Δ 2 mmi

Τόγκα (π γ.)

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΡΟΥΖΒΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56, ΑΘΗΝΑΙ
1950

ΠΙΝΑΞ

Ἐμφαίνων τὴν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ (Α) τῶν ἀσκήσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν **ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ** (Β΄ ἔκδοσις) Π. Γ. Τόγκα καὶ τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ (Λ) τῶν λύσεων τῶν ἀναγραφομένων εἰς τὸ βιβλίον **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ** Π. Γ. Τόγκα

Α	Λ	Α	Λ	Α	Λ	Α	Λ	Α	Λ
1	1	201	237	246	315	291	304	336	451
2	2	2	238	7	318	2	307	7	459
3	3	3	254	8	320	3	308	8	460
—	—	4	255	9	323	4	366	9	452
—	—	5	256	250	321	5	367	340	453
—	—	6	257	1	319	6	368	1	455
159	159	7	258	2	325	7	369	2	457
160	161	8	260	3	326	8	370	3	—
1	162	9	245	4	328	9	372	4	432
2	163	210	246	5	317	300	374	5	433
3	164	1	248	6	327	1	375	6	436
4	167	2	247	7	330	2	376	7	437
5	166	3	249	8	331	3	377	8	438
6	168	4	252	9	302	4	378	9	441
7	169	5	261	260	332	5	235	350	421
8	173	6	262	1	276	6	381	1	425
9	170	7	263	2	274	7	383	2	426
170	171	8	264	3	277	8	388	3	427
1	172	9	253	4	276	9	389	4	430
2	176	220	267	5	275	310	390	5	428
3	177	1	268	6	260	1	394	6	429
4	178	2	270	7	292	2	395	7	419
5	180	3	271	8	293	3	396	8	442
6	191	4	272	9	299	4	398	9	480
7	179	5	273	270	303	5	401	360	488
8	185	6	279	1	346	6	402	1	499
9	186	7	280	2	300	7	408	2	527
180	188	8	284	3	301	8	409	3	528
1	189	9	282	4	297	9	410	4	445
2	190	230	287	5	379	320	411	5	464
3	196	1	288	6	380	1	412	6	465
4	199	2	289	7	350	2	413	7	535
5	201	3	290	8	352	3	414	8	536
6	203	4	291	9	305	4	415	9	537
7	228	5	293	280	306	5	403	370	538
8	229	6	294	1	340	6	405	1	539
9	222	7	269	2	341	7	406	2	540
190	226	8	286	3	351	8	387	3	543
1	227	9	295	4	308	9	416	4	544
2	230	240	282	5	396	330	417		
3	231	1	309	6	347	1	418		
4	232	2	310	7	316	2	423		
5	233	3	311	8	349	3	—		
6	174	4	312	9	322	4	449		
7	192	5	314	490	335	5	450		
8	193								
9	221								
200	236								

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΡΟΥΖΒΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56, ΑΘΗΝΑΙ
1950

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Α΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ εὐμενὴς ἀφ' ἑνὸς ὑποδοχή, ἧς ἔτυχον ὅλα τὰ μέχρι σήμερον συγγραφέντα παρ' ἐμοῦ διδακτικὰ βιβλία, καὶ ὁ πόθος μου ἀφ' ἑτέρου, ὅπως συντελέσω εἰς τὴν ἀκοπωτέραν ἐκ μέρους τῶν κ. κ. συναδέλφων διδασκαλίαν, εὐχερεστέραν δὲ καὶ ἀσφαλεστέραν ἐκ μέρους τῶν μαθητῶν κατανόησιν τοῦ μαθήματος τῆς Τριγωνομετρίας, μὲ ἤγαγον εἰς τὴν ἀπόφασιν νὰ συγγράψω τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον: «**Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία**».

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου τούτου εἶχον ὁδηγὸν μερικὰς ἀρχὰς τῆς εἰδικῆς διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν καὶ τὰ διδακτικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα καὶ εἰς ἐμὲ ἐδημιουργήθησαν κατὰ τὴν μακροχρόνιον ὑπηρεσίαν μου καὶ δὴ κατὰ τὴν δεκαετῆ τοιαύτην ἐν τῇ Βαρβακείῳ Προτύπῳ Σχολῇ.

Διὰ τοῦτο: 1ον. Προτάσσω τῶν διαφόρων ὁρισμῶν παραδείγματα, διὰ τῶν ὁποίων ὄχι μόνον γίνεται φανερὰ ἡ ἔννοια, ἀλλὰ καὶ ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁριστέου.

2ον. Τοὺς ὁρισμοὺς τῶν διαφόρων τριγωνομετρικῶν ἢ ἄλλων συναφῶν ἐννοιῶν δὲν παρέχω διὰ μιᾶς, ἀλλὰ τόσους μόνον, ὅσοι εἶναι αὐστηρῶς ἀπαραίτητοι διὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ οἰκείου μέρους.

3ον. Τὰ πλεῖστα τῶν διαφόρων θεμάτων τίθενται ὑπὸ μορφὴν προβλημάτων, ἵνα ἐγείρουν εἰκασίας εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ παράσχουν εἰς αὐτοὺς τὴν δυνατότητα μεγαλυτέρας αὐτενεργείας. Ἀκολουθοῦν δὲ ἐφαρμογαὶ καὶ ἀρκετὰ παραδείγματα διὰ τὴν πλήρη κατανόησιν τῶν ἐκτιθεμένων.

4ον. Ἡ αὐτὴ ἀρχὴ τηρεῖται καὶ μετὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑκάστου θεωρήματος.

5ον. Παραθέτω εἰς τὴν ἁρμόζουσαν θέσιν τὸ κατάλληλον σχῆμα διὰ τὴν εὐχερῆ μελέτην τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν θέματος.

Ἐπὶ τούτοις ἐπιθυμῶν, ὅπως τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι συγχρονισμένον καὶ κατάλληλον ὄχι μόνον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν γυμνασίων καὶ πρακτικῶν λυκείων, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς Στρατιωτικὰς καὶ Ἀνωτάτας τοῦ Κράτους Σχολὰς καὶ δὴ διὰ τὸ Πολυτεχνεῖον καὶ ἐν γένει δι' ὅσους μετασχολικῶς ἀσχολοῦνται μὲ τὰ μαθηματικά, προέβην εἰς τὰ ἑξῆς:

1ον. Ἐπλούτισα αὐτὸ μὲ νέας συγχρόνους ἐννοίας π.χ. προσανατολισμένη εὐθεῖα, προσανατολισμένος κύκλος κ.λ.π.

2ον. Περιέλαβον τὰ περὶ Φυσικῶν Τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων μεγάλη χρῆσις γίνεται εἰς τὴν Φυσικήν.

3ον. Ἐπεξέτεινα τὸ κεφάλαιον τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων μὲ τὴν διερεύνησιν αὐτῶν καὶ μὲ τὰς τριγωνομετρικὰς ἀνισότητας.

4ον. Μεθ' ἕκαστον θέμα παρέθεσα ἀρκετὰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ὅσων οἱ μαθηταὶ ἔμαθον.

5ον. Εἰς τὸ τέλος ἑκάστου σχεδὸν κεφαλαίου παρέθεσα πολλὰς καὶ ποικίλας ἀσκήσεις, κλιμακώσας αὐτὰς μὲ αὔξουσαν δυσκολίαν, χάριν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Στρατιωτικὰς καὶ τὰς ἄλλας ἀνωτάτας Κρατικὰς Σχολὰς καὶ τῶν μὲ τὰ μαθηματικὰ ἐν γένει ἀσχολουμένων.

Οὕτω συντεταγμένον τὸ βιβλίον τοῦτο εὐελπιστῶ, ὅτι θέλει ἀνταποκριθῆ πλήρως εἰς τὸν σκοπόν, δι' ὃν ἐγράφη, καὶ δ' ἐμὲ θὰ εἶναι μεγίστη ἱκανοποίησις, ἐὰν τύχῃ τῆς αὐτῆς ὑποδοχῆς παρ' ὅλων τῶν ἐνδιαφερομένων.

Ἀθῆναι τῇ 17 Ἀπριλίου 1946.

Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τοῦ βιβλίου «**Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία**» διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς πρώτης ἐκδόσεως καὶ κατὰ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ κατὰ τὸ περιεχόμενον. Ὁ πίναξ τῶν περιεχομένων δεικνύει τὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ τὸ περιεχόμενον τῆς ἐκδόσεως αὐτῆς.

Ἰδιαιτέρως ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς:

Διὰ νὰ συμφωνήσῃ, ἐν μέρει, ἡ διάταξις τῆς ὕλης καὶ πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας, ἐδώσαμεν, μετὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας, ἕνα ἰδιαίτερον ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς **ὀξείας** γωνίας.

Χάρις εἰς τοὺς ὁρισμοὺς αὐτούς, ἡ ἐπίλυσις τῶν τριγώνων καὶ αἱ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς, δηλ. τὸ κύριον ἔργον τῆς Τριγωνομετρίας, ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτούς.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου γίνεται διὰ τῆς χρήσεως τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων. Διὰ τοῦτο παρέχομεν 4 πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία.

Εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐξισώσεων σημειώνομεν τὰς λύσεις μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

Αἱ ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις ἐξετάζονται ἐκτενῶς εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Ἀθῆναι τῇ 20 Φεβρουαρίου 1950

Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἐξητάσαμεν τὰς μετρικὰς σχέσεις τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου. Ἐκεῖ ἐμάθαμεν, γενικῶς, νὰ ὑπολογίζωμεν, συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, τὰ μέτρα τῶν διαφόρων μεγεθῶν του, δηλ ἐμάθαμεν νὰ ὑπολογίζωμεν τὰ ὕψη * των, τὰς διαμέσους των, τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του, τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κύκλων, τὸ ἐμβαδόν του κλπ.

Ἐν τούτοις ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του. Ἐπίσης δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ὅταν μερικὰ ἀπὸ τὰ δοθέντα στοιχεῖα του εἶναι γωνίαι. Εἶναι ἀληθές, ὅτι εἰς μερικὰς ἰδιαιτέρας περιπτώσεις, ὅπως εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, εἰς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα κλπ., δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν, ἀλλὰ γενικῶς εἰς τὴν Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχουν τύποι, οἱ ὁποῖοι νὰ δίδουν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

Θὰ ἠδύνατο τις νὰ ὑπολογίσῃ τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ἂν κατασκευάσῃ αὐτὸ γεωμετρικῶς καὶ μετρήσῃ αὐτὰ διὰ γεωμετρικῶν ὀργάνων.

Ἀλλὰ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου δὲν εἶναι πάντοτε ἁπλῆ· ἐπίσης ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, διὰ γεωμετρικῶν ὀργάνων, δὲν εἶναι πάντοτε ἀκριβής, εἴτε λόγῳ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων, εἴτε λόγῳ ἀδεξίας χρήσεως αὐτῶν.

Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου εἶναι μεγάλα καὶ ὑποχρεωθῶμεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα,

* Κατωτέρω ὅταν θὰ λέγωμεν: πλευραί, διάμεσοι, ὕψη κλπ. ἑνὸς σχήματος, θὰ ἐννοοῦμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν, διαμέσων, ὑψῶν κλπ.

Π.χ. Ἔστω ὅτι αἱ διαστάσεις μιᾶς θύρας, αἱ ὁποῖαι ἐμετρήθησαν μὲ μονάδα μήκους τὸ μέτρον εἶναι

$$υ = 3 \text{ μετρ. καὶ } β = 1{,}20 \text{ μετρ.}$$

Ὁ λόγος τῶν διαστάσεων αὐτῶν εἶναι $\frac{υ}{β} = \frac{3}{1{,}20} = 2{,}5.$

Ἂν μετρηθοῦν αἱ διαστάσεις αὐταὶ μὲ μονάδα μήκους τὸ δεκατόμετρον, θὰ εἶναι υ=30 δεκατόμετρα καὶ β=12 δεκατόμετρα καὶ ὁ λόγος $\frac{υ}{β}$ γίνεται $\frac{30}{12} = 2{,}5.$

Ἂν μετρηθοῦν μὲ μονάδα μήκους τὸ ἑκατοστόμετρον, θὰ εἶναι

$$\frac{υ}{β} = \frac{300}{120} = 2{,}5.$$

Ὥστε, οἱανδήποτε μονάδα καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαστάσεων τῆς θύρας, ὁ λόγος των εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ 2,5.

4. Μέτρησις τόξων. Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα τόξον, πρέπει νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο ὡρισμένον τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς ***μονὰς τῶν τόξων.***

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται ***μέτρον*** τοῦ μετρηθέντος τόξου. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς φανερώνει ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ τόξον αὐτό.

5. Μέτρησις γωνιῶν. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν πρέπει νὰ τὴν συγκρίνωμεν πρὸς μίαν ἄλλην ὡρισμένην γωνίαν, ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς ***μονὰς τῶν γωνιῶν.***

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται ***μέτρον*** τῆς μετρηθείσης γωνίας. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς φανερώνει ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ γωνία αὐτή.

6. Μονάδες μετρήσεως τόξων καὶ γωνιῶν. Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα τῶν τόξων.

Μοῖρα. Συνήθως ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων καὶ συνεπῶς καὶ τῶν γωνιῶν, λαμβάνομεν τὴν ***μοῖραν,*** δηλ. τὸ 360ὸν οἱασδήποτε περιφερείας ἑνὸς κύκλου.

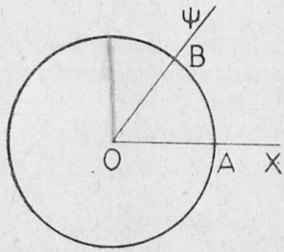
Ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας εἶναι :

Τὸ ***πρῶτον λεπτὸν*** (′) ἴσον μὲ τὸ ἑξηκοστὸν τῆς μοίρας.

Τὸ ***δευτερόλεπτον*** (″) ἴσον μὲ τὸ ἑξηκοστὸν τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Κατὰ ταῦτα ἡ ***ὀρθὴ γωνία***, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τεταρτημόριον (ἕνα τέταρτον περιφερείας) ἔχει μέτρον ἴσον μὲ 90°.

Ἐὰν μία γωνία ΧΟΨ (Σχ. 4) ἀντιστοιχῇ εἰς ἕνα τόξον $AB=75^{\circ}\,25'\,40''$ λέγομεν, ὅτι τὸ ***μέτρον*** τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι $75^{\circ}\,25'\,40''$ καὶ γράφομεν: μέτρ. $\widehat{XO\Psi}=75^{\circ}\,25'\,40''$ ἢ ἁπλούστερον $\widehat{XO\Psi}=75^{\circ}\,25'\,40''$.



Σχ. 4.

Βαθμός. Ἐπίσης ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων καὶ συνεπῶς τῶν γωνιῶν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν ***βαθμόν,*** δηλ. τὸ 400ὸν μιᾶς οἱασδήποτε περιφερείας.

Ὁ βαθμὸς ($^{\gamma}$) διαιρεῖται εἰς 10, 100, 1000, ... ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἀντιστοίχως ***δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, ... τοῦ βαθμοῦ.***

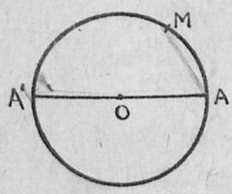
Π.χ. ἐὰν ἕνα τόξον ΑΒ εἶναι 25,4782 βαθμῶν, τότε ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ΧΟΨ εἶναι 25,4782 βαθμῶν καὶ γράφομεν: $\widehat{XO\Psi}=25^{\gamma},4782$.

Ἀκτίνιον. Ἐκτὸς τῶν δύο ἀνωτέρω μονάδων, τῆς μοίρας καὶ τοῦ βαθμοῦ, χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν καὶ μίαν τρίτην μονάδα: τὸ ***ἀκτίνιον***, δηλ. ***ἕνα τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.***

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸ μῆκος τοῦ ἀκτινίου θὰ εἶναι ἐπίσης R, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι $2\pi R$. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ κύκλου θὰ ἔχῃ τόσα ἀκτίνια, ὅσας φορὰς τὸ μῆκος R τοῦ ἀκτινίου χωρεῖ εἰς τὸ μῆκος $2\pi R$ τῆς περιφερείας· δηλ. ἡ περιφέρεια θὰ ἔχῃ $2\pi R : R = 2\pi$ ἀκτίνια, ὅπου $\pi=3{,}14159...$

Ὥστε τὸ μέτρον τῆς περιφερείας εἶναι 2π ἀκτίνια, τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι π ἀκτίνια, τοῦ τεταρτημορίου, καὶ συνεπῶς τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι $\frac{\pi}{2}$ ἀκτίνια.

7. Σχέσεις μεταξὺ τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν τόξων.



Σχ. 5.

Ἔστω ΑΜ (Σχ. 5) ἕνα τόξον καὶ μ τὸ μέτρον του εἰς μοίρας, β τὸ μέτρον του εἰς βαθμοὺς καὶ α τὸ μέτρον του εἰς ἀκτίνια. Ἔστω ἐπίσης καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΜΑ′, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον 180°, ἢ 200^{γ} ἢ π ἀκτίνια.

Ἐπειδή, καθὼς γνωρίζομεν (§ 3), ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν (μέτρων των), ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\text{τοξ AM}}{\text{τοξ AMA}'}=\frac{\mu}{180},\quad \frac{\text{τοξ AM}}{\text{τοξ AMA}'}=\frac{\beta}{200},\quad \frac{\text{τοξ AM}}{\text{τοξ AMA}'}=\frac{\alpha}{\pi}.$$

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα μέλη των καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}=\frac{\alpha}{\pi}} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μέτρα μ, β, α ἑνὸς τόξου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μ,β,α.

Σημ. Διὰ τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν

$$\pi=3,1416 \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\pi}=0,3183.$$

Παράδειγμα 1ον. Πόσον βαθμῶν εἶναι ἕνα τόξον $25^0\,38'\,24''$.

Ἐὰν εἰς τὴν γνωστὴν σχέσιν $\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}$ θέσωμεν $\mu=25^0\,38'\,24''$ λαμβάνομεν $\frac{25^0\,38'\,24''}{180^0}=\frac{\beta}{200}$ ἢ $\frac{92304''}{648000''}=\frac{\beta}{200}$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν

$$\beta=\frac{92304\times 200}{648000}=28,488 \text{ βαθμούς}.$$

Παράδειγμα 2ον. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον $\frac{5\pi}{7}$ ἀκτινίων;

Εἰς τὸν τύπον $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ θέτομεν $\alpha=\frac{5\pi}{7}$ καὶ ἔχομεν $\frac{\mu}{180}=\frac{5\pi}{7}\cdot\frac{1}{\pi}$ ἢ $\frac{\mu}{180}=\frac{5}{7}$ ἢ $\mu=\frac{5\times180}{7}=128^0\,34'\,17''\frac{1}{7}$.

Ἀσκήσεις: *Α' Ὁμάς.* **1.** Νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς ἀκτίνια τὰ κάτωθι τόξα:

1ον.	45^0,	60^0,	120^0,	$48^0\,12'\,35''$.
2ον.	50^γ,	120^γ,	160^γ,	26,52 βαθμοί.

2. Νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς μοίρας τὰ κάτωθι τόξα:

1ον.	50^γ,	150^γ,	44,05 βαθμοί.
2ον.	$\frac{3\pi}{10}$,	$\frac{\pi}{7}$,	$\frac{3}{4}$ ἀκτίνια.

3. Νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς βαθμοὺς τὰ κάτωθι τόξα:

1ον.	45^0,	60^0,	120^0.
2ον.	$\frac{5\pi}{7}$,	$\sqrt{5}$ ἀκτίνια	5,4 ἀκτίνια.

Β' Ὁμάς. **4.** Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ δεῖκται ἑνὸς ὡρολογίου κατὰ τὴν δωδεκάτην ὥραν καὶ 15'.

5. Ἡ διαφορὰ δύο τόξων εἶναι 10^{γ} καὶ τὸ ἄθροισμά των 10^{0}. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἕκαστον τῶν τόξων αὐτῶν;

6. Νὰ ὑπολογισθοῦν εἰς ἀκτίνια αἱ γωνίαι Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας Α κατὰ 15^{0} καὶ ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι μικροτέρα κατὰ 20 βαθμοὺς τοῦ τριπλασίου τῆς γωνίας Α.

7. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι 3x μοιρῶν, ἡ γωνία Β εἶναι x βαθμῶν καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι $\frac{\pi x}{300}$ ἀκτινίων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἑκάστη γωνία εἰς μοίρας.

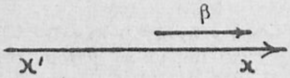
8. Νὰ εὑρεθῇ μία γωνία, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστρόφων τῶν μέτρων της εἰς μοίρας καὶ εἰς βαθμοὺς εἶναι ἴση μὲ τὸ μέτρον της εἰς ἀκτίνια, διῃρημένον διὰ 2π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ - ΤΟΞΑ - ΓΩΝΙΑΙ

1. Διανύσματα.

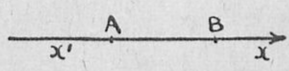
8. Ἄξων. Ἔστω μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα x΄x (Σχ. 6). Ἕνα κινητὸν σημεῖον δύναται νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ᾽ ἀντίθετον φοράν. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς δύο αὐτὰς φορὰς μεταξύ των, δίδομεν εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως, τὸ ὄνομα ***θετικὴ φορά***, ὁπότε ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ ***ἀρνητικὴ φορά***. Συνήθως ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x΄ πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x΄.



Σχ. 6.

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα x΄x ***ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, λέγεται ἄξων ἢ προσανατολισμένη εὐθεῖα.***

9. Διάνυσμα. Ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας x΄x (Σχ. 7) λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν ἐπὶ τῆς x΄x ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον, καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν, ἀδιαφόρως, εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἢ ΒΑ. Ἂν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ διανύεται ἀπὸ ἕνα κινητόν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ Α καὶ φθάνει εἰς τὸ Β, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ διαφέρει τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΑ, τὸ ὁποῖον διανύεται ἀπὸ ἕνα κινητόν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ Β καὶ φθάνει εἰς τὸ Α.



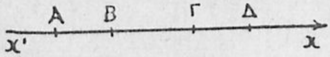
Σχ. 7.

Τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΑ, τὰ ὁποῖα διανύονται ἀπὸ ἕνα κινητὸν κατά τινα φορὰν λέγονται ***διανύσματα*** ἢ ***ἀνύσματα.***

Τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἕνα κινητόν, διὰ νὰ διανύσῃ ἕνα διάνυσμα, λέγεται ***ἀρχὴ τοῦ διανύσματος,*** τὸ σημεῖον δὲ εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ κινητόν, λέγεται ***τέλος τοῦ διανύσματος*** καὶ ἡ φορά, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ κατὰ τὴν κίνησίν του, λέγεται ***φορὰ*** τοῦ διανύσματος.

Π.χ. τὸ διάνυσμα ΑΒ (Σχ. 7) ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α, τέλος τὸ σημεῖον Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἐνῶ τὸ διάνυσμα ΒΑ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β, τέλος τὸ Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

Ἕνα διάνυσμα ΑΒ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται: ***διάνυσμα ΑΒ.*** Πρέπει πάντοτε νὰ γράφωμεν πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς ἑνὸς διανύσματος καὶ ἔπειτα τὸ γράμμα τοῦ τέλους του.



Σχ. 8.

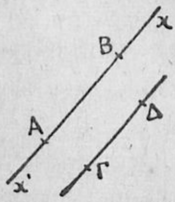
Οὕτω τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 8) εἶναι δύο διανύσματα, τὰ ὁποῖα διηνύθησαν τὸ μὲν 1ον ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β καὶ τὸ 2ον ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ.

10. Μῆκος ἑνὸς διανύσματος. ***Μῆκος ἑνὸς διανύσματος*** $\overrightarrow{AB}$, ἢ ***ἀπόλυτος τιμὴ*** ἑνὸς διανύσματος, λέγεται ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, συναρτήσει μιᾶς μονάδος μήκους. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται μὲ τὴν γραφὴν (ΑΒ) ἢ ἁπλῶς ΑΒ.

Σχ. 9.

Οὕτω (Σχ. 9) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ΑΒ = ΒΑ = 3.

11. Φορεὺς ἑνὸς διανύσματος. Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα x΄x ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἕνα διάνυσμα λέγεται ***φορεὺς τοῦ διανύσματος.*** Ὁ φορεὺς ἑνὸς διανύσματος ὁρίζει τὴν ***διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος.*** Ἐπίσης μία εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τὸν φορέα, ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν ἑνὸς διανύσματος.



Σχ. 10.

Π.χ. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι x΄x καὶ ΓΔ (Σχ. 10) εἶναι παράλληλοι, τὰ διανύσματα ΑΒ καὶ ΔΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἀλλὰ ἀντιθέτους φοράς.

Ἐπίσης (Σχ. 9) τὰ διανύσματα ΑΒ καὶ ΒΑ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἀλλὰ ἀντιθέτους φοράς.

12. Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ διανύσματα. Ἕνα διάνυσμα, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος, λέγεται ***θετικὸν*** ἢ ***ἀρνητικόν,*** ἐὰν ἡ φορά του συμφωνῇ μὲ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος.

Π.χ. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 9) εἶναι θετικόν, ἐνῷ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἀρνητικόν.

13. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος. ***Ἀλγεβρικὴ τιμὴ*** ἑνὸς διανύσματος ἢ ***μέτρον*** ἑνὸς διανύσματος εἶναι ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ μῆκος του καὶ σημεῖον τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, καθόσον τὸ διάνυσμα εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

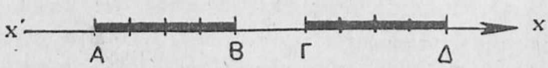
Ὥστε, διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀπαραιτήτως ἕνα ἄξονα, ὁ ὁποῖος νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν φορέα του ἢ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν φορέα του.

Σχ. 11.

Π.χ. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 11) εἶναι $+3$ καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ εἶναι -5.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον: $\overline{AB}$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται: ***ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος*** $\overrightarrow{AB}$ ***ἢ μέτρον τοῦ διανύσματος*** $\overrightarrow{AB}$.

14. Ἰσοδύναμα διανύσματα. Δύο διανύσματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων, λέγονται ***ἰσοδύναμα*** ἢ ***ἴσα***, ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν φοράν.



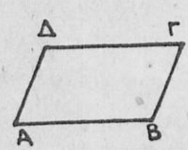
Σχ. 12.

Π.χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 12) εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος $AB=4$, $\Gamma\Delta=4$ καὶ τὴν αὐτὴν φοράν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\overline{AB}=\overline{\Gamma\Delta}=+4.$$

Ἐπίσης εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 13), τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπίσης ἰσοδύναμα εἶναι καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἢ τὰ $\overrightarrow{BA}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἢ τὰ $\overrightarrow{\Delta A}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma B}$.

15. Ἀντίθετα διανύσματα. Δύο διανύσματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων, λέγονται ***ἀντίθετα,*** ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 13.

Π. χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ (Σχ. 12) εἶναι ἀντίθετα, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος $AB=4$ καὶ ἀντίθετον φοράν, δηλ. εἶναι $\overline{AB}=+4$ καὶ $\overline{BA}=-4$. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι $\overline{AB}=-\overline{BA}$ ἢ $\overline{AB}+\overline{BA}=0$.

Ἐπίσης εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα· ἀντίθετα διανύσματα εἶναι καὶ τὰ $\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma B}$. ἐπίσης τὰ $\overrightarrow{BA}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

16. Στοιχεῖα ἑνὸς διανύσματος. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν, ὅτι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x′x, εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται:

1ον. Ἀπὸ τὴν ***ἀρχήν του*** Α.

2ον. Ἀπὸ τὴν ***διεύθυνσίν*** του, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος.

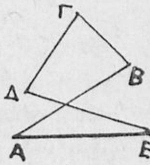
3ον. Ἀπὸ τὴν ***φοράν*** του· ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

4ον. Ἀπὸ τὸ ***μέγεθός*** του, δηλ. ἀπὸ τὸ μῆκος του ΑΒ.

Ἡ διεύθυνσις ἑνὸς διανύσματος, ἡ φορά του καὶ τὸ μῆκος του λέγονται ***στοιχεῖα τοῦ διανύσματος.***

17. Διαδοχικὰ διανύσματα. Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα λέγονται ***διαδοχικά,*** ὅταν τὸ τέλος τοῦ πρώτου διανύσματος εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς:

Π.χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ (Σχ. 14) εἶναι διαδοχικά.



Σχ. 14.

18. Γεωμετρικὸν ἄθροισμα ἢ συνισταμένη διανυσμάτων. ***Γεωμετρικὸν ἄθροισμα*** ἢ ***συνισταμένη*** διαδοχικῶν διανυσμάτων λέγεται τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου διανύσματος καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου διανύσματος.

Π.χ. ἡ συνισταμένη τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$, (Σχ. 14) εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$.

Ἂν τὸ τέλος τοῦ τελευταίου διανύσματος συμπέσῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου διανύσματος, τότε ἡ συνισταμένη τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι ἕνα σημεῖον.

Ἡ συνισταμένη διαδοχικῶν διανυσμάτων λέγεται καὶ συνισταμένη τῆς ***πολυγωνικῆς γραμμῆς***, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα.

19. Θεώρημα τοῦ Chasles. ***Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς συνισταμένης διαδοχικῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ***

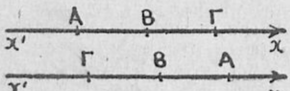
ἄξονος, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὰ διαδοχικὰ διανύσματα εἶναι δύο ἢ περισσότερα.

Ι Περίπτωσις. Τὰ διαδοχικὰ διανύσματα εἶναι δύο. Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ x′x ἄξονος καὶ $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἡ συνισταμένη των. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\overline{A\Gamma}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις σχήματος, καθόσον ἕκαστον τῶν σημείων Α,Β,Γ κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 15.

1ον. ***Τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ*** (Σχ. 15). Ἐὰν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

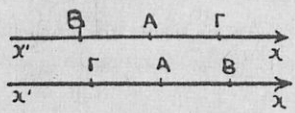
$$A\Gamma=AB+B\Gamma \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\overline{A\Gamma}$, $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$ θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ διανύσματος ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἄλλων διανυσμάτων ΑΒ καὶ ΒΓ· ἐπειδὴ δὲ τὰ διανύσματα αὐτὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον συνάγομεν, ὅτι: ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{A\Gamma}$ τοῦ διανύσματος ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν $\overline{AB}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$ τῶν διανυσμάτων ΑΒ καὶ ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\overline{A\Gamma}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma}.$$

2ον. ***Τὸ σημεῖον Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.*** (Σχ. 16). Ἐὰν τὸ σημεῖον Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$B\Gamma=BA+A\Gamma.$$



Σχ. 16.

Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, θὰ εἶναι, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν Ι περίπτωσιν 1ον,

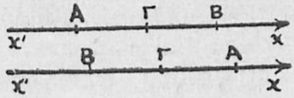
$$\overline{B\Gamma}=\overline{BA}+\overline{A\Gamma}$$

Ἐπειδὴ $\overline{BA}=-\overline{AB}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{B\Gamma}=-\overline{AB}+\overline{A\Gamma} \quad ἢ \quad \overline{A\Gamma}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma}$$

3ον. ***Τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β*** (Σχ. 17). Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$AB = A\Gamma + \Gamma B$$



Σχ. 17.

καὶ ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ, ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, θὰ ἔχωμεν (Ι περίπτωσις. 1ον)

$$\overline{AB} = \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}$$

Ἐπειδὴ $\overline{\Gamma B} = -\overline{B\Gamma}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{AB} = \overline{A\Gamma} - \overline{B\Gamma} \quad ἢ \quad \overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x, ἔχομεν πάντοτε τὴν σχέσιν

$$\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$$

Ἡ σχέσις αὐτή, ἡ ὁποία καλεῖται ***σχέσις τοῦ Chasles***, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{B\Gamma}} + \overline{\mathbf{\Gamma A}} = 0}$$

ΙΙ. ***Περίπτωσις. Τὰ διαδοχικὰ διανύσματα εἶναι περισσότερα τῶν δύο.*** Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα

ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . , ΙΚ, ΚΛ.

Τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος καὶ ΑΛ ἡ συνισταμένη των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{A\Lambda} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \dots + \overline{IK} + \overline{K\Lambda}$$

Τὸ θεώρημα ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅταν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα εἶναι δύο. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα, ὅτι, ἐὰν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ ν—1 διαδοχικὰ διανύσματα, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ ν διαδοχικὰ διανύσματα.

Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,. . . ΙΚ, καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \dots + \overline{IK}$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν $\overline{K\Lambda}$ θὰ ἔχωμεν

$$\overline{AK} + \overline{K\Lambda} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \dots + \overline{IK} + \overline{K\Lambda} \qquad (1)$$

Ἐπειδή, κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Chasles, τὸ ἄθροισμα $\overline{AK} + \overline{K\Lambda}$ εἶναι ἴσον μὲ ΑΛ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\overline{A\Lambda}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}+\ldots+\overline{IK}+\overline{K\Lambda}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς συνισταμένης διαδοχικῶν διανυσμάτων. . . .***

Ἡ τελευταία ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}+\ldots+\overline{IK}+\overline{K\Lambda}+\overline{\Lambda A}=0}$$

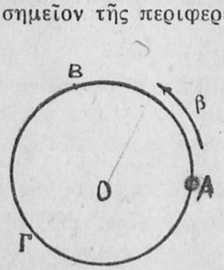
Ἀσκήσεις. 9. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνὸς ἄξονος x΄Ox καὶ Γ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις $\overline{O\Gamma}=\dfrac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$.

10. Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x΄Ox δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\overline{A\Gamma}=\dfrac{\overline{\Gamma B}}{2}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{O\Gamma}=\dfrac{2.\overline{OA}+\overline{OB}}{3}$.

11. Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x΄Ox δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, τοιαῦτα ὥστε $\overline{AB}=10$, $\overline{B\Gamma}=-6$, $\overline{\Gamma\Delta}=15$, $\overline{\Delta E}=-4$, $\overline{EZ}=16$. Νὰ ἐκφρασθοῦν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BZ}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Delta B}$.

2. Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου.

20. Προσανατολισμένος κύκλος. Ἔστω ὁ κύκλος Ο καὶ Α ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας του (Σχ. 18). Ἐὰν ἕνα κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, δύναται νὰ διανύσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς· εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β ἢ κατ᾽ ἀντίθετον φοράν. Ἡ φορά, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ βέλος β καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, λέγεται ***θετικὴ φορά,*** ἡ δὲ ἄλλη φορά, δηλ. ἡ ἀντίθετος πρὸς τὴν φορὰν τοῦ βέλους, λέγεται ***ἀρνητικὴ φορά.***



Σχ. 18.

Ὁ κύκλος Ο, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορά, καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, λέγεται ***προσανατολισμένος κύκλος.***

21. Τριγωνομετρικὸς κύκλος. Ἕνας προσανατολισμένος κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως, λέγεται ***τριγωνομετρικὸς κύκλος.***

22. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας ἑνὸς τόξου. Ἔστω ὁ προσανατολισμένος κύκλος Ο (Σχ. 18) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας του. Ὅπως γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν δύο μόνον τόξα, τὰ ΑΒ καὶ ΑΓΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἕνα κινητὸν κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο· θὰ λέγωμεν, ὅτι ἕνα κινητὸν γράφει ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἕνα τόξον ΑΒ, ὅταν ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατά τινα φορὰν καὶ σταματᾷ εἰς τὸ σημεῖον Β.

Ἀλλὰ ἕνα κινητόν, ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, δύναται νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β κατὰ πολλοὺς τρόπους· πράγματι, δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (τὴν φορὰν τοῦ βέλους β) καὶ νὰ σταματήσῃ εἰς τὸ Β, ὁπότε λέγομεν, ὅτι ἔγραψεν τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ***ἀρχὴν*** τὸ Α, ***τέλος*** ἢ ***πέρας*** τὸ Β καὶ φορὰν θετικὴν ***(θετικὸν τόξον)***· δύναται ἐπίσης, ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ Α, νὰ κινηθῇ πάλιν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ νὰ σταματήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἀφοῦ προηγουμένως διανύσει πρῶτον ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν μίαν, δύο, τρεῖς, ... φορὰς καὶ ἔπειτα τὸ γεωμετρικὸν τόξον ΑΒ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ κινητὸν ἔγραψε ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν θετικὴν καὶ τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΑΒ κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

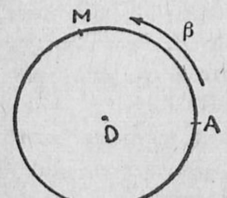
Ἐπίσης τὸ κινητόν, ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν καὶ νὰ σταματήσῃ εἰς τὸ Β, εἴτε εὐθὺς ὡς συναντήσει τὸ σημεῖον Β, ὁπότε λέγομεν, ὅτι τὸ κινητὸν ἔγραψε τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α τέλος τὸ Β καὶ φορὰν ἀρνητικήν, εἴτε, ἀφοῦ προηγουμένως διανύσει ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν μίαν, δύο, τρεῖς, . . . φορὰς καὶ ἔπειτα τὸ γεωμετρικὸν τόξον ΑΓΒ· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ κινητὸν ἔγραψεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν ἀρνητικὴν ***(ἀρνητικὸν τόξον)*** καὶ τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΑΓΒ κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

Τὰ τοιαῦτα τόξα ΑΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α τέλος τὸ Β καὶ φορὰν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν καὶ γράφονται ἀπὸ ἕνα κινητόν, κατὰ τὸν τρόπον ποὺ ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω, λέγονται ***τριγωνομετρικὰ τόξα.***

23. Ἀλγεβρικὸν μέτρον ἑνὸς τόξου. Ἔστω ἕνας προσανατολισμένος κύκλος Ο (Σχ. 18) καὶ Α ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας του. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα κινητὸν Μ, ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ Α, μετατίθεται ἐπὶ τῆς περιφερείας του σταθερῶς κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β καὶ σταματᾷ εἰς τὸ σημεῖον Β. Θὰ ὀνομάζωμεν ***ἀλγεβρικὸν μέτρον ἢ ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ τόξου ΑΒ***, τὸ ὁποῖον γράφει τὸ κινητόν, τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει, ὡς ἀπόλυτον τιμήν, τὸν ἀριθμὸν (τῆς ἀριθμητικῆς), ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ ὡς σημεῖον, τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον —, καθόσον τὸ κινητὸν κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν.

Π.χ. Ἐὰν τὸ κινητὸν Μ ἔχῃ γράψει, κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἕνα τέταρτον περιφερείας καὶ ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τὴν μοῖραν, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ τόξου αὐτοῦ εἶναι $+90^{0}$.

24. Σχέσεις μεταξὺ τῶν μέτρων τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος. Ἔστω ὁ προσανατολισμένος κύκλος Ο (Σχ. 19) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Μ τῆς περιφερείας του. Ἔστω α τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΑΜ.



Σχ. 19.

1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα κινητὸν ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ διατρέχει τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Ὅταν τὸ κινητὸν συναντήσῃ διὰ πρώτην φορὰν τὸ σημεῖον Μ, τὸ κινητὸν θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα γεωμετρικὸν τόξον ΑΜ, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον θὰ εἶναι α ἀκτίνια· ὅταν τὸ κινητὸν ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησίν του ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ συναντήσῃ διὰ δευτέραν φορὰν τὸ σημεῖον Μ, θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ***μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν καὶ ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν τόξον ΑΜ*** καὶ ἑπομένως τὸ μέτρον τοῦ τόξου αὐτοῦ θὰ εἶναι $\alpha+2\pi$ ἀκτίνια.

Ἐὰν τὸ κινητὸν ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησίν του ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ συναντήσῃ τὸ σημεῖον Μ διὰ τρίτην, τετάρτην, ... φοράν, θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ***δύο, τρεῖς.... ὁλοκλήρους περιφερείας καὶ ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν τόξον ΑΜ*** καὶ ἑπομένως τὰ μέτρα τῶν τόξων αὐτῶν, εἰς ἀκτίνια, θὰ εἶναι

$\alpha+2.2\pi$, $\alpha+3.2\pi$, ... ἀκτίνια καὶ γενικῶς θὰ εἶναι

$$\widehat{AM}=\alpha+\nu\,.\,2\pi \qquad (1)$$

ὅπου ν εἶναι ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι τὸ κινητὸν ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ διατρέχει τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Ὅταν τὸ κινητὸν συναντήσῃ διὰ πρώτην φορὰν τὸ σημεῖον Μ, θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα τόξον ΑΜ, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον $\widehat{AM}$ θὰ εἶναι

$$-(2\pi - \alpha) \quad \text{ἢ} \quad \alpha - 2\pi \quad \text{ἀκτίνια.}$$

Ὅταν τὸ κινητὸν συναντήσῃ διὰ δευτέραν φορὰν τὸ σημεῖον Μ, θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα ἀρνητικὸν τόξον ΑΜ, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν καὶ ἀπὸ τὸ τόξον ΑΜ· ἄρα τὸ μέτρον του θὰ εἶναι $\quad -2\pi + (\alpha - 2\pi) \quad$ ἢ $\quad \alpha - 2.2\pi$.

Σκεπτόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ὅταν τὸ κινητὸν συναντήσῃ διὰ τρίτην, τετάρτην, . . . ν′ φορὰν θὰ ἔχῃ γράψει ἕνα ἀρνητικὸν τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον θὰ εἶναι

$$\alpha - 3.2\pi \quad , \quad \alpha - 4.2\pi, \ldots, \text{ ἀκτίνια}$$

καὶ γενικῶς θὰ εἶναι $\quad \widehat{AM} = \alpha - \nu'.2\pi \quad$ ἀκτίνια $\quad$ (2)

ὅπου ν′ εἶναι ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Οἱ τύποι (1) καὶ (2) συγχωνεύονται εἰς τὸν τύπον

$$\boxed{\widehat{AM} = \alpha + 2k\pi} \qquad (3)$$

ὅπου $\widehat{AM}$ παριστάνει τὰ μέτρα, εἰς ἀκτίνια, ὅλων τῶν τόξων, θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ, α παριστάνει τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ μικροτέρου θετικοῦ τόξου ΑΜ καί k παριστάνει ἕνα τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς προσανατολισμένου κύκλου ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Μ, ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ. Ἐὰν τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, οἱονδήποτε, ἔχῃ μέτρον α ἀκτίνια, ὅλα τὰ ἄλλα ἔχουν μέτρα, τὰ ὁποῖα δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $\widehat{AM} = \alpha + 2k\pi$, ὅπου k παριστάνει ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ μηδέν.

25. Πόρισμα. Ἀπὸ τὸν τύπον (3) τῆς § 24 λαμβάνομεν

$$\widehat{AM} - \alpha = 2k\pi$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι:

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος, ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων των εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2π.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ μέτρον ω τοῦ μικροτέρου τόξου ΑΜ ἐκφράζεται εἰς μοίρας ἢ εἰς βαθμούς, τότε τὰ μέτρα ὅλων τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὸ αὐτὸ τέλος Μ, ἐκφράζονται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν τύπων

$$\boxed{\widehat{AM} = \omega + 360^\circ k} \qquad \boxed{\widehat{AM} = \omega + 400^\gamma k}$$

Ἀσκήσεις. 12. Εἰς ἕνα τριγωνομετρικὸν κύκλον λαμβάνομεν ὅλα τὰ τόξα ω, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὸ αὐτὸ τέλος Μ. Ποῖα εἶναι τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\omega}{\nu}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α, ἂν ν εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός;

13. Δίδεται ἕνα τόξον $\widehat{AM} = 90^\circ$. Ποῖα εἶναι ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ; Ποῦ καταλήγουν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ ὅλων αὐτῶν τῶν τόξων. Τί σχῆμα σχηματίζουν αἱ κορυφαὶ τῶν τόξων αὐτῶν;

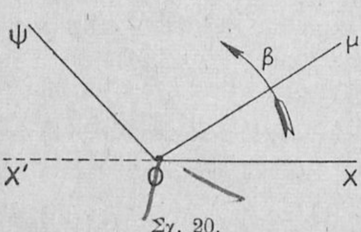
14. Δίδεται τὸ τόξον $\widehat{AM} = -\frac{\pi}{3}$. Ποῖα εἶναι ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ; Ποῦ καταλήγουν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ ὅλων αὐτῶν τῶν τόξων; Τί σχῆμα σχηματίζουν αἱ κορυφαὶ τῶν τόξων αὐτῶν;

15. Ποῦ καταλήγουν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ ὅλων τῶν τόξων $\widehat{AM} = \frac{2\pi}{3}$;

16. Τρία κινητὰ ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἑνὸς κυκλικοῦ στίβου καὶ κινοῦνται ἐπ' αὐτοῦ μὲ ὁμαλὴν κίνησιν καὶ μὲ ἀνίσους ταχύτητας α, β, γ ἀκτίνια κατὰ λεπτόν. 1ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὰ τρία κινητὰ διέλθουν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν; 2ον. Ἐὰν $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = -\frac{\pi}{6}$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος τῆς πρώτης συναντήσεώς των.

3. Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας.

26. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Ἔστω μία ἡμιευθεῖα Ομ (Σχ. 20), ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ο. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα αὐτὴ κινεῖται περὶ τὸ Ο, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ ὅτι, ἀναχωροῦσα, κατ' ἀρχάς, ἀπὸ μίαν ὡρισμένην θέσιν ΟΧ καὶ στρεφομένη σταθερῶς κατὰ



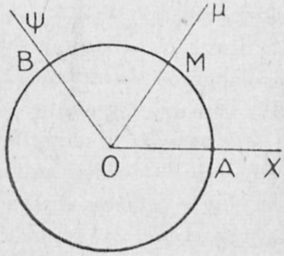
Σχ. 20.

τὴν αὐτὴν φορὰν (ἔστω κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β), σταματᾷ εἰς τὴν θέσιν ΟΨ. Ὅταν ἡ ἡμιευθεῖα Ομ σταματήση εἰς τὴν θέσιν ΟΨ, πρὶν συμπληρώση ὁλόκληρον στροφήν, λέγομεν, ὅτι ***ἡ ἡμιευθεῖα Ομ ἔγραψε τὴν γωνίαν ΧΟΨ.***...

Θὰ παραδεχθῶμεν ἀκόμη νὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ομ ***γράφει μίαν γωνίαν*** καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη, ποὺ θὰ σταματήση εἰς τὴν θέσιν ΟΨ, ἀφοῦ προηγουμένως διέλθη ἀπὸ τὴν ὡρισμένην ἡμιευθεῖαν ΟΧ μίαν ἢ περισσοτέρας φοράς.

Ἰδιαιτέρως, ἐὰν ἡ ἡμιευθεῖα Ομ, ἀναχωροῦσα ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν θέσιν ΟΧ, σταματήση εἰς τὴν προέκτασιν ΟΧ′ τῆς ΟΧ, θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ Ομ ἔγραψε μίαν ***εὐθύγραμμον γωνίαν ΧΟΧ′***.

Αὐτὴ ἡ γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου, τὴν ὁποίαν ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 22. Πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ομ (Σχ. 21), ἀναχωροῦσα ἀπὸ τὴν θέσιν ΟΧ, κάμη μίαν ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπανέλθη εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν ΟΧ, τότε κάθε σημεῖον Μ τῆς ἡμιευθείας Ομ γράφει μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Ο. Εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς κάθε τόξον ΑΜ, τὸ ὁποῖον γράφει τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς, ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐπίκεντρος γωνία, ΧΟμ, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ἡμιευθεῖα Ομ.



Σχ. 21.

27. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν. Θὰ ὀνομάσωμεν ***γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΟΧ καὶ ΟΨ*** καὶ θὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\widehat{OX, O\Psi}$, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἡμιευθεῖα Ομ, ἡ ὁποία συμπίπτει κατ᾽ ἀρχὰς μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΧ, στρέφεται ἔπειτα περὶ τὸ Ο καὶ συμπίπτει τέλος μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΨ. Ἡ ΟΧ λέγεται ***ἀρχικὴ πλευρὰ*** καὶ ἡ ΟΨ ***τελικὴ πλευρὰ*** τῆς γωνίας $\widehat{OX, O\Psi}$.

28. Προσανατολισμένον ἐπίπεδον. Ἡ κινητὴ ἡμιευθεῖα Ομ δύναται νὰ στραφῇ περὶ τὸ σημεῖον Ο (Σχ. 20), εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ᾽ ἀντίθετον φοράν.

Λέγομεν, ὅτι ἕνα ***ἐπίπεδον εἶναι προσανατολισμένον***, ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς φορὰς στροφῆς τῆς ἡμιευθείας Ομ ἔχη ὁρισθῆ ὡς ***θετικὴ φορὰ στροφῆς***. Ἡ ἀντίθετος φορὰ λέγεται ***ἀρνητικὴ φορὰ*** στροφῆς.

Ὡς ***θετικὴν φορὰν*** στροφῆς τῆς ἡμιευθείας Ομ περὶ τὸ Ο, λαμβάνομεν τὴν φοράν, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ἑνὸς ὡρολογίου καὶ τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ βέλος β.

29. Ἀλγεβρικὸν μέτρον μιᾶς γωνίας. Ἔστω ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον καὶ Ο ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ὑποθέτομεν, ὅτι μία κινητὴ ἡμιευθεῖα Ομ (Σχ. 20) ἀναχωροῦσα ἀπὸ μίαν ὡρισμένην θέσιν ΟΧ, στρέφεται περὶ τὸ Ο, ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου αὐτοῦ ἐπιπέδου, σταθερῶς κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ σταματᾷ εἰς τὴν θέσιν ΟΨ. Θὰ ὀνομάζωμεν ***ἀλγεβρικὸν μέτρον*** ἢ ***ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς γωνίας***, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ἡμιευθεῖα Ομ, τὸν ἄλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει, ὡς ἀπόλυτον τιμήν, τὸν ἀριθμὸν (τῆς ἀριθμητικῆς), ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ μέτρον τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ ὡς σημεῖον τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον —, καθόσον ἡ κινητὴ ἡμιευθεῖα στρέφεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ ἑνὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου (Σχ. 21), καὶ Ομ μία κινητὴ ἡμιευθεῖα. Εἰς κάθε γωνίαν, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ἡμιευθεῖα Ομ, στρεφομένη περὶ τὸ Ο, ἀντιστοιχεῖ, ὅπως εἴδομεν, ἕνα τόξον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον γράφει τὸ σημεῖον Μ. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὡς θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο τὴν φοράν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κινητὴ ἡμιευθεῖα Ομ καὶ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει τὸ σημεῖον Μ ἔχουν τὸ αὐτὸ ***ἀλγεβρικὸν μέτρον***, ἀρκεῖ νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ μέτρα των μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Παρατήρησις. Κατωτέρω, ὅπου θὰ ἀναφέρωμεν : ***μέτρον τόξου*** ἢ ***μέτρον γωνίας,*** θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ ***ἀλγεβρικοῦ μέτρου*** τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας. Τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου ΑΒ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\overset{\frown}{AB}$ ἢ μὲ τὸ σύμβολον $\overset{\smile}{AB}$.

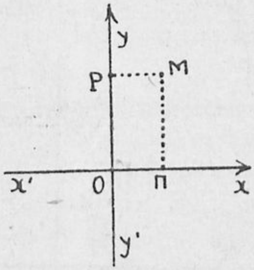
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι

30. Ὀρθογώνιοι ἄξονες. Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου γράφομεν δύο καθέτους εὐθείας x΄Ox καὶ y΄Oy (Σχ. 22), αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον O· τὸ σημεῖον O λέγεται ***ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.***

Προσανατολίζομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας x΄Ox καὶ y΄Oy, δηλ. ὁρίζομεν τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 22.

Οὕτω ἐπὶ τῆς x΄Ox ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν φορὰν x΄Ox καὶ ἐπὶ τῆς y΄Oy τὴν φορὰν y΄Oy· κάθε μία ἀπὸ τὰς προσανατολισμένας αὐτὰς εὐθείας ὀνομάζεται ***ἄξων τῶν συντεταγμένων.*** Ἡ πρώτη x΄Ox ὀνομάζεται ***ἄξων τῶν τετμημένων*** ἢ ***ἄξων τῶν*** *x* καὶ ἡ δευτέρα y΄Oy ὀνομάζεται ***ἄξων τῶν τεταγμένων*** ἢ ***ἄξων τῶν y.***

Ἐπειδὴ οἱ ἄξονες x΄Ox καὶ y΄Oy τέμνονται καθέτως, λέγονται ***ὀρθογώνιοι ἄξονες.***

31. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου. Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται οἱ ἄξονες x΄Ox καὶ y΄Oy (Σχ. 22), τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν. Ἀπὸ τὸ σημεῖον M φέρομεν τὰς καθέτους MΠ καὶ MP ἐπὶ τοὺς ἄξονας x΄Ox καὶ y΄Oy. Ἔστω Π ὁ ποὺς τῆς καθέτου MΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ P ὁ ποὺς τῆς καθέτου MP ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y.

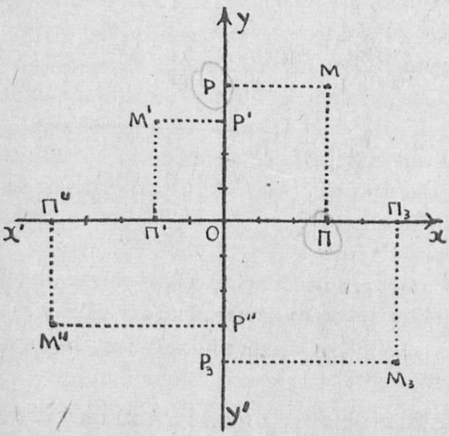
Ὅταν τὸ σημεῖον M εἶναι ὡρισμένον, τὸ σημεῖον Π εἶναι γνωστὸν καὶ ἑπομένως τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Pi}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων καὶ τέλος τὸν πόδα Π τῆς καθέτου MΠ, εἶναι τελείως ὡρισμένον. Μετροῦμεν λοιπὸν τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O\Pi}$ μὲ τυχοῦσαν μονάδα μήκους. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος OΠ ὀνομάζεται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου M καὶ παρίσταται πάντοτε μὲ τὸ γράμμα x, δηλ. εἶναι

$$x = \overline{O\Pi}$$

Ἐπίσης τὸ σημεῖον Ρ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων καὶ τέλος τὸ Ρ. Μετροῦμεν τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους, ποὺ ἐμετρήσαμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Pi}$. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος ΟΡ ὀνομάζεται ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται πάντοτε μὲ τὸ γράμμα y· δηλ. εἶναι $y = \overline{OP}$

Ἡ τετμημένη x καὶ ἡ τεταγμένη y ἑνὸς σημείου Μ ὀνομάζονται ***συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.***

32 Σημεῖα τῶν συντεταγμένων. Οἱ δύο ἄξονες x΄Οx καὶ y΄Οy (Σχ. 23) σχηματίζουν τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας xOy, yOx΄, x΄Oy΄, y΄Ox, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἀντιστοίχως πρώτη, δευτέρα, τρίτη, τετάρτη γωνία τῶν ἀξόνων.



Σχ. 23.

Τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Π. χ. Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ (Σχ. 23) κεῖται εἰς τὴν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι του $x = \overline{O\Pi}$ καὶ $y = \overline{OP}$ εἶναι θετικαί. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶναι $x = \overline{O\Pi} = +3$ καὶ $y = \overline{OP} = +4$.

Ἐὰν τὸ Μ΄ κεῖται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἡ τετμημένη του $x = \overline{O\Pi'}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἡ τεταγμένη του $y = \overline{OP'}$ εἶναι θετική. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ΄ εἶναι $x = \overline{O\Pi'} = -2$ καὶ $y = \overline{OP'} = +3$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ΄΄ κεῖται εἰς τὴν τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἡ τετμημένη του $x = \overline{O\Pi''}$ καὶ ἡ τεταγμένη του $y = \overline{OP''}$ εἶναι ἀρνητικαί. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ΄΄ εἶναι $x = \overline{O\Pi''} = -5$ καὶ $y = \overline{OP''} = -3$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον M_3 κεῖται εἰς τὴν τετάρτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἡ τετμημένη του $x = \overline{O\Pi_3}$ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ τεταγμένη του $y = \overline{OP_3}$ εἶναι ἀρνητική. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M_3 εἶναι $x = \overline{O\Pi_3} = +5$ καὶ $y = \overline{OP_3} = -4$.

Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχουν τεταγμένην μηδὲν καὶ τετμημένην θετικὴν μέν, ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox, ἀρνητικὴν δέ, ὅταν κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox′.

Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔχουν τετμημένην μηδὲν καὶ τεταγμένην θετικὴν μέν, ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Oy, ἀρνητικὴν δέ, ὅταν κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Oy′.

Τέλος τὸ σημεῖον O καὶ μόνον τὸ σημεῖον αὐτό, ἔχει καὶ τὰς δύο συντεταγμένας του μηδέν.

33. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως ἑνὸς σημείου διὰ τῶν συντεταγμένων του. Ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἔχει δύο συντεταγμένας x καὶ y τελείως ὡρισμένας. Θὰ ἴδωμεν τώρα, ***ἀντιστρόφως***, ὅτι, ἐὰν δίδωνται δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ὑπάρχει ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἕνα μόνον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς x καὶ y.

Πράγματι· λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′Ox (Σχ. 23), ἀπὸ τὸ σημεῖον O καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἐὰν ἡ τετμημένη του x εἶναι θετικὴ ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, ἐὰν ἡ τετμημένη του x εἶναι ἀρνητική, ἕνα μῆκος ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς τετμημένης x. Ἔστω Π τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

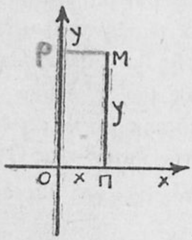
Ἐπίσης λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′Oy, ἀπὸ τὸ σημεῖον O καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἐὰν ἡ τεταγμένη του y εἶναι θετικὴ ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, ἐὰν ἡ τεταγμένη του y εἶναι ἀρνητική, ἕνα μῆκος OP ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς τεταγμένης y. Ἔστω P τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

Ἔπειτα φέρομεν ἀπὸ τὸ Π μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἀπὸ τὸ P μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· αἱ δύο αὐταὶ παράλληλοι εὐθεῖαι, ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας ὀρθογωνίως, θὰ τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον M, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μοναδικὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τοὺς ἀριθμοὺς x καὶ y.

Ὥστε παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰς συντεταγμένας x καὶ y, ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἕνα μόνον. Ἂν ζητήσωμεν ἔπειτα τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι του εἶναι x καὶ y.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ ἔχει τετμημένην x = α καὶ τεταγμένην y = β, γράφομεν συμβολικῶς Μ(α,β).

Σημ. Τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς συντεταγμένας του x καὶ y, δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα ΟΠ (Σχ. 24), τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{ΟΠ}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ x καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x. Ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{ΠΜ}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ νὰ εἶναι ἴση μὲ y. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.



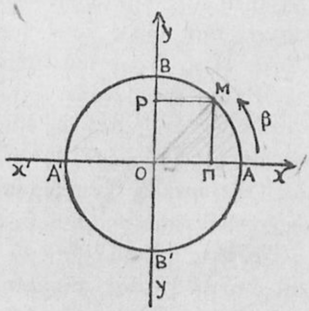
Σχ. 24.

Ἀσκήσεις. 17. Ἐπὶ ἑνὸς τετραγωνισμένου χάρτου σημειώσατε τὰ σημεῖα Α(2, 4), Β(—1, 4), Γ(—3—1), Δ(3,—5).

18. Ἐπὶ ἑνὸς τετραγωνισμένου χάρτου σημειώσατε τὰ σημεῖα· Α(2,3) καὶ Β(—1,2). Κατασκευάσατε ἔπειτα τὰ δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ καὶ ὁρίσατε τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων Γ,Δ,Ε,Ζ.

2. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου.

34. Συνημίτονον καὶ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου. Ἔστω Ο ἕνας τριγωνομετρικὸς κύκλος (Σχ. 25). Ἐπὶ τῆς περιφερείας του λαμβάνομεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ ἕνα ἄξονα x΄Ox, ὁ ὁποῖος περιέχει τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ x΄ πρὸς τὸ x, ὁπότε ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ θὰ εἶναι $\overline{ΟΑ} = +1$. Ὁ ἄξων αὐτὸς x΄Ox, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων λέγεται ***ἄξων τῶν συνημιτόνων.***



Σχ. 25.

Ἂν στρέψωμεν τὸν ἄξονα x΄Ox περὶ τὸ Ο κατὰ 90^0 καὶ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, θὰ ἔχωμεν ἕνα ἄξονα y΄Oy, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄Ox καὶ ὁ ὁποῖος λέγεται ***ἄξων τῶν ἡμιτόνων.***

Ἔστω Μ τὸ ἄκρον ἑνὸς τόξου ΑΜ. Εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας x΄Ox καὶ y΄Θy, ἂν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως αὐτῶν τὴν ἀκτῖνα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ἔστω $\overline{ΟΠ}$ ἡ τετμημένη καὶ $\overline{ΟΡ}$ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ.

Ἡ τετμημένη $\overline{ΟΠ}$* τοῦ σημείου Μ λέγεται συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ· δηλ. εἶναι

$$\text{συνημίτονον } \widehat{ΑΜ} = \overline{ΟΠ} \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\widehat{ΑΜ} = \overline{ΟΠ} \qquad (1)$$

Ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ λέγεται ἡμίτονον τοῦ τόξου Μ· δηλ. εἶναι

$$\text{ἡμίτονον } \widehat{ΑΜ} = \overline{ΟΡ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ημ}\widehat{ΑΜ} = \overline{ΟΡ} \qquad (2)$$

Ἐὰν ω εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΜ, αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) γράφονται

$$\boxed{\textbf{συν}\,ω = \overline{\textbf{ΟΠ}}}\ , \quad \boxed{\textbf{ημ}\,ω = \overline{\textbf{ΟΡ}}}$$

καὶ ἀπαγγέλλονται : συνημίτονον ω ἴσον $\overline{ΟΠ}$, καὶ ἡμίτονον ω ἴσον $\overline{ΟΡ}$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὸ αὐτὸ τέλος Μ, ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον $\overline{ΟΠ}$ καὶ τὸ αὐτὸ ἡμίτονον $\overline{ΟΡ}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Β, ἐκφράζονται διὰ τοῦ τύπου $\widehat{ΑΜ} = 2kπ + ω$, ὅπου ω εἶναι τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ ἐλαχίστου τόξου ΑΜ καὶ k τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ μηδέν, θὰ εἶναι

$$\text{συν}\widehat{ΑΜ} = \text{συν}(2kπ + ω) \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}ω = \text{συν}(2kπ + ω)$$
$$\text{ημ}\widehat{ΑΜ} = \text{ημ}(2kπ + ω) \quad \text{ἢ} \quad \text{ημ}ω = \text{ημ}(2kπ + ω).$$

Σημείωσις. Ἡ ἰσότης συν ω = $\overline{ΟΠ}$ σημαίνει : τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ω, εἶναι ἴσον μὲ $\overline{ΟΠ}$. Ἐν τούτοις θὰ τὴν ἀπαγγέλλωμεν ἁπλῶς : ***συνημίτονον ω ἴσον $\overline{ΟΠ}$.***

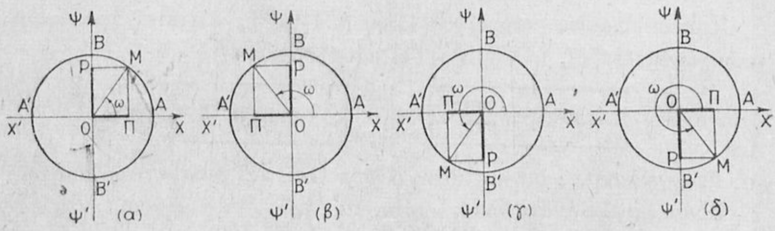
---

* Ἡ τετμημένη $\overline{ΟΠ}$ εἶναι ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς $\dfrac{\overline{ΟΠ}}{\overline{ΟΑ}}$ καὶ ἡ τεταγμένη $\overline{ΟΡ}$ εἶναι ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς $\dfrac{\overline{ΟΡ}}{\overline{ΟΒ}}$, ὅπου $\overline{ΟΑ} = \overline{ΟΒ} = +1$.

35. Σημεῖον τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου. Ἔστω Ο (Σχ. 26) ἕνας τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων. Ὁ ἄξων x΄Οx τῶν συνημιτόνων καὶ ὁ ἄξων y΄Οy τῶν ἡμιτόνων χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα, τὰ ὁποῖα λέγονται ***τεταρτημόρια*** : Τὸ ΑΒ εἶναι τὸ ***πρῶτον τεταρτημόριον***, τὸ ΒΑ΄ εἶναι τὸ ***δεύτερον τεταρτημόριον***, τὸ Α΄Β΄ εἶναι τὸ ***τρίτον τεταρτημόριον*** καὶ τὸ Β΄Α εἶναι τὸ ***τέταρτον τεταρτημόριον.***

Ἔστω Μ τὸ ἄκρον ἑνὸς τόξου ΑΜ (Σχ. 26) καὶ ΜΠ, ΜΡ αἱ κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς ἄξονας x΄Οx καὶ y΄Οy.

Ἐὰν τὸ Μ εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ ***πρώτου τεταρτημορίου*** ΑΒ (Σχ. 26α), οἱ ἀριθμοὶ $\overline{ΟΠ}$, $\overline{ΟΡ}$ εἶναι θετικοί· ἄρα τὸ ***συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι θετικά.***



Σχ. 26.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ ***δεύτερον τεταρτημόριον*** (Σχ. 26 β) ἡ τετμημένη του $\overline{ΟΠ}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἡ τεταγμένη του $\overline{ΟΡ}$ εἶναι θετική· ἄρα τὸ τόξον ΑΜ ἔχει τὸ ***συνημίτονον ἀρνητικὸν καὶ τὸ ἡμίτονον θετικόν.***

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ ***τρίτον τεταρτημόριον*** (Σχ. 26 γ) ἡ τετμημένη του $\overline{ΟΠ}$ καὶ ἡ τεταγμένη του $\overline{ΟΡ}$ εἶναι ἀρνητικαί· ἄρα τὸ τόξον ΑΜ ἔχει τὸ ***συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον ἀρνητικά.***

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ ***τέταρτον τεταρτημόριον*** (Σχ. 26 δ), ἡ τετμημένη του $\overline{ΟΠ}$ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ τεταγμένη του $\overline{ΟΡ}$ ἀρνητική· ἄρα ***τὸ τόξον ΑΜ ἔχει τὸ συνημίτονον θετικὸν καὶ τὸ ἡμίτονον ἀρνητικόν.***

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ Α, τὸ μέτρον ω τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι μηδὲν ἢ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας καὶ θὰ εἶναι συν ω $= +1$ καὶ ημ ω $= 0$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ Β, τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι ἴσον μὲ 90^0 ἢ μὲ $90^0 + 360^0 k$, ὅπου k εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδὲν καὶ θὰ εἶναι $συν\,ω = 0$ καὶ $ημ\,ω = \overline{OB} = +1$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ Α′, τὸ μέτρον ω τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι 180^0 ἢ $180^0 + 360^0 k$ καὶ θὰ εἶναι $συνω = \overline{OA'} = -1$ καὶ $ημω = 0$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ Β′, τὸ μέτρον ω τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι 270^0 ἢ $270^0 + 360^0 k$ καὶ θὰ εἶναι $συν\,ω = 0$ καὶ $ημ\,ω = \overline{OB'} = -1$.

36. Θεμελειώδης σχέσις. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ (Σχ. 26) σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ· κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι :

$$\overline{O\Pi}^2 + \overline{\Pi M}^2 = \overline{OM}^2 \qquad (1)$$

Ἐὰν $\widehat{AM} = ω$, θὰ εἶναι $\overline{O\Pi} = συν\,ω$, $\overline{\Pi M} = \overline{OP} = ημ\,ω$ καὶ $\overline{OM} = 1$· ἄρα ἡ σχέσις (1) γράφεται $(συν\,ω)^2 + (ημ\,ω)^2 = 1$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{συν^2ω + ημ^2ω = 1}} \qquad (2)$$

καὶ ἀπαγγέλλεται : συνημίτονον τετράγωνον ω καὶ ἡμίτονον τετράγωνον ω ἴσον 1.

Ἡ σχέσις (2) εἶναι θεμελειώδης εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν καὶ ὑφίσταται δι᾿ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ τόξου ω.

Ἡ σχέσις (2) γράφεται καὶ

$$\boxed{\mathbf{συν^2ω = 1 - ημ^2ω}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\mathbf{ημ^2ω = 1 - συν^2ω}}$$

Σημείωσις. Ὁ τύπος (2), ὡς περιέχων ἄθροισμα τετραγώνων ἀριθμῶν, δηλ. ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν, ἰσχύει διὰ κάθε τόξον, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν λήγῃ τὸ τόξον τοῦτο.

37. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες. Ἡ προηγουμένη ἰσότης $συν^2ω + ημ^2ω = 1$, ἀληθεύει δι᾿ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ τόξου ω· ἄρα εἶναι μία ***ταυτότης τριγωνομετρική***.

Ἡ ἐπαλήθευσις τῶν τριγωνομετρικῶν ταυτοτήτων γίνεται, ὅπως καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἀλγεβρικῶν ταυτοτήτων· δηλ. λαμβάνομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητος καὶ προσπαθοῦμεν νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος, διὰ διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος, ὁπότε πρέπει νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ πρῶτον.

Παράδειγμα : Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$(ημx + συνx)^2 = 1 + 2ημx\,συνx$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ταυτότητος καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\, x)^2 &= \eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x\\ &= (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) + 2\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x\\ &= \quad 1 \quad + 2\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x\end{aligned}$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ταυτότης εἶναι ἀληθής.

Ἀσκήσεις. 19. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$
2. $\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 x$
3. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x . \sigma\upsilon\nu^2 x}$

20. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\eta\mu^2\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\, \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

21. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\, \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$

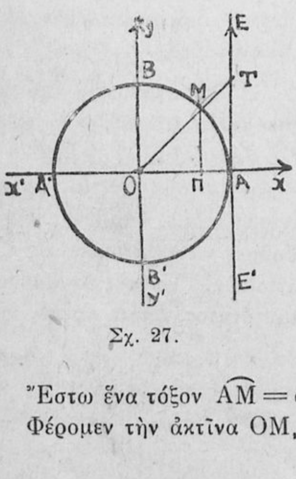
38. Ἐφαπτομένη τόξου. ***Ὁ λόγος τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου πρὸς τὸ συνημίτονόν του λέγεται ἐφαπτομένη τοῦ τόξου αὐτοῦ.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἐφαπτομένην ἑνὸς τόξου ω μὲ εφω, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι :

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$$

Ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς τόξου εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν τὸ συνημίτονόν του δὲν εἶναι μηδέν· δηλ. ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου εἶναι τελείως ὡρισμένη, δι᾿ ὅλα τὰ τόξα, ἐκτὸς τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα καταλήγουν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν συνημίτονον μηδέν.

Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ἐφαπτομένης. Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο (Σχ. 27), Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, x′Ox ὁ ἄξων τῶν συνημιτόνων καὶ y′Oy ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων. Εἰς τὸ σημεῖον Α, ἀρχὴν τῶν τόξων, φέρομεν ἐφαπτομένην Ε′ΑΕ τῆς περιφερείας Ο. Ἐπειδὴ ἡ Ε′ΑΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y′Oy, ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς Ε′ΑΕ, ὡς θετικὴν φοράν, τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος y′Oy, δηλ. τὴν ἐκ τοῦ Ε′ πρὸς τὸ Ε φοράν. Ἡ προσανατολισμένη αὐτὴ εὐθεῖα Ε′ΑΕ λέγεται ***ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.***



Σχ. 27.

Ἔστω ἕνα τόξον $\overset{\frown}{AM} = \omega$.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον Τ. Τὸ σημεῖον Τ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{AT}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{AM} = ω$; δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι : $\overline{AT} = εφω = \frac{ημω}{συνω}$.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα x′Ox. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΤ καὶ ΟΠΜ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Ο κοινήν. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AT}{OA} = \frac{ΠΜ}{ΟΠ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μήκη ΠΜ καὶ ΟΠ, εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ημω καὶ συνω καὶ ΟΑ εἶναι ἡ μονάς, ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{AT}{1} = \left|\frac{ημω}{συνω}\right| \quad ἢ \quad AT = \left|\frac{ημω}{συνω}\right| \qquad (2)$$

Πρέπει τώρα νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς $\overline{AT}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ λόγου $\frac{ημω}{συνω}$. Πράγματι· ἐὰν τὸ σημεῖον Μ, τέλος τοῦ τόξου ΑΜ, κεῖται εἰς τὸ πρῶτον καὶ τρίτον τεταρτημόριον, τὰ ημω καὶ συνω ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἑπομένως ὁ λόγος $\frac{ημω}{συνω}$ εἶναι θετικός· ἀλλὰ καὶ τὸ σημεῖον Τ κεῖται ἄνω τοῦ Α καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{AT}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ εἶναι θετική, ὅπως εἶναι καὶ ὁ λόγος $\frac{ημω}{συνω}$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κεῖται εἰς τὸ δεύτερον καὶ τέταρτον τεταρτημόριον, τὰ ημω καὶ συνω εἶναι ἑτερόσημα καὶ ἑπομένως ὁ λόγος $\frac{ημω}{συνω}$ εἶναι ἀρνητικός· ἀλλὰ καὶ τὸ σημεῖον Τ κεῖται κάτωθεν τοῦ Α καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{AT}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$ εἶναι ἀρνητική, ὅπως εἶναι καὶ ὁ λόγος $\frac{ημω}{συνω}$. Ὥστε εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τὸ σημεῖον τοῦ $\overline{AT}$ συμφωνεῖ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ λόγου $\frac{ημω}{συνω}$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\overline{AT} = \frac{ημω}{συνω} = εφ\,ω$$

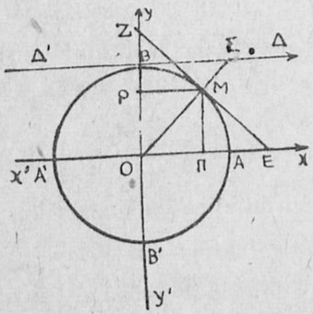
39. Συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου. ***Ὁ λόγος τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου πρὸς τὸ ἡμίτονόν του λέγεται συνεφαπτομένη τοῦ τόξου αὐτοῦ.***

Ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου ω παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον ***σφω***

καὶ ἀπαγγέλλεται : συνεφαπτομένη ω. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρι
εἶναι

$$\boxed{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$$

Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς συνεφαπτομένης. Ἔστω ὁ τ
τρικὸς κύκλος Ο (Σχ. 28), Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, x'Ox ὁ
συνημιτόνων, y'Oy ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων καὶ ἕνα τόξον Α
Εἰς τὸ σημεῖον Β, τέλος τοῦ πρώτου τεταρτημορίου,



Σχ. 28.

πτομένην Δ'ΒΔ τῆ $\alpha - \eta\mu^2\beta$
Ἐπειδὴ ἡ Δ'ΒΔ $\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$
πρὸς τὸν ἄξονα x'O ***ου ἑνὸς τόξου***
τῆς ἐφαπτομένης Δ'Ι ***τόξου αὐτοῦ.***
φοράν, τὴν θετικὴν φ ὲ εφω, κατὰ
νος x'Ox, δηλ. τὴν ἐκ ι
τὸ Δ φοράν· ἡ προσανα
αὐτὴ εὐθεῖα Δ'ΒΔ λέγετα
τῶν συνεφαπτομένων.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ημί-
ποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὸν ἄ
ξονα τῶν συνεφαπτομένων εἰς τὸ
σημεῖον Σ. Τὸ σημεῖον Σ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων
ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B}\Sigma}$· θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{\mathrm{B}\Sigma}$ τοῦ δια-
νύσματος $\overrightarrow{\mathrm{B}\Sigma}$ εἶναι ἡ συνεφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{AM}} = \omega$· δηλ. θὰ δεί-
ξωμεν, ὅτι :

$$\overline{\mathrm{B}\Sigma} = \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΡ ἐπὶ τὸν ἄξονα y'Oy. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΣ καὶ ΟΡΜ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινήν· ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν : $\frac{\mathrm{B}\Sigma}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}}$ (1). Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μήκη ΡΜ καὶ ΟΡ εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν συνω καὶ ημω καὶ ΟΒ εἶναι ἡ μονάς, ἡ σχέσις (1) γράφεται : $\frac{\mathrm{B}\Sigma}{1} = \left|\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\right|$ ἢ $\mathrm{B}\Sigma = \left|\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\right|$ (2)

Ἔπειτα σκεπτόμενοι, ὅπως καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς $\overline{\mathrm{B}\Sigma}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ λόγου $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\overline{\mathrm{B}\Sigma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \sigma\varphi\omega.$$

ξονα τῶ

ἄξονος τ

βρικὴ τι

$\widehat{AM} = \omega$

Ἀπὸ τ

Τὰ ὀρθογώ

ὀξεῖαν γωνία

ἔχομεν

Ἐπειδὴ οἱ

αἱ ἀπόλυτοι τ

σις (1) γράσ

Πρό

τοῦ δι

Π

40. Σχέσις μεταξὺ τῆς εφω καὶ σφω. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας εφω $= \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$, σφω $= \frac{\text{συνω}}{\text{ημω}}$, λαμβάνομεν

$$\boxed{\text{εφω} \cdot \text{σφω} = 1} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\text{σφω} = \frac{1}{\text{εφω}}}$$

Ὥστε: *Ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης του.*

41. Σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου. Τὸ σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου του.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὸ σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου ω.

