = 25 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{cm}.}$$

965. Τῇ βοηθείᾳ γεφύρας Wheatstone πρόκειται νὰ μετρηθῇ ἀντίστασις R_x. Αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 συνίστανται ἀπὸ σύρμα σταθερᾶς τομῆς ἐπὶ τοῦ ὁποίου μετατίθεται ὁ δρομεύς. Εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας ὁ λόγος τῶν μηκῶν l_1 καὶ l_2 εἶναι 1/12 καὶ τὸ κιβώτιον ἀντιστάσεως εἶναι 480 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_x.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ γέφυρα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει ἔνδειξιν μηδέν, ἕπεται δὲ ὅτι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὑπάρχει τὸ αὐτὸ δυναμικόν. Ἄρα ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Β, καθὼς καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Δ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Β. Ἄρα θὰ ἔχωμεν



$$R_x \cdot i_1 = R_\pi \cdot i_2 \qquad (1)$$

καὶ

$$R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{R_x}{R_\pi} \qquad (3)$$

καὶ ἐκ τῆς (2) ἐπίσης λαμβάνομεν

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (4)$$

Ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν (3) καὶ (4) προκύπτει

$$\frac{R_x}{R_\pi} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (5)$$

Ἀλλὰ $R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S}$ καὶ $R_2 = \rho \cdot \frac{l_2}{S}$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν

$$\frac{R_x}{R_\pi} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{ἢ} \quad \underline{R_x = R_\pi \cdot \frac{l_1}{l_2}} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν σχέσιν (6), $R_\pi = 480\ \Omega$, $l_1/l_2 = 1/12$, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_x = 40\ \Omega.}$$

966. Γέφυρα διὰ χορδῆς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν ἀγνώστου ἀντιστάσεως R_x. Τὸ τμῆμα l_1 τῆς χορδῆς ἔχει μῆκος 40 cm, τὸ δὲ τμῆμα l_2 ἔχει μῆκος 60 cm. Ἡ πρότυπος ἀντίστασις εἶναι $R_\pi = 3\ \Omega$ καὶ ἡ ἔνδειξις τοῦ γαλβανομέτρου Γ εἶναι μηδέν. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασιν R_x.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῆς γεφύρας Wheatstone (βλ. Ἄσκησιν 964), θὰ ἔχωμεν

$$R_x = R_\pi \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $R_\pi = 3\ \Omega$, $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 60$ cm, εὑρίσκομεν

$$R_x = 2\ \Omega.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

967. Ἀμπερόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν 0,006 Ω καὶ δεικνύει 1 Α ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος. Ποίαν ἀντίστασιν πρέπει νὰ ἔχῃ διακλάδωσις (shunt) ἵνα τοῦτο δεικνύῃ 5 Α ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος. (Ἀπ. 0,0015 Ω.)

968. Ἀμπερόμετρον ἔχει ἀντίστασιν 2,4 Ω. Ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως 0,02 Α διαρρέῃ τὸ ὄργανον, ἔχομεν πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ τεθῇ ἐν διακλαδώσει, ἵνα ὁ δείκτης ἀποκλίνῃ πλήρως, ὅταν τὸ ρεῦμα τοῦ κυκλώματος εἶναι 100 Α. (Ἀπ. 0,000 48 Ω.)

969. Πόση ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα κυκλώματος ἀποτελουμένου ἀπὸ γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 450 Ω καὶ διακλάδωσιν (shunt) 50 Ω, ἐὰν τοῦτο δεικνύῃ ἔντασιν ρεύματος 0,3 Α. (Ἀπ. 135 V.)

970. Ἀμπερόμετρον ἔχει ἀντίστασιν 10 Ω καὶ εἶναι βαθμολογημένον διὰ νὰ χρησιμοποιῆται μεταξὺ μηδενὸς και 1 Α. Ἐπιθυμεῖ τις νὰ τὸ χρησιμοποιήσῃ διὰ μετρήσεις α) μέχρι 5 Α καὶ β) μέχρις 20 Α. Ποίας τιμὰς δέον νὰ ἔχουν αἱ διακλαδώσεις τοῦ ὀργάνου. (Ἀπ. 2,5 Ω, καὶ 0,526 Ω.)

971. Ἀμπερόμετρον συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ μίαν ἄγνωστον ἀντίστασιν καὶ βολτόμετρον ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτήν. Ἐὰν τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύῃ 1,2 Α καὶ τὸ βολτόμετρον 18 V, εὕρατε τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως. (Ἀπ. 15 Ω.)

972. Εἰς γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 36 Ω συνδέομεν ἐν παραλλήλῳ διακλάδωσιν (shunt) ἀντιστάσεως 4 Ω. Ποῖον μέρος τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος θὰ διέλθῃ μέσῳ τοῦ γαλβανομέτρου. (Ἀπ. 0,1 ἢ 10 % τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος.)

973. Ἀμπερόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν 2 Ω. Φέρει διακλάδωσιν, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 0,001 Ω. Ὑπολογίσατε τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διέρχεται μέσῳ τοῦ ὀργάνου, ὅταν τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα εἶναι 50 Α. (Ἀπ. 0,025 Α.)

974. Βολτόμετρον ἀντιστάσεως 2000 Ω δεικνύει 1 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ παρεντεθῇ ἐν σειρᾷ μὲ τὸ βολτόμετρον, ἵνα τοῦτο δεικνύῃ 4 V ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν κλίμακος. (Ἀπ. 6000 Ω.)

975. Γεννήτρια ΗΕΔ 14 V περιέχει εἰς τὸ κύκλωμα αὐτῆς ἀμπερόμετρον καὶ ἀντίστασιν ἐν σειρᾷ. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 2 Α. Παρεμβάλλεται διακλάδωσις μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ἀντιστάσεως ἴση πρὸς 5 Ω. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως, οὕτως ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ ἀμπερόμετρον νὰ εἶναι 3 Α. (Ἀπ. 5,71 Ω.)

976. Γαλβανόμετρον ἔχει ἀντίστασιν 100 Ω καὶ δύναται νὰ μετρήσῃ ρεῦμα ἐντάσεως μέχρι 2 mA. Προκειμένου νὰ καταστῇ δυνατὸν ὅπως τὸ ὄργανον τοῦτο μετρᾷ ἐντάσεις α) ἀπὸ 0 ἕως 0,1 Α, β) ἀπὸ 0 ἕως 1 Α καὶ γ) ἀπὸ 0 ἕως 10 Α, ποία ἀντίστασις δέον νὰ συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ γαλβανόμετρον, εἰς ἑκάστην περίπτωσιν. Ἐπίσης ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ γαλβανόμετρον, ἵνα τοῦτο μετρᾷ τάσεις α) ἀπὸ 0 ἕως 2V, β) ἀπὸ 0 ἕως 10 V καὶ γ) ἀπὸ 0 ἕως 50 V.

(Ἀπ. Ὡς ἀμπερόμετρον: 1/49, 1/499, 1/4999 τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὀργάνου. Ὡς βολτόμετρον: α΄ 900 Ω. β΄ 4900 Ω. γ΄ 24900 Ω.)

977. Ἀμπερόμετρον κινητοῦ πλαισίου ἔχει ἀντίστασιν 0,7 Ω καὶ δίδει πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου ἐπὶ κλίμακος 150 ὑποδιαιρέσεων, ὅταν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 0,015 V. Ὑπολογίσατε τὴν ἀντίστασιν (shunt) τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ συνδέσωμεν ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ ὄργανον, ἵνα τοῦτο δώσῃ πλήρη ἀπόκλισιν διὰ α) 15 A, β) 300 A.

(Ἀπ. α΄ 7/6 990 Ω, β΄ 7/139 900 Ω.)

978. Μιλλιαμπερόμετρον ἔχει ἀντίστασιν 14,6 Ω, καὶ δίδει πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου του διὰ ρεῦμα ἐντάσεως 15 mA. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ τεθῇ ἐν σειρᾷ μὲ τὸ ὄργανον, ἐὰν πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς βολτόμετρον, μὲ πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου, διὰ 250 V.

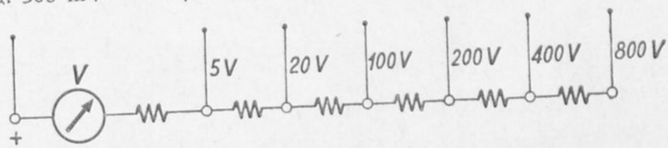
(Ἀπ. 16,652 Ω.)

979. Ἔχομεν γαλβανόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r, τοῦ ὁποίου ἡ κλῖμαξ φέρει 100 ἴσας ὑποδιαιρέσεις. Ὅταν διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 100 μA ἡ βελόνη εὑρίσκεται εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 100. Κατόπιν συνδέσεως ἐν παραλλήλῳ (shunt) μιᾶς ἀντιστάσεως R = 1 Ω, παρατηροῦμεν ὅτι ρεῦμα ἐντάσεως 1 A προκαλεῖ τὴν μετακίνησιν τῆς βελόνης εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 50 τῆς κλίμακος. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τοῦ γαλβανομέτρου.

(Ἀπ. 19 999 Ω.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1953.)

980. Βολτόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον ἔχει ἀντίστασιν 20 Ω. Ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου ἀποκλίνει τελείως ἐπὶ κλίμακος 150 ὑποδιαιρέσεων, ὅταν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 300 mV. Οἱ ἀκροδέκται τοῦ ὀργάνου συνδέονται ὡς εἰς τὸ διάγραμμα



(βλ. σχῆμα). Εὕρατε τὴν ἀντίστασιν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ θέσωμεν ἐν σειρᾷ μὲ τὸ ὄργανον καὶ μεταξὺ ἑκάστου ἀκροδέκτου καὶ τοῦ ἑπομένου, οὕτως ὥστε τὸ ὄργανον νὰ δίδῃ πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου του διὰ 5 V, 20 V, 100 V, 200 V, 400 V καὶ 800 V.

(Ἀπ. 313,3 Ω, 1000,3 Ω, 5333,3 Ω, 6666,6 Ω, 13333,3 Ω καὶ 26666,6 Ω.)

981. Γαλβανόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν 28 Ω καὶ ὁ δείκτης του ἀποκλίνει κατὰ μίαν ὑποδιαίρεσιν τῆς κλίμακος ἀνὰ μιλλιάμπερ (mA). Ποία ἡ ἀπαιτουμένη ἀντίστασις καὶ κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ συνδεθῇ αὕτη διὰ νὰ μεταβάλῃ τὸ γαλβανόμετρον α) εἰς ἀμπερόμετρον δεικνύον ἓν τέταρτον τοῦ Ampere ἀνὰ ὑποδιαίρεσιν τῆς κλίμακος β) εἰς βολτόμετρον τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης νὰ ἀποκλίνῃ κατὰ 5 ὑποδιαιρέσεις τῆς κλίμακος ἀνὰ Volt.

(Ἀπ. α) 0,112 Ω, ἐν παραλλήλῳ, β) 172 Ω, ἐν σειρᾷ.)

982. Βολτόμετρον μὲ κλίμακα 200 ὑποδιαιρέσεων καὶ ἀντιστάσεως 26 000 Ω, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν μιᾶς μεγάλης ἀγνώστου ἀντιστάσεως. Ὅταν τὸ βολτόμετρον μετρᾷ τὴν τάσιν τῶν πόλων τῆς πηγῆς συνεχοῦς ρεύματος δεικνύει 140 V. Ὅταν συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ τὴν ἄγνωστον ἀντίστασιν καὶ οἱ ἀκροδέκται τοῦ συστήματος συνδεθοῦν μὲ τὴν ἀνωτέρω πηγὴν συνεχοῦς ρεύματος, τὸ βολτόμετρον δεικνύει 40 V. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ἀντιστάσεως.

(Ἀπ. 65000 Ω.)

983. Ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητοῦ πλαισίου ἀμπερομέτρου εἶναι 0,50 Ω. Ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀνθέξῃ τὸ πλαίσιον εἶναι 0,10 Α. 1) Ποίας ἀντιστάσεις πρέπει νὰ ἔχουν αἱ διακλαδώσεις, ἵνα τὸ ὄργανον δύναται νὰ μετρᾷ ρεύματα 1Α, 5Α καὶ 10 Α. Ποία εἶναι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων, ἡ ἐν διακλαδώσει ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου. 2) Ποία πρόσθετος ἀντίστασις πρέπει νὰ τεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ πλαίσιον, οὕτως ὥστε τὸ ὄργανον, λειτουργοῦν ὡς βολτόμετρον, νὰ δύναται νὰ μετρᾷ διαφορὰς δυναμικοῦ 1 V, 10 V, 100 V.

('Απ. 1' 'Αντιστάσεις διακλαδώσεων: 0,0556 Ω, 0,0102 Ω, 0,00505 Ω.
'Αντιστάσεις ἀμπερομέτρου: 0,050 Ω, 0,010 Ω, 0,005 Ω.
2' Πρόσθετοι ἀντιστάσεις: 9,5 Ω, 99,5 Ω, 999,5 Ω.)

984. 'Αμπερόμετρον δεικνύει τὴν ὑποδιαίρεσιν 10 τῆς κλίμακός του, ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,05 Α. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων του εἶναι τότε 0,1 V. Ἡ ὁλικὴ κλῖμαξ περιλαμβάνει 50 ὑποδιαιρέσεις. Ζητεῖται. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διακλάδωσις ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται, ἵνα ἡ αὐτὴ ἀπόκλισις λαμβάνεται διὰ ρεῦμα 1 Α. (Νὰ δοθῇ τὸ ἀποτέλεσμα μὲ προσέγγισιν 1 mA. β) Τὸ οὕτω ἐν διακλαδώσει ἀμπερόμετρον χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ μετρᾶται ἔντασις ρεύματος ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ δύο λυχνίας τῶν 500 W, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ, ὑπὸ τάσιν 220 V. Εἰς ποίαν ὑποδιαίρεσιν θὰ σταματήσῃ ὁ δείκτης τοῦ ἀμπερομέτρου.

('Απ. α' 0,1052 Ω. β' 45,45 ὑποδιαιρέσεις.)

985. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἀντίστασιν x, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γέφυραν Wheatstone, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὅταν $R_1 = 60$ Ω, $R_2 = 45$ Ω καὶ $R_3 = 420$ Ω. Αἱ τέσσαρες ἀντιστάσεις εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σχήματι ρόμβου, ἡ δὲ R_2 εἶναι ἀπέναντι τῆς x. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς x. ('Απ. 560 Ω.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

986. Γαλβανόμετρον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 23 Ω. 'Εν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸ τίθεται σύρμα ἀντιστάσεως 2 Ω. Ποῖον μέρος τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος θὰ διαρρέῃ τὸ ὄργανον καὶ ποῖον τὴν ἐν παραλλήλῳ ἀντίστασιν (shunt).

987. Πρόκειται ὅπως τὰ 0,2 τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος διέλθουν μέσῳ ἀμπερομέτρου ἀντιστάσεως 0,06 Ω. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς ἀντιστάσεως, ἥτις πρέπει νά συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτό.

988. Πόσην ἀντίστασιν πρέπει νὰ συνδέσωμεν ἐν παραλλήλῳ πρὸς ἀμπερόμετρον ἀντιστάσεως 0,04 Ω, οὕτως ὥστε 25 % τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος νὰ διέρχωνται μέσῳ τοῦ ἀμπερομέτρου.

989. Τὸ κινητὸν πλαίσιον βολτομέτρου συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἀντίστασιν 60 Ω. Ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως 20 mA διαρρέῃ τὴν περιέλιξιν τοῦ κινητοῦ πλαισίου, ἔχομεν πλήρη ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου. Ποίαν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν πρέπει νά συνδέσωμεν ἐν σειρᾷ μὲ τὸ κινητὸν πλαίσιον, οὕτως ὥστε ἡ περιοχὴ λειτουργίας τοῦ ὀργάνου νὰ εἶναι 0 ἕως 100 V.

990. Ποῖον μέρος ἐκ τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος θὰ διέλθῃ μέσῳ ὀργάνου ἀντιστάσεως 0,006 Ω, ὅταν διακλάδωσις ἀντιστάσεως 0,002 Ω συνδέεται ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ ὄργανον.

991. Δύο ἀντιστάσεις $R_1 = 1000$ Ω καὶ $R_2 = 1$ Ω συνδέονται ἐν σειρᾷ, ἐν διακλαδώσει δὲ πρὸς τὴν R_2, γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 40 Ω. 'Εὰν τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος συνδεθοῦν πρὸς τάσιν 2 V, ποία ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ γαλβανομέτρου καὶ ἡ ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτὸ ρεύματος.

992. Εἰς ὄργανον ἠλεκτρικῶν μετρήσεων ὁ δείκτης δεικνύει τὴν μεγίστην ἀπόκλισιν, ὅταν διὰ τοῦ κινητοῦ πλαισίου τοῦ ὀργάνου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 mA. Ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι 35 Ω. Διὰ νὰ καταστῇ δυνατὸν ὅπως τὸ ὄργανον χρησιμοποιηθῇ ὡς βολτόμετρον, πρὸς μέτρησιν τάσεων μέχρι 15 V, κατασκευάζεται πηνίον ἐκ σύρματος νικελίου, ἔχοντος ἀντίστασιν 6,5 Ω ἀνὰ μέτρον. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ ἀπαιτουμένου σύρματος ὡς καὶ ὁ τρόπος συνδέσεως τοῦ πηνίου.

993. Εἰς ὄργανον μετὰ κινητοῦ πλαισίου ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 100 Ω, ὁ δείκτης δεικνύει τὴν μεγίστην του ἀπόκλισιν, ὅταν τὸ ὄργανον μετρᾷ τάσιν 0,01 V. Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ μετατραπῇ τὸ ὄργανον εἰς βολτόμετρον, μὲ περιοχὰς μετρήσεων α) 0 ἕως 3 V, β) 0 ἕως 15 V καὶ γ) 0 ἕως 150 V.

994. Εἰς τὰ ἄκρα σύρματος ἐκ κονσταντάνης μήκους 100 cm καὶ τομῆς 0,8 mm^2 συνδέομεν βολτόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5000 Ω, τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης δεικνύει τὴν μεγίστην ἀπόκλισιν, ὅταν τὸ ὄργανον διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 1 mA. Ποία ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος, καὶ ποῖον τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ἀπόκλισις τοῦ βολτομέτρου ἰσοῦται πρὸς τὰ 3/4 τῆς μεγίστης.

995. Ἀντίστασις R συνδέεται πρὸς τοὺς πόλους A καὶ B ἠλεκτρικῆς πηγῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r. Συνδέοντες ἀκολούθως ἐν διακλαδώσει πρὸς τὴν ἀντίστασιν R, γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως r′, λαμβάνομεν ὡς ἔνδειξιν ἔντασιν i. Νὰ ἐκφρασθῇ, συναρτήσει τῶν r, R, r′ καὶ i, ἡ μεταξὺ τῶν A καὶ B διαφορὰ δυναμικοῦ μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ γαλβανομέτρου. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $r = 2\ \Omega$, $R = 18\ \Omega$, $r' = 98{,}2\ \Omega$ καὶ $i = 0{,}05$ A.

996. Σπείρωμα ἀποτελεῖται ἐκ σύρματος χαλκίνου, πάχους $d = 0{,}4$ mm. Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ μήκους τοῦ σύρματος μετρῶμεν τὴν ἀντίστασιν αὐτοῦ μὲ γέφυραν Wheatstone, ἔχουσαν πρότυπον ἀντίστασιν $R = 50\ \Omega$. Τὸ διὰ τοῦ γαλβανομέτρου τῆς γεφύρας διερχόμενον ρεῦμα μηδενίζεται διὰ $l_1/l_2 = 41/59$. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, ἐὰν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\rho = 0{,}017\ \Omega \cdot mm^2/m$.

997. Εἰς γέφυραν διὰ χορδῆς ἡ ἰσορροπία ἐπιτυγχάνεται εἰς σημεῖον ἀπέχον 25 cm ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον σύρματος μήκους 100 cm. Ἡ ὑπὸ ἐξέτασιν ἀντίστασις συνδέεται πρὸς αὐτὸ τὸ ἄκρον, καὶ μία σταθερὰ ἀντίστασις τῶν 3,6 Ω συνδέεται μὲ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ σύρματος. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου ἀντιστάσεως.

998. Μετρᾶται διὰ τῆς ποτενσιομετρικῆς μεθόδου ἡ ΗΕΔ στοιχείου Leclanché. Πρὸς τοῦτο συνδέεται τοῦτο ἐν παραλλήλῳ πρὸς συσσωρευτήν, παρατηρεῖται δὲ ὅτι τὸ τμῆμα ΑΖ τοῦ ἀποτελοῦντος τὴν γέφυραν σύρματος εἶναι 15 cm. Ἀντικαθίσταται τὸ στοιχεῖον Leclanché διὰ στοιχείου Poggendorf ΗΕΔ 2 V καὶ εὑρίσκεται ὅτι τὸ τμῆμα ΑΖ ἔχει μῆκος 20 cm. Πόση ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου Leclanché.

999. Διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν ΗΕΔ E_1 καὶ E_2 δύο στηλῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀντιστάσεις εἶναι ἄγνωστοι, τίθενται εἰς κύκλωμα μετὰ γαλβανομέτρου ἀγνώστου ἀντιστάσεως. Κατὰ ἕνα πρῶτον πείραμα συνδέονται αἱ στῆλαι ἐν σειρᾷ καὶ ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ἀποκλίνει κατὰ 25 διαιρέσεις. Κατὰ ἕνα δεύτερον πείραμα, συνδέονται αἱ στῆλαι ἐν παραλλήλῳ καὶ ὁ δείκτης ἀποκλίνει κατὰ 5 διαιρέσεις. Θεωροῦντες τὰς ἐντάσεις τοῦ ρεύματος ἀναλόγους πρὸς τὰς ἀποκλίσεις τοῦ δείκτου, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο ΗΕΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΕΠΑΓΩΓΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1000. Πηνίον ἐξ 20 σπειρῶν σύρεται ἐντὸς 0,02 sec ἀπὸ τὸν μεταξὺ τῶν πόλων μαγνήτου χῶρον, ὅπου ἡ ἐπιφάνειά του διαπερᾶται ὑπὸ ροῆς 31000 M_x, εἰς χῶρον ὅπου ἡ ἐπιφάνειά του διαπερᾶται ὑπὸ ροῆς 1000 M_x. Ὑπολογίσατε τὴν μέσην ΗΕΔ ἥτις ἐπάγεται ἐπὶ τοῦ πηνίου.

Λύσις. Ἐὰν δι' ἑνὸς πηνίου n σπειρῶν ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ μεταβάλλεται κατὰ ΔΦ εἰς χρόνον Δt, τότε εἰς τὸ ἄκρον τοῦ πηνίου ἀναπτύσσεται ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n}$$

ὅπου τὸ 10^{-8} εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ ΔΦ καὶ Δt μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ τὸ $E_{\varepsilon\pi}$ εἰς τὸ πρακτικόν.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $\Delta\Phi = 31000\ Mx - 1000\ Mx = 30000\ Mx$, $\Delta t = 0{,}02$ sec καὶ $n = 20$, εὑρίσκομεν

$$\underline{E_{\varepsilon\pi} = 0{,}3\ V.}$$

1001. Πηνίον ἀντιστάσεως 5 Ω ἐξ 100 σπειρῶν καὶ διαμέτρου 6 cm, τοποθετεῖται μεταξὺ τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς. Ὅταν τὸ πηνίον ἐξάγεται ταχέως ἀπὸ τὸ πεδίον τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, φορτίον 10^{-4} Cb διαρρέει ἀντίστασιν 2000 Ω γαλβανομέτρου συνδεδεμένου μὲ τὸ πηνίον. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ πηνίον ἔχει τομὴν S καὶ ἐξάγεται ἐκ τοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathscr{H}$. Τότε ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου θὰ εἶναι $\mathscr{H}$ καὶ ἡ μεταβολὴ ΔΦ τῆς μαγνητικῆς του ροῆς

$$\Delta\Phi = \mathscr{H} \cdot S \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ μεταβολὴ αὐτὴ τῆς ροῆς συντελεῖται ἐντὸς χρόνου Δt καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου εἶναι n, τότε ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς ($E_{\varepsilon\pi}$) καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n = 10^{-8} \cdot \frac{\mathscr{H} \cdot S}{\Delta t} \cdot n \qquad (2)$$

ὅπου τὸ 10^{-8} εἶναι συντελεστὴς μονάδων καὶ τίθεται διότι τὰ ΔΦ, Δt, S καὶ $\mathscr{H}$ μετρῶνται εἰς τὸ ΗΜΜ, ἐνῷ ἡ $E_{\varepsilon\pi}$ εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων.

Λόγῳ τώρα τῆς ΗΕΔ καὶ ἐφ' ὅσον τὸ πηνίον ἀποτελεῖ κλειστὸν κύκλωμα, θὰ ἐμφανισθῇ ἐντὸς αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐξ ἐπαγωγῆς, ἐντάσεως

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} \qquad (3)$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Ἐκ τοῦ τύπου (3) λαμβάνομεν $E_{\varepsilon\pi} = R \cdot i$ ἢ

$$E_{\varepsilon\pi} = R \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad (4)$$

διότι ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τὸ πηλῖκον τοῦ διερχομένου φορτίου Δq, διά τινος τομῆς τοῦ ἀγωγοῦ, διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου Δt.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ $E_{\varepsilon\pi}$, ἐκ τοῦ τύπου (4), εἰς τὸν τύπον (2), λαμβάνομεν

$$R \cdot \Delta q = 10^{-8}\,\mathcal{H} \cdot S \cdot n \qquad (5)$$

Λύοντες ἀκολούθως τὸν τύπον (5) ὡς πρὸς $\mathcal{H}$, προκύπτει

$$\mathcal{H} = \frac{10^8 \cdot R \cdot \Delta q}{S \cdot n} \qquad (6)$$

καὶ ἐπειδὴ $S = \pi \cdot r^2$, ὅπου r εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ πηνίου, λαμβάνομεν

$$\underline{\mathcal{H} = \frac{10^8\, R \cdot \Delta q}{\pi \cdot r^2 \cdot n}} \qquad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (7), $R = 2005\ \Omega$, $\Delta q = 10^{-4}$ Cb, $r = 3$ cm, $n = 100$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\mathcal{H} = 7100 \text{ Gauss.}}$$

1002. Πλαίσιον πλευρᾶς 20 cm, φέρον 100 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 250 Gauss περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου, μὲ συχνότητα 50 στρ./sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς.

Λύσις. Ἡ μέση ΗΕΔ E, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ πλαισίου, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n \qquad (1)$$

ὅπου, ΔΦ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἡ ὁποία λαμβάνει χώραν ἐντὸς αὐτοῦ, Δt ὁ χρόνος διὰ τὴν μεταβολὴν ταύτην, n ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ τὸ 10^{-8} τίθεται ἵνα ὁ τύπος δίδῃ τὴν ΗΕΔ εἰς βόλτ, ὅταν τὰ ΔΦ καὶ Δt τίθενται εἰς τὸ ΗΜΜ. Ἐπειδὴ ὅμως $\Delta\Phi = \Delta\mathcal{H} \cdot S$, ὅπου $\Delta\mathcal{H}$ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαισίου, ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\underline{E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\mathcal{H} \cdot S}{\Delta t} \cdot n} \qquad (2)$$

Δίδονται, $\Delta\mathcal{H} = 250$ Gauss, $S = 20^2$ cm², $n = 100$ καὶ $\Delta t = \frac{1}{4} T = \frac{1}{200}$ sec, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2), εὑρίσκομεν

$$\underline{E_{\varepsilon\pi} = 20 \text{ V.}}$$

1003. Πηνίον διαμέτρου 20 cm, φέρον 200 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 500 Gauss, περὶ ἄξονα σχηματίζοντα γωνίαν 30⁰ μὲ τὴν διεύθυνσιν τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου. Τὸ πλαίσιον ἐκτελεῖ 20 στρ./sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς. β) Ἡ μέση ἔντασις τοῦ ἐξ ἐπαγωγῆς ρεύματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀγωγὸς συνίσταται ἐκ χαλκίνου σύρματος (εἰδικῆς ἀντιστάσεως $1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$ cm) τομῆς 0,2 mm².

Λύσις. α) Ἡ μέση ΗΕΔ $E_{\varepsilon\pi}$ δίδεται ὡς γνωστὸν ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n \quad (1) \qquad \text{ἀλλὰ} \quad \Delta\Phi = \Delta\mathcal{H} \cdot S \cdot \text{συν}\,\alpha \quad (2)$$

ὅπου, $\Delta\mathcal{H}$ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, S ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαισίου, α ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τὸ διάνυσμα τῆς ἐντάσεως καὶ τὴν κάθετον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πλαισίου, n ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου καὶ τὸ 10^{-8} εἶναι συντελεστὴς μονάδων. Ἄρα ὁ τύπος (1) γράφεται

$$E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\mathcal{H} \cdot S \cdot \text{συν}\,\alpha}{\Delta t} \cdot n \quad (3) \qquad \text{ἤ, ἐπειδὴ} \quad S = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \quad (4)$$

ὅπου d ἡ διάμετρος τοῦ πηνίου, ἔχομεν

$$E_{\varepsilon\pi} = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta\mathcal{H} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \text{συν}\,\alpha}{4\,\Delta t} \cdot n \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $\Delta\mathcal{H} = 500$ Gauss, $d = 20$ cm, $\alpha = 60^0$, $n = 200$ καὶ $\Delta t = \frac{1}{4} \cdot T = \frac{1}{80}$ sec, εὑρίσκομεν

$$E_{\varepsilon\pi} = 12{,}5\ \text{V}.$$

β) Ἡ μέση ἔντασις i τοῦ ρεύματος, θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} \qquad (6)$$

Ἡ ἀντίστασις ὅμως R τοῦ πλαισίου θὰ εἶναι

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S'} \qquad (7)$$

ἤ, ἐπειδὴ $l = \pi \cdot d \cdot n$, ἔχομεν

$$R = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d \cdot n}{S'} \qquad (8)$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (6) γράφεται

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi} \cdot S'}{\rho \cdot \pi \cdot d \cdot n} \qquad (9)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (9), $E_{\varepsilon\pi} = 12{,}5$ V, $S' = 0{,}2$ mm² $= 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ cm², $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot$cm, $d = 20$ cm καὶ $n = 200$, εὑρίσκομεν

$$i = 1{,}25\ \text{A}.$$

1004. Πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,48 H, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A. Ὑπολογίσατε τὴν ἐνέργειαν τοῦ μαγνητικοῦ του πεδίου.

Λύσις. Ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν ἐνέργειαν A πηνίου, εἶναι

$$A = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \qquad (1)$$

ὅπου L ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτό.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $L = 0{,}48$ H καὶ $i = 5$ A, εὑρίσκομεν

$$A = 6\ \text{Joule}.$$

1005. Ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις 8 V ἐπάγεται εἰς δοθὲν πηνίον, ὅταν τὸ ρεῦμα εἰς αὐτὸ μεταβάλλεται κατὰ 32 A ἀνὰ sec. Ὑπολογίσατε τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

Λύσις. Ἐὰν εἰς ἕνα πηνίον ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτό, μεταβάλλεται κατὰ Δi ἐντὸς χρόνου Δt, τότε ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸ πηνίον ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E_{\alpha\upsilon\tau} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad (1)$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς L, λαμβάνομεν

$$L = \frac{E_{αυτ} \cdot \Delta t}{\Delta i} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $E_{αυτ} = 8$ V, $\Delta t = 1$ sec, $\Delta i = 32$ A, εὑρίσκομεν

$$L = 0,25 \text{ H.}$$

1006. Μεταλλικὴ ράβδος μήκους 30 cm εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἔντασιν μαγνητικοῦ πεδίου καὶ μετακινεῖται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου μὲ ταχύτητα 20 cm/sec. Ὑπολογίσατε τὴν ἐπὶ τῆς ράβδου ἀναπτυσσομένην ΗΕΔ, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 40 000 Gauss.

Λύσις. Ὅταν εὐθύγραμμος ἀγωγὸς μήκους l μετακινεῖται μὲ ταχύτητα υ καθέτως πρὸς τὰς μαγνητικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $\mathcal{H}$, τότε ἡ ΗΕΔ $E_{επ}$ ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται εἰς τὰ ἄκρα του ἐξ ἐπαγωγῆς, εἶναι

$$E_{επ} = 10^{-8}\, υ \cdot \mathcal{H} \cdot l$$

ὅπου τὸ 10^{-8} εἶναι συντελεστὴς μονάδων.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, $υ = 20$ cm/sec, $\mathcal{H} = 40000$ Gauss καὶ $l = 30$ cm, εὑρίσκομεν

$$E_{επ} = 0,24 \text{ V.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

1007. Ξυλίνη στεφάνη, καθέτου τομῆς 10 cm² καὶ μέσης περιφερείας μήκους 40 cm, περιελίσσεται ὑπὸ 300 σπειρῶν σύρματος. Ὑπολογίσατε τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ δακτυλιοειδοῦς σωληνοειδοῦς. (Ἀπ. 0,28 mH.)

1008. Συνεχὲς ρεῦμα ἐντάσεως 2,5 A δημιουργεῖ 14000 Mx εἰς πηνίον τῶν 500 σπειρῶν. Ποῖος ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου. (Ἀπ. 28 mH.)

1009. Πηνίον, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶναι 15 cm², φέρει 1000 σπείρας εἰς μῆκος 50 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου τούτου. (Ἀπ. 0,0037 H.)

1010. Ὁ σιδηροῦς πυρὴν σωληνοειδοῦς ἔχει μῆκος 40 cm, ἐγκαρσίαν τομὴν 5 cm² καὶ ἡ περιέλιξίς του ἀποτελεῖται ἐκ 10 σπειρῶν σύρματος ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Ὑπολογίσατε τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ σωληνοειδοῦς, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς 500. (Ἀπ. 126 mH.)

1011. Ποία ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης δείγματος σιδήρου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα δακτυλίου ἐγκαρσίας τομῆς 6 cm² καὶ μέσης περιφερείας 105 cm. Ὁ δακτύλιος εἶναι περιελιγμένος μὲ 600 σπείρας διαρρεομένας ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 A καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου δημιουργεῖται μαγνητικὴ ροὴ 100 000 Mx. (Ἀπ. 1,161.)

1012. Σιδηροῦς δακτύλιος ἔχει ἐγκαρσίαν τομὴν 4 cm² καὶ μέσην διάμετρον 20 cm. Ὁ δακτύλιος περιελίσσεται ὁμοιομόρφως μὲ 500 σπείρας σύρματος, καὶ ρεῦμα ἐντάσεως 1 A διαρρέει τὴν περιέλιξιν. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι 1200. α) Ὑπολογίσατε τὴν μαγνητικὴν ροὴν καὶ τὴν πυκνότητα ροῆς εἰς τὸν δακτύλιον. β) Ποία ροὴ θὰ παρήγετο ἐντὸς τοῦ δακτυλίου, ἐὰν εἶχεν ἀέρα ἀντὶ σιδηροῦ πυρῆνος. (Ἀπ. α΄ 48000 Mx, 12000 Gauss.)

1013. Πηνίον τομῆς 20 cm² φέρει, ἐπὶ μήκους 10 cm, 1000 σπείρας αἱ ὁποῖαι διαρρέονται ὑπὸ ρεύματος 10 A. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου εὑρίσκεται πυρὴν ἐκ μαλακοῦ σιδήρου, συντελεστοῦ μαγνητικῆς διαπερατότητος 200. Ἡ ἀποκατάστασις τοῦ ρεύματος διαρκεῖ 1/10 sec, ἐνῷ ἡ διακοπὴ 1/100 sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος, β) ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν τοῦ ρεύματος, γ) ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.
('Απ. 500 V, 5000 V, 5 H.)

1014. Πλαίσιον τομῆς 20 cm² φέρει, ἐπὶ μήκους 25 cm, 1000 σπείρας διαρρεομένας ὑπὸ ρεύματος 10 A. Ἡ ἀποκατάστασις καὶ ἡ διακοπὴ τοῦ ρεύματος διαρκοῦν 1/5 sec καὶ 1/50 sec ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ἰσχὺς ἐξ αὐτεπαγωγῆς, κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν καὶ κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος.
('Απ. 2,5 W, 25 W.)

1015. Πηνίον μήκους 25 cm καὶ τομῆς 80 cm² ὅπερ φέρει 200 σπείρας ἀνὰ cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 2 A. Ἡ ἀποκατάστασις τοῦ ρεύματος διαρκεῖ 1/5 sec, ἐνῷ ἡ διακοπὴ 1/50 sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς τοῦ ρεύματος ἀποκαταστάσεως, β) ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς τοῦ ρεύματος διακοπῆς, γ) ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, δ) αἱ τιμαὶ τῶν ΗΕΔ τοῦ ρεύματος τοῦ πηνίου, ἐὰν ἐντὸς αὐτοῦ εὑρίσκεται σιδηροῦς πυρὴν μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 600$.
('Απ. α' 10 V, β' 100 V, γ' 1 H, δ' 6000 V, 60 000 V.)

1016. Ἠλεκτρομαγνήτης φέρει πυρῆνα ἐκ μαλακοῦ σιδήρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἡ ἐπαγωγὴ εἶναι ἐντάσεως 15000 Gauss. Οὗτος φέρει δύο πόλους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 30 cm². 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φέρουσα δύναμις (ἕλξις τῶν πόλων) εἰς kgr*. 2) Διακόπτεται τὸ ρεῦμα καὶ διαπιστοῦται ὅτι ἡ φέρουσα δύναμις ἐλαττοῦται κατὰ 60 kgr*. Ποία ἡ παραμένουσα ἐπαγωγή.
('Απ. 1' 550 kgr*. 2' 5 000 Gauss.)

1017. Μικρὸν πηνίον ἀπὸ λεπτὸν σύρμα, φέρει 800 σπείρας, ἑκάστην ἐπιφανείας 10 cm². Τὸ σπείρωμα ἀποτελεῖ κλειστὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως 50 Ω, τοποθετεῖται δὲ εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων του νὰ εἶναι ὁριζόντιος καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σπειρῶν του κάθετον πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Νὰ ὑπολογισθῇ 1) ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον. (Ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου $\mathscr{H} = 0{,}2$ Gauss). 2) Ἐὰν στραφῇ τὸ πηνίον κατὰ 180° περὶ κατακόρυφον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του, ζητεῖται α) πόση εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ροῆς διὰ μέσου τῶν σπειρῶν καὶ β) πόσον εἶναι τὸ ἐξ ἐπαγωγῆς ἀναπτυσσόμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον.
('Απ. 1' 1600 Mx. 2α' 3200 Mx, 2β' 0,64 μCb.)

1018. Πηνίον ἐκ 1600 σπειρῶν, μήκους 80 cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 5 A. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εἰσάγεται ἐπίπεδον κυκλικὸν πηνίον ἀκτῖνος 20 cm φέρον 50 σπείρας, ἐκ σύρματος χαλκοῦ εἰδικῆς ἀντιστάσεως 0,02 Ω·mm²/m, τὸ ὁποῖον διατίθεται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐὰν πρὸς τὰ ἄκρα τοῦ δευτέρου πηνίου συνδεθῇ γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 10 Ω, ζητεῖται, πόσα Coulomb διέρχονται δι' αὐτοῦ, ὅταν διακόπτεται ἡ δίοδος τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρῶτον πηνίον.
('Απ. $657 \cdot 10^{-6}$ Cb.)

1019. Ἐπὶ κυλίνδρου μήκους 60 cm περιτυλίσσονται κανονικῶς n σπεῖραι μέσης διαμέτρου 6 cm ἀπὸ χάλκινον μεμονωμένον σύρμα 1 mm διαμέτρου. Ὁ πυρὴν τοῦ μαλακοῦ σιδήρου ἔχει μαγνητικὴν διαπερατότητα 1200. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἀποκατασταθῇ μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ σύρματος, ἵνα παραχθῇ πεδίον ἐξ ἐπαγωγῆς, ἐντάσεως 15 000 Gauss εἰς τὸ κέντρον τοῦ πυρῆνος. Πόση εἶναι ἡ ἀπορροφουμένη ἰσχύς. Δίδονται n = 1000 σπεῖραι καὶ n = 10000 σπεῖραι, ρ = 1,6 μΩ cm. ('Απ. 7,2 V, 4,32 W, 0,432 W.)

1020. 'Επίπεδον πηνίον σχήματος ὀρθογωνίου, ἀποτελούμενον ἐξ 100 σπειρῶν ἐπιφανείας 200 cm² περιστρέφεται μὲ ταχύτητα 10 στρ./sec, ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ ὁποίου αἱ μαγνητικαὶ γραμμαὶ εἶναι κάθετοι πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου, ἡ ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ πεδίου ἐναλλασσομένη τάσις ἔχει μεγίστην τιμὴν 31,4 V, ('Απ. 2500 Gauss.)

1021. 'Υπολογίσατε τὴν ἀμοιβαίαν ἐπαγωγὴν εἰς Henry μεταξὺ δύο πηνίων τὰ ὁποῖα εἶναι περιελιγμένα ἐπὶ σιδηροῦ δακτυλίου σταθερᾶς μαγνητικῆς διαπερατότητος μ = 900. Τὸ ἓν πηνίον ἔχει 100 σπείρας καὶ τὸ ἕτερον 1000 σπείρας. 'Η ἐγκαρσία τομὴ τοῦ σιδηροῦ δακτυλίου εἶναι 8 cm² καὶ ἡ μέση περιφέρεια αὐτοῦ 80 cm. ('Απ. 0, 113 Η.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1022. Ποῖος ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς σωληνοειδους, μήκους $l = 18$ cm, ἀποτελουμένου ἐκ n = 1000 σπειρῶν ἀκτῖνος r = 6 cm. Ποία ἡ ἐν αὐτῷ ἀναπτυσσομένη ΗΕΔ, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου ρεύματος μεταβληθῇ κατὰ 5 A ἐντὸς 1/1000 sec.

1023. Κυκλικὴ σπεῖρα 2000 cm² ἐπιφανείας εἶναι τοποθετημένη καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ροὴ διὰ μέσου τῆς σπείρας αὐτῆς νὰ εἶναι 1 700 000 Mx.

1024. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς πηνίου, ἄνευ σιδηροῦ πυρῆνος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἡ διερχομένη δι' αὐτοῦ εἶναι $4 \cdot 10^7$ Mx, ὅταν τροφοδοτεῖται τοῦτο ὑπὸ συνεχοῦς ρεύματος ἐντάσεως 0,8 A.

1025. Τὸ ἀνάπτυγμα περιφερείας δακτυλίου εἶναι 1 m. 'Ο δακτύλιος φέρει σπείρωμα 100 σπειρῶν ἀπὸ μεμονωμένον σύρμα διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i. Διὰ πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ εὑρέθη ὅτι ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ ἐντὸς τοῦ σιδηροῦ δακτυλίου εἶναι 15 000 Gauss. 'Επίσης ὑπελογίσθη ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς διαπερατότητος τοῦ σιδήρου, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, εἶναι 1000. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος i.

1026. Πηνίον κυκλικὸν σχηματίζεται ἀπὸ 10 σπείρας μέσης διαμέτρου 10 cm. Αὗται τοποθετοῦνται εἰς ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 200 Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Τὸ πηνίον περιστρέφεται κατὰ 180°, εἰς χρόνον 1/20 sec. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ πηνίου.

1027. Πλαίσιον τομῆς 20 cm² φέρει, ἐπὶ μήκους 10 cm, 1000 σπείρας αἱ ὁποῖαι διαρρέονται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A. 'Η ἀποκατάστασις αὐτοῦ διαρκεῖ 1/5 sec ἐνῷ ἡ διακοπὴ 1/50 sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν, β) ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν διακοπήν, γ) ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

1028. Περὶ κυλινδρικὸν σιδηροῦν πυρῆνα (μ = 600), διαμέτρου 10 cm, εἶναι περιτυλιγμέναι ἐπὶ μήκους 25 cm, 500 σπεῖραι χαλκίνου σύρματος (εἰδικῆς ἀντιστάσεως $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm) τομῆς 0,25 mm², ἐξ οὗ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 20 A. 'Η ἀποκατάστασις καὶ ἡ διακοπὴ τοῦ ρεύματος διαρκεῖ ἀντιστοίχως 1/5 sec καὶ 1/50 sec.

Νὰ συγκριθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος ἐξ αὐτεπαγωγῆς, πρὸς τὴν ἰσχὺν τοῦ ἐπάγοντος ρεύματος.

1029. Πλαίσιον διαμέτρου 40 cm, φέρον 300 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 600 Gauss, περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. Ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ πλαισίου εἶναι 25 στρ./sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς, β) ἡ ἀντίστασις τοῦ συνιστῶντος τὸ πλαίσιον σύρματος, γ) ἡ μέση ἔντασις τοῦ ἐπαγομένου ρεύματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πλαίσιον ἀποτελεῖται ἀπὸ χάλκινον σύρμα εἰδικῆς ἀντιστάσεως $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot$ cm, τομῆς 0,25 mm^2.

1030. Πλαίσιον διαμέτρου 30 cm, φέρον 20 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου (0,467 Gauss) περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου, ἡ δὲ συχνότης περιστροφῆς εἶναι 100 στρ./min. Νὰ ὑπολογισθοῦν. α) Ἡ μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς, β) ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου, γ) ἡ μέση ἔντασις τοῦ ἐξ ἐπαγωγῆς ρεύματος ἐπὶ τοῦ πλαισίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι συνίσταται ἐκ χαλκίνου σύρματος (εἰδικὴ ἀντίστασις $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot$ cm), τομῆς 10 mm^2.

1031. Πλαίσιον, πλευρᾶς 25 cm, φέρον 1000 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 200 Gauss, περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν μαγνητικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου. Πόση ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ πλαισίου ἵνα ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀναπτυσσομένη μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς εἶναι 125 V.

1032. Πλαίσιον, πλευρᾶς 20 cm, φέρον 500 σπείρας, στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου 200 Gauss, περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν μαγνητικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου. Πόση ἡ συχνότης περιστροφῆς, ἵνα ἡ μέση ἔντασις τοῦ ἐπαγομένου ρεύματος εἶναι 2,5 A, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀγωγὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα ἀργιλλίου (εἰδικὴ ἀντίστασις $2{,}8 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot$ cm), τομῆς 0,5 mm^2.

1033. Δύο πηνία A καὶ B εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ μαγνητικὸν κύκλωμα καὶ ἀποτελοῦνται ἐκ 200 σπειρῶν καὶ 800 σπειρῶν ἀντιστοίχως. Συνεχὲς ρεῦμα ἐντάσεως 2 A, παράγει ροὴν 25000 Mx εἰς τὸ πηνίον A καὶ 18000 Mx εἰς τὸ πηνίον B. Ὑπολογίσατε α) Τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ A, β) τὸν συντελεστὴν ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς τῶν A καὶ B, γ) τὴν κατὰ μέσον ὅρον ἐπὶ τοῦ πηνίου B ἐπαγομένην ΗΕΔ, ὅταν τὸ ρεῦμα εἰς τὸ A μηδενίζεται ἐντὸς 0,3 sec.

1034. Δύο γειτονικὰ πηνία A καὶ B, ἔχουν 300 σπείρας καὶ 600 σπείρας ἀντιστοίχως. Ρεῦμα 1,5 A εἰς τὸ A δημιουργεῖ ροὴν 12000 Mx μέσῳ τοῦ A καὶ 9000 Mx μέσῳ τοῦ B. Ὑπολογίσατε α) Τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ A, β) τὸν συντελεστὴν ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς τῶν A καὶ B, καὶ γ) τὴν κατὰ μέσον ὅρον ἐπὶ τοῦ B ἐπαγομένην ΗΕΔ, ὅταν τὸ ρεῦμα εἰς τὸ A μηδενίζεται ἐντὸς 0,2 sec.

1035. Μικρὸν ἐπίπεδον πηνίον ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 σπείρας λεπτοῦ σύρματος, ἐπιφανείας 1,77 cm^2 καὶ τίθεται εἰς τὸ διάκενον τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου, ὥστε νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰς μαγνητικὰς γραμμάς. Τὸ πηνίον συνδέεται πρὸς γαλβανόμετρον καὶ ὅταν ἐξάγεται ταχέως ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὄργανον δεικνύει ἀπόκλισιν $1{,}86 \cdot 10^{-3}$ Cb. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ διάκενον.

1036. Εὐθὺς ἀγωγὸς μήκους 10 cm, κινεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 10^4 Gauss, μὲ ταχύτητα 100 cm/sec καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ διευθύνσεις τῆς ταχύτητος τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου καὶ τοῦ ἀγωγοῦ νὰ εἶναι κάθετοι ἀλλήλων. Ποία ἡ ἐξ ἐπαγωγῆς ΗΕΔ, ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ κινουμένου ἀγωγοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1037. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχει συχνότητα 50 Hz. Ποία ἡ κυκλικὴ συχνότης καὶ ποία ἡ περίοδος αὐτοῦ.

Λύσις. α) Ἡ κυκλικὴ συχνότης ω εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{\omega = 2\pi \cdot \nu}$$

ὅπου ν ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος. Οὕτω διὰ $\nu = 50$ Hz, εὑρίσκομεν

$$\underline{\omega = 314 \text{ rad/sec.}}$$

β) Ἡ περίοδος Τ εἶναι ἀντίστροφος τῆς συχνότητος ν, ἤτοι

$$\underline{T = \frac{1}{\nu}}$$

Οὕτω διὰ $\nu = 50$ Hz, εὑρίσκομεν

$$\underline{T = 0{,}02 \text{ sec.}}$$

1038. Βολτόμετρον δεικνύει 220 V ὅταν συνδέεται μὲ τοὺς ἀκροδέκτας ἐναλλακτῆρος. Ὑπολογίσατε τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς ΗΕΔ.

Λύσις. Τὸ βολτόμετρον δεικνύει τὴν ἐνεργὸν τάσιν $U_{εν}$ καὶ συνεπῶς ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς τάσεως U_o θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$U_{εν} = \frac{U_o}{\sqrt{2}}$$

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς U_o, λαμβάνομεν

$$\underline{U_o = U_{εν} \cdot \sqrt{2}}$$

Οὕτω διὰ $U_{εν} = 220$ V, εὑρίσκομεν

$$\underline{U_o = 311 \text{ V.}}$$

1039. Μεταξὺ δύο σημείων ἑνὸς κυκλώματος ἐξασκεῖται ἡμιτονοειδὴς τάσις, τῆς ὁποίας τὸ πλάτος εἶναι μηδὲν εἰς χρόνον $t = 0$, καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἐνεργὸς τιμὴ εἶναι 10 V. Ἡ τάσις αὐτὴ ἔχει συχνότητα 50 sec^{-1}. Ποία εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς στιγμιαίας τιμῆς τῆς τάσεως.

Λύσις. Ἡ στιγμιαία τιμὴ U τῆς τάσεως, δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$U = U_o \cdot \eta\mu\, \omega t \qquad (1)$$

ὅπου U_o εἶναι τὸ πλάτος τῆς τάσεως καὶ ω ἡ κυκλικὴ συχνότης αὐτῆς. Ὡς γνωστὸν ὅμως τὸ πλάτος τῆς τάσεως U_o συνδέεται μὲ τὴν ἐνεργὸν τιμὴν τῆς τάσεως, διὰ τῆς σχέσεως

$$U_{εν} = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἢ} \qquad U_o = U_{εν} \cdot \sqrt{2} \qquad (2)$$

καὶ ἡ κυκλικὴ συχνότης ω συνδέεται μὲ τὴν συχνότητα ν διὰ τῆς σχέσεως

$$\omega = 2\pi \cdot \nu \tag{3}$$

Οὕτω, λόγῳ τῶν (2) καὶ (3), ὁ τύπος (1) γράφεται

$$U = U_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{2} \cdot \eta\mu\,(2\pi\nu t) \tag{4}$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $U_{\varepsilon\nu} = 10$ V, $\nu = 50$, λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἔκφρασιν τῆς τιμῆς τῆς στιγμιαίας τάσεως, ἤτοι

$$\underline{U = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \eta\mu\,(314\,t)}$$

Ἐὰν ὁ χρόνος t μετρᾶται εἰς sec, τότε ἡ τάσις U μετρᾶται εἰς Volt.

1040. Ποία ἡ ἰσχὺς ἐναλλασσομένου ρεύματος, ὅταν ἡ ἐνεργὸς τάσις αὐτοῦ εἶναι 220 V, ἡ ἐνεργὸς ἔντασις 10 A καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως ρεύματος καὶ τάσεως 60^0.

Λύσις. Ἡ μέση ἰσχὺς N ἐναλλασσομένου ρεύματος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{N = U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi}$$

ὅπου $U_{\varepsilon\nu}$, $i_{\varepsilon\nu}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις ἀντιστοίχως, τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, καὶ φ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως καὶ τάσεως αὐτοῦ.

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, $U_{\varepsilon\nu} = 220$ V, $i_{\varepsilon\nu} = 10$ A, $\sigma\upsilon\nu\,\varphi = 0{,}5$ ($\varphi = 60^0$), εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 1100 \text{ W}.}$$

1041. Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς τμῆμα κυκλώματος εἶναι 362 W, ὅταν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 4 A καὶ ὅταν ἡ ἐνεργὸς διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου τοῦ κυκλώματος εἶναι 100 V. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως καὶ τάσεως.

Λύσις. Ἡ μέση ἰσχὺς N τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{N = U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi}$$

ὅπου $U_{\varepsilon\nu}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις, $i_{\varepsilon\nu}$ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις καὶ φ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος.

Λύομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς συν φ καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{N}{U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu}}}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον, N = 362 W, $U_{\varepsilon\nu} = 100$ V καὶ $i_{\varepsilon\nu} = 4$ A, λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu\,\varphi = 0{,}905$ καὶ

$$\underline{\varphi = 25^0\ 10'.}$$

1042. Πηνίον διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι 4 A. Ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα του εἶναι 104,5 V. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐκλυομένη θερμότης συνεπείᾳ τοῦ φαινομένου Joule εἶναι 24 kcal ἐντὸς 5 min, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος (1 cal = 4,18 Joule).

Λύσις. Ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια A δι' ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, ἐντὸς χρόνου t, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu} \cdot t \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi \tag{1}$$

όπου $U_{εν}$, $i_{εν}$ είναι άντιστοίχως ή ένεργός τάσις καί ή ένεργός ένтασις καί τό συν φ ό συντελεστής ίσχύος.

