

Δ 2 m
ΣΠΥΡΟΥ ΚΑΝΕΛΛΟ

Καυδ 2201/3201

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΤΟΜΟΣ

ΠΡΩΤΟΣ



ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

Δ

2

MMI

Κουίζος (Βιβλίο 5.)

ΑΛΓΕΒΡΑ

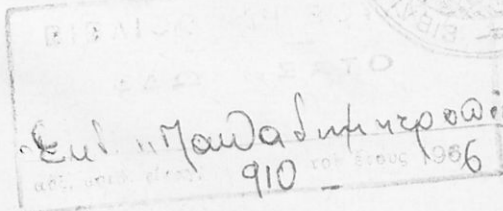
ΔΙΑ ΤΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΥΠΟ

ΣΠΥΡΟΥ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

Υφηγητού του Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν



ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ,"

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

002
112
ET 28
2334

Υπογραφή του συγγραφέως

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ
ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ Α΄ ΤΟΜΟΥ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Σ

Σύνολα (Γενικότητες, διμελείς σχέσεις, δομή)

Θεωρητική Ἀριθμητική

Πραγματικοὶ ἀριθμοὶ

Ἀλγεβρικός λογισμὸς

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως

Γραμμικαὶ ἐξισώσεις, ἀνισώσεις καὶ συστήματα

Ρηταὶ καὶ ἄρρητοι Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις

Γραφικαὶ παραστάσεις πρωτοβαθμίων συναρ-
τήσεων

Ἀναλυτικὴ Γεωμετορία τῆς εὐθείας

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Εἰς τὸ παρὸν διδακτικὸν βιβλίον Ἀλγέβρας, ἀφ' ἐνὸς μὲν γίνεται ἡ πραγματεύσεις τοῦ βασικοῦ τούτου κλάδου τῶν Μαθηματικῶν τῇ βοήθειᾳ τῶν νεωτέρων μεθόδων καὶ συμβόλων διὰ τῶν ὁποίων αὐξάνεται σημαντικῶς ἡ συντομία, ἡ τάξις καὶ ἡ διαύγεια, ἀφ' ἑτέρου δὲ οὐδὲν παραλείπεται ἀπὸ τὸν κλασικὸν Ἀλγεβρικὸν λογισμόν.

Ἡ διδακτέα ὕλη τῆς Ἀλγέβρας μαζὶ μὲ τὰ συναφῆ εἰδικὰ θέματα εἶναι συμφώνως πρὸς τὰς συγχρόνους ἀπαιτήσεις, λίαν ἐκτεταμένη. Διὰ τοῦτο τὸ ὅλον βιβλίον ἔχωρίσθη εἰς τρεῖς τόμους. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον τίθενται αἱ βάσεις ὁλοκλήρου τῆς Ἀλγέβρας ὡς ἐπίσης καὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ἡ ὁποία εἶναι παντοιοτρόπως χρήσιμος εἰς διαφοροὺς κλάδους τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν. Μὲ τὸν δεῦτερον τόμον συμπληροῦται ἡ κυρίως διδακτέα ὕλη τῆς Ἀλγέβρας, ἐνῶ ὁ τρίτος τόμος περιέχει εἰδικώτερα θέματα διὰ τῶν ὁποίων ὁλοκληροῦται ἡ ὕλη τῆς Ἀλγέβρας.

Ἀθῆναι, Ἀπρίλιος 1966

Σ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΣ

ΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αἱ προτεινόμεναι ἀσκήσεις διακρίνονται εἰς δύο κατηγορίας σημειουμένας διὰ τῶν γραμμάτων Α καὶ Β. Αἱ ἀσκήσεις μὲ τὸ διακριτικὸν Α εἶναι αἱ ἀπλούστεραι, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸ πλεῖστον εἶναι ἄμεσοι συνέπειαι τῆς θεωρίας. Αἱ σημειωμένα μὲ τὸ Β εἶναι αἱ συνθετώτεραι.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

(Αί παράγραφοι (§) αναγράφονται εις τὸ ἄνω μέρος ἐκάστης σελίδος)

I. ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

- § 1. Ἐννοια τοῦ συνόλου
- § 2. Τομὴ συνόλων
- § 3. Ἐνῶσις συνόλων
- § 4. Συμπληρωματικά σύνολα
- § 5. p , q - μέθοδος
- § 6. Τρεῖς νόμοι πράξεων
- § 7. Διατεταγμένα ζεύγη
- § 8. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων
- § 9. Διαφορὰ δύο συνόλων

II. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

- § 10. Ἰσοδυναμικά σύνολα
- § 11. Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
- § 12. Διάταξις μεγέθους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
- § 13. Ἀπειροσύνη
- § 14. Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς
- § 15. Πρόσθεσις ἀκεραίων
- § 16. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως
- § 17. Ἰσοδύναμοι σχέσεις
- § 18. Ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων
- § 19. Κανόνες ἀφαιρέσεως
- § 20. Πράξεις εἰς ἀνισότητας
- § 21. Γινόμενον δύο ἀκεραίων
- § 22. Πολλαπλασιασμός ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἰσότητος ἢ ἀνισότητος, ἐπὶ ἀκεραίων
- § 23. Ἐπιμεριστικός νόμος
- § 24. Γινόμενον περισσοτέρων ἀκεραίων
- § 25. Συνέπειαι θεμελιωδῶν νόμων
- § 26. Ὁ παράγων μηδέν
- § 27. Νόμος διαγραφῆς εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν
- § 28. Δυνάμεις μὲ φυσικοὺς ἐκθέτας. Δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως
- § 29. Πολλαπλάσια
- § 30. Ἰσότης τῆς διαιρέσεως
- § 31. Ἄρτιοι καὶ περιττοὶ
- § 32. Διαιρέται
- § 33. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης
- § 34. Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον
- § 35. Σχετικῶς πρῶτοι
- § 36. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοὶ
- § 37. Πρῶτοι παράγοντες
- § 38. Συστήματα ἀριθμήσεως

III. ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

- § 39. Ἐκτελεσταί, ἀκεραίοι καὶ κλασματικοὶ

- § 40. Ἀριθμητικὰ κλάσματα
- § 41. Σύμμετροι ἀριθμοὶ
- § 42. Ἰσότητες μεταξύ συμμέτρων
- § 43. Ἐνιαία μορφή τῶν συμμέτρων
- § 44. Ἀνάγωγα κλάσματα
- § 45. Τροπὴ κλασμάτων εἰς ὁμόνυμα
- § 46. Ἀνισότητες μεταξύ συμμέτρων
- § 47. Πρόσθεσις τῶν κλασμάτων
- § 48. Ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων
- § 49. Πολλαπλασιασμός τῶν κλασμάτων
- § 50. Διαίρεσις τῶν κλασμάτων
- § 51. Ἀκέραιον μέρος ἀριθμητικοῦ κλάσματος
- § 52. Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ
- § 53. Δεκαδικὴ προσέγγισις πηλίκου
- § 54. Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα
- § 55. Δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τῶν συμμέτρων

IV. ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

- § 56. Ἀκεραία νουστή δύναμις
- § 57. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβῆς
- § 58. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος
- § 59. Προσέγγισις κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν
- § 60. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ...
- § 61. Κυβικὴ ρίζα, νουστή ρίζα
- § 62. Ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου
- § 63. Εὐθύγραμμα τμήματα σύμμετρα πρὸς ἄλληλα
- § 64. Εὐθύγραμμα τμήματα ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα
- § 65. Ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ
- § 66. Ρητὰ προσεγγίσεις ἐνδὸς ἀσυμμέτρου
- § 67. Πράξεις μὲ ἀσύμμετρος
- § 68. Ἀνισότητες μεταξύ ἀσυμμέτρων
- § 69. Ἐνα θεώρημα

V. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- § 70. Προσανατολισμένα μεγέθη
- § 71. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ
- § 72. Δεσμευμένον διάνυσμα
- § 73. Χαρακτῆρες τοῦ διανύσματος
- § 74. Ἐλεύθερον διάνυσμα
- § 75. Συγγραμμικά διανύσματα
- § 76. Μηδενικὸν διάνυσμα
- § 77. Πρόσθεσις διανυσμάτων
- § 78. Πολλαπλασιασμός διανύσματος ἐπὶ σχετικὸν ἀριθμὸν

- § 79. Διανυσματική εικών ενός σχετικού αριθμού
 § 80. Τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 81. Ἀθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 82. Διαφορὰ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 83. Ἀλγεβρικὸν ἀθροισμα
 § 84. Γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 85. Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 86. Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ φυσικοῦς ἐκθέτας
 § 87. Πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 88. Ἀλγεβρικά κλάσματα
 § 89. Ἀναλογίαι
 § 90. Ταυτότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μέ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν
 § 91. Δεύτερος ὁρισμὸς τῆς ἀπολύτου τιμῆς
 § 92. Τὸ σύνολον Ακ τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας
 § 93. Ἀριθμητικαὶ ἰσοδυναμιαὶ
 § 94. Δυνάμεις μέ ἐκθέτην τυχόντα ἀκεραίων
 § 95. Σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι τῆς Ἀλγέβρας
 § 96. Διαδοχικαὶ ἐπεκτάσεις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ
 § 97. Ἀνισότητες
 § 98. Αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων

VI. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- § 99. Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, ταυτότητες, σχέσεις
 § 100. Μονώνυμα
 § 101. Ἀκέραια πολυώνυμα
 § 102. Ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς
 § 103. Ἀξιοσημεῖωτοι πολλαπλασιασμοὶ
 § 104. Ἄλλα, αξιοσημεῖωτοι ταυτότητες
 § 105. Τύπος τοῦ διωνύμου
 § 106. Παραγοντοποίησις
 § 107 – 113. Περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως.
 § 114. Ἐφαρμογαὶ τινες τῆς μετατροπῆς εἰς γινόμενον
 § 115. Κυκλικὴ μετατροπὴ

VII. ΜΗ ἈΡΝΗΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ — ΑΠΟΛΥΤΟΙ ΤΙΜΑΙ

- § 116. Δευτεροτάξιον ὀρίζουσαι
 § 117. Μὴ ἄρνητικαὶ μορφαί, ταυτότης τοῦ Lagrange

- § 118. Μόνιμοι ἀνισότητες
 § 119. Ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν

VIII. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ— ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- § 120. Τὰ σύνολα Π Π² Π³...
 § 121. Τὰ σύμβολα Y καὶ X
 § 122. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον
 § 123. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις
 § 124. Σύνθεσις ἀπεικονίσεων

IX. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ἘΝΑ ἈΓΝΩΣΤΟΝ

- § 125. Συναρτήσεις
 § 126. Πραγματικαὶ συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς
 § 127. Πραγματικοὶ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν
 § 128. Ἀκέραια Ἀλγεβρικά παραστάσεις
 § 129. Ἐξισώσεις μέ ἓνα ἄγνωστον
 § 130. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις
 § 131. Πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις
 § 132. Παραγοντοποιημέναι ἐξισώσεις
 § 133. Διαστήματα
 § 134. Ἀνισώσεις μέ ἓνα ἄγνωστον
 § 135. Ἐπίλυσις πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων
 § 136. Σημεῖον τοῦ γινομένου $(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \tau)$
 § 137. Συστήματα ἀνισώσεων μέ ἓνα ἄγνωστον
 § 138. Ἐξισώσεις καὶ ἀνισώσεις περιέχουσαι τὸ x καὶ ἀπολύτους τιμὰς τῆς μορφῆς $|x - \kappa|$

X. ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- § 139. Ἐξισώσεις μέ πολλοὺς ἀγνώστους
 § 140. Πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις μέ δύο ἀγνώστους εἰς τὸ πεδῖον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
 § 141. Σύστημα ἐξισώσεων
 § 142. Ἰσοδύναμα συστήματα
 § 143. Μέθοδοι ἐπιλύσεως πρωτοβαθμίων συστημάτων μέ δύο ἀγνώστους
 § 144. Διερεύνησις τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μέ δύο ἀγνώστους
 § 145. Πρωτοβάθμια συστήματα μέ περισσότερους τῶν δύο ἀγνώστους
 § 146. Ἰδιαίτεροι τινὲς μέθοδοι
 § 147. Τριτοτάξιον ὀρίζουσαι

- § 148. Ἰδιότητες τῶν ὀριζουσῶν
 § 149. Κανὼν τοῦ Cramer
 § 150. Ἐξισώσεις συμβιβασταὶ
 § 151. Ὁμογενῆ γραμμικὰ συστήματα
 § 152. Πρωτοβάθμια προβλήματα με
 ἓνα ἄγνωστον
 § 153. Πρωτοβάθμια προβλήματα με
 πολλοὺς ἄγνωστους

XI. ΡΗΤΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- § 154. Ρητὰ κλάσματα
 § 155. Κοινὰ πολλαπλάσια ἄκεραίων
 παραστάσεων
 § 156. Πρόσθεσις ρητῶν κλασμάτων
 § 157. Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσις
 ρητῶν κλασμάτων.
 § 158. Ρηταὶ ἀλγεβρικοὶ παραστάσεις
 159. Σύνθετα κλάσματα
 160. Ρηταὶ κλασματικαὶ ἐξισώσεις
 161. Ἐπίλυσις ρητῶν ἐξισώσεων
 162. Κλασματικαὶ ἀνισώσεις

XII. ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- § 163. Ρίζαι πραγματικῶν ἀριθμῶν
 164. Ἰδιότητες τῶν ριζῶν
 165. Ἀρνητικὰ ὑπόρριζα
 166. Λογισμός με ρίζας
 167. Ρητοποιήσις τοῦ παρονομαστοῦ
 168. Ἀρρητοὶ συναρτήσεις
 169. Διώνυμα $a + b\sqrt{\gamma}$
 170. Διπλὰ ριζικὰ
 171. Δυνάμεις με κλασματικὸν ἐκθέτην
 172. Ἀρρητοὶ ἐξισώσεις
 173. Παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀρρή-
 τῶν ἐξισώσεων
 § 174. Ἀρρητοὶ ἐξισώσεις με παράμε-
 τρον
 § 175. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$$

 § 176. Προσεγγίσεις

XIII. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

- § 177. Ἀλγεβρική τιμὴ διανύσματος
 178. Θεώρημα τοῦ Châles
 § 179. Τετμημένη σημείου κειμένου
 ἐπὶ ἄξονος
 § 180. Λόγος δύο συγγραμμικῶν δια-
 νυσμάτων

- § 181. Διαίρεσις διανύσματος εἰς δοθέ-
 ντα λόγον
 § 182. Συντεταγμένοι σημείου
 § 183. Γραφικὴ παράστασις συναρτή-
 σεως — Μεταβολαὶ
 § 184. Συντεταγμένοι διανύσματος
 § 185. Συνθήκη παραλληλίας διανυσμά-
 τῶν
 § 186. Γραφικὴ παράστασις πρωτοβαθ-
 μίου συναρτήσεως
 § 187. Γραφικὴ ἐπίλυσις συστήματος
 με δύο ἄγνωστους

XIV. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΝ ΕΠΙΠΕΔΩ

- § 188. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας
 § 189. Θέσεις εὐθειῶν πρὸς ἄλληλας
 190. Τρία σημεία ἐπ' εὐθείας
 191. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν
 § 192. Θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος
 τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν
 $ax + by + \gamma = 0$
 § 193. Μετρικὸν ἐπίπεδον
 194. Μῆκος διανύσματος
 § 195. Συνθήκη καθετότητος δύο δια-
 νυσμάτων ἐν τῷ μετρικῷ ἐπι-
 πέδῳ
 § 196. Προσημασμένα ἐμβαδὰ
 § 197. Ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν συν-
 τεταγμένων τῶν κορυφῶν
 § 198. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας
 ἐν τῷ μετρικῷ ἐπιπέδῳ
 § 199. Πολικαὶ συντεταγμένοι ἐν ἐπι-
 πέδῳ

XV. ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ : ΔΥΑΔΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ — ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ — ΔΟΜΗ ΣΥΝΟΛΟΥ

- § 200. Δυαδικαὶ σχέσεις καὶ οἱ οὐ-
 σιῶδεις χαρακτῆρες τῶν
 § 201. Σχέσις τάξεως
 § 202. Σχέσις ἰσοδυναμίας
 § 203. Ἐσωτερικὸς νόμος εἰς ἓνα σύν-
 ολον
 § 204. Ἰδιότητες τῶν ἐσωτερικῶν νό-
 μων (ἢ πράξεων)
 § 205. Ἰσομορφισμός
 § 206. Ὁμάδες
 207. Δακτύλιοι.
 § 208. Σώματα

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΟΚΛΗ- ΡΟΥ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Πρῶται γνώσεις ἐπὶ τῶν συνόλων

§ 1. Ἔννοια τοῦ συνόλου. α') Ἐάν θεωρήσωμεν διάφορα ἀντικείμενα (εἴτε φυσικὰ εἴτε νοητά, πάντως, καλῶς καθωρισμένα) καὶ τὰ συνενώσωμεν διὰ τῆς σκέψεώς μας εἰς ἓνα ὅλον (εἰς μίαν ομάδα) δημιουργοῦμεν, τότε, ἓνα *σύνολον*. Ἡ προσοχή μας δὲ κατευθύνεται εἰς τὸ ὅλον καὶ ὄχι εἰς ἕκαστον μεμονωμένον ἀντικείμενον.

Ἐπομένως: *σύνολον καλεῖται κάθε συλλογή ἀντικειμένων.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως, τὸ σύνολον τῶν παικτῶν μιᾶς ποδοσφαιρικῆς ομάδος, τὸ σύνολον τοῦ ἄρρενος πληθυσμοῦ μιᾶς χώρας, τὸ σύνολον τῶν θεμελιωδῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς (πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις), τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χαραχθοῦν ἐπὶ ἐνὸς δεδομένου ἐπιπέδου.

β') Τὸ *σύμβολον τοῦ «ἀνήκειν»*.—Τὰ ἀντικείμενα τὰ ἀπαρτίζοντα τὸ σύνολον καλοῦνται *στοιχεῖα (ἢ σημεῖα) τοῦ συνόλου*.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ τοῦ A ἓνα σύνολον τότε ὁ συμβολισμός

(1)

$$\alpha \in A$$

δηλοῖ ὅτι τὸ ἀντικείμενον α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A δηλαδὴ εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου A . Ἡ (1) ἀναγιγνώσκεται: *Τὸ α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A* . Ὡστε τὸ σύμβολον $\in$ εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ «ἀνήκειν».

Ἔστω π.χ. ὅτι τὸ σύνολον A σύγκειται ἀπὸ τὰ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

καὶ ἀκόμη: $\alpha \in A, \beta \in A, \gamma \in A, \delta \in A$.

Ἐάν θεωρήσωμεν ἓνα ἄλλο γράμμα διαφορετικὸν τῶν ἀνωτέρω, π.χ. τὸ k , τότε γράφομεν:

(2)

$$k \notin A$$

καὶ ἡ (2) ἀναγιγνώσκεται: Τὸ k δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A . Δηλαδή τὸ σύμβολον τοῦ «μὴ ἀνήκειν» εἶναι τὸ $\notin$.

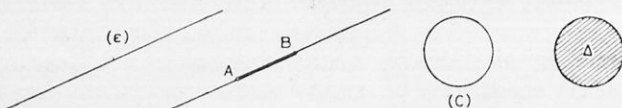
γ') Ἰσότης.— Δύο σύνολα A καὶ B λέγονται ἴσα διὰν κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ B καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ A . Τότε γράφομεν:

(3)

$$A = B$$

Ἡ (3), συνεπῶς, ἐκφράζει ὅτι τὰ A καὶ B ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια στοιχεῖα. (Ταυτιζόμενα σύνολα). Ἡ (3) εἶναι μία ἰσότης μεταξὺ δύο συνόλων τὰ δὲ A καὶ B καλοῦνται «μέλη τῆς ἰσότητος», πρῶτον καὶ δεύτερον, ἀντιστοίχως.

δ') Κάθε σύνολον γεωμετρικῶν σημείων καλεῖται «σημειοσύνολον». Κάθε γεωμετρικὸν σχῆμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓνα σημειοσύνολον, (ὅπως λ.χ. εἰς τὸ σχ. 1 ἡ ἀπέραντος εὐθεῖα (ε), τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB , ἡ περιφέρεια (c), ὁ κύκλος (δίσκος) Δ).



Σχ. 1

ε') Ὑποσύνολον.—Τὸ σύνολον A καλεῖται ὑποσύνολον τοῦ B διὰν κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ B .

Λέγομεν ἐπίσης ὅτι τότε τὸ A περιέχεται εἰς τὸ B γράφομεν δὲ

(4)

$$A \subseteq B$$

(A , ὑποσύνολον τοῦ B).

Ἡ σχέσις (4) δὲν ἀποκλείει νὰ εἶναι $A = B$ δηλ. ἡ σχέσις $A \subseteq A$ ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ A εἶναι ὄντως, μέρος τοῦ B δηλ. τὸ B περιέχει καὶ στοιχεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὸ ὑποσύνολόν του A , τότε τὸ A λέγεται γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B ἢ μέρος τοῦ B καὶ τότε γράφομεν:

(5)

$$A \subset B$$

(A , γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B)

Περιέχειν—περιέχεσθαι. Ἡ (4) καὶ ἡ (5) διαβάζονται καί: τὸ A περιέχεται εἰς τὸ B · δύναται δὲ νὰ γραφοῦν:

$$B \supseteq A \quad \text{ἢ} \quad B \supset A$$

ὁπότε λέγομεν: τὸ B περιέχει τὸ A .

στ') Τὸ κενὸν σύνολον. Ἐὰν ἐκ τῶν ἑνὸς συνόλων ἀφαιρέσωμεν ὅλα

τὰ στοιχεῖα του λέγομεν συμβατικῶς ὅτι τὸ σύνολον ἀπομένει κενόν. Κατὰ συνθήκην, δεχόμεθα ὡς σύνολον καὶ τὸ οὐδὲν στοιχεῖον περιέχον.

Ἐὰν σύνολον A οὐδὲν στοιχεῖον περιέχῃ, τότε λέγεται κενὸν σύνολον.

Ἐνα κενὸν σύνολον παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\emptyset$.

Κατὰ σύμβασιν, πᾶν σύνολον E περιέχει τὸ κενὸν σύνολον:
 $E \supset \emptyset$ ἢ $\emptyset \subseteq E$.

§ 2. Τομὴ συνόλων. α') *Ἐστωσαν δύο σύνολα A καὶ B . Καλεῖται τομὴ τῶν συνόλων A καὶ B , τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ ὅλα τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων A καὶ B .*

Γράφομεν: (1)

$$T = A \cap B$$

Ἡ (1) διαβάζεται: « $T = A$ τομὴ B ».

Ἡ τομὴ T σύγκειται λοιπὸν ἀπὸ στοιχεῖα ἀνήκοντα καὶ εἰς τὸ A καὶ εἰς τὸ B . Ἐὰν δηλ. $\alpha \in \{A \cap B\}$ τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι: $\alpha \in A$ καὶ $\alpha \in B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ἐστω A τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ B , τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων β, γ, δ ἥτοι :

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ καὶ } B = \{\beta, \gamma, \delta\}. \text{ Τότε } A \cap B = \{\beta, \gamma\}.$$

2. Ἐὰν φαντασθῶμεν δύο εὐθεῖας e_1 καὶ e_2 τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον K τότε εἶναι $K = (e_1) \cap (e_2)$ ὅπου (e_1) παριστᾷ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς e_1 καὶ (e_2) τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς e_2 . Ἡ τομὴ εἶναι ἐνταῦθα, σύνολον μὲ ἓνα μόνον στοιχεῖον, τὸ K .

β') Προκειμένου περὶ συνόλων περισσοτέρων τῶν δύο, ἔστω τῶν A, B, Γ, Δ τὸ σύμβολον $A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta$ δηλοῖ τὸ σύνολον τῶν κοινῶν στοιχείων ὅλων τῶν συνόλων τούτων.

γ') *Σύνολα ξένα μεταξὺ των.*—*Δύο σύνολα A καὶ B τὰ ὁποῖα οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν, λέγονται ξένα μεταξὺ των. Ἡ τομὴ δύο ξένων μεταξὺ των συνόλων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον. Ἐχομεν τότε $A \cap B = \emptyset$ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἡ τομὴ τῶν A καὶ B εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, τότε τὰ A καὶ B εἶναι ξένα μεταξὺ των.*

Οὕτω π.χ. ἂν αἱ εὐθεῖαι (e_1) καὶ (e_2) εἴναι παράλληλοι τότε $(e_1) \cap (e_2) = \emptyset$.

Σημ. Τὰ ξένα σύνολα λέγονται καὶ «ἐξωτερικά» ἀλλήλων.

§ 3. Ἐνῶσις συνόλων. *Καλεῖται ἐνῶσις δύο συνόλων A καὶ B τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἴτε εἰς τὸ A εἴτε εἰς τὸ B . Τὸ ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν A καὶ B προκύπτον σύνολον καλεῖται ἐνῶσις τῶν A καὶ B .*

$$(1) \quad \boxed{\Gamma = A \cup B} \quad (\Gamma = A \text{ ένωσης } B)$$

Ἡ ένωσις περισσοτέρων τῶν δύο συνόλων γίνεται ὁμοίως.
Ἐάν A, B, Γ, Δ εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε γράφοντες

$$(2) \quad A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta$$

ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν ἐνώσωμεν τὸ A μετὰ τὸ B καὶ τὴν ένωσιν τῶν δύο αὐτῶν μετὰ τὸ Γ καὶ τὴν προκύψασαν ένωσιν, μετὰ τὸ Δ . Τὸ σύνολον (2) ἀποτελεῖται ἀπὸ στοιχεῖα ἀνήκοντα εἴτε εἰς τὸ A , εἴτε εἰς τὸ B , εἴτε εἰς τὸ Γ , εἴτε εἰς τὸ Δ δηλ. ἀνήκοντα εἰς ἓνα τουλάχιστον ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ἐστω ὅτι $A = \{a, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\beta, \gamma, \delta\}$. Τότε θὰ εἶναι $A \cup B = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$.

2. Ἐστω A τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι λήγουν εἰς τὸ 0 καὶ B τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι λήγουν εἰς 5. Τότε τὸ $A \cup B$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5.

§ 4. Συμπληρωματικὰ σύνολα. α') Ἐστω $A \subseteq B$. Καλοῦμεν συμπληρωματικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸ B , τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ B τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A . Τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸ B (ὑπάρχον, μόνον ὅταν $A \subseteq B$) παρίσταται μετὰ

$$A' \quad \bar{A} \quad \underset{B}{C}A$$

Συνήθως, τὰ συμπληρώματα τῶν ἐξεταζομένων συνόλων λαμβάνονται ὡς πρὸς ἓνα γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων σύνολον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλα τὰ ἐξεταζόμενα, ὡς ὑποσύνολα αὐτοῦ. Τότε τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ A παρίσταται μετὰ A' ἢ $\bar{A}$ ἀντὶ μετὰ $\underset{B}{C}A$ διότι τότε δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὡς πρὸς ποῖον σύνολον ἀναφέρεται τὸ συμπλήρωμα τοῦ A .

Εὐκόλα φαίνεται ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων :

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = B, \quad B' = \emptyset, \quad (A')' = A$$

β') Τὸ μέγιστον σύνολον ἢ χῶρος ἐρεύνης. Ὅταν ὅλα τὰ σύνολα τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται εἰς μίαν Μαθηματικὴν ἐρευναν εἶναι ὑποσύνολα ἐνὸς ὠρισμένου συνόλου X , τότε τὸ X λέγεται μέγιστον σύνολον ἢ χῶρος ἐρεύνης. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ κάθε ἐξεταζόμενον σύνολον A , ὑπάρχει ἓνα ἄλλο, A' , ξένον πρὸς τὸ A τὸ ὁποῖον ἐνούμενον μετὰ τὸ A παρέχει τὸ μέγιστον σύνολον X . Τὸ A' δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ A , ὡς πρὸς X , ἥτοι

$$A' = \overset{X}{C}A$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο ξένα μεταξὺ τῶν σύνολα A καὶ A' πληροῦν τὴν σχέσηιν

$$A \cup A' = X$$

τότε τὰ A καὶ A' εἶναι συμπληρωματικά (ὡς πρὸς X).

Πᾶν στοιχείον τοῦ X μὴ ἀνήκον εἰς τὸ A , ἀνήκει εἰς τὸ A' .

Ἡ ἔνωσις καὶ ἡ τομὴ γίνεται συνήθως μεταξὺ συνόλων ἀνηκόντων εἰς τὸν αὐτὸν χώρον ἐρεύνης X , δηλ. ὑποσυνόλων τοῦ X .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ἐστω ὅτι ἐξετάζωμεν σημειοσύνολα κείμενα ἐπὶ μιᾶς ὀρισμένης εὐθείας $x'x$ ἢ ὁποῖα εἶναι καὶ ὁ χώρος ἐρεύνης, X . Τότε ἡ ἡμιευθεία ox (σχ. 2) (θεωρουμένη ὡς σύνολον σημείων) ἔχει ὡς συμπλήρωμα τὴν ἀντίθετον προέκτασίν της ox' .

$$\begin{array}{ccc} x' & o & x \\ \hline & \Sigma\chi. 2 & \end{array}$$

Ἐπίσης (σχ. 3) τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (εἰς τὸ ὁποῖον δὲν περιλαμβάνονται τὰ ἄκρα A, B) ἔχει ὡς συμπλήρωμα τὸ σύνολον τῶν δύο ἡμιευθειῶν Bx καὶ Ax' .

$$\begin{array}{cccc} x' & A & B & x \\ \hline & \Sigma\chi. 3 & & \end{array}$$

2. Ὅλα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα ἐπὶ ἐνὸς (ἀπεράντου), ἐπιπέδου X εἶναι ὑποσύνολα τοῦ X . Δηλ. τὸ ἐπίπεδον X εἶναι διὰ τὰ ἐπ' αὐτοῦ κείμενα γεωμετρικὰ σχήματα (σημειοσύνολα) τὸ μέγιστον σύνολον (σημειοσύνολον). Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς ἐνὸς κύκλου Δ , τοῦτο ἔχει συμπληρωματικὸν σύνολον, τὸν κυκλικὸν δίσκον Δ .

3. Ἐάν ἐξετάζωμεν τὸν πληθυσμὸν μιᾶς χώρας, τότε κάθε ὁμάς ἐξεταζομένων ἀτόμων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ὅλου πληθυσμοῦ, ὅστις εἶναι τὸ μέγιστον σύνολον X , διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτήν. Τὸ σύνολον τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡλικίαν ἄνω τῶν 40 ἔτων ἔχει συμπληρωματικὸν σύνολον, τὸ σύνολον τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ, ἡλικίας οὐχὶ ἀνωτέρας τῶν 40 ἐτῶν.

§ 5. Ἡ p, q —μέθοδος. Διὰ ν' ἀποδείξωμεν μίαν ἰσότητα $A=B$ τῆς ὁποίας τὰ δύο μέλη εἶναι σύνολα, (συνολοϊσότητα) ἄρκει νὰ δείξωμεν ὅτι $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A$. Διότι τότε θὰ ἔχωμεν ἀποδείξει ὅτι πᾶν στοιχείον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ B (§ 1, ε') καὶ ὅτι πᾶν στοιχείον τοῦ B εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ A . Συνεπῶς θὰ εἶναι $A=B$ (§ 1, γ'). Πρὸς τοῦτο, θεωροῦμεν ἓνα τυχὸν (ὅποιοιδήποτε) στοιχείον τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, ἔστω τὸ p καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ δευτέρου μέλους. Ἀκολουθῶς θεωροῦμεν τυχὸν στοιχείον q τοῦ δευτέρου μέλους καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ πρώτου μέλους (p, q —μέθοδος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Ἐστώσαν A καὶ B δύο ὑποσύνολα τοῦ X καὶ A' καὶ B' τὰ συμπληρωματικά των (ὡς πρὸς X). Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$i) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{καὶ} \quad ii) (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Ἀπόδειξις τῆς i) Ἐστω p στοιχείον τοῦ $(A \cap B)'$. Τότε τὸ p δὲν ἀνήκει εἰς τὸ $A \cap B$, ἄρα δὲν εἶναι κοινὸν στοιχείον τῶν A καὶ B . Ἄν τὸ p ἀνήκει εἰς τὸ A , τότε δὲν ἀνήκει εἰς τὸ B , συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸ B' ἄρα καὶ εἰς τὸ $A' \cup B'$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

"Αν τὸ p δὲν ἀνήκει εἰς τὸ A , τότε ἀνήκει εἰς τὸ A' , ἄρα καὶ εἰς τὸ $A' \cup B'$. Ὡστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, $p \in A' \cup B'$. Ἐστω τώρα q , στοιχείον τοῦ $A' \cup B'$. Τότε τὸ q ἀνήκει ἢ εἰς τὸ A' ἢ εἰς τὸ B' (ἂν δὲν ἀνήκει καὶ εἰς τὰ δύο).

Ἐὰν $q \in A'$ τότε $q \notin A$, συνεπῶς $q \notin A \cap B$ ἄρα $q \in (A \cap B)'$.

Ἐὰν $q \in B'$, τότε $q \notin B$, συνεπῶς $q \notin A \cap B$, ἄρα $q \in (A \cap B)'$.

Ὡστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, τὸ q ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον μέλος.

Ἀπόδειξις τῆς ii. Ἐστω p στοιχείον τοῦ πρῶτου μέλους $(A \cup B)'$. Τότε τὸ p δὲν ἀνήκει εἰς τὸ $A \cup B$ ἄρα οὔτε εἰς τὸ A οὔτε εἰς τὸ B ἀνήκει. Συνεπῶς $p \in A'$ καὶ $p \in B'$, ἄρα $p \in A' \cap B'$. Ἐστω q , στοιχείον τοῦ δευτέρου μέλους, $A' \cap B'$. Τότε $q \in A'$ καὶ $q \in B'$ συνεπῶς $q \notin A$ καὶ $q \notin B$. Ἀρα $q \notin A \cup B$ καὶ κατὰ συνέπειαν $q \in (A \cup B)'$.

§ 6. Οἱ τρεῖς νόμοι τῶν πράξεων μεταξύ συνόλων.

α') **Ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος.** Ἐὰν ἐνώσωμεν δύο σύνολα A καὶ B εἴτε κατὰ τὴν τάξιν A, B (δηλ. τὸ A μὲ τὸ B) εἴτε κατὰ τὴν τάξιν B, A (δηλ. τὸ B μὲ τὸ A), λαμβανόμενον τὸ ἴδιο σύνολον Γ . Δηλαδή ἰσχύει:

(1)

$$A \cup B = B \cup A = \Gamma$$

Διότι προφανῶς, κάθε στοιχείον τοῦ $A \cup B$ εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $B \cup A$ καὶ ἀντιθέτως. (Βλέπε § 1, γ' «ἴσα σύνολα»).

Ὡστε, κατὰ τὴν ἔνωσιν δύο συνόλων, δυνάμεθα νὰ ἀντιμεταθέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἐνώσεως, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμα. Ἐκ τούτου λέγομεν ὅτι.

Ἡ ἐνῶσις δύο συνόλων εἶναι προᾶξιν ἀντιμεταθετικὴ ἢ ὅτι εἰς τὴν ἐνῶσιν ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὴν τομὴν ἰσχύουν τὰ ὅμοια, ἦτοι ἡ τομὴ τοῦ συνόλου A μὲ τὸ B εἶναι τὸ ἴδιο σύνολον μὲ τὴν τομὴν τοῦ συνόλου B μὲ τὸ A , δηλαδή:

(2)

$$A \cap B = B \cap A = T$$

διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι:

Κατὰ τὴν τομὴν δύο συνόλων ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος ἢ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι προᾶξιν ἀντιμεταθετικὴ.

(Ἡ ἀπόδειξις τῆς (2) εἶναι εὐκόλος: κάθε στοιχείον τοῦ $A \cap B$ εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $B \cap A$ διότι ἀνήκει εἰς τὸ B καὶ εἰς τὸ A . Ὅμοίως, κάθε στοιχείον τοῦ $B \cap A$ ἀνήκει εἰς τὸ $A \cap B$. Ἐπομένως τὰ δύο σύνολα εἶναι τὰ ἴδια).

β') 'Ο προσεταιριστικός νόμος. Διὰ τρία τυχόντα σύνολα A , B , Γ ισχύει ὅτι

(3)

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma$$

Πράγματι, κάθε στοιχείον τοῦ πρώτου μέλους τῆς (3) ἀνήκει εἴτε εἰς τὸ A , εἴτε εἰς τὸ B , εἴτε εἰς τὸ Γ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἀντιθέτως. Ὡστε τὰ δύο σύνολα: $A \cup (B \cap \Gamma)$ καὶ $(A \cup B) \cap \Gamma$ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια στοιχεῖα.

Ἡ ιδιότης (3) λέγεται *προσεταιριστικός νόμος*, διότι τὸ B προσεταιρίζεται τὸ A . Ἐπομένως:

Ἡ ἔνωσης εἶναι πρᾶξις προσεταιριστικὴ ἢ ἀκόμῃ κατὰ τὴν ἔνωσιν τῶν συνόλων ισχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος.

Τὰ ὅμοια ισχύουν καὶ διὰ τὴν τομὴν τῶν συνόλων. Ἐστώσαν τρία σύνολα A , B , Γ . Διαπιστοῦμεν ὅτι ισχύει:

(4)

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$$

(ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) ἐκφράζουν τὸ ἴδιο σύνολον: τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα εἶναι κοινὰ καὶ εἰς τὸ A καὶ εἰς τὸ B καὶ εἰς τὸ Γ).

Ἡ ιδιότης τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ἡ ισότης (4) λέγεται *προσεταιριστικός νόμος* διὰ τὴν τομὴν τῶν συνόλων.

Ἐπομένως:

Κατὰ τὴν τομὴν τῶν συνόλων ισχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος ἢ ἀκόμῃ, ἡ τομὴ εἶναι πρᾶξις προσεταιριστικὴ.

γ') 'Ο ἐπιμεριστικός νόμος. Ἐστώσαν τρία σύνολα A , B , Γ . Διαπιστοῦμεν ὅτι ισχύει:

(5)

$$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$$

Ἡ ιδιότης τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ἡ ισότης (5) λέγεται *ἐπιμεριστικός νόμος* καὶ ἀφορᾷ ἓνα συνδυασμὸν ἐνώσεως καὶ τομῆς. Συνέπεια τῆς (5) εἶναι ἡ ισότης:

$$(A \cup B) \cap (\Gamma \cup \Delta) = (A \cap \Gamma) \cup (A \cap \Delta) \cup (B \cap \Gamma) \cup (B \cap \Delta)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς (5) ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν p , q μέθοδον (§ 5).

Ἐστω p ἓνα στοιχείον τοῦ πρώτου μέλους τῆς (5), δηλ. τοῦ συνόλου $(A \cup B) \cap \Gamma$, τότε τὸ p θὰ εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $(A \cup B)$ καὶ στοιχείον τοῦ Γ (βλ. § 2).

Ὡς στοιχείον τοῦ $A \cup B$, τὸ p θὰ εἶναι ἢ στοιχείον τοῦ A ἢ τοῦ B . Ἐάν p εἴη στοιχείον τοῦ A , τότε καὶ εἰς τὸ Γ εἰσὶν ὅμοια, ὥστε p εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $A \cap \Gamma$. Ἐάν p εἴη στοιχείον τοῦ B , τότε καὶ εἰς τὸ Γ εἰσὶν ὅμοια, ὥστε p εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $B \cap \Gamma$. Ὡς στοιχείον τοῦ $A \cap \Gamma$ ἢ τοῦ $B \cap \Gamma$, τὸ p εἶναι καὶ στοιχείον τοῦ $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$.

B (ἂν δὲν εἶναι καὶ τῶν δύο). Ὡστε τὸ p θὰ εἶναι ἡ στοιχεῖον τοῦ A καὶ συγχρόνως τοῦ Γ , δηλαδὴ στοιχεῖον τοῦ $A \cap \Gamma$ ἢ στοιχεῖον τοῦ B καὶ συγχρόνως καὶ τοῦ Γ , δηλ. στοιχεῖον τοῦ $B \cap \Gamma$. Ἀφοῦ τὸ p θὰ εἶναι ἡ στοιχεῖον τοῦ $A \cap \Gamma$ ἢ στοιχεῖον τοῦ $B \cap \Gamma$, θὰ εἶναι στοιχεῖον τῆς ἐνώσεως τῶν δύο τούτων, δηλαδὴ τοῦ $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$, δηλ. στοιχεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (5).

Ἀντιστρόφως, ἔστω q ἓνα (ὁποιοδήποτε) στοιχεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (5), δηλ. τοῦ συνόλου $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$. Τὸ q θὰ εἶναι, τότε, στοιχεῖον ἐνὸς τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο συνόλων $A \cap \Gamma$ καὶ $B \cap \Gamma$, δηλ. θὰ εἶναι ἡ κοινὸν στοιχεῖον τῶν A καὶ Γ ἢ κοινὸν τῶν B καὶ Γ . Ἄν εἶναι κοινὸν τῶν A καὶ Γ τότε θὰ εἶναι καὶ κοινὸν τῶν $A \cup B$ καὶ Γ , ἄρα θ' ἀνήκει εἰς τὴν τομὴν $(A \cup B) \cap \Gamma$. Ἄν εἶναι κοινὸν τῶν B καὶ Γ τότε θὰ εἶναι κοινὸν τῶν $A \cup B$ καὶ Γ , ἄρα θ' ἀνήκει εἰς τὸ $(A \cup B) \cap \Gamma$. Ὡστε τὸ q εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) ὁ. ἔ. δ.

δ') Ἀνακεφαλαίωσις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν νόμων :

Ἀντιμεταθετικός : $\begin{cases} A \cup B = B \cup A & (\text{διὰ τὴν ἐνώσιν}) \\ A \cap B = B \cap A & (\text{διὰ τὴν τομὴν}) \end{cases}$

Προσεταιριστικός : $\begin{cases} A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma = A \cup B \cap \Gamma & (\text{διὰ τὴν ἐνώσιν}) \\ A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma = A \cap B \cup \Gamma & (\text{διὰ τὴν τομὴν}) \end{cases}$

Ἐπιμεριστικός : $\{ (A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) \text{ (διὰ τομὴν - ἐνώσιν)}$

§ 7. Διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων.—Ἐστῶσαν δύο σύνολα A καὶ B τὰ ὁποῖα κατατάσσομεν : τὸ A πρῶτον καὶ τὸ B δεύτερον. Καλοῦμεν διατεταγμένον ζεῦγος, κάθε ζεῦγος (α, β) δύο στοιχείων α καὶ β ἐξ ὧν τὸ πρῶτον ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A καὶ τὸ δεύτερον, ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον B (δηλ. $\alpha \in A, \beta \in B$).

Καὶ ἐὰν ἀκόμη $A = B$ δηλ. ἔχωμεν δύο ταυτιζόμενα σύνολα, πάλιν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν διατεταγμένα ζεύγη (α, β) ἐκ δύο στοιχείων τοῦ ἰδίου συνόλου ὅταν θεωροῦμεν ὡς διαφορετικὰ τὰ ζεύγη (α, β) καὶ (β, α) δηλ. ἀποδίδομεν σημασίαν εἰς τὴν τάξιν καθ' ἣν γράφονται τὰ δύο στοιχεῖα τοῦ ζεύγους : $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$ (ἐκτὸς ἐὰν $\alpha = \beta$).

Ἐτσι π.χ., οἱ δύο ὅροι κάθε ἀριθμητικοῦ κλάσματος α/β ἀποτελοῦν ἓνα διατεταγμένον ζεῦγος ἀκεραίων ἀριθμῶν α, β (δηλαδὴ ἓνα διατεταγμένον ζεῦγος στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων). Διότι κάμνομεν διάκρισιν : α ἀριθμητῆς, β παρονομαστῆς τὰ δὲ ζεύγη (α, β) καὶ (β, α) ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφορετικὰ (ἀντίστροφα) κλάσματα.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πόλιτικῆς

§ 8. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων. α') "Ἐστωσαν δύο σύνολα A καὶ B . Ἐὰν $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$, τὸ σύνολον, ὄλων τῶν δυνατῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) ἀποτελεῖ ἓνα νέον σύνολον τὸ ὁποῖον καλεῖται γινόμενον τοῦ συνόλου A ἐπὶ τὸ σύνολον B καὶ παρίσταται μὲ $A \times B$.

Τὸ γινόμενον $A \times B$ καλεῖται καὶ Καρτεσιανὸν γινόμενον ἢ ἀπλῶς «γινόμενον» τῶν συνόλων A καὶ B καὶ εἶναι ἓνα σύνολον ζευγῶν (α, β) . Τὰ στοιχεῖα α καὶ β λέγονται καὶ συνιστῶσαι ἢ συνετεταγμένα τοῦ στοιχείου (α, β) .

β') Ὅταν τὸ σύνολον B ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον A (δηλ. $A=B$) τότε τὸ γινόμενον καθίσταται $A \times A = A^2$ καὶ παριστᾷ τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) ἐκ στοιχείων τοῦ A (δηλ. $\alpha \in A$, $\beta \in A$ ὅπου, δυνατόν, $\beta = \alpha$).

Οὕτω π.χ. ἂν Φ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τὸ $\Phi \times \Phi$ παριστᾷ ὅλα τὰ δυνατὰ ζεύγη φυσικῶν ἀριθμῶν.

γ') Ἄν θεωρήσωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς διατεταγμένας τριάδας (α, β, γ) ἐκ στοιχείων τοῦ συνόλου A , τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα, αὐτὰς τὰς τριάδας, παρίσταται μὲ $A \times A \times A = A^3$. Τὰ στοιχεῖα, α, β, γ ἐκάστης τριάδος δὲν εἶναι ἀναγκαιῶς διάφορα μεταξύ των.

Ἐὰν τὰ α, β, γ εἶναι διάφορα ἀλλήλων ἀνὰ δύο, αἱ τριάδες (α, β, γ) , (α, γ, β) , (β, α, γ) , (β, γ, α) , (γ, α, β) , (γ, β, α) εἶναι πᾶσαι διάφοροι ἀλλήλων, δηλ. διαφορετικὰ μεταξύ των στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \times A \times A$.

A Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-1.—Ἐστω E τὸ σύνολον τῶν 8 ἀριθμῶν: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ἄς καλέσωμεν E_1 τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν οἱ ὅποιοι ἐμφανίζονται μεταξύ τῶν 8 ἀνωτέρω ἀριθμῶν καὶ E_2 τὸ σύνολον τῶν μικροτέρων τοῦ 6, οἱ ὅποιοι ἐμφανίζονται μεταξύ τῶν 8 ἀνωτέρω. Τί παρίστανουν τότε τὰ σύνολα: $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $\overline{E_2}$, $E \cap E_1$, $E \cap E_2$;

A-2.—Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου E εἶναι τὰ 6 ζεύγη τῶν ἀριθμῶν: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3). Καλοῦμεν E_1 τὸ ὑποσύνολον τοῦ E , τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ E εἰς τὰ ὅποια, ὁ 1 ἐμφανίζεται τουλάχιστον ἅπαξ. Καλοῦμεν E_2 τὸ ὑποσύνολον τοῦ E τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ E εἰς τὰ ὅποια οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα περιττόν. Προσδιορίσατε τὰ σύνολα: $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$, E_1' , E_2' .

A-3.—Ἄν $A \subseteq B$ δεῖξατε ὅτι τότε $A \cup B = B$.

B-4.—Δεῖξατε ὅτι διὰ δύο τυχόντα σύνολα A καὶ B ἰσχύει: i) $(A \cap B) \subseteq A$, ii) $(A \cap B) \cup B = B$, iii) $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$.

A-5.—'Εάν (δ) τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας δ καὶ (ε) τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας C, τί σημαίνει $(δ) \cap (ε) = \emptyset$;

A-6.—'Εάν διὰ δύο σύνολα A καὶ B ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A$ νὰ δεიχθῇ ὅτι $A = B$.

B-7. Διὰ τρία τυχόντα σύνολα A, B, Γ δείξατε ὅτι ἰσχύουν αἱ σχέσεις:
 $(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$ (βλ. § 5)

A-8.—'Εστῶσαν τὰ σύνολα $A = \{a, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{1, 2\}$. Σχηματίσατε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \times B$ καὶ τοῦ $B \times A$.

A-9.—'Εάν τὸ σύνολον A ἔχη μ στοιχεῖα καὶ τὸ B, ν στοιχεῖα, πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον $A \times B$;

B-10. 'Εστῶσαν A, B, Γ ὑποσύνολα τοῦ X καὶ A', B', Γ' τὰ συμπληρωματικά των ὡς πρὸς X. 'Εκφράσατε δι' ἐνώσεων καὶ τομῶν ἐκτελουμένων μεταξύ τῶν A, B, Γ, A', B', Γ' τὰ ἑξῆς σύνολα ἐκ στοιχείων τοῦ X (ὑποσύνολα τοῦ X):

i) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς τὸ A, ἀλλὰ μὴ ἀνήκοντα οὔτε εἰς τὸ B οὔτε εἰς τὸ Γ (βλ. § 4, β').

ii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα καὶ εἰς τὸ A καὶ εἰς τὸ B ἀλλ' ὄχι εἰς τὸ Γ.

iii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα, ἐνὸς τουλάχιστον ἐκ τῶν A, B, Γ.

iv) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα τουλάχιστον εἰς δύο ἐκ τῶν A, B, Γ.

v) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα μόνον εἰς ἓν ἐκ τῶν τριῶν συνόλων A, B, Γ.

vi) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς δύο μόνον ἐκ τῶν τριῶν συνόλων A, B, Γ.

vii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν συνόλων A, B, Γ.

viii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς ὄχι περισσότερα τῶν δύο ἐκ τῶν A, B, Γ.

B-11. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σύνολα $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma'$, $A \cap B' \cap \Gamma$ μένουν ἀμετάβλητα ὅταν ὅπου A τεθῇ τὸ $A \cap (B \cup \Gamma)$. Ὁ τόνος σημαίνει τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον ὡς πρὸς κάποιο σύνολον X περιέχον τὰ A, B, Γ ὡς ὑποσύνολα.

B-12. i) 'Εάν A, B δύο σύνολα ἀνήκοντα εἰς τὸ μέγιστον σύνολον X, δείξατε ὅτι $A' \cap B' = (A \cup B)'$ καὶ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ὅπου οἱ τόνοι σημαίνουν συμπληρωματικά σύνολα.

ii) 'Επίσης, βάσει τῆς προηγουμένης καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου, εὑρετε ἀπλὴν ἑκφρασιν διὰ τὴν παράστασιν

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B')$$

★ **§ 9. Διαφορὰ δύο συνόλων.** 'Εστῶσαν B καὶ A δύο τυχόντα σύνολα. Καλεῖται διαφορὰ τοῦ B μείον A ἓνα νέον σύνολον Δ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ B τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὸ A.

Γράφομεν τότε

$$B - A = \Delta$$

Συμβολικῶς: 'Εάν $a \in \Delta$ τότε πρέπει $a \in B$ καὶ $a \notin A$.

Μὲ ἄλλας λέξεις, ἡ διαφορὰ $B - A$ εἶναι τὸ ἀπομένον σύνολον, ὅταν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ B ἐξαλειφθοῦν ἐκεῖνα τὰ ὅποια ἀνήκουν καὶ εἰς τὸ A.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἐκ τοῦ ὁρίσμου τῆς διαφορᾶς $B-A$ ἔπεται ὅτι, τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν B καὶ A δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν διαφορὰν $B-A$, ἐὰν δὲ ἓνα στοιχεῖον τοῦ B δὲν ἀνήκει εἰς τὴν διαφορὰν $B-A$, τότε θ' ἀνήκει εἰς τὸ A .

Ἐὰν $A \subseteq B$ τότε ἡ διαφορὰ $B-A$ συμπίπτει μετὰ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ A ὡς πρὸς τὸ B (§ 4).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-13.—Ἐὰν $B \subseteq A$ καὶ $\Gamma \subseteq B$ δεῖξτε ὅτι :

$$(A-B) \cup (B-\Gamma) = (A-\Gamma) \quad (\text{βλ. § 5})$$

B-14. Ἐὰν $B \subseteq A$ καὶ Γ τυχὸν σύνολον δεῖξτε ὅτι :

$$(A-B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) - (B \cap \Gamma).$$

B-15. Ἐὰν $A \supset B$, $\Gamma \supset \Delta$ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης

$$(A-B) \cap (\Gamma-\Delta) = \{(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Delta)\} - \{(B \cap \Gamma) \cup (A \cap \Delta)\}.$$

B-16. Ἐὰν A καὶ B εἶναι τυχόντα σύνολα, δεῖξτε ὅτι τὰ σύνολα A καὶ $B-(A \cap B)$ εἶναι ξένα μεταξύ των.

B-17. Ἐὰν X εἶναι τὸ μέγιστον σύνολον (§ 4 β') καὶ A καὶ B δύο ὑποσύνολα τοῦ X τοιαῦτα ὥστε $B \subseteq A$, δεῖξτε ὅτι $A-B = A \cap B'$, ὅπου B' τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ B .

B-18. Διὰ δύο τυχόντα σύνολα A καὶ B δεῖξτε ὅτι

$$A \cap B = B - \{(A \cup B) - A\}$$

ἥτοι «ἡ τομὴ δύναται νὰ προκύρῃ μετὰ ἐνώσεις καὶ ἀφαιρέσεις».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Οἱ ἀκέραιοι τῆς ἀριθμητικῆς

§ 10. Ἴσοδυναμικὰ σύνολα. α') Ἐστω τὸ σύνολον $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ καὶ τὸ σύνολον $\{\zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}$ τῶν γραμμάτων $\zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa$. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα παρουσιάζουν τὴν ἐξῆς δυνατότητα συσχετίσεως μεταξύ των: δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα των εἰς ζεύγη, ὅπου κάθε ζεύγος ν' ἀποτελῇται ἀπὸ ἓνα στοιχεῖον τοῦ πρώτου συνόλου καὶ ἀπὸ ἓνα στοιχεῖον τοῦ δευτέρου. Δυνάμεθα π.χ. νὰ προσεταιρίσωμεν τὸ α μὲ τὸ ζ , τὸ β μὲ τὸ η , τὸ γ μὲ τὸ θ , τὸ δ μὲ τὸ ι καὶ τὸ ϵ μὲ τὸ κ . (σχ. 4).



Σχ. 4

Τὸ ζ λέγεται ἀντίστοιχον τοῦ α , τὸ η , ἀντίστοιχον τοῦ β κ.ο.κ. Ἀντιστρόφως, τὸ α εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ ζ , τὸ β τοῦ η , κ.τ.λ. Ἀφοῦ ὅλα τὰ στοιχεῖα καὶ τῶν δύο συνόλων διαταχθοῦν κατὰ ζεύγη, δὲν περισσεύει κανὲν στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου συνόλου, τὸ ὅποῖον νὰ μὴ ἔχῃ τὸ ἀντίστοιχόν του.

Λέγομεν ὅτι, μεταξύ τῶν δύο ἀνωτέρω συνόλων ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἢ ἀντιστοιχία ἑνὸς—πρὸς—ἓν.

β) Ἴσοδυναμικὰ σύνολα.—Ὅσάκις ὑπάρχει ἡ δυνατότης δημιουργίας ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξύ τῶν στοιχείων δύο συνόλων, τὰ σύνολα λέγονται ἰσοδυναμικὰ (ἢ καὶ ἰσοδύναμα). Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι δύο σύνολα A καὶ B εἶναι ἰσοδυναμικά, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν: $A \equiv B$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Τὰ σύνολα $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $\{\delta, \epsilon\}$ δὲν εἶναι ἰσοδυναμικά, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργηθῇ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν. Πράγματι, ἂν προσεταίριώσωμεν π.χ. τὸ α μὲ τὸ δ καὶ τὸ β μὲ τὸ ϵ , θ' ἀπομείνῃ τὸ γ χωρὶς ἀντίστοιχον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1η. Προφανῶς, εἰς τὰ ἰσοδυναμικά σύνολα, ἡ ἀμοιβαία ἀντιστοιχία δύναται νὰ δημιουργηθῇ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Δηλαδή, δυνάμεθα ν' ἀνακατατάξωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ἐνὸς συνόλου δημιουργοῦντες οὕτω διαφορετικά ζεύγη ἀντιστοιχῶν στοιχείων χωρὶς νὰ παύσῃ ἡ ἀμοιβαία ἀντιστοιχία τῶν δύο συνόλων. Π.χ. εἰς τὸ σχ. 4 δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν τὸ α μὲ τὸ θ , τὸ γ μὲ τὸ ζ καὶ ν' ἀφήσωμεν τὰ λοιπὰ ζεύγη ὅπως εἶναι, ἢ ν' ἀλλάξωμεν ὅλα τὰ ζεύγη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2α. Ἐὰν $A \equiv B$ καὶ $B \equiv \Gamma$ τότε προφανῶς $A \equiv \Gamma$. Διότι εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἀντιστοιχεῖ, μέσῳ τοῦ B , ἓνα στοιχεῖον τοῦ Γ καὶ ἀνὰ πάλιν. (Μεταβατικότης τῆς ἰσοδυναμίας).

§ 11. Τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. α') Ἴσοι καὶ ἄνισοι πληθικοὶ ἀριθμοί. Εἰς τὰ σύνολα ἀντιστοιχιζόμεν ἀριθμούς, ἥτοι σύμβολα δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου. Ὅλα τὰ ἰσοδυναμικά μεταξὺ τῶν σύνολα (βλ. § 10) ἔχουν τὸ ἴδιον πλῆθος στοιχείων καὶ συνεπῶς χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ δηλοῦντες τὰ πλῆθη τῶν στοιχείων λέγονται **πληθικοὶ ἀριθμοί**. Δύο σύνολα μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἔχουν διαφορετικούς πληθικούς ἀριθμούς. Λέγομεν π.χ. ἡ A τάξις ἔχει 27 μαθητάς καὶ ἡ B τάξις ἔχει 25 μαθητάς.

Ἐὰν α δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἐνὸς συνόλου καὶ β τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἐνὸς ἄλλου, ἰσοδυναμικοῦ πρὸς τὸ πρῶτον γράφομεν

$$(1) \quad \alpha = \beta \quad (\alpha \text{ ἴσον } \beta)$$

Ἡ σχέσις (1) εἶναι μία ἀριθμητικὴ ἰσότης μὲ πρῶτον μέλος τὸ α καὶ δεύτερον τὸ β .

Ἐστωσαν, τώρα, δύο σύνολα A καὶ B μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ A εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς ἓνα μέρος τοῦ B τότε λέγομεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ A εἶναι **μικρότερον** τοῦ πλῆθους τῶν στοιχείων τοῦ B .

Τότε, ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ A καὶ μὲ β τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ B , γράφομεν

$$\alpha < \beta \quad (\alpha \text{ μικρότερον τοῦ } \beta)$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ~~βιβλιοφιλανθρωπικὸν~~ βιβλιοφιλανθρωπικὸν ἐργαστήριον τοῦ Παιδείας

Οί πληθικοί ἀριθμοὶ α καὶ β οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰ ἀνωτέρω σύνολα A καὶ B εἶναι ἄνιστοι.

Ἀντιστροφῶς, οἱ ἴσοι πληθικοὶ ἀριθμοὶ χαρακτηρίζουν σύνολα μεταξὺ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία οἱ δὲ ἄνιστοι, χαρακτηρίζουν σύνολα μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

β) Τὸ σύνολον Φ . "Όταν ἓνα σύνολον περιέχῃ ἓνα μόνον στοιχεῖον, τότε εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχίζομεν τὸν ἀριθμὸν ἓνα. Σύμβολον: 1.

Ἐάν εἰς τὸ προηγούμενον σύνολον ἐπισυνάψωμεν ἓνα ἀκόμη στοιχεῖον, τὸ νέον σύνολον περιέχει δύο στοιχεῖα καὶ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς δύο, παριστώμενος διὰ τοῦ συμβόλου 2.

Συνάπτοντες ἓνα ἀκόμη στοιχεῖον λαμβάνομεν ἓνα σύνολον ἐκ τριῶν στοιχείων εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχίζομεν τὸν ἀριθμὸν τρία, συμβολιζόμενον μέ: 3.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προχωροῦμεν ἄνευ τέλους καὶ δημιουργοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

οἱ ὁποῖοι καλοῦνται **φυσικοὶ ἀριθμοί**. Νοοῦμενοι ὁ ἓνας κατόπιν τοῦ ἄλλου, καθ' ἣν σειρὰν κατεσκευάσθησαν, οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, ἀποτελοῦν ὡς λέγομεν, μίαν «ἀκολουθίαν».

Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπέραντος.

(Τελευταῖος δὲν ὑπάρχει, πρῶτος ὑπάρχει, ὁ 1).

Τὰ σύνολα: $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$... $\{1,2,...n\}$... λέγονται «ἀρχικὰ ἀποκόμματα» τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν παρίσταται μὲ τὸ γράμμα Φ :

$$\Phi = \{1,2,3,...n,...\}$$

γ') Πεπερασμένον σύνολον λέγεται κάθε σύνολον ἰσοδυναμικὸν πρὸς ἓνα ἀρχικὸν ἀπόκομμα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς κάθε πεπερασμένου συνόλου εἶναι ἓνας φυσικὸς ἀριθμός. Δηλαδή τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του χαρακτηρίζεται ἀπὸ ἓνα φυσικὸν ἀριθμὸν. **Ἀπαρίθμησις** δὲ ἐνὸς πεπερασμένου συνόλου λέγεται ἡ εὑρεσις τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὸ (ἡ εὑρεσις τοῦ πληθικοῦ τοῦ ἀριθμοῦ). Λόγω τῆς ἀντιστοιχίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰ πεπερασμένα σύνολα, οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ **πεπερασμένοι ἀριθμοί**.

δ') Χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῶν πεπερασμένων συνόλων: **Κάθε πεπερασμένον σύνολον δὲν εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς κα-
νένα ἄλλο πεπερασμένον σύνολον πρὸς τὸ ἐκτὸς τῆς ἀκολουθίας.** Ἡ

πρότασις, είναι ένορατικώς, φανερά καί ή κατωτέρω δεδομένη απόδειξις δύναται νά παραλειφθῇ κατὰ τήν διδασκαλίαν.

Ἀπόδειξις. Ἀς υποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕνα πεπερασμένον σύνολον, ἔστω τὸ A τὸ ὁποῖον ἔχει τήν ἀποδεικτέαν ιδιότητα, δηλ. δὲν εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς κανένα μέρος αὐτοῦ. Ὁ ἀποδείξωμεν ὅτι ἂν εἰς τὸ A προσθέσωμεν ἕνα ἀκόμη στοιχεῖον, ἔστω τὸ ϵ , τὸ προκύπτον νέον σύνολον $A \cup \epsilon$ ἔχει τήν ἰδίαν ιδιότητα, δηλ. δὲν εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς κανένα γνήσιον ὑποσύνολόν του.

Ἀς παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\equiv$ τὴν ἰσοδυναμίαν δύο συνόλων.

Ἀς υποθέσωμεν ὅτι τὸ $A \cup \epsilon$ εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς ἕνα μέρος του.

Ἀς καλέσωμεν B τὸ μέρος αὐτό. Τότε θὰ ἔχωμεν $A \cup \epsilon \equiv B$.

i) Ἀς υποθέσωμεν ὅτι τὸ B δὲν περιέχει τὸ ϵ .

Ἐστω η τὸ στοιχεῖον τοῦ B τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ στοιχεῖον ϵ τοῦ ἰσοδυναμοῦ συνόλου $A \cup \epsilon$.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἰσοδυναμικά σύνολα $A \cup \epsilon$ καὶ B ἀφαιρέσωμεν τὰ δύο στοιχεῖα ϵ καὶ η ὁ ἀπομείνουσιν πάλιν ἰσοδυναμικά σύνολα ἤτοι $A \equiv B - \eta$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι τὸ $B - \eta$ εἶναι μέρος τοῦ A τὸ δὲ A δὲν ἰσοδυναμεῖ μὲ κανένο μέρος του.

ii) Ἀς υποθέσωμεν ὅτι τὸ B περιέχει τὸ ϵ .

Τότε, δυνατόν τὸ ϵ τοῦ B νὰ εἶναι προσεταιρισμένον μὲ τὸ ϵ τοῦ $A \cup \epsilon$ ὅποτε μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ ϵ ἀπὸ τὰ δύο ἰσοδυναμικά σύνολα $A \cup \epsilon$ καὶ B , μένουσιν πάλιν ἰσοδυναμικά σύνολα: $A \equiv B - \epsilon$ ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι τὸ $B - \epsilon$ εἶναι μέρος τοῦ A .

Ἀς υποθέσωμεν, τώρα ὅτι τὸ ϵ τοῦ B εἶναι προσεταιρισμένον μὲ κάποιον ἄλλο στοιχεῖον τοῦ $A \cup \epsilon$, ἔστω μὲ τὸ η καὶ ὅτι τὸ ϵ τοῦ $A \cup \epsilon$ εἶναι προσεταιρισμένον μὲ τὸ στοιχεῖον θ τοῦ B (ἔχομεν δηλ. τὰ ζεύγη $(\eta \leftarrow \rightarrow \epsilon)$, $(\epsilon \leftarrow \rightarrow \theta)$). Τότε ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ἰσοδυναμικῶν συνόλων $A \cup \epsilon$ καὶ B παραμένει καὶ ὅταν συνδυάσωμεν διαφορετικά: τὸ η τοῦ $A \cup \epsilon$ μὲ τὸ θ τοῦ B καὶ τὸ ϵ τοῦ $A \cup \epsilon$ μὲ τὸ ϵ τοῦ B (δηλ.: νὰ ἔχωμεν $(\eta \leftarrow \rightarrow \theta)$, $(\epsilon \leftarrow \rightarrow \epsilon)$).

Ἀλλὰ τότε, ὡς ἀπεδείχθη ἀμέσως προηγουμένως, ἡ σχέση $A \cup \epsilon \equiv B$ εἶναι ἀδύνατος.

Ἐπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ $A \cup \epsilon$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα μέρος του, εἶναι ἀδύνατος. Ὡστε τὸ $A \cup \epsilon$ δὲν ἰσοδυναμεῖ μὲ κανένα μέρος του.

Ἐξ ἄλλου, διὰ σύνολον μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον, τὸ θεώρημα ἀληθεύει. Διότι τὸ μονομελὲς σύνολον δὲν ἔχει γνήσιον ὑποσύνολον (ἐκτὸς τοῦ κενοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει στοιχεῖα).

Ἐπίσης, διὰ σύνολον μὲ δύο στοιχεῖα: $\{\alpha, \beta\}$ τὸ θεώρημα ἀληθεύει, διότι τὰ γνήσια ὑποσύνολα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι τὰ $\{\alpha\}$ καὶ $\{\beta\}$, οὐδὲν δὲ τούτων δύναται ν' ἀντιστοιχισθῇ ἀμφιμονοσημάντως μὲ τὸ $\{\alpha, \beta\}$. Ἀφοῦ τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ σύνολον μὲ δύο στοιχεῖα. Ὁ ἀληθεύει καὶ διὰ σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα σύμφωνα μὲ ἀνωτέρω ἀποδειχθέν. Ἀφοῦ ἀληθεύει διὰ σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα, ὁ ἀληθεύει (ὡς ἐδείχθη) καὶ ἂν συνάψωμεν ἐν ἀκόμῃ στοιχεῖον, δηλ. ὁ ἀληθεύει καὶ διὰ σύνολον μὲ τέσσαρα στοιχεῖα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μεταβαίνομεν εἰς κάθε πεπερασμένον σύνολον οἷουδήποτε πλήθους στοιχείων. Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 12. Αἱ τρεῖς σχέσεις μεγέθους. α') Τὰ σύνολα τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιήσαμεν ἄνωτέρω διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀποτελοῦν μίαν ἀπέραντον κλίμακα τῆς ὁποίας ἡ πρώτη βαθμὶς εἶναι ἓνα σύνολον μὲ ἓν στοιχεῖον, δευτέρα βαθμὶς, ἓνα σύνολον μὲ δύο στοιχεῖα, τρίτη βαθμὶς, ἓνα σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ πρὸς μίαν βαθμίδα τῆς κλίμακος αὐτῆς καὶ κάθε πεπερασμένον σύνολον ἐπίσης· δηλ. κάθε πεπερασμένον σύνολον εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς μίαν ὀρισμένην βαθμίδα τῆς κλίμακος καὶ μάλιστα τὴν ἔχουσαν τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμὸν μὲ αὐτό. Ἐπειδὴ κάθε βαθμὶς τῆς κλίμακος προέρχεται ἀπὸ τὴν προηγούμενην τῆς δι' ἐπισυνάψεως ἑνὸς στοιχείου, διὰ τοῦτο κάθε βαθμὶς περιέχει τὰς προηγούμενας ὡς ὑποσύνολά της. Ἡ οὕτω προκύπτουσα διαδοχὴ συνόλων, ἧς ὀνομασθῇ κλίμαξ πεπερασμένων συνόλων. Ἐάν, τώρα, φαντασθῶμεν δύο διαφορετικὰς βαθμίδας Α καὶ Β τῆς κλίμακος τῶν πεπερασμένων συνόλων, κατ' ἀνάγκην ἡ μία θὰ εἶναι μέρος τῆς ἄλλης καὶ ἐπομένως ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἰσοδυναμικαί. (§ 11, δ'). Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰς δύο αὐτὰς βαθμίδας θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μικρότερος ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς ἐκείνην ἡ ὁποία εἶναι ὑποσύνολον τῆς ἄλλης. Ἄν πάλιν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἰδίαν βαθμίδα, τότε εἶναι ἴσοι.

Ἰσοὶ καὶ ἄνισοι δὲν δύνανται συγχρόνως νὰ εἶναι δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β· διότι ἀφοῦ εἶναι ἄνισοι, ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο διαφορετικὰς βαθμίδας Α καὶ Β τῆς κλίμακος καὶ ἀφοῦ εἶναι ἴσοι, ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν δύο τούτων διαφορετικῶν βαθμίδων Α καὶ Β, πρῶγμα τὸ ὁποῖον ὡς εἶδομεν προηγούμενως ἀποκλείεται.

Ἐπομένως, μεταξὺ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν α καὶ β θὰ ὑφίσταται μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων μεγέθους :

$$\eta \alpha = \beta \quad \eta \alpha < \beta \quad \eta \alpha > \beta$$

β') Ἐκ τῶν ἄνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἡμποροῦν πάντοτε νὰ θεωρηθοῦν ὡς πληθικοὶ ἀριθμοὶ δύο συνόλων Α καὶ Β τοιούτων ὥστε :

ἂν $\alpha = \beta$ τότε νὰ εἶναι $A \equiv B$ (ἰσοδυναμικὰ σύνολα)

ἂν $\alpha < \beta$ τότε νὰ εἶναι $A \subset B$.

γ') Μεταβατικότης τῆς ἰσότητος : ἔὰν $\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma$ τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \gamma$. Διότι, ἂν οἱ α, β, γ εἶναι οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν συνόλων Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ $\alpha = \beta$, τὸ Α εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ Β καὶ ἐπειδὴ $\beta = \gamma$, τὸ Β εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ Γ· ἔκ τούτου καὶ τὸ Α εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ Γ.

ναμικόν τοῦ Β καὶ ἐπειδὴ $\beta = \gamma$, τὸ Β εἶναι ἰσοδυναμικόν τοῦ Γ. Ἐπομένως, Α, ἰσοδυναμικόν πρὸς Γ (§ 10. παρατηρ. 2α) ἄρα $\alpha = \gamma$.

δ') **Μεταβατικότης τῆς ἀνισότητος**: ἐὰν $\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \gamma$ τότε θὰ εἶναι $\alpha < \gamma$. Διότι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ δυνάμεθα ν' ἀντιστοιχίσωμεν σύνολα Α, Β, Γ τοιαῦτα ὥστε: ΑСВ (ἄφοῦ $\alpha < \beta$), ВСГ ἄφοῦ ($\beta < \gamma$). Κατὰ συνέπειαν ΑСГ, ἄρα $\alpha < \gamma$.

ε') **Ἐνδιαμεσότης**: Ἡ διπλῇ ἀνισότης $\alpha < \gamma < \beta$ ἐκφράζει ὅτι ὁ ἀριθμὸς γ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ α , μικρότερος δὲ τοῦ β ἢ ὅπως λέγομεν: ὁ γ περιέχεται μεταξὺ α καὶ β . (ὁ γ , ἐνδιάμεσος τῶν α καὶ β).

στ') **Μὴ μεγαλύτερος**: Ἡ σχεσις $\alpha \leq \beta$ ἐκφράζει ὅτι ὁ α δὲν ὑπερβαίνει τὸν β . Ἦτοι ὅτι ὁ α εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ἢ μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ β . (Μὴ μεγαλύτερος τοῦ β).

Κατόπιν αὐτῶν, εἶναι εὐνόητος ἡ σημασία τῶν σχέσεων

$$\alpha \leq \gamma < \beta, \quad \alpha < \gamma \leq \beta, \quad \alpha \leq \gamma \leq \beta.$$

ζ') **Ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων**: Ὁ συμβολισμὸς $\alpha \neq \beta$ ἐκφράζει ὅτι οἱ α καὶ β δὲν εἶναι ἴσοι, συνεπῶς ἂν $\alpha \neq \beta$ τότε ἢ $\alpha < \beta$ ἢ $\alpha > \beta$.

§ 13. Ἀπειροσύνολον.—Κάθε σύνολον (ὄχι κενόν) τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἰσοδυναμικόν πρὸς οὐδὲν πεπερασμένον σύνολον, λέγεται μὴ πεπερασμένον σύνολον ἢ ἀπειροσύνολον. Τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ μὴ πεπερασμένου συνόλου λέγομεν ὅτι εἶναι ἀπειρον.

Ἐπομένως κάθε πεπερασμένον σύνολον, ὅσονδήποτε μέγα πλῆθος στοιχείων καὶ ἂν ἔχῃ, ἰσοδυναμεῖ πάντοτε πρὸς ἕνα μέρος οἴουδήποτε ἀπειροσυνόλου καὶ ποτὲ πρὸς τὸ ἀπειροσύνολον.

Κάθε σύνολον τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδυναμικόν πρὸς ἕνα μέρος του, εἶναι ἀπειροσύνολον.

Διότι ἂν ἦτο πεπερασμένον δὲν θὰ ἦτο ἰσοδυναμικόν πρὸς κανένα μέρος του (§ 11, δ').

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ εἶναι μὴ πεπερασμένον. Διότι, κάθε πεπερασμένον σύνολον ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἕνα «ἀρχικὸν ἀπόκομμα» τοῦ Φ καὶ ποτὲ πρὸς τὸ Φ . (Ἐνα πεπερασμένον σύνολον μὲ πλῆθος στοιχείων ἴσον μὲ k , εἶναι ἰσοδυναμικόν πρὸς τὸ σύνολον $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα ἀρχικὸν ἀπόκομμα τοῦ Φ). Ἐκτὸς τούτου, τὸ σύνολον $\Phi = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ἔχει τὸ γνῶρισμα ἀπειροσυνόλου διότι εἶναι ἰσοδυναμικόν πρὸς ἕνα μέρος του, π.χ. πρὸς τὸ $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$. Διότι μεταξὺ τῶν Φ καὶ Α ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία:

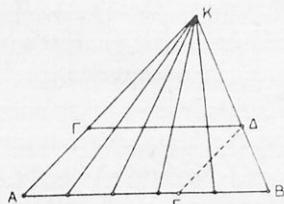
$$\begin{array}{ccccccc} \Phi: & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ & 2 & 4 & 6 & & 2n & \end{array}$$

καθ' ἣν τὸ στοιχεῖον ρ τοῦ Φ καὶ τὸ 2ρ τοῦ A εἶναι ἀντίστοιχα δηλ. $\rho \longleftrightarrow 2\rho$ διὰ $\rho=1, 2, 3, \dots$ (Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν). Ἐφ' ὅσον δὲ τὸ Φ ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἓνα μέρος του, δέν εἶναι πεπερασμένον σύνολον.

ii) Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι, μὴ πεπερασμένον.

Διότι, εἰς τὸ σχῆμα 5 γίνεται φανερά ἡ ὑπάρχουσα ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB μετὰ τὰ σημεία τοῦ $\Gamma\Delta$. Τὸ σημειοσύνολον AB εἶναι λοιπόν, ἰσοδύναμον μετὰ τὸ σημειοσύνολον $\Gamma\Delta$, τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ ἰσοδυναμεῖ μετὰ ἓνα μέρος τοῦ AB (π.χ. μετὰ τὸ AE). Ὡστε τὸ σημειοσύνολον AB εἶναι ἰσοδύναμον μετὰ ἓνα μέρος του.

Τὴν ιδιότητα αὐτήν, μόνον τὰ σύνολα μετὰ ἀπειρον πλῆθος στοιχείων δύνανται νὰ κατέχουν.



Σχ. 5

§ 14. Τὸ σύνολον Φ_0 τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς. Εἰς τὸ κενὸν σύνολον ἀντιστοιχοῦμεν τὸ ἀριθμὸν μηδέν. Τὸ σύμβολον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου: 0. Ἐὰν εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν συνάψωμεν καὶ τὸν ἀριθμὸν 0, τὸ προκύπτον νέον σύνολον:

$$\Phi_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$

λέγεται σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς. Πᾶς λοιπὸν ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι ἢ φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ τὸ μηδέν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον μετὰ τὴν λέξιν ἀκέραιος θὰ ἐννοοῦμεν ἓνα ἀκέραιον τῆς Ἀριθμητικῆς, δηλ. ἓνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου Φ_0 .

Τὸ μηδέν εἶναι μικρότερον παντὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ διότι τὸ κενὸν σύνολον θεωρεῖται ὡς ὑποσύνολον παντὸς συνόλου. Ὅλα τὰ προηγουμένως λεχθέντα περὶ ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων μεταξὺ φυσικῶν ἀριθμῶν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους.

§ 15. Πρόσθεσις ἀκεραίων ἀριθμῶν. α') "Ἀθροῖσμα δύο ἀκεραίων. Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι α καὶ β εἶναι ἀντιστοίχως οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ξένων μεταξὺ τῶν συνόλων A καὶ B τότε, καλεῖται ἄθροισμα αὐτῶν, ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς γ τοῦ συνόλου $\Gamma = A \cup B$. Ἐχομεν δηλ.: $A \cup B = \Gamma$ καὶ γράφομεν:

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Τὸ σημεῖον $+$ εἶναι τὸ σύμβολον μιᾶς προσθέσεως πρὸς ἐκτέλεσιν, οἱ δὲ α καὶ β λέγονται ὅροι τοῦ ἀθροίσματος ἢ προσθετέοι.

Ἐνίστε, ἀντὶ «προσθέτομεν εἰς τὸν α τὸν β » λέγομεν «αὐξάνομεν τὸν α κατὰ β ». Ἡ ἀπόφασις αὕτη ἐλήφθη ἀπὸ τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

"Αν ὁ ἕνας ἐκ τῶν δύο προσθετέων εἶναι ὁ μηδέν, τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄλλον. "Εχομεν δηλ. :

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad 0 + \alpha = \alpha$$

Ἡ ιδιότης αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἐξῆς :

Ὁ ἀριθμὸς μηδέν εἶναι οὐδέτερος διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων.

β') "Αθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν. "Εστω ὅτι δίδονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων. καὶ εἰς τὸ εὗρεθὲν ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν τρίτον καὶ εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον, προσθέτομεν τὸν τέταρτον. Καταλήγομεν ἔτσι εἰς ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος καλεῖται ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ καὶ ὁ ὁποῖος παρίσταται μέ :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

"Εχομεν δηλαδή: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \{(\alpha + \beta) + \gamma\} + \delta$ ὅπου τὸ $(\alpha + \beta)$ σημαίνει ὅτι οἱ α καὶ β ἔχουν ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματός των, δηλ. ὅτι ἡ πρόσθεσις $\alpha + \beta$ ἔχει ἐκτελεσθῇ καὶ τὸ $\{(\alpha + \beta) + \gamma\}$ ὅτι οἱ δύο προσθετέοι $(\alpha + \beta)$ καὶ γ ἔχουν ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματός των.

Ὅμοιως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα οἰουδήποτε πεπερασμένου πλήθους προσθετέων. Π.χ. $5 + 3 + 7 + 9 + 12 = 8 + 7 + 9 + 12 = 15 + 9 + 12 = 24 + 12 = 36$.

γ') Τὸ ἄθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n$. "Αν φαντασθῶμεν τὸ σύνολον E ὅλων τῶν ἀθροισμάτων :

$E = \{1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, \dots \text{ἄνευ τέλους}\}$ τότε τὸ σύμβολον $1+2+3+\dots+n$, παριστάνει κάποιον ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τῶν ἀνηκόντων εἰς τὸ σύνολον E καὶ μάλιστα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει πλῆθος προσθετέων, ἴσον μὲ n . "Ετσι π.χ. τὸ σύμβολον $1+2+3+\dots+n$, διὰ $n=1$ παριστάνει τὸν 1, διὰ $n=2$, παριστάνει τὸν $1+2$, διὰ $n=3$ παριστάνει τὸν $1+2+3$ κ.ο.κ. Δηλ. ὅταν τὸ n διατρέχη ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς, τὸ $1+2+3+\dots+n$ παριστάνει διαδοχικῶς, ὅλα τὰ ἀθροίσματα τοῦ συνόλου E . Τὸ $1+2+3+\dots+n$ καλεῖται καὶ «ἄθροισμα τῶν n πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν».

Παρόμοια ἀθροίσματα, μὲ ὄχι συγκεκριμένον πλῆθος προσθετέων, χρησιμοποιοῦνται συχνὰ εἰς θεωρίαν τῆς Ἀλγέβρας. Ταῦτα ἔχουν τὴν μορφήν: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ (ἄλφα ἐν + ἄλφα 2 + κ.τ.λ. + ἄλφα νί), ὅπου τὸ n , εἶναι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ γενικοῦ τούτου ἀθροίσματος. Οἱ προσθετέοι,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n \dots$, πρέπει νὰ καθορίζονται κατὰ ἓνα ἐντελῶς ὀρισμένον τρόπον.

§ 16. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. i) Ἡ πρόσθεσις δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι προᾶξις ἀντιμεταθετική, ἥτοι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Διότι, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ξένων μεταξὺ των συνόλων A καὶ B τότε ὁ $\alpha + \beta$ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $A \cup B$ ὁ δὲ $\beta + \alpha$ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $B \cup A$. Εἶδομεν ὅμως (§ 6) ὅτι $A \cup B = B \cup A$.

ii) Ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων εἶναι προᾶξις προσεταιριστική, ἥτοι $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Διότι, ἂν οἱ α, β, γ παριστοῦν τὰ πλῆθη τῶν στοιχείων τῶν ξένων μεταξὺ των συνόλων, A, B, Γ , τότε τὸ μὲν ἄθροισμα $(\alpha + \beta) + \gamma$ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $(A \cup B) \cup \Gamma$ τὸ δὲ $\alpha + (\beta + \gamma)$ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $A \cup (B \cup \Gamma)$. Γνωρίζομεν ὁμῶς (§ 6) ὅτι $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$.

iii) Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται ἀν ἀλλάξῃ ἢ τάξιν τῶν προσθετέων.

Ἐστω τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau$. Θὰ δεῖξωμεν πρῶτον ὅτι δυνάμεθα ν' ἀντιμεταθέσωμεν δύο διαδοχικοὺς προσθετέους, ἔστω τοὺς γ καὶ δ , χωρὶς τὸ ἄθροισμα νὰ μεταβληθῇ, δηλ. ὅτι :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \epsilon + \dots + \tau.$$

Πρὸς τοῦτο, παριστῶντες διὰ τοῦ k τὸ ἄθροισμα $(\alpha + \beta)$ καὶ χρησιμοποιοῦντες τὸν ὅρισμόν τοῦ ἄθροίσματος πολλῶν προσθετέων, τὸν προσεταιριστικὸν νόμον καὶ τὸν ἀντιμεταθετικὸν νόμον (διὰ δύο προσθετέους) ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau &= k + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau = \\ &= \{(k + \gamma) + \delta\} + \epsilon + \dots + \tau = \{k + (\gamma + \delta)\} + \epsilon + \dots + \tau = \\ &= \{k + (\delta + \gamma)\} + \epsilon + \dots + \tau = \{(k + \delta) + \gamma\} + \epsilon + \dots + \tau = \\ &= k + \delta + \gamma + \epsilon + \dots + \tau = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \epsilon + \dots + \tau. \end{aligned}$$

Θὰ δεῖξωμεν τώρα ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau$ δυνάμεθα ν' ἀντιμεταθέσωμεν δύο τευχόντας προσθετέους π.χ. τὸν β καὶ ϵ , δηλ. ὅτι :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau = \alpha + \epsilon + \gamma + \delta + \beta + \dots + \tau.$$

Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν ἀντιμεταθέσεις διαδοχικῶν προσθετέων ὡς ἔχομεν δικαίωμα καὶ λαμβάνομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \dots + \tau &= \alpha + \beta + \gamma + \epsilon + \delta + \dots + \tau = \\ &= \alpha + \beta + \epsilon + \gamma + \delta + \dots + \tau = \alpha + \epsilon + \beta + \gamma + \delta + \dots + \tau = \\ &= \alpha + \epsilon + \gamma + \beta + \delta + \dots + \tau = \alpha + \epsilon + \gamma + \delta + \beta + \dots + \tau. \quad \text{ὅ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου γίνεται φανερόν ὅτι δυνάμεθα ν' ἀνακατατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος καθ' ἣν σειράν θέλομεν χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀθροίσεως.

iv) Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται

ἄν αντικαταστήσωμεν τινὰς τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν.

Ἐστω π.χ. τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$. Λαμβάνομεν μερικοὺς προσθετέους, ἔστω τοὺς α , γ καὶ δ καὶ εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν: $\alpha + \gamma + \delta = \sigma$. Θὰ δεῖξωμεν ὅτι:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \sigma + \beta + \epsilon.$$

$$\text{Πράγματι: } \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \gamma + \delta + \beta + \epsilon = \{(\alpha + \gamma) + \delta\} + \beta + \epsilon = \sigma + \beta + \epsilon.$$

v) Διὰ τὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἓνα μόνον ἄθροισμα, περιέχον τοὺς ὅρους ὅλων τῶν ἀθροισμάτων.

$$\text{Π.χ. } (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta + \epsilon) + (\eta + \theta) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta + \theta.$$

Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ 2ον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, εἶναι ὄντως, ἴσον μὲ τὸ πρῶτον. Χρησιμοποιοῦντες ἐπανειλημένως τὴν προηγουμένην ιδιότητα ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta + \theta &= (\alpha + \beta) + \gamma + \delta + \epsilon + \eta + \theta = \\ &= (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta + \epsilon) + \eta + \theta = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta + \epsilon) + (\eta + \theta). \end{aligned}$$

vi) Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὅσαοδήποτε ἰσότητας.

Ἦτοι ἂν εἶναι π.χ. $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $\epsilon = \eta$ τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma + \epsilon = \beta + \delta + \eta$.

Διότι ἂν νοήσωμεν σύνολα $A, B, \Gamma, \Delta, E, H$, ξένα μεταξὺ των ἀνὰ δύο καὶ ἔχοντα πληθικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὰ A, Γ, E εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ B, Δ, H (ἄφοῦ $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $\epsilon = \eta$) καὶ συνεπῶς τὸ $A \cup \Gamma \cup E$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $B \cup \Delta \cup H$ ἄρα καὶ $\alpha + \gamma + \epsilon = \beta + \delta + \eta$. Πόρισμα τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος εἶναι ὅτι:

Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Δηλ. ἂν $\alpha = \beta$ τότε καὶ $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

vii) Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος, τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Δηλ. ἂν $\alpha < \beta$ τότε καὶ $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

Διότι, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἀκεραίους α, β, γ ὡς πληθικοὺς ἀριθμοὺς συνόλων A, B, Γ ὅπου $A \subset B$ (ἄφοῦ $\alpha < \beta$) καὶ Γ ξένον πρὸς τὸ B . Εὐκόλα βλέπομεν ὅτι τότε θὰ εἶναι καὶ $A \cup \Gamma \subset B \cup \Gamma$ καὶ ἐκ ταύτης: $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

viii) Νόμος τῆς διαγραφῆς εἰς τὴν πρόσθεσιν:

“Ἄν $\alpha + x = \alpha + y$ τότε εἶναι $x = y$ ”.

Ἡ ιδιότης αὕτη λέγεται νόμος τῆς διαγραφῆς, διότι δυνάμεθα νὰ διαγράψωμεν τὸν ἀριθμὸν α ἀπὸ τὰ δύο μέλη.

Ἀποδείξεις: Ἐὰν ἀληθεύσῃς τῆς $\alpha + x = \alpha + y$ οἱ x καὶ y δὲν ἦσαν ἴσοι τότε θὰ ἦτο ἢ $x < y$ ἢ $y < x$. Ἐὰν $x < y$ τότε κατὰ τὴν προηγουμένην ιδιότητα θὰ ἦτο: $\alpha + x < \alpha + y$ τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄν $y < x$ τότε θὰ εἴχομεν $\alpha + y < \alpha + x$ τὸ ὁποῖον πάλιν ἀντίκειται. Ἀποκλειομένων τῶν $x < y$ καὶ $y < x$, θὰ ὑπάρξῃ κατ' ἀνάγκην $x = y$.

§ 17. Τὸ συνεπάγεσθαι-Ἰσοδύναμοι σχέσεις. Εἶδομεν προηγουμένως ὅτι ἡ σχέση $\alpha + x = \alpha + y$ συνεπάγεται τὴν σχέση $x = y$. Τοῦτο σημειοῦμεν ὡς κάτωθι :

$$(1) \quad \alpha + x = \alpha + y \Rightarrow x = y$$

ὅπου τὸ σύνολον $\Rightarrow$ διαβάζεται : «συνεπάγεται».

Εἶδομεν ὅμως ὅτι καὶ ἡ δευτέρα σχέση, $x = y$, συνεπάγεται τὴν πρώτην : $\alpha + x = \alpha + y$. Δηλ. ἰσχύει καὶ

$$(2) \quad x = y \Rightarrow \alpha + x = \alpha + y.$$

Διὰ τὰ ἐκφράσωμεν καὶ τὰς δύο ιδιότητες (ἢ θεωρήματα ἢ προτάσεις) (1) καὶ (2) μαζί, γράφομεν :

$$(3) \quad \alpha + x = \alpha + y \iff x = y$$

ὅπου τὸ σύμβολον $\iff$ διαβάζεται : «συνεπάγεται ἀντιστρέπτως».

Δύο σχέσεις, ὅπως αἱ $\alpha + x = \alpha + y$ καὶ $x = y$ ἐξ ὧν ἐκάστη συνεπάγεται τὴν ἄλλην λέγονται **ἰσοδύναμοι** (ἢ λογικῶς ἰσοδύναμοι) **σχέσεις**.

Τὰ σύμβολα $\Rightarrow$ καὶ $\iff$ λέγονται ἀντιστοίχως, σύμβολα **λογικῆς συνεπαγωγῆς** καὶ **λογικῆς ἰσοδυναμίας** καὶ εἶναι μεγίστης χρήσεως εἰς τὰ Μαθηματικά.

Ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο σχέσεις εἰς μίαν συνεπικωγὴν, ἡμπορεῖ νὰ εἶναι πολυμελεῖς. Π.χ. :

$$\{\alpha = \beta \text{ καὶ } \beta = \gamma\} \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\{A \subset B \text{ καὶ } B \subset \Gamma\} \Rightarrow A \subset \Gamma$$

Ἀντὶ τοῦ καὶ διὰ τοῦ ὁποίου συζητηθῶνται αἱ δύο σχέσεις γράφεται πολλάκις ἓνα κόμμα, ἢ τὸ σύμβολον $\wedge$. Π.χ. οἱ τρεῖς συμβολισμοί :

$$\{p \in A \text{ καὶ } p \in B\} \iff p \in A \cap B$$

$$\{p \in A, p \in B\} \iff p \in A \cap B$$

$$\{p \in A \wedge p \in B\} \iff p \in A \cap B$$

σημαίνουν τὸ ἴδιο πράγμα.

§ 18. Ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐστῶσαν δύο ἄνισοι ἀκέραιοι (τῆς Ἀριθμητικῆς) α καὶ β , ἀντιστοιχοῦντες (ὡς πληθικοὶ ἀριθμοὶ) ὁ μὲν β εἰς ἓνα σύνολον B ὁ δὲ α εἰς ἓνα ὑποσύνολον τοῦ B , ἔστω τὸ A . Ἐπειδὴ $A \subset B$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha < \beta$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $B = A + A'$, ὅπου A' τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ A ὡς πρὸς B ἔπεται ἡ σχέση μετὰ τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν :

$$(1) \quad \beta = \alpha + x$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

όπου x ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ A' . (Ὁ x εἶναι μοναδικός, διότι αἱ δύο ισότητες $\beta = \alpha + x$, $\beta = \alpha + y$ συνεπάγονται: $\alpha + x = \alpha + y \Rightarrow x = y$ (§ 16, viii)).

Βλέπομεν ἐκ τῆς (1) ὅτι, *δοθέντων δύο ἀκεραίων α καὶ β , όπου $\alpha < \beta$, ὑπάρχει πάντοτε ἓνας (καὶ μόνον ἓνας) τρίτος ἀκεραῖος x ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον, δίδει τὸν μεγαλύτερον. Οὗτος καλεῖται διαφορὰ τοῦ β μεῖον α . Γράφομεν:*

$$(2) \quad \beta - \alpha = x \quad (\beta > \alpha).$$

Ἡ εὕρεσις τῆς διαφορᾶς εἶναι μία πρᾶξις ἀριθμητική, καλουμένη ἀφαίρεσις. Τὸ σημεῖον — εἰς τὴν (2) σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ μία ἀφαιρέσις. Ὁ β λέγεται μειωτέος καὶ ὁ α ἀφαιρετέος. Δυνάμεθα δὲ νὰ εἴπωμεν ὅτι: «*ἡ διαφορὰ προστιθεμένη εἰς τὸν ἀφαιρετέον, δίδει τὸν μειωτέον*».

Ἐνίοτε ἀντὶ «ἀπὸ τὸν α ἀφαιροῦμεν τὸν β » λέγομεν: «ἐλαττοῦμεν τὸν α κατὰ β ».

Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἐὰν $\alpha = \beta$, τότε ὡς διαφορὰ $\alpha - \beta = \alpha - \alpha$ λαμβάνεται τὸ μηδέν, διότι ἔχομεν $\alpha + 0 = \alpha$, συνεπῶς $\alpha - \alpha = 0$.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τῆς διαφορᾶς προκύπτει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία:

$$\beta - \alpha = x \iff \beta = \alpha + x$$

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$x - (x - \alpha) = \alpha$$

Διότι, ἡ διαφορὰ $x - \alpha$, προστιθέμενη εἰς τὸν ἀφαιρετέον α , δίδει τὸν μειωτέον x , δηλ.: $x = (x - \alpha) + \alpha \Rightarrow x - (x - \alpha) = \alpha$.

§ 19. Μερικοὶ κανόνες πράξεων. i) Ἀφαιρέσεις ἀθροίσματος:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$$

Ἀπόδειξις, Ἄν καλέσωμεν x τὴν διαφορὰν $\alpha - (\beta + \gamma)$ θὰ ἔχομεν μίαν σειρὰν ἰσοδυνάμων σχέσεων:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = x \iff x + (\beta + \gamma) = \alpha \iff (x + \gamma) + \beta = \alpha \iff x + \gamma = (\alpha - \beta) \Rightarrow x = (\alpha - \beta) - \gamma.$$

ii) Πρόσθεσις διαφορᾶς:

$$1) \quad \alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$$

$$2) \quad \alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) + \beta$$

$$3) \quad \boxed{(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \delta) + (\delta - \varepsilon) = \alpha - \varepsilon}$$

Ἀπόδειξις. 1) Ἐάν καλέσωμεν x τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ $\beta - \gamma$ θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν

$$x = \alpha + (\beta - \gamma) \Rightarrow (x - \alpha) = \beta - \gamma \Rightarrow (x - \alpha) + \gamma = \beta \Rightarrow (x - \alpha) + \alpha + \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow x + \gamma = (\alpha + \beta) \Rightarrow x = (\alpha + \beta) - \gamma.$$

2) Ἐάν $\gamma < \alpha$, ἔχομεν κατὰ σειρὰν: $\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) + \gamma + (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) + (\gamma + (\beta - \gamma)) = (\alpha - \gamma) + \beta.$

3) Εἶναι $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = (\lambda \acute{o}\gamma\omega \tau\eta\varsigma \text{ ii}) \{(\alpha - \beta) + \beta\} - \gamma = \alpha - \gamma.$ Ἐπομένως $\{(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)\} + (\gamma - \delta) = (\alpha - \gamma) + (\gamma - \delta) = \alpha - \delta$ κ.ο.κ. Προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν προστιθεμένων διαφορῶν δύνανται νὰ εἶναι οἷονδήποτε (πεπερασμένον πλῆθος).

iii) Ἀφαίρεσις μιᾶς διαφορᾶς :

$$1) \quad \boxed{\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta}$$

$$2) \quad \boxed{\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma}$$

Ἀπόδειξις. 1) Ἐάν $\alpha - (\beta - \gamma) = x$, τότε, $x + (\beta - \gamma) = \alpha \Rightarrow (x + \beta) - \gamma = \alpha \Rightarrow x + \beta = (\alpha + \gamma) \Rightarrow x = (\alpha + \gamma) - \beta.$

2) Ἐάν $\beta < \alpha$ θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν :

$$\alpha - (\beta - \gamma) = \{(\alpha - \beta) + \beta\} - (\beta - \gamma) = \lambda \acute{o}\gamma\omega \tau\eta\varsigma \text{ ii}) (\alpha - \beta) + \{\beta - (\beta - \gamma)\} = (\alpha - \beta) + \gamma.$$

§ 20. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὰς ἀνισότητας. i) Νόμος διαγραφῆς :

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta.$$

Διότι, ἂν ᾗτο $\alpha = \beta$, τότε, $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ὅπερ ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐάν ᾗτο $\alpha > \beta$ τότε, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ (§ 16, viii) τὸ ὅποιον πάλιν, ἀπορρίπτεται. Ἐπομένως, μένει $\alpha < \beta.$

ii) Πρόσθεσις κατὰ μέλη :

$$\{\alpha < \beta \text{ καὶ } \gamma < \delta\} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

Ἀπόδειξις. Ἐάν θέσωμεν: $\beta - \alpha = x$, $\delta - \gamma = y$ τότε :

$$\{\beta = \alpha + x, \delta = \gamma + y\} \Rightarrow (\beta + \delta) = (\alpha + \gamma) + (x + y) \Rightarrow \beta + \delta > \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 21. Γινόμενον δύο ἀκεραίων. α') Καλεῖται γινόμενον τοῦ ἀκεραίου α ἐπὶ τὸν ἀκέραιον n , τὸ ἄθροισμα n ἀριθμῶν ἴσων πρὸς α .

$$\text{Θέτομεν : } \underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n \text{ ὅροι}} = n\alpha$$

Ὁ ἀριθμὸς n ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἄθροισματος λέγεται **πολλαπλασιαστικὸς** ὁ δὲ α , **πολλαπλασιαστέος**. ὁ ἀριθμὸς $\gamma = n\alpha$ Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

λέγεται γινόμενον οί δὲ ν καὶ α ὁμοῦ, παράγοντες τοῦ γινομένου. Ἡ πρᾶξις καθ' ἣν ἐκ τῶν ν καὶ α δημιουργεῖται τὸ γινόμενον να λέγεται πολλαπλασιασμός.

Τὸ γινόμενον να, διαβάζεται καί : ν φορὰς τὸ α ἢ ν ἐπὶ α ἢ $\nu \alpha$. ἄλφα γράφεται δὲ συχνὰ καὶ $\nu \cdot \alpha$ ἢ ἀκόμη $\nu \times \alpha$.

Οὕτω π.χ. : $5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$, $3 \cdot \alpha = \alpha + \alpha + \alpha$.

β') 'Ο ἀντιμεταθετικός νόμος. Ἄς θεωρήσωμεν ἓνα πλῆθος κοκκίδων διατεταγμένων εἰς τρεῖς (ὀριζοντίας) γραμμὰς καὶ εἰς πέντε (κατακορύφους) στήλας, ὡς εἰς σχ. 6. Τὸ πλῆθος ὅλων αὐτῶν τῶν κοκκίδων εἶναι $5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5$ ὅταν ἀθροίσωμεν κατὰ γραμμὰς. Σχ. 6

Τὸ ἴδιο πλῆθος εἶναι $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3$ ὅταν ἀθροίσωμεν κατὰ στήλας. Κατὰ συνέπειαν εἶναι

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

Καὶ γενικῶς, ἂν α καὶ β εἴναι δύο ἀκέραιοι, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha \cdot \beta = \beta \alpha$$

Ἦτοι κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν δύο ἀκεραίων δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς δύο παράγοντας.

Μὲ ἄλλας λέξεις, ὁ ἀντιμεταθετικός νόμος ἰσχύει κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν δύο ἀκεραίων.

γ') Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἔχομεν : $\alpha \times 1 = \alpha$ καὶ $1 \times \alpha = \alpha$.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμός ἐπὶ 1 δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμὸν λέγομεν ὅτι : 'Ο ἀριθμὸς 1 εἶναι οὐδέτερος διὰ τὸν πολ/σμόν.

§ 22. Πολλαπλασιασμός ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἰσότητος ἢ ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμὸν.

i) Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε ἐκ τῆς $\alpha = \beta \Rightarrow \nu \alpha = \nu \beta$.

Διότι προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha = \beta$ λαμβάνομεν $2\alpha = 2\beta$ καὶ προσθέτοντες πάλιν κατὰ μέλη τὰς $2\alpha = 2\beta$ καὶ $\alpha = \beta$ λαμβάνομεν $3\alpha = 3\beta$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξακολουθοῦμεν ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν $\nu \alpha = \nu \beta$.

ii) Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε ἐκ τῆς $\alpha < \beta \Rightarrow \nu \alpha < \nu \beta$.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς προηγουμένως, βάσει τῆς § 20, ii.

§ 23. Ἐπιμεριστικός νόμος. α') Ἔχομεν : $3(2 + 5) = (2 + 5) + (2 + 5) + (2 + 5) = 2 + 5 + 2 + 5 + 2 + 5 = 2 + 2 + 2 + 5 + 5 + 5 =$

$$= (2+2+2) + (5+5+5) = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 5) \quad \eta\tau\omicron\iota: \quad 3(2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5.$$

Γενικῶς δι' ἀκεραίους α, β, γ ἰσχύει ὁμοίως ὅτι:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Ἡ ἰσότης αὕτῃ ἐκφράζει τὸν λεγόμενον *ἐπιμεριστικὸν νόμον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ* ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ὅστις γενικεύεται καὶ διὰ περισσοτέρους προσθετέους. Οὕτω π.χ.:

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha\{(\beta + \gamma) + \delta\} = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha\delta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta.$$

Ἀπὸ τοὺς τρεῖς προσθετέους μεταβαίνομεν εἰς τέσσαρας:

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = \alpha\{(\beta + \gamma + \delta) + \varepsilon\} = \alpha(\beta + \gamma + \delta) + \alpha \cdot \varepsilon = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon.$$

Γενικῶς:

Ἐπιμερισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα.

Ὅταν τὸν ἀριθμὸν $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$ τὸν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\beta + \gamma + \delta)$, λέγομεν ὅτι ἐξάγομεν τὸν κοινὸν παράγοντα α ἐκτὸς παρενθέσεως ἢ ὅτι τρέπομεν εἰς γινόμενον τὸ ἀθροισμα $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$.

β') Ἐχομεν ἐπίσης τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας:

$$\beta - \gamma = x \Rightarrow \beta = \gamma + x \Rightarrow \alpha\beta = \alpha(\gamma + x) \Rightarrow \alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha x \Rightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha x$$

καὶ ἂν ὅπου x τεθῇ $\beta - \gamma$, εὐρίσκομεν: $\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha(\beta - \gamma)$ ἢ

$$\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

δηλ. τὸν *ἐπιμεριστικὸν νόμον* τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν.

§ 24. Γινόμενον ἀκεραίων περισσοτέρων τῶν δύο.

α') Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κατὰ σειράν, καλεῖται γινόμενον αὐτῶν καὶ παρίσταται μέ:

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \quad \eta \quad \alpha\beta\gamma\delta$$

ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁποῖον εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὸν α ἐπὶ τὸν β καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου, ἐπὶ γ καὶ τὸ ἐξαγόμενον, ἐπὶ δ . Δηλ.:

$$\alpha\beta\gamma\delta = \{(\alpha\beta) \cdot \gamma\} \cdot \delta = (\alpha\beta\gamma) \cdot \delta.$$

Οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Τὸ γινόμενον δύναται νὰ ἔχῃ οἰονδήποτε πεπερασμένον πλῆθος παραγόντων.

β') 'Ο προσεταιριστικὸς νόμος. Ἔχομεν: $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 2 \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 3(5 + 5) = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot (5 \cdot 2)$, ἤτοι:

$$3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 5) \cdot 2.$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἂν α , β , γ παριστάνουν ἀκεραίους, ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν προσεταιριστικὸν νόμον διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν.

γ') Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων. i) Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

$$\text{Π.χ. } \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon = \gamma \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \epsilon \cdot \delta.$$

ii) Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν τινὰς τῶν παραγόντων διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

$$\text{Π.χ. } 12 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 6 = (4 \cdot 9 \cdot 6) \cdot 12 \cdot 7 = 216 \cdot 12 \cdot 7.$$

iii) Διὰ τὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἓνα μόνον γινόμενον περιέχον ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.

$$\text{Π.χ. } (\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \delta \epsilon)(\zeta \theta) = \alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \theta.$$

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω στηρίζεται εἰς τὸν ἀντιμεταθετικὸν καὶ προσεταιριστικὸν νόμον καὶ γίνεται ἀκριβῶς ὅπως ἔγινε διὰ τὸ ἄθροισμα, εἰς τὴν § 16, iii) iv) καὶ v) τιθεμένου μόνον, τοῦ συμβόλου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὴν θέσιν τοῦ συμβόλου + τῆς προσθέσεως.

§ 25. Συνέπεια τῶν θεμελιωδῶν νόμων. α') Γινόμενον δύο ἀθροισμάτων. Πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ γινομένου $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta + \epsilon)$, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ $(\alpha + \beta)$ ὡς ἓνα ἀριθμὸν καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\gamma + \delta + \epsilon) &= (\alpha + \beta)\gamma + (\alpha + \beta)\delta + (\alpha + \beta)\epsilon = \\ &= \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta + \alpha\epsilon + \beta\epsilon. \end{aligned}$$

Γενικῶς ἰσχύει ὅτι:

Λαμβάνομεν τὸ γινόμενον δύο ἀθροισμάτων, πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον ὅρον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα.

β') Πολλαπλασιασμός γινομένου ἐπὶ ἀριθμόν.—*Διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν ἑνα γινόμενον ἐπὶ ἑνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑνα παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

$$\text{Π.χ. } \varepsilon \cdot (\alpha\beta\gamma\delta) = \alpha\beta(\varepsilon\gamma) \cdot \delta.$$

$$\text{Διότι: } \varepsilon \cdot (\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta)\varepsilon = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \ (\S\ 24\ \alpha') = \alpha\beta\varepsilon\gamma\delta \ (\S\ 24\ \gamma') = \alpha\beta(\gamma\varepsilon)\delta \ (\S\ 24\ \gamma').$$

§ 26. Ὁ παράγων μηδέν. α') Ἐχομεν $n \times 0 = 0$.

Διότι τὸ $n \times 0$ εἶναι ἴσον μὲ ἄθροισμα n μηδενικῶν.

β') Συμφωνοῦμεν: $0 \times n = 0$.

Ὅποτε οἱ θεμελιώδεις νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πληροῦνται καὶ ὅταν ὁ ἕνας παράγων εἶναι μηδέν.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζουν τὴν ιδιότητα:

Ὅταν ὁ ἕνας παράγων ἑνὸς γινομένου ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

γ') Τὸ γινόμενον δύο φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι πάλιν φυσικὸς ἀριθμός. Διότι ὡς εἶδομεν, τὸ γινόμενον εἶναι ἄθροισμα ἴσων προσθετέων καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, ἔχουν ἄθροισμα φυσικὸν ἀριθμόν. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ὅταν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, δὲν δύνανται καὶ οἱ δύο ἀκεραῖοι νὰ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, διότι τότε θὰ εἶχον γινόμενον φυσικὸν ἀριθμόν, συνεπῶς διάφορον τοῦ μηδενός ($\neq 0$). Ἡ μόνη ἀπομένουσα δυνατότης, διὰ νὰ εἶναι $\alpha \cdot \beta = 0$ εἶναι ὁ εἷς τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο ἀκεραίων α, β , νὰ εἶναι μηδέν. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται:

Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν, ὁ ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι μηδέν.

Γενικώτερον, ἂν γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων εἶναι μηδέν, ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι μηδέν.

§ 27. Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. α') Ἐὰν οἱ ἀκεραῖοι n, α, β ὅπου $n \neq 0$ πληροῦν τὴν ἰσότητα $n\alpha = n\beta$ τότε θὰ ἔχωμεν καὶ $n\alpha - n\beta = 0$ ἢ ἀκόμη $n(\alpha - \beta) = 0$. Ἐπομένως κάποιος ἐκ τῶν δύο παραγόντων τοῦ μηδενικοῦ γινομένου $n(\alpha - \beta)$ πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ ὁ n δὲν εἶναι μηδέν, (ἐξ ὑποθέσεως), θὰ εἶναι μηδέν ὁ ἄλλος παράγων, $\alpha - \beta$ ἤτοι $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$. Ἐχομεν λοιπόν:

$$n\alpha = n\beta \Rightarrow \alpha = \beta \text{ ὅταν } n \neq 0$$

Τοῦτο εἶναι «νόμος διαγραφῆς», διότι διαγράφεται ὁ παράγων ν ἀπὸ ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος. Ὡστε:

Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς ἰσχύει διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν ὑπὸ τὸν ὅρον ὁ διαγραφόμενος παράγων νὰ εἶναι $\neq 0$.

β') Διὰ τὰς ἀνισότητας ἰσχύει ἀνάλογος ιδιότης:

$$\nu\alpha < \nu\beta \Rightarrow \alpha < \beta \text{ ὅταν } \nu \neq 0$$

Διότι, ἂν ᾖτο $\alpha = \beta$ τότε θὰ ἔχωμεν $\nu\alpha = \nu\beta$ (§ 22, i) ἐνῶ ἔχομεν $\nu\alpha < \nu\beta$. Ἄρα δὲν εἶναι $\alpha = \beta$. Ἐὰν ᾖτο $\beta < \alpha$, τότε θὰ ἔχωμεν $\nu\beta < \nu\alpha$ (§ 22, ii) ἐνῶ ἔχομεν $\nu\beta > \nu\alpha$. Ἄρα δὲν εἶναι οὔτε $\beta < \alpha$. Συνεπῶς ἀπομένει, νὰ εἶναι $\alpha < \beta$, ὡς συνέπεια τῆς $\nu\alpha < \nu\beta$.

§ 28. Δυνάμεις μὲ φυσικοὺς ἐκθέτας. Δεκαδικὸν σύστημα. α') Καλεῖται νουστή δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ α , τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν α .

Ἡ νουστή δύναμις τοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου:

$$\alpha^{\nu}$$

τὸ ὅποιον διαβάζεται: α εἰς τὴν ν . Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν λέγεται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως α^{ν} . Ἐξ ὁρισμοῦ λοιπὸν εἶναι:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ἡ πρᾶξις καθ' ἣν σχηματίζομεν τὴν δύναμιν α^{ν} λέγεται «ὑψωτοῦ α εἰς τὴν νουστήν».

Ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ α , δηλ. τὸ $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$ λέγεται τετράγωνον τοῦ α καὶ ἡ τρίτη δηλ. τὸ $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$, κύβος τοῦ α . Λέγομεν ὅτι ἕνας ἀκέραιος εἶναι τέλειον τετράγωνον ἢ τέλειος κύβος, ἢ τελεία νουστή δύναμις, ὅταν ὑπάρχῃ ἕνας ἄλλος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος ἢ ἡ νουστή δύναμις, ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθέντα ἀκέραιον.

Σύμβασις: Θέτομεν $\alpha^1 = \alpha$.

Ἰδιότητες: i) Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μία δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν διαφόρων παραγόντων.

Π.χ. $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 2^{3+4}$.

Γενικῶς: $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\rho} = \alpha^{\mu+\nu+\rho}$.

ii) Ἡ δύναμις μιᾶς δυνάμεως τοῦ α εἶναι μία δύναμις τοῦ α ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Π.χ. $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4}$
καὶ ὁμοίως, $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$.

iii) Ἡ νυοσιτὴ δύναμις γινομένου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν νυοσιῶν δυνάμεων τῶν παραγόντων.

Π.χ. $(\alpha\beta\gamma)^3 = (\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\gamma\gamma\gamma = \alpha^3\beta^3\gamma^3$
καὶ γενικώτερον: $(\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu\delta^\nu\ldots\tau^\nu$.

β') Δυνάμεις τοῦ 10. Εἶναι $10^1 = 10$, $10^2 = 10 \times 10 = 100$,
 $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ καὶ γενικῶς $10^\nu = \underbrace{1000 \ldots 0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$.

γ') Δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως. Γνωρίζομεν π.χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς «τρεῖς χιλιάδες ὀκτακόσια ἐνενήντα ἑπτὰ» εἶναι ἄθροισμα τοῦ «τρεῖς χιλιάδες» καὶ τοῦ «ὀκτακόσια» καὶ τοῦ «ἐνενήντα» καὶ τοῦ «ἑπτὰ» δηλ. ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 χιλιάδας, 8 ἑκατοντάδας, 9 δεκάδας καὶ 7 ἀπλᾶς μονάδας καὶ ἐπομένως ἰσοῦται μὲ $3 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 7 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7$ καὶ γράφεται 3897. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς ἡμπορεῖ νὰ παρασταθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν 10 «ψηφίων»: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. ὁ ὅποιος διαμορφοῦται ἀπὸ τὰ ψηφία $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ γραφόμενα κατὰ σειρὰν, δηλ. ὁ $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ ἰσοῦται μὲ $\psi_1 \cdot 10^3 + \psi_2 \cdot 10^2 + \psi_3 \cdot 10 + \psi_4$. Ὁμοίως ὁ $x\psi\omega = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + \omega = 100x + 10y + \omega$.

Θεώρημα: «Διὰ κάθε ν - ψηφίον ἀριθμὸν α τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, ἰσχύει ὅτι:

$$10^{\nu-1} \leq \alpha \leq 10^\nu - 1.$$

Ἀπόδειξις. Ὁ α θὰ εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha = \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu = \psi_1 \cdot 10^{\nu-1} + \psi_2 \cdot 10^{\nu-2} + \psi_3 \cdot 10^{\nu-3} + \ldots + \psi_{\nu-1} \cdot 10 + \psi_\nu$.

Ὁ μικρότερος ν -ψηφίος εἶναι προφανῶς ἐκεῖνος ὅστις ἔχει ὅλα τὰ ψηφία $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu$ μηδενικά καὶ τὸ $\psi_1 = 1$, δηλ. ὁ $10^{\nu-1}$. Ὁ μεγαλύτερος ν -ψηφίος εἶναι ἐκεῖνος ὅστις ἔχει ὅλα τὰ ψηφία τοῦ ἴσου πρὸς 9, δηλ. ὁ $9 \cdot 10^{\nu-1} + 9 \cdot 10^{\nu-2} + 9 \cdot 10^{\nu-3} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9 = (10-1)10^{\nu-1} + (10-1)10^{\nu-2} + (10-1)10^{\nu-3} + \ldots + (10-1)10 + (10-1) = (10^\nu - 10^{\nu-1}) + (10^{\nu-1} - 10^{\nu-2}) + (10^{\nu-2} - 10^{\nu-3}) + \ldots + (10^2 - 10) + (10 - 1) = 10^\nu - 1$, διότι ὁ δεῦτερος ὅρος ἐκάστης διαφορᾶς, ἐξαιλεῖται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἐπομένης διαφορᾶς (§ 19, ii).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

(Προϋποτίθεται ἡ γνῶσις ἀπλῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων).

A-19.—Διὰ ν' ἀριθμηθοῦν αἱ σελίδες ἐνὸς τετραδίου, ἐχρειάσθησαν 468 ψηφία (ἀριθμητικά). Πόσας σελίδας ἔχει τὸ τετράδιον;

A-20.—Ἐάν γράψωμεν τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου τοὺς 2.000 πρώτους φυσικοὺς ἀριθμοὺς, πόσας φορές θὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ ψηφίον 1;

A-21.—Ἐάν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν των, τί παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὅποιον λαμβάνομεν;

A-22.—Ἐάν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν των, τί παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὅποιον λαμβάνομεν;

A-23.—Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 160. Τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου εἶναι 120. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν;

A-24.—Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 45215 καὶ ἡ διαφορὰ των 23949. Εὑρετε τοὺς δύο ἀριθμοὺς.

A-25.—Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 123. Εὑρετε τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς.

A-26.—Τέσσαρες διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα 290. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί;

A-27.—Εὑρετε ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ αὐξηθὲν κατὰ 18.

A-28.—Δείξτε ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀκεραίων δὲν βλάπτεται ἂν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος ἐλαττωθοῦν ἢ αὐξηθοῦν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

A-29.—Ὁ ἀριθμὸς $2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^{11}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον;

A-30.—Ἄν ν φυσικὸς ἀριθμὸς ἀποδείξατε ὅτι

$$2^{2^v} = 4^v, \quad 2^{3^v} = 8^v, \quad 2^{v+1} - 2^v = 2^v, \quad 3^{v+1} - 2 \cdot 3^v = 3^v$$

B-31.—Λαμβάνομεν τρία ὀρισμένα ἐκ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ἔστω τὰ ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Κατασκευάζομεν 6 διψήφιους ἀριθμοὺς ἕκαστος τῶν ὁποίων περιέχει δύο ἐκ τῶν τριῶν ψηφίων ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 6 τούτων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ 22 φορές τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

B-32.—Ἐστῶσαν α καὶ β δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $\alpha < \beta$. Πόσοι φυσικοὶ ἀριθμοὶ x ὑπάρχουν τέτοιοι ὥστε $\alpha \leq x \leq \beta$;

B-33.—Πόσοι διαφορετικοὶ μεταξύ των πενταψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν;

B-34.—Ἐάν x καὶ y φυσικοὶ ἀριθμοί, δείξατε ὅτι

$$x > y \iff 10^x > 10^y.$$

B 35.—Ἐάν α ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς, ἀποδείξατε ὅτι

$$99\alpha = 100(\alpha - 1) + 90 + (10 - \alpha)$$

Ἐξ αὐτοῦ νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $1 < \alpha \leq 9$, ὁ ἀριθμὸς 99α εἶναι ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ μεσαῖον ψηφίον εἶναι 9 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκραίων ψηφίων, εἶναι πάλιν 9.

B-36.—Ἐάν δύο τριψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι σχηματισμένοι μὲ τὰ ἴδια ψηφία ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, πότε ἡ διαφορὰ των εἶναι διψήφιος ἀριθμὸς καὶ πότε τριψήφιος; Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μεσαῖον ψηφίον ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς των.

ψηφίον τῆς διαφορᾶς εἶναι τὸ 9 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκραίων εἶναι, πάλιν 9.

B-37.—Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔχει ἄθροισμα ψηφίων τὸ 15 καὶ ὅτι ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ὁ σχηματιζόμενος ἀπὸ τὰ ἴδια ψηφία γεγραμμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν, εὑρίσκειται διαφορὰ ἴση μὲ 27.

B-38.—Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν ὀνομάσωμεν S τότε θὰ ἔχωμεν :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

i) Ἐκ τῶν δύο τούτων, νὰ δειχθῇ ὅτι $2S = n(n+1)$.

ii) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν ;

B-39.—Ἐστω ἓνας Πυθαγόρειος πίναξ πολλαπλασιασμοῦ μὲ n στήλας καὶ n σειράς. Βάσει τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄθροισματος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος εἶναι $\{n(n+1)\}^2$.

1	2	3	...	n
2	4	6	...	$2n$
3	6	9	...	$3n$
...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	...	n^2

B-40.—Ἐὰν $\beta > 1$, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n διαφορῶν :

$$(\beta-1) + (\beta^2-\beta) + (\beta^3-\beta^2) + \dots + (\beta^n - \beta^{n-1}).$$

ἰσοῦται μὲ $\beta^n - 1$. Ἀκολούθως δείξατε τὴν ἰσότητα

$$\beta^n - 1 = (\beta-1)(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1}).$$

ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

§ 29. Πολλαπλάσια.— Καλοῦνται πολλαπλάσια ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ α , τὰ γινόμενα τοῦ α , ἐπὶ τοὺς ἀκεραίους 0, 1, 2, 3, 4, 5... ἤτοι, οἱ ἀριθμοὶ 0, α , 2α , 3α , 4α , 5α ...

Συνεπῶς, κάθε ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $\lambda \cdot \alpha$ ὅπου λ ἀκέραιος, εἶναι ἓνα πολλαπλάσιον τοῦ α . Ἐνίοτε γράφομεν : $\beta = \text{πολ.}\alpha$ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ὁ β εἶναι ἓνα πολλαπλάσιον τοῦ α .

Ἰδιότητες: i) Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων πολλαπλασίων τοῦ α , εἶναι πάλιν, πολλαπλάσιον τοῦ α .

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ πολλαπλάσια τοῦ α : $x_1\alpha$, $x_2\alpha$, ..., $x_p\alpha$ (p , τὸ πλῆθος των), ὅπου x_1 , x_2 , ..., x_p ἀκέραιοι. Ἡ ἰσότης $x_1\alpha + x_2\alpha + \dots + x_p\alpha = (x_1 + x_2 + \dots + x_p)\alpha$ (ἐπιμεριστικός νόμος) δεικνύει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω πολλαπλασίων τοῦ α εἶναι ἴσον μὲ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμόν, $x_1 + x_2 + \dots + x_p$, δηλ. εἶναι πάλιν, πολλαπλάσιον τοῦ α .

ii) Ἡ διαφορὰ δύο πολλαπλασίων ἐνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι ἐπίσης, πολλαπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Διότι $\lambda\alpha - \mu\alpha = (\lambda - \mu)\alpha = \text{πολ } \alpha$ (ἀφοῦ ὁ $\lambda - \mu$ εἶναι ἀκέραιος).

iii) Τὸ πολλαπλάσιον ἐνὸς πολλαπλασίου τοῦ α , εἶναι πάλιν πολλαπλάσιον τοῦ α .

Διότι, ἔστω $\lambda\alpha$ ἓνα πολλαπλάσιον τοῦ α . Τὸ τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\lambda\alpha$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $k(\lambda\alpha)$ ὅπου k ἀκέραιος. Ἀλλὰ $k(\lambda\alpha) = (k\lambda)\alpha = \text{πολ } \alpha$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

(Προϋποτίθεται ἡ γνῶσις τῶν ἰσοτήτων $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$).

A-41.—Ἐστω α φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ E τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ α . Δείξατε ὅτι τὸ E εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ Φ_0 καὶ τοῦτο πάλιν, εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ Φ . Διὰ ποῖον ἀκέραιον ἀριθμὸν α τὸ E ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓνα μόνον στοιχεῖον;

A-42.—Ἐὰν $\beta = \text{πολ } 3 + 1$ (ἤτοι ἂν ὁ β εἶναι ἄθροισμα ἐνὸς πολλαπλασίου τοῦ 3 καὶ μιᾶς μονάδος), δείξατε ὅτι θὰ εἶναι:

$$\beta^2 = \text{πολ } 3 + 1, \quad \beta^3 = \text{πολ } 3 + 1.$$

A-43.—Ἐὰν $\beta = \text{πολ } 5 + 3$ δείξατε ὅτι:

$$\beta^2 = \text{πολ } 5 + 4, \quad \beta^3 = \text{πολ } 5 + 2, \quad \beta^4 = \text{πολ } 5 + 1.$$

A-44.—Ἐὰν $v = \text{πολ } 5 + 1$ δείξατε ὅτι τότε:

$$3v^2 + 3v - 1 = \text{πολ } 5.$$

A-45.—Ἐὰν $v = \text{πολ } 5 + 2$, δείξατε ὅτι:

$$2v + 1 = \text{πολ } 5, \quad v + 3 = \text{πολ } 5.$$

§ 30. Ἡ ἰσότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως. Ἀς ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ 33 καὶ 7. Ἀς γράψωμεν ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὸν 33. Ταῦτα εἶναι: 0, 7, 14, 21, 28. Ἐξ αὐτῶν ἂς λάβωμεν τὸ μεγαλύτερον, δηλ. τὸ 28. Τοῦτο διαφέρει τοῦ 33 ὀλιγώτερον τοῦ 7, διότι τὸ ἀμέσως ἐπόμενόν του, 35 ὑπερβαίνει τὸ 33. Ἡ διαφορὰ $33 - 28 = 5$ εἶναι τὸ λεγόμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 33 διὰ τοῦ 7. Ἡ ἰσότης $33 = 7 \cdot 4 + 5$ ἀναλύει τὸν 33 εἰς δύο μέρη ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 τὸ δὲ ἄλλο (τὸ ὑπόλοιπον) εἶναι μικρότερον τοῦ 7.

Γενικῶς, ἰσχύει τὸ ἐξῆς θεώρημα:

«Δοθέντων δύο ἀκεραίων α καὶ β ὅπου $\beta \neq 0$, ὑπάρχει ἓνα καὶ μοναδικὸν ζεῦγος ἀκεραίων π καὶ ν τοιούτων ὥστε $\alpha = \beta\pi + \nu$ ὅπου $0 \leq \nu < \beta$ ».

Πρὸς ἀπόδειξιν, θεωροῦμεν ἅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ β τὰ ὁποῖα δὲν ὑπερβαίνουν τὸν α καὶ ἔστω $\beta \cdot \pi$ τὸ μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν. Τοῦτο θὰ διαφέρει, προφανῶς, τοῦ α κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ β , δηλ. θὰ εἶναι $\alpha - \beta \pi < \beta$. (Διότι, τὸ ἐπόμενον τοῦ $\beta \cdot \pi$ πολλαπλάσιον, ὑπερβαίνει τὸ α καὶ ἔχομεν, $(\pi+1)\beta > \alpha \Rightarrow \alpha < \beta \pi + \beta \Rightarrow \alpha - \beta \pi < \beta$). Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν, u , τὴν διαφορὰν $\alpha - \beta \pi$ θὰ ἔχωμεν $\alpha - \beta \pi = u$, ἥτοι :

$$(1) \quad \alpha = \beta \pi + u \quad \mu \epsilon \quad u < \beta.$$

Ἐπομένως, ἡ ὑπαρξίς τῶν δύο ἀνωτέρω ἀπεδείχθη.

Ἡ (1) λέγεται *ισότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως*. Ἐν τούτοις, εἰς ὅλον τὸ παρὸν κεφάλαιον, θὰ λέγωμεν χάριν συντομίας, «διαίρεσις» ἀντὶ «ἀλγοριθμικῆς διαίρεσις» καὶ ἡ (1) θὰ λέγεται συντόμως «*ισότης τῆς διαιρέσεως*».

Τὸ u λέγεται *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β* .

Ὁ α λέγεται *διαιρετέος τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β* .

Ὁ β λέγεται *διαιρέτης τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β* .

Τὸ π λέγεται *κατὰ προσέγγισιν μονάδος, πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β* .

Ἐκτέλεσις τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι ἡ εὑρεσις τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ ὑπολοίπου. Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως συμβολίζεται μὲ $\alpha : \beta$. Ἡ πρακτικὴ μέθοδος ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν στοιχειώδη Ἀριθμητικὴν.

Τελεία διαίρεσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $u=0$, ἡ διαίρεσις $\alpha : \beta$ λέγεται *τελεία*. Τότε καὶ μόνον λέγομεν ὅτι ὁ α διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ β . Προφανῶς, εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν $\alpha = \beta \pi$ δηλ. ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. Ὅταν $u \neq 0$ ἡ διαίρεσις $\alpha : \beta$ λέγεται ὅχι *τελεία* ὁ α τότε δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ β .

Παρατηρήσεις : 1. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς u τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$ εἶναι ὁ μικρότερος ἀκέραιος ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τὸν α τὸν καθιστᾷ πολλαπλάσιον τοῦ β .

2. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$ δὲν βλάπτεται, ἂν ὁ α ἀυξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ β .

Διότι ἂν $k\beta$ τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ β , θὰ ἔχωμεν ὅτι : $\alpha = \beta \pi + u \Rightarrow \alpha + k\beta = \beta \pi + \beta k + u$ ἥτοι :

$$(2) \quad (\alpha + k\beta) = \beta(\pi + k) + u.$$

Ἡ (2) εἶναι μία *ισότης διαιρέσεως* μὲ διαιρετέον τὸν $\alpha + k\beta$, διαιρέτην β καὶ ὑπόλοιπον u . Ἡ (2) εἶναι μία *ισότης διαιρέσεως* μὲ διαιρετέον τὸν $\alpha + k\beta$, διαιρέτην β καὶ ὑπόλοιπον u .

3. *Ἐάν, ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε τὸ (κατὰ προσέγγισιν μονάδος) πηλίκον εἶναι τὸ μηδὲν καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι αὐτὸς οὗτος ὁ διαιρετέος.*

Δηλ. ἐὰν $\alpha < \beta$, ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως εἶναι:

$$\alpha = \beta \cdot 0 + \alpha.$$

Οὕτω π.χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 3 διὰ τοῦ 8, δίδει πηλίκον (κατὰ προσέγγισιν μονάδος) τὸ μηδὲν καὶ ὑπόλοιπον τὸ 3.

§ 31. Ἄρτιοι καὶ περιττοί. Κάθε ἀκέραιος ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 2 θὰ διδῇ ὑπόλοιπον ᾗ 0 ἢ 1, σύμφωνα με τὴν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως. Ὡς ἐκ τούτου τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων χωρίζεται εἰς δύο «κλάσεις» (ἢ ὑποσύνολα). Εἰς τὴν μίαν κλάσιν ἀνήκουν πάντες οἱ ἀκέραιοι οἱ ἀκριβῶς διαιρετοὶ διὰ 2, οἱ ὅποιοι λέγονται *ἄρτιοι* καὶ εἰς τὴν ἄλλην, οἱ μὴ διαιρετοὶ διὰ 2 οἱ ὅποιοι λέγονται *περιττοί*.

Σύνολον τῶν ἀρτίων = {0, 2, 4, 6...}.

Σύνολον τῶν περιττῶν = {1, 3, 5, 7...}.

Πᾶς ἄρτιος εἶναι τῆς μορφῆς $2k$ ὅπου k ἀκέραιος.

Πᾶς περιττός εἶναι τῆς μορφῆς $2k+1$ ὅπου k ἀκέραιος.

§ 32. Διαιρέται. α') Ὁ δ λέγεται διαιρέτης τοῦ α , ὅταν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιόν του. Γράφομεν τότε:

$\delta | \alpha$ (ὁ δ εἶναι διαιρέτης τοῦ α)

(ἢ συντόμως: «ὁ δ , διαιρεῖ τὸν α »).

Μὲ ἄλλας λέξεις, διὰ νὰ εἶναι ὁ δ , διαιρέτης τοῦ α , πρέπει νὰ ὑπάρχῃ κάποιος ἀκέραιος k , τοιοῦτος ὥστε: $k\delta = \alpha$,

Ὅταν $\delta | \alpha$, ἡ διαίρεσις $\alpha : \delta$ εἶναι τελεία, διότι τότε εἶναι $\alpha = \text{πολ } \delta$, δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ὁ διαιρέτης δ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν α .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6, 12 εἶναι ὅλοι, διαιρέται τοῦ 12.

Ἰδιότητες: i) *Διὰ κάθε ἀκέραιον α , προφανῶς ἰσχύουν:*

$$1 | \alpha, \alpha | \alpha, \alpha | 0.$$

ii) *Ἐὰν ἀκέραιος εἶναι διαιρέτης δύο ἄλλων ἀκεραίων, τότε εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τούτων ἀκεραίων (βλ. § 29, i, ii).*

iii) *Ἐὰν ἀκέραιος εἶναι διαιρέτης ἐνὸς παράγοντος ἐνὸς γινομένου, τότε εἶναι καὶ διαιρέτης τοῦ γινομένου (βλ. § 29, iii).*

β') Διαίρεσις διὰ δ , ἐνὸς ἀθροίσματος πολλαπλασίων τοῦ δ . Ἐστω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ δ ($\neq 0$), καὶ ὅτι, διαιρούμενοι διὰ δ δίδουν πηλικά α', β', γ' ἀντιστοίχως (ἔλφα τονού-
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς)

μενον, βῆτα τονούμενον...). Ἐστω καὶ ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις :

$$(1) \quad \Pi = k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma.$$

ὅπου k_1, k_2, k_3 ἀκέραιοι. Τὸ Π εἶναι ἐπίσης πολλαπλάσιον τοῦ δ (§ 29 i, iii) καὶ ἔστω Π' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ δ . Τότε θὰ ἔχωμεν $\Pi = \delta \cdot \Pi'$ ἀλλὰ καὶ $\alpha = \delta \cdot \alpha', \beta = \delta \cdot \beta', \gamma = \delta \cdot \gamma'$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται : $\delta \cdot \Pi' = k_1\delta\alpha' + k_2\delta\beta' + k_3\delta\gamma' \quad \eta \quad \delta\Pi' = \delta(k_1\alpha' + k_2\beta' + k_3\gamma')$ καὶ διδει, (§ 27)

$$(2) \quad \Pi' = k_1\alpha' + k_2\beta' + k_3\gamma'.$$

Ἡ μετάβασις ἀπὸ τὴν (1) εἰς τὴν (2) λέγεται διαίρεσις ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) διὰ τοῦ δ . Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) εἶναι ἄθροισμα πολλαπλασίων τοῦ δ καὶ διὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ δ , διαίρουμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος διὰ δ . Ὅταν ὁ διαιρούμενος ὅρος εἶναι γινόμενον, διαίρουμεν διὰ τοῦ δ ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου, ἐκεῖνον ὅστις εἶναι πολ. δ .

γ') Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. «Ἐὰν $\mu > \nu$, τότε ἡ δύναμις α^μ διαίρεται ἀκριβῶς διὰ τῆς δυνάμεως α^ν καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^{\mu-\nu}$ ».

Διότι $\mu = \nu + (\mu - \nu)$, $\alpha^\mu = \alpha^{\nu + (\mu - \nu)}$, $\alpha^\mu = \alpha^\nu \cdot \alpha^{(\mu - \nu)}$ (§ 28, ἰδιότης i).

Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι τὸ $\alpha^{\mu-\nu}$ εἶναι τὸ πηλίκον $\alpha^\mu : \alpha^\nu$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-46.—Ποῖα εἶναι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὸ 30 καὶ ποῖα τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὸ 34;

A-47.—Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι, οἱ ὅποιοι πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 37 δίδουν γινόμενον μικρότερον τοῦ 427;

A-48.—Ἄν ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι τὸ 7, ποῖα εἶναι τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα;

A-49.—Εὑρετε τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὅποιοι διαιρούμενοι διὰ 3 δίδουν πηλίκον διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου.

A-50.—Εὑρετε τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὅποιοι διαιρούμενοι διὰ 11 δίδουν πηλίκον, ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον.

A-51.—Ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι 4227, τὸ πηλίκον 13 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 171. Ποῖος εἶναι ὁ διαιρέτης;

A-52.—Τὸ γινόμενον δύο περιττῶν, δεῖξατε ὅτι εἶναι περιττός.

B-53.—Εὑρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 3, τῶν ἐπομένων ἀριθμῶν: 175^2 , $(1827)^{22}$, $(1828)^{11}$, $(4321)^3$.

B-54.—Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$ εἶναι ν , τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(\lambda\alpha) : (\lambda\beta)$ εἶναι $\lambda \cdot \nu$ ἐνῶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτό.

B-55.—Ἐὰν δύο ἀκέραιοι διαιρούμενοι διὰ β δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τότε οὗτοι διαφέρουν κατὰ πολ. β .

B-56.—Ἐάν δύο ἀκέραιοι διαφέρουν κατὰ πολ. β, τότε διαιρούμενοι διὰ β, δίδουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπον.

B-57.—Δείξατε ὅτι, ἂν δύο ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα ἄρτιον, τότε ἔχουν καὶ διαφορὰν ἄρτιαν. Ἄν ἔχουν ἄθροισμα περιττόν, ἔχουν καὶ διαφορὰν περιττήν.

B-58.—Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιον καὶ ὅτι τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἄρτιων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8.

B-59.—Δείξατε ὅτι τὸ τετράγωνον ἐνὸς περιττοῦ ἀκεραίου εἶναι ἓνα πολ. 8 ἠὺξημένον κατὰ 1.

B-60. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν, εἶναι πάντοτε, πολ. 8.

A-61.—Εὗρετε τοὺς διαιρέτας τοῦ 24. Δείξατε ὅτι ὁ 28 ἴσουςται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν διαιρετῶν του.

B-62.—Ἐάν $a \neq 0$ καὶ $\delta | a$ δείξατε ὅτι τότε $\delta \leq a$.

B-63.—Ἐάν $\delta | a$ καὶ $\delta > a$ δείξατε ὅτι τότε $a = 0$.

A-64.—Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ ἀκέραιοι καὶ $a \neq 0$ τότε ἂν $a | \beta$ καὶ $a | \gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι $a | (\beta\mu + \gamma\nu)$.

B-65.—Νὰ εὗρεθοῦν πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὅποιοι διαιρούμενοι διὰ δεδομένου ἀκεραίου β, δίδουν πηλίκον ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον.

B-66.—Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ ν (ν φυσικὸς ἀριθμός).

B-67.—Ἄν ὁ δ διαιρῇ ἀκριβῶς τὴν διαφορὰν δύο ἀκεραίων καὶ τὸν ἓνα ἐξ αὐτῶν, τότε διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἄλλον.

B-68.—Ἄν $v = \text{πολ}5 + 3$ ἢ $v = \text{πολ}5 + 1$ τότε $5 | (3v^2 + 3v - 1)$.

§ 33. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. α') Ἐάν ἀκέραιος $\delta \neq 0$, διαιρῇ καὶ τὸν α καὶ τὸν β, τότε λέγεται κοινὸς διαιρέτης (κ.δ.) τῶν α καὶ β. Δύο ἀκέραιοι α, β ἔχουν ἓν γένει ἓνα πεπερασμένον πλῆθος κοινῶν διαιρετῶν· ἐξ ὅλων τῶν κ. διαιρετῶν ὁ μεγαλύτερος καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τῶν α καὶ β. Π.χ. οἱ διαιρέται τοῦ 12 εἶναι 1, 2, 3, 4, 6, 12 καὶ τοῦ 16, οἱ: 1, 2, 4, 8, 16. Οἱ κ.δ. τῶν 12 καὶ 16 εἶναι οὖν: 1, 2, 4, ὁ Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ 4.

Συνήθως ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων α καὶ β παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου (α, β). Γράφομεν π.χ., $(12, 16) = 4$, $(5, 3) = 1$.

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. βοηθοῦμεθα ἀπὸ τὰ δύο ἐπόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 1ον. «Ἐάν ὁ β διαιρῇ τὸν α τότε ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καὶ β εἶναι ὁ β».

Διότι ὁ β διαιρεῖ καὶ τὸν ἑαυτὸν του, ἄρα εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β. Μεγαλύτερος κ.δ. ἀπὸ τὸν β δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ διότι δὲν θὰ διήρῃ τὸν β.

Διὰ τῶν εἰς τὰ προηγούμενα εἰσαχθέντων συμβόλων τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\beta | \alpha \Rightarrow (\alpha, \beta) = \beta.$$

Θεώρημα 2ον. (Κύριον θεώρημα). «*Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων δὲν βλάπτεται ἐὰν ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν μικρότερον.*»

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\alpha > \beta$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ α διὰ τοῦ β θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon, \quad \upsilon < \beta$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$\upsilon = \alpha - \beta\pi.$$

Πᾶς κ.δ. τῶν α καὶ β διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν α καὶ τὸν $\beta\pi$, ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν τῶν $\alpha - \beta\pi$, δηλ. τὸ υ . (βλ. § 32, ii). Ὡστε πᾶς κ.δ. τῶν α καὶ β εἶναι καὶ κ.δ. τῶν β καὶ υ . Ἀντιστρόφως, πᾶς κ.δ. τῶν β καὶ υ διαιρεῖ καὶ τὸν $\beta\pi$ καὶ τὸν υ , ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των $\beta\pi + \upsilon$, δηλ. τὸν α , ὥστε θὰ εἶναι καὶ κ.δ. τῶν α καὶ β . Ὡστε τὸ ζευγὸς τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἔχει τοὺς αὐτοὺς κ.δ. μὲ τὸ ζευγὸς τῶν ἀριθμῶν β καὶ υ . Συνεπῶς θὰ ἔχη καὶ τὸν αὐτὸν Μ.Κ.Δ. Ὡστε Μ.Κ.Δ. τῶν α $\beta =$ Μ.Κ.Δ. τῶν β καὶ υ ἢ $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)$.

Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος. Οὕτω καλεῖται ἡ μέθοδος εὐρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν δι' ἄλλεπαλλήλων διαιρέσεων. Ἡ μέθοδος αὕτη εὐρίσκεται εἰς τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου (βιβλίον 7ον), ὠνομάσθη δὲ οὕτω ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον ἃς ἀρχίσωμεν μὲ ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

Ἐστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν 595 καὶ 252. Κατὰ τὸ 2ον θεώρημα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸν 595 διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς 252. Ἐκτελοῦμεν λοιπὸν τὴν διαίρεσιν: $595 = 252 \cdot 2 + 91$, ἥτις δίδει ὑπόλοιπον 91. Ὡστε ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 91 καὶ 252. Εὐρίσκομεν πάλιν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 252 ὡς πρὸς 91, $252 = 91 \cdot 2 + 70$. Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 91 καὶ 252 εἶναι, κατὰ τὸ 2ον θεώρ. ὁ αὐτὸς μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν 91 καὶ 70. Ἡ νέα διαίρεσις $91 = 70 \cdot 1 + 21$ δίδει ὑπόλοιπον 21. Εἰς τὸ ζευγὸς λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν 91, 70 θέτομεν ἀντὶ τοῦ 91 τὸ ὑπόλοιπόν του 21 καὶ λαμβάνομεν τὸ ζευγὸς τῶν ἀριθμῶν 21 καὶ 70 τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν Μ.Κ.Δ. μὲ τὰ προηγούμενα ζεύγη. Ὁμοίως ἔχομεν: $70 = 21 \cdot 3 + 7$ καὶ φθάνομεν εἰς τὸ ζευγὸς 21 καὶ 7. Ἐκ τούτων ὁ 7 διαιρεῖ τὸν 21, ἄρα κατὰ τὸ 1ον θεώρ. εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 21 καὶ 7, ἄρα εἶναι καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. ὅλων τῶν προηγούμενων ζευγῶν, ἄρα καὶ τῶν 595 καὶ 252. Ἐπὶ πλέον, ὡς εἶδαμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 2ου θεωρ. ἄρα μόνον ὁ Μ.Κ.Δ. εἶναι

ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰ δύο ζεύγη (595, 252) καὶ (21, 7) ἀλλὰ καὶ πάντες οἱ κ.δ. ἐκάστου ζεύγους εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ τοὺς τοῦ ἄλλου.

Γενικῶς. Ἐστώσαν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ὅπου $\alpha > \beta$. Πρὸς εὑρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν α καὶ β ἐκτελοῦμεν τὰς ἐπομένους ἄλλε-παλλήλους διαιρέσεις:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha = \beta\pi + \nu & \text{ὅπου} & \nu < \beta \\
 \beta = \nu\pi_1 + \nu_1 & \text{»} & \nu_1 < \nu \\
 \nu = \nu_1\pi_2 + \nu_2 & \text{»} & \nu_2 < \nu_1 \\
 \nu_1 = \nu_2\pi_3 + \nu_3 & \text{»} & \nu_3 < \nu_2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \nu_{v-2} = \nu_{v-1}\pi_v + \nu_v & \text{»} & \nu_v < \nu_{v-1}
 \end{array}
 \quad (1)$$

σταματῶμεν δὲ ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν ἐκείνην ἣ ὅποια δίδει ὑπόλοιπον μηδέν. Τοῦτο ἐξάπαντος θὰ συμβῇ διότι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διηνεκῶς ἐλαττούμενοι ὥπως φαίνεται ἀπὸ τὰς παραπλεύρως ἀνισότητος. Ἐστὼ ὅτι ἡ τελευταία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφομένων διαιρέσεων, δίδει ὑπόλοιπον μηδέν, δηλ. $[\nu_v = 0]$. Τότε ὁ ν_{v-1} εἶναι ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. Διότι σύμφωνα μὲ τὸ 2ον θεώρ. ἔχομεν: $(\alpha, \beta) = (\nu, \beta) = (\nu, \nu_1) = (\nu_1, \nu_2) = (\nu_2, \nu_3) = \dots = (\nu_{v-2}, \nu_{v-1})$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ν_{v-1} διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ ν_{v-2} ἔπεται κατὰ τὸ 1ον θεώρ. ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ν_{v-1} καὶ ν_{v-2} ἥτοι $(\nu_{v-2}, \nu_{v-1}) = \nu_{v-1}$. Ὡστε $(\alpha, \beta) = \nu_{v-1}$.

β) Ἰδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ.: i) Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 2ου θεώρ. πάντες οἱ κ.δ. τοῦ ζεύγους (α, β) εἶναι καὶ κ.δ. τοῦ τελευταίου ζεύγους (ν_{v-2}, ν_{v-1}) καὶ ἀντιστρόφως. Ἀλλὰ πάντες οἱ κ.δ. τῶν (ν_{v-2}, ν_{v-1}) διαιροῦν τὸν ν_{v-1} , δηλ. τὸν Μ.Κ.Δ. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι:

«Πάντες οἱ κ.δ. δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι καὶ διαιρέται τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως».

ii) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη ἐκάστης τῶν ἰσοτήτων (1) τοῦ Εὐκλείδειου ἀλγορίθμου, ἐπὶ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν k αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες:

$$\begin{array}{lll}
 (k\alpha) = (k\beta)\pi + (k\nu), & \text{ὅπου} & k\nu < k\beta \\
 (k\beta) = (k\nu)\pi_1 + (k\nu_1), & \text{»} & k\nu_1 < k\nu \\
 \dots & \dots & \dots \\
 (k\nu_{v-2}) = (k\nu_{v-1})\pi_v + (k\nu_v) & \text{»} & k\nu_v = 0
 \end{array}$$

δεικνύουν ὅτι ὁ Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος ἐφαρμοζόμενος εἰς τοὺς ἀριθμοὺς $k\alpha$ καὶ $k\beta$ δίδει ὡς Μ.Κ.Δ. τὸν $k\nu_{v-1}$. Δηλαδή:

«Ἐὰν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β πολλαπλασιασθοῦν ἀμφοτέρω ἐπὶ τυχόντα φυσικὸν k , τότε καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. των πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k ».

iii) Ἐὰν οἱ α καὶ β ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην δ , οὗτος θὰ διαιρῇ κατὰ σειράν, ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς α , β , u , u_1 , u_2 , $u_3, \dots, u_{n-2}$, u_{n-1} (ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν ιδιότητα i). Ἐάν, τῶρα διαιρέσωμεν διὰ δ ἀμφοτέρω τὰ μέλη ἐκάστης τῶν ἰσοτήτων (1) (βλ. § 32 β') καὶ παραστήσωμεν μὲ α' , β' , u' , $u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_{n-2}$, u'_{n-1} τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν α , β , $u, \dots, u_{n-2}$, u_{n-1} , διὰ τοῦ δ , αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες (ὁμοῦ μὲ τὰς παραπλευρώς ἀνισότητας):

$$\begin{array}{lll} \alpha' = \beta' \pi + u' & \text{ὅπου} & u' < \beta' \\ \beta' = u'_1 \pi_1 + u'_1 & \text{»} & u'_1 < u' \\ u' = u'_1 \pi_2 + u'_2 & \text{»} & u'_2 < u'_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u'_{n-2} = u'_{n-1} \pi_n + u'_n & \text{»} & u'_n = 0 \end{array}$$

δεικνύουν ὅτι, ὁ Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος ἐφαρμοζόμενος εἰς τοὺς ἀριθμοὺς α' καὶ β' δίδει ὡς Μ.Κ.Δ. τὸν u'_{n-1} δηλ. τὸ πηλίκον τοῦ u_{n-1} διὰ δ . Δηλαδή:

Ἐὰν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β διαιρεθοῦν ἀμφοτέρω διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου των, ἔστω τοῦ λ , τότε καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ λ .

Περίπτωσις περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν. Κοινοὺς διαιρέτας καὶ Μ.Κ.Δ. ἔχει καὶ κάθε ὁμὰς ἀκεραίων: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τριῶν ἀκεραίων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς δύο ἔστω τοὺς α_1, α_2 διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν δ καὶ κατόπιν εὐρίσκομεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν δ καὶ α_3 . Ἡ περίπτωσις τεσσάρων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν τριῶν κ.ο.κ.

Αἱ ιδιότητες i), ii), iii) τοῦ Μ.Κ.Δ. ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A-69.—Εὑρετε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν 36 καὶ 48, τῶν 60 καὶ 90, τῶν 163 καὶ 34, τῶν 288 καὶ 158, τῶν 3456 καὶ 7234.

A-70.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 480, 1280 καὶ 1680 καθὼς καὶ τῶν 144, 216 καὶ 256.

B-71.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος a ὅστις διαιρῶν τὸν 4373 δίδει ὑπόλ. 8 καὶ διαιρῶν τὸν 826 δίδει ὑπόλ. 7.

B-72.—Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ x καὶ y ἔχοντες Μ.Κ.Δ. τὸν 12, ὁ-
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ταν τὰ διαδοχικὰ πηλικά τὰ ἀνευρισκόμενα κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι 8,2,7.

A-73.—Εὗρετε ὅλους τοὺς κ.δ. τῶν τριῶν ἀριθμῶν 375, 2325 καὶ 3525.

B-74.—Νὰ δεიχθῇ ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καὶ β εἶναι καὶ Μ.Κ.Δ. τῶν $\alpha + \beta\gamma$ καὶ $\alpha + \beta(\gamma - 1)$.

B-75.—Δείξατε ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καὶ $\beta\gamma$ εἶναι ἀκριβῶς διαιρετὸς διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν α καὶ β .

§ 34. Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Δοθέντων n φυσικῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, πᾶς φυσικὸς ἀριθμὸς M ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ α_1 καὶ διὰ $\alpha_2 \dots$ καὶ διὰ α_n καλεῖται κοινὸν πολλαπλάσιον (κ. π.) τῶν $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ἐνα προφανὲς κ.π. τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ εἶναι τὸ γινόμενόν των, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$. Καὶ ἐπειδὴ (§ 29, iii) καὶ ὁ ἀριθμὸς $\lambda \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ εἶναι κ.π. τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (λ οἷοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς) ἔπεται ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κ.π. καλεῖται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (**Ε.Κ.Π.**) τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Διὰ τὸ Ε.Κ.Π. ἰσχύει τὸ ἐξῆς θεώρημα:

“Ὅλα τὰ κ.π. τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ Ε.Κ.Π. αὐτῶν.

{Ἡ ἄλλως, τὸ Ε.Κ.Π. εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν κ.π.}.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο κ.π. εἶναι πάλιν κ.π. (§ 29, i, ii). Ἐστω, τώρα μ τὸ Ε.Κ.Π. καὶ M τυχὸν κ.π. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ M διὰ μ λαμβάνομεν $M = \mu \cdot \rho + \upsilon$ ὅπου $\upsilon < \mu$ ἢ ἀκόμη $\upsilon = M - \mu \cdot \rho$.

Ἐπειδὴ, τώρα, τὸ $\mu \cdot \rho$ εἶναι κ.π. καὶ τὸ M ἐπίσης, θὰ εἶναι ὁμοίως καὶ ἡ διαφορὰ των υ . Ἐπειδὴ ὅμως τὸ υ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε.Κ.Π. ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0, δηλ. ὁ μόνος μικρότερος τοῦ μ , ἀκέραιος ὅστις διαιρεῖται ἀπ’ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Ἐκ τούτου ἔπεται $M = \mu \cdot \rho$, δηλ. τὸ M εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ μ .

Ἀναζήτησις τοῦ Ε.Κ.Π. 1) Νὰ εὗρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 8 καὶ 40. Ἐπειδὴ τὸ 40 εἶναι πολ. 8 καὶ συγχρόνως καὶ πολ. 40, διὰ τοῦτο, τὸ 40 εἶναι τὸ ζητούμενον Ε.Κ.Π.

2) Νὰ εὗρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 9 καὶ 12. Λαμβάνομεν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ σχηματίζομεν τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσιά του μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ἕνα πολλαπλάσιον διαιρετὸν διὰ τοῦ μικροτέρου. Τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον Ε.Κ.Π. Ἐνταῦθα εἶναι τὸ 36.

3) Νὰ εὗρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 12, 4, 9, 18. Ὁ 12 εἶναι πολ. 4. ἄρα πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 12 εἶναι καὶ τοῦ 4 καὶ δυνάμεθα νὰ παρα-

λείψωμεν τὸ 4. Ὅμοίως τὸ 18 εἶναι πολ. 9, πᾶν πολ. 18 εἶναι πολ. 9 καὶ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ 9. Ἀγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ Ε.Κ.Π τῶν 12 καὶ 18. Τὸ πρῶτον πολ. 18 τὸ ὁποῖον διαιρεῖται καὶ διὰ 12 εἶναι τὸ 36 ἄρα τὸ ζητούμενον Ε.Κ.Π εἶναι τὸ 36.

4) Νὰ εὕρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π τῶν 48, 60, 36. Εὕρισκομεν τὸ Ε.Κ.Π τῶν δύο, π.χ. τῶν 48 καὶ 60. Τοῦτο εἶναι 240. Ἀκολουθῶς, εὕρισκομεν τὸ Ε.Κ.Π τῶν 240 καὶ 36. Τοῦτο εἶναι τὸ 720 καὶ εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον.

Ἄλλη μέθοδος δίδεται εἰς τὴν § 37 γ'.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-76. Νὰ εὕρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π τῶν 7 καὶ 2, τῶν 3 καὶ 6, τῶν 12 καὶ 30, τῶν 56 καὶ 84 τῶν 54 καὶ 63.

A-77. Νὰ εὕρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π τῶν 8, 3, 18, 20, 24, 12.

A-78. Δυὸ κινητὰ κινούμενα ὁμορρόπως ἐπὶ περιφερείας, διανύουν αὐτήν, τὸ μὲν πρῶτον εἰς 72 ὥρας τὸ δεύτερον εἰς 108 ὥρας. Ἐὰν κατὰ τινα στιγμήν εὕρισκονται συγχρόνως εἰς ἓνα σημεῖον Α τῆς περιφερείας, μετὰ πόσον χρόνον θὰ εὕρισκονται πάλιν μαζί εἰς τὸ Α;

B-79. Εὗρετε ἀκέραιον < 400 ὅστις διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 δίδει ὑπόλοιπον 1 καὶ διαιρούμενος διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον μηδέν.

§ 35. Σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί. α'). Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται σχετικῶς πρῶτοι ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν ἔχουν Μ.Κ.Δ. ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, δηλ. $(\alpha, \beta) = 1$.

β') Πολλοὶ ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο ὅταν, ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Π.χ. οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο ἂν $(\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\alpha, \delta) = (\beta, \gamma) = (\beta, \delta) = (\gamma, \delta) = 1$.

γ') Πολλοὶ ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των ὅταν ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εἶναι ἴσος μὲ 1. Οὕτω π.χ. οἱ 8 καὶ 15 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἢ σχετικῶς πρῶτοι) διότι δὲν ἔχουν ἄλλον κ.δ. ἀπὸ τὴν μονάδα. Οἱ 4, 9 καὶ 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Οἱ 15, 25 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των.

Θεωρήματα. 1ον) Ἐὰν ὁ γ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\alpha\beta$ καὶ εἶναι σχετικῶς πρῶτος πρὸς τὸν α , τότε ὁ γ θὰ διαιρῇ τὸν β . (α, β, γ φυσικοὶ ἀριθμοί).

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ὁ γ καὶ α ἔχουν Μ.Κ.Δ. = 1, ἔπεται ὅτι οἱ $\gamma\beta$ καὶ $\alpha\beta$ θὰ ἔχουν Μ.Κ.Δ. = 1. $\beta = \beta$ (833. ii). Ἀφοῦ ὁμοίως ὁ γ διαιρεῖ

καὶ τὸν $\gamma\beta$ καὶ τὸν $\alpha\beta$ ἔπεται ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν δηλ. τὸν β (§ 33, i).

Οὕτω π.χ., ἂν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $15\beta=8\alpha$ θὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ 15 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν α καὶ ὅτι ὁ 8 διαιρεῖ τὸν β .

2ον) Ἐὰν φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇται ὑπὸ διαφόρων ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινόμενου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ k διαιρεῖται διὰ α διὰ β καὶ διὰ γ ὅπου α, β, γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἀφοῦ διαιρεῖται διὰ α θὰ εἶναι $k=\alpha\pi_1$ (π_1 φυσικὸς). Ὁ β διαιρῶν τὸν k διαιρεῖ καὶ τὸν ἴσον τοῦ $\alpha\pi_1$ καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν α θὰ διαιρῇ τὸν π_1 , δηλ. $\pi_1=\beta\pi_2$. Ὁμοίως ὁ γ διαιρεῖ τὸν π_1 , ἄρα καὶ τὸν ἴσον τοῦ $\beta\pi_2$ καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν β θὰ διαιρῇ τὸν π_2 . Ἀρα $\pi_2=\gamma\pi_3$. Ἐχομεν λοιπὸν $k=\alpha\cdot\pi_1$, $\pi_1=\beta\cdot\pi_2$, $\pi_2=\gamma\cdot\pi_3$, ἄρα $k=\alpha\beta\gamma\pi_3$, δηλ. ὁ k διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha\beta\gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇται χωριστὰ διὰ τοῦ 3, διὰ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦ 8, τότε θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ 120. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇται διὰ τοῦ 2, τοῦ 5 καὶ 12 δὲν ἔπεται ὅτι θὰ διαιρῇται διὰ τοῦ 2.5.12, δηλ. διὰ τοῦ 120. Διότι εἰς τὴν β' περίπτωσιν οἱ 2, 5, 12 δὲν εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀνὰ δύο. Οὕτω π.χ. ὁ 60 διαιρεῖται διὰ 2, 5, 12 ἀλλὰ ὄχι διὰ 2.5.12=120.

3ον) Ἐὰν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α, β διαιρεθοῦν διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. των, δ , τότε καθίστανται σχετικῶς πρῶτοι.

Διότι καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. των διαιρεῖται διὰ δ καὶ καθίσταται 1 (βλ. § 33, iii). Οὕτω π.χ. οἱ 24 καὶ 15, ἂν διαιρεθοῦν διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. των, 3, καθίστανται 8 καὶ 5 ἥτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-80. Μεταξὺ τριῶν διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁ εἰς εἶναι πάντοτε, πολ.3 καὶ μεταξὺ 5 διαδοχικῶν φυσικῶν, ὁ εἰς εἶναι πολ.5.

A-81. Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

A-82. Τὸ γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 120.

B-83. Ἐὰν n ἀκεραῖος, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον $n(n+2)(5n-1)(5n+1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 24.

A-84. Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε οἱ n καὶ $n+1$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

B-85. Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε οἱ $5n+1$ καὶ $6n+1$ εἶναι σχετικῶς πρῶτοι.

B-86. Ἐὰν n τυχὸν ἀκεραῖος δείξατε ὅτι :

$30 \mid n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 36. Πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ σύνθετοι ἀριθμοί. α') "Ένας φυσικὸς ἀριθμὸς p λέγεται πρῶτος ὅταν δὲν εἶναι μονάς (δηλ. $p \neq 1$) καὶ ὅταν οἱ μόνοι διαιρέται αὐτοῦ εἶναι ὁ 1 καὶ ὁ p .

Π.χ. μεταξὺ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100, πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

β') Πᾶς μὴ πρῶτος φυσικὸς ἀριθμὸς, $\neq 1$ λέγεται σύνθετος.

Ὁ σύνθετος δηλ. ἀριθμὸς δέχεται καὶ ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του. Ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα διαιρέτης τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ λέγεται δεύτερος διαιρέτης. Ὁ δεύτερος διαιρέτης, εἶναι δηλ. ὁ μικρότερος ἐκ τῶν διαιρετῶν τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ οἱ ὅποιοι εἶναι $\neq 1$. Ἐὰν α εἶναι ἕνας σύνθετος ἀριθμὸς καὶ δ ὁ δεύτερος διαιρέτης του, τότε ὁ δ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Διότι ἂν δὲν ἦτο πρῶτος, θὰ ἦτο σύνθετος καὶ συνεπῶς θὰ εἶχε ἕνα δεύτερον διαιρέτην $\delta_1 < \delta$. Ὁ δ_1 θὰ ἦτο τότε καὶ αὐτὸς διαιρέτης τοῦ α (βλ. 29, iii). Ἀρα θὰ ὑπῆρχεν διαιρέτης τοῦ α μικρότερος τοῦ δ καὶ $\neq 1$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἀφοῦ ὁ δ εἶναι δεύτερος διαιρέτης τοῦ α . Ὡστε ὁ δ εἶναι πρῶτος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι:

Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἔχει ἕνα τουλάχιστον διαιρέτην, πρῶτον.

γ') "Ελεγχος τοῦ ἂν ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος. Ἐξετάζομεν ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔστω ὁ α ἔχη κάποιον διαιρέτην πρῶτον καὶ $< \alpha$. Δοκιμάζομεν πρὸς τοῦτο μὲ τοὺς γνωστοὺς πρῶτους ἀριθμοὺς (2, 3, 5, 7, 11...) μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν ὅστις νὰ διαιρῇ τὸν α ὁπότε ὁ α εἶναι σύνθετος· ἐὰν αἱ δοκιμαὶ εἶναι ἀρνητικαί, μέχρι καὶ ἐνὸς πρώτου τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον, ὑπερβαίνει τὸν α , τότε ὁ α εἶναι πρῶτος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ 113 εἶναι πρῶτος.

Διαπιστοῦμεν ὅτι ὁ 113 δὲν διαιρεῖται μὲ τοὺς: 2, 3, 5, 7, 11. Ἐπειδὴ δὲ $11^2 = 121 > 113$ συνάγομεν ὅτι ὁ 113 εἶναι πρῶτος.

2) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ 221 εἶναι πρῶτος.

Δοκιμάζοντες κατὰ σειρὰν μὲ τοὺς 1, 3, 5, 7, 11 βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται μὲ κανένα ἐξ αὐτῶν. Διὰ τοῦ 13 ὅμως εἶναι διαιρετός, ἔχομεν δὲ $221 = 13 \times 17$. Συνεπῶς ὁ 221 εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς.

§ 37. Πρῶτοι παράγοντες. α') Ἐὰν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς p διαιρῇ τὸ γινόμενον $\alpha\beta$ ὅπου α, β φυσικοὶ ἀριθμοί, τότε ὁ p θὰ διαιρῇ τὸν ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο παραγόντων α καὶ β .

Διότι, ἂν μὴ δὲν διαιρῇ τὸν α , τότε ὁ p καὶ α θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς

ἀλλήλους. Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα 1ον τῆς § 35 ὁ p θὰ διαιρῇ τὸν β .

Πόρισμα. «Ἐὰν πρῶτος p διαιρῇ γινόμενον πολλῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, αβγδ... τότε ὁ p θὰ διαιρῇ ἓνα τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ».

β') Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς. «Πᾶς φυσικὸς n (> 1) ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη εἶναι μονότροπος (δηλ. γίνεται κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον), μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὅψιν τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.

α') Θὰ δείξωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ δυνατόν τῆς ἀναλύσεως παντὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρῶτων.