Τεταρτημόριον εἰς ὃ λήγει τὸ τόξον ω	*ημω*	*συνω*	*εφω*	*σφω*
α′	+	+	+	+
β′	+	—	—	—
γ′	—	—	+	+
δ′	—	+	—	—

Ἀσκήσεις. 22. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $1+\text{εφ}^2x=\frac{1}{\text{συν}^2x}$ 2. $1+\text{σφ}^2x=\frac{1}{\text{ημ}^2x}$

23. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{σφ}^2x\,\text{συν}^2x=\text{σφ}^2x-\text{συν}^2x$.

24. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{εφ}x+\text{εφω}=\text{εφ}x\,\text{εφω}(\text{σφ}x+\text{σφω})$

25. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ημ}^2x\,\text{εφ}x-\text{συν}^2x\,\text{σφ}x=\text{εφ}x-\text{σφ}x$

26. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1. $\frac{\text{εφ}x+\text{εφω}}{\text{σφ}x+\text{σφω}}=\text{εφ}x\cdot\text{εφω}$ 2. $\text{εφ}x+\text{σφ}x=\frac{1}{\text{ημ}x\,\text{συν}x}$

27. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1. $\frac{1-\text{εφ}x}{1+\text{εφ}x}=\frac{\text{σφ}x-1}{\text{σφ}x+1}$ 2. $\frac{1-\text{εφ}^2x}{1+\text{εφ}^2x}=1-2\text{ημ}^2x$.

42. Τέμνουσα καὶ συντέμνουσα ἑνὸς τόξου: *Ὁ ἀντίστροφος λόγος τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου λέγεται* ***τέμνουσα*** *τοῦ τόξου αὐτοῦ.*

Ἡ τέμνουσα ἑνὸς τόξου ω παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον *τεμω* καὶ ἀπαγγέλλεται : τέμνουσα ω. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν θὰ εἶναι

$$\boxed{\text{τεμ}\,\omega = \frac{1}{\text{συν}\omega}}$$

Ὁ ἀντίστροφος λόγος τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου λέγεται συντέμνουσα τοῦ τόξου αὐτοῦ.

Ἡ συντέμνουσα ἑνὸς τόξου ω παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον **στεμω** καὶ ἀπαγγέλλεται : συντέμνουσα ω. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι

$$\boxed{\text{στεμ}\,\omega = \frac{1}{\text{ημ}\omega}}$$

Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς τεμνούσης καὶ συντεμνούσης. Ἐὰν φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Μ (Σχ. 28) τέλος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM} = \omega$, ἡ ἐφαπτομένη αὐτὴ τέμνει τὸν ἄξονα x΄Οx εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὸν ἄξονα y΄Οy εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΕ καὶ ΟΜΖ, κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας, ἔχομεν :

$$\overline{OM}^2 = OE.O\Pi \quad \text{καὶ} \quad \overline{OM}^2 = OZ.OP$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Π καὶ Ε εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο, ὅπως καὶ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ζ, αἱ ἰσότητες (1) θὰ ἰσχύουν κατὰ τὸ μέγεθος καὶ κατὰ τὸ σημεῖον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\overline{OM}^2 = \overline{EO}.\overline{O\Pi} \quad \text{καὶ} \quad \overline{OM}^2 = \overline{OZ}.\overline{OP} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $\overline{OM} = 1$, $\overline{O\Pi} = \text{συν}\omega$, $\overline{OP} = \text{ημ}\omega$, αἱ ἰσότητες (2) γράφονται $1 = \overline{OE}.\text{συν}\omega$ καὶ $1 = \overline{OZ}.\text{ημ}\omega$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν :

$$\overline{OE} = \frac{1}{\text{συν}\omega} \quad \text{καὶ} \quad \overline{OZ} = \frac{1}{\text{ημ}\omega}$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{OE} = \text{τεμ}\omega \quad \text{καὶ} \quad \overline{OZ} = \text{στεμ}\omega$$

43. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου. Τὸ συνημίτονον, τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη, ἡ συνεφαπτομένη, ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συντέμνουσα ἑνὸς τόξου λέγονται ***τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ***τριγωνομετρικοὶ λόγοι*** τοῦ τόξου, ἢ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας.

Ἐκ τούτων οἱ τρεῖς πρῶτοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, δηλ. τὸ συνημίτονον, τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν. Οἱ ἄλλοι τρεῖς, δηλ. ἡ τέμνουσα, ἡ συντέμνουνα καὶ ἡ συνεφαπτομένη, ὡς ἀντίστροφοι ἀντιστοίχως τῶν τριῶν πρώτων, ἐκφράζονται δι' αὐτῶν.

Σημείωσις. Κατωτέρω ὅπου θὰ ἀναφέρωμεν ἁπλῶς τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ἢ γωνίας, θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι πρόκειται μόνον διὰ τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας.

Ἀσκήσεις. 28. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1. $\text{τεμ}^2x = 1 + \text{εφ}^2x$, 2. $\text{στεμ}^2x = 1 + \text{σφ}^2x$.

29. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τεμ}^2x . \text{στεμ}^2x = \text{τεμ}^2x + \text{στεμ}^2x$.

30. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\left(\dfrac{\text{ημ}x + \text{συν}x}{\text{ημ}x\,\text{συν}x}\right)^2 = (\text{τεμ}x + \text{στεμ}x)^2$.

31. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\text{τεμ}x - \text{συν}x}{\text{στεμ}x - \text{ημ}x} = \text{εφ}^3x$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

***Α' Ὁμάς*. 32.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$(1 + \text{εφ}x)(1 + \text{σφ}x)\,\text{ημ}x\,\text{συν}x = (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2$$

33. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\text{ημ}x + \text{εφ}x)(\text{συν}x + \text{σφ}x) = (1 + \text{ημ}x)(1 + \text{συν}x)$

34. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{σφ}^2x\,\text{σφ}^2y - 1 = \dfrac{\text{συν}^2x - \text{ημ}^2y}{\text{ημ}^2x\,\text{ημ}^2y}$

35. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\text{συν}^2x - \text{ημ}^2y}{\text{ημ}^2x\,\text{ημ}^2y} = \dfrac{1}{\text{εφ}^2x}\left(\dfrac{1}{\text{ημ}^2y} - \dfrac{1}{\text{συν}^2x}\right)$

36. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ημ}^2x\,\text{εφ}x - \text{συν}^2x\,\text{σφ}x = \text{εφ}x - \text{σφ}x$.

37. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ημ}^2x\,\text{εφ}x + \text{συν}^2x\,\text{σφ}x + 2\text{ημ}x\,\text{συν}x = \text{εφ}x + \text{σφ}x$.

38. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{εφ}x + \text{σφ}x = \sqrt{\dfrac{1}{\text{συν}^2x} + \dfrac{1}{\text{ημ}^2x}}$

39. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\text{εφ}x - \text{ημ}x)^2 + (1 - \text{συν}x)^2 = (\text{τεμ}x - 1)^2$.

40. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\text{εφ}x + 2)(2\text{εφ}x + 1) = 5\text{εφ}x + 2\text{τεμ}^2x$.

41. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τεμ}^2x . \text{στεμ}^2x = \text{εφ}^2x + \text{σφ}^2x + 2$.

***Β' Ὁμάς*. 42.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ημx καὶ συνx, ἐὰν εἶναι:

1ον $3\text{ημ}x + 4\text{συν}x = 5$. 2ον $\text{ημ}x + 2\text{συν}x = 2$.

43. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$A = 2(\text{ημ}^6x + \text{συν}^6x) - 3(\text{συν}^4x + \text{ημ}^4x)$$

ἔχει μίαν τιμὴν ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ τόξου x.

44. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$y = 2(1 - \text{ημ}^2x\,\text{συν}^2x)^2 - (\text{ημ}^8x + \text{συν}^8x)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

45. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$y = \text{ημ}^6x + \text{συν}^6x + 3\text{ημ}^2x\,\text{συν}^2x$ εἶναι σταθερὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις ἔχουν μίαν τιμὴν ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ τόξου x.

46. $y = 2(\text{ημ}^4x + \text{ημ}^2x\,\text{συν}^2x + \text{συν}^4x)^2 - (\text{ημ}^8x + \text{συν}^8x)$.

47. $y = (1 - \text{ημ}^2x\,\text{συν}^2x)(\text{ημ}^3x\,\text{συν}x - \text{συν}^3x\,\text{ημ}x) - (\text{ημ}^7x\,\text{συν}x - \text{συν}^7x\,\text{ημ}x)$.

48. $y = \text{ημ}^6x + \text{συν}^6x - 2\text{ημ}^4x - \text{συν}^4x + \text{ημ}^2x$.

49. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ παράστασις

$$y = \text{ημ}^6x + \text{συν}^6x + \mu(\text{ημ}^4x + \text{συν}^4x)$$

λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

50. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

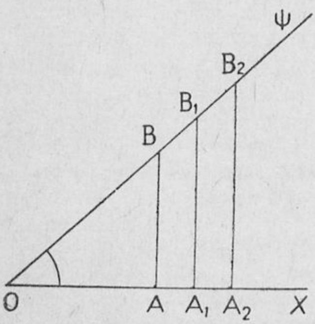
$A = 2\text{συν}^8x - 2\text{ημ}^8x + 3\text{ημ}^6x - 5\text{συν}^6x + 3\text{συν}^4x$ (θέσατε $\text{συν}^2x = \omega$).

51. Ἐὰν ημβ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ ημα καὶ συνα, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{συν}^2\beta - \text{ημ}^2\beta = (\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha)^2$.

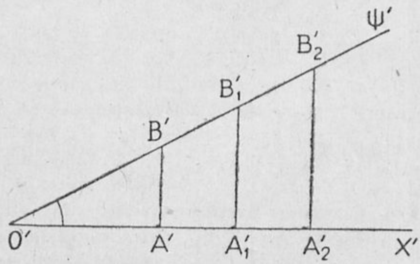
3. Ἄλλος ὁρισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας.

44. Θεμελιώδης σχέσις μεταξὺ τοῦ λόγου δύο πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογων. τριγώνου πρὸς τὰς ὀξείας γωνίας του. Ἔστω μία ὀξεῖα γωνία ΧΟΨ (Σχ. 29). Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς της ΟΨ διάφορα σημεῖα Β, $Β_1$, $Β_2$, . . . καὶ φέρωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ τὰς καθέτους ΒΑ, $Β_1Α_1$, $Β_2Α_2$, ... ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΟΧ, σχηματίζονται ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, $ΟΑ_1Β_1$, $ΟΑ_2Β_2$ . . . . Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{AB}{OA}=\frac{A_1B_1}{OA_1}=\frac{A_2B_2}{OA_2}=\dots$$
$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}=\dots$$
$$\frac{AB}{OB}=\frac{A_1B_1}{OB_1}=\frac{A_2B_2}{OB_2}=\dots$$



Σχ. 29.



Σχ. 30.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{OA}$ ἔχει πάντοτε μίαν σταθερὰν ἀριθμητικὴν τιμήν, οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΨ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς ἄλλους λόγους $\frac{OA}{OB}$ καὶ $\frac{AB}{OB}$. Ὥστε οἱ λόγοι $\frac{AB}{OA}$, $\frac{OA}{OB}$, $\frac{AB}{OB}$ εἶναι σταθεροὶ καὶ δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΨ τῆς γωνίας ΧΟΨ.

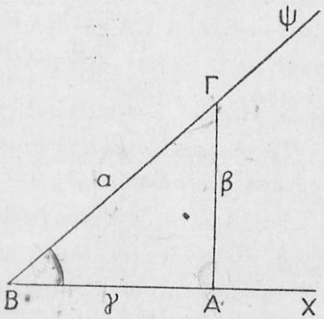
Ἐὰν ὅμως λάβωμεν μίαν ἄλλην γωνίαν Χ′Ο′Ψ′ (Σχ 30) καὶ ἐργασθῶμεν, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ λόγος $\frac{A'B'}{O'A'}$ ἔχει μίαν τιμὴν διάφορον τῆς $\frac{AB}{OA}$, ἀλλὰ ἡ τιμὴ αὐτὴ μένει σταθερά, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Β′ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ο′Ψ′.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Οἱ λόγοι δύο οἱωνδήποτε πλευρῶν ἑνὸς ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΑ$_1$Β$_1$,.... δὲν ἐξαρτῶνται καθόλου ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΨ τῆς γωνίας ΧΟΨ, ἀλλὰ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας αὐτῆς.

Οἱ σταθεροὶ αὐτοὶ λόγοι εἶναι χαρακτηριστικοὶ διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ θὰ μᾶς ἐπιτρέψουν νὰ δώσωμεν ἕναν ἄλλον ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας.

45. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας. Ἔστω μία ὀξεῖα γωνία ΧΒΨ (Σχ. 31) καὶ ω τὸ μέτρον της εἰς μοίρας, λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα τῆς μοίρας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς πλευρᾶς ΒΨ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΑ ἐπὶ τὴν ΒΧ. Σχηματίζεται οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ καὶ ἔστωσαν ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ αἱ τρεῖς πλευραί του.



Σχ. 31.

1ον ***Ἡμίτονον μιᾶς γωνίας.*** Ὁ σταθερὸς λόγος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Β, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ λέγεται ***ἡμίτονον τῆς γωνίας Β***. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι

$$\boxed{\text{ἡμίτονον γωνίας } B=\frac{\text{ἀπέναντι πλευρὰ } A\Gamma}{\text{ὑποτείνουσα } B\Gamma}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{ημ}B=\frac{\beta}{\alpha}}$$

2ον. ***Συνημίτονον μιᾶς γωνίας.*** Ὁ σταθερὸς λόγος τῆς πλευρᾶς ΒΑ, ἡ ὁποία πρόσκειται πρὸς τὴν γωνίαν Β, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ λέγεται ***συνημίτονον τῆς γωνίας Β.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι

$$\boxed{\text{συνημίτονον γων.}B=\frac{\text{προσκειμένη πλευρὰ } BA}{\text{ὑποτείνουσα } B\Gamma}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{συν}B=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

3ον. ***Ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας.*** Ὁ σταθερὸς λόγος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Β, πρὸς τὴν προσκειμένην ἄλλην κάθετον πλευρὰν ΒΑ λέγεται ***ἐφαπτομένη τῆς γωνίας Β.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι:

$$\boxed{\text{ἐφαπτομένη γων. } B=\frac{\text{ἀπέναντι πλευρὰ } A\Gamma}{\text{προσκειμένη πλευρὰ } BA}} \text{ ἢ } \boxed{\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}} \quad (1)$$

4ον. ***Συνεφαπτομένη μιᾶς γωνίας.*** Ὁ σταθερὸς λόγος τῆς πλευρᾶς ΒΑ, τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν γωνίαν Β, πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας αὐτῆς πλευρὰν ΑΓ λέγεται ***συνεφαπτομένη τῆς γωνίας Β.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι:

$$\boxed{\text{συνεφαπτομένη γων. } B=\frac{\text{προσκειμένη πλευρὰ } BA}{\text{ἀπέναντι πλευρὰ } A\Gamma}} \text{ ἢ } \boxed{\sigma\varphi B=\frac{\gamma}{\beta}}$$

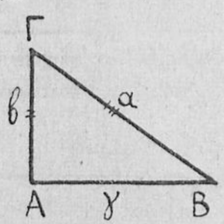
Παρατηρήσεις. 1η. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ (Σχ. 31) αἱ κάθετοι πλευραὶ ΓΑ καὶ ΒΑ εἶναι μικρότεραι τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ ἑπομένως οἱ λόγοι $\frac{AB}{B\Gamma}$, $\frac{B\Gamma}{B\Gamma}$ εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\eta\mu B$ καὶ $\frac{BA}{B\Gamma}=\sigma\upsilon\nu B$ συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος 1.

2α. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\sigma\varphi B=\frac{\gamma}{\beta}$, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 45, συνάγομεν, ὅτι ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης της· δηλ. εἶναι

$$\boxed{\varepsilon\varphi B . \sigma\varphi B = 1}$$

46. Ἐφαρμογαί. *Πρόβλημα 1ον. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ* (Σχ. 32) *εἶναι ΑΓ=9 μέτρα, ΑΒ=12 μέτρα, ΒΓ=15 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας Β.*



Σχ. 32.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς γωνίας Β θὰ εἶναι:

$$\eta\mu B=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0{,}60$$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{BA}{B\Gamma}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}=0{,}80$$

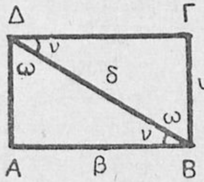
$$\varepsilon\varphi B=\frac{A\Gamma}{BA}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$\sigma\varphi B=\frac{BA}{A\Gamma}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}=1{,}333.$$

Σημ. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀφῃρημένοι ἀριθμοὶ καὶ ἐκφράζονται γενικῶς ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Πρόβλημα 2ον. Ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (Σχ. 33) *δίδονται αἱ διαστάσεις ΑΒ=β καὶ ΒΓ=υ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζει ἡ διαγώνιος ΒΔ μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου.*

Ἔστω δ ἡ διαγώνιος ΔΒ. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι $\delta^2=\beta^2+\upsilon^2$ ἢ $\delta=\sqrt{\beta^2+\upsilon^2}$. Ἡ διαγώνιος ΒΔ σχηματίζει μὲ τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΓ δύο γωνίας ν καὶ ω, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΒΓΔ ἔχομεν, κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:



Σχ. 33.

$$\eta\mu\nu=\frac{\upsilon}{\delta}=\frac{\upsilon}{\sqrt{\beta^2+\upsilon^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\nu=\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\upsilon^2}},$$

$$\varepsilon\varphi\nu=\frac{\upsilon}{\beta},\quad \sigma\varphi\nu=\frac{\beta}{\upsilon},$$

$$\eta\mu\omega=\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\upsilon^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\upsilon}{\delta}=\frac{\upsilon}{\sqrt{\beta^2+\upsilon^2}},\quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{\beta}{\upsilon},\quad \sigma\varphi\omega=\frac{\upsilon}{\beta}$$

Ἀσκήσεις. 52. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας Β ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν:

1ον. α=2,5 μ., β=1,5 μ., γ=2 μ.
2ον. α=74 μ., β=24 μ., γ=70 μ.

53. Αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ εἶναι β=8 μ. καὶ γ=6 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας Γ.

54. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=υ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

55. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του.

56. Εἰς ἕνα ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι α=3β. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας Β.

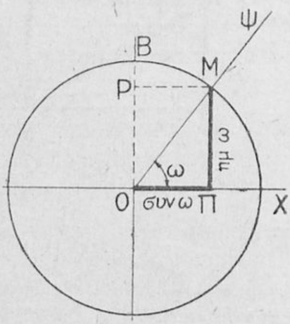
57. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 20 μέτρ. καὶ 15 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιός του καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζει ἡ διαγώνιος μὲ τὰς διαστάσεις του.

47. Γεωμετρικὴ σημασία τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας. Ἐπειδὴ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ΧΟΨ=ω (Σχ. 34) δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΨ τῆς γωνίας, δηλ. δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ μῆκος ΟΜ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ μῆκος αὐτὸ ἴσον μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν (1 ἑκ., 1 παλ., 1 μέτρ.), μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὑπολογισμούς. Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΨ τῆς γωνίας Ο ἕνα μῆκος ΟΜ ἴσον μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΠ ἐπὶ τὴν ΟΧ, τότε κατὰ τοὺς ὁρισμούς, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 45, θὰ εἶναι

$$\eta\mu\omega = \frac{\Pi M}{OM} = \frac{\Pi M}{1} \quad \mathring{\eta} \quad \eta\mu\omega = \Pi M = OP$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{O\Pi}{OM} = \frac{O\Pi}{1} \quad \mathring{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = O\Pi$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ***ἡμίτονον*** καὶ ***συνημίτονον*** μιᾶς ὀξείας γωνίας ω ἢ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΑΜ, παρίστανται μὲ ***μήκη εὐθυγράμμων τμημάτων,*** ὅταν τὸ μῆκος ΟΜ ληφθῇ ὡς μονάς.



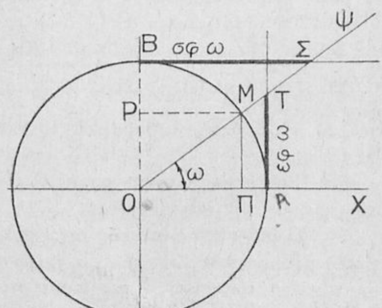
Σχ. 34.

Ἐπίσης ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας δύνανται νὰ παρασταθοῦν ***μὲ μήκη εὐθυγράμμων τμημάτων.*** Πράγματι, μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας ΧΟΨ (Σχ. 35) καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα μήκους γράφομεν μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΟΧ καὶ ΟΨ τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Μ ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΠ ἐπὶ τὴν ΟΧ καὶ ἀπὸ τὸ Α τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΨ εἰς τὸ σημεῖον Τ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΑΤ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω κοινήν. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi M}{O\Pi} = \frac{AT}{OA} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\frac{\Pi M}{O\Pi} = \varepsilon\varphi\omega$ καὶ $OA = OM = 1$ ἡ (1) γράφεται

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AT}{1} \quad \mathring{\eta} \quad \varepsilon\varphi\omega = AT$$



Σχ. 35.

Ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὀξείας γωνίας ω παρίσταται μὲ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΤ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν συνεφαπτομένην τῆς ὀξείας γωνίας ω καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αὕτη παρίσταται μὲ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΣ.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὰς § 34, 38, 39.

48. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν. Ἔστω τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 36). Κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ ἔχομεν:

$$\text{ημ}\,B=\frac{\beta}{\alpha},\quad \text{συν}\,B=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \text{εφ}\,B=\frac{\beta}{\gamma},\quad \text{σφ}\,B=\frac{\gamma}{\beta}$$

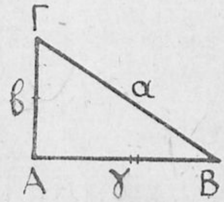
$$\text{ημ}\,\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \text{συν}\,\Gamma=\frac{\beta}{\alpha},\quad \text{εφ}\,\Gamma=\frac{\gamma}{\beta},\quad \text{σφ}\,\Gamma=\frac{\beta}{\gamma}$$

Παρατηροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι

$$\text{ημ}B=\text{συν}\Gamma,\quad \text{συν}B=\text{ημ}\Gamma,\quad \text{εφ}B=\text{σφ}\Gamma,\quad \text{σφ}B=\text{εφ}\Gamma \qquad (1)$$

Ἂν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψει τὰς ἰσότητας (1) καὶ ὅτι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συμπληρωματικαί, συνάγομεν ὅτι:

Ὅταν δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης γωνίας καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς εἶναι ἴση μὲ τὴν συνεφαπτομένην τῆς ἄλλης.



Σχ. 36.

Γενικῶς: Ἔστω ω τὸ μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας εἰς μοίρας. Τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς της θὰ εἶναι $90^\circ-\omega$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{ημ}(90^\circ-\omega)=\text{συν}\omega, & \text{εφ}(90^\circ-\omega)=\text{σφ}\omega \\ \text{συν}(90^\circ-\omega)=\text{ημ}\omega, & \text{σφ}(90^\circ-\omega)=\text{εφ}\omega \end{array}}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν γνωρίζωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0° μέχρι 45° δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν ἀπὸ 45° μέχρι 90°.

Π. χ. $\text{ημ}75^\circ=\text{συν}15^\circ$, διότι $75^\circ+15^\circ=90^\circ$
$\text{συν}60^\circ=\text{ημ}30^\circ$, » $60^\circ+30^\circ=90^\circ$
$\text{εφ}56^\circ=\text{σφ}34^\circ$, » $56^\circ+34^\circ=90^\circ$
$\text{σφ}80^\circ=\text{εφ}10^\circ$, » $80^\circ+10^\circ=90^\circ$

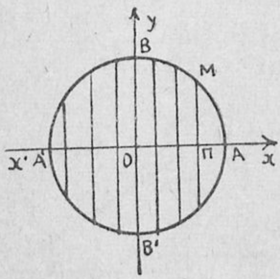
Ἀσκήσεις. 58. Ἂν εἶναι $\text{ημ}A=0{,}643$ καὶ $\text{συν}A=0{,}766$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας τῆς Α.

59. Ἂν εἶναι ημω$=\frac{12}{17}$ καὶ συνω$=\frac{5}{17}$ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας (90^0—ω).

60. Εἰς ἕνα ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : ημΒ$=\frac{40}{41}$ καὶ συνΒ$=\frac{9}{41}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας Γ.

4. Μεταβολαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν καὶ γραφικὴ παράστασις αὐτῶν

49. Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου. Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο καὶ $\overset{\frown}{AM}$ ἕνα τόξον τῆς περιφερείας του. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ, τέλος τοῦ τόξου ΑΜ, ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, ἀρχὴν τῶν τόξων, κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο, κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ ὅτι ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον Α



Σχ. 37.

Τὸ σημεῖον Μ, κατὰ τὴν κίνησίν του αὐτήν, γράφει ἕνα τόξον $\overset{\frown}{AM}$, τὸ ὁποῖον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0 (0 μέχρι 2π). Ἂς ἴδωμεν τώρα πῶς μεταβάλλεται τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM}$ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ τετμημένη τοῦ Μ, δηλ. τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, εἶναι ἴση μὲ $\overline{OA}=+1$. Θὰ εἶναι λοιπὸν συν$0^0=+1$.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὸ Β, τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM}$ αὐξάνει (↗) ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0 (0 ἕως $\frac{\pi}{2}$)· τότε τὸ σημεῖον Π κινεῖται ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Ο καὶ ἑπομένως τὸ συνημίτονόν του $\overline{O\Pi}$ εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦται (↘) ἀπὸ 1 ἕως 0. Θὰ εἶναι λοιπὸν συν$90^0=0$.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α′ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ 90^0 μέχρι 180^0· τότε τὸ σημεῖον Π μετατίθεται ἀπὸ τὸ Ο πρὸς τὸ Α′ καὶ ἑπομένως τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 ἕως —1. Θὰ εἶναι λοιπὸν συν$180^0=-1$.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἀπὸ τὸ Α′ πρὸς τὸ Β′, τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM}$

αὐξάνει ἀπὸ 180^0 ἕως 270^0· τότε τὸ σημεῖον Π μετατίθεται ἀπὸ τὸ Α΄ πρὸς τὸ Ο καὶ ἑπομένως τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ αὐξάνει ἀπὸ -1 ἕως 0. Θὰ εἶναι λοιπὸν συν$270^0=0$.

Τέλος, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἀπὸ τὸ Β΄ πρὸς τὸ Α, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ 270^0 ἕως 360^0· τότε τὸ σημεῖον Π μετατίθεται ἀπὸ τὸ Ο πρὸς τὸ Α καὶ ἑπομένως τὸ συνημίτονόν του αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως $+1$. Θὰ εἶναι λοιπὸν συν$360^0=+1=$συν0^0.

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει συνοπτικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτὴν

Τόξον x εἰς μοίρας	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗	360^0
Τόξον x εἰς ἀκτίνια	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
συνx	$+1$ *Μεγ.*	↘	0	↘	-1 *Ἐλαχ.*	↗	0	↗	$+1$ *Μεγ.*

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου συνάγομεν :

1ον. Ὅτι τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου περιλαμβάνεται σταθερῶς μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

2ον. Ὅτι ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ συνημίτονον εἶναι $+1$ καὶ ἡ ἐλαχίστη -1. Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{-1 \leqslant \text{συν}x + \leqslant 1}$$

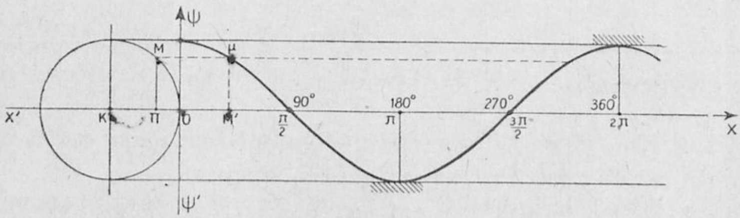
50. Συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν, ὅτι ὑπάρχουν δύο μεταβληταὶ ποσότητες, τὸ τόξον καὶ τὸ συνημίτονόν του, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς κάθε τιμὴν τοῦ τόξου νὰ ἀντιστοιχῇ πάντοτε μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ συνημιτόνου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ συνημίτονον εἶναι ***συνάρτησις*** τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ἀνεξάρτητον μεταβλητήν.*** Γενικῶς, λέγομεν ὅτι :

Μία μεταβλητὴ ποσότης εἶναι συνάρτησις μιᾶς ἄλλης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν εἰς κάθε τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ πάντοτε μία ὡρισμένη τιμὴ τῆς πρώτης μεταβλητῆς.

51. Περιοδικαὶ συναρτήσεις. Ἐὰν συνεχίσωμεν τὸν πίνακα τῆς παραγράφου 49 καὶ δώσωμεν εἰς τὸ τόξον τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ 360^0 μέχρι 2.360^0 (2π μέχρι 4π), θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ συνημίτονον λαμβάνει καὶ εἰς τὸ διάστημα (360°, 2.360°) τὰς αὐτὰς τιμάς, ποὺ ἔλαβε καὶ εἰς τὸ διάστημα (0°, 360°). Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν λέγομεν, ὅτι τὸ συνημίτονον εἶναι μία ***περιοδικὴ συνάρτησις*** τοῦ τόξου, καὶ ὅτι ἡ ***περίοδος*** τοῦ συνημιτόνου εἶναι ὁ ἀριθμὸς 360°, (2π). Δηλ. θὰ εἶναι πάντοτε: ημx=ημ(x+2kπ).

Γενικῶς λέγομεν, ὅτι: ***Μία συνάρτησις σ(x) εἶναι περιοδικὴ καὶ ἔχει ὡς περίοδον ἕνα ἀριθμὸν ω, ἐὰν αὕτη διατηρῇ τὴν αὐτὴν τιμήν, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x αὐξηθῇ κατὰ μίαν ὡρισμένην ποσότητα ω, ἢ κατὰ ἕνα οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τῆς ω.***

52. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου. Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου, ἂν θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου καὶ ὡς



Σχ. 38.

τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ συνημιτόνου. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x′Ox καὶ ψ′Oψ, οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον O. Ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Ox′ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον O λαμβάνομεν ἕνα μῆκος OK ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους· μὲ κέντρον τὸ K καὶ ἀκτῖνα τὴν KO γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος ψ′Oψ εἰς τὸ σημεῖον O.

Ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Ox καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον O λαμβάνομεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας K.

Ἔπειτα ὁρίζομεν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, διάφορα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου καὶ τεταγμένας τὰς τιμὰς τοῦ ἀντιστοίχου συνημιτόνου.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν σημείων αὐτῶν ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

Ἔστω ἕνα τόξον OM καὶ KΠ τὸ συνημίτονόν του· ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Ox λαμβάνομεν ἕνα μῆκος OM′ ἴσον μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου

ΟΜ· ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ′ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα x′Ox καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα Μ′μ ἴσον κατ᾽ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον μὲ τὸ συνημίτονον $\overline{ΚΠ}$ τοῦ τόξου ΟΜ. Οὕτω ὁρίζομεν ἕνα σημεῖον μ τοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ μὲ ἄλλα τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0, ὁρίζομεν σειρὰν σημείων. Ἐὰν ἑνώσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα αὐτά, λαμβάνομεν μίαν καμπύλην, ἡ ὁποία παριστάνει τὰς μεταβολὰς τοῦ συνημιτόνου.

Ἡ καμπύλη αὐτὴ λέγεται ***συνημιτονοειδὴς καμπύλη.***

Ἡ συνημιτονοειδὴς καμπύλη ἐπεκτείνεται καὶ κατὰ τὰς δύο φορὰς τοῦ ἄξονος x′Ox καὶ τέμνει αὐτὸν εἰς ἄπειρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο.

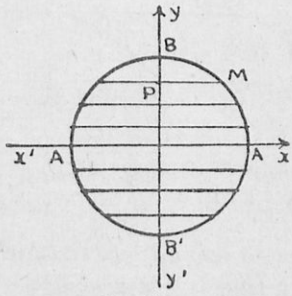
Ἡ συνημιτονοειδὴς καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τεταγμένων.

Ἀσκήσεις. 61. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y = 1 + συνx$, ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ -2π ἕως $+2\pi$
2. $y = -συν^2x + 4συνx$ » » » » » 0 » $+2\pi$
3. $y = \dfrac{-συνx+2}{2συνx-1}$ » » » » » $-\pi$ » π

53. Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0 (0 μέχρι 2π) ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰργάσθημεν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου.



Σχ. 39.

Τόξον x εἰς μοίρας	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗	360^0
Τόξον x εἰς ἀκτίνια	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
ημx	0	↗	1 *Μέγ.*	↘	0	↘	-1 *Ἐλάχ.*	↗	0

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου συνάγομεν:

1ον. Ὅτι τὸ ἡμίτονον περιλαμβάνεται σταθερῶς μεταξὺ —1 καὶ +1.

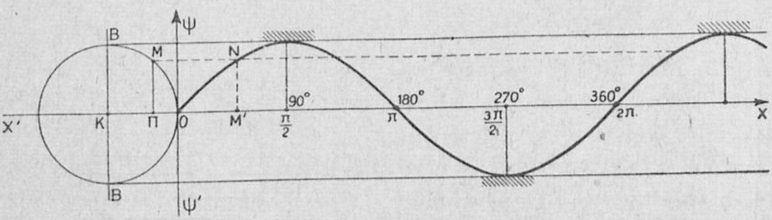
2ον. Ὅτι ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ ἡμίτονον εἶναι +1 καὶ ἡ ἐλαχίστη —1. Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{-1 \leqslant \eta\mu x \leqslant +1}$$

Περιοδικότης τοῦ ἡμιτόνου. Ἐὰν συνεχίσωμεν τὸν πίνακα τῆς § 53 καὶ δώσωμεν εἰς τὸ τόξον x τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ 2π καὶ 2.2π, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὸ ἡμίτονον λαμβάνει καὶ εἰς τὸ διάστημα (2π, 4π) τὰς αὐτὰς τιμάς, τὰς ὁποίας ἔλαβε καὶ εἰς τὸ διάστημα (0, 2π)· Ὥστε τὸ ἡμίτονον εἶναι ***περιοδικὴ συνάρτησις*** τοῦ τόξου καὶ ἡ περίοδος εἶναι 2π.

Γραφικὴ παράστασις τοῦ ἡμιτόνου. Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου, ἂν θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου ἀπὸ 0 ἕως 360° (0 ἕως 2π) καὶ ὡς τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν § 52, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς συνημιτονοειδοῦς καμπύλης, κατασκευάζομεν μίαν καμπύλην (Σχ. 40)



Σχ. 40.

ἡ ὁποία παριστᾷ γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου. Ἡ καμπύλη αὐτὴ λέγεται ***ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.***

Ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη ἐπεκτείνεται καὶ κατὰ τὰς δύο φορὰς τοῦ ἄξονος x΄Ox καὶ τέμνει αὐτὸν εἰς ἄπειρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ O.

Ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τεταγμένων.

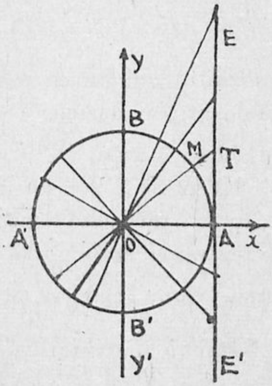
Ἀσκήσεις. 62. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y=\eta\mu^2 x-1$ ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ —π ἕως π
2. $y=2\eta\mu^2 x+\eta\mu x$ » » » » » 0 ἕως +2π
2. $y=\dfrac{3\eta\mu x}{\eta\mu x-2}$ » » » » » $-\dfrac{\pi}{2}$ ἕως $\dfrac{3\pi}{2}$

54. Μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης. Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο, (Σχ. 41) $\widehat{AM}=x$ ἕνα τόξον τῆς περιφερείας του καὶ Ε΄ΑΕ ὁ ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ, τέλος τοῦ τόξου ΑΜ, ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων, κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον Α.

Τὸ σημεῖον Μ κατὰ τὴν κίνησίν του αὐτὴν γράφει ἕνα τόξον $\widehat{AM}=x$, τὸ ὁποῖον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 (0 ἕως 2π).



Σχ. 41.

Ἂς ἴδωμεν τώρα πῶς μεταβάλλεται ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{AM}$, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ προέκτασις τῆς ἀκτῖνος ΟΜ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου εἶναι μηδέν. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\text{εφ}0^0=0$.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὸ Β, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0 $\left(0 \text{ ἕως } \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ τὸ σημεῖον Τ, σημεῖον τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος ΟΜ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων, μετατίθεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, συνεχῶς ἀπομακρυνόμενον ἀπὸ τὸ Α· ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη $\overline{AT}$ τοῦ τόξου βαίνει συνεχῶς αὐξανομένη.

Ὅταν τὸ Μ πλησιάζῃ πρὸς τὸ Β, ἡ ἐφαπτομένη $\overline{AT}$ αὐξάνει ταχύτατα καὶ τείνει νὰ ὑπερβῇ κάθε ἀριθμόν.

Ὅταν τὸ Μ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, δηλ. ὅταν τὸ τόξον γίνῃ 90^0, $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ἡ προέκτασις τῆς ἀκτῖνος ΟΜ δὲν συναντᾷ τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, διότι εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὸν καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη του, μένουσα θετική, ὑπερβαίνει κάθε θετικὸν ἀριθμόν, δηλ. τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$).

Ὅταν τὸ Μ ἀπομακρυνθῇ κατ᾽ ἐλάχιστον ἀπὸ τὸ Β, δηλ. ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ γίνῃ $90^0+\varepsilon$, ὅπου ε εἶναι ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸ Τ ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΑΕ′ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν πολὺ μεγάλην κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν. Ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου μεταπηδᾷ ἀπὸ τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$) εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι, ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι 90^0, ἡ ἐφαπτομένη του εἶναι ***ἀσυνεχής***.

Ὅταν τὸ Μ κινῆται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β πρὸς τὸ Α′, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0, $\left(\frac{\pi}{2} \text{ ἕως } \pi\right)$ καὶ τὸ σημεῖον Τ πλησιάζει πρὸς τὸ Α καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη του $\overline{AT}$ αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$) μέχρι τοῦ μηδενός, τὴν ὁποίαν τιμὴν λαμβάνει, ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι 180^0, (π).

Ὅταν τὸ Μ κινῆται ἀπὸ τὸ Α′ πρὸς τὸ Β′, τὸ σημεῖον Τ κινεῖται πάλιν ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΑΕ, συνεχῶς ἀπομακρυνόμενον ἀπὸ τὸ Α. Ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη του αὐξάνει ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὴν ὁποίαν τιμὴν λαμβάνει, ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι 270^0, $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Ὅταν τὸ Μ κινῆται ἀπὸ τὸ Β′ πρὸς τὸ Α, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0, $\left(\frac{3\pi}{2} \text{ ἕως } 2\pi\right)$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη του μεταπηδᾷ καὶ πάλιν ἀπὸ τὸ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ βαίνει συνεχῶς αὐξανομένη ἀπὸ τὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὴν ὁποίαν τιμὴν λαμβάνει, ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι 360^0, (2π).

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 ἢ ἀπὸ 0 ἕως 2π ἀκτίνια:

Τόξον x εἰς μοίρας	0^0	$\nearrow$	90^0		$\nearrow$	180^0	$\nearrow$	270^0		$\nearrow$	360^0
Τόξον x εἰς ἀκτίνια	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$		$\nearrow$	2π
εφx	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	0

Παρατήρησις I. Ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν ἀπὸ $-\infty$ μέχρι ~~τὸ~~ $+\infty$.

Παρατήρησις II. Ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῆς σπουδῆς τῶν μεταβολῶν τοῦ λόγου $\frac{\text{ημx}}{\text{συνx}}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὴν εφx.

Πράγματι· ἐὰν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0, τὸ ἡμίτονον εἶναι θετικὸν καὶ αὐξάνει ἀπὸ 0 μέχρι 1, τὸ συνημίτονον εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 μέχρι 0. Ἑπομένως ὁ λόγος $\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}$, δηλαδὴ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου εἶναι θετικὴ καὶ αὐξάνει ἀπὸ

$$\frac{0}{1}=0 \quad \text{ἕως} \quad \frac{1}{0}=+\infty .$$

Ἐὰν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0, τὸ ἡμίτονον εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 ἕως 0, τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 ἕως -1· ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}$, δηλ. τῆς ἐφαπτομένης, ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{1}{0}=\infty$ ἕως $\frac{0}{1}=0$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἀρνητική· ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0. Παρατηροῦμεν ἐδῶ, ὅτι, ὅταν τὸ τόξον περάσῃ ἀπὸ τὴν τιμὴν 90^0, ἡ ἐφαπτομένη δὲν ὑπάρχει· ἀλλὰ ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ τόξον τιμὰς πολὺ γειτονικὰς τῶν 90^0, δηλ. ἐὰν τὸ τόξον εἶναι $90^0-\varepsilon$ ἢ καὶ $90^0+\varepsilon$, ὅπου ε εἶναι ἐλάχιστος ἀριθμός, ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει τιμὰς πολὺ μεγάλας κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ἑτεροσήμους. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἀσυνεχής, ὅταν τὸ τόξον εἶναι 90^0.

Ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 180^0 ἕως 360^0, ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει τὰς αὐτὰς τιμάς, ποὺ ἔχει ἡ ἐφαπτομένη, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0.

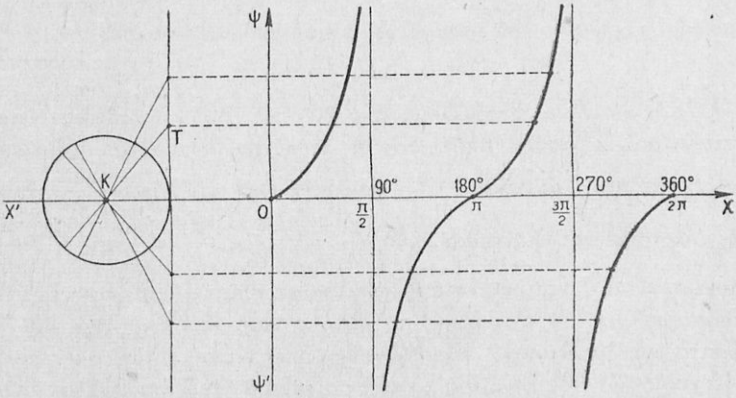
Περιοδικότης τῆς ἐφαπτομένης. Ἀπὸ τὸν πίνακα τῆς § 54 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ ἐφαπτομένη, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $(\pi, 2\pi)$, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τιμάς, ποὺ λαμβάνει ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ διάστημα $(0, \pi)$. Ἡ ἐφαπτομένη λοιπὸν ἑνὸς τόξου δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν εἰς τὸ τόξον, ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον ἡμιπεριφερείας. Ὥστε ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μία ***περιοδικὴ συνάρτησις*** τοῦ τόξου καὶ ἡ περίοδός της εἶναι π.

Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης. Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν πρῶτον ἕνα τριγωνομετρικὸν κύκλον Κ καὶ φέρομεν τὸν ἄξονα Ε΄ΑΕ τῶν ἐφαπτομένων.

Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων τυχὸν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ συνημιτόνου, ὡς πρὸς ἄξονας τοὺς x΄Ox καὶ ψ΄Οψ.

Ἔπειτα ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων x΄Ox καὶ ψ΄Oψ διάφορα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου καὶ τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ἐφαπτομένων. Τὰ σημεῖα αὐτὰ



Σχ. 42.

ὁρίζονται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον, ποὺ ἐξεθέσαμεν εἰς τὴν § 52.

Ἐὰν ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ συνεχῆ γραμμήν, λαμβάνομεν μίαν ***ἀσυνεχῆ καμπύλην,*** ἡ ὁποία παριστάνει γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

Ἀσκήσεις. 63. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y=1-\varepsilon\varphi x$, ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\pi$ ἕως π.
2. $y=2\varepsilon\varphi^2 x+1$ » » » » » 0 » 2π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΤΟΞΟΥ

1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

55. Μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ὑπάρχουν οἱ κάτωθι θεμελιώδεις τύποι, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν εἰς τὰς § 36, 38 καὶ 39 :

$$\text{συν}^2\omega+\text{ημ}^2\omega=1\ ,\quad \text{εφ}\omega=\frac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}\ ,\quad \text{σφ}\omega=\frac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$$

Μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν τῶν τύπων δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ἑπομένως νὰ ὑπολογίσωμεν ὅλους τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας, ἂν γνωρίζωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν.

Τὰ κάτωθι προβλήματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς ἐργασίας αὐτῆς.

56. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ω, συναρτήσει τοῦ ημω.***

1ον. Ἀπὸ τὸν τύπον $\text{συν}^2\omega+\text{ημ}^2\omega=1$ λαμβάνομεν

$$\text{συν}^2\omega=1-\text{ημ}^2\omega \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{συν}\omega=\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\omega}} \qquad (1)$$

2ον. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους $\text{εφ}\omega=\frac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}$ καὶ $\text{σφ}\omega=\frac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ συνω τὸ ἴσον του $\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\omega}$ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\text{εφ}\omega=\frac{\text{ημ}\omega}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\omega}}} \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\text{σφ}\omega=\frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\omega}}{\text{ημ}\omega}} \quad (3)$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν $\text{ημ}\omega=\frac{1}{2}=0{,}5$, *νὰ ὑπολογισθοῦν : τὸ συνω, ἡ εφω, καὶ ἡ σφω.*

Εἰς τοὺς τύπους (1), (2), (3) θέτομεν ἀντὶ τοῦ ημω τὴν τιμήν του $\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν

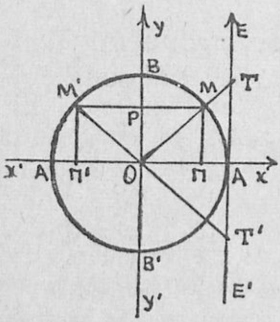
$$συνω=\pm\sqrt{1-ημ^2ω}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{1,73}{2}=\pm0,866......$$

$$εφω=\frac{ημω}{\pm\sqrt{1-ημ^2ω}}=\frac{0,5}{\pm0,866}=\pm0,577....$$

$$σφω=\frac{\pm\sqrt{1-ημ^2ω}}{ημω}=\frac{\pm0,866}{0,5}=\pm1,73......$$

'Εξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$. Οἱ τύποι (1), (2), (3) δίδουν δύο τιμὰς διὰ τὸ συνω, δύο τιμὰς διὰ τὴν εφω καὶ δύο τιμὰς διὰ τὴν σφω.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ δύναται νὰ ἐξηγηθῇ ὡς ἑξῆς:



Σχ. 43.

Εἰς τὴν ἐφαρμογὴν ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$, ὡς τιμὴ ἑνὸς ἡμιτόνου, δηλ. ἐδόθη ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{OP}=\frac{1}{2}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ (Σχ. 43). 'Αλλὰ εἰς τὴν τιμὴν $\overline{OP}=\frac{1}{2}$ ἀντιστοιχοῦν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Μ ἢ εἰς τὸ Μ', ὅπου Μ καὶ Μ' εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς παραλλήλου ΜΡΜ' πρὸς τὸν ἄξονα x'x, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ρ. Τὰ τόξα, ποὺ ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ, ἔχουν θετικὸν συνημίτονον $\overline{ΟΠ}$ καὶ θετικὴν ἐφαπτομένην $\overline{AT}$, ἐνῶ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουν εἰς τὸ Μ', ἔχουν ἀρνητικὸν συνημίτονον $\overline{ΟΠ'}$ καὶ ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην $\overline{AT'}$.

Ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $ημω=\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν δύο ἀντιθέτους τιμὰς διὰ τὸ συνημίτονον καὶ δύο ἀντιθέτους τιμὰς διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

'Εὰν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $\frac{1}{2}$ τοῦ ἡμιτόνου, ***δίδεται καὶ τὸ τεταρτημόριον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον,*** τότε θὰ ἀντιστοιχῇ μία μόνον ὡρισμένη τιμὴ διὰ τὸ συνημίτονον καὶ μία μόνον τιμὴ διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Πράγματι· ἐὰν τὸ τόξον ω λήγῃ εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, τὸ συνημίτονόν του καὶ ἡ ἐφαπτομένη του θὰ εἶναι θετικὰ καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον $+$ ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐφαρμογήν, ἐὰν τὸ τόξον ω ἔληγεν εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον καὶ ἦτο ημω=0,5, θὰ ἦτο

$$συνω=-0,866, \quad εφω=-0,577 \quad \text{καὶ} \quad σφω=-1,73$$

Ἀσκήσεις. 64. Δίδεται ημ$x=\frac{3}{4}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου x, ἂν τοῦτο λήγῃ εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.

65. Ἐὰν 4ημx=1, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ συνx καὶ ἡ εφx. Τὸ τόξον x λήγει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.

57. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ω, συναρτήσει τοῦ συνω.***

1ον. Ἀπὸ τὸν τύπον συν²ω+ημ²ω=1 λαμβάνομεν

$$\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\eta\mu\omega=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}} \quad (1)$$

2ον. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ καὶ $\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ ημω τὸ ἴσον του $\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega=\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega}} \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}}} \quad (3)$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{2}{5}=0,4$, *νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου ω.*

Εἰς τοὺς τύπους (1), (2), (3) θέτομεν ἀντὶ τοῦ συνω τὴν τιμήν του $\frac{2}{5}$ καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu\omega=\pm\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\pm\sqrt{\frac{21}{25}}=\pm\frac{\sqrt{21}}{5}=\pm\frac{4,582}{5}=\pm0,916.$$

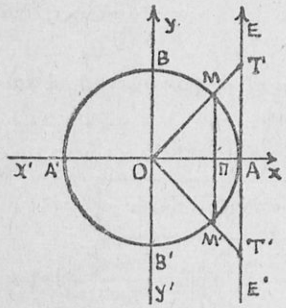
$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\pm0,916}{0,4}=\pm2,29.$$

$$\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}=\frac{0,4}{\pm0,916}=\pm0,436.$$

Ἐξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου ±. Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν πάλιν δύο τιμὰς διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ δύο τιμὰς διὰ τὴν ἐφαπτομένην. Ἡ ἐξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου γίνεται, ὅπως ἔγινε καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον.

Πράγματι· εἰς τὸ πρόβλημα ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}$ ὡς τιμὴ ἑνὸς συνημιτόνου, δηλ. ἐδόθη ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{O\Pi}=\frac{2}{5}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O\Pi}$. (Σχ. 44) Ἀλλὰ εἰς τὴν τιμὴν $\overline{O\Pi}=\frac{2}{5}$ τοῦ συνημιτόνου ἀντιστοιχοῦν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον

Μ ἢ Μ′. Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ ἔχουν θετικὸν ἡμίτονον τὸ $\overline{ΠΜ}$ καὶ θετικὴν ἐφαπτομένην $\overline{ΑΤ}$, ἐνῶ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ′ ἔχουν ἀρνητικὸν ἡμίτονον $\overline{ΠΜ'}$ καὶ ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην $\overline{ΑΤ'}$.



Σχ. 44.

Ὥστε εἰς τὴν τιμὴν συνω$=\frac{2}{5}$ εὑρίσκομεν δύο ἀντιθέτους τιμὰς διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ δύο διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Ἐὰν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $\frac{2}{5}$ τοῦ συνημιτόνου, ***δίδεται καὶ τὸ τεταρτημόριον*** εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον, τότε θὰ ἀντιστοιχῇ μία μόνον ὡρισμένη τιμὴ διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ μία διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Πράγματι· ἐὰν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον, τὸ ἡμίτονόν του καὶ ἡ ἐφαπτομένη του θὰ εἶναι θετικὰ καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον $+$ ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ.

Ἀσκήσεις. 66. Δίδεται συνx$=-\frac{3}{4}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου x, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τόξον λήγει εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον.

67. Ἐὰν 5συνx+6=8συνx+7, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημx καὶ ἡ εφx. Τὸ τόξον x λήγει εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον.

58. Πρόβλημα 3ον. *Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ω συναρτήσει τῆς εφω.*

1ον. Γνωρίζομεν, ὅτι

$$\frac{ημω}{συνω}=εφω \quad (1) \qquad καὶ \quad συν^2ω+ημ^2ω=1 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν $\qquad ημω=συνω.εφω \qquad (1')$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ ημω μὲ τὸ ἴσον του, ποὺ δίδει ἡ (1′) καὶ ἔχομεν

$$συν^2ω+συν^2ω.εφ^2ω=1 \quad ἢ \quad συν^2ω(1+εφ^2ω)=1$$

$$ἢ \quad συν^2ω=\frac{1}{1+εφ^2ω} \quad ἢ \quad συνω=\pm\sqrt{\frac{1}{1+εφ^2ω}}$$

ἄρα
$$\boxed{συνω=\frac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2ω}}}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1′) τὸ συνω μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\text{ημω}=\frac{\text{εφω}}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{ω}}}}$$

2ον. Ἐπειδὴ ἡ σφω εἶναι ἀντίστροφος τῆς εφω, θὰ εἶναι

$$\boxed{\text{σφω}=\frac{1}{\text{εφω}}}$$

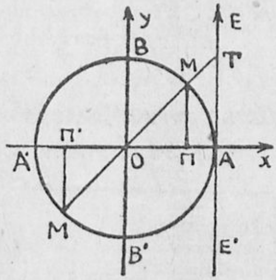
Ἐφαρμογή. Ἐὰν εφω=2 νὰ ὑπολογισθοῦν: τὸ ημω, τὸ συνω καὶ ἡ σφω.

$$\text{ημω}=\frac{\text{εφω}}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{ω}}}=\frac{2}{\pm\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\pm\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}=\pm\frac{2\times 2{,}236}{5}=\pm 0{,}8944.$$

$$\text{συνω}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{ω}}}=\frac{1}{\pm\sqrt{5}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{5}=\pm\frac{2{,}236}{5}=\pm 0{,}447.$$

$$\text{σφω}=\frac{1}{\text{εφω}}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ἐξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου ±. Ἡ ἐξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου ± εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἐδώσαμεν εἰς τὰς § 56 καὶ 57. Πράγματι· εἰς τὸ πρόβλημα ἐδόθη ὁ ἀριθμὸς 2, ὡς τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου ω, δηλ. ἐδόθη ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{\text{AT}}=2$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\text{AT}}$· ἀλλ᾽ εἰς τιμὴν $\overline{\text{AT}}=2$ τῆς ἐφαπτομένης, ἀντιστοιχοῦν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον Μ ἢ Μ′.



Σχ. 45.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ ἔχουν θετικὸν συνημίτονον $\overline{\text{OΠ}}$ καὶ θετικὸν ἡμίτονον $\overline{\text{ΠM}}$· τὰ δὲ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ′ ἔχουν ἀρνητικὸν συνημίτονον $\overline{\text{OΠ}'}$ καὶ ἀρνητικὸν ἡμίτονον $\overline{\text{Π}'\text{M}'}$.

Ἐὰν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐκτὸς τῆς τιμῆς 2 τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου, δίδεται καὶ τὸ τεταρτημόριον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον, τότε θὰ ἀντιστοιχῇ μία μόνον ὡρισμένη τιμὴ διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ μία διὰ τὸ συνημίτονον.

Πράγματι· ἐὰν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον, τὸ ἡμίτονον του θὰ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον — ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ· ἐπίσης τὸ συνημίτονόν του θὰ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον — ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ.

59. Γενικὸν συμπέρασμα. Ὅταν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς τόξου συναρτήσει τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, πρέπει νὰ δίδεται ὄχι μόνον ἡ τιμὴ τοῦ γνωστοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ καὶ τὸ τεταρτημόριον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον.

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* **68.** Ἐὰν $εφx=-2$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημx καὶ συνx. Τὸ τόξον x λήγει εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον.

69. Νὰ ὑπολογισθῇ: 2ημx συνx συναρτήσει τῆς εφx.

70. Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου συναρτήσει τῆς σφω.

Β' Ὁμάς. **71.** Δίδεται: $εφx=\frac{\sqrt{β}}{\sqrt{α}}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\frac{1}{συνx}$, ἂν τὸ τόξον x λήγῃ εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον.

72. Νὰ ὑπολογισθῇ: $συν^2x-ημ^2x$ συναρτήσει τῆς εφx.

73. Ἐὰν $συνx=\frac{5}{13}$ νὰ ὑπολογισθῇ: $\frac{2-3σφx}{4-9\sqrt{τεμ^2x-1}}$.

74. Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς $εφx=λ$, ἡ παράστασις

$$ημ^8x+συν^8x+6ημ^4x.συν^4x+4ημ^2x.συν^2x(ημ^4x+συν^4x)$$

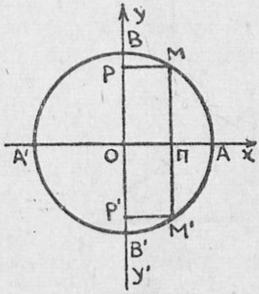
Πίναξ συνοψίζων τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ	Συναρτήσει τοῦ:			
	ημω	συνω	εφω	σφω
ημω	ημω	$\pm\sqrt{1-συν^2ω}$	$\frac{εφω}{\pm\sqrt{1+εφ^2ω}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2ω}}$
συνω	$\pm\sqrt{1-ημ^2ω}$	συνω	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2ω}}$	$\frac{σφω}{\pm\sqrt{1+σφ^2ω}}$
εφω	$\frac{ημω}{\pm\sqrt{1-ημ^2ω}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-συν^2ω}}{συνω}$	εφω	$\frac{1}{σφω}$
σφω	$\frac{\pm\sqrt{1-ημ^2ω}}{ημω}$	$\frac{συνω}{\pm\sqrt{1-συν^2ω}}$	$\frac{1}{εφω}$	σφω

2. Ὑπολογισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μερικῶν τόξων

60. Θεώρημα. *Τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῶν 90⁰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου του τόξου.*

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο (Σχ. 46), Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, x′Ox ὁ ἄξων τῶν συνημιτόνων, καὶ ΑΜ ἕνα τόξον μικρότερον τῶν 90^0. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Μ′.



Σχ. 46.

Γνωρίζομεν, ὅτι ημ$\widehat{AM}=\overline{\Pi M}$. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν Μ′Μ, διχοτομεῖ αὐτὴν καὶ διχοτομεῖ καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον Μ′ΑΜ.

Ὥστε τὸ $\overline{\Pi M}$, δηλ. τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου $\widehat{AM}$, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς Μ′Μ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον Μ′ΑΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου $\widehat{AM}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῶν 90^0, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὴν ἰσότητα

$$\boxed{\text{ημ}\omega = \frac{1}{2}\ \text{χορδῆς τόξου } 2\omega}$$

61. Ἐφαρμογαί: Χρησιμοποιοῦντες τὸν ἀνωτέρω τύπον, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μερικῶν τόξων.

1ον. Ὑπολογισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 30^0 $\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Α′ τρόπος. Κατὰ τὸν τύπον τῆς § 60 θὰ ἔχωμεν

$$\text{ημ}30^0 = \frac{1}{2}\ \text{χορδῆς τόξου } 60^0 \qquad (1)$$

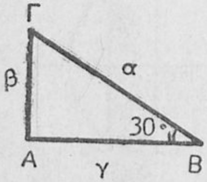
Ἀλλὰ ἡ ***χορδὴ τόξου 60⁰*** εἶναι ἡ ***πλευρὰ*** ἑνὸς ***κανονικοῦ ἑξαγώνου***, ($360^0 : 60^0 = 6$), ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου, δηλ., μὲ 1. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν χορδὴν τόξου 60^0 μὲ τὸ ἴσον του 1 καὶ εὑρίσκομεν

$$ημ30^0=\frac{1}{2}.1 \quad ἢ \quad ημ30^0=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Διὰ τὸ συν30⁰ ἔχομεν $συν30^0=\sqrt{1-ημ^2 30^0}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Διὰ τὴν εφ30⁰ ἔχομεν $εφ30^0=\frac{ημ30^0}{συν30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Β΄ τρόπος. Τὸ ημ30⁰ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:



Σχ. 47.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 47) εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι Β=30⁰.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας (§ 45) θὰ εἶναι

$$ημB=\frac{β}{α} \quad ἢ \quad ημ30^0=\frac{β}{α} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν, ὅτι ἡ κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας τῶν 30⁰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· δηλ. εἶναι $β=\frac{α}{2}$ ἢ $\frac{β}{α}=\frac{1}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\frac{β}{α}$ μὲ τὸ ἴσον του $\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν $ημ30^0=\frac{1}{2}.$

2ον. Ὑπολογισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 45⁰.

Α΄ τρόπος. Κατὰ τὸν τύπον τῆς § 60 θὰ εἶναι

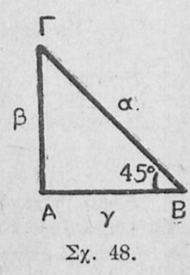
$$ημ45^0=\frac{1}{2}\ \text{χορδῆς τόξου } 90^0 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ χορδὴ τόξου 90⁰ εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου (360 : 90=4) ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $R\sqrt{2}$ ἢ $1\sqrt{2}$ ἢ $\sqrt{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν χορδὴν τόξου 90⁰ μὲ τὴν τιμήν της $\sqrt{2}$ καὶ ἔχομεν $ημ45^0=\frac{1}{2}.\sqrt{2}$ ἢ $ημ45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Διὰ τὸ συν45⁰ ἔχομεν $συν45^0=\sqrt{1-ημ^2 45^0}=\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Διὰ τὴν εφ45⁰ ἔχομεν $εφ45^0=\frac{ημ45^0}{συν45^0}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$



Σχ. 48.

Α΄ τρόπος. Τὸ ημ45⁰ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ὁπότε θὰ εἶναι β=γ καὶ Β=Γ=45⁰. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας (§ 45) θὰ εἶναι

$$ημB=\frac{β}{α} \quad ἢ \quad ημ45^0=\frac{β}{α} \qquad (1)$$

Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \beta^2+\beta^2=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad 2\beta^2=\alpha^2$$

$$\text{ἢ} \quad \beta^2=\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad \beta=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ β μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu 45^0=\frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3ον. Ὑπολογισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 60⁰.

Α' τρόπος. Κατὰ τὸν τύπον τῆς § 60 θὰ εἶναι

$$\eta\mu 60^0=\frac{1}{2} \text{ χορδῆς τόξου } 120^0. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ χορδὴ τόξου 120^0 εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου (360 : 120=3), ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $R\sqrt{3}$ ἢ $1\sqrt{3}$ ἢ $\sqrt{3}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν χορδὴν τόξου 120^0 μὲ τὴν τιμήν του $\sqrt{3}$ καὶ ἔχομεν: $\eta\mu 60^0=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ ἢ $\eta\mu 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Διὰ τὸ συν60^0 ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu 60^0=\sqrt{1-\eta\mu^2 60^0}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Διὰ τὴν εφ60^0 ἔχομεν: $\varepsilon\varphi 60^0=\dfrac{\eta\mu 60^0}{\sigma\upsilon\nu 60^0}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Β' τρόπος. Τὸ ημ60^0 δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{\Gamma}=60^0$, ὁπότε $\widehat{B}=30^0$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας § (45) θὰ εἶναι

$$\eta\mu\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu 60^0=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\widehat{B}=30^0$, θὰ εἶναι $\beta=\frac{\alpha}{2}$. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\gamma^2=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \gamma^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4} \quad \text{ἢ} \quad \gamma=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ γ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu 60^0=\frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* 75. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$A=\eta\mu 30^0+\eta\mu 45^0+\eta\mu 60^0 \quad , \quad \Gamma=\varepsilon\varphi 30^0+\varepsilon\varphi 45^0+\varepsilon\varphi 60^0$$
$$B=\sigma\upsilon\nu 30^0+\sigma\upsilon\nu 45^0+\sigma\upsilon\nu 60^0 \quad , \quad \Delta=\sigma\varphi 30^0+\sigma\varphi 45^0+\sigma\varphi 60^0.$$

76. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$A=\frac{\eta\mu^2 30^0+\eta\mu^2 45^0+\eta\mu^2 60^0}{\sigma\upsilon\nu^2 30^0+\sigma\upsilon\nu^2 45^0+\sigma\upsilon\nu^2 60^0}-\frac{\sigma\varphi^2 30^0+\sigma\varphi^2 45^0+\sigma\varphi^2 60^0}{\varepsilon\varphi^2 30^0+\varepsilon\varphi^2 45^0+\varepsilon\varphi^2 60^0}$$

77. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$A=\eta\mu^2\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}+\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{6} \qquad B=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}\,.\,\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{4}+\eta\mu^2\frac{\pi}{3}\,.\,\sigma\varphi^2\frac{\pi}{6}$$

Β' Ὁμάς. **78.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημ18^0 καὶ τὸ συν18^0, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

79. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημ36^0 καὶ τὸ συν36^0, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Πίναξ περιέχων τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων 30^0, 45^0, 60^0.

Μέτρον τόξου: Μοῖραι	Βαθμοί	Ἀκτίνια	Ἡμίτονον	Συνημίτονον	Ἐφαπτομένη	Συνεφαπτομένη
30^0	33,33	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}577$	$\sqrt{3}=1{,}732$
45^0	50	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707$	1	1
60^0	66,66	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866$	$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\sqrt{3}=1{,}732$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}577$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

1. Πίναξ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

62. Φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν § 60 δυνάμεθα, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς Γεωμετρίας, νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων μερικῶν τόξων καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Ὑπάρχουν μέθοδοι, τὰς ὁποίας δὲν θὰ ἀναπτύξωμεν ἐδῶ καὶ αἱ ὁποῖαι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίζωμεν, μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν, τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0. Τὰ ἐξαγόμενα τῶν μεθόδων αὐτῶν περιέχονται εἰς πίνακας. Οἱ πίνακες αὐτοὶ εἶναι δύο εἰδῶν:

Οἱ μὲν δίδουν αὐτὰς ταύτας τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τοῦτο λέγονται ***πίνακες τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.***

Οἱ δὲ ἄλλοι δίδουν τοὺς ***λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.***

Οἱ πρῶτοι πίνακες χρησιμοποιοῦνται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀπαιτοῦν μεγάλην ἀκρίβειαν.

Οἱ δεύτεροι εἶναι πληρέστεροι καὶ περισσότερον ἀκριβεῖς.

63. Περιγραφὴ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες ὑπὸ τὴν ἐπικεφαλίδα «Φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί»* περιέχουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0 καὶ ἀνὰ $30'$, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία. Ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ χρῆσις τῶν πινάκων αὐτῶν ἀναγράφεται εἰς ὅλους τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας καὶ δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν εἰς τὴν περιγραφὴν αὐτῶν.

Ἀντὶ τῶν πινάκων αὐτῶν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς κατωτέρω πίνακας, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

---

* Εἶναι ὁ πίναξ τῆς σελίδος 137 τοῦ βιβλίου «Νέοι πίνακες λογαρίθμων» ὑπὸ Π. Γ. Τόγκα.

ΗΜΙΤΟΝΟΝ

Μοῖραι	Πρῶτα λεπτὰ μοίρας 0	10	20	30	40	50	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03200	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	**85**
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21359	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	**75**
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27556	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32852	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	**65**
25	0,42263	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45139	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	**60**
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52982	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	**55**
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68199	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	**45**
45	0,70711						44
	60	50	40	30	20	10 Πρῶτα λεπτὰ μοίρας	Μοῖραι

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

Πρῶτα λεπτὰ μοίρας

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99995	0,99992	0,99988	89
1	0,99984	0,99980	0,99973	0,99965	0,99958	0,99950	88
2	0,99940	0,99928	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	87
3	0,99863	0,99848	0,99831	0,99814	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99735	0,99714	0,99692	0,99669	0,99644	85
5	0,99618	0,99594	0,99567	0,99539	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99389	0,99357	0,99324	0,99289	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98429	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97629	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97099	76
14	0,97029	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94921	0,94832	0,94739	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91589	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78979	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75279	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74119	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711						44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι

Πρῶτα λεπτὰ μοίρας

ΗΜΙΤΟΝΟΝ

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Μοῖραι	Πρῶτα λεπτὰ μοίρας 0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02338	0,02620	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04085	0,04366	0,04658	0,04950	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	**85**
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	**75**
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28989	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31520	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33459	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35739	0,36068	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	**65**
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	**55**
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73099	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,74355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78125	0,78598	0,79060	0,79544	0,80019	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92169	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97699	0,98260	0,98843	0,99419	**45**
45	1,00000						44
	60′	50′	40	30	20	10	Μοῖραι
				Πρῶτα λεπτὰ μοίρας			

ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Μοῖραι	Πρῶτα λεπτὰ μοίρας 0′	10′	20	30	40	50′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	88
2	28,63225	26,43160	24,54176	22,90377	21,47060	20,20655	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	**85**
5	11,43005	11,05943	10.71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22666	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	76
14	4.01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	**75**
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	74
16	3,48741	3,45951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30524	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58361	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	66
24	2.24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	**65**
25	2,14451	2,12832	2,11232	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47280	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	**55**
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	**45**
45	1,00000						44
	60′	50′	40′	30′	20	10 Πρῶτα λεπτὰ μοίρας	Μοῖραι

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

τῶν γωνιῶν ἢ τῶν τόξων μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν, μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία καὶ αἱ γωνίαι προχωροῦν ἀνὰ 10′ τῆς μοίρας.

Οἱ πίνακες αὐτοὶ ἔχουν ὡς ἐπικεφαλίδα ἄνω τὰς λέξεις: ***Ἡμίτονον, Συνημίτονον, Ἐφαπτομένη, Συνεφαπτομένη*** καὶ κάτω ἀντιστοίχως τὰς λέξεις: ***Συνημίτονον, Ἡμίτονον, Συνεφαπτομένη, Ἐφαπτομένη***.

Αἱ ἐπικεφαλίδες ἄνω ἀντιστοιχοῦν εἰς γωνίας ἀπὸ 0^0 ἕως 45^0 καὶ αἱ ἐπικεφαλίδες κάτω ἀντιστοιχοῦν εἰς γωνίας ἀπὸ 45^0 ἕως 90^0.

Ἕκαστος πίναξ ἔχει χωρισθῆ εἰς στήλας. Εἰς τὴν πρώτην στήλην, ἡ ὁποία ἔχει ἐπικεφαλίδα τὴν λέξιν ***Μοῖραι*** ἀναγράφονται αἱ μοῖραι τῶν γωνιῶν καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἀπὸ 0^0 ἕως 45^0.

Αἱ δεξιὰ τῆς στήλης αὐτῆς στῆλαι ἔχουν ἐπικεφαλίδας τοὺς ἀριθμοὺς 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′.

Ἡ τελευταία στήλη, ἡ ὁποία δὲν φέρει ἄνω καμμίαν ἔνδειξιν, φέρει ὅμως κάτω τὴν λέξιν ***Μοῖραι***, ἀναγράφει τὰς μοίρας ἀπὸ 45^0 ἕως 90^0, ἀλλὰ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Ἡ ἀνάγνωσις τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων γίνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ διὰ τὰς γωνίας ἀπὸ 0^0 ἕως 45^0, καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διὰ τὰς γωνίας ἀπὸ 45^0 ἕως 90^0.

64. Χρῆσις τῶν πινάκων. ***Πρόβλημα Ι. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς γωνίας.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις πρώτη. Ἡ δοθεῖσα γωνία ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας $36^0\ 40'$.

Τὸ ἡμίτονον $36^0\ 40'$ εὑρίσκεται (σελὶς 60) εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 36^0 καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἐπικεφαλίδα 40′.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $ημ36^0\ 40'=0{,}59716$.

Ὁμοίως εἰς τὴν σελίδα 61, ποὺ φέρει ἐπικεφαλίδα «Συνημίτονον» εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι $συν36^0\ 40'=0{,}80212$.

Ὁμοίως εἰς τὴν σελίδα 62, ποὺ φέρει ἐπικεφαλίδα «Ἐφαπτομένη» εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι $εφ36^0\ 40'=0{,}74447$.

Ὁμοίως εἰς τὴν σελίδα 63, ποὺ φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν λέξιν «Συνεφαπτομένη» εὑρίσκομεν ἀμέσως

$$σφ36^0\ 40'=1{,}34323.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας $58^0\,20'$.

Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 45^0, θὰ ἀναζητήσωμεν τὰς ἐπικεφαλίδας «ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη» εἰς τὸ κάτω μέρος τῶν σελίδων 60—63.

Τὸ ἡμίτονον τῶν $58^0\,20'$ εὑρίσκεται (Σελὶς 61) εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν 58^0 καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει κάτω ἐπικεφαλίδα τὸν ἀριθμὸν 20′.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\eta\mu 58^0\,20'=0{,}85112$.

Ὁμοίως εἰς τὰς σελίδας 60, 63, 62, ποὺ φέρουν κάτω ἐπικεφαλίδας τὰς λέξεις συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη, εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu 58^0\,20'=0{,}52498$$
$$\varepsilon\varphi 58^0\,20'=1{,}62125$$
$$\sigma\varphi 58^0\,20'=0{,}61681.$$

Περίπτωσις δευτέρα. Ἡ δοθεῖσα γωνία δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας $25^0\,46'$.

Εὕρεσις τοῦ ημ$25^0\,46'$.

Εὑρίσκομεν ἀμέσως (σελὶς 60), ὅτι

$$\begin{array}{r} \eta\mu 25^0\,40'=0{,}43313 \\ \eta\mu 25^0\,50'=0{,}43575 \\ \hline \text{Διαφορὰ} \quad 0{,}00262 \end{array}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἡ γωνία αὐξήσῃ κατὰ 10′, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει κατὰ 0,00262. Ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ αὔξησις μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ ἡμιτόνου της, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν κάτωθι συλλογισμόν:

Ἐὰν ἡ γωνία αὐξ. κατὰ 10′, τὸ ἡμ. αὐξ. κατὰ 0,00262

» » » » » 6′, » » » » $\dfrac{0{,}00262\times 6}{10}=0{,}00157.$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\eta\mu 25^0\,46'=0{,}43313+0{,}00157=0{,}43470.$$

Διάταξις τῶν πράξεων

Διὰ ημ$25^0\,40'$ . . . . 0,43313. $\Delta=0{,}00262$

δι᾽ αὔξ. 6′ . . . $\dfrac{0{,}00262\times 6}{10}=$ 0,00157

ὥστε ημ$25^0\,46'$ . . . 0,43470.

Εὕρεσις τῆς εφ$25^0 46'$. Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον εὑρίσκομεν, ὅτι

Δι᾽ εφ$25^0\,40'$ . . . . 0,48055 $\Delta=0{,}00359$

δι᾽ αὔξ. 6′ . . . . . $\dfrac{0{,}00359\times 6}{10}=0{,}00215$

ὥστε εφ$25^0\,46'$ 0,48270

Εὕρεσις τοῦ συν$25^0 46'$. Εὑρίσκομεν ἀμέσως (Σελὶς 61), ὅτι

$$\begin{aligned} συν25^0\,40' &= 0{,}90133 \\ συν25^0\,50' &= 0{,}90007 \\ \hline Δ=Διαφορὰ &= 0{,}00126 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι

Ἐὰν ἡ γωνία αὐξ. κατὰ 10′ τὸ συν ἐλαττοῦται κατὰ 0,00126

» » « » » 6′ » » » » $\frac{0{,}00126\times6}{10}=$

$= 0{,}00756.$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$συν26^0\,46'=0{,}90133-0{,}00756=0{,}89377$$

Διάταξις τῶν πράξεων

Διὰ συν$25^0 46'$ . . . . 0,90133 Δ=0,00126

δι' αὔξ. + 6′ . . . $\frac{0{,}00126\times5}{10}=-0{,}00756$

Ὥστε συν$25^0 36'$ 0,89377

Εὕρεσις τῆς σφ$25^0 46'$. Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ διὰ τὸ συνημίτονον εὑρίσκομεν

Διὰ σφ$25^0 40'$ . . . . 2,08094 Δ=0,01541

Δι' αὔξ. +6′ . . . $\frac{0{,}01541\times6}{10}=-0{,}00925$

ὥστε σφ$25^0 46'$ 2,07169

65. Πρόβλημα II. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν ἕνα ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς της.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωσις. Ἡ δοθεῖσα τιμὴ τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ημ$x=0{,}81412$.

Ἐπειδὴ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀγνώστου γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 0,70705, ἡ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 45^0· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν ἀναζητήσωμεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ εἰς τὸν πίνακα (Σελ. 61) ὁ ὁποῖος φέρει κάτω τὴν ἐπικεφαλίδα ἡμίτονον. Εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ἀριθμὸν 0,81412 ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν γωνίαν $x=54^0\,30'$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

Ἐὰν εἶναι συν$x=0{,}98378$ θὰ εἶναι $x=10^0\,20'$

Ἐὰν » εφ$x=2{,}58361$ » » $x=68^0\,50'$

Ἐὰν » σφ$x=0{,}04366$ » » $x=87^0\,30'$

Δευτέρα περίπτωσις. Ἡ δοθεῖσα τιμὴ τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ὑπάρχει εἰς τὸν πίνακα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\eta\mu x = 0{,}46205.$$

Ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα (Σελ. 60), ὁ ὁποῖος φέρει ἄνω τὴν ἐπικεφαλίδα συνημίτονον, τὸν ἀριθμὸν 0,46205 καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν 0,45175 καὶ 0,46433 οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς γωνίας $27^0\,30'$ καὶ $27^0\,40'$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία περιέχεται μεταξὺ $27^0\,30'$ καὶ $27^0\,40'$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ 0,46175 καὶ 0,46433 εἶναι 0,00258 καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 0,46175 καὶ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι 0,00030.