Λύομεν ώς πρός συν φ καί λαμβάνομεν

$$\underline{συν\,φ = \frac{A}{U_{εν} \cdot i_{εν} \cdot t}} \qquad (2)$$

Θέτοντες είς τόν τύπον (2), $A = 24000 \cdot 4{,}18$ Joule, $U_{εν} = 104{,}5$ V, $i_{εν} = 4$ A, $t = 300$ sec, εύρίσκομεν

$$\underline{συν\,φ = 0{,}8.}$$

1043. Πηνίον παρουσιάζει άντίστασιν 20 Ω καί αύτεπαγωγήν 0,35 Η. Ύπολογίσατε τήν έπαγωγικήν του άντίστασιν ώς καί τήν σύνθετον άντίστασιν, όταν τοῦτο διαρρέεται ύπό έναλλασσομένου ρεύματος συχνότητος 25 sec⁻¹.

Λύσις. α) Ή έπαγωγική άντίστασις R_L τοῦ πηνίου, δίδεται ύπό τοῦ τύπου

$$R_L = L \cdot ω \qquad (1)$$

όπου L ό συντελεστής αύτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καί ω ή κυκλική συχνότης τοῦ έναλλασσομένου ρεύματος.

Έάν όμως καλέσωμεν ν τήν συχνότητα τοῦ έναλλασσομένου ρεύματος, θά έχωμεν $ω = 2\,π \cdot ν$, καί ό άνωτέρω τύπος γράφεται

$$\underline{R_L = L \cdot 2\,π \cdot ν} \qquad (2)$$

Οὕτω, διά $L = 0{,}35$ H καί $ν = 25\ sec^{-1}$, εύρίσκομεν

$$\underline{R_L = 55\ Ω.}$$

β) Ή σύνθετος άντίστασις Z δίδεται ύπό τοῦ τύπου

$$\underline{Z = \sqrt{R^2 + R^2_L}}$$

Οὕτω, διά $R = 20\ Ω$ καί $R_L = 55\ Ω$, εύρίσκομεν

$$\underline{Z = 58{,}5\ Ω.}$$

1044. Πηνίον άντιστάσεως 50 Ω, έχον συντελεστήν αύτεπαγωγῆς 0,275 Η, διαρρέεται ύπό έναλλασσομένου ήμιτονοειδοῦς ρεύματος, τοῦ όποίου ή ένεργός ένтασις είναι 4,4 Α. Ή συχνότης τοῦ ρεύματος είναι 50 sec⁻¹. Ποία είναι ή διαφορά δυναμικοῦ είς τά άκρα τοῦ πηνίου.

Λύσις. Έστω L ό συντελεστής αύτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καί ω ή κυκλική συχνότης τοῦ έναλλασσομένου ρεύματος. Ή έπαγωγική άντίστασις τοῦ πηνίου θά είναι

$$R_L = L \cdot ω \quad ή \quad R_L = L \cdot 2\,π \cdot ν \qquad (1)$$

διότι $ω = 2\,π \cdot ν$, ένθα ν ή συχνότης τοῦ έναλλασσομένου ρεύματος.

Έάν άκολούθως καλέσωμεν καί R τήν ώμικήν άντίστασιν τοῦ πηνίου, ή σύνθετος άντίστασις αύτοῦ θά είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\,π \cdot ν)^2} \qquad (2)$$

Συμφώνως δέ πρός τόν νόμον τοῦ Ohm θά έχωμεν

$$i_{εν} = \frac{U_{εν}}{\sqrt{R^2 + (L \cdot 2\,π \cdot ν)^2}} \qquad (3)$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ τύπου (3) ὡς πρὸς $U_{\varepsilon\nu}$ λαμβάνομεν

$$U_{\varepsilon\nu} = i_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot \nu)^2} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $i_{\varepsilon\nu} = 4{,}4$ A, $R = 50\ \Omega$, $L = 0{,}275$ H, $\nu = 50\ \text{sec}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$U_{\varepsilon\nu} = 439\ \text{V}.$$

1045. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 36,8 μF, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐνεργοῦ ἐντάσεως 4,4 A. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 sec⁻¹. Ποία εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν C τὴν χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ καὶ ω τὴν κυκλικὴν συχνότητα τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τότε ὁ πυκνωτὴς παρουσιάζει χωρητικὴν ἀντίστασιν

$$R_C = \frac{1}{C \cdot \omega} \qquad (1)$$

ἤ, ἐπειδὴ $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ὅπου ν ἡ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, θὰ ἔχωμεν

$$R_C = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἀκολούθως καλέσωμεν $U_{\varepsilon\nu}$ τὴν ἐφαρμοζομένην ἐνεργὸν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ, ἡ ἐνεργὸς ἔντασις $i_{\varepsilon\nu}$ τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος θὰ εἶναι

$$i_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R_C} = U_{\varepsilon\nu} \cdot C \cdot 2\pi \cdot \nu \qquad (3)$$

Δι' ἐπιλύσεως τῆς σχέσεως (3) ὡς πρὸς $U_{\varepsilon\nu}$, λαμβάνομεν

$$U_{\varepsilon\nu} = \frac{i_{\varepsilon\nu}}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $i_{\varepsilon\nu} = 4{,}4$ A, $C = 36{,}8 \cdot 10^{-6}$ F, $\nu = 50\ \text{sec}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$U_{\varepsilon\nu} = 380\ \text{V}.$$

1046. Κύκλωμα συνίσταται ἀπὸ λυχνίαν πυρακτώσεως ἀντιστάσεως 75 Ω, πηνίον ὠμικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω καὶ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,5 H καὶ πυκνωτὴν χωρητικότητος 10 μF. Ἡ λυχνία, τὸ πηνίον καὶ ὁ πυκνωτὴς εἶναι συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως τῆς ἐφαρμοζομένης εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος εἶναι 130 V, ἐνῷ ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 Hz. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος καὶ β) ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως.

Λύσις. α) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z ἑνὸς κυκλώματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ὠμικὴν ἀντίστασιν R, πηνίον καὶ πυκνωτήν, εἶναι

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad (1)$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, C ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ ω ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $R = 80\ \Omega$, $L = 0{,}5$ H, $C = 10\ \mu\text{F} = 10 \cdot 10^{-6}$ F καὶ $\omega = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50$ rad/sec, εὑρίσκομεν

$$Z = 180{,}2\ \Omega.$$

β) Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

ὁπότε, θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν L, C καὶ ω, εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = -2{,}02 \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi = -63^0\ 40'$$

Ἄρα ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως εἶναι

$$\underline{\varphi = 63^0\ 40'}$$

Τὸ σημεῖον (—) σημαίνει ὅτι προηγεῖται ἡ ἔντασις καὶ ἕπεται ἡ τάσις.

1047. Συνδέεται ἐν σειρᾷ πηνίον αὐτεπαγωγῆς 0,2 H καὶ πυκνωτὴς χωρητικότητος 125 μF. Ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 20 Ω. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, ὅταν ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 sec⁻¹. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ συχνότης αὕτη, ἵνα ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι ἐλαχίστη.

Λύσις. Ἡ ἀντίστασις Z ἑνὸς κυκλώματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς L, πυκνωτὴν χωρητικότητος C καὶ ὠμικὴν ἀντίστασιν R, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (1)$$

ὅπου ω ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1), $R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}2\ H$, $C = 125 \cdot 10^{-6}\ F$, $\omega = 2\pi \cdot \nu = 314$ rad/sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{Z = 42{,}35\ \Omega.}$$

Διὰ νὰ εἶναι ἐλαχίστη ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad (2)$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{\nu = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $L = 0{,}2\ H$, $C = 125 \cdot 10^{-6}\ F$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu = 31{,}83\ \text{sec}^{-1}.}$$

1048. Πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς L καὶ ἀντιστάσεως R συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος C. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς, τὸ κύκλωμα ἔχει μόνον ὠμικὴν ἀντίστασιν. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: ν = 50 sec⁻¹, C = 0,1 μF.

Λύσις. Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος εἶναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \qquad (1)$$

ὅπου R_L ἡ ἐπαγωγικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου καὶ R_C ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις τοῦ πυκνωτοῦ.

Εἶναι ὅμως

$$R_L = L\omega \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad R_C = \frac{1}{C\omega} \quad (3)$$

ὅπου L ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, C ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ ω ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος. Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad (4)$$

Ἵνα δὲ Z = R, πρέπει νὰ εἶναι

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \qquad (5)$$

συνεπῶς λαμβάνομεν

$$L = \frac{1}{C\omega^2} \qquad (6)$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6), $C = 0{,}1\ \mu F = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ F$, $\omega = 2\pi \cdot \nu = 6{,}28 \cdot 50 = 314$ rad/sec καὶ εὑρίσκομεν

$$L = 101{,}5\ H \quad \text{(περίπου)}$$

1049. Τάσις ἐνεργοῦ τιμῆς 120 V ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα κυκλώματος, συνισταμένου ἀπὸ πηνίον ἀντιστάσεως 30 Ω καὶ ἐπαγωγικῆς ἀντιστάσεως $L\omega = 52\ \Omega$ καὶ πυκνωτοῦ μὲ χωρητικὴν ἀντίστασιν $1/C\omega = 22\ \Omega$, συνδεδεμένου ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ πηνίον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἰς τὸ κύκλωμα.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $U_{\varepsilon\nu}$ τὴν ἐνεργὸν τάσιν καὶ $i_{\varepsilon\nu}$ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τότε ἡ ἰσχὺς N θὰ εἶναι

$$N = U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (1)$$

ὅπου φ εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως τοῦ ρεύματος.

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν Z τὴν σύνθετον ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος, θὰ ἔχωμεν

$$i_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \qquad (2)$$

Οὕτω ὁ τύπος (1) γράφεται

$$N = \frac{U^2_{\varepsilon\nu}}{Z} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (3)$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z εἶναι ὡς γνωστὸν

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \qquad (4)$$

ὅπου R_L εἶναι ἡ ἐπαγωγικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου καὶ R_C ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις τοῦ πυκνωτοῦ.

Συνεπῶς βάσει τῆς σχέσεως (4) ἡ σχέσις (3) δίδει

$$N = \frac{U^2_{\varepsilon\nu}}{\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (5)$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ φάσεως φ. Αὕτη ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{R_L - R_C}{R} \qquad (6)$$

Ὁ τύπος οὗτος διὰ $R_L = 52\ \Omega$, $R_C = 22\ \Omega$ καὶ $R = 30\ \Omega$, δίδει εφ φ = 1, ἐξ οὗ

$$\varphi = 45^0$$

Θέτοντες ἀκολούθως εἰς τὸν τύπον (5), $U_{\varepsilon\nu} = 120$ V, $R = 30\ \Omega$, $R_L = 52\ \Omega$, $R_C = 22\ \Omega$, συν $\varphi = \sqrt{2}/2$ ($\varphi = 45^0$), εὑρίσκομεν

$$N = 240 \text{ W}.$$

1050. Τὸ πρωτεῦον μετασχηματιστοῦ ἀπορροφᾷ ἰσχὺν 6000 W. Τὸ δευτερεῦον εἶναι συνδεδεμένον εἰς κύκλωμα, ἄνευ αὐτεπαγωγῆς καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο εἶναι 10 A. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἴση πρὸς 1. Πόση εἶναι ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $E_{2\varepsilon\nu}$ τὴν ἐνεργὸν τάσιν καὶ $i_{2\varepsilon\nu}$ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν εἰς τὸ δευτερεῦον, τότε ἡ ἰσχὺς N_2 εἰς τὸ δευτερεῦον θὰ εἶναι

$$N_2 = E_{2\varepsilon\nu} \cdot i_{2\varepsilon\nu} \tag{1}$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχὺν εἰς τὸ πρωτεῦον, τότε θὰ ἔχωμεν

$$N_1 = N_2 \qquad \text{ἤ} \qquad N_1 = E_{2\varepsilon\nu} \cdot i_{2\varepsilon\nu} \tag{2}$$

διότι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι 1. Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς $E_{2\varepsilon\nu}$ καὶ λαμβάνομεν

$$E_{2\varepsilon\nu} = \frac{N_1}{i_{2\varepsilon\nu}}.$$

Θέτοντες ἀκολούθως $N_1 = 6000$ W, $i_{2\varepsilon\nu} = 10$ A, εὑρίσκομεν

$$E_{2\varepsilon\nu} = 600 \text{ W}.$$

1051. Τὸ δευτερεῦον μετασχηματιστοῦ φέρει 154 σπείρας. Ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ πρωτεύοντος εἶναι 2500 V. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἔχωμεν ἐν κενῷ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ δευτερεύοντος, τάσιν ἐνεργοῦ τιμῆς 110 V. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος.

Λύσις. Διὰ τὸν μετασχηματιστὴν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{E_{2\varepsilon\nu}}{E_{1\varepsilon\nu}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

ὅπου $E_{2\varepsilon\nu}$, $E_{1\varepsilon\nu}$ εἶναι αἱ τάσεις ἀντιστοίχως τοῦ δευτερεύοντος καὶ πρωτεύοντος καὶ n_2 n_1, ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν αὐτῶν, ἀντιστοίχως. Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς n_1, λαμβάνομεν

$$n_1 = \frac{n_2 \cdot E_{1\varepsilon\nu}}{E_{2\varepsilon\nu}} \tag{2}$$

Δίδονται $n_2 = 154$ σπεῖραι, $E_{1\varepsilon\nu} = 2500$ V, $E_{2\varepsilon\nu} = 110$ V. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2), εὑρίσκομεν

$$n_1 = 3500 \text{ σπεῖραι}.$$

1052. Εἰς τὸ δευτερεῦον μετασχηματιστοῦ λαμβάνομεν ἰσχὺν 4032 W. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 0,96. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον, ὅταν ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως τροφοδοσίας εἶναι 120 V.

Λύσις. Ἔστωσαν αἱ ἐνεργοὶ τιμαὶ τάσεως πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος $E_{1\varepsilon\nu}$, $E_{2\varepsilon\nu}$ ἀντιστοίχως. Ἐπίσης ἔστωσαν $i_{1\varepsilon\nu}$, $i_{2\varepsilon\nu}$ ἀντιστοίχως αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων τοῦ πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος. Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως α εἶναι πηλίκον τῆς ἀποδιδομένης ἰσχύος διὰ τῆς καταναλισκομένης ἰσχύος, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \frac{E_{2\varepsilon\nu} \cdot i_{2\varepsilon\nu}}{E_{1\varepsilon\nu} \cdot i_{1\varepsilon\nu}} \tag{1}$$

Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν $i_{1εν}$ τοῦ πρωτεύοντος, λαμβάνομεν

$$i_{1εν} = \frac{E_{2εν} \cdot i_{2εν}}{α \cdot E_{1εν}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2), $α = 0{,}96$, $E_{2εν} \cdot i_{2εν} = 4032$ W, $E_{1εν} = 120$ V, εὑρίσκομεν

$$i_{1εν} = 35 \text{ A}.$$

1053. Μετασχηματιστὴς λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 2400 V καὶ δίδει εἰς τὴν κατανάλωσιν ρεῦμα ἐντάσεως 80 A. Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος πρὸς τὸν ἀριθμὸν σπειρῶν τοῦ δευτερεύοντος εἶναι 20 : 1. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἀπόδοσις εἶναι 100 %, ὑπολογίσατε τὴν τάσιν εἰς τὸ δευτερεῦον, τὸ ρεῦμα εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ τὴν ἀποδιδομένην ἰσχύν.

Λύσις. Ὑπολογισμὸς τῆς τάσεως εἰς τὸ δευτερεῦον. Ἐὰν καλέσωμεν $E_{1εν}$, $E_{2εν}$ τὰς ἐνεργοὺς τάσεις πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος, καθὼς καὶ n_1, n_2 τὸν ἀριθμὸν σπειρῶν αὐτῶν ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E_{1εν}}{E_{2εν}} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (1)$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $E_{2εν}$ λαμβάνομεν

$$E_{2εν} = E_{1εν} \cdot \frac{n_2}{n_1} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν $E_{1εν} = 2400$ V, $n_2/n_1 = 1/20$ καὶ λαμβάνομεν

$$E_{2εν} = 120 \text{ V}.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον. Ἐὰν καλέσωμεν $i_{1εν}$ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν εἰς τὸ πρωτεῦον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{i_{1εν}}{i_{2εν}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (3)$$

ὁπότε δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $i_{1εν}$, λαμβάνομεν

$$i_{1εν} = i_{2εν} \cdot \frac{n_2}{n_1} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4), $i_{2εν} = 80$ A, $n_2/n_1 = 1/20$, καὶ εὑρίσκομεν

$$i_{1εν} = 4 \text{ A}.$$

Ὑπολογισμὸς ἰσχύος εἰς τὸ δευτερεῦον. Θὰ ἔχωμεν

$$N_2 = E_{2εν} \cdot i_{2εν} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5), $i_{2εν} = 80$ A, $E_{2εν} = 120$ V, καὶ εὑρίσκομεν

$$N_2 = 9600 \text{ W}.$$

1054. Μετασχηματιστὴς πτώσεως τάσεως, φέρει πρωτεῦον 4500 σπειρῶν καὶ δευτερεῦον 150 σπειρῶν. Τὸ κύκλωμα τοῦ πρωτεύοντος δέχεται ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ὑπὸ ἐνεργὸν τάσιν 3000 V. Τὸ ρεῦμα τοῦ δευτερεύοντος χρησιμοποιεῖται εἰς μίαν ἀντίστασιν θερμάνσεως καὶ διαπιστοῦται ὅτι ἡ ἐκλυομένη θερμότης φέρει εἰς βρασμόν, ἐντὸς 10 min, 15 kgr ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 15°C.

Δεχόμενοι ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας διὰ τὴν θέρμανσιν εἶναι ἀμελητέαι, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπορροφούμενον ρεῦμα ὑπὸ τοῦ πρωτεύοντος καὶ ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος.

Λύσις· Ὑπολογισμὸς τάσεως εἰς τὸ δευτερεῦον. Ἔστωσαν n_1, $E_{1εν}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ πρωτεύοντος καὶ n_2, $E_{2εν}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ δευτερεύοντος. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E_{2εν}}{E_{1εν}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $E_{2εν}$, προκύπτει

$$\underline{E_{2εν} = \frac{n_2}{n_1} \cdot E_{1εν}} \tag{2}$$

Θέτοντες, $E_{1εν} = 3000$ V, $n_1 = 4500$, $n_2 = 150$, εὑρίσκομεν

$$\underline{E_{2εν} = 100 \text{ V.}}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ πρωτεῦον. Ἐὰν καλέσωμεν $i_{1εν}$ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν εἰς τὸ πρωτεῦον, τότε ἡ ἰσχὺς N_1 τοῦ πρωτεύοντος θὰ εἶναι

$$N_1 = E_{1εν} \cdot i_{1εν} \tag{3}$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν c τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ὕδατος, m τὴν μᾶζαν, Δθ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας καὶ t τὸν χρόνον θερμάνσεως αὐτοῦ, τότε, ἐπειδὴ ἡ ἰσχὺς τοῦ πρωτεύοντος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἰσχὺν τοῦ δευτερεύοντος, εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ἴση πρὸς

$$N_1 = J \cdot \frac{c \cdot m \cdot \Delta\theta}{t} \tag{4}$$

ὅπου J εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Συνεπῶς βάσει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) θὰ ἔχωμεν

$$E_{1εν} \cdot i_{1εν} = J \cdot \frac{c \cdot m \cdot \Delta\theta}{t} \tag{5}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς $i_{1εν}$, λαμβάνομεν

$$\underline{i_{1εν} = J \cdot \frac{c \cdot m \cdot \Delta\theta}{t \cdot E_{1εν}}} \tag{6}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (6), $J = 4{,}18$ Joule/cal, $c = 1$ cal/gr · grad, $m = 15000$ gr, $\Delta\theta = 85^0$ C, $t = 10$ min $= 600$ sec, $E_{1εν} = 3000$ V, εὑρίσκομεν

$$\underline{i_{2εν} = 2{,}96 \text{ A.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1055. Σύρμα διαρρέεται ὑπὸ συνεχοῦς ρεύματος ἐντάσεως 3 A καὶ ὑπὸ ἐναλλασσομένου ἡμιτονοειδοῦς ρεύματος, ἐνεργοῦ ἐντάσεως 4,5 A. Ποία εἶναι ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο ρευμάτων. ('Απ. 5,4 A.)

1056. Σύρμα διαρρέεται ὑπὸ συνεχοῦς ρεύματος ἐντάσεως 5 A, ἐν συνεχείᾳ δὲ διαβιβάζεται ἐναλλασσόμενον ρεῦμα δι' αὐτοῦ, ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο ρευμάτων προκύπτοντος ρεύματος εἶναι 6,5 A. Πόση ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος. ('Απ. 4,15 A.)

1057. Ἡμιτονοειδὲς ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος 50 περιόδων τροφοδοτεῖ ἠλεκτρικὸν θερμαντῆρα, τοῦ ὁποίου ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις εἶναι 55 Ω καὶ ὁ συντε-

λεστὴς αὐτεπαγωγῆς ἀμελητέος. Ὁ θερμαντὴρ δίδει 12762 cal/min. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ ρεύματος καὶ β) ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ.
(Ἀπ. 220 V, 880 W.)

1058. Ἐφαρμόζεται εἰς τοὺς ἀκροδέκτας λυχνίας πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 260 Ω, σταθερὰ τάσις 130 V. Πόσον τὸ ἐκλυόμενον ἀνὰ δευτερόλεπτον ποσὸν θερμότητος. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ ἡμιτονοειδοῦς τάσεως συχνότητος 100 περιόδων, ἥτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ ἄκρα τῆς λυχνίας, ἵνα ἡ ἐκλυομένη ποσότης θερμότητος εἰς τὸ νῆμα μὴ ὑποστῇ μεταβολήν. (Ἀπ. 15,6 cal, 183,3 V.)

1059. Πυκνωτὴς πρέπει νὰ παρουσιάζῃ, εἰς ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος 1000 Hz, χωρητικὴν ἀντίστασιν $R_C = 100\ \Omega$. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης αὐτοῦ. (Ἀπ. 1,6 μF.)

1060. Εἰς κύκλωμα ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος 50 Hz, ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἶναι 220 V, τῆς ἐντάσεως 2 A καὶ ἡ ἰσχὺς 330 W. Ποία ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως. (Ἀπ. 41^0 24,5′.)

1061. Πυκνωτὴς συνδέεται πρὸς πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως, συχνότητος 100 Hz καὶ ἐνεργοῦ τάσεως 10 000 V. Ποία ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ διὰ τοῦ πυκνωτοῦ διερχομένου ρεύματος, ἐὰν ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἶναι $\frac{2}{9}\cdot 10^{-2}\ \mu F$. (Ἀπ. 716200 Ω, 19,75 mA.)

1062. Πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,05 H καὶ ἀντιστάσεως 10 Ω συνδέεται μὲ τάσιν μεγίστης τιμῆς 200 V καὶ συχνότητος 50 c/sec. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος καὶ τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως.
(Ἀπ. 10,74 A, 57^0 30′.)

1063. Τάσις τῆς μορφῆς $150 \cdot ημ\,\omega t$ ἐφαρμόζεται εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς πυκνωτοῦ χωρητικότητος 24 μF. Ἡ συχνότης εἶναι 25 c/sec. Ὑπολογίσατε τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸν πυκνωτὴν καὶ σχεδιάσατε τὰς καμπύλας ἐντάσεως ρεύματος καὶ τάσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου. (Ἀπ. 0,566 A.)

1064. Ἐὰν ἐναλλασσομένη τάσις τῆς μορφῆς $U = 140 \cdot ημ\,\omega t$ συνδεθῇ μὲ τὰ ἄκρα ἀντιστάσεως 8 Ω, ἄνευ αὐτεπαγωγῆς, ὑπολογίσατε τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ σχεδιάσατε καμπύλην παριστῶσαν τὴν μεταβολὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος συναρτήσει τοῦ χρόνου. Ἡ συχνότης τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως εἶναι 50 c/sec. (Ἀπ. 17,5 A.)

1065. Ἀποπνικτικὸν πηνίον διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A, ὅταν συνδέεται μὲ τάσιν ἐναλλασσομένην 230 V, συχνότητος 50 c/sec. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 2 Ω, εὕρατε τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, ὡς καὶ τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος.
(Ἀπ. 0,073 H, 85^0.)

1066. Πυκνωτὴς εὑρίσκεται ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν τῶν 30 Ω καὶ συνδέεται μὲ πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως 220 V. Ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι 40 Ω. Ὑπολογίσατε α) τὴν σύνθετον ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος, β) τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, γ) τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς ἔξωθεν ἐφαρμοζομένης τάσεως, δ) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος.
(Ἀπ. α′ 50 Ω, β′ 4,4 A, γ′ $\varphi = 53^0$, δ′ 0,60.)

1067. Κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν, αὐτεπαγωγὴν καὶ χωρητικότητα ἐν σειρᾷ συνδεδεμένα μὲ δίκτυον ἐναλλασσομένης τάσεως 110 V. Ἡ ἀντίστασις εἶναι 9 Ω, ἡ

ἐπαγωγικὴ ἀντίστασις 28 Ω καὶ ἡ χωρητικὴ ἀντίστασις 16 Ω. Ὑπολογίσατε α) τὴν αὐτεπαγωγὴν τοῦ κυκλώματος, β) τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, γ) τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς ἔξωθεν ἐφαρμοζομένης τάσεως, δ) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος τοῦ κυκλώματος.
(Ἀπ. α' 15 Ω, β' 7,33 A, γ' ἡ τάσις προηγεῖται τοῦ ρεύματος κατὰ 53° 8', δ' 0,60.)

1068. Ρεῦμα ἐντάσεως 30 mA διαβιβάζεται μέσῳ πυκνωτοῦ χωρητικότητος 4 μF, συνδεδεμένου ἐν παραλλήλῳ μὲ πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως, συχνότητος 500 c/sec. Ὑπολογίσατε τὴν χωρητικὴν ἀντίστασιν τοῦ πυκνωτοῦ καὶ τὴν τάσιν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας του.
(Ἀπ. 80 Ω, 2,4 V.)

1069. Πηνίον αὐτεπαγωγῆς 0,10 H παρουσιάζει ἀντίστασιν 12 Ω. Συνδέεται μὲ πηγὴν τάσεως 110 V καὶ συχνότητος 60 c/sec. Ὑπολογίσατε, α) τὴν ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν τοῦ πηνίου, β) τὴν σύνθετον ἀντίστασιν τοῦ πηνίου, γ) τὴν ἔντασιν τοῦ διαρρέοντος τὸ πηνίον ρεύματος, δ) τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως καὶ ἔξωθεν ἐφαρμοζομένης τάσεως, ε) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος τοῦ κυκλώματος, στ) τὴν ἔνδειξιν βατομέτρου συνδεδεμένου μὲ τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου.
(Ἀπ. α' 37,7 Ω, β' 39, 6 Ω, γ' 2,78 A, δ' ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις προηγεῖται τοῦ ρεύματος κατὰ 72° 20', ε' 0,303, στ' 92,6 W.)

1070. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 10 μF εὑρίσκεται ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν 40 Ω καὶ συνδέεται μὲ πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως 110 V καὶ συχνότητος 60 c/sec. Ὑπολογίσατε, α) τὴν χωρητικὴν ἀντίστασιν, β) τὴν σύνθετον ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος, γ) τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ κύκλωμα, δ) τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως ρεύματος καὶ ἔξωθεν ἐφαρμοζομένης τάσεως, ε) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος τοῦ κυκλώματος.
(Ἀπ. α' 266 Ω, β' 269 Ω, γ' 0,409 A, δ) ἡ ἔντασις προηγεῖται τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως κατὰ 81° 25', ε' 0,149.)

1071. Κύκλωμα, συνδέεται μὲ τάσιν 100 V, συχνότητος 60 c/sec καὶ συνίσταται ἐξ ἑνὸς πυκνωτοῦ χωρητικῆς ἀντιστάσεως 30 Ω, ἀντιστάσεως 44 Ω (ἄνευ αὐτεπαγωγῆς) καὶ πηνίου ἐπαγωγικῆς ἀντιστάσεως 90 Ω καὶ ὠμικῆς ἀντιστάσεως 36 Ω, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Ὑπολογίσατε α) τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης τούτων (πυκνωτής, ἀντίστασις, πηνίον), β) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος τοῦ κυκλώματος καὶ γ) τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ τοῦ κυκλώματος ἰσχύν.
(Ἀπ. α' 97 V. β' 0,80. γ' 80 W.)

1072. Ὀκταπολικὸς ἐναλλακτήρ, λειτουργεῖ μὲ τὸν ρυθμὸν τῶν 900 στροφῶν ἀνὰ min καὶ ἐμφανίζει ΗΕΔ ἀποδιδομένην ὑπὸ ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης, ἐχούσης μεγίστην τιμὴν 300 V. Ὑπολογίσατε α) τὴν συχνότητα καὶ τὴν περίοδον τῆς ΗΕΔ, β) τὴν στιγμιαίαν τιμὴν τῆς ΗΕΔ 1/720 sec, ἀφοῦ διέλθῃ διὰ τῆς μηδενικῆς τιμῆς καὶ γ) τὴν ἐνεργὸν τιμὴν τῆς τάσεως.
(Ἀπ. α' 60 c/sec. 1/60 sec, β' 150 V, γ' 212 V.)

1073. Πηνίον, ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,14 H καὶ ἀντίστασιν 12 Ω. Τοῦτο συνδέεται μὲ πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως 110 V καὶ συχνότητος 25 c/sec. Ὑπολογίσατε α) τὴν ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν τοῦ πηνίου, β) τὴν σύνθετον ἀντίστασιν τοῦ πηνίου, γ) τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ πηνίον, δ) τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως καὶ τῆς ἔξωθεν ἐφαρμοζομένης τάσεως, ε) τὸν συντελεστὴν ἰσχύος, στ) τὴν ὑπὸ τοῦ πηνίου καταναλισκομένην ἰσχύν.
(Ἀπ. α' 22 Ω, β' 25,1 Ω, γ' 4,38 A, δ' $\varphi = 61^{0}\ 20'$, ε' 0,478, στ' 230 W.)

1074. Ἡ ἐνεργὸς τάσις ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος 50 c/sec, εἶναι 200 V. Ἡ τάσις αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς κύκλωμα συνιστάμενον ἐξ ἑνὸς πηνίου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 2 Ω καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς 0,01 Η. Εὕρατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ὡς καὶ τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. ('Απ. 53,8 Α, 57° 30'.)

1075. Πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,64 Η καὶ ἀντιστάσεως 40 Ω, συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος 12 μF. Ὑπολογίσατε α) τὴν συχνότητα, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑφίσταται συντονισμός, β) τὴν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ τοῦ πυκνωτοῦ, ἀντιστοίχως, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν εἰς τὸ κύκλωμα ἐφαρμοζομένην τάσιν, ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως 1,5 Α, ὑπὸ τὴν συχνότητα συντονισμοῦ, διαρρέει τὸ κύκλωμα, γ) τὰς τρεῖς τάσεις τῆς ἐρωτήσεως (β) μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 1,5 Α καὶ συχνότητος 50 c/sec.
('Απ. α' 57,5 c/sec, β' 352 V, 346,4 V, 60 V, γ' 307 V, 398 V, 111 V.)

1076. Πηνίον, ἀμελητέας ὠμικῆς ἀντιστάσεως, ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,01 Η. Τάσις τῆς μορφῆς 140 · ημ ωt, ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἡ συχνότης τῆς τάσεως εἶναι 50 c/sec. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ πηνίον καὶ σχεδιάσατε καμπύλας τῆς τάσεως καὶ ἐντάσεως, συναρτήσει τοῦ χρόνου. ('Απ. 44,5 · ημ (ωt − π/2).)

1077. Κύκλωμα, ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς πηνίου συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,25 Η, ἀντιστάσεως 3 Ω καὶ πυκνωτοῦ χωρητικότητος 20 μF, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Ὑπολογίσατε εἰς ποίαν συχνότητα θὰ ἔχωμεν συντονισμόν, ὡς καὶ τὴν ἔντασιν τοῦ διαρρέοντος τὸ κύκλωμα ρεύματος, ἐὰν ἡ ἐναλλασσομένη τάσις 40 V ὑπὸ τὴν συχνότητα συντονισμοῦ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ κύκλωμα. Εὕρατε ἐπίσης τὴν τάσιν εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ. ('Απ. 71,2 c/sec, 13,33 Α, 1,491 V.)

1078. Πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,03 Η καὶ ἀντιστάσεως 1 Ω, τοποθετεῖται ἐν σειρᾷ μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος 200 μF. Ὑπολογίσατε τὴν συχνότητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ὑφίσταται συντονισμός. Ἐὰν τάσις 1 V ἐφαρμόζεται εἰς τὸ κύκλωμα, σχεδιάσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, συναρτήσει τῆς συχνότητος. Ἐὰν τὸ πηνίον ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἄλλου, ἔχοντος τὸν αὐτὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς, ἀλλ' ἀντίστασιν 0,5 Ω, σχεδιάσατε τὴν νέαν καμπύλην ρεύματος - συχνότητος. ('Απ. 65 c/sec.)

1079. Κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ λυχνίαν πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 150 Ω καὶ πυκνωτὴν χωρητικότητος 10 μF, συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ καὶ τροφοδοτεῖται ἀπὸ πηγὴν ἐναλλασσομένου ρεύματος τάσεως ἐνεργοῦ τιμῆς 110 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, β) ὁ συντελεστὴς ἰσχύος, γ) ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ ἐντάσεως καὶ τάσεως, δ) ἡ μέση ἰσχὺς τῆς πηγῆς, ε) ἡ φαινομένη ἰσχὺς αὐτῆς, στ) ἡ ἐνεργὸς ΗΕΔ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 Hz. ('Απ. 352 Ω, 0,426, 64° 47', 14,7 W, 34,4 VA, 100 V.)

1080. Ἡμιτονοειδὲς ἐναλλασσόμενον ρεῦμα κυκλικῆς συχνότητος 300 rad/sec τροφοδοτεῖ θερμαντῆρα ἠλεκτρικόν, τοῦ ὁποίου ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις εἶναι 62,5 Ω καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς ἀμελητέος. Ὁ θερμαντὴρ δίδει 3600 cal/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς τάσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐντάσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου. ('Απ. 176,25 · ημ 300 t, 2,82 · ημ 300 t.)

1081. Ἡμιτονοειδὲς ἐναλλασσόμενον ρεῦμα κυκλικῆς συχνότητος 200 rad/sec καὶ ἐνεργοῦ τάσεως 220 V τροφοδοτεῖ θερμαντῆρα ἠλεκτρικόν, τοῦ ὁποίου ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις εἶναι 80 Ω καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς 0,3 Η. Νὰ ὑπολογισθοῦν, α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ὅπερ διαρρέει τὸν θερμαντῆρα, β) ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος γ) ἡ ἀνὰ λεπτὸν (min) χορηγουμένη ποσότης θερμότητος καὶ δ) ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. ('Απ. 2,2 Α, 484 W, 6970 cal, 0,8.)

1082. Κύκλωμα συνίσταται ἀπὸ λυχνίαν πυρακτώσεως, ὠμικῆς ἀντιστάσεως 80 Ω καὶ ἀπὸ πηνίον τοῦ ὁποίου ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις εἶναι ἀμελητέα καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς 0,5 H. Ἡ λυχνία καὶ τὸ πηνίον εἶναι συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ καὶ τὸ κύκλωμα τροφοδοτεῖται διαδοχικῶς ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἐνεργοῦ τάσεως 220 V καὶ κυκλικῆς συχνότητος 300 rad/sec, 1500 rad/sec, 3000 rad/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ρευμάτων ἡ ἔντασις καὶ ἡ ἰσχύς. Νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν ὁ ρόλος τῆς αὐτεπαγωγῆς.
('Απ. 1,3 A, 134,6 W, 0,292 A, 6,8 W, 0,146 A, 1,7 W. Ἡ αὐτεπαγωγὴ ἀποσβένει τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα τόσον περισσότερον ὅσον ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα.)

1083. Κύκλωμα συνίσταται ἀπὸ λυχνίαν πυρακτώσεως, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 80 Ω, καὶ πυκνωτὴν χωρητικότητος 2 μF, τὰ ὁποῖα εἶναι συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Τὸ κύκλωμα τροφοδοτεῖται διαδοχικῶς ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἐνεργοῦ τάσεως 220 V, καὶ κυκλικῆς συχνότητος 300 rad/sec, 1500 rad/sec, καὶ 3000 rad/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν δι' ἕκαστον τῶν ρευμάτων ἡ ἔντασις καὶ ἡ ἰσχύς. Νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν ὁ ρόλος τοῦ πυκνωτοῦ.
('Απ. 0,132 A, 1,39 W, 0,642 A, 33 W, 1,189 A, 113 W. Ὁ πυκνωτὴς ἀποσβένει τόσον ὀλιγώτερον τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ὅσον ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα.)

1084. Κύκλωμα συνίσταται ἀπὸ δύο κλάδους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἀποτελεῖται ἀπὸ λυχνίαν πυρακτώσεως ἀντιστάσεως 150 Ω, ἐνῷ ὁ ἕτερος ἀπὸ πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,32 H καὶ ἀμελητέας ὠμικῆς ἀντιστάσεως. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 120 V, ἐνῷ ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι 314 rad/sec. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἕκαστον κλάδον τοῦ κυκλώματος. ('Απ. 0,8 A, 1,2 A.)

1085. Μετασχηματιστὴς χρησιμοποιεῖ 120 V καὶ δίδει ρεῦμα ἐντάσεως 2 A ὑπὸ τάσιν 900 V. Ποῖον ρεῦμα διαρρέει τὸ πρωτεῦον. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀπόδοσις εἶναι 100 %. ('Απ. 15 A.)

1086. Μετασχηματιστὴς ὑψηλῆς τάσεως χρησιμοποιεῖται ἵνα παρέχῃ ἐξ 120 V, 1800 V. Τὸ πρωτεῦον ἔχει 100 σπείρας. Ὑπολογίσατε τὰς σπείρας τοῦ δευτερεύοντος. ('Απ. 1500 σπεῖραι.)

1087. Μετασχηματιστὴς χαμηλῆς τάσεως χρησιμοποιεῖ 1650 V διὰ νὰ προμηθεύσῃ 45 A ὑπὸ τάσιν 110 V. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ πρωτεῦον, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἀπόδοσιν 100 % ('Απ. 3 A.)

1088. Μετασχηματιστὴς χαμηλῆς τάσεως, μετασχηματίζει 2200 V εἰς 110 V. Πόσας σπείρας ἔχει τὸ πρωτεῦον, ὅταν τὸ δευτερεῦον ἔχῃ 25 τοιαύτας. ('Απ. 500.)

1089. Τὸ πρωτεῦον σπείρωμα μετασχηματιστοῦ ἀνυψώσεως τάσεως, φέρει 150 σπείρας. Ἡ ἐνεργὸς ἐναλλασσομένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου τούτου εἶναι 110 V. Τὸ πηνίον τοῦ δευτερεύοντος ἔχει 3150 σπείρας. Πόση εἶναι ἡ τάσις ἐν κενῷ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος. ('Απ. 2310 V.)

1090. Μετασχηματιστὴς ὑψηλῆς τάσεως, λειτουργεῖ εἰς τάσιν 110 V καὶ δίδει ρεῦμα ἐντάσεως 2 A. Ὁ λόγος τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος πρὸς τὰς σπείρας τοῦ δευτερεύοντος εἶναι 1 : 25. Ὑπολογίσατε τὴν τάσιν εἰς τὸ δευτερεῦον, τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον, ὡς καὶ τὴν ἀποδιδομένην ἰσχύν. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀπόδοσίς του εἶναι 100 %. ('Απ. 2750 V, 50 A, 5,5 kW.)

1091. Εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ πρωτεύοντος μονοφασικοῦ μετασχηματιστοῦ, ὑφίσταται τάσις 2000 V. Εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ δευτερεύοντος, ἀναπτύσσεται τάσις 440 V καὶ ὑπὸ πλῆρες φορτίον ἡ ἀποδιδομένη ἰσχὺς εἶναι 20 kW. Ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τῆς δευτερευούσης περιελίξεως εἶναι 130. Ὑπολογίσατε τὸν ἀριθμὸν τῶν σπειρῶν τῆς πρωτευούσης περιελίξεως ὡς καὶ τὰς ἐντάσεις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον. (Ἀπ. 591, 10 A, 45,5 A.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1092. Ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς ἐντάσεως ἑνὸς ρεύματος, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $i = 10 \cdot \eta\mu\, 157\, t$. Ζητεῖται 1) Ποία εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως. 3) Πόση ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος καὶ 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης της.

1093. Κύκλωμα περιλαμβάνει ἀντίστασιν R καὶ αὐτεπαγωγὴν L ἐν σειρᾷ. Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος $i = 10\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\,(314\, t - \pi/3)$. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\, 314\, t$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν R καὶ L.

1094. Συνδέεται πυκνωτὴς 150 μF ἐν σειρᾷ πρὸς ἀντίστασιν 150 Ω καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κυκλώματος ἐναλλασσομένη τάσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ παρασταθῇ συναρτήσει τοῦ χρόνου, ὑπὸ τοῦ τύπου $U = 200 \cdot \eta\mu\, 200\, t$, ὅπου τὸ U ἐκφράζεται εἰς Volt καὶ ὁ χρόνος t εἰς sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐκλυομένη θερμότης ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως εἰς χρόνον 1 min.

1095. Ἡ στιγμιαία ἔντασις ρεύματος εἶναι τῆς μορφῆς $i = i_o \cdot \eta\mu\,(\omega t - \varphi)$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀκριβὴς ἔκφρασις τῆς ἐντάσεως ταύτης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι $\sqrt{2}$ A, ἡ συχνότης εἶναι 50 Hz, καὶ ὅτι εἶναι μηδὲν διὰ $t = 0{,}01$ sec.

1096. Εἰς τὰ ἄκρα ἀντιστάσεως 10 Ω, ἄνευ αὐτεπαγωγῆς, ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ στιγμιαίας τιμῆς $U = 100\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\, 314\, t$. Ποία εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς στιγμιαίας ἐντάσεως ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως. Νὰ δοθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως.

1097. Ἡ στιγμιαία ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς εἰς σπείρωμα στεφάνης περιστρεφομένης ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $E = 0{,}0005\, \pi^2 \cdot \eta\mu\,(\pi \cdot t - \alpha)$. Ἡ μέση ἐξ ἐπαγωγῆς ΗΕΔ εἰς τὸ σπείρωμα εἶναι: $E_{\mu\varepsilon\sigma\eta} = \pi/1000$ Volt. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ μέσης ΗΕΔ καὶ μεγίστης ΗΕΔ.

1098. Εἰς τὰ ἄκρα πηνίου ἔχοντος ἀντίστασιν 150 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,2 H, ἐφαρμόζεται ἐναλλασσομένη τάσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ παρασταθῇ συναρτήσει τοῦ χρόνου ἀπὸ τὴν $U = 200 \cdot \eta\mu\, 200\, t$, ἔνθα U ἐκφράζεται εἰς Volt καὶ t εἰς sec. Ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς 1 min ἐκλυομένη θερμότης ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως ταύτης.

1099. Εἰς τὰ ἄκρα πηνίου ἐφαρμόζεται τάσις ἡμιτονοειδής, ἐνεργοῦ τιμῆς 220 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 sec^{-1}. Ἡ δεικνυομένη ἔντασις ἀπὸ θερμικὸν ἀμπερόμετρον εἶναι 2,2 A. Ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως ρεύματος εἶναι π/3. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

1100. Πηνίον μὲ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}1$ H παρουσιάζει ἀμελητέαν ὠμικὴν ἀντίστασιν. Εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐφαρμόζεται ἐναλλασσομένη τάσις, ἔχουσα μεγίστην τιμὴν 100 V καὶ συχνότητα 50 Hz. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀντίστασις, ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος (στιγμιαία, μεγίστη καὶ ἐνεργός), ὡς καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως.

1101. Πηνίον αὐτεπαγωγῆς 0,1 H καὶ ὠμικὴ ἀντίστασις 50 Ω συνδέονται ἐν σειρᾷ πρὸς πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως, ἐχούσης μεγίστην τιμὴν 118 V καὶ συχνότητα 50 Hz. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως, ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ συστήματος ρεύματος.

1102. Θεωροῦμεν κύριον κύκλωμα διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως $i_1 = 10\sqrt{6}\cdot$συν $(\omega t - \alpha)$. Τὸ κύκλωμα τοῦτο ἔχει 2 διακλαδιζόμενα κυκλώματα διαρρεόμενα ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ρευμάτων $i_2 = 10\sqrt{2}\cdot$συν ωt καὶ $i_3 = 10\sqrt{3}\cdot$συν $(\omega t - \varphi)$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν α καὶ φ.

1103. Μεταξὺ τῶν δύο ἀκροδεκτῶν πηγῆς ἡμιτονοειδοῦς ρεύματος, ἐναλλασσομένης τάσεως, συχνότητος 50 Hz καὶ ἐνεργοῦ τιμῆς 220 V, συνδέεται ἐν σειρᾷ πηνίον ἀντιστάσεως 50 Ω, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς εἶναι 0,275 H καὶ πυκνωτής. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς χωρητικότητος τοῦ πυκνωτοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις εἰς τὸ κύκλωμα ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις αὕτη.

1104. Πυκνωτὴς συνδέεται εἰς κύκλωμα ἐναλλασσομένου ρεύματος συχνότητος 50 Hz. Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ διὰ τοῦ πυκνωτοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι 51,6 mA, ἡ δὲ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ 16,4 V. Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ. Ποῖαι αἱ ἐξισώσεις τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ διὰ τοῦ πυκνωτοῦ διερχομένου ρεύματος.

1105. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 4 μF συνδέεται πρὸς πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως, τῆς ὁποίας ἡ μεγίστη τιμὴ παραμένει σταθερὰ καὶ εἶναι ἴση πρὸς 10 V, ἐνῷ ἡ συχνότης αὐτῆς μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 20 Hz μέχρι 400 Hz. Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ ποίων τιμῶν μεταβάλλεται ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ πυκνωτοῦ ρεύματος κατὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολὴν τῆς συχνότητος τῆς τάσεως τῆς πηγῆς.

1106. Ὠμικὴ ἀντίστασις 1210 Ω συνδέεται πρὸς πηγὴν ἐναλλασσομένης τάσεως 220 V. 1) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτῆς διερχομένου ρεύματος καὶ πόσον ἐπὶ τοῖς % μεταβάλλεται αὕτη, α) ὅταν ἐν σειρᾷ πρὸς τὴν ἀντίστασιν συνδεθῇ πηνίον αὐτεπαγωγῆς L = 2,5 H, ἀμελητέας ὠμικῆς ἀντιστάσεως, β) ὅταν συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πυκνωτὴς χωρητικότητος 30 μF. 2) Ποία ἡ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀντίστασις τοῦ πηνίου, ὡς καὶ ἡ ἐκ χωρητικότητος ἀντίστασις τοῦ πυκνωτοῦ. 3) Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ περιπτώσεις (α) καὶ (β) διὰ συνεχῆ τάσιν 220 V.

1107. Συνδέονται ἐν σειρᾷ πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,1 H καὶ πυκνωτής, τοῦ ὁποίου θὰ προσδιορίσωμεν τὴν χωρητικότητα, οὕτως ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ εἶναι ἐν φάσει πρὸς τὴν τάσιν, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ὑπάρχῃ τάσις $U = 100\cdot$ημ $200\,t$. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 200 Ω, πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ τάσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ.

1108. Κύκλωμα συνίσταται ἀπὸ πηνίον ἀντιστάσεως 10 Ω, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς εἶναι 0,2 H καὶ ἀπὸ πυκνωτὴν συνδεδεμένον ἐν σειρᾷ, χωρητικότητος 200 μF. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ κυκλώματος εἶναι $i = 2\cdot$ημ$\cdot 200\,t$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως τάσεως - ἐντάσεως.

1109. Εἰς τὰ ἄκρα ἐναλλακτῆρος ὑφίσταται ἡμιτονοειδὴς διαφορὰ δυναμικοῦ ἐνεργοῦ τιμῆς 220 V. Οἱ ἀκροδέκται τοῦ ἐναλλακτῆρος συνδέονται πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας πηνίου αὐτεπαγωγῆς. Ἀμπερόμετρον θερμικόν, ἀμελητέας ἀντιστάσεως, τοποθετημένον εἰς τὸ κύκλωμα δεικνύει ἔντασιν 2,2 A. Τὸ ἐκλυόμενον ποσὸν θερμότητος συνεπείᾳ τοῦ φαινομένου Joule εἰς τὸ πηνίον εἶναι 3473 cal/min. Ποία ἡ διαφορὰ φάσεως τοῦ ρεύματος ὡς πρὸς τὴν τάσιν.

1110. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐντάσεως ἐναλλασσομένου ρεύματος διαρρέοντος ἀντίστασιν $R = 30\ \Omega$ εἶναι $i = 3{,}2 \cdot \eta\mu\ 4000\ t$. Ποία ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τοῦ ρεύματος, ὡς καὶ ἡ στιγμιαία, ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως.

1111. Πηνίον ἀμελητέας ὠμικῆς ἀντιστάσεως διαρρέεται ὑπὸ ἐναλλασσομένου ρεύματος συχνότητος $5 \cdot 10^5$ Hz. Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ πηνίου εἶναι 1,1 mA καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ 22 V. α) Ποία ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως ὡς καὶ ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς τάσεως. β) Ποία ἡ αὐτεπαγωγὴ τοῦ πηνίου εἰς mH. γ) Πρὸς ποῖον τμῆμα τῆς ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀντιστάσεως τοῦ πηνίου θὰ ἰσοῦτο ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ, ἐὰν τοῦτο ἀπετελεῖτο ἐξ 157 m σύρματος ἐκ χαλκοῦ, πάχους 0,6 mm καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως $0{,}018\ \Omega \cdot mm^2/m$.

1112. Μετασχηματιστὴς φέρει δύο σπειρώματα, ἕνα πρωτεῦον μὲ 500 σπείρας συνδεδεμένον εἰς δίκτυον 110 V καὶ ἕνα δευτερεῦον φέρον 30 σπείρας. Ὅταν συνδέεται τὸ δευτερεῦον μετὰ λυχνίας διαπιστοῦται, τῇ βοηθείᾳ θερμικοῦ ἀμπερομέτρου, ὅτι διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς λυχνίας, ὑποθέτοντες ὅτι αἱ ἀντιστάσεις τῶν συρμάτων συνδέσεως καὶ τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος εἶναι ἀμελητέαι. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ δευτερεύοντος. 3) Ὅταν ἡ ἀπόδοσις εἰς ἐνέργειαν εἶναι 90 %, πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς ἡ λαμβανομένη ὑπὸ τοῦ πρωτεύοντος ἐκ τοῦ δικτύου. 4) Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον κύκλωμα.

1113. Τὸ πρωτεῦον σπείρωμα μετασχηματιστοῦ φέρει $n_1 = 3720$ σπείρας καὶ τὸ σπείρωμα τοῦ δευτερεύοντος $n_2 = 124$ σπείρας, ἐφαρμόζεται δὲ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση πρὸς 3000 V. Συνδέονται τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος πρὸς ἀντίστασιν ἄνευ αὐτεπαγωγῆς 10 Ω. Ποία εἶναι ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῶν ἐντάσεων $i_{2\varepsilon\nu}$ καὶ $i_{1\varepsilon\nu}$ τοῦ ρεύματος εἰς τὰ δύο κυκλώματα.

1114. Κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, ἐξ ὧν ὁ εἷς συνίσταται ἀπὸ πηνίον ὠμικῆς ἀντιστάσεως 20 Ω καὶ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,1 H, ἐνῷ ὁ ἕτερος ἀπὸ πυκνωτὴν χωρητικότητος 10 μF. Ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος εἶναι 130 V, ἡ δὲ κυκλικὴ συχνότης αὐτῆς εἶναι 300 rad/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν, α) ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως εἰς τὸν κλάδον τῆς αὐτεπαγωγῆς, β) ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως εἰς τὸν κλάδον τοῦ πυκνωτοῦ, γ) ἡ ὁλικὴ ἔντασις, δ) ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως.

1115. Πλαίσιον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας σύρματος καὶ παρουσιάζει ἐπιφάνειαν 100 cm^2, στρέφεται δὲ περὶ κατακόρυφον ἄξονα μὲ συχνότητα 1800 στρ./min. Τὸ ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἐπαγόμενον ρεῦμα συλλέγεται εἰς δύο ψήκτρας ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν, ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐπαγομένης ΗΕΔ, ὡς καὶ ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τοῦ ἐπαγομένου ρεύματος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἶναι 0,2 Ω, ἡ δὲ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου 0,2 Gauss.

1116. Πυκνωτὴς τοποθετεῖται παραλλήλως πρὸς πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,03 H καὶ ἀντιστάσεως 5 Ω. Οἱ ὁπλισμοὶ τοῦ πυκνωτοῦ συνδέονται μὲ τάσιν 200 V, συχνότητος 50 c/sec. Τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸν πυκνωτὴν εἶναι 32 A καὶ προηγεῖται τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως κατὰ 90^0. Ὑπολογίσατε τὸ ὁλικὸν ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ὡς καὶ τὴν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ ρεύματος καὶ ἐφαρμοζομένης τάσεως.

1117. Μεταξὺ δύο σημείων κυκλώματος ὑφίσταται σταθερὰ συνεχὴς τάσις 1 V, εἰς αὐτὴν δὲ ἐπιπροστίθεται ἐναλλασσομένη τάσις ἐνεργοῦ τιμῆς 1 V καὶ συχνότητος 50 sec^{-1}. Διὰ συνδέσεως πηνίου αὐτεπαγωγῆς μεταξὺ τῶν δύο σημείων, διαπιστοῦται ἡ διέλευσις δι' αὐτοῦ συνεχοῦς ρεύματος ἐντάσεως 2,5 A καὶ ἐναλλασσομένου ρεύματος ἐνεργοῦ τιμῆς 0,1 A. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ πηνίου, ὡς καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξύ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως.

1118. Κύκλωμα συνίσταται ἐξ ἑνὸς ἀποπνικτικοῦ πηνίου, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,05 H καὶ ἀντιστάσεως 10 Ω. Τὸ κύκλωμα συνδέεται μὲ ἐνεργὸν τάσιν 200 V, συνημιτονοειδοῦς μορφῆς, συχνότητος 50 c/sec. Σχεδιάσατε καμπύλας ἀπεικονιζούσας τὴν ἐφαρμοζομένην τάσιν, τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος καὶ τὴν χρησιμοποιουμένην ἰσχὺν εἰς τὸ κύκλωμα κατὰ τὴν διάρκειαν ἡμίσεος κύκλου. Ὑπολογίσατε τὴν μέσην καταναλισκομένην ἰσχὺν εἰς τὸ κύκλωμα, τὴν γωνίαν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ρεῦμα καθυστερεῖ τῆς τάσεως, ὡς καὶ τὸν συντελεστὴν ἰσχύος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ΄

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1119. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ παρουσιάζει εἰς τοὺς ἀκροδέκτας της τάσιν 125 V. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ ἐπαγωγέως εἶναι ἀντιστοίχως 0,05 Ω καὶ 25 Ω. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐπαγώγιμον εἶναι 100 A, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΗΕΔ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν E τὴν ΗΕΔ τοῦ ἐπαγωγίμου θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν,

$$\underline{E = U + i \cdot r}$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον.