Ἡ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον «πρῶτων» εἶναι φανερά διὰ μικροῦς ἀριθμοὺς, ὅπως π.χ., $3=3$, $4=2 \cdot 2$, $5=5$, $6=2 \cdot 3$, $7=7$, $8=2 \cdot 2 \cdot 2$, $9=3 \cdot 3$, $10=2 \cdot 5$, οὕτω δὲ προχωροῦντες φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὅλοι οἱ φυσικοὶ οἱ μικρότεροι κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ α , ἀναλύονται εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων. (Τὸ α καθορίζεται κατὰ βούλησιν. Ἐὰν π.χ. ἀρκεσθῶμεν εἰς τὰ ἀναγραφέντα παραδείγματα ἔχομεν ἀποδείξει ὅτι μικρότεροι τοῦ 11 ἀναλύονται εἰς γινόμενον πρῶτων, ἄρα $\alpha=11$).

Ἐστω τώρα τυχὸν φυσικὸς ἀριθμὸς $n \geq \alpha$. Ἐὰν ὁ n εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἰσχύει. (Τὸ «γινόμενον» τότε ἔχει ἓνα μόνον παράγοντα, τὸ συμβατικὸν γινόμενον). Ἐὰν ὁ n εἶναι σύνθετος θὰ ἔχῃ ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 36, β' ἓνα πρῶτον διαιρέτην p_1 καὶ θὰ εἶναι $n = p_1 v_1$ ὅπου $v_1 < n$. Ἐὰν ὁ v_1 εἶναι πρῶτος τὸ ἀποδεικτέον ἰσχύει. Ἄν ὁ v_1 εἶναι σύνθετος θὰ ἔχῃ ἓνα διαιρέτην, πρῶτον, ἔστω τὸν p_2 ὁπότε $v_1 = p_2 v_2$ καὶ $n = p_1 p_2 v_2$, ὅπου $v_2 < v_1$. Ὁμοίως ἂν ὁ v_2 δὲν εἶναι πρῶτος, θ' ἀναλύεται εἰς $p_3 v_3$, ὁπότε $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 v_3$ ὅπου $v_3 < v_2 < v_1$, κ.ο.κ. Οὕτω προχωροῦντες φθάνομεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν $n = p_1 p_2 \dots p_k v_k$ ὅπου ἢ ὁ v_k θὰ εἶναι πρῶτος καὶ τὸ θεώρημα ἰσχύει ἢ, ἐπειδὴ οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ $v_1, v_2, v_3, \dots$ βαίνει ἐλαττούμενοι, θὰ εἶναι $v_k < \alpha$ ὁπότε πάλιν ὁ v_k θ' ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρῶτων, $v_k = q_1 q_2 \dots q_l$. Ὡστε τελικῶς $n = p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l$.

β') Τὸ μονότροπον τῆς ἀναλύσεως ἀποδεικνύεται βάσει τοῦ προηγούμενου πορίσματος. Ἐστω ὅτι ὁ n ἡδύνατο νὰ ν' ἀναλυθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων, δηλ. $n = p'_1 p'_2 \dots p'_r$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l = p'_1 p'_2 \dots p'_r$$

Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς p_1 ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον, ἄρα θὰ διαιρῇ ἓνα τῶν παραγόν-

των τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ ὅμως ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι πρῶτοι, ὁ p_1 θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν παράγοντα τοῦ διαιρεῖ, ἔστω τὸν p_1' . Εἶναι λοιπὸν $p_1 = p_1'$, ἄρα καὶ $p_2 p_3 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l = p_2' p_3' \dots p_l'$. Ὁμοίως θὰ εἶναι $p_2 = p_2'$ κ.ο.κ. Ὡστε οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους ὑπάρχουν καὶ εἰς τὸ δεύτερον. Ὁμοίως, καὶ κάθε παράγων τοῦ δευτέρου μέλους ὑπάρχει καὶ εἰς τὸ πρῶτον, ἄρα τὰ δύο γινόμενα, ἔχουν τοὺς ἰδίους ἀκριβῶς, παράγοντας.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ γινόμενον $p_1 p_2 p_3 \dots$ εἰς ὃ ἀναλύεται ὁ n , εἶναι δυνατὸν ἓνας πρῶτος παράγων νὰ ἐμφανίζεται πολλὰς φορές. Ἐπομένως ἡ γενικὴ μορφή τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ n ἀναλυόμενος εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων εἶναι ἡ κάτωθι :

$$(1) \quad n = (p_1)^{\alpha_1} (p_2)^{\alpha_2} \dots (p_k)^{\alpha_k}$$

ὅπου τόσον αἱ βάσεις $p_1, p_2, \dots, p_k$ ὅσον καὶ οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ (ἐκθέται) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ εἶναι πλήρως ὀρισμένοι ὅταν δοθῇ ὁ n .

γ') Ἡ μέθοδος τῆς ἀναλύσεως εἰς πρῶτους παράγοντας. Ὑπενθυμίζομεν τὸν γνωστὸν ἐκ τῆς Στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς τρόπον ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων :

Ἐστω πρὸς ἀνάλυσιν ὁ 80262. Οὗτος εἶναι ἄρτιος, ἄρα περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα 2. Ἐχομεν λοιπὸν :

$$80262 = 2 \times 40131.$$

Ὁ 40131 εἶναι περιττός, συνεπῶς δὲν περιέχει τὸν παράγοντα 2. Δοκιμάζοντες μὲ τὸν ἐπόμενον πρῶτον ἀριθμὸν, δηλ. τὸ 3, εὐρίσκομεν :

$$40131 = 3 \times 13377.$$

Ἐξετάζομεν ἂν ὁ 13377 διαιρῇται πάλιν μὲ 3 καὶ εὐρίσκομεν :

$$13377 = 3 \times 4459.$$

Εὐρίσκομεν ὅτι ὁ 3 δὲν εἶναι, πλέον, διαιρέτης τοῦ 4459. Ὁ ἀμέσως ἐπόμενος πρῶτος εἶναι ὁ 5 ἀλλὰ οὗτος δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 4459. Ὁ ἀμέσως ἐπόμενος πρῶτος εἶναι ὁ 7. Εὐρίσκομεν δέ :

$$4459 = 7 \times 637.$$

Προχωροῦντες ὁμοίως εὐρίσκομεν :

$$637 = 7 \times 91$$

$$91 = 7 \times 13.$$

Συνδυάζοντες τ' ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$80262 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 13.$$

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς κάτωθι :

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

80262	2	
40131	3	
13377	3	
4459	7	80262 = 2 · 3 · 3 · 7 · 7 · 7 · 13
637	7	
91	7	
13	13	
1		

δ') Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τοῦσαι δυνάμεις αὐτῶν εἶναι πρῶται πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (σχετικῶς πρῶτοι) καὶ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, $\alpha = p_1 p_2 \dots p_k$, $\beta = q_1 q_2 \dots q_l$ (ὅπου εἷς πρῶτος παράγων δύναται νὰ ἐπαναλαμβάνεται μέσα εἰς τὸ γινόμενον), τότε οὐδεὶς ἐκ τῶν $p_1 p_2 \dots, p_k$ θὰ εὐρίσκειται μέσα εἰς τοὺς παράγοντας $q_1 q_2 \dots q_l$ τοῦ δευτέρου γινομένου, δηλ. τὰ δύο γινόμενα δὲν θὰ ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ἀρα καὶ δύο οἱ αἰδηποτε δυνάμεις τῶν α καὶ β ὡς αἱ $\alpha^m = p_1^m p_2^m \dots p_k^m$, $\beta^n = q_1^n q_2^n \dots q_l^n$ θὰ εἶναι πάλιν ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡς οὐδένα κοινὸν πρῶτον παράγοντα ἔχουσιν.

ε') Μέθοδος εὐρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π. Ἐὰν ἕκαστος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $v_1, v_2, \dots$ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τῆς μορφῆς (1) τὸ Ε.Κ.Π. τῶν $v_1, v_2, \dots$ εὐρίσκεται ἂν μορφώσωμεν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων οἱ ὅποιοι ἐμφανίζονται καὶ μὲ ἕκαστον ὑψωμένον εἰς τὸν μέγιστον ἐκθέτην μὲ τὸν ὅποιον ἀπαντᾷται.

Οὕτω π.χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 15, 22, 36, ἀναλύομεν: $15 = 3 \cdot 5$, $22 = 2 \cdot 11$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, ὁπότε τὸ Ε.Κ.Π. $= 3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 11 = 1980$.

Ἐπίσης, τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν $7^2 \cdot 5^3 \cdot 11$, $7 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3^2$, $7^2 \cdot 5 \cdot 11$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = (2 \cdot 5)^3 \cdot (3 \cdot 7)^2 \cdot 11 = 1000 \cdot 441 \cdot 11 = 4851000$.

στ') Μέθοδος εὐρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν κοινῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς πρώτων παραγόντων ὑψωμένου ἑκάστου εἰς τὸν μικρότερον ἐκθέτην μὲ τὸν ὅποιον ἀπαντᾷται.

Π.χ. ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $5^3 \cdot 11$, $2^4 \cdot 11 \cdot 5$, $17 \cdot 11 \cdot 5^4$ εἶναι ὁ $5 \cdot 11 = 55$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α-87.—Ἀναγνωρίσατε ἂν οἱ ἐπόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι:

713, 1121, 1471, 4313, 4189, 2963, 4453, 4307, 4327.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

A-88.—Δι' ἀναλύσεως τοῦ 2025 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων δείξατε ὅτι οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ὁμοίως διὰ τὸν ἀριθμὸν 11025.

A-89.—Ἀναλύσατε εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν :

86805, 4805, 4225, 2772.

A-90.—Εὑρετε τὸ Μ.Κ.Δ. τῶν ἐπομένων ἀριθμῶν :

11088 καὶ 38808, 5292 καὶ 44100. Ἐπίσης τῶν 144, 216 καὶ 256.

A-91.—Εὑρετε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 6, 24, 30, 18. Ὁμοίως τῶν 180, 84, 1188. Ὁμοίως τῶν 210, 100, 1290.

B-92.—Τρία γεγονότα ἐμφανίζονται περιοδικῶς, τὸ πρῶτον ἀνὰ 15 ἡμέρας, τὸ δεύτερον ἀνὰ 22 ἡμέρας καὶ τὸ τρίτον ἀνὰ 36 ἡμέρας. Ἐάν ταῦτα ἐμφανισθοῦν συγχρόνως μίαν Κυριακὴν, ζητεῖται μετὰ πόσας ἡμέρας, θὰ ἐμφανισθοῦν πάλιν Κυριακὴν ;

B-93.—Προσδιορίσατε δύο ἀκεραίους ἔχοντας Μ.Κ.Δ.=36 καὶ Ε.Κ.Π.=756.

(Ὑποδ.: Ἄν οἱ ζητούμενοι x, y διαιρεθοῦν διὰ 36, καθίστανται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐνῶ τὸ Ε.Κ.Π. διαιρεῖται καὶ αὐτὸ διὰ 36).

B-94.—Ἐάν δύο ἀκεραῖοι ἔχουν καὶ διαφορὰν ἄρτιαν καὶ γινόμενον ἄρτιον, τότε εἶναι ἀμφότεροι ἄρτιοι.

B-95.—Δείξατε ὅτι ἂν οἱ τρεῖς ἀκεραῖοι α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ τῶν, τότε καὶ οἱ ἀριθμοί: $\alpha+\beta+\gamma, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ τῶν.

(Ὑπόδ.: ἄρκει νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς τελευταῖοι δὲν ἔχουν κ.δ. πρῶτον ἀριθμὸν).

B-96.—Ἐάν οἱ ἀκεραῖοι α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε i) οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ii) οἱ $\alpha^v+\beta^v$ καὶ $\alpha\beta$, ἐπίσης. (βλ. ὑπόδειξιν προηγούμενης ἀσκῆσεως).

§ 38. Συστήματα ἀριθμῆσεως. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμῆσεως (§ 28, γ') κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς α ἀναλύεται εἰς τὴν μορφήν :

$$(1) \quad \alpha = \psi_1 + \psi_2 \cdot 10 + \psi_3 \cdot 10^2 + \psi_4 \cdot 10^3 + \dots + \psi_n \cdot 10^{n-1}$$

ὅπου οἱ ἀκεραῖοι $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_n$ εἶναι ὅλοι < 10 καὶ λέγονται «ψηφία» τοῦ α εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμῆσεως (ψ_1 τῶν μονάδων, ψ_2 τῶν δεκάδων, ψ_3 τῶν ἑκατοντάδων κ.τ.λ.) γράφεται δὲ τότε ὁ α συντόμως: $\psi_n \psi_{n-1} \dots \psi_3 \psi_2 \psi_1$. Τὸ n δεικνύει καὶ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων του.

Ἐάν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ 10 ὑπάρχει ἕνας οἰοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς $\beta > 1$ ὅλα δὲ τὰ $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ εἶναι $< \beta$ δηλαδὴ ἂν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς α γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(2) \quad \alpha = \psi_1 + \psi_2 \beta + \psi_3 \beta^2 + \psi_4 \beta^3 + \dots + \psi_n \beta^{n-1}$$

ὅπου $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ εἶναι ἀκεραῖοι $< \beta$, τότε λέγομεν ὅτι ὁ α ἀναφέρεται εἰς τὸ σύστημα ἀριθμῆσεως μετὰ ἀριθμοῦ β .

ται εἰς σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν β καὶ ἔχει ψηφία, ὡς πρὸς βά-
σιν τὸ β , τὰ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ γράφομεν δὲ τὴν (2) συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\alpha = \psi_v \psi_{v-1} \dots \psi_4 \psi_3 \psi_2 \psi_1 \langle \beta \rangle,$$

Βλέπουμεν ὅτι ἡ (2) εἶναι μία γενίκευσις τῆς (1), (δηλ. περιέχει καὶ τὴν (1) ὡς μερικὴν περίπτωσιν).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ ισότητα $\alpha = 3256_{\leq 7}$ σημαίνει ὅτι :

$$a = 6 + 5 \times 7 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7^3$$

*Ητοι ὁ $3256_{<7>}$ ἰσοῦται μετὰ τὸν ἀριθμὸν $6+35+98+1029=1168$ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως. Δυνάμεθα δὲ νὰ γράψωμεν: $3256_{<7>} = 1168_{<10>}$.

Σημειωτέον ότι διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ 7-δικὸν σύστημα, χρειάζονται 7 ψηφία : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Διότι αἱ 7 μονάδες σημειοῦνται ὡς 1 μονάς ἀνωτέρας τάξεως, αἱ 8 μονάδες, ὡς 1 ἀπλή μονάς καὶ 1 μονάς ἀνωτέρας τάξεως, κ.τ.λ. Εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα, χρειάζονται μόνον τὰ ψηφία 0, 1.

Θεώρημα. «Δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\beta > 1$, ὁ τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς α δύναται πάντοτε νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\alpha = \psi_1 + \psi_2\beta + \psi_3\beta^2 + \dots + \psi_v\beta^{v-1}$$

όπου $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_v$ είναι άκέραιοι $< \beta$.

Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀποδεικνύεται τὸ δυνατόν τῆς ἀναλύ-
σεως παντὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὴν μορφήν (2).

Πρὸς ἀποδείξιν διαιροῦμεν τὸν α διὰ τοῦ β καὶ λαμβάνομεν $\alpha = \beta\pi_1 + \psi_1$. Ἐὰν ὁ π_1 εἴναι $> \beta$ διαιροῦμεν πάλιν τὸν π_1 διὰ β καὶ λαμβάνομεν $\pi_1 = \beta\pi_2 + \psi_2$ ὁπότε ὁ ἀριθμὸς α γράφεται: $\alpha = \beta(\beta\pi_2 + \psi_2) + \psi_1 = \beta^2\pi_2 + \beta\psi_2 + \psi_1$. Ἐὰν ὁ π_2 εἴναι πάλιν $> \beta$, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως $\pi_2 = \beta\pi_3 + \psi_3$ καὶ ὁ ἀριθμὸς α γράφεται:

$$\alpha = (\pi_3 + \psi_3)\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1 = \pi_3\beta^3 + \psi_3\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1.$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀκέραιοι $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots$ βαίνουν ἐλαττούμενοι, θὰ φθάσω-
μεν ἐξακολουθοῦντες οὕτω εἰς τὴν μορφὴν:

$$\alpha = \pi_{v-1}\beta^{v-1} + \psi_{v-1}\beta^{v-2} + \dots + \psi_3\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1,$$

όπου $\pi_{v-1} < \beta$ ενώ συγχρόνως και όλοι οι άλλοι άκέραιοι $\psi_{v-1} \dots \psi_3, \psi_2, \psi_1$ θά είναι $< \beta$ ως υπόλοιπα διαιρέσεων διά β . ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Έστω $\beta=5$ και $\alpha=723$. Διὰ τὸν δώσωμεν εἰς τὸν 723 τὴν μορφήν (2) ἐκτελοῦμεν τὰς ἐπομένους διαιρέσεις: $723=5,144+3$, $144=5,28+4$, $28=5,5+3$. Ἐτσι, ἡ πρώτη ἰσότης γράφεται $723=5(5,28+4)+3=28,5^2+4,5+3$ καὶ ἀκόμη, λόγῳ τῆς τρίτης:

$$723 = (5.5+3)5^2 + 4.5+3 = 5^4 + 3.5^2 + 4.5+3. \quad \text{"\Omegaστε: } 723=10343_{<5>}.$$

Πρὸς εὐκολίαν κατατάσσουμεν τὰς πράξεις ὡς κάτωθι :

ΚΑΝΕΛΛΟΥ, «ΑΛΛΕΡΕΑ, Α»

723	5
3	144
	4
	28
	3
	5
	0
	1

Τὰ εὐρισκόμενα ὑπόλοιπα, 3,4,3,0 εἶναι κατὰ σειράν, τὰ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ καὶ τὸ τελευταῖον πηλίκον (τὸ $<5>$) εἶναι τὸ ψ_5 .

Οὕτω, διὰ νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 10792 εἰς τὸ ἐπταδικὸν σύστημα (δηλ. ὡς πρὸς βάσιν τὸ 7), θὰ ἐκτελέσωμεν τὰς διαιρέσεις :

10792	7
37	1541
29	14
12	1
5	
	220
	10
	3
	31
	3
	7
	4

Θὰ εἶναι δὲ $10792 = 43315_{<7>}$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-97.—Ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ $323_{<4>}$ ἢ τὸ $333_{<5>}$ ἢ τὸ $335_{<6>}$;

A-98.—Πῶς παρίσταται ὁ ἀριθμὸς 27, ὡς πρὸς βάσιν 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 9 ἢ 12 ;

B-99.—Προσδιορίσατε τοὺς ἀκεραίους x, y, ω, φ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι πάντες <4 καὶ ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης :

$$x + y \cdot 4 + \omega \cdot 4^2 + \varphi \cdot 4^3 = 210.$$

A-100.—Ὁ ἀριθμὸς $7842_{<9>}$ (τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος) νὰ γραφῇ εἰς τὸ σύστημα μὲ βάσιν 7.

B-101.—Εἰς πᾶν σύστημα ἀριθμήσεως, μὲ βάσιν $\beta > 2$, ὁ ἀριθμὸς $121_{<\beta>}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

B-102.—Ἐστω β ἡ βάσις ἀριθμήσεως. Ἐξ ὅλων τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι γράφονται μὲ ν ψηφία εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἀριθμήσεως, εὑρετε ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Πόσος γίνεται οὗτος ἂν αὐξηθῇ κατὰ μονάδα ;

Οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς

§ 39. Ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἐκτελεσταί. α')

Ἐὰν ὅποιονδήποτε εὐθύγραμμον τμήμα καὶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν . Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα νέον εὐθύγραμμον τμήμα T λαμβάνοντες ἐπὶ μιᾷς εὐθείας, ν τμήματα διαδοχικὰ ἴσα πρὸς U . Τὸ T εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ U ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ν . Γράφομεν δὲ

$$(1) \quad \boxed{T = \nu \cdot U} \quad (\text{Τὸ } T, \nu \cdot \text{πλάσιον τοῦ } U)$$

(ἐννοεῖται ὅτι $1 \cdot U = U$)

Δεχόμενοι καὶ τὸ μηδενικὸν τμήμα ἥτοι ἓν σημεῖον, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν συμβατικῶς :

$$(2) \quad 0 \cdot U = 0$$

ἥτοι τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μηδέν, εἶναι τὸ μηδενικὸν τμήμα.

Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν $\nu \cdot U$, ὁ ἀκέραιος ν παίξει τὸν ρόλον ἀριθμητικοῦ ἐκτελεστοῦ ὅστις ἐνεργῶν ἐπὶ τοῦ U τὸ μετατρέπει εἰς νέον τμήμα (γινόμενον) νU . Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης θεωρούμενοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν **ἀκέραιοι ἐκτελεσταί**.

β') Ἐπιννοῦμεν, τώρα ἕνα ἐκτελεστήν ὅστις ἐνεργῶν ἐπὶ τοῦ τμήματος $T (= \nu U)$, τὸ μετατρέπει εἰς U . Ὁ ἐκτελεστής αὐτὸς παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\frac{1}{\nu}$ (ἐν διὰ νί) καὶ γράφομεν : $\frac{1}{\nu} T = U$. Ἰ-

σχῶουν λοιπὸν αἱ ἀντιστρέφται σχέσεις :

$$(3) \quad \boxed{T = \nu U} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{\nu} T}$$

Ὁ $\frac{1}{\nu}$ εἶναι ἕνας κλασματικὸς ἐκτελεστής ὅστις ἐνεργῶν ἐπὶ τοῦ

T , τὸ ὑποβιβάζει εἰς τὸ ἐν νουστὸν αὐτοῦ, συνεπῶς ἐκτελεῖ τὴν ἀντίστροφον μετάβασιν ἐκείνης ἣν ἐκτελεῖ ὁ ν . Διὰ τοῦ ν μεταβαίνομεν ἀπὸ τὸ U εἰς τὸ T (βλ. (1)) ἐνῶ διὰ τοῦ $\frac{1}{\nu}$ μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ T

εἰς τὸ U . Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ὁ $\frac{1}{v}$ εἶναι ἐκτελεστής, ἀντίστροφος τοῦ v .

γ') Ἐστῶσαν τώρα οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ μ , v καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα U . Ἐκ τοῦ U κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ τμήμα $\frac{1}{v}U$ καὶ πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὸ $\frac{1}{v}U$ ἐπὶ μ . Ἔτσι, φθάνομεν εἰς τὸ τμήμα $T = \mu \cdot \left(\frac{1}{v}U\right)$. Αἱ δύο μεταβάσεις ἀπὸ τοῦ U εἰς τὸ $\frac{1}{v}U$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{v}U$ εἰς τὸ $\mu \cdot \left(\frac{1}{v}U\right) = T$ ἀντικαθίστανται μὲ μίαν ἀπ' εὐθείας μετάβασιν ἀπὸ U εἰς T δι' ἑνὸς ἐκτελεστοῦ ἐνεργοῦντος ἐπὶ τοῦ U , ὅστις παρίσταται μὲ $\frac{\mu}{v}$ (ἀνάγνωθι: μὲ διὰ νί). Γράφομεν δὲ $T = \frac{\mu}{v}U$. Ὡστε: ὁ $\frac{\mu}{v}$ εἶναι ἓνας κλασματικὸς ἐκτελεστής ὅστις ἐφαρμοζόμενος εἰς ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα U τὸ μετατρέπει εἰς τὸ τμήμα $T = \mu \cdot \left(\frac{1}{v}U\right)$, ἥτοι:

$$(4) \quad \boxed{\frac{\mu}{v}U = \mu \cdot \left(\frac{1}{v}U\right)}$$

δ') Εἰς τὸν κλασματικὸν ἐκτελεστήν $\frac{\mu}{v}$, δύναται νὰ εἶναι καὶ $\mu=0$ ($v \neq 0$) ὁπότε λαμβάνομεν τὸν ἐκτελεστήν

$$\frac{0}{v} \quad (v \neq 0)$$

ὅστις ἐνεργῶν ἐπὶ ἑνὸς τμήματος A , τὸ μηδενίζει:

$$\frac{0}{v} \cdot A = 0 \cdot \left(\frac{1}{v}A\right) = 0 \cdot A' = 0, \quad \left(\text{ὅπου } A' = \frac{1}{v}A\right)$$

ε') Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος OA καὶ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v , ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ τμήματος OA ἓν σημεῖον B καὶ ἓνα μόνον, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι, $v \cdot OB = OA$.

Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι, ἂν δύο εὐθύγραμμα τμήματα πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ τὸν ἴδιον φυσικὸν ἀριθμὸν, δίδουν ἴσα γινόμενα, τότε τὰ τμήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

στ') Ἰδιότητες τῶν ἐκτελεστῶν. Ἐὰν μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ U τυχὸν εὐθύγραμμον τμήμα τότε ἰσχύουν κατὰ σειρὰν :

$$i) \quad (\mu + \nu)U = \mu U + \nu U$$

$$ii) \quad (\mu \nu)U = \mu(\nu U)$$

$$iii) \quad \nu \cdot \left(\frac{1}{\nu} U \right) = U \quad (\nu \neq 0)$$

$$vi) \quad \frac{1}{\mu \nu} U = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\nu} U \right) \quad (\mu, \nu \neq 0)$$

Αἱ τρεῖς πρῶται ἐκ τῶν ἀνωτέρω, γίνονται εὐκολα φανεραί. Διὰ ν ἀποδείξωμεν τὴν τετάρτην παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς εἶναι πράγματι, ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα διότι πολλαπλασιαζόμενα ἕκαστον μὲ τὸν ἀριθμὸν $\mu\nu$, γίνονται ἴσα :

$$\mu\nu \left(\frac{1}{\mu\nu} U \right) = U \quad (\text{λόγῳ τῆς iii}).$$

$$\nu \mu \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\nu} U \right) \right\} = (\text{λόγῳ τῆς ii}) \nu \left\{ \mu \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\nu} U \right) \right) \right\} = (\text{λόγῳ τῆς iii})$$

$$\nu \left(\frac{1}{\nu} U \right) = (\text{λόγῳ τῆς iii}) U.$$

§ 40. Ἀριθμητικὰ κλάσματα. Οἱ κλασματικοὶ ἐκτελεσται

$\frac{\mu}{\nu}$ λέγονται ἀριθμητικὰ κλάσματα.

Ὁ ἀκέραιος μ λέγεται ἀριθμητὴς καὶ ὁ ἀκέραιος ν ($\neq 0$) λέγεται παρονομαστής τοῦ κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$. Ἀμφότεροι λέγονται ὅροι τοῦ κλά-

σματος. Τὸ τμήμα $\frac{\mu}{\nu} U$ λέγεται γινόμενον τοῦ τμήματος U ἐπὶ τὸ ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἄλλη παράστασις. Πολλάκις, θὰ παριστῶμεν τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$

διὰ τοῦ συμβόλου μ/ν . Ἐτσι π.χ. $3/8 = \frac{3}{8}$.

§ 41. Σύμμετροι ἀριθμοί. Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων, ἐνούμενα εἰς ἓν σύνολον, ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Δηλαδή ένας αριθμός σ είναι σύμμετρος, αν είναι άκεραίος, ή κλάσμα μ/ν όπου μ, ν άκεραίοι και $\nu \neq 0$.

Κάθε δεδομένος σύμμετρος σ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἀριθμητικός ἐκτελεστής ὁ ὁποῖος ἐνεργῶν ἐπὶ ἐνὸς δεδομένου εὐθύγραμμου τμήματος A δίδει ὡς ἀποτέλεσμα (γινόμενον) ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμήμα B , πλήρως καθωρισμένον.

Μία ἄλλη ὀνομασία τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι : *ρητοὶ ἀριθμοί*.

§ 42. Ἰσότητες μεταξὺ συμμέτρων. Δύο σύμμετροι ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι ἢ ἰσοδύναμοι ὅταν θεωρούμενοι ὡς ἐκτελεστικὰ ἐπιδρῶντες ἐπὶ τοῦ ἰδίου εὐθυγράμμου τμήματος U , δίδουν ὡς ἀποτελέσματα (γινόμενα), ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.

Δηλ. ἂν σ καὶ σ' εἶναι σύμμετροι τότε :

$$\sigma \cdot U = \sigma' \cdot U \iff \sigma = \sigma'$$

Συνέπεται τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ καὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἐκτελεστῶν (§ 39 στ') εἶναι :

i) Ἐὰν ὁ ἀριθμητικὸς ἐνὸς κλάσματος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, ἥτοι ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐπομένως :

«Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων». Κατὰ συνέπειαν, διὰ τοῦ συστήματος τῶν κλασμάτων ἐπεκτείνεται τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ii) Ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν ἴσους παρονομαστάς, τότε ἔχουν καὶ ἴσους ἀριθμητάς.

iii) (Θεμελιῶδες θεώρημα). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὁρους ἐνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν κλάσμα ἰσοδύναμον.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὁρους ἐνὸς κλάσματος διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, λαμβάνομεν κλάσμα ἰσοδύναμον.

iv) Ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο κλάσματα α/β καὶ α'/β' εἶναι ἰσοδύναμα, εἶναι, $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

Ἦτοι αἱ δύο κάτωθι σχέσεις εἶναι ἰσοδύναμοι :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \iff \alpha\beta' = \alpha'\beta$$

Ἀς ἀποδείξωμεν τὴν iii) Ἐστω τὸ ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς k . Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ τὸν k , λαμβάνομεν κλάσμα $\frac{\alpha k}{\beta k}$ ἰσοδύναμον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$.

ἔχομεν κατὰ σειράν: $\frac{\alpha k}{\beta k} U = (\alpha k) \cdot \left(\frac{1}{k\beta} U \right) = (\text{λόγω τῆς iv, § 39})$
 $(\alpha k) \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\beta} U \right) \right\} = (\text{λόγω τῆς ii § 39}) \alpha \left\{ k \left[\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\beta} U \right) \right] \right\} = (\text{λόγω τῆς iii, § 39})$
 $\alpha \left\{ \frac{1}{\beta} U \right\} = \frac{\alpha}{\beta} U$. Ἀφοῦ $\frac{\alpha k}{\beta k} U = \frac{\alpha}{\beta} U \Rightarrow \frac{\alpha k}{\beta k} = \frac{\alpha}{\beta}$ ὁ.ἔ.δ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον, ἀποδεικνύονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

§ 43. Ἑνιαία μορφή τῶν συμμετρων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων συνάγομεν ὅτι πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

$$(1) \quad \frac{\mu}{\nu} \text{ ὅπου } \mu, \nu \text{ ἀκέραιοι καὶ } \nu \neq 0.$$

Διότι, ἂν ὁ σύμμετρος εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς α , γράφεται $\frac{2\alpha}{2}$ ἢ $\frac{3\alpha}{3}$ κ.λπ. (ιδιότης i § 42) δηλ. γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν (1), ἂν δὲ εἶναι ὁ 0, γράφεται $\frac{0}{1}$ ἢ $\frac{0}{2}$. . . ἤτοι, πάλιν ὑπὸ τὴν μορφήν (1)· τέλος, προφανῶς, ἂν εἶναι ἀριθμητικὸν κλάσμα, γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν (1).

§ 44. Ἀπλοποιήσις κλάσματος — Ἀνάγωγα κλάσματα. α') Ἀπλοποιήσις ἐνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὑρεσις κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθέν, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὄρους. Ἡ ἀπλοποιήσις στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα (iii) τῆς § 42, δηλ. γίνεται διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν ὄρων τοῦ κλάσματος διὰ τινος κ. δ. των.

Π.χ. ἔχομεν $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ (ἀπλοποιούμεν διὰ 24), $\frac{75}{45} = \frac{15}{9}$ (ἀπλ. διὰ 5)
 $= \frac{5}{3}$ (ἀπλ. διὰ 3), $\frac{80}{16} = \frac{5}{1}$ (ἀπλ. διὰ 16) = 5, $\frac{4^2 \times 5 \times 11}{44 \times 20} = \frac{4 \times 5 \times 11}{11 \times 20}$
 (ἀπλ. διὰ 4) = $\frac{4 \times 5}{20}$ (ἀπλ. διὰ 11) = $\frac{20}{20} = 1$, $\frac{48\alpha^2 x^3}{36\alpha x^4} = \frac{4\alpha^2 x^3}{3\alpha x^4}$ (ἀπλ. διὰ 12) = $\frac{4\alpha x^3}{3x^4}$ (ἀπλ. διὰ α) = $\frac{4\alpha}{3x}$ (ἀπλ. διὰ x^3). Ἐνταῦθα ὑποτίθεται $\alpha \neq 0$, $x \neq 0$.

Ἡ ἀπλοποιήσις διευκολύνει σημαντικῶς τοὺς ὑπολογισμούς, καὶ ὅποτε εἶναι δυνατὴ δὲν πρέπει νὰ παραλείπεται.

β') Ἀνάγωγον κλάσμα καλεῖται τὸ μὴ ἀπλοποιήσιμον ἀριθμητικὸν κλάσμα. Οἱ ὅροι ἀνάγωγον καὶ ἀπλοποιήσιμον κλάσματα δὲν ἔχουν κ.δ.

ἄλλον ἀπὸ τὴν μονάδα, συνεπῶς εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐνα κλάσμα τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἀνάγωγον κλάσμα, ἂν οἱ ὅροι του διαιρεθοῦν ἀμφότεροι διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. των (§35, 3^{ον}).

γ') Θεώρημα. Ἐὰν ἀριθμητικὸν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἓνα ἀνάγωγον κλάσμα, τότε οἱ ὅροι του εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὁρῶν τοῦ ἀναγώγου.

Ἔστω ὅτι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$ ὅπου $(\alpha, \beta) = 1$. Θὰ ἔχωμεν τότε $\mu\beta = \nu\alpha$

(βλ. ἰν § 42) ὅποτε ὁ β ὡς διαιρέτης τοῦ $\mu\beta$, εἶναι καὶ διαιρέτης τοῦ $\nu\alpha$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α θὰ διαιρῇ τὸν ν (§ 35, i). Ὡστε θὰ ἔχωμεν $\nu = \beta \cdot \lambda$ ὅπου λ ἀκέραιος. Ἡ ἰσότης $\mu\beta = \nu\alpha$, γίνεταί τώρα $\mu\beta = \beta\lambda\alpha$ καὶ δίδει: $\mu = \lambda\alpha$ (§ 27 α'). Ὡστε θὰ ὑπάρχῃ ἓνας ἀκέραιος λ τοιοῦτος ὥστε:

$$\boxed{\mu = \alpha\lambda \text{ καὶ } \nu = \beta\lambda} \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Οὕτω π.χ. ἂν $\frac{\mu}{\nu} = \frac{3}{5}$ τότε ἡ θὰ εἶναι $\mu=3$ καὶ $\nu=5$ ἢ $\mu=2.3$ καὶ $\nu=2.5$ ἢ $\mu=3 \cdot 3$ καὶ $\nu=3.5 \dots$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-103. Ν' ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{88}{132}, \frac{672}{288}, \frac{456}{513}, \frac{651}{483}, \frac{759}{858}, \frac{540}{420}$$

δι' ἀναλύσεως τῶν ὁρῶν των εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

A-104. Νὰ γίνουν ἀνάγωγα τὰ κλάσματα :

$$\frac{154}{182}, \frac{216}{126}, \frac{264}{396}, \frac{240}{520}, \frac{240}{312}, \frac{310}{651}$$

B-105. Νὰ γίνουν ἀνάγωγα τὰ κλάσματα :

$$\frac{9409}{10767}, \frac{11304}{30144}, \frac{6426}{8262}$$

A-106. Ἐὰν α ἀκέραιος δείξατε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{17\alpha+1}{18\alpha+1}$ καὶ $\frac{\alpha}{15\alpha+1}$

εἶναι ἀνάγωγα.

B-107. Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\nu}{2\nu+1}$ καὶ

$\frac{\nu(2\nu+1)}{\nu+1}$ εἶναι ἀνάγωγα.

B-108. Δείξατε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{23}{99}, \frac{2323}{9999}, \frac{232323}{999999}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

B-109. Πόσα κλάσματα ὑπάρχουν ἴσα πρὸς τὸ $\frac{21}{35}$, ἀλλὰ ἔχοντα ὁ-

B-110. Νά καθορισθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{378}{630}$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρων νὰ εἶναι 40.

B-111. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές, δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

B-112. Δοθέντος τοῦ ἀναγώγου κλάσματος α/β , προσδιορίσατε τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων x τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἐπὶ α/β καὶ τὸ πηλίκον διὰ α/β εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

B-113. Δοθέντων τῶν κλασμάτων $\frac{13}{133}$ καὶ $\frac{8}{68}$ προσδιορίσατε κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δεύτερον καὶ τὸ ὅποιον προκύπτει ἀπὸ τὸ πρῶτον, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ αὐξηθοῦν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

B-114. Ποιοὶ διψήφιοι ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως μετατρέπονται εἰς τὸ ἐπταδικὸν σύστημα, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία των;

B-115. Ποίους ἀκεραίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος α/β χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος;

§45. Τροπὴ κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Ὅταν πολλὰ κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν (κοινὸν παρονομαστήν), λέγονται **ὁμώνυμα κλάσματα**. Πολλὰ κλάσματα **ἐτερόνυμα** (ἔχι ὁμώνυμα) δύναται πάντοτε νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δηλ. ν' ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ ἰσοδυνάμων τῶν ἐχόντων κοινὸν παρονομαστήν. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται **τροπὴ** τῶν ἐτερονύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Ἐστωσάν π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{11}{8}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{9}{40}$. Δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστήν ἓνα ὅποιονδήποτε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστών (κατὰ προτίμησιν τὸ **E.K.II**), ἐνταῦθα τὸ 120. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{11}{8} = \frac{11 \times 15}{8 \times 15} = \frac{165}{120} \quad (\text{διότι } 15 = 120 : 8)$$

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = \frac{35}{120} \quad (\text{διότι } 5 = 120 : 24)$$

$$\frac{9}{40} = \frac{9 \times 3}{40 \times 3} = \frac{27}{120} \quad (\text{διότι } 3 = 120 : 40)$$

Ἐπομένως τὰ ἐτερόνυμα κλάσματα: $\frac{11}{8}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{9}{40}$ ἀντικαθίστανται μετὰ ὁμώνυμα $\frac{165}{120}$, $\frac{35}{120}$, $\frac{27}{120}$.

Γενικῶς: ὡς κοινὸς παρονομαστής λαμβάνεται ἓνα **K.II.** τῶν παρονομαστών, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ πολλαπλασιάζονται ἕκαστος μετὰ ὅ,τι καὶ ὁ παρονομαστής του.

§46. Ἀνισότητες μεταξύ συμμέτρων. α') Ἐὰν δύο σύμμετροι ἀριθμοὶ (§ 41), σ καὶ σ' θεωροῦνται ὡς ἀριθμητικοὶ ἐκτελεστικὰ ἐνεργούντες ἐπὶ ἑνὸς ἐξ ὁμοειδήματος Πολυπλάσιου **U**, δι-

δουν γινόμενα (τμήματα) άνισα, είναι άνισοι. Μικρότερος δέ εκ των δύο καλεΐται εκείνος ό οποίος δίδει το μικρότερον γινόμενον-τμήμα. Έάν π.χ. το τμήμα $\sigma'U$ είναι μικρότερον δηλ. μέρος του σU , όποτε γράφομεν $\sigma'U < \sigma U$, τότε ό σ' είναι έξ όρισμοϋ μικρότερος του σ και γράφομεν $\sigma' < \sigma$ ή $\sigma > \sigma'$.

(Έάν οι σ και σ' είναι άκέραιοι, ό όρισμός αυτός δέν αντιβαίνει προς τον δοθέντα εις την § 11α'. Διότι δυνάμεθα να θεωρήσωμεν το $\sigma'U$ ως σύνολον, Α, εκ σ' διακεκριμένων τμημάτων (στοιχείων) ισομήκων προς U , όποτε ό πληθικός του αριθμός είναι ό σ' και αναλόγως, το σU ως σύνολον Β με πληθικόν αριθμόν σ . Έπειδή $\sigma'U < \sigma U$, το Α ισοδυναμεί προς μέρος του Β, άρα $\sigma' < \sigma$).

Βάσει του όρισμοϋ αυτού και των ιδιοτήτων των εκτελεστών (§39, στ') αποδεικνύονται τα κάτωθι θεωρήματα.

i) Έκ δύο αριθμητικῶν κλασμάτων έχόντων τον αυτόν παρονομαστήν, μεγαλύτερον είναι το έχον τον μεγαλύτερον αριθμητήν. Αντιστρόφως αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, τότε $\alpha > \beta$.

ii) Δυνάμεθα λοιπόν να συγκρίνωμεν δύο συμμέτρους αριθμούς αν τους φέρωμεν υπό την μορφήν δύο δμωνύμων κλασμάτων.

Π.χ. $3 > \frac{19}{7}$ διότι, $3 = \frac{21}{7}$ αλλά $\frac{21}{7} > \frac{19}{7}$. Όμοίως, δια να συγκρίνωμεν τα κλάσματα $\frac{12}{13}$ και $\frac{13}{14}$ τα γράφομεν υπό την μορφήν $\frac{12 \cdot 14}{13 \cdot 14}$ και $\frac{13 \cdot 13}{13 \cdot 14}$ ή $\frac{168}{13 \cdot 14}$ και $\frac{169}{13 \cdot 14}$ όποτε βλέπομεν ότι $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.

iii) Έκ δύο αριθμητικῶν κλασμάτων έχόντων τον ίδιον, (μη μηδενικόν) αριθμητήν, μεγαλύτερον είναι το έχον τον μικρότερον παρονομαστήν.

iv) Έάν $\sigma, \sigma', \sigma''$ σύμμετροι, τότε

$$\sigma < \sigma' \text{ και } \sigma' < \sigma'' \Rightarrow \sigma < \sigma''.$$

Λέγομεν ότι ή ανισότης μεταξύ συμμέτρων, είναι μεταβατική σχέσις.

Αποδείξεις. Δια την i): Έστωσαν τα κλάσματα α/γ και β/γ όπου $\alpha > \beta$ και τυχόν εϋθύγραμμον τμήμα U . Θά έχωμεν

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} U &= \alpha \left(\frac{1}{\gamma} U \right) = \alpha U' \text{ όπου } U' = \frac{1}{\gamma} U. \\ \frac{\beta}{\gamma} U &= \beta \left(\frac{1}{\gamma} U \right) = \beta U'. \end{aligned}$$

Έπειδή $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha U' > \beta U'$ δηλ. $\frac{\alpha}{\gamma} U > \frac{\beta}{\gamma} U \Rightarrow$ (βάσει του όρισμοϋ των άνίσων κλασμάτων) $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αντιστρόφως, έστω $\alpha/\gamma > \beta/\gamma$. Τότε:

$$\frac{\alpha}{\gamma} U > \frac{\beta}{\gamma} U \Rightarrow \alpha \left(\frac{1}{\gamma} U \right) > \beta \left(\frac{1}{\gamma} U \right) \Rightarrow \alpha U' > \beta U' \Rightarrow \alpha > \beta.$$

Διὰ τὴν iii): "Εστώσαν τὰ κλάσματα γ/α καὶ γ/β μὲ $\alpha < \beta$. Τότε, $\alpha\gamma < \beta\gamma$ καὶ $\alpha\gamma/\alpha\beta < \beta\gamma/\alpha\beta$ δηλ. $\gamma/\beta < \gamma/\alpha$ ἢ τέλος, $\gamma/\alpha > \gamma/\beta$.

Διὰ τὴν iv): "Αν παραστήσωμεν τοὺς συμμετρους, ὑπὸ μορφὴν ὁμωνύμων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\nu}, \frac{\alpha'}{\nu}, \frac{\alpha''}{\nu}$, αἱ ἀνισότητες $\sigma < \sigma'$ καὶ $\sigma' < \sigma''$ γράφονται $\frac{\alpha}{\nu} < \frac{\alpha'}{\nu}$, $\frac{\alpha'}{\nu} < \frac{\alpha''}{\nu}$ καὶ δίδουν: $\alpha < \alpha'$ καὶ $\alpha' < \alpha'' \Rightarrow \alpha < \alpha'' \Rightarrow \frac{\alpha}{\nu} < \frac{\alpha''}{\nu} \Rightarrow \sigma < \sigma''$.

§ 47. Πρόσθεσις τῶν κλασμάτων. "Εστώσαν δύο ἀριθμητικὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}$. Ταῦτα ἐφαρμοζόμενα ὡς ἐκτελεσται ἐπὶ ἐνὸς τμήματος U δίδουν ἀντιστοίχως τὰ τμήματα $\frac{\alpha}{\beta}U$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}U$. Ἐὰν προσθέσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἐξαγόμενα, λαμβάνομεν ἓνα τμήμα S ,

$$\frac{\alpha}{\beta}U + \frac{\alpha'}{\beta'}U = S$$

Τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον ἐνεργοῦν ὡς ἐκτελεστικὴ ἐπὶ τοῦ U , μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μεταβῶμεν ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὸ U εἰς τὸ S λέγεται ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}$. "Ητοι,

ἂν $\frac{\alpha}{\beta}U + \frac{\alpha'}{\beta'}U = S$ ἀλλὰ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}U = S$ τότε τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}$ ἢ ἀκόμη, ἂν

$$\frac{\alpha}{\beta}U + \frac{\alpha'}{\beta'}U = \frac{\gamma}{\delta}U \quad \text{τότε τὸ } \frac{\gamma}{\delta} \text{ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν } \frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } \frac{\alpha'}{\beta'}$$

Γράφομεν: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta}$. Τὸ $+$ σημαίνει πρόσθεσιν πρὸς ἐκτέλεσιν.

"Αθροισμα πολλῶν κλασμάτων καλεῖται τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον εὐρίσκομεν προσθέτοντες τὸ πρῶτον μὲ τὸ δεύτερον, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μὲ τὸ τρίτον κ.ο.κ.

Συνέπεται τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ:

i) "Αθροισμα ὁμωνύμων κλασμάτων:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha'}{\beta}$$

$$\Delta\acute{\iota}\omicron\tau\iota \frac{\alpha+\alpha'}{\beta} U = (\alpha+\alpha') \left(\frac{1}{\beta} U \right) = \alpha \left(\frac{1}{\beta} U \right) + \alpha' \left(\frac{1}{\beta} U \right) \quad (\S 39, \sigma\tau', i) = \\ = \frac{\alpha}{\beta} U + \frac{\alpha'}{\beta} U. \text{ Σύμφωνα λοιπόν πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀθροίσματος:}$$

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta}$$

ii) Διὰ τὰ προσθέσωμεν δύο ἐτερώνυμα κλάσματα τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα (§ 45) καὶ κατόπιν τὰ προσθέτομεν ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον ἐδάφιον.

Π.χ. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha\beta'}{\beta\beta'} + \frac{\alpha'\beta}{\beta\beta'} = \frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'}$. Εἰς τὴν πρᾶξιν, δέον νὰ ἐκλέγεται ὡς κοινὸς παρονομαστής, τὸ Ε.Κ.Π. τῶν β καὶ β' τὸ ὁποῖον ἐνδέχεται νὰ εἶναι κατὰ πολὺ μικρότερον τοῦ $\beta\beta'$.

iii) Ἡ πρόσθεσις δύο κλασμάτων εἶναι πρᾶξις ἀντιμεταθετική.

$$\text{Ἦτοι } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Delta\acute{\iota}\omicron\tau\iota \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'} \text{ καὶ } \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'}{\beta'\beta} = \frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'}$$

iv) Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων εἶναι πρᾶξις προσεταιριστική.

$$\text{Ἦτοι } \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} \right) + \frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha''}{\beta''} \right)$$

Πράγματι, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἰσοῦται μὲ τὸ κλάσμα: $\frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'} + \frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta\beta''+\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$ τὸ δὲ δεύτερον μέλος ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'\beta''+\alpha''\beta'}{\beta\beta''} = \frac{\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta\beta''+\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$ ἤτοι, μὲ τὸ αὐτὸ κλάσμα.

v) Αἱ ιδιότητες τῶν ἀθροισμάτων μὲ ἀκεραίους προσθετέους (§ 16) ἰσχύουν καὶ δι' ἀθροίσματα μὲ τυχόντας συμμέτρους προσθετέους.

Ἀφοῦ ἰσχύη ὁ ἀντιμεταθετικὸς καὶ ὁ προσεταιριστικὸς νόμος εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων, θὰ ἰσχύη καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμέτρων, διότι οἱ σύμμετροι ἰσοδυναμοῦν μὲ ἀριθμητικὰ κλάσματα (§ 43). Ἐπομένως καὶ αἱ ιδιότητες iii, iv, v τῆς § 16, πηγάζουσιν ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς νόμους, θὰ ἰσχύουν καὶ κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμέτρων.

vi) Ἐὰν $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''$ σύμμετροι, τότε

$$\sigma < \sigma' \iff \sigma + \sigma'' < \sigma' + \sigma''$$

vii) Ἐκ τῶν δύο ἀνισοτήτων: $\sigma < \sigma'$ καὶ $\sigma'' < \sigma'''$.

$$\text{ἐπεται ἡ } \sigma + \sigma'' < \sigma' + \sigma'''$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ιδιότητες ἀποδεικνύονται, ἂν παραστήσωμεν τοὺς συμμέτρους ὑπὸ μορφήν ὁμώνυμων κλασμάτων καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὴν i) τῆς § 46.

§ 48. Ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων. α') Διαφορὰ δύο

κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ καλεῖται τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ δεύτερον, μᾶς δίδει τὸ πρῶτον.

Ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ μεῖον $\frac{\gamma}{\delta}$ παρίσταται μὲ $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}$

Προκειμένου περὶ δύο ὁμωνύμων κλασμάτων, ἡ διαφορὰ εὐρίσκεται ἂν ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητάς, διατηροῦντες τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἤτοι :

$$\frac{\alpha}{k} - \frac{\beta}{k} = \frac{\alpha - \beta}{k}. \quad \text{Διότι} \quad \frac{\alpha - \beta}{k} + \frac{\beta}{k} = \frac{(\alpha - \beta) + \beta}{k} = \frac{\alpha}{k}$$

(ὅπου ὑποτίθεται $\alpha \geq \beta$).

Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἓνα κλάσμα ἀπὸ ἓνα ἄλλο τρέπομεν πρῶτον τὰ δύο κλάσματα εἰς ὁμόνυμα :

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} - \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta}$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἀφαίρεσις δυνατὴ πρέπει :

$$\alpha\delta \geq \beta\gamma \quad \text{ἢ ὅπερ τὸ αὐτό,} \quad \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \geq \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἢ τέλος} \quad \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{\gamma}{\delta}.$$

β') Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα συμμετρῶν ἀριθμῶν καλεῖται μία διαδοχὴ προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων ἐκτελουμένων μεταξὺ συμμετρῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις $\frac{3}{4} + 5 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$ εἶναι ἓνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

γ') Οἱ κανόνες ὑπολογισμῶν οἱ ἀποδειχθέντες διὰ διαφορὰς ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς τὴν § 19 ἰσχύουν καὶ διὰ διαφορὰς τυχόντων συμμετρῶν, τῶν ἀποδείξεων παραμενουσῶν ὡς ἔχουν. Δηλ. ἂν, α, β, γ, x τυχόντες σύμμετροι ἰσχύουν : $(x - \alpha) + \alpha = x$, $x - (x - \alpha) = \alpha$, $(x + \alpha) - \alpha = x$, $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$, $\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$, $\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) + \beta$, $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta$ καὶ ἡ συνεπαγωγὴ $\alpha - \gamma = \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.

δ') Ἐὰν σ, σ' σύμμετροι τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ $\sigma < \sigma'$, τότε ὑπάρχει σύμμετρος x ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν σ , δίδει τὸν σ' καὶ ἀντιστρόφως.

Πράγματι, ὁ x εἶναι ἡ διαφορὰ $\sigma' - \sigma$ ἡ ὁποία ὑπάρχει, ἐφ' ὅσον $\sigma' > \sigma$ (βλ. α'). Ἀντιστρόφως, ἂν $\sigma + x = \sigma'$ τότε $\sigma < \sigma'$, διότι δυνάμεθα νὰ

παραστήσωμεν τοὺς σ, χ, σ' με δμώνυμα κλάσματα $\frac{k}{\nu}, \frac{y}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}$ καὶ νὰ συνάγωμεν,

$$\frac{k+y}{\nu} = \frac{\lambda}{\nu} \Rightarrow k+y=\lambda \Rightarrow k < \lambda \Rightarrow \frac{k}{\nu} < \frac{\lambda}{\nu} \text{ ἤτοι } \sigma < \sigma' \text{ (δηλ. } \sigma < \sigma + \chi).$$

ε') Ἐὰν $\alpha < \sigma < \sigma' < \beta$ ὅπου $\alpha, \beta, \sigma, \sigma'$ σύμμετροι, τότε $\sigma' - \sigma < \beta - \alpha$.

Διότι, ἀφοῦ $\sigma > \alpha, \sigma' > \sigma, \beta > \sigma'$ θὰ ὑπάρχουν σύμμετροι τῆς Ἀριθμητικῆς, χ, y, ω τοιοῦτοι ὥστε :

$$\sigma = \alpha + \chi, \sigma' = \sigma + y, \beta = \sigma' + \omega \quad (\beta\lambda. \delta')$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, $\beta = \sigma' + \omega = \sigma + y + \omega = \alpha + \chi + y + \omega \Rightarrow \beta - \alpha = \chi + y + \omega$, ἐνῶ $\sigma' - \sigma = y$. Ἐπειδὴ $y < \chi + y + \omega$ (βλ. δ') ἔπεται ὅτι καὶ $\sigma' - \sigma < \beta - \alpha$.

στ') Ἐὰν ἀνισότητος, αὐξήσωμεν τὸ μεγαλύτερον μέλος, (δηλ. μεταβῶμεν ἀπὸ τὴν $\alpha < \beta$ εἰς τὴν $\alpha < \gamma$ με $\gamma > \beta$) λέγομεν ὅτι ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται. Ἄν μικρύνωμεν τὸ μικρότερον μέλος, λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται.

Π.χ. Ἄν εἰς τὴν ἀνισότητα $\alpha < \beta + \gamma$ δ ἰσχύουσιν μεταξύ συμμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, θέσωμεν ὅπου β , ἓνα μεγαλύτερον σύμμετρον β' ἢ ὅπου α ἓνα μικρότερον, α' , ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-106.—Ἐκτελέσατε τὰς προσθέσεις :

$$\frac{4}{6} + \frac{1}{2} + \frac{15}{18}, \quad \frac{10}{16} + \frac{6}{14} + \frac{17}{24}, \quad \frac{19}{35} + \frac{11}{8} + \frac{7}{12}, \quad \frac{165}{242} + \frac{45}{605} + \frac{315}{1089},$$

$$\frac{391}{483} + \frac{551}{817} + \frac{155}{868}.$$

A-117.—Ν' ἀναχθοῦν τὰ κλάσματα $\frac{280}{392}, \frac{294}{392}, \frac{364}{392}$ εἰς τὸν μικρότερον δυνατόν, κοινὸν παρονομαστήν.

A-118.—Εὑρετε κλάσμα ἴσον πρὸς $\frac{3}{5}$ ἀλλὰ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 88.

A-119.—Εὑρετε τὸν ἀκέραιον x ἂν $\frac{9}{2x+9} = \frac{1}{11}$.

A-120.—Τὰ $\frac{14}{17}$ ἐνὸς ἀριθμοῦ ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένα κατὰ 3230 μονάδας. Ποῖος ὁ ἀριθμός ;

A-121.—Ἐὰν εἰς τὰ $\frac{3}{7}$ ἐνὸς ἀριθμοῦ προστεθοῦν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ καὶ 30 μονάδες, ἀκοῦν, προκύπτει ἑκατὸν δέκα καὶ πέντε ὁ ἀριθμός.

A-122.—Εἰς ἐργάτης ἐκτελεῖ ἓνα ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας καὶ ἓνας ἄλλος ἐκτελεῖ τὸ ἴδιο εἰς 5 ἡμέρας. Ποῖον κλάσμα τοῦ ἔργου ἐκτελοῦν εἰς μίαν ἡμέραν ὅταν ἐργάζωνται μαζί;

B-123.—Ποία ἡ γενικὴ μορφή τῶν κλασμάτων τὰ ὁποῖα δὲν μεταβάλλονται ἂν εἰς τὸν ἀριθμητὴν προστεθῇ ὁ 5 καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν ὁ 2;

B-124.—Θέσατε ὑπὸ μορφήν ἀναγώγου κλάσματος τὸ ἄθροισμα :

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

B-125.—Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς $\frac{188887}{211109}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 108.

B-126.—Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν αὐξοντος μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{7}, 1, \frac{25}{18}.$$

B-127.—Σχηματίσατε ὅλα τὰ ἀνάγωγα κλάσματα τὰ μικρότερα τῆς μονάδος καὶ ἔχοντα παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 6. Ἀκολουθῶς θέσατέ τα κατὰ σειρὰν αὐξοντος μεγέθους. Τέλος, διακρίνατε ζεύγη ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων, τοιαῦτα ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων ἐκάστου ζεύγους, νὰ εἶναι = 1.

B-128.—Ἐάν ν φυσικὸς ἀριθμὸς δείξατε ὅτι

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} > \frac{1}{v^2}.$$

A-129.—Ὑπολογίσατε τὰ ἀλγεβρικὰ ἄθροισματα

$$\frac{1521}{8649} + \frac{1872}{2018} - \frac{54}{4505}, \quad \left(\frac{19}{16} - 1 + \frac{3}{16} \right) - \left(2 - \frac{7}{4} \right).$$

B-130.—Νὰ ἐλατθῇ τὸ κλάσμα $\frac{275}{289}$ κατὰ τὰ $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ διὰ πράξεων

ἐκτελουμένων μόνον ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ του.

B-131.—Δείξατε ὅτι ἂν ρ, φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε

$$\frac{1}{\rho(\rho+1)} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho+1}.$$

Ἀκολουθῶς δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν κλασμάτων

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(v-1)v} + \frac{1}{v(v+1)} \text{ ἰσοῦται με } \frac{v}{v+1}.$$

§ 49. Πολλαπλασιασμός τῶν κλασμάτων. α) Ἐστῶσαν

δύο ἀριθμητικὰ κλάσματα α/β καὶ α'/β' καὶ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα U. Εὐρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τοῦ U ἐπὶ α/β , ἥτοι τὸ τμήμα

$\frac{\alpha}{\beta} U$ καὶ τὸ εὑρεθὲν τοῦτο τμήμα $\frac{\alpha}{\beta} U$ τὸ πολλαπλασιάζομεν πάλιν ἐπὶ

τὸ δεύτερον κλάσμα α'/β' . Διὰ τῶν δύο ἄλλεπαλλήλων τούτων πολλαπλα-

σιασμῶν, φθάνομεν εἰς ἓνα τμήμα P. Ἦτοι: $\frac{\alpha'}{\beta'} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} U \right\} = P$.

Τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον ἐνεργοῦν ὡς ἐκτελεστὴς ἐπὶ τοῦ U, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μεταβῶμεν ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὸ U εἰς τὸ P λέγεται γινόμενον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}$. Δηλαδή ἂν

$\frac{\alpha'}{\beta'} \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) = P$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta} U = P$ τότε τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}$. Ἡ ἀκόμῃ, ἂν

$$(1) \quad \frac{\alpha'}{\beta'} \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) = \frac{\gamma}{\delta} U \quad \text{τότε τὸ } \frac{\gamma}{\delta} \text{ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ } \frac{\alpha}{\beta} \text{ ἐπὶ } \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Σημειοῦμεν: $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta}$. Ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου λέγεται πολλαπλασιασμὸς.

Συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ εἶναι:

i) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμητικῶν κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Ἦτοι $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}$. Πρὸς ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν (1), νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$(2) \quad \frac{\alpha'}{\beta'} \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} U$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\beta\beta'$, γίνεται ἴσον μὲ $(\alpha\alpha')U$.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δειξῶμεν ὅτι καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν $\beta\beta'$ δίδει τὸ ἴδιον τμήμα $(\alpha\alpha')U$.

Πράγματι ἔχομεν:

$$\begin{aligned} (\beta\beta') \left\{ \frac{\alpha'}{\beta'} \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) \right\} &= \beta \cdot \left\{ \beta' \left(\frac{\alpha'}{\beta'} \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) \right) \right\} \quad (\S 39, \text{στ' ii}) = \\ &= \beta \left\{ \alpha' \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) \right\} \quad (\S 39, \text{iii}) = (\beta\alpha') \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) \quad (\S 39, \text{ii}) = (\alpha'\beta) \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) = \\ &= \alpha' \left\{ \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} U \right) \right\} \quad (\S 39, \text{ii}) = \alpha'(\alpha U) \quad (\beta\lambda. 3) = (\alpha'\alpha)U \quad (\S 39, \text{ii}) = (\alpha\alpha')U \quad \text{ῆ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

Πόρισμα. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν του.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\text{Διότι } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{1} \text{ (§ 42, i)} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot 1} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta} = \alpha$$

ii) Ἀντίστροφα κλάσματα λέγονται δύο κλάσματα ἔχοντα γινόμενον ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

$$\text{Τὸ ἀντίστροφον τοῦ } \frac{\alpha}{\beta} \text{ εἶναι τὸ } \frac{\beta}{\alpha}, \text{ διότι } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\beta\alpha} = 1.$$

iii) Γινόμενον κλασμάτων περισσοτέρων τῶν δύο καλεῖται τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ τρίτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον.

$$\begin{aligned} \text{Π. χ. } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{\theta}{\iota} &= \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\eta} \right) \cdot \frac{\theta}{\iota} = \\ &= \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\eta} \right) \cdot \frac{\theta}{\iota} = \frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\eta} \cdot \frac{\theta}{\iota} = \frac{\alpha\gamma\varepsilon\theta}{\beta\delta\eta\iota} \end{aligned}$$

Βλέπομεν ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

iv) Δυνάμεις ἐνὸς κλάσματος. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ γραφόμενα εἰς τὴν § 47, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^v = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdots \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}{\beta \cdot \beta \cdots \beta} = \frac{\alpha^v}{\beta^v} \quad \text{"Ἡτοι}$$

v παράγοντες

Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἂν καὶ ὁ ἀριθμητὴς του καὶ ὁ παρονομαστὴς του, ὑψωθῶν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

v) Ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο κλασμάτων.

$$\begin{aligned} \text{Διότι } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} &= \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} \text{ καὶ } \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'\alpha}{\beta'\beta} = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}, \text{ ἐπομένως} \\ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} &= \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

vi) Ὁ προσεταιριστικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων.

$$\begin{aligned} \text{Διότι } \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \right) \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} &= \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''} \text{ καὶ} \\ \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} \right) &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'\alpha''}{\beta'\beta''} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}, \text{ ἄρα} \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \right) \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} &= \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} \right) \quad \text{ὁ.ξ.δ.} \end{aligned}$$

vii) Ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

$$\begin{aligned} \text{Διότι} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} &= \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta} = \frac{\alpha\delta\varepsilon}{\beta\delta\zeta} + \\ &+ \frac{\beta\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta} \quad (\S 47) = \frac{\alpha\varepsilon}{\beta\zeta} + \frac{\gamma\varepsilon}{\delta\zeta} \quad (\text{κατόπιν ἀπλοποιήσεων}). \quad \text{Ἦτοι:} \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad (\text{βλ. § 24}) \end{aligned}$$

viii) Γινόμενον πολλῶν συμέτρων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσοδυναμοῦν πρὸς ἀριθμητικὰ κλάσματα, τὸ γινόμενον ὅσωνδήποτε συμέτρων, εἶναι γινόμενον κλασμάτων. Τὸ γινόμενον ὅσωνδήποτε κλασμάτων ἔχει τὰς ιδιότητες τοῦ γινομένου ἀκεραίων τὰς ἀποδειχθεῖσας εἰς τὴν § 24 γ', διότι αὐταί, πηγάζουν ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀνωτέρω θεμελιώδεις νόμους ν, vi, vii. Ἐπομένως:

Διὰ τὸ γινόμενον πολλῶν συμέτρων ἀριθμῶν ἰσχύουν πᾶσαι αἱ ιδιότητες τοῦ γινομένου ἀκεραίων, αἱ ἀποδειχθεῖσαι εἰς τὴν § 24. (ἄρκει μόνον ἡ λέξις ἀκέραιος ἀριθμὸς ν' ἀντικατασταθῇ μὲ τὴν λέξιν σύμμετρος ἀριθμὸς).

ix) Νόμος τῆς διαγραφῆς εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμέτρων τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἐὰν σ, σ', λ, σύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ $\lambda \neq 0$ τότε

$$\boxed{\lambda\sigma = \lambda\sigma'} \iff \boxed{\sigma = \sigma'}$$

Διότι ἂν παραστήσωμεν τοὺς συμέτρους διὰ κλασμάτων ὁμωνύμων π.χ.:

$$\sigma = \frac{\alpha}{\kappa}, \quad \sigma' = \frac{\beta}{\kappa}, \quad \lambda = \frac{\gamma}{\kappa} \quad \text{ἔχομεν κατὰ σειρὰν}$$

$$\lambda\sigma = \lambda\sigma' \Rightarrow \frac{\gamma}{\kappa} \cdot \frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\gamma}{\kappa} \cdot \frac{\beta}{\kappa} \Rightarrow \frac{\gamma\alpha}{\kappa^2} = \frac{\gamma\beta}{\kappa^2} \Rightarrow \gamma\alpha = \gamma\beta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\beta}{\kappa} \Rightarrow \sigma = \sigma'$$

καὶ ἀντιστρόφως.

x) Ἰσχύει ἐπίσης

$$\sigma < \sigma' \iff \lambda\sigma < \lambda\sigma'$$

καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως:

$$\frac{\alpha}{\kappa} < \frac{\beta}{\kappa} \iff \alpha < \beta \iff \gamma\alpha < \gamma\beta \iff \frac{\gamma\alpha}{\kappa^2} < \frac{\gamma\beta}{\kappa^2} \iff \frac{\gamma}{\kappa} \cdot \frac{\alpha}{\kappa} < \frac{\gamma}{\kappa} \cdot \frac{\beta}{\kappa}$$

δηλ. $\lambda\sigma < \lambda\sigma'$ (βλ. § 23 ii, § 27 β').

xi)
$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}$$

(Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \beta\delta < \frac{\gamma}{\delta} \beta\delta \Rightarrow \alpha\delta < \gamma\beta \Rightarrow$

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma} < \frac{\gamma\beta}{\alpha\gamma} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

§ 50. Διαίρεσις τῶν κλασμάτων. α') Καλεῖται πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος α/β (διαιρετέου) διὰ τοῦ κλάσματος γ/δ (διαιρέτου), ἓνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομενον ἐπὶ τὸ δεύτερον, μᾶς δίδει τὸ πρῶτον.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ πολλαπλασιάζομενον ἐπὶ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ μᾶς δίδει τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦτο τὸ $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$. Γράφομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \quad \eta \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}.$$

Ἦτοι: Τὸ πηλίκον δύο κλασμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

β') Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ α πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν α , ἢ ἂν εἶναι δυνατόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α .

$$\text{Π.χ.:} \quad \frac{7}{5} : 4 = \frac{7}{5} : \frac{4}{1} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \quad \eta \text{τοι} \quad \frac{7}{5} : 4 = \frac{7}{20}$$

$$\eta \quad \frac{12}{35} : 4 = \frac{12}{35} : \frac{4}{1} = \frac{12}{35} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{35 \cdot 4} = \frac{3}{35} \quad \eta \text{τοι} \quad \frac{12}{35} : 4 = \frac{3}{35}.$$

γ') Κάθε ἀριθμητικὸν κλάσμα ἐκφράζει τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Ἔστωσαν π.χ. οἱ ἀκεραῖοι, 7 καὶ 5. Δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν 5 νὰ δίδει τὸν 7. Ἄν ὑπῆρχε, θὰ ἦτο τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ 7 διὰ 5. Ὑπάρχει ὁμῶς κλάσμα τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζων τὸν 5 δίδει τὸν 7. Τοῦτο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$. Πράγματι, $\frac{7}{5} \cdot 5 = 7$ (§ 49, i, πόρισμα). Ἐνεκα

τοῦτου, τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$ θεωρεῖται ὡς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 διὰ τοῦ 5. (Ἐνταῦθα, ἡ λέξις διαίρεσις δὲν ἔχει τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως» τῶν ἀκεραίων (§ 30) ἀλλὰ τὴν ἔννοιαν μιᾶς πράξεως διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὐρίσκεται τρίτος ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν δεύτερον, δίδει τὸν πρῶτον).

δ') **Λόγοι.** Δοθέντων δύο συμμετρῶν ἀριθμῶν σ καὶ σ' ἐξ ὧν ὁ

$\sigma' \neq 0$ καλεῖται **λόγος** τοῦ σ πρὸς τὸν σ' , ὁ ἀριθμὸς λ ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν σ' δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς σ . Γράφομεν τότε:

$\frac{\sigma}{\sigma'} = \lambda = \text{λόγος τοῦ } \sigma \text{ πρὸς τὸν } \sigma'.$ Ἰσχύει δὲ ἡ ἀντιστρεπτή σχέσις:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \lambda \iff \sigma = \lambda \sigma'.$$

Ὁ λόγος τοῦ σ πρὸς σ' λέγεται καὶ πηλίκον (ἀκριβὲς) τῆς διαιρέσεως τοῦ σ διὰ σ'.

§ 51. Ἀκέραιον μέρος ἀριθμητικοῦ κλάσματος. Ἐστω

ἐν ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐὰν $\alpha > \beta$, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1 διότι :

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\beta} > \beta \cdot \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 1.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀλγοριθμικὴν διαίρεσιν τοῦ α διὰ β καὶ εἶναι π τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον (§ 30), θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta\pi + \upsilon, & \upsilon < \beta \\ \text{καὶ } \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\beta\pi + \upsilon}{\beta} = \frac{\beta\pi}{\beta} + \frac{\upsilon}{\beta} = \pi + \frac{\upsilon}{\beta} & \text{ἤτοι} \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \pi + \frac{\upsilon}{\beta} & (\upsilon < \beta). \end{aligned}$$

Τὸ π εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$. Ὁ ἀκέραιος π εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἐκ τῶν μὴ ὑπερβαίνοντων τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, διότι $\pi \leq \frac{\alpha}{\beta}$ ἐνῶ $\pi + 1 > \frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐὰν $\alpha < \beta$ τότε τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι μικρότερον τοῦ 1 καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος του εἶναι ὁ μηδὲν (βλ. § 30, παρατ. 3^η).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ $\frac{27}{11}$ εἶναι ὁ 2, διότι $\frac{27}{11} = 2 + \frac{5}{11}$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-132.— Ὑπολογίσατε τὰ γινόμενα :

$$\begin{aligned} &12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right), & 4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\right), & 3\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + 1\right), \\ &\frac{65}{35} \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{26}, & \frac{3}{25} \times \frac{253}{9} \times \frac{75}{69}, & \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} \times \frac{248}{36}\right) \\ &\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{248}{36}\right), & \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right), & \left(\frac{9}{5} + \frac{3}{21}\right)\left(\frac{9}{12} + \frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

A-133.— Ἐκτελέσατε τὰς διαιρέσεις :

$$\frac{16}{15} : 8, \quad \frac{9}{17} : 3, \quad \frac{19}{85} : 19, \quad \frac{31}{9} : 31, \quad \frac{39}{15} : 13,$$

A-134.—Υπολογίσατε τὰς ἐκφράσεις :

$$x^2 + y + 3, \quad x^2 + y^2 + 5, \quad \frac{2x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$$

$$\text{ὅταν } x = \frac{5}{6} \text{ καὶ } y = \frac{5}{12}$$

A-135.—Υπολογίσατε ἕκαστον τῶν κάτωθι κλασμάτων :

$$\frac{x+y}{3x+y}, \quad \frac{x^2+y^2}{3x^2+5y^2}, \quad \frac{2x^2y+3xy^2+x^3}{7x^3+8xy}$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ λόγος τοῦ x πρὸς τὸν y ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{3}$.

B-136.—Εὑρετε τὸ σύνολον (ἢ τὴν γενικὴν μορφήν) τῶν ἀκεραίων x οἱ ὅποιοι διαιροῦμενοι εἴτε διὰ $\frac{4}{105}$ εἴτε διὰ $\frac{6}{35}$ δίδουν πηλίκον ἀκέραιον ἀριθμόν.

A-137.—Προσδιορίσατε τὸν ἀριθμόν x οὕτως ὥστε οἱ λόγοι $\frac{8x-6}{3x}$ καὶ

$$\frac{8x}{3x+3} \text{ νὰ εἶναι ἴσοι.}$$

A-138.—Υπολογίσατε τοὺς λόγους (ἢ πηλίκα).

$$\frac{4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{7}{2} + \frac{1}{4} - 1}, \quad \frac{\frac{8}{7} - \frac{1}{4}}{3 + \frac{2}{21} + \frac{39}{52}}, \quad \frac{3 - \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}}.$$

B-139.—Ἐκτελέσατε τοὺς κάτωθι σημειωμένους ὑπολογισμοὺς

$$i) \quad \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{13} + \frac{18}{5} \cdot \frac{3}{\frac{1}{5}} - \frac{1085}{651}.$$

$$ii) \quad \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} : \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}.$$

$$\text{B-140.} - \text{Δείξατε ὅτι } \frac{x-1}{5} + \frac{2(x-4)}{15} < 1 \iff x < \frac{26}{5}.$$

B-141.—Εὑρετε ἀκέραιον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{31506}{214}$ ἀλλὰ

διαφέροντα τοῦ κλάσματος τούτου, ὅχι περισσότερον ἀπὸ $1/2$.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

§ 52. Δεκαδικὰ κλάσματα - Δεκαδικοὶ ἀριθμοί. α') Καλεῖται δεκαδικὸν κλάσμα, ἐν ἀριθμητικὸν κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής εἶναι δύναμις τοῦ 10 (§ 28, β').

Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα : $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες* 1ης, 2ας, 3ης, ... τάξεως (δέκατον, ἑκατοστόν, χίλιοστόν, ...).

Εἶναι προφανές ὅτι, δέκα δεκαδικαὶ μονάδες μιᾶς οἰασδήποτε τάξεως, ἀποτελοῦν μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς ἀμέσως μικροτέρας τάξεως.

β') Ἐστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{4896}{1000}$. Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα :

$$\begin{aligned}\frac{4896}{1000} &= \frac{4000+800+90+6}{1000} = \frac{4000}{1000} + \frac{800}{1000} + \frac{90}{1000} + \frac{6}{1000} = \\ &= 4 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000}.\end{aligned}$$

Τὸ τελευταῖον ἄθροισμα συμφωνοῦμεν νὰ τὸ γράφωμεν
4,896.

Ὁ ἀριθμὸς 4,896 λέγεται *δεκαδικὸς ἀριθμὸς*. Εἰς αὐτόν, κάθε ψηφίον γεγραμμένον ἀμέσως ἀριστερὰ ἐνὸς ἄλλου παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως μικροτέρας τάξεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἴσον πρὸς ἓνα δεκαδικὸν κλάσμα, χωρίζομεν μὲ ἓνα κόμμα ἀπὸ τὸ δεξιὸν τοῦ ἀριθμητοῦ, τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

$$\text{Π.χ. : } \frac{4896}{1000} = 4,896, \quad \frac{532}{100} = 5,32, \quad \frac{41}{1000} = 0,041,$$

Ἀντιστρόφως : Διὰ νὰ σχηματίσωμεν δεκαδικὸν κλάσμα ἴσον πρὸς ἓνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν, παραλείπομεν τὸ κόμμα καὶ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν ὡς παρονομαστὴν γράφομεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ δοθεὶς δεκαδικός.

γ') Αἱ τέσσαρες πράξεις μεταξὺ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

$$\text{Πρόσθεσις : } 3,14 + 2,71 + 14,5 = \frac{314}{100} + \frac{271}{100} + \frac{1450}{100} = \frac{2035}{100} = 20,35.$$

$$\text{Ἀφαιρέσεις : } 19,78 - 1,073 = \frac{19780}{1000} - \frac{1073}{1000} = \frac{18707}{1000} = 18,707.$$

$$\text{Πολλαπλασιασμός : } 23,7 \times 0,35 = \frac{237}{10} \times \frac{35}{100} = \frac{8295}{1000} = 8,295.$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς
Πρακτικῶς, αἱ τρεῖς ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται ὡς κάτωθι :

3,14	19,780	23,7
2,71	4,073	0,35
14,50	18,707	1185
20,35		711
		8,295

$$\text{Διαίρεσις: } 11,7 : 0,38 = \frac{117}{10} : \frac{38}{100} = \frac{117}{10} \times \frac{100}{38} = \frac{11700}{38}.$$

Ἐνταῦθα τὸ ἐξαγόμενον δὲν εἶναι ἐν γένει ἓνα δεκαδικὸν κλάσμα.

★ δ') Τὸ Σύμβολον $0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_{v < \beta} >$. Εἶδομεν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $0, \psi_1 \psi_2 \psi_3$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3}$ ὅπου τὰ ψηφία ψ_1, ψ_2, ψ_3 εἶναι < 10 . Κατ' ἀναλογίαν δυνάμεθα, ὅταν ἡ βᾶσις ἀριθμήσεως εἶναι ἕνας ἀκέραιος $\beta > 1$ νὰ γράψωμεν:

$$0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 < \beta > = \frac{\psi_1}{\beta} + \frac{\psi_2}{\beta^2} + \frac{\psi_3}{\beta^3} \quad \text{ὅπου τὰ ψηφία } \psi_1, \psi_2, \psi_3 \text{ εἶναι } < \beta.$$

$$\text{Π.χ.: } 3,54 < 8 > = 3 + \frac{5}{8} + \frac{4}{8^2} = \frac{236}{64} = \frac{59}{16},$$

$$32,2113 < 4 > = 3.4 + 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} = \frac{2335}{156} \quad (\text{πρβλ. § 38}).$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-142.—Τὰ κάτωθι δεκαδικὰ κλάσματα νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

$$\frac{23}{100}, \frac{57}{10^4}, \frac{1}{10000}, \frac{7593}{100}, \frac{853}{10}, \frac{3}{10^5}.$$

A-143.—Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφήν κλασμάτων οἱ κάτωθι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ
12,35, 0,37, 0,0012, 3,14, 823,57.

A-144.—Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$0,354 + \frac{2}{10}, \quad 7,19 + \frac{13}{2}, \quad 0,999 + 0,001 - \frac{7,19}{133}.$$

B-145.—Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις:

$$9,81 \left((3,5)^2 - (2,5)^2 \right), \left(\frac{1}{0,02} \right)^2 + \left(\frac{1}{0,05} \right)^3 + \left(\frac{1}{0,1} \right)^4, \frac{1,02}{1,08} \times \frac{2,16}{1,26} \times \frac{1,05}{1,70}.$$

B-146.—Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως:

$$\left(\frac{1}{0,125} \right)^2 - \left(\frac{1}{0,25} \right)^3 + \frac{7}{3} \cdot \frac{45}{105}.$$

A-147.—Εὑρετε τὸν x οὕτως ὥστε νὰ εἶναι:

$$\text{i) } 4,83 \cdot x - 4,7 = 37,1 + 1,22x, \quad \text{ii) } 0,35x + 1,62(x-1) = 4,23.$$

B-148.—Δείξατε ὅτι $\frac{4,75 - 0,25x}{3,50x + 3,35} > 1 \iff x < \frac{4}{11}$.

B-149.—Ὁ ἀριθμὸς $3,41_{<8>}$ νὰ γραφῇ ὡς ἀριθμητικὸν κλάσμα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος (βλ. § 52, *8').

B-150.—Οἱ ἀριθμοὶ $A = 4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ καὶ $B = 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}$ νὰ γραφοῦν εἰς τὸ σύστημα ἀριθμήσεως μετὰ βάσιν τὸ 8. Ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι μεγαλύτερος;

§ 53. Δεκαδικὴ προσέγγισις ἐνὸς πηλίκου. α) Ἐστωσαν δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β . Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι τὸ κλάσμα α/β (§ 50, γ').

Τὸ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $x/10$, τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{x}{10} \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{x+1}{10}$$

Τὸ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $y/100$, τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{y}{100} \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{y+1}{100}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ πηλίκον τοῦ 1 διὰ 7.

Ἐστω $\omega/1000$ τὸ ζητούμενον κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ πηλίκον. Τότε :

$$\frac{\omega}{1000} \leq \frac{1}{7} < \frac{\omega+1}{1000} \Rightarrow \omega \leq \frac{1000}{7} < \omega+1$$

Ἐπομένως τὸ ω εἶναι τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1000 διὰ 7 ἢ ἄλλως, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος $1000/7$ (§ 51). Εὐρίσκομεν $\omega=142$. Συνεπῶς τὸ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ πηλίκον τοῦ 1 διὰ 7 εἶναι τὸ $\frac{142}{1000} = 0,142$.

Διάταξις τῶν πράξεων :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 30 & 0,142 \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

Δηλαδή, λαμβάνομεν ἰὰς διαδοχικὰς προσεγγίσεις, διὰ μιᾶς συνεχιζομένης διαιρέσεως.

Παρατήρησις. Ἐάν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $\psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n$ εἶναι τὸ κατὰ προσέγγισιν $1/10^n$ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ τότε :

$$\psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \leq \frac{\alpha}{\beta} < \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n + \frac{1}{10^n}.$$

★ β') «Εὰν δύο αριθμητικά κλάσματα προσεγγίζονται ἀπὸ τὸν ἴδιον δεκαδικὸν ἀριθμὸν, κατὰ προσέγγισιν $1/10^v$ τότε τὰ κλάσματα διαφέρουν μεταξύ των ὀλγώτερον τοῦ $1/10^v$ ».

Ἐστώσαν τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοιαῦτα ὥστε :

$$\frac{x}{10^v} \leq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} < \frac{x+1}{10^v}$$

Τότε ὅπως εἶδομεν εἰς τὴν § 48 ε' θὰ εἶναι :

$$\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{x+1}{10^v} - \frac{x}{10^v} = \frac{1}{10^v}$$

* γ') Ἐὰν δύο αριθμητικά κλάσματα ἔχουν τὰς πάσης τάξεως δεκαδικὰς προσεγγίσεις των, τὰς αὐτάς, δηλ. ἔχουν τὴν ἰδίαν προσέγγισιν δεκάτου, τὴν ἰδίαν ἑκατοστοῦ, τὴν ἰδίαν χιλιοστοῦ, ... (ἄνεν τέλους), τότε τὰ δύο κλάσματα εἶναι ἴσα.

Διότι ἂν εἶχον διαφορὰν τινα ἔστω τὴν $\frac{\lambda}{k} \neq 0$ τότε θὰ ἦτο $\frac{\lambda}{k} < \frac{1}{10^v}$, διὰ πᾶν v (βλ. β') ἢ $\frac{k}{\lambda} > 10^v$ διὰ πᾶν v , ὅπου k καὶ λ ὠρισμένοι ἀκέραιοι. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Διότι, ἂν A εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος k/λ , τότε $A+1 > k/\lambda$ καὶ συνεπῶς $A+1 > 10^v$. Ἐνας ὠρισμένος ἀκέραιος $A+1$ θὰ ἦτο μεγαλύτερος ὅλων τῶν δυνάμεων τοῦ 10, πρᾶγμα ἀδύνατον. (Ὁ ἀκέραιος $A+1$ γραφόμενος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, θὰ εἶχε ἓνα ὠρισμένον πλῆθος ψηφίων, ἔστω p . Ἐπομένως $A+1 < 10^p$ (§ 28, γ', θεώρ. καὶ § 38) καὶ ἐπειδὴ $10^v < A+1$ θὰ ἦτο $10^v < 10^p$ καὶ $v < p$ διὰ πᾶν v . Ἦτοι ὅλοι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ v θὰ ἦσαν μικρότεροι τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ p , ὅπερ ἄτοπον).

Ἐπομένως τὰ κλάσματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄνισα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-151.—Υπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ τὸ πηλίκον $\frac{9,810}{3,141}$.

A-152.—Εὑρετε κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τὰ πηλικά :

$$\frac{1,17}{9} + \frac{2,91}{3}, \quad \frac{85,43}{1,1} + \frac{6,25}{1,21},$$

$$12 - \frac{0,43}{2}, \quad 35,42 - \frac{3,14}{0,12}.$$

B-153.—Ποίαν διαφορὰν θὰ ἔχωμεν ὡς πρὸν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}$ ἂν ἑκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν μετὰ τὴν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τιμὴν του ;

B-154.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐνὸς κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής εἶναι 113 καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ τιμὴ εἶναι 3,141.

§ 54. Δεκαδικὸν περιδοικὸν κλάσμα. Ἐστω τὸ κλάσμα $1/7$. Εἶδομεν (§ 53) ὅτι δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν διαδοχικὰς προσεγγί-

σεις αὐτοῦ διὰ μιᾶς συνεχιζομένης διαιρέσεως ἡ ὁποία παρίσταται ὡς κάτωθι :

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 7 \\
 0 & 0 \\
 \hline
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 10 & 7 \\
 30 & 0,142857... \\
 20 & \\
 60 & \\
 40 & \\
 50 & \\
 10 & \\
 \dots &
 \end{array}$$

Ἡ πρώτη, μερική διαιρέσεις δίδει πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Ἡ δευτέρα, πηλίκον 1, ὑπόλοιπον 3. Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα 2, 6, 4, 5 καὶ ἐπανευρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 1.

Εἶναι ἤδη φανερόν ὅτι αἱ πράξεις θὰ ἐπαναληφθοῦν ἀκριβῶς κατὰ τὴν ἰδίαν σειράν, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπανευρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 1. Ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ προσεγγίσωμεν τὸ $1/7$ μὲ 12 δεκαδικὰ ψηφία, θὰ γράψωμεν

$$0,142857 \ 142857$$

Ἐὰν θέλωμεν προσέγγισιν μὲ 18 δεκαδικὰ ψηφία, θὰ γράψωμεν

$$0,142857 \ 142857 \ 142857$$

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν ἀνωτέρω διαιρέσιν συνεχιζομένην ἐπ' ἄπειρον, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ σύμβολον

$$(1) \quad 0,142857 \ 142857 \ 142857 \dots$$

τὸ ὁποῖον λέγεται **δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα** ἢ καὶ **δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς**.

Εἰς τὸ ἀτέρμον δεκαδικὸν κλάσμα (1) ὑπάρχει μία ὁμὰς ψηφίων, ἡ 142857, ἡ ὁποία διηνεκῶς ἐπαναλαμβάνεται. Ἡ ὁμὰς αὕτη λέγεται **περίοδος**. Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα (1) λέγεται καὶ **δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα** τοῦ $1/7$ καὶ θεωρεῖται ὡς μία διαφορετικὴ παράστασις τοῦ κλάσματος $1/7$.

Εἶναι δυνατόν, ἡ περίοδος ν' ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν ἢ ν' ἀρχίζῃ ἀπὸ μίαν ὁποιανδήποτε θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Π.χ. δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰ δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα

$$8, \overline{75757575} \dots$$

$$0, \overline{3249494949} \dots$$

$$0, \overline{00666666} \dots$$

§ 55. Δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τῶν συμμέτρων. α') Πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς παρίσταται ἀπὸ ἑνα δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα· καὶ ἀντιστρόφως.

Εἶδομεν ὅτι τὸ κλάσμα $1/7$ δίδει γένεσιν εἰς τὸν ἀτέρμονα περιοδικὸν δεκαδικὸν $0,142857142857 \dots$

Ἐστω τώρα τὸ κλάσμα $3/8$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν συνεχιζομένην διαίρεσιν, αὕτη τερματίζεται καὶ εὐρίσκομεν :

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Δυνάμεθα ὅμως ἀντὶ τοῦ $0,375$ νὰ γράψωμεν :

$$0,375000000 \dots$$

ὁπότε ὁ $3/8$ δίδει γένεσιν εἰς τὸν δεκαδικὸν περιοδικὸν $0,375000\dots$ ἔχοντα περίοδον τὸ 0.

Ἐστω ἀκόμη ὁ ἀκέραιος 7. Ἀντὶ τοῦ 7 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$7,0000000 \dots$$

ῥτοι ἕνα δεκαδικὸν περιοδικὸν μὲ περίοδον μηδέν.

Γενικῶς, ἔστω ὁ σύμμετρος μ/ν . Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μ διὰ τοῦ φυσικοῦ ν θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ὑπολοίπων $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$, καὶ μίαν ἀντίστοιχον σειρὰν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὸ πηλίκον, τὰ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots$

μ	ν
$\dots$	$A, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_l, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots$
$u_1 0$	
$u_2 0$	
$\dots$	
$u_k 0$	
$u_{k+1} 0$	
$\dots$	
$u_l 0$	
$u_k 0$	
$u_{k+1} 0$	

Ἐὰν κάποιον ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, ἡ διαίρεσις τερματίζεται καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ἕνας ἀριθμὸς μὲ πεπερασμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων. Νοοῦντες κατόπιν τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ πηλίκου, ἀπέραντον σειρὰν μηδενικῶν λαμβάνομεν ἕνα ἀπέραντον δεκαδικὸν περιοδικὸν μὲ περίοδον 0, ὅστις εἶναι τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ συμμέτρου μ/ν .

Ἐὰν ὅμως δὲν ἐμφανισθῇ μηδενικὸν ὑπόλοιπον, τότε ἀναγκαστικῶς τὰ ὑπόλοιπα ἀπὸ τινος τάξεως καὶ πέραν θὰ ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς. Διότι ὅλα τὰ ὑπόλοιπα $u_1, u_2, u_3, \dots$ εἶναι μικρότερα τοῦ v , δηλ. θὰ εἶναι ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3... ἢ $v-1$, συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανίζωνται διαρκῶς νέα ὑπόλοιπα. Ἐὰν δὲ προχωρήσωμεν μέχρι τοῦ νουστοῦ ὑπολοίπου, τοῦτο θὰ εἶναι ἀσφαλῶς ἓνα ἀπὸ τὰ προηγουμένως παρυσιασθέντα. Ἀφοῦ λοιπὸν θὰ ἐπανεύρωμεν ἓνα προηγουμένως ἐμφανισθὲν ὑπόλοιπον, ἔστω τὸ u_k θὰ ἐπανεύρωμεν καὶ ὅλην τὴν σειρὰν $u_k, u_{k+1}, \dots, u_l$. Ἡ ὁμὰς αὕτη τῶν ὑπολοίπων θὰ ἐπαναλαμβάνεται προφανῶς ἐπ' ἄπειρον καὶ τ' ἀντίστοιχα ψηφία τοῦ πηλίκου θὰ ἐπαναλαμβάνωνται καὶ αὐτὰ περιοδικῶς μὲ περίοδον $\psi_k \psi_{k+1} \dots \psi_l$.

Ὡστε, πᾶς σύμμετρος δίδει γένεσιν εἰς ἓνα δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.

(Οὐδεὶς ἄλλος σύμμετρος δίδει γένεσιν εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. Δηλαδή, δύο διάφοροι σύμμετροι δίδουν γένεσιν εἰς δύο διάφορα δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα. Διότι ἂν ἔδιδον τὸ ἴδιον, θὰ εἶχον τὰς ἰδίας δεκαδικὰς προσεγγίσεις, πάσης τάξεως καὶ συνεπῶς (§ 53, γ') θὰ ἦσαν ἴσοι.

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ὁποῖον νὰ διδῇ γένεσιν εἰς τὸν ἀτέρμονα περιοδικὸν 0,999999... Διότι, ἂν ὑπῆρχε, θὰ εἶχομεν : (§ 53, α' παρατ.).

$$\underbrace{0,999 \dots 9}_{v \text{ φορές}} < \frac{\alpha}{\beta} < \underbrace{0,999 \dots 9}_{v \text{ φορές}} + \frac{1}{10^v} \quad \text{ἢ} \quad \underbrace{0,999 \dots 9}_{v \text{ φορές}} < \frac{\alpha}{\beta} < 1.$$

Ἐπομένως, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ διέφερε τοῦ 1, ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10^v}$ διὰ πᾶν v .

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον (§ 53, γ'), ἐκτὸς ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = 1$. Ἀλλὰ τότε $\alpha = \beta$

καὶ ἡ ἀτέρμων διαίρεσις $\alpha : \beta$, θὰ ἔδιδε γένεσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1,00000...

Δυνάμεθα πάντως, νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύμβολον 0,9999... ὡς ἀριθμὸν, ἴσον πρὸς 1 καίτοι τοῦτο δὲν προέρχεται ἀπὸ ἀτέρμονα διαίρεσιν).

Ἀντιστρόφως, δοθέντος ἐνὸς οἰοιοῦδήποτε περιοδικοῦ κλάσματος τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία τῆς περιόδου δὲν εἶναι ὅλα 9, ὑπάρχει ἓν ἀριθμητικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον δίδει γένεσιν εἰς τὸ δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα. Τοῦτο ἀποδεικνύεται λεπτομερῶς εἰς τὴν θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν. Ἐνταῦθα θ' ἀρκεσθῶμεν εἰς ἓνα πρακτικὸν τρόπον εὐρέσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ κλάσματος ἐξ οὗ προέρχεται τὸ δοθὲν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα, διὰ τῶν κατωτέρω δύο παραδειγμάτων.

i) Ἐστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς 0,273273273... Γράφομεν κατὰ τὴν ἐξήγησιν ἀπὸ τοῦ Ἰνστιτούτου Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$x = 0,273273273...$$

$$1000 x = 273,273273...$$

$$1000 x = 273 + 0,273273273...$$

$$1000 x = 273 + x$$

$$999 x = 273 \quad \text{καὶ τέλος,}$$

$$x = \frac{273}{999} = \frac{\text{μία περίοδος}}{\text{τόσα 9, ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος}}$$

(Κανών, διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι μηδὲν ἢ δὲ περίοδος ἀρχίζει εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ὁπότε ὁ ἀπέραντος περιοδικὸς λέγεται «*ἀπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα*»).

ii) Ἐστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς $20,12\overline{71}7171...$ Γράφομεν κατὰ σειράν :

$$y = 20,12\overline{71}7171..., 100y = 2012,717171...$$

$$100y = 2012 + \frac{71}{99} \quad (\text{προηγούμενος κανὼν}).$$

$$100y = \frac{199188}{99} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{199188}{9900}.$$

Ἀφοῦ λοιπόν, εἰς κάθε σύμμετρον, ἀντιστοιχῇ ἓνας ἀπέραντος δεκαδικὸς περιοδικὸς (τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία τῆς περιόδου δὲν εἶναι ὅλα 9) καὶ εἰς διαφόρους συμέτρους, ἀντιστοιχοῦν διαφορετικοὶ περιοδικοί, ἔπεται ὅτι *δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν κάθε σύμμετρον, μετὸν ἀντίστοιχόν του δεκαδικὸν περιοδικόν.*

Ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ὅστις παριστᾷ ἓνα δοθέντα σύμμετρον λέγεται *δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ συμέτρου.*

β') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι : *Πᾶς σύμμετρος, ἔχει δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα περιοδικόν καὶ ἀντιστρόφως.*

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-155.—Παραστήσατε τοὺς συμέτρους $\frac{33}{40}$, $\frac{43}{1250}$, $\frac{738933}{99900}$ ὑπὸ τὴν μορφήν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων.

A-156.—Παραστήσατε τὰ δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα :

$$0,8\overline{71}871871..., 1,43\overline{27}2727..., 0,0043\overline{14}31...$$

ὑπὸ τὴν μορφήν κλασμάτων $\frac{p}{q}$, ὅπου p φυσικοὶ ἀριθμοί.

B-157.—Ἐστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{p}{q} < 1$. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ $\frac{p}{q}$ τρέπεται εἰς ἀπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα με μονοψηφίαν περίοδον, εὑρετε ποίας τιμᾶς δύναται νὰ λάβῃ τὸ q .

B-158.—Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{p}{q} < 1$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ ὅτι τρέπεται εἰς ἀπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα με μονοψηφίαν περίοδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς

ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 56. Ἀκεραία, νυοστή δύναμις.— «Ἐὰν φυσικὸς ἀριθμὸς α δὲν εἶναι νυοστή δύναμις ἀκεραίου, τότε δὲν εἶναι οὔτε νυοστή δύναμις ἀριθμητικοῦ κλάσματος».

Ἐστω ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν $n^{\text{η}}$ δύναμιν (n ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς ≥ 2) νὰ δίδῃ τὸν α . Ἄς ὑποθέσωμεν, τότε ὅτι ὑπάρχει κάποιον ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{p}{q}$ ὅπου $\boxed{q > 1}$ τὸ ὁποῖον ὑψούμενον εἰς τὴν νυοστήν, δίδει τὸν α . Ἦτοι:

$$(1) \quad \left(\frac{p}{q}\right)^n = \alpha \quad \mu\epsilon \quad q > 1.$$

Τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha = \frac{p^n}{q^n}$ ἤτοι $\alpha q^n = p^n$. Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι $q \mid p^n$ ἄρα ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν q καὶ p^n εἶναι ὁ q (§ 33, Θεωρ. 1^{ον}). Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ οἱ p καὶ q εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔπεται ὅτι καὶ οἱ q καὶ p^n εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 37, δ') ἄρα ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν q καὶ p^n εἶναι ὁ 1. Ἐπομένως, $q=1$, ὅπερ ἄτοπον (ἀφοῦ ὑπετέθη $q > 1$). Ἀρα ἡ (1) δὲν ἀληθεύει.

§ 57. Τετραγωνικὴ ρίζα, ἀκριβής.— Καλεῖται τετραγωνικὴ ρίζα (ἀκριβής) ἐνὸς ἀριθμοῦ α , ἕνας ἀριθμὸς τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν α .

Οὕτω π.χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 9 εἶναι ὁ 3, τοῦ $\frac{16}{25}$, ὁ $\frac{4}{5}$ τοῦ 7,84 ὁ 2,8 τοῦ 0,4624 ὁ 0,68, διότι ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$(1) \quad 3^2=9, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}, \quad (2,8)^2=7,84, \quad (0,68)^2=0,4624.$$

Γενικῶς, ἂν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς καὶ x ἡ τετραγωνικὴ τοῦ ρίζα θὰ ἔχωμεν :

$$x^2 = \alpha.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α συμβολίζεται με

$$x = \sqrt{\alpha}.$$

(Τὸ σύμβολον : $\sqrt{}$ λέγεται ριζικόν, τὸ α ὑπόρριζον).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (1) θὰ ἔχωμεν :

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \sqrt{7,84} = 2,8, \quad \sqrt{0,4624} = 0,68.$$

Ἐὰν ὁ α εἶναι ἀκέραιος, μὴ τέλειον τετράγωνον, τότε δὲν ὑπάρχει σύμμετρος ἀριθμὸς δυνάμενος νὰ χρησιμεύσῃ ὡς τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ (βλ. § 56). Τὸ σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ δὲν παριστάνει τότε οὐδένα σύμμετρον ἀριθμόν. Π.χ. τὰ σύμβολα $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{23}$, δὲν παριστάνουν συμμέτρους ἀριθμοὺς ἀλλὰ νέους ἀριθμοὺς, *γενικευμένους*. Οὗτοι ὑπολογίζονται ὡς θὰ ἴδωμεν με ὅσῃν προσέγγισιν θέλωμεν, ἡ δὲ ἀκριβὴς τῶν ἔννοια θὰ δοθῇ περαιτέρω.

§ 58. Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α κατὰ προσέγγισιν μονάδος. α') Ἐὰν α ἕνας ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς, καλεῖται *τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α κατὰ προσέγγισιν μονάδος*, ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς x τοιοῦτος ὥστε :

$$(1) \quad x^2 \leq \alpha < (x+1)^2$$

Δηλ. ὁ x εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνον δὲν ὑπερβαίνει τὸν α .

Ἄν π.χ. εἶναι $\alpha = n^2 + 1$ ὅπου n φυσικὸς ἀριθμὸς, τότε ἐπειδὴ :

$$n^2 < \alpha < (n+1)^2,$$

ἔπεται ὅτι ὁ n εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α .

Ἐπειδὴ :

$$51^2 < 2615 < 52^2$$

ἔπεται ὅτι ὁ 51 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2615. Ἐπειδὴ δέ :

$$51^2 < 2615,34 < 52^2$$

ἔπεται ὅτι ὁ 51 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2615,34. Βλέπομεν εὐχερῶς ὅτι :

Ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα ἐνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, $A, \psi_1\psi_2 \dots \psi_n$ ἰσοῦται με τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους του, A .

β') **Ὑπόλοιπον.** Ἡ διαφορὰ $\alpha - x^2 = R$ καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς κατὰ προσέγγισιν τετραγωνικῆς ρίζης x .

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει: $\alpha - x^2 < (x+1)^2 - x^2$ ἢ $R < 2x+1$. (Τὸ ὑπόλοιπον δὲν ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τῆς τετρ. ρίζης).

Οὕτω π.χ. τὸ ὑπόλοιπον τῆς κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2615 εἶναι: $2615 - 51^2 = 2615 - 2601 = 14$.

Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ἴσῃται μὲ μηδέν, ὁ ἀριθμὸς α εἶναι τέλειον τετράγωνον.

γ') Πρακτικὴ εὗρεσις τῆς κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῆς ρίζης ἐνὸς ἀκεραίου.

1η περίπτωσης. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100.

Τότε ἡ ζητούμενη τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι μικροτέρα τοῦ 10, δηλ. εἰς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ...9. Γνωρίζοντες ἀπὸ μνήμης τὰ τετράγωνα τῶν 9 τούτων ἀριθμῶν, εὐρίσκομεν ἀμέσως τὴν ζητούμενην τετραγωνικὴν ρίζαν. Οὕτω π.χ. διὰ τὸν ἀριθμὸν 47, ἐπειδὴ οὗτος περιέχεται μεταξὺ $36=6^2$ καὶ $49=7^2$, ἔχομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 6.

2α περίπτωσης. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100.

Ἀκολουθοῦμεν τότε τὸν ἐξῆς κανόνα:

1ον. Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Τὸ πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήμα δυνατὸν νὰ περιέχη ἓνα μόνον ψηφίον.

2ον. Ἐξάγομεν τὴν (κατὰ προσέγγισιν μονάδος) τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρῶτου, πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήματος καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ρίζης. Τὸ τετράγωνον τοῦ πρῶτου τούτου ψηφίου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήμα καὶ λαμβάνομεν τὸ πρῶτον, μερικὸν ὑπόλοιπον.

Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζομεν τὸ ἐπόμενον διψήφιον τμήμα καὶ ἀποκόπτομεν δι' ἐνὸς κόμματος, τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον.

3ον. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀριστερὰ τοῦ κόμματος, διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εἰς τὴν ρίζαν εὐρεθέντος ἀριθμοῦ. Τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἐπόμενον (δεύτερον) ψηφίον τῆς ρίζης, ἢ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δέοντος. Δοκιμάζομεν τὸ νέον τοῦτο ψηφίον. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ ψηφίον τοῦτο δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὐρεθείσης ρίζης καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν μὲ τὸ ψηφίον τοῦτο. Ἐὰν τὸ γινόμενον δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον ἀκολουθοῦμεν ἀπὸ τὸ ἐπόμενον διψήφιον τμήμα, τότε τὸ δοκιμασθὲν ψηφίον εἶναι

ἀκριβές. Ἐὰν ὅχι, τότε δοκιμάζομεν μὲ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερόν του, ἕως ὅτου ἡ ἀνωτέρω ἀφαιρέσεις καταστῇ δυνατή. Τότε λαμβάνομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐκτελεσθείσης ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον.

Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, καταβιβάζομεν τὸ τρίτον διψήφιον τμήμα καὶ ἀποκόπτομεν δι' ἐνὸς κόμματος τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον.

4ον. Ἐξακολουθοῦμεν ὅπως εἰς τὸ 3ον ἐδάφιον μέχρις ὅτου καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Οὕτω π.χ. διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 9790687 σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διατάσσομεν τὰς πράξεις ὡς κάτωθι :

9'79'06'87	312			
9	61	622	6249	
07,9	1	2	9	
6,1	61	1244	56241	
180,6				
1244				
5628,7				
52241				
46				

Ἡ ρίζα εἶναι ὁ 312 καὶ τὸ 46 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Δηλ. : $9790687 = (312)^2 + 46$.

Ἔτερον παράδειγμα εἰς τὸ ὁποῖον χρειάζονται περισσότεραι δοκιμαὶ ἔστω τὸ ἐπόμενον :

3'57'20	188		
1	29	369	
25,7	9	9	
22 4	261	3321	
332,0	28	368	
2944	8	8	
376	224	2944	

Δοκιμή : $(188)^2 + 376 = 35344 + 376 = 35720$.

§ 59. Προσέγγις κατ' ἑλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν.— "Οταν $x^2 < a$, τότε ὁ x εἶναι μία κατ' ἑλλειψιν προσέγγις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ a . "Οταν $y^2 > a$, ὁ y εἶναι μία καθ' ὑπεροχὴν προσέγγις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ a .

Ὁ ἀκέραιος x ὁ πληρῶν τήν: $x^2 \leq \alpha < (x+1)^2$ εἶδομεν ὅτι λέγεται «κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α ». Ἀκριβέστερον, ὁ x εἶναι «ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ κατ' ἑλλειψιν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α ». Διὰ τὴν συντομίαν, χρησιμοποιοῦμεν τὴν πρῶτην ὀνομασίαν ἀντὶ τῆς δευτέρας.

Ὁ ἀκέραιος $x+1$ εἶναι «ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ καθ' ὑπεροχὴν, τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α ». Συνήθως ὅταν λέγωμεν «κατὰ προσέγγισιν» θὰ ἐννοοῦμεν συγχρόνως καὶ «κατ' ἑλλειψιν».

§ 60. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ... α') Κατὰ προσέγγισιν δεκάτου τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α λέγεται ἐν ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{x}{10}$ τοιοῦτον ὥστε:

$$(2) \quad \left(\frac{x}{10}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 10^2 τὰ τρία μέλη τῆς (1) λαμβάνομεν

$$x^2 \leq 100\alpha < (x+1)^2$$

καὶ τοῦτο δεικνύει (βλ. § 58, α') ὅτι ὁ ἀκέραιος x εἶναι ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 100α .

Εὐρίσκοντες τὸν x (§ 58) εὐρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὸν $x/10$.

Κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α λέγεται ἐν ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{x}{100}$ τοιοῦτον ὥστε:

$$(2) \quad \left(\frac{x}{100}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $x^2 \leq 10000\alpha < (x+1)^2$. Συνεπῶς ὁ ἀκέραιος x εἶναι ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $100^2\alpha$.

Γενικῶς, κατὰ προσέγγισιν $1/10^p$ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α εἶναι ἐν ἀριθμητικὸν κλάσμα $x/10^p$ τοιοῦτον ὥστε:

$$\left(\frac{x}{10^p}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{x+1}{10^p}\right)^2$$

ὁ δὲ x εἶναι ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $10^{2p}\alpha$.

β') Κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Ὅπως εἶδομεν ἄνωτέρω, διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01, ἢ 0,001,... δέον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ 100 ἢ 10000 ἢ 1000000..., νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 100α ἢ 10000α ἢ 1000000α ... καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10, 100, 1000,... Ἐὰν ὁ α εἶναι

δεκαδικὸς ἀριθμὸς, μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ 2 ἢ 4 ἢ 6... θέσεις πρὸς τὰ δεξιά καὶ ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 100α, 10000α, 1000000α, ... (βλ. § 58, α').

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν π.χ. τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha=0,00072762$ κατὰ προσέγγισιν 0,001, εὐρίσκομεν πρῶτον τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $1000000\alpha=727,62$ διὰ τῆς γνωστῆς διατάξεως:

7'27	26		
4	48	47	46
32,7	8	7	6
276	384	329	276
51			

Τὴν εὐρεθεῖσαν ρίζαν 26 διαιροῦμεν διὰ 1000. Ἡ ζητούμενη ρίζα εἶναι 0,026.

Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 1, 0,1 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001 εἶναι:

1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421.

Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001 καὶ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι:

2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422.

Αἱ δύο ἀκολουθίαι:

1 1,4 1,41 1,414 1,4142 1,41421...

2 1,5 1,42 1,415 1,4143 1,41422...

δύνανται νὰ συνεχισθοῦν ἐπ' ἄπειρον. Αἱ διαφοραὶ τῶν ἀντιστοιχῶν ὅρων τῶν εἶναι 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001... καὶ βαίνουν ὅλοεν ἐλαττούμεναι καὶ καθιστάμεναι τόσον ἀσήμαντοι ὥστε ἂν χωρήσωμεν ἀρκετὰ, οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι τῶν δύο ἀκολουθιῶν εἶναι πρακτικῶς ἴσοι.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν:

A-159.— 527, 932, 1871, 5940.

A-160.— 20111, 312697, 1863407.

A-161.— 100034, 3589800, 58300010.

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν 0,001 τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν:

A-162.— 39,2 474,9, 8716, 0,356.

A-163.— 0,059, 172,35, 1849.

A-164.— 3,14, 9,81, 1,414.

A-165.— Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν 0,001 τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν: 3,17, 3,1416, 10.

A-166.—Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν κλασμάτων :

$$\frac{15}{49}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{25}{16}, \quad \frac{169}{100}, \quad \frac{121}{225}$$

B-167.—Νὰ ἐξαχθῇ, κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{35}{11}, \quad \frac{9,81}{3,4}$$

B-168.—Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν 1/1000 τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

A-169.—Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ λήγοντες εἰς 2, 3, 7, 8 δύνανται νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα ;

B-170.—Ἐὰν τὸ τετράγωνον ἀκεραίου εἶναι διαιρετὸν διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ p , τότε εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ p^2 (βλ. § 37, α').

B-171.—Νὰ δειχθῇ ὅτι ἵνα ἀριθμητικὸν κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν ὁρῶν του νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

B-172.—Ἐὰν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς v πληροῖ τὴν ἰσότητα $v^2 + v = a$ ἢ τὴν $v^2 + 2v = a$ τότε ὁ v εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν 1 τετρ. ρίζα τοῦ a . **Ἐφαρμογή :** Νὰ προσδιορισθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἔχοντες γινόμενον 2256.

B-173.—Ἡ κατὰ προσέγγισιν 1/100 τετραγωνικὴ ρίζα ἐνὸς ἀριθμητικοῦ κλάσματος εἶναι ὁ 0.52. Ἄν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος εἶναι ὁ 175 εὑρετε, ποῖος δύναται νὰ εἶναι ὁ ἀριθμητής ;

B-174.—Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφή τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι εἶναι ἀκριβῶς διαιρετοὶ διὰ τῆς κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῆς τῶν ρίζης (βλ. § 58, α').

§ 61. Κυβικὴ ρίζα, νυοστή ρίζα.— α') *Καλεῖται κυβικὴ ρίζα (ἀκριβῆς) ἐνὸς ἀριθμοῦ a , ἓνας ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ κύβος, ἰσοῦται πρὸς τὸν a .*

Ἐὰν δηλ. ἔχωμεν

$$x^3 = a$$

τότε ὁ x εἶναι ἡ (ἀκριβῆς) κυβικὴ ρίζα τοῦ a καὶ συμβολίζεται μὲ

$$x = \sqrt[3]{a}.$$

Οὕτω π.χ. ἔχομεν : $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$, $\sqrt[3]{79507} = 43$.

Ἐὰν ὁ a εἶναι ἀκέραιος, μὴ τέλειος, κύβος, τότε κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 56, δὲν ἔχει ὡς κυβικὴν ρίζαν σύμμετρον ἀριθμόν. Τὰ σύμβολα

π.χ. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{10}$ δὲν ἔχουν νόημα συμέτρου ἀριθμοῦ· εἶναι γενικευμένοι (ἢ ἀσύμμετροι) ἀριθμοὶ δυνάμενοι νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ προσέγγισιν οἵανδήποτε.

Κατὰ προσέγγισιν μονάδος, κυβικὴ ρίζα τοῦ a καλεῖται ὁ ἀκέραιος x τοιοῦτος ὥστε :

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$(1) \quad x^3 \leq \alpha < (x+1)^3.$$

β') Κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, κυβική ρίζα τοῦ α καλεῖται τὸ ἀριθμητικὸν κλάσμα $x/10$ τοιοῦτον ὥστε:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^3 \leq \alpha < \left(\frac{x+1}{10}\right)^3.$$

Ὁ x εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ 1000 α .

Ἀναλόγως ὀρίζεται ἡ κατὰ προσέγγισιν 0,01, 0,001, ... κυβική ρίζα τοῦ α .

γ') Γενικῶς: καλεῖται *νυοστή ρίζα τοῦ α , ἑνας ἀριθμὸς x τοῦ ὁποῦν ἡ νυοστή δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὸν α .*

Ἦτοι, ἂν $x^v = \alpha$ (v , φυσικὸς ἀριθμὸς) τότε ὁ x εἶναι νυοστή ρίζα τοῦ α καὶ συμβολίζεται μὲ $x = \sqrt[v]{\alpha}$.

Ὁ v λέγεται *δείκτης* τῆς ρίζης.

Διὰ $v=2$, ἔχομεν τὴν τετραγωνικὴν (δευτέραν) ρίζαν, διὰ $v=3$ ἔχομεν τὴν κυβικὴν (τρίτην) ρίζαν. Διὰ $v=1$ ἔχομεν τὴν πρώτην ρίζαν τὴν ὁποίαν τὴν ὁποίαν συμβατικῶς, ταυτίζομεν μὲ τὸν α . Ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος νυοστή ρίζα τοῦ α ὀρίζεται ὡς ὁ ἀκέραιος x ὁ πληρῶν τὰς σχέσεις

$$x^v \leq \alpha < (x+1)^v$$

καὶ ἀναλόγως, ὀρίζονται αἱ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ... νυοσταὶ ρίζαι.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-175.—Ἐὰν $v^3 + v^2 + v = \alpha$ τότε ὁ (φυσικὸς) ἀριθμὸς v εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ α .

B-176.—Ἐὰν $v(v+1)(v+2) = \alpha$, τότε ὁ ἀριθμὸς v εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ α .

B-177.—Ποία ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $(v+1)^3 - 1$ ὅπου v δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμὸς;

ΚΟΙΝΟΝ ΜΕΤΡΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

§ 62. Ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου.— Ἐὰν U καὶ V εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα ὥστε $U < V$, τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὗρωμεν ἕνα φυσικὸν ἀριθμὸν n , τοιοῦτον ὥστε $nU > V$.

Πόρισμα 1ον. Δοθέντων δύο τμημάτων AB καὶ $ΓΔ$ δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὗρωμεν ἕνα κλάσμα $1/n$ τοιοῦτον ὥστε

$$\frac{1}{n} AB < ΓΔ$$

Διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει θὰ εἴχομεν διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n , ὅτι $\frac{1}{n} AB \geq ΓΔ$ καὶ συνεπῶς $AB \geq n \cdot ΓΔ$ ἢ $n \cdot ΓΔ \leq AB$, ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου.

Πόρισμα 2ον. Δοθέντος τυχόντος συμμετρου σ , δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν φυσικὸν ἀριθμὸν ν τοιοῦτον ὥστε

$$\frac{1}{\nu} < \sigma.$$

Ἄς θεωρήσωμεν τὰ τμήματα U καὶ $\sigma.U = V$. Κατὰ τὸ προηγούμενον, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς ν τοιοῦτος ὥστε :

$$\frac{1}{\nu} \cdot U < V \text{ ἢ } \frac{1}{\nu} U < \sigma.U \Rightarrow \frac{1}{\nu} < \sigma. (\S 46, \alpha')$$

Πόρισμα 3ον. Δοθέντων δύο τμημάτων AB καὶ ΓA δυνάμεθα πάντοτε ν , εὑρωμεν ἓνα φυσικὸν ἀριθμὸν ν τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{1}{2^\nu} AB < \Gamma A.$$

Ἔχομεν : $\nu < 2^\nu$. Ἐπειδὴ ὑπάρχει φυσικὸς ν τοιοῦτος ὥστε $\frac{1}{\nu} \cdot AB < \Gamma A$

θὰ ἔχομεν κατὰ μείζονα λόγον : $\frac{1}{2^\nu} AB < \Gamma A$ (ἀφοῦ $1/2^\nu < 1/\nu$).

(Ἡ ἀνισότης $\nu < 2^\nu$ δύνανται ν' ἀποδειχθῇ, ὅταν $\nu \geq 2$, ὡς κάτωθι :

$$\begin{aligned} \underbrace{\nu=1+1+1+\dots+1}_{\nu \text{ φορές}} &< \underbrace{2^{\nu-1}+2^{\nu-2}+2^{\nu-3}+\dots+2^2+2+1}_{\nu \text{ προσθετέοι}} \\ &= (2^\nu - 2^{\nu-1}) + (2^{\nu-1} - 2^{\nu-2}) + \dots + (2^2 - 2) + (2 - 1) = 2^\nu - 1 < 2^\nu. \end{aligned}$$

§ 63. Εὐθύγραμμα τμήματα σύμμετρα μεταξύ των.— α')

Ἔστωσαν δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ ΓA . Ἐὰν ὑπάρχῃ ἓνα τμήμα U τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν, μ , δίδει τὸ AB καὶ ἐπαναλαμβανόμενον ἐπίσης ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν, ν , δίδει τὸ ΓA (δηλαδή : $\mu U = AB$, $\nu U = \Gamma A$) τότε τὸ U λέγεται κοινὸν μέτρον τῶν AB καὶ ΓA .

Ὅταν δύο τμήματα AB καὶ ΓA ἔχουν κάποιο κοινὸν μέτρον, τότε λέγονται σύμμετρα μεταξύ των.

β') Ὅταν δύο τμήματα AB καὶ ΓA εἶναι σύμμετρα, τότε ὑπάρχει ἓνας σύμμετρος ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάζων τὸ ἓνα δίδει τὸ ἄλλο. Διότι ἔστω U τὸ κοινὸν μέτρον. Τότε θὰ εἶναι : $AB = \mu U$, $\Gamma A = \nu U$ (μ, ν φυσικοὶ ἀριθμοί), $U = \frac{1}{\nu} \Gamma A$, $\mu U = \mu \left(\frac{1}{\nu} \Gamma A \right)$ δηλαδή, $AB = \frac{\mu}{\nu} \Gamma A$.

γ') Ἀντιστρόφως, ἂν ἓνα τμήμα ΓA εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ AB ἐπὶ ἓνα σύμμετρον ἀριθμὸν μ/ν , τότε τὸ ΓA εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ AB . Διότι, ἂν $\Gamma A = \frac{\mu}{\nu} \cdot AB$ τότε $\Gamma A = \mu \cdot \left(\frac{1}{\nu} AB \right)$, ἄρα τὸ τμήμα $\frac{1}{\nu} AB$ χωρεῖ μ φορές εἰς τὸ ΓA καὶ ν φορές εἰς τὸ AB , ἵτοι εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν AB καὶ ΓA . Ἐπομένως :

Ἄν τὸ ἓν τμήμα προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἓνα σύμμετρον ἀριθμὸν, τότε τὰ δύο τμήματα ἔχουν κοινὸν μέτρον (εἶναι σύμμετρα) καὶ ἀντιστρόφως.

δ') Τὸ κοινὸν μέτρον δύο τμημάτων δὲν βλάπτεται, ἂν τὸ μεγαλύτερον τμήμα ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τμημάτων. Διότι, ἂν $AB = \mu \cdot U$, $\Gamma A = \nu \cdot U$ ($\mu > \nu$) τότε $AB - \Gamma A = (\mu - \nu)U$ ἵτοι τὸ U χωρεῖ ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὴν διαφορὰν $AB - \Gamma A$.

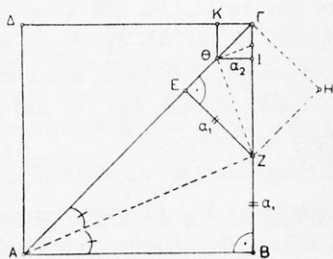
§ 64. Εὐθύγραμμα τμήματα ἀσύμμετρα μεταξύ των. — α')

Εἶναι δυνατόν νὰ μὴ ὑπάρχη κοινὸν μέτρον δύο τμημάτων AB καὶ $ΓΔ$. (Γνωστόν ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τοῦ Πυθαγόρα).

Ὅταν δύο εὐθύγραμμα τμήματα δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον τότε λέγονται ἀσύμμετρα μεταξύ των.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ διαγώνιος ἐνὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἐστω ὅτι ὑπῆρχε ἐν ὀρισμένον κοινὸν μέτρον U τῆς πλευρᾶς AB καὶ τῆς διαγωνίου AG τοῦ τετραγώνου $ABΓΔ$ (σχ. 8). Τότε, ἂν ἀπὸ τὴν AG ἀφαιρέσωμεν τὴν $AB=AE$, τὸ U θὰ ἦτο κοινὸν μέτρον τῶν AB καὶ EG (§ 63, δ') ἄρα καὶ κοινὸν μέτρον τῶν EG καὶ $AB=EG=GB-ZB=ΓZ$. Δηλ. τὸ U θὰ ἦτο κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου ἐνὸς μικροτέρου τετραγώνου $EZHΓ$. Ὅμοιως, μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ $EZHΓ$ εἰς ἓν τρίτον τετράγωνον $ΘΙΓΚ$.



Σχ. 8

τὸ U θὰ ἦτο κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς $ΘΙ$ καὶ τῆς διαγωνίου $ΘΓ$ τοῦ τετραγώνου $ΘΙΓΚ$. Ἐκ τοῦ $ΘΙΓΚ$ μεταβαίνομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἓνα ἔτι μικρότερον τετράγωνον κ.ο.κ. ἄνευ τέλους. Εἰς τὴν ἀπέραντον αὐτὴν ἀκολουθίαν τετραγώνων, ἡ πλευρὰ ἐκάστου εἶναι μικρότερα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ προηγουμένου του. Διότι, $EZ < ZΓ$ ἄρα $BZ < ZΓ \Rightarrow BZ + BZ < ZΓ + BZ \Rightarrow 2BZ < BΓ \Rightarrow BZ < \frac{1}{2} BΓ$. Ἄν λοιπὸν καλέσωμεν μὲ $a, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$

τὰς πλευρὰς τῶν ἀνωτέρω διαδοχικῶν τετραγώνων, θὰ ἔχωμεν: $a_1 < \frac{1}{2} a$ καὶ

ὁμοίως: $a_2 < \frac{1}{2} a_1 \Rightarrow a_2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \Rightarrow a_2 < \frac{1}{2^2} a$. Ὅμοιως $a_3 < \frac{1}{2} a_2 \Rightarrow a_3 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_2 \Rightarrow a_3 < \frac{1}{2^2} a_2 \Rightarrow a_3 < \frac{1}{2^3} a$

καὶ γενικῶς $a_n < \frac{1}{2^n} a$.

Ἐπειδὴ τὸ U εἶναι κοινὸν μέτρον πλευρᾶς καὶ διαγωνίου εἰς ὅλα τὰ τετράγωνα τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας, ἔπεται ὅτι θὰ χωρῇ ἀκριβῶς εἰς ὅλα τὰ τμήματα $a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ἄρα $U \leq a_n$ διὰ πᾶν n , ἢ $a_n \leq U$ ἢ τέλος: $\frac{1}{2^n} a \leq U$ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n .

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον (§ 62, πόρισμα 3ον). Ἄρα δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς AB καὶ τῆς διαγωνίου AG τοῦ τετραγώνου.

β') Ἐὰν δύο εὐθύγραμμα τμήματα U καὶ T εἶναι ἀσύμμετρα μεταξύ των, τότε δὲν ὑπάρχει σύμμετρος ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιάζων τὸ ἓν νὰ δίδῃ τὸ ἄλλο. Διότι ἂν ὑπῆρχε, τὰ τμήματα θὰ ἦσαν σύμμετρα (§ 63, α'). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπινοοῦνται νέοι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς οἱ ὅποιοι ἐνεργοῦντες ὡς ἐκτελεσταὶ ἐπὶ ἐνὸς τμήματος, δίδουν ὡς ἀποτέλεσμα (γινόμενον) ἓνα νέον τμήμα, ἀσύμμετρον πρὸς τὸ πρῶτον.

ΠΡΩΤΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ *

§ 65. Οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δὲν ἀρκοῦν δι' ὅλας τὰς ἀνάγκας τῶν Μαθηματικῶν. Οὕτω π.χ. δὲν ὑπάρχει σύμμετρος ἴσος πρὸς τὴν ἀκριβῆ τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2 (§ 56, παράδειγμα). Ἐπίσης εἶναι δυνατόν, τὸ μήκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB, μετρηθέντος μὲ μίαν μονάδα U, νὰ μὴ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Πράγματι, ἂν τὰ τμήματα U καὶ AB δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον (§ 64, β') τότε δὲν ὑπάρχει σύμμετρος ἀριθμός ὅστις πολλαπλασιάζων τὸ μοναδιαῖον τμήμα U, νὰ δίδῃ τὸ AB, δηλ. τὸ AB δὲν ἔχει μήκος ἐκφραζόμενον μὲ σύμμετρον ἀριθμὸν.

Ἐπομένως, ἂν περιορισθῶμεν μόνον εἰς τοὺς συμμέτρους ἀριθμοὺς τὸ σύμβολον $\sqrt{a}$ (ἀκριβὴς τετραγωνικὴ ρίζα) ἄλλοτε θὰ ἔχη νόημα καὶ ἄλλοτε ὅχι. ὁμοίως, τὸ ἀκριβὲς μήκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἄλλοτε θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἄλλοτε δὲν θὰ ὑπάρχῃ. Διὰ τὴν τακτοποίησιν τῶν ζητημάτων τούτων καὶ πλείστων ἄλλων ὁμοίων, συχνὰ παρυσιαζομένων, ἡ Ἀριθμητικὴ εἰσάγει καὶ νέους ἀριθμοὺς, **διαφόρους τῶν συμμέτρων** οἱ ὅποιοι λέγονται **ἀσύμμετροι**. Κάθε ἀσύμμετρος ἀριθμός νοεῖται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν μεθόδους διὰ νὰ εὐρίσκωμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{2}$ μὲ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία θέλωμεν (§ 60). Ἡ $\sqrt{2}$ προσεγγίζεται διαδοχικῶς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, ... οἱ ὅποιοι τετραγωνιζόμενοι δίδουν: 1, 1,96, 1,9881, 1,999396, 1,99996164, 1,9999899841, ... δηλ. τετράγωνα ὁλοὲν καὶ ὀλιγώτερον διαφέροντα τοῦ 2. Ἐὰν ἡ ἐργασία αὐτὴ νοηθῇ ἐξακολουθοῦσα ἄνευ τέλους, θὰ προκύψῃ εἰς ἀτέρμων ἀριθμὸς

$$(1) \quad 1,414213564 \dots$$

ὅστις θὰ ἐκφράζῃ τὴν ἀκριβῆ $\sqrt{2}$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν θὰ εἶναι περιοδικός, διότι τότε ἡ $\sqrt{2}$ θὰ ἦτο σύμμετρος.

Οὕτω ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ εἶναι πλήρως καθωρισμένος διότι ὁλόκληρος ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία (1) τῶν ψηφίων του εἶναι καθωρισμένη ἂν καὶ δὲν μᾶς εἶναι γνωστὴ, παρὰ μόνον κατὰ τὰ ἀρχικὰ ψηφία αὐτῆς.

Γενικῶς, εἰς ἀνέγραφοις ψ_0 ἀκολουθούμενοι ἀπὸ ἄπειρον πληθὺς

* Εἰς τὸ μέρος τοῦτο γίνεται μία στοιχειώδους περιγραφὴ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ὡς καὶ ἐκείνη τοῦ ἑσπερίου τοῦ Ἰνστιτούτου Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν, λέγομεν ὅτι παριστάνει ἓνα ἀσύμμετρον ἀριθμὸν.

Ὁ ἀσύμμετρος $A = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_n \dots$ δὲν ἰσοῦται μὲ κανένα σύμμετρον, διότι ἂν συνέβαινε τοῦτο, τὰ ψηφία του θὰ ἦσαν ἀπὸ τινος καὶ ἔπειτα, περιοδικὰ (§ 55, β').

§ 66. Ρηταὶ προσεγγίσεις ἐνὸς ἀσυμμέτρου. — Κάθε ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἶναι διάφορος παντὸς συμμέτρου. (Ὁ πρῶτος ἔχει δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα μὴ περιοδικὸν ἐνῶ ὁ δεῦτερος ἔχει περιοδικόν). Ἄν α ἀσύμμετρος, ἡ ἰσότης $\alpha = \mu/\nu$ ὅπου μ, ν ἀκέραιοι καὶ $\nu \neq 0$ εἶναι ἀδύνατος. Θὰ εἶναι λοιπὸν πάντοτε $\alpha \neq \mu/\nu$. Ἐν τούτοις κάθε ἀσύμμετρος προσεγγίζεται ὅσον θέλομεν στενῶς ἀπὸ συμμέτρους ἀριθμούς.

Ἄς θεωρήσωμεν ἓνα ἀσύμμετρον ἀριθμὸν π.χ. τὸν α , τοῦ ὁποίου τὰ πρῶτα ψηφία, εἶναι: 17,0341276014257762... Οὗτος προσεγγίζεται ὅλον ἐν καὶ στενότερον ἀπὸ τοὺς συμμέτρους (ρητοὺς) ἀριθμούς:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 17, & 17,3, & 17,034, & 17,0341, & 17,03412, \\ 17,034127, & 17,0341266, & 17,034127601, \dots \end{array}$$

Κάθε ἀριθμὸς τῆς ἀπεράντου ἀκολουθίας (1) εἶναι μία κατ' ἑλλειψιν ρητὴ προσέγγις (σύμμετρος προσέγγις) τοῦ ἀσυμμέτρου α . Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς α προσεγγίζεται ἐπίσης, ὅλον ἐν καὶ περισσότερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 18, & 17,1 & 17,04, & 17,035, & 17,0342 \\ 17,03413, & 17,034128, & 17,0341277, \dots \end{array}$$

Πάντες οἱ (ἀπειροπληθεῖς) ἀριθμοὶ (2) εἶναι κατ' ὑπεροχὴν ρηταὶ (ἢ σύμμετροι) προσεγγίσεις τοῦ ἀσυμμέτρου α . Ἀκριβέστερον, δεχόμεθα ὅτι ὁ ἀσύμμετρος α πληροῖ τὰς διαδοχικὰς ἀνισότητας:

$$\begin{array}{lll} 17 < \alpha < 18, & 17,0 < \alpha < 17,1, & 17,03 < \alpha < 17,04, \\ 17,034 < \alpha < 17,035, & 17,0341 < \alpha < 17,0342, & \end{array}$$

κ.ο.κ ἐπ' ἄπειρον.

Ἐνταῦθα τὸ $\alpha >$ σημαίνει ὅ α ἔπεται καὶ $\alpha <$ ὁ α προηγεῖται, δηλαδὴ ὁ α νοεῖται τοποθετημένος ἀπὸ ἀπόψεως μεγέθους μεταξὺ δύο συμμέτρων οἱ ὅποιοι ὅλον ἐν πλησιάζουν πρὸς ἀλλήλους, χωρὶς νὰ συμπίπτουν ποτέ.

§ 67. Στοιχειώδης περιγραφή πράξεων μὲ ἀσυμμέτρους. — Ἐν πρῶτοις δύο ἀσύμμετροι A καὶ A' εἶναι ἴσοι, ὅταν ἔχουν τὰς ἰδίας κατ' ἑλλειψιν καὶ τὰς ἰδίας κατ' ὑπεροχὴν ρητὰς προσεγγίσεις. Ἄν $A = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_n \dots$ καὶ $A' = \psi'_0, \psi'_1 \psi'_2 \psi'_3 \dots \psi'_n \dots$ τότε εἶναι $A = A'$ ὅταν καὶ μόνον ὅταν $\psi_0 = \psi'_0, \psi_1 = \psi'_1, \psi_2 = \psi'_2, \dots \psi_n = \psi'_n, \dots$

Διὰ τὴν ἐννοήσωμεν στοιχειωδῶς τὰς πράξεις μεταξὺ ἀσυμμέτρων ἃς λάβωμεν ἓνα συγκεκριμένον παράδειγμα, μὲ τοὺς δύο ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$.

Τί θὰ καλέσωμεν ἄθροισμα $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; Ἐπειδὴ ὁ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ 1,4 καὶ 1,5, ὁ δὲ $\sqrt{3}$ μεταξὺ 1,7 καὶ 1,8, τὸ ἄθροισμά των, ἔχομεν βεβαίως τὴν ἀπαίτησιν νὰ εἶναι ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ μεταξὺ 1,4+1,7 καὶ 1,5+1,8. Τοῦτο ἃς γραφῇ μὲ τὰ σύμβολα τῶν ἀνισοτήτων: $3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,3$.

1,41	$< \sqrt{2} < 1,42$	1,73	$< \sqrt{3} < 1,74$	3,14	$< \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16$
1,414	$< \sqrt{2} < 1,415$	1,732	$< \sqrt{3} < 1,733$	3,146	$< \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,148$
1,4142	$< \sqrt{2} < 1,4143$	1,7320	$< \sqrt{3} < 1,7321$	3,1462	$< \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,1463$
1,41421	$< \sqrt{2} < 1,42422$	1,73205	$< \sqrt{3} < 1,73206$	3,14626	$< \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,14628$

Οὕτω πῶς, προχωροῦντες ἄνευ τέλους, δημιουργοῦμεν ἓνα ἀτέρμονα δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,1462ψ₅ψ₆ψ₇... ὅστις θὰ κληθῇ ἄθροισμα τοῦ $\sqrt{2}$ καὶ τοῦ $\sqrt{3}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον νοοῦμεν τὴν διαφορὰν $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ὡς ἀριθμὸν προσεγγιζόμενον διαρκῶς καὶ περισσότερον ἀπὸ τὴν διαφορὰν ὅλοῦν καὶ καλλιτέρων ρητῶν προσεγγίσεων τῶν $\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{2}$. Ὁμοίως τὸ γινόμενον $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ὡς ἀριθμὸν προσεγγιζόμενον ὅλοῦν καὶ περισσότερον ἀπὸ τὰ γινόμενα ρητῶν προσεγγίσεων τοῦ $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ πηλίκον $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Τὰ ἀνωτέρω γενικεύονται διὰ δύο τυχόντας ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς α καὶ α'. Ἐπίσης, ἐντελῶς ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ διαφορὰ συμμέτρου καὶ ἀσυμμέτρου, τὸ γινόμενόν των καὶ τὸ πηλίκον. Τέλος, ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ γινόμενον ἀσυμμέτρου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μηδέν, ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἐν γένει, *ἀριθμητικαὶ παραστάσεις περιέχουσαι ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ὑπολογίζονται μὲ πᾶσαν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν, διὰν οἱ ἀσύμμετροι ἀντικατασταθοῦν δι' ἐπαρκῶν ρητῶν προσεγγίσεών των.*

Ἀποδεικνύεται ἐπίσης, ὅτι οἱ τρεῖς θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων, ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικός καὶ ἐπιμεριστικός, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς πράξεις μεταξὺ ἀσυμμέτρων. Συνεπῶς καὶ ὅλοι οἱ γνωστοὶ κανόνες τῶν πράξεων, ἰσχύουν. Δυνάμεθα π.χ. νὰ γράψωμεν:

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha \text{ (ἐκ τοῦ ὁρίσμου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης).}$$

$$(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 (\sqrt{\beta})^2 = \alpha \cdot \beta \text{ (Διότι } (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}) (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}) \text{)}$$

$$\text{καὶ διὰ τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ νόμου} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{\alpha}{\beta} = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2,$$

$$(5 - \sqrt{3}) + (7 + \sqrt{3}) = 5 + 7 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 12.$$

$$(3 + 4\sqrt{2})5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} + 20 \cdot (\sqrt{2})^2 = 15\sqrt{2} + 20 \cdot 2 = 40 + 15\sqrt{2}.$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(Βλέπομεν ὅτι τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα πράξεων ἐκτελουμένων μεταξὺ ἀσυμμέτρων, δυνατόν νὰ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός).

§ 68. Ἀνισότητες μεταξὺ ἀσυμμέτρων. — Ὅπως ἀνεπτύχθη εἰς τὴν § 66 κάθε ἀσύμμετρος A εἶναι, ἐξ ὁρίσμοῦ, μεγαλύτερος κάθε ρητῆς κατ' ἑλλειψιν προσεγγίσεώς του καὶ μικρότερος κάθε ρητῆς καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίσεώς του. Ἄν δηλ. $A = \psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots \psi_n \dots$ ἕνας ἀσύμμετρος, τότε θεωρεῖται ὅτι :

$$A > \psi_0 + \frac{\psi_1}{10}, \quad A > \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{100} \text{ κ.ο.κ.}$$

$$\text{καὶ } A < \psi_0 + 1, \quad A < \psi_0 + \frac{\psi_1 + 1}{10}, \quad A < \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2 + 1}{100} \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἐὰν τώρα, A τυχὼν ἀσύμμετρος καὶ σ τυχὼν σύμμετρος, θὰ λέγωμεν ὅτι, $\sigma < A$ ὅταν $\sigma < \sigma'$, ὅπου σ' , ρητὴ προσέγγισις τοῦ A κατ' ἑλλειψιν.

Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι $\sigma > A$ ὅταν $\sigma > \sigma'$, ὅπου σ' ρητὴ προσέγγισις τοῦ A καθ' ὑπεροχὴν. (Τὰ ἀνωτέρω γράφονται ἀντιστοίχως καὶ $A > \sigma, A < \sigma$).

Π.χ. $0,97 < \sqrt{2}$, διότι $0,97 < 1,4$, ὅπου $1,4 < \sqrt{2}$ καὶ $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, διότι $\frac{3}{2} > 1,42$, ὅπου $1,42 > \sqrt{2}$.

Τέλος ἂν A καὶ A' εἶναι δύο ἀσύμμετροι θὰ λέγωμεν ὅτι $A < A'$ ἂν ὑπάρχῃ σύμμετρος σ τοιοῦτος, ὥστε $A < \sigma$ καὶ $\sigma < A'$. (Τοῦτο γράφεται καὶ $A' > A$).

Αἱ ιδιότητες τῶν ἀνισοτήτων :

i) $\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

ii) $\alpha < \beta \iff \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

iii) $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$

iv) $\alpha < \beta \iff \lambda \alpha < \lambda \beta$ διὰ $\lambda \neq 0$

v) $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha \gamma < \beta \delta$

αἱ ἰσοχρόναι δὲ αὐτὰς τῶν ἀνισοτήτων τῆς ἀντιστοίχης ἰσχύουν καὶ

ἀφοῦ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀνάγωγον. Συνεπῶς ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{2} = \frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀδύνατος.

Παρατήρησις. Ὅτι ἡ $\sqrt[3]{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος, φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς § 56. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις (ὀφειλομένη εἰς τὸν Εὐκλείδην) ἐδόθη διότι παρέχει μέθοδον καὶ δι' ἄλλα ζητήματα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-178.—Ἐὰν σ εἶναι σύμμετρος $\neq 0$ καὶ α ἀσύμμετρος, δεῖξτε διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \sigma$, τὸ γινόμενον $\sigma \cdot \alpha$ καὶ τὸ πηλίκον α/σ εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

A-179.—Δείξτε διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $5\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{7}$, $5+\sqrt[3]{3}$, $6-\sqrt[3]{3}$ εἶναι ἀσύμμετροι.

A-180.—Δείξτε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων δύναται νὰ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Ὁμοίως καὶ τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον.

B-181.—Προσδιορίσατε τοὺς συμμέτρους ἀριθμοὺς α καὶ β , γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $(\alpha - \beta) \cdot \sqrt[3]{2} - (\beta - 7)$ ἰσοῦται μὲ μηδέν. (βλ. § 69).

B-182.—Δείξτε ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. (βλ. § 69 παράδ. 2).

B-183.—Ἐὰν β καὶ γ σύμμετροι, πληροῦται δὲ ἡ σχέσηις $\beta \cdot \sqrt[3]{2} = \gamma \cdot \sqrt[3]{3}$ δεῖξτε ὅτι τότε θὰ εἶναι $\beta = 0$ καὶ $\gamma = 0$.

B-184.—Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἕκαστον δὲ τῶν δύο ἴσων κλασμάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, τότε καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha\sqrt[3]{2} + \gamma}{\beta\sqrt[3]{2} + \delta}$ εἶναι ἐπίσης σύμμετρος.

B-185.—i) Διὰ δύο τυχόντας ἀριθμοὺς x, y τῆς Ἀριθμητικῆς δεῖξτε τὴν συνεπαγωγὴν: $x < y \iff \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$, ii) Ποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\sqrt[3]{6,6666\dots}$ καὶ $\frac{5}{2}$;

B-186.—Ἐὰν $0 < v < 1$ ἀποδείξτε τὴν διπλὴν ἀνισότητα $v < \sqrt[3]{v} < 1$. Ἐξ αὐτοῦ ὑπολογίσατε τὰ 10 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 0,999999999.

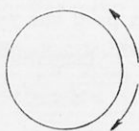
Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ

§ 70. Παραδείγματα προσανατολισμοῦ.—α') Μία εὐθεΐα (ε) δύναται νὰ διανυθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἐὰν εἰς τὴν εὐθεΐαν αὐτὴν, (ε) προσεταίρῳμεν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς φοράς, τότε λαμβάνομεν μίαν **προσανατολισμένην εὐθεΐαν**. (Σχ. 9).

Σχ. 9

Ἐὰν κινούμενοι ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας (ε) μεταβῶμεν (ἄνευ παλινδρομήσεως) ἀπὸ σημείου αὐτῆς Α εἰς ἄλλο Β, τότε ἡ μετατόπισις ΑΒ θὰ εἶναι ἡ ὁμόρροπος πρὸς τὴν προσανατολισμένην εὐθεΐαν (ε) ἢ ἀντίρροπος.

β') Ἐπὶ ἐκάστης περιφερείας διακρίνομεν δύο ἀντιθέτους φοράς καθ' ὧς δύναται νὰ διαγραφῇ αὕτη (σχ. 10α). Ἐν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς φοράς προσεταίρῳμεν εἰς τὴν περιφέρειαν, τότε ἔχομεν μίαν **προσανατολισμένην περιφέρειαν** (Σχ. 10β). Κάθε τόξον διαγραφόμενον ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης περιφερείας θὰ εἶναι ἡ ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὴν προσανατολισμένην περιφέρειαν.



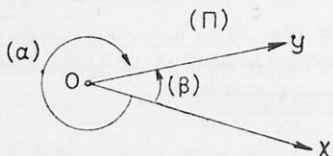
Σχ. 10α



Σχ. 10β

γ') Μία γωνία (οx, oy) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαγραφομένη ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας οx στρεφομένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν φορὰν (α) ἢ (β), μέχρις ὅτου ἡ οx συμπίσῃ μετὰ τὴν oy. (Σχ. 11).

Ἐὰν εἰς τὸ ζεύγος (οx, oy) τῶν ἡμιευθειῶν προσεταίρῳμεν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς φοράς (α) ἢ (β), ἔχομεν μίαν **προσανατολισμένην γωνίαν**.



Σχ. 11

§ 71. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοί.— α') Οἱ λεγόμενοι «*σχετικοὶ ἀριθμοί*» τῆς Ἀλγέβρας εἶναι νέοι ἀριθμοί, ἀνταποκρινόμενοι καλῶς πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν μεγεθῶν. Δι' αὐτῶν διευκολύνονται καὶ ἀπλουστεύονται οἱ ὑπολογισμοί. Οἱ σχετικοὶ (ἢ καὶ «*ἀλγεβρικοί*» λεγόμενοι) ἀριθμοί, δημιουργοῦνται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς.

Καλεῖται σχετικὸς ἀριθμὸς τὸ σύνολον ἐκ δύο στοιχείων: ἑνὸς σημείου (τοῦ σημείου + ἢ τοῦ σημείου —) καὶ ἑνὸς ἀριθμοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Οὕτω, π.χ. τὰ σύμβολα: $+7$ (ἀνάγνωθι: σὺν ἑπτὰ), $+\sqrt{2}$ (ἀνάγνωθι: σὺν ρίζα δύο), -12 (ἀνάγνωθι: πλὴν δώδεκα), $-\sqrt{3}$ (ἀνάγνωθι: πλὴν ρίζα 3) παριστάνουν σχετικοὺς ἀριθμοὺς.

Θετικοὶ ἀριθμοί. Ὅταν τὸ σημεῖον, λεγόμενον καὶ *πρόσημον*, τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ $+$ ὁ ἀριθμὸς λέγεται *θετικὸς*.

Ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. Ὅταν τὸ πρόσημον τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ $-$, ὁ ἀριθμὸς λέγεται *ἀρνητικὸς*.

Ἀπόλυτος τιμὴ. Ἐκαστος σχετικὸς ἀριθμὸς συνίσταται ὡς βλέπομεν ἀπὸ δύο οὕτως εἰπεῖν συστατικά: ἀπὸ ἑνα πρόσημον καὶ ἀπὸ ἑνα ἀριθμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς ὅστις ἀκολουθεῖ τὸ πρόσημον. Καλεῖται δὲ *ἀπόλυτος τιμὴ σχετικοῦ ἀριθμοῦ*, ὁ ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς ὁ προκύπτων ὅταν παραλειφθῇ τὸ πρόσημον τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+3$ εἶναι ὁ 3, ἡ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -3 εἶναι πάλιν ὁ 3. Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$|+3| = 3, \quad |-3| = 3.$$

Διὰ νὰ παραστήσωμεν δηλαδὴ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, γράφομεν αὐτὸν μεταξὺ δύο κατακορύφων γραμμῶν. Τὸ σύνολον $|a|$ παριστᾷ λοιπὸν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ a .

Ἔχομεν π.χ. $|-1,5| = 1,5$, $|- \sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+2/5| = 2/5$. Ὁ ἀριθμὸς 0 (μηδὲν) τῆς Ἀριθμητικῆς χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς τὴν Ἀλγέβραν (ὡς ἀριθμὸς ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕνα ἄλλον δὲν τὸν μεταβάλλει), ἔχει δὲ ἐξ ὁρισμοῦ ἀπόλυτον τιμὴν ἴσην μὲ μηδέν, δηλ. $|0| = 0$.

Τὸ σημεῖον καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀποτελοῦν ὅπως εἶδομεν ἕνα σύνολον, ἥτοι εἶναι ἀδιαχώριστα. Δι' αὐτὸ θέτομεν πολλάκις τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν ἐντὸς παρενθέσεως: $(+4)$ σημαίνει $+4$, $(-\frac{7}{8})$ ση-

μαίνει $-\frac{7}{8}$.

β') **Ίσότης.** Δύο σχετικοί αριθμοί α και β λέγονται **Ίσοι**, διαν έχουν Ίσας απόλυτους τιμὰς και τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐν ἐναντία περιπτώσει λέγονται ἄνισοι ἢ διάφοροι μεταξὺ των. Ἡ ἰσότης και ἡ μὴ ἰσότης, μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζονται μετὰ τὰ συνήθη σύμβολα = και $\neq$ ἀντιστοίχως.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος ἔχει τὰς τρεῖς ἐπομένας ιδιότητας :

1ον. $\alpha = \alpha$ (εἶναι ἀντανακλαστική).

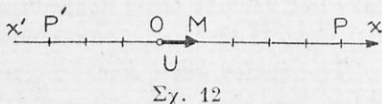
2ον. Ἐὰν $\alpha = \beta$ τότε και $\beta = \alpha$ (εἶναι συμμετρική).

3ον. Ἐὰν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$ τότε και $\alpha = \gamma$ (εἶναι μεταβατική).

Ἀντίθετοι λέγονται δύο σχετικοί ἀριθμοί ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν ἀλλ' ἀντίθετα σημεῖα. Οὕτω π.χ. ἀντίθετοι εἶναι ὁ +7 και ὁ -7 ἢ ὁ +12/5 και ὁ -12/5.

γ') **Μεγέθη ἔχοντα ἀλγεβρικὸν μέτρον.** — Οἱ σχετικοί ἀριθμοὶ χρησιμεύουν εἰς τὴν μέτρησιν πλείστων γεωμετρικῶν και φυσικῶν μεγεθῶν ἀφοῦ προηγουμένως συμφωνηθῇ ἡ ἔννοια τοῦ προσήμου + και ἡ τοῦ -. Οὕτω π.χ., ἂν κατὰ σύμβασιν αἱ ὑπεράνω τοῦ μηδενὸς θερμοκρασίαι παρασταθῶν μετὰ θετικῶν ἀριθμῶν και αἱ κάτω τοῦ μηδενὸς μετὰ ἀρνητικῶν, τότε ἡ θερμοκρασία ἐνὸς τόπου παρίσταται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν ὑπὸ ἐνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἢ τοῦ μηδενός. Λέγοντες π.χ. ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι +15 βαθμῶν Κελσίου ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι 15 βαθμῶν Κελσίου ὑπεράνω τοῦ μηδενός· ἐνῶ λέγοντες ὅτι εἶναι -4 βαθμῶν Κελσίου ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι τεσσάρων βαθμῶν κάτω τοῦ μηδενός. Ἐνταῦθα τὸ προτασόμενον σημεῖον + ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ διακριτικοῦ ὑπεράνω τοῦ μηδενός και τὸ -, κάτω τοῦ μηδενός. Φυσικά, θὰ ἠδύνατο νὰ συμφωνηθῇ και τὸ ἀντίθετον, ἦτοι αἱ ἄνω τοῦ μηδενός θερμοκρασίαι νὰ παρίστανται μετὰ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν και αἱ κάτω τοῦ μηδενός μετὰ θετικῶν. Ἡ διάκρισις και ἡ ἀντίθεσις πάλιν ὑπάρχει.

Ἄλλο παράδειγμα ἔστω τὸ ἐξῆς : Ἐπὶ δοθείσης προσανατολισμένης εὐθείας $x'x$ ὀρίζομεν σταθερὸν σημεῖον O και μονάδα μήκους $U = OM$. Δοθέντος, τώρα, ἐνὸς σημείου P ἐπὶ τῆς $x'x$ ἃς καλέσωμεν «ἀπομάκρυνσιν» τοῦ P ἀπὸ τοῦ O » τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα ἀπόλυτον μὲν τιμὴν, τὸ μήκος τοῦ τμήματος OP μετρηθέντος μετὰ μονάδα τὴν U , σημεῖον δὲ τὸ + ἢ τὸ - καθ' ὅσον ἡ φορὰ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ P συμπίπτει μετὰ τὴν φορὰν τῆς προσανατολισμένης εὐθείας $x'x$ ἢ εἶναι ἀντίθετος αὐτῆς. (Π.χ. εἰς τὸ σχ. 12, τὸ P ἔχει ἀπομάκρυνσιν ἀπὸ τοῦ O ἴσην μετὰ +5 και τὸ P' ἔχει ἀπομάκρυνσιν, -3). Τότε ἡ θέσις ἐνὸς σημείου ἐπάνω εἰς τὴν $x'x$ ὀρίζεται πλήρως, ἂν δοθῇ ἡ ἀπομάκρυνσις του ἀπὸ τοῦ O (δηλ. ἓνας σχετικὸς ἀριθμὸς). Π.χ. διὰ νὰ ἀνεύρωμεν ἐπὶ τῆς $x'x$ τὸ σημεῖον τὸ ἔχον ἀπομάκρυνσιν -2,5, ἀρκεῖ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ O νὰ προχωρήσωμεν κατὰ τμήμα $2,5 \times U$ και κατὰ φορὰν ἀντίθετον ἀπὸ τὴν φορὰν τῆς προσανατολισμένης εὐθείας $x'x$. Δύο σημεῖα τῆς $x'x$, συμμετρικά ὡς πρὸς τὸ O ἔχουν ὡς ἀπομακρύνσεις, ἀντιθέτους ἀριθμούς.



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-187.—Εάν $\alpha = -5,32$, $\beta = +0,32$, εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως :

$$|\alpha| - |\beta| \text{ ἢ τῆς } 2|\alpha| - \frac{1}{4}|\beta|$$

A-188.—Ποιοὶ σχετικοὶ ἀριθμοὶ x πληροῦν τὴν ἰσότητα, $|x|=3$;

A-189.—Εάν $|x|=|y|$ τί συμπεραίνειτε διὰ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς x καὶ y ;

Δ Ι Α Ν Υ Σ Μ Α Τ Α

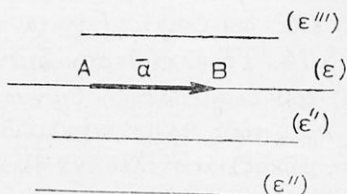
§ 72. Δεσμευμένον διάνυσμα. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐπισυνάψει μίαν φορὰν διαγραφῆς (§ 70, α') καλεῖται *προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμήμα*.

Ἐνα προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμήμα καλεῖται *δεσμευμένον διάνυσμα*.

Εἰς κάθε δεσμευμένον διάνυσμα, διακρίνομεν *ἀρχὴν* καὶ *πέρας*. Ἐάν ἡ φορὰ τοῦ διανύσματος AB εἶναι ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B , τότε τὸ σημεῖον A λέγεται *ἀρχὴ* καὶ τὸ B , *πέρας* τοῦ διανύσματος.

Δύο διακεκριμένα σημεῖα A καὶ B ὀρίζουν δύο δεσμευμένα διανύσματα: τὸ ἔχον ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ B τὸ ὁποῖον παρίσταται μὲ $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ ἔχον ἀρχὴν τὸ B καὶ πέρας τὸ A , ἦτοι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$.

Φορεὺς ἐνὸς δεσμευμένου διανύσματος καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας τοῦ διανύσματος. Γραφικῶς, παρίσταται τὸ διάνυσμα διὰ βέλους ἔχοντος τὴν αἰχμὴν εἰς τὸ πέρας τοῦ διανύσματος (σχ. 13).



Σχ. 13

Διὰ τὴν συμβολικὴν παράστασιν ἐνὸς διανύσματος, μεταχειρίζομεθα πολλάκις, ἓνα μόνον γράμμα μὲ ἐπιγραμμὴν ὅπως π.χ. $\vec{\alpha}$ ἀντὶ $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 13).

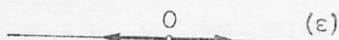
§ 73. Οἱ τρεῖς θεμελιώδεις χαρακτηῖρες τοῦ διανύσματος.—Εἰς κάθε δεσμευμένον διάνυσμα διακρίνομεν τρία χαρακτηριστικὰ τὰ ὁποῖα θὰ ὀνομάζωμεν *θεμελιώδη*.

α') **Διεύθυνσις τοῦ διανύσματος.** Ἡ διεύθυνσις ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ πᾶσαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν φορέα τοῦ διανύσματος ἢ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν φορέα. Π.χ. εἰς τὸ σχ. 13 ὅποιαδήποτε ἀπὸ τὰς παραλλήλους εὐθείας (ϵ) , (ϵ') , (ϵ'') , (ϵ''') ἐκφράζει τὴν διεύθυνσιν τοῦ

διανύσματος. Ἐπίσης, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν: τὴν καθοριζομένην ὑπὸ τῆς ἀπεράντου εὐθείας AB ἢ οἰασδήποτε παραλλήλου πρὸς τὴν AB .

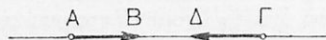
β') **Φορὰ (ἢ κατεύθυνσις) τοῦ διανύσματος.** Ἐπὶ τῆς διευθύνσεως (ε) τοῦ διανύσματος, ὑπάρχουν

δύο ἀντίθετοι φοραὶ καθ' ἃς δυνάμεθα νὰ κινηθῶμεν (σχ. 14α). Τὴν μίαν ἐκ τούτων, κατέχει τὸ διάνυσμα, καὶ αὕτη εἶναι ἡ φορὰ του.



Σχ. 14α

Οὕτω π.χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 14β) ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ



Σχ. 14β

$\overrightarrow{BA}$ ἐνῶ τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (σχ. 14β) ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα).

γ') **Μέτρον (ἢ μῆκος) τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$** καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB μετρηθέντος με μίαν συμφωνηθεῖσαν μονάδα. Τὸ μῆκος παρίσταται με ἓνα ἀριθμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς. Τὸ μέτρον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται καὶ με $|\overrightarrow{AB}|$ ἢ (AB) τὸ δὲ μέτρον τοῦ $\vec{a}$ παρίσταται με $|\vec{a}|$ ἢ ἀπλῶς με a . (Τίθεται $|\vec{a}| = a$). Τὸ μῆκος ἢ μέτρον ἑνὸς διανύσματος, λέγεται καὶ **ἀπόλυτος τιμὴ** τοῦ διανύσματος.

§ 74. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.— α') Τὸ σύνολον (ἢ κλάσις) τῶν δεσμευμένων διανυσμάτων τὰ ὁποῖα συμφωνοῦν καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς θεμελιώδεις χαρακτῆρας (διεύθυνσιν, φορὰν, μῆκος) ἀποτελεῖ ἓνα ἐλεύθερον διάνυσμα.

Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα εἶναι ἓνα σύνολον ἐκ τριῶν χαρακτῆρων: μιᾶς διευθύνσεως, μιᾶς φορᾶς (ἐπάνω εἰς τὴν διεύθυνσιν) καὶ ἑνὸς μήκους· ἔχει δὲ ὡς ἀντιπρόσωπον, οἷονδήποτε δεσμευμένον διάνυσμα κατέχον τοὺς τρεῖς τούτους δεδομένους χαρακτῆρας. Με ἄλλας λέξεις, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα δύναται νὰ μετατοπίζεται ὥστε νὰ μὲνῃ παράλληλον, ὁμόρροπον καὶ ἰσόμηκες πρὸς ἓνα σταθερὸν δεσμευμένον διάνυσμα.

β') **Διανυσματικὴ ἰσότης.** Δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ἴσα ὅταν ἀνήκουν εἰς τὴν ἰδίαν κλάσιν, δηλαδὴ ἔχουν ὡς ἀντιπρόσωπον, τὸ αὐτὸ δεσμευμένον διάνυσμα. Ἡ ἰσότης

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

δηλοῖ: 1ον) ὅτι ἡ εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος (ἢ συμπίπτουσα) με τὴν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$, 2ον) ὅτι ἡ φορὰ ἐπάνω εἰς τὴν AB εἶναι ἡ ἰδία με

τὴν φορὰν ἐκ τοῦ Γ πρὸς Δ , καὶ β ον) ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσα: $(AB) = (\Gamma\Delta)$.

§ 75. Συγγραμμικά διανύσματα — Ἀντίθετα διανύσματα.— Δύο διανύσματα (ἐλεύθερα ἢ δεσμευμένα) λέγονται **συγγραμμικά**, ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν. (§ 73 α').

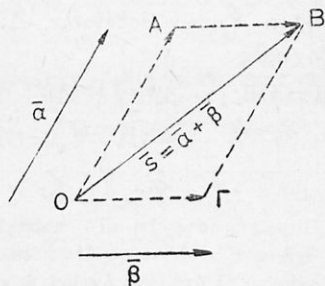
Δύο ἐλεύθερα διανύσματα λέγονται **ἀντίθετα** ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ μέτρον, ἀλλὰ φορὰς ἀντιθέτους. Π. χ. τὰ $\vec{AB}$ καὶ $\vec{BA}$ εἶναι ἀντίθετα. Τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$ παρίσταται μὲ $-\vec{\alpha}$, συνεπῶς ἰσχύει: $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

§ 76. Μηδενικὸν διάνυσμα.— Διὰ τὴν οἰκονομίαν τῶν πράξεων δεχόμεθα καὶ τὸ «μηδενικὸν διάνυσμα» ἥτοι ζευγὸς σημείων συμπίπτοντων εἰς ἓν. (Ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας ἔχουν συμπίπτει). Μὲ ἄλλας λέξεις, δεχόμεθα συμβατικῶς ὅτι ἓνα σημεῖον παριστᾷ ἓνα μηδενικὸν διάνυσμα. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἔχει μέτρον μηδέν, διεύθυνσιν δὲ καὶ φορὰν ὅχι ὀρισμένην καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\vec{0}$ ἢ 0 .

Ἄν εἶναι $\vec{AB} = 0$ τότε τὰ σημεῖα A καὶ B συμπίπτουν.

§ 77. Πρόσθεσις ἐλευθέρων διανυσμάτων.— α') Δεσμευμένα διανύσματα τοιαῦτα ὥστε τὸ πέρας ἐκάστου νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπομένου, λέγονται **διαδοχικά**.

β') Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ (σχ. 15) κατασκευάζομεν δύο δεσμευμένα διαδοχικά διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{AB} = \vec{\beta}$. Τὸ διάνυσμα $\vec{OB}$ ἀντιπροσωπεύει τὸ ἄθροισμα τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. Γράφομεν:



Σχ. 15

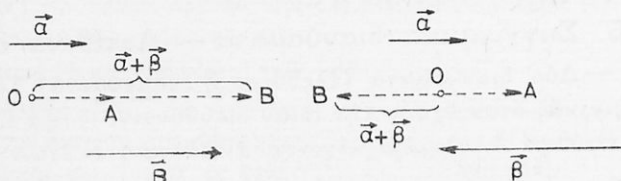
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OB} \quad \eta \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{S}$$

(ὅπου $\vec{S}$ ἐλεύθερον διάνυσμα).

γ') Ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὴν πρόσθεσιν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον $OAB\Gamma$ (σχ. 15) θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OG} \quad \vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OG} \quad \eta \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{S} \quad \eta \quad \vec{\beta} + \vec{\alpha} = \vec{S}$$

δ') Τὰ ἀνωτέρω, ἰσχύουν καὶ ὅταν τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά.



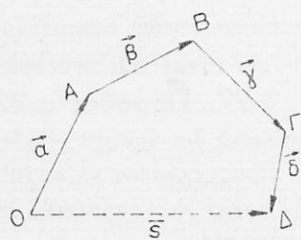
Σχ. 15

ε') Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$, προσθέτομεν τὸ $\vec{\alpha}$ μετὰ τὸ $\vec{\beta}$ καὶ εἰς τὸ εὐρεθὲν ἄθροισμα προσθέτομεν τὸ $\vec{\gamma}$ καὶ εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέτομεν τὸ $\vec{\delta}$. Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ ἄθροίσματος $\vec{S}$ τῶν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$, γίνεται συντόμως, ὡς ἐν τῷ σχ. 17. Ἦτοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐνὸς αὐθαίρετου σημείου O κατασκευάζομεν διαδοχικὰ (δεσμευμένα) διανύσματα, ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα, τὰ $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{AB} = \vec{\beta}, \vec{BG} = \vec{\gamma}, \vec{GD} = \vec{\delta}$ καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{OD}$ τὸ ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου, ἀντιπροσωπεύει τὸ ἄθροισμα $\vec{S}$ τῶν δοθέντων. Διότι εἶναι διαδοχικῶς :

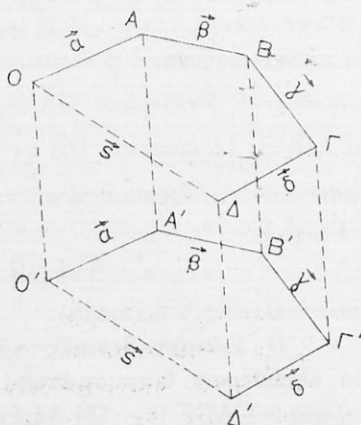
$$\begin{aligned} \vec{\alpha} + \vec{\beta} &= \vec{OB}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{OB} + \vec{BG} = \vec{OG}, \\ \{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}\} + \vec{\delta} &= \vec{OG} + \vec{GD} = \vec{OD} = \\ &= \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{S}. \end{aligned}$$

Παρατήρησις 1η. Τὸ πικραπλευρὸς σχῆμα 17α, δεικνύει ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ σημείου O ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀρχίζομεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ἄθροίσματος, δὲν παίζει ρόλον, διότι ἂν ἐκλέξωμεν ἐν ἄλλῳ σημεῖον O' ὡς ἀφετηρίαν τῆς κατασκευῆς, εὐρίσκομεν ὡς ἄθροισμα, τὸ $\vec{O'D'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μετὰ τὸ $\vec{OD}$ δηλ. τὸ $\vec{OD}$ καὶ $\vec{O'D'}$ παριστοῦν τὸ ἴδιον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{S}$.

Παρατήρησις 2α. Ἐὰν τὸ πέρας Δ τοῦ τελευταίου δεσμευμένου διανύματος, συμπίπτῃ μετὰ τὴν ἀρχὴν



Σχ. 17



Σχ. 17α

Ο τοῦ πρώτου, τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα.