Ἔπειτα λέγομεν

Ἐὰν τὸ ἡμιτ. αὔξ. κατὰ 0,00258 ἡ γωνία αὔξ. κατὰ $10'$

» » » » » 0,00030 » » » » $10 \times \dfrac{0{,}00030}{0{,}00258} = 1{,}1'$

ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι

$$27^0\,30' + 1{,}1' = 27^0\,31{,}1'.$$

Διάταξις τῶν πράξεων

Διὰ 0,46175 εἶναι . . . . $x = 27^0\,30'$ $\Delta = 0{,}00258$

Δι' αὔξ. 0,00030 » $\dfrac{10 \times 0{,}00030}{0{,}00258}$ . . . . . $1{,}1'$

Διὰ 0,46205 εἶναι . . . . $x = 27^0\,31{,}1'$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\varepsilon\varphi x = 1{,}72800.$$

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον εὑρίσκομεν (Σελὶς 63)

Διὰ 1,72047 εἶναι . . . . $59^0\,50'$ $\Delta = 0{,}01158$

δι' αὔξ. 0,00753 » $10' \times \dfrac{753}{1158} = +$ $6',5$

Διὰ 1,72800 εἶναι . . . . $59^0\,56',5$

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι $59^0\,56',5$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu x = 0{,}67680.$$

Ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα (Σελ. 60) ὁ ὁποῖος φέρει κάτω τὴν ἐπικεφαλίδα Συνημίτονον τὸν ἀριθμὸν 0,67680 καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν 0,67773 καὶ 0,67559, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς γωνίας $47^0\,20'$ καὶ $47^0\,30'$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία περιέχεται μεταξὺ $47^0\,20'$ καὶ $47^0\,30'$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ 0,67773 καὶ 0,67559 εἶναι 0,00214 καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ 0,67773 καὶ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 0,67680 εἶναι 0,00093. Ἔπειτα λέγομεν

Ἐὰν τὸ συνημ. ἐλατ. κατὰ 0,00214 ἡ γων. αὔξ. κατὰ $10'$

» » » » » 0,00093 » » » » $10 \times \dfrac{93}{214} = 4{,}3'$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι $47^0\,20' + 4{,}3' = 47^0\,24',3$.

Διάταξις τῶν πράξεων

Διὰ 0,67773 εἶναι . . . . $47^0\,20'$ $\Delta=0{,}00214$

δι' ἐλατ. 0,00093 . . . $+10\times\frac{93}{214}=$ $+4',3$

Διὰ 0,67680 εἶναι $47^0\,24',3$

Παράδειγμα 4ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\sigma\varphi x=3{,}20500.$$

Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ διὰ τὸ συνημίτονον εὑρίσκομεν (Σελ. 64), ὅτι

Διὰ 3,23714 εἶναι . . . . $17^0\,10'$ $\Delta=0{,}03308$

δι' ἐλατ. 0,03214 » . . $+10'\times\frac{3214}{3308}=+$ $9',7$

Διὰ 3,20500 εἶναι $17^0\,19',7$

ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι $x=17^0\,19',7$.

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **80.** Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κάτωθι τόξων:

1. $35^0\,45'$. 2. $68^0\,25'$. 3. $85^0\,18'$.

81. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα x, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι

1. ημx=0,43200, συνx=0,64720, εφx=0,82900, σφx=1,72000.
2. ημx=0,90725, συνx=0,93250, εφx=1,85400, σφx=0,30200.

82. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων

1. $\eta\mu 24^0\,30'+\sigma\upsilon\nu 38^0\,40'-\varepsilon\varphi 68^0\,50'+\sigma\varphi 15^0\,20'$
2. $\sigma\upsilon\nu 64^0\,45'-\eta\mu 75^0\,25'+\varepsilon\varphi 54^0\,35'-\sigma\varphi 62^0\,15'$.

Β' ὁμάς. **83.** Μία φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ μιᾶς ὑαλίνης πλακὸς ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\pi=40^0\,20'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία διαθλάσεως τῆς ἀκτῖνος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\nu=\frac{3}{2}$. (Μεταξὺ τῶν γωνιῶν προσπτώσεως π, διαθλάσεως δ καὶ τοῦ δείκτου διαθλάσεως ν, ὑπάρχει ἡ σχέσις $\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta}=\nu$).

84. Μία φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\pi=60^0\,30'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως ν τοῦ ὕδατος πρὸς τὸν ἀέρα, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ γωνία διαθλάσεως εἶναι $\delta=40^0\,30'$.

85. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $\Delta_1=8$ χγρ. καὶ $\Delta_2=6$ χγρ. ἂν αἱ διευθύνσεις των σχηματίζουν γωνίαν $\varphi=28^0\,30'$. (Μεταξὺ τῆς συνισταμένης Σ καὶ τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2 ὑπάρχει ἡ σχέσις $\Sigma^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+2.\Delta_1.\Delta_2.\sigma\upsilon\nu\varphi$).

86. Ἀπὸ τὴν Φυσικὴν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ ἐπὶ ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία κλίσεως εἶναι ω, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\gamma=g\,\eta\mu\omega$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γ, ἐὰν $g=9{,}81$ καὶ $\omega=16^0\,40'$.

2. Πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0.

66. Λογαριθμικοὶ πίνακες. Ἐκτὸς τῶν πινάκων, τοὺς ὁποίους ἐξητάσαμεν εἰς τὴν § 62 καὶ οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν (φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί), ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι πίνακες, οἱ ὁποῖοι δίδουν ***τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων* ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0.*** Οἱ πίνακες αὐτοὶ εἶναι περισσότερον εὔχρηστοι εἰς τὰ μαθηματικά· μὲ τοὺς πίνακας αὐτοὺς εὐκολύνονται ἄλλως τε καὶ οἱ πολλαπλασιασμοί, αἱ διαιρέσεις, αἱ ὑψώσεις εἰς δυνάμεις, αἱ ἐξαγωγαὶ ριζῶν κ.λ.π.

Κατωτέρω θὰ περιγράψωμεν τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας Dupuis, τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἑλληνικὴ ἔκδοσις **.

67. Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων Dupuis. Οἱ πίνακες αὐτοὶ περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων. συνεφαπτομένων καὶ συνημιτόνων ὅλων τῶν τόξων τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καὶ ἀπὸ λεπτοῦ εἰς λεπτὸν μοίρας.

Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τῶν 45^0, ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου ἀναγράφεται εἰς τὸ ἄνω μέρος καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου ἑκάστου πίνακος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ (′) εἰς τὴν πρώτην στήλην ἑκάστου πίνακος. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι μεγαλύτερον τῶν 45^0, ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου ἀναγράφεται εἰς τὸ κάτω μέρος καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου ἑκάστου πίνακος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ (′) εἰς τὴν τελευταίαν στήλην (πρώτην ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά). Τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς πρώτης στήλης βαίνουν αὐξανόμενα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, τῆς δὲ τελευταίας στήλης ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τέσσαρες στῆλαι περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων, συνεφαπτομένων καὶ συνημιτόνων τῶν τόξων αὐτῶν. Αἱ στῆλαι αὐταὶ ἐπιγράφονται ἄνω Sin (Ἡμ. ἡμίτονον), Tang (Ἐφ. ἐφαπτομένη). Cotg (Σφ. συνεφαπτομένη), καὶ Cos (Συν. συνημίτονον) διὰ τὰ τόξα τὰ μικρότερα τῶν 45^0 καὶ κάτω Cos. (Συν.), Tang. (Ἐφ.), Cotg. (Σφ.), Tang, (Ημ.), διὰ τὰ τόξα τὰ μεγαλύτερα τῶν 45^0. Εἶναι εὔκολον νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν διάταξιν αὐτήν. Εἰς τὴν σελίδα 71 οἱ ἀριθμοὶ τῶν μοιρῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι γραμμένοι ἄνω καὶ κάτω καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου τοῦ πί-

* Κατωτέρω ὅπου ἀναφέρεται ἡ λέξις ***τόξον*** θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν ἀντίστοιχον γωνίαν.

** Ὑπὸ Π. Γ. Τόγκα.

νακος εἶναι 34^0 καὶ 55^0. Τὸ ἄθροισμά των εἶναι 89^0. Ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν 20′ τῆς πρώτης στήλης εὑρίσκεται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην ὁ ἀριθμὸς 40′· ἑπομένως τὰ τόξα $34^0 20'$ καὶ $55^0 40'$ ἔχουν ἄθροισμα 90^0, δηλ. εἶναι συμπληρωματικά. Συνεπῶς, ἐὰν διαβάζωμεν εἰς τὴν στήλην Ημ, τὸν ἀριθμὸν $\overline{1},75128$, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ημ$34^0 20'$· ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς $\overline{1},75128$ εἶναι καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ συν$55^0 40'$ καὶ διαβάζεται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἡ ὁποία τελειώνει μὲ τὴν ἐπικεφαλίδα ***Συν***, ὥστε εἶναι :

$$\text{λογ ημ}34^0 20' = \overline{1},75128 = \text{λογ συν}55^0 40'.$$

Δεξιὰ τῶν στηλῶν τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων ὑπάρχουν μικραὶ στῆλαι, αἱ ὁποῖαι φέρουν ἐπικεφαλίδα τὰ γράμμα D (Δ), αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων δύο διαδοχικῶν τόξων. Ἐπίσης μεταξὺ τῶν στηλῶν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ὑπάρχει μία μικρὰ στήλη, ἡ ὁποία φέρει τὴν ἐπικεφαλίδα D (Δ) καὶ ἡ ὁποία περιέχει τὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶν τόξων. Αἱ διαφοραὶ αὐταὶ εἶναι σταθερῶς ἴσαι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν.

68. Χρῆσις τῶν πινάκων. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ δύο κατωτέρω προβλήματα.

Πρόβλημα Ι. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου ἢ ἐφαπτομένης ἢ συνεφαπτομένης ἢ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Πρώτη περίπτωσις. Ὅταν τὸ τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα λεπτὰ μοίρας.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου $34^0 18'$, δηλ. λογ ημ$34^0 18'$.

Ἀναζητοῦμεν τὰς 34^0 εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος 102 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων (ἐδῶ εἰς τὴν σελίδα 71) καὶ τὰ 18′ εἰς τὴν πρώτην στήλην. Δεξιὰ τοῦ 18′ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην, ἡ ὁποία ἔχει ἐπικεφαλίδα Ημ. εὑρίσκομεν τὰ τέσσαρα τελευταῖα ψηφία 5091 τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου· τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ εἶναι $\overline{1},7$ τὰ ὁποῖα ἀναγράφονται ἀπέναντι τοῦ 0 καὶ τὰ ὁποῖα νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα· θὰ εἶναι λοιπόν : λογ ημ$34^0 18' = \overline{1},75091$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι : λογ εφ$34^0 29' = \overline{1},83686$

λογ σφ$34^0 4' = 0,16992$ λογσυν$34^0 15' = \overline{1},91729$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ εφ$55^0 45'$.

Ἀναζητοῦμεν πρῶτον τὰς 55^0 εἰς τὴν σελίδα 102 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων (ἐδῶ εἰς τὴν σελίδα 71) καὶ τὰ 40′ εἰς τὴν πρώτην στήλην ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον εὑρίσκομεν, ὅτι : λογ εφ55° 45′=0,16693.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι : λογ ημ55° 32′$=\overline{1},91617$

λογ συν 55° 57′$=\overline{1},74812$ λογ σφ55° 48′$=\overline{1},83225$.

102 **34°**

28	
1″	0,47
2	0,93
3	1,40
4	1,87
5	2,33
6	2,80
7	3,27
8	3,73
9	4,20

27	
1	0,45
2	0,90
3	1,35
4	1,80
5	2,25
6	2,70
7	3,15
8	3,60
9	4,05

19	
1	0,32
2	0,63
3	0,95
4	1,27
5	1,58
6	1,90
7	2,22
8	2,53
9	2,85

18	
1	0,3
2	0,6
3	0,9
4	1,2
5	1,5
6	1,8
7	2,1
8	2,4
9	2,7

′	Ημ.	Δ	Εφ.	Δ	Σφ.	Συν.	Δ	′
0	$\overline{1}$,74766	19	$\overline{1}$,8 2899	27	0,1 7101	$\overline{1}$,9 1857	8	60
1	4775	19	2926	27	7074	1849	9	59
2	4794	18	2953	27	7047	1840	8	58
3	4812	19	2980	28	7020	1832	9	57
4	4831		3008		6992	1823		56
—	—	19	—	27	—	—	8	—
5	4850	18	3035	27	6965	1815	9	55
6	4868	19	3062	27	6938	1806	8	54
7	4887	19	3089	28	6911	1798	9	53
8	4906	18	3117	27	6883	1789	8	52
9	4924		3144		6856	1781		51
—	—	19	—	27	—	—	9	—
10	4943	18	3171	27	6829	1772	9	50
11	4961	19	3198	27	6802	1763	8	49
12	4980	19	3225	27	6775	1755	9	48
13	4999	18	3252	28	6748	1746	8	47
14	5017		3280		6720	1738		46
—	—	19	—	27	—	—	9	—
15	5036	18	3307	27	6693	1729	9	45
16	5054	19	3334	27	6666	1720	8	44
17	5073	18	3361	27	6639	1712	9	43
18	5091	19	3388	27	6612	1703	8	42
19	5110		3415		6585	1695		41
—	—	18	—	27	—	—	9	—
20	5128	19	3442	28	6558	1686	9	40
21	5147	18	3470	27	6530	1677	8	39
22	5165	19	3497	27	6503	1669	9	38
23	5184	18	3524	27	6476	1660	9	37
24	5202		3551		6449	1651		36
—	—	19	—	27	—	—	8	—
25	5221	18	3578	27	6422	1643	9	35
26	5239	19	3605	27	6395	1634	9	34
27	5258	18	3632	27	6368	1625	8	33
28	5276	18	3659	27	6341	1617	9	32
29	5294		3686		6314	1608		31
—	—	19	—	27	—	—	9	—
30	$\overline{1}$,75313		$\overline{1}$,83713		0,1 6287	$\overline{1}$,9 1599		30
′	Συν		Σφ.		Εφ.	Ημ.		′

55°

Δευτέρα περίπτωσις. Ὅταν τὸ τόξον περιέχῃ καὶ δεύτερα λεπτὰ τῆς μοίρας.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λογ ημ34° 25′ 40″.

Τὸ τόξον 34° 25′ 40″ περιέχεται μεταξὺ τῶν τόξων 34°25′ καὶ 34°26′ καὶ ἑπομένως καὶ ὁ λογ ημ34° 25′ θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογ ημ34° 25′ καὶ λογ ημ34° 26′. Ὁ πίναξ δίδει:

$$\text{λογ ημ}34^\circ\,25' = \overline{1},75221 \qquad \text{λογ ημ}34^\circ\,26' = \overline{1},75239.$$

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν εἶναι 18 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὅπως δεικνύει καὶ ἡ στήλη Δ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1′ ἢ 60″·

Ἂν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ αὔξησις μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου της, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν κάτωθι συλλογισμόν:

Ἐὰν ἡ γωνία αὐξ. κατὰ 60″ ὁ λογ ημ αὐξ. κατὰ 0,00018

» » » » » 40″ » » » » $0,0018 \times \frac{40}{60} = 0,000145$,

Θὰ εἶναι λοιπὸν λογ ημ34° 25′ 40″ $= \overline{1},75221 + 0,00014 = \overline{1},75235$.

Διάταξις τῶν πράξεων:

Διὰ λογ ημ34° 25′ . . . . . . $= \overline{1},75221$ Δ=0,00018
δι' αὐξ. 40″ . . . . . $=0,00014$

Ὥστε λογ ημ34° 25′ 40″ . . $= \overline{1},75235$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ζητῆται ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς γωνίας.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ συν55° 48′ 25″.

Ὁ πίναξ (σελὶς 71) δίδει λογ συν55° 48′ $= \overline{1},74980$
λογ συν55° 49′ $= \overline{1},74961$
Διαφορὰ 0,00019

Παρατηροῦμεν, ὅτι:

Ἐὰν ἡ γωνία αὐξ. κατὰ 1′ ἢ 60″ ὁ λογ συν ἐλαττ. κατὰ 0,00019

» » » » » 25″ » » » $0,00019 \times \frac{25}{60} =$

$=0,000078$ ἢ $0,00008$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν λογ συν55°48′25″ $= \overline{1},74980 - 0,00008 = \overline{1},74972$.

Διάταξις τῶν πράξεων:

Διὰ λογ συν55° 48′ . . . . . . $= \overline{1},74980$ Δ=0,00019
δι' αὐξ. 25″ . . . . . $= -0,00008$

Ὥστε λογ συν55° 48′ 25″ . . . . . $= \overline{1},74972$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι λογ σφ55° 35′ 42″ $= \overline{1},83559$.

Ἀσκήσεις. 87. Νὰ εὑρεθῇ:

1. λογ ημ42° 38′
2. λογ ημ75° 45′
3. λογ συν34° 34′
4. λογ συν66° 19′
5. λογ εφ25° 16′
6. λογ εφ80° 40′
7. λογ σφ16° 18′
8. λογ σφ54° 36′

88. Νὰ εὑρεθῇ :

1. λογ ημ$38^0\,46'\,15''$
2. λογ ημ$65^0\,15'\,40''$
3. λογ εφ$42^0\,35'\,50''$
4. λογ εφ$40^0\,36'\,10''$
5. λογ συν$15^0\,20'\,25''$
6. λογ συν$72^0\,36'\,40''$
7. λσγ σφ$17^0\,48'\,12''$
8. λογ σφ$67^0\,42'\,35''$

69. Πρόβλημα II. ***Ἀντίστροφον. Δίδεται ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς τόξου καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μικρότερον τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις

Α'. περίπτωσις. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν

$$λογ\,ημx=\overline{1},75054$$

Ἀναζητοῦμεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},75054$ εἰς τὴν στήλην Ημ., παρατηροῦντες, ὅτι ὁ λογάριθμος αὐξάνει, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ. Εἰς τὴν σελίδα 71 καὶ εἰς τὴν στήλην Ημ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν $\overline{1},75054$. Ἀπέναντι αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν πρώτην στήλην εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 16, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ τόξου. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν του εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος. Ὥστε, ἐὰν εἶναι

$$λογ\,ημx=\overline{1},75054, \quad θὰ\ εἶναι \quad x=34^0\,16'$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

Ἂν εἶναι λογ ημx$=\overline{1},91651$ θὰ εἶναι $x=55^0\,36'$
λογ εφx$=\overline{1},83497$ » » $x=34^0\,22'$
λογ σφx$=0,16314$ » » $x=34^0\,29'$
λογ συνx$=\overline{1},74831$ » » $x=55^0\,56'$

Β' περίπτωσις. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$λογ\,ημx=\overline{1},75225$$

Ἀναζητοῦμεν, ὅπως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸν λογάριθμον, ὁ ὁποῖος πλησιάζει πρὸς τὸν δοθέντα $\overline{1},75225$ καὶ εὑρίσκομεν, εἰς τὴν σελίδα 71, ὅτι οὗτος περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων $\overline{1},75221$ καὶ $\overline{1},75239$. Εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1},75221$ ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον $34^0\,25'$, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὰς μοίρας καὶ τὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ ζητουμένου τόξου. Ἡ διαφορὰ τοῦ $\overline{1},75221$ καὶ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου $\overline{1},75225$ εἶναι 0,00004, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ $\overline{1},75221$ καὶ τοῦ ἑπομένου του $\overline{1},75239$ εἶναι 0,00018 (εἰς τὴν στήλην Δ γράφεται 18). Λέγομεν λοιπὸν

Ἐὰν τὸ ημ. αὐξ. κατὰ 0,00018 τὸ τόξ. αὐξ. κατὰ 60''
» » » » » 0,00004 » » » » $\dfrac{60\times 0,0004}{0,00018}=13,3.$

Ὥστε τὸ ζητούμενον τόξον x θὰ εἶναι $x=34^0\,25'\,13'',3$.

Διάταξις τῶν πράξεων:

Διὰ $\overline{1},75221$ . . . . $=34^{0}\,25'$, $\Delta=0,00018$

δι' αὐξ. $0,00004$ εἶναι $\dfrac{60\times 0,00004}{0,00018}=$ $13'',3$

Διὰ $\overline{1},75225$ εἶναι x $=34^{0}25'13'',3$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ ὁ λογάριθμος ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu x=\overline{1},74920.$$

Εἰς τὴν στήλην (Σελ. 71) ἡ ὁποία φέρει κάτω ἐπικεφαλίδα Συν. εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},74924$ ἀμέσως ἀνώτερον τοῦ $\overline{1},74920$· εἰς αὐτὸν ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον $55^{0}\,51'$, τὸ ὁποῖον διαβάζομεν κάτω τοῦ πίνακος καὶ εἰς τὴν α' στήλην πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου $\overline{1},74924$ καὶ $\overline{1},74906$ εἶναι 0,00018, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν εἰς τὴν στήλην Δ· ἐξ ἄλλου ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου $\overline{1},74920$ καὶ τοῦ $\overline{1},74924$ εἶναι 0,00004. Λέγομεν λοιπόν:

Ἐὰν τὸ συν ἐλατ. κατὰ 0,00018, τὸ τόξ. αὐξ. κατὰ 60''

» » » » » 0,00004, » » » » $\dfrac{60\times 0.00004}{0,00018}=13'',3.$

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία x θὰ εἶναι $x=55^{0}\,51'\,13'',3.$

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ ὁ λογάριθμος συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου.

Ἀσκήσεις. 89. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

1. λογ ημx$=\overline{1},47835$	5. λογ συνx$=\overline{1},94380$
2. λογ ημx$=\overline{1},95400$	6. λογ συνx$=\overline{1},39125$
3. λογ εφx$=\overline{1},83840$	7. λογ σφx $=0,08140$
4. λογ εφx$=0,37800$	8. λογ σφx $=\overline{1},87560$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΝΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ - ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

---

1. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων

70. Στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, αἱ γωνίαι του, τὸ ἐμβαδόν του, αἱ διάμεσοί του, τὰ ὕψη του κλπ. λέγονται ***στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

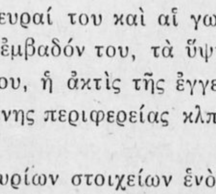
Τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου διακρίνονται εἰς ***κύρια*** καὶ εἰς ***δευτερεύοντα.***

Τὰ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου εἶναι αἱ πλευραί του καὶ αἱ γωνίαι του. Ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα του, δηλ. τὸ ἐμβαδόν του, τὰ ὕψη του, αἱ διάμεσοί του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας κλπ. εἶναι τὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Ἐπίλυσις τριγώνου. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ὅταν δοθοῦν ἐπαρκῆ στοιχεῖα αὐτοῦ, λέγεται ***ἐπίλυσις τριγώνου.***

Διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριγώνων ἐκπληροῦται ὁ σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.

71. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου. Μεταξὺ τῶν πλευρῶν α, β, γ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 49) καὶ τῶν γωνιῶν του ὑπάρχουν μερικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 49.

1ον. Γνωρίζομεν (§ 45) ὅτι,

$$\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha},\quad \sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma},\quad \sigma\varphi B=\frac{\gamma}{\beta}$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\beta=\alpha\,\eta\mu B,\quad \gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B,\quad \beta=\gamma\,\varepsilon\varphi B,\quad \gamma=\beta\,\sigma\varphi B \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, θὰ εἶναι ημΒ=συνΓ, συνΒ=ημΓ, εφΒ=σφΓ, σφΒ=εφΓ, ὁπότε αἱ ἰσότητες (1) γίνονται

$$\beta=\alpha\,\text{συν}\Gamma,\quad \gamma=\alpha\,\text{ημ}\Gamma,\quad \beta=\gamma\,\text{σφ}\Gamma,\quad \gamma=\beta\,\text{εφ}\Gamma \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητος (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι :

Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον: 1ον. Κάθε κάθετος πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης γωνίας.

2ον. Κάθε κάθετος πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν πρώτην κάθετον πλευρὰν ὀξείας γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτὴν γωνίας.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

$$\boxed{\begin{aligned}\beta&=\alpha\,\text{ημ}B=\alpha\,\text{συν}\Gamma\\ \gamma&=\alpha\,\text{ημ}\Gamma=\alpha\,\text{συν}B\end{aligned}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\begin{aligned}\beta&=\gamma\,\text{εφ}B=\gamma\,\text{σφ}\Gamma\\ \gamma&=\beta\,\text{εφ}\Gamma=\beta\,\text{σφ}B\end{aligned}}$$

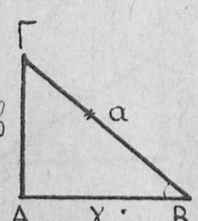
Ἀσκήσεις. 90. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὑφίστανται αἱ κάτωθι σχέσεις :

1. $\text{ημ}B.\text{εφ}B=\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}$. 2. $\text{στεμ}B+\text{σφ}B=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$. 3. $\dfrac{\text{ημ}B+\text{συν}\Gamma}{\text{συν}B+\text{ημ}\Gamma}=\text{εφ}B$.

72. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων. Αἱ προηγούμεναι σχέσεις (§ 71) καὶ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ***ἐπιλύσωμεν*** ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του ἢ μίαν πλευρὰν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν του.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων δύναται νὰ παρουσιάσῃ τέσσαρας περιπτώσεις, καθόσον τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δίδονται εἶναι:

I. Ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία του.
II. Μία τῶν καθέτων πλευρῶν του καὶ μία ὀξεῖα γωνία του.
III. Ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν του.
VI. Αἱ δύο κάθετοι πλευραί του.



Σχ. 50.

73. Πρώτη περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του α καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β.***

Δοθέντα : α, $\widehat{B}$. *Ἄγνωστα* : $\widehat{\Gamma}$, β, γ.

Τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\Gamma=90^\circ-B, \qquad \beta=\alpha\,\text{ημ}B, \qquad \gamma=\alpha\,\text{συν}B.$$

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι δίδονται :

α=4,25 μ. καὶ Β=38° 35′.

Δοθέντα $\begin{cases} \alpha=4{,}25 \text{ μέτρα} \\ B=38^0\,35' \end{cases}$ *Ἐξαγόμενα* *Ἄγνωστα* $\begin{cases} \Gamma=51^0 25' \\ \beta=2{,}65051 \text{ μετρ.} \\ \gamma=3{,}2222 \text{ μετρ.} \end{cases}$

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἔχομεν :

$$\Gamma=90^0-B$$
$$=90^0-(38^0\,35')=51^0\,25'$$

$$90^0=89^0\,60'$$
$$B=38^0\,35'$$
$$90^0-B=51^0\,25'$$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς β. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ ἔχομεν

$\beta=4{,}25\times\eta\mu 38^0\,35'$

ἢ $\beta=4{,}25\times0{,}62365=2{,}65051$ μ.

Βοηθητικαὶ πράξεις

$\eta\mu 38^0\,30' \ldots 0{,}62251 \quad \Delta=0{,}00228$

δι' αὔξ. $5' \ldots 0{,}00114$

$\eta\mu 38^0\,35' \ldots 0{,}62365$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B$ ἔχομεν

$\gamma=4{,}25\times\sigma\upsilon\nu 38^0\,35'$

$=4{,}25\times0{,}78170=3{,}2222$ μ.

$\sigma\upsilon\nu 38^0\,30' \ldots 0{,}78261 \quad \Delta=0{,}00182$

διὰ $5' \ldots 0{,}00091$

$\sigma\upsilon\nu 38^0\,35' \ldots 0{,}78170$

Σημείωσις. Τὰς πλευρὰς β καὶ γ ὑπελογίσαμεν διὰ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν αὐτὰς καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅπως φαίνεται κατωτέρω:

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ λαμβάνομεν $\beta=4{,}250\times\eta\mu 38^0\,35'$.

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma 4{,}25+\lambda o\gamma\,\eta\mu 38^0\,35'$$
$$=0{,}62839+\bar{1},79494=0{,}42333.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $\beta=2{,}6505$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι μεταξὺ τῆς τιμῆς $\beta=2{,}6505$, ἡ ὁποία εὑρέθη διὰ τῶν λογαρίθμων, καὶ τῆς τιμῆς $\beta=2{,}65051$, ποὺ εὑρέθη διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ὑπάρχει ἐλαχίστη διαφορά.

Ἀσκήσεις. 91. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν : 1ον. $\alpha=13{,}85$ μέτ. $B=38^0\,35'$. 2ον. $\alpha=125{,}9\cdot$ $\Gamma=40^0\,10'$.

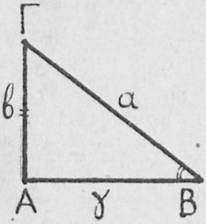
92. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογών. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι : $\alpha=496{,}5$ μ. καὶ $B-\Gamma=18^0\,16'$.

74. Δευτέρα περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κάθετον πλευράν του β καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β.***

Δοθέντα : β, $\widehat{B}$. *Ἄγνωστα :* $\widehat{\Gamma}$, α, γ.

Τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα Γ καὶ γ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\Gamma = 90^0 - B \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \beta\, \sigma\varphi B$$



Σχ. 51.

Ἡ ὑποτείνουσα α εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον β=α ημΒ ἀπὸ τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι εἶναι β=35,60 μέτρ. καὶ Β=42° 16′.

Δοθέντα $\begin{cases} \beta = 35{,}60 \text{ μ.} \\ B = 42^0 16' \end{cases}$ *Ἄγνωστα* $\begin{cases} \Gamma = 47^0 44' \\ \alpha = 52{,}92 \text{ μ.} \\ \gamma = 39{,}172 \text{ μ.} \end{cases}$ *Ἐξαγόμενα*

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἔχομεν :

$$\Gamma = 90^0 - B$$
$$= 90^0 - (42^0 16') = 47^0 44'$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$90^0 = 89^0 60'$
$B^0 = 42^0 16'$
$90^0 - B = 47^0 44'$

Ὑπολογισμὸς τῆς ὑποτεινούσης α. Ἀπὸ τὸν τύπον $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{35{,}60}{\eta\mu 42^0 16'} = $$
$$= \frac{35{,}60}{0{,}67258} = 52{,}92 \text{ μ.}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

ημ42° 10′......0,67129 Δ=0,00215
διὰ 6′.......0,00129
ημ42° 16′ = 0,67258

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Ἀπὸ τὸν τύπον γ=β σφΒ λαμβάνομεν

$$\gamma = 35{,}60 . \sigma\varphi 42^0 16' =$$
$$= 35{,}60 \times 1{,}10034 = 39{,}1721 \text{ μ.}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

σφ42° 10′......1,10414 Δ=0,00634
δι' αὔξ. 6...—0,00380
σφ42° 16′......1,10034

Ἀσκήσεις. 93. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀνωτέρω ὀρθογ. τρίγωνον διὰ τῶν λογαρίθμων.

94. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι :

1ον. β=56,70 μέτρα, $\widehat{B} = 57^0 42'$. 2ον. γ=9,45 μέτρα, $\widehat{B} = 56^0 20'$.

95. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

β=12,40 μ. καὶ Β—Γ=23° 40′.

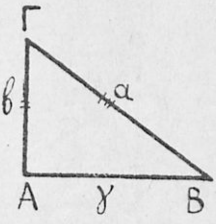
75. Τρίτη περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του α καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν β.***

Δοθέντα : α, β. *Ἄγνωστα :* Β, Γ, γ.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ λαμβάνομεν $\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}$.

Τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα Γ καὶ γ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$\Gamma=90^0-B$ **καὶ** $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$



Σχ. 52.

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι εἶναι:

$\alpha=1{,}65$ μ. καὶ $\beta=0{,}75$ μ.

Δοθέντα $\begin{cases} \alpha=1{,}65 \text{ μ.} \\ \beta=0{,}75 \text{ μ.} \end{cases}$ *Ἄγνωστα* $\begin{cases} B=27^0\ 2'\ 7'' \\ \Gamma=62^0 57' 53'' \\ \gamma=1{,}46 \text{ μέτρ.} \end{cases}$ *Ἐξαγόμενα*

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}$ λαμβάνομεν

$\eta\mu B=\frac{0{,}75}{1{,}65}=0{,}45454$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν

$\widehat{B}=27^0\,2'\,7''$

Βοηθητικαὶ πράξεις

Διὰ 0,45399.....27^0 Δ=0,00259
δι' αὔξ. 0,00055...... 2′ 7″
0,45454...27^0 2′ 7″

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἔχομεν

$\Gamma=90^0-B$
$=90^0-(27^0\,2'\,7'')$
$=62^0\,57'\,53''$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$90=89^0\,59'\,60''$
$B=27^0\;\;2'\;\;7''$
$90^0-B=62^0\,57'\,53''$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Ἀπὸ τὸν τύπον

$\gamma=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$ λαμβάνομεν
$\gamma=\sqrt{2{,}40\times0{,}90}=\sqrt{2{,}16}=1{,}46$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$\alpha=1{,}65$
$\beta=0{,}75$
$\alpha+\beta=2{,}40$
$\alpha-\beta=0{,}90$

Ἀσκήσεις. 96. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀνωτέρω ὀρθ. τρίγωνον διὰ τῶν λογαρίθμων.

97. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι:
1ον. $\alpha=1304$ μ. καὶ $\beta=775{,}2$ μ. 2ον. $\alpha=0{,}94$ μ., $\beta=0{,}56$ μ.

98. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι
$\alpha+\beta=678{,}5$ καὶ $\alpha-\beta=287{,}5$.

76. Τετάρτη περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς καθέτους πλευράς του β καὶ γ.***

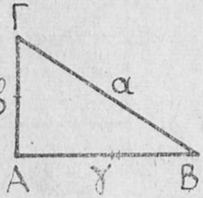
Δοθέντα: β, γ. *Ἄγνωστα:* Β, Γ, α.

Ἀπὸ τὸν τύπον $\beta=\gamma\,\varepsilon\varphi B$ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας Β, εὑρίσκομεν $\Gamma = 90^0 - B$.

Ἀπὸ τὸν τύπον $\beta = \alpha\, \eta\mu B$ λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$



Σχ. 53.

Ἡ πλευρὰ α δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τοῦ τύπου $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι εἶναι $\beta = 46{,}5$ μετρ. καὶ $\gamma = 75{,}6$ μ.

Δοθέντα: $\begin{cases} \beta = 46{,}5 \\ \gamma = 75{,}6 \end{cases}$ *Ἄγνωστα:* *Ἐξαγόμενα* $\begin{cases} B = 31^0\, 35'\, 39'' \\ \Gamma = 58^0\, 24'\, 21'' \\ \alpha = 80{,}85 \text{ μ.} \end{cases}$

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi B = \frac{46{,}5}{75{,}6} = 0{,}61507$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\widehat{B} = 31^0\, 35',66 = 31^0 35'\, 39''$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

Διὰ	0,61280....	$31^0\, 30'$	$\Delta = 0{,}00401$
δι' αὔξ.	0,00227....	5,66	
	0,61507....	$31^0\, 35',66$	

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma} = 90^0 - B$$
$$= 90^0 - (31^0\, 35'\, 39')$$
$$= 58^0\, 24'\, 21''$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$90^0 = 89^0\, 59'\, 60''$
$B = 31^0\, 35'\, 39''$

$90^0 - B = 58^0\, 24'\, 21''$

Ὑπολογισμὸς τῆς ὑποτεινούσης α. Ἀπὸ τὸν τύπον $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{46{,}5}{\eta\mu 31^0\, 35',66} = \frac{46{,}5}{0{,}52390} =$$
$$= 88{,}75 \text{ μέτρα}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

Διὰ $\eta\mu 31^0\, 30'$	0,52250	$\Delta = 0{,}00248$
δι' αὔξ. $5',66$	...0,00140	
διὰ $\eta\mu 31^0\, 35',66$	...0,52390	

Ἀσκήσεις. 99. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀνωτέρω ὀρθ. τρίγωνον διὰ τῶν λογαρίθμων.

100. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

1ον. $\beta = 125{,}4$ μ., $\gamma = 90{,}4$ μ., 2ον. $\beta = 64{,}73$ μ., $\gamma = 82{,}06$ μ.

101. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

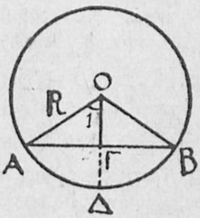
$\beta + \gamma = 435{,}0$ μέτρ. καὶ $\beta - \gamma = 109{,}4$ μέτρ.

2. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

77. Ἡ λύσις μερικῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας, τῆς Φυσικῆς, τῆς Τοπογραφίας, τῆς Κοσμογραφίας κλπ. ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίων τριγώνων. Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν βοήθειαν, τὴν ὁποίαν προσφέρει ἡ Τριγωνομετρία εἰς τοὺς ἀνωτέρω κλάδους τῆς ἐπιστήμης.

78. Γεωμετρίας. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μία χορδή του μήκους 36,80 μ. ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον $48^0\,30'$.*

Ἔστω ὁ κύκλος Ο (Σχ. 54), καὶ ΑΒ μία χορδή του. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ· ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μὲ $48^0\,30'$. Φέρομεν τὴν κάθετον ΟΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία διχοτομεῖ αὐτὴν καὶ τὴν γωνίαν ΑΟΒ. Ἡ ζητουμένη ἀκτὶς ΟΑ τοῦ κύκλου θὰ ὑπολογισθῇ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΓΑ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν



Σχ. 54.

$\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\,\text{ΑΒ}=\frac{1}{2}\times 36{,}80=18{,}40$ μ. καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $\text{Ο}_1=24^0\,15'$. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΟΓΑ ἔχομεν

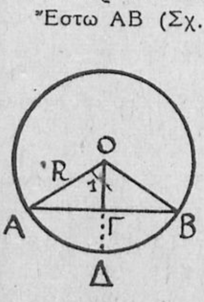
$$\text{ΑΓ}=\text{ΟΑ}\,\text{ημ}\text{Ο}_1 \quad \text{ἢ} \quad 18{,}40=\text{ΟΑ}\,.\,\text{ημ}24^0\,15'$$

$$\text{ἄρα} \quad \text{ΟΑ}=\frac{18{,}40}{\text{ημ}24^0\,15'}=\frac{18{,}40}{0{,}41072}=44{,}79 \text{ μέτρ.}$$

Ὥστε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 44,79 μέτρα.

Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ πολύγωνον.***

Ἔστω ΑΒ (Σχ. 55) ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἔχει ν πλευράς. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τὸ ἀπόστημα του ΟΓ. Ἡ ζητουμένη πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΑ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ, ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Ο_1, ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς κεντρικῆς γωνίας ΑΟΒ τοῦ δοθέντος πολυγώνου.



Σχ. 55.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\quad \text{ΑΒ}=2.\text{ΑΓ} \qquad (1)$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΓΑ ἔχομεν $\text{ΑΓ}=\text{R}\,\text{ημ}\text{Ο}_1$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΑΓ μὲ τὸ ἴσον του R ημO_1 καὶ ἔχομεν ΑΒ=2 R ημO_1.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς κεντρικῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R=1 μ.

Ἡ κεντρικὴ γωνία ΑΟΒ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴση μὲ $\frac{360^0}{10}=36^0$. Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα ΑΒ=2 R ημO_1 θέσωμεν R=1 καὶ $\widehat{O}_1=18^0$ θὰ ἔχωμεν ΑΒ=2. ημ$18^0=2\times0{,}30902=0{,}618$ μ.

Σημ. Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $AB=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$. Ἂν θέσωμεν R=1 εὑρίσκομεν

$$AB=\frac{1}{2}(2{,}236-1)=0{,}618 \text{ μ.}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, εἴτε ὑπολογίσωμεν αὐτὴν γεωμετρικῶς εἴτε τριγωνομετρικῶς.

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* 102. Ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 2,48 μ. καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του 34^0. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι του, αἱ ἴσαι πλευραί του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

103. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $64^0\,20'$ καὶ τὸ ὕψος. τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τὴν κορυφήν του, εἶναι 12,84 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του καὶ αἱ πλευραί του.

104. Ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν του. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

105. Ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 5,20 μ. καὶ τὸ ὕψος, τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τὴν κορυφήν του, εἶναι 2,40. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του καὶ ἡ βάσις του.

***Β' Ὁμάς.* 106.** Ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 65,60 μ. καὶ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν του γωνίαν $34^0\,20'$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

107. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχουν λόγον 3 : 5. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μία διαγώνιός του μὲ τὰς πλευράς του.

108. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 34,60 μ. καὶ 25,40 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διαγώνιός του μὲ τὸ ὕψος του.

***Γ' Ὁμάς.* 109.** Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 40 μ. καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιός του 68 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ρόμβου.

110. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 1,40 μ. καὶ σχηματίζει μὲ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιόν του γωνίαν $18^{0}\,20'$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του.

111. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ῥόμβου εἶναι 9,60 μ. καὶ 12,40 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ πλευρά του καὶ αἱ γωνίαι του.

112. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι 32,65 μ. καὶ 18,54 μ. καὶ σχηματίζουν γωνίαν $42^{0}\,35'$.

Δ' Ὁμάς. **113.** Αἱ βάσεις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 15 μετρ. καὶ 8 μέτρα, ἑκάστη δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν του 6 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

114. Τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 18 μ., ἡ μικρὰ βάσις του 70 μέτρ. καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του εἶναι 40 μ. καὶ 85 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

115. Αἱ δύο βάσεις ἑνὸς δισορθογωνίου τραπεζίου εἶναι 13,60 μετρ. καὶ 8,50 μέτρ. καὶ τὸ ὕψος του 6,70 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τετάρτη πλευρά του.

Ε' Ὁμάς. **116.** Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 2,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ μία χορδή του, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον $64^{0}\,30'$.

117. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 4,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τόξου $64^{0}\,50'$ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν χορδήν.

118. Μία χορδὴ κύκλου μήκους 1,25 μ. ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου 0,80 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τόξα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν.

119. Μία χορδὴ κύκλου ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον 78^{0} καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 2,8 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς αὐτῆς.

120. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 2,4 μ. Πόσον ἀπέχει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀπὸ μίαν χορδήν του, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 2 μέτρα ;

121. Μία χορδὴ ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὰ 3/5 τῆς διαμέτρου του. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μέτρα τῶν τόξων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν.

122. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 6 μέτρ., τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἶναι 48^{0}. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀντίστοιχον βέλος, (δηλ. ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ τόξου ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον χορδήν).

123. Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος 1,60 μ. φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον $64^{0}\,40'$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.

124. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἕνας κύκλος Ο ἀκτῖνος 2 ἑκ. ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ κέντρου ἀπόστασιν ἴσην μὲ 5,8 ἑκ.

125. Δύο περιφέρειαι ἀκτίνων R καὶ Ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι. Ἐφαρμογή : R=15 ἑκ. Ρ=5 ἑκ.

Ϛ' Ὁμάς. **126.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος τῆς κεντρικῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου.

Ἐφαρμογή. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 καὶ 15 πλευράς, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R=1 μ.

127. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς εἶναι λ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημά του ρ.

Ἐφαρμογή. 1ον. Ἐὰν ν=10, λ=36 ἑκ. 2ον. Ἐὰν ν=8, λ=0,60 μ.

128. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς εἶναι λ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἐφαρμογή. 1ον. $\nu=8$ καὶ $\lambda=0{,}90$ μ. 2ον. $\nu=10$, $\lambda=1{,}8$ μ.

129. Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι ρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ ἡ περίμετρός του.

Ἐφαρμογή. 1ον $\nu=8$, $\rho=0{,}40$ μ. 2ον $\nu=10$, $\rho=1{,}20$ μ.

130. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 καὶ 15 πλευρὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος $R=1$.

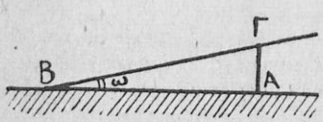
Ζ' *Ὁμάς.* 131. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων ἑνὸς κύβου.

132. Αἱ γενέτειραι ἑνὸς κώνου σχηματίζουν γωνίαν $34^\circ 30'$ μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ εἶναι ἴσαι μὲ 0,475 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν: 1ον ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου καὶ 2ον ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

133. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του εἶναι 1,4 μ. καὶ αἱ γενέτειραί του σχηματίζουν μὲ τὴν βάσιν του γωνίαν $34^\circ 50'$.

79. Φυσικῆς. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Τὸ μῆκος ΒΓ (Σχ. 56) ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 1,20 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΓ εἶναι 0,75 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κλίσις του;*

Ζητεῖται ἡ γωνία ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΒΓ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του Β. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΒΑΓ ἔχομεν



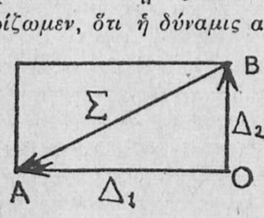
Σχ. 56.

$$ΑΓ=ΒΓ\ ημω \quad ἢ \quad 0{,}75=1{,}20\ ημω,$$

ἄρα $ημω=\dfrac{0{,}75}{1{,}20}=0{,}625$. Ἀπὸ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν $ω=38^\circ 40' 55''$.

Ὥστε ἡ κλίσις του εἶναι $38^\circ 40' 55''$.

Πρόβλημα 2ον. *Μία δύναμις 75 χλγρ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ δύναμις αὐτὴ σχηματίζει, μὲ μίαν ἀπὸ τὰς συνιστώσας γωνίαν $18^\circ 30'$.*



Σχ. 57.

Ἔστω ΑΒ=75 χλγρ. ἡ δοθεῖσα δύναμις (Σχ. 57), ΟΑ, ΟΒ αἱ δύο συνιστῶσαι εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται καὶ $ω=18^\circ 30'$ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ δοθεῖσα δύναμις ΑΒ μὲ τὴν συνιστῶσαν ΟΑ. Αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι δυνάμεις εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ=75 καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $ΟΑΒ=ω=18^\circ 30'$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. αὐτὸ τρίγωνον ἔχομεν:

$$ΟΑ=ΑΒ\ συνω=75.συν18^\circ 30'=75\times 0{,}94832=71{,}124 \text{ χλγρ.}$$
$$ΟΒ=ΑΒ\ ημω=75.ημ18^\circ 30'=75\times 0{,}31730=23{,}7975 \text{ χλγρ.}$$

Ἀσκήσεις. 134. Δύο δυνάμεις 15 χγρ. καὶ 24 χγρ. ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ συνισταμένη μὲ αὐτάς.

135. Δύο δυνάμεις ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἐὰν ἡ μία ἔχῃ ἔντασιν 120 χγρ. καὶ σχηματίζῃ μὲ τὴν συνισταμένην των γωνίαν 35° 30′, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης δυνάμεως.

136. Μία δύναμις 150 χγρ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των, ὅταν ἡ δύναμις αὐτὴ σχηματίζῃ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς συνιστώσας γωνίαν 26° 45′.

137. Ἕνα κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει κλίσιν 16° 40′ καὶ ὕψος 1,60 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκός του.

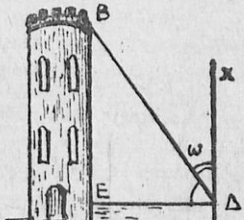
138. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κλίσις ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἂν τὸ μῆκος του εἶναι 2,20 μ. καὶ τὸ ὕψος του 0,75 μετρ.

139. Ἕνα κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει κλίσιν 26° 40′ καὶ μῆκος 1,4 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του.

140. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ὅτι μεταξὺ μιᾶς δυνάμεως F εἰς δύνας, τῆς μεταθέσεως (δρόμου) s τοῦ κινητοῦ καὶ τοῦ παραγομένου ἔργου Ε ὑπάρχει ἡ σχέσις $E=F.s.\text{συν}\omega$, ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως μὲ τὴν τροχιὰν τοῦ σημείου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον Ε, ἐὰν $F=120$, $s=25$ μ. καὶ $\omega=20^{\circ}\,30'$.

80. Τοπογραφίας κλπ. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι προσιτή.*

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ΑΒ ἑνὸς πύργου (Σχ. 58). Τοποθετοῦμεν τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς ἕνα σημεῖον Γ, καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΕΔΒ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΔΒ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Δ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου· ἔπειτα μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΔΕ ἢ τὴν ἴσην της ΓΑ. Δυνάμεθα τώρα νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΔ καὶ τὴν γωνίαν ΕΔΒ=ν. Πράγματι ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΕΔ ἔχομεν ΒΕ=ΕΔ.εφ ν.



Σχ· 58.

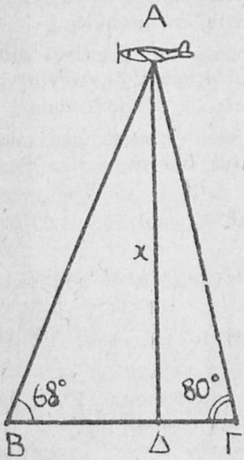
Τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ τοῦ πύργου θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ ΒΕ τὸ ὕψος ΓΔ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου.

Παράδειγμα. Ἐὰν ΕΔ=38 μέτρ. καὶ ν=23° 45′ θὰ εἶναι

$$BE=38.\text{εφ}23^{\circ}\,45'=38\times0{,}44001=16{,}720 \text{ μ.}$$

Ἐὰν τὸ ὕψος ΓΔ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου εἶναι 1,20 μ., τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ πύργου εἶναι 16,720 μέτρ. +1,20 μ.=17,92 μέτρα.

Πρόβλημα 2ον. *Δύο παρατηρηταὶ Β καὶ Γ (Σχ. 59), οἱ ὁποῖοι* *κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 800 μέτρα, μετροῦν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν, μὲ ἕνα γωνιομετρικὸν ὄργανον, τὰς γωνίας ὑπὸ τὰς ὁποίας βλέπουν ἕνα ἀεροπλάνον Α, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο διέρχεται διὰ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς παρατηρητὰς αὐτοὺς καὶ εὑρίσκουν ἀντιστοίχως 68^0 καὶ 80^0. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.*



Σχ. 59.

Οἱ παρατηρηταὶ Β καὶ Γ καὶ τὸ ἀεροπλάνον Α ὁρίζουν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=800 μέτρα καὶ τὰς γωνίας $B=68^0$ καὶ $\Gamma=80^0$. Ἔστω ΑΔ=x τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου. Ἀπὸ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχομεν

$$B\Delta = x.\sigma\varphi 68^0 \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Gamma = x.\sigma\varphi 80^0.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$B\Delta + \Delta\Gamma = x\,\sigma\varphi 68^0 + x\,\sigma\varphi 80^0$$

$$\text{ἢ} \quad B\Gamma = x\,(\sigma\varphi 68^0 + \sigma\varphi 80^0) \quad \text{ἢ} \quad 800 = x\,(\sigma\varphi 68^0 + \sigma\varphi 80^0).$$

$$\text{ἄρα:} \quad x = \frac{800}{\sigma\varphi 68^0 + \sigma\varphi 80^0} = \frac{800}{0{,}404 + 0{,}176} = 1379{,}31 \text{ μετρ.}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου εἶναι 1379,31 μ.

Σημείωσις. Εἰς τὸ ὕψος αὐτὸ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὕψος τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου, διότι τὸ ὕψος αὐτὸ εἶναι ἐλάχιστον ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

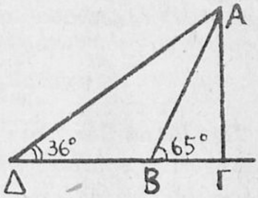
Ἀσκήσεις. 141. Μία σιδηροδρομικὴ γραμμὴ παρουσιάζει μίαν κλίσιν 0,02 κατὰ τρέχον μέτρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

142. Μία ἁμαξοστοιχία διανύει ἕνα ἀνωφερικὸν τμῆμα 1200 μέτρων μιᾶς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς καὶ ἀνέρχεται οὕτω εἰς ὕψος 25 μετρ. ἄνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεώς της. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κλίσις τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς.

143. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ὁριζοντίου ἐδάφους, ἀπομακρυνόμεθα κατὰ 50 μέτρα ἀπὸ τὸν πόδα τοῦ πύργου καὶ παρατηροῦμεν τὴν κορυφήν του. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐδάφους γωνίαν 28^0 καὶ ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἔδαφος 1,60 μέτρ. νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

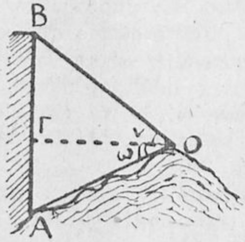
144. Ἐπὶ ἑνὸς τοπογραφικοῦ χάρτου μετροῦμεν, διὰ τῆς κλίμακος τοῦ χάρτου, τὴν ἀπόστασιν, ἡ ὁποία χωρίζει δύο σημεῖα μιᾶς ὁδοῦ καὶ εὑρίσκομεν 6000 μέτρα. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ὁδὸς αὐτὴ σχηματίζει μὲ τὸν ὁρίζοντα γωνίαν 8^0, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀληθὴς ἀπόστασις τῶν δύο σημείων.

145. Ἕνας μοχλὸς ΑΒ (Σχ. 60) μήκους 8 μέτρ. σχηματίζει γωνίαν 65^0 μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν πόδα του Β. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον ὕψος, ἄνω τοῦ ἐδάφους, εὑρίσκεται τὸ ἀνώτερον μέρος του Α. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μοχλὸς ΑΒ συγκρατεῖται μὲ μίαν ἄλυσσιν ΑΔ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ ἄξονος τοῦ μοχλοῦ καὶ σχηματίζει γωνίαν 36^0 μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΑΔ καὶ ἡ ἀπόστασις ΔΒ, ἡ ὁποία χωρίζει τὸ σημεῖον Δ τῆς στερεώσεώς της ἀπὸ τὸ σημεῖον Β τοῦ μοχλοῦ.



Σχ. 60.

146. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου ΑΒ (Σχ. 61), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι προσιτή, τοποθετοῦμεν εἰς ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐδάφους ἕνα γωνιομετρικὸν ὄργανον καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ω καὶ ν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις ΟΑ καὶ ΟΒ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Ο. Ἐπίσης μετροῦμεν τὸ μῆκος ΟΑ=α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου. Ἐφαρμογή: α = 65 μ., $\nu=26^0\,30'$ καὶ $\omega=34^0\,45'$.

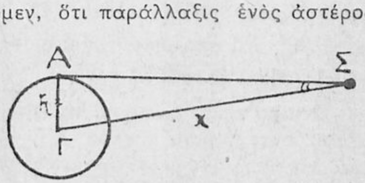


Σχ. 61.

147. Ὁ πλοίαρχος ἑνὸς πλοίου, τὸ ὁποῖον διευθύνεται πρὸς βορρᾶν, βλέπει πρὸς δυσμὰς δύο φάρους Φ καὶ Φ'. Μετὰ πορείαν μιᾶς ὥρας οἱ δύο φάροι φαίνονται, ὁ μὲν Φ' πρὸς Νοτιο - Δυτικά, ὁ δὲ Φ πρὸς Νοτιο - Νοτιο - Δυτικὰ τοῦ πλοίου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν φάρων εἶναι 8 χλμ.

81. Κοσμογραφίας, Γεωγραφίας κλπ. *Πρόβλημα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς Γῆς ἀπὸ τὴν Σελήνην, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μέση ὁριζοντία παράλλαξις τῆς Σελήνης εἶναι 57'.*

Ἀπὸ τὴν Κοσμογραφίαν γνωρίζομεν, ὅτι παράλλαξις ἑνὸς ἀστέρος λέγεται ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς, ἀπὸ τὸν ἀστέρα. Ἔστω Γ τὸ κέντρον τῆς Γῆς (Σχ. 62) καὶ Σ τὸ κέντρον τῆς Σελήνης. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΓ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΣΑ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (σφαιρικὴν) τῆς Γῆς. Ἂν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΑ εἰς τὸ σημεῖον



Σχ. 62.

τῆς ἐπαφῆς, σχηματίζεται τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΣΑΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς, δηλ. ἴσην μὲ 6371 χιλιόμ. περίπου καὶ τὴν γωνίαν Σ ἴσην μὲ 57'. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΓΣ, δηλ. ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΓΑΣ. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχομεν

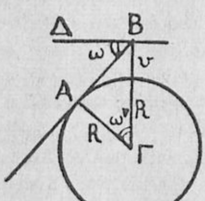
$$\text{ΑΓ}=\text{ΓΣ ημΣ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΓΣ}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ημΣ}}=\frac{6371}{\text{ημ}57'}=\frac{6371}{0{,}01658}=384\,258 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Σημείωσις. Οἱ ἀστρονόμοι διὰ νὰ ὑπολογίσουν τοιαύτας ἀποστάσεις, λαμβάνουν ὡς μονάδα μήκους τὴν ἀκτῖνα R τῆς Γῆς καὶ ὄχι τὸ χιλιόμετρον. Ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς θὰ εἶναι

$$\text{ΓΣ}=\frac{R}{\text{ημΣ}}=\frac{R}{0{,}01658}=60{,}3\,R \text{ περίπου.}$$

Πρόβλημα 2ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς, ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ βάθος τοῦ ὁρίζοντος εἶναι ω, δι' ἕνα παρατηρητήν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς ἕνα ὕψος υ ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῆς θαλάσσης.*

Ἔστω Γ τὸ κέντρον τῆς Γῆς, (Σχ. 63) Β ἡ θέσις τοῦ παρατηρητοῦ, ΒΔ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ διρχόμενον διὰ τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ΒΑ ἡ ὀπτικὴ ἀκτίς, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Τὸ βάθος τοῦ ὁρίζοντος διὰ τὸν παρατηρητὴν Β, εἶναι ἡ γωνία ΔΒΑ=ω. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΑ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α καὶ τὴν ΒΓ σχηματίζεται τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΓΑΒ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ω' εἶναι ἴση μὲ τὴν ω, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι, μία πρὸς μίαν. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΓΑΒ ἔχομεν



Σχ. 63.

$$\text{ΓΑ}=\text{ΓΒ συνω}' \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΓΑ=R, ΓΒ=ΓΕ+ΕΒ = R+υ καὶ ω'=ω ἡ (1) γίνεται

$$R=(R+υ)\text{συνω} \text{ ἢ } R=R\,\text{συνω}+υ\,\text{συνω}$$

ἢ

$$R-R\,\text{συνω}=υ\,\text{συνω} \text{ ἢ } R(1-\text{συνω})=υ\,\text{συνω},$$

$$\text{ἄρα} \quad R=\frac{υ\,\text{συνω}}{1-\text{συνω}}.$$

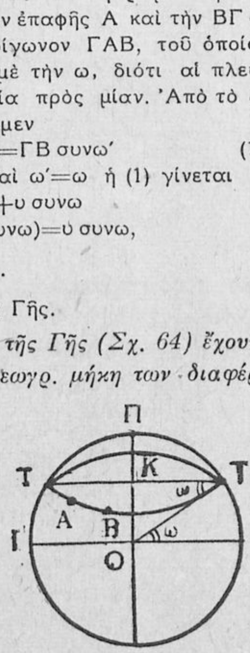
Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὴν ἀκτῖνα R τῆς Γῆς.

Πρόβλημα 3ον. *Δύο τόποι Α καὶ Β τῆς Γῆς (Σχ. 64) ἔχουν τὸ αὐτὸ βόρειον γεωγρ. πλάτος 48° καὶ τὰ γεωγρ. μήκη των διαφέρουν κατὰ 36°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασίς των (ἀκτὶς τῆς Γῆς=6371 χμ.).*

Οἱ δύο τόποι Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου κύκλου ΤΤ' τῆς Γῆς. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀπόστασίν των ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ=36° τοῦ κύκλου Τ'Τ'

Ἂν ΚΤ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Τ'Τ θὰ εἶναι

$$\text{Μῆκ. τόξ. ΑΒ}=\frac{2\pi.\text{ΚΤ}.36^0}{360^0}=\frac{\pi.\text{ΚΤ}}{5} \qquad (1)$$



Σχ. 64.

Ὑπολογίζομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΤ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΤ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΤ=6371 χμ. καὶ τὴν γωνίαν $\omega = I\widehat{O}T = 48^0$. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχομεν

$$KT = OT\,\text{συν}\,\omega \quad \text{ἢ} \quad KT = 6371.\text{συν}48^0 = 6371 \times 0{,}669 = 2255{,}20 \text{ χμ.}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ ΚΤ μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

$$\text{Μῆκ. τόξ. } AB = \frac{\pi.2255{,}20}{5} = 1416{,}2656 \text{ χμ.}$$

Ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων εἶναι 1416,2656 χμ.

Ἀσκήσεις. 148. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου κύκλου τῆς Γῆς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ γεωγρ. πλάτος του εἶναι $\varphi = 25^0$.

149. Δύο τόποι τῆς Γῆς ἔχουν τὸ αὐτὸ βόρειον γεωγρ. πλάτος 36^0 καὶ τὰ μήκη των διαφέρουν κατὰ 30^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασίς των.

150. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πάχος (ὕψος) τῆς ζώνης τῆς Γῆς, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν Τροπικῶν τοῦ Καρκίνου καὶ τοῦ Αἰγόκερω (Ἀκτὶς τῆς Γῆς R=6371 χμ. καὶ λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς$=23^0\,27'$).

151. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς εἰς γηΐνας ἀκτῖνας, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μέση ὁριζοντία παράλλαξις τοῦ Ἡλίου εἶναι 8″, 8.

152. Οἱ ἀστρονόμοι παρετήρησαν, ὅτι ἡ μεγαλυτέρα γωνιώδης ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ πλανήτου Ἀφροδίτης καὶ τοῦ Ἡλίου εἶναι περίπου 46^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλανήτου αὐτοῦ ἀπὸ τὸν Ἥλιον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ Ἡλίου καὶ Γῆς εἶναι 149 000 000 χμ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

82. Ἄθροισμα τόξων. Ἔστωσαν τὰ τόξα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. . . . , τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν προσανατολισμένον κύκλον καὶ τῶν ὁποίων τὰ μέτρα των εἶναι ἀντιστοίχως $\widehat{AB}=\alpha$, $\widehat{\Gamma\Delta}=\beta$, $\widehat{EZ}=\gamma$, . . .

Θὰ ὀνομάσωμεν ἄθροισμα τῶν τόξων αὐτῶν, τὸ τριγωνομετρικὸν τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄθροισμα α+β+γ+... τῶν μέτρων τῶν τόξων αὐτῶν:

Ἐὰν $\alpha=25^\circ$, $\beta=95^\circ$, $\gamma=-36^\circ$ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{EZ}$ εἶναι $25^\circ+95^\circ-36^\circ=84^\circ$.

Ἐπίσης ἐὰν εἶναι $\alpha=375^\circ$, $\beta=-400^\circ$, $\gamma=565^\circ$, τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{EZ}$ εἶναι $375^\circ-400^\circ+565^\circ=540^\circ$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ ἑνὸς προσανατολισμένου κύκλου τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{EZ}$ λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, ἕνα τόξον $\widehat{BK}$ ἴσον μὲ τὸ τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$, ἔπειτα ἐν συνεχείᾳ τοῦ τόξου $\widehat{BK}$, ἕνα τόξον $\widehat{K\Lambda}$ ἴσον μὲ τὸ τόξον $\widehat{EZ}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκεῖνο ἀπὸ τὰ τόξα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀρχὴν τὸ Α καὶ ὡς τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τόξου καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ἴσον μὲ α+β+γ+. . . . εἶναι τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν δοθέντων τόξων.

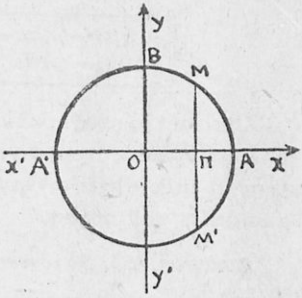
83. Διαφορὰ δύο τόξων. Ὀνομάζομεν ***διαφορὰν δύο τόξων*** α καὶ β ἕνα ἄλλο τόξον γ, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ β νὰ δίδῃ τὸ τόξον α. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτον τόξον καὶ ὅτι τὸ μέτρον του εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων α καὶ β τῶν τόξων.

84. Τόξα ἀντίθετα. Α΄. Δύο τόξα λέγονται ***ἀντίθετα,*** ἐὰν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.

Π. χ. τὰ τόξα 40° καὶ -40° εἶναι ἀντίθετα.

Β΄. ***Πρόβλημα.*** *Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν ἄκρων δύο ἀντιθέτων τόξων.*

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο (Σχ. 65) Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, x′Ox ὁ ἄξων τῶν συνημιτόνων καὶ y′Oy ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων. Ἔστωσαν ἐπίσης καὶ τὰ ἀντίθετα τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′. Ἂν εἶναι $\widehat{AM}=\omega$, θὰ εἶναι $\widehat{AM'}=-\omega$.



Σχ. 65.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα αὐτὰ εἶναι ἀντίθετα, τὰ μέτρα των $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AM'}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν· δηλ. ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν περιφερειῶν, ηὐξημένον κατὰ τὰ ἴσα γεωμετρικὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′.

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΜΜ′. Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι ἴσα κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, ἡ διάμετρος Α′ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΜΜ′ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Π. Τὰ ἄκρα λοιπὸν Μ καὶ Μ′ τῶν τόξων ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον ΑΑ′. Ὥστε:

Ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι ἀντίθετα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀρχήν των.

Γ′. *Σύγκρισις τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο ἀντιθέτων τόξων.* Ἔστωσαν $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AM'}$ δύο ἀντίθετα τόξα (Σχ. 65) $\widehat{AM}=\omega$, $\widehat{AM'}=-\omega$ τὰ μέτρα των. Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι τὰ πέρατά των Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΑΑ′· ἄρα θὰ εἶναι, ἀπολύτως ΠΜ=ΠΜ′. Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\Pi M}$ καὶ $\overrightarrow{\Pi M'}$ θὰ εἶναι

$$\overline{\Pi M}=-\overline{\Pi M'} \quad ἢ \quad ημω=-ημ(-ω) \quad ἢ \quad ημ(-ω)=-ημω \qquad (1)$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τόξα $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AM'}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον $\overline{O\Pi}$· δηλ. εἶναι $συν(-ω)=συνω$ (2)

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{ημ(-ω)}{συν(-ω)}=\frac{-ημω}{συνω} \quad ἢ \quad εφ(-ω)=-εφω.$$

Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν τὰς (2) καὶ (1) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$σφ(-ω)=-σφω.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Δύο τόξα ἀντίθετα ἔχουν τὰ αὐτὰ συνημίτονα, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Δηλ. εἶναι :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega, & \varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\upsilon\nu(-\omega)=\ \sigma\upsilon\nu\omega, & \sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega \end{array}}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἡμιτόνου ἢ μιᾶς ἐφαπτομένης ἢ μιᾶς συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου, πρέπει νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ τόξου.

Ἀσκήσεις. 153. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων -30^0, -45^0, -60^0.

154. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων (διὰ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν) :

$A=\eta\mu(-24^0)-\sigma\upsilon\nu(-56^0)+\varepsilon\varphi(-72^0)+\sigma\varphi(-12^0)$

$B=\eta\mu(-35^0\,30')+\sigma\upsilon\nu(42^0\,30')-\varepsilon\varphi(-25^0\,30')-\sigma\varphi(-75^0\,30')$

$\Gamma=\varepsilon\varphi(-18^0\,40')-\sigma\varphi(27^0\,10')+\sigma\upsilon\nu(-70^0\,30')+\eta\mu(68^0\,10')$.

Β' Ὁμάς. **155.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu\omega.\sigma\upsilon\nu(-\omega)+\eta\mu^2\omega=1$
2. $\varepsilon\varphi\omega\,.\,\sigma\varphi(-\omega)+\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=0$.

156. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀρχήν των Α, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

85. Τόξα παραπληρωματικά. Α'. Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ὅταν τὰ μέτρα των ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 180^0 ἢ μὲ 200 βαθμοὺς ἢ μὲ π ἀκτίνια.

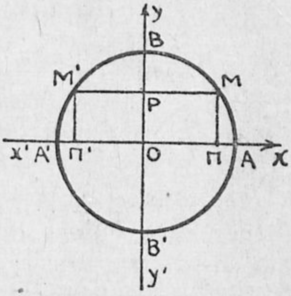
Π.χ. τὰ τόξα 52^0 καὶ 128^0 εἶναι παραπληρωματικά, διότι τὰ μέτρα των ἔχουν ἄθροισμα $52^0+128^0=180^0$.

Ἐπίσης τὰ τόξα 500^0 καὶ -320^0 εἶναι παραπληρωματικά, διότι τὰ μέτρα των ἔχουν ἄθροισμα $500^0+(-320^0)=180^0$.

Ἐὰν τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου εἶναι ω μοῖραι ἢ βαθμοὶ ἢ ἀκτίνια, τὸ μέτρον τοῦ παραπληρωματικοῦ του εἶναι $180^0-\omega$ μοῖραι, ἢ $200-\omega$ βαθμοὶ ἢ $\pi-\omega$ ἀκτίνια.

Β'. *Πρόβλημα.* *Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο παραπληρωματικῶν τόξων.*

Ἔστω ἕνα τόξον $\widehat{AM}$ (Σχ. 66) τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ω μοῖραι. Τὸ παραπληρωματικόν του θὰ ἔχῃ μέτρον $180^0-\omega$. Ἐπειδὴ $180^0-\omega=180+(-\omega)$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο, τὸ παραπληρωματικὸν τόξον τοῦ ΑΜ. Πρὸς τοῦτο, ἀπὸ τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἕνα τόξον ΑΑ', τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι 180^0· ἔπειτα ἀπὸ τὸ σημεῖον Α' καὶ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν λαμβάνομεν ἕνα τόξον Α'Μ', τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ἀπολύτως ἴσον μὲ ω μοίρας. Τὸ θετικὸν τόξον ΑΜ', τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ' εἶναι τὸ παραπληρωματικὸν τοῦ τόξου $\widehat{AM}$.



Σχ. 66.

Ἐπειδὴ τὰ γεωμετρικὰ τόξα ΑΜ καὶ Α'Μ' εἶναι ἴσα, ἡ χορδὴ ΜΜ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΑΑ' καὶ συνεπῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΒ'.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

1ον. ***Ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι παραπληρωματικὰ καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, τὰ περατά των κεῖνται ἐπὶ μιᾶς χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον ΑΑ'.***

2ον. ***Δύο παραπληρωματικὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, ἔχουν τὰ πέρατά των συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΒΒ'.***

Γ'. *Σύγκρισις τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο παραπληρωματικῶν τόξων.* Ἔστω $\widehat{AM}$ (Σχ. 66) ἕνα τόξον καὶ ω τὸ μέτρον του. Τὸ παραπληρωματικόν του, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, θὰ λήγῃ εἰς τὸ σημεῖον Μ' συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y'y. Τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΜ' θὰ εἶναι $\widehat{AM'}=180^0-\omega$.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΒΒ', θὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν

$$\text{PM}=\text{PM}' \quad \text{ἢ} \quad \text{ΟΠ}=\text{ΟΠ}'.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΟΠ}}$ καὶ $\overrightarrow{\text{ΟΠ}'}$ θὰ εἶναι

$$\overline{\text{ΟΠ}}=-\overline{\text{ΟΠ}'}$$

ἢ $\quad$ $\text{συν}\omega=-\text{συν}(180^0-\omega)$ ἢ $\text{συν}(180^0-\omega)=-\text{συν}\omega$ $\quad$ (1)

Ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΠ καὶ Π'Μ' ἐπὶ τὴν διάμετρον Α'Α, αἱ κάθετοι αὐταὶ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς κάθετοι περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Α'Α καὶ Μ'Μ'. Θὰ εἶναι δηλ. κατ' ἀπόλυτον τιμὴν

$$\text{ΠΜ}=\text{Π}'\text{Μ}'=\text{ΟΡ}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\Pi M}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{\Pi' M'}$

θὰ εἶναι $\overline{\Pi' M'} = \overline{\Pi M} = \overline{OP}$ ἢ ημ$(180^0 - \omega) =$ ημω (2)

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (2) καὶ (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ημ}(180^0-\omega)}{\text{συν}(180^0-\omega)} = \frac{\text{ημω}}{-\text{συνω}} \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}(180^0-\omega) = -\text{εφω}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν σφ$(180^0 - \omega) = -$σφω.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.
Δηλ. εἶναι

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{ημ}(180^0-\omega) = \text{ημω}, & \text{εφ}(180^0-\omega) = -\text{εφω} \\ \text{συν}(180^0-\omega) = -\text{συνω}, & \text{σφ}(180^0-\omega) = -\text{σφω} \end{array}}$$

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **157.** Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κάτωθι τόξων:

1ον. 120^0, 135^0, 150^0. 2ον. -120^0, -135^0, -150^0.

158. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων (διὰ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν)

Α=ημ125^0+συν160^0+εφ128^0+σφ105^0

Β=ημ$150^0\,30^0$+συν$120^0\,30'$—εφ$135^0\,30^0$—σφ$168^0\,30'$

Γ=ημ$100^0\,40'$—συν$140^0\,10'$—εφ$150^0\,20'$+σφ$112^0\,40'$.

159. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

Α=ημ120^0 συν150^0 εφ135^0, Β=ημ(-120^0) συν(-135^0) εφ(-150^0).

160. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$\text{Α} = \text{ημ}\frac{5\pi}{6}\,\text{συν}\frac{3\pi}{4}\,\text{εφ}\frac{2\pi}{3} \qquad \text{Β} = \text{ημ}\frac{2\pi}{3}\,\text{συν}\frac{3\pi}{4}\,\text{εφ}\frac{5\pi}{6}$$

Β' Ὁμάς. **161.** Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. ημ(Α+Β)=ημΓ, συν(Α+Β)=—συνΓ, εφ(Α+Β)=—εφΓ
2. ημ(Β+Γ)=ημΑ, συν(Β+Γ)=—συνΑ, εφ(Β+Γ)=—εφΑ
2. ημ(Γ+Α)=ημΒ, συν(Γ+Α)=—συνΒ, εφ(Γ+Α)=—εφΒ.

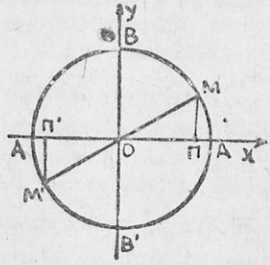
162. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὰ πέρατά των κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀρχήν των, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ π.

86. Τόξα διαφέροντα κατὰ 180^0. Α'. Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ ἕνα τόξον (Σχ. 67) καὶ ω τὸ μέτρον του. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΜ'· εἶναι προφανές, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΜ' θὰ εἶναι $\omega + 180^0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τόξα $\overset{\frown}{AM} = \omega$ καὶ $\overset{\frown}{AM'} = 180^0 + \omega$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, διαφέρουν κατὰ 180^0 καὶ ὅτι τὰ πέρατά των Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου· ὥστε :

Ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ διαφέρουν κατὰ 180^0, τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Β′. *Σύγκρισις τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων διαφερόντων κατὰ 180^0.* Ἔστωσαν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AM}=\omega$ καὶ $\overset{\frown}{AM'}=180^0+\omega$ (Σχ. 67), τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 180^0.



Σχ. 67.

Φέρομεν τὰς καθέτους ΜΠ καὶ Μ′Π′ ἐπὶ τὴν διάμετρον Α′Α.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο, αἱ συντεταγμέναι των θὰ εἶναι ἀντίθετοι· δηλ, θὰ εἶναι

$$\overline{\Pi M}=-\overline{\Pi' M'} \quad \text{ἢ} \quad \overline{\Pi' M'}=-\overline{\Pi M} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu(180^0+\omega)=-\eta\mu\omega \quad (1)$$

$$\overline{O\Pi}=-\overline{O\Pi'} \quad \text{ἢ} \quad \overline{O\Pi'}=-\overline{O\Pi} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(180^0+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega \quad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\eta\mu(180^0+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(180^0+\omega)}=\frac{-\eta\mu\omega}{-\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi(180^0+\omega)=\varepsilon\varphi\omega.$$

Ὁμοίως ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (2) καὶ (1) εὑρίσκομεν, ὅτι $\sigma\varphi(180+\omega)=\sigma\varphi\omega.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Δύο τόξα, τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 180^0 ἔχουν τὰς αὐτὰς ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Δηλ. εἶναι

$$\boxed{\begin{array}{ll} \eta\mu(180^0+\omega)=-\eta\mu\omega, & \varepsilon\varphi(180^0+\omega)=\varepsilon\varphi\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^0+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega, & \sigma\varphi(180^0+\omega)=\sigma\varphi\omega \end{array}}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς συνημιτόνου ἑνὸς τόξου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν 180^0 εἰς τὸ τόξον.

Ἀσκήσεις. 163. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων:
1ον 210^0, 225^0, 240^0. 2ον -210^0, -225^0, -240^0.

164. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων (διὰ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν):

$A = ημ250^\circ - συν240^\circ + εφ230^\circ + σφ220^\circ$

$B = ημ204^\circ\,30' + συν190^\circ\,30' - εφ254^\circ\,30' + σφ260^\circ\,30'$

$Γ = ημ198^\circ\,40' - συν200^\circ\,20' + εφ264^\circ\,10' - σφ205^\circ\,20'$.

165. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$A = ημ210^\circ\, συν225^\circ\, εφ240^\circ$, $\quad B = ημ(-225^\circ)\, συν(-240^\circ)\, εφ(-210^\circ)$.

166. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1. $ημ\frac{5π}{4} συν\frac{7π}{6} εφ\frac{4π}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\quad$ 2. $συν\frac{5π}{4} ημ\frac{7π}{6} εφ\frac{4π}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

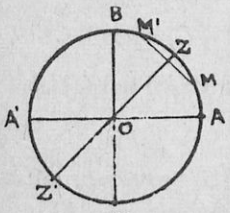
167. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων των εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ π.

87. Τόξα συμπληρωματικά. Α΄. Δύο τόξα λέγονται ***συμπληρωματικά***, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των εἶναι ἴσον μὲ 90°, ἢ μὲ 100 βαθμοὺς ἢ μὲ $\frac{π}{5}$ ἀκτίνια.

Π. χ. τὰ τόξα -125° καὶ 215° εἶναι συμπληρωματικά, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των εἶναι $-125^\circ + 215^\circ = 90^\circ$.

Ἐὰν τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου εἶναι ω μοῖραι ἢ βαθμοὶ ἢ ἀκτίνια, τὸ μέτρον τοῦ συμπληρωματικοῦ του εἶναι $90^\circ - ω$ μοῖραι, ἢ $100 - ω$ βαθμοὶ ἢ $\frac{π}{2} - ω$ ἀκτίνια.

Β΄. *Πρόβλημα.* *Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο συμπληρωματικῶν τόξων.*



Σχ. 68.