Θέτοντες, U = 125 V, i = 100 A, r = 0,05 Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 130 \text{ V.}}$$

1120. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς ὑδροστροβίλου, ἵνα ἡ ὑπ' αὐτοῦ κινουμένη δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ παρέχῃ ρεῦμα ἐντάσεως 500 A ὑπὸ τάσιν 240 V. Ἡ ἀπόδοσις αὐτῆς εἶναι 80 %.

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς $N_{υδ}$ τοῦ ὑδροστροβίλου θὰ εἶναι

$$\eta \cdot N_{υδ} = N_{δυν} \tag{1}$$

ὅπου η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως καὶ $N_{δυν}$ ἡ ἰσχὺς τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς.

Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι

$$N_{δυν} = U \cdot i \tag{2}$$

ὅπου i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ δυναμοηλεκτρικὴ μηχανή, ὅταν ἐργάζεται ὑπὸ τάσιν U. Ἡ σχέσις (1) λόγῳ τῆς σχέσεως (2), γράφεται

$$N_{υδ} = \frac{U \cdot i}{\eta} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3), $\eta = 0{,}8$, $U = 240$ V, $i = 500$ A, εὑρίσκομεν

$$N_{υδ} = 150\,000 \text{ W} = 200 \text{ HP}.$$

1121. Κινητὴρ ἐργάζεται ὑπὸ τάσιν 220 V καὶ ἀναπτύσσει ἀντιηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 180 V. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος.

Λύσις. Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος, εἶναι τὸ πηλίκον τῆς ὠφελίμου ἰσχύος ($N_{ωφ}$) τοῦ κινητῆρος, διὰ τῆς καταναλισκομένης ὑπ' αὐτοῦ ἰσχύος ($N_{κατ}$), ἤτοι

$$\eta = \frac{N_{ωφ}}{N_{κατ}} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὅμως καλέσωμεν U τὴν τάσιν λειτουργίας, E' τὴν ἀντι - ΗΕΔ τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητήρ, καὶ i τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον διαρρέει αὐτόν, θὰ ἔχωμεν

$$N_{ωφ} = E' \cdot i \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad N_{κατ} = U \cdot i \quad (3)$$

Οὕτω, βάσει τῶν (2) καὶ (3), ἡ (1) γράφεται

$$\eta = \frac{E'}{U} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $E' = 180$ V καὶ $U = 220$ V, εὑρίσκομεν

$$\eta = 0{,}818.$$

1122. Κινητὴρ διεγειρόμενος παραλλήλως, τροφοδοτεῖται ὑπὸ σταθερᾶς τάσεως 120 V καὶ ἀπορροφᾷ ρεῦμα ὁλικῆς ἐντάσεως 20 A. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι 0,2 Ω καὶ ἡ τοῦ ἐπαγωγέως 200 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντι - ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος.

Λύσις. Ἡ ἔντασις i_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἐπαγωγέα, θὰ εἶναι

$$i_1 = \frac{U}{R} \qquad (1)$$

ὅπου U ἡ τάσις ἡ ὁποία διεγείρει τὸν κινητῆρα καὶ R ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγέως. Ἑπομένως ἡ ἔντασις i' τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον, εἶναι

$$i' = i_{ολ} - i_1 = i_{ολ} - \frac{U}{R} \qquad (2)$$

ὅπου $i_{ολ}$ ἡ ἔντασις τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος. Ἐὰν καλέσωμεν U' τὴν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ R' τὴν ἀντίστασιν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$U' = \left(i_{ολ} - \frac{U}{R} \right) \cdot R' \qquad (3)$$

ἡ ἀναπτυσσομένη ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι $E' = U - U'$

ἢ

$$E' = U - \left(i_{ολ} - \frac{U}{R} \right) \cdot R' \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $U = 120$ V, $i_{ολ} = 20$ A, $R' = 0{,}2\ \Omega$ καὶ $R = 200\ \Omega$, εὑρίσκομεν

$$\underline{E' = 116{,}12 \text{ V.}}$$

1123. Γεννήτρια ρεύματος διατηρεῖ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας αὐτῆς τάσιν 500 V καὶ διεγείρει κινητῆρα, τὰ δὲ σύρματα συνδέσεως ἔχουν ἀντίστασιν 10 Ω. Ζητεῖται ἡ σχέσις ἥτις δίδει τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα συναρτήσει τῆς ὠφελίμου ἰσχύος. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μεγίστη ὠφέλιμος ἰσχὺς ἥτις προσφέρεται εἰς τὸν κινητῆρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἥτις διαρρέει τὸ κύκλωμα ὅταν ἐμποδίζεται ὁ κινητὴρ νὰ περιστρέφεται καὶ ὅταν ἀφίεται νὰ λειτουργῇ ἐν κενῷ. Ὑποτίθεται ὅτι τὸ ἔργον ὅπερ ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῶν τριβῶν εἶναι ἀμελητέον.

Λύσις. Ἔστω U ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ παρεχομένου ρεύματος. Ἡ παρεχομένη ἰσχὺς $N_{παρ}$ ὑπὸ της γεννητρίας, θὰ εἶναι

$$N_{παρ} = U \cdot i$$

Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς $N_{κατ}$, λόγῳ θερμάνσεως τῶν ἀγωγῶν μεταφορᾶς (ἀντιστάσεως R) τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, θὰ εἶναι

$$N_{κατ} = R \cdot i^2$$

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν $N_{ωφ}$ τὴν ὠφέλιμον ἰσχὺν τοῦ κινητῆρος, θὰ ἔχωμεν

$$N_{παρ} = N_{κατ} + N_{ωφ} \qquad \text{ἢ} \qquad R \cdot i^2 - U \cdot i + N_{ωφ} = 0.$$

Ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως λαμβάνομεν τὴν ἔντασιν i τοῦ ρεύματος συναρτήσει τῆς ὠφελίμου ἰσχύος

$$\underline{i = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4R \cdot N_{ωφ}}}{2R}}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν λύσεις παραδεκτάς, πρέπει

$$U^2 - 4R \cdot N_{ωφ} \geqslant 0 \qquad \text{ἢ} \qquad N_{ωφ} \leqslant \frac{U^2}{4R}$$

Ἡ μεγίστη λοιπὸν ζητουμένη ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι

$$\underline{N_{ωφ,\ μεγ} = \frac{U^2}{4R}}$$

Θέτοντες δὲ $U = 500$ V καὶ $R = 10\ \Omega$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{N_{ωφ,\ μεγ} = 6250 \text{ W.}}$$

Ὅταν ἐμποδίζεται νὰ λειτουργῇ ὁ κινητὴρ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, κατὰ τὴν ἐκκίνησιν τοῦ κινητῆρος, ἡ ἔντασις $i_{εκ}$ τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι

$$\underline{i_{εκ} = \frac{U}{R} = \frac{500}{10} = 50 \text{ A}}$$

καθ' ὅσον ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι μηδέν.

Ὅταν ὁ κινητὴρ λειτουργῇ ἐν κενῷ, τότε ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ρότορος εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπ' αὐτοῦ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις νὰ εἶναι ἴση σχεδὸν πρὸς τὴν ἐφαρμοζομένην τάσιν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας αὐτοῦ καὶ ἐπομένως προκύπτει πρακτικῶς ὅτι ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, εἶναι μηδέν.

1124. Κύκλωμα περιλαμβάνει ἠλεκτρικὴν γεννήτριαν ΗΕΔ 220 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω, ὡς ἐπίσης καὶ κινητῆρα ἀντιηλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 150 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω. Ποία ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος.

Λύσις. Ἡ ἀπόδοσις η τοῦ κινητῆρος εἶναι τὸ πηλῖκον τῆς ὠφελίμου ἰσχύος ($N_{\omega\varphi}$) τοῦ κινητῆρος διὰ τῆς καταναλισκομένης ἰσχύος ($N_{\kappa\alpha\tau}$) ὑπ' αὐτοῦ, ἤτοι

$$\eta = \frac{N_{\omega\varphi}}{N_{\kappa\alpha\tau}} \tag{1}$$

Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N_{\omega\varphi} = E' \cdot i \tag{2}$$

ὅπου E' ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπ' αὐτοῦ ἀντι - ΗΕΔ καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.
Ἐπίσης ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος ἰσχὺς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N_{\kappa\alpha\tau} = U \cdot i \tag{3}$$

ὅπου U εἶναι ἡ τάσις λειτουργίας αὐτοῦ. Οὕτω λόγῳ τῆς (2) καὶ (3) ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\eta = \frac{E'}{U} \tag{4}$$

Ἐὰν καλέσωμεν r καὶ r' τὰς ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις ἀντιστοίχως τῆς γεννητρίας καὶ τοῦ κινητῆρος, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν, ὅτι

$$U = E - i \cdot r' \tag{5}$$

ἤ, ἐπειδὴ $i = E - E'/r' + r$, θὰ ἔχωμεν

$$U = \frac{E \cdot (r' + r) - (E - E') \cdot r'}{r' + r} \quad (6) \qquad \text{ἤ} \qquad U = \frac{E \cdot r + E' \cdot r'}{r' + r} \quad (7)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (7), ἡ σχέσις (4) γράφεται

$$\eta = \frac{E' \cdot (r' + r)}{E \cdot r + E' \cdot r'} \tag{8}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (8), $r' = 5\ \Omega$, $r = 5\ \Omega$, $E = 220$ V καὶ $E' = 150$ V, εὑρίσκομεν

$$\eta = 0{,}81.$$

1125. Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια παρέχει ρεῦμα ἰσχύος 1000 kW ὑπὸ τάσιν 10 000 V. Τὸ ρεῦμα μεταφέρεται διὰ δύο ἀγωγῶν εἰς ἀπόστασιν 20 km, διὰ χαλκίνου ἀγωγοῦ τομῆς 10 mm². Τὸ αὐτὸ ρεῦμα ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἰσχύν, δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ τάσιν 50 000 V καὶ νὰ μεταφερθῇ εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν διὰ δύο ἀγωγῶν, οὕτως ὥστε ἡ δαπανωμένη ἰσχύς, λόγῳ φαινομένου Joule, νὰ εἶναι ἡ αὐτή. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ δευτέρου σύρματος. β) Δεδομένου ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,9 gr/cm³, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὠφέλεια ἥτις θὰ προκύψῃ, ἂν 1 kgr* χαλκοῦ στοιχίζῃ 40 δραχμάς. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$ cm.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Τμῆμα Φυσικόν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1955).

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N καὶ U_1, τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν τάσιν, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ ἔντασις i_1 τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι

$$i_1 = \frac{N}{U_1}$$

'Επίσης, ἐὰν καλέσωμεν U_2 τὴν τάσιν, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, τότε, ἐπειδὴ ἡ ἰσχὺς εἶναι πάλιν N, ἡ ἔντασις i_2 τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι

$$i_2 = \frac{N}{U_2}$$

'Εξ ἄλλου, ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, λόγῳ τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως τῶν ἀγωγῶν μεταφορᾶς, θὰ εἶναι

$$N_1 = i_1^2 \cdot R_1 = \frac{N^2}{U_1^2} \cdot R_1$$

ὅπου R_1 ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν μεταφορᾶς, καὶ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν

$$N_2 = i_2^2 \cdot R_2 = \frac{N^2}{U_2^2} \cdot R_2$$

ὅπου R_2 ἡ ἀντίστασις τῶν νέων ἀγωγῶν μεταφορᾶς. 'Επειδὴ ὅμως $N_1 = N_2$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{N^2}{U_1^2} \cdot R_1 = \frac{N^2}{U_2^2} \cdot R_2$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{U_2^2}{U_1^2} \qquad (1)$$

α) Ἔστω ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ καὶ l τὸ διπλάσιον τῆς δοθείσης ἀποστάσεως, S_1 ἡ τομὴ τοῦ ἀγωγοῦ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ S_2 ἡ τομὴ τοῦ ἀγωγοῦ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Θὰ ἔχωμεν

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l}{S_1} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad R_2 = \rho \cdot \frac{l}{S_2} \quad (3)$$

Λόγῳ τῶν (2) καὶ (3), ἡ (1) γράφεται

$$\rho \cdot \frac{l}{S_2} = \rho \cdot \frac{l}{S_1} \cdot \frac{U_2^2}{U_1^2}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς τὴν τομὴν S_2, λαμβάνομεν

$$S_2 = \frac{U_1^2}{U_2^2} \cdot S_1 \qquad (4)$$

Θέτοντες λοιπόν, $U_1 = 10000$ V, $U_2 = 50000$ V καὶ $S_1 = 10$ mm², εὑρίσκομεν

$$S_2 = 4 \cdot 10^{-1} \text{ mm}^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2.$$

'Επειδὴ δὲ $S_2 = \pi \cdot \delta^2/4$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη διάμετρος δ εἶναι

$$\underline{\delta = \sqrt{\frac{4\,S_2}{\pi}} = 0{,}7 \text{ mm}} \qquad (\text{περίπου})$$

β) Τὸ βάρος τοῦ χρησιμοποιηθέντος χαλκοῦ εἶναι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν: $B_1 = \varepsilon \cdot S_1 \cdot l$, ὅπου ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ, καὶ εὑρίσκομεν

$$B_1 = 3560 \cdot 10^3 \text{ gr}^* = 3560 \text{ kgr}^*$$

καὶ τὸ βάρος κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι: $B_2 = \varepsilon \cdot S_2 \cdot l$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$B_2 = 142{,}4 \cdot 10^3 \text{ gr}^* = 142{,}4 \text{ kgr}^*$$

Ἄρα ἡ ὠφέλεια θὰ εἶναι $(B_1 - B_2) \cdot 40$, ἤτοι

$$\underline{(3560 - 142{,}4) \cdot 40 = 136\,704 \text{ δραχμαί.}}$$

1126. Δι' ἀτμοστροβίλου διέρχεται ἐντὸς 1 δευτερολέπτου 1 kgr ἀτμοῦ ὑπὸ ταχύτητα 750 m/sec. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ παρεχομένου ὑπὸ τάσιν 5000 V, ὑπὸ δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς, συνεζευγμένης πρὸς τὸν ἀτμοστρόβιλον, ἐὰν αἱ ἀπώλειαι ἀνέρχονται εἰς 40 % ἐπὶ τῆς παρεχομένης ἐνεργείας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ ὑπὸ τάσιν U, τότε ἡ παρεχομένη ὑπ' αὐτῆς ἰσχὺς ($N_{δυν}$) θὰ εἶναι

$$N_{δυν} = U \cdot i \qquad (1)$$

καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$i = \frac{N_{δυν}}{U} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἐὰν καλέσωμεν $N_{ατμ}$ τὴν ἰσχὺν τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἀτμοστρόβιλος καὶ η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως θὰ ἔχωμεν

$$N_{δυν} = \eta \cdot N_{ατμ} \qquad (3)$$

Εἶναι ὅμως

$$N_{ατμ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m\, \upsilon^2}{t} \qquad (4)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ διερχομένου ἀτμοῦ, υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ καὶ t ὁ χρόνος διελεύσεως.

Ἡ σχέσις (3), λόγῳ τῆς σχέσεως (4), δίδει

$$N_{δυν} = \frac{\eta \cdot m\, \upsilon^2}{2\,t}$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\underline{i = \frac{\eta \cdot m\, \upsilon^2}{2\,U \cdot t}}$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα. Θέτοντες, $m = 1$ kgr, $\upsilon = 750$ m/sec, $t = 1$ sec, $U = 5000$ V, $\eta = 0{,}6$, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 33{,}75\ \text{A}}$$

1127. Ὁ ἐπαγωγεὺς μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 πόλους κανονικῶς ἐναλλασσομένους, στρέφεται δὲ ὑπὸ συχνότητα 600 στρ./min καὶ παράγει ἐναλλασσόμενον ἡμιτονοειδὲς ρεῦμα. Ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι 220 V, ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος 50 A καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ ρεύματος καὶ τάσεως εἶναι 30°. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος τῆς στιγμιαίας τιμῆς τῆς ΗΕΔ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος.

Λύσις. Ἡ συχνότης ν τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν,

$$\nu = N \cdot n \qquad (1)$$

ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμοίων πόλων τοῦ ἐναλλακτῆρος καὶ n ἡ συχνότης περιστροφῆς. Ἐπειδὴ ὅμως $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) γράφεται

$$\omega = 2\pi \cdot N \cdot n \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ μεγίστη ΗΕΔ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E_o = E_{εν} \cdot \sqrt{2} \qquad (3)$$

Συνεπῶς ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς ΗΕΔ E, θὰ εἶναι

$$E = E_o \cdot ημ\, \omega t = E_{εν} \cdot \sqrt{2} \cdot ημ\,(2\pi N \cdot n \cdot t) \qquad (4)$$

Θέτομεν, $E_{\varepsilon\nu} = 220$ V, $N = 10/2 = 5$, $n = 10$ sec^{-1}, καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{E = 310 \cdot \eta\mu\, 314 \cdot t}$$

β) Ἡ ἰσχὺς δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{N = E_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu} \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi}$$

Θέτοντες, $E_{\varepsilon\nu} = 220$ V, $i_{\varepsilon\nu} = 50$ A, $\varphi = 30^0$ ($\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \sqrt{3}/2$), εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 9526 \text{ W.}}$$

1128. Δυναμὸ ἔχει ΗΕΔ 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Ζητεῖται ἡ μεγίστη ἰσχὺς ἡ δαπανωμένη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κυκλώματος.

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς N, ἡ ὁποία δαπανᾶται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, θὰ εἶναι

$$N = U \cdot i \qquad (1)$$

ὅπου U ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ δυναμὸ καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα.

Ἐὰν καλέσωμεν ἐξ ἄλλου, E τὴν ΗΕΔ τοῦ δυναμὸ καὶ r τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$U = E - i \cdot r \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$N = (E - i \cdot r) \cdot i \qquad (3)$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἡ ἰσχὺς N μεγίστη, πρέπει τὸ γινόμενον $(E - i \cdot r) \cdot i$ νὰ εἶναι μέγιστον, ὁπότε πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$N = \frac{(E - i \cdot r) \cdot i \cdot r}{r}$$

Ἀλλά, διὰ νὰ εἶναι τὸ N μέγιστον, πρέπει νὰ εἶναι

$$E - i \cdot r = i \cdot r \qquad (4)$$

διότι $E - i \cdot r + i \cdot r =$ σταθερόν, καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις πρέπει νὰ εἶναι

$$\underline{i = \frac{E}{2r}} \qquad (5)$$

Ἄρα, διὰ $E = 120$ V καὶ $r = 1\ \Omega$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (5) $i = 60$ A καὶ οὕτω προκύπτει ἐκ τῆς (3) ὅτι, ἡ μεγίστη ἰσχὺς εἶναι

$$\underline{N_{\mu\varepsilon\gamma} = 3600 \text{ W.}}$$

1129. Πτῶσις ὕδατος ὕψους 10 m καὶ παροχῆς 2,5 m³/sec, θέτει εἰς κίνησιν ὑδροστρόβιλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδοσις εἶναι 0,6. Ὁ ὑδροστρόβιλος θέτει εἰς κίνησιν ἐναλλακτῆρα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδοσις εἶναι 0,9. Τὰ σύρματα τῆς γραμμῆς ὁδηγοῦν τὸ ρεῦμα εἰς τὸ πρωτεῦον μετασχηματιστοῦ. Ἡ ἰσχὺς εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι 162 CV. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 95 %. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπώλεια ἰσχύος, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule, εἰς τὰ σύρματα τῆς γραμμῆς.

Λύσις. 1) Ἡ ἰσχὺς N, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν ὑδατόπτωσιν, εἶναι

$$N = \varepsilon \cdot \Pi \cdot h \qquad (1)$$

ὅπου ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πίπτοντος ὕδατος, Π ἡ παροχὴ καὶ h τὸ ὕψος.

2) Ἡ παρεχομένη ἰσχὺς N_1 ὑπὸ τοῦ ὑδροστροβίλου θὰ εἶναι

$$N_1 = \eta_1 \cdot N = \eta_1 \cdot \varepsilon \cdot \Pi \cdot h \qquad (2)$$

ὅπου η_1 ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτοῦ.

3) Ἡ παρεχομένη ἰσχὺς N_2 ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος θὰ εἶναι

$$N_2 = \eta_2 \cdot N_1 = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \varepsilon \cdot \Pi \cdot h \qquad (3)$$

ὅπου η_2 ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτοῦ.

4) Ἐὰν καλέσωμεν N_θ τὴν ἰσχὺν ἥτις χάνεται εἰς τὰ σύρματα μεταφορᾶς, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule, τότε ἡ ἰσχὺς N_3 εἰς τὸ δευτερεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ θὰ εἶναι

$$N_3 = \eta_3 \left(\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \varepsilon \cdot \Pi \cdot h - N_\theta \right) \qquad (4)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς N_θ, λαμβάνομεν

$$\underline{N_\theta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \varepsilon \cdot \Pi \cdot h - \frac{N_3}{\eta_3}} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5), $\eta_1 = 0{,}6$, $\eta_2 = 0{,}9$, $\eta_3 = 0{,}95$, $\varepsilon = 1$ gr*/cm³ $= 10^3$ kgr*/m³, $\Pi = 2{,}5$ m³/sec, $h = 10$ m, $N_3 = 162$ CV $= 162 \cdot 75$ kgr*m/sec, εὑρίσκομεν

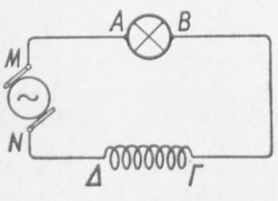
$$\underline{N_\theta = 711 \text{ kgr*m/sec} = 9{,}4 \text{ CV.}}$$

1130. Κύκλωμα ΜΑΒΓΔΝ περιλαμβάνει ἐναλλακτῆρα ΜΝ, λυχνίαν ΑΒ ἀντιστάσεως 20 Ω καὶ ἕνα πηνίον αὐτεπαγωγῆς ΔΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις R_2 καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L εἶναι ἄγνωστοι. Αἱ πτώσεις τάσεως μετρηθεῖσαι διὰ θερμικοῦ βολτομέτρου, εἶναι εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς λυχνίας 50 V, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου 70 V, εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ ἐναλλακτῆρος 87 V. Ζητοῦνται α) Ἡ ἀντίστασις R_2 τοῦ πηνίου, β) ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ πηνίου, γ) ἡ ἀπορροφουμένη ὑπὸ τῆς λυχνίας N_1 ἰσχύς, δ) ἡ ἀπορροφουμένη ὑπὸ τοῦ πηνίου N_2 ἰσχύς, ε) ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος, στ) ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. Τιμὴ κυκλικῆς συχνότητος 200 rad/sec.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαί: Ἀρχιτεκτόνων, Χημικῶν - Μηχανικῶν. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1957).

Λύσις. α) 1. Ἔστω i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm διὰ τὸ πηνίον, ἔχομεν

$$U_2 = i \cdot \sqrt{R_2^2 + (L\omega)^2} \qquad (1)$$



ὅπου R_2 εἶναι ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου καὶ U_2 ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

2) Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm διὰ τὴν ἀντίστασιν τῆς λυχνίας ἔχομεν

$$i = \frac{U_1}{R_1} \qquad (2)$$

ὅπου R_1 ἡ ἀντίστασις τῆς λυχνίας καὶ U_1 ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς.

Ἡ σχέσις (1) λόγῳ τῆς (2) γράφεται

$$U_2 = \frac{U_1}{R_1} \cdot \sqrt{R_2^2 + (L\omega)^2} \quad \text{ἢ} \quad R_2^2 + (L\omega)^2 = \left(\frac{U_2 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 \qquad (3)$$

3) Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm διὰ τὴν λυχνίαν καὶ τὸ πηνίον ὁμοῦ, ἔχομεν

$$U_3 = i \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L\,\omega)^2} \quad \text{ἢ} \quad U_3 = \frac{U_1}{R_1} \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L\,\omega)^2}$$

ἢ $\left(\frac{U_3 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 = (R_1 + R_2)^2 + (L\,\omega)^2$ ἢ $\left(\frac{U_3 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2\,R_1 \cdot R_2 + (L\,\omega)^2$

καὶ

$$R_2^2 + (L\,\omega)^2 = \left(\frac{U_3 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 - R_1^2 - 2\,R_1 \cdot R_2 \qquad (4)$$

Οὕτω ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4), προκύπτει

$$\left(\frac{U_2 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{U_3 \cdot R_1}{U_1}\right)^2 - R_1^2 - 2\,R_1 \cdot R_2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{U_2^2 \cdot R_1^2}{U_1^2} = \frac{U_3^2 \cdot R_1^2}{U_1^2} - R_1^2 - 2\,R_1 \cdot R_2$$

καὶ τελικῶς προκύπτει

$$\underline{R_2 = \frac{U_3^2 \cdot R_1}{2\,U_1^2} - \frac{U_2^2 \cdot R_1}{2\,U_1^2} - \frac{R_1}{2}} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5), $U_3 = 87$ V, $U_2 = 70$ V, $U_1 = 50$ V, $R_1 = 20$ Ω, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_2 = 0{,}676\ \Omega.}$$

β) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (1)

$$U_2 = \frac{U_1}{R_1} \cdot \sqrt{R_2^2 + L^2\,\omega^2}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν

$$U_2^2 = \left(\frac{U_1}{R_1}\right)^2 \cdot (R_2^2 + L^2\omega^2) \quad \text{ἢ} \quad L^2\omega^2 = \frac{U_2^2 \cdot R_1^2}{U_1^2} - R_2^2$$

καὶ

$$\underline{L = \sqrt{\frac{U_2^2 \cdot R_1^2}{U_1^2 \cdot \omega^2} - \frac{R_2^2}{\omega^2}}} \qquad (6)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν

$$\underline{L = 0{,}14\ \text{H}.}$$

γ) Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ συν φ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως εφ $\varphi = L\omega/R$, ὅπου R εἶναι ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ὅτι

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\varphi}} \qquad (7)$$

Ἄρα, βάσει τῆς προηγουμένης σχέσεως λαμβάνομεν

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \qquad (8)$$

καὶ διὰ $R = R_1 + R_2 = 20{,}676$ Ω, $L = 0{,}14$ H, $\omega = 200\ \text{sec}^{-1}$, εὑρίσκομεν

$$\underline{\text{συν}\,\varphi = 0{,}594}$$

δ) Ἡ ἀπορροφουμένη ἰσχὺς ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος εἶναι

$$N_1 = U_1 \cdot i$$

καὶ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν

$$\underline{N_1 = 74{,}26 \text{ W.}}$$

ε) Ἡ ἀπορροφουμένη ἰσχὺς ὑπὸ τοῦ πηνίου εἶναι

$$N_2 = U_2 \cdot i \cdot \text{συν}\, \varphi$$

καὶ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν

$$\underline{N_2 = 104 \text{ W.}}$$

στ) Ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι

$$N = U \cdot i \cdot \text{συν}\, \varphi$$

καὶ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 129{,}225 \text{ W.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1131. Γεννήτρια διεγειρομένη ἐν παραλλήλῳ ἔχει ἐπαγώγιμον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 0,08 Ω καὶ ἐμφανίζει ΗΕΔ - ἐξ ἐπαγωγῆς 120 V. Ποία ἡ πολικὴ τάσις, ἐὰν ρεῦμα 50 Α διαρρέῃ τὸ ἐπαγώγιμον. ('Απ. 116 V.)

1132. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντι - ΗΕΔ κινητῆρος διεγειρομένου ἐν σειρᾷ, ἀπὸ τὰ ἑξῆς δεδομένα. Τάσις ὑφισταμένη μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν αὐτοῦ 115 V, ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος 0,25 Ω καὶ ἔντασις ρεύματος τροφοδοτήσεως 20 Α. ('Απ. 110 V.)

1133. Ὅταν δυναμοηλεκτρικὴ μηχανή, διεγειρομένη ἐν σειρᾷ, παρέχῃ εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ρεῦμα ἐντάσεως 40 Α, ἡ τάσις εἰς τοὺς ἀκροδέκτας αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς 100 V. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς μηχανῆς εἶναι 0,2 Ω, τὸ δὲ ἐπαγώγιμον αὐτῆς ἀποτελεῖται ἐκ 300 σπειρῶν καὶ περιστρέφεται μὲ ταχύτητα 900 στροφῶν ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς τῆς δημιουργουμένης ὑπὸ τοῦ ἐπαγωγέως. ('Απ. $24 \cdot 10^5$ Mx.)

1134. Κινητὴρ διεγειρόμενος ἐν σειρᾷ, λειτουργεῖ ὑπὸ σταθερὸν τάσιν 112 V. Ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου κατὰ τὴν λειτουργίαν ρεύματος εἶναι 25 Α. Τὸ ἐπαγώγιμον τοῦ κινητῆρος ἀποτελεῖται ἐκ 250 σπειρῶν καὶ στρέφεται μὲ συχνότητα 1200 στρ./min, ἡ δὲ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς τὴν ὁποίαν δημιουργεῖ ὁ ἐπαγωγεὺς εἶναι 1 050 000 Mx. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. ('Απ. 0,28 Ω.)

1135. Κινητήρ, τοῦ ὁποίου ἡ περιέλιξις παρουσιάζει ἀντίστασιν 0,2 Ω, συνδέεται πρὸς πηγὴν τάσεως 65 V. Ἡ ἀντι - ΗΕΔ αὐτοῦ εἶναι 63 V. Ποία προστατευτικὴ ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ, πρὸς τὸν κινητῆρα, ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν περιέλιξιν μὴ ὑπερβῇ τὰ 20 Α. Ποία ἡ ἔντασις μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τῆς ἀντιστάσεως. ('Απ. 3,05 Ω, 10 Α.)

1136. Ὁ ἐπαγωγεὺς μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος φέρει 10 ἐναλλασσομένους πόλους καὶ περιστρέφεται ὑπὸ ταχύτητα 600 στρ./min. Τὸ ἐπαγώγιμον φέρει 10 περιελίξεις τῶν 120 σπειρῶν ἑκάστη. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ροῆς, διὰ μέσου μιᾶς σπείρας, οὕτως ὥστε ἡ ἐνεργὸς ΗΕΔ τοῦ ἐναλλακτῆρος νὰ εἶναι 110 V. ('Απ. 41257 Mx.)

1137. Δυναμὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπαγωγέα μήκους 1 m καὶ ἐπαγώγιμον τομῆς 40 cm^2. Τὸ πηνίον τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου ὅπερ φέρει 1500 σπείρας, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 2 A. Τὸ ἐπαγώγιμον ὅπερ φέρει 200 σπείρας, ἐκτελεῖ 900 στρ./min. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου. β) Ἡ ΗΕΔ τοῦ δυναμό. Συντελεστὴς μαγνητικῆς διαπερατότητος μαλακοῦ σιδήρου 1500.
(Ἀπ. 2 250 000 Mx, 67,5 V.)

1138. Εἰς τὰ ἄκρα ἠλεκτρικοῦ κινητῆρος ὑφίσταται διαφορὰ δυναμικοῦ 100 V. Ὅταν ὁ κινητὴρ εἶναι ἀκίνητος, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 20 A, ὅταν δὲ στρέφεται, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 5 A. Νὰ εὑρεθοῦν 1) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος, 2) ἡ μηχανικὴ ἰσχύς, ὅταν οὗτος στρέφεται. (Ἀπ. 1ʹ 5 Ω, 2ʹ 375 W.)

1139. Ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἐπαγωγέως μιᾶς δυναμοηλεκτρικῆς διπολικῆς μηχανῆς δι' ἀνεξαρτήτου διεγέρσεως, εἶναι σταθερά. Τὸ ἐπαγώγιμον στρέφεται μὲ ταχύτητα 1320 στρ./min καὶ φέρει 600 περιφερειακοὺς ἀγωγούς. Ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς ἡ ΗΕΔ εἶναι 120 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης περιστροφῆς εἰς στρ./min, ἵνα ἡ ΗΕΔ εἶναι 125 V. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς τοῦ ἐπαγωγέως.
(Ἀπ. 1375 στρ./min, 909 090 Mx.)

1140. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ μεταβιβάσωμεν ἰσχὺν 2500 kW εἰς ἀπόστασιν 20 km ὑπὸ τάσιν 100 000 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τομὴ τοῦ χρησιμοποιηθησομένου σύρματος διὰ τὴν μεταβίβασιν τῆς ἠλεκτρικῆς ἰσχύος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ συνιστὸν τὴν γραμμὴν σύρμα ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν $2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$ καὶ ὅτι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς δὲν ὑπερβαίνει τὰ 5 %. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ δευτερεῦον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τάσις ὑφίσταται πτῶσιν 500 V εἰς μίαν θέσιν ὅπου εὑρίσκονται 20 μετασχηματισταὶ συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ καὶ ὅτι ἡ ἀπόδοσις μετασχηματισμοῦ εἶναι 95 %. (Ἀπ. 5 mm^2, 225 A.)

1141. Εἰς ἐργοστάσιον παραγωγῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἡ ἰσχὺς ὑδροστροβίλου εἶναι 197,4 PS ἡ δὲ ἰσχὺς τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς, τῆς συνεζευγμένης πρὸς αὐτὸν 184,8 PS. Εἰς τὸν μετασχηματιστὴν ἀνυψώσεως τῆς τάσεως ἡ ἀπώλεια ἰσχύος εἶναι 7,2 PS, εἰς δὲ τὴν γραμμὴν μεταβιβάσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἀνέρχεται εἰς 15 %. Εἰς τὸν μετασχηματιστὴν ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως ἡ ἀπόδοσις εἶναι 95,7 %. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόδοσις τοῦ ἐργοστασίου ὡς καὶ τοῦ ὅλου συστήματος μεταβιβάσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας.
(Ἀπ. Περίπου 90 % καὶ 73 % ἀντιστοίχως.)

1142. Γεννήτρια μὲ διέγερσιν ἐν παραλλήλῳ, δίδει ρεῦμα 300 A ὑπὸ τάσιν 220 V, ὅταν λειτουργῇ μὲ συχνότητα 840 c/sec. Αἱ ἀπώλειαι τῆς ἰσχύος λόγῳ θερμάνσεως τῶν χαλκίνων ἀγωγῶν ἀνέρχονται εἰς 6200 W. Ὑπολογίσατε α) τὴν ἀπόδοσιν τῆς γεννητρίας, β) τὴν ἀπαιτουμένην ἰσχὺν διὰ τὴν κίνησιν τῆς γεννητρίας.
(Ἀπ. αʹ 91,4 %, βʹ 96,8 HP.)

1143. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ μεταβιβάσωμεν εἰς ἀπόστασιν 20 km, ἰσχὺν 50 kW. Παραδεχόμεθα ὡς ἀπώλειαν ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς 10 %. Νὰ συγκριθοῦν αἱ διάμετροι τῶν χαλκίνων συρμάτων τῆς γραμμῆς, ἐὰν χρησιμοποιηθῇ συνεχὲς ρεῦμα τάσεως 500 V ἢ ἐὰν χρησιμοποιηθῇ ρεῦμα ἐναλλασσόμενον ὑπὸ ἐνεργὸν τάσιν 10000 V. Νὰ συγκριθοῦν ὡσαύτως τὰ βάρη τῶν συρμάτων τῶν δύο γραμμῶν. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἀντιστοίχως $1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$ καὶ 8,9 gr^*/cm^3.
(Ἀπ. αʹ Συνεχὲς ρεῦμα, 4,16 cm, 485 τόννοι.
βʹ Ἐναλλασ. ρεῦμα, 0,21 cm, 1210 kgr*.)

1144. Μονοφασικὸς ἐναλλακτήρ, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπαγωγέα κινητόν, σχηματιζόμενον ἀπὸ 20 πόλους κανονικῶς ἐναλλασσομένους καὶ σταθερὸν ἐπαγώγιμον, σχηματιζόμενον ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πηνίων. Ὁ ἐπαγωγεὺς στρέφεται μὲ συχνότητα 3000 στρ./min, ἐνῷ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι 130 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, β) ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς λυχνιῶν πυρακτώσεως, ἀντιστάσεως 200 Ω καὶ ἐνεργοῦ ἐντάσεως 0,65 A, τὰς ὁποίας δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ ὁ ἐναλλακτήρ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ εἶναι 17,5 kW καὶ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος 0,965, γ) ἡ φαινομένη ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος. (Ἀπ. 50 περιόδων, 200, 35 kVA.)

1145. Στρεφόμενος ἐπαγωγεύς, φέρων 2 πόλους, μονοφασικοῦ ἐναλλακτῆρος, εἶναι προσηρμοσμένος ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἀτμομηχανῆς, ἐκτελούσης 3000 στρ./min. Ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι 220 V. Τὸ ρεῦμα, ὅπερ διέρχεται δι' ἀντιστάσεως 40 Ω, ἀποδίδει 14400 cal/min. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, β) ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ γ) ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. (Ἀπ. 50 περίοδοι, 5 A, 0,91.)

1146. Κινητὴρ παρουσιάζει ἀντι-ΗΕΔ 100 V. Τὸ ἐπαγώγιμόν του διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 30 A, ὅταν περιστρέφεται μὲ συχνότητα 25 c/sec. Ὑπολογίσατε τὴν ἰσχὺν εἰς Watt καὶ τὴν ῥοπὴν εἰς dyn·cm, τὴν ἐμφανιζομένην εἰς τὸ ἐπαγώγιμον. (Ἀπ. 3000 W, $1{,}9 \cdot 10^{-8}$ dyn·cm.)

1147. Γεννήτρια ΗΕΔ 48 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν 5 Ω, βυθιζομένην ἐντὸς θερμιδομέτρου, καὶ μὲ κινητῆρα ἀντιστάσεως R. Ὅταν ἐμποδισθῇ νὰ περιστρέφεται ὁ κινητήρ, εἰς τὸ θερμιδόμετρον ἀναπτύσσεται θερμότης 1152 cal/min. Ὅταν ὁ κινητὴρ λειτουργῇ κανονικῶς, εἰς τὸ θερμιδόμετρον ἀναπτύσσεται θερμότης 72 cal/min. α) Πόση ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. β) Ποία εἶναι ἡ ἀντι-ΗΕΔ αὐτοῦ. γ) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν. Δίδονται: 1 Joule = 0,24 cal.
(Ἀπ. α' 7 Ω. β' 36 V. γ' 28 V, 43 V.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1148. Ὅταν ἠλεκτρικὴ γεννήτρια, συνθέτου διεγέρσεως, παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 125 A εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν αὐτῆς εἶναι 125 V. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις τῆς περιελίξεως τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι 0,025 Ω, αἱ δὲ ἀντιστάσεις τῶν δύο περιελίξεων τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι 0,05 Ω, διὰ τὴν ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ ἐπαγώγιμον συνδεδεμένην περιέλιξιν καὶ 25 Ω διὰ τὴν συνδεδεμένην ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτό, νὰ εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας.

1149. Δίδεται ἠλεκτρικὴ γεννήτρια, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 400 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀνιστάσεως 25 Ω, ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ δι' ἀγωγοῦ, συνολικῆς ἀντιστάσεως 80 Ω, κινητῆρα. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς εἶναι 350 V. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, β) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος, γ) ἡ ἰσχύς του καὶ δ) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας του, ἂν ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ εἶναι 100 %. (Σχολὴ Ἰκάρων, 1955.)

1150. Ἡ ἐξ ἐπαγωγῆς ΗΕΔ, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ ἐπαγώγιμον γεννητρίας μὲ ἐν παραλλήλῳ διέγερσιν, εἶναι 400 V. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι 0,12 Ω. α) Εὕρατε τὴν πολικὴν τάσιν, ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως 250 A διαρρέῃ τὸ ἐπαγώγιμον. Ἡ ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως εἶναι 100 Ω. Ὑπολογίσατε τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὴν διακλάδωσιν, τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ὡς καὶ τὴν παρεχομένην εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἰσχύν.

1151. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ παρέχει 30 A ὑπὸ τάσιν 120 V εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ὅταν αὕτη λειτουργῇ μὲ συχνότητα 1200 c/min. Αἱ ἀπώλειαι τῆς ἰσχύος εἶναι 400 W. Ὑπολογίσατε, α) τὴν καταναλισκομένην ἰσχὺν εἰς HP. β) τὴν ἀπόδοσιν.

1152. Εἰς κινητῆρα συνεχοῦς ρεύματος, ἡ περιέλιξις τοῦ ἐπαγωγίμου, ἀντιστάσεως 0,15 Ω, εἶναι συνδεδεμένη ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὴν περιέλιξιν τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, ἔχουσαν ἀντίστασιν 110 Ω. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κινητῆρα, κατὰ τὴν κανονικὴν λειτουργίαν αὐτοῦ εἶναι 28 A. Ὁ κινητὴρ συνδέεται πρὸς πηγὴν τάσεως 220 V. α) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὰς περιελίξεις τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου καὶ τοῦ ἐπαγωγίμου κατὰ τὴν λειτουργίαν, ὡς καὶ ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἐπαγωγίμου διὰ κανονικὴν φόρτισιν τοῦ κινητῆρος. β) Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸν κινητῆρα κατὰ τὴν ἐκκίνησιν αὐτοῦ. γ) Ποία ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ ἐὰν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 84 %.

1153. Μεταξὺ δύο λήψεων μηχανῆς διατηρεῖται διαφορὰ δυναμικοῦ σταθερὰ 110 V καὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ ροοστάτης, κινητὴρ καὶ βολτάμετρον θειϊκοῦ χαλκοῦ μὲ δύο ἠλεκτρόδια χαλκοῦ. 1) Ὅταν ὁ κινητὴρ παραμένῃ ἀκίνητος ἐναποτίθεται 3,525 gr χαλκοῦ εἰς 18 min. Ποία ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. 2) Ὅταν ὁ κινητὴρ λειτουργῇ, τὸ αὐτὸ βάρος χαλκοῦ λαμβάνεται εἰς 30 min. Ποία εἶναι τότε ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἰσχύς του. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ 63.

1154. Ἠλεκτρικὸς κινητὴρ λειτουργῶν ὑπὸ τάσιν 220 V, ἔχει ἀντίστασιν 0,1 Ω καὶ ἀπορροφᾷ ὑπὸ μορφὴν τριβῶν, ἰσχὺν 90 W. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον τὸν διαρρέει, ὅταν ἀνυψώνῃ φορτίον 70 τόννων εἰς ὕψος 1 m ἐντὸς 327 sec. Ἐκ τῶν δύο τιμῶν τῆς ἐντάσεως δεχόμεθα ὡς ἀκριβῆ τὴν μικροτέραν. Πόση γίνεται ἡ τιμὴ αὕτη, ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν ἀνυψώνῃ βάρος. Πόση γίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐὰν αἱ τριβαὶ ἐλαττοῦνται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον.

1155. Δύο δυναμό, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν χρησιμεύει ὡς γεννήτρια καὶ τὸ ἕτερον ὡς ἀποδέκτης, ἔχουν ἀντίστασιν 5 Ω. Τὰ σύρματα τῆς γραμμῆς συνδέσεως ἔχουν ἀντίστασιν 4 Ω, ἡ ΗΕΔ τῆς γεννητρίας εἶναι 200 V καὶ τοῦ ἀποδέκτου 130 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν, α) ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας, β) ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀποδέκτου, γ) ἡ ἐνεργειακὴ ἀπόδοσις, δ) τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ἐκλυόμενον κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὴν ἐγκατάστασιν.

1156. Δύο ὅμοιαι ἠλεκτρικαὶ μηχαναί, τῶν ὁποίων οἱ ἐπαγωγεῖς εἶναι συνδεδεμένοι ἐν σειρᾷ, χρησιμεύουν ἵνα μεταβιβάζουν ἐνέργειαν εἰς ἀπόστασιν 1250 m. Ἑκάστη ἔχει ἀντίστασιν 0,1 Ω, τὰ δὲ χάλκινα σύρματα (εἰδικὴ ἀντίστασις $1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$) ἔχουν τομὴν 10 mm^2. Ἡ γεννήτρια παρουσιάζει ΗΕΔ 550 V καὶ δίδει ρεῦμα ἐντάσεως 50 A. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, β) ἡ ἠλεκτρικὴ ἀπόδοσις μεταφορᾶς, γ) ἡ κατανομὴ τῶν ἀπωλειῶν.

1157. Κινητὴρ ἐναλλασσομένου ρεύματος καταναλίσκει ρεῦμα ἐνεργοῦ ἐντάσεως 50 A καὶ ἐνεργοῦ τάσεως 220 V. Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν 9,5 kW. Νὰ προσδιορισθοῦν α) Ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως. β) Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ κινητῆρος, ἐὰν ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ εἶναι 2 Ω καὶ ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος 50 περιόδων.

1158. Ἐναλλακτὴρ εἶναι συνεζευγμένος πρὸς ὑδροστρόβιλον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου πίπτουν ἀνὰ δευτερόλεπτον 1,5 m^3 ὕδατος ἀπὸ ὕψους 200 m. Ἡ ὁλικὴ ἀπόδοσις εἶναι 70 %. Ἡ τάσις τῆς ὑπ' αὐτοῦ παραγομένης ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἀνυψοῦται ὑπὸ μετασχηματιστοῦ ἀποδόσεως 95 %, αἱ δὲ ἀπώλειαι εἰς τὴν γραμμὴν μεταβιβάσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι 10 %. Ἐὰν εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως ἡ τάσις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ὑποβιβάζεται διὰ μετασχηματιστοῦ ὁμοίου πρὸς τὸν προηγούμενον, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς ἡ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ δευτερεύοντος τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματιστοῦ (εἰς kcal/sec).

1159. Πηνίον τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς εἶναι 0,1 H συνδέεται εἰς κύκλωμα ἐναλλακτῆρος συχνότητος 50 c/sec καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μεγίστη ἔντασις εἶναι 5 A. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ μεγίστη ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς, ἡ παραγομένη ἐντὸς τοῦ πηνίου. β) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. γ) Ἡ μεγίστη ΗΕΔ τοῦ ἐναλλακτῆρος. δ) Ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος. ε) Ἡ φαινομένη ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος. στ) Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. Ἡ ὁλικὴ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 20 Ω.

1160. Ἠλεκτρικὸν ὄχημα κινεῖται δι' ἠλεκτρικοῦ κινητῆρος, λειτουργοῦντος ὑπὸ τάσιν 200 V. Ἡ μετατροπὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἰς μηχανικὴν γίνεται ὑπὸ ἀπόδοσιν 80 %. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἰς τὴν ἕλξιν (τριβὴ) εἶναι 0,004. Πόση ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τροφοδοσίας τοῦ κινητῆρος, ἐὰν τὸ ὄχημα κινῆται ὑπὸ ταχύτητα 45 km/h. Πόση ἡ ἰσχύς, ἐκπεφρασμένη εἰς kW καὶ CV, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος, καὶ πόση ἡ δύναμις ἕλξεως αὐτῶν.

1161. Ἠλεκτροκίνητον ὄχημα 20 τόννων λειτουργεῖ μὲ κινητῆρα ὅστις ἀπαιτεῖ τάσιν 500 V καὶ ἔντασιν 320 A. Ἡ μετατροπὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἰς μηχανικὴν φθάνει ἀπόδοσιν 80 %. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἰς τὴν ἕλξιν εἶναι 0,004. Πόση ἡ ἰσχύς, ἐκπεφρασμένη εἰς kW καὶ CV, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητὴρ εἰς ὁριζοντίαν κίνησιν. Πόση ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ὄχημα, ἐὰν ὁ κινητὴρ δέχεται ρεῦμα ἐπὶ 20 sec. Πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα μέχρις ὅτου φθάσῃ τὴν ταχύτητα ταύτην. Πόση ἡ δύναμις ἕλξεως ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος ἐν ὁριζοντίᾳ κινήσει.

1162. Κλειστὸν κύκλωμα περιλαμβάνει ἐν σειρᾷ γεννήτριαν, κινητῆρα, ροοστάτην καὶ ἀμπερόμετρον. Ἡ ΗΕΔ τῆς γεννητρίας εἶναι ἴση πρὸς 100 V, ἡ δὲ ἐσωτερική της ἀντίστασις εἶναι ἀμελητέα. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου εἶναι 8 Ω, ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος εἶναι 2 Ω. Τὸ ὑπόλοιπον κύκλωμα δὲν παρουσιάζει ἀντίστασιν. 1) Ὁ κινητὴρ δὲν λειτουργεῖ· τί θὰ δείξῃ τὸ ἀμπερόμετρον. 2) Ὁ κινητὴρ λειτουργεῖ καὶ προσφέρεται ἐνέργεια ἐκ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. Ὅταν σταθεροποιηθῇ ἡ ταχύτης του, τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 5 A· νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς ἡ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ αὐτοῦ δύναμις. 3) Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξις βολτομέτρου εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος.

1163. Δευτερεύων πίναξ διανομῆς ἠλεκτρισμοῦ B, ἀπέχει ἀπὸ κεντρικοῦ τοιούτου A, 200 m καὶ τροφοδοτεῖ 50 λυχνίας τῶν 50 W, 20 λυχνίας τῶν 100 W καὶ ἠλεκτρικὸν κινητῆρα ἰσχύος 10 ἵππων. Τὸ ρεῦμα εἶναι συνεχές, τάσεως 230 V εἰς τὸν A καὶ ἐπιτρέπεται πτῶσις τάσεως 5 % ἕως τὸν B. Εὕρατε τὴν διατομὴν τοῦ χαλκίνου ἀγωγοῦ μεταξὺ τῶν A καὶ B καὶ τὴν κατανάλωσιν ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἰς τὸν πίνακα A, διὰ δεκάωρον λειτουργίαν. Δίδονται $g = 9,8\ m/sec^2$ καὶ $\rho_{\chi\alpha\lambda} = 0,018\ \Omega \cdot mm^2/m$.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1953.)

1164. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς ἀπόστασιν τὴν ἐνέργειαν ὑδατοπτώσεως ὕψους 12 m καὶ παροχῆς 150 m^3/min. Χρησιμοποιεῖται πρὸς τοῦτο ὑδροστρόβιλος ὅστις θέτει εἰς κίνησιν ἐναλλακτῆρα. Ὁ ἐναλλακτὴρ εἶναι συνδεδεμένος πρὸς τὴν γραμμὴν μεταφορᾶς, μέσῳ πρωτεύοντος μετασχηματιστοῦ, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου κρατεῖται τάσις ἐνεργοῦ τιμῆς 3000 V, ἐνῷ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος εἶναι 125 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ, β) ἡ διαθέσιμος ἰσχὺς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος, γ) ὁ ἀριθμὸς λυχνιῶν πυρακτώσεως, ἰσχύος 100 W, τὰς ὁποίας δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ ὁ μετασχηματιστής. Αἱ ἀποδόσεις τοῦ ὑδροστροβίλου, τοῦ ἐναλλακτῆρος καὶ τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἀντιστοίχως 0,75, 0,90, 0,95. Αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς, λόγῳ φαινομένου Joule, εἶναι 10 % τῆς ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος χορηγουμένης ἐνεργείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ΄

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΑΕΡΙΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1165. Τὸ ἠλεκτρονικὸν βὸλτ (1 eV) εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς Ἀτομικῆς καὶ Πυρηνικῆς Φυσικῆς χρησιμοποιουμένη μονὰς ἐνεργείας, ὁρίζεται δὲ ὡς ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀποκτᾶ ἓν ἠλεκτρόνιον, ὅταν κινηθῇ μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ 1 V. 1) Πρὸς πόσα erg ἰσοῦται 1 ἠλεκτρονικὸν βόλτ. 2) Πρὸς πόσα ἠλεκτρονικὰ βόλτ ἰσοῦται α) 1 erg, β) 1 cal.

Λύσις. 1) Ἐὰν καλέσωμεν e τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου, τότε συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τῆς θεωρίας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $A = q \cdot U$, τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παράγεται κατὰ τὴν μετακίνησιν ἑνὸς ἠλεκτρονίου μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ U, θὰ εἶναι

$$\underline{A = e \cdot U}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν θέσωμεν, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ $U = 1\ V = 1/300$ ΗΣΜ - τάσεως, εὑρίσκομεν

$$1\ eV = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{300}\ erg$$

ἢ

$$\underline{1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg.}$$

α) Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς προηγουμένης ἐρωτήσεως εὑρίσκομεν, διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι

$$\underline{1\ erg = 62{,}5 \cdot 10^{10}\ eV.}$$

β) Ἐπειδὴ $1\ cal = 4{,}2\ Joule = 4{,}2 \cdot 10^7\ erg$, θὰ εἶναι

$$\underline{1\ cal = 2{,}6 \cdot 10^{19}\ eV.}$$

1166. Ἓν ἠλεκτρόνιον τὸ ὁποῖον ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων τοῦ πεδίου τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ 10^4 V. Ποία εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (εἰς erg καὶ eV) καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἓν σωμάτιον μάζης m, φέρον φορτίον q, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων τοῦ πεδίου, ἐχόντων διαφορὰν δυναμικοῦ U. Τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾶ τὸ σωμάτιον εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ, ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ $E_{\kappa\iota\nu} = 1/2 \cdot m\, v^2$, πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον $q \cdot U$, τὸ ὁποῖον παρήχθη ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἤτοι

$$E_{\kappa\iota\nu} = q \cdot U \qquad (1) \qquad ἢ \qquad \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = q \cdot U \qquad (2)$$

Ἔστω ὅτι τὸ κινούμενον σωμάτιον εἶναι ἓν ἠλεκτρόνιον. Καλοῦμεν e τὸ φορτίον αὐτοῦ, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$E_{\kappa\iota\nu} = e \cdot U$$

Δίδεται, $U = 10^4$ V $= 10^4/300$ ΗΣΜ - τάσεως. Τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴ σχέσιν (1), λαμβάνομεν

$$E_{\kappa\iota\nu} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ erg.}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς eV, προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βόλτ, ἴση πρὸς

$$E_{\kappa\iota\nu} = 10^4 \text{ eV.}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου (2) λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U} \qquad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $U = 10^4$ V $= 10^4/300$ ΗΣΜ - τάσεως καὶ δεδομένου ὅτι $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, εὑρίσκομεν

$$\upsilon = 6 \cdot 10^9 \text{ cm/sec.}$$

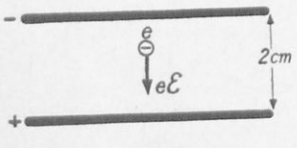
1167. Ἓν ἠλεκτρόνιον ἀποσπᾶται ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς μιᾶς ἐκ δύο ἐπιπέδων καὶ παραλλήλων, φορτισμένων μεταλλικῶν πλακῶν καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ὑφισταμένου ἠλεκτρικοῦ πεδίου κινεῖται πρὸς τὴν θετικὴν πλάκα, ἐπὶ τῆς ὁποίας προσπίπτει μετὰ χρόνον $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ sec ἀπὸ τῆς ἀποσπάσεως. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν πλακῶν εἶναι 2 cm. Ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγήν του ἐκ τῆς ἀρνητικῆς πλακός, τὸ ἠλεκτρόνιον εἶχε ταχύτητα μηδέν, νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, β) ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν προσκρούει τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπὶ τῆς θετικῆς πλακός.