Τὰ δεσμευμένα διανύσματα, λέγομεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὅτι ἀποτελοῦν κλειστὸν πολύγωνον. Εἰς τὸ σχ. 17β θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GO} = 0 \quad \eta \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = 0.$$

στ') Ὁ προσεταιριστικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων.

Ἀπὸ τὸ σχ. 18 λαμβάνομεν :

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{OB} + \vec{BG} = \vec{OG} = \vec{S}$$

$$\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OG} = \vec{S}$$

Ἄρα
$$\boxed{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})}$$

δηλ. ἰσχύει ὁ προσεταιριστικὸς νόμος, κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων.

ζ.) Τὸ οὐδέτερον στοιχείον εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων. Ἔχομεν προφανῶς :

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

δηλ. τὸ μηδενικὸν διάνυσμα προστιθέμενον εἰς ἓν ἄλλο, δὲν τὸ μεταβάλλει.

§ 78. Πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ σχετικὸν ἀριθμὸν.— Ἐστω ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ καὶ ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς +2. Τὸ διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμόροπον καὶ διπλάσιον τοῦ $\vec{AB}$ καλεῖται γινόμενον τοῦ $\vec{AB}$ ἐπὶ +2. Ἦτοι :

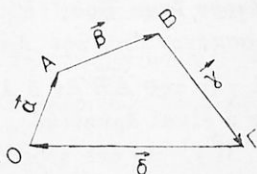
$$\vec{\Gamma\Delta} = (+2) \cdot \vec{AB} \quad (\text{Σχ. 19})$$

Τὸ διάνυσμα $\vec{H\Theta}$, ἀντίροπον καὶ τριπλάσιον εἰς μῆκος, τοῦ $\vec{AB}$

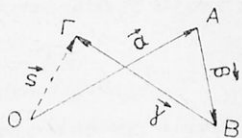
εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\vec{AB}$ ἐπὶ (-3). Γράφομεν :

$$\vec{H\Theta} = (-3) \cdot \vec{AB} \quad \eta \quad \vec{H\Theta} = -3\vec{\alpha}. \quad \text{Γενικῶς :}$$

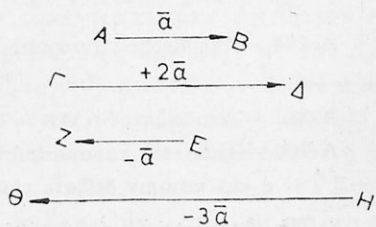
Καλεῖται γινόμενον διανύσματος $\vec{AB}$ ἐπὶ σχετικὸν ἀριθμὸν λ, τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον εἶναι συγγραμμικὸν πρὸς τὸ $\vec{AB}$, ἔχει



Σχ. 17β



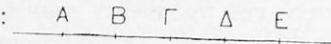
Σχ. 18



Σχ. 19

μέτρον ἴσον πρὸς $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{AB}|$ (δηλ. τὸ μέτρον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ λ) καὶ φορὰν τὴν ἰδίαν μὲ τὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἂν ὁ λ εἶναι θετικός, ἀντίθετον δὲ τῆς τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἂν ὁ εἶναι ἀρνητικός.

Π.χ. Ἄν ἐπὶ εὐθείας ἔχωμεν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ, E τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι:

$$AB = BG = \Gamma\Delta = \Delta E \quad \text{τότε θα ἰσχύουν:}$$


$$\frac{1}{2} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}, \quad -\frac{1}{4} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA},$$

$$-\frac{3}{4} \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{A\Delta}, \quad 3\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}, \quad \frac{1}{3} \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{E\Delta}$$

Σχ. 20

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-190.—Εἰς τρίγωνον ABΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ, BE, ΓΖ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Κ. Ἀποδείξατε ὅτι:

$$\frac{2}{3} \overrightarrow{A\Delta} + \frac{1}{8} \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A\Gamma}, \quad \overrightarrow{AK} + 2 \overrightarrow{CK} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \overrightarrow{A\Delta}$$

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{A\Delta} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Gamma B} + 3\overrightarrow{KE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$$

A-191.—Δίδονται τρία διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG}$. Κατασκευάσατε ἓνα τέταρτον διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ τοιοῦτον ὥστε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

A-192.—Δίδονται δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Κατασκευάσατε ἓνα τρίτον διάνυσμα $\overrightarrow{OG}$ τοιοῦτον ὥστε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB}$.

A-193.—Δίδονται δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{a}$ καὶ $\vec{b}$. Κατασκευάσατε τὰ ἄθροισματα:

$$a + (-\vec{b}), \quad (-2)\vec{a} + (+3)\vec{b}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(+\frac{3}{2}\right)\vec{b}.$$

A-194.—Ἀποδείξατε (γεωμετρικῶς) ὅτι $(+2)\{\vec{a} + \vec{b}\} = (+2)\vec{a} + (+2)\vec{b}$.

A-195.—Ἀποδείξατε ὅτι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

A-196.—Βάσει τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου ἀποδείξατε ὅτι: $(\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = \vec{a}$ καὶ κατόπιν δείξατε τὴν συνεπαγωγὴν: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{\gamma} + \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\gamma}$.

§ 79. Διανυσματικὴ εἰκὼν ἐνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ.—

α') Ἐστω ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς -3 καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{U}$ (σχ. 21).

Τὸ γινόμενον τοῦ $\vec{U}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν -3 (§ 78)

$$\text{δηλ. τὸ διάνυσμα } \vec{A} = \quad \xrightarrow{-3\vec{U} = \vec{A}} \quad \xrightarrow{(+2)\vec{U} = \vec{B}}$$

$= (-3)\vec{U}$ εἶναι ἡ δια-

νυσματική εικών τοῦ -3 ἀναφορικῶς πρὸς τὸ $\vec{U}$. Ὀμοίως, τὸ γινόμενον τοῦ $\vec{U}$ ἐπὶ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν $+2$, δηλ. τὸ διάνυσμα $(+2)\vec{U} = \vec{B}$ εἶναι ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ $(+2)$ ἀναφορικῶς πρὸς τὸ $\vec{U}$.

Γενικῶς :

Δοθέντος ἐνὸς διανύσματος $\vec{U}$ (διάνυσμα ἀναφορᾶς) καὶ τυχόντος ἀριθμοῦ α , καλεῖται διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ α , (ἀναφορικῶς πρὸς τὸ $\vec{U}$) τὸ γινόμενον τοῦ διανύσματος $\vec{U}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν α (ἴτοι τὸ $\alpha \cdot \vec{U}$).

Ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ α εἶναι ἐλεύθερον διάνυσμα.

Οἱ ἴσοι ἀριθμοί, ἔχουν ὡς διανυσματικὰς εἰκόνας, διανύσματα ἴσα· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἴσας διανυσματικὰς εἰκόνας, ἐπεταὶ ὅτι εἶναι ἴσοι. (βλ. § 74, β').

β') **Μοναδιαῖον διάνυσμα.** Ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{U}$ βάσει τοῦ ὁποῦ κατασκευάζονται αἱ διανυσματικαὶ εἰκόνας εἶναι καὶ αὐτὸ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ ἀριθμοῦ $+1$, διὰ τοῦτο θὰ τὸ καλοῦμεν συνήθως **μοναδιαῖον διάνυσμα**.

γ') Ἐπειδὴ ὡς γινόμενον διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μηδὲν θεωρεῖται τὸ μηδενικὸν διάνυσμα, διὰ τοῦτο, ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ ἀριθμοῦ μηδὲν (ὅστις δὲν ἀνήκει εἰς τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς), εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα (§ 76).

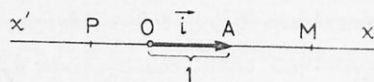
§ 80. Τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. —

α') Τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν (§ 71) μαζί με τὸν ἀριθμὸν μηδὲν (ὅστις δὲν ἔχει πρόσημον) ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Λέγοντες, λοιπόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι πραγματικός, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ α εἶναι ἢ θετικὸς ἀριθμὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν θὰ συμβολίζωμεν μετὰ τὸ γράμμα Π. Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι πραγματικός, γράφομεν: (βλ. § 1).

$$\alpha \in \Pi$$

θερὸν σημεῖον O καλούμενον «ἀρχή» καὶ ἓνα διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{i}$, τοῦ ὁποῦ τοῦ μήκος νὰ λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως παντὸς εὐθυγράμμου τμήματος κειμένου ἐπὶ τῆς $x'x$. O , ἀρχή, $\vec{OA} = \vec{i}$, μοναδιαῖον διάνυσμα.



Σχ. 22

Τὸ $\vec{i}$, καλούμενον **μοναδιαῖον διάνυσμα**, προσανατολίζει τὴν εὐθείαν

Θετικὴ φορά τοῦ ἄξονος, ἢ φορά τοῦ $\vec{i}$
δὴλ. ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ A .

$x'x$, δὴλ. ἡ φορά του εἶναι συγχρόνως καὶ θετικὴ φορά ἐπὶ τῆς $x'x$. Τὸ σύνολον: τῆς εὐθείας $x'x$, τοῦ σημείου O καὶ τοῦ διανύσματος $\vec{i}$ ἀποτελεῖ ἓνα **ἄξονα**, τὸν $(x'ox, \vec{i})$.

γ') **Ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου Π καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος.** Ἐστω οἷοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς α . Οὗτος ἔχει μίαν ὠρισμένην διανυσματικὴν εἰκόνα ἀναφορικῶς πρὸς τὸ $\vec{i}$. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος $(x'ox, \vec{i})$ λαμβάνομεν ἓνα **δεσμευμένον διάνυσμα** $\vec{OP}$, ἶσον πρὸς τὴν διανυσματικὴν εἰκόνα τοῦ α καὶ ἀντιστοιχίζομεν πρὸς τὸν ἀριθμὸν α τὸ σημεῖον P (πέρας τοῦ δεσμευμένου διανύσματος $\vec{OP}$) (σχ. 22). Οὕτω, εἰς κάθε $\alpha \in \Pi$ ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον σημεῖον P τοῦ ἄξονος. Ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ εἰς καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμὸς, ὁ ἔχων διανυσματικὴν εἰκόνα ἴσην πρὸς τὸ $\vec{OM}$. Ἐπομένως, μεταξὺ τοῦ συνόλου Π καὶ τοῦ σημειοσυνόλου $x'ox$ ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

Ἐπειδὴ πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ παρίστανται (ἢ ἀντιστοιχοῦν) μὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα «γεμίζουν» ὁλόκληρον τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν $x'ox$ διὰ τοῦτο ὁ ἄξων $(x'ox, \vec{i})$ λέγεται **ἄξων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** ἢ «πραγματικὸς ἄξων» εἶναι δὲ οὗτος, μία γεωμετρικὴ εἰκὼν τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

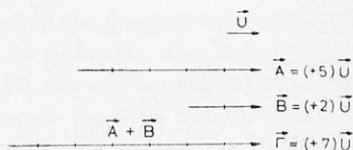
§ 81. **Ἀθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν.**—α') Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β , καλεῖται **ἄθροισμα** αὐτῶν, ἓνας τρίτος ἀριθμὸς γ ὅστις ἔχει διανυσματικὴν εἰκόνα, τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν α καὶ β . Δηλ. ἂν $\vec{U}$ εἶναι τὸ διάνυσμα ἀναφοράς $\vec{A} = \alpha\vec{U}$ καὶ $\vec{B} = \beta\vec{U}$ εἶναι αἱ διανυσμα-

τικαὶ εἰκόνες τῶν α καὶ β , τότε τὸ διάνυσμα $\vec{A} + \vec{B}$ εἶναι ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν ἐνὸς ἀριθμοῦ γ ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β .
Ἦτοι :

$$\alpha \vec{U} + \beta \vec{U} = \gamma \vec{U} \iff \alpha + \beta = \gamma.$$

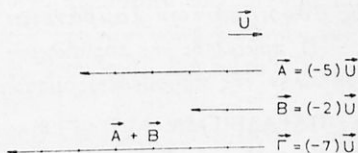
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha = +5$, $\beta = +2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά των, κατασκευάζομεν πρῶτον τὰς διανυσματικὰς των

εἰκόνας $\vec{A}$ καὶ $\vec{B}$ καὶ εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $\vec{\Gamma}$ τῶν δύο διανυσματικῶν εἰκόνων. Τὸ $\vec{\Gamma}$ βλέπομεν ὅτι εἶναι ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ $+7$ δηλ. ὁ $+7$ ἔχει διανυσματικὴν εἰκὼνα, τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν $(+5)$ καὶ $(+2)$. Ἐπομένως : $(+5) + (+2) = +7$.



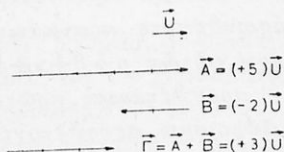
Σχ. 23

2) Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha = (-5)$ καὶ $\beta = (-2)$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά των ἐργαζόμεθα ὅπως δεικνύει τὸ σχ. 24. Βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν δύο προσθετέων εἶναι ἴσον μὲ (-7) $\vec{U}$ καὶ συνάγομεν ὅτι $(-5) + (-2) = -7$.



Σχ. 24

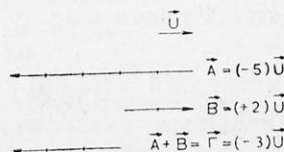
3) Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $\alpha = (+5)$, $\beta = (-2)$. Τὸ σχ. 25 δεικνύει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διανυσματικῶν εἰκόνων $(+5)\vec{U}$ καὶ $(-2)\vec{U}$ εἶναι τὸ $(+3)\vec{U}$ δηλ. ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ $(+3)$. Συνάγομεν ὅτι $(+5) + (-2) = (+3)$.



Σχ. 25

4) Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα $(-5) + (+2)$.

Εἰς τὸ σχ. 26 βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν δύο προσθετέων, εἶναι τὸ διάνυσμα $(-3)\vec{U}$ καὶ συνάγομεν ὅτι $(-5) + (+2) = -3$.



Σχ. 26

5) Ἐστω $\alpha = +3$ καὶ $\beta = -3$. Αἱ διανυσματικαὶ εἰκόνες τῶν α καὶ β εἶναι τὰ ἀντίθετα διανύσματα $(+3)\vec{U}$ καὶ $(-3)\vec{U}$ συνεπῶς, ἔχουν ἄθροισμα τὸ μηδενικὸν διάνυσμα. Τοῦτο ὅμως εἶναι εἰκὼν τοῦ ἀριθμοῦ μηδέν. Ὡστε : $(+3) + (-3) = 0$.

6) Ἐστῶσαν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ 0 . Τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων

νων των εἶναι τὸ $a \vec{U} + \vec{0} = a \vec{U}$. Συνάγομεν: $a + 0 = a$. (Τὸ 0, οὐδέτερον στοιχείον εἰς τὴν πρόσθεσιν).

β' Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Κανὼν εὐρέσεως τοῦ ἄθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν:

«Ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον, σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καὶ εἰς αὐτὸ προτάσσομεν τὸ κοινὸν πρόσημον τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἐὰν ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν, τὸ ἄθροισμὰ των ἰσοῦται πρὸς τὸν ἄλλον.

Ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἀντίθετα πρόσημα, σχηματίζομεν τὴν ἀριθμητικὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καὶ εἰς αὐτὴν δίδομεν τὸ πρόσημον ἐκείνου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅστις ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν. Ἐν ἡ περιπτώσει οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν, δηλ. εἶναι ἀντίθετοι, ὡς ἄθροισμὰ των λαμβάνεται τὸ μηδέν».

Ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα λέγεται πρόσθεσις. Ὡς σύμβολον τῆς προσθέσεως μεταχειριζόμεθα τὸ σύμβολον +.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $(+7) + (+8) = +15$, $(-5) + (-3) = -8$, $(+18,5) + (-0,5) = +18$, $(+6) + (-20) = -14$, $(+9) + (-9) = 0$, $(-2) + 0 = -2$.

γ') **Ἀθροισμα περισσοτέρων πραγματικῶν ἀριθμῶν.**—Δοθέντων ὅσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ καλοῦμεν ἄθροισμα αὐτῶν $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὐρίσκομεν προσθέτοντες πρῶτον τὸν α μὲ τὸν β καὶ εἰς τὸ προκύπτον ἄθροισμα προσθέτοντες τὸν γ καὶ εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέτοντες τὸν δ , κ.ο.κ., μέχρις ὅτου προσθέσωμεν καὶ τὸν τελευταῖον.

Οὕτω, ἂν παραστήσωμεν μὲ $(\alpha + \beta)$ τὸ ἐξαχγόμενον τῆς προσθέσεως τῶν α καὶ β , δηλ. τὸ ἐκτελεσθὲν ἄθροισμα $\alpha + \beta$ καὶ μὲ $(\alpha + \beta + \gamma)$ τὸ ἐκτελεσθὲν ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \{(\alpha + \beta) + \gamma\} + \delta = (\alpha + \beta + \gamma) + \delta.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $(+5) + (-7) + (+8) + (-9) = \{(+5) + (-7)\} + (+8) + (-9) = (-2) + (+8) + (-9) = \{(-2) + (+8)\} + (-9) = (+6) + (-9) = -3$.

δ') **Σύμβασις.** Ὅταν οἱ προσθετέοι δὲν παρίστανται μὲ γράμματα δυνάμεθα νὰ παραθέσωμεν αὐτοὺς τὸν ἓνα κατόπιν τοῦ ἄλλου παραλείποντες τὸ ἐνδιάμεσον +. Π.χ. τὸ προηγούμενον ἄθροισμα: $(+5) + (-7) + (+8) + (-9)$ γράφεται $+5 - 7 + 8 - 9$

ε') 'Ο νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἰσχύει κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἦτοι: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Διότι, ἀφοῦ κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος (§ 77, γ') ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων $\vec{\beta} + \vec{\alpha}$, ἄρα τὰ ἀθροίσματα $\alpha + \beta$ καὶ $\beta + \alpha$ εἶναι ἴσα (§ 78).

στ') 'Ο προσεταιριστικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἦτοι $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Διότι, ἀφοῦ ὁ προσεταιριστικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων ἔπεται ὅτι $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ δηλ. ἡ διανυσματικὴ εἰκὼν τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha + \beta) + \gamma$ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διανυσματικὴν εἰκὼνα τοῦ $\alpha + (\beta + \gamma)$, ἄρα τὰ δύο αὐτὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα.

ζ') 'Ιδιότητες τῶν ἀθροισμάτων. Ἀφοῦ ἰσχύει ὁ προσεταιριστικὸς καὶ ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος, εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ ἰσχύουν διὰ τὰ ἀθροίσματα πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ ἰδιότητες τῆς § 16 αἱ ὁποῖαι πηγάζουν ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς νόμους. Ἦτοι ἰσχύουν οἱ κάτωθι νόμοι:

i) «Εἰς πᾶν ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν προσθετέων χωρὶς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα νὰ μεταβληθῇ».

ii) «Εἰς πᾶν ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ὅσονσδήποτε προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματός των ἢ ἓνα τῶν προσθετέων, ὑπὸ ἄλλων, ἐχόντων αὐτὸν ὡς ἄθροισμα».

iii) «Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἓνα μόνον ἄθροισμα περιέχον τοὺς ὅρους ὅλων τῶν ἀθροισμάτων».

iv) «Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν θετικῶν προσθετέων, κατόπιν ὅλων τῶν ἀρνητικῶν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα».

'Ο 4ος νόμος εἶναι συνέπεια τοῦ 1ου καὶ 2ου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) $+7 - 11 + 15 + 1 = -11 + 1 + 15 + 7$.

2) $-4 - 6 - 5 + 7 + 2 = -4 - 5 + 3$, διότι ἀντικατεστήσαμεν τὸν 2ον, 4ον καὶ 5ον προσθετέον διὰ τοῦ ἀθροίσματός των $+3$.

3) $+7 + (-9 + 4 - 3) = (+7) + (-9) + (+4) + (-3) = +7 - 9 + 4 - 3 = -2 + 4 - 3 = +2 - 3 = -1$.

4) $-3 + \frac{12}{5} - 9 + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \left(+\frac{12}{5} + \frac{1}{2} \right) + \left(-3 - 9 - \frac{3}{10} \right) =$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-197.—Υπολογίσατε ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι ἄθροισματα :

$$(+5) + (+3), \quad (-5) + (+2), \quad (+5,5) + (3,5), \quad (-1,5) + (-2,5), \\ (+3) + (-1), \quad (+15) + (-7), \quad (+57) + (-47), \quad (+153) + (-21).$$

A-198.—Υπολογίσατε ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι ἄθροισματα :

$$(-3) + (+13), \quad (-6) + (+4), \quad (+5) + (-7), \quad (-8) + (+14), \\ (-9) + (-3), \quad (-1) + (+42), \quad (-25) + (+3), \quad (-95) + (+95).$$

A-199.—Υπολογίσατε ἀπὸ μνήμης τὰ ἄθροισματα :

$$(-2) + \left(-\frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right), \quad \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right), \\ \left(-\frac{11}{4}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right), \quad \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(+\frac{17}{8}\right), \quad \left(+\frac{11}{13}\right) + \left(+\frac{4}{13}\right).$$

A-200.—Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν :

$$-\frac{75}{190}, \quad \frac{275}{1000}, \quad -\frac{750}{2000}, \quad -0,25.$$

A-201.—Ἐπ' εὐθείας κεῖνται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, τοιαῦτα ὥστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ. Ἐπὶ ποῖον σχετικὸν ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΑ}$ διὰ νὰ δώσῃ τὸ $\overrightarrow{ΓΕ}$; Ἡ τὸ $\overrightarrow{ΑΓ}$ διὰ νὰ δώσῃ τὸ $\overrightarrow{ΕΔ}$; Ἡ τὸ $\overrightarrow{ΑΔ}$ διὰ νὰ δώσῃ τὸ $\overrightarrow{ΕΑ}$;

A-202.—Βάσει τοῦ κανόνος τῆς (81, β') δείξατε ὅτι, ἂν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι σχετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει: $|α+β|=|α|+|β|$.

A-203.—Ἐπαληθεύσατε τὴν ἰσότητα :

$$+\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}.$$

A-204.—Εὑρετε τὸ ἄθροισμα $(-7,5+3,4-2,3)+(4,6-8,1)+(+5,8+6,2-9,6)$.

§ 82. Διαφορὰ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν.—α') Θεώρημα. «*Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ὑπάρχει πάντοτε τρίτος ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει τὸν α. Εἰς μόνος δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς ὑπάρχει*».

Ἐστῶσαν α καὶ β δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸν τρίτον ἀριθμὸν θὰ ἔπρεπε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:

$$x + \beta = \alpha.$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν β' τὸν ἀντίθετον τοῦ β καὶ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν:

$$(x + \beta) + \beta' = \alpha + \beta'$$

$$x + (\beta + \beta') = \alpha + \beta'$$

$$x + 0 = \alpha + \beta'$$

$$x = \alpha + \beta'$$

Ἐπομένως ἡ ἀπάντησις τοῦ ἐκτιθεμένου x δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλος

ἀπὸ τὸν $\alpha + \beta'$. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως $\alpha + \beta'$, πράγματι, προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει τὸν α , διότι:

$$(\alpha + \beta') + \beta = \alpha + (\beta' + \beta) = \alpha + 0 = \alpha.$$

β') Ὁρισμός. «Καλεῖται διαφορά μεταξὺ α καὶ β καὶ παρίσταται μὲ $\alpha - \beta$, ὁ ἀριθμὸς ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β παρέρχει τὸν α ».

Συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ διαφορά ὑπάρχει πάντοτε καὶ μάλιστα εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\alpha + \beta'$, ὅπου β' ὁ ἀντίθετος τοῦ β . Ὡστε:

$$\alpha - \beta = \alpha + \beta',$$

δηλ. διὰ τὰ εὗρωμεν τὴν διαφορὰν $\alpha - \beta$, ἀρκεῖ εἰς τὸν α , τὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ β .

Ἡ εὗρεσις τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$ καλεῖται ἀφαίρεσις τοῦ β ἀπὸ τὸν α . Τὸ σημεῖον $-$ δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ μία ἀφαίρεσις. Ἡ ἀφαίρεσις τοῦ β , ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου τοῦ β .

γ') Παράστασις τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ. Κατὰ συνθήκην, τὸ σύμβολον $+$ α , παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α , τὸ δὲ σύμβολον $-$ α τὸν ἀντίθετον τοῦ α . Ἡ παραδοχὴ αὕτη παρέχει π.χ. τὰς ἰσότητας:

$$+(+3) = +3, \quad -(+2) = -2, \quad +(-7) = -7, \quad -(-8) = +8$$

καὶ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

«Δύο πρόσημα διαδοχικὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ ἓν πρόσημον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $+$ ἢ τὸ $-$ καθ' ὅσον τὰ διαδοχικὰ πρόσημα εἶναι τὰ αὐτὰ ἢ ἀντίθετα».

§ 83. Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα. — Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα καλεῖται, μία διαδοχὴ προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων ἐκτελουμένων μεταξὺ δεδομένων ἀριθμῶν.

Οὕτω π.χ. ἡ παράστασις:

$$(+7) + (-10) - (-20) - (+25),$$

εἶναι ἓν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς τὸ ὁποῖον ὁ (-10) προστίθεται εἰς τὸν $(+7)$ καὶ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον ἀφαιρεῖται ὁ -20 καὶ ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον ἀφαιρεῖται ὁ $+25$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν:

$$(+7) + (-10) + (+20) + (-25)$$

Καλοῦνται ὅροι τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἄθροισματος οἱ ἀποτελοῦντες αὐτὸ ἀριθμοὶ μαζὶ μὲ τὰ σημεῖα τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως τὰ ὁποῖα φέρει ἕκαστος πρὸ αὐτοῦ. Ἐστὼ π.χ. τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon$ ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ τυχόντες ἀριθμοὶ. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,$

—β, +γ, —δ, +ε, εἶναι οἱ ὅροι τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος. Δύναται δὲ τὸ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, κατόπιν τῆς παραδοχῆς τῶν σημείων (§ 82, γ') νὰ γραφῇ ὡς σύνηθες ἄθροισμα :

$$\alpha + (-\beta) + \gamma + (-\delta) + \varepsilon$$

Ἐπομένως, πᾶν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα πάντων τῶν ὁρῶν του. Ἄρα ἰσχύουν καὶ δι' αὐτὸ αἱ ἰδιότητες τῆς § 81, ζ'.

Ἰσχύει ἀκόμη διὰ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τὸ ἐξῆς θεώρημα :

Θεώρημα. «Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὁρῶν του μὲ ἀλλαγέ-
νον τὸ σημεῖον του».

Ἐὰν α, β, γ, δ οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος θὰ δεῖξωμεν ὅτι :

$$k - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = k - \alpha - \beta - \gamma - \delta$$

Ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ ἀντίθετον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος εὐρίσκει-
ται ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὁρῶν του. Πράγματι, τὰ ἀθροίσματα :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \quad \text{καὶ} \quad -\alpha - \beta - \gamma - \delta$$

εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίθετοι, διότι ἔχουν ἄθροισμα μηδέν :

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (-\alpha - \beta - \gamma - \delta) = (\alpha - \alpha) + (\beta - \beta) + (\gamma - \gamma) + (\delta - \delta) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Ἐπομένως ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, προσθέτομεν τὸ $-\alpha - \beta - \gamma - \delta$, δηλ. τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἐφαρμογαί : 1ον) $\alpha + (\beta + \gamma - \delta) = \alpha + \beta + \gamma - \delta$.

δηλαδή, ἂν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εὐρίσκειται ἐντὸς παρενθέσεως φερούσης προτεταγμένον τὸ +, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν παρενθέσιν (§ 81, ζ' iii).

$$2ον) \quad \alpha - \beta - \gamma + \delta = \alpha - (\beta + \gamma - \delta),$$

δηλαδή, ὅσουσδήποτε ὁρους ἐνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δυνά-
μεθα νὰ τοὺς εἰσαγάγωμεν ἐντὸς παρενθέσεως φερούσης πρὸ αὐ-
τῆς τὸ — ἀφοῦ ὁμως ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὁρῶν τούτων.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-205.—Υπολογίσατε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα :

$$(-11,34) + (-2,65) - (+12,05) - (-10,75) - (-3,50)$$

A-206.—Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος :

$$-(-\frac{3}{8}) + (-\frac{4}{3}) - (-\frac{5}{6}) - (+\frac{1}{12}) - (+\frac{17}{24})$$

A-207.—Υπολογίσατε τὰ ἀλγεβρικά ἀθροίσματα :

$$i) \quad (-\frac{2}{7}) - (-\frac{8}{14}) - (+\frac{5}{7}) - (+\frac{12}{21}) - (-\frac{20}{28})$$

$$ii) \quad (-\frac{3,5}{5}) + (+\frac{10}{15}) - (-\frac{4,8}{20}) - (-\frac{20,2}{30}) + (+\frac{2,8}{150})$$

A-208.—Υπολογίσατε τὸν x ἐκ τοῦ τύπου $x = |a - \beta - \gamma + \delta|$ γνωρίζοντες ὅτι $a = -1,2$, $\beta = +\frac{3}{4}$, $\gamma = -2$, $\delta = +\frac{4}{5}$.

A-209.—Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις:

i) $a - (\beta - (\gamma - (\delta - \epsilon - \eta)))$.

ii) $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + (a_4 - a_5) + (a_5 - a_6) + (a_6 - a_7) + (a_7 - a_8)$,

ὅπου $a_1, a_2, \dots, a_8$, τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

A-210.—Ἀφοῦ διαπιστωθῶν αἱ ἀριθμητικαὶ ἰσότητες:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}, \quad \text{νὰ ὑπολογισθῇ βάσει αὐτῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν}$$

$$\text{εἴκοσι κλασμάτων} \quad + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{20 \cdot 21}.$$

§ 84. Γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν.—α') Γινόμενον δύο ἀριθμῶν: «Καλεῖται γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἷς τρίτος ἀριθμὸς, ἔχων ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ἔχων πρόσημον $+$ ἢ $-$, καθ' ὅσον οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον ἢ ἀντίθετα πρόσημα. Ὄταν ὁ εἷς τῶν δύο ἀριθμῶν εἴναι τὸ μηδέν, τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ μηδέν».

Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, παρέχεται συμφώνως μὲ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ὑπὸ τοῦ πίνακος:

1ος	2ος	Γινόμενον
+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	+

(Κανὼν τῶν σημείων)

Ἡ πράξις δι' ἧς εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν α καὶ β , λέγεται πολλαπλασιασμός, οἱ α καὶ β παράγοντες τοῦ γινομένου, τὸ δὲ γινόμενον παοίσταται μὲ $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$ ἢ $\alpha\beta$. Ἐνίοτε, τὸ ἐκτελεσθὲν γινόμενον παριστῶμεν μὲ $(\alpha\beta)$.

Ἔχομεν π.χ.: $(+2)(+3) = +6$, $(+5)(-3) = -15$, $(-9)(+4) = -36$,

$$(-4)\left(-\frac{3}{2}\right) = +6, \quad 0 \cdot (+5) = 0.$$

Ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δηλ.:

(1) Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εἰδικῆς Παιδείας

Διὰ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς (1) εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ ἴσοι, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς (§ 71, β'). Τὸ πρῶτον γίνεται προφανές ἀπὸ τὸν κανόνα τῶν σημείων. Ἐξ ἄλλου ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\alpha \cdot \beta$ εἶναι κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ γινομένου, ἴση μὲ $|\alpha| \cdot |\beta|$ ἢ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\beta \cdot \alpha$ εἶναι ἴση μὲ $|\beta| \cdot |\alpha|$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ $|\alpha|$, $|\beta|$ εἶναι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσχύει δι' αὐτοὺς ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος, ἦτοι $|\alpha| \cdot |\beta| = |\beta| \cdot |\alpha|$. Ὡστε οἱ ἀριθμοὶ $\alpha\beta$ καὶ $\beta\alpha$ ἔχουν ἴσας ἀπολύτους τιμὰς καὶ τὸ αὐτὸ πρόσημον. Ἄρα εἶναι ἴσοι.

β') Γινόμενον ἴσον μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, μόνον εἰς τὴν περιπτώσιν καθ' ἣν εἰς τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν, διὰ τοῦτο ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί: (περὶ τοῦ $\wedge$ βλ. σ. 22).

$$\alpha\beta = 0 \iff \text{εἴτε } \alpha = 0 \text{ εἴτε } \beta = 0$$

$$\alpha\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$$

γ') Γινόμενον ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν: «Δοθέντων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$, παριστάνομεν διὰ τοῦ συμβόλου $\alpha\chi\beta\chi\gamma\chi\dots\chi\tau$, ἡ ἀπλούστερον διὰ τοῦ $\alpha\beta\gamma\dots\tau$, τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρῶτους α καὶ β καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ., μέχρις ὅτου συμπεριλάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον».

Ὁ ἀριθμὸς $\alpha\beta\gamma\dots\tau$, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$.

Ἐὰν εἰς παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συγκεκριμένους ἀριθμοὺς οἱ δὲ λοιποὶ γράμματα, τότε ὁ ἀριθμητικὸς παράγων λέγεται ἀριθμητικὸς συντελεστὴς τοῦ γινομένου. Οὕτω, π.χ. τὰ γινόμενα $+5\alpha, -7\beta\gamma, -\frac{2}{3}\gamma\chi\omega$, ἔχουν ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἀντίστοιχως, $+5, -7, -\frac{2}{3}$.

Ἐν ἡ περιπτώσει ὁ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, παραλείπομεν συνήθως τὸ πρόσημον $+$. Ἔτσι π.χ. τὰ γινόμενα $+2\alpha, +\frac{3}{7}\alpha\beta, +1,05\alpha\beta\gamma, +\sqrt{3}\cdot\alpha\delta$, γράφονται ἀπλῶς: $2\alpha, \frac{3}{7}\alpha\beta, 1,05\alpha\beta\gamma, \sqrt{3}\cdot\alpha\delta$.

Διὰ τὸ γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν παραγόντων $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί:

$$\alpha\beta\gamma\dots\tau = 0 \iff \text{εἴτε } \alpha = 0, \text{ εἴτε } \beta = 0, \dots \text{ εἴτε } \tau = 0$$

$$\alpha\beta\gamma\dots\tau \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \dots \wedge \tau \neq 0$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ἴνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

§ 85. Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν.—**Θεώρημα 1ον.** «*Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων*».

Προκειμένου διὰ δύο παράγοντας, τὸ θεώρημα γίνεται φανερόν ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὁρίσμου τοῦ γινομένου δύο παραγόντων. (§ 84α')

Π.χ.: $|(+8)(-7)| = 56 = 8 \cdot 7 = | + 8 | \cdot | - 7 |$, Γενικῶς εἶναι :

$$(1) \quad | \alpha \beta | = | \alpha | \cdot | \beta |.$$

Ἐστω τώρα τὸ γινόμενον $\alpha\beta\gamma$. Ἐπειδὴ ἐξ ὁρίσμου εἶναι $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$, θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὴν (1) :

$| \alpha\beta\gamma | = | (\alpha\beta)\gamma | = | \alpha\beta | \cdot | \gamma | = | \alpha | \cdot | \beta | \cdot | \gamma |$, (ὅπου $| \alpha |$, $| \beta |$, $| \gamma |$ εἶναι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς).

Ἀκολούθως ἐπεκτείνεται διὰ τέσσαρας παράγοντας :

$$| \alpha\beta\gamma\delta | = | (\alpha\beta\gamma) \cdot \delta | = | \alpha\beta\gamma | \cdot | \delta | = | \alpha | \cdot | \beta | \cdot | \gamma | \cdot | \delta |, \quad \kappa.ο.κ.$$

Θεώρημα 2ον. «*Τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι τὸ + ἢ τὸ —, καθόσον τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν*».

Σημείωσις. Ὁ μὴδὲν θεωρεῖται ἄρτιος.

Ἐστω τὸ γινόμενον $\alpha\beta\gamma\delta\dots\tau$. Ἐπειδὴ $(+1)\alpha = \alpha$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον : $(+1)\alpha\beta\gamma\delta\dots\tau$. Δηλαδὴ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $+1$ ἐπὶ α , τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ β , τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ γ , κ.ο.κ.

Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τῶν προσήμων, ὁσάκις πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ ἀρνητικὸν παράγοντα, τὸ γινόμενον ἀλλάσσει πρόσημον. Ἐπομένως τὸ γινόμενον θ' ἀλλάξῃ τόσας φορὰς πρόσημον, ὅσοι ἀρνητικοὶ παράγοντες ὑπάρχουν. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ κ νεῖς ἀρνητικός, δὲν θ' ἀλλάξῃ, ἄρα θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ $+1$, δηλ. τὸ $+$. Ἄν ὑπάρχουν 2 ἀρνητικοὶ θ' ἀλλάξῃ δύο φορὰς, ἄρα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ πρόσημον τοῦ πρώτου, δηλ. εἰς τὸ $+$. Ἄν ὑπάρχουν 4 ἀρνητικοὶ θ' ἀλλάξῃ τέσσαρας φορὰς, ἄρα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ $+$, κ.ο.κ.

Τέλος, ἂν ὑπάρχῃ περιττὸν πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων, τότε κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν θὰ γίνουν 1 ἢ 3 ἢ 5... ἀλλαγὰι προσήμου καὶ ἐπομένως τὸ τελικὸν γινόμενον $(+1)\alpha\beta\gamma\dots\tau$, θὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρόσημον τοῦ $(+1)$, δηλ. τὸ $-$.

Κανὼν. «*Τὸ γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εὐρίσκεται ἂν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων καὶ προτάξωμεν εἰς αὐτό, τὸ πρόσημον $+$ ἢ τὸ $-$, καθ' ὅσον τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν*. Ἐὰν εἷς παράγων ἰσοῦται μὲ μηδὲν καὶ τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ μηδέν».

Θεώρημα 3ον. «*Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν βλάπτειται ἐὰν ἀλλάξῃ ἡ τάξις τῶν παραγόντων*».

Διότι τὸ σημεῖον τοῦ γινόμενου δὲν θ' ἀλλάξῃ, ὡς ἐξαχρώμενον μόνον ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων. Κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐπίσης δὲν θ' ἀλλάξῃ τὸ γινόμενον, διότι αὕτη ἰσοῦται συμφώνως πρὸς τὸ 1ον θεώρημα μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν, ὅπερ ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς (διότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ εἶναι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς), δὲν θ' ἀλλάξῃ διὰ τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων.

Θεώρημα 4ον. «Εἰς πᾶν γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν, *δυναμέθα ν' ἀντικαταστήσωμεν ὁσουςδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ γινόμενου αὐτῶν ἢ ἓνα παράγοντα δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον*».

Θὰ εἶναι π.χ.: $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha(\beta\gamma\delta)$ (ὅπου $(\beta\gamma)$ σημαίνει τὸ ἐκτελεσθὲν γινόμενον).
Διότι $\alpha\beta\gamma\delta = \beta\gamma\alpha\delta = (\beta\gamma)\alpha\delta = \alpha(\beta\gamma)\delta$. Καὶ ἀντιστρόφως.

Θεώρημα 5ον. «Γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν, ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων του, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον».

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι: $(\alpha\beta\gamma\delta) \cdot \lambda = \alpha(\beta\lambda)\gamma\delta$.

Διότι $(\alpha\beta\gamma\delta)\lambda = \alpha\beta\gamma\delta\lambda = \alpha(\beta\lambda)\gamma\delta$, κατὰ τὸ προηγούμενον.

Θεώρημα 6ον. «Ὁ προσεταιριστικὸς νόμος ἰσχύει κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πραγματικῶν ἀριθμῶν».

Θὰ ἰσχύῃ, δηλ. ὅτι $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 7ον. «Ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν ἰσχύει διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς».

Ἀπόδειξις τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου. Διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως θὰ εἰσαγάγωμεν τὸ σύμβολον «σημ» (=σημεῖον). Διὰ τοῦ σημ(α) θὰ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν +1, ἂν ὁ α εἶναι θετικὸς, τὸν -1 ἂν ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς καὶ τὸν 0 ἂν ὁ α=0. Οὕτω, π.χ.:

$$\text{σημ}(-3) = -1, \quad \text{σημ}(+2) = +1, \quad \text{σημ}\{(+7) + (-8)\} = -1,$$

$$\text{σημ}\{(+7)(-8)\} = -1, \quad \text{σημ}\{(+4) \cdot 0\} = 0.$$

Ὁ κανὼν τῶν σημείων, ὁ δοθεὶς εἰς τὴν (§ 84), δίδει τὴν ἰσότητά,

$$\text{σημ}(\alpha\beta) = \text{σημ}(\alpha)\text{σημ}(\beta).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν, τώρα τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου:

$$(1) \quad (\alpha + \beta)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda.$$

Ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος (1) ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν. Πρὸς τοῦτο διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον. Ἄς εἶναι οἱ α καὶ β ὁμόσημοι ἀριθμοί. Τότε

$$\text{σημ}((\alpha + \beta)\lambda) = [\text{σημ}(\alpha + \beta)] \cdot [\text{σημ}(\lambda)] = \text{σημ}(\alpha)\text{σημ}(\lambda), \quad \text{σημ}(\alpha\lambda + \beta\lambda) = \text{σημ}(\alpha\lambda) = \text{σημ}(\alpha)\text{σημ}(\lambda),$$

ὥστε τὰ δύο μέλη τῆς (1), ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον (πρόσημον).
Ἐξ ἄλλου πάλιν ὁμοεικότα ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$|(\alpha + \beta)\lambda| = |\alpha + \beta| \cdot |\lambda| = (\S 81, \beta') (A + B)\Lambda = A\Lambda + B\Lambda$$

(διότι διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος :

$$(A + B)\Lambda = A\Lambda + B\Lambda).$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ αλ καὶ βλ εἶναι ὁμόσημοι, θὰ εἶναι :

$$|\alpha\lambda + \beta\lambda| = |\alpha\lambda| + |\beta\lambda| = A\Lambda + B\Lambda.$$

Ὡστε τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς.

2ον. Ἄς εἶναι ὁ α καὶ β ἑτερόσημοι. Ἐστω ἀκόμη ὅτι $A > B$, δηλ. ὁ α ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἢ ὁ β. Τότε θὰ εἶναι καὶ $A\Lambda > B\Lambda$, δηλ. ὁ αλ ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς τοῦ βλ.

Τότε θὰ ἔχωμεν : $\text{σημ}\{(\alpha + \beta)\lambda\} = \{\text{σημ}(\alpha + \beta) \text{σημ}(\lambda) = \text{σημ}(\alpha)\text{σημ}(\lambda),$
 $\text{σημ}(\alpha\lambda + \beta\lambda) = \text{σημ}(\alpha\lambda) = \text{σημ}(\alpha)\text{σημ}(\lambda).$

Ἐπίσης θὰ ἔχωμεν :

$$|(\alpha + \beta)\lambda| = |\alpha + \beta| \cdot |\lambda| = (A - B)\Lambda = A\Lambda - B\Lambda,$$

διότι ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι γνωστὸν ὅτι $(A - B)\Lambda = A\Lambda - B\Lambda$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ αλ καὶ βλ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἔχει ὁ αλ θὰ εἶναι :

$$|\alpha\lambda + \beta\lambda| = A\Lambda - B\Lambda.$$

Ὡστε τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς.

3ον. Οἱ α καὶ β εἶναι ἀντίθετοι. Τότε καὶ οἱ αλ καὶ βλ εἶναι ἀντίθετοι, καὶ ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει.

Πορίσματα τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου : i) *Γινόμενον δύο ἀθροισμάτων.* Ἐφ' ὅσον ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος ἰσχύει διὰ δύο προσθετέους, θὰ ἰσχύει καὶ διὰ τρεῖς, δηλ. $(\alpha + \beta + \gamma)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda$. Πράγματι $(\alpha + \beta + \gamma)\lambda = [(\alpha + \beta) + \gamma]\lambda = (\alpha + \beta)\lambda + \gamma\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda$.

Ἐκ τῶν τριῶν μεταβαίνομεν εἰς τοὺς τέσσαρας :

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\lambda = [(\alpha + \beta + \gamma) + \delta]\lambda = (\alpha + \beta + \gamma)\lambda + \delta\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda, \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται καὶ ὁ κανὼν : «**Ἀθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν κάθε ὅρος τοῦ ἐνὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου καὶ προστεθοῦν τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα**».

Π.χ. : $(\alpha + \beta + \gamma)(\delta + \epsilon) = \alpha(\delta + \epsilon) + \beta(\delta + \epsilon) + \gamma(\delta + \epsilon) = \alpha\delta + \alpha\epsilon + \beta\delta + \beta\epsilon + \gamma\delta + \gamma\epsilon$, (ὅπου ἐθεωρήθη κατ' ἀρχὰς τὸ $(\delta + \epsilon)$ ὡς εἰς ἀριθμὸς καὶ ἔγινε ἐπικνηλημμένη ἐφαρμογὴ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου).

ii) Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος. Βάσει τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(2) \quad \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda = \lambda(\alpha + \beta + \gamma).$$

Ἡ μετατροπὴ (2) λέγεται ἐξ α γ ω γ ῆ κοινοῦ παράγοντος ἐκ τῶς παρενθέσεως. Ὁ ἐκτὸς παρενθέσεως ἐξαχθεὶς κοινὸς παράγων εἶναι ὁ λ.

Διὰ τῆς ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος, ὠρισμένα ἀθροίσματα μετατρέπονται εἰς γινόμενα. Π.χ. :

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \delta\beta + \delta\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \delta(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha + \delta),$$

(τελικῶς ἐξήχθη κοινὸς παράγων ὁ β + γ).

iii) Ἀναγωγή ὁμοίων ὁρῶν. Γινόμενα τῶν ὁμοίων εἰς παράγων εἶναι

$$v) \quad 3(x-y+8)-4(x-5y+3)+6x-2y-1).$$

A-216. Ἐξαγάγετε κοινούς παράγοντας καὶ τρέψατε εἰς γινόμενα :

$$i) \quad ax-\beta x+\gamma x, \quad ii) \quad 2\gamma k-3\gamma-6k+9, \quad iii) \quad 4x-4y-ax+ay.$$

§ 86. Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ φυσικοὺς ἐκθέτας. Τὸ γινόμενον v παραγόντων ἴσων πρὸς α , καλεῖται *νυοστή δύναμις* τοῦ ἀριθμοῦ α καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου α^v (α εἰς τὴν v). Εἰς τὸ σύμβολον α^v , τὸ α καλεῖται *βάσις* καὶ ὁ v , *ἐκθέτης* τῆς δυνάμεως. Τὸ σύμβολον α^1 λέγεται *κχτ'* ἐπέκτασιν πρῶτη δύναμις τοῦ α (ἐκθέτης = 1) καὶ εἶναι ἐξ ὀρισμοῦ $\alpha^1 = \alpha$.

Πρὸς τὸ παρὸν θεωροῦμεν δυνάμεις α^v μὲ ἐκθέτην v , φυσικὸν ἀριθμόν, 1, 2, 3, ... καὶ βάσιν α , τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμόν.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων :

i) «Πᾶσα δύναμις θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετική».

Διότι τὸ γινόμενον θετικῶν παραγόντων εἶναι θετικόν.

ii) «Δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι θετική, μὲ περιττὸν δὲ ἐκθέτην ἀρνητική».

Διότι τὸ σημεῖον ἐνὸς γινομένου εἶναι τὸ + ἢ τὸ -, καθ' ὅσον τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $(-1)^v = +1$, ὅταν v ἄρτιος

$(-1)^v = -1$, ὅταν v περιττός

$$(-2)^5 = -2^5 = -32, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

iii) «Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν».

Δηλαδή $\alpha^u \cdot \alpha^v = \alpha^{u+v}$ (βλ. § 28, i).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $a^3 \cdot a^7 = a^{10}$, $a^2 \cdot a^5 \cdot a^8 = a^{15}$, $(x^2 y^5)(x^3 y^2) = (x^2 x^3)(y^5 y^2) = x^5 y^7$.

iv) «Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν νέον ἐκθέτην».

Δηλαδή $(\alpha^u)^v = \alpha^{uv}$ (βλ. § 28 ii).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $(a^3)^2 = a^6$, $(x^3)^5 = x^{15}$, $\beta^4 = (\beta^2)^2$.

v) «Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἂν ἑκαστος τῶν παραγόντων ὑψωθῇ εἰς δύναμιν ταύτην».

Δηλ. $(\alpha\beta\gamma)^v = \alpha^v \beta^v \gamma^v$ (βλ. § 28 iii).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $(-2\delta)^5 = (-2)^5 \cdot \delta^5 = -2^5 \delta^5 = -32\delta^5$,

$$(-3x^2 y^3)^4 = (-3)^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 = 81 x^8 y^{12}.$$

Αἱ λοιπαὶ δύο ιδιότητες τῶν δυνάμεων ἐκτίθενται εἰς τὰς § 87 στ', § 88, iv.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-217. Φέρατε ὑπὸ τὴν μορφήν a^v τὰς ἐπομένους παραστάσεις :

$$(-3)^2(-3)^5(-3), \quad (-5)^3(-5)^7(-5)^2, \quad (+8)^2(-4)^3.$$

A-218. Φέρατε ὑπὸ τὴν μορφήν a^v τὰς ἐπομένους παραστάσεις :

$$\left(+\frac{1}{5}\right)^3\left(+\frac{1}{5}\right)^2\left(+\frac{1}{5}\right)^4, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{4}\right).$$

A-219. Ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, διδομένους ἀπὸ τὰς :

$$\alpha = \{(-2^3)\}^2, \quad \beta = \{(-3)^2\}^2, \quad \gamma = \{(-1)^5\}^3, \quad \delta = \{(-2)^2\}^3.$$

A-220. Νᾶ γραφοῦν ὑπὸ τὴν ἀπλουστάτην μορφήν τὰ γινόμενα :

$$\left(\frac{3}{4} x^4 y^2 z^3\right)\left(-\frac{1}{9} x^2 z\right), \quad (-4xyz^2)\left(\frac{3}{2} x^2 yz\right)\left(\frac{2}{3} x^2 y^3 z\right)(-5xz).$$

A-221. Νᾶ γίνουν αἱ ὑψώσεις εἰς δύναμιν :

$$(2\alpha^3\beta^2\gamma)^2, \quad \left(-\frac{1}{3}x^2y^3z\right)^3, \quad (\alpha\beta^4\gamma)^4.$$

A-222. Νᾶ δεიχθῇ ὅτι $|\omega^v| = |\omega|^v$, ὅπου v φυσικὸς ἀριθμὸς.

A-223. Ὑπολογίσατε τὴν δύναμιν $(-1)^{2v+5}$ ὅπου v φυσικὸς ἀριθμὸς.

A-224. Νᾶ ἀπλουστευθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις δι' ἀναγωγῆς ὁμοίων ὀρων :

- i) $kx^2 - 3k^2x^2 + 6k^2x + 2x - 2kx^2 + 8 - 3x$,
- ii) $2x^3y - 3x^4 + 4x^2y^2 - xy^3 + 7x^4 - 3x^3y + x^2y^2 - 5xy^3$,
- iii) $12 + 8y - 3y^2 + y^4 - 6y - 7 - 5y^2 + y^3 - 3y^4$,
- iv) $5\alpha^2\varphi - \varphi^3 + 4\alpha\varphi^2 + 2\alpha^3 + 3\varphi^3 - 2\alpha^2\varphi - 8\alpha^2\varphi + \alpha^3$.

§ 87. Πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. α') Ἐστωσαν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β , ὅπου $\beta \neq 0$. Καλεῖται πηλίκον τοῦ α (διαιρετέου) διὰ τοῦ β (διαιρέτου), ὁ ἀριθμὸς x τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ β ἰσοῦται μὲ τὸν α .

Τὸ ἀνωτέρω πηλίκον παρίσταται ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α/β ἢ $\alpha:\beta$, ἡ δὲ πρᾶξις δι' ἧς εὐρίσκομεν τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β καλεῖται διαίρεσις τοῦ α διὰ β .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $\frac{+8}{-2} = -4$ (διότι $(-4)(-2) = +8$),

$$\frac{-20}{-5} = +4 \quad (\text{διότι } (+4)(-5) = -20), \quad \frac{-5}{+3} = -\frac{5}{3} \quad \left(\text{διότι } \left(-\frac{5}{3}\right)(+3) = -\left(\frac{5}{3} \cdot 3\right) = -5 \right), \quad \frac{0}{+7} = 0 \quad (\text{διότι } (+7) \cdot 0 = 0).$$

β') Θεώρημα. «Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β , ἐνθα α, β πραγματικοὶ καὶ $\beta \neq 0$, ὑπάρχει, εἶναι ἓνα μόνον, ἔχει δὲ ἀπλότυον τιμὴν ἔσσην μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς, $|\alpha| : |\beta|$

καὶ πρόσσημον τὸ + ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἢ τὸ — ἂν εἶναι ἐτερόσημοι. "Ὅταν ὁ διαιρετέος α εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν τότε καὶ τὸ πηλίκον α/β ἰσοῦται μὲ μηδέν».

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος. Ἐστω x πραγματικὸς ἀριθμὸς τοιοῦτος ὥστε :

$$|x| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \text{ καὶ } \text{σημ.}(x) = \text{σημ.}(\alpha) \text{ σημ.}(\beta). (\text{περὶ τοῦ «σημ.» βλ. σελ. 114}).$$

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἰσχύει :

$$(1) \quad x\beta = \alpha.$$

Ἀρκεῖ νὰ δεიχθῇ, ὅτι, τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ ἴδιον πρόσημον.

Πράγματι: $|x\beta| = |x| \cdot |\beta| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot |\beta| = |\alpha|$. (Σύμφωνα μὲ τὴν Ἀριθμητικὴν) καὶ

$$\text{σημ.}(x\beta) = \{\text{σημ.}(x)\} \cdot \{\text{σημ.}(\beta)\} = \{\text{σημ.}(\alpha)\} \cdot \{\text{σημ.}(\beta)\} = \text{σημ.}(\alpha).$$

"Ὡστε ἡ (1) ἀληθεύει καὶ συνεπῶς, ὁ x εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

"Ἄν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο πηλίκον x', θὰ εἴχομεν x'β = α, ἄρα x'β = xβ ἢ x'β - xβ = 0 ἢ β(x' - x) = 0 καὶ ἐπειδὴ β ≠ 0, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην x' - x = 0, δηλ. x' = x.

"Ὡστε τὸ πηλίκον ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν μόνον, προσδιορίζεται δὲ συμφῶνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεῶρημα.

Πόρισμα. «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν».

Δηλ., $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$. Τοῦτο συνάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

γ') Ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ μηδενός. Εἰς τὸν ὅρισμόν τοῦ πηλίκου α/β καθὼς καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω θεῶρημα τοῦ ἑδαφίου β'), ὑπεθέσαμεν ὅτι ὁ διαιρέτης β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Καὶ τοῦτο, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν, τὸ πηλίκον α/β εἶναι ἢ ἀνύπαρκτον ἢ ἀόριστον.

Πράγματι, ἂν α ≠ 0 καὶ β = 0 τὸ πηλίκον θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε x · β = α, δηλ. ὁ x θὰ ἔπρεπε πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν νὰ δίδῃ γινόμενον διάφορον τοῦ μηδενός. Τοιοῦτος ὁμοῦς ἀριθμὸς δὲν ὑπάρχει σύμφωνα μὲ τὰ γνωστά ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 84, α'). "Ὡστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει τὸ πηλίκον α/β, δηλ. ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$, ὅταν α ≠ 0, δὲν ἔχει νόημα

ἀριθμοῦ.

Ἐὰν πάλιν εἶναι καὶ ὁ διαιρετέος α = 0 καὶ ὁ διαιρέτης β = 0, τότε ὡς πηλίκον τοῦ α διὰ β ἡμπορεῖ νὰ ληφθῇ πᾶς ἀριθμὸς. Διότι πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν (δηλ. ἐπὶ τὸν διαιρέτην) δίδει γινόμενον μηδέν (ἀριθμητικὴ μορφὴ τοῦ διαιρετέου). Συνεπῶς

τὸ πηλίκον εἶναι κάθε ἀριθμός, δηλαδή ἀόριστον. Ἐξ αὐτοῦ, ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις $\frac{0}{0}$ λέγεται ἀπροσδιόριστος μορφή.

Εἰς τὰ ἐπόμενα ὁσάκις γράφομεν τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$, θὰ ὑποθέτωμεν ὅτι $\beta \neq 0$, διότι ἄλλως τὸ σύμβολον τοῦτο δὲν ἐκφράζει ἕναν ὠρισμένον ἀριθμόν.

δ') **Ἀντίστροφοι ἀριθμοί.** Δύο ἀριθμοὶ α καὶ α' λέγονται ἀντίστροφοι ὅταν ἔχουν γινόμενον ἴσον μὲ $+1$, δηλ., $\alpha\alpha' = +1$. Συνεπῶς $\alpha' = \frac{+1}{\alpha}$, δηλ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ α εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{+1}{\alpha}$ ὅστις γράφεται καὶ $\frac{1}{\alpha}$.

ε') **Ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ τοῦ β , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦ α ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ β .**

Πράγματι τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β δίδει τὸν α :

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) \beta = \alpha \left(\frac{1}{\beta} \cdot \beta\right) = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Ὡστε τὸ $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β , δηλ. μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ (ἀφοῦ, πολ)μενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην β δίδει τὸν διαιρετέον α). Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι:

«Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἂν ἕκαστος τῶν ὄρων τοῦ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ». Δηλαδή:

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta}$$

$$\text{Διότι, } \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta} = (\alpha + \alpha' + \alpha'') \cdot \frac{1}{\beta} = (\text{κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον})$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha' \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha'' \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta}.$$

στ') **Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ:**

1ον. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ παρονομαστοῦ, ἰσοῦται μὲ δυνάμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τὴν (ἀριθμητικὴν) διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.

2ον. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ παρονομαστοῦ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίστροφον δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐχούσης ἐκθέτην τὴν (ἀριθμητικὴν) διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.

3ον. Ἐὰν οἱ ἐκθῆται τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ εἶ-
ναι ἴσοι, ἰσοῦνται μὲ 1.

Ἀπόδειξις: Ἐστω τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$. Ἐὰν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς μ εἴναι με-
γαλύτερος τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν , τότε θὰ ἔχωμεν $\mu = \nu + k$, ὅπου k φυσικὸς
τις ἀριθμὸς (ἡ διαφορὰ $\mu - \nu$) καὶ συνεπῶς:

$$\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+k} = \alpha^{\nu} \cdot \alpha^k \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\nu} \cdot \alpha^k}{\alpha^{\nu}} = \alpha^k = \alpha^{\mu-\nu}$$

Ἐὰν πάλιν ὁ ν ὑπερβαίνει τὸν μ , ἔστω κατὰ k , θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν:

$$\nu = \mu + k, \quad \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+k} = \alpha^{\mu} \cdot \alpha^k, \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^k} = \frac{1}{\alpha^k} = \frac{1}{\alpha^{\nu-\mu}}.$$

Τέλος, ἂν $\mu = 1$ τότε $\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu}$ καὶ συνεπῶς $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = 1$, ὥ.ἔ.δ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\frac{(+5)^8}{(+5)^6} = (+5)^2$, $\frac{(-3)^2}{(-3)^3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{(-4)^3}{(-4)^3} = 1$, $\frac{x^3}{x^7} = \frac{1}{x^4}$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-225. Ὑπολογίσατε τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$$(+9,81) : (-7), \quad (-1,05) : (-0,5), \quad (-3,14) : (+1,57).$$

A-226. Εὑρετε τὰ πηλικά:

$$\left(-\frac{22}{5}\right) : (-11), \quad \left(-\frac{1}{3}\right) : (+2), \quad \left(-\frac{8}{7}\right) : (+2), \quad \left(-\frac{11}{2}\right) : (+3).$$

A-227. Εὑρετε τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$$(-50) : \left(+\frac{50}{3}\right), \quad (-9) : \left(-\frac{3}{5}\right), \quad (+20) : \left(+\frac{5}{2}\right), \quad (+35) : \left(-\frac{7}{11}\right).$$

A-228. Ὑπολογίσατε τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὅταν δίδεται:

i) $\alpha = (-2) + \left(+\frac{5}{7}\right)$, $\beta = (-3) - \left(-\frac{2}{3}\right)$. ii) $\alpha = +\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

A-229. Ὑπολογίσατε τὰ πηλικά $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, $\frac{2\alpha-\beta}{\gamma-2\alpha}$ ὅταν $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{11}{2}$.

A-230. Ὑπολογίσατε τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων:

$$\frac{x+y}{x-y-1}, \quad \frac{2x-y+5}{x+3y}, \quad \frac{x-3y}{3-x-y} \quad \text{γνωρίζοντες ὅτι } x = -11/2, \quad y = -7/3.$$

A-231. Ὑπολογίσατε τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων:

$$\frac{\alpha xy}{3\alpha + x + y}, \quad \frac{\alpha x^2 + y^2}{\alpha^2 - x^2}, \quad \frac{x+y+\alpha}{x^2 + y^2 + \alpha^2} \quad \text{ὅταν } \alpha = +\frac{1}{6}, \quad x = -\frac{1}{10}, \quad y = -\frac{1}{15}.$$

A-232. Εὑρετε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν κάτωθι ἀριθμῶν:

A-233. Ποῖος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἀντίστροφον;

A-234. Ποῖοι ἀριθμοὶ ἰσοῦνται μὲ τοὺς ἀντιστρόφους τῶν;

A-235. Εὗρετε τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

$$\left\{ \frac{-\frac{8}{3}}{+\frac{5}{7}-\frac{1}{3}} + \frac{+\frac{4}{6}-2}{+\frac{7}{6}} \right\} \cdot \left\{ \frac{-\frac{7}{10}+\frac{1}{3}}{+\frac{11}{15}} - \frac{+\frac{3}{4}+1}{+\frac{1}{6}-\frac{5}{2}} \right\} = ;$$

§ 88. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα. α') Τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ἐκ-

φράζον τὸ πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β , καλεῖται ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ καὶ λόγος τοῦ α πρὸς β (βλ. § 50, δ'). Ὁ α καλεῖται ἀριθμητὴς καὶ ὁ β παρονομαστὴς ($\beta \neq 0$).

Δύο ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ἴσα, ὅταν τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ γ διὰ δ .

Π.χ. $\frac{-1,2}{0,4} = \frac{4,17}{-1,39}$. Ἐν προκειμένῳ ἰσχύει ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma. \quad (\text{βλ. § 89, i})$$

Πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα. Πράγματι, $\alpha = \frac{\alpha}{+1} = \frac{\alpha}{1}$.

Ἐπίσης, πᾶν κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι, (δηλ. ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς) εἶναι ἴσοι, ἰσοῦται μὲ $+1$, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha} = +1$ διότι $\alpha \cdot (+1) = \alpha$. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι πᾶν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ β , δηλ. $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$. Διότι ὡς εἶδομεν εἰς τὴν § 87, δ', τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β , δηλ. μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἐξ αὐτοῦ δὲ προκύπτει καὶ ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως ὁμωνύμων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta}. \quad \text{Διότι:}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha' \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha'' \cdot \frac{1}{\beta} =$$

$$= (\alpha + \alpha' + \alpha'') \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta}.$$

β') Ἰδιότητες τῶν ἀλγεβρικών κλασμάτων. Ὅλαι αἱ ιδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων αἱ ἀποδειχθεῖσαι εἰς τὰς §§ 45, 47, 48, 49, 50 ἰσχύουν καὶ διὰ τ' ἀλγεβρικά κλάσματα. Θ' ἀποδείξωμεν διὰ τ' ἀλγεβρικά κλάσματα, τὰς βασικὰς ιδιότητας ἐξ ὧν συνάγονται εὐκόλως καὶ αἱ ἄλλαι.

ι) «Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὁρους ἐνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται».

$$\Delta\eta\lambda. \text{ ἂν } \gamma \neq 0, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma} = \frac{\alpha/\gamma}{\beta/\gamma}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\alpha/\beta = x$. Τότε $\alpha = \beta x$ καὶ συνεπῶς $\alpha\gamma = (\beta x)\gamma$ ἢ $\alpha\gamma = (\beta\gamma)x$, ἄρα $\alpha\gamma/\beta\gamma = x = \alpha/\beta$.

Πόρισμα. «Δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν δύο ὁρων ἐνὸς κλάσματος, χωρὶς ἡ ἀξία του νὰ μεταβληθῇ».

Διότι ἡ ἀλλαγὴ σημείου ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ -1 .

Ἐφαρμογὴ 1η: Δυνάμεθα ν' ἀπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικά κλάσματα.

$$\text{Π. χ. } \frac{-24}{-8} = \frac{+3}{+1}, \quad \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{-10\alpha^2\beta}{-15\alpha\beta^2} = \frac{2\alpha}{3\beta},$$

$$\frac{-8x^4y^{11}}{x^6y^3} = \frac{-8y^8}{x^2}.$$

Ἐφαρμογὴ 2α: Δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ὁμώνυμα (δηλ. μὲ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν) ὁσάδῃποτε κλάσματα ἀλγεβρικά. Οὔτω, π.χ.,

$$\text{τὰ κλάσματα } \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''} \text{ μετατρέπονται ἀντιστοίχως εἰς: τὰ}$$

$$\frac{\alpha\beta'\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \frac{\alpha'\beta\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \frac{\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$$

ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Κατὰ συνέπειαν, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσῶν δῃποτε κλασμάτων μὲ ἓνα κλάσμα, ἀφοῦ προηγουμένως τὰ καταστήσωμεν ὁμώνυμα καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

$$\text{Παράδειγμα: } \frac{7-4\alpha}{5} + \frac{15+20\alpha}{-7} = \frac{11+5\alpha}{5} + \frac{4\alpha-7}{-7} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(11+5a) \cdot 2 \cdot (-7)}{5 \cdot 2 \cdot (-7)} + \frac{(4a-7) \cdot 5 \cdot (-7)}{2 \cdot 5 \cdot (-7)} + \frac{(15+20a) \cdot 5 \cdot 2}{(-7) \cdot 5 \cdot 2} = \\
 &= \frac{(11+5a) \cdot (-14) + (4a-7) \cdot (-35) + (15+20a) \cdot 10}{-70} = \\
 &= \frac{-154-70a-140a+245+150+200a}{-70} = \\
 &= \frac{-154+245+150-70a-140a+200a}{-70} = \frac{241-10a}{-70} = \frac{10a-241}{70}.
 \end{aligned}$$

ii) «Τὸ γινόμενον δύο ἀλλεβρικών κλασμάτων, ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν». Δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}, \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}.$$

Ἀπόδειξις τῆς ii. Ἐστω $\alpha/\beta = x$ καὶ $\alpha'/\beta' = x'$. Τότε, $\alpha = \beta x$ καὶ $\alpha' = \beta' x'$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha\alpha' = (\beta x)(\beta' x') \text{ ἢ } \alpha\alpha' = \beta\beta' \cdot xx'.$$

Ἄρα $\alpha\alpha'/\alpha\beta\beta' = xx' = \alpha/\beta \cdot \alpha'/\beta'$.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : } \frac{\alpha x}{\beta y} \cdot \frac{\beta \omega}{\gamma x} \cdot \frac{\gamma y}{\alpha \omega} = \frac{(\alpha x)(\beta \omega)(\gamma y)}{(\beta y)(\gamma x)(\alpha \omega)} = \frac{\alpha \beta \gamma x y \omega}{\beta \gamma \alpha \gamma x \omega} = 1.$$

$$\frac{-3a^2\beta}{2\gamma\delta} \cdot \frac{-8\gamma^3\delta^2}{12a\beta^2} = \frac{3 \cdot 8 \cdot a^2\beta\gamma^3\delta^2}{2 \cdot 12\gamma\delta a\beta^2} = \frac{\alpha\gamma^2\delta}{\beta} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} \cdot (-1) = \frac{-\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

iii) «Διὰ τὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀνεστραμμένον».

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : } \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma},$$

$$\frac{+1}{\frac{\alpha}{\beta}} = (+1) \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{+1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma},$$

$$\frac{24a^2\beta^3}{5x} : \frac{8a\beta}{10x^4} = \frac{24a^2\beta^3}{5x} \cdot \frac{10x^4}{8a\beta} = \frac{24 \cdot 10 \cdot a^2\beta^3x^4}{8 \cdot 5 \cdot a\beta x} = 6a\beta^2x^3.$$

Ἀπόδειξις τῆς iii. Ἐστω $\beta/\gamma = x$. Τότε $\beta = \gamma x$. Θέλομεν νὰ δείξωμεν ὅτι :

$$\alpha : \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} \text{ ἢ } \frac{\alpha\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta/\gamma}.$$

Τοῦτο ἀληθεύει, διότι ἔχομεν κατὰ σειρὰν :

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma x} = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta/\gamma}.$$

iv) «Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὄροι τοῦ ὑψωθοῦν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην». Δηλαδή :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}. \quad (\beta\lambda. \S 49, iv)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$\left(\frac{2a^3xy^4}{3ax^2y^2}\right)^2 = \left(\frac{2a^2y^2}{3x}\right)^2 = \frac{(2a^2y^2)^2}{(3x)^2} = \frac{2^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (y^2)^2}{3^2 \cdot x^2} = \frac{4a^4y^4}{9x^2},$$

$$\left(\frac{x^3y}{a\beta^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3\beta^2}{xy^2}\right)^2 = \frac{(x^3y)^3}{(a\beta^2)^3} \cdot \frac{(a^3\beta^2)^2}{(xy^2)^2} = \frac{x^9y^3a^6\beta^4}{a^3\beta^6x^2y^4} = \frac{a^3x^7}{\beta^2y}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-236.—Εκτελέσατε τὰς σημειουμένας πράξεις ἀπλοποιούντες τὰ τε-
λικά ἐξαγόμενα :

$$\left(\frac{3x^2y^3}{2xy^4}\right)^2 : (xy^3)^3, \quad (-5x^2y^2)^3 : \left(\frac{10x^4y^2}{3xy}\right)^2.$$

A-237.—Εάν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{v-1}, a_v$ πραγματικοί ἀριθμοὶ $\neq 0$, εὑρετε τὸ
γινόμενον τῶν v κλασμάτων :

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_{v-1}}{a_v}.$$

A-238.—Ἐπαληθεύσατε ὅτι, ἂν

$$x = \frac{2\beta^2 - \alpha^2 + \gamma^2}{3\alpha}, \quad y = \frac{2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{3\beta}, \quad \text{θὰ ἔχωμεν: } \frac{x+\alpha}{y+\beta} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

A-239.—Εκτελέσατε τὰς κάτωθι προθέσεις ἀλγεβρικών κλασμάτων τρέ-
ποντες αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ δίδοντες εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τὴν ἀπλουστάτην
του μορφήν.

$$\frac{3a-1}{7} + \frac{8-5a}{14} - 2a, \quad \frac{-x+2}{4} + \frac{5x-3}{8} + \frac{x}{2},$$

$$\frac{3\beta+\alpha}{a} - \frac{9\beta-\alpha}{2a} + \frac{8a-5\beta}{4a}, \quad \frac{x+2y}{xy} - \frac{4x+y}{3xy} + \frac{9x-8y}{6xy}.$$

A-240.—Εάν $x \neq 0$ δεῖξατε ὅτι :

$$\frac{3x+5y}{x-y} = \frac{3+5\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}, \quad \frac{2x^2+y^2}{xy+y^2} = \frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{3xy-y^2+4x^2}{x^2+7y^2} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4}{1+7\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad \frac{3x^2-5xy+2y^2}{x^2+xy+4y^2} = \frac{3-5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{x^3-5y^3}{4x^2y} = \frac{1-5\left(\frac{y}{x}\right)^3}{4\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

B-241.—Εάν $\frac{y}{x} = \frac{-2}{3}$ ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἐκάστου τῶν
κλασμάτων :

$$\frac{3x-y}{x^2}, \quad \frac{5x^2-xy+y^2}{x^2}, \quad \frac{x^3-2y^3}{x^2y}$$

§ 89. Ἀναλογίαι. — α') Καλεῖται ἀναλογία ἡ ἰσότης δύο ἀλγεβρικῶν κλασμάτων (ἢ λόγων), δηλ. ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν οἱ α καὶ δ καλοῦνται ἄκροισι, ἐνῶ οἱ β καὶ γ , μέσοι. Οὕτω, π.χ., ἡ ἰσότης $\frac{8}{-2} = \frac{-12}{3}$ εἶναι μία ἀναλογία, ἐπίσης ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$, διότι γράφεται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{1}$.

Εἰς κάθε ἀναλογίαν ἰσχύουν τὰ ἐπόμενα θεωρήματα, ὑπὸ τὸν γενικὸν περιορισμὸν ὅτι πάντες οἱ παρονομαστές τὸσον τῆς δοθείσης, ὅσον καὶ τῶν ἀποδεικτικῶν ἀναλογιῶν εἶναι $\neq 0$.

i) «Τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων».

$$\text{Δηλαδή, } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \beta\gamma = \alpha\delta.$$

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι, } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot (\beta\delta) = \frac{\gamma}{\delta} \cdot (\beta\delta) \Rightarrow \\ &\frac{\alpha\beta\delta}{\beta} = \frac{\gamma\beta\delta}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \end{aligned}$$

Ἀντίστροφον. Ἐὰν $\beta\gamma = \alpha\delta$, τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

δηλ. οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, συνιστοῦν ἀναλογίαν.

Ὡστε, πᾶσα ἰσότης τῆς μορφῆς $\alpha\beta = \gamma\delta$ ($\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$), δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἀναλογία.

ii) «Δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους».

$$\text{Δηλ., ἂν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ καθὼς καὶ } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha\delta = \beta\gamma$ διὰ τοῦ γινομένου $\gamma\delta$ ἢ τοῦ $\beta\alpha$.

iii) «Δυνάμεθα ν' ἀντιστρέψωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀναλογίας».

$$\text{Δηλ. ἂν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε καὶ } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Διότι ἐκ τῆς δοθείσης λαμβάνομεν $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ (ἐναλλαγή τῶν ἄκρων). Καὶ ἐκ τῆς νέας, δι' ἐναλλαγῆς τῶν μέσων, λαμβάνομεν $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$ ἤτοι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$.

iv) «Δυνάμεθα εἰς τοὺς ἀριθμητὰς νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τοὺς παρονομαστές, ἢ εἰς τοὺς παρονομαστὰς νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς».

Δηλαδή, ἂν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε θὰ ἰσχύουν ἐπίσης αἱ ἀναλογίαι:

$$(1) \quad \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$$

$$(2) \quad \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$$

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \frac{\gamma}{\delta + \gamma}$$

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma}{\delta - \gamma}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς (1) προσθέτομεν τὸ 1 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης, ὁπότε

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{\gamma}{\delta} \quad \eta \quad \frac{\beta}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} \quad \eta \quad \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς (2) ἀφοιροῦμεν τὴν μονάδα ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.
 $= \frac{\gamma}{\delta}$. Διὰ τὴν δειχθῆ ἢ (3), ἀντιστρέφωμεν τὴν δοθεῖσαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$(5) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Κατόπιν ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν (5) τὴν ιδιότητα (1) καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{\beta + \alpha}{\alpha} = \frac{\delta + \gamma}{\gamma}$$

Ἀντιστρέφωμεν, τέλος τὴν τελευταίαν ταύτην καὶ λαμβάνομεν τὴν (3).

Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ (4).

$$v) \text{ «} \text{Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε καὶ } \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta} \text{»}.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν, διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2).

$$\text{Μέσος ἀνάλογος. Ἐὰν μία ἀναλογία εἶναι τῆς μορφῆς } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

τότε ὁ β καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν α καὶ γ. Θὰ εἶναι δὲ τότε, (ιδιότης i),

$$(6) \quad \beta^2 = \alpha\gamma.$$

Ἐκ τῆς (6) ἔπεται ὅτι: ὁ μέσος ἀνάλογος δύο δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο δοθέντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 4 καὶ 9, διότι $6^2 = 4 \cdot 9$, $4:6 = 6:9$. Καὶ ὁ —6 εἶναι ἐπίσης μέσος ἀνάλογος τῶν 4 καὶ 9.

Μία ἄλλη ὀνομασία τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι «μέσος γεωμετρικός». Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

β') Μία ιδιότης τῶν ἴσων κλασμάτων. Θεώρημα: «Ἐὰν ὁσαδήποτε ἀλγεβρικά κλάσματα εἶναι ἴσα, τότε τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἴσων κλασμάτων καὶ παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ κλάσματα ταῦτα».

Φυσικά, τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν ὑποτίθεται $\neq 0$.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν, π.χ. τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}$. Ἀς παριστήσωμεν μὲ λ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν ἴσων τούτων κλασμάτων, δηλ. λ θὰ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β ἀλλὰ καὶ τοῦ α' διὰ β', κ.ο.κ. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\alpha = \beta\lambda$, $\alpha' = \beta'\lambda$, $\alpha'' = \beta''\lambda$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \beta\lambda + \beta'\lambda + \beta''\lambda \quad \eta \quad \alpha + \alpha' + \alpha'' = (\beta + \beta' + \beta'')\lambda$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο δεικνύει, ὅτι τὸ λ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha + \alpha' + \alpha''$ διὰ τοῦ $\beta + \beta' + \beta''$, δηλαδή ὅτι:

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta + \beta' + \beta''} = \lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$1) \quad \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-8}{16} = \frac{3}{-6} = \frac{-1+2-8+3}{2-4+16-6} = \frac{-4}{8}.$$

$$2) \text{ Ἐὰν } \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \text{ τότε καὶ } \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\gamma-\delta+\gamma+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Παρατήρησις 1η. Ἄν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, τότε ἡ ἀνωτέρω ἰσότης $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \lambda(\beta + \beta' + \beta'')$ δεικνύει ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἴσων κλασμάτων θὰ εἶναι ἐπίσης μηδέν.

Πόρισμα: «Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''} = \lambda$, τότε καὶ $\frac{k\alpha + \rho\alpha' + \mu\alpha''}{k\beta + \rho\beta' + \mu\beta''} = \lambda$, ὅπου k, ρ, μ τυχόντες ἀριθμοὶ πάντες δὲ οἱ παρονομαστῶν $\neq 0$ ».

Διότι πρὶν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς, δυνάμεθα προηγουμένως πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῶν ἴσων κλασμάτων, ἐπὶ τὸν αὐτὸν τυχόντα ἀριθμὸν $\neq 0$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{k\alpha}{k\beta} = \frac{\rho\alpha'}{\rho\beta'} = \frac{\mu\alpha''}{\mu\beta''} = \frac{k\alpha + \rho\alpha' + \mu\alpha''}{k\beta + \rho\beta' + \mu\beta''}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}$, τότε καὶ τὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha - \alpha' - \alpha''}{\beta - \beta' - \beta''}, \quad \frac{\alpha - \alpha' + \alpha''}{\beta - \beta' + \beta''}, \quad \frac{\alpha + \alpha' - \alpha''}{\beta + \beta' - \beta''}$$

εἶναι ὅλα ἴσα πρὸς τὰ ἀρχικά.

Διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $k=1, \rho=-1, \mu=-1$, κ.τ.λ.

$$2. \text{ Ἐὰν } \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x+2} \text{ τότε } \frac{x+2}{x-1} = \frac{x+2-x+1}{x-1-x+2} = \frac{3}{-1} = -3.$$

$$3. \text{ Ἐάν } \frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \text{ νὰ δειχθῇ ὅτι } \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+\beta^3+\gamma^3} = \frac{(x+y+z)^3}{(a+\beta+\gamma)^3}.$$

$$\text{Ἀποδείξεις. Θὰ ἔχωμεν : } \frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{x+y+z}{a+\beta+\gamma} \quad (1).$$

Ἐπίσης οἱ κύβοι τῶν ἴσων κλασμάτων θὰ εἶναι ἴσοι, συνεπῶς.

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{y^3}{\beta^3} = \frac{z^3}{\gamma^3} = \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+\beta^3+\gamma^3}.$$

Ἐχομεν λοιπὸν (λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν (1)) :

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+\beta^3+\gamma^3} = \left(\frac{x}{a} \right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{a+\beta+\gamma} \right)^3 = \frac{(x+y+z)^3}{(a+\beta+\gamma)^3}.$$

Παρατήρησις 2α. Διὰ τῆς μεθόδου δι' ἣς ἀποδείξαμεν τὸ θεώρημα τῶν ἴσων κλασμάτων δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ διαφόρους ἄλλας σχέσεις ἀπορροούσας ἀπὸ τὴν ἰσότητα δεδομένων κλασμάτων.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Ἐάν } \frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \text{ νὰ δειχθῇ ὅτι}$$

$$\frac{a^3\beta+2\gamma^2\varepsilon-3a\varepsilon^2\zeta}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3} = \frac{a\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta} \gg.$$

Λύσις. Παριστάνομεν τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν ἴσων κλασμάτων μὲ λ, δηλαδή $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \lambda$, ὁπότε θὰ εἶναι $a=\beta\lambda$, $\gamma=\delta\lambda$, $\varepsilon=\zeta\lambda$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, τὰ α, γ, ε διὰ τῶν ἴσων τῶν, βλ, δλ, ζλ ἀντιστοίχως ὁπότε τοῦτο γράφεται διαδοχικῶς :

$$\frac{(\beta\lambda)^3\beta+2(\delta\lambda)^2(\zeta\lambda)-3(\beta\lambda)(\zeta\lambda)^2\zeta}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3} = \frac{\beta^3\lambda^3\beta+2\delta^2\lambda^2\zeta\lambda-3\beta\lambda\zeta^2\lambda^2\zeta}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3} =$$

$$= \frac{\beta^4\lambda^3+2\delta^2\lambda^3\zeta-3\beta\zeta\lambda^3}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3} = \frac{\lambda^3(\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3)}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3} = \lambda^3 = \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{a\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta},$$

δηλ. ἰσοῦται μὲ τὸ δεῦτερον μέλος.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-242. Ἐάν $\frac{x}{y} = \frac{+5}{+7}$ εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἐκάστου τῶν κλασμάτων :

$$\frac{x}{x+y}, \quad \frac{x-y}{y}, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{x}{2y}, \quad \frac{x-2y}{x+2y}.$$

A-243. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν, ἕκαστος μέσος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διὰ τοῦ ἄλλου μέσου· ἕκαστος ἄκρος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου. Ἐφαρμόσατε τοῦτο πρὸς ἄμεσον εὑρεσιν τοῦ x ἐκ τῆς $\frac{20}{x} = \frac{5}{3}$ ἢ τῆς $\frac{20}{5} = \frac{12}{x}$.

B-244. Βάσει τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν δεῖξατε ὅτι, ἂν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{a-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\beta}{\delta}, \quad (a+\beta)(\gamma-\delta) = (a-\beta)(\gamma+\delta), \quad \frac{a^2+\beta^2}{a^2} = \frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma^2}, \quad \frac{2a-4\beta}{5\beta} = \frac{2\gamma-4\delta}{5\delta}.$$

B-245. Ἐάν $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{7x-4y}{3x+y}, \text{ καθὼς καὶ τοῦ } \frac{3xy-y^2}{x^2+y^2}.$$

B-246. Ἐάν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{\pi a^2 + k\beta^2}{\pi a^2 - k\beta^2} = \frac{\pi \gamma^2 + k\delta^2}{\pi \gamma^2 - k\delta^2}$, ὅπου π, k αὐθαίρετοι, ἀλλὰ $(\pi a^2 - k\beta^2)(\pi \gamma^2 - k\delta^2) \neq 0$.

A-247. Ἐάν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $a + \delta = \beta + \gamma + \frac{(a-\beta)(a-\gamma)}{a}$.

B-248. Δείξτε ὅτι ἂν ὁ γ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν a καὶ β θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{a}{\beta} = \frac{(a+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}.$$

B-249. Χρησιμοποιοῦντες ιδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, δείξτε ὅτι, ἔαν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης :

$$(2\mu a + 6\mu\beta + 3\nu\gamma + 9\nu\delta)(2\mu a - 6\mu\beta - 3\nu\gamma + 9\nu\delta) = \\ = (2\mu a - 6\mu\beta + 3\nu\gamma - 9\nu\delta)(2\mu a + 6\mu\beta - 3\nu\gamma - 9\nu\delta),$$

ὅπου $\mu \neq 0, \nu \neq 0$, τότε οἱ a, β, γ, δ συνιστοῦν ἀναλογία.

B-250. Ἐάν $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, δείξτε ὅτι τότε :

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{a^4 + \beta^4 + \gamma^4} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}.$$

A-251. Ἐάν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δείξτε ὅτι τότε :

$$\frac{2a^4\beta^2 + 3a^2\gamma^2 + 5\gamma^4\delta}{2\beta^6 + 3\beta^2\delta^2 + 5\delta^4} = \frac{a^4}{\beta^4}.$$

B-252. Ἐάν ὑφίστανται αἱ ἰσότητες :

$$\frac{x}{k+p-\pi} = \frac{y}{p+\pi-k} = \frac{z}{\pi+k-p}$$

ἀποδείξτε ὅτι τότε θὰ εἶναι : $(k-p)x + (p-\pi)y + (\pi-\mu)z = 0$.

B-253. Ἐάν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξτε ὅτι θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$\frac{a^2\gamma + a\gamma^2}{\beta^2\delta + \beta\delta^2} = \frac{(a+\gamma)^3}{(\beta+\delta)^3}.$$

B-254. Ἐάν $\frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξτε ὅτι τότε :

$$(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (a\beta + \beta\gamma + \gamma\delta)^2.$$

Καὶ γενικῶς, ἔαν $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{v-1}}{a_v} = \frac{a_v}{a_{v+1}}$, ὅπου $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{v+1}$ τυχόντες ἀριθμοὶ $\neq 0$, τότε θὰ ἔχωμεν καὶ

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_v^2)(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_{v+1}^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_v a_{v+1})^2.$$

B-255. Ἐάν $\frac{\mu}{x} = \frac{\nu}{y} = \frac{\rho}{z}$ καὶ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, δείξτε ὅτι τότε :

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} + \frac{\rho^2}{\gamma^2} = \frac{\mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

B-256. Ἐάν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{x^2 + \alpha^2}{x + \alpha} + \frac{y^2 + \beta^2}{y + \beta} + \frac{z^2 + \gamma^2}{z + \gamma} = \frac{(x + y + z)^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2}{(x + y + z) + (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

§ 90. Ταυτότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μέ τās ἀπολύ-

τους τιμάς των. Ἐάν συγκρίνωμεν ὑπολογισμούς ἐκτελουμένους μεταξὺ ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ὁμοίους ὑπολογισμούς ἐκτελουμένους μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν ἀριθμῶν, διαπιστοῦμεν ὅτι οὐδεμία οὐσιαστικὴ διαφορὰ ὑπάρχει.

Οὕτω, π.χ.:

$$\begin{array}{rcll} 2+5+7=14 & \text{ἐνῶ} & (+2)+(+5)+(+7)=+14 & \\ 12-7=5 & \text{»} & (+12)-(+7)=+5 & \\ 3 \cdot 7=21 & \text{»} & (+3)(+7)=+3 \cdot 7=+21 & \\ \frac{12}{3}=4 & \text{»} & \frac{+12}{+3}=+4 & \end{array}$$

Δηλαδή τὰ ἀνωτέρω δεξιὰ ἀναγραφόμενα ἐξαγόμενα εὐρίσκονται καὶ ἐάν ἐργασθῶμεν μέ ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀρκεῖ εἰς τὸ ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον νὰ προτάξωμεν τὸ +.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: «Πᾶσα πρᾶξις μεταξὺ θετικῶν ἀριθμῶν, δί-
δει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ὡς ἐάν ἐγένετο μεταξὺ τῶν ἀπολύτων τιμῶν
τῶν ἀριθμῶν τούτων, (δηλ. ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς), ἀρκεῖ εἰς τὸ
ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον νὰ τεθῇ τὸ πρόσημον +. (Ὑποτίθεται ὅτι ἡ
ἀντίστοιχος ἀριθμητικὴ πρᾶξις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ)».

Κατόπιν τούτων, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἐπομένῃν παραδοχὴν, (ἢ σύμβα-
σιν), ἡ ὁποία διευκολύνει τοὺς ὑπολογισμούς χωρὶς νὰ ἔρχεται εἰς
σύγκρουσιν μέ τοὺς κανόνες τῶν πράξεων.

Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἰσοῦται μέ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν του.

Ἡ ἄλλως, τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ταυτίζεται μέ τὸ σύ-
νολον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

Οὕτω, οἱ μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ τῆς Ἀλγέβρας ταυτίζονται
μέ τοὺς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐπομένως ἐκ τῶν δύο τάξεων
τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν τὰς ὁποίας μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν μόνον οἱ
ἀρνητικοὶ παραμένουν ὡς νέοι ἀριθμοὶ ἐνῶ τὸ μηδὲν καὶ οἱ θετι-
κοί, (δηλ. οἱ μὴ ἀρνητικοί), συμπίπτουν μέ τοὺς γνωστούς
ἤδη ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς, οἱ ὅποιοι οὕτω, ἀποτελοῦν ὑποσύνολ-
ον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς δέ, πᾶν μέγεθος τὸ ὁποῖον μετρᾶται μὲ ἓνα θετικὸν ἀριθμὸν, δύναται νὰ μετρᾶται καὶ μὲ ἓνα ἀριθμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς.

Οὕτω λοιπὸν κατὰ τὴν ἀνωτέρω σύμβασιν θὰ εἶναι :

$$+2=2, \quad +15=15, \quad +\frac{1}{12}=\frac{1}{12}, \quad (+5) (+7)=5-7=-2.$$

Διὰ τῆς συμβάσεως ταύτης ὀρισμέναι παραστάσεις τῆς Ἀριθμητικῆς μὴ ἔχουσιν νόημα ἀποκτοῦν τοιοῦτον. Π.χ. ἡ παράστασις 10-80 εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν οὐδένα ἀριθμὸν ἐκφράζει, (ἀδύνατος ἀφαίρεσις), εἰς τὴν Ἀλγεβρᾶν ὅμως παριστᾷ τὸν -70. Ὁμοίως, ἡ 7-9+2-5+10 μὲ τὴν Ἀριθμητικὴν δὲν προσδιορίζεται ἐνῶ μὲ τὴν Ἀλγεβρᾶν παριστᾷ τὸν 5.

§ 91. Δεύτερος ὁρισμὸς τῆς ἀπολύτου τιμῆς. Εἰς τὴν § 71 ὠρίσαμεν τί εἶναι ἀπόλυτος τιμὴ σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Τώρα, κατόπιν τῆς ταυτίσεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μὲ τοὺς ἀπολύτους, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἓνα δεύτερον ὁρισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἄς λάβωμεν πρὸς τοῦτο ἓνα συγκεκριμένον ἀριθμὸν, π.χ. τὸν +5. Ἐχομεν $|+5| = 5$ συμφώνως μὲ τὸν πρῶτον ὁρισμὸν τῆς § 71α'. Ἐπίσης ἔχομεν $5=+5$ συμφώνως μὲ τὴν σύμβασιν.

Ἐπομένως προκύπτει, $|+5|=+5$, δηλαδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ +5 εἶναι ὁ ἴδιος ὁ +5. Καὶ γενικῶς :

$$(1) \quad | \text{θετικοῦ ἀριθμοῦ} | = \text{ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς}$$

Διὰ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν -5, ἔχομεν, $|-5|=5$, ἀλλὰ $5=+5$ καὶ $+5=-(-5)$, δηλ. $|-5|=-(-5)$, δηλ. ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -5 εἶναι ὁ ἀντίθετος ἀριθμὸς-(-5). Καὶ γενικῶς :

$$(2) \quad | \text{ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ} | = \text{ὁ ἀντίθετός του.}$$

Οὕτω προκύπτει ὁ 2ος ὁρισμὸς τῆς ἀπολύτου τιμῆς :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι αὐτὸς οὗτος δ x ὅταν εἶναι θετικὸς, ἢ ὁ ἀντίθετός του, $-x$, ὅταν δ x εἶναι ἀρνητικὸς, ἢ τὸ μηδέν, ὅταν $x=0$.

Ὡστε ἔχομεν :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ἐὰν } x \text{ θετικὸς τότε } |x| = x. \\ \text{Ἐὰν } x \text{ ἀρνητικὸς τότε } |x| = -x. \\ \text{Ἐὰν } x \text{ μηδέν τότε } |x| = 0. \end{array} \right.$$

Προφανῶς ἡ $|x|$ οὐδέποτε εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς.

Ὁ δεύτερος οὗτος ὁρισμὸς εἰσάγει τὴν $| |$ εἰς τὴν Ἀλγεβρᾶν, εἶναι Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

πλέον εὔχρηστος εἰς τὰς πράξεις καὶ χρησιμοποιεῖται σχεδὸν πάντοτε εἰς τὴν "Αλγεβραν.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν :

$$|\sqrt{2}-7|+\frac{2}{3}|6-3|+|\sqrt{2}-1| \text{ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:}$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}-7$ εἶναι ἀρνητικός, ἡ $|\sqrt{2}-7| = -(\sqrt{2}-7) = 7-\sqrt{2}$.

Ἐπειδὴ ὁ $6-3$ εἶναι θετικός, ἡ $|6-3| = 6-3$. Ἐπειδὴ ὁ $\sqrt{2}-1$ εἶναι θετικός
 $\Rightarrow |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$.

Ὡστε ἡ ἀνωτέρω παράστασις ἰσοῦται μὲ :

$$7-\sqrt{2}+\frac{2}{3}(6-3)+\sqrt{2}-1=7-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-1=7+2-1=8.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-257. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως :

$$|0,14-\{3,14-\sqrt{2}|+|1-\sqrt{2}|\}|=;$$

B-258. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως :

$$-\left(-\frac{1}{0,5}\right)^2+\left(\frac{1}{0,2}\right)^3-\{5-\sqrt{80}|+|16-\sqrt{80}|\}^2.$$

B-259. Ποιοὶ ἀριθμοὶ πληροῦν τὴν ἰσότητα $|x-3|=7$ καὶ ποιοὶ τὴν ἰσότητα $2|x|+x=3$;

B-260. Νὰ δεიχθῇ ὅτι i) $x^2=|x|^2$, ii) $|x|+3x^2=|x|\cdot\{1+3|x|\}$.

B-261. Βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα

$$\frac{|x|+3x^2}{3|x|+1}.$$

B-262. Ἐξαγάγετε κοινούς παράγοντας καὶ τελικῶς μετατρέψατε εἰς γινόμενον δύο παραστάσεων τὴν παράστασιν : $xy+|xy|-|x|y-x|y|$.

B-263. Νὰ εὑρεθῇ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀληθεύει :

$$2n+\frac{(-3)^{2n+5}}{|(-3)^{2n+5}|}=\left|\left(\frac{5}{7-\frac{49}{5}}+\frac{7}{5-\frac{25}{7}}\right)\cdot\frac{-22}{-\frac{25}{7}+\frac{49}{5}}\right|+121-\{6-\sqrt{73}|+17-\sqrt{73}\}^2.$$

§ 92. Τὸ σύνολον A_k τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας.

α') Οἱ ἀριθμοὶ: $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \dots$ (n φυσικὸς) λέγονται ἀκεραῖοι τῆς Ἀλγέβρας ἢ Ἀλγεβρικοὶ ἀκεραῖοι ἢ ἀπλῶς **ἀκέραιοι**. Εἰς τὴν "Αλγεβραν, δηλ. ἐννοοῦμεν ὡς ἀκεραίους, ὅλους τοὺς θετικούς ἀκεραίους ἢ φυσικούς ἀριθμούς, $1, 2, 3, 4, \dots$, ὅλους τοὺς ἀρνητικούς ἀκεραίους, $-1, -2, -3, -4, \dots$ (ἀντιθέτους τῶν προηγουμένων) καὶ τὸ μηδέν. Τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν ἀκεραίων θὰ παριστῶμεν μὲ A_k .

Ὡς ἐκ τούτου, ὅταν λέγομεν ὅτι ἀκεραῖοι τῆς Ἀλγέβρας, ἐπεκτείνοντα

καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους τῆς Ἀλγέβρας μὲ μικρὰς ἐνίοτε τροποποιήσεις. Οὕτω :

Διαιρετότης. Οἱ ὁρίσμοι εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ τοὺς γνωστοὺς ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς (§ 32), μόνον ποὺ ἔχομεν ἐδῶ καὶ ἀρνητικούς διαιρέτας. Ὁ ἀλγεβρικός ἀκέραιος $+4$ ἔχει π.χ. ὡς διαιρέτας τοὺς $+1, -1, +2, -2, +4, -4$, τοὺς αὐτοὺς δὲ ἀκριβῶς διαιρέτας ἔχει καὶ ὁ ἀκέραιος -4 .

Πρῶτος, λέγεται ἓνας ἀκέραιος p τῆς Ἀλγέβρας $\neq 0$ καὶ $\neq \pm 1$, ὅταν ἔχη ὡς μόνους διαιρέτας τοὺς ± 1 καὶ $\pm p$. Οὕτω οἱ «πρῶτοι» ἀκεραῖοι τῆς Ἀλγέβρας εἶναι οἱ $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \dots$

Τὸ ὑπόλοιπον u τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου a διὰ τοῦ ἀκεραίου $\beta \neq 0$, εἶναι ἀκέραιος μὴ ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου β , πληρῶν τὴν ἰσότητά :

$$(1) \quad a = \beta\pi + u, \quad 0 \leq u < |\beta|, \quad \pi \text{ ἀκέραιος}$$

(βλ. § 30 (1)). Οὕτω, π.χ., ἡ (ἀλγοριθμικὴ) διαίρεσις τοῦ -37 διὰ $+8$, δίδει ὑπόλοιπον $+3$ καὶ πηλίκον -5 ,

$$-37 = (+8)(-5) + 3.$$

$$(37 = 8 \cdot 4 + 5 \Rightarrow -37 = 8 \cdot (-4) - 5 \Rightarrow -37 = 8(-4) - 5 + 8 - 8 = 8(-4) + 8(-1) + 3 = 8(-4 - 1) + 3 = 8(-5) + 3).$$

Ἄλλα παραδείγματα διαιρέσεως (ἀλγοριθμικῆς) εἶναι :

$$\text{τοῦ } -17 \text{ διὰ } -7, \quad -17 = (-7) \cdot (+3) + 4 \quad (\text{πηλίκον } +3, \text{ ὑπόλ. } +4)$$

$$\text{τοῦ } -7 \text{ διὰ } +11, \quad -7 = 11 \cdot (-1) + 4 \quad (\text{πηλίκον } -1, \text{ ὑπόλ. } +4)$$

$$\text{τοῦ } -50 \text{ διὰ } -22, \quad -50 = (-22) \cdot 3 + 16 \quad (\text{πηλίκον } 3, \text{ ὑπόλ. } +16)$$

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, εἶναι φυσικά, ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν θετικῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν δοθέντων καὶ εὐρίσκεται ὅπως ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἀντικαθιστωμένων τῶν ἀκεραίων διὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των (βλ. § 33).

Τὸ ἐλάχιστον θετικὸν κοινὸν πολλαπλάσιον, δεδομένων ἀκεραίων εὐρίσκεται ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἀντικαθιστωμένων τῶν ἀκεραίων διὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των (§ 34, § 37, ε').

Οἱ σχετικῶς πρῶτοι, ὀρίζονται ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν (§ 35) καὶ πάντα τὰ θεωρήματα τῆς (§ 35), ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους τῆς Ἀλγέβρας, ὡς εἶναι ἀμεσῶς προφανές.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-264. Ἐστω k ἀλγεβρικός ἀκέραιος. i) Δείξατε ὅτι ὁ k δύναται νὰ λάβῃ μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς μορφάς: 3λ ἢ $3\lambda+1$ ἢ $3\lambda-1$ ὅπου λ ἀλγεβρικός ἀκέραιος. ii) Δείξατε ὅτι ὁ k δύναται νὰ λάβῃ μίαν ἀπὸ τὰς 5 μορφάς: 5λ , $5\lambda+1$, $5\lambda+2$ ὅπου λ ἀκέραιος.

B-265. Ἐὰν ὁ k διατρέχῃ ὅλους τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀκεραίους καὶ καλέσωμεν E_1 τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $2k + \frac{1}{2}$, E_2 τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $2k - \frac{1}{2}$ καὶ E_3 τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\frac{2k+1}{2}$ δεῖξατε ὅτι

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 = E_3.$$

B-266. Ἐὰν E_1 = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $a + 2k$ ὅπου a δεδομένος πραγματικός ἀριθμὸς καὶ k διατρέχῃ ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς, $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, E_2 = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $2k + 1 - a$ καὶ E_3 = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $(-1)^k a + k$ δεῖξατε ὅτι: $E_1 \cup E_2 = E_3$. (Τὸ σύμβολον $(-1)^k$ ὅταν k ἀρνητικός ἀκέραιος, ὀρίζεται εἰς τὴν § 94).

*** 93. Ἀριθμητικαὶ ἰσοδυναμίαι.**—Λέγομεν ὅτι δύο ἀκέραιοι α καὶ β εἶναι ἰσοδύναμοι (ἢ ἰσοτιμοὶ) ὡς πρὸς μέτρον (modulo) μ ὅπου $\mu \in A_k$, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ μ .

Γράφομεν δὲ τότε:

$$(1) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \quad (\alpha \text{ ἰσοδύναμος } \beta, \text{ modulo } \mu).$$

Ἡσχέσις (1) καλεῖται ἰσοδυναμία ἢ ἰσοτιμία (congruence) καὶ δύναται νὰ γραφῇ: $\alpha - \beta = \text{πολ. } \mu$ ἢ $\alpha = \beta + \text{πολ. } \mu$. Προφανῶς, ἡσχέσις τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι μεταβατική:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \beta \equiv \gamma \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \pmod{\mu}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $7 \equiv -1 \pmod{8}$, $7 \equiv 1 \pmod{2}$, $-35 \equiv -2 \pmod{11}$, πᾶς περιττός $\equiv 1 \pmod{2}$, πᾶς ἄρτιος $\equiv 0 \pmod{2}$, $\gamma \equiv \gamma \pmod{\mu}$, ὅπου γ τυχὸν ἀκέραιος καὶ μ οἷονδήποτε μέτρον. (Διότι $\gamma - \gamma = 0 = \text{πολ. } \mu$).

Ἰδιότητες τῶν ἰσοτιμιῶν:

$$i) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow (\alpha \pm \alpha') \equiv (\beta \pm \beta') \pmod{\mu}$$

$$\alpha' \equiv \beta'$$

καὶ εἰδικώτερον:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha \pm \gamma \equiv \beta \pm \gamma \pmod{\mu}.$$

$$ii) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha \alpha' \equiv \beta \beta' \pmod{\mu}$$

$$\alpha' \equiv \beta'$$

καὶ ὡς πορίσματα:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha^v \equiv \beta^v \pmod{\mu}, \quad v \in \Phi$$

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha \gamma \equiv \beta \gamma \pmod{\mu}.$$

$$iii) \quad \alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \iff \alpha \gamma \equiv \beta \gamma \pmod{\gamma \mu}, \quad \gamma \neq 0.$$

$$iv) \quad \alpha \gamma \equiv \beta \gamma \pmod{\mu} \iff \alpha \equiv \beta \pmod{\mu}.$$

μ πρῶτος πρὸς γ

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω εἶναι ἀπλούσταται.

Διὰ τὴν i): Ἐκ τῶν ὑποθέσεων προκύπτει ὅτι $\alpha = \beta + \text{πολ.}\mu$, $\alpha' = \beta' + \text{πολ.}\mu$
 $\Rightarrow \alpha \pm \alpha' = \beta \pm \beta' + \text{πολ.}\mu \Rightarrow (\alpha \pm \alpha') - (\beta \pm \beta') = \text{πολ.}\mu$.

Διὰ τὴν ii): Ἐκ τῶν ὑποθέσεων προκύπτει: $\alpha\alpha' = (\beta + \text{πολ.}\mu)(\beta' + \text{πολ.}\mu) =$
 $= \beta\beta' + \beta\text{πολ.}\mu + \beta'\text{πολ.}\mu + \text{πολ.}\mu.\text{πολ.}\mu = \beta\beta' + \text{πολ.}\mu \Rightarrow \alpha\alpha' - \beta\beta' = \text{πολ.}\mu$.

Διὰ τὴν iii): Ἐκ τῆς $\alpha = \beta + \lambda\mu \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma + \lambda.\gamma\mu \Rightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma = \text{πολ.}(\gamma\mu)$.
 (ὅπου λ καὶ $\gamma \in A_k$). Καὶ ἀντιστρόφως.

Διὰ τὴν iv): Ἐκ τῆς $\alpha\gamma - \beta\gamma = \lambda\mu$ ἔπεται ὅτι ὁ γ διαιρεῖ τὸ $\lambda\mu$. Ἐπειδὴ δὲ
 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν μ , θὰ διαιρῇ τὸν λ ἄρα $\lambda = k\gamma$ καὶ ἡ ἰσότης γίνεται
 $\alpha\gamma - \beta\gamma = k\gamma\mu \Rightarrow \alpha - \beta = k\mu \Rightarrow \alpha \equiv \beta \pmod{\mu}$. Καὶ ἀντιστρόφως.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. 1) Ὁ ἀριθμὸς $\alpha^2 + \beta^2$ διαιρεῖται διὰ 7, τότε καὶ μόνον,
 ὅταν οἱ α καὶ β εἶναι ἀμφότεροι διαιρετοὶ διὰ 7.

Ἀπόδειξις. Οἰσδῆποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀκέραιος α , ἰσχύει:

$$\alpha \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}.$$

(Διότι $\alpha = \text{πολ}7 + \nu$ ὅπου $\nu = 0$ ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6. Ἐὰν $\nu = 4$ ἢ
 5 ἢ 6 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντιστοίχως, $\alpha = \text{πολ}7 + 7 - 3$, $\alpha = \text{πολ}7 + 7 - 2$,
 $\alpha = \text{πολ}7 + 7 - 1$, δηλ.: $\alpha = \text{πολ}7 - 3$ ἢ $\alpha = \text{πολ}7 - 2$ ἢ $\alpha = \text{πολ}7 - 1$). Ἐκ τῆς ἰδιότη-
 τος (ii) (πόρισμα), ἔπεται: $\alpha^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{7}$ ἢ ἀκόμη: $\alpha^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$.
 Ὁμοίως, θὰ εἶναι: $\beta^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$. Ἐκ τῶν δύο τούτων καὶ τῆς ἰδιό-
 τητος (i) ἔπεται ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 0 \pmod{7}$ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν $\alpha^2 \equiv 0$ καὶ
 $\beta^2 \equiv 0 \pmod{7}$ ἥτοι ὅταν οἱ α^2 , β^2 καὶ συνεπῶς καὶ οἱ α καὶ β εἶναι ἀμφότεροι
 διαιρετοὶ διὰ 7 (§ 37, α').

2) 1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῶν διαφορῶν δυνάμεων
 τοῦ 2 καὶ τὸ τῶν διαφορῶν δυνάμεων τοῦ 7.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $3548^9 \times 2537^{31}$.

Λύσις. 1ον) Τὸ τελευταῖον ψηφίον x , ἐνὸς ἀκεραίου α εἶναι τὸ ὑπόλοιπον
 τῆς διαιρέσεως τοῦ διὰ 10 καὶ ἔχωμεν: $\alpha = x + \text{πολ}10 \Rightarrow \alpha \equiv x \pmod{10}$.
 Ἔχωμεν ὡς πρὸς modulo 10:

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 6, 2^5 \equiv 2.$$

Ἀπὸ τοῦ 2^5 καὶ πέραν, τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν
 τάξιν, ὥπως ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ $2^1 \equiv 2$ (ιδιότης (ii)).

Γενικῶς, θὰ ἔχωμεν λοιπὸν, πάντοτε ὡς πρὸς modulo 10:

$$2^{4v} \equiv 6, 2^{4v+1} \equiv 2, 2^{4v+2} \equiv 4, 2^{4v+3} \equiv 8 \quad (v \in \Phi).$$

Δυνάμεις τοῦ 7. Ἔχωμεν ὡς πρὸς mod. 10:

$$7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 9, 7^3 \equiv 3, 7^4 \equiv 1,$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ, τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν ἰδίαν τάξιν. Γενικῶς
 θὰ εἶναι:

$$7^{4v} \equiv 1, 7^{4v+1} \equiv 7, 7^{4v+2} \equiv 9, 7^{4v+3} \equiv 3 \pmod{10}, \quad (v \in \Phi).$$

2ον) Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐκάστου παράγοντος.

Ἔχωμεν: $3458 \equiv 8 \pmod{10}$, $3458^9 \equiv 8^9 \pmod{10} \equiv 2^{27} \pmod{10}$.

Ἐπειδὴ $2^{27} \equiv 2 \pmod{10}$ (ὡς εἶδαμεν ἀνωτέρω) καὶ $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$

$2^{27} \equiv 48 \pmod{10} \equiv 8 \pmod{10}$. Ἐπομένως $3458^9 \equiv 8 \pmod{10}$.

Ἐξ ἄλλου, $2537 \equiv 7$, $2537^{31} \equiv 7^{31} \equiv 7^{28} \times 7^3 \equiv 1 \times 3 \pmod{10}$. Ἀφοῦ ὁ πρῶτος παράγων λήγει εἰς 8 καὶ ὁ δεῦτερος εἰς 3, τὸ γινόμενον λήγει εἰς 4.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-267. Δείξατε ὅτι, i) $a \equiv a \pmod{\mu}$ διὰ τυχὸν $\mu \in \Phi$, ii) $a \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \beta \equiv a \pmod{\mu}$, iii) $a \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow -a \equiv -\beta \pmod{\mu}$.

B-268. $a \equiv \beta \pmod{2}$ καὶ $2|a\beta \Rightarrow 2|a$ καὶ $2|\beta$.

B-269. Ἐὰν $v \in \Phi$ δείξατε ὅτι $23^v \equiv (-1)^v \pmod{4}$ καὶ $23^v \equiv (-1)^v \pmod{3}$
 $\equiv \frac{3 - (-1)^v}{2} \pmod{3}$.

B-270. Ἐὰν p πρῶτος τότε $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

B-271. Δείξατε ὅτι $5^{5v} \equiv 1 \pmod{11}$, $1424 \equiv 5 \pmod{11}$, $4241 \equiv -5 \pmod{11}$
καὶ ἀκολούθως εὑρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ
 $4241^{1424} \times 1424^{4241}$ διὰ 11.

§ 94. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην τυχόντα ἀκέραιον. α') Τὸ σύμβολον a^v ἔχει ὁρισθῆ ὅταν ὁ a εἴναι τυχὸν πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ v εἴναι φυσικὸς ἀριθμὸς 1, 2, 3, ... (§ 86). Ἦδη θὰ ὀρίσωμεν τὸ σύμβολον a^v (ἄλφα εἰς τὴν v) ὅταν ὁ v διατρέχῃ τὰς ὑπολοίπους ἀκεραίας τιμὰς: 0, -1, -2, -3, ...

Ὁρισμοί. Ἐὰν μ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $a \neq 0$, τὸ σύμβολον $a^{-\mu}$ παριστᾷ τὸ ἀντίστροφον τῆς δυνάμεως a^μ τὸ δὲ σύμβολον a^0 παριστᾷ τὴν θετικὴν μονάδα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$,

$$(-0,3)^{-3} = \frac{1}{(-0,3)^3} = \frac{1}{-(0,3)^3} = -\frac{1}{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = -\frac{1000}{27}, \quad (a+\beta)^0 = 1,$$

$$x^{-2}y^5 = \frac{x^2}{y^5} = \frac{y^{-5}}{x^{-2}}, \quad a^{-2}-\beta^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta}\right) = (a^{-1} + \beta^{-1})(a^{-1} - \beta^{-1}).$$

Ὡστε ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ $a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}$, $a^0 = 1$, ὅπου $a \neq 0$, $\mu \in \Phi$.

β') Τὰ νέα ταῦτα σύμβολα, a^0 , a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} , ..., a^{-v} , ... (τὰ ὁποῖα ἔχουν νόημα διὰ $a \neq 0$) καλοῦνται ἐπίσης δυνάμεις τοῦ a (μὲ ἐκθέτας ἀρνητικούς ἢ μηδέν) καὶ οὐδόλως διαφέρουν, ὥς πρὸς τὰς ιδιότητας, ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἤδη δυνάμεις μὲ θετικούς ἐκθέτας· ὑπακούουν, δηλ. αἱ νέαι αὗται δυνάμεις εἰς τοὺς αὐτοὺς νόμους οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν διὰ δυνάμεις μὲ φυσικοὺς ἐκθέτας (§ 86).

Τοῦτο ἀποδείκνυται διὰ τῶν ἐπεκτείνων θεμάτων:

i) «Ἐὰν μ ἀκέραιος, (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ μηδέν) ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότης

$$(1) \quad \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\mu > 0$ ἡ ἰσότης ἰσχύει ἐξ ὁρισμοῦ. Ἐστὼ λοιπὸν ὅτι ὁ μ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ θ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ. Τότε $\mu = -\theta$, $-\mu = \theta$ καὶ τὸ πρῶτον μέλος $\alpha^{-\mu}$ τῆς ἀποδεικτέας ἰσοῦται μετὰ α^{θ} , ἐνῶ τὸ δεῦτερον ἰσοῦται μετὰ:

$$\frac{1}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{-\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{\theta}}} = \alpha^{\theta}.$$

Ἄρα τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα.

Τέλος, ἂν $\mu = 0$ ἀμφότερα τὰ μέλη ἰσοῦνται μετὰ 1 σύμφωνα μετὰ τὸν ὁρισμόν: $\alpha^0 = 1$, ὥστε πάλιν ἡ ἰσότης ἰσχύει.

ii) «Διὰ τυχόντας φυσικοῦς ἀριθμοῦς μ καὶ ν καὶ $\alpha \neq 0$, ἰσχύει πάντοτε ὅτι

$$(2) \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\mu > \nu$ ἡ ἰσότης (2) ἰσχύει ὡς γνωστὸν (βλ. § 87, στ'). Ἐὰν $\mu = \nu$ τότε $\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu}$, ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι ἴσον μετὰ 1. Ἀλλὰ καὶ τὸ δεῦτερον μέλος εἶναι τότε α^0 , δηλ. πάλιν 1.

Τέλος, ἂν $\nu > \mu$ τότε θὰ ἔχωμεν $\nu = \mu + \theta$ ὅπου θ ἡ (θετικὴ) διαφορὰ $\nu - \mu$. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) γράφεται τότε διὰδοχικῶς

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu+\theta}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\theta}} = \frac{1}{\alpha^{\theta}}.$$

Τὸ δεῦτερον μέλος ἰσοῦται μετὰ $\alpha^{-(\nu-\mu)}$, δηλ. μετὰ $\alpha^{-\theta}$ ὥστε πάλιν ἡ (2) ἰσχύει.

iii) «Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μετὰ ἐκθέτας τυχόντας ἀκεραίους ἰσοῦται μετὰ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν».

Δηλ. θὰ εἶναι πάντοτε

$$(3) \quad \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}. \quad (\mu, \nu \in A_k)$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν μ καὶ ν θετικοὶ ἀκέραιοι ἡ (3) ὡς γνωστὸν ἰσχύει.

Ἐὰν μ θετικὸς καὶ ν ἀρνητικὸς, ἴσος μετὰ τὸν $-\theta$ τότε:

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{-\theta} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\theta}} = \alpha^{\mu-\theta} \quad (\text{σύμφωνα μετὰ τὴν (2)})$$

Ἀλλὰ, $-\theta = \nu$ καὶ $\mu - \theta = \mu + \nu$. Ὡστε $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\theta} = \alpha^{\mu+\nu}$, ὅ.ε.δ.

Ἐὰν μ καὶ ν ἀρνητικοί, ἔστω $\mu = -k$, $\nu = -\theta$ τότε

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{-k} \cdot \alpha^{-\theta} = \frac{1}{\alpha^k} \cdot \frac{1}{\alpha^{\theta}} = \frac{1}{\alpha^{k+\theta}} = \frac{1}{\alpha^{-(\mu+\nu)}} = \alpha^{\mu+\nu}.$$

(σύμφωνα μὲ τὴν (1)). Ὡστε πάλιν ἡ (3) ἰσχύει.

Ἐὰν εἷς ἐκ τῶν ἐκθετῶν εἴναι μηδέν, π.χ. $\mu=0$ τότε :

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^0 \cdot \alpha^{\nu} = 1 \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\nu} = \alpha^{0+\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$

δηλ. πάλιν ἡ (3) ἰσχύει.

Τέλος ἂν καὶ οἱ δύο ἐκθέται εἴναι μηδενικοί, προφανῶς ἡ (3) ἰσχύει καθ' ὅσον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς εἶναι ἴσα πρὸς 1.

iv) «Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μὲ ἐκθέτας τυχόντας ἀκέραιους, ἰσοῦται μὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, τοῦ ἀριθμοῦ μείον τὸν τοῦ παρονομαστοῦ». Δηλαδή πάντοτε :

$$(3) \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu} \quad (\mu \in A_k, \nu \in A_k)$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν $\frac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{-\nu}$ (Θεώρημα i) καὶ συνεπῶς

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{-\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

v) «Δύναμις μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν νέον ἐκθέτην».

Δηλαδή πάντοτε ἰσχύει

$$(4) \quad (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} \quad \text{ὅπου } \mu, \nu \in A_k.$$

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα εἶναι γνωστὸν ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται εἴναι θετικοὶ ἀκέραιοι.

1ον) Ἐστω μ ἀρνητικὸς $= -\theta$ καὶ ν θετικὸς. Τότε :

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{-\theta})^{\nu} = \left(\frac{1}{\alpha^{\theta}} \right)^{\nu} = \frac{1}{(\alpha^{\theta})^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\theta\nu}} = \alpha^{-\theta\nu} = \alpha^{(-\theta)\nu} = \alpha^{\mu\nu}, \quad \text{ὅ.ξ.δ.}$$

2ον) Ἐστω μ θετικὸς καὶ ν ἀρνητικὸς $= -k$. Τότε :

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{\mu})^{-k} = \frac{1}{(\alpha^{\mu})^k} = \frac{1}{\alpha^{\mu k}} = \alpha^{-\mu k} = \alpha^{\mu(-k)} = \alpha^{\mu\nu}, \quad \text{ὅ.ξ.δ.}$$

3ον) Ἐστω μ ἀρνητικὸς $= -\theta$ καὶ ν ἀρνητικὸς $= -k$. Τότε :

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{-\theta})^{-k} = \left(\frac{1}{\alpha^{\theta}} \right)^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{\theta}} \right)^k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{\theta k}}} = \alpha^{\theta k} = \alpha^{(-\theta)(-k)} = \alpha^{\mu\nu}, \quad \text{ὅ.ξ.δ.}$$

4ον) Ἐστω $\mu=0$. Τότε :

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^0)^{\nu} = 1^{\nu} = 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\mu\nu} = \alpha^{0\nu} = \alpha^0 = 1$$

ἄρα πάλιν ἡ (4) ἰσχύει.

5ον) "Εστω $v=0$.

Τότε πάλιν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (4) εἶναι $(\alpha^u)^0=1$ καὶ τὸ δεύτερον εἶναι $\alpha^{u \cdot 0} = \alpha^0 = 1$, ἄρα αὐτὴ ἰσχύει καὶ πάλιν.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-272. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων :

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{-5}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3} - 3 \cdot 7 \cdot (-5) \cdot (-2).$$

A-273. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις :

$$(-0,125)^{-2} - (0,25)^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} \cdot \frac{45}{105} = ;$$

A-274. Γράψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις ὡς γινόμενα δυνάμεων, (χωρὶς παρονομαστὰς) :

$$\frac{5x^2}{a^2y^3}, \quad \frac{3a^5x^3}{a^7x}, \quad \frac{1}{xy^2}, \quad \frac{9x^{-4}y^{-4}}{x^2y}.$$

A-275. Ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :

$$\frac{\alpha\beta^{-2}(\alpha^{-1}\beta^{-2})^4(\alpha\beta^{-1})^2}{\alpha^{-2}\beta(\alpha^2\beta^{-1})^3\alpha^{-1}\beta} \quad (\alpha, \beta \in \Pi, \alpha\beta \neq 0).$$

B-276. Ἐὰν ὁ β εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α καὶ γ δεῖξατε ὅτι :

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^{-2} - \beta^{-2} + \gamma^{-2}} = \beta^4.$$

B-277. Ἐὰν τεθῇ $S_k = x^k + x^{-k}$ διὰ $k=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τὰ $S_1, S_2, S_3, \dots$ καὶ S_{n+2} , ὅπου n τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς.

§ 95. Σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι τῆς Ἀλγέβρας.

"Ενας πραγματικὸς ἀριθμὸς λέγεται **σύμμετρος**, ὅταν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων α/β ὅπου $\beta \neq 0$. Οὕτω, π.χ., οἱ ἀριθμοὶ $-3, -\frac{5}{7}, +0,27, 0$ εἶναι σύμμετροι καθ' ὅσον γράφονται

ἀντιστοίχως : $-\frac{3}{+1}, \frac{-5}{+7}, \frac{+27}{+100}, \frac{0}{+1}$. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ

ἀπόλυτος τιμὴ κάθε συμμέτρου τῆς Ἀλγέβρας εἶναι ἕνας σύμμετρος τῆς Ἀριθμητικῆς (§ 41), αἱ δὲ τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις ἐκτελούμεναι μεταξὺ συμμέτρων δίδουν ὡς ἐξαγόμενον πάλιν σύμμετρον ἀριθμὸν.

Πάντες οἱ λοιποὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οὔτινες δὲν εἶναι σύμμετροι, ἤτοι δὲν δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφήν α/β ἐνθα α, β ἀκεραιοὶ καὶ $\beta \neq 0$, λέγονται **ἀσύμμετροι**. Οἱ ἀσύμμετροι τῆς Ἀλγέβρας ἔχουν προφανῶς ὡς ἀπολύτους τιμὰς, ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς (§ 65). Οὕτω, π.χ., οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ

$- \sqrt{2}$, $+\sqrt{5}$, $-3\sqrt[3]{7}$ είναι ασύμμετροι διότι καὶ αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν εἶναι ἀσύμμετοι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς (βλ. § 56, παράδ.).

Οὕτω, οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρίζονται εἰς δύο τάξεις: εἰς συμμετρουσ καὶ ἀσυμμέτρους. Κάθε δὲ πραγματικὸς ἀριθμὸς θ' ἀνήκη ἢ εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην τάξιν. Ἡ ἄλλως: τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἔνωσις δύο ξένων μεταξὺ τῶν συνόλων, τοῦ συνόλου τῶν συμμετρουσ καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀσυμμέτρων.

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ θεώρημα τῆς § 69 ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ α , σ , σ' εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

B-278.—Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι σύμμετροι καὶ $\neq 0$, ὁ x ἀσύμμετρος καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}$ εἶναι σύμμετρος, δεῖξατε ὅτι τότε οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

§ 96. Διαδοχικαὶ ἐπεκτάσεις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ. Σύμβολα. Οἱ βαθμηδὸν εἰσαχθέντες μέχρι τοῦδε ἀριθμοί, δύνανται νὰ νοηθοῦν ὡς ἀνήκοντες εἰς ἀριθμοσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἐπομένου του. Συνοψίζομεν κατωτέρω τὰ διαδοχικὰ αὐτὰ ἀριθμοσύνολα, ἕκαστον μὲ τὸ σύμβολόν του τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ παρὸν βιβλίον.

1ον) Φ : σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

$$\Phi = \{1, 2, 3, \dots n, \dots\}.$$

2ον) Φ_0 : σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς.

$$\Phi_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3ον) A_k : σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας (ἢ σχετικῶν ἀκερίων), $A_k = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Διακρίνομεν:

A_k^- : σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων καὶ A_k^+ , σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων.

4ον) P : σύνολον τῶν συμμετρουσ (ἢ ρητῶν) ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας.

Διακρίνομεν: P^- τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν συμμετρουσ καὶ P^+ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν συμμετρουσ (ἢ ρητῶν).

5ον) Π : σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Διακρίνομεν: Π^- τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν καὶ Π^+ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν, πραγματικῶν ἀριθμῶν.

(Ἐννοεῖται ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι

τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ συνόλου τῶν συμμέτρων, ὡς πρὸς Π ἤτοι τὸ Π-Ρ).

Ἀργότερον, θὰ ἐπεκταθῶμεν καὶ εἰς τὸ τελευταῖον ἀριθμοσύνην, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ Π ὡς ὑποσύνολον.

ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 97. Ἀνισότητες. α'). Ὁρισμός. «*Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β, λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β, διὰν ἡ διαφορὰ α-β εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς. Γράφομεν δὲ τότε α > β. Ἐάν, τουναντίον, ἡ διαφορὰ α-β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, τότε λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ β καὶ γράφομεν τότε α < β.*»

Δηλαδή:

$$(α-β) \text{ θετικὸς} \iff α > β$$

$$(α-β) \text{ ἀρνητικὸς} \iff α < β$$

Οὕτω, π.χ., ἔχομεν ὅτι $-7 < -2$, διότι $(-7) - (-2) = -5$, δηλ. ἀρνητικὸς ἀριθμὸς. Ἐπίσης $10 > -50$ διότι $10 - (-50) = +60$, δηλ. θετικὸς ἀριθμὸς.

Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι, ἂν ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β, τότε ὁ β θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ α. Διότι ἀφοῦ αἱ δύο διαφοραὶ $(α-β)$ καὶ $(β-α)$ εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἂν ἡ πρώτη διαφορὰ εἶναι θετικὴ, ὁπότε $α > β$, τότε ἡ δευτέρα θὰ εἶναι ἀρνητικὴ, ἄρα $β < α$. Ὡστε αἱ ἀνισότητες $α > β$ καὶ $β < α$ εἶναι ἰσοδύναμοι, δηλ. ἐκάστη συνεπάγεται τὴν ἄλλην.

Τὰ σύμβολα < καὶ > καλοῦνται «σημεῖα ἀνισότητος», ἡ δὲ σχέσηis καθ' ἣν δύο ἀριθμοὶ συνδέονται μὲ ἓν ἐκ τῶν συμβόλων τούτων καλεῖται ἀνισότης οἱ δὲ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται μέλη τῆς ἀνισότητος. Δύο ἀνισότητες ὅπως αἱ $α < β$ καὶ $γ < δ$ μὲ τὸ ἴδιον «σημεῖον ἀνισότητος», λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ εἶναι ὁμοίόστροφοι. Αἱ ἀνισότητες $α > β$ καὶ $γ > δ$ εἶναι ἐπίσης ὁμοίόστροφοι. Ἄλλως, λέγομεν ὅτι ἔχουν ἀντίθετον φορὰν ἢ εἶναι ἐτερόστροφοι. Οὕτω, π.χ., αἱ δύο ἀνισότητες $α < γ$ καὶ $γ > δ$ εἶναι ἐτερόστροφοι.

Εἶναι προφανές, ὅτι μεταξὺ δύο τυχόντων πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων:

$$\eta \quad α > β \quad \eta \quad α < β \quad \eta \quad α = β.$$

β'. "Αμεσοι συνέπειαί του ὁρισμοῦ :

i. «Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός».

Διότι ἡ διαφορὰ τοῦ θετικοῦ θ καὶ τοῦ 0 εἶναι $\theta - 0 = \theta$, δηλαδὴ θετικὸς ἀριθμὸς. Ὡστε $\theta > 0$.

ii. «Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός».

Διότι ἂν α ἀρνητικὸς, ἡ διαφορὰ $\alpha - 0 = \alpha$, δηλ. εἶναι ἀρνητικὴ, ἐπομένως, κατὰ τὸν ὁρισμόν, $\theta \alpha$ εἶναι, $\alpha < 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x εἶναι θετικὸς, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν :

$$(1) \quad x > 0$$

διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ ὅτι ἀριθμὸς y εἶναι ἀρνητικὸς, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν :

$$(2) \quad y < 0.$$

Ἐπίσης, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν

$$(3) \quad \alpha\beta > 0$$

διότι ἡ (3) ἰσχύει ὅταν καὶ μόνον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον.

Τέλος, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι ἐτερόσημοι, $\theta \alpha$ ἔχωμεν :

$$(4) \quad \alpha\beta < 0$$

καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ἰσχύῃ ἡ (4) οἱ α καὶ β εἶναι ἐτερόσημοι.

iii. «Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ».

Διότι, ἂν $\alpha > 0$ καὶ $\beta < 0$ ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ἄρα εἶναι θετικὸς. Συνεπῶς $\alpha > \beta$.

iv. «Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μικρότερος εἶναι ὁ ἔχων μεγαλύτεραν ἀπόλυτον τιμήν».

Ἐστῶσαν οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ἔστω $|\alpha| > |\beta|$. Ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ καὶ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ἀπολύτως μεγαλύτερου προσθετέου, δηλ. τοῦ α . Ὡστε εἶναι ἀρνητικὴ. Συνεπῶς $\alpha < \beta$.

Παρατήρησις. Λέγομεν ὅτι, ὁ α εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερος τοῦ β , ἂν ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $|\alpha| > |\beta|$. Ἄν ἰσχύῃ ἡ $|\gamma| < |\delta|$, λέγομεν ὅτι ὁ γ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ δ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω $\theta \alpha$ ἰσχύουν :

$$+7 > 0, \quad -\frac{2}{3} < 0, \quad -11,2 < 0, \quad 7,5 > -800, \quad -20 < -12, \quad -30 > -50,$$

γ') Τὸ σύμβολον τοῦ περιέχεσθαι. Ἡ διπλῇ ἀνισότης:

$$(5) \quad \alpha < x < \beta,$$

ἐκφράζει ὅτι ὁ x εἶναι συγχρόνως καὶ μεγαλύτερος τοῦ α καὶ μικρότερος τοῦ β . Τούτου συμβαίνοντος λέγομεν ὅτι ὁ x περιέχεται μετὰ α καὶ β .

Οὕτω, π.χ., ὁ 5,2 περιέχεται μετὰ 4 καὶ 7, δηλ. $4 < 5,2 < 7$ καὶ ὁ -1 μετὰ -2 καὶ $-\frac{1}{10}$ ἤτοι: $-2 < -1 < -\frac{1}{10}$.

δ') Τὰ σύμβολα $\leq$, $\geq$.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ὁ α εἶναι «μικρότερος ἢ τὸ πολὺ ἴσος» μὲ β γράφομεν

$$(6) \quad \alpha \leq \beta.$$

Ἡ (6) σημαίνει, δηλ. ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδέν. Ἐκφράζει ἀκόμη ὅτι ὁ α εἶναι ὅχι μεγαλύτερος τοῦ β . Στηριζόμενοι εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην ἀποφιν θὰ ἡδυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $5 \leq 7$, διότι ὁ 5 εἶναι ὅχι μεγαλύτερος τοῦ 7. Ὁμοίως. τὸ γεγονός ὅτι ὁ α εἶναι «μεγαλύτερος ἢ ἴσος» τοῦ β διατυπώνεται:

$$(7) \quad \alpha \geq \beta.$$

Ἡ (7) σημαίνει ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν. Ἡ ἄλλως ὅτι ὁ α εἶναι ὅχι μικρότερος τοῦ β . Καὶ πάλιν, θὰ ἡδυνάμεθα νὰ γράψωμεν $5 \geq 0$, ἐφ' ὅσον ὁ 5 εἶναι ὅχι μικρότερος τοῦ 0.

Εἰδικώτερον, ἂν ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\alpha \geq 0.$$

λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μὴ ἀρνητικὸς. (Δηλ. ὁ α εἶναι ἢ θετικὸς ἢ μηδέν).

Οὕτω, ἐὰν n φυσικὸς καὶ x τυχὼν πραγματικὸς ἰσχύει πάντοτε:

$$(8) \quad x^{2n} \geq 0.$$

ε') Ἡ ἀπόδειξις μιᾶς ἀνισότητος, γίνεται πολλάκις βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δοθέντος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παρούσης παραγράφου. Διὰ νὰ κρίνωμεν, δηλ. ἂν A εἶναι $>$ τοῦ B σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $A - B$ καὶ ἐξετάζομεν ἐὰν αὕτη εἶναι θετικὴ. Ἡ διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι $\Gamma < \Delta$ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ $\Gamma - \Delta$ εἶναι ἀρνητικὴ (A, B, Γ, Δ , πραγματικοί).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἄν α καὶ β ὁμόσημοι νὰ δεῖχθῃ ὅτι:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) > 1 + \alpha + \beta.$$

Λύσις. Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου μέλους μείον τὸ δεύτερον:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) - (1 + \alpha + \beta) = 1 + \beta + \alpha + \alpha\beta - 1 - \alpha - \beta = \alpha\beta$$

Βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορὰ εἶναι θετική διότι α καὶ β ὁμόσημοι, ἄρα ἡ ἀνισότης ἰσχύει.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-279.—Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν αὐξοντος μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ :

$$-1, +4, -3/2, -1/6, +20, -7, -\sqrt{2}, +\sqrt{3}.$$

A-280.—Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν : $-(2,8+\sqrt{2})$ καὶ $\frac{-2}{0,1+(1/2)^3}$ εἶναι

μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου ;

A-281.—Ἐάν $\alpha < \beta$ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

A-282.—Ἐάν $\alpha < \beta < \gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$.

B-283.—Καλεῖται μέσος ἀριθμητικὸς n ἀριθμῶν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς n πραγματικῶν ἀριθμῶν περιέχεται μεταξὺ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεγαλύτερου ἐκ τῶν n δοθέντων.

A-284.—Ἐάν $\alpha \leq \beta$ καὶ συγχρόνως $\alpha \geq \beta$ τότε $\alpha = \beta$.

B-285.—Ἐάν x καὶ y τυχόντες πραγματικοὶ νὰ δειχθῇ ὅτι : i) πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τῆς ἀπολύτου τιμῆς του ($x \leq |x|$) καὶ βάσει τούτου : ii) $xy + |xy| \geq x|y| + x|y|$.

§ 98. Αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. i)
«*Δοθέντων τριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β, γ ἐὰν ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β καὶ ὁ β μεγαλύτερος τοῦ γ , τότε ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ γ .*»

Διότι, ἀφοῦ $\alpha > \beta$ καὶ $\beta > \gamma$, αἱ διαφοραὶ $\alpha - \beta$ καὶ $\beta - \gamma$ εἶναι θετικαί, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θετικόν, δηλ. τὸ $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$ εἶναι θετικόν. Ἄρα $\alpha > \gamma$. (Ἡ σχέσηις τῆς ἀνισότητος εἶναι μετὰ α, β, γ τικὴ σχέσηις).

ii) «*Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἡ ἀνισότης ἀλλάζει φορὰν (ἀντιστρέφεται).*»

Δηλαδή, $\alpha > \beta \iff -\alpha < -\beta$. Διότι ἀφοῦ $\alpha > \beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὴ καὶ συνεπῶς ὁ ἀντίθετός της ἀριθμὸς $(-\alpha) - (-\beta)$ εἶναι ἀρνητικὸς. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν $(-\alpha)$ καὶ $(-\beta)$ εἶναι ἀρνητικὴ, ἔπεται ὅτι $-\alpha < -\beta$.

iii) «*Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*»

Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν

ἀριθμόν, διότι ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου.

Πράγματι, ἔστω $\alpha > \beta$ καὶ γ τυχὼν πραγματικὸς. Ἡ διαφορὰ
 $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta + \gamma - \gamma = \alpha - \beta$.

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha - \beta$ θετικὸς, ὥστε ἡ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ θετική, ἄρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Ὡστε, $\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

iv) «Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὅσα σδήποτε ἀνισότηας ὁμοιοστρόφους».

Ἐάν, π.χ. $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, $\varepsilon > \zeta$, $\eta > \theta$, τότε θὰ εἶναι καί: $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$, Διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ διαφοραὶ $(\alpha - \beta)$, $(\gamma - \delta)$, $(\varepsilon - \zeta)$, $(\eta - \theta)$ εἶναι ὅλαι θετικαί, ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι θετικόν. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τούτων γράφεται:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) + (\varepsilon - \zeta) + (\eta - \theta) &= \alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \eta - \theta = \\ &= \alpha + \gamma + \varepsilon + \eta - \beta - \delta - \zeta - \theta = (\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \theta). \end{aligned}$$

Ὡστε ἡ διαφορὰ $(\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \theta)$ εἶναι θετικὴ καὶ συνεπῶς
 $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$.

v) «Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται, ἂν δὲ ἐπὶ ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται».

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$ καὶ τυχὼν θετικὸς γ . Ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὴ, ἄρα καὶ τὸ γινόμενον $(\alpha - \beta)\gamma$ θετικόν, δηλ. τὸ $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι θετικόν. Συνεπῶς $\alpha\gamma > \beta\gamma$. Ἐάν γ ἀρνητικὸς, τότε τὸ γινόμενον $(\alpha - \beta)\gamma$ εἶναι ἀρνητικόν, δηλ. ἡ διαφορὰ $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ συνεπῶς $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Πόρισμα. «Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἡ ἀνισότης διατηρεῖται ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι θετικὸς, ἀντιστρέφεται δὲ ἂν εἶναι ἀρνητικὸς».

Διότι ἡ διαίρεσις διὰ γ ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμὸν $\frac{1}{\gamma}$ ὅστις εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ .

vi) «Δοθεῖσιν δύο ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων, ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης καὶ τὸ δευτέρον μέλος τῆς δευτέρας εἶναι ὁμόσημα, τότε ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας, λαμβάνομεν ὁμοιοστρόφον ἀνισότητα, ἐφ' ὅσον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μελῶν τούτων εἶναι τὸ +, ἐτερόστροφον δέ, ἂν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μελῶν τούτων εἶναι τὸ —».

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$.

1. Ἐστω ὅτι α καὶ δ εἶναι θετικοί. Τότε κατὰ τὴν προηγουμένην Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ το Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ιδιότητα, θὰ ἔχωμεν πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ α καὶ τῆς πρώτης ἐπὶ δ :

$$\alpha\gamma > \alpha\delta \text{ καὶ } \alpha\delta > \beta\delta$$

καὶ λόγῳ τῆς μεταβατικότητος, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma > \beta\delta$.

2. Ἐὰν α καὶ δ ἀρνητικοί, οἱ ἴδιοι πολλαπλασιασμοὶ παρέχουν ἀντιστρόφους τῶν προηγουμένων ἀνισότητος:

$$\alpha\gamma < \alpha\delta \text{ καὶ } \alpha\delta < \beta\delta$$

ἐξ ὧν ἔπεται ὅτι $\alpha\gamma < \beta\delta$.

Πόρισμα 1ον. «Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι θετικά, τότε ὑποϋντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν ἀνισότητα ὁμοίόστροφον. Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη εἶναι ἀρνητικά, τότε δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν ἐτερόστροφον ἀνισότητα».

Διότι ἡ ὑψωσις ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\alpha > \beta$ εἰς τὸ τετράγωνον, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κατὰ μέλη πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀνισοτήτων $\alpha > \beta$, $\alpha > \beta$. Ἐφαρμόζεται λοιπὸν τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Πόρισμα 2ον. «Ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ὁ ἔχων τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερος».

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β . Ἐὰν $\alpha^2 > \beta^2$, τότε λέγομεν, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha > \beta$. Διότι, ἂν ᾗτο $\alpha < \beta$, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, θὰ εἶχομεν καὶ $\alpha^2 < \beta^2$ τὸ ὅποῖον ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ὡστε δὲν εἶναι $\alpha < \beta$. Ἄν ᾗτο $\alpha = \beta$ τότε καὶ $\alpha^2 = \beta^2$ τὸ ὅποῖον πάλιν ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, ὥστε δὲν εἶναι $\alpha = \beta$. Ἀναγκαστικῶς λοιπὸν θὰ εἶναι $\alpha > \beta$.

Πόρισμα 3ον. «Ἐὰν α καὶ β εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ σχέσις $\alpha^2 \geq \beta^2$ συνεπάγεται τὴν $\alpha \geq \beta$ ».

Διότι ἀφοῦ $\alpha^2 \geq \beta^2$ θὰ εἶναι ἢ $\alpha^2 > \beta^2$ ἢ $\alpha^2 = \beta^2$.

1ον) Ἐστω $\alpha^2 > \beta^2$ καὶ $\beta \neq 0$. Τότε κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα θὰ ἔχωμεν $\alpha > \beta$.

2ον) Ἐστω $\alpha^2 > \beta^2$ καὶ $\beta = 0$. Τότε $\alpha^2 > 0$, ἄρα $\alpha \neq 0$ καὶ ἐπειδὴ ὁ α εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἔπεται ὅτι $\alpha > 0$ καὶ ἐπομένως $\alpha > \beta$.

3ον) Ἐστω $\alpha^2 = \beta^2$. Τότε ἢ θὰ εἶναι καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ μηδενικοί, ὁπότε ἰσχύει ἡ σχέσις $\alpha = \beta$ ἢ θὰ εἶναι καὶ οἱ δύο θετικοί. Ἄλλ' ἐὰν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ἴσα τετράγωνα εἶναι ἴσοι, (ἂν ᾗταν ἄνισοι θὰ εἶχον καὶ ἄνισα τετράγωνα κατὰ τὸ πόρισμα 1ον). Ὡστε πάλιν $\alpha = \beta$.

Συνεπῶς καταλήγομεν εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ὅτι θὰ εἶναι, εἴτε $\alpha > \beta$ εἴτε $\alpha = \beta$. Δηλαδή θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\alpha \geq \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Ἐστω $0 < \alpha < \gamma$ καὶ $0 < \beta < \delta$. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha - \frac{1}{\beta} < \gamma - \frac{1}{\delta}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν $\beta < \delta$, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς v θὰ εἶναι :

$$\frac{\beta}{\beta\delta} < \frac{\delta}{\beta\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\delta}.$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα ii θὰ εἶναι $-\frac{1}{\beta} < -\frac{1}{\delta}$. Τέλος ἀπὸ τὰς δύο ἀνισότητος $\alpha < \gamma$ καὶ $-\frac{1}{\beta} < -\frac{1}{\delta}$ ἔπεται ἡ ἀποδεικτέα $\alpha - \frac{1}{\beta} < \gamma - \frac{1}{\delta}$ (ιδιότης iv).

2. Ἐάν $3x + 5 > \frac{x}{2} + 3$, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε $x > -\frac{4}{5}$.

Ἀπόδειξις. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἐπὶ 2, ὅποτε κατὰ τὴν ιδιότητα v, λαμβάνομεν $6x + 10 > x + 6$. Ἐξ αὐτῆς ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸ x (ιδιότης iii), λαμβάνομεν $5x + 10 > 6$. Ἀφαιροῦντες τὸ 10 ἀπὸ τὰ δύο μέλη λαμβάνομεν ἀκόμη $5x > -4$. Διαιροῦντες ἀμφότερα θὰ μέλη διὰ 5 (ιδιότης v) λαμβάνομεν $x > -\frac{4}{5}$.

3. Ἐάν ἀληθεύουν αἱ τέσσαρες ἀνισότητες $\pi > 0$, $k > 0$, $\pi^2 - 4k > 0$, $2\alpha > \pi$, νὰ δειχθῇ ὅτι θ' ἀληθεύουν καὶ αἱ ἀνισότητες : i) $\alpha\pi > 2k$ καὶ ii) $\alpha > \frac{\pi}{4} + \frac{k}{\pi}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\pi > 0$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς 4ης τῶν δοθεισῶν $2\alpha\pi > \pi^2$ (ιδιότης v). Ἐπειδὴ δὲ $\pi^2 > 4k$ (ὡς φαίνεται ἀπὸ τὴν τρίτην τῶν δοθεισῶν) ἔπεται : $2\alpha\pi > 4k$ (ιδιότης i). Διαιροῦντες διὰ 2 τὰ μέλη τῆς τελευταίας (βλ. πόρισμα τῆς v) φθάνομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν $\alpha\pi > 2k$.

Ἀπὸ τὴν ἀποδειχθεῖσαν $\alpha\pi > 2k$, λαμβάνομεν τὴν

$$(1) \quad \alpha > \frac{2k}{\pi} \quad (\text{Πόρισμα τῆς v}).$$

Καὶ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν $2\alpha > \pi$, λαμβάνομεν τὴν

$$(2) \quad \alpha > \frac{\pi}{2}.$$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $2\alpha > \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{\pi}$ (ιδιότης iv). Διαιροῦντες διὰ 2 ἀμφότερα. τὰ μέλη τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν τὴν 2αν ἀποδεικτέαν : $\alpha > \frac{\pi}{4} + \frac{k}{\pi}$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-286.—Δείξατε διὰ παραδειγμάτων ἀριθμητικῶν ὅτι ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστροφους ἀνισότητας, δυνατόν νὰ προκύψῃ ὁμοιόστροφος ἢ ἑτερόστροφος πρὸς τὰς δοθείσας ἀνισότης ἢ ἀκόμη καὶ ἰσότης. (Δὲν ὑπάρχει κανὼν διὰ τὴν ἀφαίρεσιν ὁμοιοστροφῶν ἀνισοτήτων κατὰ μέλη. Ἡ πρῶξις αὐτῆς κατὰ μέλη ἀφαιρέσεως ὁμοιοστροφῶν ἀνισοτήτων δὲν συγκαταλέγεται εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις).

A-287.—Καθ' ὅμοιον τρόπον δείξατε ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη δύο ὁμοιοστροφους ἀνισότητας, λαμβάνομεν ἀνισότητα, ἄλλοτε ὁμοιόστροφον καὶ ἄλλοτε ἐτερόστροφον, πρὸς τὰς δοθείσας ἢ ἀκόμη καὶ ἰσότητα. (Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις διὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν τῶν ἀνισοτήτων κατὰ μέλη).

A-288.—Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν $a > \beta$ καὶ $\gamma < \delta$, τότε θὰ εἶναι $a - \gamma > \beta - \delta$.

A-289.—Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν $a > \beta$ τότε $\frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$, ἐφ' ὅσον οἱ a καὶ β εἶναι ὁμόσημοι καὶ $\frac{1}{a} > \frac{1}{\beta}$, ὅταν οἱ a καὶ β εἶναι ἐτερόσημοι.

B-290.—Ἐάν τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοὶ σχετίζονται, οὕτως ὥστε, ἕκαστος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τότε καὶ οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι θετικοί.

A-291.—Ἐάν a, β, γ, δ θετικοὶ ἰσχύει δὲ $a > \beta, \gamma < \delta$, τότε θὰ ἰσχύη καὶ ἡ ἀνισότης

$$\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}.$$

B-292.—Δείξατε ὅτι ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἔχων τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι ὁ μικρότερος.

A-293.—Δείξατε ὅτι: $\frac{-x+7}{3} + \frac{3x-8}{2} > 10 \Rightarrow x > 10$.

A-294.—Δείξατε ὅτι: $\frac{x}{-3} + \frac{x}{+2} > \frac{1}{6} \iff x < 1$.

B-295.—Ἐάν n φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $a > \beta > 0$ τότε καὶ $a^n > \beta^n$. Ἀντιστρόφως δείξατε διὰ τῆς εἰς ἑαυτοὺς ἀπαγωγῆς ὅτι ἂν $a^n > \beta^n$, ὅπου a, β θετικοὶ τότε θὰ ἰσχύη καὶ $a > \beta$.

B-296.—Ἐάν a, β, γ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, δείξατε ὅτι τότε: $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2a\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma a$.

B-297.—Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν κλάσμα μὲ θετικοὺς ὁρους εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, προσθέσωμεν δὲ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὁρους τοῦ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμὸν, τότε τὸ κλάσμα αὐξάνει. Ἄν δὲ τὸ κλάσμα εἶναι > 1 , τότε διὰ τῆς αὐτῆς πράξεως ἐλαττοῦται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

'Αλγεβρικαὶ παραστάσεις. Πολύνομα

§ 99. 'Αλγεβρικαὶ παραστάσεις, ταυτότητες, σχέσεις. α') "Εστω Σ ἓνα σύνολον ἀριθμῶν. 'Εάν τὸ σύμβολον α παριστᾷ κατὰ βούλησιν, ὅποιον δὴ ποτε ἀριθμὸν τοῦ Σ , τότε τὸ α λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητῇ. 'Ο ἐκάστοτε ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον παριστᾷ ἡ μεταβλητῇ, λέγεται τιμὴ τῆς μεταβλητῆς.

'Εάν θεωρήσωμεν διαφόρους ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ τότε, ἡ σημειώσις (ἢ ἔκφρασις), μιᾶς ἀλληλουχίας ἀλγεβρικῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι πρόκειται νὰ γίνουν μεταξύ δεδομένων ἀριθμῶν ἀφ' ἐνὸς καὶ ἀριθμῶν συμβολιζομένων ἀπὸ τὰ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἀφ' ἐτέρου, λέγεται ἀλγεβρικὴ παράστασις μὲ μεταβλητάς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Αἱ μεταβληταὶ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ὑποτίθεται ὅτι δὲν λαμβάνουν τιμὰς διὰ τὰς ὁποίας αἱ σημειωμέναι πράξεις εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐκτελεσθοῦν (π.χ. διαίρεσις διὰ μηδενός).

"Οταν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ συγκεκριμένων ἀριθμῶν, αἱ δὲ σημειούμεναι ἐν τῇ ἀλγεβρικῇ παραστάσει πράξεις ἐκτελεσθοῦν, τότε προκύπτει ὡς ἀποτέλεσμα ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν περιέχουσαν τὰς μεταβλητάς $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, y, \dots$ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν μὲ $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ ἢ $P(x, y, z)$ ἢ $f(\alpha, \beta, x)$ κ.τ.λ. (Διαβάζονται: Πι τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, Ρό τῶν $x, y, z, \dots$ κ.τ.λ.) ἢ ἐνίοτε διὰ τὸ σύντομον, μὲ $\Pi, P, f, \dots$ ἀντιστοίχως. "Οταν αἱ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν μὲ καθωρισμέναις τιμὰς: $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς παραστάσεως $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ παρίσταται μὲ $\Pi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots)$ ἢ ἐνίοτε διὰ τὸ σύντομον, μὲ $\bar{\Pi}$.

Πρὸς τὸ παρὸν θὰ ὑποθέτωμεν ὅτι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ διατρέχουν ἐκάστη, τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

'Ορίζομεν, ἀκόμη, ὡς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις καὶ αὐτὰς τὰς ἰδίας, ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς.

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots x, y, z, \dots$$

και τέλος, κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ καθιερωμένον σύμβολόν του ὅπως π.χ.:

$$2, -3, \sqrt{5}, -7/8, 0, 17, \dots$$

θὰ τὸν θεωροῦμεν κατὰ συνθήκην ὡς ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἥτις ὀνομάζεται καὶ «σταθερά».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἡ ἔκφρασις $(a^2 + 5a - 1)^2 = P(a)$, (Πι τοῦ a) εἶναι μία ἀλγεβρική παράστασις μὲ μεταβλητὴν a . Ὄταν τὸ a λάβῃ μίαν ὀρισμένην τιμὴν, ἡ $P(a)$ λαμβάνει καὶ αὐτή, μίαν συγκεκριμένην, ἀντίστοιχον τιμὴν. Διὰ $a=0$ ἡ παράστασις ἔχει τιμὴν $P(0)=1$. Διὰ $a=-5$, ἔχομεν: $P(-5)=1$. Ἐπίσης ἡ ἔκφρασις $(x-2y)^3 = P(x,y)$ ἡ δηλοῦσα ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν x ἀφαιρεῖται τὸ διπλάσιον τοῦ y καὶ ἡ προκύπτουσα διαφορὰ ὑψοῦται εἰς τὸν κύβον (μία ἀλληλουχία πράξεων) εἶναι μία ἀλγεβρική παράστασις μὲ δύο μεταβλητάς, τὰς x καὶ y . Εἰς κάθε διατεταγμένον ζεύγος πραγματικῶν τιμῶν (x,y) ἀντιστοιχεῖ ἑμιά τιμὴ τῆς παραστάσεως. Π.χ. διὰ $(x=2, y=4)$ ἡ παράστασις ἔχει τιμὴν $P(2,4)=-216$ ἐνῶ διὰ $(x=4, y=2)$ ἔχει τιμὴν $P(4,2)=0$.

Καθ' ὅμοιον δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀλγεβρικές παραστάσεις μὲ 3, 4, ... γράμματα (μεταβλητάς).

β') **Ἰσαι ἀλγεβρिकाὶ παραστάσεις.** Δύο παραστάσεις Π καὶ P λέγονται ἴσαι, ἢ καὶ **ἐκ ταυτότητος ἴσαι**, ὅταν περιέχουν τὰς ἰδίας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς καὶ λαμβάνουν τιμὰς ἴσας, μὲ ὅποιονδήποτε μεταβληταί. Δηλαδή, ὅταν ποτε τιμὰς καὶ ἂν ἀντικατασταθοῦν αἱ μεταβληταί. Δηλαδή, ὅταν $\overline{\Pi} = \overline{P}$ διὰ πᾶσαν ἀντικατάστασιν. Ἡ ἰσότης $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = P(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ ἡ ἰσχύουσα διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ λέγεται καὶ **ταυτότης** (Ἀλγεβρική) καὶ συμβολίζεται κατὰ διαφόρους τρόπους:

$$(1) \quad \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \equiv P(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad \tilde{\eta}$$

(1') $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = P(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ (ὅταν δὲν ὑπάρχει φόβος παρανόησεως) ἢ ἀπλούστερον

$$\Pi \equiv P \quad \tilde{\eta} \quad \text{τέλος} \quad \Pi = P.$$

Τὰ δύο μέλη τῆς (1) λέγονται καὶ **ισοδύναμοι ἀλγεβρικοὶ παραστάσεις**. Ἡ (1) λέγεται καὶ **μετασχηματισμὸς** τῆς $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ εἰς τὴν μορφήν $P(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

γ') Αἱ παραστάσεις, προστίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται καὶ διαιροῦνται μεταξὺ των, παρέχουσαι νέας παραστάσεις. Π.χ. ἐκ τῶν παραστάσεων Π_1, Π_2 δημιουργοῦνται αἱ νέαι παραστάσεις $\Pi_1 + \Pi_2, \Pi_1 - \Pi_2, \Pi_1 \cdot \Pi_2, \Pi_1 / \Pi_2$ τῶν ὁποίων τὸ νόημα εἶναι προφανές. (Ἐκάστη

τούτων, συμβολίζει μίαν νέαν ἀλληλουχίαν πράξεων μεταξύ ἀριθμῶν καὶ μεταβλητῶν).

δ') Οἱ πέντε νόμοι τῶν πράξεων ἰσχύουν διὰ τὰς ἀλγεβρικές παραστάσεις. Ἄν Π_1, Π_2, Π_3 εἶναι παραστάσεις, τότε :

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_2 + \Pi_1, \quad \Pi_1 + (\Pi_2 + \Pi_3) = (\Pi_1 + \Pi_2) + \Pi_3$$

$$\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1, \quad \Pi_1 (\Pi_2 \Pi_3) = (\Pi_1 \Pi_2) \Pi_3,$$

$$(\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 = \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3.$$

Διὰ ν' ἀποδείξωμεν οἰανδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω ταυτοτήτων, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δυὸ μέλη τῆς καθίστανται ἴσοι ἀριθμοὶ διὰ τυχοῦσαν ἀντικατάστασιν τῶν μεταβλητῶν. Π.χ., ἐπειδὴ ἡ ἰσότης $(\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 = \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3$ ἰσχύει, διὰ τυχόντας πραγματικούς ἀριθμούς Π_1, Π_2, Π_3 , ἐπεταί ὅτι αἱ δύο παραστάσεις $(\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3$ καὶ $\Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3$ λαμβάνουν τιμὰς ἴσας, δι' οἰανδήποτε ἀντικατάστασιν τῶν μεταβλητῶν, ἄρα εἶναι (ἐκ ταυτότητος) ἴσαι, δηλαδὴ $(\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \equiv \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3$ ἢ ἐπὶ τὸ ἀπλούστερον, $(\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 = \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3$.

ε') Σχέσεις. Μία ἰσότης μεταξύ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

$$(2) \quad \Pi(x, y, z, \dots) = P(x, y, z, \dots)$$

ἢ ὁποία μόνον δι' εἰδικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ ἰσχύει ἐνῶ δι' ἄλλας τιμὰς αὐτῶν δὲν ἰσχύει, λέγεται *σχέσις* μεταξύ τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ ἢ ἐξίσωσις μὲ ἀγνώστους $x, y, z, \dots$. Αἱ μεταβληταὶ $x, y, z, \dots$ ἐφ' ὅσον δεσμεύονται διὰ τῆς (2), δὲν εἶναι πλέον, ἀνεξάρτητοι. Διὰ τὴν (2) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(3) \quad \Pi(x, y, z, \dots) \not\equiv P(x, y, z, \dots)$$

(ὅχι ἐκ ταυτότητος ἴσαι)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : Αἱ ἰσότητες $(3\alpha - 5\beta)\gamma = 3\alpha\gamma - 5\beta\gamma$ καὶ $\frac{a^2}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 1} = 1$

εἶναι ταυτότητες, ἐνῶ αἱ ἰσότητες : $xy = x + y$, $-3xy + y\omega + x\omega = xy\omega$ εἶναι σχέσεις, ἢ μία μεταξύ τῶν x, y (διμελῆς) καὶ ἡ ἄλλη μεταξύ τῶν x, y, ω (τριμελῆς).

στ') Ἐὰν γράψωμεν : $x = \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ τότε ἡ x εἶναι μία μεταβλητὴ, ὅχι ἀνεξάρτητος, ἀλλ' ἐξηρημένη ἐκ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ αἱ ὁποῖα καθορίζουν τὴν τιμὴν τῆς x . Λέγομεν τότε ὅτι ἡ x εἶναι ἐκπεφρασμένη συναρτήσιν τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

§ 100. Μονώνυμα. α') Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις εἰς τὰς ὁποίας δὲν σημειοῦται οὔτε πρόσθεσις, οὔτε ἀφαίρεσις, παρὰ μόνον πολλαπλασιασμός ἢ καὶ διαίρεσις, λέγονται *μονώνυμα*. Π.χ. αἱ παραστάσεις :

$$\frac{-5xy}{z}, \quad x^3y, \quad -7x^2y^3z, \quad \frac{2xy^2}{z^5}, \quad \frac{xyz}{3\omega^2}$$

είναι μονώνυμα. Οί αριθμητικοί παράγοντες, $-5, 1, -7, 2, 1/3$ είναι οί **συντελεσται** τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων, ἀντιστοίχως. Ἐκεῖνα τὰ μονώνυμα εἰς τὰ ὅποια σημειοῦται καὶ διαίρεσις διὰ γράμματος (μεταβλητῆς) λέγονται **κλασματικά**. (Ὅπως π.χ. τὸ 1ον, 4ον καὶ 5ον τῶν ἀνωτέρω).

β') **Ἀκέραια μονώνυμα**. Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$c \cdot \alpha^m \beta^n \gamma^p \dots$$

ὅπου c , γνωστὸς (σταθερὸς ἀριθμὸς), α, β, γ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ καὶ $m, n, p, \dots$ σταθεροί, **μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι** λέγονται **ἀκέραια μονώνυμα**. (Εἰς αὐτά, μόνον πολλαπλασιασμοὶ σημειοῦνται).

Ὁ c λέγεται **συντελεστής** καὶ τὸ $m+n+p+\dots$, **βαθμὸς** τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου. Π.χ. τὸ $\frac{2}{5}x^3y^2$ εἶναι βαθμοῦ $3+2=5$ καὶ τὸ $-4\sqrt{3}x^3\beta^2\gamma \equiv -4\sqrt{3}x^3\beta^2\gamma^1$ εἶναι βαθμοῦ $3+2+1=6$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓνα γράμμα, καλεῖται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος ἐν τῷ μονωνύμῳ· ὡς πρὸς δύο γράμματα, τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν γραμμάτων τούτων, κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τὸ $9x^2y^3\omega$ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον 6ου βαθμοῦ. Ὡς πρὸς x εἶναι δευτέρου, ὡς πρὸς y τρίτου, ὡς πρὸς ω πρώτου, ὡς πρὸς x καὶ y 5ου καὶ ὡς πρὸς x καὶ ω εἶναι τρίτου βαθμοῦ.

Ἀριθμητικαὶ τιμαί. Ἐστω τὸ μονώνυμον $f(x, y) = -5xy^3$. Εἰς κάθε διατεταγμένον ζευγὸς πραγματικῶν τιμῶν (x, y) ἀντιστοιχεῖ μία ὠρισμένη ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μονωνύμου. Π.χ. εἰς τὸ ζευγὸς $(2, -1)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $f(2, -1) = -5 \cdot 2 \cdot (-1)^3 = 10$. Διὰ $x = -1, y = 2$ τὸ μονώνυμον ἔχει ἀριθμητικὴν τιμὴν $f(-1, 2) = -5(-1)(2)^3 = 40$ καὶ καθεξῆς.

Ὅμοια μονώνυμα, λέγονται τὰ διαφέροντα μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν. Π.χ. τὰ μονώνυμα $4ax^2, -\frac{3}{7}ax^2, -ax^2$ εἶναι ὅμοια.

Μονώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, θεωροῦνται αἱ σταθεραί. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς -12 θεωρεῖται μονώνυμον μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς οἵανδήποτε μεταβλητὴν διότι, $-12 \equiv -12x^0$.

Ἰσα ἀκέραια μονώνυμα. Δύο ἀκέραια μονώνυμα, π.χ. $c_1x^m y^n z^p$ καὶ $c_2x^k y^l z^r$ εἶναι ἴσα, ὅταν λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς δι' οἷασιςδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν x, y, z (βλέπε § 99 β').

Ἐὰν $c_1x^m y^n z^p \equiv c_2x^k y^l z^r$ τότε θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην, $c_1 = c_2, m = k, n = l, p = r$. Διότι διὰ $x=1, y=1, z=1$ λαμβάνομεν, $c_1 = c_2$. Διὰ $y=1, z=1$ καὶ $x=2$ λαμβάνομεν $2^m = 2^k \Rightarrow m = k$ καὶ ὁμοίως διὰ τὰς y καὶ z .

γ') Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων μονωνύμων. Ἐστῶσαν π.χ. τὰ μονώνυμα $A = -3xy^2z$, $B = 2xy^2z$, $\Gamma = -\frac{1}{3}xy^2z$. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $A + B - \Gamma$ εἶναι τὸ μονώνυμον $\left(-3 + 2 + \frac{1}{3}\right)xy^2z = -\frac{2}{3}xy^2z$ διότι, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις (§ 99 δ').

δ') Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι πάλιν, ἀκέραιον μονώνυμον καὶ εὐρίσκεται συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο γινομένων.

$$\text{Π.χ. } (4x^3y^2z)(3x^2yz) = 4x^3y^2z \cdot 3x^2yz = 4 \cdot 3x^3x^2y^2yz = 12x^5y^3z.$$

$$\text{Ἐπίσης: } \left(\frac{3}{4}a^3b^2\gamma^5\right)(20ab\gamma^2) = \frac{3}{4} \cdot 20 \cdot a^3ab^2b\gamma^5\gamma^2 = 15a^4b^3\gamma^7.$$

Ὡς εἶναι φανερόν, ὁ συντελεστὴς τοῦ γινομένου δύο μονωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν δύο μονωνύμων τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ γράμματα καὶ τῶν δύο μονωνύμων καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ εἰς τὰ δύο μονώνυμα.

Ἄλλα παραδείγματα:

$$\left(\frac{1}{7}ax^3y\right)(2bxy^2) = \frac{2}{7}abx^4y^3$$

$$(-9x^3y)\left(-\frac{4}{3}x^5yz\right)(2xyz) = 24x^9y^3z^2.$$

ε') Θεώρημα. «Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων μονωνύμων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων».

Διότι, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἐνὸς μονωνύμου πλέον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἄλλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὁ βαθμὸς τοῦ $\frac{1}{2}a^3b\gamma$ εἶναι ὁ 5, ὁ δὲ τοῦ $7a\gamma$ εἶναι

ὁ 2. Τὸ γινόμενον τῶν $\frac{7}{2}a^4b\gamma^2$ ἔχει βαθμὸν 7 ἥτοι $5+2$.

στ') Δύναμις μονωνύμου. Λιγὴν νὰ ὑψώσωμεν μονώνυμον εἰς δύ-

ναμιν, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ιδιότητα v τῆς § 86. Π.χ. ἂν $A = -2x^2yz^3$ τότε $A^2 = 4x^4y^2z^6$, $A^3 = -8x^6y^3z^9$.