Ἔστω ἕνα τόξον $\widehat{AM}$ (Σχ. 68) καὶ ω τὸ μέτρον του. Τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ $\widehat{AM'}$ θὰ ἔχῃ μέτρον $90^\circ - ω$.

Ἐπειδὴ $90^\circ - ω = 90^\circ + (-ω)$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο, τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ τόξου ΑΜ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἕνα τόξον ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι 90°· ἔπειτα ἀπὸ τὸ σημεῖον Β καὶ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν λαμβάνομεν ἕνα τόξον ΒΜ΄, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ἀπολύτως ἴσον μὲ ω μοίρας. Τὸ θετικὸν τόξον $\widehat{AM'}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ΄ εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ τόξου $\widehat{AM}$.

Φέρομεν τὴν διχοτόμον Ζ΄Ζ τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τὴν χορδὴν ΜΜ΄.

Ἐπειδὴ ἡ Ζ΄Ζ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ, τὰ γεωμετρικὰ τόξα ΑΖ καὶ ΒΖ εἶναι ἴσα. Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα γεωμετρικὰ τόξα ΑΜ καὶ ΒΜ′, τὰ ἀπομένοντα γεωμετρικὰ τόξα ΖΜ καὶ ΖΜ′ θὰ εἶναι ἴσα.

Ἡ διχοτόμος λοιπὸν Ζ′Ζ διχοτομεῖ τὸ τόξον ΜΜ′ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΜΜ′. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν Ζ′Ζ′.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

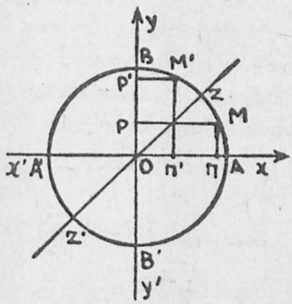
Ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι συμπληρωματικὰ καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διχοτόμον τῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$.

Γ′. *Σύγκρισις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων συμπληρωματικῶν.* Ἔστωσαν $\widehat{AM}=\omega$ καὶ $\widehat{AM'}=90^0-\omega$ δύο συμπληρωματικὰ τόξα (Σχ. 69).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου θὰ εἶναι

$$\eta\mu\omega=\overline{\Pi M},\quad \sigma\upsilon\nu\omega=\overline{O\Pi},$$

$$\eta\mu(90^0-\omega)=\overline{\Pi' M'},\quad \sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)=\overline{O\Pi'}.$$



Σχ. 69.

Ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω τὰ πέρατα Μ καὶ Μ′ δύο συμπληρωματικῶν τόξων εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν Ζ′Ζ. Ἂν λοιπὸν περιστρέψωμεν τὸ ἡμικύκλιον Ζ′Β′Ζ περὶ τὴν διχοτόμον Ζ′Ζ μέχρις ὅτου ἐφαρμόσει ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου, τὸ σημεῖον Μ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του Μ′ καὶ ὁ ἡμιάξων Οx ἐπὶ τοῦ Οy· τότε τὸ σημεῖον Π θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον Ρ′, διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν Οy ἀπὸ τὸ Μ′. Ἐπίσης τὸ σημεῖον Π′ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον Ρ, ἡ δὲ θετικὴ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος x′Οx θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y′Οy καὶ ἑπομένως τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OP'}$ καὶ $\overrightarrow{O\Pi}$ θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ θὰ εἶναι ὁμόσημα: δηλ. θὰ εἶναι :

$$\overline{OP'}=\overline{O\Pi} \quad ἢ \quad \eta\mu(90^0-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad (1)$$

Ὁμοίως καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{O\Pi'}$ καὶ $\overrightarrow{OP}$ θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ θὰ εἶναι ὁμόσημα : δηλ. θὰ εἶναι :

$$\overline{O\Pi'}=\overline{OP} \quad ἢ \quad \sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)=\eta\mu\omega \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\eta\mu(90^0-\omega)}{\sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi(90^0-\omega)=\sigma\varphi\omega$$

Ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας (2) καὶ (1) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\sigma\varphi(90^0-\omega)=\varepsilon\varphi\omega$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἐὰν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου τόξου καὶ ἡ ἐφαπτομένου τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἄλλου. Δηλ. εἶναι

$$\boxed{\begin{array}{ll}\eta\mu(90^0-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega, & \varepsilon\varphi(90^0-\omega)=\sigma\varphi\omega\\ \sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)=\eta\mu\omega, & \sigma\varphi(90^0-\omega)=\varepsilon\varphi\omega\end{array}}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς συνάγομεν, ὅτι

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἡμίτονον εἰς συνημίτονον, ἢ ἕνα συνημίτονον εἰς ἡμίτονον, ἢ μίαν ἐφαπτομένην εἰς συνεφαπτομένην ἢ μίαν συνεφαπτομένην εἰς ἐφαπτομένην, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ συμπληρωματικὸν τόξον τοῦ δοθέντος.

Ἀσκήσεις. 168. Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, $\quad\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, $\quad\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$

2ον. $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\quad\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}$, $\quad\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}$

3ον. $\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\quad\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+A}{2}=\eta\mu\frac{B}{2}$, $\quad\varepsilon\varphi\frac{\Gamma+A}{2}=\sigma\varphi\frac{B}{2}$.

169. Ἐὰν $\alpha+\beta=90^0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta=1$.

170. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\eta\mu(45^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu(45^0-\omega)$.

171. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$A=\eta\mu(90^0-\omega)\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)\eta\mu\omega$$
$$B=\varepsilon\varphi(90^0-\omega)\varepsilon\varphi\omega-\sigma\varphi(90^0-\omega)\sigma\varphi\omega.$$

172. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διχοτόμον τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ καὶ τῆς μορφῆς $(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

88. Τόξα διαφέροντα κατὰ 90°. Ἔστωσαν ω καὶ $90^0+\omega$ τὰ μέτρα δύο τόξων, τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 90^0.

Ἐὰν λάβωμεν τὰ συμπληρωματικὰ τόξα $90^0+\omega$ καὶ $-\omega$, κατὰ τὴν § 87, θὰ εἶναι:

$$\eta\mu(90^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu(-\omega) \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu(90^0+\omega)=\eta\mu(-\omega) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα —ω καὶ ω εἶναι ἀντίθετα, θὰ εἶναι

συν(—ω)=συνω καὶ ημ(—ω)=—ημω.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἰσότητας (1) τὰ δεύτερα μέλη των διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\eta\mu(90^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega}\ ,\quad \boxed{\sigma\upsilon\nu(90^0+\omega)=-\eta\mu\omega}$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi(90^0+\omega)=-\sigma\varphi\omega\ ,\quad \sigma\varphi(90^0+\omega)=-\varepsilon\varphi\omega}$$

Ἀσκήσεις. 173. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ημ(90°+ω)ημω+συν(90°+ω)συνω=0.
174. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι σφ(90°+ω)εφω+σφ(90°—ω)εφω=0.

89. Δύο τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 360°. Ἔστωσαν ω καὶ 360°—ω αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ δύο τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα ω+(360°—ω)=360°. Ἐπειδὴ τὸ 360°—ω γράφεται: 360°+(—ω), παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μέτρα —ω καὶ 360°+(—ω) διαφέρουν κατὰ ὁλόκληρον περιφέρειαν· ἄρα θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς· δηλ. θὰ εἶναι:

ημ(360°—ω) = ημ(—ω), εφ(360°—ω)=εφ(—ω)
συν(360°—ω)=συν(—ω), σφ(360°—ω)=σφ(—ω) (1)

Ἐπειδὴ ὅμως ημ(—ω)=—ημω, συν(—ω)=συνω, εφ(—ω)=—εφω καὶ σφ(—ω)=—σφω, αἱ ἰσότητες (1) γράφονται

$$\boxed{\begin{array}{ll}\eta\mu(360^0-\omega)=-\eta\mu\omega\ , & \varepsilon\varphi(360^0-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega\\ \sigma\upsilon\nu(360^0-\omega)=\ \sigma\upsilon\nu\omega, & \sigma\varphi(360^0-\omega)=-\sigma\varphi\omega\end{array}}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 360°, ἔχουν τὰ αὐτὰ συνημίτονα καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις. 175. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:
1. ημ150°συν240°—συν300°ημ210° = 0
2. εφ315°σφ225° — εφ225°σφ135°=0.

176. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:
1. ημω+ημ(90°—ω)+ημ(180°+ω)+ημ(270°—ω)=0
2. συνω+συν(90°+ω)+συν(180°+ω)+ημ(180°—ω)=0

177. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
1. συνω+ημ(270°+ω)—ημ(270°—ω)+συν(180°+ω)=0
2. σφω+ εφ(180°+ω) + εφ(90°+ω) + εφ(360°—ω)=0.

90. Ἀναγωγὴ ἑνὸς τόξου εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον. Εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, ὅπου ὑπεισέρχονται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, χρησιμοποιοῦμεν πίνακας, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἢ τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναγάγωμεν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς οἱουδήποτε τόξου εἰς ὑπολογισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τοῦ τεταρτημορίου.

Ἡ ἀναγωγὴ ἑνὸς τόξου εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

I. Τόξα θετικά.

1ον. Ἐὰν τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0, ὅπως π.χ. τὸ 145^0, εὑρίσκομεν τὸ παραπληρωματικόν του $180^0-145^0=35^0$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τῶν 90^0.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 145^0 καὶ 35^0 εἶναι παραπληρωματικά, θὰ εἶναι (85)

$$\etaμ145^0= ημ35^0= 0{,}57358, \qquad εφ145^0=-εφ35^0=-0{,}70021$$
$$συν145 =-συν35=-0{,}81915, \qquad σφ145^0=-σφ35^0=-1{,}42815.$$

2ον. Ἐὰν τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0, ὅπως π.χ. τὸ 260^0, εὑρίσκομεν τὸ τόξον τὸ διαφέρον αὐτοῦ κατὰ 180^0. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 260^0 τὰς 180^0 καὶ εὑρίσκομεν τὸ τόξον $260^0-180^0=80^0$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τῶν 90^0.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 260^0 καὶ 80^0 διαφέρουν κατὰ ἡμιπεριφέρειαν (§ 86), θὰ εἶναι:

$$ημ260^0=-ημ80^0=-0{,}98481, \qquad εφ260^0=εφ80^0=5{,}67128$$
$$συν260^0=-συν80^0=-0{,}17365, \qquad σφ260^0=σφ80^0=0{,}17633.$$

3ον. Ἐὰν τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0, ὅπως π. χ. 340^0, εὑρίσκομεν τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ δοθὲν δίδει ἄθροισμα 360^0. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 360^0 τὰς 340^0 καὶ εὑρίσκομεν τὸ τόξον $360^0-340^0=20^0$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τῶν 90^0.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 340^0 καὶ 20^0 ἔχουν ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, θὰ εἶναι (89)

$$ημ340^0=-ημ20^0=-0{,}34202, \qquad εφ340^0=-εφ20^0=-0{,}36397$$
$$συν340^0= συν20^0= 0{,}93969, \qquad σφ340^0=-σφ20^0=-2{,}74748$$

4ον. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι μεγαλύτερον τῶν 360^0, ἡ ἀναγωγὴ γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τὸ τόξον 795^0. Διαιροῦμεν τὰς 795^0 διὰ 360 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 75. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$795^0=360^0.2+75^0.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 795^0 καὶ 75^0 διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας, θὰ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς· δηλ. θὰ εἶναι

$$ημ795^0 = ημ75^0 = 0,96593, \qquad εφ795^0 = εφ75^0 = 3,73205$$
$$συν795^0 = συν75^0 = 0,25882, \qquad σφ795^0 = σφ75^0 = 0,26795.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς τόξου διὰ 360 εἶναι μεγαλύτερον τῶν 90^0, τότε ἀναγόμεθα εἰς μίαν ἀπὸ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

II τόξα ἀρνητικά. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι ἀρνητικόν, ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους τῆς § 84. Γ καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα, ὅπως ἐδείξαμεν ἀνωτέρω:

Π.χ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου $-135^0\,40'$ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$ημ(-135^0\,40') = -ημ(135^0\,40') = -ημ(44^0\,20') = -0,69883$$
$$συν(-135^0\,40') = συν(135^0\,20') = -συν(44^0\,20') = -0,71529 \quad κλπ.$$

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* **178.** Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κάτωθι τόξων:

1ον.	$165^0\,20'$	$245^0\,10'$	καὶ	$350^0\,50'$
2ον.	750^0	1100^0	καὶ	2120^0
3ον.	$\frac{25\,\pi}{4}$	$\frac{11\,\pi}{5}$	καὶ	$\frac{17\,\pi}{3}$.

179. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$A = ημ68^0 + συν145^0 + εφ204^0 + σφ310^0$$
$$B = ημ154^0\,30' - συν258^0\,30' - εφ322^0\,30' + σφ28^0\,30'$$
$$Γ = ημ75^0\,40' + συν340^0\,10' - εφ164^0\,20' + σφ190^0\,40'$$
$$Δ = ημ(-35^0) + συν(-156^0) + εφ(-250^0) + σφ(-345^0)$$
$$E = ημ790^0 + συν1320^0 + εφ810^0 + σφ2140^0.$$

Β' Ὁμάς. Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κάτωθι τόξων συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου x:

180.	$x+5\pi,$	$x+3\pi,$	$-x-5\,\pi$
181.	$x-\frac{5\,\pi}{2}$	$-x-\frac{3\,\pi}{2}$	$x+\frac{5\,\pi}{2}$
182.	$x-\frac{7\,\pi}{2}$	$-x+\frac{3\,\pi}{2}$	$-x-7\pi.$

N **183.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $y = \dfrac{ημ(\pi+α)συν\left(α-\frac{\pi}{2}\right)εφ(7\pi+α)}{συν(3\pi-α)ημ\left(\frac{3\,\pi}{2}+α\right)εφ(2\pi+α)}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΔΟΘΕΝΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

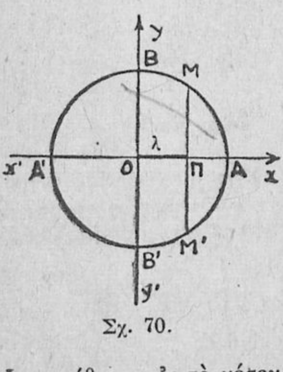
91. Κυκλικαὶ συναρτήσεις ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν § 50 κλπ. τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας ἔχουν τιμάς, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ τόξου των ἢ τῆς γωνίας των. Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται καὶ ***κυκλικαὶ συναρτήσεις τοῦ τόξου αὐτοῦ*** ἢ τῆς γωνίας αὐτῆς.

Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι εἰς δοθὲν τόξον ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον ἡμίτονον, ἕνα συνημίτονον, μία ἐφαπτομένη, δηλ. ἕνας καὶ μόνον τριγωνομετρικὸς ἀριθμός.

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἰς δοθέντα ***τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχοῦν ἄπειρα τόξα.***

92. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα x, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθὲν συνημίτονον λ.***

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου μεταβάλλεται ἀπὸ -1 ἕως $+1$· διὰ νὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς λ νὰ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$.



Σχ. 70.

Ἔστω Ο (Σχ. 70) ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{O\Pi}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{O\Pi}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ λ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων x΄Οx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄· τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον ΑΟΑ΄, διότι ἡ ΑΟΑ΄ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΜΜ΄.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον Μ ἢ τὸ σημεῖον Μ′ ἔχουν συνημίτονον $\overline{O\Pi}=\lambda$ καὶ εἶναι τὰ μόνα, ποὺ ἔχουν συνημίτονον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν λ.

Ἀφοῦ ὡρίσθησαν τὰ ἄκρα τῶν τόξων αὐτῶν, ἂς ζητήσωμεν τώρα τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μέτρων των.

Ἔστω α τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ μικροτέρου τόξου $\widehat{AM}$· ὅλα τὰ τόξα $\widehat{AM}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ, ἔχουν μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x_1=\alpha+2k\pi.$$

Μεταξὺ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον Μ′ ὑπάρχει ἕνα τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον εἶναι —α. Ἑπομένως ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον Μ′, ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x_2=-\alpha+2k\pi.$$

Οἱ δύο προηγούμενοι τύποι συγχωνεύονται εἰς τὸν τύπον

$$\boxed{x=2k\pi\pm\alpha}$$

Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν συνάγομεν καὶ ὅτι :

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των ἢ ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων των εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ μέτρον α τοῦ τόξου παριστάνῃ μοίρας, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται

$$\boxed{x=360^0k\pm\alpha}$$

93. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. 1ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ συνημίτονον εἶναι μηδέν.* Τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἔχουν συνημίτονον μηδέν, λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Β ἢ εἰς τὸ Β′ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

2ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ συνημίτονον εἶναι +1.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x=2k\pi.$$

3ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ συνημίτονον εἶναι —1.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Α′ ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx′ καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x=(2k+1)\pi.$$

94. Ἐφαρμογή. ***Παράδειγμα 1ον.*** *Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα* $συνx=συν80^0$.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ 80^0 ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, συνδέονται διὰ τοῦ τύπου $x=360^0k\pm80^0$. (1)

Ἐὰν $k=0$ ὁ τύπος (1) δίδει $x=\pm80^0$

» $k=1$ » » » » $x_1=440^0$ καὶ $x_2=280^0$

» $k=2$ » » » » $x_2=800^0$ » $x_2=640^0$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συνημίτονον 0,5.*

Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὸ μέτρον ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα αὐτά, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $συνx=0,5$ (1)

Ἐπειδὴ $0,5=συν60^0$, ἡ (1) γράφεται $συνx=συν60^0$.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ 60^0, ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, συνδέονται διὰ τοῦ τύπου $x=360^0k\pm60^0$. (2)

Ἐὰν $k=0$, ὁ τύπος (2) δίδει $x=\pm60^0$.

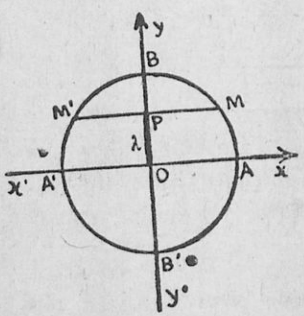
Ἐὰν $k=1$, ὁ τύπος (2) δίδει $x_1=420^0$ καὶ $x_2=300^0$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις. 184. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἰσότητας:

1. $συνx=συν\frac{\pi}{4}$.
2. $συνx=0,93565$.

95. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα x, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθὲν ἡμίτονον λ.***

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου μεταβάλλεται ἀπὸ -1 ἕως $+1$· διὰ νὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς λ νὰ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$.



Σχ. 71.

Ἔστω O ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ A ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων (Σχ. 71). Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{OP}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ λ· ἀπὸ τὸ σημεῖον P φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M', τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον A'A.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ A καὶ τέλος τὸ σημεῖον M ἢ τὸ M', ἔχουν ἡμίτονον $\overline{OP}=λ$ καὶ εἶναι τὰ μόνα, ποὺ ἔχουν ἡμίτονον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν λ.

Ἂς ζητήσωμεν τώρα τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μέτρων $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AM'}$ τῶν τόξων αὐτῶν.

Ἔστω α τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ μικροτέρου τόξου $\widehat{AM}$. Ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ, ἔχουν μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\boxed{x_1 = \alpha + 2k\pi}$$

Μεταξὺ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ', ὑπάρχει ἕνα τόξον ΑΜ', μικρότερον ἡμιπεριφερείας, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι π—α (διότι τὰ τόξα ΑΜ καὶ Α'Μ' εἶναι ἀπολύτως ἴσα). Ἑπομένως ὅλα τὰ τόξα, ποὺ ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ', ἔχουν μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi \quad \text{ἢ} \quad \boxed{x_2 = (2k+1)\pi - \alpha}$$

Ἀπὸ τοὺς δύο ἀνωτέρους τύπους συνάγομεν, ὅτι

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον:

Ἡ διαφορά των εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας· ἢ τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον περιφερείας.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ μέτρον α τοῦ τόξου παριστάνῃ μοίρας, οἱ ἀνωτέρω τύποι γράφονται

$$\boxed{x = \alpha + 360^\circ k \quad \text{καὶ} \quad x = (2k+1)180^\circ - \alpha}$$

96. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. 1ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ ἡμίτονον εἶναι μηδέν.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Α ἢ εἰς τὸ Α' ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ μοναδικοῦ τύπου

$$x = k\pi.$$

2ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ ἡμίτονον εἶναι ἴσον μὲ +1.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Oy καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ μοναδικοῦ τύπου $\quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

3ον. *Τόξα τῶν ὁποίων τὸ ἡμίτονον εἶναι ἴσον μὲ —1.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον Β' ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Oy' καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ μοναδικοῦ τύπου $\quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$.

97. Ἐφαρμογή. *Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον 0,52982.*

Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὸ μέτρον ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα αὐτά, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\eta\mu x = 0{,}52982 \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ὅτι $0{,}52982 = \eta\mu 32^\circ$. Ἑπομένως ἡ (1) γράφεται

$$\eta\mu x = \eta\mu 32^\circ.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ 32°, ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, συνδέονται διὰ τῶν τύπων

$$x = 360^\circ k + 32^\circ \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad x = (2k+1)180^\circ - 32^\circ \quad (3)$$

Ἐὰν $k=0$ ὁ τύπος (2) δίδει $x = 32^\circ$ καὶ ὁ τύπος (3) δίδει $x=148^\circ$

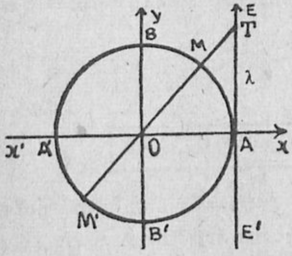
Ἐὰν $k=1$ » » » » $x=392^\circ$ » » » » » $x=508$ κλπ.

Ἀσκήσεις. 185. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἰσότητας :

1. $\eta\mu x = 0{,}50$. 2. $\eta\mu x = 0{,}35021$.

98. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν ἐφαπτομένην λ.***

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο καὶ Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων (Σχ. 72). Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ε΄ΑΕ τῶν ἐφαπτομένων καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{AT}$, νὰ εἶναι ἴση μὲ λ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΟΤ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄, τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον Ο.



Σχ. 72.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ σημεῖον Μ ἢ τὸ Μ΄ ἔχουν ἐφαπτομένην $\overline{AT} = \lambda$ καὶ εἶναι τὰ μόνα, ποὺ ἔχουν ἐφαπτομένην ἴσην μὲ λ.

Ἂς ζητήσωμεν τώρα τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μέτρων $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AM'}$ τῶν τόξων αὐτῶν.

Ἔστω α τὸ μέτρον, εἰς ἀκτίνια, τοῦ μικροτέρου τόξου $\widehat{AM}$. Ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ ἔχουν μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x_1 = \alpha + 2k\pi.$$

Μεταξὺ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ΄ ὑπάρχει ἕνα τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον εἶναι $\alpha+\pi$. Ἑπομένως ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Μ΄, θὰ ἔχουν ἀλγεβρικὸν μέτρον $(\alpha+\pi)+2k\pi$ ἢ $\alpha+(2k+1)\pi$ καὶ ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου $x_2=\alpha+(2k+1)\pi$.

Οἱ δύο προηγούμενοι τύποι συγχωνεύονται εἰς τὸν τύπον

$\boxed{x=k\pi+\alpha}$ ὅπου k ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω τύπον συνάγομεν, ὅτι :

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, ἡ διαφορά των εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον ἡμιπεριφερείας.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ μέτρον α τοῦ τόξου παριστάνῃ μοίρας, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται

$$\boxed{x=180^0k+\alpha}$$

99. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. 1ον. *Τόξα τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μηδέν.* Τὰ τόξα αὐτὰ λήγουν εἰς τὸ σημεῖον A ἢ εἰς τὸ A′ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ μοναδικοῦ τύπου

$$x=k\pi.$$

100. Ἐφαρμογή. *Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα* $\varepsilon\varphi x=1{,}53987$.

Ἐκ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ὅτι $1{,}53987=\varepsilon\varphi 57^0$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται

$$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi 57^0.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ 57^0 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, συνδέονται διὰ τοῦ τύπου

$$x=180^0k+57^0 \qquad (2)$$

Ἐὰν $k=0$ ἡ (2) δίδει $x=57^0$

Ἐὰν $k=1$ ἡ (2) δίδει $x=237^0$ κλπ.

Ἀσκήσεις. 186. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἰσότητας :

1. $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$. 2. $\varepsilon\varphi x=1{,}47280$.

101. Στοιχειώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις. Εἰς τὴν § 94 εἴδομεν, ὅτι ἡ ἰσότης

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 80^0 \qquad (1)$$

ἀληθεύει ***μόνον*** διὰ τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν τύπον

$$x=360^0k\pm 80^0.$$

Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) εἶναι μία ἐξίσωσις καὶ ἐπειδὴ περιέχει τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου x, λέγεται ἰδιαιτέρως ***τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.***

Ἐπίσης αἱ ἰσότητες $\eta\mu x=0{,}52902$, $\varepsilon\varphi x=1{,}53987$ εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων τόξων ἢ γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, λέγεται ***λύσις τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.***

Αἱ ἁπλούστεραι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἔχουν τὴν μορφὴν

$$\text{ημ}x=\text{ημ}\alpha,\quad \text{συν}x=\text{συν}\alpha,\quad \text{εφ}x=\text{εφ}\alpha$$

ἢ

$$\text{ημ}x=\lambda\ ,\quad \text{συν}x=\mu\ ,\quad \text{εφ}x=\nu$$

ὅπου

$$-1\leqslant\lambda\leqslant+1 \quad \text{καὶ} \quad -1\leqslant\mu\leqslant+1$$

καὶ λύονται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὰ παραδείγματα τῶν § 94, 97, 100.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* 187. 1ον. Δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὰ πέρατά των κεῖνται ἐπὶ μιᾶς χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον ΑΑ'. Ποῦ εὑρίσκονται τὰ πέρατα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν δοθέντων τόξων;

2ον. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ὅταν τὰ δύο δοθέντα τόξα ἔχουν τὰ πέρατά των συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

188. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ποὺ ἔχει τὸ τόξον α, ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

2ον. Ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ποὺ ἔχει τὸ τόξον α, ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ τύπου $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^k\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, ὅπου k εἶναι ἕνας τυχὼν ἀκέραιος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

189. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=k\pi$ ἢ $\alpha-\beta=k\pi$, ὅπου k εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι

$$\text{ημ}(\alpha+\gamma)\text{ημ}(\alpha+\delta)=\text{ημ}(\beta+\gamma)\text{ημ}(\beta+\delta).$$

190. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\vartheta=\frac{\nu\pi}{3}$ (ὅπου ν εἶναι ἀκέραιος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός).

191. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\text{εφ}\left[\frac{\nu\pi}{3}+(-1)^\nu\frac{\pi}{6}\right]$, ὅπου ν ἀκέραιος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

192. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι φ καὶ ω ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha\,\text{ημ}\omega\,\text{ημ}\varphi+\beta\,\text{συν}\omega\,\text{συν}\varphi=0$, ἡ παράστασις

$$y=\frac{1}{\alpha\,\text{ημ}^2\omega+\beta\,\text{συν}^2\omega}+\frac{1}{\alpha\,\text{ημ}^2\varphi+\beta\,\text{συν}^2\varphi}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν φ καὶ ω.

193. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν συντελεστῶν α, β, γ, δ, ε τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=\alpha\,\text{ημ}^2x+\beta\,\text{συν}^2x+\gamma\,\text{ημ}x\,\text{συν}x+\delta\,\text{ημ}x+\varepsilon\,\text{συν}x+\lambda$$

εἶναι μηδὲν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x;

194. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα τὸ κλάσμα

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\alpha\,\text{ημ}^2x+\beta\,\text{συν}^2x+\gamma\,\text{ημ}x\,\text{συν}x+\delta\,\text{ημ}x+\varepsilon\,\text{συν}x+\lambda}{\alpha'\text{ημ}^2x+\beta'\text{συν}x^2+\gamma'\text{ημ}x\,\text{συν}x+\delta'\text{ημ}x+\varepsilon'\text{συν}x+\lambda'}$$

λαμβάνῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν k διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x;

195. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα πολυώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha\,\eta\mu x+\beta\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma$. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ πολυώνυμον αὐτό.

Β' Ὁμάς. **196.** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῶν τόξων

$$18^0,\quad 72^0,\quad 36^0,\quad 54^0.$$

197. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1ον. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{5}=1\cdot$ 2ον. $\eta\mu\dfrac{\pi}{10}+\eta\mu\dfrac{13\pi}{10}=-\dfrac{1}{2}.$

198. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : 1ον. $\eta\mu\dfrac{\pi}{5}\eta\mu\dfrac{2\pi}{5}\eta\mu\dfrac{3\pi}{5}\eta\mu\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{5}{16}.$

2ον. $\sigma\upsilon\nu^2 18^0\eta\mu^2 36^0-\sigma\upsilon\nu 36^0\eta\mu 18^0=\dfrac{1}{16}.$

199. 'Εὰν $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha+3\,\sigma\upsilon\nu 6\alpha+4\,\sigma\upsilon\nu 8\alpha=-\frac{5}{2}.$$

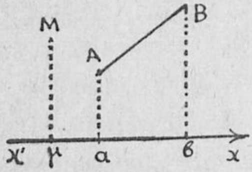
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ, ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΞΩΝ

---

1. Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν προβολῶν

102. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα. Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄξονος x΄x (Σχ. 73). Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν τὴν κάθετον Μμ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x. Τὸ σημεῖον μ λέγεται ***ὀρθὴ προβολὴ*** τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x. Ἡ κάθετος Μμ λέγεται ***προβάλλουσα*** τοῦ σημείου Μ καὶ ὁ ἄξων x΄x, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ προβολαὶ τῶν σημείων, λέγεται ***προβολικὸς ἄξων.***



Σχ. 73.

103. Ὀρθὴ προβολὴ ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα. Ἔστω ἕνα διάνυσμα ΑΒ καὶ x΄x ἕνας ἄξων (Σχ. 73), ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ τὸ διάνυσμα ΑΒ. Ἔστωσαν α ἡ προβολὴ τοῦ Α καὶ β ἡ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x. Τὸ διάνυσμα αβ τοῦ ἄξονος x΄x, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν προβολὴν α τῆς ἀρχῆς Α καὶ τέλος τὴν προβολὴν β τοῦ τέλους Β τοῦ διανύσματος ΑΒ, λέγεται ***ὀρθὴ προβολὴ τοῦ διανύσματος ΑΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x.***

104. Μέτρον τῆς προβολῆς ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἕνα ἄξονα. Θεώρημα. ***Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὴν προβολὴν ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἕνα ἄξονα, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ θετικὴ διεύθυνσις τοῦ προβολικοῦ ἄξονος μὲ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ διάνυσμα.***

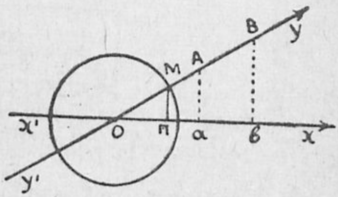
Ἔστω x΄x (Σχ. 74) ἕνας ἄξων ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ x΄ πρὸς τὸ x φορὰν καὶ ΑΒ ἕνα διάνυσμα, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος y′y, τοῦ ὁποίου ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ y′ πρὸς τὸ y φορά.

Ἔστω αβ ἡ προβολὴ τοῦ διανύσματος AB ἐπὶ τὸν ἄξονα x′x. Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{AB}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{Ox, Oy})$$

Ἔστω O τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων x′x καὶ y′y. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y λαμβάνομεν ἕνα θετικὸν διάνυσμα OM, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν διανυσμάτων· δηλ. εἶναι: $\overline{OM}=+1$.

Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν MΠ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα x′x. Αἱ προβάλλουσαι MΠ, Aα, Bβ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα x′x καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ, θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 74.

$$\frac{\alpha\beta}{O\Pi}=\frac{AB}{OM} \qquad (1)$$

Ἐὰν τὰ διανύσματα AB καὶ OM ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, καὶ αἱ προβολαί των αβ καὶ OΠ θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν· ἐὰν τὰ διανύσματα AB καὶ OM ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς καὶ αἱ προβολαί των αβ καὶ OΠ θὰ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $\overline{\alpha\beta}$ καὶ $\overline{O\Pi}$, καθὼς καὶ οἱ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{OM}$ ἔχουν συγχρόνως τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ διάφορα σημεῖα· ἑπομένως οἱ λόγοι

$$\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{O\Pi}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{OM}}$$

εἶναι καὶ οἱ δύο θετικοὶ ἢ καὶ οἱ δύο ἀρνητικοί.

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι αὐτοὶ ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1), θὰ εἶναι ἴσοι, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{O\Pi}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OM}} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $\overline{OM}=+1$ ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{O\Pi}}=\frac{\overline{AB}}{1} \quad \text{ἢ} \quad \overline{\alpha\beta}=\overline{AB}\,.\,\overline{O\Pi} \qquad (3)$$

Ἂν μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν OM γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ὁ κύκλος O θὰ εἶναι τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ τὸ $\overline{O\Pi}$ θὰ εἶναι τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας $\widehat{Ox, Oy}$· δηλ. θὰ εἶναι

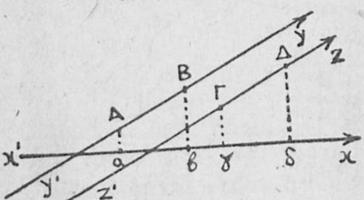
$$\overline{O\Pi} = συν(\widehat{Ox, Oy})$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\overline{O\Pi}$ μὲ τὸ ἴσον του $συν(\widehat{Ox, Oy})$ καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\overline{\alpha\beta} = \overline{AB} \,.\, συν(\widehat{Ox, Oy})} \qquad ὅ.ἔ.δ$$

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὴν προβολὴν ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα λέγεται ***μέτρον*** τῆς προβολῆς τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτόν.

105. Πόρισμα. ***Αἱ προβολαὶ δύο ἰσοδυνάμων διανυσμάτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν προβολικὸν ἄξονα εἶναι διανύσματα, τὰ ὁποῖα μετροῦνται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· δηλ. εἶναι ἰσοδύναμα διανύσματα.***



Σχ. 75.

Πράγματι· ἔστωσαν δύο ἰσοδύναμα διανύσματα AB καὶ ΓΔ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἀξόνων $y'y$ καὶ $z'z$· καὶ ἔστωσαν αβ, γδ αἱ προβολαί των ἐπὶ τὸν ἄξονα $x'x$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 104 θὰ εἶναι

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{AB} .\, συν(\widehat{x'x, y'y}) \qquad (1)$$

$$\overline{\gamma\delta} = \overline{\Gamma\Delta} .\, συν(\widehat{x'x, z'z}) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$ καὶ $\widehat{x'x, y'y} = \widehat{x'x, z'z}$, συνάγομεν, ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2), ὅτι

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\gamma\delta}$$

106. Θεώρημα τῶν προβολῶν. ***Τὸ μέτρον τῆς προβολῆς τῆς συνισταμένης διαδοχικῶν διανυσμάτων ἐπὶ ἄξονα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προβολῶν τῶν διαδοχικῶν αὐτῶν διανυσμάτων.***

Ἔστω $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ (Σχ. 76) ἡ συνισταμένη τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

Ἔστω ἐπίσης ὁ ἄξων x΄x καὶ α, β, γ, δ αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x. Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$=μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$+μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$+μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Chasles (§ 19) θὰ εἶναι:

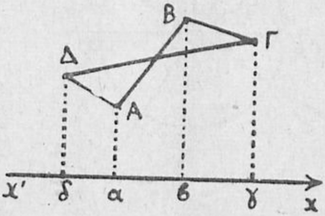
$$\overline{\alpha\beta}+\overline{\beta\gamma}+\overline{\gamma\delta}=\overline{\alpha\delta} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $\overline{\alpha\beta}$=μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overline{\beta\gamma}$=μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$

$\overline{\gamma\delta}$=μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$

$\overline{\alpha\delta}$=μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$



Σχ. 76.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\alpha\delta}$, μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

μέτρ. προβ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$+μέτρ.πρ. $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$+μέτρ.πρ. $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$=μέτρ.πρ. $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$

107. Πόρισμα. Ἡ σχέσις $\overline{\alpha\beta}+\overline{\beta\gamma}+\overline{\gamma\delta}=\overline{\alpha\delta}$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς: $\overline{\alpha\beta}+\overline{\beta\gamma}+\overline{\gamma\delta}+\overline{\delta\alpha}=0$, ἐπειδὴ $\overline{\alpha\delta}=-\overline{\delta\alpha}$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι:

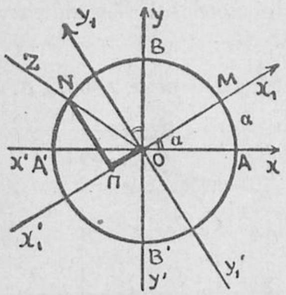
Τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προβολῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων μιᾶς κλειστῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

2. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο τόξων

108. Πρόβλημα. ***Δίδονται οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο τόξων α καὶ β. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων (α+β) καὶ (α—β).***

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο καὶ x΄Οx, y΄Οy δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες, τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν ὡς ἄξονας τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων διὰ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας Ο (Σχ. 77).

Ἔστωσαν α καὶ β τὰ μέτρα δύο διαδοχικῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καὶ $\overset{\frown}{MN}$. Τὸ μέτρον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AN}$ θὰ εἶναι $\alpha+\beta$.



Σχ. 77.

Δοθέντα	ημα, ημβ συνα, συνβ
Ἄγνωστα	συν(α+β), συν(α−β) ημ(α+β), ημ(α−β) εφ(α+β), εφ(α−β)

Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AN}=\alpha+\beta$.

Φέρομεν ἕνα ἄξονα $x_1'Ox_1$, ὁ ὁποῖος νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ, ἀρχὴν τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MN}=\beta$ καὶ ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ x_1' πρὸς τὸ x_1 φοράν. Φέρομεν ἐπίσης καὶ τὸν ἄξονα $y_1'Oy_1$ κάθετον ἐπὶ τὸν $x_1'Ox_1$ καὶ ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν αὐτοῦ, τὴν ἐκ τοῦ y_1' πρὸς τὸ y_1 φοράν.

Οἱ δύο αὐτοὶ ἄξονες $x_1'Ox_1$ καὶ $y_1'Oy_1$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄξονες τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων διὰ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Μ.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ν φέρομεν τὴν κάθετον ΝΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα $x_1'Ox_1$ τῶν συνημιτόνων. Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ εἶναι :

$$\overline{O\Pi}=\sigma\upsilon\nu\overset{\frown}{MN}=\sigma\upsilon\nu\beta, \qquad \overline{\Pi N}=\eta\mu\overset{\frown}{MN}=\eta\mu\beta.$$

1ον. ***Ὑπολογισμὸς τοῦ συν(α+β).*** Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΝ. Προβάλλομεν τώρα τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΟΠΝ καὶ τὴν συνισταμένην της ΟΝ ἐπὶ τὸν ἄξονα x'Ox τῶν συνημιτόνων. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν (§ 106) θὰ εἶναι :

$$\text{μετρ. προβ. } \overrightarrow{ON}=\text{μετρ. προβ. } \overrightarrow{O\Pi}+\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{\Pi N} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 104) ὅτι :

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ON}=\overline{ON}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{Ox, Oz})=1.\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{O\Pi}=\overline{O\Pi}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{Ox, Ox_1})=\sigma\upsilon\nu\beta.\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{\Pi N}=\overline{\Pi N}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{Ox, Oy_1})=\eta\mu\beta.\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+90^0).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ μέτρ. προβ. $\overrightarrow{ON}$, ... μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+90^0) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ συν(α+90°)=—ημα (§ 88), ἡ ἰσότης (2) γράφεται :

$$\boxed{\textbf{συν}(\alpha+\beta)=\textbf{συν}\alpha\ \textbf{συν}\beta-\textbf{ημ}\alpha\ \textbf{ημ}\beta}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$συν(20^\circ+50^\circ)=συν20^\circ\ συν50^\circ-ημ20^\circ\ ημ50^\circ.$$

2ον. *Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ(α+β)*. Προβάλλομεν τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΟΠΝ καὶ τὴν συνισταμένην της ΟΝ ἐπὶ τὸν ἄξονα y′Oy τῶν ἡμιτόνων. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν θὰ ἔχωμεν :

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΟΝ}=\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΟΠ}+\text{μετρ. προβ. } \overrightarrow{ΠΝ} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 104) ὅτι :

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΟΝ}=\overline{ΟΝ}\ συν(\widehat{Oy, Oz})=$$
$$=1\,.\,συν[(\alpha+\beta)-90^\circ] \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα (α+β)—90° καὶ 90°—(α+β) εἶναι ἀντίθετα, θὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ συνημίτονα· ἤτοι θὰ εἶναι :

$$συν[(\alpha+\beta)-90^\circ]=συν[90^\circ-(\alpha+\beta)]$$
$$=ημ(\alpha+\beta)$$

διότι τὰ τόξα 90°—(α+β) καὶ (α+β) εἶναι συμπληρωματικὰ καὶ ἑπομένως τὸ συνημίτονον τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ ἄλλου. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ συν[(α+β)—90°] μὲ τὸ ἴσον του ημ(α+β) καὶ λαμβάνομεν :

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΟΝ}=ημ(\alpha+\beta).$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΟΠ}=\overline{ΟΠ}\ συν(\widehat{Oy, Ox_1})=συν\beta\ συν(90^\circ-\alpha)$$
$$=συν\beta\ ημ\alpha$$

$$\text{μέτρ. προβ. } \overrightarrow{ΠΝ}=\overline{ΠΝ}\ συν(Oy, Oy_1)=ημ\beta\ συν\alpha$$

διότι $(\widehat{Oy, Oy_1})=(\widehat{Ox, Ox_1})=\alpha$, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ μέτρ. προβ. $\overrightarrow{ΟΝ}$, ... , μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$ημ(\alpha+\beta)=συν\beta\ ημ\alpha+ημ\beta\ συν\alpha$$

ἢ

$$\boxed{\textbf{ημ}(\alpha+\beta)=\textbf{ημ}\alpha\ \textbf{συν}\beta+\textbf{συν}\alpha\ \textbf{ημ}\beta}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$ημ(40^\circ+35^\circ)=ημ40^\circ\ συν35^\circ+συν40^\circ\ ημ35^\circ$$

3ον. ***Ὑπολογισμὸς τοῦ συν(α—β).*** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον:

$$συν(α+β)=συνα\,συνβ-ημα\,ημβ$$

θέσωμεν ἀντὶ τοῦ β τὸ —β θὰ ἔχωμεν:

$$συν(α-β)=συνα\,συν(-β)-ημα\,ημ(-β) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα —β καὶ β εἶναι ἀντίθετα θὰ εἶναι:

$$συν(-β)=συνβ \text{ καὶ } ημ(-β)=-ημβ.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ συν(—β) καὶ τὸ ημ(—β) μὲ τὰ ἴσα των συνβ καὶ —ημβ καὶ ἔχομεν:

$$\boxed{συν(α-β)=συνα\,συνβ+ημα\,ημβ}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$συν(50^0-40^0)=συν50^0\,συν40^0+ημ50^0\,ημ40^0.$$

4ον. ***Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ(α—β).*** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον:

$$ημ(α+β)=ημα\,συνβ+συνα\,ημβ$$

θέσωμεν ἀντὶ τοῦ β τὸ —β θὰ ἔχωμεν:

$$ημ(α-β)=ημα\,συν(-β)+συνα\,ημ(-β)$$

ἢ

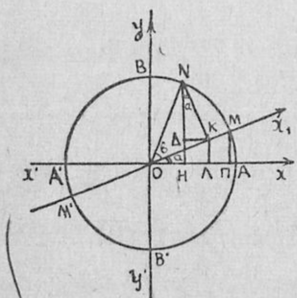
$$\boxed{ημ(α-β)=ημα\,συνβ-συνα\,ημβ}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$ημ(70^0-40^0)=ημ70^0\,συν40^0-συν70^0\,ημ40^0.$$

Σημείωσις. Ἐὰν $α+β<90^0$, τὸ ημ(α+β) καὶ συν(α+β) εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο, $\overset{\frown}{AM}=α$ ἕνα τόξον, $\overset{\frown}{MN}=β$ ἕνα ἄλλο τόξον, καὶ $\overset{\frown}{AN}=α+β$ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καὶ $\overset{\frown}{MN}$.



Σχ. 78.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΜ καὶ ΟΝ, τὰς καθέτους ΜΠ καὶ ΝΗ ἐπὶ τὴν Α'Α καὶ τὴν κάθετον ΝΚ ἐπὶ τὴν ΟΜ.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι

$$\overline{ΠM}=ημα, \quad \overline{HN}=ημ(α+β)$$

$$\overline{OΠ}=συνα, \quad \overline{OH}=συν(α+β)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἄξονα τῶν συνημιτόνων τὸν Μ'Μ, διὰ τὸ τόξον $\overset{\frown}{MN}$, θὰ εἶναι

$$\overline{KN}=ημβ, \qquad \overline{OK}=συνβ.$$

Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, καὶ τὴν ΚΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΝΗ. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα θὰ εἶναι

$$ημ(α+β)=\overline{HN}=\overline{HΔ}+\overline{ΔN}=\overline{ΛK}+\overline{ΔN} \qquad (1)$$

$$συν(α+β)=\overline{OH}=\overline{OΛ}-\overline{HΛ}=\overline{OΛ}-\overline{ΔK} \qquad (2)$$

Ὑπολογίζομεν τὰ ΛΚ, ΔΝ, ΟΛ, ΔΚ.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΚ ἔχομεν (§ 71)

$$\overline{ΛK}=\overline{OK}.ημα=συνβ\,.\,ημα, \qquad \overline{OΛ}=\overline{OK}.συνα=συνβ\,.\,συνα$$

Ἐπειδὴ $\widehat{KNΔ}=\widehat{AOM}=α$ ἔχομεν ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΝ

$$\overline{ΔN}=\overline{KN}.συνα=ημβ.συνα, \qquad \overline{ΔK}=\overline{KN}.ημα=ημβ.ημα$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) τὰ $\overline{ΛK}$, $\overline{ΔN}$, $\overline{OΛ}$, $\overline{ΔK}$ μὲ τὰς εὑρεθείσας τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$ημ(α+β)=ημα\,συνβ+συνα\,ημβ$$
$$συν(α+β)=συνα\,συνβ-ημα\,ημβ.$$

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* **200.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῶντόξων : 75^0, 15^0, 105^0 $(75^0=45^0+30^0)$.

201. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ(α±β) καὶ τὸ συν(α±β), ἐάν:

1ον. $ημα=\frac{1}{2}$, $συνβ=\frac{4}{5}$. 2ον. $ημα=\frac{1}{4}$, $συνβ=\frac{4}{5}$.

202. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα συν(α+β)+συν(α−β), ἐὰν συνα=0,6 καὶ συνβ=0,8.

Β' Ὁμάς. **203.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ημ^2(α+β)+ημ^2(α-β)=2ημ^2α\,συν^2β+2ημ^2β\,συν^2α$$

204. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ημ(α+β)\,ημ(α-β)=ημ^2α-ημ^2β=συν^2β-συν^2α$$

205. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$συν(α+β)συν(α-β)=συν^2α-ημ^2β=συν^2β-ημ^2α.$$

206. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$συν(α+β)ημ(α-β)=ημα\,συνα-ημβ\,συνβ.$$

207. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{2ημ(α+β)}{συν(α+β)+συν(α-β)}=εφα+εφβ.$

208. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1ον. $\dfrac{ημ(α+β)}{συνα\,συνβ}=εφα+εφβ$, 2ον. $\dfrac{ημ(α-β)}{ημα\,ημβ}=σφβ-σφα.$

209. Γνωρίζοντες τὰ ημα, ημβ, ημγ, συνα, συνβ, συνγ, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημ(α+β+γ) καὶ τὸ συν(α+β+γ).

210. Γνωρίζοντες τὰ ημα, ημβ, ημγ, συνα, συνβ, συνγ, νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ημ(α−β+γ) καὶ τὸ συν(α+β−γ).

109. Ἔκφρασις τῆς εφ(α+β) καὶ εφ(α−β) συναρτήσει τῶν εφα καὶ εφβ. Γνωρίζομεν, ὅτι $εφ(α+β)=\dfrac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὰ ημ(α+β) καὶ συν(α+β) μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 108 καὶ ἔχομεν

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ημ}\alpha\ \text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\ \text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\ \text{ημ}\beta}.$$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ δεύτερον μέλος, διὰ συνα συνβ καὶ ἔχομεν

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\text{ημ}\alpha\ \text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}+\dfrac{\text{συν}\alpha\ \text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}}{\dfrac{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}-\dfrac{\text{ημ}\alpha\ \text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}}=\frac{\dfrac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}+\dfrac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}}{1-\dfrac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}\cdot\dfrac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}}$$

ἢ

$$\boxed{\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\ \text{εφ}\beta}}$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον αὐτὸν εἰς τὰ τόξα α καὶ —β θὰ ἔχωμεν

$$\text{εφ}[\alpha+(-\beta)]=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}(-\beta)}{1-\text{εφ}\alpha.\text{εφ}(-\beta)} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα —β καὶ β εἶναι ἀντίθετα θὰ εἶναι εφ(—β)=εφβ καὶ ἑπομένως ἡ (1) γίνεται

$$\boxed{\text{εφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{1+\text{εφ}\alpha\ \text{εφ}\beta}}$$

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ εἶναι

$$\text{εφ}(40^0+20^0)=\frac{\text{εφ}40^0+\text{εφ}20^0}{1-\text{εφ}40^0\ \text{εφ}20^0},\qquad \text{εφ}(40^0-20^0)=\frac{\text{εφ}40^0-\text{εφ}20^0}{1+\text{εφ}40^0\ \text{εφ}20^0}$$

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **211.** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ(α±β) ἐάν :

1ον. $\text{εφ}\alpha=\sqrt{3}$ καὶ $\text{εφ}\beta=1$. 2ον. $\text{εφ}\alpha=\frac{1}{2}$ καὶ $\text{εφ}\beta=\frac{1}{3}$.

212. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ εφ15⁰ καὶ εφ75⁰ καὶ ἐξ αὐτῶν αἱ σφ15⁰ καὶ σφ75⁰.

213. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ(α±β), ἐὰν ημα=0,6 καὶ συνβ=0,8.

Β' Ὁμάς. **214.** Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ σφ(α+β) καὶ ἡ σφ(α—β) συναρτήσει τῶν σφα καὶ σφβ.

215. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{εφ}(45^0-\alpha)=\dfrac{\text{συν}\alpha-\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha+\text{ημ}\alpha}$

216. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι (συνx—ημx) εφ(x+45⁰)=συνx+ημx.

217. Ἐὰν Α+Β+Γ=180⁰, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. εφΑ+εφΒ+εφΓ=εφΑ εφΒ εφΓ.

2ον. σφΑ σφΒ+σφΒ σφΓ+σφΓ σφΑ=1.

218. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha=1$

2ον. $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma=\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma$.

219. Γνωρίζοντες τὴν εφα, εφβ, εφγ, νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)$. 2ον. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta-\gamma)$.

Γ' Ὁμάς. **220.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\beta}$.

221. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\sqrt{3}-\varepsilon\varphi\alpha).\varepsilon\varphi(\alpha+30^0)=(\sqrt{3}+\sigma\varphi\alpha)\varepsilon\varphi\alpha$.

222. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1ον. $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu^2\alpha$

2ον. $\eta\mu^2(\alpha+\beta)+\eta\mu^2\beta-2\,\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu^2\alpha$

3ον. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu^2(\alpha+\beta)+\eta\mu^2\beta-2\,\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=1$.

223. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν $\alpha+\beta=\gamma$ θὰ εἶναι

1ον. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma-2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=1$,

2ον. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=\eta\mu^2\gamma$.

224. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1ον. $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu(120^0+x)+\sigma\upsilon\nu(240^0+x)=0$

2ον. $\eta\mu x+\eta\mu(120^0+x)+\eta\mu(240^0+x)=0$

225. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x.

$A=\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2(120^0+x)+\sigma\upsilon\nu^2(120^0-x)$

$B=\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$.

3. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τόξων

110. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 2α, συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου α.***

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι μία μερικὴ περίπτωσις τῆς προσθέσεως τῶν τόξων, διότι κάθε πολλαπλάσιον ἑνὸς τόξου α εἶναι ἕνα ἄθροισμα τόξων ἴσων μὲ τὸ α. Οἱ σχετικοὶ λοιπὸν τύποι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου ν . α, θὰ ἐξαχθοῦν ἀμέσως ἀπὸ τοὺς τύπους τοὺς σχετικοὺς μὲ τὸ ἄθροισμα ν τόξων ἴσων μὲ τὸ τόξον α.

Δοθέντα	ημα, συνα, εφα
Ἄγνωστα	ημ2α, συν2α, εφ2α

1. ***Ἔκφρασις τοῦ ημ2α συναρτήσει τῶν συνα καὶ ημα.*** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ β μὲ τὸ α λαμβάνομεν

$$\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha$$

ἢ
$$\boxed{\eta\mu2\alpha=2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

Ἐὰν θέσωμεν $2α=ω$, ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται :

$$\boxed{ημω=2ημ\frac{ω}{2}\,συν\frac{ω}{2}}$$

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ εἶναι

$$ημ40^0=2\,ημ20^0\,συν20^0.$$

II. ***Ἔκφρασις τοῦ συν2α συναρτήσει τοῦ συνα καὶ ημα.*** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $συν(α+β)=συνα\,συνβ-ημα\,ημβ$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ β μὲ τὸ α λαμβάνομεν

$$συν(α+α)=συνα\,συνα-ημα\,ημα$$

ἢ

$$\boxed{συν2α=συν^2α-ημ^2α}$$

Ἐὰν θέσωμεν $2α=ω$, ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται

$$\boxed{συνω=συν^2\frac{ω}{2}-ημ^2\frac{ω}{2}}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὸ συν2α συναρτήσει τοῦ συνα μόνον, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $ημ^2α$ μὲ τὸ ἴσον του $1-συν^2α$ καὶ θὰ ἔχωμεν

$$συν2α=συν^2α-(1-συν^2α)$$

ἢ

$$\boxed{συν2α=2\,συν^2α-1}$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὰς μορφάς :

$$\boxed{1+συν2α=2\,συν^2α} \quad ἢ \quad \boxed{1+συνα=2συν^2\frac{α}{2}}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὸ συν2α συναρτήσει τοῦ ημα, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $συν^2α$ μὲ τὸ ἴσον του $1-ημ^2α$ καὶ θὰ ἔχωμεν $συν2α=(1-ημ^2α)-ημ^2α$

ἢ

$$\boxed{συν2α=1-2\,ημ^2α}$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὰς μορφάς :

$$\boxed{1-συν2α=2\,ημ^2α} \quad ἢ \quad \boxed{1-συνα=2\,ημ^2\frac{α}{2}}$$

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ εἶναι

$$συν40^0=συν^2 20^0-ημ^2 20^0$$

$$συν40^0=2\,συν^2 20^0-1 \quad καὶ \quad συν40^0=1-2\,ημ^2 20^0$$

III. ***Ἔκφρασις τῆς εφ2α συναρτήσει τῆς εφα.*** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ β μὲ τὸ α λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi(\alpha+\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\alpha}$

ἢ $$\boxed{\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$\varepsilon\varphi 50^0=\frac{2\,\varepsilon\varphi 25^0}{1-\varepsilon\varphi^2 25^0}$$

§ 111. Ἔκφρασις τῶν ημ3α, συν3α καὶ εφ3α συναρτήσει τῶν ημα, συνα, εφα. Ἐπειδὴ $3\alpha=\alpha+2\alpha$ θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}\eta\mu 3\alpha=\eta\mu(\alpha+2\alpha)&=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\\&=\eta\mu\alpha(1-2\,\eta\mu^2\alpha)+2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha\\&=\eta\mu\alpha-2\,\eta\mu^3\alpha+2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\\&=\eta\mu\alpha-2\,\eta\mu^3\alpha+2\,\eta\mu\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)\\&=\eta\mu\alpha-2\,\eta\mu^3\alpha+2\,\eta\mu\alpha-2\,\eta\mu^3\alpha\\&=3\,\eta\mu\alpha-4\,\eta\mu^3\alpha.\end{aligned}$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 3\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+2\alpha)&=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\eta\mu 2\alpha\,\eta\mu\alpha\\&=\sigma\upsilon\nu\alpha(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)-2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\eta\mu\alpha\\&=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2\,\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\\&=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2\,(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha\\&=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu\alpha+2\,\sigma\upsilon\nu^3\alpha\\&=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha.\end{aligned}$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi 3\alpha=\varepsilon\varphi(\alpha+2\alpha)&=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi 2\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha}\\&=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\dfrac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}{1-\varepsilon\varphi\alpha.\dfrac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha(1-\varepsilon\varphi^2\alpha)+2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha-2\,\varepsilon\varphi^2\alpha}\\&=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha+2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-3\,\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{3\,\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\,\varepsilon\varphi^2\alpha}.\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **226.** Ἐὰν $\eta\mu\alpha=\dfrac{1}{4}$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ημ2α, συν2α, εφ2α.

227. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{3}{5}$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ημ2ω, συν2ω, εφ2ω.

228. Ἐὰν $\eta\mu\alpha=\dfrac{1}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta=\dfrac{1}{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ2(α+β). Τὰ τόξα α καὶ β εἶναι μικρότερα τῶν 90^0.

229. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ2x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{5}$.

Β' Ὁμάς. **230.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\,\sigma\varphi\alpha}$.

231. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1 + \eta\mu 2\alpha$.

232. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$.

233. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $1 + \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

234. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi^2(45^0 - \alpha) = \frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$.

235. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi(45^0 + \alpha) - \varepsilon\varphi(45^0 - \alpha) = 2\,\varepsilon\varphi 2\alpha$.

236. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha + \sigma\varphi 2\alpha = \sigma\varphi\alpha$.

237. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\varepsilon\varphi^2 2x - \varepsilon\varphi^2 x}{1 - \varepsilon\varphi^2 2x\,\varepsilon\varphi^2 x} = \varepsilon\varphi 3x\,\varepsilon\varphi x$.

Γ' Ὁμάς. **238.** Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνα.

239. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{2}{(1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \sigma\varphi\alpha)}$.

240. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\,\sigma\varphi 2\alpha$.

2ον. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα $\Sigma = \varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu}$.

112. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου, συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἡμίσεως τόξου.***

Ἔστω ἕνα τόξον α, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ημα, συνα, εφα συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

Δοθέντα	$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$
Ἄγνωστα	ημα, συνα, εφα

I. ***Ἔκφρασις τοῦ ημα.*** Γνωρίζομεν, ὅτι $\eta\mu\alpha = 2\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$. Θέτομεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἢ τὸ ἴσον της $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}$$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $συν^2\frac{α}{2}$ (διὰ νὰ ἐμφανισθῇ ἡ $εφ\frac{α}{2}$) καὶ ἔχομεν

$$ημα=\frac{\dfrac{2ημ\frac{α}{2}\,συν\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}}{\dfrac{ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}+\dfrac{συν^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}}=\frac{\dfrac{2\,ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}}}{\dfrac{ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}+1}=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{εφ^2\frac{α}{2}+1}$$

Ὥστε εἶναι $$\boxed{\mathbf{ημα=\frac{2\,εφ\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}}}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι $ημ20^0=\frac{2\,εφ10^0}{1+εφ^2 10^0}$.

II. ***Ἔκφρασις τοῦ συνα.*** Γνωρίζομεν, ὅτι

$$συνα=συν^2\frac{α}{2}-ημ^2\frac{α}{2} \quad ἢ \quad συνα=\frac{συν^2\frac{α}{2}-ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}+ημ^2\frac{α}{2}}.$$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ $συν^2\frac{α}{2}$ καὶ ἔχομεν

$$συνα=\frac{1-\dfrac{ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}}{1+\dfrac{ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}}=\frac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$$

Ὥστε εἶναι $$\boxed{\mathbf{συνα=\frac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}}}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι $συν50^0=\frac{1-εφ^2 25^0}{1+εφ^2 25^0}$.

III. ***Ἔκφρασις τῆς εφα συναρτήσει τῆς*** $εφ\frac{α}{2}$. Εἰς τὴν § 110 III εὑρήκαμεν, ὅτι $εφ2α=\frac{2\,εφα}{1-εφ^2α}$· ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\boxed{εφα=\frac{2\,εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι $εφ70^0=\frac{2\,εφ35^0}{1-εφ^2 35^0}$.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑνὸς τόξου ἐκφράζονται ***ρητῶς*** συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἡμίσεως τόξου· ἑπομένως εἰς κάθε τιμὴν τῆς $εφ\frac{α}{2}$ ἀντιστοιχεῖ ***μία καὶ μόνον τιμὴ*** διὰ τὸ ημα, μία διὰ τὸ συνα, καὶ μία διὰ τὴν εφα.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι $εφ\frac{α}{2}=μ$ καὶ ἔστω $\frac{θ}{2}$ ἕνα ὡρισμένον τόξον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μ· δηλ. ἔστω, ὅτι εἶναι $εφ\frac{α}{2}=εφ\frac{θ}{2}$. Ὅλα τὰ τόξα $\frac{α}{2}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ τόξον $\frac{θ}{2}$, ἐκφράζονται (§ 98) ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{α}{2}=kπ+\frac{θ}{2} \quad ἢ \quad α=2kπ+θ$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι τὰ τόξα α καὶ θ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος καὶ ἑπομένως τὸ ημα ἢ τὸ συνα ἢ ἡ εφα θὰ ἔχουν μίαν καὶ μόνον τιμήν.

Ἀσκήσεις. 241. Ἐὰν $εφ\frac{α}{2}=2$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημα, συνα καὶ ἡ εφα.

242. Ἐὰν $εφα=\frac{3}{4}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ2α, συν2α καὶ ἡ εφ2α.

243. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ημ2x, συν2x, εφ2x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ τόξα x ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $εφ^2x-6\,εφx+9=0$.

Β' Ὁμάς. **244.** Ἐὰν εφα=2, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ4α καὶ τὸ συν4α.

245. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ2α=\frac{2}{εφα+σφα}$.

246. Ἐὰν εἶναι $εφ^2α=1+2\,εφ^2β$, θὰ εἶναι καὶ $συν2β-2\,συν2α=1$.

113. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τοῦ συνα.***

Δοθέντα	συνα
Ἄγνωστα	$συν\frac{\alpha}{2}$, $ημ\frac{\alpha}{2}$, $εφ\frac{\alpha}{2}$

I. ***Ἔκφρασις τοῦ*** $συν\frac{\alpha}{2}$ ***συναρτήσει τοῦ συνα.*** Γνωρίζομεν (§ 110 II) ὅτι:

$$συν^2\frac{\alpha}{2}+ημ^2\frac{\alpha}{2}=1 \qquad (1)$$

$$συν^2\frac{\alpha}{2}-ημ^2\frac{\alpha}{2}=συνα \qquad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\,συν^2\frac{\alpha}{2}=1+συνα \quad ἢ \quad συν^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+συνα}{2}$$

ἄρα $$\boxed{συν\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+συνα}{2}}} \qquad (3)$$

II. ***Ἔκφρασις τοῦ*** $ημ\frac{\alpha}{2}$ ***συναρτήσει τοῦ συνα.*** Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\,ημ^2\frac{\alpha}{2}=1-συνα \quad ἢ \quad ημ^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-συνα}{2}$$

ἄρα $$\boxed{ημ\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνα}{2}}} \qquad (4)$$

III. ***Ἔκφρασις τῆς*** $εφ\frac{\alpha}{2}$ ***συναρτήσει τοῦ συνα.*** Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{ημ\frac{\alpha}{2}}{συν\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-συνα}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+συνα}{2}}} \quad ἢ \quad \boxed{εφ\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνα}{1+συνα}}} \qquad (5)$$

Οἱ τύποι (3), (4), (5) λύουν τὸ δοθὲν πρόβλημα.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι εὑρήκαμεν δύο τιμὰς διὰ τὸ ἡμίτονον, δύο τιμὰς διὰ τὸ συνημίτονον καὶ δύο διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Ὥστε, ἐὰν δοθῇ μόνον τὸ συνα, δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀκριβῶς τὴν τιμὴν τοῦ $ημ\frac{\alpha}{2}$, $συν\frac{\alpha}{2}$, $εφ\frac{\alpha}{2}$. Πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ δοθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον $\frac{\alpha}{2}$.

Ἐξήγησις τοῦ διπλοῦ σημείου. Δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν τὴν ὕπαρξιν τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$.

Εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα ἐδόθη τὸ συνα· ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συνημίτονον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν συνα.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου, ἀπὸ αὐτὰ ποὺ ἔχουν συνημίτονον ἴσον μὲ συνα, τότε ὅλα τὰ τόξα α, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον ἐκφράζονται (§ 92) ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$α=2kπ\pm ω$$

ὅπου k εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ καὶ μηδέν. Τὰ ***ἡμίση*** τῶν τόξων αὐτῶν δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\frac{α}{2}=kπ\pm\frac{ω}{2} \tag{4}$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις, καθόσον ὁ k εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

Ἐὰν* k *εἶναι ἄρτιος, τότε τὰ τόξα $\frac{α}{2}$ καὶ $kπ\pm\frac{ω}{2}$ διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν τὴν σχέσιν $\frac{α}{2}=kπ+\frac{ω}{2}$ θὰ ἔχωμεν:

$$ημ\frac{α}{2}=ημ\frac{ω}{2},\qquad συν\frac{α}{2}=συν\frac{ω}{2},\qquad εφ\frac{α}{2}=εφ\frac{ω}{2}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν σχέσιν $\frac{α}{2}=kπ-\frac{ω}{2}$ θὰ ἔχωμεν:

$$ημ\frac{α}{2}=ημ\left(-\frac{ω}{2}\right)=-ημ\frac{ω}{2},\quad συν\frac{α}{2}=συν\left(-\frac{ω}{2}\right)=συν\frac{ω}{2}$$

$$εφ\frac{α}{2}=εφ\left(-\frac{ω}{2}\right)=-εφ\frac{ω}{2}.$$

Ἐὰν ὁ* k *εἶναι περιττὸς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $k=2k'+1$ τότε ἡ σχέσις (4) γίνεται:

$$\frac{α}{2}=(2k'+1)π\pm\frac{ω}{2}\qquad ἢ\qquad \frac{α}{2}=2k'π+π\pm\frac{ω}{2}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν σχέσιν $\frac{α}{2}=2k'π+\left(π+\frac{ω}{2}\right)$, θὰ ἔχωμεν

$$ημ\frac{α}{2}=ημ\left(π+\frac{ω}{2}\right)=-ημ\frac{ω}{2},\quad συν\frac{α}{2}=συν\left(π+\frac{ω}{2}\right)=-συν\frac{ω}{2}$$

$$εφ\frac{α}{2}=εφ\left(π+\frac{ω}{2}\right)=εφ\frac{ω}{2}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν σχέσιν $\frac{α}{2}=2k'π+\left(π-\frac{ω}{2}\right)$, θὰ ἔχωμεν

$$ημ\frac{α}{2}=ημ\left(π-\frac{ω}{2}\right)=ημ\frac{ω}{2},\quad συν\frac{α}{2}=συν\left(π-\frac{ω}{2}\right)=-συν\frac{ω}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\omega}{2}\right)=-\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ ἐκφράζονται ἀντιστοίχως, μὲ $\pm\eta\mu\frac{\omega}{2}$, $\pm\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$, $\pm\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$, δηλ. μὲ δύο ἀντιθέτους τιμάς.

Ἀσκήσεις. 247. *Α' Ὁμάς.* Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\alpha=0{,}8$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

248. Ἐὰν $\eta\mu\alpha=\frac{4}{5}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνα καὶ ἔπειτα τὸ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$.

249. Ἐὰν $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{3}{4}$ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνα καὶ ἔπειτα τὸ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$.

250. Ἐὰν $\eta\mu 210^0=-\frac{1}{2}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\eta\mu 105^0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 105^0$.

251. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ καὶ τὸ $\eta\mu\frac{\pi}{8}$.

Β' Ὁμάς. **252.** Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu 4\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ συν2α καὶ συνα.

253. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{1}{2}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

254. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

114. Πρόβλημα 4ον. *Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τῆς εφα.*

Γνωρίζομεν (§ 118 III), ὅτι

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Δοθέντα	εφα
Ἄγνωστα	$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

Λύομεν τὴν ἰσότητα (1) πρὸς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\varepsilon\varphi\alpha\left(1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}\right)=2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}-2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\alpha=0 \qquad (2)$$

Ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι μία ἰξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἄγνωστον τὴν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$. Αἱ ρίζαι τῆς (2) δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει τὴν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τῆς εφα.

Ἀσκήσεις. 255. Γνωρίζοντες, ὅτι $\varepsilon\varphi 30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ$15^0$.

256. Ἐὰν $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{4}{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

***Α' Ὁμάς*. 257.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\sigma\varphi\alpha=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$.

258. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

259. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2(\sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha+\sigma\varphi 2\alpha)=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

260. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha(3-\varepsilon\varphi^2\alpha)=4\,\eta\mu(60^0+\alpha)\,\eta\mu(60^0-\alpha)$.

261. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu(\alpha+\gamma)\,\sigma\upsilon\nu\gamma=\eta\mu(\beta-\gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma).$$

262. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha}=0$.

263. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu(\alpha-\beta)\,\eta\mu(\alpha-\gamma)}+\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu(\beta-\gamma)\,\eta\mu(\beta-\alpha)}+\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu(\gamma-\alpha)\,\eta\mu(\gamma-\beta)}=0.$$

264. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

1ον. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)+\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)+\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha)=\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)\,\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)\,\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha)$.

2ον. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta+60^0)+\varepsilon\varphi(\beta-\gamma+60^0)+\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha+60^0)=$
$=\varepsilon\varphi(\alpha-\beta+60^0)\varepsilon\varphi(\beta-\gamma+60^0)\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha+60^0)$

265. Ποία εἶναι ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ; Νὰ εὑρεθῇ ἀνάλογος σχέσις μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου.

266. Ἐὰν $\frac{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha}=1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi^2\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta$.

***Β' Ὁμάς*. 267.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{1-\varepsilon\varphi^2(45^0-\alpha)}{1+\varepsilon\varphi^2(45^0-\alpha)}=\eta\mu 2\alpha$.

268. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

269. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ημ^2 2α - 4\,ημ^2 α}{ημ^2 2α + 4\,ημ^2 α - 4} = εφ^4 α$.

270. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ\left(45^0 + \frac{α}{2}\right) + σφ\left(45^0 + \frac{α}{2}\right) = \frac{2}{συνα} = \cancel{2τεμα}$.

271. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-ημx}{1+ημx}}$.

2ον. Ἐὰν $ημx = \frac{α-β}{α+β}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $εφ\left(45^0 - \frac{x}{2}\right)$.

272. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(1+εφα+τεμα)(1+εφα-τεμα) = ημ2α\ τεμ^2 α$.

273. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ2α + τεμ2α = \frac{συνα+ημα}{συνα-ημα} = εφ(45^0+α)$.

274. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $3 - συν2x(4 - συν2x) - ημ^2 2x = 8ημ^4 x$.

275. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφα = \frac{1}{εφα} - \frac{2}{εφ2α}$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$Σ = εφα + 2εφ2α + 4εφ4α + \dots + 2^ν\, εφ2^ν α.$$

276. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $τεμνα \cdot τεμ(ν+1)α = στεμα[εφ(ν+1)α - εφνα]$.

καὶ 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$Σ = \frac{1}{συνα\,συν2α} + \frac{1}{συν2α\,συν3α} + \dots + \frac{1}{συν\,να\,συν(ν+1)α}$$

Γ' Ὁμάς. **277.** Ἐὰν $εφ2α = \sqrt{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ3α.

278. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφx ἀπὸ τὴν σχέσιν $εφx = (2+\sqrt{3})εφ\frac{x}{3}$.

279. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $συν^2 2α - ημ^2 α = συνα\,συν3α$.

280. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφα + εφ(α+60^0) + εφ(α+120^0) = 3\,εφ3α$.

281. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ5α = 5\,ημα - 20\,ημ^3 α + 16\,ημ^5 α$.

282. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $συν5α = 16\,συν^5 α - 20\,συν^3 α + 5\,συνα$

283. Ἐὰν $α < 45^0$ καὶ $εφα = \frac{3}{4}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις

$$y = ημ5α - 8\,συν^4 α\,ημα + 6\,συν^2 α\,ημα.$$

284. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ημ2x - ημ4x}{ημ2x + ημ4x} \cdot \frac{συν2x - συν4x}{συν2x + συν4x} + εφ^2 x = 0$.

285. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $3 - 4\,συν2x + συν4x = 8\,ημ^4 x$

286. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $4\,ημ^2\frac{α}{4}\left(1 - ημ\frac{α}{2}\right) = \left(1 \pm \sqrt{1+ημα}\right)^2$

287. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ^2 x + σφ^2 x = 2 \cdot \frac{3+συν4x}{1-συν4x}$.

288. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ημβ\,συνα(εφα+εφβ)}{1-συν(α+β)} + \frac{ημ\frac{α-β}{2}}{συνβ\,ημ\frac{α+β}{2}} = 1$.

289. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{εφ^2 α}{εφ^2 β} = \frac{συνβ}{συνα} \cdot \frac{συνx - συνα}{συνx - συνβ}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $εφ\frac{x}{2}$

Δ' Ὁμάς. **290.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $ημ3x = 4\,ημx\,ημ(x+60^0)\,ημ(x+120^0)$.

2ον. $συν3x = -4\,συνx\,συν(x+60^0)συν(x+120^0)$

3ον. $εφ3x = -εφx\,εφ(x+60^0)\,εφ(x+120^0)$.

291. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ3α\,στεμα - συν3α\,τεμα = 2$

292. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $4\,συν3α\,ημ^3 α + 4\,ημ3α\,συν^3 α = 3\,ημ4α$

293. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. $\eta\mu 3\alpha\, \eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha\, \sigma\upsilon\nu^3\alpha = \sigma\upsilon\nu^3 2\alpha$

2ον. $\sigma\upsilon\nu^3\alpha \cdot \frac{\eta\mu 3\alpha}{3} + \eta\mu^3\alpha \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{3} = \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{4}$.

Ε' Ὁμάς. **294.** Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\sigma\varphi^2 A + \sigma\varphi^2 B + \sigma\varphi^2 \Gamma \geqslant 1.$$

295. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi^2\alpha+\varepsilon\varphi^2\beta+\varepsilon\varphi^2\gamma \geqslant 1$.

296. Ἐὰν τὰ τόξα α καὶ β εἶναι θετικὰ καὶ μικρότερα τῶν 90^0, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\eta\mu(\alpha+\beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$.

297. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε τιμὴν τῶν α καὶ β θὰ εἶναι

$$2(1-\eta\mu\alpha\, \eta\mu\beta) \geqslant \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta.$$

298. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι α, β, γ εἶναι ὀξεῖαι, θὰ εἶναι $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma$.

299. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δι' ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ π, θὰ εἶναι $\sigma\varphi\frac{x}{2} > 1 + \sigma\varphi x$.

Ϛ' Ὁμάς. **300.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2 \Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma}$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές.

301. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν αἱ γωνίαι του ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$.

302. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν αἱ γωνίαι του ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$.

303. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν αἱ γωνίαι του ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν

$$\eta\mu\frac{A}{2}\, \sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{B}{2}\, \sigma\upsilon\nu^3\frac{A}{2}.$$

304. Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου καὶ ἐὰν αἱ

$\sigma\varphi\frac{A}{2}$, $\sigma\varphi\frac{B}{2}$, $\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}\, \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 3.$$

305. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν ἀκμῶν του καὶ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀκμαὶ αὐταὶ ἀνὰ δύο.

306. 1ον. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ λ καὶ μ, ἵνα ἡ σχέσις $\frac{1}{\eta\mu\alpha} = \lambda\, \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} + \mu\, \sigma\varphi\alpha$, ἰσχύῃ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου α.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma = \frac{1}{\eta\mu\alpha} + \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \frac{1}{\eta\mu 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\eta\mu 2^\nu\alpha}$$

307. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχουν δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha = A\, \sigma\varphi\alpha + B\, \sigma\varphi 2\alpha$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου α.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\Sigma = \varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

1. Τροπὴ ἀθροισμάτων ἢ διαφορῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα

115. Τροπὴ τῶν παραστάσεων ημA±ημB εἰς γινόμενα. Γνωρίζομεν (§ 108) ὅτι

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu(\alpha+\beta)&=\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \eta\mu(\alpha-\beta)&=\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)=2\ \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)=2\ \eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (3)$$

Θέτομεν $\quad \alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B \qquad (4)$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν

$$2\alpha=A+B \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\frac{A+B}{2}$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (4) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν

$$2\beta=A-B \quad \text{ἢ} \quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) τὰ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α, καὶ β μὲ τὰ ἴσα των καὶ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu A+\eta\mu B&=2\ \eta\mu\frac{A+B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \\ \eta\mu A-\eta\mu B&=2\ \eta\mu\frac{A-B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \end{aligned}}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι μᾶς χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ τρέπωμεν εἰς γινόμενον παραγόντων παραστάσεις τῆς μορφῆς ημA±ημB καὶ ἑπομένως νὰ καθιστῶμεν αὐτὰς λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων.

Κατὰ τοὺς τύπους αὐτοὺς θὰ εἶναι

$$\eta\mu 56^\circ+\eta\mu 24^\circ=2\eta\mu\frac{56^\circ+24^\circ}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{56^\circ-24^\circ}{2}=2\,\eta\mu 40^\circ\,\sigma\upsilon\nu 16^\circ$$

$$\eta\mu 40^\circ-\eta\mu 22^\circ=2\eta\mu\frac{40^\circ-22^\circ}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{40^\circ+22^\circ}{2}=2\,\eta\mu 9^\circ\,\sigma\upsilon\nu 31^\circ.$$

116. Ἐφαρμογή. ***Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις*** $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}$.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰς προηγουμένας ἰσότητας εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{2\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{\eta\mu\frac{A+B}{2}}=$$

$$=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\,.\,\sigma\varphi\frac{A+B}{2}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}.$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\boxed{\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}}$$

117. Τροπὴ τῶν παραστάσεων συνA±συνB εἰς γινόμενα.