Λύσις. α) Ἂς καλέσωμεν $\mathcal{E}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν πλακῶν. Ἐὰν δι' e παραστήσωμεν τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου, ἡ δύναμις F, ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \mathcal{E} \cdot e \qquad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπενεργεῖ σταθερὰ δύναμις, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1), τοῦτο θὰ ἐκτελέσῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς

$$\gamma = \frac{\mathcal{E} \cdot e}{m} \qquad (2)$$



(ἔνθα m ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου). Εἰς τὸ τέλος δὲ χρόνου t ἀπὸ τῆς ἀποσπάσεώς του ἐκ τῆς ἀρνητικῆς πλακός, θὰ ἔχῃ διανύσει διάστημα ἴσον πρὸς

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (3)$$

ἤ, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ σχέσις (2), λαμβάνομεν

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{E} \cdot e}{m} \cdot t^2 \qquad (4)$$

καὶ ἐὰν λύσωμεν τὴν (4) ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν $\mathcal{E}$, προκύπτει ὁ τύπος

$$\mathcal{E} = 2\,s \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{t^2} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5), $s = 2$ cm, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $t = 1,5 \cdot 10^{-8}$ sec καὶ εὑρίσκομεν

$$\mathscr{E} = 9,99 \text{ V/cm}.$$

β) Ἐφ' ὅσον τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\upsilon = \gamma \cdot t$, ἤ, λόγῳ τῆς (2),

$$\upsilon = \frac{\mathscr{E} \cdot e}{m} \cdot t$$

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν $\mathscr{E} = 9,99$ V/cm $= 3,33 \cdot 10^{-2}$ ΗΣΜ - τάσεως/cm, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ $t = 1,5 \cdot 10^{-8}$ sec, εὑρίσκομεν

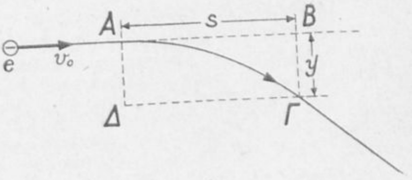
$$\upsilon = 2,664 \cdot 10^{8} \text{ cm/sec.}$$

1168. Ἐπὶ ἠλεκτρονίου κινουμένου ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα 20 000 km/sec ἐπενεργεῖ ἐπί τι χρονικὸν διάστημα ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ εἶναι κατακόρυφοι (βλ. σχῆμα). Εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος τῆς ἐπενεργείας τοῦ πεδίου, τὸ ἠλεκτρόνιον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Α, εἰς δὲ τὸ τέλος αὐτοῦ εἰς τὴν θέσιν Γ τῆς τροχιᾶς του. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 22 cm, ἡ δὲ ἀπόκλισις ΒΓ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐκ τῆς ἀρχικῆς του διευθύνσεως εἶναι 1 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, β) ἡ χρονικὴ διάρκεια τῆς ἐπενεργείας αὐτοῦ. (Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, φορτίον αὐτοῦ $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου).

Λύσις. Καλοῦμεν y τὴν ἀπόκλισιν, t τὴν χρονικὴν διάρκειαν τῆς ἐπενεργείας τοῦ πεδίου, s τὸ ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς διευθύνσεως τοῦ ἠλεκτρονίου διάστημα καὶ υ_o τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων, τὸ ἠλεκτρόνιον, κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου, φθάνει μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπενεργείας αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς ὑπ' αὐτοῦ διαγραφομένης τροχιᾶς, ὡς ἐὰν ἐκινεῖτο πρῶτον ὁριζοντίως μὲ κίνησιν ὁμαλὴν ἐπὶ χρόνον t ὑπὸ τὴν διδομένην ἀρχικὴν ταχύτητα υ_o καὶ διήνυε τὸ διάστημα (ΑΒ) = s, ἀκολούθως δὲ κατακορύφως ἐπὶ χρόνον t μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, κατὰ τὸ διάστημα (ΒΓ) = y.

Διὰ τὴν πρώτην κίνησιν τοῦ ἠλεκτρονίου θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$s = \upsilon_o \cdot t \qquad (1)$$



καὶ διὰ τὴν δευτέραν, ἡ σχέσις

$$y = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

ὅπου γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν προσδίδει εἰς τὸ ἠλεκτρόνιον ἡ σταθερὰ δύναμις $F = \mathscr{E} \cdot e$ τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον.

Ἐπειδὴ εἶναι $\gamma = \mathscr{E} \cdot e/m$, ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ γ εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{E} \cdot e}{m} \cdot t^2 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (3), δι' ἀπαλειφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ αὐτῶν, ἔχομεν

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathscr{E} \cdot e}{m} \cdot \frac{s^2}{\upsilon_o^{\,2}} \qquad (4)$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς $\mathscr{E}$, προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\mathscr{E} = 2\,y \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{\upsilon_o^{\,2}}{s^2}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $y = 1$ cm, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $\upsilon_o = 20\,000$ km/sec $= 2 \cdot 10^9$ cm/sec, $s = 22$ cm, εὑρίσκομεν

$$\underline{\mathcal{E} = 3{,}09 \cdot 10^{-2} \text{ ΗΣΜ τάσεως/cm} = 9{,}27 \text{ V/cm.}}$$

β) Ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν διὰ τὴν χρονικὴν διάρκειαν τῆς ἐπενεργείας τοῦ πεδίου

$$t = \frac{s}{\upsilon_o}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, $s = 22$ cm καὶ $\upsilon_o = 2 \cdot 10^9$ cm/sec, λαμβάνομεν

$$\underline{t = 1{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}}$$

1169. Σωμάτιον φέρον ἓν στοιχειῶδες θετικὸν φορτίον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα $5 \cdot 10^9$ cm/sec ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 2000 Gauss, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Ποία ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ δύναμις. (Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.)

Λύσις. Ἐὰν τὸ σωμάτιον φέρῃ φορτίον q καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα υ, ἡ ὁποία σχηματίζει γωνίαν φ μετὰ τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου, τότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις F θὰ ἰσοῦται, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Laplace, πρὸς

$$F = q \cdot \upsilon \cdot \mathcal{H} \cdot \text{ημ}\,\varphi$$

ὅπου $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου.

Θέτοντες, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου, $\upsilon = 5 \cdot 10^9$ cm/sec, $\mathcal{H} = 2000$ Gauss, $\varphi = 90^0$ (ημ $90^0 = 1$), εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 1{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ dyn.}}$$

1170. Ἓν ἠλεκτρόνιον κινεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 100 Gauss, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ, μὲ ταχύτητα τῆς ὁποίας τὸ μέτρον παραμένει σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $1{,}2 \cdot 10^7$ m/sec. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τροχιὰ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ πεδίου εἶναι κυκλική. β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου. (Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου, μᾶζα αὐτοῦ $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr).

Λύσις. α) Ἡ δύναμις κατὰ Laplace, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ ἠλεκτρονίου κινουμένου ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου, εἶναι, ὡς γνωστόν, κάθετος πρὸς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Ἑπομένως αὕτη θὰ ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς κεντρομόλος δύναμις, προσδίδουσα εἰς αὐτό, συμφώνως πρὸς τὴν Μηχανικήν, μόνον κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν. Ἀφ' ἑτέρου τὸ μέτρον τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ κινουμένου ἠλεκτρονίου δυνάμεως κατὰ Laplace, ὅταν τοῦτο κινῆται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ, ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ὑπετέθη, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ ἠλεκτρονίου παραμένει σταθερόν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $F = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon$, καὶ ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου κεντρομόλος δύναμις παραμένει σταθερὰ κατὰ μέτρον. Ὅταν ὅμως ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι σταθερὰ κατὰ μέτρον, ἡ τροχιὰ εἶναι κυκλική.

β) Ἐφ' ὅσον ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ, ἡ ὁποία ἀναγκάζει τὸ ἠλεκτρόνιον (μάζης m καὶ φορτίου e) νὰ διαγράψῃ κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r, εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις κατὰ Laplace F, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$F_\kappa = F \qquad (1) \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (2)$$

ἔνθα υ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ $\mathcal{H}$ ἡ ἔντασις τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς r, λαμβάνομεν

$$\underline{r = \frac{m \cdot \upsilon}{e \cdot \mathcal{H}}} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ μεγέθη, m, υ, e καὶ $\mathcal{H}$, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀσκήσει δοθεισῶν τιμῶν αὐτῶν, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $\upsilon = 1{,}2 \cdot 10^{9}$ cm/sec, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ-φορτίου, $\mathcal{H} = 100$ Gauss, εὑρίσκομεν

$$r = 0{,}675 \text{ cm}.$$

γ) Ἐὰν τὸν τύπον $\upsilon = 2\pi\nu \cdot r$ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς ν, προκύπτει διὰ τὴν συχνότητα περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου

$$\nu = \frac{\upsilon}{2\pi \cdot r}$$

Εὕρομεν $r = 0{,}675$ cm, εἶναι δὲ $\upsilon = 1{,}2 \cdot 10^{9}$ cm/sec. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\nu = 2{,}83 \cdot 10^{8} \text{ sec}^{-1}.$$

1171. Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν τὸ κινούμενον σωμάτιον εἶναι πρωτόνιον, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἵνα τοῦτο διαγράψῃ περιφέρειαν ἀκτῖνος 5 cm ἐντὸς τοῦ πεδίου. Δίδεται ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου $m = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου.

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἓν σωμάτιον μάζης m, φέρον φορτίον q, κινούμενον μὲ ταχύτητα υ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου, διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r, προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (2) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἴση πρὸς

$$\mathcal{H} = \frac{m \cdot \upsilon}{q \cdot r}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν αὐτήν, $m = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr, $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου (δεδομένου ὅτι τὸ φορτίον τοῦ πρωτονίου εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσον πρὸς τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου), $\upsilon = 1{,}2 \cdot 10^{9}$ cm/sec, $r = 5$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{H} = 2{,}505 \cdot 10^{4} \text{ Gauss}.$$

1172. $6 \cdot 10^{17}$ ἠλεκτρόνια κινούμενα ἐντὸς σωλῆνος καθοδικῶν ἀκτίνων μὲ ταχύτητα 30 000 km/sec προσπίπτουν ἐπὶ ὀρθογωνίου μεταλλικῆς πλακὸς εὑρισκομένης ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. Ποία ἡ προκαλουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τῆς πλακός, ἐὰν αὕτη ἔχῃ πάχος 0,8 mm καὶ ἐπιφάνειαν 0,8 cm^2. Ἡ πυκνότης τῆς ὕλης τῆς πλακὸς εἶναι 18,7 gr/cm^3, ἡ δὲ εἰδικὴ θερμότης αὐτῆς 0,033 cal/gr·grad (μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr).

Λύσις. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ἠλεκτρονίου μάζης m καὶ ταχύτητος υ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη κατὰ τὴν πρόσπτωσιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς πλακός, μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἴσην πρὸς

$$Q = \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$$

ἔνθα J εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Συνολικῶς, κατὰ τὴν πρόσπτωσιν n ἠλεκτρονίων ἐπὶ τῆς πλακός, παράγεται θερμότης ἴση πρὸς

$$Q = n \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$$

Ἔστω ὅτι ἡ θερμότης αὕτη, ἀπορροφουμένη ὑπὸ τῆς πλακός, προκαλεῖ ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας αὐτῆς κατὰ Δθ ^{0} C. Ἀφ' ἑτέρου ἐὰν ἡ πλὰξ συνίσταται ἐξ ὕλης πυκνότητος ρ καὶ εἰδικῆς θερμότητος c καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι S, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς h, τότε ἡ ἀπαιτουμένη θερμότης πρὸς ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας της κατὰ $\Delta\theta^0$ C θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$Q' = m \cdot c \cdot \Delta\theta$, ὅπου m ἡ μᾶζα τῆς πλακός, ἤ, $Q' = S \cdot h \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta\theta$

(διότι $m = S \cdot h \cdot \rho$). Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ εἶναι $Q = Q'$, ἤτοι

$$n \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 = S \cdot h \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta\theta$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$\underline{\Delta\theta = \frac{n \cdot m \cdot \upsilon^2}{2\,J \cdot S \cdot h \cdot c \cdot \rho}}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν αὐτήν, $n = 6 \cdot 10^{17}$ ἠλεκτρόνια, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $\upsilon = 3 \cdot 10^9$ cm/sec, $J = 4{,}2$ Joule/cal $= 4{,}2 \cdot 10^7$ erg/cal, $S = 0{,}8$ cm², $h = 0{,}8$ mm $= 0{,}08$ cm, $c = 0{,}033$ cal/gr · grad, $\rho = 18{,}7$ gr/cm³, εὑρίσκομεν

$$\underline{\Delta\theta = 1460\,^0\ C.}$$

1173. Λεπτὴ δέσμη καθοδικῶν ἀκτίνων, ἰσοδύναμος πρὸς ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως 10 mA, προσπίπτει ἐπὶ λεπτοῦ μεταλλικοῦ φύλλου. Ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρονίων τῆς δέσμης εἶναι $5 \cdot 10^7$ m/sec. α) Πόσα ἠλεκτρόνια προσπίπτουν ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου ἐπὶ τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου. β) Ἐὰν κατὰ τὴν δίοδον τῆς δέσμης διὰ τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρονίων ἐλαττοῦται εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς, πόση θερμότης ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου. (Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, μᾶζα αὐτοῦ $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr).

Λύσις. α) Ἔστω ὅτι, κατὰ τὴν δίοδον διὰ λεπτοῦ μεταλλικοῦ φύλλου δέσμης καθοδικῶν ἀκτίνων ἰσοδυνάμου πρὸς ρεῦμα ἐντάσεως i, προσπίπτουν εἰς χρόνον t ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ n ἠλεκτρόνια. Τότε, ἐὰν καλέσωμεν e τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου, θὰ πρέπει, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος $i = q/t$, νὰ εἶναι

$$i = \frac{n \cdot e}{t} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἐὰν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς n, προκύπτει

$$\underline{n = \frac{i \cdot t}{e}} \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (2) θέσωμεν, $i = 10$ m A $= 1 \cdot 10^{-2}$ A, $t = 1$ sec, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, εὑρίσκομεν ὅτι ἐπὶ τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου προσπίπτουν ἀνὰ δευτερόλεπτον

$$\underline{n = 6{,}25 \cdot 10^{16} \text{ ἠλεκτρόνια.}}$$

β) Ἔστω, ὅτι διὰ τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου διέρχονται ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου n ἠλεκτρόνια. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια n ἠλεκτρονίων, ταχύτητος υ, εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{\kappa\iota\nu} = n \cdot \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$$

(m ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου). Κατὰ τὴν δίοδον τῶν ἠλεκτρονίων διὰ τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου, τὸ ἥμισυ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας αὐτῶν μετατρέπεται εἰς θερμότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς

$$Q = \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν, $J = 4{,}2 \cdot 10^7$ erg/cal, $n = 6{,}25 \cdot 10^{16}$ ἠλεκτρόνια, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ $\upsilon = 5 \cdot 10^9$ cm/sec, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου ἀναπτυσσομένη θερμότης εἰς τὸ μεταλλικὸν φύλλον, εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{Q = 8{,}37 \text{ cal.}}$$

1174. Ἡ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται μεταξὺ ἀνόδου καὶ καθόδου ἠλεκτρονικῆς λυχνίας εἶναι 300 V. Ποία ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν ἓν ἠλεκτρόνιον προσκρούει ἐπὶ τῆς ἀνόδου, ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγήν του ἐκ τῆς καθόδου εἶχε ταχύτητα μηδέν. (Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, μᾶζα αὐτοῦ = $9 \cdot 10^{-28}$ gr.)

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = e \cdot U \qquad (1)$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου

$$\underline{\upsilon = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ ΗΣΜ, $U = 300\ V = \frac{300}{300}$ ΗΣΜ - τάσεως = 1 ΗΣΜ - τάσεως, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 1{,}015 \cdot 10^9 \text{ cm/sec.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

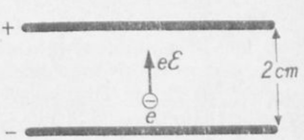
1175. Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $9 \cdot 10^{-28}$ gr, ἡ δὲ διάμετρος αὐτοῦ $3{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης του. (Ἀπ. $2{,}9 \cdot 10^{10}$ gr/cm³ περίπου.)

1176. α) Πόσα ἠλεκτρόνια ἔχουν συνολικῶς μᾶζαν 10^{-12} gr. β) Ποῖον τὸ συνολικὸν φορτίον αὐτῶν εἰς Cb. γ) Ἐὰν τὰ ἠλεκτρόνια ταῦτα κινηθοῦν μεταξὺ δύο ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν ἠλεκτρικοῦ πεδίου, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 100 V, ποίαν συνολικὴν ἐνέργειαν ἀποκτοῦν εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς των. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 1{,}59 \cdot 10^{-19}$ Cb.
(Ἀπ. α' $1{,}11 \cdot 10^{15}$ ἠλεκτρόνια. β' $1{,}7 \cdot 10^{-4}$ Cb. γ' $111 \cdot 10^{15}$ eV.)

1177. Ἠλεκτρόνιον διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 10^5 V. Ποίαν κινητικὴν ἐνέργειαν (εἰς eV καὶ erg) καὶ ποίαν ταχύτητα ἀποκτᾶ τὸ ἠλεκτρόνιον εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, μᾶζα αὐτοῦ $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. α' 10^5 eV, $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ erg, β' $1{,}88 \cdot 10^{10}$ cm/sec.)

1178. Ποία ἡ ταχύτης ἠλεκτρονίου κινητικῆς ἐνεργείας 1 keV (1 keV = 10^3 eV.) Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου = $9 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. $1{,}88 \cdot 10^9$ cm/sec.)

1179. Ἓν ἠλεκτρόνιον εὑρίσκεται μεταξὺ δύο ἐπιπέδων καὶ παραλλήλων μεταλλικῶν πλακῶν, φορτισμένων εἰς τάσιν 2000 V. Ἐὰν ἡ μεταξὺ τῶν πλακῶν ἀπόστασις εἶναι 2 cm, ποία ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου.
(Ἀπ. $1{,}6 \cdot 10^{-9}$ dyn.)

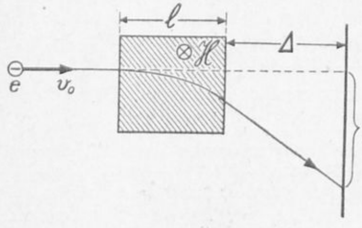


1180. Ἠλεκτρόνιον εὑρίσκεται μεταξὺ δύο παραλλήλων καὶ ἐπιπέδων μεταλλικῶν πλακῶν, ἀπεχουσῶν κατὰ 1 cm ἀπ' ἀλλήλων. Μεταξὺ τῶν πλακῶν ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 100 V. α) Ποία ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου. β) Ποῖος ὁ λόγος τῆς δυνάμεως αὐτῆς πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἠλεκτρονίου. γ) Ἐὰν τὸ ἠλεκτρόνιον, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὑπὸ τοῦ πεδίου ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένης δυνάμεως, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας, διατρέξῃ διάστημα 1 cm, ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης καὶ ἡ κινητική του ἐνέργεια εἰς τὸ τέλος τῆς διαδροπρὸς τὸν ἄξονα z. Ἐὰν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι ἴσον πρὸς $2 \cdot 10^4$ m/sec καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διελεύσεως διὰ τοῦ Ο συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα z, ἡ ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν ἀσκουμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ dyn καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα x. Ποῖον τὸ μέτρον, ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ-φορτίου, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr.

(Ἀπ. Τὸ μέτρον τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $\mathcal{H} = 5 \cdot 10^3$ Gauss, ἡ διεύθυνσις συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα y καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς εἶναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω.)

1191. Ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα 10^9 cm/sec ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Τὸ πεδίον δημιουργεῖται ὑπὸ σωληνοειδοῦς μήκους 22 cm, ἔχοντος 180 σπείρας διαρρεομένας ὑπὸ ρεύματος 1,58 A. Τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἐντὸς τοῦ πεδίου κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 3,5 cm. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ λόγου e/m (εἰδικὸν φορτίον) τοῦ φορτίου πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου. (Ἀπ. $1{,}77 \cdot 10^7$ ΗΜΜ-φορτίου/gr.)

1192. Ἓν ἠλεκτρόνιον κινούμενον ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα υ διέρχεται διὰ μέσου τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ παραλλήλων πρὸς ἀλλήλας ἐπιφανειῶν τῶν ἄκρων τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου. Ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεώς του εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἔντασιν $\mathcal{H}$ τοῦ (ὁμογενοῦς) μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου. Τὸ ἠλεκτρόνιον, κατὰ τὴν διαδρομήν του ἐντὸς τοῦ πεδίου τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου ἐκτρέπεται τῆς ἀρχικῆς του διευθύνσεως, ἐξερχόμενον δὲ προσπίπτει ἐπὶ κατακορύφου πετάσματος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν Δ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτὸ ἄκρου τῶν πόλων. Ἐὰν εἶναι l τὸ μῆκος ἑκάστου πόλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόκλισις y ἐπὶ τοῦ πετάσματος. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = e, μᾶζα αὐτοῦ = m.



$$\left(\text{Ἀπ. } y = \left(\Delta + \frac{l}{2} \right) \cdot \mathcal{H} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{l}{υ} \cdot \right)$$

1193. Ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα $6 \cdot 10^8$ cm/sec ἐπὶ τοῦ ἄξονος x ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων Oxyz. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κινουμένου ἠλεκτρονίου ἐπενεργήσῃ ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 30 Gauss, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα z, συγχρόνως δὲ καὶ ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις ἔχει διεύθυνσιν συμπίπτουσαν πρὸς τὸν ἄξονα y, ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέτρον αὐτῆς, ὥστε αἱ ἐπιδράσεις τῶν δύο πεδίων ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου νὰ ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως. (Ἀπ. U = 180 V/cm.)

1194. Ἓν ἠλεκτρόνιον, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας, κινεῖται μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐχόντων διαφορὰν δυναμικοῦ 100 V, ἀκολούθως δὲ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 50 Gauss, καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, συγχρόνως πρὸς τὸ μαγνητικὸν πεδίον, ἐπενεργήσῃ καὶ ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ, ὥστε αἱ ἐπιδράσεις τῶν δύο πεδίων ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου νὰ ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr. $1\ V = 10^8$ ΗΜΜ-τάσεως. ('Απ. 298,15 V/cm.)

1195. Ἓν ἠλεκτρόνιον ἐξέρχεται ἐκ τῆς καθόδου διόδου ἠλεκτρονικῆς λυχνίας καὶ κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἀνόδου τῆς λυχνίας ὑφισταμένου ἠλεκτρικοῦ πεδίου προσκρούει ἐπὶ τῆς ἀνόδου μὲ ταχύτητα 1260 km/sec. Ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγήν του ἐκ τῆς καθόδου τὸ ἠλεκτρόνιον εἶχε ταχύτητα μηδέν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταξὺ ἀνόδου καὶ καθόδου ἐφαρμοζομένη τάσις. Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $9 \cdot 10^{-28}$ gr. $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg. ('Απ. 4,48 V.)

1196. Ἠλεκτρόνιον ἀποσπᾶται ἐκ τῆς καθόδου φωτοκυττάρου καὶ κινεῖται πρὸς τὴν ἄνοδον αὐτοῦ μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὸ 1/10 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου τοῦ φωτοκυττάρου εἶναι 5 cm. α) Εἰς πόσον χρόνον τὸ ἀποσπασθὲν ἠλεκτρόνιον διατρέχει τὸ διάστημα τοῦτο. β) Πόσα ἠλεκτρόνια συλλέγονται ὑπὸ τῆς ἀνόδου τοῦ φωτοκυττάρου ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου, ἐὰν τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ρεῦμα εἶναι $9{,}6 \cdot 10^{-12}$ A. ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.) ('Απ. α' $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ sec. β' $6 \cdot 10^7$ ἠλεκτρόνια/sec.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ'

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1197. Πόση ἡ συχνότης, ἐκπεφρασμένη εἰς kc/sec, **τοῦ πομποῦ Ἀθηνῶν, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος κύματος εἶναι 412** m.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ μῆκος τοῦ κύματος τοῦ πομποῦ τῶν Ἀθηνῶν καὶ ν τὴν συχνότητα αὐτοῦ, τότε ἡ ταχύτης c, μὲ τὴν ὁποίαν διαδίδεται τὸ ἐκπεμπόμενον κῦμα, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$c = \lambda \cdot \nu$$

Λύομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς ν καὶ λαμβάνομεν

$$\underline{\nu = \frac{c}{\lambda}}$$

Θέτοντες, $\lambda = 412 \cdot 10^2$ cm, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu = 728155 \text{ c/sec}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\nu = 728{,}155 \text{ kc/sec.}}$$

1198. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ κεραία ἡ χρησιμοποιουμένη εἰς τὴν ἀσύρματον τηλεπικοινωνίαν παίζει τὸν αὐτὸν ρόλον διὰ τὰς ἠλεκτρικὰς ταλαντώσεις, ὃν παίζει κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν εἰς τὰς ἠχητικὰς ταλαντώσεις, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς κεραίας ἥτις ὀφείλει νὰ ἐκπέμπῃ τὴν θεμελιώδη συχνότητα $5 \cdot 10^6$ c/sec.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ὁ τύπος τῆς συχνότητος τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον ἐκπέμπει κλειστὸς ἠχητικὸς σωλήν, εἶναι

$$\nu = \frac{\upsilon}{4l} \qquad (1)$$

ὅπου υ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος. Ἐὰν τώρα, ἀντὶ υ, θέσωμεν τὴν ταχύτητα c τοῦ φωτὸς (ἠλεκτρομαγνητικὴ ἀκτινοβολία) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς κεραίας εἶναι l, ἡ θεμελιώδης συχνότης τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας θὰ εἶναι

$$\nu = \frac{c}{4l} \qquad (2)$$

Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς l, λαμβάνομεν

$$l = \frac{c}{4\nu} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3), $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec, $\nu = 5 \cdot 10^6$ c/sec, εὑρίσκομεν

$$l = 15 \text{ m.}$$

1199. Εἰς κύκλωμα ταλαντώσεων ἡ χωρητικότης εἶναι 100 pF καὶ ἡ αὐτεπαγωγὴ $7 \cdot 10^{-6}$ H. Ποία ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῶν ταλαντώσεων.

Λύσις. Ἡ συχνότης ν τοῦ κυκλώματος ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

ὅπου L ἡ αὐτεπαγωγὴ καὶ C ἡ χωρητικότης τοῦ κυκλώματος

Θέτοντες, $L = 7 \cdot 10^{-6}$ H, $C = 10^{-10}$ F, εὑρίσκομεν

$$\nu = 6 \cdot 10^6 \text{ Hz.}$$

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν λ τὸ μῆκος κύματος καὶ c τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός, θὰ ἔχωμεν

$$c = \lambda \cdot \nu \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

ὁπότε, διὰ $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec καὶ $\nu = 6 \cdot 10^6$ Hz, εὑρίσκομεν

$$\lambda = 50 \text{ m.}$$

1200. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας τῆς ἐκπεμπομένης ὑπὸ κυκλώματος ταλαντώσεων, ἀποτελουμένου ἀπὸ πηνίον συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 1/5000 H καὶ πυκνωτοῦ χωρητικότητος 1/5000 μF.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν L τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ C τὴν χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ κυκλώματος ταλαντώσεων, τότε ἡ συχνότης ν τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\nu = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν καλέσωμεν c τὴν ταχύτητα διαδόσεως τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας (φωτὸς) καὶ λ τὸ μῆκος κύματος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$c = \lambda \cdot \nu \qquad \text{καὶ} \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} \qquad (2)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \qquad (3)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς λ, προκύπτει

$$\underline{\lambda = c \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4), $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec, $C = 1/5000\ \mu F = \frac{1}{5000} \cdot 10^{-6}$ F, $L = \frac{1}{5000}$ H, εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 376{,}8 \text{ m.}}$$

1201. Κύκλωμα ταλαντώσεων συνίσταται ἐκ σταθεροῦ πυκνωτοῦ, πηνίου αὐτεπαγωγῆς καὶ ρυθμιζομένου πυκνωτοῦ συνδεδεμένου παραλλήλως πρὸς τὸν πρῶτον. Ἡ χωρητικότης τούτου δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 3000 pF καὶ 6000 pF. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ταλαντώσεων εἶναι 590 Hz, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν 500 Hz. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ σταθεροῦ πυκνωτοῦ καὶ ἡ αὐτεπαγωγὴ τοῦ πηνίου.

Λύσις. Ἔστωσαν C_1 ἡ ἐλαχίστη, C_2 ἡ μεγίστη χωρητικότης τοῦ ρυθμιζομένου πυκνωτοῦ καὶ C ἡ χωρητικότης τοῦ σταθεροῦ πυκνωτοῦ. Ἡ ὁλικὴ χωρητικότης τοῦ κυκλώματος θὰ εἶναι

ἐλαχίστη $C_{\varepsilon\lambda} = C + C_1$ (1) μεγίστη $C_{\mu\varepsilon\gamma} = C + C_2$ (2)

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν $\nu_{\mu\varepsilon\gamma}$ τὴν μεγίστην συχνότητα, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλαχίστην χωρητικότητα, $\nu_{\varepsilon\lambda}$ τὴν ἐλαχίστην συχνότητα, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην χωρητικότητα καὶ L τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, θὰ ἔχωμεν τοὺς τύπους

$$\nu_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot (C + C_1)}} \quad (3) \qquad \nu_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot (C + C_2)}} \quad (4)$$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰς (3) καὶ (4) καὶ διαιροῦντες κατόπιν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\frac{\nu^2_{\mu\varepsilon\gamma}}{\nu^2_{\varepsilon\lambda}} = \frac{C + C_2}{C + C_1} \qquad (5)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς C, προκύπτει

$$\underline{C = \frac{C_2 \cdot \nu^2_{\varepsilon\lambda} - C_1 \cdot \nu^2_{\mu\varepsilon\gamma}}{\nu^2_{\mu\varepsilon\gamma} - \nu^2_{\varepsilon\lambda}}} \qquad (6)$$

καὶ διὰ $C_1 = 3000$ pF, $C_2 = 6000$ pF, $\nu_{\varepsilon\lambda} = 500$ Hz, $\nu_{\mu\varepsilon\gamma} = 590$ Hz, εὑρίσκομεν

$$\underline{C = 4645 \text{ pF.}}$$

Λύοντες ἀκολούθως τὸν τύπον (3) ὡς πρὸς L, λαμβάνομεν

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (C + C_1) \cdot \nu^2_{\mu\varepsilon\gamma}} \qquad (7)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (7), $C = 4645 \cdot 10^{-12}$ F, $C_1 = 3 \cdot 10^{-9}$ F, $\nu = 590$ Hz, εὑρίσκομεν

$$\underline{L = 9{,}53 \text{ H.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1202. Κύκλωμα ταλαντώσεων ἀποτελεῖται ἐκ χωρητικότητος $C = \frac{5}{9} \cdot 10^{-3}$ μF καὶ αὐτεπαγωγῆς $L = 8 \cdot 10^{-2}$ mH. Ποία ἡ περίοδος, ἡ συχνότης, ἡ κυκλικὴ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῶν ταλαντώσεων.
(Ἀπ. $13{,}2 \cdot 10^{-7}$ sec, 755 kHz, $4{,}74 \cdot 10^{6}$ sec^{-1}, 397,4 m.)

1203. Ποία ἡ αὐτεπαγωγὴ κυκλώματος ταλαντώσεων, χωρητικότητος $C = \frac{1}{10}$ μF καὶ μήκους κύματος $\lambda = 1300$ m. (Ἀπ. $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ mH.)

1204. Εἰς κύκλωμα ταλαντώσεων ἡ χωρητικότης εἶναι $C_1 = \frac{4}{9} \cdot 10^{-3}$ μF τό δὲ μῆκος κύματος $\lambda = 200$ m. Ἐὰν εἰς τὴν αὐτεπαγωγὴν L_1 τοῦ κυκλώματος προστεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτὴν ἡ L_2, τὸ μῆκος κύματος τοῦ κυκλώματος παραμένει ἀμετάβλητον, ὅταν ἡ πρώτη χωρητικότης μεταβληθῇ εἰς $C_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-3}$ μF. Ποία ἡ τιμὴ τῆς L_2.
(Ἀπ. $76 \cdot 10^{-6}$ H.)

1205. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει κύκλωμα περιλαμβάνον αὐτεπαγωγὴν 1/4000 H καὶ χωρητικότητα 1/4000 μF, ὅταν εἰς τὸ κύκλωμα ἔχομεν συντονισμόν. (Ἀπ. 640 kc.)

1206. Σταθμὸς ἀσυρμάτου, ἐκπομπῆς βραχέων μηκῶν κύματος χρησιμοποιεῖ μήκη περιλαμβανόμενα μεταξὺ 10 m καὶ 60 m. Ἐρασιτέχνης χρησιμοποιεῖ δέκτην ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ σταθερὰν αὐτεπαγωγὴν καὶ μεταβλητὸν πυκνωτήν, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ὁρίων 450 ΗΣΜ καὶ 45 ΗΣΜ - χωρητικότητος. Πόση ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς τῶν χρησιμοποιουμένων πηνίων διὰ τὴν ὁμάδα αὐτὴν τῶν κυμάτων. (Ἀπ. 0,00055 mH ἕως 0,002 mH.)

1207. Ἡ σταθερὰ αὐτεπαγωγὴ σταθμοῦ λήψεως ἀσυρμάτου τηλεγραφίας εἶναι διὰ μήκη κύματος περιλαμβανόμενα μεταξὺ 200 m καὶ 600 m ἴση πρὸς 0,2 mH. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μεταβλητοῦ πυκνωτοῦ, ἵνα δύναται νὰ ἀκουσθῇ ραδιοφωνικὸς σταθμός, ὅστις ἐκπέμπει εἰς μῆκος κύματος 483,9 m. (Ἀπ. $3 \cdot 10^{-10}$ F.)

1208. Πόση ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, τῆς ἐκπεμπομένης ὑπὸ κυκλώματος ἀποτελουμένου ἐξ αὐτεπαγωγῆς 1/3000 H καὶ χωρητικότητος 1/3000 μF. (Ἀπ. 477 kc/sec, 628,9 m.)

1209. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ κεραία ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπὸ πομποῦ ἀσυρμάτου τηλεγραφίας εἶναι διὰ τὰς ἠλεκτρικὰς ταλαντώσεις, ὡς κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν διὰ τὰς ἠχητικὰς κυμάνσεις, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς κεραίας ἡ ὁποία πάλλεται εἰς τὴν θεμελιώδη αὐτῆς συχνότητα ἴσην πρὸς 620 kc/sec. (Ἀπ. 121 m.)

1210. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ κεραία ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπὸ πομποῦ ἀσυρμάτου τηλεγραφίας εἶναι διὰ τὰς ἠλεκτρικὰς ταλαντώσεις, ὡς κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν διὰ τὰς ἠχητικὰς κυμάνσεις, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς κεραίας τῆς δυναμένης νὰ μεταδώσῃ ἠλεκτρομαγνητικὴν ἀκτινοβολίαν μήκους κύματος 50 m.
(Ἀπ. 12,5 m, 37,5 m, 62,5 m, $(2k + 1) \cdot 12{,}5$ m.)

1211. Ποῖαι αἱ τιμαὶ τῆς αὐτεπαγωγῆς καὶ τῆς χωρητικότητος, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων τὸ ὁποῖον πάλλεται εἰς μῆκος κύματος 483,9 m.
(Ἀπ. $255 \cdot 10^{-6}$ H, $255 \cdot 10^{-6}$ μF.)

1212. Λυχνία ταλαντώτρια διεγείρει κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἰς συχνότητα 1 000 250 c/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συχνότης τῶν διακροτημάτων τὰ ὁποῖα παράγονται ὅταν τὸ κύκλωμα συνδέεται πρὸς κεραίαν ἡ ὁποία δέχεται ἠλεκτρομαγνητικὰ κύματα 301 m, 300 m καὶ 299 m. Νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν συχνοτήτων τῶν διακροτημάτων, ποῖα διακροτήματα εἶναι ἀκουστὰ εἰς τὸ μεγάφωνον τοῦ δέκτου.

('Απ. 3600 sec^{-1}, 250 sec^{-1}, 3100 sec^{-1}. Μόνον τὰ διακροτήματα τὰ ὁποῖα δίδει τὸ μῆκος κύματος 300 m εἶναι ἀκουστὰ εἰς τὸ μεγάφωνον.)

1213. Πηνίον αὐτεπαγωγῆς 1 H συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς λυχνίαν πυρακτώσεως 2 Ω. Ἐπίσης ἐν σειρᾷ πρὸς ἑτέραν ὁμοίαν λυχνίαν συνδέεται πυκνωτὴς χωρητικότητος 10 μF. Τὰ δύο συστήματα συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὅλου συστήματος ἐφαρμόζεται ἐναλλασσομένη τάσις ἐνεργοῦ τιμῆς 630 V καὶ συχνότητος 50 Hz. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ κύκλωμα ὡς καὶ εἰς ἕκαστον τῶν δύο κλάδων. (Αἱ ἀπομακρύνσεις τῆς διαφορᾶς φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως ἐκ τῆς τιμῆς τῶν 90^0 δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν).

('Απ. $i_{1εν} = 2{,}005$ A, $i_{2εν} = 1{,}979$ A, $i_{εν} = 0{,}026$ A.)

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΓ΄

ΑΤΟΜΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1214. Τὸ μῆκος κύματος τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς (H_α) τοῦ φάσματος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι 6563 Å. Ποία ἡ συχνότης καὶ ἡ ἐνέργεια ἑνὸς φωτονίου τῆς ἀκτινοβολίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν γραμμὴν ταύτην. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= \mathbf{6{,}6 \cdot 10^{-27}}$ erg · sec, **ταχύτης τοῦ φωτὸς** $c = \mathbf{3 \cdot 10^{10}}$ cm/sec.

Λύσις. α) Ἡ συχνότης ν, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$c = \lambda \cdot \nu \tag{1}$$

ὅπου c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός, λ τὸ μῆκος κύματος καὶ ν ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας.

Ἐκ τοῦ τύπου (1), λύοντες ὡς πρὸς ν, λαμβάνομεν

$$\underline{\nu = \frac{c}{\lambda}} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2), $\lambda = 6563$ A$=6563 \cdot 10^{-8}$ cm καὶ ἐπειδὴ εἶναι $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, λαμβάνομεν διὰ τὴν συχνότητα ν,

$$\underline{\nu = 4{,}57 \cdot 10^{14}\ \mathrm{sec}^{-1}}.$$

β) Συμφώνως πρὸς τὴν κβαντικὴν θεωρίαν τῆς ἀκτινοβολίας, ἡ ἐνέργεια E ἑνὸς φωτονίου μονοχρωματικῆς ἀκτινοβολίας εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{E = h \cdot \nu} \tag{3}$$

ἔνθα h ἡ σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck καὶ ν ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας.

Εὕρομεν ὅτι, $\nu = 4{,}57 \cdot 10^{14}\ \mathrm{sec}^{-1}$, εἶναι δὲ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν

$$\underline{E = 3{,}016 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}.}$$

1215. Ἡ ὁρατὴ περιοχὴ τοῦ φάσματος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 4000 Å (ἰῶδες) καὶ 8000 Å (ἐρυθρόν). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια τῶν ἀντιστοίχων φωτονίων.

Λύσις. Ἡ ἐνέργεια E ἑνὸς φωτονίου εἶναι ἴση πρὸς

$$E = h \cdot \nu \tag{1}$$

Δεδομένου ὅτι $\nu = c/\lambda$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1)

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \tag{2}$$

Δίδονται, $\lambda_1 = 4000\ \text{Å} = 4000 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}$, $\lambda_2 = 8000\ \text{Å} = 8000 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}$, εἶναι δὲ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}$ καὶ $c = 3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$$\underline{E_1 = 4{,}95 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}.} \qquad \underline{E_2 = 2{,}47 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}.}$$

1216. Ἡ ὑψηλὴ τάσις ἡ ἐφαρμοζομένη μεταξὺ τῆς ἀνόδου καὶ τῆς καθόδου σωλῆνος ἀκτίνων Röntgen **εἶναι 30** kV. **α) Ποία ἡ ἐνέργεια ἑνὸς φωτονίου τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας** Röntgen. **β) Ποῖον τὸ μῆκος κύματος αὐτῆς. γ) Μὲ ποίαν ταχύτητα προσπίπτουν τὰ ἠλεκτρόνια ἐπὶ τῆς ἀντικαθόδου τοῦ σωλῆνος. Σταθερὰ δράσεως τοῦ** Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec, **φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου** $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ **ΗΣΜ-φορτίου, μᾶζα αὐτοῦ** $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Σημείωσις. Δεχόμεθα ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ἠλεκτρονίου προσπίπτοντος ἐπὶ τῆς ἀνόδου τοῦ σωλῆνος μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας Röntgen. **Τὸ αὐτὸ θὰ δεχθῶμεν καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους περιπτώσεις τῆς Κατηγορίας Β′.**

Λύσις. α) Συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῆς γενέσεως τοῦ συνεχοῦς φάσματος τῆς ἀκτινοβολίας, τὴν ὁποίαν ἐκπέμπει σωλὴν ἀκτίνων Röntgen καὶ τὴν παραδοχὴν τῆς ἀσκήσεως, ἡ ἐνέργεια E ἑνὸς φωτονίου τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας Röntgen συχνότητος ν, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E = e \cdot U$$

ἔνθα e τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ U ἡ διεγείρουσα τὸν σωλῆνα τάσις. Δίδονται $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $U = 30\ \mathrm{kV} = 30000\ \mathrm{V} = 30000/300$ ΗΣΜ - τάσεως $= 100$ ΗΣΜ - τάσεως. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{E = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg}.}$$

β) Τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$E = h \cdot \nu \quad \text{ἢ} \quad E = h \cdot \frac{c}{\lambda}, \quad \text{ὁπότε} \quad \lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

Εὕρομεν, $E = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg}$, εἶναι δὲ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}$ καὶ $c = 3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν, λαμβάνομεν

$$\underline{\lambda = 41{,}25 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm} = 41{,}25\ \text{Å}.}$$

γ) Ὡς γνωστόν, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου θὰ προέρχεται ἐξ ὁλοκλήρου ὑπὸ τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν, $E = 1/2 \cdot m \cdot \upsilon^2$, ἐὰν δὲ λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς υ, λαμβάνομεν

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot \frac{E}{m}}$$

Θέτοντες εἰς αὐτήν, $E = 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ erg, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, εὑρίσκομεν

$$\underline{\upsilon = 1{,}03 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}}$$

1217. Ὅταν πλὰξ ἐκ χαλκοῦ φωτισθῇ δι' ὑπεριώδους φωτὸς μήκους κύματος 2540 Å ἐκπέμπονται ἐξ αὐτῆς φωτοηλεκτρόνια κινητικῆς ἐνεργείας $0{,}896 \cdot 10^{-12}$ erg. α) Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον μῆκος κύματος, διὰ τὸ ὁποῖον λαμβάνει χώραν ἀπόσπασις φωτοηλεκτρονίων ἐκ τῆς πλακός. β) Ἐὰν ἡ πλὰξ φωτισθῇ δι' ὑπεριώδους φωτὸς μήκους κύματος 2000 Å, ποία ἡ ταχύτης τῶν ἀποσπωμένων φωτοηλεκτρονίων.

Λύσις. α) Ἔστω ν_{op} ἡ ὁρικὴ συχνότης τῆς προσπιπτούσης ἀκτινοβολίας, διὰ τὴν ὁποίαν παρατηρεῖται τὸ φωτοηλεκτρικὸν φαινόμενον εἰς τὸν χαλκόν. Τότε, ἐὰν διὰ b παραστήσωμεν τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς, θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$h \cdot \nu_{op} = b \tag{1}$$

Ἐπειδὴ $\nu_{op} = \dfrac{c}{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}}$, ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}} = b \tag{2}$$

Ἐὰν εἰς τὴν φωτοηλεκτρικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein, $h \cdot \nu = \dfrac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + b$, θέσωμεν, $\dfrac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = E_{\kappa\iota\nu}$ καὶ συνδυάσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν (2) λαμβάνομεν, διὰ τὸν χαλκὸν

$$h \cdot \nu = E_{\kappa\iota\nu} + h \cdot \frac{c}{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}} \tag{3}$$

Ἔστω ὅτι φωτίζομεν τὴν πλάκα μὲ φῶς μήκους κύματος λ. Ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_{\kappa\iota\nu} + h \cdot \frac{c}{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}} \tag{4}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\lambda_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{h \cdot c \cdot \lambda}{h \cdot c - \lambda \cdot E_{\kappa\iota\nu}} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5), $\lambda = 2540$ Å $= 2540 \cdot 10^{-8}$ cm, $E_{\kappa\iota\nu} = 0{,}896 \cdot 10^{-12}$ erg, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · sec, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma} = 2860 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 2860 \text{ Å}.}$$

β) Ἡ ταχύτης υ τῶν φωτοηλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα ἐκπέμπονται ὑπὸ τοῦ μετάλλου, ὅταν τοῦτο φωτισθῇ διὰ φωτὸς μήκους κύματος λ, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (4), ὅστις γράφεται

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + h \cdot \frac{c}{\lambda_{\mu\varepsilon\gamma}} \tag{6}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον (6) ὡς πρὸς υ, λαμβάνομεν

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,h \cdot c}{m} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda_{\mu\epsilon\gamma}}\right)} \qquad (7)$$

Εὕρομεν $\lambda_{\mu\epsilon\gamma} = 2860\ \text{Å} = 2860 \cdot 10^{-8}$ cm. Δίδονται, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · sec, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $\lambda = 2000\ \text{Å} = 2000 \cdot 10^{-8}$ cm. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (7), εὑρίσκομεν

$$\underline{\upsilon = 2{,}56 \cdot 10^{7}\ \text{cm/sec.}}$$

1218. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ πρὸς μᾶζαν 1 gr, α) εἰς erg, β) εἰς kWh, γ) εἰς eV καὶ δ) εἰς cal.

Λύσις. α) Ἡ ἰσοδυναμία μεταξὺ ὕλης καὶ ἐνεργείας ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = m \cdot c^2$$

ἔνθα c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον αὐτὸν $m = 1$ gr καὶ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 9 \cdot 10^{20}\ \text{erg.}}$$

β) Ἐπειδὴ 1 kWh $= 3{,}6 \cdot 10^{6}$ Joule $= 3{,}6 \cdot 10^{13}$ erg, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια ἰσοῦται πρὸς

$$\underline{E = 25 \cdot 10^{6}\ \text{kWh.}}$$

γ) Ἐπειδὴ εἶναι 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg (βλ. Ἄσκησιν 1165) προκύπτει ὅτι

$$\underline{E = 5{,}625 \cdot 10^{32}\ \text{eV.}}$$

δ) Ὡς γνωστὸν 1 cal $= 4{,}2$ Joule $= 4{,}2\ 10^{7}$ erg, ἑπομένως

$$\underline{E = 2{,}1 \cdot 10^{13}\ \text{cal.}}$$

1219. Ποία ἡ μᾶζα ἡ ἰσοδυναμοῦσα πρὸς ἐνέργειαν α) 1 eV, β) 1 kgr*m.

Λύσις. α) Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $E = m \cdot c^2$, ἡ μᾶζα ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐνέργειαν E εἶναι ἴση πρὸς

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad (1)$$

ὅπου c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός. Ἡ σχέσις αὕτη παρέχει τὴν μᾶζαν m εἰς γραμμάρια, ἐὰν ἡ ἐνέργεια ἐκφρασθῇ εἰς erg, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς cm/sec.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βόλτ γνωρίζομεν ὅτι 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg, εἶναι δὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$cm/sec.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν

$$\underline{m = 1{,}77 \cdot 10^{-33}\ \text{gr.}}$$

β) Ἐπειδὴ 1 kgr*m $= 981000$ dyn · 100 cm $= 9{,}81 \cdot 10^{7}$ erg, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (1)

$$\underline{m = 1{,}09 \cdot 10^{-13}\ \text{gr.}}$$

1220. Ἐὰν ἡ μᾶζα ἑνὸς ἠλεκτρονίου μετατραπῇ εἰς ἐνέργειαν ἑνὸς φωτονίου ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, ποῖον τὸ μῆκος κύματος τὸ ὁποῖον ἀντι-

στοιχεῖ πρὸς τοῦτο. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= \mathbf{6{,}6 \cdot 10^{-27}}$ erg · sec, **ταχύτης τοῦ φωτὸς** $c = \mathbf{3 \cdot 10^{10}}$ cm/sec. **Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου** $= \mathbf{9 \cdot 10^{-28}}$ gr.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ m τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου, τότε ἡ ἐνέργεια E τοῦ ἐκπεμπομένου φωτονίου θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$E = m \cdot c^2 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς τὴν κβαντικὴν θεωρίαν τῆς ἀκτινοβολίας, ἐὰν ἡ συχνότης τοῦ φωτονίου εἶναι ν, ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ E, πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E = h \cdot \nu \qquad (2)$$

ἤ, ἐπειδὴ $\nu = c/\lambda$

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \qquad (3)$$

ἔνθα h εἶναι ἡ σταθερά δράσεως τοῦ Planck καὶ λ τὸ μῆκος κύματος τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ φωτόνιον.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) προκύπτει

$$m \cdot c^2 = h \cdot \frac{c}{\lambda} \qquad (4)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς λ, λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot c} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5), $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · sec, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 0{,}024 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} = 0{,}024\ \text{Å}.}$$

1221. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν τοῦτο κινῆται ἐπὶ τῆς τροχιᾶς K μὲ ταχύτητα $\mathbf{2 \cdot 10^{10}}$ cm/sec. **Μᾶζα ἠρεμίας τοῦ ἠλεκτρονίου** $m_o = \mathbf{9 \cdot 10^{-28}}$ gr, **ταχύτης τοῦ φωτὸς** $c = \mathbf{3 \cdot 10^{10}}$ cm/sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_o τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, ἡ μᾶζα τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο ὅταν κινῆται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα υ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $m_o = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $\upsilon = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec, καὶ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν τοῦτο κινῆται ἐπὶ τῆς τροχιᾶς K, εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{m = 12{,}08 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}.}$$

1222. Ποία ἡ ταχύτης ἠλεκτρονίου, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα εἶναι κατὰ 20 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς μάζης ἠρεμίας αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

ἐπειδὴ $m = 20\ m_o$, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$20\ m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς υ, προκύπτει

$$\upsilon = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{400}} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), ἐπειδὴ εἶναι $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$\upsilon = 299\,500 \text{ km/sec.}$$

1223. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 55,84. Ζητοῦνται α) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμματόμου σιδήρου, β) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου σιδήρου, γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων σιδήρου τῶν περιεχομένων ἐντὸς 1 cm³ σιδήρου. Πυκνότης τοῦ σιδήρου = 7,6 gr/cm³, μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου = $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.

Λύσις. α) Τὸ γραμμάτομον ἑνὸς στοιχείου ὁρίζεται, κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὡς καὶ τὸ γραμμομόριον, ὡς ἡ ποσότης ἐκείνη τοῦ στοιχείου, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν τόσων γραμμαρίων, ὅσον εἶναι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ στοιχείου. Ἑπομένως, ἐφ' ὅσον τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 55,84, ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμματόμου σιδήρου θὰ εἶναι ἴση πρὸς 55,84 gr.

β) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀτομικοῦ βάρους, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ σιδήρου

$$A = \frac{m_{\text{ἀτόμου σιδήρου}}}{m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}} \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ ἀτόμου τοῦ σιδήρου, λαμβάνομεν

$$m_{\text{ἀτόμου σιδήρου}} = A \cdot m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) θέσωμεν, $A = 55{,}84$ καὶ $m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr, εὑρίσκομεν

$$m_{\text{ἀτόμου σιδήρου}} = 93{,}25 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}$$

γ) Ἐφ' ὅσον ἡ πυκνότης τοῦ σιδήρου εἶναι ἴση πρὸς 7,6 gr/cm³, ἕπεται ὅτι 1 cm³ σιδήρου ἔχει μᾶζαν 7,6 gr. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου σιδήρου εἶναι ἴση πρὸς $93{,}25 \cdot 10^{-24}$ gr, διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι, εἰς 1 cm³ σιδήρου περιέχονται

$$n = 8{,}15 \cdot 10^{22} \text{ ἄτομα σιδήρου.}$$

1224. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου (O_2) εἶναι 16. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὀξυγόνου, β) ἡ μᾶζα ἑνὸς μορίου ὀξυγόνου, γ) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου = $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.

Λύσις. α) Ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους A τοῦ ὀξυγόνου

$$A = \frac{m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}}}{m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}}$$

δι' ἐπιλύσεως αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ ἀτόμου τοῦ ὀξυγόνου, προκύπτει

$$m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}} = A \cdot m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}$$

Δίδονται, $A = 16$ καὶ $m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}} = 26{,}72 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}$$

β) Τὸ μόριον τοῦ ὀξυγόνου, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀτόμων ὀξυγόνου. Ἑπομένως ἡ μᾶζα τοῦ μορίου τοῦ ὀξυγόνου, θὰ εἶναι διπλασία τῆς μάζης τοῦ ἀτόμου αὐτοῦ, ἤτοι

$$m_{\text{μορίου ὀξυγόνου}} = 53{,}44 \cdot 10^{-24}\ \text{gr}.$$

γ) Τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι ἴσον πρὸς 32, ἐπομένως ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου θὰ εἶναι ἴση πρὸς 32 gr.

1225. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμομορίων τῶν περιεχομένων ἐντὸς 1 m³ ὀξυγόνου (O_2) εὑρισκομένου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, β) ἡ μᾶζα 1 m³ ὀξυγόνου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων ὀξυγόνου τὰ ὁποῖα περιέχονται ἐντὸς αὐτοῦ καὶ δ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς αὐτοῦ περιεχομένων μορίων.