ζ') **Τελεία διαιρέσεις μονωνύμων.** Δοθέντων δύο ἀκεραίων μονωνύμων A καὶ B , λέγομεν ὅτι τὸ B διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ A , ἂν ὑπάρχῃ ἓν ἀκέραιον μονώνυμον Γ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζον τὸ B νὰ δίδῃ τὸ A . Ἦτοι ἂν

$$\Gamma \times B \equiv A$$

Τὸ Γ λέγεται *πηλίκον* τῆς διαιρέσεως τοῦ A (διαιρετέου) διὰ τοῦ B (διαιρέτου).

Ἔστω π.χ. $A = 120x^2y^2z^5$, $B = 24x^2yz^3$. Διὰ νὰ εὔρωμεν τὸ πηλίκον Γ τοῦ A διὰ B , διαιροῦμεν τὸ 120 διὰ 24, τὸ x^2 διὰ x^2 , τὸ y^2 διὰ y καὶ τὸ z^5 διὰ z^3 . Λαμβάνομεν :

$$\Gamma = 5yz^2$$

Βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ διαιρῇται ἀκριβῶς τὸ ἀκέραιον μονώνυμον A διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου B πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ A νὰ περιέχῃ ὅλας τὰς μεταβλητάς τοῦ B καὶ μὲ ἐκθέτην τουλάχιστον ἴσον.

η') **Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν μονωνύμων.**

1) Δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων μονωνύμων, καλεῖται κοινὸν πολλαπλάσιον (*Κ.Π.*) αὐτῶν κάθε ἀκέραιον μονώνυμον τὸ ὁποῖον περιέχει ὡς παράγοντας τὰ δοθέντα μονώνυμα.

2) Καλεῖται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* (*Ε.Κ.Π.*) ὁσωνδήποτε ἀκεραίων μονωνύμων ἐχόντων ἀκεραίους συντελεστές, ἓνα μονώνυμον ἔχον συντελεστήν τὸ *Ε.Κ.Π.* τῶν συντελεστικῶν τῶν δοθέντων καὶ περιέχον ὅλας τὰς μεταβλητάς τῶν δοθέντων μονωνύμων, ἐκάστην δὲ μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τῆς. (Πρὸβλ. § 37, ε').

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα

$$(1) \quad 24x^2yz^3, \quad 15xy^2z, \quad -4z^5, \quad xy.$$

Τὸ *Ε.Κ.Π.* τῶν (1) εἶναι τὸ μονώνυμον

$$(2) \quad 120x^2y^2z^5$$

ὅπου ὁ συντελεστής 120 εἶναι τὸ *Ε.Κ.Π.* τῶν 24, 15, -4 καὶ 1. Βλέπομεν ὅτι τὸ (2) περιέχει ὅλα τὰ δοθέντα μονώνυμα ὡς παράγοντας, ἄρα εἶναι *Κ.Π.* τῶν (1). Ἐὰν ὅμως εἷς ἐκ τῶν ἐκθετῶν τοῦ (2) ἐλαττωθῇ, τότε τοῦτο παύει νὰ περιέχῃ ὡς παράγοντας ὅλα τὰ δοθέντα, δηλ. παύει νὰ εἶναι *Κ.Π.*, συνεπῶς τὸ (2) εἶναι τὸ κατωτάτου δυνατοῦ βαθμοῦ *Κ.Π.* τῶν (1) καὶ ἔτσι ἐξηγεῖται καὶ ἡ ὀνομασία του ὡς *Ε.Κ.Π.*

θ') **Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀκεραίων μονωνύμων ἐχόντων ἀκεραίους συντελεστές.** Καλεῖται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* (*Μ.Κ.Δ.*) ὁσωνδήποτε ἀκεραίων μονωνύμων ἐχόντων ἀκεραίους συντελεστές, ἓνα μονώνυμον ἔχον συντελεστήν τὸ *Μ.Κ.Δ.* τῶν συντελεστικῶν τῶν δοθέντων καὶ περιέχον ὅλας τὰς μεταβλητάς τῶν δοθέντων μονωνύμων, ἐκάστην δὲ μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην τῆς. (Πρὸβλ. § 37, ε').

μον τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν τὸν **Μ.Κ.Δ.** τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων καὶ μεταβλητῶν, μόνον τὰς κοινὰς εἰς τὰ μονώνυμα μεταβλητὰς καὶ ἐκάστην τούτων, μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην της. (Πρβλ. 37, στ').

Π.χ. ὁ **Μ.Κ.Δ.** τῶν $-5xy^3, +20x^2yz^3, -10xyz^4$ εἶναι τὸ $5xy$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-298. Διὰ $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = -6, a = 10$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν ἐκάστης τῶν παραστάσεων: $axyz, ax^3y^2z, -15a^2x^2yz^2$.

A-299. Εὑρετε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι μονωνύμων εἶναι ὅμοια, καὶ ποῖα εἶναι ἀντίθετα:

$$3ax^2, -2a^2x^3, -\frac{1}{3}ax^2, +\sqrt{2}a^2x^2, 2a^2x^3, \frac{1}{3}a^2x^2.$$

A-300. Θέσατε τὰ κάτωθι γινόμενα ὑπὸ μορφήν μονωνύμων:

$$(12x^3y) \cdot (7x^2yz), (-5xyz)(8xy^2), (7xy^2z^3) \cdot (2x^2yz) \cdot (5x^4y^5z^2).$$

A-301. Εὑρετε τὰ τετράγωνα καὶ τοὺς κύβους τῶν κάτωθι μονωνύμων:

$$-2x^3, \frac{1}{2}xy^2, -\frac{1}{3}x^2yz, 11xy^3z^2\omega.$$

A-302. Ὑπολογίσατε τὰς τετάρτας καὶ πέμπτας δυνάμεις τῶν κάτωθι μονωνύμων:

$$-xy, \frac{1}{2}xy^2z^3, -3x^5yz^2\omega.$$

A-303. Ὑπολογίσατε τὰ γινόμενα:

$$\left(\frac{1}{2}a\beta^2\gamma\right)^4 \cdot (-3a^2\beta), (-3x^2y)^3 \cdot (-xy^3z)^5 \cdot (3xyz)^2.$$

A-304. Προσθέσατε τὰ κάτωθι μονώνυμα:

$$-\frac{11}{3}x^2y, 5x^2y, +\frac{8}{3}x^2y, -7x^2y, x^2y, (3-\sqrt{2})x^2y, \sqrt{2}x^2y.$$

A-305. Προσδιορίσατε τὸ **Ε.Κ.Π.** καὶ τὸν **Μ.Κ.Δ.** τῶν μονωνύμων:

$$i) -3x^2y\omega, 6xy^3\omega, 15xy^5\omega^2. \quad ii) 4x^3y, -6xy\omega, +14xy^3, 8x^4y^4.$$

A-306. Εὑρετε τὸ **Ε.Κ.Π.** τῶν μονωνύμων:

$$i) 3a^2\beta, -11a\beta^2, 22a^3\beta\gamma, 6a\beta\gamma^4, \quad ii) a^4, -a^2\beta, +a^2\beta^2, -a\beta^3, \beta^4.$$

A 307. Ἐκτελέσατε τὰς διαιρέσεις:

$$-15x^3y^2\omega : 3xy^2\omega, \quad -7a^7\beta\gamma : -a^3\beta, \\ 2a^2xy : -5ax, \quad 121a^3\beta x : -22a^2x, \quad -169a^3\beta^2x : 13a\beta x.$$

A-308. Εὑρετε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$-\frac{1}{3}x^2yz : \frac{11}{6}x^2z, \quad 32x^3y^4z^5 : -64xy^4z^2,$$

$$\frac{3}{11}a^3\beta^2\gamma^2\omega : -16a^2\beta^3\gamma^2\omega, \quad \frac{1}{15}x^3yz : \frac{1}{15}xy, \quad -x^2yz : x^2yz.$$

§ 101. **Ἀκέραια πολυώνυμα.**— α') Κάθε ἀλγεβρική παράστασις ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων καλεῖται **ἀκέραιον πολυώνυμον**. Τὰ μονώνυμα ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ πολυώνυμον λέγονται ὅροι τοῦ πολυωνύμου.

β') **Βαθμός.** Ἐκ τῶν ὄρων τοῦ πολυωνύμου λαμβάνομεν ἐκεῖνον ὅστις ἔχει τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους ἢ ἔχει βαθμὸν ὅχι μικρότερον ἀπὸ κανένα ἄλλον καὶ ὁ βαθμὸς τοῦ ὅρου τούτου λέγεται **βαθμὸς τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Αἱ παραστάσεις :

$$(1) \quad \Pi(x) = \frac{5}{7}x^3 - 2x^2 + 4x - 1.$$

$$(2) \quad f(x, y) = 4x^3y - 2x^2y + 3xy + y^2 + x^2 - 1,$$

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{3}x^2y + 5yz^2 - 2xyz + \frac{1}{7}$$

εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς, δύο καὶ τριῶν μεταβλητῶν ἀντιστοίχως, βαθμῶν δὲ 4ου, 4ου καὶ 3ου ἀντιστοίχως.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν. Τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον (2) εἶναι βαθμοῦ τρίτου ὡς πρὸς x καὶ δευτέρου ὡς πρὸς y . Τὸ (3) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x , πρώτου ὡς πρὸς y , καὶ 2ου ὡς πρὸς z .

γ') **Ἀναγωγή ὁμοίων ὄρων.** Ἐὰν ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς ἓνα πολυώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς μετ' ἓνα (§ 100 γ').

Οὕτω π.χ. :

$$\begin{aligned} & 4\alpha x^3 - 3\alpha^2 x + \frac{1}{7}\alpha x^3 - 4 - \alpha x^3 + 2x^2 = \\ & = \left(4\alpha x^3 + \frac{1}{7}\alpha x^3 - \alpha x^3 \right) - 3\alpha^2 x - 4 + 2x^2 = \frac{22}{7}\alpha x^3 + 2x^2 - 3\alpha^2 x - 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐπίσης:} \quad & \alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - 4\beta^3 - 4\alpha^3 + \alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 5\beta^3 = \\ & = (\alpha^3 - 4\alpha^3) + (2\alpha^2\beta + \alpha^2\beta) + (-3\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta^2) + (-4\beta^3 + 5\beta^3) = -3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3. \end{aligned}$$

δ') **Διώνυμον, τριώνυμον.** Ἐὰν τὸ πολυώνυμον σύγκειται ἀπὸ δύο ὅχι ὅμοια μονώνυμα, λέγεται **πολλάκις** καὶ **διώνυμον** καὶ ἀν ἀπὸ τρία, **τριώνυμον**.

ε') **Διατεταγμένα πολυώνυμα.** Ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται **διατεταγμένον** κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς, ὅταν οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς βαίνουν ἐλαττούμενοι, ἐφ' ὅσον ἀναγιγνώσκωμεν τὸ πολυώνυμον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ. Π.χ. τὰ πολυώνυμα

$$-6x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^3 + 2\alpha^2 - 7\alpha + 12$$

εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τὸ πρῶτον καὶ τοῦ α τὸ δεύτερον.

Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς, ὅταν ὁ βαθμὸς τῆς μεταβλητῆς βαίνει αὐξανόμενος ἐφ' ὅσον ἀναγιγνώσκωμεν τὸ πολυώνυμον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $-3+2x+7x^2-2x^3+x^4$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x .

Ἐφ' ὅσον οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου περιέχουν πολλὰς μεταβλητάς, τότε τὸ πολυώνυμον δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους, ὡς πρὸς τὰς διαφόρους μεταβλητάς.

Π.χ. τὸ $3ax^2y+2axy^2+\omega^2$ δύναται νὰ διαταχθῇ :

1ον. Κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x : $3ax^2y+2axy^2+\omega^2$.

2ον. Κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ y : $2x\omega y^2+3ax^2y+\omega^2$.

3ον. Κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ω : $3\omega^2+2axy^2+3ax^2y$ καθὼς καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰ αὐτὰ γράμματα.

στ') Ὅμογενές πολυώνυμον πολλῶν μεταβλητῶν λέγεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα τοῦ ἰδίου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς. Π.χ. τὸ $x+3y+z$ (ὁμογενές 1ου βαθμοῦ), τὸ $2x^2-xy+3y^2$ (ὁμογενές 2ου βαθμοῦ), τὸ x^3-3x^2y+xyz (ὁμογενές 3ου βαθμοῦ).

ζ') Διάταξις εἰς ὁμογενεῖς ομάδας. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου περιέχουν διαφόρους μεταβλητάς καὶ γραφοῦν καθ' ὁμάδας, ἐκαστῇ τῶν ὁποίων ν' ἀποτελῇ ὁμογενές πολυώνυμον, ὁ κοινὸς δὲ βαθμὸς ἐκάστης ομάδος νὰ εἶναι διαφορετικὸς τοῦ τῶν ἄλλων, τότε λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον εἰς ὁμογενεῖς ομάδας.

Π.χ. τὸ $(2x^2+3xy+y^2)+(4x-5y)+7$, εἶναι διατεταγμένον εἰς τρεῖς ὁμογενεῖς ομάδας. Ἡ πρώτη εἶναι 2ου, ἡ δευτέρα 1ου καὶ ἡ τρίτη, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y .

η') Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων, εἶναι, πάλιν, ἀκέραιον πολυώνυμον. Διότι, ἐφ' ὅσον διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις ἰσχύουν οἱ νόμοι τῶν πράξεων, (§ 99 δ') τὰ πολυώνυμα προστίθενται, ἀφαιροῦνται καὶ πολλαπλασιάζονται ὅπως τὰ ἀλγεβρικὰ ἄθροίσματα, τὸ δὲ ἐξαγόμενον εἶναι πάλιν ἄθροισμα μονωνύμων, δηλ. ἀκέραιον πολυώνυμον.

Π.χ. ἔστωσαν τὰ πολυώνυμα $A=9x^4-2ax^3+a^2x^2-\beta^3x+\beta^4$ καὶ $B=5x^4+3\beta x^3-5\alpha\beta x^2-\alpha^3x+\beta^4$. Τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$$A+B=(9x^4-2ax^3+a^2x^2-\beta^3x+\beta^4)+(5x^4+3\beta x^3-5\alpha\beta x^2-\alpha^3x+\beta^4)=$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\begin{aligned}
 &= 9x^4 - 2\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - \beta^3 x + \beta^4 + 5x^4 + 3\beta x^3 - 5\alpha\beta x^2 - \alpha^3 x + \beta^4 = \\
 &= 9x^4 + 5x^4 - 2\alpha x^3 + 3\beta x^3 + \alpha^2 x^2 - 5\alpha\beta x^2 - \beta^3 x - \alpha^3 x + \beta^4 + \beta^4 = \\
 &= 14x^4 + (3\beta - 2\alpha)x^3 + (\alpha^2 - 5\alpha\beta)x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + 2\beta^4.
 \end{aligned}$$

Ἐπίσης, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον ἀρκεῖ ν' ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ καὶ κατόπιν μὲ ἡλλαγμένα σημεῖα νὰ τοὺς προσθέσωμεν διαδοχικῶς. Π.χ.

$$\begin{aligned}
 &5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x - 12 - (3x^4 + 8x^2 + 9x + 10) = \\
 &= 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x - 12 - 3x^4 - 8x^2 - 9x - 10 = \\
 &= 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 19x - 22.
 \end{aligned}$$

Ὁ πολλαπλασιασμός πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον γίνεται συμφώνως πρὸς τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον.

Ἐστω π.χ. τὸ πολυώνυμον $A = 3x^2 - 5xy + 2y^2$ καὶ τὸ μονώνυμον $\lambda = 7x^3y$. Τὸ γινόμενον $A\lambda$ εἶναι:

$$(3x^2 - 5xy + 2y^2)(-7x^3y) = -21x^5y + 35x^4y^2 - 14x^3y^3.$$

Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εὐρίσκεται συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀθροισμάτων, δηλ. πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ ἄλλου καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα (ἐπιμεριστικὸς νόμος). Συνήθως πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου πολυωνύμου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου, κ.ο.κ., καὶ τέλος ἀθροίζομεν ὅλα τὰ γινόμενα ἐκτελοῦντες καὶ τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων (ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τοιοῦτοι). Οὕτω π.χ.

$$\begin{aligned}
 &(2x + 5x^2 - 6x^3 + 4x^4)(2 + 5x - 4x^2) = \\
 &= 4x + 10x^2 - 8x^3 + 10x^2 + 25x^3 - 20x^4 - 12x^3 - 30x^4 + 24x^5 + 8x^4 + 20x^5 - 16x^6 = \\
 &= -16x^6 + 44x^5 - 42x^4 + 5x^3 + 20x^2 + 4x.
 \end{aligned}$$

Βλέπομεν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.

θ') **Βαθμὸς τοῦ γινομένου.** Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολ/σμοῦ τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων γίνεται φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκέραιων πολυωνύμων εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο παραγόντων. Π.χ. τὸ $x^2 + 2xy^2$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y τὸ δὲ $xz + y$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z . Τὸ γινόμενόν των εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z μὲ μεγιστοβάθμιον ὅρον τὸν $2x^2y^2z$.

ι') **Θεώρημα.** Ἐστωσαν $A(x)$ καὶ $B(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα διατεταγμένα ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καὶ $\Gamma(x)$ τὸ γινόμενόν των $A(x) \cdot B(x)$ διατεταγμένον ἐπίσης ὡς πρὸς x . Τότε ὁ μεγιστοβάθμιος ὡς πρὸς x , ὅρος τοῦ γινομένου $\Gamma(x)$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μεγιστοβαθμίων ὁρων τῶν $A(x)$ καὶ $B(x)$ ὁ δὲ ἐλαχιστοβάθμιος (ὡς πρὸς x) ὅρος τοῦ $\Gamma(x)$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἐλαχιστοβαθμίων ὁρων τῶν $A(x)$ καὶ $B(x)$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω Kx^a τυχὼν ὅρος τοῦ πρώτου πολυωνύμου καὶ Lx^b τυχὼν ὅρος τοῦ δευτέρου. (Τὰ K καὶ L εἶναι ἢ ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις περιέχουσαι ἄλλας μεταβλητὰς διαφόρους τοῦ x).

Τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ὄρων, δηλ. τὸ KLx^{a+b} θὰ εἶναι εἰς ὅρος τοῦ γινομένου τῶν δύο πολυωνύμων. Εἶναι δὲ προφανές, ὅτι ἐν ἡ περιπτώσει ὁ Kx^a εἶναι ὁ μεγίστου βαθμοῦ ὅρος τοῦ πρώτου πολυωνύμου, ὁ δὲ Lx^b ὁ ὅρος μεγίστου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου πολυωνύμου (ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x), τότε ὁ ὅρος KLx^{a+b} θὰ εἶναι ὁ ὅρος μεγίστου βαθμοῦ (ὡς πρὸς x) τοῦ γινομένου μὴ ἀναγόμενος με κανένα ἄλλον. (Καθ' ὅσον πάντες οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ γινομένου θὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $a+b$).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ τὸ 2ον μέρος τοῦ θεωρήματος.

ια') Τὸ τετράγωνον τυχόντος πολυωνύμου. «Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου (ἢ καὶ ἀθροίσματος ἀριθμῶν) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὄρων του αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἀθροισμα τῶν διπλασίων γινομένων τῶν ὄρων λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους».

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \rho + \sigma + \tau$, πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$(1) \quad (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \rho + \sigma + \tau)(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \rho + \sigma + \tau)$$

Οἱ ὅροι τοῦ γινομένου (1) σχηματίζονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τυχόντος ὄρου τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ τυχόντα ὄρον τοῦ δευτέρου. Ὅταν λοιπὸν λάβωμεν τὸ αὐτὸ γράμμα καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἀθροίσματα θὰ σχηματισθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ γράμματος τούτου. Ἄν λάβωμεν διαφορετικὰ γράμματα, π.χ., τὸ β ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τὸ ρ ἐκ τοῦ δευτέρου θὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον $\beta\rho$ τῶν γραμμάτων τούτων. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ παρουσιασθῇ ἀκόμη μίαν φορὰν ὅταν λάβωμεν, ἀντιστρόφως, τὸ ρ ἐκ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος καὶ τὸ β ἐκ τοῦ δευτέρου. Ἄρα θὰ παρουσιασθῇ τὸ διπλάσιον τοῦ $\beta\rho$. Ὡστε οἱ ὅροι τοῦ (1) μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ εἶναι δύο εἰδῶν ἢ τετράγωνα τῶν γραμμάτων ἢ διπλάσια γινόμενα τῶν γραμμάτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐν τῇ πράξει γράφομεν πρῶτον κατὰ σειρὰν τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν προσθετῶν καὶ ἀκόλουθως τὰ διπλάσια γινόμενα τοῦ πρώτου με ὅλα τὰ ἐπόμενα γράμματα, κατόπιν τοῦ δευτέρου με ὅλα τὰ ἐπόμενα του, κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta, \\ (x^3 + x^2 - x - 1)^2 &= x^6 + x^4 + x^3 + 1 + 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = \\ &= x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

2) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διατυπῶνται συμβολικῶς καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(2) \quad (\Sigma\alpha)^2 = \Sigma\alpha^2 + \Sigma 2\alpha\beta,$$

ὅπου $\Sigma\alpha$ = ἀθροισμα τοῦ α καὶ τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν.

$\Sigma\alpha^2$ = ἀθροισμα τοῦ α^2 καὶ ὅλων τῶν λοιπῶν τετραγώνων.

$\Sigma 2\alpha\beta$ = ἀθροισμα τοῦ $2\alpha\beta$ καὶ ὅλων τῶν λοιπῶν δυνατῶν διπλασίων γι-

ιβ') Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου. Ἐπειδὴ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἂν ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔπεται, κατ' ἀναλογία, ὅτι πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ μονωνύμου, ἂν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

Τὸ πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου, δὲν εἶναι ἐν γένει ἀκέραιον πολυώνυμον (ἀλλὰ κλασματικὴ παράστασις) πλὴν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν ὅλαι αἱ μερικαὶ διαιρέσεις εἶναι τέλειαι. (§ 100 ζ').

Ἐστω π.χ. $A = 25x^2y^2 - 10xy^4 + 20x^2y$ καὶ $\lambda = 15xy$. Τὸ πηλίκον τοῦ A διὰ λ εἶναι, $A : \lambda = (25x^2y^2 : 15xy) - (10xy^4 : 15xy) + (20x^2y : 15xy) = \frac{5}{3}xy - \frac{2}{3}y^3 + \frac{4}{3}x$.

ιγ') Τελεία διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου. Ἐστωσαν δύο ἀκέραια πολυώνυμα A καὶ B . Λέγομεν ὅτι τὸ A διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ B , ὅταν ὑπάρχῃ τρίτον ἀκέραιον πολυώνυμον Π τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ B δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ A . Δηλαδή ὅταν τὸ A δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$A = B \cdot \Pi$$

Τὸ Π λέγεται πηλίκον τῆς (τελείας) διαιρέσεως τοῦ A διὰ τοῦ B . Λέγομεν ἐπίσης τότε ὅτι τὸ A εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ B ἢ ὅτι τὸ B διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ A . Γράφομεν ἀκόμῃ :

$$A : B = \Pi$$

ἢ

$$\frac{A}{B} = \Pi$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-309. Τίνος βαθμοῦ εἶναι ἕκαστον τῶν κάτωθι πολυωνύμων :
 $2xy + y^2 - 5y + 7xy^2 + 1$, $x^3 + y^3 - 3xy^2 + 4x^2y$, $xyz - 2x^2 - 2z^2$.

A-310. Τίνος βαθμοῦ εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$$3x^2yz - 4xy^2 + z^3 + 2x^2y + 3z^2x - 8xyz + 9x - 7y,$$

1ον) ὡς πρὸς x , 2ον) ὡς πρὸς y , 3ον) ὡς πρὸς z , 4ον) ὡς πρὸς x καὶ z , 5ον) ὡς πρὸς x, y, z ;

A-311. Νὰ διαταθοῦν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τὰ πολυώνυμα :

$$ax^3 + 3a^2x^2 - 5ax^3 + x^4 + ax^3 + a^2x^2 - 3a^3x + a \quad \text{καὶ} \\ x^4y^3 - x^3y^5 + 2x^4y^4 - x^5y^2 - x^3y^5 - y^3 - 2x^4y^3$$

A-312. Ποία ἐκ τῶν κάτωθι πολυωνύμων εἶναι ὁμογενῆ :

$$x^5 - 4x^4y + 2x^2y^2z + 3xy^4 - 5z^5, \quad 2x^2 + 3xy - y^2 + 2y, \quad -7xy^5 + x^6 + x^2y^4 - 2x^3y^3.$$

A-313. Νὰ διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας τὸ πολώνυμον :

$$3x^4y^2 - x^3y^5 + 10x^4y^4 - x^5y^2 - 7x^3y^5 + y^3 - 2x^4y^3 + 3xy^2.$$

A-314. Προσθέσατε τὰ πολώνυμα : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ καὶ $\sigma(x) = 5x^3 + 7x^2 - 6x - 2$. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολωνύμων εἶναι $\varphi(x)$, εὑρετε τὸ $\varphi(-1)$.

A-315. Φέρατε εἰς τὴν ἀπλουστάτην δυνατὴν μορφήν τὰς παραστάσεις :

$$1ον) 3x - \{3y - (-5z + 5y)\} - \{3x - (4y - 5z)\} - \{4y - (3z + 2x)\}.$$

$$2ον) 11x^2y - (11xy^2 - y^3) - (x^3 + 11xy^2 - y^3 + 7x^2y) - (2y^3 - 16xy^2 - x^3).$$

$$3ον) xy - \{3yz + (3zx - 2xy - (xy + 2yz)) + 3xy - (yz + 5zx)\}.$$

A-316. Εὑρετε τὰ γινόμενα :

$$(2xy - xz + 5yz) \times x^3y^2z, \quad (-5a^2 + 3a\beta - 8\beta^2) \times (-9a\beta),$$

$$(6x^2y^2z^2 - 4xy^2z^3 - 10xy^2z) \times 5x^2y^2z, \quad -4a\beta\gamma x^2y^2 \times (-5a^2\beta^2\gamma^2 + 3a\beta\gamma - a\alpha - 2\beta\gamma - 4\gamma z).$$

A-317. Εὑρετε τὰ γινόμενα :

$$(2x-7)(x-5), \quad (3x^2-7x-9)(2x-3), \quad (3a^2-7a\beta-16\beta^2) \cdot (-9a-4\beta), \\ (2a^2+2a+3)(3a^2-3a+1).$$

A-318. Εὑρετε τὰ γινόμενα :

$$(x^2+x+1)(x-1), \quad (x^2-2xy+4y^2)(x+2y), \quad (0,2x^2+0,3x+1,5) \cdot (2,4x-3,7), \\ (27x^3-36x^2y+48xy^2-64y^3) \cdot (3x+4y).$$

A-319. Ἐὰν δύο ἀκέραια πολώνυμα εἶναι ἀντιστοίχως μ καὶ ν βαθμοῦ ὡς πρὸς x , ὅπου $\mu > \nu$, τίνος βαθμοῦ ὡς πρὸς x εἶναι τὸ ἄθροισμά των καὶ τίνος βαθμοῦ ἡ διαφορά των;

B-320. Ἐὰν τὸ πολώνυμον A εἶναι μ βαθμοῦ, τὸ B , ν βαθμοῦ, τὸ Γ , ρ βαθμοῦ ὡς πρὸς x , ὅπου $\mu > \nu > \rho$, τίνος βαθμοῦ εἶναι τὸ πολώνυμον $5A \cdot B + 7B \cdot \Gamma - B \cdot \Gamma$;

A-321. Ἐκτελέσατε τὰς διαιρέσεις :

$$(6a^3\beta^2 - 12a^2\beta^3 - 3a\beta^4) : 3a\beta$$

$$(8x^8y^6z - 4x^4yz^2 + 2x^2yz^2) : 2x^2yz$$

$$(4\mu^7\nu^3 + 8\mu^6\nu^4 - 12\mu^4\nu^6) : (-2\mu^4\nu^3).$$

A-322. Ἐπίσης : $\left(\frac{7}{8}x^4y^2 - \frac{11}{3}x^3y^3 + 4xy^4\right) : \left(-\frac{7}{24}xy^2\right)$

$$(0,26x^3 + 0,09x^2 - 0,72x) : (0,2x)$$

$$(1,44x^6 - 0,67x^4 - 2,97x^2) : \left(-\frac{1}{3}x^2\right).$$

B-323. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς x ἐξ ὧν τὸ ἓν ἔχει τουλάχιστον δύο ὁρους διαφορετικοῦ βαθμοῦ, οὐδέποτε εἶναι μονώνυμον.

B-324. Δείξατε ὅτι τὸ $3x^2 + 2x - 21$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $x+3$. Ὁμοίως τὸ $2x^2 + 13x + 6$ διὰ τοῦ $x+6$ (βλ. § 101, ιγ').

B-325. Εὑρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $9x^2 - 42x + 49$ διὰ τοῦ $3x - 7$.

B-326. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν κάτωθι πολωνύμων :

$$x^2 + 1, \quad x^2 + 2x + 1, \quad x^2 + 3x + 2, \quad x^2 + 4x + 4, \quad x^2 + 5x + 6, \quad x^2 + 6x + 9, \quad x^2 + 7x + 12, \quad x^2 + 8x + 16.$$

B-327. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 120, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι 4400. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀριθμῶν τούτων λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους;

§ 102. Ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. α') Γενικὴ μορφή. Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον νουστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x θὰ εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς

$$(1) \quad \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ὅπου $\alpha_n \neq 0$ καὶ πάντες οἱ $n+1$ συντελεσταὶ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ εἶναι ἤ ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις μὴ περιέχουσιν τὸ x .

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ (1) εἶναι $\neq 0$ τὸ πολυώνυμον λέγεται καὶ πλῆρες πολυώνυμον.

Τὸ πολυώνυμον νουστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ:

$$(2) \quad \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n, \quad \alpha_n \neq 0,$$

δηλ. κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x .

Δύναται ἀκόμη νὰ γραφῇ:

$$(3) \quad \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

$$(3') \quad \text{μὲ } \alpha_n \neq 0 \text{ καὶ } \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = 0$$

Ἐὰν ἔχωμεν καὶ δεύτερον πολυώνυμον, μ βαθμοῦ, ἔστω τὸ

$$(4) \quad \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu+1} x^{\mu+1} + \beta_{\mu+2} x^{\mu+2} + \dots$$

$$(4') \quad \text{μὲ } \beta_\mu \neq 0 \text{ καὶ } \beta_{\mu+1} = \beta_{\mu+2} = \dots = 0$$

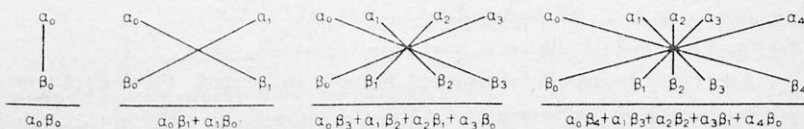
τότε τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν (3) καὶ (4) δύναται νὰ γραφῇ:

$$(5) \quad (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_2 + \beta_2)x^2 + \dots + (\alpha_p + \beta_p)x^p + \dots$$

ὑπὸ τὰς συνθήκας (3') καὶ (4'), τὸ δὲ γινόμενον τῶν (3) καὶ (4):

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0)x + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0)x^2 + \dots + \\ & + (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_2 \beta_{n-2} + \dots + \alpha_n \beta_0)x^n + \dots \end{aligned}$$

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ γινομένου προκύπτουν διὰ τῶν κάτωθι σχημάτων:



β') Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον τοῦ x . Διὰ θεωρητικοὺς λόγους εἰσάγομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ «μηδενικοῦ πολυωνύμου», δηλαδή ἑνὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς x τοῦ ὁποίου πάντες συντελεσταὶ εἶναι μηδέν: $0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0$. Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων του δύναται νὰ εἶναι οἷονδήποτε, βαθμὸς δὲ αὐτοῦ δὲν ὀρίζεται. Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον προστιθέμενον εἰς ἕν ἄλλο τυχὸν πολυώνυμον τοῦ x , τὸ ἀφίνει ἀμετάβλητον. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι πάντοτε τὸ μηδέν ὅποιανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ τὸ x . Διὰ τοῦτο προκειμένου νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι κάποιον ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x , ἔστω τὸ $f(x)$, εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον γράφομεν:

$$(6) \quad f(x) \equiv 0 \quad (\text{ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς μηδέν})$$

καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ $f(x)$ δὲν εἶναι μηδενικὸν πολυώνυμον γράφομεν:

$$(7) \quad f(x) \not\equiv 0.$$

Τὸ πολυώνυμον μὲ μηδενικοὺς συντελεστάς εἶναι τὸ μόνον πολυώνυμον τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ μηδενίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Δηλ. **ισχύει ἡ ιδιότης**: ἂν πολυώνυμον $f(x)$ καθίσταται μηδέν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x τότε τὸ $f(x)$ θὰ ἔχῃ πάντας τοὺς συντελεστάς του μηδενικοὺς.

Τοῦτο δεικνύεται ἐπαγωγικῶς ὡς ἐξῆς:

1ον) Ἐστω τὸ $f(x)$ τῆς μορφῆς $\alpha_0 + \alpha_1 x$.

Ἐξ ὑποθέσεως $f(x) = 0$ δι' ὅποιονδήποτε x .

Ἐὰν τεθῇ $x=0$, τότε $f(0) = \alpha_0$ ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως, $f(0) = 0$, ἄρα $\alpha_0 = 0$.

Ἐὰν τεθῇ $x=1$, τότε $f(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = 0$.

Ἐπομένως καὶ οἱ δύο συντελεσταὶ του εἶναι 0, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

2ον) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀποδεικτέα ιδιότης ἰσχύει δι' ὅλα τὰ πολυώνυμα τῆς μορφῆς $n-1$ βαθμοῦ:

$$(8) \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}.$$

δηλαδή ὅτι ταῦτα, ἐφ' ὅσον μηδενίζονται διὰ κάθε x , θὰ ἔχουν ὅλους τοὺς συντελεστάς των μηδενικοὺς.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τότε, ἡ ιδιότης θὰ ἰσχύῃ κατ' ἀνάγκην καὶ διὰ πολυώνυμα τῆς μορφῆς n βαθμοῦ:

$$(9) \quad F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n,$$

δηλ. ἂν $F(x) = 0$ διὰ κάθε x , τότε $A_0 = A_1 = \dots = A_n = 0$.

Διὰ $x=0$, ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως, $F(0) = 0$ καὶ ἐπειδὴ $F(0) = A_0$ ἔπεται $A_0 = 0$ καὶ τὸ $F(x)$ καθίσταται: $A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$.

Διὰ $x=1$ καὶ $x=2$ ἔχομεν ὅτι $F(1) = 0$ καὶ $F(2) = 0$ ἔπεται ὅτι $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$ καὶ $2A_1 + 2^2 A_2 + \dots + 2^n A_n = 0$.

$$\begin{aligned} 2^v & \mid F(\lambda) = A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots + A_{v-1}\lambda^{v-1} + A_v\lambda^v = 0 \\ -1 & \mid F(2\lambda) = A_1 \cdot 2\lambda + A_2 \cdot 2^2\lambda^2 + \dots + A_{v-1} \cdot 2^{v-1}\lambda^{v-1} + A_v \cdot 2^v\lambda^v = 0 \end{aligned}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν :

$$(10) \quad \begin{cases} 2^v F(\lambda) - F(2\lambda) = A_1\lambda(2^v - 2) + A_2\lambda^2(2^v - 2^2) + \dots + A_{v-1}\lambda^{v-1}(2^v - 2^{v-1}) = 0 \\ \text{διὰ κάθε } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Ἄν θεωρήσωμεν τώρα τὸ πολυώνυμον

$$p(x) = A_1(2^v - 2)x + A_2(2^v - 2^2)x^2 + \dots + A_{v-1}(2^v - 2^{v-1})x^{v-1},$$

βλέπομεν ὅτι τοῦτο διὰ $x=0$ μηδενίζεται καὶ διὰ τυχὸν $x=\lambda \neq 0$, πάλιν μηδενίζεται λόγῳ τῆς (10). Ἐπειδὴ δὲ τὸ $p(x)$ εἶναι τῆς μορφῆς $v-1$ βαθμοῦ, δηλ. τῆς μορφῆς (8) ἔπεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι θὰ ἔχη ὅλους τοὺς συντελεστές του μηδενικούς, δηλ. : $A_1 = A_2 = \dots = A_{v-1} = 0$. Ἐπομένως τὸ $F(x)$ καθίσταται : $A_v x^v$. Διὰ $x=1$ λοιπὸν, $F(1) = A_v$ ἐνῶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $F(1) = 0$. Ἄρα $A_v = 0$. Ὡστε ἐδείχθη ὅτι καὶ τὸ $F(x)$ εἶναι μηδενικὸν πολυώνυμον.

Ἐδείξαμεν λοιπὸν ὅτι ἂν ἡ ιδιότης ἰσχύῃ διὰ πολυώνυμα μορφῆς $v-1$ βαθμοῦ, ἰσχύει ἀναγκαστικῶς καὶ διὰ πολυώνυμα μορφῆς v , βαθμοῦ. Ἀλλὰ διὰ πολυώνυμα μορφῆς πρώτου βαθμοῦ ἡ ιδιότης ἰσχύει (βλέπε 1ον). Συνεπῶς, ἰσχύει καὶ διὰ πολυώνυμα μορφῆς 2ου βαθμοῦ. Ἀφοῦ ἰσχύει διὰ πολυώνυμα μορφῆς 2ου βαθμοῦ, ἔπεται ὅτι θὰ ἰσχύει καὶ διὰ πολυώνυμα μορφῆς 3ου βαθμοῦ. Ἰσχύουσα διὰ μορφῆς 3ου βαθμοῦ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ μορφῆς 4ου βαθμοῦ κ.ο.κ. Διὰ τῶν διαδοχικῶν τούτων βημάτων φθάνομεν εἰς πολυώνυμον μορφῆς οἰοῦνδήποτε βαθμοῦ v .

γ') **Ἰσα πολυώνυμα.** Σύμφωνα μετὰ τὸν ὅρισμὸν τῶν ἴσων, ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (§ 99 β') δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x εἶναι ἴσα ἢ ἐκ ταυτότητος ἴσα, ὅταν λαμβάνουν ἴσας τιμὰς, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x .

Ἐστῶσαν τὰ (ἐκ ταυτότητος) ἴσα πολυώνυμα :

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \quad \text{καὶ}$$

$$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

Τότε θὰ εἶναι $P_1(x) = P_2(x)$ διὰ κάθε $x \in \Pi$ καὶ συνεπῶς $P_1(x) - P_2(x) = 0$ διὰ κάθε x . Ἡ διαφορὰ δηλαδή, τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴση μετὰ μηδέν, δηλ. εἶναι ἴση μετὰ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Ἐπειδὴ δὲ $P_1(x) - P_2(x) = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_2 - \beta_2)x^2 + \dots$ ἔπεται ὅτι

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots \quad \alpha_v = \beta_v \dots$$

Συνάγωμεν ὅτι ἵνα δύο διατεταγμένα ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, οἱ συντελεστοὶ τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων τῶν νὰ εἶναι ἴσοι, ἕνας πρὸς ἕνα. (Νὰ σύγ-
κεινται δηλαδή ἀπὸ τὰ αὐτὰ μονώνυμα).

δ') **Τὸ πολυώνυμον - σταθερά.** Ἡ οἰκογένεια τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x συμπληροῦται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς αὐτήν, ἐκτὸς τοῦ μηδενικοῦ καὶ τοῦ σταθεροῦ πολυωνύμου. Τὸ σταθερὸν πολυώνυμον (ἢ πολυώνυμον - σταθερά) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν σταθερὸν μόνον ὄρον καὶ εἶναι συνεπῶς ἀνεξάρτητον τοῦ x . Δηλαδή μία σταθερά c θεωρεῖται κατ' ἐπέκτασιν ὡς πολυώνυμον τοῦ x , βαθμοῦ μηδενικοῦ, ἐφ' ὅσον $c \neq 0$. Οὕτω, π.χ., ὁ ἀριθμὸς 7 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x μηδενικοῦ βαθμοῦ, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $7 \equiv 7x^0$. Ἐὰν $c=0$, τότε τὸ σταθερὸν πολυώνυμον συμπίπτει μὲ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

A-328. Διὰ κάθε a δεῖξατε ὅτι

$$(a-10)(x-a)(x-10) + 9(x-10)(x-1) + (1-a)(x-1)(x-a) + 9(a-10)(1-a) \equiv 0.$$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

§ 103. Ἀξιοσημεῖωτοι πολλαπλασιασμοί. Ὁρισμένοι τύποι γινομένων παρουσιάζονται τόσον συχνὰ εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν ὥστε καθίσταται ἀπαραίτητον, διὰ τὴν εὐχερῇ διεξαγωγὴν τῶν πράξεων, νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα τῶν εἰδικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν. Αἱ ἀπομνημονευτέαι αὗται ἰσότητες ἢ ταυτότητες (ἢ τύποι) εἶναι αἱ κάτωθι :

i) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

ii) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν i) ἐκτελεῖται ἐπιμεριστικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ καὶ διὰ τὴν ii), τίθεται εἰς τὴν i) ὅπου β , τὸ $-\beta$.

iii) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Ἀπόδειξις. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \beta^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $(\alpha\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3})(\alpha\sqrt{2} - \gamma\sqrt{3}) = 2\alpha^2 - 3\gamma^2$, $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = x^2 - 3$, $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) = [(\alpha + \beta) + \gamma][(\alpha + \beta) - \gamma] = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2$, $(x - y + \omega)(x + y - \omega) = [x - (y - \omega)][x + (y - \omega)] = x^2 - (y - \omega)^2 = x^2 - y^2 + 2y\omega - \omega^2$.

iv) $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$, $(x-1)(x-10) = x^2 - 11x + 10$, $(x+5)(x-1) + (x-2)(x+7) + (x+8)(x+6) = x^2 + 4x - 5 + x^2 + 5x - 14 + x^2 + 14x + 48 = 3x^2 + 23x + 29$.

v) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{Ἀπόδειξις. } (a + \beta + \gamma)^2 = [(a + \beta) + \gamma]^2 = (a + \beta)^2 + 2(a + \beta)\gamma + \gamma^2 = \\ = a^2 + 2a\beta + \beta^2 + 2a\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a\beta + 2a\gamma + 2\beta\gamma.$$

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. } (3x - y + 2)^2 = 9x^2 + y^2 + 4 - 6xy + 12x - 4y, \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x.$$

$$\text{vi) } (a + \beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 = a^3 + \beta^3 + 3a\beta(a + \beta).$$

«Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν, σὺν τρεῖς φορὰς τὸ γινόμενόν των ἐπὶ τὸ ἄθροισμά των».

Ἡ ἀπόδειξις εὐκόλος.

Ἐφαρμογή. Νὰ δεῖχθῇ ὅτι, ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἀθροισμα μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενόν των.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $a + \beta + \gamma = 0$. Τότε θὰ ἔχωμεν καὶ $a + \beta = -\gamma$. Ὑψούν-
τες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸν κύβον λαμβάνομεν $(a + \beta)^3 = (-\gamma)^3$ ἢ $a^3 + \beta^3 +$
 $+ 3a\beta(a + \beta) = -\gamma^3$. Εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα θέτομεν ὅπου $a + \beta$ τὸ ἴσον τοῦ
 $-\gamma$ καὶ λαμβάνομεν $a^3 + \beta^3 + 3a\beta(-\gamma) = -\gamma^3$ ἢ $a^3 + \beta^3 - 3a\beta\gamma = -\gamma^3$ ἢ $a^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$
 $= 3a\beta\gamma$, ὁ.ἔ.δ.

$$\text{vii) } (a - \beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3 = a^3 - \beta^3 - 3a\beta(a - \beta).$$

Ἡ (vii) προκύπτει ἐκ τῆς (vi) ἂν ὅπου β τεθῇ $-\beta$.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. } (\sqrt{5} + 1)^3 - (\sqrt{5} - 1)^3 = (\sqrt{5})^3 + 3(\sqrt{5})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 1^2 + 1^3 - \\ - \{(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 1^2 - 1^3\} = 6(\sqrt{5})^2 + 2 = 6 \cdot 5 + 2 = 32.$$

$$\text{viii) } (a + \beta + \gamma)^3 = a^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3a^2(\beta + \gamma) + 3\beta^2(a + \gamma) + \\ + 3\gamma^2(a + \beta) + 6a\beta\gamma.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δύνχεται νὰ προκύψῃ δι' ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $(a + \beta + \gamma)^2(a + \beta + \gamma)$.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν $a + \beta + \gamma = 0$ τότε, $\beta + \gamma = -a$, $a + \gamma = -\beta$ καὶ $a + \beta = -\gamma$, ἡ δὲ ἀνωτέρω ἰσότης (viii) γίνεταί:

$$0 = a^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3a^2(-a) + 3\beta^2(-\beta) + 3\gamma^2(-\gamma) + 6a\beta\gamma \quad \text{ἢ}$$

$$0 = a^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3a^3 - 3\beta^3 - 3\gamma^3 + 6a\beta\gamma \quad \text{ἢ}$$

$$0 = -2a^3 - 2\beta^3 - 2\gamma^3 + 6a\beta\gamma \quad \text{ἢ} \quad a^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3a\beta\gamma.$$

Δηλαδή ἀποδεικνύεται πάλιν ἡ ἐφαρμογή τοῦ τύπου (vi): «Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἀθροισμα μηδέν τότε...».

Παρατήρησις. Δὲν θὰ ἦτο περιττόν, ὁ σπουδαστὴς ν' ἀπομνημονεύσῃ τοὺς ἀνωτέρω τύπους καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν. Δηλαδή:

$$\text{i) } a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a + \beta)^2 \quad (\text{τέλειον τετράγωνον διωνύμου}).$$

$$\text{ii) } a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2.$$

$$\text{iii) } a^2 - \beta^2 = (a + \beta)(a - \beta).$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

- iv) $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$.
 v) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2$ (τέλειον τετράγωνον
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = (\alpha + \beta - \gamma)^2$ τριωνύμου).
 vi) $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$ (τέλειος κύβος διωνύμου).
 vii) $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ ἐκτελεσθῶν βάσει τῶν ἀξιοσημειώντων πολλαπλασιασμῶν αἱ πράξεις αἱ σημειούμεναι εἰς τὰς ἀσκήσεις 329 καὶ 330.

A-329. $(3\alpha x + 2\beta y)(3\alpha x - 2\beta y)$, $(3x - y + 5)(3x + y - 5)$, $(\alpha + 2\beta - 3)(\alpha + 2\beta + 3)$,
 $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta)(\alpha^2 + 4\beta^2)(\alpha^4 + 16\beta^4)$, $(2x + 3 + \mu)(2x + 3 - \mu)$.

A-330. $(x^2 + 3x - 2)^2$, $(1 + x^2 + x\sqrt{2})(1 + x^2 - x\sqrt{2})$, $(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)^2$,
 $(1 + x^2)(1 + x^2 + x\sqrt{3})(1 + x^2 - x\sqrt{3})$,

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{2y}{5}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{5}\right), \left(\frac{a^2}{\beta} + \frac{3a}{x}\right)\left(\frac{3a}{x} - \frac{a^2}{\beta}\right), \left(\frac{y}{2a} + \frac{a}{y}\right)^2.$$

A-331. Ν' ἀπλουστευθῶν αἱ παραστάσεις :

$$\alpha') (x + y - z)^2 - (x - y - z)^2 + (x - y + z)^2 - (y + z - x)^2.$$

$$\beta') \alpha(\beta + \gamma - \alpha)^2 + \beta(\gamma + \alpha - \beta)^2 + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma).$$

A-332. Νὰ ἐκτελεσθῶν αἱ πράξεις : $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 - 2\beta^3$, $(1 + x + x^2)^3$,
 $(x - y)^3 + (x + y)^3 + 3(x + y)(x - y)^2 + 3(x - y)(x + y)^2$.

B-333. Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης :

$$\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x-1)x}{2}\right\}^2 = x^3$$

καὶ ν' ἀποδειχθῇ κατόπιν τῇ βοηθείᾳ ταύτης ὅτι :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + v^3 = \left\{\frac{v(v+1)}{2}\right\}^2$$

ὅπου ν τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς.

B-334. Ν' ἀπλουστευθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} - \frac{(x-1)x(2x-1)}{6}$$

καὶ κατόπιν νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$$

ὅπου ν τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς.

A-335. Νὰ γραφῶν ὡς τετράγωνα διωνύμων τὰ πολυώνυμα :

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4, \quad x^2 - 2x + 1, \quad 4x^2 + 4x + 1, \quad x^2 - 22xy + 121y^2.$$

A-336. — Ὡρίσατε ἐκάστοτε τὸν ὅρον Τ, οὕτως ὥστε, ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ καθίσταται τέλειον τετράγωνον διωνύμου :

$$x^2 + T + 4y^2, \quad 9x^2 + T + 1, \quad 25 + T + y^2, \quad 25x^2 + T + 9y^2, \quad 81m^2 + T + 4n^2,$$

$$k^2 + T + 161^2, \quad 81x^2y^6 + T + 4, \quad 121a^2 + T + 9\beta^2, \quad 9x^4y^2 - 12x^2y^2 + T,$$

B-337. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων τριωνύμων καὶ ποῖαι ὄχι ; Ἐν τῇ πρώτῃ δὲ περιπτώσει νὰ γραφῶν ὡς τέλεια τετράγωνα :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma, \\ x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2, \quad x^2 + y^2 + 4 + 4x + 4y - 2xy, \quad x^2 + y^2 + 9 + 6x - 6y - 2xy.$$

B-338.—Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλειοι κύβοι ἀκεραίων διωνύμων ;

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1, \quad \omega^3\phi^3 + 3\omega^2\phi^2x + 3\omega\phi x^2 + x^3, \quad y^3 - 6y^2 + 12y - 8, \quad z^3 - 9z^2 - 27z - 27.$$

§ 104. Ἄλλαι ἀξιοσημεῖωτοι ταυτότητες.

i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

Δηλαδή τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἐκφράζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ γινομένου.

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \frac{1}{2} \{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2\}.$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma &= \frac{1}{2} \{2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma\} = \\ &= \frac{1}{2} \{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma\} = \\ &= \frac{1}{2} \{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma) + (\gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha\gamma)\} = \\ &= \frac{1}{2} \{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\}. \end{aligned}$$

iii) $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2.$

iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta).$

«Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν μείων τρεῖς φορές τὸ γινόμενόν των ἐπὶ τὸ ἄθροισμά των».

Διὰ τῆς ταυτότητος αὐτῆς ἐκφράζεται τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν συναρτήσῃ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἀπόδειξις εὐκόλος (βλ. § 103, vi).

v) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2).$

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος μετατρέπει τὸ ἄθροισμα δύο κύβων εἰς γινόμενον, προκύπτει δὲ ἐκ τοῦ προηγουμένου ἂν ἐξαχθῇ εἰς τὸ β' μέλος του ὁ κοινὸς παράγων $(\alpha + \beta)$ ἐκτὸς παρενθέσεως.

vi) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta).$

Δηλ. ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἐκφράζεται συναρτήσῃ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ γινομένου τῶν βάσεων.

Ἀπόδειξις εὐκόλος.

Ἡ φηλοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\text{vii)} \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

Δηλ. ἡ διαφορὰ δύο κύβων μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον.
Ἀποδείξεις, ὅπως ἡ τοῦ (v).

$$\text{viii)} \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) = \\ = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\}.$$

Ἀποδείξεις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος λαμβάνομεν τὸ πρῶτον. Ἐκ τοῦ δευτέρου μεταβαίνομεν ἐπίσης εἰς τὸ τρίτον δυνάμει τῆς (ii).

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ δεύτερον χρησιμοποιοῦντες δύο φορές τὴν ταυτότητα (iv) ὡς ἐξῆς :

$$\begin{aligned} (\alpha^3 + \beta^3) + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= \{(\alpha + \beta)^3 + \gamma^3\} - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= [(\alpha + \beta) + \gamma]^3 - 3(\alpha + \beta)\gamma[(\alpha + \beta) + \gamma] - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot [(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha + \beta)\gamma] - 3\alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot [(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha + \beta)\gamma - 3\alpha\beta] = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma - 3\alpha\gamma - 3\beta\gamma - 3\alpha\beta) = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha). \end{aligned}$$

$$\text{ix)} \quad x^v - \alpha^v = (x - \alpha)(x^{v-1} + x^{v-2}\alpha + x^{v-3}\alpha^2 + \dots + x\alpha^{v-2} + \alpha^{v-1})$$

ὅπου, x, α , τυχόντες πραγματικοὶ καὶ $v \in \Phi$.

Ἀποδείξεις. Ἀς καλέσωμεν Π τὴν παράστασιν

$$x^{v-1} + x^{v-2}\alpha + \dots + x\alpha^{v-2} + \alpha^{v-1}.$$

Θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad x^{v-1} + x^{v-2}\alpha + x^{v-3}\alpha^2 + \dots + x\alpha^{v-2} + \alpha^{v-1} = \Pi.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ x λαμβάνομεν :

$x^v + x^{v-1}\alpha + x^{v-2}\alpha^2 + \dots + x^2\alpha^{v-2} + x\alpha^{v-1} = x\Pi$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν ἀριθμὸν α^v :

$$x^v + x^{v-1}\alpha + x^{v-2}\alpha^2 + \dots + x^2\alpha^{v-2} + x\alpha^{v-1} + \alpha^v = x\Pi + \alpha^v.$$

Εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἐξάγομεν τὸν α ἐκτὸς παρενθέσεως, ἀπὸ ὅλους τοὺς ὁρους οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν α :

$$x^v + \alpha(x^{v-1} + x^{v-2}\alpha + \dots + x\alpha^{v-2} + \alpha^{v-1}) = x\Pi + \alpha^v.$$

Τὸ ἐν παρενθέσει πολυώνυμον εἶναι ἡ Π (λόγῳ τῆς (1)), ὥστε ἔχομεν :
 $x^v + \alpha\Pi = x\Pi + \alpha^v$. Ἐπομένως :

$$x^v - \alpha^v = x\Pi - \alpha\Pi \quad \eta \quad x^v - \alpha^v = (x - \alpha)\Pi$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν Π ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν ἀποδεικτέαν ταυτότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$

$x^5 - 25 = (x - 5)(x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 125x + 625)$

$$x^6 - 1 = x^6 - (-1)^6 = \{x - (-1)\} \{x^5 + x^4(-1) + x^3(-1)^2 + x^2(-1)^3 + x(-1)^4 + (-1)^5\} \\ = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1).$$

$$x) \quad x^v - 1 = (x - 1) (x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1) \quad (v \in \Phi)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ εἰς τὴν ix) νὰ τεθῇ $\alpha = 1$.

xi) Ἐὰν v , περιττός φυσικός ἀριθμός καὶ x τυχῶν πραγματικός ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$x^v + \alpha^v = (x + \alpha) (x^{v-1} - x^{v-2}\alpha + x^{v-3}\alpha^2 - \dots - x\alpha^{v-2} + \alpha^{v-1})$$

Ἐνταῦθα, τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ παρένθεσι πολυωνύμου εἶναι ἐναλλάξ + καὶ - καὶ μάλιστα τὸ + ὑπάρχει εἰς τοὺς ὅρους μὲ ἐκθέτην τοῦ α , ἄρτιον.

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ νὰ τεθῇ εἰς τὴν ix) ὅπου α , τὸ $-\alpha$ καὶ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἐπειδὴ v = περιττός θὰ εἶναι :

$$(-\alpha)^v = -\alpha^v, \quad (-\alpha)^{v-1} = \alpha^{v-1}, \quad (-\alpha)^{v-2} = -\alpha^{v-2} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.} \quad x^3 + \alpha^3 = (x + \alpha)(x^2 - \alpha x + \alpha^2), \\ x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

xii) Ἐὰν v περιττός, φυσικός ἀριθμός τότε :

$$x^v + 1 = (x + 1)(x^{v-1} - x^{v-2} + x^{v-3} - x^{v-4} + \dots - x + 1).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 1) «Ἐὰν v φυσικός ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀκέραιος $2^{4v} - 1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 15».

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς $2^{4v} - 1$ γράφεται καὶ $(2^4)^v - 1 = 16^v - 1$ καὶ προκύπτει ἀπὸ τὸ διώνημον $x^v - 1$ ὅταν $x = 16$. Θεωροῦμεν λοιπὸν τὴν ἐκ τῆς (x) ἀπορρέουσαν ταυτότητα

$$x^v - 1 = (x - 1)(x^{v-1} + x^{v-2} + x^{v-3} + \dots + x + 1).$$

καὶ θέτομεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη της ὅπου x τὸν 16 ὁπότε, φυσικὰ προκύπτουν ἴσοι ἀριθμοί :

$$16^v - 1 = 15(16^{v-1} + 16^{v-2} + \dots + 16 + 1).$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐν παρενθέσει ποσότης ἐκφράζει ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἔπεται ὅτι τὸ 2ον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 15, ἄρα καὶ τὸ πρῶτον.

2) «Ἐὰν v φυσικός ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀκέραιος $3^{2v+2} - 2^{v+1}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 7».

Ἀπόδειξις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς γράφεται $(3^2)^{v+1} - 2^{v+1} = 9^{v+1} - 2^{v+1}$ καὶ προκύπτει ἀπὸ τὴν παράστασιν $x^{v+1} - 2^{v+1}$ ὅταν $x = 9$. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν ταυτότητα

$$x^{v+1} - 2^{v+1} = (x - 2)(x^v + x^{v-1} \cdot 2 + x^{v-2} \cdot 2^2 + \dots + 2^v).$$

τεθῇ $x = 9$ λαμβάνομεν

$$9^{v+1} - 2^{v+1} = 7(9^v + 9^{v-1} \cdot 2 + \dots + 2^v) = \text{πολ. 7.}$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-339.—Νά ἐκτελεσθοῦν διὰ συντόμου τρόπου, βάσει τῶν ἀξιοσημειώ-
των μετασχηματισμῶν αἱ πράξεις :

$$(x+a)(x^2-ax+a^2)-(x-a)(x^2+ax+a^2),$$

$$(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2).$$

A-340.—Ἐάν $x+y=5$ καὶ $xy=6$, εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἐκάστης
τῶν παραστάσεων :

$$a') x^2+y^2, \quad b') x^3+y^3, \quad \gamma') (x-y)^2, \quad \delta') x^2+y^2+xy,$$

B-341. Ἐάν $z-y=1$ καὶ $x^2+y^2=4$, εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς
παραστάσεως :

$$x^3-y^3+(x+y)^3.$$

B-342. Δείξατε ὅτι ἂν α, β, γ πραγματικοί, τότε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0 \Rightarrow \alpha=0$
καὶ $\beta=0$ καὶ $\gamma=0$.

B-343. Ἐάν $x^3+y^3+z^3=3xyz$ νά δειχθῇ ὅτι τότε, ἢ $x+y+z=0$ ἢ $x=y=z$.

B-344. Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὴν σχέσιν
 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$
δείξατε ὅτι τότε $x=y=z$.

B-345. Βάσει τῆς ταυτότητος

$$\frac{x^2+k^2}{2} = \left(\frac{x+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-k}{2}\right)^2$$

δείξατε ὅτι ἂν x καὶ k εἶναι ἀκέραιοι ἀμφοτέρω ἄρτιοι ἢ ἀμφοτέρω πε-
ριττοί, τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{x^2+k^2}{2}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων
δύο ἀκεραίων.

B-346. Ἐάν x, y ἀκέραιοι ὁ δὲ ἀριθμὸς x^2+2y εἶναι τέλειον τετράγω-
νον ἀκεραίου τινὸς k , δείξατε ὅτι τότε οἱ x καὶ k εἶναι ἀμφοτέρω ἄρτιοι ἢ
ἀμφοτέρω περιττοί καὶ ὅτι ὁ ἀκέραιος x^2+y ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα δύο
ἀκεραίων τετραγώνων.

A-347.—Νά εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι τελείων διαιρέσεων (§ 101 ιγ'):

$$\frac{x^5-32y^5}{x-2y}, \quad \frac{81x^4-1}{9x^2-1}, \quad \frac{x^7y^7+1}{xy+1}, \quad \frac{\omega^5+32x^5}{\omega+2x}, \quad \frac{x^8-1}{x+1}, \quad \frac{y^6-64}{y+2}, \quad \frac{243x^6+32}{3x+2},$$

$$\frac{81a^4-\beta^8}{3a-\beta^2}, \quad \frac{x^8-16y^4}{x^2-2y}, \quad \frac{x^{6\mu}-y^{12\nu}}{x^\mu-y^{2\nu}}, \quad \frac{x^{3\mu}+y^{6\nu}}{x^\mu+y^{2\nu}} \quad (\mu, \nu \text{ φυσικοὶ ἀριθμοί}).$$

B-348. Ἐάν n ἄρτιος δείξατε ὅτι :

$$\frac{x^n-a^n}{x+a} = x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\dots-a^{n-1}.$$

A-349.—Ἐπὶ ποίαν παράστασιν πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ τὸ πολυώνυ-
μον $a^4+a^3\beta+a^2\beta^2+a\beta^3$ διὰ νά γίνῃ διώνυμον; Ὁμοίως διὰ τὰ x^2+ax+a^2 ,
 x^2-ax+a^2 , $x^3-ax^2+a^2x-a^3$.

B-350.—Ἐάν n φυσικὸς ἀριθμὸς δείξατε ὅτι ὁ ἀκέραιος $5^{2n+1}+1$ εἶναι
διαίρετὸς διὰ 6.

B-351.—Ἀπόδειξτε ὅτι ὁ ἀκέραιος $2^{35}+1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 31 καὶ διὰ 127.

B-352.—'Εάν α, β, ν φυσικοί ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > \beta$ νὰ δειχθῇ ἡ διπλῇ ἀνισότης

$$\nu \alpha^{\nu-1} > \frac{\alpha^{\nu} - \beta^{\nu}}{\alpha - \beta} > \nu \beta^{\nu-1}$$

§ 105. Ὁ τύπος τοῦ διωνύμου. — 'Εὰν τὸ διώνυμον $\alpha + \beta$ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην τυχόντα ἀκέραιον θετικόν, ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἐξαγόμενον τῆς ὑψώσεως ταύτης, δηλ. τὸ λεγόμενον ἀνάπτυγμα τῆς δυνάμεως $(\alpha + \beta)^{\nu}$ λέγεται διωνυμικὸς τύπος ἢ τύπος τοῦ διωνύμου. Μερικαὶ περιπτώσεις τοῦ διωνυμικοῦ τύπου εἶναι οἱ τύποι

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

Πρὸς τὸ παρόν, θὰ περιγράψωμεν ἀπλῶς τὸν τύπον τοῦτον ἀποβλέποντες εἰς τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν αὐτοῦ.

'Ἡ μορφή τοῦ διωνυμικοῦ τύπου εἶναι κατ' ἀρχὴν ἡ ἐξῆς:

(1) $(\alpha + \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + c_1 \alpha^{\nu-1} \beta + c_2 \alpha^{\nu-2} \beta^2 + c_3 \alpha^{\nu-3} \beta^3 + \dots + c_{\nu} \beta^{\nu}$
ὅπου οἱ συντελεσταὶ $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{\nu}$ τοῦ ἀναπτύγματος ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ ν καὶ προσδιορίζονται βαθμηδὸν μὲ τὸν ἐξῆς τρόπον:

Ὁ c_1 ἰσοῦται μὲ ν . Ὁ c_2 εὐρίσκεται ἂν ὁ c_1 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχόν του ἐκθέτην τοῦ α , δηλ. ἐπὶ $\nu-1$ καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ πλήθους τῶν πρὸ τοῦ c_2 ὅρων, δηλ. διὰ 2. Ὁ c_3 εὐρίσκεται ἂν ὁ c_2 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχόν του ἐκθέτην τοῦ α , δηλ. ἐπὶ $\nu-2$ καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ πλήθους τῶν πρὸ τοῦ c_3 ὅρων, δηλ. διὰ 3 κ.ο.κ.

Οὕτω π.χ.

$$(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + c_1 \alpha^4 \beta + c_2 \alpha^3 \beta^2 + c_3 \alpha^2 \beta^3 + c_4 \alpha \beta^4 + c_5 \beta^5, \quad \text{ὅπου}$$

$$c_1 = 5, \quad c_2 = \frac{c_1 \cdot 4}{2} = 10, \quad c_3 = \frac{c_2 \cdot 3}{3} = 10, \quad c_4 = \frac{c_3 \cdot 2}{4} = 5, \quad c_5 = \frac{c_4 \cdot 1}{5} = 1.$$

'Εν τούτοις, ὁ ὑπολογισμὸς τῶν συντελεστῶν διευκολύνεται, διότι ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰσάκεις τῶν ἄκρων ἀπέχοντες συντελεσταὶ εἶναι ἴσοι καὶ συνεπῶς ἐπαναλαμβάνονται δίς, ἐκτὸς τοῦ μεσίου (ἂν ὑπάρχῃ). Οὕτω:

$$(\alpha + \beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

$$(\alpha + \beta)^7 = \alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7.$$

'Εὰν εἰς τὸν τύπον (1) τεθῇ ὅπου β τὸ $-\beta$ λαμβάνομεν τὸν τύπον:

(2) $(\alpha - \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} - c_1 \alpha^{\nu-1} \beta + c_2 \alpha^{\nu-2} \beta^2 - c_3 \alpha^{\nu-3} \beta^3 + \dots$

όπου οί συντελεσται $c_1, c_2, c_3, \dots$ εἶναι οί προηγουμένως ὑπολογισθέντες. Οὕτω, π.χ.

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^5 &= \alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 - \beta^5 \\(\alpha - \beta)^8 &= \alpha^8 - 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 - 56\alpha^5\beta^3 + 70\alpha^4\beta^4 - 56\alpha^3\beta^5 + 28\alpha^2\beta^6 - 8\alpha\beta^7 + \beta^8.\end{aligned}$$

Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ διωνυμικοῦ τύπου εἶναι :

$$(\mathbf{x} + \alpha)^v = \mathbf{x}^v + v\mathbf{x}^{v-1}\alpha + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2}\mathbf{x}^{v-2}\alpha^2 + \frac{v(v-1)(v-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\mathbf{x}^{v-3}\alpha^3 + \dots + \alpha^v$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ἐάν οί ἀριθμοὶ x, y πληροῦν τὰς σχέσεις $x + y = \alpha, x^3 + y^3 = \beta^3$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $x^4 + y^4$, συναρτήσῃ τῶν α καὶ β .

Λύσις. Ὑποῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $x + y = \alpha$ εἰς τὴν 4ην λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \alpha^4 \quad \eta \quad x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \alpha^4 \quad \eta \\(3) \quad (x^4 + y^4) + 4xy(x^2 + y^2) + 6(xy)^2 &= \alpha^4.\end{aligned}$$

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην σχέσιν, ἐκτὸς τῆς ζητουμένης ποσότητος $x^4 + y^4$ ὑπάρχουν ἀκόμη καὶ αἱ ποσότητες xy καὶ $x^2 + y^2$ ἀρκεῖ δὲ νὰ γνωρίζωμεν τὰς δύο τελευταίας διὰ τὰ εὑρωμεν τὴν πρώτην.

Τὸ γινόμενον xy εὐρίσκεται ἐκ τῆς ταυτότητος $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, ἥτις δίδει :

$$\beta^3 = \alpha^3 - 3xy\alpha, \quad 3xy\alpha = \alpha^3 - \beta^3, \quad xy = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3\alpha}.$$

Τὸ $x^2 + y^2$ εὐρίσκεται ἐκ τῆς ταυτότητος $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ἥτις δίδει :

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3\alpha} = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^3 + 2\beta^3}{3\alpha} = \frac{\alpha^3 + 2\beta^3}{3\alpha}.$$

Κατόπιν τούτων ἡ (3) γίνεται :

$$x^4 + y^4 + 4 \cdot \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3\alpha} \cdot \frac{\alpha^3 + 2\beta^3}{3\alpha} + 6 \left(\frac{\alpha^3 - \beta^3}{3\alpha} \right)^2 = \alpha^4$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$x^4 + y^4 = \alpha^4 - 4 \cdot \frac{(\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + 2\beta^3)}{9\alpha^2} - 6 \cdot \frac{(\alpha^3 - \beta^3)^2}{9\alpha^2}$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις :

$$x^4 + y^4 = \frac{2\beta^6 + 8\alpha^3\beta^3 - \alpha^6}{9\alpha^2}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-353. Νὰ εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα : $(1-x)^6, (1+x^2)^7, (4-x^3)^8$.

A-354. Νὰ εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα :

$$\begin{aligned}(x+1)^4 - (x-1)^4, (x+\sqrt{2})^4 + (x-\sqrt{2})^4, \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^5, (x+\beta)^6 + (x-\beta)^6, \\(\sqrt{2}+1)^6 - (\sqrt{2}-1)^6, (\alpha+\beta)^7 - (\alpha-\beta)^7.\end{aligned}$$

B-355. Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν κάτωθι δυνάμεων τῇ βοήθειᾳ τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου :

$$(100+1)^7, (101)^6, (100-1)^6, 99^7, 98^4, 49^5.$$

B-356. Ν' ἀποδείχθωσιν αἱ ταυτότητες :

$$(x+y)^4 + x^4 + y^4 \equiv 2(x^2 + xy + y^2)^2$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 \equiv 5xy(x+y)(x^2 + y^2 + xy).$$

B-357. Ἐάν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y πληροῦν τὰς σχέσεις $x+y=a$ καὶ $x^3+y^3=b^3$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως x^5+y^5 συναρτήσῃ τῶν a καὶ b .

B-358. Ἐάν οἱ ἀριθμοὶ a καὶ β πληροῦν τὴν σχέσιν $a^2+\beta^2=1$, δεῖξατε ὅτι θὰ πληροῦν καὶ τὴν σχέσιν :

$$(a^4+\beta^4+a^2\beta^2)^2 = \frac{a^8+\beta^8+1}{2}.$$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

§ 106. Παραγοντοποίησις.—Ἀλγεβρική παράστασις ἡ ὁποία συγκροτεῖται ἀπὸ ἀκεραία πολυώνυμα συνδεδεμένα μεταξὺ τῶν διὰ προσθέσεων ἀφαιρέσεων καὶ πολλαπλασιασμῶν λέγεται **ἀκεραία - ρητὴ παράστασις**. Ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς ἀκεραίας - ρητῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ εἰς γινόμενον ἄλλων ἀκεραίων ρητῶν παραστάσεων $\Pi_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, $\Pi_2(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$... δ.ηλ. ἡ εὑρεσις μιᾶς ταυτότητος: $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \equiv \Pi_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \cdot \Pi_2(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$... λέγεται **παραγοντοποίησις** τῆς παραστάσεως $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ ἢ ἀκόμη τροπὴ εἰς γινόμενον ἢ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον παραγόντων τῆς δοθείσης παραστάσεως $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$. Ἡ παραγοντοποίησις ἀκεραίου πολυωνύμου ἢ γενικώτερον ἀκεραίας ρητῆς παραστάσεως εἶναι μία σημαντικὴ ἀλγεβρικὴ πρᾶξις, διότι συντελεῖ εἰς τὴν ἀπλοποίησιν πολυπλόκων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, εἰς τὴν ἀπόδειξιν διαφόρων προτάσεων καὶ εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων καὶ ἀνισώσεων ἀνωτέρου βαθμοῦ.

Τὸ πρόβλημα τῆς παραγοντοποιήσεως πολυωνύμου εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων. Διότι τώρα δίδεται τὸ γινόμενον καὶ ζητοῦνται οἱ παράγοντες ἐνῶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, δίδονται οἱ παράγοντες καὶ ζητεῖται τὸ γινόμενον.

Ἡ παραγοντοποίησις δὲν εἶναι πάντοτε εὐκόλος οὔτε πάντοτε δυνατὴ. Εἰς τὰ ἀμέσως ἐπόμενα θὰ ἐξετάσωμεν τὰς στοιχειώδεις μεθόδους δι' ὧν ἐπιτυγχάνεται ἡ παραγοντοποίησις διαφόρων ἀκεραίων πολυωνύμων ἢ γενικώτερον, ἀκεραίων ρητῶν παραστάσεων.

§ 107. Περίπτωσις κοινοῦ παράγοντος.—Ὅταν μεταξὺ τῶν ὄρων τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων (μονώνυμον) τότε δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως, σύμφωνα πρὸς τὸν τύπον

$$ax+ay+az = a(x+y+z)$$

ὁπότε τὸ πολυώνυμον μετατρέπεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. $ax+bx^2+cx^3=x(a+bx+cx^2)$.

$$2. 25xyz+5yz^2-10x^2yz^3=5yz(5x+z-2x^2yz^2).$$

$$3. 2x^3y^3-4x^2y^4+3x^3y^4-x^4y^3=x^2y^3(2x-4y^2+3xy-x^2).$$

§ 108. Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος καθ' ὁμάδας ὄρων.—Όταν δὲν ὑπάρχη κοινὸς μονωνυμικὸς παράγων εἰς ὅλους τοὺς ὄρους τοῦ πολυωνύμου, εἶναι δυνατόν πολλάκις, νὰ χωρίσωμεν τοὺς ὄρους εἰς ὁμάδας τοιαύτας ὥστε, ἀπὸ ἐκάστην ὁμάδα νὰ ἐξάγεται κοινὸς παράγων ἐκτὸς παρενθέσεως, τὸ δὲ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως πολυώνυμον νὰ εἶναι τὸ ἴδιο δι' ὅλας τὰς ὁμάδας, ὅποτε ἐξάγεται καὶ τοῦτο ἐκτὸς παρενθέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Νὰ γίνη γινόμενον τὸ $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\chi + \gamma\chi$.

Λύσις. Μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ὄρων ἐξάγομεν τὸν α καὶ μεταξὺ τρίτου καὶ τετάρτου τὸν χ ὅποτε λαμβάνομεν : $\alpha(\beta + \gamma) + \chi(\beta + \gamma)$.

Τὸ $(\beta + \gamma)$ εἶναι τώρα κοινὸς παράγων εἰς τὰς δύο ὁμάδας καὶ συνεπῶς δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς παρενθέσεως ὅποτε ἡ παράστασις γράφεται ὑπὸ μορφήν γινομένου : $(\beta + \gamma)(\alpha + \chi)$.

2. Νὰ γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $(\alpha\chi + \beta\gamma)^2 + (\beta\chi - \alpha\gamma)^2$.

Λύσις. Ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὰς πράξεις καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha^2\chi^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\chi^2 + \alpha^2\gamma^2.$$

Μεταξὺ 1ου καὶ 3ου ὄρου ἐξάγομεν τὸν χ^2 καὶ μεταξὺ 2ου καὶ 4ου τὸν γ^2 ὅποτε τὸ πολυώνυμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ

$$\chi^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2(\beta^2 + \alpha^2)$$

καὶ τοῦτο πάλιν εἰς τὸ

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\chi^2 + \gamma^2).$$

3. Ὅμοίως ἔχομεν : $\alpha\gamma + \beta\gamma - 4\alpha - 4\beta + \gamma\gamma - 4\gamma = \alpha\gamma - 4\alpha + \beta\gamma - 4\beta + \gamma\gamma - 4\gamma =$
 $= \alpha(\gamma - 4) + \beta(\gamma - 4) + \gamma(\gamma - 4) = (\gamma - 4)(\alpha + \beta + \gamma).$

4. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\gamma.$$

Λύσις. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ ἀναλύομεν τὸ $2\alpha\beta\gamma$ εἰς $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma$ διὰ νὰ ἔχωμεν ὁκτὼ ὄρους ὅποτε ὑπάρχει ἡ δυνατότης νὰ τοὺς λάβωμεν ἀνά ζεύγη ἔχοντα τὸν ἴδιον παράγοντα. Οὕτω ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma &= (\alpha^2\beta + \beta^2\alpha) + (\alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + \\ &+ (\gamma^2\alpha + \gamma^2\beta) = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) = \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2) = (\alpha + \beta)[\alpha(\beta + \gamma) + \gamma(\beta + \gamma)] = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Οὕτω ἡ παράστασις μετετράπη εἰς γινόμενον τριῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων.

5. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον τὸ $\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta)$.

Λύσις. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις :

$$\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta.$$

Ἐὰν μεταξὺ πρώτου καὶ δευτέρου ἐξαχθῇ ὁ α^2 θὰ μείνῃ ἐντὸς παρενθέσεως τὸ $\beta - \gamma$. Ἐὰν ὁ τρίτος ὁρος ληφθῇ μὲ τὸν τελευταῖον θὰ μείνῃ πάλιν $\Psi\eta\phi\iota\omicron\pi\omicron\iota\eta\theta\eta\kappa\epsilon\ \alpha\pi\omicron\tau\omicron\ \iota\upsilon\sigma\tau\iota\tau\omicron\upsilon\tau\omicron\ \text{Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς}$

ἐντὸς παρενθέσεως τὸ $\beta-\gamma$. Τέλος μεταξὺ τῶν δύο ὑπολοίπων ἂν ἐξαχθῇ ὁ $-a$ θὰ μείνῃ ἐντὸς παρενθέσεως ὁ $\beta^2-\gamma^2$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸν $\beta-\gamma$ ὡς παράγοντα τῆς δοθείσης παραστάσεως. Γράφομεν λοιπὸν τὴν δοθείσαν παράστασιν διαδοχικῶς :

$$\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta\gamma(\beta-\gamma) - a(\beta^2-\gamma^2) = (\beta-\gamma)[\alpha^2 + \beta\gamma - a(\beta+\gamma)] = (\beta-\gamma)[(\alpha^2 - a\beta) + (\beta\gamma - a\gamma)] =$$

$$= (\beta-\gamma)[a(\alpha-\beta) - \gamma(\alpha-\beta)] = (\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma).$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ **χρήσιμος ταυτότης**

$$\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta) = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

6. Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\alpha|\beta| + |\alpha|\beta - \alpha\beta - |\alpha\beta|.$$

Λύσις. Αὕτη γράφεται :

$$\alpha|\beta| + |\alpha|\beta - \alpha\beta - |\alpha|\beta = \alpha|\beta| - \alpha\beta + |\alpha|\beta - |\alpha|\beta = \alpha\{|\beta| - \beta\} + |\alpha|\{\beta - |\beta|\} =$$

$$= \alpha\{|\beta| - \beta\} - |\alpha|\{|\beta| - \beta\} = \{|\beta| - \beta\}\{\alpha - |\alpha|\}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-359. Εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα νὰ ἐξαχθῇ κοινὸς παράγων τὸ μονώνυμον τοῦ μεγίστου δυνατοῦ βαθμοῦ :

$$2x^3y^3 - 4x^2y^6 + 3x^3y^5 - x^4y^3$$

$$\alpha^2\beta^2x^4 - \frac{1}{2}\alpha^3\beta x^5 + \frac{2}{3}\alpha^2\beta^3x^3 - \alpha^5\beta x^3$$

$$- 3x^3y^2 + 12x^2y^3 - 6x^4y + 9x^3y - 3x^2y$$

$$5x^3y^3z^3 - 20x^2y^2z^4 + 10xy^3z^3 - 5xy^4z^5 + 15xy^2z^5.$$

A 360. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

$5x + x^2 - 35 - 7x$	$2ax^2 - 3\beta x^2 - 6a + 9\beta$
$3ax - 2\beta x + 2\beta y - 3ay$	$7ax^2 - 4y^2 + 4x^2 - 7ay^2$
$3x + 5ax + 3y + 5ay$	$3x - 5\beta y + ax - 5\beta x + ay + 3y$
$xy - 4x - 3y + 12$	$2a^2 + a(2\beta - 1) - \beta$
$\alpha(\beta^2 + \gamma^2) + \beta(\gamma^2 + \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta\gamma$	$\alpha(\beta^2 - \gamma^2) + \beta(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 - \beta^2).$

B-361. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $2^{40} + 2^{28} + 2^{23} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{17} + 2^6 + 2^5 + 2 + 1$ διὰ τοῦ $2^{23} + 2 + 1$.

A-362. Νὰ δεიχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2 + a\beta + \beta\gamma + a\gamma)(\beta^2 + \beta\gamma + a\gamma + a\beta)(\gamma^2 + \beta\gamma + a\gamma + a\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου τῶν μεταβλητῶν α, β, γ .

§ 109. Διαφορὰ τετραγώνων. — Ὅταν ἡ παράστασις εἶναι ἢ δύναται νὰ γραφῇ ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο ἄλλων παραστάσεων, ἐφαρμόζομεν τότε τὸν μετασχηματισμὸν

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

ὅστις τὴν μετατρέπει εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων ἡ ἀλγεβρική παράστασις : $(13x^2 - 5y^2)^2 - (12x^2 + 4y^2)^2$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

KANELLAY, « Ἀλγεβρα, Α' »

Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ μετασχηματίζοντος τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων εἰς γινόμενον, ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται διαδοχικῶς :

$$(13x^2 - 5y^2 + 12x^2 + 4y^2)(13x^2 - 5y^2 - 12x^2 - 4y^2) = (25x^2 - y^2)(x^2 - 9y^2) = \\ = [(5x)^2 - y^2][x^2 - (3y)^2] = (5x + y)(5x - y)(x + 3y)(x - 3y).$$

Ὡστε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοδυναμεῖ πρὸς γινόμενον τεσσάρων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

2. Νὰ γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$.

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων γραφομένη :

$$\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma) = \alpha^2 - (\beta - \gamma)^2.$$

Συνεπῶς ἰσοῦται μὲ

$$(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma).$$

3. Νὰ γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$.

Λύσις. Διὰ τῆς προσθήκης τοῦ ὅρου $\alpha^2\beta^2$ ἡ παράστασις αὕτη καθίσταται τέλειον τετράγωνον : $\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

Ἐὰν κατόπιν ἀφαιρέσωμεν τὸν προστεθέντα ὅρον, λαμβάνομεν διαφορὰν τετραγώνων. Ὡστε : $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$.

4. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\alpha^4 + \beta^4$.

Λύσις. Ὅπως προηγουμένως, προσθέτομεν εἰς τὴν παράστασιν, τὸν ὅρον $2\alpha^2\beta^2$ διὰ νὰ καταστῇ αὕτη τέλειον τετράγωνον καὶ κατόπιν τὸν ἀφαιροῦμεν : $\alpha^4 + \beta^4 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta\sqrt{2})^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\sqrt{2})$.

5. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $x^4 - x^2 + 16$.

Λύσις. Διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὅρου $9x^2$ ἡ παράστασις καθίσταται τέλειον τετράγωνον. Συνεπῶς ἔχομεν :

$$x^4 - x^2 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 9x^2 = (x^2 + 4)^2 - 9x^2 = (x^2 + 4 + 3x)(x^2 + 4 - 3x).$$

6. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2.$$

Πρὸς τοῦτο μετασχηματίζομεν τὴν δοθεῖσαν, προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες τὸν ὅρον $4\alpha^2\beta^2$. Οὕτω ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς :

$$(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2) - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = \\ = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta) = [(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) - \gamma^2][(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) - \gamma^2] = \\ = [(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2][(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2] = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma).$$

Ὡστε τελικῶς λαμβάνομεν γινόμενον τεσσάρων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-363. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

$$\begin{array}{lll} 4x^2 - y^2, & 49a^2x^4 - 25\beta^2y^2, & 81x^2 - 121y^2, \\ 169x^4 - 100a^2y^2, & 28x^2 - 63\mu^2v^2, & x^3 - 4xy^2, \\ \frac{4}{9}x^2y^2 - \frac{1}{4}, & \frac{25}{16}a^3x^4 - \frac{4}{9}ay^2, & \frac{9}{4}\mu^2x^2 - \frac{25}{36}v^2y^2. \end{array}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
B-364. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων πολυωνύμων αἱ παραστάσεις :

$$4\beta^2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 \qquad 4(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2, \\ (\alpha\beta + \gamma\delta + \beta^2 - \delta^2)^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 \qquad 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2.$$

B-365. Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις :

$$(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2, \qquad x^4 + 324, \qquad x^4 + 4.$$

B-366. Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις :

$$x^4 - 23x^2y^2 + y^4, \qquad x^4 - 11x^2y^2 + y^4, \qquad x^4 - 14x^2 + 25, \\ 16 - 60x^2 + 49x^4, \qquad 9 - 55x^2 + 25x^4, \qquad x^8 - 17x^4 + 16.$$

B-367. Ἀφοῦ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $x^4 + 4y^4$ νά δειχθῇ ἀκολούθως ὅτι αὕτη δὲν δύναται νά ἰσοῦται μὲ ἄλλον πρῶτον ἀριθμὸν εἰμὴ μόνον μὲ τὸν 5, ὅταν τὰ x καὶ y εἶναι οἰοιδήποτε ἀκέραιοι.

B-368. Ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν σχέσιν

$$x^4 + 4y^4 = 13;$$

B-369. Ἀφοῦ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$a^4 - 18a^2 + 17$$

νά δειχθῇ ἂν ὁ a εἶναι περιττός ἀκέραιος τότε ἡ παράστασις αὕτη ἰσοῦται μὲ πολλαπλάσιον τοῦ 64.

§ 110. Διαφορὰ ἢ ἄθροισμα κύβων.—Ὅταν ἡ ἀλγεβρική παράστασις δύναται νά τεθῇ ὑπὸ μορφὴν διαφορᾶς ἢ ἄθροίσματος κύβων, τότε μετατρέπεται εἰς γινόμενον τῇ βοηθεῖα μιᾶς ἐκ τῶν δύο ταυτοτήτων :

$$A^3 - B^3 \equiv (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 \equiv (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1ον) $1 - 125x^3 = 1^3 - (5x)^3 = (1 - 5x)(1 + 5x + 25x^2)$.

$$2ον) 27x^3y^3 + 1 = (3xy)^3 + 1^3 = (3xy + 1)\{(3xy)^2 - 3xy + 1\}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-370. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$27x^3 - 64y^3, \qquad 8\alpha^3 + \beta^3, \qquad 8\mu^3 + 125\nu^3, \\ 24x^3 - 81\alpha^3y^3, \qquad 7x^6 - 448y^6, \qquad x^{12} + y^6, \\ (3x + y)^3 - 27, \qquad (x + 2y)^3 + 8(3x - y)^3.$$

A-371. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$x(x^2 + 1) - y(y^2 + 1), \qquad a^{2m+3n} - a^{2m} - a^{3n} + 1 \\ a^6 - \beta^6 \qquad (a + \beta + \gamma)^3 - a^3 - \beta^3 - \gamma^3.$$

B-372. Ἐὰν οἱ διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦν τὰς σχέσεις : $\alpha^3 + \alpha + k = 0$, $\beta^3 + \beta + k = 0$, $\gamma^3 + \gamma + k = 0$ νά δειχθῇ ὅτι τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

§ 111. Ἡ ἀνάλυσις ἐνὸς ὅρου εἰς δύο μέρη.—Ἐνίοτε ἡ μετατροπὴ εἰς γινόμενον, πολυωνύμου ἔχοντος περιττὸν πλῆθος ὅρων, ἐπιτυγχάνεται διὰ καταλλήλου ἀναλύσεως ἐνὸς ὅρου τοῦ εἰς δύο μέρη, οὕτως ὥστε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου νά γίνῃ ἄρτιον. Τότε οἱ ὅροι δύνανται ἐνδεχομένως νά ληφθοῦν κατὰ ζεύγη ἔχοντα ὅλα τὸν ἴδιον κοινὸν παράγοντα.

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3)$. (Ἀνελύθη ὁ $5x$ εἰς $2x+3x$).
2. $a^6 + 7a^3 - 8 = a^6 + 8a^3 - a^3 - 8 = a^3(a^3-1) + 8(a^3-1) = (a^3-1)(a^3+8) = (a-1) \cdot (a^2+a+1) \cdot (a+2) \cdot (a^2-2a+4)$ (Ἀνελύθη ὁ $7a^3$ εἰς $8a^3 - a^3$).
3. $x^3 + 2x^2 - 3 = x^3 + 2x^2 - 2 - 1 = (x^3-1) + 2(x^2-1) = (x-1)(x^2+x+1) + 2(x-1)(x+1) = (x-1)\{x^2+x+1+2(x+1)\} = (x-1)(x^2+3x+3)$.
4. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + 2x - 2 = x^3(x-1) - 3x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^3-3x+2) = (x-1)(x^3-x-2x+2) = (x-1)\{x(x^2-1)-2(x-1)\} = (x-1)\{x(x-1)(x+1)-2(x-1)\} = (x-1)^2\{x(x+1)-2\} = (x-1)^2(x^2+x-1-1) = (x-1)^2[(x^2-1) + (x-1)] = (x-1)^2[(x-1)(x+1) + (x-1)] = (x-1)^3(x+2)$.
5. $x^6 + 26x^3y^3 - 27y^6 = x^6 + 27x^3y^3 - x^3y^3 - 27y^6 = (x^6 - x^3y^3) + (27x^3y^3 - 27y^6) = x^3(x^3 - y^3) + 27y^3(x^3 - y^3) = (x^3 - y^3)(x^3 + 27y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-373.—Νά τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$\begin{array}{ll} a^2 - 4ab + 3b^2, & (x+h)^2 - 4(x+y)(3x+y-1) + 3(3x+y-1)^2, \\ 4x^2 - 8x - 5, & 8x^2 + 10x - 3, \\ 6x^2 + 25x - 25, & 15x^2 - 19x + 6, \\ x^2 + 3x + 2, & 20x^2 + 18xy - 38y^2. \end{array}$$

B-374.—Νά τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$\begin{array}{lll} a^4 - 9a^2 + 20, & x^5 - 5x^4y + 4x^3y^2, & x^3 + x - 2, \quad 2x^3 - x - 1, \\ 3x^3 - x - 2, & x^3 - 2x - 1, & a^2 - 3\beta^2 + 2a\beta. \end{array}$$

A-375.—Ἐάν x, y ἀκέραιοι καὶ τὸ $4x - y$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 νὰ δεῖχθῃ ὅτι τὸ $4x^2 + 7xy - 2y^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

§ 112. ᾽Αθροισμα ἢ διαφορὰ ὁμοίων δυνάμεων. —

Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha^v - \beta^v$, ὅπου v τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς, ἢ $\alpha^v + \beta^v$, ὅπου v περιττός, τρέπονται εἰς γινόμενα βάσει τῶν ἰσοτήτων (ix) καὶ (xi) τῆς § 104. Δηλαδή :

$$\begin{aligned} \alpha^v - \beta^v &= (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1}) \quad (v \text{ τυχὼν φυσικὸς}) \\ \alpha^v + \beta^v &= (\alpha + \beta)(\alpha^{v-1} - \alpha^{v-2}\beta + \dots + \beta^{v-1}) \quad (v \text{ περιττός}) \end{aligned}$$

Παρατηρητέον ὅτι ἂν ὁ v εἶναι ἄρτιος εἶναι προτιμώτερον νὰ μετατρέπωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν διαφορὰν $\alpha^v - \beta^v$ ὡς διαφορὰν δύο τετραγώνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. $a^6 - \beta^6 = (a^3 - \beta^3)(a^3 + \beta^3) = (a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)(a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)$.

2ον) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)^2(\alpha^2 + \beta^2)$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α-376. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$\begin{array}{lll} x^7+y^7, & x^6+64, & 243x^5+32, \\ a^{10}+1, & 32x^5-y^5, & x^{10}-y^{10}. \end{array}$$

Α-377. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα :

$$\begin{array}{lll} x^9-y^9, & 16x^4-81, & 64a^6-\beta^6, \\ x^{12}+1, & x^{3\mu}+y^{6\nu}, & a^{4\mu}-\beta^{6\nu}. \end{array}$$

§ 113. Τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου.—

Ἐνίοτε μία παράστασις προέρχεται ἀπὸ τὴν ὕψωσιν ἀκεραίου πολυωνύμου εἰς τὸ τετράγωνον καὶ συνεπῶς (ἀφοῦ διαπιστωθῇ τοῦτο) ἡ παράστασις τρέπεται εἰς γινόμενον (δύο ἴσων παραγόντων). Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ παράστασις περιέχῃ τὰ τετράγωνα διαφορῶν μονωνύμων καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, δηλ. εἶναι μιᾶς τῶν μορφῶν

$$\begin{array}{ll} \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta, & \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma, & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta & \text{ κλπ.} \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. $9x^2+4y^4+25z^2-12xy^2-20y^2z+30xz=(3x-2y^2+5z)^2$.2. $9a^2x^2+a^2+16y^2+4+6a^2x-24axy+12ax-8ay+4a-16y=(3ax+a-4y+2)^2$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α-378. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις :

1. $x^2+y^2+9-6x-6y+2xy$
2. $x^2+4y^2+25-4xy-10x+20y$
3. $9x^2+4y^2+16-12xy+24x-16y$
4. $25a^2+4\beta^2+9\gamma^2+20a\beta-30a\gamma-12\beta\gamma$
5. $x^2y^2+4y^2z^2+x^2z^2+4xyz^2-4xy^2z-2x^2yz$
6. $36a^2+9\beta^2+16-36a\beta+48a-24\beta$
7. $9x^2+16y^2+z^2+24xy-6xz-8yz-9a^2$
8. $4a^2+9\beta^2+25\gamma^2-16\delta^2-12a\beta-20a\gamma+30\beta\gamma$
9. $4x^2+9y^2+z^2+16k^2+12xy-4xz+16xk-6yz+24yk-8zk$
10. $4a^2+9\beta^2+25\gamma^2+16\delta^2-12a\beta-20a\gamma+16a\delta+30\beta\gamma-24\beta\delta-40\gamma\delta$
11. $x^2y^2-4|xy|\omega+4\omega^2$
12. $x^2+y^2+\omega^2-2x|y|-2x|\omega|+2|y\omega|$.

§ 114. Ἐφαρμογαί τινες τῆς μετατροπῆς εἰς γινόμενον.

1. «Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ἀληθεύει ἡ σχέσις

$$2x^4+1 \geq 2x^3+x^2 \text{ »}.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ $2x^4+1-(2x^3+x^2)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ποσότης. Διὰ νὰ μελετήσωμεν δὲ τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς ταύτης εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

σκόπιμον νὰ τὴν μετατρέψωμεν εἰς γινόμενον ἀπλουστέρων παραγόντων καὶ νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σημεῖον ἐκάστου παράγοντος. Αὕτῃ γράφεται διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} 2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 &= 2x^3(x-1) - (x^2-1) = (x-1)(2x^3 - x - 1) = \\ &= (x-1)(x^3 + x^3 - x - 1) = (x-1)[(x^3 - x) + (x^3 - 1)] = \\ &= (x-1)\{x(x+1)(x-1) + (x-1)(x^2 + x + 1)\} = \\ &= (x-1)(x-1)\{x^2 + x + x^2 + x + 1\} = (x-1)^2(2x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

Ὁ πρῶτος παράγων $(x-2)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ποσότης ἐνῶ ὁ δεύτερος εἶναι μονίμως θετικὸς, διότι δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα τετραγώνων μὴ μηδενιζομένων συγχρόνως, δηλαδὴ

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2.$$

Ὡστε τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν.

2. «Ἐὰν ν ἀκέραιος, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $v^5 - 5v^3 + 4v$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 120».

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ 120 πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ 120, δηλαδὴ τοὺς 3, 5 καὶ 8 ($120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$). Πρὸς διαπίστωσιν τούτου τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν $v^5 - 5v^3 + 4v$ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} v^5 - 5v^3 + 4v &= v(v^4 - 5v^2 + 4) = v(v^4 - v^2 - 4v^2 + 4) = \\ &= v\{v^2(v^2 - 1) - 4(v^2 - 1)\} = v(v^2 - 1)(v^2 - 4) = v(v+1)(v-1)(v+2)(v-2) = \\ &= (v-2)(v-1)v(v+1)(v+2). \end{aligned}$$

Δηλαδὴ φθάνομεν εἰς γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων, τὸ ὅποιον πάντοτε διαιρεῖται διὰ τοῦ 120.

Διότι μεταξὺ 5 διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι κατ' ἀνάγκην πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἄρα τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 5. Ἐπίσης, μεταξὺ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι ἀναγκαστικῶς πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν 5 διαδοχικῶν διαιρεῖται καὶ διὰ 3.

Τέλος μεταξὺ τῶν πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων $v-2$, $v-1$, v , $v+1$, $v+2$, θὰ ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο διαδοχικοὶ ἄρτιοι, τὸ γινόμενον δὲ δύο διαδοχικῶν ἀρτίων ἔστω τῶν $2k$ καὶ $2k+2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8. Διότι,

$$2k(2k+2) = 4k(k+1)$$

καὶ $k(k+1) = \text{ἄρτιος} = 2\rho$, ὥστε $2k(2k+2) = 8\rho$. Ὡστε τὸ $(v-2)(v-1)v(v+1)(v+2)$ διαιρεῖται καὶ διὰ 8. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν τὸ ὕψιν γινόμενον διαιρῇται καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 3 καὶ διὰ 8 θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινόμενου αὐτῶν $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$, διότι οἱ 5, 3 καὶ 8 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνά δύο (βλ. § 35, θεώρ. 2ον).

3. «Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ καὶ $\gamma + \delta$ εἶναι $\neq 0$ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ εἶναι ἢ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν νὰ δεῖξωμεν ὅτι θ' ἀληθεύῃ ἐν ἓκ τῶν δύο : ἢ $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ἢ $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι

(1) Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς.

ὅποτε ἡ ὁ εἷς ἡ ὁ ἄλλος παράγων θὰ εἶναι μηδέν. Ἀλλ' ἡ (1) ὀφείλει νὰ προέ-
ρχεται ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν, ἥτις γράφεται

$$(2) \quad (\alpha + \beta)^2 \gamma \delta - (\gamma + \delta)^2 \alpha \beta = 0.$$

Ἐπομένως πρέπει νὰ τραπῇ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἰς τὸ γινόμενον
παραγόντων διὰ νὰ προκύψῃ ἡ (1).

Ἔχομεν πράγματι :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 \gamma \delta - (\gamma + \delta)^2 \alpha \beta &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \gamma \delta - (\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2) \alpha \beta = \\ &= \alpha^2 \gamma \delta + 2\alpha\beta \gamma \delta + \beta^2 \gamma \delta - \gamma^2 \alpha \beta - 2\gamma \delta \alpha \beta - \delta^2 \alpha \beta = \\ &= \alpha^2 \gamma \delta - \delta^2 \alpha \beta + \beta^2 \gamma \delta - \gamma^2 \alpha \beta = \alpha \delta (\alpha \gamma - \beta \delta) - \beta \gamma (\alpha \gamma - \beta \delta) = \\ &= (\alpha \gamma - \beta \delta) (\alpha \delta - \beta \gamma). \end{aligned}$$

A Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-379. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ πολυώνυμα :

$$\begin{aligned} 81x^4 + 11x^2 + 4, & \quad x^3 - 8y^3 + 2x^2 - 8xy + 8y^2 - 6x + 12y, \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 16z^2 - 6x - 12y + 9, & \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25z^2 + 40z - 16. \end{aligned}$$

B-380. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) + (\alpha\gamma - \beta\delta)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2).$$

B-381. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$xyz(x^2y^2z^2 - z^2x - x^2y - zy^2) + zx^2 + xy^2 + yz^2 - 1.$$

B-382. Ἐὰν ὁ a εἶναι ἀκέραιος περιττός νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ὁ ἀριθμὸς
 $a^3 - a$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 240.

B-383. Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

νὰ δειχθῇ ὅτι ἔπεται ἡ σχέσις

$$(\alpha + \beta + \gamma)^{2v+1} = \alpha^{2v+1} + \beta^{2v+1} + \gamma^{2v+1}$$

ὅπου v τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ α, β, γ πραγματικοί.

B-384. Ἐὰν $x > 0$ νὰ ἐξετασθῇ ποία ἐκ τῶν δύο ποσοτήτων $x^3 + 1$ καὶ
 $x^3 + x$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἄλλης :

B-385. Ὁμοίως διὰ τὰς x^3 καὶ $x^2 + x + 2$ ὅταν $x > 2$.

$$(\text{Ἔποδ. : } x^2 + x + 1 \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0).$$

B-386. Ὁμοίως διὰ τὰς ποσότητας $3\alpha\beta^3$ καὶ $\alpha^3 + 2\beta^3$ ὅταν $\alpha > 0$ καὶ $\beta > 0$.

B-387. Ἐὰν $x > \alpha$ δείξατε ὅτι $x^3 + 13\alpha^2x > 5\alpha x^2 + 9\alpha^3$.

$$(\text{Ἔποδ. : } x^2 - 4\alpha x + 9\alpha^2 \equiv (x - 2\alpha)^2 + 5\alpha^2 > 0).$$

B-388. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2 - \beta\gamma)^3 + (\beta^2 - \alpha\gamma)^3 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^3 - 3(\alpha^2 - \beta\gamma)(\beta^2 - \alpha\gamma)(\gamma^2 - \alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τῶν α, β, γ .

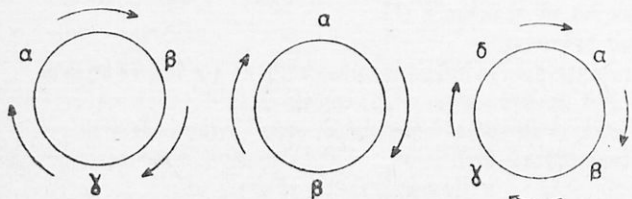
B-389. Ἐὰν v ἀκέραιος > 2 δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς

$$v^7 - 7v^5 - 14v^3 - 8v$$

εἶναι διαιρετὸς διὰ 120.

§ 115. Ἡ κυκλικὴ μετατροπή. Ἐὰς θεωρήσωμεν μίαν ἀλγεβρικήν
παράστασιν A ἥτις περιέχει τὰ γράμματα α, β, γ . Ἐὰν ἐν τῇ παραστάσει ταύτῃ

ἀντικαταστήσωμεν τὸ γράμμα α διὰ τοῦ β , τὸ β διὰ τοῦ γ καὶ τὸ γ διὰ τὸ α , τότε προκύπτει μία νέα ἀλγεβρική παράστασις A' , περιέχουσα τὰ ἴδια γράμματα ἀλλ' ἐν γένει διάφορος τῆς πρώτης. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ A' προῆλθε ἐκ τῆς A διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων α, β, γ .



Σχῆμα 27

Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος 27, ἡ δὲ πρῶξις αὕτη δι' ἧς μεταβαλόμεν ἐκ τῆς παραστάσεως A εἰς τὴν A' λέγεται κυκλικὴ μετατροπὴ.

Ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ δύναται νὰ γίνῃ εἰς δύο γράμματα α καὶ β , ὅποτε ἀντικαθιστῶμεν τὸ α διὰ τοῦ β καὶ τὸ β διὰ τοῦ α (βλ. σχ. 27).

Ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ δύναται νὰ γίνῃ εἰς τέσσαρα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ὅποτε σύμφωνα μὲ τὸ (σχ. 27), ἀντικαθίσταται τὸ α διὰ τοῦ β , τὸ β διὰ τοῦ γ , τὸ γ διὰ τοῦ δ καὶ τὸ δ διὰ τοῦ α .

Τέλος, ἂν ἡ ἀλγεβρική παράστασις περιέχῃ n γράμματα $x_1, x_2, \dots, x_n$, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει κυκλικὴν μετατροπὴν ἀντικαθιστῶντες τὸ x_1 διὰ τοῦ x_2 , τὸ x_2 διὰ τοῦ $x_3, \dots$, τὸ x_{n-1} διὰ τοῦ x_n καὶ τὸ x_n διὰ τοῦ x_1 .

Οὕτω, π.χ.: ἡ παράστασις $\alpha^2 - \beta\gamma$ παρέχει διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τὴν $\beta^2 - \gamma\alpha$ καὶ αὕτη πάλιν τὴν $\gamma^2 - \alpha\beta$, ἡ τελευταία δὲ αὕτη παράγει τὴν πρώτην.

Ἐπίσης, ἡ ἀλγεβρική παράστασις $A = 3\alpha\beta^2\gamma + \alpha\gamma$ διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων τῆς, δίδει τὴν $A' = 3\beta\gamma^2\alpha + \beta\alpha$ καὶ αὕτη πάλιν διὰ νέας κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων τῆς, δίδει τὴν $A'' = 3\gamma\alpha^2\beta + \gamma\beta$. Ἡ A'' διὰ νέας κυκλικῆς μετατροπῆς δίδει πάλιν τὴν A .

Ἐπίσης ἡ παράστασις $x^2y + 7$ δι' ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων τῆς, δίδει τὴν $y^2x + 7$ ἡ δὲ $\alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + (\delta - \alpha - \beta)^2$ διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δίδει τὴν $\beta^2\gamma + \gamma\delta^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2$ κ.ο.κ.

Κυκλικαὶ σχέσεις. Ἐὰν ἔχωμεν δύο σχέσεις $A=B$ καὶ $\Gamma=\Delta$ ἐξ ὧν ἡ δευτέρα προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς ὁρισμένων γραμμάτων τῆς πρώτης τότε ἡ δευτέρα καλεῖται «κυκλικὴ» τῆς πρώτης.

Οὕτω, π.χ., ἂν ἰσχύουν αἱ δύο σχέσεις :

$$x^3 + yz^2 + zx = \alpha$$

$$y^3 + zx^2 + xy = \beta$$

ἡ δευτέρα ἐκ τούτων εἶναι κυκλικὴ τῆς πρώτης ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, z .

Ὁμοίως, ἡ σχέσις $\beta + \gamma = -\alpha$ εἶναι κυκλικὴ τῆς $\alpha + \beta = -\gamma$ καὶ ἡ $\gamma + \alpha = \beta$ κυκλικὴ τῆς $\beta + \gamma = -\alpha$ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ .

Κυκλικὴν μετατροπὴν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ εἰς δύο συγχρόνως ὁμάδας γραμμάτων μιᾶς σχέσεως διὰ νὰ λάβωμεν τὴν κυκλικὴν τῆς. Οὕτω ἐκ τῶν σχέσεων

$$xy = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} z, \quad yz = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} x, \quad zx = \frac{\gamma + \alpha}{\beta} y$$

ή δευτέρα είναι κυκλική τῆς πρώτης καὶ ἡ τρίτη τῆς δευτέρας.

Ἡ κυκλική μετατροπὴ εἶναι μία ἐργασία ἣτις μᾶς ἀπαλλάσσει πολλάκις ἀπὸ τὸν περιττὸν κόπον τῆς ἐπαναλήψεως παρομοίων ἀλγεβρικῶν πράξεων, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Συμμετρικὴ παράστασις. Ἐὰν μία ἀλγεβρική παράστασις μὲν ἀμετάβλητος κατόπιν τῆς κυκλικῆς τροπῆς τῶν γραμμάτων τῆς, λέγεται τότε **συμμετρικὴ ἀλγεβρική παράστασις**. Π.χ., ἡ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ κυκλικῶς μετατρεπομένη γίνεται $\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2$, δηλ. μένει ἡ ἰδία, ἄρα εἶναι συμμετρικὴ παράστασις ὡς πρὸς τὰ α, β, γ .

Μερικὴ μετατροπὴ. Ἐνίοτε εἶναι ὠφέλιμος ἡ παρατήρησις ὅτι μία ἀλγεβρική παράστασις ἢ σχέσις προκύπτει ἀπὸ μίαν ἄλλην διὰ μετατροπῆς ἐνὸς μόνον γράμματος τῆς πρώτης εἰς ἄλλο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ σχέσις (ισότης)

$$\frac{\alpha}{\beta - \gamma} + \frac{\beta}{\gamma - \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = 0$$

συνεπάγεται τὴν

$$\frac{\alpha}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{\beta}{(\gamma - \alpha)^2} + \frac{\gamma}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

Ἀποδείξεις. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν τὴν

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta - \gamma} = - \left\{ \frac{\beta}{\gamma - \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \right\} \quad \eta$$

$$\frac{\alpha}{\beta - \gamma} = - \left\{ \frac{\alpha\beta - \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)} \right\} = \frac{\beta^2 - \gamma^2 + \alpha\gamma - \alpha\beta}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)},$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\frac{1}{\beta - \gamma}$ λαμβάνομεν

$$(2) \quad \frac{\alpha}{(\beta - \gamma)^2} = \frac{\beta^2 - \gamma^2 + \alpha\gamma - \alpha\beta}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)}.$$

Ὅπως ἡ (1), συνεπάγεται τὴν (2), ἔτσι καὶ ἡ κυκλικὴ τῆς (1) δηλ. ἡ

$$(3) \quad \frac{\beta}{\gamma - \alpha} = - \left\{ \frac{\gamma}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha}{\beta - \gamma} \right\}$$

(ἡ ὁποία ἐπίσης ἰσχύει), θὰ συνεπάγεται τὴν κυκλικὴν τῆς (2) δηλ. τὴν

$$(4) \quad \frac{\beta}{(\gamma - \alpha)^2} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + \beta\alpha - \beta\gamma}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}.$$

Ὁμοίως, θὰ ἰσχύει καὶ ἡ κυκλικὴ τῆς (4), δηλ. ἡ

$$(5) \quad \frac{\gamma}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma\beta - \gamma\alpha}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (2), (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{\beta}{(\gamma - \alpha)^2} + \frac{\gamma}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\beta^2 - \gamma^2 + \alpha\gamma - \alpha\beta + \gamma^2 - \alpha^2 + \beta\alpha - \beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma\beta - \gamma\alpha}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} =$$

$$= \frac{0}{(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)} = 0.$$

δηλ. τὴν ἀποδεικτέαν. (Φυσικὰ, ὑποτίθεται ὅτι $(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a) \neq 0$).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-390. Ἐὰν $a+\beta+\gamma=0$ νὰ δειχθοῦν αἱ ἰσότητες :

$$\text{i)} \quad (a\beta + \beta\gamma + \gamma a)^2 = a^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2a^2 = \frac{1}{2}(a^4 + \beta^4 + \gamma^4).$$

$$\text{ii)} \quad 2(a^4 + \beta^4 + \gamma^4) = (a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2.$$

B-391. Ἐὰν $a+\beta+\gamma=0$ δείξατε ὅτι :

$$\begin{aligned} a^7 + \beta^7 + \gamma^7 &= \frac{7}{2} a\beta\gamma(a^4 + \beta^4 + \gamma^4) = \frac{7}{6} (a^3 + \beta^3 + \gamma^3)(a^4 + \beta^4 + \gamma^4) = \\ &= \frac{7}{10} (a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^5 + \beta^5 + \gamma^5). \end{aligned}$$

B-392. Ἐὰν διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $x, y, z, a, \beta, \gamma$ ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$(1) \quad \frac{2y+2z-x}{a} = \frac{2z+2x-y}{\beta} = \frac{2x+2y-z}{\gamma}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ ἰσότητες αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν (1) δι' ἐναλλαγῆς τῶν x, y, z μὲ τὰ a, β, γ ἀντιστοιχῶς.

B-393. Ἐὰν $A=a+\beta+\gamma+\delta, B=a+\beta-\gamma-\delta, \Gamma=a-\beta+\gamma-\delta, \Delta=a-\beta-\gamma+\delta,$

$$\text{i)} \quad \text{Δείξατε ὅτι } AB(A^2+B^2)=2\{(a+\beta)^4-(\gamma+\delta)^4\}.$$

$$\text{ii)} \quad \text{Εὑρετε τὴν ποσότητα } \Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2) \text{ ἐκ τῆς προηγουμένης, ἄνευ ἐκτελέσεως πράξεων.}$$

$$\text{iii)} \quad \text{Ἐὰν πληροῦται ἡ σχέσηις } AB(A^2+B^2)=\Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2) \text{ δείξατε ὅτι τότε θὰ πληροῦται καὶ ἡ : } a\beta(a^2+\beta^2)=\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2).$$

B 394. Ἐὰν

$$X=ax+\beta y+\gamma z$$

$$\Psi=ay+\beta z+\gamma x$$

$$Z=az+\beta x+\gamma y$$

$$\text{δείξατε ὅτι } X^3+\Psi^3+Z^3-3X\Psi Z=(a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Μὴ ἀρνητικαὶ παραστάσεις. Ἀπόλυτοι τιμαὶ

§ 116. Τὸ σύμβολον τῆς δευτεροταξίου ὀριζούσης.

Διάφοροι Μαθηματικοὶ τύποι γράφονται κατὰ τρόπον πλέον εὐμνημόνευτον καὶ κομψὸν ἢ πᾶσαν διαφορὰν τῆς μορφῆς $\alpha\beta - \alpha'\beta$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

τὸ ὅποῖον λέγεται *ὀρίζουσα δευτέρας τάξεως* καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας ἀριθμοὺς γεγραμμένους εἰς δύο γραμμὰς (ὀριζοντίας) καὶ δύο στήλας (κατακορύφους).

Ὡστε ἐξ ὀρισμοῦ ἔχομεν

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta.$$

$$\text{Οὕτω, π.χ., } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 13, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -x & -y \end{vmatrix} = 2y + x.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-395. Ὑπολογίσατε τὰς ἐπομένας ὀριζούσας :

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}.$$

§. 117. Μὴ ἀρνητικαὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις. Ταυτότης τοῦ Lagrange. α') Ἐὰν μία ἀλγεβρική παράστασις, διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων της, λαμβάνη μόνον θετικὰς ἢ μηδενικὰς τιμὰς, τότε ἡ παράστασις αὕτη λέγεται *μὴ ἀρνητικὴ ἀλγεβρική παράστασις* (ἢ μὴ ἀρνητικὴ ποσότης).

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Δηλ. ἐὰν A εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ἀλγεβρικὴ παράστασις τότε ἡ σχέσις
(1) $A \geq 0$

ἀληθεύει οἰασδὴποτε πραγματικὰς τιμὰς καὶ ἂν ἔχουν αἱ μεταβληταὶ
ὧν συνάρτησις εἶναι ἡ A .

Οὕτω, π.χ., ἡ παράστασις $(\alpha - \beta)^2$ προφανῶς οὐδέποτε λαμβάνει
ἀρνητικὴν τιμὴν, οἰασδὴποτε πραγματικὰς τιμὰς καὶ ἂν ἔχουν τὰ
γράμματα α καὶ β ἀλλὰ εἶναι θετικὴ ὅταν $\alpha \neq \beta$ καὶ μηδέν, ὅταν $\alpha = \beta$.
Ὡστε ἡ παράστασις $(\alpha - \beta)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ
σχέσις

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν α καὶ β .

Ἐπίσης αἱ παραστάσεις:

$$x^2, \quad x^2 + y^2, \quad (x - y)^2 + (y - z)^2, \quad |x + 3|$$

εἶναι μὴ ἀρνητικά, μηδενιζόμεναι ἢ μὲν πρώτη μόνον διὰ $x=0$, ἢ
δευτέρα διὰ $x=0, y=0$, ἢ τρίτη διὰ $x=y=z$, ἢ τετάρτη διὰ $x=-3$.

Θεώρημα. «Ἐὰν τὸ ἄθροισμα πραγματικῶν καὶ μὴ ἀρνητικῶν
ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν, τότε ἕκαστος προσθετέος χωριστὰ,
ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν».

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν οἱ μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ $A_1, A_2, \dots, A_n$ τοιοῦ-
τοι ὥστε:

$$(2) \quad A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = 0.$$

Ἐκαστος τῶν προσθετέων εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἢ θετικὸς ἢ μηδέν.
Ἐὰν ὁ A_1 ἦτο θετικὸς τότε ἐπειδὴ οἱ ἄλλοι δὲν εἶναι ἀρνητικοί, τὸ
ἄθροισμα $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ θὰ ἦτο θετικόν, ὅπερ ἀντίκειται πρὸς τὴν
ὑπόθεσιν (2). Ἄρα ἀποκλείεται ὁ A_1 νὰ εἶναι θετικὸς, ἐπομένως δὲν
ἀπομένει παρὰ νὰ εἶναι $A_1 = 0$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ δι' ὅλους
τοὺς ἄλλους, δηλ. κατὰ σειρὰν θὰ εἶναι

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \dots, \quad A_n = 0.$$

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐφαρμόζεται ἀμέσως ὅταν τὸ ἄθροισμα μὴ
ἀρνητικῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἰσοῦται (διὰ καταλλήλους πραγ-
μαδικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τῶν) μὲ μηδέν. Οὕτω π.χ.. ἐὰν δίδε-
ται ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$(x-3)^2 + (x+y-1)^2 + (x+y+\omega)^2 = 0$$

ὅπου x, y, ω πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε συνάγομεν ἀμέσως ὅτι $x-3=0$,
 $x+y-1=0$, $x+y+\omega=0$ καὶ ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν $x=3$, $y=-2$, $\omega=1$.

Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται **μονίμως θετικὴ**, ὅταν λαμ-
βάνηται ἀπό τινος ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω θεώρημα, ὅτι εἶναι ἀρνητικὴ καὶ
πραγματικὰς τι-

μάς καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα αὐτῆς. Ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ ἡ μονίμως ἀρνητικὴ ἀλγεβρική παράστασις.

Οὕτω, π.χ., αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $x^2 + 1$, $(x-y)^2 + 3$, $x^2 + y^2 + \omega^2 + 0,2$ εἶναι μονίμως θετικά ἐνῶ αἱ $-7 - (3x+y)^2$, $-|x-3| - |x+5|$ εἶναι μονίμως ἀρνητικά.

β') **Ταυτότης τοῦ Lagrange.** Διὰ δύο τυχούσας τριάδας ἀριθμῶν (α, β, γ) καὶ (x, y, z) ἰσχύει :

$$(1) \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2.$$

Ἀπόδειξις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ταυτότητος (1) μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων λαμβάνει τὴν μορφήν

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 z^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \beta^2 z^2 + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz = (\alpha^2 y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2 x^2) + (\beta^2 z^2 - 2\beta\gamma yz + \gamma^2 y^2) + (\gamma^2 x^2 - 2\alpha\gamma xz + \alpha^2 z^2) = (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 = B \text{ μέλος.}$$

Θὰ ἡδυνάμεθα ἐπίσης ν' ἀναπτύξωμεν καὶ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον μέλος καὶ νὰ τὰ διατάξωμεν ὡς ἀκέραια πολυώνυμα 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z ὅποτε θὰ κατελήγαμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη εἰς τὸ ἴδιον ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$(\beta^2 + \gamma^2)x^2 + (\gamma^2 + \alpha^2)y^2 + (\alpha^2 + \beta^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha xz.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange γράφεται μετὰ τὴν βοήθειαν τῶν ὀριζουσῶν :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ x & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & z \end{vmatrix}^2$$

ἦτοι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν ὀριζουσῶν προκυπτουσῶν ἀπὸ τὰς στήλας τοῦ πίνακος

$$\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

λαμβανομένας ἀνὰ δύο.

Γενικωτέρα ταυτότης τοῦ Lagrange. Ἀνάλογος ταυτότης πρὸς (1), ἰσχύει καὶ ὅταν δοθοῦν δύο ομάδες ἐκ n γραμμάτων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τὴν περίπτωσιν δύο ομάδων ἐκ τεσσάρων γραμμάτων :

$$(2) \quad \begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ x & y & z & \omega \end{Bmatrix}.$$

Ἡ ἀντίστοιχος ταυτότης τοῦ Lagrange εἶναι

$$(3) \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \omega)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ x & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ x & \omega \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \delta \\ y & \omega \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ z & \omega \end{vmatrix}^2.$$

Δηλαδή και πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ (2) ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς τοῦ (2) μεῖον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοιχῶν γραμμῶν τῶν δύο γραμμῶν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρίζουσῶν, αἵτινες προκύπτουν ἀπὸ τὰς στήλας τοῦ πίνακος (2) λαμβανομένας ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς (3) γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τριῶν γραμμῶν (δευτέρα μέθοδος), ἥ δὲ γενίκευσις διὰ δύο ομάδας ἐκ n γραμμῶν ἐκάστη εἶναι εὐνόητος.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-396. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, ω ἐὰν πληροῦν τὴν σχέσιν :

$$\begin{aligned} & (2x-4)^2 + (x+y-5)^2 + (x+y+\omega-1)^2 = 0 \\ \text{ἢ τὴν σχέσιν} & \quad |3x-6| + |x+2y-8| + |x+y+\omega+7| = 0 \\ \text{ἢ τὴν σχέσιν} & \quad x^2 + y^2 + \omega^2 = 0. \quad (\text{βλ. § 117, θεωρ.}) \end{aligned}$$

A-397. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $|x-5| + |x-7| + |x-8|$ εἶναι μονίμως θετική, ἐνῶ ἡ $|x-5| + |y-7| + |\omega-8|$ εἶναι μὴ ἀρνητική.

A-398. Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, a$, πληροῦν τὴν σχέσιν

$$|x_1 - a| + |x_2 - a| + |x_3 - a| + \dots + |x_n - a| = 0$$

τότε θὰ πληροῦν καὶ τὴν

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{n-1} - x_n| = 0.$$

B-399. Δείξατε ὅτι ἡ ἀλγεβρική παράστασις

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - x^2yz - y^2zx - z^2xy$$

εἶναι μὴ ἀρνητική. Πότε αὕτη ἰσοῦται μὲ μηδέν :

B-400. Δείξατε ὅτι ἡ ἀλγεβρική παράστασις

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2x^2yz - 2y^2zx - 2z^2xy$$

εἶναι μὴ ἀρνητική.

B-401. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἐπομένων παραστάσεων εἶναι μὴ ἀρνητική :

$$(x-y)(x-z) + (y-z)(y-x) + (z-x)(z-y)$$

$$(x+y)(x-z) + (y+z)(y-x) + (z+x)(z-y).$$

B-402. Ἐὰν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $a, \beta, \gamma, x, y, z$, ὅπου a, β, γ διάφοροι τοῦ μηδενός, ὑφίσταται ἡ σχέση

$$(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + \beta y + \gamma z)^2,$$

δείξατε ὅτι τότε θὰ ἰσχύη :

B-403. Ὅμοίως, ἐκ τῆς σχέσεως $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \omega)^2$,

ἐπεται ὅτι

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{\omega}{\delta}.$$

ὅπου ὑποτίθεται ὅτι οἱ παρονομασται εἶναι $\neq 0$.

B-404. Ἐὰν ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἰσότητες

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_v^2$$

$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_v^2$$

$$\alpha\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_v\beta_v,$$

δείξατε ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ β^2 , τῆς δευτέρας ἐπὶ α^2 καὶ τῆς τρίτης ἐπὶ $-2\alpha\beta$ καὶ κατόπιν τὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη θὰ προκύψῃ ὅτι :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_v}{\beta_v}$$

ὅπου οἱ παρονομασται ὑποτίθενται $\neq 0$.

§ 118. Μόνιμοι ἀνισότητες. α') Μία ἀνισότης $A > B$ συνδέουσα δύο ἀλγεβρικούς παραστάσεις A καὶ B λέγεται **μόνιμος ἀνισότης**, ὅταν ἰσχύῃ δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τὰς δύο ἀλγεβρικούς παραστάσεις A καὶ B .

Ὅμοίως, ἡ σχέσις $A \geq B$ λέγεται **μόνιμος** ὅταν ἰσχύῃ δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν ἀφ' ὧν ἐξαρτῶνται αἱ παραστάσεις A καὶ B .

Προφανῶς, ἵνα ἡ $A > B$ εἶναι μόνιμος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διαφορὰ $A - B$ νὰ εἶναι μονίμως θετικὴ παράστασις. Ἐπίσης ἵνα μονίμως ἰσχύῃ ἡ σχέσις $A \geq B$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ $A - B$ νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ἀλγεβρικὴ παράστασις.

β') **Χρήσιμοι, μόνιμοι ἀνισότητες.**

1)

$$x^2 \geq 0$$

ὅπου x τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς

2)

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

ὅπου α, β , τυχόντες πραγματικοί.

Ἀπόδειξις: Ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου μέλους μεῖον τὸ δεύτερον, $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$, δηλ. εἶναι ποσότης μὴ ἀρνητικὴ. Τὸ $=$ ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha = \beta$.

3)

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \geq \alpha\beta$$

όπου α, β , τυχόντες πραγματικοί.

$$\begin{aligned} \text{Ἀπόδειξις: } \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \alpha\beta &= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} - \alpha\beta = \\ &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

Τὸ = ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha = \beta$.

4)

$$x^2 \pm x + 1 > 0$$

όπου x , τυχὸν πραγματικός.

Ἀπόδειξις: Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος εἶναι μονίμως θετική παράστασις διότι γράφεται: $\left(x \pm \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$.

5) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιστρόφων θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ≥ 2 , δηλ. $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$. Τὸ = ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha = 1$.

6) Ἀνισότης τοῦ Schwarz :

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2) \geq (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n)^2.$$

Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τὸ 2ον μέλος τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange εἶναι πάντοτε μὴ ἀρνητική παράστασις.

Οὕτω π.χ. ἐκ τῆς ταυτότητος (1) καὶ τῆς § 117 ἔπεται ἀμέσως ἡ

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

ἥτις εἶναι μερική περίπτωσης τῆς 5) διὰ $n=3$.

Ἐπίσης ἐκ τῆς ταυτότητος (3) § 117 ἔπεται ἀμέσως ἡ

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \omega)^2$$

ἥτις εἶναι μερική περίπτωσης τῆς 5) διὰ $n=4$.

Ἡ γενική μορφή 5) τῆς ἀνισότητος τοῦ Schwarz δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς γενικῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange διὰ δύο ομάδας ἐκ n γραμμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀνισότης :

$$2.4.6.8. \dots (2n) < (n+1)^n, \quad n > 1.$$

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες ἀπὸ τοὺς ἄκρους, (δηλ. πρῶτος καὶ τελευταῖος, δεῦτερος καὶ προτελευταῖος, ...) ἔχουν τὸ ἴδιο ἄθροισμα :

$$2 + 2n = 2(n+1), \quad 4 + (2n-2) = 2(n+1), \quad 6 + (2n-4) = 2(n+1), \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἡ φησὶς οὕτως ἔπεται ἀπὸ τὸ ἴσχυον τοῦ ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς Χρησιμοποιοῦντες τὴν 2) λαμβανόμεν:

$$\begin{aligned}
 & 2.2v < (v+1)^2 \\
 & 4.(2v-2) < (v+1)^2 \\
 & 6.(2v-4) < (v+1)^2 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & (2v-4).6 < (v+1)^2 \\
 & (2v-2).4 < (v+1)^2 \\
 & 2v.2 < (v+1)^2
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητος (1) καὶ μάλιστα τὰ πρῶτα μέλη «κατὰ στήλας» καὶ λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned}
 & \{2.4.6 \dots (2v)\} \cdot \{2v(2v-2) \dots 6.4.2\} < \{(v+1)^2\}^v \quad \eta \\
 & \{2.4.6 \dots (2v-2) \cdot (2v)\}^2 < \{(v+1)^v\}^2 \quad \text{ὁπότε θὰ εἶναι καὶ} \\
 & 2.4.6 \dots (2v) < (v+1)^v
 \end{aligned}$$

διότι ἐκ δύο θετικῶν, ὁ ἔχων τὸ μικρότερον τετράγωνον εἶναι μικρότερος (βλ. § 98 πόρισμα 2ον).

Σημείωσις. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) δυνατόν ἢ μία νὰ εἶναι ἰσότης καὶ τοῦτο συμβαίνει ἂν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος, ὅστις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν του. Τοῦτο ὁμῶς δὲν μεταβάλλει τὴν ἀποδεικτέαν ἀνισότητα.

2. «Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πηραστήσωμεν μὲ $\Sigma \alpha_k \alpha_\lambda$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινόμενων τῶν ἀνά δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ μὲ $\Sigma \alpha_p^2$ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\Sigma \alpha_k \alpha_\lambda \leq \frac{v-1}{2} \Sigma \alpha_p^2.$$

Ἀπόδειξις. Ἄν γράψωμεν ὅλα τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ ἀνά δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ δι' ἕκαστον τούτων ἐφαρμόσωμεν τὴν 2) θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha_1\alpha_2 \leq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\
 & 2\alpha_1\alpha_3 \leq \alpha_1^2 + \alpha_3^2 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & 2\alpha_1\alpha_v \leq \alpha_1^2 + \alpha_v^2 \\
 & 2\alpha_2\alpha_3 \leq \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & 2\alpha_{v-1}\alpha_v \leq \alpha_{v-1}^2 + \alpha_v^2.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν ὅλων τῶν ἀνωτέρω σχέσεων εἶναι $2\Sigma \alpha_k \alpha_\lambda$ τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι

$$(v-1)\alpha_1^2 + (v-1)\alpha_2^2 + \dots + (v-1)\alpha_v^2 = (v-1)\Sigma \alpha_p^2.$$

Διότι εἰς τὰ δευτέρα μέλη ἕκαστον γράμμα παρουσιάζεται συνοδευόμενον ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἄλλων, δηλαδὴ $v-1$ φορές. Π.χ. τὸ α_1 παρουσιάζεται μίαν φοράν μετὰ τοῦ α_2 , μίαν μετὰ τοῦ α_3 , μίαν μετὰ τοῦ $\alpha_4, \dots$ μίαν μετὰ τοῦ α_v .

δηλ. τόσας φορές, ὅσα εἶναι τὰ ὑπόλοιπα γράμματα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ a_2 , διὰ τὸ a_3 , ..., διὰ τὸ a_n . Κατόπιν τούτου διὰ προσθέσεως τῶν (2) κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα σχέσηις.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-405. Ἐάν a πραγματικός, δείξατε ὅτι

$$3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2.$$

B-406. Διὰ τυχόντας πραγματικῶς x, y, z δείξατε ὅτι ἰσχύει

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$$

B-407. Ἐάν n φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ω θετικὸς δείξατε ὅτι

$$\omega^{2n} + \omega^{2n-1} + \omega^{2n-2} + \dots + \omega^2 + \omega + 1 \geq (2n+1)\omega^n.$$

B-408. Ἐάν a, β, γ θετικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$a\beta(a+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma a(\gamma+a) \geq 6a\beta\gamma.$$

B-409. Ἐάν a, β, γ θετικοί δείξατε ὅτι

$$\frac{a\beta\gamma}{a+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+a)} \leq \frac{1}{8}$$

Πότε ἰσχύει τὸ = ;

B-410. Δείξατε ὅτι $\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \geq 6\beta\gamma(a+\beta+\gamma)$, ὅπου a, β, γ τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

B-411. Ἐάν $x+y+z > 0$ δείξατε ὅτι τότε $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$.

A-412. Ἐάν $a > \beta > 0$ δείξατε ὅτι $a^3 - \beta^3 > (a-\beta)^3$.

B-413. Ἐάν x, y, z πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $x < y+z, y < x+z, z < x+y$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{2}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) > x^3+y^3+z^3+xyz.$$

B-414. Ἐάν πληροῦνται αἱ σχέσεις $a^2+\beta^2=1$ καὶ $x^2+y^2=1$ τότε θὰ πληροῦνται καὶ ἡ $ax+\beta y \leq 1$.

B-415. $a^2+\beta^2+\gamma^2=1 \wedge x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow ax+\beta y+\gamma z \leq 1$ καὶ γενικώτερον ἂν $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=1$ καὶ $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$ τότε θὰ πληροῦνται καὶ ἡ $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n \leq 1$.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 119. Ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν. Εἰς τὴν § 91 ὥρισamen τὸ σύμβολον $|x|$ (=ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x), ὅπου x τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς, ὡς ἐξῆς:

$$\begin{aligned} |x| &= x && \text{ἐάν} && x > 0 \\ |x| &= -x && \text{ἐάν} && x < 0 \\ |x| &= 0 && \text{ἐάν} && x = 0 \end{aligned}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x ἐστὶν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $-x$, δηλ.

ὅτι πάντοτε ἔχομεν : $|x| \geq 0$. Μᾶς εἶναι γνωστὸν ἀκόμη ὅτι οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀπολύτου τιμὴν δηλ. : $|x| = |-x|$.

Περαιτέρω ιδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν περιγράφονται ἀπὸ τὰ κάτωθι θεωρήματα :

i) «Πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τῆς ἀπολύτου τιμῆς του».

Δηλαδή πάντοτε $x \leq |x|$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν τότε $x = |x|$ σύμφωνα μὲ τὸν ὀρισμὸν. Ἐὰν ὁ x εἶναι ἀρνητικὸς τότε εἶναι μικρότερος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $|x|$ δηλαδή τότε $x < |x|$.

ii) «Τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ».

Δηλαδή $|x|^2 = x^2$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $x > 0$ τότε $|x| = x$ καὶ $|x|^2 = x^2$. Ἐὰν $x < 0$ τότε $|x| = -x$, ὥστε πάλιν, $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Παρατήρησις. Προφανῶς ἰσχύει καὶ ὅτι $|x|^{2n} = x^{2n}$, ὅπου n φυσικὸς ἀριθμὸς.

iii) Διὰ $\alpha > 0$ καὶ x πραγματικὸν ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία:

$$-\alpha \leq x \leq \alpha \iff |x| \leq \alpha$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν τότε $x = |x|$ καὶ συνεπῶς, ἀφοῦ ἔχομεν $x \leq \alpha$ θὰ ἔχωμεν καὶ $|x| \leq \alpha$. Ἐὰν ὁ x εἶναι ἀρνητικὸς τότε $|x| = -x$ ἤτοι $x = -|x|$ καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $-\alpha \leq x$ θὰ ἔχωμεν καὶ $-\alpha \leq -|x|$ ἢ $\alpha \geq |x|$ ἢ $|x| \leq \alpha$. Ὡστε πάντοτε : $|x| \leq \alpha$.

Ἀντιστροφος : Ἐστω ὅτι ἰσχύει : $|x| \leq \alpha$, ὅπου $\alpha > 0$. Τότε, ἂν $x \geq 0$ θὰ ἔχωμεν $|x| = x$. Ἄρα ἡ δοθεῖσα σχέσις $|x| \leq \alpha$ γράφεται $x \leq \alpha$. Εἶναι ὅμως συγχρόνως καὶ $x > -\alpha$ διότι ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν. Ὡστε θὰ ἔχωμεν :

$$-\alpha < x \leq \alpha.$$

Ἐὰν δὲ $x < 0$ τότε $|x| = -x$, ἄρα ἡ δοθεῖσα σχέσις $|x| \leq \alpha$ γράφεται, $-x \leq \alpha$ ἢ $x \geq -\alpha$. Ἐχομεν ὅμως συγχρόνως καὶ ὅτι $x < \alpha$ διότι ὁ x εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ὁ α θετικὸς. Ὡστε θὰ ἔχωμεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, $-\alpha \leq x < \alpha$.

Ἀρα θὰ εἶναι, ἢ $-\alpha < x \leq \alpha$ ἢ $-\alpha \leq x < \alpha$ καθ' ὅσον ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς. Ἐπομένως, συγχωνευμένων τῶν δύο σχέσεων, θὰ εἶναι γενικῶς :

$$-\alpha \leq x \leq \alpha$$

Παρατηρήσεις. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰσοδυναμία τῶν σχέσεων

$$1. \quad -\alpha < x < \alpha \iff |x| < \alpha \quad \text{όπου} \quad \alpha > 0$$

$$2. \quad \{x < -\alpha \text{ ή } x > \alpha\} \iff |x| > \alpha \quad \text{όπου} \quad \alpha > 0.$$

iv) «*Η απόλυτος τιμή του άθροίσματος δύο αριθμών είναι μικροτέρα ή ίση του άθροίσματος των απόλυτων τιμών των δύο αριθμών*».

Δηλαδή, έχουμε πάντοτε: $|x+y| \leq |x|+|y|$, όπου x, y τυχόντες πραγματικοί.

Απόδειξις. Κατά το 1ον θεώρημα θα ισχύουν:

$$x \leq |x|, \quad y \leq |y|$$

αίτινες προστιθέμεναι κατά μέλη δίδουν τήν

$$(1) \quad x+y \leq |x|+|y|.$$

Όμοίως, ισχύουν αί σχέσεις: $-x \leq |-x|$, $-y \leq |-y|$, ήτοι

$$-x \leq |x|, \quad -y \leq |y|$$

αίτινες δίδουν τήν $-x-y \leq |x|+|y|$ ήτοι

$$(2) \quad x+y \geq -(|x|+|y|).$$

Αί (1) καί (2) γράφονται ως διπλή άνισότης

$$(3) \quad -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|.$$

Έκ τής (3) έχουμε, εφαρμόζοντας το 3ον θεώρημα, ότι

$$|x+y| \leq |x|+|y|, \quad \text{ό.έ.δ.}$$

1ον Πόρισμα. «*Η απόλυτος τιμή της διαφοράς δύο αριθμών είναι μικροτέρα ή ίση του άθροίσματος των απόλυτων τιμών των δύο αριθμών*».

Δηλαδή $|x-y| \leq |x|+|y|$ όπου x, y τυχόντες πραγματικοί.

Πράγματι: $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$.

2ον Πόρισμα. «*Η απόλυτος τιμή του άθροίσματος όσωνδήποτε προσθετέων είναι μικροτέρα ή ίση του άθροίσματος των απόλυτων τιμών των προσθετέων*».

Δηλ. $|a_1+a_2+\dots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$, όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ τυχόντες πραγματικοί.

Απόδειξις. Έστωσαν πρώτον τρεῖς προσθετέοι a_1, a_2, a_3 . Το άθροισμα $a_1+a_2+a_3$ δύναται νά θεωρηθῇ ως άθροισμα δύο προσθετέων: του (a_1+a_2) καί του a_3 ώστε δυνάμεθα νά εφαρμόσωμεν το άνωτέρω θεώρημα.

Δηλαδή $|a_1+a_2+a_3| = |(a_1+a_2)+a_3| \leq |a_1+a_2|+|a_3|$.

Αλλά $|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$ καί συνεπώς $|a_1+a_2|+|a_3| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|$.

Επομένως $|a_1+a_2+a_3| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|$.

Κατ' ανάλογον τρόπον ή περίπτωσις των τεσσάρων προσθετέων ανάγει εις την ήδη κατεργασμένην των τριών. Επειδή

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4| = |(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4| \leq |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| + |\alpha_4| \leq \\ \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4|.$$

Ὁμοίως, ἀφοῦ ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ τέσσαρας προσθετέους θὰ ἰσχύει καὶ διὰ πέντε κ.ο.κ. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν φθάνομεν εἰς ὅσους-δήποτε προσθετέους.

ν) «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἷανδήποτε τάξιν».

Δηλ. θὰ εἶναι $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$ καθὼς καὶ $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|$, ὅπου x, y τυχόντες πραγματικοί.

Ἀποδείξεις. Ἐχομεν $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{y}| = |\mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ τελευταῖον μέλος τὴν $|\mathbf{y}|$ λαμβάνομεν $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ἥτοι $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$. Ὁμοίως $|\mathbf{y}| = |\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}| = |\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ ἐκ τῆς ὁποίας

$$|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad \text{ἥτοι} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|.$$

Πόρισμα. «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν».

$$\text{Δηλαδή:} \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \quad \text{καὶ} \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|.$$

$$\text{Πράγματι:} \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x} - (-\mathbf{y})| \geq |\mathbf{x}| - |-\mathbf{y}| = |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|.$$

vi) «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴση τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν».

$$\text{Δηλ.} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| = ||\mathbf{y}| - |\mathbf{x}||$$

Ἀποδείξεις. Ἀπὸ τὸ 5ον θεώρημα ἔχομεν: $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$ ἥτοι
(4) $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$

Ἐπίσης ἔχομεν $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|$ ἢ $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$ ἥτοι
(5) $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \geq -|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$

Αἱ (4) καὶ (5) γράφονται ὡς διπλῇ ἀνισότης

$$(6) \quad -|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν, χάρις εἰς τὸ 3ον θεώρημα ὅτι

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{ἢ} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα. Ἐὰν x, y τυχόντες πραγματικοί, ἰσχύει ὅτι

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||.$$

Διότι $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x} - (-\mathbf{y})| \geq ||\mathbf{x}| - |-\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||.$

Συνοπτική γραφή τῶν θεωρημάτων. «Ἐὰν α καὶ β τυχόντες ἀριθμοὶ ἰσχύουν πάντοτε αἱ σχέσεις

$$(7) \quad |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Αἱ σχέσεις (7) εἶναι λίαν χρήσιμοι διὰ τὸν λογισμὸν τῶν ἀπολύτων τιμῶν, ὡς περιέχουσιν τὰ περισσότερα ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδείχθέντων θεωρημάτων.

vii) «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων».

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta \quad |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n| \quad (\beta\lambda. \S 85).$$

viii) «Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν».

$$\Delta\eta\lambda. \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \text{ὅπου } \beta \neq 0, \quad (\beta\lambda. \S 87).$$

ix) «Ἐὰν x τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς, ἀληθεύει ὅτι $x = |x| \cdot \text{σημ}(x)$ ἔαν δὲ $x \neq 0$ τότε $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \text{σημ}(x)$ ».

Ἀποδείξεις. Τὸ σύμβολον $\text{σημ}(x)$ (=σημεῖον τοῦ x) ὥρισamen εἰς τὴν § 85, θεώρημα 7ον, ὡς ἐξῆς: $\text{σημ}(x) = +1$, ὅταν $x > 0$, $\text{σημ}(x) = -1$, ὅταν $x < 0$ καὶ $\text{σημ}(x) = 0$, ὅταν $x = 0$. Ἐὰν λοιπὸν $x > 0$ τότε $x = |x| = +1|x| = |x| \cdot \text{σημ}(x)$, ἂν $x < 0$ τότε $x = -|x| = |x| \cdot \text{σημ}(x)$, ἂν $x = 0$ πάλιν ἰσχύει ὅτι $x = |x| \cdot \text{σημ}(x)$. Ἐὰν δὲ $x \neq 0$ ἔπεται ἀμέσως ὅτι $\frac{|x|}{x} = \text{σημ}(x) = \frac{x}{|x|}$.

Ἄλλαι ἀποδείξεις. Αἱ περισσότεραι ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδείχθεισῶν ἀνισότητων μὲ ἀπολύτους τιμὰς δύναται νὰ δειχθοῦν καὶ δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, βάσει τοῦ ἐξῆς συλλογισμοῦ: Ἐὰν α καὶ β εἶναι μὴ ἀρνητικοί, ἡ σχέσις $\alpha \leq \beta$ ἀληθεύει ἂν ἀληθεύῃ ἡ $\alpha^2 \leq \beta^2$ (βλ. § 98, πόρισμα 1ον, θεωρ. 6ου).

1. Νὰ δειχθῇ ὅτι $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ δύο μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἀνισότητος εἶναι μὴ ἀρνητικοί, ἀρκεῖ νὰ δειξωμεν ὅτι $|x \pm y|^2 \leq \{|x| + |y|\}^2$ ἢ νὰ δειξωμεν ὅτι:

$$(x \pm y)^2 \leq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 \quad (\text{συμφώνως πρὸς τὸ 2ον θεώρημα}),$$

δηλ.: $x^2 \pm 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2$, ἢ τέλος νὰ δειξωμεν $\pm 2xy \leq 2|x| \cdot |y|$. Τοῦτο ὅμως ἀληθεύει συμφώνως πρὸς τὸ 1ον θεώρημα.

2. Νὰ δειχθῇ ὅτι $|x \pm y| \geq |x| - |y|$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ἀρνητικὸν ἢ μηδέν, ἡ σχέσις ἀληθεύει, διότι τὸ πρῶτον εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν. Ἐὰν πάλιν τὸ δεύτερον μέλος εἶναι θετικόν, τότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶναι μὴ ἀρνητικά καὶ συνεπῶς διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ $|x \pm y| \geq |x| - |y|$ ἀρκεῖ νὰ δειξωμεν ὅτι $|x \pm y| + |y| \geq |x|$. Τοῦτο ἔστιν ἀληθές, διότι $|x \pm y| + |y| \geq |x|$ ἀληθεύει διὰ τὸν ἰσοτιμὸν $|x \pm y| + |y| \geq |x|$ (βλ. § 98, πόρισμα 2ον, θεωρ. 6ου).

$$|x \pm y|^2 \geq \{|x| - |y|\}^2 \quad \text{ἢ} \quad \text{ὅτι} \quad x^2 + y^2 \pm 2xy \geq x^2 + y^2 - 2|xy| \quad \text{ἢ} \quad \text{ὅτι} \\ \pm 2xy \geq -2|xy| \quad \text{ἢ} \quad \text{ὅτι} \quad \mp 2xy \leq 2|xy|.$$

Ἡ τελευταία ὁμῶς σχέσις εἶναι ἀληθής. (Θεώρ. 1ον).

3. Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$.

Καὶ ἡ σχέσις αὕτη δεικνύεται διὰ τετραγωνισμού τῶν μελῶν της, ἀκριβῶς ὅπως ἡ 1.

4. Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι :

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n|^2 \leq \{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\}^2 \quad \text{ἢ} \quad \text{ὅτι} \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots \leq |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + 2|a_1||a_2| + 2|a_1||a_3| + \dots \\ \text{ἢ} \quad \text{ὅτι} \quad 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots \leq 2|a_1||a_2| + 2|a_1||a_3| + \dots$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἀληθεύει διότι ἀληθεύουν αἱ :

$$2a_1a_2 \leq 2|a_1||a_2|, \quad 2a_1a_3 \leq 2|a_1||a_3|, \dots$$

αἱ ὁποῖαι προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν τὴν

$$2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots \leq 2|a_1||a_2| + 2|a_1||a_3| + \dots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ἐὰν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y, a, b ὅπου $ab \neq 0$, ἰσχύουν αἱ δύο σχέσεις :

$$(1) \quad x = a\{|a| + |b|\} \quad \text{καὶ} \quad y = b\{|a| + |b|\}$$

τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ

$$(2) \quad a = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}} \quad b = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ (2) συνεπάγονται τὰς (1).

Δύσις. Ἐπειδὴ ἡ (2) περιέχει τὰς $|x|, |y|$ διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐκάστης τῶν (1) ὁπότε ἔχομεν

$$|x| = |a|\{|a| + |b|\}, \quad |y| = |b|\{|a| + |b|\}.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\sqrt{|x| + |y|} = \{|a| + |b|\} \cdot \{|a| + |b|\} = \{|a| + |b|\}^2 \quad \text{καὶ} \quad \text{συνεπῶς}$$

$$(3) \quad \sqrt{|x| + |y|} = |a| + |b|.$$

Ἐπειδὴ $a \neq 0$ καὶ $b \neq 0$ λαμβάνομεν ἀπὸ τὰς (1) :

$$|a| + |b| = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

ὁπότε ἡ (3) γίνεται

$$\sqrt{|x| + |y|} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τὰς ὑποδεικτέας (2).

Ἀντιστρόφως. Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν

$$(4) \quad |a| = \frac{|x|}{\sqrt{|x| + |y|}} \quad |b| = \frac{|y|}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν : $|a| + |b| = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{|x| + |y|}} = \sqrt{|x| + |y|}$. Ἀφοῦ λοιπὸν $\sqrt{|x| + |y|} = |a| + |b|$

$$\alpha \text{ (2) γράφονται} \quad \alpha = \frac{x}{|a| + |\beta|} \quad \beta = \frac{y}{|a| + |\beta|}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τὰς (1).

2. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ σχέσις

$$\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$$

συνεπάγεται τὰς δύο σχέσεις

$$|\beta - 1| < 1, \quad \alpha(1 - |\beta - 1|) = \beta - 1$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐπεται ἡ πρώτη.

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $\beta(1 + |\alpha|) - (1 + |\alpha|) = \alpha$ ἢ

$$(\beta - 1)(1 + |\alpha|) = \alpha, \quad \beta - 1 = \frac{\alpha}{1 + |\alpha|} \quad \text{καὶ ἐκ ταύτης}$$

$$(5) \quad |\beta - 1| = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $|\alpha| < 1 + |\alpha|$ ἐπεται ὅτι $\frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < 1$ καὶ συνεπῶς

$$|\beta - 1| < 1.$$

Ἐξ ἄλλου ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5) ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μονάδα, εὐρίσκομεν

$$1 - |\beta - 1| = 1 - \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} = \frac{1}{1 + |\alpha|} \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς}$$

$$(6) \quad \alpha\{1 - |\beta - 1|\} = \frac{\alpha}{1 + |\alpha|}$$

Ἐχομεν ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως: $(\beta - 1)(1 + |\alpha|) = \alpha$, ὅτι

$$\frac{\alpha}{1 + |\alpha|} = \beta - 1$$

καὶ συνεπῶς ἡ (6) γίνεται $\alpha\{1 - |\beta - 1|\} = \beta - 1$.

Ἀντιστρόφως. Ἐκ τῆς $|\beta - 1| < 1$ ἔχομεν ὅτι $1 - |\beta - 1| > 0$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν:

$$(7) \quad \alpha = \frac{\beta - 1}{1 - |\beta - 1|}$$

Ἐκ τῆς (7) λαμβάνομεν: $|\alpha| = \frac{|\beta - 1|}{1 - |\beta - 1|}$ ἢ

$$(8) \quad 1 + |\alpha| = 1 + \frac{|\beta - 1|}{1 - |\beta - 1|} = \frac{1}{1 - |\beta - 1|}.$$

Ἡ (8) διδὲι $(\beta - 1)(1 + |\alpha|) = \frac{\beta - 1}{1 - |\beta - 1|}$ καὶ λόγῳ τῆς (7): $(\beta - 1)(1 + |\alpha|) = \alpha$ ἢ $\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$.

3. «Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων

$$(9) \quad \left| \frac{2\alpha + 5\beta}{2\beta + 5\alpha} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1, \quad \left| \frac{2\alpha\beta + 5\beta^2}{2\alpha\beta + 5\alpha^2} \right| < 1$$

ὅπου $\alpha, \beta \neq 0$, πᾶν ἄν ἐκ τῶν τριῶν ἐκείνων ἀποβῇ ἡ ἀνίστησις $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1$.

³Απόδειξις. Ἐστω ὅτι ὑφίσταται ἡ πρώτη. Θὰ ἔχωμεν τότε καὶ

$$\left| \frac{2\alpha + 5\beta}{2\beta + 5\alpha} \right|^2 < 1 \quad \text{ἢ} \quad 4\alpha^2 + 25\beta^2 + 20\alpha\beta < 4\beta^2 + 25\alpha^2 + 20\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad 21\beta^2 < 21\alpha^2$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha^2 > \beta^2 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 > 1 \quad \text{ἢ} \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 > 1 \quad \text{ἢ} \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1.$$

⁴Ακολουθῶς, πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσχυοῦσας ἀνισότητος :

$$\left| \frac{2\alpha + 5\beta}{2\beta + 5\alpha} \right| < 1, \quad \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$$

λαμβάνομεν τὴν τρίτην ἐκ τῶν (9).

⁵Ἐστω ὅτι ἰσχύει ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (9). Τότε ἀκολουθοῦντες τὴν ἀντίθετον πορείαν φθάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας (9) εἰς τὴν πρώτην. Δηλαδή, θὰ ἰσχύουν κατὰ σειρὰν αἱ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1, \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1, \quad \alpha^2 > \beta^2, \quad 21\beta^2 < 21\alpha^2, \\ 4\alpha^2 + 25\beta^2 + 20\alpha\beta < 25\alpha^2 + 4\beta^2 + 20\alpha\beta, \quad (2\alpha + 5\beta)^2 < (5\alpha + 2\beta)^2, \\ \left(\frac{2\alpha + 5\beta}{5\alpha + 2\beta} \right)^2 < 1, \quad \left| \frac{2\alpha + 5\beta}{5\alpha + 2\beta} \right| < 1, \quad \left| \frac{2\alpha + 5\beta}{2\beta + 5\alpha} \right| < 1. \end{aligned}$$

⁶Ἐπομένως, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, θὰ ἰσχύει καὶ ἡ τρίτη. Τέλος ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ τρίτη ἐκ τῶν (9). Τότε θὰ ἰσχύουν κατὰ σειρὰν αἱ ἀνισότητες :

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\alpha\beta + 5\beta^2}{2\alpha\beta + 5\alpha^2} \right|^2 < 1, \quad 4\alpha^2\beta^2 + 25\beta^4 + 20\alpha\beta^3 < 4\alpha^2\beta^2 + 25\alpha^4 + 20\alpha^3\beta, \\ 0 < 25(\alpha^4 - \beta^4) + 20\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad 0 < 5(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \quad \text{ἢ} \\ (10) \quad (\alpha^2 - \beta^2)\{5\alpha^2 + 5\beta^2 + 4\alpha\beta\} > 0. \end{aligned}$$

⁷Ἐπειδὴ ὅμως $5\alpha^2 + 5\beta^2 + 4\alpha\beta = (2\alpha + \beta)^2 + 4\beta^2$, δηλ. εἶναι θετικὴ ποσότης, ἔπεται ἐκ τῆς (10) ὅτι $\alpha^2 - \beta^2 > 0$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2$ καὶ συνεπῶς $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > 1$.

⁸Ἰσχυοῦσης δὲ τῆς 2ας ἐκ τῶν (9) θὰ ἰσχύει καὶ ἡ πρώτη ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

4. «Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν δύο σχέσεων

$$\alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0, \quad |\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|$$

ἐκάστη συνεπάγεται τὴν ἄλλην».

¹Απόδειξις. Ἐστω ὅτι ἀληθεύει $\alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0$. Αὕτη γράφεται

$$|\alpha| \cdot \text{σημ}(\alpha) \cdot |\beta| - |\beta| \cdot \text{σημ}(\beta) \cdot |\alpha| = 0 \quad \text{ἢ} \quad |\alpha| \cdot |\beta| \{ \text{σημ}(\alpha) - \text{σημ}(\beta) \} = 0.$$

²Ὡστε, θὰ εἶναι ἢ $\alpha = 0$ ἢ $\beta = 0$, ὅποτε ἡ δευτέρα ἀληθεύει ὡς ἰσότης ἢ $\text{σημ}(\alpha) = \text{σημ}(\beta)$, ὅποτε οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι καὶ συνεπῶς

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta > -2\alpha\beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta > \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta, \quad (\alpha + \beta)^2 > (\alpha - \beta)^2, \\ |\alpha + \beta|^2 > |\alpha - \beta|^2 \quad \text{καὶ} \quad \text{τέλος} \quad |\alpha + \beta| > |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

³Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $|\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|$ τότε $|\alpha + \beta|^2 \geq |\alpha - \beta|^2$ ἢ

$$(\alpha + \beta)^2 \geq (\alpha - \beta)^2 \quad \text{ἢ} \quad 2\alpha\beta \geq -2\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad 4\alpha\beta \geq 0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta \geq 0$$

ἐκ δὲ τῆς τελευταίας ἔπεται ὅτι ἢ $\alpha\beta = 0$ ἢ $\alpha\beta > 0$. Ἐὰν $\alpha = 0$ ἢ $\beta = 0$ ἡ πρώτη προφανῶς ἀληθεύει. Ἐὰν α καὶ β ὁμόσημοι τότε

$$\text{σημ}(\beta) = \text{σημ}(\alpha) \quad \text{ἢ} \quad \frac{|\beta|}{\alpha} = \frac{|\alpha|}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \alpha|\beta| = \beta|\alpha|.$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

5. Ἐάν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς z πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\left| \frac{z+4}{z+1} \right| = 2$$

νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $|z|$.

Λύσις. Ἐκ τῆς δοθείσης λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{|z+4|}{|z+1|} = 2, \quad \frac{|z+4|^2}{|z+1|^2} = 4, \quad z^2 + 16 + 8z = 4(z^2 + 2z + 1).$$

$$z^2 + 16 + 8z = 4z^2 + 8z + 4, \quad 3z^2 = 12, \quad z^2 = 4, \quad |z| = 2.$$

6. Ἐάν οἱ $\neq 0$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, α, β πληροῦν τὰς σχέσεις

$$\alpha = \frac{|x|}{1+|x|+|y|}, \quad \beta = \frac{y}{1+|x|+|y|}$$

νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x καὶ y συναρτήσας τῶν α, β .

Λύσις. Ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὰς

$$|\alpha| = \frac{|x|}{1+|x|+|y|}, \quad |\beta| = \frac{|y|}{1+|x|+|y|}$$

καὶ διὰ προσθέσεως αὐτῶν τὴν

$$(11) \quad |\alpha| + |\beta| = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{\{1+|x|+|y|\}-1}{1+|x|+|y|} = 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|}.$$

Ἄλλ' ἐκ τῶν δοθεισῶν ἔχομεν ὅτι

$$\frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\alpha}{x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\beta}{y}$$

ἐπομένως ἡ (11) δίδει

$$|\alpha| + |\beta| = 1 - \frac{\alpha}{x} \quad \text{καὶ} \quad |\alpha| + |\beta| = 1 - \frac{\beta}{y}.$$

Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἀνωτέρω γράφεται :

$$\frac{\alpha}{x} = 1 - |\alpha| - |\beta| \quad \text{καὶ} \quad \text{δίδει} \quad x = \frac{\alpha}{1 - |\alpha| - |\beta|}.$$

καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ἔχομεν ὁμοίως : $y = \frac{\beta}{1 - |\alpha| - |\beta|}.$

7. α' Ἐάν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ δείξατε ὅτι ἡ παράστασις

$$\Pi = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

διατηρεῖ σταθερὰν τιμὴν ὅταν τὸ x μεταβάλλεται παραμένον μεταξὺ β καὶ γ , δηλ. $\beta < x < \gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $x > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $x > \alpha$ καὶ ἐπειδὴ $x < \gamma$ θὰ εἶναι καὶ $x < \delta$. Ὡστε ἔχομεν : $x > \alpha, x > \beta, x < \gamma, x < \delta$ καὶ συνεπῶς $x - \alpha > 0, x - \beta > 0, x - \gamma < 0, x - \delta < 0$,

$$\text{ἄρα} \quad |x - \alpha| = x - \alpha, \quad |x - \beta| = x - \beta, \quad |x - \gamma| = \gamma - x, \quad |x - \delta| = \delta - x.$$

Συνεπῶς $\Pi = x - \alpha + x - \beta + \gamma - x + \delta - x = \gamma + \delta - (\alpha + \beta)$, δηλ. ἡ παράστασις Π εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ.

Παρατηρήσεις. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν $\beta \leq x \leq \gamma$. Ἐάν δὲ τὸ x δέν πληροῖ τὴν σχέσιν $\beta \leq x \leq \gamma$, τότε θὰ πληροῖ μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων σχέσεων : $\alpha \leq x \leq \beta$ ἢ $x < \alpha$ ἢ $\gamma < x \leq \delta$ ἢ $x > \delta$.
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

όποτε ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω δι' ἐκάστην περίπτωσιν χωριστά, εὐρίσκομεν (ἀπαλλάσσοντες τὴν Π ἀπὸ τὰς ἀπολύτους τιμὰς) ὅτι καὶ εἰς τὰς τέσσαρας περιπτώσεις ἡ Π ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x , ἔχουσα διαφόρους ἐκφράσεις ἐκάστοτε. Τὴν ἐργασίαν ταύτην ἀφήνομεν ὡς ἄσκησιν εἰς τὸν ἀναγνώστην.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-416. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $a_1, a_2, \dots, a_n, x, y$ εἶναι ὁμόσημοι τότε ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$|x - y| = |x| - |y|.$$

A-417. Ποῖοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ πληροῦν τὴν ἀνισότητα :

$$|x| < 2,75;$$

A-418. Ποῖοι ἀκέραιοι πληροῦν συγχρόνως καὶ τὰς δύο ἀνισότητας :

$$|x| > 1,2 \text{ καὶ } |x| < \sqrt{27}; \text{ (βλ. § 119, θεωρ. iii, παρατ. 1,2).}$$

A-419. Ν' ἀπλουστευθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{x-a}{\xi-a} \left(1 - \frac{x-\xi}{|x-\xi|} \right) + \frac{x-\beta}{\xi-\beta} \left(1 + \frac{x-\xi}{|x-\xi|} \right) \right\}$$

ὅπου $a < \xi < \beta$ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, α') ὅτι $x < \xi$ καὶ β') ὅτι $x > \xi$.

A-420. Ἐὰν $x = \frac{a}{|a|+|\beta|}$, $y = \frac{\beta}{|a|+|\beta|}$, τότε $|x|+|y|=1$.

A-421. Ἄν x πραγματικὸς δεῖξατε ὅτι

$$\{x+|x|\} \{x-|x|\} = 0.$$

B-422. Ἐὰν $a^2 \neq \beta^2$, δεῖξατε ὅτι :

$$\frac{|a|-|\beta|}{|a|-|\beta|} + \frac{|a|-|\beta|}{|a-\beta|} + \frac{|a+\beta|}{|a|+|\beta|} \leq 3.$$

B-423. Ἐὰν $a\beta \neq 0$ καὶ $a^2 < 16\beta^2$ δεῖξατε ὅτι τότε

$$\left| \frac{a}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{a} \right| < \frac{15}{4}.$$

B-424. α') Ἐὰν $|a\beta| < 1$ τότε εἰς τουλάχιστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν $|a|, |\beta|$ εἶναι < 1 . β') Ἐὰν $a^4 + \beta^4 = k^4$ τότε καὶ $|a| \leq k$ καὶ $|\beta| \leq k$. γ') Ἐὰν $(x-a)^2 + y^2 \leq \rho^2$ τότε, $-\rho + a \leq x \leq \rho + a$.

A-425. Ἐὰν $|x-1| + |x^2-x| = 0$, εὑρετε τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x .

B-426. Ἐὰν x καὶ y εἶναι πραγματικοὶ $\neq 0$, τότε ἂν

$$\frac{|xy + yx|}{|xy|} = 2$$

οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι ὁμόσημοι.

B-427. Δείξατε ὅτι διὰ πραγματικῶν a, β , ἰσχύει

$$\frac{|a+\beta|}{1+|a+\beta|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

A 428. Ψηφιοποιήθηκε από το Υπουργείο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

A-429. Δείξτε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x πληρὼν τὴν σχέσιν:

$$|x| = \left| x + \frac{ax^2 + \beta}{x} \right|$$

ὅπου a, β ὁμόσημοι.

B-430. Ἐὰν $|a| > 1$, δείξτε ότι

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| - 1 < |a| < \left| a + \frac{1}{a} \right|.$$

B-431. Ἐὰν a, β πραγματικοί, δείξτε ότι ἐκάστη τῶν δύο σχέσεων: $|a\beta| + \beta|a| = 0$, $|a + \beta| \leq |a - \beta|$ συνεπάγεται τὴν ἄλλην.

B-432. Ἐὰν $a > 0$ καὶ $\lambda > 1$ εὑρετε τὴν $|z|$ γνωστοῦ ὄντος ότι z πληροῖ τὴν ἰσότητα

$$\frac{\left| z + \frac{a\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \right|}{\left| z + \frac{a}{\lambda^2 - 1} \right|} = \lambda.$$

A-433. Ἐὰν $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ καὶ $|x - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ ὅπου $\varepsilon > 0$, τότε θὰ εἶναι:

$$|a - \beta| < \varepsilon.$$

B-434. Ἐὰν a, β, γ πραγματικοί, $\neq 0$, νὰ δειχθῇ ότι ἡ διπλὴ ἀνισότης $|\beta - \gamma| < a < \beta + \gamma$ συνεπάγεται τὰς τρεῖς ἀνισότητες $a < \beta + \gamma$, $\beta < \gamma + a$, $\gamma < a + \beta$ καὶ ἀντιστρόφως αἱ τρεῖς τελευταῖαι συνεπάγονται τὴν ἀρχικὴν. Ἐπίσης, ἡ ἀρχικὴ συνεπάγεται ότι a, β, γ εἶναι θετικοί.

B-435. Ἐὰν a, β πραγματικοί δείξτε τὴν σχέσιν

$$|a^2 + a\beta| - |a\beta| + a|\beta| \leq |a + \beta| - a|a| + a^2.$$

B-436. Ἐὰν $a > \beta > 0$ καὶ $|x - a| > x - \beta$ νὰ δειχθῇ ότι τότε

$$x < \frac{a + \beta}{2}.$$

B-437. Ἐὰν $a = \frac{x}{|y| + |z|}$, $\beta = \frac{y}{|z| + |x|}$, $\gamma = \frac{z}{|x| + |y|}$, νὰ δειχθῇ ότι τότε

$$|a\beta\gamma| < \frac{1}{8} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} < 6.$$

A-438. Ἐὰν $|a_1| < |a_2| < |a_3|$ δείξτε ότι τότε

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3^2} < \frac{|a_1| + |a_2|}{|a_3|}.$$

B-439. Ἐὰν $x = \frac{a\sqrt{3}}{2v} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(v-1)}$ ὅπου a, β, v ἀκέραιοι τοιοῦτοι, ὥστε

$v \geq 5$, $a\beta = -1$ δείξτε ότι $40|x| \leq \sqrt{3}$.