Γνωρίζομεν § 108, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta$$

Προσθέτομεν πρῶτον καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)&=\ \ 2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)&=-2\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Θέτομεν $\alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B$ καὶ εὑρίσκομεν, ὅπως εἰς τὴν § 115, ὅτι $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$ καὶ $\beta=\dfrac{A-B}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἰσότητας (1) τὰ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α καὶ β μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B&=2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\\ \sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B&=-2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\end{aligned}}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι μᾶς χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ τρέπωμεν παραστάσεις τῆς μορφῆς συνA±συνB εἰς γινόμενον παραγόντων.

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu 50^0+\sigma\upsilon\nu 40^0=2\,\sigma\upsilon\nu\frac{50^0+40^0}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{50^0-40^0}{2}=2\,\sigma\upsilon\nu 45^0\,\sigma\upsilon\nu 5^0$$

$$\sigma\upsilon\nu 33^0-\sigma\upsilon\nu 27^0=-2\eta\mu\frac{33^0+27^0}{2}\eta\mu\frac{33^0-27^0}{2}=-2\,\eta\mu 30^0\,\eta\mu 3^0.$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὰ τόξα $\frac{A-B}{2}$ καὶ $\frac{B-A}{2}$ εἶναι ἀντίθετα καὶ ἑπομένως εἶναι $\eta\mu\frac{A-B}{2}=-\eta\mu\frac{B-A}{2}$, ὁ τύπος

$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B-A}{2}}$$

δηλ. μὲ θετικὸν τὸ δεύτερον μέλος του.

118. Ἐφαρμογή. ***Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις $1+\sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ $1-\sigma\upsilon\nu\alpha$.***

Ἐπειδὴ $1=\sigma\upsilon\nu 0^0$ θὰ εἶναι

$$1+\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu 0+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\,\sigma\upsilon\nu\frac{0+\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{0-\alpha}{2}=2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1-\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu 0-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\,\eta\mu\frac{0+\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\alpha-0}{2}=2\,\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

δηλ, εὑρήκαμεν τοὺς τύπους, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 110.

Ἀσκήσεις. 308. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

1ον. $\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$. 2ον. $\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

309. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

1ον. $\frac{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta}$ 2ον. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta}$

310. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\frac{\eta\mu 5\alpha-\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$ 2ον. $\frac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$

311. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\eta\mu 3\alpha-\eta\mu\alpha}=\varepsilon\varphi 2\alpha$ 2ον. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\beta-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\beta+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$

312. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha-\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha$ 2ον. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 4\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi 3\alpha$

313. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1. $\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha$ 2ον $\frac{\eta\mu\alpha+\mu\,\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha}{\eta\mu 3\alpha+\mu\,\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}=\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu 5\alpha}$

314. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{2\,\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi 2\alpha-\varepsilon\varphi\alpha$.

119. Τροπὴ τῶν παραστάσεων εφΑ±εφΒ εἰς γινόμενα. Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ εἶναι

$$\text{εφ}A\pm\text{εφ}B=\frac{\text{ημ}A}{\text{συν}A}\pm\frac{\text{ημ}B}{\text{συν}B}=\frac{\text{ημ}A\,\text{συν}B\pm\text{συν}A\,\text{ημ}B}{\text{συν}A\,\text{συν}B}$$

ἢ

$$\boxed{\text{εφ}A\pm\text{εφ}B=\frac{\text{ημ}(A\pm B)}{\text{συν}A\,\text{συν}B}}$$

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ εἶναι

$$\text{εφ}25^0+\text{εφ}48^0=\frac{\text{ημ}(25^0+48^0)}{\text{συν}25^0\,\text{συν}48^0}=\frac{\text{ημ}73^0}{\text{συν}25^0\,\text{συν}48^0}$$

$$\text{εφ}50^0-\text{εφ}40^0=\frac{\text{ημ}(50^0-40^0)}{\text{συν}50^0\,\text{συν}40^0}=\frac{\text{ημ}10^0}{\text{συν}50^0\,\text{συν}40^0}$$

120. Ἐφαρμογή. *Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις*

$$1\pm\text{εφ}\alpha$$

Ἐπειδὴ $1=\text{εφ}45^0$ θὰ εἶναι

$$1\pm\text{εφ}\alpha=\text{εφ}45^0\pm\text{εφ}\alpha=\frac{\text{ημ}(45^0\pm\alpha)}{\text{συν}45^0\,\text{συν}\alpha}=\frac{\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^0\pm\alpha)}{\text{συν}\alpha}$$

Ἀσκήσεις. ***Β' Ὁμάς.*** **315.** Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

1ον $\text{εφ}^2\alpha-\text{εφ}^2\beta$. 2ον $\dfrac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}$

316. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις

1ον. $\text{σφ}\alpha\pm\text{σφ}\beta$. 2ον. $\dfrac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta}$ 3ον. $\dfrac{\text{εφ}\alpha-\text{σφ}\beta}{\text{εφ}\alpha+\text{σφ}\beta}$

121. Τροπὴ γινομένου τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Πολλάκις εἶναι χρήσιμος ἡ μετατροπὴ γινομένων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Αἱ μετατροπαὶ αὐταὶ γίνονται κατὰ τοὺς κατωτέρω τύπους, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν εἰς τὰς § 115 καὶ 117

$$\boxed{\begin{aligned}2\,\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta&=\text{ημ}(\alpha+\beta)+\text{ημ}(\alpha-\beta)\\2\,\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha&=\text{ημ}(\alpha+\beta)-\text{ημ}(\alpha-\beta)\\2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta&=\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)\\2\,\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta&=\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta)\end{aligned}}$$

Π.χ.

$$2\,\text{ημ}4\alpha\,\text{συν}\alpha=\text{ημ}5\alpha+\text{ημ}3\alpha$$
$$2\,\text{συν}3\alpha\,\text{συν}\alpha=\text{συν}4\alpha+\text{συν}2\alpha$$
$$2\,\text{ημ}6\alpha\,\text{ημ}2\alpha=\text{συν}4\alpha-\text{συν}8\alpha$$

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* **317.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ15^0\, ημ105^0 = \frac{1}{4}$.

318. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $συν165^0\, συν75^0 = -\frac{1}{4}$.

319. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\, ημ(45^0+β)ημ(45^0-β)=συν2β$.

320. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$ημ6α\, ημ4α - ημ15α\, ημ13α + ημ19α\, ημ9α = 0.$$

Β' Ὁμάς. **321.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ6^0\, εφ42^0\, εφ66^0\, εφ78^0 = 1$.

322. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $συνα\, ημ(β-γ)+συνβ\, ημ(γ-α)+συνγ\, ημ(α-β)=0$

2ον. $ημα\, ημ(β-γ)+ημβ\, ημ(γ-α)+ημγ\, ημ(α-β)=0$.

323. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $ημ(α+β)ημ(α-β)+ημ(β+γ)ημ(β-γ)+ημ(γ+α)ημ(γ-α)=0$

2ον. $συν(α+β)ημ(α-β)+συν(β+γ)ημ(β-γ)+συν(γ+α)ημ(γ-α)=0$.

324. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$συν(α+β)ημ(α-β)+συν(β+γ)ημ(β-γ)+συν(γ+δ)ημ(γ-δ)+συν(δ+α)ημ(δ-α)=0.$$

122. Παραδείγματα χρησιμοποιήσεως τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ παραστάσεων εἰς γινόμενα.

1ον. *Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις*

$$ημφ \pm συνω.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα ω καὶ $90^0-ω$ εἶναι συμπληρωματικά, θὰ εἶναι $συνω=ημ(90^0-ω)$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$ημφ+συνω=ημφ+ημ(90^0-ω)$$
$$=2ημ\frac{φ+(90^0-ω)}{2}\,συν\frac{φ-(90^0-ω)}{2}$$

ἢ

$$\boxed{\mathbf{ημφ+συνω=2\,ημ\left(\frac{φ-ω}{2}+45^0\right)συν\left(\frac{φ+ω}{2}-45^0\right)}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$ημφ-συνω=ημφ-ημ(90^0-ω)$$
$$=2\,ημ\frac{φ-(90^0-ω)}{2}\,συν\frac{φ+(90^0-ω)}{2}$$

ἢ

$$\boxed{\mathbf{ημφ-συνω=2\,ημ\left(\frac{φ+ω}{2}-45^0\right)συν\left(\frac{φ-ω}{2}+45^0\right)}}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ τόξα φ καὶ ω ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν x θὰ εἶναι

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{ημx+συνx=2\,ημ45^0\,συν(x-45^0)=\sqrt{2}\,συν(x-45^0)}\\&\mathbf{ημx-συνx=2\,ημ(x-45^0)συν45^0=\sqrt{2}\,ημ(x-45^0)}\end{aligned}}$$

2ον. ***Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις***

$$A = \eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 7\alpha.$$

Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται

$$\begin{aligned} A &= (\eta\mu 7\alpha + \eta\mu\alpha) + (\eta\mu 5\alpha + \eta\mu 3\alpha) \\ &= 2\,\eta\mu\frac{7\alpha+\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{7\alpha-\alpha}{2} + 2\,\eta\mu\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{5\alpha-3\alpha}{2} \\ &= 2\,\eta\mu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha + 2\,\eta\mu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ &= 2\,\eta\mu 4\alpha(\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \\ &= \eta\mu 4\alpha \,.\, 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\alpha+\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\alpha-\alpha}{2} \\ &= 4\,\eta\mu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha. \end{aligned}$$

3ον. ***Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^{\circ}$, νὰ τραπῇ ἡ παράστασις $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.***

Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma &= (\eta\mu A + \eta\mu B) + \eta\mu\Gamma \\ &= 2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + \eta\mu\Gamma \qquad (1) \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Γ καὶ Α+Β εἶναι παραπληρωματικαὶ θὰ εἶναι

$$\eta\mu\Gamma = \eta\mu(A+B) = 2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ημΓ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma &= 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \\ &= 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right] \\ &= 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,.\,2\sigma\upsilon\nu\frac{(A-B)+(A+B)}{4}\,\sigma\upsilon\nu\frac{(A-B)-(A+B)}{4} \\ &= 4\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{-B}{2} \qquad (1') \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, διότι τὰ τόξα $\frac{A+B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικά, καὶ ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{-B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, διότι δύο τόξα ἀντίθετα ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ἡ ἰσότης (1′) γίνεται :

$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}}$$

Ἀσκήσεις. *Α′ Ὁμάς*. 325. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις $\dfrac{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta}$.

326. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις :

1. $\varepsilon\varphi\alpha \pm \eta\mu\alpha$ 2. $\varepsilon\varphi\alpha \pm 2\,\eta\mu^2\alpha$.

327. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:
1. $τεμα \pm στεμα$ 2. $τεμα \pm εφα$.

328. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $ημ^2 24^0 - ημ^2 6^0$.

B' Ὁμάς. **329.** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:
$A = ημx + 2\,ημ2x + ημ3x$
$B = συνx + 2\,συν2x + συν3x$.

330. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:
$A = ημx + ημ2x + ημ3x$
$B = ημx + ημ3x + ημ7x + ημ9x$
$Γ = συνx + συν4x - συν8x - συν11x$.

331. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:
$A = ημα + ημ3α - ημ5α + ημ9α$
$B = συνα + συν3α + συν5α + συν9α$.

332. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:
$$y = 1 + ημα + συνα + ημα\,συνα.$$

333. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:
$$y = ημα + ημβ + ημ(α+β).$$

2. Μετασχηματισμοὶ μὲ χρῆσιν βοηθητικῆς γωνίας

123. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας. Πολλαὶ παραστάσεις δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων, μὲ χρῆσιν βοηθητικῆς γωνίας.

Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν παραστάσεων εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων, χρησιμοποιοῦμεν καὶ τοὺς κάτωθι τύπους, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν προηγουμένως καὶ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης:

$$1 + συνω = 2\,συν^2\frac{ω}{2}, \qquad 1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$$

$$1 - συνω = 2\,ημ^2\frac{ω}{2}, \qquad 1 \pm εφω = \frac{\sqrt{2}\,ημ(45^0 \pm ω)}{συνω}$$

A. ***Παραστάσεις τῆς μορφῆς α+β.*** Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $α+β$ γίνονται λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

1ον. Θέτομεν τὸ α ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$α + β = α\left(1 + \frac{β}{α}\right) \qquad (1)$$

Θέτομεν $\frac{β}{α} = εφ^2ω$ (2), ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$α + β = α(1 + εφ^2ω) \quad ἢ \quad α + β = \frac{α}{συν^2ω}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $α+β$ μετεσχηματίσθη εἰς ἕνα πηλίκον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων: Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (3) ἔχομεν

$$λογ(α+β)=λογα-2\,λογ\,συνω$$

Ἡ βοηθητικὴ γωνία ω ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2).

2ον. Ἂν θέσωμεν $\frac{β}{α}=εφω$ ἡ (1) γίνεται

$$α+β=α(1+εφω) \quad ἢ \quad α+β=α\,.\,\frac{\sqrt{2}\,ημ(45^0+ω)}{συνω}$$

3ον. Ἐὰν $\frac{β}{α}<1$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βοηθητικὴν γωνίαν, μίαν γωνίαν ω, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{β}{α}=συνω$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$α+β=α(1+συνω) \quad ἢ \quad α+β=α.2συν^2\frac{ω}{2}$$

Β. ***Παραστάσεις τῆς μορφῆς α—β, ὅπου α>β.*** Θέτομεν τὸ α ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$α-β=α\left(1-\frac{β}{α}\right) \qquad (1)$$

Θέτομεν $\frac{β}{α}=συν^2ω$ (2), ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$α-β=α(1-συν^2ω) \quad ἢ \quad α-β=α\,ημ^2ω$$

Ἡ βοηθητικὴ γωνία ω ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2).

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{β}{α}=συνω$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται

$$α-β=α(1-συνω) \quad ἢ \quad α-β=α\,ημ^2\frac{ω}{2}$$

Γ. ***Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{α^2+β^2}$.*** Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι α εἶναι θετικόν, ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται

$$\sqrt{α^2+β^2}=α\sqrt{1+\frac{β^2}{α^2}} \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{β}{α}=εφω$ (2), ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\sqrt{α^2+β^2}=α\sqrt{1+εφ^2ω}=α\sqrt{\frac{1}{συν^2ω}}=\frac{α}{συνω}$$

Ἡ γωνία ω ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2).

Δ. ***Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{α^2-β^2}$ ὅπου α>β.*** Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται

$$\sqrt{α^2-β^2}=α\sqrt{1-\frac{β^2}{α^2}} \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{β}{α}=ημω$ (2), ἡ ἰσότης (1), γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\alpha\sqrt{1-\eta\mu^2\omega} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

Ἡ γωνία ω ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2).

Ε. ***Παραστάσεις τῆς μορφῆς α ημx±β συνx.*** Θέτομεν τὸ α ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$\alpha\,\eta\mu x\pm\beta\,\sigma\upsilon\nu x=\alpha\left(\eta\mu x\pm\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x\right) \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=\varepsilon\varphi\omega$ (2), ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$\alpha\,\eta\mu x\pm\beta\,\sigma\upsilon\nu x=\alpha(\eta\mu x\pm\varepsilon\varphi\omega\,\sigma\upsilon\nu x)=\alpha\left(\eta\mu x\pm\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$=\alpha\left(\frac{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\omega\pm\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)=\frac{\alpha\,.\,\eta\mu(x\pm\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

Ἡ γωνία ω ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2).

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **334.** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:
1ον. $2\pm\sqrt{3}$ 2ον. $1\pm\sqrt{3}$

335. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:
1ον. $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2ον. $\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{2}}{2}$.

336. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

Β' Ὁμάς. **337.** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα α+β, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι λογα=2,63719 καὶ λογβ=1,18412, χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως οἱ α καὶ β.

338. Ἐὰν λογα=1,26740 καὶ λογβ=0,40600, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως οἱ α καὶ β.

339. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}$.

340. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$.

341. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις ημα$+\sqrt{3}$ συνα.

342. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\sqrt{2}+2$ ημω, ἐὰν ω=35° 40'.

3. Ὑπολογισμὸς τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων μικροτέρων τῶν 4° καὶ μεγαλυτέρων τῶν 85°.

124. Ὑπολογισμὸς τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομ. ἀριθμῶν τόξων μικροτέρων τῶν 4° καὶ μεγαλυτέρων 85°. Ἡ γενικὴ μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 66—69, δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὰ τόξα τὰ μικρότερα τῶν 4^0 καὶ τὰ μεγαλύτερα τῶν 85^0. Πράγματι αἱ ὑπάρχουσαι διαφοραὶ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθων εἶναι πολὺ μεγάλαι καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν πλέον τὴν ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν τόξων καὶ τῶν λογαρίθμων, ἀναλογίαν, ἡ ὁποία πάντοτε εἶναι κατὰ προσέγγισιν. Διὰ τοῦτο εἶναι προτιμότερον νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν κάτωθι μέθοδον, διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ἐλαχίστων αὐτῶν τόξων, ὅταν περιέχουν καὶ δευτερόλεπτα.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ ημα, ὅπου α παριστᾷ ἕνα τόξον εἰς δεύτερα λεπτά.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι $\eta\mu\alpha=\alpha.\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}$.

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\,\eta\mu\alpha=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ S τὸν $\lambda o\gamma\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda o\gamma\,\eta\mu\alpha=\lambda o\gamma\,\alpha+S}} \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ εφα, ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\varepsilon\varphi\alpha=\alpha.\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\alpha}$$

Ἂν θέσωμεν $\lambda o\gamma\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\alpha}=T$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha=\lambda o\gamma\,\alpha+T}} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ὁ λογ ημα εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ α, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ τόξον εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ S, ὁ δὲ λογ εφα εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ λογα καὶ τοῦ ἀριθμοῦ T.

Ὁ λογ α εὑρίσκεται ἐκ τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, οἱ δὲ ἀριθμοὶ S καὶ T ἀναγράφονται * εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς πρώτης σελίδος καὶ εἰς τὸ κάτω καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου ἑκάστης τῶν ἄλλων σελίδων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν.

---

* Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τοῦ Π. Γ. Τόγκα οἱ ἀριθμοὶ S καὶ T ἀναγράφονται εἰς τὴν τρίτην καὶ τετάρτην στήλην τῶν πινάκων, οἱ ὁποῖοι φέρουν ἐπικεφαλίδας 0^0, 1^0, 2^0, 3^0.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν χρῆσιν τῶν πινάκων διὰ τὴν λύσιν τῶν δύο προβλημάτων τῆς § 68 καὶ 69 διὰ τὰ ἐλάχιστα τόξα.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ ημ $1^0\,44'\,28''$.*

Εἰς τὴν σελίδα 37 (λογαριθμικοὶ πίνακες Π. Τόγκα) παρατηροῦμεν ὅτι:

τοξ. $1^0\,44'$ . . . . . . $=6240''$

» $1^0\,44'\,28''$ . . . . $=6240''+28''=6268''$

Εἰς τὴν αὐτὴν σελίδα καὶ εἰς τὴν στήλην S καὶ παραπλεύρως τοῦ τόξου $1^0\,44''$ παρατηροῦμεν, ὅτι $S=\overline{6},68550$.

Ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ὅτι:

λογ 6268=3,79713

Κατὰ τὸν τύπον λογ ημα=λογα+S

θὰ ἔχωμεν: λογ ημ$1^0\,44'\,28''=3,79713+\overline{6},68550=\overline{2},48263$

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ εφ $1^0\,27'\,39''$*

Εἰς τὴν σελίδα 36 τῶν λογαρ. πινάκων παρατηροῦμεν, ὅτι:

$1^0\,27'$ . . . . $=5220''$

ἄρα: $1^0\,27'\,39''$ . . . . $=5220''+39''=5259''$.

Εἰς τὴν αὐτὴν σελίδα καὶ εἰς τὴν στήλην Τ καὶ παραπλεύρως τοῦ τόξου $1^0\,27'$ εὑρίσκομεν $T=\overline{6},68566$.

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν:

λογ 5259=3,72090

Κατὰ τὸν τύπον λογ εφα=λογα+Τ

θὰ ἔχωμεν: λογ εφ$1^0\,27'\,39''=3,72090+\overline{6},68566=\overline{2},40656$

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ σφ $0^0\,54'\,45''$.*

Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\alpha=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, 0^0\,54'\,45''=\lambda o\gamma\frac{1}{\varepsilon\varphi\, 0^0\,54'\,45''}$$
$$=-\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 0^0\,54'\,45''.$$

Εὑρίσκομεν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 2ον, ὅτι

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 54'\,45''=\overline{2},20215$$

ἄρα $$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 0^0\,54'\,45''=-\overline{2},20215=1,79785.$$

Σημ. Διὰ τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ 86^0 καὶ 90^0 ἀντικαθιστῶμεν τὴν εφα μὲ $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi(90^0-\alpha)}$, τὴν σφα μὲ εφ$(90^0-\alpha)$ καὶ τὸ συνα μὲ ημ$(90^0-\alpha)$.

Παράδειγμα 4ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ $88^0\,50'\,45''$.*

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $88^0\,50'\,45''$ καὶ $90^0-88^0\,50'\,45''=1^0\,9'\,15''$ εἶναι συμπληρωματικά, θὰ εἶναι

$$\varepsilon\varphi\, 88^0\,50'\,45''=\sigma\varphi 1^0\,9'\,15''=\frac{1}{\varepsilon\varphi 1^0\,9'\,15''}$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi 88^0\, 50'\, 45'' = -\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi 1^0\, 9'\, 15''$.

Ἐργαζόμενοι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 2ον, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi 1^0\, 9'\, 15'' = 3{,}61857 + \overline{6}{,}68563 = \overline{2}{,}30420$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi 88^0\, 50'\, 45'' = -\overline{2}{,}30420 = 1{,}69580$.

Παράδειγμα 5ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ σφ88⁰ 36′ 10″*

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $88^0\, 36'\, 10''$ καὶ $90^0 - 88^0\, 36'\, 10'' = 1^0\, 23'\, 50''$ εἶναι συμπληρωματικά, θὰ εἶναι

$$\sigma\varphi\, 88^0\, 36'\, 10'' = \varepsilon\varphi\, 1^0\, 23'\, 50''$$

Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 2ον εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 1^0\, 23'\, 50'' = 3{,}70157 + \overline{6}{,}68565{,}9 = \overline{2}{,}38722{,}9$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, 88^0\, 36'\, 10'' = \overline{2}{,}38722{,}9$

Παράδειγμα 6ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογ συν 89⁰ 1′ 40″.*

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $89^0\, 1'\, 40''$ καὶ $90^0 - (89^0\, 1'\, 40'') = 58'\, 20''$ εἶναι συμπληρωματικά, θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\, 89^0\, 1'\, 40'' = \eta\mu 58'\, 20''$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, 89^0\, 1'\, 40'' = \lambda o\gamma\, \eta\mu 58'\, 20''$.

Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, 58^0\, 20'' = 3{,}54407 + \overline{6}{,}68555{,}4 = \overline{2}{,}22956{,}4$$

ἄρα $\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, 89^0\, 1'\, 40'' = \overline{2}{,}22956{,}4$

Παράδειγμα 7ον. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ μικρότερον τόξον x, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι* $\lambda o\gamma\, \eta\mu x = \overline{2}{,}16740$

Ὁ πίναξ (σελὶς 35) δεικνύει, ὅτι τὸ τόξον x περιλαμβάνεται μεταξὺ $0^0\, 50'$ καὶ $0^0\, 51'$ καὶ δίδει ὡς ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ $S = \overline{6}{,}68556$.

Ἐπειδὴ τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τῶν 2^0 χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu x = \lambda o\gamma x + S$$

ἀπὸ τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν:

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma\, \eta\mu x - S = \overline{2}{,}16740 - \overline{6}{,}68556 = 3{,}48184.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν:

$$x = 3032''{,}8 = 50'\, 32'{,}8$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δίδεται ὁ λογάριθμος ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ποσότητα T ἀντὶ τῆς S.

Ἀσκήσεις. 343. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1. $\lambda o\gamma\, \eta\mu\, 1^0\, 2'\, 45''$
2. $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 2^0\, 15''$
3. $\lambda o\gamma\, \eta\mu\, 25'\, 40''$
4. $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, 89^0\, 40'\, 10''$
5. $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, 88^0\, 15'\, 12''$
6. $\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, 88^0\, 2'\, 25''$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **344.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = 4\, \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

2ον. $$(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 4\, \eta\mu^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

345. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $\eta\mu 8\alpha - \eta\mu 6\alpha - \sigma\upsilon\nu 8\alpha\,\eta\mu 2\alpha = 2\,\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu 8\alpha.$

346. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\beta=1$

347. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $1-\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

348. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $\dfrac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x}-2\sigma\upsilon\nu 2x-2\,\sigma\upsilon\nu 4x-2\,\sigma\upsilon\nu 6x=1$

349. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha+\left(\frac{\eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi\alpha}\right)^2-\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\sqrt{2}\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\alpha-45^0)$$

Β' Ὁμάς. **350.** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:

1ον. $1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha$ 2ον. $1+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha.$

351. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις;

1ον. $1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ 2ον. $1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x$

352. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$y=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2(\alpha+\beta)$$

353. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:

$$A=\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma-\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$B=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$$

354. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$A=\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)-(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma).$$

355. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$A=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma$$

356. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον αἱ παραστάσεις:

$$A=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\gamma-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$B=\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)+\eta\mu(\beta+\gamma-\alpha)+\eta\mu(\gamma+\alpha-\beta)-\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$$

Γ' Ὁμάς. **357.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha.\eta\mu\frac{3\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$

358. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(\alpha+60^0)+\varepsilon\varphi(\alpha+120^0)=3\,\varepsilon\varphi 3\alpha$

2ον. $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi(\alpha-60^0)+\sigma\varphi(\alpha-120^0)=3\,\sigma\varphi 3\alpha$

Δ' Ὁμάς. **359.** Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

+ 1ον. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

2ον. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

+ 3ον. $\eta\mu A+\eta\mu B-\eta\mu\Gamma=4\,\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$

360. Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

+ 1ον $\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=4\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$

2ον $\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma=-1-4\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$

361. 'Εὰν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1-2\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$

2ον. $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=2+2\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$

362. 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma+\eta\mu\delta=4\,\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2}$

2ον. $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu\delta=4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2}$

363. 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma-\eta\mu\delta=4\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}\eta\mu\frac{\gamma+\alpha}{2}$

2ον. $\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\delta=4\,\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma+\alpha}{2}$

Ε' Ὁμάς. 364. 'Εὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

365. 'Απὸ τὴν σχέσιν $\eta\mu x=\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{1+\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}$ νὰ ἐξαχθῇ :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\pm\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$$

366. 'Εὰν $2\,\varepsilon\varphi\alpha=3\,\varepsilon\varphi\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\beta}{2+3\,\varepsilon\varphi^2\beta}=\frac{\eta\mu2\beta}{5-\sigma\upsilon\nu2\beta}$$

ϛ' Ὁμάς. 367. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\eta\mu A=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, εἶναι ὀρθογώνιον.

368. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

369. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\eta\mu4A+\eta\mu4B+\eta\mu4\Gamma=0$, τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον.

370. 'Εὰν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ $\eta\mu(\beta+\gamma-\alpha)$, $\eta\mu(\gamma+\alpha-\beta)$ $\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ οἱ $\varepsilon\varphi\alpha$, $\varepsilon\varphi\beta$, $\varepsilon\varphi\gamma$.

371. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ $\eta\mu2\alpha$, $\eta\mu2\beta$, $\eta\mu2\gamma$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ οἱ $\varepsilon\varphi(\beta+\gamma)$, $\varepsilon\varphi(\gamma+\alpha)$, $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$.

372. 'Εὰν τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ οἱ συνεφαπτόμενοι τῶν ἡμίσεων γωνιῶν των σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

373. 'Εὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu3A+\sigma\upsilon\nu3B+\sigma\upsilon\nu3\Gamma=1$, ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς εἶναι 120^0.

374. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\eta\mu3A+\eta\mu3B+\eta\mu3\Gamma=0$, ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς εἶναι 60^0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις

125. Ὁρισμοί. Γνωρίζομεν (§ 101), ὅτι ***τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις*** εἶναι μία ἰσότης, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἢ περισσοτέρους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀγνώστων τόξων καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει δι᾽ ὡρισμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τόξων.

Π.χ. ἡ ἰσότης $\eta\mu x=0$ εἶναι μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον διὰ τιμὰς τοῦ τόξου x, αἱ ὁποῖαι δίδονται (§ 96, 1ον) ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x=k\pi,$$

ἐνῶ ἡ ἰσότης

$$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$$

εἶναι μία ταυτότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου x.

126. Μέθοδοι λύσεως. Ἡ λύσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων δὲν δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς γενικοὺς κανόνας. Δυνάμεθα ὅμως νὰ κατατάξωμεν αὐτὰς εἰς διαφόρους ὁμάδας, αἱ ὁποῖαι νὰ περιέχουν τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις, ποὺ λύωνται μὲ τὴν αὐτὴν μέθοδον.

127. Ι. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\,\eta\mu x=\beta$, $\alpha\,\sigma\upsilon\nu x=\beta$, $\alpha\,\varepsilon\varphi x=\beta$. Ἐὰν μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις ἔχει τὴν μορφήν :

$$\alpha\,\eta\mu x=\beta, \qquad \alpha\,\sigma\upsilon\nu x=\beta, \qquad \alpha\,\varepsilon\varphi x=\beta$$

ἢ

$$\eta\mu x=\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \sigma\upsilon\nu x=\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \varepsilon\varphi x=\frac{\beta}{\alpha}$$

ἡ ἐξίσωσις λύεται εὐκόλως· διότι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἀμέσως, ἢ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἕνα τόξον ω τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἡμίτονόν του, ἢ τὸ συνημίτονόν του κλπ. νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{\beta}{\alpha}$. Θὰ ἔχωμεν τότε νὰ λύσωμεν τὰς στοιχειώδεις τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις :

$$\eta\mu x=\eta\mu\omega, \qquad \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\omega, \qquad \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\omega.$$

Εἰς τὰς § 93, 97, 100 εἴδομεν πῶς λύονται αἱ στοιχειώδεις αὗται ἐξισώσεις. Κατωτέρω θὰ δώσωμεν καὶ ἄλλα παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $συνx=\frac{2}{3}$.

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν $λογ\,συνx=λογ2-λογ3$

ἢ $λογ\,συνx=0,30103-0,47712=\overline{1},82391$

Ἀπὸ τοὺς λοάριθμικοὺς πίνακας εὑρίσκομεν, ὅτι $x=47^0\,11'\,21'',4$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$συνx=συν47^0\,11'\,21'',4$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ $47^0\,11'\,21'',4$ ἔχουν τὰ αὐτὰ συνημίτονα, συνδέονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x_1=360^0k+47^0\,11'\,21'',4 \quad καὶ \quad x_2=360^0k-(47^0\,11'\,21'',4).$$

Ἐὰν $k=0$ οἱ τύποι δίδουν $x_1=47^0\,11'\,21'',4$ καὶ $x_2=-47^0\,11'\,21'',4$.

Ἐὰν $k=1$ » » » $x_1=407^0\,11'\,21'',4$ καὶ $x_2=312^0\,48'\,38^0,6$

Παράδειγμα 2ον· *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$ημ(3x+45^0)=ημ(2x-60^0)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $3x+45^0$ καὶ $2x-60^0$ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, συνδέονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$3x+45^0=360^0k+(2x-60^0) \quad (1) \quad καὶ \quad 3x+45^0=(2k+1)180^0-(2x-60^0) \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν

$$3x-2x=360^0k-105^0 \quad ἢ \quad x=360^0k-105^0 \qquad (1')$$

Ἐὰν $k=0$, ἡ (1′) δίδει $x=-105^0$

Ἐὰν $k=1$, » » » $x=255^0$ κ.ο.κ.

Ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$3x+2x=(2k+1)180^0+15^0 \quad ἢ \quad 5x=(2k+1)\,180^0+15^0$$

ἄρα $$x=(2k+1)\,36^0+3^0 \qquad (2')$$

Ἐὰν $k=0$, ἡ (2′) δίδει $x=39^0$

Ἐὰν $k=0$, » » » $x=111^0$ κ.ο.κ.

Σημείωσις. Εἶναι καλὸν νὰ σημειώνωμεν τὰς λύσεις μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εὑρήκαμεν ἀνωτέρω, ὅτι αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=360^0k-105^0 \quad (1') \quad καὶ \quad x=(2k+1)\,36^0+3^0 \qquad (2')$$

Ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου λάβωμεν ἕνα σημεῖον A ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου (1′) ἔχουν ἕνα κοινὸν πέρας, τὸ πέρας τοῦ τόξου -105^0.

Εὑρίσκομεν τώρα ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου (2′)

Ὁ τύπος (2) γράφεται

$$5x=(2k+1)\,180^0+15^0 \quad ἢ \quad 5x=360^0k+195^0$$

ἢ $$x=k\,.\,\frac{360^0}{5}+39^0 \qquad (3)$$

Δίδομεν τὸ k τὰς τιμὰς εἰς 0, 1, 2, 3 καὶ 4 καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον (3) τὰς ἀντιστοίχως τιμὰς τοῦ x καὶ σημειώνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς περιφερείας 0 (Σχ. 79) τὰ πέρατα τῶν τόξων x. Οὕτω:

Ἐὰν $k=0$, ὁ τύπος (3) δίδει $x=39^0$ σημεῖον M_0

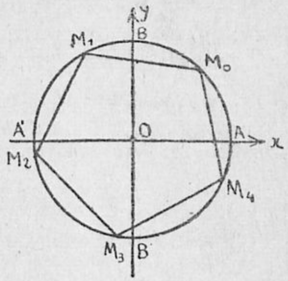
» $k=1$ » » » » $x=111^0$ » M_1

» $k=2$ » » » » $x=183^0$ » M_2

» $k=3$ » » » » $x=255^0$ » M_3

» $k=4$ » » » » $x=327^0$ » M_4

Ἐὰν λάβωμεν $k=5$ εὑρίσκομεν $x=360^0+39^0$ καὶ ἑπομένως τὸ τόξον λήγει εἰς τὸ σημεῖον M_0. Ἐὰν $k=6$ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον M_1 κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ πέρατα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (2) εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ***κανονικοῦ πενταγώνου*** ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον 0.



Σχ. 79.

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $συν7x=συν\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $7x$ καὶ $3x+\frac{\pi}{6}$ ἔχουν τὰ αὐτὰ συνημίτονα, συνδέονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$7x=2k\pi\pm\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{δηλ. ὑπὸ τῶν τύπων}$$

$$7x=2k\pi+\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad 7x=2k\pi-\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) \quad (2)$$

Ἀπὸ τὸν (1) λαμβάνομεν

$$7x-3x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{ἢ} \quad 4x=2k\pi+\frac{\pi}{6}, \quad \text{ἄρα}$$

$$x=k\cdot\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{24} \qquad (1')$$

Ἐὰν $k=0$ ἡ (1′) δίδει $x=\frac{\pi}{24}$

Ἐὰν $k=1$ » » » $x=\frac{13\pi}{24}$ κ.ο.κ.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἔχουν τὰ πέρατά των εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς ***τετραγώνου*** ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$7x+3x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \quad \text{ἢ} \quad 10x=2k\pi-\frac{\pi}{6}, \quad \text{ἄρα}$$

$$x=k\cdot\frac{2\pi}{10}-\frac{\pi}{60} \qquad (2')$$

Ἐὰν $x=0$, ἡ (2′) δίδει $x=-\frac{\pi}{60}$

Ἐὰν $x=1$, » » » $x=\frac{11\pi}{60}$ κ.ο.κ.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (2) λήγουν εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Παράδειγμα 4ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\varepsilon\varphi\left(7x+\frac{\pi}{8}\right)=\varepsilon\varphi 3x.$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $7x+\frac{\pi}{8}$ καὶ $3x$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, συνδέονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$7x+\frac{\pi}{8}=k\pi+3x$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$7x-3x=k\pi-\frac{\pi}{8} \quad \text{ἢ} \quad 4x=k\pi-\frac{\pi}{8}, \quad \text{ἄρα}$$

$$x=k\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32} \qquad (1)$$

Ἐὰν $k=0$, ἡ (1) δίδει $x=-\frac{\pi}{32}$

Ἐὰν $k=1$, » » » $x=\frac{7\pi}{32}$ κ.ο.κ.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἐπὶ ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου, εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν τὴν λύσιν (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=k\cdot\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{32}$ ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἀμέσως τὸ κλάσμα $\frac{2\pi}{8}$ ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ πέρατα τῶν τόξων ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου, δίδομεν εἰς τὸ k τὰς ἀκεραίας τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 καὶ 7 καὶ ὁρίζομεν τὰ σημεῖα M_0, M_2, . . . M_7 τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ***κανονικοῦ ὀκταγώνου***.

Ἀσκήσεις. 375. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $\eta\mu(7x-30^0)=\eta\mu 5x$. 2ον. $\eta\mu(3x+15^0)=\eta\mu(5x-20^0)$.

376. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον $\eta\mu\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 2ον $\eta\mu\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

377. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $\sigma\upsilon\nu(7x+20^0)=\sigma\upsilon\nu(6x-16^0)$ 2ον. $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(60^0-2x)$

378. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $\sigma\upsilon\nu(x-\pi)=\sigma\upsilon\nu\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)$. 2ον. $\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(5x-\frac{\pi}{11}\right)$

379. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{3}+30^0\right)=\varepsilon\varphi(x-45^0)$. 2ον. $\varepsilon\varphi\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$

128. II. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς ημx=συνα, συνx=ημα, εφx=σφα. Ἐὰν μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις ἔχῃ μίαν ἀπὸ τὰς μορφὰς

$$\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\alpha,\quad \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\alpha,\quad \varepsilon\varphi x=\sigma\varphi\alpha$$

ἀναζητοῦμεν τὸ συμπληρωματικὸν τόξον τοῦ τόξου α καὶ ἀνάγομεν αὐτὰς εἰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς I.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 60^0$.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 30^0 καὶ 60^0 εἶναι συμπληρωματικά, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu 60^0=\eta\mu 30^0$ καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\eta\mu x=\eta\mu 30^0.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα x καὶ 30^0 ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, θὰ συνδέωνται ὑπὸ τῶν τύπων :

$$x=360^0k+30^0 \quad \text{καὶ} \quad x=(2k+1)180^0-30^0.$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ δίδουν ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Σημ. Ὁμοίως λύονται αἱ ἐξισώσεις συνx=ημα καὶ εφx=σφα.

Ἀσκήσεις. 380. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1ον. $\eta\mu(2x+60^0)=\sigma\upsilon\nu(90^0+x)$. 2ον. $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

381. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1ον. $\varepsilon\varphi(x+30^0)=\sigma\varphi(3x-45^0)$. 2ον. $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\varphi\frac{x}{2}$

382. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1ον. $\eta\mu 3x=-\sigma\upsilon\nu(45^0+x)$. 2ον. $\eta\mu\left(\frac{2x}{3}-45^0\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x}{3}+45^0\right)=0$

383. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1ον. $\varepsilon\varphi\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\varphi\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=0$. 2ον. $\varepsilon\varphi(x+60^0)+\sigma\varphi(90^0-3x)=0$

Β' Ὁμάς. **384.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu^2(5x+45^0)=\sigma\upsilon\nu^2 2x$.

385. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu(x^2-3x+1)=\eta\mu(4x-2)$.

386. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu^2\left(7x-\frac{\pi}{7}\right)=\sigma\upsilon\nu^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

387. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi 7x\,\varepsilon\varphi 3x=1$.

129. III. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἀλγεβρικῆς μορφῆς. Ἐὰν μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις περιέχῃ ἕνα μόνον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου, εἶναι ἐξίσωσις ἀλγεβρικὴ πρὸς ἄγνωστον αὐτὸν τὸν τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν καὶ λύεται εὐκόλως, ὅπως αἱ ἀλγεβρικαὶ ἐξισώσεις.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$3\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+5=3+6\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x.$$

Ἂν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἰς τὸ α' μέλος καὶ κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2\,\text{συν}^2x - 5\,\text{συν}x + 2 = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἄγνωστον τὸ συνx. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\text{συν}x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4.2.2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$.

δηλ. εἶναι $\quad \text{συν}x = 2 \quad (1) \quad$ καὶ $\quad \text{συν}x = \frac{1}{2} \quad (2)$

Ἡ ρίζα συνx=2 ἀπορρίπτεται, διότι τὸ συνx εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $\quad \text{συν}x = \text{συν}60^\circ \quad (2')$

δηλ. ἀνάγεται εἰς μίαν στοιχειώδη τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν· ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν (2') δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x = 360^\circ \pm 60^\circ.$$

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\text{εφ}^4x - 4\,\text{εφ}^2x + 3 = 0.$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι διτετράγωνος ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄγνωστον τὴν εφx. Αἱ ρίζαι αὐτῆς δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\text{εφ}^2x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Ἄρα θὰ εἶναι $\quad \text{εφ}^2x = 3 \quad (1) \quad$ καὶ $\quad \text{εφ}^2x = 1 \quad (2)$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$\text{εφ}x = \pm\sqrt{3} \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}x = \pm\text{εφ}60^\circ$$

Ἂν λάβωμεν $\text{εφ}x = \text{εφ}60^\circ$, θὰ εἶναι $x = 180^\circ k + 60^\circ$.

Ἂν λάβωμεν $\text{εφ}x = -\text{εφ}\,60^\circ = \text{εφ}\,120^\circ$, θὰ εἶναι $x = 180^\circ k + 120^\circ$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν

$$\text{εφ}x = \pm 1 \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}x = \pm\text{εφ}\,45^\circ.$$

Ἂν λάβωμεν $\text{εφ}x = \text{εφ}\,45^\circ$, θὰ εἶναι $x = 180^\circ k + 45^\circ$.

Ἂν λάβωμεν $\text{εφ}x = -\text{εφ}\,45^\circ = \text{εφ}(-45^\circ)$, θὰ εἶναι $x = 180^\circ k - 45^\circ$.

Ἀσκήσεις. 388. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $4\,\text{ημ}^2x - 3\,\text{ημ}x = 1$. $\qquad$ 2ον. $4\,\text{ημ}^2x + \sqrt{3} = 2(1+\sqrt{3})\text{ημ}x$

389. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $2\,\text{συν}^2x - 7\,\text{συν}x + 3 = 0$. $\qquad$ 2ον. $4\,\text{συν}^2x - 2(\sqrt{2}+1)\text{συν}x + \sqrt{2} = 0$

390. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1ον. $\sqrt{3}\,\text{εφ}^2x - (1+\sqrt{3})\text{εφ}x + 1 = 0$. $\qquad$ 2ον. $3\,\text{εφ}^2x - 4\sqrt{3}\,\text{εφ}x + 3 = 0$

130. IV. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς σ(ημx, συνx, εφx, . . .)=0. Ἐὰν μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις περιέχῃ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς

$$σ(\text{ημ}x,\ \text{συν}x,\ \text{εφ}x,\ \ldots) = 0,$$

ἀντικαθιστῶμεν, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅλους τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς συναρτήσει ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ ἀνάγομεν τότε τὴν ἐξίσωσιν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς προηγουμένας μορφὰς I, II, III.

Ἡ ἐκλογὴ τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ἄλλους, πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς νὰ μὴ προκύπτουν ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν ὅρους μὲ ριζικά, τὰ ὁποῖα μᾶς ὁδηγοῦν εἰς λύσεις ἀσχέτους πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὅλους τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, ποὺ περιέχει μία ἐξίσωσις, δι᾿ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, τότε ἀντικαθιστῶμεν τὰς εφx καὶ σφx συναρτήσει τοῦ ημx καὶ συνx, ὁπότε θὰ προκύψῃ μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$f(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)=0 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς αὐτῆς δύναται νὰ λυθῇ, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ ημx καὶ συνx συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), ἂν συνδυάσωμεν αὐτὴν μὲ τὴν ταυτότητα $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$.

Θὰ ἔχωμεν τότε νὰ λύσωμεν ἕνα ***ἀλγεβρικὸν*** σύστημα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἀγνώστους τὰ ημx καὶ συνx, ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰ ημx καὶ συνx καὶ ἑπομένως καὶ τὸ τόξον x.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $2\sigma\upsilon\nu^2x+5\eta\mu x=4$.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ ημx καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\sigma\upsilon\nu^2x$ συναρτήσει τοῦ ημx, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$2(1-\eta\mu^2x)+5\,\eta\mu x=4 \quad \text{ἢ} \quad 2\,\eta\mu^2x-5\,\eta\mu x+2=0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἄγνωστον τὸ ημx. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι:

$$\eta\mu x=\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu x=2 \ (\text{ἀποκλείεται}).$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\eta\mu x=\frac{1}{2} \quad \text{ἢ μὲ τὴν} \quad \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \qquad (1)$$

Ὅλα τὰ τόξα, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἑπομένως καὶ τὴν δοθεῖσαν, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{καὶ} \quad x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$$

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:* $\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x+2\,\sigma\upsilon\nu x=2$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+2\,\sigma\upsilon\nu x=2 \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu^2x+2\,\sigma\upsilon\nu^2x=2\,\sigma\upsilon\nu x.$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\eta\mu^2x$ συναρτήσει τοῦ συνx καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γράφεται:

$$(1-\sigma\upsilon\nu^2x)+2\,\sigma\upsilon\nu^2x=2\,\sigma\upsilon\nu x \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu^2x-2\,\sigma\upsilon\nu x+1=0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἀλγεβρική ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸ συνx. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\sigma\upsilon\nu x=1$ (διπλῆ ρίζα).

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\sigma\upsilon\nu x=1 \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $x=0$ καὶ ἑπομένως καὶ ἀπὸ ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα δίδονται (§ 93. 2ον) ἀπὸ τὴν σχέσιν $x=2k\pi$.

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :*

$$\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1=0$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ ημx, συνx συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t$.

Ἐπειδὴ (§ 112) $\quad \eta\mu x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-1=0$$

$$\text{ἢ} \quad 2t(1-t^2)+2t(1+t^2)-(1-t^2)(1+t^2)-(1+t^2)^2=0$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν :

$$(1-t)^2=0 \quad \text{ἢ} \quad 1=t \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν (1) καὶ ἑπομένως καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad \text{ἢ} \quad x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

Ἀσκήσεις. 391. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3(1-\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu^2 x$.

392. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1+\sigma\upsilon\nu 2x=6\,\eta\mu^2 x$.

393. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi^2 x-1)=\sigma\varphi x$

394. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,\varepsilon\varphi^2 x-16\,\eta\mu^2 x+3=0$.

395. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x=2$.

131. V. Ἐὰν ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις δύναται νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων, τότε προκύπτουν ἀπὸ αὐτὴν ἁπλούστεραι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἀνάγονται εἰς τὰς προηγουμένας μορφάς.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=\varepsilon\varphi x$.*

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \text{ἢ} \quad 2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x=0$$

$$\text{ἢ} \quad \eta\mu x(2\,\sigma\upsilon\nu^2 x-1)=0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἀληθεύει, εἴτε διὰ

$$\eta\mu x=0 \quad (1) \quad \text{εἴτε διὰ} \quad 2\,\sigma\upsilon\nu^2 x-1=0 \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $\eta\mu x=\eta\mu 0$ καὶ ἀληθεύει (§ 96) διὰ $x=k\pi$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{2} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu x=\pm\sigma\upsilon\nu 45^0$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν συνάγομεν, ὅτι $x=360k\pm 45^0$ καὶ $x=360^0k\pm 135^0$.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:*

$$ημx+ημ3x+ημ5x+ημ7x=0.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀνάγεται (§ 122. 2ον) εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$4\,ημ4x\;συν2x\;συνx=0$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτουν αἱ στοιχειώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις

$$ημ\,4x=0\;,\qquad συν\,2x=0\;,\qquad συνx=0$$

αἱ ὁποῖαι λύονται, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν περίπτωσιν I.

Ἀσκήσεις. 396. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx+ημ\,2x+ημ\,3x=0$.

397. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνx-συν\,2x+ημ\,3x=0$.

398. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν\,2x+συνx=ημx+ημ\,2x$.

399. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx+συνx=τεμx$.

400. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφx+εφ\,2x=εφ\,3x$.

132. VI. Τριγ. ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $α\,ημx+β\,συνx=γ$.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $α\,ημx+β\,συνx=γ$ (1)
δύνανται νὰ λυθοῦν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν IV. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν κατωτέρω ***γενικὴν μέθοδον*** λύσεως τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (1).

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ α καὶ ἔχομεν

$$ημx+\frac{β}{α}\,συνx=\frac{γ}{α} \qquad (2)$$

Θέτομεν $\frac{β}{α}=εφω$ (3), ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$ημx+εφω\,συνx=\frac{γ}{α} \quad ἢ \quad ημx+\frac{ημω}{συνω}\,συνx=\frac{γ}{α}$$

$$ἢ \quad ημx\,συνω+ημω\,συνx=\frac{γ}{α}\,συνω \quad ἢ \quad ημ(x+ω)=\frac{γ}{α}\,συνω \qquad (4)$$

Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν γωνίαν ω ἀπὸ τὴν σχέσιν (3).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $-1\leqslant\frac{γ}{α}\,συνω\leqslant+1$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ἕνα τόξον ϑ τοιοῦτον, ὥστε $ημϑ=\frac{γ}{α}\,συνω$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$ημ(x+ω)=ημϑ.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $x+ω$ καὶ ϑ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον συνδέονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$x+ω=2\,kπ+ϑ \quad καὶ \quad x+ω=(2k+1)π-ϑ.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν τοὺς τύπους

$$x=2\,kπ+ϑ-ω \quad καὶ \quad x=(2\,k+1)π-ϑ-ω,$$

οἱ ὁποῖοι δίδουν ὅλας τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\eta\mu x+\sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}$.

Ἐπειδὴ $\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\, 60^0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\eta\mu x+\varepsilon\varphi\, 60^0\, \sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2} \quad ἢ \quad \eta\mu x+\frac{\eta\mu\, 60^0}{\sigma\upsilon\nu\, 60^0}\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}$$

ἢ $$\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu 60^0+\eta\mu\, 60^0\, \sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\, 60^0$$

ἢ $$\eta\mu(x+60^0)=\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\, 60^0 \quad ἢ \quad \eta\mu(x+60^0)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

ἢ $$\eta\mu(x+60^0)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ἢ \quad \eta\mu(x+60^0)=\eta\mu\, 45^0.$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα $x+60^0$ καὶ 45^0 ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, συνδέονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$x+60^0=360^0k+45^0 \quad καὶ \quad x+60^0=(2k+1)180^0-45^0.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν τοὺς τύπους

$$x=360^0k-15^0 \quad καὶ \quad x=(2k+1)180^0-105^0$$

οἱ ὁποῖοι δίδουν ὅλας τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις. 401. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3}\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{3}$.

402. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,\eta\mu x-\sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x=1$.

403. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\, 3x+\sigma\upsilon\nu\, 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

404. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x+\sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x=2$.

133. VII. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\, \eta\mu^2x+\beta\, \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x+\gamma\, \sigma\upsilon\nu^2x+\delta=0$.

Ἐὰν μία ἐξίσωσις ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$\alpha\, \eta\mu^2x+\beta\, \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x+\gamma\, \sigma\upsilon\nu^2x+\delta=0$$

δυνάμεθα νὰ τὴν καταστήσωμεν ὁμογενῆ ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ ημx καὶ συνx, ἀρκεῖ νὰ τὴν θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha\, \eta\mu^2x+\beta\, \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x+\gamma\, \sigma\upsilon\nu^2x+\delta(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)=0 \qquad (1)$$

διότι $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ $\sigma\upsilon\nu^2x$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\, \varepsilon\varphi^2x+\beta\, \varepsilon\varphi x+\gamma+\delta(\varepsilon\varphi^2x+1)=0$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἄγνωστον τὴν εφx.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\eta\mu^2x+3\,\sigma\upsilon\nu^2x-4\,\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x=0.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ ημx καὶ συνx. Διὰ τοῦτο διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ $\sigma\upsilon\nu^2x$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\varepsilon\varphi^2x+3-4\,\varepsilon\varphi x=0 \quad ἢ \quad \varepsilon\varphi^2x-4\,\varepsilon\varphi x+3=0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἀλγεβρικὴ καὶ λύεται, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν περίπτωσιν III.

᾿Ασκήσεις. *Α′ ῾Ομάς.* **405.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\eta\mu^2x+2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x-1=0$.

406. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\eta\mu^2x+\sqrt{3}\,\eta\mu 2x=3$.

407. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

Β′ ὁμάς. **408.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\,3x+\sigma\upsilon\nu\,5x=0$.

409. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,\eta\mu 2x=5\,\sigma\upsilon\nu^2x$.

410. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x=1$.

411. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\,\eta\mu^2x=\varepsilon\varphi x$,

412. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\,5x=\sigma\upsilon\nu\,2x\,\sigma\upsilon\nu\,4x$.

413. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu x=\tau\varepsilon\mu x-\eta\mu x$ (Πολυτεχνεῖον)

414. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$.

415. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1}{\eta\mu x}-\varepsilon\varphi x+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}=0$.

416. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi\,2x+\sigma\varphi x=8\,\sigma\upsilon\nu^2x$

417. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\,2x+\sigma\upsilon\nu\,2x=\sqrt{2}\,\eta\mu x$.

418. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu\,2x=2\,\sigma\upsilon\nu x-1$.

419. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\,2x+\eta\mu\,6x=2\,\eta\mu\,4x$.

420. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\,9x+\eta\mu\,5x+2\,\eta\mu^2x=1$.

421. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x+\eta\mu\,2x+\eta\mu\,3x=1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x$

422. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\eta\mu\,3x=3\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\,3x$ (Πολυτεχνεῖον)

134. Διερεύνησις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\varphi(\eta\mu x)=(\lambda+4)\eta\mu^2x-(2\lambda+1)\eta\mu x+\lambda-1=0.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἄγνωστον τὸ ημx.

1ον. Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, πρέπει αἱ ρίζαι της νὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ νὰ περιέχωνται μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μίαν καὶ μόνον ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$, πρέπει νὰ εἶναι

$$\varphi(-1)\,.\,\varphi(+1)<0 \qquad (1)$$

᾿Επειδὴ $\varphi(-1)=(\lambda+4)(-1)^2-(2\lambda+1)(-1)+\lambda-1=4\lambda+4=4(\lambda+1)$

$\varphi(1)=(\lambda+4)\,(1)^2-(2\lambda+1).1+\lambda-1=2$

ἡ ἀνισότης (1) γράφεται

$$4(\lambda+1)\,.\,2<0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda+1<0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda<-1$$

῞Ωστε, ἐὰν εἶναι $\lambda<-1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$ καὶ ἑπομένως ἔχει μίαν λύσιν.

2ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες :

$$\Delta>0 \;\; (2) \qquad \alpha\varphi(-1)>0 \;\; (3), \qquad \alpha\varphi(1)>0 \;\; (4),$$

$$-1<-\frac{\beta}{2\alpha} \;\; (5), \qquad 1>-\frac{\beta}{2\alpha} \;\; (6)$$

᾿Εδῶ εἶναι $\Delta=(2\lambda+1)^2-4(\lambda+4)\,(\lambda-1)=-8\lambda+17$

καὶ εἶναι $\Delta>0$ ἢ $-8\lambda+17>0$ διὰ $\lambda<\dfrac{17}{8}$ (2′)

Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda+4$ καὶ $\varphi(-1)=4(\lambda+1)$ ἡ ἀνισότης (3) γράφεται
$4(\lambda+4)(\lambda+1)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda<-4$, εἴτε διὰ $\lambda>-1$ (3′)

Ἐπειδὴ $\varphi(1)=2$, ἡ ἀνισότης (4) γράφεται

$$(\lambda+4)\,.\,2>0 \text{ καὶ ἀληθεύει διὰ } \lambda>-4.$$

Ἡ ἀνισότης (5) γράφεται

$$-1<\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+4)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\lambda+1}{2(\lambda+4)}+1>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{4\lambda+9}{2(\lambda+4)}>0.$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(4\lambda+9)(\lambda+4)>0$, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\lambda<-4$ καὶ διὰ $\lambda>-\frac{9}{4}$.

Ἡ ἀνισότης (6) γράφεται $1>\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+4)}$ ἢ $1-\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+4)}>0$ ἢ $\frac{7}{2(\lambda+4)}>0$ ἢ $\lambda+4>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda>-4$.

Εὑρίσκομεν τώρα τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (2), (3), (4), (5) καὶ (6). Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ λ καὶ

$$\underbrace{-\infty \;.\;.\;.\; -4}\;\underbrace{.\;.\;.\; -\frac{9}{4}}\;\underbrace{.\;.\;.\; -1}\;.\;.\;.\;\frac{17}{8}\;\underbrace{.\;.\;.\;.\;.\;.\; +\infty}$$

κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ

$$-1<\lambda<\frac{17}{8}.$$

Ὥστε διὰ $-1<\lambda<\frac{17}{8}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

Ἀσκήσεις. 423. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$4\,\sigma\upsilon\nu^2 x-2\mu\,\sigma\upsilon\nu x-1=0.$$

424. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu\,\eta\mu^2 x-(\mu-2)\eta\mu x+3=0$.

425. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\eta\mu^2 x+2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x-2\,\sigma\upsilon\nu^2 x=\mu.$$

2. Τριγωνομετρικὰ συστήματα

135. Τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ἐὰν εἰς ἕνα σύστημα ἐξισώσεων ὑπάρχῃ ***μία τουλάχιστον τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις,*** τὸ σύστημα λέγεται ***τριγωνομετρικὸν σύστημα.***

Τὰ τριγωνομετρικὰ συστήματα χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας: Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὑπάγονται τὰ συστήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα, ἐκτὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, ὑπάρχουν καὶ ἀλγεβρικαὶ ἐξισώσεις.

Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ὑπάγονται τὰ συστήματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρικαί.

Π.χ. τὰ συστήματα:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \eta\mu x \pm \eta\mu y = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu x \pm \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}$$

ἀνήκουν εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν.

Τὰ συστήματα:

$$\begin{cases} \eta\mu x \pm \eta\mu y = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu x \pm \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon\varphi x \pm \varepsilon\varphi y = \alpha \\ \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}$$

ἀνήκουν εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν.

136. Λύσις τριγωνομετρικῶν συστημάτων Α΄ κατηγορίας. Α΄ Ὁμάς. Τὰ συστήματα τῆς πρώτης κατηγορίας δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν εἰς ὁμάδας.

Εἰς τὴν Α΄ ὁμάδα ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \eta\mu x \pm \eta\mu y = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu x \pm \sigma\upsilon\nu y = \beta \end{cases}$$

Ὅλα τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \eta\mu x+\eta\mu y=\beta & (2) \end{cases}$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$2\,\eta\mu\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta \quad \text{ἢ} \quad 2\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\beta}{2\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \qquad (3)$$

Ἐὰν $-1 \leqslant \dfrac{\beta}{2\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \leqslant +1$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ἕνα τόξον ω τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\beta}{2\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται $\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu\omega.$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{x-y}{2}=2k\pi\pm\omega \quad \text{ἢ} \quad x-y=4\,k\pi\pm2\omega \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) μὲ τὴν (4) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=4\,k\pi+2\,\omega \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=4\,k\pi-2\,\omega \end{cases}$$

Λύοντες αὐτὰ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\alpha}{2}+2\,k\pi\pm\omega \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha}{2}-2\,k\pi\mp\omega$$

Ἀσκήσεις. 426. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1ον. $\begin{cases} x+y=75^0 \\ \eta\mu x+\eta\mu y=1,21637 \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \eta\mu x-\eta\mu y=\beta \end{cases}$

427. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

1ον. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$

137. Β´ Ὁμάς. Εἰς τὴν ὁμάδα αὐτὴν ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \eta\mu x\,\eta\mu y=\beta \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$$

Ὅλα τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \eta\mu x\,\eta\mu y=\beta & (2) \end{cases}$

Γνωρίζομεν (§ 121) ὅτι

$$2\,\eta\mu x\,\eta\mu y=\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (2) τοῦ δοθέντος συστήματος γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)=2\beta \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\beta$$

$$\text{ἢ} \qquad \sigma\upsilon\nu(x-y)=2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha. \qquad (3)$$

Ἐὰν $-1\leqslant 2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\leqslant+1$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ἕνα τόξον ω, τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\omega=2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\sigma\upsilon\nu\omega$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι

$$x-y=2\,k\pi\pm\omega \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) μὲ τὴν (4) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=2\,k\pi+\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=2\,k\pi-\omega \end{cases}$$

Λύοντες αὐτὰ εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha}{2}+k\pi\pm\frac{\omega}{2}$, $y=\frac{\alpha}{2}-k\pi\mp\frac{\omega}{2}$

Ἀσκήσεις. 428. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1ον. $\begin{cases} x+y=70^0 \\ \eta\mu x\,\eta\mu y=0,32139 \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \eta\mu x\,\eta\mu y=\beta \end{cases}$

429. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

1ον. $\begin{cases} x+x=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$

138. Γ´ Ὁμάς. Εἰς τὴν τρίτην ὁμάδα ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{matrix}$$

Τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $x+y=\alpha$, (1), $\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta$ (2)

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$, ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\eta\mu x+\eta\mu y}=\frac{\beta-1}{\beta+1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\,\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}{2\,\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}}=\frac{\beta-1}{\beta+1}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}}=\frac{\beta-1}{\beta+1} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}=\frac{\beta-1}{\beta+1}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἕνα τόξον ω τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\beta-1}{\beta+1}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\varepsilon\varphi\omega$, ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται $\varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}=\varepsilon\varphi\omega$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{x-y}{2}=k\pi+\omega \quad \text{ἢ} \quad x-y=2k\pi+2\omega \qquad (4)$$

Λύοντες ἔπειτα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4) εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\alpha}{2}+k\pi+\omega \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha}{2}-k\pi-\omega.$$

Ἀσκήσεις. 430. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{cases}$ 3ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{cases}$

139. Δ΄ Ὁμάς. Εἰς τὴν τετάρτην ὁμάδα ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$\begin{gathered} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\pm\varepsilon\varphi y=\beta \end{gathered}$$

Τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\beta & (2) \end{cases}$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται (§ 119)

$$\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}=\beta \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}=\beta \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\frac{\eta\mu\alpha}{\beta} \qquad (3)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὴν (3) λαμβάνομεν ἕνα σύστημα τῆς ὁμάδος Β, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν.

Ἀσκήσεις. 431. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1ον. $\begin{cases} x+y=90^{\circ} \\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=2{,}22520 \end{cases}$ 2ον. $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y=\beta \end{cases}$

140. Ε΄ Ὁμάς. Εἰς τὴν πέμπτην ὁμάδα ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$x \pm y = \alpha$$
$$\varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi y = \beta$$

Τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi y = \beta & (2) \end{cases}$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $\qquad \dfrac{\eta\mu x\ \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y} = \beta \qquad (2')$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἀναλογίαν $\dfrac{\beta-\alpha}{\beta} = \dfrac{\delta-\gamma}{\delta}$, ἡ ἐξίσωσις (2′) γράφεται

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x\ \eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y} = \frac{1-\beta}{1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y} = 1-\beta$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y} = 1-\beta \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\beta} \qquad (4)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὴν ἐξίσωσιν (4), λαμβάνομεν ἕνα σύστημα τῆς Β′ ὁμάδος, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν.

Ἄσκησις. 432. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x-y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\ \varepsilon\varphi y = \beta \end{cases}$

141. ΣΤ΄ Ὁμάς. Εἰς τὴν ἕκτην ὁμάδα ὑπάγονται τὰ συστήματα τῆς μορφῆς

$$x \pm y = \alpha \qquad x \pm y = \alpha$$
$$\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} = \beta \qquad \frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi y} = \beta$$

Τὰ συστήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} x+y=\alpha & (1 \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} = \beta & (2) \end{cases}$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$\frac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y} = \frac{\beta-1}{\beta+1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta\mu(x-y)}{\eta\mu(x+y)} = \frac{\beta-1}{\beta+1}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\eta\mu(x-y)}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta-1}{\beta+1} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu(x-y) = \frac{\beta-1}{\beta+1}\,\eta\mu\alpha \qquad (3)$$

Ἐὰν $-1 \leqslant \dfrac{\beta-1}{\beta+1}\,\eta\mu\alpha \leqslant +1$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ἕνα τόξον ω τοιοῦτον, ὥστε $ημω = \frac{β-1}{β+1} ημα$, ὁπότε ἡ (3) γράφεται

$$ημ(x-y)=ημω$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν συνάγομεν, ὅτι

$$x-y=2kπ+ω \quad καὶ \quad x-y=(2k+1)π-ω \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) μὲ τὴν (5) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=α \\ x-y=2kπ+ω \end{array}\right\} \quad καὶ \quad \left.\begin{array}{l} x+y=α \\ x-y=(2k+1)π-ω. \end{array}\right\}$$

Λύοντες αὐτὰ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις:

$$x=kπ+\frac{π}{2}+\frac{α}{2}, \qquad y=\frac{α}{2}-kπ-\frac{ω}{2}$$

$$καὶ \quad x=(2k+1)\frac{π}{2}+\frac{α}{2}-\frac{ω}{2}, \qquad y=\frac{α}{2}-(2k+1)\frac{π}{2}+\frac{ω}{2}$$

Ἀσκήσεις. 433. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x-y=α \\ \frac{εφx}{εφy}=β. \end{array}\right.$

434. Νὰ χωρισθῇ ἡ γωνία τῶν 45^0 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναί των νὰ ἔχουν λόγον 5 πρὸς 6.

142. Λύσις τριγωνομετρ. συστημάτων Β΄ κατηγορίας. Ἡ λύσις τῶν τριγωνομετρικῶν συστημάτων τῆς Β΄ κατηγορίας δὲν δύναται νὰ βασισθῇ εἰς ὡρισμένους καὶ σαφεῖς κανόνας. Ἡ λύσις πολλῶν τοιούτων τριγων. συστημάτων, δύναται νὰ παράσχῃ σαφῆ, ὁπωσδήποτε, ἰδέαν τῆς ποικιλίας καὶ τοῦ πλούτου τῶν χρησιμοποιουμένων εἰδικῶν μεθόδων διὰ τὴν λύσιν τῶν συστημάτων αὐτῶν. Κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν λύσιν μερικῶν συστημάτων, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι εὔκολος.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\left\{\begin{array}{ll} ημ5x-ημy=0 & (1) \\ εφ3x\ εφ4y=1 & (2) \end{array}\right.$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $ημ5x=ημy$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 5x καὶ y ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, συνδέονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$5x=2kπ+y \quad καὶ \quad 5x=(2k+1)π-y$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$5x-y=2kπ \ (3) \quad καὶ \quad 5x+y=(2k+1)π \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$εφ3x=\frac{1}{εφ4y} \quad ἢ \quad εφ3x=σφ4y \quad ἢ \quad εφ3x=εφ\left(\frac{π}{2}-4y\right)$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα 3x καὶ $\frac{π}{2}-4y$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, συνδέονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$3x=λπ+\frac{π}{2}-4y \quad ἢ \quad 3x+4y=λπ+\frac{π}{2} \qquad (5)$$

Ἐὰν συνδυάσωμεν διαδοχικῶς τὴν ἐξίσωσιν (5) μὲ καθεμίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\text{I}\ \begin{cases} 5x-y=2k\pi \\ 3x+4y=\lambda\pi+\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \text{II}\ \begin{cases} 5x+y=(2k+1)\pi \\ 3x+4y=\lambda\pi+\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

τῶν ὁποίων ἡ λύσις δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=2 \\ 2\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=1 \end{cases}$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος γράφεται (§ 119)

$$\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}=2 \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu(x+y)=2\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ $2\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y$ μὲ τὸ ἴσον του 1, ποὺ δίδει ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος, λαμβάνομεν

$$\eta\mu(x+y)=1$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν συνάγομεν (§ 96, 2ον), ὅτι

$$x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὴν (1) λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} x+y=2\,k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 2\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=1 \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον λύεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 136

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\begin{cases} \eta\mu x+\eta\mu y=\alpha & (1) \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta & (2) \end{cases}$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $\quad 2\,\eta\mu\dfrac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\alpha \qquad (1')$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $\quad 2\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\beta \qquad (2')$

Διαιροῦμεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{\beta} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα τόξον ω τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\alpha}{\beta}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$$\varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\varepsilon\varphi\omega\cdot$$

ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\quad \dfrac{x+y}{2}=180^0k+\omega \qquad (4)$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1′) τὸ $\dfrac{x+y}{2}$ μὲ τὴν τιμήν του $180^0k+\omega$ λαμβάνομεν

$$2\,\eta\mu(180^0k+\omega)\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha,$$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\,\eta\mu(180^0k+\omega)} \tag{5}$$

Ἐάν k εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, τότε ημ$(180^0k+\omega)=$ημω καὶ ἡ ἐξίσωσις (5) γίνεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\,\eta\mu\omega} \qquad (6)$$

Ἐάν k εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τότε ημ$(180^0k+\omega)=-$ημω καὶ ἡ ἐξίσωσις (5) γίνεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{-2\,\eta\mu\omega} \qquad (7)$$

Ἐάν φ εἶναι ἕνα τόξον τοιοῦτον, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{2\,\eta\mu\omega}$, τότε ἡ μὲν (6) γίνεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $\frac{x-y}{2}=360^0k'\pm\varphi$

ἡ δὲ (7) γίνεται $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=-\sigma\upsilon\nu\varphi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu(180^0-\varphi)$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $\frac{x-y}{2}=360^0k'\pm(180^0-\varphi)$.

Ἔχομεν τώρα νὰ λύσωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=180^0k+\omega\\ \frac{x-y}{2}=360^0k'\pm\varphi\end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases}\frac{x+y}{2}=180^0k+\omega\\ \frac{x-y}{2}=360^0k'\pm(180^0-\varphi)\end{cases}$$

τὰ ὁποῖα λύονται εὐκόλως.

Ἀσκήσεις. 435. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu(x-y)=\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu(x+y)=\frac{1}{2} \quad (2)$$

436. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\varepsilon\varphi(x+y)=\sqrt{3}\\ \varepsilon\varphi(x-y)=1\end{cases}$

437. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\eta\mu(3x-60^0)=\sigma\upsilon\nu(y+30^0)\\ \varepsilon\varphi x=\sigma\varphi 2y\end{cases}$

438. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=0\\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=0\end{cases}$

439. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha\\ \sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x=\beta\end{cases}$

440. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\varepsilon\varphi(x+y)=\frac{4}{3}$ (1) $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=1$ (2)

441. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\alpha\\ \sigma\varphi(x+y)=\beta\end{cases}$

442. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu x\,\eta\mu y=\frac{1}{4} \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\frac{3}{4} \quad (2)$$

443. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 2y\\ \eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu y\end{cases}$

444. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $2(\eta\mu 2x+\eta\mu 2y)=2\,\eta\mu(x+y)=1$

445. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\eta\mu y-\sqrt{2}\,\eta\mu x=0\\ 2\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=1\end{cases}$

446. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \text{συν}x + \text{συν}y = 1 \\ \text{συν}3x + \text{συν}3y = -2 \end{cases}$

447. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \text{συν}x + \text{συν}y = \alpha \\ \text{συν}2x + \text{συν}2y = \beta \end{cases}$

(Σχολὴ Εὐελπίδων)

143. Ἀπαλοιφὴ * τῶν x καὶ y μεταξὺ τριῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων. ***Πρόβλημα.*** *Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:*

$$\begin{cases} x+y=60^0 & (1) \\ \text{εφ}x+\text{εφ}y=\text{εφ}\alpha & (2) \\ \text{σφ}x+\text{σφ}y=\text{σφ}\beta & (3) \end{cases}$$

ἀποτελοῦν σύστημα ἐξισώσεων, δηλ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν.

Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$$\frac{1}{\text{εφ}x}+\frac{1}{\text{εφ}y}=\frac{1}{\text{εφ}\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{εφ}x+\text{εφ}y}{\text{εφ}x\,\text{εφ}y}=\frac{1}{\text{εφ}\beta} \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ εφx+εφy=εφα, ἡ (4) γράφεται

$$\frac{\text{εφ}\alpha}{\text{εφ}x\,\text{εφ}y}=\frac{1}{\text{εφ}\beta} \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}x\,\text{εφ}y=\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta \qquad (5)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) διὰ τῆς ἐξισώσεως (5) λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} x+y=60^0 & (1) \\ \text{εφ}x+\text{εφ}y=\text{εφ}\alpha & (2) \\ \text{εφ}x\,\text{εφ}y=\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta & (5) \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{εφ}(x+y)=\text{εφ}60^0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{εφ}x+\text{εφ}y}{1-\text{εφ}x\,\text{εφ}y}=\sqrt{3} \qquad (6)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (6) τὸ εφx+εφy καὶ εφx εφy διὰ τῶν ἴσων των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (5) καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}=\sqrt{3} \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}\alpha=\sqrt{3}\,(1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta).$$

Ἡ τελευταία σχέσις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις (ἀπαλείφουσα).

Ἀσκήσεις. 448. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ἵνα αἱ ἐξισώσεις:

$$\text{εφ}x+\text{εφ}y=\text{εφ}\alpha \quad \text{καὶ} \quad \text{σφ}x+\text{σφ}y=\text{σφ}\alpha$$

ἔχουν μίαν λύσιν, ἡ ὁποία νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν $x+y=135^0$.

449. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\text{ημ}x+\text{ημ}y=\alpha, \quad \text{συν}x+\text{συν}y=\beta, \quad \text{συν}(x-y)=\gamma$$

ἀποτελοῦν σύστημα ἐξισώσεων.

---

* Βλέπε Ἄλγεβραν Π. Γ. Τόγκα. Σελὶς 319.

3. Τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες

144. Τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες. Κάθε ἀνισότης, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἢ περισσοτέρους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς ἀγνώστου τόξου, λέγεται ***τριγωνομετρικὴ ἀνισότης.***

Π.χ. αἱ ἀνισότητες

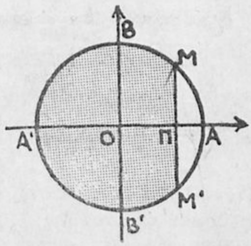
$$\eta\mu 2x > 1 \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x - 1 > 0 \quad , \quad \alpha\,\varepsilon\varphi x + \beta > 0$$

εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες.

Ἡ λύσις μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισότητος συνδέεται στενῶς μὲ τὴν λύσιν τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$ μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $\sigma\upsilon\nu x > \sigma\upsilon\nu 45^\circ$.

Ἐπὶ ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο (Σχ. 80) προσδιορίζομεν τὸ συνημίτονον τῶν 45°. Ἔστω $\overline{О\Pi}$ τὸ συνημίτονον τῶν 45°. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′.



Σχ. 80.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ συνx νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\overline{О\Pi}$, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\overline{О\Pi} < \sigma\upsilon\nu x \leqslant \overline{OA}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτὸ πρέπει τὸ τόξον x νὰ λήγῃ εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου Μ′ΑΜ· ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον $\widehat{AM}$ εἶναι 45°, ὁπότε τὸ ἀντίθετόν του $\widehat{AM}'$, θὰ εἶναι -45°, πρέπει νὰ εἶναι $-45^\circ < x < 45^\circ$.
Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $-45^\circ < x < 45^\circ$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ θ τὸ μέτρον ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ λήγουν εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΜΑΜ′, τότε τὰ μέτρα ὅλων τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

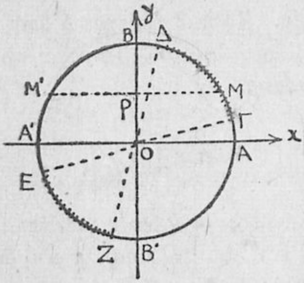
$$x = 2k\pi + \theta$$

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $2\,\eta\mu 2x > 1$.

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται $\eta\mu 2x > \frac{1}{2}$ (1)

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ (Σχ. 81), τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{OP}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{2}$. Ἀπὸ τὸ Ρ φέρομεν τὴν παράλληλον Μ′ΡΜ πρὸς τὴν Α′Α.

Τὰ τόξα, τῶν ὁποίων τὸ ἡμίτονον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{2}$, ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ λήγουν εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΜΒΜ'.



Σχ. 81.

Ἐπειδὴ $\widehat{AM}=30^0$ καὶ $AM'=150^0$ ἕπεται, ὅτι ἡ ἰδιαιτέρα λύσις τῆς ἀνισότητος (1) εἶναι ἡ

$$30^0<2x<150^0$$

καὶ ἡ γενικὴ λύσις εἶναι

$$360^0k+30^0<2x<360^0k+150^0$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$180^0k+15^0<x<180^0k+75^0$$

Ὅλα αὐτὰ τὰ τόξα x ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ τὰ πέρατά των λήγουν εἰς τὰ τόξα ΓΔ καὶ ΕΖ.

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $ημx+συνx>1$.

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται

$$ημx+1 \cdot συνx>1 \quad ἢ \quad ημx+εφ45^0\, συνx>1$$

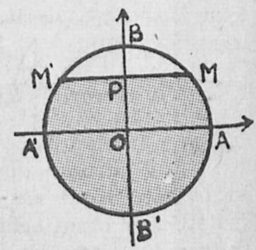
$$ἢ \qquad ημx+\frac{ημ45^0}{συν45^0}\, συνx>1 \quad ἢ \quad ημx\, συν45^0+ημ45^0\, συνx>συν45^0$$

$$ἢ \qquad ημ(x+45^0)>συν45^0.$$

Ἐπειδὴ $συν45^0=ημ45^0$ ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται

$$ημ(x+45^0)>ημ45^0 \qquad (1)$$

Ἐπὶ ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο (Σχ. 82) προσδιορίζομεν τὸ ἡμίτονον τῶν 45^0. Ἔστω $\overline{OP}$ τὸ $ημ45^0$. Ἀπὸ τὸ Ρ φέρομεν τὴν χορδὴν Μ'ΡΜ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον Α'ΟΑ.