Λύσις. α) Ὡς γνωστόν, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, 22,4 λίτρα οἱουδήποτε ἀερίου, ἔχουν μᾶζαν ἴσην πρὸς ἓν γραμμομόριον (1Mol) τοῦ ἀερίου. Συνεπῶς 1m³ ὀξυγόνου = 1000 λίτρα ὀξυγόνου, θὰ ἔχῃ μᾶζαν ἡ ὁποία, διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκεται ἴση πρὸς

$$m = 44{,}64\ \text{Mol}.$$

β) Τὸ γραμμομόριον τοῦ ὀξυγόνου, ἔχει μᾶζαν ἴσην πρὸς 32 gr (ἐπειδὴ τὸ μοριακόν του βάρος εἶναι ἴσον πρὸς 32 gr). Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ἓν γραμμομόριον ὀξυγόνου, ἤτοι 32 gr ὀξυγόνου, καταλαμβάνουν ὄγκον 22,4 λίτρων, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι 1m³ ὀξυγόνου = 1000 λίτρα ὀξυγόνου, θὰ ἔχῃ μᾶζαν

$$m = 1428\ \text{gr}.$$

γ) Δεδομένου ὅτι, ἓν ἄτομον ὀξυγόνου ἔχει μᾶζαν $26{,}72 \cdot 10^{-24}$ gr (βλ. προηγουμένην ἄσκησιν), διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι, εἰς 1m³ ὀξυγόνου, ἤτοι 1428 gr ὀξυγόνου, περιέχονται

$$n = 5{,}34 \cdot 10^{25}\ \text{ἄτομα ὀξυγόνου}.$$

δ) Ἐφ' ὅσον ἓν μόριον ὀξυγόνου ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀτόμων ὀξυγόνου, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς 1 m³ ὀξυγόνου περιεχομένων μορίων ὀξυγόνου, θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων, ἤτοι πρὸς

$$n = 2{,}67 \cdot 10^{25}\ \text{μόρια}.$$

1226. Ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς μορίου ἀερίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T τοῦ ἀερίου. Ποῖος ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας, ἐὰν ἡ μέση ταχύτης υ ἑνὸς μορίου ὀξυγόνου εἰς 0° C εἶναι 460 m/sec. Μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου = 32. Σταθερὰ Loschmidt N = 6,06 · 10²³ μόρια/Mol.

Λύσις. Ἔστω m ἡ μᾶζα ἑνὸς μορίου ἀερίου καὶ $\overline{\upsilon}$ ἡ μέση ταχύτης τῆς θερμικῆς κινήσεως αὐτοῦ εἰς θερμοκρασίαν T. Τότε, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον συντελεστὴν διὰ k, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \overline{\upsilon^2} = k \cdot T$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς k, λαμβάνομεν

$$k = \frac{m\,\overline{\upsilon^2}}{2\,T} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀφ' ἑτέρου καλέσωμεν M τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου, θὰ εἶναι 1Mol ὀξυγόνου = = M gr καὶ θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν μᾶζαν ἑνὸς μορίου ὀξυγόνου

$$m = \frac{M}{N} \qquad (2)$$

ἔνθα M τὸ γραμμομόριον τοῦ ὀξυγόνου καὶ N ἡ σταθερὰ Loschmidt. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (1) καὶ (2), προκύπτει

$$k = \frac{M \cdot \overline{\upsilon}^2}{2\,N \cdot T} \tag{3}$$

Ἐὰν εἰς τὴν (3) θέσωμεν, $M = 32$ gr, $\overline{\upsilon} = 460$ m/sec $= 4{,}6 \cdot 10^4$ cm/sec, $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ μόρια/Mol καὶ $t = 0^0\,C = 273^0\,K$, εὑρίσκομεν

$$\underline{k = 2{,}05 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad.}}$$

1227. Κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἀερίου, ὥστε ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς μορίου τοῦ ἀερίου ν' αὐξηθῇ κατὰ 1 eV.

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως

$$\overline{E}_{\kappa\iota\nu} = k \cdot T \tag{1}$$

ἐάν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς T, λαμβάνομεν

$$T = \frac{\overline{E}_{\kappa\iota\nu}}{k} \tag{2}$$

Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὕρομεν $k = 2{,}05 \cdot 10^{-16}$ erg/grad, εἶναι δὲ $1\text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg. Δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{T = 7767^0\,K.}$$

1228. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ πυρῆνος πρέπει νὰ μεταφερθῇ τὸ ἠλεκτρόνιον τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὥστε ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀσκουμένη ἑλκτικὴ δύναμις νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου. Σταθερὰ Loschmidt **$N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμάτομον.** $g = 981$ cm/sec². **Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Ἀτομικὸν βάρος ὑδρογόνου = 1.**

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν r τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ τοῦ πυρῆνος τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου καὶ e τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον, τότε ἡ δύναμις F, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ πυρῆνος ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$F = \frac{e^2}{r^2} \tag{1}$$

(διότι τὸ φορτίον τοῦ πυρῆνος τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου (τοῦ πρωτονίου) εἶναι ἀπολύτως ἴσον πρὸς e).

Ἀφ' ἑτέρου διὰ τὸ βάρος ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου θὰ ἔχωμεν

$$B_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} = m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} \cdot g \tag{2}$$

προσέτι δέ, κατ' ἀναλογίαν ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν (1226), θὰ εἶναι

$$m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} = \frac{A}{N} \tag{3}$$

ἔνθα A τὸ γραμμάτομον τοῦ ὑδρογόνου καὶ N ἡ σταθερὰ Loschmidt. Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $B_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}} = \frac{A}{N} \cdot g$

Διὰ νὰ εἶναι $F = B_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}$ πρέπει

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{A}{N} \cdot g \tag{4}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (4) ὡς πρὸς r θὰ προκύψῃ ὁ τελικὸς τύπος

$$r = e \cdot \sqrt{\frac{N}{A \cdot g}} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5) $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμάτομον, $A = 1$ gr καὶ $g = 981$ cm/sec², εὑρίσκομεν

$$r = 11{,}9 \text{ cm.}$$

1229. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν τοῦτο περιστρέφεται περὶ τὸν πυρῆνα ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $5{,}28 \cdot 10^{-9}$ cm. Ποία ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου. $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Λύσις. Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον κινῆται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἀκτῖνος r, ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ ἡ δύναμις Coulomb F_C, ἥτις τὸ περιστρέφει καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ κεντρομόλος δύναμις F_K. Ἤτοι

$$F_K = F_C \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $F_K = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r}$ καὶ $F_C = \frac{e^2}{r^2}$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς υ, λαμβάνομεν

$$\upsilon = \frac{e}{\sqrt{m \cdot r}} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $r = 5{,}28 \cdot 10^{-9}$ cm, εὑρίσκομεν

$$\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^8 \text{ cm/sec.}$$

β) Ἐκ τῶν γνωστῶν τύπων, $\upsilon = \omega \cdot r$ καὶ $\omega = 2\pi \cdot \nu$, λαμβάνομεν

$$\nu = \frac{\upsilon}{2\pi \cdot r}$$

Εὕρομεν, $\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^8$ cm/sec, εἶναι δὲ $r = 5{,}28 \cdot 10^{-9}$ cm. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\nu = 6{,}6 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}.$$

1230. Κατὰ τὴν διέγερσιν τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, τὸ ἠλεκτρόνιον μεταπηδᾷ ἐκ τῆς τροχιᾶς Κ εἰς τὴν ὁποίαν περιφέρεται μονίμως (θεμελιώδης τροχιά), εἰς τὴν τροχιὰν Μ, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ εἶναι κατὰ 2,85 eV μεγαλυτέρα τῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἠλεκτρόνιον ὅταν περιστρέφεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος καὶ ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας ἡ ὁποία ἐκπέμπεται ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπανέλθῃ ἐπὶ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν E_1 τὴν ἐνέργειαν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς Κ καὶ E_2 τὴν ἐνέργειαν αὐτοῦ εἰς τὴν τροχιὰν Μ (ἔχουσαν ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τῆς θεμελιώδους), τότε, συμφώνως πρὸς τὴν δευτέραν κβαντικὴν συνθήκην τοῦ Bohr, κατὰ τὴν ἐπάνοδον τοῦ ἠλεκτρονίου ἐκ τῆς τροχιᾶς μεγαλυτέρας ἐνεργείας Μ εἰς τὴν θεμελιώδη τροχιὰν Κ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα ἐνέργεια, ἐκπέμπεται ἓν φωτόνιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$h \cdot \nu = E_2 - E_1 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\nu = \frac{c}{\lambda}$, ἡ (1) γράφεται

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_2 - E_1 \qquad (2)$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς λ, λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_2 - E_1} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3), $E_2 - E_1 = 2{,}85\ eV = 2{,}85 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg = 4{,}56 \cdot 10^{-12}\ erg$, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$, $c = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἐκπεμπομένου φωτονίου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\underline{\lambda = 4340 \cdot 10^{-8}\ cm = 4340\ \text{Å}.}$$

1231. Τὸ μῆκος κύματος τῆς κυανῆς γραμμῆς τοῦ φάσματος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι 4861 Å. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πρὸς τὴν ἀνωτέρω γραμμὴν ἀντιστοιχοῦσα διαφορὰ ἐνεργείας μεταξὺ δύο ἐπιτρεπομένων τροχιῶν τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου.

Λύσις· Ἐκ τῶν σχέσεων, $h \cdot \nu = E_2 - E_1$ καὶ $c = \lambda \cdot \nu$, λαμβάνομεν

$$\underline{E_2 - E_1 = h \cdot \frac{c}{\lambda}}$$

Δίδεται, $\lambda = 4861\ \text{Å} = 4861 \cdot 10^{-8}\ cm$, εἶναι δὲ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$ καὶ $c = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$. Δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν

$$\underline{E_2 - E_1 = 4{,}07 \cdot 10^{-12}\ erg = 2{,}54\ eV.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1232. Ποία ἡ ἐνέργεια ἑνὸς φωτονίου τοῦ φωτὸς τῆς ἰώδους γραμμῆς τοῦ φάσματος τοῦ ὑδρογόνου, τῆς ἐχούσης μῆκος κύματος $\lambda = 4101\ \text{Å}$. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$, ταχύτης τοῦ φωτὸς $= 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$.
(Ἀπ. $4{,}83 \cdot 10^{-12}$ erg.)

1233. Ποία ἡ ἐνέργεια εἰς erg, kgr*m καὶ eV ἑνὸς φωτονίου μονοχρωματικῆς ἀκτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{Å}$. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}554 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$. Ταχύτης τοῦ φωτὸς $c = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$.
(Ἀπ. α' $9{,}831 \cdot 10^{-5}$ erg, β' 10^{-12} kgr*m, γ' $61{,}7 \cdot 10^{6}$ eV.)

1234. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας, τῆς ὁποίας τὰ φωτόνια ἔχουν ἐνέργειαν 1 keV. (1 keV $= 10^3\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ erg$). Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$.
(Ἀπ. 12,3 Å.)

1235. Πόσα φωτόνια μονοχρωματικῆς ἀκτινοβολίας μήκους κύματος 1 Å ἔχουν συνολικῶς ἐνέργειαν ἴσην πρὸς 1 erg. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}55 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$.
(Ἀπ. $5 \cdot 10^{7}$ φωτόνια.)

1236. Πόσα φωτόνια ἐρυθρᾶς ἀκτινοβολίας μήκους κύματος 7500 Å ἔχουν συνολικὴν ἐνέργειαν ἰσοδύναμον πρὸς ποσὸν θερμότητος 1 cal. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec$.
(Ἀπ. $1{,}59 \cdot 10^{19}$ φωτόνια.)

1237. Ἡ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου σωλῆνος ἀκτίνων Röntgen εἶναι 230 000 V. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος καὶ ἡ συχνότης τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας Röntgen. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου. Ταχύτης τοῦ φωτὸς $= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. (Ἀπ. 0,0537 Å, $5{,}58 \cdot 10^{19}$ Hz.)

1238. Ποία τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου σωλῆνος ἀκτίνων Röntgen, διὰ νὰ παραχθῇ ἀκτινοβολία μήκους κύματος 1/10 Å. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου. (Ἀπ. 124 kV περίπου.)

1239. Ὑπὸ ποίας τάσεως πρέπει νὰ διεγερθῇ σωλὴν ἀκτίνων Röntgen διὰ νὰ δώσῃ φωτόνια ἐνεργείας $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ erg. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec, φορτίον ἠλεκτρονίου $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου. (Ἀπ. 100 000 V.)

1240. Ἡ ὑψηλὴ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου σωλῆνος ἀκτίνων Röntgen εἶναι 10 kV. Μὲ ποίαν ταχύτητα προσπίπτουν τὰ ἠλεκτρόνια ἐπὶ τῆς ἀνόδου. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου, μᾶζα αὐτοῦ $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. $5{,}92 \cdot 10^{7}$ m/sec.)

1241. Ὅταν μεταλλικὴ πλὰξ φωτισθῇ μὲ ἰῶδες φῶς μήκους κύματος 4 000 Å ἐκπέμπονται ἐξ αὐτῆς φωτοηλεκτρόνια κινητικῆς ἐνεργείας $1{,}28 \cdot 10^{-12}$ erg. Ποῖον τὸ μέγιστον μῆκος κύματος διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὴ ἡ ἀπόσπασις φωτοηλεκτρονίων ἐκ τοῦ μετάλλου τῆς πλακός. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Ταχύτης τοῦ φωτὸς $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. (Ἀπ. 5390 Å.)

1242. Τὸ μέγιστον μῆκος κύματος διὰ τὸ ὁποῖον λαμβάνει χώραν ἀπόσπασις φωτοηλεκτρονίων ἐκ πλακὸς βολφραμίου εἶναι $2{,}73 \cdot 10^{-5}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ (εἰς eV) ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν ἠλεκτρονίων τὰ ὁποῖα ἀποσπῶνται ἐκ τῆς πλακός, ὅταν αὕτη φωτισθῇ μὲ ὑπεριῶδες φῶς μήκους κύματος $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. 2,34 eV.)

1243. Τὸ μέγιστον μῆκος κύματος διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὴ ἡ ἀπόσπασις φωτοηλεκτρονίων ἐκ τῆς ἐπιφανείας στρώματος νατρίου εἶναι 5830 Å. α) Ποία ἡ ἐνέργεια ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἀπόσπασιν ἑνὸς ἠλεκτρονίου. β) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια φωτισθῇ μὲ ἰῶδες φῶς μήκους κύματος 4500 Å, ποία ἡ ταχύτης τῶν ἀποσπωμένων φωτοηλεκτρονίων. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ gr. Ταχύτης τοῦ φωτὸς $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec (Ἀπ. α′ 2,125 eV. β′ $4{,}7 \cdot 10^{5}$ m/sec.)

1244. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ πρὸς μᾶζαν 1 kgr α) εἰς erg, β) εἰς kWh καὶ γ) εἰς cal. 2) Πρὸς πόσην μᾶζαν ἰσοδυναμεῖ ἐνέργεια 1 keV. Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς ἰσοῦται πρὸς $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.
(Ἀπ. 1′ α′ $9 \cdot 10^{23}$ erg, β′ $25 \cdot 10^{9}$ kWh, γ′ $2{,}1 \cdot 10^{16}$ cal. 2′ $m = 1{,}77 \cdot 10^{-30}$ gr.)

1245. Κατὰ τὴν ἕνωσιν ἑνὸς γραμμομορίου ὑδρογόνου πρὸς ἓν γραμμάτομον ὀξυγόνου ἐκλύεται θερμότης ἴση πρὸς 69 kcal. Ποῖον μέρος τῆς συνολικῆς μάζης τῶν ἀντιδρώντων σωμάτων μετατρέπεται κατὰ τὴν ἀντίδρασιν εἰς ἐνέργειαν. $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $J = 4{,}18$ Joule/cal. (Ἀπ. $\frac{1}{56 \cdot 10^{8}}$.)

1246. Ἐὰν 10^{-25} gr ὕλης μετατραποῦν εἰς ἐνέργειαν ἑνὸς φωτονίου ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τοῦτο. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ erg · sec. (Ἀπ. $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ Å.)

1247. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ αὔξησις τῆς μάζης 1 λίτρου ὕδατος, κατὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας του ἀπὸ 0^0 C εἰς 100^0 C. J = 4,18 Joule/cal.
(Ἀπ. $4{,}644 \cdot 10^{-9}$ gr.)

1248. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ λειτουργῇ ἄνευ διακοπῆς λυχνία πυρακτώσεως 80W, ἵνα τὸ νῆμα της ὑποστῇ ἀπώλειαν μάζης ἴσην πρὸς $2 \cdot 10^{-5}$ gr.
(Ἀπ. 6232 h καὶ 30 min.)

1249. Ἡ μᾶζα σώματος, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, εἶναι m_o. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα 150 000 km/sec. (Ἀπ. 1,154 m_o.)

1250. Ἠλεκτρόνιον τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων τοῦ πεδίου τούτου. α) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο σημείων, ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός. β) Ποία ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν αὔξησις τῆς μάζης τοῦ ἠλεκτρονίου, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ τὴν ταχύτητα αὐτήν. $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.
(Ἀπ. α' 74 kV, β' 15 %.)

1251. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς μονάδας Ångström (Å), α) ἡ ἀκτὶς τοῦ μορίου τοῦ ὕδατος, β) ἡ ἀκτὶς τοῦ ἀτόμου τοῦ ὀκταεδρικοῦ θείου. Δίδονται α) Μοριακὸν βάρος τοῦ ὕδατος M = 18, σταθερὰ Loschmidt $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμάτομον. Πυκνότης ὕδατος εἰς 0^0 C $\rho = 1$ gr/cm^3, β) Ἀτομικὸν βάρος τοῦ θείου = 32. Πυκνότης ὀκταεδρικοῦ θείου $\rho' = 2{,}07$ gr/cm^3. (Ἀπ. α' 1,912 Å, β' 1,81 Å.)

1252. Νὰ ὑπολογισθῇ (εἰς dyn καὶ kgr*) ἡ κεντρομόλος δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ ἠλεκτρονίου περιστρεφομένου μὲ ταχύτητα $2 \cdot 10^{10}$ cm/sec ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $5{,}3 \cdot 10^{-7}$ cm. Ποία ἡ τιμὴ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος αὐτοῦ. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. 0,68 dyn ἢ $6{,}9 \cdot 10^{-7}$ kgr*, $3{,}77 \cdot 10^{16}$ rad/sec.)

1253. Ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν τοῦτο κινῆται ἐπί τινος ἐκ τῶν ἐπιτρεπομένων τροχιῶν, εἶναι $6 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ προκαλουμένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. (Ἀπ. 0,96 mA.)

1254. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ οὐρανίου εἶναι 238,07. Νὰ ὑπολογισθῇ, α) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμματόμου οὐρανίου, β) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου οὐρανίου καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων τοῦ οὐρανίου τῶν περιεχομένων εἰς 1 cm^3 οὐρανίου. Πυκνότης οὐρανίου = 18,3 gr/cm^3. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.)
(Ἀπ. α' 238,07 gr, β' $397{,}57 \cdot 10^{-24}$ gr, γ' $4{,}6 \cdot 10^{22}$ ἄτομα.)

1255. Πόσα μόρια ὕδατος περιέχονται εἰς 1 mm^3 ὕδατος 0^0 C. Ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἰς 0^0 C εἶναι 1 gr/cm^3. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.
(Ἀπ. $33{,}2 \cdot 10^{18}$ μόρια.)

1256. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀζώτου εἶναι 14. Νὰ εὑρεθῇ, α) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου καὶ ἡ μᾶζα ἑνὸς μορίου ἀζώτου, β) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων ἀζώτου, τῶν περιεχομένων εἰς ἓν λίτρον ἀζώτου. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.
(Ἀπ. α' $23{,}38 \cdot 10^{-24}$ gr, β' $46{,}76 \cdot 10^{-24}$ gr, γ' $5{,}34 \cdot 10^{22}$ ἄτομα, $2{,}67 \cdot 10^{22}$ μόρια.)

1257. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἡλίου εἶναι 4. α) Ποία ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ἡλίου, β) Πόσα ἄτομα ἡλίου περιέχονται εἰς ἓν λίτρον ἡλίου. Τὸ ἥλιον εἶναι ἀέριον μονατομικόν. Σταθερὰ Loschmidt $= 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμάτομον.

('Απ. α' $6{,}68 \cdot 10^{-24}$ gr, β' $2{,}68 \cdot 10^{22}$ ἄτομα.)

1258. Τὸ ἠλεκτρόνιον ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου περιστρέφεται περὶ τὸν πυρῆνα μὲ ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, ἐπὶ τροχιᾶς ἀκτῖνος $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m. Ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $2{,}2 \cdot 10^{6}$ m/sec. α) Ἐὰν τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου εὑρεθῇ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss, κατὰ τρόπον ὥστε, τὸ ἐπίπεδον τῆς ἠλεκτρονικῆς τροχιᾶς νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῆς δυνάμεως Coulomb, τῆς ἀσκουμένης μεταξὺ τοῦ πυρῆνος τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου καὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, πρὸς τὴν δύναμιν Laplace, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου ἠλεκτρονίου.

('Απ. $F_C / F_L = 2{,}36 \cdot 10^{6}$.)

1259. Τὰ μήκη κύματος τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς δύο ἐκ τῶν ἰωδῶν γραμμῶν τοῦ φάσματος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἀντιστοίχως 4340 Å καὶ 3970 Å. Νὰ ὑπολογισθῇ (εἰς eV) ἡ εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν δύο γραμμῶν ἀντιστοιχοῦσα διαφορὰ ἐνεργείας μεταξὺ δύο ἐπιτρεπομένων τροχιῶν τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου.

('Απ. α' 2,86 eV, β' 3,12 eV.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΔ'

ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1260. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὥστε, ὅταν ἓν σωμάτιον α τὸ ὁποῖον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τοῦ πεδίου, κινηθῇ μεταξὺ αὐτῶν, ν' ἀποκτήσῃ εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του κινητικὴν ἐνέργειαν 10^5 eV.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ὥστε ἓν σωμάτιον τὸ ὁποῖον φέρει φορτίον q, κινούμενον μεταξὺ αὐτῶν, ν' ἀποκτήσῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{κιν}$, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $E_{κιν} = q \cdot U$, ἴση πρὸς

$$U = \frac{E_{κιν}}{q} \tag{1}$$

Ἐὰν τὸ ἐπιταχυνόμενον σωμάτιον εἶναι ἓν σωμάτιον α, τὸ φορτίον αὐτοῦ θὰ εἶναι $q = 2e = 2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Ἐπίσης εἶναι 10^5 eV $= 10^5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg $= 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ erg. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (1), εὑρίσκομεν

$$U = \frac{5 \cdot 10^2}{3} \text{ ΗΣΜ - τάσεως} = 50\,000 \text{ V.}$$

1261. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς σωματίου α, ἐκπεμπομένου ὑπό τινος ἀκτινεργοῦ πυρῆνος, εἶναι ἴση πρὸς 5,35 MeV. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ σωματίου. (1 MeV = 10^6 eV. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ἡλίου = $6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr).

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς κινητικῆς ἐνεργείας $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$, προκύπτει διὰ τὴν ταχύτητα υ τοῦ σωματίου

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\kappa\iota\nu}}{m}}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S., θέτομεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον, $E_{\kappa\iota\nu} = 5{,}35$ MeV $= 5{,}35 \cdot 10^6$ eV $= 5{,}35 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg $= 8{,}56 \cdot 10^{-6}$ erg, $m = 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr, καὶ εὑρίσκομεν

$$\upsilon = 1{,}6 \cdot 10^9 \text{ cm/sec.}$$

1262. Ἀκτινεργὸς πυρὴν ἐκπέμπει ἓν σωμάτιον β, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐν συνεχείᾳ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 100 Gauss, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς, διαγράφον κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 7,5 cm. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματίου εἰς MeV. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου = $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr, φορτίον αὐτοῦ $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου.

Λύσις. Ὡς γνωρίζομεν, ἡ κεντρομόλος δύναμις $F_K = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r}$, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας τὸ σωμάτιον κινούμενον ἐντὸς τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου διαγράφει κυκλικὴν τροχιάν, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένης δυνάμεως κατὰ Laplace

$$F = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$F_K = F \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon \qquad (2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει διὰ τὴν ταχύτητα υ

$$\upsilon = \frac{\mathcal{H} \cdot e \cdot r}{m} \qquad (3)$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ υ εἰς τὸν τύπον τῆς κινητικῆς ἐνεργείας $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$, λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{\mathcal{H}^2 \cdot e^2 \cdot r^2}{2\,m} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον $\mathcal{H} = 100$ Gauss, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου, $r = 7{,}5$ cm, $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἐκπεμπομένου ὑπὸ τοῦ πυρῆνος σωματίου β, εἶναι

$$E = 8 \cdot 10^{-8} \text{ erg} = 0{,}05 \text{ MeV.}$$

1263. Ἓν πρωτόνιον καὶ ἓν δευτερόνιον, κινοῦνται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου μετὰ τῆς αὐτῆς κινητικῆς ἐνεργείας, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων, τοὺς ὁποίους διαγράφουν.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ πρωτονίου, τότε ἡ μᾶζα τοῦ δευτερονίου, θὰ εἶναι 2 m καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου, θὰ εἶναι

$$A_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_1^2 \qquad (1)$$

τοῦ δὲ δευτερονίου

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,m \cdot \upsilon_2^2 = m \cdot \upsilon_2^2 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $A_1 = A_2$ λαμβάνομεν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὅτι

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \cdot \sqrt{2} \qquad (3)$$

Τὸ φορτίον τοῦ πρωτονίου καὶ τὸ τοῦ δευτερονίου εἶναι ἀπολύτως ἴσον πρὸς τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον e, ἑπομένως ἡ δύναμις Laplace, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πρωτονίου θὰ εἶναι

$$F_1 = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon_1 = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon_2 \cdot \sqrt{2} \qquad (4)$$

ἐπὶ δὲ τοῦ δευτερονίου

$$F_2 = \mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon_2 \qquad (5)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ κεντρομόλος δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πρωτονίου θὰ εἶναι

$$F_1 = \frac{m\,(\upsilon_2 \cdot \sqrt{2})^2}{r_1} \qquad (6)$$

καὶ ἐπὶ τοῦ δευτερονίου

$$F_2 = \frac{2\,m \cdot \upsilon_2^2}{r_2} \qquad (7)$$

Βάσει τῶν σχέσεων (4) καὶ (6) λαμβάνομεν

$$\mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon_2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\,m \cdot \upsilon_2^2}{r_1} \qquad (8)$$

καὶ βάσει τῶν σχέσεων (5) καὶ (7) λαμβάνομεν

$$\mathcal{H} \cdot e \cdot \upsilon_2 = \frac{2\,m \cdot \upsilon_2^2}{r_2} \qquad (9)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (8) καὶ (9), λαμβάνομεν

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{2}.$$

1264. Ποῖον τὸ μέτρον τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ὑπὸ ἑνὸς πυρῆνος χρυσοῦ ($Z = 79$), εἰς ἓν σημεῖον τοῦ πεδίου, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 10^{-12} cm ἀπὸ τοῦ πυρῆνος. Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου.

Λύσις. Τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον τοῦ πυρῆνος τοῦ χρυσοῦ δημιουργεῖται ὑπὸ τῶν ἐντὸς αὐτοῦ ὑπαρχόντων πρωτονίων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσος πρὸς τὸν ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z τοῦ χρυσοῦ.

Ἐπειδὴ τὸ φορτίον ἑκάστου πρωτονίου εἶναι ἀπολύτως ἴσον πρὸς τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον e, τὸ μέτρον τῆς ἐντάσεως τοῦ ὑπὸ τῶν πρωτονίων τοῦ πυρῆνος δημιουργουμένου πεδίου εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τοῦ πυρῆνος, θὰ εἶναι — συμφώνως πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον τῆς θεωρίας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου — ἴσον πρὸς

$$\mathcal{E} = \frac{Z \cdot e}{r^2}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν, $Z = 79$, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ $r = 10^{-12}$ cm, εὑρίσκομεν

$$\mathcal{E} = 3{,}792 \cdot 10^{16} \text{ ΗΣΜ - ἐντάσεως ἠλεκτρικοῦ πεδίου.}$$

1265. Πυρὴν ραδίου ($Z = 88$), διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου α, μετατρεπόμενος εἰς πυρῆνα ραδονίου. α) Ποία ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ὁ πυρὴν τοῦ ραδονίου ἐπὶ τοῦ σωματίου, ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι $5 \cdot 10^{-11}$ cm. β) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σωματίου εἰς τὴν θέσιν αὐτήν. Εἶναι $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ἠλίου $= 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr.

Λύσις. Ἐὰν ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς τοῦ ραδίου εἶναι Z, ἐφ' ὅσον ὁ πυρὴν αὐτοῦ διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου α, ἕπεται ὅτι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς τοῦ ραδονίου (θυγατρικοῦ πυρῆνος) θὰ εἶναι (Z – 2), τὸ δὲ φορτίον αὐτοῦ $(Z-2)\cdot e$.

Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἡ ἀπωστικὴ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ πυρὴν τοῦ ραδονίου ἐπὶ τοῦ ἐκπεμφθέντος σωματίου α, ὅταν ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι r, θὰ εἶναι

$$F = \frac{(Z-2)\cdot e\cdot 2e}{r^2}$$

διότι, ὡς γνωστόν, ἓν σωμάτιον α φέρει δύο στοιχειώδη (θετικὰ) ἠλεκτρικὰ φορτία.

Δίδονται, $Z = 88$, $e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου, $r = 5\cdot 10^{-11}$ cm. Δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν

$$F = 1{,}58\cdot 10^{-4}\ \text{dyn}.$$

β) Ἡ ἐπιτάχυνσις, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

ἔνθα F εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ σωματίου καὶ m ἡ μᾶζα αὐτοῦ. Εὕρομεν $F = 1{,}58\cdot 10^{-4}$ dyn καὶ δίδεται $m = 6{,}7\cdot 10^{-24}$ gr. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σωματίου εἶναι

$$\gamma = 2{,}35\cdot 10^{19}\ \text{cm/sec}^2.$$

1266. Κατὰ τὴν ἀκτινεργὸν μετατροπὴν τοῦ ἰσοτόπου $_{88}Ra^{226}$ εἰς $_{82}Pb^{206}$, πόσα χιλιοστὰ τοῦ γραμμαρίου (mgr) μολύβδου σχηματίζονται ἐξ ἑνὸς γραμμαρίου τοῦ πρώτου ἰσοτόπου.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν ἀκτινεργὸν μετατροπὴν τοῦ ραδίου (ἀτομικοῦ βάρους A = 226) εἰς μόλυβδον (ἀτομικοῦ βάρους A = 206), ἐξ ἑνὸς γραμματόμου ραδίου, ἤτοι ἐκ 226 gr ραδίου, προκύπτει ἓν γραμμάτομον μολύβδου, ἤτοι 206 gr μολύβδου. Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν διάσπασιν 1 gr ραδίου σχηματίζονται

$$m = 0{,}9115\ \text{gr} = 911{,}5\ \text{mgr μολύβδου.}$$

1267. Κατὰ τὴν ἐξαφάνισιν τοῦ συσσωματώματος ἑνὸς ἠλεκτρονίου καὶ ἑνὸς ποζιτρονίου ἐλευθεροῦται ἐνέργεια ὑπὸ μορφὴν δύο φωτονίων γ, ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν τῶν δύο σωματίων. Νὰ ὑπολογισθῇ (εἰς MeV) ἡ ἐνέργεια ἑκάστου φωτονίου. (Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου = $9\cdot 10^{-28}$ gr).

Λύσις. Ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐλευθεροῦται κατὰ τὴν ἐξαφάνισιν τοῦ συσσωματώματος ἑνὸς ἠλεκτρονίου καὶ ἑνὸς ποζιτρονίου, θὰ εἶναι, λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν μαζῶν τῶν δύο σωματίων, ἴση πρὸς

$$E = (m+m)\cdot c^2 \quad \text{ἢ} \quad E = 2m\cdot c^2$$

ἔνθα m ἡ κοινὴ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ τοῦ ποζιτρονίου

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν ταύτην, $m = 9\cdot 10^{-28}$ gr καὶ $c = 3\cdot 10^{10}$ cm/sec, εὑρίσκομεν

$$E = 1{,}62\cdot 10^{-6}\ \text{erg} = 10^6\ \text{eV} = 1\ \text{MeV}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐνέργεια αὕτη ἐκπέμπεται ὑπὸ μορφὴν δύο φωτονίων γ, ἡ ἐνέργεια ἑκάστου φωτονίου θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E = 0{,}5\ \text{MeV}.$$

1268. Ποία ἡ ἐνέργεια (εἰς erg, eV καὶ cal) ἡ ἐκλυομένη κατὰ τὴν σχάσιν ἑνὸς πυρῆνος $_{92}U^{235}$ ἐὰν κατ' αὐτὴν ἐξαφανίζεται περίπου 1 ‰ τῆς μάζης του. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου = $1{,}67\cdot 10^{-24}$ gr.

Λύσις. Ἡ μᾶζα τοῦ πυρῆνος τοῦ οὐρανίου, λόγῳ τῆς λίαν μικρᾶς μάζης τῶν ἠλεκτρονίων, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀντιπροσωπεύουσα τὴν μᾶζαν ὁλοκλήρου τοῦ ἀτόμου τοῦ οὐρανίου.

Δεδομένου τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ οὐρανίου (A = 235) καὶ τῆς μάζης ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου, ἐκ τῆς σχέσεως

$$m_{\text{ἀτόμου οὐρανίου}} = A \cdot m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}$$

εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν τοῦ ἀτόμου τοῦ οὐρανίου ἴσην πρὸς $392{,}45 \cdot 10^{-24}$ gr.

Τὸ ἓν χιλιοστὸν τῆς μάζης τοῦ πυρῆνος, δηλ. $392{,}45 \cdot 10^{-27}$ gr μετατρεπόμενον εἰς ἐνέργειαν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $E = m \cdot c^2$, θὰ ἀποδώσῃ ἐνέργειαν ἴσην πρὸς

$$\underline{E = 353{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ erg.}}$$

Ἐπειδὴ $1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{E = 220 \text{ MeV.}}$$

Προσέτι, ἐπειδὴ $1 \text{ cal} = 4{,}2 \text{ Joule} = 4{,}2 \cdot 10^7$ erg, θὰ εἶναι

$$\underline{E = 84 \cdot 10^{-13} \text{ cal.}}$$

1269. Κατά τινα ἁλυσσιδωτὴν ἀντίδρασιν σχάσεων, ὁ ἀριθμὸς τῶν καθ' ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν ἐκπεμπομένων νετρονίων διπλασιάζεται, καθιστάμενος ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἴσος πρὸς A. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς A τῶν νετρονίων, ὡς καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν ἐκπομπὴν A/2 νετρονίων, ἐὰν κατὰ τὸ πρῶτον λεπτὸν ὑπῆρχον ἐντὸς τῆς σχαζομένης μάζης 2 νετρόνια.

Λύσις. α) Εἶναι προφανὲς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ τῶν διαδοχικῶς εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν ἐκπεμπομένων ἐντὸς τῆς σχαζομένης μάζης νετρονίων ἀποτελοῦν τοὺς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον ἴσον πρὸς 2 (καὶ πρῶτον ὅρον τὸν n_1). Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν νετρονίων τὰ ὁποῖα θὰ ὑπάρχουν ἐντὸς τῆς μάζης εἰς τὸ τέλος χρόνου k πρώτων λεπτῶν ἀπὸ τῆς εἰσόδου τῶν n_1 ἀρχικῶν νετρονίων ἐντὸς αὐτῆς, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$n_k = n_1 \cdot 2^{k-1}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $n_1 = 2$ καὶ $k = 60$, εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 2^{60} \text{ νετρόνια} = 11{,}59 \cdot 10^{17} \text{ νετρόνια.}}$$

β) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $n_k = n_1\, 2^{k-1}$ θέσωμεν $n_k = \frac{A}{2}$ νετρόνια $= 5{,}7645 \cdot 10^{17}$ νετρόνια καὶ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $k = 59$, ἤτοι, ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ τὴν ἐκπομπὴν $\frac{A}{2}$ νετρονίων εἶναι ἴσος πρὸς

$$\underline{t = 59 \text{ min.}}$$

1270. Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ἀτόμου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἀστέρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ θερμοκρασία εἶναι $20 \cdot 10^6$ °K.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὰ ἄτομα ἀερίου εὑρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν T, ἔχουν μέσην κινητικὴν ἐνέργειαν παρεχομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{m\,\overline{v^2}}{2} = k \cdot T$$

ἔνθα $k = 2{,}05 \cdot 10^{-16}$ erg/grad (Βλ. Ἄσκησιν 1226). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $T = 20 \cdot 10^{6}$ ⁰K, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μέση κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ἀτόμου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἀστέρος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu} = 4{,}1 \cdot 10^{-9} \text{ erg} = 2562{,}5 \text{ eV}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

1271. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ πυκνότης τοῦ πυρῆνος τοῦ ὑδρογόνου, β) τοῦ πυρῆνος τοῦ οὐρανίου (εἰς gr/cm³). Μᾶζα τοῦ πρωτονίου $1{,}633 \cdot 10^{-24}$ gr, διάμετρος τοῦ πρωτονίου $2 \cdot 10^{-13}$ cm, ἀτομικὸν βάρος τοῦ οὐρανίου 238, διάμετρος τοῦ πυρῆνος τοῦ οὐρανίου $= 9 \cdot 10^{-13}$ cm. Σταθερὰ Loschmidt $6{,}06 \cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμάτομον. (Ἀπ. $3{,}9 \cdot 10^{14}$ gr/cm³, β΄ $1{,}02 \cdot 10^{15}$ gr/cm³.)

1272. Ποία ἡ ταχύτης α) ἑνὸς ἠλεκτρονίου, β) ἑνὸς πρωτονίου καὶ γ) ἑνὸς σωματίου α, ὅταν ἕκαστον κέκτηται κινητικὴν ἐνέργειαν 1 eV. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr, μᾶζα τοῦ πρωτονίου $= 1{,}663 \cdot 10^{-24}$ gr, μᾶζα τοῦ σωματίου α $= 6{,}6 \cdot 10^{-24}$ gr. (Ἀπ. α΄ 596 km/sec, β΄ 13,8 km/sec, γ΄ 6,96 km/sec.)

1273. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ, μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ὥστε ἓν σωμάτιον α, τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται μεταξὺ αὐτῶν, νὰ ἀποκτήσῃ εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του κινητικὴν ἐνέργειαν 1 keV. Ποία ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ σωματίου. Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου. Μᾶζα τοῦ σωματίου α $= 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr.
(Ἀπ. 1000 V, $2{,}18 \cdot 10^{7}$ cm/sec.)

1274. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς σωματίου β, τὸ ὁποῖον ἐκπέμπεται ὑπό τινος ἀκτινεργοῦ πυρῆνος, εἶναι ἴση πρὸς 0,15 MeV. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ σωματίου. Μᾶζα τοῦ σωματίου β $= 9 \cdot 10^{-28}$ gr. (Ἀπ. $2{,}31 \cdot 10^{10}$ cm/sec.)

1275. Ποία ἡ ταχύτης ἑνὸς νετρονίου, κινητικῆς ἐνεργείας 0,025 eV. Μᾶζα τοῦ νετρονίου $= 1{,}674 \cdot 10^{-24}$ gr. (Ἓν νετρόνιον κινητικῆς ἐνεργείας τῆς τάξεως τῶν 0,025 eV, καλεῖται θερμικὸν νετρόνιον.) (Ἀπ. $= 2{,}18 \cdot 10^{5}$ cm/sec.)

1276. α) Μὲ ποίαν δύναμιν ἀπωθοῦνται δύο σωμάτια α, εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 10^{-11} cm ἀπ' ἀλλήλων. β) Ποία ἡ τιμὴ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀσκουμένης Νευτωνείου δυνάμεως. Σταθερὰ παγκοσμίου ἕλξεως $k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ dyn·cm²·gr⁻², $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου, μᾶζα ἑνὸς σωματίου α $= 6{,}68 \cdot 10^{-24}$ gr.
(Ἀπ. α΄ 9216 dyn, β΄ $2{,}97 \cdot 10^{-32}$ dyn.)

1277. Ἐπὶ φορτίου $5 \cdot 10^{-9}$ Cb εὑρισκομένου εἴς τι σημεῖον ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐξασκεῖται δύναμις $2 \cdot 10^{-3}$ dyn. Ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τεθῇ ἓν σωμάτιον α, ποία δύναμις θὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ. $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου.
(Ἀπ. $1{,}28 \cdot 10^{-13}$ dyn.)

1278. Ποία ἡ ἀπωστικὴ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη μεταξὺ ἑνὸς πυρῆνος χρυσοῦ, ἀποτελουμένου ἐξ 79 πρωτονίων καὶ 118 νετρονίων καὶ ἑνὸς σωματίου α, ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι 10^{-12} cm. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σωματίου εἰς τὴν θέσιν αὐτήν. $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου, μᾶζα ἑνὸς σωματίου $\alpha = 6{,}68 \cdot 10^{-24}$ gr.
(Ἀπ. $3{,}6 \cdot 10^{7}$ dyn. $5{,}4 \cdot 10^{28}$ m/sec².)

1279. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τοῦ δημιουργουμένου ὑπὸ ἑνὸς πρωτονίου, εἰς σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $5{,}28 \cdot 10^{-9}$ cm ἀπ' αὐτοῦ. ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου.) (Ἀπ. $1{,}73 \cdot 10^{7}$ ΗΣΜ-ἐντάσεως.)

1280. Ἓν σωμάτιον α, τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κινούμενον ὁριζοντίως μεταξὺ δύο σημείων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ 100 V, ἐν συνεχείᾳ δὲ διέρχεται διὰ μέσου δύο ὁριζοντίων καὶ ἐπιπέδων μεταλλικῶν πλακῶν κειμένων εἰς ἀπόστασιν 1 cm ἀπ' ἀλλήλων καὶ φορτισμένων εἰς τάσιν 20 V. Κατὰ τὴν διαδρομήν του ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τῶν πλακῶν, τὸ ἠλεκτρόνιον ὑφίσταται ἐκτροπὴν ἐκ τῆς ἀρχικῆς του διευθύνσεως, ἐξερχόμενον δὲ προσπίπτει ἐπὶ κατακορύφου πετάσματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτὸ ἄκρου τῶν πλακῶν. Ἐὰν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ μῆκος 3 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐκτροπὴ y ἐπὶ τοῦ πετάσματος. Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Μᾶζα ἑνὸς σωματίου α $= 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr. ('Απ. 5 cm.)

1281. Ἓν ἠλεκτρόνιον καὶ ἓν σωμάτιον α κινοῦνται μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\nu_{\eta\lambda}/\nu_{\pi\rho\omega\tau}$ τῶν συχνοτήτων περιστροφῆς τῶν δύο σωματίων. Μᾶζα τοῦ σωματίου α $= 6{,}68 \cdot 10^{-24}$ gr, μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr. ('Απ. 3670.)

1282. Σωμάτιον α ἐκπέμπεται ὑπό τινος ἀκτινεργοῦ πυρῆνος ὑπὸ ταχύτητα $1{,}92 \cdot 10^{9}$ cm/sec, ἐν συνεχείᾳ δὲ κινεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς, διαγράφον κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 30 cm. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ἡλίου $= 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου. ('Απ. $1{,}34 \cdot 10^{4}$ Gauss.)

1283. Δευτερόνιον κινούμενον ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $1{,}5 \cdot 10^{4}$ Gauss καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς, διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 40 cm. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ δευτερονίου ὡς καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ διαγράψῃ τοῦτο ἡμίσειαν περιφέρειαν. Μᾶζα τοῦ πρωτονίου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr. Ἡ μᾶζα τοῦ νετρονίου θὰ ληφθῇ ἴση πρὸς τὴν τοῦ πρωτονίου. Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου. ('Απ. α' $2{,}9 \cdot 10^{7}$ m/sec. β' $4{,}3 \cdot 10^{-8}$ sec.)

1284. Ἓν θετικὸν ἰὸν τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ κινεῖται μεταξὺ δύο σημείων αὐτοῦ τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ 120 V, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 378 Gauss καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς. Ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἰὸν κινούμενον ἐντὸς τοῦ πεδίου εἶναι 20 cm. Ἐὰν τοῦτο φέρῃ ἓν στοιχειῶδες θετικὸν φορτίον, ποῖον τὸ ἀτομικὸν βάρος αὐτοῦ. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr. ('Απ. 23.)

1285. Ἓν ἄτομον τοῦ ἰσοτόπου ${}_{3}Li^{7}$ μάζης $1{,}16 \cdot 10^{-23}$ gr, τὸ ὁποῖον φέρει ἓν στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ κινεῖται ἐντὸς αὐτοῦ μεταξὺ δύο σημείων ἐχόντων διαφορὰν δυναμικοῦ 500 V, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 4000 Gauss, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Ποία ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἄτομον. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ ΗΜΜ - φορτίου. ('Απ. 2,13 cm.)

1286. Μονοχρωματικὴ ἀκτινοβολία γ ἀποτελεῖται ἐκ φωτονίων ἐνεργείας 1 MeV. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος αὐτῆς. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck $= 6{,}6 \cdot 10^{-27}$) erg · sec. ('Απ. $1{,}24 \cdot 10^{-11}$ cm $= 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ Å.)

1287. Κατὰ τὴν δίοδον ἰονιζούσης ἀκτινοβολίας διὰ θαλάμου ἰονισμοῦ περιέχοντος ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, σχηματίζονται ἐντὸς αὐτοῦ ἀνὰ δευτερόλεπτον $2 \cdot 10^{5}$ ἰόντα, φέροντα ἕκαστον ἓν στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον. α) Ποῖον τὸ συνολικὸν φορτίον τῶν ἰόντων αὐτῶν. β) Ποία πτῶσις τάσεως προκαλεῖται κατὰ μῆκος ἀντιστάσεως 28 000 Ω, ὅταν τὸ φορτίον τοῦτο διέλθῃ δι' αὐτῆς εἰς χρόνον 1 sec. ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.) ('Απ. α' $320 \cdot 10^{-16}$ Cb. β' 0,8960 mV.)

1288. Κατὰ τὴν δίοδον δέσμης ἀκτίνων γ δι' ἀέρος εὑρισκομένου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, σχηματίζεται ἐντὸς 1 cm^3 ἀέρος ἴσος ἀριθμὸς θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἰόντων, φερόντων ἕκαστον ἓν στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον. 'Εὰν τὸ συνολικὸν φορτίον τῶν θετικῶν ἰόντων εἶναι +1 ΗΣΜ - φορτίου, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν −1 ΗΣΜ - φορτίου, πόσα ζεύγη ἐξ ἑνὸς θετικοῦ καὶ ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἰόντος παρήχθησαν. $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. ('Απ. $2{,}08 \cdot 10^9$ ζεύγη.)

1289. Ποία ἡ πίεσις ἑνὸς λίτρου τριτίου ($_1H^3$) μάζης 1 gr καὶ θερμοκρασίας 25° C. Μοριακὸν βάρος τριτίου = 6,036.
('Απ. 'Εκ τοῦ μοριακοῦ βάρους τοῦ τριτίου ὑπολογίζομεν τὴν πυκνότητα αὐτοῦ εἰς 0°C καὶ 760 Torr, καὶ τελικῶς εὑρίσκομεν $p = 4{,}07$ at.)

1290. Πόση ποσότης ἄνθρακος, θερμότητος καύσεως 8000 cal/gr, καιομένη παρέχει ἐνέργειαν ἴσην μὲ τὴν ἐκλυομένην κατὰ τὴν μετατροπὴν 4,032 gr ὑδρογόνου εἰς 4,002 gr ἡλίου. ('Απ. 80,35 τόννοι.)

1291. 'Η μᾶζα τοῦ 'Ηλίου εἶναι ἴση περίπου πρὸς $2 \cdot 10^{27}$ τόννους. 'Εὰν εἰς χρόνον $15 \cdot 10^9$ ἐτῶν μετατρέπεται εἰς ἐνέργειαν τὸ 1/1 000 τῆς μάζης αὐτοῦ, ὑπὸ ποίαν ἰσχὺν (εἰς erg/sec) ἀκτινοβολεῖ ὁ Ἥλιος. ('Απ. $3{,}8 \cdot 10^{33}$ erg/sec.)

1292. Κατά τινα ἀντίδρασιν συντήξεως μεταξὺ δύο ἰσοτόπων τοῦ ὑδρογόνου ἐξαφανίζεται περίπου 0,7 % τῆς συνολικῆς μάζης τῶν ἀντιδρώντων πυρήνων. Πόση ἐνέργεια ἐκλύεται κατὰ τὴν σύντηξιν ποσότητος τῶν ἰσοτόπων συνολικῆς μάζης 1 kgr.
('Απ. $1{,}75 \cdot 10^8$ kWh.)

1293. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς Z τῶν πρωτονίων καὶ ὁ ἀριθμὸς N τῶν νετρονίων τῶν κάτωθι πυρήνων: $_2He^4$, $_7N^{14}$, $_8O^{16}$, $_{11}Na^{23}$, $_{92}U^{235}$.
('Απ. Z = 2, 7, 8, 11, 92, N = 2, 7, 8, 12, 143.)

1294. Εἰς πυρὴν οὐρανίου ($_{92}U^{238}$) καὶ εἰς πυρὴν ραδίου ($_{88}Ra^{226}$) διασπῶνται ἕκαστος ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου α. Ποῖος ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος.
('Απ. α' 90, 234. β' 86, 222.)

1295. Τὸ ἀκτινεργὸν ἰώδιον ($_{53}J^{131}$) διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου β ($_{-1}e^0$). Ποῖος εἶναι ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος. ('Απ. 54, 131.)

1296. 'Ο ἀκτινεργὸς φωσφόρος ($_{15}P^{30}$) διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου ($_{+1}e^0$). Ποῖος ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος. ('Απ. 14, 30.)

1297. Ποῖος ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ πυρῆνος ὁ ὁποῖος προκύπτει κατὰ τὴν ἐνσωμάτωσιν ἑνὸς νετρονίου ($_0n^1$) εἰς ἕνα πυρῆνα οὐρανίου 238 ($_{92}U^{238}$).
('Απ. 92, 239.)

1298. Ἓν νετρόνιον ($_0n^1$) ἐνσωματοῦται εἰς ἕνα πυρῆνα νατρίου ($_{11}Na^{23}$). 'Ο προκύπτων πυρὴν διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου β ($_{-1}e^0$). Ποῖος ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ τελικοῦ πυρῆνος. ('Απ. 12, 24.)

1299. Πυρὴν ἄνθρακος ($_6C^{12}$) βομβαρδιζόμενος δι' ἑνὸς σωματίου α διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς νετρονίου. Ποῖος ὁ ἀτομικὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος πυρῆνος. ('Απ. 8, 15.)

1300. Πυρὴν θείου ($_{16}S^{32}$) βομβαρδιζόμενος δι' ἑνὸς νετρονίου, διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς πρωτονίου. Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιδράσεως.
('Απ. $_{16}S^{32} + _0n^1 \rightarrow _{15}P^{32} + _1H^1$)

1301. Πυρὴν ψευδαργύρου ($_{30}Zn^{66}$), βομβαρδιζόμενος δι' ἑνὸς νετρονίου, ὑφίσταται διάσπασιν ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου α. Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιδράσεως.
('Απ. $_{30}Zn^{66} + _0n^1 \rightarrow _{28}Ni^{63} + _2He^4$.)

1302. Πυρὴν ἀζώτου ($_7N^{14}$) βομβαρδιζόμενος δι' ἑνὸς νετρονίου διασπᾶται μετατρεπόμενος εἰς πυρῆνα ἄνθρακος ($_6C^{14}$). Ποῖον τὸ κατὰ τὴν διάσπασιν ἐκπεμπόμενον σωμάτιον.
('Απ. Ἓν πρωτόνιον.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΕ΄

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Δ΄

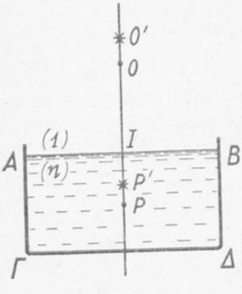
ΟΠΤΙΚΗ

1303. Προσδιορίζεται, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὑπὸ τοῦ Foucault περιγραφείσης διατάξεως, ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ ὕδατος (βλ. Ἄσκησιν 6). Τίθεται πρὸς τοῦτο μεταξὺ τοῦ στρεφομένου κατόπτρου Α καὶ τοῦ κοίλου κατόπτρου Β σωλὴν μήκους $l' = 3$ m. πλήρης ὕδατος καὶ προσδιορίζεται ἐπὶ τῆς κλίμακος ἡ μετατόπισις τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος, ὡς πρὸς τὴν προσπίπτουσαν, ἥτις εἶναι $x = 2{,}4$ mm, ὅταν τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον Α στρέφεται ὑπὸ συχνότητα $n = 600$ στρ./sec. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κατόπτρων Α καὶ Β εἶναι $l = 5$ m. ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου Α ἀπὸ τοῦ κανόνος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ μέτρησις τῆς μετατοπίσεως (ΓΔ), $r = 8$ m. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ ὕδατος.
('Απ. 225 000 km/sec.)

1304. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ταχύτητος αὐτοκινήτου, ὁ ὁδηγὸς χρησιμοποιεῖ κοῖλον κάτοπτρον, ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m, φέρον ὑποδιαιρέσεις εἰς χιλιοστόμετρα καὶ καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο διέρχεται ἔμπροσθεν κατακορύφου πασσάλου, ὕψους 1,75 m, οὗτος θέτει εἰς κίνησιν χρονόμετρον καὶ ἄρχεται παρακολουθῶν τὴν μεταβολὴν τοῦ μεγέθους τοῦ ὑπὸ τοῦ κατόπτρου παρεχομένου εἰδώλου τοῦ πασσάλου. Ὅταν τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ἐλαττωθῇ εἰς 10 mm, ὁ ὁδηγὸς διακόπτει τὴν λειτουργίαν τοῦ χρονομέτρου. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ χρονομέτρου δεικνύει ὅτι παρῆλθε χρόνος 10,5 sec, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου.
('Απ. 29,83 km/h.)

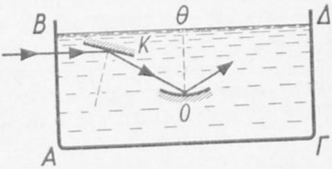
1305. Ὑαλίνη λεκάνη, περιέχει στρῶμα διθειάνθρακος ($n = 5/3$) καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ στρῶμα ὕδατος ($n = 4/3$). α) Φωτεινὴ ἀκτὶς προερχομένη ἐκ τοῦ στρώματος τοῦ διθειάνθρακος, προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 30^0 ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ διθειάνθρακος - ὕδατος. Ποία ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν ἡ διαθλωμένη ἀκτὶς σχηματίζει μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ διθειάνθρακος - ὕδατος, εἰς τὸ σημεῖον τῆς εἰσόδου της εἰς τὸ ὕδωρ. β) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν προσπτώσεως α, πρέπει νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ διθειάνθρακος - ὕδατος φωτεινὴ ἀκτίς, ἵνα ὑποστῇ ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπ' αὐτῆς. γ) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν προσπτώσεως πρέπει νὰ προσπέσῃ φωτεινὴ ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ διθειάνθρακος - ὕδατος, ἵνα ὑποστῇ ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ ὕδατος - ἀέρος.
('Απ. α΄ $56^0\ 27'$. β΄ $\alpha > 53^0\ 8'$. γ΄ $\alpha > 36^0\ 52'$.)