B-440. Ἐὰν $a < \beta$, διὰ ποῖα x ἡ παράστασις

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

είναι ανεξάρτητος του x :

$$\text{B-441. Δείξτε ότι αἱ δύο σχέσεις: } a = \frac{\gamma}{1+|\gamma|+|\delta|}, \quad b = \frac{\delta}{1+|\gamma|+|\delta|}$$

συνεπάγονται τὰς τρεῖς σχέσεις :

$$|a|+|b|<1, \quad \gamma = \frac{a}{1-|a|-|b|}, \quad b = \frac{\beta}{1-|a|-|b|}$$

καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τρεῖς τελευταῖαι συνεπάγονται τὰς δύο πρώτας.

$$\text{B-442. Δείξτε ότι } |a_1+a_2+\dots+a_n| \geq |a_1|-|a_2|-|a_3|-\dots-|a_n|.$$

$$\text{B-443. Ἐάν } \rho_1, \rho_2 \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε } \rho_1^2 \neq \rho_2^2 \text{ καὶ } \rho_1 \rho_2 \neq 0$$

$$\text{καὶ παραστήσωμεν μὲ } M \text{ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν } \left| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right|, \left| \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|$$

$$\text{δείξτε ότι } \frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{|\rho_1\rho_2|}-1 < M < \frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{|\rho_1\rho_2|}.$$

$$\text{B-444. Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ } a, b, \gamma \text{ πληροῦν τὰς ἀνισότητας}$$

$$|a| < |b+\gamma|, \quad |b| < |\gamma+a|, \quad |\gamma| < |a+b|.$$

τότε εἶναι πάντες ὁμόσημοι καὶ θὰ πληροῦν καὶ τὰς ἀνισότητας

$$|a| > |b-\gamma|, \quad |b| > |\gamma-a|, \quad |\gamma| > |a-b|$$

$$\text{B-445. Ἐάν } x, y, z, \text{ πραγματικοὶ καὶ } \neq 0 \text{ πληροῦνται δὲ ἡ σχέσεις}$$

$$\frac{|x|yz|+y|zx|+z|xy|}{|xyz|} = 3$$

τότε οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι.

$$\text{A-446. Ἐάν } x, y \text{ πραγματικοὶ καὶ } |x| < 1, \text{ δείξτε ότι ἂν ἰσχύη ἡ σχέσηεις}$$

$$y = \frac{x}{1-|x|} \text{ τότε θὰ ἰσχύη καὶ ἡ } x = \frac{y}{1-|y|}.$$

$$\text{B-447. Νὰ δειχθῇ ότι ἡ παράστασις } |a|x|+|bx| \text{ δύνανται πάντοτε νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν } A|x|+Bx \text{ (ὅπου } a, b \text{ σταθεροὶ γνωστοί, } A, B \text{ σταθεροὶ ζητούμενοι καὶ } x \text{ μεταβλητὴ διατρέχουσα τὸ σύνολον } \Pi).$$

$$\text{B-448. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ } c_1 \text{ καὶ } c_2 \text{ συναρτήσῃ τῶν } a \text{ καὶ } b \text{ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν διὰ κάθε } x \in \Pi, \quad |ax^2+bx|x| \equiv c_1x^2+c_2x|x|.$$

$$\text{A-449. Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης}$$

$$\{2x^2+2x|x|-|x|-x\} \{a^2|x|-a^2x-5|x|+5x\} \equiv 0.$$

$$\text{A-450. Ἐάν } a, b \text{ πραγματικοὶ, δείξτε ότι}$$

$$a|b|+|a|b < a|b|+|ab|.$$

Πότε ἰσχύει τὸ =;

$$\text{B-451. Ἐάν } a, b \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ } ab \neq 0, \text{ δείξτε ότι ἡ σχέσεις}$$

$$\left| \frac{5a+16b}{4a+20b} \right| < 1$$

συνεπάγεται τὴν

$$\left| \frac{a}{b} \right| - \left| \frac{b}{a} \right| < \frac{15}{4} \text{ καὶ ἀντιστρόφως.}$$

$$\text{B-452. Ἐάν } v \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ } |a| < 1 \text{ νὰ δειχθῇ ότι :}$$

$$\left| v \frac{a-1}{a^2+v} \right| < \frac{v}{|a|}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

'Απεικονίσεις - Συναρτήσεις

§ 120. Τὰ σύνολα Π , Π^2 , Π^3 , ... - Διὰ τοῦ Π παριστῶμεν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (§ 80).

Διὰ τοῦ Π^2 (ἢ $\Pi \times \Pi$) παριστῶμεν τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (§ 7).

Διὰ τοῦ Π^3 (ἢ $\Pi \times \Pi \times \Pi$) παριστῶμεν τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα: $(\alpha, \beta) \in \Pi^2$ σημαίνει ὅτι τὸ ζεῦγος α, β εἶναι ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πρῶτον τὸν α καὶ δεῦτερον τὸν β . Ἐπίσης: $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi^3$ σημαίνει ὅτι ἡ τριάς α, β, γ εἶναι μία τριάς πραγματικῶν ἀριθμῶν εἰλημμένων κατὰ σειράν: α (πρῶτος), β (δεύτερος), γ (τρίτος).

§ 121. Τὰ σύμβολα $\forall$ καὶ $\exists$. (Ποσοτισταί). Τὸ σύμβολον $\forall$ ἀναγινώσκεται: «διὰ κάθε» (ἢ «οἰοῦδήποτε ὄντος τοῦ»). Π.χ. διὰ τὸ νὰ διατυπώσωμεν τὴν πρότασιν: «διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x ἰσχύει ἡ ἀνισότης $x^2 + 1 > 0$ » δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συμβολικῶς:

$$x \in \Pi \quad \forall x : x^2 + 1 > 0.$$

Ἐπίσης, ἂν γράψωμεν: $\alpha \in A_k, \forall \alpha : \alpha^2 \in \Phi_0$ τοῦτο σημαίνει: τὸ τετράγωνον κάθε ἀκεραίου εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν.

Ἡ ἀκόμη: $(x, y) \in \Pi^2 \quad \forall (x, y) : x^2 + y^2 \geq 2xy$ σημαίνει ὅτι, διὰ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y ἰσχύει ἡ σχέση $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Τὸ σύμβολον $\exists$ ἀναγινώσκεται: «ὑπάρχει ἓνα τουλάχιστον... τοιοῦτον ὥστε». Π.χ. ἡ πρότασις: «ὑπάρχει ἓνα τουλάχιστον ἀλγεβρικὸς ἀκέραιος x τοιοῦτος ὥστε: $x^2 = 4$ » διατυπώνεται συμβολικῶς:

$$x \in A_k \quad \exists x : x^2 = 4$$

Ἐνίοτε χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ σύμβολον $\exists?$ τὸ ὁποῖον διαβάζεται «ὑπάρχει;» Π.χ. ἡ ἐρώτησις: «ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς x τέτοιος ὥστε $x^2 = 5$;» διατυπώνεται συμβολικῶς:

Γενικῶς, ἂν E σύνολον μὲ στοιχεῖα οἰασδήποτε φύσεως καὶ Ω μία ὠρισμένη ιδιότης τὴν ὁποῖαν τὰ στοιχεῖα τοῦ E δυνατόν νὰ ἔχουν ἢ νὰ μὴ ἔχουν, τότε οἱ συμβολισμοὶ

$$(1) \quad x \in E \quad \forall x : \Omega$$

$$(2) \quad x \in E \quad \forall x : \text{ὄχι } \Omega$$

$$(3) \quad x \in E \quad \exists x : \Omega$$

σημαίνουν ἀντιστοίχως :

ὁ (1) : κάθε στοιχεῖον τοῦ E ἔχει τὴν ιδιότητα Ω

ὁ (2) : οὐδὲν στοιχεῖον τοῦ E ἔχει τὴν ιδιότητα Ω

ὁ (3) : ὑπάρχει τουλάχιστον ἓνα στοιχεῖον τοῦ E ἔχον τὴν ιδιότητα Ω .

Σημειωτέον ὅτι ἡ ἄρνησις τοῦ (1) δηλ. ἡ ἄρνησις τοῦ ὅτι *κάθε* στοιχεῖον τοῦ E ἔχει τὴν ιδιότητα Ω εἶναι: ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ E *μὴ ἔχοντα* τὴν ιδιότητα Ω καὶ διατυπῶνται συμβολικῶς :

$$(4) \quad x \in E \quad \exists x : \text{ὄχι } \Omega.$$

§ 122. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον.—Ἐστω ἓνα σύνολον E καὶ ἕτερον σύνολον F διάφορον ἢ ταυτιζόμενον μὲ τὸ E . Εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in E$ προσεταιρίζομεν ἓνα στοιχεῖον $y \in F$. Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη ὀρίζει μίαν (μονοσήμαντον) ἀπεικόνισιν f , τοῦ συνόλου E εἰς τὸ σύνολον F .

Τὸ στοιχεῖον $y \in F$ καλεῖται εἰκὼν τοῦ $x \in E$. Ἡ ἀπεικόνισις ἡ προσεταιρίζουσα κάθε x τοῦ E μὲ ἓνα y τοῦ F παρίσταται συμβολικῶς μὲ ἓνα γράμμα, f . Σημειοῦμεν :

$$f : x \in E \rightarrow y \in F$$

ἥτοι, βάσει μιᾶς καθωρισμένης ἀπεικονίσεως f , τὸ x ἔχει εἰκόνα τὸ y .

Λέγεται ἀκόμη ὅτι, ἡ εἰκὼν y ἔχει ἀρχέτυπον τὸ x .

Ἡ εἰκὼν τοῦ x , δηλ. τὸ y παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον: $f(x)$ (διαβάζεται: f τοῦ x) ὁπότε γράφομεν :

$$(1) \quad y = f(x)$$

ἢ καί :

$$(2) \quad x \rightarrow f(x)$$

Τὸ βέλος $\rightarrow$ ἀναγινώσκεται: «ἔχει ὡς εἰκόνα» ἢ «παρέχει» ἢ «μετασχηματίζεται εἰς».

Ἐνῶ, κάθε στοιχεῖον τοῦ E ἔχει μίαν εἰκόνα ἐντὸς τοῦ F , κάθε στοιχεῖον τοῦ F δὲν εἶναι ἐν γένει εἰκὼν ἐνὸς στοιχείου τοῦ E ἥτοι, ἐν γένει, τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων δὲν καλύπτει τὸ F , ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ. Δύναται ὅμως νὰ συμβαίνει, ὥστε ἓνα οἰονδήποτε στοιχεῖον τοῦ F νὰ εἶναι εἰκὼν, ἐνὸς τουλάχιστον στοιχείου τοῦ E . Εἰς τὴν περί-

πτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E ἐπὶ τοῦ F . Τ' ἀνωτέρω διατυπῶνται καὶ ὡς ἐξῆς:

Ἄς παραστήσωμεν μὲ $f(E)$ τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων τῶν στοιχείων τοῦ E . Θὰ εἶναι πάντοτε $f(E) \subseteq F$.

Ἐὰν $f(E) \subseteq F$ (δηλ. τὸ $f(E)$ εἶναι μέρος τοῦ F), ἡ f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ F .

Ἐὰν $f(E) = F$, ἡ f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E ἐπὶ τοῦ F . (Τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων, ταυτίζεται μὲ τὸ F).

Ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα «μονοσήμαντος» ἀπεικόνισις ἀναφέρεται συνήθως ὡς «ἀπεικόνισις» ἀπλῶς. Ἡ ἔννοια τοῦ ὅρου ἀπεικόνισις ἡ ὁποία εἶναι μία εὐρυτάτη ἔννοια, διαφωτίζεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ἄς λάβωμεν ὡς E τὸ σύνολον A_k τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς F , πάλιν τὸ A_k . Εἰς κάθε στοιχεῖον x τοῦ A_k , δηλ. εἰς κάθε ἀκέραιον, ἄς ἀντιστοιχίσωμεν τὸν ἀριθμὸν x^3 ὅστις εἶναι πάλιν στοιχεῖον τοῦ A_k . Οὕτω ὀρίζομεν μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ A_k εἰς τὸ A_k :

$$f : x \in A_k \rightarrow x^3 \in A_k$$

Κάθε $x \in A_k$ ἔχει μίαν εἰκόνα $f(x) = x^3 \in A_k$. Ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ A_k δὲν εἶναι εἰκὼν ἐνὸς ἄλλου στοιχείου τοῦ A_k , διότι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀναγκαίως τέλειος κύβος. Συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις δὲν εἶναι ἀπεικόνισις τοῦ A_k ἐπὶ τοῦ A_k , ἀλλὰ τοῦ A_k εἰς τὸ A_k .

Ἐὰν ὁμοῦς ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις $x \rightarrow x^3$ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν:

$$f : x \in \Pi \rightarrow x^3 = f(x) \in \Pi$$

τότε ἔχομεν ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπὶ τοῦ Π . Διότι ὄχι μόνον, κάθε στοιχεῖον τοῦ Π ἔχει μίαν εἰκόνα ἐπὶ τοῦ Π (δηλ. τὸν κύβον του) ἀλλὰ κατ' ἀντιστροφῶς, κάθε στοιχεῖον τοῦ Π (δηλ. κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς) εἶναι κύβος κάποιου ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου), δηλαδή εἶναι εἰκὼν ἐνὸς στοιχείου τοῦ Π .

Ἡ ἀνωτέρω μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκφράζεται συντόμως:

$$f(x) = x^3 \quad \text{ἢ} \quad y = x^3.$$

2. Ἄς λάβωμεν ὡς E τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὡς F πάλιν τὸ Π . Ἄς ὀρίσωμεν ὡς εἰκόνα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x , τὸν ἀριθμὸν $x^3 - 7x$ ὅστις εἶναι πάλιν πραγματικὸς. Οὕτω δημιουργοῦμεν μίαν ἀπεικόνισιν f , τοῦ Π εἰς τὸ Π :

$$x \rightarrow x^3 - 7x = f(x)$$

Ἄς εὗρωμεν, τώρα, τὰς εἰκόνας τῶν στοιχείων: $-3, 1, 2$ τοῦ Π . ἔχομεν: $-3 \rightarrow f(-3) = (-3)^3 - 7(-3) = -6, 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 = -6, 2 \rightarrow f(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 = -6$. Δηλαδή τὰ τρία διαφορετικὰ στοιχεῖα $-3, 1, 2$ τοῦ Π ἔχουν τὴν ἴδιαν εἰ-

κόνα : -6. Ὡστε ἓνα στοιχείον τοῦ F δύναται νὰ εἶναι εἰκὼν, περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς στοιχείων τοῦ E. (Μία εἰκὼν νὰ ἔχη πολλὰ «ἀρχέτυπα»).

Ἐνταῦθα ἡ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις γράφεται συντόμως $y=x^3-7x$.

3. Ἄς λάβωμεν ὡς E τὸ $\Pi \times \Pi$ (βλ. § 120) καὶ ὡς F, τὸ Π . Κάθε στοιχείον x τοῦ E εἶναι ἐνταῦθα ἓνα διατεταγμένον ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β ἥτοι $x=(\alpha, \beta)$, ἐνῶ κάθε στοιχείον y τοῦ F εἶναι ἓνας πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Ἄν λάβωμεν ὡς ἀντίστοιχον τοῦ x, τὸ στοιχείον $y = \frac{3\alpha + \beta}{4}$ τοῦ Π , ὀρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ $\Pi \times \Pi$ ἐπὶ τοῦ Π :

$$f : x=(\alpha, \beta) \in \Pi^2 \rightarrow y = \frac{3\alpha + \beta}{4} \in \Pi.$$

Ἐνταῦθα, ἡ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις γράφεται συντόμως : $f(\alpha, \beta) = \frac{3\alpha + \beta}{4}$.

Ἡ εἰκὼν π.χ. τοῦ $x=(1,1)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $f(1,1) = \frac{3 \cdot 1 + 1}{4} = 1$. Ἡ εἰκὼν τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(-3,2)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $f(-3,2) = \frac{3 \cdot (-3) + 2}{4} = -\frac{7}{4}$ ἐνῶ ἡ εἰκὼν τοῦ $(2,-3)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $f(2,-3) = \frac{3 \cdot 2 + (-3)}{4} = \frac{3}{4}$.

4. Ἄν λάβωμεν ὡς σύνολον E τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (σημειοσύνολον) καὶ ὡς F τὸ τμήμα A'B' ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 28, τότε εἰς κάθε στοιχείον (σημεῖον) M τοῦ πρώτου δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ὡς ἀντίστοιχον, ἓν σημεῖον M' τοῦ δευτέρου, τοιοῦτον ὥστε τὰ O, M, M' νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Οὕτω ὀρίζεται μία ἀπεικόνισις f τοῦ AB ἐπὶ τοῦ A'B' :

$$f : M \in AB \rightarrow M' = f(M) \in A'B'$$

Ἡ εἰκὼν τοῦ M, δηλαδὴ τὸ M' δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ f(M).

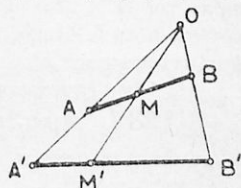
5. Ἄς λάβωμεν ὡς E, τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου (P) καὶ ὡς F, πάλιν τὸ (P).

Ἐστω $\overrightarrow{AB}$ σταθερὸν διάνυσμα ἐπὶ τοῦ (P) καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ (P) (δηλ. στοιχείον τοῦ συνόλου (P)). Μὲ ἀρχὴν τὸ M φέρομεν διάνυσμα $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ καὶ οὕτω καθορίζομεν ἓνα δεύτερον σημεῖον M' τοῦ (P). Θεωροῦντες τὸ νέον σημεῖον M' ὡς ἀντίστοιχον τοῦ M, δηλ. ὡς εἰκόνα τοῦ M ὀρίζομεν διὰ τοῦ τρόπου τούτου μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ (P) ἐπὶ τοῦ (P).

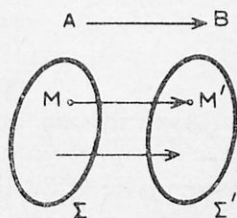
$$f : M \in (P) \rightarrow M' \in (P) \quad (\text{σχ. } 29).$$

Ἡ μονοσήμαντος αὕτῃ ἀπεικόνισις λέγεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν, **μεταφορά**.

6. Ἐστω O σταθερὸν σημεῖον τοῦ (P) καὶ λ δοθεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ (P), διάφορον τοῦ O. Θεωροῦμεν τὸ διά-



Σχ. 28



Σχ. 29

νυσμα $\overrightarrow{OM}$. Πολλαπλασιάζομεν τὸ $\overrightarrow{OM}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν λ καὶ εὐρίσκομεν ἓνα νέον διάνυσμα $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$. Τοιουτοτρόπως, ἐκ τοῦ M προκύπτει ἓνα δεύτερον σημεῖον M' , πάλιν τοῦ (P) . Θεωροῦντες τὸ M' ὡς ἀντίστοιχον τοῦ M , ὀρίζομεν διὰ τοῦ ἀνωτέρω τρόπου μίαν ἀπεικόνισιν f βάσει τῆς ὁποίας εἰς κάθε σημεῖον τοῦ (P) ἀντιστοιχεῖ ἓνα σημεῖον, πάλιν, τοῦ (P) . Ἡ f ἀπεικονίζει τὸ (P) ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του :

$$f : M \in (P) \rightarrow M' = f(M) \in (P).$$

Ἡ μονοσήμαντος αὕτη ἀπεικόνισις λέγεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν **ὁμοιοθεσία**, μὲ κέντρον O καὶ λόγον λ , ἡ δὲ εἰκὼν τοῦ M λέγεται **ὁμοιόθετον** τοῦ M . Ὡς ὁμοιόθετον τοῦ O λαμβάνεται τὸ O .

7. Μία ἄλλη σημαντικὴ ἀπεικόνισις τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι ἡ «ἀντιστροφή». Ἐστω (P) ἓνα ἐπίπεδον, O ἓνα σταθερὸν σημεῖον αὐτοῦ, (P') τὸ σημειοσύνηλον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν ἀπὸ τοῦ (P) ἀφαιρεθῇ τὸ σημεῖον O καὶ c ἓνας σταθερὸς ἀριθμὸς $\neq 0$. Εἰς τυχὸν σημείον M τοῦ (P') ἀντιστοιχίζομεν ἓνα σημεῖον πάλιν τοῦ (P') , τὸ M' (εἰκὼνα τοῦ M) κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας OM καὶ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = c$. (Τὰ $\overline{OM}$ καὶ $\overline{OM'}$ ἐκφράζουσιν τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν $\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OM'}$). Ὀρίζομεν οὕτω μίαν ἀντιστοιχίαν f δι' ἧς προσεταιρίζομεν κάθε σημεῖον M τοῦ (P') μὲν ἓν σημεῖον M' πάλιν τοῦ (P') , ἥτοι μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ (P') ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη f , ὀνομάζεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν «ἀντιστροφή» καὶ τὸ $f(M)$, ἀντίστροφον τοῦ M .

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν, αἱ ἀπεικονίσεις λέγονται καὶ μετασχηματισμοί.

§ 123. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις. — Ἐὰν εἰς μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ E ἐπὶ τοῦ F , ὅχι μόνον πᾶν στοιχεῖον τοῦ E ἔχει μίαν καὶ μόνην εἰκὼνα εἰς τὸ F ἀλλὰ καὶ πᾶν στοιχεῖον τοῦ F εἶναι εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνου στοιχείου τοῦ E , τότε ἡ ἀπεικόνισις λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντος (Bijection)**.

Ἐὰν $f(x)$ καὶ $f(x')$ εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν x καὶ x' τότε ἐφ' ὅσον ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἰσχύουν :

$$f(x) = f(x') \iff x = x'$$

$$f(x) \neq f(x') \iff x \neq x'.$$

Ἀντίστροφος ἀπεικόνισις. Εἰς τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν $y = f(x)$, τὸ y , ὡς στοιχεῖον τοῦ F θὰ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνου στοιχείου $x \in E$. Ἡ ἀπεικόνισις καθ' ἣν τὸ x εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ y καλεῖται **ἀντίστροφος ἀπεικόνισις** τῆς f καὶ παρίσταται μὲ f^{-1} . Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$(1) \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

§ 124. Συνθεσις ἀπεικονίσεων. — Ἀς θεωρήσωμεν τρία σύνολα E, F, G (σχ. 30). Ἐστω f μία ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ F προσεταιρίζουσα κάθε $x \in E$ μὲ ἓνα $y \in F : y = f(x)$.

Ἡ φηλοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ μέρος $f(E)$ τοῦ F τὸ ὁποῖον καλύπτουν αἱ εἰκόνες τῶν x , $(f(E) \subseteq F)$ καὶ μίαν δευτέραν ἀπεικόνισιν, τὴν g , ἥ ὁποία εἰς κάθε $y \in f(E)$ προσεταιρίζεται ἓνα $z \in G$, δηλ. : $z = g(y)$.

Αἱ δύο ἀλλεπάλληλοι μεταβάσεις, ἀπὸ x εἰς y καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ y εἰς z ἰσοδυναμοῦν μὲ μίαν μετάβασιν, ἀπὸ x εἰς z .

Ἡ ἀπεικόνισις $x \rightarrow z$ ὀνομάζεται τὸ γινόμενον (ἢ ἡ σύνθετος ἀπεικόνισις) τῶν δύο ἀπεικονίσεων : $x \rightarrow y$ καὶ $y \rightarrow z$.

Ἡ σύνθετος ἀπεικόνισις τῶν $y = f(x)$ καὶ $z = g(y)$ γράφεται :

$$z = g\{f(x)\}$$

Ἐπίσης, τὸ γινόμενον δύο ἀπεικονίσεων f καὶ g σημειοῦται :

$$f \circ g.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, γίνεται φανερὰ ἡ ἔννοια τῆς συνθέσεως περισσοτέρων τῶν δύο ἀπεικονίσεων.

§ 125. Συναρτήσεις. — α') Γενικὴ ἔννοια τοῦ ὅρου «συναρτήσεις». Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f ἐνὸς συνόλου E εἰς ἓνα σύνολον F (ὅπως περιεγράφη εἰς τὴν § 122), λέγεται καὶ **συνάρτησις**.

Τὸ E καλεῖται **σύνολον ὁρισμοῦ** ἢ **πεδῖον ὁρισμοῦ** τῆς συναρτήσεως καὶ τὸ σύνολον F_1 τῶν εἰκόνων ($F_1 \subseteq F$) καλεῖται **σύνολον τιμῶν** τῆς συναρτήσεως.

Τὸ στοιχεῖον $x \in E$ λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ** τὸ δὲ στοιχεῖον $y \in F$, ὅπερ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ x λέγεται **ἐξαρτημένη μεταβλητὴ** ἢ **τιμὴ**.

Λέγομεν **ἀκόμῃ** ὅτι τὸ y εἶναι **συνάρτησις** τῆς μεταβλητῆς x καὶ γράφομεν $y = f(x)$. Τὸ f δηλοῖ τὴν ἀπεικόνισιν ἢ ὁποία ἐκ τοῦ x παρέχει τὸ y . Γράφομεν **ἀκόμῃ**

$$x \rightarrow f(x)$$

ἥτοι «τὸ x δίδει $f(x)$ ».

Παραδείγματα συναρτήσεων τοῦ x εἶναι ὅλα τὰ δοθέντα εἰς τὴν § 122, ὡς παραδείγματα μονοσημάντων ἀπεικονίσεων.

Σημειώτεον ὅτι πρέπει νὰ γίνεται προσεκτικὴ διάκρισις μεταξὺ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἢ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον ὁρισμοῦ E , τῆς «τιμῆς» $f(x)$ τῆς συναρτήσεως, ἢ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τιμῶν $F_1 \subseteq F$ καὶ τῆς πράξεως f ἢ ὁποία εἶναι ὁ τρόπος τῆς ἀντιστοιχίας ἢ μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ x εἰς τὸ y .

β') **Ἀριθμοσυναρτήσεις.** Εἰς τὴν γενικὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως ἢ (ὅπερ τὸ αὐτό) μονοσημάντου ἀπεικονίσεως, τόσον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x , ὅσον καὶ ἡ «τιμὴ» $f(x)$ τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ εἶναι ἢ νὰ μὴ εἶναι ἀριθμοί. Εἰς τὰ ἐπόμενα, θὰ γνωρίσωμεν κυρίως, συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς τιμὰς, ἀριθμούς. Τοιαῦται συναρτήσεις λέγονται **ἀριθμοσυναρτήσεις**.

γ') **Σταθεραί.** Ὅταν εἰς ἓνα ζήτημα, τὸ γράμμα c εἶναι σύμβολον ἑνὸς καὶ μόνου ἀριθμοῦ, τότε τὸ c καλεῖται **σταθερά** (ποσότης) διὰ τὸ ἐν λόγῳ ζήτημα. Αἱ σταθεραὶ παρίστανται συνήθως μὲ τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου $\alpha, \beta, \gamma \dots$

§ 126. Πραγματικαὶ συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.— α') Μία ἀπεικόνισις ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ Π , εἰς τὸ Π , λέγεται **πραγματικὴ συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς** (βλ. § § 120, 122). (Ἡ λέξις **πραγματικὴ** σημαίνει ἐνταῦθα: λαμβάνουσα **πραγματικὰς τιμὰς**). Μὲ ἄλλας λέξεις, δοθέντος ἑνὸς συνόλου E πραγματικῶν ἀριθμῶν ($E \subseteq \Pi$), ὅταν εἰς κάθε $x \in E$ ἀντιστοιχεῖ ἓνας ἀριθμὸς $y \in \Pi$, τότε διὰ τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς ὀρίζεται μία συνάρτησις $y=f(x)$ ἢ ὁποία λέγεται: **πραγματικὴ συνάρτησις, μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. $f: x \in \Pi \rightarrow y = -2x \in \Pi$ ἢ συντόμως $x \rightarrow y = -2x$. Ἡ διαδικασία f δι' ἧς μεταβαίνομεν ἐκ τῆς x εἰς τὴν τιμὴν y τῆς συναρτήσεως, ἔγκειται ἐδῶ, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ x ἐπὶ -2 . Οὕτω, διὰ $x = -1$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἢ $(-2)(-1) = +2$. Γράφομεν $f(-1) = 2$.

2. $x \rightarrow y = 3x + 5 = f(x)$. Ἡ μετάβασις ἐκ τῆς x εἰς τὴν y γίνεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ x ἐπὶ 3 καὶ εἰς τὸ γινόμενον, προσθέσωμεν 5. Διὰ $x = 4$ ἔχομεν $y = 3 \cdot 4 + 5 = 17$ ἢ $f(4) = 17$. Ἡ ἰσότης $f(x) = 3x + 5$ ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸ $f(x)$ διὰ κάθε x . Λέγομεν ὅτι ἡ **συνάρτησις εἶναι ὠρισμένη $\forall x \in \Pi$** .

3. Ἡ ἰσότης $f(x) = \frac{1}{3x+5}$ δὲν προσδιορίζει τὸ $f(x)$ ὅταν εἶναι $x = -\frac{5}{3}$ ἐνῶ διὰ κάθε ἄλλην τιμὴν τοῦ x , ἡ $f(x)$ προσδιορίζεται. Τοῦτο ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς: Ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι ὠρισμένη $\forall x \in \Pi - \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$ (δηλ. ἡ $f(x)$ εἶναι ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐστερημένου τοῦ $-5/3$)

4. Ἡ συνάρτησις $f(x) = \frac{x^2}{x}$ εἶναι ὠρισμένη $\forall x \in \Pi - \{0\}$ (δηλ. διὰ κάθε $x \neq 0$).

β') **Αἱ στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ πραγματικῶν συναρτή-**
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

σεων μιᾶς μεταβλητῆς. Ἐς θεωρήσωμεν δύο πραγματικὰς συναρτήσεις f καὶ g μιᾶς μεταβλητῆς, ἐχούσας τὸ αὐτὸ πεδίου ὁρισμοῦ $E \subseteq \Pi$. Θὰ ἔχωμεν:

$$x \rightarrow f(x)$$

$$x \rightarrow g(x)$$

i) Ὀνομάζομεν **ἄθροισμα δύο συναρτήσεων**, τὴν συνάρτησιν:

$$x \in E \rightarrow f(x) + g(x) \quad (\text{συναρτήσεις } f + g)$$

εἰς ἣν, εἰς τὸ x ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $f(x) + g(x)$.

ii) Ὀνομάζομεν **διαφορὰν τῶν δύο συναρτήσεων** τὴν συνάρτησιν

$$x \rightarrow f(x) - g(x) \quad (\text{συναρτήσεις } f - g)$$

iii) Ὀνομάζομεν **γινόμενον τῶν δύο συναρτήσεων** τὴν συνάρτησιν

$$x \rightarrow f(x) \times g(x) \quad (\text{συναρτήσεις } f \cdot g)$$

iv) Ὀνομάζομεν **πηλίκον τῶν δύο συναρτήσεων** τὴν συνάρτησιν

$$x \rightarrow f(x)/g(x) \quad (\text{συναρτήσεις } f/g)$$

(ἐνταῦθα ὑποεῖθεται ὅτι $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$).

v) Ὀνομάζομεν **νυοσιτὴν δύναμιν τῆς συναρτήσεως f** τὴν συνάρτησιν

$$x \rightarrow \{f(x)\}^n \quad (\text{συναρτήσεις } \{f\}^n)$$

γ') **Ἀντίστροφοι συναρτήσεις.** Ἐστω f μία συνάρτησις, $E \subseteq \Pi$ τὸ σύνολον ὁρισμοῦ τῆς καὶ $F \subseteq \Pi$ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς. Ἐὰν ἡ ἀπεικόνισις f τοῦ E ἐπὶ τοῦ F εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 123) τότε ἡ ἀντίστροφος ἀπεικόνισις f^{-1} (§ 123) ὀρίζει μίαν δευτέραν συνάρτησιν, ἡ ὁποία λέγεται **ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς f** . Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις f^{-1} ἔχει σύνολον ὁρισμοῦ, τὸ σύνολον τιμῶν τῆς f καὶ σύνολον τιμῶν, τὸ σύνολον ὁρισμοῦ τῆς f .

Ἐστω π.χ. συνάρτησις $y = x^3$, ($x \in \Pi$). Ἐνταῦθα, ἡ ἀντιστοιχία ἀρχέτυπων (x) καὶ εἰκόνων (y) εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, δηλ. καὶ εἰς κάθε y ἀντιστοιχεῖ ἓνα μόνον x (ἡ κυβικὴ τοῦ ριζα). Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς εἰκόνος x^3 εἰς τὸ ἀρχέτυπον x , πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν. Συνεπῶς, ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $f: x \rightarrow y = x^3$ εἶναι ἡ $f^{-1}: y \rightarrow \sqrt[3]{y}$ ἡ (παριστῶντες τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν y , ἄλλιν μὲ x): $f^{-1}: x \rightarrow \sqrt[3]{x}$. Ἡ συνάρτησις $\sqrt[3]{x}$ εἶναι ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως x^3 .

§ 127. Πραγματικαὶ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν.— α') **Συνάρτησις δύο μεταβλητῶν.** Ἐστω E ἓνα σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, συμπίπτον μετὰ τὸ $\Pi \times \Pi$ (§ 120) ἡ μὲν μερὸς αὐτοῦ. Ἐὰν εἰς κάθε διατεταγμένον

ζεῦγος $(x, y) \in E$ ἀντιστοιχῇ ἑνας ἀριθμὸς $z \in \Pi$, τότε διὰ τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς ὁρίζεται μία πραγματικὴ συνάρτησις f δύο μεταβλητῶν x καὶ y . Γράφομεν :

$$(x, y) \in E \rightarrow z = f(x, y) \in \Pi.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις : Μία πραγματικὴ συνάρτησις δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν εἶναι μία ἀπεικόνισις ἐνὸς ὑποσυνόλου τοῦ $\Pi \times \Pi$, εἰς τὸ Π .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. $f : (x, y) \in \Pi^2 \rightarrow z = 3x^2 - 5xy + 7x - 1 = f(x, y) \in \Pi$.

Εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (x, y) ἀντιστοιχεῖ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $3x^2 - 5xy + 7x - 1$. Π.χ. διὰ $x=1$, $y=2$ ἔχομεν $z = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 1 = -1$. Ἐνῶ διὰ $x=2$, $y=1$ ἀντιστοιχεῖ $z = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 - 1 = 15$. Γράφομεν : $f(1, 2) = -1$, $f(2, 1) = 15$.

Τὸ σύνολον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ $\Pi \times \Pi$ ἐνῶ τὸ σύνολον τιμῶν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Π .

2. Ἡ $f(x, y) = \frac{2y^2}{x^2 + 1}$ εἶναι μία συνάρτησις δύο μεταβλητῶν x, y . ὠρισμένη $\forall (x, y) \in \Pi \times \Pi$. Ἐνταῦθα ἔχομεν : $f(0, 1) = 2$, $f(1, 0) = 0$, $f(-1, -1) = 1$, $f(1, 1) = 1$, $f(2, 3) = 18/5$.

3. Ἡ συνάρτησις $f(x, y) = \frac{3xy}{(x-1)(y-2)}$ εἶναι ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ $\Pi \times \Pi$ ἐκτὸς τερημένου τοῦ ζεύγους $(1, 2)$. Ἐχει δηλ. σύνολον ὁρισμοῦ τὸ $\Pi \times \Pi - \{(1, 2)\}$.

β') Συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν εἶναι μία ἀντιστοιχία μεταξύ διατεταγμένων τριάδων (x, y, z) πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς. Τὸ πεδῖον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ $\Pi \times \Pi \times \Pi$ (βλ. § 120) ἢ ἕνα ὑποσύνολον αὐτοῦ ἐνῶ τὸ σύνολον τιμῶν εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ Π . Γράφομεν

$$f : (x, y, z) \in \Pi^3 \rightarrow \omega = f(x, y, z) \in \Pi$$

Π.χ. ἡ $f(x, y, z) = 3x^3 + 2y^2 + 3xyz$ εἶναι μία συνάρτησις τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z ὠρισμένη $\forall (x, y, z)$ ὅπου $(x, y, z) \in \Pi^3$. Εἰς καθὲ διατεταγμένην τριάδα (x, y, z) ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς συναρτήσεως.

$$\text{Π.χ. } f(0, 1, 2) = 2, \quad f(1, 1, 1) = 8.$$

γ') Συναρτήσεις μὲ σύνολον ὁρισμοῦ E ἕνα σύνολον διατεταγμένων τετράδων (x, y, z, t) πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μὲ σύνολον τιμῶν, ἕνα ὑποσύνολον τοῦ Π , λέγονται πραγματικαὶ συναρτήσεις τεσσάρων μεταβλητῶν κ.ο.κ.

δ') Αἱ στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν, ὁρίζονται ὅπως καὶ διὰ τὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς (§ 126, β').

ε') Ἀφ' ὧν ἑκάστη καὶ καθ' ἑαυτὴν εἶναι συνάρτησις ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἕνα ἀριθμὸν, ἀποτελεῖται ἡ συνάρτησις

τὴν § 99 δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ συναρτήσεις μιᾶς ἢ περισσοτέρων πραγματικῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται ἀπὸ τὰς μεταβλητάς διὰ τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πράξεων ἐκτελουμένων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν ἢ ἀκόμη καὶ δι' ἐξαγωγῆς ρίζης.

Παραδείγματα ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:

$$\eta f(x)=3x^3-5x+1, \quad \eta \varphi(x)=\frac{2x^2+5}{7x^2+1}, \quad \eta \omega(x,y)=\frac{3x^3y}{x^2+5y^2}+x,$$

$$\eta A(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+2xyz^2, \quad \eta B(x,y,\alpha)=\frac{\alpha^2x+y}{(\alpha+x)^3}.$$

Εἰδικώτερον, ἡ συνάρτησις τοῦ x : $y=ax^n$ ὅπου a σταθερά, n , σταθερὸς φυσικὸς καὶ x διατρέχει τὸ Π , καλεῖται ἀκέραιον μονώνυμον τοῦ x , βαθμοῦ n . Αἱ συναρτήσεις $z=ax^ny^m$ (δύο μεταβλητῶν x, y), $\omega=ax^ny^mz^p$ (τριῶν μεταβλητῶν x, y, z) εἶναι ἀκέραια μονώνυμα τῶν μεταβλητῶν x, y ἢ x, y, z ἐφ' ὅσον οἱ ἐκθέται εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι. Ἡ συνάρτησις—ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων λέγεται ἀκέραιον πολώνυμον. Τὰς συναρτήσεις αὐτάς ἔχομεν ἐξετάσει εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (§§ 100, 101).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-453. Εὑρετε μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου $E=\{1,2\}$ εἰς τὸ σύνολον $F=\{a, \beta, \gamma\}$. Ποῖον εἶναι τὸ $f(1)$ καὶ τὸ $f(2)$; Κατασκευάσατε ὅλας τὰς δυνατάς ἀπεικονίσεις τοῦ E εἰς τὸ F (§ 122).

A-454. Εὑρετε ὅλας τὰς δυνατάς μονοσημάντους ἀπεικονίσεις τοῦ $E=\{1, 2, 3\}$ ἐπὶ τοῦ E .

A-455. Εἰς κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n ἕς ἀντιστοιχίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν του (ἐπίσης φυσικῶν ἀριθμῶν). Δημιουργοῦμεν τότε μίαν συνάρτησιν $f(v)=\text{πλῆθος διαιρετῶν τοῦ } v$. Ὑπολογίσατε τὰ:

$f(2)$, $f(3)$, $f(10)$, $f(6) \times f(4)$ καθὼς καὶ τὰ $f(p)$, $f(p^2)$ ὅπου p , πρῶτος. Ποῖον τὸ πεδῖον ὁρισμοῦ καὶ ποῖον τὸ σύνολον τιμῶν τῆς $f(v)$;

A-456. Εἰς κάθε ἀλγεβρικὸν ἀκέραιον $a \neq 0$ ἕς ἀντιστοιχίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν του (§ 92). Δημιουργοῦμεν τότε μίαν συνάρτησιν $f(a)=\text{πλῆθος διαιρετῶν τοῦ } a$. Εὑρετε τοὺς ἀριθμοὺς $f(-4)$, $f(36)$, $f(1)$. Δείξατε ὅτι $f(a)=f(-a)$, $f(p^2)=6$ ὅταν p ἀλγεβρικὸς ἀκέραιος, πρῶτος.

A-457. Ἐστω $\sigma(x)=x(7x+1) \cdot [3x-4]$ ὅπου $x \in \Pi \rightarrow \sigma(x) \in \Pi$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\sigma(0)$, $\sigma\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\sigma\left(\frac{4}{3}\right)$, $\sigma(2)$, $\sigma\left(-\frac{1}{3}\right)$.

A-458. Ἄν $f(x)=x^2$ νὰ εὑρεθῇ: $(f(a)-f(\beta))/f(a-\beta)$, $a \neq \beta$.

A-459. Ἐάν $v \in \Phi$ καὶ $\varphi(v)=\frac{1}{v(v+1)}$, $\sigma(v)=\frac{1}{v}$ δείξατε ὅτι $\varphi(v)=\sigma(v)-$

$-\sigma(v+1)$ καὶ ὅτι $\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\dots+\varphi(v)=\sigma(1)-\sigma(v+1)$.

A-460. Νά έκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὡς συνάρτησις τοῦ μήκους x τῆς περιφερείας του.

A-461. Δοθέντος ὅτι: $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$ εὑρετε:
$$\frac{F(a) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - F(a)F\left(\frac{1}{2}\right)},$$

ὅπου $a \neq -1$ καὶ $a \neq -\frac{1}{2}$.

A-462. Ἐὰν $f(x) = x^2 - 2|x| + 5$ καὶ $g(x) = 2x^2 + 3$, ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς ἢ παραστάσεις:

$$f(-3) + g(2), \quad f(-3) : g(-2), \quad 2f(4) - 3g(4), \quad f(a^2) - g(a^2), \quad f(a^2) + g(a).$$

A-463. Ἐὰν $\varphi(v) = 3^v$ καὶ $\sigma(v) = 3^v/2$, ὅπου $v \in \Phi$, δεῖξατε ὅτι

$$\varphi(v) = \sigma(v+1) - \sigma(v)$$

καὶ βάσει τούτου εὑρετε τὸ ἄθροισμα:

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^v.$$

A-464. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f : (x, y) \in \Pi^2 \rightarrow f(x, y) = 3x - 2y + 4$. Ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς ἢ παραστάσεις:

$$f(0,0), \quad f(1,-1), \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right), \quad f(2a, 3a), \quad f(-x, -y), \quad f(y, x).$$

B-465. α') Εἰς κάθε διατεταγμένον ζεύγος (x, y) πραγματικῶν ἀριθμῶν (δηλ. $(x, y) \in \Pi \times \Pi$) ἀντιστοιχίζομεν ἓνα μὴ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $d(x, y)$ τοιοῦτον ὥστε

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Ὅρίζομεν οὕτω μίαν συνάρτησιν $d(x, y)$. Δείξατε ὅτι

$$i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$ii) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

β') Ὅρίζομεν μίαν νέαν συνάρτησιν $d'(x, y)$ διὰ τῆς ισότητος

$$d'(x, y) = \frac{d'(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Δείξατε ὅτι ἡ $d'(x, y)$ ἔχει τὰς ἀνωτέρω ιδιότητες i), ii), iii).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Ἐξισώσεις καὶ ἀνισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον

§ 128. Ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.—Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν συνάρτησιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν ἢ ὅποια νὰ συγκροτῇται ἀπὸ ἀκέραια πολυώνυμα συνδεδεμένα μεταξὺ τῶν διὰ προσθέσεων, ἀφαιρέσεων καὶ πολλαπλασιασμῶν. Μιὰ τοιαύτη συνάρτησις λέγεται καὶ ἀκέραια ἀλγεβρική παράστασις. Κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι μία ἀκέραια ἀλγεβρική παράστασις. Οὕτω π.χ. αἱ συναρτήσεις :

$$f(x) = (3x^2 - 5x + 7)^2 \cdot (-8x + 1) + (3x^3 - 9x^2 + 12x) - \frac{3}{7}(x^5 + 1) \quad \eta$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{5}(5x - 3)(4x + 9)^3 - 7(8x^2 + 4x + \sqrt{2}) \quad \eta$$

$$\omega(x) = \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + x(x+1)^2(x+2)^3(x+4)^3 - 11$$

εἶναι ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις μιᾶς μεταβλητῆς.

Ὅμοίως αἱ συναρτήσεις :

$$f(x, y) = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^2) + \frac{1}{2}y^5,$$

$$\sigma(x, y) = (3x^2 - 5xy + 1)^2 3x - (x^2 + y^2)(3x^3 + y^3 - 1) + x + y - 2$$

εἶναι ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις δύο μεταβλητῶν, κ.ο.κ.

Τελικῶς, κάθε ἀκέραια ἀλγεβρική παράστασις μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ ἀναγωγῇν ὁμοίων ὅρων καταλήγει εἰς ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον (ταυτίζεται μὲ ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον). Δύο ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, ἀναγόμεναι τελικῶς εἰς τὸ ἴδιον ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι ἴσαι (ἢ ἐκ ταυτότητος ἴσαι).

§ 129. Ἐξισώσεις μὲ ἓνα ἄγνωστον.— α') Ἐστωσαν $A(x)$ καὶ $B(x)$ δύο συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x ἔχουσαι τὸ ἴδιον πεδὸν ὁρισμοῦ E .

Λέγομεν ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $A(x) = B(x)$ ὅταν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ἐκεῖνα, τὰς τιμὰς, τῆς μεταβλητῆς x , διὰ

τὰς ὁποίας αἱ συναρτήσεις $A(x)$ καὶ $B(x)$ λαμβάνουν ἴσας τιμὰς.

Δηλαδή, ὅταν τὸ x λάβῃ μίαν τυχαίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\rho \in E$, αἱ συναρτήσεις $A(x)$, $B(x)$ λαμβάνουν ἀντιστοίχους τιμὰς $A(\rho)$ καὶ $B(\rho)$ αἱ ὁποῖαι ἐν γένει εἶναι ἄνιστοι. Τὸ πρόβλημα ἔγκειται: διὰ ποῖον (ἢ ποῖα) ρ , ἔχομεν $A(\rho) = B(\rho)$;

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $A(x) = B(x)$ τὸ $A(x)$ ὀνομάζεται *πρῶτον μέλος* καὶ τὸ $B(x)$, *δεύτερον μέλος* τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ μεταβλητὴ x λέγεται: ὁ *ἄγνωστος* τῆς ἐξισώσεως.

Κάθε ἀριθμὸς ρ ὁ ὁποῖος δίδει εἰς τὰς συναρτήσεις $A(x)$ καὶ $B(x)$, ἴσας τιμὰς, λέγεται *λύσις* ἢ *ρίζα* τῆς ἐξισώσεως $A(x) = B(x)$. Δηλ. ὁ ρ εἶναι μία λύσις, ὅταν $A(\rho) = B(\rho)$.

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν λύσεων (ἢ ριζῶν) λέγεται *ἐπίλυσις* τῆς ἐξισώσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ἡ κάτωθι διατύπωσις τῆς ἐξισώσεως:

$$\exists\{x\}?: \quad A(x) = B(x)$$

(ὕπάρχει σύνολον ἀριθμῶν x τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχομεν τὴν ἰσότητα $A(x) = B(x)$; Εἰς τὴν ἐξίσωσιν, τὸ $=$ ἔχει ἐρωτηματικὸν χαρακτῆρα).

β') Ἐὰν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $A(x) = B(x)$ εἶναι ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τῆς x (§ 128) τότε ἡ ἐξίσωσις λέγεται *ἀκεραία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις*.

$$\text{Π.χ. ἡ ἐξίσωσις: } \frac{2x^3 - x}{6} - \frac{5x^2 - 3x - 1}{10} = \frac{x^2(2x^2 - 1)}{15}$$

εἶναι μία ἀκεραία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις. Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$A(x) = \frac{2x^3 - x}{6} - \frac{5x^2 - 3x - 1}{10}, \quad B(x) = \frac{x^2(2x^2 - 1)}{15}$$

$$\text{Διὰ } x = 1 \text{ λαμβάνομεν: } A(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} \quad \text{ἀλλὰ καὶ } B(1)$$

$$= \frac{1}{15} \quad \text{δηλ. } A(1) = B(1). \text{ Ὁ ἀριθμὸς } 1 \text{ εἶναι μία λύσις (ἢ ρίζα) αὐτῆς.}$$

γ') **Ἀδύνατος ἐξίσωσις - Ταυτότης.** Μία ἀπραγματοποίητος ἰσότης μεταξὺ δύο παραστάσεων (συναρτήσεων) ὅπως π.χ. ἡ $x = x + 1$, λέγεται *ἀπάλιν ἐξίσωσις* καὶ εἰδικώτερον, «*ἀδύνατος ἐξίσωσις*». Αὕτη οὐδεμίαν λύσιν ἔχει ἥτοι τὸ σύνολον $\{x\}$ τῶν λύσεων τῆς εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: $\{x\} = \emptyset$. Ἐὰν πάλιν κάθ' ἑν ἀριθμὸς ρ , εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως τότε ἡ ἐξίσωσις *μεταπίπτει εἰς ταυτότητα*. Οὕτω π.χ. ἡ $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ εἶναι ταυτότης. Τὸ σύνολον $\{x\}$ τῶν λύσεων τῆς εἶναι πᾶν.

§ 130. Ίσοδύναμοι εξισώσεις.— α') Δύο εξισώσεις λέγονται *ισοδύναμοι*, όταν έχουν τὸ ἴδιον σύνολον λύσεων $\{x\}$. Δηλαδή, όταν πᾶσα λύσις τῆς πρώτης εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας καὶ πᾶσα λύσις τῆς δευτέρας, εἶναι καὶ λύσις τῆς πρώτης. Εἶναι εὐνόητον ὅτι μία εξίσωσις δύναται ν' αντικατασταθῇ ἀπὸ μίαν ισοδύναμόν της.

Ίσοδυνάμους εξισώσεις πρὸς μίαν δοθεῖσαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τῇ βοήθειᾳ τῶν δύο ἐπομένων θεωρημάτων.

Θεώρημα 1ον. «Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη μιᾶς εξισώσεως $A(x) = B(x)$ προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἡ αὐτὴ ἀλγεβρική παράστασις $\Gamma(x)$, ἔχουσα τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ μὲ τὰς $A(x)$ καὶ $B(x)$, προκύπτει εξίσωσις ισοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν.

Δηλαδή, αἱ εξισώσεις $A(x) = B(x)$ καὶ $A(x) + \Gamma(x) = B(x) + \Gamma(x)$ εἶναι ισοδύναμοι.

Διότι, ἂν ρ εἶναι μία λύσις τῆς πρώτης θὰ ἔχωμεν :

$A(\rho) = B(\rho) \Rightarrow A(\rho) + \Gamma(\rho) = B(\rho) + \Gamma(\rho)$. Ἄρα τὸ ρ εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας. Ἀντιστρόφως, ἂν λ εἶναι μία λύσις τῆς δευτέρας, θὰ ἔχωμεν :

$A(\lambda) + \Gamma(\lambda) = B(\lambda) + \Gamma(\lambda) \Rightarrow A(\lambda) = B(\lambda)$. Ἄρα τὸ λ εἶναι καὶ λύσις τῆς πρώτης.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$A(x) = B(x) \iff A(x) + \Gamma(x) = B(x) + \Gamma(x)$$

Π.χ. αἱ εξισώσεις $x^3 - x = 7$ καὶ $x^3 - x + 14x + x^2 = 7 + 14x + x^2$ εἶναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 2ον. «Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη μιᾶς εξισώσεως ἐπὶ λ ὅπου λ σχετικὸς ἀριθμὸς $\neq 0$, τότε προκύπτει εξίσωσις ισοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν».

Δηλαδή ἂν $\lambda \neq 0$, αἱ εξισώσεις $A(x) = B(x)$ καὶ $\lambda \cdot A(x) = \lambda \cdot B(x)$ εἶναι ισοδύναμοι. Διότι, ἂν ρ εἶναι μία λύσις τῆς πρώτης, θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad A(\rho) = B(\rho) \Rightarrow \lambda \cdot A(\rho) = \lambda \cdot B(\rho)$$

δηλ. τὸ ρ εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας. Ἀντιστρόφως, ἂν ρ εἶναι λύσις τῆς δευτέρας θὰ ἔχωμεν

$$\lambda \cdot A(\rho) = \lambda \cdot B(\rho) \Rightarrow A(\rho) = B(\rho).$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$A(x) = B(x) \iff \begin{cases} \lambda A(x) = \lambda B(x) \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

β') Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἓνα μέλος εἰς τὸ ἄλλο.

Σύμφωνα πρὸς τὸ 1ον Θεώρημα, ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad f(x) + \sigma(x) = \varphi(x)$$

ισοδυναμεῖ πρὸς τὴν

$$(2) \quad f(x) = \varphi(x) - \sigma(x)$$

προκύπτουσιν ἐκ τῆς (1) διὰ προσθέσεως τοῦ $-\sigma(x)$ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη της. Λέγομεν ὅτι *μεταβαίνομεν ἐκ τῆς (1) εἰς τὴν (2) διὰ μεταφορᾶς τοῦ $\sigma(x)$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος. Τὸ μεταφερόμενον ἀλλάζει σημεῖον.*

Π.χ. ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2x - x^3 + 5 = 8 - 2x^3$ μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της $2x - x^3 + 5 + 2x^3 = 8$ διὰ μεταφορᾶς τοῦ $-2x^3$ ἐκ τοῦ 2ου μέλους εἰς τὸ πρῶτον. Ἡ νέα ἐξίσωσις γράφεται $x^3 + 2x + 5 - 8 = 0$ διὰ μεταφορᾶς τοῦ 8 ἀπὸ τὸ 2ον μέλος εἰς τὸ πρῶτον. Ἡ τελευταία, ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν, γράφεται $x^3 + 2x - 3 = 0$.

γ') **Κανονικὸς μετασχηματισμός.** Ἡ μετὰβασις ἀπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, λέγεται καὶ «*κανονικὸς μετασχηματισμός*» τῆς ἐξισώσεως.

δ') **Βαθμὸς μιᾶς ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως.** Πᾶσα ἀκεραία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ ἓνα ἄγνωστον δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $f(x) = 0$ ὅπου $f(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον. Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου τούτου, λέγεται *βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.*

(Διὰ νὰ λάβῃ ἡ ἐξίσωσις τὴν μορφήν $f(x) = 0$ ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη της, τὸ ἀντίθετον τοῦ δευτέρου μέλους).

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x^2 - 3x + x^3 = x^3 + x + 7$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $2x^2 - 3x + x^3 - x^3 - x - 7 = 0$ ἢ $2x^2 - 4x - 7 = 0$ συνεπῶς εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

ε') **Ἐξάλειψις τῶν παρονομαστῶν.** Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὁρῶν ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως εἶναι κλασματικοὶ (σύμμετροι) ἀριθμοί, ἡ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη της ἐπὶ ἓνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν. (2ον Θεώρ.).

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{4}{3}x - \frac{1}{6} - 5x = \frac{x}{4} + 8 - \frac{x}{2}$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της ἐπὶ 12, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $16x - 2 - 60x = 3x + 96 - 6x$ ἥτις ἔχει ἀκεραίους συντελεστάς.

βάθμιον ἐξίσωσιν μὲ ἓνα ἄγνωστον, κάθε ἐξίσωσιν ἢ ὁποῖα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$ax + \beta = 0$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος καὶ ὅπου οἱ συντελεσταὶ a καὶ β εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ οὐδόλως ἐξαρτώμενοι ἐκ τῆς μεταβλητῆς x .

Ἐὰν οἱ a καὶ β εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις ὅπως π.χ. ἡ $5x - 7 = 0$ ἄλλως λέγεται ἐγγράμμα-τος ὅπως π.χ. ἡ $3ax - \beta\gamma = 0$.

β') **Ἐπίλυσις πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀριθμητικῶν.**

1. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $(x+1)(x-2) = x^2 - 3(x-4)$.

Ἐκτελοῦμεν εἰς τὰ δύο μέλη τὰς σημειουμένας πράξεις καὶ ἔχομεν:

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 3x + 12$$

Μεταφέρομεν τοὺς ὅρους μὲ τὸ x εἰς τὸ πρῶτον μέρος, τοὺς δὲ γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ δεύτερον καὶ ἔχομεν:

$$x^2 - x^2 - x + 3x = 12 + 2.$$

Ἀνάγομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους καὶ λαμβάνομεν

$$2x = 14.$$

Διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x , δηλ. διὰ 2, ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ φθάνομεν εἰς τὴν

$$x = 7.$$

Ἡ τελευταία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἡ τελευταία ὅμως ἔχει προφανῇ λύσιν: τὸν ἀριθμὸν 7 καὶ μόνον αὐτόν. Ἐπομένως $x=7$ εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τῆς δοθείσης.

$$2. \quad \exists \{x\} \subseteq \Pi? : \frac{5x}{6} - \frac{x-1}{2} = x + \frac{1}{3} + \frac{3}{8}(x+1)$$

α') Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 24:

$$20x - 12(x-1) = 24x + 8 + 9(x+1).$$

β') Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις:

$$20x - 12x + 12 = 24x + 8 + 9x + 9.$$

γ') Μεταφέρομεν τοὺς ἀγνώστους εἰς τὸ 1ον μέρος:

$$20x - 12x - 24x - 9x = -12 + 8 + 9.$$

δ') Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων:

$$-25x = 5.$$

ε') Διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x :

$$x = -\frac{1}{5}.$$

Τὸ σύνολον $\{x\}$ τῶν λύσεων εἶναι μονομελές: $\{-1/5\}$.

Ἡ γενικὴ πορεία τῆς λύσεως γίνεται σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

πέντε βήματα: ἐξάλειψις - ἐκτέλεσις - μεταφορὰ - ἀναγωγή - διαίρεσις.

$$3. \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: } \frac{2x-1}{5} + \frac{23x-10}{15} - 3x = -x - \frac{x}{15}$$

$$\text{Ἐξαλείφωμεν τοὺς παρ/στάς: } 3(2x-1) + 23x - 10 - 45x = -15x - x.$$

$$\text{Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις: } 6x - 3 + 23x - 10 - 45x = -16x.$$

$$\text{Μεταφέρομεν: } 6x + 23x - 45x + 16x = 3 + 10.$$

$$\text{Ἀνάγωμεν: } 0 \cdot x = 13.$$

Τὸ τελευταῖον βῆμα, ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x δὲν δύναται νὰ γίνη (§ 87, γ'). Δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς x ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 13, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δίδει γινόμενον μηδέν. Κατὰ συνέπειαν ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος (οὐδεμίαν λύσιν ἔχει).

$$4. \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: } 5(x-1) + 3(2-x) = 2x + 1$$

$$\text{Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις: } 5x - 5 + 6 - 3x = 2x + 1.$$

$$\text{Μεταφέρομεν: } 5x - 3x - 2x = 5 - 6 + 1.$$

$$\text{Ἀνάγωμεν τοὺς ὁμοίους ὅρους: } 0 \cdot x = 0.$$

Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν δίδει γινόμενον μηδέν, διὰ τοῦτο κάθε ἀριθμὸς, εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x . (Τὸ σύνολον $\{x\}$ τῶν λύσεων εἶναι τὸ Π).

γ') **Διερεύνησις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.**

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις: $\alpha x + \beta = 0$ (βλ. α').

Μεταφέροντες τὸ β εἰς τὸ 2ον μέλος λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$(1) \quad \alpha x = -\beta$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον) **Ἐστω $\alpha \neq 0$.** Τότε δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ α ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

ἡ ὁποία προφανῶς **μὴν καὶ μόνην λύσιν ἔχει**, τὴν $-\frac{\beta}{\alpha}$.

2ον) **Ἐστω $\alpha = 0, \beta \neq 0$.** Τότε ἡ ἐξίσωσις (1) καθίσταται $0 \cdot x = -\beta$ καὶ διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν, θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς x ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν νὰ δίδῃ γινόμενον $-\beta$, διάφορον τοῦ μηδενός. Ἐπειδὴ τοιοῦτος ἀριθμὸς δὲν ὑπάρχει, συνάγομεν ὅτι εἰς τὴν περὶ τὴν x ἐξίσωσιν (ὅπου $\alpha = 0, \beta \neq 0$) ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ εἶναι ἀδύνατος.

3ον) Ἐστω $\alpha=0$, $\beta=0$. Τότε ἡ (1) καθίσταται $0 \cdot x=0$ καὶ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . (Καταντᾷ ταυτότητος ὡς πρὸς x).

δ') Ἐγγράμματα ἐξισώσεις. «Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}x + 2\alpha - 2\beta = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}x$$

ὅπου α, β δεδομένοι ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta) \neq 0$ καὶ x ὁ ἄγνωστος».

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x + 2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) &= \\ &= (\alpha^3-\beta^3)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)x \end{aligned}$$

καὶ ἀκολουθῶς τὰς ἰσοδυναμίας ἐξισώσεις :

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x + (\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x = (\alpha^3-\beta^3)(\alpha^2-\beta^2) - 2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)$$

$$\text{ἢ} \quad (\alpha^2+\beta^2)\{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\}x = (\alpha^2-\beta^2)\{(\alpha^3-\beta^3) - 2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)\}$$

$$\text{ἢ} \quad 2(\alpha^2+\beta^2)^2x = (\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\beta) \cdot (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-2\alpha^2-2\beta^2)$$

$$\text{καὶ τέλος } x = \frac{-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)^2} = -\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha^3+\beta^3)}{2(\alpha^2+\beta^2)^2}.$$

§ 132. Παραγοντοποιημένα ἐξισώσεις. — Ὀνομάζομεν

παραγοντοποιημένην ἐξίσωσιν, κάθε ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$(1) \quad \sigma_1(x) \cdot \sigma_2(x) \dots \sigma_n(x) = 0$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x)$ εἶναι ἐν γένει, ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x .

Διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ (1), πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἶς τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, διότι μόνον τότε τὸ γινόμενον $\sigma_1(x) \cdot \sigma_2(x) \dots \sigma_n(x)$ μηδενίζεται. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

$$(2) \quad \sigma_1(x)=0, \quad \sigma_2(x)=0, \quad \dots, \quad \sigma_n(x)=0.$$

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $(x-1)(2x+3)(5x+7)=0$ ἔχει λύσεις, τὰς λύσεις τῶν : $x-1=0$, $2x+3=0$, $5x+7=0$ δηλ. ἔχει τρεῖς ρίζας : $x=1$,

$$x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\frac{7}{5}.$$

Ἐὰν μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) εἶναι ἀδύνατος, π.χ. ἡ $\sigma_1(x)=0$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ παράστασις $\sigma_1(x)$ δὲν μηδενίζεται δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μὲ τὴν ἐξίσωσιν

$$(3) \quad \sigma_2(x)\sigma_3(x) \dots \sigma_n(x)=0, \quad (\forall x, \sigma_1(x) \neq 0).$$

Ἡ τοῖ :

ἠφελήθηκε ἀπὸ τοῦ ἰνστιτούτου Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως διὰ μιᾶς παραστάσεως, παντοῦ ὠρισμένης, ἐφ' ὅσον ἡ παράστασις αὐτὴ δὲν δύναται νὰ μηδενίζεται.

Μία ἐξίσωσις $f(x)=0$, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, δύναται νὰ ἐπιλυθῇ, ἐφ' ὅσον ἐπιτευχθῇ ἡ ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων. Πρὸς τοῦτο χρησιμεύουν εἰς πολὺς περιπτώσεις αἱ μέθοδοι παραγοντοποιήσεως.

Παρατήρησις. Μία ἐξίσωσις $A(x)=B(x)$ δύναται νὰ ὀδηγήσῃ εἰς διαφορετικὰς λύσεις, ἀναλόγως τοῦ συνόλου εἰς τὸ ὁποῖον θέλομεν ν' ἀνήκῃ ὁ ἀγνωστος x . Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις:

$$(x-\sqrt{3})(x-1)(x+2)(4x+5)(x^2+1)=0,$$

ὅταν $x \in \Phi$ ἔχει μίαν λύσιν: $x=1$

ὅταν $x \in A_K$ ἔχει δύο λύσεις: $x=1, x=-2$

ὅταν $x \in P$ ἔχει τρεῖς λύσεις: $x=1, x=-2, x=-\frac{5}{4}$

ὅταν $x \in \Pi$ ἔχει τέσσαρας λύσεις: $x=1, x=-2, x=-\frac{5}{4}, x=\sqrt{3}$

καὶ ὅταν x ἀνήκῃ εἰς τοὺς μιγαδικούς, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, ἔχει ἀκόμη δύο λύσεις.

Γενικῶς ὅμως, ἐφ' ὅσον δὲν δηλοῦται τὸ ἀντίθετον, θὰ ὑποτίθεται ὅτι $x \in \Pi$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-466. Ἐπαληθεύσατε ὅτι:

i) ὁ ἀριθμὸς $x=-2$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3x^3-5x+14=0$.

ii) » $x=-\frac{1}{3}$ » » » $3x^2-8x-3=0$.

iii) » $x=\frac{1}{4}$ » » » $256x^4-512x^2-33=0$.

A-467. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$x-7(4+x)=5x-6(3-4x), \quad 3(x+5)(x-3)+x=3(x+4)(x-2)-5,$$

$$0,8x-0,3=0,2x+1,4, \quad 5(1,2-3,5x)=6(3,5-1,2x),$$

$$9x-\{8x-(6x-5)\}=7x-\{4x-9(x-2)\}.$$

A-468. $\frac{5x}{6} - \frac{x-1}{2} = x + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}(x+1), \quad \frac{x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2},$

$$\frac{x-3}{8} + \frac{x+4}{12} = \frac{3x+7}{20} + 3, \quad \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left\{ \frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right\} = \frac{x-9}{9} - \frac{7}{8},$$

$$\frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}.$$

A-469. $(3x-2)(x-3)-(4x-1)(x+7)=5(1-x)(x+3)+3(1-x)(3-x)+x^2,$

$$2x(x-5)+3x(x+4)=x(x+1)+(2x-3)^2,$$

$$\frac{3}{4}(x-2)+2(x-1)-\frac{1}{2}=3(3-2x)+2x-\frac{13}{10}.$$

$$A-470. \frac{1-4x}{6}+2(x+1)-\frac{1}{10}=\frac{4x+3}{2}-\frac{2x+1}{3},$$

$$\frac{3x}{4}-\frac{7x+2}{20}=\frac{2(x-4)}{5}+\frac{3}{2}, \quad \frac{x+6}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+22}{6}.$$

A-471. Να λυθούν αι εξισώσεις :

$$(x-1)(2x+1)(x-4)=0, \quad x^3-4x=0, \quad (3x-1)^2-(5x+3)^2=0.$$

$$A-472. (x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9), \quad (x+2)^3-(x-2)^3=32x+16, \\ (x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0.$$

$$A-473. (4x^2-9)(3x+2)-6(2x-3)=0, \quad 4x^2-\frac{1}{9}=6x-1.$$

$$(2x-3)(x+6)+(3-2x)(4x-1)=0.$$

B-474. Να λυθούν αι κάτωθι εξισώσεις, διά παραγοντοποιήσεως του πρώτου μέλους :

$$x^2-5x+4=0, \quad 2x^2-3x+1=0, \quad x^2+4x+4=0, \quad 3x^2-7x+4=0, \quad x^2+13x+42=0.$$

$$B-475. \text{Να λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \frac{ax-1}{2}=\frac{x+7}{3} \text{ ὅπου ὁ } a \text{ θεωρεῖται γνω-}$$

στός (παράμετρος) καὶ x ὁ ἄγνωστος. Δύνатаι ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ νὰ εἶναι ἀδύνατος ἢ ἀόριστος :

B-476. Να λυθούν αι εξισώσεις :

$\{(a+\beta)x-\gamma\}^2=\{(a-\beta)x-\gamma\}^2, \quad (x+a)^3+(x+\beta)^3+(x+\gamma)^3=3(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)$
ὅπου a, β, γ θεωροῦνται γνωστοὶ (παράμετροι) καὶ x ὁ ἄγνωστος. Εὑρετε, πότε αι ἐξισώσεις αὐταὶ δὲν ἔχουν λύσιν ἢ εἶναι ταυτότητες.

B-477. Να λυθούν καὶ διερευνηθοῦν αι ἐξισώσεις :

$$i) (1-x)(a-x)=(a-x)(1-\beta)-(1+x)(\beta-x)$$

$$ii) (x-a)^3(x+2\beta+a)-(x+\beta)^3(x+2a-\beta)=0$$

ὅπου a, β θεωροῦνται δεδομένοι καὶ x ὁ ἄγνωστος.

A-478. Ἐστω ἡ παράστασις $y=(x^2-9)^2-(x+3)^2$. Ζητεῖται : i) Ν' ἀναπτυχθῇ καὶ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x . ii) Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων. iii) Νὰ εὑρεθοῦν αι τιμαὶ τῆς y διὰ $x=0$, διὰ $x=-3$ καὶ διὰ $x=2$. iv) Νὰ δοθοῦν αι τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἡ y λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδέν.

A-479. Δίδονται αι παραστάσεις $f(x)=(5-3x)(x+4)-(5-3x)(2x-3)$ καὶ $\sigma(x)=9x^2-25$. Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης $2f(x)-3\sigma(x)=0$;

§ 133. Διαστήματα.

α' Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha < \beta$ καλεῖται ἀνοικτὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β , τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν οἱ ὅποιοι εἶναι μεγαλύτεροι μὲν τοῦ α μικρότεροι δὲ τοῦ β . Δηλ. τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x οἱ ὅποιοι πληροῦν τὴν διπλῇ ἀνισότητα

$$(1) \quad \alpha < x < \beta.$$

Εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα δὲν συμπεριλαμβάνονται οἱ α καὶ β , δηλ. τὰ λεγόμενα πέρατα τοῦ διαστήματος. (Τὸ α κάτω, τὸ β ἄνω, πέρας). Τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $\alpha < x < \beta$ παρίσταται μὲ $] \alpha, \beta[$.

Καλεῖται κλειστὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν x οἱ ὅποιοι πληροῦν τὴν διπλὴν σχέσιν

$$(2) \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Δηλαδή εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα συμπεριλαμβάνονται καὶ τὰ πέρατα α καὶ β . Τοῦτο συμβολίζεται μὲ $[\alpha, \beta]$. Ὀμοίως ἔχομεν τὸ ἀνοικτὸν πρὸς τ' ἀριστερὰ διάστημα:

$$(3) \quad \alpha < x \leq \beta \quad \eta \quad] \alpha, \beta]$$

καὶ τὸ ἀνοικτὸν πρὸς τὰ δεξιὰ:

$$(4) \quad \alpha \leq x < \beta \quad \eta \quad [\alpha, \beta[.$$

Τὰ (3) καὶ (4) λέγονται καὶ ἡμιανοικτὰ διαστήματα. Τὸ κλειστὸν διάστημα (2) παρίσταται γεωμετρικῶς ἀπὸ ἓν εὐθύγραμμον τμήμα κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχον ἄκρα τὰ δύο σημεῖα τὰ παριστῶντα τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β (βλ. § 80 γ').

Τὰ λοιπὰ διαστήματα (1), (3), (4) παρίστανται ἀπὸ τὸ ἴδιον τμήμα ὅταν ἐξαίρεσωμεν τὸ ἐν ἡ καὶ τὰ δύο ἄκρα του.

Κατ' ἐπέκτασιν καλοῦμεν διάστημα καὶ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων ἐνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ α . Πάντες οἱ ἀριθμοὶ x τοῦ διαστήματος τούτου θὰ πληροῦν τὴν ἀνισότητα

$$(5) \quad x > \alpha.$$

Ἀντὶ τῆς (5) γράφομεν πολλάκις

$$(5') \quad \alpha < x < +\infty$$

ἥτις σημαίνει ἀκριβῶς ὅ,τι καὶ ἡ (5).

Ὀμοίως διακρίνομεν διαστήματα τιμῶν τοῦ x ὀριζόμενα ὑπὸ τῆς ἀνισότητος

$$(6) \quad x < \alpha.$$

(ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ὑπὸ τῆς $-\infty < x < \alpha$), ἡ τῆς σχέσεως

$$(7) \quad x \geq \alpha \quad \eta \quad τῆς$$

$$(8) \quad x \leq \alpha.$$

Τὰ διαστήματα (5), (6), (7) καὶ (8) παρίστανται γεωμετρικῶς ἀπὸ ἀπεράντους ἡμιευθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος (§ 80 γ'), ἀρχομένης ἀπὸ τοῦ σημείου A τοῦ παριστῶντος τὸν α καὶ εἰς τὰς ὁποίας συμπεριλαμβάνεται ἡ ὀχι ἡ ἀρχὴ των A .

Τέλος, διακρίνομεν καὶ τὸ «διάστημα» ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὅπερ ἐν γεωμετρικῶς παρίσταται ἀπὸ ὅλην τὴν ἄνω ἀπὸ τοῦ ἄξονος

τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, Τοῦτο ἐκφράζομεν ὡς διάστημα ἀπὸ $-\infty$ (πλὴν ἁπειρον) ἕως $+\infty$ (σὺν ἁπειρον) καὶ τὸ παριστάνομεν μέ :

$$-\infty < x < +\infty.$$

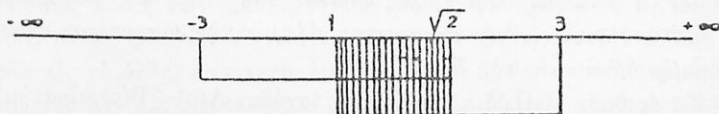
β') Εἰς διάφορα ζητήματα τῶν ἀνισοτήτων μᾶς χρειάζεται τὸ κοινὸν μέρος δύο διαστημάτων, δηλ. τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν x οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν συγχρόνως εἰς δύο δεδομένα διαστήματα (τομὴ δύο συνόλων).

Τὸ κοινὸν μέρος δύο ἢ καὶ περισσοτέρων διαστημάτων εὐρίσκεται εὐκόλως γραφικῶς ἂν παραστήσωμεν τὰ διαστήματα μὲ εὐθύγραμμα τμήματα, εἶναι δὲ καὶ αὐτό, πάλιν ἓνα διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος τῶν διαστημάτων

$$-3 < x < \sqrt{2} \quad \text{καὶ} \quad 1 < x < 3.$$

Λύσις. Γράφομεν τὰ πέρατα τῶν δύο διαστημάτων, δηλ. τοὺς ἀριθμοὺς $-3, \sqrt{2}, 1, 3$, κατὰ σειρὰν μεγέθους, ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ὡς εἰς τὸ σχ. 31,



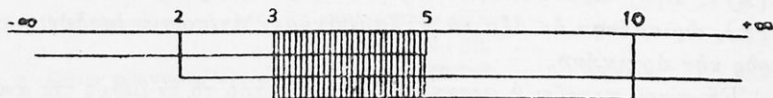
Σχ. 31

καὶ ὑπογραμμίζομεν τὰ δύο διαστήματα διὰ γραμμῶν ἐχουσῶν διαφορετικὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς εὐθείας. Τὸ κοινὸν διάστημα, φαίνεται ἄμεσως ὅτι εἶναι ἀπὸ 1 ἕως $\sqrt{2}$, μὴ συμπεριλαμβανομένων τῶν ἁκρῶν. Δηλαδή εἶναι τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $1 < x < \sqrt{2}$. (Ἡ τιμὴ $x=1$ ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον ἀλλὰ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ δεῦτερον, συνεπῶς δὲν εἶναι κοινὴ τιμὴ τῶν δύο. Ὁμοίως ἡ $\sqrt{2}$).

2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος τῶν τριῶν διαστημάτων :

$$-\infty < x \leq 5, \quad 2 < x < +\infty, \quad 3 \leq x \leq 10.$$

Λύσις. Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Ἡ λύσις δίδεται ἀπὸ τὸ σχ. 32. Τὸ κοινὸν διάστημα εἶναι ἀπὸ 3 ἕως 5 καὶ εἶναι κλει-



Σχ. 32

στὸν διότι ἡ τιμὴ $x=3$ ἀνήκει εἰς ὅλα τὰ δοθέντα διαστήματα· ὁμοίως καὶ ἡ τιμὴ $x=5$. Ὡστε τὸ κοινὸν μέρος εἶναι τὸ $3 \leq x \leq 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἡ ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Α-480. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος τῶν διαστημάτων :

- α) $-7 \leq x \leq -2$ και $-5 \leq x \leq 0$
 β) $x > 0$ και $-1 < x < 2$
 γ) $x < 0$ και $-2 < x \leq 0$
 δ) $1 \leq x < 10$ $7 \leq x < 11$, $3 \leq x < 9$.

A-481. Εύρετε το κοινό μέρος των τεσσάρων διαστημάτων :

- α) $3 - \sqrt{12} < x \leq \sqrt{12}$, β) $3,4 \leq x < 3,5$, γ) $x > -0,45$, δ) $x < \sqrt{13}$.

B-482. Εάν $a < b$ δείξτε ότι θα έχουμε :

$$\frac{1}{2} |a-x| - |b-x| = \left| \frac{a+b}{2} - x \right| \quad \eta \quad = \frac{1}{2} (b-a)$$

καθ' όσον ό x περιέχεται εις τό διάστημα $a \leq x \leq b$ ή όχι.

B-483. Πόσοι φυσικοί αριθμοί ανήκουν εις τό διάστημα $123,6 < x \leq 1027$;

§ 134. Άνισώσεις με ένα άγνωστον. α') Έστωσαν $A(x)$ και $B(x)$ δύο πραγματικά συναρτήσεις της μεταβλητής x έχουσαι τό αυτό πεδίο όρισμοϋ, π.χ. τό Π .

Λέγομεν ότι έχουμε να λύσωμεν τήν ανίσωσιν $A(x) < B(x)$ όταν ζητούμεν να προσδιορίσωμεν όλας εκείνας τας τιμάς της μεταβλητής x αί όποίαι δίδουν εις τήν συνάρτησιν $A(x)$ τιμήν μικροτέραν εκείνης τήν όποιαν δίδουν εις τήν $B(x)$.

Κάθε αριθμός $\rho \in \Pi$, διά τόν όποϊον ισχύει: $A(\rho) < B(\rho)$ είναι μία λύσις της ανίσωσεως $A(x) < B(x)$ ή όπως, λέγομεν, ικανοποιεί τήν ανίσωσιν $A(x) < B(x)$. Η εύρεσις όλων τών λύσεων λέγεται επίλυσις της ανίσωσεως $A(x) < B(x)$.

β') **Ίσοδύναμοι ανισώσεις** λέγονται δύο ανισώσεις αί όποίαι έχουν τας ίδίας λύσεις.

Άπό μίαν ανίσωσιν $A(x) < B(x)$ δυνάμεθα να λάβωμεν άλλας ισοδυνάμους τή βοηθεία τών έπομένων θεωρημάτων τών όποϊών ή απόδειξις είναι εύκολος, στηριζομένη εις τας γνωστάς ιδιότητες τών ανισοτήτων (§ 98 iii, v και § 130, 1ον, 2ον).

Θεώρημα 1ον. «Εάν εις άμφοτέρα τα μέλη της ανίσωσεως $A(x) < B(x)$ προσθέσωμεν τήν αυτήν, αλγεβρικήν παράστασιν $\Gamma(x)$, ώρισμένην δι' όλα τα x , λαμβάνομεν ανίσωσιν ισοδύναμον προς τήν αρχικήν».

Έξ αυτού πηγάζει ή μεταφορά ένός όρου από τό έν μέλος της ανισότητος εις τό άλλο.

Θεώρημα 2ον. «Εάν άμφοτέρα τα μέλη ανίσωσεως πολλαπλασιασθούν επί τόν αυτόν θετικόν αριθμόν, προκύπτει ανίσωσις ισοδύναμος προς τήν αρχικήν».

$$(\forall k \in \Pi^+ \quad A(x) > B(x) \iff kA(x) > kB(x))$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
 Έξ αυτού πηγάζει ή εξαίρεσις τών παρονομαστών.

Θεώρημα 3ον. «*Εάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισώσεως* $A(x) < B(x)$ *ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, καὶ συγχρόνως ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τῆς ἀνισώσεως, λαμβάνομεν ἀνίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀρχικὴν*».

$$((\forall \lambda \in \Pi-, A(x) > B(x) \iff \lambda A(x) < \lambda B(x))$$

γ') **Ἡ σχέσις** $A(x) \leq B(x)$. Ἀντὶ τῆς ἀνισώσεως $A(x) < B(x)$ παρουσιάζεται πολλάκις ἡ σχέσις:

$$A(x) \leq B(x)$$

ἥτις ἱκανοποιεῖται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x καθιστῶσαν τὸ $A(x)$ μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $B(x)$. (μὴ μεγαλύτερον τοῦ $B(x)$).

Διὰ τὴν σχέσιν αὐτὴν ἰσχύουν πάντες οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ καὶ τὰ θεωρήματα 1ον, 2ον, 3ον.

§ 135. Ἐπίλυσις πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τριῶν θεωρημάτων τῆς § 134 δύναται νὰ γίνη ἡ επίλυσις τῶν πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων, δηλ. *ἐκείνων τῶν ὁποίων τὰ μέλη εἶναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα τοῦ x* . Ἡ επίλυσις γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (ἐξάλειψις παρονομαστών, μεταφορὰ τῶν ἀγνώστων ὅρων εἰς τὸ ἐν μέρος καὶ τῶν γνωστών εἰς τὸ ἄλλο, ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων, διαίρεσις διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x). Ὡς ἀποτέλεσμα ὅμως τῆς ἐπιλύσεως τῆς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως λαμβάνομεν ὅχι μίαν τιμὴν τοῦ x ὅπως εἰς τὰς ἐξισώσεις ἀλλ' ἐν γένει ὁλόκληρον διάστημα τιμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} > 1 - \frac{x}{7}.$$

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης, ἐπὶ 70 ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνίσωσιν

$$14(3x-1) - 35(x+1) > 70 - 10x$$

ἥτις γράφεται

$$7x - 49 > 70 - 10x.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν ἰσοδύναμον προσθέτοντες τὸ $10x$, εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη (δηλ. μεταφέροντες τὸν ὅρον $-10x$ εἰς τὸ πρῶτον μέρος):

$$7x + 10x - 49 > 70.$$

Μεταφέροντες τὸ -49 εἰς τὸ δεύτερον μέρος:

$$7x + 10x > 49 + 70.$$

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὴν

$$17x > 119$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εἰς τὴν ἰσοδύναμον: $x > \frac{119}{17}$, ἥτοι $x > 7$.

Ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν. Ἄρα ἡ ἀρχικὴ ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς μεγαλυτέρας τοῦ 7.

Σημείωσις. Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀνισώσεων πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα

ὅτι, ὡςάκις πολλαπλασιάζωμεν, ἢ διαιροῦμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη ἀνισότητος ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν πρέπει ν' ἀλλάσωμεν τὴν φορὰν τῆς ἀνισότητος.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-484. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις :

$$\text{i)} \quad 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7, \quad \text{ii)} \quad \frac{8x+3}{2} < 2x+25.$$

καὶ νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x πληροῦσαι συγχρόνως καὶ τὰς δύο.

A-485. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις :

$$\text{i)} \quad 8x - 5 > \frac{15x-8}{2}, \quad \text{ii)} \quad 2(2x-3) > 5x - \frac{3}{4}$$

καὶ νὰ ἐξετασθῇ ἂν τὸ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ἡ πρώτη, ἔχει κοινὸν μέρος μὲ τὸ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ἡ δευτέρα.

B-486. Ἐν $a \neq 0$ δεῖξατε ὅτι τὸ δινόμενον $ax + \beta$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ a διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεγαλυτέραν τῆς ρίζης του (δηλ. τῆς $-\beta/a$).

B-487. i) Αἱ ἀνισώσεις $x^2(x-3) > 0$ καὶ $x-3 > 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι :

ii) Αἱ σχέσεις $x^2(x-3) \geq 0$ καὶ $x-3 \geq 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι :

§ 136. Σημεῖον τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\tau)$.

α') Ἐς ἀρχίσωμεν ἀπὸ ἓνα συγκεκριμένον πρόβλημα :

«Εἰς ποῖα διαστήματα τιμῶν τοῦ x τὸ γινόμενον $(x-1)(x-3)(x-10)$ εἶναι θετικὸν καὶ εἰς ποῖα ἀρνητικόν» ;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 3, 10, δηλ. τὰς ρίζας τοῦ γινομένου, κατὰ σειρὰν αὐξάνοντος μεγέθους ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

$x :$		$-\infty$		1		3		10		$+\infty$
Γινόμενον:			-		+		-		+	
										Σχ. 33

Οὕτω δημιουργοῦνται τέσσαρα ἀνοικτὰ διαστήματα: ἀπὸ $-\infty$ ἕως 1, ἀπὸ 1 ἕως 3, ἀπὸ 3 ἕως 10, καὶ ἀπὸ 10 ἕως $+\infty$.

Ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν τινὰ τοῦ τελευταίου δεξιά διαστήματος τότε τὸ γινόμενον καθίσταται θετικόν. Διότι ἀφοῦ τὸ x ἀνήκῃ εἰς τὸ διάστημα τῶν τιμῶν τῶν ἄνω τοῦ 10 θὰ εἶναι $x > 10$, $x > 3$, $x > 1$, ἄρα καὶ $x-10 > 0$, $x-3 > 0$, $x-1 > 0$, ἄρα καὶ $(x-10)(x-3)(x-1) > 0$.

Ὅταν ὁ x μεταπηδήσῃ εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 3 ἕως 10 τότε θὰ εἶναι $x < 10$, $x > 3$, $x > 1$, ἄρα $x-10 < 0$, $x-3 > 0$, $x-1 > 0$ καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενον $(x-10)(x-3)(x-1)$ καθίσταται τότε ἀρνητικόν.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὴν τινὰ τοῦ ἀμέσως προηγούμενου (ἀνοικτοῦ) διαστήματος 1 ἕως 3 τότε θὰ πληροῖ τὰς ἀνισότητας $x < 10$, $x < 3$, $x > 1$, ἄρα θὰ εἶναι $x-10 < 0$, $x-3 < 0$, $x-1 > 0$ καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενον $(x-10)(x-3)(x-1)$ εἶναι τότε θετικόν.

Ἐν γένει, ὅταν ὁ x μεταπηδᾷ ἀπὸ ἓν ἐκ τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων εἰς τὸ προηγούμενον, τὸ γινόμενον ἀλλάζει σημεῖον.

Ὡστε τὸ ἐξεταζόμενον γινόμενον καθίσταται θετικὸν μὲν εἰς τὰ (ἀνοικτὰ) διαστήματα $x > 10$ καὶ $1 < x < 3$ καὶ ἀρνητικὸν εἰς τὰ $x < 1$ καὶ $3 < x < 10$ (βλ. σχ. 33).

Γενικῶς, ἂς θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον

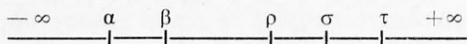
$$(1) \quad (x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)$$

οὗτινος αἱ ρίζαι $\alpha, \beta, \dots, \rho, \sigma, \tau$, ἔστω ὅτι πληροῦν τὰς ἀνισότητος,

$$(2) \quad \alpha < \beta < \gamma \dots < \rho < \sigma < \tau.$$

Ἐὰν γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ κατὰ τὴν σειρὰν (2) ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δημιουργοῦνται διαδοχικὰ ἀνοικτὰ διαστήματα τιμῶν:

$$x < \alpha, \alpha < x < \beta, \dots, \rho < x < \sigma, \sigma < x < \tau, x > \tau.$$



Ἐὰν ὁ x ἀνῆλθῃ εἰς τὸ τελευταῖον διάστημα, δηλ. εἶναι $x > \tau$ τότε θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον καὶ $x > \sigma, x > \rho, \dots, x > \alpha$, ἄρα ὅλοι οἱ παράγοντες $x-\alpha, x-\beta, \dots, x-\rho, x-\sigma, x-\tau$ εἶναι θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον τῶν θετικόν.

Ὅταν ὁ x μεταβῇ εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον διάστημα, ἀπὸ σ ἕως τ τότε θὰ ἰσχύουν:

$$x < \tau, x > \sigma, x > \rho, \dots, x > \alpha.$$

Συνεπῶς, εἶναι $x-\tau < 0$ ἐνῶ πάντες οἱ λοιποὶ παράγοντες $x-\sigma, x-\rho, \dots, x-\alpha$, εἶναι θετικοί, ἄρα τὸ γινόμενον ἔχει τιμὴν ἀρνητικὴν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο.

Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται φανερόν ὅτι ἐν γένει ὅταν ὁ x μεταπηδᾷ ἀπὸ ἓν διάστημα εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον, ἀλλάζει σημεῖον μόνον εἰς πᾶράγων τοῦ γινομένου, ἄρα ἀλλάζει σημεῖον καὶ τὸ γινόμενον.

Κατὰ ταῦτα, διὰ τὴν μελέτην τοῦ σημείου τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)$, γράφομεν κατὰ σειρὰν αὐξάνοντος μεγέθους τὰς ρίζας $\alpha, \beta, \dots, \rho, \sigma, \tau$, ὁπότε εἰς τὸ τελευταῖον δεξιὰ διάστημα, (δηλ. $x > \tau$), τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν, εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον διάστημα, (δηλ. $\sigma < x < \tau$), τὸ γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν, κ.ο.κ., ἐναλλάξ.

β') Ἐφαρμογή: ἐπίλυσις παραγοντοποιημένης ἀνισώσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις:

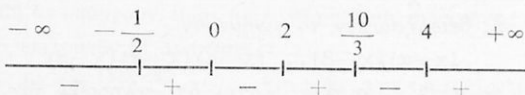
$$(3) \quad x(2x+1)(x-2)(3x-10)(4-x) > 0.$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Λύσις. Γράφωμεν τὴν (3) ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν (1) διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς διὰ τοῦ 2·3 καὶ ἀλλάζοντες τὸ σημεῖον τοῦ τελευταίου παράγοντος ὁπότε ἡ ἀνίσωσις ἀντιστρέφεται :

$$(4) \quad (x-0)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-4) < 0.$$

Γράφωμεν τὰς ρίζας 0, $-\frac{1}{2}$, 2, $\frac{10}{3}$, 4 κατὰ σειρὰν αὐξοντος μεγέθους ὁπότε



δημιουργοῦμεν ἕξ διαστήματα. Εἰς τὸ τελευταῖον δεξιὰ, (δηλ. εἰς τὸ $x > 4$) τὸ πρῶτον μέλος τῆς (4) εἶναι θετικόν, εἰς τὸ προτελευταῖον, (δηλ. $\frac{10}{3} < x < 4$) εἶναι ἀρνητικόν, κ.ο.κ. Διὰ νὰ πληρωθῇ ἡ (4) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος τῆς νὰ εἶναι ἀρνητικόν καὶ τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ διαστήματα

$$(5) \quad \frac{10}{3} < x < 4, \quad 0 < x < 2 \quad \text{καὶ} \quad -\infty < x < -\frac{1}{2}.$$

Αἱ (5) δίδουν πάσας τὰς λύσεις τῆς (3).

2ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις :

$$x^3(2x+1)^2(x-2)(3x-10)^5(x-4)^2 < 0.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται :

$$(7) \quad \{x^2(2x+1)^2(3x-10)^4(x-4)^2\} \{x(2x+1)(x-2)(3x-10)\} < 0.$$

ἤτοι ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραστάσεων ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ἡ δὲ δευτέρα εἶναι τῆς μορφῆς (1).

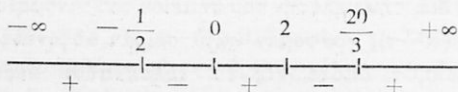
Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (7) πρέπει νὰ μὴ μηδενίζεται ἡ πρώτη ἀγκύλη (ὁπότε θὰ εἶναι θετικὴ) ἐνῶ ἡ δευτέρα πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικὴ. Ὡστε ἡ (7) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα τῶν δύο σχέσεων

$$(8) \quad x(2x+1)(x-2)(3x-10) < 0.$$

$$(8') \quad x(2x+1)(3x-10)(x-4) \neq 0.$$

Λύομεν τὴν ἀνίσωσιν (8) κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον, δηλ. ἀφοῦ πρῶτον τὴν γράψωμεν ὑπὸ μορφήν

$$(x-0)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{20}{3}\right) < 0.$$



καὶ εὐρίσκομεν ὅτι αὕτη ἀληθεύει εἰς τὰ διαστήματα

$$(9) \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \quad \text{καὶ} \quad 2 < x < \frac{20}{3}.$$

Κατόπιν ἐξετάζομεν ἂν εἰς τὰ διαστήματα (9) ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x μὴ ἱκανοποιῦσαι τὴν (8') ὁπότε αὗται πρέπει ν' ἀποκλεισθοῦν. Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι αἱ

$$x=0, \quad x=-\frac{1}{2}, \quad x=\frac{20}{3} \quad \text{καὶ} \quad x=4.$$

Ἐκ τούτου μόνον ἡ $x=4$ ἀνήκει εἰς τὸ δεῦτερον ἐκ τῶν διαστημάτων (9) καὶ πρέπει νὰ ἐξαίρεθῇ ἀπὸ αὐτό.

Ὡστε τελικῶς αἱ λύσεις τῆς (6) εἶναι αἱ

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \quad \text{καὶ} \quad 2 < x < \frac{20}{3}, \quad \text{ὅπου} \quad x \neq 4$$

ἢ ἄλλως :

$$-\frac{1}{2} < x < 0, \quad 2 < x < 4, \quad 4 < x < \frac{20}{3}.$$

§ 137. Συστήματα ἀνισώσεων μὲ ἓνα ἄγνωστον.

Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς ἀνισώσεις περιχοῦσας τὸν ἴδιον ἄγνωστον x καὶ ζητοῦμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν, τότε ἔχομεν πρὸ ἡμῶν. σύστημα ἀνισώσεων. Λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι πᾶσαι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἡ μᾶλλον πάντα τὰ διαστήματα τιμῶν τοῦ x εἰς τὰ ὅποια ἱκανοποιοῦνται συγχρόνως πᾶσαι αἱ δοθεῖσαι ἀνισώσεις. Δηλαδή λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι αἱ κοινὰὶ λύσεις τῶν ἀνισώσεων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ σύστημα.

Πρὸς εὑρεσιν τῶν κοινῶν λύσεων, λύομεν χωριστὰ ἐκάστην ἀνίσωσιν καὶ κατόπιν διὰ γραφικῆς μεθόδου εὐρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἐπόμενον παράδειγμα.

Ἐστω ὅτι ζητοῦνται αἱ κοινὰὶ λύσεις τῶν τριῶν ἀνισώσεων :

$$A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \quad \Gamma(x) > 0.$$

Λύοντες τὴν πρώτην ἔστω ὅτι εὐρίσκομεν

$$(1) \quad x < \frac{3}{4} \quad \text{καὶ} \quad x > 10.$$

Λύοντες τὴν δευτέραν ἔστω ὅτι εὐρίσκομεν

$$(2) \quad -7 < x < 15 \quad \text{καὶ} \quad x > 21$$

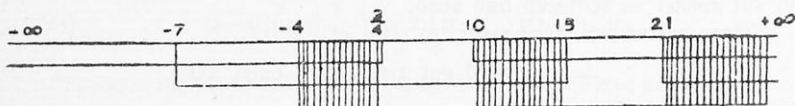
Λύοντες τέλος τὴν τρίτην ἔστω ὅτι εὐρίσκομεν

$$(3) \quad x > -4.$$

Πρὸς εὑρεσιν τῶν κοινῶν λύσεων (ἐὰν ὑπάρχουν) γράφομεν τὰ πέρατα ὅλων τῶν εὐρεθέντων διαστημάτων (1), (2), καὶ (3) κατὰ σειρὰν αὐξοντος μεγέθους ἐπ' εὐθείας (ε) καὶ υπογραμμίζομεν τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὅποια πληροῦται ἐκάστη ἀνίσωσις, διὰ γραμμῶν ἔχουσῶν διαφορετικὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν (ε) διὰ τὰς διαφόρους ἀνισώσεις.

Ἄν ὑπάρχουν κοινὰ διαστήματα τῶν (1), (2) καὶ (3), ταῦτα γίνονται ἐποπτικῶς καταφανῆ ἀμέσως. Εἰς τὸ παράδειγμά μας αἱ τρεῖς

ἀνισώσεις ικανοποιούνται συγχρόνως (συναληθεύουν) εἰς τὰ διαστήματα.



Σχ. 33

$$(4) \quad -4 < x < \frac{3}{4}, \quad 10 < x < 15 \text{ καὶ } x > 21$$

καὶ μόνον εἰς αὐτά. Τὰ (4) ἀποτελοῦν λοιπὸν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τριῶν ἀνισώσεων.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-488. Νά λυθοῦν αἱ ἀνισώσεις :

$$\text{i) } (5-x)(11-x)(6x-1)(12x-5) < 0, \quad \text{ii) } (x-3)^2(5x+2)^3(2-x)(4-3x) > 0.$$

A-489. Εὑρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις :

$$x^2 - 5x > 0 \quad \text{καὶ} \quad 2x^2 - 11x < 0.$$

A-490. Εὑρετε διὰ τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις :

$$x^3 - x^2 > 0, \quad |x| < 4, \quad x > \frac{1}{2}.$$

A-491. Εὑρετε τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισώσεων

$$(4x-3)(10-x) < 0, \quad (x-21)(x+7)(x-15) > 0, \quad (x^2+1)(x+4) < 0.$$

B-492. Προσδιορίσατε τὸ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὐρίσκειται

$$\delta \ x \ \text{ἵνα ἑκαστος ἐκ τῶν τριῶν ὁρίθμῶν} \quad \alpha = \frac{x}{2} + 1, \quad \beta = 2x - 4, \quad \gamma = -\frac{3x}{4} + 3$$

εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Τοῦτου συμβαίνοντος, μεταξὺ ποίων ὀρίων περιέχεται τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$:

§138. Ἐξισώσεις καὶ ἀνισώσεις περιέχουσαι τὸ x καὶ ἀπολύτους τιμὰς τῆς μορφῆς $|x-k|$. α') Κἀθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς.

$$(A) : \quad \alpha x + \alpha_1 x - \beta_1 + \alpha_2 x - \beta_2 + \dots + \alpha_n x - \beta_n = \gamma$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ καὶ ὁ ἄγνωστος x εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, δύνανται ν' ἀναχθῇ εἰς $n+1$ πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις. Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_n$, τότε οἱ ἀριθμοὶ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ χωρίζουν τὸ ὅλον διάστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἰς $n+1$ διαστήματα : $x \leq \beta_1, \beta_1 < x \leq \beta_2, \beta_2 < x \leq \beta_3, \dots, \beta_{n-1} < x \leq \beta_n$ καὶ τέλος $x > \beta_n$.

Ἐὰν κάμωμεν τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ x περιέχεται εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων τότε γνωρίζομεν τὰ πρόσημα, ὅλων τῶν διανομῶν, $x - \beta_1, x - \beta_2, \dots, x - \beta_n$ ($x - \beta_1 \leq 0, x - \beta_2 < 0, x - \beta_3 < 0, \dots$

$x - \beta_v < 0$) καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις ἀπαλλάσσεται τῶν ἀπολύτων τιμῶν. Ὀμοίως, ἀπαλλοτρίωνται τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἂν κάμωμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὁ x περιέχεται εἰς τὸ 2ον ἐκ τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων: $\beta_1 < x \leq \beta_2$ διότι τότε θὰ εἶναι $x - \beta_1 > 0$, $x - \beta_2 \leq 0$, $x - \beta_3 < 0, \dots$, $x - \beta_v < 0$ καὶ ἐπομένως: $|x - \beta_1| = x - \beta_1$, $|x - \beta_2| = \beta_2 - x$, $|x - \beta_3| = \beta_3 - x$, $\dots |x - \beta_v| = \beta_v - x$. Ἐπειδὴ, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν $v+1$ τοιαύτας προϋποθέσεις (διότι ἔχωμεν $v+1$ ἐν ὅλῳ διαστήματα), διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις ἀναλύεται εἰς $v+1$ ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους ἐξ ὧν ἐκάστη συν-οδεύεται ἀπὸ μίαν «παρασυνθήκην» δηλ. ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τὴν ὁποίαν ἔχωμεν κάμῃ διὰ τὸ x . Οὕτω, ἔχομεν διαδοχικῶς:

1) Ἐὰν $x \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{v+1}$ τότε ἡ ἐξίσωσις (A) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \alpha_1(\beta_1 - x) + \alpha_2(\beta_2 - x) + \dots + \alpha_v(\beta_v - x) = \gamma$ καὶ τὴν ἀνισότητα $x \leq \beta_1$. Εὐρίσκομεν τὸ x ἐκ τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως καὶ ἂν ἡ εὐρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x πληροῖ τὴν παρασυνθήκην $x \leq \beta_1$, τότε εἶναι δεκτὴ, ὡς λύσις (ρίζα), ἄλλως, ἀπορρίπτεται.

2) Ἐὰν $\beta_1 < x \leq \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_v$, τότε

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \alpha_1(x - \beta_1) + \alpha_2(\beta_2 - x) + \dots + \alpha_v(\beta_v - x) = \gamma \\ \beta_1 < x \leq \beta_2 \end{cases}$$

3) Ἐὰν $\beta_1 < \beta_2 < x \leq \beta_3 < \beta_4 < \dots < \beta_v$ τότε

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \alpha_1(x - \beta_1) + \alpha_2(x - \beta_2) + \alpha_3(\beta_3 - x) + \dots + \alpha_v(\beta_v - x) = \gamma \\ \beta_2 < x \leq \beta_3 \end{cases}$$

$\dots$
 $v+1$) Ἐὰν $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_v < x$ τότε

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \alpha_1(x - \beta_1) + \dots + \alpha_v(x - \beta_v) = \gamma \\ x > \beta_v \end{cases}$$

Διὰ τῶν $v+1$ τούτων βημάτων, εὐρίσκομεν ὅλας τὰς λύσεις τῆς (A) τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος κυμαίνεται ἀπὸ 0 ἕως $v+1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\exists x \in \mathbb{P}?: 3x - 5|x + 1| + 4|x - 12| - 2|3x + 6| = -1$.

Λύσις. Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν (A):

$$3x - 6|x + 2| - 5|x + 1| + 4|x - 3| = -1.$$

(Τὰ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, εἶναι, τώρα, κατὰ σειρὰν $-2, -1, 3$).

1) Ἐὰν $x \leq -2 < -1 < 3$, ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμεῖ μὲ

$$\begin{cases} 3x - 6(-x - 2) - 5(-x - 1) + 4(3 - x) = -1 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Εὐρίσκομεν ἐκ τῆς πρωτοβαθμίου, $x = -3$. Ἡ παρασυνθήκη $x \leq -2$ πλη-
 ροῦται, ἄρα μία λύσις εἶναι ἡ $x = -3$.

2) Ἐὰν $-2 < x \leq -1 < 3$, ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμεῖ μὲ

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\begin{cases} 3x-6(x+2)-5(-x-1)+4(3-x)=-1 \\ -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

Ἡ πρωτοβάθμια, δίδει $x=3$ ἥτις ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τὴν παρασυνθήκην.

3) Ἐάν $-2 < -1 < x \leq 3$, ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμεῖ μὲ

$$\begin{cases} 3x-6(x+2)-5(x+1)+4(3-x)=-1 \\ -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ἡ πρωτοβάθμια δίδει $x=-1/3$, ἥτις ἀπορρίπτεται.

4) Ἐάν $-2 < -1 < 3 < x$, ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμεῖ μὲ

$$\begin{cases} 3x-6(x+2)-5(x+1)+4(x-3)=-1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Ἡ πρωτοβάθμια δίδει $x=-7$, ἥτις ἀπορρίπτεται.

Συμπέρασμα: α') ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τὴν $x=-3$

β') Καθ' ὅμοιον τρόπον, δηλαδὴ θέτοντες προϋποθέσεις διὰ τὸ x (παρασυνθήκας), δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν ἀνισώσεις τῆς μορφῆς:

$$ax + a_1|x - \beta_1| + \dots + a_n|x - \beta_n| < \gamma \quad \text{ἢ} \quad > \gamma.$$

Ἔτσι π.χ. ἡ $ax + a_1|x - \beta_1| < \gamma$ ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο συστήματα ἀνισώσεων:

$$1\text{ον. } \begin{cases} x \leq \beta_1, & ax + a_1(\beta_1 - x) < \gamma \end{cases} \quad \text{καὶ}$$

$$2\text{ον. } \begin{cases} x > \beta_1, & ax + a_1(x - \beta_1) < \gamma \end{cases}.$$

γ') **Εἰδικὴ περίπτωση.** Ἐάν ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν

$$(B) \quad x = A \cdot \{ \Theta + \Theta_1|x| \}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ A , Θ καὶ Θ_1 πληροῦν τὰς συνθήκας $\Theta > 0$, $\Theta_1 > 0$ καὶ $1 > \Theta_1|A|$, τότε ἡ ἐνδεικνυομένη λύσις εἶναι:

$$x = A \{ \Theta + \Theta_1|x| \} \Rightarrow |x| = |A| \cdot (\Theta + \Theta_1|x|) \Rightarrow |x| = \frac{\Theta|A|}{1 - \Theta_1|A|} \Rightarrow x = \frac{\Theta \cdot A}{1 - \Theta_1 \cdot |A|}$$

διότι ἐκ τῆς (B), πρέπει x καὶ A νὰ εἶναι ὁμόσημοι.

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

B-493. i) Νὰ ἐπιλυθοῦν, εἰς τὸ πεδῖον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν αἱ ἐξισώσεις:

$$3x + 5|x| = 4, \quad x - \frac{|12 - 10x|}{10} = \frac{4}{5},$$

$$7x + 5 + |14x + 10| = 65, \quad -x + 2|7x - 1| + |9x + 4| - 6 = 0$$

$$(|x| + 1)(5x - |x - 1|)(|3x + 5| - |7x - 3|) = 0.$$

$$a(1 + |x|) = 1 + x + |x| \quad \text{ὅπου} \quad 0 < a < 2$$

ii) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις,

$$x - 2|x| < 6, \quad |x - 1| + |x - 2| < 2x + 1.$$

Συστήματα πρωτοβαθμίων εξισώσεων — Πρωτοβάθμια προβλήματα

§ 139. Ἐξίσωσις με πολλοὺς ἀγνώστους. α') Ἐστωσαν δύο συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$ τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x, y .

Ἐὰν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) , διὰ τὰ ὁποῖα αἱ συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$ λαμβάνουν ἴσας τιμὰς (δηλ. ἂν τεθῇ τὸ ἐρώτημα: $\exists\{(x, y)\}?: \sigma(x, y) = \varphi(x, y)$) τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1) \quad \sigma(x, y) = \varphi(x, y).$$

Κάθε διατεταγμένον ζεύγος (x_0, y_0) τὸ ὁποῖον δίδει ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς εἰς τὰ δύο μέλη τῆς (1) δηλαδὴ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\sigma(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$, λέγεται *λύσις* τῆς (1). Ἡ εὕρεσις τοῦ συνόλου $\{(x, y)\}$ τῶν λύσεων (x, y) λέγεται *ἐπίλυσις* τῆς (1). Ἐν γένει, ἡ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις. Αἱ μεταβληταὶ x, y λέγονται οἱ «ἀγνώστοι» τῆς ἐξίσωσης.

Ἐὰν ἡ (1) ἀληθεύει διὰ κάθε $(x, y) \in \Pi$ τότε μεταπίπτει εἰς *ταυτότητα*. Πάντως, δέον νὰ διακρίνωμεν σαφῶς τὴν ἐξίσωσιν, ἢ ὁποία δι' ἄλλας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν ἀληθεύει καὶ δι' ἄλλας δὲν ἀληθεύει ἀπὸ τὴν ταυτότητα ἢ ὁποία εἶναι ἕνας μετασχηματισμός, δηλ. μία ἀλλαγὴ μορφῆς τοῦ πρώτου μέλους, τιθεμένου ὑπὸ τὴν μορφήν τοῦ δευτέρου.

Π.χ. ἡ ισότης $x + y = 10$ δὲν ικανοποιεῖται ἀπὸ ὁποιονδήποτε ζεύγος (x, y) , συνεπῶς δὲν εἶναι ταυτότης. Τὰ ζεύγη $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(-2, 12)$ (καὶ ἄπειρα ἄλλα) εἶναι λύσεις αὐτῆς. Τουναντίον ἡ ισότης $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ εἶναι μία ταυτότης· ὁμοίως ἡ $2(x + y) = 2x + 2y$.

β') Ἐντελῶς ἀναλόγως μεταβαίνομεν εἰς ἐξισώσεις με τρεῖς ἀγνώστους:

$$(2) \quad \sigma(x, y, z) = \varphi(x, y, z).$$

Πᾶσα διατεταγμένη τριάς (x_0, y_0, z_0) ικανοποιούσα τὴν (2) δηλ., τοιαύτη ὥστε $\sigma(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0)$ εἶναι *μία λύσις* τῆς (2) ἢ δὲ εὕρεσις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων (τριάδων) λέγεται *ἐπίλυσις* τῆς (2).

(Ἄν ἡ (2) ἀληθεύει διὰ κάθε $(x, y, z) \in \Pi^3$ τότε ἡ (2) μεταπίπτει εἰς ταυτότητα).

Π.χ. ἡ ἰσότης $x+3y+z=10$ εἶναι μία ἐξίσωσις μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Αἱ διατεταγμέναι τριάδες $(1, 0, 9)$ $(-1, 1, 8)$ εἶναι λύσεις αὐτῆς (δηλ. ἀληθεύει διὰ $x=1, y=0, z=9$ ἢ $x=-1, y=1, z=8$). Δυνάμεθα δὲ νὰ καθορίσωμεν τὰς ἀπείρους λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς ἐξῆς. Δίδομεν εἰς τὸ x μίαν αὐθαίρετον τιμὴν: $x=k$ καὶ εἰς τὸ y μίαν ἐπίσης αὐθαίρετον τιμὴν: $y=\lambda$. Τότε διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ $x+3y+z=10$ πρέπει τὸ z νὰ λάβῃ τιμὴν $10-k-3\lambda$. Ἔτσι ἔχομεν τὴν λύσιν (τριάδα):

$$(2) \quad \begin{cases} x=k & (\text{αὐθαίρετος ἀριθμὸς}) \\ y=\lambda & (\text{αὐθαίρετος ἀριθμὸς}) \\ z=10-k-3\lambda \end{cases}$$

Ἡ (2) περιγράφει τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων λύσεων τῆς $x+3y+z=10$, διότι τὰ k καὶ λ διατρέχουν, ἕκαστον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄλλου, ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς.

Εὐκόλῃ δυνάμεθα τώρα, νὰ φαντασθῶμεν ἐξίσωσιν μὲ 4, 5, ..., ν ἀγνώστους.

Κάθε ἐξίσωσις (ὅχι ταυτότης) περιέχουσα πολλοὺς ἀγνώστους $x, y, z, \dots$ λέγεται καὶ **σχέσις μεταξὺ τῶν $x, y, z, \dots$**

γ') Ὄταν τὰ δύο μέλη $\sigma(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$ τῆς (1) εἶναι ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις (§ 128) ἡ ἐξίσωσις (1) λέγεται **ἀκέραια, ἀλγεβρική ἐξίσωσις**.

δ') Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις λέγονται δύο ἐξισώσεις (μὲ ὅσους-δήποτε ἀγνώστους) ἔχουσαι τὸ αὐτὸ σύνολον λύσεων.

Τὰ θεωρήματα 1ον καὶ 2ον § 130 ἐπεκτείνονται προφανῶς καὶ δι' ἐξισώσεις μὲ πολλοὺς ἀγνώστους.

ε') Πᾶσα ἐξίσωσις μὲ ἀγνώστους $x, y, z, \dots$ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν $A(x, y, z, \dots)=0$ ὅπου $A(x, y, z, \dots)$ συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$. Ἄν ἡ $A(x, y, z, \dots)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, τότε ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου τούτου, ὡς πρὸς ὅλας ὁμοῦ τὰς μεταβλητάς $x, y, z, \dots$ λέγεται **βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως**.

στ') Μία σχέσις τῆς μορφῆς: $x=f(y, z, \dots)$ λέγομεν ὅτι ἐκφράζει τὸ x **συναρτήσας** τῶν μεταβλητῶν $y, z, \dots$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-494. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων εἶναι ταυτότητες καὶ ποῖαι εἶναι ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 + 5 = x^2 + 2x + 6, & (x+y)^3 - 3xy(x+y) &= x^3 + y^3, \\ & (x+y^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + 2zx, & 3x + y &= 10. \end{aligned}$$

A-495. Ἀποδείξτε ὅτι :

$$(α-β)(α+β-γ) + (β-γ)(β+γ-α) + (γ-α)(γ+α-β) = 0,$$

$$(μ^4 - ν^4) + 2ν(μ^3 + ν^3) - (μ + ν)^2(μ - ν) = 2μ^2ν(μ + ν),$$

$$(α + β + γ + δ)^2 + (α - β - γ + δ)^2 + (α - β + γ - δ)^2 + (α + β - γ - δ)^2 = 4(α^2 + β^2 + γ^2 + δ^2).$$

B-496. Δείξτε ὅτι ἐκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων δὲν ἔχει καμμίαν πραγματικὴν λύσιν

i) $|x-3| + |x-2| = -1$, ii) $x^2 + y^2 + z^2 = -3$, iii) $(x-2)^2 + 5 = 0$,

iv) $|x+5| = x$.

B-497. Ἐὰν $α, β, γ$ δεδομένοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ δείξτε ὅτι ἐκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν λύσιν

i) $|x-α| + |y-β| + |z-γ| = 0$, ii) $(x-α)^2 + (y-α)^4 + (z-γ)^6 = 0$,

iii) $x^2 + (y-2)^2 + 3(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

A-498. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ζεύγος $\left(\frac{12-5α}{3}, α\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $3x + 5y = 12$, οἷονδὴποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ $α$.

A-499. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τριάς $\left(\frac{7+5α-β}{3}, α, β\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $3x - 5y + z = 7$, οἷονδὴποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν $α, β$.

A-500. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ζεύγος $\left(\frac{3}{1+α^2}, \frac{6α}{1+α^2}\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = 9$, οἷονδὴποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ $α$.

§ 140. Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις με δύο ἀγνώστους, εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Καλεῖται πρωτοβάθμιος (ἢ γραμμικὴ) ἐξίσωσις με δύο ἀγνώστους, κάθε ἐξίσωσις ἢ ὁποία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$(1) \quad αx + βy = γ$$

ὅπου $α, β, γ$ εἶναι σταθεροὶ (δεδομένοι) καί, x, y οἱ ἀγνώστοι. Ὑποθέτομεν, τώρα, ὅτι, ὅσον οἱ «συντελεσται» $α, β, γ$ ὅσον καὶ οἱ ἀγνώστοι x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

i) Ἐὰν $|α| + |β| \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ ὅχι καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ $α, β$ εἶναι μηδενικοὶ) τότε ἡ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις (ζεύγη). Πράγματι, ἂν $α \neq 0$, τότε ἂν δώσωμεν εἰς τὸν y μίαν αὐθαίρετον τιμὴν $λ$, ἡ (1) καθίσταται πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ ἔχει μίαν ὀρισμένην λύσιν: $x = (γ - βλ) / α$.

Τὸ ζεύγος: $\left\{x = \frac{γ - βλ}{α}, y = λ \text{ (αὐθαίρετος)}\right\}$, περιγράφει τὰς ἀπεί-

ρους λύσεις τῆς (1) ὅταν ὁ $λ$ διατρέχει τὸ σύνολον Π . Ἄν $β \neq 0$, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν αὐθαίρετον ἀριθμητικὴν τιμὴν k , ὁπότε ἡ (1) ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸν y : $y = (γ - αk) / β$.

Τὸ ζεύγος: $\left\{x = k \text{ (αὐθαίρετος)}, y = \frac{γ - αk}{β}\right\}$

παρέχει τὰς ἀπείρους λύσεις τῆς (1) ὅταν ὁ k διατρέχει τὸ Π .

ii) Ἐὰν $\alpha = \beta = 0$ καὶ $\gamma \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι προφανῶς ἀδύνατος. (Τότε, $\{(x, y)\} = \emptyset$, δηλ. τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν-λύσεων, εἶναι τὸ κενὸν σύνολον).

iii) Ἐὰν $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ἡ ἐξίσωσις (1) καταντᾷ ταυτότητος, δηλ. ἐπαληθεύεται, οἰοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y .

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

B-501. $\exists \{(x, y)\} \subseteq P \times \Phi? : 2x + 5y - 13 = 0.$

(x , σύμμετρος, y , φυσικός).

§ 141. Σύστημα ἐξισώσεων. Ἐστωσαν δύο ἐξισώσεις $A(x, y) = 0$ καὶ $B(x, y) = 0$. Μία τυχοῦσα λύσις (x_0, y_0) τῆς πρώτης, δὲν εἶναι ἐν γένει καὶ λύσις τῆς δευτέρας· καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπομένως τίθεται τὸ πρόβλημα: Ποία ἢ ποῖαι λύσεις τῆς πρώτης εἶναι συγχρόνως καὶ λύσεις τῆς δευτέρας;

Ὅταν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ἐκεῖνα τὰ ζεύγη (x, y) τὰ ὁποῖα ικανοποιοῦν ἀμφοτέρους τὰς ἐξισώσεις $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$(1) \quad \begin{cases} A(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος (x_0, y_0) τὸ ὁποῖον εἶναι λύσις καὶ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), λέγεται λύσις τοῦ συστήματος (1).

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν λύσεων τοῦ συστήματος λέγεται ἐπίλυσις τοῦ συστήματος.

Τὸ (1) εἶναι ἓνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ὁμοίως, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους:

$$(2) \quad \{A(x, y, z) = 0, \quad B(x, y, z) = 0, \quad \Gamma(x, y, z) = 0\}.$$

Πᾶσα διατεταγμένη τριάς (x_0, y_0, z_0) ἡ ὁποία εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης ἐκ τῶν (2) εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος (2).

Ἐὰν ὅλοι αἱ ἐξισώσεις αἱ συγκροτοῦσαι τὸ σύστημα εἶναι πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, $x, y, \dots$ τότε τὸ σύστημα λέγεται πρώτου βαθμοῦ ἢ γραμμικὸν σύστημα.

§ 142. Ἰσοδύναμα συστήματα. α') Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ σύνολον λύσεων.

β') **Θεώρημα :** «Τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων $\{A=0, B=0\}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα $\{A=0, \lambda A + k B=0\}$ ὅπου λ, k σταθεροὶ ἀριθμοὶ καὶ $k \neq 0$ ».

Ἐνταῦθα γράφομεν χάριν συντομίας, A ἀντὶ $A(x, y)$ καὶ B ἀντὶ $B(x, y)$.

Ἀποδείξεις. Πᾶσα λύσις τοῦ πρώτου συστήματος εἶναι καὶ λύσις τοῦ δευτέρου, διότι μηδενίζουσα τὰς παραστάσεις A καὶ B θὰ μηδενίῃ καὶ τὴν παράστασιν $\lambda A + k B$.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα λύσις τοῦ δευτέρου συστήματος ὡς μηδενίζουσα ἀμφοτέρας τὰς παραστάσεις A καὶ $\lambda A + k B$ θὰ μηδενίῃ καὶ τὴν $k B$ · ἐπειδὴ δὲ $k \neq 0$ θὰ μηδενίῃ καὶ τὴν παράστασιν B . Συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος

$$\{A=0, B=0\}.$$

γ') Ἡ ἐξίσωσις $\lambda A + k B=0$ λέγεται *γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἐξισώσεων* $A=0, B=0$.

§ 143. Μέθοδοι ἐπιλύσεως πρωτοβαθμίων συστημάτων με δύο ἀγνώστους. α') Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ. Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$(1) \quad \begin{cases} 4x + 5y = 23 \\ 3x - 11y = -86 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ 11 (δηλ. μετὸν ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ y εἰς τὴν δευτέραν) καὶ ἀμφοτέρα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ 5 (δηλ. μετὸν συντελεστὴν τοῦ y εἰς τὴν πρώτην) καὶ λαμβάνομεν :

$$(2) \quad \begin{cases} 44x + 55y = 253 \\ 15x - 55y = -430 \end{cases}$$

ἤτοι ὁ y ἀποκτᾷ ἀντιθέτους συντελεστὰς εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις. Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (2), τὸ y ἀπαλείφεται καὶ λαμβάνομεν :

$$59x = -177 \Rightarrow x = -3.$$

Θέτοντες εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) ὅπου x τὸ -3 λαμβάνομεν :

$$4 \cdot (-3) + 5y = 23 \Rightarrow 5y = 35 \Rightarrow y = 7.$$

Ἡ μοναδικὴ λύσις τοῦ συστήματος (1) εἶναι τὸ ζεύγος $(-3, 7)$ ἤτοι : $(x = -3, y = 7)$.

Ἡ ἄνωτέρω μέθοδος στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα τῆς § 142, β' καθ' ὃ ἡ μία ἐξίσωσις τοῦ συστήματος $\{A=0, B=0\}$ δύναται ν' ἀντικατασταθῇ δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ ἀμφοτέρων : $\{A=0, kA +$

$+λB=0$ }. Ἐκλέγομεν δὲ τοὺς αὐθαιρέτους ἀριθμοὺς k καὶ $λ$ εἰς τρόπον ὥστε ὁ y νὰ ἔχῃ ἀντιθέτους συττελεστάς μέσα εἰς τὰς παραστάσεις kA καὶ $λB$ ὅποτε διὰ προσθέσεως αὐτῶν ἀπαλείφεται.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐξελέξαμεν $k=11$, $λ=5$ καὶ ἐφθάσαμεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα: $\{4x+5y=23, x=-3\}$ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ x ἔχει εὐρεθῆ, ὁ δὲ y εὐρίσκεται ἀκολούθως ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως.

Ἄλλο παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} (A) \quad & \begin{cases} 4x-y=-1 \\ 2x+11y=57 \end{cases} \\ (B) \quad & \end{aligned}$$

Ἀπαλοίφομεν τὸ x διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $1 \cdot (A) + (-2) \cdot (B)$.

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (A) : & \quad 4x-y=-1 \\ -2(B) : & \quad -4x-22y=-114 \\ 1 \cdot (A) + (-2)B : & \quad -23y=-115 \Rightarrow y=5 \end{aligned}$$

Ἡ (A) δίδει: $4x-5=-1 \Rightarrow x=1$.

Τὸ σύστημα δέχεται μίαν μόνην λύσιν: $(x=1, y=5)$.

β') Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐστω πάλιν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} (A) \quad & 4x+5y=23 \\ (B) \quad & 3x-11y=-86 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς (A) εὐρίσκομεν τὸ y συναρτήσει τοῦ x :

$$5y=23-4x, \quad y=\frac{23-4x}{5}.$$

Τὴν πρὸς τὸ y ἴσην παράστασιν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (B) ἥτις τότε γίνεται ἐξίσωσις μὲ ἓνα ἄγνωστον:

$$\begin{aligned} 3x-11 \cdot \frac{23-4x}{5} &= -86 \Rightarrow 15x-11(23-4x)=-430 \Rightarrow \\ 15x-223+44x &= -430 \Rightarrow 59x=-177 \Rightarrow x=-3. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου ἡ $y = \frac{23-4x}{5}$ δίδει $y = \frac{23-4(-3)}{5} = 7$. Ἔχομεν τὴν λύσιν: $(x=-3, y=7)$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

A-502. $\{3x+y=10, 2x-y=5\}, \quad \{4x-3y=20, 6x+5y=-8\}.$

A-503. $\{x-5y=10, 8x+9y=45\}, \quad \{3x+4y-29=0, 9x-2y-17=0\}.$

A-504. $\{6x-11y+23=0, 5x+2y+8=0\}, \quad \{y=3x+7, y=-2x+5\}.$

$$\text{A-505. } \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20, \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 18 \right\} \left\{ y = 3 - \frac{3}{4}x, x = 4 - \frac{4}{3}y \right\}$$

$$\text{A-506. } \{y = 0,6(10-x), \quad 3x + 5y = 15\}, \left\{ x = \frac{2}{3}y + 6, \quad y = \frac{2}{3}x - 4 \right\}.$$

$$\text{A-507. } \left\{ \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{2} = 7, \quad \frac{x+1}{10} - \frac{y+5}{4} = 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = -\frac{13}{2}, \quad \frac{x+2y}{4} - \frac{x-3y}{6} = \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{A-508. } \left\{ \frac{6a}{5} - \beta = 6, \quad 4a - \frac{\beta}{3} = 11 \right\} \quad (\text{ἀγνώστοι } \alpha, \beta)$$

$$\left\{ \frac{2}{2a-\beta-3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{6a+\beta+1} = \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{A-509. } \left\{ \frac{8+x}{5} - \frac{2x-y+1}{4} = 3y-2, \quad \frac{5y-6}{2} + \frac{4x+1}{6} = 13-5x \right\}$$

$$\{0,7x + 0,3y = 0,2, \quad 0,9x - 0,4y = -0,8\}.$$

B-510. Προσδιορίσατε τοὺς συντελεστὰς α, β οὕτως ὥστε τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} (3\alpha + 2\beta)x - (\alpha - 1)y = 4\alpha - 3\beta + 1 \\ (2\alpha + \beta - 1)x + (\alpha + \beta - 1)y = 4\alpha - \beta + 3 \end{cases}$$

νὰ δέχεται ὡς λύσιν τὸ ζεύγος : $x=3, y=-3$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐξετάσατε ἀν δέχεται καὶ ἄλλας λύσεις.

§ 144. Διερεύνησις τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους. α') Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

ὅπου x, y οἱ ἀγνώστοι καὶ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ σταθεροὶ ἀριθμοὶ (συντελεσταὶ) οὐδόλως ἐξαρτώμενοι ἐκ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y .

Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύστημα (1) εἶχε ὡς λύσιν τὸ ζεύγος (x_0, y_0) , τότε θὰ εἴχομεν :

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma \\ \alpha' x_0 + \beta' y_0 = \gamma' \end{cases}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐκ τῶν (2) ἐπὶ β' καὶ τὰ τῆς δευτέρας ἐπὶ $-\beta$ λαμβάνομεν :

$$\begin{cases} \alpha\beta'x_0 + \beta\beta'y_0 = \gamma\beta' \\ -\alpha'\beta x_0 - \beta'\beta y_0 = -\gamma'\beta \end{cases}$$

Ἦτοι ὁ y_0 ἀποκτᾷ ἀντιθέτους συντελεστὰς εἰς τὰς δύο ἰσότητας, καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(3) \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x_0 = \gamma\beta' - \gamma'\beta.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐξ ἄλλου ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐκ

τῶν (2) ἐπὶ $-\alpha'$ καὶ τὰ τῆς δευτέρας ἐπὶ α καὶ ἀκολουθῶς προσθέ-
τοντες λαμβάνομεν ὁμοίως

$$(4) \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y_0 = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Ὡστε ἂν πληροῦνται αἱ (2) θὰ πληροῦνται καὶ αἱ

$$(5) \quad \begin{cases} (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x_0 = \gamma\beta' - \beta\gamma' \\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y_0 = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \end{cases}$$

Ἄν ὑποτεθῇ, τὴν αὖτε, ὅτι

$$(6) \quad \boxed{\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0}$$

τότε λαμβάνομεν ἐκ τῶν (5) τὰς

$$(7) \quad \left\{ x_0 = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad y_0 = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right\}.$$

Ὡστε, ἂν ὑπῆρχε λύσις τις (x_0, y_0) τοῦ συστήματος (1) αὕτη θὰ ᾔτο (ἀναγκαίως) ἡ ὑπὸ τῶν τύπων (7) παρεχομένη.

Μένει ἀκόμη νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν x_0 καὶ y_0 πράγματι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα. Πρὸς τοῦτο θέτομεν εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (1), ὅπου x_0 καὶ y_0 τὰς εὑρεθεῖσας τιμὰς τῶν, ὁπότε ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \alpha x_0 + \beta y_0 &= \alpha \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \beta \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \\ &= \frac{\alpha\gamma\beta' - \alpha\beta\gamma' + \beta\alpha\gamma' - \beta\alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \frac{\gamma(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma \end{aligned}$$

δηλ. ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ὁμοίως καὶ ἡ δευτέρα. Ὡστε οἱ τύποι (7) παρέχουν τὴν μοναδικὴν λύσιν τοῦ συστήματος (1) ἐν τῇ περι-
πτώσει ταύτῃ.

Ἄς ὑποτεθῇ τὴν αὖτε, ὅτι

$$(8) \quad \boxed{\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\gamma\beta' - \beta\gamma' \neq 0}$$

Τότε ἡ πρώτη ἐκ τῶν (5) δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x_0 ἱκανοποιεῖται, συνεπῶς τὸ σύστημα (1) δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἂν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$.

Τέλος, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι

$$(9) \quad \boxed{\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0} \quad \boxed{\gamma\beta' - \beta\gamma' = 0} \quad \boxed{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σύστημα (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις ἐκτὸς μιᾶς περιπτώσεως καθ' ἣν $\alpha = \beta =$
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$\alpha' = \beta' = 0$ ἐνῶ γ ἢ $\gamma' \neq 0$ ὁπότε προφανῶς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

Ἐστω πρῶτον $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Τότε αἱ (9) δίδουν :

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \lambda.$$

Ὡστε : $\alpha' = \alpha\lambda$, $\beta' = \beta\lambda$, $\gamma' = \gamma\lambda$ καὶ ἡ $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$ λαμβάνει τὴν μορφήν $\alpha x + \beta y = \lambda\gamma$ ἢ $\lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda\gamma$ ὁπότε πᾶσα λύσις τῆς $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι καὶ λύσις τῆς $\lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda\gamma$ δηλ. τῆς $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$, ἄρα τὸ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις. (Δηλ. τὰς ἀπείρους λύσεις τῆς $\alpha x + \beta y = \gamma$).

Ἐὰν πάλιν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ τότε ἡ πρώτη ἐκ τῶν (9) δίδει $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \lambda$ ἡ δὲ δευτέρα $\gamma' = 0$, ὥστε τὸ σύστημα καταντᾷ $\{\alpha x + \beta y = 0, \lambda\alpha x + \lambda\beta y = 0\}$ καὶ ἔχει πάλιν ἀπείρους λύσεις.

Ἐὰν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ ἡ πρώτη ἐκ τῶν (9) δίδει $\beta' = 0$ ἡ δὲ τρίτη $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \lambda$ καὶ τὸ σύστημα καταντᾷ $\{\alpha x = \gamma, \lambda\alpha x = \lambda\gamma\}$ καὶ ἔχει ἀπείρους λύσεις : $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ y οἴοσθ' ὅτι ἀριθμός.

Τέλος, ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάσας τὰς λοιπὰς δυνατὰς περιπτώσεις ὅτι πληρουμένων τῶν (9) τὸ σύστημα (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$, ἐνῶ γ ἢ $\gamma' \neq 0$ ὁπότε προφανῶς δὲν ἔχει λύσιν.

β') Διατύπώσεις μὲ ὀριζούσας. Τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως διατυποῦνται κατὰ πλέον εὐμνημόνευτον τρόπον διὰ τῆς χρήσεως δευτεροταξίων ὀριζουσῶν (βλ. § 116). Πράγματι τὰ πρῶτα μέλη τῶν (9) γράφονται ἀντιστοίχως :

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix},$$

καὶ θὰ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

i) Ἐάν :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τὸ σύστημα $\{\alpha x + \beta y = \gamma, \alpha' x + \beta' y = \gamma'\}$ ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν παρεχομένην ὑπὸ τῶν τύπων

$$(11) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

(Παρονομαστικής εἶναι ὀρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἑκαστος δὲ ἀριθμητικῆς προκύπτει ἂν εἰς τὸν παρονομαστικὴν ἀντικατασταθῶν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου ὑπὸ τῶν γνωστῶν ὅρων ὑποτιθεμένων εἰς τὸ δεῦτερον μέλος).

ii) Ἐάν :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

καὶ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο ἀλλων ὀριζουσῶν (10) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς τὸ σύστημα οὐδεμίαν λύσιν ἔχει. (Αἱ ἐξισώσεις (1) λέγονται τότε ἀσυμβίβαστοι).

iii) Ἐάν καὶ αἱ τρεῖς ὀρίζουσαι (10) εἶναι μηδενικαί, τὸ σύστημα (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως $\alpha=\beta=\alpha'=\beta'=0$ μὲ γ ἢ $\gamma' \neq 0$ ὁπότε δὲν ἔχει λύσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΩΣ. «Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου λ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda+5)x + (2\lambda+3)y = 3\lambda+2 \\ (3\lambda+10)x + (5\lambda+6)y = 2\lambda+4 \end{cases}$$

ἔχει μίαν ἢ καμμίαν ἢ ἀπείρους λύσεις ; »

(Ὁ ἀριθμὸς λ ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐξαρτῶνται αἱ συντελεσταὶ μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται παράμετρος).

Λύσις. Μίαν καὶ μόνην λύσιν θὰ ἔχωμεν ἂν

$$\begin{vmatrix} \lambda+5 & 2\lambda+3 \\ 3\lambda+10 & 5\lambda+6 \end{vmatrix} \neq 0$$

ἢ $(\lambda+5)(5\lambda+6) - (2\lambda+3)(3\lambda+10) \neq 0$ ἢ $-\lambda^2 + 2\lambda \neq 0$ ἢτοι ἂν $-\lambda(\lambda-2) \neq 0$.

Μὲ ἄλλα λόγια, δι' ὅσας τὰς τιμὰς τοῦ λ αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι οὔτε μηδὲν οὔτε 2, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν.

Μένουν λοιπὸν πρὸς ἐξέτασιν αἱ τιμαὶ 0 καὶ 2 τῆς παραμέτρου λ .

Διὰ $\lambda=0$ τὸ δοθὲν σύστημα καθίσταται

$$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 10x+6y=4 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} 5x+3y=2 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$$

καὶ ἔχει προφανῶς, ἀπείρους λύσεις : $\left\{ x=k, y=\frac{2-5k}{3} \right\}$ ὅπου k αὐθαίρετος ἀριθμός.

Διὰ $\lambda=2$ τὸ δοθὲν σύστημα καθίσταται

$$\begin{cases} 7x+7y=8 \\ 16x+16y=8 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} x+y=8/7 \\ x+y=1/2 \end{cases}$$

καὶ οὐδεμίαν λύσιν ἔχει διότι προφανῶς αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις εἶναι ἀσυμβίβαστοι.

Συμπέρασμα : Ἐὰν $\lambda(\lambda-2) \neq 0$, μία μόνη λύσις

Ἐὰν $\lambda=0$ ἄπειροι λύσεις

Ἐὰν $\lambda=2$ καμμία λύσις.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-511. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5(x-y)-2x=3(x-5)}{\frac{3x-6}{6} = \frac{4x-y-1}{8}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4x+2}{3} + \frac{y-x}{4} = 2x-1 \\ \frac{6y-2x}{3} - 4y = 3(x-y)-4 \end{array} \right.$$

B-512. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda-1)x + 2\lambda y + 2 = 0 \\ 2\lambda x + (\lambda-1)y - (\lambda-4) = 0 \end{array} \right.$$

B-513. Νὰ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ τὸ σύστημα :

$$\{ (\lambda-1)x + (\lambda+1)y - 2(\lambda^3-1) = 0, \quad (\lambda^2-1)x + (\lambda^2+1)y - 2(\lambda^3-1) = 0 \}.$$

B-514. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ μ καὶ ρ συναρτήσῃ τῶν α καὶ β οὕτως ὥστε τὸ σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} (3\mu-5\rho+\beta)x + (8\mu-3\rho-\alpha)y = 1 \\ (2\mu-3\rho+\beta)x + (4\mu-\rho)y = 2 \end{array} \right.$$

νὰ ἔχῃ ἀπείρους λύσεις.

B-515. Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ οὕτως ὥστε αἱ τρεῖς ἐξισώσεις :

$$(2\mu+5)x + (3\mu+1)y + 3 = 0, \quad (\mu+5)x + (2\mu+3)y - 18 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y - 2x = 0,$$

νὰ ἔχουν κοινὴν τινα λύσιν.

§ 145. Πρωτοβάθμια συστήματα μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους. α') Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Ὁρισμός. α' Ἐὰν $k, \lambda, \mu, \dots$ σταθεροὶ ἀριθμοὶ $\neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωσις $kA + \lambda B + \mu \Gamma + \dots = 0$, θὰ λέγωμεν ὅτι προκύπτει διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων $A=0, B=0, \Gamma=0, \dots$.

Οἱ ἀριθμοὶ $k, \lambda, \mu, \dots$ εἶναι οἱ «συντελεσταὶ» ἐπὶ τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζονται αἱ ἐξισώσεις πρὶν προστεθοῦν.

Θεώρημα. «Δοθέντος συστήματος ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων, $A=0, B=0, \Gamma=0, \dots, T=0$, λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον ἂν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ αὐτῆς καὶ ὁσωνδήποτε ἐκ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος».

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος λαμβάνομεν, π.χ., τὸ σύστημα

$$\{ A=0, kB + \lambda A + \mu \Gamma = 0, \Gamma=0, \dots, T=0 \}$$

ὅπου ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀντικατεστάθη διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ αὐτῆς καὶ τῶν $A=0, \Gamma=0$. Ἡ ἀποδείξις ὅτι τὰ δύο συστήματα εἶναι

ισοδύναμον με ἀρχικόν, εἶναι ἐντελῶς ὁμοία με τὴν τοῦ θεωρήματος τῆς § 142, β'.

Ἐφαρμογή. Ἐστω τὸ πρωτοβάθμιον (ἢ γραμμικὸν) σύστημα

$$(1) \quad \{A=0, B=0, \Gamma=0, \Delta=0\}$$

με τέσσαρας ἀγνώστους x, y, z, t . Τοῦτο δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν με τὸ σύστημα

$$(2) \quad \{A=0, \lambda A + kB=0, \Gamma=0, \Delta=0\}$$

ὅπου ἡ δευτέρα ἐξίσωσις νὰ μὴ περιέχῃ τὸν x . Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐκλέξωμεν τοὺς αὐθαιρέτους ἀριθμοὺς λ καὶ k εἰς τρόπον ὥστε ὁ x νὰ ἔχῃ ἀντιθέτους συντελεστὰς εἰς τὰς ἐξισώσεις $\lambda A=0$ καὶ $kB=0$ (§ 143, α') ὅποτε διὰ τῆς προσθέσεως ἐξαλείφεται.

Ἀκολούθως εἰς τὸ (2) ἀντικαθιστῶμεν τὴν $\Gamma=0$ διὰ τῆς $\lambda'A + k'\Gamma=0$ μὴ περιέχουσιν τὸν x (κατόπιν καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν λ' καὶ k') καὶ τέλος εἰς τὸ προκύπτον σύστημα

$$(3) \quad \{A=0, \lambda A + kB=0, \lambda'A + k'\Gamma=0, \Delta=0\}$$

ἀντικαθιστῶμεν τὴν $\Delta=0$ μετὰ τὴν $\lambda''A + k''\Delta=0$ μὴ περιέχουσιν ἐπίσης τὸν x . Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(4) \quad \{A=0, \lambda A + kB=0, \lambda'A + k'\Gamma=0, \lambda''A + k''\Delta=0\}$$

τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις δὲν περιέχουν τὸν x . Ἄρα αὐταὶ ἀποτελοῦν σύστημα μετὰ τρεῖς ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον ἀνάγομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς ἄλλο μετὰ δύο ἀγνώστους καὶ τοῦτο πάλιν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μετὰ ἓνα ἄγνωστον.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐπιλύσεως συστημάτων συγκειμένων ἀπὸ γραμμικὰς (δηλ. πρωτοβαθμίους) ἐξισώσεις εἶναι ἡ κυριώτατα χρησιμοποιομένη εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ λέγεται μέθοδος τοῦ Gauss.

Ἡ λύσις ἀκολουθεῖ τὸ κάτωθι σχῆμα

$$(1) \quad \begin{cases} \text{τέσσαρες ἀγνώστοι} \\ \text{τέσσαρες} & \text{»} \\ \text{τέσσαρες} & \text{»} \\ \text{τέσσαρες} & \text{»} \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \text{τέσσαρες ἀγνώστοι} \\ \text{τρεῖς} & \text{»} \\ \text{τρεῖς} & \text{»} \\ \text{τρεῖς} & \text{»} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{τέσσαρες ἀγνώστοι} \\ \text{τρεῖς} & \text{»} \\ \text{δύο} & \text{»} \\ \text{δύο} & \text{»} \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} \text{τέσσαρες ἀγνώστοι} \\ \text{τρεῖς} & \text{»} \\ \text{δύο} & \text{»} \\ \text{εἷς} & \text{»} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Νὰ λυθῇ τὸ γραμμικὸν σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A)} \quad x+y-2z=3 \\ \text{(B)} \quad 3x+2y-z=12 \\ \text{(Γ)} \quad 8x-4y+5z=21 \end{array} \right\}$$

Λύσις. Διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ 1. (A)+(-2)(B) ἀπαλείφωμεν τὸν z μεταξὺ (A) καὶ (B).

$$\begin{array}{l} 1. \text{(A)} : \quad x+y-2z=3 \\ -2. \text{(B)} : \quad -6x-4y+2z=-24 \end{array}$$

$$1. \text{(A)}-2. \text{(B)} : \quad -5x-3y=-21$$

Διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ 5(B)+1.(Γ) ἀπαλείφωμεν τὸ z μεταξὺ (B) καὶ (Γ)

$$\begin{array}{l} 5. \text{(B)} : \quad 15x+10y-5z=60 \\ 1. \text{(Γ)} : \quad 8x-4y+5z=21 \end{array}$$

$$5. \text{(B)}+1. \text{(Γ)} : \quad 23x+6y=81$$

Μεταβαίνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(E}_1\text{)} \quad 3x+2y-z=12 \\ \text{(E}_2\text{)} \quad -5x-3y=-21 \\ \text{(E}_3\text{)} \quad 23x+6y=81 \end{array} \right\}$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν (E₃) διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ 2(E₂)+1.(E₃) διὰ τοῦ ὁποίου ἀπαλείφεται ὁ y :

$$2. \text{(E}_2\text{)} : \quad -10x-6y=-42$$

$$1. \text{(E}_3\text{)} : \quad 23x+6y=81$$

$$2. \text{(E}_2\text{)}+1. \text{(E}_3\text{)} : \quad 13x=39 \Rightarrow x=3$$

καὶ μετεβαίνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x+2y-z=12 \\ -5x-3y=-21 \\ x=3 \end{array} \right.$$

Ἡ δευτέρα δίδει $-5.3-3.y=-21$ ἢ $3y=6 \Rightarrow y=2$ καὶ ἡ πρώτη $3.3+2.2-z=12 \Rightarrow z=1$.

Τὸ σύστημα δέχεται ὡς λύσιν τὴν (x=3, y=2, z=1).

2. Ἔστω τὸ σύστημα μὲ 5 ἀγνώστους x, y, z, t, u :

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y+z-t+u=0 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+3y-2u=0 \\ 3x-3y+t=2 \\ 5z-4t+5u=2. \end{array} \right.$$

Δυνάμεθα, συνδυάζοντες γραμμικῶς τὴν 1ην καὶ 2αν ἐξίσωσιν νὰ λάβωμεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸν x, δηλ. ν' ἐπαλείψωμεν τὸν x μεταξὺ 1ης καὶ 2ας. Ὅμοιως τὸν x μεταξὺ 1ης καὶ 3ης καὶ μεταξὺ 1ης καὶ 4ης. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ -2 καὶ τὴν προσθέτομεν μὲ τὴν 2αν ὅτε λαμβάνομεν :

Κατόπιν τὴν πρώτην ἐπὶ -1 καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὴν τρίτην, ὅτε εἰς τὴν θέσιν τῆς τρίτης ἔχομεν :

$$4y - z + t - 3u = 0.$$

Κατόπιν, προσθέτομεν τὴν πρώτην πολλαπλασιασμένην ἐπὶ -3 μετὰ τὴν τετάρτην καὶ θέτομεν εἰς τὴν θέσιν τῆς τετάρτης τὸν γραμμικὸν αὐτὸν συνδυασμὸν

$$4t - 3z - 3u = 2.$$

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ 4y - z + t - 3u = 0 \\ 4t - 3z - 3u = 2 \\ 5z - 4t + 5u = 2 \end{cases}$$

Μεταξὺ 2ας καὶ 3ης ἀπαλείφομεν τὸν y , προσθέτοντες εἰς τὴν τρίτην, τὴν 2αν πολλαπλασιασμένην ἐπὶ -4 .

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ -5z - 7t + 5u = -4 \\ -3z + 4t - 3u = 2 \\ 5z - 4t + 5u = 2. \end{cases}$$

Μεταξὺ 3ης καὶ 4ης ἐπαλείφομεν τὸν z (πολλαπλασιάζοντες τὴν 3ην ἐπὶ -3 καὶ τὴν 4ην ἐπὶ 5 καὶ προσθέτοντες) καὶ μεταξὺ 3ης καὶ 5ης ἐπίσης ἀπαλείφομεν τὸν z (προσθέτοντες). Ἔτσι φθάνομεν εἰς τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ -5z - 7t + 5u = -4 \\ 41t - 30u = 22 \\ -11t + 10u = -2 \end{cases}$$

Τέλος ἀπαλείφομεν τὸ u μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων (πολλαπλασιάζοντες τὴν 5ην ἐπὶ $+3$ καὶ προσθέτοντες τὴν τετάρτην) καὶ φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ -5z - 7t + 5u = -4 \\ 41t - 30u = 22 \\ 8t = 16 \end{cases}$$

Εὐρίσκομεν βαθμὸν : $t=2$, $u=2$, $z=0$, $y=1$, $x=1$.

β') **Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.** Ἄς θεωρήσωμεν, π.χ. τὸ σύστημα :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἀποτελούμενον ἀπὸ τρεῖς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις περιεχούσας τοὺς ἀγνώστους x, y, z .

Ἐὰν $\alpha \neq 0$ δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς x , δηλ. νὰ ἐκφράσωμεν τὸν x συναρτήσει τῶν δύο ἄλλων ἀγνώντων:

$$(2) \quad x = \frac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} \quad (\text{τύπος ἀντικαταστάσεως})$$

καὶ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις, τὸ x διὰ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὸ παραστάσεως. Θὰ λάβωμεν τότε τὸ σύστημα

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} \\ \alpha' \frac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} + \beta' y + \gamma' z = \delta' \\ \alpha'' \frac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} + \beta'' y + \gamma'' z = \delta'' \end{array} \right.$$

Τὸ (3) εἶναι σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1), δηλ. πᾶσα λύσις (x_0, y_0, z_0) τοῦ (1) εἶναι καὶ λύσις τοῦ (3) καὶ ἀντιστρόφως· τοῦτο φαίνεται εὐκόλως.

Συνεπῶς ἀντὶ τοῦ (1) ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ (3). Εἰς τὸ (3) αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους y καὶ z . Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο μὲ τοὺς δύο ἀγνώστους προσδιορίζομεν τὰ y καὶ z . Ἀντικαθιστῶντες δὲ κατόπιν τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς τὴν (2) προσδιορίζομεν καὶ τὸ x .

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς οἰονδήποτε γραμμικὸν σύστημα. Διότι, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως, ἀνάγομεν τὸ σύστημα ἐκ n ἐξισώσεων μὲ n ἀγνώστους εἰς ἄλλο μὲ $n-1$ ἐξισώσεις καὶ $n-1$ ἀγνώστους. Τοῦτο πάλιν ἀνάγεται διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς ἄλλο μὲ $n-2$ ἐξισώσεις καὶ $n-2$ ἀγνώστους. Οὕτω καθ' ἐξῆς, βαθμυδὸν φθάνομεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἓναν ἀγνώστον. Ἀνατρέχοντες δὲ εἰς τοὺς τύπους ἀντικαταστάσεως, προσδιορίζομεν βαθμυδὸν ὅλους τοὺς ἀγνώστους.

Παρατήρησις. Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν προκύψῃ ἐξίσωσις τις ἥ ὅποια δὲν ἔχει λύσιν ἢ εἶναι ταυτότης, τότε καὶ τὸ ἀρχικὸν σύστημα δὲν θὰ ἔχῃ λύσιν ἢ δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἀπείρους λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 10 \\ 3x + 2y + 7z = 28 \\ x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Λύσις. Ἐκ τῆς τελευταίας λαμβάνομεν τὸ x συναρτήσει τῶν y καὶ z καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς δύο πρώτας. Οὕτω μεταβαίνομεν εἰς τὸ σύστημα

$$(4) \quad \{x=5+y-2z, 4(5+y-2z)-5y+2z=2z=0, 3(5+y-2z)+2y+7z=28\}.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι μετὰ τὰς ἀναγωγὰς δίδουν τὸ σύστημα,

$$(5) \quad \begin{cases} y+6z=20 \\ 5y+z=13 \end{cases}$$

Τὸ (5) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἰδίας μεθόδου. Ἦτοι εὐρίσκομεν τὸ y ἐκ τῆς πρώτης τῶν (5):

$$(6) \quad y=20-6z \text{ (τύπος ἀντικαταστάσεως)}$$

καὶ τὸ φέρομεν εἰς τὴν δευτέραν ἣτις καθίσταται

$$5(20-6z)+z=13.$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν $z=3$, ἐκ τῆς (6), $y=2$ καὶ ἐκ τῆς 1ης τῶν (4), $x=1$. Ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι ἡ τριάς (1,2,3).

Γενίκευσις τῆς μεθόδου. Ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως ἐπιδέχεται καὶ τὴν ἐξῆς γενίκευσιν.

Ἀντὶ νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον, π.χ. τὸν x τὴν μίαν ἐξίσωσιν, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν δύο ἐκ τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς δύο ἄγνωστους x καὶ y (εὐρίσκοντες αὐτοὺς συναρτήσει τῶν ἄλλων ἀγνώντων) καὶ τὰς τιμὰς τῶν νὰ φέρομεν εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις. Τότε ἀναγόμεθα εἰς σύστημα μὴ περιέχον x καὶ y , δηλ. ἔχον δύο ἄγνωστους ὀλιγωτέρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἐστώ πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\{x+y+5z=12, \quad x-y+6z=8, \quad 2x-7y+10z=21\}.$$

Θεωροῦμεν τὰς δύο πρώτας ὡς ἀποτελούσας σύστημα μὲ ἀγνώστους x καὶ y

$$\begin{cases} x+y=12-5z \\ x-y=8-6z \end{cases}$$

καὶ (διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη) εὐρίσκομεν τὰ x καὶ y συναρτήσει τοῦ z :

$$(7) \quad x = \frac{20-11z}{2}, \quad y = \frac{4+z}{2}.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y εἰσάγομεν εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος καὶ λαμβάνομεν

$$2 \cdot \frac{20-11z}{2} - 7 \cdot \frac{4+z}{2} + 10z = 21.$$

Ἐξ αὐτῆς, $z = -\frac{10}{3}$. Ἐκ τῶν (7) εὐρίσκομεν

$$x = \frac{20+\frac{110}{3}}{2} = \frac{85}{3}, \quad y = \frac{4-\frac{10}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Οὕτω ἔχομεν ὡς λύσιν τὴν τριάδα $\left(\frac{85}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

Εἰς σύστημα μὲ περισσοτέρους, τῶν τριῶν, ἀγνώστους δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τρεῖς ἐκ τῶν δοθεισῶν ὡς πρὸς τρεῖς ἀγνώστους καὶ κατόπιν νὰ ἐργασθῶμεν ὁμοίως.

Οὕτω, λ.χ., εἰς τὸ σύστημα:

$$\{ax = by = cz = \delta\omega, \quad ex + \eta y + kz + \lambda\omega = \gamma\}$$

δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν τρεῖς ἐκ τῶν ἀγνώστων συναρτήσῃ τοῦ τετάρτου:

$$(8) \quad x = \frac{\delta}{\alpha}\omega, \quad y = \frac{\delta}{\beta}\omega, \quad z = \frac{\delta}{\gamma}\omega \quad (\text{ὑποτίθεται } \alpha\beta\gamma\delta \neq 0) \quad \text{ὁπότε δι'}$$

ἀντικαταστάσεως ἡ τετάρτη ἐξίσωσις γίνεται

$$\varepsilon \frac{\delta}{\alpha}\omega + \eta \frac{\delta}{\beta}\omega + k \frac{\delta}{\gamma}\omega + \lambda\omega = \mu$$

ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν τὸν ω καὶ κατόπιν ἐκ τῶν (8) τὰ x, y, z .

* Τὸ γενικὸν θεώρημα. «Ὅταν εἰς ἓνα σύστημα ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἢ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον, τότε λαμβανόμεν σύστημα ἰσοδύναμον, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, τὸν ἄγνωστον τοῦτον διὰ τῆς πρὸς αὐτὸν ἴσης παραστάσεως».

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων

$$(9) \quad \{x = A(y, z), \quad B(x, y, z) = 0, \quad \Gamma(x, y, z) = 0\}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς x . Ἄς θεωρήσωμεν καὶ τὸ σύστημα

$$(10) \quad \{x = A(y, z) \quad B(A, y, z) = 0, \quad \Gamma(A, y, z) = 0\}$$

τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ (9) ὅταν εἰς τὴν 2αν καὶ τὴν 3ην ἐκ τῶν (9) τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ x ἢ πρὸς αὐτὸ ἴση παράστασις $A(y, z)$ τὴν ὁποίαν χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ μόνου τοῦ A . Οὕτω ἡ δευτέρα τῶν (10) δὲν περιέχει x ἀλλὰ μόνον y, z . Ὅμοιως καὶ ἡ τρίτη. Ἄς θεωρήσωμεν λύσιν τινὰ τοῦ συστήματος (9) ἔστω $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. Ἐὰν εἰς τὰς (9) ὅπου x, y, z θέσωμεν ἀντιστοίχως x_0, y_0, z_0 αὗται ἐπαληθεύονται συνεπῶς ἔχομεν

$$(11) \quad x_0 = A(y_0, z_0) = A_0, \quad B(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \Gamma(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι τὰ (x_0, y_0, z_0) ἀποτελοῦν λύσιν καὶ τοῦ (10). Πράγματι, ἡ πρώτη ἐκ τῶν (10) ἐπαληθεύεται (διότι εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν πρώτην ἐκ τῶν (9)). Ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ἐκ τῶν (10) τεθῇ ὅπου y τὸ y_0 καὶ ὅπου z τὸ z_0 , τότε τὸ A (περιέχον τὰ y καὶ z) θὰ λάβῃ τιμὴν τινὰ A_0 καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς 2ας ἐκ τῶν (10) θὰ γίνῃ $B(A_0, y_0, z_0)$ ἤτοι, $B(x_0, y_0, z_0)$ διότι $A_0 = x_0$ λόγῳ τῶν (11). Ἀλλὰ $B(x_0, y_0, z_0) = 0$ λόγῳ τῶν (11), συνεπῶς ἡ 2α ἐκ τῶν (10) ἐπαληθεύεται.

Ὅμοιως καὶ ἡ 3η ἐκ τῶν (10).

Ἀντιστρόφως. Ἐστω (x_1, y_1, z_1) μία λύσις τοῦ (10). Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (10), θὰ ἐπαληθεύωνται μὲ τὰς τιμὰς αὐτάς, δηλ. θὰ ἔχομεν

$$(12) \quad x_1 = A(y_1, z_1) = A_1, \quad B(A_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Gamma(A_1, y_1, z_1) = 0.$$

Ἐπειδὴ ὁμως $A_1 = x_1$ αἱ (12) γράφονται:

$$(13) \quad \{x_1 = A(y_1, z_1), \quad B(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Gamma(x_1, y_1, z_1) = 0\}.$$

Αἱ (13) δεικνύουν ὅτι τὸ (9) ἐπαληθεύεται διὰ $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. Δηλ. κάθε λύσις τοῦ (10) εἶναι καὶ τοῦ (9).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\begin{array}{l} \text{A-516} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x + y - 4z = 5 \\ 2x - 3y - 5z = 2 \end{array} \right. \quad \text{A-517} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 4z = -1 \\ 5x + 2y - 4z = 8 \\ 7y = -23 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{A-518} \quad \begin{cases} x + y + z = 16 \\ x - 4y + 3z = 42 \\ x + 6y + 2z = 14 \end{cases}$$

$$\text{A-519} \quad \begin{cases} 12x + 5y + 2z = -1 \\ 7x + 8y - 3z = 23 \\ 4x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{A-520} \quad \begin{cases} 2x + 4y - z = -12 \\ 6x + 5y + z = 6 \\ 4x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{A-521} \quad \begin{cases} 2x - 7y + 5z = -14 \\ 9x - 3y - 6z = 51 \\ 3x + 4y + 8z = -38 \end{cases}$$

$$\text{A-522} \quad \begin{cases} 6x + 10y - 13z = 84 \\ 4x - 2y + 7z = 18 \\ 9y - 8z = 56 \end{cases}$$

$$\text{A-523} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ 3x + y + 7z = -4 \\ 4x - 4y + 13z = 16 \end{cases}$$

$$\text{A-524} \quad \begin{cases} 12x + 7y = 109 \\ 5y - 2z = 11 \\ 3z + 4x = 26 \end{cases}$$

$$\text{A-525} \quad \begin{cases} \alpha^3 + \alpha^2 x + \alpha y + z = 0 \\ \beta^3 + \beta^2 x + \beta y + z = 0 \\ \gamma^3 + \gamma^2 x + \gamma y + z = 0 \end{cases}$$

όπου x, y, z οι άγνωστοι καὶ α, β, γ δεδομένοι ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο.

$$\text{B-526} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 970 = 0 \\ x - y + 2z - 355 = 0 \\ 2y - 3z + t + 50 = 0 \\ z - t - 60 = 0 \end{cases}$$

$$\text{B-527} \quad \begin{cases} x + 3y + 5z + 3u = 34 \\ x + y + 2z + u = 13 \\ x + 2y + 5z + 4u = 36 \\ x + 3y + 8z + 5u = 51 \end{cases}$$

B-528.—Νὰ λυθῇ καὶ ἀκολούθως διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου μ τὸ σύστημα :

$$\{\mu x + y + z = 1, \quad x + \mu y + z = \mu, \quad x + y + \mu z = \mu^2\}.$$

B-529.—Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου μ τὸ σύστημα :

$$\{x + 2y + (\mu + 3)z = 8, \quad 2x + 3y + (\mu + 4)z = 12, \quad 3x + (6\mu + 5)y + 7z = 20\}.$$

B-530.—Δώσατε τύπους παρέχοντας :

i) τὰς ἀπείρους λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x - y = 15$

ii) τὰς ἀπείρους λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\{2x + 2y + z = 12, \quad x - y + 3z = 15\}.$$

§ 146. Ἰδιαιτέραι τινὲς μέθοδοι. α') Σειρὰ ἴσων κλασμάτων.

*Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left\{ \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{t}{10}, \quad 3x - 10y + 9z - 15t = -256 \right\}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ λ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν ἴσων κλασμάτων, τότε πάντες οἱ ἄγνωστοι ἐκφράζονται συναρτήσῃ τοῦ λ :

$$(1) \quad x = 3\lambda, \quad y = 5\lambda, \quad z = 7\lambda, \quad t = 10\lambda.$$

Βάσει τῶν τύπων ἀντικαταστάσεως (1) ἡ τετάρτη ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καθίσταται

$$9\lambda - 50\lambda + 63\lambda - 150\lambda = -256 \Rightarrow -128\lambda = -256 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν τὴν λύσιν :

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$(x=6, y=10, z=14, t=20).$$

β') Τὸ σύστημα $\{x+y=\alpha, y+z=\beta, z+x=\gamma\}$.

Προσθέτομεν πρώτην καὶ τρίτην καὶ ἀπὸ τὴν προκύπτουσιν ἀφαιροῦμεν τὴν δευτέραν :

$$2x+y+z-(y+z)=\alpha+\gamma-\beta \Rightarrow 2x=\alpha+\gamma-\beta \Rightarrow x=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν :

$$y=\frac{\beta+\alpha-\gamma}{2} \text{ καὶ } z=\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}.$$

γ') Ἀλλαγὴ ἀγνώστων. i) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = \alpha, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{3}{x} = \beta, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = \gamma \right\}.$$

Λύσις. Τὸ σύστημα τοῦτο δὲν εἶναι πρωτοβάθμιον. Λαμβάνομεν ὡς νέους ἀγνώστους τὰ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ θέτοντες

$$(1) \quad \frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y', \quad \frac{1}{z} = z'.$$

Τὸ σύστημα μεταβαίνει εἰς τὸ γραμμικὸν σύστημα :

$$(2) \quad \{x' + y' - 3z' = \alpha, y' + z' - 3x' = \beta, z' + x' - 3y' = \gamma\}.$$

Διὰ προσθέσεως ὅλων ἐξισώσεων κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(3) \quad -x' - y' - z' = \alpha + \beta + \gamma.$$

Προσθέτοντες τὴν (3) κατὰ μέλη μὲ τὴν πρώτην τῶν (2) λαμβάνομεν $-4z' = 2\alpha + \beta + \gamma$, $z' = -(2\alpha + \beta + \gamma)/4$ καὶ ἀναλόγως εὐρίσκομεν :

$$x' = -(2\beta + \gamma + \alpha)/4, \quad y' = -(2\gamma + \alpha + \beta)/4.$$

Ἐκ τῶν (1) εὐρίσκομεν τελικῶς :

$$x = \frac{-4}{2\beta + \gamma + \alpha}, \quad y = \frac{-4}{2\gamma + \alpha + \beta}, \quad z = \frac{-4}{2\alpha + \beta + \gamma}.$$

ii) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x(y+z)}{\alpha} = \frac{y(z+x)}{\beta} = \frac{z(x+y)}{\gamma} \\ yz + zx + xy = (\alpha + \beta + \gamma)xyz \end{array} \right\}$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι εἰς ὅλους τοὺς ὅρους ὅλων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ὑπάρχει ὡς παράγον η ὁ x ἢ ὁ y . Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν $x=0$ καὶ $y=0$ τότε αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται οἰανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ z . Ἐχομεν λοιπὸν μίαν ἀπειρίαν λύσεων,

1) $x=0, y=0, z=\text{αὐθαίρετος ἀριθμὸς οἰοσδήποτε.}$

Ὁμοίως διαπιστοῦμεν τὴν ὑπαρξιν τῶν λύσεων,

2) $x=0, y=k$ (αὐθαίρετος), $z=0$.

3) $x=\lambda, y=0, z=0$.

Ἐὰν μόνον ὁ x εἶναι μηδέν, οἱ δὲ y καὶ z εἶναι $\neq 0$ ἡ τελευταία δὲν ἐπαληθεύεται. Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

"Ὡστε μένει νὰ ζητήσωμεν λύσεις εἰς τὰς ὁποίας οὐδείς ἀγνώστος εἶναι μηδενικός. Δηλ. θὰ ὑποθέσωμεν τώρα ὅλους τοὺς ἀγνώστους $\neq 0$. Ἐφαρμόζομεν τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων καὶ χρησιμοποιοῦντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$\frac{xy+xz}{\alpha} = \frac{yz+yx}{\beta} = \frac{zx+zy}{\gamma} = \frac{2(xv+yz+zx)}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)xyz}{\alpha+\beta+\gamma} = 2xyz.$$

"Ἡ ἀκόμη :

$$\left. \begin{aligned} xy+xz &= 2\alpha xyz \\ yz+xy &= 2\beta xyz \\ zx+zy &= 2\gamma xyz \end{aligned} \right\}$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐκάστης τούτων διὰ $xyz \neq 0$ φθάνομεν εἰς τὸ σύστημα :

$$\left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 2\alpha, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2\beta, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2\gamma \right\}.$$

Θέτοντες $\frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y', \quad \frac{1}{z} = z'$, φθάνομεν εἰς τὸ γνωστὸν σύστημα :

$$\{z' + y' = 2\alpha, \quad x' + z' = 2\beta, \quad y' + x' = 2\gamma\}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν : $z' = \alpha + \beta - \gamma, \quad x' = \beta + \gamma - \alpha, \quad y' = \gamma + \alpha - \beta$.

"Ὡστε ἡ μὴ μηδενικὴ λύσις εἶναι ἡ $x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{1}{y'}, \quad z = \frac{1}{z'}$ δηλ. ἀδὴ

$$x = \frac{1}{\beta + \gamma - \alpha}, \quad y = \frac{1}{\gamma + \alpha - \beta}, \quad z = \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

Διὰ νὰ ἔχῃ νόημα ἡ εὐρεθεῖσα λύσις δεόν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ὅλα τὰ ἀθροίσματα : $\alpha + \beta - \gamma, \beta + \gamma - \alpha, \gamma + \alpha - \beta$ εἶναι $\neq 0$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\text{A-531. } \left\{ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 48, \quad \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 13 \right\}, \quad \left\{ \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = -3, \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{B-532. } \left\{ 2x + \frac{3}{y} = \frac{5}{3}, \quad 3x + \frac{2}{y} = \frac{5}{3} \right\}, \quad \left\{ \frac{6}{x} - \frac{y}{6} = 1, \quad \frac{10}{x} + \frac{y}{10} = 2,8 \right\}.$$

$$\text{B-533. } \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 11, \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 5, \quad \frac{5}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} = 7 \right\}.$$

$$\text{B-534. } \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{z} + \frac{1}{x} = 1 \right\}.$$

$$\text{B-535. } \left\{ \frac{1}{4x} = \frac{1}{2y} = \frac{3}{4z} = \frac{1}{t}, \quad x+y+z+t=10 \right\}.$$

$$\text{B-536. } \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}, \quad 2x+3y-z=31 \right\}.$$

B-537. $\{2x+y=3xy, -x+3y=4xy\}$, (βλ. § 146, γ', ii).

B-538. $\left\{ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{18}, \frac{z+x}{zx} = \frac{13}{36}, \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{12} \right\}$.

ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΤΡΙΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 147. Τριτοτάξιοι όρίζουσαι. α') Είς τήν § 116 ώρίσαμεν τὸ σύμβολον

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

ὡς παριστὸν τήν διαφορὰν $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Όρίζομεν τώρα :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \eta \\ \beta & \varepsilon & \theta \\ \gamma & \zeta & \iota \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \theta \\ \zeta & \iota \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \eta \\ \zeta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \delta & \eta \\ \varepsilon & \theta \end{vmatrix}$$

Τὸ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἀναγρ.όμενον σύμβολον λέγεται *όρίζουσα τριτῆς τάξεως*. Αὕτη περιέχει μεταξὺ δύο κατακορύφων γραμμῶν, 9 στοιχεῖα: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota$, εἰς τρεῖς γραμμάς: $(\alpha, \delta, \eta), (\beta, \varepsilon, \theta), (\gamma, \zeta, \iota)$ καὶ εἰς τρεῖς στήλας: $(\alpha, \beta, \gamma), (\delta, \varepsilon, \zeta), (\eta, \theta, \iota)$. Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) λέγεται *ανάπτυγμα τῆς όρίζουσῆς* κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης ἢ «τιμὴ» τῆς όριζούσης καὶ ἰσοῦται μέ:

$$\alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta\delta\iota - \zeta\eta + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta).$$

β') *Άλγεβρικὰ συμπληρώματα*. Έστω ἡ όρίζουσα

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \eta \\ \beta & \varepsilon & \theta \\ \gamma & \zeta & \iota \end{vmatrix} \quad \text{καὶ ὁ πίναξ} \quad (3) \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Καλεῖται, *άλγεβρικὸν συμπλήρωμα* ἑνὸς στοιχείου τῆς (2), ἡ *όρίζουσα* (2^ας τάξεως) ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀποκοπῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἣν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον, μὲ πρὶ αὐτῆς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἀπὸ τὸν πίνακα (3)

Π.χ. τὸ *άλγεβρικὸν συμπλήρωμα* τοῦ στοιχείου ε τῆς (2) εἶναι: $+ \begin{vmatrix} \alpha & \eta \\ \gamma & \iota \end{vmatrix} = E$. τοῦ στοιχείου β εἶναι: $- \begin{vmatrix} \delta & \eta \\ \zeta & \iota \end{vmatrix} = B$. τοῦ στοιχείου δ εἶναι: $- \begin{vmatrix} \beta & \theta \\ \gamma & \iota \end{vmatrix} = \Delta$. Τὸ *ανάπτυγμα* τῆς (2) γράφεται κατὰ ταῦτα:

$$\alpha A + \beta B + \gamma \Gamma$$

ὅπου A, B, Γ εἶναι *άλγεβρικὰ συμπληρώματα* τῶν α, β, γ ἀντιστοίχως.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-539. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν ἐκάστης τῶν κάτωθι ὀριζουσῶν :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ -1 & 7 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 9 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

A-540. Ἀναπτύξατε τὰς ὀριζούσας

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & a+2\beta & a+3\beta \\ 0 & a-2\beta & a-3\beta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & \delta \\ 1 & \beta & \delta \\ 1 & \gamma & \delta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & a \\ \gamma & a & \beta \end{vmatrix}.$$

§ 148. Ἰδιότητες τῶν ὀριζουσῶν. i) Ἡ τιμὴ τῆς ὀριζούσης δὲν βλάπτεται, ἂν αἱ γραμμαὶ γίνωνται στήλαι καὶ αἱ στήλαι γραμμαί. Δηλ. :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Ἡ ἰσότης (1) ἀποδεικνύεται ἂν ἀναπτύξωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς σύμφωνα μετὰ τὴν § 147, α'.

Πόρισμα. Δυνάμεθα ν' ἀναπτύξωμεν μίαν ὀρίζουσαν κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς. Δηλ. ἰσχύει :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Διότι, εἶναι ὥς νὰ ἀναπτύσσωμεν τὸ Β' μέλος τῆς (1) κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης. Ἡ τιμὴ τῆς ὀριζούσης λαμβάνει τώρα, τὴν μορφήν

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 \Gamma_1$$

ὅπου A_1, B_1, Γ_1 εἶναι τ' ἀλγεβρικά συμπληρώματα τῶν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ἀντιστοίχως (βλ. § 147 β').

ii) Ἡ τιμὴ τῆς ὀριζούσης ἀλλάζει σημεῖον διὰν ἀντιμεταθέσωμεν δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας :

$$\begin{vmatrix} \alpha & p & x \\ \beta & q & y \\ \gamma & r & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha & x & p \\ \beta & y & q \\ \gamma & z & r \end{vmatrix}.$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐχερῶς, ἂν ἀναπτύξωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀποδείξεως ἰσότητος.

iii) Ὀρίζουσα μετὰ δύο γραμμὰς ἢ στήλας τὰς αὐτὰς ἰσοῦται μετὰ μηδέν. Διότι, ἂν ἀντιμεταθέσωμεν τὰς δύο ὁμοίας στήλας (ἢ γραμ-

μάς) ἡ ὀρίζουσα Δ πρέπει ν' ἀλλάζῃ σημεῖον, σύμφωνα πρὸς τὴν 2αν ιδιότητα. Ἐξ ἄλλου ἡ ὀρίζουσα παραμένει ἡ ἰδία διότι αἱ δύο ἀντιμετατιθέμεναι στήλαι δὲν διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων. Ὡστε $-\Delta = \Delta \Rightarrow \Delta = 0$.

iv) Ἡ τιμὴ τῆς ὀριζούσης πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k , διὰν δλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης πολλαπλασιασθῶν ἐπὶ k .

$$\begin{vmatrix} k\alpha & p & x \\ k\beta & q & y \\ k\gamma & r & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \alpha & p & x \\ \beta & q & y \\ \gamma & r & z \end{vmatrix}.$$

v) Ὅριζουσα εἰς τὴν ὁποίαν δύο γραμμαὶ ἢ στήλαι ἔχουν στοιχεῖα ἀνάλογα, ἰσοῦται μὲ μηδέν.

$$\begin{vmatrix} k\alpha & \alpha & x \\ k\beta & \beta & y \\ k\gamma & \gamma & z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & y \\ \gamma & \gamma & z \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0 \quad (\text{ιδιοτ. iii}).$$

vi) Ἡ τιμὴ τῆς ὀριζούσης δὲν βλάπτεται ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης, προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα ἄλλης πολλαπλασιασμένα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. (Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς γραμμὰς).

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \lambda\beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 + \lambda\beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 + \mu\gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \lambda\beta_2 + \mu\gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 + \lambda\beta_3 + \mu\gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Ἄν καλέσωμεν A_1, A_2, A_3 τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τῆς πρώτης ὀριζούσης θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ δευτέρα, ἀναπτυσσομένη γίνεται :

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \lambda\beta_1)A_1 + (\alpha_2 + \lambda\beta_2)A_2 + (\alpha_3 + \lambda\beta_3)A_3 = \\ & = (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3) + \lambda(\beta_1A_1 + \beta_2A_2 + \beta_3A_3) = \\ & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ὁ δευτερός ὁμως προσθετέος εἶναι μηδέν. (Ἰδιότης iii).

vii) Ἡ ὀρίζουσα δύναται ν' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς οἰασδήποτε γραμμῆς (ἢ στήλης). Π.χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \beta_1B_1 + \beta_2B_2 + \beta_3B_3 = \alpha_2A_2 + \beta_2B_2 + \gamma_2\Gamma_2 = \gamma_1\Gamma_1 + \gamma_2\Gamma_2 + \gamma_3\Gamma_3,$$

ὅπου ἕκαστον στοιχεῖον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμά του.

Ἡ ἰδιότης αὕτῃ συνάγεται ἐκ τῶν προηγουμένων ιδιοτήτων.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \begin{vmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 1 & 15 & 4 \\ 55 & 33 & 44 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 15 & 4 \\ 55 & 33 & 44 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα iv}) = 4.11. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 15 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 4.11.4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.11.4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα ii}) = \\
 &= -4.11.4.3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4.11.4.3.16 = 8448.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta + \gamma & 1 \\ \beta & \gamma + \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha + \beta & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \beta + \gamma & 1 \\ \beta + \gamma + \alpha & \gamma + \alpha & 1 \\ \gamma + \alpha + \beta & \alpha + \beta & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα vi}) = \\
 &= (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & \beta + \gamma & 1 \\ 1 & \gamma + \alpha & 1 \\ 1 & \alpha + \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ιδιότητα iii}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 29-26 & 26 & 22-26 \\ 25-31 & 31 & 27-31 \\ 63-54 & 54 & 46-54 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα vi}) = \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix} = -3.4 \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα iv}) = \\
 &= -12. \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2-1 & 31-26 & 1-1 \\ 3-2.1 & 54-2.26 & 2-2.1 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα vi}) = \\
 &= -12 \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{ιδιότητα ii}) = 12. \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 132.
 \end{aligned}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-541. Βάσει των ιδιοτήτων τῶν ὀριζουσῶν ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν ἐκάστης τῶν ὀριζουσῶν :

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}.$$

A-542. Ὑπολογίσατε τὰς ὀριζούσας

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}.$$

A-543. Ὑπολογίσατε τὰς ὀριζούσας

$$\begin{vmatrix} 6 & 20 & 16 \\ 9 & 5 & 4 \\ 9 & 75 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 48 \\ 21 & 0 & 96 \\ 1 & 14 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 15 & 10 & 18 \\ 10 & 1 & 18 \\ 25 & 16 & 54 \end{vmatrix}.$$

B-544. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} x & x+6 & x+3 \\ x+5 & x & x+2 \\ x+3 & x+4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

B 545. Δείξτε ότι :

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta + \gamma & (\beta + \gamma)(\beta^2 + \gamma^2) \\ 1 & \gamma + \alpha & (\gamma + \alpha)(\gamma^2 + \alpha^2) \\ 1 & \alpha + \beta & (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = 0.$$

B-546. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 1 + \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & 1 + \gamma \end{vmatrix} = 1 + \alpha + \beta + \gamma.$$

B-547. Εκφράσατε την όριζουσάν ως γινόμενον τριών γραμμικών πα-
ργόντων ως προς x:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 3 & 5 & x+4 \end{vmatrix}.$$

B-548. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} (x+2)(x+3) & x+3 & 1 \\ (x+4)(x+5) & x+5 & 1 \\ (x+6)(x+7) & x+7 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

B-549. Νά λυθούν ως προς x αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \gamma & \gamma & \gamma \\ \beta & x & \beta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+1 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

B-550. Ἄνευ ἀναπτύξεως τῶν όριζουσῶν νά δειχθῶν αἱ ισότητες

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \beta & \mu \\ x & \alpha & \lambda \\ z & \gamma & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

§ 149. **Κανὼν τοῦ Cramer.** Θὰ περιορισθῶμεν ἐνταῦθα εἰς
γραμμικὸν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ἐὰν εἰς σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς
ἀγνώστους ἡ όρίζουσα Δ τὴν όποίαν σχηματίζουν οἱ συντελεσται
τῶν ἀγνώστων εἶναι $\neq 0$, τότε τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει μίαν μό-
νην λύσιν. Ἡ τιμὴ δὲ ἐκάστου ἀγνώστου ἰσοῦται μὲ κλάσμα
ἔχον παρόνομαστίην μὲν τὴν όρίζουσάν Δ τῶν συντελεστῶν τῶν
ἀγνώστων, ἀριθμητήν δὲ τὴν όρίζουσάν τὴν προκύπτουσάν ἐκ
τῆς Δ, ἂν οἱ συντελεσται τοῦ ἀγνώστου ἀντικατασταθῶν ἐν αὐτῇ
διὰ τῶν γνωστῶν ὁρῶν ὑποτιθεμένων εἰς τὸ δεῦτερον μέρος.

Δηλαδή, τὸ γραμμικὸν σύστημα

$$(1) \quad \begin{aligned} (E_1) : & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ (E_2) : & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ (E_3) : & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{aligned}$$

ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν ὅταν

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

καὶ μάλιστα, τὴν ἐξῆς :

$$(2) \quad x = \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} : \Delta, \quad y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} : \Delta$$

$$z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix} : \Delta.$$

Ἐὰν καλέσωμεν A_1, A_2, A_3 τ' ἀλγεβρικά συμπληρώματα τῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τῆς ὀριζούσης Δ καὶ σχηματίσωμεν τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν $A_1 \cdot (E_1) + A_2 \cdot (E_2) + A_3 \cdot (E_3)$ τῶν ἐξισώσεων (1), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(3) \quad (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)x + (\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3)y + (\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3)z = \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3.$$

Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν, συντελεστὴς τοῦ x εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὀριζούσης Δ · συντελεστὴς τοῦ y εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα ὀριζούσης προκυπτούσης ἐκ τῆς Δ , ἂν τὰ στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἀντικατασταθοῦν μὲ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ἀντιστοίχως· συνεπῶς ὁ συντελεστὴς τοῦ y ἰσοῦται μὲ μηδέν (§ 148, iii). Ὀμοίως, ὁ συντελεστὴς τοῦ z εἶναι ὁ μηδέν. Τέλος, τὸ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα ὀριζούσης προερχομένης ἐκ τῆς Δ , ἂν τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἀντικατασταθοῦν μὲ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Ἔτσι, ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὁ πρῶτος ἐκ τῶν τύπων (2). Κατ' ἀνάλογον τρόπον προκύπτουν καὶ αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἄλλων ἀγνώστων. Ἀποδεικνύεται ἀκόμη ὅτι αἱ (2) ἀποτελοῦν τὴν μοναδικὴν λύσιν τοῦ συστήματος (1).

(Ἀφοῦ $\Delta \neq 0$, τὰ A_1, A_2, A_3 δὲν εἶναι ὅλα μηδενικά. Ἐστω $A_1 \neq 0$. Τότε τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ σύστημα ἀποτελούμενον ἀπὸ τὴν (3) καὶ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις $\beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 - \alpha_2 x$, $\beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 - \alpha_3 x$ ὅπου τὸ x ἔχει τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν ἐκ τῆς (3). Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα ἔχον μίαν καὶ μόνον λύσιν, ἀφοῦ $A_1 \neq 0$. Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει μίαν καὶ μόνον λύσιν).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα μὲ τὸν κανόνα τοῦ Cramer.

A-551. $x + 2y + 2z = 2$

$$2x + 3y + 4z = 3$$

$$x + 4y + 3z = 3$$

A-553. $5x + 2y + 2z = 2$

$$4x + 3y + 4z = 0$$

$$3x - y - 6z = 2$$

A-555. $x + y + z = 0$

$$2y + 5z = 0$$

A-552. $3x + y + 2z = 2$

$$5x + 2y + 4z = 3$$

$$4x + y + 3z = 1$$

A-554. $2x + y - 3z = 2$

$$x + 2y + 5z = -1$$

$$3x + 3y - 4z = 7$$

B-556. $x + y + z = a + \beta + \gamma$

$$\beta x + \gamma y + \alpha z = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\gamma x + \alpha y + \beta z = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

B-557. Νά διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα

$$\{\lambda x + 3z = 1, \quad \lambda x + 8y + z = 0, \quad 5x + 7y + 2z = 0\}$$

B-558. Νά διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα

$$\{3x - 4y + \lambda z = 3, \quad -x + 3y + z = 3, \quad 4x - 7y + (\lambda - 1)z = 0\}$$

§ 150. Ἐξισώσεις συμβιβασταί. Ἀς θεωρήσωμεν γραμμικὸν σύστημα ἐκ τεσσάρων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, y, z . Ἐν γένει αἱ τρεῖς ἐκ τῶν ἐξισώσεων ἔχουν μίαν κοινὴν λύσιν ἢ ὁποία ὅμως δὲν εἶναι ὑποχρεωτικῶς καὶ λύσις τῆς τετάρτης.

Ἐὰν ὅμως συμβαίνει ἡ κοινὴ λύσις τῶν τριῶν νὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν τετάρτην τότε αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις μὲ τοὺς τρεῖς ἀγνώστους λέγονται **συμβιβασταί**.

Ἄλλως, λέγονται **ἀσυμβίβαστοι**.

Ἐστώσαν, π.χ. αἱ τέσσαρες πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις $A=0, B=0, \Gamma=0, \Delta=0$ περιέχουσαι τοὺς τρεῖς ἀγνώστους x, y, z . Μία ἱκανὴ συνθήκη ἵνα εἶναι συμβιβασταί εἶναι: αἱ μὲν τρεῖς ἐξ αὐτῶν $\{A=0, B=0, \Gamma=0\}$ νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν ἢ δὲ τετάρτη νὰ προκύπτῃ διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἄλλων. Διότι ἂν $\Delta \equiv kA + \lambda B + \mu \Gamma$, ὅπου k, λ, μ σταθεροὶ ἀριθμοί, ἡ κοινὴ λύσις τῶν $A=0, B=0, \Gamma=0$ θὰ μηδενίζῃ προφανῶς καὶ τὴν παράστασιν $kA + \lambda B + \mu \Gamma$, δηλαδὴ θὰ καθιστᾷ τὸ Δ ἴσον μὲ μηδέν, ἄρα θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν $\Delta=0$.

Ἐν γένει, διὰ νὰ εἶναι συμβιβασταί τέσσαρες ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους πρέπει νὰ ὑπάρχῃ κατάλληλος σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων. Τὴν ἀναγκαίαν αὐτὴν σχέσιν (ἣτις λέγεται καὶ **ἀπαλείφουσα σχέσις**) δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἂν ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων καὶ ἀπαιτήσωμεν αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων νὰ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν τετάρτην.

Τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν, φυσικά, καὶ διὰ τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους ἢ πέντε ἐξισώσεις μὲ 4 ἀγνώστους κ.τ.λ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. «Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ τρεῖς ἐξισώσεις

$$(1) \quad \{ax + by = \gamma, \quad a'x + b'y = \gamma', \quad a''x + b''y = \gamma''\}$$

εἶναι συμβιβασταί, ποία σχέσις θὰ συνδέῃ τότε τοὺς 9 συντελεστάς $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$;».

Λύσις. Ἡ κοινὴ λύσις (x_0, y_0) τῶν δύο πρώτων δίδεται ἀπὸ τοὺς τύπους (7) τῆς § 144. Τὸ ζεῦγος (x_0, y_0) θὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν τρίτην τῶν δοθεισῶν ἀφοῦ εἶναι συμβιβασταί. Δηλ.

$$a''x_0 + b''y_0 = \gamma'' \quad \text{ἢ} \quad \frac{a''\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \frac{b''\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma''$$

Ἡ ζητούμενη λοιπὸν σχέσις εἶναι ἡ

$$(2) \quad \frac{a''\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \frac{b''\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma''$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἡ εὐρεθεῖσα σχέσις, λέγεται καὶ *ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλείφῃς τῶν δύο ἀγνώστων* x, y *μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων* (1), διότι αὕτη οὐδένα ἄγνωστον περιέχει. Διὰ τῆς χρήσεως τῶν ὁρίζουσων ἢ «ἀπαλείφουσα σχέσις» (2) (ἢ ὁποῖα λέγεται καὶ «συναρμόζουσα») γράφεται:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

2. «Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ a εἶναι συμβιβασταὶ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις $\{3x + ay = 5, \quad 5x + (a+2)y = 6, \quad 8x - 3ay = 11\}$ ».

1η Λύσις. Ἀρκεῖ κατ' ἀρχήν, ἡ τρίτη νὰ προκύπτῃ διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο πρώτων. Δηλ. νὰ ὑπάρχουν δύο σταθεροὶ λ καὶ μ τοιοῦτοι ὥστε ἡ παράστασις

$$\lambda(3x + ay - 5) + \mu\{5x + (a+2)y - 6\}$$

νὰ ταυτίζεται μετὰ τὴν παράστασιν $8x - 3ay - 11$. Ὡστε πρέπει

$$\lambda(3x + ay - 5) + \mu\{5x + (a+2)y - 6\} = 8x - 3ay - 11$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ y ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καθὼς καὶ τοὺς σταθεροὺς ὅρους λαμβάνομεν :

$$3\lambda + 5\mu = 8, \quad \lambda + \mu(a+2) = -3a, \quad -5\lambda - 6\mu = -11.$$

Ἐκ τῆς πρώτης καὶ τρίτης εὐρίσκομεν $\lambda = 1$, $\mu = 1$, ὁπότε ἐκ τῆς δευτέρας εὐρίσκομεν $a = -2/5$. Τέλος ἐλέγχομεν ὅτι διὰ $a = -2/5$ αἱ δύο πρώται εἶναι συμβιβασταί.

2α Λύσις. Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν μετὰ τὴν ἀπαλείφουσαν σχέσιν (3) τοῦ προηγουμένου παραδείγματος.

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

A-559. Ἐὰν $aa' \neq 0$, εὑρετε τὴν μεταξὺ τῶν a, β, a', β' ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην ἵνα τὸ σύστημα $\{ax + \beta = 0, \quad a'x + \beta' = 0\}$ ἔχῃ λύσιν (δηλ. αἱ δύο ἐξισώσεις νὰ εἶναι συμβιβασταί).

B-560. Ἐὰν αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις

$$A \equiv ax + \beta y + \gamma z - \delta = 0 \quad \text{καὶ} \quad B \equiv a'x + \beta'y + \gamma'z - \delta' = 0$$

εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ὑπάρχει σταθερὸς ἀριθμὸς λ τοιοῦτος ὥστε $B \equiv \lambda A$. (Ἐς ὑποθετῇ $a\beta\gamma\delta \neq 0$).

B-561. Ἐὰν εἰς σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων: $\{A=0, \quad B=0, \quad \Gamma=0, \quad \Delta=0\}$ αἱ ἐξισώσεις $A=B=0$ καὶ $\Gamma=\Delta=0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος προκύπτει διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἄλλων.

B-562. Νὰ δεიχθῇ ὅτι ἂν $\lambda\mu(\lambda+\mu) \neq 0$ αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις :

$$A \equiv \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - \lambda \left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0, \quad B \equiv \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - \mu \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

$$\Gamma \equiv \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0, \quad \Delta \equiv \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0$$

B-563. Ἐάν $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ καὶ ἔάν αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις εἶναι συμβιβασταί, ποίαν ἄλλην συνθήκην πρέπει νὰ πληροῦν τὰ α, β, γ ἵνα τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z - (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \\ \beta x + \gamma y + \alpha z - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \\ \gamma x + \alpha z + \beta z - 4\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

ἔχει λύσιν; (Δηλ. αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις νὰ εἶναι συμβιβασταί).

A-564. Δείξατε ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν κατωτέρω συστημάτων αἱ τρεῖς ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι, δηλ. μία ἐξ αὐτῶν προκύπτει διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἄλλων:

$$1) \begin{cases} x - y = 3 \\ y - z = -5 \\ z - x = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 8y + 7z = 10 \\ 2x + 5z - 3z = 12 \\ 16x + 9y - z = 80 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 13 \\ 2x + 5y - 3z = -9 \\ 7x + 8y - 2z = -5 \end{cases}$$

Τί συνάγετε διὰ τὸ πλῆθος τῶν λύσεων ἑκάστου τῶν συστημάτων τούτων; Πῶς δύνανται νὰ ὁρισθοῦν αἱ λύσεις;

§ 151. Ὁμογενῆ γραμμικὰ συστήματα. α') "Ὅταν ὁ σταθερὸς ὅρος μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι μηδενικός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ὁμογενής. Τριαῦται, λ.χ., εἶναι αἱ ἐξισώσεις $\alpha x + \beta y = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \omega = 0$. Ἐάν δὲ ἕνα σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἀπαρτίζεται ἀπὸ ὁμογενεῖς ἐξισώσεις, τότε λέγεται ὁμογενὲς γραμμικὸν σύστημα.

Οὕτω, π.χ., τὸ σύστημα μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, y, z :

$$(1) \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0 \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0 \end{cases}$$

εἶναι ὁμογενές. Κάθε ὁμογενὲς σύστημα ἔχει πάντοτε μίαν προφανῆ λύσιν, τὴν μηδενικὴν λύσιν. Οὕτω, π.χ., τὸ (1) δέχεται προφανῶς ὡς λύσιν τὴν τριάδα ($x=0, y=0, z=0$).

Εἰς κάθε ὁμογενὲς σύστημα δυνατόν νὰ συμβαίνουν δύο τινά: "Ἡ δὲν ἔχει ἄλλην λύσιν πλὴν τῆς μηδενικῆς ἢ ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς ἔχει καὶ μίαν μὴ μηδενικὴν λύσιν, ὁπότε θὰ ἔχη καὶ ἄλλας, ἀπείρους λύσεις. (Π.χ. ἂν $(x_1, y_1, z_1, \dots)$ εἶναι μία μὴ μηδενικὴ λύσις, τότε ἡ $(tx_1, ty_1, tz_1, \dots)$ θὰ εἶναι ἐπίσης λύσις, διὰ κάθε t). Διὰ νὰ συμβαίη τὸ δεύτερον, δηλ. νὰ ἔχη ἀπείρους λύσεις, ἀπαιτεῖται εἰδικὴ σχέση μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος.

β') Τρεῖς ὁμογενεῖς γραμμικαὶ ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Θὰ δείξωμεν ὅτι: ἔάν τὸ ὁμογενὲς σύστημα (1) ἔχει καὶ λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς, τότε μεταξὺ τῶν συντελεστῶν του ὑφίσταται ἡ ἀνάγκη

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθεθῇ ὅτι τὸ (1) ἔχει ἐκτὸς τῆς (0, 0, 0) καὶ μίαν ἄλλην λύσιν (x_1, y_1, z_1). Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\Delta \neq 0$, διότι, ἂν ᾖτο $\Delta \neq 0$ θὰ εἶχε μίαν μόνον λύσιν (§ 148), ἐνῶ ἔχει περισσοτέρας. Κατὰ συνέπειαν, ἀποκλειομένης τῆς περιπτώσεως $\Delta \neq 0$, μένει ὅτι, $\Delta = 0$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. Ἦτοι, ἂν ἡ ὀρί-
ζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τοῦ (1) ἰσοῦται μὲ μηδέν, τότε τὸ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις.

γ') Δύο ὁμογενεῖς γραμμικαὶ ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους.
Τὸ σύστημα :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0 \end{cases}$$

παρουσιάζεται συχνὰ εἰς ζητήματα τῆς Ἀλγέβρας. Διὰ τὸ σύστημα τοῦτο ἰσχύει τὸ ἐξῆς θεώρημα :

$$\alpha' \text{ Ἐὰν } \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{τότε}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0 \end{cases} \iff \frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad ».$$

Πράγματι, γράφοντες τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφήν $\{\alpha x + \beta y = -\gamma z, \alpha' x + \beta' y = -\gamma' z\}$ καὶ λύοντες ὡς πρὸς x καὶ y λαμβάνομεν : (§ 114, β' (11)) :

$$x = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\gamma & \beta \\ -\gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad y = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma \\ \alpha' & -\gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῶν}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad \text{δηλ. τὴν ἀποδεικτέαν.}$$

Ἀντιστρόφως. Καλοῦντες τοὺς ἴσους λόγους μὲ λ θὰ ἔχωμεν

$$x = \lambda \frac{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad y = \lambda \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad z = \lambda \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad \text{καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν}$$

τῷ συστήματι ποιεῖται τὸ ἴδιον τοῦτο ἐκπαινετικὴν πραγματικὴν

σύστημα ἐπαληθεύεται. Π.χ. τὸ πρῶτον μέλος τῆς 1^{ης} ἐξίσωσως γίνεται

$$\alpha\lambda \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + \beta\lambda \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} + \gamma\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} =$$

$=\lambda\{\alpha(\beta\gamma'-\beta'\gamma)+\beta(\gamma\alpha'-\alpha'\gamma')+\gamma(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\}=\lambda\cdot 0=0$ δηλ. ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ὁμοίως καὶ ἡ δευτέρα.

Ἐφαρμογή. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{3x-4y+7z=0, \quad 2x-y-2z=0, \quad 3x^3-y^3+z^3=18\}.$$

Λύσις. Ἀπὸ τὰς δύο πρῶτας ἐξισώσεις λαμβάνομεν :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ -4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & x \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{x}{12} = \frac{y}{20} = \frac{z}{5} \quad \eta$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1} = \lambda, \quad x=3\lambda, \quad y=4\lambda, \quad z=\lambda.$$

ὁπότε ἡ τρίτη γίνεται :

$$27\lambda^3-64\lambda^3+\lambda^3=18 \quad \eta \quad -36\lambda^3=18 \quad \text{καὶ} \quad \lambda=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$\text{Ὡστε} \quad x=-3/\sqrt[3]{2}, \quad y=-4/\sqrt[3]{2}, \quad z=-1/\sqrt[3]{2}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-565 Δείξατε ὅτι ἵνα τὸ ὁμογενὲς σύστημα

$$\{ax+by=0, \quad a'x+b'y=0\}$$

ἔχεται ὡς μοναδικὴν λύσιν τὴν $x=0, y=0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ: $ab'-a'b \neq 0$.

B-566. Ἐάν οἱ $\neq 0$ ἀριθμοὶ x, y, z ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα

$$\{a(y+\omega)=x, \quad b(\omega+x)=y, \quad \gamma(x+y)=\omega\}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τότε

$$ab+\beta\gamma+\gamma\alpha+2\alpha\beta\gamma=1.$$

Ἐπίσης θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$x^2/a(1-\beta\gamma)=y^2/b(1-\alpha\gamma)=\omega^2/\gamma(1-\alpha\beta)$$

(τῶν παρονομαστικῶν ὑποτιθεμένων $\neq 0$).

B-567. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ σύστημα

$$\{ax+\gamma y+\beta z=0, \quad \gamma x+\beta y+az=0, \quad \beta x+\alpha y+\gamma z=0\}$$

πληροῦται καὶ ἀπὸ τιμὰς τῶν x, y, z ὅχι ὅλας μηδενικὰς νὰ δειχθῇ ὅτι μετὰ τῶν α, β, γ θὰ ὑφίσταται τότε ἡ σχέσηις :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0.$$

B-568. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$7yz+3zx=4xy, \quad 21yz-3zx=4xy, \quad x+2y-3z=19.$$

B-569. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right\}.$$

B-570. Νά δειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν σχέσεων

$$x = \gamma y + \beta z, \quad y = \alpha z + \gamma x, \quad z = \beta x + \alpha y$$

ἐπεταί ἡ σχέσις: $\frac{x^2}{1-\alpha^2} = \frac{y^2}{1-\beta^2} = \frac{z^2}{1-\gamma^2}$ (ὡς τινες εὐνοήτους περιορισμοὺς διὰ τὰ α, β, γ).

B-571. Ἐάν $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1) \neq 0$ δείξατε ὅτι ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x = \beta y + \gamma z + \delta \omega, & y = \alpha x + \gamma z + \delta \omega \\ z = \alpha x + \beta y + \delta \omega, & \omega = \alpha x + \beta y + \gamma z \end{cases}$$

ἔχη καὶ λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς, θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\delta}{\delta+1} = 1.$$

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

§ 152. Πρωτοβάθμια προβλήματα με ἓνα ἄγνωστον.

Ἡ γενικὴ μέθοδος, διὰ νὰ λύσωμεν ὑπολογιστικῶς ἓνα πρόβλημα, ἔγκειται εἰς τὸ ν' ἀνάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως. Εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα δεικνύεται ἡ πορεία τὴν ὁποίαν ἐν γένει ἀκολουθοῦμεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Ποσὸν 1680 δραχ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα οὕτως ὥστε τὸ δεύτερον νὰ λάβῃ 70 δραχ. περισσότερας τοῦ πρώτου τὸ δὲ τρίτον, 40 δραχ. περισσότερας τοῦ δευτέρου».

Ἡ λύσις περιλαμβάνει τέσσαρα μέρη.

i) Ἐκλογή τοῦ ἀγνώστου. Ἐνταῦθα ἔχομεν ἄγνωστους ἀριθμοὺς, τὰ τρία μερίδια. Ἄς ἐκλέξωμεν ὡς ἄγνωστον τοῦ προβλήματος τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου καὶ ἄς τὸ καλέσωμεν x . Τὰ δύο ἄλλα μερίδια δύνανται νὰ ἐκφραστοῦν τῇ βοήθειᾳ τοῦ x . Διότι τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ἴσον πρὸς $x+70$ δραχ. τὸ δὲ μερίδιον τοῦ τρίτου θὰ εἶναι $x+70+40=x+110$ δραχ.

ii) Κατάστρωσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ διανεμήθη τὸ ποσὸν 1680 δραχ. εἰς τρία μερίδια, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μεριδίων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἥτοι πρέπει:

$$(1) \quad x + (x+70) + (x+110) = 1680.$$

iii) Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως. Ἐπιλύοντες τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν (1) εὕρισκομεν $x=500$. Ἐπομένως τὰ ζητούμενα μερίδια εἶναι 500 δραχ., 570 δραχ. καὶ 610 δραχ.

iv) Διερεύνησις. Ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος, ὁ ἄγνωστος x , πρέπει νὰ εἶναι ἓνας θετικὸς ἀριθμὸς. Ἀρχὴν ἡ εὕρεθεῖσα τιμὴ $x=500$ εἶναι παραδεκτὴ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει τὴν ἀνωτέρω λύσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νὰ εὕρεθῶν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

τοιούτοι ὥστε τὸ ἐν πέμπτῳ τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ὑπερβαίνει κατὰ 3 τὸ ἐν ἑβδομῳ τοῦ μικροτέρου».

Λύσις. i) *Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου.* Ἄς ἐκλέξωμεν ὡς ἄγνωστον τοῦ προβλήματος τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο ζητούμενων ἀριθμῶν καὶ ἄς τὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x . Τότε ὁ μεγαλύτερος, ὡς ἀμέσως ἐπόμενος τοῦ x θὰ εἶναι $x+1$.

ii) *Κατάστρωσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος.* Σύμφωνα πρὸς τὸ ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \quad \frac{x+1}{5} = \frac{x}{7} + 3.$$

iii) *Λύσις τῆς ἐξισώσεως.* Λύοντες τὴν (2) εὐρίσκομεν $x = 49$.

iv) *Διερεύνησις.* Ὁ x δέον νὰ εἶναι ἀκέραιος. Ἐπομένως ἡ εὕρεσις αὐτῆς $x = 49$ εἶναι δεκτὴ καὶ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 49 καὶ ὁ 50.

§ 153. Πρωτοβάθμια προβλήματα με πολλοὺς ἀγνώστους. α') Ἐάν, εἰς ἓνα πρόβλημα ἐκλέξωμεν ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ενός, τότε ἔχομεν πρόβλημα με πολλοὺς ἀγνώστους, τοῦ ὁποῦ ἡ λύσις δέον ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων. Ἡ πορεία τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἴδια με τὴν περιγραφεῖσαν εἰς τὰ προβλήματα με ἓνα ἄγνωστον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ εὐρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς γνωστοῦ ὄντος ὅτι : α') Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. β') Ὅτι, προσθέτοντες 42 εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνομεν ἀριθμὸν ἔχοντα τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν ἢ ὁ ζητούμενος (δηλ. λαμβάνομεν τὸν ἀνέστραμμένον τοῦ ζητούμενου) γ') Ἐάν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων, λαμβάνομεν ἀριθμὸν ὅστις αὐξανόμενος κατὰ 27 γίνεται ἴσος πρὸς τὸν ἀνέστραμμένον τοῦ ζητούμενου.

Λύσις. Ἐκλογὴ τῶν ἀγνώστων. Ἄς παραστήσωμεν με x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, με y τὸ τῶν δεκάδων, ὁπότε κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι y καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y μονάδας, y δεκάδας καὶ x ἑκατοντάδας, συνεπῶς θὰ εἶναι ὁ $xyx_{<10>}$ (βλ. § 38) καὶ θὰ ἔχῃ ἐν ὅλῳ μονάδας :

$$y+10y+100x$$

Κατάστρωσις τῶν ἐξισώσεων. Ὁ ἀνέστραμμένος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ $yx_{<10>}$, ἅρα θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ $x+10y+100y$ μονάδας. Κατὰ τὸ β' ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1) \quad 42+2(y+10y+100x)=x+10y+100y.$$

Ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων προκύπτων ἀριθμὸς

θά είναι $\acute{o} \chi y \chi_{<10>} = y + 10x + 100y$ καὶ κατὰ τὸ γ' ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν :

$$(2) \quad y + 10x + 100y + 27 = x + 10y + 100y.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀπλοποιούμεναι σχηματίζουν τὸ σύστημα

$$(3) \quad \begin{cases} 198x - 88y = -42 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Λύσις τοῦ συστήματος. Λύοντες τὸ σύστημα (3) εὐρίσκομεν $x=2, y=5$.

Διερεύνησις. Οἱ ἄγνωστοι x, y δεόν νὰ εἶναι ἀκέραιοι πληροῦντες τὰς σχέσεις : $0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$. Ἐπομένως αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ εἶναι παραδεκταὶ καὶ ὁ ζητούμενος $\chi y \chi_{<10>}$ εἶναι ὁ 255.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ εὐρεθοῦν δύο ἀκέραιοι θετικοὶ τοιοῦτοι ὥστε ἂν ζητήσωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων, ἢ πρώτη διαιρέσις νὰ δίδῃ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 6, ἢ δὲ δευτέρα πηλίκον τὸ ἐν ἑκατοστὸν τοῦ μεγαλύτερου ἀριθμοῦ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.

Λύσις. Ἐστώσαν x καὶ y οἱ ζητούμενοι καὶ ἔστω $x > y$. Ἡ πρώτη διαιρέσις δίδει $x = 3y + 6$ ἢ δὲ δευτέρα $y = 6 \cdot \frac{x}{100}$. Ἐκ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $x=60, y=18$.

β') **Περιορισμοί.** Οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος ὀφείλουν ἐν γένει νὰ ἱκανοποιοῦν ὀρισμένας συνθήκας σχετικὰς πρὸς τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος τὰς ὁποίας καλοῦμεν περιορισμούς τοῦ προβλήματος. Δύναται λοιπὸν νὰ συμβῇ, ἀφοῦ καταστρώσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ λύσωμεν αὐτάς, νὰ λάβωμεν τιμὰς τῶν ἀγνώστων μὴ πληροῦσας τοὺς περιορισμούς.

Τότε αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ εἶναι ἀπαράδεκτοι καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ἐτσι π.χ. εἰς τὸ 1^{ον} ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ἐὰν τὸ σύστημα (3) εἶχε λύσεις ὅχι ἀκεραίας ἢ εἶχε ἀκεραίας ἀλλὰ μὴ πληροῦσας τοὺς περιορισμούς $0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$ τότε τὸ πρόβλημα δὲν θὰ εἶχε λύσιν.

Δυνάμεθα νὰ θέτωμεν τοὺς περιορισμούς τῶν ἀγνώστων εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς καὶ νὰ ἀπορρίπτωμεν εἰς τὸ τέλος ἐκείνας τὰς λύσεις αἱ ὁποῖαι δὲν πληροῦν τοὺς τεθέντας περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ εὐρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς ἔχων τὰ δύο πρῶτα ψηφία του ἴσα, τὰ δύο τελευταῖα ἴσα καὶ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Λύσις. Ἐστω $\chi y \chi y_{<10>}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς. Θέτομεν τοὺς περιορισμούς τῶν ἀγνώστων : x καὶ y ἀκέραιοι, $0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι :

$$\chi y \chi y_{<10>} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y) = 11(99x + x + y).$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον διὰ τοῦτο πρέπει ὁ παράγων $99x + x + y$ νὰ διαιρῇται καὶ αὐτὸς διὰ τοῦ 11. Ὁ παράγων $99x + x + y$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο προσθετέους: $99x$ καὶ $x + y$ ἐξ ὧν ὁ πρῶτος διαιρεῖται διὰ 11. Ἄρα καὶ ὁ δεύτερος πρέπει νὰ διαιρῇται διὰ 11. Ἐπειδὴ ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ x εἶναι 9 καὶ τοῦ y , ἐπίσης, διὰ τοῦτο ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ $x + y$ εἶναι 18. Ὡστε $x + y \leq 18$. Ἀλλ' ἐκ τῶν θετικῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων τοῦ 18 μόνον ὁ 11 διαιρεῖται διὰ 11. Ἄρα κατ' ἀνάγκην $x + y = 11$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἰσοῦται λοιπὸν μὲ

$$11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1).$$

Ὁ παράγων $9x + 1$ πρέπει νὰ εἶναι καὶ αὐτὸς τέλειον τετράγωνον. Αἱ δυναταί τιμαὶ τοῦ x εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ἡ τιμὴ $x = 1$ ἀποκλείεται διότι δίδει $y = 10$. Ὡστε μένουν πρὸς ἔλεγχον αἱ λοιπαί. Διὰ $x = 2, 3, 4, 5$ καὶ 6 εὐρίσκομεν ὅτι τὸ $9x + 1$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· διὰ $x = 7$ εἶναι καὶ διὰ $x = 8$ καὶ 9 δὲν εἶναι.

Ἄρα, ἡ μόνη δεκτὴ τιμὴ τοῦ x εἶναι $x = 7$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $x + y = 11$ ἐπεται ὅτι $y = 4$. Ὡστε ὁ ἀριθμὸς δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἄλλος ἀπὸ τὸν 7744. Πράγματι οὗτος εἶναι τετράγωνον τοῦ 88 καί, ὡς ἐδείχθη, εἶναι ὁ μόνος ὅστις πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

γ') **Συνθηκαὶ δυνατότητος.** Ὅταν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος παρίστανται διὰ γραμμάτων (δηλ. γενικῶν καὶ ὄχι συγκεκριμένων ἀριθμῶν) τότε τὸ πρόβλημα δύναται δι' ὠρισμένας τιμὰς τῶν δεδομένων τοῦ νὰ ἔχῃ λύσιν καὶ δι' ἄλλας τιμὰς τῶν δεδομένων τοῦ νὰ μὴ ἔχῃ λύσιν.

Διερευνῆσις καλεῖται ἡ εὑρεσις τῶν συνθηκῶν εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν. Αἱ συνθηκαὶ αὗται μεταξὺ τῶν δεδομένων (τὰ ὅποια παρίστανται διὰ γραμμάτων) λέγονται καὶ συνθηκαὶ δυνατότητος τοῦ προβλήματος.

Διὰ νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθηκαὶ δυνατότητος πρέπει προηγουμένως νὰ διατυπωθοῦν (συνήθως δι' ἀνισοτήτων) οἱ περιορισμοὶ εἰς τοὺς ὁποίους δέον νὰ ὑπόκεινται οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Τρεῖς ἵπποι Α, Β, Γ πρόκειται νὰ τρέξουν εἰς μίαν ἵπποδρομίαν. Ἐὰν ὁ Α ἔλθῃ πρῶτος, ὁ ἐπ' αὐτοῦ στοιχηματίζων λαμβάνει α φορὰς τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἔπαιξεν ἐπὶ τοῦ ἵππου τούτου. Ἄν ὁ Β ἔλθῃ πρῶτος, τὸ ἐπ' αὐτοῦ παιχθὲν ποσὸν ἀποδίδεται β φορὰς καὶ διὰ τὸν Γ τὸ παιχθὲν ποσὸν ἀποδίδεται γ φορὰς. Ζητοῦνται τὰ ποσὰ τὰ ὁποία πρέπει νὰ παίξῃ τις ἐπὶ ἐκάστου ἵππου οὕτως ὥστε νὰ ἔχῃ ἐν πάσῃ περιπτώσει κέρδος, δεδομένον ποσὸν Σ.

Λύσις. Ἐστω ὅτι πρέπει νὰ στοιχηματίσῃ x δρχ. ἐπὶ τοῦ ἵππου Α, y δρχ. ἐπὶ τοῦ Β καὶ z δρχ. ἐπὶ τοῦ Γ. Ἐὰν νικήσῃ ὁ Α τότε ὁ παίκτης θὰ λάβῃ ax δρχ. θὰ ἔχῃ ἐξοδεύσει δὲ $x + y + z$ δρχ., ἄρα τὸ κέρδος τοῦ θὰ εἶναι $ax - (x + y + z)$: τούτο πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ Σ. Ὡστε θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x - (x + y + z) = \Sigma \quad \text{ἢ} \quad x + y + z = \alpha x - \Sigma$$

Ὅμοίως σκεπτόμενοι διὰ τοὺς ἵππους Β καὶ Γ εὐρίσκωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$x + y + z = \beta y - \Sigma, \quad x + y + z = \gamma z - \Sigma.$$

Ἐχομεν λοιπὸν πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα :

$$(4) \quad \{x + y + z = \alpha x - \Sigma = \beta y - \Sigma = \gamma z - \Sigma\}.$$

Ἐκ τῶν (4) λαμβάνομεν :

$$\alpha x = \beta y = \gamma z.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ t ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων γινομένων, ἔχομεν

$$\alpha x = \beta y = \gamma z = t \quad \text{καὶ} \quad x = t/\alpha, \quad y = t/\beta, \quad z = t/\gamma.$$

Δυνάμει τούτων ἡ πρώτη τῶν (4) καθίσταται

$$\frac{t}{\alpha} + \frac{t}{\beta} + \frac{t}{\gamma} = \alpha \frac{t}{\alpha} - \Sigma$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὐρίσκωμεν

$$t = \frac{\Sigma}{1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)}.$$

Εὐρεθέντος τοῦ t εὐρίσκονται καὶ τὰ x, y, z :

$$x = \frac{\Sigma}{\alpha(1-M)}, \quad y = \frac{\Sigma}{\beta(1-M)}, \quad z = \frac{\Sigma}{\gamma(1-M)}, \quad \text{ὅπου} \quad M = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ἔχη λύσιν τὸ πρόβλημα πρέπει αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν x, y, z νὰ εἶναι θετικαί. Τοῦτο ὁμῶς συμβαίνει μόνον ὅταν $1-M > 0$ ἢ $M < 1$.

Ὡστε ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ προβλήματος εἶναι :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1,$$

δηλ. ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τοῦτον διὰ τὰ α, β, γ τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-572. Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν 800 km. Ὁ τόννος τοῦ ἀνθρακος τιμᾶται εἰς μὲν τὴν Α, 3700 δρχ., εἰς δὲ τὴν Β, 4675 δρχ., τὰ μεταφορικά δὲ εἶναι κατὰ τόννον 1,80 δρχ. ἀνὰ km. Νὰ ὁρισθῇ μετὰ τῶν Α καὶ Β σημείων ὅπου ἡ ἀξία τοῦ ἀνθρακος νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἴτε οὗτος ληφθῇ ἐκ τῆς Α εἴτε ἐκ τῆς Β.

A-573. Νὰ εὐρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, ὅστις αὐξάνει κατὰ 270 ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του, ἐλαττοῦται κατὰ 396 ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ ἀκραῖα ψηφία του, τέλος δὲ ἐλαττοῦται κατὰ 63 ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του.

A-574. Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμῆσεως ὁ ἀριθμὸς 25 διπλασιάζεται δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του;

A-575. Νὰ εὐρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς (τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος) ὅστις, ἂν ἀναστραφῇ παριστάνει τὸν ἴδιον ἀριθμὸν εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

A-576. Τρεῖς παῖκται Α, Β, Γ συμφωνοῦν ὅπως ὁ χάνων δίδει εἰς τοὺς Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἄλλους, ὅσα ἔχει ἕκαστος. Κατ' ἀρχάς χάνει ὁ Α, κατόπιν ὁ Β καὶ τέλος ὁ Γ. Μετὰ ταῦτα ἕκαστος παίκτης ἔχει α δρχ. Ζητοῦνται τὰ ποσὰ πού εἶχεν ἕκαστος εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παιγνιδίου.

B-577. Δεξαμενὴ φέρει τρεῖς κρουνοὺς Α, Β, Γ. Ἄν καὶ οἱ τρεῖς χρησιμοποιοῦν ὡς κρουνοὶ παροχῆς ἡ δεξαμενὴ πληροῦται εἰς $2 + \frac{6}{7}$ ὥρας ὅταν καὶ οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν. Ἐάν μόνον οἱ Α καὶ Γ ἀνοιχθοῦν χρειάζονται $3 + \frac{3}{4}$ ὥρας διὰ νὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ. Ἐάν οἱ Β καὶ Γ χρησιμοποιοῦν ὡς κρουνοὶ παροχῆς καὶ ὁ Α ὡς κρουνὸς ἀποχετεύσεως χρειάζονται $6 + \frac{2}{3}$ ὥραι διὰ νὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος κρουνὸς μόνος του πληροῖ τὴν δεξαμενὴν.

B-578. Πόσα μέρη βάρους καθαροῦ ψευδαργύρου καὶ πόσα μέρη βάρους καθαροῦ χαλκοῦ θὰ πρέπη νὰ προστεθοῦν εἰς 150 μέρη βάρους μίγματος περιέχοντος 25% ψευδάργυρον καὶ 35% χαλκὸν διὰ νὰ δώσουν μίγμα περιέχον 31 $\frac{1}{3}$ % ψευδάργυρον καὶ 40% χαλκόν;

B-579. Ἀλώπηξ καταδιώκει λαγόν. Ὁ λαγὸς ἀπέχει 50 βήματα ἀλώπεκος ἀπὸ τὴν ἀλώπεκα. Πόσα βήματα θὰ κάνῃ ὁ λαγὸς μέχρις ὅτου τὸν φθάσῃ ἡ ἀλώπηξ ἐάν ὁ λαγὸς κάνει 5 βήματα καθ' ὃν χρόνον ἡ ἀλώπηξ κάνει 4, ἀλλὰ 2 βήματα ἀλώπεκος εἶναι ἰσοδύναμα μὲ 3 βήματα λαγοῦ;

B-580. Ἐχομεν ὡς δεδομένον ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους του, δηλαδὴ ἡ ἀξία Α εἶναι συνάρτησις τοῦ βάρους Β, τῆς μορφῆς: $A = KB^2$, ὅπου Κ σταθερὸς συντελεστής. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἀδάμαντος βάρους ἐνὸς καρατίου ὅταν τρία χρυσὰ δακτυλίδια ἰσοβαρῇ, φέροντα ἀδάμαντας τριῶν, τεσσάρων καὶ πέντε καρατίων ἀντιστοίχως στοιχίζουσιν α, β γ δρχ. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐργασία διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν στοιχίζει τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὰ τρία καὶ ὅτι ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ καθαρόν χρυσόν καὶ ἓνα ἀδάμαντα.

B-581. Τριγώνον δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ ταύτας ὕψων ἴσονται πρὸς τὸ τρίτον ὕψος. Νὰ υπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά. Ποία ἡ συνθήκη δυνατότητος;

B-582. Ὁξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις ΒΓ = α καὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος h. Νὰ υπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ ἔχοντος περίμετρον 2τ. Ἡ μία πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου δέον νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὁλόκληρον δὲ τὸ ὀρθογώνιον νὰ περιέχεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου. Διερεῦνησις.

B-583. Εἰς τὴν ἀσκ. 78 νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν διὰ πρώτην φοράν;

Ἐάν αἱ ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν ἦσαν v_1 καὶ v_2 ὅπου $v_1/v_2 = \text{ἀσύμμετρος ἀριθμός}$, δεῖξατε ὅτι οὐδέποτε τὰ δύο κινητὰ θὰ εὑρεθοῦν πάλιν συγκρόνως εἰς τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ἀνεχώρησαν.

B-584. Ποίαν χρονικὴν στιγμὴν μεταξὺ 8ης καὶ 9ης οἱ δεικταὶ ἐνὸς ὥρολογίου συμπίπτουσιν; Πότε δεικνύουν πρὸς ἓκ διαμέτρον ἀντίθετα σημεῖα;

A-585. Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καί τὸ μήκος ἀμαξοστοιχίας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι χρειάζεται 7 sec διὰ νὰ διέλθῃ πρὸ ἀκινήτου παρατηρητοῦ καὶ 25 sec διὰ νὰ διασχίσῃ σταθμὸν μήκους 387 m.

A-586. Ἀμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 8 π.μ. καὶ φθάνει εἰς Θεσσαλονίκην τὴν 10 μ.μ. Μία ἄλλη ἀναχωρεῖ ἐκ Θεσσαλονίκης τὴν 12ην μεσημβρινὴν καὶ φθάνει εἰς Ἀθήνας τὸ μεσονύκτιον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν θὰ συναντηθοῦν ἂν ὅλη ἡ ἀπόστασις εἴναι 500 km, ἀμφότεραι δὲ αἱ ἀμαξοστοιχίαι κινοῦνται μὲ σταθεράς ταχύτητας ;

B-587. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β διανύουν τὸ μεταξὺ δύο πόλεων Π καὶ Κ διάστημα ἐκ 405 km ἀνοχωροῦντες ἀπὸ τὴν Π ἐνῶ συγχρόνως μὲ αὐτοὺς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Κ κατευθυνόμενος πρὸς τὴν Π τρίτος ποδηλάτης Γ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : 1ον) μετὰ 9 ὥρας ὁ Α ἰσαπέχει τῶν Β καὶ Γ, 2ον) μετὰ 10 ὥρας ὁ Γ ἰσαπέχει τῶν Α καὶ Β, 3ον) ὅτι ὁ Α διανύει εἰς 30' ὅσον ὁ Β εἰς 36', νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἰς km/h (ὑποτιθέμεναι σταθεραὶ) ὥς καὶ μετὰ πόσας ὥρας (ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως) ὁ Β θὰ ἰσαπέχῃ τῶν Α καὶ Γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ

Ρητὰ ἀλγεβρικά παραστάσεις

§ 154. Ρητὰ κλάσματα. Κάθε συνάρτησις μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν ἣ ὁποία ἔχει τὴν μορφήν $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ ὅπου Π_1 καὶ Π_2 εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ ἀπλῶς ρητὸν κλάσμα. Τὸ Π_1 λέγεται ἀριθμητὴς καὶ τὸ Π_2 , παρονομαστής.

Διὰ τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς (ἢ τῶν μεταβλητῶν) τὰς μηδενίζουσας τὸν παρονομαστήν, τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα δὲν ἔχει ἀντίστοιχον ἀριθμητικὴν τιμὴν (βλ. § 87, γ'). Ἐπομένως τὸ πεδίου ὁρίσμοῦ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, δὲν περιλαμβάνει τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς (ἢ τοῦ ζεύγους ἢ τῆς τριάδος... μεταβλητῶν) τὰς μηδενίζούσας τὸν παρονομαστήν.

Οὕτω, τὸ ρητὸν κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ὅπου P, Q ἀκέραια πολυώνυμα, ἔχει σύνολον ὁρίσμοῦ τὸ $\Pi - \{\text{σύνολον τιμῶν μηδενίζουσῶν τὸ } Q(x)\}$.

Τὸ $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ὅπου $P(x,y), Q(x,y)$ ἀκέραια πολυώνυμα ἔχει σύνολον (ἢ πεδίου) ὁρίσμοῦ τὸ $\Pi \times \Pi - \{\text{σύνολον ζευγῶν } (x,y) \text{ μηδενιζόντων τὸ } Q(x,y)\}$ κ.ο.κ.

Π.χ. αἱ συναρτήσεις:

$$x+1 \neq 0 \rightarrow \frac{3x^2-5x+4}{x+1} = \varphi(x)$$

$$(x-5)(x-3) \neq 0 \rightarrow \frac{-2}{(x-5)(x-3)} = \sigma(x)$$

$$3x+5y-1 \neq 0 \rightarrow \frac{4x^2-9xy+y^2}{3x+5y-1} = f(x,y)$$

$$x^2+y^2-xyz \neq 0 \rightarrow \frac{x^3+y^3-2z^3}{x^2+y^2-xyz} = u(x,y,z)$$

εἶναι ρητὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Μὲ ἄλλας λέξεις, ρητὸν κλάσμα εἶναι κάθε ἀλγεβρικὴ παράστασις $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ ὅπου Π_1, Π_2 εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα.

Ἀπλοποιήσεις. Ἐνα ρητὸν κλάσμα δύναται ν' ἀπλοποιηθῇ ἐφ' ὅσον οἱ δύο ὅροι τοῦ ἔχουν ὡς κοινὸν παράγοντα κάποιο πολυώνυμον.

Ἐὰν π.χ. τὸ $\lambda(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, τότε τὰ ρητὰ κλάσματα

$$\frac{P(x) \times \lambda(x)}{Q(x) \times \lambda(x)}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)}$$

λαμβάνουν πάντοτε ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς ἐφ' ὅσον δίδομεν εἰς τὸ x τιμὰς α τοιαύτας ὥστε $Q(\alpha) \neq 0$ καὶ $\lambda(\alpha) \neq 0$. Γράφομεν :

$$\frac{P(x) \times \lambda(x)}{Q(x) \times \lambda(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Τὰ ὅμοια ἰσχύουν καὶ διὰ ρητὰ κλάσματα μὲ πολλὰς μεταβλητάς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ ρητὸν κλάσμα

$$\frac{\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2)+xy(\alpha^2-\beta^2)} ».$$

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενα παραγόντων καὶ ἐφ' ὅσον ὑπάρξουν παράγοντες κοινοὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν νὰ διαιρέσωμεν δι' αὐτῶν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος.

Ὁ ἀριθμητὴς γράφεται :

$$\alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 + \alpha^2 xy + \beta^2 xy = \alpha x(\beta x + \alpha y) + \beta y(\alpha y + \beta x) = (\beta x + \alpha y)(\alpha x + \beta y)$$

καὶ ὁ παρονομαστὴς ὁμοίως ἀναλύεται εἰς γινόμενον

$$(\alpha x - \beta y)(\beta x + \alpha y).$$

Συνεπῶς τὸ κλάσμα γράφεται :

$$\frac{(\alpha x + \beta y)(\beta x + \alpha y)}{(\alpha x - \beta y)(\beta x + \alpha y)}$$

καὶ ἀπλοποιούμενον διὰ $\beta x + \alpha y$ καθίσταται ἴσον πρὸς

$$\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha x - \beta y}.$$

Ἡ διαίρεσις διὰ $\beta x + \alpha y$ εἶναι ἐπιτρεπτή, διότι ἐξυπακούεται ὅτι ὁ παρονομαστὴς $(\alpha y - \beta x)(\beta x + \alpha y) \neq 0$ ἐπομένως καὶ $\beta x + \alpha y \neq 0$.

Αἱ τέσσαρες πράξεις μεταξὺ ρητῶν κλασμάτων ἐκτελοῦνται συμφώνως πρὸς τοὺς κανόνας τοὺς ἰσχύοντας διὰ τ' ἀλγεβρικῶν κλάσματα.

Οὕτω π.χ. αἱ παραστάσεις

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} & \quad \text{καὶ} \quad \frac{P(x) + P_1(x)}{Q(x)} \quad \eta \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} & \quad \text{καὶ} \quad \frac{P(x) \times P_1(x)}{Q(x) \times Q_1(x)} \end{aligned}$$

λαμβάνουν πάντοτε ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς $\forall x \in \Pi$ μὲ $Q(x) \neq 0$ καὶ $Q_1(x) \neq 0$. Ἐπομένως, θεωροῦνται ἴσαι παραστάσεις.

§ 155. Κοινὰ πολλαπλάσια ἀκεραίων παραστάσεων.

α') Δοθεισῶν δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

καλεῖται κοινὸν πολλαπλάσιον (Κ.Π.) αὐτῶν, κάθε ἀκεραία ἀλγεβρική παράστασις ἣ ὁποία περιέχει ὡς παρά οντας τὰς δοθείσας παραστάσεις.

Ἔστωσαν π.χ. αἱ ἀκέραιαι παραστάσεις: $(x+y)^2$, $xy(x-y)$ καὶ $x^2y(x^2-y^2)$. Ἡ παράστασις $(x+y)^2(x^2-y^2)x^2y^2$ εἶναι ἓνα Κ.Π. αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ ἡ $(x+y)^2(x-y)x^2y$ εἶναι ἓνα ἄλλο ἀπλούστερον, Κ.Π.

β') Ἐὰν δοθοῦν δύο ἢ περισσότεραι ἀκέραιαι παραστάσεις ἀναλελυμένα εἰς γινόμενα τῆς μορφῆς

$$(1) \quad c_1 A'' B'' \Gamma'' \dots, \quad c_2 A' B' \Delta' \sigma' \dots$$

ὅπου $c_1, c_2, \dots$ ἀκέραιοι συντελεσταὶ καὶ $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ ἀκέραια πολυώνυμα, τότε καλοῦμεν σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. τῶν παραστάσεων τούτων (1), τὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν συντελεστικῶν $c_1, c_2, \dots$ καὶ ἀπὸ ὅλους τοὺς παράγοντας $A, B, \Gamma, \dots$ (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς εἰς τὰς παραστάσεις (1)), ἐκάστου παράγοντος λαμβανομένου μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του.

Τὸ ὡς ἄνω σχηματιζόμενον γινόμενον περιέχει ὡς παράγοντας κάθε μίαν ἀπὸ τὰς παραστάσεις (1) ὅρα εἶναι Κ.Π. τῶν (1). Σχετικῶς δὲ μὲ τὰς μορφὰς τῶν γινομένων (1) εἶναι τὸ ἀπλούστερον (πρβλ. § 37, ε').

Ἔστωσαν π.χ. αἱ ἀκέραιαι παραστάσεις

$$\begin{aligned} 24(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)(\alpha^2+1)^3, & \quad 15(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+1) \\ -4(\alpha^2+1)^5, & \quad -(\alpha+\beta)(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Τὸ σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενον :

$$120 \cdot (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+1)^5.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Νὰ εὑρεθῇ ἓνα σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. τῶν πολυωνύμων :

$$\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta - \beta^3, \quad 25\alpha^3 - 25\alpha\beta^2 - 25\alpha^2\beta + 25\beta^3, \quad 15\alpha^2 + 15\alpha\beta - 30\beta^2).$$

Λύσις. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ὀρισμὸν β') τρέπομεν πρῶτον τὰς παραστάσεις εἰς γινόμενα τῆς μορφῆς (1). Λαμβάνομεν δὲ

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta - \beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2 \\ 25\alpha^3 - 25\alpha\beta^2 - 25\alpha^2\beta + 25\beta^3 &= 5^2(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta) \\ 15\alpha^2 + 15\alpha\beta - 30\beta^2 &= 5 \cdot 3(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta). \end{aligned}$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν ὀρισμὸν β') εὐρίσκομεν ὡς σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. τὴν παράστασιν :

$$5^2 \cdot 3 \cdot (\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2(\alpha+2\beta).$$

Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

A-588. Νὰ εὑρεθῇ ἓνα σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. ἐκάστης τῶν κάτωθι ομάδων :

$$1. \quad 28\alpha^3 + \alpha + \beta^3, \quad 35\alpha\beta^2(\alpha-\beta).$$

$$2. \quad 6x^5 - 12x^3y^2, \quad 4x^3y - 8xy^3.$$

$$3. \quad 15\alpha\beta xy^2 - 45\beta y^3, \quad 10\alpha^2x^2 - 30\alpha^2xy.$$

5. $4x^2 - 25y^2$, $6x^2 - 9xy - 15y^2$, $10x^2 + 35xy + 25y^2$.
6. $36a^2 - 49b^2$, $36a^3 - 18a^2b - 28ab^2$, $90a^3b + 165a^2b^2 + 70b^3$.
7. $x^{12} - y^6$, $3x^4 - 6x^2y - 9y^2$.
8. $x^3 + y^3$, $(x+y)^3$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 - y^2$.

§ 156. Πρόσθεσις ρητῶν κλασμάτων. α') Ἐν μίᾳ ἀλγεβρική παράστασις εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τότε ἰσοῦται μὲ ἓνα ρητὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστήν τὸν κοινὸν παρονομαστήν τῶν κλασμάτων καὶ ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν :

$$\frac{\alpha}{k} - \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma}{k} - \frac{\delta}{k} = \frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta}{k}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.
$$\frac{x^2 - y^2}{3(x+y)} - \frac{x^3 - y + y^3}{3(x+y)} + \frac{x}{3(x+y)} =$$

$$= \frac{x^2 - y^2 - (x^3 - y + y^3) + x}{3(x+y)} = \frac{(x^2 - y^2) - (x^3 + y^3) + (x + y)}{3(x+y)} =$$

$$= \frac{(x+y)(x-y) - (x+y)(x^2 - xy + y^2) + (x+y)}{3(x+y)} = \frac{x - y - x^2 + xy - y^2 + 1}{3}.$$

Σημειωτέον ὅτι τὸ πρόσημον $-$, πρὸ τοῦ κλάσματος, δύναται ν' ἀντικατασταθῇ μὲ $+$ ἂν ἀλλάζωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ

β') Ἐν ἡ ἀλγεβρική παράστασις εἶναι ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων μὲ διαφορετικοὺς παρονομαστές, τότε δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τοὺς προσθετέους ὁμώνυμα κλάσματα καὶ κατόπιν νὰ τοὺς προσθέσωμεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἐνῆς τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἐκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων. Τότε, κοινὸς παρονομαστής λαμβάνεται τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. «Νὰ μετατραπῇ εἰς ἓν ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - \frac{2xy - x^2 + y^2}{yx} + 3x + 5y ».$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα δύναται νὰ λάβῃ κατὰ σειράν, τὰς μορφάς :

$$\frac{(x^3 - y^3)xy}{(x^2 + y^2)xy} - \frac{(2xy - x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{xy(x^2 + y^2)} + \frac{(3x + 5y)(x^2 + y^2)xy}{(x^2 + y^2)xy} =$$

$$= \frac{(x^3 - y^3)xy - (2xy - x^2 + y^2)(x^2 + y^2) + (3x + 5y)(x^2 + y^2)xy}{(x^2 + y^2)xy} =$$

$$= \frac{4x^4y + 4xy^4 + 3x^2y^3 + 5x^3y^2 - 2x^3y - 2xy^3 + x^4 - y^4}{x^3y + xy^3}.$$

Συνήθως ὅμως, κατὰ τὴν μετατροπὴν τῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαττωτικὴ παρονομαστήν ἢ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ρονομαστών ἀλλὰ ἓνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστών ὅσον τὸ δυνατὸν ἀπλούστερον. Εὐρεθέντος τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐκάστου κλάσματος μὲ κατὰλληλον παράστασιν οὕτως ὥστε, ὅλοι οἱ παρονομασταὶ νὰ γίνουν ἴσοι μὲ τὸν προκαθορισθέντα κοινὸν παρονομαστὴν, ὅστις ὡς εἴπομεν εἶναι ἓνα Κ.Π. ἢ τὸ σχετικῶς ἀπλούστερον Κ.Π. τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. «Νὰ γίνῃ ρητὸν κλάσμα ἢ παράστασις

$$\frac{1}{(x+\alpha)^2} + \frac{2}{(x+\alpha)(x+\beta)} - \frac{3}{(x+\beta)^2} ».$$

Λύσις. Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστών εἶναι ἐνταῦθα τὸ $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ καὶ τοῦτο θὰ τεθῇ ὡς κοινὸς παρονομαστής· πρὸς τοῦτο θὰ πολλαπλασιασθοῦν οἱ ὅροι τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ $(x+\beta)^2$, τοῦ δευτέρου ἐπὶ $(x+\alpha)(x+\beta)$ καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ $(x+\alpha)^2$ ὅποτε ἡ παράστασις θὰ λάβῃ τὴν μορφήν

$$\begin{aligned} & \frac{(x+\beta)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} + \frac{2(x+\alpha)(x+\beta)}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} - \frac{3(x+\alpha)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \\ & = \frac{(x+\beta)^2 + 2(x+\alpha)(x+\beta) - 3(x+\alpha)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \frac{2\alpha x - 2\beta x + 2\alpha\beta - 2\beta^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. «Νὰ γίνῃ ρητὸν κλάσμα ἢ παράστασις

$$A = \frac{8}{(x^3+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1} ».$$

Λύσις. Ὁ πρῶτος παρονομαστής περιέχει ὡς παράγοντας καὶ τοὺς ἄλλους, ἄρα οὗτος θὰ ληφθῇ ὡς κοινὸς παρονομαστής. Οἱ ἀριθμηταὶ ἐκάστου τῶν ἄλλων θὰ πολλαπλασιασθοῦν μὲ τοὺς παράγοντας οἱ ὅποιοι λείπουν ἀπὸ τοὺς παρονομαστές των. Ἦτοι :

$$A = \frac{8+2(x+1)(x-1)+(x^2+3)(x-1)}{(x^2+3)(x+1)(x-1)} = \frac{x^3-3x^2+3x+3}{(x^2+3)(x^2-1)}.$$

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἐξῆς πρακτικὸν κανόνα :

«Τὸ ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων ἰσοῦται μὲ ρητὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν ἓνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστών καὶ ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πολλαπλασιασμένων, ἕκαστον μὲ δ,τι ἐπολλαπλασιάσθῃ ὁ παρονομαστής του».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. «Νὰ γίνῃ ρητὸν κλάσμα ἢ παράστασις

$$\frac{1}{\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta} + \frac{1}{\beta^2-3\alpha^2+2\alpha\beta} - \frac{2}{3\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2} ».$$

Λύσις. Κατ' ἀρχὰς τρέπομεν τοὺς παρονομαστές εἰς γινόμενα σύμφωνα μὲ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)$$

$$\beta^2-3\alpha^2+2\alpha\beta=-(\alpha-\beta)(\beta+3\alpha)$$

$$3\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2=(3\alpha+\beta)(3\beta+\alpha).$$

Ὡς κοινὸς παρονομαστής τῶν κλασμάτων θὰ ληφθῇ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν, ὅπερ ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς :

δηλ. τὸ $(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)(3\alpha+\beta)$ καὶ θὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ ἀνωτέρω ὁ κανὼν. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)} - \frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta+3\alpha)} - \frac{2}{(3\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)} =$$

$$= \frac{(3\alpha+\beta) - (\alpha+3\beta) - 2(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)(3\alpha+\beta)} = \frac{0}{(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)(3\alpha+\beta)} = 0.$$

Ὑποτίθενται βεβαίως ὅλοι οἱ παρονομασται $\neq 0$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-589. Νὰ τραποῦν εἰς ἓνα ρητὸν κλάσμα τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

$$\text{i)} \quad \frac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta} + \frac{7\alpha}{3(\alpha+\beta)}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{4x-6}{2x^2+7x-15} + \frac{3x-6}{25-x^2} - \frac{2-x}{x^2-7x+10}.$$

B-590. Νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς ρητοῦ κλάσματος ἕκαστον τῶν κάτωθι ἀθροισμάτων :

$$\text{i)} \quad \frac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3} + \frac{1}{x^2-y^2} - \frac{x^2+3y^2}{x^4-y^4} - \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x^4-(x-1)^2}{x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$$

B-591. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, τὰς μὴ μηδενιζούσας τοὺς παρονομαστές, ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$\text{i)} \quad \frac{y^2z^2}{\beta^2\gamma^2} + \frac{(y^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^3(\beta^2-\gamma^2)} + \frac{(y^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\beta^2(\gamma^2-\beta^2)} = 1.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right)^2.$$

B-592. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

καὶ νὰ δημιουργηθῇ κατόπιν ἀνάλογος ἰσότης διὰ τέσσαρα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma,$ δ. Τέλος, νὰ γίνῃ γενίκευσις δι' ὅσαδήποτε γράμματα.

B-593.—Νὰ τεθοῦν ὑπὸ ἀπλουστέραν μορφὴν αἱ παραστάσεις :

$$\text{i)} \quad \frac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} + \frac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} + \frac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

B-594.—Νὰ τεθοῦν ὑπὸ ἀπλουστέραν μορφὴν αἱ παραστάσεις :

$$\text{i)} \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) - \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} \right).$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha} (\gamma^2+\alpha^2-\beta^2) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2).$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-3x^2y^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2}.$$

B-595. Γνωρίζοντες ὅτι $xyz=1$, ἀπλουστεύσατε τὴν παράστασιν

$$A = \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1}.$$

B-596. Ν' ἀπλουστευθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{x^2 y^2 z^2}{\beta^2 \gamma^2} + \frac{(x^2 - \beta^2)(y^2 - \beta^2)(z^2 - \beta^2)}{\beta^2(\beta^2 - \gamma^2)} + \frac{(x^2 - \gamma^2)(y^2 - \gamma^2)(z^2 - \gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2 - \beta^2)}.$$

B-597. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις :

$$\frac{ax^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{\beta \gamma (y - z)^2 + \gamma \alpha (z - x)^2 + \alpha \beta (x - y)^2}$$

διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν ὅταν τὰ x, y, z μεταβάλλονται πληροῦντα πάντοτε τὴν σχέσιν

$$ax + \beta y + \gamma z = 0.$$

§ 157. Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεσις ρητῶν κλασμάτων. Τὸ γινόμενον ρητῶν κλασμάτων, ἰσοῦται μὲ ρητὸν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστήν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι πάλιν ἀκεραίων πολυώνυμον, συνεπῶς τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι κλάσμα μὲ ὄρους πολυώνυμα, δηλ. ρητὸν κλάσμα.

Ἀλλὰ καὶ τὸ πηλίκον δύο ρητῶν κλασμάτων εἶναι πάλιν ρητὸν κλάσμα διότι ὡς εἶδομεν εἰς τὰ περὶ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, πρὸς εὐρεσιν τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1.
$$\frac{12(x^2 - 4)}{5(x^2 + xy - 2y^2)} \times \frac{15(x^2 - y^2)}{4(x^2 - 5x + 6)} = \frac{x + 2y}{x + y}$$

$$= \frac{4 \cdot 3(x + 2)(x - 2) \cdot 5 \cdot 3(x + y)(x - y)(x + 2y)}{5(x + 2y)(x - y) \cdot 4 \cdot (x - 3)(x - 2)(x + y)} = \frac{9(x + 2)}{x - 3}.$$

2.
$$\frac{4x^2 - y^2}{4x^2 - 11xy - 3y^2} : \frac{2x^2 - 5xy - 3y^2}{4x^2 + 5xy + y^2} = \frac{4x^2 - y^2}{4x^2 - 11xy - 3y^2} \times$$

$$\times \frac{4x^2 + 5xy + y^2}{2x^2 - 5xy - 3y^2} = \frac{(2x + y)(2x - y)(4x + y)(x + y)}{(4x + y)(x - 3y)(2x + y)(x - 3y)} = \frac{(2x - y)(x + y)}{(x - 3y)^2}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-598. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι σημειούμεναι πράξεις :

$$\frac{16x^2 - 9}{4x + 1} : (3 - 4x), \quad \frac{a^3 + \beta^3}{a - 3\beta} \times \frac{1}{4a^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}, \quad \frac{5ax + 10ay}{x^3 - y^3} : \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

A-599. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$\frac{3y - x}{x^2 - xy - 10y^2} \cdot \frac{x^2 - 4y^2}{x^3 - 27y^3} \cdot \frac{x^2 - 4xy - 5y^2}{x - 2y}$$

$$\left(\frac{x^2 y^2 - 2y^4}{3x^2 + y^2} : \frac{x^4 - 4x^2 y^2 + y^4}{3x^4 - 2x^2 y^2 - y^4} \right) \cdot \frac{x + y}{x - y}.$$

B-600. Ἐάν $x = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$ καὶ $y = \frac{(a + \gamma - \beta)(a + \beta - \gamma)}{(a + \beta + \gamma)(\beta + \gamma - a)}$ νά ὑπολογισθῇ

τὸ γινόμενον $(x + 1)(y + 1)$ συναρτήσῃ τῶν a, β, γ .

B-601. Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ἔργο τοῦ Ἑλληνικοῦ Εὐρωπαϊκοῦ Κοινοβουλίου

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma} + \frac{\beta}{\gamma-\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=9.$$

§ 158. Ρηταί αλγεβρικοί παραστάσεις. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν συνάρτησιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν ἡ ὁποία νὰ συγκροτῇται ἀπὸ ἀκέραια πολυώνυμα καὶ ρητὰ κλάσματα συνδεδεμένῃ μεταξὺ των διὰ προσθέσεων, ἀφαιρέσεων, πολλαπλασιασμῶν καὶ διαιρέσεων. Μία τοιαύτη συνάρτησις λέγεται ρητὴ ἢ αλγεβρικὴ παράστασις. Π.χ. αἱ συναρτήσεις:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x+5}{x^2-1} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right) \cdot (2x^2+3) + 7$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{x+y} \cdot \left(x + \frac{3}{x} + \frac{5}{y}\right) : \left\{ \frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+2y} \right\}$$

εἶναι ρηταί αλγεβρικοί παραστάσεις.

Ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες, λεγόμεναι, ρηταὶ πράξεις, δηλ. πρόσθεσις, ἀφαιρέσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἐκτελούμεναι μεταξὺ ρητῶν κλασμάτων καὶ πολυωνύμων, δίδουν πάντοτε ὡς ἀποτέλεσμα ἓνα ρητὸν κλάσμα, διὰ τοῦτο:

Πᾶσα ρητὴ αλγεβρική παράστασις μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὴν ρητὸν κλάσμα. Αἱ ἀκέραιαι αλγεβρικοί παραστάσεις ὑπάρχοντες εἰς τὰς ρητάς, διότι δύνανται νὰ νοηθοῦν ὡς ἔχουσαι παρονομαστήν τὴν μονάδα.

§ 159. Σύνθετα κλάσματα. Ἡ παράστασις, $\Pi_1 : \Pi_2$ ὅπου Π_1 καὶ Π_2 εἶναι ρηταὶ αλγεβρικοί παραστάσεις, λέγεται σύνθετον κλάσμα ἐνν περιέχει ἓνα τουλάχιστον ρητὸν κλάσμα εἰς τὸν ἀριθμητὴν Π_1 ἢ εἰς τὸν παρονομαστὴν Π_2 ἢ εἰς ἀμφοτέρους. Τὸ ρητὸν κλάσμα μὲ ὅρους ἀκεραίας παραστάσεις, λέγεται ἐν ἀντιθέσει ἀπλοῦν κλάσμα.

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἀπλοῦν, μετατρέπωμεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ εἰς ἓν ἀπλοῦν κλάσμα καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἐπίσης καὶ κατόπιν διαιρούμεν τὰ δύο προκύψαντα ἀπλᾶ κλάσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. «Νὰ τραπῇ εἰς ἀπλοῦν τὸ σύνθετον κλάσμα:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{y^2}{x^2-y^2}} \quad ».$$

Λύσις. Ἰν. Ὁ ἀριθμητὴς γράφεται:

ἠφιλοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{4xy}{x^2-y^2}.$$

Ο παρονομαστής γράφεται :

$$1 + \frac{y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2}{x^2-y^2}.$$

Εξ αὐτῶν ἔχομεν :

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\frac{4xy}{x^2-y^2}}{\frac{x^2}{x^2-y^2}} = \frac{4xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2} = \frac{4y}{x}.$$

Λύσις 2α. Πολλάκις, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ ἐξαλείψωμεν. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα θέλομεν νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς $x-y$, $x+y$, x^2-y^2 καὶ διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου ἐπὶ $(x+y)(x-y)$,

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\left\{ \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right\} (x-y)(x+y)}{\left\{ 1 + \frac{y^2}{x^2-y^2} \right\} (x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2-y^2+y^2} = \frac{4y}{x}.$$

2. Νὰ τραπῇ εἰς ἀπλοῦν τὸ σύνθετον :

$$\frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{1+x}}}$$

Λύσις. Ἀπλοστεύομεν πρῶτον τὰς κλασματικὰς παραστάσεις τὰς πλέον ἀπομακρυσμένας ἀπὸ τὴν κυρίαν γραμμὴν διαιρέσεως :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{1+x} &= \frac{1+x-x}{1+x} = \frac{1}{1+x} \\ \frac{x}{1 - \frac{x}{1+x}} &= \frac{x}{\frac{1}{1+x}} = x+x^2 \\ 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{1+x}} &= 1 - x - x^2 \end{aligned}$$

καὶ τελικῶς

$$\frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{1+x}}} = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-602. Νὰ γίνουν ἀπλᾶ τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

$$\frac{x-2-\frac{8}{x}}{1+\frac{5}{x+\frac{6}{x}}}, \quad \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{x+4-\frac{5}{x}}, \quad \frac{x+3-\frac{12x+26}{x+4}}{1+\frac{11x+26}{x+4}}.$$

A-603. Νά τραπούν εις ἀπλᾶ τὰ σύνθετα κλάσματα :

$$\begin{array}{ccc} m-6 - \frac{m+12}{m+2} & , & \frac{3m+4}{3m} - \frac{n+2}{n} & , & \frac{x^2+x+1}{x^3-x+1} - \frac{x^3}{x+1} \\ m+4 - \frac{2m+1}{m-2} & , & \frac{9m}{16n} - \frac{n}{4m} & , & \end{array}$$

A-604. Νά τραπῇ εἰς ἓνα ρητὸν κλάσμα ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων :

$$\begin{array}{l} \text{i)} \quad \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} \right) \cdot \frac{x^4 y^4}{xy + y^2} \cdot \frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{x^3 - 2x^2 y + xy^2} \\ \text{ii)} \quad \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}} \end{array}$$

A-605. Νά τραπῇ εἰς ἓνα ρητὸν κλάσμα ἐκάστη τῶν παραστάσεων :

$$\begin{array}{l} \text{i)} \quad \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta + \gamma}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta - \gamma}} \left\{ 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - a^2}{2\beta\gamma} \right\} \\ \text{ii)} \quad \frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma} - \beta}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta - 2\gamma}} + \frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma} - \gamma}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma - 2\beta}} \end{array}$$

§ 160. Ρηταὶ κλασματικαὶ ἐξισώσεις. "Όταν τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι ρηταὶ - ἀλγεβρικοὶ παραστάσεις τότε ἡ ἐξίσωσις λέγεται ρητὴ ἀλγεβρική ἢ ρητὴ-κλασματικὴ καὶ δύναται τελικῶς, ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφήν

$$(1) \quad \frac{A}{B} = 0$$

ὅπου A καὶ B ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν (§ 158).

Πᾶσα λύσις τῆς (1) καθιστᾷ τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ ἴσον μὲ τὸ μηδέν, συνεπῶς μηδενίζει τὸν ἀριθμητὴν του χωρὶς νὰ μηδενίξῃ συγχρόνως καὶ τὸν παρονομαστὴν του.

Διότι ἂν ἐμηδένιζε καὶ τὸν παρονομαστὴν θὰ καθίστατο τὸ κλάσμα ὅχι ἴσον μὲ μηδέν ἀλλ' ἀόριστον.

Διὰ τοῦτο ὡς λύσεις τῆς (1) δεχόμεθα τὰς τιμὰς ἐκεῖνας τοῦ ἀγνώστου (ἢ τῶν ἀγνώστων) αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὰς δύο σχέσεις : $A=0$, $B \neq 0$. Ὡς ἐπὶ ἐξήγησεν ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἡ κλασματικὴ ἐξίσωσις $A/B=0$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα τῶν σχέσεων

$$\{A=0, B \neq 0\}.$$

§ 161. Ἐπίλυσις ρητῶν ἐξισώσεων. Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν § 160, πᾶσα ρητὴ - κλασματικὴ ἐξίσωσις $A(x)/B(x)=0$ μὲ ἕνα ἄγνωστον x ἀνάγεται τελικῶς εἰς σύστημα δύο σχέσεων ἀποτελουμένων ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν $A(x)=0$ καὶ ἀπὸ μίαν παρὰ συν-
θὴ $x \eta \gamma, B(x) \neq 0$. Πᾶσα λύσις πρέπει νὰ ἰκανοποιῇ καὶ τὰς δύο σχέ-
σεις: $\{A(x)=0, B(x) \neq 0\}$.

$$\left(\eta \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff \{A(x)=0, B(x) \neq 0\} \right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0».$$

Λύσις. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τρέπομεν εἰς γινόμενον τὴν παράστασιν x^2+2x-3 ,

$$x^2+2x-3 = x^2-x+3x-3 = x(x-1)+3(x-1) = (x-1)(x+3)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 0 \quad \eta \quad \frac{(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 4}{(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\eta \quad \frac{3x+9}{(x-1)(x+3)} = 0.$$

Ἡ τελευταία ἀληθεύει ὅταν συγχρόνως ἔχωμεν

$$(1) \quad 3x+9=0$$

$$(2) \quad (x+1)(x+3) \neq 0.$$

Ἡ (1) δίδει $x=-3$ ἀλλ' ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x δὲν ἐπαληθεύει τὴν (2), (δηλ. μὴδενίζει τὸν παρονομαστήν) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτος. Ὡστε ἡ δοθεῖσα δὲν ἔχει λύσιν.

2. «Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha x-1}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{\alpha(x^2+1)}{x^2-1} ».$$

Λύσις. Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς, θέτοντες συγχρόνως καὶ τὸν περιορισμόν.

$$(1) \quad (x-1)(x+1) \neq 0$$

καὶ λαμβάνομεν τὴν

$$(\alpha x-1)(x+1) + \beta(x-1) = \alpha(x^2+1)$$

ἢ μετὰ τὰς ἀναγωγάς, τὴν

$$(2) \quad (\alpha + \beta - 1)x = \alpha + \beta + 1.$$

Περίπτωσις i). Ἐστω $\alpha + \beta - 1 \neq 0$. Τότε ἡ (2) δίδει

$$(3) \quad x = \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta - 1}.$$

Διὰ τὸ εἶναι δεκτὴ ἡ (3) πρέπει νὰ πληροῖ τὴν (1), δηλ. πρέπει :

$$\left(\frac{a+\beta+1}{a+\beta-1}-1\right) \cdot \left(\frac{a+\beta+1}{a+\beta-1}+1\right) \neq 0 \quad \eta \quad \frac{2}{a+\beta-1} \cdot \frac{2(a+\beta)}{a+\beta-1} \neq 0 \quad \eta \quad a+\beta \neq 0.$$

Ἐὰν εἶναι $a+\beta=0$ ἡ (3) εἶναι ἀπαράδεκτος, ὥς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν (1).

Περίπτωσης ii). Ἐστω $a+\beta-1=0$. Τότε ἡ (2) δὲν ἔχει λύσιν διότι τὸ δεύτερον μέλος τῆς $a+\beta+1=2 \neq 0$.

Συμπέρασμα. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὅταν $a+\beta \neq 1$ καὶ συγχρόνως $a+\beta \neq 0$, δηλ. ὅταν $(a+\beta-1)(a+\beta) \neq 0$ καὶ κομμίαν λύσιν ὅταν $(a+\beta-1)(a+\beta)=0$.

3. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+6}{x+7} = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+5}{x+6}.$$

Λύσις. Ὅλα τὰ ἐμφανιζόμενα κλάσματα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{x+a-1}{x+a} = 1 - \frac{1}{x+a}$.

Βάσει τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου ἡ ἐξίσωσις γράφεται (μετὰ τὰς ἀναγωγὰς)

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+6}$$

ἢ ἀκόμη

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} \quad \eta \quad \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x^2+13x+42}.$$

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν $x^2+5x+6=x^2+13x+42$ καὶ $x=-9/2$, τιμὴν μὴ μηδενίζουσαν, οὐδένα παρονομαστήν τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-606. Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \quad \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{2(5x-39)}{3x-24},$$

$$\beta) \quad \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{x}{3}, \quad \gamma) \quad \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}.$$

B-607. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6},$$

$$\beta) \quad \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-5}{x-6} + \frac{x-2}{x-3}, \quad \gamma) \quad \frac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10} = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2.$$

B-608. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 0, \quad \beta) \quad \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{14}{x-3} - \frac{9}{x-2}.$$

$$\gamma) \quad \frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)}.$$

A-609. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}} + \frac{\frac{1}{1+x}}{1-x} + \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}} + \frac{3}{2x} = 0,$$

$$\beta) \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) = \frac{\left(x-3 + \frac{5x}{2x-6} \right) \frac{3x}{2}}{2x-1 + \frac{15}{x-3}}.$$

B-610. Να λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \frac{\alpha}{\alpha x - 1} + \frac{\beta}{\beta x - 1} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)x - 1},$$

$$\beta) \frac{x-\alpha}{x-\alpha-1} - \frac{x-\alpha-1}{x-\alpha-2} = \frac{x-\beta}{x-\beta-1} - \frac{x-\beta-1}{x-\beta-2}.$$

B 611. Να λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha) \frac{1}{(x+\alpha)^2 - \beta^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{x^2 - \alpha + \beta} + \frac{1}{x^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

$$\beta) \frac{x+\alpha}{x-\alpha} + \frac{x+2\alpha}{x-2\alpha} = \frac{x-2\alpha}{x+2\alpha} + \frac{x-\alpha}{x+\alpha}.$$

§ 162. Κλασματικάι ἀνισώσεις. α') Μία ἀνίσωσις λέγεται κλασματική ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x , ὅταν τὰ μέλη τῆς εἶναι ρητὰ κλασματικάι παραστάσεις τοῦ x , (δηλ. ὁ ἄγνωστος x ἐμφανίζεται εἰς τὸν παρονομαστήν).

Ἐὰν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς κλασματικῆς ἀνισώσεως εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἀναγῶμεν πάντα τὰ κλάσματα εἰς ἓνα (καθιστῶντες αὐτὰ ὁμόνυμα) τότε ἡ ἀνίσωσις λαμβάνει μίαν τῶν μορφῶν:

$$(1) \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{ἢ} \quad (1') \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

ὅπου $A(x)$ καὶ $B(x)$ ἀκέραιαι παραστάσεις ὡς πρὸς x .

Ἡ ἀνίσωσις (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$(2) \quad A(x) \cdot B(x) > 0.$$

Διότι ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1) τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ παραστάσεις $A(x)$ καὶ $B(x)$ εἶναι ὁμόσημοι καὶ συνεπῶς ἔχουν γινόμενον θετικόν, ἥτοι $A(x) \cdot B(x) > 0$. Ἀντιστρόφως, ἂν $A(x) \cdot B(x) > 0$ τότε αἱ παραστάσεις $A(x)$ καὶ $B(x)$ εἶναι ὁμόσημοι καὶ συνεπῶς ἔχουν πηλίκον θετικόν, δηλ. $A(x)/B(x) > 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ (1') ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν

$$(2') \quad A(x) \cdot B(x) < 0.$$

Οὕτω, ἀναγόμεθα εἰς ἀνίσωσιν τῆς μορφῆς (2) ἢ (2') ὅχι κλασματικήν. Ἐἰς τὴν ἀπλοποίησιν αὐτῆς ἀπὸ τῶν ποσότητων $A(x)$ καὶ $B(x)$ πολλαπλασιαστικῶς, ἀναγόμεθα εἰς ἀνίσωσιν τῆς μορφῆς (2) ἢ (2') ὅχι κλασματικήν. Ἐἰς τὴν ἀπλοποίησιν αὐτῆς ἀπὸ τῶν ποσότητων $A(x)$ καὶ $B(x)$ πολλαπλασιαστικῶς, ἀναγόμεθα εἰς ἀνίσωσιν τῆς μορφῆς (2) ἢ (2') ὅχι κλασματικήν.

τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παρὰ γόντων τότε μεταπίπτωμεν εἰς ἀνίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$(x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\sigma)(x-\tau) > 0 \quad \eta \quad < 0 \quad (\beta\lambda. \S 136).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. «Νὰ λυθῇ ἡ ἀνίσωσις

$$\frac{x+2}{3x+1} < \frac{x-2}{2x-1} ».$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται

$$\frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1} < 0 \quad \eta \quad \frac{(x+2)(2x-1) - (x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} < 0 \quad \eta \quad \frac{-x^2+8x}{(3x+1)(2x-1)} < 0.$$

Οὕτω ἐφθάσαμεν εἰς τὴν μορφήν $A(x)/B(x) < 0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνίσωσιν $(-x^2+8x)/(3x+1)(2x-1) < 0$ ἢ $-x(x-8)/(3x+1)(2x-1) < 0$ ἢ τὴν

$$(x-0)(x-8) \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$$

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	8	$+\infty$
+	+	-	+	-	+

Αἱ ρίζαι τοῦ πρώτου μέλους εἶναι: $0, 8, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Ταύτας γράφομεν κατὰ σειρὰν μεγέθους ἐπ' εὐθείας καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς προηγούμενα παραδείγματα εὐρίσκομεν ὅτι τὸ γινόμενον $(x-0)(x-8)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ εἶναι θετικὸν εἰς τὰ ὑπογραμμισμένα διαστήματα: $x < -\frac{1}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 8$, τὰ ὁποῖα καὶ ἀποτελοῦν πάσας τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἀνίσωσεως.

2. «Νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x καὶ νὰ διερευνηθῇ ὡς πρὸς λ ἡ ἀνίσωσις :

$$(1) \quad \frac{\lambda x}{\lambda-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4} ».$$

Λύσις. Ἡ ἀνίσωσις εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x · ἐπειδὴ ὅμως περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν τὸ γράμμα λ τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται δεδομένος μὲν ἀριθμὸς ἀλλὰ δυνάμενος νὰ λάβῃ ποικίλας τιμὰς (ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐκάστοτε ἐξαρτᾶται ἡ λύσις) διὰ τοῦτο προκειμένου νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς θὰ ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὰς κλασματικὰς ἀνίσωσεις.

Λαμβάνομεν δηλαδὴ διαδοχικῶς τὰς ἰσοδύναμους πρὸς τὴν ἀρχικὴν ἀνίσωσεις :

$$\frac{\lambda x}{\lambda-2} - \frac{x-1}{3} - \frac{2x+3}{4} < 0 \quad \eta \quad \frac{12\lambda x - 4(\lambda-2)(x-1) - 3(\lambda-2)(2x+3)}{12(\lambda-2)} < 0$$

$$\eta \quad \frac{12\lambda x - 4(\lambda-2)x + 4(\lambda-2) - 6(\lambda-2)x - 9(\lambda-2)}{\lambda-2} < 0 \quad \eta \quad \frac{(2\lambda+20)x - 5(\lambda-2)}{\lambda-2} < 0$$

$$\eta \quad (\lambda-2)\{(2\lambda+20)x - 5(\lambda-2)\} < 0 \quad \eta \quad 2(\lambda-2)(\lambda+10)x - 5(\lambda-2)^2 < 0,$$

ἢ, τελικῶς

$$(2) \quad 2(\lambda-2)(\lambda+10)x < 5(\lambda-2)^2.$$

Διακρίνομεν τώρα τρεῖς περιπτώσεις :

Φημισμένη ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

i) $(\lambda-2)(\lambda+10) > 0$. Τότε διαιρούντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς (3) διὰ τοῦ (θετικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ x λαμβάνομεν :

$$x < \frac{5(\lambda-2)^2}{2(\lambda-2)(\lambda+10)}.$$

Ἦτοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ (1) πληροῦται διὰ

$$x < \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)}.$$

ii) $(\lambda-2)(\lambda+10) < 0$. Τότε διαιρούντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς (2) διὰ τοῦ (ἀρνητικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ x λαμβάνομεν

$$x > \frac{5(\lambda-2)^2}{2(\lambda-2)(\lambda+10)}.$$

Ὡστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀνίσωσις ἀληθεύει διὰ

$$x > \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)}.$$

iii) $(\lambda-2)(\lambda+10) = 0$. Τοῦτο συμβαίνει διὰ $\lambda=2$ ἢ $\lambda=-10$. Διὰ $\lambda=2$ δὲν ἔχει νόημα ἡ δοθεῖσα (διότι μηδενίζεται εἰς παρονομαστής). Διὰ $\lambda=-10$ ἡ (3) καθίσταται

$$0 \cdot x < 5 \cdot 12^2$$

καὶ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x (διότι καθίσταται $0 < 5 \cdot 12^2$).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἔχομεν διαφόρους ἀπαντήσεις εἰς τὸ τεθὲν πρόβλημα διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς «παραμέτρου» λ .

β') **Παράμετρος.** Γενικῶς, ἂν μία ἐξίσωσις ἢ ἀνίσωσις περιέχῃ ἐκτὸς τοῦ ἀγνώστου καὶ ἐν ἄλλο γράμμα λ τὸ ὁποῖον χωρὶς νὰ δίδεται ἀριθμητικῶς, θεωρεῖται ὡς γνωστὴ ποσότης, τότε τὸ γράμμα τοῦτο λ , λέγεται παράμετρος τῆς ἐξίσωσεως ἢ τῆς ἀνίσωσεως. Ἡ λύσις ἐξαρτᾶται τότε ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς παραμέτρου καὶ ἐνδέχεται ἡ μορφή τῆς λύσεως ν' ἀλλάξῃ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου.

Σημειώσεις 1η. Αἱ περιπτώσεις i) καὶ ii) δύνανται ν' ἀναλυθοῦν περαιτέρω. Ὡτ' ἡ ἀνισότης i) δύνανται νὰ λυθῇ ὡς πρὸς λ ὁπότε δίδει $\lambda < -10$ ἢ $\lambda > 2$. Ἐπίσης ἡ ἀνισότης ii) λυομένη ὡς πρὸς λ δίδει $-10 < \lambda < 2$. Κατόπιν τούτων δυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν πίνακα λύσεων δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ , ὡς τὸν κάτωθι :

$$\text{Διὰ } -\infty < \lambda < -10 \dots x < \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)} \quad (\text{Περίπτ. i}).$$

$$\text{Διὰ } \lambda = -10 \dots \text{ἀληθεύει διὰ πᾶν } x \quad (\text{Περίπτ. iii}).$$

$$\text{Διὰ } -10 < \lambda < 2 \dots x > \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)} \quad (\text{Περίπτ. ii}).$$

$$\text{Διὰ } \lambda = 2 \dots \text{δὲν ἔχει νόημα} \quad (\text{Περίπτ. iii}).$$

$$\text{Διὰ } 2 < \lambda < +\infty \dots x < \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)} \quad (\text{Περίπτ. i}).$$

Αί τιμαί $\lambda = -10$ καί $\lambda = 2$ λέγονται καί συνοριακαί τιμαί τοῦ λ διότι εὑρίσκονται εἰς τὰ σύνορα τῶν διαδοχικῶν διαστημάτων.

Σημείωσις 2α. Θὰ ἡδυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς ἀνωτέρω ἀνισώσεως (1) **πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ὅχι ἐπὶ $3.4(\lambda - 2)$** (τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζομεν ἂν εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν), ἀλλ' ἐπὶ **$3.4(\lambda - 2)$** , ὁπότε ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος διατηρεῖται. Κατόπιν προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-612. Νὰ λυθοῦν αἱ κλασματικαὶ ἀνισώσεις

$$i) \quad \frac{7x-9}{2x-1} < 1 \quad ii) \quad \frac{-4}{3x+1} > \frac{3}{2-x}.$$

B-613. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνίσωσις

$$\frac{9}{(2x-5)^2} > \frac{25}{(2x-3)^2}.$$

B-614. Νὰ λυθῇ ἡ διπλῇ ἀνίσωσις

$$-1 < \frac{10x^2-3x-2}{(x-1)(x-2)} < 1.$$

B-615. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαί τοῦ x αἱ πληροῦσαι τὴν σχέσιν :

$$\begin{aligned} \{ (4x^2-1)(x+2)^2 / x^3(x+1)(x-2)^5 \} &\geq 0 \\ \text{ἢ τὴν} \quad \frac{2x^2-4x+3}{(x+2)(x-3)} &\leq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A-616. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισώσεις

$$a) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{2}{x+2} \quad b) \quad \frac{1}{x(x-1)(x+2)} > \frac{1}{x^2(x+3)}.$$

B-617. Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν ὡς πρὸς τὴν παράμετρον λ αἱ ἀνισώσεις

$$a) \quad \frac{\lambda x+1}{3} + \frac{4\lambda-x}{2} < \frac{\lambda^2}{6}, \quad b) \quad \frac{2x-1}{\lambda+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(\lambda+1)}.$$

B-618. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἀνίσωσις

$$\lambda(\lambda x-5) < 4x-5$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος καὶ λ , παράμετρος.

B-619. Νὰ λυθοῦν ὡς πρὸς x αἱ ἀνισώσεις

$$\mu \frac{x+1}{x-1} > 1, \quad \left(\frac{x+\alpha}{x+\beta} \right)^2 < \frac{x^2+\alpha^2}{x^2+\beta^2} \quad (\alpha \neq \beta).$$

B-620. Νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x ἡ ἀνίσωσις

$$\frac{\mu x + \nu}{\alpha + \beta} - \frac{\pi x + k}{\alpha - \beta} < \frac{\mu x - \nu}{\alpha - \beta} + \frac{\pi x - k}{\alpha + \beta}.$$

B-621. $\exists x \in \mathbb{P}$, $\frac{1}{2+|x|} < \frac{3}{4+|x-3|}$ ἢ $\frac{x}{|x|-1} < \frac{5}{3}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

Ἄρρητοι Ἀλγεβρικάι παραστάσεις

§ 163. Ρίζαι πραγματικῶν ἀριθμῶν.—α') «Ἐὰν ὑπάρχη πραγματικὸς ἀριθμὸς β, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστήν δύναμιν (ν φυσικὸς ἀριθμὸς), γίνεται ἴσος πρὸς δοθέντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α, δηλ. ἂν $\beta^n = \alpha$, τότε ὁ β λέγομεν ὅτι εἶναι μία νυοστή ρίζα τοῦ α. Ἐὰν $n=2$ ὁ β εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α. Ἐὰν $n=3$ ὁ β εἶναι μία κυβικὴ ρίζα τοῦ α».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Ὁ 2 εἶναι μία κυβικὴ ρίζα τοῦ 8, διότι $2^3=8$.

2. Ὁ -2 εἶναι μία πέμπτη ρίζα τοῦ -32 , διότι $(-2)^5=-32$.

3. Ὁ -3 εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $+9$, διότι $(-3)^2=+9$.

4. Ὁ $+3$ εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $+9$, διότι $(+3)^2=+9$.

5. Ὁ -2 εἶναι μία τετάρτη ρίζα τοῦ 16, διότι $(-2)^4=16$.

6. Ὁ 2 εἶναι μία τετάρτη ρίζα τοῦ 16, διότι $(2)^4=16$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων γίνεται φανερόν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῆς μιᾶς νυοστῆς πραγματικὰς ρίζας.

Ὑπάρχουν καὶ ἀριθμοὶ οἱ ὅποιοι δὲν ἔχουν καμμίαν πραγματικὴν νυοστήν ρίζαν. Π.χ. δὲν ὑπάρχει τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -16 , διότι πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἢ μηδέν καὶ συνεπῶς δὲν δύναται νὰ δώσῃ τὸν -16 . Γενικῶς :

«Ἐὰν ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ὁ ν ἄρτιος, τότε οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, δυνάμενος νὰ χρησιμεύσῃ ὡς νυοστή ρίζα τοῦ α».

Διότι, πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἄρτιαν δύναμιν καθίσταται θετικὸς ἢ μηδέν καὶ συνεπῶς οὐδέποτε θὰ παρεῖχε τὸν ἀρνητικὸν α.

Μόνον ὅταν ἐπεκταθῇ τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς νέων ἀριθμῶν, τῶν καλουμένων μιγαδικῶν, θὰ δυνηθῶμεν νὰ ἐξετάσωμεν καὶ τοιαύτας νυοστὰς ρίζας, αἱ ὅποιοι δὲν ὑπάρχουν μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πρὸς τὸ παρὸν θὰ περιορισθῶμεν εἰς τοιαύτας τιμὰς τοῦ α καὶ τοῦ ν διὰ τὰς ὁποίας, μία τουλάχιστον (πραγματικὴ) νυοστή εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν.

β') Διὰ τὰ ἔχωμεν ἱκανοποιητικὸν συμβολισμὸν τῶν ριζῶν εἰσάγω-
μεν τὸν ἐπόμενον ὅρισμόν.

«Ἐὰν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς α ἔχει μίαν νυοστήν ρίζαν ἢ
ὁποία εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν, ἡ ρίζα αὕτη λέγεται πρωτεύουσα
νυοστή ρίζα τοῦ α .

Ἐὰν ὁ α δὲν ἔχει θετικὴν νυοστήν ρίζαν ἀλλὰ ἔχει μίαν ἄρ-
νητικὴν νυοστήν ρίζαν τότε ἡ ἀρνητικὴ νυοστή ρίζα καλεῖται
πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α .

Ἡ πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμ-
βόλου $\sqrt[n]{\alpha}$ ἢ διὰ τοῦ $\sqrt[n]{\alpha}$ διὰν $n=2$ ».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 7. Ἐχομεν, π.χ. $\sqrt{25}=5$. Σημειωτέον ὅτι ἡ $\sqrt{25}$ δὲν
ἰσοῦται μὲ -5 , ἂν καὶ ὁ -5 εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25, (ὄχι ὁμως
ἡ πρωτεύουσα σύμφωνα μὲ τὸν ὅρισμόν β'). Ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν
τὴν ἀρνητικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 25 τότε προτάσσομεν τὸ σημεῖον πλην.
Γράφομεν, δηλ. — $\sqrt{25}=-5$.

* 8. $\sqrt[3]{-8}=-2$. 9. $\sqrt[4]{81}=3$. 10. — $\sqrt[4]{81}=-3$. 11. $\sqrt[3]{64}=4$. 12. $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[n]{\alpha}$ τὸ σύμβολον $\sqrt[n]{}$ λέγεται ριζικόν, ὁ
ν δείκτης τῆς ρίζης καὶ τὸ α ὑπόρριζον. Ἡ παράστασις $\sqrt[n]{\alpha}$
χωρὶς τὸν δείκτην 2 ἀναγεγραμμένον ἐκφράζει τὴν πρωτεύουσαν τε-
τραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α .

γ') Ἡ ὑπαρξὶς τῆς νυοστῆς ρίζης. Ἀποδεικνύεται ὅτι δοθέντος
οἰοῦντοθε θετικοῦ ἀριθμοῦ α , ὑπάρχει πάντοτε εἷς καὶ μόνος ἄλλος
θετικὸς β , ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστήν παρέχει τὸν α . Ὁ β δύ-
νεται νὰ εἶναι σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει,
λέγομεν ὅτι ἡ νυοστή ρίζα τοῦ α ἐξάγεται ἀκριβῶς, ἢ ὅτι ὁ α
εἶναι τελεία νυοστή δύναμις. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει
καθ' ἣν ὁ β εἶναι ἀσύμμετρος, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς $\sqrt[n]{\alpha}$ εἶναι γνω-
στὴ μόνον κατὰ προσέγγισιν.

Ὡστε, ἐὰν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ ὁ n τυχὼν φυσικὸς, ἡ $\sqrt[n]{\alpha}$
ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓνας ὠρισμένος θετικὸς ἀριθμὸς σύμμετρος ἢ
ὄχι, (καθ' ὅσον ὁ α εἶναι τελεία νυοστή δύναμις ἢ ὄχι).

Ἐὰν ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ὁ n περιττός, τότε ὑπάρχει εἷς καὶ
μόνον πραγματικὸς ἀριθμὸς β καὶ μάλιστα ἀρνητικὸς, ὅστις ὑψόμε-
νος εἰς τὴν νυοστήν μᾶς δίδει τὸν α .

Δηλ. ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ n περιττός, τότε ὑπάρχει μὴ τελευτῶσα κα-

θωρισμένος ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος, (καθ' ὅσον ὁ α εἶναι τελεία δύναμις ἢ ὄχι).

Δὲν ὑπάρχει πραγματικὴ νυοστή ρίζα τοῦ α , μόνον ὅταν $\alpha < 0$ καὶ n ἄρτιος.

Οὕτω π.χ., ἡ $\sqrt[5]{7}$, ἡ $\sqrt[3]{10}$, ὑπάρχουν, εἶναι θετικὰ καὶ μάλιστα ἀσύμμετροι (βλ. § 56). Ἡ $\sqrt[5]{-20}$, ὑπάρχει, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ μάλιστα ἀσύμμετρος. Ἡ τετάρτη ρίζα τοῦ -5 δὲν ὑπάρχει (ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

Τ' ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὰς ἐξῆς ιδιότητας τοῦ συμβόλου $\sqrt[n]{\alpha}$:

Πάντοτε ἰσχύει ὅτι $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς νυοστής ρίζης τοῦ α .

Ἐὰν $\alpha > 0$, τότε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n εἶναι $\sqrt[n]{\alpha} > 0$, (βλ. καὶ παραδείγματα, 7, 9, 11).

Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ n περιττὸς τότε $\sqrt[n]{\alpha} < 0$, (βλ. καὶ παραδείγματα 8, 12).

Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ n ἄρτιος τότε τὸ σύμβολον $\sqrt[n]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

δ') **Ἐνδιαφέρουσα ἰσότης.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν α ἰσχύει:

$$\sqrt[n]{\alpha^2} = |\alpha|.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-622. Γράψατε συμβολικῶς καὶ εὑρετε τὰς ἐπομένους πρωτεύουσας ρίζας: Τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ -27 , τὴν τετάρτην ρίζαν τοῦ 16 , τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $\frac{1}{25}$, τὴν ἑκτὴν ρίζαν τοῦ 64 , τὴν πέμπτην ρίζαν τοῦ $-\frac{1}{243}$.

A-623. i) Εὑρετε τὰς (πρωτεύουσας) ρίζας: $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt[3]{64/27}$, $\sqrt[3]{-0,125}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[4]{16/81}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[5]{-243/32}$, $\sqrt[n]{(-\theta)^n}$, ὅπου n ἄρτιος καὶ θ θετικὸς.

ii) Εὑρετε ὅλας τὰς πραγματικὰς τετάρτας ρίζας ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν 81 , $625/16$, $0,0256$.

A-624. Ἀφαιρούμενη ἀπὸ τοῦ νοσηρίου τοῦ Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\sqrt[3]{121} - \sqrt[3]{1000} + \sqrt[4]{256} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-a^3} + \sqrt[4]{a^4} \quad (a > 0).$$

A-625. Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι δυνάμεις :

$$(\sqrt[3]{19})^2, (\sqrt[3]{-7})^3, (\sqrt[4]{8})^4, (\sqrt[5]{-8})^5, (-\sqrt[3]{11})^3, (-\sqrt[4]{7})^4, (-\sqrt[5]{-8})^5.$$

A-626. Ἀποδείξατε ὅτι, ἂν α τυχὼν πραγματικὸς καὶ ν ἄρτιος,

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

§ 164. Ἰδιότητες τῶν ριζῶν μὲ θετικὰ ὑπόρριζα. Θὰ

ἐξετάσωμεν τώρα, περαιτέρω ἰδιότητας τοῦ συμβόλου $\sqrt[n]{a}$ (= πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α) τὸ ὁποῖον ὠρίσθη εἰς τὴν § 163.

Ὑποθέτοντες τὰ ὑπόρριζα θετικὰ καὶ τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν τυχόντας φυσικοὺς ἀριθμοὺς θὰ δεῖξωμεν τὰς κάτωθι 6 ἰδιότητες (νόμους τῶν ριζῶν) οἱ ὁποῖοι διέπουν τὰς πράξεις μετὰ τῶν ριζῶν.

i) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. Ἦτοι: «Ρίζα ρίζης ἰσοῦται μὲ ρίζαν ἔχουσαν δείκτην τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν καὶ ὑπόρριζον τὸ αὐτό».

ii) $\theta \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\theta^n \cdot a}$, ὅπου $\theta > 0$. Ἦτοι: «Θετικὸς παράγων εὐ- ρισκόμενος πρὸ τοῦ ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ὑπὸ τὸ ριζικὸν ἀφοῦ ὑψωθῇ εἰς ἣν δύναμιν δεικνύει ὁ δείκτης».

Ἡ ἄλλως: «Παράγων εὐρυσκόμενος ὑπὸ τὸ ριζικὸν δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης του διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτη τῆς ρίζης».

iii) $\sqrt[n]{a^{\mu}} = \sqrt[n]{a^{\mu p}}$, (ρ φυσικός). Ἦτοι: «Ἡ ἀξία τῆς ρίζης δὲν βλάπτεται ὅταν δείκτης καὶ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου πολλαπλα- σιασθῶν ἢ διαιρεθῶν μὲ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμόν».

iv) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} \cdot \sqrt[n]{\gamma} = \sqrt[n]{a\beta\gamma}$. Ἦτοι: «Τὸ γινόμενον ἰσοβαθμίων ριζῶν (δηλ. ἔχουσῶν τὸν αὐτὸν δείκτην) ἰσοῦται μὲ ρίζαν ἔχου- σαν τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ὑπόρριζον τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων».

v) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}}$. Ἦτοι: «Τὸ πηλίκον δύο ἰσοβαθμίων ρι- ζῶν ἐκφράζεται μὲ ρίζαν ἔχουσαν τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ὑπόρ- ριζον τὸ πηλίκον τῶν ὑπορρίζων».

Ἡ ἄλλως: «Ἡ νυοστή ρίζα κλάσματος ἰσοῦται μὲ τὴν νυο- στήν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς νυοστής ρίζης τοῦ παρονο- μαστοῦ» (Φυσικὰ, λυμβάνονται πάντοτε εἰς πρωτεύουσαι ρίζαι).

vi) $(\sqrt[n]{\alpha})^p = \sqrt[n]{\alpha^p}$. "Ητοι: «*Πίξα ύψοῦται εἰς δύναμιν ἂν τὸ ὑπόρριζον ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην*».

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις καὶ τῶν 6 νόμων στηρίζεται εἰς τὸ ἔξῃς λήμμα :

«Ἐὰν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β , ὑψούμενοι ἕκαστος εἰς τὴν λ , (λ φυσικὸς) δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι».

Πράγματι, ἂν ᾖτο $\alpha < \beta$, τότε θὰ ᾖτο καὶ $\alpha^\lambda < \beta^\lambda$ (βλ. § 98, νι πόρισμα 1^{ον}), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $\alpha^\lambda = \beta^\lambda$. Ὁμοίως, δὲν δύναται νὰ εἶναι $\alpha > \beta$. Ἐπομένως $\alpha = \beta$.

Κατόπιν τούτου, διὰ νὰ δεῖξωμεν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας **i)** ἕως **vi)**, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο (θετικὰ) μέλη ἑκάστης εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἴδιο ἐξαγόμενον.

Οὕτω, ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς **i)** εἰς τὴν δύναμιν μν. Τὸ πρῶτον μέλος γίνεται διαδοχικῶς :

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left\{\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}}\right)^\mu\right\}^\nu = \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^\nu = \alpha.$$

(Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ρίζης, εἶναι $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$).

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς **i)** ὑψούμενον εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν γίνεται $(\sqrt[n]{\alpha})^{\mu\nu} = \alpha$, δηλ. ὅσον ἔγινε καὶ τὸ πρῶτον. Ὡστε τὰ δύο μέλη τῆς **i)** εἶναι ἴσα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς **ii)** ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς εἰς τὴν ν.ρ νυοστήν :

$$\begin{aligned} (\theta \sqrt[n]{\alpha})^\nu &= \theta^\nu \cdot (\sqrt[n]{\alpha})^\nu = \theta^\nu \alpha \\ (\sqrt[n]{\theta^\nu \alpha})^\nu &= \theta^\nu \alpha \end{aligned}$$

καὶ ὥς βλέπομεν καθίστανται ἴσα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς **iii)**, ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς εἰς τὴν ν.ρ

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{\alpha^\mu}\right)^{\nu\rho} &= \left\{\left(\sqrt[n]{\alpha^\mu}\right)^\nu\right\}^\rho = (\alpha^\mu)^\rho = \alpha^{\mu\rho}, \\ \left(\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} &= \alpha^{\mu\rho} \end{aligned}$$

καὶ λαμβάνομεν ἴσα ἐξαγόμενα.

Ἡ **iv)** καὶ **v)** ἀποδεικνύονται δι' ὑψώσεως τῶν μελῶν των εἰς τὴν νυοστήν. Ἡ ἀπόδειξις ἀπὸ τοῦ ἴσχυρου ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^p = \underbrace{\sqrt[p]{\alpha} \sqrt[p]{\alpha} \dots \sqrt[p]{\alpha}}_{p \text{ φορές}} = \sqrt[p]{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha} = \sqrt[p]{\alpha^p}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $\alpha > 0$, $\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^6}} = \sqrt[6]{\alpha^6} = \alpha$. (ιδιότη. i),

$\sqrt[9]{8\alpha} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \alpha} = 2\sqrt[3]{\alpha}$ (ιδιότη. ii), $\sqrt{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$ (ιδιότη. iii),

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$ (ιδιότη. iv)

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ (ιδιότη. v),}$$

$$\left(\sqrt[3]{3a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{(3a^2)^6} = \sqrt[3]{3^6 a^{12}} = \sqrt[3]{3^6} \sqrt[3]{a^{12}} = 3^2 \cdot a^4 = 9a^4 \text{ (ιδιότη. vi, iv).}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-627.—'Απλουστεύσατε τὰ γινόμενα

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3}, \sqrt{5} \times \sqrt{3}, \sqrt{3} \times \sqrt{8}, \sqrt{5} \times \sqrt{12}, \sqrt{12} \times \sqrt{2}.$$

A-628.—'Υπολογίσατε τὰ γινόμενα

$$\sqrt{11} \times \sqrt{11}, \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}, \sqrt{14} \times \sqrt{56}, \sqrt{21} \times \sqrt{6} \times \sqrt{14}.$$

A-629.—'Υπολογίσατε τὰ γινόμενα

$$\sqrt{\frac{2}{7}} \times \sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{7}{5}}, \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{15} \times \sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{72} \times \sqrt{\frac{2}{9}}.$$

A-630. 'Υπολογίσατε τὸ γινόμενον

- i) $\sqrt{\alpha^2 \beta} \sqrt{\alpha \beta^2} \sqrt{\alpha^2 \beta^2}$ ὅπου $\alpha > 0, \beta > 0$, και τὸ
 ii) $\sqrt{x^2(x-1)} \cdot \sqrt{(x-1)^2} \cdot \sqrt{x^6}$ ὅπου $x > 1$.

A-631. 'Απλοποιήσατε τὰ κλάσματα

$$\frac{\alpha\sqrt{x} + x\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}}, \quad \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha}} \quad (\alpha, \beta, x \text{ θετικά}).$$

A-632. 'Εκτελέσατε τὰς πράξεις και ἀπλουστεύσατε :

$$\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\right)^5, \left(\sqrt[3]{\alpha^4}\right)^3, \left(\sqrt[5]{\alpha^6}\right)^{15}, (\sqrt{x^3})^{12}, \left(\sqrt[3]{\alpha^v}\right)^3, (\sqrt{x^4})^{2v}, \left(\sqrt[5]{x^k}\right)^{2v}, \left(\sqrt[5]{\alpha^k}\right)^{vm}.$$

A-633. 'Εκτελέσατε τὰς πράξεις και ἀπλουστεύσατε

$$\left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^2, \left(\sqrt[3]{x^2}\right) \cdot \sqrt[3]{x}, \left(\sqrt[5]{y}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{y^2}\right)^6.$$

A-634. 'Εκτελέσατε τοὺς πολλαπλασιασμοὺς

$$\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right)^2, \left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}\right), \left(\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{27}\right) \left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right).$$

§ 165. 'Αρνητικὰ ὑπόρριζα. 'Εὰν ν περιττός και θ θετικός, ἰσχύη ἡ ἰσότης

$$(1) \quad \sqrt[\nu]{-\theta} = -\sqrt[\nu]{\theta}$$

δηλ. τὸ πρόσημον πλήν, ἐξέρχεται ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ ὅταν ὁ δείκτης εἶναι περιττός. Πράγματι, τὰ δύο μέλη τῆς (1) εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ οἵτινες ὑφούμενοι εἰς τὴν περιττὴν δύναμιν n καθίστανται ἴσοι. Συνάγεται εὐκόλως ἐκ τούτου ὅτι εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.

Βάσει τῆς (1), πράξεις μεταξὺ ριζῶν με ἀρνητικὰ ὑπόρριζα ἀνάγονται εἰς πράξεις μεταξὺ ριζῶν με θετικὰ ὑπόρριζα.

$$\text{Οὕτω π.χ.} \quad \sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{42},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[9]{2}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἀνεξαρτήτως ὅμως τούτου, πᾶσαι αἱ ιδιότητες **i**) ἕως **vi**) τῆς § 164 ἰσχύουν καὶ δι' ἀρνητικὰ ὑπόρριζα ὑπὸ τὸν ὅρον, τὰ δύο μέλη ἐκάστης ἰσότητος νὰ ἔχουν ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ εἶναι ὁμόσημα.

Οὕτω, π.χ., ἡ τιμὴ τῆς ρίζης $\sqrt[5]{(-7)^3}$ δὲν βλάπτεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν δείκτην καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου με 3 (ιδιότης **iii**), ἐνῶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2 μεταβάλλεται. Δηλ. :

$$\sqrt[5]{(-7)^3} = \sqrt[15]{(-7)^9}, \quad \text{ἐνῶ} \quad \sqrt[5]{(-7)^3} \neq \sqrt[10]{(-7)^6}.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν αἱ δύο παραστάσεις δὲν εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί.

§ 166. Ἐφαρμογαὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ριζῶν. α') Πολλαπλασιασμός ἀνισοβαθμίων ριζῶν. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀνισοβαθμίους ρίζας τὰς τρέπομεν πρῶτον εἰς ἰσοβαθμίους βάσει τῆς ἰδιότητος **iii**) τῆς § 164. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν δείκτην καὶ ἐκθέτην ἐκάστης ρίζης ἐπὶ κατάλληλον ἀκέραιον, ὥστε πάντες οἱ δείκται νὰ καταστοῦν ἴσοι. Ἀκολουθῶντες ἐφαρμόζομεν τὴν ιδιότητα **vi**).

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1.} \quad \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{b} \cdot \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[12]{a^3} \sqrt[12]{b^2} \sqrt[12]{\gamma^4} = \sqrt[12]{a^3 b^2 \gamma^4}.$$

$$2. \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[4]{8a^3\gamma} = \sqrt[12]{(4a^2b)^4} \sqrt[12]{(8a^3\gamma)^3} = \sqrt[12]{4^4 \cdot a^8 \cdot b^4 \cdot 8^3 \cdot a^9 \cdot \gamma^3} = \\ = \sqrt[12]{2^8 \cdot 2^9 \cdot a^{17} \cdot b^4 \cdot \gamma^3} = 2a\sqrt[2]{2^5 a^5 b^4 \gamma^3}. \quad (\text{Τὰ } a, b, \gamma \text{ ὑποτίθενται θετικά}).$$

β') Διαιρέσεις ἀνισοβαθμίων ριζῶν. Αὕτη γίνεται ὁμοίως.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1.} \quad \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[10]{a}} = \frac{\sqrt[10]{a^2}}{\sqrt[10]{a}} = \sqrt[10]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[10]{a}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \frac{\sqrt[3]{4a^2x} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{2ax} \cdot \sqrt[6]{8a^4x^2}} &= \frac{\sqrt[12]{(4a^2x)^4} \cdot \sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{(2ax)^6} \cdot \sqrt[12]{(8a^4x^2)^2}} = \\
 &= \frac{\sqrt[12]{4^4 \cdot a^8 \cdot x^7}}{\sqrt[12]{2^6 \cdot 8^2 \cdot a^{14} \cdot x^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{4^4 \cdot a^8 \cdot x^7}{2^6 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot a^{14} \cdot x^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2^4 \cdot a^6 \cdot x^3}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt[12]{2^4 \cdot a^6 \cdot x^3}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2^4 a^6 x}}.
 \end{aligned}$$

γ') 'Απλούστευσις μιᾶς ρίζης. Οὕτω καλεῖται ἡ ἀναγωγὴ μιᾶς ρίζης εἰς ἄλλην ἢ ὁποῖα ἐμφανίζει μικρότερον ὑπόρριζον ἢ μικρότερον δείκτην. Ἡ ἀπλούστευσις τῆς ρίζης, ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατὴ, ἐπιτυγχάνεται διὰ τῶν ιδιοτήτων **i**), **ii**) καὶ **iii**) τῆς § 164. Ἐπίσης συντελεῖ εἰς τὴν ἀπλούστευσιν ἡ ἐνδεχομένη μετατροπὴ τοῦ ὑπορρίζου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ } 1. \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 2} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}.$$

$$2. \sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 7} = 3\sqrt[3]{7}.$$

$$3. \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \alpha \sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{4}} \cdot \frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{8}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}}.$$

δ') 'Απλούστευσις διαφορῶν ἀρρήτων παραστάσεων. Πολλὰκις, πολύπλοκοι παραστάσεις μὲ ριζικὰ ἀπλυστεύονται σημαντικῶς μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ριζῶν.

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ } 1. \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

$$2. \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} \cdot \sqrt[10]{\sqrt[4]{a^{19}}} = \sqrt[15]{a^2} \cdot \sqrt[24]{a^9} \cdot \sqrt[120]{a^{19}} = \sqrt[120]{a^{16} a^{45} a^{19}} = \sqrt[120]{a^{80}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$\begin{aligned}
 3. \sqrt[3]{-108} + \sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{-32} - \sqrt[6]{11664} &= -\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{500} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[6]{11664} = \\
 &= -\sqrt[3]{4 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{4 \cdot 5^3} + \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} - \sqrt[6]{4^2 \cdot 3^6} = -3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = \\
 &= (-3+5+2-3)\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}.
 \end{aligned}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-635. N' άπλουστευθοῦν αἱ ρίζαι

$$\sqrt{a^2}, \sqrt{3a^2}, \sqrt{a^3\beta^2}, \sqrt{(x+1)^2x^3}, \sqrt{5a^2m^3}.$$

A 636. N' άπλουστευθοῦν αἱ ρίζαι

$$\sqrt{180}, \sqrt{18}, \sqrt{300}, \sqrt{27}, \sqrt{147}, \sqrt{80}, \sqrt{243}.$$

A 637. N' άπλουστευθοῦν αἱ ρίζαι

$$\sqrt{x^2+2x+1}, \sqrt{x^2+4-4x}, \sqrt{x^2(9x^2+6x+1)}, \sqrt{54(x-y)^3}. \quad (\text{Βλ. § 163, } \delta').$$

A 638. N' άπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3), \quad (4-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}), \\ (4-3\sqrt{3})(1+2\sqrt{3}).$$

B-639. N' άπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$3\sqrt{80}-\frac{1}{3}\sqrt{405}+\frac{2}{7}\sqrt{245}, \quad 5\sqrt{2}+\sqrt{\frac{77}{9}}-3-\frac{1}{11}\sqrt{726} \cdot \sqrt{3}$$

καὶ κατόπιν νά ὑπολογισθοῦν μὲ προσέγγισιν 1/100.

A 640. Ἐκτελέσατε τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{\beta}\right).$$

B-641. Ὑπολογίσατε τὴν παράστισιν $A = (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ἀφοῦ πρῶτον ὑπολογίσατε τὸ A^2 .

A 642. Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις :

$$(3\sqrt{6}+\sqrt{150})(\sqrt{150}-3\sqrt{6}), \quad (3\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{18})(3-\sqrt{12}+\sqrt{27}).$$

A-643. N' άπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}, \quad \sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-125},$$

$$\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{a^5}} \cdot \sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{a^3}} \cdot \sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{a^9}} \cdot \sqrt[\mu]{\sqrt[a]{a}}.$$

A-644. N' άπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2}), \quad \frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-3\sqrt{27}+\sqrt{45}}.$$

B-645. Ἀποδείξατε ὅτι $\sqrt{2}-1=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

A 646. N' άπλουστευθοῦν αἱ ἄρρητοι παραστάσεις

$$\sqrt[3]{27x^8-81x^6y^2}, \quad \sqrt{x^{-4}-3x^{-2}y^2}, \quad \sqrt{4x^{-2}y^4+3y^6},$$

$$\sqrt[5]{729}, \quad \sqrt[3]{\frac{3}{25}}+\sqrt[3]{-120}+\sqrt[3]{\frac{5}{9}}.$$

A 647. N' άπλουσιευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\sqrt[3]{1375}+\sqrt[3]{-88}+\sqrt[3]{0.48}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{12} \sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{108}}, \quad \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{xy}}, \quad \sqrt[3]{2+x^{-3}} : \sqrt[3]{8x^4+4x}.$$

B-648. Ἐάν ἰσχύη ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$, δείξατε ὅτι τότε θὰ ἰσχύη καὶ ἡ $(x+y+z)^3 = 27xyz$.

B-649. Ἄν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ νὰ τεθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (μέσος ἀριθμητικός), $\sqrt{\alpha\beta}$ (μέσος γεωμετρικός) καὶ $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (μέσος ἀρμονικός).

B-650. Δείξατε ὅτι ἂν $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{\Delta}{\delta}$, ὅπου πάντες οἱ ὄροι τῶν κλασμάτων εἶναι θετικοί, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{\Gamma\gamma} + \sqrt{\Delta\delta} = \sqrt{(A+B+\Gamma+\Delta)(a+b+\gamma+\delta)}.$$

B-651. Ἐάν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὴν σχέσιν $xy + yz + zx = 1$, θὰ πληροῦν ἐπίσης καὶ τὴν σχέσιν

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = 2.$$

§ 167. Ρητοποιήσεις τοῦ παρονομαστοῦ. Ἄρρητα ἀλγεβρικά κλάσματα καλοῦνται τὰ περιέχοντα ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς ἓνα τοῦλάχιστον ἐκ τῶν ὅρων των, ὅπως π.χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{2\sqrt{3} + 1}, \quad \frac{1}{\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}, \quad \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Ἐάν ἓνα ἄρρητον ἀλγεβρικὸν κλάσμα περιέχῃ εἰς τὸν παρονομαστὴν ριζικά, ἐπιδιώκομεν τότε νὰ μετατρέψωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς ἄλλο ἴσον, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής νὰ μὴ περιέχῃ ριζικά, δηλ. νὰ εἶναι ρητός. Τοῦτο ἐπιδιώκεται διότι, τὰ κλάσματα μὲ ρητὸν παρονομαστὴν παρουσιάζουν πολλὰ πλεονεκτήματα ἔναντι τῶν ἐχόντων ἄρρητον παρονομαστὴν, τόσον εἰς τὰς πράξεις ὅσον καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., ἡ πρόσθεσις ἀρρήτων κλασμάτων εὐκολύνεται σημαντικῶς ἂν μετατραποῦν οἱ προσθετέοι εἰς κλάσματα μὲ ρητοὺς παρονομαστές καὶ χρησιμοποιηθῇ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ρητῶν παρονομαστῶν.

Ἡ ἐργασία δι' ἧς εὐρίσκομεν κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ἀλλὰ ἔχον παρονομαστὴν ρητὸν, καλεῖται « ρητοποιήσεις » τοῦ παρονομαστοῦ ἢ μετατροπὴ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς ρητὸν.

Μορφαὶ κλασμάτων μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν αἱ συχνότερον παρουσιάζονται εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν, εἶναι αἱ ἐπόμεναι:

1ον. Κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{V\beta \pm V\gamma}$, $\frac{\alpha}{\beta \pm V\gamma}$. Ταῦτα

τρέπονται εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν οἱ δύο ὅροι τῶν ἐπὶ μίαν συζυγῇ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, δηλ. διαφέρουσιν τοῦ παρονομαστοῦ μόνον ὡς πρὸς τὸ πρόσημον τοῦ ἐνὸς ριζικοῦ.

Οὕτω :

$$\frac{\alpha}{V\beta + V\gamma} = \frac{\alpha(V\beta - V\gamma)}{(V\beta + V\gamma)(V\beta - V\gamma)} = \frac{\alpha(V\beta - V\gamma)}{(V\beta)^2 - (V\gamma)^2} = \frac{\alpha(V\beta - V\gamma)}{\beta - \gamma}.$$

$$\frac{\alpha}{V\beta - V\gamma} = \frac{\alpha(V\beta + V\gamma)}{(V\beta + V\gamma)(V\beta - V\gamma)} = \frac{\alpha(V\beta + V\gamma)}{\beta - \gamma}.$$

$$\frac{4}{2-3\sqrt{7}} = \frac{4(2+3\sqrt{7})}{(2-3\sqrt{7})(2+3\sqrt{7})} = \frac{4(2+3\sqrt{7})}{4-63} = -\frac{4(2+3\sqrt{7})}{59}.$$

$$\frac{Vx+y-Vx-y}{Vx+y+Vx-y} = \frac{(Vx+y-Vx-y)(Vx+y-Vx-y)}{(Vx+y+Vx-y)(Vx+y-Vx-y)} =$$

$$\frac{(Vx+y-Vx-y)^2}{(x+y)-(x-y)} = \frac{x+y-2Vx^2-y^2+x-y}{2y} = \frac{x-Vx^2-y^2}{y}.$$

2ον. Κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{V\beta \pm V\gamma \pm V\delta}$. Διὰ τὴν μετατρέψω-

μεν ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῶν ἐπὶ μίαν συζυγῇ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν τοῦ παρονομαστοῦ ἐλαττοῦται καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν 1^{ον}.

Οὕτω :

$$\frac{\alpha}{V\beta + V\gamma + V\delta} = \frac{\alpha(V\beta + V\gamma - V\delta)}{\{(V\beta + V\gamma) + V\delta\} \cdot \{(V\beta + V\gamma) - V\delta\}} =$$

$$= \frac{A}{(V\beta + V\gamma)^2 - (V\delta)^2} = \frac{A}{(\beta + \gamma - \delta) + 2V\beta\gamma}$$

ὅπου ἐτέθη $A = \alpha(V\beta + V\gamma - V\delta)$. Πολλαπλασιάζομεν ἐκ νέου τοὺς ὅρους τοῦ προκύψαντος κλάσματος ἐπὶ τὴν συζυγῇ τοῦ παρονομαστοῦ παράστασιν: $(\beta + \gamma - \delta) - 2V\beta\gamma$ καὶ τοῦτο μετατρέπεται εἰς τὸ :

$$\frac{A(\beta + \gamma - \delta - 2V\beta\gamma)}{[(\beta + \gamma - \delta) + 2V\beta\gamma][(\beta + \gamma - \delta) - 2V\beta\gamma]} = \frac{A(\beta + \gamma - \delta - 2V\beta\gamma)}{(\beta + \gamma - \delta)^2 - 4\beta\gamma}.$$

Οὕτω φθάνομεν τελικῶς εἰς κλάσμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν.

Γενικότερον. Ἐὰν ὁ παρονομαστής εἶναι τῆς μορφῆς

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}$$

πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν παράστασιν

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) - (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}),$$

ὁπότε μεταβαίνομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ἂν ὁ παρονομαστής ἔχῃ 5 ὅρους, κ.ο.κ.

3ον. Κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}$. Ὁ παρονομαστής ρητοποιεῖται ἂν

πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸν παράγοντα $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$. Πράγματι :

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \frac{\alpha \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta} \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}} = \frac{\alpha \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}} = \frac{\alpha \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\beta}.$$

$$\text{Οὕτω : } \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-652. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα :

$$\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

A-653. Νὰ γίνουν ρητοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha + \beta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha} - 1 - \sqrt{2\alpha} + \sqrt{\alpha + 1}}, \quad \frac{\sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{10} - \sqrt{5}}.$$

B-654. Ν' ἀπλουστευθῇ ἐκάστη ἐκ τῶν ταμασιάσεων ;

$$\text{i) } \frac{7}{3 - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \quad \text{ii) } \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}.$$

A-655. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως

$$\sqrt{\frac{4}{(1 - \sqrt{2})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(1 + \sqrt{2})^2}}.$$

B-656. Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν 1/100, τὸν ἀριθμὸν

ἡφιόλουφθηκε ἀπὸ τὸ ἴνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$A = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

A-657. Καταστήσατε ρητὸν τὸν παρονομαστήν τῶν κλασμάτων

$$\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{15}-1}, \quad \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}-\sqrt{5}}, \quad \frac{\sqrt{75}-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

B 658. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$i) \frac{2x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad ii) (2x-3)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 2(x-\sqrt{2})(x-1).$$

B 659. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\frac{x+1}{x-1} = 2 + \sqrt{3}$.

B-660. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\frac{9+\sqrt{75}}{15-7\sqrt{12}} \cdot \frac{13-\sqrt{147}}{5+\sqrt{27}}.$$

B-661. Νά τραποῦν εἰς κλάσματα μὲ ρητὸν παρονομαστήν αἱ παραστάσεις

$$\sqrt[4]{2x + \frac{1}{8x^2y^6}}, \quad \sqrt{\frac{3a^2-a^3}{50x^5}}, \quad \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}, \quad \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}-\sqrt{18}},$$

$$\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{14}}, \quad \frac{3\sqrt{0.1}-2\sqrt{10}}{\sqrt{0.1}+\sqrt{10}},$$

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{2\sqrt{\alpha-\beta}}{3\sqrt{\alpha+\beta}-2\sqrt{\alpha-\beta}} + \frac{3\sqrt{\alpha+\beta}}{3\sqrt{\alpha+\beta}+2\sqrt{\alpha-\beta}}$$

B-662. Δείξατε τὰς ισότητες:

$$i) \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$ii) \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{4}\right)^{-1} - \frac{5+2\sqrt{6}}{4} = 15\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

§ 168. Ἀρρητοὶ συναρτήσεις. α') Ἡ συνάρτησις τετραγωνικὴ ρίζα. Ἐστω $A(x)$ μία ρητὴ ἀλγεβρική παράστασις ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x (§ 158). Ἐὰν εἰς κάθε $x \in \Pi$ καὶ τὸ ὅποῖον καθιστᾷ τὴν $A(x)$ μὴ ἀρνητικὴν, ἀντιστοιχίσωμεν τὴν πρωτεύουσαν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ $A(x)$ τότε κατασκευάζομεν τὴν συνάρτησιν

$$(1) \quad x \in \Pi \rightarrow \sqrt{A(x)} \in \Pi^+$$

(Π = σύνολον πραγματικῶν, Π^+ = σύνολον μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν).

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{A(x)}$ εἶναι τὸ σύνολον ἐκείνων τῶν x γιὰ τοὺς ὁποίους ἡ $A(x)$ εἶναι ἰσχυρὰ θετικὴ: $A(x) \geq 0$

(και οι οποιοι, φυσικα δὲν μηδενίζουν ἐνδεχόμενον παρονομαστήν τῆς $A(x)$). Αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{A(x)}$ ἀνήκουν εἰς τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, (ἐφ' ὅσον δὲν εἶναι μηδέν).

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω, ὁρισθεῖσα συνάρτησις $A(x)$ πληροῖ τὴν σχέσιν :

$$(2) \quad \sqrt{\{A(x)\}^2} = |A(x)|$$

Δυνάμεθα, τώρα νὰ ἐπεκταθῶμεν εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x, y) = \sqrt{A(x, y)}$ ὅπου $A(x, y)$ εἶναι ρητὴ ἀλγεβρική παράστασις. Τὰ x, y πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦτα ὥστε $A(x, y) \geq 0$ ἢ δὲ $f(x, y)$ εἶναι πάντοτε ≥ 0 .

β') **Ἡ συνάρτησις κυβικὴ ρίζα.** Εἰς κάθε x μὴ μηδενίζον ἐνδεχόμενον παρονομαστήν τῆς ρητῆς συναρτήσεως $A(x)$ ἀντιστοιχεῖ μία (καὶ μόνη) πρωτεύουσα κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $A(x)$ (§ 163, γ'). Ἐντεῦθεν κατὰσκευάζεται ἡ συνάρτησις :

$$(3) \quad x \in \Pi \rightarrow \sqrt[3]{A(x)} \in \Pi$$

Ἡ $\sqrt[3]{A(x)}$ εἶναι > 0 ἢ < 0 καθ' ὅσον $A(x) > 0$ ἢ $A(x) < 0$. Τὸ σύνολον τιμῶν τῆς $\sqrt[3]{A(x)}$ δύναται νὰ εἶναι ὁλόκληρον τὸ Π ἢ ἐν ὑποσύνολον αὐτοῦ.

γ') δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν συναρτήσεις τῆς μορφῆς :

$$f(x) = \sqrt[2v]{A(x)} = \text{πρωτεύουσα ρίζα } 2v \text{ τάξεως, τοῦ } A(x) \text{ καὶ}$$

$$\varphi(x) = \sqrt[2v+1]{A(x)} = \text{πρωτεύουσα ρίζα } 2v+1 \text{ τάξεως τοῦ } A(x) \text{ (v, φυσικὸς ἀριθμός).}$$

Τὸ πεδῖον ὁρισμοῦ τῆς $\sqrt[2v]{A(x)}$ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ πεδῖον ὁρισμοῦ τῆς $\sqrt[2v+1]{A(x)}$, τῆς δὲ $\sqrt[3]{A(x)}$ τὸ ἴδιο μὲ τὸ τῆς $\sqrt[3]{A(x)}$. Τὰ σύνολα τιμῶν εἶναι ἐπίσης ὅμοια μὲ τὰ τῶν συναρτήσεων (1) καὶ (3).

δ') Αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις : $\sqrt[3]{A(x)}$, $\sqrt[3]{A(x)}$, ..., $\sqrt[v]{A(x, y)}$, ... λέγονται **ἄρρητοι συναρτήσεις** ἢ **ἄρρητοι ἀλγεβρικοὶ παραστάσεις**. Καὶ πᾶς συνδυασμὸς αὐτῶν μεταξύ των ἢ μὲ ἄλλας ρητὰς παραστάσεις, βάσει τῶν τεσσάρων πράξεων : προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως, λέγεται ἐπίσης «ἄρρητος ἀλγεβρική παράστασις». Π.χ. αἱ συναρτήσεις (ἢ παραστάσεις) :

$$(x^2 + \sqrt{x^2 + x + 1})^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \quad \sqrt[2x]{x^2 + x + 1}$$

$$(x+y) \cdot \sqrt{\frac{x-y}{x+3y}} + \sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{x+y+2x^2+5y+1}$$

είναι ἄρρητοι ἀλγεβρικοί παραστάσεις.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-663. Ἐστω ἡ παράστασις: $y = (x-1)\sqrt{x^2-x^2-x+8}$ ὅπου ξx τυχὼν πραγματικός. i) Εὑρετε διακρίνοντας περιπτώσεις διὰ τὸ x , τὰς διαφοροὺς ἀπλουστέρας μορφὰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράστασις y . ii) Εὑρετε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x , τὸ y μηδενίζεται.

A-664. Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα

$$S = \frac{4x-6y}{x+y} + \frac{4\sqrt{x}-6\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{6x-4y}{x-y} + \frac{4\sqrt{x}+6\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{12xy}{x^2-y^2}.$$

B-665. Καθορίσατε τὰς διαφοροὺς ἀπλουστέρας μορφὰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ ἄρρητος παράστασις

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$$

κατὰ τὰς διαφοροὺς τιμὰς τοῦ x .

A-666. Ἀπλουστεύσατε τὰς παραστάσεις

$$\sqrt{(x-1)^2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}, \quad \sqrt{\frac{a^2(x+2)^2}{25(x+1)^2}}.$$

B-667. N' ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα

$$\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$$

i) ὅταν $x < -2$, ii) ὅταν $x > 2$.

B-668. N' ἀπλοποιηθῇ ἡ ἄρρητος παράστασις

$$\frac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$$

B-669. N' ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα: $\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^4-a^4}{4(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}$ καὶ νὰ λάβῃ τελικῶς μορφήν ἔχουσαν ρητὸν παρονομαστήν.

§ 169. Διώνυμα τῆς μορφῆς $a + \beta\sqrt{\gamma}$. α') Ἐὰν α, β, γ σύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $\gamma > 0$, καὶ ὅχι τέλειον τετράγωνον, ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις $a + \beta\sqrt{\gamma}$ θὰ καλεῖται **διώνυμον** ὡς πρὸς $\sqrt{\gamma}$. Ἡ παράστασις $a - \beta\sqrt{\gamma}$ εἶναι τὸ **συζυγὲς διώνυμον** τοῦ $a + \beta\sqrt{\gamma}$.

Εὐκόλῃ βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον, ὁ κύβος, ἡ τετάρτη δύναμις, ... ἐνὸς διωνύμου ὡς πρὸς $\sqrt{\gamma}$ εἶναι πάλιν ἓνα διώνυμον ὡς πρὸς $\sqrt{\gamma}$:

$$(a + \beta\sqrt{\gamma})^2 = (a^2 + \beta^2\gamma) + 2\alpha\beta\sqrt{\gamma} = A + B\sqrt{\gamma}$$

$$(a + \beta\sqrt{\gamma})^3 = a^3 + 3a^2\beta\sqrt{\gamma} + 3a\beta^2\gamma + \beta^3\gamma\sqrt{\gamma} =$$

$$= (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma) + (3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma)\sqrt{\gamma} = K + \Lambda\sqrt{\gamma}$$

όπου ἐτέθη $A = \alpha^2 + \beta^2\gamma$, $B = 2\alpha\beta$, $K = \alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma$, $\Lambda = 3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma$.

Ἐπίσης βλέπομεν ὅτι ἂν $f(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συν-
μέτρους συντελεστές, τότε οἱ ἀριθμοὶ $f(\alpha + \beta\sqrt{\gamma})$ καὶ $f(\alpha - \beta\sqrt{\gamma})$ εἶ-
ναι συζυγῇ διώνυμα ὡς πρὸς $\sqrt{\gamma}$.

Π.χ. Ἐστω $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$. Ἄς εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς
συναρτήσεως $f(x)$ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς $x = 2 - \sqrt{3}$. Ἐχομεν:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(2 - \sqrt{3}) &= (2 - \sqrt{3})^3 - 5(2 - \sqrt{3})^2 + 2(2 - \sqrt{3}) - 7 = \\ &= 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} - 5(7 - 4\sqrt{3}) + 2(5 - \sqrt{3}) - 7 = \\ &= (8 + 18 - 35 + 10 - 7) - (12 + 3 - 20 + 2)\sqrt{3} = -6 + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $f(2 + \sqrt{3})$ ἀρκεῖ προφανῶς εἰς τὴν ἰσότητα (1)
νὰ τεθῇ ὅπου $\sqrt{3}$ τὸ $-\sqrt{3}$ ὁπότε καὶ εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον δέον
νὰ τεθῇ ὅπου $\sqrt{3}$ τὸ $-\sqrt{3}$. Δηλ.:

$$f(2 + \sqrt{3}) = -6 - 3\sqrt{3}.$$

β') Περὶ τῆς ἰσότητος $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$.

Θεώρημα. «Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί, ἐξ ὧν
οἱ β καὶ δ εἶναι > 0 καὶ ὅχι τέλεια τετράγωνα συμμέτρων, τότε
ἂν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$, θὰ εἶναι $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$ ».

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται

$$\sqrt{\beta} = (\gamma - \alpha) + \sqrt{\delta}$$

καὶ τετραγωνιζομένη δίδει τὴν

$$\beta = (\gamma - \alpha)^2 + \delta + 2(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta} \quad \text{ἥτοι:}$$

$$(1) \quad \beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2 = 2(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta}.$$

Ἐὰν ᾗτο $\gamma - \alpha \neq 0$, θὰ ἐλαμβάνομεν διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς (1) διὰ
 $2(\gamma - \alpha)$, τὴν ἰσότητα

$$\sqrt{\delta} = \frac{\beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2}{2(\gamma - \alpha)}.$$

Δηλ. ἡ $\sqrt{\delta}$ θὰ ᾗτο ἴση πρὸς τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν $\frac{\beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2}{2(\gamma - \alpha)}$

καὶ συνεπῶς τὸ δ θὰ ᾗτο τέλειον τετράγωνον συμμέτρου ἀριθμοῦ· τοῦτο
ὅμως ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἐπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\gamma - \alpha \neq 0$,
μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἀπαράδεκτον ἐξαγόμενον. Ἀποκλειομένης λοιπὸν τῆς πε-
ριπτώσεως $\gamma - \alpha \neq 0$ μένει ὅτι κατ'ἀνάγκην θὰ εἶναι $\gamma - \alpha = 0$, δηλ. $\gamma = \alpha$.

Ἀλλ' ἡ πρώτη ἰσότης ἀπὸ τὸν νοητὸν ἐξισοθεύει καὶ ὁμοεισὶς ὅτι καὶ $\beta = \delta$.

Παρατηρήσεις : 1. Ἐὰν ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις ἰσχύη ὅτι $\alpha - \sqrt{\beta} = \gamma - \sqrt{\delta}$ πάλιν θὰ ἔχωμεν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$. Διότι ἀρκεῖ ν' ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν δύο μελῶν ὁπότε ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

2. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῆς § 69.

Ἐφαρμογή. «Ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$, ὅπου A, B, x, y , σύμμετροι καὶ B καὶ y θετικοί, ὅχι τέλεια τετράγωνα, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ ὑφίσταται καὶ ἡ ἰσότης :

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y}.$$

Ἀπόδειξις. Ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης σχέσεως εἰς τὸν κύβον λαμβάνομεν :

$$A + \sqrt{B} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} = (x^3 + 3xy) + (3x^2 + y)\sqrt{y} \quad \eta$$

$$A + \sqrt{B} = (x^3 + 3xy) + \sqrt{(3x^2 + y)^2 y}$$

ὁπότε χάρις εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ ἰσχύουν ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες :

$$A = x^3 + 3xy, \quad B = (3x^2 + y)^2 y.$$

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} A - \sqrt{B} &= x^3 + 3xy - \sqrt{(3x^2 + y)^2 y} = x^3 + 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y} = \\ &= x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y} = (x - \sqrt{y})^3 \end{aligned}$$

Συνεπῶς
$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-670. Δίδεται ἡ συνάρτησις

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x^2 - 1}$$

Νὰ ὑπολογίσθωσιν οἱ ἀριθμοὶ $f(\sqrt{2} + 1)$ καὶ $f(1 - \sqrt{2})$.

A-671. Ἐὰν $f(x) = x^4 - 4x^2 - 8x - 3$ ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς $f(1 + \sqrt{3})$ καὶ $f(1 - \sqrt{3})$.

A-672. Ἐὰν $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 6$ εὑρετε τὰ $f(3 - \sqrt{3})$, $f(3 + \sqrt{3})$.

A-673. Νὰ δειχθῇ ὅτι, $7 + 4\sqrt{3}$ καὶ $4 + 2\sqrt{3}$ εἶναι τετράγωνα διωνύμων ὡς πρὸς $\sqrt{3}$.

A-674. Δεῖξατε ὅτι $8 + 4\sqrt{3}$, $3 - 2\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{3}$, $28 - 5\sqrt{12}$ εἶναι τετράγωνα διωνύμων τῆς μορφῆς $a \pm \sqrt{b}$.

B-675. Ἐὰν ἰσχύη ἡ ἰσότης $\sqrt{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$, ὅπου A, B, x, y ρητοὶ καὶ B καὶ y θετικοί καὶ ὅχι τέλεια τετράγωνα, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ὁ ἀριθμὸς $A^2 - B$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον συμμέτρου ἀριθμοῦ ὁ δὲ A θὰ εἶναι > 0 . Θὰ ἰσχύη δὲ ἐπὶ πλέον καὶ ἡ ἰσότης

B-676. Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως διὰ τούς ἀριθμούς A, B, x, y νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης $A + \sqrt[3]{B} = x - \sqrt[3]{y}$ εἶναι ἀδύνατος.

B-677. Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\sqrt{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$, ὅπου διὰ τούς ἀριθμούς A, B, x, y ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τῆς ἀσκ. 675, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ἡ ποσότης $A^2 - B$ εἶναι κύβος συμμετρικοῦ ἀριθμοῦ (τέλειος κύβος).

B-678. Ἐὰν x καὶ y φυσικοὶ ἀριθμοί, ὅχι τέλεια τετράγωνα νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ὅμοιως δὲ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, ἐφ' ὅσον ὁμοῦς $x \neq y$.

B-679. Ἐὰν α, β σύμμετροι ἢ δὲ παράστασις $x^2 + \alpha x + \beta$ μηδενίζεται ἂν δx ἀντικατασταθῇ μὲ $\gamma + \sqrt{\delta}$ ὅπου γ, δ σύμμετροι καὶ $\delta > 0$ καὶ ὅχι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ αὐτὴ παράστασις θὰ μηδενίζεται καὶ ἂν ἀντικατασταθῇ τὸ x μὲ $\gamma - \sqrt{\delta}$.

B-680. Ἐὰν α, β, γ σύμμετροι τότε ἂν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{3}$ δεῖξτε ὅτι $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

B-681. Ἐφ' ὅσον οἱ α, β, γ εἶναι σύμμετροι δεῖξτε ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

§ 170. Διπλὰ ριζικὰ λέγονται παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$(1) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}}, \quad A > 0, B > 0, A > \sqrt{B}$$

ὅπου A, B εἶναι ἢ σύμμετροι ἀριθμοί ἢ ρηταὶ ἀλγεβρικοὶ παραστάσεις.

Ἡ (1) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς. Ἡ παράστασις

$$(2) \quad \Pi = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha > \sqrt{\beta})$$

τετραγωνιζομένη, γίνεται: $\Pi^2 = 2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta}$ καὶ ἐξ αὐτῆς:

$$(3) \quad \Pi = \sqrt{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta}}.$$

Ἡ (3) δίδει ἀπλουστέραν μορφήν τῆς Π . Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται ἡ ἰσότης

$$(4) \quad \sqrt{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta}} = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}.$$

Ἐὰν τεθῇ, $2\alpha = A, 4\alpha^2 - 4\beta = B$ τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{A^2 - B}{4}$$

καὶ ἡ (4), διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων αὐτῶν δίδει

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \eta$$

$$(5) \quad \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \Gamma}{2}} + \sqrt{\frac{A - \Gamma}{2}} \quad \mu\epsilon \quad \Gamma = \sqrt{A^2 - B}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ Γ , δηλ. ἡ $\sqrt{A^2-B}$ εἶναι σύμμετρος ἀριθμὸς ἢ ρητὴ παράστασις, τότε ἡ (5) εἶναι μία χρήσιμος ἰσότης, μετατρέπουσα τὸ διπλοῦν ριζικὸν $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ εἰς ἀπλᾶ ριζικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ διπλοῦν ριζικὸν $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν ριζικῶν.

Λύσις. Τὸ δοθέν, γράφεται $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (5), παρατηροῦμεν ὅτι $A=7$, $B=48$, $A^2-B=1$, $\Gamma=1$, συνεπῶς

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

2. Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ διπλοῦν ριζικὸν $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, ($x > 2$).

Λύσις. Τὸ δοθέν γράφεται $\sqrt{x-4x+4}$ καὶ ἔχει $A=x$, $B=4x-4$, $A^2-B=x^2-4x+4=(x-2)^2$, $\Gamma=|x-2|=x-2$. Σύμφωνα μετὰ τὸν (5) θὰ ἔχωμεν :

$$\sqrt{x-4x+4} = \sqrt{\frac{x+x-2}{2}} - \sqrt{\frac{x-(x-2)}{2}} = \sqrt{x-1}-1.$$

A Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-682. Μετατρέψατε εἰς ἀπλᾶ ριζικά τὰ κάτωθι (διπλᾶ) :

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}, (6-\sqrt{35})^{1/2}, \sqrt{52+\sqrt{2700}}, \sqrt{7-4\sqrt{3}}, \sqrt{19+6\sqrt{2}}.$$

B-683. Δείξατε ὅτι $\sqrt{38+17\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

B-684. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως

$$\frac{(4+\sqrt{15})^{3/2} + (4-\sqrt{15})^{3/2}}{(6+\sqrt{35})^{3/2} - (6-\sqrt{35})^{3/2}}.$$

A-685. Νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀπλουστάτην δυνατὴν μορφήν ἡ παράστασις

$$\sqrt{28+10\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}.$$

A-686. Νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀπλουστάτην μορφήν τῆς ἡ παράστασις

$$\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}.$$

A-687. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

ὕπολογίζεται ὅταν γνωρίζωμεν μόνον τὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{5}$.

B-688. Νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀπλουστάτην μορφήν ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις

$$\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}.$$

B-689. i) Συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $2-\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

ii) Εὑρετε τὸν μέσον ἀνάλογον τῶν ἀριθμῶν $2+\sqrt{3}$ καὶ $26-15\sqrt{3}$.

B-690. Εὑρετε τὸν μέσον ἀνάλογον τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{3}/(\sqrt{5}-1)$ καὶ $1/(\sqrt{15}+\sqrt{3})$.

A-691. Ν' ἀπλουστευθῇ ἡ παράστασις

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = k.$$

(Ὑπόδ.: ὕψωσις ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εἰς τὸ τετράγωνον).

A-692. Ν' ἀπλουστευθῇ ἡ παράστασις

$$\sqrt[4]{\sqrt{8} + \sqrt{2-1}} - \sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{2-1}} = k \quad (\text{βλ. προηγ. ὑσκ.}).$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{8} + \sqrt{2-1}} - \sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{2-1}}}{\sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{2-1}}} = \sqrt{2}.$$

B-693. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{a+2b\sqrt{a-b^2}} + \sqrt{a-2b\sqrt{a-b^2}}$$

ἰσοῦται μὲ $2b$ ἢ μὲ $2\sqrt{a-b^2}$ καθ' ὅσον εἶναι $b^2 \leq a \leq 2b^2$ ἢ εἶναι $a > 2b^2$, ($b > 0$).

§ 171. Δυνάμεις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην. α') Ὁρισμός:
«Ἐὰν μ καὶ ν εἶναι τυχόντες φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ a θετικὸς
οἰοσδῇποτε, τότε διὰ τοῦ συμβόλου $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, παριστῶμεν τὴν νυο-
στήν (πρωτεύουσαν) ρίζαν τῆς μυοστής δυνάμεως τοῦ a , δηλ. $\sqrt[\nu]{a^\mu}$ ».

Τὸ σύμβολον $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ τὸ ἐκφράζον τὴν $\sqrt[\nu]{a^\mu}$ καλεῖται δύναμις τοῦ a μὲ
κλασματικὸν ἐκθέτην $\frac{\mu}{\nu}$. (Διαβάζεται: a εἰς τὴν $\frac{\mu}{\nu}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{1,25} = a^{\frac{125}{100}} = a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$,
 $a^{3,14} = a^{\frac{314}{100}} = a^{\frac{157}{50}} = \sqrt[50]{a^{157}}.$

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, θὰ εἶναι $a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$ ἔπεται ὅτι
καὶ κάθε ρίζα δύναται νὰ γραφῇ ὡς δύναμις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην.

Αἱ νέαι αὗται δυνάμεις καίτοι ἔχουν διάφορον ἔννοιαν ἀπὸ τὰς γνω-
στάς μας δυνάμεις μὲ ἀκεραίους ἐκθέτας, ἐν τούτοις ὑπακούουν εἰς τοὺς
ἰδίους νόμους μὲ ἐκεῖνας.

Θὰ ἔχωμεν, π.χ.

$$\alpha^{3,14} \cdot \alpha^{0,86} = \alpha^4, \quad (\alpha^{0,2})^4 = \alpha^{0,8}, \quad \kappa.ο.κ.$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ ἐπόμενον θεώρημα :

β') **Θεώρημα i).** «Οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων μὲ ἀκεραίους ἐκθέτας ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ κλασματικούς ἐκθέτας».

Ἀπόδειξις. 1) Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{\mu}{\lambda}}} \sqrt[\lambda]{\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} \cdot \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda + \kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda + \kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda} + \frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\kappa}{\lambda}}$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μὲ δυνάμιν τοῦ α ἔχουσιν ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

2) Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ α (ὑποτίθεται $\mu/\nu > \kappa/\lambda$) :

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} : \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} &= \sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{\mu}{\lambda}}} : \sqrt[\lambda]{\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} : \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \\ &= \sqrt[\nu\lambda]{\frac{\alpha^{\mu\lambda}}{\alpha^{\kappa\nu}}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda - \kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda - \kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda} - \frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu} - \frac{\kappa}{\lambda}} \end{aligned}$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μὲ δυνάμιν τοῦ α ἔχουσιν ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.

3) Δυνάμεις εἰς δυνάμιν :

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\kappa}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\kappa}} = \alpha^{\frac{\mu\kappa}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\kappa}{\lambda}},$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μὲ δυνάμιν τοῦ α ἔχουσιν ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

4) Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὁ κανὼν ὑψώσεως γινομένου εἰς δυνάμιν :

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

5) Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὁ κανὼν ὑψώσεως κλάσματος εἰς δυνάμιν :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}.$$

γ') Δυνάμεις μὲ ἀρνητικὸν κλασματικὸν ἐκθέτην $-\frac{\mu}{\nu}$. Ὁ-

ρισμός. «Διὰ τοῦ συμβόλου $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$ παριστῶμεν τὸ ἀντίστροφον

τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ».

Ἦτοι ἐξ ὀρισμοῦ, εἶναι :

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} \quad \mu, \nu \text{ φυσικοί, } \alpha > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : $\alpha^{-0,2} = \frac{1}{\alpha^{0,2}} = \frac{1}{\alpha^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\alpha}} = \frac{\sqrt[5]{\alpha^4}}{\alpha},$

$$\beta^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\beta^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2}} = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{\beta}, \quad \gamma^{-1,2} = \frac{1}{\gamma^{1,2}} = \frac{1}{\gamma^{12/10}} = \frac{1}{\gamma^{6/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\gamma^6}} = \frac{\sqrt[5]{\gamma^4}}{\gamma^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{x}} = x^{-\frac{1}{\nu}}.$$

δ') **Θεώρημα ii).** «Πᾶσαι αἱ ιδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ θετικούς συμμετρους ἐκθέτας ἰσχύουν καὶ ὅταν αἱ δυνάμεις ἔχουν ἐκθέτας οἰουσδήποτε συμμετρους, εἴτε ἀρνητικούς εἴτε θετικούς, ἀδιακρίτως».

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει κατ' οὐσίαν ἀποδειχθῇ εἰς τὴν § 94, ὅπου ἐδείχθη ὅτι πάντες οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων μὲ θετικούς ἐκθέτας ἰσχύουν καὶ διὰ δυνάμεις μὲ ἐκθέτας τυχόντας ἀκεραίους, εἴτε ἀρνητικούς εἴτε θετικούς, ἀδιακρίτως.

δ') Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι τὸ σύμβολον α^x ($\alpha > 0$) ἔχει ἔννοιαν διὰ τυχόντα σύμμετρον ἐκθέτην x · ἀκέραιον θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, κλασματικὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἢ δεκαδικόν μὲ περασμένον πλῆθος ψηφίων καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ιδιότητες $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$, $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$, $(\alpha\beta\gamma)^x = \alpha^x \beta^x \gamma^x$ κ.τ.λ. ἰσχύουν δι' ὅλας τὰς προαναφερθεῖσας περιπτώσεις, καίτοι τὸ σύμβολον α^x ἔχει διαφόρους σημασίας ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰ διάφορα εἶδη τοῦ ἐκθέτου. Οὕτω, π.χ., θὰ ἔχωμεν : $\alpha^{2,57} \cdot \alpha^{-0,57} = \alpha^2$, $(\alpha^{-0,5})^{-2} = \alpha$, $\alpha^{-3,14} : \alpha^{-0,14} = \alpha^{-3}$, $\alpha^4 \cdot \alpha^{-4,5} = \alpha^{-0,5}$.

στ') Ἐνίοτε ἡ βάσις τῆς δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην λαμβάνεται καὶ ἀρνητική. Τότε, δυνατόν, νὰ ἔχη νόημα ἡ παράστασις $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἀλλὰ δέον ν' ἀποφεύγεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν κανόνων τοῦ λογιζμοῦ μὲ δυνάμεις, ὅταν ἡ βάσις εἶναι ἀρνητική. Οὕτω, π.χ., ἡ δύναμις

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{ἐνῶ ἡ δύναμις } (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[3]{8} = +2,$$

$$\delta\eta\lambda. (-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}}.$$

Ἐπομένως δὲν ὑπάρχει εὐχέρεια λογιζομένου μὲ τοιαύτας δυνάμεις.

Ἐφαρμογή. Ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ ἄρρητον κλάσμα :

$$K = \frac{\alpha - x + 4\alpha^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} - 4\alpha^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}} + 2\alpha^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}}} \quad (\alpha > 0, x > 0).$$

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω κλάσμα μορφήν ρητοῦ κλάσματος, ἂν ὅλους τοὺς ἐκθετάς τοῦ x καταστήσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα καὶ τοῦ x ἐπίσης :

$$K = \frac{\alpha^{\frac{4}{4}} - x^{\frac{4}{4}} + 4\alpha^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} - 4\alpha^{\frac{2}{4}} x^{\frac{2}{4}}}{\alpha^{\frac{2}{4}} + 2\alpha^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{2}{4}}}.$$

καὶ κατόπιν θέσωμεν :

$$\alpha^{\frac{1}{4}} = y, \quad x^{\frac{1}{4}} = \omega, \quad (y \geq 0, \omega \geq 0)$$

ὅποτε τὸ κλάσμα μετατρέπεται εἰς ρητὸν (ὥς πρὸς τὰς νέας μεταβλητάς). Διότι θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^{\frac{1}{4}} = y, \quad \alpha^{\frac{2}{4}} = y^2, \quad \alpha^{\frac{4}{4}} = y^4, \quad x^{\frac{1}{4}} = \omega, \quad x^{\frac{2}{4}} = \omega^2, \\ x^{\frac{3}{4}} = \omega^3, \quad x^{\frac{4}{4}} = \omega^4,$$

καὶ συνεπῶς

$$K = \frac{y^4 - \omega^4 + 4y\omega^3 - 4y^2\omega^2}{y^2 + 2y\omega - \omega^2}.$$

Ἐχομεν λοιπὸν ν' ἀπλοποιήσωμεν ρητὸν κλάσμα. Ὁ ἀριθμητὴς γράφεται :

$$y^4 - (\omega^4 - 4y\omega^3 + 4y^2\omega^2) = y^4 - (\omega^2 - 2y\omega)^2 = (y^2 + \omega^2 - 2y\omega)(y^2 - \omega^2 + 2y\omega) \text{ καὶ συνεπῶς}$$

$$K = \frac{(y^2 + \omega^2 - 2y\omega)(y^2 - \omega^2 + 2y\omega)}{y^2 - \omega^2 + 2y\omega} = y^2 + \omega^2 - 2y\omega = (y - \omega)^2.$$

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὰς παλαιὰς μεταβλητάς λαμβάνομεν

$$K = \left\{ \alpha^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} \right\}^2.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-694. Νὰ ἐκφραστοῦν διὰ ριζικῶν αἱ κάτωθι ἀριθμητικαὶ παραστάσεις καὶ νὰ εὐρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν :

$$(+32)^{-\frac{1}{5}}, \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}, \quad (0,25)^{\frac{1}{2}}, \quad (0,216)^{\frac{1}{3}}, \quad 125^{\frac{2}{3}},$$

$$(-27)^{\frac{4}{3}}, \quad \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

A-695. Νά εκτελεσθοῦν αἱ σημειούμεναι πράξεις τὰ δὲ τελικὰ ἐξαγόμενα νὰ γραφοῦν χωρὶς κλασματικούς ἐκθέτας

$$\begin{aligned} & \left(5^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} y\right)^4 \quad \left(\frac{8a^3}{x^9}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\ & (a^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{2}}) \quad (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}) \\ & (a^{\frac{1}{3}} - \beta^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}) \quad (2x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{2}} + 4y^{\frac{1}{2}}) \\ & (x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}} + 2). \end{aligned}$$

A-696. Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως

$$\left\{zy^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right\} \left\{xy - y\sqrt{x} + \frac{xz^2}{y}\right\}$$

ὅπου $x=0,0001$, $y=-0,008$, $z=-\frac{1}{2}$.

A-697. Ὑπολογίσατε τὴν παράστασιν

$$\sqrt[4]{16\sqrt{256}} - 81^{-0,25} + \frac{2}{5}\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54} - (9^{0,2})^{2,5} + 27^{-\frac{4}{3}} - 36^{\frac{3}{2}}.$$

B-698. Χρησιμοποιοῦντες δυνάμεις μὲ κλασματικούς ἐκθέτας τρέψατε εἰς γινόμενον τὰς παραστάσεις:

$$\begin{aligned} 4x^{\frac{2}{3}} - 9y^{\frac{2}{3}}, \quad x^{\frac{6}{5}} - y^{\frac{4}{3}}, \quad x^{-6} - 27y^{\frac{9}{2}}, \quad x - y, \\ 36x^{-\frac{4}{3}} - 25y^{-\frac{2}{5}}, \quad a^{\frac{2}{3}} - 5a^{\frac{1}{3}}\beta^{-\frac{1}{3}} + 6\beta^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

B-699. Ν' ἀπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{8}} + 1}.$$

B-700. Ν' ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}} - 2xy^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}.$$

A-701. Ἐάν a, β ρητοὶ θετικοὶ καὶ $a\beta > 1$ ν' ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{\left(a^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)^a \left(a - \frac{1}{\beta}\right)^{\beta-a}}{\left(\beta^2 - \frac{1}{a^2}\right)^\beta \left(\beta + \frac{1}{a}\right)^{a-\beta}}.$$

A-702. Ἐάν α, β τυχόντες θετικοὶ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης

$$\left(\alpha^2 + \alpha^{\frac{4}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\beta^2 + \alpha^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

B 703. Ἐάν α, β θετικοί, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \left\{ \alpha - (\alpha^2 - \alpha x)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\alpha^2} + \left\{ \alpha - (\alpha^2 - \alpha x)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ὅταν} \quad x = \alpha \left\{ 1 - \frac{16\beta^2}{(1+\beta)^4} \right\}.$$

B-704. Ἐάν $\alpha > 0, \beta > 0$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$2\alpha(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1}, \quad \text{ὅταν} \quad x = 2^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

§ 172. Ἄρρητοι ἐξισώσεις. α') Ὄταν τὸ ἓνα τουλάχιστον

μέλος μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι ἄρρητος ἀλγεβρική παράστασις (§ 168 δ') ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους, ἡ ἐξίσωσις λέγεται **ἄρρητος** ἢ καὶ ἐξίσωσις με ριζικά. Ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις περιέχει τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους, ὑπὸ τὸ ριζικόν. Πᾶσα λύσις τῆς ἄρρητου ἐξισώσεως ἐξυπακούεται ὅτι ἀνήκει εἰς τὸ πεδίου ὁρισμοῦ ὅλων τῶν ἄρρητων παραστάσεων τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τὴν ἐξίσωσιν. (§ 168).

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς $x = -4$ εἶναι λύσις τῆς $\sqrt{5-x} = \sqrt{1-2x}$ ἀλλὰ δὲν εἶναι λύσις τῆς $\sqrt{x-5} = \sqrt{2x-1}$. Ἐπίσης, ὁ $x=1$ εἶναι λύσις τῆς $x+3=4x$ ἀλλὰ δὲν εἶναι λύσις τῆς $x+3+\sqrt{x-2}=4x+\sqrt{x-2}$.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν, ἐπιδιώκομεν νὰ τὴν ἀνάγωμεν εἰς αἰχτὴν (δηλ. μὴ περιέχουσιν τὸν ἄγνωστον ὑπὸ τὸ ριζικόν). Πρὸς τοῦτο χρησιμεύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα.

Θεώρημα i). Ἐάν θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$(1) \quad A(x)=B(x) \quad \text{καὶ} \quad (2), \quad \{A(x)\}^2=\{B(x)\}^2$$

τότε πᾶσα λύσις τῆς πρώτης εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας. Πᾶσα δὲ λύσις x_0 τῆς δευτέρας εἶναι λύσις μιᾶς ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων: $A(x)=B(x)$ ἢ $A(x)=-B(x)$, ἐφ' ὅσον ἡ λύσις αὐτὴ x_0 καθιστᾷ, τὰ δύο μέλη τῆς (1) πραγματικοὺς ἀριθμοὺς.

Ἀποδείξεις. Προφανῶς, πᾶσα λύσις τῆς (1), ὡς καθιστῶσα τὰς παραστάσεις $A(x), B(x)$ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἴσους θὰ καθιστᾷ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι καὶ λύσις τῆς (2).

Ἐστὼ, τώρα μία λύσις x_0 τῆς (2) καθιστῶσα τὰς $A(x), B(x)$ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $A(x_0), B(x_0)$ (βλ. ἑστῶτα Θεώρημα Δεύτερον Πολυτικής

$\{A(x_0)\}^2 = \{B(x_0)\}^2 \Rightarrow \{A(x_0) + B(x_0)\} \{A(x_0) - B(x_0)\} = 0$, ἄρα, ἢ $A(x_0) = B(x_0)$ ὅποτε τὸ x_0 εἶναι λύσις τῆς $A(x) = B(x)$ ἢ $A(x_0) = -B(x_0)$ ὅποτε τὸ x_0 εἶναι λύσις τῆς $A(x) = -B(x)$.

Ἡ ἐξίσωσις $A(x) = -B(x)$ λέγεται συζυγῆς τῆς $A(x) = B(x)$.

Παρατήρησις. Ἡ διὰ τετραγωνισμοῦ τῶν μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν. Διότι περιέχει καὶ τὰς λύσεις τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν ἀρχικὴν.

Θεώρημα ii). Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$(1) \quad A(x) = B(x) \quad \text{καὶ} \quad (2), \quad \{A(x)\}^3 = \{B(x)\}^3$$

τότε πᾶσα λύσις τῆς πρώτης εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας. Πᾶσα δὲ λύσις x_0 τῆς δευτέρας, εἶναι καὶ λύσις τῆς πρώτης, ἐφ' ὅσον ἡ λύσις αὐτὴ x_0 καθιστᾷ τὰ δύο μέλη τῆς (1), πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἀπόδειξις. Τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος εἶναι φανερόν.

Ἐστω τώρα μία λύσις x_0 τῆς (2) καθιστῶσα τὰς $A(x)$, $B(x)$, πραγματικούς ἀριθμούς $A(x_0)$, $B(x_0)$. Θὰ ἔχωμεν :

$$(3) \quad \{A(x_0)\}^3 = \{B(x_0)\}^3$$

Ἐκ τῆς (3) ἔπεται ὅτι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $A(x_0)$, $B(x_0)$ ἔχουν ἴσους κύβους· ἄρα εἶναι ἴσοι. Συνεπῶς $A(x_0) = B(x_0)$ ἴτοι ἡ x_0 εἶναι καὶ λύσις τῆς (1).

β) Γενίκευσις τῶν θεωρημάτων 1 καὶ 2. Εὐκόλα δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

Τὸ θεώρημα i) ἰσχύει καὶ διὰ τὰς δύο ἐξισώσεις :

$$A(x) = B(x) \quad \text{καὶ} \quad \{A(x)\}^{2v} = \{B(x)\}^{2v}, \quad v \text{ φυσικός.}$$

Τὸ θεώρημα ii) ἰσχύει καὶ διὰ τὰς δύο ἐξισώσεις :

$$A(x) = B(x) \quad \text{καὶ} \quad \{A(x)\}^{2v+1} = \{B(x)\}^{2v+1}, \quad v \text{ φυσικός.}$$

γ) Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $A(x) = \sqrt{B(x)}$. Ἐὰν ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις περιέχῃ ἓνα μόνον ριζικόν τῆς μορφῆς $k\sqrt{B(x)}$ ὅπου k σταθερὰ καὶ $B(x)$, ρητὴ παράστασις, τότε, ἂν ἀπομονώσωμεν τὸ ριζικόν, δηλαδὴ τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸ ἓνα μέλος, ὅλους δὲ τοὺς ρητοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως μεταφέρωμεν εἰς τὸ ἄλλο μέλος, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν

$$(4) \quad A(x) = \sqrt{B(x)}$$

ὅπου $A(x)$ καὶ $B(x)$, ρηταὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τοῦ x .

Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν

$$(5) \quad \{A(x)\}^2 = B(x).$$

Κάθε λύσις x_0 τῆς (5), καθιστᾷ τὸ $B(x)$ ἴσον μὲ $\{A(x)\}^2$ δηλ. καθιστᾷ τὸ ὑπόρριζον τῆς (4), ἴσον πρὸς μὴ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, ἐπομένως, καθιστᾷ τὰ μέλη τῆς (4) πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα i) κάθε λύσις τῆς (5), ἢ θὰ εἶναι λύσις τῆς (4), ἢ θὰ εἶναι λύσις τῆς συζυγοῦς τῆς :

$$(4') \quad A(x) = -\sqrt{B(x)}.$$

Ἐπομένως, διὰ νὰ λύσωμεν τὴν (4), ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν (5) καὶ ἐκ τῶν λύσεων τῆς (5) ν' ἀποκλείσωμεν ἐκείνας αἱ ὁποῖαι δὲν ἐπαληθεύουν τὴν (4). (Αἱ ἀποκλειόμεναι θὰ ἐπαληθεύουν ἀπαραιτήτως τὴν (4')).

Ἡ ἐπιλογὴ τῶν λύσεων τῆς (5) αἱ ὁποῖαι ἀρμόζουν διὰ τὴν (4) δύνανται νὰ γίνῃ βάσει τῆς ἐξῆς παρατηρήσεως :

Κάθε λύσις τῆς (4) καθιστᾷ τὸ $A(x)$ ἴσον τὴν $\sqrt{B(x)}$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\sqrt{B(x)} \geq 0$ (§ 168 α') θὰ πρέπη νὰ εἶναι καὶ $A(x) \geq 0$. Τουναντίον κάθε λύσις τῆς (4') καθιστᾷ τὸ $A(x) \leq 0$. Ἐπομένως :

Ἐκ τῶν λύσεων τῆς (5), ἀρμόζουν διὰ τὴν (4) μόνον ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὸν περιορισμὸν $A(x) \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2$.

Λύσις. Ἀπομονοῦντες τὸ ριζικὸν λαμβάνομεν

$$(6) \quad \sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (6), φθάνομεν εἰς τὴν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν $x^2 + x - 1 = 4 + x^2 - 4x$ ἢ $5x = 5$ ἥτις δίδει $x = 1$.

Περιορισμός : $2 - x \geq 0$. Ἡ εὑρεθεῖσα ρίζα $x = 1$ πληροῖ τὸν περιορισμὸν ὅρα εἶναι ἡ λύσις τῆς (6).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5 + \sqrt{x^2 - 3} = x$.

Λύσις. Ἀπομονοῦμεν τὸ ριζικόν :

$$(6) \quad \sqrt{x^2 - 3} = x - 5.$$

Τετραγωνίζομεν : $x^2 - 3 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 10x = 28 \Rightarrow x = 2,8$.

Περιορισμός : $x - 5 \geq 0$. Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις δὲν πληροῖ τὸν περιορισμὸν διότι καθιστᾷ τὸ $x - 5$, δηλ. τὸ δεύτερον μέλος τῆς (6), ἀρνητικόν. Συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x = 2,8$ ἀπορρίπτεται. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν. (Ἡ συζυγὴς τῆς (6), ἔχει λύσιν, τὴν $x = 2,8$).

δ') **Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = \Gamma(x)$.** Ἐστω ὅτι μία ἄρρητος ἐξίσωσις, περιέχουσα δύο μόνον ριζικά, δύνανται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν

$$(7) \quad \sqrt{A} + \sqrt{B} = \Gamma$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς
ὅπου A, B, Γ ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ x .

Διὰ τετραγωνίσεως τῆς (7), ἐλαττοῦται τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν, ἀπὸ δύο, εἰς ἓν :

$$(8) \quad \begin{aligned} A+B+2\sqrt{AB} &= \Gamma^2 & \eta \\ 2\sqrt{AB} &= \Gamma^2 - A - B. \end{aligned}$$

Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα i) πᾶσα λύσις x_0 τῆς (8) εἶναι, ἡ λύσις τῆς (7) ἡ λύσις τῆς συζυγοῦς τῆς: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\Gamma$, (ἐφ' ὅσον ἡ x_0 καθιστᾷ τὰ ὑπόρριζα A καὶ B , μὴ ἀρνητικά).

Ἐπομένως, αἱ λύσεις τῆς (8) αἱ ἀρμόζουσαι διὰ τὴν (7) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς

$$(\alpha) \quad A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad \Gamma \geq 0.$$

Τετραγωνίζοντες τὴν (8) λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν

$$(9) \quad 4AB = (\Gamma^2 - A - B)^2$$

Πᾶσα λύσις τῆς (9), ἀρμόζουσα διὰ τὴν (8) πρέπει νὰ πληροῖ τὸν περιορισμόν, (βλέπε ἐδάφιον γ') :

$$(\beta) \quad \Gamma^2 - A - B \geq 0.$$

Ἐπομένως: *λύσεις τῆς (7) εἶναι, ὅσαι λύσεις τῆς (9), πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς (β) καὶ (α).*

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ παραστάσεις $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$ δὲν μηδενίζονται συγχρόνως, διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x , οἱ περιορισμοὶ ὀλιγοστεύουν καὶ καθίστανται :

(γ)

$$\Gamma > 0, \quad \Gamma^2 \geq A + B$$

Διότι, τότε οὐδεμία λύσις τῆς (9) ἀρμόζουσα εἰς τὴν (7) θὰ μηδενίῃ τὸ Γ . (Ἐὰν ἐμηδένιζε τὸ Γ , τότε θὰ ἔπρεπε νὰ μηδενίῃ καὶ τὸ $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ἄρα ἔπρεπε νὰ μηδενίῃ καὶ τὸ A καὶ τὸ B , ἥτοι θὰ ἐμηδένιζε τὰ A, B, Γ). Ἐπομένως, αἱ λύσεις τῆς (9) αἱ ἀρμόζουσαι εἰς τὴν (7) καθιστοῦν τὸ $\Gamma > 0$, δηλ. ὁ τρίτος περιορισμὸς ἐκ τῶν (α) γίνεται $\Gamma > 0$.

Ἡ (9) γράφεται, $4AB = \Gamma^4 + (A+B)^2 - 2(A+B)\Gamma$ ἢ $2\Gamma(A+B) = \Gamma^4 + (A-B)^2$ καὶ ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης, ὁ περιορισμὸς $\Gamma > 0$, συνεπάγεται τὴν

$$(10) \quad A + B > 0$$

Ἡ (9) συνεπάγεται ἐπίσης

$$(11) \quad AB \geq 0.$$

Πᾶσα λοιπὸν λύσις τῆς (9) πληροῦσα τὸν περιορισμόν $\Gamma > 0$, θὰ πληροῖ αὐτομάτως, τὰς σχέσεις (10) καὶ (11) ἄρα θὰ καθιστᾷ τὰ A καὶ B , μὴ ἀρνητικά. Ἐπομένως, οἱ δύο πρῶτοι περιορισμοὶ ἐκ τῶν (α), αὐτοὶ καὶ ὁ τρίτος, ἀρμόζουσιν διὰ τὴν (7) καὶ τὴν (9). (γ).

ε') Γενικῶς, ἐὰν ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἐνὸς ριζικά, τότε δι' ἀλλεπαλλήλων ὑψώσεων εἰς δυνάμεις (ἀφοῦ προηγουμένως γίνουν κατάλληλοι μεταφοραί) ἐλαττοῦμεν βαθμηδὸν τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν, μέχρις οὗτου φθάσωμεν εἰς ρητὴν ἐξίσωσιν ἣτις θὰ περιέχη ὅλας τὰς λύσεις τῆς ἀρχικῆς ἀλλὰ καὶ ἄλλας, ἐνδεχομένως.

Οὕτω π.χ. ἐκ τῆς $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Delta}$ φθάνομεν διὰ τετραγωνίσεως εἰς τὴν $A + B - 2\sqrt{AB} = \Gamma + \Delta + 2\sqrt{\Gamma\Delta}$ ἣτις γράφεται $2\{\sqrt{\Gamma\Delta} + \sqrt{AB}\} = A + B - \Gamma - \Delta$. Διὰ νέας τετραγωνίσεως φθάνομεν εἰς τὴν $4(\Gamma\Delta + AB + 2\sqrt{AB\Gamma\Delta}) = (A + B - \Gamma - \Delta)^2$ ἥτοι: $8\sqrt{AB\Gamma\Delta} = (A + B - \Gamma - \Delta)^2 - 4(\Gamma\Delta + AB)$ καὶ διὰ νέας τετραγωνίσεως φθάνομεν εἰς τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν:

$$64AB\Gamma\Delta = \{(A + B - \Gamma - \Delta)^2 - 4(\Gamma\Delta + AB)\}^2.$$

Πρέπει ὅμως ἐκ τῶν λύσεων τῆς ρητῆς ἐξίσωσεως εἰς τὴν ὁποίαν ἐκάστοτε καταλήγομεν νὰ ἐκλέξωμεν ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν. Ἡ ἐπιλογή αὕτη δύναται νὰ γίνη κατὰ δύο τρόπους:

1. Δι' ἐπαληθεύσεως, τοῦ ποῖαι ἐκ τῶν εὐρεθεισῶν λύσεων εἶναι καὶ λύσεις τῆς ἀρχικῆς.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἐν γένει, δυσχερὴς

2. Βάσει ἀρμοδίων περιορισμῶν τοὺς ὁποίους θέτομεν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιλύσεως καὶ τοὺς ὁποίους πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦν αἱ λύσεις τῆς τελικῆς (ρητῆς) διὰ νὰ εἶναι καὶ λύσεις τῆς ἀρχικῆς (ἀρρήτου).

Παρατήρησις. Ἐν ἡ περιπτώσει ἢ συζυγῆς τῆς $A=B$ δηλ. ἢ $A=-B$ εἶναι ἀδύνατος (δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν) τότε ἢ $A=B$ ἔχει λύσεις, ὅλας τὰς λύσεις τῆς $A^2=B^2$ τὰς καθιστῶσας τὰ A καὶ B πραγματικοὺς ἀριθμοὺς.

* § 173. Παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀρρήτων ἐξισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-10}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συζυγῆς τῆς (1) δηλαδὴ ἡ

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = -\sqrt{x+2} - \sqrt{x-10}.$$

οὐδεμίαν λύσιν ἔχει, διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς τὸ δὲ δεύτερον ἀρνητικὸς καὶ συνεπὶς ἰσότης μεταξύ των εἶναι ἀδύνατος.

Ἐπομένως ἡ (1) ἔχει λύσεις, ὅλας τὰς λύσεις τῆς

$$(2) \quad \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-10}.$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

τὰς καθιστῶσας τὰ ὑπόρριζα θετικά ἢ 0, δηλ. τὰς πληρούσας τὸν περιορισμὸν

(α)

$$x \geq 10$$

Ἡ (2) γράφεται μετὰ τὰς πράξεις :

$$(2') \quad 2\sqrt{x^2-9x+14}=1+2\sqrt{x^2-8x-20}.$$

Ἡ συζυγῆς τῆς (2') δὲν ἔχει προφανῶς λύσιν. Ἀρα αἱ λύσεις τῆς (2') εἶναι αἱ λύσεις τῆς

$$(3) \quad (2\sqrt{x^2-9x+14})^2 = (1+2\sqrt{x^2-8x-20})^2$$

αἱ πληροῦσαι τὸν περιορισμὸν (α).

Ἡ (3) γράφεται μετὰ τὰς πράξεις

$$(3') \quad 4\sqrt{x^2-8x-20} = -4x+135.$$

Ἡ (3') ἔχει λύσεις, τὰς λύσεις τῆς

$$(4) \quad \{4\sqrt{x^2-8x-20}\}^2 = (-4x+135)^2$$

τὰς πληρούσας τὸν περιορισμὸν

(β)

$$-4x+135 \geq 0$$

Ἡ (4) γράφεται : $16(x^2-8x-20)=16x^2+18225-1080x$ καὶ δίδει

$$(5) \quad x=19+\frac{457}{952}.$$

Ἐνταῦθα ἐτέθησαν δύο περιορισμοί : ὁ (β) καὶ ὁ (α). Ἐπειδὴ ἡ εὐρεθεῖσα λύσις (5), πληροὶ ἀμφοτέρους, αὕτη εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τῆς (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad \frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}} + \frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}.$$

Λύσις. Διὰ τὰ ἔχῃ τὸ πρῶτον μέλος, νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πρέπει $2+x \geq 0$ καὶ $2-x \geq 0$, δηλαδὴ

(α)

$$-2 \leq x \leq 2$$

καὶ διὰ τὰ εἶναι ὁ δεῦτερος παρονομαστής $\neq 0$ πρέπει $x \neq 0$. Ὡστε :

(β)

$$x \neq 0$$

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν

$$(2+x)(\sqrt{2}-\sqrt{2-x})+(2-x)(\sqrt{2}+\sqrt{2+x})=\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2+x})(\sqrt{2}-\sqrt{2-x})$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς : $-x\sqrt{2-x}+2\sqrt{2}-x\sqrt{2+x}=-\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}$.

Ἡ τελευταία αὕτη γράφεται :

$$(2) \quad x\{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\}=\sqrt{2}\{2+\sqrt{4-x^2}\}$$

καὶ ἔχει δεῦτερον μέλος θετικόν. Συνεπῶς καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) πρέπει νὰ εἶναι >0 . Ἐπειδὴ δὲ ὁ παράγων $\{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\}$ εἶναι >0 ἔπεται ὅτι πρέπει

(γ)

$$x \geq 0$$

Κατόπιν τοῦ περιορισμοῦ (γ) ὑποῦμεν τὰ δύο μέλη τῆς (2) εἰς τὸ τετράγωνον ὁπότε λαμβάνομεν :

$$x^2\{4+2\sqrt{4-x^2}\}=2\{8-x^2+4\sqrt{4-x^2}\}.$$

Ἀπλοποιούντες διὰ 2 καὶ ἀπομονοῦντες τὸ ριζικόν λαμβάνομεν :

$$(3) \quad (x^2-4)\sqrt{4-x^2}=8-3x^2.$$

Ἀπὸ τὴν (3) προκύπτει ὁ περιορισμός :

(δ)

$$\frac{8-3x^2}{x^2-4} \geq 0$$

Κατόπιν τοῦ περιορισμοῦ (δ) τετραγωνίζομεν τὴν (3) καὶ λαμβάνομεν :

$$(4-x^2)^3=(8-3x^2)^2 \quad \text{ἢ} \quad x^6-3x^4=0 \quad \text{ἢ} \quad x^4(x^2-3)=0$$

καὶ ἐκ τῆς τελευταίας, τρεῖς τιμὰς διὰ τὸ x :

$$x_1=0, \quad x_2=\sqrt{3}, \quad x_3=-\sqrt{3}.$$

Ἡ πρώτη ρίζα $x_1=0$ ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν (β).

Ἡ τρίτη, $x_3=-\sqrt{3}$ ἐπίσης, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν (γ). Ἡ δευτέρα $x_2=\sqrt{3}$ πληροῖ ἅπαντας τοὺς τεθέντας περιορισμοὺς : (α), (β), (γ) καὶ (δ) ἐπομένως εἶναι ἡ (μοναδική) λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

§ 174. Ἄρρητοι ἐξισώσεις μὲ παράμετρον. Ὅταν ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις περιέχει παράμετρον (βλ. § 162 β') τότε δυνατόν δι' ὠρισμένας τιμὰς τῆς παραμέτρου νὰ ἔχῃ λύσιν καὶ διὰ τὰς λοιπὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου νὰ μὴ ἔχῃ λύσιν. Οὕτω, π.χ., ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{5-2x}=\lambda\sqrt{x}$ διὰ τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ δὲν ἔχει προφανῶς λύσιν (τὰ δύο μέλη εἶναι τότε ἑτερόσημα) ἐνῶ διὰ τὰς θετικὰς (ἢ μηδέν) ἔχει.

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἢ περισσοτέρας λύσεις καλεῖται διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς τὴν παράμετρον.

Ἡ διερεύνησις γίνεται βάσει τῶν περιορισμῶν τοὺς ὁποίους θέτομεν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἄρρητου ἐξισώσεως, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ ἐπόμενα παραδείγματα :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \quad \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = \lambda.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὴ ποσότης πρέπει νὰ εἶναι :

(α)

$$\lambda > 0$$

Κατόπιν τούτου τετραγωνίζομεν τὴν (1) καὶ ἀπομονοῦντες τὸ ριζικὸν λαμβάνομεν

$$(2) \quad 2\sqrt{(x-3)(x-7)} = \lambda^2 - 2x + 10.$$

Ἡ συζυγῆς τῆς (1) δὲν ἔχει λύσεις ἐφ' ὅσον $\lambda > 0$. Ἐπομένως πᾶσαι αἱ λύσεις τῆς (2) ἀρμόζουν καὶ διὰ τὴν (1). Δεύτερος περιορισμός, προκύπτει ἀπὸ τὴν (2):

$$(β) \quad \boxed{\lambda^2 - 2x + 10 \geq 0}$$

Τετραγωνίζοντες τὴν (2) καὶ λύοντες ὡς πρὸς x εὐρίσκομεν

$$(3) \quad x = \frac{\lambda^4 + 20\lambda^2 + 16}{4\lambda^2}.$$

Ἡ εὐρεθεῖσα λύσις πρέπει ὁμῶς νὰ πληροῖ τὸν περιορισμὸν (β), δηλ. πρέπει

$$(4) \quad \lambda^2 - 2 \frac{\lambda^4 + 20\lambda^2 + 16}{4\lambda^2} + 10 \geq 0.$$

(4), προκύψασα ἐκ τοῦ περιορισμοῦ (β) κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ x ἐν αὐτῷ, ἀποτελεῖ περιορισμὸν διὰ τὴν παράμετρον λ . Δηλαδή ἡ λ δὲν δύναται νὰ εἶναι τυχοῦσα, ἀλλὰ πρέπει νὰ πληροῖ τὴν (4) καὶ τὴν (α) ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν.

Ἡ (4) λαμβάνει μετὰ τὰς πράξεις τὴν μορφήν: $\lambda^4 - 16 \geq 0$ ἢ

$$(5) \quad (\lambda^2 + 4)(\lambda + 2)(\lambda - 2) \geq 0$$

καὶ ἐπειδὴ πρέπει $\lambda > 0$ ὡς παρατηρήσαμεν ἐξ ἀρχῆς, φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν:

$$\lambda - 2 \geq 0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda \geq 2.$$

Ὡστε ἡ (1) ἔχει ὡς λύσιν τὴν (3), μόνον ὅταν $\boxed{\lambda \geq 2}$.

Διὰ $\lambda < 2$ ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

Παρατήρησις. Ἡ τιμὴ $\lambda = 2$ εἶναι ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τὴν ὁποῖαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράμετρος λ , ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ λύσιν. Εἶναι συγχρόνως καὶ ἡ ἐλάχιστη δυνατὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7}$ (minimum τῆς $f(x)$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἔχει λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$x = \alpha + \sqrt{x^2 + 2(\alpha + 1)x + 4\alpha};$$

Λύσις. Ἀπομονοῦμεν τὸ ριζικὸν:

$$\sqrt{x^2 + 2(\alpha + 1)x + 4\alpha} = x - \alpha$$

ἐξ οὗ ὁ περιορισμός

$$(α) \quad x - \alpha \geq 0.$$

Τετραγωνίζοντες λαμβάνομεν

$$x^2 + 2(\alpha + 1)x + 4\alpha = x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \quad \text{ἢ} \quad 2x(2\alpha + 1) = \alpha^2 - 4\alpha \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2(2\alpha + 1)}.$$

Ἴνα ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x πληροῖ τὴν δοθεῖσαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῖ τὸν περιορισμὸν (α), δηλ. πρέπει

$$(2) \quad \frac{a^2 - 4a}{2(2a + 1)} - a \geq 0.$$

Λύοντες τὴν κλασματικὴν ἀνίσωσιν (2) (βλ. § 162) εὐρίσκομεν ὅλας ἐκείνας τὰς τιμὰς τοῦ a διὰ τὰς ὁποίας ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν. Εὐρίσκομεν δὲ

$$-\frac{1}{2} < a \leq 0$$

§ 175. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0$.

Ἡ λύσις τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, ὅπου A, B, Γ συναρτήσεις τῆς x , διευκολύνεται ἂν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι: ἂν τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των ἰσοῦται πρὸς τὸ τριπλάσιον γινόμενόν των (βλ. § 103).

Συνεπῶς ἐκ τῆς δοθείσης ἔπεται ἡ

$$(1) \quad A + B + \Gamma = 3\sqrt[3]{AB\Gamma} \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ}$$

$$(2) \quad (A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma$$

Ἀντιστρόφως ἡ (1) συνεπάγεται τὴν δοθεῖσαν ἐφ' ὅσον *δὲν εἶναι* $A=B=\Gamma$, (βλ. § 104, viii καὶ ἄσκ. 343).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(3) \quad \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$$

Λύσις. ἔχομεν $\sqrt[3]{x+1} + (-\sqrt[3]{x-1}) + (-\sqrt[6]{x^2-1}) = 0$ καὶ συνεπῶς, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον γινόμενον, δηλ.:

$$(4) \quad \sqrt[3]{x+1} + (-x+1) + (-\sqrt[3]{x^2-1}) = 3\sqrt[3]{x^2-1} \cdot \sqrt[6]{x^2-1} \quad \eta$$

$$2 - \sqrt[3]{x^2-1} = 3\sqrt[3]{x^2-1} \quad \eta \quad \sqrt[3]{x^2-1} = \frac{1}{2}, \quad x^2 = \frac{5}{4}, \quad x' = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x'' = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πληροῦσαι τὴν (4) πληροῦν καὶ τὴν (3) διότι δὲν καθιστοῦν ἴσα τὰ τρία ριζικὰ εὔτε ἀρνητικὸν τὸ ὑπόρριζον x^2-1 .

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἄρρητοι ἐξισώσεις (τῶν ὁποίων τὰ δύο μέλη εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς x).

$$A-705. \quad \sqrt{2x-1}=3, \quad \sqrt{x-2}=3=0, \quad \sqrt{2x+1}-7=0, \quad (4x^2+13)^{\frac{1}{2}}-2x=1.$$

$$A-706. \quad 2x - \sqrt{7x+2}=0, \quad 3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+4}=0, \quad \sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}-1=0.$$

$$A-707. \quad -\frac{1}{2} + (10x-4)^{\frac{1}{2}} = 5.$$

$$\mathbf{A-708.} \quad \sqrt{x^2-x+1}=x-2, \quad \sqrt{3x-2}-3=\sqrt{3x-4}.$$

$$\mathbf{A-709.} \quad 2\sqrt{x+1,5}=\sqrt{x}+\sqrt{x+4}, \quad \sqrt{12+x}=\sqrt{x}+2\sqrt{1+x}.$$

$$\mathbf{A-710.} \quad \sqrt{4x-3}=2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{4x-3}}, \quad \sqrt{9x-32}=3\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{9x-32}}.$$

$$\mathbf{B-711.} \quad \text{i) Νά τραπή εις γινόμενον τὸ τριώνυμον : } 4x^2-15x-4.$$

$$\text{ii) Βάσει ιδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις}$$

$$\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}.$$

$$\mathbf{B-712.} \quad \text{Νά λυθοῦν αἱ ἄρρητοι ἐξισώσεις :}$$

$$\text{i) } \sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}.$$

$$\text{ii) } \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1.$$

$$\mathbf{B-713.} \quad \text{Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :}$$

$$\text{i) } \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}, \quad \text{ii) } \sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1.$$

$$\text{ii) } \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}} = \sqrt{2(x^3+1)}.$$

$$\mathbf{B-714.} \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :}$$

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$$

$$\mathbf{B-715.} \quad \text{Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :}$$

$$\text{α) } \sqrt[3]{x+49}-\sqrt[3]{x-49}=2. \quad \text{β) } \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$$

$$\mathbf{B-716.} \quad \text{Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :}$$

$$\text{α) } \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt[3]{x-1} \quad \text{β) } \sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\frac{4}{\sqrt{x+2}}.$$

Εἰς τὰς κάτωθι ἐξισώσεις νά εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμᾶς τῆς παρὰμέτρου a ὑπάρχει λύσις καὶ ποία ἡ λύσις αὕτη ;

$$\mathbf{B-717.} \quad \sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = a.$$

$$\mathbf{B-718.} \quad \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}} = ax.$$

$$\mathbf{B-719.} \quad \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$\mathbf{B-720.} \quad \frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2(\sqrt{a^2+x^2}+x).$$

$$\mathbf{B-721.} \quad \sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθήκαι τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν αἱ παράμετροι διὰ νὰ ὑπάρχη λύσεις.

$$\text{B-722. } \sqrt{a^2+x}\sqrt{b^2+x^2-a^2}=x-a.$$

$$\text{B-723. } \frac{1-\alpha x}{1+\alpha x} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta x}{1-\beta x}}=1.$$

$$\text{B-724. } \sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}.$$

$$\text{B-725. } \sqrt{x-2a}+\sqrt{x-2b}=2.$$

$$\text{B-726. } \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:}$$

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-\gamma}=0$$

καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ὑπαρξὶς λύσεως.

$$\text{B-727. } \text{Δίδονται αἱ ἄρρητοι ἐξισώσεις}$$

$$\text{i) } \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{\Gamma}=0, \text{ ii) } \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{\Gamma}=0,$$

ὅπου Α, Β, Γ ρηταὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τοῦ x. Νὰ εὑρεθῇ δι' ἐκάστην, μία ἀντίστοιχος ρητὴ ἐξίσωσις περιέχουσα καὶ τὰς ρίζας τοῦ ἀρρήτου.

$$\text{B-728. } \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.}$$

$$x=t+\sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}$$

καὶ νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου t, ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης ἂν δύνανται συγχρόνως ὁ x καὶ ὁ t νὰ εἶναι ἀκέραιοι.

$$\text{B-729. } \text{Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \{3\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}=4, \quad 5\sqrt{x-1}-2\sqrt{y-2}=5\}$$

διὰ χρήσεως βοηθητικῶν ἀγνώστων: $\sqrt{x-1}=\omega$, $\sqrt{y-2}=\phi$ ὑποκειμένων εἰς τοὺς περιορισμοὺς: $\omega \geq 0$, $\phi \geq 0$.

$$\text{B-730. } \exists \{(x,y)\} \subset \Pi^2?,$$

$$\{\sqrt{x^2-2y}=x-1, \quad \sqrt{x+2y-2}=\sqrt{4y-2}\}.$$

$$\text{B-731. } \text{Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:}$$

$$\{\sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x}, \quad 3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}\}.$$

$$\text{B-732. } \exists \{(x,y)\} \subset \Pi^2?,$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x^2+3x+144}+5\sqrt{y^2+y}=33 \\ 7\sqrt{x^2+3x+114}+20\sqrt{y^2+y}=y24. \end{cases}$$

§ 176. Προσεγγίσεις. α') 'Ορισμοί. Ἐστω α μία προσέγγις (κατ' ἔλλειψιν ἢ κατ' ὑπεροχὴν) ἐνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκριβὴς τιμὴ εἶναι Α. Τότε:

$$\text{i) } \text{'Η διαφορὰ } |A-a| \text{ καλεῖται ἀπόλυτον λάθος (ἢ σφάλμα).}$$

$$\text{ii) } \text{'Ο λόγος } \frac{|A-a|}{A} \text{ καλεῖται σχετικὸν λάθος (ἢ σφάλμα).}$$

iii) Ἐὰν $|A-a| < \epsilon$ ($0 < \epsilon < A$), τότε τὸ ε εἶναι ἓνα ἀνω φράγμα τοῦ (ἀπολύτου) λάθους.

iv) Ἀποτίμησης τοῦ Α. Ἐάν, χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν Α, φανερῶμεν ἀπὸ τὸ ἱστοπύοτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\alpha < A < \alpha'$$

τότε τὸ ζεύγος (α, α') ἄς λέγεται μία ἀποτίμησης τοῦ A . Ἡ διαφορὰ $\alpha' - \alpha = \varepsilon$ εἶναι τότε ἄνω φράγμα τοῦ λάθους τὸ ὁποῖον γίνεται ἂν ἀντικατασταθῇ τὸ A διὰ τῆς κατ' ἑλλειψίν προσεγγίσεώς του α ἢ τῆς καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίσεώς του α' . Διότι προφανῶς, $|A - \alpha| < \alpha' - \alpha$ καθὼς καὶ $|A - \alpha'| < \alpha' - \alpha$, δηλ. $|A - \alpha| < \varepsilon$ καὶ $|A - \alpha'| < \varepsilon$. Αἱ δύο ἐκφράσεις: «ἀποτιμῶ τὸ A » καὶ «ὑπολογίζω κατὰ προσέγγισιν τὸν A » εἶναι ταυτόσημοι.

v) Ἐὰν $\alpha - \varepsilon < A < \alpha + \varepsilon$ τότε τὸ α εἶναι μία προσέγγις τοῦ A (ἄγνωστον ἂν εἶναι κατ' ἑλλειψίν ἢ καθ' ὑπεροχὴν) μὲ ἄνω φράγμα λάθους, τὸ ε . Διότι $\alpha - \varepsilon < A < \alpha + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < A - \alpha < \varepsilon \Rightarrow |A - \alpha| < \varepsilon$.

vi) Ἐὰν $\alpha < A < \alpha + \varepsilon$, τότε τὸ α εἶναι κατ' ἑλλειψίν προσέγγις τοῦ A , μὲ ἄνω φράγμα λάθους, τὸ ε . (Κατὰ τὴν ἀποτίμησιν ριζῶν ἢ ἄλλων παραστάσεων, ὁ α λέγεται συνήθως (ὄχι ὀρθῶς), κατὰ προσέγγισιν ε καὶ κατ' ἑλλειψίν τιμὴ τῆς ρίζης ἢ τῆς παραστάσεως). Ἐννοεῖται ὅτι καὶ ὁ $\alpha + \varepsilon$ εἶναι μία καθ' ὑπεροχὴν προσέγγις τοῦ A (ἢ προσέγγις ἐκ τῶν ἄνω) μὲ ἄνω φράγμα λάθους, ε .

vii) Ἐὰν $\alpha - \varepsilon < A < \alpha$, τότε τὸ α εἶναι καθ' ὑπεροχὴν προσέγγις τοῦ A μὲ ἄνω φράγμα λάθους ε .

β') Ἀποτίμησης ἀριθμητικῶν παραστάσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Κατὰ τὴν μέτρησιν τριῶν φυσικῶν μεγεθῶν αἱ ἀκριβεῖς τιμαὶ εἶναι A, B, Γ εὐρέθησαν ὥς κατὰ προσέγγισιν τιμαὶ αὐτῶν, ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ $\alpha = 2,35$, $\beta = 14,71$, $\gamma = 5,70$. Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι ἄνω φράγμα τοῦ γενομένου εἰς ἐκάστην μέτρησιν, (ἀπολύτου) λάθους, εἶναι τὸ 0,01. Ζητεῖται ν' ἀποτιμηθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}}$.

Λύσις. Ἐχομεν, ἐν πρώτοις, $\alpha - \varepsilon < A < \alpha + \varepsilon$, δηλ.

$$(1) \quad 2,34 < A < 2,36.$$

Ἐχομεν ἐπίσης $5,69 < \Gamma < 5,71$ καὶ συνεπῶς

$$(2) \quad 17,07 < 3\Gamma < 17,13.$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν $\alpha - \varepsilon < A < \alpha + \varepsilon$ καὶ $\beta - \varepsilon < B < \beta + \varepsilon$ δηλ. τῶν $2,34 < A < 2,36$ καὶ $14,70 < B < 14,72$

λαμβάνομεν διὰ πολ./σμοῦ κατὰ μέλη :

$$34,3980 < AB < 34,7392 \quad \text{ἢ καὶ}$$

$$34,39 < AB < 34,74. \quad \text{Ἀντιστρέφοντες :}$$

$$(3) \quad \frac{1}{34,74} < \frac{1}{AB} < \frac{1}{34,39}$$

Πολ./ντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\frac{17,07}{34,74} < \frac{3\Gamma}{AB} < \frac{17,13}{34,39} \quad \eta$$

$$0,451 \dots < \frac{3\Gamma}{AB} < 0,498 \dots \quad \eta$$

$$0,45 < \frac{3\Gamma}{AB} < 0,50 \quad \text{και τέλος}$$

$$(4) \quad -0,50 < -\frac{3\Gamma}{AB} < -0,45.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$1,84 < A - \frac{3\Gamma}{AB} < 1,91. \quad \text{'Εξ αὐτῆς :}$$

$$\sqrt{1,84} < \sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}} < \sqrt{1,91} \quad \eta$$

$$1,3564 \dots < \sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}} < 1,385 \dots \quad \eta \quad \text{ἀκόμη}$$

$$1,35 < \sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}} < 1,39.$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ τελικὴ ἀποτίμησις τῆς δοθείσης παραστάσεως ἡ ὁποία προσεγγίζεται κατ' ἑλλειψιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 1,35 μὲ ἄνω φράγμα λάθους 0,04. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}} = 1,3 \dots$$

ὅπου αἱ κοκκίδες παριστάνουν ἄγνωστα ψηφία.

Τὸ σχετικὸν λάθος κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν εἶναι :

$$\frac{0,04}{\sqrt{A - \frac{3\Gamma}{AB}}} < \frac{0,04}{1,38} = \frac{4}{138} = 0,029 \dots < 0,03. \quad \text{ἥτοι}$$

ἔχει ἄνω φράγμα 0,03. Λέγομεν ὅτι τὸ σχετικὸν λάθος εἶναι ὀλιγώτερον τοῦ 3 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν.

2. Νὰ εὐρεθῇ προσέγγις τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως

$$A = 1580 (2 + \sqrt{9,8})$$

μὲ ἄνω φράγμα λάθους, τὸ 1/10.

Λύσις. 'Εὰν ἡ $\sqrt{9,8}$ ὑπολογισθῇ κατ' ἑλλειψιν μὲ λάθος λ τότε τὸ λάθος τοῦτο θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1580 καὶ θὰ γίνῃ 1580λ . Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $1580\lambda < \frac{1}{10}$, ἄρα $\lambda < \frac{1}{15800}$. Ὡστε κατὰ τὴν ἐξαγωγήν τῆς $\sqrt{9,8}$ πρέπει νὰ

κάμωμεν λάθος $< \frac{1}{15800}$. 'Επειδὴ ἡ ρίζα ἐξάγεται κατὰ προσέγγισιν 1 ἢ

1/10 ἢ $\frac{1}{100}$ κλπ. πρέπει τώρα νὰ ἐξαχθῇ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100000}$ (δηλ. μὲ 5

δεκαδικά ψηφία) διὰ τὴν ἐξασφαλισθῇ ὅτι θὰ κάμωμεν λάθος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{15800}$. Ἐπομένως, διὰ τὴν εὐρώμεν τὴν Α με προσέγγισιν $1/10$, δέον ν' ἀν-

τικαταστήσωμεν τὴν $\sqrt{9,8}$ διὰ τῆς ἐξῆς προσεγγίσεώς της : 3,13049. Εὐρίσκομεν δὲ τότε $A=8116,17420$ καὶ κρατοῦμεν μόνον : $A=8116,1$ διότι ἡ ἐξασφαλιζομένη προσέγγισις εἶναι ἐνὺς δεκάτου (Ἐπαλήθευσις : Θὰ ἔχωμεν $3,13049 < \sqrt{9,8} < 3,13050$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 1580 :

$$4946,1742 < 1580\sqrt{9,8} < 4946,1900$$

καὶ προσθέτοντες 1580.2 : $8106,1742 < 1580(2 + \sqrt{9,8}) < 8106,1900$

ἤτοι : $8106,1742 < A < 8106,1900$ ἢ $0,0742 < A - 8106,1 < 0,0900$ ἢ $0 < A - 8106,1 < 0,1$. Ἐπομένως, κατὰ προσέγγισιν δεκάτου καὶ κατ'ἑλλειπιν, εἶναι $A=8106,1$.

*** γ') Κανόνες ἀποτιμήσεως.** Διὰ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμούς, εἶναι χρήσιμοι οἱ κάτωθι κανόνες τοὺς ὁποίους (ἐκτὸς προγράμματος) παραθέτομεν, διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ θέματος τῶν προσεγγίσεων.

1ον. Ἐὰν $\alpha < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta < B < \beta + \eta$ τότε

$$(\alpha + \beta) < A + B < (\alpha + \beta) + (\epsilon + \eta)$$

$$(\alpha - \beta) - \eta < A - B < (\alpha - \beta) + \epsilon$$

Ἐὰν $\alpha - \epsilon < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta - \eta < B < \beta + \eta$, τότε

$$(\alpha + \beta) - (\epsilon + \eta) < A + B < (\alpha + \beta) + (\epsilon + \eta)$$

$$(\alpha - \beta) - (\epsilon + \eta) < A - B < (\alpha - \beta) + (\epsilon + \eta).$$

2ον. Ἐὰν $\alpha < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta < B < \beta + \eta$ τότε

$$\alpha\beta < AB < \alpha\beta + \delta$$

ὅπου $\delta = A'\eta + B'\epsilon$ μὲ $A' > \alpha + \epsilon$ καὶ $B' > \beta + \eta$.

Ἐὰν $\alpha - \epsilon < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta - \eta < B < \beta + \eta$ τότε

$$\alpha\beta - \delta < AB < \alpha\beta + \delta$$

ὅπου δ , τὸ ἴδιον μὲ τὸ προηγούμενον.

3ον. Ἐὰν $\alpha < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta < B < \beta + \eta$ τότε

$$\frac{\alpha}{\beta + \eta} < \frac{A}{B} < \frac{\alpha + \epsilon}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\eta + \beta\epsilon}{\beta^2} < \frac{A}{B} < \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\eta + \beta\epsilon}{\beta^2}.$$

Ἐὰν $\alpha - \epsilon < A < \alpha + \epsilon$ καὶ $\beta - \eta < B < \beta + \eta$ τότε

$$\frac{\alpha - \epsilon}{\beta + \eta} < \frac{A}{B} < \frac{\alpha + \epsilon}{\beta - \eta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\eta + \beta\epsilon}{(\beta - \eta)^2} < \frac{A}{B} < \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\eta + \beta\epsilon}{(\beta - \eta)^2}.$$

Σημείωσις. Εἰς τὸν πρακτικὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $(\alpha\eta + \beta\epsilon)/(\beta - \eta)^2$, ἀντικαθίστανται εἰς μὲν τὸν ἀριθμητὴν, τὰ α καὶ β δι' ἀριθμῶν μεγαλυτέρων ἀλλ' ἀπλουστέρων εἰς δὲ τὸν παρονομαστήν, τὸ $\beta - \eta$ δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου ἀλλ' ἀπλουστέρου.

4ον. Ἐὰν $\alpha < A < \alpha + \epsilon$ τότε

$$\sqrt{\alpha} < \sqrt{A} < \sqrt{\alpha + \epsilon} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{\alpha} < \sqrt{A} < \sqrt{\alpha} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλεόν $\sigma < \sqrt{\alpha} < \sigma'$, τότε $\sigma < \sqrt{A} < \sigma' + \frac{\epsilon}{2\sigma}$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Διὰ τὴν IX $A < \alpha + \varepsilon \wedge B < \beta + \eta \Rightarrow (1)$, $AB < \alpha\beta + \alpha\eta + \beta\varepsilon + \varepsilon\eta$.

Ἐπίσης $A' > \alpha + \varepsilon \wedge B' > \beta + \eta \Rightarrow A'\eta + B'\varepsilon > \alpha\eta + \beta\varepsilon + 2\varepsilon\eta > \alpha\eta + \beta\varepsilon + \varepsilon\eta$.

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς: $\alpha\eta + \beta\varepsilon + \varepsilon\eta < A'\eta + B'\varepsilon = \delta$, ἢ (1) γίνεται $AB < \alpha\beta + \delta$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεικνύεται καὶ τὸ β' μέρος τῆς IX.

Διὰ τὴν X. $\beta < B < \beta + \eta \Rightarrow \frac{1}{\beta + \eta} < \frac{1}{B} < \frac{1}{\beta}$ καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη μὲ τὴν $\alpha < A < \alpha + \varepsilon$ προκύπτει ἡ πρώτη ἀποδεικτέα. Διὰ τὴν δευτέραν ἀποδεικτέαν πρέπει νὰ δειχθοῦν δύο τινά: πρῶτον, $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{A}{B} < \frac{\alpha\eta + \beta\varepsilon}{\beta^2}$ καὶ δεύτερον, $\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha\eta + \beta\varepsilon}{\beta^2}$. Διὰ τὸ πρῶτον: $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{A}{B} < \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta + \eta} = \frac{\alpha\eta}{\beta(\beta + \eta)} < \frac{\alpha\eta + \beta\varepsilon}{\beta^2}$. Διὰ τὸ δεύτερον: $\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha + \varepsilon}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\beta} < \frac{\alpha\eta + \beta\varepsilon}{\beta^2}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται καὶ τὸ β' μέρος.

Διὰ τὴν XI. $\alpha < A < \alpha + \varepsilon \Rightarrow \alpha < A < \alpha + \varepsilon + 2\sqrt{\alpha\varepsilon} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\varepsilon})^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{A} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\varepsilon}$. Διὰ τὴν δευτέραν ἀποδεικτέαν: $A - \alpha < \varepsilon \Rightarrow (\sqrt{A} + \sqrt{\alpha})(\sqrt{A} - \sqrt{\alpha}) < \varepsilon \Rightarrow 2\sqrt{\alpha}(\sqrt{A} - \sqrt{\alpha}) < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{A} - \sqrt{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \sqrt{A} < \sqrt{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}}$.

Ἐὰν $\sigma < \sqrt{\alpha} < \sigma'$ τότε $\sqrt{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}} < \sigma' + \frac{\varepsilon}{2\sigma}$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-733. Δοθέντος ὅτι $\sqrt{10} = 3,162\dots$ ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sqrt{6 + \frac{2}{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{10} - 3}, \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

δίδοντες συγχρόνως καὶ ἄνω φράγμα τοῦ λάθους.

B-734. Δοθέντος ὅτι $\sqrt{7} = 2,646\dots$ ἀποτιμήσατε τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \sqrt{14 + \frac{2}{7}}, \quad \frac{3}{\sqrt{7} - 2}, \quad \frac{2\sqrt[4]{49}}{7 + \sqrt{7}}$$

B-735. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ προσέγγισιν $1/100$ αἱ κάτωθι παραστάσεις.

$$\frac{19\sqrt{2} + 5\sqrt{7}}{180}, \quad \frac{4}{\sqrt{7}}, \quad \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$$

B-736. Γνωρίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς $e = 2,718\dots$ καὶ $\sqrt[3]{3} = 1,732\dots$ μὲ λάθος ὀλιγώτερον τοῦ 10^{-4} . Μὲ ποίαν προσέγγισιν γνωρίζομεν i) τὸν e^2 ; ii) τὸ γινόμενον $e^2\sqrt[3]{3}$;

B-737. Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, ποία ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ κατ' ἑλλειψιν (§58, §61):

τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $(n+1)^2 - 1$

» » » $(n+1)^2 + 1$
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\begin{array}{ccc} \text{κυβική} & \gg & \gg & (v+1)^3-1 \\ & \gg & \gg & (v+1)^3+1. \end{array}$$

B-738. Ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν $v+1$ καὶ $v+2$ προσεγγίζει περισσότερο τὴν

$$\sqrt{(v+1)(v+2)}; \quad (v \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς}).$$

B-739. Ἐὰν $0 < x < 1$ νὰ δεიχθῇ ἡ ἀποτίμησις :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

Μὲ ποῖον φράγμα λάθους παριστᾷ τὴν $\sqrt{1+x}$ ἡ ποσότης $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$;

Νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω, ἡ $\sqrt{1,02}$ κατὰ προσέγγισιν καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ προσέγγισις.

B-740. Ἐὰν a ἀκέραιος νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὴ ρίζα τῶν παραστάσεων :

$$16a^2+8a+3, \quad 4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}, \quad a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}$$

B-741. Ἐὰν a φυσικὸς ἀριθμὸς δεῖξατε ὅτι μὲ σφάλμα ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{4a^2+1}$ καὶ κατ' ἔλλειψιν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ a^2+1 προσεγγίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν $a + \frac{2a}{4a^2+1}$.

B-742. Ἐὰν a εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς >1 , δεῖξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $a - \frac{1}{3a^2}$, μὲ λάθος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{3a^2}$ προσεγγίζει ἐκ τῶν ἄνω τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ a^3-1 . Ὁμοίως δὲ καὶ ὁ ἀριθμὸς $a + \frac{1}{3a^2}$, τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ a^3+1 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙΠ

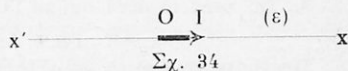
Γραφικαὶ παραστάσεις πρωτοβαθμίων συναρτήσεων τοῦ x .

ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ

§ 177. Ἀλγεβρική τιμὴ διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος. α') Ἀξων. Μία εὐθεῖα (ϵ) καὶ ἐπὶ ταύτης ἓνα δεσμευ-
μένον διάνυσμα $\vec{OI} = \vec{i}$ τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἡ μονάς,
ἀποτελοῦν ἓναν ἄξονα $x'ox$ (σχ. 34).

Τὸ σταθερὸν σημεῖον O λέγεται «ἀρχή» τοῦ ἄξονος ἢ σημεῖον
ἀναφορᾶς. Τὸ διάνυσμα $\vec{OI} = \vec{i}$ λέγεται μοναδιαῖον διάνυσμα
τοῦ ἄξονος καὶ ἡ φορὰ αὐτοῦ, θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος. Ἡ ἀντί-
θετος πρὸς τὴν θετικὴν, φορὰ, λέγεται ἀρνητικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος.

Τὸ μῆκος παντὸς εὐθυγράμμου τμήματος κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος,
μετρεῖται ὑποχρεωτικῶς μὲ μονάδα
τὴν OI . Ὁ ἄξων τοῦ σχ. 34 δύνα-
ται νὰ παρασταθῇ μὲ $\{(\epsilon), O, \vec{i}\}$
διότι εἶναι σύνολον ἀποτελούμενον ἐκ τῆς εὐθείας (ϵ) τῆς «ἀρχῆς» O
καὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{i}$. Ὁ αὐτὸς ἄξων παρίσταται καὶ μὲ
($x'ox, \vec{i}$).



β') Καλεῖται ἀλγεβρική τιμὴ (ἢ σχετικὸν μέτρον) ἐνὸς δια-
νύσματος $\vec{AB}$ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ($x'ox, \vec{i}$), ὁ σχετικὸς ἀ-
ριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τὸ μοναδιαῖον τοῦ ἄξο-
νος διάνυσμα $\vec{i}$, δίδει τὸ $\vec{AB}$. (βλ. § 78).

Κατὰ συνέπειαν, ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ $\vec{AB}$ ἔχει πρόσημον τὸ $+$
ἂν $\vec{AB}$ καὶ $\vec{OI} (= \vec{i})$ εἶναι ὁμόρροπα· καὶ πρόσημον τὸ $-$ ἂν $\vec{AB}$ καὶ
 $\vec{OI}$ εἶναι ἀντίρροπα. Κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, ἡ ἀλγεβρική τιμὴ εἶναι τὸ
ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ τμήματος AB μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ
 OI . Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα OI (μοναδιαῖον) καὶ AB εἶναι σύμ-
μετρα μεταξὺ τῶν (βλ. § 63), τότε ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι

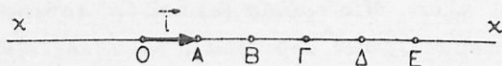
σύμμετρος αριθμός τῆς Ἀλγέβρας. Ἄν δὲ τὰ Οἱ καὶ AB εἶναι ἀσύμμετρα μεταξύ των (§ 64) τότε ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός τῆς Ἀλγέβρας.

Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται μὲ $\overline{AB}$. Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ ἔχομεν

(1)

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Εἰς τὸ σχ. 35, ἔχουν ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'ox ἔχοντος μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, τὰ σημεῖα B, Γ, Δ, Ε οὕτως ὥστε: $OA = AB = BG = \Gamma\Delta = \Delta E$. Θὰ ἔχωμεν τότε:



Σχ. 35

$$\overline{OA} = 1, \overline{EA} = -1, \overline{BD} = 2, \overline{EA} = -4, \overline{OA} = 4\vec{i}, \overline{DA} = -3\overline{OA} = -3\vec{i}, \overline{EO} = -5\vec{i}.$$

2. Ἀναφορικῶς πρὸς τὸ σχ. 35 ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$\overline{GO} + \overline{OE} + \overline{EA} = \overline{GA}$$

Διότι τὸ πρῶτον μέλος ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν $(-1) + (+5) + (-4) = -2$ καὶ τὸ δεῦτερον, ἰσοῦται ἐπίσης μὲ -2 .

3. Ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σχῆμα (35) θὰ ἰσχύη ἐπίσης ἡ ἰσότης:

$$\overline{AB} \cdot \overline{\Gamma\Delta} + \overline{A\Gamma} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{B\Gamma} = 0$$

Πράγματι, τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται μὲ $(+1)(+1) + (+2)(-2) + (+3)(+1) = 1 - 4 + 3 = 0$.

Προφανῶς, τὰ διανύσματα τὰ ὁμόρροπα πρὸς τὸ μοναδιαῖον ἔχουν ἀλγεβρικές τιμὰς θετικές τὰ δὲ ἀντίρροπα, ἀρνητικές. Τὸ **μηδενικὸν διάνυσμα** θεωρεῖται ὡς ἔχον ἀλγεβρικήν τιμήν, τὸ μηδέν. Τὰ **ἀντίθετα** διανύσματα ἔχουν ἀντιθέτους ἀλγεβρικές τιμὰς, ἐπομένως, ἂν A καὶ B δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος θὰ ἰσχύη:

(2)

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀλγεβρικήν τιμήν ἑνὸς διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος, τότε γνωρίζομεν ὅχι μόνον τὸ μήκος (ἢ μέτρον) τοῦ διανύσματος ἀλλὰ καὶ τὴν φοράν αὐτοῦ. Ἐτσι π.χ. ἂν $\overline{AB} = -3$, συνάγομεν ὅτι τὸ $\overrightarrow{AB}$ φέρεται πρὸς τ' ἀρνητικὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἔχει μήκος τριῶν μονάδων.

γ') Ἐὰν τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἔχη φοράν τὴν θετικὴν φοράν τοῦ ἄξονος τότε ἡ ἀλγεβρική τιμὴ του συμπίπτει μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του (μέτρον)

του) και δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τότε, $\overline{B\Gamma} = |\overrightarrow{B\Gamma}| = (B\Gamma) = (\Gamma B)$ ὅπου $(B\Gamma)$ συμβολίζει τὸ ἀπόλυτον (ἢ ἀριθμητικὸν) μῆκος τοῦ τμήματος $B\Gamma$. (βλ. § 90). Ἐὰν τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$ φέρεται πρὸς τ' ἀρνητικά, τότε $\overline{B\Gamma} = -|\overrightarrow{B\Gamma}| = -(B\Gamma) = -(\Gamma B)$.

δ') Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀλγε- κ' βρικῆς τιμῆς δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ πᾶν διάνυσμα *συγ-*

γραμμικὸν (§ 75) πρὸς τὸν ἄξονα ($x'ox$, $\vec{i}$): Ἄν $\vec{\lambda i} = \overrightarrow{AB}$ τότε $\overline{AB} = \lambda$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$ (σχ. 36).

§ 178. Θεώρημα τοῦ Châsles. α') Καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν κείνται τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ ἐνὸς ἄξονος, ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἰσότης :

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$$

Ἀποδείξεις. Τὰ τρία σημεῖα θὰ ἔχουν μίαν ἀπὸ τὰς 6 διατάξεις τοῦ σχ. 37 (θετικὴ φορά ἐκ τοῦ x' πρὸς x).

Εἰς τὴν περίπτωσιν 1), αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι θετικοὶ καὶ ἡ προφανὴς Γεωμετρικὴ σχέσις $(AB) + (B\Gamma) = (A\Gamma)$ ἡ ὁποία ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, γράφεται :

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} \quad (\text{βλ. § 177, γ'}).$$

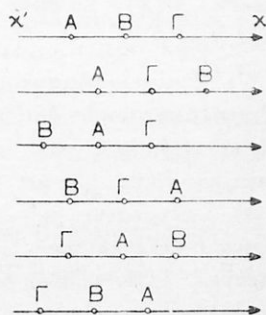
Εἰς τὴν περίπτωσιν 6), ἔχομεν προφανῶς, πάλιν: $\overline{\Gamma B} + \overline{BA} = \overline{\Gamma A}$. Ἡ σχέσις

αὕτη γράφεται: $-\overline{B\Gamma} - \overline{AB} = -\overline{A\Gamma}$ ἢ $\overline{B\Gamma} + \overline{AB} = \overline{A\Gamma}$ ἢ $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$, ὥστε ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης, ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

Κατὰ τὴν διάταξιν 2) θὰ ἔχομεν προφανῶς: $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B} = \overline{AB}$. Προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη, τὸν ἀριθμὸν $\overline{B\Gamma}$ λαμβάνομεν: $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B} + \overline{B\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$ καὶ ἐπεὶ δὴ $\overline{\Gamma B} + \overline{B\Gamma} = 0$, λαμβάνομεν $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$, δηλαδή τὴν ἀποδεικτέαν: $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ἰσότης $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$ ἰσχύει εἰς ὅλας τὰς λοιπὰς περιπτώσεις.

β') Καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν κείνται ἐπὶ ἄξονος, n σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἰσότης



Σχ. 37

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \dots + \overline{A_{v-1} A_v} = \overline{A_1 A_v}.$$

Τοῦτο, ἔπεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας: $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} = (\overline{A_1 A_3})$, $(\overline{A_1 A_3}) + \overline{A_3 A_4} = (\overline{A_1 A_4})$, $(\overline{A_1 A_4}) + \overline{A_4 A_5} = (\overline{A_1 A_5})$, ..., $(\overline{A_1 A_{v-1}}) + \overline{A_{v-1} A_v} = \overline{A_1 A_v}$ ὅποτε αἱ ἐντὸς παρενθέσεως τεθεῖσαι ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ διαγράφονται ἀπὸ τὰ δύο μέλη.

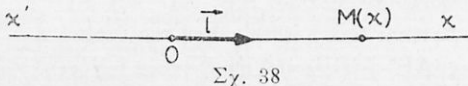
§ 179. Τετμημένη σημείου κειμένου ἐπὶ ἄξονος. α')

Ἐστω M ἐν ὁποιοδήποτε σημείον τοῦ ἄξονος ($\kappa'ox, \vec{i}$). Καλεῖται τετμημένη τοῦ M , ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν, τὴν ἀρχὴν O τοῦ ἄξονος καὶ πέρας τὸ σημεῖον M (σχ. 38).

Ἡ τετμημένη παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γράμματος x . Εἶναι δὲ ἐξ ὁρισμοῦ: $x = \overrightarrow{OM}$ ἢ $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

Διὰ τὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M ἔχει τετμημένην x , γράφομεν: $M(x)$. Τὸ $M(x)$ εἶναι δηλαδή τὸ πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ ὅπου $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

β') Ἀφαιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τῶν σημείων τοῦ ἄξονος καὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Εἰς κάθε σημείον τοῦ ἄξονος, ἀντιστοιχεῖ ὡς εἶδομεν, ἓνας πραγματικός ἀριθμὸς ὅστις



σημεῖον· ἀλλὰ καὶ ἀντι-

στρόφως, δοθέντος ἑνὸς ὁποιοδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x , ὑπάρχει ἓνα καὶ μόνον σημεῖον M τοῦ ἄξονος, ἔχον ὡς τετμημένην τὸν ἀριθμὸν x . Εἰς πολλὰς περιπτώσεις, δοθέντος τοῦ x δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον $M(x)$, π.χ. ὅταν ὁ x εἶναι σύμμετρος ἢ εἶναι $\sqrt{2}$ (ὅποτε $OM =$ διαγώνιος τοῦ μοναδιαίου τετραγώνου) ἢ $-3\sqrt{2}$ ἢ $\sqrt{3}$ κ.τ.λ. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ ὑπαρξὶς τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς τὸν x σημείου, εἶναι ἀποδεδειγμένη. Ἐὰν ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ τμήματος OM εἶναι ἀδύνατος διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, ἢ ἄλλως πῶς, τότε παραδεχόμεθα τὴν ὑπαρξιν ἑνὸς σημείου ἔχοντος τετμημένην τὸν δοθέντα ἀριθμὸν x .

Ἐν προκειμένῳ, δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὡς ἀξίωμα ὅτι:

Εἰς κάθε σημείον M τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ ἓνας πραγματικός ἀριθμὸς x (ἡ τετμημένη τοῦ M) καὶ εἰς κάθε πραγματικὸν
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἀριθμὸν x ἀντιστοιχεῖ ἓνα καὶ μόνον σημεῖον $M(x)$ τοῦ ἄξονος. Τοῦτο λέγεται: ἀξίωμα τῆς ἀμφιμονοσημάντων ἀντιστοιχίας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα ἐνὸς ἄξονος.

(Ἡ ἀμφιμονοσήμαντος αὐτὴ ἀντιστοιχία δὲν δύναται ν' ἀποδειχθῇ παρὰ μόνον ἐὰν παραδεχθῶμεν ἄλλα ἀξιώματα ἀφορῶντα τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας).

γ') Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ πέρατος, μείον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς τοῦ διανύσματος.

Πράγματι, ἔστω $\overrightarrow{AB}$ διάνυσμα κείμενον ἐπὶ ἄξονος xox' , x_1 ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς A καὶ x_2 ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος B , δηλ.:

$$(1) \quad \overline{OA} = x_1, \quad \overline{OB} = x_2$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Châles, ἰσχύει ὅτι $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$ ἢ $-\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{AB}$ ἢ $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2 - x_1$ (λόγῳ τῶν (1)).

δ') Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἁκρῶν τοῦ τμήματος.

Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὰ σημεῖα $A(x_1)$, $B(x_2)$ καὶ ἔστω $M(x)$ τὸ μέσον τοῦ AB . Τότε ἔχομεν $\overline{AM} = \overline{MB}$ καὶ $\overline{AM} = \overline{MB}$ ἢ ἀκόμη, $x - x_1 = x_2 - x$ (προηγούμενον θεώρ.) ἢ $2x = x_1 + x_2$ ἢ τέλος $x = (x_1 + x_2)/2$.

§ 180. Λόγος δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων. α')

Ἔστωσαν δύο συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ (βλ. § 75).

Καλεῖται λόγος τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$, ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς λ , ὅστις πολλαπλασιάξων τὸ $\overrightarrow{AB}$ δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (§ 78).

$$\text{Ἦτοι:} \quad (1) \quad \frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda \iff \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ἔστω, τώρα καὶ ἓνας ἄξων ($x'ox, i$) παράλληλος πρὸς τὰ δύο συγγραμμικά διανύσματα. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} \quad (\text{βλ. § 177 δ'}) \quad \text{καὶ ἐπομένως}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \vec{i}}{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}}. \quad \text{Ἀποδεικνύεται ὅτι} \quad \frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \vec{i}}{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}}$$

(ἡ γενικὴ ἀπόδειξις τούτου ἐμπίπτει εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καὶ δὲν θὰ δοθῇ ἐνταῦθα) δηλ.:

Ὁ λόγος δύο διανυσμάτων συγγραμμικῶν πρὸς ἓνα ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δύο διανυσμάτων.

Ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος τοῦ μήκους, προφανῶς οὐδεμίαν ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ λόγου τῶν δύο ἀλγεβρικῶν τιμῶν $\vec{\Gamma\Delta} : \vec{AB}$ δηλ. τοῦ λόγου τῶν δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων $\vec{\Gamma\Delta} : \vec{AB}$.

β) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι ἂν α, β τυχόντες σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\vec{i}$ τυχὸν διάνυσμα, τότε ἰσχύει

$$\alpha(\beta \vec{i}) = \alpha\beta \cdot \vec{i} = \beta\alpha \cdot \vec{i} = \beta(\alpha \vec{i})$$

Διότι ἂν θέσωμεν: $\vec{k} = \beta \cdot \vec{i}$ καὶ $\vec{\tau} = \alpha\beta \cdot \vec{i}$ τότε

$$\frac{\vec{\tau}}{\vec{k}} = \frac{\alpha\beta \cdot \vec{i}}{\beta \cdot \vec{i}} = \frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha \Rightarrow \vec{\alpha k} = \vec{\tau} \Rightarrow \alpha(\beta \vec{i}) = \alpha\beta \vec{i}.$$

§ 181. Διαίρεσις διανύσματος εἰς δοθέντα λόγον.

α') Λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον M χωρίζει (ἢ διαιρεῖ) τὸ διάνυσμα $\vec{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ , ὅταν τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB καὶ ὅταν εἶναι :

$$(1) \quad \frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = \lambda.$$

Μετατρέποντες τὴν εὐθείαν AB εἰς ἄξονα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν (1)

$$(2) \quad \frac{\vec{MA}}{\vec{MA}} = \lambda \quad \eta \quad \vec{MA} = \lambda \vec{MB}.$$

Ἡ συμβολικὴ ἰσότης :

$$(3) \quad (\vec{AB}, \vec{M}) = \lambda$$

ἐκφράζει ὅτι τὸ M χωρίζει τὸ $\vec{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ .

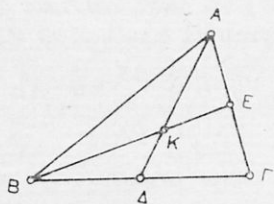
$$\text{δηλ. } (\vec{AB}, M) = \lambda \iff \vec{MA} : \vec{MB} = \lambda.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐστω K τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων AD καὶ BE τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 39). Τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι :

Τὸ K χωρίζει τὸ $\vec{AD}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\vec{KA} : \vec{KD} = -2$.

Τὸ Δ χωρίζει τὸ $\vec{B\Gamma}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\vec{DB} : \vec{\Delta\Gamma} = -1$.

Τὸ Γ χωρίζει τὸ $\vec{EA}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\vec{\Gamma E} : \vec{\Gamma A} = 1 : 2$.



Ἐπίσης :

$$(\overrightarrow{BA}, \Gamma) = \overrightarrow{GB} : \overrightarrow{GA} = 2, (\overrightarrow{DA}, K) = \overrightarrow{KA} : \overrightarrow{KA} = -1/2, (\overrightarrow{EK}, B) = \overrightarrow{BE} : \overrightarrow{EK} = 3 : 2.$$

β') Σημείον τοῦ λόγου $(\overrightarrow{AB}, M) = \overrightarrow{MA} : \overrightarrow{MB}$ κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M. Ἐστω τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x (σχ. 40) καὶ I τὸ μέσον αὐτοῦ.

Ἐάν τὸ M, χωρὶς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ A κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ax' τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ὁ λόγος των λ, θετικός. Ἐπὶ πλέον $|\overrightarrow{MA}| < |\overrightarrow{MB}|$, ἄρα ὁ λόγος λ εἶναι καὶ < 1 . Ἐχομεν τότε :

$$0 < \lambda < 1.$$

Ἐάν τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ AI, ὁ λόγος λ εἶναι ἀρνητικός διότι $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ ἀντίρροπα· ἐπίσης ὁ λ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τι < 1 διότι $|\overrightarrow{MA}| < |\overrightarrow{MB}|$. Αἱ $\lambda < 0$ καὶ $|\lambda| < 1$ συνεπάγονται :

$$-1 < \lambda < 0.$$

Ἐάν τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ IB, ὁ λόγος λ εἶναι ἀρνητικός διότι $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ἀντίρροπα· ἐπίσης ὁ λ εἶναι ἀπολύτως > 1 διότι $|\overrightarrow{MA}| > |\overrightarrow{MB}|$, ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\lambda < -1.$$

Ἐάν τὸ M, μὴ συμπίπτων μὲ τὸ B κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Bx, τότε ὁ λόγος λ εἶναι ἀφ' ἑνὸς θετικός, διότι τὰ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἀφ' ἑτέρου, > 1 διότι $|\overrightarrow{MA}| > |\overrightarrow{MB}|$, δηλ. τότε

$$\lambda > 1.$$

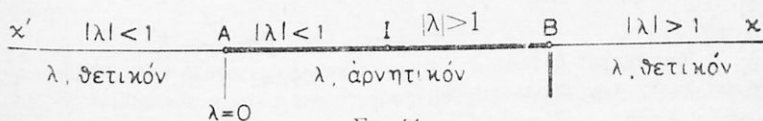
Ἐάν τὸ M συμπίσῃ μὲ τὸ A τότε $\overrightarrow{MA} = 0$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ καὶ συνεπῶς

$$\lambda = 0.$$

Ἐάν τὸ M συμπίσῃ μὲ τὸ I τότε $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ἀντίθετα καὶ συνεπῶς

$$\lambda = -1.$$

Ἐάν τὸ M συμπίπτῃ μὲ τὸ B, τότε $\overrightarrow{MB} = 0$ (ὁ παρ/στῆς μηδενίζεται) καὶ ὁ λόγος λ δὲν ὁρίζεται.



Σχ. 41

Τὸ σημεῖον τοῦ ἀλγεβρικοῦ λόγου λ ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχ. 41.

γ') Πρόβλημα. «Δοθέντος διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ ἄξονος $x'ox$, καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λ, ζητεῖται νὰ καθορισθοῦν ἐκεῖνα τὰ σημεῖα M τοῦ ἄξονος $x'ox$ τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ».

Ἐὰν $\lambda=1$, τότε πρέπει $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ τὸ ὁποῖον προφανῶς δὲν συμβαίνει εἰς καμμίαν θέσιν τοῦ M . Ἐπομένως :

Δὲν ὑπάρχει σημεῖον χωρίζον τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda=1$.

Ἐστω, τώρα $\lambda \neq 1$. Ἄν καλέσωμεν x_1 καὶ x_2 τὰς τετμημένας τῶν A καὶ B ἀντιστοίχως καὶ x τὴν τετμημένην τοῦ ζητουμένου σημείου M , τότε πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow (\S 179, \gamma'), x_1 - x = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x(\lambda - 1) = \lambda x_2 - x_1$$

ἢ $x(1 - \lambda) = x_1 - \lambda x_2$ καὶ ἐπειδὴ $\lambda - 1 \neq 0$ εὐρίσκομεν ὅτι :

(4)

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$

Ἐπομένως, ὑπάρχει ἓνα μοναδικὸν σημεῖον M : τὸ ἔχον τετμημένην x διδομένην ἀπὸ τὴν (4).

Συνεπῶς, δοθέντων δύο σημείων A καὶ B , ἡ θέσις ἐνὸς σημείου M ἐπὶ εὐθείας AB εἶναι τελείως ὠρισμένη, διὰν δοθῇ ὁ ἀλγεβρικὸς λόγος $(\overrightarrow{AB}, M) = \lambda$ ὅπου $\lambda \neq 1$. Διότι, ὡς εἶδόμεν ἡ τετμημένη τοῦ M εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένη διὰ τοῦ τύπου (4).

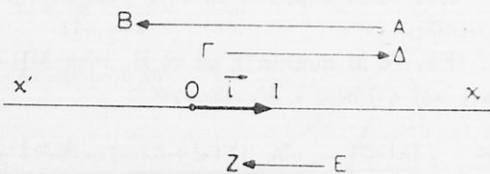
Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ

A-743. i) Ἐπὶ τοῦ σχήματος (42) μετρήσατε τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν συγγραμμικῶν πρὸς τὸν ἄξονα διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$.

ii) Ἐπίσης τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν διανυσμάτων

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{EZ}.$$



Σχ. 42

iii) Ἐκφράσατε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσας τῶν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{EZ}$.

A-744. Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος (x' οx, $\vec{i}$) δίδονται τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ, E τοιαῦτα ὥστε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta E} = \vec{i}$ (μοναδιαῖον). Ὑπολογίσατε τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων :

$$\alpha') \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GO}, \quad \beta') \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{OE},$$

$$\gamma') \overrightarrow{AE}^2 \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{GE}^2 \cdot \overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Delta E}^2 \cdot \overrightarrow{AG}, \quad \delta') \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{\Delta B}.$$

B-745. Δύο ἄξονες κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας (ε) ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν καὶ μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{U}$ συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως $\vec{U} = k\vec{i}$ ὅπου k δεδομένος ἀριθμὸς. Ἐστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κείμενον ἐπὶ τῆς (ε). Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ἀλγεβρικῶν τιμῶν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἀναφορικῶς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας;

Θεώρημα τοῦ Châles

B-746. Ἐὰν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ ἄξονος καθ' οἷανδὴποτε τάξιν δεῖξατε ὅτι : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$.

B-747. Ἐὰν διὰ τρία σημεῖα A, B, Γ κείμενα ἐπὶ ἄξονος ὑφίσταται ἡ σχέσις : $\overrightarrow{AB}^3 + \overrightarrow{B\Gamma}^3 + \overrightarrow{\Gamma A}^3 = 0$, δεῖξατε ὅτι τότε δύο τουλάχιστον ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ, συμπίπτουν εἰς ἓν.

Ἀξων, τετμημένοι

A-748. Χαράξατε μίαν εὐθείαν, ὀρίσατε μίαν ἀρχὴν O καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ καὶ κατόπιν σημειώσατε ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος ἄξονος τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x(x^2 + 5x + 6) = 0$.

A-749. Ἐπὶ ἄξονος κεῖνται τὰ σημεῖα $M_1(+4)$, $M_2(-3)$. Ποία ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$; Ποία ἡ ἐπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 ;

A-750. Ἐστῶσαν ἐπὶ ἄξονος τὰ σημεῖα M(8), A(-3), B(4), Γ(-5). Ὑπολογίσατε τὴν παράστασιν :

$$\overrightarrow{MA}^2 \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{MB}^2 \cdot \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{M\Gamma}^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

A-751. Δίδονται τὰ σημεῖα A(2), B(-3) ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x' οx. Εὑρετε τὴν τετμημένην ἑνὸς σημείου M τοῦ ἄξονος, τοιοῦτου ὥστε νὰ ἰσχύη : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3$.

A-752. Ἐστῶσαν τὰ σημεῖα A($\sqrt{2}+1$) καὶ B($\sqrt{2}-1$) ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος. Προσδιορίσατε ἓνα σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\sqrt{2} + 2.$$

B-753. Ἐπὶ ἄξονος x' οx (μὲ ἀρχὴν τὸ O) δίδονται τὰ σημεῖα A καὶ B ἔχοντα τετμημένας α καὶ β ἀντιστοίχως. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος, ἔχον τετμημένην x .

i) Ὑπολογίσατε τὴν τετμημένην x τοῦ σημείου M Μικτῆς συμμετρικοῦ τοῦ

M ως πρὸς τὸ A καὶ τὴν τετμημένην x_2 τοῦ σημείου M_2 , συμμετρικοῦ τοῦ M_1 ως πρὸς B . Συγκρίνατε τὰ $\overline{M_1M_2}$ καὶ $\overline{AB}$.

ii) Ὑπολογίσατε τὴν τετμημένην x_3 τοῦ σημείου M_3 , συμμετρικοῦ τοῦ M_2 ως πρὸς A . Προσδιορίσατε τὸ x οὕτως ὥστε τὰ M καὶ M_3 νὰ συμπίπτουν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πῶς κεῖνται τὰ σημεία A, B, M ;

A-754. Ἐπὶ ἄξονος $x'x$ με ἀρχὴν τὸ O , θεωροῦμεν τὰ σημεία $A(2)$, $B(6)$, $\Gamma(-3)$.

i) Ποία ἡ τετμημένη τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB ;

ii) Ποῖα ἡ τετμημένη σημείου P τοῦ ἄξονος, τοιοῦτου ὥστε νὰ πληροῦται ἡ σχέση $\overline{PA} + \overline{PB} = k$. Πῶς ἔνθα k δοθεὶς ἀριθμὸς; Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ k ἔχει τὸ πρόβλημα λύσιν;

Διαιρέσεις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ

A-755. Ἐπὶ ἄξονος δίδονται τὰ σημεία $A(3)$ καὶ $B(5)$. Ποία ἡ τετμημένη σημείου M διαιροῦντος τὸ $\overline{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον 2; Ποία ἡ τετμημένη τοῦ M ὅταν $(\overline{AB}, M) = -1$;

A-756. Ἐπὶ ἄξονος δίδονται τὰ σημεία $A(-10)$, $B(-7)$, $\Gamma(1)$. Ὑπολογίσατε τοὺς ἀλγεβρικοὺς λόγους: $(\overline{AB}, \Gamma)$, $(\overline{BA}, \Gamma)$, $(\overline{GB}, A)$, $(\overline{AG}, B)$, $(\overline{BG}, A)$, $(\overline{GA}, B)$.

A-757. Δίδονται ἐπὶ ἄξονος τὰ σημεία $P_1(3)$, $P_2(11)$, $P_3(8)$, $P_4(23)$. Δείξατε ὅτι τὰ P_3 καὶ P_4 χωρίζουν τὸ $\overline{P_1P_2}$ εἰς ἀλγεβρικοὺς λόγους ἀντιθέτους.

A-758. Δίδεται τμήμα AB , μήκους 13 cm. Ὅρίσατε ἐπὶ τῆς εὐθείας AB τὰ σημεία Γ καὶ Δ τὰ διαιροῦντα τὸ διάνυσμα $\overline{AB}$ εἰς λόγους $4/9$ καὶ $-4/9$ ἀντιστοίχως. Ποία ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν Γ καὶ Δ ;

A-759. Διάνυσμα $\overline{GA}$ ἔχει μέτρον $|\overline{GA}| = 2 + \sqrt{3}$ cm. Σημεῖον M διαιρεῖ τὸ $\overline{GA}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda = -\sqrt{3}/2$. Ὑπολογίσατε τὰ μήκη τῶν τμημάτων $M\Gamma$ καὶ $M\Delta$.

B-760. Ἐπὶ ἄξονος δίδονται τὰ σημεία $A(\alpha)$ καὶ $B(\beta)$. Ἐνα τρίτον σημεῖον M ἔχει τὴν ιδιότητα: $2\overline{MA} + 2\overline{MB} = 3\overline{AB}$. Ὑπολογίσατε τὸν λόγον εἰς ὃν τὸ M χωρίζει τὸ $\overline{AB}$.

B-761. Ἐπὶ ἄξονος δίδονται τὰ σημεία A καὶ B . Δύο ἄλλα σημεία M καὶ M' καθορίζονται διὰ τῶν σχέσεων $(\overline{AB}, M) = -4/7$, $(\overline{AB}, M') = 4/7$. i) Ὑπολογίσατε τὸ $\overline{AB}$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $MM' = -112$ mm. ii) Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $(AB)^2 + (MM')^2 - 4(1K)^2$ ὅπου I καὶ K εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν AB καὶ MM' .

Προβλήματα κινήσεως

Σημείωσις. Ἡ κίνησις σημείου ἐπὶ ἄξονος $x'ox$ εἶναι μαθηματικῶς ὠρισμένη ὅταν δοθῇ ἡ «ἀπομάκρυνσις» x_M τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ O (σελ. 96, γ') ὡς συνάρτησις τοῦ χρόνου t .

Κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ M , ἡ ἀπομάκρυνσις x_M ἀπὸ τοῦ O , εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου: $x_M = ut + \alpha$ ὅπου u ἡ σταθερὰ ταχύτης (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ) καὶ α ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ M ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O κατὰ τὴν «ἀρχὴν τῶν χρόνων» δηλ. ὅταν $t=0$.

B-762. Δύο κινητὰ M καὶ P κινοῦνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x' ὅς μὲ ἀντιστοίχους ταχύτητας u καὶ u_1 (σταθεράς). Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=0$ (ἀρχὴ τῶν χρόνων) ταῦτα εὐρίσκονται, τὸ μὲν πρῶτον εἰς τὸ σημεῖον $A(+8)$ τὸ δὲ δευτέρον εἰς τὸ $B(+4)$.

i) Εὑρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως ἐκάστου, δηλ. τὴν τετμημένην x_M τοῦ πρώτου κατὰ τὴν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν t καθὼς καὶ τὴν τετμημένην x_P τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν t .

ii) Ὑπολογίσατε τὰ u καὶ u_1 γνωρίζοντες ὅτι τὰ κινητὰ συναντῶνται κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=1$ καὶ ὅτι ἔχουν θέσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=6$. Εὑρετε ἐπίσης τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν δύο κινητῶν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=8$.

B-763. Δύο κινητὰ M καὶ P κινοῦνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἄξονος x' ὅς καὶ ἔχουν ἐξισώσεις κινήσεως: $x_M = 3t - 8$, $x_P = -2t + 7$.

i) Προσδιορίσατε τὴν χρονικὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως αὐτῶν.

ii) Κατὰ ποίας χρονικὰς στιγμὰς ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν 15;

B-764. Δύο κινητὰ M καὶ P κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ ἄξονος x' ὅς. Τὸ πρῶτον διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $A(+7)$ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=-1$ καὶ διὰ τοῦ σημείου $B(-1)$ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=1$. Τὸ δευτέρον ἔχει ταχύτητα $+2$ καὶ συνταντὰ τὸ πρῶτον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=+2$.

i) Καταστρώσατε τὴν ἐξίσωσιν κινήσεως ἐκάστου κινητοῦ.

ii) Κατὰ ποίαν χρονικὴν στιγμὴν τὰ M καὶ P εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O ;

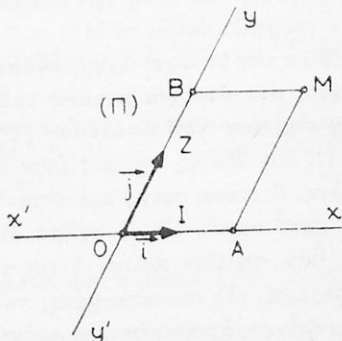
ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

§ 182. Συντεταγμέναι σημείου. α') Ἐπὶ ἐπιπέδου (P) ὡς χαράξωμεν δύο ἄξονας τεμνομένους, x' ὅς καὶ y' ὅς, ἔχοντας κοινὴν ἀρχὴν O καὶ μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{OI} = \vec{i}$ καὶ $\vec{OZ} = \vec{j}$ ἀντιστοίχως (σχ. 43). Οἱ δύο αὐτοὶ ἄξονες ἀποτελοῦν ἓνα σύστημα ἁξόνων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) .

Ἔστω, τώρα, τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου (P) . Φέρομεν διὰ τοῦ M , παράλληλον πρὸς τὸν $y'y'$, τέμνουσαν τὸν $x'x$ εἰς A καὶ παράλληλον πρὸς τὸν $x'x$, τέμνουσαν τὸν $y'y'$ εἰς τὸ B .

Καλεῖται *τετμημένη τοῦ M ,*

ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διαστήματος



τος $\overrightarrow{OA}$ καὶ τεταγμένη τοῦ M , ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$.

Θέτομεν: $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ x καὶ y λέγονται συντεταγμέναι τοῦ σημείου M καὶ γράφονται συνήθως, παραπλευρῶς τοῦ M ἐντὸς παρενθέσεως, πρώτη ἢ τετμημένη καὶ κατόπιν ἢ τεταγμένη: $M(x,y)$.

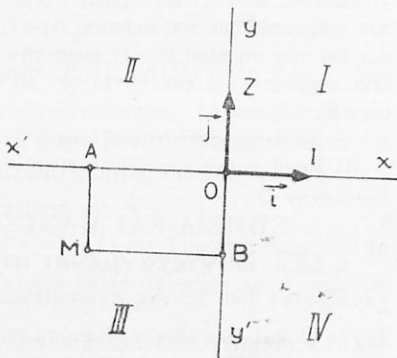
β') Διαμορφωμένον ἐπίπεδον.

Τὸ σύστημα τῶν δύο ἀξόνων $x'Ox$, $y'Oy$ διαμορφώνει τὸ ἐπίπεδον (P) κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε:

1. Εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ ἐπίπεδου ἀντιστοιχεῖ ἓνα διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y) (τετμημένη-τεταγμένη) καὶ

Σχ. 44

2. Εἰς πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y) ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπίπεδου, τὸ $M(x,y)$, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀν λάβωμεν ἐπὶ τῶν $x'x$ καὶ $y'y$ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ τοιαῦτα ὥστε, $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$ καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ A , παράλληλον πρὸς τὸν $y'y$ καὶ ἐκ τοῦ B παράλληλον πρὸς τὸν $x'x$ (σχ. 43). Ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων γραμμῶν ὀρίζει τὸ M .



Σχ. 45

Συνεπῶς ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ συνόλου $\Pi \times \Pi$ καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπίπεδου (P) .

Οἱ δύο ἄξονες σχηματίζουν τέσσερας γωνίας αἱ ὁποῖαι καλοῦνται πρώτη, δευτέρα, τρίτη καὶ τετάρτη γωνία τῶν ἀξόνων ὅπως σημειοῦνται κατὰ σειρὰν εἰς τὸ σχῆμα (45).

Ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐντὸς τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων, ἔχει ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας του θετικὰς· ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ἔχει τετμημένην ἀρνητικὴν καὶ τεταγμένην θετικὴν· εἰς τὴν τρίτην ἔχει

καὶ τὰς δύο συντεταγμένας του ἀρνητικὰς καὶ εἰς τὴν τετάρτην, ἔχει τετμημένην θετικὴν καὶ τεταγμένην ἀρνητικὴν.

Ὁ ἄξων x' οὗ λέγεται ἀρχὴ τῶν x ἢ ἄξων τῶν τετμημένων καὶ ὁ y' οὗ, ἄξων τῶν y ἢ ἄξων τῶν τεταγμένων ἢ δὲ τομὴ των O λέγεται ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. Πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει τεταγμένην μηδὲν καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν y ἔχει τετμημένην μηδὲν.

Ἡ ἀρχὴ O ἔχει καὶ τὰς δύο συντεταγμένας τῆς μηδενικᾶς, δηλαδὴ $O(0,0)$.

γ') Οἱ δύο ἄξονες x' καὶ y' λέγονται

i) **πλαγιογώνιοι**, ὅταν δὲν εἶναι κάθετοι (σχ. 43).

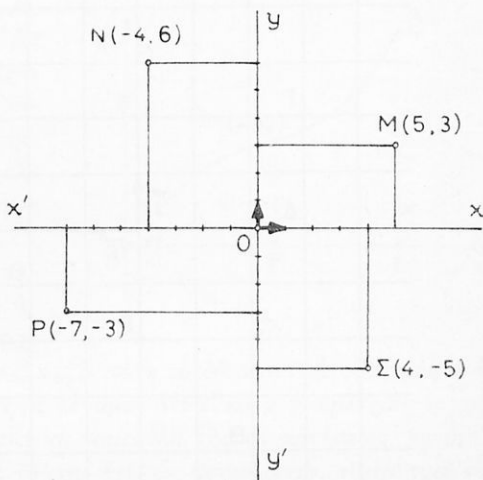
ii) **ὀρθογώνιοι**, ὅταν τέμνονται κάθετως (σχ. 44).

iii) **ὀρθοκανονικοί**, ὅταν εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἔχουν ἐπὶ πλέον **ισομήκη** μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$.

Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ χρησιμοποιοῦμεν κατὰ κανόνα ὀρθογωνίους ἄξονας, μὲ μοναδιαῖα (θεμελιώδη) διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, ἄλλοτε ἀνισομήκη καὶ ἄλλοτε ἰσομήκη.

δ') Αἱ ἀνωτέρω ὁριθεῖσαι συντεταγμέναι (x, y) λέγονται **Καρτεσιανὰ** συντεταγμένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εἰς τὸ σχ. 46, ἡ τετμημένη τοῦ M εἶναι 5 καὶ ἡ τεταγμένη του, 3. Τὸ σημεῖον παρίσταται ὡς $M(5,3)$. Ὅμοίως, τὰ σημεῖα, N, P, Σ γράφονται ἀντιστοιχῶς: $N(-4,6)$, $P(-7,-3)$, $\Sigma(4,-5)$.



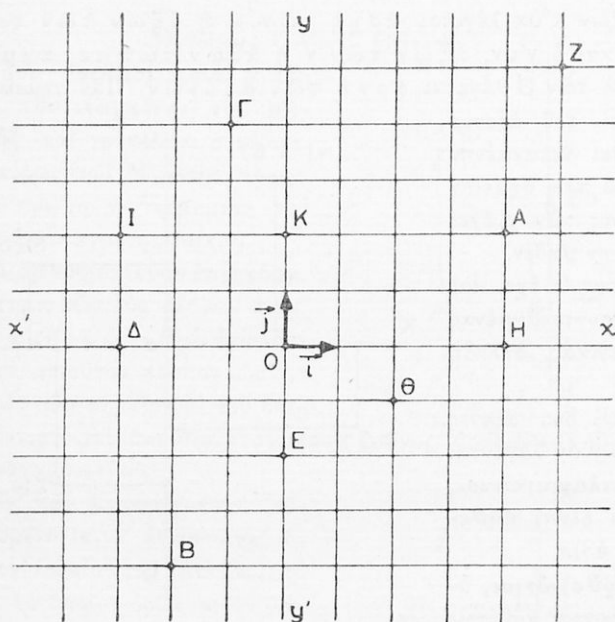
Σχ. 46

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-765. Εὑρετε τὰς συντεταγμένας ἐκάστου τῶν σημείων $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K$ τοῦ σχήματος (47).

A-766. Χαράξτε ἓνα σύστημα δύο τυχόντων ἀξόνων x' καὶ y' καὶ σημειώσατε τὰ ἐπόμενα σημεῖα.

$A(2,3)$, $B(-3,2)$, $\Gamma(-3,-5)$, $\Delta(4,-5)$, $E(0,5)$, $Z(\frac{5}{2},0)$, $H(-3,-3)$, $\Theta(-4,0)$.



Σχ. 47

A-767. Είς σύστημα δύο ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων σχεδιάσατε:

i) Τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα $A(4,2)$, $B(-2,2)$, $\Gamma(-2,-4)$, $\Delta(4,-4)$. ii) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $(8,-2)$, $(-4,2)$, $(-4,3)$. iii) Τὸ τραπέζιον $(2,3)$, $(-3,3)$, $(-4,1)$, $(5,-1)$.

A-768. Είς σύστημα δύο ἀξόνων ὀρθοκανονικῶν, αἱ τρεῖς κορυφαὶ A, B, Γ τοῦ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ἔχουν συντεταγμένας: $A(5,4)$, $B(5,-3)$, $\Gamma(-2,-3)$. Εὑρετε τὰς συντεταγμένας τῆς Δ .

A-769. Είς τυχὸν σύστημα ἀξόνων, αἱ κορυφαὶ A, B, Γ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ἔχουν συντεταγμένας: $A(4,6)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(-1,-2)$. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ ;

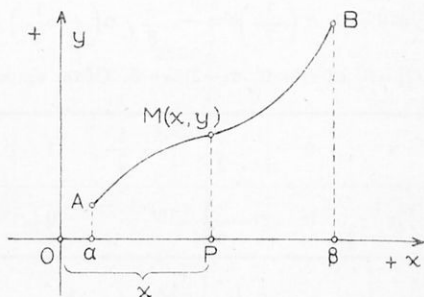
A-770. Είς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων κατασκευάσατε τὰ σημεῖα $A(-6,70)$, $B(-\frac{3}{2},80)$, $\Gamma(0,-85)$, $\Delta(7,-90)$, $E(5,68)$ λαμβάνοντες 1 cm ὡς μονάδα μήκους ἐπὶ τοῦ $x'x$ καὶ 1 mm ὡς μονάδα μήκους ἐπὶ τοῦ $y'y$. Δηλαδή ἐπὶ τοῦ $y'y$, τὸ 1 cm παριστᾷ 10 μονάδας μήκους.

A-771. Δίδονται τὰ σημεῖα $A(2,5)$, $B(4,9)$. Προσδιορίσατε τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB .

A-772. Εἰς σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων μὲ μοναδιαία διανύσματα μήκους 1 cm ἑκαστον, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα $\Delta(-2, 1, 7)$, $B(1, 5, 7)$. Ὑπολογίσατε εἰς cm, τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν (AB) τῶν A καὶ B.

§ 183. Γραφικὴ παράστασις συναρτήσεως $y = \sigma(x)$.

α') Ἐστω $y = \sigma(x)$ μία συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς x καὶ ἓνα σύστημα ἀξόνων ox, oy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, (σχ. 48). Ἀς θεωρήσωμεν σημεῖον M ἔχον τετμημένην μὲν τυχοῦσαν τιμὴν x τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τεταγμένην y τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἥτοι ἔχον $y = \sigma(x)$. Ὅταν τὸ x συνεχῶς μεταβάλλεται ἐντὸς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς $\sigma(x)$, ἔστω π.χ.



Σχ. 48

ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\alpha \leq x \leq \beta$ τότε τὸ M κινεῖται, διαγράφον ἐν γένει μίαν γραμμὴν AB , ἥτις λέγομεν ὅτι εἶναι ἡ γεωμετρικὴ ἢ γραφικὴ παράστασις ἢ παραστατικὴ καμπύλη τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$. Πᾶν σημεῖον τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχει ὡς τετμημένην, τιμὴν τινὰ τοῦ x καὶ ὡς τεταγμένην, τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ὁρισμός. «Γραφικὴ παράστασις μιᾶς συναρτήσεως καλεῖται ἡ γραμμὴ ἢ ὁποία σύγκειται ἀπὸ τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας μὲν τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τεταγμένας δὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως».

Ἦτοι, τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x, \sigma(x))$ εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$. Ἡ γραφικὴ παράστασις δίδει μίαν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς συναρτήσεως, δεικνύουσαν ἐποπτικῶς πῶς μεταβάλλονται αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ διατρέχει τὰς τιμὰς τῆς.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εἰς πρώτην προσέγγισιν τὴν γραφικὴν παράστασιν μιᾶς συναρτήσεως σχηματίζομεν ἓνα πῖνακα αποτελούμενον ἐκ διαφόρων τιμῶν τοῦ x αὐθαιρέτως ἐκλεγομένων καὶ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν y τῆς συναρτήσεως καὶ κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα συντεταγμένας, τὰ ζεύγη ταῦτα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν x καὶ y . Τὰ οὕτω εὕρισκόμενα σημεῖα ἀνήκουν ἅπαντα εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς $y = \sigma(x)$ καθορίζοντα κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον τὸ σχῆμα αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις: $y = \sigma(x) = x^3 - x$ εἰς διάστημα $[-2, 2]$ ».

Δίδομεν εἰς τὸ x τὰς τιμὰς $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, -1, -2$ καὶ εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y :

$$\sigma(0)=0, \sigma\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}, \sigma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}, \sigma(1)=0, \sigma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8},$$

$\sigma(2)=6, \sigma(-1)=0, \sigma(-2)=-6$. Οὕτω προκύπτει ὁ πίναξ:

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	-1	-2
y	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{15}{8}$	6	0	-6

Τὰ σημεῖα $(0,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right), (1,0), \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right), (2,6), (-1,0), (-2,-6)$,

κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἣτις παριστᾷ τὴν συνάρτησιν καὶ καθορίζουν κατὰ προσέγγισιν τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς ταύτης. Τὰ ὀκτὼ ταῦτα σημεῖα, παριστώμενα εἰς τὸ σχ. 49 διὰ κυκλίσκων συνδέομεν κατὰ σειρὰν δι' ὁμαλῆς καμπύλης καὶ δημιουργοῦμεν οὕτω μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς δοθείσης συναρτήσεως διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ -2 ἕως $+2$.

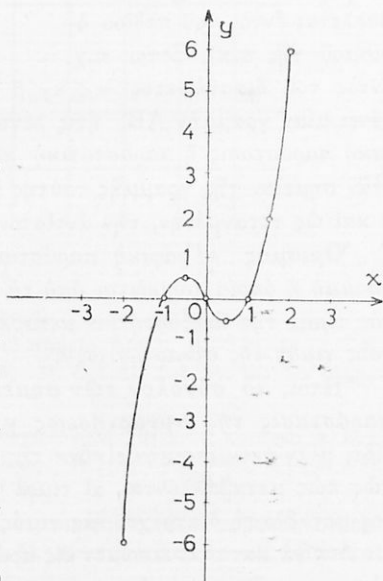
Ἐξω τῆς περιοχῆς αὐτῆς εἶναι εὐκολον νὰ φαντασθῶμεν πῶς προχωρεῖ ἡ γραμμὴ. Εἰς τὸ σχ. 49 τὰ θεμελιώδη διανύσματα τῶν δύο ἀξόνων ἐλήφθησαν ἴσομήκη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ σχεδιασθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως:

$$y = \sigma(x) = 3x^4 + 8x^3 - 90x^2 + 100$$

εἰς τὸ διάστημα $[-8, 5]$.

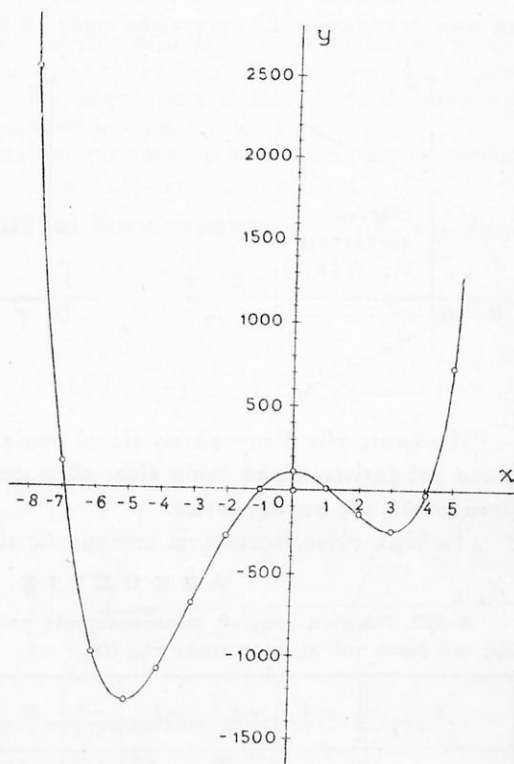
Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη ἐδῶ εἶναι πολυπλοκωτέρα, λαμβάνομεν περισσότερας τιμὰς τοῦ x ἀπὸ τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Σχηματίζομεν ὡς προηγουμένως πίνακα ἀντιστοιχίας τῶν x καὶ y .



Σχ. 49

x	5	4	3	-2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
y	725	-60	-251	-148	21	100	5	-276	-683	-1804	-1275	-980	149	2532

Ἐπειδὴ διὰ μικρὰς τιμὰς τοῦ x ἔχομεν ἐν γένει μεγάλας (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) τιμὰς τοῦ y καὶ συνεπῶς τὰ σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως πίπτουν ἔξω τοῦ χάρτου σχεδιάσεως ὅταν αἱ κλίμακες ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι αἱ αὐταί, διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὰς τεταγμένας, πολὺ μικροτέραν μονάδα. Κατόπιν δοκιμῶν καταλήγομεν νὰ λάβωμεν τὸ ἴδιον μῆκος ὡς παριστῶν μίαν μονάδα ἐπὶ τοῦ ox καὶ διακοσίας μονάδας ἐπὶ τοῦ oy . Ἀφοῦ σημειώσωμεν τὰς μετρίκας κλίμακας ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων, προσδιορίζομεν τὰ 14 σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τὰ παρεχόμενα ὑπὸ τοῦ πίνακος (σημειοῦντες αὐτὰ διὰ κυκλίσκων) καὶ λαμβάνομεν. ὡς τὸ σχ. 50 δεικνύει τὴν γραφικὴν παράστασιν.



Σχ. 50

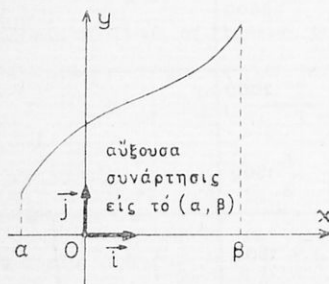
β') **Συνάρτησις, αὐξουσα ἢ φθίνουσα εἰς ἓνα διάστημα.** (Πρώτη ἔννοια). Μία συνάρτησις $s(x)$ λέγεται **αὐξουσα** εἰς ἓνα διάστημα $\alpha \leq x \leq \beta$ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως βαίνουν αὐξανόμεναι ἐφ' ὅσον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x βαίνει αὐξανόμενη ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ. (Τιμὴ τῆς συναρτήσεως καὶ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ, συγχρόνως αὐξάνουν ἢ συγχρόνως ἐλαττοῦνται).

Τουναντίον, ὅταν αὐξανόμενης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \leq x \leq \beta$, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως βαίνει ἐλαττουμένη, τότε

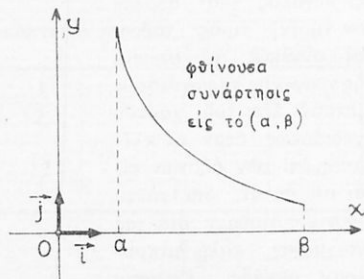
ή συνάρτησις λέγεται *φθίνουσα* ἐν τῷ διαστήματι $[α, β]$. (Εἰς μεγαλύτεραν τιμὴν τοῦ x , ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα τιμὴ τῆς συναρτήσεως).

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς αὐξούσης συναρτήσεως εἶναι γραμμὴ «ἀνερχομένη» ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ.

Ἡ γραφικὴ παράστασις φθίνουσας συναρτήσεως εἶναι γραμμὴ «κατερχομένη» ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ.



Σχ. 51



Σχ. 52

Ἡ εὕρεσις τῶν διαστημάτων εἰς τὰ ὅποια ἡ συνάρτησις εἶναι αὐξουσα καὶ ἐκείνων εἰς τὰ ὅποια εἶναι φθίνουσα καλεῖται: *μελέτη τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως*.

(Τὸ θέμα τοῦτο, ἐξετάζεται λεπτομερῶς εἰς τὸν Β' Τόμον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A-773. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς $y=f(x)$ εἰς τὸ διάστημα -4 ἕως $+6$ βάσει τοῦ πίνακος τιμῶν τῆς $f(x)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y=f(x)$	-11	-3	$-\frac{7}{4}$	4	$\frac{11}{2}$	4	$\frac{13}{4}$	3	4	7	$\frac{51}{4}$

A-774. Ὅμοιως βάσει τοῦ πίνακος:

x	-5	-4	-3	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	1	2	3
$y=f(x)$	9	2	-3	-6	$-6^{3/4}$	-7	$-6^{3/4}$	-6	-3	2	9

A-775. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $y=f(x)$ εἰς τὸ διάστημα -2 ἕως $+4$ βάσει τῶν τιμῶν αὐτῆς:

$$f(-2)=-5, f(-1)=0, f(0)=3, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=0, f(4)=-5.$$

Ἡ ἐπιμέλεια τοῦ βιβλίου ἐκτελέσθη ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἀκολουθῶς ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως νὰ εὑρεθοῦν (κατὰ προσέγγισιν) αἱ τιμαὶ $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$. Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν ἡ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν $f(x)=1$ καθὼς καὶ ἐκείνη δι' ἣν $f(x)=2$.

A-776. Σχεδιάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x) = \frac{2}{3}x + 3$ εἰς τὸ διάστημα $-9 \leq x \leq 12$.

A-777. Σχεδιάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $y = x^3 - 21x + 20$ ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ -6 ἕως 5 . Καθορίσατε τὰς μονάδας μήκους ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἴδιο μήκος νὰ παριστάνῃ μίαν μονάδα ἐπὶ τοῦ x' καὶ πέντε μονάδας ἐπὶ τοῦ $y'y$.

A-778. Σχεδιάσατε προχείρως τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως:
 $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

§ 184. Συντεταγμένοι διανύσματα. α') Ἐστω τυχὸν σύ-

στημα ἀξόνων ox , oy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Π) καὶ τυχὸν διάνυσμα $\vec{AB}$ ἐπὶ τοῦ (Π) (σχ. 54).

Φέρομεν διὰ τῆς ἀρχῆς A , τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ παράλληλον πρὸς τὸν x' καὶ διὰ τοῦ πέρατος B , παράλληλον πρὸς τὸν $y'y$, ἥτις τέμνει τὴν πρώτην παρὰλληλον, εἰς τὸ Γ . Τὸ $\vec{AB}$ ἀναλύεται τότε εἰς ἄθροισμα δύο διανυσμάτων συγγραμμικῶν πρὸς τοὺς ἀξόνους:

$$(1) \quad \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} \quad (\S 77).$$

Αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\vec{AG}$ καὶ $\vec{GB}$ λέγονται **συντεταγμένοι** (ἢ **συντεταγμένοι προβολαί**) τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$:

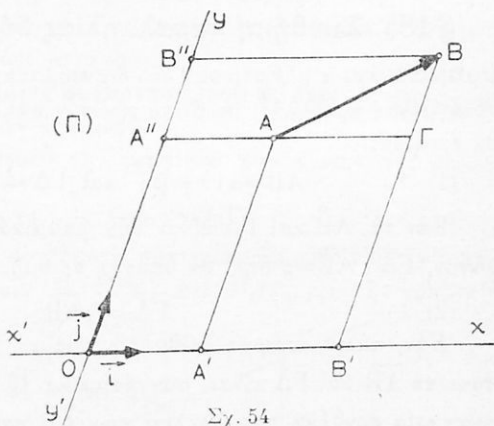
$$\vec{AG} = \vec{A'B'} = \alpha = \text{τετμημένη τοῦ } \vec{AB}$$

$$\vec{GB} = \vec{A''B''} = \beta = \text{τεταγμένη τοῦ } \vec{AB}.$$

Ἐὰν (x_1, y_1) εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀρχῆς A καὶ (x_2, y_2) τοῦ πέρατος B , προφανῶς ἰσχύει:

$$\vec{AG} = \vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = x_2 - x_1, \quad \text{καὶ} \quad \vec{GB} = \vec{A''B''} = y_2 - y_1 \quad \text{δηλ.}$$

(2) Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ ἴνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς
 $\alpha = x_2 - x_1, \quad \beta = y_2 - y_1$.



Δηλαδή: ἡ τετμημένη διανύσματος ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ πέρατος, μείον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς· ὁμοίως καὶ ἡ τεταγμένη.

β') Συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγονται τὰ δύο διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma B}$ τῆς ἰσότητος (1) ἥτις γράφεται:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{A''B''} \cdot \vec{j} \quad (\text{βλ. § 177, β'}) \quad \text{ἤτοι}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}.$$

γ') Συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καλεῖται ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ διανύσματος:

$$(4) \quad \text{συντελεστὴς διευθύνσεως, } \lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\overline{GB}}{\overline{A\Gamma}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

§ 185. Συνθήκη παραλληλίας δύο δεσμευμένων διανυσμάτων. α') Ἐστώσαν δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἔχοντα συντεταγμένας προβολάς, (α, β) τὸ πρῶτον καὶ (α', β') τὸ δεύτερον. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \quad \text{καὶ} \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j}.$$

Ἐὰν τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι συγγραμμικά, τότε θὰ ἔχουν κάποιον λόγον, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} : \overrightarrow{AB} = \rho$ δηλ. θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς ρ τοιοῦτος ὥστε (§ 180):

$$(2) \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho \overrightarrow{AB}.$$

Ἐάν, πάλιν, ὑπάρχῃ ἀριθμὸς ρ τοιοῦτος ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ (2), τότε τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι συγγραμμικά (§ 78). Ἐπομένως, ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι, νὰ ὑπάρχῃ σχετικὸς ἀριθμὸς ρ τοιοῦτος ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (2). Ἡ (2), λόγῳ τῶν (1) γράφεται:

$$\alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j} = \rho(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}) = \rho(\alpha \vec{i}) + \rho(\beta \vec{j}) = \rho \alpha \vec{i} + \rho \beta \vec{j} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha' \vec{i} - \rho \alpha \vec{i} = \rho \beta \vec{j} - \beta' \vec{j} \quad \text{ἢ τέλος:}$$

$$(3) \quad (\alpha' - \rho \alpha) \vec{i} = (\rho \beta - \beta') \vec{j}$$

Ἐπειδὴ τὰ $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ δὲν εἶναι συγγραμμικά, ἔπεται ἐκ τῆς (3) ὅτι:

$$(4) \quad \alpha' - \rho \alpha = 0 \quad \text{καὶ} \quad \rho \beta - \beta' = 0$$

(Διότι, ἄλλως, ἡ (3) θὰ ἔδιδε: $\vec{i} = \frac{\rho \beta - \beta'}{\alpha' - \rho \alpha} \vec{j}$ δηλ. τὰ $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ θὰ συνεδέοντο διὰ σχέσεως τῆς μορφῆς (2) καὶ θὰ ἦσαν συγγραμμικά).

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Αί (4) δίδουν :

$$(5) \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$$

ἦτοι : Ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων, εἶναι : αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι αὐτῶν νὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἐπίσης, ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας εἶναι ἡ ἰσότης τῶν συντελεστικῶν διευσθύνσεως τῶν δύο διανυσμάτων.

β') Συντελεστὴς διευσθύνσεως εὐθείας καλεῖται ὁ συντελεστὴς διευσθύνσεως οἰοῦνδήποτε διανύσματος συγγραμμικοῦ πρὸς τὴν εὐθεΐαν.

§ 186. Γραφικὴ παράστασις τῆς πρωτοβαθμίου συναρτήσεως $y = \lambda x + \mu$. α') Πᾶσα πρωτοβάθμιος συνάρτησις τοῦ x , εἶναι τῆς μορφῆς :

$$s(x) = \lambda x + \mu \quad \text{ὅπου } \lambda, \mu \text{ σταθεραί.}$$

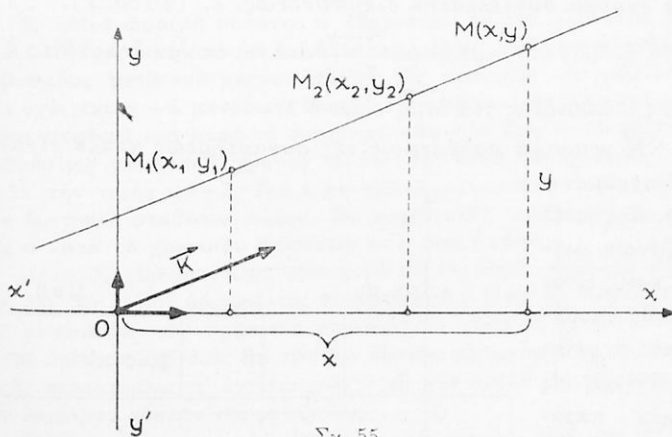
Ἐὰν ἀντὶ $s(x)$ γράψωμεν y , ἡ σχέσις $y = \lambda x + \mu$ ἐκφράζει ὅτι τὸ y μεταβάλλεται πρωτοβαθμῶς μετὰ τοῦ x .

β') Κάθε πρωτοβάθμιος συνάρτησις τοῦ x , ἔχει ὡς γραφικὴν παράστασιν, μίαν εὐθεΐαν γραμμὴν.

Πράγματι, ἂς ζητήσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως :

$$y = \lambda x + \mu \quad \text{ὅπου } \lambda \neq 0.$$

Ἀναφερόμενοι εἰς ἓν οἰοῦνδήποτε σύστημα ἀξόνων $x'Ox$, $y'Oy$ ἂς κατασκευάσωμεν δύο σημεῖα $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$ τῆς γραφικῆς



Σχ. 55

παραστάσεως, δίδοντες εἰς τὸ x δύο αὐθαίρετους (σταθεράς) τιμὰς x_1 καὶ x_2 καὶ ὑπολογίζοντες τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς y_1, y_2 τῆς συναρτή-

σεως: $y_1 = \lambda x_1 + \mu$, $y_2 = \lambda x_2 + \mu$. Ἀς θεωρήσωμεν τώρα καὶ ἓν ἄλλο *τυχὸν σημεῖον* $M(x, y)$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως (σχ. 55). Τοῦτο θὰ ἔχῃ τετμημένην τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x καὶ τεταγμένην y ἴσην πρὸς $\lambda x + \mu$. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$y = \lambda x + \mu$$

$$y_1 = \lambda x_1 + \mu$$

$$y_2 = \lambda x_2 + \mu.$$

Δι' ἀφαιρέσεων κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} (1) \quad y - y_1 &= \lambda(x - x_1) \\ y - y_2 &= \lambda(x - x_2). \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν (1) προκύπτει ὅτι:

$$(2) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2}.$$

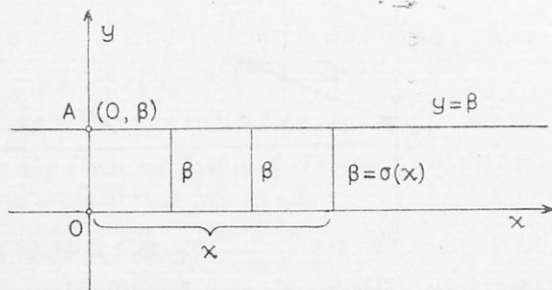
Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_1 M}(x - x_1, y - y_1)$ καὶ $\overrightarrow{M_2 M}(x - x_2, y - y_2)$ ἔχουν ἴσους συντελεστὰς διευθύνσεως (§ 184, γ' (4)) ὅρα εἶναι συγγραμμικά (§ 185). Συνεπῶς τὸ *τυχὸν σημεῖον* $M(x, y)$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως, *κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας* $M_1 M_2$. Τοῦ x διατρέχοντος τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ $M(x, y)$ διαγράφει τὴν ἀπέραντον εὐθεΐαν $M_1 M_2$.

γ') Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \lambda x + \mu$ εἶναι εὐθεΐα ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως, λ . (§ 185, β').

Διότι ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \lambda$ τὸ ὅποῖον δηλοῖ ὅτι: ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ $\overrightarrow{M_1 M}$ εἶναι ὁ λ .

δ') Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \lambda x$ εἶναι εὐθεΐα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων. Διότι διὰ $x=0$ εἶναι καὶ $y=0$, ἐπομένως τὸ σημεῖον $(0, 0)$ ἀνήκει εἰς γραφικὴν παράστασιν.

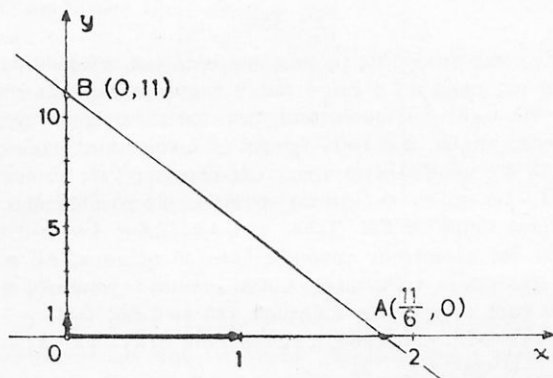
ε') Ἡ σταθε-



$y=\beta$ παρίσταται δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x , καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $A(0,\beta)$ (σχ. 56). Διότι διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι πάντοτε ἴση μὲ β .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. «Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=11-6x$ ».

Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο σημεῖα τῆς παραστατικῆς γραμμῆς καὶ νὰ τὰ ἐνώσωμεν δι' εὐθείας. Θέτοντες $x=0$ λαμβάνομεν $y=11$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον $B(0,11)$ (σχ. 57). Θέτοντες $y=0$ εὕρισκομεν $x=\frac{11}{6}$ καὶ ὀρίζομεν τὸ σημεῖον $A(\frac{11}{6}, 0)$. Ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ ζητούμενη γραφικὴ παράστασις.



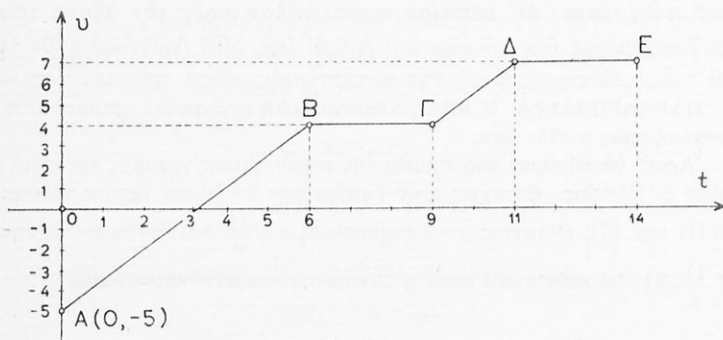
Σχ. 57

2. «Μία φυσικὴ ποσότης u ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου t ὡς ἐξῆς: Διὰ $t=0$ ἔχει τιμὴν $u=-5$ μονάδων καὶ ἀκολουθῶς μεταβάλλεται πρωτοβαθμίως μετὰ τοῦ χρόνου μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς $t=6$ ὅποτε ἡ u ἔχει τιμὴν $+4$ μονάδων. Κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t=6$ ἕως $t=9$, μένει σταθερὰ καὶ κατὰ τὸ διάστημα ἀπὸ $t=9$ ἕως $t=11$ αὐξάνει πρωτοβαθμίως μετὰ τοῦ χρόνου φθάνουσα κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t=11$ τὴν τιμὴν $u=+7$. Τοῦ t μεταβαλλομένου ἀπὸ $t=11$ μέχρι $t=14$ ἡ u διατηρεῖ σταθερὰν τιμὴν. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς u κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα $t=0$ ἕως $t=14$ ».

Λύσις. Χαράσσομεν τοὺς ἄξονας. Οἱ καὶ Οὐ (ἄξων τῶν t καὶ ἄξων τῶν u) (σχ. 58). Τὸ πεδίον ὀρίσμου τῆς συναρτήσεως u εἶναι τὸ διάστημα $0 \leq t \leq 14$ ἐνῶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ διάστημα $-5 \leq u \leq 7$. Ἀφοῦ ὀρίσωμεν μονάδας ἐπὶ τῶν δύο ἄξόνων, εὕρισκομεν τὰ σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως t ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πέρας ἐκάστης τῶν διαφόρων φάσεων τῆς μεταβολῆς.

Διὰ $t=0$ ἔχομεν $u=-5$ καὶ ἀντίστοιχον σημεῖον τὸ A (σχ. 58).

Διὰ $t=6$, ἔχομεν $u=4$ καὶ ἀντίστοιχον σημεῖον τὸ B . Ἐπειδὴ εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $t=0$ ἕως $t=6$ ἡ u εἶναι γραμμικὴ (πρωτοβάθμιος) συνάρτησις



Σχ. 58

τοῦ t , διὰ τοῦτο παρίσταται εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB . Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ t ἀπὸ 6 ἕως 9 ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν ἰδίαν τιμὴν (ἦν εἶχε διὰ $t=6$) ἄρα παρίσταται ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $BΓ$ παραλλήλου πρὸς τὸν Ot . Διὰ $t=11$ ἔχομεν $v=7$ καὶ ἀντίστοιχον σημεῖον τὸ $\Delta(11,7)$. Ἐπειδὴ ἡ v μεταβάλλεται γραμμικῶς μετὰ τοῦ t εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $t=9$ ἕως $t=11$, διὰ τοῦτο παρίσταται γραφικῶς εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$. Τέλος ἀπὸ $t=11$ ἕως $t=14$ ἡ v διατηρεῖ σταθερὰν τιμὴν καὶ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ τμήματος ΔE παραλλήλου πρὸς τὸν Ot . Τελικῶς ἡ τεθλασμένη $AB\Gamma\Delta E$ παριστᾷ γραφικῶς πῶς μεταβάλλεται ἡ v κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ $t=0$ ἕως $t=14$.

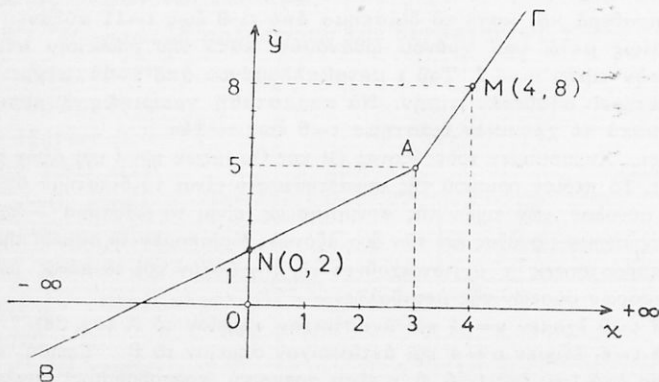
3. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $\sigma(x) = |x-3| + 2x - 1$ εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < \infty$.

Διὰ ν' ἀπαλλαγῶμεν ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν, κάμνομεν ὑποθέσεις διὰ τὸ x :

α') Ἐὰν $x \leq 3 \Rightarrow x-3 \leq 0 \Rightarrow |x-3| = 3-x \Rightarrow \sigma(x) = 3-x+2x-1 = x+2$.

β') Ἐὰν $x > 3 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow |x-3| = x-3 \Rightarrow \sigma(x) = x-3+2x-1 = 3x-4$.

Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχει εἰς τὰ δύο διαστήματα ($x \leq 3$) καὶ ($x > 3$) δύο διαφορετικὰς ἀλγεβρικὰς ἐκφράσεις:



Σχ. 59

διὰ $-\infty < x \leq 3$ είναι $\sigma(x) = x + 2$ (γραμμική) καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ὑπὸ ἡμιευθείας AB (σχ. 59) ἐνῶ διὰ $3 < x < +\infty$ είναι $\sigma(x) = 3x - 4$ (γραμμική) καὶ παρίσταται γραφικῶς εἰς τὸ διάστημα τοῦτο, ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας ΑΓ. Τὸ σύνολον τῶν δύο ἡμιευθειῶν AB, ΑΓ εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις εἰς τὸ διάστημα $(-\infty + \infty)$.

Μεταβολαί. Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως φαίνεται ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὐξουσα εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

4. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\sigma(x) = |x-1| + |x-2|$ εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Πῶς μεταβάλλεται ἡ $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα τοῦτο;

Αἱ τιμαὶ τοῦ x : $x=1$, $x=2$ αἱ μηδενίζουσαι τὰς ἀπολύτους τιμὰς, ὀρίζουν τρία διαστήματα: τὸ $x \leq 1$, τὸ $1 < x \leq 2$ καὶ τὸ $x > 2$ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις ἔχει διαφορετικὰς ἀλγεβρικὰς ἐκφράσεις:

α') Ἐὰν $x \leq 1 \Rightarrow x < 2$ ὁπότε $x-1 \leq 0$ καὶ $x-2 < 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x$, $|x-2| = 2-x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sigma(x) = 1-x+2-x = 3-2x$.

β') Ἐὰν $1 < x \leq 2 \Rightarrow x-1 > 0$, $x-2 \leq 0 \Rightarrow$
 $|x-1| = x-1$, $|x-2| = 2-x \Rightarrow$

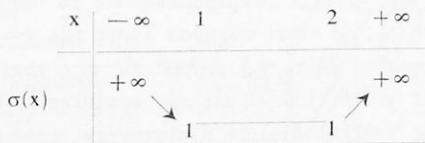
$$\sigma(x) = x-1+2-x = 1 \quad (\text{σταθερά}).$$

γ') Ἐὰν $x > 2$ ὁπότε $x > 1 \Rightarrow x-2 > 0$ καὶ

$$x-1 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2, \quad |x-1| = x-1 \Rightarrow \sigma(x) = x-1+x-2 = 2x-3.$$

Εὐκόλῃ εὐρίσκομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν διαστημάτων διότι ἀρκοῦν δύο σημεῖα δι' ἕκαστον (βλ. σχ. 60).

Μεταβολαί. Τὸ σχ. 60 δεικνύει ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $x \leq 1$, μένει σταθερὰ εἰς τὸ $1 \leq x \leq 2$ καὶ εἶναι αὐξουσα εἰς τὸ $x \geq 2$. Γράφομεν.



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-779. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ ἐπόμεναι συναρτήσεις:

$$y = -\frac{3}{2}x, \quad y = -x, \quad y = 3x, \quad y = -1.$$

A-780. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ συναρτήσεις:

$$y = x+2, \quad y = x-2, \quad y = 2x+3, \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}.$$

A-781. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις ἐκάστης τῶν συναρτήσεων $y_1 = -2x+1$, $y_2 = 4x-1$ καὶ νὰ εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ ση-

μείου τῶν δύο παραστατικῶν γραμμῶν, i) βάσει τοῦ σχεδίου, ii) δι' ὑπολογισμοῦ.

B-782. Γραφικὴ παράστασις καὶ πίναξ μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων :

$$i) y=2-|x-1|, \quad ii) y=|x+1|-1.$$

B-783. Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων :

$$y=|x-2|, \quad y=|1-x|, \quad y=x+|x|+3.$$

B-784. Γραφικὴ παράστασις καὶ πίναξ μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων :

$$i) y=|3-2x|+|x-1| \quad \text{καὶ} \quad ii) y=|3+2x|+|1-x|-|x|.$$

B-785. Γραφικὴ παράστασις τῶν :

$$i) y = \frac{x+1}{|x+1|}, \quad ii) y = \sqrt{x^2}.$$

B-786. Γραφικὴ παράστασις τῶν :

$$i) y=|x|+\sqrt{(x+1)^2}-1, \quad ii) y=|x|+\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}.$$

B-787. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $y=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}-5$.

i) Ἀπλουστεύσατε τὴν παράστασιν τοποθετοῦντες τὸ x διαδοχικῶς εἰς τὰ διαστήματα $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 2$, $x \geq 2$. ii) Κατασκευάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς y εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, ὅταν τὸ x διατρέχῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς. Συναγάγετε ἀκολουθῶς διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x εἶναι $y < 0$ ἢ $y > 0$ ἢ $y = 0$ καὶ κατασκευάσατε πίνακα μεταβολῶν.

§ 187. Γραφικὴ ἐπίλυσις συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους. Ἐστω τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$(1) \quad \{y=f(x), \quad y=\varphi(x)\}$$

καὶ ἔστωσαν (γ_1) καὶ (γ_2) αἱ παραστατικαὶ γραμμαὶ τῶν δύο συναρτήσεων $y=f(x)$ καὶ $y=\varphi(x)$ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ ἴδιον σύστημα ἀξόνων x' ο x , y' ο y . Ἐὰν (x_0, y_0) εἶναι τυχοῦσα λύσις τῆς $y=f(x)$ τότε, ἐπειδὴ $y_0=f(x_0)$, τὸ σημεῖον $M(x_0, y_0)$ ἀνήκει εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $y=f(x)$ δηλ. εἰς τὴν γραμμὴν (γ_1) . Δηλαδή, πᾶσα λύσις (x_0, y_0) τῆς $y=f(x)$ ἔχει ἓν ἀντίστοιχον παραστατικὸν σημεῖον $M(x_0, y_0)$ κείμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς (γ_1) . Ὀμοίως, πᾶσα λύσις τῆς $y=\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ ἓν ἀντίστοιχον παραστατικὸν σημεῖον ἀνήκον εἰς τὴν γραμμὴν (γ_2) δηλ. εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς $y=\varphi(x)$. Ἐπομένως αἱ κοινὰι λύσεις τῶν δύο ἐξισώσεων (1) θὰ δίδωνται ἀπὸ τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο παραστατικῶν γραμμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :

$$\{2x-y=1, \quad 2x+y=7\}.$$

Χαράσσομεν τυχρὸν σύστημα ἀξόνων καὶ κατασκευάζομεν τὰς εὐθείας γραμ-

μάς (γ_1) και (γ_2) αίτινες είναι αί γραφικαί παραστάσεις τών συναρτήσεων $y=2x-1$, $y=7-2x$. Τò κοινόν σημείον Μ τών (γ_1) και (γ_2) ἔχει συντεταγμένας (2,3) τὰς ὁποίας μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ σχεδίου (σχ. 61). Ἡ λύσις τοῦ συστήματος: $x_0=2$, $y_0=3$.

2. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα:
 $\{2x-y=-3, 4x-2y=2\}$

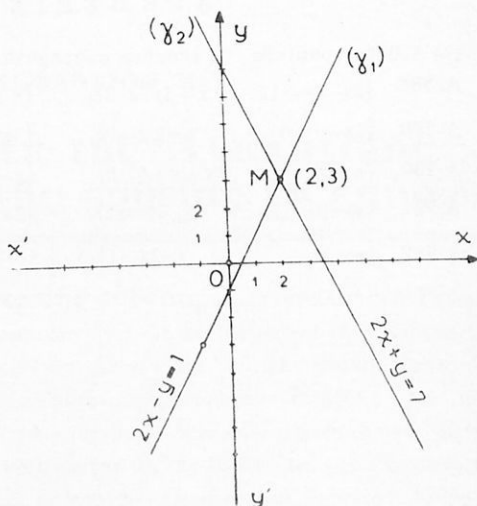
Κατασκευάζομεν, πάλιν τὰς παραστατικὰς γραμμὰς (γ_1) καὶ (γ_2) τών δύο συναρτήσεων $y=2x+3$, $y=2x-1$ (σχ. 62). Αὗται εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι, διότι ἔχουν κοινόν συντελεστήν διεθύνσεως, τὸν 2 καὶ τέμνουν τὸν x' εἰς δύο διαφορετικὰ σημεία $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν κοινόν σημείον τών δύο γραφικῶν παραστάσεων. Τὸ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν.

3. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα:

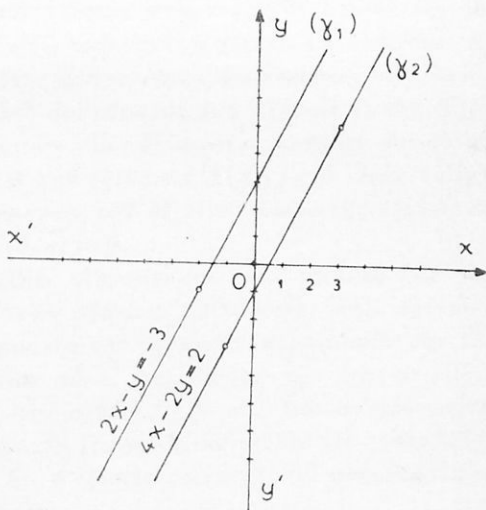
$$\left\{ 2x-y=1, \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \right\}.$$

Κατασκευάζομεν τὰς παραστατικὰς γραμμὰς τών συναρτήσεων. Ἀμφότεραι διέρχονται διὰ τῶν σημείων $(0, -1)$ καὶ $(\frac{1}{2}, 0)$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι εὐθεῖαι, συμπίπτουν. Ἄρα τὸ

σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις: $x=\xi$ (αὐθαίρετον), $y=2\xi-1$.



Σχ. 61



Σχ. 62

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς, τὰ ἐπόμενα συστήματα :

$$\text{A-788. } \{2x-3y=12, \quad x+3y=-3\}, \quad \{x+y=2, \quad x-3y=-6\}.$$

$$\text{A-789. } \{2x-y+6=0, \quad x+2y=7\}, \quad \{3x-y=6, \quad 2x-3y+3=0\}.$$

$$\text{A-790. } \{x+3y=3, \quad 2x+y+6=0\}, \quad \{x-3y+3=0, \quad 2x-y+6=0\}.$$

$$\text{A-791. } \{3x-y=6, \quad 6x-2y=12\}, \quad \{2x+3y=-6, \quad 4x+6y=12\}.$$

$$\text{A-792. } \{y=x^2, \quad y-2x=1\}, \quad \left\{ x^2 - \frac{y}{2} = 0, \quad y-x=6 \right\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

Στοιχεῖα ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας τῆς εὐθείας ἐν ἐπιπέδῳ

§ 188. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας. α') Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία. Ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν μελέτην τῶν ιδιοτήτων τῶν Γεωμετρικῶν σχημάτων διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ. Αὕτη θεμελιούται ἐπὶ τῆς ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἐνὸς ἄξονος. Τὰ γεωμετρικὰ σημεῖα παρίστανται δι' ἀριθμῶν καὶ αἱ Γεωμετρικαὶ γραμμαὶ δι' ἐξισώσεων. Ὡς ἐκ τούτου, Γεωμετρικὰ ζητήματα ἀνάγονται εἰς Ἀλγεβρικά. Ἡ ἐπίπεδος Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἐξετάζει μόνον ἐπιπέδους γραμμὰς καὶ ἐπίπεδα σχήματα ἢ δὲ Στερεὰ ἐξετάζει ἐπιφανείας καὶ γραμμὰς ἐν τῷ τριδιαστάτῳ χώρῳ. Τὰ κατωτέρω ἐκτιθέμενα ἀφοροῦν τὴν μελέτην εὐθειῶν γραμμῶν κειμένων ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου διαμορφωμένου ὑπὸ συστήματος δύο ἀξόνων (§ 182, β').

γ') Σημεῖον ἱκανοποιοῦν μίαν ἐξίσωσιν. Λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $M(\xi, \eta)$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $f(x, y) = 0$ ὅταν τὸ ζεύγος (ξ, η) τῶν συντεταγμένων τοῦ M εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $f(x, y) = 0$ ἥτοι ὅταν $f(\xi, \eta) = 0$.

γ') Ἐξίσωσις γραμμῆς. Λέγομεν ὅτι μία γραμμὴ (γ) κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων $x'ox, y'oy$, ἔχει ἐξίσωσιν $f(x, y) = 0$, ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν $f(x, y) = 0$ καὶ μόνον αὐτά. Δηλαδή ὅταν πᾶν σημεῖον $M(\xi, \eta)$ τῆς γραμμῆς (γ) , πληροῦ τὴν σχέσιν $f(\xi, \eta) = 0$, ἐνῶ συγχρόνως πᾶν σημεῖον $M(\xi, \eta)$ ἱκανοποιοῦν τὴν $f(x, y) = 0$, κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς (γ) .

Λέγομεν ἀκόμη τότε, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f(x, y) = 0$ παριστᾷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὴν γραμμὴν (γ) .

δ') Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δύο δεδομένων σημείων $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$. Ἐστω $M(x, y)$ τυχόν τρίτον σημεῖον τῆς ἀπεράντου εὐθείας M_1M_2 . Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα $\vec{M_1M}$ καὶ $\vec{M_1M_2}$ εἶναι συγγραμμικά, ἔπεται ὅτι θὰ ἔχουν τὰς ὁμώνυμους συντεταγμένας τῶν ἀναλόγων (§ 185) γὰρ οἱ δύο κληρονομικαὶ σχέσεις:

(1)

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

Ἡ (1) πληροῦται ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα $M(x,y)$ τῆς εὐθείας M_1M_2 καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά. (Διότι ἡ (1) συνεπάγεται: $\overrightarrow{M_1M} // \overrightarrow{M_1M_2}$).

Ἡ (1) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας M_1M_2 .

ε') Ἐὰν εὐθεῖα μὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων, τέμνει τοὺς δύο ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$ εἰς Π καὶ P , αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{O\Pi}$ καὶ $\overrightarrow{OP}$ καλοῦνται *συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*, τῆς εὐθείας. Ἄν εἶναι $O\Pi = \alpha$, $OP = \beta$ τότε ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων $\Pi(\alpha, 0)$, $P(0, \beta)$ καὶ ἔχει ἐξίσωσιν

(2)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

Ἡ (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) ὅταν $(x_1 = \alpha, y_1 = 0)$ καὶ $(x_2 = 0, y_2 = \beta)$ καὶ εἶναι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας ἐχοῦσης *συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*: α καὶ β .

στ') Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ $M_1(x_1, y_1)$ καὶ ἐχοῦσης *συντελεστὴν διευθύνσεως* λ (βλ. § 185, β'). Ἡ ἐν λόγω εὐθεῖα, (d), θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{k}(1, \lambda)$ διότι τοῦτο ἔχει *συντελεστὴν διευθύνσεως* $\lambda:1 = \lambda$. Ἄν λοιπὸν $M(x,y)$ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (d) (διάφορον τοῦ M_1) τότε $\overrightarrow{M_1M} // \vec{k}$ ἄρα οἱ *συντελεσταὶ διευθύνσεως* τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{M_1M}$ καὶ $\vec{k}$ εἶναι ἴσοι. Τὸ πρῶτον ἔχει *συντελεστὴν διευθύνσεως*, $(y-y_1)/(x-x_1)$ καὶ τὸ δεῦτερον, λ . Ἄρα $(y-y_1)/(x-x_1) = \lambda$ καὶ τέλος

(3)

$$y-y_1 = \lambda(x-x_1)$$

Πᾶν σημεῖον $M(x,y)$ τῆς εὐθείας (d) ἱκανοποιεῖ, λοιπὸν, τὴν (3) καὶ ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον $M(x,y)$ ἱκανοποιεῖ τὴν (3) κεῖται ἐπὶ τῆς (d), διότι ἡ (3) συνεπάγεται τὴν $(y-y_1)/(x-x_1) = \lambda$, δηλαδὴ τὴν σχέσιν $\overrightarrow{M_1M} // \vec{k}$ ἥτις ὑποχρεώνει τὸ M νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς d.

ε') Ἡ ἐξίσωσις $y = \lambda x + \mu$ παριστᾷ εὐθεῖαν ἐχοῦσαν *συντελεστὴν διευθύνσεως* λ καὶ *τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*, μ . Διότι γράφεται $y - \mu = \lambda(x - 0)$ δηλ. λαμβάνει τὴν μορφήν (3) ἄρα παριστάνει εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ $(0, \mu)$ καὶ ἐχοῦσαν *συντελεστὴν διευθύνσεως* λ .

η') Εἰδικαὶ περιπτώσεις :

$y=0$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄξονος τῶν x .

$x=0$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄξονος τῶν y .

$y=\beta$, ἡ ἐξίσωσις εὐθείας $\parallel ox$ μὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν, ἴσην πρὸς β (βλ. σχ. 56, σελ. 352).

$x=\alpha$, ἡ ἐξίσωσις εὐθείας $\parallel oy$ καὶ ἐχούσης τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν, α .

θ') Πᾶσα πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x, y ἐξίσωσις : $Ax+By+\Gamma=0$ μὲ $|A|+|B|\neq 0$ παριστᾷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $(-B, A)$ καὶ συνεπῶς ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως $-A/B$ (ἐφ' ὅσον $B\neq 0$).

Διότι, ἂν $B\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις $Ax+By+\Gamma=0$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B}$ δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς $y=\lambda x+\mu$, ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἐδάφιον ζ') παριστᾷ εὐθεῖαν μὲ συντελ. διευθύνσεως $-A/B$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ διάνυσμα $(-B, A)$ ἔχει τὸν ἴδιον συντελεστὴν διευθύνσεως, ἄρα ἡ εὐθεῖα εἶναι $\parallel$ πρὸς τὸ διάνυσμα τοῦτο.

Ἐὰν $B\neq 0$ καὶ $A=0$, τότε ἡ $Ax+By+\Gamma=0$ καθίσταται $y=-\Gamma/B$ (=σταθ.) καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν $\parallel ox$ (βλ. ἐδαφ. η').

Ἐὰν $B=0$ καὶ $A\neq 0$, ἡ $Ax+By+\Gamma=0$ καθίσταται $Ax+\Gamma=0$ ἢ $x=-\Gamma/A$ =σταθ. καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν $\parallel oy$.

Παρατήρησις. Διὰ τὰ εὐρωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως εὐθείας δεδομένης διὰ τῆς ἐξισώσεώς της, λύομεν ὡς πρὸς y , ὅποτε ὁ συντελεστὴς τοῦ x , εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως.

§ 189. Θέσεις συνεπιπέδων εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας.

α') Ἐστῶσαν δύο εὐθεῖαι (d_1) καὶ d_2 , ὁριζόμεναι διὰ τῶν ἐξισώσεων των $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.

i) Ἐὰν ὑπάρχει ἀριθμὸς $\lambda\neq 0$ τοιοῦτος ὥστε

$$A_2=\lambda A_1, \quad B_2=\lambda B_1, \quad \Gamma_2=\lambda \Gamma_1$$

τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ταυτίζονται. Διότι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην. (γράφεται: $\lambda(A_1x+B_1y+\Gamma_1)=0$, $\lambda\neq 0$).

ii) Ἐὰν $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνονται. Διότι τὸ σύστημα (1) $\{A_1x+B_1y+\Gamma_1=0, A_2x+B_2y+\Gamma_2=0\}$ ἔχει τότε μίαν καὶ μόνην λύσιν (x_0, y_0) (βλ. § 144, β'). Τὸ σημεῖον (x_0, y_0) ὡς ἱκανοποιῶν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις, κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν, ἄρα εἶναι ἡ τομὴ των.

iii) Ἐὰν $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ καὶ $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ αἱ δύο εὐθεῖαι εἰ-

ναι παράλληλοι. Διότι τὸ σύστημα (1) δὲν ἔχει τότε λύσιν (βλ. § 144) ἄρα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν αἱ δύο εὐθεῖαι.

β') "Εστῶσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἔχουσαι ἐξισώσεις

$$(2) \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Ἐὰν αἱ (2) εἶναι συμβιβασταί, δηλ. ὑπάρχῃ σημεῖον (x_0, y_0) ἱκανοποιῶν καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις, τότε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τούτου (x_0, y_0) . Ἐπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν § 150, ἵνα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι (2) ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον ἀρκεῖ :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἐνῶ} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 190. Τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας. Ἐστῶσαν τρία διακεκριμένα σημεῖα $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἁξόνων (x, y) καὶ (x', y') . Ἴνα τὰ M_1, M_2, M_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$(1) \quad \overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_3} \quad (\text{συγγραμμικὰ διανύσματα}).$$

Ἡ (1) ἰσχύει ὅταν οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν $\overrightarrow{M_1M_2}$ καὶ $\overrightarrow{M_1M_3}$ εἶναι ἴσοι ἤτοι ὅταν :

$$(2) \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Ἡ (2) γράφεται καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης :

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{συνθήκη ἵνα τρία σημεῖα εἶναι ὁμοευθειακά}).$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-793. i) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι :

$$\begin{array}{lll} (\delta_1) & \text{ἔχουσα ἐξίσωσιν} & y = x \\ (\delta_2) & \text{»} & y = 12 - x \\ (\delta_3) & \text{»} & y = 2x \\ (\delta_4) & \text{»} & y = -\frac{x}{2} + 6. \end{array}$$

ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (δ_2) καὶ (δ_4) τέμνονται ἐπὶ τοῦ ο.κ.

iii) Ἄν B ἡ τομὴ τῶν (δ_2) καὶ (δ_3) καὶ Γ ἡ τομὴ τῶν (δ_4) καὶ (δ_1) νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ο.κ.

A-794. Νά υπολογισθῶν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν ἀντιστοιχοῦσων πρὸς τὰς ἐξισώσεις :

$$i) \quad \begin{cases} (ε_1) & 2x-8y-14=0 \\ (ε_2) & x-3y=14 \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} (ε_1) & x+y-1=0 \\ (ε_2) & x-y+1=0 \end{cases}$$

A-795. Κατασκευάσατε τὰς παραστατικὰς γραμμὰς τῶν συναρτήσεων :

$$y=x+4, \quad y=-\frac{2}{3}x-1, \quad x=-4x+9.$$

Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι σχηματίζουν ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ὑπολογίσατε τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του.

A-796. Εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων μὲ μοναδιαία διανύσματα μήκους 1 cm χαράξατε τὰς εὐθείας $(δ_1)$ καὶ $(δ_2)$ τὰς ἀντιστοιχοῦσας πρὸς τὰς ἐξισώσεις $6x-3y+9=0$ καὶ $8x-4y-12=0$. Ἡ $(δ_1)$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς Α καὶ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς Β. Ἡ $(δ_2)$ τέμνει ἀντιστοίχως, τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ y εἰς Γ καὶ Δ. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΔΓ εἰς cm^2 .

A-797. Νά ἐξετασθῇ ἂν τὰ σημεία $M_1(a, \beta)$, $M_2(a+\beta, a-\beta)$, $M_3(a+2\beta, a-2\beta)$ κεῖνται ἀπ' εὐθείας καὶ ἐν τιαυτῇ περιπτώσει νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ταύτης.

A-798. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $(a-2\beta, (a-\beta)^2)$ καὶ ἐχούσης τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσην μὲ β^2 .

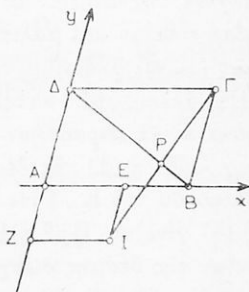
B-799. Δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ συνδέομεν τὴν κορυφὴν Γ μὲ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς διαγωνίου ΑΒ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΓΡ κατὰ μήκος ΡΙ=ΓΡ. Ἐκ τοῦ Ι ἄγομεν τὴν ΙΕ παράλληλον τῇ ΑΔ καὶ συναντῶσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε, κατόπιν δὲ τὴν ΙΖ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ συναντῶσαν τὴν ΑΔ εἰς Ζ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία Ρ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

{ Ὑποδ. Νά ληφθοῦν οἱ ἄξονες ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ καὶ ἄς τεθῇ $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=\beta$. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ΒΔ. Νά κληθοῦν (x_0, y_0) αἱ συντεταγμ. τοῦ Ρ (ὀφείλουν νά ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ΒΔ). Ἐκ τῶν συντεταγμ. τοῦ Ρ καὶ τοῦ Γ νά ὀρισθοῦν αἱ συντεταγμ. τοῦ Ι καὶ νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ΖΕ. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ (x_0, y_0) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν }.

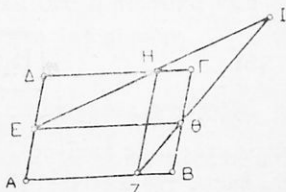
B-800. «Αἱ εὐθεῖαι ΕΘ καὶ ΗΖ ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 64). Ἄν Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΕΗ καὶ ΖΘ νά δειχθῇ ὅτι τὰ σημεία Α, Γ, Ι κεῖνται ἐπ' εὐθείας»

{ Ὑποδ. Νά ληφθοῦν οἱ ἄξονες ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΕΘ καὶ ΖΗ. Νά τεθῇ $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=\beta$,

$\overline{OE}=\xi$, $\overline{OH}=\eta$. Βάσει τούτων νά εὑρεθῶν αἱ συντεταγμέναι τῶν Ε καὶ Ζ, αἱ ἐξισώσεις



Σχ. 63



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν εὐθειῶν ΕΗ, ΖΘ καὶ αἱ συντεταγμένοι τοῦ Ι. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν $\overrightarrow{ΑΓ} \parallel \overrightarrow{ΑΙ}$, (§ 190, (2)).

§ 191. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν, καλεῖται τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἐνὸς ἐπιπέδου αἵτινες διέρχονται δι' ἐνὸς σταθεροῦ σημείου Κ. Τὸ Κ καλεῖται *κέντρον τῆς δέσμης*, αἱ εὐθεῖαι, *ἄκτινες τῆς δέσμης*. Ἐὰν διαμορφώσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς δέσμης διὰ δύο ἄξόνων $(x'ox, \vec{i})$ καὶ $(y'oy, \vec{j})$ καὶ θεωρήσωμεν τὸ κέντρον $K(x_0, y_0)$ τῆς δέσμης ὡς τομὴν δύο ἀκτίνων:

$$(1) \quad A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (A_1B_2 \neq A_2B_1)$$

τότε κάθε ἀκτὶς τῆς δέσμης θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$(2) \quad \mu_1(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu_2(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$$

ὅπου μ_1, μ_2 σταθεροὶ ἀριθμοὶ ὅχι συγχρόνως μηδενικοί.

Ἐὰν δὲ τεθῇ:

$$(3) \quad A_1x + B_1y + \Gamma_1 \equiv H_1(x, y), \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 \equiv H_2(x, y)$$

ἡ (2) γράφεται

$$(4) \quad \mu_1 H_1(x, y) + \mu_2 H_2(x, y) = 0 \quad (|\mu_1| + |\mu_2| \neq 0)$$

Ἐν πρώτοις ἡ (4) παριστάνει διὰ κάθε ζεύγος $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$, μίαν ἀκτὶνα τῆς δέσμης. Διότι ὡς πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ y παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν καὶ μάλιστα διερχομένην διὰ τοῦ $K(x_0, y_0)$, διότι τὸ ζεύγος (x_0, y_0) μηδενίζει τὰ $H_1(x, y)$ καὶ $H_2(x, y)$ ἄρα ἐπαληθεύει τὴν (4). Ἐξ ἄλλου, μὲ κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν σταθερῶν μ_1, μ_2 ἡ (4) δύναται νὰ παραστήσῃ *ὅποιανδήποτε ἀκτὶνα* τῆς δέσμης Κ. Ἐστω π.χ. εὐθεῖα (d) τῆς δέσμης διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου $N(\xi, \eta)$ διαφοροῦ τοῦ Κ. Τότε ἂν ἐκλέξωμεν, $\mu_1 = H_2(\xi, \eta)$ καὶ $\mu_2 = -H_1(\xi, \eta)$ ἡ (4) γίνεται $H_2(\xi, \eta)H_1(x, y) - H_1(\xi, \eta)H_2(x, y) = 0$ καὶ παριστάνει εὐθεῖαν τῆς δέσμης διερχομένην ἀπὸ τὸ $N(\xi, \eta)$ διότι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ν τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x, y εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς τῷ καθιστοῦν $H_2(\xi, \eta)H_1(\xi, \eta) - H_1(\xi, \eta)H_2(\xi, \eta)$ δηλαδὴ ἴσον μὲ μηδέν. Ἀρα παριστᾷ τὴν δοθεῖσαν ἀκτὶνα (d).

Ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu_1 \neq 0$ καὶ τεθῇ $\mu_2/\mu_1 = \lambda$ ἡ (4) γράφεται

$$(5) \quad \boxed{H_1(x, y) + \lambda H_2(x, y) = 0}$$

καὶ παριστᾷ διὰ τὰς διαφοροὺς τιμὰς τοῦ λ , ὅλας τὰς εὐθείας τῆς δέσμης *ἐκτὸς* μιᾶς ἀκτίνος, ἐκείνης ἣτις προκύπτει ἀπὸ τὴν (4) διὰ $\mu_1 = 0$ δηλ. ἐκτὸς τῆς ἀκτίνος $H_2(x, y) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Αἱ εὐθεῖαι ἐφ' ὧν κείνται αἱ πλευραὶ ἐνὸς τρι-

γώνου ἔχουν ἐξισώσεις $x-5y=1$, $2x+3y=4$, $5x-3y+2=0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν κορυφῶν του παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.

Λύσις 1η. Εὐρίσκομεν πρῶτον τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου. Π.χ. ἡ κορυφή ἣτις εἶναι τομὴ τῶν πλευρῶν $x-5y=1$, $2x+3y=4$ ἔχει συντεταγμένας προκυπτούσας ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος

$$\{x-5y=1, \quad 2x+3y=4\} \text{ δηλ. τὰς } \left(\frac{23}{13}, \frac{2}{13}\right).$$

Ἡ ἀπέναντί της πλευρὰ $5x-3y+2=0$ ἔχει συντελεστήν διευθύνσεως $\frac{5}{3}$ ὥς φαίνεται ἂν γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $y=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$, (§ 168, ζ') ἄρα καὶ ἡ ζητούμενη παράλληλος θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν συντελεστήν διευθύνσεως $\frac{5}{3}$ καὶ θὰ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς $\left(\frac{23}{13}, \frac{2}{13}\right)$.

Ὅθεν ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις εἶναι

$$y-\frac{2}{13}=\frac{5}{3}\left(x-\frac{23}{13}\right) \quad \text{ἢ} \quad 65x-39y-109=0$$

Ἀναλόγως εὐρίσκομεν καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις.

Λύσις 2α. Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν $x-5y-1=0$, $2x+3y-4=0$ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (§ 191, (5)) $x-5y-1+\lambda(2x+3y-4)=0$ ἢ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν, $(2\lambda+1)x+(3\lambda-5)y-4\lambda-1=0$ (1).

Τὴν μορφήν (1) θὰ ἔχη ἄρα καὶ ἡ ζητούμενη εὐθεῖα. Διὰ νὰ εἶναι δὲ παράλληλος πρὸς τὴν $5x-3y+2=0$ ἀρκεῖ νὰ ὀρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (1) νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{5}{3}$, δηλ. $-\frac{2\lambda+1}{3\lambda-5}=\frac{5}{3}$.

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν τὸν $\lambda=\frac{22}{21}$. Ἀντικαθιστώντες τὴν τιμὴν τοῦ λ εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν τὴν ζητούμενην ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{44}{21}+1\right)x+\left(\frac{66}{21}-5\right)y-\frac{88}{21}-1=0$$

$$\text{ἢ} \quad 65x-39y-109=0$$

2. «Νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦ λ μεταβαλλομένου ἡ εὐθεῖα $(2\lambda+1)x+(1-\lambda)y+2\lambda-1=0$ κινεῖται οὕτως ὥστε νὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. Νὰ εὑρεθῇ τοῦτο».

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφήν

$$x+y-1+\lambda(2x-y+2)=0$$

δεικνύει ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἀκτὶς τῆς δέσμης τῆς ὀριζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $x+y-1=0$, $2x-y+2=0$, ἄρα διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τούτων οἷοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ λ . Εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι αἱ συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς δέσμης εἶναι $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-801. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν: $2x-5y+11=0$, $3x+y-9=0$ καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν $2x-y-3=0$, $3x+2y-18=0$.

B-802. Νά εὑρεθῇ ἡ κοινὴ ἄκτις τῶν δεσμῶν: $12x-17y-29+\lambda(7x+9y+2)=0$ καὶ $10x+y-32+\mu(x+10y-23)=0$ προσδιοριζομένων τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων λ καὶ μ . (Ἴδε § 191, (5)).

A-803. «Νά εὑρεθοῦν αἱ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας ἄκτινες τῆς δέσμης τὴν ὁποίαν ὀρίζουν αἱ εὐθεῖαι $2x-7y+11=0$, $5x+3y-1=0$ καθὼς καὶ ἡ ἄκτις ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $(-2,3)$ ».

A-804. «Νά ἐξετασθῇ ἂν αἱ εὐθεῖαι $3x-5y-7=0$, $7x+2y-4=0$, $15x+16y+2=0$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου».

§ 192. Θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $Ax+By+\Gamma=0$. Κάθε εὐθεῖα (ε) ἐνὸς ἐπιπέδου (P), χωρίζει τὸ (P) εἰς δύο μέρη (ἡμιεπίπεδα) ἐκατέρωθεν τῆς (ε) κείμενα καὶ συνορεύοντα κατὰ μῆκος τῆς (ε). Ἡ (ε) θὰ θεωρῇται ὡς μὴ ἀνήκουσα οὔτε εἰς τὸ ἓν οὔτε εἰς τὸ ἄλλο μέρος. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (P) ἀναφέρεται εἰς σύστημα δύο ἀξόνων ἡ δὲ (ε) ἔχει ἐξίσωσιν

$$(1) \quad Ax+By+\Gamma=0$$

τότε τὰ δύο ἀνωτέρω μέρη ἔχουν τὴν ἐξῆς ιδιότητα: αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τοῦ ἐνὸς μέρους τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x καὶ y εἰς τὸ πολυώνυμον $Ax+By+\Gamma$, καθιστοῦν αὐτὸ θετικόν, αἱ δὲ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τοῦ ἄλλου μέρους καθιστοῦν τὸ $Ax+By+\Gamma$, ἀρνητικόν.

Τὰ δύο ταῦτα μέρη καλοῦνται *θετικὸν* καὶ *ἀρνητικὸν* μέρος τοῦ ἐπιπέδου (P) ὡς πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $Ax+By+\Gamma$ (ἢ ὅπως λέγομεν συνήθως, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $Ax+By+\Gamma=0$).

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

Θετικὸν ἡμιεπίπεδον εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(\xi, \eta)$:

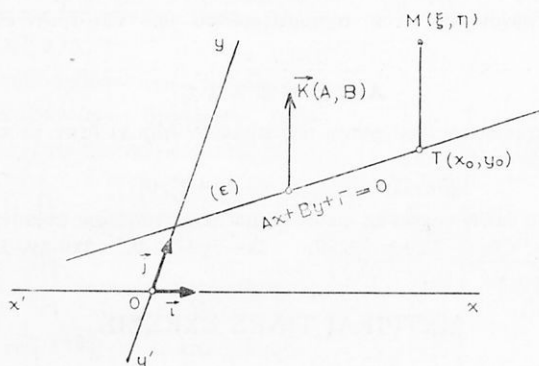
$$\{M(\xi, \eta) \mid A\xi+B\eta+\Gamma>0\}$$

ἀρνητικὸν δὲ ἡμιεπίπεδον, τὸ

$$\{M(\xi, \eta) \mid A\xi+B\eta+\Gamma<0\}.$$

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ I τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ ὁποῖον κατευθύνεται τὸ διάνυσμα $\vec{K}(A, B)$ ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς εὐθείας καὶ ἂν ἀπὸ τυχόν σημείου $M(\xi, \eta)$ τοῦ μέρους I φέρομεν $\parallel \vec{K}$ τέμνουσαν εἰς $T(x_0, y_0)$ τὴν (ε) (βλ. σχ. 65), τότε τὰ διανύσματα $\vec{K}$ καὶ $\vec{TM}$ ὡς ὁμόροπα, θὰ ἔχουν *ὁμοσήμους* τεταγμένους καὶ ὁμο-

σήμους τεταγμένους δηλ.: $\frac{\xi-x_0}{A} = \frac{\eta-y_0}{B} = \theta > 0$. Λαμβάνομεν, $\xi=x_0$



Σχ. 65

$+ \theta A, \eta = y_0 + B\theta$ καὶ $A\xi + B\eta + \Gamma = A(x_0 + \theta A) + B(y_0 + B\theta) + \Gamma = (Ax_0 + By_0 + \Gamma) + \theta(A^2 + B^2) = \theta(A^2 + B^2)$ διότι τὸ $T(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$. Δηλ. $A\xi + B\eta + \Gamma > 0$. Ὡστε θετικὸν μέρος εἶναι ἐκεῖνο πρὸς τὸ ὁποῖον δεῖχ-
χνει τὸ διάνυσμα (A, B) Ἀναλόγως, ἐργαζόμεθα διὰ τὸ μέρος II.

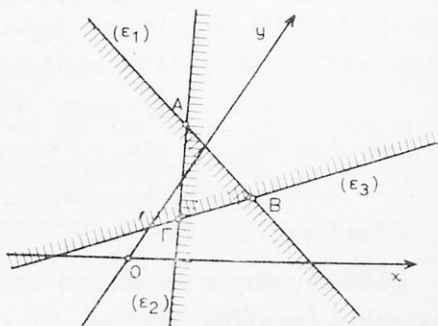
ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ὧν αἱ συντεταγμέναι πληροῦν ταυτοχρόνως καὶ τὰς τρεῖς ἀνισότητας :

$$3x + 4y - 12 < 0$$

$$2x + y - 2 > 0$$

$$x - 2y + 2 < 0$$

Λύσις. Τὴν πρώτην ἀνισότητα πληροῦν τὰ σημεῖα τὰ κείμενα εἰς τὸ ἀρ-
νητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ
ὡς πρὸς τὴν εὐθείαν $3x + 4y - 12 = 0$. Ἐπειδὴ ἡ ἀρχὴ O ἐπαλη-
θεύει τὴν ἀνισότητα διὰ τοῦτο
πάντα τὰ σημεῖα τὰ πληροῦντα
τὴν πρώτην ἀνισότητα κεῖνται
μετὰ τοῦ O πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος
τῆς εὐθείας (ε_1) δηλ. τῆς $3x + 4y - 12 = 0$. Ὁμοίως χαράσσομεν
καὶ τὴν εὐθείαν (ε_2) ἔχουσαν ἐξί-
σωσιν $2x + y - 2 = 0$ καὶ εὐρίσκο-
μεν ἁμέσως ὅτι τὰ σημεῖα τὰ
πληροῦντα τὴν 2αν ἀνισότητα
κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας
 (ε_2) πρὸς ὃ δὲν κεῖται τὸ O.



Σχ. 66

Τέλος χαράσσομεν καὶ τὴν εὐθείαν (ε_3) ἔχουσαν ἐξίσωσιν $x - 2y + 2 = 0$

καὶ εὐρίσκομεν τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ταύτην ὅπερ εἶναι τὸ μέρος πρὸς ὃ δὲν κεῖται τὸ O . Ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος συνάγουμεν ὅτι ὁ τόπος εἰς ὃν πληροῦνται καὶ αἱ τρεῖς ὁμοῦ ἀνισότητες εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν εὐθειῶν (ϵ_1) , (ϵ_2) , (ϵ_3) .

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

B-805. Σχεδιάσατε τὸν τόπον τῶν σημείων $M(x,y)$ ὅταν τὰ x,y πληροῦν συγχρόνως τὰς ἀνισότητας

$$\{3x-2y+6>0, \quad x+2y+2>0\}$$

B-806. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἀνισοτήτων

$$\{3x+y-5<0, \quad 3x+y-2>0, \quad 2x-5y-5>0, \quad 2x-5y-35<0\}$$

μὲ ἀγνώστους x,y .

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

§ 193. Μετρικὸν ἐπίπεδον. Ἐν ἐπίπεδον (Π) τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα ἀναφέρονται εἰς σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων (§ 182, iii, γ'), λέγεται μετρικὸν ἐπίπεδον. Ἐπὶ τοῦ μετρικοῦ ἐπιπέδου, ὡς θετικὴ φορὰ περιστροφῆς λαμβάνεται ἡ φορὰ καθ' ἣν πρέπει νὰ στραφῇ κατὰ 90° τὸ μοναδιαῖον $\vec{i}$ τοῦ ox διὰ νὰ συμπίσῃ ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου $\vec{j}$ τοῦ oy . Ἐπομένως τὸ μετρικὸν ἐπίπεδον εἶναι προσανατολισμένον (§ 70).

§ 194. Μῆκος διανύσματος.

Ἐὰν X καὶ Ψ εἶναι αἱ συντεταγμέναι διανύσματος κειμένου ἐπὶ μετρικοῦ ἐπιπέδου (§ 193), τότε ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχ. 67 (βλ. καὶ § 184, α') ἰσχύει:

$(AB)^2 = (AG)^2 + (GB)^2 = X^2 + \Psi^2$ ἐπομένως:

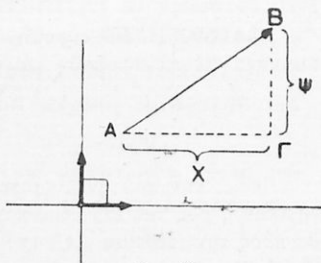
$$|AB| = (AB) = \sqrt{X^2 + \Psi^2}.$$

Ἐὰν εἶναι $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε:

$$|AB| = (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{βλ. § 184, α'}).$$

(Ἀσκήσεις: 807, 808).

§ 195. Συνθήκη καθετότητος δύο διανυσμάτων ἐν τῷ μετρικῷ ἐπιπέδῳ. Ἐστώσαν $\vec{OG}$ καὶ $\vec{OD}$ δύο κάθετα διανύσματα ἐν τῷ μετρικῷ ἐπιπέδῳ (§ 193) ἔχοντα συντελεστὰς διευθύνσεως, ἀντιστοίχως λ_1 καὶ λ_2 .



Σχ. 67

Ἐστω $\vec{OI} = \vec{i}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ OX καὶ ἔστωσαν Π καὶ P τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εἰς τὸ I ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸν OX , τέμνει τὰς εὐθείας OG , OD .

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $PO\Pi$ λαμβάνομεν, (σύμφωνα μὲ γνωστὴν σχέσιν ἐκ τῆς Γεωμετρίας).

$$\vec{OI}^2 = -\vec{IP} \cdot \vec{IP} \Rightarrow \frac{\vec{IP}}{\vec{OI}} \cdot \frac{\vec{IP}}{\vec{OI}} = -1.$$

Ἀλλὰ $\frac{\vec{IP}}{\vec{OI}}$ = συντελεστὴς διευ-

θύνσεως τοῦ $\vec{OP}$, $= \lambda_1$ καὶ ὁμοίως

$\frac{\vec{IP}}{\vec{OI}}$ = συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ

$\vec{OP}$, $= \lambda_2$ (§ 184, γ').

Ἐπομένως: **συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων ἀναφερομένων εἰς σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων εἶναι, τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ -1 :**

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Δίδονται τὰ σημεῖα $A(3, -7)$, $B(5, +9)$ ἀναφερόμενα εἰς σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος AB .

Λύσις. Τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος ἔχει συντεταγμένας, τὰ ἡμιαθροίσματα τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος. Συνεπῶς ἂν M τὸ μέσον τοῦ AB θὰ εἶναι:

$$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-7+9}{2}\right) \quad \text{ἢ} \quad M(4, 1).$$

Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι: $\lambda_1 = \frac{9+7}{5-3} = 8$ (§ 184, γ').

Ἄν ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς μεσοκαθέτου εἶναι λ θὰ ἔχωμεν:

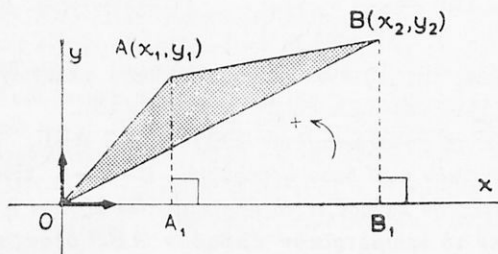
$$\lambda \lambda_1 = -1 \quad \text{ἢ} \quad \lambda \cdot 8 = -1, \quad \lambda = -1/8.$$

Συνεπῶς, ἡ μεσοκάθετος εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ $M(4, 1)$ καὶ ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = -1/8$. Σύμφωνα μὲ τὴν § 188, στ' ἡ ἐξίσωσις τῆς εἶναι:

$$y-1 = -\frac{1}{8}(x-4) \quad \text{ἢ} \quad x+8y-5=0$$

(Ἀσκήσεις: 809, 811, 812).

$$(2) \quad \frac{1}{2} (\overline{A_1A} + \overline{B_1B}) \cdot \overline{B_1A_1} = \frac{1}{2} \overline{OA_1} \cdot \overline{A_1A} + (\text{OAB}) + \frac{1}{2} \overline{B_1O} \cdot \overline{B_1B}$$



Σχ. 72

(διότι όλα τὰ ἐμβαδὰ τῆς (1) εἶναι θετικά). Ἡ (2) γράφεται

$$\frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} x_1 y_1 + (\text{OAB}) + \frac{1}{2} (-x_2 y_2 \text{ καὶ δίδει:}$$

$$(3) \quad (\text{OAB}) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Ὁ τύπος (3) δίδει τὸ προσημασμένον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OAB, εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, δηλ. οἰανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν τὰ A καὶ B ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Οὕτω π.χ. τὸ τρίγωνον OAB τοῦ σχήματος (72) ἔχει ἀρνητικὸν ἐμβαδόν. Θὰ ἔχωμεν τώρα:

$$(4) \quad (\text{OAB}) + (\text{OBB}_1) = (\text{OAA}_1) + (\text{ABB}_1A_1)$$

ὅπου ὅλα τὰ ἐμβαδὰ τῆς (4) εἶναι ἀρνητικά. Ἡ (4) γράφεται

$$(\text{OAB}) + \frac{1}{2} \overline{B_1O} \cdot \overline{B_1B} = \frac{1}{2} \overline{A_1O} \cdot \overline{A_1A} + \frac{1}{2} (\overline{A_1A} + \overline{B_1B}) \cdot \overline{B_1A_1} \quad \eta$$

$$(\text{OAB}) + \frac{1}{2} (-x_2) y_2 = \frac{1}{2} (-x_1) y_1 + \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$$

καὶ δίδει πάλιν τὴν ἰσότητα (3).

β') Ἐστώσαν A(x₁, y₁), B(x₂, y₂), Γ(x₃, y₃) αἱ κορυφαὶ τριγώνου ABΓ ἀναφερόμεναι εἰς σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων.

Ἐὰν O ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ προσημασμένα ἐμβαδά, τὴν σχέσιν (βλ § 196, β' (1)).

$$(5) \quad (\text{ABΓ}) = (\text{OAB}) + (\text{OBΓ}) + (\text{OΓA}).$$

Ἡ (5) γίνεται λόγῳ τῆς (4):

$$(6) \quad (\text{ABΓ}) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}$$

ἢ ἀκόμῃ

$$(7) \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{τετραγωνικαὶ μονάδες})$$

διότι τὸ 2^{ον} μέλος τῆς (7) ἀναπτυσσόμενον κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης (§ 148, vii) δίδει τὸ 2^{ον} μέλος τῆς (6).

Ἡ (7) δίδει τὸ προσημασμένον ἐμβαδὸν τοῦ ABΓ, ἥτοι τὸ δίδει θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν καθ' ὅσον ἡ φορὰ Α—Β—Γ—Α εἶναι ἡ θετικὴ ἢ φορὰ περιστροφῆς ἣν καθορίζει τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων ἢ ἡ ἀρνητικὴ. **Διὰ τὰ ἔχωμεν τὸ γεωμετρικὸν ἐμβαδὸν ABΓ δέον τὰ λάβωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ὀριζούσης.**

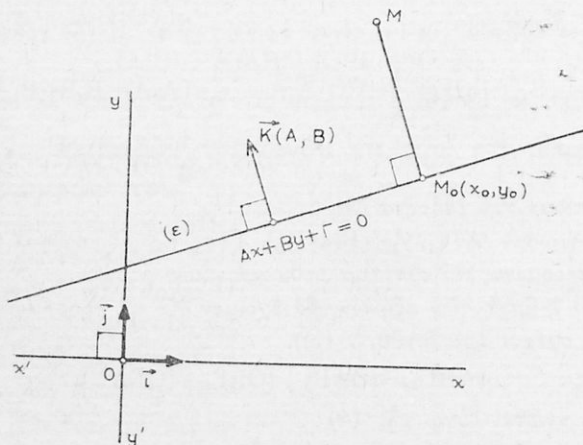
Υ') Συνθήκη ἵνα τρία σημεῖα A(x₁, y₁), B(x₂, y₂), Γ(x₃, y₃) κεῖνται ἐπ' εὐθείας εἶναι :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Διότι τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ABΓ, μηδενίζεται.

(᾽Ασκήσις : 813).

*** § 198. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας ἐν τῷ μετρικῷ ἐπιπέδῳ.** α') Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων, τὸ διάνυσμα $\vec{k}(A, B)$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $Ax + By + \Gamma = 0$. Διότι τὸ μὲν $\vec{k}$ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda_1 = \frac{B}{A}$ ἡ δὲ εὐθεῖα ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda_2 = -\frac{A}{B}$



(§ 188 θ'). Ἐπειδὴ πληροῦται ἡ σχέσις $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ ἔπεται ὅτι αἱ δύο αὐταὶ διευθύνσεις εἶναι κάθετοι.

β') Εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν, λαμβάνεται ὡς ἀπόστασις τοῦ σημείου $M(\xi, \eta)$ ἀπὸ τῆς εὐθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ ἡ ἀπόλυτος (Γεωμετρικὴ) ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τῆς εὐθείας, ἐφοδιασμένη μετὰ τὸ πρόσημον + ἂν τὸ M κεῖται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ μετὰ - ἂν τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος. Ἐστω $M_0(x_0, y_0)$ ἡ προβολὴ τοῦ $M(\xi, \eta)$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) ἔχουσαν ἐξίσωσιν $Ax + By + \Gamma = 0$ εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα (σχ. 73). Ἐπειδὴ τὰ $\vec{M_0M}(\xi - x_0, \eta - y_0)$ καὶ $\vec{k}(A, B)$ εἶναι συγγραμμικά θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\xi - x_0}{A} = \frac{\eta - y_0}{B} = \frac{A\xi - Ax_0}{A^2} = \frac{B\eta - By_0}{B^2} = \frac{A\xi + B\eta - (Ax_0 + By_0)}{A^2 + B^2} = \frac{A\xi + B\eta + \Gamma}{A^2 + B^2}$$

(διότι $Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0$). Λαμβάνομεν:

$$\xi - x_0 = \frac{A}{A^2 + B^2} (A\xi + B\eta + \Gamma), \quad \eta - y_0 = \frac{B}{A^2 + B^2} (A\xi + B\eta + \Gamma)$$

καὶ ἐξ αὐτῶν:

$$(MM_0)^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 = \frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^2} (A\xi + B\eta + \Gamma)^2 \quad \text{καὶ} \quad |MM_0| = \frac{|A\xi + B\eta + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις $|MM_0|$ ἐφοδιάζεται αὐτομάτως μετὰ τὸ ἀρμόζον σημεῖον ἂν εἰς τὸ δεῦτερον μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως παραλείψωμεν τὸ σύμβολον τῆς ἀπολύτου τιμῆς. Ἐπομένως:

Ἡ προσημασμένη ἀπόστασις h τοῦ $M(\xi, \eta)$ ἀπὸ τῆς $Ax + By + \Gamma = 0$ δίδεται εἰς σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἄξωνων, ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$h = \frac{A\xi + B\eta + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

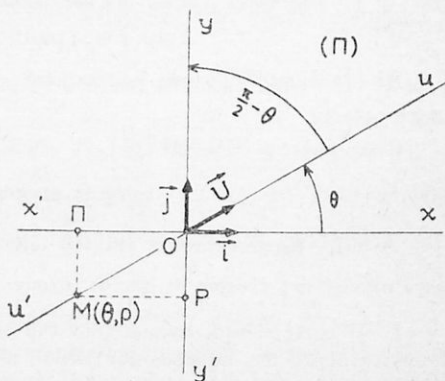
§ 199. Πολικαὶ συντεταγμέναι ἐν ἐπιπέδῳ. α') Ἐπὶ τοῦ

μετρικοῦ ἐπιπέδου (Π) (§ 193)

ἔστω σημεῖον M (σχ. 74).

1ον. Στρέφομεν τὸν $x'x$ περὶ τὸ O κατὰ τινὰ γωνίαν θ (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) οὕτως ὥστε εἰς τὴν νέαν θέσιν του $u'u$ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ M . Τὸ θ εἶναι ἡ **πολικὴ γωνία** τοῦ M .

2ον. Εὐρίσκομεν τὴν ἀλγεβρικήν τιμὴν τοῦ $\vec{OM}$ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος $u'u$ (ἔχοντος μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{U}$, ἰσόμεγρος πρὸς τὸν $\vec{U}$) καὶ ἔστω $\vec{OM} = T$. Τὸ T εἶναι ἡ **πολικὴ ἀ-**



Σχ. 74

ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ O καὶ τὸ θ εἶναι ἡ **πολικὴ ἀ-**

Οἱ δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ : (θ, ρ) λέγονται **πολικάι συντεταγμέναι τοῦ M .** Γράφομεν: $M(\theta, \rho)$.

Ὅταν δοθοῦν αἱ δύο πολικάι συντεταγμέναι τοῦ M , ἡ θέσις τοῦ M εἶναι τελείως ὀρισμένη. Τὸ M ἀνευρίσκεται ἀφοῦ πρῶτον στρέψωμεν τὸν $x'x$ (δηλ. τὸ $\vec{i}$) κατὰ γωνίαν θ (ἀκτινίων) περὶ τὸ O καὶ ἐπὶ τοῦ νέου ἄξονος $u'u$ ὁ ὅποιος προκύπτει, ὀρίσωμεν σημεῖον M τοιοῦτον ὥστε $OM = \rho$. Τὸ αὐτὸ σημεῖον M δύναται νὰ ἔχῃ ἀπείρους πολικάς γωνίας (διαφερούσας ἀλλήλων κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2π ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας).

β') Σχέσεις πολικῶν καὶ Καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ἐστώσαν (x, y) αἱ καρτεσιαναὶ καὶ (θ, ρ) αἱ πολικάι συντεταγμέναι τοῦ M ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ox, oy . Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ὅτι «ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τῆς προβολῆς διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος, ἐπὶ ἄλλον ἄξονα, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀλγεβρικήν τιμὴν τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συννημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἀξόνων». Ἐπομένως: (σχ. 74).

$$x = OP = OM \cos(\widehat{x'x, u'u}) = \rho \cos \theta \quad \text{καὶ}$$

$$y = \overline{OP} = OM \sin(\widehat{y'y, u'u}) = OM \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\widehat{x'x, u'u})\right) = \\ = \rho \sin(\widehat{x'x, u'u}) = \rho \sin \theta.$$

Ἐξ αὐτῶν αἱ σχέσεις:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Αἱ (1) ἐκφράζουν τὰς καρτεσιανὰς, συναρτήσας τῶν πολικῶν συντεταγμένων.

(Ἀσκήσεις: 816, 817).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-807.—Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ ἰδίου συστήματος ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων ox, oy τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξισώσεις: $y=2x$, $y=-\frac{x}{2}+4$, $y=1$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι σχηματίζουν ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. i) Ὑπολογίσατε τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του, ii) τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, iii) ποῖον τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$; iv) εὑρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου.

A-808.—Προσδιορίσατε τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν σημείων i) $A(-1, 3)$, $B(4, 2)$, ii) $A(3, -4)$, $B(5, -1)$, iii) $A(at^2, 2at)$, $B(a/t^2, -2a/t)$ (σύστημα ἀξόνων, ὀρθοκανονικόν).

A-809.—Θεωρούμεν τὰς εὐθείας (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοιχῶς ἐξισώσεις $3x-2y-6=0$ καὶ $4x+6y+5=0$ (ἄξονες ὀρθοκανονικοί). i) Κατασκευάσατε τὰς (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καὶ ὑπολογίσατε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τομῆς τῶν. ii) Ὑπολογίσατε τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων εἰς αἱ (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνουσι τὸν ἄξονα $x'x$. iii) Δείξατε ὅτι αἱ (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) εἶναι κάθετοι.

A-810.—Ἐστῶσαν $x'ox$ καὶ $y'oy$ δύο ὀρθοκανονικοὶ ἄξονες. i) Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας, $(\epsilon_1): y=-2x+4$, $(\epsilon_2): y=2x$. ii) Ἡ εὐθεῖα (ϵ_1) τέμνει τὴν (ϵ_2) εἰς τὸ Α καὶ τὸν $x'ox$ εἰς τὸ Β. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές.

B-811.—Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ $M(\xi, \eta)$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $H(x, y) \equiv Ax + By + \Gamma = 0$; Τὸ σύστημα τῶν ἁξόνων ὑποτίθεται ὀρθοκανονικόν.

A-812.—Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς $A(2, 1)$, $B(-5, 3)$ καὶ $\Gamma(1, -4)$ εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἁξόνων;

A-813.—Εὑρετε τὸ (ἀπόλυτον) ἔμβαδὸν ἐκάστου τῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν εἶναι:

i) $(2, 1)$, $(-4, -3)$, $(3, 4)$.

ii) $(3, 1)$, $(-2, -6)$, $(4, 5)$,

iii) $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(-2, -6)$.

iv) $(c\lambda, \frac{c}{\lambda})$, $(-c\lambda, -\frac{c}{\lambda})$, $(c\lambda^2, 2c\lambda)$.

A-814.—i) Ὅρίσατε τὰ αἶνα τὰ σημεία $(3, -5)$, $(4, 1)$, $(5a, 7a)$, εἶναι συγγραμμικά. ii) Δείξατε ὅτι τὰ σημεία $(3, -5)$, $(4, 1)$ καὶ $(6, 13)$ εἶναι συγγραμμικά.

A-815.—Σχεδιάσατε τὸ κυρτὸν τετράπλευρον $A(2, 2)$, $B(-1, 4)$, $\Gamma(-3, 1)$, $\Delta(1, -1)$ καὶ ὑπολογίσατε τὸ ἔμβαδόν του εἰς τετραγ. μονάδας. ($\vec{i} \perp \vec{j}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}|$).

B-816.—Δείξατε ὅτι τὰ σημεία με πολικάς συντεταγμένας $(\frac{\pi}{6}, 5)$, $(-\frac{5\pi}{6}, -5)$, $(-\frac{11\pi}{6}, 5)$, συμπίπτουν.

B-817. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἁξόνων, ox, oy τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$ (X, Y) στρέφεται περὶ τὸ O κατὰ $+\frac{\pi}{2}$ ἀκτίν. Ποῖαι αἱ νέαι συντεταγμέναι του;

B-818.—Ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων ἁξόνων $(x'ox, \vec{i})$ $(y'oy, \vec{j})$ με $|\vec{i}| = |\vec{j}|$ λαμβάνομεν τὰ σημεία A καὶ B ἀντιστοιχῶς εἰς τρόπον ὥστε $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{c}$ ἐνθα c σταθερά ποσότης. Ἐάν Γ ἡ τετάρτη κορυφή τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου $OAGB$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον AB διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

Περαιτέρω γνώσεις ἐπὶ τῶν συνόλων: Δυαδικαὶ σχέσεις—Ἑσωτερικοὶ νόμοι —Δομὴ συνόλου

ΔΥΑΔΙΚΑΙ (ἢ ΔΙΜΕΛΕΙΣ) ΣΧΕΣΕΙΣ

§ 200. Δυαδικαὶ σχέσεις καὶ οἱ οὐσιώδεις χαρακτη-
ρες τῶν. α') "Ἐστω σύνολον $E = \{a, b, \gamma, \dots\}$. Ἐὰν καθορίσωμεν
μὴν κάποιαν ιδιότητα Ω τοιαύτην ὥστε διὰ κάθε διατεταγμένον
ζεύγος (a, b) ἐκ στοιχείων τοῦ E , δύο μόνον δυνατότητες νὰ
υπάρχουν : ἢ τὸ (a, b) νὰ ἔχῃ τὴν ιδιότητα Ω ἢ τὸ (a, b) νὰ
μὴ ἔχῃ τὴν ιδιότητα Ω , τότε λέγομεν ὅτι καθωρίσαμεν ἐπὶ τοῦ E
μὴν δυαδικὴν (ἢ διμελῆ) σχέσιν.

"Ὅταν ἓνα ζεύγος (a, b) ἔχῃ τὴν ιδιότητα Ω , γράφομεν

$a\Omega b$ (τὸ a εὐρίσκεται ἐν τῇ σχέσει Ω μὲ τὸ b)

Οὕτω π.χ. ἐπὶ τοῦ συνόλου E τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου δυνά-
μεθα νὰ διακρίνωμεν τὴν σχέσιν τῆς παραλληλίας. Δύο εὐθεῖαι α καὶ
 β τοῦ ἐπιπέδου (δηλ. δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου E) ἢ εὐρίσκονται ἐν τῇ
σχέσει Ω τῆς παραλληλίας (δηλ. $\alpha // \beta$) ἢ ὅχι.

Ἐπίσης, ἐπὶ τοῦ συνόλου Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἄς καθο-
ρίσωμεν τὴν ιδιότητα : «εἰς ἓνα διατεταγμένον ζεύγος ἀριθμῶν, ὁ πρῶ-
τος δὲν ὑπερβαίνει τὸν κύβον τοῦ δευτέρου». Ἡ ιδιότης αὕτη εἶναι μίαν
δυαδικὴν σχέσιν Ω ἐπὶ τοῦ Π , διότι κάθε ζεύγος $(a, b) \in \Pi^2$ ἢ τὴν πλη-
ροῦ ($a \leq b^3$) ἢ ὅχι.

"Ἄλλος ὁρισμὸς τῆς δυαδικῆς σχέσεως. Ἐπειδὴ κάθε διατετα-
γμένον ζεύγος (a, b) ἐκ στοιχείων τοῦ E ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον $E \times E$
(§ 8), διὰ τοῦτο, ὅλα τὰ ζεύγη τὰ ἱκανοποιούντα μίαν ὁποιαδήποτε
δυαδικὴν σχέσιν, εἶναι στοιχεῖα τοῦ $E \times E$ καὶ συνεπῶς ἀποτελοῦν ἓνα
ὑποσύνολον τοῦ $E \times E$ ἔστω τὸ Ω . Δηλαδή εἰς πᾶσαν δυαδικὴν σχέσιν
ἐπὶ τοῦ E ἀντιστοιχεῖ ἓνα ὑποσύνολον τοῦ $E \times E$, καὶ ἀντίθετα, ἓνα
ὑποσύνολον τοῦ $E \times E$ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν δυαδικὴν σχέσιν ἐπὶ τοῦ E .

τὰ ζεύγη τὰ πληροῦντα τὴν σχέσιν. Ἀντιστρόφως, ἂν δοθῇ ἓνα ὑποσύνολον τοῦ $E \times E$, τοῦτο ὀρίζει μίαν δυαδικὴν σχέσιν ἐπὶ τοῦ E . Διότι πᾶν διατεταγμένον ζεύγος στοιχείων τοῦ E ἢ θ' ἀνήκει εἰς Ω ὅποτε πληροῖ τὴν σχέσιν, ἢ δὲν ἀνήκει ὅποτε δὲν τὴν πληροῖ. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὅρισμόν:

Ἐπὶ τοῦ E ὀρίζεται μία δυαδικὴ σχέσις, ὅταν δοθῇ ἓνα ὑποσύνολον τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $E \times E$.

β') Οἱ τέσσαρες χαρακτῆρες (ἢ ιδιότητες) εἰς τὰς δυαδικὰς σχέσεις.— Μία σχ. σὺς Ω λέγεται ἀντανακλαστικὴ ὅταν $a\Omega a$ δηλ. τὸ τυχὸν ζεύγος (a, a) μὲ ἴσα στοιχεῖα, ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν.

Μία σχέσις Ω λέγεται συμμετρικὴ ὅταν $a\Omega b \Rightarrow b\Omega a$ δηλ. ὅταν: τοῦ ζεύγους (a, b) πληροῦντος τὴν σχέσιν καὶ τὸ (b, a) τὴν πληροῖ.

Μία σχέσις Ω λέγεται μεταβατικὴ ὅταν $\{a\Omega b \text{ καὶ } b\Omega \gamma\} \Rightarrow a\Omega \gamma$.

Μία σχέσις λέγεται ἀντισυμμετρικὴ ὅταν ἡ περίπτωσις $\{a\Omega b \text{ καὶ } b\Omega a\}$ ὑφίσταται διὰ ζεύγη (a, b) ἐκ συμπιπτόντων στοιχείων $(a=b)$ καὶ μόνον δι' αὐτά.

Δηλ. ὅταν: $\{a\Omega b \text{ καὶ } b\Omega a\} \Rightarrow a=b$.

(Εἰς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας περιπτώσεις, λέγομεν ἀντιστοίχως ὅτι ἡ Ω ἔχει τὴν ιδιότητα τῆς ἀνακλαστικότητος ἢ τῆς συμμετρίας ἢ τῆς μεταβατικότητος ἢ τῆς ἀντισυμμετρίας).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. Ἐστω (Π) τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἄν λάβωμεν ἓνα σταθερὸν σημεῖον O τοῦ (Π) τότε εἰς κάθε διατεταγμένον ζεύγος (A, B) σημείων τοῦ (Π) δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν ἂν τὸ πρῶτον σημεῖον A ἀπέχη τοῦ O περισσότερον παρὰ τὸ δεύτερον B , ἢ ὄχι. Ἡ ιδιότης αὕτη εἶναι μιᾶς δυαδικῆς σχέσεως. Ἄν $OA > OB$ ἡ σχέσις Ω πληροῦται, ἂν $OA \leq OB$ ἡ Ω δὲν πληροῦται.

Ἡ δυαδικὴ σχέσις ἡ ὁρισθεῖσα εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δὲν εἶναι ἀντανακλαστικὴ, διότι τὸ ζεύγος (A, A) δὲν τὴν ἱκανοποιεῖ. Ἐπίσης, δὲν εἶναι συμμετρικὴ, διότι ἂν τὸ ζεύγος (A, B) τὴν ἱκανοποιεῖ, τὸ (B, A) δὲν τὴν ἱκανοποιεῖ. Εἶναι ὅμως μεταβατικὴ, διότι ἂν τὸ A ἀπέχη τοῦ O περισσότερον τοῦ B καὶ τὸ B περισσότερον τοῦ Γ , τότε τὸ A ἀπέχει περισσότερον τοῦ Γ , δηλ. $A\Omega B$ καὶ $B\Omega \Gamma \Rightarrow A\Omega \Gamma$. Τέλος, δὲν εἶναι ἀντισυμμετρικὴ, διότι δὲν ὑπάρχει καθόλου ἡ περίπτωσις $A\Omega B$ καὶ συγχρόνως $B\Omega A$.

2. Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύνολον (Π) , δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὴν ἐξῆς δυαδικὴν σχέσιν: τὸ A καὶ τὸ B κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας OX , ἀπὸ τοῦ O ἀρχομένης.

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀντανακλαστικὴ, διότι πληροῦται ἀπὸ ἓνα ζεύγος συμπιπτόντων σημείων (A, A) . Δὲν εἶναι μεταβατικὴ, διότι ἂν A καὶ B κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας OX , καὶ τὰ B καὶ Γ ἐπίσης, τότε τὰ A καὶ Γ κεῖνται μὲν ἐπὶ αὐτῆς ἡμιευθείας, ἀπὸ τοῦ O , ἀλλὰ ὅχι ἀνάγκη κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμιευ-

θείας διότι δυνατόν τὸ B νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ O . Εἶναι συμμετρική, διότι ἂν τὸ ζεύγος (A, B) τῶν σημείων τὴν ἱκανοποιεῖ, τότε καὶ τὸ (B, A) τὴν ἱκανοποιεῖ ἐπίσης. (Φυσικά, ἀφοῦ εἶναι συμμετρική, δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική).

3. Ἐστω Φ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ (α, β) τυχὸν διατεταγμένον ζεύγος στοιχείων τοῦ Φ . Δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν ἂν ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης τοῦ δευτέρου ἢ ὄχι. Ἐπομένως: «ὁ α διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν β » εἶναι μία δυαδική σχέσις ἐπὶ τοῦ συνόλου Φ .

Ἡ δυαδικὴ αὕτῃ σχέσις εἶναι ἀντανεκλαστική, διότι ὁ α διαιρεῖ τὸν α . Δὲν εἶναι συμμετρική. Εἶναι μεταβατική διότι ἂν $\alpha|\beta$ καὶ $\beta|\gamma \Rightarrow \alpha|\gamma$. Εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι: $\{\alpha$ διαιρῇ τὸν β καὶ β διαιρῇ τὸν $\alpha\}$ συμβαίνει μόνον ὅταν $\alpha=\beta$.

Παρατήρησις. Ἡ δυαδικὴ σχέσις μεταξὺ δύο στοιχείων α καὶ β ἐνὸς συνόλου E δὲν εἶναι ἐν γένει, συνάρτησις. Διότι ἡ συνάρτησις $\beta=f(\alpha)$, ὀρίζει τὸ β μονοσημάντως, ὅταν δοθῇ τὸ α , ἐνῶ ἡ δυαδικὴ σχέσις μεταξὺ α καὶ β δὲν ὀρίζει ἐν γένει τὸ β ὅταν δοθῇ τὸ α (π.χ. ἂν $\alpha<\beta$, τὸ β δὲν ὀρίζεται ὅταν δοθῇ τὸ α ἢ ἂν « α , διαιρῇ τὸ β » τὸ β δὲν ὀρίζεται μονοσημάντως ὅταν δοθῇ τὸ α).

Ἀντιστρόφως, ἡ συνάρτησις $\beta=f(\alpha)$ δὲν εἶναι πάντοτε δυαδικὴ σχέσις, διότι δυνατόν τὰ α καὶ β ν' ἀνήκουν εἰς διάφορα σύνολα E καὶ F (βλέπε § 125), ἐνῶ δυαδικὴ σχέσις ὑπάρχει μόνον ὅταν τὰ α καὶ β ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον.

§ 201. Σχέσις τάξεως. α') Μία δυαδικὴ σχέσις Ω , ὀρισθεῖσα ἐπὶ ἐνὸς συνόλου E λέγεται σχέσις τάξεως ἐπὶ τοῦ E ὅταν εἶναι ἀντανεκλαστική, μεταβατικὴ καὶ ἀντισυμμετρικὴ ἤτοι ἂν ἔχῃ τὰς τρεῖς ιδιότητας 1^{ον} $\alpha\Omega\alpha$ (ἀντανεκλαστικότης), 2^{ον} $\alpha\Omega\beta$ καὶ $\beta\Omega\gamma \Rightarrow \alpha\Omega\gamma$ (μεταβατικότης), 3^{ον} $\alpha\Omega\beta$ καὶ $\beta\Omega\alpha \Rightarrow \alpha=\beta$ (ἀντισυμμετρία) (βλ. § 200, β').

Λέγομεν τότε ὅτι ἡ σχέσις Ω διατάσσει τὸ σύνολον E ἢ ὅτι τὸ E εἶναι *σύνολον διατεταγμένον ὑπὸ τῆς Ω* .

Εἰς τὸ σύνολον Φ ἡ σχέσις: α διαιρεῖ τὸν β εἶναι μιὰ σχέσις τάξεως ἐπὶ τοῦ Φ (βλ. § 200, παρ./γμα 3^{ον}).

β') **Σχέσις ὀλικῆς τάξεως.** Γενικῶς, μιὰ σχέσις τάξεως ἐπὶ ἐνὸς συνόλου, δὲν ἐπιτρέπει πάντοτε νὰ διατάξωμεν *ὅλα* τὰ ζεύγη. Ἐὰν ὅμως, ἡ σχέσις τάξεως Ω εἶναι *τοιαύτη* ὥστε διὰ κάθε ζεύγος (α, β) νὰ ἰσχύῃ: ἢ $\alpha\Omega\beta$ ἢ $\beta\Omega\alpha$, ἡ σχέσις Ω λέγεται *σχέσις ὀλικῆς τάξεως* καὶ τὸ σύνολον E *ὀλικῶς διατεταγμένον ὑπὸ τῆς δυαδικῆς σχέσεως Ω* .

Οὕτω π.χ. τὸ σύνολον Φ (τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν), ἐφωδιασμένον διὰ τῆς σχέσεως $\leq$, εἶναι ὀλικῶς διατεταγμένον. Πράγματι ἂν $\alpha \in \Phi$ καὶ $\beta \in \Phi$ θὰ ἔχωμεν:

ἢ $\alpha \leq \beta$ ἢ $\beta \leq \alpha$ καὶ ἀκόμη

$\alpha \leq \alpha$ (ἡ σχέσις $\leq$ εἶναι ἀντανανκλαστική)

$\{\alpha \leq \beta \text{ καὶ } \beta \leq \gamma\} \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ (ἡ σχέσις $\leq$ εἶναι μεταβατική)

$\{\alpha \leq \beta \text{ καὶ } \beta \leq \alpha\} \Rightarrow \alpha = \beta$ (ἡ σχέσις $\leq$ εἶναι ἀντισυμμετρική).

Τουναντίον ἡ σχέσις $\alpha|\beta$ ἢ ὅποια ὡς εἶδομεν εἰς τὸ ἐδάφ. α' εἶναι σχέσις τάξεως ἐπὶ τοῦ Φ , δὲν εἶναι σχέσις ὀλικῆς τάξεως διότι διὰ τυχόν ζεύγος (α, β) δὲν ἰσχύει ὅτι: ἢ $\alpha|\beta$ ἢ $\beta|\alpha$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ σχέσις Ω εἶναι σχέσις ὀλικῆς τάξεως, χρησιμοποιεῖται πολλάκις ἀντὶ τοῦ Ω τὸ σύμβολον $\prec$ ἥτοι ἀντὶ $\alpha\Omega\beta$ γράφομεν $\alpha \prec \beta$ (ἀναγιγνώσκεται: «τὸ α προηγείται τοῦ β »).

§ 202. Σχέσεις ἰσοδυναμίας. α') Μία δυαδικὴ σχέσις Ω ὀρισθεῖσα ἐπὶ συνόλου E , λέγεται σχέσις ἰσοδυναμίας ἐπὶ τοῦ E , ὅταν εἶναι ἀντανανκλαστική, μεταβατικὴ καὶ συμμετρικὴ (βλ. 200, β').

Γενικῶς, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα $\alpha \in E$ καὶ $\beta \in E$ συνδέονται διὰ μιᾶς σχέσεως ἰσοδυναμίας Ω , γράφομεν $\alpha \sim \beta$ (α ἰσοδύναμον πρὸς τὸ β) ἀντὶ $\alpha\Omega\beta$. Τὰ δὲ στοιχεῖα α καὶ β λέγονται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἰσοδύναμα.

Αἱ τρεῖς ιδιότητες τῆς ἰσοδυναμίας γράφονται κατὰ ταῦτα:

ἀντανανκλαστικότης $\alpha \sim \alpha$

μεταβατικότης $\alpha \sim \beta \text{ καὶ } \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

συμμετρία $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1. Ἐπὶ τοῦ συνόλου D ὅλων τῶν εὐθειῶν ἐνὸς ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ὡς σχέσιν ἰσοδυναμίας δύο στοιχείων α καὶ β τοῦ D (δηλ. δύο εὐθειῶν), τὴν παράλληλιν. Ἦτοι « $\alpha \sim \beta$ ὅταν αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι ($\alpha//\beta$)». Πράγματι, ἡ σχέσις τῆς παραλληλίας εἶναι ἀντανανκλαστικὴ (πᾶσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτὸν της), εἶναι μεταβατικὴ ($\alpha//\beta$ καὶ $\beta//\gamma \Rightarrow \alpha//\gamma$) καὶ προφανῶς, συμμετρικὴ.

Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ D αἱ παράλληλοι πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν d , ἀποτελοῦν μίαν «κλάσιν ἰσοδυναμίας». Εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν d ἀπὸ ἀπόψεως διευθύνσεως. Κάθε μία ἐκ τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι ἓνας «ἀντιπρόσωπος» τῆς κοινῆς διευθύνσεως, καὶ καθορίζει αὐτὴν καθὼς καὶ ὅλην τὴν κλάσιν τῶν παραλλήλων.

2. Ἐπὶ τοῦ συνόλου P τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας, δηλ. τῶν κλασμάτων $\frac{\mu}{\nu}$ ὅπου μ, ν ἀκέραιοι καὶ $\nu \neq 0$ ὀρίζεται ἡ ἐξῆς σχέσις ἰσο-

δυναμίας: δύο κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu'}{\nu'}$ εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν πληροῦται ἡ ἰσότης $\mu\nu' = \mu'\nu$. Ἦτοι « $\frac{\mu}{\nu} \sim \frac{\mu'}{\nu'}$ ὅταν $\mu\nu' = \mu'\nu$ ». Πράγματι, ἡ σχέσις αὕτη

είναι άνταντακλαστική $\left(\frac{\mu}{\nu} \sim \frac{\mu}{\nu} \text{ διότι είναι } \mu\nu = \mu\nu\right)$, είναι μεταβατική $\left(\frac{\mu}{\nu} \sim \frac{\mu'}{\nu'} \text{ και } \frac{\mu'}{\nu'} \sim \frac{\mu''}{\nu''} \Rightarrow \mu\nu' = \nu\mu' \text{ και } \mu'\nu'' = \mu''\nu' \Rightarrow (\mu\nu') \cdot (\mu'\nu'') = (\nu\mu') \cdot (\mu''\nu') \Rightarrow \mu\nu'\mu'\nu'' = \nu\mu'\mu''\nu' \Rightarrow \mu\nu'' = \nu\mu'' \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \sim \frac{\mu''}{\nu''}\right)$ και συμμετρική, προφανώς. Έπουνένως είναι, πράγματι, σχέσις ισοδυναμίας.

Όλα τὰ κλάσματα τὰ ισοδύναμα πρὸς ἓνα δοθὲν ἀποτελοῦν μίαν «κλάσιν ισοδυναμίας» ἡ ὁποία καθορίζει ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν σύμμετρον ἀριθμόν. Οἰονόηποτε τῶν ισοδυνάμων κλασμάτων εἶναι ἓνας ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως καὶ καθορίζει αὐτήν. Ἐν τῇ πράξει τὸ σύμβολον $\sim$ ἀντικαθίσταται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μὲ τὸ σύμβολον $=$.

3. Ἐπὶ τοῦ συνόλου A_k τῶν ἀλγεβρικῶν ἀκεραίων ὁρίζεται ἡ δυαδικὴ σχέσις τῆς ἀριθμητικῆς ισοδυναμίας modulo μ : δύο ἀκεραίοι α, β εἶναι ισοδύναμοι, modulo μ ($\alpha \equiv \beta \pmod{\mu}$) ὅταν $\alpha - \beta = \text{πολ. } \mu$. (βλ. § 93). Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀνταντακλαστική:

$$\alpha \equiv \alpha \pmod{\mu} \quad (\text{διότι } \alpha - \alpha = 0 = \text{πολ. } \mu).$$

Εἶναι μεταβατικὴ:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \text{ καὶ } \beta \equiv \gamma \pmod{\mu} \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \pmod{\mu}.$$

Εἶναι συμμετρικὴ:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu} \Rightarrow \beta \equiv \alpha \pmod{\mu}.$$

Ἄρα εἶναι μία σχέσις ισοδυναμίας ἡ ὁποία καλεῖται «ἀριθμητικὴ ισοδυναμία».

Ἐνταῦθα, ὅλοι οἱ ἀκεραίοι, οἱ ισοδύναμοι modulo μ πρὸς ἓνα δοθέντα ἀκέραιον α , ἀποτελοῦν μίαν «κλάσιν ισοδυναμίας».

β') Κλάσις, ισοδυναμίας. Ἐστω E τὸ σύνολον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει ὁρισθῇ μία σχέσις Ω ισοδυναμίας. Θεωροῦμεν ἓνα στοιχεῖον $\alpha \in E$ καὶ καλοῦμεν κλάσιν ισοδυναμίας τοῦ α , τὸ ὑποσύνολον τοῦ E τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ E τὰ ισοδύναμα πρὸς τὸ α (δὴλ. τὰ εὐρισκόμενα ἐν τῇ σχέσει Ω , μὲ τὸ α).

Μία κλάσις ισοδυναμίας καθορίζεται ἀπὸ ἓνα ὁποιοῦνδήποτε στοιχεῖον α τῆς κλάσεως αὐτῆς, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κληθῇ ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα 1, 2 καὶ 3, διαφωτίζουν τὴν ἔννοιαν τῆς κλάσεως ισοδυναμίας.

γ') Σύνολον — πηλίκον. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν κλάσεων ισοδυναμίας (σύνολον συνόλων) αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται διὰ τῆς σχέσεως ισοδυναμίας Ω , καλεῖται σύνολον — πηλίκον, τοῦ E διὰ τῆς σχέσεως Ω .

Τοῦτο σημειοῦται: $\frac{E}{\sim}$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 4. Ἐάν E εἶναι τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἐνὸς ἐπιπέδου (Π) καὶ Ω ἡ σχέσις τῆς παραλληλίας, τὸ σύνολον—πηλίκον $\frac{E}{\Omega}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν διευθύνσεων αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ (Π) .

Μία δέσμη εὐθειῶν τοῦ (Π) περιέχει τοὺς ἀντιπροσώπους ὅλων τῶν κλάσεων τούτων ἰσοδυναμίας.

5. Ἐάν A_k εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σχέσις ἰσοδυναμίας Ω ληφθῇ ἡ ἐξῆς: $a\Omega b$ ὅταν $a-b$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ($a \in A_k$, $b \in A_k$) τότε δύο κλάσεις ἰσοδυναμίας δημιουργοῦνται ἐπὶ τοῦ Z : Ἡ κλάσις $\dots -3, -1, +1, +3, \dots$ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντες ἰσοδύναμοι πρὸς τὸν $+1$ βάσει τῆς συμφωνηθείσης σχέσεως ἰσοδυναμίας Ω καὶ ἡ κλάσις $\dots -4, -2, 0, +2, +4, \dots$ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντες ἰσοδύναμοι μὲ τὸ 0. Ἐπομένως τὸ σύνολον—πηλίκον $\frac{A_k}{\Omega}$ ἔχει δύο στοιχεῖα: τὴν κλάσιν τῶν περιττῶν ἀκεραίων καὶ τὴν κλάσιν τῶν ἀρτίων ἀκεραίων. Αἱ δύο αὗται κλάσεις ἀντιπροσωπεύονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 0.

6. Ἐάν P τὸ σύνολον τῶν συμμετρῶν καὶ ὡς σχέσις ἰσοδυναμίας Ω δύο συμμετρῶν μ/ν καὶ μ'/ν' ληφθῇ: $\mu/\nu = \mu'/\nu'$ (βλ. ἀνωτέρω, παρ/γμα 2), τότε τὸ σύνολον—πηλίκον $\frac{P}{\Omega}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἀντιπρόσωπον ἓνα ἀνάγωγον κλάσμα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

A-819. Ἡ δυαδικὴ σχέσις: «τὸ ζεύγος (α, β) , ὅπου $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi$, ἔχει $M\kappa\Delta=1$ », ποίας ἐκ τῶν τεσσάρων ιδιοτήτων (ἡ χαρακτῆρων) (§ 200 β') ἔχει; (Φ , τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν).

A-820. Ἡ δυαδικὴ σχέσις: «τὸ διατεταγμένον ζεύγος (x, y) ὅπου $x \in \Pi$, $y \in \Pi$ πληροῖ τὴν ἰσότητα $3x+5y+11=0$ », ποίας ἐκ τῶν τεσσάρων ιδιοτήτων ἔχει;

A-821. Ἡ δυαδικὴ σχέσις: «ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν β , ὅπου α, β , στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν ἐνὸς ἐπιπέδου», ποίας ἐκ τῶν τεσσάρων ιδιοτήτων ἔχει;

A-822. Ἐστω $A \subseteq E$, $\alpha \in E$, $\beta \in E$. Ἡ δυαδικὴ σχέσις: «ἀμφότερα τὰ στοιχεῖα τοῦ ζεύγους (α, β) ἀνήκουν εἰς τὸ A », ποίας ἐκ τῶν τεσσάρων ιδιοτήτων (§ 200 β') ἔχει;

A-823. Ἐπὶ τοῦ συνόλου E τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν μίαν σχέσιν ἰσοδυναμίας; (βλ. § 202).

A-824. Ἐάν ὡς στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου E θεωρηθοῦν ὅλα τὰ ὑποσύνολα ἐνὸς συνόλου X , τότε ἡ σχέσις ἡ ὁποία σημειοῦται μὲ $\subseteq$ εἶναι διὰ τὸ E σχέσις τάξεως; (βλ. § 202). Εἶναι σχέσις ὀλικῆς τάξεως;

B-825. Ἐστω τὸ σύνολον $\Phi \times \Phi = \Phi^2$. Δύο στοιχεῖα τοῦ Φ^2 , ἔστω τὰ (α, β) καὶ (α', β') συνδέονται διὰ τῆς δυαδικῆς σχέσεως σ : $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$. Δείξατε ὅτι ἡ σ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 202). Ὅρίσατε τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας ἡ ὁποία ἔχει ἀντιπρόσωπον τὸ στοιχεῖον $(2, 1)$ ἢ τὸ στοιχεῖον $(5, 5)$ ἢ τὸ $(0, 1)$.

B-826. Ἐστω δ μία εὐθεία καὶ ω ἓν σημεῖον αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\delta-\omega$. Δύο σημεῖα $A \in (\delta-\omega)$ καὶ $B \in (\delta-\omega)$ πληροῦν τὴν σχέσιν σ ὅταν $AB \cap \omega = \emptyset$. Δείξατε ὅτι ἡ σ εἶναι μία σχέσις ἰσοδυναμίας ἐπὶ τοῦ συνόλου $\delta-\omega$. Πόσαι κλάσεις ἰσοδυναμίας ὑπάρχουν; (§ 202). (Τὸ AB παριστᾷ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα (σημειοσύνολον) τὸ ἔχον ἄκρα τὰ δύο σημεῖα A καὶ B).

B-827. Ἐστω ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεία δ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\Pi-\delta$. Δύο σημεῖα $A \in (\Pi-\delta)$ καὶ $B \in (\Pi-\delta)$ πληροῦν τὴν σχέσιν σ ὅταν $AB \cap \delta = \emptyset$. Δείξατε ὅτι ἡ σ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Πόσαι κλάσεις ἰσοδυναμίας ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ $\Pi-\delta$;

B-828. Δείξατε ὅτι δύο τυχοῦσαι κλάσεις ἰσοδυναμίας (§ 202, β') (μὴ συμπίπτουσαι εἰς μίαν), εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ των.

B-829. Ἐστω Z τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων. Δύο στοιχεῖα α καὶ β τοῦ Z πληροῦν τὴν σχέσιν σ ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι διαιρετὴ ἀκριβῶς διὰ 3. Δείξατε ὅτι ἡ σ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Πόσαι κλάσεις ἰσοδυναμίας ὑπάρχουν;

B-830. Εἰς τὸ σύνολον E τῶν ἀναγώγων κλασμάτων μεταξύ 0 καὶ 1 ὀρίζομεν τὴν δυαδικὴν σχέσιν «προηγείται τοῦ» τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ $\prec$ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\alpha}{\beta} \prec \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ ἂν εἶναι } \alpha + \beta < \alpha' + \beta' \text{ ἢ ἂν } \begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \\ \alpha \leq \alpha' \end{cases}$$

Μελετήσατε τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀπὸ ἀπόψεως ἀντανακλαστικότητος, συμμετρίας καὶ μεταβατικότητος. Τί συνάγετε διὰ τὴν σχέσιν $\prec$;

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ (Ἡ ΠΡΑΞΕΙΣ) ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΥΝΟΛΟΥ

§ 203. Ἐσωτερικὸς νόμος ἐντὸς συνόλου. Μία *πρᾶξις καθ'* ἣν εἰς κάθε διατεταγμένον ζεύγος στοιχείων (α, β) ἐνὸς συνόλου E , ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως βάσει μιᾶς ὠρισμένης διαδικασίας, ἓνα τρίτον στοιχεῖον γ ἀνήκον ἐπίσης εἰς τὸ E , λέγεται *ἔσωτερικὸς νόμος εἰς τὸ E* (ἢ ἐπὶ τὸ ἀπλούστερον, «πρᾶξις» ἐντὸς τοῦ E). Τὸ στοιχεῖον γ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως. Ἐὰν ἡ πρᾶξις σημειοῦται μὲ $*$ τότε γράφομεν $\alpha * \beta = \gamma$. (Ἐννοεῖται ὅτι τὰ α καὶ β δυνατόν νὰ συμπίπτουν). Λέγομεν ἀκόμη ὅτι τὸ E εἶναι *κλειστόν* ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\forall \alpha \in E, \forall \beta \in E, \alpha * \beta = \gamma \in E.$$

Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἔχομεν π.χ. τὴν πρᾶξιν «πρόσθεσις» καθ' ἣν εἰς τὸ τυχὸν ζεύγος (α, β) δύο ἀκεραίων ἀντιστοιχεῖ ἓνας τρίτος ἀκέραιος ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β , ἢ τὴν πρᾶξιν «πολλαπλασιασμός» καθ' ἣν εἰς τὸ ζεύγος (α, β) ἀντιστοιχεῖ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ β . Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ χώρου ἔχομεν τὴν πρᾶξιν: «πρόσθεσις δύο διανυσμάτων» καθ' ἣν δοθέντων δύο

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἐλευθέρων διανυσμάτων α καὶ β ἀντιστοιχεῖ καθ' ὅρισμένον τρόπον ἓνα τρίτον ἐλεύθερον διάνυσμα γ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ «γεωμετρικὸν ἄθροισμα» τοῦ α καὶ β .

Ἐπειδὴ κάθε διατεταγμένον ζεύγος (α, β) ἐκ στοιχείων τοῦ E ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον $E \times E$ (§ 8) καὶ ἐπειδὴ εἰς κάθε ἐσωτερικὴν πράξιν, τὸ (α, β) ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἓνα στοιχεῖον γ τοῦ E δυνάμεθα νὰ εἴπομεν:

“*Ἐνας ἐσωτερικὸς νόμος (πρᾶξις) ἐντὸς ἐνὸς συνόλου E εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ $E \times E$ εἰς τὸ E (§ 128).*”

§ 204. Ἰδιότητες τῶν ἐσωτερικῶν νόμων (ἢ πράξεων).

i) Ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ἐὰν

$$\forall \alpha, \forall \beta, \alpha * \beta = \beta * \alpha.$$

ii) Ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι προσεταιριστικὴ ἐὰν

$$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma, (\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma).$$

iii) Ἡ πρᾶξις ἢ σημειουμένη μὲ $\circ$ εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τὴν σημειουμένην μὲ $*$ ὅταν

$$\alpha \circ (\beta * \gamma) = (\alpha \circ \beta) * (\alpha \circ \gamma) \quad \text{καὶ} \quad (\beta * \gamma) \circ \alpha = (\beta \circ \alpha) * (\gamma \circ \alpha).$$

iv) Ἐὰν ὑπάρχῃ ἓνα στοιχεῖον $e \in E$ τέτοιο ὥστε

$$\forall \alpha, \alpha * e = e * \alpha = \alpha$$

τότε τὸ e λέγεται οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πρᾶξιν $*$.

Ἐὰν ὑπάρχῃ οὐδέτερον στοιχεῖον e , τοῦτο εἶναι μοναδικόν. Διότι ἂν ὑπῆρχε καὶ ἓνα ἄλλο, e' θὰ ἔχωμεν $\alpha * e' = e' * \alpha = \alpha$ ἀλλὰ καὶ $\alpha * e = \alpha$, $\forall \alpha \in E$. Θέτοντες εἰς μὲν τὴν ἰσότητα $e' * \alpha = \alpha$ ὅπου α τὸ e εἰς δὲ τὴν $\alpha * e = \alpha$ ὅπου α τὸ e' λαμβάνομεν $e' * e = e$ καὶ $e' * e = e'$, ἄρα $e = e'$. Οὕτω π.χ. τὸ 0 εἶναι τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸ 1 εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

v) Τὸ συμμετρικὸν ἐνὸς στοιχείου. Ἐὰν e εἶναι τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς μίαν πρᾶξιν $*$ ὀνομάζομεν *συμμετρικὸν* τοῦ α , ἓνα στοιχεῖον α' τέτοιο ὥστε

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e.$$

Π.χ. εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ συμμετρικὸν τοῦ α εἶναι διὰ μὲν τὴν πρόσθεσιν, ὁ ἀριθμὸς $-\alpha$ διὰ δὲ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὁ ἀριθμὸς $1/\alpha$.

vi) Ἐνα στοιχεῖον α λέγεται *κανονικὸν διὰ μίαν πρᾶξιν $*$* ὅταν οἰαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ στοιχεῖα x καὶ y τοῦ E ἐκάστη τῶν ἰσοτήτων $\alpha * x = x$ καὶ $y * \alpha = y$ ἰσχύει. Ἐὰν ἓνα στοιχεῖον α εἶναι κανονικὸν διὰ μίαν πρᾶξιν $*$, τότε καὶ ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι κανονικὸς διὰ τὴν πρᾶξιν $*$.

Λέγομεν τότε ὅτι δυνάμεθα «ν' ἀπλοποιήσωμεν» διὰ α ἢ ὅτι ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς ἰσχύει διὰ τὸ α .

Π.χ. διὰ τὴν πρόσθεσιν, κάθε ἀριθμὸς εἶναι κανονικός. Διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, κάθε ἀριθμὸς εἶναι κανονικός, ἐκτὸς τοῦ 0 διότι ἡ ἰσότης $0 \cdot x = 0 \cdot y$ δὲν συνεπάγεται $x = y$. (Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς δὲν ἰσχύει διὰ τὸν παράγοντα μηδέν). Ἄλλο παράδειγμα: ὡς ὀρίσωμεν ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὴν πρᾶξιν $x * y = x^y$. Τότε, κάθε στοιχεῖον $\neq 1$ εἶναι κανονικὸν διὰ τὴν πρᾶξιν αὐτήν. Διότι ἡ ἰσότης $\alpha * x = \alpha * y$ δηλ. $\alpha^x = \alpha^y \Rightarrow x = y$ ἐφ' ὅσον $\alpha \neq 1$ καὶ ἡ $x * \alpha = y * \alpha$ δηλ. $x^a = y^a \Rightarrow x = y$. Τουναντίον, τὸ 1 δὲν εἶναι κανονικὸν διότι ἡ $1 * x = 1 * y$ δηλ. $1^x = 1^y$ δὲν συνεπάγεται $x = y$.

Παραδείγματα ἐσωτερικῶν νόμων δίδονται εἰς τὰς § 206, 207.

§ 205. Ἴσομορφισμός. Ἐστωσαν δύο σύνολα E καὶ F διάφορα ἢ ταυτιζόμενα, ἐφοδιασμένα τὸ μὲν E μὲ ἓνα ἐσωτερικὸν νόμον $*$ τὸ δὲ F μὲ ἄλλον ἐσωτερικὸν νόμον $\circ$. Καλεῖται **ἰσομορφισμός** τοῦ E ἐπὶ τοῦ F μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E ἐπὶ τοῦ F (βλ. § 123) καθ' ἣν

$$\begin{cases} \alpha \in E \rightarrow \alpha' \in F \\ \beta \in E \rightarrow \beta' \in F \end{cases} \Rightarrow \alpha * \beta \rightarrow \alpha' \circ \beta'.$$

Δηλαδή τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $*$ εἰς τὰ ἀρχέτυπα α, β ἔχει ὡς εἰκόνα, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $\circ$ εἰς τὰς εἰκόνας α', β' .

Εἰς τὸν ἰσομορφισμόν, τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως $*$ (ἂν ὑπάρχῃ τοιοῦτον) ἔχει ὡς εἰκόνα, τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως $\circ$. Διότι, ἂν e τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$ καὶ e' ἡ εἰκὼν τοῦ e εἶναι $\forall \alpha \in E$:

$$\begin{cases} e * \alpha \rightarrow e' \circ \alpha' \\ e * \alpha = \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \rightarrow e' \circ \alpha' \text{ καὶ ἐπειδὴ } \alpha \rightarrow \alpha'$$

ἔπεται $e' \circ \alpha' = \alpha'$. Ἐντελῶς ὁμοίως εὐρίσκομεν, $\alpha' \circ e' = \alpha'$.

Ὡστε τὸ e' εἶναι τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν πρᾶξιν $\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὡς E ὡς λάβωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς F τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς 2^n ὅπου n ἀκεραῖος τῆς Ἀλγέβρας. Ὡς πρᾶξιν $*$ ὡς λάβωμεν τὴν πρόσθεσιν (εἰς τὸ E) καὶ ὡς πρᾶξιν $\circ$ ὡς λάβωμεν τὸν πολλαπλασμόν (εἰς τὸ F).

Ἡ ἀπεικόνισις: $v \rightarrow 2^v$ εἶναι ἓνας ἰσομορφισμός τοῦ E ἐπὶ τοῦ F διότι εἰς τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων v, v' τοῦ E ἀντιστοιχεῖ τὸ γινόμενον τῶν εἰκόνων τῶν:

$$v + v' \rightarrow 2^{v+v'} \quad \text{ἢ} \quad v + v' \rightarrow 2^v \cdot 2^{v'}$$

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

§ 206. Όμάδες. Ένα σύνολον, όχι κενόν, εφοδιασμένον με μίαν ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΝ ΠΡΑΞΙΝ συμβολιζομένην π.χ. με * λέγεται **όμάς**, όταν ή πράξις * εΐναι ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ έχουσα ΟΥΔΕΤΕΡΟΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ και όταν κάθε στοιχείον του συνόλου, έχει ένα ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΝ. (βλ. § 204).

Δηλαδή ένα σύνολον Ε εΐναι **όμάς** ως πρὸς τὴν πράξιν * όταν

- I. $x \in E, \quad y \in E \Rightarrow x * y \in E$ (κλειστότης)
 II. $\forall x, \forall y, \forall z \quad (x * y) * z = x * (y * z)$ (προσεταιριστικότητα)
 III. $\exists e : \forall x \quad e * x = x * e = x$ (οὐδέτερον στοιχείον)
 IV. $\forall x, \exists x' \quad x' * x = x * x' = e$ (ὑπαρξίς συμμετρικοῦ)

(Αξιιώματα τῆς ομάδος). Λέγομεν **ἀκόμη** ὅτι τὸ Ε ἔχει **δομὴν** **όμάδος** ως πρὸς τὴν πράξιν *.

Ἐὰν ἐπὶ πλέον, ἡ πράξις * εΐναι **ἀντιμεταθετική**, ἡ **όμάς** λέγεται **ἀντιμεταθετική** ἢ **Ἀβελιανή**. (Ἡ Ἀβελιανὴ **όμάς** ἀπαιτεῖ 5 ἀξιιώματα).

Εἰς τὰς Ἀβελιανὰς ομάδας, ἡ πράξις * συμβολίζεται κατὰ τὸ πλεῖστον, ἢ με τὸ + ὁπότε λέγεται «πρόσθεσις» καθ' οἷονδῆποτε τρόπον καὶ ἂν ὀρισθῇ, ἡ δὲ **όμάς** λέγεται τότε **προσθετική Ἀβελιανή** **όμάς** ἢ ἡ πράξις * συμβολίζεται με $\times$ ἢ $\cdot$ καὶ λέγεται «πολλαπλασιασμός», ὡπωσδήποτε καὶ ἂν ἔχη ὀρισθῇ, ὁπότε ἡ **όμάς** λέγεται **πολλαπλασιαστική**. Μία **όμάς** δύναται νὰ εΐναι πεπερασμένης τάξεως ν, ἂν ἔχει πεπερασμένον πλῆθος ν, στοιχείων ἢ ἀπείρου τάξεως ἂν ἔχει ἄπειρον πλῆθος στοιχείων.

Υποομάς. Ένα μέρος μιᾶς ομάδος, τὸ ὁποῖον εΐναι καὶ αὐτὸ **όμάς** ως πρὸς τὴν ἰδίαν ἐσωτερικὴν πράξιν, λέγεται **ὑποομάς**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. Τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων κα ἐνὸς δεδομένου ἀκεραίου α (ὅπου $k \in A_k$), με ἐσωτερικὴν πράξιν τὴν συνήθη πρόσθεσιν, ἀποτελεῖ Ἀβελιανὴν **όμάδα**. Εὐκόλα βλέπομεν ὅτι τὰ ἀξιιώματα I ἕως IV πληροῦνται, τὸ δὲ $e=0$.

2. Ἡ πράξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθιστᾷ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν συμμέτρων, Ἀβελιανὴν (ἢ ἀντιμεταθετικὴν) **όμάδα**. Οὐδέτερον στοιχείον εἶναι τὸ 1 καὶ συμμετρικὸν τοῦ σ, τὸ $1/\sigma$.

3. Εἰς τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἄς ὀρίσωμεν τὴν πράξιν * (ἀστερίσκος) διὰ τῆς ἰσότητος

$$a * \beta = a + \beta + a\beta$$

καὶ ἄς ἐξετάσωμεν κατὰ πόσον τὸ Π εφοδιασμένον διὰ τῆς πράξεως ταύτης

ἔχει δομὴν ομάδος. Πρὸς τοῦτο ὡς ἐξετάσωμεν κατὰ πόσον πληροῦνται τὰ 4 ἀξιώματα τῆς ομάδος.

I. **Κλειστότης** ὡς πρὸς τὴν *πρᾶξιν* *. ("Ἄν δηλ. τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶναι πάντοτε στοιχεῖον τοῦ ἰδίου συνόλου). Ἐχομεν

$$\alpha \in \Pi, \beta \in \Pi \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha\beta \in \Pi \text{ δηλ. } \alpha * \beta \in \Pi.$$

"Ὡστε ἡ ὁρισθεῖσα πρᾶξις εἰναι μιὰ ἐσωτερικὴ πρᾶξις διὰ τὸ Π. Ἡ ὅπως λέγομεν, τὸ Π εἶναι κλειστόν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν *.

II. **Προσεταιριστικότης**. Δι' οἷαδήποτε στοιχεῖα α, β, γ τοῦ Π θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta) * \gamma &= (\alpha + \beta + \alpha\beta) * \gamma = \alpha + \beta + \alpha\beta + \gamma + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\gamma = \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma. \\ \alpha * (\beta * \gamma) &= \alpha * (\beta + \gamma + \beta\gamma) = \alpha + \beta + \gamma + \beta\gamma + \alpha(\beta + \gamma + \beta\gamma) = \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Ἐπομένως : $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$. Ἡ προσεταιριστικότης ὑφίσταται.

III. **Οὐδέτερον στοιχεῖον**. Τὸ στοιχεῖον e θὰ εἶναι οὐδέτερον διὰ τὴν πρᾶξιν * ἂν $\forall \alpha \in \Pi : \alpha * e = e * \alpha = \alpha$ ἤτοι ἂν $\forall \alpha : \alpha + e + \alpha e = \alpha$ ἢ $e(\alpha + 1) = 0$. Τοῦτο ἀπαιτεῖ, $e = 0$. Ὡστε ἡ πρᾶξις * ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0.

IV. **"Υπαρξίς τοῦ συμμετρικοῦ**. Τὸ στοιχεῖον $\alpha \in \Pi$ θὰ ἔχη ἓνα συμμετρικόν, ἂν ὑπάρχῃ στοιχεῖον x τέτοιο ὥστε

$$\alpha * x = x * \alpha = e$$

δηλ. : $\alpha + x + \alpha x = x + \alpha + x\alpha = 0$ ἢ $x(1 + \alpha) = -\alpha$.

Ἐὰν $\alpha = -1$, τὸ x δὲν ὑπάρχει. Ἐὰν $\alpha \neq -1$ τότε $x = -\frac{\alpha}{1 + \alpha}$.

Ἐπομένως κάθε στοιχεῖον $\neq -1$ ἔχει ἓνα συμμετρικόν, τὸ $-\alpha/(1 + \alpha)$.

Συμπέρασμα : Τὸ σύνολον Π ἐστερημένον τοῦ ἀριθμοῦ -1 , ἔχει δομὴν ομάδος ὡς πρὸς τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν * ἐπειδὴ δὲ ἐπὶ πλέον, ἡ πρᾶξις * εἶναι (προφανῶς) ἀντιμεταθετική, ἔχει τὴν δομὴν Ἀβελιανῆς ομάδος.

§ 207. Δακτύλιοι. α') *Καλεῖται δακτύλιος μιὰ ὁμὰς Ἀβελιανῆ ἐφοδιασμένη με μίαν δευτέραν ἐσωτερικὴν πρᾶξιν ἢ ὅποια εἶναι ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ καὶ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ὡς ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ.*

Πλέον, δηλαδή, τῶν ἀξιωμάτων τῆς Ἀβελιανῆς ομάδος (I–IV, § 206 καὶ ἀντιμεταθετικότης) ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν δακτύλιον τρία ἐπὶ πλέον ἀξιώματα :

ἡ ὑπαρξίς ἑνὸς δευτέρου ἐσωτερικοῦ νόμου (§ 203),

ἡ προσεταιριστικότης τοῦ δευτέρου αὐτοῦ νόμου (§ 204, ii),

ἡ ἐπιμεριστικότης τοῦ δευτέρου νόμου ὡς πρὸς τὸν πρῶτον (§ 204, iii).

Εἰς τοὺς δακτυλίους, ὁ νόμος τῆς ομάδος (ὁ πρῶτος νόμος) σημειοῦται συνήθως με + καὶ καλεῖται «πρόσθεσις». Ὁ δεύτερος νόμος σημειοῦται με $\times$ ἢ $\cdot$ καὶ καλεῖται «πολλαπλασιασμός». Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πρῶτου νόμου σημειοῦται με 0 (μηδέν).

Ἡ πράξις $\times$ δὲν ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι ἀντιμεταθετική. Ἄν ὅμως εἶναι, τότε ὁ δακτύλιος λέγεται *ἀντιμεταθετικός*.

Ὑποδακτύλιος. Καλεῖται ὑποδακτύλιος κάθε μέρος (ὑποσύνολον) ἐνὸς δακτύλιου Δ τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτό, δακτύλιος ὡς πρὸς τοὺς αὐτοὺς δύο ἐσωτερικοὺς νόμους.

β') Τὸν δακτύλιον δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν λεπτομερῶς ὡς ἑξῆς :

Ἔνα σύνολον Δ ἐκ στοιχείων οἷσδήποτε φύσεως διὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν ὁρισθῇ καθ' ἓνα οἰονδήποτε τρόπον αἱ πράξεις, πρόσθεσις (+) καὶ πολλαπλασιασμός ($\times$ ἢ $\cdot$) λέγεται δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ $\cdot$ ὅταν αἱ πράξεις αὗται ἔχουν καθορισθῇ κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε νὰ πληροῦν τοὺς κάτωθι κανόνας :

$$\text{I. } x \in \Delta, y \in \Delta \Rightarrow x + y \in \Delta$$

$$\text{II. } \forall x, \forall y, \quad x + y = y + x$$

$$\text{III. } \forall x, \forall y, \forall z, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\text{IV. } \forall x \quad x + 0 = 0 + x = x, \quad (\text{ὅπου } 0 \text{ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον})$$

$$\text{V. } \forall x, \exists x' : x + x' = x' + x = 0, \quad (\text{τὸ } x' \text{ λέγεται καὶ ἀντίθετον τοῦ } x \text{ καὶ παρίσταται μὲ τὸ } -x).$$

$$\text{VI. } x \in \Delta, y \in \Delta \Rightarrow x \cdot y \in \Delta$$

$$\text{VII. } \forall x, \forall y, \forall z, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$\text{VIII. } \forall x, \forall y, \forall z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ καὶ } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Τὸ σύνολον A_k τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, εἶναι δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις πρόσθεσις καὶ πολλαπλασιασμός ὁριζομένως ὡς συνήθως. Διότι τὰ ἀξιώματα I ἕως VIII προφανῶς πληροῦνται. Διὰ τοῦτο ὁμιλοῦμεν πολλάκις διὰ τὸν «δακτύλιον τῶν ἀκεραίων».

2. Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀκεραίων εἶναι δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς ὡς ἀνωτέρω πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ δακτύλιος αὐτὸς εἶναι ὑποδακτύλιος τοῦ A_k .

3. Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον E τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) ἐξ ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ἄς ὀρίσωμεν διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ E , τὴν ἰσότητα, τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν ὡς κάτωθι :

$$\text{Ἰσότης} : (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \text{ ὅταν καὶ μόνον, } \alpha = \alpha', \beta = \beta'.$$

$$\text{Ἀθροισμα} : (\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta').$$

$$\text{Γινόμενον} : (\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Ἄς ζητήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν ἂν τὸ E ἔχει δομὴν δακτυλίου ὡς πρὸς τὰς δύο ἀνωτέρω ὁρισθείσας πράξεις + καὶ $\cdot$.

1. **Κλειστότης.** Ἐὰν $\alpha \in A_k, \beta \in A_k, \alpha' \in A_k, \beta' \in A_k \Rightarrow \alpha + \alpha' \in A_k, \beta + \beta' \in A_k, \alpha\alpha' + 2\beta\beta' \in A_k, \alpha\beta' + \alpha'\beta \in A_k$ ἄρα τὸ «ἄθροισμα» καὶ τὸ «γινόμενο» δύο στοιχείων τοῦ E ἀνήκουν πάλιν εἰς τὸ E . Τὸ E εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὰς δύο αὐτὰς πράξεις.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

II. **Ἀντιμεταθετικότητα τῆς πράξεως +.** Ἐὰν $x=(\alpha, \beta)$ καὶ $x'=(\alpha', \beta')$ δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ E ἔχομεν:

$$x+x'=(\alpha+\alpha', \beta+\beta'), \quad x'+x=(\alpha'+\alpha, \beta'+\beta) \quad \text{ἄρα} \quad x+x'=x'+x.$$

Ἡ πρόσθεσις εἶναι ἀντιμεταθετική.

III. **Προσεταιριστικότητα τῆς πράξεως +.** Ἐχομεν:

$$(x+x') \cdot x''=(\alpha+\alpha', \beta+\beta') \cdot (\alpha'', \beta'')=(\alpha+\alpha'+\alpha'', \beta+\beta'+\beta'')$$

$$x+(x'+x'')=(\alpha, \beta)+(\alpha'+\alpha'', \beta'+\beta'')=(\alpha+\alpha'+\alpha'', \beta+\beta'+\beta'') \quad \text{ἤτοι} \\ (x+x') \cdot x''=x+(x'+x''). \quad \text{Ἡ ὀρίσθεισα πρόσθεσις εἶναι προσεταιριστική.}$$

IV. **Οὐδέτερον στοιχεῖον.** Ἴνα τὸ στοιχεῖον $e=(\alpha_0, \beta_0)$ εἶναι οὐδέτερον, ἀρκεῖ (λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικότητος): $(\alpha, \beta)+(\alpha_0, \beta_0)=(\alpha, \beta)$ δι' οἵαδήποτε α, β . Ἦτοι: $\alpha+\alpha_0=\alpha, \beta+\beta_0=\beta \iff \alpha_0=0, \beta_0=0$.

Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $(0,0)$.

V. **Ὑπαρξίς τοῦ συμμετρικοῦ.** Συμμετρικὸν τοῦ στοιχείου (α, β) θὰ εἶναι τὸ στοιχεῖον (α', β') ἐφ' ὅσον $(\alpha, \beta)+(\alpha', \beta')=e=(0,0)$ ἢ $\alpha+\alpha'=0, \beta+\beta'=0$ ἢ ἂν $\alpha'=-\alpha, \beta'=-\beta$. Ὡστε κάθε στοιχεῖον $x=(\alpha, \beta)$ τοῦ E ἔχει ἓνα συμμετρικὸν $x'=(-\alpha, -\beta)$.

Μέχρι τοῦδε διεπιστώθη ὅτι τὸ E εἶναι **Ἀβελιανή** ὁμάς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

VI. **Προσεταιριστικότητα τῆς δευτέρας πράξεως.** Ἐχομεν

$$(x \cdot x') \cdot x''=(\alpha\alpha'+2\beta\beta', \alpha\beta'+\alpha'\beta) \cdot (\alpha'', \beta'')= \\ =(\alpha\alpha'\alpha''+2\beta\beta'\alpha''+2\alpha\beta'\beta''+2\alpha'\beta\beta'', \alpha\alpha'\beta''+2\beta\beta'\beta''+\alpha\beta'\alpha''+\alpha'\beta\beta'') \\ x \cdot (x' \cdot x'')=(\alpha, \beta)(\alpha'\alpha''+2\beta'\beta'', \alpha'\beta''+\alpha'\beta')= \\ =(\alpha\alpha'\alpha''+2\alpha\beta'\beta''+2\beta\alpha'\beta''+2\beta\alpha''\beta', \alpha\alpha'\beta''+\alpha\alpha''\beta'+\beta\alpha'\alpha''+2\beta\beta'\beta'').$$

Ὡστε $(x \cdot x') \cdot x''=x \cdot (x' \cdot x'')$. Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν στοιχείων εἶναι προσεταιριστικός.

VII. **Ἐπιμεριστικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.** Ἐχομεν

$$x \cdot (x'+x'')=(\alpha, \beta) \cdot (\alpha'+\alpha'', \beta'+\beta'')= \\ =(\alpha\alpha'+\alpha\alpha''+2\beta\beta'+2\beta\beta'', \alpha\beta'+\alpha\beta''+\beta\alpha'+\beta\alpha'') \quad \text{καὶ} \\ x \cdot x'+x \cdot x''=(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta')+(\alpha, \beta) \cdot (\alpha'', \beta'')= \\ =(\alpha\alpha'+2\beta\beta', \alpha\beta'+\beta\alpha')+(\alpha\alpha''+2\beta\beta'', \alpha\beta''+\beta\alpha'')= \\ =(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+\alpha\alpha''+2\beta\beta'', \alpha\beta'+\beta\alpha'+\alpha\beta''+\beta\alpha'') \quad \text{ἤτοι} \\ x \cdot (x'+x'')=x \cdot x'+x \cdot x''.$$

Λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικότητος ἐκάστης τῶν δύο πράξεων, θὰ ἰσχύη καὶ $(x'+x'') \cdot x=x' \cdot x+x'' \cdot x$.

Πληρουμένων ὅλων τῶν αἰτημάτων, συνάγεται ὅτι τὸ E , ἐφοδιασμένον μὲ τὰς δύο ἀνωτέρω ἐσωτερικὰς πράξεις, ἔχει δομὴν δακτυλίου.

§ 208. Σώματα. Καλεῖται **σῶμα** ἓνας δακτύλιος K ὁ ὁποῖος ἀποστεροῦμενος τοῦ οὐδετέρου στοιχείου τῆς προσθέσεως καθίσταται ὁμάς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν (βλ. § 207, β').

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ δευτέρα ἐσωτερικὴ πρᾶξις (ἡ νόμος) ὀνομαζομένη «πολλαπλασιασμός» καὶ σημειουμένη μὲ $\cdot$ ἢ $\times$ καθιστᾷ τὸ σύνολον $K-\{0\}$, ὁμάδα, πρέπει νὰ ἔχη καὶ αὕτη οὐδέτερον στοιχεῖον καὶ νὰ Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἐπιτρέπη τὴν ὑπαρξίν συμμετρικοῦ στοιχείου, σύμφωνα μὲ τὰς ἀπαιτήσεις τῆς ομάδος (§ 206). Ἐπομένως τὰ ἀξιώματα τοῦ σώματος εἶναι τὰ τοῦ δακτυλίου. (I-VIII § 207, β') καὶ ἐπὶ πλέον:

$$\text{IX. } \exists e : \forall x \quad e \cdot x = x \cdot e = x.$$

$$\text{X. } \forall x (x \neq 0) \exists x' : x \cdot x' = x' \cdot x = e.$$

Τὸ x' σημειοῦται μὲ x^{-1} τὸ δὲ e σημειοῦται μὲ 1.

Ἐὰν ὁ δεύτερος νόμος εἶναι ἀντιμεταθετικός, τὸ σῶμα καλεῖται ἀντιμεταθετικόν.

Ὑποσῶμα. Κάθε μέρος τοῦ K τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτὸ σῶμα, ὡς πρὸς τὰς ἰδίας δύο πράξεις, λέγεται ὑποσῶμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1. Τὸ σύνολον P τῶν συμμετρῶν ἀριθμῶν εἶναι σῶμα, ἀντιμεταθετικόν. Αἱ δύο πράξεις: πρόσθεσις καὶ πολλαπλασιασμός ὁρίζονται ὡς συνήθως ἐπὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου P , πληροῦν ὅλα τὰ αἰτήματα I ἕως X. Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον e τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1 (ἀξίωμα IX) καὶ τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς στοιχείου $\sigma \neq 0$ ὑπάρχει ἐν τῇ πράξει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ εἶναι τὸ $1/\sigma$ (ἀξίωμα X).

2. Τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι σῶμα (ἀντιμεταθετικόν) περιέχον ὡς ὑποσῶμα τὸ σύνολον P τῶν ρητῶν.

3. Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον E τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha + \beta\sqrt{2}$ ὅπου α καὶ β οἰοῖδήποτε σύμμετροι (ρητοί) ἀριθμοί. Τὸ σύνολον τοῦτο περιέχει καὶ ὅλους τοὺς συμέτρους (διὰ $\beta=0$) καὶ φυσικά καὶ τὸν ἀριθμὸν 0 (διὰ $\alpha=0$, $\beta=0$). Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ συνόλου πραγματικῶν ἀριθμῶν, αἱ πράξεις πρόσθεσις καὶ πολλαπλασιασμός θὰ ἔχουν τὴν συνήθη σημασίαν.

Ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο στοιχείων τοῦ συνόλου E : $\alpha + \beta\sqrt{2} = \alpha' + \beta'\sqrt{2}$ ὑφίσταται μόνον ὅταν $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ (βλ. § 169). Ἄς ἐξετάσωμεν τὴν δομὴν τοῦ συνόλου αὐτοῦ.

α') Ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, εἶναι ὁμὰς διότι ὑπάρχουν: i) ἡ κλειστότης ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν $((\alpha + \beta\sqrt{2}) + (\alpha' + \beta'\sqrt{2}) = (\alpha + \beta) + (\beta + \beta')\sqrt{2} =$ ἀριθμὸς τοῦ ἰδίου συνόλου E), ii) ἡ προσεταιριστικότης τῆς προσθέσεως, iii) τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον ($e=0+0\sqrt{2}$) καὶ iv) τὸ συμμετρικὸν παντὸς στοιχείου (τοῦ $\alpha + \beta\sqrt{2}$ εἶναι τὸ $-\alpha - \beta\sqrt{2}$) (§ 206, I-IV). Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρόσθεσις εἶναι καὶ ἀντιμεταθετικὴ, ἡ ὁμὰς εἶναι Ἀβελιανή.

β') Διὰ νὰ εἶναι δακτύλιος (§ 207) πρέπει ἡ δευτέρα πρᾶξις (πολλαπλασιασμός) νὰ εἶναι ἐσωτερικὴ, προσεταιριστικὴ καὶ ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρώτῃν. Πράγματι, τὸ E εἶναι κλειστὸν καὶ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: $(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha' + \beta'\sqrt{2}) = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{2} =$ ἀριθμὸς πάλιν τῆς μορφῆς $\sigma + \sigma'\sqrt{2}$ δηλ. τοῦ ἰδίου συνόλου E . Ἡ προσεταιριστικότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πραγματικῶν ἀριθμῶν: $(K \cdot \Lambda) \cdot M = K \cdot (\Lambda \cdot M)$ ὑφίσταται ὡς γνωστὸν δι' οἰοῦσδήποτε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς, ἄρα καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ E . Τέλος ἡ ἐπιμεριστικότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν: $K \cdot (\Lambda + M) = K\Lambda + KM$, $(\Lambda + M)K = \Lambda \cdot K + MK$ ὑφίσταται διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς, ἄρα καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ E . Ἐπομένως τὸ E εἶναι δακτύλιος.

γ') Διὰ νὰ εἶναι τὸ Ε σῶμα, πρέπει νὰ πληροῦνται τὰ δύο τελευταῖα ἀξιώματα IX καὶ X διὰ τὴν πράξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Δηλαδή: i) *Νὰ ὑπάρξῃ οὐδέτερον στοιχείον* διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἐὰν τὸ στοιχείον $e = x + y\sqrt{2}$ τοῦ Ε εἶναι οὐδέτερον ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν πρέπει $(x + y\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ καὶ $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ διὰ κάθε ζεύγος (α, β) συμμετρῶν ἀριθμῶν. Λόγω τῆς ἀντιμεταθετικότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀρκεῖ νὰ συμβαίνει τὸ πρῶτον, δηλαδή: $(ax + 2by) + (xb + ay)\sqrt{2}$

$$= a + b\sqrt{2} \quad \text{ἢ} \quad \forall (a, b) \quad \begin{cases} ax + 2by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} a(x-1) + 2by = 0 \\ b(x-1) + ay = 0. \end{cases}$$

Αἱ δύο ἰσότητες ἰσχύουν $\forall a, \forall b$ μόνον ὅταν $x=1, y=0$. Ἄρα ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχείον εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, τὸ $1 + 0\sqrt{2}$.

ii) *Ὑπαρξίς ἐνὸς συμμετρικοῦ*. Ἐστω τυχὸν μὴ μηδενικόν, στοιχείον τοῦ τοῦ Ε, τὸ $a + b\sqrt{2} \neq 0$ (δηλ. ὄχι καὶ τὸ α καὶ τὸ β μηδενικά). Ἄν τὸ στοιχείον τοῦτο ἔχῃ ἓνα συμμετρικόν, $a' + b'\sqrt{2}$ (ἐν τῇ πράξει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) θὰ πρέπει:

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = e = 1 \quad \text{ἢ}$$

$$aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} = 1 \quad \text{ἢ}$$

$$(ab' + a'b)\sqrt{2} = 1 - aa' - 2bb'.$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον ὅταν $\{ab' + a'b = 0 \text{ καὶ } aa' + 2bb' = 1\}$ (βλ. § 69). Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκουμεν:

$$a' = \frac{a}{a^2 - 2b^2}, \quad b' = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}.$$

Ἐφ' ὅσον α, β σύμμετροι ὄχι καὶ οἱ δύο μηδενικοί, ἔχομεν $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (Ἄν ἦτο $a^2 - 2b^2 = 0$ τότε $2 = (a/b)^2 =$ τετράγωνον συμμετρου, ὅπερ ἀδύνατον, βλ. § 56). Ἐπομένως παντὸς στοιχείου $\neq 0$ ὑπάρχει συμμετρικόν ὡς πρὸς τὴν πράξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ σύνολον τοῦτο Ε, ἔχει δομὴν σώματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A-831. Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ἀποτελεῖ ομάδα ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν; ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν;

A-832. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $E = \{e, i, j\}$ ἐκ τριῶν στοιχείων καὶ μίαν ἐσωτερικὴν πράξιν σημειουμένην μὲ $\bullet$ καὶ καθοριζομένην ὑπὸ τοῦ πίνακος

	e	i	j
e	e	i	j
i	i	j	k
j	j	k	e

ὡς ἐξῆς: τὸ γινόμενον δύο στοιχείων λαμβάνεται εἰς τὴν τομὴν τῆς (ὀριζοντίας) γραμμῆς ποιεῖται ἀπὸ τοῦ ἡμιτοῦτο Εκαπιδευτικῆς Πολιτικῆς (κατακορύφου)

στήλης της ἀρχομένης μετὰ τὸ δεύτερον στοιχείον. Π.χ. : $i \cdot j = k$. Δείξατε ὅτι μετὰ τὴν πρᾶξιν αὐτήν, τὸ E ἔχει δομὴν Ἀβελιανῆς ομάδος.

B-833. Ἐστω E τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν (α, β) ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν ὅπου ὁ πρῶτος ἀριθμὸς α τοῦ ζεύγους εἶναι $\neq 0$. Ὅρίζομεν τὸ «γινόμενον» δύο στοιχείων τοῦ E διὰ τῆς ἰσότητος

$$(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', \alpha\beta' + \beta).$$

Δείξατε ὅτι τὸ E εἶναι ὁμάς μὴ ἀντιμεταθετικὴ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν αὐτήν.

B-834. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ δομὴ τοῦ συνόλου E τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\mu + \nu\sqrt{5}$ ὅπου μ, ν δύο τυχόντες **ἀκέραιοι** τῆς Ἀλγέβρας.

B-835. Ἐφοδιάζομεν τὸ σύνολον E τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) πραγματικῶν ἀριθμῶν, μετὰ μίαν ἰσότητα, μίαν πρόσθεσιν καὶ ἓνα πολλαπλασιασμόν ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \quad \text{ὅταν καὶ μόνον} \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'$$

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \quad \beta + \beta')$$

$$(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Νὰ μελετηθῇ ἡ δομὴ τοῦ συνόλου τούτου.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΟΚΛΗΡΟΥ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ Α'. ΤΟΜΟΥ

B-836. Νά εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις εἰς τὸ 7-δικὸν σύστημα γράφεται μὲ τρία ψηφία καὶ εἰς τὸ 9-δικὸν μὲ τὰ ἴδια ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

B-837. Προσδιορίσατε τέσσαρας θετικούς ἀριθμούς, ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμούς 2, 3, 4, 6 καὶ τοιούτους ὥστε τὰ τέσσαρα πηλίκα τὰ ὅποια εὐρίσκομεν διαιροῦντες δι' ἐκάστου ἐκ τῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων, νὰ ἔχουν ἄθροισμα 14625.

Σημείωσις. Οἱ ἀριθμοὶ $x, y, z, t, \dots$ λέγονται **ἀνάλογοι** πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ὅταν ὑφίστανται αἱ ἰσότητες τῶν λόγων: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{t}{\delta} = \dots$

A-838. Δείξατε ὅτι ἡ ἀλγεβρική παράστασις

$$y = \frac{\frac{\alpha+x}{1-\alpha x} + \frac{\alpha-x}{1+\alpha x}}{1 - \frac{\alpha+x}{1-\alpha x} \cdot \frac{\alpha-x}{1+\alpha x}}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x .

B-839. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$y = \frac{1+2x}{1-\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$$

διὰ $x = \sqrt{3}/4$.

B-840. Ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ ἄρρητον κλάσμα

$$f(x) = \frac{3x-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^2)^2}}$$

B-841. Νά λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ ἡ ἐξίσωσις:

$$x^2 + \sqrt{x-3} = \lambda x + \sqrt{x-3}.$$

B-842. Νά λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ ἡ ἐξίσωσις:

$$|x - |x-1|| = (\lambda-1)x + 1$$

A-843. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\sqrt{3x^2-20x+16} = x-4$.

A-844. Νά λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ ἡ ἐξίσωσις:

$$\sqrt{x^2-\lambda x} = x + \lambda.$$

B-845. Ἐστώσαν x, y, z τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί. Σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμούς:

$$\alpha = x^2 + xy + y^2, \quad \beta = y^2 + yz + z^2, \quad \gamma = z^2 + zx + x^2.$$

Ποία σχέσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ μεταξύ τῶν x, y, z ἵνα ὁ β εἶναι μέσος ἀριθμητικὸς (βλ. ἀσκ. 283) τῶν α καὶ γ .

A-846. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους του (βλ. ἀσκ. 580) δεῖξτε ὅτι πᾶς τεμαχισμὸς τοῦ ἀδάμαντος, μειώνει τὴν ἀξίαν του.

A-847. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\lambda^3 x - \lambda^2 - 4 = 4\lambda(x-1)$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος καὶ λ , παράμετρος.

B-848. Εὑρετε ἀριθμὸν ὅστις ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10 καὶ συγχρόνως, μὲ τὸ διπλάσιον μιᾶς δυνάμεως τοῦ 20 ὅπου αἱ δυνάμεις ἔχουν ἐκθέτην ἀλγεβρικὸν ἄκεραιον.

A-849. Ἀπλοποιήσατε τὴν παράστασιν

$$y = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}.$$

A-850. Ἀπλουστεύσατε τὴν παράστασιν :

$$A = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - xyz \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right).$$

B-851. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{(x-2)^2}{1-tx} = x+4$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος καὶ t παράμετρος. Διὰ ποίας τιμᾶς τῆς παραμέτρου t ἡ διάφορος τοῦ μηδενὸς ρίζα τῆς ἐξίσωσεως εἶναι ἄκεραιος ἀριθμὸς;

B-852. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\{|x-y|+2|x+y-1|=3, \quad 2x+y=1\}.$$

A-853. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμᾶς τῆς παραμέτρου λ τὸ σύστημα:

$$\{\lambda x + y = 2\lambda, \quad x + \lambda y = \lambda + 1\},$$

B-854. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\lambda x + y + z = 1, \quad x + \lambda y + z = \lambda, \quad x + y + \lambda z = \lambda^2\}.$$

B-855. Διὰ ποίας τιμᾶς τῆς παραμέτρου m , τὸ σύστημα

$$\{x+2y-m=0, \quad 3x+4y-11=0\}$$

ἔχει ὡς λύσιν, ζευγὸς θετικῶν ἀριθμῶν; Διὰ ποίας φυσικὰς τιμᾶς τῆς m , ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι ζευγὸς φυσικῶν ἀριθμῶν;

B-856. Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y πληροῦν τὴν ἰσότητα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \gamma^2} = 1$$

ὅπου $a > \gamma > 0$, νὰ δεიχθῇ πρῶτον ὅτι: $\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1, \quad \frac{\gamma x}{a} + a > 0,$

$\frac{\gamma x}{a} - a < 0$ καὶ ἀκολούθως ὅτι οἱ x καὶ y θὰ πληροῦν καὶ τὴν:

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2a.$$

B-857. Ἐὰν n περιττός, φυσικὸς νὰ δεიχθῇ ὅτι ἰσχυροῦσης τῆς ἀνισότητος $a > b$ θὰ ἰσχύη καὶ ἡ $a^n > b^n$. Ἀντιστρόφως, ἂν $a^n > b^n$ ὅπου n περιττός, τότε καὶ $a > b$.

A-858. Ἐὰν $a < b < \gamma < \delta$, νὰ δεიχθῇ ὅτι τότε $|b-\gamma| < |a-\delta|$.

A-859. Ἐάν εἶναι $\alpha < \sqrt{2} < \beta$, δείξατε ὅτι τότε θὰ εἶναι :

$$\left\{ \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{|\alpha - \beta|}{2} \right\}^2 > 2.$$

A-860. Δείξατε ὅτι, ἂν $x_1 \neq x_2$, ἡ παράστασις $\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{|x_1 - x_2|}{2}$ παριστά-
νει τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2 ἐνῶ ἡ $\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_1 - x_2|}{2}$, τὸν μι-
κρότερον.

B-861. Δοθέντων ὁσωνδήποτε κλασμάτων, ὄχι ὁλῶν ἴσων μεταξύ των, καὶ ἐχόντων παρονομαστὰς ὁμοσήμους, τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, περιέχε-
ται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων.

B-862. α, β, γ εἶναι τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ συνδεδεμένοι διὰ τῆς σχέσεως $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. i) Συγκρίνατε τὸν α μετὰ τὸν $\beta + \gamma$. ii) Συγκρίνατε τὸν α^3 μετὰ τὸν $\beta^3 + \gamma^3$.

B-863. x, y, z εἶναι τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ συνδεδεμένοι διὰ τῆς σχέσεως $3y^2 = 2(z^2 - x^2)$. i) Δείξατε ὅτι ὁ z εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν τριῶν καὶ δώ-
σατε τὴν συνθήκην τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ x, y, z ἵνα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μῆκη πλευρῶν τριγώνου. ii) Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ συνθήκη αὐτὴ πληροῦται (x, y, z μῆκη πλευρῶν τριγώνου) δείξατε ὅτι ὁ λόγος y/x εἶναι μι-
κρότερος σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον καὶ νὰ προσδιορίσετε. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τοὺς λόγους z/x καὶ y/z .

B-864. Νὰ δεიχθῇ ὅτι, ἂν ἀληθεύουν αἱ ἀνισότητες: $\beta > 0, 4\alpha < \beta, \alpha + \gamma > \beta$, τό-
τε θ' ἀληθεύουν κατὰ σειρὰν αἱ ἀνισότητες $4\gamma > 3\beta, 7\gamma > \frac{21\beta}{4}, 7\gamma > 5\beta, 8\gamma + \alpha > 6\beta$.

A-865. Ἐάν $0 < \omega < 1$ καὶ $\nu > \mu$, δείξατε ὅτι τότε $\omega^{\nu-\mu} < 1$ καὶ ὅτι $\omega^\nu < \omega^\mu$,
ὅπου ν, μ φυσικοὶ ἀριθμοί. (Ἦτοι, ἂν ἡ βᾶσις δυνάμεως εἶναι θετικὴ καὶ
μικροτέρα τῆς μονάδος, τότε αὐξάνωντος τοῦ ἐκθέτου, ἡ δύναμις ἐλατ-
τοῦται).

B-866. Ἐάν $0 < \omega < 1$ καὶ ν φυσικὸς ἀριθμὸς δείξατε ὅτι

$$(1 - \omega^{2\nu})^{\nu+1} < (1 - \omega^{2\nu+2})^\nu.$$

(Ὑποδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ παρατήρησις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως).

B-867. Ἐάν $\alpha > \beta > 0$ καὶ ν φυσικὸς ἀριθμὸς, δείξατε ὅτι:

$$(\alpha^{2\nu+2} - \beta^{2\nu+2})^\nu > (\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu})^{\nu+1}.$$

(Ὑποδ. Διαιρέσατε ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀποδεικτέας διὰ $\alpha^{2\nu(\nu+1)}$, θέ-
σατε $\frac{\beta}{\alpha} = \omega$ καὶ ἀναγάγετε τὴν ἀποδεικτέαν εἰς τὴν ἀνισότητα τῆς προη-
γουμένης ἀσκήσεως).

A-868. Ἀπλουστεύσατε τὴν παράστασιν

$$(2 - \sqrt{1-x})^6 + (2 + \sqrt{1-x})^6.$$

B-867. Ἐάν x, y, z τυχόντες ἀριθμοὶ καὶ τεθῇ

$$x+y+z=a, \quad xy+yz+zx=\beta; \quad xyz=\gamma$$

ὕπολογίσατε τὴν παράστασιν $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ συναρτήσας τῶν a, β, γ .

B-870. Ἐάν ν φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $0 < \omega < 1$, δείξατε ὅτι

$$1 - \omega^{2v+1} > (2v+1)\omega^v(1-\omega).$$

B-871. Ἐάν ἀληθεύη ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}$$

νά δειχθῇ ὅτι δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀντίθετοι καὶ ἀκολουθῶς νά δειχθῇ ὅτι θ' ἀληθεύη καὶ ἡ

$$\frac{1}{\alpha^{2v+1}} + \frac{1}{\beta^{2v+1}} + \frac{1}{\gamma^{2v+1}} = \frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma)^{2v+1}}$$

ὅπου v , φυσικὸς ἀριθμὸς.

A-872. Ν' ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\beta(x^2+y^2) + \gamma\gamma(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2) + \gamma\gamma(\alpha^2-\beta^2)}$.

B-873. Ἐάν $(\alpha, \beta) = 1$ τότε οἱ $\alpha + \beta$ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ δὲν δύνανται νά ἔχουν ἄλλον κ.δ. παρὰ μόνον τὸν 3. ('Υποδ.: $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$).

B-874. Ἀριθμὸς γράφεται εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα μὲ ὀκτῶ ψηφία. Πόσα ψηφία δύνανται νά ἔχη εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως;

B-875. Νά προσδιορισθῇ ἀκέραιος τετραψήφιος διαιρετὸς διὰ 147, λήγων εἰς 9 καὶ ὅστις νά εἶναι τέλειον τετράγωνον.

A-876. Νά εὐρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποῖου ἡ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, μείον τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, νά ἰσοῦται μὲ 1· ἐάν δὲ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, τὸν ἀριθμὸν ὅστις σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἴδια ψηφία γεγραμμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νά λαμβάνωμεν ἄθροισμα 77.

A-877. Ἐάν ἕκαστος ἐκ δύο ἀκεραίων εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων, τότε καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀκεραίων εἶναι πάλιν ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.

A-878. Νά δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ὅστις διαιρούμενος διὰ 12 νά διδῇ ὑπόλοιπον 5 καὶ συγχρόνως διαιρούμενος διὰ 15 νά διδῇ ὑπόλοιπον 4.

A-879. Ἐάν καὶ ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων εἶναι ἄρτια, τότε ἀμφότεροι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ἄρτιοι.

B-880. $a \in \Phi \wedge a > 4 \Rightarrow 600 \mid (a^4 - 1)a^2(a^4 - 16)$.

A-881. Εὐρετε τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν n γνωρίζοντας ὅτι

$$n(n+1)(2n+1) = 84.$$

B-882. Νά δειχθῇ ὅτι $111 < \beta < 10101 < \beta$ καὶ νά εὐρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς τελείας ταύτης διαιρέσεως.

B-883. Δεῖξτε ὅτι ἂν $(v - \mu) \mid (v\alpha + \mu\beta)$ τότε $(v - \mu) \mid (v\beta + \mu\alpha)$ καὶ $(v - \mu) \mid (\alpha + \beta)(\mu + v)$.

B-885. $(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta, \alpha\beta) = 1$ καὶ $(\alpha^v + \beta^v, \alpha\beta) = 1$. Ἐν συνεχείᾳ νά δειχθῇ ὅτι ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ $\neq 1$ τότε τὸ ἄθροισμα

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ δὲν ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ἂν τὸ α/β εἶναι οἰονδήποτε, $\neq 1$.

A-885. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς
 $2x^2 + 5xy - 3y^2, 2x^2 - 3x - 5.$

B-886. Τρία δοχεία κυλινδρικά διαφόρων χωρητικότητων αλλά γεωμετρικῶς ὁμοία καὶ τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι ὡς $1:2:3$, περιέχουν ὕδωρ εἰς ποσότητας ἀναλόγους πρὸς τὰ ὕψη τῶν. Μεταβιβάζοντες ὕδωρ ἐκ τοῦ ἐνὸς δοχείου εἰς τὸ ἄλλο φέρομεν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ εἰς τὰ τρία δοχεία. Ἀκολουθῶς λαμβάνοντες 9 λίτρας ὕδατος ἐκ τοῦ τρίτου δοχείου καὶ ρίπτοντες αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον, βλέπομεν ὅτι τὸ δευτέρον περιέχει διπλάσιον ὕδωρ τοῦ πρῶτου. Τούτων δεδομένων νὰ εὑρεθῶν οἱ ἀρχικοὶ ὄγκοι τοῦ ὕδατος καὶ εἰς τὰ τρία δοχεία.

B-887. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀντικαταστάσεων $x-y=u$, $xy=v$ νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς σχέσεως :

$$4(x^2+xy+y^2)^3 \geq 27x^2y^2(x+y)^2.$$

B-888. Ἐὰν διὰ φυσικὴν τιμὴν τοῦ a , ὁ ἀριθμὸς $\beta = \frac{9}{2}(2a+1+\sqrt{4a+1})$ εἶναι ἀκέραιος, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ὁ β θὰ εἶναι καὶ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου.

B-889. i) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς $\neq 2$ δύναται κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν. ii) Ὅτι, πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς $N \neq 1$ μὴ πρῶτος καὶ μὴ τέλειον τετράγωνον δύναται κατὰ δύο τουλάχιστον τρόπους νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν. iii) Ὅτι πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς ὅστις δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4, δὲν δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν.

A-890. Ἐὰν $x_1 > 0$ δεῖξατε ὅτι $1+x_1 \geq 2\sqrt{x_1}$. Συμπεράνατε ὅτι διὰ n θετικῶς $x_1, x_2, \dots, x_n$ ἰσχύει :

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 2^n \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Πότε ἰσχύει τὸ = :

B-891. i) Ἀναλύσατε εἰς γινόμενον δύο παραγόντων τὴν παράστασιν $3xyz + x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2)$. ii) Χρησιμοποιοῦντες τὴν προκύπτουσαν ταυτότητα, δεῖξατε ὅτι διὰ τυχόντας θετικῶς x, y, z ἰσχύει :

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz.$$

B-892. Προσδιορίσατε τοὺς ἀριθμοὺς a καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4 - 6x^3 + ax^2 + \beta x + 1$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐνὸς ἄλλου πολυωνύμου.

A-893. Προσδιορίσατε τοὺς ἀκεραίους x, y ὅταν δίδεται ἡ σχέση

$$2^{2x-y-1} \times 5^{x-2y+1} = 20^{y-x+4}.$$

B-894. Ἐὰν a, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ $\neq 0$ δεῖξατε ὅτι ἐὰν ἰσχύη ἡ ἰσότης $(a+\beta+\gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$ τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ

$$\frac{a^2}{a^2+2\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\beta^2+2\gamma a} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+2a\beta} = 1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta\gamma}{a^2+2\beta\gamma} + \frac{\gamma a}{\beta^2+2\gamma a} + \frac{a\beta}{\gamma^2+2a\beta} = 1.$$

A-895. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ὡς πρὸς τὴν παράμετρον a ἡ ἀνίσωτης

$$\frac{x}{a} - 5 < \frac{x}{3}.$$

A-896. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ὡς πρὸς m τὸ σύστημα

$$\begin{cases} mx-y=m, & x+y=5 \end{cases}.$$

A-897. Νὰ ὁρισθῇ ὁ m οὕτως ὥστε τὸ σύστημα

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\{(2m+5)x + (3m+1)y + 3 = 0, \quad (m+5)x + (2m+3)y - 18 = 0\}.$$

να ἔχη λύσιν εἰς ἣν ἡ τιμὴ τοῦ y νὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ x .

A-898. Ἐάν $x - \frac{1}{x} = 3$ ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν ἐκάστης τῶν παραστάσεων :

$$x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x^3 - \frac{1}{x^3}, \quad x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

B-899. Προσδιορίσατε τὰ a καὶ β οὕτως ὥστε ἡ διαίρεσις τοῦ $x^3 + ax^2 + 6x + 1$ διὰ τοῦ $x^2 + \beta x + 1$, νὰ εἶναι τελεία.

B-900. Ὅρίσατε τὰ a καὶ β οὕτως ὥστε ἡ διαίρεσις τοῦ $9x^3 - 7x + \beta$ διὰ τοῦ $9x^2 + 9ax + 2a^2$ νὰ εἶναι τελεία.

B-901. Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν ὡς πρὸς a αἱ ἐξισώσεις :

$$i) \quad \frac{(x-a)^2}{x} = \frac{x^2}{x+2a}, \quad ii) \quad \frac{(a+x)^2}{1+ax} = a^2 - x.$$

B-902. Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν ὡς πρὸς a τὰ συστήματα :

$$i) \quad \{x+y+z=1, \quad x-y+z=-1, \quad a^2x+ay+z=a^3\}.$$

$$ii) \quad \{x+y+az=1, \quad x+ay+z=2, \quad x-y+z=3\}.$$

A-903. i) Ὅρίσατε τὸ m ἵνα ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς ἐξισώσεως (1) $(3m+5)x + (2m-3)y = 12m+1$ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς. ii) Ὅρίσατε τὸ m ἵνα ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(2, 3)$. iii) Δείξατε ὅτι ὅλαι αἱ παραστατικαὶ εὐθεῖαι τῆς (1) αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ m διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

B-904. Νὰ δεიχθῇ ὅτι εἰς ἓνα μόνον σύστημα ἀριθμήσεως μετὰ βάσιν x , ὁ ἀριθμὸς $1155_{<x>}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς $12_{<x>}$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ ὁ x .

B-905. Ὅρίσατε τὰ ψηφία a, β, γ ἵνα ὁ ἀριθμὸς $13a\beta 45\gamma$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 792 (δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως).

A-906. Ἐάν ἀκέραιος εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων δείξατε ὅτι καὶ τὸ διπλάσιόν του εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.

A-907. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 550. Ἐάν ὁ ἓνας παράγων αὐξήθῃ κατὰ 5, τὸ γινόμενον γίνεται 675. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

A-908. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

$$i) \quad \{x+y+z=\delta, \quad y+z+t=a, \quad z+t+x=\beta, \quad t+x+y=\gamma\}$$

$$ii) \quad \{y+z+t-x=a, \quad z+t+x-y=\beta, \quad t+x+y-z=\gamma, \quad x+y+z-t=\delta\}$$

προσδιοριζομένου πρῶτον, τοῦ ἄθροίσματος S τῶν τεσσάρων ἀγνώστων x, y, z, t .

B-909. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} ax+k(y+z+t)=\lambda & \beta y+k(z+t+x)=\mu \\ \gamma z+k(t+x+y)=v & \delta t+k(x+y+z)=\rho \end{cases}$$

προσδιοριζομένου πρῶτον, τοῦ ἄθροίσματος S τῶν τεσσάρων ἀγνώστων x, y, z, t .

B-910. Προσδιορίσατε τὸ k , οὕτως ὥστε ἕκαστον τῶν κάτωθι ὁμογενῶν συστημάτων νὰ ἔχη καὶ λύσεις διαφόρους τῆς $(0, 0, 0)$:

$$x+2y+3z=0$$

$$2x+3y+kz=0$$

$$i) \quad 4x+5y+6z=0$$

$$ii) \quad 2x+7.5y+kz=0$$

$$5x+7y+kz=0$$

$$3x+y+7.5z=0$$

B-911. Δείξτε τὰς ἀνισότητας :

$$\sqrt{13} + \sqrt{5} < \sqrt{11} + \sqrt{7}, \quad \sqrt{30} > \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad \sqrt{11} - \sqrt{6} + \sqrt{5} < \sqrt{10}, \\ \sqrt[4]{6} < (\sqrt{2} + \sqrt{3}) / 2.$$

A-912. Δώσατε τὰς τιμὰς τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας συναλθεύουν αἱ τρεῖς ἀνισότητες

$$\frac{x}{x^2-4} > 0, \quad \frac{(x-1)^2-6}{x-1} > 0, \quad x^3-3x^2 < 0.$$

B-913. Ἐὰν μ, ν φυσικοὶ ἀριθμοί, τὸ ξ γινόμενον $\mu\nu$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

B-914. i) Δείξατε ὅτι ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\alpha / (\sqrt[n]{\beta} - \sqrt[n]{\gamma})$ ἐπὶ τὸν παράγοντα

$$\sqrt[n]{\beta^{n-1}} + \sqrt[n]{\beta^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\beta^{n-3}} \sqrt[n]{\gamma^2} + \dots + \sqrt[n]{\gamma^{n-1}}.$$

τότε εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν.

ii) Νὰ γίνουν ρητοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1}{2+\sqrt[4]{7}}.$$

B-915. Νὰ γίνουν ρητοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}.$$

A-916. Ἐὰν $a+\beta > 0$ καὶ $a > \beta$, νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{x+|y|=a, \quad |x|+y=\beta\}.$$

A-917. Ἐὰν $f(x) = \frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}$, παραστήσατε γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $y = \frac{1}{f(x)}$. Ποία ἡ ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν

ἀνωτέρω γραφικὴν παράστασιν καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $A(+2, -3)$; Εἰς ποία σημεία ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τοὺς ἄξονας;

A-918. Σχεδιάσατε εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε') αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξισώσεις $x-2y=0$ καὶ $2x+y-5=0$. Ὑπολογίσατε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τομῆς A τῶν (ε) καὶ (ε') καὶ ἐπαληθεύσατε ἐπὶ τοῦ σχεδίου. Ἐὰν ἡ (ε') τέμνῃ τὸν y' οὐ εἰς τὸ B , δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὑπολογίσατε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

B-919. Ἐστω x ἀκέραιος θετικός, πενταψήφιος ἀριθμός. Ἐστω A ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν γράφοντες ἓνα 1 δεξιὰ τοῦ x καὶ B ὁ ἀριθμὸς ὅστις σχηματίζεται ἂν γράψωμεν ἓνα 1, ἀριστερά τοῦ x . Εὑρετε τὸν x γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ A εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ B .

B-920. Ἐὰν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες ἕκαστος Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἀπόλυτον τιμὴν < 1 καὶ $a_1, a_2, \dots, a_n$ τυχόντες πραγματικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ὑπάρχει ἀριθμὸς λ περιεχόμενος μεταξὺ -1 καὶ $+1$ καὶ τοιοῦτος ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ἰσότης :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \lambda \{ |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \}.$$

B-921. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων

$$x\{|3x| + |2y| + |7z|\} = a, \quad y\{|3x| + |2y| + |7z|\} = \beta$$

$$z\{|3x| + |2y| + |7z|\} = \gamma, \quad \text{ὅπου } a\beta\gamma \neq 0 \text{ ἔπονται αἱ σχέσεις}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{|3a| + |2\beta| + |7\gamma|}}, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{|3a| + |2\beta| + |7\gamma|}}, \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{|3a| + |2\beta| + |7\gamma|}}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

B-922. Ἐάν μεταξὺ τῶν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν a καὶ β ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\beta(1+|a|)(1-|a|+a^2) = a^3$ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ $a^3\{|\beta|-1\} + \beta = 0$. Ὑπὸ ποίαν συνθήκην ἀληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφον;

B-923. Ἐάν $x_1, x_2, \dots, x_n$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ δειχθῇ ἡ σχέσις

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

B-924. Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ a, β, x, y πληροῦν τὰς τρεῖς σχέσεις

$$a\beta > 0, \quad |x| < |x+a| < \beta, \quad |y| < |y+a| < \beta$$

νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ πληροῦν καὶ τὴν ἀνισότητα

$$|xy - (x+a)(y+a)| < 2a\beta.$$

B-925. Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y πληροῦν τὴν ἀνισότητα

$$|xy - 3x| < |x - y| - 4$$

δείξατε ὅτι τότε οἱ ἀριθμοὶ $1 - |x|$ καὶ $4 - |y|$ εἶναι ἐτερόσημοι.

B-926. Ἐάν $\theta_2 > \theta_1 > 0$ καὶ a καὶ β πραγματικοὶ καὶ $a \neq \beta$ πληροῦνται δὲ ἡ ἀνισότης

$$\left| \frac{\theta_1 a + \theta_2 \beta}{\theta_1 \beta + \theta_2 a} \right| \cdot \left| \frac{\beta}{a} \right| < 1$$

δείξατε ὅτι τότε θὰ εἶναι $|\beta| < |a|$.

B-927. Ἐάν $2a + \beta + 4 = 0$ ὅπου a, β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ, δείξατε ὅτι τότε $|a| + |\beta| \geq 2$.

B-928. Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ a, β, ξ, η πληροῦν τὰς σχέσεις

$$a > \beta > 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

τότε ἂν οἱ πραγματικοὶ x καὶ y πληροῦν τὴν ἰσότητα

$$(x - \beta)^2 + y^2 = \frac{\beta^4}{a^4} \xi^2 + \eta^2$$

θὰ πληροῦν καὶ τὰς σχέσεις $|y| \leq \beta$ καὶ $|x - \beta| \leq \beta$.

B-929. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$|x - 10| + 10 + |2x - 10| = 3x + 10$$

i) γραφικῶς, ii) ὑπολογιστικῶς.

B-930. Ἐστώσαν A καὶ B δύο ὑποσύνολα τοῦ R καὶ A', B' τὰ συμπληρωματικά των ἐξ ἑκαστοῦ $R \setminus A, R \setminus B$. Δείξατε ὅτι

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A - B) \cup (B - A).$$

B-931. Ἐστωσαν A καὶ B δύο ὑποσύνολα τοῦ R καὶ A', B' τὰ συμπληρωματικά των ὡς πρὸς R . Δείξατε ὅτι

$$i) \quad A \subset B \iff A \cap B' = \emptyset$$

$$ii) \quad A \subset B \iff A' \cup B = R.$$

B-932. Ἐὰν A καὶ B δύο σύνολα, ὁρίσατε ὅλα τὰ σύνολα X διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $A \cap X = B$.

B-933. i) Νὰ ἐκφρασθῇ ἕκαστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν a καὶ b ὡς γραμμικός συνδυασμός τῶν $5a+3b$ καὶ $13a+8b$, καὶ

ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων a καὶ b εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν $5a+3b$ καὶ $13a+8b$.

A-934. Εὑρετε δύο διαδοχικούς ἀκεραίους τοιοῦτους ὥστε τὸ τέταρτον σὺν τὸ πέμπτον τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον σὺν τὸ ἑβδομον τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ἀκεραῖοι.

A-935. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν ἀνισοτήτων

$$\{x^3 - 5x^2 + 6x > 0, |x| < 4, |x| > 1\}.$$

A-936. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $y = -x + 6$, $y = x + 3$. Αἱ παραστατικαὶ γραμμαὶ αὐτῶν εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων μὲ ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα, τέμνονται εἰς τὸ A . Ἡ πρώτη τέμνει τὸν $x'x$ εἰς Δ καὶ τὸν $y'y$ εἰς B . Ἡ δευτέρα τέμνει τὸν $x'x$ εἰς E καὶ τὸν $y'y$ εἰς Γ . i) Ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $ΟΔΑΓ$. ii) Ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται τὸ ἐκ τοῦ A ὕψος τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$. iii) Ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ἐκ τοῦ B διάμεσος τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$.

B-937. Ὅρισατε τὰ a καὶ b ἵνα τὸ πολωνύμιον $f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ εἶναι τέλειος κύβος ἄλλου ἀκεραίου πολωνύμου.

B-938. Ἐὰν $b > a > 0$ καὶ $\mu \in \Phi$ δείξατε ὅτι

$$\sqrt[\mu]{x^\mu + \sqrt[\mu]{a^\mu x^{\mu^2}}} + \sqrt[\mu]{a^\mu + \sqrt[\mu]{a^{\mu^2} x^\mu}} = b \Rightarrow x = \left\{ b^{\frac{\mu}{\mu+1}} - a^{\frac{\mu}{\mu+1}} \right\}^{\frac{\mu+1}{\mu}}$$

B-939. Δείξατε ὅτι $30562 < 7 > \times 41 < 7 > = 1563302 < 7 > .$

B-940. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν $a \leq 4$ ὁ ἀριθμὸς $40001 < a >$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $221 < a > .$

B-941. Δείξατε ὅτι αἱ δύο σχέσεις:

$$\{3yz + 2y + z + 1 = 0, \quad 3zx + 2z + x + 1 = 0\}$$

συνεπάγονται τὴν: $3xy + 2x + y + 1 = 0$.

B-942. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$x + y - (\lambda - 1)z = 0, \quad x + (\lambda - 1)y - z = 0, \quad x + \lambda y + z = 0.$$

A-943. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$i) \begin{cases} \frac{4x}{7} = \frac{-y}{2} = \frac{3z}{5} \\ 8x + y - 6z = 42 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ \frac{1}{4x} = \frac{1}{2y} = \frac{3}{4z} = \frac{1}{t} \end{cases} \quad iii) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \end{cases}$$

B-944. Θεωροῦμεν τὸ κλάσμα $\sigma = \frac{4487}{14175}$.

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

i) Νά μετατραπῇ τὸ δοθέν, εἰς ἴσον κλάσμα ἔχον παρονομαστήν δύναμιν τοῦ 15. Ἐστω N ὁ ἀριθμητὴς τοῦ εὑρεθησομένου κλάσματος. ii) Νά γραφῇ ὁ N εἰς τὸ σύστημα ἀριθμήσεως μετὰ βάσιν 15. ("Ἀς παρασταθοῦν μετὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ οἱ ἀριθμοὶ 10, 11, 12, 13, 14 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος). iii) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα σ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς δυνάμεις τοῦ 15. iv) Νά γραφῇ τὸ κλάσμα σ εἰς τὸ σύστημα μετὰ βάσιν 15.

B-945. Νά μετατραπῇ τὸ κλάσμα $\sigma = \frac{4855}{12960}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς, δυνάμεις τοῦ 6 (βλ. ἄσκ. 944).

B-946. Νά εὑρεθοῦν δύο θετικοὶ ἀκέραιοι x καὶ y ὅταν τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον τοῦ x διὰ y εἶναι ἴσον πρὸς 3 καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου xy εἶναι 7.

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

1. $\{1,2,3,4,5,6,8\}$, $\{2,4\}$, $\{1,3,5,7\}$, $\{6,7,8\}$, $\{1,3,5\}$, $\{6,8\}$, E_1 , E_2 , $\{1,2,3,4,5,7\}$, $\{1,3,5\}$. 2. $\{(1,2), (2,1)\}$, $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\}$, $\{(1,1), (1,3)\}$, $\{(2,2), (3,3)\}$, $\{(1,1), (1,3), (2,2), (3,3)\}$, $\emptyset$. 5. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας. 8. $A \times B = \{(a,1), (a,2), (\beta,1), (\beta,2), (\gamma,1), (\gamma,2)\}$, $B \times A = \{(1,a), (1,\beta), (1,\gamma), (2,a), (2,\beta), (2,\gamma)\}$. 9. μ. ν. 19. 192. 20. 1600. 21. Τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου. 22. Τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου. 23. 40. 24. 10633. 25. 40, 41, 42. 26. 71, 72, 73, 74. 27. 12. 32. $\beta - \alpha + 1$. 33. 90000. 37. 96. 38. ii) 5050. 46. 0,5,10,15,20,25,30. 47. 0,1...ἕως 11. 48. 0,1...6. 49. 0,7,14. 50. 0,12,24...120. 51. 312. 53. 1,0,1,1. 65. $(\beta+1)v$, $v=0, 1, \dots, (\beta-1)$. 69. 12, 30, 1, 2,2. 70. 80,4. 71. 9. 73. 1, 5, 25. 76. 14, 6, 60, 168, 378. 77. 360. 78. 216 ὥρας. 79. 301. 87. 1ος, 2ος, 4ος, 5ος, 8ος σύνθετοι, οἱ λοιποὶ πρῶτοι. 89. $3^3 \cdot 5 \cdot 643$, $5 \cdot 31^2$, $5^2 \cdot 13^2$, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. 90. 5544, 1764, 8. 91. 360, 41580, 90300. 92. 13860 ἡμέρας. 93. 252 καὶ 108 ἢ 756 καὶ 36. 97. 59, 93, 131. 98. $11011_{<2>}$, $1000_{<3>}$, $123_{<4>}$, $102_{<5>}$, $30_{<9>}$, $23_{<12>}$. 99. 2, 0, 1, 3. 100. $22610_{<7>}$. 102. $\beta v - 1$. 103. $2/3$, $7/3$, $8/9$, $31/23$, $23/26$, $9/7$. 104. $11/13$, $12/7$, $2/3$, $6/13$, $10/13$, $10/21$. 105. $97/111$, $9/16$, $7/9$. 109. 6. 110. $15/25$. 112. $x = K \cdot \Pi$. τῶν α , β ἦτοι τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ $E, K \cdot \Pi$. τῶν α, β . 113. $16/136$. 114. 23, 46. 115. $\lambda\alpha/\Delta$, $\lambda\beta/\Delta$ ὅπου $\Delta = (\alpha, \beta)$. 116. 2, $37/21$, $161/72$, $23/22$, $12311/3612$. 117. $20/28$, $21/28$, $26/28$. 118. $33/55$. 119. 45. 120. 15150. 121. 210. 122. $8/15$. 123. $2\rho/5\rho$. 124. $685/252$. 125. $51/57$. 126. $5/12 < 2/3 < 4/5 < 8/9 < 1 < 25/18 < 12/7$. 127. $1/5$, $1/4$, $1/3$, $2/5$, $1/2$, $3/5$, $2/3$, $3/4$, $4/5$. 129. $4768065539/4367268745$, $1/8$. 130. $275/408$. 132. 12, 9, $11/2$, $4/3$, $253/69$, $31/18$, $523/108$, $35/32$, $459/175$. 134. $89/18$, $845/144$, $47/52$. 135. $5/9$, $13/57$, $49/100$. 136. 12ρ , ρ ἄκερ. 137. 3. 138. $9/11$, $75/197$, $85/56$. 139. $160/3$, $13/35$. 141. 147. 145. 59, 46, 18125, 1. 146. 1. 147. $3240/361$, $423/197$. 149. $225/64$. 150. $4.5637_{<8>}$, $4.5576_{<8>}$. 151. 3, 123. 152. 0,09, 8,95. 153. 0,01. 154. 355. 156. $871/999$, $1573/1100$, $431/99900$. 157. 3 ἢ 9. 158. $1/9$ ἢ $4/9$. 159. 22, 30, 43, 77. 160. 141, 559, 1365. 161. 316, 1814, 7635. 162. 6,260, 21,792, 93,359. 163. 0,242, 13,129, 43,000. 164. 1,772, 3,132, 1,189. 165. 1,780, 1,772, 3,162. 167. 0,77, 0,75, 1,78, 1,69. 168. 0,885. 172. 47,48. 173. 48 ἢ 49. 174. v^2 , $v(v+1)$, $v(v+2)$. 177. v. 181. $\alpha = \beta = 7$. 185. Ὁ πρῶτος. 186. 0,9999999999. 189. Ἴσοι ἢ ἀντίθετοι. 200. —11/10. 204. —6, +20, —7,5. 206. —5/3. 207. +8/7, —347/375. 208. $17/20$. 210. $20/21$. 212. —12. 213. $51/8$. 215. $3\alpha - 3\gamma$, $+3\gamma$, $+5\alpha$, $-2\alpha + 2\beta$, $5x + 5y + 6$. 216. $(\alpha - \beta + \gamma)x$, $(2k + 3)$, $(\gamma - 3)$, $(x - y)$, $(4 - \alpha)$. 217. $(-3)^8$, $(-5)^{12}$, -2^{12} . 218. $(1/5)^9$, $(-1/2)^5$, $(1/2)^5$. 219. 64, 81. 220. $-x^6y^2z^4/12$, $20x^6y^5z^5$. 223. —1. 227. —3, +15, +8, —55. 228. $27/49$, —1/5. 229. —13/9, —1. 230. $47/25$, $2/5$, $3/26$. 231. $1/300$, $11/32$, 0. 233. Ὁ μηδέν. 234. Ὁ +1 καὶ ὁ —1. 235. $57/28$. 236. $-9/4xy^7$, $-9/20x^4y$. 237. α_1/α_v . 239. $(6-27\alpha)/14$,

- $(7x+1)/8$, $(14\alpha-11\beta)/4\alpha$, $(7x+2y)/6xy$. **241.** $11/9$, $-55/7$, $-43/54$. **242.** $-2/7$, $5/14$, $-19/9$. **243.** $x=12$, $x=3$. **245.** $5/13$, $4/5$. **257.** 2. **258.** 0. **259.** i) $x=-4$ ή 10, ii) $x=1$ ή -3 . **261.** $|x|$. **262.** $(x-|x|)(y-|y|)$. **263.** $v=6$. **271.** Ὑπολ. 1. **272.** 0. **273.** 1. **274.** δ) $9x^{-6}y^{-5}$. **275.** β^3/a^4 . **277.** $S_1S_{v+1}=S_{v+2}+S_v$. **279.** $-7 < -3/2 < -\sqrt{2} < -1 < 1/6 < \sqrt{3} < 4 < 20$. **280.** Ὁ πρῶτος. **298.** -10 , $-5/6$, -1500 . **303.** $-3a^6\beta^3\gamma^4/16$, $243x^{13}y^{20}z^7$. **304.** x^2y . **305.** Ε.Κ.Π. = $30x^2y^5\omega^2$ καὶ $168x^4y^4\omega$. Μ.Κ.Δ. = $3xy\omega$ καὶ $2yx$. **306.** $66a^3\beta^6\gamma^4$, $a^4\beta^4$. **308.** $-2y/11$, $-x^2z^3/2$, $-\beta\gamma^2/22$, $3x^2\omega$, -1 . **311.** $x^4-3ax^3+4a^2x^2-3a^3x+a$, $-y^2x^5-2y^5x^3+(y^2-2y^3+2y^4)x^2-y^3$. **312.** 1ον καὶ 3ον. **313.** $(10x^4y^4-8x^3y^5)-(x^5y^2+2x^4y^3)+2x^4y^2+(y^3+3xy^2)$. **314.** $6x^3+5x^2-3x-6$, -10 , $+6$, -4 . **315.** $2x+y-7z$, $4x^2y-6xy^2$, $xy+2zy$. **318.** x^3-1 , $x^3+8y^3+4xy^2-4xy^3$, $0,48x^3-0,02x^2+2,49x-5,55$, $81x^4-256y^4$. **319.** μ. **320.** $\mu+v$. **321.** iii) $-2\mu^3-4\mu^2v+6v^3$. **322.** iii) $-4,32x^4+2,01x^2+8,91$. **325.** $3x-7$. **327.** 2α καὶ 4η ὄχι. Αἱ λοιπαὶ: $(\alpha+\beta-\gamma)^2$, $(-x^2+y^2+z^2)^2$, $(x-y+2)^2$. **329.** iv) $a^8-256\beta^8$, v) $4x^2+12x+9-\mu^2$. **330.** ii) x^4+1 , iii) $x^8+y^8-2x^4y^4$, iv) x^6+1 . **331.** i) $4(xy+zx-2zy)$, ii) $4a\beta\gamma$. **332.** i) $6a^2\beta$, ii) $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$, iii) $8x^3$. **336.** T: $4xy, 6x, 10y, 30xy, 36mn, 322k, 36xy^3, 66a\beta, 4y^2$. **337.** 2α καὶ 4η ὄχι. Αἱ λοιπαὶ: $(\alpha+\beta-\gamma)^2$, $(-x^2+y^2+z^2)^2$, $(x-y+2)^2$. **338.** Τὸ 4ον μόνον δὲν εἶναι. **339.** $2a^3$, x^6-a^6 . **340.** 13, 35, 1, 19. **341.** 2. **347.** i) $x^5-(2y)^5$: $x-(2y)$, vi) $y^6-(-2)^6$: $y-(-2)$, vii) $(3x)^5+2^5$: $(3x)+2$. **349.** $a^5-\beta^5$, x^3-a^3 , x^3+a^3 , x^4-a^4 . **353.** $1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$, $x^4+7x^{12}+21x^{10}+35x^8+35x^6+21x^4+7x^2+1$, $65336-131072x^3+110668x^6-57344x^9+17920x^{12}-3584x^{15}+448x^{18}-32x^{21}+x^{24}$. **355.** $101^7=1061520150601$. **357.** $\{3a^6-5(a^3-\beta^3)\}/3a-10$ $(a^3-\beta^3)/9a$. **360.** $(x+5)(x-7)$, $(3a-2\beta)(x^2-3)$, $(3a-2\beta)(x-y)$, $(x^2-y^2)(7a+4)$, $(x+y)(5a+3)$, $(x+y)(a-5\beta+3)$, $(x-3)(y-4)$, $(\alpha+\beta)(2a-1)$, $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$, $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$. **361.** Πηλίκον: $2^{17}+2^5+1$, ὑπόλ. 2^{20} . **364.** i) $(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$, ii) $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, iii) $(\beta+\delta)(\beta-\delta)(\alpha+\gamma+\beta-\delta)$, iv) $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$. **365.** $(x^2+y^2)(x+y+z)(x+y+z)$, $(x^2+6x+18)(x^2-6x+18)$, $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. **368.** Ὁχι. **370.** vii) $x^2\{(x\sqrt[3]{5})^3+(y\sqrt[3]{16})^3\}=x^2(x\sqrt[3]{5}+y\sqrt[3]{16})\{(x\sqrt[3]{5})^2-xy\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{16}+(y\sqrt[3]{16})^2\}$. **371.** $(x-y)(x^2+xy+y^2+1)$, $(a^\mu-1)^2(a^\mu+1)(a^{2\mu}+a^\mu+1)$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$. $(a^2+\alpha\beta+\beta^2)$. **373.** $(\alpha-\beta)(\alpha-3\beta)$, $(1-2x)(3-8x-2y)$, $(2x+1)(2x-5)(2x+3)(4x-1)$, $(x+5)(6x-5)$, $(5x-3)(3x-2)$, $(x+1)(x+2)$, $2(x-y)(10x+19y)$. **374.** $(a+2)(a-2)(a^2-5)$, $(x-y)x^3(x-4y)$, $(x-1)(x^2+x+2)$, $(x-1)(2x^2+2x+1)$, $(x-1)(3x^2+3x+2)$, $(x-1)(3x^2+3x+1)$, $(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)$. **376.** iii) $(3x+2)(81x^4-54x^3+36x^2-24x+16)$. **377.** iv) $(x^4+1)(x^8-x^4+1)$, v) $(x^\mu+y^{2v})(x^{2\mu}-x^\mu y^{2v}+y^{4v})$. **378.** $(x+y-3)^2$, $(-x+2y+5)^2$, $(3x-2y+4)^2$, $(5a+2\beta-3\gamma)^2$, $(xy+2y-xz)^2$, $(6a-3\beta+4)^2$, $(3x+4y-z+3a)(3x+4y-z-3a)$, $(-2a+3\beta+5\gamma)^2-(4\delta)^2$, $(2x+3y-z+4k)^2$, $(2a+3\beta+5\gamma-4\delta)^2$, $(|xy|-2\omega)^2$, $\{|x|+|y|+|z|\}$. **379.** $(9x^2+2)^2-(5x)^2$, $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2+2x-4y-6)$, $(x+2y-3)^2-(4z)^2$, $(2x-3y)^2-(5z-4)^2$. **380.** $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma)$. **381.** $(xy^2-1)(yz^2-1)(zx^3-1)$. **384.** Ἡ πρώτη φέρει 385, ἡ δεύτερη 389, ἡ τρίτη 393, ἡ τέταρτη 397, ἡ πέμπτη 399, ἡ ἕκτη 403. **396.** i) $x=2$, $y=3$, $\omega=-4$. **417.** -2 , -1 , 0 , 1 , 2 . **418.** $+2$, $+3$, $+4$, $+5$. **425.** $x=1$.

432. $|z| = \alpha\lambda/(\lambda^2 - 1)$. 440. $x \leq a$, $x \geq \beta$. 448. $2c_1 = |a + \beta| + |a - \beta|$, $2c_2 = |a + \beta| - |a - \beta|$. 453. Έάν τεθῇ ἡ ἀντιστοιχία $1 \rightarrow \gamma$, $2 \rightarrow a$ τότε $f(1) = \gamma$, $f(2) = a$. Αἱ δυνατόι ἀπεικονίσεις εἶναι 6: $\begin{cases} 1 \rightarrow a, 1 \rightarrow a, 1 \rightarrow \beta, 1 \rightarrow \beta, 1 \rightarrow \gamma, 1 \rightarrow \gamma \\ 2 \rightarrow \beta, 2 \rightarrow \gamma, 2 \rightarrow a, 2 \rightarrow \gamma, 2 \rightarrow a, 2 \rightarrow \beta. \end{cases}$ 454. Αἱ δυνατόι μονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις εἶναι 6: $\{1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3\}$, $\{1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2\}$, $\{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3\}$, $\{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}$, $\{1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2\}$, $\{2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1\}$. 455. $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $f(10) = 4$, $f(p) = 2$, $f(p^2) = 3$. 456. $f(-4) = 6$, $f(36) = 18$, $f(1) = 2$, $f(p) = 4$, $f(p^2) = 6$. 457. $\sigma(0) = 0$, $\sigma(-1/7) = 0$, $\sigma(4/3) = 0$, $\sigma(2) = 60$, $\sigma(-1/3) = 20/9$. 458. $(a + \beta)/(a - \beta)$. 460. Ἐμβ. κύκλου $= x^2/4\pi$. 461. $(2a - 1)/(2a + 1)$. 462. 19, 8/11, -79, $-a^4 - 2a^2 + 2$, $3a^4 - 2a^2 + 8$. 463. $3(3^V - 1)/2$. 464. 4, $3y - 2x + 4$, $-3x + 2y + 4$ κ.τ.λ. 467. Λύσεις: $-2/7$, 1, 17/6, 150/153, 13/5. 468. Λύσεις: -29 , 33/23, 407/7, $-3324/83$, 13/6. 469. Λύσεις: $-11/16$, 9/13, 254/135. 470. Ἀδύνατος, ταυτότης, ταυτότης. 471. i) $x = 1$ ἢ $1/2$ ἢ 4, ii) $x = 0$ ἢ 2 ἢ -2, iii) $x = -1/4$ ἢ -2. 472. i) $x = 0$ ἢ 1 ἢ 14, ii) $x = 0$ ἢ 8/3, iii) $x = 1$ ἢ 2 ἢ 4. 473. i) $x = -13/6$, 0, 3/2, ii) $x = 1/6$, 4/3, iii) $x = 3/2$, 7/3. 474. i) $x = 1, 4$, ii) $x = 1, 1/2$, iii) $x = -2$, iv) $x = 1/6, 4/3$, v) $x = -6, -7$. 475. i) ἂν $a \neq 2/3$, μία λύσις: $17/(3a - 2)$. ii) ἂν $a = 2/3$, ἀδύνατος. 476. i) ἂν $a = 0$, ταυτότης, ἂν $a \neq 0$, $\beta \neq 0$, δύο λύσεις: 0, γ/β , ἂν $a \neq 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, μία λύσις $x = 0$ ἂν $a \neq 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ταυτότης, ii) ἂν a, β, γ ὄχι ὅλα ἴσα: μία λύσις, $x = (a + \beta + \gamma)/3$ ἂν $a = \beta = \gamma$, ταυτότης. 477. i) ἂν $a \neq -1 \Rightarrow x = \beta$, ἂν $a = -1$, ταυτότης, ii) ἔάν $a + \beta \neq 0 \Rightarrow x = (a - \beta)/2$, ἂν $a + \beta = 0$, ταυτότης. 478. i) $x^4 - 19x^2 - 6x + 72$, ii) $(x^2 + x - 6)(x^2 - x - 12)$, iii) 72, 0, 0, iv) $x = -3, 2, 4$. 479. $x = 5/3$ ἢ $-15/7$. 480. α) $-5 \leq x \leq -2$, β) $0 < x < 2$, γ) $-2 < x < 0$, δ) $7 \leq x < 9$. 481. $3.4 \leq x \leq \sqrt{12}$. 483. 904. 484. i) $x > 22/7$, ii) $x < 47/4$. 485. i) $x > 2$, $x < -21/4$, iii) ὄχι. 487. i) Εἶναι, ii) ὄχι. 488. i) $1/6 < x < 5/12$ ἢ $5 < x < 11$, ii) $-2/5 < x < 4/3$, $2 < x < 3$, $3 < x < +\infty$. 489. $5 < x < 11/2$. 490. $1 < x < 4$. 491. $-7 < x < -4$. 492. $8/3 < x < 32/9$, $14/3 < a + \beta + \gamma < 56/9$. 493. i) ($x = 1/2$, $x = -2$), ($x = 1$), ($x = 50/21$, $x = -10$), ($x = 0$, $x = 2/11$), ($x = 1/6$, $x = 2$, $x = -1/5$), ii) ἀμφοτέραι ἀληθεύουν $\forall x$. 494. 1η, 2α ταυτότητες, 3η, 4η, ἐξισώσεις. 501. $\{x = (13 - 5v)/2, y = v\}$ ὅπου $v = 1, 2, 3, \dots$. 502. i) (3, 1), ii) (2, -4). 503. i) (45/7, -5/7), ii) (3, 5). 504. i) (-2, 1), ii) (-2/5, 29/5). 505. i) (8, 48), ii) $x = t$, $y = (12 - 3t)/4$, t αὐθαίρετος. 506. i) Καμία λύσις, ii) (6, 0). 507. i) (4, -7), ii) (-8, 1). 508. i) ($a = 5/2$, $\beta = -3$), ii) ($a = 3/2$, $\beta = -4$). 509. i) (2565/178, 851/890), ii) $-16/55$, 222/165). 510. $a = -23/17$, $\beta = 28/17$. 511. 33, -16, 42, 0, 2. 512. i) ἀόριστον: ($x = \text{τυχόν}$, $y = 3$), ii) ἀδύνατον. 513. "Αν $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$, μία λύσις. "Αν $\lambda = 0$ ἄπειροι λύσεις. "Αν $\lambda = 1$, ἄπειροι λύσεις. 514. $\mu = (14a - 37\beta)/64$, $\rho = (2a + 3\beta)/16$. 515. $\mu = -1$. 516. (3, -2, 2). 517. (2, 5, 3). 518. (10, -2, 8). 519. (-1, 3, -2). 520. (3/2, -2, 7). 521. (2, -1, -5). 522. (5, 8, 2). 523. (0, -4, 0). 524. (260/31, 37/31, -78/31). 525. $x = -(a + \beta + \gamma)$, $y = a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $z = -a\beta\gamma$. 526. (125, 240, 235, 175). 527. (1, 2, 3, 4). 528. Διὰ $(\mu - 1)\mu + 2 \neq 0$, μία λύσις. Διὰ $\mu = -2$, καμία λύσις. Διὰ $\mu = 1$ ἄπειροι λύσεις: x, y τυχόντες, $z = 1 - x - y$. 529. "Εάν $\mu(3\mu + 7) \neq 0$, μία λύσις: $x = 12(\mu + 1)/(3\mu + 7)$, $y = 4/(3\mu + 7)$, $z = 12/(3\mu + 7)$. "Εάν $\mu = -7/3$, καμία λύσις. "Εάν $\mu = 0$ ἄπειροι λύσεις: $x = t$, $y = t$, t αὐθαίρετος.

- τος, ii) $x=(42-7z_0)/2$, $y=(5z_0-18)/2$, $z=z_0$ (τυχόν). **531.** (1/7, 1/4), (-3/2, 4/3). **532.** (1, 3, 3), (4, 3). **533.** (49/125, 49/39, 7/16). **534.** (2, 3, 4). **535.** $x=1/10$, $y=1/5$, $z=3/10$, $t=2/5$. **536.** (7, 10, 13). **537.** (0, 0) και (7/11, 7/5). **538.** (9/7, 36/25, 26/23). **539.** 24, -43, 92, 137. **540.** $-2\alpha\beta, \alpha(\gamma-\delta)$, $3\alpha\beta\gamma - \alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3$. **541.** -43, 0. **542.** 1, 7. **543.** 7200, 9576, -1980. **544.** $x=-8/3$. **547.** $x(x-1)(x+11)$. **549.** $x=\alpha$ ή $\beta, x=4, x=-11/9$. **551.** (2, 1, -1). **552.** (1, 3, -2). **553.** (1, -2, 1/2). **556.** $x=\beta+\gamma-\alpha$, $y=\gamma+\alpha-\beta$, $z=\alpha+\beta-\gamma$. **557.** $\lambda \neq 4$ μία λύσις, $\lambda=4$, καμμία. **558.** Πάντοτε άπειροι λύσεις. **563.** $\alpha+\beta=\gamma$. **568.** (19, 0, 0), (0, 0, -19/3), (0, 19/2, 0). **569.** (1, 1, 1). **572.** Άπέχει από της Α, 670.8 km. **573.** 470 ή 581 ή 692. **574.** Όκταδικόν. **575.** 23 ή 46. **576.** Ό πρώτος είχε, 13α/8. **577.** Α: 10 ωρ, Β: 12 ωρ, Γ: 6ωρ. **578.** 37,5 μέρη ψευδαργ. και 37,5 χαλκού. **579.** 375 βήματα. **580.** $(\alpha-2\beta+\gamma)/2$. **581.** $\gamma=\alpha\beta/(\alpha+\beta)$, $|\alpha^2-\beta^2|<\alpha\beta<(\alpha+\beta)^2$. **582.** $\alpha(h-\tau)/(h-\alpha)$, $h(\tau-\alpha)/(h-\alpha)$. Πρέπει ό τ να περιέχεται μεταξύ α και h. **583.** 216 ώρας. **584.** i) $8^h 43^{\text{min}}$. $38,2^{\text{sec}}$, ii) $8^h 10^{\text{min}}$. $54,5^{\text{sec}}$. **585.** Ταχύτης $=21,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ μήκος $=150,5 \text{ m}$. **586.** 30,7 km. **587.** i) 18km/h, 15km/h, 24km/h, ii) μετά 11 ώρ. 15 λεπτά. **588.** i) $140\alpha^3\beta^2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3, 5$ $15(4x^2-25y^2)^2(x+\gamma)$. **589.** i) 1/3, ii) $1/(x^2-25)$. **590.** i) 0 ii) 1. **593.** i) 0, ii) 1. **594.** i) $(\gamma^2-\alpha^2)/\alpha^2\gamma^2$, ii) $2(\alpha+\beta+\gamma)$, iii) $xy+yz+zx$. **595.** 1. **596.** $x^2+y^2+z^2-\beta^2-\gamma^2$. **598.** ii) $(\alpha+\beta)/4(\alpha-3\beta)$. **599.** $-(x+y)/(x^2+3xy+9y^2)$, $(x^2-4y^2)y^2(x+y)^2/(x^4-4x^2y^2+y^4)$. **600.** 2. **602.** iii) $(x+4)(x-7)/(x-5)$. **603.** ii) $-32/3(3m+2n)$, iii) $-(1/x^2(x-1)^2)$. **604.** i) x^3+y^3 , ii) $-1/x(x+1)$. **605.** i) $(\alpha+\beta+\gamma)^2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)/2\beta\gamma(\beta+\gamma)(\beta-\gamma-\alpha)$, ii) $\beta\gamma$. **606.** $x=12$, $x=4$, $x=1$. **607.** $x=4$, $x=9/2$, $x=-1/2$. **608.** α) $x=\pm\sqrt{5/2}$, β) $x=1/5$, $x=7/5$, γ) $x=19/13$. **609.** $x=3$, $x=-3$. **610.** α) $x=0$ και $x=2/(a+\beta)$ έφ' όσον $\alpha\beta(a+\beta)\neq 0$. Έάν $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta\neq 0$ τότε $x=0$. Έάν $\alpha\beta=0$, ταυτότης. β) Έάν $\alpha\neq\beta$, $(\alpha-\beta)^2\neq 1$, μία λύσις: $x=\frac{\alpha+\beta+3}{2}$. Έάν $\alpha=\beta$, ταυτότης. **611.** α) $x=(\alpha^2+\beta^3)/(\alpha-\beta)$. β) Έάν $\alpha\neq 0$ τρεις λύσεις, $x=0$, $x=\pm\alpha\sqrt{5/2}$. Έάν $\alpha=0$, ταυτότης. **612.** i) $\frac{1}{2}<x<\frac{8}{5}$, ii) $x>2$ ή $-\frac{11}{5}<x<-\frac{1}{3}$. **613.** $17/8<x<5/2$, $5/2<x<4$. **614.** $-2/3<x<0$ και $6/11<x<2/3$. **615.** i) $x=-2$, $-1<x\leq -1/2$, $0<x\leq 1/2$, $x>2$, ii) $0\leq x\leq 9/5$. **616.** α) $x<-3$, $-2<x<-1$, $x>1$, β) $x<-3$, $-2<x<-1$, $x>1$. **617.** α) διό $2\lambda-3>0$, λύσις είναι $x<(\lambda^2-12\lambda-2)/(2\lambda-3)$, διό $2\lambda-3<0$ λύσις: $x>(\lambda^2-12\lambda-2)/(2\lambda-3)$, διό $2\lambda-3=0$ άδύνατος. β) Έάν $(\lambda+1)(4-2\lambda)>0$, είναι $x>(5-4\lambda)/(4-2\lambda)$. Έάν $(\lambda+1)(4-2\lambda)<0$, τότε $x<(5-4\lambda)/(4-2\lambda)$. Έάν $(\lambda+1)(4-2\lambda)=0$, ούδεμία λύσις. **618.** Έάν $\lambda<-2$ ή $\lambda>2$ τότε $x<5(\lambda-1)/(\lambda^2-4)$. Έάν $-2<\lambda<2$, τότε $x>5(\lambda-1)/(\lambda^2-4)$. Έάν $\lambda=2$, καμμία λύσις. Έάν $\lambda=-2$ άληθεύει διό πών x. **619.** α) Έάν $\mu>1$, τότε: $x<-(\mu+1)/(\mu-1)$ ή $x>1$. Έάν $\mu<1$ άληθεύει διό τιμάς του x μεταξύ 1 και $-(\mu+1)/(\mu-1)$. Έάν $\mu=1$ τότε $x>1$. β) Έάν $\alpha-\beta>0$ και $\alpha\beta>0$: $x<-\sqrt{\alpha\beta}$, $0<x<\sqrt{\alpha\beta}$. Έάν $\alpha-\beta>0$, $\alpha\beta<0$: $x<0$. Έάν $\alpha-\beta<0$, $\alpha\beta>0$: $-\sqrt{\alpha\beta}<x<0$, $x>\sqrt{\alpha\beta}$. Έάν $\alpha-\beta<0$, $\alpha\beta<0$: $x>0$. **620.** Έάν $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\pi+\beta\mu)>0$, τότε $x>(\alpha\nu-k\beta)/(\alpha\pi+\beta\mu)$. Έάν $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\pi+\beta\mu)<0$, τότε $x<(\alpha\nu-k\beta)/(\alpha\pi+\beta\mu)$.

621. i) $x < -1/2$, $x > 1/4$, ii) $x < -1$, $0 < x < 1$, $x > 5/2$. 624. 21. 631. $\sqrt{ax}$, $1/\sqrt{a\beta}$. 635. $|a|$, $|a|\sqrt{3}$, $|a\beta|\sqrt{a}$, $|x(x+1)|/\sqrt{x}$, $|am|\sqrt{5m}$. 636. $6\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $10\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$, $9\sqrt{3}$. 637. $|x+1|$, $|x-2|$, $|x(3x+1)|$, $3|x-y|\sqrt{6(x-y)}$. 638. $10-3\sqrt{6}$, -4 , $3\sqrt{5}-1$, $-14+5\sqrt{3}$. 639. $11\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}/3$. 641. -2 . 642. i) 96 , ii) $6(\sqrt{2}-\sqrt{6})$. 643. $9\sqrt{7}$, $5+2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{\frac{\mu\nu}{a^3}}$. 644. $6\sqrt{2}$. 649. μ . $\dot{\alpha}\rho\mu. \leq \mu$. $\gamma\epsilon\omega\mu. \leq \mu$. $\dot{\alpha}\rho\iota\theta\mu.$ 652. 0. 654. 5, 0. 655. 4. 656. 0,27. 658. i) $-(40+11\sqrt{6})/38$, ii) $x=(41-\sqrt{2})/46$. 659. $x=\sqrt{3}$. 660. $-2/11$. 663. i) $x \leq 0$, $y=-2(x^2-4)$, $x > 0$, $y=-2(x-4)$, ii) διὰ $x=-2$, $x=4$. 664. $2(4x^2-y^2-2xy)/(x^2-y^2)$. 665. Διὰ $x \leq -1 \rightarrow y=-2$. Διὰ $-1 < x \leq 1 \rightarrow y=2x$. Διὰ $x > 1 \rightarrow y=2$. 667. Διὰ $x < -2 \rightarrow -\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. Διὰ $x > 2 \rightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. Διὰ $-2 < x < 2$ τὸ κλάσμα δὲν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. 668. Διὰ $x > 2 \rightarrow \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$. 669. $x\sqrt{a^2-a^2}$. 670. $-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$, $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$. 671. 1, 1. 672. $6(7 \pm 4\sqrt{3})$. 682. ii) 1ον) $\sqrt{5/2} + \sqrt{3/2}$, 4ον) $1 + \sqrt{18}$. 684. $7/13$. 686. $\sqrt{3}/3$. 688. $5+3\sqrt{3}$. 689. i) Ὁ πρῶτος, μεγαλύτερος, ii) $2-\sqrt{3}$. 690. $1/2$. 691. $\sqrt{10} + \sqrt{2}$. 696. $-1,52594$. 697. $-212,699$. 698. 1) $(2x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}) \cdot (2x^{\frac{1}{3}}-3y^{\frac{1}{3}})$ 5) $(a^{\frac{1}{3}}-2b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}})$. 699. i) $(x^{1/2}-y^{1/2})y^{1/4}/x^{1/4}$, ii) $x^{1/4}+2x^{3/8}+1$. 700. i) $a^{3/2}-2x^{1/4}$. 701. $(a/\beta)^{a+\beta}$. 703. $1/\beta \dot{\alpha}\nu \beta > 1$ καὶ $\beta \dot{\alpha}\nu \beta < 1$. 704. $a+\beta$. 705. $x=5$, 11, 24, 3. 706. $x=2$, $x=11$, $x=6$. 707. 2, $1/2$. 708. i) δὲν ἔχει λύσιν, ii) δὲν ἔχει λύσιν. 709. i) $x=1/2$, ii) $x=1/4$. 710. i) $x^{1/8}$, ii) $x=4$. 711. $x=4$. 712. i) $x=1$, ii) $x=5/4$. 713. i) $x=1/4$, ii) $x=16/25$, iii) $x=1$. 714. $x=2$. 715. α) $x=\pm\sqrt{3867}=\pm 62,185$, β) $x=0$, $\pm\sqrt{5/2}$. 716. α) $x=1, 2, 10$, β) $\hat{x}=2/3$. 717. Διὰ $a > 2$, $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2-1}}$. 718. Πρέπει: $2 < a^2 < 4$ ὅποτε $x=\varepsilon\sqrt{\frac{4}{a^2(4-a^2)}}$ ὅπου $\varepsilon=\text{σημ}(a)$. 719. Πρέπει $0 < a \leq 1$, $x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$. 720. Ἐχει πάντοτε λύσιν, $x=3|a|/4$. 721. Διὰ $a < 0$, λύσεις: $x=-2a$, διὰ $a > 0$ δὲν ἔχει λύσιν. 722. Πρέπει $a < 0$ καὶ $a^2 < \beta^2$ ὅποτε ἔχει λύσεις: $x=0$, $x=\frac{5a^2-\beta^2}{4a}$. 723. Ἡ λύσις $x=0$ ὑπάρχει πάντοτε. Διὰ νὰ ἔχη καὶ ἄλλας λύσεις πρέπει $\frac{1}{2} < \frac{a}{\beta} < 1$ ὅποτε $x=\pm\sqrt{\frac{2a-\beta}{a^2\beta}}$. 724. Ἐὰν $a > \beta$ τότε, $x=\beta$. Ἐὰν $a < \beta$ τότε $x=a$. Ἐὰν $a=\beta$, τότε $x=a$. 725. Λύσις ὑπάρχει ὅταν $\beta-a \geq 2$: $x=\{(\beta-a)^2+4(\beta+a)+4\}/4$. 726. Ἐχει πάντοτε λύσιν: $x=\{(a+\beta+\gamma)^3-27a\beta\gamma\}/(a^2+\beta^2+\gamma^2-3a\beta-3\beta\gamma-3\gamma a)$ ὅταν a, β, γ ὄχι ὁλοῦς καὶ $x=0$ ὅταν $a=\beta=\gamma$. 727. α)

- $(A+B-\Gamma)^2 = -37AB\Gamma$, $\beta) (A+3B\Gamma+\Gamma^2)^2 = 9B(B+\Gamma^2)^2$. **728.** Μόνον όταν $t < -2$ ή $-\frac{1}{2} < t \leq 0$ έχει λύσιν: $x = (t^2 - 4t)/(4t + 2)$. Διά $t = 0$ ή -2 ο x άκέρ. **729.** (10, 27). **730.** (1, 1/2). **731.** (16, 25). **732.** Καμμία λύσις. **733.** 0,316, 2,529, 0,880, 5,162. **734.** 0,378, 3,78, 2,787, 0,882. **735.** 0,22, 1,50, 0,81. **736.** i) $7,38 < e^2 < 7,39$, ii) $12,7 < e^2 \sqrt{3} < 12,8$. **737.** $v, v+1, v, v+1$. **738.** 'Ο $v+1$. **739.** Προσεγγ. $x^3/16$. **740.** $4a+1, 2a+1, a+1$. **744.** 1, 11, 2, -8. **745.** 'Αντιστρόφως ανάλογοι μοναδιαίων. **749.** -7, 7. **750.** 0. **751.** 0. **752.** -1. **753.** $2a-x, 2\beta-2a+x, \overline{MM}_2 = 2\overline{AB}, 4a-2\beta-x, x=2a-\beta$. **754.** 4, $(3k+8)/(2-k)$, $k \neq 2$. **755.** 7, 4. **756.** 11/8, 8/11, 11/3, -3/8, 3/11, -8/3. **758.** $\Gamma\Delta = 8$. **759.** $\sqrt{3}$, 2. **760.** 1/5. **761.** $\overline{AB} = 66\text{mm}$, 0. **762.** $x_M = vt + 8, x_p = v_1t + 4, v_1 = 1, v = -3, MP = 28$. **763.** i) $t = 1$, ii) $t = 0, t = 6$. **764.** i) $x_M = -4t + 3, x_p = 2t - 9$, ii) $t = -3$. **768.** $\Delta(-2, 4)$. **769.** $\Delta(4, -2)$. **771.** (3, 7). **772.** 5. **775.** $\approx 1,35, 3,7, -1,35, -1,67$. **781.** (4/3, 13/3). **787.** $y = -2x - 4$ ή -2 ή $2x - 6$, $x < -2 \Rightarrow y > 0, x > 3 \Rightarrow y > 0, -2 < x < 3 \Rightarrow y < 0$. **794.** i) (35, 7), ii) (0, 1). **796.** 9 cm^2 . **797.** $ax + \beta y = a^2 + \beta^2$. **798.** $y = ax + \beta^2$. **807.** $A(8/5, 16/5), B(1/2, 1), \Gamma(6, 1), (AB) = 11\sqrt{5}/10, B\Gamma = 11/2, A\Gamma = 11\sqrt{5}/5, 3y = -4x + 16, 9y = -2x + 21, 6y = 2x + 5$. **808.** $\sqrt{26}, \sqrt{13}, a(t^2 + 1)^2/t^2$. **811.** $\xi = \frac{2A.H(\xi, \eta)}{A^2 + B^2}$, $\eta = \frac{2B.H(\xi, \eta)}{A^2 + B^2}$. **812.** $\left(\frac{55}{29}, \frac{47}{29}\right)$. **813.** 7, 13/2, 8, $c^2, |1 - 2\lambda^2|$. **814.** $a = 1$. **815.** 13,5 τετρ. μον. **817.** $(-\Psi, X)$. **819.** Συμμετρική. **820.** 'Αντισυμμετρική. **821.** Συμμετρική. **822.** Είναι σχέσις τάξεως. **823.** Παράλληλιαν. **824.** 'Ολικής τάξεως. **825.** $\{(2, 1), (3, 2), \dots, (v+1, v)\}$ και $\{(0, 1), (1, 2), \dots, (v, v+1)\}$. **826.** Δύο. **827.** Δύο. **829.** Τρείς. **831.** 'Οχι, ναί. **834.** Δακτύλιος. **835.** Δομή σώματος. **836.** 248. **837.** (30, 45, 60, 90). **839.** 1. **840.** $3x/\sqrt{1-x^2}$ ή $-3x/\sqrt{1-x^2}$ καθ' όσον $4x^2 < 1$ ή $4x^2 > 1$. **841.** $x = \lambda$ έφ' όσον $\lambda \geq 3$. **842.** $\lambda < -1 \Rightarrow x = 0, \lambda = -1 \Rightarrow$ κάθε αριθμός $< 1/2$ είναι λύσις, $-1 < \lambda < 1 \Rightarrow x = 0, x = -2/(\lambda - 3), \lambda = 1 \Rightarrow x = 0$ και κάθε $x \geq 1, \lambda > 1 \Rightarrow x = 0$. **843.** $x = 6$. **844.** $\lambda < 0 \Rightarrow$ καμμία λύσις, $\lambda = 0 \Rightarrow$ κάθε $x \geq 0$ είναι λύσις $\lambda > 0 \Rightarrow x = \lambda/3$. **845.** $x + z = 2y$ ή $x + z = -y$. **847.** $\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$ μία λύσις $\lambda = 2$, ταυτότης $\lambda = 0$ ή $-2 \Rightarrow$ καμία λύσις. **848.** 1/200. **849.** $(1+x^2)/(1-x^2)$. **850.** $2(x+y+z)$. **851.** i) $(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow x = 0$, και $x = (-4t+5)/(t+1), (t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$, ii) $t = (q-k)/k$ όπου k άκέραιος $\neq 4$ και $\neq 6$. **852.** (4/5, -3/5) και (-2/5, 9/5). **853.** $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow$ μία λύσις, $\lambda = -1 \Rightarrow$ καμμία, $\lambda = 1 \Rightarrow$ άπειροι λύσεις. **854.** $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0 \Rightarrow$ μία λύσις, $\lambda = 1$ άπειροι λύσεις, με δύο άγνωστους αυθαίρετους, $\lambda = -2 \Rightarrow$ καμμία λύσις. **855.** $11/3 < m < 11/2, m = 5$. **862.** $\alpha < \beta + \gamma, \alpha^3 > \beta^3 > \gamma^3$. **868.** $-2x^3 + 126x^2 - 726x + 730$. **869.** $\beta^2 - 2\alpha\gamma$. **872.** $(ax + \beta y)/(ax - \beta y)$. **874.** 2 ή 3. **875.** 3969. **876.** 34. **881.** $v = 3$. **885.** $\{x|+3|y|\}, \{2|x|-|y|\}, \{x|+1|\}, \{2|x|-5|\}$. **886.** 21, 42, 63 λίτρα. **891.** $(x+y+z)(xy+yz+zx)$. **892.** $\alpha = 11, \beta = -6$ ή 7,6. **893.** $x = 3, y = 1$. **896.** $m \neq -1$, μία λύσις, $m = -1$ ούδεμία. **897.** $m = -1$. **899.** $\alpha = 6, \beta = 5$. **900.** (1, -2) ή (-1, 2). **901.**

i) $a \neq 0 \Rightarrow x = 2a/3$, $a = 0$, πᾶς ἀριθμὸς $\neq 0$ εἶναι λύσις, ii) $x = 0$ εἶναι πάντοτε λύσις. "Αν $a \neq 1$ καὶ $a \neq -1$, $x = a^2 - a - 1$. "Αν $a = -1$ ἄπειροι λύσεις. **902.** $a^2 - 1 \neq 0$ μία λύσις (a , 1 , $-a$). "Αν $a^2 - 1 = 0$ ἄπειροι λύσεις. **903.** i) $m = -1/12$, ii) $m =$ κάθε ἀριθμὸς. **904.** $x = 7$. **905.** $a = 8$, $\beta = 0$, $\gamma = 6$. **907.** 22, 25. **910.** i) $k = 9$ ii) $k = 5$. **912.** $1 - \sqrt{6} < x < 0$. **916.** $x = (a - \beta)/2$, $y = (a + \beta)/2$. **918.** $OA = \sqrt{5}$, $OB = 5$ $AB = 2\sqrt{5}$. **919.** 11111 ἢ 42857. **929.** $x = 10/3$. **932.** $x = B \cup C$ ὅπου C οἰονδήποτε ξένον πρὸς τὸ A . **935.** $1 < x < 2$ καὶ $3 < x < 4$. **936.** $69/4$, $y = 9/2$, $y = -3x + 6$. **937.** $a = 16/3$, $\beta = 16/9$. **942.** $\lambda \neq 2$, μία μόνη λύσις $(0, 0, 0)$. $\lambda = 2$, ἄπειροι λύσεις: $x = 3t$, $y = -2t$, $z = t$, t αὐθαίρετος. **944.** i) $16025/15^4$, ii) $N = 4\beta 35$, iii) $4/15 + 11/15^2 + 3/15^3 + 5/15^4$, iv) $0,4\beta 35$. **945.** $2/6 + 1/6^2 + 2/6^3 + 5/6^4 + 3/6^5$. **946.** $(x = 13, y = 4)$ ἢ $(x = 14, y = 4)$ ἢ $(x = 15, y = 4)$.

ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	σελ. 1	$]a, \beta]$	» 226
$\notin$	» 1	$[a, \beta[$	» 226
$\subseteq$	» 2	I	σελ. 35
$\subset$	» 2	σημ	σελ. 114
$\supseteq$	» 2	$a \equiv \beta \pmod{\mu}$	σελ. 135
$\supset$	» 2	$(a, \beta) = \delta$	σελ. 42
$\emptyset$	σελ. 3	$C_B A$	σελ. 4
$\cap$	» 3	A'	» 4
$\cup$	σελ. 4	Στερεότυπα σύμβολα συνόλων	
$\Rightarrow$	σελ. 22	Φ	σελ. 13
$\Leftrightarrow$	» 22	Φ_0	» 18
$\wedge$	σελ. 22	Π	σελ. 103
$\forall$	σελ. 206	A_k	σελ. 113
$\exists$	» 206	P	σελ. 132
$\exists?$	» 206		
$\rightarrow$	σελ. 207	A_k^+, A_k^-	σελ. 141
$[a, \beta]$	σελ. 226	Π^+, Π^-	» »
$]a, \beta[$	» 226		

$$i) a \neq 0:$$

λύσεις."Α

μία λύσ

κάθε άρ

$$ii) k=5$$

$$OB=5$$

οίονδήπ

$$y=-3x-$$

άπειροι

$$N=4\beta 3;$$

$$5/6^4+3$$

€

≠

⊆

⊂

⊃

⊄

∅

∩

∪

=

←

∧

∨

?

α

α





0020632515

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