Σχ. 82.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (1) καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ δοθεῖσα, πρέπει τὸ $ημ(x+45^0)$ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΟΡ, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\overline{OP}<ημ(x+45^0)\leqslant\overline{OB}$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτό, πρέπει τὸ τόξον $x+45^0$ νὰ λήγῃ εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΜΒΜ'. Ἐπειδὴ $\widehat{AM}=45^0$ καὶ $\widehat{AM'}=135^0$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἰδιαιτέρα λύσις τῆς ἀνισότητος (1) εἶναι ἡ

$$45^0<x+45^0<x+135 \quad ἢ \quad 0<x<90^0$$

καὶ ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι

$$360^0k<x<360^0k+90^0.$$

Παράδειγμα 4ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $2\,συν^2x-3\,συνx-2>0$.

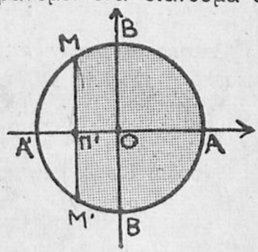
Τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἀνισότητος εἶναι ἕνα τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς συνx· αἱ ρίζαι του εἶναι 2 καὶ $-\frac{1}{2}$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης, πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι θετικόν· ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ τριώνυμον $2\,συν^2x-3\,συνx-2$, πρέπει τὸ συνx νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν του· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι:

$$συνx<-\frac{1}{2} \quad (1), \qquad \text{εἴτε} \quad συνx>2 \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) εἶναι ἀδύνατος· μένει μόνον ἡ σχέσις (1).

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα ΟΠ′ (Σχ. 83), τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{ΟΠ'}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ $-\frac{1}{2}$. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Π′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′. Ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ λήγουν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἔχουν συνημίτονον $-\frac{1}{2}$. Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὅμως ἡ σχέσις (1) πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συνημίτονον μικρότερον τοῦ $-\frac{1}{2}$· καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὸ Α καὶ λήγουν εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΜΑ′Μ′.



Σχ. 83.

Ἐπειδὴ $-\frac{1}{2}=συν120^0$ καὶ $-\frac{1}{2}=συν240^0$ ἕπεται, ὅτι ἡ ἰδιαιτέρα λύσις τῆς ἀνισότητος (1) εἶναι ἡ

$$120^0<x<240^0$$

καὶ ἡ γενικὴ λύσις εἶναι

$$360^0k+120^0<x<360^0k+240^0.$$

Παράδειγμα 5ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $\frac{συνx-2\,συν^2x}{2\,συν^2x-1}>0$.

Ἂν θέσωμεν συνx=y ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται

$$\frac{y-2y^2}{2y^2-1}>0.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(y-2y^2)(2y^2-1)>0 \quad ἢ \quad (2y^2-y)(2y^2-1)<0 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $2y^2-y=y(2y-1)$ καὶ $2y^2-1=2\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ἡ (1) γράφεται

$$y(2y-1)2\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0 \quad ἢ$$

$$y(2y-1)\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0 \qquad (2)$$

Λύομεν τὴν ἀνισότητα (1′) κατὰ τὰ γνωστά*.

---

* Βλέπε Ἄλγεβραν Π. Γ. Τόγκα.

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Τάσσομεν τὰς ρίζας αὐτὰς κατὰ τάξιν μεγέθους καὶ ἔχομεν

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ἐπίσης τάσσομεν καὶ τοὺς παράγοντας τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) κατὰ τάξιν μεγέθους ριζῶν καὶ ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) y\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0 \qquad (3)$$

Προσδιορίζομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) y\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος (3).

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου αὐτοῦ διὰ τιμὰς τοῦ y=συνx, περιεχομένας μεταξὺ —1 καὶ +1.

y=συνx	$-1 \;.\;.\; -\frac{1}{\sqrt{2}} \;.\;.\;.\; 0 \;.\;.\;.\; \frac{1}{2} \;.\;.\;.\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;.\;.\;.\; +1$
Σημεῖον τοῦ Γ	+ − + − +

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (3) καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ δοθεῖσα, πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ γινόμενον Γ, νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα συνάγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ y περιεχομένας μεταξὺ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ 0 καὶ διὰ τιμὰς τοῦ y, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, δηλ. διὰ $-\frac{1}{\sqrt{2}}<y<0$, εἴτε διὰ $\frac{1}{2}<y<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y=συνx δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=2k\pi\pm\theta, \quad \text{ὅπου } 90^0<\theta<135^0$$

καὶ
$$x=2k\pi\pm\theta', \quad \text{ὅπου } 45^0<\theta'<60^0$$

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **450.** Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\,ημx-\sqrt{3}<0$.

451. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\,συνx+\sqrt{3}<0$.

452. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{3}\,εφx-1<0$.

Β' Ὁμάς. **453.** Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $ημx+2\,συνx>1$.

454. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\,ημx-5\,συνx>0$.

455. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\,ημ^2x-3\,ημx+1<0$.

456. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{ημx-συνx}{ημx+συνx}<0$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **457.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,ημ2x = 3\,ημx$.

458. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ3x = 8\,ημ^3x$.

459. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,ημx\,ημ3x = 1$.

460. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^2x - συν^2x = \frac{1}{2}$.

461. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,ημ^2 3x + ημ^2 6x = 2$.

462. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ7x + ημ3x + 2\,ημ^2x = 1$.

463. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ3x - 2\,ημ2x + ημ^2x + 4\,ημ^3x = 0$.

464. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,συν2x + συν6x = \frac{1}{2}$.

465. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $τεμx = ημx + 2\,συνx$.

466. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ2x + συν2x = \sqrt{2}\,ημx$.

467. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6\,ημ^2x - 8\,συν^2x = ημ2x$.

468. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,συν\frac{x}{3} - ημ\frac{x}{2} = 2$.

469. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^4x + συν^4x = \frac{1}{2}$.

470. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1 + ημx + ημ2x + ημ3x = συνx - συν2x + συν3x$

471. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx + ημ2x + ημ3x = 4συν\frac{x}{2}\,συνx\,συν\frac{3x}{2}$.

472. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ\frac{x}{2} = \frac{εφx - 2}{εφx + 2}$.

473. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ3x = ημ6x$.

474. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφx = 4\,ημ\frac{x}{2}$.

475. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ(60^0 - x)συν^2(60^0 - x) = εφx\,συν^2x$.

476. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ^2x + ημ^2x = 3\,συν^2x$.

477. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx\,συνx = \frac{1}{2}\,εφx$.

478. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx\,εφ\frac{x}{2} = συνx$.

479. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνx + σφx = 1 + ημx$.

480. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $σφx - συνx = στεμx - ημx$.

481. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{1}{ημ^2x} - \frac{1}{συν^2x} - \frac{1}{εφ^2x} - \frac{1}{σφ^2x} - \frac{1}{τεμ^2x} - \frac{1}{στεμ^2x} = -3.$$

482. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(ημx + συνx + εφx)^3 = ημ^3x + συν^3x + εφ^3x$.

483. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1 - εφ^2x = ημx\,εφx + ημx$.

484. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx + συνx + εφx + σφx + τεμx + στεμx = -2$.

Β' Ὁμάς. **485.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx + ημ(α - x) = μ$.

486. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ(x - α) = ημx - ημα$.

487. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^2(x + α) - ημ^2(x - α) = μ$.

Ἐφαρμογή: $α = 15^0$ καὶ $μ = \frac{1}{4}$.

488. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu 3x = \mu\, \eta\mu^2 x$.

489. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu^2 \eta\mu^2 x - 2\, \eta\mu x - 3 = 0$.

490. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu\, \mu x + \sigma\upsilon\nu(\mu-2)x - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

491. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) = \mu$.

492. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\alpha}{\eta\mu x} + \dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu x} = \beta$.

493. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu(x+20^0) + \sigma\upsilon\nu 120^0 = \eta\mu 30^0 - \sigma\upsilon\nu(x+50^0)$.

494. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi x\, \varepsilon\varphi 2x = \mu$.

495. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(45^0+x) + \varepsilon\varphi(45^0-x) = \mu$.

496. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(x+\alpha) + \varepsilon\varphi(x-\alpha) = \varepsilon\varphi 2x$.

497. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(\alpha+x)\, \varepsilon\varphi(\alpha-x) = \dfrac{1-2\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+2\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

(Σχολὴ Εὐελπίδων)

498. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(\sigma\varphi x) = \sigma\varphi(\varepsilon\varphi x)$.

499. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu(\pi\, \sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu(\pi\, \eta\mu x)$.

Γ' Ὁμάς. **500.** Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=120^0 \\ \tau\varepsilon\mu x + \tau\varepsilon\mu y = 4 \end{cases}$

501. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases}$

502. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y = \beta \end{cases}$

503. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x-y=60^0 \\ 3(\eta\mu x - \eta\mu y) + 4\, \eta\mu x\, \eta\mu y = 3 \end{cases}$

504. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=2\alpha \\ \eta\mu x + \eta\mu y = \mu(\eta\mu x - \eta\mu y) \end{cases}$

505. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = 1 \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{y}{2} = \sqrt{3}. \quad (2)$$

506. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu y = -0{,}5 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = 0 \end{cases}$

(Πολυτεχνεῖον)

507. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu(x+y) = \varepsilon\varphi(x-y) = \frac{1}{2}\,(\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y)$$

508. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\varepsilon\varphi x\, \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (1), \qquad \eta\mu x\, \eta\mu y = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad (2)$$

509. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = 1 \quad (6), \qquad \sigma\upsilon\nu x\, \sigma\upsilon\nu y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$ (Πολυτεχνεῖον)

510. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu 2x = \mu\, \eta\mu y \quad (1), \qquad \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 2y = 2. \quad (2)$$

511. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$\varepsilon\varphi x = \alpha\, \varepsilon\varphi 2y \quad (1), \qquad \varepsilon\varphi y = \alpha\, \varepsilon\varphi 2x. \quad (2)$$

512. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu x+\eta\mu y=\eta\mu\vartheta$$
$$\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=1+\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

513. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x+y+\omega=\pi \quad (1), \qquad \frac{\varepsilon\varphi x}{\mu}=\frac{\varepsilon\varphi y}{\nu}=\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\varrho} \quad (2)$$

Δ' Ὁμάς. **514.** Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sigma\upsilon\nu 2x>\eta\mu 45^0$.

515. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\eta\mu(x-60^0)>\eta\mu x$.

516. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x>0$.

517. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu 30^0$.

518. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x<\varepsilon\varphi 45^0$.

519. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\eta\mu x+3\,\sigma\upsilon\nu x-1<0$.

520. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{1-\eta\mu x}{1-3\eta\mu x}<\dfrac{1+\eta\mu x}{1-9\,\eta\mu^2 x}$.

521. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\,\sigma\upsilon\nu x}>\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-2\,\sigma\upsilon\nu x}$.

522. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu 2x}>2$.

523. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ τόξον x κεῖται μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$ θὰ εἶναι

$$\eta\mu x>\varepsilon\varphi x-\frac{1}{2}\,\varepsilon\varphi^3 x$$

524. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{3-4\sigma\upsilon\nu^2 x}>1+3\eta\mu x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

145. Ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ημx, τὸ συνx, ἡ εφx κλπ. μεταβάλλονται, ὅταν τὸ τόξον x μεταβάλλεται.

Κάθε λοιπὸν τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς τόξου εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου. Ἂν θέσωμεν

$$y = \eta\mu x \tag{1}$$

ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι τὸ τόξον x καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι ὁ y, δηλ. τὸ ημx.

Ἡ συνάρτησις y ***εἶναι τελείως ὡρισμένη***, ὅταν δοθῇ τὸ τόξον x.

Πράγματι: Ἐὰν $x = 30^0$, τότε $y = \eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$.

Ἐὰν $x = 45^0$, » $y = \eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κλπ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ y μεταβάλλεται, τότε θὰ μεταβάλλεται καὶ τὸ τόξον x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ὁ y, δηλ. τὸ ημx καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι τὸ τόξον x. Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι τὸ τόξον x εἶναι συνάρτησις τοῦ y, δηλ. τοῦ ημx, γράφομεν

$$\boxed{x = \tau o\xi.\eta\mu y} \tag{2}$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἐκφράζει, ὅτι:

Τὸ x εἶναι ἕνα τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον εἶναι y.

Ἡ συνάρτησις (2) λέγεται ***ἀντίστροφος κυκλικὴ συνάρτησις*** τῆς συναρτήσεως (1).

Ἡ συνάρτησις (2) ***δὲν εἶναι τελείως ὡρισμένη.***

Πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $y = \frac{1}{2}$, τότε ἡ συνάρτησις (2) γράφεται $x = \tau o\xi.\,\eta\mu\frac{1}{2}$ καὶ παριστάνει τὰ τόξα x, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον $\frac{1}{2}$.

Δηλ. ἀπὸ τὴν $x = \tau o\xi.\,\eta\mu\frac{1}{2}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 95), ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}$=ημ30°, ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα ημx=$\frac{1}{2}$, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=360^0k+30^0 \quad \text{καὶ} \quad x=(2k+1)180^0-30^0.$$

Σκεπτόμενοι ὁμοίως, ἐκ τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων

$$y_1=συνx\ , \quad y_2=εφx\ , \quad y_3=σφx \quad \text{κλπ.}$$

εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστρόφους κυκλικὰς συναρτήσεις

$$x=τοξ.συνy_1\ , \quad x=τοξ.εφy_2\ , \quad x=τοξ.σφy_3 \quad \text{κλπ.}$$

Ὅπως εἴδομεν ἀνωτέρω ὑπάρχει οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ τῶν συναρτήσεων

$$y=ημx\ , \quad y_1=συνx\ , \quad y_2=εφx \quad \text{κλπ.}$$

καὶ τῶν ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων

$$x=τοξ.ημy\ , \quad x=τοξ.συνy_1\ , \quad x=τοξ.εφy_2 \quad \text{κλπ.}$$

Αἱ πρῶται εἶναι τελείως ὡρισμέναι, ὅταν δοθῇ τὸ τόξον x.

Αἱ δεύτεραι δὲν εἶναι ὡρισμέναι, διότι εἰς δοθέντα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν δὲν ἀντιστοιχεῖ ἕνα τόξον, ἀλλὰ ἄπειρα τοιαῦτα.

Ἂν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἐξεταζόμενον τόξον περιέχεται μεταξὺ ὡρισμένου διαστήματος τιμῶν του, τότε εἰς κάθε τιμὴν δοθέντος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον τόξον, τὸ ὁποῖον εἶναι τελείως ὡρισμένον.

Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀντίστροφον κυκλικὴν συνάρτησιν

$$x=τοξ.συν\frac{1}{2}$$

καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 0° ἀπὸ 180°, τὸ μόνον τόξον, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει αὐτὴν εἶναι x=60· διότι συν60°=$\frac{1}{2}$.

Ὁμοίως, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα τόξον x περιέχεται εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ −90° ἕως +90°, ἐκ τῆς

$$x=τοξ.εφ\,1 \text{ εὑρίσκομεν } x=45^0, \text{ διότι } εφ\,45^0=1.$$

Γενικῶς, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ παριστάνωμεν μέ:

τοξ.ημα	τὸ ἐλάχιστον	θετικὸν	τόξον	φ,	τοῦ	ὁποίου	τὸ:	**ημφ=α**
τοξ.συνβ	»	»	»	ω »	»	»	»:	**συνω=β**
τοξ.εφγ	»	»	»	τ »	»	»	»:	**εφτ=γ**

Ὑποτίθεται, ὅτι α καὶ β περιέχονται μεταξὺ −1 καὶ +1.

146. Ἐφαρμογαί. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐλάχιστον τόξον x, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει τὴν ἰσότητα*

$$x=τοξ.εφ\,1+τοξ.εφ\sqrt{3}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ φ τὸ τελείως ὡρισμένον τόξον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἴση μὲ 1, δηλαδή, ἐὰν θέσωμεν

$$\text{τοξ.εφ}\,1=\varphi,\quad \text{τότε θὰ εἶναι}\quad \text{εφ}\,\varphi=1=\text{εφ}\,45^0$$

καὶ ἑπομένως $\varphi=45^0$.

Ὁμοίως, ἂν θέσωμεν τοξ.εφ$\sqrt{3}=\omega$, θὰ εἶναι εφ$\omega=\sqrt{3}=$εφ60^0 καὶ ἑπομένως $\omega=60^0$.

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἰσότης γράφεται

$$x=\varphi+\omega=45^0+60^0=105^0.$$

Πρόβλημα 2ον. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

$$\text{τοξ.εφ}\frac{1}{2}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\text{τοξ.εφ}\frac{1}{2}=\varphi$, θὰ εἶναι $\text{εφ}\,\varphi=\frac{1}{2}$ (1)

$\text{τοξ.εφ}\frac{1}{3}=\omega$, » » $\text{εφ}\,\omega=\frac{1}{3}$ (2)

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι

$$\varphi+\omega=\frac{\pi}{4}\quad \text{ἢ}\quad \text{εφ}(\varphi+\omega)=\text{εφ}\frac{\pi}{4}$$

Ἀλλὰ
$$\text{εφ}(\varphi+\omega)=\frac{\text{εφ}\,\varphi+\text{εφ}\,\omega}{1-\text{εφ}\,\varphi\,\text{εφ}\,\omega}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1=\text{εφ}\frac{\pi}{4}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σχέσις $\text{εφ}(\varphi+\omega)=\text{εφ}\frac{\pi}{4}$ ἀληθεύει· ἄρα θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ $\varphi+\omega=\frac{\pi}{4}$ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα

$$\text{τοξ.εφ}\frac{1}{2}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

Πρόβλημα 3ον. *Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης*

$$\text{τοξ.ημ}\frac{3}{5}+\text{τοξ.ημ}\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}.$$

ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ ἀναφερόμενα τόξα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ ω τὸ τελείως ὡρισμένον τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{5}$, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$\text{τοξ.ημ}\frac{3}{5}=\omega$, θὰ εἶναι $\text{ημ}\omega=\frac{3}{5}$ (1)

Ὁμοίως, ἐὰν θέσωμεν

$\text{τοξ.ημ}\frac{4}{5}=\varphi$, θὰ εἶναι $\text{ημ}\,\varphi=\frac{4}{5}$ (2)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ταυτότητα τὸ $\text{τοξ.ημ}\frac{3}{5}$ καὶ τοξ.ημ$\frac{4}{5}$ μὲ τὰ ἴσα των ω καὶ φ καὶ ἔχομεν

$$\omega+\varphi=\frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ἀποδείξω, ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις (3) πρέπει νὰ δείξω, ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ σχέσις

$$\eta\mu(\omega+\varphi)=\eta\mu\frac{\pi}{2} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi+\sigma\upsilon\nu\omega\,\eta\mu\varphi=1 \qquad (4)$$

Ὑπολογίζομεν τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ω καὶ φ, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι θετικά, διότι τὰ τόξα ω καὶ φ περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$. Θὰ εἶναι δὲ

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\sqrt{1-\eta\mu^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (4) τὰ ημω, συνφ, συνω, ημφ μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$1\text{ον μέλος}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{25}{25}=1.$$

Ἡ σχέσις λοιπὸν (4) ἀληθεύει· ἄρα θὰ εἶναι

$$\eta\mu(\omega+\varphi)=\eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ καὶ ἑπομένως } \varphi+\omega=\frac{\pi}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$\text{τοξ.ημ}\frac{3}{5}+\text{τοξ.ημ}\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$$

Πρόβλημα 4ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\text{τοξ.εφ}x+\text{τοξ.εφ}3x=90^0$

Ἐὰν θέσωμεν τοξ.εφx=φ, θὰ εἶναι εφ φ=x

τοξ.εφ3x=ω, θὰ εἶναι εφ ω=3x

ὁπότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\varphi+\omega=90^0.$$

Ἀπὸ αὐτὴν ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi(\varphi+\omega)=\varepsilon\varphi\,90^0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi\,\varphi+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\,\varphi\,\varepsilon\varphi\omega}=\infty$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ εφ φ καὶ εφω μὲ τάς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\frac{x+3x}{1-x.3x}=\infty$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ τελευταία σχέσις, πρέπει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος νὰ εἶναι μηδέν, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$1-3x^2=0 \quad \text{ἢ} \quad (1-\sqrt{3}\ x)\,(1+\sqrt{3}\ x)=0 \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ διὰ $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ἀσκήσεις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰς κάτωθι ἀσκήσεις τόξα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

Α' ὁμάς. **525.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τοξ.εφ}\sqrt{3}+\text{τοξ.εφ}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{2}$.

526. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τοξ.ημ}\frac{3}{4}+\text{τοξ.ημ}\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\pi}{2}$.

527. Νὰ ἀποδειθχῇ, ὅτι $\text{τοξ.συν}\frac{1}{2}+\text{τοξ.συν}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Β' Ὁμάς. **528.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\text{τοξ.ημ}\frac{4}{5}+\text{τοξ.ημ}\frac{5}{13}+\text{τοξ.ημ}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

529. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τοξ.εφ}\frac{1}{2}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{5}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

530. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τοξ.εφ}\frac{1}{5}-\text{τοξ.εφ}\frac{1}{70}+\text{τοξ.εφ}\frac{11}{16}=\frac{\pi}{4}$.

531. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $4\,\text{τοξ.εφ}\frac{1}{5}-\text{τοξ.εφ}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

532. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\,\text{τοξ.εφ}\frac{1}{3}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

533. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\text{τοξ.εφ}\frac{1}{3}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{5}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{7}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

534. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{τοξ.εφ}\,5-\text{τοξ.εφ}\,3+\text{τοξ.εφ}\frac{7}{9}=\frac{\pi}{4}$.

Γ' Ὁμάς. **535.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε θετικὴν τιμὴν τῶν x καὶ α θὰ εἶναι $\text{τοξ.ημ}\sqrt{\frac{x}{x+\alpha}}=\text{τοξ.εφ}\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$.

Τὰ ἀναφερόμενα τόξα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

536. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἰσότης $\text{τοξ.ημ}\frac{\mu-1}{\mu+1}=\text{τοξ.συν}\frac{2\sqrt{\mu}}{\mu+1}$.

Δ' Ὁμάς. **537.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{τοξ.εφ}x=\text{τοξ.σφ}3x$.

538. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{τοξ.ημ}x-\text{τοξ.συν}x=\text{τοξ.ημ}(3x-2)$.

539. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{τοξ.εφ}\frac{1}{x}+\text{τοξ.εφ}\frac{1}{x+1}=\frac{\pi}{4}$.

540. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{τοξ.εφ}\frac{2x}{3}+\text{τοξ.σφ}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$.

541. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{τοξ.εφ}\frac{x+1}{x-1}+\text{τοξ.εφ}\frac{x-1}{x}=k\pi+\text{τοξ.εφ}(-7)$.

542. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\text{τοξ.εφ}x+\text{τοξ.εφ}\frac{y}{2}=90^0,\qquad \text{τοξ.εφ}\sqrt{\frac{3y}{2}}-\text{τοξ.εφ}\frac{x}{\sqrt{3}}=30^0.$$

543. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l}\text{τοξ.συν}(2x-y)=60^0\\ \text{τοξ.εφ}(3x+2y-3)=45^0.\end{array}\right.$

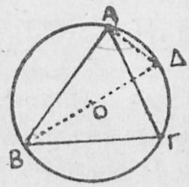
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου

147. Θεώρημα. ***Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του.***

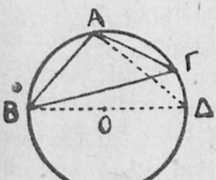
Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τυχὸν τρίγωνον, Α, Β, Γ αἱ γωνίαι του καὶ α, β, γ αἱ πλευραί του, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι, ἀντιστοίχως, τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.



Σχ. 84.

Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸν κύκλον Ο καὶ ἔστω R ἡ ἀκτίς του. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΟΔ καὶ τὴν χορδὴν ΑΔ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν $AB=B\Delta\,\eta\mu \widehat{A\Delta B}$ (1)

Ἐπειδὴ ΑΒ=γ, ΒΔ=2R καὶ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Γ, διότι εἶναι καὶ αἱ δύο ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται



Σχ. 85.

$$\gamma=2R\,\eta\mu\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R.$$

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν τὰς διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ, καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2R \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B}=2R \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1), (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R} \quad \text{(Σχέσις τῶν ἡμιτόνων)}$$

148. Πόρισμα. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$ συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας εἶναι ἴσος μὲ τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας.

'Ασκήσεις. 544. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\quad \eta\mu\frac{\Gamma-A}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, κλπ.

2ον. $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}$, $\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\eta\mu\frac{B}{2}$. (Σχολὴ 'Ικάρων)

545. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\alpha=\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\,\sigma\upsilon\nu B,\quad \beta=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\,\sigma\upsilon\nu A,\quad \gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B+\beta\,\sigma\upsilon\nu A.$$

546. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\sigma\varphi A=\frac{\beta-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\,\eta\mu\Gamma}=\frac{\gamma-\alpha\,\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\,\eta\mu B},\qquad \sigma\varphi B=\frac{\gamma-\beta\,\sigma\upsilon\nu A}{\beta\,\eta\mu A}=\frac{\alpha-\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\beta\,\eta\mu\Gamma}$$

$$\sigma\varphi\Gamma=\frac{\alpha-\gamma\,\sigma\upsilon\nu B}{\gamma\,\eta\mu B}=\frac{\beta-\gamma\,\sigma\upsilon\nu A}{\gamma\,\eta\mu A}.$$

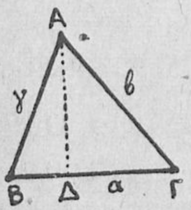
547. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma).$$

149. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.***

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ ΑΒ=γ μία πλευρά του, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ· θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$



Σχ. 86.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ἡ πλευρὰ γ κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἢ ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας.

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ πλευρὰ γ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ (σχ. 86). Κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας θὰ εἶνε

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha.\Delta\Gamma \qquad (1)$$

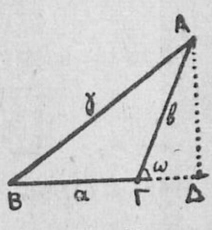
Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\Delta\Gamma=\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ ΔΓ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$.
Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\,\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A,\quad \beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\,\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ πλευρὰ γ κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ (σχ. 87). Κατὰ γνωστὸν



Σχ. 87.

θεώρημα τῆς Γεωμετρίας θὰ ἔχωμεν

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\,.\,\Gamma\Delta \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν $\Gamma\Delta=\beta$ συνω (3)

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ω εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ, θὰ εἶναι συνω=—συνΓ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (3) γράφεται $\Gamma\Delta=-\beta$ συνΓ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ΓΔ μὲ τὴν τιμὴν $-\beta$ συνΓ καὶ ἔχομεν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$ συνΓ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

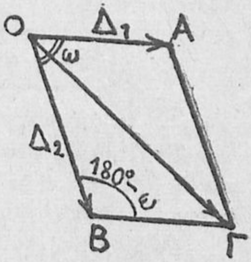
$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A\ ,\qquad \beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}B.$$

Ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις θὰ εἶναι :

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A\\ \beta^2&=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\,\text{συν}B\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma\end{aligned}}$$

150. Ἐφαρμογή. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν συνισταμένην δύο δυνάμεων.***

Ἔστωσαν Δ_1 καὶ Δ_2 (σχ. 88) δύο δυνάμεις, Ο τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς των, ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δυνάμεις καὶ Σ ἡ συνισταμένη των. Σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΟΒΓΑ τῶν δυνάμεων. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν τῆς § 149 εἰς τὸ τρίγωνον ΟΒΓ θὰ ἔχωμεν



$$\overline{O\Gamma}^2=\overline{OB}^2+\overline{B\Gamma}^2-2\,OB\times B\Gamma\,\text{συν}(180^0-\omega) \qquad (1)$$

Σχ. 88.

Ἐπειδὴ $O\Gamma=\Sigma$, $OB=\Delta_2$, $B\Gamma=OA=\Delta_1$ καὶ συν$(180^0-\omega)=-$συνω, (διότι αἱ γωνίαι (180—ω) καὶ ω εἶναι παραπληρωματικαὶ) ἡ (1) γράφεται

$$\boxed{\Sigma^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+2\,\Delta_1\,.\,\Delta_2\,\text{συν}\omega}$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν συνισταμένην δύο δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν ω.

Π.χ Ἐὰν εἶναι $\Delta_1=3$ χλγρ., $\Delta_2=5$ χγρ. καὶ $\omega=25^0$ θὰ εἶναι

$$\Sigma^2=3^2+5^2+2.3.5\,\text{συν}25^0=9+25+30\times0{,}906=61{,}18$$

ἄρα $\Sigma=\sqrt{61{,}18}=7{,}81$ χγρ.

Ἀσκήσεις. 548. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις

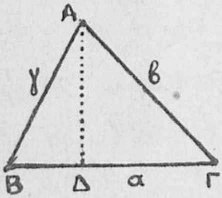
1ον. $\dfrac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}=\dfrac{\text{εφ}A}{\text{εφ}B}$. 2ον. $\dfrac{1}{\beta\,\text{συν}\Gamma-\gamma\,\text{συν}B}=\dfrac{\alpha}{\beta^2-\gamma^2}$

3ον. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\,(\beta\gamma\,\text{συν}A+\gamma\alpha\,\text{συν}B+\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma)$.

549. Αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν μήκη 2, $\sqrt{6}$ καὶ $1+\sqrt{3}$ Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του χωρὶς χρῆσιν πινάκων.

550. Ἐπὶ ἑνὸς σημείου ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις τῶν 18 χγρ. καὶ τῶν 24 χγρ. καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 40^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη των.

151. Ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου. ***1ον.*** Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον (σχ. 89), τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδόν του Ε.



Σχ. 89.

Ἐὰν φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΔ θὰ εἶναι

$$Ε=\frac{1}{2}ΒΓ.ΑΔ \quad ἢ \quad Ε=\frac{1}{2}α.ΑΔ \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν ΑΔ=ΑΓ ημΓ ἢ ΑΔ=β ημΓ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΑΔ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $Ε=\frac{1}{2}αβ\,ημΓ.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $Ε=\frac{1}{2}βγ\,ημΑ$ καὶ $Ε=\frac{1}{2}γα\,ημΒ.$

Ὥστε εἶναι

$$\boxed{Ε=\frac{1}{2}αβ\,ημΓ=\frac{1}{2}βγ\,ημΑ=\frac{1}{2}γα\,ημΒ}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

2ον. Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται καὶ ὑπὸ τῶν τύπων

$$\boxed{Ε=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}, \quad \boxed{Ε=\frac{αβγ}{4R}}, \quad \boxed{Ε=ρτ}$$

ὅπου α, β, γ εἶναι αἱ πλευραί του, τ ἡ ἡμιπερίμετρός του, R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον.

Σημείωσις. Ὁ τύπος $Ε=\frac{αβγ}{4R}$ ἐξάγεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπον $Ε=\frac{1}{2}βγ\,ημΑ$, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ημΑ διὰ τῆς τιμῆς του $ημΑ=\frac{α}{2R}$ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{α}{ημΑ}=2R.$

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** **551.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις :

1ον. $Ε=2R^2\,ημΑ\,ημΒ\,ημΓ.$ 2ον. $Ε=αR\,ημΒ\,ημΓ.$

552. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$E=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{4\,\varepsilon\varphi\frac{A+B-\Gamma}{2}}$$

(Πολυτεχνεῖον 1930)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν)

Β' Ὁμάς. **553.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $(\beta+\gamma)\,\sigma\upsilon\nu A+(\gamma+\alpha)\,\sigma\upsilon\nu B+(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha+\beta+\gamma$

2ον. $(\beta^2-\gamma^2)\,\sigma\varphi A+(\gamma^2-\alpha^2)\,\sigma\varphi B+(\alpha^2-\beta^2)\,\sigma\varphi\Gamma=0.$

554. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\alpha\,\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\,\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\,\eta\mu(A-B)=0$$

555. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}$$

556. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, θὰ εἶναι:

1ον. $E=\frac{1}{4}(\alpha^2\eta\mu 2B+\beta^2\,\eta\mu 2A)$, 2ον. $E=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\,\eta\mu A\,\eta\mu B}{2\,\eta\mu(A-B)}$

557. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=\frac{\tau}{R}.$ 2ον. $E=\varrho R(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)$

3ον. $\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma=\frac{\varrho\tau}{2R^2}.$

558. 'Επὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. 'Εὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}=\omega$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A\Delta=\frac{2E}{\alpha\,\eta\mu\omega}.$

2. Κλασσικαὶ περιπτώσεις ἐπιλύσεως τριγώνων

152. 'Επίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων. Γνωρίζομεν, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι τελείως ὡρισμένον, ὅταν δίδωνται τρία ἀπὸ τὰ ἓξ στοιχεῖα του, ἐκ τῶν ὁποίων πρέπει τὸ ἕνα τοὐλάχιστον νὰ εἶναι πλευρά. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ὅταν δίδωνται ἱκανὰ ἐξ αὐτῶν, λέγεται ***ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου.***

Ὀνομάζομεν ***κλασσικὰς περιπτώσεις*** ἐπιλύσεως ἑνὸς τριγώνου ἐκείνας τὰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ τρίγωνον ὁρίζεται συναρτήσει μερικῶν ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων του.

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν οἱωνδήποτε τριγώνων προκύπτουν 4 περιπτώσεις, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω:

153. Πρώτη περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν του καὶ δύο γωνίας του.***

Ἔστω, ὅτι γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

Γνωστά: α, Β, Γ. | *Ἄγνωστα:* Α, β, γ.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Α. Ἡ γωνία Α ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν τύπον $A=180^0-(B+\Gamma)$.

Ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν β καὶ γ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$ λαμβάνομεν

$$\boxed{\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}} \qquad (1)$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ Ε. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ ἀντικαταστήσωμεν τάς πλευρὰς β καὶ γ μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (1), λαμβάνομεν

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}\cdot\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\eta\mu A \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E=\frac{\alpha^2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{2\,\eta\mu A}} \qquad (2)$$

Ὅλοι οἱ ἀνωτέρω τύποι εἶναι λογιστοὶ διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 90^0, τότε θὰ εἶναι $B+\Gamma<90^0$, καὶ ἐπειδὴ $\eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)$, οἱ τύποι (1) καὶ (2) γίνονται

$$\boxed{\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)},\quad \gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu(B+\Gamma)},\quad E=\frac{\alpha^2\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{2\,\eta\mu(B+\Gamma)}}$$

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι α=456,75 μέτρα,* $\widehat{B}=35^0\,8'\,40''$ *καὶ* $\widehat{\Gamma}=74^0\,50'\,15''$.

Γνωστά:		*Ἄγνωστα:*	***Ἐξαγόμενα***
	α=456,75		$A=70^0\,1'\,5''$
	$B=35^0\,8'\,40''$		β=279,66 μ.
	$\Gamma=74^0\,50'\,15''$		γ=469,09 μ.

Τύποι: $\mathbf{A=180^0-(B+\Gamma)}$, $\quad \beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\quad \gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Α.

$$\begin{aligned} A&=180^0-(B+\Gamma)\\ 180^0&=179^0\,59'\,60''\\ B+\Gamma&=109^0\,58'\,55''\\ \hline A&=70^0\,1'\,5'' \end{aligned}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$$\begin{aligned} B&=35^0\,8'\,40''\\ \Gamma&=74^0\,50'\,15''\\ \hline B+\Gamma&=109^0\,58'\,55'' \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}$ λαμβάνομεν $\beta=\frac{456{,}75\,.\,\eta\mu 35^0\,8'\,40''}{\eta\mu 70^0\,1'\,5''}$ ἢ

$$λογ\, β=(λογ\, 456,75+λογ\, ημ 35^0\, 8'\, 40'')-λογ ημ 70^0\, 1'\, 5''$$

Τελικαὶ πράξεις		*Βοηθητικαὶ πράξεις*	
λογ 456,75	$=2,65968$	λογ ημ $35^0\, 8'$	$=\overline{1},76003$
λογ ημ $35^0\, 8'\, 40''$	$=\overline{1},76015$	διὰ $40''$	$=12$
ἄθροισμα	$=2,41983$	λογ ημ$35^0\, 8'\, 40''$	$=\overline{1},76015$
λογ ημ $70^0\, 1'\, 5''$	$=\overline{1},97303$	λογ ημ$70^0\, 1'$	$=\overline{1},97303$
λογ β	$=2,44680$	διὰ $5''$	$=0$
ἄρα β	$=279,66$	λογ ημ$70^0\, 1'\, 5''$	$=\overline{1},97303$

'Υπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. 'Απὸ τὸν τύπον $γ=\frac{α\, ημΓ}{ημA}$ λαμβάνομεν $γ=\frac{456,75\,.\,ημ74^0\, 50'\, 15''}{ημ70^0\, 1'\, 5''}$ ἢ

$$λογ\, γ=(λογ 456,75+λογ\, ημ 74^0\, 30'\, 15'')-λογ\, ημ 70^0\, 1'\, 5''$$

Τελικαὶ πράξεις		*Βοηθητικαὶ πράξεις*	
λογ456,75	$=2,65968$	λογ ημ$74^0\, 50'$	$=\overline{1},98460$
λογ ημ$74^0\, 50'\, 15''$	$=\overline{1},98461$	διὰ $15''$	$=1$
῎Αθροισμα	$=2,64429$	λογ ημ$74^0\, 50'\, 15''$	$=\overline{1},98461$
λογ ημ $70^0\, 1'\, 5''$	$=\overline{1},97303$		
λογ β	$=2,67126$		
ἄρα β	$=469,09$		

'Ασκήσεις. 559. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι:
$α=284,8$ μέτρ., $B=67^0\, 14'\, 20''$, $Γ=40^0\, 16'\, 15''$.

560. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 5 μέτρων φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ ΒΑ καὶ ΓΑ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

561. 'Η διαγώνιος ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι $36^0\, 10'$ καὶ ἡ ἄλλη $28^0\, 10'\, 10''$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $ΑΓ=6,20$ μέτρα.

562. 'Η συνισταμένη δύο δυνάμεων εἶναι 75 χγρ. καὶ σχηματίζει μὲ τὰς δύο συνιστώσας γωνίας 18^0 καὶ 24^0. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δύο συνιστῶσαι.

154. Δευτέρα περίπτωσις. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.***

῎Εστω, ὅτι γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς α, β ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν γωνίαν Γ.

Γνωστά: α, β, Γ. | *῎Αγνωστα:* Α, Β, γ.

'Υπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Α καὶ Β. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

'Από τὴν γνωστὴν σχέσιν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ λαμβάνομεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\alpha-\beta}{\eta\mu A-\eta\mu B}=\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu B}$$

'Από τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B} \quad \text{ἢ (§ 116)} \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}}$$

$$\text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}} \qquad (1)$$

'Ομοίως εὑρίσκομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-A}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}\sigma\varphi\frac{B}{2}}$$

'Από τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν A—B τῶν γωνιῶν A καὶ B. Ἂν παραστήσωμεν μὲ ω τὴν διαφορὰν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$\left.\begin{aligned} &A-B=\omega \\ \text{'Αλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι καὶ}\quad &A+B=180^0-\Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) εὑρίσκομεν

$$A=90^0-\frac{\Gamma}{2}+\frac{\omega}{2} \quad \text{καὶ} \quad B=90^0-\frac{\Gamma}{2}-\frac{\omega}{2}.$$

'Υπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Γνωρίζοντες ἤδη τὴν γωνίαν A, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν γ ἀπὸ τὸν τύπον $\gamma=\dfrac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$.

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha=675,4$ μέτρα, $\beta=546,3$ μέτρα καὶ $\Gamma=54^0\,40'\,20''$.*

Γνωστά :	$\alpha=675,4$ $\beta=546,3$ $\Gamma=54^0\,40'\,20''$	*Ἄγνωστα :*	***'Εξαγόμενα*** $A=74^0\,13'\;\;1'',25$ $B=51^0\;\;6'\;\;38'',75$ $\gamma=572,625$ μ.

Τύποι : $\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$, $\quad\gamma=\dfrac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν A καὶ B. Ἀπὸ τὸν τύπον

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$ λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{129,1}{1221,7}\cdot\sigma\varphi 27^0\,20'\,10''$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$\alpha=675,4$
$\beta=546,3$
$\alpha-\beta=129,1$
$\alpha+\beta=1221,7$

ἢ $$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=(\lambda o\gamma 129,1+\lambda o\gamma\,\sigma\varphi 27^0\,20'\,10'')-\lambda o\gamma 1221,7$$

Τελικαὶ πράξεις

λογ129,1	$=2,11093$
λογ σφ$27^0\,20'\,10''$	$=0,28656$
Ἄθροισμα	$=2,39749$
λογ1221,7	$=3,08697$
λογ εφ$\frac{A-B}{2}$	$=\overline{1},31052$

ἄρα $\frac{A-B}{2}=11^0\,33'\,11'',25$

καὶ $A-B=23^0\;6'22'',5$

Βοηθητικαὶ πράξεις

λογ σφ$27^0\,20'$		$=0,28661$
δι' αὐξ.	$10''$	$=-\;5$
λογ σφ $27^0\,20'\,10''$		$=0,28656$
Διὰ $\overline{1},31040$		$=11^0\,33'$
δι' αὐξ. 12		$=11'',25$
Διὰ 1,31052		$=11^0\,33'\,11'',25$

Εὑρήκαμεν $A-B=23^0\;6'22'',5$ (1) Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι

καὶ $A+B=125^0\,19'\,40''$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $2A=148^0\,26'2'',5$ ἄρα $A=74^0\,13'\,1'',25$. Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν $2B=102^0\,13'\,17'',5$, ἄρα

$$B=51^0\,6'\,38'',75.$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$180^0=179^0\,59'\,60''$
$\Gamma=54^0\,40'\,20''$
$A+B=125^0\,19'\,40''$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Ἀπὸ τὸν τύπον $\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ λαμβάνομεν

$$\gamma=\frac{675,4\,.\,\eta\mu 54^0\,40'\,20''}{\eta\mu 74^0\,13'\,1'',25}$$

ἢ $$\lambda o\gamma\,\gamma=(\lambda o\gamma 675,4+\lambda o\gamma\,\eta\mu 54^0\,40'\,20'')-\lambda o\gamma\,\eta\mu 74^0\,13'\,1'',25$$

Τελικαὶ πράξεις

λογ 675,4	$=2,82956$
λογ ημ$54^0\,40'\,20''$	$=\overline{1},91162$
Ἄθροισμα	$=2,74118$
λογ ημ$74^0 13'\,1'',25$	$=\overline{1},98331$
λογ γ	$=2,75787$
ἄρα γ	$=572,625$ μ.

Βοηθητικαὶ πράξεις

λογ ημ$54^0\,40'$		$=\overline{1},91159$
δι' αὐξ.	$20''$	$=3$
λογ ημ$54^0\,40'\,20''$		$=\overline{1},91162$
λογ ημ$74^0\,13'$		$=\overline{1},98331$
δι'	$1'',25$	$=0$
λογ ημ$74^0\,13'\,1'',25$		$=\overline{1},98331$

Ἀσκήσεις. 563. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι:

$\alpha=337,6$ μέτρα, $\beta=274,40$ μέτρα, $\widehat{\Gamma}=54^0\,35'$

564. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι $\delta=12$ μέτρα καὶ $\delta'=16$ μέτρα καὶ ἡ γωνία των $\omega=26^0\ 10'$.

565. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 90 χγρ. εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς εἶνε 36 χλγρ. καὶ σχηματίζει μὲ τὴν δύναμιν τῶν 90 χγρ. γωνίαν $22^0\ 30'$. Νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ἡ γωνία τῶν συνιστωσῶν.

155. Τρίτη περίπτωσις (*ἀμφίβολος*). ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν.***

Ἔστω, ὅτι γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς α, β ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν γωνίαν Α, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α.

Γνωστά: α, β, Α | *Ἄγνωστα:* Β, Γ, γ.

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\alpha}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{λαμβάνομεν} \quad \eta\mu B=\frac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha}.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δίδει τὴν γωνίαν Β καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν Γ ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$\Gamma=180^0-(A+B).$$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Γνωρίζοντες ἤδη τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πλευρὰν γ ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma.$$

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν Β ἐχρησιμοποιήσαμεν τὸν τύπον

$$\eta\mu B=\frac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν, ἀπὸ τὸν τύπον αὐτόν, τὴν γωνίαν Β, πρέπει τὸ ημΒ ἢ τὸ ἴσον του $\frac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha}$, νὰ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον ἢ μικρότερον τῆς μονάδος 1· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha}\leqslant 1 \quad \text{ἢ} \quad \beta\,\eta\mu A\leqslant\alpha. \qquad (2)$$

Ὥστε, ἐὰν εἶναι $\beta\,\eta\mu A>\alpha$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ σχέσις (2) ὑφίσταται, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τοὺς πίνακας μίαν ὀξεῖαν γωνίαν B_1 καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν $B_2=180^0-B_1$, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (1).

Ἔπειτα ἀπὸ τὸν τύπον $Γ=180^0-(A+B)$ εὑρίσκομεν, ὅτι:
Εἰς τὴν γωνίαν B_1 ἀντιστοιχεῖ ἡ γωνία $Γ_1=180^0-(A+B_1)$·
Εἰς τὴν γωνίαν $B_2=(180^0-B_1)$ » » » $Γ_2=B_1-A$.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκταὶ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τῆς γωνίας Γ, πρέπει νὰ εἶναι προφανῶς θετικαὶ καὶ μικρότεραι τῶν 180^0.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

I. Περίπτωσις $A<90^0$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ πρώτη γωνία B_1 εἶναι ὀξεῖα, τότε θὰ εἶναι $A+B_1<180^0$ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία $Γ_1=180^0-(A+B_1)$ εἶναι θετική. Διὰ νὰ εἶναι καὶ ἡ δευτέρα γωνία $Γ_2=B_1-A$ θετικὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$B_1-A>0 \quad ἢ \quad B_1>A \quad ἢ \quad ημB_1>ημA \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία B_1 εἶναι ὀξεῖα, τότε ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$ημB_1=\frac{β\,ημA}{α}, \quad \text{ὁπότε ἡ σχέσις (3) γίνεται}$$

$$\frac{β\,ημA}{α}>ημA \quad ἢ \quad \frac{β}{α}>1 \quad ἢ \quad β>α.$$

Ὥστε, ἐὰν $β>α$ ὑπάρχουν δύο γωνίαι $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ θετικαὶ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις· ἐὰν $β<α$ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

II. Περίπτωσις $A>90^0$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, πρέπει νὰ λάβωμεν μόνον τὴν ὀξεῖαν γωνίαν B_1 καὶ ὄχι καὶ τὴν δευτέααν γωνίαν B_2, ἡ ὁποία εἶναι ἀμβλεῖα, διότι τότε τὸ τρίγωνον θὰ εἶχε δύο ἀμβλείας γωνίας, τὰς Α καὶ B_2.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἡ ὀξεῖα γωνία B_1 δεκτή, πρέπει νὰ εἶναι

$$A+B_1<180^0 \quad ἢ \quad B_1<180^0-A \quad ἢ \quad ημB_1<ημA \qquad (4),$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία B_1 εἶναι ὀξεῖα, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$ημB_1=\frac{β\,ημA}{α}, \quad \text{ὁπότε ἡ σχέσις (4) γίνεται}$$

$$\frac{β\,ημA}{α}<ημA \quad ἢ \quad \frac{β}{α}<1 \quad ἢ \quad β<α$$

Ὥστε, ἐὰν $β<α$, θὰ εἶναι $A+B_1<180^0$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει μία ὀξεῖα καὶ θετικὴ γωνία Γ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν· ἐὰν $β>α$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Τέλος ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, πρέπει νὰ λάβωμεν μόνον τὴν πρώτην ὀξεῖαν γωνίαν B_1 καὶ ὄχι τὴν δευτέραν ἀμβλεῖαν γωνίαν B_2· Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι $β\,ημA=α$, τότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$ημB=1 \quad ἢ \quad ημB=ημ90^0 \quad ἢ \quad B=90^0.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο γωνίαι B_1 καὶ B_2 συμπίπτουν εἰς μίαν γωνίαν $B=90^0$ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν ἐὰν $A<90^0$ ἢ καμμίαν, ἐὰν $A>90^0$. Τὰ συμπεράσματα τῆς διερευνήσεως αὐτῆς περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα

β ημA>α	. . . .	καμμία	λύσις
B ημA<α	A<90°: β>α	2	λύσεις
	A<90°: β⩽α	1	λύσις
	A>90°: β<α	1	λύσις
	A>90°: β⩾α	0	λύσις
	A=90°	1	λύσις
β ημA=α	A<90°	1	λύσις
	A>90°	0	λύσις

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι* $\alpha=468{,}6$ *μέτρα,* $\beta=504{,}8$ *μέτρα,* $A=62^0\ 10'\ 20''$.

Γνωστὰ	*Ἄγνωστα* 1η Λύσις	*Ἄγνωστα* 2α Λύσις
$\alpha=468{,}6$	$B_1=72^0\ 18'$	$B_2=107^0\ 42'$
$\beta=504{,}8$	$\Gamma_1=45^0\ 31'\ 40''$	$\Gamma_2=10^0\ 7'\ 40''$
$A=62^0\ 10'\ 20''$	$\gamma_1=378{,}11$	$\gamma_2=91{,}556$

Τύποι : $\eta\mu B=\frac{\beta\ \eta\mu A}{\alpha}$, $\Gamma=180^0-(A+B)$, $\gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\eta\mu B=\frac{\beta\ \eta\mu A}{\alpha}$ λαμβάνομεν

$$\eta\mu B=\frac{504{,}8\ .\ \eta\mu 62^0\ 10'\ 20''}{468{,}6}$$

ἢ $\lambda o\gamma\ \eta\mu B=(\lambda o\gamma 504{,}8+\lambda o\gamma\ \eta\mu 62^0\ 10'\ 20'')-\lambda o\gamma 468{,}6$.

Τελικαὶ πράξεις		***Βοηθητικαὶ πράξεις***
λογ504,8	$=2{,}70312$	$180^0=179^0\ 60'$
λογ ημ62° 10′ 20″	$=\bar{1}{,}94662$	$B_1=\ 72^0\ 18'$
Ἄθροισμα	$=2{,}64974$	$B_2=107^0\ 42'$
λογ468,6	$=2{,}67080$	
λογ ημΒ	$=\bar{1}{,}97894$	
ἄρα Β	$=72^0\ 18'$	

1η Λύσις	***2α Λύσις***
$B_1=72^0\ 18'$	$B_2=107^0\ 42'$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ.

1η Λύσις	***2α Λύσις***
$\Gamma_1=180^0-(A+B_1)$	$\Gamma_2=180^0-(A+B_2)$
$180^0=179^0 59' 60''$	$180^0=179^0\ 59'\ 60''$
$A+B_1=134^0 28' 20''$	$A+B_2=169^0\ 52'\ 20''$
$\Gamma_1=45^0 31' 40''$	$\Gamma_2=\ 10^0\ \ 7'\ 40''$

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ. Ἀπὸ τὸν τύπον $\gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ ἔχομεν

1η Λύσις	*2α Λύσις*
$\gamma_1 = \frac{468,6 \cdot \eta\mu 45^0\, 31'\, 40''}{\eta\mu 62^0\, 10'\, 20''}$	$\gamma_2 = \frac{468,6 \cdot \eta\mu 10^0\, 7'\, 40''}{\eta\mu 62^0\, 10'\, 20''}$
ἢ λογγ_1=(λογ468,6+λογημ45° 31′ 40″)— —λογ ημ62° 20′ 20″	λογγ_2=(λογ468,6+λογημ10° 7′ 40″)— —λογ ημ62° 10′ 20″
λογ 468,6 =2,67080	λογ 468,6 =2,67080
λογ ημ 45° 31′ 40″=$\overline{1}$,85345	λογ ημ 10° 7′ 40″ =$\overline{1}$,23513
Ἄθροισμα =2,52425	Ἄθροισμα =1,90593
λογ ημ62° 10′ 20″ =$\overline{1}$,94662	λογ ημ62° 10′ 20″ =$\overline{1}$,94662
λογ γ_1 =2,57763	λογ γ_2 =1,95931
ἄρα γ_1 =378,71	ἄρα γ_2 =91,556 μ.

'Ασκήσεις. 566. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι:
α=372,4 μέτρα β=506,8 μέτρα, Α=73° 54′ 20″

567. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha=1, \quad \beta=\sqrt{3}+1$ καὶ $A=15^0$.

568. 'Εὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι Α=30°, β=100 μ. καὶ α=40 μ., πόσας λύσεις θὰ ἔχωμεν;

569. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι α=420 μ., β=604 μ., Α=65° 40′.

156. Τετάρτη περίπτωσις. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του.*

1η Μέθοδος : *Δεδομένα :* α, β, γ. *Ἄγνωστα :* Α, Β, Γ.

Γνωρίζομεν, ὅτι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A$. 'Απὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\boxed{\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}$, ἡ ὁποία δίδει τὴν γωνίαν Α.

'Ομοίως αἱ γωνίαι Β καὶ Γ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}}, \qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu \Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}}$$

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι α=12 μετρ., β=15 μετρ., γ=10 μετρ.*

Δεδομένα : $\begin{cases} \alpha=12 \ \mu. \\ \beta=15 \ \mu. \\ \gamma=10 \ \mu. \end{cases}$ *Ἄγνωστα :* $\begin{cases} A=52^0\, 54' \\ B=85^0\, 26' \\ \Gamma=41^0\, 40' \end{cases}$ (***'Εξαγόμενα***)

Τύποι : $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu \Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$

'Υπολογισμὸς τῆς γωνίας Α. 'Απὸ τὸν τύπον $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$

λαμβάνομεν $\quad συνA = \dfrac{15^2+10^2-12^2}{2\times15\times10} = \dfrac{181}{300} = 0{,}6033.$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν $A=52^0\,54'$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας B. Ἀπὸ τὸν τύπον $συνB=\dfrac{γ^2+α^2-β^2}{2\,αγ}$

λαμβάνομεν $συνB=\dfrac{10^2+12^2-15^2}{2\times12\times10} = \dfrac{19}{240} = 0{,}079$, ἄρα $B=85^0\,26'$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἀπὸ τὸν τύπον $συνΓ=\dfrac{α^2+β^2-γ^2}{2\,αβ}$

λαμβάνομεν $συνΓ=\dfrac{α^2+β^2-γ^2}{2\,αβ} = \dfrac{12^2+15^2-10^2}{2\times12\times15} = \dfrac{269}{360} = 0{,}747,$

ἄρα $\quad Γ=41^0\,40'$.

Β' Μέθοδος. Κλασσική. Οἱ τύποι $συνA=\dfrac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$ κλπ. ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὴν 1ην μέθοδον δὲν εἶναι λογιστοὶ διὰ τῶν λογαρίθμων. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἄλλους τύπους, λογιστοὺς διὰ τῶν λογαρίθμων.

Ἐπειδὴ ὁ ὑπολογισμὸς μιᾶς γωνίας εἶναι ἀκριβέστερος, ὅταν γίνεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης της, παρὰ διὰ τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου της, διὰ τοῦτο θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν A ἐκ τοῦ τύπου

$$εφ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-συνA}{1+συνA}} \tag{1}$$

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ $1-συνA$, καὶ $1+συνA$.

Ἔχομεν

$$1-συνA=1-\frac{β^2+γ^2-α^2}{2\,βγ} = \frac{α^2-(β^2+γ^2-2\,βγ)}{2\,βγ} =$$

$$= \frac{α^2-(β-γ)^2}{2\,βγ} = \frac{(α+β-γ)\,(α-β+γ)}{2\,βγ} \tag{2}$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$1+συνA=1+\frac{β^2+γ^2-α^2}{2\,βγ} = \frac{(β^2+γ^2+2\,βγ)-α^2}{2\,βγ} = \frac{(β+γ)^2-α^2}{2\,βγ} =$$

$$= \frac{(β+γ+α)\,(β+γ-α)}{2\,βγ} \tag{3}$$

Ἐὰν θέσωμεν $α+β+γ=2τ$ καὶ ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη αὐτῆς διαδοχικῶς τὸ $2γ$, $2β$, $2α$ εὑρίσκομεν

$$α+β-γ=2τ-2γ=2(τ-γ)$$
$$α-β+γ=2τ-2β=2(τ-β)$$
$$β+γ-α=2τ-2α=2(τ-α)$$

ὁπότε ἀπὸ τὰς (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$1-συνA=\frac{2(τ-γ)\,(τ-β)}{βγ}, \qquad 1+συνA=\frac{2τ(τ-α)}{βγ}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ 1—συνΑ καὶ 1+συνΑ μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}}}\,,\qquad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}}$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\boxed{E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

τὸν ὁποῖον εὑρήκαμεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ταχύτερον τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου εἶναι πρόσφορον νὰ εἰσαγάγωμεν μίαν βοηθητικὴν ποσότητα:

$$\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον, καὶ τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀκτῖνος ϱ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς τιμὰς τῶν

$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ποὺ εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\alpha}}\,,\qquad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\beta}}\,,\qquad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\gamma}}$$

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι α=345,6 μέτρα, β=448,6 μέτρα καὶ γ=565,4 μέτρα.*

Γνωστά :	α=345,6 β=448,2 γ=565,4	*Ἄγνωστα :*	***Ἐξαγόμενα*** $A=37^0\,40'\,45'',4$ $B=52^0\,26'\,22'',5$ $\Gamma=89^0\,52'\,48''$

Τύποι : $$\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}},$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\alpha},\qquad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\beta},\qquad \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\gamma}.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ϱ. Ἀπὸ τὸν τύπον $\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$ λαμβάνομεν $\varrho=\sqrt{\frac{334\,.\,231{,}4\,.\,114{,}2}{679{,}6}}$ ἢ

$$\lambda o\gamma\,\varrho=\frac{1}{2}\,[(\lambda o\gamma 334+\lambda o\gamma 231{,}4+\lambda o\gamma 114{,}2)-\lambda o\gamma 679{,}6]$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,334 &= 2{,}52375\\
\lambda o\gamma\,231{,}4 &= 2{,}36436\\
\lambda o\gamma\,114{,}2 &= 2{,}05767\\
\hline
\text{Ἄθροισμα} &= 6{,}94578\\
\lambda o\gamma\,679{,}6 &= 2{,}83225\\
\hline
2\lambda o\gamma\,\varrho &= 4{,}11353\\
\lambda o\gamma\,\varrho &= 2{,}05676
\end{aligned}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

$$\begin{aligned}
\alpha&=345{,}6\\
\beta&=448{,}2\\
\gamma&=565{,}4\\
\hline
2\tau&=1359{,}2\\
\tau&=679{,}6\\
\tau-\alpha&=334\\
\tau-\beta&=231{,}4\\
\tau-\gamma&=114{,}2
\end{aligned}$$

῾Υπολογισμὸς τῆς γωνίας Α. Ἀπὸ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\alpha}$ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{334}$ ἢ

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\lambda o\gamma\,\varrho-\lambda o\gamma\,334$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,\varrho &= 2{,}05676\\
\lambda o\gamma\,334 &= 2{,}52375\\
\hline
\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} &= \overline{1}{,}53301
\end{aligned}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

Διὰ	$\overline{1}{,}53285$	$=18^0\,50'$
δι' αὔξ.	16 . . . . $=$	$22'',7$
	$\overline{1}{,}53301$	$18^0\,50'\,22'',7$

ἄρα $\frac{A}{2}=18^0\,50'\,22'',7$ καὶ $A=37^0\,40'\,45'',4$

῾Υπολογισμὸς τῆς γωνίας Β. Ἀπὸ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\beta}$ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\varrho}{231{,}4}$ ἢ

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\lambda o\gamma\,\varrho-\lambda o\gamma\,231{,}4.$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,\varrho &= 2{,}05676\\
\lambda o\gamma\,231{,}4 &= 2{,}36436\\
\hline
\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} &= \overline{1}{,}69240
\end{aligned}$$

Βοηθητικαὶ πράξεις

Διὰ	$\overline{1}{,}69234$. . .	$=26^0\,13'$
δι' αὔξ.	6. . . . $=$	$11'',25$
	1,69240. . . .	$=26^0\,13'\,11'',25$

ἄρα $\frac{B}{2}=26^0\,13'\,11'',25$ καὶ $B=52^0\,26'\,22'',5$

῾Υπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ. Ἀπὸ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\varrho}{\tau-\gamma}$ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\varrho}{114{,}2}$ ἢ

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\lambda o\gamma\,\varrho-\lambda o\gamma\,114{,}2$$

Τελικαὶ πράξεις		*Βοηθητικαὶ πράξεις*		
$\lambda o\gamma\, \varrho$	$=2,05676$	Διὰ	$\bar{1},99899$	$=44^0\,56'$
$\lambda o\gamma\, 114,2$	$=2,05767$	δι' αὐξ.	10	$= \quad 24''$
$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$	$=\bar{1},99909$	διὰ	99909	$=44^0\,56'\,24''$

ἄρα $\frac{\Gamma}{2}=44^0\,56'\,24''$ ἄρα $\Gamma=89^0\,52'\,48''$.

Ἀσκήσεις. 570. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι:
$\alpha=685,40$ μέτρα, $\beta=532,8$ μέτρα, $\gamma=748,6$ μέτρα.

571. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ πλευραί του α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 9, 10, 11.

572. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha=24$ μέτρα, $\beta=38$ μέτρα, $\gamma=34$ μέτρα.

573. Δύο δυνάμεις 20 χγρ. καὶ 40 χγρ. ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἐὰν ἡ συνισταμένη των εἶναι 55 χγρ. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν δύο δυνάμεων.

157. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεως ἑκάστης γωνίας ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν πλευρῶν του α, β, γ.***

Εἰς τὴν § 156, εὑρήκαμεν, ὅτι

$$1-\sigma\upsilon\nu A=\frac{2(\tau-\gamma)(\tau-\beta)}{\beta\gamma} \qquad (1)$$

καὶ
$$1+\sigma\upsilon\nu A=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \qquad (2)$$

Γνωστά	α, β, γ
Ἄγνωστα	$\eta\mu\frac{A}{2},\ \eta\mu\frac{B}{2},\ \eta\mu\frac{\Gamma}{2}$
	$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2},\ \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

1ον. Ἐπειδὴ $1-\sigma\upsilon\nu A=2\,\eta\mu^2\frac{A}{2}$, ἡ (1) γράφεται

$$2\,\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{2(\tau-\gamma)(\tau-\beta)}{\beta\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}}\,, \qquad \boxed{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}}$$

2ον. Ἐπειδὴ $1+\sigma\upsilon\nu A=2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$, ἡ (2) γράφεται

$$2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}}\,, \qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}}$$

'Ασκήσεις. 574. 'Εὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι $\alpha=9$, $\beta=6$, $\gamma=5$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.

575. 'Εὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι $\alpha=12$, $\beta=13$, $\gamma=14$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\eta\mu\frac{A}{2}$, $\eta\mu\frac{B}{2}$, $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

576. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\frac{E}{4R\varrho}$$

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

***Α' 'Ομάς.* 577.** 'Ενὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται: $\widehat{A}=45^{\circ}$, $\beta=4$, $\gamma=\sqrt{2}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν, χωρὶς πίνακας, τὰ ημΒ, συνΒ, ημΓ, συνΓ.

578. 'Ενὸς τριγώνου δίδονται: $\widehat{\Gamma}=18^{\circ}$, $\alpha=4+\sqrt{80}$, $\gamma=4$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Α, Β καὶ ἡ πλευρὰ β.

579. 'Ενὸς τριγώνου δίδονται: $\widehat{A}=15^{\circ}$, $\alpha=4$, $\beta=4+\sqrt{48}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ καὶ ἡ πλευρὰ γ.

580. 'Ενὸς τριγώνου δίδονται: $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=\sqrt{3}$, $\widehat{\Gamma}=60^{\circ}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν, χωρὶς πίνακας, τὰ α, ημΑ, ημΒ, συνΑ, συνΒ.

581. 'Εὰν μεταξὺ τῶν πλευρῶν α, β, γ, ἑνὸς τριγώνου ὑπάρχουν αἱ σχέσεις $\alpha=\frac{8}{5}\gamma$ καὶ $\beta=\frac{9}{5}\gamma$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, καὶ ἔπειτα ἡ γωνία Α.

582. Εἰς ἕνα τρίγωνον εἶναι $\beta=\alpha+1$, $\gamma=\alpha+2$ καὶ $\sigma\upsilon\nu A=\frac{3}{5}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

583. Αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \gamma=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν, χωρὶς πίνακας, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

584. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\widehat{A}=60^{\circ}\ \text{καὶ}\ \alpha=(\beta-\gamma)\sqrt{3}\,.$$

585. 'Ενὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία $\widehat{A}=60^{\circ}$ καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\gamma}=2+\sqrt{3}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του Β καὶ Γ.

586. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha=2\beta$ καὶ $\Gamma=60^{\circ}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Α καὶ Β.

587. 'Εὰν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha\,\varepsilon\varphi A+\beta\,\varepsilon\varphi B=(\alpha+\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι.

588. 'Εὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2\beta}$.

589. 'Εὰν $\widehat{\Gamma}=120^\circ$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{B}=45^\circ$.

590. 'Εὰν ἡ γωνία Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 120°, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}=\dfrac{\beta}{\gamma}$. Τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει ;

Β' 'Ομάς. **591.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὑφίστανται αἱ σχέσεις :

1ον. $\eta\mu\, 2B=\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$. 2ον. $\sigma\upsilon\nu\, 2B=\dfrac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$. 3ον. $\varepsilon\varphi\, 2B=\dfrac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$

4ον. $\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}=\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}$ 5ον. $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$

6ον. $\sigma\tau\varepsilon\mu\, B+\sigma\varphi\, B=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$ 7ον. $\tau\varepsilon\mu\, 2B-\varepsilon\varphi\, 2\Gamma=\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}$

8ον. $\varepsilon\varphi\, B+\varepsilon\varphi\, \Gamma=\dfrac{\alpha^2}{2\,E}$ (Σχ. 'Ικάρων) 9ον. $\sigma\upsilon\nu(2\Gamma-B)=\dfrac{\gamma}{\alpha^3}(3\alpha^2-4\gamma^2)$

592. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων του ὑφίσταται ἡ σχέσις :

1ον. $\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B$. 2ον. $\eta\mu A=\dfrac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}$

3ον. $E=\tau(\tau-\alpha)$ 4ον. $\sigma\varphi\dfrac{B}{2}=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$

5ον. $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma-B)}{\eta\mu A+\eta\mu(\Gamma-B)}$ 6ον. $\dfrac{\sigma\varphi(2\Gamma+B)}{\varepsilon\varphi(\Gamma+2B)}=\dfrac{4\gamma^2-\alpha^2}{4\beta^2-\alpha^2}$

(Πολυτεχνεῖον 1931)

593. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων του ἀληθεύῃ ἡ σχέσις :

1ον. $\eta\mu A=2\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$. 2ον. $\beta\,\sigma\upsilon\nu A=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B$

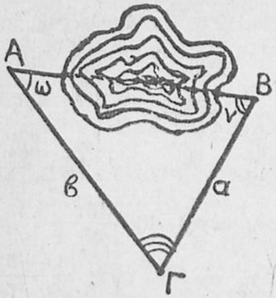
3ον. $\alpha=2\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$. 4ον. $\alpha=2\,\beta\,\eta\mu\dfrac{A}{2}$

5ον. $\eta\mu\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\dfrac{B}{2}=\eta\mu\dfrac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\dfrac{A}{2}$. 6ον. $(\tau-\beta)\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\tau\,\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}$

7ον. $\dfrac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}+\dfrac{\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu(B+\Gamma)}=\dfrac{\eta\mu A-\Gamma}{\eta\mu(A+\Gamma)}$

3ον. 'Εφαρμογαὶ τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριγώνων εἰς τὴν Τοπογραφίαν κ.λ.π.

158. Κατασκευὴ μιᾶς σήραγγος. Ὅταν θέλουν νὰ κατασκευάσουν μίαν σήραγγα, ἀρχίζουν τὴν ἐργασίαν ταυτοχρόνως καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ διέλθῃ ἡ σήραγξ διὰ μέσου τοῦ ὄρους. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὁρίσουν τὴν διεύθυνσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διάτρησις. 'Επειδὴ ἡ διεύθυνσις ΑΒ (σχ. 89) τῆς σήραγγος δὲν εἶναι ὁρατή, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : 'Εκλέγομεν ἕνα σημεῖον Γ ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνωνται τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ διέλθῃ ἡ σήραγξ. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν γωνίαν ΑΓΒ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ=β καὶ ΒΓ=α. Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς τὰς α καὶ β καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Γ· ἄρα δυνάμεθα (§ 154) νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β καὶ νὰ ὁρίσωμεν οὕτω τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ.

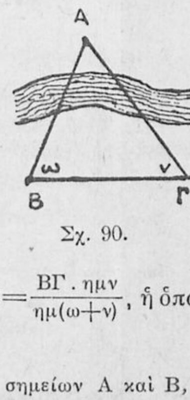


Σχ. 89.

Ἀσκήσεις. 594. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι θὰ μᾶς δώσουν τὴν διεύθυνσιν μιᾶς ὁδοῦ, διὰ μέσου ἑνὸς δάσους, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα της Α καὶ Β (σχ. 89), ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΑΓ=1684 μ., ΓΒ=1840 μ. καὶ Γ=76° 40′.

159. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ἑνὸς προσιτοῦ σημείου Β ἀπὸ ἀπροσίτου, ἀλλ᾽ ὁρατοῦ σημείου Α.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα χωρίζονται ἀπὸ ἕνα ποταμὸν (σχ. 90). Ἐπὶ τῆς ὄχθης, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ προσιτὸν σημεῖον Β, ἐκλέγομεν ἕνα δεύτερον προσιτὸν σημεῖον Γ καὶ μετροῦμεν, μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, τὴν ἀπόστασιν ΒΓ, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***βάσις*** καὶ μὲ ἕνα γωνιομετρικὸν ὄργανον τὰς γωνίας ΑΒΓ=ω καὶ ΒΓΑ=ν. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν



Σχ. 90.

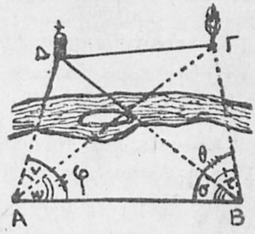
$$\frac{AB}{\eta\mu\nu}=\frac{B\Gamma}{\eta\mu A} \quad \text{ἤ} \quad \frac{AB}{\eta\mu\nu}=\frac{B\Gamma}{\eta\mu(\omega+\nu)}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν $AB=\frac{B\Gamma\,.\,\eta\mu\nu}{\eta\mu(\omega+\nu)}$, ἡ ὁποία δίδει τὴν ἀπόστασιν ΑΒ.

Ἄσκησις. 595. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶναι ἀπρόσιτον (σχ. 90) ἂν γνωρίζωμεν ὅτι:

$$B\Gamma=75 \text{ μέτρα}, \quad \widehat{\omega}=68^{\circ}\,40', \quad \widehat{\nu}=74^{\circ}\,20'.$$

160. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων σημείων.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο ἀπροσίτων σημείων Γ καὶ Δ (σχ. 91), τὰ ὁποῖα χωρίζονται ἀπὸ τὸν παρατηρητὴν μὲ ἕνα ποταμόν. Ἐπὶ τῆς ὄχθης ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ὁ παρατηρητὴς ἐκλέγομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκ τῶν ὁποίων νὰ φαίνωνται τὰ ἀπρόσιτα σημεῖα Γ καὶ Δ. Μετροῦμεν ἔπειτα, μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, τὴν ἀπόστασιν ΑΒ καὶ μὲ ἕνα γωνιομετρικὸν ὄργανον τὰς γωνίας ΔΑΒ=φ, ΓΑΒ=ω, ΓΒΑ=θ, ΔΒΑ=σ καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΓ=ν, ἡ ὁποία δὲν εἶναι, γενικῶς, ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ, διότι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ δὲν κεῖνται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 91.

'Επιλύομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον ΔΑΒ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ημσ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ημ}(\sigma+\varphi)} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΔ} = \frac{\text{ΑΒ ημσ}}{\text{ημ}(\sigma+\varphi)}$$

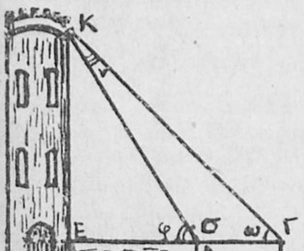
'Επιλύομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ημ}\vartheta} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ημ}(\omega+\vartheta)} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΓ} = \frac{\text{ΑΒ ημ}\vartheta}{\text{ημ}(\omega+\vartheta)}$$

Ἔπειτα ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς ΑΔ καὶ ΑΓ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ν καὶ οὕτω ὑπολογίζομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ΓΔ.

Ἄσκησις. 596. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων σημείων Γ καὶ Δ (σχ. 91), ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι: ΑΒ=184,5 μ., $\widehat{\varphi}=70^0\,30'$, $\widehat{\nu}=39^0\,50'$, $\widehat{\omega}=28^0\,30'$, $\widehat{\sigma}=25^0\,40'$, $\widehat{\vartheta}=65^0\,10'$.

161. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἀπρόσιτος.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ΑΚ (σχ. 92) ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις Α εἶναι ἀπρόσιτος. 'Επὶ τοῦ ἐδάφους μετροῦμεν ἕνα ὁριζόντιον εὐθύγραμμον τμῆμα Α'Β, τοῦ ὁποίου ἡ προέκτασις νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν πόδα Α τοῦ πύργου.



Σχ. 92.

Ἔπειτα μετροῦμεν μὲ ἕνα γωνιομετρικὸν ὄργανον τὰς γωνίας φ καὶ ω, ὁπότε θὰ εἶναι γνωσταὶ καὶ αἱ γωνίαι σ καὶ ν.

'Απὸ τὸ τρίγωνον ΚΔΓ λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ΚΔ}}{\text{ημω}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ημν}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΚΔ}}{\text{ημω}} = \frac{\text{Α'Β}}{\text{ημν}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΚΔ} = \text{Α'Β} \cdot \frac{\text{ημω}}{\text{ημν}}$$

Ἔπειτα ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΕΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΚΔ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν φ, ἔχομεν

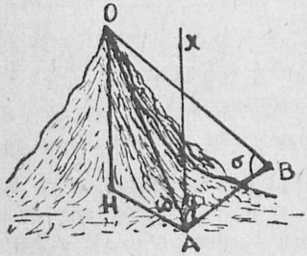
KE=KΔ ημφ. 'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὸ KΔ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$KE = A'B \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\nu} . \eta\mu\varphi.$$

Ἡ τελευταία σχέσις δίδει τὸ ὕψος KE. Τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ KE τὸ ὕψος EA τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου.

Ἄσκησις. 597. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἀπρόσιτος, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ἀναγκαῖαι μετρήσεις (σχ. 92) ἔδωσαν: A'B=38 μ., $\widehat{\omega}=30^0\,40'$, $\widehat{\varphi}=42^0\,20'$ καὶ ὕψος γωνιομετρικοῦ ὀργάνου 1,20 μ.

162. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς ὄρους.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος OH (σχ. 93) ἑνὸς ὄρους, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ O κεῖται ἄνωθεν ἑνὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ ἕνα γνωστὸν σημεῖον A. Μετροῦμεν, μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, μίαν βάσιν AB. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν διαδοχικῶς τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας φ καὶ σ, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ βάσις AB μὲ τὰς AO καὶ BO. Τέλος μετροῦμεν τὴν γωνίαν ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ AO μὲ τὴν ὁριζόντιον εὐθεῖαν AH, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν AO. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον OAB λαμβάνομεν



Σχ. 93.

$$\frac{OA}{\eta\mu\sigma} = \frac{AB}{\eta\mu(\varphi+\sigma)} \quad \text{ἢ} \quad OA = AB \cdot \frac{\eta\mu\sigma}{\eta\mu(\varphi+\sigma)}$$

Ἔπειτα ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OHA λαμβάνομεν

$$OH = OA\,\eta\mu\omega.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὸ OA μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

$$OH = AB \cdot \frac{\eta\mu\sigma\,\eta\mu\omega}{\eta\mu(\varphi+\sigma)}.$$

Τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ ὄρους θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ ὕψος OH τὸ ὕψος τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου.

Ἀσκήσεις. 598. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς ὄρους (σχ. 93), ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι: AB=135 μ., $\widehat{\omega}=23^0\,40'$, $\widehat{\sigma}=48^0\,20'$, $\varphi=36^0\,10'$.

599. Δύο σημεῖα A καὶ B εἶναι ἀπρόσιτα, ἀλλὰ ὁρατὰ ἐξ ἑνὸς σημείου

Γ. Ἄλλο σημεῖον Δ προσιτὸν κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΔΓ=30 μ., $\widehat{ΒΓΑ}=ω=36^0$, $\widehat{ΔΓΒ}=ν=87^0\,10'$, $\widehat{ΑΔΓ}=φ=62^0\,20'$.

600. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς 100 μέτρ. φαίνονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ὑπὸ γωνίαν 120^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΔ.

601. Ἕνας παρατηρητής, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐπὶ ἀεροστάτου βλέπει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἕνα στόχον πρὸς Νότον ὑπὸ γωνίαν 35^0· ὅταν ὅμως τὸ ἀερόστατον ἐκινήθη πρὸς ἀνατολὰς κατὰ 4 χλμ. εἶδεν ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸν αὐτὸν στόχον ὑπὸ γωνίαν 20^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου.

602. Δύο παρατηρηταὶ Α καὶ Β βλέπουν ἀερόστατον Γ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὕψους ω. Ὁ Α βλέπει τὴν ἀπόστασιν ΒΓ τοῦ ἀεροστάτου Γ ἀπὸ τὸν ἄλλον παρατηρητὴν Β, ὑπὸ γωνίαν φ. Ἐὰν ΑΒ=δ, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν παρατηρητῶν Α καὶ Β.

603. Ἕνας παρατηρητὴς εὑρισκόμενος ἐπὶ μιᾶς ὄχθης ἑνὸς ποταμοῦ βλέπει ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ὄχθης ἕνα δένδρον ὑπὸ γωνίαν ὕψους 60^0 καὶ ὅταν απομακρυνθῇ κατὰ 40 μέτρα, βλέπει τὸ αὐτὸ δένδρον ὑπὸ γωνίαν ὕψους 30^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου καὶ τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ.