1306. 1) Λεκάνη περιέχει ὕδωρ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ΑΒ. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου ΟΡ εὑρίσκεται, εἰς τὸ Ο, εἰς ἀπόστασιν 1,20 m ἄνωθεν τῆς ΑΒ, ὁ ὀφθαλμὸς Ο παρατηρητοῦ, εἰς δὲ τὸ Ρ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 0,80 m κάτωθεν τῆς ΑΒ, ὁ ὀφθαλμὸς Ρ ἑνὸς ἰχθύος. Ποία ἡ φαινομένη ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ ἰχθύος α) διὰ τὸν παρατηρητήν, β) διὰ τὸν ἰχθύν. 2) Ὁ πυθμὴν τῆς λεκάνης ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον ΓΔ, τὸ δὲ πάχος τοῦ ὑδατίνου στρώματος ἄνωθεν τοῦ κατόπτρου εἶναι 1,20 m. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο καὶ παρατηρεῖ ἐντὸς τοῦ κατόπτρου ΓΔ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀντιλαμβάνεται οὗτος τὸ εἴδωλόν του. Κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον μετατοπίζεται τοῦτο, ὅταν ἐκρεύσῃ ὅλον τὸ ὕδωρ ἐκ τῆς λεκάνης. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος 4/3.



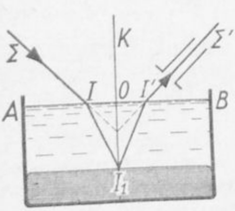
(Ἀπ. 1′ Φαινομένη ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ὀφθαλμῶν α) διὰ τὸν παρατηρητὴν 1,80 m, β) διὰ τὸν ἰχθὺν 2,40 m. 2′ Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ, βλέπει τὸ εἴδωλόν του εἰς ἀπόστασιν 4,20 m ἀπ᾽ αὐτοῦ. Ὅταν ἐκρεύσῃ τὸ ὕδωρ, τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπομακρύνεται κατὰ 0,60 m.)

1307. Ὑάλινον δοχεῖον ΒΑΓΔ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, λίαν λεπτῶν τοιχωμάτων, περιέχει ὑγρὸν δείκτου διαθλάσεως $\sqrt{2}$. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος (ΟΘ) $= R$ τοποθετεῖται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εἰς τρόπον ὥστε $ΘΔ = 3\,R \cdot \sqrt{3}/2$. Τῇ βοηθείᾳ μικροῦ ἐπιπέδου κατόπτρου Κ στέλλεται εἰς τὸ Ο φωτεινὴ ἀκτὶς σχηματίζουσα γωνίαν 60° μὲ τὴν ΟΘ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πορεία τῆς ἀκτῖνος ταύτης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι κατὰ τὴν ἀρχικὴν πρόσπτωσίν της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἦτο ὁριζοντία. Ζητεῖται προσέτι ποία ἡ κλίσις τοῦ κατόπτρου Κ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.



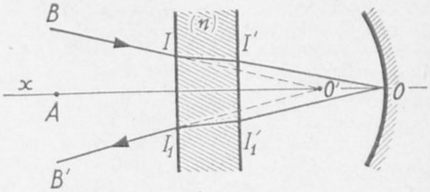
(Ἀπ. Προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἕδρας ΔΓ ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 30° καὶ ἐξέρχεται αὐτῆς ὑπὸ γωνίαν 45° πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου. Τὸ κάτοπτρον σχηματίζει γωνίαν 15° μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.)

1308. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 45° ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὕδατος ($n = 4/3$) εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ δοχείου τοῦ σχήματος, ἄνωθεν στρώματος ἐξ ὑδραργύρου. Τὸ πάχος τοῦ στρώματος ἐξ ὕδατος εἶναι 5 cm. Ἡ ἀκτὶς εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, διαθλᾶται, ἐν συνεχείᾳ ἀνακλᾶται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στρώματος ἐξ ὑδραργύρου καὶ διαθλᾶται ἐκ νέου, ἐξερχομένη παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα σωλῆνος Σ′. Μετὰ ταῦτα ἀντικαθίσταται τὸ ὕδωρ δι᾽ ἑτέρου ὑγροῦ δείκτου διαθλάσεως 5/3. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πάχος τοῦ νέου ὑγροῦ, ἵνα ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς ἐξέρχεται καὶ πάλιν παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σωλῆνος. Ἡ θέσις τῆς ἐπιφανείας ΑΒ διατηρεῖται σταθερά, τὸ δὲ πάχος τῆς στοιβάδος τοῦ ὑγροῦ ρυθμίζεται διὰ μεταβολῆς τοῦ πάχους τοῦ στρώματος ὑδραργύρου.



(Ἀπ. 6,78 cm.)

1309. Πρὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m τίθεται φωτεινὸν βέλος AB καὶ εἰς ἀπόστασιν 0,75 m ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου A′B′. β) Παρεμβάλλεται μεταξὺ AB καὶ κατόπτρου διαφανὴς πλὰξ μὲ παραλλήλους ἕδρας πάχους 4 cm καὶ δείκτου διαθλάσεως $n = 4/3$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα θέσις τοῦ εἰδώλου τοῦ AB. γ) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ τὸ κάτοπτρον ἵνα ἐπανέλθῃ τὸ εἴδωλον τοῦ AB εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν A′B′.



('Απ. α′ 1,5 m, β′ 155 cm, γ′ 1 cm.)

1310. 'Ορθογώνιον τριγωνικὸν πρῖσμα ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως 1,50, τοῦ ὁποίου ἡ μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 70^0 φέρεται ἐξ ὁλοκλήρου ὑπὸ τὸ ὕδωρ $(n = 4/3)$ μὲ τὴν κυρίαν αὐτοῦ τομὴν κατακόρυφον, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ μικροτέρα κάθετος ἕδρα, θεωρουμένη ὡς βάσις τοῦ πρίσματος, νὰ διατεθῇ ὁριζοντίως, ἡ δὲ ἀντικειμένη αὐτῆς γωνία, θεωρουμένη ὡς διαθλαστικὴ γωνία αὐτοῦ, νὰ εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐκ τοῦ ὕδατος καθέτως ἐπὶ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως. 'Εν ἐπαφῇ μετὰ τῆς ἀνωτέρας ἀκμῆς τοῦ πρίσματος, εὑρίσκεται ὁμοίως κάτωθεν τοῦ ὕδατος, ὁριζόντιον ἐπίπεδον κάτοπτρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ κάτω. α) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀπτικὸν διάγραμμα καὶ β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ τῆς ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ἀνακλωμένης ἀκτῖνος. ('Απ. 149^0 31′.)

1311. 'Ακτὶς μονοχρωματικοῦ φωτὸς προσπίπτουσα ἐπὶ σφαιρικοῦ σταγονιδίου ὕδατος $(n = 4/3)$ διαθλᾶται, ἀκολούθως ἀνακλᾶται ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας τῆς σταγόνος καὶ ἐξέρχεται αὐτῆς ἀφοῦ ὑποστῇ ἐκ δευτέρου διάθλασιν. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία δ μεταξὺ τῆς προσπιπτούσης καὶ τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος, συναρτήσει τῆς γωνίας προσπτώσεως καὶ τῆς γωνίας διαθλάσεως. β) Νὰ ἀποδοθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς δ μετὰ τῆς γωνίας προσπτώσεως α, διά τιμὰς τῆς τελευταίας μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0, ἀπεχούσας κατὰ 10^0.

$$('Απ.\ \ \delta = 4\beta - 2\alpha,\ ὅπου\ ημ\,\beta = \frac{ημ\,\alpha}{n},\ \alpha_{μεγ} = 59^0\,23',\ \delta_{μεγ} = 42^0\,30'.)$$

1312. 'Αντικειμενικὸς φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο φακοὺς συνηνωμένους, ἕνα ἀμφίκυρτον ἐκ στεφανυάλου καὶ ἕτερον κοιλόκυρτον ἀποκλίνοντα ἐκ πυριτυάλου. Αἱ δύο ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ ἀμφικύρτου φακοῦ εἶναι ἴσαι. 'Η ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κοίλης ἐπιφανείας τοῦ κοιλοκύρτου φακοῦ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τοῦ συγκλίνοντος, ἐνῷ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς εἶναι διπλασία αὐτῶν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ σύστημα ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 16 cm, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν φακῶν καὶ αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις αὐτῶν. Δείκτης διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου 1,52, τῆς πυριτυάλου 1,65. ('Απ. 11,5 cm, 23 cm, 11,1 cm, 35,4 cm.)

1313. Δύο λεπτοὶ ἀμφίκυρτοι φακοί, ἑστιακῶν ἀποστάσεων ἀντιστοίχως $f_1 = 10$ cm καὶ $f_2 = 15$ cm τίθενται εἰς ἄμεσον ἐπαφήν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ σύστημα φακῶν. Ὄπισθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $d = 9$ cm ἀπ' αὐτοῦ τρίτος ἀμφίκυρτος φακός. Δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων, διερχομένη διὰ τοῦ συστήματος συγκλίνει πρὸς σημεῖον κείμενον ὄπισθεν τοῦ τρίτου φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν $\delta = 2$ cm ἀπ' αὐτοῦ. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ τρίτου φακοῦ.

$$('Απ.\ f_3 = \delta \cdot \frac{d\,(f_1 + f_2) - f_1 \cdot f_2}{(\delta + d) \cdot (f_1 + f_2) - f_1 \cdot f_2},\ 1{,}20\ cm.)$$

1314. 1) Φωτεινὸν ἀντικείμενον AB, μήκους 1 cm, κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα συγκλίνοντος φακοῦ Φ, τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ τούτου. Λαμβάνεται τότε πραγματικὸν εἴδωλον A'B', τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Φ εἶναι 60 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Φ καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A'B'. 2) Ὁ φακὸς Φ εἶναι ἐξ ὑάλου, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι 1,5. Ἐὰν ἡ μία τῶν ἐπιφανειῶν του εἶναι ἐπίπεδος, ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἑτέρας. 3) Παρεμβάλλεται μεταξὺ φακοῦ Φ καὶ εἰδώλου A'B' διαφανὴς πλὰξ μὲ παραλλήλους ἕδρας, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι κάθετοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Τὸ πάχος τῆς πλακὸς ταύτης εἶναι 9 cm καὶ ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης αὐτῆς 1,5. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου $A_1'B_1'$, τοῦ λαμβανομένου ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους. 4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A'_2 B'_2 τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ἐὰν ἡ πλὰξ μὲ παραλλήλους ἕδρας παρεμβληθῇ μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου AB καὶ τοῦ φακοῦ Φ.
(Ἀπ. 1' $f = 15$ cm, $A'B' = 3$ cm (πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον). 2' $R = 7,5$ cm. 3' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, εἰς ἀπόστασιν 63 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ, $A'_1B'_1 = 3$ cm. 4' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, εἰς ἀπόστασιν 127,5 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. $A'_2B'_2 = 7,5$ cm.)

1315. α) Φωτεινὸν ἀντικείμενον AB ὕψους 0,5 cm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ $Φ_1$ ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_1 = 40$ cm. Τὸ AB εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ φακοῦ, τὸ δὲ σημεῖον A εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις, τὸ εἶδος καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A'B'. β) Εἰς ἀπόστασιν 100 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_1$ καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον πλευρὰν ἀπὸ τὴν τοῦ ἀντικειμένου AB τοποθετεῖται συγκλίνων φακὸς $Φ_2$ ἐπιπεδόκοιλος, ἔχων τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα μὲ τὸν $Φ_1$. Οὗτος συνίσταται ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως 1,5 καὶ ἡ κοίλη ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 20 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις, τὸ εἶδος καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A''B'' τοῦ ἀντικειμένου AB. γ) Παρεμβάλλεται μεταξὺ $Φ_1$ καὶ $Φ_2$ ὑαλίνη πλὰξ ($n = 1,5$) μὲ παραλλήλους ἕδρας, καθέτους πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Τὸ πάχος αὐτῆς εἶναι 30 cm. Ποῖον εἶναι τὸ νέον εἴδωλον, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ σύστημα.
(Ἀπ. α' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ὕψους 1 cm, εἰς ἀπόστασιν 120 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_1$. β' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ὕψους 2 cm καὶ εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_2$. γ' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ὕψους 4 cm καὶ εἰς ἀπόστασιν 120 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_2$.)

1316. Χρησιμοποιεῖται λεπτὸς φακός, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm, ὡς ἀντικειμενικὸς φακὸς φωτογραφικῆς μηχανῆς. Τὸ πρὸς φωτογράφησιν ἀντικείμενον εἶναι οἰκία ὕψους 20 m, κειμένη εἰς ἀπόστασιν 200 m ἀπ' αὐτοῦ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλον τῆς οἰκίας καὶ ποῖον τὸ μέγεθός του. Ἑτέρα φωτογραφικὴ μηχανή, φέρει σύνθετον ἀντικειμενικὸν φακόν, συνιστάμενον ἀπὸ λεπτὸν συγκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 15$ cm καὶ λεπτὸν ἀποκλίνοντα φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 6$ cm. Οἱ κύριοι ἄξονες αὐτῶν συμπίπτουν καὶ τὰ ὀπτικά των κέντρα εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπ' ἀλλήλων. Αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες διέρχονται πρῶτον διὰ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ. Διὰ τῆς μηχανῆς ταύτης, φωτογραφεῖται ἡ αὐτὴ οἰκία, εὑρισκομένη εἰς τὴν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ σχηματίζεται τὸ ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος φακῶν παρεχόμενον εἴδωλον τῆς οἰκίας καὶ ποῖον τὸ μέγεθός του. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις συγκλίνοντος φακοῦ, ὁ ὁποῖος θὰ παρεῖχε εἴδωλον τῆς οἰκίας, εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 200 m ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ του κέντρου, τῶν αὐτῶν διαστάσεων πρὸς τὸ διδόμενον ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος φακῶν. Εἰς τί πλεονεκτεῖ τὸ χρησιμοποιούμενον σύστημα φακῶν ἔναντι τοῦ ἁπλοῦ συγκλίνοντος τοιούτου.
(Ἀπ. 1' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, εἰς ἀπόστασιν 15,01 cm ἀπὸ τοῦ

φακοῦ καὶ ὕψους 1,50 cm. 2΄ Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, εἰς ἀπόστασιν 30,4 cm ἀπὸ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ ὕψους 9,1 cm. 3΄ f = 91 cm.)

1317. Συγκλίνων φακὸς Φ, ἔχων ἑστιακὴν ἀπόστασιν f = 40 cm, προβάλλει ἐπὶ πετάσματος τὸ πραγματικὸν καὶ ἀνεστραμμένον εἴδωλον Α΄Β΄ ἀντικειμένου ΑΒ, καθέτου πρὸν τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. 1) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἀντικείμενον, οὕτως ὥστε τὸ εἴδωλον νὰ εἶναι 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ Φ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ πέτασμα. 2) Μεταξὺ πετάσματος καὶ φακοῦ Φ, εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ πετάσματος, τοποθετεῖται ἀποκλίνων φακὸς Φ΄, ἔχων τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα μὲ τὸν Φ. Τὸ νέον εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ εἶναι πραγματικόν, σχηματίζεται δὲ εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν παρ' ὅτι τὸ πρῶτον ἀπὸ τοῦ φακοῦ καὶ εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερον αὐτοῦ. Ποία θὰ εἶναι ἡ φορά του ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον. Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ Φ ἀπὸ τὸ νέον εἴδωλον. 3) Μετατίθεται προοδευτικῶς ὁ φακὸς Φ΄ πλησιάζων τὸν Φ, μέχρις ὅτου ἔλθη εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπ' αὐτοῦ. Πῶς μεταβάλλεται τὸ εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος.

(Ἀπ. 1΄ α = 38 cm, β = 240 cm. 2΄ Εἴδωλον ἀνεστραμμένον, f = − 200 cm, β = 340 cm. 3΄ Τὸ εἴδωλον Α΄΄Β΄΄ ἀπομακρύνεται μέχρι τοῦ ἀπείρου καὶ γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλύτερον.)

1318. Ἀμφίκυρτος φακὸς ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως 1,5 ἔχει ἐπιφανείας τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι 20 cm καὶ 25 cm. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ. 2) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ, ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον, οὕτως ὥστε τὸ εἴδωλόν του νὰ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τοῦ φακοῦ. 3) Ἀπομακρύνεται τὸ ἀντικείμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κατὰ 2 cm ἐκ τοῦ φακοῦ καὶ διαπιστοῦται ὅτι ἐὰν πρὸς αὐτὸν συνενωθῇ δεύτερος φακὸς ἐκ τῆς ἰδίας ὑάλου, τὸ εἴδωλον σχηματίζεται ἐκ νέου εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν. Ποῖον τὸ εἶδος τοῦ δευτέρου τούτου φακοῦ καὶ ποία ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις. 4) Ἐὰν ὁ δεύτερος φακὸς ἔχῃ τὴν μίαν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἐπίπεδον, ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἑτέρας.

(Ἀπ. 1΄ f = 22,2 cm. 2΄ α = 23,53 cm. 3΄ φακὸς ἀποκλίνων f = − 300 cm. 4΄ R = 150 cm.)

1319. Ἀμφίκοιλος φακὸς καὶ ἕτερος ἀμφίκυρτος, ἔχων ἑστιακὴν ἀπόστασιν f_2, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν d ἀπ' ἀλλήλων καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν συμπίπτουν. Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν l ἀπὸ τοῦ ἀμφικοίλου φακοῦ ἐκπέμπει φωτεινὰς ἀκτῖνας, αἵτινες ἀφοῦ διέλθουν διὰ τοῦ συστήματος συναντῶνται εἰς σημεῖον ὄπισθεν τοῦ ἀμφικύρτου φακοῦ εἰς ἀπόστασιν δ ἀπ' αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις f_1 τοῦ ἀμφικοίλου φακοῦ καὶ ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ $l = 2$ m, d = 10 cm, $f_2 = 40$ cm, δ = 1 m.

(Ἀπ. $f_1 = \dfrac{l\,[\,d\,(\delta - f_2) - \delta \cdot f_2\,]}{(\delta - f_2)\cdot(d + l) - \delta \cdot f_2}$, $\upsilon = \dfrac{d\,(\delta - f_2) - \delta \cdot f_2}{l \cdot f_2}$, − 79 cm, 17 : 40.)

1320. Παρατηρεῖ τις διὰ μέσου λεπτοῦ μεγεθυντικοῦ φακοῦ μικρὸν ἀντικείμενον ΑΒ. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ἀπέχει κατὰ 1 cm ἀπὸ τὸν φακόν. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι 12 cm, ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως διὰ τὸν παρατηρητὴν εἶναι 25 cm, ἡ δὲ μεγίστη τὸ ἄπειρον. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν 1) Αἱ ὁρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ ὀφθαλμὸς βλέπει τοῦτο εὐκρινῶς. 2) Αἱ μεγεθύνσεις διὰ τὰς ἀποστάσεις ταύτας.

(Ἀπ. 1΄ 8 cm < α < 12 cm, 2΄ Μ = 3 καὶ Μ΄ = 2,1.)

1321. α) Συνδέονται δύο ὅμοιοι συγκλίνοντες φακοί, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 3 cm, ἀπέχοντες κατὰ 2 cm μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μεγεθυντικὸν σύστημα φακῶν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ πρώτου φακοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ μικρὸν ἀντικείμενον, ἵνα παρατηρητὴς ἔχων κανονικὴν ὅρασιν δύναται νὰ ἐξετάσῃ τὸ εἴδωλον ἄνευ προσαρμογῆς. Ποία εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἰσχὺς τοῦ συστήματος εἰς διοπτρίας. β) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 cm ὄπισθεν τοῦ δευτέρου φακοῦ καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως δι' αὐτὸν εἶναι 25 cm, νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ ποίαν φορὰν καὶ κατὰ πόσον δύναται νὰ μετατοπισθῇ ἐκ τῆς προηγουμένης του θέσεως τὸ ἀντικείμενον, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ διακρίνεται εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον διὰ μέσου τοῦ συστήματος.

('Απ. $\alpha = 0{,}75$ cm, $P = 44{,}4$ διοπτρίαι. Τὸ ἀντικείμενον δύναται νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὸν φακὸν κατὰ 2 mm.)

1322. Ἔστω κοινὸς φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 13,5 cm, διὰ τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ φωτογραφηθῇ ὑπὸ σμίκρυνσιν 2/3 ἐπίπεδος πολύχρωμος πίναξ. Ζητεῖται: α) Ἡ ἀπόστασις l εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ πίναξ. β) Ἡ ἀπόστασις l' μεταξὺ τοῦ φακοῦ καὶ τῆς φωτογραφικῆς ταινίας (φίλμ). γ) Παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν ρυθμίζωμεν μὲ μεγίστην ἀκρίβειαν τὴν φωτογραφικὴν μηχανὴν διὰ τὰς διαφορόχρώμους περιοχὰς τοῦ πίνακος ἡ ἀπόστασις l' = φακὸς — φίλμ κυμαίνεται μεταξὺ τῶν ὁρίων $l' \pm \Delta l'$ ἀντὶ νὰ εἶναι ἁπλῶς l'. Νὰ δοθῇ ἡ σχετικὴ ἐξήγησις καὶ νὰ διευκρινισθοῦν τὰ $+\Delta l'$ καὶ $-\Delta l'$. δ) Τὰ σύγχρονα παγχρωματικὰ φωτογραφικὰ φίλμ παρουσιάζουν τὴν αὐτὴν περίπου εὐπάθειαν διὰ τὰ τρία βασικὰ χρώματα τοῦ φάσματος, ἐνῷ τὰ φίλμ παλαιοτέρου τύπου ἦσαν εὐπαθῆ μόνον διὰ φῶς ἀνῆκον εἰς τὸ κυανοῦν ἄκρον τοῦ φάσματος. Προκειμένου νὰ φωτογραφήσωμεν πολύχρωμον τοπίον μὲ μηχανὴν ἐφωδιασμένην διὰ κοινοῦ φακοῦ, συγκρίνατε τὰ ἀποτελέσματα ἐπὶ παγχρωματικοῦ καὶ κοινοῦ φίλμ ἀπὸ ἀπόψεως ἀποδόσεως τῶν λεπτομερειῶν τοῦ τοπίου μόνον, ἀδιαφοροῦντες διὰ τὴν μὴ πιστὴν ἀπόδοσιν τῶν χρωμάτων.

('Απ. α' $l = 33{,}75$ cm, β' $l' = 22{,}5$ cm.)

(Γεωπονικὴ Σχολὴ 'Αθηνῶν, 1955.)

1323. Ἐξετάζονται εἰς μικροσκόπιον δύο παράλληλοι γραμμαὶ ἀπέχουσαι ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 0,1 mm. Διὰ χειρισμοῦ τοῦ μικρομετρικοῦ κοχλίου φέρεται διαδοχικῶς τὸ ἓν νῆμα τοῦ σταυρονήματος εἰς σύμπτωσιν μὲ τὰ εἴδωλα τῶν γραμμῶν τούτων. Εὑρίσκεται ὅτι διὰ νὰ διέλθῃ τὸ νῆμα τοῦ σταυρονήματος ἀπὸ τὸ ἕνα εἴδωλον εἰς τὸ ἕτερον πρέπει νὰ μετακινηθῇ κατὰ 1,9 mm. Ἐπιμηκύνεται ὁ σωλὴν τοῦ μικροσκοπίου κατὰ 5 cm καὶ φέρεται πάλιν διαδοχικῶς τὸ ἓν νῆμα τοῦ σταυρονήματος ἐν συμπτώσει πρὸς τὰ εἴδωλα τῶν γραμμῶν. Εὑρίσκεται ὅτι τώρα τὸ νῆμα πρέπει νὰ μετακινηθῇ κατὰ 2,4 mm ἵνα διέλθῃ ἐκ τοῦ ἑνὸς εἰδώλου εἰς τὸ ἕτερον. Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τῶν γραμμῶν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εἰδώλων των εἶναι 26,35 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ, β) Ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου διὰ τὸ τελευταῖον μῆκος τοῦ σωλῆνος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ προσοφθάλμιος ἔχει ἰσχὺν 30 διοπτριῶν. ('Απ. 1 cm, 720 διοπτρίαι.)

1324. Τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνθέτου μικροσκοπίου εἶναι τὰ ἀκόλουθα: Ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀντικειμενικοῦ 5 mm, προσοφθαλμίου 20 mm, ἀπόστασις τῶν ἐσωτερικῶν ἑστιῶν τῶν δύο φακῶν 180 mm. Ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς ἑστίας τοῦ προσοφθαλμίου. Ζητεῖται 1) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ ἀντικειμένου, ὥστε τὸ τελικόν του εἴδωλον νὰ σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου καὶ ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ. 3) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ ὀφθαλμοῦ, ἵνα τὸ πραγματικὸν εἴδωλον σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπ' αὐτοῦ. 4) Ἐπιθυμεῖ τις νὰ φωτογραφήσῃ τὸ ἀντικείμενον ἐπὶ φωτογραφικῆς πλακός, εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀντικειμένου καὶ ἡ γραμμικὴ μεγέθυνσις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

(Ἀπ. 1ʹ Ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ $\beta_1 = 5{,}139$ mm. 2ʹ P = 1800 διοπτρίαι, M = 450. 3ʹ Ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ $\beta_2 = 5{,}138$ mm. 4ʹ Ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ $\beta_3 =$ $= 5{,}140$ mm $A'B'/AB = 320$.)

1325. Μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο λεπτοὺς φακούς, ἕνα ἀντικειμενικόν, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 6 mm καὶ ἕνα προσοφθάλμιον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 25 mm. Ἀντικείμενον μήκους 0,5 mm τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 6,2 mm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Ζητεῖται 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ὑπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ παρεχομένου εἰδώλου τοῦ ἀντικειμένου. 2) Ἐὰν τὸ ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ παρατηρούμενον εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος τοῦ μικροσκοπίου καὶ ἡ ἰσχύς του. 3) Ποία εἶναι ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου, ἐὰν ὁ προσοφθάλμιος μετατεθῇ πρὸς τὰ ὄπισθεν κατὰ 2 mm, ἐνῷ ὁ ἀντικειμενικὸς καὶ τό ἀντικείμενον μείνουν εἰς τὴν αὐτὴν ὡς προηγουμένως θέσιν.

(Ἀπ. 1ʹ β = 186 mm, $A_1B_1 = 15$ mm. 2ʹ $l = 211$ mm, P = 1200 διοπτρίαι. 3ʹ Πραγματικὸν εἴδωλον, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 337,5 mm ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου. Μέγεθος τοῦ εἰδώλου 187,5 mm.)

1326. 1) Ἀστρονομικὴ διόπτρα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντικειμενικὸν φακόν ἰσχύος 5 διοπτριῶν καὶ ἀπὸ λεπτὸν προσοφθάλμιον φακὸν ἰσχύος 50 διοπτριῶν, ρυθμίζεται δὲ εἰς τὸ ἄπειρον καὶ παρατηρεῖται δι' αὐτῆς ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄπειρον. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς διόπτρας καὶ ἡ μεγέθυνσις αὐτῆς. 2) Διὰ μεταβολῆς τοῦ μήκους τῆς διόπτρας παρατηρεῖται δι' αὐτῆς ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, τοῦ ὀφθαλμοῦ παρατηροῦντος πάντοτε εἰς τὸ ἄπειρον. Ποῖον τὸ νέον μῆκος αὐτῆς. 3) Χρησιμοποιεῖται ἡ διόπτρα μὲ τὸ ἀρχικόν της μῆκος διὰ νὰ παρατηρηθῇ ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ, ὅστις πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ πρὸς τὸν προσοφθάλμιον διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τοῦτο. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγέθυνσις τοῦ οὕτω προκύπτοντος συνθέτου προσοφθαλμίου.

(Ἀπ. 1ʹ $l = 22$ cm, M = 10. 2ʹ $l' = 27$ cm, $M' = 12{,}5$, 3ʹ 1 διοπτρία, $M'' = 10$.)

1327. Σύνθετον μικροσκόπιον δύναται νὰ δεχθῇ δύο προσοφθαλμίους φακοὺς ἑστιακῶν ἀποστάσεων 18 mm καὶ 36 mm, φέρει δὲ τρεῖς ἀντικειμενικοὺς φακούς, ἔχοντας ἀντιστοίχως ἑστιακὰς ἀποστάσεις 2 mm, 4,2 mm καὶ 16 mm. Τὸ σύστημα στηρίξεως εἶναι τοιοῦτον, ὥστε εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἡ ἐσωτερικὴ ἑστία τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἑστία τοῦ προσοφθαλμίου νὰ ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 15 cm. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διάφοροι ἰσχεῖς αἱ ὁποῖαι ἐπιτυγχάνονται δι' ὅλων τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν.

(Ἀπ. Δι' ἀντικειμενικὸν 2 mm: P = 4166 καὶ 2083 διοπτρίαι. Δι' ἀντικειμενικὸν 4,2 mm: P = 1984 καὶ 992 διοπτρίαι. Δι' ἀντικειμενικὸν 16 mm: P = 520 καὶ 260 διοπτρίαι.)

1328. 1) Μικροσκόπιον φέρει ἀντικειμενικὸν καὶ προσοφθάλμιον φακὸν μὲ ἑστιακὰς ἀποστάσεις 5 mm καὶ 25 mm ἀντιστοίχως. Τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 5,1 mm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου ἀπὸ τοῦ εἰδώλου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ παρατηρητοῦ. β) Ἡ μεγέθυνσις καὶ τὸ μῆκος τοῦ μικροσκοπίου. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ πρόβλημα εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις. α) Τὸ ἀντικείμενον παρατηρεῖται ἀπὸ ἐμμέτρωπα ὀφθαλμὸν (ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως

20 cm. β) Τὸ ἀντικείμενον παρατηρεῖται ἀπὸ μυωπικὸν ὀφθαλμὸν (ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 10 cm). γ) Τὸ ἀντικείμενον παρατηρεῖται ἀπὸ ὑπερμετρωπικὸν ὀφθαλμὸν (ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 50 cm.)
('Απ. 22 mm, 20 mm, 24 mm, 455, 250, 1042, 27,7 cm, 27,5 cm, 27,9 cm.)

1329. Διόπτρα Γαλιλαίου, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο λίαν λεπτοὺς φακούς, ἔχοντας τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα. Ὁ εἷς φακὸς εἶναι συγκλίνων, ἰσχύος 6,25 διοπτριῶν, ἐνῷ ὁ ἕτερος εἶναι ἀποκλίνων, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 cm. Παρατηρητὴς κανονικῆς ὁράσεως ρυθμίζει τὴν διόπτραν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ βλέπῃ ἄνευ προσαρμογῆς πύργον λίαν μεκακρυσμένον, ὕψους 20 m. α) Πόση ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας. β) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ παρατηρητοῦ εὑρίσκεται ὁ πύργος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν παρατηρεῖται διὰ μέσου τῆς διόπτρας εἶναι $4^0\ 27'$.
('Απ. α' M = 4, β' 1000 m.)

1330. Ἀστρονομικὴ διόπτρα ἔχει ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_\alpha = 100$ cm καὶ προσοφθάλμιον ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f_\pi = 2$ cm. Ποία ἡ μεγέθυνσις ὡς καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὀργάνου εἰς τὰς τρεῖς ἀκολούθους περιπτώσεις. α) Ὅταν τὸ παρατηρούμενον ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ παρατηρῶν ὀφθαλμὸς εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ ἄπειρον. β) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον, ὁ δὲ ὀφθαλμὸς τίθεται εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, παρατηρῶν εἰς 25 cm. γ) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ, ὁ δὲ ὀφθαλμὸς τίθεται εἰς ἀπόστασιν 1 cm ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου καὶ παρατηρεῖ εἰς ἀπόστασιν 25 cm.
('Απ. α' M = 50 καὶ $l = 102$ cm. β' M = 50 καὶ $l = 101{,}84$ cm.
γ' M = 48 καὶ $l = 101{,}85$ cm.)

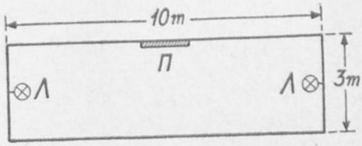
1331. Τηλεφωτογραφικὸς φακὸς συνίσταται ἐξ ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 3,5 cm. τιθεμένου εἰς ἀπόστασιν 2 cm πρὸ ἀποκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 1,8 cm. α) Εὕρατε τὴν θέσιν τοῦ ὑπὸ τοῦ συστήματος παρεχομένου εἰδώλου μεμακρυσμένου ἀντικειμένου. β) Καθορίσατε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν ἁπλοῦ φακοῦ, ὅστις δίδει εἴδωλον τοῦ μεμακρυσμένου ἀντικειμένου, ἔχον τὸ αὐτὸ μέγεθος μὲ τὸ εἴδωλον τὸ ὁποῖον παρέχει τὸ ἀνωτέρω σύστημα φακῶν.
('Απ. α' 9 cm ὄπισθεν τοῦ ἀποκλίνοντος. β' +21 cm.)

1332. Δύο πρίσματα, τὸ ἓν ἐκ στεφανυάλου, τὸ ἕτερον ἐκ πυριτυάλου, συνενοῦνται κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ ἑνὸς νὰ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου. α) Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν διαθλαστικῶν γωνιῶν A καὶ A' τῶν δύο πρισμάτων, ἵνα αἱ ἀκτῖνες τοῦ κεντρικοῦ μέρους τοῦ φάσματος δέσμης λευκοῦ φωτὸς ἐξέρχωνται πρακτικῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὴν ὁποίαν εἶχον ὅταν εἰσῆλθον εἰς τὸ πρῶτον πρῖσμα. Οἱ δεῖκται διαθλάσεως τῆς στεφανυάλου καὶ τῆς πυριτυάλου, διὰ τὰς ἀκτῖνας τοῦ κεντρικοῦ μέρους τοῦ φάσματος εἶναι n καὶ n' ἀντιστοίχως. β) Ποία ἡ τιμὴ τῆς γωνίας A', ἂν $A = 20^0$ καὶ $n = 1{,}533$, $n' = 1{,}642$, δι' ὡρισμένον μονοχρωματικὸν φῶς.
('Απ. $\frac{A}{A'} = \frac{(n'-1)}{(n-1)}$, $A' = 16^0\ 36{,}24'$.)

1333. Φασματοσκόπιον, ἀποτελεῖται ἐκ κατευθυντῆρος μὲ σχισμήν, εὑρισκομένην εἰς τὴν ἑστίαν τοῦ φακοῦ τοῦ κατευθυντῆρος, ἐκ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας $A = 60^0$ καὶ διόπτρας παρατηρήσεως ρυθμισμένης εἰς τὸ ἄπειρον, τῆς ὁποίας ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 20 cm. Τὸ ὄργανον ρυθμίζεται κατὰ τρόπον, ὥστε μία ἀκτὶς μονοχρωματικοῦ φωτός, διερχομένη διὰ τοῦ πρίσματος, συνισταμένου ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως 1,5179 διὰ τὸ φῶς τοῦτο, νὰ ὑφίσταται ἐλαχίστην ἐκτροπήν. 1) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ πορεία τῶν ἀκτίνων. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ ὀπτικοὶ ἄξονες τῆς διόπτρας καὶ τοῦ κατευθυντῆρος. 3) Ἡ φωτεινὴ δέσμη περιέχει ἑτέραν μονοχρωματικὴν ράβδωσιν, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι 1,5195. Τὸ φασματοσκόπιον ρυθμίζεται κατὰ τρόπον, ὥστε μία ἀκτὶς τοῦ φωτὸς τῆς πρώτης ραβδώσεως, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πρίσματος, νὰ ὑφίσταται ἐλαχίστην ἐκτροπήν. Ποία ἡ ἐκτροπὴ τῆς ἀκτῖνος τοῦ φωτὸς τῆς δευτέρας ραβδώσεως.

(Ἀπ. 1′ $\eta\mu\,\alpha = \dfrac{1{,}5179}{2} = 0{,}7589$. $\alpha = 49^0\ 22'$. 2′ $\varepsilon = 2\alpha - A = 38^0 44'$. 3′ $\eta\mu\,\beta = 0{,}7589/1{,}5195$, $\beta = 29^0\ 58'$, $\beta' = 60 - 29^0\ 58' = 30^0\ 02'$, $\eta\mu\,\delta = 1{,}5195 \cdot \eta\mu\,\gamma$, $\delta' = 49^0\ 31'$, $\varepsilon' = \alpha + \delta - A = 38^0\ 53'$.)

1334. Εἰς τὸ μέσον τοῦ μεγαλυτέρου τοίχου δωματίου, μήκους 10 m καὶ πλάτους 3 m, εἶναι ἀνηρτημένος πίναξ, ὅστις φωτίζεται ὑπὸ δύο λυχνιῶν, τοποθετημένων εἰς τὸ μέσον τῶν δύο μικροτέρων τοίχων τοῦ δωματίου. Ἐὰν δι' ἄνετον ἀνάγνωσιν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἀπαιτῆται φωτισμὸς 50 Lux α) πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστης τῶν δύο λυχνιῶν. β) Ποία ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς ἑκάστης ἐξ αὐτῶν, ἐάν, διὰ νὰ παραχθῇ φωτεινὴ ροὴ 22,5 Lm ἀπαιτῆται ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς 1 W. γ) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς λυχνίας, ἀνηρτημένης εἰς τὸ μέσον τοῦ δωματίου, εἰς ὕψος 2,5 m ἄνωθεν τοῦ δαπέδου, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ἄνωθεν τοῦ δαπέδου πίνακος εἶναι 1,5 m.



(Ἀπ. α′ 2170 κηρία. β′ 1210 W. γ′ 150 W.)

1335. Δύο λαμπτῆρες, φωτεινῶν ἰσχύων J_1 καὶ J_2 κηρίων ἀντιστοίχως, ἐξαρτῶνται εἰς ὕψος h m ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἀπέχουν μεταξύ των d m. (Ὑποτίθεται ὅτι ἡ φωτεινὴ ἔντασις ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς πάσας τὰς διευθύνσεις.) Εὕρατε τὸν φωτισμὸν εἰς σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο σημεῖα τοῦ ἐδάφους τὰ εὑρισκόμενα κάτωθεν ἀκριβῶς τῶν δύο λαμπτήρων, εἰς ἀπόστασιν x m ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ εὑρισκομένου κάτωθεν ἀκριβῶς τοῦ πρώτου λαμπτῆρος.

$$\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{J_1 \cdot h}{(h^2 + x^2)^{2/3}} + \frac{J_2 \cdot h}{[h^2 + (d - x)^2]^{3/2}} \quad \frac{NK}{m^2}.\right)$$

1336. Δύο λυχνίαι, παρέχουν ἴσον φωτισμὸν ἐπὶ τοῦ φύλλου φωτομέτρου Bunsen, ὅταν τεθοῦν εἰς ἀπόστασιν 40 cm καὶ 60 cm ἀντιστοίχως ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Ἐπίπεδον κάτοπτρον, τίθεται εἰς ἀπόστασιν 5 cm ὄπισθεν τῆς ἀσθενεστέρας πηγῆς κατὰ τρόπον, ὥστε ν' ἀνακλᾷ τὸ φῶς ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ φύλλου τοῦ φωτομέτρου. Διαπιστοῦται τότε ὅτι, ἡ ἰσχυροτέρα πηγὴ πρέπει νὰ μετακινηθῇ κατὰ 11 cm πλησιέστερον πρὸς τὸ φωτόμετρον, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἐκ νέου ἰσότης φωτισμῶν. Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τοῦ φωτὸς τῆς ἀσθενεστέρας πηγῆς ἀνακλᾶται ὑπὸ τοῦ κατόπτρου.

(Ἀπ. 78,1 %.)

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

1337. Ἠλεκτρικὴ κάμινος Κ τροφοδοτεῖται διὰ συνεχοῦς ρεύματος τάσεως E = 20 Volt, παραγομένου ὑπὸ γεννητρίας Γ. Ὁ εἷς ἀκροδέκτης τῆς γεννητρίας Γ εἶναι προσγειωμένος, ὅπως ἐπίσης εἶναι προσγειωμένος καὶ ὁ ἕτερος ἀκροδέκτης τῆς καμίνου Κ. Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς ἐγκαταστάσεως, παρετηρήθη ἐπὶ τοῦ ἀμπερομέτρου Α ἀπότομος πτῶσις τῆς ἐντάσεως I = 100 A τοῦ ρεύματος εἰς I′ = 20 A, διεπιστώθη δὲ ὅτι ἡ πτῶσις αὐτὴ ὠφείλετο εἰς τὴν ἐπελθοῦσαν ἀτελῆ ἐπαφὴν τοῦ ἄκρου τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο καλωδίων προσγειώσεως τῆς ἐγκαταστάσεως. Ὁ ἐπιβλέπων αὐτὴν ὑπελόγισε τὴν ἐκ τῆς ἐλαττωματικῆς ἐπαφῆς ἰσοδύναμον πρόσθετον ἀντίστασιν R', βάσει τοῦ ἑξῆς συλλογισμοῦ. Ἐφ' ὅσον ἐπῆλθε πτῶσις τοῦ Ι κατὰ ΔΙ = 100 − 20 = 80 Α, ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις θὰ εἶχεν ἀνέλθη εἰς 20 : 80 = 0,25 Ω. Ἐπειδὴ ὅμως αὕτη ἦτο πρὸ τῆς μεταβολῆς προφανῶς 0,20 Ω, ἡ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐλαττωματικῆς προσγειώσεως ἐμφανισθεῖσα πρόσθετος ἀντίστασις R' θὰ ἦτο ἡ διαφορὰ αὐτῶν, δηλ. R' = 0,25 − 0,2 = 0,05 Ω. Ἡ τοπικῶς ὅμως παραχθεῖσα θερμότης οὐδόλως ἀνταπεκρίνετο πρὸς τὴν ὡς ἄνω μικρὰν τιμὴν R' = 0,05 Ω καὶ ὡς ἐκ τούτου ζητεῖται α) νὰ ὑποδείξητε τὸ σφάλμα εἰς τὸν ὡς ἄνω συλλογισμόν, β) νὰ ὑπολογίσητε τὴν ὀρθὴν τιμὴν τοῦ R' καὶ γ) νὰ διατυπώσητε τὸν νόμον τοῦ Ohm ὥστε νὰ μὴ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπανάληψις μιᾶς παρομοίας ἐσφαλμένης ἐφαρμογῆς αὐτοῦ. (Ἀπ. α' Ἀντὶ νὰ διαιρέσῃ τὰ 20 V διὰ 20 Α, διαιρεῖ τὰ 20 V διὰ 80 Α, β' R' = = 0,8 Ω. γ' $R' = R_2 - R_1 = V \cdot (I_1 - I_2)/I_1 \cdot I_2$, ἔνθα $R_1 = V : I_1$, $R_2 = V : I_2$.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1955.)

1338. Συνδέονται ἐν σειρᾷ πρὸς τοὺς πόλους γεννητρίας, τῆς ὁποίας ἡ ΗΕΔ εἶναι 32 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις 1 Ω, α) ροοστάτης ἀντιστάσεως R = 1 Ω, β) ἀντίστασις 2 Ω, βυθισμένη ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 100 gr ὕδατος, γ) βολτάμετρον νιτρικοῦ ἀργύρου, ἀντιστάσεως 6 Ω. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου ἀνυψοῦται κατὰ 9° C εἰς 3 min καὶ 30 sec. Ζητοῦνται 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ βολταμέτρου. 2) Ἡ μᾶζα τοῦ ἀργύρου, ἡ ἐναποτιθεμένη ἐπὶ τῆς καθόδου αὐτοῦ εἰς χρόνον 3 min καὶ 30 sec. 3) Ἡ ἀντι-ΗΕΔ τῆς συσκευῆς. 4) Ἐὰν ἀντικατασταθοῦν τὰ ἀπρόσβλητα ἠλεκτρόδια τοῦ βολταμέτρου ἀπὸ ἠλεκτρόδια ἀργύρου, ποία εἶναι ἡ νέα τιμὴ τῆς ἐντάσεως. Ποία τιμὴ ἀντιστάσεως πρέπει νὰ δοθῇ εἰς τὸν ροοστάτην R εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ διὰ τοῦ κυκλώματος διερχομένου ρεύματος νὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ἀρχικὴν τιμήν.

(Ἀπ. 1' i = 3 Α. 2' m = 0,704 gr. 3' e = 2 V. 4' i' = 3,2 Α, R' = 1,67 Ω.)

1339. Βολτάμετρον θειϊκοῦ χαλκοῦ, μὲ ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκόν, λειτουργεῖ ὑπὸ ἔντασιν ρεύματος 0,5 Α καὶ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις εἶναι 10 Ω. Ἡ συσκευὴ πρόκειται νὰ συνδεθῇ πρὸς δίκτυον συνεχοῦς τάσεως 130 V. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ (εἰς Ohm) τῆς ἀντιστάσεως, ἡ ὁποία πρέπει νὰ παρεμβληθῇ ἐν σειρᾷ εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ βολταμέτρου τούτου, ἵνα λάβωμεν τὴν ἐπιθυμητὴν ἔντασιν. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος (εἰς μέτρα) τοῦ σύρματος ἐκ νεαργύρου, διαμέτρου 0,4 mm, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἀντίστασιν αὐτὴν (εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ νεαργύρου 80 μΩ·cm). 3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος (μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τοῦ γραμμαρίου) τοῦ χαλκοῦ, ὁ ὁποῖος ἐναποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου εἰς χρόνον 2 h (ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 64, σθένος αὐτοῦ = 2). 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης θερμότητος εἰς kcal, ἡ ὁποία ἐκλύεται ἐπὶ τῆς παρεμβαλλομένης ἀντιστάσεως εἰς τὸ κύκλωμα κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον (ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος α = 0,24 cal/Joule). 5) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ σύνδεσις ἡ ὁποία ἐπιτρέπει νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν προηγουμένην ἀντίστασιν μὲ τὸν πλέον δυνατὸν μικρὸν ἀριθμὸν ἀντιστάσεων, ἑκάστης ἐκ 1000 Ω.

(Ἀπ. 1' 250 Ω. 2' 39,27 m. 3' 1,19 gr. 4' 108 cal. 5' 4 ἀντιστάσεις ἐν παραλλήλῳ.)

1340. Βολτόμετρον μεγάλης ἀντιστάσεως συνδεδεμένον εἰς τοὺς πόλους συστοιχίας συσσωρευτῶν δεικνύει τάσιν 100 V. Ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ βολτόμετρον, συνδέεται πρὸς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας ἀντίστασις x Ω. Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀντιστάσεως, εἶναι ἐντάσεως 25 Α, μετὰ δὲ τὴν σύνδεσιν αὐτῆς τὸ βολτόμετρον δεικνύει τάσιν 50 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΗΕΔ τῆς συστοιχίας τῶν συσσωρευτῶν, ἡ ἀντίστασις x καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τῆς συστοιχίας ταύτης. 2) Ἡ ἔντασις τοῦ διὰ τῆς ἀντιστάσεως x διερχομένου ρεύματος πίπτει εἰς 20 Α, ὅταν εἰς κινητήρ, τὸν ὁποῖον ἐμποδίζομεν νὰ λειτουργῇ, εἶναι συνδεδεμένος ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. 3) Ἀφίνομεν νὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητήρ, ὅτε ἡ ἔντασις ἐλαττοῦται εἰς 15 A. Πόση ἡ ἀντι - ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος, πόση ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ καὶ πόση ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ, τὴν ὁποίαν δεικνύει βολτόμετρον συνδεδεμένον εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

(Ἀπ. 1α′ 100 V, 1β′ 2 Ω, 1γ′ 2Ω. 2′ 1 Ω. 3α′ 25 V, 3β′ 375 W, 3γ′ 40 V.)

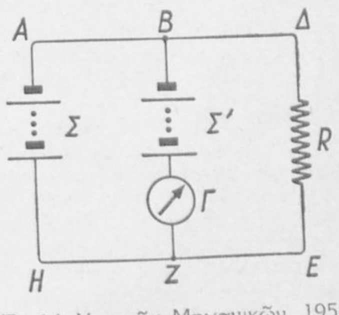
1341. 1) Σωληνοειδὲς S, φέρει 504 σπείρας διατεταγμένας ἐπὶ μήκους 60 cm. Ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 4,4 Ω, τὸ δὲ σύρμα τῆς περιελίξεως ἔχει τομὴν 1 mm^2. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου ἐκ τοῦ ὁποίου συνίσταται τοῦτο, εἶναι $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος. 2) Τρεῖς ἀντιστάσεις, $R_1 = 65$ Ω, $R_2 = 26$ Ω, $R_3 = x$ Ω, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, διὰ νὰ σχηματίσουν ἀντίστασιν R = 6,5 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ x. 3) Τὸ σωληνοειδὲς S καὶ ἡ ἀντίστασις R συνδέονται ἐν σειρᾷ εἰς τὰ ἄκρα συσσωρευτοῦ ΗΕΔ 55 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,1 Ω. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, β) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος διὰ τῶν S, R_1, R_2, R_3, γ) ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου, δ) τὸ ἀποδιδόμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον ἐντὸς 2 h ἀπὸ τὸν συσσωρευτήν. 4) Δεχόμενοι ὅτι τὸ ἠλεκτρικὸν αὐτὸ φορτίον διέρχεται ἀπὸ δύο βολτάμετρα συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ, τῶν ὁποίων οἱ ἠλεκτρολύται εἶναι, διὰ τὸ πρῶτον δισθενὴς θειϊκὸς σίδηρος καὶ διὰ τὸ δεύτερον τρισθενὴς θειϊκὸς σίδηρος, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μᾶζαι τοῦ σιδήρου, αἱ ὁποῖαι ἀποτίθενται ἐπὶ ἑκάστης τῶν καθόδων. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 56.

(Ἀπ. 1′ 275 m. 2′ 10 Ω. 3α′ 11 Ω, 3β′ 5 A, $i_1 = 0{,}5$ A, $i_2 = 1{,}25$ A, $i_3 = 3{,}25$ A, 3γ′ 52,50 Gauss, 3δ′ 36000 Cb. 4α′ 10,44 gr, 4β′ 6,96 gr.)

1342. Διαθέτει τις δύο λυχνίας πυρακτώσεως, λειτουργούσας κανονικῶς ἀμφοτέρας ὑπὸ τάσιν 110 V καὶ ἐχούσας ἰσχεῖς 40 W καὶ 100 W. 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντιστάσεις των καὶ αἱ ἐντάσεις τῶν ἀντιστοίχων ρευμάτων κατὰ τὴν λειτουργίαν αὐτῶν. 2) Συνδέονται αἱ δύο λυχνίαι ἐν σειρᾷ καὶ τροφοδοτεῖται τὸ κύκλωμα αὐτῶν ὑπὸ τάσιν 220 V. Νὰ δειχθῇ ὅτι αὗται δὲν λειτουργοῦν πλέον κανονικῶς. Διὰ νὰ λειτουργήσουν κανονικῶς, τίθεται ἀντίστασις R ἐν παραλλήλῳ, πρὸς τὰ ἄκρα τῆς λυχνίας τῶν 40 W. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως ταύτης, ἵνα ἀμφότεραι αἱ λυχνίαι λειτουργοῦν κανονικῶς. 3) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν προηγουμένην ἀντίστασιν, λαμβάνοντες 100 m μεταλλικῆς ταινίας, 2 mm πλάτους, ἐκ κράματος τοῦ ὁποίου ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις εἶναι $50 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πάχος τῆς ταινίας.

(Ἀπ. 1α′ $i_1 = 4/11$ A, $i_2 = 10/11$ A, 1β′ 302,5 Ω, 121 Ω, 2α′ 0,51 A $\neq i_1 \neq i_2$. 2β′ 201, 66 Ω. 3′ 0, 12 mm.)

1343. Δύο στῆλαι Σ καὶ Σ′, ἀποτελούμεναι ἡ πρώτη ἐκ 5 στοιχείων καὶ ἡ δευτέρα ἐκ 4 ὁμοίων στοιχείων, συνδέονται πρὸς κύκλωμα ΑΒΔΕΖΗΙΑ, ὡς εἰς τὸ σχῆμα δεικνύεται. Εἰς Γ εὑρίσκεται γαλβανόμετρον καὶ εἰς R μεταβλητὴ ἀντίστασις. Ρυθμίζομεν τὴν τελευταίαν ταύτην κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ γαλβανόμετρον νὰ δεικνύῃ μηδέν. Εὑρίσκομεν τότε ὅτι ἡ ἀντίστασις R εἶναι 1 Ω. Ζητεῖται ἐκ τοῦ πειράματος τούτου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου τῶν στοιχείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται αἱ δύο στῆλαι. Θεωροῦμεν ὡς ἀμελητέαν τὴν ἀντίστασιν ὅλων τῶν συρμάτων τῆς διατάξεως. (Ἀπ. 0,05 Ω.)



(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1954.)

1344. Τίθεται ἐπὶ 15 ὥρας εἰς κανονικὴν φόρτισιν διὰ ρεύματος ἐντάσεως 6 A, συστοιχία ἐξ 75 στοιχείων συσσωρευτῶν, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι συνδεδεμένα εἰς τρεῖς ὁμάδας ἐξ 25 στοιχείων, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ. Αἱ τρεῖς ὁμάδες εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ. Ἡ συστοιχία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν τροφοδότησιν ἠλεκτρικοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον λειτουργεῖ ὑπὸ ἔντασιν 27 A. Πόση εἶναι ἡ δυνατὴ διάρκεια τροφοδοτήσεως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόδοσις εἶναι 90 %. Δεχόμενοι σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς 2 V τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου στοιχείου καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἑκάστου ἴσην πρὸς μηδέν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος ἐκφορτίσεως.

('Απ. 9 h, $1{,}458 \cdot 10^7$ Joule, 450 W.)

1345. Ὑπολογίσατε α) Τὴν ἀπόδοσιν συσσωρευτοῦ, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,4 Ω, ὅταν εἶναι συνδεδεμένος πρὸς ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν 6 Ω. β) Ποία ἡ ἀπόδοσις τοῦ συσσωρευτοῦ, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν αὐτοῦ. γ) Ἐὰν εἷς συσσωρευτὴς ἔχῃ ΗΕΔ 2,4 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,3 Ω, διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἡ ἀποδιδομένη ἰσχὺς εἶναι μεγίστη. Ποία ἡ τάσις μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ συσσωρευτοῦ αὐτοῦ, ὅταν ἀποδίδῃ τὴν μεγίστην ἰσχύν. ('Απ. α' 94 %, β' 50 %, γ' 4 A, 1,2 V.)

1346. Συνδέονται ἐν σειρᾷ 10 συσσωρευταί, ἓν βολτάμετρον διὰ θειϊκοῦ χαλκοῦ μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ χαλκοῦ καὶ εἷς κινητήρ. 1) Ἐὰν ἐμποδισθῇ ἡ λειτουργία τοῦ κινητῆρος, διαπιστοῦται ἀπόθεσις 3,18 gr χαλκοῦ ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου, ἐντὸς χρόνου 1 ὥρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῆς περιελίξεως τοῦ κινητῆρος, ἐὰν τὸ βολτάμετρον ἔχῃ ἀντίστασιν 5 Ω, αἱ δὲ ἐσωτερικαὶ ἀντιστάσεις τῶν συσσωρευτῶν εἶναι ἀμελητέαι. Ἡ ΗΕΔ ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 2 V. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63,6, σθένος αὐτοῦ = 2. 2) Ἐὰν ὁ κινητὴρ ἀφεθῇ νὰ λειτουργήσῃ, ἡ ἐναπόθεσις τοῦ χαλκοῦ γίνεται ἴση πρὸς 1,06 gr καθ' ὥραν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἰσχύς του.

('Απ. 1' 2,46 Ω. 2' 13,3 V, 11,9 W.)

1347. Πρὸς τοὺς πόλους ἠλεκτρικῆς πηγῆς ΗΕΔ 60 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 2,5 Ω, συνδέονται ἐν σειρᾷ α) εἷς κινητὴρ ἀντι-ΗΕΔ 20 V, τοῦ ὁποίου ἡ περιέλιξις ἔχει ἀντίστασιν 1,5 Ω, β) δύο ἀντιστάσεις $R_1 = 5$ Ω καὶ $R_2 = 20$ Ω, συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ καὶ γ) διακόπτης (ἡ ἀντίστασις τῶν συρμάτων συνδέσεως θεωρεῖται ἀμελητέα). 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις τοῦ συστήματος τῶν R_1 καὶ R_2. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ θεωρούμενον κύκλωμα, ὅταν κλεισθῇ ὁ διακόπτης. 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς πηγῆς, τοῦ κινητῆρος ὡς καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῶν δύο ἀντιστάσεων. 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. 5) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν θερμότητος, τὸ ἐκλυόμενον εἰς τὴν ἀντίστασιν R_1, ὅταν τὸ κύκλωμα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐπὶ χρόνον 10 min.

('Απ. 1' 4 Ω. 2' 5 A. 3' 47,5 V, 27,5 V, 20 V. 4' 137,5 W. 5' 11500 cal.)

1348. Ἐὰν ἠλεκτρικὴ πηγὴ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς ἀντίστασιν καὶ μιλλιαμπερόμετρον, ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου εἶναι 7,5 mA (Ἡ ἀντίστασις τῶν συρμάτων συνδέσεως τοῦ μιλλιαμπερομέτρου ὡς καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς πηγῆς θεωροῦνται ἀμελητέαι). 1) Παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα σύρμα Σ τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία εἶναι 0^0 C, ἔχον εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην ἀντίστασιν $R_0 = 1000$ Ω. Ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου καθίσταται τότε ἴση πρὸς 6,7 mA. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος καὶ ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς. 2) Τὸ σύρμα Σ φέρεται εἰς θερμοκρασίαν 100^0 C, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον μέρος του κυκλώματος διατηρεῖ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν. Ἡ νέα ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου εἶναι 6,4 mA. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R_{100} τοῦ σύρματος Σ εἰς 100° C καὶ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως α τοῦ μετάλλου τοῦ σύρματος. 3) Ποία ἀντίστασις R΄ δέον νὰ τεθῇ ἐν παραλλήλῳ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος Σ, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται εἰς 100° C, ἵνα ἡ ἔνδειξις τοῦ μιλλιαμπερομέτρου γίνῃ ἐκ νέου ἴση πρὸς 6,7 mA. 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἰς τὴν ἀντίστασιν R΄.

(Ἀπ. 1΄ 837 Ω, 6,28V, 2΄ 144 Ω, $\alpha = 4{,}4 \cdot 10^{-3}$, 3΄ 327 Ω, 4΄ 1,37 mW.)

1349. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 125 A ὅταν τροφοδοτῇ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, διὰ γραμμῆς ἐκ δύο συρμάτων ἐκ χαλκοῦ διαμέτρου 8 mm. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶναι 0,36 Ω, ἡ δὲ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ εἶναι $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς μηχανῆς εἶναι 540 V. α) Πόση ἡ πτῶσις τάσεως εἰς τὴν γραμμήν. β) Πόση ποσότης θερμότητος ἀπόλυται εἰς χρόνον 10 min ἐπὶ τῆς γραμμῆς (1 Joule = 0,24 cal.) γ) Πόσον τὸ συνολικὸν μῆκος τῶν δύο ἀγωγῶν τῆς γραμμῆς, δ) Πόση ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς (νὰ ἐκφρασθῇ εἰς W καὶ CV), ε) Ἡ μηχανὴ κινεῖται δι' ὑδροστροβίλου κινουμένου ὑπὸ ὑδατοπτώσεως 36 m ὕψους καὶ παροχῆς 300 lt/sec. Πόση ἡ ἀπόδοσις τοῦ συστήματος ὑδροστροβίλου - μηχανῆς.

(Ἀπ. 45 V, 810 000 cal, 565,2 m, 67500 W ἢ 91,71 CV, 0,63.)

1350. Πρὸς τοὺς πόλους ἠλεκτρικῆς πηγῆς ΗΕΔ E = 31,5 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r = 1 Ω εἶναι συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ: α) ἀντίστασις 1 Ω ἥτις εἶναι ἐμβαπτισμένη ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 100 gr ὕδατος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία ἀνυψοῦται κατὰ 1,3° C ἀνὰ λεπτόν, β) βολτάμετρον διὰ θειϊκοῦ χαλκοῦ ἔχον ἀντίστασιν 8 Ω (τὰ ἠλεκτρόδια τοῦ βολταμέτρου εἶναι ἀπρόσβλητα ὑπὸ τῶν ἰόντων τὰ ὁποῖα ἀποβάλλουν ἐπ' αὐτῶν τὸ φορτίον των κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν). Ζητοῦνται 1) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κατὰ προσέγγισιν 0,01 A. 2) Ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ ἡ ὁποία ἀποτίθεται εἰς 1 min ἐπὶ τῆς καθόδου. 3) Ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ βολταμέτρου. 4) Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ρεύματος καὶ τῆς ἐναποτιθεμένης μάζης τοῦ χαλκοῦ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μὴ προσβαλλόμενα ἠλεκτρόδια δι' ἑτέρων ἐκ χαλκοῦ, τοῦ αὐτοῦ μεγέθους καὶ τοποθετημένα κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον. (Ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ = 63,5, σθένος αὐτοῦ = 2 καὶ α = 4,17 Joule/cal).

(Ἀπ. 1΄ 3A. 2΄ 0,592 gr. 3΄ 1,5 V. 4΄ 3,15 A, 0,622 gr.)

1351. Βολτάμετρον μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ χαλκοῦ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ ἔχει ἀντίστασιν 15 Ω. Ὅταν δι' αὐτοῦ διέλθῃ ἐπί τι χρονικὸν διάστημα ρεῦμα ἐντάσεως 10 A ἐπὶ τῆς καθόδου ἀποτίθενται 113,2 gr χαλκοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, ἥτις ἀποτίθεται εἰς τὴν κάθοδον, ἐὰν παραλλήλως πρὸς τὸ βολτάμετρον συνδεθῇ κινητὴρ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 5 Ω, τοῦ ὁποίου ἐμποδίζεται ἡ λειτουργία καὶ διὰ τοῦ κυκλώματος διέλθῃ ἐπὶ χρονικὸν διάστημα ἴσον πρὸς τὸ προηγούμενον ρεῦμα, ἐντάσεως 10 A. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ ἡ ὁποία συνολικῶς ἀποτίθεται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἐὰν ὁ κινητὴρ ἐργάζεται ὑπὸ ἰσχὺν 70 W. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διερχομένη ἔντασις διὰ τοῦ κινητῆρος εἶναι ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν δύο δυνατῶν τιμῶν.

(Ἀπ. 1΄ 10 A, ἐξ ὧν 2,5 A διέρχονται διὰ τοῦ βολταμέτρου, m = 28,3 gr. 2΄ 0,5 A διὰ τὸν κινητῆρα καὶ 9,5 A διὰ τὸ βολτάμετρον, m΄ = 107,5 gr καὶ ἀντι-ΗΕΔ = 140 V.)

1352. 16 ὅμοια στοιχεῖα, ΗΕΔ 1,8 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω, ταξινομοῦνται εἰς 2 ὁμάδας ἐξ 8 στοιχείων, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Αἱ δύο ὁμάδες συνδέονται ἐν παραλλήλῳ, πρὸς τοὺς πόλους δὲ τῆς οὕτω ἀποτελουμένης συστοιχίας συνδέονται ἐν παραλλήλῳ τρεῖς ἀντιστάσεις τῶν 1 Ω, 6 Ω καὶ 6 Ω. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις τοῦ ρεύματος εἰς τὰς ἀντιστάσεις, ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα τῆς συστοιχίας καὶ ἡ ἀπόδοσις. β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σύνδεσις, διὰ τῆς ὁποίας θὰ ἐπιτευχθῇ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἡ μεγίστη ἰσχύς, ἡ τιμὴ τῆς ἰσχύος ταύτης καὶ ἡ ἀπόδοσις.

('Απ. α' Ἑκάστη ὁμὰς παρέχει εἰς ἑκάστην τῶν ἀντιστάσεων ρεῦμα ἀντιστοίχως $i_1 = 2{,}88$ A, $i_2 = i_3 = 1{,}44$ A, 16,58 W, 20 %. β' Σχηματίζομεν 4 ὁμάδας, ἑκάστην ἐκ 4 στοιχείων ἐν σειρᾷ, τὰς 4 ὁμάδας συνδέομεν ἐν παραλλήλῳ, 26 W, 50 %.)

1353. Τὰ ἠλεκτρόδια συσκευῆς ἠλεκτρολύσεως ὕδατος εἶναι παράλληλοι ὀρθογώνιοι πλᾶκες ἐπιφανείας 20 cm², κείμεναι εἰς ἀπόστασιν 1,5 cm ἀπ' ἀλλήλων. Ἡ εἰδικὴ ἀγωγιμότης τοῦ ὀξυνισμένου ὕδατος διὰ τὴν ἐπικρατοῦσαν θερμοκρασίαν, εἶναι $0{,}300\ \Omega^{-1}\cdot cm^{-1}$. Πόσα cm³ κροτοῦντος ἀερίου θερμοκρασίας 20° C καὶ πιέσεως 720 Torr, ἐκλύονται ἐντὸς 5 min, ὅταν ἡ συσκευὴ τεθῇ ὑπὸ τάσιν 2 V. (Τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ κροτοῦντος ἀερίου, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι 0,714 cm³/Cb).

('Απ. 473 cm³.)

1354. Σύρμα χαλκοῦ κάμπτεται, ὥστε νὰ σχηματισθῇ κύκλος ἀκτῖνος 10 cm, ὁ ὁποῖος τοποθετεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, εἰς τὸ κέντρον δὲ αὐτοῦ τίθεται μικρὰ καὶ εὐαίσθητος μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Τὸ σύρμα συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς βολτάμετρον δι' ὕδατος καὶ διαβιβάζεται δι' αὐτῶν ἐπὶ 10 min ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως, ὁπότε ἐκλύονται 69,6 cm³ ὀξυγόνου 0° C καὶ 700 Torr. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐὰν ἡ βελόνη δεικνύῃ ἀπόκλισιν 32° 8'.

('Απ. 2 A, 0,2 Gauss.)

1355. Ἐπὶ καθόδου ἐπιφανείας 1 cm² πρόκειται νὰ ἐναποτεθῇ στρῶμα χαλκοῦ πάχους 2 mm δι' ἠλεκτρολύσεως διαλύματος θειϊκοῦ χαλκοῦ. Τὸ ἠλεκτρόδιον τῆς ἀνόδου εἶναι ἐκ χαλκοῦ, χρησιμοποιεῖται δὲ ὡς πηγὴ ρεύματος συσσωρευτὴς μολύβδου ΗΕΔ 2 V καὶ ρυθμίζεται ἡ ἀπόστασις τῶν ἠλεκτροδίων ἐντὸς τοῦ διαλύματος, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος νὰ εἶναι 0,01 A. Ζητοῦνται α) ἡ ἀντίστασις τοῦ διαλύματος (ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ ἡ ἀντίστασις τῶν χρησιμοποιουμένων ἀγωγῶν συνδέσεως εἶναι ἀμελητέαι), β) τὸ ὁλικὸν φορτίον τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κυκλώματος κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν, γ) ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς τὴν συσκευὴν καὶ ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν, δ) ἡ διάρκεια τῆς ἠλεκτρολύσεως. Ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,8 gr/cm³, τὸ ἀτομικὸν βάρος 63,6, καὶ τὸ σθένος αὐτοῦ = 2.

('Απ. 200 Ω, 5,340 Cb, 0,02 W, 10680 Joule, 534 000 sec ἢ 148 h 20 min.)

1356. Πρόκειται νὰ παρασκευασθῇ ἀργίλλιον δι' ἠλεκτρολύσεως μίγματος ὀξειδίου τοῦ ἀργιλλίου καὶ κρυολίθου δι' ἠλεκτρικῆς καμίνου λειτουργούσης ὑπὸ τάσιν 8 V καὶ ἔντασιν 8 000 A. Ζητεῖται 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ ἀργιλλίου ἡ ὁποία λαμβάνεται ἐντὸς 1h 2) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀντι-ΗΕΔ τῆς καμίνου εἶναι 2,8 V νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις αὐτῆς. 3) Πόσην ἰσχὺν χρησιμοποιεῖ ἡ κάμινος α) ὑπὸ μορφὴν θερμότητος καὶ β) ὑπὸ χημικὴν μορφήν. 4) Νὰ προσδιορισθῇ εἰς Joule ἡ χημικὴ ἐνέργεια ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἵνα ἐλευθερωθῇ 1 gr ἀργιλλίου. Δίδονται τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργιλλίου = 27, σθένος αὐτοῦ = 3 καὶ ὑπενθυμίζεται ὅτι 96 500 Cb ἐλευθεροῦν 1 gr ὑδρογόνου.

('Απ. 1' 2686 gr. 2' 0,00065 Ω. 3α' 41600 W, 3β' 22400 W. 4' 30022 Joule.)

1357. Ταξινομοῦνται 12 στοιχεῖα συσσωρευτῶν εἰς τρεῖς ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει 4 στοιχεῖα, συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Αἱ τρεῖς ὁμάδες συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ἡ συστοιχία αὐτὴ τροφοδοτεῖ μέσῳ ἀντιστάσεως R = 15 Ω, κινητῆρα ἀντιστάσεως r = 4,8 Ω. Ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου εἶναι 2 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $r_1 = 0{,}15\ \Omega$. 1) Ἐὰν ἐμποδισθῇ ἡ λειτουργία τοῦ κινητῆρος, ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἑκάστην ὁμάδα τῆς συστοιχίας. 2) Ὅταν ὁ κινητὴρ περιστρέφεται, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον τὸν διαρρέει εἶναι 0,3 A. Ποία εἶναι ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ α) ἡ ἠλεκτρική, β) ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. 3) Ἡ ἀντίστασις $R = 15\ \Omega$, ἀποτελεῖται ἐκ σύρματος συνισταμένου ἐκ κράματος εἰδικῆς ἀντιστάσεως $60\ \mu\Omega \cdot cm$ καὶ μήκους 20 m. Ποία ἡ τομὴ τοῦ σύρματος καὶ ποῖον ποσὸν θερμότητος ἐκλύεται ἀνὰ λεπτὸν (min) ἐντὸς αὐτοῦ α) ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν περιστρέφεται, β) ὅταν ὁ κινητὴρ περιστρέφεται. Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $\alpha = 4{,}18$ Joule/cal.

('Απ. 1′ α) 0,4 A, β) 0,133 A. 2′ 2 V, α) 0,432 W, β) 0,6 W. 3′ 0,008 cm^2 α) 34,4 cal, β) 19,3 cal.)

1358. 1) Δέκα στοιχεῖα, ἔχοντα ἕκαστον ΗΕΔ 1,08 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,1 Ω, εἶναι συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Ταῦτα τροφοδοτοῦν βολτάμετρον διὰ θειϊκοῦ χαλκοῦ μὲ ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκὸν (ἀντίστασις βολταμέτρου 0,5 Ω). Ἡ ἀντίστασις τῶν συρμάτων συνδέσεως εἶναι ἀμελητέα. Ποία εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία ἐναποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου ἐντὸς μιᾶς ὥρας. 2) Τὸ βολτάμετρον διὰ θειϊκοῦ χαλκοῦ, ἀντικαθίσταται διὰ βολταμέτρου μὲ ἠλεκτρόδια ἀπὸ σίδηρον καὶ διάλυμα καυστικοῦ νατρίου, ἀντιστάσεως 1,5 Ω. Εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου συλλέγονται ἐντὸς μιᾶς ὥρας 1532 cm^3 ὑδρογόνου (μετρηθέντα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας πιέσεως καὶ θερμοκρασίας). Ζητεῖται α) Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ βολτάμετρον καὶ β) ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ βολταμέτρου. 3) Τὰ δύο προηγούμενα βολτάμετρα συνδέονται ἐν παραλλήλῳ πρὸς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὰ στοιχεῖα ὡς καὶ ἕκαστον βολτάμετρον. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63, σθένος = 2.

('Απ. 1′ 8,46 gr. 2′ α) 3,66 A, β) 1,65 V. 3′ 7,55 A, 6,50 A, 1,05 A.)

1359. Δέκα πυκνωταί, τῆς αὐτῆς χωρητικότητος $C = 4\ \mu F$, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Τὸ σύστημα συνδέεται πρὸς πηγὴν συνεχοῦς τάσεως καὶ μετὰ τὴν φόρτισιν ἐκφορτίζεται μέσῳ βολταμέτρου δι' ὕδατος. Τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται 20 φορὰς διαδοχικῶς. Εἰς τὸ βολτάμετρον παράγονται συνολικῶς 35,4 mm^3 κροτοῦντος ἀερίου εἰς 20^0 C καὶ 720 Torr. Πόσα Coulomb διῆλθον διὰ τοῦ βολταμέτρου καὶ ποία ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος μεθ' ἑκάστην φόρτισιν. 1 Cb ἀποχωρίζει εἰς 0^0 C καὶ 760 Torr, 0,174 cm^3 κροτοῦντος ἀερίου. ('Απ. 0,18 Cb, 225 V.)

1360. Οἱ ὁπλισμοὶ ἐπιπέδου πυκνωτοῦ χωρητικότητος 0,2 μF συνδέονται διὰ χωριστῶν ἀγωγῶν α) πρὸς τοὺς πόλους ἠλεκτρικῆς πηγῆς, β) πρὸς τὰ ἄκρα ἀντιστάσεως 10000 Ω καὶ γ) πρὸς εὐαίσθητον βολτόμετρον τὸ ὁποῖον δεικνύει τάσιν 200 V. Τμῆμα τῆς πρώτης καὶ δευτέρας συνδεσμολογίας ἀποτελοῦν ἀνὰ ἓν μικρὸν φύλλον κασσιτέρου τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα μεταξύ των καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 cm τὸ ἓν ἀπέναντι τοῦ ἄλλου. Ἐὰν τὰ φύλλα βληθοῦν διὰ περιστρόφου, τὸ βλῆμα διαπερᾷ διαδοχικῶς τὸ φύλλον τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας συνδεσμολογίας, διακόπτον ἀντιστοίχως τὴν σύνδεσιν τῆς πηγῆς καὶ τῆς ἀντιστάσεως πρὸς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὸν χρόνον τῆς διαδρομῆς τοῦ βλήματος μεταξὺ τῶν δύο φύλλων ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου ἐλαττοῦται κατὰ 10 V. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. ('Απ. 200 m/sec.)

1361. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως συσσωρευτοῦ διὰ μολύβδου χρησιμοποιοῦμεν πυκνωτὴν ἀέρος μεταβλητῆς χωρητικότητος, ἀφοῦ δὲ ρυθμίσωμεν αὐτὴν εἰς 1000 pF, συνδέομεν τὸν πυκνωτὴν πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ συσσωρευτοῦ. Εἰς ἠλεκτροστατικὸν βολτόμετρον χωρητικότητος 7 pF, συνδεδεμένον ἐν παραλλήλῳ μετὰ τοῦ πυκνωτοῦ πρὸς τοὺς πόλους τοῦ συσσωρευτοῦ, δὲν παρατηρεῖται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀπόκλισις, λόγῳ τῆς μικρᾶς τάσεως εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Ἀκολούθως ὁ πυκνωτὴς μετὰ τοῦ βολτομέτρου συνδεδεμένου εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀποχωρίζεται τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ ρυθμίζεται εἰς 10pF, ὁπότε τὸ βολτόμετρον δεικνύει τάσιν 124 V. Ποία ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ. ('Απ. 2,09 V.)

1362. 'Αμπερόμετρον Α φέρει κλίμακα βαθμολογημένην ἀπὸ 0 — 100 mA. Ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 1 Ω. 1) Ποία ἀντίστασις x πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸ ὄργανον, οὕτως ὥστε ὅταν τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος 1 Α, ἡ βελόνη νὰ εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τῆς ὑποδιαιρέσεως 100. Πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις i_1 τοῦ διερχομένου ρεύματος διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου Α καὶ ἡ ἔντασις i_2 τοῦ διερχομένου διὰ τῆς διακλαδώσεως. Πόση εἶναι ἡ πρὸς τὸ ὄργανον καὶ τὴν διακλάδωσιν ἰσοδύναμος ἀντίστασις R. 2) Τὸ ἀμπερόμετρον μὲ τὴν διακλάδωσιν τίθεται ἐν σειρᾷ πρὸς κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιέχει πηνίον Β, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 5 Ω καὶ πρὸς πηγὴν ΗΕΔ Ε καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r. Τὰ σύρματα συνδέσεως ἔχουν ἀμελητέαν ἀντίστασιν. Ὁ δείκτης τοῦ ἀμπερομέτρου δεικνύει 50. 'Αντικαθίσταται τὸ πηνίον Β ἀπὸ ἕτερον Β′ ἀντιστάσεως 10 Ω, ὅτε ὁ δείκτης δεικνύει 40. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ΗΕΔ Ε καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τῆς πηγῆς. 3) Τὸ πηνίον Β′ φέρει 1000 σπείρας, ἔχει δὲ μῆκος 1 m. Ποία εἶναι εἰς Gauss ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\mathcal{H}$ τοῦ δημιουργουμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου κατὰ τὴν προηγουμένην σύνδεσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ἐκλυόμενον ἐντὸς τοῦ πηνίου τούτου εἰς χρόνον 1 min. ('Απ. 1′ 0,1 Ω. 2′ $E = 10$ V, $r = 14{,}9$ Ω. 3′ $\mathcal{H} = 5$ Gauss, 23 cal.)

1363. 1) Πηνίον ἐπίμηκες ἔχει τὸν ἄξονά του ὁριζόντιον καὶ κάθετον πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν, φέρει δὲ 10 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Εἰς τὸ κέντρον του τοποθετεῖται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη κινητὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Διὰ ρεῦμα ἐντάσεως 25 Α διαρρέον τὸ πηνίον, ὁ δείκτης ἀποκλίνει κατὰ 60^0. Ποία εἶναι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου. 2) Πρὸς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου τούτου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 25 Ω, συνδέονται α) ἀγωγὸς ἀντιστάσεως 100 Ω, β) ἠλεκτρικὴ πηγὴ καὶ ἀντίστασις 100 Ω, συνδεδεμέναι μεταξύ των ἐν σειρᾷ. Διαπιστοῦται τότε ὅτι ὁ δείκτης ἀποκλίνει κατὰ 45^0 ἐκ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς.

('Απ. 1′ $\mathcal{H} = 0{,}18$ Gauss. 2′ 2,16 V.)

1364. Μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως, ἀπομακρυνομένη τῆς θέσεως ἰσορροπίας ἐντὸς τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐπανέρχεται εἰς αὐτὴν ἐκτελοῦσα ταλαντώσεις, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι 1,6 sec^{-1}. Ἡ βελόνη τοποθετεῖται κατὰ τὴν προέκτασιν ραβδομόρφου μαγνήτου, εἰς τρόπον ὥστε τὸ κέντρον τῆς βελόνης νὰ εἶναι εἰς σημεῖον Ο, ἀπέχον 1 cm ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου τοῦ μαγνήτου. Εἰς τὴν νέαν της θέσιν ἡ βελόνη, ἀπομακρυνομένη τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἐκτελεῖ, ἕως ὅτου ἰσορροπήσῃ, ταλαντώσεις συχνότητος 8 sec^{-1}. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) Ἡ τιμὴ τοῦ ὑπὸ τοῦ μαγνήτου δημιουργουμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ο. β) Ἡ μαγνητικὴ ποσότης ἑκάστου πόλου τοῦ μαγνήτου. γ) Ἡ συχνότης τῶν ταλαντώσεων, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετέλει ἡ βελόνη, ἐὰν ἐφέρετο εἰς τὰ σημεῖα $O_1, O_2 \ldots O_n$, ἀπέχοντα ἀντιστοίχως ἐκ τοῦ βορείου πόλου τῆς ράβδου 20 cm, 30 cm . . . $10 \cdot n$ cm. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου, εἶναι 0,2 Gauss.

('Απ. α′ 4,8 Gauss. β′ 480 μονάδες C.G.S. γ′ 4, 2,67, . . ., $\frac{8}{n}$.)

1365. 'Επὶ μαγνήτου, κινητοῦ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, στερεοῦται μικρὸν κοῖλον κάτοπτρον, ἀκτῖνος καμπυλότητος 1 m. Καθέτως πρὸς τὸν ὀπτικὸν ἄξονα τοῦ κατόπτρου, τίθεται κανών, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑφίσταται κατακόρυφος φωτιζομένη σχισμή, τῆς ὁποίας τὸ μέσον συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ὁ μαγνήτης, ὅστις φέρει τὸ κάτοπτρον, εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον σωληνοειδοῦς ὁριζοντίου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν γήϊνον μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Τὸ σύρμα τοῦ σωληνοειδοῦς, τὸ ὁποῖον φέρει 20 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,5 mA. Τὸ πραγματικὸν εἴδωλον τῆς σχισμῆς μετατίθεται τότε ἐπὶ τοῦ κανόνος κατὰ 125 mm ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. ('Απ. 0,2 Gauss.)

1366. Σωληνοειδές, τοῦ ὁποίου τὸ σύρμα ἔχει ἀντίστασιν 4000 Ω, δημιουργεῖ εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον, ἐντάσεως 1 Gauss, ὅταν τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 0,1 A. Ὁ ἄξων τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι κάθετος πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ εἶναι τοποθετημένη μικρὰ ὁριζοντία μαγνητικὴ βελόνη, ἐξηρτημένη διὰ νήματος (ἄνευ ροπῆς στρέψεως). Αὕτη φέρει κατακόρυφον ἐπίπεδον κάτοπτρον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πίπτει λεπτὴ φωτεινὴ δέσμη, ἡ ὁποία ἀνακλᾶται καὶ προσπίπτει ἐπὶ κανόνος ἀπέχοντος 1 m ἀπὸ τὴν βελόνην καὶ καθέτου πρὸς τὸν γήϊνον μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Συνδέονται τὰ δύο ἄκρα τοῦ σωληνοειδοῦς πρὸς τὰ ἄκρα συσσωρευτοῦ ΗΕΔ 2 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μετατόπισις τῆς φωτεινῆς δέσμης ἐπὶ τοῦ κανόνος. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss. ('Απ. 5 cm.)

1367. Ἐπίπεδον πηνίον σχήματος τετραγώνου, πλευρᾶς 20 cm, φέρει 50 σπείρας. Τὸ πηνίον περιστρέφεται μὲ συχνότητα 360 sec^{-1}, περὶ ἄξονα κείμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πηνίου καὶ κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 400 Gauss. α) Ὑπολογίσατε τὴν μεγίστην ροήν, τὴν διερχομένην διὰ μέσου τοῦ πηνίου, ὡς καὶ τὴν μέσην ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς, ἥτις ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ. β) Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πηνίον εἶναι ἀκίνητον καὶ τὸ ἐπίπεδόν του κάθετον ἐπὶ τὸ πεδίον. Ἐὰν τὸ πεδίον μηδενισθῇ ἐντὸς χρόνου 0,04 sec, ὑπολογίσατε τὴν μέσην ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς τὴν ἀναπτυσσομένην ἐντὸς αὐτοῦ. γ) Θεωροῦμεν ὅτι τὸ ἴδιον πηνίον εἶναι ἀκίνητον καὶ σχηματίζει γωνίαν 60^0 μὲ τὴν διεύθυνσιν ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 400 Gauss. Ἐὰν τὸ πηνίον μηδενισθῇ ἐντὸς 0,04 sec, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς, ἥτις ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ. ('Απ. α' 160 000 Mx, 1,92 V. β' 2 V. γ' 1,73 V.)

1368. Ὁ ἄξων εὐθείας μαγνητικῆς ράβδου κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας καθέτου πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινὸν καὶ διερχομένης διὰ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς μαγνητικῆς βελόνης. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο σημειακῶν πόλων τῆς ράβδου, εἶναι $l = 22{,}8$ cm, τὸ δὲ μέσον τῆς ράβδου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 33{,}5$ cm ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βελόνης. Ἡ γωνία μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι $\varphi = 45^0$. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss. Ἐκ τῶν δεδομένων τούτων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ ποσότης τῶν πόλων τῆς ράβδου. Νὰ δοθῇ ἐπίσης γενικὴ λύσις τοῦ προβλήματος, διὰ τυχοῦσαν γωνίαν φ, μεταξὺ τῆς βελόνης καὶ τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. ('Απ. 129 μονάδες C.G.S. $m = \mathcal{H} \cdot \text{εφ}\, \varphi\, (\alpha^2 - l^2/4)^2/2\,\alpha \cdot l$.)

1369. 1) Ἡ τάσις μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β κυκλώματος, διαρρεομένου ὑπὸ ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος 50 sec^{-1}, ἔχει ἐνεργὸν τιμὴν ἴσην πρὸς 110 V. Ποία ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς τάσεως μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. 2) Πρὸς τὰ Α καὶ Β συνδέεται πηνίον ὠμικῆς ἀντιστάσεως 100 Ω καὶ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,1 H. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ διὰ τοῦ πηνίου διερχομένου ρεύματος, ὡς καὶ ἡ ἀπορροφουμένη ὑπ' αὐτοῦ ἰσχύς. 3) Συνδέεται πρὸς τὰ Α καὶ Β, ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ προηγούμενον πηνίον, πυκνωτὴς χωρητικότητος 20 μF. Ποία εἶναι ἡ νέα τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς τάσεως μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ πυκνωτοῦ, ὡς καὶ μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ πηνίου. 4) Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ τεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ πηνίον, ἵνα διέλθῃ δι' αὐτοῦ ἡ μεγίστη ἐνεργὸς ἔντασις. (Θὰ ληφθῇ $\pi^2 = 10$.)

('Απ. 1' $U = 110\sqrt{2}\cdot \eta\mu \cdot 100\pi\cdot t$. 2' α' 1,048 A, β' 110 W. 3' α' 0,682 A, β' 108 V, γ' 71,27 V. 4' 100 μF.)

1370. 1) Ἀντίστασις, συνίσταται ἐκ σύρματος μαγγανίνης διαμέτρου 1 mm καὶ μήκους 1600 π cm. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τῆς μαγγανίνης εἶναι 42 μΩ·cm. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως. 2) Τὸ σύρμα περιτυλίσσεται εἰς σπείρωμα περὶ σωλῆνα ἀπὸ μονωτικὴν ὕλην, ἐξωτερικῆς διαμέτρου 4 cm. Ἡ μόνωσις τοῦ σύρματος ἔχει ἀμελητέον πάχος. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς σπειρῶν καὶ τὸ μῆκος τοῦ οὕτω κατασκευαζομένου σωληνοειδοῦς. 3) Τὸ σωληνοειδὲς τροφοδοτεῖται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 4 A. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς. 4) Ποία ἡ τιμὴ τῆς ροῆς, τῆς διερχομένης διὰ μιᾶς σπείρας. 5) Ὁ σωλὴν τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ ἀντικαθίσταται ἀπὸ κύλινδρον ἐκ χυτοσιδήρου τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 140$. Ποία ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς εἰς τὸν χυτοσιδηροῦν πυρῆνα.

('Απ. 1' 26,88 Ω. 2' α' 400 σπεῖραι, β' 40 cm. 3' 50 Gauss. 4' 628 Mx. 5' 7000 Gauss.)

1371. Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ τὸ θερμαντικὸν σῶμα συσκευῆς ἠλεκτρικῆς θερμάνσεως ἀπὸ σύρμα ἐκ κράματος, τοῦ ὁποίου ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις εἶναι 40 μΩ·cm. Τὸ σύρμα πρέπει νὰ ἔχῃ μῆκος 30 m. Ἡ συσκευὴ τροφοδοτεῖται μέσῳ μεταλλικοῦ σύρματος ἀμελητέας ἀντιστάσεως, ὑπὸ πηγῆς συνεχοῦς τάσεως 120 V, ἐπιθυμοῦμεν δὲ ὅπως αὕτη διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A. 1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος. 2) Πόση ἡ ἐνέργεια (εἰς kWh), ἡ δαπανωμένη εἰς τὴν συσκευήν, εἰς 24 ὥρας. Πόσον τὸ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐκλυόμενον ποσὸν θερμότητος. Ποῖον τὸ βάρος ἀκαθάρτου πετρελαίου (μαζούτ), τοῦ ὁποίου ἡ καῦσις θὰ παρῆγε τὸ αὐτὸ ποσὸν θερμότητος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τοῦ μαζοὺτ εἶναι 10000 cal/gr. 3) Τὸ διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος σύρμα, διατίθεται ὁριζοντίως καὶ παραλλήλως πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σύρματος, εἰς σημεῖον κείμενον 1 m ἄνωθεν αὐτοῦ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ σύρμα εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Τὸ σύρμα θὰ θεωρηθῇ λίαν μεγάλου μήκους. 4) Εἰς τὸ προηγούμενον σημεῖον τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ἀγωγοῦ τίθεται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη. Κατὰ ποίαν γωνίαν θὰ στραφῇ αὕτη, ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ὅταν διακοπῇ τὸ ρεῦμα. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss.

('Απ. 1' 0,01 cm², 1,128 mm. 2' α' 28,8 kWh, β' 24,803 kcal, γ' 2480 gr. 3' 0,02 Gauss. 4' 5° 43'.)

1372. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης $\mathcal{H}_{o\rho}$ τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου πραγματοποιεῖται ἡ κάτωθι διάταξις. Εἰς τὸ κέντρον ἐπιμήκους σωληνοειδοῦς, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι ὁριζόντιος καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν, ἐξαρτᾶται, ἀπὸ σύρμα ἄνευ ροπῆς στρέψεως, μικρὰ ὁριζοντία μαγνητικὴ βελόνη. Τὸ σωληνοειδὲς ἔχει 10 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους καὶ ὁλικὴν ἀντίστασιν 75 Ω. Συνδέονται τὰ ἄκρα του εἰς τοὺς ἀκροδέκτας συσσωρευτοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι 2 V καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἀμελητέα. Διαπιστοῦται τότε ὅτι ἡ δίοδος τοῦ ρεύματος προκαλεῖ ἀπόκλισιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας κατὰ 60°. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν θερμότητος, τὸ ἐκλυόμενον ἐντὸς 1 min, κατὰ τὴν δίοδον τοῦ ρεύματος διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς.

('Απ. 1' 0,192 Gauss, 2' 0,765 cal.)

1373. Μικρὸς εὐθύγραμμος μαγνήτης NS, ἐξηρτημένος ἀπὸ νήματος, ἄνευ ροπῆς στρέψεως, τίθεται εἰς τὸ κέντρον Α σωληνοειδοῦς, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α. 1) Ὅταν ὁ μαγνήτης λάβῃ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του, ἀφίνομεν νὰ διέλθῃ μέσῳ τοῦ σωληνοειδοῦς ρεῦμα ἐντάσεως $i = 0,1$ mA. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία α (εἰς rad), κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ στραφῇ ὁ μαγνήτης NS, ἕως ὅτου φθάσῃ εἰς τὴν νέαν θέσιν ἰσορροπίας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ σωληνοειδὲς φέρει 400 σπείρας κατανεμημένας ἐπὶ μήκους 10 cm καὶ ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι 0,2 Gauss. 2) Ὁ μαγνήτης NS παρασύρει κατὰ τὴν κίνησίν του μικρὸν κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἐπὶ βαθμολογημένου κανόνος εὐκρινὲς εἴδωλον φωτεινῆς σχισμῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 100 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κατόπτρου. Πόση εἶναι ἡ μετατόπισις τοῦ εἰδώλου, τὴν ὁποίαν ἐπιφέρει ἡ δίοδος τοῦ προηγουμένου ρεύματος διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς. 3) Παραδεχόμεθα ὅτι δύναται νὰ παρατηρηθῇ πᾶσα μετακίνησις τοῦ εἰδώλου μεγαλυτέρα τῶν 0,25 mm. Ποία ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον δύναταί τις νὰ ἀντιληφθῇ. 4) Ἡ ἀντίστασις τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι 50 Ω. Πόση μετατόπισις θὰ παρατηρηθῇ, ἐὰν ἀποκατασταθῇ διαφορὰ δυναμικοῦ 0,01 V εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ σωληνοειδοῦς. (Ἀπ. 1′ 0,025 rad, 2′ 5 cm, 3′ 0,5 μA, 4′ 10 cm.)

1374. 1) Ἠλεκτρικὴ πηγὴ Γ ἀποτελεῖται ἐκ 3 συστοιχιῶν συσσωρευτῶν συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Ἑκάστη συστοιχία περιλαμβάνει 3 στοιχεῖα συσσωρευτῶν συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου εἶναι 2 V καὶ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις 0,01 Ω. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ΗΕΔ τῆς πηγῆς καὶ β) ἡ ἐσωτερική της ἀντίστασις. 2) Βολτάμετρον Β μὲ ἠλεκτρόδια ἀπὸ λευκόχρυσον περιέχει ὕδωρ εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει προστεθῆ μικρὰ ποσότης θειϊκοῦ ὀξέος. Ἡ ἀντι-ΗΕΔ αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 1 V, ἡ δὲ ἀντίστασίς του 1,91 Ω. Τὸ βολτάμετρον συνδέεται πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς πηγῆς Γ διὰ συρμάτων ἐχόντων ἀντίστασιν ἀμελητέαν. Νὰ ὑπολογισθοῦν. α) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου β) ὁ ὄγκος — ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας — τοῦ συλλεγομένου εἰς αὐτὸ ὑδρογόνου ἐντὸς 10 min. Ὑπενθυμίζεται ὅτι 96500 Cb ἐλευθερώνουν 1 gr ὑδρογόνου. 3) Κατασκευάζεται ἀντίστασις R, ἴση πρὸς 2,91 Ω, ἀπὸ σύρμα κονσταντάνης τομῆς 1 mm^2. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τῆς κονσταντάνης εἶναι 50 μΩ · cm. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις αὕτη συνδεθῇ πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς πηγῆς Γ, νὰ ὑπολογισθοῦν, α) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, β) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R, γ) τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ἐκλυόμενον εἰς χρόνον 10 min ἐντὸς αὐτῆς. Ὑπενθυμίζεται ὅτι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος εἶναι α = 4,18 Joule/cal. 4) Σωληνοειδὲς φέρον 10 σπείρας ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, ἔχει ἀντίστασιν 15 Ω. Ἑκάστη σπεῖρα ὁρίζει ἐπιφάνειαν 100 cm^2. Τὸ σωληνοειδὲς συνδέεται πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς γεννητρίας Γ ἐν σειρᾷ πρὸς τὴν ἀντίστασιν R. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου Σ, β) ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωληνοειδοῦς, γ) ἡ τιμὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἡ ὁποία διέρχεται διά τινος τομῆς τοῦ πηνίου Σ. 5) Τὸ σωληνοειδές, παραμένον συνδεδεμένον εἰς τὸ προηγούμενον κύκλωμα, διατίθεται οὕτως, ὥστε ὁ ἄξων του νὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου Σ, τοποθετεῖται μικρά μαγνητικὴ βελόνη, εἰς τὰ ἄκρα δὲ αὐτοῦ συνδέεται ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸ ἀντίστασις μεταβλητή, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ρυθμίζεται εἰς τρόπον ὥστε ἡ μαγνητικὴ βελόνη νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου Σ. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ πηνίου Σ καὶ νὰ κατασκευασθῇ σχεδιάγραμμα τῆς διατάξεως τοῦ πειράματος τούτου.

(Ἀπ. 1′ α′ 18 V, β′ 0,09 Ω. 2′ α′ 8,5 A, β′ 591 cm^3. 3′ α′ 582 cm, β′ 6 A, γ′ 15037 cal. 4′ α′ 1 A, β′ 12,5 Gauss, γ′ 1250 Mx. 5′ 0,016 A.)

1375. Σωληνοειδὲς Σ ἔχει μῆκος 1 m, φέρει δὲ 800 κυκλικὰς σπείρας διαμέτρου 5 cm ἐκ σύρματος ἐξ ἀργιλλίου διαμέτρου 1 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σωληνοειδοῦς. Τὸ σωληνοειδὲς διατίθεται εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων του νὰ εἶναι ὁριζόντιος καὶ κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τὸ κέντρον του τίθεται μικρὰ ὁριζοντία μαγνητικὴ βελόνη, κινητὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου Σ, ἵνα εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας ἡ μαγνητικὴ βελόνη σχηματίζῃ γωνίαν 45^0 μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ σωληνοειδοῦς. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀργιλλίου $=2{,}8\cdot10^{-6}\ \Omega\cdot$cm. Ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου = 0,2 Gauss.

(Ἀπ. 4,48 Ω, 0,0896 V.)

1376. Βολτάμετρον ἀντιστάσεως R = 8 Ω καὶ σωληνοειδὲς ἀντιστάσεως r = 2 Ω, φέρον ἀνὰ ἑκατοστόμετρον μήκους 10 σπείρας ἐπιφανείας 25 cm^2 συνδέονται ἐν σειρᾷ πρὸς τοὺς πόλους πηγῆς σταθερᾶς τάσεως 2 V. Ἡ μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μιᾶς σπείρας τοῦ πηνίου (εἰς τὴν κεντρικὴν περιοχὴν) εἶναι ἴση πρὸς 14,2 Mx. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ κύκλωμα. β) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ πηνίου καὶ τοῦ βολταμέτρου. γ) Ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ βολταμέτρου. δ) Τὸ πηνίον τοποθετεῖται ὁριζοντίως εἰς τρόπον ὥστε ὁ ἄξων του νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη κινητὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου. Να ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης, ὅταν τὸ ρεῦμα ἀποκατασταθῇ πλήρως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 0,2 Gauss. Δίδονται εφ $70^0 = 2{,}747$, εφ $71^0 = 2{,}904$ καὶ εφ $72^0 = 3{,}078$.

(Ἀπ. α′ 0,045 A, β′ 0,090 V, 1,909 V, γ′ 1,545 V, δ′ 70^0 35′.)

1377. 1) Μεταβλητὴ ἀντίστασις (ροοστάτης) συνίσταται ἀπὸ δύο ἀντιστάσεις συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι κατασκευασμένη ἐκ σύρματος διαμέτρου d = 2 mm καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως $\rho = 80\cdot10^{-6}\ \Omega\cdot$cm, περιτυλιγμένου εἰς μίαν στρῶσιν ἐκ συνεχομένων σπειρῶν (τὸ πάχος τῆς μονώσεως τοῦ σύρματος εἶναι ἀμελητέον). Ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου εἶναι 22 Ω, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος l τοῦ σύρματος ἀπὸ τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἕκαστον σπείρωμα. 2) Ἓν ἐκ τῶν σπειρωμάτων τοῦ ροοστάτου χρησιμοποιεῖται ὡς σωληνοειδές. Ἑκάστη κυκλικὴ σπεῖρα αὐτοῦ ἔχει διάμετρον d = 11 cm. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου αὐτοῦ ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 4 A. 3) Χρησιμοποιεῖται ὁ ροοστάτης διὰ νὰ φορτισθῇ ἐκ δικτύου συνεχοῦς τάσεως 220 V συστοιχία συσσωρευτῶν νικελίου, περιλαμβάνουσα 4 στοιχεῖα ἀμελητέας ἀντιστάσεως, τῶν ὁποίων ἡ τάσις φορτίσεως εἶναι 1,8 V κατὰ στοιχεῖον. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ τεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τοὺς συσσωρευτὰς ἵνα τὸ ρεῦμα φορτίσεως τῶν συσσωρευτῶν ἔχῃ ἔντασιν 4 A καὶ ἡ ἔντασις τοῦ παρεχομένου ρεύματος ἀπὸ τὸ δίκτυον ἐντὸς τοῦ ροοστάτου νὰ εἶναι 12 A.

(Ἀπ. 1′ 172,78 m. 2′ 25 Gauss. 3′ 20,2 Ω.)

1378. 1) Κύκλωμα περιέχει συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ α) πηγὴν ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, β) γαλβανόμετρον μετὰ κινητοῦ πλαισίου καὶ γ) ἀντίστασιν $R_1 = 3000\ \Omega$. Σημειοῦται ἡ ἀπόκλισις τοῦ γαλβανομέτρου καὶ ἀκολούθως συνδέεται ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸ ἀντίστασις $R_2 = 50\ \Omega$. Διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὴν ἀπόκλισιν τοῦ γαλβανομέτρου εἰς τὴν προτέραν της τιμήν, πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ R_1 ἀπὸ ἑτέραν ἀντίστασιν $R_2 = 1500\ \Omega$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου. 2) Τὸ κινητὸν πλαίσιον τοῦ γαλβανομέτρου ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρθογωνίους σπείρας 3 cm × 2 cm ἐκ σύρματος χαλκοῦ διαμέτρου 0,1 mm καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως 1,57 μΩ·cm. Τὸ ὁμογενὲς πεδίον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὸν

μαγνήτην τοῦ ὀργάνου ἔχει ἔντασιν 400 Gauss. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς σπειρῶν τὰς ὁποίας φέρει τὸ πλαίσιον. Θὰ ληφθῇ $\pi/2 = 1{,}57$.
(Ἀπ. 1' 50 Ω. 2' 250 σπεῖραι.)

1379. Εὐθὺ τμῆμα σύρματος μήκους 20 cm, κινεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 10^3 Gauss, μὲ ταχύτητα 5 m/sec. Τὸ σύρμα, ἡ ταχύτης μετατοπίσεώς του καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ πεδίου, σχηματίζουν μεταξύ των, ἀνὰ δύο, ὀρθὴν γωνίαν. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ἐξ ἐπαγωγῆς ρεύματος ἐντὸς τοῦ σύρματος, ἐὰν τοῦτο συνδεθῇ πρὸς ἐξωτερικὸν κύκλωμα ὁλικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται, ὅπως ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ διὰ τὴν μετακίνησιν αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ πεδίου.
(Ἀπ. 0,2 A, 400 dyn.)

1380. Δίδεται ἡ συνολικὴ ἀντίστασις R ὀργάνου μετὰ κινητοῦ πλαισίου, προσέτι δὲ ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου δι' αὐτοῦ, ὅταν ὁ δείκτης δεικνύει τὴν μεγίστην ἀπόκλισιν. α) Ποία εἶναι ἡ μεγίστη τάσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ μετρηθῇ διὰ τοῦ ὀργάνου, χωρὶς νὰ ἐπιφέρωμεν μεταβολὴν εἰς αὐτό. β) Πῶς δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τοῦτο, ὥστε νὰ αὐξήσωμεν τὴν περιοχὴν μετρήσεων κατὰ n φοράς, ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὸ ὄργανον α) ὡς βολτόμετρον, β) ὡς ἀμπερόμετρον. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $R = 50$ Ω, ἔντασις ρεύματος ἐντὸς τοῦ συστήματος διὰ μεγίστην ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου $i = 2$ mA, ἀμπερόμετρον μὲ περιοχὴν μετρήσεων 10 A, βολτόμετρον μὲ περιοχὴν 250 V.
(Ἀπ. α) $U_{\mu\epsilon\gamma} = i \cdot R$. β) Ὡς ἀμπερόμετρον: διὰ συνδέσεως ἐν παραλλήλῳ ἀντιστάσεως $R_1 = R/(n-1)$, 10^{-2} Ω. γ' Ὡς βολτόμετρον: διὰ συνδέσεως ἐν σειρᾷ ἀντιστάσεως $R_2 = (n-1) \cdot R$, $1{,}25 \cdot 10^5$ Ω.)

1381. Δύο ὅμοια στοιχεῖα, ἔχοντα ἕκαστον ΗΕΔ 2 V, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τροφοδοτοῦν διὰ ρεύματος μεταλλικὸν σπείρωμα, τὸ ὁποῖον θερμαίνει 210 gr ὕδατος ἀπὸ 24,8° C εἰς 25,5° C, ἐντὸς 4 min. Κατὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀντιστάσεως R_1 τοῦ σπειρώματος εἰς γέφυραν διὰ χορδῆς μὲ πρότυπον ἀντίστασιν $R_2 = 3$ Ω, τὸ ρεῦμα εἰς τὸ γαλβανόμετρον μηδενίζεται, ὅταν ὁ λόγος τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ δρομέως τμημάτων τῆς χορδῆς εἶναι $l_1 : l_2 = 32{,}5 : 67{,}5$. Ποία ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r ἑκάστου στοιχείου καὶ ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σπειρώματος, ἐὰν ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι 0,6 mm καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις $\rho = 0{,}42$ Ω·mm²/m.
(Ἀπ. $R = 0{,}12$ Ω. $l = 97{,}2$ cm.)

1382. 1) Βολτόμετρον μεγάλης ἀντιστάσεως, συνδέεται πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας συσσωρευτοῦ καὶ δεικνύει τάσιν 80 V. Ἐὰν ἀκολούθως πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ συσσωρευτοῦ συνδεθοῦν ἐν σειρᾷ ἀντίστασις R καὶ ἀμπερόμετρον A (ἀμελητέας ἀντιστάσεως), ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου καθίσταται ἴση πρὸς 78 V. Τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει 2 A. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R καθὼς καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ συσσωρευτοῦ. 2) Ἀντικαθίσταται ἡ ἀντίστασις R ἀπὸ ἠλεκτρικὸν κινητῆρα, ὅστις ἀφίεται νὰ λειτουργήσῃ. Τὸ ἀμπερόμετρον δεικνύει ἐκ νέου 2 A. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντιηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς περιελίξεώς του εἶναι 1 Ω. Ποία εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου. Ποία ἡ ἰσχύς, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς πηγῆς. Ποία ἡ ὑπὸ τοῦ κινητῆρος καταναλισκομένη ἰσχύς. Ποία ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου κατὰ τὴν στιγμήν, καθ' ἣν κλείεται τὸ κύκλωμα τοῦ κινητῆρος (ἐκκίνησις τοῦ κινητῆρος). Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ προστεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸν κινητῆρα, διὰ νὰ περιορισθῇ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου εἰς 8 A.
(Ἀπ. 1α' 39 Ω, β' 1 Ω. 2α' 76 V, β' 160 W, γ' 156 W, δ' 4 W. 3α' 40 A, β' 8 Ω.)

1383. 1) Κατασκευάζεται γαλβανόμετρον μὲ ὀρθογώνιον πλαίσιον ἐξ 100 σπειρῶν, διαστάσεων 3 cm × 2 cm. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται σύρμα ἐκ χαλκοῦ, διαμέτρου 0,05 mm. Ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου (εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ = 1,6 μΩ·cm). 2) Πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ γαλβανόμετρον ὡς βολτόμετρον. Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀντίστασις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτό, ἵνα τὸ ὄργανον δύναται νὰ μετρᾷ διαφορὰν δυναμικοῦ 3 V (ἡ μεγίστη ἐπιτρεπομένη ἔντασις τοῦ διὰ τοῦ πλαισίου διερχομένου ρεύματος, εἶναι 100 μA). 3) Πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ γαλβανόμετρον ὡς ἀμπερόμετρον. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ, οὕτως ὥστε τὸ γαλβανόμετρον νὰ διαρρέεται ἀπὸ 1/50000 τοῦ ρεύματος τοῦ κυκλώματος, εἰς τὸ ὁποῖον συνδέεται. 4) Τὸ πλαίσιον εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 1500 Gauss. Πόση εἶναι ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ, ὅταν διέρχεται δι' αὐτοῦ ρεῦμα 1 μA.

('Απ. 1' 81,48 Ω. 2' 29918,51 Ω. 3' 1630 μΩ. 4' 0,09 dyn·cm.)

1384. 1) Εἰς τὰ δύο ἄκρα πηγῆς ἐναλλασσομένης τάσεως ἐνεργοῦ τιμῆς 220 V καὶ συχνότητος 50 sec^{-1} συνδέονται ἐν σειρᾷ ἀγωγὸς (ἄνευ αὐτεπαγωγῆς) ἔχων ἀντίστασιν 275 Ω καὶ αὐτεπαγωγὴν ὠμικῆς ἀντιστάσεως ἀμελητέας. Ὁ ἀγωγὸς εἶναι βυθισμένος ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν 5,033 λίτρα ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 15° C. Μετὰ 1 ὥραν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος καθίσταται ἴση πρὸς 22,5° C. (Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος = 4,18 Joule/cal). Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν ἀγωγὸν καὶ εἰς τὴν αὐτεπαγωγήν. 2) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτεπαγωγῆς καὶ ποῖος ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου. 3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος καὶ ἡ ὁλικὴ ἀπορροφουμένη ἰσχύς.

('Απ. 1' 0,4 A. 2' α' 110 V, β' 190,5 V, γ' 1,51 H. 3' α' συν φ = 0,50, β' 44 W.)

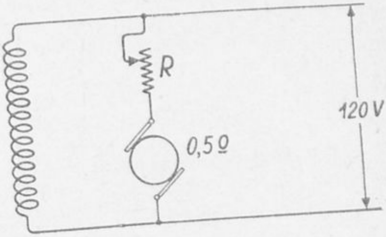
1385. Μετασχηματιστὴς περιλαμβάνει εἰς τὸ πρωτεῦον 3500 σπείρας καὶ εἰς τὸ δευτερεῦον 125. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἐφαρμόζεται ἐναλλασσομένη τάσις ἐνεργοῦ τιμῆς 3080 V. 1) Ποία ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος εἰς ἀνοικτὸν κύκλωμα. 2) Τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος συνδέονται μέσῳ ἀντιστάσεως 15 Ω ἄνευ αὐτεπαγωγῆς. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ δευτερεύοντος εἶναι ἀμελητέα, πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀντιστάσεως. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον διὰ τοῦ πρωτεύοντος. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 100 %. 3) Ἀντικαθίσταται ἡ ἀντίστασις ἀπὸ κινητῆρα καταναλίσκοντα ἰσχὺν 1,5 kW καὶ τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι 0,7. Ποία εἶναι τότε ἡ ἐνεργὸς τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ δευτερεύοντος.

('Απ. 1' 110 V, 2α' 7,33 A, 2β' 0,26 A, 3' 19,48 A.)

1386. Ἠλεκτρικὴ ἐγκατάστασις περιλαμβάνει 4 ἠλεκτρικὰς μηχανὰς ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ καὶ ἐργάζονται ὡς γεννήτριαι, τροφοδοτοῦσαι τὰς δύο ἄλλας αἵτινες εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ καὶ λειτουργοῦν ὡς κινητῆρες. Αἱ μηχαναὶ αὗται ἔχουν ἀντίστασιν 0,1 Ω ἑκάστη. Τὸ χάλκινον σύρμα (εἰδικὴ ἀντίστασις χαλκοῦ $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ω·cm) τὸ ὁποῖον συνδέει τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ συστήματος τῶν δύο γεννητριῶν πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τῶν κινητήρων ἔχει μῆκος 1250 m καὶ τομὴν 20 mm^2. Αἱ ἠλεκτρικαὶ μηχαναὶ παρουσιάζουν ΗΕΔ 362,5 V ἑκάστη. Τὸ ρεῦμα τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὸ κινητήριον ζεῦγος εἶναι 100 A. Νὰ ὑπολογισθοῦν 1) ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητηρίου ζεύγους, 2) ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως, 3) ἡ κατανομὴ τῶν ἀπωλειῶν ἐνεργείας.

('Απ. 1' 25 kW, 2' 69 %, 3' Συνολικὴ ἀπώλεια ἰσχύος 31 %. Κατανομὴ αὐτῆς: α' 2,75 % εἰς τὸ ζεῦγος τῶν γεννητριῶν, β' 27,55 % εἰς τὰ σύρματα συνδέσεως καὶ γ' 0,70 % εἰς τὸ ζεῦγος τῶν κινητήρων.)

1387. Κινητὴρ διεγειρόμενος ἐν παραλλήλῳ ἔχει ἐπαγώγιμον τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 0,5 Ω καὶ λειτουργεῖ εἰς δίκτυον σταθερᾶς τάσεως 120 V. α) Πόσον ρεῦμα διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, δηλ. πρὶν ἐμφανισθῇ ἡ ἀντι-ΗΕΔ εἰς τὸ ἐπαγώγιμον. β) Διὰ ποίαν ἀντίστασιν τοῦ ροοστάτου ἐκκινήσεως, ὅστις εἶναι συνδεδεμένος ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ ἐπαγώγιμον, θὰ περιορίσωμεν τὸ διαρρέον τὸ ἐπαγώγιμον ρεῦμα, εἰς 20 Α. γ) Ποία ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος, ὅταν τὸ ρεῦμα τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι 8 Α. δ) Ἐὰν ἡ ἠλεκτρικὴ αὐτὴ μηχανὴ ἐχρησιμοποιεῖτο ὡς γεννήτρια, ποία θὰ ἦτο ἡ ὁλικῶς ἀναπτυσσομένη ΗΕΔ εἰς τὸ ἐπαγώγιμον, ὅταν τοῦτο παρέχῃ 8 Α ὑπὸ τάσιν 120 V εἰς τὴν διακλάδωσιν διεγέρσεως τῶν ἠλεκτρομαγνητῶν καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα.



(Ἀπ. α′ 240 Α. β′ 5,5 Ω. γ′ 116 V. δ′ 124 V.)

1388. Εἰς τοὺς ἀκροδέκτας δικτύου συνεχοῦς τάσεως 120 V, συνδέεται κύκλωμα τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ἐν σειρᾷ κινητῆρα διεγειρόμενον ἐν σειρᾷ καὶ ἕνα ἀγωγόν. Ὁ ἀγωγὸς ἔχει ἀντίστασιν 8 Ω καὶ εἶναι βυθισμένος ἐντὸς θερμιδομέτρου. Οἱ ἀγωγοὶ συνδέσεως ἔχουν ἀντίστασιν 1,2 Ω. 1) Τοῦ κινητῆρος ἀκινητοῦντος, τὸ ἐκλυόμενον ποσὸν θερμότητος ἐντὸς 5 min εἰς τὸ θερμιδόμετρον εἶναι 82954 cal. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, β) ἡ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. 2) Ἀφίεται νὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητήρ. Τὸ ἐκλυόμενον ποσὸν θερμότητος ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου εἰς χρόνον 5 min εἶναι τώρα 2304 cal. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, β) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος, γ) ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος. (1 Joule = 0,24 cal).

(Ἀπ. 1) α′ 12 Α, β′ 0,8 Ω, 2) α′ 2 Α, β′ 101,6 V, γ′ 100 V.)

1389. 1) Πρόκειται νὰ μεταβιβασθῇ ἰσχὺς 500 kW. παραγομένη ἀπὸ μονοφασικὸν ἐναλλακτῆρα, εἰς ἀπόστασιν 10 km, ὑπὸ τάσιν 20000 V. Ἐὰν ἡ ἐπιτρεπομένη ἀπώλεια ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς εἶναι 1/10, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν μεταφοράν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι σύρμα (ἐκ τοῦ ἰδίου μετάλλου ὡς τὸ προηγούμενον) τομῆς 1 mm^2 καὶ μήκους 50 m παρουσιάζει ἀντίστασιν 1 Ω. 2) Τὸ ρεῦμα διοχετεύεται εἰς δύο μετασχηματιστὰς μονοφασικοὺς συνδεδεμένους ἐν παραλλήλῳ καὶ προοριζομένους εἰς τὸ νὰ ὑποβιβάσουν τὴν τάσιν εἰς 125 V. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς μετατροπῆς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ὡς καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ δευτερεύοντος (θεωροῦνται ἀμεληταῖαι αἱ ἀπώλειαι, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς ὑστέρησιν, ρεύματα Foucault καὶ τὸ φαινόμενον Joule, εἰς τοὺς ἀγωγοὺς τῆς περιελίξεως).

(Ἀπ. 1′ 0,05 cm^2. 2α′ 1 : 144, β′ 1800 Α.)

1390. Ἐγκατάστασις συνεχοῦς ρεύματος περιλαμβάνει 1) Γεννήτριαν, διεγειρομένην ἐν διακλαδώσει, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι $r = 0,108$ Ω καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγέως $R = 96$ Ω. 2) Μίαν γραμμὴν ἀπὸ 2 σύρματα, ἔχοντα ἕκαστον μῆκος 320 m. 3) Κινητῆρα Κ διεγειρόμενον ἐν σειρᾷ, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι $R' = 0,125$ Ω, τοῦ δὲ ἐπαγωγίμου $r' = 0,15$ Ω. Ἡ γεννήτρια Γ τροφοδοτεῖ τὸν κινητῆρα Κ μέσῳ τῶν δύο προηγουμένων συρμάτων. Εἰς κανονικὴν λειτουργίαν, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν γραμμὴν εἶναι 60 Α, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς γεννητρίας 240 V, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος 222 V. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται τὸ σύρμα τῆς γραμμῆς εἶναι 1,8 μΩ·cm. Νὰ γίνῃ τὸ σχεδιάγραμμα τῆς ἐγκαταστάσεως καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν 1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν ἐπαγωγέα καὶ ἡ δαπανωμένη εἰς αὐτὸν ἰσχὺς τῆς γεννητρίας. 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐπαγώγιμον τῆς γεννητρίας καὶ ἡ ΗΕΔ αὐτῆς. 3) Ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, ἡ τομή της καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ρεύματος εἰς αὐτήν. 4) Ἡ πτῶσις τάσεως εἰς τὸν ἐπαγωγέα τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἀντι - ΗΕΔ αὐτοῦ καὶ 5) Ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς, ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς καὶ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος.

(Ἀπ. 1′ α′ 2,5 A, β′ 600 W. 2′ α′ 62,5 A, β′ 246,75 V. 3′ α′ 0,3 Ω, β′ 0,384 cm^2 γ′ 1,56 A/mm^2. 4′ α′ 7,5 V, β′ 205,5 V. 5′ α′ 13,320 kW, β′ 12,330 kW, γ′ 0,92.)

1391. Κινητὴρ διεγειρόμενος ἐν διακλαδώσει, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν κίνησιν ὀχήματος. Οὗτος λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 600 V καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 110 A, ὅταν εὑρίσκεται ὑπὸ πλῆρες φορτίον. Ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι 80 CV. Ζητεῖται 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, ἡ ἀντι - ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ ἐπαγωγίμου (ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου 0,36 Ω, ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ ἐπαγωγέως = 1,5 A). 3) Νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν προηγουμένων δεδομένων ἡ τιμὴ τῶν ἀπωλειῶν ἐντὸς τοῦ κινητῆρος (ὑστέρησις, ρεύματα Foucault, τριβαί, θερμότης Joule). 4) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου ἐκκινήσεως τοῦ κινητῆρος τούτου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐκκινήσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 150 A.

(Ἀπ. 1′ 0,89. 2′ α′ 560,94 V, β′ 60,862 kW. 3′ 2,002 kW. 4′ 3,68 Ω.)

1392. Κινητὴρ διεγειρόμενος ἐν διακλαδώσει, ἔχει ὠφέλιμον ἰσχὺν 9,5 kW καὶ συνδέεται πρὸς δίκτυον σταθερᾶς τάσεως 225 V. Ὑπὸ πλῆρες φορτίον ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κινητῆρος εἶναι 50 A. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου εἶναι 0,25 Ω καὶ τοῦ ἐπαγωγέως 150 Ω. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν: 1) Ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ κινητῆρος. 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν ἐπαγωγέα. 3) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ ἐπαγώγιμον. 4) Ἡ ἀντι - ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος. 5) Ἡ ὁλικὴ μηχανικὴ ἰσχύς, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ ἐπαγωγίμου. 6) Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος. 7) Αἱ ἀπώλειαι, αἱ ὀφειλόμεναι εἰς τὸ φαινόμενον Joule, ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου. 8) Αἱ ἀπώλειαι, λόγῳ τοῦ φαινομένου Joule εἰς τὸν ἐπαγωγέα. 9) Αἱ ἀπώλειαι λόγῳ ὑστερήσεως, ρευμάτων Foucault καὶ τριβῶν.

(Ἀπ. 1′ 11,250 kW. 2′ 1,5 A. 3′ 48,5 A. 4′ 212,875 V. 5′ 10,324 kW. 6′ 0,90. 7′ 588 W. 8′ 337,5 W. 9′ 824,4 W.)

1393. 1) Πτῶσις ὕδατος ὕψους 70 m παρέχουσα 90 m^3 ἀνὰ πρῶτον λεπτόν, κινεῖ ὑδροστρόβιλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδοσις εἶναι 0,9. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ὑδροστρόβιλος. 2) Ὁ ὑδροστρόβιλος κινεῖ ἐναλλακτῆρα τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδοσις εἶναι 0,9 καὶ ἡ ἐνεργὸς ΗΕΔ 2500 V. Ἡ παρεχομένη ἐνέργεια ἀπὸ τὸν ἐναλλακτῆρα μεταβιβάζεται εἰς τὴν κατανάλωσιν μέσῳ γραμμῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 2 Ω. Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τῆς γραμμῆς εἶναι 0,85. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δαπανωμένη ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐνέργεια συνεπείᾳ τοῦ φαινομένου Joule καὶ ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἐνεργείας εἰς τὸ ἄκρον τῆς γραμμῆς πρὸς τὴν παρεχομένην ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος ἐνέργειαν. 3) Ἡ γραμμὴ συνδέεται πρὸς τὸν ἐναλλακτῆρα μέσῳ μετασχηματιστοῦ ἀνυψώσεως τάσεως μὲ συντελεστὴν μετατροπῆς 20 καὶ ἀπόδοσιν 0,95. Τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς γραμμῆς συνδέεται πρὸς τὸ πρωτεῦον μετασχηματιστοῦ ὑποβιβασμοῦ τάσεως, ἀποδόσεως 0,95. Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι καὶ πάλιν 0,85. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διατιθεμένη ἰσχὺς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος τοῦ μετασχηματιστοῦ πτώσεως τάσεως ὡς καὶ ὁ λόγος τῆς διατιθεμένης ἰσχύος εἰς τὸ δευτερεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ τούτου πρὸς τὴν παρεχομένην ἰσχὺν ὑπὸ τοῦ ἐναλλακτῆρος. (Ἀπ. 1′ 927,045 kW. 2′ 308,270 kW, 0,63. 3′ 752,331 kW.)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Γ' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

Α'—ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ σελὶς 13.

14. α) Ἡ ἀπόστασις δὲν μεταβάλλεται. β) $x = 84$ cm. γ) $y = 12$ cm **15.** α) Πυραμὶς κορυφῆς Σ, τετράγωνον πλευρᾶς 20 cm. β) Ὀρθογώνιον πλευρῶν 12 cm καὶ 20 cm **16.** 14,4 cm. **17.** 8,33 στρ./sec **18.** 300 000 km/sec **19.** 37,5, 112,5 . . . (2k + 1) · 37,5 στρ./sec.

Β'—ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ. Α' ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ σελὶς 18.

31. 30^0, 60^0, 60^0 **32.** $11^0 36'$ **33.** Τὰ ὑπὸ τοῦ κατόπτρου Κ σχηματιζόμενα εἴδωλα εὑρίσκονται εἰς ἀποστάσεις ἀπ' αὐτοῦ: δ, δ + 2 δ', δ + 4 δ' . . . Τὰ εἴδωλα τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τοῦ Κ' εὑρίσκονται εἰς ἀποστάσεις ἀπ' αὐτοῦ: δ', δ' + 2 δ, δ' + 4 δ . . . **35.** 160 cm^2, $S' = (300 + δ/δ)^2 \cdot S$.

Γ'—ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ. Β' ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΚΑΤΟΠΤΡΑ σελὶς 33.

76. 15,4 cm **77.** 15 cm **78.** 60 cm ἔμπροσθεν τοῦ κατόπτρου M = 3 **79.** α = 180 cm **80.** Φανταστικόν, ὀρθόν, β = 9 cm, ὕψος 4,2 cm **81.** α = 40 cm, β = 80 cm, f = 26,65 cm **82.** Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, 3 φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου, β = 33,3 cm **83.** 5 cm ἐντὸς τῆς σφαίρας, 0,46 mm **84.** 60 cm, 10 cm, φανταστικόν, ὀρθόν, διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου **85.** A/3 4/3 f **86.** 4/3 f, 5f **87.** β = — 12 cm, h = 2,4 cm **88.** 71,1 cm, — 20,3 cm **89.** — 40 cm **90.** AB = 10 m **91.** Κυρτὸν f = — 30 cm **92.** 14,3 cm **93.** Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, 4 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου· εἰς ἀπόστασιν 80 cm. Πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, 4 φορὰς μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου· εἰς ἀπόστασιν 120 cm **94.** 1' x = 3,25 m. 2' Εἴδωλον πραγματικόν, ἀνεστραμμένον, ἴσον πρὸς 10 cm.

Δ'—ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ. ΠΛΑΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΑ σελὶς 54.

156. 22^0 **157.** $1,97 \cdot 10^8$ m/sec **158.** $41,8^0$ **159.** 1,66 37^0 **160.** $41,8^0$, $48,6^0$, $48,6^0$ **161.** $27,8^0$ **162.** $φ = α \cdot (n - 1)/n$, $ε = 45'$ **163.** n = 1,33 **164.** ΑΓ > 6 cm **165.** 1,15 cm **166.** 2 mm, 1,5 **167.** β' h = 0,268α β' x = 0,846α, $ε = 112^0$ **168.** $β_3 = α_1$ **169.** $β_1 = 35^0$, $β_2 = 40^0 35'$, $β_3 = 32^0$, β' = 2,18 cm **170.** 1,98 α − 1,14 β **171.** 1,66 **172.** $\sqrt{n^2 - συν^2α}$, 1,52 **173.** 1,62 **174.** $54^0 14'$, $54^0 14'$ **175.** $1' 30^0$ $21^0 2'$ $21^0 3'$ 45^0 **176.** Θέσις ἐλαχίστης ἐκτροπῆς 30^0, $α > 21^0 30'$ **177.** 16^0 **178.** $34^0 45'$. $14^0 45'$ **180.** $ε = 2 \cdot (α - A)$ **181.** $48^0 35'$ **182.** α' $27^0 40'$. β' $22^0 30'$· γ' $15^0 10'$ **183.** α' $6^0 14'$ β' 12'.

Ε'— ΦΑΚΟΙ σελὶς 88.

268. 30 cm ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ. M = 3 **269.** Συγκλίνον, + 2,25 cm **270.** α' — 10,5 cm, β' — 10 cm **271.** 0,5 m ἀπὸ τὸ ἀντικείμενον, + 0,48 m **272.** 43,0 cm **273.** 10,3 cm **274.** 80 cm **275.** 1,5 **276.** 7 διοπτρίαι **277.** $α_1$ = 80 cm, $α_2$ = 20 cm **278.** 60 cm ὄπισθεν τοῦ φακοῦ M = 2, πραγματικὸν **279.** f = 0,2 m, 10 cm **280.** 24 cm **281.** Φανταστικόν, ὀρθόν, ἴσον κατὰ μέγεθος πρὸς τὸ 1/4 τοῦ ἀντικειμένου καὶ εἰς ἀπόστασιν 7,5 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ **282.** 11 cm **283.** — 13,33 cm, 3,33 cm **284.** 6 cm ἔμπροσθεν τοῦ φακοῦ, 0,75 **285.** 10 cm^2 **286.** 11,6 cm, 12 cm **287.** 75 cm **288.** 100 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ, διπλάσιον τοῦ μεγέθους τῆς φλογός, ἀνεστραμμένον **289.** Ἐφ' ὅσον τὸ ἀντικείμενον πλησιάζει ἢ ἀπομακρύνεται κατὰ 0,50 m θὰ ἀπομακρύνεται ἢ θὰ πλησιάζῃ τὸ πέτασμα κατὰ 1 mm ἢ 0,7 mm **290.** 50 cm, φακὸς ἀποκλίνων. 150 cm, φακὸς συγκλίνων **291.** 1/25 mm^2 **292.** Ἀπομάκρυνσις πλακὸς κατὰ 5 mm **293.** 4 διοπτρίαι, φανταστικόν, ὀρθόν, ἴσον πρὸς τὰ 5/8 τοῦ ἀντικειμένου καὶ εἰς ἀπόστασιν 9,375 cm ἐκ τοῦ φακοῦ **294.** 5 cm **295.** S = 0,0266 mm^2 **296.** f = 58,9 cm, 1,63 καὶ 0,613 **297.** n = 1,33 **298.** 24 cm **299.** 40 cm πέραν τοῦ + 8 cm φακοῦ **300.** 60 cm καὶ — 60 cm **301.** Φανταστικόν, ἀνεστραμμένον, ἴσον πρὸς 2,5 cm εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ $Φ_2$ 31,25 cm καὶ 56,25 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_1$ **302.** Ὀρθόν, πραγματικόν, ὕψος 10 cm καὶ ἀπέχον 50 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_2$ καὶ 250 cm ἀπὸ τοῦ $Φ_1$ **303.** $d = D \cdot D - 2 f \pm \sqrt{D^2 - 4 f f'} / 2 (f + f' - D)$ **304.** Πραγματικὸν εἴδωλον, ἀνεστραμμένον, εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ καὶ ὕψους 1,745 cm **305.** D = f + f' **306.** 72 cm **307.** Πραγματικὸν εἴδωλον, 30 cm ὄπισθεν τοῦ ἀμφικοίλου φακοῦ **308.** $d_1 = f$, $d_2 = 3f$.

ΣΤ'— ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ. ΟΦΘΑΛΜΟΣ σελὶς 97.

325. — 50 cm, — 2 διοπτρίαι **326.** 4 διοπτρίαι, 6,25 cm **327.** 11 cm **328.** 0,06 mm **329.** Μεταξὺ 66,7 καὶ 71,7 διοπτριῶν **330.** Φακὸς ἀποκλίνων − 1 διοπτριῶν, ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως 10,9 cm **331.** 11,1 cm καὶ 20 cm **332.** + 1,5 διοπτρίαι, − 2,7 διοπτρίαι.

Ζ'— ΟΠΤΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ σελὶς 112.

372. 1' 25 διοπτρίαι, 6,25. 2' 0,025 rad ἢ 86' **373.** 1' 50 διοπτρίαι. 2' 12,5. 3' 5 **374.** α' 0,0148. β' 0,08. γ' 0,0889 **375.** $M = \varepsilon\varphi\, \omega' / \varepsilon\varphi\, \omega = \delta/\varphi$, $M_s = M^2 = \delta^2/f^2$ **376.** 5,2 περίπου **377.** 1' 15 cm. 2' 250 διοπτρίαι. 3' 50 **378.** α' 200, 5,13 mm. β' 247, 5,13 mm **379.** 37,3 **380.** 25 cm ἀπὸ τὸν προσοφθάλμιον, M = 30 **381.** 1' 0,015 cm ἔμπροσθεν τῆς ἑστίας τοῦ ἀντικειμενικοῦ, 400 περίπου. 2' 10 μ περίπου, − 0,514 cm **382.** α' 33,3, 17,5 cm, 2,27 cm. β' 19,5 cm περίπου, 333 **383.** α' 1250 διοπτρίαι, β' 250. γ' 8,3 mm **384.** α' 15,4 cm β' 3,23 m × 3,23 m **385.** α' 10 cm πέραν τοῦ ἀποκλίνοντος β' 5 **386.** 20 cm **387.** 101,85 cm **388.** 1' l = 16 cm, M = 5. 2' l' = 15,24 cm, M' = 4,20 **389.** 1' l = 10 cm. 2' M = 3. 3' θ = 1° 43' **390.** α' 12 cm καὶ 3 cm. β' 24 cm, 6 cm. γ' 0,24 cm **390α.** 1' F = 90 cm. 2' 108 cm, M = 45.

Η'— ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ. ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΑ σελὶς 122.

406. 48,37°, 50,06° **407**. 50,39 cm, 49,05 cm **408**. 1,65, 1,68, 23,9 cm **409**. −16,9 cm **410**. 2,87 cm **411**. 25° 88', 26° 13', 0° 45' **412**. 2' 47° 24' 50''. 3' 52° 44' 56'', 56° 30' 11''. 4' 1,64 cm

Θ'— ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ σελὶς 133.

448. 41,2 cm **449**. α' 1256 Lm. β' 64 Lux, 32 Lux **450**. 42,4 cm, 556 Lm/m² **451**. 85° 30' **452**. 160 NK, 720 NK **453**. 1,61 m **454**. r_1 = 0,9 m, r_2 = −3,33 m **455**. 90,7 % **456**. α' 100 Lm/m², β' 0,762 m **457**. 27° 16' **458**. 52,3 W **459**. 7,35 NK **460**. 48,54 cm, 108,54 cm, − 18,54 cm, 41,46 cm **461**. 13,4 Lm/W.

Ι'— ΦΥΣΙΚΗ (ΚΥΜΑΤΙΚΗ) ΟΠΤΙΚΗ σελὶς 140.

477. α' 0,6 mm β' 0,45 mm **478.** 0,0006 cm, 4800 Å **479.** 2 h · συν r + λ/2 **480.** 2 n · h · συν r **481.** 179° 58' 16'' **482.** 51 km/sec **483.** 5625 Å, 4500 Å, 3375 Å, 3000 Å.

ΙΑ'— ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ. ΓΗΙΝΟΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ σελὶς 151.

520. 1600 dyn **521.** 7 cm **522.** 5 dyn. Παράλληλος πρὸς τὸν μαγνήτην καὶ μὲ φορὰν ἀπὸ S ἕως N **523.** 8 gr* **524.** 360 μονάδες C.G.S. **525.** 250 Gauss **526.** 500 μονάδες C.G.S. **527.** α' 4 dyn. β' 4 dyn, γ' 5,7 dyn, δ' 5,7 Gauss **528.** 3,84 Gauss, 115 dyn S → N **529.** 17 Gauss **530.** 3 : 4 **531.** 66° 36'.

ΙΒ'— ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΡΕΥΜΑ σελὶς 174.

603. 3 A **604**. 60 V **605**. 70 Ω **606**. 1,25 A, 100 Ω **607**. 50 Ω, 100 V **608**. 0,025 Ω **609**. 8,4 Ω **610**. 4,8 mm **611**. 40,2 Ω · mm²/m **612**. 0,6 V, 0,011 V/cm **613**. α' 3 A, β' 30 V, γ' 27 V, δ' 63 V, ε' 0,3 A, στ' 2,25 A. **614**. α' 2 A, β' 40 V, γ' 50 V, δ' 0,67 A, ε' 1 A **615**. 50. **616**. 6,46 mA, 12,9 mA, 20 mA **617**. 1 Ω, 2 V **618**. 7 V **619**. 4,06 Ω **620**. $42{,}2 \cdot 10^{-4}$ grad^{-1} **621**. 53,8° C **622**. $2{,}9 \cdot 10^{-3}$ grad^{-1} **623**. 1,93 Ω, 0,207 A **624**. 1' x = 0,4 Ω, 2' 1,6 V, 3' 20 A **625**. 1' 0,10 A, 2' 0,5 V **626**. 0,5 Ω **627**. α' 5 A, β' 3 V, γ' 12 V, δ' 60 V, ε' 72 V, στ' 75 V **628**. 1,8 Ω **629**. α' 6 Ω, β' 4 A, γ' 1,3 A, δ' 20 V, 1,2 V, ε' 21,2 V **630**. α' 2,5 A, β' 1,88 A, γ' 0,62 A, δ' 7,5 V **631**. $E_1 : E_4 = R_1 : R_4$ **631α**. 5 Ω, 10 Ω **632**. 0,5 Ω, 1,125 V **633**. ΑΓ : 10 A, 10 V. ΓΒ : 8 A, 16 V, ΑΔ : 12 A, 12 V. ΔΒ : 14 A, 14 V. ΓΔ : 2 A, 2 V, 1,18 Ω **634**. $i_{ΓB} = i_{ZE}$ = 2,5 A, $i_{ΓA} = i_{AE}$ = 2,885 A, $i_{AΔ}$ = 0, $i_{ΓΔ} = i_{ΔE}$ = 5 A, 0,98 Ω.

ΙΓ'— ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΙΣΧΥΣ σελὶς 190.

675. 266342 Joule **676**. 91866 cal **677**. 36,3 kW **678**. 2160 sec ἢ 36 min **679**. $2{,}78 \cdot 10^{18}$ ἠλεκτρόνια **680**. 7,26 Ω **681**. 37 δρχ/h **682**. 10 A **683**. 8 m περίπου, 222 sec περίπου, 92,6 δρχ, περίπου **684**. 0,23 Ω, 225 V, $1{,}74 \cdot 10^7$ Joule, $3{,}23 \cdot 10^8$ Joule **685**. $x = y$ = 242 Ω **686**. 1' R = 5 Ω,

2' 71,8 cal, 3' 10 W **687.** R = 25 Ω, i = 2 A **688.** 21,7 m **689.** 34 Ω, 60 A, 47960 V, 122,4 kW,
29,38 kcal **690.** 288,4° C **691.** x = 2 Ω. i = 12,5 A **692.** 1' 550 W, 2' 8 λυχνίαι, 3' 45 λεπτά.
4' Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ ἀνέλθῃ κατὰ 5,45 A ἄνω τῆς ὑπὸ τῆς ἐγκαταστάσεως ἐπιτρεπομέ-
νης **693.** 1' ἐν παραλλήλῳ, 2' 9,64 A, 3' 86,04 kcal **694.** 53,7° C, 91,4 %.

ΙΔ'— ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΥΓΡΩΝ. ΗΛΕΚΤΡΟΛΥΣΙΣ. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ σελὶς 209.

747. 3,048 gr **748.** 2,58 A **749.** 1,04 : 1 **750.** 1' 313 cm^3. 2' 1 h 36 min 30 sec **751.** 94,6 cm^3,
47,3 cm^3 **752.** 1' 231 000 Cb. 2' 6,42 A **753.** 1' 2 A. 2' 1,06 gr* **754.** 3 σειραὶ ἐν παραλλήλῳ,
t = 13 h 46 min 13 sec **755.** α' 2 · 1/108 gr H_2 καὶ 2 · 8/108 gr O_2. β' 2 · 8/108 gr O_2. γ'
2 · 35,5/108 gr Cl καὶ 2 · 56/2 · 108 gr Fe. δ' 2 · 56/3 · 108 Fe **756.** 3,32 A **757.** Πρέπει νὰ συνδε-
θοῦν ἀνὰ δύο στοιχεῖα ἐν παραλλήλῳ καὶ αἱ προκύπτουσαι 24 ὁμάδες ἐν σειρᾷ. **758.** 1,04 V **759.**
1,8 V, 0,25 Ω **760.** 3,84 V, 0,04 Ω **761.** 1' V = 11,6 cm^3. 2' t = 833 sec. 3' Ἡ μᾶζα Zn εἶναι δύο
φορὰς μικροτέρα εἰς τὸ 2ον πείραμα **762.** 1,4 V, 2 Ω ἢ 5,6 V, 8 Ω **763.** 2 σειραὶ ἐν παραλλήλῳ
ἀπὸ 5 στοιχεῖα ἢ τὰ 10 στοιχεῖα ἐν σειρᾷ **764.** 0,5 A **765.** 37, 22, 14 στοιχεῖα **766.** 1' r = 7,5 Ω,
U = 0,18 V. 2' 30 στοιχεῖα **767.** Ὑπάρχουν δύο τρόποι: α) σύνδεσις ἐν σειρᾷ τῶν 2 στηλῶν.
β) σύνδεσις τῶν πόλων τῆς 1ης μόνον στήλης μετὰ τῆς ἀντιστάσεως R **768.** 1' E = 10,8 V,
r = 0,5 Ω. 2' α = 30 Ω, β = 10 Ω. 3' 10,125 V. 4' 2940 cal **769.** e/(r/m + R/n) A **770.** 56
συσσωρευταί, 66 cal/sec, 275 · 10^7 erg/sec, 28 kgr*m/sec, 0,37 PS. **771.** 43,6 Ω, 25 h **772.**
1 · 10^{-10} Ah, 0,2 · 10^{-8} Ah **773.** 0,4 A, 0,2 Ω **774.** α' 13,45 A β' 0,867 gr, γ' 0,821 gr **775.** α'
3 A, β' 1,83 gr.

ΙΕ'— ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΦΟΡΤΙΟΝ σελὶς 216.

790. 917 kgr* **791.** α' 500 ΗΣΜ - φορτίου, β' 10^4 dyn, 4 · 10^4 dyn, 312,5 dyn **792.** 9,2 · 10^6 kgr*
793. 2,17 cm **794.** 10 cm **795.** $\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Cb **796.** 25 ΗΣΜ - φορτίου.

ΙΕ'— ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ σελὶς 236.

858. 60 ΗΣΜ - δυναμικοῦ **859.** α' 0,3 ΗΣΜ - δυναμικοῦ, 0,6 dyn β' 0,2 ΗΣΜ - δυναμικοῦ
0,4 dyn **860.** 60 erg **861.** α' 0, β' 16, γ' 2 ΗΣΜ - δυναμικοῦ **862.** 20 ΗΣΜ - δυναμικοῦ **863.**
σ : σ' = 0,675 : 1 **864.** 1413 V **865.** 0,00189 Joule **866.** 677 V **867.** 3000 V/cm περίπου **868.**
135 mgr* **869.** 7000 V περίπου **870.** 85 dyn **871.** 2,14 ΗΣΜ, 0,54 dyn. Ἡ συνισταμένη σχημα-
τίζει γωνίαν 83° 49' μὲ τὴν πλευρὰν AB **872.** 32 · 10^{-19} Cb **873.** 1,4 · 10^{-4} μF **874.** 8 dyn **875.**
α' $\mathcal{E} = 2\,e \cdot l/r^3$ β' $\mathcal{E} = e \cdot l/r^3$ **876.** 2590 V **877.** 3,536 μF, 35,36 μF **878.** 4,5 · 10^{-6} Cb,
20,8 · 10^{-6} Cb. β' 8 V, 3 V, 6,9 · 10^{-6} Cb, 18,4 · 10^{-6} Cb **879.** 67,4° C **880.** 31847 ΗΣΜ - φορ-
τίου ἢ 10,616 μCb. 636940 dyn ἢ 649,3 gr*, 2866230 erg, 200 ΗΣΜ - δυναμικοῦ ἢ 60000 V,
2866230 erg, 0 **881.** 11943 ΗΣΜ - φορτίου ἢ 3,981 μCb 179100 dyn ἢ 182,5 gr*, 30 ΗΣΜ,
4 ΗΣΜ - δ. δυναμικοῦ ἢ 1200 V, 23880 dyn ἢ 24,3 gr*, 4 ΗΣΜ **882** 0,005 μF, 706,5 cm^2, 0,09
Joule, 0,03 Joule **883.** 10^{-3} μF, 38 cm, 0,04 mm **884.** 20 ΗΣΜ - φορτίου, 60 V, 12,6 mm^2 **885.**
α' $C_2 = \frac{1}{2} C_1$, $Q_2 = Q_1$, $V_2 = V_1$, $E_2 = E_1$, $A_2 = 2\,A_1$, β' $C_2 = \frac{1}{2} C_1$, $Q_2 = \frac{1}{2} Q_1$, $V_2 =$
$= V_1$, $E_2 = \frac{1}{2} E_1$, $A_2 = \frac{1}{2} A_1$ **886.** α' 90 Joule. β' 6 · 10^4 A. γ' 9 · 10^4 kW.

ΙΣΤ'— ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ σελὶς 251.

935. 2 A **936.** 4705 **937.** 294,5 kgr* **938.** 240 dyn · cm **939.** 40 ἀμπεροστροφαὶ/cm **940.**
2500 dyn **941.** 200 dyn ἢ 0,204 gr* **942.** 93750 Mx **943.** 1,6 A, 100 Mx **944.** 115,3 gr*, 1153
gr* · cm **945.** 10^{-7} Cb **946.** $\frac{8 \cdot \sqrt{5}}{125} \pi \cdot i \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{m}{\beta} \right)$ Gauss **947.** 1' 640 σπεῖραι, 2' 4 **948.**
3,18 A **949.** 1,5 · 10^6 dyn **950.** 683 Gauss **951.** 40000 gr* **952.** 10^8 dyn ἢ 100 kgr* **953.** 1' 1 Joule,
2' Μηδὲν **954.** α' 320 Mx, β' 80 φορὰς μεγαλύτερον, γ' 1000 φορὰς μεγαλύτερον **955.** α' 0,31 mA,
β' 31 mA.

ΙΖ′— ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ, ΤΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ σελὶς 264.

986. 0,08 τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος διὰ τοῦ γαλβανομέτρου καὶ 0,92 μέσῳ τῆς ἀντιστάσεως **987.** 0,015 Ω **988.** 0,013 Ω **989.** 4940 Ω **990.** 0,25 ἢ 25 °/₀ **991.** 1,95 mV, 0,049 mA **992.** 225 m, ἐν σειρᾷ **993.** Διὰ συνδέσεως ἐν σειρᾷ ἀντιστάσεως α′ $2{,}99 \cdot 10^4$ Ω, β′ $1{,}5 \cdot 10^5$ Ω, γ′ $1{,}5 \cdot 10^6$ Ω **994.** 3,75 V, 6 A, **995.** $U = i\left(r' + \dfrac{R \cdot r}{R + r}\right)$, 5 V **996.** 532 m **997.** 1,2 Ω **998.** 1,5 V **999.** 1,5.

ΙΗ′— ΕΠΑΓΩΓΗ σελὶς 271.

1022. L = 0,08 H, U = 400 V **1023.** 850 Gauss **1024.** 0,5 H **1025.** 12 A **1026.** 0,0628 V **1027.** 1,25 V, 12,5 V, 0,025 H **1028.** Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ρεύματος εἶναι 1,5 φορὰς μεγαλυτέρα κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν καὶ 15 φορὰς μεγαλυτέρα κατὰ τὴν διακοπὴν τῆς ἰσχύος τοῦ ἐπάγοντος **1029.** 226 V, 24 Ω, 9,4 A **1030.** 0,0264 V, 0,032 Ω, 0,825 A **1031.** 25 στρ./sec **1032.** 35 στρ./sec **1033.** α′ 25 mH. β′ 72 mH. γ′ 0,48 V **1034.** α′ 24 mH. β′ 36 mH, γ′ 0,27 V **1035.** 35 000 Gauss **1036.** 0,1 V.

ΙΘ′— ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ σελὶς 286.

1092. 1′ 10 A, 2′ 7,07 A, 3′ 157 rad/sec, 4′ 25 sec^{-1} **1093.** R = 5 Ω, L = 0,0275 H **1094.** 1822 cal **1095.** i = 2 · ημ (314 t − 3,14) **1096.** $i = 10\sqrt{2} \cdot$ συν 314 t, $i_{εν}$ = 10 A **1097.** $E_{μεγ} = \dfrac{2}{\pi} \cdot E_{μεγ}$ **1098.** 1783 cal **1099.** 0,275 H **1100.** 31,4 Ω, i = −3,18 · συν ωt A, 3,18 A, 2,25 A, φ = 90° **1101.** $i_{μεγ}$ = 2 A περίπου, φ = 32,1°, N = 100 W **1102.** φ = 60°, α = 30° **1103.** 36,8 μF, 4,4 A **1104.** 10 μF, U = 23,2 · ημ ωt V i = 0,0730 · συν ωt A **1105.** 5,02 mA ἕως 100,4 mA **1106.** 1′ 0,182 A, α′ 16 °/₀, β ½ °/₀. 2′ 1440 Ω, 1215 Ω **1107.** 250 μF, $50\sqrt{2}$ V **1108.** 18,30 Ω, 56° 20′ **1109.** 60° **1110.** 3,2 A καὶ 2,26 A, 96 · ημ 4000 t V, 96 V, 67,9 V **1111.** α′ 31 V, 1,55 mA, $31 \cdot$ ημ $10^6 \pi \cdot t$ V, β′ 6,4 mH, γ′ 1/2000 **1112.** 1, 6,6 V, 2′ 66 W, 3′ 73 W, 4′ 0,67 A **1113.** i_2 = 10 A, i_1 = 0,333 A **1114.** 3,61 A, 0,39 A, 3,28 A, 52° 30′ **1115.** 0,00377 V, 0,00267 V, 0,01885 A, 0,01337 A **1116.** 17,75 A, 60° 21′ προηγεῖται τῆς τάσεως **1117.** R = 0,4 Ω, L = 0,0318 H, φ = 88° περίπου **1118.** 1,160 W, 57° 30′ 0,5373.

Κ′— ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ σελὶς 300.

1148. 134,5 V, 89,3 °/₀ **1149.** α′ 2 A, β′ 95 Ω, γ′ 380 W, δ′ 190 V **1150.** α′ 370 V, β′ 3,7 A, γ′ 246,3 A, 91,1 kW **1151.** α′ 5,36 HP β′ 90 °/₀ **1152.** α′ Περιέλιξις ἠλεκτρομαγνήτου 2 A, ἐπαγωγίμου 26 A, ἀντι-ΗΕΔ 216,1 V, β′ R = 8,31 Ω (διὰ λειτουργίαν ἄνευ φορτίσεως), γ′ ἰσχὺς 5,17 kW **1153.** 1′ 11 Ω διὰ i = 10 A, 2′ 44 V, 264 W **1154.** i = 10 A, i = 0,5 A. Τὸ i ἐλαττοῦται **1155.** 1000 W, 650 W, 0,65, 84 cal **1156.** 17 kW, 62 °/₀, 0,9 °/₀, 36,2 °/₀, 0,9 °/₀ **1157.** 30° 16′, 12,4 mH **1158.** 401,6 kcal/sec **1159.** 157 V, 37,2 Ω, 186 V, 250 W, 465 VA, 0,538 **1160.** 73,5 A, 14,72 kW ἢ 20 CV, 80 kgr* **1161.** 15,5 kW ἢ 21,3 CV, 57,6 km/h, 160 m, 80 kgr* **1162.** 1′ 10 A 2′ 50 V, 250 W, 3′ 60 V **1163.** 33,95 mm^2 124,7 kWh **1164.** 24, 170 kW, 1700.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 32	στ. 2	Ἀσκ.	62	ἀντὶ 10 cm. γρ. f
» 163	» 15 (κάτω)	»	558	» ἀρνητικὸν γρ. θετικὸν
» 166	» 14	»	560	» $i \cdot R = U$ γρ. $i_1 \cdot R = U$
» 179	» 14 (κάτω)	»	639	» t = 96 sec γρ. $96 \cdot 10^{-10}$ sec
» 197	» 9	»	705	» ἐν παραλλήλῳ γρ. ἐν ἀντιθέσει
» 282	» 1	»	1057	» 12762 γρ. 12672
» 287	» 8	»	1102	» $i_3 = 10\sqrt{3} \cdot$ συν (ωt − φ), γρ. $i_3 = 10\sqrt{2} \cdot$ συν (ωt − φ)
» 300	» 4	»	1144	» 3000 γρ. 300
» 302	» 11	»	1160	» ὄχημα γρ. ὄχημα 20 τόννων
» 325	» 11 (κάτω)	»	1230	» 2,85 eV γρ. 12 eV
» 326	» 5	»	1230	γράφε $E_2 - E_1 = 12$ eV $= 12 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg $= 1{,}92 \cdot 10^{-11}$ erg
» 326	» 8	»	1230	ἀντὶ $\lambda = 4340 \cdot 10^{-8}$ cm γρ. $1025 \cdot 10^{-8}$ cm = 1025 Å.

Μονάδες μεγεθῶν Μηχανικῆς

Μέγεθος	Μονὰς C.G.S	Μονὰς Τ.Σ.	Σχέσις μονάδων C.G.S. καὶ Τ.Σ.
Μῆκος	cm	m	1 m = 10^2 cm
Μᾶζα	gr	Τ.Μ. μάζης	1 Τ.Μ. = 9810 gr ἢ 9,81 kgr
Χρόνος	sec	sec	—
Δύναμις	dyn	kgr*	1 kgr* = 981000 dyn
Ἔργον	erg	kgr*m	1 kgr*m = $9{,}81 \cdot 10^7$ erg
Ἰσχὺς	erg/sec	kgr*m/sec	1 kgr*m/sec = $9{,}81 \cdot 10^7$ erg/sec

Μονάδες ἠλεκτρικῶν καὶ μαγνητικῶν μεγεθῶν

Μέγεθος	Πρακτικαὶ μονάδες	Μονάδες C.G.S καὶ σχέσις αὐτῶν πρὸς τὰς πρακτικὰς μονάδας: Η Σ Μ	Η Μ Μ
Ἠλεκτρ. φορτίον (q)	Coulomb (C)	1 ΗΣΜ-φορτίου= $\frac{1}{3 \cdot 10^9}$ C	1 ΗΜΜ - φορτίου = 10 C
Ἔντασις ρεύματος (i)	Ampère (A)	1 ΗΣΜ - ἐντάσ.= $\frac{\text{1 ΗΣΜ-φορτ.}}{\text{sec}} = \frac{1}{3 \cdot 10^9}$ A	1 ΗΜΜ - ἐντάσ. = 10 A
Ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς (N)	Watt (W)	1 erg / sec = 10^{-7} Watt	1 erg/sec = 10^{-7} Watt
Ἀντίστασις (R)	Ohm (Ω)	1 ΗΣΜ-ἀντιστάσεως = $9 \cdot 10^{11}$ Ω	1 ΗΜΜ - ἀντιστ.= $\frac{1}{10^9}$ Ω
Δυναμικὸν (U)	Volt (V)	1 ΗΣΜ-δυναμ.= $\frac{\text{1 erg}}{\text{1 ΗΣΜ-φορτ.}} = 3 \cdot 10^2$ V	1 ΗΜΜ - δυναμ.= $\frac{1}{10^8}$ V
Ποσότης μαγνητισμοῦ (m)		1 ΗΣΜ - ποσ. μαγν.= $4\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}$ πρακτ. μονάδες	1 ΗΜΜ - ποσότ. μαγν.= 4π πρακτ. μονάδες
Ἔντασις μαγν. πεδίου ($\mathscr{H}$)		1 ΗΣΜ - ἐντάσ. μαγν. πεδίου = $3^{-1} \cdot 10^{-10}$ πρακτ. μονάδες	1 Oersted* = 1 πρακτικὴ μονὰς
Μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ (B)		1 ΗΣΜ - μαγν. ἐπαγ.= $3 \cdot 10^{10}$ πρακτ. μονάδες	1 Gauss = 1 πρακτ. μονὰς
Μαγνητικὴ ροὴ (Φ)		1 ΗΣΜ - μαγν. ροῆς= $3 \cdot 10^{10}$ πρακτ. μονάδες	1 Maxwell = 1 Gauss · cm² = 1 πρακτ. μονὰς
Συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς (L)	Henry (H)	1 ΗΣΜ - αὐτεπαγωγῆς = $9 \cdot 10^{11}$ H	1 cm = $\frac{1}{10^9}$ H
Χωρητικότης (C)	Farad (F)	1 ΗΣΜ - χωρητ.= $\frac{\text{1 ΗΣΜ - φορτ.}}{\text{1 ΗΣΜ - δυναμ.}}$ = 1 cm = $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ F	1 ΗΜΜ - χωρητ.= 10^9 F

* Ἐπειδή, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου $B = \mu \cdot \mathscr{H}$, ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ ἔχει τὰς αὐτὰς διαστάσεις πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μονάδα Gauss, χρησιμοποιοῦντες αὐτὴν τόσον ὡς μονάδα μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς, ὅσον καὶ ὡς μονάδα ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Δεῖκται διαθλάσεως διὰ τὴν ράβδωσιν τοῦ Νατρίου (λ = 5893 Å)

Στερεὰ		Ὑγρὰ	
Ἀδάμας	2,419	Αἰθυλικὴ ἀλκοόλη (20 ⁰ C)	1,354
Βάλσαμον τοῦ Καναδᾶ	1,540	Βενζόλιον (20⁰ C)	1,501
Ἰσλανδικὴ κρύσταλλος (τακτική)	1,658	Γλυκερίνη	1,471
Ἰσλανδικὴ κρύσταλλος (ἔκτακτος)	1,486	Διθειάνθραξ (20⁰ C)	1,643
Πάγος εἰς − 8 ⁰ C	1,310	Κεδρέλαιον	1,510
Πυριτύαλος	1,580	Τετραχλωράνθραξ (20⁰ C)	1,461
Πυριτύαλος βαρεῖα	1,656	Ὕδωρ (0⁰ C)	1,334
Στεφανύαλος	1,517	Ὕδωρ (20⁰ C)	1,333
Φθορίτης	1,434	Ὕδωρ (40⁰ C)	1,331
Χαλαζίας	1,458	Ὕδωρ (80⁰ C)	1,323

Ἀέρια καὶ ὑδρατμοὶ εἰς 0⁰ C καὶ 760 mm Hg.

Ἀὴρ ξηρὸς	1,000 292
Αἰθυλικὸς αἰθὴρ	1,001 52
Διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος	1,000 45
Ὑδρατμὸς	1,000 25

Μήκη κύματος χαρακτηριστικῶν τινων ραβδώσεων φασμάτων εἰς Å

Ἀσβέστιον (Ca)	**Κάδμιον** (Cd)	**Λίθιον** (Li)	**Ὑδράργυρος** (Hg)
3968,47 (H)	6438,47	6707,8	5790,65
3933,67 (K)	5085,82	6103,5	5769,59
Ἥλιον (He)	4799,92	4602,0	5460,74
6678,15	4678,16	**Νέον** (Ne)	4916,04
5875,62	**Κάλιον** (K)	6402,2	4358,35
5047,74	7699,0	5881,9	4077,81
5015,67	7664,9	5852,5	4046,56
4921,93	6939,0	**Ὑδρογόνον** (H)	**Ψευδάργυρος** (Zn)
4713,14	6911,3	6562,82 (C)	6362,3
4471,48	4047,2	4861,33 (F)	4810,5
4437,55	4044,1	4340,46	4722,2
4387,93	**Σίδηρος** (Fe)	4101,74	4680,1
Νάτριον (Na)	5269,54		3345,0
5895,92 } (D)	4307,91		3072,1
5889,95 } (D)			3035,8

Εἰδικὴ ἀντίστασις καὶ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἰς 20⁰ C

Οὐσία	ρ εἰς Ω · cm	α εἰς grad⁻¹	Οὐσία	ρ εἰς Ω · cm	α εἰς grad⁻¹
Μέταλλα					
Ἀργίλλιον	$2{,}8 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-4}$	Χαλκὸς	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	$38 \cdot 10^{-4}$
Ἄργυρος	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-4}$	Χρυσὸς	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-4}$
Ἀντιμόνιον	$42 \cdot 10^{-6}$	$38 \cdot 10^{-4}$	Ψευδάργυρος	$5{,}9 \cdot 10^{-6}$	$35 \cdot 10^{-4}$
Βισμούθιον	$120 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	**Μονωταὶ**	εἰς 18⁰ C	
Βολφράμιον	$5{,}5 \cdot 10^{-6}$	$52 \cdot 10^{-4}$	Βακελίτης	$2 \cdot 10^{16}$	
Λευκόχρυσος	$10{,}5 \cdot 10^{-6}$	$37 \cdot 10^{-4}$	Ἐβονίτης	$2 \cdot 10^{15}$	
Μόλυβδος	$20{,}6 \cdot 10^{-6}$	$40 \cdot 10^{-4}$	Θεῖον	$1 \cdot 10^{17}$	
Νικέλιον	$7{,}2 \cdot 10^{-6}$	$54 \cdot 10^{-4}$	Μαρμαρυγίας	$5 \cdot 10^{16}$	
Σίδηρος	$9{,}8 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-4}$	Παραφίνη	$3 \cdot 10^{18}$	
Ὑδράργυρος	$95{,}8 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$			

ΠΙΝΑΞ ΦΥΣΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γωνία		ημ	συν	εφ	Γωνία		ημ	συν	εφ
Μοῖραι	Ακτίνια				Μοῖραι	Ακτίνια			
0	0,000	0,000	1,000	0,000	46	0,803	0,719	0,695	1,036
1	0,017	0,018	1,000	0,018	47	0,820	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,035	0,999	0,035	48	0,838	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,052	0,999	0,052	49	0,855	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,070	0,998	0,070	50	0,873	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,087	0,996	0,088	51	0,890	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,105	0,995	0,105	52	0,908	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,122	0,993	0,123	53	0,925	0,799	0,602	1,327
8	0,140	0,139	0,990	0,141	54	0,942	0,809	0,588	1,376
9	0,157	0,156	0,988	0,158	55	0,960	0,819	0,574	1,428
10	0,175	0,174	0,985	0,176	56	0,977	0,829	0,559	1,483
11	0,192	0,191	0,982	0,194	57	0,995	0,839	0,545	1,540
12	0,209	0,208	0,978	0,213	58	1,012	0,848	0,530	1,600
13	0,227	0,225	0,974	0,231	59	1,030	0,857	0,515	1,664
14	0,244	0,242	0,970	0,249	60	1,047	0,866	0,500	1,732
15	0,262	0,259	0,966	0,268	61	1,065	0,875	0,485	1,804
16	0,279	0,276	0,961	0,287	62	1,082	0,883	0,470	1,881
17	0,297	0,292	0,956	0,306	63	1,100	0,891	0,454	1,963
18	0,314	0,309	0,951	0,325	64	1,117	0,899	0,438	2,050
19	0,332	0,326	0,946	0,344	65	1,134	0,906	0,423	2,145
20	0,349	0,342	0,940	0,364	66	1,152	0,914	0,407	2,246
21	0,367	0,358	0,934	0,384	67	1,169	0,921	0,391	2,356
22	0,384	0,375	0,927	0,404	68	1,187	0,927	0,375	2,475
23	0,401	0,391	0,921	0,425	69	1,204	0,934	0,358	2,605
24	0,419	0,407	0,914	0,445	70	1,222	0,940	0,342	2,747
25	0,436	0,423	0,906	0,466	71	1,239	0,946	0,326	2,904
26	0,454	0,438	0,899	0,488	72	1,257	0,951	0,309	3,078
27	0,471	0,454	0,891	0,510	73	1,274	0,956	0,292	3,271
28	0,489	0,470	0,883	0,532	74	1,292	0,961	0,276	3,487
29	0,506	0,485	0,875	0,554	75	1,309	0,966	0,259	3,732
30	0,524	0,500	0,866	0,577	76	1,326	0,970	0,242	4,011
31	0,541	0,515	0,857	0,601	77	1,344	0,974	0,225	4,331
32	0,559	0,530	0,848	0,625	78	1,361	0,978	0,208	4,705
33	0,576	0,545	0,839	0,649	79	1,379	0,982	0,191	5,145
34	0,593	0,559	0,829	0,675	80	1,396	0,985	0,174	5,671
35	0,611	0,574	0,819	0,700	81	1,414	0,988	0,156	6,314
36	0,628	0,588	0,809	0,727	82	1,431	0,990	0,139	7,115
37	0,646	0,602	0,799	0,754	83	1,449	0,993	0,122	8,144
38	0,663	0,616	0,788	0,781	84	1,466	0,995	0,105	9,514
39	0,681	0,629	0,777	0,810	85	1,484	0,996	0,087	11,43
40	0,698	0,643	0,766	0,839	86	1,501	0,998	0,070	14,30
41	0,716	0,658	0,755	0,869	87	1,518	0,999	0,052	19,08
42	0,733	0,669	0,743	0,900	88	1,536	0,999	0,035	28,64
43	0,751	0,682	0,731	0,933	89	1,553	1,000	0,018	57,29
44	0,768	0,695	0,719	0,966	90	1,571	1,000	0,000	∞
45	0,785	0,707	0,707	1,000					

№ 00620

Έλαβον έν τῷ Ἀναγνωστηρίῳ τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Βουλῆς πρός ἀνάγνωσιν ....

....

....

....

....

καί ὑπόσχομαι νά κάμω χρῆσιν αὐτ ... μετά προσοχῆς χωρίς νά ἐπιφέρω οὐδεμίαν βλάβην εἴτε διπλώσεως φύλλου εἴτε σημειώσεως διά μολυβδίδος εἴτε οἱασδήποτε ἄλλης φύσεως.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 195

Ὀνοματεπώνυμον ....

Διεύθυνσις ....

Ὑπογραφή