604. Ἕνας παρατηρητής, ὁ ὁποῖος ἵσταται εἰς ἕνα σημεῖον Β βλέπει τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ὄρους ὑπὸ γωνίαν ὕψους 60^0 ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ. Προχωρεῖ ἔπειτα πρὸς τὸ ὄρος ἀκολουθῶν ἀπὸ τὸ σημεῖον Β ἕνα δρόμον, ὁ ὁποῖος σχηματίζει γωνίαν 30^0 ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ὅταν φθάσῃ εἰς ἕνα σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1000 μετρ. ἀπὸ τὸ Β, παρατηρεῖ ὅτι ἡ γωνία ΒΓΑ εἶναι 135^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὄρους.

605. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ὕψος υ ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου δι' ἑνὸς σημείου Α ἑνὸς πύργου, βλέπομεν τὴν κορυφὴν Κ τοῦ πύργου ὑπὸ γωνίαν ω ἄνωθεν τοῦ ὁρίζοντος καὶ τὸν πόδα Π τοῦ πύργου ὑπὸ γωνίαν φ κάτωθεν τοῦ ὁρίζοντος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

606. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν ὕψους φ ἑνὸς νέφους, τὴν γωνίαν βάθους ω τοῦ εἰδώλου του, ἐντὸς μιᾶς λίμνης καὶ τὸ ὕψος υ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ ὑπεράνω τῆς λίμνης, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ νέφους ὑπεράνω τῆς λίμνης.

607. Μία στήλη κατακόρυφος ἔχει τὸν πόδα της ἐπὶ τῆς ὄχθης μιᾶς λίμνης. Ἕνας παρατηρητής, τοῦ ὁποίου ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν δ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς στήλης, βλέπει τὴν στήλην ὑπὸ γωνίαν ω καὶ τὸ εἴδωλόν της ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὑπὸ γωνίαν φ. Ἐπίσης βλέπει ἕνα ἄστρον νὰ ἀντανακλᾶται ἀκριβῶς εἰς τὸν πόδα τῆς στήλης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς στήλης καὶ ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τοῦ ἄστρου καὶ τοῦ ὁρίζοντος.

608. Ἐπὶ τῆς ὄχθης ἑνὸς ποταμοῦ ἔχει στηθῇ μία κατακόρυφος στήλη ΑΒ καὶ ἄνωθεν αὐτῆς ἕνα ἄγαλμα ΒΓ. Ἕνας παρατηρητής, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην βλέπει ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ἄγαλμα καὶ ἕνα στρατιώτην, ὁ ὁποῖος ἵσταται πλησίον τοῦ ποδὸς τῆς στήλης. Ἂν γνωρίζωμεν τὰ ὕψη τῆς στήλης, τοῦ ἀγάλματος καὶ τὸ ἀνάστημα τοῦ στρατιώτου, νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ. Ὑποθέτομεν, ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ὁ ποὺς τῆς στήλης εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

609. Δύο πύργοι ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των ΑΒ=α μέτρα εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα ἑνὸς ὁριζοντίου δρόμου. Ὁ πύργος ΑΑ΄ φαίνεται ἀπὸ τὸν πόδα Β τοῦ ἄλλου πύργου ὑπὸ γωνίαν ΑΒΑ΄=ω, ὁ δὲ πύργος ΒΒ΄ φαίνεται ἀπὸ τὸν πόδα Α τοῦ ἄλλου πύργου ὑπὸ γωνίαν ΒΑΒ΄=2ω. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ἀποστάσεως ΑΒ οἱ δύο πύργοι φαίνονται ὑπὸ γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὕψη τῶν δύο πύργων.

610. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς βάσεως ΑΒ=2α, τὸ ὕψος ἑνὸς ὄρους φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω, ἀπὸ δὲ τὸ μέσον της Γ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν φ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὕψος x τοῦ ὄρους δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x = α\ ημφ\ ημω \sqrt{στεμ(φ+ω)\ στεμ(φ-ω)}\ .$$

611. Ἕνας παρατηρητὴς ἵσταται μεταξὺ δύο δένδρων καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει αὐτά· βλέπει δὲ τὸ μὲν ἕνα δένδρον ὑπὸ γωνίαν 40^0, τὸ δὲ ἄλλο ὑπὸ γωνίαν 65^0. Ἐὰν πλησιάσῃ τὸ πρῶτον δένδρον κατὰ 100 μέτρα βλέπει καὶ τὰ δύο δένδρα ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν 45^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο δένδρων καὶ τὸ ὕψος κάθε δένδρου.

612. Ἕνας πύργος ΠΣ κλίνει πρὸς βορρᾶν. Ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται πρὸς νότον τοῦ πύργου καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸν πόδα Π τοῦ πύργου, ἡ κορυφὴ Σ τοῦ πύργου φαίνεται ὑπὸ τὰς γωνίας ὕψους φ καὶ ω. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΠΑ=α, καὶ ΠΒ=β, (β>α) νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου καὶ ἡ κλίσις του.

613. Δύο πύργοι ΑΒ καὶ ΓΔ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄνισα ὕψη (ΑΒ>ΓΔ) εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς πεδιάδος. Ἕνας παρατηρητής, ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖ μίαν ὁριζοντίαν ὁδόν, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας Α καὶ Γ τῶν πύργων σταματᾷ εἰς ἕνα σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ καὶ μετρεῖ τὰς γωνίας ω καὶ φ ὕψους τῶν πύργων ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔπειτα πλησιάζει πρὸς τὸν μικρὸν πύργον καὶ σταματᾷ εἰς ἕνα σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει γ χιλιόμετρα ἀπὸ τὸ Ε, τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ μικρότερος πύργος σκεπάζει τὸν μεγαλύτερον πύργον καὶ μετρεῖ τὴν γωνίαν θ ὕψους τῶν δύο πύργων. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν δύο πύργων.

614. Ἕνα ἀερόστατον φαίνεται ταυτοχρόνως ἀπὸ τρεῖς σταθμοὺς Α, Β, Γ ὑπὸ γωνίας 45^0, 45^0 καὶ 60^0 ἀντιστοίχως· ὁ σταθμὸς Β εὑρίσκεται πρὸς βορρᾶν τοῦ Γ καὶ ὁ Α πρὸς δυσμὰς τοῦ Γ καὶ εἶναι ΑΒ=5 χμ., ΒΓ=4 χμ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΞ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1. Ὑπολογισμὸς τῶν δευτερευόντων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἐμάθαμεν νὰ ὑπολογίζωμεν, συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, τὰ ὕψη του, τὰς διαμέσους του, τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του, τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κύκλων κλπ. Εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ θὰ ὑπολογίσωμεν τὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, συναρτήσει τῶν γωνιῶν του καὶ μιᾶς πλευρᾶς του, ἔστω τῆς α.

163. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=2R$ λαμβάνομεν

$$\boxed{\mathbf{R=\frac{\alpha}{2\,\eta\mu A}=\frac{\beta}{2\,\eta\mu B}=\frac{\gamma}{2\,\eta\mu \Gamma}}},$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι $\boxed{\mathbf{R=\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}}}$

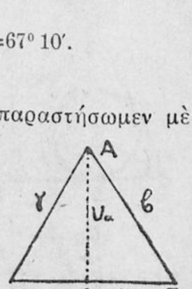
Ἀσκήσεις. 615. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν πλευρὰν $\alpha=4{,}45$ μετρ. καὶ τὴν γωνίαν $A=67^\circ\,10'$.

2ον. Τὰς πλευρὰς $\alpha=12$ μ., $\beta=15$ μ. καὶ $\gamma=17$ μ.

164. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν. *1ον.* Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ_α, υ_β, υ_γ τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ,

$$\upsilon_\alpha = AB\,\eta\mu B \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\boldsymbol{\upsilon_\alpha=\gamma\,\eta\mu B}} \qquad (1)$$



Σχ. 94.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon_\beta=\alpha\,\eta\mu\Gamma}}, \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\boldsymbol{\upsilon_\gamma=\alpha\,\eta\mu B}}$$

2ον. 'Από τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ λαμβάνομεν

$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $\boxed{\upsilon_\alpha=\frac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\upsilon_\beta=\frac{\beta\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}{\eta\mu B}},\quad \boxed{\upsilon_\gamma=\frac{\gamma\,\eta\mu A\,\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}}$$

3ον. 'Από τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι τὰ ὕψη υ_α, υ_β, υ_γ, ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζονται καὶ ὑπὸ τῶν τύπων

$$\boxed{\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}\ \kappa.\lambda.\pi.,\qquad \boxed{\upsilon_\alpha=\frac{\beta\gamma}{2R}}$$

$$\boxed{\alpha\upsilon_\alpha=\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma=2E}$$

'Ασκήσεις. 616. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι:

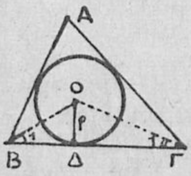
1ον. $\alpha=14$ μέτρα, $\beta=16$ μέτρα, $\gamma=18$ μέτρα.
2ον. $\alpha=25$ μέτρα, $A=35^0\,48'$, $B=75^0\,14'$.
3ον. $R=4$ μέτρα, $A=40^0$, $B=65^0\,30'$.

617. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$\upsilon_\alpha=2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$, $\upsilon_\beta=2R\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma$, $\upsilon_\gamma=2R\,\eta\mu A\,\eta\mu B$.

618. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$\upsilon_\alpha=\frac{2\tau\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$$

165. 'Ακτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. ***1ον.*** Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 95) ἕνα τρίγωνον καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Φέρομεν τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ· ἐπίσης φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΔ = ρ, εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. 'Από τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΔΒ καὶ ΟΔΓ ἔχομεν



Σχ. 95.

$$B\Delta=O\Delta\,\sigma\varphi B_1 \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Gamma=O\Delta\,\sigma\varphi\Gamma_1 \qquad (1)$$

'Επειδὴ $O\Delta=\varrho$, $B_1=\frac{B}{2}$ καὶ $\Gamma_1=\frac{\Gamma}{2}$, αἱ ἰσότητες (1) γράφονται

$$B\Delta=\varrho\,\sigma\varphi\frac{B}{2},\quad \Delta\Gamma=\varrho\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} \qquad (1')$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$B\Delta+\Delta\Gamma=\varrho\,\sigma\varphi\frac{B}{2}+\varrho\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\varrho\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right) \quad (2)$$

'Επειδὴ $\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$

ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\alpha=\varrho\,.\,\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\varrho=\alpha\,.\,\frac{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}}$$

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\varrho=\beta\,.\,\frac{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}}\,, \quad \boxed{\varrho=\gamma\,.\,\frac{\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}}$$

2ον. 'Απὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι:

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad \text{καὶ} \quad E=\varrho\tau.$$

'Απὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν $\varrho\tau=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\varrho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\varrho=\frac{E}{\tau}}$$

3ον. 'Επίσης ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι $B\Delta=\tau-\beta$, ὁπότε ἡ πρώτη τῶν ἰσοτήτων (1′) γίνεται

$$\tau-\beta=\varrho\,\sigma\varphi\frac{B}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\tau-\beta}{\varrho}=\sigma\varphi\frac{B}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varrho}{\tau-\beta}=\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\varrho=(\tau-\beta)\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}$$

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\varrho=(\tau-\alpha)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}}\,, \quad \boxed{\varrho=(\tau-\gamma)\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

'Ασκήσεις. 619. 'Ενὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ γωνίαι $A=38^{\circ}$, $B=74^{\circ}$ καὶ ἡ πλευρὰ $\alpha=6$ μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ρ.

620. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\varrho}{\tau}=\frac{E}{\tau^2}$ 2ον. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{4R+\varrho}{\tau}$

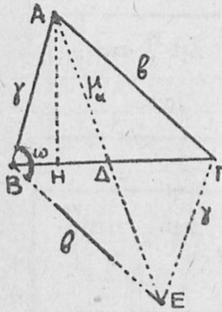
Γ-68

3ον. $\sigma\varphi\frac{A}{2}\,\sigma\varphi\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{E}{\varrho^2}.$

621. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\tau}{\varrho}=\frac{\tau^2}{E}=\frac{E}{\varrho^2}.$$

166. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων. ***1ον.*** Ἔστωσαν μ_α, μ_β, μ_γ αἱ διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ.



Σχ. 96.

Καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν θὰ εἶναι

$$\left.\begin{aligned}4\,\mu_\alpha^2&=2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2\\4\,\mu_\beta^2&=2\gamma^2+2\alpha^2-\beta^2\\4\,\mu_\gamma^2&=2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

λαμβάνομεν $\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς σχέσεις (1) τὰς πλευρὰς β καὶ γ μὲ τὰ ἴσα των ἔχομεν

$$\boxed{\begin{aligned}4\,\mu_\alpha^2&=\alpha^2\,.\,\frac{2\,\eta\mu^2B+2\,\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2A}{\eta\mu^2A}\\4\,\mu_\beta^2&=\alpha^2\,.\,\frac{2\,\eta\mu^2\Gamma+2\,\eta\mu^2A-\eta\mu^2B}{\eta\mu^2A}\\4\,\mu_\gamma^2&=\alpha^2\,.\,\frac{2\,\eta\mu^2A+2\,\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma}{\eta\mu^2A}\end{aligned}}$$

2ον. Ἡ διάμεσος ἑνὸς τριγώνου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ συναρτήσει δύο πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Πράγματι· προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν μῆκος ΔΕ=ΑΔ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΕΓ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΕ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται· ἄρα θὰ εἶναι ΒΕ=β καὶ ἡ γωνία ω θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἔχομεν

$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2\,AB\,.\,BE\;\sigma\upsilon\nu\omega$$

ἢ $$4\,\mu_\alpha^2=\gamma^2+\beta^2-2\gamma\,\beta\;\sigma\upsilon\nu\omega\qquad(1)$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ A εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu A$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

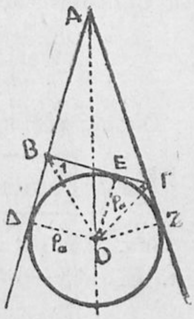
$$\boxed{4\mu_\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 + 2\gamma\beta\,\sigma\upsilon\nu A}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{4\mu_\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu B}, \qquad \boxed{4\mu_\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 + 2\beta\alpha\,\sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

Ἀσκήσεις. 622. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία A ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς $\beta=5$ μέτρα, $\gamma=8$ μέτρα καὶ τὴν διάμεσον $\mu_\alpha = 7$ μέτρα.

167. Ὑπολογισμὸς τῶν ἀκτίνων ρ_α, ρ_β, ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. ***1ον.*** Ἔστω (σχ. 97) ἕνα τρίγωνον καὶ Ο ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν γωνίαν Α καὶ ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, τὰς ὁποίας παριστάνομεν μὲ ρ_α· ἐπίσης φέρομεν καὶ τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 97.

Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΕΓ ἔχομεν

$$BE = OE\,\sigma\varphi B_1, \quad E\Gamma = OE\,\sigma\varphi\Gamma_1 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $OE = \rho_\alpha$, $\sigma\varphi B_1 = \sigma\varphi\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = \varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ καὶ

$$\sigma\varphi\Gamma_1 = \sigma\varphi\left(90^0 - \frac{\Gamma}{2}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

αἱ ἰσότητες (1) γράφονται

$$BE = \rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}, \quad E\Gamma = \rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \qquad (1')$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1′) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$BE + E\Gamma = \rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \rho_\alpha\left(\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha = \rho_\alpha \cdot \frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} = \rho_\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\boxed{\rho_\alpha = \alpha \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\rho_\beta = \beta \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}} \qquad \boxed{\rho_\gamma = \gamma \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}}$$

2ον. Φέρομεν τὴν ΑΟ, ἡ ὁποία εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΟ ἔχομεν

$$\text{ΟΔ}=\text{ΑΔ}\;\varepsilon\varphi A_1 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\rho_\alpha = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\rho_\beta = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}\,, \qquad \boxed{\rho_\gamma = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

3ον. Ἐὰν εἰς τὰς ἰσότητας (1′) ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΒΕ μὲ τ—γ καὶ τὸ ΕΓ μὲ τ—β λαμβάνομεν

$$\tau-\gamma=\rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} \quad \text{καὶ} \quad \tau-\beta=\rho_\alpha\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς εὑρίσκομεν

$$\boxed{\rho_\alpha = (\tau-\gamma)\,\sigma\varphi\frac{B}{2} = (\tau-\beta)\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\rho_\beta = (\tau-\gamma)\,\sigma\varphi\frac{A}{2} = (\tau-\alpha)\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

$$\boxed{\rho_\gamma = (\tau-\alpha)\,\sigma\varphi\frac{B}{2} = (\tau-\beta)\,\sigma\varphi\frac{A}{2}}$$

4ον. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν $\rho_\alpha = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ μὲ τὸ ἴσον της $\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ λαμβάνομεν

$$\varrho_\alpha = \tau \cdot \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)^2}} = \frac{E}{\tau-\alpha}$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\boxed{\varrho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}}, \quad \boxed{\varrho_\beta = \frac{E}{\tau-\beta}}, \quad \boxed{\varrho_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma}}$$

'Ασκήσεις. 623. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ $\alpha=8$ μ., $\beta=10$ μ., $\gamma=15$ μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ.

624. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις :

1ον. $\varrho\,\varrho_\gamma = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)$, 2ον. $\varrho_\alpha\,\varrho_\beta = \tau(\tau-\gamma)$, 3ον. $\varrho_\gamma\,\varrho_\beta + \varrho\,\varrho_\alpha = \beta\gamma$.

4ον. $E=\varrho\,\varrho_\alpha\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$. 5ον. $E=\varrho_\beta\,\varrho_\gamma\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$

625. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις :

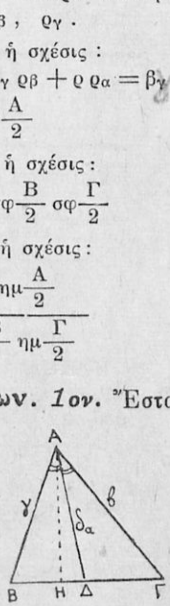
1ον. $\alpha=\varrho_\alpha\left(\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$ 2ον. $\varrho_\alpha = \varrho\,\sigma\varphi\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$

626. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις :

1ον. $\varrho = \dfrac{\upsilon_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2}}{2\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$, 2ον. $\varrho_\alpha = \dfrac{\upsilon_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2}}{2\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$

168. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.

1ον. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ $A\Delta=\delta_\alpha$ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ· ἤτοι



Σχ. 98.

ἐμβ. τρ. ΑΒΓ=ἐμβ. τρ. ΑΒΔ+ἐμβ. τρ. ΑΔΓ

ἢ $\frac{1}{2}\gamma\beta\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\delta_\alpha\,\beta\,\eta\mu\frac{A}{2}$

ἢ $\beta\gamma\,\eta\mu A = \delta_\alpha(\beta+\gamma)\,\eta\mu\frac{A}{2}$

ἢ $\beta\gamma 2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \delta_\alpha(\beta+\gamma)\,\eta\mu\frac{A}{2}$ ἢ $\boxed{\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$ (1)

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\delta_\beta = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}, \quad \boxed{\delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

2ον. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) ἀντικαταστήσωμεν τὰ β καὶ γ μὲ τὰ ἴσα των $\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}$ καὶ $\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, θὰ ἔχωμεν

$$\delta_\alpha = \frac{2\,.\,\dfrac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}\,.\,\dfrac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}}{\dfrac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A}+\dfrac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}}\,.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{\dfrac{2\,\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}\,.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

ἢ $$\delta_\alpha = \frac{\dfrac{2\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\,.\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}}{2\,\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}$$ ἢ $$\boxed{\delta_\alpha = \frac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\delta_\beta = \frac{\beta\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}{\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma-A}{2}} = \frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma-A}{2}}}\,, \quad \boxed{\delta_\gamma = \frac{\alpha\,\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-A}{2}}}$$

Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι

$$\boxed{\delta_\alpha = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}}\,, \quad \boxed{\delta_\beta = \frac{2}{\gamma+\alpha}\sqrt{\gamma\alpha\tau(\tau-\beta)}}$$

$$\boxed{\delta_\gamma = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}}$$

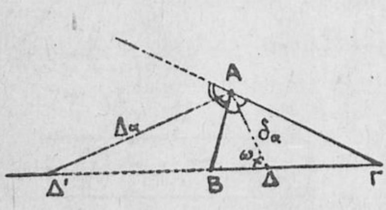
Ἀσκήσεις. 627. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διχοτόμος δ_α τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\beta=19$ μέτρα, $\gamma=23$ μέτρα καὶ $A=40^0\,35'$.

628. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$E=\frac{1}{2}\,\delta_\alpha\,(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2}$$

169. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων. *1ον.*

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον (Σχ. 99) καὶ $A\Delta'=\Delta_\alpha$ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α. Ἔστω ἐπίσης $A\Delta=\delta_\alpha$ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.



Σχ. 99.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Δ'ΑΔ ἔχομεν

$$A\Delta'=A\Delta\,.\,\varepsilon\varphi\omega \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία ω, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εἶναι

$$\omega=\frac{A}{2}+\Gamma=\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)+\Gamma=90^0-\frac{B-\Gamma}{2}$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\omega=90^0-\dfrac{B-\Gamma}{2}$ καὶ $\dfrac{B-\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικαὶ γωνίαι, θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\omega=\sigma\varphi\dfrac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$A\Delta' = A\Delta \cdot \sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2} \quad \text{ἢ} \quad \Delta_\alpha = \delta_\alpha\, \sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2} \qquad (2)$$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον δ_α μὲ τὸ ἴσον της $\dfrac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 168 καὶ

ἔχομεν $\Delta_\alpha = \dfrac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}} \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}$ ἢ $\boxed{\Delta_\alpha = \dfrac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}}$

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\Delta_\beta = \frac{\beta\,\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A}{\eta\mu B\,\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}} = \frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\Delta_\gamma = \frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu\frac{A-B}{2}}}$$

2ον. 'Απὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι

$$\boxed{\Delta_\alpha = \frac{2}{|\beta-\gamma|}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

'Ασκήσεις. 629. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \frac{\varrho}{4R}$, 2ον. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + \frac{\varrho}{R}$

3ον. $\alpha\,\sigma\varphi A + \beta\,\sigma\varphi B + \gamma\,\sigma\varphi\Gamma = 2(R+\varrho)$.

630. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\varrho_\alpha = 4\,R\,\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, 2ον. $\varrho_\alpha + \varrho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$

631. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\alpha\,\sigma\upsilon\nu A + \beta\,\sigma\upsilon\nu B + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{2\,\tau\varrho}{R} = \frac{2\,E}{R}$ (Πολυτεχνεῖον)

2ον. $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu A + \beta\,\sigma\upsilon\nu B + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \dfrac{R}{\varrho}$

632. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $(\beta-\gamma)\sigma\varphi\frac{A}{2} + (\gamma-\alpha)\sigma\varphi\frac{B}{2} + (\alpha-\beta)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 0$

2ον. $(\beta^2-\gamma^2)\,\sigma\varphi A + (\gamma^2-\alpha^2)\,\sigma\varphi B + (\alpha^2-\beta^2)\,\sigma\varphi\Gamma = 0$

633. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἡ σχέσις:

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) + \beta\,\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A) + \gamma\,\sigma\upsilon\nu(A-B) = \frac{4\,E}{R}$$

2. 'Επίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων ἐκ δευτερευόντων στοιχείων

170. Μέθοδος ἐπιλύσεως τριγώνων ἐκ τῶν δευτερευόντων στοιχείων του. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὰ δεδομένα περιλαμβάνουν ἕνα ἢ περισσότερα δευτερεύοντα στοιχεῖα, προσπαθοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὰ δευτερεύοντα αὐτὰ στοιχεῖα συναρτήσει τῶν κυρίων στοιχείων του, εἴτε γνωστὰ εἶναι αὐτά, εἴτε ἄγνωστα. Ἔπειτα λύομεν τὰς ἐξισώσεις ἢ τὰ συστήματα τῶν ἐξισώσεων, ποὺ θὰ προκύψουν, ὡς πρὸς τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα.

Γενικῶς, κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τριγώνων ἐκ τῶν δευτερευόντων στοιχείων του, ἀκολουθοῦμεν μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι μεθόδους:

I. ***Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὰς πλευράς του.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ περιέχῃ καὶ τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμούς, ἐὰν εἰς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ὑπάρχουν καὶ γωνίαι. Ἡ λύσις αὐτὴ λέγεται ***ἀλγεβρικὴ λύσις.***

II. ***Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὰς γωνίας του.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ πρόβλημα εἶναι καθαρῶς ἕνα πρόβλημα τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς ἐπιλύσεως τριγώνων ἐκ τῶν δευτερευόντων στοιχείων του.

171. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.***

Α' Λύσις. Ἐὰν ἐξισώσωμεν τοὺς δύο τύπους $2Ε=βγ$ καὶ $2Ε=αυ_α$, ποὺ δίδουν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ ἔχωμεν
$$βγ=αυ_α \qquad (1)$$
Ἐπειδὴ $β=α\,ημΒ$ καὶ $γ=α\,συνΒ$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται
$$α^2 ημΒ\, συνΒ=αυ_α \quad ἢ \quad α\cdot 2\, ημΒ\, συνΒ=2\, υ_α \quad ἢ \quad ημ2Β=\frac{2υ_α}{α}$$
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν 2Β, ἄρα καὶ τὴν Β. Γνωρίζοντες ἤδη τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν (§ 73) τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοὺς τύπους $β=α\,ημΒ$ καὶ $γ=α\,συνΒ$.

Β' Λύσις. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ἀλγεβρικῶς. Πράγματι ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις
$$βγ=αυ_α \quad καὶ \quad β^2+γ^2=α^2$$
δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

172. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του α καὶ τὸ ἄθροισμα β+γ=λ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.***

Λύσις. Γνωρίζομεν, ὅτι $\beta=\alpha\,\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\,\eta\mu\Gamma$.

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\beta+\gamma=\alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma) \quad \text{ἢ} \quad \beta+\gamma=\alpha\left(2\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\right) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\beta+\gamma=\lambda$ καὶ $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\lambda=\alpha\,.\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}, \quad \text{ἄρα} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{\alpha\sqrt{2}}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα ὑπολογίζεται ἡ διαφορὰ $B-\Gamma$ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ. Γνωρίζοντες καὶ τὸ ἄθροισμά των $B+\Gamma=90^0$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας B καὶ Γ.

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀπὸ τοὺς τύπους $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ καὶ $\gamma=\alpha\,\eta\mu\Gamma$.

Ἀσκήσεις. 634. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας R καὶ ρ.

635. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ δύο τμήματα μ καὶ ν τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν.

636 Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ δύο τμήματα μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν β.

637. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

638. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

639. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διχοτόμον δ_β.

640. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ.

173. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν γωνίαν Β.***

Λύσις. Ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ $\Gamma=90^0-B$.

Γνωρίζομεν, ὅτι $\upsilon_\alpha=\gamma\,\eta\mu B$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\gamma=\frac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu B} \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) δίδει τὴν πλευρὰν γ.

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν γ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν (§ 74) τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν πλευρὰν β ἀπὸ τοὺς τύπους

$$\alpha=\frac{\gamma}{\text{συν}B} \quad \text{καὶ} \quad \beta=\gamma\,\text{εφ}B.$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου συναρτήσει τῶν γνωστῶν υ_α καὶ Β.

Πράγματι· ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\beta=\gamma\,\text{εφ}B$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πλευρὰν γ μὲ τὸ ἴσον της, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἰσότης (1), θὰ ἔχωμεν

$$\beta=\frac{\upsilon_\alpha}{\text{ημ}B}\cdot\text{εφ}B \quad \text{ἢ} \quad \beta=\frac{\upsilon_\alpha}{\text{συν}B}.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha=\frac{\gamma}{\text{συν}B}$, εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{\upsilon_\alpha}{\text{ημ}B\,\text{συν}B}$.

Ἀσκήσεις. 641. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὸ ἐμβαδόν του Ε.

642. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

643. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν περίμετρον του 2τ.

644. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

645. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha-\upsilon_\alpha=\lambda$.

646. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

647. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ρόμβου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων του εἶναι 520 μέτρ. καὶ μία γωνία του $37^\circ\,20'\,10''$.

648. Ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας ἑνὸς ρόμβου, ὁ ὁποῖος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ κύκλον ἀκτῖνος 4 μέτρων, εἶναι $64^\circ\,48'\,36''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου αὐτοῦ.

174. Πρόβλημα 4ον. *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

Λύσις. Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης α· ἄρα θὰ εἶναι $\alpha=2\mu_\alpha$.

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὑπάρχει ἡ σχέσις $\beta+\gamma=\alpha+2\rho$ (1)

'Επειδὴ $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ καὶ $\gamma=\alpha\,\eta\mu\Gamma$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\alpha\,\eta\mu B+\alpha\,\eta\mu\Gamma=\alpha+2\varrho \quad \text{ἢ} \quad \alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=\alpha+2\varrho$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha\,.\,2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\alpha+2\varrho \quad \text{ἢ} \quad \alpha\,.\,2\,\eta\mu 45^0\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\alpha+2\varrho$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha 2\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\alpha+2\varrho \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\alpha+2\varrho}{\alpha\sqrt{2}}$$

'Από τὴν τελευταίαν ἰσότητα ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν $B-\Gamma$ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ. Γνωρίζοντες δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα $B+\Gamma=90^0$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας B καὶ Γ.

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν ὑποτείνουσαν $\alpha=2\mu_\alpha$ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας B καὶ Γ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευράς του β, γ ἀπὸ τοὺς τύπους

$$\beta=\alpha\,\eta\mu B=2\mu_\alpha\,\eta\mu B \quad \text{καὶ} \quad \gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B=2\mu_\alpha\,\sigma\upsilon\nu B$$

175. Πρόβλημα 5ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὸ ὕψος υ_α.***

Λύσις. Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὰς γωνίας.

'Από τὴν σχέσιν (§ 164) $\upsilon_\alpha=\dfrac{\alpha\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ λαμβάνομεν

$$\alpha=\frac{\upsilon_\alpha\,\eta\mu A}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma} \qquad (1)$$

'Επίσης ἀπὸ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ (σχ. 94) λαμβάνομεν $\upsilon_\alpha=\beta\,\eta\mu\Gamma$ καὶ $\upsilon_\alpha=\gamma\,\eta\mu B$

'Από τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\beta=\frac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu\Gamma} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma=\frac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu B} \quad (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\upsilon_\alpha\,\eta\mu A}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}+\frac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu B}+\frac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu\Gamma}$$

$$\text{ἢ} \quad 2\tau=\frac{\upsilon_\alpha\,\eta\mu A+\upsilon_\alpha\,\eta\mu\Gamma+\upsilon_\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad 2\tau=\frac{\upsilon_\alpha\,(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}=\frac{2\tau}{\upsilon_\alpha} \qquad (4)$$

'Επειδὴ (§ 122. 3ον) $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}$

καὶ $\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma=2\,\eta\mu\dfrac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\,.\,2\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}$, ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$\frac{4\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{4\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{2\tau}{\upsilon_\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\tau}{\upsilon_\alpha}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα λαμβάνομεν

$$2\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\tau}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \qquad (5)$$

ἢ (§ 121) $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\tau}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$

ἢ $$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\tau}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2} \qquad (6)$$

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἰσότης (6) γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha\sqrt{2}}{2\tau}+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\upsilon_\alpha+\tau}{\tau}$$

Ἐὰν ω εἶναι μία γωνία θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90^0, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον νὰ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\upsilon_\alpha+\tau}{\tau}$, τότε θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{ἢ} \quad \frac{B-\Gamma}{2}=\omega \quad \text{ἢ} \quad B-\Gamma=2\omega.$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν διαφορὰν $B-\Gamma$ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ καὶ τὸ ἄθροισμα $B+\Gamma=90^0$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας B καὶ Γ. Πράγματι· λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $B-\Gamma=2\omega$ καὶ $B+\Gamma=90^0$, εὑρίσκομεν $B=\omega+45$ καὶ $\Gamma=45^0-\omega$.

Τέλος αἱ πλευραὶ α, β, γ ὑπολογίζονται ἀπὸ τοὺς τύπους (1),(2),(3).

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* 649. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τ.

650. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διάμεσον μ_α.

651. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ καὶ τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma}=\lambda$.

652. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

653. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαφορὰς $\beta-\gamma=\lambda$ καὶ $\alpha-\upsilon_\alpha=\mu$.

654. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν β καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha-\gamma=\lambda$.

655. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ ἀθροίσματα $\alpha+\beta=\lambda$ καὶ $\alpha+\gamma=\mu$.

656. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ὕψος υ_α.

Β' 'Ομάς. **657.** Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ_α.

658. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν περίμετρον 2τ.

659. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_β καὶ τὴν διάμεσον μ_β.

660. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ R.

Γ' 'Ομάς. **661.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διάμεσοι μ_β καὶ μ_γ.

662. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ παριστάνομεν μὲ ω τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διάμεσος τῆς γωνίας Β μὲ τὴν ὑποτείνουσαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi^2 B+2}$$

663. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία Β ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\frac{1}{AB}+\frac{2}{A\Gamma}=\frac{\sqrt{5}}{A\Delta}$, ὅπου ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

664. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $AB'=\mu$ καὶ $A\Gamma'=\nu$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β καὶ ἡ ὑποτείνουσα α.

665. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὸν λόγον λ τοῦ γινομένου τῶν διχοτόμων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β.

666. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις $B\Gamma=\alpha$ καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α· νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐφαρμογή: $\alpha=2{,}4$ μέτρα, $\widehat{A}=40^\circ 20'$.

667. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις $B\Gamma=\alpha$ καὶ ἡ διχοτόμος δ_β μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως· νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῆς βάσεως.

668. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ὀρθοκέντρου του καὶ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

669. Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$AB\,.\,\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}=\Gamma\Delta.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Delta}{2}.$$

3. Ἐπίλυσις τυχόντων τριγώνων ἐκ δευτερευόντων στοιχείων.

176. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του Ε καὶ τὰς γωνίας του Α, Β, Γ.*

Λύσις. Γνωρίζομεν § 151, ὅτι $\quad Ε=\frac{1}{2}αβ\,ημΓ \qquad (1)$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν σχέσιν $\quad \frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}$

λαμβάνομεν $\quad β=\frac{α\,ημΒ}{ημΑ}.$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ β θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$Ε=\frac{1}{2}α\cdot\frac{α\,ημΒ}{ημΑ}ημΓ \quad ἢ \quad 2Ε\,ημΑ=α^2ημΒ\,ημΓ$$

$$ἢ \quad α^2=\frac{2Ε\,ημΑ}{ημΒ\,ημΓ}, \quad ἄρα \quad α=\sqrt{\frac{2Ε\,ημΑ}{ημΒ\,ημΓ}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\quad β=\sqrt{\frac{2Ε\,ημΒ}{ημΑ\,ημΓ}}, \qquad γ=\sqrt{\frac{2Ε\,ημΓ}{ημΑ\,ημΒ}}$

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω τύπους ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς α, β, γ.

177. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ.*

1η Λύσις. Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εἶναι $Β+Γ<180^0$.

Ἡ γωνία Α ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα $Α=180^0-(Β+Γ)$.

Τὰς πλευρὰς α, β, γ θὰ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν

$\frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}$. Πράγματι ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ἔχομεν

$$\frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}=\frac{α+β+γ}{ημΑ+ημΒ+ημΓ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $α+β+γ=2τ$ καὶ $ημΑ+ημΒ+ημΓ=4\,συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}$ (§ 122. 3ον), ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}=\frac{2τ}{4\,συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$α=\frac{2τ\,ημΑ}{4\,συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}=\frac{2τ\,.\,2\,ημ\frac{Α}{2}συν\frac{Α}{2}}{4\,συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}=\frac{τ\,ημ\frac{Α}{2}}{συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\beta = \dfrac{\tau\,\eta\mu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$, $\gamma = \dfrac{\tau\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}$

2α *Λύσις*. Γνωρίζομεν (§ 156), ὅτι

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}, \quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}},$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀνὰ δύο τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\tau-\alpha = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}, \quad \tau-\beta = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}, \quad \tau-\gamma = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}.$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς ὑπολογίζομεν τὰ $\tau-\alpha$, $\tau-\beta$, $\tau-\gamma$ καὶ ἔπειτα τὰ α, β, γ.

Ἀσκήσεις. 670. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του Α, Β, Γ καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

671. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του Α, Β, Γ καὶ τὸ ὕψος του υ_α.

672. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του Α, Β, Γ καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\lambda^2$.

178. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα β+γ=λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.***

Α' Λύσις (τριγωνομετρική). Ἂν ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν Ι κλασσικὴν περίπτωσιν (§ 153).

Ἐν πρώτοις ἔχομεν $\quad B+\Gamma=180^\circ-A \qquad (1)$

Ἐπίσης ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν $\beta+\gamma=\lambda$.

Ἐκφράζομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ συναρτήσει τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τῶν γνωστῶν κυρίων στοιχείων.

Πράγματι· ἀπὸ τὴν σχέσιν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma} = \frac{\lambda}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\eta\mu B+\eta\mu\Gamma = \frac{\lambda}{\alpha}\,.\,\eta\mu A \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὰς γωνίας Β καὶ Γ, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$2\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{\alpha}\,2\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

$$\text{ἢ}\quad 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{2\lambda}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

Ἁπλοποιοῦμεν διὰ $2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}$

Ἐὰν ω εἶναι μία γωνία θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90^0, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον νὰ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\lambda}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}$, θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{ἢ} \quad \frac{B-\Gamma}{2}=\omega \quad \text{ἢ} \quad B-\Gamma=2\omega$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$B+\Gamma=180^0-A \quad \text{καὶ} \quad B-\Gamma=2\omega$$

εὑρίσκομεν $B=90^0+\omega-\frac{A}{2}$ καὶ $\Gamma=90^0-\omega-\frac{A}{2}$.

Γνωρίζοντες ἤδη τὰς γωνίας Α, Β, Γ καὶ τὴν πλευρὰν α, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A},\qquad \gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Β' Λύσις (Ἀλγεβρική). Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{cases} \beta+\gamma=\lambda \\ \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\,\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A. \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha^2=(\beta+\gamma)^2-2\,\beta\gamma-2\,\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2=(\beta+\gamma)^2-2\,\beta\gamma(1+\sigma\upsilon\nu A)$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha^2=\lambda^2-2\,\beta\gamma(1+\sigma\upsilon\nu A) \quad \text{ἢ} \quad \beta\gamma=\frac{\lambda^2-\alpha^2}{2(1+\sigma\upsilon\nu A)}$$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν β καὶ γ καὶ τὸ γινόμενόν των, αἱ β καὶ γ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-\lambda x+\frac{\lambda^2-\alpha^2}{2(1+\sigma\upsilon\nu A)}=0.$$

179. Πρόβλημα 4ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ἄθροισμα β+γ=λ καὶ ὅτι Γ=2Β.***

Λύσις. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=\frac{\lambda}{\eta\mu B+\eta\mu\,2B} \tag{1}$$

Ἐπειδὴ $A+B+\Gamma=180^0$, θὰ εἶναι $A+B+2B=180^0$ ἢ $A=180^0-3B$ ἢ $\eta\mu A=\eta\mu 3B$.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ ημΑ μὲ τὸ ἴσον του ημ3Β καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\, 3B}=\frac{\lambda}{\eta\mu B+\eta\mu\, 2B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{2\,\eta\mu\frac{3B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2}}=\frac{\lambda}{2\,\eta\mu\frac{3B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}$$

῾Απλοποιοῦμεν διὰ $2\,\eta\mu\frac{3B}{2}$, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2}}=\frac{\lambda}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\lambda\,\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2} \qquad (2)$$

'Επειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2}=4\,\sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2}-3\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ (§ 111), ἡ (2) γράφεται

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\lambda\left(4\,\sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2}-3\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\right) \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}=\frac{\alpha+3\lambda}{4\lambda}$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\alpha+3\lambda}{4\lambda}}$$

'Εὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει μία γωνία θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90^0, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον εἶναι ἴσον μὲ $\sqrt{\frac{\alpha+3\lambda}{4\lambda}}$, τότε θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\omega$ ἢ $\frac{B}{2}=\omega$ ἢ $B=2\omega$.

'Επειδὴ $\Gamma=2B$, θὰ εἶναι $\Gamma=4\omega$, ὁπότε ἡ ἰσότης $A=180^0-3B$ γίνεται $A=180^0-6\omega$.

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν α καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευράς του β, γ, ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu B}{\eta\mu A} \quad \text{καὶ} \quad \gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

'Ασκήσεις. 673. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὴν γωνίαν Α.

674. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Β καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

675. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν πλευρὰν β καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\gamma=\lambda$.

676. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

677. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν πλευρὰν α καὶ τὸ γινόμενον $\beta\gamma=\lambda^2$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

678. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma}=\lambda$.

679. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν β, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸν λόγον $\frac{\alpha}{\gamma}=\lambda$.

680. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ ὅτι $\alpha^2=4\beta\gamma$.

180. Πρόβλημα 5ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ἄθροισμα $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \lambda$ τῶν ὑψῶν υ_β καὶ υ_γ.***

Γνωρίζομεν (§ 164), ὅτι

$$\upsilon_\beta = \alpha\,\eta\mu\Gamma, \qquad \upsilon_\gamma = \alpha\,\eta\mu B$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \alpha\,\eta\mu B + \alpha\,\eta\mu\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \lambda = \alpha\,(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma) \qquad (1)$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν (§ 147), ὅτι $2R=\frac{\alpha}{\eta\mu A}$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\alpha=2R\,\eta\mu A$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ α μὲ τὸ ἴσον του $2R\,\eta\mu A$ καὶ ἔχομεν

$$\lambda=2R\,\eta\mu A(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma) \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu B+\eta\mu\Gamma=\frac{\lambda}{2R\,\eta\mu A} \qquad (2)$$

$$\text{ἢ} \quad 2\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{2R\,\eta\mu A} \quad \text{ἢ} \quad 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{2R\,\eta\mu A}$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{4R\,\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} \qquad (3)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει μία γωνία ω θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90^0, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (3), τότε θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\omega \quad \text{ἢ} \quad \frac{B-\Gamma}{2}=\omega \quad \text{ἢ} \quad B-\Gamma=2\omega$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=2\omega$ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τὸ ἄθροισμά των $B+\Gamma=180^0-A$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ.

Πράγματι, λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$B-\Gamma=2\omega, \quad B+\Gamma=180^0-A$$

εὑρίσκομεν $B=90^0+\omega-\frac{A}{2}$, $\quad \Gamma=90^0-\frac{A}{2}-\omega$.

Αἱ πλευραὶ α, β, γ τοῦ τριγώνου ὑπολογίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\alpha=2R\,\eta\mu A, \quad \beta=2R\,\eta\mu B, \quad \gamma=2R\,\eta\mu\Gamma$$

181. Πρόβλημα 6ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν***

γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Λύσις. Γνωρίζομεν (§ 164, 165), ὅτι

$$υ_α = \frac{α\, ημΒ\, ημΓ}{ημΑ} \quad \text{καὶ} \quad ρ=α.\frac{ημ\frac{Β}{2}\, ημ\frac{Γ}{2}}{συν\frac{Α}{2}}$$

Ἂν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς πρὸς α καὶ ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη των θὰ ἔχωμεν

$$\frac{υ_α\, ημΑ}{ημΒ\, ημΓ}=\frac{ρ\, συν\frac{Α}{2}}{ημ\frac{Β}{2}\, ημ\frac{Γ}{2}} \quad ἢ \quad \frac{υ_α\, ημ(Β+Γ)}{ημΒ\, ημΓ}=\frac{ρ\, ημ\frac{Β+Γ}{2}}{ημ\frac{Β}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2}}.$$

$$ἢ \quad \frac{υ_α\, 2\, ημ\frac{Β+Γ}{2}\, συν\frac{Β+Γ}{2}}{2\, ημ\frac{Β}{2}\, συν\frac{Β}{2}\,.\,2\, ημ\frac{Γ}{2}\, συν\frac{Γ}{2}}=\frac{ρ\, ημ\frac{Β+Γ}{2}}{ημ\frac{Β}{2}\, ημ\frac{Γ}{2}}$$

$$ἢ\ υ_α\,.συν\frac{Β+Γ}{2}=2ρ\, συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2} \quad ἢ\ υ_α\, συν\frac{Β+Γ}{2}=ρ\left(συν\frac{Β+Γ}{2}+συν\frac{Β-Γ}{2}\right)$$

$$ἢ\ υ_α\, συν\frac{Β+Γ}{2}=ρ\left(συν\frac{Β+Γ}{2}+συν\frac{ω}{2}\right) \quad ἢ \quad συν\frac{Β+Γ}{2}=\frac{ρ\, συν\frac{ω}{2}}{υ_α-ρ} \qquad (1)$$

Ἔστω $\frac{\vartheta}{2}$ ἡ μικροτέρα θετικὴ γωνία, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1)· τότε θὰ εἶναι

$$συν\frac{Β+Γ}{2}=συν\frac{\vartheta}{2} \quad ἢ \quad \frac{Β+Γ}{2}=\frac{\vartheta}{2} \quad ἢ \quad Β+Γ=\vartheta \qquad (2)$$

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ $Β-Γ=ω$ (3)

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν

$$Β=\frac{\vartheta+ω}{2}, \qquad Γ=\frac{\vartheta-ω}{2}$$

Γνωρίζοντες τὰς γωνίας Β καὶ Γ ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν Α ἀπὸ τὴν σχέσιν $Α=180^\circ-(Β+Γ)$.

Ἡ πλευρὰ α ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $α=\frac{υ_α\, ημΑ}{ημΒ\, ημΓ}$, αἱ δὲ πλευραὶ β καὶ γ ἀπὸ τὰς σχέσεις $β=\frac{α\, ημΒ}{ημΑ}$, $\quad γ=\frac{α\, ημΓ}{ημΑ}$

182. Πρόβλημα 7ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διάμεσον $μ_α$ καὶ τὴν διαφορὰν Β—Γ=2ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. (Β>Γ).***

Λύσις. Γνωρίζομεν (§ 166) ὅτι $4μ_α^2=α^2\frac{2ημ^2Β+2ημ^2Γ-ημ^2Α}{ημ^2Α}$

$$ἢ \qquad 4μ_α^2\, ημ^2Α=α^2(2ημ^2Β+2ημ^2Γ-ημ^2Α) \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν Α, τότε δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$Β+Γ=180^0-Α \quad καὶ \quad Β-Γ=2ω$$

Διὰ τοῦτο ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν Α. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$(4μ_α^2+α^2)\,ημ^2Α=α^2(2\,ημ^2Β+2\,ημ^2Γ) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ (§ 110)

$$2\,ημ^2Β=1-συν2Β \quad καὶ \quad 2\,ημ^2Γ=1-συν2Γ$$

ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$(4μ_α^2+α^2)\,ημ^2Α=α^2(2-συν2Β-συν2Γ) \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $συν\,2Β+συν\,2Γ=2\,συν(Β+Γ)\,συν(Β-Γ)=-2\,συνΑ\,συν2ω$ ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται

$$(4μ_α^2+α^2)\,ημ^2Α=2α^2(1+συν2ω\,συνΑ)$$

Ἐὰν θέσωμεν $ημ^2Α=1-συν^2Α$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γράφεται

$$(4μ_α^2+α^2)\,(1-συν^2Α)=2α^2(1+συν2ω\,συνΑ)$$

ἢ

$$(4μ_α^2+α^2)\,συν^2Α+2α^2συν2ω\,συνΑ+α^2-4μ_α^2=0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ πρὸς συνΑ. Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ συνΑ, ἄρα καὶ τὴν γωνίαν Α.

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν γωνίαν Α, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$Β+Γ=180^0-Α \quad καὶ \quad Β-Γ=2ω$$

Αἱ πλευραὶ β καὶ γ ὑπολογίζονται ἔπειτα ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$β=\frac{α\,ημΒ}{ημΑ}, \qquad γ=\frac{α\,ημΓ}{ημΑ}$$

Ἀσκήσεις. 681. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α καὶ β, καὶ ὅτι Α=2Β.

682. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

683. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

684. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸν λόγον $\frac{β-γ}{υ_α}=λ$.

685. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν διαφορὰν Α—Β=ω.

686. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, καὶ τὰς διαφορὰς β—γ=λ καὶ Β—Γ=ω.

687. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν β—γ=λ καὶ ὅτι Β=2Γ.

688. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν γ, τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὴν διαφορὰν $A-B=\omega$.

689. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

690. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

691. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Γ, τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ ὅτι $\alpha+\beta-\gamma=\lambda$.

692. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ R τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

693. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

694. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ_β, ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

695. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὸ ἐμβαδόν του Ε.

183. Πρόβλημα 8ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.***

Λύσις. Γνωρίζομεν (§ 168), ὅτι $\delta_\alpha=\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\text{συν}\dfrac{A}{2}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν:

$$\text{συν}\frac{A}{2}=\frac{\delta_\alpha(\beta+\gamma)}{2\beta\gamma}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν Α.

Γνωρίζοντες ἤδη τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὴν γωνίαν Α, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν (§ 154) τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοὺς τύπους

$$\text{εφ}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\text{σφ}\frac{A}{2}, \qquad \alpha=\frac{\beta\,\text{ημ}A}{\text{ημ}B}$$

184. Πρόβλημα 9ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$ τῶν πλευρῶν του β καὶ γ.***

Λύσις. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, γνωρίζομεν καὶ τὴν περίμετρον 2τ τοῦ τριγώνου.

Ἐπίσης, ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰς δύο παραστάσεις, ποὺ δίδουν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\upsilon=2\rho\tau \qquad (1)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα ϱ μὲ τὸ ἴσον του $\varrho=(\tau-\alpha)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ (§ 165) λαμβάνομεν

$$\alpha\upsilon=2\tau(\tau-\alpha)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\alpha\upsilon}{2\tau(\tau-\alpha)} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν Α καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα Β+Γ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Ἔπειτα ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=\frac{\lambda}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν

$$\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=\frac{\lambda\ \eta\mu A}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad 2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda\ \eta\mu A}{\alpha}$$

$$\text{ἢ}\ 2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda\ 2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda}{\alpha}\ \eta\mu\frac{A}{2} \qquad (3)$$

Ἐὰν ω εἶναι μία γωνία θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90°, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3), δηλ. ἐὰν εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}$, ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{ἢ} \quad \frac{B-\Gamma}{2}=\omega \quad \text{ἢ} \quad B-\Gamma=2\omega.$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν διαφορὰν Β—Γ=2ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τὸ ἄθροισμά των Β+Γ=180°—Α, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ.

Αἱ πλευραὶ β καὶ γ ὑπολογίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\beta=\frac{\alpha\ \eta\mu B}{\eta\mu A}, \quad \gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

185. Πρόβλημα 10ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὴν ἀκτῖνα ϱ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ὕψος υ_α.***

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν R, ϱ, υ_α ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\varrho=\alpha\,\frac{\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}, \qquad \upsilon_\alpha=\alpha\,\frac{\eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}, \qquad 2R=\frac{\alpha}{\eta\mu A} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν ἔχομεν

$$\alpha=2R\eta\mu A \quad \text{ἢ} \quad \alpha=2R.2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=4R\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην σχέσιν τῶν (1) τὴν πλευρὰν α μὲ τὸ ἴσον της $4R\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ καὶ εἰς τὴν δευτέραν σχέσιν (1) τὴν πλευρὰν α μὲ τὸ ἴσον της 2R ημΑ καὶ ἔχομεν

$$\varrho=4R\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad (2) \qquad \upsilon_\alpha=2R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon_\alpha=2R\,.\,2\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,.\,2\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad (3)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\varrho}=\frac{2\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}} \quad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$\varrho=2R\,\eta\mu\frac{A}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\right) \text{ ἢ } \varrho=2R\,\eta\mu\frac{A}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\eta\mu\frac{A}{2}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{2R\,\eta\mu\frac{A}{2}} \quad (5)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\varrho}\eta\mu\frac{A}{2} \text{ ἢ } \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}+\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\varrho}\eta\mu\frac{A}{2} \quad (6)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{2\varrho}\eta\mu\frac{A}{2}-\frac{\varrho}{4R\,\eta\mu\frac{A}{2}}$$

$$\text{ἢ} \quad \eta\mu^2\frac{A}{2}-\frac{\upsilon_\alpha}{2\varrho}\eta\mu^2\frac{A}{2}+\frac{\varrho}{4R}=0 \text{ ἢ } \frac{\upsilon_\alpha-2\varrho}{\varrho}\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{\varrho}{2R}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν Α.

Ἂν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) κατὰ μέλη θὰ λάβωμεν

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{2\varrho}\,\eta\mu\frac{A}{2}+\frac{\varrho}{4R\,\eta\mu\frac{A}{2}} \quad (7)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει μία γωνία ω θετικὴ καὶ μικροτέρα τῶν 90^0, τῆς ὁποίας τὸ συνημίτονον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (7), τότε θὰ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\omega \text{ ἢ } \frac{B-\Gamma}{2}=\omega \text{ ἢ } B-\Gamma=2\omega.$$

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$B-\Gamma=2\omega \quad \text{καὶ} \quad B+\Gamma=180^0-A$$

καὶ προσδιορίζομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ.

Γνωρίζοντες ἤδη τὰς γωνίας Α, Β, Γ, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\alpha=2R\,\eta\mu A, \quad \beta=2R\,\eta\mu B, \quad \gamma=2R\,\eta\mu\Gamma.$$

῎Ασκησις 696. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα $υ_β + υ_γ = μ$ καὶ τὰς διαφορὰς $β-γ=λ$ καὶ $Β-Γ=ω$.

697. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_γ$, καὶ τὰς διαφορὰς $α-β=λ$ καὶ $Β-Γ=ω$.

698. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν διαφορὰν $Β-Γ=ω$.

699. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον $μ_α$, τὸ ἐμβαδόν του Ε καὶ τὸ ἄθροισμα $β+γ=λ$.

700. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$, τὴν διάμεσον $μ_α$ καὶ τὴν διχοτόμον $δ_α$.

701. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὴν διχοτόμον $δ_α$ καὶ τὴν διαφορὰν $Β-Γ=ω$.

702. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον 2τ, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ γινόμενον $βγ=λ^2$.

703. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ τρία ὕψη του $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$.

704. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας $ρ_α$, $ρ_β$, $ρ_γ$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

705. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὸ γινόμενον $βγ=λ^2$.

706. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ἄθροισμα $β+γ=λ$ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

707. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

'Ασκήσεις. *Α' 'Ομάς.* 708. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΑ' καὶ θέτομεν $\widehat{ΑΑ'Γ}=ω$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $σφω=\frac{1}{2}(σφΒ-σφΓ)$.

709. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν διάμεσον ΒΒ'. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $ΒΒ'Γ=ν$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου.

710. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου μὲ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον (2 περιπτώσεις).

711. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ἑνὸς πολυγώνου ἐπὶ ἑνὸς προβολικοῦ ἐπιπέδου.

712. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΜΝ συνδέῃ ἀντιστοίχως τὰ μέσα Ν καὶ Μ τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $σφ\widehat{ΝΜΒ}=σφΓ-σφΒ$. (Σχολὴ Ἰκάρων 1948).

713. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΕΟ}{ΟΑ} = -\frac{συν(Β+Γ)}{συν(Β-Γ)}$.

714. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος R. Γράφομεν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς α καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας Λ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας Ο εἶναι ἴση μὲ $\frac{Ε}{α}εφ^2\frac{Α}{2}$, ὅπου Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

715. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, ἵνα ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι τριπλασία τῆς ἀκτῖνος ϱ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου;

716. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται ἡ πλευρὰ α, ἡ γωνία Α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$. 1ον. Νὰ ὁρισθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι αἱ πλευραὶ β καὶ γ. 2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, Α, $υ_α$, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον;

717. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ὀρθογ. τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$ϱ = α\sqrt{2}\,ημ\frac{Β}{2}ημ\left(45^0 - \frac{Β}{2}\right).$$

718. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ε′ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{Ε'}{Ε} = \frac{2\,α\,β\,γ}{(α+β)\,(β+γ)\,(γ+α)}$$

719. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ε′ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{Ε'}{Ε} = 2ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2}ημ\frac{Γ}{2}.$$

720. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ε′ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{Ε'}{Ε} = 1 + \frac{α}{2(τ-α)} + \frac{β}{2(τ-β)} + \frac{γ}{2(τ-γ)}$$

721. Ἐὰν κ, λ, μ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ϱ ἡ ἀκτίς του καὶ τ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδεχθῇ, ὅτι:

1ον. $\frac{κλμ}{ϱ} = \frac{αβγ}{τ}$, 2ον. $\frac{1}{κ^2} = \frac{1}{λ^2} + \frac{1}{μ^2} + \frac{\sqrt{2}}{λμ}$ ορθογων. τρίγωνο

722. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Κ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγρ. κύκλου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\,σφ\,\widehat{ΚΜΒ} = σφ\frac{Γ}{2} - σφ\frac{Β}{2}$

723. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ τοῦ κύκλου καὶ συνδέομεν τὸ κέντρον Ο μὲ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς Β καὶ Γ δι' εὐθειῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον

$\varepsilon\varphi\dfrac{AOB}{2}\times\varepsilon\varphi\dfrac{AO\Gamma}{2}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διευθύνσεως τῆς τεμνούσης.

724. Ἀπὸ τὰ μέσα Γ′ καὶ Β′ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσας γωνίας θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\varphi\theta=\frac{1}{2}(\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)$.

725. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΑ′.

Θέτομεν $\widehat{AA'\Gamma}=\omega$, $\widehat{A'AB}=\varphi$, $\widehat{A'A\Gamma}=\theta$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\varphi\varphi-\sigma\varphi\theta}{2}$, 2ον. $\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma=\sigma\varphi\varphi-\sigma\varphi\theta$.

726. Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ λάβωμεν τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν $\sigma\varphi\, MAB=\sigma\varphi B+2\sigma\varphi A$.

727. Ἐὰν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι δύο διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$3\sigma\varphi\, B\Theta A'=2\sigma\varphi A+2\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma.$$

Β′ Ὁμάς. **728.** Δύο κύκλοι Κ καὶ Λ ἀκτίνων 39 μ. καὶ 16 μ. ἀντιστοίχως, τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′. Ἐκ τοῦ κέντρου Λ φέρομεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Γ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ΑΓ′, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ Β. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἂν εἶναι ΚΛ=49 μέτρα. (Πολυτεχνεῖον).

729. Δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἔνθα ΑΒ=120 μ. καὶ κύκλος Κ. Ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ, ΑΔ καὶ ΒΕ, ΒΖ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\widehat{ZBA}=34^\circ,\quad \widehat{\Gamma AB}=115^\circ,\quad \widehat{\Delta AB}=63^\circ,\quad \widehat{EBA}=82^\circ.$$

730. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται $\dfrac{\alpha}{\upsilon_\alpha}=\mu$, $\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}.\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\nu$. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν.

731. Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Α καὶ ὁ λόγος $\dfrac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\gamma}=\lambda$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ. (Πολυτεχνεῖον 1948)

732. Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Α, ὁ λόγος $\dfrac{\beta-\gamma}{\upsilon_\alpha}=\lambda$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του Β καὶ Γ.

733. Τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὸν λόγον $\dfrac{\beta}{\gamma}=\lambda$ καὶ ὅτι Γ=2Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

734. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Α. Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διχοτόμος δ_α εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευράν. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

735. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὕψος ΑΔ τέμνεται εἰς τὸ μέσον Η ὑπὸ τοῦ ὕψους ΓΕ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εφΒ.εφΓ=2. 2ον. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

736. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν του ὑπάρχουν αἱ σχέσεις:

$$\text{εφ}B=3\,\text{εφ}\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}A=2\,\text{ημ}(B-\Gamma).$$

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ, ἐὰν γνωρίζωμεν. ὅτι $A=50^0\ 40'$.

737. Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ διαφορὰ $B-\Gamma=90^0$ καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\sqrt{2}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του Β καὶ Γ.

738. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται τὸ ἐμβαδὸν $E=\frac{4}{3}$τμ. τὸ ἄθροισμα $\beta^2+\gamma^2=\frac{20}{3}$ καὶ τὸ γινόμενον εφΒ εφΓ=4. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ εφΑ. (Πολυτεχνεῖον)

739. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται ἡ γωνία Α, ἡ πλευρὰ β καὶ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\gamma}=\lambda$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ γ. (Σχολὴ Ἰκάρων)

Γ' Ὁμάς. **740.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α=3 μέτρα, τὴν διχοτόμον $A\Delta=2\sqrt{2}$ καὶ ὅτι ἡ ΑΔ σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ γωνίαν 45^0.

741. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ πλευραί του εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὅτι ἡ μεγαλυτέρα γωνία του εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας.

742. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α=54 μέτρα καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν του ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\frac{\text{εφ}\frac{A}{2}}{3}=\frac{\text{εφ}\frac{B}{2}}{4}=\frac{\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}}{5}.$$

743. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὸ γινόμενον $\text{εφ}\frac{A}{2}\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}=\mu^2$.

744. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_α καὶ ὅτι $\text{εφ}\frac{B}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}=\lambda$.

745. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι

$$\alpha=x^2+x+1, \quad \beta=2x+1 \quad \text{καὶ} \quad \gamma=x^2-1.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι 120^0.

746. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α καὶ καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν του ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\text{εφ}B+\text{σφ}B=4 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \text{εφ}\Gamma+\text{σφ}\Gamma=\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

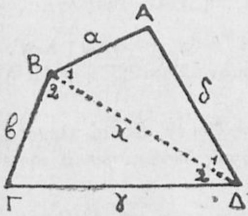
747. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰ ἀθροίσματα $\alpha+\beta=\mu$ καὶ $\alpha+\gamma=\nu$. (Σχολὴ Ἰκάρων)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΚΥΡΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ ΕΓΓΡΑΨΙΜΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

186. Κυρτὸν τετράπλευρον. Ἔστω ἕνα τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

Συνήθως παριστάνομεν μὲ Α, Β, Γ, Δ τὰ μέτρα, εἰς μοίρας, τῶν τεσσάρων γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ μὲ α, β, γ, δ τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν του



Σχ. 100.

$$ΑΒ=α,\quad ΒΓ=β,\quad ΓΔ=γ,\quad ΔΑ=δ.$$

Ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ἔχει 8 ***κύρια στοιχεῖα***: τὰς τέσσαρας γωνίας του καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του.

Αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου συνδέονται, καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$Α+Β+Γ+Δ=360^0.$$

Γενικῶς ἕνα τετράπλευρον εἶναι τελείως ὡρισμένον, ὅταν δοθοῦν πέντε ἀπὸ τὰ ὀκτὼ κύρια στοιχεῖα του, ἐκ τῶν ὁποίων ἀπαραιτήτως πρέπει δύο νὰ εἶναι πλευραί.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν δοθέντων στοιχείων ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ μὲ τὰς διαγωνίους του, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν ὡς βοηθητικοὺς ἀγνώστους, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὰ διάφορα τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τετράπλευρον καὶ ἑπομένως, τελικῶς, νὰ ἐπιλύσωμεν καὶ τὸ τετράπλευρον.

Παράδειγμα. *Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του α, β, γ, δ καὶ τὴν γωνίαν Α.*

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ=x.

Ἐπιλύομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς α καὶ δ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Α (δευτέρα κλασσικὴ περίπτωσις). Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως αὐτῆς ὑπολογίζομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ=x καὶ τὰς γωνίας $Β_1$ καὶ $Δ_1$.

Ἔπειτα ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς β, γ, x (τετάρτη κλασ. περίπτωσις).

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ὑπολογίζομεν τὰς γωνίας B_2, Γ καὶ Δ_2.

Γνωρίζοντες ἤδη τὰς γωνίας B_1, B_2, Δ_1, Δ_2 ὑπολογίζομεν τὰς δύο ἄλλας γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$B=B_1+B_2 \quad \text{καὶ} \quad \Delta=\Delta_1+\Delta_2.$$

Ἀσκήσεις. 748. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίαι τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν.

749. Αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι α=24,5, β=38,4 μ. καὶ σχηματίζουν γωνίαν $38^0\,40'$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

750. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπ' αὐτῶν.

751. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν διαγώνιον του δ, τὸ ἐμβαδόν του Ε καὶ τὴν περίμετρόν του 2τ.

752. Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α=34 μέτρα, β=18 μέτρα, δ=16 μέτρα, καὶ τὰς γωνίας $A=60^0$, $B=65^0$.

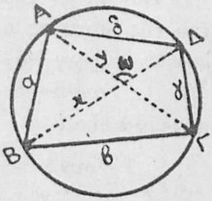
753. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι 24,6 μ. καὶ 38,9 μ. καὶ σχηματίζουν γωνίαν $69^0\,48'\,15''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

754. Τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδεται ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ=60 μέτρα, αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του ΑΔ=40 μέτρα, ΒΓ=70 μέτρα καὶ τὸ ὕψος υ=15 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

187. Ἐπίλυσις τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του α, β, γ, δ.***

Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραὶ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ. Τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ ἄγνωστα στοιχεῖα εἶναι αἱ τέσσαρες γωνίαι του.



Σχ. 101.

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν του. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος παριστῶμεν μὲ x. Ἡ διαγώνιος ΒΔ χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν

$$x^2=\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\,\text{συν}A \quad \text{καὶ} \quad x^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\Gamma.$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι

$$\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\,\text{συν}A=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}\Gamma \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Γ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι συνΓ=—συνΑ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\,\sigma\upsilon\nu A=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ὁρίζει τὴν γωνίαν Α, ἀλλὰ δὲν εἶναι λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων. Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν σχέσιν αὐτὴν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰργάσθημεν εἰς τὴν τετάρτην κλασσικὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριγώνων.

Ἐπειδὴ ὁ ὑπολογισμὸς μιᾶς γωνίας εἶναι ἀκριβέστερος, ὅταν γίνεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης της, παρὰ διὰ τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου της, διὰ τοῦτο ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν Α ἐκ τοῦ τύπου

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu A}{1+\sigma\upsilon\nu A}} \qquad (2)$$

Ἐδῶ εἶναι

$$1-\sigma\upsilon\nu A=1-\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}=\frac{2(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha^2-\delta^2+\beta^2+\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)^2-(\alpha-\delta)^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}=\frac{(\beta+\gamma+\alpha-\delta)\,(\beta+\gamma-\alpha+\delta)}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$1+\sigma\upsilon\nu A=1+\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}=\frac{2(\alpha\delta+\beta\gamma)+\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

$$=\frac{(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}=\frac{(\alpha+\delta+\beta-\gamma)\,(\alpha+\delta-\beta+\gamma)}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

Ἐὰν θέσωμεν α+β+γ+δ=2τ, καὶ ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διαδοχικῶς τὸ 2α, 2β, 2γ, 2δ εὑρίσκομεν

$$\beta+\gamma+\delta-\alpha=2(\tau-\alpha) \qquad \alpha+\gamma+\delta-\beta=2(\tau-\beta)$$

$$\alpha+\beta+\delta-\gamma=2(\tau-\gamma) \qquad \alpha+\beta+\gamma-\delta=2(\tau-\delta)$$

ὁπότε θὰ εἶναι

$$1-\sigma\upsilon\nu A=\frac{2(\tau-\delta)\,(\tau-\alpha)}{\alpha\delta+\beta\gamma}, \qquad 1+\sigma\upsilon\nu A=\frac{2(\tau-\gamma)\,(\tau-\beta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ 1—συνΑ καὶ 1+συνΑ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\delta)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πλευραὶ α καὶ δ, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, εἶναι ἐκεῖναι, ποὺ σχηματίζουν τὴν γωνίαν Α.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\boxed{\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}}$

Γνωρίζοντες ἤδη τὰς γωνίας Α καὶ Β δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας Γ καὶ Δ, ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$A+\Gamma=180^0 \quad \text{καὶ} \quad B+\Delta=180^0.$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ $1-\sigma\upsilon\nu A=2\,\eta\mu^2\frac{A}{2}$.

ἡ ἰσότης $1-\sigma\upsilon\nu A=\frac{2(\tau-\alpha)(\tau-\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$, ποὺ εὑρήκαμεν ἀνωτέρω, γράφεται

$$2\,\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{2(\tau-\alpha)(\tau-\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}}$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ $1+\sigma\upsilon\nu A=2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$, ἡ ἰσότης

$$1+\sigma\upsilon\nu A=\frac{2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\delta+\beta\gamma}, \quad \text{γράφεται}$$

$$2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\delta+\beta\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}}$$

188. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ἐμβαδόν του Ε καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.***

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὑρήκαμεν, ὅτι

$$x^2=\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\,\sigma\upsilon\nu A \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu A=\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ συνΑ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$x^2=\alpha^2+\delta^2-\alpha\delta\cdot\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\delta^2)(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha\delta(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\delta^2)\alpha\delta+(\alpha^2+\delta^2)\beta\gamma-\alpha\delta(\alpha^2+\delta^2)+\alpha\delta(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\delta^2)\beta\gamma+\alpha\delta(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}=\frac{\alpha^2\beta\gamma+\delta^2\beta\gamma+\alpha\delta\beta^2+\alpha\delta\gamma^2}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

$$=\frac{\alpha\beta(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma\delta(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

ἄρα $$\boxed{x=\sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος παράγων τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ὁ δεύτερος παράγων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αβ καὶ γδ τῶν πλευρῶν, αἵ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου x. Ὁ παρονομαστὴς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἵ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΑΓ=y.

Αἱ παρατηρήσεις αὗται μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ γράψωμεν, χωρὶς νέον ὑπολογισμόν, ὅτι

$$\boxed{y=\sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}} \qquad (2)$$

Παρατήρησις. 'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{xy=\alpha\gamma+\beta\delta}$$

'Εὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$$

Αἱ δύο αὗται ἰσότητες ἐκφράζουν ἀλγεβρικῶς δύο γνωστὰ θεωρήματα τῆς Γεωμετρίας, ὑπὸ τὸ ὄνομα: ***Θεωρήματα τοῦ Πτολεμαίου.*** Αἱ δύο αὗται σχέσεις καὶ ἰδιαιτέρως ἡ πρώτη, εἶναι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα τὰ τέσσαρα εὐθύγραμμα τμήματα, α, β, γ, δ εἶναι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

Αἱ σχέσεις αὗται χρησιμοποιοῦνται διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου.

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ. 'Εὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 101) θὰ ἔχωμεν:

$$E=\text{ἐμβ. τριγ. } AB\Delta+\text{ἐμβ. τριγ. } B\Gamma\Delta$$

ἢ $$E=\frac{1}{2}\alpha\delta\ \text{ημ}A+\frac{1}{2}\beta\gamma\ \text{ημ}\Gamma \qquad (1)$$

'Επειδὴ αἱ γωνίαι Γ καὶ Α εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι ημΓ=ημΑ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$E=\frac{1}{2}\alpha\delta\ \text{ημ}A+\frac{1}{2}\beta\gamma\ \text{ημ}A=\frac{1}{2}\text{ημ}A(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

$$\text{ἢ} \qquad E=\frac{1}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

'Εὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\eta\mu\frac{A}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 187 θὰ ἔχωμεν

$$E=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}\,.\,\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}\,.\,(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

$$\text{ἢ} \qquad \boxed{E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}$$

'Υπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος R. 'Η ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐπίσης ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$2R=\frac{x}{\eta\mu A} \qquad \text{ἢ} \qquad R=\frac{x}{2\,\eta\mu A} \qquad (1)$$

'Αλλὰ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εὑρήκαμεν, ὅτι

$$E=\frac{1}{2}\,\eta\mu A(\alpha\delta+\beta\gamma) \qquad \text{ἢ} \qquad \eta\mu A=\frac{2\,E}{\alpha\delta+\beta\gamma}.$$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ημA μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$R=\frac{x(\alpha\delta+\beta\gamma)}{4E}$$

'Επειδὴ $x=\sqrt{\dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}}{4\,E}}$$

189. 'Υπολογισμὸς τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ε καὶ σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀνὰ δύο παραπληρωματικαί, καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον. 'Η μία ἀπὸ τὰς ὀξείας αὐτὰς γωνίας ὀνομάζεται ***γωνία τῶν διαγωνίων*** τοῦ τετραπλεύρου.

Σχ. 102.

Ἔστω φ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΕΑΒ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ΕΔΑ· ἤτοι εἶναι

$$\text{Ε}=\text{ἐμβ.τρ.ΕΑΒ}+\text{ἐμβ.τρ.ΕΒΓ}+\text{ἐμβ.τρ.ΕΓΔ}+\text{ἐμβ.τρ.ΕΔΑ}$$
$$=\frac{1}{2}\text{ΕΑ.ΕΒ}\eta\mu\varphi+\frac{1}{2}\text{ΕΒ.ΕΓ}\eta\mu\varphi+\frac{1}{2}\text{ΕΓ.ΕΔ}\eta\mu\varphi+\frac{1}{2}\text{ΕΔ.ΕΑ}\eta\mu\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}[\text{ΕΑ(ΕΒ+ΕΔ)}+\text{ΕΓ(ΕΒ+ΕΔ)}]\eta\mu\varphi=\frac{1}{2}(\text{ΕΒ+ΕΔ})(\text{ΕΑ+ΕΓ})\eta\mu\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\text{ΒΔ.ΑΓ}\,\eta\mu\varphi=\frac{1}{2}\,xy\,\eta\mu\varphi.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\boxed{\eta\mu\varphi=\frac{2\text{Ε}}{xy}=\frac{2\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}{\alpha\gamma+\beta\delta}}$$

Ἀσκήσεις. 755. Ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ=1, ΒΓ=2, ΓΔ=3, ΔΑ=4. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ΑΔΓ=x, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μεγαλύτεραι πλευραί του.

756. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἐὰν Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\text{Ε}=\text{ΑΒ}\times\text{ΓΔ}+\text{ΑΔ}\times\text{ΒΓ}$.

757. Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον Ο, διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ πλευρὰ ΓΔ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ ΑΓ=x καὶ ΒΔ=y οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου νὰ εἶναι ἴσον μὲ μ^2. Ἐφαρμογή: R=1, $\mu^2=2\sqrt{3}$.

758. Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=x. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τὴν διάμετρον x, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἄλλας τρεῖς πλευράς του ΒΓ=α, ΓΔ=β, ΔΑ=γ.

759. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς βάσεις του ΑΒ=α, ΓΔ=β καὶ τὰς διαγωνίους του ΑΓ=δ καὶ ΒΔ=δ′.

760. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς βάσεις του α, β καὶ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του γ καὶ δ.

761. Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι α=5 μέτρα, β=2 μέτρα, τὸ ὕψος του $\upsilon=\sqrt{3}$ καὶ ἡ γωνία $\text{Ο}=60^\circ$, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του.

762. Ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου δίδονται αἱ βάσεις α, β καὶ τὸ ὕψος υ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί του, αἱ γωνίαι του καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

763. Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδεται ἡ βάσις ΑΒ=4 μέτρα, αἱ διαγώνιοι ΑΔ=3 μέτρα, ΒΔ=4 μέτρα καὶ ἡ γωνία $\omega=90^\circ$ τῶν διαγωνίων του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη βάσις ΓΔ.

764. Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β καὶ αἱ ἴσαι πλευραί του ΑΔ=ΒΓ=γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

765. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τραπέζιον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του ω καὶ τὸ ἐμβαδόν του μ^2.

766. Νὰ ἐπιλυθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἐκ τῆς περιμέτρου του 2τ, τοῦ λόγου $\dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}}=\lambda$ τῶν διαγωνίων του, καὶ τῆς γωνίας ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι του.

767. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ δίδονται ἡ γωνία ΒΑΔ τοιαύτη, ὥστε $\varepsilon\varphi\text{ΒΑΔ}=2\sqrt{2}$, ἡ διαγώνιος $\text{ΒΔ}=5\sqrt{2}$ καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΚ=5 τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΔΒ. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΓ. (Πολυτεχνεῖον)

768. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ γνωρίζομεν τὰ πλευρὰς ΑΒ=1, $\text{ΑΔ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ καὶ τὰς γωνίας $\widehat{\text{ΔΑΒ}}=90^\circ$, $\widehat{\text{ΔΓΑ}}=\widehat{\text{ΒΓΑ}}=30^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ΑΓ, αἱ γωνίαι $\widehat{\text{ΑΔΓ}}=x$ καὶ $\widehat{\text{ΑΒΓ}}=y$ καὶ αἱ πλευραὶ ΓΒ καὶ ΓΔ.

769. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ=α, ΑΔ=β, ΒΓ=γ καὶ αἱ γωνίαι Α=ω, Β=ν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΓΔ καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ. Ἐφαρμογή: α=5 μέτρα, β=8 μέτρα, γ=10 μέτρα, $\widehat{\text{Α}}=60^\circ$, $\widehat{\text{Β}}=120^\circ$.

770. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται ἡ γωνία $\text{Α}=90^\circ$ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ=4α, ΒΓ=7α, ΓΔ=8α καὶ ΔΑ=3α. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του, αἱ διαγώνιοί του καὶ τὸ ἐμβαδόν του. Ἐφαρμογή: α=3 μέτρα.

771. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του α, β, γ, δ καὶ τὸ ἐμβαδόν του Ε.

772. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον Ο ἀκτῖνος R ἕνα δισορθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι Ε καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀκτῖνες ΟΓ καὶ ΟΔ νὰ σχηματίζουν γωνίαν 60°.

773. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, πλευρῶν α, β, γ, δ καὶ περιγεγραμμένου περὶ κύκλον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\text{Ε}=\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\;\eta\mu\frac{\text{Α}+\text{Γ}}{2}.$$

773΄. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ Ε ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι α, β, γ, δ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Sigma^2=(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)-\alpha\beta\gamma\delta\;\sigma\upsilon\nu^2\frac{\text{Α}+\text{Γ}}{2},$$

ὅπου 2τ παριστάνει τὴν περίμετρον τοῦ τετραπλεύρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

1. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες-Μετασχηματισμοί.

Α' Ὁμάς. **774.** Ἐὰν δύο τόξα συμπληρωματικὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διχοτόμον τοῦ πρώτου ἢ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου, ὑπολογιζομένων ἀπὸ τῆς κοινῆς ἀρχῆς τῶν τόξων.

775. Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατά των κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ π.

776. Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων των εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ π.

777. Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατά των εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των, εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας.

Β' Ὁμάς. **778.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu(\gamma-\alpha)+4\,\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma-\alpha}{2}=0$$

779. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi\alpha+2\,\varepsilon\varphi2\alpha+4\,\varepsilon\varphi4\alpha+8\,\varepsilon\varphi8\alpha=\sigma\varphi\alpha$.

780. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi3\alpha-\varepsilon\varphi2\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi3\alpha\,\varepsilon\varphi2\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha$.

781. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\eta\mu(270^0-\alpha)\varepsilon\varphi(180^0-\beta)}{-\varepsilon\varphi(180^0+\beta)\sigma\upsilon\nu(180^0-\alpha)}+\frac{\sigma\varphi(90^0+\alpha)\eta\mu(\gamma-90^0)}{\sigma\upsilon\nu(180^0-\gamma)\varepsilon\varphi(-\gamma)}=\frac{\eta\mu(\alpha+\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\;\eta\mu\gamma}$$

782. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

$$\sqrt[3]{\frac{3\,\eta\mu\alpha-\eta\mu3\alpha}{3\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha}}=\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu3\alpha}{3\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha}=\frac{3\eta\mu\alpha-\eta\mu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu3\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha.$$

783. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\eta\mu3\alpha+\eta\mu5\alpha+\eta\mu7\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu5\alpha+\sigma\upsilon\nu7\alpha}{\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu5\alpha+\sigma\upsilon\nu7\alpha}=\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^0+5\alpha)}{\sigma\upsilon\nu5\alpha}$$

784. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu^6x=\frac{5}{16}+\frac{15}{32}\,\sigma\upsilon\nu2x+\frac{3}{16}\,\sigma\upsilon\nu4x+\frac{1}{32}\sigma\upsilon\nu6x$

785. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2(\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^6x)=\frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu2x\,\eta\mu^22x$.

Γ' Ὁμάς. **786.** Ἐὰν $\varepsilon\varphi(\alpha+\vartheta)=\nu\,\varepsilon\varphi(\alpha-\vartheta)$, νὰ δειχθῇ, ἡ ἰσότης

$$\frac{\eta\mu2\vartheta}{\eta\mu2\alpha}=\frac{\nu-1}{\nu+1}$$ (Πανεπιστήμ. Θεσσαλονίκης)

787. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha}=1$, νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι $\varepsilon\varphi^2\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta$.

788. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $(1+\alpha\sigma\upsilon\nu x)(1-\alpha\sigma\upsilon\nu y)=1-\alpha^2$, νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{\varepsilon\varphi^2\frac{y}{2}}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

789. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ημφ, συνφ, εφφ, σφφ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι

$2\,\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}=2-\sqrt{3}$ (Φαρμακευτικὴ Σχολὴ Παν. Ἀθηνῶν 1948)

790. Νὰ ὑπολογισθῇ $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta}$.

791. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{x}{2}\right)$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\eta\mu x=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

792. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συν4α, συναρτήσει τοῦ συνα καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}$. Ἐφαρμογή, ἐὰν $\alpha=240^0$.

793. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\beta$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

794. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu\varphi=\mu(\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\vartheta-1)$ καὶ $\mu\neq 1$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\vartheta}{2}$ συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}$.

795. 1ον. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\varepsilon\varphi\alpha=\lambda$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$

Ἐφαρμογὴ $\lambda=\frac{3}{4}$.

2ον. Νὰ ἐξηγηθῇ διατὶ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ ἔχει τέσσαρας τιμὰς καὶ διατὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 2.

796. Ἐὰν $\alpha=\frac{\pi}{13}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 10\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}$

797. Αἱ α, β, γ, δ εἶναι γωνίαι τοιαῦται, ὥστε

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1}{2},\quad \varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{3},\quad \varepsilon\varphi\gamma=\sqrt{2}+1,\quad \varepsilon\varphi\delta=\sqrt{2}-1.$$

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία x, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\eta\mu x=\frac{\eta\mu(2\alpha+2\beta-\gamma)}{\eta\mu(2\alpha+2\beta-\gamma)}$$

798. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ εφα καὶ εφβ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+\mu=0$, νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τῶν λ καὶ μ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$A=\eta\mu^2(\alpha+\beta)+\lambda\,\eta\mu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\mu\,\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)$$

Δ΄ Ὁμάς. **799.** Ἐὰν τὰ τόξα φ καὶ ω συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $(1+\lambda\,\sigma\upsilon\nu\varphi)(1-\lambda\,\sigma\upsilon\nu\omega)=1-\lambda^2$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι :

$$\varepsilon\varphi^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}$$

800. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ^2\frac{φ}{2}+εφ^2\frac{x}{2}+εφ^2\frac{y}{2}=1.$

801. Ἂν γνωρίζωμεν. ὅτι $\frac{ημ(x-α)}{ημ(x-β)}=\frac{λ}{μ}$ καὶ $\frac{συν(x-α)}{συν(x-β)}=\frac{λ'}{μ'}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $συν(α-β)=\frac{λλ'+μμ'}{λμ'+λ'μ}$.

802. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $εφα=\frac{ν\,ημβ\,συνβ}{1-ν\,ημ^2β}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$εφ(α-β)=(ν-1)εφβ.$$

803. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$(β^2+γ^2)(συνx-συνα)^2+β^2(ημx-ημα)^2=γ^2(2+συνx+συνα)^2,$$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ\frac{x}{2}-εφ\frac{α}{2}=\pm\frac{2γ}{β}$.

804. Ἐὰν α καὶ β εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι καὶ τοιαῦται, ὥστε $εφα\,.\,εφβ=\frac{1}{6}$ (1) καὶ $ημα\,.\,ημβ=\frac{1}{5}συν\,45^0$ (2), νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ συν(α+β) καὶ εφ(α+β). Ἐξ αὐτῶν νὰ ἐξαχθοῦν αἱ εφα καὶ εφβ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ ἔπειτα, ὅτι $εφ2α\,.\,εφ2β=1$ καὶ $ημ4α=ημ4β$.

805. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφα+εφβ+εφγ-εφα\,εφβ\,εφγ=ημ(α+β+γ)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα

$$εφα+εφβ+εφγ=εφα\,εφβ\,εφγ.$$

806. Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι

1ον) $συν^4\frac{π}{8}+συν^4\frac{3π}{8}+συν^4\frac{5π}{8}+συν^4\frac{7π}{8}=\frac{3}{2}$

2ον) $ημ^4\frac{π}{8}+ημ^4\frac{3π}{8}+ημ^4\frac{5π}{8}+ημ^4\frac{7π}{8}=\frac{3}{2}$

807. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $συν\frac{2π}{7}+συν\frac{4π}{7}+συν\frac{6π}{7}=-\frac{1}{2}$

808. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφ\,9^0-εφ\,27^0-εφ\,63^0+εφ\,81^0=4.$

809. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{(1-α^2)\,ημ2x-2α\,συν2x}{ημx-α\,συνx}$

810. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{ημ\,(π+φ)\,συν\left(\frac{3π}{2}-φ\right).εφ\left(\frac{3π}{2}+φ\right)}{ημ(2π-φ)}$

(Πανεπιστ. Ἀθηνῶν Φαρμ. τμ.)

811. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις $A=1+ημx+συνx+ημxσυνx$. Τὸ γινόμενον αὐτὸ νὰ γραφῇ ὡς τετράγωνον ἀθροίσματος δύο συνημιτόνων. (Σχ. Εὐελπίδων 1947)

812. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις

$$A=α\,συν(ωϑ+λ)+β\,συν(ωϑ+μ).$$

813. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$αx^2+βx+γ=0.$$

814. Νὰ γίνουν λογιστοὶ διὰ τῶν λογαρίθμων οἱ τύποι οἱ δίδοντες τὰς λύσεις τοῦ συστήματος

$xημα+yημ2α=ημ3α$ (1), $xημ3α+yημ6α=ημ9α$ (2)

815. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $A=\frac{\sigma\varphi^2\alpha+1}{\sigma\varphi^2\alpha-1}\cdot\frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2}+1}{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2}-1}\cdots\frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2^\nu}+1}{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2^\nu}-1}$

816. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων ὅλων τῶν τόξων τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, ἀπὸ μοίρας εἰς μοῖραν, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{3\sqrt{30}}{2^{89}}$.

(Θεώρημα τοῦ Laisamt)

817. Ἐὰν τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ, συνδέωνται διὰ μόνης τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma=\pi$ (1), νὰ δειχθῇ, ὅτι κάθε σχέσις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν αὐτῶν προκύπτουσα ἐκ τῆς (1), ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῶν γωνιῶν

$\lambda\pi-(3\lambda-1)A,\quad \lambda\pi-(3\lambda-1)B,\quad \lambda\pi-(3\lambda-1)\Gamma$, ὅπου λ τυχὼν ἀριθμός.

818. Τὰ Α, Β, Γ, εἶναι τρία τόξα τοιοῦτα, ὥστε $A+B+\Gamma=2\pi$ (1). Νὰ δειχθῇ, ὅτι κάθε σχέσις συνδέουσα τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων τούτων καὶ πηγάζουσα ἐκ τῆς (1), θὰ ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν, ἀντὶ τῶν Α, Β, Γ τεθῇ

$\frac{4}{3}\lambda\pi-(2\lambda-1)A,\quad \frac{4}{3}\lambda\pi-(2\lambda-1)B,\quad \frac{4}{3}\lambda\pi-(2\lambda-1)\Gamma$, ὅπου λ τυχὼν ἀριθμός.

819. Ἂν τὰ τόξα Α, Β, Γ, Δ, συνδέωνται διὰ μόνης τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma+\Delta=2\pi$ (1), νὰ δειχθῇ, ὅτι κάθε σχέσις προκύπτουσα ἐκ τῆς (1) μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων τούτων, θὰ ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν ἀντὶ ἑκάστου τούτων τεθῇ $\lambda\pi-(2\lambda-1)A$, $\lambda\pi-(2\lambda-1)B$, $\lambda\pi-(2\lambda-1)\Gamma$, $\lambda\pi-(2\lambda-1)\Delta$, ὅπου λ τυχὼν ἀριθμὸς δεδομένος.

820. Ἂν παραστήσωμεν μὲ θ, φ, ω τὰς γωνίας ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$4\,\eta\mu\theta\;\eta\mu\varphi\;\eta\mu\omega=\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma.$$

ΣΤ' Ὁμάς. **821.** Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}=1-2\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

2ον. $\sigma\upsilon\nu^2(60^0-A)+\sigma\upsilon\nu^2(60^0-B)+\sigma\upsilon\nu(60^0-\Gamma)=$
$=1-2\,\sigma\upsilon\nu(60^0-A)\sigma\upsilon\nu(60^0-B)\sigma\upsilon\nu(60^0-\Gamma)$

822. Ἐὰν $A+B+\Gamma+\Delta=2\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\Sigma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\Sigma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Gamma}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Delta}{2}\right)$

2ον. $\Sigma\,\varepsilon\varphi\frac{\pi+A}{3}=\Sigma\,\varepsilon\varphi\frac{\pi+B}{3}\,\varepsilon\varphi\frac{\pi+\Gamma}{3}\,\varepsilon\varphi\frac{\pi+\Delta}{3}$.

823. Ἐὰν $A+B+\Gamma=\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-A}{4}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-B}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-\Gamma}{4}$

2ον. $\eta\mu\frac{A}{2}+\eta\mu\frac{B}{2}+\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=4\eta\mu\frac{\pi-A}{4}\,\eta\mu\frac{\pi-B}{4}\,\eta\mu\frac{\pi-\Gamma}{4}+1.$

824. Ἐὰν $Α+Β+Γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$ημ2Α\,ημ2Β+ημ2Β\,ημ2Γ+ημ2Γ\,ημ2Α=$$
$$=ημΑ\,ημ(2Γ-Α)+ημΒ\,ημ(2Α-Β)+ημΓ\,ημ(2Β-Γ).$$

825. Ἐὰν $Α+Β+Γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $$\frac{ημΒ+ημΒ-ημΓ}{ημΑ+ημΒ+ημΓ}=εφ\frac{Α}{2}\,εφ\frac{Β}{2}$$

2ον. $$\frac{εφΒ+εφΓ}{ημ2Α}=\frac{εφΓ+εφΑ}{ημ2Β}=\frac{εφΑ+εφΒ}{ημ2Γ}$$

826. Ἐὰν $Α+Β+Γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$\frac{συνΑ}{ημΒημΓ}+\frac{συνΒ}{ημΓημΑ}+\frac{συνΓ}{ημΑημΒ}=2.$$

827. Ἐὰν $Α+Β+Γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$\frac{σφΒ+σφΓ}{εφΒ+εφΓ}+\frac{σφΓ+σφΑ}{εφΓ+εφΑ}+\frac{σφΑ+σφΒ}{εφΑ+εφΒ}=1.$$

828. Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρία τόξα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ω, νὰ δειχθῇ ὅτι:

1ον. $ημα+ημγ=2ημβ\,συνω$

2ον. $συνα+συνγ=2συνβ\,συνω$. 3ον. $εφα+εφγ=\dfrac{2εφβ(1+εφ^2ω)}{1-εφ^2βεφ^2ω}$

829. Ἐὰν $Α+Β+Γ=180^0$ καὶ $συν\dfrac{Β}{2}\,ημ\left(Γ+\dfrac{Β}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+συν2Β}{2}}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ συνΒ εἶναι ἀριθμητικὸς μέσος τῶν ημΑ καὶ ημΒ.

830. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

$$Σ=ημα+ημ(α+ω)+ημ(α+2ω)+\,.\,.\,.\,.\,.+ημ[α+(ν-1)ω]$$
$$Σ'=συνα+συν(α+ω)+συν(α+2ω)+\,.\,.\,.\,.\,.+συν[α+(ν-1)ω].$$

831. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

$$Α=συν^2α+συν^2(α+ω)+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.+συν^2[α+(ν-1)ω]$$
$$Β=ημ^2α+ημ^2(α+ω)+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.+ημ^2[α+(ν-1)ω].$$

832. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$Σ=ημα\,ημ2α+ημ2α\,ημ3α+\,.\,.\,.\,.\,.+ημνα\,ημ(ν+1)α.$ (Πολυτεχνεῖον)

833. Ἐὰν $Σ=συνα+συν(α+ω)+συν(α+2ω)$

$Σ'=ημα+ημ(α+ω)+ημ(α+2ω)$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$Σ\,ημ\frac{ω}{2}=ημ\frac{3ω}{2}συν(α+ω) \quad καὶ \quad Σ'ημ\frac{ω}{2}=ημ\frac{3ω}{2}ημ(α+ω).$$

834. Θέτομεν $Α_ν=συν^2x+συν^2 2x+συν^2 3x+\,.\,.\,.\,.\,.\,.+συν^2 νx$

$Β_ν=συν2x+συν4x+συν6x+\,.\,.\,.\,.\,.\,.+συν2νx$

1ον. Νὰ εὑρεθῇ μία σχέσις μεταξὺ τῶν $Α_ν$ καὶ $Β_ν$. 2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τὰ $Α_3$ καὶ $Β_3$. 3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $Β_ν=\dfrac{ημνx\,συν(ν+1)x}{ημx}$.

835. Νὰ ὁρισθῇ τὸ λ, ἵνα τὸ κλάσμα $k=\dfrac{εφ(x-λ)+εφx+εφ(x+λ)}{εφ(x-λ)\,.\,εφx.εφ(x+λ)}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ τόξου x. Νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ k, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ λ.

836. 'Επὶ ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ κύκλου O λαμβάνομεν $\widehat{A\Gamma}=\omega$ καὶ $\widehat{A\Gamma'}=-\omega$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ τόξα $AM=x$, τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος $\frac{M\Gamma}{M\Gamma'}$ τῶν χορδῶν $M\Gamma$ καὶ $M\Gamma'$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν λ, διάφορον τῆς 1. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τόξα AM ἔχουν τὰ πέρατά των διάφορα.

837. Προβάλλομεν ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος $x'x$ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος διανύεται ἀπὸ ἕνα κινητὸν κατά τινα φοράν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἕνα τὰ διανύσματα τῶν πλευρῶν μὲ τὸν ἄξονα $x'x$, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

2. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Α' Ὁμάς. **838.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς $\varepsilon\varphi\frac{k\pi}{\sqrt{2}}$ εἶναι διάφοροι, διὰ διαφόρους τιμὰς τοῦ k.

839. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(3x+120^0)\sigma\varphi(x-60^0)=1$.

840. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu^2(3x-45^0)-\sigma\upsilon\nu^2(2x+60^0)=0$.

841. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta=1$, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ τόξα α καὶ β περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0.

842. 'Εὰν πx καὶ $\pi(x^2+1)$ εἶναι διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x μέτρα, εἰς ἀκτίνια, τόξων, νὰ ὁρισθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ περιλαμβανόμεναι μεταξὺ $-\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{3}{2}$ αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν $\eta\mu\pi(x^2+1)-\eta\mu\pi x=0$.

843. Οἱ ἀριθμοὶ $\pi(x^2+\lambda x+k)$ καὶ $\pi(\mu x^2-6x+7)$ παριστάνουν εἰς ἀκτίνια τὰ μέτρα δύο τόξων περιεχομένων μεταξὺ 0 καὶ 2π. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν k, λ, μ διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις

$\eta\mu[\pi(x^2+\lambda x+k)]=\eta\mu[\pi(\mu x^2-6x+7)]$ εἶναι ταυτότης.

844. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu 7x-\eta\mu x=\eta\mu 3x$.

845. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x+\eta\mu 2x+\eta\mu 3x+\eta\mu 4x=0$.

646. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,\eta\mu^2 x+\sqrt{3}\,\eta\mu 2x=3$. (Παν. Θεσσαλονίκης)

847. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu(\alpha+2x)+\eta\mu(\alpha+x)+\eta\mu\alpha=0$.

848. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x\;\eta\mu 3x=\mu$.

849. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\eta\mu(x-\vartheta)=\beta\eta\mu(x-\varphi)$.

850. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\eta\mu(60^0+x)=2\sqrt{3}\,\eta\mu(30^0+x)$.

851. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{1-\eta\mu^2 x}+\eta\mu x=\mu$.

852. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu\,\eta\mu x\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}=\mu$.

Β' Ὁμάς. **853.** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x=1$.

854. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x=0$.

855. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\tau\varepsilon\mu(x+\alpha)+\tau\varepsilon\mu(x-\alpha)=2\tau\varepsilon\mu x$.

856. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1+συνx+συν2x+συν3x=0$.

857. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $συν^2\frac{x-α}{2}+συν^2\frac{x+α}{2}=1$.

858. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνα-συνx=ημ(x-α)$.

859. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνμx+συν2νx-συν(μ+2ν)x=1$.

Γ' Ὁμάς. 860. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx+συν2x=1$.

861. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ2x+συν2x=1$.

(Πολυτεχνεῖον. Χημ. Τμῆμα 1947)

862. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ\,2x=3\,συν3x$.

863. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1-συν2x=\sqrt{3}\,ημ2x$.

864. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν^2x+4ημ^2\frac{x}{2}\left(ημ^2\frac{x}{2}-1\right)+1=0$.

865. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2ημ3x=3συνx+συν3x$.

866. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνx-ημx-ημx\,συνx=0$.

867. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν2x=\sqrt{2}\,(ημx+συνx)$.

868. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνx-συν2x+ημ3x=0$.

869. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{ημx}+\sqrt{συνx}=μ$.

870. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^3x+συν^3x=1$.

871. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^2x+2ημx\,συνx-2συν^2x=\frac{1}{2}$.

872. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημx\,συνx-ημ^3α\,συνx-συν^3α\,ημx=0$, ὅπου α εἶναι γνωστόν.

873. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\,συνx\,συν(60^0-x)=2ημ^2x$.

874. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2}+1)ημ^2x+(\sqrt{2}-1)\,συν^2x+ημ2x=\sqrt{2}$.

875. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$συνα\,συνβ\,ημ^2x-ημα\,ημβ\,συν^2x=ημ(α-β)ημx\,συνx.$$

876. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0^0 καὶ 180, τὰ ὁποῖα ἐπληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

$$4ημ2x-2(\sqrt{5}-1)\,συνx-4ημx+\sqrt{5}-1=0.$$

877. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $συν2x=\sqrt{2}\,(συν^3x+ημ^3x-ημxσυν^2x-συνxημ^2x)$.

Δ' Ὁμάς. 878. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφx+εφ2x+εφ3x=0$.

(Πανεπιστ. Χημικὸν τμῆμα 1948).

879. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3εφxεφ3x+1=0$.

880. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3εφ\frac{x}{2}\,εφx+9εφ^2\frac{x}{2}=2εφ^2x$.

881. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{εφ(x+α)}{εφ(x-α)}=μ$.

882. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4[τεμx+εφx(8ημx-9)]+ημ2x(9-2ημx)=0$.

883. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημxεφx+2συνx=μ$.

884. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφx=\sqrt{3συν^2x-ημ^2x}$

(Πολυτεχνεῖον. Τμῆμα Χημικῶν, Τοπογράφων 1949).

885. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu 3x+\eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 5x}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\varepsilon\varphi x$

886. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{3\pi}{2}$ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. (Πολυτεχνεῖον Τμ. 'Αρχιτεκτόνων)

887. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ 270°, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{\varepsilon\varphi(60^0-x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2(60^0-x)}$.

888. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\left(\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\eta\mu x}-\dfrac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi x}\right)^2=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta$

889. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi(x+\alpha)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x-\dfrac{1}{3}}$.

890. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα x, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{3\pi}{2}$ τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\varepsilon\varphi x\,\sigma\upsilon\nu^2 x$.

891. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ημ2x, συν2x, εφ2x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ τόξα x ἐπαληθεύουν τὴν μίαν ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$4\eta\mu^2 x-2(1+\sqrt{3})\eta\mu x+\sqrt{3}=0$ (1), $\varepsilon\varphi^2 x-4\varepsilon\varphi x-1=0$. (2)

Ε' Ὁμάς. **892.** Νὰ ἐξετασθῇ εἰς ποίαν περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τὸ $\eta\mu\dfrac{\alpha}{3}$ συναρτήσει τοῦ ημα, ἔχει δύο ῥίζας ἀντιθέτους;

893. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τὴν $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{3}$ συναρτήσει τῆς σφα, δὲν ἔχει ποτὲ δύο ῥίζας ἴσας.

894. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνα ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{4}$. 2ον. 'Εὰν παραστήσωμεν μὲ α ὅλα τὰ τόξα, τῶν ὁποίων τὸ συνημίτονον εἶναι μ, νὰ εὑρεθῇ πόσας τιμὰς θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{4}$ καὶ ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τὰς τιμὰς αὐτάς; Νὰ ἐξετασθῇ ἡ μερικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν μ=0 καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{8}$ καὶ $\sigma\varphi\dfrac{\pi}{8}$.

895. 'Εὰν τὸ τόξον θ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$, νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\theta\,\varepsilon\varphi^2 x-2\sigma\upsilon\nu\theta\,\varepsilon\varphi x+1=0$.

896. 'Εὰν τὸ τόξον θ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$, νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi^2 x-2\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu^2\theta=0$.

897. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\dfrac{x}{4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{4}+\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{4}=\mu$ μᾶς δίδει τιμὰς τοῦ τόξου x, περιλαμβανομένας μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$.

898. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $ημ3x+μημ2x+ημx=0$. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν: 1ον. Ὅταν τὸ μ περιέχεται μεταξὺ -2 καὶ $+2$. 2ον. Ὅταν τὸ μ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-2, +2)$. 3ον. Ὅταν $μ=-2$ καὶ ὅταν $μ=2$.

899. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$ημ[x]+συν[x]+εφ[x]+\frac{1}{ημ[x]}+\frac{1}{συν[x]}+\frac{1}{εφ[x]}+3=0.$$

(Πολυτεχνεῖον 1947)

ΣΤ' Ὁμάς. **900.** Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$μ\,(ημx+συνx)=ημx\,συνx$$

901. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$ημx\,ημ(60^0-x)=ημx+ημ(60^0-x)$$

902. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν^2x+σφ^2x=μ$.

903. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνx+εφω\,ημx=1+εφω$, ἐὰν ω εἶναι ἕνα τόξον περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ π.

904. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$ημ^2x+μ\,συν^2x-(ημx+μ\,συνx)=0$$

905. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(ημα+ημβ)συνx-(συνα+συνβ)ημx=μ.$$

906. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$ημx\,συνx-μ(ημx+συνx)+1=0.$$

907. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$μ\,ημ^2x-2(μ-2)ημx+μ+2=0,$$

908. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$2ημ^2x+3(μ-1)συνx+μ=0.$$

909. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$α\,συν^2x+(2α^2-α+1)ημx-3α+1=0.$$

910. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ\frac{x}{2}=\frac{α-1+εφx}{α+1+εφx}$.

911. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφx\,εφ(45^0+x)=μ$.

912. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $εφ^2x=μ\,εφ(x+α)εφ(x-α)$.

Ζ' Ὁμάς. **913.** 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $μσυνx-(μ+1)ημx=μ$. (1) 2ον. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ δύο ῥίζας x' καὶ x'', τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ $\frac{π}{2}$.

914. Ἐὰν ὁ ἄγνωστος x περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{3π}{2}$, νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $μ\,ημx+συνx+3μ-1=0$.

915. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ παράμετρος μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $συνx+ημx=μ$ ἔχῃ δύο ῥίζας x' καὶ x'', αἱ ὁποῖαι νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $x''-x'=\frac{π}{2}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ῥίζαι.

916. 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$3\,\varepsilon\varphi 3x=(3\mu^2-4\mu+2)\varepsilon\varphi x.$$

2ον. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα x εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ μ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3y^2-4y-8=0$.

917. 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu 3x=(\mu^2-5\mu+3)\eta\mu x$. 2ον. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα x εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ μ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $y^2-5y+1=0$.

918. 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(\mu+1)\,\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\mu\,\eta\mu^2\frac{x}{2}+2\mu\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}.$$

2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ θὰ ἔχωμεν τὴν λύσιν $x=\dfrac{2\pi}{2}$.

919. 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(3-5\mu)\,\sigma\upsilon\nu x-2\,(2-3\mu)\,\sigma\upsilon\nu x+2-\mu=0$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ προσέγγισιν $\dfrac{2}{11}$ αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράμετρος μ, ἵνα αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι πραγματικαί.

920. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu x+\lambda\eta\mu x-1-\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1+\lambda=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν λύσιν; Ποία εἶναι ἡ κοινὴ αὕτη λύσις;

921. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2\sigma\upsilon\nu\omega-1)x^2-4x+4\sigma\upsilon\nu\omega+2=0$, ὅπου ω παριστάνει μίαν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0. Νὰ εὑρεθῇ: 1ον. Διὰ ποίας τιμάς του ω ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας; 2ον. Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν; 3ον. Νὰ καταστῇ λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν αὐτῶν.

922. Σημειώσατε ἐπὶ ἄξονος καὶ ἐπὶ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις:

$$-180^0\leqslant x\leqslant 180^0 \quad (1) \qquad \varepsilon\varphi x\leqslant |\eta\mu x| \quad (2)$$

$$\eta\mu x+\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\leqslant 0 \ (3), \quad 8\eta\mu x\,\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\leqslant 1 \ (4)$$

(Πολυτεχνεῖον. Τμῆμα Πολιτ. Μηχανικῶν 1949)

3. Τριγωνομετρικὰ συστήματα.

923. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=90^0 \\ \sigma\upsilon\nu\,(90^0-x)\,\tau\varepsilon\mu y=1 \end{cases}$

924. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ λύσεις x καὶ y τοῦ συστήματος

$$x+y=\pi-(\alpha+\beta) \quad (1) \qquad \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$$

ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\sigma\varphi x-\sigma\varphi y=\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta$

925. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=60^0 \\ \varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi y+6\varepsilon\varphi x+3\varepsilon\varphi y=9 \end{cases}$

926. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \eta\mu x+\eta\mu y=\mu\,(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta) \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\mu(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta) \end{cases}$

927. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu 2x=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\eta\mu y \quad (1), \qquad \sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=\frac{1}{2} \quad (2)$$

928. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \eta\mu x=\varepsilon\varphi\alpha\ \eta\mu(y+\alpha) \\ \eta\mu(\alpha-x)=2\eta\mu^2\frac{y}{2}+\sigma\upsilon\nu\,(y+2\alpha) \end{cases}$

929. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \eta\mu x+\eta\mu y=1 \\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y=\frac{3}{4} \end{cases}$

930. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu x\ \eta\mu y=\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

931. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \eta\mu x+\eta\mu y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{cases}$

932. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y=\frac{3}{2} \quad (1) \qquad \sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 y=\frac{1}{2} \quad (2)$$

933. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\ y}{\sigma\upsilon\nu\ x}=\sqrt{2} \quad (1) \qquad 2\ \eta\mu|x|+\eta\mu|y|=1 \quad (2)$$

(Πολυτεχνεῖον. Πολιτ. Μηχανικοὶ 1948)

934. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=1 \\ \varepsilon\varphi\frac{x}{2}\ \varepsilon\varphi\frac{y}{2}=\frac{1}{3} \end{cases}$

935. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x\eta\mu(\vartheta-y)=\alpha \\ x\eta\mu(\varphi-y)=\beta \end{cases}$

936. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=2 \\ 2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=1 \end{cases}$

937. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \varepsilon\varphi x=\alpha\sigma\varphi y \\ \varepsilon\varphi 2x=\beta\sigma\varphi 2y \end{cases}$

938. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\sigma\varphi y=\alpha \\ \sigma\varphi x+\varepsilon\varphi y=\beta \end{cases}$

939. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=-2\sqrt{3} \\ \sigma\varphi x+\sigma\varphi y\ =\ 2\sqrt{3} \end{cases}$

940. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=2\sqrt{3} \\ \varepsilon\varphi\frac{x}{2}+\varepsilon\varphi\frac{y}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

941. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y+\omega=\pi \\ \frac{\eta\mu x}{\mu}=\frac{\eta\mu y}{\nu}=\frac{\eta\mu\omega}{\varrho} \end{cases}$

942. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\alpha+y\eta\mu\alpha=\mu\sigma\upsilon\nu 3\alpha \\ y\eta\mu\alpha-y\sigma\upsilon\nu\alpha=\mu\eta\mu 3\alpha \end{cases}$

καὶ νὰ ὁρισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ α, ἵνα ἡ παράστασις x^2+y^2 ἔχῃ τὴν μεγίστην ἢ καὶ τὴν ἐλαχίστην τιμήν.

943. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x\text{συν}\alpha + y\text{ημ}\alpha = \text{συν}\beta \\ x\text{συν}2\alpha + y\text{ημ}2\alpha = \text{συν}(\alpha+\beta) \end{cases}$

καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων α καὶ β.

944. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}\alpha + \text{συν}(\alpha+x) + \text{συν}(\alpha+y) &= 0 \\ \text{ημ}\alpha + \text{ημ}(\alpha+x) + \text{ημ}(\alpha+y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

ὅπου α εἶναι γνωστὸν τὸ τόξον, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 1 + \text{συν}x + \text{συν}y &= 0 \\ \text{ημ}x + \text{ημ}y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα (B). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πέρατα τῶν τριῶν τόξων α, α+x καὶ α+y, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον.

4. Ἀπαλοιφή.

945. Νὰ γίνῃ ἀπαλοιφὴ τοῦ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\text{ημ}x + \sqrt{3}\,\text{συν}x = 1$$
$$\text{ημ}x + \text{συν}x = \mu$$

946. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλοίφουσα τῶν ἐξισώσεων

$$\text{ημ}x - \text{στεμ}x = \alpha$$
$$\text{συν}x - \text{τεμ}x = \beta$$

947. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha\text{ημ}x - \beta\text{συν}x = \frac{1}{2}\gamma\text{ημ}2x$$
$$\alpha\text{συν}x + \beta\text{ημ}x = \gamma\text{συν}2x$$

εἶναι ἡ $\qquad \alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}$

948. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$\alpha\text{ημ}2x + \beta\text{συν}2x = \gamma \quad (1) \qquad \mu\text{εφ}(x+\lambda) = \nu\text{εφ}(x-\lambda).$

949. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$\text{ημ}x + \text{συν}x = \mu \quad (1) \qquad \text{εφ}2x + \text{σφ}2x = \nu \quad (2)$

950. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$\text{ημ}x + \sqrt{3}\,\text{συν}x = 1 \quad (1) \qquad \text{ημ}x + \text{συν}x = \mu \quad (1)$

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι συμβιβαστόν;

951. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις

$$(\beta^2 - \alpha^2 - 1)\beta\text{συν}x + (2\beta^2 - 1)\alpha\text{ημ}x = \alpha\beta$$
$$(2\alpha^2 - 1)\beta\text{συν}x + (\alpha^2 - \beta^2 - 1)\alpha\text{ημ}x = \alpha\beta$$

εἶναι συμβιβασταί, ὅταν τὰ α καὶ β παριστάνουν ἀντιστοίχως τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον μιᾶς γωνίας ω. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν δύο ἐξισώσεων.

952. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$\alpha\text{ημ}^2x + \beta\,\text{συν}^2y = \mu \quad (1), \qquad \beta\text{ημ}^2y + \alpha\text{συν}^2y = \nu \quad (2), \qquad \alpha\text{εφ}x = \beta\text{εφ}y \quad (3)$

5. Τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες.

953. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

954. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\varepsilon\varphi^2x-(\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}<0$

955. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{2\,\sigma\upsilon\nu x-5\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}>0$

956. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\eta\mu x}{2\,\eta\mu x-1}>\frac{1-\eta\mu x}{4\,\eta\mu^2x-1}$

957. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{1-\eta\mu x}{1-2\eta\mu x}<\frac{1+\eta\mu x}{1-4\eta\mu^2x}$

958. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-3\sigma\upsilon\nu x}<\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-9\,\sigma\upsilon\nu^2x}$

959. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{4\,\eta\mu^2x-1}>1+3\eta\mu x$

960. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{3\sigma\upsilon\nu^2x-1}>5\eta\mu^2x-4$

961. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2+\sqrt{4-\sigma\upsilon\nu x}>3\sigma\upsilon\nu x$

962. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα x, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ 2π, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $\frac{2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x-3\sigma\upsilon\nu x+2}>0$.

963. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ 2π, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $\frac{\eta\mu 2x-\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2x-3\sigma\upsilon\nu x+2}>0$, ὅπου α εἶναι ἕνας ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 0 καὶ 1.

964. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ τόξου x, αἱ περιεχόμεναι μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1}{2\,\eta\mu^2x-1}<0$.

965. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τόξου x, αἱ μικρότεραι τῶν 90^0, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα $\frac{\varepsilon\varphi x(3-\varepsilon\varphi^2x)}{1-\varepsilon\varphi^2x}>0$.

966. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{1-2\eta\mu x}{1+3\eta\mu x}>\frac{1+5\eta\mu x}{1-9\eta\mu^2x}$

(Πολυτεχνεῖον 1947)

967. Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἶναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\omega}\right|>1$, θὰ εἶναι καὶ $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\varphi}\right|>1$ καὶ $|\,\sigma\varphi\varphi.\sigma\varphi\omega\,|>1$· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἰσχύῃ μία ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων τότε θὰ ἰσχύουν καὶ δύο ἄλλαι.

(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν. Μαθ. Τμ.)

968. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἀκτίνια τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα συναληθεύουν τὰς ἀνισότητας $\frac{4x^2-9}{2\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1}<0$ (1) $-2\pi\leqslant x<\pi$ (2)

(Πολυτεχνεῖον 1948. Πολιτ. μηχ.)

969. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{2\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})\eta\mu x-\sqrt{6}+1}{4\eta\mu^2x-1}<1$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν ποῦ κεῖνται τὰ ἄκρα τῶν τόξων—λύσεων, ἂν ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων ληφθῇ ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

970. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ μέρη μιᾶς τριγωνομετρικῆς περιφερείας ὅπου εὑρίσκονται τὰ ἄκρα τῶν τόξων x, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα

$$\frac{1+3\text{συν}x}{1-2\text{συν}x} < \frac{1+4\,\text{συν}x}{1-4\text{συν}^2x}.$$

971. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$10\,(\text{συν}^2x-\text{συν}2x-1)+2 < \sqrt{2\text{συν}^2x-\text{ημ}^2x}$$

καὶ νὰ εὑρεθοῦν ποῦ κεῖνται τὰ ἄκρα τῶν τόξων—λύσεων, ἂν ὡς ἀρχὴ τῶν τόξων ληφθῇ πάντοτε ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

(Πολυτεχνεῖον)

6. 'Αντίστροφαι κυκλικαὶ συναρτήσεις.

972. 'Εὰν τὸ τόξον x περιέρχεται μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\text{τοξ.σφ}x+2\,\text{τοξ.σφ}3=45^0$$

973. Δίδεται ἡ ταυτότης $\text{ημ}^2\alpha=\dfrac{\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$. Νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς ταυτότητος αὐτῆς, ἡ ἀντίστροφος τριγωνομετρικὴ ταυτότης.

974. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$y=\text{ημ}\left(\text{τοξ.ημ}\dfrac{1}{1+\alpha^2}+\text{τοξ.συν}\dfrac{1}{1+\alpha^2}\right)$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ τόξα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$.

975. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\quad \text{τοξ.ημ}x=\text{τοξ.συν}(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})$.

976. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left\{\begin{aligned}\text{τοξ.ημ}x+\text{τοξ.ημ}y&=\alpha\\ xy&=\beta\end{aligned}\right.$

977. 'Εὰν εἶναι $\omega_\nu=\text{τοξ.εφ}\,\dfrac{1}{2\nu^2}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma_\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_\nu$$

7. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου.

Α' 'Ομάς. **978.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\text{εφ}B=\dfrac{\text{συν}(\Gamma-B)}{\text{ημ}A+\text{ημ}(\Gamma-B)}$ $\qquad$ 2ον. $\text{εφ}B=\dfrac{\beta\,\text{ημ}\Gamma}{\alpha-\beta\,\text{συν}\Gamma}$.

979. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\text{συν}A+\text{συν}B=\frac{2\,(\alpha+\beta)}{\gamma}\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}.$$

980. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $(\alpha-\beta)\text{εφ}\dfrac{A+B}{2}+(\beta-\gamma)\text{εφ}\dfrac{B+\Gamma}{2}+(\gamma-\alpha)\text{εφ}\dfrac{\Gamma+A}{2}=0$

2ον. $(\alpha+\beta)\text{εφ}\dfrac{A-B}{2}+(\beta+\gamma)\,\text{εφ}\dfrac{B-\Gamma}{2}+(\gamma-\alpha)\text{εφ}\dfrac{\Gamma-A}{2}=0$

3ον. $$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}}+\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}}+\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi^2\frac{\Gamma}{2}}=0$$

981. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $$\alpha\eta\mu A+\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2R}$$

2ον. $$\frac{\alpha\eta\mu A+\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma$$

982. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$$\alpha^2\sigma\varphi A+\beta^2\sigma\varphi B+\gamma^2\sigma\varphi\Gamma=4E.$$

983. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma-2\beta\gamma\eta\mu(B-\Gamma)-\gamma^2\eta\mu 2B=0.$$

984. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\beta\gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu A}{\gamma\alpha}=\frac{1}{4R^2}$$

985. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις·
$$(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\varepsilon\varphi A=(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)\varepsilon\varphi B=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\varepsilon\varphi^2\Gamma.$$

986. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$$\frac{\eta\mu^2 A}{\upsilon_\alpha^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{2\,\sigma\upsilon\nu A}{\beta\gamma}$$

987. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$$\frac{\beta-2\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\eta\mu\Gamma}+\frac{\gamma-2\beta\sigma\upsilon\nu A}{\beta\eta\mu A}+\frac{\alpha-2\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\gamma\eta\mu B}=0$$

988. Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις
$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}{R}.$$

989. Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις
$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}=2.\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$$

990. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις:

1ον. $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_\alpha}+\frac{1}{\varrho_\beta}+\frac{1}{\varrho_\gamma}$ 2ον. $4R=\varrho_\alpha+\varrho_\beta+\varrho_\gamma-\varrho$

3ον. $2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=\frac{\varrho\tau}{R^2}$ 4ον. $\frac{\tau^2-\varrho_\alpha^2}{\tau^2+\varrho_\alpha^2}=\sigma\upsilon\nu A$

B' Ὁμάς. **991.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἐὰν εἶναι $1+\sigma\varphi(45^0-B)=\frac{2}{1-\sigma\varphi\Gamma}$ καὶ $2\beta\gamma=\alpha^2$

992. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν εἶναι
$$\frac{\beta^3+\gamma^3-\alpha^3}{\beta+\gamma-\alpha}=\alpha^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu B\eta\mu\Gamma=\frac{3}{4} \quad (2)$$

993. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐάν εἶναι

$$\beta\varepsilon\varphi\frac{B}{2}-\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=2(R-\varrho).$$

994. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν οἱ ἀριθμοι $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ συγχρόνως εἶναι $\beta=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}$.

995. Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\varrho_\alpha=\varrho+\varrho_\beta+\varrho_\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον.

996. Ἂν εἰς ἕνα τρίγωνον εἶναι

$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=2$, τότε τοῦτο εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. (Πολυτεχνεῖον)

997. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}$ (ἔνθα β_1 γ_1 εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν β, γ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν α, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἢ ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές. (Πολυτεχνεῖον)

Γ' Ὁμάς. **998.** Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον εἶναι $\beta-\alpha=\nu\gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι :

1ον. $\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{\Gamma}{2}\right)=\nu\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$. 2ον. $\sigma\varphi\frac{B-A}{2}=\frac{1+\nu\,\sigma\upsilon\nu B}{\nu\,\eta\mu B}$.

909. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὕψος του ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\,\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma$.

1000. Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=2$ καὶ $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=1$, νὰ δειχθῇ, ὅτι $R=\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Μαθημ. Τμῆμα)

1001. Τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ τὴν γωνίαν Α. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Β ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi B=\frac{\beta\eta\mu A}{\gamma-\beta\,\sigma\upsilon\nu A}$. 2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β, γ, Α, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές ; 3ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β, γ, Α, ἵνα ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς Γ ;

1002. Ἂν εἰς τρίγωνον ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}=3\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$,

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}=4$.

1003. Ἐὰν αἱ γωνίαι τριγώνου συνδέωνται μὲ τὴν σχέσιν

$\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=2\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $3\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=1$.

1004. Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\eta\mu A+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu B$ θὰ εἶναι καὶ

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}.$$

1005. 'Εὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου καὶ Α, Β, Γ, αἱ γωνίαι του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι x, y, ω, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις: $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις $\quad \epsilon\varphi^2\frac{x}{2}+\epsilon\varphi^2\frac{y}{2}+\epsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}=1,$

$$\epsilon\varphi\frac{x}{2}\epsilon\varphi\frac{y}{2}\epsilon\varphi\frac{\omega}{2}=\epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\frac{B}{2}\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Δ' Ὁμάς. **1006.** Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ β καὶ γ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία Α εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν β καὶ γ.

1007. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν α ἀμετάβλητον καὶ τῶν ὁποίων αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ μεταβάλλονται εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμά των $\beta+\gamma$ νὰ μένῃ σταθερόν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α εἶναι σταθερόν.

1008. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ. Ἂν x καὶ y εἶναι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΔ μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ δειχθῇ, ὅτι $\quad \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}$.

1009 Τριγώνου δίδονται ἡ γωνία Α, τὸ ἐμβαδὸν Ε, καὶ ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=k^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τούτων τὸ γινόμενον: ημΒημΓ. (Εὕρετε τύπον λογιστὸν διὰ λογαρίθμων).

1010. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τὴν κάθετον ἐπὶ πλευρὰν ΑΒ, ἐκ τῆς κορυφῆς Β τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τῆς Γ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τεμνόμεναι σχηματίζουν ἕνα τρίγωνον Α'Β'Γ'. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων Α'Β'Γ' καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσος μὲ $(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)^2$.

1011. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀχθοῦν τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΗ, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ ΑΒΓ περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι $\quad \frac{\alpha}{\Delta A'}+\frac{\beta}{EB'}+\frac{\gamma}{H\Gamma'}=2\epsilon\varphi A\epsilon\varphi B\epsilon\varphi\Gamma$.

1012. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφομεν τεταρτοκύκλιον ΑΜΓ ἔχον ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ τεταρτοκυκλίου ἰσχύει ἡ σχέσις

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\varphi)=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία φ, ὅταν $\alpha=\frac{\pi}{6}$, ὅπου α ἡ γωνία ΜΒΓ καὶ φ ἡ γωνία ΜΔΓ. (Πολυτεχνεῖον)

1013. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ''. Ζητεῖται: 1ον. Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ μήκη $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{\Gamma\Gamma'}$, $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{\Gamma\Gamma''}$ συναρτήσει τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{\overline{AA''}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{BB''}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{\Gamma\Gamma''}}{\overline{\Gamma\Gamma'}}$ εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ τρίγωνα. (Πολυτεχνεῖον 1948)

1014. Δίδεται περιφέρεια κύκλου Κ καὶ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της. Ἀπὸ τὸ Ο ἄγεται τέμνουσα ΟΜΝ, ἡ ὁποία σχηματίζει τὰς γωνίας $\widehat{ΟΚΜ}=ω$ καὶ $\widehat{ΟΚΝ}=ϑ$. Νὰ δειχθῇ, ὅτι

$εφ\frac{ϑ}{2}εφ\frac{ω}{2}=$ σταθερά. (Πολυτεχνεῖον 1948 Πολιτ. μηχ.)

1015. Δίδεται κύκλος Κ ἀκτῖνος α. Προεκτείνομεν διάμετρόν τινα ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΚΓ=τ· ἀκολούθως φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΓΔΕ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τούτων τὸ γινόμενον: $εφ\frac{ΔΚΓ}{2} \cdot εφ\frac{ΕΚΓ}{2}$. (Πολυτεχνεῖον)

Ε' Ὁμάς. **1016.** Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ἡ γωνία Α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $4(1-συνΑ)(1-συνΓ)=συνΑ+συνΓ$.

1017. Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ αἱ $σφ\frac{Α}{2}$, $σφ\frac{Β}{2}$, $σφ\frac{Γ}{2}$ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ αἱ πλευραὶ α, β, γ.

1018. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ συνεφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὰ τετράγωνα τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν θὰ ἀποτελοῦν ἐπίσης ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1019. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἡμιτόνων των εἶναι ἴσον μὲ 2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

1020. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου δὲν δύνανται νὰ σχηματίζουν συγχρόνως ἀριθμητικὰς προόδους.

1021. Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, δὲν δύνανται καὶ αἱ πλευραί του νὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν πρόοδον. (Πολυτεχνεῖον 1947)

ΣΤ' Ὁμάς. **1022.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχει: 1ον. Τὰς πλευράς του ἴσας μὲ α συνΑ, β συνΒ, γ συνΓ. 2ον. Τὴν περίμετρόν του ἴσην μὲ 4RημΑ ημΒ ημΓ. 3ον. Τὸ ἐμβαδόν του Ε' ἴσον μὲ 2ΕσυνΑ συνΒ συνΓ.

1023. Δίδεται ἕνας κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΒ ἀκτῖνος R καὶ γωνίας $ω<90^0$. Ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τομέως λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι γων.ΑΟΜ=x καὶ ἐγγράφομεν εἰς τὸν τομέα τὸ ὀρθογώνιον ΜΝΡΚ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΡΚ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ $μR^2$.

1024. Δίδεται ἕνα τεταρτημόριον ΑΟΒ ἀκτῖνος R· ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, (ΟΓ=γ) φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΟΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸ τόξον εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα ΕΖ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τεταρτημορίου εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΓΔ, νὰ ἔχῃ τὸ μέσον του εἰς τὸ Μ. Νὰ ληφθῇ ὡς ἄγνωστος ἡ γωνία ΑΟΜ=x.

8. Ἐπιλύσεις τριγώνων

Α' Ὁμάς. **1025.** Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $\gamma=4$ μέτρα, καὶ ὅτι $A=2\Gamma$ καὶ $\text{συν}\Gamma=\frac{3}{4}$.

1026. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Β καὶ ὅτι $A\Gamma=2B\Delta$, ὅπου Δ εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους ΑΔ.

1027. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α, τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

1028. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

1029. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ ὅτι $\beta-\gamma+\upsilon_\alpha=\lambda$.

1030. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$.

1031. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸν λόγον $\frac{\upsilon_\alpha}{\varrho_\beta}=\lambda$ καὶ ὅτι $B=2\Gamma$.

1032. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $A=120^0$, τὴν διχοτόμον δ_α καὶ ὅτι $\beta+\gamma-\alpha=\lambda$.

1033. Νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

Β' Ὁμάς. **1034.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὸν λόγον $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\gamma}=\lambda$.

(Πολυτεχνεῖον 1948. Μηχανολόγοι)

1035. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ ὅτι αἱ πλευραί του κατὰ τὴν σειρὰν α, β, γ, σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος ω ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου τούτου.

1036. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης $\eta\mu^2 A-\eta\mu^2 B=\eta\mu(A+B)\eta\mu(A-B)$.

2ον. Συναρτήσει τοῦ λόγου $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}=\lambda$, τῆς πλευρᾶς γ, καὶ τῆς διαφορᾶς $A-B=\omega^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ γίνῃ διερεύνησις, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $0<A-B<\frac{\pi}{2}$.

(Πολυτεχνεῖον 1947. Μηχανολόγοι)

1037. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς τρεῖς γωνίας ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον. 1ον. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ γωνίαι, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 2ον. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=\lambda$.

1038. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ $\alpha=88{,}1$ μέτρα, $\beta=177{,}284$ μέτρα καὶ ἡ γωνία $\Gamma=69^0\ 10'\ 12''$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1039. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου εἰς τὸ Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β, ἐὰν ΒΓ=4ΒΔ.

(Σχολὴ Εὐελπίδων 1947)

1040. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται τὸ ἐμβαδὸν $E=\frac{4}{3}$ τ. μέτρα, $\beta^2+\gamma^2=\frac{20}{3}$ καὶ τὸ γινόμενον εφΒεφΓ=4. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ εφΑ.

1041. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι του ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι φ. Εἶναι δὲ $A<B<\Gamma$. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα συμβαίνῃ αὐτὸ εἶναι νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν πλευρῶν του ἡ σχέσις $(\alpha+\gamma)^2=\beta^2+3\alpha\gamma$. 2ον. Εὕρετε τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ἡ γωνία φ. 3ον. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς β καὶ τῆς περιμέτρου 2τ, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς φ καὶ αἱ ἄγνωστοι πλευραὶ α καὶ γ. Νὰ γίνουν αἱ σχετικαὶ διερευνήσεις. (Πολυτεχνεῖον 1947)

1042. 'Επὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΒ κύκλου Κ ἀκτῖνος 21 μ. λαμβάνομεν τμῆμα ΚΑ=12,6 μ. καὶ ἄλλο ΚΓ=35 μ. καὶ γράφομεν περιφέρειαν Λ ἀκτῖνος 28 μ. διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Γ καὶ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΚΗΛ.

1043. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ΑΒ=120 μέτρα. 'Εκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ, ΑΔ καὶ ΒΕ, ΒΖ εἰς κύκλον Κ 'Εὰν εἶναι γωνΖΒΑ=34°, γωνΓΑΒ=115°, γωνΔΑΒ=63°, γωνΕΒΑ=82°, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ. (Πολυτεχνεῖον)

1044. Δίδεται ἡμικύλιον Ο διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΤ καὶ ΒΣ καὶ ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ φέρομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐφαπτομένην ΒΣ εἰς τὸ σημεῖον Δ· ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ΒΡΔ=x, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΔΕ=μ.

1045. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ σχηματίζουσαι τὰς γωνίας ΑΟΒ=ω, ΑΟΓ=ν καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν τοιοῦτον, ὥστε ΟΑ=μ. Ν' ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα ΑΒΓ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ . ΑΓ=μ^2.

1046. Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. 'Επὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ΟΡ=α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ μία τέμνουσα ΡΓΔ τῆς περιφερείας, ἵνα ἡ γωνία ΓΟΔ νὰ ἔχῃ μέτρον ἴσον μὲ ω.

1047. Δίδεται κύκλος Ο ἀκτῖνος R=2 μέτρων καὶ δύο διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ κάθετοι μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΒ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ χορδὴ ΜΔ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος μ=3 μέτρων.

1048. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΔ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΑΜ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{MAB}=x$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΑΔ νὰ ἔχῃ δεδομένην ἐπιφάνειαν μ^2. 'Εφαρμογή: R=2 μέτρα, μ=1,2 τ. μέτρα.

1049. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΡΑ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΡΒ, ΡΓ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

1050. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΜΓ νὰ εἶναι λ^2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων.

(Πολυτεχνεῖον 1948. Μηχανολόγοι)

1051. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι 250 μέτρα, ἡ δὲ γωνία x, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὴν ΑΓ συνδέεται μετὰ τῆς γωνίας Γ δια τῆς σχέσεως $\eta\mu 2x=\eta\mu\Gamma$. Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι $2\gamma=\beta\sqrt{2}$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον. (Φυσικὸν Τμῆμα Πανεπιστ. Ἀθηνῶν 1948)

1052. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ δίδονται ἐκ τῶν στοιχείων $A=x+\frac{x}{2}$, $\Gamma=2x+\frac{x}{2}$, ἔνθα x εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως .

$\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{x}{2}\right)$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου, ὅταν $\alpha=10\sqrt{2}$ μέτρα. (Πανεπιστ. Ἀθηνῶν Μαθ. Σχ. 1948)

1053. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ. Αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι $AB=156$ μέτρα καὶ $A\Gamma=104\sqrt{1{,}5}$. Ἡ ἀπόστασις ΚΔ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἶναι $26\sqrt{3}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου καὶ αἱ γωνίαι του.

(Πανεπιστ. Ἀθηνῶν. Χημικὴ Σχολή).

1054. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται τὸ ἐμβαδόν του Ε καὶ ἡ περίμετρός του 2τ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του, αἱ γωνίαι του καὶ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐφαρμογή: $E=0{,}275$ τ. μ. καὶ $2\tau=15$ μ.

(Γεωπονικὴ Σχολὴ)

1055. Δίδεται εὐθεῖα $AB=5$ μέτρων καὶ δύο κάθετοι ΑΓ, ΒΔ ἐπ' αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦται, ὥστε $A\Gamma=4$ μετρ. καὶ $B\Delta=3$ μετρ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε

$$\widehat{\Gamma M A}=2\,\widehat{\Delta M B}.$$

1056. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΨ καὶ ἕνα σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΟΨ καὶ τοιοῦτον, ὥστε $O\Gamma=\gamma$. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῆς ΟΧ δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\mu^2$ καὶ ὅτι αἱ γωνίαι ω καὶ ν ὑπὸ τὰς ὁποίας βλέπομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι συμπληρωματικαί.

1057. Εἰς ἕνα ἐπίπεδον χαράσσομεν δύο περιφερείας κύκλων μὲ ἀκτῖνας 6 μετρ. καὶ 8 μετρ. Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν ἀπέχουν 4 μέτρα. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν: 1ον. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ποὺ ἔχει βάσιν τὴν διάκεντρον καὶ κορυφὴν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν. 2ον. Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς. 3ον. Τὰ μέτρα τοῦ τόξου, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν καὶ 4ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κύκλων. (Πολυτεχνεῖον 1948)

1058. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΔΕΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ ΑΒΓ.

1059. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς $A=30^0$ καὶ τὴν μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν $AB=\sqrt{3}$. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα $B\Delta=1$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $B\Delta E=x$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία x εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι $\Delta E=EZ$.

1060. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ διαγωνίου $A\Gamma=2$ μέτρων καὶ κύκλος ὁμόκεντρος ἀκτῖνος R· ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τῆς περιφερείας βλέπομεν τὰς διαγωνίους ὑπὸ τὰς γωνίας ω καὶ ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν τούτων ὑπάρχει σχέσις ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας.

1061. Ἐπὶ εὐθείας δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε $AB=4$, $B\Gamma=2$, $\Gamma\Delta=6$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὸν γωνίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία αὐτή.

1062. Δοθέντος τριγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἄγομεν τρεῖς ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Τοιουτοτρόπως σχηματίζονται τρία νέα τρίγωνα ἐντὸς τοῦ δοθέντος. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρία νέα τρίγωνα ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον. 2ον. Ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὴν ὀγδόην δύναμιν τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον. (Πολυτεχνεῖον 1948)

1063. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του καὶ σχηματίζεται οὕτω ἕνα νέον τρίγωνον. Ἐπίσης φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ νέου τριγώνου καὶ σχηματίζεται ἕνα δεύτερον τρίγωνον κ.ο.κ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ νυοστοῦ τριγώνου.

1064. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες Οx καὶ Οy. Ἐπὶ τοῦ Οx λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τοῦ Οy δύο σημεῖα Β καὶ Γ τοιαῦτα, ὥστε $OB=6$ ἐκ. καὶ $O\Gamma=10$ ἐκ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος $OA=x$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ γωνία $OAB=\omega$ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας $BA\Gamma=\nu$.

Γ' Ὁμάς. **1065.** Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς $\alpha=25$ μ. στρέφεται περὶ ἄξονα xy ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον. Ἐὰν ὁ ἄξων σχηματίζῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ γωνίαν $\omega=25^0\,40'$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ παράγουν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν xy κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.

1066. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$. Φέρομεν τὴν τέμνουσαν

ΒΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία x, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τέμνουσα ΒΔ μὲ τὴν διάμετρον ΒΑ, ἵνα οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ὑπὸ τῆς μικτογράμμου ἐπιφανείας ΑΓΔ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, εἶναι ἰσοδύναμοι.

1067. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΣΒΓ ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τὰ ἐπίπεδά των σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν x. Νὰ ἐκφρασθῇ, συναρτήσει τῆς γωνίας x καὶ τῆς πλευρᾶς α τῶν τριγώνων, ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ. Ἐὰν τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικόν, ποῖαι εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ημx, συνx, εφx.

1068. Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο διαμέτρου ΑΒ=2R λαμβάνομεν ἕνα τόξον ΒΜΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία ΒΟΓ=x, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν, τὰς ὁποίας παράγουν ἡ ἀκτὶς ΟΓ καὶ τὸ τόξον ΒΜΓ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος μ. Ἐφαρμογή: R=1, μ=1.

1069. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ=ΑΔ=1 μέτρον, ΒΓ=ΔΓ=ΒΔ καὶ $\widehat{A}=90^0$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τετράπλευρον, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.

1070. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνονται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ λαμβάνομεν τμήματα ΑΒΔ=ΑΒ.λ, ΒΓΕ=ΒΓ.μ, ΓΑΖ=ΓΑ.ν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΑΒΓ συναρτήσει τῶν λ, μ, ν.

1071. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=β=3 ἑκ.) ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, στρέφεται περὶ ἄξονα ΒΧ, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Β καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία ΧΒΓ=x, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ μὲ τὸν ἄξονα ΒΧ οὕτως, ὥστε ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον, ὅταν τοῦτο στραφῇ κατὰ ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὸν ἄξονα ΒΧ, νὰ εἶναι ἴσος μὲ $2\pi\sqrt{2}$.

1072. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ οὕτως, ὥστε $\widehat{\Gamma O \Delta}=45^0$. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία ΒΟΓ=x οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΓΔΟ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ κατὰ ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ποὺ παράγει τὸ ἡμικύκλιον νὰ εἶναι ἴσος μὲ μ. Ἐφαρμογή: $R=1$ καὶ $\mu=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

1073. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΒΔ=2 μέτρ. καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν διαγωνίων του ἴση μὲ 2ω. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν διαγωνίου ΓΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ σχηματίζομεν ἕνα δεύτερον ὀρθογώνιον ΕΖΔΗ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ΕΔ καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων τοῦ ΕΖΔΗ συναρτήσει τῶν λ καὶ ω.

1074. Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ἀκτῖνος R. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ κέντρου ἀπόστασιν $AO=\lambda$ φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΔΕ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Α γωνίαν ω. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΔΕ, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτοῦ κύκλου καὶ ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπ' αὐτοῦ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒΓ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΒΔΕΓ.

1075. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι διαμέτρων $AB=2R$ καὶ $A'B'=2R'$ $(R'>R)$. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΜ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐξωτερικὴν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία $MAB=x$, εἰς τρόπον ὥστε, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ νὰ εἶναι ἴσον μὲ μ^2. Ἐφαρμογή: $R=2$, $R'=2{,}5$ καὶ $\mu=2{,}5$.

1076. Νὰ τμηθῇ σφαῖρα Ο, ὥστε ὁ κῶνος ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν τομὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον Ο, νὰ ἔχῃ ὄγκον τριπλάσιον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ὁ κῶνος.

(Πολυτεχνεῖον Χημ. τμῆμα 1947)

1077. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν συντρεχουσῶν πρὸς τὴν μίαν κορυφήν του καὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται ἀνὰ δύο. (Πολυτεχνεῖον 1947)

1078. Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις $B\Gamma=\alpha$, τὸ ὕψος $A\Delta=\upsilon$ καὶ ἡ γωνία Α. Συνδέομεν τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ προκύπτει οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΕΖ. Συνδέομεν τὰ μέσα Η καὶ Θ τῶν ΑΕ καὶ ΑΖ καὶ προκύπτει οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΗΘ κλπ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ κατὰ σειρὰν τέταρτον τρίγωνον ΑΙΚ διὰ τῶν στοιχείων τοῦ ἀρχικοῦ. Ἐφαρμογή:

$$A=30^0\ 30',\quad \upsilon=33 \text{ μέτρα},\quad \alpha=44 \text{ μέτρα}.$$

1079. Δίδεται κύκλος Γ ἀκτῖνος R, ἐφαπτόμενος τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΒ εἰς τὰ Α καὶ Β. Φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΟΜΝ σχηματίζουσαν μὲ τὴν ΟΓ γωνίαν x. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον. τὸ ἄθροισμα $OM+ON$ συναρτήσει τῶν R καὶ x. 2ον. Τὸ γινόμενον $OM \cdot ON$ καὶ 3ον. Ἡ γωνία x, ἂν $ON=3OM$.

1080. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΟΧ λαμβάνομεν τμῆμα $OA=\alpha$. Ἀπὸ τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον $AB=\alpha$ ἐπὶ τὴν ΟΧ. Συνδέομεν δι' εὐθείας τὸ Β μὲ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ΟΧ καὶ φέρομεν τὴν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΜ. Παριστάνομεν μὲ x τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΟΜΒ. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν α καὶ x, αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος ΔΕ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΜ. 2ον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ x εἰς τρόπον, ὥστε $\Delta E=\dfrac{\alpha}{2}$.

1081. Περιφέρεια κύκλου Ο ἀκτῖνος R ἐφάπτεται εὐθείας ΧΨ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Β τῆς καθέτου ΓΟ ἐπὶ τὴν ΧΨ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας πρὸς τὴν περιφέρειαν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΧΨ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α'. Θέτομεν $\Gamma A=x$ καὶ $\widehat{\Gamma A O}=\omega$. 1ον. Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ ΓΑ, ΓΒ, ΑΒ συναρτήσει τῶν R καὶ ω. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ $\dfrac{x(x^2+R^2)}{x^2-R^2}$.

1082. Αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων K_α, K_β, K_γ εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ καὶ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διαδοχικαὶ ἀκτῖνες ϱ_α, ϱ_β εἶναι 35^0. Νὰ ἐκφρασθῇ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διὰ τῆς ἀντιστοίχου εἰς αὐτὴν ἀκτῖνος τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

9. Διάφορα.

1083. Τεθλαμένης γραμμῆς $A_0A_1A_2 \ldots A_\nu$ κάθε πλευρά της $A_{\varkappa-1}A_\varkappa$ (διὰ $\varkappa=1, 2, \ldots \nu$) εἶναι λ καὶ κάθε γωνία της $\widehat{A_{\varkappa-1}A_\varkappa A_{\varkappa+1}}$ (διὰ $\varkappa=1, 2, \ldots \nu$) εἶναι $\pi-\vartheta$, ἔνθα ϑ σταθερόν.

Νὰ δειχθῇ : 1ον. ὅτι τὸ μῆκος A_0A_ν εἶναι $\eta\mu\dfrac{\nu\vartheta}{2} : \eta\mu\dfrac{\vartheta}{2}$.

2ον. $$1+\sigma\upsilon\nu\vartheta+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta+\ldots+\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\vartheta=\frac{\eta\mu\dfrac{\nu\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\nu-1\right)\dfrac{\vartheta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\vartheta}{2}}$$

$$\eta\mu\vartheta+\eta\mu 2\vartheta+\ldots+\eta\mu(\nu-1)\vartheta=\frac{\eta\mu\dfrac{\nu\vartheta}{2}\eta\mu\left(\nu-1\right)\dfrac{\vartheta}{2}}{\eta\mu\dfrac{\vartheta}{2}}.$$

3ον. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ 0 καὶ 2π λύσεις τῆς ἐξισώσεως $1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x=0$.

(Πολυτεχνεῖον 1948. Μηχανολόγοι)

1084. Ἐὰν τρεῖς γωνίαι α, β, γ, μεγαλύτεραι τοῦ 0^0 καὶ μικρότεραι τῶν 180^0, συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως συνα=συνβ συνγ, δείξατε, ὅτι τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι εἴτε ἡ μία μόνον ἀμβλεῖα εἴτε καὶ αἱ τρεῖς ἀμβλεῖαι. Κατόπιν τούτου ποῖαι περιπτώσεις εἶναι δυναταί ;

1085. Σιδηροδρομικὴ γραμμὴ σχηματίζει καμπύλην ἀκτῖνος καμπυλότητος 150 μ. Ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς μετὰ τοῦ ὁρίζοντος διὰ νὰ μὴ ἐκτροχιασθῇ ἡ ἁμαξοστοιχία, καθ' ἣν στιγμὴν διέρχεται διὰ τῆς καμπύλης μὲ μεγίστην ταχύτητα 90 χμ. τὴν ὥραν ;

1086. Ἐὰν $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ κληθῶσι τὰ ἡμίτονα καὶ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ τὰ ἀντίστοιχα συνημίτονα τῶν γωνιῶν τριγώνου, θὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις :

$$(\varrho_1+\sqrt{\lambda}\,\sigma_1)(\varrho_2+\sqrt{\lambda}\,\sigma_2)(\varrho_3+\sqrt{\lambda}\,\sigma_3)=P+\sqrt{\lambda}\,\Sigma \qquad (1)$$
$$(\varrho_1-\sqrt{\lambda}\,\sigma_1)(\varrho_2-\sqrt{\lambda}\,\sigma_2)(\varrho_3-\sqrt{\lambda}\,\sigma_3)=P-\sqrt{\lambda}\,\Sigma \qquad (2)$$

ἔνθα $P=(\lambda+1)\varrho_1\varrho_2\varrho_3$, $\Sigma=(\lambda+1)\sigma_1\sigma_2\sigma_3+1$ καὶ λ τυχὼν ἀριθμός.

1087. Ἐὰν τ_1, τ_2, τ_3 κληθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις: $\tau_1^3+\tau_2^3+\tau_3^3=0$ οὐδέποτε ἀληθεύει.

Η ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΙΣ ΑΥΤΗΣ

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ παρόντος βιβλίου ἐμάθαμεν, ὅτι αἱ γνωσταὶ μέθοδοι κατασκευῶν τριγώνων, τὰς ὁποίας μᾶς διδάσκει ἡ Γεωμετρία, εἶναι μὲν θεωρητικῶς ἀκριβεῖς, ἀλλ' ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν χρησιμοποιουμένων γεωμετρικῶν ὀργάνων, ὑπόκεινται εἰς σφάλματα κατὰ τὴν ἐφαρμογήν των. Διὰ τοῦτο αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ εἶναι ἀνεπαρκεῖς εἰς τὴν πράξιν. Λόγῳ τῆς ἀνεπαρκείας αὐτῆς ἐδημιουργήθη ἡ ***Τριγωνομετρία,*** ἡ ὁποία διακρίνεται εἰς ***εὐθύγραμμον*** ἢ ***ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν*** καὶ εἰς ***σφαιρικήν.***

Ἐμάθαμεν ἐπίσης, ὅτι ἡ εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία ἔχει σκοπὸν τὴν ἀναλυτικὴν ἐπίλυσιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων, δηλ. τὴν δι' ὑπολογισμοῦ εὕρεσιν τῶν μέτρων τῶν στοιχείων αὐτοῦ, ὅταν δοθοῦν ἱκανὰ ἐξ αὐτῶν.

Πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ της ἐμάθαμεν, ὅτι ἡ τριγωνομετρία ἐρευνᾷ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἓξ κυρίων στοιχείων ἑκάστου τριγώνου. Ἐκ τῆς ἐρεύνης αὐτῆς κατορθώνει νὰ εὑρίσκῃ, μὲ ἀριστοτεχνικὸν τρόπον, τοὺς τύπους, τοὺς ὁποίους ἀνεγράψαμεν ἐντὸς κορνιζῶν καὶ οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τοιαύτας σχέσεις, ὡς περιέχοντες τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

Εἰς τὸ σημεῖον ὅμως τοῦτο καταλαμβανόμεθα ἀπὸ θαυμασμὸν πρὸς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν, ὁ ὁποῖος ὑπὸ τὸ φῶς τῆς ἐρεύνης ἔλαμψε καὶ ἐφώτισεν ἀπλέτως τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα, ὑπὸ τὴν ἰσχυρὰν αὐτὴν ἀνταύγειαν, ἀφῆκαν νὰ ἀποκαλυφθοῦν τὰ μυστικά των διὰ τῶν λογιστικῶν σχέσεών των.

Ποῖος ὅμως ὁ ἱδρυτὴς τοῦ κλάδου τούτου τῶν Μαθηματικῶν δὲν γνωρίζομεν ἀκριβῶς. Καὶ εἶναι ἀληθὲς περίεργον, πῶς κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ὁ ὁποῖος, ὅπως ἐμάθαμεν, ἔχει τόσας ἐφαρμογὰς καὶ ὁ ὁποῖος, χάρις εἰς τοὺς εὑρεθέντας τύπους, δίδει τὴν λύσιν εἰς τόσα προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς πλείστας ἐκδηλώσεις τῆς ἀνθρωπίνης ζωῆς, δὲν φέρει τὸ τιμητικὸν ὄνομα τοῦ θεμελιωτοῦ του. Οἱ πλεῖστοι τῶν μεγάλων ἀρχαίων Γεωμετρῶν ἀπορροφημένοι ἀπὸ τοὺς ἀφηρημένους συλλογισμοὺς καὶ τὰς θεωρίας τῆς Γεωμετρίας, φαίνεται ὅτι δὲν ἔδωσαν εἰμὴ δευτερεύουσαν σημασίαν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν εἰς τὴν πρᾶξιν. Αὐτὸς ἀναμφιβόλως εἶναι ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἔμεινεν ἄγνωστος ἡ πρώτη ἀρχὴ τῆς Τριγωνομετρίας.

Ὁπωσδήποτε ἱδρυτὴς τῆς Τριγωνομετρίας θεωρεῖται ὁ ***Ἵππαρχος*** (2ος π. Χ. αἰὼν) ἐκ Νικαίας τῆς Βιθυνίας, μέγας τῆς ἀρχαιότητος ἀστρονόμος. Μετ' αὐτὸν ὁ ***Μενέλαος*** (1ος μ. Χ. αἰὼν) εἰσήγαγε τὴν χρῆσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ ἀπέδειξε τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς περιπτώσεις ἰσότητος αὐτῶν. Ἔπειτα ὁ ***Πτολεμαῖος*** (108—160 μ.Χ.) πρῶτος ὑπελόγισε τὰς τριγωνομετρικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν τριῶν γωνιῶν καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου. Ὁ Πτολεμαῖος μάλιστα ἔκαμε χρῆσιν πίνακος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀντὶ τοῦ ἡμιτόνου εἰσέρχεται τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου. Τὸ ἡμίτονον εἰσήγαγον οἱ Ἰνδοί, οἱ ὁποῖοι συνέταξαν καὶ τοὺς πρώτους πίνακας ἡμιτόνων. Οἱ ἴδιοι εἰσήγαγον καὶ τὸ συνημίτονον. Τὰς ὑπολοίπους τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις εἰσήγαγον οἱ Ἄραβες.

Εἰς τὴν Δύσιν ἡ σπουδὴ τῆς Τριγωνομετρίας εἰσήχθη μόλις κατὰ τὸν 15ον αἰῶνα, (Regiomontanus 1436—1475, Rheticus 1514—1575). Ἀλλὰ ἡ ἀνάπτυξις αὐτῆς ἦτο τόσον ραγδαία, ὥστε κατὰ τὰ μέσα τοῦ ἰδίου αἰῶνος οἱ εὐρωπαῖοι ἐπιστήμονες ἀνέπτυξαν συστηματικῶς, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, τὰς μεθόδους διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων.

Ἂν καὶ σχετικῶς μικρὰ ἡ γνῶσις διὰ τὴν ἱστορικὴν ἐξέλιξιν τῆς Τριγωνομετρίας, ἐν τούτοις ἀρκετὰ μεγάλη εἶναι ἡ χρησιμότης της καὶ πλουσία ἡ ἐξ αὐτῆς ἀπόδοσις. Διὰ τῆς Τριγωνομετρίας κατώρθωσεν ὁ ἄνθρωπος νὰ δώσῃ τὴν λύσιν εἰς πλεῖστα προβλήματα, ποὺ τὸν ἀπησχόλησαν. Τῆς Τριγωνομετρίας προϊόντα εἶναι τὰ θαυμάσια ἔργα τῆς Μηχανικῆς, Αρχιτεκτονικῆς, Γεφυροποιΐας, Ὁδοποιΐας, Ναυπηγικῆς κλπ.) πρὸ τῶν ὁποίων ἐνίοτε ἱστάμεθα κατάπληκτοι.

Ἂν μάλιστα εἰς ὅλα αὐτὰ προσθέσωμεν καὶ τὰς ὑπερόχους κατακτήσεις, ποὺ ἔχει κάμει καὶ πρόκειται νὰ κάμῃ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς πολὺ πέραν τοῦ γηραιοῦ πλανήτου μας, χάρις εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν, δυνάμεθα ἀδιστάκτως νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ εὕρεσις τῆς Τριγωνομετρίας ἀποτελεῖ γιγάντιον ἆθλον τῆς ἀνθρωπίνης διανοήσεως, διὰ τὸν ὁποῖον δικαίως ἠμπορεῖ νὰ σεμνύνεται.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1. **Ἄλγεβρα.** Βιβλίον ἀπαραίτητον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Σελ. 600. Δρχ. 50.000
2. **Μεγάλη Θεωρητικὴ Γεωμετρία.** Περιέχει τὴν ὕλην τὴν διδασκομένην εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ Πρακτικὰ Λύκεια καὶ 3000 ἀσκήσεις. Βιβλίον ἀπαραίτητον διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Δρχ. 60.000
3. **Μεγάλη Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία.** Περιέχει τὴν ὕλην τὴν διδασκομένην εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ Πρακτικὰ Λύκεια καὶ 1090 ἀσκήσεις. Ἔκδ. Β΄. Δρχ. 20.000
4. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων Γεωμετρίας,** τῶν περιεχομένων εἰς τὴν Μεγάλην Γεωμετρίαν. Τεύχη 1—5 Δραχ. 85.500
5. **Ἀσκήσεις καὶ Θεωρία Ἀλγέβρας.** Κυκλοφοροῦν 6 τόμοι, οἱ ὁποῖοι περιέχουν 6200 ἀσκήσεις Ἀλγέβρας λ υ μ έ ν α ς. Οἱ δύο πρῶτοι τόμοι τιμῶνται ἀπὸ 12.500 δρχ. ἕκαστος, οἱ τρεῖς ἑπόμενοι ἀπὸ 15.000 δρχ. ἕκαστος καὶ ὁ 6ος 20.000 δρχ.
6. **Προβλήματα Γεωμετρικῶν τόπων καὶ κατασκευῶν** εἰς δύο τόμους. Περιέχουν 964 ἀσκήσεις λ υ μ έ ν α ς ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Ὁ Ι τομος τιμᾶται 15.000 καὶ ὁ ΙΙ 20.000 δρχ.
7. **Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Γεωμετρίας.** (Συμπλήρωμα). Τὸ βιβλίον αὐτὸ περιέχει 397 ἀσκήσεις Γεωμετρίας λ υ μ έ ν α ς, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς μεθόδους ποὺ χρησιμοποιεῖ ἡ Γεωμετρία πρὸς ἀπόδειξιν γεωμ. θεωρημάτων καὶ τὴν λύσιν γεωμ. προβλημάτων. Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶναι ἰδιαιτέρως ἀπαραίτητον διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Πολυτεχνείου. Τιμᾶται δρχ. 20.000.
8. **Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Τριγωνομετρίας** ὑπὸ Πέτρ. Τόγκα καὶ Παν. Πούντζα. Περιέχει 1675 ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας λ υ μ έ ν α ς εἰς τρεῖς τόμους. Ἕκαστος τόμος τιμᾶται δρχ. 15.000.
9. **Νέοι πίνακες Λογαρίθμων.** (Ζ΄ Ἔκδοσις). Οἱ πίνακες αὐτοὶ περιέχουν καὶ πλῆρες τυπολόγιον Ἀλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας, Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, Φυσικῆς, Ἀναλύσεως, Κοσμογραφίας, Χημείας Δρχ. 10.000
10. **Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.** (Ἐξηντλήθησαν)
11. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς Τριγωνομετρίας Ὀργανισμοῦ.** Δρχ. 6.000
12. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς Ἀλγέβρας Ὀργανισμοῦ.** Δρχ. 4.000
13. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς Ἀριθμητικῆς Ὀργανισμοῦ.** Δρχ. 10.000

ΤΥΠΩΝΟΝΤΑΙ

Αἱ λύσεις τῶν ἀσκήσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τῆς Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας.