ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α/Γ = 151

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ

Ἐκ τοῦ βιβλίου τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων «ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ» (Βιβλίον I), ὡς ἐτροποποιήθη ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας ἐπιτροπῆς τοῦ Ὑπουργείου.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Περιγραφή γεωμετρικῶν τινῶν στερεῶν καί τῶν γεωμετρικῶν των στοιχείων.

§§ Σελίς

1 Φυσικά στερεά σώματα καί γεωμετρικά στερεά . . . . 1 Α
2 Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Εἴδη γραμμῶν καί ἐπιφανειῶν. . . . . 3 Α
3 Γένεσις μιᾶς γραμμῆς. Ἰδιότητες τῆς εὐθείας . . . 5 Α
4 Ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου. Παράλληλα ἐπίπεδα. Παράλληλοι εὐθεῖαι . . . . 7 Α
5 Τεμνόμεναι εὐθεῖαι. Τεμνόμενα ἐπίπεδα . . . . 10 Α
6 Ἰσότης γεωμετρικῶν σχημάτων . . . . 11 Α
7 Ὀρθογώνιον . . . . 12 Α
8 Ἀνάπτυγμα ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 13 Α
9 Κύβος . . . . 13 Α
10 Ὀρθόν πρῖσμα : . . . . 14 Α
11 Πολύεδρον. Πυραμίς . . . . 17 Α
12 Ὀρθός κυκλικός κύλινδρος. Κύκλος . . . . 19 Α
13 Σφαῖρα . . . . 21 Α
Ἀσκήσεις . . . . 23 Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Μονάδες μετρήσεως.

1 Μονάδες μήκους. Ἀσκήσεις . . . . 24 Α
2 " μετρήσεως γωνιῶν καί τόξων περιφερείας. Ἀσκήσεις . . . . 27 Α
3 Μονάδες ἐπιφανειῶν. Ἀσκήσεις . . . . 29 Α
4 " ὄγκου καί χωρητικότητος. Ἀσκήσεις . . . . 31 Α
5 " βάρους. Εἰδικόν βάρος. Ἀσκήσεις . . . . 33 Α
6 " χρόνου. Ἀσκήσεις . . . . 35 Α
Προβλήματα . . . . 35 Α

§§ ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Εἰσαγωγή εἰς τά σύνολα.

§§ Σελίς
1 Ἔννοια τοῦ συνόλου . . . . 36 Α
2 Παράστασις ἑνός συνόλου. Συμβολισμοί. Ἀσκήσεις . . 37 Α
3 Ὑποσύνολον συνόλου . . . . 40 Α
4 Τό κενόν σύνολον . . . . 42 Α
5 Γεωμετρική παράστασις συνόλων. Διαγράμματα. Ἀσκήσεις 43 Α
6 Ἴσα σύνολα. Ἀσκήσεις . . . . 45 Α
7 Ἰσοδύναμα σύνολα. Ἀσκήσεις . . . . 47 Α
8 Ἕνωσις συνόλων. Ἀσκήσεις . . . . 48 Α
9 Τομή συνόλων. Ἀσκήσεις . . . . 51 Α
10 Συμπλήρωμα συνόλου ὡς πρός ὑπερσύνολον. Ἀσκήσεις 52 Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

1 Φυσικοί ἀριθμοί. Τό μηδέν . . . . 54 Α
2 Δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως. Ἀσκήσεις . . . . . 57 Α
3 Ἑλληνική γραφή τῶν ἀριθμῶν . . . . 60 Α
4 Ρωμαϊκή ἤ Λατινική γραφή. Ἀσκήσεις . . . . 61 Α
5 Ἴσοι καί ἄνισοι ἀριθμοί . . . . 62 Α
6 Ἰδιότητες ἰσότητος καί ἀνισότητος . . . . 63 Α
7 Σύνολα ἀκεραίων ἀριθμῶν . . . . 65 Α
Ἀσκήσεις. Προβλήματα . . . . 67 Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Ἐπίπεδον. Ἡμιευθεῖα. Εὐθύγραμμα τμήματα.

Κυρτά καί μή κυρτά ἐπίπεδα χωρία.

1 Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Γένεσις αὐτῆς διά κινήσεως εὐθείας . . . . 68 Α
2 Ἀπεικόνισις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐπί ἡμιευθείας. Ἡμιάξων. 70 Α
3 Εὐθύγραμμα τμήματα . . . . 71 Α
4 Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις εὐθυγράμμων τμημάτων . . . 74 Α
5 Εὐθεῖαι τεμνόμεναι καί εὐθεῖαι παράλληλοι . . . . 76 Α
6 Κυρτά καί μή κυρτά ἐπίπεδα χωρία . . . . 79 Α
Ἀσκήσεις . . . . 82 Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

Γωνίαι

1 Ἡ γωνία καί τά στοιχεῖα της . . . . 83 Α
2 Γένεσις γωνίας μέ στροφήν μιᾶς ἡμιευθείας . . . . 85 Α

§§ Σελίς
3 Ἰσότης καί ἀνισότης γωνιῶν . . . . 87 Α
4 Γωνίαι ἐφεξῆς. Γωνίαι κατακορυφήν . . . . 89 Α
5 Μέτρησις γωνιῶν. Μοιρογνωμόνιον . . . . 90 Α
6 Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις γωνιῶν . . . . 93 Α
7 Συμπληρωματικαί καί παραπληρωματικαί γωνίαι. . . 96 Α
8 Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὅταν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθοῦν ἀπό μίαν μή παράλληλον . . . . 97 Α
9 Θέσις γωνίας ὡς πρός δοθέντα κύκλον . . . . . . 98 Α
10 Ἰσότης ἐπικέντρων γωνιῶν καί ἰσότης ἀντιστοίχων τόξων . . . . 99 Α
11 Κατασκευή μιᾶς γωνίας ἴσης πρός δοθεῖσαν μέ κανόνα καί διαβήτην . . . . 102 Α
Ἀσκήσεις . . . . 103 Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

Τετραγωνισμένος χάρτης.

1 Κατασκευή τετραγωνισμένου χάρτου . . . . .105 Α
2 Διατεταγμένα ζεύγη . . . . .106 Α
3 Γραφική παράστασις διατεταγμένων ζευγῶν μέ μέλη ἀκεραίους ἀριθμούς . . . . 107 Α
Ἀσκήσεις . . . . 109 Α

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

Πράξεις μέ ἀκεραίους ἀριθμούς.

1 Πρόσθεσις ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀσκήσεις. . . . . . 1 Β
2 Ἀφαίρεσις ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀσκήσεις . . . . 13 Β
3 Πολλαπλασιασμός ἀκεραίων. Ἀσκήσεις . . . . 25 Β
4 Διαίρεσις ἀκεραίων. Ἀσκήσεις . . . . 44 Β
5 Δυνάμεις ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀσκήσεις . . . . 56 Β
6 Δεκαδικόν καί δυαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως. Ἀσκήσεις 65 Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

Διαιρετότης.

1 Διαιρέται ἀκεραίου καί πρῶτοι ἀριθμοί. Ἀσκήσεις 70 Β
2 Κριτήρια διαιρετότητος. Ἀσκήσεις . . . . 75 Β
3 Ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας. Ἀσκήσεις . . . . 81 Β
4 Κοινοί διαιρέται. Μ.κ.δ. Ἀσκήσεις . . . . 84 Β
5 Κοινά πολλαπλάσια. Ε.κ.π. Ἀσκήσεις . . . . 90 Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

Συμμετρία. Καθετότης.

§§		Σελίς
1	Συμμετρία ὡς πρός σημεῖον εἰς τό ἐπίπεδον. Ἀσκήσεις	96 Β
2	Κάθετοι εὐθεῖαι. Ἀσκήσεις	102 Β
3	Συμμετρία ὡς πρός εὐθεῖαν εἰς τό ἐπίπεδον. Ἀσκήσεις	114 Β
4	Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ἴσα μέρη Ἀσκήσεις	126 Β

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

Κλάσματα

1	Ἀκέραιοι καί κλασματικοί ἐκτελεσταί. Ἀσκήσεις	1 Γ
2	Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις κλασμάτων	15 Γ
3	Πολλαπλασιασμός καί ἀφαίρεσις κλασμάτων. Ἀσκήσεις	20 Γ
	Ἀσκήσεις γενικαί εἰς τό κλάσματα	29 Γ
4	Δεκαδικά κλάσματα καί δεκαδικοί ἀριθμοί. Ἀσκήσεις	32 Γ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄

§§		Σελίς
1	Ἰσότης τριγώνων	50 Γ
2	Τό ἰσοσκελές τρίγωνον	54 Γ
3	Εἰδικά γνωρίσματα ἰσότητος ὀρθογ. τριγώνων . . .	56 Γ
	Ἀσκήσεις	59 Γ
4	Διανύσματα	60 Γ
5	Ὁ κύκλος	62 Γ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

1	Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	64 Γ
	Ἀσκήσεις	70 Γ
	Ἀσκήσεις ἐπαναλήψεως τοῦ ΜΕΡΟΥΣ ΤΡΙΤΟΥ	71 Γ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Περιγραφή γεωμετρικῶν τινων στερεῶν καί τῶν γεωμετρικῶν των στοιχείων.

§ 1. Φυσικά στερεά σώματα καί γεωμετρικά στερεά.

1.1 Διά τῶν αἰσθήσεών μας ἀντιλαμβανόμεθα τήν ὕπαρξιν στερεῶν σωμάτων εἰς τόν φυσικόν κόσμον πού μᾶς περιβάλλει, ἤτοι σωμάτων τά ὁποῖα ὡς ἐκ τῆς συνοχῆς τῶν μορίων των παρουσιάζουν σταθερόν ὄγκον καί σχῆμα ὑπό σταθεράν θερμοκρασίαν καί πίεσιν. Τοιαῦτα π.χ. σώματα εἶναι τό κτίριον τοῦ σχολείου μας, οἱ τοῖχοι, τά θρανία, ὁ μαυροπίναξ, ὁ κανών καί ὁ γνώμων σχεδιάσεως κτλ. Τά φυσικά αὐτά σώματα ἀποτελοῦνται ἀπό ὕλην καί ἔχουν ἑπομένως ὡς ἕνα πρῶτον κοινόν γνώρισμα τό βάρος των. Ἕν ἄλλο κοινόν γνώρισμά των εἶναι ὅτι καταλαμβάνουν μίαν περιωρισμένην ἔκτασιν ἐντός τοῦ ἀπεριορίστου χώρου (τοῦ διαστήματος) πού τά περιβάλλει καί ὅτι ὡς ἐκ τούτου ἔχουν ἕνα μικρότερον ἤ μεγαλύτερον ὄγκον. Ἐάν εἰδικῶς τοποθετηθῶμεν ἔμπροσθεν ἑνός ἐξ αὐτῶν, θά ἀντιληφθῶμεν ὅτι τοῦτο ἐκτείνεται ἐντός τοῦ χώρου κατά τάς ἑξῆς κατευθύνσεις: ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ἐκ τῶν ὄπισθέν μας πρός τά ἐμπρός καί ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι κάθε στερεόν σῶμα καθώς καί ὁ πέριξ χῶρος ἔχουν τρεῖς διαστάσεις. Ἕνα τρίτον κοινόν γνώρισμα τῶν φυσικῶν στερεῶν σωμάτων εἶναι ὅτι ἕκαστον παρουσιάζει μίαν ὡρισμένην μορφήν, ἕν ὡρισμένον σχῆμα. Ἡ μορφή αὐτή μᾶς γίνεται ἀντιληπτή ἀπό τήν ἐπιφάνειαν εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται τό σῶμα καί διά τῆς ὁποίας τοῦτο χωρίζεται ἀπό τόν περιβάλλοντα χῶρον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος εἰς τό φῶς παρουσιάζει καί ἕνα χρωματισμόν.

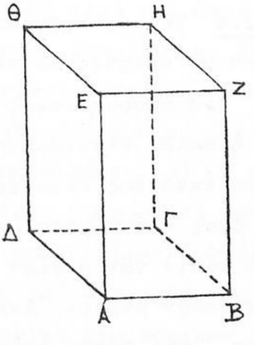
1.2 Αἱ ἀνάγκαι τῆς ζωῆς καί ἡ φιλομάθειά μας μᾶς ὡδήγησαν εἰς μίαν συστηματικήν μελέτην τῶν φυσικῶν στερεῶν σωμάτων, διηυκολύναμεν δέ αὐτήν τήν μελέτην ἐξετάζοντες πρῶτον τά στερεά σώματα χωρίς νά λαμβάνωμεν ὑπ'ὄψιν ἀπό ποίαν ὕλην ἀποτελοῦνται, προσέχοντες μόνον εἰς τά γνωρίσματά των τῆς ἐκτάσεως, τῆς μορφῆς καί τῆς τοποθετήσεώς των ἐντός τοῦ χώρου. Ἔτσι ἐγεννήθησαν οἱ δύο κλάδοι τῶν Μαθηματικῶν πού λέγονται Ἀριθμητική καί Γεωμετρία καί πού πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐκαλλιέργησαν συστηματικά.
Εἰς τήν Γεωμετρίαν εἰδικῶς ἐκεῖνο πού μελετῶμεν εἶναι ὁμοιώματα νοερά τῶν φυσικῶν στερεῶν σωμάτων, τά καλοῦμεν δέ πρός διάκρισιν γεωμετρικά στερεά καί, συντόμως, στερεά.
Ἕνα γεωμετρικόν στερεόν δέν εἶναι κάτι τό ὑλικόν, ἐπομένως δέν ἔχει βάρος καί ἡ ἐπιφάνειά του δέν ἐμφανίζει κανένα χρωματισμόν· εἶναι ἕνα δημιούργημα τοῦ νοῦ μας μέ μόνα γνωρίσματα: 1) τήν ἔκτασίν του εἰς τόν χῶρον κατά τρεῖς διαστάσεις, 2) τήν μορφήν του (τό σχῆμα του) καί 3) τήν δυνατότητα νά ἀλλάζωμεν τήν θέσιν του ἐντός τοῦ χώρου χωρίς νά μεταβάλλεται ἡ μορφή καί ὁ ὄγκος του.

1.3 Αἱ μορφαί τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν παρουσιάζουν μεγάλην ποικιλίαν καί πολλαί ἐξ αὐτῶν εἶναι περίπλοκοι. Διά τοῦτο ἡ μελέτη των ἤρχισεν ἀπό τήν ἐξέτασιν ἁπλῶν τινων μορφῶν καί τῶν στοιχείων πού ἠμποροῦμεν νά διακρίνωμεν εἰς αὐτάς.
Ἡ μετάβασις εἰς πολυπλοκωτέρας μορφάς δύναται νά γίνη κατόπιν μέ κατάλληλον σύνθεσιν τῶν στοιχείων τούτων. Ἔτσι

καί ἡμεῖς τώρα θά ἀρχίσωμεν ἀπό τήν περιγραφήν μερικῶν ἁπλῶν στερεῶν πού ἐγνωρίσαμεν καί εἰς τό Δημοτικόν Σχολεῖον καί θά ὑπενθυμίσωμεν ποῖα εἶναι τά γεωμετρικά στοιχεῖα τά ὁποῖα διακρίνομεν εἰς αὐτά. Εἰς ἑπόμενα κεφάλαια θά γίνη ἔπειτα μία συστηματικωτέρα μελέτη τῶν στοιχείων τούτων.

§ 2. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καί τά στοιχεῖα του. Εἴδη γραμμῶν καί εἴδη ἐπιφανειῶν.

2.1 Τό στερεόν πού εἰκονίζεται κατωτέρω ὀνομάζεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν πολλά φυσικά στερεά σώματα, π.χ. μία κασετίνα , ἕνα τοῦβλο, ἕνα κουτί σπίρτων κλπ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ ἀποτελεῖται ἀπό 6 διακεκριμένα μέρη· τά μέρη αὐτά λέγονται ἕδραι τοῦ στερεοῦ. Ἀνά δύο αἱ ἕδραι κεῖνται ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης καί δέν συναντῶνται, ἐνῶ δύο μή ἀπέναντι ἕδραι συναντῶνται εἰς μίαν γραμμήν· ἡ γραμμή αὐτή λέγεται ἀκμή τοῦ στερεοῦ. Τό στερεόν ἔχει 12 ἀκμάς. Ἀνά τρεῖς αἱ ἀκμαί συναντῶνται εἰς ἕνα σημεῖον· τό σημεῖον αὐτό λέγεται κορυφή τοῦ στερεοῦ. Τό στερεόν ἔχει 8 κορυφάς.



2.2 Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τί εἴδους γραμμή εἶναι μία ἀκμή. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νά ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτήν εἴτε τήν ἀκμήν ἑνός κανόνος σχεδιάσεως, δηλαδή τοῦ ὀργάνου μέ τήν βοήθειαν τοῦ ὁποίου χαράσσομεν εὐθείας γραμμάς, είτε ένα λεπτόν τεντωμένον νήμα τό όποιον μάς παρέχει τήν ύλικήν πραγματοποίησιν αύτού πού είς τήν Γεωμετρίαν καλούμεν εύθεΐαν γραμμήν. Ώστε αί άκμαί του όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι εύθεΐαι γραμμαί.

2.3 Άς έξετάσωμεν δεύτερον τί είδους έπιφάνεια είναι μία έδρα του παραλληλεπιπέδου. Παρατηρούμεν ότι ή άκμή του κανόνος σχεδιάσεως έφαρμόζει είς τήν έδραν όποιαδήποτε καί άν είναι ή θέσις τήν όποίαν δίδομεν είς τήν άκμήν τοποθετούντες τήν έπί τής έδρας. Επίσης ένα λεπτόν τεντωμένον νήμα κεΐται ολόκληρον έπί τής έδρας, όταν δύο σημεΐα του εύρεθούν έπ'αύτής. Αύτού τού είδους αί έπιφάνειαι καλούνται έπίπεδοι. Ώστε αί 6 έδραι του όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι έπίπεδοι έπιφάνειαι.

2.4 Ύλικάς πραγματοποιήσεις έπιπέδων έπιφανειών μάς παρέχουν αί έπιφάνειαι τών τοίχων τής αιθούσης μας, ή έπιφάνεια του μαυροπίνακος έπί τής όποίας γράφομεν ή σχεδιάζομεν, ή καλώς πλανισμένη άνω έπιφάνεια μιάς τραπέζης, μία μικράς έκτάσεως έλευθέρα έπιφάνεια ήρεμούντος ύδατος. Ύπάρχουν όμως καί σώματα (π.χ. μία μπάλα ποδοσφαίρου, ένα λαστιχένιο τόπι) τών όποίων αί έπιφάνειαι δέν παρουσιάζουν κανένα έπίπεδον μέρος. Αντίστοιχον γεωμετρικόν στερεόν είναι ή σφαΐρα· καί αύτής ή έπιφάνεια έχει τήν έξής ίδιότητα: κάθε μέρος της, όσονδήποτε μικρόν καί άν είναι, δέν άποτελεΐ έπίπεδον έπιφάνειαν. Τοιούτου είδους έπιφάνειαι λέγονται καμπύλαι έπιφάνειαι.

Επιφάνεια άποτελουμένη άπό μέρη έπίπεδα λέγεται τεθλασμένη. Τεθλασμένη είναι λοιπόν ή ολική έπιφάνεια του όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ύλικώς ήμπορούμεν νά πραγματοποιήσωμεν μίαν άλλην τεθλασμένην έπιφάνειαν ώς έξής: παίρνομεν ένα λεπτόν φύλ-

λον ἀπό χαρτόνι καί, ἀφοῦ τό τσακίσωμεν, ἀνοίγομεν κατά τι περί τήν εὐθεῖαν τοῦ τσακίσματος τά δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα μέρη πού προέκυφαν.
Ἐκτός τῶν καμπύλων καί ἐπιπέδων ἤ τεθλασμένων ἐπιφανειῶν ἔχομεν καί τάς μικτάς ἐπιφανείας, δηλαδή ἐκείνας πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἐπίπεδα καί ἀπό καμπύλα μέρη. Παράδειγμα μιᾶς τοιαύτης ἐπιφανείας μᾶς παρέχει ἡ ἐπιφάνεια ἑνός κυλινδρικοῦ δοχείου κονσέρβας· αὕτη ἀποτελεῖται 1ον ἀπό δύο ἐπίπεδα μέρη πού χρησιμεύουν διά τήν τοποθέτησιν τοῦ δοχείου ἐπί μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας καί πού διά τοῦτο λέγονται βάσεις καί 2ον ἀπό μίαν παράπλευρον καμπύλην ἐπιφάνειαν ἡ ὁποία συνδέει τάς δύο βάσεις.

2.5 Κατά τρόπον ἀντίστοιχον πρός τά ἀνωτέρω ὑπάρχουν τά ἑξῆς εἴδη γραμμῶν: 1) Ἡ εὐθεῖα γραμμή περί τῆς ὁποίας ἔγινε ἤδη λόγος. 2) Ἡ τεθλασμένη ἡ ὁποία ἀπαρτίζεται ἀπό μέρη εὐθείας μή ἀποτελοῦντα ὅλα μαζί εὐθεῖαν γραμμήν· παράδειγμα μιᾶς τοιαύτης γραμμῆς εἶναι ἡ κλειστή γραμμή εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται μία ἕδρα τοῦ παραλληλεπιπέδου. 3) Η καμπύλη γραμμή τῆς ὁποίας κανένα μέρος, ὅσον μικρόν καί ἄν εἶναι, δέν ἀποτελεῖ εὐθεῖαν· τοιαύτη γραμμή εἶναι π.χ. ἐκείνη εἰς τήν ὁποίαν περατοῦται μία βάσις τοῦ ἀναφερθέντος δοχείου κονσέρβας καί τῆς ὁποίας ἀντίστοιχον γεωμετρικον σχῆμα εἶναι ἡ γνωστή μας περιφέρεια κύκλου. 4) Ἡ μικτή γραμμή ἡ ὁποία ἔχει καί εὐθύγραμμα καί καμπύλα μέρη. Παράδειγμα μιᾶς τοιαύτης γραμμῆς μᾶς παρέχει τό κεφαλαῖον ἑλληνικόν γράμμα ρῶ (Ρ).

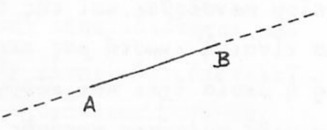
§ 3. Γένεσις μιᾶς γραμμῆς. Ἰδιότητες τῆς εὐθείας γραμμῆς.

3.1 Ἄν ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας μετακινήσωμεν τήν μύτην ἑνός μολυβιοῦ ἤ ἑνός αἰχμηροῦ ὀργάνου, ἡ κίνησις αὐτη θά ἀφήση ὡς ἴχνος ἐπί τῆς ἐπιφανείας τήν εἰκόνα, δηλαδή τήν ὑλικήν πραγματοποίησιν, μιᾶς γραμμῆς. Ἡ γραμμή ἠμπορεῖ λοιπόν νά νοηθῆ ὡς μία συνεχής σειρά θέσεων ἑνός σημείου πού μετακινεῖται ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ μετακίνησις τοῦ σημείου δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά γίνεται ἐπί μιᾶς ἐπιφανείας. Τό σημεῖον ἠμπορεῖ νά μετακινηθῆ καί ἐντός τοῦ χώρου· πάλιν θά παραχθῆ μία γραμμή. Ἡ προκύπτουσα γραμμή θά εἶναι εὐθεῖα, ἐάν ἡ κίνησις τοῦ σημείου γίνεται κατά μίαν σταθεράν κατεύθυνσιν.

Ἕνα γεωμετρικόν σημεῖον δέν ἔχει ἔκτασιν· ἐπομένως ἡ γραμμή πού παράγεται διά τῆς κινήσεώς του ἐκτείνεται κατά μίαν μόνον διάστασιν, δι'αὐτό λέγομεν ὅτι μία γραμμή ἔχει μόνον μῆκος. Ἀντιθέτως μία ἐπιφάνεια ἐκτείνεται κατά δύο διαστάσεις· δι'αὐτό λέγομεν ὅτι μία ἐπιφάνεια ἔχει μῆκος καί πλάτος.

Εἰς τά ἑπόμενα θά συμβολίζωμεν ἕνα σημεῖον μέ ἕνα κεφαλαῖον ἑλληνικόν γράμμα καί μίαν γραμμήν μέ ἕνα μικρόν ἑλληνικόν γράμμα.

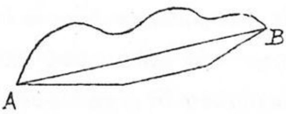
<u>3.2</u> Ἐάν μεταξύ δύο σημείων Α καί Β τεντώσωμεν δύο λεπτά νήματα, θά διαπιστώσωμεν ὅτι τά δύο νήματα συμπίπτουν καθ'ὅλον τό μῆκος των. Τό πείραμα αὐτό μᾶς ἐξηγεῖ διατί δεχόμεθα εἰς τήν Γεωμετρίαν ὅτι δύο σημεῖα ἠμποροῦν νά συνδεθοῦν μέ μίαν καί <u>μόνον μίαν</u> εὐθεῖαν. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι τήν εὐθεῖαν αὐτήν ἠμποροῦμεν νά τήν θεωρήσωμεν ὡς <u>μέρος</u> μιᾶς εὐθείας μέ μεγαλύτερον μῆκος. Διά τοῦτο δεχόμεθα εἰς τήν Γεωμετρίαν ὅτι ἠμποροῦμεν κάθε εὐθεῖαν νά τήν προεκτείνωμεν πρός δύο μέρη, πέραν ἀπό τά δύο ἄκρα της, καί μάλιστα



ὅσον θέλομεν. Ἔτσι καταλήγομεν εἰς τό νά θεωρῶμεν τήν εὐθεῖαν τῆς Γεωμετρίας ὡς μίαν ἀπεριόριστον γραμμήν πού καθορίζεται ἀπό δύο τυχόντα σημεῖα της.

Συνέπεια αὐτοῦ εἶναι νά ὀνομάζωμεν μίαν εὐθεῖαν καί μέ δύο κεφαλαῖα γράμματα πού εἶναι τά σύμβολα δύο σημείων της: π.χ. εὐθεῖα ΑΒ σημαίνει εἰς τήν Γεωμετρίαν τήν μοναδικήν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν γραμμήν πού διέρχεται ἀπό τά δύο σημεῖα Α καί Β. Τό περιωρισμένον τμῆμα τῆς εὐθείας μέ τά δύο ἄκρα Α καί Β λέγεται τότε πρός διάκρισιν <u>εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ</u> καί, συντόμως , <u>τμῆμα ΑΒ</u>.

Μία τρίτη ἰδιότης τῆς εὐθείας προκύπτει ἀπό τήν παρατήρησιν ὅτι τό τεντωμένον νῆμα μεταξύ Α καί Β ἔχει μικρότερον μῆκος ἀπό κάθε μή τεντωμένον νῆμα συνδέον τά σημεῖα Α καί Β. Εἰς τήν Γεωμετρίαν



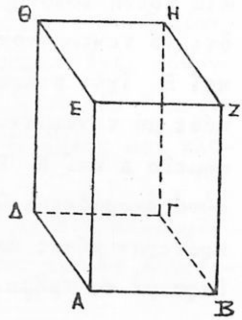
αὐτό ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει μικρότερον μῆκος ἀπό κάθε ἄλλην γραμμήν ἡ ὁποία ἔχει τά ἴδια ἄκρα μέ τό τμῆμα.

§ 4. Ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου
Παράλληλα ἐπίπεδα. Παράλληλοι εὐθεῖαι.

<u>4.1</u> Ὅπως εἴδαμεν , μία ἕδρα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Ἐάν λάβωμεν ἕνα στερεόν σῶμα πού νά ἔχη σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί τό τοποθετήσωμεν ἐπί μιᾶς τραπέζης, θά ἀντιληφθῶμεν ὅτι ἡ ἕδρα μέ τήν ὁποίαν τό σῶμα ἀκουμπᾶ ἐπί τῆς τραπέζης ἀποτελεῖ μέρος τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τῆς τραπέζης· μέ ἄλλας λέξεις ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τῆς τραπέζης προεκτείνει τήν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τῆς ἕδρας. Δέν εἶναι δύσκολον νά φαντασθῶμεν καί νά

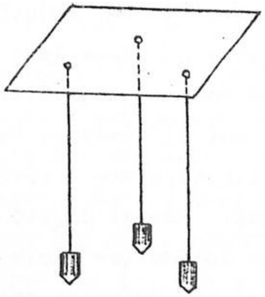
ἐννοήσωμεν ὅτι καί ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τῆς τραπέζης δύναται νά προεκταθῆ ὅσον θέλομεν καθ'ὅλας τάς ἐπ'αὐτῆς διευθύνσεις παραμένουσα ἐπίπεδος. Διά τοῦτο εἰς τήν Γεωμετρίαν δεχόμεθα ὅτι κάθε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι μέρος μιᾶς ἀπεριορίστου ἐπιφανείας μέ τήν ἑξῆς ἰδιότητα: ὁλόκληρος ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα πού ὁρίζεται ἀπό δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τῆς ἐπιφανείας κεῖται ἐπί τῆς ἐπιφανείας. Μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια μέ αὐτήν τήν ἰδιότητα ὀνομάζεται εἰς τήν Γεωμετρίαν <u>ἐπίπεδον</u>.

<u>4.2</u> Ἄς ἐπανέλθωμεν τώρα εἰς τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον πού εἰκονίζεται παραπλεύρως καί ἄς θεωρήσωμεν δύο ἀπέναντι ἕδρας του π.χ. τάς ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ. Εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τά δύο ἐπίπεδα πού εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τούτων δέν συναντῶνται, δηλαδή, δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον. Δύο τέτοια ἐπίπεδα (καθώς καί δύο τυχόντα μέρη των) λέγονται <u>παράλληλα</u>. Ὥστε δύο ἀπέναντι ἕδραι ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι. Τό πάτωμα καί ἡ ἐσωτερική ὀροφή μιᾶς αἰθούσης εἶναι ὑλική πραγματοποίησις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.



<u>4.3</u> Ἄς θεωρήσωμεν τώρα μίαν ἕδραν τοῦ παραλληλεπιπέδου, π.χ. τήν ΑΒΖΕ , καί δύο ἀπέναντι ἀκμάς της, π.χ. τάς ΑΕ καί ΒΖ Εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι αἱ δύο ἀπεριόριστοι εὐθεῖαι πού εἶναι προεκτάσεις τῶν ἀκμῶν τούτων, δέν συναντῶνται. Δύο ἀπεριόριστοι εὐθεῖαι πού κεῖνται ἐπί ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί πού δέν συναντῶνται λέγονται <u>παράλληλοι εὐθεῖαι</u>· ὁμοίως λέγονται <u>παράλληλα</u> καί δύο ὁποιαδή-

ποτε μέρη των. Ὥστε δύο ἀπέναντι ἀκμαί μιᾶς ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα.



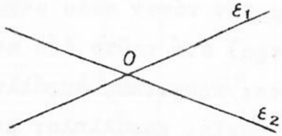
Παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ἠμποροῦμεν νά πραγματοποιήσωμεν ὑλικῶς κατά πολύ καλήν προσέγγισιν, ἐάν κρεμάσωμεν πλησίον ἀλλήλων δύο ἤ περισσότερα νήματα τῆς στάθμης (βλ. εἰκ. παραπλεύρως). Αἱ ἀπεριόριστοι εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι παριστάνονται ἀπό τά τεντωμένα αὐτά νήματα λέγονται κατακόρυφοι εὐθεῖαι τοῦ τόπου εἰς τόν ὁποῖον εὑρίσκονται τά νήματα. Αἱ εὐθεῖαι αὐταί συναντῶνται εἰς τό κέντρον τῆς Γῆς, ἐπειδή ὅμως τοῦτο ἀπέχει ἀπό τόν θεωρούμενον τόπον πολύ μεγάλην ἀπόστασιν (περίπου 6.530.000 μέτρα) διά τοῦτο δύο κατακόρυφοι εὐθεῖαι ἑνός τόπου θεωροῦνται πρακτικῶς παράλληλοι.

Εὐθεῖαι παράλληλοι μεταξύ των λέγομεν ὅτι ἔχουν τήν αὐτήν διεύθυνσιν ἐντός τοῦ χώρου. Ἔτσι εἰς κάθε τόπον τῆς Γῆς ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη κατακόρυφος διεύθυνσις. Ἡ διεύθυνσις αὐτή λέγεται κάθετος πρός κάθε ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν τοῦ τόπου, δηλαδή πρός κάθε ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν πού ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἑνός εἰς τόν τόπον ἠρεμοῦντος ὑγροῦ. Ὁριζόντιοι ἐπιφάνειαι εἶναι π.χ. τό πάτωμα καί τό ταβάνι μιᾶς αἰθούσης, ἡ ἄνω ἐπιφάνεια μιᾶς τραπέζης κλπ. Ἕνα ἐπίπεδον εἰς ἕνα τόπον λέγεται κατακόρυφον, ἐάν περιέχῃ τήν κατακόρυφον διεύθυνσιν τοῦ τόπου. Παραδείγματα κατακορύφων ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν εἶναι αἱ ἐσωτερικαί ἐπιφάνειαι τῶν τοίχων τῆς αἰθούσης μας.

4.4 Ἄς λάβωμεν τώρα τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδόν μας καί ἄς τό τοποθετήσωμεν ἐπί μιᾶς τραπέζης. Εἶναι φυσικόν νά καλέσωμεν βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου τήν ἕδραν του πού χρησιμεύει διά τήν στήριξίν του ἐπί τῆς τραπέζης. Εἰς τήν Γεωμετρίαν καλοῦμεν ὅμως βάσιν και τήν ἀπέναντι παράλληλον ἕδραν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Αἱ ἄλλαι τέσσαρες ἕδραι του καθώς καί αἱ τέσσαρες ἀκμαί πού δέν περιέχονται εἰς τάς δύο βάσεις λέγονται τότε παράπλευροι ἕδραι καί παράπλευροι ἀκμαί. Ἐάν αἱ βάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λάβουν ὁριζόντιον θέσιν εἰς ἕνα τόπον, τότε αἱ παράπλευροι ἀκμαί του παίρνουν τήν κατακόρυφον διεύθυνσιν τοῦ τόπου.

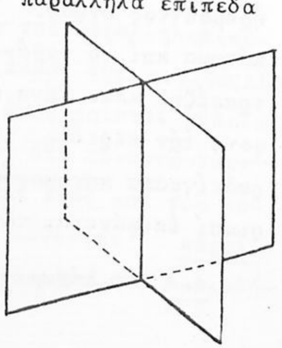
§ 5. Τεμνόμεναι εὐθεῖαι καί τεμνόμενα ἐπίπεδα.

5.1 Δύο εὐθεῖαι ἑνός ἐπιπέδου πού δέν εἶναι παράλληλοι ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον (βλ. εἰκ. παραπλεύρως). Τό σημεῖον αὐτό χωρίζει καθεμίαν ἀπό τάς δύο εὐθείας εἰς δύο μέρη. Τά δύο μέρη ἑκάστης εὐθείας κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἄλλης.



Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι δύο μή παράλληλοι εὐθεῖαι ἑνός ἐπιπέδου τέμνονται (κόβονται) εἰς ἕνα σημεῖον.

5.2 Κατά ἀντίστοιχον τρόπον δύο μή παράλληλα ἐπίπεδα ἔχουν κοινά σημεῖα καί τά σημεῖα αὐτά ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν. Ἡ εὐθεῖα αὐτή χωρίζει τό καθένα ἀπό τά δύο ἐπίπεδα εἰς δύο μέρη. Τά δύο μέρη ἑκάστου ἐπιπέδου κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄλλου.

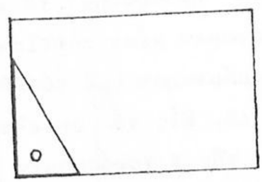


Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι δύο μή παράλληλα

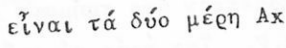
ἐπίπεδα τέμνονται (κόβονται) κατά μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

§ 6. Ἰσότης γεωμετρικῶν σχημάτων.

Ἂν ἀντιγράφωμεν ἐπί ἑνός φύλλου χαρτονιοῦ τό σχῆμα μιᾶς ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θά παρατηρήσωμεν ὅτι τό ἀντίγραφον αὐτό ἠμπορεῖ νά μεταφερθῇ ἐπί τῆς ἀπέναντι ἕδρας καί νά ἐφαρμόσῃ εἰς αὐτήν κατά τρόπον ὥστε ἡ ἕδρα καί τό μεταφερθέν ἀντίγραφον νά ἀποτελέσουν ἕνα μόνον σχῆμα. Αὐτό τό ἐκφράζομεν εἰς τήν Γεωμετρίαν λέγοντες ὅτι δύο ἀπέναντι ἕδραι ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.
Μέ ὅμοιον τρόπον ἠμποροῦμεν νά διαπιστώσωμεν ὅτι δύο ἀπέναντι ἀκμαί μιᾶς ἕδρας εἶναι ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.
Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι δύο μή ἀπέναντι ἀκμαί μιᾶς ἕδρας σχηματίζουν συναντώμεναι μίαν γωνίαν. Ἔχομεν λοιπόν τέσσαρας γωνίας εἰς κάθε ἕδραν. Ὅλαι αὐταί αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἠμποροῦμεν νά ἐφαρμόσωμεν τήν ὀρθήν γωνίαν τοῦ γνώμονός μας. Αἱ τέσσαρες γωνίαι μιᾶς ἕδρας εἶναι ἑπομένως ὄχι μόνον ἴσαι ἀλλά καί ὀρθαί.

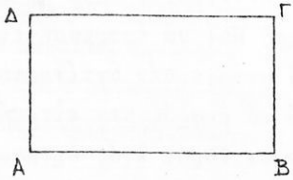


Διά τοῦτο τό σχῆμα μιᾶς ἕδρας λέγεται ὀρθογώνιον.
Γενικῶς δύο γεωμετρικά σχήματα λέγονται ἴσα, ἐάν δυνάμεθα μέ μίαν κατάλληλον μετακίνησίν των νά τά κάμωμεν νά συμπέσουν καθ'ὅλα τά μέρη των, δηλαδή νά ταυτισθοῦν.
Ἕνα νέον παράδειγμα δύο ἴσων σχημάτων εἶναι τά δύο μέρη Ax καί Ay εἰς τά ὁποῖα μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα ε χωρίζεται ἀπό τυχόν σημεῖον της A (βλ. εἰκ.παραπλευρ). Τά μέρη αὐτά καλοῦνται ἡμιευθεῖαι.

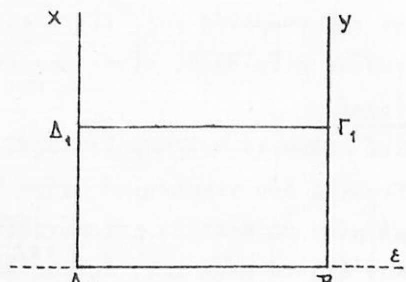


§ 7. Ὀρθογώνιον

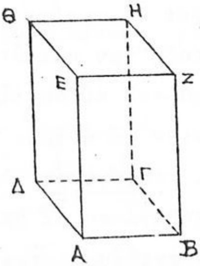
7.1 Ὅπως φαίνεται ἀπό τά προηγούμενα, τό ὀρθογώνιον εἶναι μέρος ἐπιπέδου περιοριζόμενον ἀπό τέσσερα εὐθύγραμμα τμήματα πού σχηματίζουν τέσσαρας ὀρθάς γωνίας καί εἶναι ἀνά δύο ἀπέναντι ἴσα καί παράλληλα. Τά τμήματα αὐτά λέγονται πλευραί τοῦ ὀρθογωνίου. Ἕνα ὀρθογώνιον συμβολίζεται μέ τά τέσσερα γράμματα τῶν κορυφῶν του π.χ. λέγομεν: ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Δύο ἀπέναντι πλευραί του, π.χ. αἱ ΑΒ καί ΔΓ, ἀποτελοῦν τότε μίαν διαστασίν του, τό μῆκος του, καί αἱ δύο ἄλλαι, αἱ ΑΔ καί ΒΓ τήν ἄλλην διαστασίν του, τό πλάτος του.



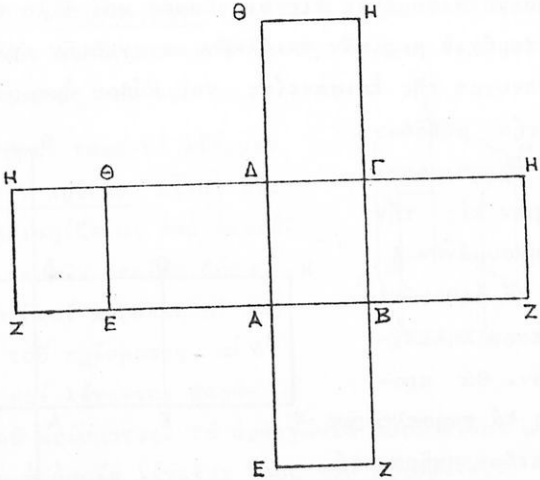
7.2 Διά νά σχεδιάσωμεν ὀρθογώνιον ἴσον μέ ἕνα δοθέν ΑΒΓΔ ἠμποροῦμεν νά ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Μέ τόν κανόνα χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε καί ὁρίζομεν ἐπ'αὐτῆς μέ τό διαστημόμετρον (μέ τόν διαβήτην) ἕνα τμῆμα $Α_1Β_1$ ἴσον μέ τό τμῆμα ΑΒ. Εἰς τά σημεῖα $Α_1$ καί $Β_1$ τῆς ε χαράσσομεν μέ τήν βοήθειαν τοῦ γνώμονος, πρός τό ἴδιον μέρος τῆς ε, δύο εὐθείας $Α_1x$ καί $Β_1y$ πού νά σχηματίζουν ὀρθάς γωνίας μέ τήν ε. Ἐπί τῶν εὐθειῶν τούτων λαμβάνομεν μέ τό διαστημόμετρον δύο τμήματα $Α_1Δ_1$ καί $Β_1Γ_1$ ἴσα πρός τά τμήματα ΑΔ καί ΒΓ. Τέλος μέ τόν κανόνα χαράσσομεν τό τμῆμα $Δ_1Γ_1$. Τό ὀρθογώνιον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι τό ζητούμενον.



§ 8. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



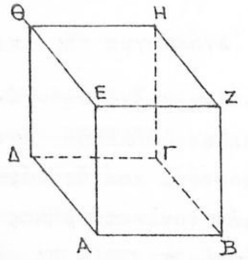
Ἄς λάβωμεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ κατεσκευασμένον ἀπό χαρτόνι καί ἄς κόψωμεν τήν ἐπιφάνειάν του κατά μῆκος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ καθώς καί κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν ΕΖ, ΖΗ καί ΗΘ τῆς ἄνω βάσεώς του ΕΖΗΘ.



Μετά τοῦτο δυνάμεθα νά φέρωμεν τάς παραπλεύρους ἕδρας καθώς καί τήν ἄνω βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω βάσεως ΑΒΓΔ. Ἔτσι θά προκύψη τό παραπλεύρως ἐπίπεδον σχῆμα πού λέγεται <u>ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου</u>. Ἀναχωροῦντες ἀπό τό ἀνάπτυγμα δέν εἶναι δύσκολον νά ἀνακατασκευάσωμεν τό στερεόν. Ὅπως βλέπομεν, τό ἀνάπτυγμα ἀποτελεῖται ἀπό 6 ὀρθογώνια ἀνά δύο ἴσα: ΖΕΘΗ ἴσον μέ ΑΒΓΔ, ΕΑΔΘ ἴσον μέ ΒΖΗΓ καί ΕΖΒΑ ἴσον μέ ΔΓΗΘ.

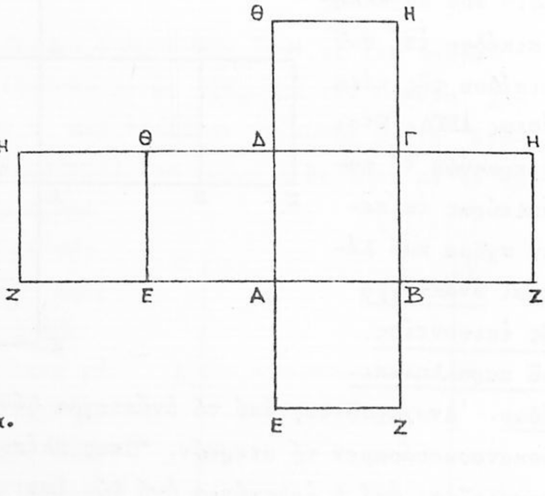
§ 9. Κύβος.

Μερική περίπτωσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τό



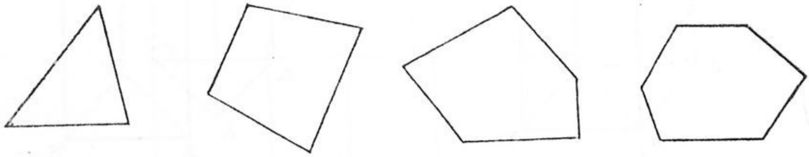
στερεόν κύβος. Είς τόν κύβον καί αἱ ἕξ ἕδραι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αὐτό ἔχει ὡς συνέπειαν νά εἶναι ἴσαι μεταξύ των καί ὅλαι αἱ 12 ἀκμαί. Μία ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι λοιπόν ἕνα ὀρθογώνιον μέ 4 ἴσας πλευράς καί λέγεται τετράγωνον. Ἡ σχεδίασις ἑνός τετραγώνου μέ δεδομένον μῆκος πλευρῶν προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν σχεδίασιν ἑνός ὀρθογωνίου πού ἐδόθη εἰς τήν § 7.2. Σχῆμα κύβου ἔχουν διάφορα σώματα, ὅπως τά ζάρια, κυβόλιθοι χρησιμοποιούμενοι εἰς οἰκοδομάς καί ἄλλα τεχνικά ἔργα, ξύλινα τεμάχια μερικῶν παιδικῶν παιγνιδιῶν κτλ.

Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου ἠμποροῦμεν νά λάβωμεν μέ τήν μέθοδον πού ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τήν προηγουμένην § διά τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Θά προκύψη τό παραπλεύρως ἐπίπεδον σχῆμα, πού ἀπαρτίζεται τώρα ἀπό ἕξ ἴσα τετράγωνα.

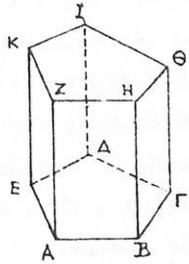


§ 10. Ὀρθόν πρῖσμα.

10.1 Ἄς ὑπενθυμίσωμεν πρῶτα τί καλοῦμεν πολύγωνον. Πολύγωνον λέγεται μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πού περατοῦται εἰς μίαν κλειστήν τεθλασμένην γραμμήν. Πλευραί τοῦ πολυγώνου εἶναι τά εὐθύγραμμα τμήματα τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τήν κλειστήν αὐτήν γραμμήν. Ἕνα πολύγωνον ἔχει τόσας γωνίας καί τόσας κορυφάς ὅσας καί πλευράς. Διά τοῦτο ἕνα πολύγωνον μέ 3,5,



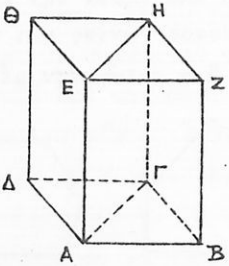
6 κ.ο.κ. πλευράς λέγεται ἀντιστοίχως τρίγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον κ.ο.κ. Κατ'ἐξαίρεσιν ἕνα πολύγωνον μέ 4 πλευράς ὀνομάζεται γενικῶς τετράπλευρον, διότι ἡ λέξις τετράγωνον σημαίνει τό εἰδικόν πολύγωνον πού ἔχει τέσσαρας ἴσας πλευράς καί τέσσαρας ὀρθάς γωνίας.

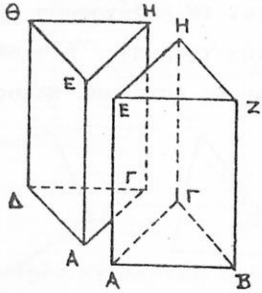


10.2 Ἠμποροῦμεν τώρα νά εἴπωμεν τί εἶναι ἕνα ὀρθόν πρῖσμα. Εἶναι ἕνα στερεόν πού περιορίζεται ἀπό ἐπιπέδους ἐπιφανείας ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι πολύγωνα ἴσα (καί παράλληλα) καί λέγονται βάσεις τοῦ πρίσματος, αἱ δέ ἄλλαι ὀρθογώνια καί λέγονται παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος. Τά ὀρθογώνια αὐτά ἔχουν μίαν κοινήν διάστασιν ἡ ὁποία λέγεται ὕψος τοῦ πρίσματος.

10.3 Τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καί ὁ κύβος πού ἐγνωρίσαμεν εἶναι ὀρθά πρίσματα μέ βάσεις τετραπλευρικάς: ἕνα ὀρθογώνιον διά τό πρῶτον καί ἕνα τετράγωνον διά τό δεύτερον.

Ἀπό τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ, ἄν τό κόψωμεν εἰς δύο μέρη μέ ἕνα ἐπίπεδον πού περιέχει τάς δύο παραλλήλους ἀκμάς ΕΑ καί ΗΓ, λαμβάνομεν τά δύο ὀρθά πρίσματα τά ὁποῖα εἰκονίζονται ὄπισθεν ἀποχωρισμένα ὀλίγον δεξιώτερα.

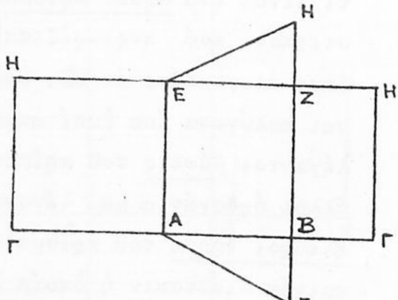




Τά δύο αὐτά πρίσματα λέγονται τριγωνικά ἐπειδή ἔχουν ὡς βάσεις τρίγωνα.

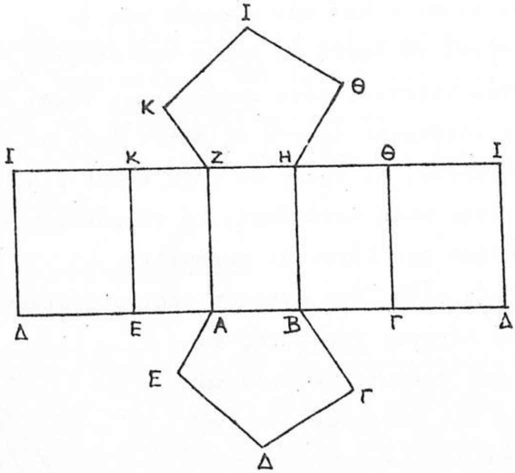
Ἂς ἐξετάσωμεν τό ἕνα ἐξ αὐτῶν, τό ΑΒΓΕΖΗ. Ἔχει 5 ἕδρας: 2 ἴσα τρίγωνα ὡς βάσεις καί 3 ὀρθογώνια ὡς παραπλεύρους ἕδρας. Ἀκμάς ἔχει 9 καί κορυφάς 6. Τήν ἐπιφάνειάν του ἠμποροῦμεν νά τήν ἀναπτύξωμεν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου, μέ τόν ἑξῆς τροπον: Φανταζόμεθα ὅτι τήν κόβομεν κατά μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς ΗΓ καθώς καί τῶν ἀκμῶν ΓΑ , ΓΒ , ΗΕ καί ΗΖ τῶν δύο βάσεων.

Δυνάμεθα τότε νά φέρωμεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΒΖΕ τάς ἄλλας 4 ἕδρας τοῦ πρίσματος· θά προκύψη τό εἰκονιζόμενον ἐπίπεδον σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τρία ὀρθογώνια καί δύο τρίγωνα.



10.4 Ἂς ἐξετάσωμεν ἀκόμη τό πρῖσμα πού εἰκονίζεται εἰς τήν ἀρχήν ταῦ § 10.2.

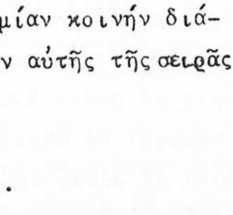
Λέγεται πενταγωνικόν, διότι ἔχει ὡς βάσεις δύο ἴσα πεντάγωνα. Ὁ ἀριθμός τῶν ἑδρῶν του εἶναι $7 = 2 + 5$, τῶν ἀκμῶν του $15 = 3 \times 5$ καί τῶν κορυφῶν του $10 = 2 \times 5$. Τό ἀνάπτυγμά του, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἐπίπεδον σχῆμα κατωτέρω, ἀπο-



τελεῖται ἀπό μίαν σειράν 5 ὀρθογωνίων μέ μίαν κοινήν διάστασιν καί ἀπό δύο ἴσα πεντάγωνα ἑκατέρωθεν αὐτῆς τῆς σειρᾶς

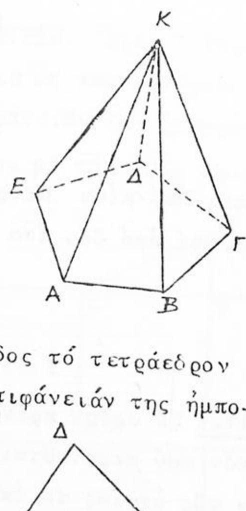
§ 11. Πολύεδρον. Πυραμίς.

11.1 Τό ὀρθόν πρῖσμα εἶναι ἕνα πολύεδρον, δηλαδή ἕνα στερεόν πού περατοῦται εἰς μίαν κλειστήν τεθλασμένην ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας τά ἐπίπεδα μέρη εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ στερεοῦ. Τό πολύεδρον μέ ἐλάχιστον ἀριθμόν ἑδρῶν τό ὁποῖον συναντήσαμεν ἕως τώρα εἶναι τό τριγωνικόν ὀρθόν πρῖσμα πού ἔχει 5 ἕδρας.

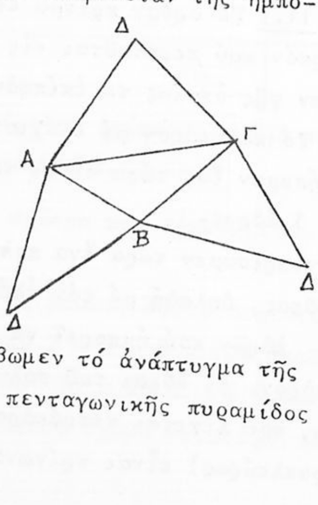


Θά γνωρίσωμεν τώρα ἕνα πολύεδρον μέ 4 ἕδρας, δηλαδή μέ τόν ἐλάχιστον ἀριθμόν ἑδρῶν πού ἠμπορεῖ νά ἔχῃ ἕνα πολύεδρον. Αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου τούτου, πού λέγεται τετράεδρον, (βλ. εἰκ. παραπλεύρως) εἶναι τρίγωνα, ὁ ἀριθμός

τῶν ἀκμῶν του εἶναι 6 καί τῶν κορυφῶν του 4.
Κάθε ἕδρα ἠμπορεῖ νά ληφθῆ ὡς βάσις τοῦ στερεοῦ· αἱ τρεῖς ἄλλαι ἕδραι του λέγονται τότε παράπλευροι ἕδραι καί ἔχουν τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα: ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει μέ τήν βάσιν μίαν κοινήν πλευράν, αἱ τρεῖς δέ μαζί ἔχουν μίαν κοινήν κορυφήν. Ἡ ἰδιότης αὐτή κατατάσσει τό τετράεδρον εἰς τό εἶδος τῶν πολυέδρων πού λέγονται πυραμίδες.
Πράγματι πυραμίς εἶναι ἕνα στερεόν περιοριζόμενον ἀπό ἕνα πολύγωνον, πού λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος, καί ἀπό τρίγωνα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μέ τήν βάσιν μίαν κοινήν πλευράν, ὅλα δέ μαζί ἔχουν μίαν κοινήν κορυφήν πού λέγεται κορυφή τῆς πυραμίδος. Παραπλεύρως εἰκονίζεται μία πενταγωνική πυραμίς, δηλαδή μία πυραμίς μέ βάσιν ἕνα πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καί κορυφήν τό σημεῖον Κ.



Σύμφωνα μέ αὐτόν τόν ὁρισμόν τῆς πυραμίδος τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι μία τριγωνική πυραμίς. Τήν ἐπιφάνειάν της ἠμποροῦμεν νά τήν ἀναπτύξωμεν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου ὡς ἑξῆς: Φανταζόμεθα ὅτι τήν κόβομεν κατά μῆκος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ΔΑ, ΔΒ , ΔΓ. Μετά τοῦτο εἶναι δυνατόν νά φέρωμεν τάς παραπλεύρους ἕδρας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Θά προκύψη τό παραπλεύρως ἐπίπεδον σχῆμα.

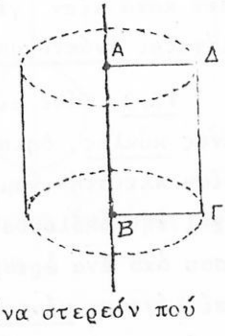


Μέ ὅμοιον τρόπον εἶναι δυνατόν νά λάβωμεν τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τῆς ἀνωτέρω εἰκονιζομένης πενταγωνικῆς πυραμίδος καθώς καί κάθε πυραμίδος.

Μία πυραμίς λέγεται κανονική ὅταν 1) τό πολύγωνον τῆς βάσεώς της ἔχει ἴσας πλευράς καί ἴσας γωνίας καί 2) αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι μεταξύ των.
Σχῆμα πυραμίδος ἔχουν τάφοι βασιλέων τῆς ἀρχαίας Αἰγύπτου, στέγαι πύργων κτλ.

§ 12. Ὀρθός κυκλικός κύλινδρος.

12.1 Σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἔχουν πολλά φυσικά σώματα, π.χ. ἕνα κυλινδρικόν δοχεῖον κονσέρβας, ἕνα ἄξυστο στρογγυλό μολύβι, ὁ βαρύς συμπαγής κύλινδρος ἀπό μάρμαρον ἤ ἄλλην ὕλην μέ τόν ὁποῖον ἰσοπεδώνομεν ἕνα γήπεδον ἀθλητισμοῦ κτλ. Ἄν φαντασθῶμεν ὅτι κόβομεν τόν κύλινδρον αὐτόν μέ ἕνα ἐπίπεδον πού περιέχει τόν ἄξονα περιστροφῆς του, δέν εἶναι δύσκολον νά ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ τομή θά εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον τό ὁποῖον χωρίζεται εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἀπό τό νοερόν αὐτό πείραμα ὁδηγούμεθα εἰς τό ἑξῆς ἄλλο πού ἠμποροῦμεν σχετικῶς εὔκολα νά πραγματοποιήσωμεν. Παίρνομεν ἕνα ὀρθογώνιον φύλλον λαμαρίνας ΑΒΓΔ καί στερεώνομεν μέ συγκολλήσεις εἰς τήν πλευράν του ΑΒ ἕνα λεπτόν μεταλλικόν στέλεχος (βλ. εἰκ. παραπλεύρως) Δυνάμεθα τότε νά περιστρέφωμεν τό φύλλον περί τό στέλεχος ΑΒ ὡς ἄξονα περιστροφῆς. Ἡ συνεχής σειρά τῶν θέσεων, τάς ὁποίας παίρνει τό φύλλον εἰς μίαν πλήρη στροφήν, ἀποτελεῖ ἕνα στερεόν πού ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.



12.2 Ἠμποροῦμεν τώρα νά δώσωμεν τήν ἑξῆς περιγραφήν τοῦ γεωμετρικοῦ στερεοῦ πού λέγεται ὀρθός κυκλικός κύλινδρος:

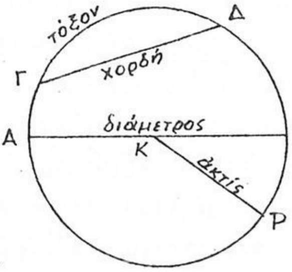
Παράγεται μέ τήν περιστροφήν ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω ἀπό μίαν πλευράν του, ἔστω τήν ΑΒ , καί περατοῦται εἰς τάς ἑξῆς ἐπιφανείας: 1) μία καμπύλην ἐπιφάνειαν πού γεννᾶται μέ τήν κίνησιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ τῆς παραλλήλου πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς ΑΒ καί 2) δύο ἴσας ἐπιπέδους ἐπιφανείας πού γεννῶνται μέ τήν κίνησιν τῶν πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ τῶν καθέτων πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται <u>παράπλευρος</u> ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι λέγονται <u>βάσεις</u> τοῦ κυλίνδρου. <u>Γενέτειραι</u> τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ πλευρά ΔΓ εἰς τάς διαφόρους θέσεις της κατά τήν περιστροφήν. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται <u>ἄξων</u> καί τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ <u>ὕψος</u> τοῦ ὀρθοῦ κυκλ. κυλίνδρου.

Μίαν ὑλικήν πραγματοποίησιν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνός κυλίνδρου μᾶς παρέχει ἕνας σωλήν θερμάστρας· κατασκευάζεται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιον φύλλον λαμαρίνας μέ κατάλληλον κάμψιν του. Ἀντιστρόφως εἶναι δυνατόν νά ἁπλώσωμεν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου τόν σωλῆνα ἀφοῦ τόν κόψωμεν κατά μίαν γενέτειράν του.

Ἔτσι καί ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἠμπορεῖ νά ἀναπτυχθῇ ἐπί ἑνός ἐπιπέδου, ἀφοῦ τήν κόψωμεν κατά μίαν γενέτειραν· θά προκύψῃ ἕνα ὀρθογώνιον, πού λέγεται <u>ἀνάπτυγμα</u> τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

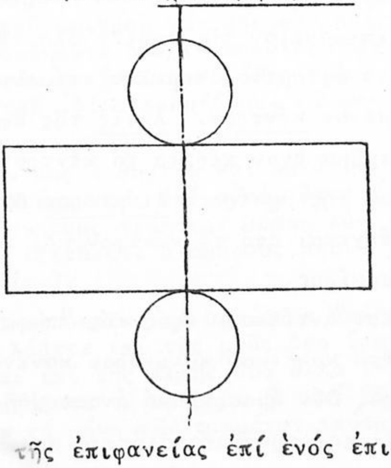
<u>12.3</u> Κάθε μία ἀπό τάς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἕνας <u>κύκλος</u>, δηλαδή μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς μίαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν πού λέγεται <u>περιφέρεια</u> καί ἔχει τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα: ὅλα τά σημεῖα της ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα ὡρισμένον σημεῖον πού κεῖται ἐντός τοῦ κύκλου καί λέγεται <u>κέντρον</u> τοῦ κύκλου καθώς καί τῆς περιφερείας. <u>Ἀκτίς</u> καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα πού ἔχει πέρατα τό κέντρον καί ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. <u>Διάμετρος</u> εἶναι κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα πού διέρχεται ἀπό τό κέντρον καί περατοῦ-

ται είς τήν περιφέρειαν. Τόξον λέγεται κάθε μέρος τῆς περιφερείας καί χορδή του τό εὐθύγραμμον τμῆμα πού συνδέει τά δύο ἄκρα του.



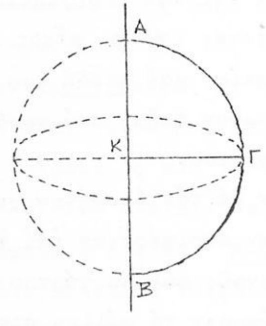
Ἐάν μέ τόν διαβήτην χαράξωμεν μίαν περιφέρειαν ἐπί ἑνός διαφανοῦς φύλλου χάρτου καί διπλώσωμεν τό φύλλον κατά μῆκος μιᾶς διαμέτρου, θά ἴδωμεν ὅτι τά δύο μέρη είς τά ὁποῖα ἡ διάμετρος χωρίζει τόν κύκλον συμπίπτουν· ἄρα τά μέρη ταῦτα εἶναι ἴσα καί, ἐπειδή εἶναι τά ἡμίση τοῦ ἑνός κύκλου, λέγονται ἡμικύκλια. Μέ ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι ἡ διάμετρος χωρίζει καί τήν περιφέρειαν είς δύο ἴσα μέρη, τά ὁποῖα διά τοῦτο λέγονται ἡμιπεριφέρειαι.

12.4 Παρατηροῦμεν τέλος τό ἑξῆς: Διά νά λάβωμεν τό ἀνάπτυγμα ὅλης τῆς ἐπιφανείας ἑνός ὀρθοῦ κυκλ.κυλίνδρου ἀρκεῖ νά κόψωμεν τήν μέν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας, τάς δέ βάσεις κατα μῆκος τῶν περιφερειῶν των. Δυνάμεθα κατόπιν νά ἁπλώσωμεν τά τρία αὐτά μέρη τῆς ἐπιφανείας ἐπί ἑνός ἐπιπέδου. Θά προκύψη τό ἀνωτέρω ἐπίπεδον σχῆμα.



§ 13. Σφαῖρα

Ἄς παρωμεν ἕνα φύλλον λαμαρίνας ΑΚΒΓ μέ σχῆμα ἡμικυκλίου (βλ. είκ. παραπλεύρως) καί ἄς στερεώσωμεν μέ συγκολλήσεις είς τήν διάμετρόν του AB ἕνα λεπτόν μεταλλικόν στέλεχος. Δυνάμεθα τότε νά περιστρέφωμεν τό φύλλον περί τό στέλεχος AB ὡς ἄξονα περιστροφῆς. Εἰς μίαν πλήρη στροφήν ἡ μέν ἡμιπεριφέρεια ΑΓΒ θά παραγάγη μίαν κλειστήν καμπύλην ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα θά ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τό κέντρον Κ τοῦ ἡμικυκλίου, τό δέ ἡμικύκλιον θά παραγάγη ἕνα στερεόν πού περατοῦται εἰς τήν καμπύλην αὐτήν ἐπιφάνειαν. Τό στερεόν αὐτό καλεῖται <u>σφαῖρα.</u>



Ὥστε σφαῖρα εἶναι ἕνα στερεόν περικλειόμενον ἀπό καμπύλην ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα ὡρισμένον σημεῖον κείμενον ἐντός τοῦ στερεοῦ καί καλούμενον <u>κέντρον</u>. <u>Ἀκτίς</u> τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον πέρατα τό κέντρον καί ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, <u>διάμετρος</u> δέ κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα πού διέρχεται ἀπό τό κέντρον καί περατοῦταιεἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Κατ'ἀντίθεσιν πρός τάς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων καί τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου κανένα μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δέν ἠμπορεῖ νά ἀναπτυχθῆ (νά ἁπλωθῆ) ἐπί ἑνός ἐπιπέδου. Ὑλικαί πραγματοποιήσεις σφαίρας εἶναι διάφορα φυσικά σώματα: οἱ βῶλοι τοῦ γνωστοῦ παιδικοῦ παιγνιδιοῦ, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, τά σφαιρίδια ἑνός ρουλεμάν κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τί χωρίζει ἕνα σῶμα ἀπό τόν πέριξ χῶρον ;

2) Δώσατε παραδείγματα ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

3) Δείξατε είς τήν αἴθουσαν διδασκαλίας παραλλήλους καθώς καί μή παραλλήλους εὐθείας.

4) Ὀνομάσατε διάφορα γνωστά σας ἀντικείμενα καί ὁρίσατε τό εἶδος τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου.

5) Ὁρίσατε τό εἶδος τῆς γραμμῆς τήν ὁποίαν σχηματίζει τό καθένα ἀπό τά πρῶτα ἑπτά κεφαλαῖα ἑλληνικά γράμματα τοῦ τύπου.

6) Κατά τί ὁμοιάζει μέ τόν κύβον καί κατά τί διαφέρει ἀπ'αὐτόν τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον;

7) Ἀπαριθμήσατε χωριστά τάς κορυφάς, τάς ἀκμάς καί τάς ἕδρας ἑνός τριγωνικοῦ, ἑνός τετραγωνικοῦ, ἑνός πενταγωνικοῦ καί ἑνός ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἔπειτα καταγράψατε είς ἕνα πίνακα τά ἀποτελέσματα τῆς ἀπαριθμήσεώς σας. Ποῖον κανόνα ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε διά τόν προσδιορισμόν τοῦ πλήθους τῶν κορυφῶν, τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν καί τοῦ πλήθους τῶν ἀκμῶν ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος ;

8) Πράξατε τό ἴδιον διά μίαν τριγωνικήν, διά μίαν τετραγωνικήν καί διά μίαν πενταγωνικήν πυραμίδα.

9) Ὑπολογίσατε τό ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καί τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν ἑνός ὁποιουδήποτε ἀπό τά πολύεδρα τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων. Συγκρίνατε ἔπειτα τό ἄθροισμα τοῦτο μέ τόν ἀριθμόν τῶν ἀκμῶν τοῦ ἰδίου πολυέδρου. Τί παρατηρεῖτε ;

10) Ὁρίσατε είς τό τετράδιόν σας 4 σημεῖα καί κατόπιν χαράξατε τάς εὐθείας αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπό αὐτά, ὅταν τά λάβετε ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους. Πόσας εὐθείας εὑρίσκετε ; (Θά ἔχετε νά ἐξετάσετε διαφόρους περιπτώσεις τοποθετήσεως τῶν 4 σημείων).

11) Χαράξατε δύο ἡμιευθείας αἱ ὁποῖαι νά ἀρχίζουν ἀπό τό ἴδιον σημεῖον Α. Ἔπειτα νά λάβετε ἐπί τῆς μιᾶς δύο ἴσα διαδοχικά τμήματα ΑΒ καί ΒΓ καί ἐπί τῆς ἄλλης δύο ἄλλα ἴσα τμήματα ΑΔ καί ΔΕ. Τέλος χαράξατε τά τμήματα ΒΔ καί ΓΕ. Τί παρατηρεῖτε, ὅταν συγκρίνετε τά μήκη τῶν τμημάτων τούτων ΒΔ καί ΓΕ ;

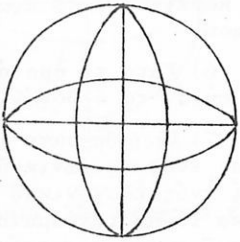
12) Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν καί ὁρίσατε δύο σημεῖα, ἕνα ἐπ'αὐτῆς καί ἕνα ἐκτός αὐτῆς. Ἀπό τά σημεῖα αὐτά φέρατε καθέτους πρός τήν εὐθεῖαν.

13) Ὁρίσατε τρία σημεῖα τά ὁποῖα νά μή κεῖνται ἐπ'εὐθείας. Ἔπειτα χαράξατε ἀπό τό καθένα ἐξ αὐτῶν εὐθεῖαν

παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν τήν ὁποίαν ὁρίζουν τά δύο ἄλλα.

14) Σχεδιάσατε ἕνα πεντάγωνον εἰς τό τετράδιόν σας. Κατόπιν χαράξατε ὅλας τάς διαγωνίους του (δηλαδή τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ἑνώνουν δύο ὁποιασδήποτε κορυφάς αἱ ὁποῖαι δέν εἶναι πέρατα μιᾶς καί τῆς αὐτῆς πλευρᾶς). Πόσαι εἶναι αἱ διαγώνιοι αυταί

15) Γράφατε μίαν περιφέρειαν κύκλου καί δύο καθέτους διαμέτρους της. Ἔπειτα συμπληρώσατε τήν σχεδίασίν σας συμφώνως πρός τό παραπλεύρως σχῆμα. Τέλος χρωματίσατε τά 16 μέρη εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος, μέ 3 διαφορετικά χρώματα οὕτως ὥστε δύο μέρη συνορεύοντα κατά μίαν γραμμήν νά μή ἔχουν τό ἴδιον χρῶμα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Μονάδες μετρήσεως

§ 1. Μονάδες μήκους

1.1 Ὅπως εἶναι γνωστόν, διά νά μετρήσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, ἐκλέγομεν πρῶτα ἕνα ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ὡς μονάδα μήκους καί κατόπιν ἐξετάζομεν ἀπό πόσας μονάδας μήκους καί ὑποδιαιρέσεις της ἀποτελεῖται τό πρός μέτρησιν τμῆμα. Προκύπτει ἔτσι ἕνας ἀριθμός ὁ ὁποῖος λέγεται μέτρον καθώς καί μῆκος τοῦ θεωρουμένου τμήματος. Ὁ ἀριθμός αὐτός ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τήν μονάδα μήκους πού ἐξελέξαμεν καί μεταβάλλεται, ἄν λάβωμεν μικροτέραν ἤ μεγαλυτέραν μονάδα μετρήσεως.

1.2 Αἱ συνηθέστεραι μονάδες μήκους πού χρησιμοποιοῦμεν τώρα εἰς τήν χώραν μας εἶναι αἱ ἑξῆς:

Ι) <u>Τό μέτρον</u> (m). Τοῦτο εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρός τήν ἀπόστασιν, ὑπό θερμοκρασίαν 0^{o}, δύο παραλλήλων χαραγῶν ἐπί μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου ἀπό πλατίναν καί ἰρίδιον, πού φυλάσσεται εἰς τό Διεθνές Γραφεῖον Βαρῶν καί Μέτρων πλησίον τῶν Παρισίων. Τό μέτρον (m) ἐξελέγη κατά τρόπον ὥστε τό μῆκος ἑνός μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νά εἶναι, κατά πολύ καλήν προσέγγισιν ἴσον μέ 40 000 000 μέτρα (m).

ΙΙ) Εἰς τό σύστημα μετρήσεων πού ἔχει ὡς βάσιν τό μέτρον (m), αἱ ἄλλαι χρησιμοποιούμεναι μονάδες μήκους εἶναι ἤ 10 ἤ 100 ἤ 1000 κ.ο.κ. φοράς μικρότεραι ἤ μεγαλύτεραι τοῦ μέτρου. Μέ ἄλλας λέξεις αἱ μονάδες αὐταί ἀκολουθοῦν τόν <u>δεκαδικόν νόμον</u>. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου συνήθως χρησιμοποιούμεναι εἶναι αἱ ἑξῆς:

τό <u>δεκατόμετρον</u> (dm) = ἕνα δέκατον τοῦ m,
τό <u>ἑκατοστόμετρον</u> (cm) = ἕνα ἑκατοστόν τοῦ m ,
τό <u>χιλιοστόμετρον</u> (mm) = ἕνα χιλιοστόν τοῦ m.

Πολλαπλάσια τοῦ m συνήθως χρησιμοποιούμενα εἶναι:

τό <u>δεκάμετρον</u> (dam) = 10 m ,
τό <u>ἑκατόμετρον</u> (hm) = 100 m ,
τό <u>χιλιόμετρον</u> (km) = 1000 m .

Ἀπό τά ἀνωτέρω προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm},$$
$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm},$$
$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}.$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10\,000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ mm}.$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ὁ δεκαδικός νόμος τόν ὁποῖον ἀκολουθοῦν αἱ ἀνωτέρω μονάδες μᾶς ἐπιτρέπει νά γράφωμεν κατά ἕνα ἁπλοῦν τρόπον τό μῆκος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος εἰς τό δεκαδικόν μας σύστημα ἀριθμῶν. Π.χ. ἕνα μῆκος μ ἀποτελούμενον ἀπό

3 m 7 dm 4 mm

ἠμπορεῖ νά γραφῆ ὑπό μορφήν ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἑξῆς:
$\mu = 3{,}704$ m ἤ $\mu = 37{,}04$ dm ἤ $\mu = 370{,}4$ cm κ.ο.κ.
καί ἕνα μῆκος ἀποτελούμενον ἀπό

$$15 \text{ km } 23 \text{ m } 4 \text{ dm}$$

γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$15{,}0234 \text{ km} = 15023{,}4 \text{ m} = 150234 \text{ dm}.$$

III) Εἰς τήν χώραν μας χρησιμοποιεῖται ἀκόμη ἐνίοτε ὡς μονάς μήκους καί ὁ

$$\text{τεκτονικός πῆχυς} = 75 \text{ cm} = 0{,}75 \text{ m} = \frac{3}{4} \text{ m}.$$

IV) Εἰς τό ἐμπόριον καί εἰς τεχνικά ἔργα (π.χ. ὑδραυλικάς ἐγκαταστάσεις) χρησιμοποιοῦμεν εἰς τήν χώραν μας καί τάς ἀκολούθους ἀγγλοσαξωνικάς μονάδας μήκους:
τήν <u>ὑάρδαν</u> (yrd) καί τάς ὑποδιαιρέσεις της εἰς 3 ἴσα μέρη, τούς <u>πόδας</u> (ft), καί εἰς 36 ἴσα μέρη, τάς <u>ἴντσας</u> (in). Ἔχομεν δηλαδή τάς σχέσεις:

$$1 \text{ yrd} = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in},$$
$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}.$$

Μεταξύ τῶν μονάδων τούτων (αἱ ὁποῖαι, ὅπως παρατηροῦμεν, δέν ἀκολουθοῦν τόν δεκαδικόν νόμον) καί τοῦ μέτρου (m) ἰσχύουν κατά πολύ καλήν προσέγγισιν αἱ σχέσεις:

$$1 \text{ yrd} = 0{,}9144 \text{ m} = 91{,}44 \text{ cm} = 914{,}4 \text{ mm}$$
$$1 \text{ ft} = 0{,}305 \text{ m} = 30{,}5 \text{ cm}$$
$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm}.$$

Ἐξ ἄλλου διά τήν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων χρησιμοποιοῦμεν πλήν τοῦ χιλιομέτρου (km) καί τό ἀγγλοσαξωνικόν

<u>μίλιον</u> = 1609 m = 1,609 km

Τέλος εἰς τήν ναυτιλίαν γίνεται διεθνῶς χρῆσις καί τοῦ <u>γαλλικοῦ ναυτικοῦ μιλίου</u> = 1852 m = 1,852 km.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐάν τό ἀκέραιον μέρος ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παρι-

στάνη μέτρα (m), τότε τά δεκατόμετρα (dm) κατέχουν τήν 1ην θέσιν δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, τά ἑκατοστόμετρα (cm) τήν 2αν θέσιν κ.ο.κ. Ἐάν τό ἀκέραιον μέρος ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παριστάνη dm, ποίαν θέσιν κατέχουν τά cm ; ποίαν τό mm; καί ποῖον ψηφίον παριστάνει μέτρα (m);

2) Ἕνας τετραψήφιος ἀκέραιος ἀριθμός παριστάνει μέτρα (m). Ποῖον ψηφίον του παριστάνει χιλιόμετρα (km) ; ποῖον δεκάμετρα ;

3) Ἐκτιμήσατε εἰς ἑκατοστόμετρα (cm) διά τοῦ ὀφθαλμοῦ τό μῆκος καί τό πλάτος τοῦ τετραδίου σας, κατόπιν ἐλέγξατε τάς ἐκτιμήσεις σας ἐκτελοῦντες μετρήσεις μέ ἕνα ὑποδεκάμετρον, τέλος γράψατε ἀριθμητικῶς τά ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων σας. Ἐκτιμήσατε εἰς m διά τοῦ ὀφθαλμοῦ τό μῆκος καί τό πλάτος τῆς αἰθούσης διδασκαλίας σας, ἐλέγξατε τάς ἐκτιμήσεις μέ μετρήσεις καί γράψατε ἀριθμητικῶς τό ἀποτέλεσμα τῶν μετρήσεών σας.

4) Ἐκτελέσατε τάς πράξεις:
α) 8,633 m + 9,78 m + 0,425 m − 8,9 m
β) 9,275 m + 15,42 m − 0,848 m − 3,56 m
γ) 57 m + 265 cm + 42 dm

5) Γράψατε τούς κάτωθι ἀριθμούς ὑπό δεκαδικήν μορφήν κατά τρόπον ὥστε τό ἀκέραιον μέρος νά σημαίνη μέτρα (m) :
α) 8 m 5 cm , β) 7 cm 5 mm , γ) 30 m 9 dm 6 mm.

6) Τρέψατε εἰς μέτρα (m) τά ἑξῆς δύο μήκη :
α) 18 ὑάρδες (yrd) , β) 7 yrd 19 in

7) Διά τό ἴδιον ὕφασμα ὑπάρχουν δύο προσφοραί:
1η) 76,50 δρχ τό μέτρον (m), 2α) 71,75 δρχ ἡ ὑάρδα
Ποία ἀπό τάς δύο προσφοράς εἶναι ἡ συμφερωτέρα διά τόν ἀγοραστήν ;

8) Ἡ διάμετρος ἑνός σωλῆνος εἶναι $\frac{3}{4}$ in. Μέ πόσα χιλιοστόμετρα (mm) ἰσοδυναμεῖ αὐτό ;

§ 2. Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν καί τόξων περιφερείας.

<u>1.1</u> Διά τήν μέτρησιν τῶν γωνιῶν εἶναι φυσικόν νά ληφθοῦν ὡς <u>μονάδες</u> ἡ <u>ὀρθή γωνία</u> καί <u>ὑποδιαιρέσεις της</u>. Ὑπάρχουν δύο συστήματα ὑποδιαιρέσεων τῆς ὀρθῆς γωνίας

Ι) τό παλαιότερον σύστημα καί συχνότερα χρησιμοποιούμενον γενικῶς εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι τό ἑξῆς:
Ἡ ὀρθή γωνία ὑποδιαιρεῖται εἰς 90 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται μοῖρα (°). Μία μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά (′) καί ἕνα πρῶτον λεπτόν εἰς 60 δεύτερα λεπτά (″). Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

$$1 \text{ ὀρθή γωνία} = 90^{\circ} = 5400' = 324\,000''$$
$$1^{\circ} = 60' = 3600''$$
$$1' = 60''.$$

ΙΙ) Ἕνα νεώτερον σύστημα ὑποδιαιρέσεων τῆς ὀρθῆς γωνίας, χρησιμοποιούμενον κυρίως εἰς τήν Τοπογραφίαν, ἀκολουθεῖ τόν δεκαδικόν νόμον καί εἶναι τό ἑξῆς:
Ἡ ὀρθή γωνία ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται βαθμός (gr). Ὁ βαθμός ὑποδιαιρεῖται δεκαδικῶς, δηλαδή εἰς 10 δέκατα βαθμοῦ (dgr), εἰς 100 ἑκατοστά βαθμοῦ (cgr), εἰς 1000 χιλιοστά βαθμοῦ(mgr) κ.ο.κ. Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

$$1 \text{ ὀρθή γωνία} = 100 \text{ gr} = 1000 \text{ dgr} = 10\,000 \text{ cgr}$$
$$1 \text{ gr} = 10 \text{ dgr} = 100 \text{ cgr}$$
$$1 \text{ dgr} = 10 \text{ cgr κοκ.}$$

Τό σύστημα τοῦτο ἔχει τό πλεονέκτημα νά ἁπλοποιῇ τούς ὑπολογισμούς ἐπί τῶν γωνιῶν.

1.2 Ἀντιστοίχως πρός τά ἀνωτέρω ἔχομεν διά τήν μέτρησιν τῶν τόξων μιᾶς καί τῆς αὐτῆς περιφερείας ὡς μονάδας τό τέταρτον τῆς περιφερείας καί ὑποδιαιρέσεις του κατά τά ἀκόλουθα δύο συστήματα.

Ι) Τό τέταρτον τῆς περιφερείας ὑποδιαιρεῖται εἰς 90 ἴσα μέρη (90 ἴσα τόξα), ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται μοῖρα (°). Μία μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά (′) καί ἕνα πρῶτον λεπτόν εἰς (60) δεύτερα λεπτά (″). Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις :

1 ὁλόκληρος περιφέρεια = 4 τέταρτα περιφερείας = 360^0

1 τέταρτον περιφερείας = 90^0 = $5400'$ = $324\,000''$

1^0 = $60'$ = $3600''$

$1'$ = $60''$

II) Τό τέταρτον τῆς περιφερείας ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη (100 ἴσα τόξα), ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται βαθμός (gr). Ἕνας βαθμός ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 δέκατα βαθμοῦ (dgr), εἰς 100 ἑκατοστά βαθμοῦ (cgr), εἰς 1000 χιλιοστά βαθμοῦ (1000 mgr) κ.ο.κ. Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

1 ὁλόκληρος περιφέρεια = 4 τέταρτα περιφερείας = 400 gr

1 τέταρτον περιφερείας = 100 gr = 1000 dgr = 10 000 cgr

1 gr = 10 dgr = 100 cgr.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Γράψατε ὑπό μορφήν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, μέ ἀκέραιον μέρος παριστάνον βαθμούς, τά ἀκόλουθα μέτρα γωνιῶν:

16 gr , 5 dgr 4 cgr , 85 gr 8 dgr 7 cgr , 110 gr 9 cgr

Αἱ ἴδιαι γωνίαι ἀπό ποίους δεκαδικούς ἀριθμούς παριστάνονται, ὅταν τά ἀκέραια μέρη τούτων σημαίνουν δέκατα βαθμοῦ (dgr) ;

2) Τρέψατε εἰς βαθμούς (καί δεκαδικάς ὑποδιαιρέσεις τοῦ βαθμοῦ) τά ἀκόλουθα μέτρα γωνιῶν:

α) 30^0 , 45^0 , 60^0 , 120^0

β) $50^0\ 20'$, $75^0\ 40'$, $145^0\ 30'$

γ) $35'20''$, $1^0\ 30'25''$, $3^0\ 45''$

§ 3. Μονάδες ἐπιφανειῶν.

3.1 Διά τήν μέτρησιν μιᾶς ἐπιφανείας, π.χ. ἑνός πατώματος δωματίου, ἑνός οἰκοπέδου, ἑνός τετραπλεύρου πού ἐσχεδιάσαμεν εἰς τόν μαυροπίνακα, ἐκλέγομεν μίαν ὡρισμένην ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ὡς μονάδα καί συγκρίνομεν πρός αὐτήν τήν πρός μέτρησιν ἐπιφάνειαν, διά νά εὕρωμεν ἀπό πόσας μονάδας καί μέρη μονάδος ἀποτελεῖται αὐτή ἡ ἐπιφάνεια ὁ ἀριθ. πού προκύπτει ἀπό αὐτήν τήν σύγκρισιν λέγεται <u>μέτρον</u> ἤ <u>ἐμβαδόν</u> τῆς μετρουμένης ἐπιφανείας.

<u>3.2</u> Αἱ μονάδες ἐπιφανείας πού χρησιμοποιοῦμεν εἰς τάς συνήθεις μετρήσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

Ι) <u>Τό τετραγωνικόν μέτρον</u> (m^2). Τοῦτο εἶναι ἕνα τεράγωνον τοῦ ὁποίου κάθε πλευρά εἶναι ἴση μέ 1 m.

ΙΙ) <u>Τό τετραγωνικόν δεκατόμετρον</u> (dm^2). Τοῦτο εἶναι ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 1 dm. Ἕνα τετραγωνικόν μέτρον (m^2) ἀποτελεῖται ἑπομένως ἀπό $10 \times 10 = 100$ dm^2.

ΙΙΙ) <u>Τό τετραγωνικόν ἑκατοστόμετρον</u> (cm^2), δηλαδή ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 1 cm. Ἑπομένως 1 dm^2 ἀποτελεῖται ἀπό $10 \times 10 = 100$ cm^2.

IV) <u>Τό τετραγωνικόν χιλιοστόμετρον</u> (mm^2), δηλαδή ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 1 mm. Ἑπομένως 1 cm^2 ἀποτελεῖται ἀπό $10 \times 10 = 100$ mm^2.

Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2 ,$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2 ,$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2 .$$

V) Διά μεγάλας ἐκτάσεις ἐπιφανείας (π.χ. διά τήν ἐπιφάνειαν ἑνός νομοῦ τῆς χώρας μας) χρησιμοποιεῖται ὡς μονάς τό <u>τετραγωνικόν χιλιομετρον</u> (km^2), πού εἶναι ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 1 km. Ἑπομένως ἔχομεν τήν σχέσιν:

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 .$$

<u>3.3</u> Διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας γηπέδων, ἀγρῶν κλπ. χρησιμοποιοῦνται εἰς τήν χώραν μας καί αἱ ἑξῆς μονάδες πού εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 1 m^2:

Ι) <u>Τό στρέμμα</u> πού εἶναι τό χιλιοπλάσιον τοῦ m^2 :

$$1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$$

Ἐμβαδόν ἑνός στρέμματος περίπου ἔχει ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 31,62 m.

II) Τό ἑκτάριον = 10 στρέμματα = 10 000 m^2.

Ἐμβαδόν ἑνός ἑκταρίου ἔχει ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 100 m.

3.4 Διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας οἰκοπέδων χρησιμοποιεῖται εἰσέτι καί ὁ τετραγωνικός τεκτονικός πῆχυς, ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνα τετράγωνον μέ πλευράς μήκους 75 cm = $\frac{3}{4}$ m.

Ἔχομεν ἐπομένως τήν σχέσιν:

1 τετραγ. τεκτ. πῆχυς $= \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\ m^2 = \frac{9}{16}\ m^2 = 0,5625\ m^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τρέψατε τό ἐμβαδόν 70,5 m^2 εἰς ἐμβαδόν μέ μονάδα τό dm^2 καθώς καί εἰς ἐμβαδόν μέ μονάδα τό cm^2. Ἐπομένως πῶς τρέπομεν ἐμβαδά μέ μονάδα τό m^2 εἰς ἐμβαδά μέ μονάδα τό dm^2; μέ μονάδα τό cm^2; μέ μονάδα τό mm^2;

2) Τρέψατε τό ἐμβαδόν 3655200 cm^2 εἰς ἐμβαδόν μέ μονάδα τό dm^2 καθώς καί εἰς ἐμβαδόν μέ μονάδα τό m^2. Ἐπομένως ποῖος εἶναι ὁ κανών διά τάς μετατροπάς αὐτάς;

3) Γράψατε τούς κάτωθι ἀριθμούς ὑπό δεκαδικήν μορφήν μέ ἀκέραιον μέρος παριστάνον m^2:

α) 12 m^2 37 dm^2 25 mm^2, β) 23 m^2 6 dm^2 27 cm^2, 7 mm^2

γ) 12m^2 48 mm^2.

4) Ἡ περίμετρος ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 168 m, ἡ βάσις του 56,8 m.
Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν εἰς m^2 τοῦ ὀρθογωνίου; Ποῖον τό ἐμβαδόν του εἰς στρέμματα;

§ 4. Μονάδες ὄγκου καί μονάδες χωρητικότητος.

4.1 Διά τήν μέτρησιν τοῦ ὄγκου ἑνός στερεοῦ, δηλαδή τῆς ἐκτάσεως πού καταλαμβάνει τό στερεόν ἐντός τοῦ χώρου, ἐκλέγομεν τόν ὄγκον ἑνός ὡρισμένου στερεοῦ ὡς μονάδα καί συγκρίνομεν πρός αὐτόν ἐκεῖνον τόν ὁποῖον θέλομεν νά μετρήσωμεν.

Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τήν μέτρησιν λέγεται μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ μετρουμένου στερεοῦ καθώς καί ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

4.2 Αἱ μονάδες ὄγκου τάς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν εἰς τάς συνήθεις μετρήσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

I) Τό κυβικόν μέτρον (m^3). Τοῦτο εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμάς μήκους 1 m.

II) Τό κυβικόν δεκατόμετρον (dm^3), πού εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμάς μήκους 1 dm. Ἕνα m^3 ἀποτελεῖται ἀπό
$10 \times 10 \times 10 = 1000\ dm^3$.

III) Τό κυβικόν ἑκατοστόμετον (cm^3), πού εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμάς μήκους 1 cm. Ἕνα dm^3 ἀποτελεῖται ἀπό
$10 \times 10 \times 10 = 1000\ cm^3$. Ἄρα ἕνα m^3 ἀποτελεῖται ἀπό
$1000 \times 1000 = 1\ 000\ 000\ cm^3$.

IV) Τό κυβικόν χιλιοστόμετρον (mm^3), πού εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμάς μήκους 1 mm. Ἕνα cm^3 ἀποτελεῖται ἀπό
$10 \times 10 \times 10 = 1000\ mm^3$. Ἄρα ἕνα m^3 ἀποτελεῖται ἀπό
$1\ 000 \times 1000 \times 1000 = 1000\ mm^3$.

Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\ 000\ 000.cm^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1\ 000\ 000\ mm^3.$$
$$1\ cm^3 = 1\ 000\ mm^3$$

4.3 Διά νά μετρήσωμεν τήν χωρητικότητα ἑνός δοχείου,
ὥστε νά γνωρίζωμεν τόν ὄγκον τοῦ ὑγροῦ ἤ τοῦ ἀερίου πού ἠμ-
πορεῖ νά δεχθῆ (νά χωρέση) τό δοχεῖον, χρησιμοποιοῦμεν ὡς
μονάδα χωρητικότητος τό λίτρον (l). Τοῦτο εἶναι ὁ ὄγκος τόν
ὁποῖον καταλαμβάνει ἕνα χιλιόγραμμον ἀπεσταγμένου νεροῦ θερ-
μοκρασίας 4^o Κελσίου καί ὑπό κανονικήν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν.
Κατά πολύ καλήν προσέγγισιν τό λίτρον ἰσοδυναμεῖ μέ τόν ὄγ-
κον ἑνός κυβικοῦ δεκατομέτρου (dm^3). Μεγαλύτεραι μονάδες χω-

ρητικότητος εἶναι τό <u>δεκάλιτρον</u> (dal), τό <u>ἑκατόλιτρον</u> (hl) καί τό <u>χιλιόλιτρον</u> (kl).
Μικρότεραι μονάδες τό <u>δεκατόλιτρον</u> (dl), τό <u>ἑκατοστόλιτρον</u> (cl) καί τό <u>χιλιοστόλιτρον</u> (ml). Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις

$$1\ kl = 10\ hl = 100\ dal = 1\ 000\ l$$

$$1\ l = 10\ dl = 100\ cl = 1\ 000\ ml.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Γρέψατε τόν ὄγκον 4,5 m^3 εἰς ὄγκον μέ μονάδα τό dm^3 καθώς καί εἰς ὄγκον μέ μονάδα τό cm^3. Ἑπομένως ποῖος εἶναι ὁ κανών διά τάς μετατροπάς αὐτάς ;

2) Τρέψατε τόν ὄγκον 5 200 000 cm^3 εἰς ὄγκον μέ μονάδα τό dm^3 καθώς καί εἰς ὄγκον μέ μονάδα τό m^3.

3) Τί ὄγκον ἔχει πρακτικῶς μία ποσότης 150 λίτρων καθαροῦ νεροῦ ;

§ 5 Μονάδες βάρους. Εἰδικόν βάρος.

<u>5.1</u> <u>Βάρος</u> ἑνός ὑλικοῦ σώματος εἶναι ἡ δύναμις μέ τήν ὁποίαν ἡ Γῆ τό ἕλκει πρός τό κέντρον της. Διά νά τό μετρήσωμεν, τό συγκρίνομεν πρός ἕνα ὡρισμένον βάρος πού ἐκλέγομεν ὡς μονάδα.
Εἰς τήν χώραν μας βασική μονάς βάρους εἶναι τώρα τό <u>χιλιόγραμμον</u> ἤ <u>κιλόν</u> (kgp). (Πρό τινων ἐτῶν μετεχειριζόμεθα ὡς μονάδα βάρους καί τήν ὀκάν = 1,280 kgp).
Τό <u>χιλιόγραμμον</u> (kgp) εἶναι τό βάρος ἑνός προτύπου σώματος πού εἶναι κατεσκευασμένον ἀπό ἰριδιοῦχον πλατίναν καί φυλάσσεται εἰς τό Διεθνές Γραφεῖον Βαρῶν καί Μέτρων πλησίον τῶν Παρισίων. Κατά πολύ καλήν προσέγγισιν τό βάρος τοῦτο εἶναι ἴσον μέ τό βάρος μιᾶς ποσότητος καθαροῦ νεροῦ ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον ἕνα κυβικόν δεκατόμετρον (1 dm^3).
Τό χιλιόγραμμον (kgp) ὑποδιαιρεῖται εἰς 1 000 ἴσα μέρη πού

λέγονται γραμμάρια βάρους (gp) καί χρησιμεύουν διά τήν μέτρησιν μικρῶν βαρῶν. Διά τήν μέτρησιν μεγάλων βαρῶν χρησιμοποιεῖται ὡς μονάς ὁ τόννος (t) πού εἶναι ἴσος μέ 1 000 χιλιόγραμμα (1 000 kgp).

5.2 'Από τήν Φυσικήν γνωρίζομεν ὅτι δύο στερεά σώματα πού ἔχουν τόν αὐτόν ὄγκον δέν ἔχουν κατ'ἀνάγκην καί τό αὐτό βάρος. Μέ ἄλλας λέξεις τό βάρος ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἀπό τόν ὄγκον του ἀλλά καί ἀπό τήν ὕλην ἡ ὁποία τό ἀποτελεῖ. 'Ημποροῦμεν ὅμως διά κάθε ὁμοιογενῆ ὕλην (π.χ. διά τόν σίδηρον, τόν μόλυβδον, τό ὕδωρ, τόν ὑδράργυρον κτλ.) νά προσδιορίσωμεν ποῖον εἶναι τό βάρος της κατά μονάδα ὄγκου. Αὐτό τό βάρος μιᾶς μονάδος ὄγκου ἐκ τῆς θεωρουμένης ὕλης λέγεται εἰδικόν βάρος της καί μᾶς χρησιμεύει διά νά ὑπολογίζωμεν τό βάρος ἑνός δεδομένου ὄγκου αὐτῆς τῆς ὕλης. Π.χ. τό εἰδικόν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 kgp κατά κυβικόν δεκατόμετρον (7,8 kgp/dm^3). 'Επομένως μία ποσότης σιδήρου πού ἔχει ὄγκον 3 dm^3 ἔχει βάρος $3 \times 7,8 = 23,4$ kgp. Τό εἰδικόν βάρος τῆς βενζίνης εἶναι 0,720 kgp/dm^3, ἄρα ἡ βενζίνη πού γεμίζει ἕνα δοχεῖον χωρητικότητος 12 dm^3, ἔχει βάρος $12 \times 0,720 = 8,64$ kgp.

Γενικῶς , μεταξύ τοῦ ὄγκου V, τοῦ βάρους B καί τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε ἑνός σώματος ἔχομεν τάς σχέσεις :

$$B = V \times \varepsilon \quad , \quad V = \frac{B}{\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon = \frac{B}{V} \quad ,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ καθεμία ἔχει ὡς συνέπειαν τάς δύο ἄλλας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τρέψατε εἰς χιλιόγραμμα (kgp) τά ἀκόλουθα βάρη:
α) 5,125 t , β) 0,46218 t , γ) 5275 gp δ) 85150 gp.

2) 'Εκτελέσατε τάς πράξεις:
α) 5 t + 656 kgp + 370 kgp

β) 7,8 t + 2 500 kgp - 4 200 kgp.

3) Πόσον βάρος έχουν 25 λίτρα καθαρού ύδατος ; Πόσον βάρος έχουν 76 εκατόλιτρα (hl) οίνου, άν δεχθώμεν ότι ό οίνος έχει τό ίδιον ειδικόν βάρος μέ τό ύδωρ ;

4) Ὑπολογίσατε τό βάρος ενός συμπαγούς τσιμεντολίθου γνωρίζοντες τόν όγκον του 4,7 m^3 καί τό ειδικόν βάρος του 2,2 t κατά κυβικόν μέτρον (2,2 t/m^3).

§ 6. Μονάδες χρόνου.

Μονάδες διά τήν μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ὥρα (h) καί αἱ ὑποδιαιρέσεις της εἰς 60 λεπτά (min) καί 60 × 60 = 3600 δευτερόλεπτα (sec).

Διά μεγάλας σχετικῶς χρονικάς διαρκείας χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας τήν ἡμέραν = 24 h , τό ἔτος = $365 \frac{1}{4}$ ἡμέρας καί τόν αἰῶνα = 100 ἔτη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Πόσα λεπτά ἔχει ἡ ἡμέρα ; πόσα δευτερόλεπτα ;

2) Πόσας ὥρας ἔχει κάθε μήν τῶν 30 ἡμερῶν ; πόσας κάθε μήν τῶν 31 ἡμερῶν ;

3) Ὁ χρόνος ὁ μεταξύ δύο διαδοχικῶν πανσελήνων εἶναι 42523 min. Τρέψατέ τον εἰς ἡμέρας, ὥρας καί λεπτά

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Ἕν αὐτοκίνητον διανύει 64 km μέ ἕνα γαλλόνι βενζίνης (1 γαλλόνι = 3,785 λίτρα). Πόσα γαλλόνια θά χρειασθῆ διά νά διατρέξη 448 km ;

2) Μία δεξαμενή τῆς ἑταιρίας "Πουρφίνα" περιεῖχε ἀρχικῶς 1940 γαλλόνια βενζίνης καί μετά τό γέμισμά της 4979 γαλλόνια. Πόσα γαλλόνια βενζίνης ἐχύθησαν εἰς τήν δεξαμενήν;

3) Ἕνας ἠλεκτροκινητήρ ἐκτελεῖ 2870 στροφάς ἀνά λεπτόν. Νά εὕρετε πόσας στροφάς θά ἐκτελέση ἐάν λειτουργήση συνεχῶς ἀπό τήν 9ην ὥραν π.μ. μέχρι τῆς 2ας ὥρας μ.μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας.

4) Τήν 24ην Μαΐου 1962 καί ὥραν 2 καί 45΄ μ.μ. ἐξετοξεύθη ὁ πύραυλος "Ἄτλας" μέ τόν Ἀμερικανόν κοσμοναύτην

Κάρπεντερ. Ὁ Κάρπεντερ ἔκαμε τρεῖς περιστροφάς γύρω ἀπό τήν Γῆν ὁλικοῦ μήκους 126225 km καί ἐπανῆλθεν εἰς τάς 7 ὥρ. 15΄μ.μ. Πόσα km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν) ἦτο ἡ μέση ταχύτης του;

5) Εἰς πόσας ὥρας ἕν διαστημόπλοιον μέ ταχύτητα 28050 km/h θά φθάση εἰς τήν Σελήνην, ὅταν αὕτη ἀπέχη ἀπό τήν Γῆν 378 675 km;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Εἰσαγωγή εἰς τά σύνολα

§ 1. Ἔννοια τοῦ συνόλου.

1.1 Οἱ μαθηταί μιᾶς τάξεως, ἔστω τῆς Α΄ τάξεως τοῦ σχολείου μας, εἶναι ὡρισμένοι καί διακρίνονται ὁ εἷς ἀπό τόν ἄλλον, π.χ. διά τῶν ὀνοματεπωνύμων των ἤ καί διά τοῦ ἀριθμοῦ ἑνός ἑκάστου εἰς τό μαθητολόγιον. Προκειμένου ὁ διευθυντής τοῦ σχολείου νά δώση μίαν ἐντολήν ἡ ὁποία τούς ἀφορᾶ, π.χ. νά συγκεντρωθοῦν εἰς τήν αἴθουσαν μουσικῆς, συνήθως λέγει: "Ἡ Α΄τάξις νά συγκεντρωθῆ εἰς τήν αἴθουσαν μουσικῆς". Δηλαδή ὁ διευθυντής ἐκφράζεται διά τούς μαθητάς τούς ὁποίους ἔχει ὑπ'ὄψιν του χρησιμοποιῶν ἕνα κοινόν χαρακτηριστικόν τό ὁποῖον ἔχουν οἱ μαθηταί οὗτοι καί ὄχι οἱ ἄλλοι μαθηταί τοῦ σχολείου μας.

Ὁ τρόπος αὐτός νά ὁμιλῶμεν διά πολλά πράγματα συγχρόνως χρησιμοποιοῦντες μίαν περιληπτικήν ἔκφρασιν ἡ ὁποῖα τά ἀντιπροσωπεύει, εἶναι πολύ συνήθης. Π.χ. λέγομεν ὁ λόχος καί ἐννοοῦμεν ὅλους τούς ἄνδρας πού τόν ἀποτελοῦν, λέγομεν ἡ ἐνωμοτία τῶν προσκόπων τοῦ σχολείου μας καί ἐννοοῦμεν ὅλους τούς μαθητάς πού μετέχουν εἰς τήν ἐνωμοτίαν αὐτήν· ὁ γυμναστής παραγγέλλει "Τάξις "Αλτ" καί ἀναμένει τήν ἐκτέλεσιν

τῆς ἐντολῆς του ἀπό ὅλους τούς μαθητάς τῆς τάξεως.
Συμπέρασμα. Εἰς πολλάς περιπτώσεις ὁμιλοῦμεν διά πολλά πράγματα συγχρόνως, τά ὁποῖα ὅμως διά τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνός κοινοῦ χαρακτηριστικοῦ των συνοψίζομεν εἰς μίαν ἑνότητα.

1.2 Δυνάμεθα τώρα νά ὁρίσωμεν τί εἶναι σύνολον. Σύνολον καλοῦμεν ἕνα ἤ περισσότερα ἀντικείμενα τά ὁποῖα περιλαμβάνομεν εἰς ἕν ὅλον. Τά ἀντικείμενα αὐτά πρέπει νά εἶναι σαφῶς καθωρισμένα καί νά διακρίνωνται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο, ἕκαστον δέ ἐξ αὐτῶν λέγεται στοιχεῖον ἤ μέλος τοῦ συνόλου.
Ἰδού καί μερικά παραδείγματα συνόλων: 1) ὅλοι οἱ μαθηταί τοῦ σχολείου μας, 2) ὅλοι οἱ μαθηταί μιᾶς ὡρισμένης τάξεώς του, 3) ὅλοι οἱ μαθηταί οἱ παρόντες εἰς ἕνα ὡρισμένον μάθημα τῆς τάξεώς μας, 4) τά θρανία τῆς αἰθούσης μας διδασκαλίας, 5) τά θρανία, ἡ ἕδρα καί ὁ μαυροπίναξ τῆς αἰθούσης μας, 6) τά θρανία τῆς αἰθούσης μας καί οἱ μαθηταί οἱ παρόντες εἰς ἕνα ὡρισμένον μάθημα, 7) οἱ μαθηταί οἱ ἀπόντες ἀπό τό μάθημα τοῦτο καί τά σημεῖα ἀπουσίας τά ὁποῖα ὁ καθηγητής ἔχει γράψει εἰς τόν κατάλογον, κ.ο.κ.
Δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ των, ὅταν δέν ἔχουν κοινά στοιχεῖα. Π.χ. τά σύνολα 1) καί 4) εἶναι ξένα μεταξύ των, ἐπίσης τά 6 καί 7), τά 3 καί 5) κ.ο.κ.

§ 2. Παράστασις ἑνός συνόλου. Συμβολισμοί.

2.1 Χάριν συντομίας ἕνα σύνολον θά παριστάνεται μέ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα καί ἕνα ἀντικείμενον πού εἶναι στοιχεῖον συνόλου, μέ ἕνα μικρόν γράμμα.
Διά νά δηλώσωμεν ὅτι ἕνα ἀντικείμενον παριστανόμενον μέ τό γράμμα α εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β , γράφομεν συμβολικῶς

$$\alpha \in B$$

καί ἐκφωνοῦμεν: "τό α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β" ἤ "τό α ἀνήκει εἰς τό Β". Ἄν ἕνα ἀντικείμενον πού παριστάνεται μέ τό γράμμα β δέν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β, τότε γράφομεν

$$\beta \notin B$$

καί διαβάζομεν: "τό β δέν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β" ἤ "τό β δέν ἀνήκει εἰς τό Β".

Ἔστω ὅτι τό σύνολον Α ἔχει ὡς στοιχεῖα τούς ἀριθμούς 1,3, 5,7,9· αὐτό τό σημειώνομεν συμβολικῶς ἔτσι:

$$A = \{1,3,5,7,9\} \quad \text{ἤ} \quad A = \{5,9,7,1,3\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Μέ ἄλλας λέξεις, ἡ σειρά μέ τήν ὁποίαν καταγράφομεν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἐντός τοῦ συμβόλου $\{\ \}$, πού καλοῦμεν <u>ἄγκιστρον</u>, εἶναι ἀδιάφορος. Διά τό ἀνωτέρω σύνολον ἔχομεν τάς σχέσεις:

$1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$, $9 \in A$, ἐνῶ $2 \notin A$, $6 \notin A$ κ.ο.κ.

Ἔστω δεύτερον ὅτι τό Β παριστάνει τό σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως "φῶς" . Θά γράψωμεν

$B = \{\omega\}$ καί $\omega \in B$, ἐνῶ $\varphi \notin B$, $\sigma \notin B$, $\alpha \notin B$ κ.ο.κ.

Τό σύνολον αὐτό Β λέγεται <u>μονομελές</u> ἤ <u>μονοστοιχειακόν</u>, ἐπειδή ἔχει ἕνα μόνον στοιχεῖον.

Ἐάν Γ εἶναι τό σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως "φῶς θά γράφωμεν $\Gamma = \{\varphi,\sigma\}$ ἤ $\Gamma = \{\sigma,\varphi\}$, θά ἔχωμεν δέ τάς σχέσεις $\varphi \in \Gamma$, $\sigma \in \Gamma$, ἐνῶ $\delta \notin \Gamma$ κ.υ.κ.

Τό σύνολον Γ εἶναι <u>διμελές</u> καί λέγεται <u>ζεῦγος στοιχείων.</u>

Ἐάν διά τά στοιχεῖα ἑνός ζεύγους ὁρίσωμεν μίαν σειράν (μίαν διάταξιν, ὅπως συνηθίζεται νά λέγωμεν), τότε τό ζεῦγος λέγεται <u>διατεταγμένον</u> καί ἀντί ἀγκίστρου χρησιμοποιοῦμεν μίαν παρένθεσιν· ἐντός τῆς παρενθέσεως γράφομεν ἀριστερά τό στοιχεῖον τοῦ ζεύγους πού ὡρίσθη ὡς πρῶτον καί δεξιά τό ἄλλο πού ὡρίσθη ὡς δεύτερον. Π.χ. ἐάν διά τό ζεῦγος $\{\varphi,\sigma\}$ ὁρίσωμεν ὡς σειράν τῶν στοιχείων του τήν σειράν πού ἔχουν αὐτά ἐντός τοῦ ἀλφαβήτου, τότε προκύπτει τό διατεταγμένον ζεῦγος (φ,σ). Τό διατεταγμένον αὐτό ζεῦγος (φ,σ)διαφέρει ἐννοεῖται ἀπό τό διατεταγμένον ζεῦγος (σ,φ).

2.2 Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα σύνολον Δ μέ πολλά στοιχεῖα π.χ. ὅλους τούς λεγομένους φυσικούς ἀριθμούς 1,2,3,4 κ.ο.κ. μέχρι καί τοῦ 99. Νά ἀναγράψωμεν ἐντός τοῦ ἀγκίστρου { } τά σύμβολα ὅλων αὐτῶν τῶν στοιχείων δέν εἶναι πρακτικῶς εὔκολον οὔτε ἡ ἀναγραφή αὐτή θά μᾶς ἔδιδε μίαν συνοπτικήν καί εὐδιάκριτον παράστασιν τοῦ συνόλου. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου παρουσιάζουν ἀφ'ἑαυτῶν μίαν σειράν, διά τοῦτο γράφομεν ἐντός τοῦ ἀγκίστρου τά δύο ἤ τρία πρῶτα ἐξ αὐτῶν, κατόπιν τρεῖς τελείας (στιγμάς) καί ἔπειτα τό τελευταῖον στοιχεῖον 99 τῆς σειρᾶς :

$$\Delta = \{1,2,3,\dots,99\}.$$

Τί πρέπει ὅμως νά γίνη, ἄν τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου δέν παρουσιάζουν ἀφ'ἑαυτῶν μίαν ὡρισμένην σειράν (μίαν ὡρισμένην διάταξιν) ; Ἰδού ἕνας ἁπλοῦς καί σύντομος τρόπος παραστάσεως πού ἠμπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν. Παριστάνομεν μέ ἕνα ἀπό τά τελευταῖα συνήθως γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἔστω μέ τό x , γενικῶς κάθε στοιχεῖον, γράφομεν ἐντός τοῦ ἀγγίστρου πρῶτα τό x, ἔπειτα ἕνα διαχωριστικόν σημεῖον (τό / ἤ τό :) καί τέλος μίαν ἰδιότητα πού χαρακτηρίζει τά στοιχεῖα x τοῦ συνόλου, δηλαδή μίαν ἰδιότητα πού ἔχουν ὅλα τά ἀντικείμενα τά ἀνήκοντα εἰς τό σύνολον καί μόνον αὐτά. Ἔτσι διά τό ἀνωτέρω σύνολον Δ γράφομεν:

$$\Delta = \{x \,/\, x \text{ φυσικός ἀριθμός μικρότερος τοῦ } 100\}$$

καί διαβάζομεν:

Δ εἶναι τό σύνολον τῶν x μέ τήν ἰδιότητα: x εἶναι φυσικός ἀριθμός μικρότερος τοῦ 100.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἶναι ὁ σῖτος στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν ὀσπρίων ;

2) Εἶναι τό φασόλι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν ὀσπρίων;

3) Δώσατε μίαν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων ἑκάστου ἐκ τῶν συνόλων
Α = {α,ε,η,ι,ο,υ,ω} , Β={18,20,22,24} , Γ = {4,9,16}
καί παραστήσατε αὐτά μέ τόν ἄλλον τρόπον συμβολισμοῦ των.

4) Ἀναγράψατε α) τό σύνολον τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδος τῶν ὁποίων τό ὄνομα ἀρχίζει ἀπό Θ καί β) τό σύνολον τῶν συμμαθητῶν σας τῶν ὁποίων τό ἐπώνυμον ἀρχίζει ἀπό Ν. Διά τά δύο αὐτά σύνολα νά δοθῇ καί ὁ ἄλλος τρόπος συμβολισμοῦ των.

5) Πόσα στοιχεῖα ἔχει τό καθένα ἀπό τά κάτωθι σύνολα:
α) τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπό τό 1 μέχρι καί τοῦ 15;
β) τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπό τό 10 μέχρι τοῦ 27 μή συμπεριλαμβανομένου ;
γ) τό σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας .

6) Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως "θάλασσα" ;
Νά ἔχετε ὑπ'ὄψιν σας ὅτι, ἐξ ὁρισμοῦ, τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου πρέπει νά εἶναι διάφορα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

§ 3. Ὑποσύνολα συνόλου.

3.1 Ὡς γνωστόν πολλά Γυμνασια τῆς χώρας μας ἐφαρμόζουν τό σύστημα τῶν μαθητικῶν κοινοτήτων εἰς κάθε τάξιν.
Μέ ἄλλας λέξεις οἱ μαθηταί μιᾶς τάξεως σχηματίζουν διαφόρους ὁμάδας π.χ. τήν ὁμάδα Ε τῶν ἐκδρομῶν, τήν ὁμάδα Κ τῆς καλλιτεχνίας, τήν ὁμάδα Α τοῦ ἀθλητισμοῦ κτλ., δέν ἀπαγορεύεται δέ ἕνας μαθητής νά ἀνήκῃ εἰς δύο ἤ περισσοτέρας ὁμάδας. Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι ἡ Δ΄ τάξις τοῦ Γυμνασίου μας παρουσιάζει π.χ. τάς ἑξῆς ὁμάδας:

Ε = {Γιῶργος, Κώστας , Ντῖνος, Παῦλος},
Κ = {Ἰωάννης, Ἴων , Κώστας, Παῦλος, Πέτρος, Φωκίων},
Α = {Ἰωάννης, Κώστας, Πέτρος, Φίλιππος, Χρῆστος}

Τά 3 αὐτά σύνολα ἀποτελοῦνται ἀπό στοιχεῖα τοῦ συνόλου Δ τῶν μαθητῶν τῆς Δ΄ τάξεως :

Δ = {x / x μαθητής τῆς Δ΄ τάξεως τοῦ Γυμνασίου μας} .

Διά τοῦτο λέγονται <u>ὑποσύνολα</u> τοῦ συνόλου Δ.

Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἄλλα σύνολα, τά ἀκόλουθα:

Γ = {x / x γράμμα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου} ,

Σ = {x / x σύμφωνον τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου} .

Κάθε στοιχεῖον τοῦ Σ εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Γ· διά τοῦτο τό Σ λέγεται <u>ὑποσύνολον</u> τοῦ Γ.

Ὥστε, γενικῶς , ἕνα σύνολον Χ λέγεται <u>ὑποσύνολον</u> ἑνός συνόλου Ψ , ἐάν κάθε στοιχεῖον τοῦ Χ εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Ψ . Τήν σχέσιν αὐτήν μεταξύ Χ καί Ψ τήν σημειώνομεν με τόν συμβολισμόν:

$$X \subseteq \Psi$$

πού διαβάζεται: " τό Χ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Ψ " ἤ " τό Χ περιέχεται εἰς τό Ψ ". Διά τά ἀνωτέρω σύνολα Ε, Κ, Α, Δ καί Γ, Σ θά γράφωμεν λοιπόν συμβολικῶς:

$E \subseteq \Delta$, $K \subseteq \Delta$, $A \subseteq \Delta$ καί $\Sigma \subseteq \Gamma$.

<u>3.2 Παρατηρήσεις</u>. I) Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμόν τοῦ ὑποσυνόλου συμπεραίνομεν ὅτι κάθε σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του. Π.χ. διά τά σύνολα Ε, Δ, Σ, Γ πού ὡρίσαμεν παραπάνω ἔχομεν: $E \subseteq E$, $\Delta \subseteq \Delta$, $\Sigma \subseteq \Sigma$, $\Gamma \subseteq \Gamma$.

II) Τό σύνολον Ε εἶναι μέν ὑποσύνολον τοῦ Δ, ὑπάρχει ὅμως ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖον τοῦ Δ, π.χ. ὁ μαθητής Ἰωάννης, πού δέν εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Ε. Διά τοῦτο λέγεται ὅτι τό Ε εἶναι <u>γνήσιον</u> ὑποσύνολον τοῦ Δ καί γράφομεν $E \subset \Delta$. Ὁμοίως τό Σ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Γ, διότι τό Γ ἔχει ὡς στοιχεῖα καί τά φωνήεντα πού δέν εἶναι στοιχεῖα τοῦ Σ, ἄρα $\Sigma \subset \Gamma$.

III) Τό Ε εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Δ καί τό Δ ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Τ ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας. Αὐτά ἔχουν ὡς συνέπειαν, τό Ε νά εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Τ. Τήν συνέπειαν αὐτήν τήν ἐκφράζομεν συμβολικῶς μέ ἕνα βέλος $\Longrightarrow$ ὡς ἑξῆς:

$$E \subseteq \Delta \quad \text{καί} \quad \Delta \subseteq T \Longrightarrow E \subseteq T.$$

Ὁμοίως, ἄν θεωρήσωμεν τά σύνολα

$Z = \{x \,/\, x$ θρανίον τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς μας$\}$,

$H = \{x \,/\, x$ θρανίον οἱασδήποτε αἰθούσης τοῦ Γυμνασίου μας$\}$,

$\Theta = \{x \,/\, x$ ἔπιπλον τοῦ Γυμνασίου μας$\}$,

θά εὕρωμεν ὅτι

$$Z \subseteq H \;, \; H \subseteq \Theta \quad \text{καί συνεπῶς} \quad Z \subseteq \Theta.$$

Γράφομεν λοιπόν συμβολικῶς:

$$Z \subseteq H \quad \text{καί} \quad H \subseteq \Theta \Longrightarrow Z \subseteq \Theta.$$

Κατά ταῦτα ἡ σχέσις τοῦ "περιέχεσθαι", πού ὡρίσαμεν διά τά σύνολα καί πού παρεστήσαμεν μέ τό σύμβολον $\subseteq$, ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα ἡ ὁποία λέγεται μεταβατική ἰδιότης:

Ἐάν ἕνα σύνολον A_1 περιέχεται εἰς τό σύνολον A_2 καί ἐάν τό σύνολον A_2 περιέχεται εἰς τό σύνολον A_3, τότε τό σύνολον A_1 περιέχεται εἰς τό σύνολον A_3.

IV) Ἐάν τά σύνολα πού θεωροῦμεν εἰς ἕνα ζήτημα εἶναι ὑποσύνολα ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ συνόλου Υ, τότε τό σύνολον αὐτό λέγεται σύνολον ἀναφορᾶς ἤ ὑπερσύνολον τῶν θεωρουμένων συνόλων. Π.χ. αἱ ὁμάδες Ε, Κ, Λ τῆς Δ΄ τάξεως τοῦ Γυμνασίου μας ἔχουν ὡς ὑπερσύνολον τό σύνολον Δ τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως ταύτης.

§ 4. Τό κενόν σύνολον.

Εἰς τά προηγούμενα ἐγνωρίσαμεν σύνολα μέ ἕνα ἤ δύο ἤ περισσότερα στοιχεῖα, συμφώνως καί πρός τόν ὁρισμόν πού ἐδώσαμεν εἰς τήν § 1.2. Ὅπως ὅμως εἰς τήν Ἀριθμητικήν ἐχρειάσθη νά εἰσαγάγωμεν τόν ἀριθμόν μηδέν (0) κοντά εἰς τούς ἀρχικούς ἀριθμούς 1,2,3 κτλ., ἔτσι καί ἐδῶ εἶναι ἀπαραίτητον διά τά ἑπόμενα νά εἰσαγάγωμεν ἕνα νέον σύνολον, μή προβλεπόμενον ἀπό τόν ἀρχικόν ὁρισμόν τοῦ συνόλου, τό λεγόμενον κενόν σύνολον. Τοῦτο εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἕνα σύνολον χωρίς στοιχεῖα καί ἀντιστοιχεῖ εἰς ἰδιότητας πού δέν πραγματοποιοῦνται εἰς κανένα ἀντικείμενον εἴτε τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου εἴτε τῆς σκέψεώς μας. Π.χ. τό νά εἶναι κανείς ἀδελφός τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι μία ἀπραγματοποίητος ἰδιότης· ὁμοίως κανένα ἀντικείμενον δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι συγχρόνως καί σύμφωνον τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου καί γράμμα τῆς λέξεως "αἰ". Τοιαύτας μή πραγματοποιησίμους ἰδιότητας ἀντιπροσωπεύει τό κενόν σύνολον. Ὡς σύμβολόν του θά ἠμποροῦσε νά χρησιμεύση τό κενόν ἄγκιστρον { }, ἐπεκράτησεν ὅμως ὁ συμβολισμός $\emptyset$. Ἔτσι γράφομεν π.χ.

$$\text{σύνολον συμφώνων τῆς λέξεως "αἰ"} = \emptyset$$

Τό κενόν σύνολον πρέπει νά θεωρηθῇ ὑποσύνολον παντός συνόλου Α :

$$\emptyset \subseteq \text{παντός συνόλου } A.$$

Πράγματι, δέν ὑπάρχει κανένα ἀντικείμενον πού νά ἀνήκη εἰς τό $\emptyset$ καί νά μήν ἀνήκη εἰς τό σύνολον Α.

§ 5. Γεωμετρική (ἤ γραφική) παράστασις συνόλων. Διαγράμματα.

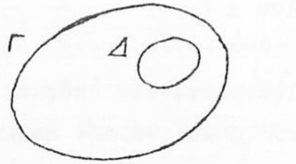
Συνηθίζεται νά παριστάνωμεν ἕνα σύνολον γεωμετρικῶς μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:
Σχεδιάζομεν ἐπί τοῦ χάρτου μίαν ἁπλῆν κλειστήν γραμμήν (π.χ. μίαν περιφέρειαν) καί ἐντός αὐτῆς σημεῖα ἀντιπροσωπεύοντα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Ἡ γεωμετρική αὐτή παράστασις λέγεται διάγραμμα τοῦ συνόλου. Π.χ. ἕνα μονομελές σύνολον Μ,

ἕνα διμελές Δ καί ἕνα τριμελές Τ ἔχουν τά ἀκόλουθα ἀντιστοίχως διαγράμματα:

Τό σύνολον Ω τῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ἔχει ὡς διάγραμμα τό εἰκονιζόμενον παραπλεύρως, κ.ο.κ.

Ἔστω τώρα $A = \{\kappa, \lambda, \mu\}$ καί $B = \{\beta, \gamma, \delta, \zeta, \vartheta, \kappa, \lambda, \mu\}$.
Τό A περιέχεται εἰς τό B καί ἐπομένως ἔχομεν τήν σχέσιν $A \subseteq B$, τῆς ὁποίας ἡ γεωμετρική παράστασις δίδεται εἰς τήν εἰκόνα παραπλεύρως.

Ἐάν τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου Γ εἶναι εἴτε μέγα εἴτε ἀπεριόριστον, τότε παριστάνομεν γεωμετρικῶς τό Γ μέ ὁλόκληρον τό <u>ἐσωτερικόν</u> μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς, δηλαδή μέ τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου τό περικλειόμενον ἀπό τήν γραμμήν. Ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον Δ τοῦ Γ θά παριστάνεται μέ ἕνα μέρος τοῦ ἐσωτερικοῦ τούτου (βλ. εἰκ. παραπλεύρως).



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖα ἐκ τῶν συνόλων

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,4,\alpha\}$, $\Gamma = \{3,\alpha,\beta\}$, $\Delta = \emptyset$ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $E = \{1,2,3,4,5\}$;

2) Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας πού ἔχουν ἀνάστημα τεσσάρων μέτρων τουλάχιστον ;

3) Ἔστω $\Theta = \{23,26,28,31,34\}$. Προσδιορίσατε τά ἀκόλουθα ὑποσύνολα τοῦ Θ:

α) ὑποσύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Θ πού διαιρ. ἀκριβῶς διά 2

β) ὑποσύνολ. τῶν στοιχ. τοῦ Θ πού <u>δέν</u> διαιρ. ἀκριβῶς διά 2
γ) " " " " " πού διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 10.

4) Ποῖα εἶναι τά τέσσερα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{\alpha,\beta\}$; Γράψατέ τα ὅλα. Ὁμοίως ποῖα εἶναι τά ὀκτώ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{\alpha,\beta,\gamma\}$; Γράψατε καί αὐτά.

5) Σχεδιάσατε ἕνα διάγραμμα διά τό σύνολον Γ τῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου καί ἕνα ἄλλο διά τό σύνολον Σ τῶν συμφώνων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου. Παραστήσατε γεωμετρικῶς τήν σχέσιν τοῦ περιέχεσθαι $\Sigma \subseteq \Gamma$.

§ 6. Ἴσα σύνολα

<u>6.1</u> Ἕνα σύνολον Α λέγεται <u>ἴσον</u> μέ (ἤ πρός) ἕνα σύνολον Β ἐάν

1) κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Β καί
2) κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Α.

Μέ ἄλλας λέξεις τό Α λέγεται <u>ἴσον</u> μέ τό Β, ἐάν τά στοιχεῖα του ταυτίζωνται ἕνα πρός ἕνα μέ τά στοιχεῖα τοῦ Β. Π χ. τό σύνολον $K = \{\varkappa,\lambda,\mu\}$ εἶναι ἴσον μέ τό σύνολον $\Lambda = \{\lambda,\mu,\varkappa\}$. Διά τήν ἰσότητα τοῦ Α μέ τό Β γράφομεν

$A = B$ (καί διαβάζομεν: σύνολον Α ἴσον σύνολον Β).

<u>6.2</u> Ἡ ἰσότης αὐτή ἔχει τάς ἑξῆς τρεῖς φανεράς ἰδιότητας:

Ι) Κάθε σύνολον Α εἶναι ἴσον μέ τόν ἑαυτόν του:

$$A = A$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή λέγεται <u>ἀνακλαστική</u>.

ΙΙ) Ἐάν ἕνα σύνολον Β εἶναι ἴσον μέ ἕνα σύνολον Γ, τότε καί τό Γ εἶναι ἴσον μέ τό Β. Συμβολικῶς ἡ ἰδιότης αὐτή διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$B = \Gamma \Longrightarrow \Gamma = B$$

καί λέγεται συμμετρική ἰδιότης. Τό σύμβολον $\Longrightarrow$ διαβάζεται ἔτσι: "ἔχει ὡς συνέπειαν" ἤ "συνεπάγεται".

III) Ἐάν ἕνα σύνολον Α εἶναι ἴσον μέ ἕνα σύνολον Β καί ἐάν τοῦτο εἶναι ἴσον μέ ἕνα σύνολον Γ, τότε τό Α εἶναι ἴσον καί μέ τό Γ. Συμβολικῶς ἡ ἰδιότης αὐτή διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$A = B \text{ καί } B = \Gamma \Longrightarrow A = \Gamma$$

καί λέγεται μεταβατική ἰδιότης.

Π.χ. ἐπειδή $\{\kappa,\lambda,\mu\} = \{\lambda,\mu,\kappa\}$ καί $\{\lambda,\mu,\kappa\} = \{\mu,\lambda,\kappa\}$, θά ἔχωμεν καί τήν ἰσότητα $\{\kappa,\lambda,\mu\} = \{\mu,\lambda,\kappa\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τό κενόν σύνολον $\emptyset$ ἠμπορεῖ ἄραγε νά εἶναι ἴσον μέ ἕνα μή κενόν σύνολον ; Δικαιολογήσατε τήν ἀπάντησίν σας.

2) Ἕνα μονομελές σύνολον ἠμπορεῖ ἄραγε νά εἶναι ἴσον μέ ἕνα διμελές ; Δικαιολογήσατε τήν ἀπάντησίν σας.

3) Τό σύνολον $\{\alpha,\beta\}$ μέ ποῖον ἄλλο σύνολον εἶναι ἴσον;

4) Τό σύνολον $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ εἶναι ἴσον μέ 5 ἄλλα σύνολα. Ποῖα εἶναι αὐτά ;

§ 7. Ἰσοδύναμα σύνολα.

7.1 Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα πούλμαν εἶναι πλῆρες ἀπό καθημένους ἐπιβάτας καί ἄς θεωρήσωμεν τό σύνολον Κ τῶν καθισμάτων του δι᾽ἐπιβάτας καθώς καί τό σύνολον Ε τῶν καθημένων ἐπιβατῶν του. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε ἐπιβάτην ἀντιστοιχεῖ ἕνα κάθισμα, καί ἀντιστρόφως, εἰς κάθε κάθισμα ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἐπιβάτης. Λέγομεν ὅτι μεταξύ τῶν στοιχείων τῶν δύο αὐτῶν συνόλων Κ καί Ε ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία "ἕνα πρός ἕνα" καί ὀνομάζομεν τά δύο αὐτά σύνολα ἰσοδύναμα.

Γενικῶς, ἕνα σύνολον Α λέγεται ἰσοδύναμον μέ ἕνα σύνολον Β, ἐάν τά στοιχεῖα τοῦ Α ἠμποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρός ἕ-

να εἰς τά στοιχεῖα τοῦ Β.
Διά νά δηλώσωμεν ὅτι τό σύνολον Α εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Β γράφομεν συμβολικῶς:

$$A \sim B.$$

Π.χ. ἐάν $A = \{5,7,9\}$ καί $B = \{\varkappa,\lambda,\mu\}$, τότε $A \sim B$. Πράγματι, ἠμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν τά στοιχεῖα τοῦ Α ἕνα πρός ἕνα εἰς τά στοιχεῖα τοῦ Β ὡς ἑξῆς: τό 5 τό ἀντιστοιχίζομεν εἰς τό κ, τό 7 εἰς τό λ καί τό 9 εἰς τό μ.
Ἐννοεῖται ὅτι ἡ ἀντιστοίχισις αὐτή ἠμπορεῖ νά γίνῃ καί κατ' ἄλλους τρόπους, π.χ. κατά τόν ἑξῆς: εἰς τό 5 ἀντιστοιχίζομεν τό λ, εἰς τό 7 τό κ καί εἰς τό 9 τό μ.

7.2 Δύο ἴσα σύνολα εἶναι καί ἰσοδύναμα. Μέ ἄλλας λέξεις, ἡ ἰσότης $A = B$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἰσοδυναμίαν $A \sim B$. Π.χ. ἐπειδή

$\{\varkappa,\lambda,\mu\} = \{\lambda,\mu,\varkappa\}$ νά εἶναι καί $\{\varkappa,\lambda,\mu\} \sim \{\lambda,\mu,\varkappa\}$.
Ἀντιθέτως, δύο ἰσοδύναμα σύνολα δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην καί ἴσα. Π.χ. τά ἰσοδύναμα σύνολα $\{5,7,9\}$ καί $\{\varkappa,\lambda,\mu\}$ δέν εἶναι ἴσα. Ὥστε πρέπει νά προσέχωμεν καί νά μή συγχέωμεν τήν ἰσοδυναμίαν μέ τήν ἰσότητα.
Ἡ ἰσότης εἶναι μία πολύ εἰδική περίπτωσις ἰσοδυναμίας.

7.3 Εἶναι εὔκολον νά ἀντιληφθῶμεν ὅτι ἡ ἰσοδυναμία ἔχει τρεῖς βασικάς ἰδιότητας ἀντιστοίχους πρός τάς τρεῖς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος πού διετυπώσαμεν εἰς τήν § 6.2.

I) Κάθε σύνολον Α εἶναι ἰσοδύναμον μέ τόν ἑαυτόν του:

$A \sim A$ (ἀνακλαστική ἰδιότης).

II) Ἐάν τό σύνολον Β εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Γ, τότε καί τό Γ εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Β. Συμβολικῶς γράφομεν:

$B \sim \Gamma \Longrightarrow \Gamma \sim B$ (συμμετρική ἰδιότης).

III) Ἐάν τό Α εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Β καί τό Β ἰσοδύναμον μέ τό Γ, τότε τό Α εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Γ. Συμβολικῶς γράφομεν:

$A \sim B$ καί $B \sim \Gamma \Longrightarrow A \sim \Gamma$ (μεταβατική ἰδιότης).

Π.χ. $\{1,2,3,4\} \sim \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \sim \{\varphi,\chi,\psi,\omega\}$.

Ἄρα $\{1,2,3,4\} \sim \{\varphi,\chi,\psi,\omega\}$.

7.4 Δύο ἤ περισσότερα μεταξύ των ἰσοδύναμα σύνολα λέγομεν ὅτι ἔχουν τό ἴδιον πλῆθος στοιχείων (ἤ τήν ἰδίαν δυναμικότητα).

Π.χ. τά ἰσοδύναμα σύνολα $\{1,2,3,4\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $\{\varphi,\chi,\psi,\omega\}$ ἔχουν τό ἴδιον πλῆθος στοιχείων καί αὐτό τό πλῆθος τό παριστάνομεν, ὡς γνωστόν, μέ τόν φυσικόν ἀριθμόν 4. Διά τοῦτο τό 4 λέγεται πληθικός ἀριθμός καθενός ἀπό τά θεωρούμενα τρία ἰσοδύναμα σύνολα. Δύο μή ἰσοδύναμα σύνολα, ὅπως π.χ. τά $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $\{\varphi,\chi,\psi,\omega\}$, ἔχουν ἐννοεῖται διαφορετικούς πληθικούς ἀριθμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τό κενόν σύνολον $\emptyset$ ἠμπορεῖ ἄραγε νά εἶναι ἰσοδύναμον μέ ἕνα μή κενόν σύνολον ; Ἕνα μονομελές σύνολον ἠμπορεῖ ἄραγε νά εἶναι ἰσοδύναμον μέ ἕνα διμελές ; Δικαιολογήσατε τάς ἀπαντήσεις σας.

2) Ἐξηγήσατε διατί δύο ὁποιαδήποτε μονομελῆ σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των, ἐπίσης διατί δύο ὁποιαδήποτε διμελῆ σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

3) Γράψατε τρία ὄχι μεταξύ των ἴσα σύνολα πού νά εἶναι ἰσοδύναμα μέ τό σύνολον

{Κυριακή , Δευτέρα, Τρίτη , Τετάρτη, Πέμπτη} .

§ 8. Ἕνωσις συνόλων

8.1 Ἄς θεωρήσωμεν τά σύνολα

Ε = {Γιῶργος , Κώστας , Νῖκος , Παῦλος}

Κ = {'Ιωάννης, "Ιων, Κώστας, Παῦλος, Πέτρος, Φωκίων}

Α = {'Ιωάννης, Κώστας, Πέτρος, Φίλιππος, Χρῆστος}

πού ὡρίσαμεν εἰς τήν § 3.1. Καλοῦμεν ἕνωσιν τοῦ Ε μέ τό Κ τό ἑξῆς σύνολον, πού συμβολίζομεν μέ Ε ∪ Κ :

Ε∪Κ = {Γιῶργος, 'Ιωάννης, "Ιων , Κώστας ,
Νῖκος, Παῦλος, Πέτρος, Φωκίων}.

Μέ ἄλλας λέξεις, ἕνωσις Ε∪Κ εἶναι τό σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τούς μαθητάς καί τῶν δύο ὁμάδων: τῆς ὁμάδος ἐκδρομῶν Ε καί τῆς ὁμάδος καλλιτεχνίας Κ.

'Ομοίως ἔχομεν τήν ἕνωσιν:

Ε∪Α = {Γιῶργος, 'Ιωάννης, Κώστας , Νῖκος, Παῦλος,
Πέτρος, Φίλιππος, Χρῆστος}.

Γενικῶς ἕνωσις ἑνός συνόλου Γ μέ ἕνα σύνολον Δ λέγεται τό σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα καί τοῦ Γ καί τοῦ Δ. 'Εννοεῖται ὅτι κάθε κοινόν στοιχεῖον τῶν συνόλων Γ καί Δ δέν ἐμφανίζεται εἰς τήν ἕνωσιν δύο φοράς ἀλλά μόνον μίαν φοράν, διότι τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου πρέπει νά διακρίνωνται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο (νά μή ταυτίζωνται).

'Η ἕνωσις τοῦ Γ μέ τό Δ συμβολίζεται μέ τόν συμβολισμόν Γ∪Δ πού διαβάζεται: "Γ ἕνωσις Δ".

8.2 Ι) 'Από τόν ὁρισμόν τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων Α καί Β συμπεραίνομεν ἀμέσως τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα τῆς πράξεως τῆς ἑνώσεως:

$$A \cup B = B \cup A$$

'Η ἰδιότης αὐτή λέγεται ἀντιμεταθετική.

ΙΙ) 'Επειδή ἡ ἕνωσις δύο συνόλων εἶναι σύνολον, ἠμποροῦμεν τό σύνολον αὐτό νά τό ἑνώσωμεν μέ ἕνα τρίτον σύνολον καί ἔτσι νά ἔχωμεν τήν ἕνωσιν τριῶν συνόλων.

Τήν ἕνωσιν αὐτήν ἠμποροῦμεν νά τήν ἑνώσωμεν μέ ἕνα τέταρτον σύνολον καί νά λάβωμεν τοιουτοτρόπως τήν ἕνωσιν τεσσάρων συνόλων κ.ο.κ.

Χρησιμοποιοῦντες τά παραπάνω σύνολα Ε , Κ , Α ἐπαληθεύομεν ἀμέσως ὅτι, ἄν ἑνώσωμεν τό $(E \cup K)$ μέ τό Α, τό σύνολον $(E \cup K) \cup A$ πού προκύπτει, ταυτίζεται μέ τό σύνολον $E \cup (K \cup A)$.

Πράγματι

$(E \cup K) \cup A = E \cup (K \cup A) =$ { Γιῶργος, Ἰωάννης, Ἴων, Κώστας Νῖκος Παῦλος, Πέτρος, Φίλιππος, Φωκίων, Χρῆστος }.

Αὐτή ἡ ἰδιότης τῆς πράξεως τῆς ἑνώσεως λέγεται <u>προσεταιριστική</u>.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνομεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα πού εὑρίσκομεν ἑνώνοντες δύο ἤ περισσότερα σύνολα εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν μέ τήν ὁποίαν λαμβάνομεν τά σύνολα. Π.χ.

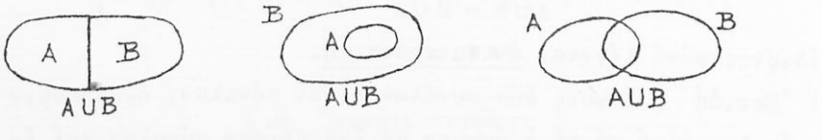
$$A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = B \cup \Delta \cup \Gamma \cup A.$$

III) Εἶναι φανερόν ὅτι διά κάθε σύνολον Α ἔχομεν:

$$A \cup \emptyset = A.$$

Διά τοῦτο τό κενόν σύνολον $\emptyset$ λέγεται <u>οὐδέτερον στοιχεῖον</u> διά τήν πρᾶξιν τῆς ἑνώσεως.

<u>8.3</u> Κατωτέρω παραθέτομεν τήν γεωμετρικήν παράστασιν τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ δύο συνόλων Α καί Β εἰς τάς ἑξῆς τρεῖς διαφόρους περιπτώσεις: 1) τά Α καί Β εἶναι ξένα μεταξύ των, 2) τό Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β καί 3) τά Α καί Β ἔχουν κοινά στοιχεῖα χωρίς νά εἶναι τό ἕνα ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

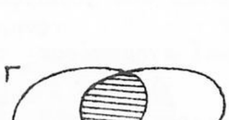
1) Ἄς εἶναι $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ καί $\Gamma = \{1,2,8,9\}$. Σχηματίσατε τάς ἑνώσεις $A \cup B$, $A \cup \Gamma$ καί $B \cup \Gamma$.

2) Πόσα εἶναι τά στοιχεῖα ἑκάστου ἐκ τῶν συνόλων Α,Β, Γ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καί πόσα ἑκάστης ἐκ τῶν τριῶν ἑνώσεων πού ἐσχηματίσατε ; Συγκρίνατε τόν ἀριθμόν τῶν στοιχείων ἑκάστης ἑνώσεως μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν στοιχείων τῶν δύο μερῶν της. Τί παρατηρεῖτε ;

3) Παραστήσατε γραφικῶς τά σύνολα Α,Β,Γ καί $A \cup B, A \cup \Gamma, B \cup \Gamma$ τῆς ἀσκήσεως 1) κατά τό ὑπόδειγμα τῆς § 8.3.

§ 9. Τομή συνόλων.

9.1 Ἄς λάβωμεν τά σύνολα $A = \{1,2,3,4\}$ καί $B = \{3,4,5\}$ καί ἄς σχηματίσωμεν τό σύνολον $\{3,4\}$ τῶν κοινῶν στοιχείων τους.
Τό σύνολον αὐτό λέγεται τομή τοῦ Α μέ τό Β καί παριστάνεται μέ τόν συμβολισμόν $A \cap B$, ὁ ὁποῖος διαβάζεται: "Α τομή Β".
Γενικῶς, τομή $\Gamma \cap \Delta$ ἑνός συνόλου Γ μέ ἕνα σύνολον Δ λέγεται τό σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν Γ καί Δ. Ἐννοεῖται ὅτι, ὅταν δέν ὑπάρχουν κοινά στοιχεῖα, τότε ἡ τομή $\Gamma \cap \Delta$ εἶναι τό κενόν σύνολον $\varnothing$.
Γεωμετρικῶς ἡ τομή $\Gamma \cap \Delta$ δύο συνόλων Γ καί Δ τά ὁποῖα δέν εἶναι ξένα μεταξύ των παριστάνεται ἀπό τό κοινόν μέρος τῶν διαγραμμάτων τῶν Γ καί Δ (βλ. τό γραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ σχήματος παραπλεύρως).



9.2 I) Εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{καί} \quad \Gamma \cap \Delta = \Delta \cap \Gamma.$$

Αὐτή ἡ ἰδιότης τῆς τομῆς λέγεται ἀντιμεταθετική.

II) Ἄς θεωρήσωμεν τά σύνολα

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$ καί $\Gamma = \{2,4,6\}$.

Ἄν σχηματίσωμεν πρῶτα τήν τομήν $(A \cap B) = \{3,4\}$ καί κατόπιν τήν $(A\cap B)\cap \Gamma$ θά λάβωμεν ὡς ἀποτέλεσμα τό σύνολον $\{4\}$ τῶν στοιχείων πού εἶναι κοινά καί εἰς τά τρία σύνολα A,B,Γ. Τό ἴδιον ἀποτέλεσμα θά λάβωμεν, ἄν σχηματίσωμεν πρῶτα τήν τομήν $(B\cap\Gamma)=\{4\}$ καί ἔπειτα τήν τομήν $A\cap(B\cap\Gamma)$. Ὥστε ἔχομεν διά τήν πρᾶξιν τῆς τομῆς τήν ἰδιότητα

$$(A\cap B)\cap\Gamma = A\cap(B\cap\Gamma)$$

ἡ ὁποία λέγεται <u>προσεταιριστική</u>.

Τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα $\{4\}$ λέγεται τομή τῶν τριῶν A,B,Γ καί γράφεται ἁπλούστερα ὡς ἑξῆς: $A\cap B\cap\Gamma$. Ἡ σειρά μέ τήν ὁποῖαν γράφονται τά τρία σύνολα A, B, Γ εἶναι ἀδιάφορος, διότι τό σύνολον τῶν στοιχείων πού εἶναι κοινά εἰς τά τρία σύνολα A, B, Γ, δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τήν σειράν αὐτήν:

$$A\cap B\cap\Gamma = B\cap A\cap\Gamma = \Gamma\cap B\cap A \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Θεωρήσατε τά σύνολα E, K, Λ τῆς § 3.1 καί σχηματίσατε τάς τομάς $E\cap K$, $E\cap\Lambda$, $K\cap\Lambda$, $E\cap K\cap\Lambda$.

2) Θεωρήσατε τά ἑξῆς σύνολα:

Ω = σύνολον φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου
Σ = " συμφώνων " "
Γ = " γραμμάτων " "

καί σχηματίσατε τάς τομάς $\Omega\cap\Sigma$, $\Omega\cap\Gamma$, $\Sigma\cap\Gamma$ καί $\Omega\cap\Sigma\cap\Gamma$.

3) Ἔστω $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ = σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 11 καί $\Delta=\{1,2,3,\dots,99\}$ = σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 100. Ἔχομεν $A\subseteq\Delta$. Ποία εἶναι ἡ τομή $A\cap\Delta$;

Γενικῶς, ἐάν τό σύνολον B εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Γ, ποία εἶναι ἡ τομή $B\cap\Gamma$; Προσπαθήσατε νά δικαιολογήσετε τήν ἀπάντησίν σας. Κατά ταῦτα, ποία εἶναι ἡ τομή $\emptyset\cap E$, ὅπου E τυχόν σύνολον;

§ 10. Συμπλήρωμα συνόλου ὡς πρός ἕνα ὑπερσύνολον.

10.1 Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν τά σύνολα E,K,Λ τῆς § 3.1

πού ἔχουν ὡς ὑπερσύνολον τό σύνολον Δ τῶν μαθητῶν τῆς 4ης τάξεως τοῦ Γυμνασίου μας. Οἱ μαθηταί τῆς τάξεως πού δέν εἶναι μέλη τῆς ὁμάδος ἐκδρομῶν Ε ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον πού λέγεται συμπλήρωμα (ἤ συμπληρωματικόν) τοῦ συνόλου Ε ὡς πρός τό ὑπερσύνολον Δ. Τό συμπλήρωμα αὐτό, πού δέν ἔχει κοινά στοιχεῖα μέ τό Ε, παριστάνεται συνήθως μέ Ε΄. Ἔχομεν λοιπόν τάς σχέσεις:

$$E \cap E' = \emptyset \quad \text{καί} \quad E \cup E' = \Delta.$$

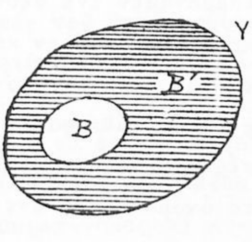
Σύμφωνα μέ αὐτούς τούς ὁρισμούς ἔχομεν καί τά ἑξῆς:

Κ΄ = συμπλήρωμα τῆς ὁμάδος καλλιτεχνίας Κ ὡς πρός Δ
  = σύνολον μαθητῶν τῆς 4ης τάξεως πού δέν ἀνήκουν εἰς τήν ὁμάδα Κ ,

Α΄ = συμπλήρωμα τῆς ὁμάδος ἀθλητισμοῦ Α ὡς πρός Δ
  = σύνολον μαθητῶν τῆς 4ης τάξεως πού δέν ἀνήκουν εἰς τήν ὁμάδα Α,

$$K \cap K' = \emptyset \ , \quad K \cup K' = \Delta \quad \text{καί} \quad A \cap A' = \emptyset \ , \quad A \cup A' = \Delta.$$

10.2 Γεωμετρικῶς τό συμπλήρωμα Β΄ ἑνός συνόλου Β ὡς πρός ἕνα ὑπερσύνολον Υ παριστάνεται ἀπό τό μέρος πού ἀπομένει ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ Υ, ὅταν ἀπό αὐτό τό διάγραμμα ἀφαιρέσωμεν τό μέρος του πού δίδει τήν παράστασιν τοῦ συνόλου Β. Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα τό ἀπομένον αὐτό μέρος ἔχει γραμμοσκιασθῆ.



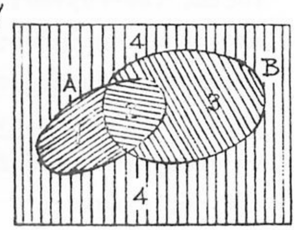
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖον εἶναι τό συμπλήρωμα Σ΄ τοῦ συνόλου Σ τῶν συμφώνων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ὡς πρός ὑπερσύνολον τό σύνολον Γ τῶν γραμμ. τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ; Ποῖον εἶναι τό συμπλήρωμα τοῦ Γ ὡς πρός τόν ἑαυτόν του ; Ποῖον εἶναι τό συμπλήρωμα τοῦ ∅ ὡς πρός τό Γ ;

2) Ποῖα εἶναι τά συμπληρώματα τῶν μονομελῶν ὑποσυνόλων

τοῦ $A = \{1,2,3,4\}$ ὡς πρός ὑπερσύνολον τό A ;
Τό σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ A πού διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 2 ποῖον συμπλήρωμα ἔχει ;

3) Ἕνα σύνολον Υ ἄς παριστάνεται ἀπό τό παραπλεύρως ὀρθογώνιον καί ἄς εἶναι A, B δύο γνήσια, ὄχι ξένα μεταξύ των ὑποσύνολά του. Τό ὀρθογώνιον χωρίζεται εἰς τέσσερα μέρη πού ἐσημειώθησαν εἰς τό σχῆμα μέ τούς ἀριθμούς 1,2, 3,4 ἀντιστοίχως. Νά εὕρετε ἀπό ποῖον μέρος παριστάνεται γραφικῶς ἕκαστον ἐκ τῶν συνόλων $A\cap B'$, $B\cap A'$, $A\cap B$, $A'\cap B'$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

§ 1. Φυσικοί ἀριθμοί. Τό μηδέν.

<u>1.1</u> Λαμβάνομεν ἕνα ἀντικείμενον ἀπό τόν χαρτοφύλακα ἑνός μαθητοῦ καί τό τοποθετοῦμεν ἐπί μιᾶς τραπέζης, ἐπί τῆς ὁποίας δέν εὑρίσκεται κανένα ἄλλο ἀντικείμενον. Κατόπιν λαμβάνομεν ἕνα δεύτερον ἀντικείμενον ἀπό τόν χαρτοφύλακα καί καί τοποθετοῦμεν καί αὐτό ἐπί τῆς τραπέζης. Συνεχίζομεν κατά τόν ἴδιον τρόπον, ἕως ὅτου ἀδειάσῃ ὁ χαρτοφύλαξ. Ἐν τῷ μεταξύ, κάθε φοράν πού θέτομεν ἕν ἀντικείμενον ἐπί τῆς τραπέζης γράφομεν εἰς τόν μαυροπίνακα ἕνα σύνολον μέ στοιχεῖα τά ὀνόματα τῶν ἀντικειμένων πού εὑρίσκονται ἐπί τῆς τραπέζης.

Ἔστω λοιπόν ὅτι ἐγράφαμεν κατά σειράν τά ἑξῆς σύνολα:

{Μολύβι}

{Μολύβι, Χάρακας}

{Μολύβι, Χάρακας, Γνώμων}

{Μολύβι, Χάρακας, Γνώμων, Βιβλίον φυτολογίας}

{Μολύβι, Χάρακας, Γνώμων, Βιβλίον φυτολογίας, Τετράδιον}. Είς καθένα άπ'αύτά τά σύνολα άντιστοιχεῖ ἕνας πληθικός ἀριθμός. Κατά σειράν ἔχομεν τούς ἀριθμούς: ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε. Ἄν ὁ χαρτοφύλαξ περιεῖχε καί ἄλλα ἀντικείμενα θά κατελήγαμεν είς μίαν μακροτέραν σειράν πληθικῶν ἀριθμῶν. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά σχηματισθέντα σύνολα τό ἑνώνομεν μέ ἕνα ξένον πρός αὐτό μονομελές σύνολον καί παράγομεν τό ἑπόμενον σύνολον τῆς σειρᾶς. Ἀντιστοίχως καθένας ἀπό τούς ἀνωτέρω πληθικούς ἀριθμούς αὐξανόμενος κατά τόν ἀριθμόν ἕνα παράγει τόν ἑπόμενόν του. Αὐτός ὅμως ὁ τρόπος παραγωγῆς νέων ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νά συνεχισθῆ ἀπεριορίστως˙ ἔτσι προκύπτει ἡ σειρά τῶν ἀριθμῶν

ἕνα , δύο , τρία , τέσσερα , πέντε, ἕξ , ἑπτά , κ.ο.κ

ἡ ὁποία ἔχει ἕνα ἀρχικόν στοιχεῖον, κανένα ὅμως τελευταῖον. Τούς ἀριθμούς αὐτούς τούς ὠνομάσαμεν ἤδη είς τό προηγούμενον Κεφάλαιον <u>φυσικούς</u>. Τό σύνολόν των ἔχει βασικήν σημασίαν διά τήν ἐπιστήμην καί θά τό παριστάνωμεν μέ τό γράμμα Φ . Ἔχομεν λοιπόν

Φ = { ἕνα , δύο , τρία , τέσσερα ,... }

ὅπου μέ τάς τρεῖς τελευταίας τελείας ἐντός τοῦ ἀγκίστρου ὑποδεικνύομεν ὅτι ἡ σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δέν ἔχει τέλος.

Πρίν ἀρχίσωμεν νά θέτωμεν ἐπί τῆς τραπέζης τά ἀντικείμενα τοῦ χαρτοφύλακος δέν ὑπῆρχε τίποτε ἐπ'αὐτῆς. Θά ἠδυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τοῦτο γράφοντες ἐπί τοῦ μαυροπίνακος τό κενόν σύνολον ϕ . Πληθικός ἀριθμός αὐτοῦ τοῦ συνόλου εἶναι φυσικά τό μηδέν. Τό μηδέν καί τούς φυσικούς ἀριθμούς θά τούς ὀνομάζωμεν μέ ἕνα κοινόν ὄνομα <u>ἀκεραίους</u> ἀριθμούς.

<u>1.2</u> Ὁ πληθικός ἀριθμός ἑνός μονομελοῦς συνόλου λέγεται καί <u>ἀκεραία μονάς</u>. Εἶναι φανερόν ἀπό τά προηγούμενα

ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός ἀπαρτίζεται ἀπό μίαν ἤ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας. Ὅπως δέ παρετηρήσαμεν ἤδη, δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἀπεριορίστως νέους φυσικούς ἀριθμούς, ἀρκεῖ εἰς τάς ἀκεραίας μονάδας πού ἀποτελοῦν ἕνα φυσικόν ἀριθμόν νά προσλάβωμεν ἀκόμη μίαν ἤ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας. Τό πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι λοιπόν ἀπεριόριστον καί τό σύνολόν τους Φ λέγεται διά τοῦτο μή πεπερασμένον. Ἀντιθέτως λέγεται πεπερασμένον τό κενόν σύνολον καθώς καί κάθε σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα ἠμποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρός ἕνα εἰς τά στοιχεῖα ἑνός ἀρχικοῦ ἀποκόμματος τῆς σειρᾶς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή ἑνός μέρους της τό ὁποῖον ἀρχίζει ἀπό τό "ἕνα" καί τελειώνει εἰς ἕνα ἀριθμόν τῆς σειρᾶς. Π.χ. ἕνα σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα ἠμποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρός ἕνα εἰς τά στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ἀπό τό "ἕνα" μέχρι καί τοῦ "ἑκατόν" εἶναι πεπερασμένον καί πληθικός του ἀριθμός εἶναι ὁ ἑκατόν. Τά παραπάνω ἠμποροῦμεν νά τά ἐκφράσωμεν καί ὡς ἑξῆς: Ἕνα σύνολον λέγεται πεπερασμένον, ὅταν τά στοιχεῖα του ἠμποροῦν νά καταμετρηθοῦν μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς πού ἀποτελοῦν ἕνα ἀρχικόν ἀπόκομμα τῆς σειρᾶς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἕνα μή πεπερασμένον σύνολον λέγεται καί ἀπειροσύνολον, τό πλῆθος τῶν στοιχείων του λέγεται ἀπεριόριστον ἤ ἄπειρον. Ἐκτός ἀπό τό Φ πρόχειρα παραδείγματα ἀπειροσυνόλων εἶναι τά ἑξῆς:

α) Τό σύνολον τῶν ἀρτίων (ζυγῶν) φυσικῶν ἀριθ.: δύο, κ.ο.κ.

β) " " " περιττῶν(μονῶν) " " : ἕνα, τρία, κοκ.

γ) Τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος καί, γενικώτερον, μιᾶς γραμμῆς. Πράγματι, ὅσα σημεῖα καί ἄν πάρωμεν ἐπί τοῦ τμήματος ἤ ἐπί τῆς γραμμῆς, ἀντιλαμβανόμεθα ἀμέσως ὅτι πρέπει νά ὑπάρχουν ἐπί τοῦ τμήματος ἤ ἐπί τῆς γραμμῆς καί ἄλλα σημεῖα.

δ) Τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἐπιφανείας καί ε) τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός στερεοῦ.

1.3 Οἱ φυσικοί ἀριθμοί δέν χρησιμεύουν μόνον διά νά προσδιορίζωμεν (νά μετροῦμεν) τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνός πεπερασμένου συνόλου, χρησιμοποιοῦνται καί ὅταν θέλωμεν νά κατατάξωμεν τά στοιχεῖα αὐτά εἰς μίαν σειράν. Π.χ. τά καθίσματα ἑνός πούλμαν φέρουν τούς φυσικούς ἀριθμούς ἕνα, δύο, τρία, κτλ. καί ἀποκτοῦν μέ αὐτόν τόν τρόπον μίαν σειράν (μίαν διάταξιν). Λέγομεν πρῶτον, δεύτερον, τρίτον κτλ. κάθισμα καί ἐννοοῦμεν τό κάθισμα πού φέρει τόν ἀριθμόν ἕνα,δύο,τρία κτλ. Οἱ φυσικοί ἀριθμοί εἶναι λοιπόν ὄχι μόνον ἀριθμοί πλήθους (πληθικοί ἀριθμοί) ἀλλά καί ἀριθμοί διατάξεως (διατακτικοί ἀριθμοί).

§ 2. Δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως.

2.1 Ἐπειδή εἶναι ἀδύνατον διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν νά ἔχωμεν καί ἰδιαίτερον ὄνομα ἤ σύμβολον, ἠναγκάσθημεν νά ἐπινοήσωμεν ἕνα τρόπον μέ τόν ὁποῖον ὀλίγαι λέξεις ἀρκοῦν διά νά ὀνομάζωμεν τούς συχνότερα χρησιμοποιουμένους ἀριθμούς καί ὀλίγα σύμβολα διά νά γράφωμεν ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον ὀνομάζονται οἱ φυσικοί ἀριθμοί λέγεται προφορική ἀρίθμησις, ὁ δέ τρόπος μέ τόν ὁποῖον γράφονται λέγεται γραπτή ἀρίθμησις.

Ὁ ἀριθμός ἕνα λέγεται ἁπλῆ μονάς ἤ μονάς πρώτης τάξεως (ἤ μηδενικῆς βαθμίδος),οἱ δέ ἀριθμοί ἕν, δύο,τρία, τέσσερα,πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, σχηματίζουν τήν τάξιν τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ὁ ἀριθμός δέκα εἶναι μονάς δευτέρας τάξεως (ἤ πρώτης βαθμίδος) καί λέγεται δεκάς. Δέκα δεκάδες σχηματίζουν τόν ἀριθμόν ἑκατόν ὁ ὁποῖος εἶναι μονάς τρίτης τάξεως (ἤ δευτέρας βαθμίδος) καί λέγεται ἑκατοντάς. Ὁμοίως δέκα ἑκατοντάδες σχηματίζουν μίαν μονάδα τετάρτης τάξεως (ἤ τρίτης βαθμίδος) ἡ ὁποία λέγεται χιλιάς. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον σχηματίζομεν μονάδας ἀνωτέρων τάξεων ὅσας θέλομεν.

Γενικῶς, δέκα μονάδες ἀπό κάθε τάξιν σχηματίζουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Τάς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τάς χωρίζομεν εἰς κλάσεις, ὅπως δεικνύει ὁ κατωτέρω πίναξ:

	Κλάσις ἑκατομμυρίων			Κλάσις χιλιάδων			Κλάσις ἁπλῶν μονάδων		
κ.ο.κ.	ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίων	δεκάδες ἑκατομμυρίων	ἑκατομμύρια	ἑκατοντάδες χιλιάδων	δεκάδες χιλιάδων	χιλιάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	(ἁπλαῖ) μονάδες

Τό σύστημα τῆς ἀριθμήσεως τό ὁποῖον διαμορφώνεται κατά τόν ἀνωτέρω τρόπον ἔχει <u>βάσιν</u> τόν ἀριθμόν δέκα, ὅπως συνηθίζεται νά λέγωμεν. Διά τοῦτο καλεῖται <u>δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως</u>.

Ἐκ τοῦ τρόπου κατά τόν ὁποῖον σχηματίζονται οἱ διάφοροι φυσικοί ἀριθμοί προκύπτει ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός ἠμπορεῖ νά ἀποτελεσθῇ ἀπό μονάδας διαφόρων τάξεων, μέ πλῆθος μονάδων ἑκάστης τάξεως τό πολύ ἐννέα.

<u>2.2</u> Θά ἴδωμεν τώρα πῶς, ἄν παραστήσωμεν τούς ἐννέα πρώτους φυσικούς ἀριθμούς καί τό μηδέν μέ εἰδικά σύμβολα, θά δυνηθῶμεν μέ αὐτά νά γράφωμεν κάθε φυσικόν ἀριθμόν. Πρός

τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τά σύμβολα 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, τά ὁποῖα ὀνομάζονται <u>ἀραβικά ψηφία</u>.

Ἡ γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν βασίζεται εἰς τούς ἑξῆς νόμους:

1) Κάθε ἀριθμός γράφεται μέ ψηφία, τά ὁποῖα τοποθετοῦνται τό ἕν παραπλεύρως τοῦ ἄλλου.

2) Τό τελευταῖον πρός τά δεξιά ψηφίον παριστάνει ἁπλᾶς μονάδας, ἕκαστον δέ ψηφίον, τό ὁποῖον γράφεται πρός τά ἀριστερά ἄλλου ψηφίου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

3) Ὅταν αἱ μονάδες μιᾶς οἱασδήποτε τάξεως λείπουν, θέτομεν εἰς τήν ἀντίστοιχον θέσιν τό ψηφίον 0.

<u>2.3</u> Ἐάν ὁ ἀριθμός δέν ἔχει ψηφία περισσότερα ἀπό τρία, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς τάς ἁπλᾶς μονάδας τάς ὁποίας περιέχουν πρῶτον αἱ ἑκατοντάδες του, ἔπειτα αἱ δεκάδες του καί τέλος αἱ μονάδες του. Π.χ. ὁ 635 ἀπαγγέλλεται: ἑξακόσια τριάντα πέντε.

Ἐάν ὁ ἀριθμός ἔχῃ ψηφία περισσότερα ἀπό τρία, χωρίζομεν αὐτόν νοερῶς εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπό τά δεξιά, ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστά ὡς νά ἦτο ἕνας ἀριθμός, συγχρόνως δέ χαρακτηρίζομεν τό τμῆμα μέ τό ὄνομα τῆς κλάσεως τήν ὁποίαν παριστάνει.

Ἡ ἀπαγγελία ἀρχίζει ἀπό τό τμῆμα τῆς ἀνωτάτης κλάσεως τό ὁποῖον δύναται νά εἶναι διψήφιον ἤ μονοψήφιον. Π.χ. ὁ ἀριθμός 13 402 758 ἀπαγγέλλεται: δεκατρία ἑκατομμύρια τετρακόσιαι δύο χιλιάδες ἑπτακόσια πενήντα ὀκτώ.

<u>2.4</u> Ἐκτός ἀπό τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως πρό αὐτοῦ ἤ καί παραλλήλως πρός αὐτό ἐχρησιμοποιήθησαν κατά διαφόρους ἐποχάς παρά διαφόρων λαῶν καί ἄλλα ἀριθμητικά συστήματα, ὅπως π.χ. τό <u>δωδεκαδικόν</u>.

Εἰς αὐτό τό σύστημα δώδεκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Διά τήν γραφήν τῶν ἀριθμῶν είς τό δωδεκαδικόν σύστημα χρειάζονται έννοεῖται δώδεκα σύμβολα, ἤτοι τό μηδέν καί ἕνδεκα ἄλλα. Ὑπολείμματα τῆς δωδεκαδικῆς ἀριθμήσεως εἶναι π.χ. ἡ ὑποδιαίρεσις τοῦ ποδός τῆς ὑάρδας είς δώδεκα ἴντσας, ἡ γκρόσσα τοῦ ἐμπορίου ἡ ὁποία περιέχει δώδεκα δωδεκάδες ὁμοίων τεμαχίων, κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπαγγείλατε τούς ἀριθμούς: 235 , 803 , 4 705 , 20 008 , 943 010 , 6 000 000 , 314 143 897.

2) Γράψατε διά ψηφίων τούς ἀριθμούς: ἑπτακόσια πενήντα δύο, δώδεκα χιλιάδες ἑπτά, δώδεκα χιλιάδες τετρακόσια ἕξ, τριακόσιαι χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά.

3) Ποῖον εἶδος μονάδων παριστάνει τό ψηφίον 7 είς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν:

703 , 57 , 4 374 , 8 427 202 , 701 283.

4) Πόσαι δεκάδες περιέχονται είς μίαν χιλιάδα ; Πόσαι ἑκατοντάδες είς ἕν ἑκατομμύριον ;

5) Ἕν βιβλίον ἔχει 157 σελίδας. Πόσας φοράς ἐχρησιμοποιήθη τό ψηφίον 7 κατά τήν ἀρίθμησιν τῶν σελίδων του ;

6) Κατά τό ἔτος 1960 τό Κράτος ἐδαπάνησε 19 038 540 620 δρχ. Ἐκτιμήσατε τήν δαπάνην αὐτήν είς χιλιάδας δραχμῶν.

7) Πόσας φοράς θά χρησιμοποιήσωμεν τό ψηφίον 9 ἄν γράφωμεν ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό τό 1 μέχρι καί τοῦ 99 ;

§ 3. Ἑλληνική γραφή τῶν ἀριθμῶν

3.1 Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο διά τήν γραφήν τῶν ἀριθμῶν τά 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καί τά σύμβολα ϛ (στίγμα), ϟ (κόππα), ϡ (σαμπῖ).

Οὕτω τάς ἁπλᾶς μονάδας 1 ἕως 9 παρίστανον διά τῶν :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α΄	β΄	γ΄	δ΄	ε΄	ϛ΄	ζ΄	η΄	θ΄

τάς δεκάδας 10 ἕως 90 διά τῶν:

10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι΄	κ΄	λ΄	μ΄	ν΄	ξ΄	ο΄	π΄	ϟ΄

καί τάς ἑκατοντάδας 100 ἕως 900 διά τῶν :

100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ΄	σ΄	τ΄	υ΄	φ΄	χ΄	ψ΄	ω΄	ϡ΄

Διά τάς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τά ἴδια γράμματα μέ τόνον ἀριστερά κάτω. Π.χ.

1000	2000	3000	200 000	κ.τ.λ.
͵α	͵β	͵γ	͵σ	

<u>Παραδείγματα:</u>	84	77	332	840	5312
	πδ΄	οζ΄	τλβ΄	ωμ΄	͵ετιβ΄

§ 4. Ρωμαϊκή ἤ Λατινική γραφή.

<u>4.1</u> Οἱ Ρωμαῖοι χρησιμοποιοῦσαν διά τήν γραφήν τῶν ἀριθμῶν τά ἑξῆς ψηφία πού ἦσαν ἑπτά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Ἡ γραφή τῶν ἀριθμῶν γίνεται κατά τούς ἑξῆς κανόνας:

α) Ὅμοια ψηφία, ὅταν γράφωνται τό ἕνα παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, προστίθενται Π.χ.

XX	CC	MMM
200	200	3000

β) Ὅταν ἕν ψηφίον γράφεται ἀριστερά μεγαλυτέρου,του ,ἀφαιρεῖται ἀπό αὐτό, ἀλλ'ὅταν γράφεται δεξιά, προστίθεται.Π.χ.

IV	VI	XL	LX
4	6	40	60

γ) Ψηφίον ἄνωθεν τοῦ ὁποίου γράφεται μία γραμμή παριστάνει χιλιάδας, ψηφίον μέ δύο γραμμάς παριστάνει ἑκατομμύρια, κ.ο.κ. Π.χ.

$\overline{\text{VII}}$ $\overline{\overline{\text{XIX}}}$ $\overline{\overline{\overline{\text{LXX}}}}$

7000 19 000 000 70 000 000 000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Γράψατε κατά τήν ἑλληνικήν γραφήν τούς ἀριθμούς: 65 , 27 , 389 , 503 , 70 , 4 100.

2) Γράψατε κατά τήν ρωμαϊκήν γραφήν τούς ἀριθμούς: 4 , 11 , 47 , 80 , 156 , 3 000 , 1962.

3) Γράψατε μέ ἀραβικά ψηφία τούς ἀριθμούς: CCC , MC , XL , CLX , CMXII , XC , MCXXXV , ιθ , κγ΄ , τλε΄, θ΄. σοδ΄ , ,εωϛα΄.

4) Ἀναφέρατε περιπτώσεις εἰς τάς ὁποίας χρησιμοποιεῖται σήμερον ἡ ἑλληνική ἤ ἡ ρωμαϊκή γραφή τῶν ἀριθμῶν.

§ 5. Ἴσοι καί ἄνισοι ἀριθμοί.

5.1 Εἴδαμεν ὅτι δύο ἰσοδύναμα (ἤ ἰσοπληθῆ) σύνολα ἔχουν τό αὐτό πλῆθος στοιχείων καί ὅτι τό ἕν δύναται να ἀπεικονισθῆ ἐπί τοῦ ἄλλου, δηλ. ὅτι δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός εἰς τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου ἕνα πρός ἕνα. Οἱ πληθικοί ἀριθμοί δύο ἰσοδυνάμων συνόλων λέγονται ἴσοι. Ἔτσι ὁδηγούμεθα εἰς τόν ὁρισμόν: δύο φυσικοί ἀριθμοί λέγονται ἴσοι ὅταν εἰς κάθε μίαν μονάδα τοῦ καθενός ἀντιστοιχῆ μία μονάς τοῦ ἄλλου.

Διά νά δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἴσοι θέτομεν μεταξύ αὐτῶν τό σύμβολον = . Γράφομεν π.χ. 7 = 7 καί διαβάζομεν "ἑπτά ἴσον ἑπτά". Οἱ δύο ἴσοι ἀριθμοί καί τό μεταξύ αὐτῶν σύμβολον = ἐκφράζουν μίαν σχέσιν ἡ ὁποία λέγεται ἰσότης. Τά ἑκατέρωθεν τοῦ = γραφόμενα λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος καί τό μέν πρός τ'ἀριστερά λέγεται πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος, τό δέ πρός τά δεξιά, δεύτερον μέλος αὐτῆς.

5.2 Ἄν λάβωμεν δύο μή ἰσοδύναμα πεπερασμένα σύνολα, θά παρατηρήσωμεν ὅτι τό ἕν ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνει στοιχεῖα,τά ὁποῖα δέν ἔχουν ἀντίστοιχα εἰς τό ἄλλο σύνολον. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ πρώτου συνόλου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δευτέρου καί ὁ δεύτερος μικρότερος τοῦ πρώτου καθώς καί ὅτι οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι. Ὥστε δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι, ἄν μονάδες τινές τοῦ ἑνός δέν ἔχουν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τόν ἄλλον.

Διά τόν συμβολισμόν τῆς ἀνισότητος δύο ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμεν τά σύμβολα $\neq$, $<$, $>$. Π.χ. $3 \neq 5$, $3 < 5$, $8 > 2$ καί διαβάζομεν "τρία ἄνισον πέντε" , "τρία μικρότερον πέντε","ὀκτώ μεγαλύτερον δύο". Αἱ γραφαί αὐταί λέγονται ἀνισότητες.

Ὅταν δέν θέλωμεν νά καθορίσωμεν τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνός πεπερασμένου συνόλου συμφωνοῦμεν νά παριστάνωμεν τόν ἀντίστοιχον ἀκέραιον ἀορίστως δι᾽ἑνός γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου π.χ. α ἤ β κτλ. Τάς παραστάσεις ταύτας ὀνομάζομεν γενικούς ἀριθμούς. Οὕτω δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ τάξις ἔχει α θρανία καί β μαθητάς. Ἄν θέλωμεν νά δηλώσωμεν ὅτι δύο γενικοί ἀριθμοί γ καί δ εἶναι ἴσοι, γράφομεν $\gamma = \delta$. Ἄν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ γ δυνατόν νά εἶναι ἴσος ἤ μικρότερος τοῦ δ, γράφομεν $\gamma \leqslant \delta$ ἤ $\delta \geqslant \gamma$. Ἡ γραφή αὐτη ἐπεκτείνεται καί μεταξύ ὡρισμένων ἀριθμῶν. Ἔτσι δυνάμεθα νά γράφωμεν τάς σχέσεις $5 \geqslant 3$, $4 \geqslant 4$, $0 \leqslant 2$, $3 \geqslant 0$.

§ 6. Ἰδιότητες ἰσότητος καί ἀνισότητος.

6.1 Ἄς λάβωμεν ἕνα σύνολον, ἔστω τό $A = \{$ αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος $\}$. Ὁ πληθικός ἀριθμός αὐτοῦ τοῦ συνόλου εἶναι ὁ 7. Ὡς γνωστόν τό σύνολον Α εἶναι ἰσοδύναμον πρός

τόν ἑαυτόν του, άν-ιστοίχως ὁ πληθικός του ἀριθμός ἰσοῦται μέ τόν ἑαυτόν του. Ἄς λάβωμεν καί ἕνα ἄλλο σύνολον ἰσοδύναμον πρός τό Α, ἔστω τό Β = {τά φωνήεντα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου} θά εἶναι πάλιν ὁ 7 πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου Β. Ἐπομένως δυνάμεθα ἀδιακρίτως νά λέγωμεν ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου Α εἶναι ἴσος πρός τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Β ἤ ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Β εἶναι ἴσος πρός τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Α. Ἄς λάβωμεν καί ἕνα ἀκόμη σύνολον ἰσοδύναμον πρός τό Β, ἔστω τό Γ = { Κέρκυρα, Παξοί, Ἀντίπαξοι, Λευκάς, Ἰθάκη, Κεφαλληνία, Ζάκυνθος} .
Παρατηροῦμεν τό ἑξῆς: ἐπειδή ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου Α εἶναι ἴσος πρός τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Β καί ἐπειδή ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Β εἶναι ἴσος πρός τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Γ, διά τοῦτο καί ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Α εἶναι ἴσος πρός τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Γ.

<u>6.2</u> Τά ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τάς βασικάς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος μεταξύ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὁμοίας ἰδιότητας συνηντήσαμεν καί εἰς τό προηγούμενον Κεφάλαιον, ὅταν ἐκάμαμεν λόγον περί ἴσων συνόλων (§ 6) ἤ περί ἰσοδυνάμων συνόλων (§ 7), ἐδώσαμεν δέ εἰς αὐτάς τά ἀκόλουθα ὀνόματα:

α) <u>Ἀνακλαστική</u> ἰδιότης. Κάθε ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μέ τόν ἑαυτόν του:

$$\alpha = \alpha.$$

β) <u>Συμμετρική</u> ἰδιότης. Ἄν ἕνας ἀκέραιυς α εἶναι ἴσος πρός ἄλλον β, τότε καί ὁ β εἶναι ἴσος πρός τόν α :

$$\alpha = \beta \Longrightarrow \beta = \alpha.$$

γ) <u>Μεταβατική</u> ἰδιότης. Ἄν ἕνας ἀκέραιας α εἶναι ἴσος πρός ἄλλον β, ὁ δέ β ἴσος πρός ἄλλον γ, τότε καί ὁ α εἶναι ἴσος πρός τόν γ:

$$(\alpha = \beta \text{ καί } \beta = \gamma) \Longrightarrow \alpha = \gamma.$$

6.3 'Από τάς τρεῖς παραπάνω ἰδιότητας μόνον ἡ μεταβατική ἰσχύει καί διά τήν ἀνισότητα μιᾶς ὡρισμένης φορᾶς, δηλαδή τήν $<$ ἤ τήν $>$. Πράγματι ἔχομεν π.χ.

$$(4 < 7 \text{ καί } 7 < 12) \Longrightarrow 4 < 12$$

καί

$$(6 > 3 \text{ καί } 3 > 1) \Longrightarrow 6 > 1 .$$

Γενικῶς ἠμποροῦμεν νά διατυπώσωμεν τήν μεταβατικήν ἰδιότητα διά τήν ἀνισότητα $<$ ὡς ἑξῆς: 'Εάν ἕνας ἀκέραιος α εἶναι μικρότερος ἑνός ἀκεραίου β καί ὁ β μικρότερος ἑνός ἀκεραίου γ, τότε ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ γ:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \beta < \gamma) \Longrightarrow \alpha < \gamma .$$

§ 7. Σύνολα ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί

$$\{0,1,2,3,4,5,6,\ldots, 100, 101, \ldots\}$$

ὡς ἐκ τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον τούς ἐσχηματίσαμεν, παρουσιάζονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν (ἤ διάταξιν) πού καλοῦμεν φυσικήν καί σύμφωνα μέ τήν ὁποίαν ἐκ δύο ἀνίσων ἀριθμῶν ὁ μικρότερος προηγεῖται τοῦ μεγαλυτέρου. Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μέ τήν παραπάνω κατάταξιν (διάταξιν) τῶν στοιχείων του λέγεται διατεταγμένον κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους.

'Ομοίαν διάταξιν ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν καί εἰς κάθε σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν εἴτε εἶναι πεπερασμένον εἴτε δέν εἶναι. Π.χ. ἔστω πρῶτον ἕνα πεπερασμένον σύνολον

$$E = \{8,6,3,10,5,2\} .$$

'Ημποροῦμεν νά κατατάξωμεν τά στοιχεῖα του κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους, ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ὡς ἑξῆς:

$$E = \{2,3,5,6,8,10\} .$$

Τό μέ αὐτόν τόν τρόπον διατεταγμένον σύνολον Ε ἔχει ἕνα πρῶτον στοιχεῖον, τό 2, πού εἶναι μικρότερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου, καί ἕνα τελευταῖον στοιχεῖον, τό 10, πού εἶναι μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Γενικῶς εἰς κάθε πεπερασμένον σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν ὑπάρχει ἕνα ἐλάχιστον στοιχεῖον (δηλ. ἕνας ἀκέραιος μικρότερος ἀπό ὅλους τούς ἄλλους ἀκεραίους τοῦ συνόλου) καί ἕνα μέγιστον στοιχεῖον (δηλ. ἕνας ἀκέραιος μεγαλύτερος ἀπ' ὅλους τούς ἄλλους ἀκεραίους τοῦ συνόλου).

Τά στοιχεῖα τοῦ πεπερασμένου συνόλου Ε ἠμποροῦν νά καταταχθοῦν καί κατά τάξιν ἐλαττουμένου (φθίνοντος) μεγέθους, ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ὡς ἑξῆς:

$$E = \{10, 8, 6, 5, 3, 2\}.$$

Τώρα πρῶτον στοιχεῖον τῆς διατάξεως εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμός 10 πού περιλαμβάνεται εἰς τό σύνολον καί τελευταῖον στοιχεῖον ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός 2.

Ἔστω δεύτερον ἕνα μή πεπερασμένον σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν π.χ. τό

$$M = \{x \mid x \text{ ἀκέραιος μονός (περιττός) ἀριθμός}\}.$$

Τά στοιχεῖα του ἠμποροῦν νά καταταχθοῦν κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους, ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ὡς ἑξῆς:

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$$

Τό πρῶτον στοιχεῖον τῆς διατάξεως, τό 1, εἶναι μικρότερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου· τελευταῖον στοιχεῖον δέν ὑπάρχει εἰς τήν διάταξιν, ἀφοῦ τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Μ εἶναι ἀπεριόριστον. Κατά συνέπειαν τό Μ δέν ἔχει μέγιστον στοιχεῖον.

Γενικῶς εἰς ἕνα μή πεπερασμένον σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε ἕνα ἐλάχιστον στοιχεῖον, κανένα ὅμως μέγιστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος διψήφιος φυσικός ἀριθμός ; Καί ποῖος ὁ μεγαλύτερος ;

2) Μέ τά ψηφία 6, 3, 8, 2, 5 γράψατε τόν μικρότερον καί τόν μεγαλύτερον ἑξαψήφιον ἀριθμόν.

3) Γράψατε κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους ὅλους τούς τριψηφίους ἀριθμούς τούς ὁποίους δύνασθε νά σχηματίσετε μέ τά ψηφία 1, 4 , 7.

4) Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τά δύο ψηφία εἶναι διάφορα;

5) Ὁ Παῦλος ἔχει ἴσην ἡλικίαν μέ τόν Γιάννη καί εἶναι 13 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Γιάννης ;

6) Ὁ Κώστας ἐπλήρωσε δι'ἕν βιβλίον ὅσα καί ὁ Γρηγόρης, ὁ δέ Γρηγόρης ὅσα καί ὁ Δημήτρης. Ἄν ὁ Δημήτρης ἐπλήρωσε 37 δρχ, πόσας ἐπλήρωσε ὁ Κώστας καί πόσας ὁ Γρηγόρης ;

7) Εἰς ποίας ἰδιότητας βασίζονται αἱ ἀπαντήσεις εἰς τάς δύο προηγουμένας ἀσκήσεις ;

8) Ἐξετάσατε ποία ἀπό τάς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος δύναται νά διατυπωθῇ καί ὡς ἑξῆς: "Δύο φυσικοί ἀριθμοί ἴσοι πρός τρίτον εἶναι καί μεταξύ των ἴσοι".

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Τό ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν ἑνός κύβου εἶναι 48 cm. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου; Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του ;

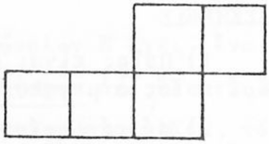
2) Διά τήν θέρμανσιν δωματίου μέ ἠλεκτρικήν θερμάστραν χρειάζονται 66 βάττ ἀνά m^3. Πόσα βάττ πρέπει νά εἶναι ἡ ἰσχύς τῆς θερμάστρας διά νά θερμάνη δωμάτιον $36\frac{2}{3}\ m^3$;

3) Τό τιμολόγιον τῆς Δ.Ε.Η. εἶναι, ὡς γνωστόν, τό ἑξῆς: τά πρῶτα 10 ὡριαῖα κιλοβάττ πληρώνονται πρός 1,20 δρχ, τά 20 ἑπόμενα πρός 1,70 δρχ , τά ἀκόλουθα 70 πρός 1,90 δρχ καί ὅλα τά ὑπόλοιπα πρός 0,70 δρχ. Νά ὑπολογισθῇ πόσα ὡριαῖα κιλοβάττ κατηνάλωσε μία οἰκογένεια ἡ ὁποία ἐπλήρωσε 209,10 δρχ.

4) Τρεῖς σάκκοι ἀλεύρων α, β, γ ζυγίζουν ἐν ὅλω 136,375 kgp. Νά εὑρεθῇ πόσον ζυγίζει ἕκαστος, ἄν οἱ μέν α καί β μαζί ζυγίζουν 93,625 kgp , οἱ δέ α καί γ μαζί 97,875 kgp.

5) Μέ 16 σπίρτα ἔχομεν σχηματίσει 5 ἴσα τετράγωνα,

ὅπως δεικνύει τό σχῆμα παραπλεύρως. Ἀλλάξατε τήν θέσιν δύο μόνον σπίρτων εἰς τρόπον ὥστε νά σχηματισθοῦν 4 ἴσα τετράγωνα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Ἐπίπεδον. Ἡμιευθεῖα. Εὐθύγραμμα τμήματα. Κυρτά καί μή κυρτά ἐπίπεδα χωρία.

§ 1. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Γένεσις αὐτῆς διά τῆς κινήσεως εὐθείας.

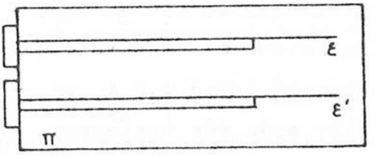
1.1 Ὅπως εἴδαμεν εἰς τά προηγούμενα (Κεφ. Α΄), τό ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον, τό πρῖσμα, ἡ πυραμίς εἶναι στερεά τά ὁποῖα περικλείονται ὑπό ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, τάς ὁποίας ὠνομάσαμεν ἕδρας. Αἱ ἕδραι αὐταί εἶναι μέρη ἀπεριορίστων ἐπιφανειῶν τάς ὁποίας ἐκαλέσαμεν ἐπίπεδα.

Πείραμα 1ον: Λαμβάνομεν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, π.χ. ἕνα φύλλον χάρτου ἐπί τῆς πινακίδος σχεδιάσεως, καί χαράσσομεν ἐπ᾽αὐτοῦ μίαν εὐθεῖαν ε. Ἐπί τῆς ε λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Α καί θέτομεν κατά μῆκος τῆς ε τήν ἀκμήν τοῦ κανόνος (Σχ.1). Στρέφομεν ἔπειτα τόν κανόνα περί τό σημεῖον Α οὕτως ὥστε ἡ ἀκμή του νά παραμένη πάντοτε ἐπί τοῦ φύλλου χάρτου.

Σχ.1

Ὅταν ὁ κανών κάμη μίαν πλήρη στροφήν περί τό σημεῖον Α ὥστε νά ἐπανέλθη εἰς τήν ἀρχικήν του θέσιν ἡ ἀκμή του θά ἔχη διαγράφει τήν ἐπιφάνειαν τοῦ φύλλου, δηλ. μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

Πείραμα 2ον: Λαμβάνομεν τήν πινακίδα σχεδιάσεως καί τό ταῦ (σχ. 2). Προσαρμόζομεν τήν κεφαλήν τοῦ ταῦ κατά μῆκος μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς πινακίδος καί ὀλισθαίνομεν τό ταῦ,οὕτως ὥστε ἡ κεφαλή του νά ἐφαρμόζη πάντοτε ἐπί τῆς πλευρᾶς τῆς πινακίδος. Παρατηροῦμεν καί πάλιν ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό μίαν ἀκμήν



Σx.2

τοῦ βραχίονος τοῦ ταῦ, γεννᾶ κατά τήν κίνησιν τούτου τήν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τῆς πινακίδος.

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν πειραμάτων βλέπομεν νά γεννᾶται ἡ γνωστή μας ἐπίπεδος ἐπιφάνεια διά τῆς κινήσεως μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

Ἔτσι δικαιολογοῦμεν τώρα, διατί ὀνομάζομεν ἐπίπεδον τήν ἐπιφάνειαν ἐπί τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἡ εὐθεῖα γραμμή.

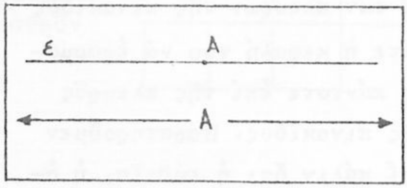
Σημείωσις: Εἰς τό 1ον πείραμα ἐκάμαμεν στροφήν τῆς εὐθείας ε περί τό σταθερόν σημεῖον Α. Εἰς τό 2ον ἐκάμαμεν παράλληλον μετατόπισιν τῆς ἀκμῆς τοῦ ταῦ δηλ. μιᾶς εὐθείας.

Ἡ στροφή καί ἡ παράλληλος μετατόπισις εἶναι δύο γεωμετρικαί πράξεις αἱ ὁποῖαι πολύ συχνά θά μᾶς βοηθοῦν εἰς τήν λύσιν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας καί διά τάς ὁποίας θά ὁμιλήσωμεν ἀργότερον λεπτομερέστερα.

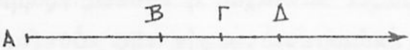
Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις (δηλ. καί εἰς τήν στροφήν καί εἰς τήν παράλληλον μετατόπισιν) οὔτε ἡ ἀκμή τοῦ κανόνος οὔτε ἡ ἀκμή τοῦ ταῦ ἔχασαν τήν ἰδιότητα τῆς εὐθείας.

1.2 Εὐθεῖα. Εἰς τά προηγούμενα (Κεφ. Α΄) ἐγνωρίσαμεν τήν εὐθεῖαν γραμμήν.

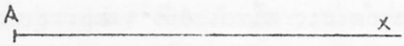
Ἡμιευθεῖα. Ἄς λάβωμεν τήν εὐθεῖαν ε ἐπί τοῦ τετραδίου μας (σχ. 3) καί ἄς ὁρίσωμεν ἕνα σημεῖον Α ἐπ'αὐτῆς. Ἔχομεν ἔτσι χωρίσει τήν εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη. Ταῦτα ἔχουν ἕνα κοινόν ἄκρον, τό σημεῖον Α, καί δύνανται νά προεκταθοῦν ἀπεριορίστως τό ἕνα πρός τήν μίαν κατεύθυνσιν, π.χ. πρός τά δεξιά τοῦ Α, τό ἄλλο πρός τήν ἀντίθετον κατεύθυνσιν, πρός τά ἀριστερά τοῦ Α. Ἕκαστον ἐκ τῶν δύο ἀπεριορίστων αὐτῶν μερῶν τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ε λέγεται <u>ἡμιευθεῖα</u>. Μία ἡμιευθεῖα εἶναι λοιπόν ἕνα μέρος εὐθείας ἔχον ἕνα μόνον ἄκρον· τό ἄκρον τοῦτο λέγεται <u>ἀρχή</u> τῆς ἡμιευθείας. Μία ἡμιευθεῖα ἐπί τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως παριστάνεται συνήθως μέ ἕνα βέλος (σχ. 4) καί ὀνομάζεται μέ δύο κεφαλαῖα γράμματα, π.χ. ΑΒ ἤ ΑΓ ἤ ΑΔ κλπ.· ἐκ τούτων τό πρῶτον Α εἶναι τό ὄνομα τῆς ἀρχῆς της καί τό δεύτερον τό ὄνομα ἑνός ἄλλου τυχόντος σημείου της πέραν τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιευθεῖα ἐκτείνεται ἀπεριορίστως. Ἕνας ἄλλος τρόπος παραστάσεως μιᾶς ἡμιευθείας χρησιμοποιεῖ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα διά τήν ἀρχήν της καί ἕνα μικρόν γράμμα διά τήν κατεύθυνσιν πρός τήν ὁποίαν ἡ ἡμιευθεῖα ἐκτείνεται ἀπεριορίστως, π.χ. Αx (σχ.5).



Σχ. 3



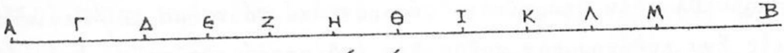
Σχ. 4



Σχ. 5

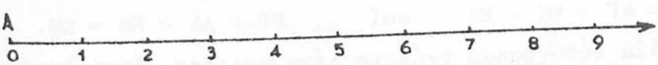
§ 2. Ἀπεικόνισις (ἤ παράστασις) τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐπί ἡμιευθείας. Ἡμιάξων.

Ἔστω (σχ. 6) ἡ ἡμιευθεῖα ΑΒ. Ἀρχίζοντες ἀπό τό Α λαμβάνομεν ἐπ'αὐτῆς μέ τήν βοήθειαν τοῦ διαστημομέτρου ἰσαπέχοντα σημεῖα Α , Γ , Δ , Ε , ...



Σχ. 6

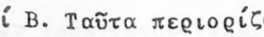
'Επειδή ἡ ἡμιευθεῖα δύναται νά προεκταθῇ καί πέραν ἀπό τό Β ὅσον θέλομεν, δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐπ'αὐτῆς οἱονδήποτε πεπερασμένον πλῆθος ἰσαπεχόντων σημείων. "Ας θεωρήσωμεν τά δέκα πρῶτα ἐξ αὐτῶν πλήν τοῦ Α : $\{Γ, Δ, Ε, \ldots, Μ\}$. Τό σύνολόν τους εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό σύνολον τῶν δέκα πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, δηλαδή ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία ἕνα πρός ἕνα μεταξύ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων. "Ενεκα τούτου δυνάμεθα νά λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός 1 ἀπεικονίζεται είς τό σημεῖον Γ, ὁ 2 είς τό σημεῖον Δ κ.ο.κ. Τήν ἀπεικόνισιν (ἤ παράστασιν) αὐτήν τῶν ἀνωτέρω 10 φυσικῶν ἀριθμῶν μέ σημεῖα τῆς ἡμιευθείας δυνάμεθα νοερῶς νά τήν ἐπεκτείνωμεν δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. 'Εάν συμφωνήσωμεν τό σημεῖον Α (δηλ. ἡ ἀρχή τῆς ἡμιευθείας) νά παριστᾶ τό 0, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν τήν ἀπεικόνισιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μέ σημεῖα τῆς ἡμιευθείας ΑΒ (σχ.7) καί καλοῦμεν τήν ἡμιευθεῖαν <u>ἡμιάξονα</u>.



Σχ. 7

§ 3. Εὐθύγραμμα τμήματα.

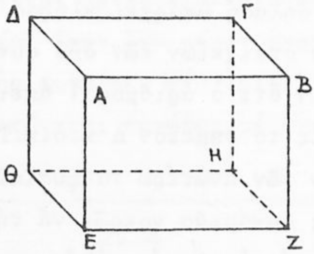
<u>3.1</u> "Εστω ἡ εὐθεῖα ε (σχ.8) καί δύο σημεῖα ἐπ'αὐτῆς Α καί Β. Ταῦτα περιορίζουν ἕνα μέρος της, τό ΑΒ. 'Ως γνωστόν τοῦτο ὀνομάζεται εὐθύγραμμον τμῆμα. "Ωστε, εὐθύγραμμον τμῆμα εἶ-



Σχ. 8

ναι ἕνα μέρος εὐθείας γραμμῆς περατούμενον εἰς δύο σημεῖα, τά <u>ἄκρα</u> του (ἤ <u>πέρατά του</u>). Εἰς τό σχ. 8 τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΑ δέν θεωρεῖται διάφορον ἀπό τό τμῆμα ΑΒ. Γενικῶς εἰς ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα δέν ἐνδιαφερόμεθα ποῖον ἀπό τά ἄκρα του εἶναι πρῶτον καί ποῖον δεύτερον.

<u>3.2 Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.</u> Ἔστω τό ὀρθογ.παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ.9). Ὅπως εἴδαμεν εἰς τά προηγούμενα, αἱ 12 ἀκμαί του εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα. Ἄς θεωρήσωμεν τά τέσσαρα ἐξ αὐτῶν ΑΕ,ΒΖ,ΓΗ καί ΔΘ. Ἐάν λάβωμεν ἐπί ἑνός διαφανοῦς χάρτου τό ἀποτύπωμα τοῦ ΑΕ καί τό μεταφέρωμεν ἐπί ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων τμημάτων θά ἴδωμεν ὅτι συμπίπτει (ταυτίζεται) μέ αὐτό. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι τό τμῆμα ΑΕ εἶναι <u>ἴσον</u> πρός τό ΒΖ, τό ΓΗ καί τό ΔΘ καί γράφομεν:



Σχ.9

$$ΑΕ = ΒΖ \quad , \quad ΑΕ = ΓΗ \quad , \quad ΑΕ = ΔΘ.$$

Καθ'ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$ΑΒ = ΔΓ = ΘΗ = ΕΖ \quad \text{καί} \quad ΒΓ = ΑΔ = ΕΘ = ΖΗ.$$

Ὥστε, δύο εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται ἴσα, ὅταν δυνάμεθα νά τά κάμωμεν νά συμπέσουν (νά ταυτισθοῦν) θέτοντες τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου.

Ὅπως εἴδαμεν, εἰς ἕνα κύβον καί αἱ 12 ἀκμαί εἶναι ἴσα μεταξύ των τμήματα.

<u>3.3</u> Διά τά ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες ἰσότητος καί ἰσοδυναμίας τάς ὁποίας ἔχομεν συναντήσει εἰς τά Κεφάλαια Γ΄ καί Δ΄ , ἤτοι

I) ΑΒ = ΑΒ (ἀνακλαστική ἰδιότης)

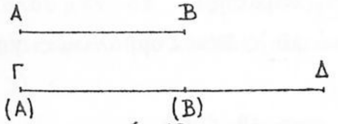
II) ΑΒ = ΓΔ $\Longrightarrow$ ΓΔ = ΑΒ (συμμετρική ἰδιότης)

III) (ΑΒ = ΓΔ καί ΓΔ = ΕΖ) $\Longrightarrow$ ΑΒ = ΕΖ (μεταβατική ἰδιότης).

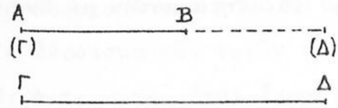
Μέ ποῖα πειράματα ἠμποροῦμεν νά ἐπαληθεύσωμεν τάς δύο τελευταίας ἰδιότητας ;

<u>3.4 Ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα.</u> Ἔστωσαν τώρα τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ (σχ.10). Θέτομεν τό ΑΒ ἐπί τοῦ ΓΔ οὕτως ὥστε τό ἄκρον Α τοῦ πρώτου νά πέσῃ ἐπί τοῦ ἄκρου Γ τοῦ δευτέρου. Βλέπομεν τότε ὅτι τό ἄκρον Β τοῦ πρώτου πίπτει μεταξύ τοῦ Γ καί Δ. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι τό ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ΓΔ καί γράφομεν

ΑΒ < ΓΔ.



Σχ. 10



Σχ. 11

Ἀντιθέτως, ἄν μεταφέρωμεν τό τμῆμα ΓΔ ἐπί τοῦ ΑΒ μέ σύμπτωσιν τῶν ἄκρων Γ καί Α (σχ.11), θά ἴδωμεν ὅτι τό ἄκρον Δ πίπτει ἐπί τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ πέραν ἀπό τό Β. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι τό ΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ καί γράφομεν

ΓΔ > ΑΒ.

Παρατηροῦμεν ὅτι καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις εἶναι ἀδύνατον νά φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν τά δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ· ἄρα τά τμήματα αὐτά δέν εἶναι ἴσα καί λέγονται <u>ἄνισα</u>: ΑΒ $\neq$ ΓΔ.

Ὥστε, δύο εὐθύγραμμα τμήματα τ_1 καί τ_2 λέγονται <u>ἄνισα</u>, ὅταν δέν εἶναι ἴσα. Τό ἕνα εἶναι τότε τό μικρότερον καί τό ἄλλο τό μεγαλύτερον. Π.χ. ἔστω $\tau_1 < \tau_2$, τότε θά εἶναι $\tau_2 > \tau_1$.

Ἀντιστρόφως, ἐάν $\tau_2 > \tau_1$, τότε θά εἶναι καί $\tau_1 < \tau_2$. Αὐτά τά ἐκφράζομεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\tau_1 < \tau_2 \Longleftrightarrow \tau_2 > \tau_1 .$$

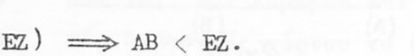
3.5 Εἶναι φανερόν ὅτι διά τήν ἀνισότητα μιᾶς ὡρισμένης φορᾶς, δηλ. τήν $<$ ἤ τήν $>$, δέν ἰσχύει οὔτε ἡ ἀνακλαστική ἰδιότης οὔτε ἡ συμμετρική ἰδιότης. Πράγματι δέν εἶναι δυνατόν νά ἔχωμεν π.χ. $AB < AB$, ἀφοῦ εἶναι $AB = AB$. Ἐπίσης δέν εἶναι δυνατόν ἀπό τήν $AB < \Gamma\Delta$ νά συμπεράνωμεν ὅτι $\Gamma\Delta < AB$, ἀφοῦ γνωρίζομεν ὅτι ἡ $AB < \Gamma\Delta$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν $\Gamma\Delta > AB$. Ἰσχύει ὅμως ἡ μεταβατική ἰδιότης:
Ἐάν $AB < \Gamma\Delta$ καί $\Gamma\Delta < EZ$, τότε καί $AB < EZ$. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$(AB < \Gamma\Delta \text{ καί } \Gamma\Delta < EZ) \Longrightarrow AB < EZ.$$

Εἶναι εὔκολον νά ἐπαληθεύσωμεν τήν ἰδιότητα αὐτήν μέ ἕνα πείραμα.

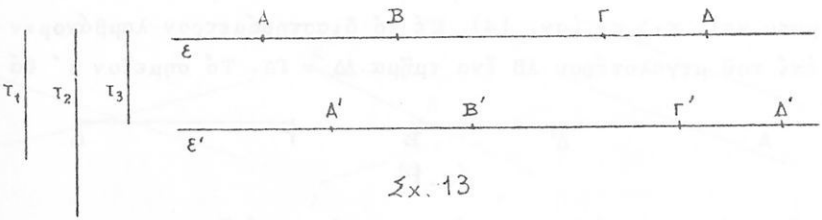
§ 4. Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις εὐθυγράμμων τμημάτων.

4.1 Δύο τμήματα ἐπί μιᾶς εὐθείας, ὅπως τά ΑΒ καί ΒΓ (σχ. 12), λέγονται διαδοχικά ἤ ἐφεξῆς, ὅταν ἔχουν ἕνα κοινόν ἄκρον (τό Β εἰς τό σχῆμα) καί κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κοινοῦ των ἄκρου. Τρία ἤ περισσότερα κατά σειράν τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ,... ἐπί μιᾶς εὐθείας λέγονται διαδοχικά ἤ ἐφεξῆς, ὅταν τό 2ον εἶναι ἐφεξῆς πρός τό 1ον, τό 3ον ἐφεξῆς πρός τό 2ον, τό 4ον πρός τό 3ον κ.ο.κ. Ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς τμημάτων ΑΒ καί ΒΓ λέγεται τό τμῆμα ΑΓ, τῶν ἐφεξῆς τμημάτων ΑΒ, ΒΓ καί ΓΔ ἄθροισμα λέγεται τό ΑΔ κ.ο.κ.



Σχ. 12

4.2 Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν να προσθέσωμεν τά τμήματα τ_1, τ_2, τ_3 (σχ. 13). Μέ τό διαστημόμετρον τά μεταφέρομεν



Σχ. 13

ἐπί μιᾶς εὐθείας ε (σχ.13) εἰς τρόπον ὥστε νά γίνουν ἐφεξῆς:

$$ΑΒ = τ_1 \quad , \quad ΒΓ = τ_2 \quad , \quad ΓΔ = τ_3 \; ,$$

καλοῦμεν δέ ἄθροισμάτων τό τμῆμα ΑΔ. Ἐάν, μέ τό διαστημόμετρον, τά καταστήσωμεν ἐφεξῆς ἐπί ἄλλης εὐθείας ε΄(σχ. 13) :

$$Α΄Β΄ = τ_1 \quad , \quad Β΄Γ΄ = τ_2 \quad , \quad Γ΄Δ΄ = τ_3 \; ,$$

τό ἄθροισμά των Α΄Δ΄ θά εἶναι ἴσον μέ τό προηγούμενον ΑΔ. Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν τμημάτων τό συμβολίζομεν μέ $τ_1 + τ_2 + τ_3$ ἔτσι ἔχομεν:

$$τ_1 + τ_2 + τ_3 = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ \text{ ,ὅπου } ΑΒ = τ_1 \, , \; ΒΓ = τ_2 \, , \; ΓΔ = τ_3 .$$

Ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν ἀπό τά $τ_1$, $τ_2$, $τ_3$ εὑρίσκομεν τό ἄθροισμα $τ_1 + τ_2 + τ_3$ λέγεται <u>πρόσθεσις</u>.

<u>4.3</u> Ἡ πρόσθεσις τήν ὁποίαν ὡρίσαμεν ἀνωτέρω ἔχει τάς ἑξῆς δύο βασικάς ἰδιότητας:

I) $τ_1 + τ_2 = τ_2 + τ_1$, ἰδιότης ἀντιμεταθέσεως.

II) $(τ_1+τ_2) + τ_3 = τ_1 + (τ_2+τ_3)$, ἰδιότης προσεταιρισμοῦ.

Ἡ γραφή $(τ_1+τ_2) + τ_3$ σημαίνει ὅτι πρῶτα εὑρίσκομεν τό ἄθροισμα $τ_1 + τ_2$ τῶν δύο τμημάτων $τ_1$ καί $τ_2$ καί ἔπειτα προσθέτομεν εἰς αὐτό τό τμῆμα $τ_3$.

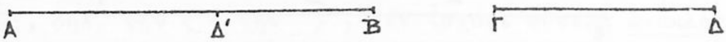
Ἀπό τάς ἰδιότητας αὐτάς συμπεραίνομεν ὅτι

$$τ_1 + τ_2 + τ_3 = τ_3 + τ_2 + τ_1 = τ_3 + τ_1 + τ_2 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ὅτι δηλαδή ἡ σειρά μέ τήν ὁποίαν προσθέτομεν τά τμήματα δέν ἔχει καμμίαν ἐπίδρασιν ἐπί τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος.

<u>4.4</u> Ἄς εἶναι τώρα $τ_1 = ΑΒ$ καί $τ_2 = ΓΔ$ δύο ἄνισα τμή-

ματα καί $\tau_1 > \tau_2$ (σχ. 14). Μέ τό διαστημόμετρον λαμβάνομεν ἐπί τοῦ μεγαλυτέρου ΑΒ ἕνα τμῆμα ΑΔ΄= ΓΔ. Τό σημεῖον Δ΄ θά



Σχ. 14

πέση τότε μεταξύ τοῦ Α καί τοῦ Β, ὥστε θά ἔχωμεν:

$$\tau_2 + \Delta'B = A\Delta' + \Delta'B = AB = \tau_1 .$$

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Δ΄Β τό ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τό μικρότερον τ_2 δίδει τό μεγαλύτερον τ_1. Τό τμῆμα αὐτό Δ΄Β λέγεται διαφορά τοῦ τ_1 ἀπό τό τ_2 καί σημειώνεται μέ τόν συμβολισμόν

$$\Delta'B = \tau_1 - \tau_2 \quad (\tau_1 \text{ μεῖον } \tau_2).$$

Ἐάν παραστήσωμεν μέ τό γράμμα δ τό τμῆμα αὐτό $\tau_1 - \tau_2$ θά ἔχωμεν τάς σχέσεις:

$$\tau_2 + \delta = \tau_1 \qquad \text{καί} \qquad \delta = \tau_1 - \tau_2 .$$

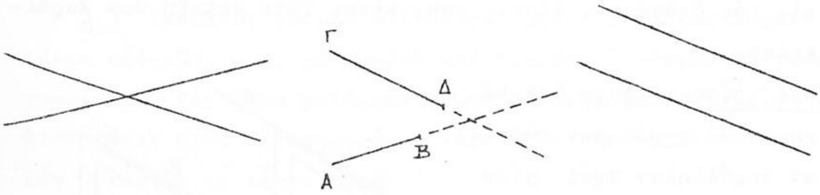
Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἄλλην· διά τοῦτο γράφομεν

$$\tau_2 + \delta = \tau_1 \Longleftrightarrow \delta = \tau_1 - \tau_2 .$$

Η πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν τήν διαφοράν $\tau_1 - \tau_2$ λέγεται ἀφαίρεσις τοῦ τμήματος τ_2 ἀπό τό μεγαλύτερον τ_1.
Ἄν τά τμήματα τ_1 καί τ_2 εἶναι ἴσα, τότε εἶναι φυσικόν νά εἴπωμεν ὅτι ἔχουν μηδενικήν διαφοράν καί ὅτι αὐτή ἡ διαφορά ἀντιπροσωπεύεται ἀπό ἕνα "μηδενικόν" τμῆμα μέ ἄκρα συμπίπτοντα.

§ 5. Εὐθεῖαι τεμνόμεναι καί εὐθεῖαι παράλληλοι.

5.1 Εἰς τό Κεφάλαιον Α΄ εἴδαμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι ἑνός ἐπιπέδου ἤ ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον, ἀφοῦ προεκταθοῦν ἐάν χρειασθῇ, ἤ δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον, ὅσον καί ἄν

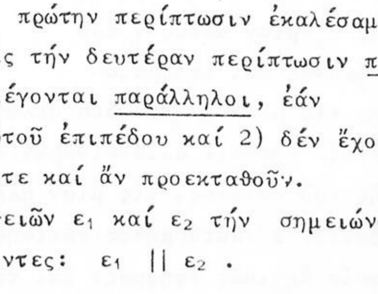


Σχ. 15

προεκταθοῦν (σχ. 15). Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἐκαλέσαμεν τάς δύο εὐθείας τεμνομένας, εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν παραλλήλους. Ὥστε δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ἐάν 1) κεῖνται ἐπί ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί 2) δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον ὁσονδήποτε καί ἄν προεκταθοῦν.
Τήν παραλληλίαν μεταξύ δύο εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 τήν σημειώνομεν μέ τό σύμβολον $||$, γράφοντες: $\varepsilon_1 \; || \; \varepsilon_2$.

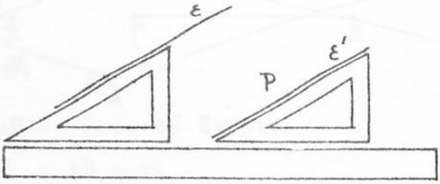
5.2 Θά περιγράφωμεν τώρα δύο τρόπους χαράξεως παραλλήλων εὐθειῶν ἐπί ἑνός φύλλου χάρτου τό ὁποῖον ἔχομεν ἁπλώσει ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς πινακίδος μας σχεδιάσεως.

1ος τρόπος. Ὁ τρόπος αὐτός βασίζεται εἰς τήν παράλληλον μετατόπισιν τοῦ ταῦ τήν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τό 2ον πείραμα τῆς § 1.2 τοῦ παρόντος Κεφαλαίου. Ὀλισθαίνομεν τό ταῦ ἐπί τῆς πινακίδος, ἀφοῦ προσαρμόσωμεν τήν κεφαλήν του εἰς μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς πινακίδος (βλ. σχ. 16), προσέχοντες ὥστε ἡ κεφαλή αὕτη νά ἐφαρμόζη συνεχῶς ἐπί τῆς πλευρᾶς τῆς πινακίδος. Αἱ εὐθεῖαι, τάς ὁποίας χαράσσομεν κατά μῆκος μιᾶς ἀκμῆς τοῦ βραχίονος τοῦ ταῦ



είς τάς διαφόρους θέσεις του, εἶναι τότε μεταξύ των παράλληλοι.

<u>2ος τρόπος</u>. Ἔστω ὅτι θέλομεν νά χαράξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρός μίαν δοθεῖσαν ε (σχ. 17). Τοποθετοῦμεν κατά μῆκος τῆς ε μίαν πλευράν τοῦ γνώμονος καί ἐφαρμόζομεν είς μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του τήν ἀκμήν ἑνός κανόνος. Κατόπιν ὀλισθαίνομεν τόν γνώμονα, κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κανόνος, είς μίαν ἄλλην θέσιν, καί χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε΄ κατά μῆκος ἐκείνης τῆς πλευρᾶς τοῦ γνώμονος ἡ ὁποία ἀρχικῶς ἐφήρμοζε ἐπί τῆς εὐθείας ε. Ἡ εὐθεῖα ε΄ εἶναι || ε.



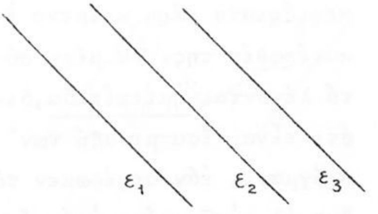
Σχ. 17

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νά χαράξωμεν μίαν παράλληλον πρός τήν ε,πού νά διέρχεται ἀπό δοθέν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου, ἀρκεῖ τό σημεῖον τοῦτο Ρ νά μή κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ε. Γεννᾶται ἤδη τό ἐρώτημα μήπως εἶναι δυνατόν νά χαράξωμεν διά τοῦ Ρ καί ἄλλην παράλληλον πρός τήν ε μέ ἄλλον τρόπον. Εἰς τήν Γεωμετρίαν πού μελετῶμεν ἀκολουθοῦντες τό σύστημα τό ὁποῖον διεμόρφωσε ὁ μεγάλος Ἕλλην μαθηματικός Εὐκλείδης (4ος αἰών π.Χ.), δεχόμεθα ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Μέ ἄλλας λέξεις είς τήν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν πού διδασκόμεθα, ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἰδιότης διά τάς παραλλήλους εὐθείας, γνωστή ὑπό τό ὄνομα "αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου". Ἀπό ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου μή κείμενον ἐπί τῆς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου διέρχεται μία καί μόνον μία παράλληλος πρός τήν ε. Κάθε ἄλλη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου διερχομένη ἀπό τό Ρ τέμνει τήν εὐθεῖαν ε.

5.3 Ὑπάρχουν φυσικά καί ἄλλοι τρόποι χαράξεως παραλλήλων εὐθειῶν, π.χ. μέ κανόνα καί διαβήτην· αὐτούς θά τούς γνωρίσωμεν εἰς ἄλλα μαθήματα. Τώρα θά περιορισθῶμεν εἰς τήν διατύπωσιν μιᾶς ἀξιοσημειώτου ἰδιότητος τῆς παραλληλίας:

Ἐάν ἡ εὐθεῖα ε_1 εἶναι παράλληλος πρός τήν ε_2 καί ἡ ε_2 παράλληλος πρός τήν ε_3, τότε καί ἡ ε_1 εἶναι παράλληλος πρός τήν ε_3 (σχ. 18).

Συμβολικῶς γράφομεν:



$(\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$ καί $\varepsilon_2 \| \varepsilon_3) \Longrightarrow \varepsilon_1 \| \varepsilon_3$.

Σχ. 18

Ἡ παραλληλία μεταξύ εὐθειῶν ἔχει λοιπόν τήν λεγομένην μεταβατικήν ἰδιότητα.

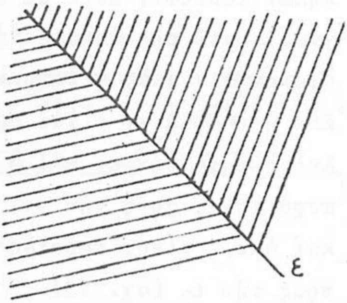
§ 6. Κυρτά καί μή κυρτά ἐπίπεδα χωρία.

6.1 Διά νά ἔχωμεν μίαν σύντομον ἔκφρασιν, θά καλέσωμεν ἐπίπεδον χωρίον, πᾶν μέρος τοῦ ἐπιπέδου καθώς καί τό ἴδιον τό (ἀπεριόριστον) ἐπίπεδον. Ἐπίπεδα χωρία πού συναντήσαμεν ἕως τώρα εἶναι τά ἑξῆς: 1) τά τρίγωνα, τά τετράγωνα, τά ὀρθογώνια, γενικῶς τά πολύγωνα. Ταῦτα εἶναι μέρη ἐπιπέδου περιοριζόμενα ἀπό εὐθύγραμμα τμήματα, δι᾽αὐτό λέγονται εὐθύγραμμα σχήματα. 2) ὁ κύκλος (ἤ κυκλικός δίσκος), δηλαδή ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου περιοριζόμενον ἀπό τήν καμπύλην κλειστήν γραμμήν πού ἐκαλέσαμεν περιφέρειαν.

Τά ἀνωτέρω ἐπίπεδα χωρία λέγονται περιωρισμένα, διότι δέν ἐκτείνονται ἀπεριορίστως πρός καμμίαν κατεύθυνσιν.

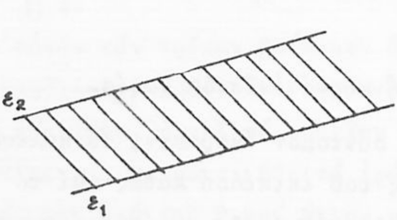
Ἰδού τώρα καί μερικά ἀπεριόριστα ἐπίπεδα χωρία: 1) ὁλόκληρον τό (ἀπεριόριστον) ἐπίπεδον. 2) Ἄς λάβωμεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου μίαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ε (σχ. 19).

('Εννοεῖται ὅτι εἰς τό σχῆμα μόνον ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου καί τῆς εὐθείας σχεδιάζεται). Ἡ εὐθεῖα ε χωρίζει τό ἐπίπεδον εἰς δύο ἀπεριόριστα μέρη κείμενα ἑκατέρωθέν της. Τά μέρη αὐτά λέγονται ἡμιεπίπεδα, διότι εἶναι ἴσα μεταξύ των· πράγματι, ἐάν στρέψωμεν τό ἕνα ἐξ αὐτῶν γύρω ἀπό τήν



Σχ. 19

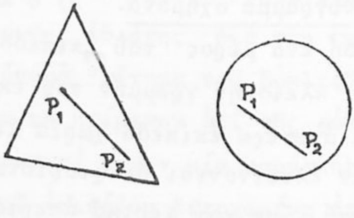
εὐθείαν ε κατά ἡμίσειαν στροφήν, τότε τό στραφέν ἡμιεπίπεδον θά πέση ἐπί τοῦ ἄλλου καί θά ταυτισθῆ μέ αὐτό. 3) Ἄς λάβωμεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου δύο παραλλήλους εὐθείας ε_1 καί ε_2



Σχ. 20

(σχ. 20). Αἱ εὐθεῖαι αὐται χωρίζουν τό ἐπίπεδον εἰς 3 μέρη: δύο ἡμιεπίπεδα καί ἕνα τρίτον ἀπεριόριστον μέρος πού κεῖται μεταξύ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν καί ὀνομάζεται <u>ταινία</u> (εἰς τό σχῆμα τό μέρος αὐτό ἔχει γραμμοσκιασθῆ).

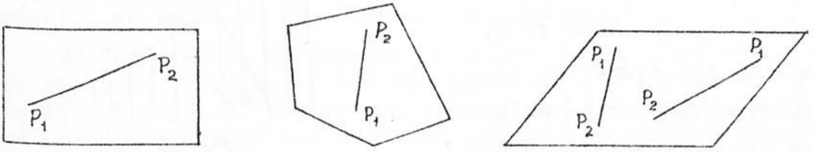
<u>6.2</u> Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα τρίγωνον καί ἕνα κύκλον καί ἄς λάβωμεν δύο <u>ὁποιαδήποτε</u> σημεῖα P_1 καί P_2 ἐντός ἑκάστου (σχ. 21). Θά παρατηρήσωμεν ὅτι καί ὁλόκληρον τό τμῆμα P_1P_2 κεῖται ἐντός



Σχ. 21

τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως τοῦ κύκλου. Διά τοῦτο καλοῦμεν τό τρίγωνον καί τόν κύκλον κυρτά ἐπίπεδα χωρία.

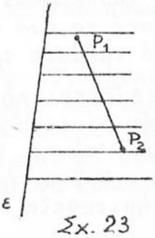
Ὁμοίως κυρτά χωρία εἶναι τό τετράγωνον, τό ὀρθογώνιον, καθώς καί πολλά πολύγωνα (σχ. 22).



Σχ. 22

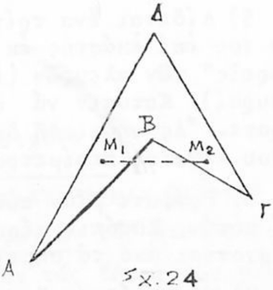
Κυρτόν ἐπίπεδον χωρίον εἶναι φυσικά ὁλόκληρον τό (ἀπεριόριστον) ἐπίπεδον καθώς καί ἕνα ἡμιεπίπεδον (σχ. 23). Γενικῶς ἕνα ἐπίπεδον χωρίον λέγεται κυρτόν ὅταν ἔχη τήν ἑξῆς ἰδιότητα:

Ἐάν τά ἄκρα ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ἀνήκουν εἰς τό χωρίον (κεῖνται ἐντός τοῦ χωρίου), τότε καί ὅλα τά σημεῖα τοῦ τμήματος ἀνήκουν εἰς τό χωρίον (ὁλόκληρον τό τμῆμα κεῖται ἐντός τοῦ χωρίου).



Σχ. 23

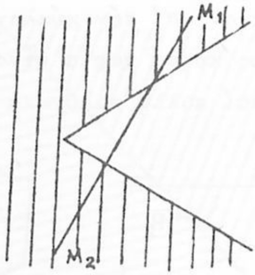
6.3 Θά δώσωμεν τώρα δύο παραδείγματα μή κυρτῶν ἐπιπέδων χωρίων. Τό σχῆμα 24 εἶναι ἕνα μή κυρτόν τετράπλευρον. Πράγματι εἰς τό τετράπλευρον αὐτό ὑπάρχουν ζεύγη σημείων, π.χ. τό ζεῦγος $\{M_1, M_2\}$, πού συνδέονται μέ εὐθύγραμ. τμήματα μή κείμενα ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ τετραπλεύρου.



Σχ. 24

Τό ἐπίπεδον χωρίον πού ἔχομεν γραμμοσκιάσει εἰς τό σχ. 25 δέν εἶναι κυρτόν.

Πράγματι ὑπάρχουν ἐντός αὐτοῦ σημεῖα, ὅπως τά M_1 καί M_2, πού ἑνώνονται μέ εὐθύγρ. τμήματα μή κείμενα ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ χωρίου.



Σχ. 25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Χαράξατε ἐπί τοῦ τετραδίου σας δύο εὐθύγραμμα τμήματα μήκους 5 cm καί 7 cm. Κατόπιν εὑρῆτε α) τό ἄθροισμά των, β) τήν διαφοράν των.

2) Λάβατε ἐπί τοῦ τετραδίου σας τρία σημεῖα Α,Β,Γ καί συνδέσατέ τα ἀνά δύο μέ εὐθύγραμμα τμήματα. Κατόπιν συγκρίνατε τά τμήματα ταῦτα ὡς πρός τό μέγεθός των.

3) Δίδεται εὐθεῖα ε καί σημεῖον Α μή κείμενον ἐπ' αὐτῆς. Μέ ἀρχήν τό Α χαράσσομεν δύο ἡμιευθείας Αx καί Αy παραλλήλους πρός τήν ε. Ποίαν σχέσιν θέσεως ἔχουν μεταξύ των αἱ δύο χαραχθεῖσαι ἡμιευθεῖαι; (Μέ ἄλλας λέξεις, πῶς κεῖται ἡ μία ἡμιευθεῖα σχετικῶς πρός τήν ἄλλην;).

4) Δίδονται 3 εὐθύγραμμα τμήματα. Τό ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου καί τοῦτο τριπλάσιον τοῦ τρίτου. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμά των.

5) Δίδεται ἕνα τρίγωνον. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του ἐπί ἑκάστης ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι "φορεῖς" τῶν πλευρῶν (ἐπί τῶν ὁποίων δηλαδή κεῖνται αἱ 3 πλευραί). Κατόπιν νά συγκρίνετε τά τρία ἀθροίσματα πού ηὕρατε. Ἄς σημειωθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνός πολυγώνου λέγεται <u>περίμετρος</u> τοῦ πολυγώνου.

6) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν ε καί λάβατε δύο σημεῖα ἔξω ἀπό αὐτήν. Κατόπιν φέρατε τάς παραλλήλους πρός τήν ε πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα αὐτά.

7) Νά χαράξετε ἕνα τρίγωνον καί ἀπό κάθε κορυφήν του νά

φέρετε τήν παράλληλον πρός τήν ἀπέναντι πλευράν τοῦ τριγώνου. Προσδιορίσατε ἔπειτα τά σημεῖα τομῆς τῶν τριῶν εὐθειῶν πού ἐφέρατε.

8) Χαράξατε πρῶτα ἕνα τετράγωνον καί ἔπειτα τάς δύο διαγωνίους του. Ἀπό κάθε κορυφήν τοῦ τετραγώνου νά φέρετε παράλληλον πρός μίαν διαγώνιον. Τίνος εἴδους ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν περιορίζουν αἱ 4 εὐθεῖαι πού ἐφέρατε ;

9) Γράψατε δύο ἡμιευθείας μέ κοινήν ἀρχήν. Ἐπί τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἀρχίζοντες ἀπό τήν ἀρχήν της, νά λάβετε 4 ἴσα ἐφεξῆς (διαδοχικά) εὐθύγραμμα τμήματα καί ἀπό τά ἄκρα των νά χαράξετε μεταξύ των παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα μέχρι τῆς ἄλλης ἡμιευθείας. Κατόπιν νά συγκρίνετε τά 4 ἐφεξῆς εὐθύγραμμα τμήματα πού κατ᾽αὐτόν τόν τρόπον ὁρίζονται ἐπί αὐτῆς τῆς ἄλλης ἡμιευθείας. Τί παρατηρεῖτε ;

10) Γράψατε δύο τεμνομένας εὐθείας καί λάβατε ἐπί ἑκάστης ἕνα σημεῖον διάφορον ἀπό τό σημεῖον τομῆς. Ἀπό ἕκαστον ἐκ τῶν δύο αὐτῶν σημείων νά χαράξετε παράλληλον πρός τήν ἄλλην εὐθεῖαν.

11) Τό ἐπίπεδον χωρίον πού κεῖται μεταξύ δύο (ἀπεριορίστων) παραλλήλων εὐθειῶν ὠνομάσθη ταινία. Νά ἐπαληθεύσετε ὅτι μία ταινία εἶναι κυρτόν χωρίον.

12) Ἐπαληθεύσατε μέ σχεδιάσεις τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἄς εἶναι (Α) καί (Β) δύο ἐπίπεδα κυρτά χωρία ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχοντα κοινά ἐσωτερικά σημεῖα. Τό σύνολον τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων ἀποτελεῖ ἕνα ἐπίπεδον χωρίον τό ὁποῖον εἶναι ἐπίσης κυρτόν. (Ὡς χωρία (Α) καί (Β) νά λάβετε ειδικῶς δύο ταινίας).

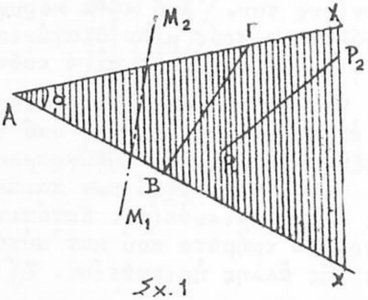
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

Γωνίαι

§ 1. Ἡ γωνία καί τά στοιχεῖα της

1.1 Ὅταν εἰς τό Κεφάλαιον Α΄ περιεγράψαμεν διάφορα πολύεδρα, ἐκάμαμεν λόγον καί περί τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας διακρίνομεν εἰς τά πολύγωνα πού ἀποτελοῦν τάς ἕδρας τῶν πολυέδρων. Τάς γωνίας αὐτάς πρόκειται νά μελετήσωμεν συστηματικά εἰς τό παρόν Κεφάλαιον.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ.1) ἕνα τρίγωνον. Ἄν φαντασθῶμεν τάς πλευράς του ΑΒ καί ΑΓ προεκτεινομένας ἀπεριορίστως πέραν ἀπό τό Β καί τό Γ, θά λάβωμεν δύο ἡμιευθείας Αx καί Αy.



Σχ.1

Αἱ ἡμιευθεῖαι αὐταί χωρίζουν τό ἐπίπεδον εἰς δύο ἀπεριόριστα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται γωνία μέ κορυφήν τό σημεῖον Α καί πλευράς τάς ἡμιευθείας Αx καί Αy. Ἄς θεωρήσωμεν πρῶτα ἐκεῖνο τό μέρος πού ἔχει γραμμοσκιασθῆ εἰς τό σχ. 1 καί πού περιέχει τό τρίγωνον ΑΒΓ. Τό μέρος αὐτό εἶναι ἕνα <u>κυρτόν χωρίον</u>, διά τοῦτο καί ἡ ἀντίστοιχος γωνία λέγεται <u>κυρτή γωνία</u>.

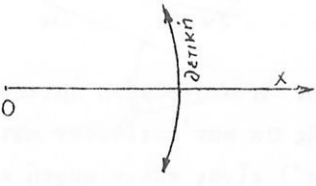
Τό ἄλλο μέρος εἶναι ἕνα <u>μή κυρτόν</u> ἐπίπεδον χωρίον καί ἡ ἀντίστοιχος γωνία λέγεται <u>μή κυρτή</u>.

Ὥστε γωνία εἶναι τό μέρος ἑνός ἐπιπέδου πού περιέχεται μεταξύ δύο ἡμιευθειῶν τοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινήν ἀρχήν.

Μία γωνία ὀνομάζεται καί συμβολίζεται κατά τούς ἑξῆς διαφόρους τρόπους: 1) Μέ μόνον τό γράμμα τῆς κορυφῆς της˙ π.χ. γωνία Α καί συμβολικῶς: ∢Α. 2) Μέ 3 κατά σειράν γράμματα ἐκ τῶν ὁποίων τό δεύτερον (τό μεσαῖον) εἶναι τό γράμμα τῆς κορυφῆς της, τά δέ δύο ἄλλα εἶναι γράμματα δύο σημείων κειμένων ἐπί τῶν πλευρῶν της˙ π.χ. (βλ.σχ.1) γωνία ΒΑΓ ἤ ΓΑΒ καί συμβολικῶς: ∢ΒΑΓ ἤ $B\hat{A}\Gamma$. 3) Μέ τά σύμβολα τῶν δύο πλευρῶν της˙ π.χ. γωνία (Αx,Αy) καί συμβολικῶς: ∢(Αx,Αy). 4) Μέ ἕνα μικρόν γράμμα πού γράφομεν πλησίον τῆς κορυφῆς παραπλεύρως ἑνός μικροῦ τόξου συνδέοντος τάς δύο πλευράς· π.χ. γωνία α (σχ.1).

§ 2. Γένεσις γωνίας μέ στροφήν μιᾶς ἡμιευθείας

2.1 Μία ἡμιευθεῖα, ὅπως π.χ. ἡ Ox(σχ.2), ἠμπορεῖ νά στραφῆ ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον γύρω ἀπό τήν ἀρχήν της O εἴτε κατά τήν "φοράν" μέ τήν ὁποίαν κινοῦνται οἱ δεῖκται ἑνός ὡρολογίου εὑρισκομένου ἐμπρός μας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου εἴτε κατά τήν ἀντίθετον φοράν. Εἰς τό παρόν Κεφάλαιον θά ὑποθέτωμεν πάντοτε ὅτι μία ἡμιευθεῖα στρέφεται περί τήν ἀρχήν της κατά τήν φοράν πού εἶναι ἀντίθετος πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καί πού λέγεται θετική φορά.



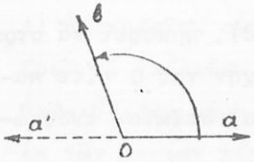
Σx.2

2.2 Ἔστω τώρα ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ox στρεφομένη ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον περί τήν ἀρχήν της O μεταβαίνει ἀπό μία ἀρχικήν θέσιν Oα εἰς μίαν τελικήν Oβ χωρίς νά ἔχη κάμει μίαν ὁλόκληρον στροφήν (σχ.3). Θά διαγράφη τότε μίαν γωνίαν (Oα,Oβ) τῆς ὁποίας ἡ πλευρά Oα λέγεται ἀρχική καί ἡ πλευρά Oβ τελική.

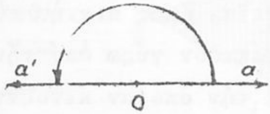
Σx.3

Μέ τό σύμβολον ∢ (Oα,Oβ) θά παριστάνωμεν λοιπόν τήν γωνίαν ἡ ὁποία γεννᾶται ὅταν μία ἡμιευθεῖα μέ ἀρχήν τό O στραφῆ περί τό σημεῖον O κατά τήν θετικήν φοράν ἀπό μίαν ἀρχικήν θέσιν Oα μέχρι μιᾶς τελικῆς Oβ. Ἔχομεν νά διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

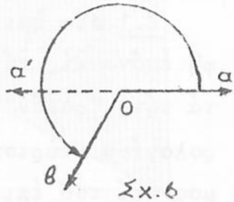
1η Ἡ στρεφομένη εὐθεῖα σταματᾶ πρίν κάμη ἡμίσειαν στροφήν, μέ ἄλλας λέξεις πρίν φθάση είς τήν προέκτασιν Οα΄(σχ. 4) τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Οα κατά τήν ἀντίθετον κατεύθυνσιν. Ἡ παραγομένη γωνία (Οα,Οβ) εἶναι τότε κυρτή.



Σχ.4



Σχ.5



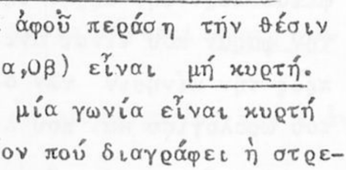
Σχ.6

2α. Ἡ στρεφομένη ἡμιευθεῖα σταματᾶ είς τήν προέκτασιν Οα΄ τῆς Οα κατ΄ἀντίθετον κατεύθυνσιν (σχ.5). Ἡ παραγομένη ∢(Οα, Οα΄) εἶναι πάλιν κυρτή καί λέγεται ἀποπλατυσμένη γωνία.

3η. Ἡ στρεφομένη ἡμιευθεῖα σταματᾶ ἀφοῦ περάση τήν θέσιν Οα΄ (σχ. 6). Ἡ παραγομένη γωνία (Οα,Οβ) εἶναι μή κυρτή.

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερόν ὅτι μία γωνία εἶναι κυρτή ἤ μή κυρτή καθόσον τό ἐπίπεδον χωρίον πού διαγράφει ἡ στρεφομένη ἡμιευθεῖα εἶναι κυρτόν ἤ μή κυρτόν, σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς τοῦ προηγουμένου Κεφαλαίου.

2.3 Εἶναι φυσικόν νά ἐπεκτείνωμεν τώρα τόν ἀρχικον ὁρισμόν τῆς γωνίας καί νά προσθέσωμεν είς τάς 3 προηγουμένας περιπτώσεις τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ στρεφομένη ἡμιευθεῖα ἐκτελεῖ μίαν ὁλόκληρον στροφήν περί τήν ἀρχήν της Ο (σχ.7). Ἡ παραγομένη γωνία (Οα,Οβ) ἔχει τότε τάς δύο πλευράς της συμπιπτούσας (ταυτιζομένας) μετά μίαν πλήρη (δηλ. ὁλόκληρον) στροφήν τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν.



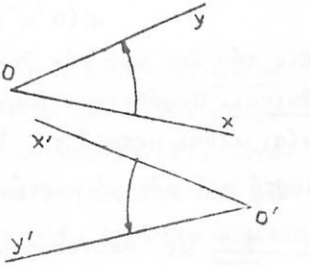
Σχ.7

Διά τοῦτο ἡ γωνία αὐτή λέγεται <u>πλήρης</u>.

§ 3. Ἰσότης καί ἀνισότης γωνιῶν

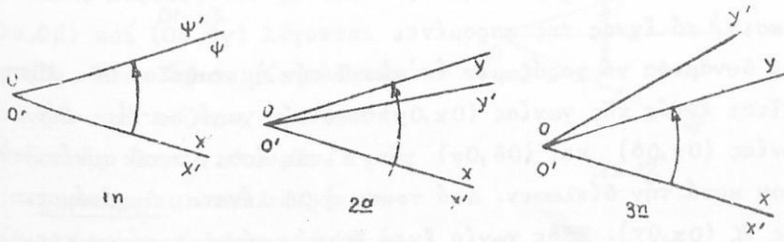
<u>3.1</u> Δύο γωνίαι εἶναι ἤ ἴσαι ἤ ἄνισοι. Τό πρῶτον θά συμβαίνη, ἄν εἶναι δυνατόν μέ κατάλληλον μετακίνησίν των νά τάς κάμωμεν νά συμπέσουν (νά ταυτισθοῦν).

Ἄς θεωρήσωμεν π.χ. τάς δύο γωνίας (Ox,Oy) καί $(O'x', O'y')$ τοῦ σχ. 8.



Σχ.8

Λαμβάνομεν τό ἀποτύπωμα τῆς $\sphericalangle(O'x', O'y')$ ἐπί ἑνός διαφανοῦς χάρτου καί τό μεταφέρομεν ἐπί τῆς $\sphericalangle(Ox,Oy)$ μέ τρόπον ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα $O'x'$ νά συμπέση μέ τήν Ox. Τρεῖς εἶναι τότε αἱ περιπτώσεις πού ἠμποροῦν νά παρουσιασθοῦν (βλ. σχ. 9) :



Σχ.9

<u>1η περίπτωσις</u>: Ὄχι μόνον αἱ δύο πλευραί Ox καί $O'x'$ ἀλλά καί αἱ δύο ἄλλαι Oy καί $O'y'$ συμπίπτουν. Αἱ δύο γωνίαι εἶναι τότε ἴσαι:

$$\sphericalangle(Ox,Oy) = \sphericalangle(O'x', O'y').$$

<u>2α</u> : Ἡ πλευρά $0'y'$ πίπτει ἐντός τῆς γωνίας $(0x,0y)$, δηλ. μεταξύ $0x$ καί $0y$. Ἡ $\measuredangle(0'x', 0'y')$ λέγεται τότε μικροτέρα τῆς $\measuredangle(0x,0y)$:

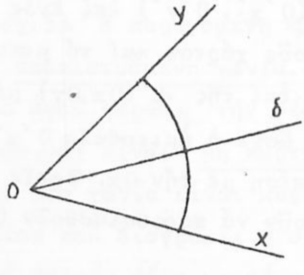
$$\measuredangle(0'x', 0'y') < \measuredangle(0x,0y).$$

<u>3η</u> : Ἡ πλευρά $0'y'$ πίπτει ἔξω ἀπό τήν γωνίαν $(0x,0y)$. Ἡ $\measuredangle(0'x', 0'y')$ λέγεται τότε μεγαλυτέρα τῆς $(0x,0y)$:

$$\measuredangle(0'x', 0'y') > \measuredangle(0x,0y).$$

Εἰς τήν 2αν καί τήν 3ην περίπτωσιν αἱ δύο γωνίαι λέγονται <u>ἄνισοι</u>. Παράδειγμα ἴσων γωνιῶν: ὅλαι αἱ ἀποπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Παράδειγμα ἀνίσων γωνιῶν: μία κυρτή καί μία μή κυρτή, ἡ κυρτή εἶναι μικροτέρα τῆς μή κυρτῆς.

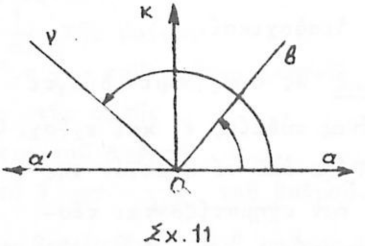
<u>3.2</u> Ἄς ἀποτυπώσωμεν τώρα ἐπί διαφανοῦς χάρτου τήν γωνίαν $(0x,0y)$ τοῦ σχ. 10 καί ἔπειτα ἄς διπλώσωμεν τό διαφανές μέ τρόπον ὥστε αἱ πλευραί $0x$ καί $0y$ νά συμπέσουν. Ἐάν ἔπειτα ἀναπτύξωμεν τήν δίπλωσιν, τό ἴχνος της παραμένει καί δυνάμεθα νά χαράξωμεν ἐπ' αὐτοῦ τήν ἡμιευθεῖαν 0δ. Αὐτη κεῖται ἐντός τῆς γωνίας $(0x,0y)$ καί τήν χωρίζει εἰς δύο γωνίας $(0x,0\delta)$ καί $(0\delta,0y)$ που εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ συνέπιπτον κατά τήν δίπλωσιν. Διά τουτο ἡ 0δ λέγεται <u>διχοτόμος</u> τῆς $\measuredangle(0x,0y)$. <u>Κάθε γωνία ἔχει λοιπόν τήν διχοτόμον της.</u> Εἰς ἄλλο Κεφάλαιον θά μάθωμεν νά τήν χαράσσωμεν μέ κανόνα καί διαβήτην.



Σχ. 10

<u>3.3</u> Ἄς θεωρήσωμεν εἰδικῶς τήν διχοτόμον 0κ μιᾶς ἀποπλατυσμένης γωνίας $(0\alpha,0\alpha')$ (βλ. σχ. 11). Ἡ 0κ χωρίζει τήν ἀποπλατυσμένην εἰς δύο ἴσας γωνίας, ἑκάστη ἐκ τῶν ὁποίων

λέγεται <u>ὀρθή γωνία</u>. Ἀφοῦ δύο ἀποπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, καί τά ἡμίση των, δηλαδή δύο ὀρθαί γωνίαι, θά εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ πλευραί μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, καθώς καί αἱ

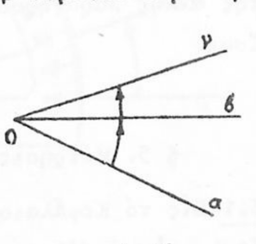


Σχ.11

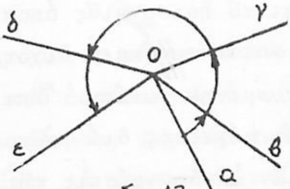
ἀπεριόριστοι εὐθειαι πού εἶναι φορεῖς των, λέγονται <u>κάθετοι ἡ μία πρός τήν ἄλλην</u>. Μία κυρτή γωνία πού εἶναι μικροτέρα ἀπό μίαν ὀρθήν, ὅπως π.χ. ἡ $\measuredangle$(Οα,Οβ) τοῦ σχ. 11, λέγεται <u>ὀξεῖα</u> καί μία κυρτή γωνία πού εἶναι μεγαλυτέρα ἀπό μίαν ὀρθήν, ὅπως π.χ. ἡ $\measuredangle$(Οα,Ογ) τοῦ σχ. 11, λέγεται <u>ἀμβλεῖα</u>

§ 4. Γωνίαι ἐφεξῆς. Γωνίαι κατακορυφήν.

<u>4.1</u> Μία γωνία (Οβ,Ογ) λέγεται <u>ἐφεξῆς</u> πρός τήν (Οα,Οβ) (σχ. 12), ὅταν ἡ ἀρχική της πλευρά Οβ συμπίπτει μέ τήν τελικήν πλευράν Οβ τῆς $\measuredangle$(Οα,Οβ). Μέ ἄλλας λέξεις, δύο γωνίαι (Οα,Οβ) καί (Οβ,Ογ) λέγονται ἐφεξῆς, ὅταν ἔχουν μίαν κοινήν πλευράν καί κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς τῆς κοινῆς πλευρᾶς. Τρεῖς ἤ περισσότεραι κατά σειράν γωνίαι λέγονται <u>διαδοχικαί</u> (ἤ <u>ἐφεξῆς</u>), ὅταν ἡ 2α ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐφεξῆς πρός τήν 1ην, ἡ 3η ἐφεξῆς πρός τήν 2αν, ἡ 4η ἐφεξῆς πρός τήν 3ην κ.ο.κ. Π.χ. εἰς τό σχ. 13 αἱ γωνίαι



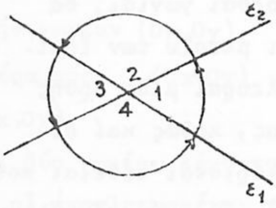
Σχ.12



Σχ.13

$(O\alpha,O\beta)$, $(O\beta,O\gamma)$, $(O\gamma,O\delta)$, $(O\delta,O\varepsilon)$ μέ αὐτήν τήν σειράν εἶναι διαδοχικαί.

4.2 Ἄς θεωρήσωμεν δύο τεμνομένας εὐθείας ε_1 καί ε_2(σχ. 14). Γύρω ἀπό τό σημεῖον τῆς τομῆς των σχηματίζονται τέσσαρες γωνίαι: ἡ $\hat{1}$, ἡ $\hat{2}$, ἡ $\hat{3}$ καί ἡ $\hat{4}$. Ἐξ αὐτῶν ἡ $\hat{1}$ μέ τήν $\hat{3}$ καθώς καί ἡ $\hat{2}$ μέ τήν $\hat{4}$ ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: αἱ πλευραί τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Δύο γωνίαι μέ τήν ἰδιότητα αὐτήν λέγονται κατακορυφήν (ἤ ἀντικόρυφοι). Ὥστε δύο γωνίαι εἶναι κατακορυφήν, ἄν αἱ πλευραί τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης κατ'ἀντίθετον κατεύθυνσιν. Λαμβάνοντες τό ἀποτύπωμα τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν καί θέτοντες αὐτό ἐπί τῆς ἄλλης παρατηροῦμεν ὅτι δύο κατακορυφήν γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 14

§ 5. Μέτρησις γωνιῶν. Μοιρογνωμόνιον.

5.1 Εἰς τό Κεφάλαιον Β΄, § 2, εἴπαμεν ὅτι εἶναι φυσικόν νά λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως διά τάς γωνίας τήν ὀρθήν γωνίαν. Βλέπομεν τώρα φανερά διά ποῖον λόγον : ἡ ὀρθή γωνία εἶναι τό ἥμισυ μιᾶς ἀποπλατυσμένης καί δυνάμεθα εὐκόλως νά τήν κατασκευάσωμεν διχοτομοῦντες μέ μίαν δίπλωσιν τήν ἀποπλατυσμένην γωνίαν. Ἐπειδή ὅμως ἡ ὀρθή γωνία ἔχει μέγα σχετικῶς μέγεθος, διά τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν συνήθως ὡς μονάδα γωνιῶν ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀρθῆς:

Iα) τήν μοῖραν $1^{o} = \frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς

Iβ) τό πρῶτον λεπτόν $1' = \frac{1}{60}$ τῆς μοίρας

Iγ) τό δεύτερον λεπτόν $1'' = \frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ

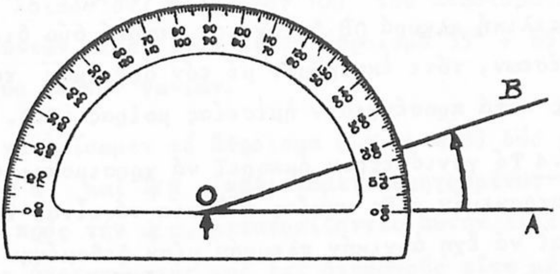
IIα) τόν βαθμόν 1 gr $= \frac{1}{100}$ τῆς ὀρθῆς

IIβ) δεκαδικάς ὑποδιαιρέσεις τοῦ βαθμοῦ , π.χ.

τό 1 dgr $= \frac{1}{10}$ τοῦ βαθμοῦ, τό 1 cgr $= \frac{1}{100}$ τοῦ βαθμοῦ.

Κατά ταῦτα μία ἀποπλατυσμένη γωνία ἔχει 180^{0} μοίρας (ἤ 200 βαθμούς) καί μία πλήρης γωνία ἔχει 360^{0} μοίρας (ἤ 400 βαθμούς). Τέλος τό μέτρον μιᾶς μή κυρτῆς γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180^{0}.

5.2 Εἰς τήν πρᾶξιν μετροῦμεν τάς γωνίας μέ ἕνα ὄργανον πού λέγεται μοιρογνωμόνιον ἤ γωνιόμετρον. Τοῦτο εἶναι ἕνα ἡ-



Σχ. 15

μικύκλιον ἀπό μέταλλον ἤ, προτιμότερον, ἀπό διαφανῆ πλαστικήν ὕλην (βλ. σχ. 15). Τό κέντρον O τοῦ ἡμικυκλίου σημειώνεται καθαρά εἰς τό ὄργανον.

Αἱ δύο ἀκτῖνες, εἰς τάς ὁποίας περατοῦται τό ἡμικύκλιον, ὁρίζουν μίαν ἀποπλατυσμένην γωνίαν πού ὑποδιαιρεῖται εἰς 180 (ἤ 200) ἴσα μέρη μέ ἀκτινωτάς εὐθυγράμμους χαραγάς πρός τό μέρος τῆς περιφερείας τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ χαραγαί αὐταί σημειώνονται ἀνά 10 μέ ἀριθμούς ἀπό 0 ἕως 180 (ἤ ἀπό 0 ἕως 200) καί ἐκ δεξιῶν πρός τά ἀριστερά καί ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά.

<u>5.3</u> Διά νά μετρήσωμεν εἰς μοίρας μίαν γωνίαν, π.χ. τήν ∢ (OA,OB) τοῦ σχ. 15, τοποθετοῦμεν τό γωνιόμετρον μέ τάς 180 ὑποδιαιρέσεις κατά τρόπον ὥστε τό κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου νά συμπέσῃ μέ τήν κορυφήν τῆς γωνίας καί ἡ χαραγή 0^o νά πέσῃ ἐπί τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς της OA.
Ἡ τελική πλευρά της OB (προκτεινομένη πέραν ἀπό τό B, ἄν εἶναι ἀνάγκη) θά διέρχεται τότε ἤ ἀπό μίαν ὑποδιαίρεσιν (χαραγήν) τοῦ γωνιομέτρου ἤ μεταξύ δύο διαδοχικῶν ὑποδιαιρέσεών του. Εἰς τό σχ. 15 ἡ πλευρά OB διέρχεται ἀπό τήν ὑποδιαίρεσιν 18^o, ἑπομένως

μέτρον εἰς μοίρας τῆς ∢ (OA,OB) = 18^o.

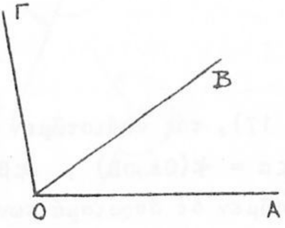
Ἄν ἡ τελική πλευρά OB διέρχεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ὑποδιαιρέσεων, τότε ἐκτιμῶμεν μέ τόν ὀφθαλμόν τό μέτρον τῆς γωνίας κατά προσέγγισιν ἡμισείας μοίρας (δηλ. 30΄).

<u>5.4</u> Τό γωνιόμετρον ἠμπορεῖ νά χρησιμοποιηθῇ καί διά τήν κατασκευήν μιᾶς γωνίας ἡ ὁποία νά εἶναι ἴση πρός δοθεῖσαν καί νά ἔχῃ ἀρχικήν πλευράν μίαν δεδομένην ἡμιευθεῖαν OX. Πρός τοῦτο μετροῦμεν πρῶτα εἰς μοίρας τήν δοθεῖσαν γωνίαν καί ἔστω ὅτι τό μέτρον της εἶναι 58^o. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν ἐπί τοῦ χάρτου μας τό γωνιόμετρον εἰς τρόπον ὥστε τό κέντρον του νά συμπέσῃ μέ τήν ἀρχήν O τῆς ἡμιευθείας OX, ἡ δέ OX νά διέρχεται ἀπό τήν ὑποδιαίρεσιν 0^o. Σημειώνομεν κατόπιν ἐπί τοῦ χάρτου ἕνα σημεῖον Ψ ἀπέναντι ἀκριβῶς εἰς τήν ὑποδιαίρεσιν 58^o. Τελος ἀποσύρομεν τό γωνιόμετρον καί χαράσσομεν τήν ἡμιευθεῖαν OΨ. Ἡ γωνία (OX,OΨ) εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 6. Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις γωνιῶν

<u>6.1</u> Ἔστω ὅτι ἔχομεν τάς ἐφεξῆς γωνίας (OA,OB) καί (OB,OΓ) (βλ. σχ. 16). Ὀνομάζομεν ἄθροισμά των τήν γωνίαν (OA,OΓ) ἡ ὁποία ἔχει ἀρχικήν πλευράν τήν ἀρχικήν OA τῆς πρώτης καί τελικήν πλευράν τήν τελικήν OΓ τῆς δευτέρας. Διά τό ἄθροισμα τοῦτο γράφομεν συμβολικῶς:

$\sphericalangle(OA,OB) + \sphericalangle(OB,O\Gamma) = \sphericalangle(OA,O\Gamma)$.



Σχ. 16

Ἐάν μετρήσωμεν τάς 3 γωνίας θά εὕρωμεν:

$\sphericalangle(OA,OB) = 35^0$, $\sphericalangle(OB,O\Gamma) = 65^0$, $\sphericalangle(OA,O\Gamma) = 100^0$.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό μέτρον 100^0 τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα $35^0 + 65^0$ τῶν μέτρων τῶν δύο τούτων γωνιῶν.

<u>6.2</u> Διά νά ὁρίσωμεν τό ἄθροισμα $(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta)$ δύο μή ἐφεξῆς γωνιῶν $\sphericalangle\alpha$ καί $\sphericalangle\beta$, καθιστῶμεν προηγουμένως τήν $\sphericalangle\beta$ ἐφεξῆς πρός τήν $\sphericalangle\alpha$, μετατοπίζοντες αὐτήν εἴτε μέ τήν βοήθειαν ἑνός ἀποτυπώματός της ἐπί διαφανοῦς εἴτε μέ τήν μέθοδον τῆς § 5.4. Παρατηροῦμεν καί πάλιν ὅτι

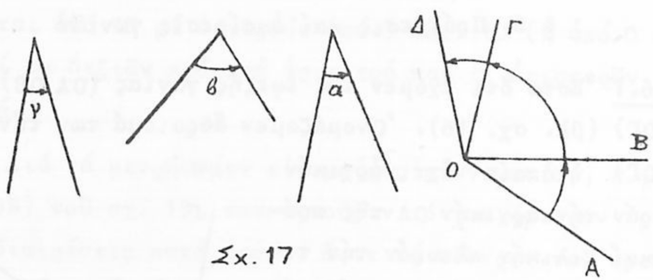
μέτρον τῆς $\sphericalangle\alpha$ + μέτρον τῆς $\sphericalangle\beta$ = μέτρον τοῦ $(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta)$.

Μέ μετρήσεις εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν ὅτι

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta + \sphericalangle\alpha.$$

Ὥστε ἡ πρόσθεσις δύο γωνιῶν ἔχει τήν ἰδιότητα τῆς <u>ἀντιμεταθέσεως</u> πού συνητήσαμεν καί είς τήν πρόσθεσιν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

<u>6.3</u> Διά νά προσθέσωμεν τρεῖς γωνίας $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$, $\sphericalangle\gamma$,(βλ.



Σχ. 17

σχ. 17), τάς καθιστῶμεν προηγουμένως διαδοχικάς:

$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΒ})$, $\sphericalangle\beta = \sphericalangle(\text{ΟΒ},\text{ΟΓ})$, $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle(\text{ΟΓ},\text{ΟΔ})$.

Καλοῦμεν δέ ἄθροισμά των $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma$ τήν γωνίαν $\sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΔ})$ ἡ ὁποία ἔχει ἀρχικήν πλευράν τήν ἀρχικήν ΟΑ τῆς πρώτης καί τελικήν πλευράν τήν τελικήν ΟΔ τῆς τρίτης:

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΔ})$$

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι

$$(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) + \sphericalangle\gamma = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΓ}) + \sphericalangle(\text{ΟΓ},\text{ΟΔ}) = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΔ})$$

καί

$$\sphericalangle\alpha + (\sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma) = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΒ}) + \sphericalangle(\text{ΟΒ},\text{ΟΔ}) = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΔ}).$$

Ἄρα

$$(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) + \sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha + (\sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma).$$

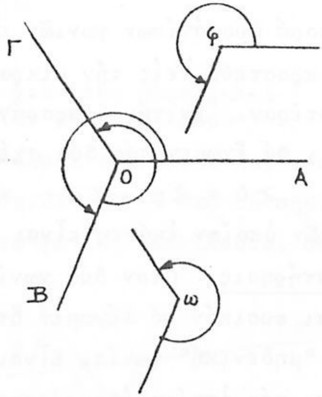
Ὥστε ἡ πρόσθεσις γωνιῶν ἔχει, ὅπως καί ἡ πρόσθεσις εὐθυγράμμων τμημάτων, τήν ἰδιότητα τοῦ <u>προσεταιρισμοῦ</u>.

Μέ ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται τώρα τό ἄθροισμα τεσσάρων ἤ περισσοτέρων γωνιῶν. Τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι, ὅπως καί τά δύο προηγούμενα ἀθροίσματα, ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν μέ τήν ὁποίαν λαμβάνομεν τάς προσθετέας γωνίας.

<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς τό σχ. 18 αἱ δύο γωνίαι $\sphericalangle\varphi$ καί $\sphericalangle\omega$ εἶναι μή κυρταί. Ἐπομένως, ὅταν τάς καταστήσωμεν ἐφεξῆς:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle(\text{ΟΑ},\text{ΟΒ}) \text{ καί } \omega = \sphericalangle(\text{ΟΒ},\text{ΟΓ})$$

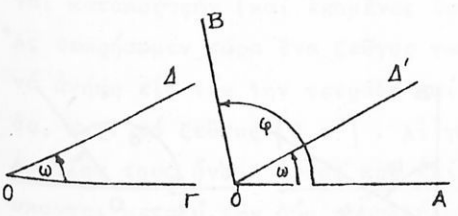
θά ὑπερκαλύψωμεν ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον. Διά νά εἶναι λοιπόν δυνατόν νά ὁμιλῶμεν περί ἀθροίσματος γωνιῶν χωρίς περιορισμόν τοῦ μεγέθους των, πρέπει νά ἐπεκτείνωμεν τόν ἀρχικόν ὁρισμόν τῆς γωνίας εἰσάγοντες καί γωνίας μεγαλυτέρας ἀπό μίαν πλήρη γωνίαν. Τοῦτο ἄλλωστε εἶναι πολύ φυσικόν, ἄν σκεφθῶμεν ὅτι ἡ γωνία ὁρίζεται καί μέ τήν στροφήν μιᾶς ἡμιευθείας ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον περί τό σημεῖον τῆς ἀρχῆς της καί ὅτι ἡ στροφή αὐτή ἠμπορεῖ νά ὑπερβῆ ὅσον θέλομεν μίαν πλήρη στροφήν.



Σχ. 18

6.4 Ἄς θεωρήσωμεν τώρα (σχ.19) δύο ἀνίσους γωνίας: $\sphericalangle\varphi = \sphericalangle(OA,OB) > \sphericalangle\omega = \sphericalangle(O\Gamma,O\Delta)$.

Τοποθετοῦμεν την μικροτέραν ω ἐπί τῆς μεγαλυτέρας φ εἰς τρόπον ὥστε ἡ πλευρά της ΟΓ νά συμπέση μέ τήν πλευράν ΟΑ. Τότε ἡ ἄλλη της πλευρά ΟΔ θά λάβη τήν θέσιν μιᾶς ἡμιευθείας ΟΔ΄ ἐντός τῆς $\sphericalangle(OA,OB)$, θά ἔχωμεν δέ



Σχ. 19

$$\sphericalangle\omega = \sphericalangle(OA,O\Delta') \text{ καί } \sphericalangle(OA,O\Delta') + \sphericalangle(O\Delta',OB) = \sphericalangle(OA,OB)$$

Ὥστε, ἄν εἰς τήν μικροτέραν γωνίαν ω προσθέσωμεν τήν $\sphericalangle(O\Delta',OB)$, λαμβάνομεν τήν μεγαλυτέραν $\sphericalangle\varphi$. Ἡ γωνία αὐτή $\sphericalangle(O\Delta',OB)$ λέγεται <u>διαφορά</u> τῆς $\sphericalangle\varphi$ ἀπό τήν $\sphericalangle\omega$ καί σημειώνεται μέ τόν συμβολισμόν

$$\sphericalangle\varphi - \sphericalangle\omega \quad (\text{γωνία φ μεῖον γωνία ω}).$$

Διαφορά δύο ἀνίσων γωνιῶν εἶναι λοιπόν ἡ γωνία ἡ ὁποία ὅταν προστεθῆ εἰς τήν μικροτέραν δίδει ὡς ἄθροισμα τήν μεγαλυτέραν. Ἄν τήν διαφοράν $\sphericalangle \varphi - \sphericalangle \omega$ τήν παραστήσωμεν μέ $\sphericalangle \delta$, θά ἔχωμεν τάς δύο σχέσεις.

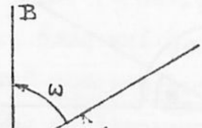
$$\sphericalangle \delta = \sphericalangle \varphi - \sphericalangle \omega \quad \text{καί} \quad \sphericalangle \varphi = \sphericalangle \omega + \sphericalangle \delta$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι συνέπεια τῆς ἄλλης.

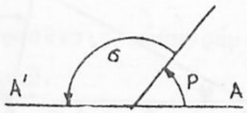
<u>Παρατήρησις</u>. Ὅταν δύο γωνίαι $\sphericalangle \alpha$ καί $\sphericalangle \beta$ εἶναι ἴσαι, τότε εἶναι φυσικόν νά λέγωμεν ὅτι ἡ διαφορά των $\sphericalangle \alpha - \sphericalangle \beta$ εἶναι μία "μηδενική" γωνία. Εἶναι λοιπόν σκόπιμον ἐκτός τῶν γωνιῶν, τάς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν ἕως τώρα, νά δεχθῶμεν καί τήν καλουμένην <u>μηδενικήν</u> γωνίαν $\sphericalangle(0x,0x)$ τῆς ὁποίας αἱ δύο πλευραί συμπίπτουν πρίν ἀπό κάθε στροφήν (κατ᾽ἀντίθεσιν πρός μίαν πλήρη γωνίαν, τῆς ὁποίας αἱ πλευραί συμπίπτουν ὕστερα ἀπό μίαν ὁλόκληρον στροφήν τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν περί τήν ἀρχήν της).

§ 7. Συμπληρωματικαί καί παραπληρωματικαί γωνίαι

<u>7.1</u> Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν. Ἡ κάθε μία λέγεται τότε συμπλήρωμα τῆς ἄλλης. Π.χ. εἰς τό σχ. 20 αἱ γωνίαι φ καί ω εἶναι συμπληρωματικαί ἐπειδή ἔχουν ἄθροισμα τήν $\sphericalangle(0A,0B)$ πού εἶναι ὀρθή.



Σχ.20

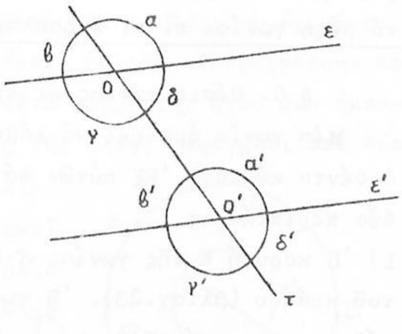


Σχ.21

ύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί (καί ἑκάστη <u>παραπλήρωμα τῆς ἄλλης</u>), ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ἀποπλατυσμένην γωνίαν, δηλ. 2 ὀρθάς. Εἰς τό σχ. 21 αἱ γωνίαι ρ καί σ εἶναι παραπληρωματικαί, ἐπειδή ἔχουν ἄθροισμα τήν ἀποπλατυσμένην γωνίαν ∢(ΟΑ,ΟΑ΄).

§ 8. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὅταν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθοῦν ἀπό μίαν μή παράλληλον

8.1 Θεωροῦμεν τάς δύο παραλλήλους εὐθείας ε καί ε΄καί μίαν εὐθεῖαν τ πού τάς τέμνει (σχ.22). Γύρω ἀπό τά σημεῖα τομῆς Ο καί Ο΄ σχηματίζονται ὀκτώ γωνίαι ἀποτελοῦσαι δύο τετράδας {α,β,γ,δ} καί {α΄,β΄,γ΄,δ΄}. Ἄν λάβωμεν ἕνα ζεῦγος γωνιῶν ἀπό τήν αὐτήν τετράδα, τότε αἱ γωνίαι τοῦ ζεύγους θά εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν, ἤ ἐφεξῆς ἤ κατακορυφήν. Π.χ. αἱ {γ,δ} εἶναι ἐφεξῆς (καί μάλιστα παραπληρωματικαί), αἱ {α,γ} εἶναι κατακορυφήν (καί ἐπομένως ἴσαι).



Σχ. 22

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα ζεῦγος γωνιῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νά ἀνήκη εἰς τήν 1ην τετράδα καί ἡ ἄλλη εἰς τήν 2αν τετράδα, π.χ. τό ζεῦγος {δ,α΄} . Αἱ γωνίαι του λέγονται μέ τό ἀρχαῖον τους ὄνομα ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη, διότι εὑρίσκονται μεταξύ τῶν δύο παραλλήλων καί πρός τό αὐτό μέρος τῆς τεμνούσης τ. Κατ'ἀνάλογον τρόπον αἱ γωνίαι {γ,α΄}λέγονται ἐντός ἐναλλάξ, αἱ {α,α΄}, ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη. αἱ {α,β΄} ἐντός ἐκτός ἐναλλάξ κ.ο.κ.

8.2 Ἄν ἀποτυπώσωμεν ἐπί διαφανοῦς τό σχῆμα πού ἀποτελοῦν αἱ τέσσαρες γωνίαι τῆς τετράδος {α,β,γ,δ} , εἶναι εὔκολον, μεταφέροντες τό ἀποτύπωμα ἐπί τοῦ σχήματος τῆς 2ας τετράδος {α΄,β΄,γ΄,δ΄}, νά διαπιστώσωμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες γωνιῶν:

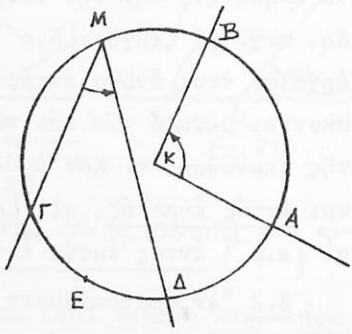
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$.

Ὥστε δύο ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἐάν τήν ἰσότητα $\alpha = \alpha'$ τήν συνδυάσωμεν μέ τήν ἰσότητα $\gamma = \alpha$, λαμβάνομεν τήν ἰσότητα $\gamma = \alpha'$· ὥστε δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἐξ ἄλλου ἐπειδή αἱ γωνίαι $\{\gamma,\delta\}$ εἶναι παραπληρωματικαί καί $\gamma = \alpha'$, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι $\{\delta,\alpha'\}$ εἶναι παραπληρωματικαί· ὥστε δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

§ 9. Θέσις γωνίας ὡς πρός δοθέντα κύκλον

Μία γωνία ἠμπορεῖ νά λάβη διαφόρους θέσεις ὡς πρός ἕνα δοθέντα κύκλον. Ἐξ αὐτῶν θά ἀναφέρωμεν ἐδῶ μόνον τάς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

I) Ἡ κορυφή Κ τῆς γωνίας ∢ (ΚΑ,ΚΒ) συμπίπτει μέ τό κέντρον τοῦ κύκλου (βλ.σχ.23). Ἡ γωνία λέγεται τότε ἐπίκεντρος. Τό τόξον περιφερείας $\widehat{AB}$ τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῶν πλευρῶν της, λέγεται ἀντίστοιχον τόξον τῆς ἐπικέντρου γωνίας (ΚΑ,ΚΒ). Ἐπίσης λέγομεν ὅτι εἰς τό τόξον $\widehat{AB}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐπίκεντρος γωνία (ΚΑ,ΚΒ) ἤ ὅτι ἡ γωνία αὐτή βαίνει ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{AB}$



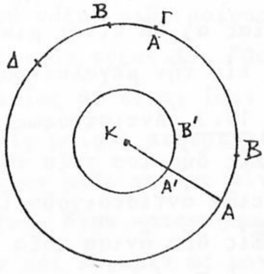
Σχ. 23

II) Ἡ κορυφή Μ τῆς γωνίας (ΜΓ,ΜΔ) κεῖται ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, αἱ δέ πλευραί της τέμνουν τήν περιφέρειαν, ἔστω εἰς τά σημεῖα Γ καί Δ. Ἡ γωνία λέγεται τότε ἐγγεγραμμένη εἰς τόν κύκλον καί ειδικώτερον, ἐγγεγραμένη εἰς τό τόξον $\widehat{\Delta M\Gamma}$ τοῦ κύκλου. Ἐάν $\widehat{\Gamma E\Delta}$ εἶναι τό τόξον τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν πλευρῶν της, τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΓΜΔ βαίνει ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma E\Delta}$.

§ 10. Ἰσότης ἐπικέντρων γωνιῶν καί ἰσότης ἀντιστοίχων τόξων.

10.1 Παρατηροῦμεν πρῶτα ὅτι δύο κύκλοι μέ ἴσας ἀκτῖνας ἠμποροῦν νά τεθοῦν ὁ εἷς ἐπί τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον ὥστε νά ταυτισθοῦν· πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά συμπέσουν τά κέντρα των. Ὥστε δύο κύκλοι μέ ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσα σχήματα καί λέγονται ἴσοι κύκλοι. Ὁμοίως δύο περιφέρειαι μέ ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσα σχήματα καί λέγονται ἴσαι περιφέρειαι.

Δύο περιφέρειαι μέ ἀνίσους ἀκτῖνας (βλ.σχ.24) εἶναι ὄχι μόνον αἱ ἴδιαι ἄνισα σχήματα, μή δυνάμενα δηλαδή νά ἐφαρμόσουν τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου, ἀλλά καί κανένα τόξον τῆς μιᾶς δέν ἠμπορεῖ νά ἐφαρμόση ἐπί τόξου τινός τῆς ἄλλης πράγματι ἀπό δύο τέτοια τόξα ἐκεῖνο πού ἀνήκει εἰς τόν κύκλον μέ τήν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα εἶναι ὀλιγώτερον καμπύλον (ὀλιγώτερον γυριστόν) ἀπό τό ἀνῆκον εἰς τόν κύκλον μέ τήν μικροτέραν ἀκτῖνα. Ἀντιθέτως δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ δύο ἴσων περιφερειῶν ἠμποροῦν νά τεθοῦν τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε ἤ νά συμπέσουν ἐξ ὁλοκλήρου (ὁπότε εἶναι ἴσα) ἤ τό ἕνα νά συμπέση μέ ἕνα μέρος τοῦ ἄλλου (ὁπότε τό πρῶτον λέγεται μικρότερον τοῦ δευτέρου).

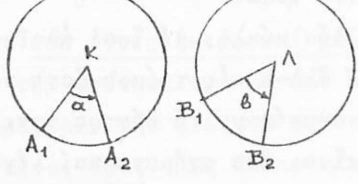


Σχ. 24

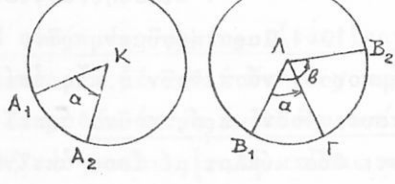
10.2 Ἄς θεωρήσωμεν τώρα δύο ἐπικέντρους γωνίας α καί β εἰς τόν αὐτόν κύκλον ἤ εἰς δύο ἴσους κύκλους. Ἀποτυπώνοντες τήν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τήν ∢α, ἐπάνω εἰς διαφανές καί μεταφέροντες τό ἀποτύπωμα ἐπί τῆς ἄλλης ∢β διαπιστώνομεν ἀμέσως τά ἑξῆς:

1η περίπτωσις: Αἱ γωνίαι α καί β εἶναι ἴσαι (σχ. 25). Τότε καί τά ἀντίστοιχα τόξα των $\overset{\frown}{A_1A_2}$ καί $\overset{\frown}{B_1B_2}$ θά εἶναι ἴσα.

2α περίπτωσις: Αἱ γωνίαι α καί β εἶναι ἄνισοι καί ἔστω



Σχ. 25



Σχ. 26

∢α < ∢β (βλ. σχ. 26). Τότε ἡ γωνία α θά εἶναι ἴση μέ ἕνα μέρος τῆς β, ἔστω τό ∢($ΛB_1$,ΛΓ). Ἐπομένως καί τό τόξον $\widehat{B_1Γ}$, τό ἀντίστοιχον τοῦ μέρους τούτου, θά εἶναι ἕνα μέρος τοῦ τόξου $\widehat{B_1B_2}$. Ἄρα τό τόξον $\widehat{A_1A_2}$, τό ἀντίστοιχον τῆς μικροτέρας γωνίας α, θά εἶναι μικρότερον τοῦ τόξου $\widehat{B_1B_2}$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μεγαλυτέραν γωνίαν β.

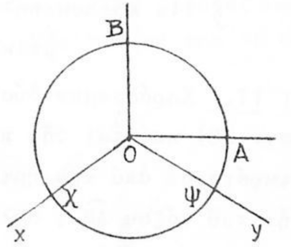
<u>10.3</u> Ἀντιστρόφως τώρα ἰσχύουν τά ἑξῆς:

1) Εἰς δύο ἴσα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ δύο ἴσων περιφερειῶν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

2) Εἰς δύο ἄνισα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ δύο ἴσων περιφερειῶν ἀντιστοιχοῦν ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι καί μάλιστα εἰς τό μικρότερον τόξον ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα ἐπίκεντρος γωνία.

<u>10.4</u> Ἀπό τά ἀνωτέρω συμπεραίνομεν εὔκολα τό ἑξῆς: Εἰς ἕνα τόξον διπλάσιον ἤ τριπλάσιον ἤ τετραπλάσιον κ.ο.κ. ἑνός τόξου τ τῆς αὐτῆς ἤ μιᾶς ἄλλης ἴσης περιφερείας ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία διπλασία ἤ τριπλασία ἤ τετραπλασία κ.ο.κ. τῆς γωνίας γ ἡ ὁποία βαίνει ἐπί τοῦ τόξου τ.

<u>10.5</u> Ἄς πάρωμεν τώρα μίαν ὀρθήν γωνίαν (OA,OB) καί ἄς τήν καταστήσωμεν ἐπίκεντρον εἰς ἕνα κύκλον (σχ. 27). Τό ἀντίστοιχον τόξον της θά εἶναι τό ἕνα τέταρτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Τό ἐνενηκοστόν μέρος $\left(\frac{1}{90}\right)$ τῆς ὀρθῆς γωνίας (OA,OB), τό ὁποῖον, ὡς γνωστόν, λέγεται μοῖρα, θά ἔχῃ ὡς



Σχ. 27

ἀντίστοιχον τόξον ἕνα ἐνενηκοστόν $\left(\frac{1}{90}\right)$ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας. Τό τόξον αὐτό λέγεται ἐπίσης μοῖρα, ὅπως γνωρίζομεν (βλ. Κεφ. Β΄ § 2), καί χρησιμεύει ὡς μονάς μετρήσεως τῶν τόξων τῆς θεωρουμένης περιφερείας.

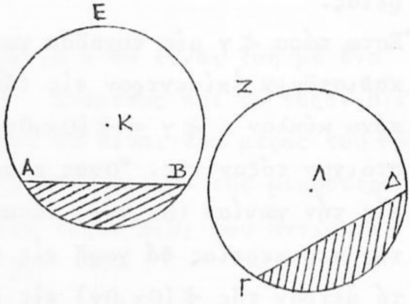
Ἔστω τώρα $\measuredangle\gamma$ μία τυχοῦσα γωνία· τήν καθιστῶμεν ἐπίκεντρον εἰς τόν παραπάνω κύκλον : $\measuredangle\gamma = \measuredangle(Ox,Oy)$ καί ἔστω τότε $\overset{\frown}{X\Psi}$ τό ἀντίστοιχον τόξον της. Ὅσας φοράς ἡ γωνία μιᾶς μοίρας χωρεῖ εἰς τήν γωνίαν (Ox,Oy), τόσας φοράς τό τόξον μιᾶς μοίρας τῆς περιφερείας θά χωρῇ εἰς τό ἀντίστοιχον τόξον $\overset{\frown}{X\Psi}$. Ὥστε τό μέτρον τῆς $\measuredangle(Ox,Oy)$ εἰς μοίρας γωνίας θά εἶναι ἴσον μέ τό μέτρον τυῦ ἀντιστοίχου τόξου $\overset{\frown}{X\Psi}$ εἰς μοίρας περιφερείας.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἰσχύει γενικά : Τό μέτρον μιᾶς γωνίας εἶναι ἴσον μέ τό μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ὅταν καταστήσωμεν τήν γωνίαν ἐπίκεντρον εἰς ἕνα κύκλον καί πάρωμεν ὡς μονάδα γωνιῶν μίαν ὡρισμένην ἐπίκεντρον γωνίαν καί ὡς μονάδα τόξων τό τόξον πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ὡρισμένην αὐτήν γωνίαν. Ἔτσι π.χ. μία γωνία $35^{0}\ 40'$, ὅταν τήν καταστήσωμεν ἐπίκεντρον εἰς ἕνα κύκλον, θά ἔχῃ ἀντίστοιχον τόξον ἕνα τόξον τοῦ ὁποίου τό μέτρον θά εἶναι 35 μοῖραι περιφερείας καί $40'$ πρῶτα λεπτά περιφερείας.

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον, ὅπως βλέπομεν, ἡ μέτρησις γωνιῶν ἀνάγεται εἰς μέτρησιν τόξων μιᾶς καί τῆς αὐτῆς περιφερείας καί ἀντιστρόφως, ἡ μέτρησις τόξων μιᾶς περιφερείας ἀνάγεται εἰς τήν μέτρησιν τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν.

§ 11. Κατασκευή μιᾶς γωνίας ἴσης πρός δοθεῖσαν μέ κανόνα καί διαβήτην.

11.1 Χαράσσομεν δύο ἴσας περιφερείας μέ κέντρα Κ καί Λ (σχ. 28) καί ἐπί τῆς περιφερείας (Κ) παίρνομεν ἕνα τόξον $\widehat{AB}$ μικρότερον ἀπό τήν ἡμιπεριφέρειαν. Χαράσσομεν καί τήν χορδήν τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, δηλαδή τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Ἐπί τῆς περιφερείας (Λ) λαμβάνομεν τώρα μέ τό διαστημόμετρον μίαν χορδήν ΓΔ ἴσην μέ τήν ΑΒ. Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθῶμεν, μέ ἀποτύπωσιν ἐπάνω εἰς διαφανές, ὅτι τά γραμμοσκιασμένα μέρη τῶν δύο κύκλων εἶναι ἴσα σχήματα. Ἄρα καί τά τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$ πού εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας καί πού ἔχουν ἴσας χορδάς εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ὁμοίως εἶναι ἴσα καί τά τόξα $\widehat{BEA}$ καί $\widehat{\Delta Z\Gamma}$ πού εἶναι μεγαλύτερα ἀπο τήν ἡμιπεριφέρειαν καί ἔχουν ἴσας χορδάς ΒΑ = ΔΓ.

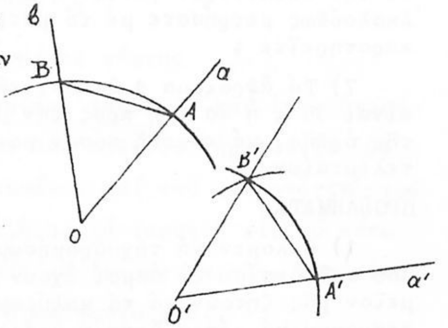


Σχ. 28

Ἄν τό τόξον $\widehat{AB}$ ἰσοῦται μέ τήν ἡμιπεριφέρειαν, τότε ἡ χορδή του ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας (Κ), δηλαδή διέρχεται ἀπό τό κέντρον Κ· ἐπομένως καί ἡ ἴση της χορδή ΓΔ θά εἶναι τότε διάμετρος τοῦ κύκλου (Λ). Συνεπῶς τά τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$ θά εἶναι ἡμιπεριφέρειαι ἴσων περιφερειῶν καί ἐπομένως θά εἶναι πάλιν ἴσα μεταξύ των.

Ὥστε, ἐάν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ δύο ἴσων περιφερειῶν εἶναι μικρότερα ἤ ἴσα μιᾶς ἡμιπεριφερείας καί ἔχουν ἴσας χορδάς, τότε θά εἶναι ἴσα μεταξύ των. Αὐτό ἀληθεύει καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά δύο τόξα μέ τάς ἴσας χορδάς εἶναι καί τά δύο μεγαλύτερα ἀπό μίαν ἡμιπεριφέρειαν.

<u>11.2</u> 'Από ὅσα προηγοῦνται, προκύπτει ἡ ἑξῆς μέθοδος διά τήν κατασκευήν μέ κανόνα καί διαβήτην μιᾶς γωνίας πού νά εἶναι ἴση πρός δοθεῖσαν κυρτήν ∢(Oα,Oβ) καί νά ἔχη δοθεῖσαν ἀρχικήν πλευράν O΄α΄(βλ.σχ. 29). Μέ κέντρον τό O καί ἀκτῖνα ρ τῆς ἐκλογῆς μας (ὄχι ὅμως πολύ μικράν) χαράσσομεν ἕνα τόξον κύκλου πού νά τέμνη τάς πλευράς τῆς ∢(Oα,Oβ), ἔστω εἰς τά σημεῖα A καί B. Μέ κέντρον



Σχ. 29

τό O΄ καί ἀκτῖνα τήν ἰδίαν ρ χαράσσομεν ἕνα δεύτερον τόξον κύκλου. Τό τόξον αὐτό ἄς τέμνη τήν ἡμιευθεῖαν O΄α΄εἰς τό σημεῖον A΄. Μέ κέντρον τό A΄ καί ἀκτῖνα ἴσην πρός τήν χορδήν AB χαράσσομεν ἕνα τρίτον τόξον πού νά τέμνη τό δεύτερον ἔστω εἰς τό σημεῖον B΄. Τέλος φέρομεν τήν ἡμιευθεῖαν O΄B΄. Θά εἶναι A΄B΄ = AB, ἄρα καί $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. Συνεπῶς αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι (Oα,Oβ) καί (O΄α΄, O΄B΄) εἶναι ἴσαι. Ἡ γωνία (O΄α΄, O΄B΄) εἶναι λοιπόν ἡ ζητουμένη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Χαράξατε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν καί ἔπειτα τήν συμπληρωματικήν της.

2) Ἄν μία γωνία εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ παραπληρωματική της ἀπό πόσα πέμπτα τῆς ὀρθῆς ἀποτελεῖται ;

3) Ἀπό ἕνα σημεῖον μιᾶς εὐθείας φέρομεν πρός τό αὐτό μέρος της δύο ἡμιευθείας. Ἄν αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς διαδοχικαί γωνίαι εἶναι ἴσαι νά εὕρετε τό μέτρον ἑκάστης α) μέ μονάδα μετρήσεως τήν ὀρθήν, β) μέ μονάδα μετρήσεως τήν μοῖραν.

4) Μία ἀπό τάς 4 γωνίας δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι 45°. Νά εὕρετε πόσων μοιρῶν εἶναι καθεμία ἀπό τάς ἄλλας.

5) Μία γωνία εἶναι $\frac{1}{6}$ τῆς ὀρθῆς. Ποία εἶναι ἡ διαφορά τῆς

συμπληρωματικῆς της ἀπό αὐτήν ;

6) Ἐγγράψατε εἰς κύκλον μίαν γωνίαν καί ἔπειτα χαράξατε τήν ἐπίκεντρον γωνίαν ἡ ὁποία βαίνει ἐπί τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἀκολούθως μετρήσατε μέ τό μοιρογνωμόνιον τάς δύο γωνίας. Τί παρατηρεῖτε ;

7) Τό ἄθροισμα 4 διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι 160^0. Ἄν ἡ 1η εἶναι 35^0, ἡ 2α ἴση πρός τήν 3ην καί ἡ 4η ἴση πρός τό 1/2 τῆς ὀρθῆς, νά εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν τριῶν τελευταίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Θέλομεν νά ταχυδρομήσωμεν ἕνα κιβώτιον σχήματος κύβου τοῦ ὁποίου αἱ ἀκμαί ἔχουν μῆκος 0,45 m. Εἰς τό ταχυδρομεῖον μᾶς ζητοῦν νά τό καλύψωμεν ἐξωτερικῶς μέ ὕφασμα. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ὕφασμα χρειαζόμεθα ;

2) Μία βρύση δίδει 50 λίτρα νερό εἰς ἕνα λεπτόν τῆς ὥρας. Πόσον χρόνον θά χρειασθῇ διά νά γεμίσῃ μίαν δεξαμενήν ἡ ὁποία ἔχει 6 m μῆκος, 5 m πλάτος καί 4,5 m βάθος ; (Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἕνα λίτρον νεροῦ ἔχει ὄγκον ἑνός κυβικοῦ δεκατομέτρου περίπου).

3) Ἕνα βαρέλιον ζυγίζει $27\frac{1}{4}$ kgp ὅταν εἶναι κενόν καί $183\frac{3}{4}$ kgp ὅταν εἶναι πλῆρες βενζίνης. Νά εὑρεθῇ τό βάρος τῆς βενζίνης ἡ ὁποία περιέχεται εἰς 18 τέτοια βαρέλια.

4) Δύο τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν τό ἴδιον μῆκος. Ἡ τιμή τοῦ μέτρου (m) ἀπό τό πρῶτον εἶναι 120 δρχ καί ἀπό τό δεύτερον 95 δρχ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος ἑκάστου, ἄν εἶναι ἀκόμη γνωστόν ὅτι ἡ τιμή ὁλοκλήρου τοῦ πρώτου τεμαχίου ὑπερβαίνει τήν τιμήν τοῦ δευτέρου κατά 2 800 δρχ.

5) Ἕνας ἱππεύς διέτρεξε τά 3/5 μιᾶς ἀποστάσεως. Ἡ ὑπόλοιπος ἀπόστασις εἶναι 36 km. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε ὁ ἱππεύς καί πόση εἶναι ὅλη ἡ ἀπόστασις ;

6) Ἕνας ἀγρός ἠγοράσθη ἀντί 40 800 δρχ πρός 4,80 δρχ τό τετραγ. μέτρον (m^2). Ἀπό πόσα στρέμματα ἀποτελεῖται ὁ ἀγρός;

7) Ἡ πλευρά ἑνός τετραγωνικοῦ κήπου εἶναι 38 m. Ἐντός τοῦ κήπου κατά μῆκος τῆς περιμέτρου του ἀνοίγομεν χάνδακα πλάτους 0,5 m. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κήπου πού μένει διά καλλιέργειαν.

8) Τό μῆκος ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 25,60 m καί τό πλάτος του ἴσον πρός τά 3/4 τοῦ μήκους του. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν του α) εἰς τετρ. μέτρα (m^2), β) εἰς στρέμματα ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

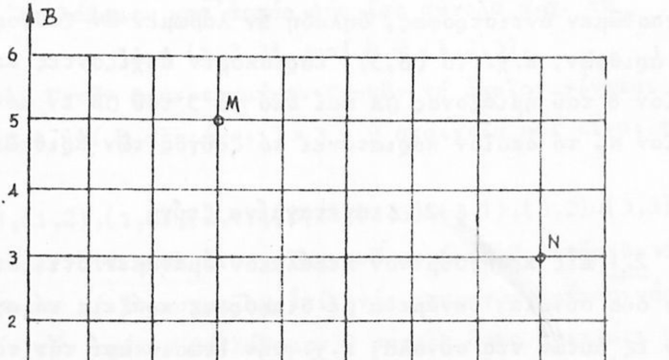
§ 1. Τετραγωνισμένος χάρτης

<u>1.1 Κατασκευή τετραγωνισμένου χάρτου.</u> Ἐπί ἑνός ἀχαράκτου φύλλου χάρτου χαράσσομεν δύο καθέτους ἡμιευθείας ΟΑ καί ΟΒ μέ τήν βοήθειαν τοῦ κανόνος καί τοῦ γνώμονος, εἰς τρόπον ὥστε ἡ μέν μία ἡμιευθεῖα, ἡ ΟΑ, νά χαραχθῆ εἰς τό κάτω μέρος τοῦ φύλλου, ἡ δέ ἄλλη εἰς τό ἀριστερόν του. Κατ᾽αὐτόν τόν τρόπον σχηματίζεται μία ὀρθή γωνία ΑΟΒ.

Ἀρχίζοντες ἀπό τήν κορυφήν Ο αὐτῆς τῆς γωνίας, χωρίζομεν τάς πλευράς της εἰς ἴσα μέρη, π.χ. εἰς ἑκατοστόμετρα, μέ τήν βοήθειαν ἑνός ὑποδεκαμέτρου.

Ἀπό τά σημεῖα πού χωρίζουν τήν ΟΑ χαράσσομεν εὐθείας παραλλήλους πρός τήν ΟΒ καί ἀπό τά σημεῖα πού χωρίζουν τήν ΟΒ, εὐθείας παραλλήλους πρός τήν ΟΑ.

Καλύπτομεν ἔτσι τήν ἐπιφάνειαν τοῦ χάρτου μας μέ μικρά τετράγωνα, διά τοῦτο καλοῦμεν τόν χάρτην μας τετραγωνισμένον.



'Από παρόμοια τετραγωνισμένα φύλλα χάρτου άπετελεῖτο καί τό τετράδιον ἀριθμητικῆς τό ὁποῖον χρησιμοποιούσαμεν εἰς τό Δημοτικόν Σχολεῖον.

1.2 Αἱ πλευραί ΟΑ καί ΟΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΒ ἔχουν χωρισθῆ μέ σημεῖα τά ὁποῖα παριστάνουν τούς φυσικούς ἀριθμούς καί λέγονται,ὡς γνωστόν,ἡμιάξονες. 'Εξ αὐτῶν ὁ μέν ΟΑ λέγεται καί ὁριζόντιος ἡμιάξων, ὁ δέ ΟΒ κατακόρυφος. "Αν τώρα λάβωμεν ἕνα τυχόν σημεῖον ἀπό ἐκεῖνα τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τάς κορυφάς τῶν τετραγώνων τοῦ χάρτου μας, θά ἴδωμεν ὅτι ἐξ αὐτοῦ τοῦ σημείου διέρχονται 2 εὐθεῖαι τοῦ τετραγωνισμοῦ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μᾶς ὁδηγεῖ πρός τόν ὁριζόντιον ἡμιάξονα ΟΑ, ἡ δέ ἄλλη πρός τόν κατακόρυφον ΟΒ. Π.χ. ἐκ τοῦ σημείου Μ διέρχονται δύο εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς τό σημεῖον 3 τοῦ ἡμιάξονος ΟΑ καί εἰς τό σημεῖον 5 τοῦ ΟΒ. Λέγομεν ὅτι τό σημεῖον Μ ἀντιπροσωπεύει ἤ παριστάνει τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν (3,5). Γενικῶς κάθε κορυφή τετραγώνου ἀντιπροσωπεύει ἕνα καί μόνον ζεῦγος ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας εὑρίσκεται ἐπί τοῦ ἡμιάξονος ΟΑ καί ὁ ἄλλος ἐπί τοῦ ΟΒ. "Αν ἐργασθῶμεν ἀντιστρόφως, δηλαδή ἄν λάβωμεν ἕν ζεῦγος ἀκεραίων ἀριθμῶν, π.χ. τό (8,3), εὑρίσκομεν ἀρχίζοντες ἀπό τό σημεῖον 8 τοῦ ἡμιάξονος ΟΑ καί ἀπό τό 3 τοῦ ΟΒ ἕν μόνον σημεῖον Ν, τό ὁποῖον παριστάνει τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν (8,3).

§ 2 Διατεταγμένα ζεύγη

2.1 Εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἐμάθαμεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν δύο σύνολα, δυνάμεθα μέ διαφόρους πράξεις νά σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν νέα σύνολα, π.χ. τήν ἕνωσιν καί τήν τομήν των. Θά ἴδωμεν τώρα πῶς ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν καί κατ' ἄλλον τρόπον ἕνα νέον σύνολον ἀπό δύο δοθέντα σύνολα. "Εστω λοιπόν ὅτι ἔχομεν τά σύνολα: $A = \{\alpha,\beta\}$ καί $B = \{\gamma\ \delta,\varepsilon\}$.

Εἶναι δυνατόν νά σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν τό σύνολον

$$Γ = \{(α,γ), (α,δ), (α,ε), (β,γ), (β,δ), (β,ε)\}$$

εἰς τό ὁποῖον κάθε στοιχεῖον εἶναι ἕνα ζεῦγος μέ πρῶτον μέλος ἕν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α καί δεύτερον μέλος ἕν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β. Παρατηροῦμεν ὅτι τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Γ τό εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τόν ἀριθμόν 2 τῶν στοιχείων τοῦ Α μέ τόν ἀριθμόν 3 τῶν στοιχείων τοῦ Β, δηλαδή $2 \cdot 3 = 6$.

Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Γ τά ὀνομάσαμεν <u>διατεταγμένα ζεύγη</u>, διότι ἀπό τά δύο μέλη ἑκάστου ζεύγους τό ἕνα χαρακτηρίζεται ὡς πρῶτον καί τό ἄλλο ὡς δεύτερον. Τήν κατάταξιν αὐτήν τῶν δύο μελῶν τοῦ ζεύγους τήν δηλώνομεν καί μέ τόν τρόπον τῆς γραφῆς: ἐντός τῆς παρενθέσεως γράφομεν πρῶτα τό πρῶτον μέλος τοῦ ζεύγους, ἔπειτα ἕνα κόμμα καί τέλος τό δεύτερον μέλος τοῦ ζεύγους.

§ 3. Γραφική παράστασις διατεταγμένων ζευγῶν μέ μέλη ἀκεραίους ἀριθμούς, δηλαδή φυσικούς ἀριθμούς καί τό μηδέν.

<u>3.1</u> Ἄς λάβωμεν κατ' ἀρχάς δύο ἴσα σύνολα π.χ. τά

$$A = (1,2,3) \quad καί \quad B = (1,2,3).$$

Τό σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τό ὁποῖον γίνεται ἀπό τά σύνολα Α καί Β περιέχει $3 \times 3 = 9$ στοιχεῖα καί εἶναι τό ἑξῆς:

$$Γ = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ δυνάμεθα νά τό παραστήσωμεν μέ ἕνα σημεῖον ἐπί ἑνός τετραγωνισμένου χάρτου. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον θά λάβωμεν 9 σημεῖα, ὅπως δεικνύει τό ὄπισθεν σχῆμα.

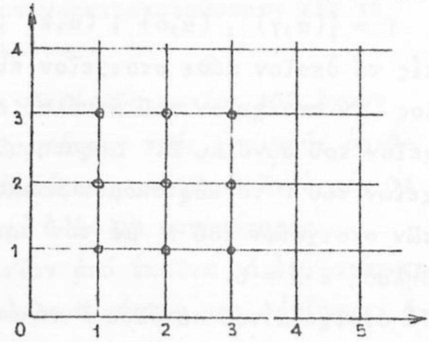
Ἄς ἐξετάσωμεν ἀκόμη ἕν παράδειγμα λαμβάνοντες τά σύνολα:

$$A = (4,5,7) \quad , \quad B = (0,2,4,6).$$

Ἐξ αὐτῶν τῶν συνόλων σχηματίζομεν τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν:

Γ = {(4,0),(4,2),(4,4),(4,6),(5,0),(5,2),(5,4),(5,6),(7,0),(7,2),(7,4),(7,6)}.

Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Γ παριστάνονται ἐπί ἑνός τετραγωνισμένου χάρτου ὑπό 12 σημείων, τά ὁποῖα σημειώνομεν εἰς τό κατωτέρω σχῆμα μέ τά γράμματα Κ,Λ,Μ,Ν,Π, Ρ,Σ,Τ,Υ,Φ,Χ,Ψ. Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε διατεταγμένον ζεῦγος, στοιχεῖον τοῦ

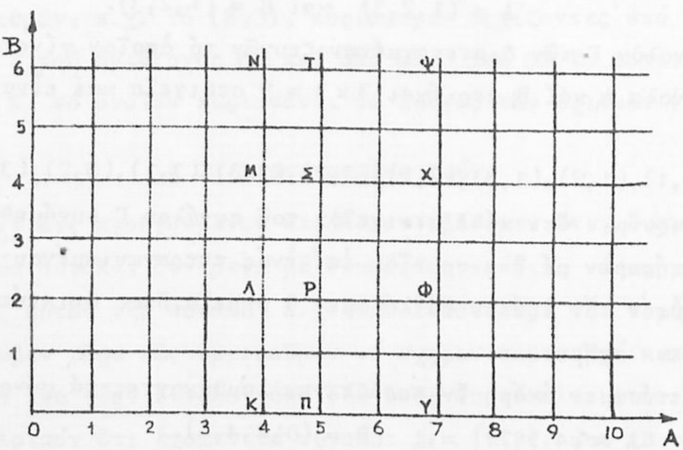


συνόλου Γ, παριστάνεται ὑπό ἑνός μόνον σημείου τοῦ τετραγωνισμένου χάρτου καί κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου {Κ,Λ,Μ,Ν,Π,Ρ,Σ,Τ, Υ,Φ,Χ,Ψ} παριστάνει ἕν μόνον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ. Δυνάμεθα ἑπομένως νά εἴπωμεν ὅτι ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία ἕνα πρός ἕνα μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

Γ = {(4,0),(4,2),(4,4),(4,6),(5,0),(5,2),(5,4),(5,6),(7,0),(7,2),(7,4),(7,6)}

καί τῶν 12 σημείων Κ,Λ,Μ,Ν,Π,Ρ,Σ,Τ,Υ,Φ,Χ,Ψ τοῦ τετραγωνισμένου χάρτου, δηλαδή τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

Δ = {Κ,Λ,Μ,Ν,Π,Ρ,Σ,Τ,Υ,Φ,Χ,Ψ}.



Ἐπειδή κατά τινα τρόπον τό σύνολον Δ ἀποτελεῖ τήν εἰκόνα τοῦ συνόλου Γ, λέγομεν συνήθως ὅτι ἡ ἀντιστοιχία ἕνα πρός ἕνα μεταξύ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Γ καί Δ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ ἑνός συνόλου ἐπί τοῦ ἄλλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Παραστήσατε ἐπί τετραγωνισμένου χάρτου τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τά ὁποῖα ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν μέ τά δύο στοιχεῖα τῶν δύο ἴσων συνόλων

$$A = B = \{0,1,2,3\}$$

2) Σχηματίσατε τό σύνολον Γ τῶν διατετ. ζευγῶν μέ πρῶτον μέλος ἐκ τοῦ $A = \{4,5\}$ καί 2ον μέλος ἐκ τοῦ $B = \{8,9\}$. Ὁμοίως τό σύνολον Δ ἐκ τῶν $B = \{8,9\}$ καί $A=\{4,5\}$. Κατόπιν ἐξετάσατε ἐάν τά σύνολα Γ καί Δ εἶναι ἴσα ἤ ὄχι.

3) Ἕν σύνολον Γ διατ. ζευγῶν γίνεται ἐκ τῶν Α καί Β. Ἄν τό Γ ἔχῃ 28 στοιχεῖα καί τό Α 4 στοιχεῖα, νά εὕρετε τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Β.

4) Δίδονται δύο σύνολα. Ἐάν τό ἕν ἐξ αὐτῶν εἶναι τό κενον σύνολον νά εὑρεθῇ ποῖον θά εἶναι τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τό σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο δοθέντων.

5) Γράψατε τά δύο σύνολα ἐκ τῶν ὁποίων ἐσχηματίσθη τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν :

$$\Gamma = \{(\alpha,2),(\alpha,3),(\beta,2),(\beta,3),(\gamma,2),(\gamma,3)\}$$

6) Ἐκ τῶν $A = B = \{0,1,2,3,4\}$ σχηματίσατε τό σύνολον Γ τῶν διατετ. ζευγῶν καί παραστήσατε γραφικῶς τό ὑποσύνολον τοῦ Γ τό ἀποτελούμενον ἀπό τά ζεύγη εἰς τά ὁποῖα τά δύο μέλη εἶναι ἴσα. Ὁμοίως παραστήσατε γραφικῶς τό ὑποσύνολον τοῦ Γ τό ἀποτελούμενον ἀπό τά ζεύγη τῶν ὁποίων τά μέλη ἔχουν ἄθροισμα 4.

Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν στοιχείων καὶ σύνολον ἀντιστοιχίας ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου Γ, λέγομεν συνήθως ὅτι ἡ ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Γ καὶ Δ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ ἑνὸς συνόλου ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Παραστήσατε καὶ γεωμετρικῶς γράψατε τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τὰ ὁποῖα μποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ δύο στοιχεῖα τῶν ἴσων συνόλων

$A = B = \{0, 1, 2, 3\}$

2) Σχηματίσατε τὸ σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μὲ πρῶτον μέλος ἐκ τοῦ $A = \{4, 5\}$ καὶ δεύτερον μέλος ἐκ τοῦ $B = \{8, 9\}$. Ὁμοίως τὸ σύνολον Δ ἐκ τῶν $B = \{8, 9\}$ καὶ $A = \{4, 5\}$. Ποῖα εἶναι τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Γ καὶ Δ;

3) Ἓν σύνολον Γ διατεταγμένων ζευγῶν σχηματίζεται ἐκ τῶν συνόλων A καὶ B. Ἂν τὸ Γ ἔχῃ 20 στοιχεῖα καὶ τὸ A 4 στοιχεῖα, νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ B.

4) Δίδονται δύο σύνολα. Ἐὰν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τῶν δύο δοθέντων.

5) Γράψατε τὰ δύο σύνολα ἐκ τῶν ὁποίων προέρχεται τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν:

$\Gamma = \{(\alpha,\kappa), (\alpha,\lambda), (\beta,\kappa), (\beta,\lambda), (\gamma,\kappa), (\gamma,\lambda)\}$

6) Ἐκ τῶν $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ σχηματίσατε τὸ σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν καὶ παραστήσατε γραφικῶς τὸ ὑποσύνολον τοῦ Γ τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ ζεύγη εἰς τὰ ὁποῖα τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα. Ὁμοίως παραστήσατε γραφικῶς τὸ ὑποσύνολον τοῦ Γ τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἔχουν ἄθροισμα 4.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Κεφάλαιον Η΄

Πράξεις μέ ἀκεραίους ἀριθμούς

§ 1. Πρόσθεσις ἀκεραίων ἀριθμῶν

1.1 Ἄθροισμα δύο ἀκεραίων. Ἔστω ὅτι θέλομεν νά ὁρίσωμεν τό ἄθροισμα ἑνός ἀκεραίου μέ ἕνα ἀκέραιον, π.χ. τοῦ 3 μέ τόν 4. Παίρνομεν δύο σύνολα ξένα μεταξύ των

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad \text{καί} \quad B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

μέ πλῆθος στοιχείων 3 καί 4 ἀντιστοίχως καί μορφώνομεν τήν ἕνωσίν τους Ε:

$$E = A \cup B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}.$$

Ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Ε εἶναι τό 7. Ἄν ἀντί τῶν Α καί Β ἐπαίρναμεν δύο ἄλλα σύνολα, ἐπίσης ξένα μεταξύ τους καί μέ πληθικούς ἀριθμούς τούς ἰδίους 3 καί 4, π.χ. τά

$$A' = \{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\} \quad \text{καί} \quad B' = \{\beta_1', \beta_2', \beta_3', \beta_4'\},$$

ἡ ἕνωσίς των $E' = A' \cup B'$ θά εἶχε τό ἴδιον πλῆθος στοιχείων 7. Δι᾽ αὐτό ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ 3 μέ τόν 4 ὁρίζομεν τόν ἀκέραιον 7 καί γράφομεν κατά τά γνωστά

$$7 = 3 + 4 \quad \text{ἤ} \quad 3 + 4 = 7.$$

Οἱ ἀριθμοί 3 καί 4 λέγονται προσθετέοι ἤ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος καί ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπό τούς ὅρους αὐτούς τό ἄθροισμα τοῦτο, λέγεται πρόσθεσις.

Γενικῶς, ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, τότε ἄθροισμα $\alpha + \beta$ λέγεται ὁ ἀκέραιος γ πού δίδει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ δύο συνόλων Α καί Β ξένων μεταξύ τους καί μέ πληθικούς ἀριθμούς τούς ἀκεραίους α καί β ἀντιστοίχως. Συμβολικῶς γράφομεν διά τήν πρᾶξιν αὐτήν τῆς προσθέσεως:

$$\gamma = \alpha + \beta \quad \text{(γάμμα ἴσον ἄλφα σύν βῆτα).}$$

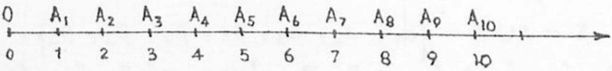
Εἰδικῶς, ὅταν $\alpha = 0$, τότε τό ἀντίστοιχον σύνολον A εἶναι τό κενόν $\emptyset$ καί $A \cup B = \emptyset \cup B = B$. Ἄρα

$$0 + \beta = \beta ,$$

ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός β.

<u>1.2 Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως.</u> Ὅπως γνωρίζομεν, οἱ διαδοχικοί ἀκέραιοι 0,1,2,3,... ἠμποροῦν νά παρασταθοῦν μέ διαδοχικά σημεῖα O, A_1, A_2, A_3, ... μιᾶς ἡμιευθείας: O εἶναι ἡ ἀρχή τῆς ἡμιευθείας, τό τμῆμα OA_1 εἶναι ἡ μονάς μήκους καί

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$$



Ἡ πρόσθεσις ἑνός ἀκεραίου μέ ἕνα ἀκέραιον, π.χ. τοῦ 2 μέ τό 5, ἔχει τότε γεωμετρικήν παράστασιν τήν πρόσθεσιν δύο τμημάτων ἐπί τῆς ἡμιευθείας, π.χ. τοῦ τμήματος OA_2, μήκους 2 μονάδων, μέ τό τμῆμα A_2A_7, μήκους 5 μονάδων. Τό ἄθροισμα παριστάνεται ἀπό τό τμῆμα OA_7, μήκους 7 μονάδων. Ἡ ἰδία πρόσθεσις ἠμπορεῖ νά ἑρμηνευθῆ καί ὡς μετατόπισις ἑνός σημείου M ἐπί τῆς ἡμιευθείας, ἀπό μίαν ἀρχικήν θέσιν, π.χ. τήν O, πρῶτον κατά 2 μονάδας εἰς τήν θέσιν A_2 καί ἔπειτα κατά 5 μονάδας εἰς τήν θέσιν A_7.

<u>1.3 Ἀντιμεταθετικότης.</u> Ἀπό τήν ἀντιμεταθετικότητα πού ἔχει ἡ πρᾶξις τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων A, B:

$$A \cup B = B \cup A ,$$

ἕπεται ἡ ἀκόλουθος ἰδιότης τῆς πράξεως τῆς προσθέσεως ἑνός ἀκεραίου α μέ ἕνα ἀκέραιον β:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Π.χ. $3 + 5 = 5 + 3 = 8, \quad 0 + 4 = 4 + 0 = 0.$

Ὥστε ἡ ἀλλαγή τῆς τάξεως (τῆς σειρᾶς) δύο προσθετέων δέν μεταβάλλει τό ἄθροισμά τους. Αὐτή ἡ ἰδιότης τῆς προσθέσεως λέγεται ἐπίσης ἀντιμεταθετικότης.

1.4 Ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ἀκεραίων. Ἄς λάβωμεν τρεῖς ἀκεραίους, π.χ. τούς 5,2,3 μέ αὐτήν τήν σειράν. Καλοῦμεν ἄθροισμά τους $5 + 2 + 3$ τόν ἀκέραιον πού εὑρίσκομεν, ὅταν προσθέσωμεν εἰς τόν πρῶτον προσθετέον τόν δεύτερον, $5 + 2 = 7$, καί εἰς τό ἄθροισμα αὐτό τόν τρίτον προσθετέον, $7 + 3 = 10$. Αὐτά τά γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$5 + 2 + 3 = (5+2) + 3 = 7 + 3 = 10,$$

δηλαδή μέ τήν παρένθεσιν (5+2) δηλώνομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις πού σημειώνεται ἐντός της πρέπει νά ἐκτελεσθῆ πρίν προχωρήσωμεν εἰς τήν ἑπομένην πρόσθεσιν. Ἄν παραστήσωμεν μέ Α, Β, Γ τρία σύνολα

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad B = \{\beta_1, \beta_2\}, \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\},$$

ξένα μεταξύ τους ἀνά δύο καί μέ πληθικούς ἀριθμούς τούς 5,2,3 ἀντιστοίχως, τότε τό ἄθροισμα $5 + 2 + 3$ εἶναι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου $(A \cup B) \cup \Gamma$. Ἐπειδή, σύμφωνα μέ τήν προσεταιριστικότητα τῆς πράξεως τῆς ἑνώσεως, εἶναι

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma),$$

θά ἔχωμεν διά τούς ἀντιστοίχους πληθικούς ἀριθμούς:

$$5 + 2 + 3 = (5+2) + 3 = 5 + (2+3) = 5 + 5 = 10.$$

Ὥστε ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων ἔχει ἐπίσης τήν ἰδιότητα τῆς προσεταιριστικότητος.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνομεν εὔκολα ὅτι τό ἄθροισμα τριῶν προσθετέων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τους.

Ἰδού καί μία ἐπαλήθευσις αὐτοῦ εἰς τό παραπάνω παράδειγμά μας :

$$3 + 2 + 5 = (3+2) + 5 = 5 + 5 = 10 = 5 + 2 + 3.$$

Γενικῶς, τό ἄθροισμα τριῶν ἤ περισσοτέρων προσθετέων ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Κατατάσσομεν τούς προσθετέους εἰς μίαν σειράν καί προσθέτομεν εἰς τόν 1ον προσθετέον τόν 2ον, εἰς τό λαμβανόμενον ἄθροισμα, τόν 3ον , εἰς τό νέον ἄθροισμα,τόν 4ον καί οὕτω καθεξῆς μέχρι καί τοῦ τελευταίου προσθετέου· τό τελικόν ἐξαγόμενον εἶναι ὁ ἴδιος πάντοτε ἀκέραιος, ὅπως καί ἄν κατατάξωμεν τούς προσθετέους . Π.χ.

$$5 + 2 + 3 + 6 = [(5+2)+3] + 6 = [7+3] + 6 = 10 + 6 = 16 ,$$
$$3 + 2 + 6 + 5 = [(3+2)+6] + 5 = [5+6] + 5 = 11 + 5 = 16 .$$

Ὅπως φαίνεται ἀπό τά δύο αὐτά παραδείγματα, μέ τήν γραφήν $[(\alpha+\beta)+\gamma] + \delta$ ὑποδεικνύομεν ποία εἶναι ἡ σειρά ἐκτελέσεως τῶν πράξεων πού σημειώνονται: πρῶτα θά ἐντελεσθῆ ἡ πρᾶξις $\alpha + \beta$ ἡ ἐντός τῆς παρενθέσεως, ἔπειτα ἡ πρᾶξις $(\alpha+\beta) + \gamma$ ἡ ἐντός τῆς ἀγκύλης $[\ldots]$ καί τελευταία ἡ πρᾶξις πού συνδέει τήν ἀγκύλην μέ τόν ἀριθμόν δ.

1.5 Ἰδιότης τοῦ 0 ὡς πρός τήν πρόσθεσιν. Ὅπως εἴδαμεν,

$$0 + \beta = \beta + 0 = \beta ,$$

ὁποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός β. Π.χ.

$$0 + 5 = 5 + 0 = 5 \quad , \quad 0 + 0 = 0.$$

Ἀντιθέτως, ἄν $\alpha \neq 0$, τότε

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \neq \beta \text{ καί μάλιστα } \alpha + \beta > \beta .$$

Π.χ. $\quad 2 + 4 = 6 > 4$ καί $2 + 0 = 2 > 0.$

Ὁ ἀριθμός μηδέν ἔχει λοιπόν μίαν ἰδιότητα πού τόν διακρίνει ἀπό τούς ἄλλους ἀκεραίους ἀριθμούς: ἀφήνει ἀμετάβλητον τόν ἀριθμόν εἰς τόν ὁποῖον προστίθεται. Διά τοῦτο λέγεται οὐδέτερον στοιχεῖον διά τήν πρόσθεσιν.

1.6 Μερικαί ἀκόμη ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Ἀπό τόν ὁρισμόν καί τάς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως πού ἀνεπτύξαμεν, ἕπονται αἱ ἑξῆς, ἄλλαι, πολύ χρήσιμοι διά τά ἑπόμενα.

1η ἰδιότης. Τό ἐξαγόμενον μιᾶς προσθέσεως δέν μεταβάλλεται ἄν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους προσθετέους μέ τό ἄθροισμά τους. Π.χ.

$$7 + 8 + 6 + 2 + 13 = (8+6+2) + (7+13) = 16 + 20 = 36.$$

2α ἰδιότης. Είς μίαν πρόσθεσιν ἐπιτρέπεται, ἄν αὐτό ἐξυπηρετῇ κάποιον σκοπόν, νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα προσθετέον μέ περισσοτέρους προσθετέους πού τόν ἔχουν ὡς ἄθροισμα. Π.χ.

$$8 + 7 + 5 = 8 + 2 + 5 + 5 = 10 + 10 = 20.$$

3η ἰδιότης. Ἄν $\alpha = \beta$, τότε καί $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ἀντιστρόφως, ἄν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ τότε καί $\alpha = \beta$. Ἡ ἰδιότης αὐτή λέγεται ἰδιότης τῆς διαγραφῆς (είς τήν πρόσθεσιν) καί διατυπώνεται συμβολικά μέ τήν ἰσοδυναμίαν:

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

Π.χ. ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha + 4 = \beta + 4$ ἕπεται ἡ $\alpha = \beta$ καί ἀντιστρόφως.

4η ἰδιότης. Ἀπό τάς δύο ἰσότητας $\alpha = \beta$ καί $\gamma = \delta$ ἕπεται ἡ $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Συμβολικῶς ἔχομεν:

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Ἐδῶ δέν ἐπιτρέπεται ἡ ἀντιστροφή˙ π.χ. ἀπό τήν ὀρθήν σχέσιν

$$5 + 3 = 4 + 4$$

δέν ἐπιτρέπεται νά συμπεράνωμεν ὅτι $5 = 4$ καί $3 = 4$.

5η ἰδιότης. Ἄν $\alpha < \beta$, τότε καί $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$˙ ἀντιστρόφως, ἄν $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, τότε καί $\alpha < \beta$.

Ἡ ἰδιότης αὐτή διατυπώνεται συμβολικά ὡς ἑξῆς: Διά κάθε ἀκέραιον γ

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Π.χ. ἀπό τήν ἀνισότητα $\alpha + 3 < \beta + 3$ ἔπεται ἡ $\alpha < \beta$ καί ἀντιστρόφως.

6η ἰδιότης. Ἀπό τάς ἀνισότητας $\alpha < \beta$ καί $\gamma \leqslant \delta$ μέ τήν ἰδίαν φοράν ἔπεται ἡ ἀνισότης $\alpha + \gamma < \beta + \delta$ τῆς ἰδίας φορᾶς. Συμβολικῶς ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta \\ \gamma \leqslant \delta\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta .$$

Καί ἐδῶ ἡ ἀντιστροφή δέν ἐπιτρέπεται.

Π.χ. $\left.\begin{array}{l}4 < 7 \\ 2 \leqslant 3\end{array}\right\} \Longrightarrow 6 < 10,$

ἀλλά ἀπό τήν σχέσιν $3 + 6 < 2 + 8$ δέν ἔπεται ὅτι ἔχομεν $3 < 2$.

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες 5η καί 6η ἐκφράζονται μέ λέξεις ὡς ἑξῆς: Ἐπιτρέπεται νά προσθέσωμεν κατά μέλη δύο ἰσότητας ἤ δύο ἀνισότητας τῆς ἰδίας φορᾶς ἡ προκύπτουσα σχέσις εἶναι μία ἰσότης εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν, μία ἀνισότης τῆς ἰδίας φορᾶς εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν.

Εἰς τάς ἰδιότητας 3η, 4η, 5η καί 6η ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν μίαν ἐποπτικήν ἑρμηνείαν χρησιμοποιοῦντες βάρη διά τήν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν καί ἕνα ζυγόν διά τήν ἀναπαράστασιν τῶν σχέσεων ἰσότητας ἤ ἀνισότητος.

1.7 Ἐξίσωσις $x + \alpha = \beta$. Ὅπως εἴδαμεν, ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ δύο ἀκέραιοι α καί β, θά ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Μία ἰσότης πού περιέχει γράμματα παριστάνοντα ἀριθμούς καί ἀληθεύει ὁποιασδήποτε ἀριθμητικάς τιμάς καί ἄν δώσωμεν εἰς τά γράμματα αὐτά λέγεται ταυτότης. Ἐννοεῖται ὅτι εἰς ἕνα γράμμα πού ἐμφανίζεται δύο ἤ περισσοτέρας φοράς εἰς τήν ἰσότητα πρέπει νά δίδωμεν ἑκάστοτε τήν ἰδίαν ἀριθμητικήν τιμήν.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τήν ἰσότητα

$$x + 3 = 7,$$

ἡ ὁποία περιέχει ἕνα γράμμα x παριστάνον τούς ἀκεραίους ἀριθμούς πού γνωρίζομεν. Εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν ὅτι ἡ ἰσότης αὐτή ἀληθεύει μόνον ὅταν δώσωμεν εἰς τό γράμμα x τήν ἀριθμητικήν τιμήν 4 διότι, ἄν

$x > 4$, τότε καί $x + 3 > 4 + 3 = 7$,

καί ἄν $x < 4$, τότε καί $x + 3 < 4 + 3 = 7$.

Μία ἰσότης, ὅπως ἡ παραπάνω, πού περιέχει ἕνα γράμμα x παριστάνον ἀριθμούς καί πού ἀληθεύει ὄχι δι'ὅλους τούς ἀριθμούς τους ὁποίους ἠμπορεῖ νά παραστήση τό γράμμα τοῦτο ἀλλά μόνον δι'ὡρισμένους ἐξ αὐτῶν, λέγεται <u>ἐξίσωσις διά τό x</u> καί , συντόμως <u>ἐξίσωσις</u>. Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ x διά τήν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἰσότης, λέγεται <u>λύσις (ἤ ρίζα) τῆς ἐξισώσεως</u>. Εἰς τάς ἐξισώσεις συμπεριλαμβάνομεν καί τάς ἰσότητας πού δέν ἀληθεύουν διά καμμίαν ἀριθμητικήν τιμήν τοῦ γράμματος πού περιέχουν. Αὐτό συμβαίνει π.χ. εἰς τήν ἰσότητα $x + 6 = x + 2$· πράγματι ἐπειδή

$$6 > 2 ,$$

θά εἶναι καί

$$x + 6 > x + 2 ,$$

ὁποιον ἀκέραιον ἀριθμόν καί ἄν βάλωμεν εἰς τήν θέσιν τοῦ γράμματος x. Μία τέτοια ἐξίσωσις δέν ἔχει λύσιν καί λέγεται <u>μή ἐπιλύσιμος</u> ἤ <u>ἀδύνατος ἐξίσωσις</u>.

<u>1.8 Πρακτική ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως</u>. Ὁ πρακτικός ὑπολογισμός τοῦ ἀθροίσματος δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων γίνεται κατά τά γνωστά μέ διαδοχικάς προσθέσεις μονοψηφίων ἀριθμῶν. Διά τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπό μνήμης γνῶσις τῶν ἀθροισμάτων δύο μονοψηφίων ἀκεραίων.

Τά ἀθροίσματα αὐτά παρέχονται εἰς τόν ἀκόλουθον πίνακα μέ ἕνα τρόπον πού εἶναι χρήσιμος καί εἰς ἄλλα ζητήματα:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ἡ κατασκευή τοῦ πίνακος εἶναι φανερά: κάθε ὁριζοντία γραμμή του σημειώνεται ἀριστερά μέ ἕνα ἀπό τά ψηφία 0,1,...,9 καί περιλαμβάνει τούς 10 διαδοχικούς ἀκεραίους ἀπό τό ψηφίον τοῦτο καί ἔπειτα. Ἡ εἰς ἴσας ἀποστάσεις γραφή τῶν ἀριθμῶν τῶν 10 αὐτῶν ὁριζοντίων γραμμῶν ἔχει ὡς συνέπειαν νά σχηματισθοῦν 10 κάθετοι στῆλαι πού σημειώνονται ἄνω μέ ἕνα ἀπό τά ψηφία 0,1,...,9 καί ἔχουν τήν ἰδίαν σύνθεσιν ὅπως καί αἱ ἀντίστοιχοι γραμμαί. Τό ἄθροισμα τώρα δύο μονοψηφίων ἀκεραίων, π.χ. τῶν 4 καί 7 , εὑρίσκεται εἰς τήν διασταύρωσιν εἴτε τῆς γραμμῆς μέ ἐπικεφαλίδα ἀριστερά τό 4 καί τῆς στήλης μέ ἐπικεφαλίδα ἄνω τό 7, εἴτε τῆς γραμμῆς μέ ἐπικεφαλίδα τό 7 καί τῆς στήλης μέ ἐπικεφαλίδα τό 4. Ἡ ἀντιμεταθετικότης τῆς προσθέσεως ἐκδηλώνεται γεωμετρικῶς μέ τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα τοῦ πίνακος· ἄν τόν διπλώσωμεν κατά μῆκος τῆς "διαγωνίου" του πού ἀρχίζει ἄνω ἀριστερά καί τελειώνει κάτω δεξιά, τότε κάθε ἀριθμός τοῦ πίνακος θά ἔλθη εἰς σύμπτωσιν μέ ἕνα ἄλλον ἴσον του.

Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν δύο πολυψηφίους ἀριθμούς, τούς 3607 καί 549. Παριστάνοντες μέ τά γράμματα M, Δ, E, X ἁπλᾶς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καί χιλιάδας ἀντιστοίχως, ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν τούς ἀριθμούς αὐτούς ὡς ἑξῆς:

$$3607 = 3X + 6E + 0\Delta + 7M.$$
$$549 = 0X + 5E + 4\Delta + 9M.$$

Ἐφαρμόζομεν τώρα τάς ἰδιότητας ἀντιμεταθετικότητος καί προσεταιριστικότητος τῆς προσθέσεως καί εὑρίσκομεν διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
3607 + 549 &= (3+0)X + (6+5)E + (0+4)\Delta + (7+9)M \\
&= 3X + 11E + 4\Delta + 16M \\
&= 3X + 10E + 1E + 4\Delta + 1\Delta + 6M \quad \left\{\begin{array}{l}\text{διότι } 11E = 10E + 1E \\ \text{καί } 16M = 1\Delta + 6M\end{array}\right. \\
&= 3X + 1X + 1E + 4\Delta + 1\Delta + 6M \text{ , διότι } 10E = 1X \\
&= 4X + 1E + 5\Delta + 6M \\
&= 4\,156.
\end{aligned}$$

Παραπλεύρως ὑπενθυμίζομεν τήν γνωστήν πρακτικήν διάταξιν πού προκύπτει ἀπό τά παραπάνω διά τήν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως αὐτῆς.

$$\begin{array}{r} 3607 \\ +\ 549 \\ \hline 4156 \end{array}$$

Η πρόσθεσις περισσοτέρων τῶν δύο ἀκεραίων ἠμπορεῖ νά ἐκτελεσθῆ μέ ὅμοιον τρόπον. Ὅταν ὅμως οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοί, ὅπως εἰς τό διπλανόν παράδειγμα, εἶναι σκόπιμον ἀφοῦ τούς χωρίσωμεν εἰς ὁμάδας, νά ἐκτελέσωμεν χωριστά τήν πρόσθεσιν εἰς κάθε ὁμάδα καί νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλικόν ἄθροισμα προσθέτοντες τά μερικά ἀθροίσματα.

	τά μερικά ἀθροίσματα
672	
4903	
5618	
107	11.300
783	
2674	
9008	
3245	15.710
416	
754	
932	2.102
ὁλικόν ἄθροισμα:	29.112

τα πού προέκυψαν.

1.9 Δοκιμή τῆς προσθέσεως. Διά νά ἐλέγξωμεν τό ἐξαγόμενον μιᾶς προσθέσεως ἐπαναλαμβάνομεν τήν ἐκτέλεσίν της μέ ἄλλην σειράν τῶν προσθετέων (π.χ. ἄν εἰς τάς παραπάνω προσθέσεις ἠκολουθήσαμεν τήν σειράν ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω, τάς ἐπαναλαμβάνομεν προχωροῦντες ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω). Ἐάν τά λαμβανόμενα δύο ἐξαγόμενα εἶναι ἄνισα, τότε ἡ μία τουλάχιστον ἀπό τάς δύο ἐκτελέσεις τῆς προσθέσεως δέν εἶναι ὀρθή· ἄν τά ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα, τότε καί αἱ δύο ἐκτελέσεις εἶναι πιθανώτατα ὀρθαί, διότι εἶναι ἀπίθανον νά ἔγιναν καί εἰς τάς δύο τά αὐτά σφάλματα ὥστε τά ἐξαγόμενα νά συμφωνοῦν.

1.10 Πρόσθεσις συγκεκριμένων ἀριθμῶν. Συγκεκριμένοι ἀκέραιοι ἀριθμοί ἠμποροῦν νά προστεθοῦν μόνον ὅταν ἀναφέρωνται εἰς πράγματα μέ τήν αὐτήν ὀνομασίαν· λέγονται τότε ὁμοειδεῖς (ἤ ὁμώνυμοι). Π.χ. 5 μέτρα καί 12 μέτρα ἠμποροῦν νά προστεθοῦν καί ἔχουν ἄθροισμα 5 + 12 = 17 μέτρα. Ἀντιθέτως 5 μέτρα καί 12 ἑκατοστόμετρα δέν ἠμποροῦν νά προστεθοῦν ἔτσι ὅπως δίδονται· ἡ πρόσθεσις γίνεται δυνατή ἀφοῦ τά 5 μέτρα τραποῦν εἰς 500 ἑκατοστόμετρα, ὁπότε τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 500 + 12 = 512 ἑκατοστόμετρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὕρετε νοερῶς τά ἑπόμενα ἀθροίσματα:

α) 3+5+11+2 , 9+25+1+15 , 75+60+25 ,

β) 53+9 , 148+9 , 23+11 , 75+11 , 654+99, 829+99 , 229+111 , 1253 + 999 ,

γ) 70+60+30 , 165+15+20 ,

δ) 515+120+65 , 7222+2968 .

2) Νά προσθέσετε τούς ἀριθμούς

3124 , 16835 , 4787 , 138

καθώς καί τούς

9365 , 3124 , 452 , 67128 , 78 , 15402.

3) Νά εὕρετε τά ψηφία πού ἔχουν παραλειφθῆ εἰς τάς δύο προσθέσεις:

```
 -732-      4-763
 11-58      37-18
 301-2       594-
  -746      273-6
------     ------
-23920     1-0263
```

4) Νά γράψετε ἁπλούστερα τά ἀθροίσματα:

$17x+39x$, $48y+37y$, $13\alpha+\alpha+16\alpha$,
$2x+3y+x+y$, $12\alpha+3\beta+5\alpha+2\beta$,
$13\alpha+2\beta+3\gamma+2\alpha+\beta+3\gamma$, $2\beta+3\gamma+6+2\gamma+5\beta+7$.

5) Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ ὅταν

$$\alpha = 528 \ , \ \beta = 750 \ , \ \gamma = 112.$$

6) Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα ἑπτά διαδοχικῶν ἀκεραίων, ὅταν ὁ τέταρτος ἀριθμός τῆς σειρᾶς εἶναι ἴσος μέ 27.

7) Νά σχηματίσετε μίαν σειράν ἀπό ὀκτώ ἀκεραίους ἡ ὁποία νά ἀρχίζη ἀπό τόν ἀριθμόν 4 καί εἰς τήν ὁποίαν κάθε ἄλλος ἀριθμός νά προκύπτη ἀπό τόν προηγούμενόν του μέ πρόσθεσιν τοῦ 4. Ποῖος εἶναι ὁ τελευταῖος ἀριθμός τῆς σειρᾶς καί ποῖον τό ἄθροισμα τῶν ὀκτώ ἀριθμῶν ;

8) Νά δείξετε, μέ καταλλήλους ἀντικαταστάσεις προσθετέων καί χωρίς νά ἐκτελέσετε τάς προσθέσεις ὅτι

$$74+38+45 = 57+100 \ ,$$
$$40+90+70 = 60+85+55.$$

Διατί ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$(18+\alpha) + (27+\beta) + (12+\gamma+\delta) = (57+\delta) + (\alpha+\beta+\gamma)$$

καί

$$(\alpha+11+\beta) + (\delta+16) + (19+\gamma+14) = (40+\alpha+\beta+\gamma) + (20+\delta) \ ;$$

9) Νά συμπληρώσετε μέ ἀριθμούς τά ἐρωτηματικά εἰς τάς παρακάτω δύο ἰσοδυναμίας:

$$\alpha + \ ; = \beta + 5 \iff \alpha = \beta$$

$$\gamma + 6 < \delta + \ ; \iff \gamma < \delta.$$

10) Νά προσδιορίσετε τήν τιμήν τοῦ β, ὅταν ἔχωμεν $\alpha+\beta = \alpha$ καί νά γράψετε μίαν ἀντίστοιχον ἰσοδυναμίαν.

11) Εἰς μίαν ἀπογραφήν εὑρέθη ὅτι οἱ πληθυσμοί 10 πόλεων καί χωρίων ἦσαν ἀντιστοίχως

46640 , 321 , 13750 , 49906 , 5144
18952 , 60845 , 13360 , 391 , 250794.

Νά ἐξακριβώσετε ἄν ὁ ὁλικός πληθυσμός αὐτῶν τῶν πόλεων καί χωρίων εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνός ἑκατομμυρίου.

12) Ὁ ἀριθμός τῶν μαθητῶν ἑνός Γυμνασίου δίδεται ἀναλυτικῶς ἀπό τόν πίνακα:

	Α΄Τάξις	Β΄Τάξις	Γ΄Τάξις	Δ΄Τάξις	Ε΄Τάξις	ΣΤ΄Τάξ.	Ἄθροισμ
Α΄Τμῆμα	62	60	55	52	50	46	
Β΄Τμῆμα	65	58	53	51	49	45	
Γ΄Τμῆμα	67	56	50	50	48	44	
Ἄθροισμα							ὁλικόν ἄθροισμα

Εὑρῆτε τόν ἀριθμόν τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου κατά τάξιν καί ὁλικῶς. Μέ ποῖον τρόπον ἠμποροῦμεν νά κάμωμεν μίαν δοκιμήν (ἕνα ἔλεγχον) τῶν εὑρεθέντων ἐξαγομένων ;

13) Ἡ ἔκτασις τῆς Θράκης εἶναι 8706 km^2.
Ἡ Ἤπειρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Θράκης κατά 645 km^2 ,
ἡ Θεσσαλία " " " " 4628 km^2 ,
ἡ Στερεά Ἑλλάς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Θεσσαλίας κατά 8081 km^2
ἡ Πελοπόννησος " " " Στ. Ἑλλάδος " 867 km^2
ἡ Μακεδονία " " " Πελοποννήσου" 2610 km^2
Ποία εἶναι ἡ ἔκτασις τῆς ἠπειρωτικῆς Ἑλλάδος ;

14) Ἕνας ἀγρός ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἡ 1η πλευρά του ΑΒ εἶναι 96 m καί ἡ καθεμία ἀπό τίς ἄλλες κατά τήν σειράν ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ ὑπερβαίνει τήν προηγουμένην της κατά 27 m. Εὑρῆτε τήν περίμετρον τοῦ ἀγροῦ.

15) Θέλομεν νά περιφράξωμεν μέ συρματόπλεγμα ἕνα γήπεδον σχήματος ὀρθογωνίου. Ἐάν ἡ μία διάστασις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 114 m καί ἡ ἄλλη κατά 32 m μεγαλυτέρα, πόσα τρέχοντα μέτρα συρματόπλεγμα θά χρειασθῶμεν ;

16) Ἕνας αὐτοκινητιστής ἠγόρασε ἕνα μεταχειρισμένον αὐτοκίνητον ἀντί 42750 δρχ. Ἐπλήρωσεν ἀκόμη 11.500 δρχ διά φόρον καί 5280 δρχ δι' ἐπισκευάς. Ἐάν θέλη νά μεταπωλήση τό αὐτοκίνητον μέ κέρδος 6400 δρχ πόσας δραχμάς πρέπει νά ζητήση ;

§ 2. Ἀφαίρεσις ἀκεραίων ἀριθμῶν

2.1 Ἔστω A ἕνα πεπρασμένον σύνολον, π.χ. τό

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

καί B ἕνα ὑποσύνολόν του, π.χ. τό

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$$

Τά στοιχεῖα τοῦ A πού δέν ἀνήκουν εἰς τό B ἀποτελοῦν, ὅπως γνωρίζομεν, ἕνα σύνολον Γ, ξένον πρός τό B:

$$\Gamma = \{\alpha_5, \alpha_6\}$$

τό ὁποῖον καλεῖται συμπλήρωμα τοῦ B ὡς πρός A καί τοῦ ὁποίου ἡ ἕνωσις μέ τό B ταυτίζεται μέ τό A:

$$A = B \cup \Gamma.$$

Τό σύνολον A διαφέρει ἀπό τό B μέ τό νά περιέχῃ ἐκτός τῶν στοιχείων τοῦ B καί τά στοιχεῖα τοῦ Γ, διά τοῦτο τό Γ λέγεται διαφορά τοῦ A ἀπό τό B, παριστάνεται δέ μέ τόν συμβολισμόν A − B πού διαβάζεται : ἄλφα πλήν βῆτα.

Ἔχομεν λοιπόν $\Gamma = A - B$ καί $A = B \cup \Gamma$.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τούς πληθικούς ἀριθμούς τῶν συνόλων A, B, Γ. Ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ A εἶναι ≧ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου του B· πράγματι $6 > 4$. Ἐπειδή $A = B \cup \Gamma$, ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Γ θά εἶναι ἕνας ἀκέραιος πού, ὅταν προστεθῇ εἰς τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ B, θά δίδῃ ἄθροισμα τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ A· πράγματι $4 + 2 = 6$. Ἀντίστοιχα λοιπόν πρός τήν γραφήν $A - B = \Gamma$ θά γράφωμεν διά τούς παραπάνω πληθικούς ἀριθμούς:

$$6 - 4 = 2 \text{ (ἕξη πλήν (ἤ μεῖον) τέσσερα ἴσον δύο).}$$

καί θά καλέσωμεν τό 2 διαφοράν τοῦ 6 ἀπό τό 4.

2.2 Γενικῶς: ἄς εἶναι α καί β δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί καί $\alpha \geqslant \beta$. Θεωροῦμεν ἕνα σύνολον A μέ πληθικόν ἀριθμόν τόν α καί ἕνα ὑποσύνολον B τοῦ A μέ πληθικόν ἀριθμόν τόν β (ἕνα τέτοιον ὑποσύνολον ὑπάρχει πάντοτε, ἐπειδή $\alpha \geqslant \beta$). Ὁ πληθικός ἀριθμός γ τοῦ συνόλου $A - B$ πού εἶναι τό συμπλήρωμα τοῦ Β ὡς πρός Α, λέγεται τότε διαφορά τοῦ α ἀπό τόν β καί σημειώνεται μέ τήν γραφήν

$$\gamma = \alpha - \beta$$ (γάμμα ἴσον ἄλφα πλήν (ἤ μεῖον) βῆτα).

Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν ἕπεται ὅτι

$$\beta + \gamma = \alpha$$ (ἄρα καί $\gamma + \beta = \alpha$).

Ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν μεταβαίνομεν ἀπό τούς ἀριθμούς α καί β, ὅπου $\alpha \geqslant \beta$, εἰς τόν ἀριθμόν $\gamma = \alpha - \beta$, λέγεται ἀφαίρεσις· οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀφαιρέσεως καθώς καί τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$. Ὁ α λέγεται μειωτέος καί ὁ β ἀφαιρετέος. Ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ καλεῖται καί ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β ἀπό τόν α. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι $\geqslant$ τοῦ ἀφαιρετέου.

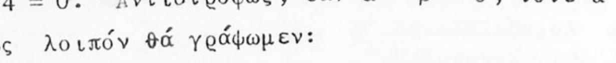
Εἰδικαί περιπτώσεις. 1) Ἐάν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha - \beta = 0$. Π.χ. $4 - 4 = 0$. Ἀντιστρόφως, ἐάν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta$. Συμβολικῶς λοιπόν θά γράφωμεν:

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta = 0.$$

2) Ἐάν $\beta = 0$, τότε $\alpha - \beta = \alpha - 0 = \alpha$, ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος α. Π.χ.

$$5 - 0 = 5, \qquad 0 - 0 = 0.$$

2.3 Γεωμετρική παράστασις τῆς ἀφαιρέσεως. Ὅπως ἡ πρόσθεσις, ἔτσι καί ἡ ἀφαίρεσις ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ γεωμετρικά μέ τήν ἀφαίρεσιν ἑνός τμήματος ἀπό ἕνα ἄλλο μεγαλύτερον ἤ ἴσον του. Π.χ. ἡ



ἀφαίρεσις $7 - 4 = 3$ παριστάνεται μέ τήν ἀφαίρεσιν ἑνός τμήματος μήκους 4 μονάδων, π.χ. τοῦ A_3A_7, ἀπό ἕνα τμῆμα μήκους 7 μονάδων, π.χ. τοῦ OA_7. Τό ὑπόλοιπον 3 παριστάνεται τότε ἀπό τό τμῆμα OA_3 μήκους 3 μονάδων. Ἡ ἰδία ἀφαίρεσις ἠμπορεῖ νά ἑρμηνευθῇ καί μέ τήν μετατόπισιν ἑνός σημείου M ἀπό μίαν ἀρχικήν θέσιν, ἔστω τήν O, πρῶτον πρός τά δεξιά κατά 7 μονάδας ἕως εἰς τήν θέσιν A_7 καί ἔπειτα πρός τά ἀριστερά κατά 4 μονάδας εἰς τήν θέσιν A_3. Ἡ προκύπτουσα τελική μετατόπισις τοῦ M εἶναι τότε ἀπό τήν θέσιν O εἰς τήν θέσιν A_3 καί ἔχει ὡς μέτρον τό ὑπόλοιπον 3 τῆς ἀφαιρέσεως 7 − 4.

2.4 Ἡ ἀφαίρεσις καί ἡ πρόσθεσις εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(6-4)+4=6 \quad , \quad \text{γενικῶς } (\alpha-\beta)+\beta=\alpha,$$

καί

$$(6+4)-4=6 \quad , \quad \text{γενικῶς } (\alpha+\beta)-\beta=\alpha.$$

Ἐπομένως αἱ δύο πράξεις: ἀφαίρεσις ἑνός ἀριθμοῦ καί πρόσθεσις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ὅταν ἐκτελεσθοῦν διαδοχικά, ἀναιροῦν ἡ μία τήν ἄλλην. Διά τοῦτο ἡ πρόσθεσις καί ἡ ἀφαίρεσις λέγονται πράξεις ἀντίστροφοι ἡ μία πρός τήν ἄλλην.

2.5 Ἰσοδυναμία τῶν δύο σχέσεων $\alpha-\beta=\gamma$ καί $\alpha=\beta+\gamma$ καθώς καί τῶν $\alpha-\beta=\gamma$ καί $\alpha-\gamma=\beta$. Ὅπως εἴδαμεν, ἀπό τήν σχέσιν $6-4=2$ ἔπεται ἡ $6=4+2$ καί ἀντιστρόφως. Γενικῶς:

Ἀπό τήν σχέσιν $\alpha-\beta=\gamma$ ἔπεται ἡ $\alpha=\beta+\gamma$ καί ἀντιστρόφως.

Συμβολικῶς θά γράφωμεν λοιπόν:

$$\alpha-\beta=\gamma \iff \alpha=\beta+\gamma.$$

Δύο τέτοιαι σχέσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ἐπειδή ἐπιτρέπεται ν'ἀντικαταστήσωμεν τήν μίαν μέ τήν ἄλλην, ὁσάκις αὐτό εἶναι σκόπιμον. Μέ ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι

$$6-4=2 \iff 6-2=4$$

καί γενικῶς

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha - \gamma = \beta.$$

2.6 'Επίλυσις ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $x + \beta = \alpha$.

Ἔστω $\alpha = 60^0$ μία ὀξεῖα γωνία· ζητεῖται το συμπλήρωμά της x.

Διά νά τό εὕρωμεν πρέπει νά ἀνακαλέσωμεν εἰς τήν μνήμην μας τί σημαίνει συμπλήρωμα μιᾶς ὀξείας γωνίας: εἶναι ἐκείνη ἡ ὀξεῖα γωνία πού μέ τήν α ἔχει ἄθροισμα μίαν ὀρθήν γωνίαν , δηλαδή μίαν γωνίαν 90^0. 'Επομένως ἡ γωνία x πού ζητοῦμεν , ὅταν ἐκφρασθῇ εἰς μοίρας , θά εἶναι ἕνας ἀριθμός πού ἐπαληθεύει τήν ἰσότητα

$$60 + x = 90 \quad \text{ἤ} \quad x + 60 = 90.$$

Αὐτή ἡ ἰσότης εἶναι μία ἐξίσωσις διά τό x πού ἠμποροῦμεν τώρα νά ἐπιλύσωμεν πολύ εὔκολα. 'Επειδή

$$60 + x = 90 \iff x = 90 - 60,$$

εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι $x = 30^0$.

Γενικῶς: ἄς γνωρίζωμεν τό ἄθροισμα α δύο ἀκεραίων καί τόν ἕνα β ἐξ αὐτῶν (ἄρα $\beta \leqslant \alpha$) ὁ ἄλλος προσθετέος x εἶναι τότε ἐκεῖνος ὁ ἀκέραιος διά τόν ὁποῖον θά ἔχωμεν

$$x + \beta = \alpha.$$

'Επειδή $x + \beta = \alpha \iff x = \alpha - \beta$, βλέπομεν ὅτι ὁ ζητούμενος προσθετέος ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τοῦ α ἀπό τόν β. Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι ἡ ἐξίσωσις διά τό x

$$x + \beta = \alpha$$

ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν $\alpha - \beta$, μέ τήν προϋπόθεσιν φυσικά ὅτι $\alpha \geqslant \beta$

2.7 'Επίλυσις τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\alpha - x = \gamma$ καί $x - \beta = \gamma$.

Από ἕνα χρηματικόν ποσόν 100 δραχμῶν ἐξωδεύσαμεν ἕνα μερος, μᾶς ἀπέμειναν δέ 30 δραχμαί ζητεῖται τί ἐξοδεύσαμεν.

"Αν παραστήσωμεν μέ x τό ζητούμενον ποσόν, θά ἔχωμεν δι'αὐτό τήν ἐξίσωσιν :

$$100 - x = 30$$

Καθώς γνωρίζομεν ὅμως, ἡ σχέσις $100 - x = 30$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν $100 - 30 = x$. Ἐπομένως τό ζητούμενον εἶναι $x = 70$ δραχμαί. Τό παραπάνω πρόβλημα ὑπάγεται είς τό ἀκόλουθον: Δίδονται ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός α καί τό ὑπόλοιπον γ τῆς ἀφαιρέσεως κάποιου ἀκεραίου ἀπό τόν α· ζητεῖται ὁ ἀφαιρεθείς ἀριθμός.

"Αν παραστήσωμεν τό ζητούμενον μέ x , θά ἔχωμεν δι'αὐτό τήν ἐξίσωσιν

$$\alpha - x = \gamma$$

Ἐπειδή $\alpha - x = \gamma \Longleftrightarrow \alpha - \gamma = x$, ἔχομεν ἀμέσως τήν ἀπάντησιν: τό x ἰσοῦται μέ τό ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ γ ἀπό τό α. Ἡ ἐξίσωσις λοιπόν

$$\alpha - x = \gamma$$

ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν $\alpha - \gamma$, μέ τήν προϋπόθεσιν ἐννοεῖται ὅτι $\alpha \geqslant \gamma$.

Μέ ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις διά τό x: $x - 5 = 15$, πού ὡς σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν $x = 5 + 15$, ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν $\alpha = 5 + 15 = 20$.

Γενικῶς: ἡ ἐξίσωσις $x - \beta = \gamma$ ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν $x = \beta + \gamma$.

<u>2.8 Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως</u>: Ι)"Εστω ἡ ἀφαίρεσις $x = 12 - 5$. Ἡ σχέσις αὐτή εἶναι διαδοχικῶς ἰσοδύναμος μέ τάς ἑξῆς:

$x+5 = 12$, $x+5+9 = 12+9$, $x+(5+9) = (12+9)$, $x = (12+9)-(5+9)$.

"Ωστε $\qquad x = 12 - 5 = (12+9) - (5+9)$.

Γενικῶς ἔχομεν:

$$\alpha - \beta = (\alpha+\delta) - (\beta+\delta).$$

Δηλαδή, τό ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως δέν μεταβάλλεται ἄν προσθέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν εἰς τόν μειωτέον καί τόν ἀφαιρετέον.

Ἡ τελευταία ἰσότης ἠμπορεῖ νά γραφῆ καί ἔτσι:

$$(\alpha+\delta) - (\beta+\delta) = \alpha - \beta.$$

Ἀπό αὐτήν, ἐπειδή $(\alpha+\delta) - \delta = \alpha$, $(\beta+\delta) - \delta = \beta$, συμπεραίνομεν τά ἑξῆς: τό ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν ἀπό τόν μειωτέον καί τόν ἀφαιρετέον, ἀρκεῖ φυσικά ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμός νά μήν ὑπερβαίνη τόν ἀφαιρετέον. Π.χ. $8-5 = (8-2) - (5-2) = 3$.

II) Ἀφαίρεσις ἀκεραίου ἀπό ἄθροισμα ἀκεραίων. Ἔστω ἡ διαφορά

$$(5+8+21) - 12,$$

ὅπου εἰς τό ἄθροισμα πού ἀποτελεῖ τόν μειωτέον, ὑπάρχει προσθετέος (ὁ 21) $\geqslant$ τοῦ ἀφαιρετέου (τοῦ 12). Ἠμποροῦμεν λοιπόν νά ἐκτελέσωμεν τήν ἀφαίρεσιν (21-12), καρατηροῦμεν δέ ὅτι

$$[5+8+(21-12)] + 12 = 5 + 8 + [(21-12)+12] = 5 + 8 + 21.$$

Ἄρα

$$(5+8+21) - 12 = 5 + 8 + (21-12).$$

Γενικῶς, ἄν $\gamma \geqslant \delta$, τότε

$$(\alpha+\beta+\gamma) - \delta = \alpha + \beta + (\gamma-\delta),$$

διότι $\alpha + \beta + (\gamma-\delta) + \delta = \alpha + \beta + [(\gamma-\delta)+\delta] = \alpha + \beta + \gamma$.

Ὥστε διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀπό ἄθροισμα ἀκεραίων ἀρκεῖ νά τόν ἀφαιρέσωμεν ἀπό ἕνα μόνον προσθετέον, ἄν τοῦτο εἶναι δυνατόν, καί ν' ἀφήσωμεν τούς ἄλλους προσθετέους ἀμεταβλήτους.

Εἰδική περίπτωσις: ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμός ἰσοῦται μέ ἕνα προσθετέον, τοῦ μειωτέου τότε, διά νά τόν ἀφαιρέσωμεν, ἀρκεῖ νά τόν ἐξαλείψωμεν ἀπό τό ἄθροισμα. Π.χ.

$$(\alpha+\beta+\gamma) - \gamma = \alpha + \beta + 0 = \alpha + \beta.$$

III) <u>Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος ἀπό ἀριθμόν</u>. Ἔστω ἡ διαφορά

$$12 - (3+5).$$

Παρατηροῦμεν ἀφ'ἑνός ὅτι 12 – 8 = 4 καί ἀφ'ἑτέρου ὅτι

$$(12-3) - 5 = 9 - 5 = 4,$$

ἄρα

$$12 - (3+5) = (12-3) - 5.$$

Γενικῶς ἔχωμεν

$$\alpha - (\beta+\gamma) = (\alpha-\beta) - \gamma,$$

καί αὐτό ἐπεκτείνεται εὔκολα εἰς τήν ἀφαίρεσιν ἀθροίσματος μέ περισσοτέρους ἀπό δύο προσθετέους.

Ὥστε, <u>διά νά ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπό ἀκέραιον, ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν διαδοχικά τόν ἕνα μετά τόν ἄλλον τούς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος</u>. Π.χ.

$$35 - (2+4+3) = (35-2) - (4+3)$$
$$= 33 - (4+3) = (33-4) - 3 = 29 - 3 = 26.$$

IV) <u>Πρόσθεσις μιᾶς διαφορᾶς</u>. Ἔστω τό ἄθροισμα

$$x = 6 + (12-4).$$

Παρατηροῦμεν ἀφ'ἑνός ὅτι $x = 6 + 8 = 14$ καί ἀφ'ἑτέρου ὅτι

$$(6+12) - 4 = 18 - 4 = 14$$

Ἄρα

$$6 + (12-4) = (6+12) - 4$$

Γενικῶς ἔχομεν: $\alpha + (\beta-\gamma) = (\alpha+\beta) - \gamma.$

Ὥστε, <u>διά νά προσθέσωμεν μίαν διαφοράν ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν τόν μειωτέον τῆς διαφορᾶς καί ἀπό τό ἐξαγόμενον ν'ἀφαιρέσωμεν τόν ἀφαιρετέον</u>.

<u>Παρατήρησις</u>. Ἄν ὁ ἀριθμός α εἰς τόν ὁποῖον πρόκειται νά προσθέσωμεν τήν διαφοράν $\beta - \gamma$ εἶναι $\geq$ τοῦ ἀφαιρετέου γ τῆς διαφορᾶς, τότε ἡ πρόσθεσις τῆς διαφορᾶς ἠμπορεῖ νά γίνῃ καί ἔτσι:

$$\alpha + (\beta-\gamma) = (\alpha-\gamma) + \beta.$$

Π.χ. $12 + (7-3) = (12-3) + 7 = 9 + 7 = 16.$

V) Ἀφαίρεσις μιᾶς διαφορᾶς. Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις

$$x = 15 - (16-14)$$

Παρατηροῦμεν ἀφ'ἑνός ὅτι

$$x = 15 - (16-14) = 15 - 2 = 13$$

καί ἀφ'ἑτέρου ὅτι

$$(15+14) - 16 = 29 - 16 = 13.$$

Ἄρα:
$$x = 15 -(16-14) = (15+14) - 16.$$

Γενικῶς ἔχομεν $x = \alpha - (\beta-\gamma) = (\alpha+\gamma) - \beta.$

Ὥστε, διά νά ἀφαιρέσωμεν μίαν διαφοράν ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν τόν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καί ἀπό τό ἐξαγόμενον νά ἀφαιρέσωμεν τόν μειωτέον της.

Παρατήρησις. Ἄν ὁ ἀριθμός α εἶναι $\geqslant$ β, τότε ἠμποροῦμεν νά ἐνεργήσωμεν καί ὡς ἑξῆς:

$$x = \alpha - (\beta-\gamma) = (\alpha-\beta) + \gamma.$$

VI) Ἀριθμητικόν πολυώνυμον. Ὅπως γνωρίζομεν ἡ γραφή $5 + 7 + 4 + 6$ σημαίνει τήν διαδοχικήν ἐκτέλεσιν τῶν ἀκολούθων προσθέσεων:

$$5+7+4+6 = [(5+7)+4]+6 = [12+4]+6 = 16 + 6 = 22.$$

Καθ'ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν, ἡ γραφή $20 - 13 - 5 + 4$ νά σημαίνῃ τήν διαδοχικήν ἐκτέλεσιν τῶν ἀκολούθων προσθέσεων ἤ ἀφαιρέσεων.

$$20 - 13 - 5 + 4 = [(20-13)-5] + 4 = [7-5] + 4 = 2 + 4 = 6.$$

Μία παράστασις ὅπως ἡ παραπάνω, πού ἀποτελεῖται ἀπό μίαν σειράν ἀριθμῶν συνδεομένων μέ τά σύμβολα + ἤ − τῆς προσθέσεως ἤ ἀφαιρέσεως λέγεται ἀριθμητικόν πολυώνυμον. Οἱ ἀριθμοί πού περιέχονται εἰς τήν παράστασιν λέγονται ὅροι τοῦ πολυωνύμου καί τό ἐξαγόμενον τῆς διαδοχικῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων πού σημειώνονται λέγεται τιμή τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου. Ἀπό τά προηγούμενα ἕπεται (καί εἶναι εὔκολον νά τό επαληθεύσωμεν) ὅτι ἡ τιμή ἑνός ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου δέν μεταβάλλεται ἄν ἀλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν ὅρων του (ἀρκεῖ φυσικά αἱ ἀφαιρέσεις πού σημειώνονται καί κατά τήν νέαν τάξιν νά εἶναι δυναταί).

Π.χ. $20 - 13 - 5 + 4 = 20 + 4 - 13 - 5 = 24 - 18 = 6$

καί

$36 - 10 + 20 - 8 - 3 = 36 + 20 - 10 - 8 - 3 = 56 - 21 = 35.$

VII) Εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον εἴδαμεν ὅτι ἐπιτρέπεται νά προσθέσωμεν εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος ἤ μιᾶς ἀνισότητος ἕνα καί τόν ἴδιον ἀριθμόν καί μάλιστα ὅτι

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$
$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα πρός αὐτά ἔχομεν τώρα:

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma\ , \quad \alpha \geqslant \gamma\ ,$$
$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \gamma < \beta - \gamma\ , \quad \alpha \geqslant \gamma\ ,$$

ἀρκεῖ βέβαια νά εἶναι $\gamma \leqslant \alpha$, διά νά εἶναι δυναταί αἱ ἀφαιρέσεις.

<u>Ὥστε ἐπιτρέπεται ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος ἤ ἀνισότητος νά ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν.</u>

Ἐπίσης εἴδαμεν ὅτι ἐπιτρέπεται νά προσθέσωμεν κατά μέλη δύο ἰσότητας:

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα ἔχομεν τώρα

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta,$$

ἀρκεῖ βέβαια νά εἶναι $\gamma \leqslant \alpha$, ὁπότε καί $\delta \leqslant \beta$.

Ἐνῶ ὅμως, ὅπως εἴδομεν, ἐπιτρέπεται νά προσθέσωμεν κατά μέλη δύο ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας δέν ἐπιτρέπεται νά τάς ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη, διότι αὐτό μπορεῖ νά ὁδηγήση εἰς ἐσφαλμένα ἐξαγόμενα. Π.χ. ἄν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη τάς ὀρθάς ἀνισότητας

$$10 < 17$$

$$3 < 12$$

θά λάβωμεν τό ἐσφαλμένον ἐξαγόμενον:

$$10 - 3 < 17 - 12 \quad \text{δηλαδή } 7 < 5.$$

2.9 Πρακτική ἐκτέλεσις τῆς ἀφαιρέσεως. Ἐφαρμόζοντες τάς διαφόρους ἰδιότητας πού διετυπώσαμεν, φθάνομεν εἰς τόν γνωστόν πρακτικόν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς ἀφαιρέσεως ἑνός πολυψηφίου ἀκεραίου. Π.χ. ἔστω ἡ ἀφαίρεσις 834 − 476. Ἀναλύομεν τούς δοθέντας ἀκεραίους εἰς τάς μονάδας διαφόρων τάξεων (ἑκατοντάδας Ε, δεκάδας Δ καί μονάδας Μ) ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται. Εὑρίσκομεν κατόπιν διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
834-476 &= (8E+3\Delta+4M) - (4E+7\Delta+6M)\\
&= (8E+3\Delta+10M+4M)-(4E+7\Delta+1\Delta+6M) \quad (\text{διότι } 10M = 1\Delta)\\
&= (8E+3\Delta+14M) - (4E+8\Delta+6M)\\
&= (8E+3\Delta+(14-6)M) - (4E+8\Delta)\\
&= (8E+3\Delta+8M) - (4E+8\Delta)\\
&= (8E+13\Delta+8M) - (5E+8\Delta) \quad (\text{διότι } 10\Delta = 1E)\\
&= (8E+(13-8)\Delta+8M) - 5E\\
&= (8E+5\Delta+8M) - 5E\\
&= (8-5)E + 5\Delta + 8M = 3E + 5\Delta + 8M\\
&= 358
\end{aligned}$$

Ἡ πρακτική διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 834\\ -476\\ \hline 358 \end{array}$$

2.10 Δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως. Διά νά δοκιμάσωμεν τό ἐξαγόμενον μιᾶς ἀφαιρέσεως προσθέτομεν τόν ἀφαιρετέον εἰς τό ὑπόλοιπον· ἄν αἱ δύο πράξεις ἐξετελέσθησαν ὀρθά, πρέπει νά εὕρωμεν τόν μειωτέον, ἐπειδή $\alpha - \beta = \gamma \Longleftrightarrow \beta + \gamma = \alpha$.

Ἕνας ἄλλος, ὄχι συνήθης τρόπος δοκιμῆς, θά ἦτο νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν μειωτέον τό εὑρεθέν ὑπόλοιπον. Ἄν αἱ δύο ἀφαιρέσεις ἐξετελέσθησαν ὀρθά, πρέπει νά ἐπανεύρωμεν τόν ἀφαιρετέον, διότι $\alpha - \beta = \gamma \Longleftrightarrow \alpha - \gamma = \beta$.

2.11 Ἀφαίρεσις μέ ὅρους συγκεκριμένους ἀριθμούς. Διά νά εἶναι δυνατή ἡ ἄμεσος ἐκτέλεσις τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ δοθέντες ἀριθμοί νά ἀναφέρωνται εἰς πράγματα μέ τήν ἰδίαν ὀνομασίαν, νά εἶναι ὁμοειδεῖς, ὅπως συνηθίζεται νά λέγωμεν. Π.χ. 10 μέτρα − 3 μέτρα = 7 μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐκτελέσετε νοερῶς τάς ἀφαιρέσεις:

220 − 50 , 2100 − 600 , 65 − 23 , 89 − 47 , 3250 − 125,
72 − 9 , 154 − 11 , 128 − 99 , 228 − 101 , 367 − 201,

2) Εὑρῆτε καί ἐλέγξατε (ἐπαληθεύσατε) τά ἐξαγόμενα τῶν ἀφαιρέσεων:
28928 − 17529 , 123572 − 98177 , 739620 − 691088.

3) Νά εὕρετε μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα τῶν ἀκολούθων παραστάσεων:

28 + (139−64) , 68 − (52−48) ,
(37−16) + (32−19) + (43−28) .

4) Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως $\alpha - \beta - \gamma$, ὅταν $\alpha = 123$, $\beta = 62$ καί $\gamma = 29$.

5) Νά ἁπλοποιήσετε τάς παραστάσεις

$100\alpha - 35\alpha$, $22\beta - \beta - 3\beta$,
$23x - x + 7x - 8x + 5 + 1 - 6$,
$16\alpha + \alpha + 2\alpha + 5\beta - \beta + 17 - 15$.

6) Εὑρῆτε τά ἐλλείποντα ψηφία εἰς τάς ἀκολούθους ἀφαιρέσεις:

;82	1;63	2341
− ;7	− 76;	− ;23
58;	;6;4	;8;;

7) Νά γράψετε μέ μορφήν μιᾶς μόνον διαφορᾶς τήν παράστασιν

$(\mu_1-\alpha_1) + (\mu_2-\alpha_2) + (\mu_3-\alpha_3) + (\mu_4-\alpha_4)$

καί νά διατυπώσετε τόν ἀντίστοιχον κανόνα.

8) Πῶς θά ἐπαληθεύσετε μέ μίαν ζυγαριάν τάς ἰσοδυναμίας:

I) $\alpha = \beta \Longleftrightarrow (\alpha - \gamma) = (\beta - \gamma)$, $\alpha \geqslant \gamma$,
II) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow (\alpha - \gamma) < (\beta - \gamma)$; $\alpha \geqslant \gamma$,
ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένοι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

- 9) Προσδιορίσατε τό x εἰς τάς ἰσοδυναμίας:

I) $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - x$, $\alpha \geqslant \gamma$;
II) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \gamma < \beta - x$, $\alpha \geqslant \gamma$,

10) Προσδιορίσατε τό x , ὅταν $\alpha - x = \alpha$, ὅπου α εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός. Ποίαν ἀντίστοιχον ἰσοδυναμίαν ἠμπορεῖται νά γράψετε ;

11) Τί προκύπτει, ὅταν εἰς τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων προσθέσωμεν τήν διαφοράν τους ; Τί προκύπτει, ὅταν ἀπό τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἀφαιρέσωμεν τήν διαφοράν τους ;

12) Κατά τί μεταβάλλεται ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων, ὅταν προσθέσωμεν εἰς τόν μειωτέον καί ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν ἀφαιρετέον τόν ἴδιον ἀκέραιον ;

13) Νά ἐπιλυθοῦν ὅσαι ἀπό τάς παρακάτω ἐξισώσεις εἶναι ἐπιλύσιμοι μέ τούς ἀκεραίους ἀριθμούς πού θεωροῦμεν πρός τό παρόν:

$x + 9 = 23$, $21 + x = 48$, $x - 7 = 12$,
$x - 45 = 17$, $65 = x - 5$, $23 = 15 - x$,
$x + 0 = 4$, $0 + x = 12$, $x - 0 = 6$,
$0 - x = 7$, $13 + x = 10$, $9 - x = 12$.

Σκεφθῆτε τρία προβλήματα πού νά ἐκφράζωνται μέ τάς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις.

14) Ἕνα ἔργον ἤρχισε τήν 18ην Μαρτίου καί ἐτελείωσεν τήν 7ην Ἀπριλίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Εἰς πόσας ἡμέρας ἐξετελέσθη ;

15) Ὁ Κώστας εἶναι σήμερον 14 ἐτῶν ἀκριβῶς. Εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθη ;

16) Ἕνας ἀγρότης διά νά συγκεντρώση τάς ἐλαίας τῶν κτημάτων του ἔκαμε τρία συνεργεῖα. Τό 1ον συνεργεῖον συνεκέντρωσε 476 κιλά ἐλαιων, τό 2ον 87 κιλά ὀλιγώτερον ἀπό τό πρῶτον καί τό 3ον 39 κιλά ὀλιγώτερον ἀπό τό 2ον . Πόσα κιλά ἐλαιῶν συνεκεντρώθησαν ἐν ὅλω;

17) Μία οἰκοκυρά ἐξώδευσε 250 δρχ διά νά πληρώση τούς λογαριασμούς τοῦ φωτισμοῦ καί τοῦ νεροῦ καθώς καί διά νά κάμη μερικά ψώνια. Διά τόν φωτισμόν ἐπλήρωσε 86 δρχ τά ψώνια πού ἔκαμε ἦσαν 2 κιλά ζάχαρη πρός 10 δρχ , 2 κιλά κρέας πρός 34 δρχ καί ἕνα κιλό ψάρια πρός 28 δρχ. Τί ἐπλήρωσε διά τό νερό ;

18) Οἱ μαθηταί τῶν τάξεων Δ΄, Ε΄ καί ΣΤ΄ ἑνός Γυμνασίου εἶναι συνολικῶς 218. Οἱ μαθηταί τῶν τάξεων Δ΄καί Ε΄ εἶναι 164 καί οἱ μαθηταί τῶν ρτάξεων Ε΄ καί ΣΤ΄, 132. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταί ἑκάστης τάξεως;

19) Νά μοιρασθῆ τό ποσόν τῶν 21500 δρχ εἰς δύο μέρη τέτοια ὥστε τό ἕνα νά εἶναι κατά 3500 δρχ μικρότερον τοῦ ἄλλου.

20) Εἰς ἕνα μικτόν Γυμνάσιον ἐνεγράφησαν 635 μαθηταί καί μαθήτριαι. Ἐάν ἐνεγράφοντο 50 μαθηταί ὀλιγώτεροι καί 15 μαθήτριαι περισσότεραι τῶν ὅσων ἐνεγράφησαν, ὁ ἀριθμός τῶν μαθητῶν θά ἦτο ἴσος μέ τόν ἀριθμόν τῶν μαθητριῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐγγραφέντες μαθηταί καί πόσαι αἱ μαθήτριαι ;

21) Ἡ περίμετρος ἑνός τριγώνου εἶναι 147 m. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του εἶναι κατά 37 m μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἐξ αὐτῶν πάλιν τῶν δύο ἡ μία ὑπερβαίνει τήν ἄλλην κατά 12 m. Εὑρῆτε τά μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν.

22) Τρία ἄτομα Α, Β, Γ ἐμοιράσθησαν 3200 δρχ. Ὁ Α ἔλαβε 50 δραχμάς ὀλιγωτέρας ἤ ὁ Β καί ὁ Β 100 δραχμάς ὀλιγωτέρας ἤ ὁ Γ. Πόσας δραχμάς ἔλαβε ἕκαστος ;

23) Εἰς ἕνα τριψήφιον ἀκέραιον τό ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ὑπερβαίνει τό ψηφίον τῶν μονάδων κατά 1. Ἐάν ἀντιστρέψωμεν τήν σειράν τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, ποία θά εἶναι ἡ διαφορά τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἀπό τόν δοθέντα ;

24) Δύο ἄνισοι ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 422. Ἐάν ἐλαττώσωμεν τόν μεγαλύτερον κατά 34 καί αὐξήσωμεν τόν μικρότερον κατά 24 οἱ ἀριθμοί γίνονται ἴσοι. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί ;

§ 3. Πολλαπλασιασμός ἀκεραίων.

3.1 Ἄν ἑνώσωμεν τρία σύνολα ἀποτελούμενα τό καθένα ἀπό 5 τετράδια, θά λάβωμεν ἕνα σύνολον πού ἀπαρτίζεται ἀπό

5τετράδια + 5τετράδια + 5τεράδια = 15τετράδια.

Ἄν τά τρία σύνολα πού ἑνώνομεν ἀποτελοῦνται ὄχι ἀπό 5 τετράδια ἀλλά ἀπό 5 διαβήτας, ἡ ἕνωσίς των θά ἔχη τόν ἴδιον πληθικόν ἀριθμόν 15 , διότι

5διαβῆται + 5 διαβῆται + 5διαβῆται = 15διαβῆται.

Γενικώτερα, ἄς πάρωμεν τρία ὁποιαδήποτε σύνολα, ξένα μεταξύ τους ἀνά δύο καί μέ τόν ἴδιον πληθικόν ἀριθμόν 5,

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$
$$B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$$
$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$$

καί ἄς σχηματίσωμεν τήν ἕνωσίν τους καταγράφοντες τά στοιχεῖα της εἰς ἕνα πίνακα μέ τρεῖς σειράς καί πέντε στήλας:

$$A \cup B \cup \Gamma = \left\{\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \end{matrix}\right\}$$

Ὁ πληθικός ἀριθμός τῆς ἑνώσεως αὐτῆς εἶναι πάλιν

$$5 + 5 + 5 = 15$$

Ἔτσι ὁδηγούμεθα εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν: Καλοῦμεν γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 3 μέ τόν ἀριθμόν 5 τό ἄθροισμα 5+5+5 = 15 τριῶν προσθετέων ἴσων μέ 5 καί τό συμβολίζομεν μέ τήν γραφήν

$$3 \times 5 \quad ἤ \quad 3 \cdot 5$$

τήν ὁποίαν διαβάζομεν: τρεῖς φορές πέντε ἤ τρία ἐπί πέντε.

Γενικῶς, ἔστω α ἕνας ἀκέραιος $\geqslant 2$ καί β ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος. Καλοῦμεν γινόμενον τοῦ α μέ τό β καί παριστάνομεν μέ $\alpha \cdot \beta$ ἤ $\alpha\beta$ ἤ $\alpha \times \beta$ τό ἄθροισμα τόσων προσθετέων ἴσων μέ τό β ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ α:

$$\underbrace{\beta + \beta + \ldots + \beta}_{\alpha \text{ φορές}} = \alpha\beta$$

Ὁ συμβολισμός αβ διαβάζεται: α φορές β ἤ α ἐπί β.

Ὑπεθέσαμεν ὅτι ὁ α εἶναι $\geqslant 2$. Πρέπει λοιπόν νά συμπληρώσωμεν τόν ὁρισμόν διά τάς περιπτώσεις $\alpha = 1$ καί $\alpha = 0$. Εἶναι φυσικόν νά ὁρίσωμεν ὅτι

$$1 \cdot \beta = μία\ φορά\ \beta = \beta$$

καί

$$0 \cdot \beta = \text{μηδέν φορές } \beta = 0,$$

όποιοσδήποτε καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός β. Τό γινόμενον $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ εἶναι τώρα ὡρισμένον ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ ἀκέραιοι α , β. Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται παράγοντες τοῦ γινομένου, ὁ πρῶτος λέγεται πολλαπλασιαστής, ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστέος. Τέλος ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν μεταβαίνομεν ἀπό τούς ἀριθμούς α , β εἰς τό γινομενόν τους αβ λέγεται πολλαπλασιασμός τοῦ α ἐπί β.

Παρατηρήσεις I) $2 \cdot 5 = 5 + 5 = 10$, γενικῶς $2 \cdot \beta = \beta + \beta$. Τό $2 \cdot \beta$ γράφεται καί χωρίς τήν τελείαν, ἔτσι : 2β καί λέγεται διπλάσιον τοῦ β. $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$, γενικῶς $3\beta = \beta + \beta + \beta = 3\beta$. Τό 3β λέγεται τριπλάσιον τοῦ β. Ὁμοίως: $4\beta = \beta + \beta + \beta + \beta = 4\beta$ = τετραπλάσιον τοῦ β , κ.ο.κ.

II) $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 2 = 0, \ldots$, γενικῶς $0 \cdot \beta = 0$.

$1 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 0 = 0, \ldots$, γενικῶς $\alpha \cdot 0 = 0$

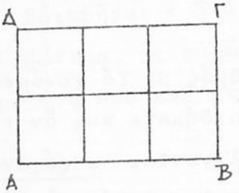
Ὥστε, ὅταν ὁ ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς δύο παράγοντας α,β εἶναι 0, τό γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ ἰσοῦται μέ μηδέν.

III) Ὅταν $\alpha \geqslant 1$, τότε $\alpha \cdot \beta \geqslant \beta$. Ὥστε, ἄν $\alpha \geqslant 1$ καί $\beta \geqslant 1$, τότε $\alpha\beta \geqslant 1$. Ἄρα τό γινόμενον δύο ἀκεραίων διαφόρων ἀπό τό μηδέν εἶναι ἐπίσης διάφορον ἀπό τό 0.

Ἀπό τάς παρατηρήσεις II) καί III) ἕπεται τό ἑξῆς: τό γινόμενον αβ δύο ἀκεραίων α,β μηδενίζεται, ὅταν καί μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς παράγοντας εἶναι μηδέν.

3.2 Γεωμετρική παράστασις τοῦ γινομένου δύο φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω τό γινόμενον $3 \cdot 2$. Θεωροῦμεν ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις ΑΒ = 3cm καί ΒΓ = 2cm. Μέ δύο παραλλήλους πρός τήν πλευράν ΒΓ καί μίαν παράλληλον πρός τήν πλευράν ΑΒ χωρίζομεν τό ὀρθογώνιον εἰς τετράγωνα μέ πλευράς 1cm.



Τά τετράγωνα αὐτά σχηματίζουν τρεῖς στήλας ἀπό δύο τετράγωνα ἡ καθεμιά, ἄρα τό πλῆθος των εἶναι $3 \cdot 2 = 6$. Τά ἴδια τετράγωνα ἀποτελοῦν ὅμως καί δύο σειράς ἀπό τρία τετράγωνα ἡ καθεμιά, ἄρα τό πλῆθος των 6 εἶναι ἴσον καί μέ $2 \cdot 3$. Ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μέ $2 \cdot 3 cm^2 = 3 \cdot 2\ cm^2$.

Γενικῶς, ἕνα ὀρθογώνιον μέ διαστάσεις α cm καί β cm, ὅπου α καί β εἶναι δύο φυσικοί ἀριθμοί, χωρίζεται είς τόσα τετράγωνα μέ πλευράς 1 cm ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες εἴτε τοῦ γινομένου $\alpha \cdot \beta$ εἴτε τοῦ $\beta \cdot \alpha$. Ὥστε τά δύο αὐτά γινόμενα εἶναι ἴσα καί τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μέ $\alpha\beta\ cm^2 = \beta\alpha\ cm^2$.

3.3 Ἀντιμεταθετικότης είς τόν πολλαπλασιασμόν. Ὅπως εἴδαμεν, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, ὅταν α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί. Αὐτή ἡ ἰσότης ἰσχύει καί ὅταν ὁ ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς παράγοντας α, β εἶναι μηδέν, διότι διά κάθε ἀκέραιον β ἔχομεν (βλ. § 3.1, II))

$$0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$$

Ὥστε τό γινόμενον δύο ἀκεραίων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν δύο παραγόντων.

3.4 Προσεταιριστικότης είς τόν πολλαπλασιασμόν. Ἄς πάρωμεν τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 2,3,5, μέ αὐτήν τήν σειράν. Πολλαπλασιάζομεν τούς δύο πρώτους, καί κατόπιν, τό γινόμενόν τους 6 τό πολλαπλασιάζομεν μέ τόν τρίτον 5. Θά εὕρωμεν

$$(2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30.$$

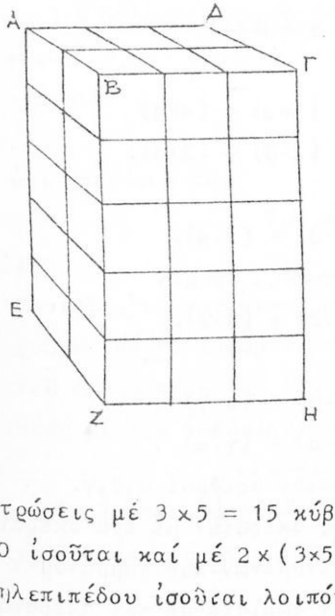
Πολλαπλασιάζομεν τώρα πρῶτα τούς δύο τελευταίους παράγοντας 3 καί 5 καί, ἔπειτα, τό γινόμενόν τους 15 μέ τόν πρῶτον παράγοντα 2. Εὑρίσκομεν

$$2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$$

Ὥστε

$$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$$

Αὐτῆς τῆς ἰσότητος ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν μίαν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν, ἄν θεωρήσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον



ΑΒΓΔΕΖΗΘ μέ διαστάσεις ΑΒ = 2 cm ΒΓ = 3 cm καί ΒΖ = 5 cm. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διάστασις ΒΖ εἶναι κατακόρυφος. Τό παραλληλεπίπεδον ἠμπορεῖ νά χωρισθῆ τότε εἰς κύβους μέ ἀκμάς 1 cm οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν πέντε ὁριζοντίους στρώσεις μέ $2 \cdot 3 = 6$ κύβους ἡ καθεμιά. Ἄρα τό πλῆθος τῶν κύβων ἰσοῦται μέ $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 = 30$. Οἱ ἴδιοι κύβοι ἠμποροῦν ὅμως νά τακτοποιηθοῦν εἰς δύο κατακορύφους στρώσεις μέ $3 \times 5 = 15$ κύβους ἡ καθεμιά. Ἄρα τό πλῆθος των 30 ἰσοῦται καί μέ $2 \times (3 \times 5)$. Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται λοιπόν μέ

$$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 30 \text{ cm}^3$$

Γενικῶς, ἄν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma).$$

Αὐτό ἰσχύει, ὅταν κανείς ἀπό τούς ἀκεραίους α,β,γ δέν εἶναι μηδέν, σύμφωνα μέ τήν προηγουμένην γεωμετρικήν ἑρμηνείαν· ἰσχύει ὅμως καί ὅταν ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς α,β,γ εἶναι μηδέν, διότι τότε καί τό ἀριστερόν καί τό δεξιόν μέλος τῆς σχέσεως εἶναι μηδέν.

Ὥστε εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀκεραίων ἰσχύει ἡ ἰδιότης

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma).$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή λέγεται προσεταιριστικότης.

3.5 Ἐπιμεριστικότης τοῦ πολλαπλασιαμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεσιν. Ἔστω τό γινόμενον $2\cdot(3+4)$ ἑνός ἀριθμοῦ μέ ἕνα ἄθροισμα.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν ἔχομεν:

$$2\cdot(3+4) = (3+4) + (3+4).$$

Ἀλλά

$$\begin{aligned}(3+4) + (3+4) &= (3+3) + (4+4)\\ &= (2\cdot3) + (2\cdot4).\end{aligned}$$

Ὥστε

$$2\cdot(3+4) = (2\cdot3) + (2\cdot4).$$

Ἐξ ἄλλου, λόγω τῆς ἀντιμεταθετικότητος, ἔχομεν

$$(3+4)\cdot2 = (3\cdot2) + (4\cdot2).$$

Γενικῶς ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = (\alpha\cdot\beta) + (\alpha\cdot\gamma)\ ,$$

$$(\beta+\gamma)\cdot\alpha = (\beta\cdot\alpha) + (\gamma\cdot\alpha)\ ,$$

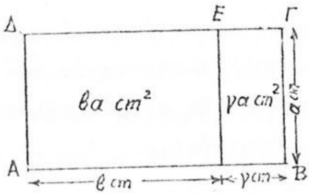
ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί α,β,γ.

Ὥστε τό γινόμενον ἑνός ἀθροίσματος ἀκεραίων μέ ἕνα ἀκέραιον ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν γινομένων πού λαμβάνομεν πολλαπλασιάζοντες κάθε προσθετέον χωριστά μέ τόν ἀκέραιον. Ἡ ἰδιότης αὐτή τοῦ πολλαπλασιαμοῦ λέγεται ἐπιμεριστικότης τοῦ πολλαπλασ σμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεσιν καί ἐπιδέχεται τήν ἀκόλουθον γεωμετρικήν ἑρμηνείαν.

Τό ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἄς ἔχη βάσιν ΑΒ = ΑΖ + ΖΒ, ὅπου τά τμήματα ΑΖ καί ΖΒ ἔχουν ἀντιστοίχως μῆκος β cm καί γ cm. Τό ὕψος ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίσ ἄς εἶναι α cm.

Τότε τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μέ $(\beta+\gamma)\cdot\alpha$ cm^2.

Ἀφ' ἑτέρου, ἄν φέρωμεν τήν ΖΕ ∥ ΒΓ, τό ὀρθογώνιον θά χωρισθῆ εἰς τά δύο ὀρθογώνια ΑΖΕΔ καί ΖΒΓΕ πού ἔχουν ἐμβαδά $\beta\cdot\alpha$ cm^2



καί $\gamma\cdot\alpha$ cm². "Αρα

$$(\beta+\gamma)\cdot\alpha \text{ cm}^2 =$$

$$= (\beta\cdot\alpha) \text{ cm}^2 + (\gamma\cdot\alpha) \text{ cm}^2$$

καί ἐπομένως

$$(\beta+\gamma)\cdot\alpha = (\beta\cdot\alpha) + (\gamma\cdot\alpha).$$

<u>3.6 Πολλαπλασιασμός διαφορᾶς μέ ἕνα ἀριθμόν.</u> "Εστω ἡ διαφορά $7 - 4 = 3$ καί γ ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος. "Εχομεν τήν ἰσότητα

$$7 = 4 + 3$$

καί ἐπομένως τήν

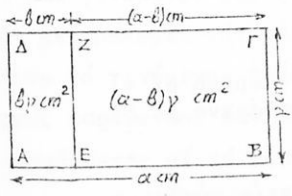
$$7\cdot\gamma = (4+3)\cdot\gamma = 4\gamma + 3\cdot\gamma .$$

"Αρα $$7\gamma - 4\gamma = 3\gamma = (7-4)\gamma .$$

Γενικῶς, τό γινόμενον μιᾶς διαφορᾶς μέ ἕνα ἀκέραιον ἠμποροῦμεν νά τό εὕρωμεν καί ὡς ἑξῆς: ἀφαιροῦμεν τό γινόμενον τοῦ ἀφαιρετέου μέ τόν ἀκέραιον ἀπό τό γινόμενον τοῦ μειωτέου μέ τόν ἀκέραιον:

$$(\alpha-\beta)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\gamma) - (\beta\cdot\gamma).$$

'Η ἰσότης αὐτή μᾶς λέγει ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πρᾶξις ἐπιμεριστική καί ὡς πρός τήν ἀφαίρεσιν.



'Ιδοῦ τώρα μία γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἐπιμεριστικότητος: Τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΕΒΓΖ εἶναι ἴσον μέ τήν διαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων ΑΒΓΔ καί ΑΕΖΔ.

<u>Παρατήρησις.</u> Συμβολισμούς πράξεων ὅπως αἱ ἀκόλουθοι:

$$(3\cdot2) + (4\cdot2) \quad , \quad (\beta\cdot\alpha) + (\gamma\cdot\alpha) \quad , \quad (\alpha\cdot\gamma) - (\beta\cdot\gamma)$$

συμφωνοῦμεν νά τούς γράφωμεν ἁπλούστερα, <u>χωρίς παρενθέσεις</u>, ὡς ἑξῆς:

$$3\cdot 2 + 4\cdot 2\ , \quad \beta\alpha + \gamma\alpha\ , \quad \alpha\gamma - \beta\gamma .$$

Μέ ἄλλα λόγια, ὅταν σημειώνωμεν χωρίς παρενθέσεις ὄχι μόνον προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις ἀλλά καί πολλαπλασιασμούς ἐπί ἀριθμῶν, ἐννοοῦμεν ὅτι <u>πρῶτα</u> θά ἐκτελεσθοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί καί <u>κατόπιν</u> αἱ προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.

Π.χ. $5\cdot 3 + 2\cdot 7 - 4\cdot 5 = 15 + 14 - 20 = 9,$

$$6\cdot 2 - 3\cdot 3 + 7 - 4 + 4\cdot 5 = 12 - 9 + 7 - 4 + 20 = 26.$$

<u>Γινόμενον ἀθροίσματος μέ ἄθροισμα.</u> Ἔστω τό γινόμενον

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐφαρμόζοντες τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεσιν ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν

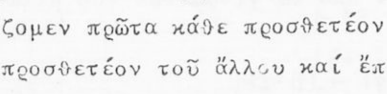
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) &= (\alpha+\beta)\cdot\gamma + (\alpha+\beta)\cdot\delta \\ &= \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta .\end{aligned}$$

Ὥστε τό γινόμενον ἑνός ἀθροίσματος μέ ἕνα ἄθροισμα ἠμποροῦμεν νά τό εὕρωμεν καί μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον: πολλαπλασιάζομεν πρῶτα κάθε προσθετέον τοῦ ἑνός ἀθροίσματος μέ κάθε προσθετέον τοῦ ἄλλου καί ἔπειτα προσθέτομεν τά μερικά γινόμενα.

Διά νά μή παραλείπωμεν κανένα μερικόν γινόμενον εἶναι σκόπιμον νά δίδωμεν εἰς τάς πράξεις τήν ἑξῆς διάταξιν:

$$\begin{array}{rl} \alpha + \beta & \\ \times\ \ \gamma + \delta & \\ \hline \alpha\gamma + \beta\gamma & \quad (\text{ἐπί μέρους γινόμενα μέ } \gamma) \\ +\ \alpha\delta + \beta\delta & \quad (\text{ἐπί μέρους γινόμενα μέ } \delta) \\ \hline (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta & \end{array}$$

Ἰδοῦ τώρα μία γεωμετρική ἑρμηνεία αὐτῶν:



εἰς τό σχῆμα:
$AH = \alpha = 30$mm, $HB = \beta = 20$mm
$BZ = \gamma = 15$mm, $Z\Gamma = \delta = 5$mm
mm = χιλιοστόμετρον

Τό ἐμβαδόν $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$ mm² τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων εἰς τά ὁποῖα εἶναι χωρισμένον. Συγκεκριμένως εἰς τό σχῆμα ἔχομεν:

$$50\cdot 20 \text{ mm}^2 = 30\cdot 15 \text{ mm}^2 + 20\cdot 15 \text{ mm}^2 + 30\cdot 5 \text{ mm}^2 + 20\cdot 5 \text{ mm}^2$$

3.8 Γινόμενον μέ περισσοτέρους ἀπό δύο παράγοντας. Ἄς πάρωμεν τέσσαρας παράγοντας 2,6,5,3 μέ αὐτήν τήν σειράν. Γινόμενον $2\cdot 6\cdot 5\cdot 3$ καλεῖται ὁ ἀριθμός πού εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν τόν 1ον παράγοντα μέ τόν 2ον, τό γινόμενόν τους 12 μέ τόν 3ον παράγοντα 5 καί τό προκύπτον γινόμενον 60 μέ τόν τελευταῖον παράγοντα 3. Ἡ διαδοχή αὐτῶν τῶν πράξεων σημειώνεται μέ τήν βοήθειαν παρενθέσεων καί ἀγκυλῶν ἔτσι:

$$2\cdot 6\cdot 5\cdot 3 = [(2\cdot 6)\cdot 5]\ 3 = [12\cdot 5]\cdot 3 = 60\cdot 3 = 180.$$

Ἀπό ὅσα εἴπαμεν διά τήν ἀντιμεταθετικότητα καί τήν προσεταιριστικότητα εἰς τόν πολλαπλασιασμόν ἕπεται ὅτι τό τελικόν ἐξαγόμενον δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν παραγόντων· καί πράγματι:

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 6 = [(2\cdot 3)\cdot 5]\cdot 6 = [6\cdot 5\ ]\cdot 6 = 30\cdot 6 = 180,$$

$$5\cdot 3\cdot 2\cdot 6 = [(5\cdot 3)\cdot 2]\cdot 6 = [15\cdot 2]\cdot 6 = 30\cdot 6 = 180, \text{ κ.ο.κ.}$$

Ὥστε, ἕνα γινόμενον δύο ἤ περισσοτέρων παραγόντων δέν ἀλλάζει, ἄν μεταβάλωμεν τήν τάξιν τῶν παραγόντων.

Ἐξ ἄλλου τό γινόμενον ἑνός πολλαπλασιασμοῦ μέ τρεῖς ἤ περισσότερους παράγοντας δέν ἀλλάζει, ἄν ἀντικαταστήσωμεν μερικούς παράγοντας μέ τό γινόμενόν τους.

Π.χ. $\quad 5\cdot 3\cdot 1\cdot 7\cdot 4 = 5\cdot(3\cdot 1\cdot 7)\cdot 4 = 5\cdot 21\cdot 4$

Ἐφαρμόζοντες αὐτήν τήν ἰδιότητα ἠμποροῦμεν κάποτε νά ὑπολογίσωμεν εὐκολώτερον ἕνα γινόμενον. Π.χ.

$$6\cdot 25\cdot 5\cdot 4 = (6\cdot 5)\cdot(25\cdot 4) = 30\cdot 100 = 3000.$$

Ἀντιστρόφως ἠμποροῦμεν εἰς ἕνα πολλαπλασιασμόν νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα μέ δύο ἤ περισσοτέρους παράγοντας τῶν ὁποίων τό γινόμενον ἰσοῦται μέ τόν ὑπ'ὄψιν παράγοντα.

Π.χ. $4 \cdot 30 \cdot 2 = 4 \cdot (3 \cdot 10) \cdot 2 = 4 \cdot 3 \; 10 \cdot 2.$

3.9 Πολλαπλασιασμός γινομένου μέ ἀριθμόν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν τό γινόμενον $(2 \cdot 4 \cdot 5)$ μέ 3. Ἡ πρᾶξις αὐτή σημειώνεται ἔτσι: $(2 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 3$ καί ἔχει ἐξαγόμενον $40 \cdot 3 = 120$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν παραπάνω, ἔχομεν

$$(2 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot (4 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 3)$$

Ὥστε, διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μή ὑπολογισμένον γινόμενον μέ ἕνα ἀριθμόν ἠμποροῦμεν νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα παράγοντά του μέ τόν ἀριθμόν καί νά ἀφήσωμεν τούς ἄλλους παράγοντας ἀμεταβλήτους.

3.10 Πολλαπλασιασμός γινομένων. Ἔστω τό γινόμενον

$$(3 \times 5) \times (4 \times 2) = 15 \times 8 = 120$$

Σύμφωνα μέ ὅσα ἐμάθαμεν, τό γινόμενον αὐτό εἶναι ἴσον μέτό $3 \times 5 \times 4 \times 2$. Γενικῶς εἶναι: $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$.

Ὥστε, τό γινόμενον δύο ἤ περισσοτέρων γινομένων εἶναι ἴσον καί μέ τό γινόμενον πού ἔχει παράγοντας ὅλους μαζί τούς παράγοντας τῶν πολλαπλασιαζομένων γινομένων.

3.11 Πολλαπλασιασμός τῶν δύο μελῶν ἀνισότητος μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν. Ἐάν μεταξύ δύο ἀκεραίων α , β ἰσχύη ἡ ἀνισότης $\alpha < \beta$, τότε προσθέτοντες κατά μέλη τάς δύο ἀνισότητας

$$\alpha < \beta$$
$$\alpha < \beta,$$

λαμβάνομεν:

$$\alpha + \alpha < \beta + \beta \quad \text{δηλαδή} \quad 2\alpha < 2\beta.$$

Προσθέτοντες πάλιν κατά μέλη τάς ἀνισότητας

$$2\alpha < 2\beta$$

$$\alpha < \beta$$

εὑρίσκομεν:

$$2\alpha + \alpha < 2\beta + \beta \quad \text{δηλαδή} \quad 3\alpha < 3\beta.$$

Γενικῶς, ἐάν ν εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, τότε

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \nu\alpha < \nu\beta$$

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφον: ἐάν ν εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, τότε

$$\nu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta \Longrightarrow \alpha < \beta.$$

3.12 Πολλαπλασιασμός τῶν δύο μελῶν ἰσότητος μέ τόν ἴδιον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἀπό μίαν ἰσότητα

$$\alpha = \beta$$

ἕπεται φυσικά ἡ ἰσότης

$$\mu\alpha = \mu\beta$$

ὁποιοσδήποτε καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής μ.

Ἀντιστρόφως ἀπό μίαν ἰσότητα

$$\mu\alpha = \mu\beta \quad ,$$

ὅπου μ εἶναι ἕνας ἀκέραιος, ἐπιτρέπεται νά συμπεράνωμεν ὅτι

$$\alpha = \beta,$$

ὅταν καί μόνον ὅταν ὁ μ εἶναι $\neq 0$.

Π.χ. ἀπό τήν ἰσότητα $3 \cdot 5 = 3 \cdot x$ ἕπεται ἡ $5 = x$, ἐνῶ ἀπό τήν ἰσότητα

$$0 \cdot 4 = 0 \cdot 7$$

δέν ἕπεται ἡ ἰσότης

$$4 = 7.$$

3.13 Πολλαπλασιασμός κατά μέλη δύο ἰσοτήτων ἤ δύο ἀνισοτήτων τῆς ἰδίας φορᾶς. Ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 7 = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow 5 \cdot 7 = 5 \cdot 7 \ , \quad \text{γενικῶς} \quad \left.\begin{array}{r} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta.$$

Πράγματι

$$\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma \ ,$$

$$\gamma = \delta \Longrightarrow \beta\gamma = \beta\delta \ ,$$

ἄρα

$$\alpha\gamma = \beta\gamma = \beta\delta \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 3 < 4 \\ 6 < 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3\cdot 6 < 4\cdot 7 \ ,$$

καί γενικῶς

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\gamma < \beta\delta \ .$$

3.14 Ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων. Αὐτή προϋποθέτει τήν γνῶσιν ἀπό μνήμης τῶν γινομένων ἀνά δύο τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων 0,1,2,...,9. Τά γινόμενα αὐτά ἠμποροῦμεν, ὅπως καί εἰς τήν πρόσθεσιν, νά τά καταγράφωμεν εἰς ἕνα τετραγωνικόν πίνακα ἀποτελούμενον ἀπό 10 γραμμάς μέ ἐπικεφαλίδας ἀριστερά τούς ἀριθμούς 0,1,2,...,9 καί ἀπό 10 στήλας μέ ἐπικεφαλίδας ἄνω τούς ἰδίους αὐτούς ἀριθμούς. Ὁ πίναξ αὐτός εἶναι ὁ γνωστός Πυθαγόρειος πίναξ καί κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ 1η γραμμή ἀποτελεῖται ἀπό μηδενικά καί περιέχει κατά σειράν τά γινόμενα τοῦ 0 μέ τά ψηφία 0,1,2,3,...,9.

Ἡ 2α γραμμή ἀποτελεῖται ἀπό τά ψηφία 0,1,2,...,9 καί περιέχει κατά σειράν τά γινόμενα τοῦ 1 μέ τά ψηφία 0,1,2,3,...,9.

Ἡ 3η γραμμή ἀποτελεῖται ἀπό τά διπλάσια τῶν ἀριθμῶν 0,1,...,9 τῆς 2ας γραμμῆς δηλαδή ἀπό τά γινόμενα τοῦ 2 μέ τά ψηφία 0,1,...,9.

Ἡ 4η γραμμή προκύπτει μέ πρόσθεσιν τῶν ὑπερκειμένων ἀριθμῶν τῆς 2ας καί τῆς 3ης γραμμῆς, περιέχει ἑπομένως τά γινόμενα τοῦ 3 μέ τά ψηφία 0,1,...,9 , κ.ο.κ.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Τό γινόμενον δύο ψηφίων,π.χ. τοῦ 4 μέ τό 6, εὑρίσκεται εἴτε εἰς τήν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς πού ἔχει ἐπικεφαλίδα ἀριστερά τό 4 μέ τήν στήλην πού ἔχει ἐπικεφαλίδα ἄνω τό 6 εἴτε εἰς τήν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς πού ἔχει ἐπικεφαλίδα ἀριστερά τό 6 μέ στήλην πού ἔχει ἐπικεφαλίδα ἄνω τό 4. Λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικότητος εἰς τόν πολλαπλασιασμόν ἄν στρέψωμεν τόν πίνακα κατά ἡμίσειαν στροφήν (180 μοίρας) περί τήν διαγώνιόν του πού ἀρχίζει ἀριστερά ἄνω καί τελειώνει δεξιά κάτω, θά λάβωμεν ἀκριβῶς τόν ἴδιον πίνακα ἀριθμῶν. Ἐπάνω εἰς τήν διαγώνιον αὐτήν εὑρίσκονται τά γινόμενα κάθε ψηφίου μέ τόν ἑαυτόν του, δηλαδή τά τετράγωνα τῶν ψηφίων. Διακρίνομεν τώρα τάς ἀκολούθους περιπτώσεις.

1η) Ἐκ τῶν δύο παραγόντων τοῦ γινομένου α·β ὁ ἕνας εἶναι ἴσος μέ 10 ἤ 100 ἤ 1000 κλπ.

Π.χ. ἔστω α = 253 , β = 100. Τότε 253 · 100 = 25300

Ὥστε διά νά εὕρωμεν τό γινόμενον α·β, ὅπου β = 10 ἤ 100 ἤ 1000 κλπ., γράφομεν δεξιά τοῦ ἀκεραίου α τόσα μηδενικά ὅσα ὑπάρχουν στόν παράγοντα β.

2α) Ὁ ἕνας παράγων τοῦ γινομένου α·β εἶναι πολυψήφιος ὁ ἄλλος μονοψήφιος. Π.χ. ἔστω α = 562 , β = 6. Ἔχομεν, μέ γνωστόν συμβολισμόν, 562 = 5Ε + 6Δ + 2Μ. Ἄρα

$$
\begin{aligned}
562 \times 6 &= (5E+6\Delta+2M) \times 6 \\
&= (5\times6)E + (6\times6)\Delta + (2\times6)M \\
&= 30E + 36\Delta + 12M \\
&= 30E + 37\Delta + 2M \\
&= 33E + 7\Delta + 2M \\
&= 3X + 3E + 7\Delta + 2M \\
&= 3372
\end{aligned}
$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως, ὅπως φαίνεται παραπλεύρως:

$$
\begin{array}{r}
562 \\
\times \quad 6 \\
\hline
3372
\end{array}
$$

3η) Ἕνας παράγων τοῦ γινομένου α·β εἶναι πολυψήφιος, τοῦ ὁποίου τά ψηφία εἶναι ὅλα μηδενικά μέ ἐξαίρεσιν τοῦ πρώτου ἀπό ἀριστερά. Π.χ. ἔστω α = 257 , β = 400.
Ἡ περίπτωσις αὐτή ἀνάγεται εἰς τάς δύο προηγουμένας , διότι

$$257 \times 400 = 257 \times 4 \times 100 = (257\times4) \times 100$$

Πολλαπλασιάζομεν λοιπόν πρῶτα τό 257 μέ τό 4. Κατόπιν ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν τό εὑρεθέν γινόμενον 1028 μέ 100.

$$
\begin{array}{r}
257 \\
\times \quad 4 \\
\hline
1028
\end{array}
$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως, ὅπως φαίνεται παραπλεύρως.

$$
\begin{array}{r}
257 \\
\times \quad 400 \\
\hline
102800
\end{array}
$$

4η) Οἱ δύο παράγοντες εἶναι ὁποιοιδήποτε πολυψήφιοι ἀκέραιοι. Π.χ. ἔστω τό γινόμενον 3576 · 453. Ἔχομεν

$$453 = 400 + 50 + 3$$

καί ἐπομένως

$$
\begin{aligned}
3576 \times 453 &= 3576 \times (400+50+3) \\
&= (3576\times400) + (3576\times50) + (3576\times3)
\end{aligned}
$$

Ὑπολογίζομεν τώρα τά τρία μερικά γινόμενα, πού ὑπάγονται εἰς τάς προηγουμένας περιπτώσεις, καί ἔπειτα τά προσθέτομεν:

$$\begin{array}{r} 3576 \times 3 = \quad 10728 \\ 3576 \times 50 = \quad 178800 \\ 3576 \times 400 = \quad 1430400 \\ \hline 3576 \times 453 = \quad 1619928 \end{array}$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως κατά τόν πρῶτον ἀπό τούς ἑξῆς δύο τρόπους:

$$\begin{array}{rl} 3576 & \\ \times \quad 453 & \\ \hline 10728 & (\text{μερικόν γινόμενον μέ } 3) \\ 17880 & (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \ 50) \\ 14304 & (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \ 400) \\ \hline 1619928 & (\text{ὁλικόν γινόμενον}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3576 & \\ \times \quad 453 & \\ \hline 14304 & (\text{μερικόν γιν. μέ } 400) \\ 17880 & (\quad \text{"} \quad \text{"} \ \text{μέ } 50) \\ 10728 & (\quad \text{"} \quad \text{"} \ \text{μέ } 3) \\ \hline 1619928 & (\text{ὁλικόν γινόμεν.}) \end{array}$$

Ὅταν ὁ παράγων πού γράφεται κάτω ἀπό τόν ἄλλον, ἔχῃ ἐνδιάμεσα μηδενικά ψηφία, τά ἀντίστοιχα μερικά γινόμενα (τά ὁποῖα μηδενίζονται) παραλείπονται. Π.χ. διά τό γινόμενον 2456×1007

$$\text{ἀντί} \quad \begin{array}{r} 2456 \\ \times \ 1007 \\ \hline 17192 \\ 0000 \\ 0000 \\ 2456 \\ \hline 2473192 \end{array} \qquad \text{γράφομεν συντομώτερα:} \qquad \begin{array}{r} 2456 \\ \times \ 1007 \\ \hline 17192 \\ 2456 \\ \hline 2473192 \end{array}$$

<u>3.15 Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ</u>. Διά νά ἐλέγξωμεν τό ἐξαγόμενον ἑνός πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων, ἐκτελοῦμεν ἀκόμη μίαν φοράν τόν πολλαπλασιασμόν, ἀφοῦ ἐναλλάξωμεν τούς δύο παράγοντας. Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τόν πολλαπλασιασμόν, πρέπει νά εὕρωμεν τό ἴδιον ἐξαγόμενον. Ἄν αὐτό συμβαίνῃ, τότε καί αἱ δύο ἐκτελέσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι πιθανώτατα ὀρθαί, διότι εἶναι ἀπίθανον νά ἔ-

γιναν καί είς τάς δύο τά ἴδια λάθη. Ἄν τά λαμβανόμενα δύο ἐξαγόμενα διαφέρουν, τότε ἡ μία τουλάχιστον ἀπό τάς δύο ἐκτελέσεις εἶναι ἐσφαλμένη.

3.16 Μερικαί ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ.

I) Ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός ἀκεραίου ἐπί 2, δηλαδή ὁ διπλασιασμός του, γίνεται μέ πρόσθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τόν ἑαυτόν του. Ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός ἀκεραίου ἐπί $4 = 2 \cdot 2$ γίνεται μέ δύο διαδοχικούς διπλασιασμούς. Π.χ.

$$625 \times 4 = (625 \times 2) \times 2 = 1250 \times 2 = 2500$$

II) Διά νά εὕρωμεν τό γινόμενον ἑνός ἀκεραίου ἐπί 9,99,999, κλπ., τόν πολλαπλασιάζομεν ἐπί 10, 100, 1000, κλπ. καί ἀπό τό γινόμενον ἀφαιροῦμεν τόν δοθέντα ἀκέραιον. Πῶς δικαιολογεῖται αὐτό ; Θεωρήσατε τό παράδειγμα

$$56 \times 99 = 56 \times 100 - 56 \times 1 = 5600 - 56 = 5544.$$

III) Διά νά εὕρωμεν τό γινόμενον ἑνός ἀκεραίου ἐπί 11 , 101 , 1001 10001, κλπ., τόν πολλαπλασιάζομεν ἐπί 10, 100, 1000, 10000, κλπ. καί εἰς τό γινόμενον προσθέτομεν τόν δοθέντα ἀκέραιον. Πῶς δικαιολογεῖται αὐτό ; Θεωρήσατε τό παράδειγμα:

$$56 \times 101 = (56 \times 100) + (56 \times 1) = 5600 + 56 = 5656.$$

3.17 Χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τήν λύσιν προβλημάτων. Εἶναι γνωστή ἡ χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διά τήν λύσιν προβλημάτων τοῦ ἑξῆς τύπου: Δίδεται ἡ τιμή μονάδος ἑνός ἐμπορεύματος ἤ μιᾶς ἐργασίας καί ζητεῖται ἡ τιμή μιᾶς δεδομένης ποσότητος ἀπό αὐτό τό ἐμπόρευμα ἤ ἀπό αὐτήν τήν ἐργασίαν. Ὁμοίου τύπου εἶναι καί τό ἑξῆς πρόβλημα: Δίδεται ἡ σταθερά ταχύτης ἑνός κινητοῦ (δηλαδή τό μῆκος τοῦ δρόμου τόν ὁποῖον διανύει τό κινητόν ἀνά μονάδα χρόνου)καί ζητεῖται τό μῆκος τοῦ δρόμου πού διέτρεξε τό κινητόν εἰς δεδομένον χρονικόν διάστημα. Π.χ. ἡ ταχύτης ἑνός ἀεροπλάνου εἶναι 850 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν)· ζητεῖται τό μῆκος τῆς πτήσεώς του εἰς 5 h (ὥρας). Ἡ ἀπάντησις εἶναι:

$$5 \text{ φορές } 850 \text{ km} = 5 \times 850 \text{ km} = 4250 \text{ km}.$$

Εἰς ὅλα τά προβλήματα αὐτά ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα συγκεκριμένον ἀριθμόν μέ ἕνα ἀφῃρημένον· τό γινόμενον εἶναι ὁμοειδές (ὁμώνυμον) μέ τόν συγκεκριμένον παράγοντα. Εἰς ἄλλα προβλήματα, ὅπως π.χ. ἐκεῖνο εἰς τό ὁποῖον ζητεῖται τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου δεδομένων διαστάσεων, ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν δύο συγκεκριμένους ἀριθμούς· τό ἐξαγόμενον εἶναι ἑτεροειδές (ἑτερώνυμον) καί πρός τόν ἕνα καί πρός τόν ἄλλον παράγοντα. Π.χ.

$$3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εὑρῆτε νοερῶς τά γινόμενα

α) 5×7, 80×4, 500×9, 20×40 , 70×6 , 400×8 , 5000×7

β) 2×63, 2×125, 2×159, 4×35, 4×125, 4×210, 4×175

γ) $47\cdot9$, $9\cdot120$, $9\cdot240$, $28\cdot99$, $150\cdot99$, $57\cdot999$.

δ) $45\cdot11$, $32\cdot11$, $11\cdot96$, $11\cdot28$

ε) $50\cdot101$, $120\cdot101$, $101\cdot350$, $1001\cdot234$

στ) $2\cdot2\cdot5\cdot5$, $2\cdot8\cdot5\cdot10$, $6\cdot8\cdot100$.

2) Ὑπολογίσατε τά γινόμενα

$2036\cdot750$, $12050\cdot309$, $30428\cdot9006$, $2034\cdot1070$.

3) Ὑπολογίσατε κατά δύο τρόπους τά γινόμενα:

$(21+18+8)\cdot7$, $12\cdot(43+51+60)$,

$(48-39)\cdot9$, $43\cdot(352-87)$,

$(15+24+4)\cdot(8+6)$, $(12+7)\cdot(25+3+8)$.

4) Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως

$$8\alpha - 3\beta + 3(\gamma-\alpha) + 2(\alpha+2\beta-\gamma),$$

ὅταν $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 10$.

5) Νά ἁπλοποιήσετε τήν παράστασιν

$$8(x+y+\omega) - x + 3(x+y-\omega) + 2(y-\omega).$$

6) Νά γράψετε μέ μορφήν γινομένων τά ἀθροίσματα

$4\ kg^* + 4\ kg^* + 4\ kg^* + 4\ kg^* + 4\ kg^*$,
$6\ m + 6\ m + 6\ m + 6\ m$,
$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15$,
$(\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma)$,
$(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta) + (\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)$.

7) Ἡ ἰσότης
$$20 + 28 + 52 = (5\cdot4) + (7\cdot4) + (13\cdot4) = (5+7+13)\cdot 4$$
μᾶς διδάσκει πῶς ἕνα ἄθροισμα μετατρέπετα εἰς γινόμενον, ὅταν οἱ προσθετέοι του ἔχουν ἕνα κοινόν παράγοντα. Λέγομεν τότε ὅτι ἐθέσαμεν τόν κοινόν παράγοντα ἐκτός παρενθέσεως.
Ὁμοίως ἔχομεν: $36 + 24 + 48 + 60 = 12\cdot(3+2+4+5) = 168$
$$28 - 21 = 4\cdot7 - 3\cdot7 = (4-3)\cdot7 = 7$$
$$25 + 40 - 35 = 5\cdot5 + 8\cdot5 - 7\cdot5 = (5+8-7)\cdot5 = 30$$
Νά ἐφαρμόσετε τώρα τήν παραπάνω μέθοδον εἰς τάς παραστάσεις
$21 + 33 + 18 + 12$, $16 + 28 + 32 - 36$,
$3600 + 360 + 36$, $90 - 63 + 18$, $72 - 48 - 16$,
$\alpha x + \beta x + \gamma x + \delta x$, $x\omega - y\omega$, $\alpha x + \beta x - \gamma x$.

8) Κατά πόσον μεταβάλλεται τό γινόμενον $4\cdot6\cdot9$ ὅταν ὁ πρῶτος του παράγων αὐξηθῆ κατά 1 ; ὅταν ὁ δεύτερος παράγων ἐλαττωθῆ κατά 1 ; ὅταν ὁ τρίτος παράγων αὐξηθῆ κατά 2 ;

9) Στηριζόμενοι εἰς τάς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νά δείξετε ὅτι
$7\cdot3\cdot9 = 210 - 21$, $453\cdot399 = 45300\cdot4 - 453$,
$25\cdot(26 - 8 + 80) = 2500 - 50$.

10) Θεωρήσατε τά σύνολα $A = \{1,3,5\}$ καί $B = \{2,4\}$ καί σχηματίσατε τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτον στοιχεῖον ἐκ τοῦ Α καί δεύτερον στοιχεῖον ἐκ τοῦ Β. Τό σύνολον τοῦτο (πού λέγεται Καρτεσιανόν γινόμενον τοῦ Α ἐπί Β) νά τό παραστήσετε γραφικῶς μέ τήν μέθοδον ἡ ὁποία ἐδιδάχθη εἰς τό Κεφάλαιον Ζ. Ποίαν σχέσιν ἔχει ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ Καρτεσιανοῦ αὐτοῦ γινομένου μέ τό γινόμενον $3\cdot2$; Πῶς φαίνεται εἰς τό γραφικόν ὅτι
$$2\cdot3 = 3 + 3\ ; \quad ὅτι \quad 2\cdot3 = 3\cdot2\ ;$$

11) Πῶς ἠμπορεῖτε νά ἐπαληθεύσετε μέ μίαν ζυγαριάν τάς ἰσοδυναμίας
$\alpha = \beta \iff \mu\alpha = \mu\beta$, ὅπου μ φυσικός ἀριθμός,
$\alpha < \beta \iff \mu\alpha < \mu\beta$, ὅπου μ φυσικός ἀριθμός

12) Νά δώσετε μίαν γεωμετρικήν ἑρμηνεῖαν τῆς ἰσότητος
$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma-\delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\delta - \beta\delta\ ,$$
ὅπου α, β, γ, δ φυσικοί ἀριθμοί, ὁ $\gamma > \delta$.

Προβλήματα:

13) Είς μίαν εταιρίαν εργάζονται 125 εργάται. Έξ αυτών οί 8 έχουν ημερομίσθιον 130 δρχ καί ένας τριπλάσιος αριθμός ημερομίσθιον 95 δρχ. Από τούς άλλους οί 72 λαμβάνουν ημερησίως 64 δρχ έκαστος καί οί υπόλοιποι 45 δρχ έκαστος. Πόσας δραχμάς πληρώνει ή εταιρία κατά εβδομάδα 6 εργασίμων ημερών;

14) Διά τήν θέρμανσιν 3 γραφείων μιάς δημοσίας υπηρεσίας χρειάζονται κατά γραφείον 16 κιλά καυσίμου ύλης ημερησίως. Υπολογίσατε τήν δαπάνην είς ένα έτος, εάν είναι γνωστόν ότι ή θέρμανσις ελειτούργησε επί 21 εβδομάδας καί επί 6 ημέρας κατά εβδομάδα.

15) Δύο πόλεις απέχουν μεταξύ των 822 km (χιλιόμετρα). Δύο αυτοκίνητα αναχωρούν ταυτοχρόνως από αυτάς καί κινούνται πρός συνάντησιν των. Νά εύρετε α) πόσον θά απέχουν τά αυτοκίνητα μεταξύ των 4 ώρας μετά τήν αναχώρησιν, εάν ή ταχύτης τού ενός είναι 65 km/h (χιλιόμετρα ανά ώραν) καί τού άλλου 72 km/h , β) πόσαι ώραι θά χρειασθούν ακόμη διά νά συναντηθούν.

16) 3 τετράδια καί 2 μολύβια κοστίζουν 22 δρχ. Εάν ή αξία κάθε τετραδίου είναι τριπλασία τής αξίας κάθε μολυβιού, νά εύρετε πόσον κοστίζει κάθε τετράδιον καί πόσον κάθε μολύβι.

17) Οί μικροί τροχοί μιάς αμάξης κάμνουν 56 στροφάς ανά λεπτόν (στρ/min) καί οί μεγάλοι 42. Υπολογίσατε πόσας περισσοτέρας στροφάς θά κάμουν οί μικροί τροχοί είς 1h (ώραν καί 25 min (λεπτά).

18) Τό φώς διανύει 300.000 km ανά δευτερόλεπτον (sec). Εύρήτε τήν απόστασιν τής Γής από τόν Ήλιον, γνωρίζοντες ότι τό φώς εχρειάσθη 8 min καί 30 sec διά νά διανύση τήν απόστασιν αυτήν.

19) Ή απόστασις τής Σελήνης από τήν Γήν είναι 56 ισημεριναί ακτίνες τής Γής, όταν ή Σελήνη ευρίσκεται είς τό περίγειον , καί κατά 8 ισημερινάς ακτίνας μεγαλυτέρα, όταν ή Σελήνη ευρίσκεται είς τό απόγειον. Υπολογίσατε τάς δύο αυτάς αποστάσεις λαμβάνοντες τήν ισημερινήν ακτίνα τής Γής ίσην πρός 6380 km.

20) Κάποιος ηγόρασε 360 αυγά πρός 27 δρχ τά 15 καί άλλα τόσα πρός 21 δρχ τά 18. Από τά αυγά αυτά τού έσπασαν 72, τά υπόλοιπα τά επώλησε πρός 54 δρχ τά 27. Υπολογίσατε τό κέρδος του.

§ 4. Διαίρεσις ἀκεραίων.

4.1 Ἡ διαίρεσις εἶναι μία πρᾶξις πού χρησιμοποιοῦμεν διά νά λύσωμεν προβλήματα ὅπως τά ἀκόλουθα.

Πρόβλημα μερισμοῦ. Ἔχομεν 63 τετράδια καί τά ἐμοιράσαμεν ἐξ ἴσου εἰς 12 μαθητάς. Πόσα τετράδια ἔλαβε κάθε μαθητής ;

Ἀπάντησις: Κάθε μαθητής ἔλαβε 5 τετράδια, ἐπερίσσευσαν δέ 3 ἀδιανέμητα τετράδια. Πράγματι

$$12\cdot 5 = 60 \leqslant 63 < 12\cdot 6 = 72.$$

Γενική μορφή τοῦ προβλήματος. Ἕνα σύνολον μέ β τό πλῆθος στοιχεῖα ἐχωρίσθη εἰς α ἰσοπληθῆ μεταξύ τους ὑποσύνολα (ὁ ἀκέραιος α πρέπει λοιπόν νά εἶναι > 0 διά νά ἔχῃ νόημα τό πρόβλημα). Πόσα στοιχεῖα ἔχει τό καθένα ἀπό τά α ὑποσύνολα;

Ἀπάντησις: Κάθε ὑποσύνολον θά ἔχῃ τόσα στοιχεῖα ὅσας φοράς ὁ φυσικός ἀριθμός α ἠμπορεῖ νά ἀφαιρεθῆ ἀπό τόν ἀκέραιον β.

Πρόβλημα μετρήσεως. Ἔχομεν 63 βιβλία καί ἐσχηματίσαμεν μέ αὐτά δωδεκάδας βιβλίων. Πόσαι δωδεκάδες ἐσχηματίσθησαν ;

Ἀπάντησις: Ἐσχηματίσθησαν 5 δωδεκάδες καί ἐπερίσσευσαν 3 βιβλία. Πράγματι:

$$63 = 12\cdot 5 + 3, \text{ ὅπου } 3 < 12.$$

Γενική μορφή τοῦ προβλήματος. Ἕνα σύνολον μέ β τό πλῆθος στοιχεῖα ἐχωρίσθη εἰς ὑποσύνολα πού περιέχουν τό καθένα α τό πλῆθος στοιχεῖα (καί ἐδῶ ὁ ἀκέραιος α πρέπει νά εἶναι > 0). Πόσα ὑποσύνολα ἐσχηματίσθησαν ;

Ἀπάντησις: Ἐσχηματίσθησαν τόσα ὑποσύνολα ὅσας φοράς ὁ φυσικός ἀριθμός α χωρεῖ εἰς τόν ἀκέραιον β.

4.2 Ὅπως παρατηροῦμεν, εἰς τά παραπάνω προβλήματα δίδονται ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός β καί ἕνας φυσικός ἀριθμός α καί ἐξετάζομεν ἄν ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος x τοῦ ὁποίου τό γινόμενον ἐπί α νά ἰσοῦται μέ β. Ἔχομεν λοιπόν διά τό x τήν ἐξίσωσιν

$$αx = β.$$

Διά νά τήν ἐπιλύσωμεν σχηματίζομεν τά διαδοχικά πολλαπλάσια τοῦ α, δηλαδή τά γινόμενά του μέ τούς ἀκεραίους 0,1,2,3,4,....:

$α\cdot 0 = 0$, $α\cdot 1 = α$, $α\cdot 2 = α + α$, $α\cdot 3 = α\cdot 2 + α$, $α\cdot 4 = α\cdot 3 + α,\ldots$

Αὐτά προχωροῦν αὐξανόμενα κάθε φοράν κατά α μονάδας. Ἑπομένως ὁ ἀκέραιος β ἤ θά εἶναι ἴσος μέ ἕνα $α\cdot π$ ἀπό αὐτά (ὁπότε ἡ ἐξίσωσις $αx = β$ θά ἔχη τήν λύσιν $x = π$) ἤ θά περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν πολλαπλασίων $α\cdot π$ καί $α(π+1)$ (ὁπότε ἡ ἐξίσωσις $αx = β$ δέν ἠμπορεῖ νά ἔχη λύσιν ἀκέραιον ἀριθμόν). Θά ἰσχύη λοιπόν πάντοτε μία σχέσις τῆς μορφῆς

$$α\cdot π \leqslant β < α\cdot(π+1) = απ + α.$$

Μέ ἄλλους λόγους ὁ ἀκέραιος π εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τό γινόμενον μέ α δέν ὑπερβαίνει τόν β. Ὁ ἀκέραιος αὐτός π, πού εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος ὅταν δοθοῦν οἱ ἀριθμοί β καί α, λέγεται ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διά α. Ἡ διαφορά

$$β - α\cdot π = υ$$

εἶναι μικροτέρα τοῦ α καί λέγεται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διά α. Οἱ ἀριθμοί α καί β λέγονται ὅροι τῆς διαιρέσεως, ὁ β διαιρετέος καί ὁ α διαιρέτης.

Εἰς τήν περίπτωσιν μηδενικοῦ ὑπολοίπου, $υ = 0$, ἔχομεν

$$β = α\cdot π, \quad \text{δηλαδή διαιρετέος} = \text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον}.$$

Λέγομεν τότε ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία καί ὅτι ὁ διαιρετεος β διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν διαιρέτην α τό πηλίκον π λέγεται ἀκριβές καί σημειώνεται μέ τόν συμβολισμόν

$β : α$ ὁ ὁποῖος διαβάζεται βῆτα διά ἄλφα.

Ἔτσι ἔχομεν τάς ἰσοδυνάμους ἰσότητας:

$$60 : 12 = 5 \Longleftrightarrow 60 = 12\cdot 5$$

καί γενικῶς

$$\beta : \alpha = \pi \iff \beta = \alpha\pi .$$

Είς τήν περίπτωσιν όχι μηδενικοῦ ὑπολοίπου , $\upsilon > 0$, θά ἔχωμεν πάντως τήν σχέσιν

$$\beta = \alpha\cdot\pi + \upsilon \text{ , μέ } \upsilon < \alpha,$$

δηλαδή

διαιρετέος = διαιρέτης x πηλίκον + ὑπόλοιπον.

Ἡ διαίρεσις ὀνομάζεται τώρα <u>ἀτελής</u> καί τό ἀκέραιον πηλίκον π λέγεται <u>πηλίκον κατά προσέγγισιν μονάδος κατ'ἔλλειψιν</u> (ἤ <u>μέ ἔλλειψιν</u>). Ἐπειδή τό πηλίκον αὐτό <u>δέν</u> εἶναι ἀκριβές,δέν τό σημειώνομεν μέ τόν συμβολισμόν $\beta : \alpha$.

Π.χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 63 διά 12 εἶναι ἀτελής, τό ἀκέραιον (κατά προσέγγισιν μονάδος) πηλίκον εἶναι 5 καί τό ὑπόλοιπον $3 < 12$.

Ἔχομεν τέλος τήν σχέσιν $63 = 12\cdot 5 + 3$.

<u>4.3 Παρατηρήσεις</u> I) Είς τήν περίπτωσιν τῆς τελείας διαιρέσεως ἔχομεν

$$\beta : \alpha = \pi \quad \text{καί} \quad (\beta:\alpha)\cdot\alpha = \pi\alpha = \beta .$$

Ὥστε αἱ δύο πράξεις, τελεία διαίρεσις διά α καί πολλαπλασιασμός ἐπί α εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι. Π.χ.

$$36 : 12 = 3 \quad \text{καί} \quad 3\cdot 12 = 36 .$$

Ὁμοίως

$$5\cdot 8 = 40 \quad \text{καί} \quad 40 : 8 = 5 .$$

II) Ἀπό τό ὑπόλοιπον υ μιᾶς διαιρέσεως $\beta = \alpha\pi + \upsilon$ μεταβαίνομεν είς τόν διαιρετέον β προσθέτοντες είς τό ὑπόλοιπον π φοράς κατ'ἐπανάληψιν τόν διαιρέτην α. Ἀντιστρόφως ἀπό τόν διαιρετέον β μεταβαίνομεν είς τό ὑπόλοιπον υ ἀφαιροῦντες,ἀπό τόν διαιρετέον β,π φοράς κατ'ἐπανάληψιν τόν διαιρέτην α. Π.χ. είς τάς διαιρέσεις 36 διά 12 καί 63 διά 12 ἔχομεν

$$0 + 12 + 12 + 12 = 36 \text{ καί } 36 - 12 - 12 - 12 = 0 \text{ ,}$$

$3 + 12+12+12+12+12 = 63$ καί $63-12-12-12$ $12-12 = 3$

4.4 Διατί ὁ διαιρέτης λαμβάνεται $\neq 0$. Ἀπό τά δύο προβλήματα μερισμοῦ καί μετρήσεως ἔγινε φανερόν ὅτι ὁ διαιρέτης α πρέπει νά λαμβάνεται $\neq 0$. Αὐτό δικαιολογεῖται καί ὡς ἑξῆς:

Ἄν ὁ α ἦτο $= 0$, τά διαδοχικά γινόμενά του μέ 0,1,2,3,4,... θά εἶναι ὅλα ἴσα μέ 0, ἄρα ὅλα θά εἶναι $\leq$ τοῦ διαιρετέου β. Ἐπομένως δέν ὑπάρχει μέγιστος ἀκέραιος π τοῦ ὁποίου τό γινόμενον μέ $\alpha = 0$ νά μή ὑπερβαίνη τόν διαιρετέον β. Δέν ἠμποροῦμεν λοιπόν νά ὁρίσωμεν οὔτε ἀκριβές οὔτε κατά προσέγγισιν πηλίκον διαιρέσεως τοῦ β διά α, ὅταν $\alpha = 0$.

4.5. Μερικαί ἀξιοσημείωτοι διαιρέσεις. I) Διαιρετέος 0, διαιρέτης ἕνας ὁποιοσδήποτε φυσικός ἀριθμός α.

Ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τό πηλίκον της ἰσοῦται μέ 0.

$$0 : \alpha = 0 \iff \alpha \cdot 0 = 0.$$

Π.χ. $0 : 1 = 0 : 2 = 0 : 3 = \ldots = 0.$

II) Διαιρετέος ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος β, διαιρέτης τό 1.

Ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τό πηλίκον της ἰσοῦται μέ β.

$$\beta : 1 = \beta \iff 1 \cdot \beta = \beta.$$

Π.χ. $0 : 1 = 0$, $2 : 1 = 2$, $5 : 1 = 5$, κ.ο.κ.

III) Διαιρετέος εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε φυσικός ἀριθμός β, διαιρέτης ὁ ἴδιος φυσικός ἀριθμός β.

Ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τό πηλίκον της ἰσοῦται μέ 1.

$$\beta : \beta = 1 \iff \beta \cdot 1 = \beta$$

Π.χ. $1 : 1 = 2 : 2 = 3 : 3 = 4 : 4 = \ldots = 1.$

IV) Διαιρετέος ἕνας ἀκέραιος β, διαιρέτης τό 10.

Ἔστω π.χ. ἡ διαίρεσις 537 διά 10. Ἔχομεν $537 = 53 \cdot 10 + 7$.

Ἄρα τό ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἰσοῦται μέ 53 καί τό ὑπόλοιπον μέ 7.

Γενικῶς, ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου β διά 10 ἔχει ἀκέραιον πηλικον τόν ἀριθμόν τῶν δεκάδων τοῦ β καί ὑπόλοιπον τό ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ β.

Διά νά διαιρῆται λοιπόν ὁ β ἀκριβῶς διά 10 πρέπει καί ἀρκεῖ νά τελειώνη δεξιά είς τό ψηφίον 0. ('Εννοεῖται ὅτι ὑποθέτομεν τόν β γραμμένον είς τό δεκαδικόν σύστημα γραφῆς).

..6 Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως. I) Πολλαπλασιασμός τῶν δύο ὅρων διαιρέσεως μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν.

Ἔστω ἡ διαίρεσις 23 διά 5 ἡ ὁποία ἔχει ἀκέραιον πηλίκον 4 καί ὑπόλοιπον 3. Ἰσχύει τότε ἡ ἰσότης

$$23 = 5\cdot 4 + 3.$$

Ἄν πολλαπλασιάσωμεν καί τά δύο μέλη της μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν, π.χ. τόν 7, θά προκύψη ἡ ἰσοδύναμος ἰσότης

$$23\cdot 7 = (5\cdot 4+3)\cdot 7 = (5\cdot 7)\cdot 4 + 3\cdot 7 \ ,$$

οπου

$$3\cdot 7 < 5\cdot 7.$$

Ἄρα ἡ διαίρεσις τοῦ $(23\cdot 7)$ διά $(5\cdot 7)$ ἔχει τό ἴδιον πηλίκον 4 μέ τήν διαίρεσιν 23 διά 5 καί ὑπόλοιπον τό $3\cdot 7$ δηλαδή 7 φοράς μεγαλύτερον.

Γενικῶς, ἄν

$$\beta = \alpha\cdot\pi + \upsilon \ , \quad \text{μέ} \ \upsilon < \alpha$$

τότε διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν ἔχομεν:

$$\beta\cdot\nu = (\alpha\cdot\nu)\cdot\pi + (\upsilon\cdot\nu) \ , \quad \text{μέ} \ \upsilon\nu < \alpha\nu.$$

Ὥστε, ἄν πολλαπλασιάσωμεν καί τούς δύο ὅρους μιᾶς διαιρέσεως μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν, τό μέν πηλίκον δέν μεταβάλλεται, τό δέ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται μέ τόν φυσικόν αὐτόν ἀριθμόν. Ἑπομένως μία τελεία διαίρεσις παραμένει τελεία καί μετά τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ὅρων της μέ ἕνα καί τον ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν.

II) Διαίρεσις ἀθροίσματος μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν πού διαιρεῖ ἀκριβῶς κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος.

Ἔστω ἡ διαίρεσις τοῦ (15+21+12) διά 3, ὅπου κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν 3. Ἔχομεν

$$15 = 3\cdot 5 \iff 15 : 3 = 5$$

$$21 = 3\cdot 7 \iff 21 : 3 = 7$$

$$12 = 3\cdot 4 \iff 12 : 3 = 4.$$

Ἄρα

$$15 + 21 + 12 = 3\cdot 5 + 3\cdot 7 + 3\cdot 4 = 3(5+7+4).$$

Ὥστε τό ἄθροισμα 15 + 21 + 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν 3 καί τό ἀκριβές πηλίκον ἰσοῦται μέ 5 + 7 + 4 δηλαδή μέ

$$(15:3) + (21:3) + (12:3).$$

Γενικῶς: Ἄν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί α, β, γ διαιροῦνται ἀκριβῶς ἀπό τόν φυσικόν ἀριθμόν ν, τότε καί τό ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν ν, τό δέ πηλίκον ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα $(\alpha:\nu) + (\beta:\nu) + (\gamma:\nu)$ τῶν ἀκριβῶν πηλίκων $(\alpha:\nu)$, $(\beta:\nu)$, $(\gamma:\nu)$.

Ὥστε, διά νά διαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀκεραίων μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν πού διαιρεῖ ἀκριβῶς κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος, ἠμποροῦμεν καί νά διαιρέσωμεν πρῶτα κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος καί ἔπειτα νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα ἀκριβῆ πηλίκα.

III) Διαίρεσις διαφορᾶς μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν πού διαιρεῖ ἀκριβῶς κάθε ὅρον τῆς διαφορᾶς.

Ἔστω ἡ διαφορά 35 − 14 τῆς ὁποίας οἱ ὅροι διαιροῦνται ἀκριβῶς ἀπό τό 7. Ἔχομεν

$$35 = 7\cdot 5 \text{ καί } 14 = 7\cdot 2 .$$

Ἄρα $$35 - 14 = 7\cdot 5 - 7\cdot 2 = 7\cdot(5-2).$$

Ὥστε καί ἡ διαφορά διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τό 7, τό δέ πηλίκον ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν 5 − 2 = (35:7) − (14:7) τῶν πηλίκων τῶν ὅρων.

Γενικῶς, ἄν οἱ ἀκέραιοι α καί β διαιροῦνται ἀκριβῶς ἀπό τόν φυσικόν ἀριθμόν ν, τότε καί ἡ διαφορά α − β διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν ν, τό δέ πηλίκον ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν πηλίκων τῶν δύο ὅρων.

$$(\alpha-\beta) : \nu = (\alpha:\nu) - (\beta:\nu).$$

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες II καί III μᾶς λέγουν ὅτι ἡ τελεία διαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεσιν καί τήν ἀφαίρεσιν.

IV) Διαίρεσις ἑνός γινομένου μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν πού διαιρεῖ ἀκριβῶς ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.

Εστω τό γινόμενον $7\cdot12\cdot13$ καί ὁ φυσικός ἀριθμός 4 πού διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν παράγοντα 12. Ἐπειδή $12 = 4\cdot3$, θά ἔχωμεν

$$7\cdot12\cdot13 = 7\cdot4\cdot3\cdot13 = 4\cdot(7\cdot3\cdot13)$$

Ἄρα $$(7\cdot12\cdot13) : 4 = 7\cdot3\cdot13 = 7\cdot(12:4)\cdot13$$

Ὥστε, τό γινόμενον $7\cdot12\cdot13$ διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τό 4 καί τό πηλίκον τό εὑρίσκομεν, ἄν ἀντικαταστήσωμεν τόν παράγοντα 12 μέ τό πηλίκον 12 : 4.

Γενικῶς: ἐάν ἕνας φυσικός ἀριθμός α διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα παράγοντα β ἑνός γινομένου, τότε θά διαιρῇ ἀκριβῶς καί τό γινόμενον, τό δέ πηλίκον θά ἰσοῦται μέ τό γινόμενον πού λαμβάνομεν διαιροῦντες τόν παράγοντα β διά α καί ἀφήνοντες ἀμεταβλήτους τούς ἄλλους παράγοντας.

Εἰδική περίπτωσις: ὁ α ἰσοῦται μέ τόν β, ὁπότε $\beta : \alpha = 1$.
Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἰσχύει ἑπομένως ὁ ἑξῆς κανών:
Διά νά διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον μέ ἕνα ἀπό τούς παράγοντάς του, ἀρκεῖ νά τόν ἐξαλείψωμεν ἀπό τό γινόμενον.

Π.χ. $$(8\cdot50\cdot14) : 50 = 8\cdot14 = 112.$$

V) Μία ἄλλη συνέπεια τῆς ἰδιότητος IV) εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐάν ἕνας φυσικός ἀριθμός α διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα ἀκέραιον β, θά διαιρῇ ἀκριβῶς καί κάθε πολλαπλάσιον τοῦ β, δηλαδή κάθε γινόμενον τοῦ β μέ ἕνα ἀκέραιον. Π.χ. ὁ 3 διαιρεῖ ἀκριβῶς τό 12, ἄρα θά διαιρῇ ἀκριβῶς καί τό $12\cdot 7 = 84$. Τό πηλίκον εὑρίσκεται ἀμέσως μέ ἐφαρμογήν τῆς ἰδιότητος (IV):

$$(12\cdot 7) : 3 = (12:3)\cdot 7 = 4\cdot 7 = 28.$$

VI) Μία σειρά ἀπό <u>τελείας</u> διαδοχικάς διαιρέσεις ἠμπορεῖ ν' ἀντικατασταθῇ μέ μίαν μόνον τελείαν διαίρεσιν. Π.χ. ἡ σειρά τῶν τριῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων

$$210 : 2 = 105, \quad 105 : 3 = 35 , \quad 35 : 5 = 7$$

ἠμπορεῖ ν'ἀντικατασταθῇ μέ τήν διαίρεσιν

$$210 : (2\cdot 3\cdot 5) = 210 : 30 = 7.$$

Γενικῶς

$$[(\beta:\alpha_1):\alpha_2] : \alpha_3 = \beta : (\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3).$$

<u>4.7 Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.</u> Ὁ γνωστός τρόπος τῆς πρακτικῆς ἐκτελέσεως μιᾶς διαιρέσεως βασίζεται εἰς τήν σχέσιν

διαιρετέος = διαιρέτης × ἀκέραιον πηλίκον + ὑπόλοιπον

ὅπου $\quad 0 \leqslant$ ὑπόλοιπον $<$ διαιρέτης

<u>1η περίπτωσις:</u> Ὁ διαιρέτης καί τό πηλίκον εἶναι μονοψήφιοι ἀκέραιοι. Ὁ διαιρετέος θά εἶναι τότε $\leqslant 9\cdot 9 + 8 = 89$. Ἡ διαίρεσις ἑνός ἀκεραίου $\leqslant 89$ μέ ἕνα ἀπό τούς ἀριθμούς $1,2,3,\dots,9$ γίνεται νοερῶς μέ τήν ἀπό μνήμης χρησιμοποίησιν τοῦ Πυθαγορείου πίνακος. Π.χ. τό ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 58 διά 7 εἶναι 8 , διότι $8\cdot 7 = 56 < 58 < 8\cdot 8 = 64$. Ἄρα τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 58 διά 7 εἶναι $58 - (8\cdot 7) = 2$.

<u>2α περίπτωσις:</u> Ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος καί τό πηλίκον μονοψήφιον.

Π.χ. εἰς τήν διαίρεσιν τοῦ 1612 διά 324 τό πηλίκον εἶναι μονοψήφιον, διότι $324\cdot 10 = 3240 > 1612$. Ἔστω λοιπόν Ψ_0 τό πηλίκον αὐτό θά εἶναι $\Psi_0 \leqslant 5$, διότι μέ $\Psi_0 \geqslant 6$ θά εἴχαμε

$$324\cdot 6 > 300\cdot 6 = 1800 > 1612.$$

Δοκιμάζομεν μήπως $\Psi_0 = 5$, μέ τόν πολλαπλασιασμόν $324\cdot 5$ · ἔχομεν

$$324\cdot 5 = 1620 > 1612,$$

ἄρα τό Ψ_0 πρέπει νά εἶναι < 5 . Δοκιμάζομεν τό $\Psi_0 = 4$. Ἔχομεν

$$324\cdot 4 = 1296 < 1612,$$

ἐπομένως $\Psi_0 = 4$. Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι

$$1612 - (324\cdot 4) = 1612 - 1296 = 316$$

Πρακτικῶς ἀκολουθοῦμεν εἰς τήν χώραν μας τήν ἀκόλουθον διάταξιν:

διαιρετέος	1612	324 διαιρέτης
	−1296	4 ἀκέραιον πηλίκον
ὑπόλοιπον	316	

καί συνεπτυγμένως

1612	324
316	4

<u>3η περίπτωσις</u>: τό πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

Π.χ. ἔστω ἡ διαίρεσις 1823 διά 71. Τό πηλίκον π εἶναι διψήφιον, διότι

$$71\cdot 10 = 710 < 1823 < 71\cdot 100 = 7100.$$

Ἔστω Ψ_1 τό ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου· θά εἶναι

$$71\cdot\Psi_1 \leqslant 182 < 71\cdot(\Psi_1+1) ,$$

διότι ἀφ' ἑνός

$$71\cdot\Psi_1\cdot 10 \leqslant 1823 \text{ καί ἐπομένως } 71\cdot\Psi_1 \leqslant 182$$

καί ἀφ' ἑτέρου

$$71\cdot(\Psi_1+1)\cdot 10 > 1823 \text{ καί ἐπομένως } 71\cdot(\Psi_1+1) > 182.$$

Ὥστε τό ζητούμενον Ψ_1 εἶναι πηλίκον τοῦ 182 διά 71. Τό εὑρίσκομεν ἐφαρμόζοντες ὅσα εἴπαμεν εἰς τήν 2αν περίπτωσιν· εἶναι $\Psi_1 = 2$ καί ἐπομένως

$$182 = 71\cdot 2 + 40 \quad \text{ἄρα } 1820 = 71\cdot 20 + 400 .$$

Ἔχομεν λοιπόν

$$1823 = 71 \cdot 20 + 403$$

Ἀπομένει τώρα νά ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ 403 διά 71 ἡ ὁποία ἔχει πηλίκον μονοψήφιον:

$$403 = 71 \cdot 5 + 48 \quad \text{μέ} \quad 48 < 71.$$

Τελικῶς λοιπόν ἔχομεν

$$1823 = 71 \cdot 20 + 71 \cdot 5 + 48$$
$$= 71 \cdot 25 + 48$$

Ἄρα τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1823 διά 71 εἶναι 25 καί τό ὑπόλοιπον 48. Πρακτικῶς ἀκολουθοῦμεν τήν ἀκόλουθον διάταξιν:

$$\begin{array}{rr|l}
\text{διαιρετέος} & 1823 & 71 \ \text{διαιρέτης} \\ \hline
& -142 & 25 \ \text{ἀκέραιον πηλίκον} \\
& 403 & \\
& -355 & \\
\text{ὑπόλοιπον} & 48 &
\end{array}$$

καί συνεπτυγμένως

$$\begin{array}{r|l}
1823 & 71 \\ \hline
403 & 25 \\
48 &
\end{array}$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ἡ συνεπτυγμένη πρακτική διάταξις ἔχει ἀπέναντι τῆς ἀνεπτυγμένης τό μειονέκτημα νά κουράζη τόν ὑπολογίζοντα καί νά μή ἐπιτρέπη ἄμεσον ἔλεγχον τῶν ἐνδιαμέσων πολλαπλασιασμῶν καί ἀφαιρέσεων. Δι'αὐτό εἶναι προτιμότερον νά χρησιμοποιοῦμεν τήν ἀνεπτυγμένην διάταξιν.

<u>4.8 Δοκιμή τῆς διαιρέσεως</u>. Πολλαπλασιάζομεν τόν διαιρέτην μέ τό ἀκέραιον πηλίκον πού ηὕραμεν καί προσθέτομεν εἰς τό γινόμενον τό ὑπόλοιπον. Ἐάν ἡ δοκιμαζομένη διαίρεσις καί αἱ πράξεις τῆς δοκιμῆς ἐξετελέσθησαν ὀρθά, πρέπει νά ἐπανεύρωμεν τόν διαιρετέον.

Π.χ. διά τό τελευταῖον παράδειγμα ἔχομεν

$$71 \cdot 25 + 48 = 1775 + 48 = 1823$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ὑπολογίσατε νοερῶς τά ἀκριβῆ πηλίκα

α) 42 : 2 , 68 : 2 , 146 : 2 , 258 : 2 , 634 : 2, 1250 : 2.

β) 16 : 4, 32 : 4 , 72 : 4 , 76 : 4 , 176 : 4 , 276 : 4 , 576 : 4 .

γ) 125 : 5 , 215 : 5 , 625 : 25 , 126 : 6 , 135 : 9.
δ.) 72 : 9 , 972 : 9 , 4500 : 9 , 4536 : 9 , 9720 : 9.
ε) 45 : 15 , 60 : 15 , 120 : 15 , 315 : 5 , 4515 : 15 , 7545 : 15.

2) Νά έκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις καί αἱ δοκιμαί των:
45483 διά 27, 56045 διά 93, 607083 διά 102, 1000000 διά 9763 , 2048064 διά 30804, 65781056 διά 123548.

3) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις

$$356 + (584:4) + (729:3) - [75:(27-12)] ,$$

$$[(9\cdot9\cdot9):27]\cdot5 + [(503-399):8]\cdot7 - 6\cdot2 .$$

4) Νά διαιρεθοῦν διά 7 αἱ ἀριθμητικαί παραστάσεις

$$5\cdot7 - 7\cdot3 + 7\cdot7 \quad , \quad 6\cdot7 + 3\cdot7 + 3\cdot7 - 4\cdot7$$

καί διά 13 αἱ παραστάσεις

$$11\cdot13 - 7\cdot13 + 2\cdot13 - 6\cdot13 \quad , \quad 13\cdot13\cdot13 - 13\cdot13 + 8\cdot13.$$

5) Νά διαιρεθοῦν διά τοῦ ὄχι μηδενικοῦ ἀκεραίου x αἱ παραστάσεις

$$8x - 3x + 2x - x \quad , \quad 5\cdot x\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 7x ,$$

$$2\alpha x + 12\beta x + 7x - 3x$$

6) Νά ὑπολογισθοῦν μέ δύο τρόπους τά ἀκριβῆ πηλίκα:
$360 : (2\cdot3\cdot5)$ καί $2310 : (7\cdot5\cdot11)$.

7) Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων πού ἔχουν διαιρέτην τόν 7 ; τόν 10 ; γενικῶς τόν φυσικόν ἀριθμόν α ;

8) Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τό γινόμενον μέ 24 εἶναι μικρότερον ἤ ἴσον τοῦ 123 ;

9) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διά 7 δίδουν πηλίκον διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου.

10) Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διά 5 δίδουν πηλίκον τριπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου.

11) Τό γινόμενον δύο ἀκεραίων αὐξανόμενον κατά 136 γίνεται = 22840. Ἐάν ὁ ἕνας ἐκ τῶν ἀκεραίων εἶναι ὁ 473, ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

12) Νά ἐπαληθεύσετε τό ἑξῆς: ἐάν προσθέσωμεν εἰς τόν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δέν μεταβάλλεται.

13) Νά ἐπαληθεύσετε τό ἑξῆς: Ἐάν τό ἀκέραιον πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως δέν ὑπερβαίνῃ τό ὑπόλοιπόν της, τότε ἡ αὔ-

ξησις τοῦ διαιρέτου κατά 1 δέν μεταβάλλει τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως.

14) Ἐπιλύσατε τάς ἑπομένας ἐξισώσεις καί ἑρμηνεύσατε τάς τρεῖς πρώτας ἐξ αὐτῶν μέ ἀντίστοιχα προβλήματα:

α) $5x = 40$, $32x = 352$, $48 = 12x$, $34x = 0$

β) $x + 2x + 3x = 18$, $2x + 3x = 75$, $3x - 2x + 5x = 24$.

γ) $x + 5 + x = 19$, $3x + 5 - x = 15$, $3x = 25 - 2x$, $2x - 6 = x + 12$.

δ) $2(x+7) = 44$, $5x + 3(x-3) = 7$, $3x - 5 = 2(x+15)$

15) Παριστάνοντες μέ τό γράμμα x τόν ζητούμενον ἀριθμόν ἐκφράσατε μέ ἐξισώσεις τά ἀκόλουθα καί εὑρῆτε τάς λύσεις των:

α) Μιᾶς διαιρέσεως ὁ διαιρέτης εἶναι 143, τό πηλίκον 79 καί τό ὑπόλοιπον 94. Ζητεῖται ὁ διαιρετέος.

β) Μιᾶς διαιρέσεως ὁ διαιρετέος εἶναι 36666 τό πηλίκον 90 καί τό ὑπόλοιπον 216. Ζητεῖται ὁ διαιρέτης.

γ) Ποίου ἀριθμοῦ τό τριπλάσιον καί τό πενταπλάσιον ἔχουν ἄθροισμα 400 ;

δ) Ποίου ἀριθμοῦ τό τριπλάσιον ἠλαττωμένον κατά 18 ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμόν ηὐξημένον κατά 8 ;

ε) Τρεῖς διαδοχικοί ἀκέραιοι ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 3003. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι αὐτοί ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

16) Δορυφόρος κινεῖται περί τήν γῆν μέ ταχύτητα 11160 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν). Νά ἐκφρασθῇ ἡ ταχύτης του εἰς m/sec (μέτρα ἀνά δευτερόλεπτον).

17) Δορυφόρος κινεῖται περί τήν γῆν μέ ταχύτητα 25200000 m/h (μέτρα ἀνά ὥραν). Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του εἰς km/sec (χιλιόμετρα ἀνά δευτερόλεπτον).

18) Ἡ ταχύτης ἑνός πυραύλου, ἀφοῦ ἔφθασε τήν τιμήν τῶν 12000 m/sec, ἤρχισε νά ἐλαττώνεται κατά 9 m/sec (μέτρα ἀνά δευτερόλεπτον). Μετά πόσα λεπτά ἡ ταχύτης του θά γίνη 7680 m/sec.

19) Ἕνας ποδηλατιστής διέτρεξε εἰς 3 ὥρας τήν ἀπόστασιν ἀπό τήν πόλιν Α εἰς τήν πόλιν Β. Κατά τήν ἐπιστροφήν του ἀπό τήν πόλιν Β εἰς τήν πόλιν Α ἡ μέση ταχύτης του ἦτο κατά 5 km/h μικροτέρα καί ἡ διάρκεια τῆς διαδρομῆς του κατά 1h (ὥραν) μεγαλυτέρα. Νά εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης τοῦ ποδηλατιστοῦ κατά τήν μετάβασιν ἀπό τήν πόλιν Α εἰς τήν πόλιν Β καί ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

20) Δύο τόποι Α καί Β ἀπέχουν μεταξύ των 72 km. Ἀπό

τόν τόπον Β ἀναχωρεῖ εἰς τάς 7 τό πρωί ἕνας ποδηλατιστής μέ ταχύτητα 8 km/h καί μέ κατεύθυνσιν πρός τόν τόπον Α. Εἰς τάς 10 τό πρωί τῆς ἰδίας ἡμέρας ἕνας ἄλλος ποδηλατιστής ἀναχωρεῖ ἀπό τόν τόπον Α καί κατευθύνεται πρός τόν τόπον Β μέ τήν ἰδίαν ταχύτητα. Νά εὑρεθῇ εἰς ποίαν ὥραν καί εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τόν τόπον Α θά συναντηθοῦν οἱ δύο.

21) Τό ἡμερομίσθιον ἑνός τεχνίτου εἶναι 4πλάσιον τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ βοηθοῦ του. Εἰς μίαν ἑβδομάδα 6 ἐργασίμων ἡμερῶν ἔλαβον οἱ δύο μαζί 1500 δρχ. Νά εὑρεθῇ τό ἡμερομίσθιον τοῦ καθενός των.

22) Ἕνας οἰκογενειάρχης ὑπελόγισε ὅτι ἄν ἐξοδεύῃ ἀπό τήν ἀρχήν τοῦ ἔτους κατά μῆνα 3450 δρχ θά ἔχῃ εἰς τό τέλος τοῦ ἔτους ἔλλειμμα 900 δρχ. Πόσας δραχμάς πρέπει νά ἐξοδεύῃ κατά μῆνα διά νά ἔχῃ εἰς τό τέλος τοῦ ἔτους περίσσευμα 1260 δρχ ;

23) Ἕνας ἐργάτης λαμβάνει τήν ἡμέραν 62 δρχ ἐκτός τῆς Κυριακῆς καί ἐξοδεύει κατά μέσον ὅρον ἡμερησίως 38 δρχ. Εἰς πόσας ἑβδομάδας θά ἐξοικονομήσῃ ὅσα χρειάζεται διά νά ἀγοράσῃ ἕνα ραδιόφωνον πρός 2160 δρχ ;

24) Τρεῖς κρουνοί γεμίζουν μέ ρευστά καύσιμα τάς ἀποθήκας τοῦ πρώτου ὀρόφου ἑνός διηπειρωτικοῦ πυραύλου. Ὁ 1ος παρέχει 630 kg (χιλιόγραμμα) εἰς 5 λεπτά, ὁ 2ος 1242 kg εἰς 9 λεπτά καί ὁ 3ος 162 kg κατά λεπτόν. Εἰς πόσα λεπτά θά χύσουν οἱ τρεῖς μαζί 3408 kg καύσιμα ;

25) Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε ὕφασμα πρός 2890 δρχ τά 17m καί τό ἐπώλησε πρός 1050 δρχ τά 5 m. Ἀπό τήν πώλησιν αὐτήν ἐκέρδισε 5880 δρχ. Πόσα μέτρα ὕφασμα εἶχεν ἀγοράσει;

§ 5. Δυνάμεις ἀκεραίων ἀριθμῶν.

5.1 Εἰς τά Μαθηματικά καί τάς ἐφαρμογάς των πολύ συχνά παρουσιάζονται γινόμενα μέ παράγοντας ἴσους μεταξύ των. Π.χ. τό ἐμβαδόν ἑνός τετραγώνου μέ πλευράς 4 m (μέτρα) ἰσοῦται μέ $4\cdot4\ m^2 = 16\ m^2$ (τετραγωνικά μέτρα). Ὁ ὄγκος ἑνός κύβου μέ ἀκμάς 4 m ἰσοῦται μέ $4\cdot4\cdot4\ m^3 = 64\ m^3$ (κυβικά μέτρα). Αὐτά ὡδήγησαν εἰς τούς ἑξῆς ὁρισμούς. Ἔστω α ἕνας ἀκέραιος. Τό γινόμενον $\alpha\cdot\alpha$ δύο παραγόντων ἴσων μέ α λέγεται δευτέρα δύναμις ἤ τετράγωνον τοῦ α καί γράφεται συντόμως $α^2$. Τό γινόμενον $α\cdot α\cdot α$ τριῶν παραγόντων ἴσων μέ α λέγεται τρίτη δύναμις ἤ κύβος τοῦ α καί γράφεται συντόμως $α^3$. Γενικῶς ἐάν ν εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός $\geqslant 2$, τό γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μέ α λέγεται νυοστή δύναμις τοῦ α καί παριστάνεται μέ τόν συμβολισμόν $α^ν$ ὁ ὁποῖος διαβάζεται: ἄλφα εἰς τήν νυοστήν ἤ καί α εἰς τήν νῦ. Ἔχομεν λοιπόν τόν ὁρισμόν

$$α^ν = \underbrace{α\cdot α\cdot \ \ldots \ \cdot α}_{ν \text{ παράγοντες } α}, \text{ ὅπου } ν \text{ ἀκέραιος } \geqslant 2.$$

Εἶναι σκόπιμον διά τά ἑπόμενα νά ἐπεκτείνωμεν τόν ὁρισμόν εἰς τήν περίπτωσιν $ν = 1$ θέτοντες $2^1 = 2$, $5^1 = 5$ καί γενικῶς

$$α^1 = α \text{ διά κάθε ἀκέραιον } α.$$

Ὁ ἀριθμός α λέγεται βάσις τῆς δυνάμεως $α^ν$ καί ὁ ν ἐκθέτης (ὁ ἐκθέτης γράφεται δεξιά ἀπό τήν βάσιν, ὀλίγον ὑψηλότερα καί μέ μικρότερον μέγεθος ἀπό αὐτήν). Ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπό ἕνα ἀριθμόν α τήν νυοστήν δύναμιν $α^ν$ λέγεται ὕψωσις τοῦ α εἰς τήν δύναμιν νῦ, τό ἐξαγόμενον τῆς ὑψώσεως λέγεται καί τιμή τῆς δυνάμεως $α^ν$.

5.2 Ἰδου μερικαί ἀξιοσημείωτοι δυνάμεις:

$0^1 = 0^2 = 0^3 = \ldots = 0$, γενικῶς $0^ν = 0$ διά ν = φυσικός ἀριθμός

$1^1 = 1^2 = 1^3 = \ldots = 1$, γενικῶς $1^ν = 1$ διά ν = φυσικός ἀριθμός

$10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000, \ldots$, γενικῶς $10^ν = \underbrace{100\ldots0}_{ν \text{ μηδενικά}}$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι μία ὁποιαδήποτε δύναμις $10^ν$ τοῦ 10 ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμόν πού γράφεται (εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως) μέ τό ψηφίον 1 καί τόσα μηδενικά εἰς τά δεξιά του ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης ν τῆς δυνάμεως. Τά σύμβολα τῶν δυνάμεων τοῦ 10 μᾶς ἐπιτρέπουν νά συντομεύωμεν τήν γραφήν μεγάλων ἀριθμῶν. Π.χ. ἡ ταχύτης τοῦ φωτός εἰς τό διάστημα, ὅταν μετρηθῇ εἰς ἑκατοστόμετρα ἀνά δευτερόλεπτον (cm/sec) ἰσοῦται, κατά πολύ καλήν προσέγγισιν, μέ 30 000 000 000, Ἀντί τοῦ πολυψηφίου αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἠμποροῦμεν τώρα νά γράψωμεν συντόμως $3\cdot10^{10}$.

5.3 Παρατηρήσεις. 1) Μία δύναμις, ὅπως π.χ. ἡ 3^2, εἶναι κάτι διάφορον ἀπό τό γινόμενον $3\cdot2$. Πράγματι $3^2 = 9$ ἐνῷ $3\cdot2 = 6$. Δέν ἐπιτρέπεται λοιπόν νά συγχέωμεν τό α^ν μέ τό $\alpha\nu$.

2) Ἡ ἀντιμετάθεσις τῆς βάσεως μέ τόν ἐκθέτην εἰς μίαν δύναμιν α^ν μεταβάλλει τήν τιμήν τῆς δυνάμεως, ὅταν $\alpha \neq \nu$. Π.χ. $2^3 = 8$ ἐνῷ $3^2 = 9$, $5^4 = 625$, ἐνῷ $4^5 = 1024$.

3) Ἡ γραφή α^2 καί α^3 τοῦ τετραγώνου καί τοῦ κυβου ἑνός ἀριθμοῦ ἐξηγεῖ διατί ἔχουν εἰσαχθῇ διεθνῶς τά σύμβολα m^2 καί m^3 πρός παράστασιν τοῦ τετραγωνικοῦ καί τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Ὁμοίως ἐξηγοῦνται τά σύμβολα cm^2 καί cm^3 διά τό τετραγωνικόν καί τό κυβικόν ἑκατοστόμετρον καθώς καί ἄλλοι παρόμοιοι συμβολισμοί.

5.4 Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Ι) Πολλαπλασιασμός δυνάμεων μέ τήν ἰδίαν βάσιν. Ἔστω τό γινόμενον $4^2\cdot4^3$. Ἔχομεν

$$4^2\cdot4^3 = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^5 = 4^{2+3}$$

Γενικῶς, ἄν α εἶναι ἕνας ἀκέραιος καί κ, λ δύο φυσικοί ἀριθμοί, τότε

$$\alpha^\kappa\cdot\alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$$

Ἐδῶ γίνεται φανερά ἡ σκοπιμότης τοῦ ὁρισμοῦ $\alpha^1 = \alpha$ χάρις εἰς αὐτόν τόν ὁρισμόν ἠμποροῦμεν νά ὑπαγάγωμεν τάς ὀρθάς σχέσεις

$$\alpha\cdot\alpha = \alpha^2\ ,\quad \alpha^2\cdot\alpha = \alpha^3 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

εἰς τήν παραπάνω γενικήν σχέσιν $\alpha^\kappa\cdot\alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$.

Ἔστω τώρα ὁ πολλαπλασιασμός $2^3\cdot2^2\cdot2^4$. Ἔχομεν

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^9 = 512$$

Ὥστε γενικά: τό γινόμενον δύο ἤ περισσοτέρων δυνάμεων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ α εἶναι δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ α μέ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιάζονται. Π.χ.

$$3^2 \cdot 3^1 \quad 3^3 \cdot 3^2 = 3^{2+1+3+2} = 3^8 = 6561.$$

II) Δύναμις ἑνός γινομένου. Ἔστω ἡ δύναμις $(2\cdot5)^3$. Ἔχομεν

$$(2\cdot5)^3 = 2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5 = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5 = 2^3\cdot5^3$$

καί γενικῶς:

$$(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu \text{ , ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$(4\cdot3\cdot6)^2 = 4^2\cdot3^2\cdot6^2.$$

Ὥστε, διά νά ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς μίαν δύναμιν ν ἠμποροῦμεν νά ὑψώσωμεν πρῶτα κάθε παράγοντα εἰς τήν δύναμιν ν καί ἔπειτα νά πολλαπλασιάσωμεν τά ἐξαγόμενα. Ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν δυνάμεις μέ τόν ἴδιον ἐκθέτην ν ἠμποροῦμεν νά πολλαπλασιάσωμεν πρῶτα τάς βάσεις των καί ἔπειτα νά ὑψώσωμεν τό ἐξαγόμενον εἰς τήν δύναμιν ν. Π.χ.

$$2^3\cdot5^3 = (2\cdot5)^3 = 10^3 = 1000.$$

III) Ὕψωσις δυνάμεως εἰς δύναμιν. Ἔστω ἡ δύναμις $(2^3)^4$. Ἔχομεν

$$(2^3)^4 = 2^3\cdot2^3\cdot2^3\cdot2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{4\cdot3} = 2^{12}.$$

Ὁμοίως :

$$(3^5)^2 = 3^5\cdot3^5 = 3^{5+5} = 3^{10} = 3^{2\cdot5} = 3^{10}.$$

καί γενικῶς:

$$(\alpha^\nu)^\lambda = \alpha^{\nu\lambda},$$

ὅπου α τυχόν ἀκέραιος καί ν, λ δύο φυσικοί ἀριθμοί.

Ὥστε, διά νά ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν α^ν εἰς μίαν δύναμιν λ ἠμποροῦμεν νά ὑψώσωμεν τό α εἰς τήν δύναμιν πού ἔχει ἐκθέτην τό γινόμενον νλ τῶν δύο ἐκθετῶν.

IV) <u>Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.</u> Ἔστω ὅτι θέλομεν νά διαιρέσωμεν τήν 4^5 διά 4^3. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, διότι

$$4^5 = 4^3 \cdot 4^2 \quad \text{ἄρα} \quad 4^5 : 4^3 = 4^2 = 4^{5-3}$$

Γενικῶς: ἔστω α ἕνας ἀκέραιος $\neq 0$ καί ν, λ δύο φυσικοί ἀριθμοί ὁ $\nu > \lambda$. Τότε $\nu = \lambda + (\nu-\lambda)$ καί $\alpha^\nu = \alpha^\lambda \cdot \alpha^{\nu-\lambda}$. Ἄρα

$$\alpha^\nu : \alpha^\lambda = \alpha^{\nu-\lambda}.$$

Ὥστε, ἡ διαίρεσις τῆς α^ν διά α^λ, ὅπου $\lambda < \nu$, εἶναι τελεία καί τό ἀκριβές πηλίκον της ἰσοῦται μέ τήν δύναμιν $\alpha^{\nu-\lambda}$ πού ἔχει ἐκθέτην τήν διαφοράν τῶν ἐκθετῶν. Π.χ.

$6^4 : 6^2 = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ καί $5^7 : 5 = 5^7 : 5 = 5^{7-1} = 5^6 = 15625$.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τί συμβαίνει, ἄν θέλωμεν νά διαιρέσωμεν τήν 4^5 διά 4^5. Προφανῶς ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία καί ἔχει πηλίκον τό 1. Ἡ ἐφαρμογή ὅμως τοῦ παραπάνω κανόνος δέν εἶναι πρός τό παρόν ἐπιτρεπτή, διότι ἡ παράστασις 4^{5-5}, δηλαδή ἡ 4^0, δέν ἔχει ὁρισθῆ, δέν ἔχει πρός τό παρόν κανένα νόημα· ἄν ὅμως τῆς δώσωμεν ἐξ ὁρισμοῦ τό νόημα $4^0 = 1$, τότε ὁ κανών ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύη εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν

$$4^5 : 4^5 = 4^{5-5} = 4^0 = 1.$$

Γενικῶς, ἔστω α ἕνας φυσικός ἀριθμός καί ν ἐπίσης ἕνας φυσικός ἀριθμός. Ἡ διαίρεσις τοῦ α^ν διά α^ν εἶναι προφανῶς τελεία καί ἔχει πηλίκον 1. Ἄν λοιπόν συμφωνήσωμεν νά θέσωμεν ἐξ ὁρισμοῦ διά κάθε ἀκέραιον $\alpha \neq 0$

$$\alpha^0 = 1,$$

τότε ὁ παραπάνω κανών $\alpha^\nu : \alpha^\lambda = \alpha^{\nu-\lambda}$ θά ἰσχύη καί εἰς τήν περίπτωσιν $\nu = \lambda$, δηλαδή

$$\alpha^\nu : \alpha^\nu = \alpha^{\nu-\nu} = \alpha^0 = 1.$$

Ἄς σημειωθῆ ὅτι μέ τόν παραπάνω ὁρισμόν τοῦ $\alpha^0 = 1$, ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν καί αἱ ἰδιότητες I), II) καί III).

Ὑπολείπεται νά ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως μιᾶς δυνάμεως α^{ν} μέ μίαν δύναμιν α^{λ} , ὅταν $\lambda > \nu$, π.χ. τῆς $2^5 = 32$ διά $2^6 = 64$. Ἡ διαίρεσις αὐτή δέν εἶναι πλέον τελεία, διότι ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν διαιρετέον. Ἐπομένως κανένας ἀκέραιος ἀριθμός δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι ἀκριβές πηλίκον της. Αὐτό θά εἶναι ἴσον μέ ἕνα κλασματικόν ἀριθμόν πού θά μελετήσωμεν εἰς τό Κεφάλαιον ΙΑ΄.

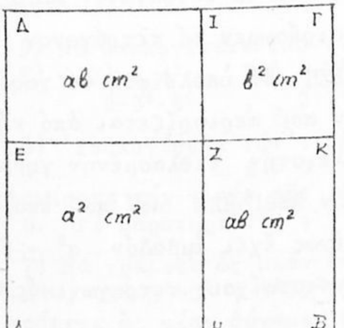
5.5 Τετράγωνον ἑνός διωνύμου $\alpha+\beta$. Ἕνα ἄθροισμα $\alpha+\beta$ μέ δύο ὅρους λέγεται διώνυμον . Τό τετράγωνόν του $(\alpha+\beta)^2$ ἐκφράζεται καί μέ ἕνα ἄλλον πολύ χρήσιμον τρόπον, ὡς ἑξῆς: Ἐφαρμόζοντες τάς γνωστάς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί τῆς προσθέσεως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\cdot\alpha + \beta\cdot\alpha + \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\beta\\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2\\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 .\end{aligned}$$

Ὥστε τό τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀκεραίων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀκεραίων πλέον τό διπλάσιον γινόμενόν τους.

Π.χ. $7^2 = (4+3)^2 = 4^2 + 3^2 + 2(4\cdot 3) = 16 + 9 + 24 = 49$.

Ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ἰσχύει ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί α, β , εἶναι λοιπόν ταυτότης. Τό δεξιόν μέλος εἶναι ἕνα τριώνυμον, δηλαδή ἄθροισμα τριῶν ὅρων, καί λέγεται ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου $(\alpha+\beta)^2$. Ἰδού μία ἐνδιαφέρουσα γεωμετρική ἑρμηνεία του (βλ. τό διπλανόν σχῆμα). Τό τετράγωνον ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος πλευρῶν



$(\alpha+\beta)$ μονάδας μήκους (εἰς τό σχῆμα $3 + 2 = 5$ cm). Τό ἐμβαδόν του ἰσοῦται λοιπόν μέ $(\alpha+\beta)^2$ ἀντιστοίχους τετραγωνικάς μονάδας (εἰς τό σχῆμα $5^2 = 25$ cm^2). Τό ὅλον ὅμως τετράγωνον χωρίζεται εἰς τά ἑξῆς: 1) τό τετράγωνον ΑΗΖΕ ἐμβαδοῦ α^2, 2) τό τετράγωνον ΖΚΙΓ ἐμβαδοῦ β^2 καί 3) τά δύο ἴσα ὀρθογώνια ΗΒΚΖ καί ΕΖΙΔ μέ ἄθροισμα ἐμβαδῶν $2\alpha\beta$. Ἐπομένως

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.$$

5.6 Διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$ δύο τετραγώνων. Ἔστω ἡ διαφορά $5^2 - 3^2$. Ἔχομεν $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. Ἀφ' ἑτέρου

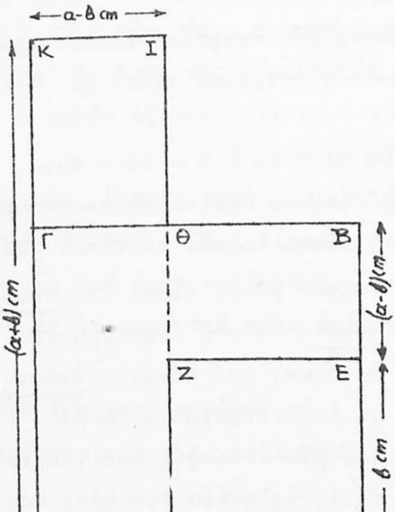
$$(5+3)\cdot(5-3) = 8\cdot 2 = 16$$

Ἄρα

$$5^3 - 3^2 = (5+3)\cdot(5-3).$$

Γενικῶς, ὅταν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, ὁ $\alpha \geqslant \beta$, τότε

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta).$$



Ἰδού μία γεωμετρική ἑρμηνεία αὐτῆς τῆς ἰσότητος. Τό τετράγωνον ΑΒΓΔ ἔχει πλευράν α μονάδας (εἰς τό σχῆμα $\alpha = 5$ cm). Τό τετράγωνον ΑΕΖΗ ἔχει πλευράν β μονάδας (εἰς τό σχῆμα $\beta = 3$ cm). Ἄν ἀπό τό τετράγωνον ΑΒΓΔ ἀφαιρέσωμεν τό τετράγωνον ΑΕΖΗ, θά ὑπολειφθῆ τό χωρίον πού περιορίζεται ἀπό τήν κλειστήν τεθλασμένην γραμμήν ΕΒΘΓΔΗΖΕ καί πού ἐπομένως ἔχει ἐμβαδόν $\alpha^2 - \beta^2$ ἀντιστοίχους τετραγωνικάς μονάδας (εἰς τό σχῆμα $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16\ cm^2$) Ἀπό τό χωριον αὐτό ἀποκόπτομεν τό ὀρθογώνιον ΕΒΘΖ καί τό μεταθέτομεν εἰς τήν θέσιν ΙΚΓΘ, θά προκύψη τότε ἕνα ὀρθογώνιον ΗΙΚΔ ἴσου ἐμβαδοῦ $\alpha^2 - \beta^2$ μέ τό χωρίον. Ἐξ ἄλλου αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΗΙΚΔ εἶναι $ΗΙ = ΔΚ = \alpha + \beta$ μονάδες καί $ΙΚ = ΗΔ = \alpha - \beta$ μονάδες. Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίουτούτου ἰσοῦται μέ $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$ τετραγωνικάς μονάδας καί ἑπομένως $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$.

Ἡ παραπάνω ἰσότης ἐκφράζεται μέ λέξεις ὡς ἑξῆς: Ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο ὁποιωνδήποτε ἀκεραίων εἶναι ἴση πρός τό γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος μέ τήν διαφοράν τῶν δύο ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά παραστήσετε συμβολικῶς ὡς δυνάμεις τά γινόμενα
$2\cdot2\cdot2\cdot2$, $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$, $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$; $0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0$
καί νά ὑπολογίσετε τάς τιμάς των. Νά παραστήσετε συμβολικῶς ὡς δυνάμεις τά γινόμενα $\alpha\cdot\alpha$, , $x\cdot x\cdot x$, $\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta$.

2) Νά εὕρετε τό ἐμβαδόν ἑνός τετραγώνου μέ πλευράς 23m καί τόν ὄγκον ἑνός κύβου μέ ἀκμάς 42 cm.

3) Ὑπολογίσατε τά τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 11,12,13,14, 15. Ἐπίσης τούς κύβους τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6, 8, 11 ,

4) Νά εὕρετε τά τετράγωνα καί τούς κύβους τῶν ἀριθμῶν 10, 20, 30, 40, 50, 60 καί νά διατυπώσετε σχετικάς παρατηρήσεις.

5) Νά ὑπολογίσετε τάς τιμάς τῶν παραστάσεων
$5^3 + 2^3 + 4^3$, $16^2 - 7^2$, $8^3 - 2^3 + 5^2$
$2\cdot3^2\cdot5^3$, $2\cdot7^2\cdot3^3 + 6\cdot7^2$

6) Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως $x^2 + y^2$ ὅταν $x = 3$, $y = 4$.
Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς ἰδίας παραστάσεως, ὅταν $x = 8$, $y = 6$. Τί παρατηρεῖτε ;

7) Νά γράφετε ὡς μίαν δύναμιν τό καθένα ἀπό τά γινόμενα
$2^3\cdot2^2$, $3^2\cdot3^4\cdot3^3$, $5^4\cdot5^2\cdot5$, $6^1\cdot6^3\cdot6^4$.
Νά γράφετε ὡς μίαν δύναμιν τό καθένα ἀπό τά ἑξῆς ἀκριβῆ πηλίκα καί νά ὑπολογίσετε:

$2^5 : 2^4$, $3^6 : 3^3$, $4^7 : 4^5$, $7^8 : 7^3$.

8) Νά ὑπολογίσετε κατά δύο τρόπους τά τετράγωνα τῶν γινομένων $5\cdot 6$, $2\cdot 5\cdot 4$, $3\cdot 5\cdot 10$.
Ὁμοίως τούς κύβους τῶν γινομένων $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $4\cdot 5\cdot 2$.

9) Νά γράφετε καί κατ' ἄλλον τρόπον τάς παραστάσεις
$(5^2)^3$, $(3^2)^4$, $(2^3)^2\cdot 2^2$, $(7^2)^5\cdot 7^2$, $(4^0)^5$.
Ὁμοίως τάς παραστάσεις
$(2x)^2$, $(3\alpha^2)^4$, $(4\alpha^3)^3$, $(13x^4)^2$, $(\alpha^2\beta^3)\cdot(\alpha^3\beta^2)$.

10) Νά εὕρετε τά ἀναπτύγματα τῶν τετραγώνων τῶν διωνύμων $(7+\alpha)$, $(x+12)$, $(\omega+1)$, $(2\alpha+\beta)$.

11) Νά γράφετε μέ τήν μορφήν γινομένου τάς διαφοράς
$100^2 - 40^2$, $6^2 - 4^2$, $49 - 9$, $64 - 25$, $16 - x^2$, $\omega^2 - 36$
Νά γράφετε μέ τήν μορφήν διαφορᾶς τά γινόμενα
$(8+2)\cdot(8-2)$, $(9+5)\cdot(9-5)$, $(\alpha+4)(\alpha-4)$, $(25+x)(25-x)$.

12) Νά ὑπολογίσετε τό γινόμενον $102\cdot 98$ ἀφοῦ ἀναλύσετε τό 102 εἰς τό ἄθροισμα $100 + 2$ καί τό 98 εἰς τήν διαφοράν $100 - 2$.
Ἐφαρμόσατε τήν ἰδίαν μέθοδον εἰς τά γινόμενα
$81\cdot 79$, $1002\cdot 998$, $103\cdot 97$.

§ 6. Δεκαδικόν καί δυαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως

6.1 Χρῆσις τῶν δυνάμεων τοῦ 10 διά τήν γραφήν ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως. Ὅπως εἴδαμεν, αἱ διαδοχικαί δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι:
$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 10\cdot 10^2 = 1000$,
$10^4 = 10\cdot 10^3 = 10000$, ...
Ἐπομένως αἱ δυνάμεις αὐταί εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μέ τάς μονάδας 1ης , 2ας , 3ης , 4ης ,... τάξεως τάς ὁποίας σχηματίζομεν εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως καί τάς ὁποίας εἰς προηγουμένας παραγράφους παρεστήσαμεν μέ τά γράμματα Μ , Δ , Ε , Χ , ... Ἕνας ἀκέραιος, π.χ. ὁ 3607, τόν ὁποῖον εἴχαμεν γράφει ὡς ἑξῆς:

$$3607 = 3X + 6E + 0\Delta + 7M ,$$

ἠμπορεῖ τώρα νά γραφῇ μέ τήν ἀκόλουθον μορφήν:

$$3607 = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 .$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$512 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 ,$$

$$17806 = 1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \text{ , κτλ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τά δεξιά μέλη αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων αἱ διαδοχικαί δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι πολλαπλασιασμέναι μέ τά ἀντίστοιχα ψηφία τῶν ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τά ἀριστερά μέλη, ἐπομένως οἱ πολλαπλασιασταί αὐτοί εἶναι ἀκέραιοι < 10.

Ἀντιστρόφως, ὅταν δοθῇ ἕνα ἄθροισμα διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασμένων μέ ἀκεραίους < 10, π.χ. τό

$$\alpha = 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \quad ,$$

τό ἄθροισμα αὐτό ἰσοῦται μέ ἕνα ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος εἰς τό δεκαδικόν σύστημα γραφῆς ἔχει κατά σειράν ὡς ψηφία τούς ἀκεραίους αὐτούς πολλαπλασιαστάς :

$$\alpha = 61093.$$

<u>6.2 Δυαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως.</u> Τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως ἀνταποκρίνεται πολύ καλά εἰς τάς ἀνάγκας τῶν ὑπολογισμῶν πού ἔχομεν συνήθως νά κάμωμεν, δι᾽αὐτό καί ἐπεκράτησε. Ὅπως ὅμως γνωρίζομεν, δέν εἶναι τό μόνον πού ἐπενόησε ὁ ἄνθρωπος, διά τήν γραφήν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὡς βάσιν ἀριθμήσεως ἠμποροῦμεν νά πάρωμεν ἀντί τοῦ ἀριθμοῦ 10 ἕναν ὁποιονδήποτε ἀκέραιον μεγαλύτερον τοῦ 1, π.χ., ὅπως εἴδαμεν, τό 12. Ἐδῶ θά ἐξετάσωμεν τό δυαδικόν σύστημα πού ἔχει βάσιν τό 2, διότι αὐτό χρησιμοποιεῖται σήμερα εἰς τάς ταχείας ἠλεκτρονικάς ὑπολογιστικάς μηχανάς.

Εἰς τό δεκαδικόν σύστημα γραφῆς τῶν ἀκεραίων συναθροίζομεν ἀνά 10 τάς μονάδας μιᾶς τάξεως διά νά σχηματίσωμεν τάς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Εἰς τό <u>δυαδικόν</u> σύστημα θά συναθροίσωμεν ἀνά δύο τάς μονάδας μιᾶς τάξεως διά νά σχηματίσωμεν τάς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἔτσι εἰς τό δυαδικόν σύστημα ἔχομεν τάς ἑξῆς μονάδας 1ης, 2ας, 3ης, 4ης , 5ης ,... τάξεως:

μονάς 1ης τάξεως = ἁπλῆ μονάς = 1 = 2^0
" 2ας " = 2 ἁπλαῖ μονάδες = δυάς = 2 = 2^1
" 3ης " = 2 δυάδες = τετράς = 2^2
" 4ης " = 2 τετράδες = ὀκτάς = 2^3
" 5ης " = δύο ὀκτάδες = δεκαεξάς = 2^4
" 6ης " = 2 δεκαεξάδες = 2^5 , κ.ο.κ.

6.3 Ἀπαρίθμησις εἰς τό δυαδικόν σύστημα. Ἰδού τώρα πῶς χρησιμοποιοῦνται αὐταί αἱ μονάδες διαφόρων τάξεων διά τήν ἀπαρίθμησιν τῶν στοιχείων ἑνός πεπερασμένου συνόλου. Ἄς πάρωμεν π.χ. ἕνα σύνολον μέ δεκατρία στοιχεῖα:

$$E = \{x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\} .$$

Συναθροίζοντες τά στοιχεῖα του ἀνά δύο:

$$\{\underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}\ \ x\}$$

σχηματίζομεν ἕξη δυάδας στοιχείων (τόσας, ὅσας φοράς τό δύο χωρεῖ εἰς τό δεκατρία), μᾶς ὑπολείπεται δέ ἕνα μεμονωμένον στοιχεῖον (ἕνα εἶναι καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεκατρία διά δύο). Συναθροίζομεν τώρα τάς σχηματισθείσας ἕξη δυάδας στοιχείων ἀνά δύο:

$$\{\underline{\underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}}\ \ \ \underline{\underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}}\ \ \ \underline{\underline{x\ x}\ \ \underline{x\ x}}\ \ \ x\}$$

καί λαμβάνομεν τρεῖς τετράδας στοιχείων (τόσας, ὅσας φοράς τό δύο χωρεῖ εἰς τό ἕξη)· δυάς στοιχείων δέν ὑπολείπεται καμμιά (μηδέν εἶναι καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἕξη διά τρία). Ἀπό τάς τρεῖς τετράδας στοιχείων σχηματίζομεν τώρα ἕνα ζεῦγος τετράδων, δηλαδή μίαν ὀκτάδα στοιχείων, μᾶς ὑπολείπεται δέ τότε μία τετράς στοιχείων:

$$\left\{ \underline{\underline{\underline{\underline{x\,x}\quad\underline{x\,x}}}}\quad \underline{\underline{\underline{x\,x}\quad\underline{x\,x}}}\quad \underline{\underline{\underline{x\,x}\quad\underline{x\,x}}}\quad x \right\}$$

(Παρατηροῦμεν ὅτι ἀντιστοίχως ἡ διαίρεσις τοῦ τρία διά δύο δίδει ἀκέραιον πηλίκον ἕνα καί ὑπόλοιπον ἕνα). Τελικῶς λοιπόν εὑρίσκομεν ὅτι τό σύνολον Ε περιέχει:

1 ὀκτάδα , 1 τετράδα, 0 δυάδα στοιχείων καί 1 στοιχεῖον.
Ἑπομένως ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου Ε εἰς τό δυαδικόν σύστημα γραφῆς θά ἀποτελῆται ἀπό

1 μονάδα 4ης, 1 μ. 3ης , 0 μ. 2ας , καί 1 μ. 1ης τάξεως.
Ἄρα ὁ πληθικός αὐτός ἀριθμός , ὁ ὁποῖος εἰς τό δεκαδικόν σύστημα παριστάνεται μέ 13, εἰς τό δυαδικόν θά παρασταθῇ μέ 1101 :

13 εἰς τό δεκαδικόν = 1101 εἰς τό δυαδικόν.

<u>6.4 Μετάβασις ἀπό τό δεκαδικόν εἰς τό δυαδικόν σύστημα καί ἀντιστρόφως.</u> Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερόν ὅτι διά νά γράφωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν εἰς τό δυαδικόν σύστημα χρειαζόμεθα δύο μόνον σύμβολα, τό 0 καί τό 1. Ἰδού τώρα καί ὁ κανών πού προκύπτει ἀπό ὅσα ἀνεπτύξαμεν καί πού ἀκολουθοῦμεν διά νά μεταγράφωμεν εἰς τό δυαδικόν σύστημα ἕνα ἀκέραιον γραμμένον εἰς τό δεκαδικόν. Ἔστω π.χ. ὁ ἀκέραιος 14. Διαιροῦμεν διά 2 τούς ἑξῆς κατά σειράν ἀριθμούς: τόν 14, τό προκύπτον ἀκέραιον πηλίκον 7, τό προκύπτον νέον ἀκέραιον πηλίκον 3 , τό προκύπτον νέον ἀκέραιον πηλίκον 1,ὁπότε λαμβάνομεν πηλίκον μηδέν καί τελειώνομεν:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$$

Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τούτων εἶναι ἤ 0 ἤ 1.
Ἡ σειρά τους 0111 , ἀφοῦ ἀντιστραφῇ εἰς τήν σειράν 1110, μᾶς δίδει τήν δυαδικήν γραφήν τοῦ ἀκεραίου 14.

14 εἰς τό δεκαδικόν = 1110 εἰς τό δυαδικόν σύστημα.

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν διά τόν ἀκέραιον 20 :

20	2 ,	10	2 ,	5	2 ,	2	2 ,	1	2 ,
ὑπόλοιπ.0	10	0	5	1	2	0	1	1	0

ἄρα

20 εἰς τό δεκαδικόν = 10100 εἰς τό δυαδικόν.

Ἀντιστρόφως, διά νά εὕρωμεν πῶς γράφεται εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ὁ ἀκέραιος ὁ ὁποῖος εἰς τό δυαδικόν παριστάνεται π.χ. μέ 11101, ἀρκεῖ νά σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: τό πρῶτον ψηφίον ἀπό δεξιά παριστάνει ἁπλᾶς μονάδας, τό δεύτερον ἀπό δεξιά δυάδας , τό τρίτον τετράδας καί τό τέταρτον ὀκτάδας, τό πέμπτον δεκαεξάδας, ἄρα

11101 εἰς τό δυαδικόν = $1\cdot16+1\cdot8+1\cdot4+0\cdot2+1\cdot1 = 29$ εἰς τό δεκαδ.

Ἔστω ἀκόμη ὁ ἀριθμός 1100100 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος. Χρησιμοποιοῦντες τάς διαδοχικάς δυνάμεις τοῦ 2 διά τήν μεταγραφήν εἰς τό δεκαδικόν σύστημα τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εὑρίσκομεν:

1100100 εἰς τό δυαδικόν =

$$= 1\cdot2^6+ 1\cdot2^5+ 0\cdot2^4+ 0\cdot2^3+ 1\cdot2^2+ 0\cdot2^1+ 0\cdot2^0$$

$$= 1\ 64 + 1\cdot32 + 1\cdot4$$

= 100 εἰς τό δεκαδικόν.

<u>6.5 Πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.</u> Εἰς τό δυαδικόν σύστημα μονοψήφιον παράστασιν ἔχουν μόνον δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁ 0 καί ὁ 1. Κατά συνέπειαν οἱ πίνακες διά τήν πρόσθεσιν καί τόν πολλαπλασιασμόν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἰς τό δυαδικόν σύστημα εἶναι πολύ ἁπλούστεροι ἀπό τούς ἀντιστοίχους πίνακας εἰς τό δεκαδικόν:

Πίναξ προσθέσεως

	0	1
0	0	1
1	1	10 (= 2 εἰς τό δεκαδικόν)

Πίναξ πολλαπλασιασμοῦ

	0	1
0	0	0
1	0	1

Ὡς ἐκ τούτου αἱ τέσσαρες πράξεις ἐπί τῶν ἀκεραίων ἔχουν ἁπλουστέραν ἐκτέλεσιν εἰς τό δυαδικόν σύστημα παρά εἰς τό δεκαδικόν καί αὐτός εἶναι ὁ λόγος διά τόν ὁποῖον τό δυαδικόν σύστημα χρησιμοποιεῖται εἰς τάς ταχείας ἠλεκτρονικάς ὑπολογιστικάς μηχανάς.
Ἀφ'ἑτέρου ἀκέραιοι συνήθους μεγέθους (π.χ. ὁ 100 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος) παριστάνονται, ὅπως εἴδαμεν, μέ πολλά ψηφία εἰς τό δυαδικόν (100 τοῦ δεκαδικοῦ = 1100100 τοῦ δυαδικοῦ). Αὐτό εἶναι ἕνα μειονέκτημα τοῦ δυαδικοῦ συστήματος διά τόν ὑπολογιστήν πού δέν χρησιμοποιεῖ τάς ταχείας ἠλεκτρονικάς ὑπολογιστικάς συσκευάς. Διά τοῦτο τό δεκαδικόν σύστημα προτιμᾶται εἰς τούς ὑπολογισμούς πού ἐκτελοῦνται χωρίς τάς μηχανάς αὐτάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπαριθμήσατε εἰς τό δυαδικόν σύστημα, μέ τόν σχηματισμόν δυάδων, τετράδων, κτλ., τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$A = \{x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\}.$$

Ἀφοῦ τά ἀπαριθμήσετε καί εἰς τό δεκαδικόν σύστημα, νά παραστήσετε μέ ψηφία τά ἀποτελέσμτα τῶν δύο ἀπαριθμήσεων.

2) Νά γράψετε εἰς τό δυαδικόν σύστημα τούς ἀκολούθους ἀριθμούς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος:
8 , 9 , 10 , 11 , 20 , 21 , 23 , 24 , 30.

3) Νά γράψετε εἰς τό δεκαδικόν σύστημα τούς ἀριθμούς 101 , 110, 1100 , 1111, 10010 , 110001 , 111111, 1000010, τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

4) Πῶς γράφεται εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ὁ ἀκέραιος πού ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα
$\alpha = 5\cdot10^6 + 0\cdot10^5 + 0\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 8\cdot10^0$
καί πῶς εἰς τό δυαδικόν ὁ ἀκέραιος πού ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα
$\beta = 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0$;

5) Νά ἐπαληθεύσετε (καί ἄν ἠμπορῆτε, νά δείξετε) τό ἑξῆς: Οἱ ἀκέραιοι πού εἶναι διαιρετοί διά $2^1 = 2$, ἤ διά $2^2 = 4$ ἤ $2^3 = 8$ κ.ο.κ. ὅταν γραφοῦν εἰς τό δυαδικόν σύστημα, τελειώνουν εἰς 1 ἤ 2 ἤ 3 κ.ο.κ. μηδενικά.

Κεφάλαιον Θ΄. Διαιρετότης

§ 1 Διαιρέται ἀκεραίου καί πρῶτοι ἀριθμοί

1.1 Διαιρέται ἑνός ἀκεραίου. Ὅπως ἤδη εἴπαμεν, ὁ ἀκέραιος 28 διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό τόν φυσικόν ἀριθμόν 4, ἐπειδή

$$28 = 4 \cdot 7 \iff 28 : 4 = 7$$

Γενικῶς εἴπαμεν ὅτι ἕνας φυσικός ἀριθμός α διαιρεῖ ἀκριβῶς ἕνα ἀκέραιον β, ὅταν ὁ β εἶναι γινόμενον τοῦ α μέ κάποιον ἀκέραιον, ἔστω τόν π :

$$\beta = \alpha \cdot \pi \iff \beta : \alpha = \pi.$$

Συντόμως θά λέγωμεν τώρα ὅτι αὐτός ὁ φυσικός ἀριθμός α εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου β καί ὅτι ὁ β εἶναι διαιρετός διά α, θά μελετήσωμεν δέ εἰς τό Κεφάλαιον αὐτό τάς ἰδιότητας αὐτῆς τῆς σχέσεως μεταξύ β καί α ἡ ὁποία λέγεται διαιρετότης τοῦ β διά α. Αἱ ἰδιότητες αὐταί εἶναι ἀπαραίτητοι διά τά ἑπόμενα (π.χ. εἰς τήν μελέτην τῶν κλασμάτων).

1.2 Πλῆθος διαιρετῶν ἑνός ἀκεραίου. Ἀμέσως προκύπτει ἕνα πρῶτον ἐρώτημα : πόσους διαιρέτας ἠμπορεῖ νά ἔχῃ ἕνας ἀκέραιος ;

Παρατηροῦμεν τά ἑξῆς:

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 0 = $\{1,2,3,4,\ldots\}$ = σύνολον φυσικ. ἀριθμ.

" " " 1 = $\{1\}$

" " " 2 = $\{1,2\}$

" " " 3 = $\{1,3\}$

" " " 4 = $\{1,2,4\}$

Σύνολον διαιρετῶν τοῦ 5 = $\{1,5\}$
" " " 6 = $\{1,2,3,6\}$ κ.ο.κ.

Ὥστε κάθε ἀκέραιος β > 1 ἤ ἔχει δύο ἀκριβῶς διαιρέτας (τό 1 καί τόν ἑαυτόν του β) ἤ ἔχει περισσοτέρους τῶν δύο διαιρέτας καί, φυσικά , τό πολύ β τό πλῆθος διαιρέτας (τό 1, τόν ἑαυτόν του β καί ἕνα τουλάχιστον ἀκόμη διαιρέτην ὁ ὁποῖος εἶναι > 1 καί < β).

1.3 Πρῶτοι ἀριθμοί. Τά παραπάνω μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς.

Ἕνας ἀκέραιος > 1 λέγεται πρῶτος, ὅταν ἔχη δύο μόνον διαιρέτας, τό 1 καί τόν ἑαυτόν του, λέγεται σύνθετος, ὅταν ἔχη περισσοτέρους τῶν δύο διαιρέτας, τό 1, τόν ἑαυτόν του καί ἕνα ἄλλον ἀκόμη τουλάχιστον. Αἱ ὀνομασίαι πρῶτος καί σύνθετος δικαιολογοῦνται ἀπό τό ὅτι οἱ σύνθετοι ἀριθμοί εἶναι γινόμενα πρώτων ἀριθμῶν, π.χ. $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$. Ἰδού τώρα ποῖοι ἀπό τούς ἀκεραίους 2 ἕως 21 εἶναι πρῶτοι καί ποῖοι σύνθετοι.

ἀριθμοί	Διαιρέται	Συμπέρασμα	Ἀριθμοί	Διαιρέται	Συμπέρασμα
2	1, 2	πρῶτος	12	1,2,3,4,6,12	σύνθετος
3	1, 3	πρῶτος	13	1, 13	πρῶτος
4	1, 2, 4	σύνθετος	14	1,2,7,14	σύνθετος
5	1, 5	πρῶτος	15	1,3,5,15	σύνθετος
6	1,2,3,6	σύνθετος	16	1,2,4,8,16	σύνθετος
7	1, 7	πρῶτος	17	1 , 17	πρῶτος
8	1,2,4,8	σύνθετος	18	1,2,3,6 ,9,18	σύνθετος
9	1,3,9	σύνθετος	19	1, 19	πρῶτος
10	1,2,5,10	σύνθετος	20	1,2,4,5,10 20	σύνθετος
11	1, 11	πρῶτος	21	1,3,7,21	σύνθετος

Αὐτός ὁ πίναξ μᾶς βοηθεῖ νά κάμωμεν τήν ἑξῆς παρατήρησιν. Ἄν κατατάξωμεν τούς διαιρέτας ἑνός ἀκεραίου > 1 εἰς σειράν κατά αὐξάνον μέγεθος (αὐτό ἐκάμαμεν εἰς τήν στήλην τῶν διαιρετῶν), τότε ὁ δεύτερος εἰς τήν σειράν διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου εἶναι πάντοτε ἕνας πρῶτος ἀριθμός.

1.4 Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί ἐγνώριζον ὅτι τό σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots\}$$

δέν εἶναι πεπερασμένον καί ὅτι ἐπομένως δέν ἔχει μέγιστον στοιχεῖον (δέν ὑπάρχει μέγιστος πρῶτος ἀριθμός). Ἐγνώριζον ἐπίσης ὅτι δέν ὑπάρχει κανένας ἁπλοῦς κανών, ὁ ὁποῖος νά μᾶς δίδη τόν ἕνα μετά τόν ἄλλον ὅλους τούς διαφόρους πρώτους ἀριθμούς, εὗρον ὅμως μίαν ἁπλῆν μέθοδον, τό κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους, διά νά προσδιορίζωμεν τούς πρώτους ἀριθμούς πού εἶναι μικρότεροι ἀπό ἕνα διδόμενον ἀκέραιον. Π.χ. διά νά εὕρετε ὅλους τούς πρώτους ἀριθμούς τούς < 100, γράψατε τήν σειράν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπό τόν 2 ἕως τόν 99 καί κατόπιν διαγράψατε τούς συνθέτους ἀριθμούς πού περιέχονται εἰς αὐτήν μέ τόν ἑξῆς τρόπον. Ἡ σειρά ἀρχίζει ἀπό τόν 2 πού εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Κάθε δεύτερος ἀριθμός μετά τό 2 διαιρεῖται ἀκριβῶς διά 2 καί εἶναι σύνθετος· διαγράψατε λοιπόν κάθε δεύτερον ἀριθμόν μετά τόν 2. Ὁ μικρότερος ἀπό τούς ἀριθμούς πού δέν διεγράφησαν εἶναι ὁ 3 καί εἶναι φυσικά πρῶτος. Κάθε τρίτος ἀριθμός μετά τόν 3 εἶναι διαιρετός διά 3 καί ἐπομένως σύνθετος· διαγράφετε λοιπόν κάθε τρίτον ἀριθμόν μετά τόν 3. Ἀπό τούς μή διαγεγραμμένους ἀριθμούς ὁ μικρότερος 5 εἶναι πρῶτος, ἀλλά κάθε πέμπτος ἀριθμός μετά τόν 5 εἶναι διαιρετός διά 5 καί ἐπομένως σύνθετος· διαγράψατε λοιπόν κάθε πέμπτον ἀριθμόν μετά τόν 5.

Ὁμοίως διαγράφατε κάθε ἕβδομον ἀριθμόν μετά τόν 7. Ἡ περαιτέρω ἐφαρμογή τῆς μεθόδου δέν ὁδηγεῖ εἰς νέας διαγραφάς καί οἱ ἀπομένοντες μή διαγεγραμμένοι ἀριθμοί εἶναι οἱ ζητούμενοι πρῶτοι ἀριθμοί οἱ ≤ 99.

Ἔτσι θά εὕρετε ὅτι πρῶτοι ἀριθμοί < 100 εἶναι οἱ ἑξῆς:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

<u>1.5 Ἰδιότητες τῶν διαιρετῶν.</u> I) Ἄς πάρωμεν ἕνα φυσικόν ἀριθμόν, π.χ. τόν 4. Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων πού ἔχουν διαιρέτην τόν 4 εἶναι τό ἑξῆς ἄπειρον σύνολον μέ τά στοιχεῖα του κατατεταγμένα εἰς σειράν αὐξάνοντος μεγέθους.

$$\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\}$$

Πρῶτον στοιχεῖον τοῦ συνόλου εἶναι τό 0· κάθε ἄλλο στοιχεῖον προκύπτει ἀπό τό προηγούμενόν του, ὅταν εἰς τοῦτο προστεθῇ ὁ ἀριθμός 4. Μέ ἄλλας λέξεις, στοιχεῖα τοῦ συνόλου εἶναι κατά σειράν τά πολλαπλάσια τοῦ 4, δηλαδή τά γινόμενα τοῦ 4 μέ τούς διαδοχικούς ἀκεραίους 0,1,2,3,...

Γενικῶς τό σύνολον τῶν ἀκεραίων πού ἔχουν διαιρέτην τόν φυσικόν ἀριθμόν α εἶναι τό ἑξῆς ἀπειροσύνολον:

$$\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 6\alpha, 7\alpha, 8\alpha, \ldots\}$$

II) Ἀπό τάς ἰδιότητας § 4.6, II ἕως § 4.6,IV τῆς διαιρέσεως πού ἐμελετήσαμεν εἰς τό προηγούμενον Κεφάλαιον ἕπεται τό ἑξῆς: Ἐάν ἕνας φυσικός ἀριθμός α εἶναι διαιρέτης δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων θά εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ἀθροίσματος καί τοῦ γινομένου των, ἐπίσης θά εἶναι διαιρέτης τῆς διαφορᾶς δύο ὁποιωνδήποτε ἐξ αὐτῶν. Π.χ. ὁ 4 πού εἶναι διαιρέτης τῶν 8, 20, 60, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ $8 + 20 + 60 = 88$ καί τοῦ $8 \cdot 20 \cdot 60 = 8 \cdot 1200 = 9600$.

Ἐπίσης εἶναι διαιρέτης τῶν διαφορῶν $20 - 8 = 12$, $60 - 8 = 52$ καί $60 - 20 = 40$.

III) Ἀπό τήν ἰδιότητα § 4.6, V τῆς διαιρέσεως ἕπεται τό ἑξῆς. Ἐάν ἕνας φυσικός ἀριθμός α εἶναι διαιρέτης ἑνός ἀκεραίου β, θά εἶναι διαιρέτης καί τοῦ γινομένου βγ τοῦ β μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ἀκέραιον γ. Π.χ. ὁ 4 πού εἶναι διαιρέτης τοῦ 16 εἶναι διαιρέτης καί τοῦ $16 \cdot 3 = 48$.

IV) Ἀπό τάς ἰδιότητας II) καί III) ἕπεται τώρα ἡ ἑξῆς ἰδιότης:

Ἐάν ἕνας φυσικός ἀριθμός α εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου β καί τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ γ, τότε θά εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ β διά γ.

Π.χ. ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου 64 καί τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ 28· ἐπομένως εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ 64 διά 28, δηλαδή τοῦ 8.

Ἄξιον σημειώσεως εἶναι τοῦτο: μόνον τό ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως τοῦ β διά γ εἶναι πάντοτε διαιρετόν διά α, τό ἀκέραιον πηλίκον π τῆς διαιρέσεως αὐτῆς ἠμπορεῖ νά μή εἶναι διαιρετόν διά γ. Αὐτό συμβαίνει π.χ. είς τό παραπάνω παράδειγμα τῆς διαιρέσεως τοῦ 64 διά 28. Τό ὑπόλοιπον 8 τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι διαιρετόν διά 4 , τό ἀκέραιον πηλίκον ὅμως εἶναι 2 καί αὐτό δέν εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 24; τοῦ ἀριθμοῦ 48 ; τοῦ $96 = 2 \cdot 48$; τοῦ $192 = 2 \cdot 96$; τοῦ $384 = 2 \cdot 192$; Τί παρατηρεῖτε ;

2) Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ $25 = 5^2$; τοῦ ἀριθμοῦ $49 = 7^2$; τοῦ ἀριθμοῦ 11^2 ; τοῦ ἀριθμοῦ 13^2 ; Τί παρατηρεῖτε ;

3) Μία δύναμις $α^ν$ ἑνός ἀκεραίου $α > 1$ ἠμπορεῖ ἄραγε νά εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὅταν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι > 1;

4) Ἐπαληθεύσατε μέ δύο παραδείγματα τήν ἰδιότητα IV).

5) Ἐπαληθεύσατε μέ παραδείγματα τό ἑξῆς: Ἄν δύο ἀκέραιοι α καί β εἶναι διαιρετοί διά γ καί δ ἀντιστοίχως, τότε τό γινόμενον $\alpha\beta$ εἶναι διαιρετόν διά $\gamma\delta$. Μήπως βλέπετε τό διατί;

§ 2. Κριτήρια διαιρετότητος.

2.1 Κριτήριον διαιρετότητος διά α λέγεται ἕνας πρακτικός κανών πού μᾶς ἐπιτρέπει νά κρίνωμεν, ἄν ὁ φυσικός ἀριθμός α εἶναι διαιρέτης ἑνός δοθέντος ἀκεραίου β, χωρίς νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ β διά α. Τόν κανόνα αὐτόν θά τόν συμπεράνωμεν ἀπό ἕνα ἄλλον κανόνα πού μᾶς λέγει πῶς νά εὑρίσκωμεν εὔκολα τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διά α. Οἱ ἑπόμενοι κανόνες βασίζονται εἰς τό δεκαδικόν σύστημα γραφῆς τῶν ἀκεραίων καί δέν ἰσχύουν εἰς ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως.

I) Κριτήριον διαιρετότητος διά 10 ἤ 100 ἤ 1000 κ.ο.κ. Ἔστω ὁ ἀκέραιος 1452. Ἄν τόν γράφωμεν μέ τήν μορφήν

$$1452 = 145 \cdot 10 + 2,$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἡ διαίρεσίς του διά 10 ἀφήνει ὑπόλοιπον τό 2, δηλαδή τό τελευταῖον ψηφίον του. Ἄν τόν γράφωμεν μέ τήν μορφήν

$$1452 = 14 \cdot 100 + 52,$$

συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι ἡ διαίρεσίς του διά 100 ἀφήνει ὑπόλοιπον τό 52, δηλαδή τόν ἀριθμόν πού σχηματίζουν τά δύο τελευταῖα ψηφία του. Ἄν τόν γράφωμεν μέ τήν μορφήν

$$1452 = 1 \cdot 1000 + 452 ,$$

θά ἴδωμεν ὅτι ἡ διαίρεσίς του διά 1000 ἀφήνει ὑπόλοιπον τό 452, δηλαδή τόν ἀριθμόν πού σχηματίζουν τά τρία τελευταῖα ψηφία του, κ.ο.κ. Ἀπό αὐτά συμπεραίνομεν τό ἀκόλουθον κριτήριον διαιρετότητος διά 10 , 100, 1000, κ.ο.κ.

Διά νά εἶναι ἕνας ἀκέραιος διαιρετός διά 10, 100, 1000 κ.ο.κ. πρέπει καί ἀρκεῖ νά τελειώνη εἰς ἕνα, δύο τρία κ.ο.κ. μηδενικά.

II) Κριτήριον διαιρετότητος διά 2 ἤ διά 5. Ἔστω ὁ ἀκέραιος 459. Τόν γράφομεν μέ τήν μορφήν

$$459 = 45 \cdot 10 + 9.$$

Ἐπειδή ὁ 10 διαιρεῖται ἀκριβῶς διά 2 καί διά 5, τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 459 εἴτε διά 2 εἴτε διά 5 θά εἶναι τό ἴδιον μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου 9 διά 2 ἤ διά 5 ἀντιστοίχως.

Ἀπό τήν παρατήρησιν αὐτήν προκύπτουν τά ἀκόλουθα δύο κριτήρια διαιρετότητος.

Διά 2 εἶναι διαιρετοί οἱ ἀκέραιοι πού τελειώνουν εἰς 0 ἤ 2 ἤ 4 ἤ 6 ἤ 8 καί μόνον αὐτοί.

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι τῆς μορφῆς $2 \cdot \mu$, ὅπου μ ἀκέραιος, καί λέγονται ἄρτιοι (ζυγοί). Οἱ ἄλλοι ἀκέραιοι λέγονται περιττοί (μονοί) καί ἀφήνουν ὑπόλοιπον τό 1, ὅταν διαιρεθοῦν διά 2, δι'αὐτό εἶναι τῆς μορφῆς $2\mu + 1$, ὅπου μ ἀκέραιος.

Διά 5 εἶναι διαιρετοί οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού τελειώνουν εἰς 0 ἤ εἰς 5 καί μόνον αὐτοί.

III) Κριτήριον διαιρετότητος διά 4 ἤ διά 25. Ἔστω ὁ ἀκέραιος 9538· ἠμποροῦμεν νά τόν γράφωμεν ἔτσι:

$$9538 = 95 \cdot 100 + 38.$$

Ἐπειδή ὁ 100 διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά 4 καί διά 25, τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 9538 διά 4 ἤ 25 θά εἶναι τό ἴδιον μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 38 διά 4 ἤ διά 25. Γενικῶς ἰσχύει τό ἑξῆς:

Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου $\geqslant 10$ διά 4 ἤ διά 25 εἶναι ἴσον μέ τό ὑπόλοιπον πού εὑρίσκομεν διαιροῦντες διά 4 ἤ διά 25 τόν ἀριθμόν τόν ὁποῖον σχηματίζουν τά δύο τελευαῖα ψηφία τοῦ ἀκεραίου κατά τήν σειράν μέ τήν ὁποίαν εἶναι γραμμένα .

Ἀπό αὐτά συμπεραίνομεν τό ἑξῆς:

Διά νά εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός $\geqslant 10$ διαιρετός διά 4 ἤ διά 25 πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ ἀριθμός τόν ὁποῖον σχηματίζουν τά δύο τελευταῖα ψηφία του νά εἶναι διαιρετός διά 4 ἤ διά 25. Π.χ. ὁ 236 εἶναι διαιρετός διά 4 διότι ὁ 36 εἶναι διαιρετός διά 4.

IV) Κριτήριον διαιρετότητος διά 9 ἤ διά 3. Ἔστω ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 754. Ἠμποροῦμεν νά τόν γράψωμεν ἔτσι:

$$754 = 7\cdot 100 + 5\cdot 10 + 4.$$

Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς :

$$100 = 99 + 1 = 11\cdot 9 + 1 \Longrightarrow 7\cdot 100 = 77\cdot 9 + 7$$

$$10 = 9 + 1 = 1\cdot 9 + 1 \Longrightarrow 5\cdot 10 = 5\cdot 9 + 5$$

Ἄρα

$$\begin{aligned} 754 = 7\cdot 100 + 5\cdot 10 + 4 &= 77\cdot 9 + 7 + 5\cdot 9 + 5 + 4 \\ &= (77+5)\cdot 9 + (7+5+4) \\ &= \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9 + (7+5+4). \end{aligned}$$

Ἑπομένως οἱ δύο ἀριθμοί 754 καί $(7+5+4) = 16$, ὅταν διαιρεθοῦν διά 9, θά ἀφήσουν τό ἴδιον ὑπόλοιπον.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδή $9 = 3\cdot 3$, θά ἔχωμεν καί τήν ἰσότητα

$$754 \cong \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 3 + (7+5+4).$$

Ἑπομένως οἱ δύο ἀριθμοί 754 καί $(7+5+4) = 16$, ὅταν διαιρεθοῦν διά 3, θά ἀφήσουν τό ἴδιον ὑπόλοιπον.

Γενικῶς ἰσχύει τό ἑξῆς: Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου $\geqslant 10$ διά 9 ἤ διά 3 ἠμποροῦμεν νά τό εὕρωμεν διαιροῦντες τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διά 9 ἤ διά 3.

Ὥστε διά νά εἶναι ἕνας ἀκέραιος $(\geqslant 10)$ διαιρετός διά 9 ἤ διά 3 πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νά εἶναι διαιρετόν διά 9 ἤ διά 3.

Π.χ. ὁ ἀκέραιος 7965 εἶναι διαιρετός διά 9, ἐπειδή τό ἄ -

θροισμα τών ψηφίων του, $7 + 9 + 6 + 5 = 27$, είναι διαιρετόν διά 9. Ὁ ἀκέραιος 7962 δέν εἶναι διαιρετός διά 9, ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, $7 + 9 + 6 + 2 = 24$, δέν εἶναι διαιρετόν διά 9, εἶναι ὅμως διαιρετός διά 3 ἐπειδή τό ἄθροισμα τοῦτο εἶναι διαιρετόν διά 3.

2.2 Δοκιμή ἑνός πολλαπλασιασμοῦ ἤ μιᾶς διαιρέσεως μέ τήν βοήθειαν τοῦ 9. Αἱ δοκιμαί αὐταί στηρίζονται εἰς τάς ἑξῆς ἰδιότητας τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων διά 9 τά ὁποῖα εἴδαμεν προηγουμένως πόσον εὔκολα προσδιορίζονται. Διά νά διατυπώσωμεν συντομώτερα τάς ἰδιότητας αὐτάς θά καλέσωμεν κατάλοιπον ἑνός ἀκεραίου τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά 9.

I) Ἄν τά κατάλοιπα δύο ἀκεραίων εἶναι ἄνισα, τότε προφανῶς καί οἱ ἀκέραιοι θά εἶναι ἄνισοι· ἄν τά κατάλοιπα εἶναι ἴσα, τότε οἱ δύο ἀκέραιοι ἤ εἶναι ἴσοι ἤ διαφέρουν κατά ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 9. Π.χ. οἱ ἀριθμοί 78 καί 96 ἔχουν τό ἴδιον κατάλοιπον 6, διαφέρουν δέ κατά $18 = 2\cdot 9 =$ πολλαπλάσιον τοῦ 9.

II) Τό κατάλοιπον ἑνός ἀθροίσματος (ἤμιᾶς διαφορᾶς) δέν μεταβάλλεται ἄν ἀντικαταστήσωμεν τούς προσθετέους (ἤ τούς ὅρους τῆς διαφορᾶς) μέ τά κατάλοιπά τους. Π.χ. τό κατάλοιπον τοῦ $52 + 67 = 119$ εἶναι τό ἴδιον μέ τό κατάλοιπον τοῦ $7 + 4 = 11$, δηλαδή τό 2.

III) Τό κατάλοιπον ἑνός γινομένου δέν μεταβάλλεται ἄν ἀντικαταστήσωμεν τούς παράγοντας μέ τά κατάλοιπά τους. Π.χ. τό κατάλοιπον τοῦ $52\cdot 67 = 3484$ εἶναι τό ἴδιον μέ τό κατάλοιπον τοῦ $7\cdot 4 = 28$, δηλαδή τό 1.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νά ἐλέγξωμεν τό ἐξαγόμενον 40218 πού ηὕραμεν ἐκτελοῦντες τόν πολλαπλασιασμόν $718\cdot 56$.

Εὑρίσκομεν τά κατάλοιπα 7 καί 2 τῶν παραγόντων καί σχηματίζομεν τό γινόμενόν τους 14. Παρατηροῦμεν ἔπειτα ὅτι κατάλοιπον τοῦ 14 εἶναι τό 5, ἐνῶ κατάλοιπον τοῦ 40218 εἶναι 6. Ἄρα τό ἐξαγόμενον 40218 δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι ὀρθόν. Καί πράγματι τό ὀρθόν γινόμενον εἶναι 40208. Μία συνήθης διάταξις τῆς δοκιμῆς δίεται παραπλεύρως. Τό συμπέρασμα πού βγάζομεν εἶναι τό ἑξῆς: ἐάν $\gamma \neq \delta$,

α = κατάλοιπον τοῦ 1ου παράγοντος	β = κατάλοιπον τοῦ 2ου παράγοντος
γ = κατάλοιπον τοῦ δοκιμαζομένου γινομένου	δ = κατάλοιπον τοῦ γινομένου αβ

τότε τό δοκιμαζόμενον γινόμενον εἶναι ἐξάπαντος ἐσφαλμένον, ἐάν $\gamma = \delta$, τότε τό γινόμενον εἶναι πιθανῶς ὀρθόν, δέν ἀποκλείεται ὅμως ἡ περίπτωσις, τό γινόμενον πού δοκιμάζομεν νά διαφέρῃ ἀπό τό ὀρθόν κατά ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 9.

2.3 Δοκιμή μιᾶς διαιρέσεως μέ τήν βοήθειαν τοῦ 9. Ἔστω ὅτι θέλομεν νά ἐλέγξωμεν τήν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ 763 διά 56 ἡ ὁποία ἔδωσε ὡς ἀποτέλεσμα: πηλίκον 13 καί ὑπόλοιπον 34. Ἄν τά ἐξαγόμενα αὐτά εἶναι ὀρθά, θά πρέπει νά ἔχωμεν

$$763 = 56 \cdot 13 + 34.$$

Ἄρα θά πρέπει τό κατάλοιπον 7 τοῦ 763 νά ἰσοῦται μέ τό κατάλοιπον τοῦ ἀθροίσματος $(56 \cdot 13) + 34$, ἄρα (σύμφωνα μέ τάς ἰδιότητας II) καί III)) μέ τό κατάλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ $(2 \cdot 4) + 7 = 15$, δηλαδή μέ τό 6. Ἐπειδή ὅμως $7 \neq 6$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως δέν ἦτο ὀρθή. Πράγματι τά ὀρθά ἐξαγόμενα εἶναι : πηλίκον 13, ὑπόλοιπον 35.

Μία συνήθης διάταξις τῆς δοκιμῆς δίδεται παραπλεύρως. Τό συμπέρασμα πού βγάζομεν εἶναι τό ἑξῆς:

α = κατάλοιπον τοῦ διαιρετέου	β = κατάλοιπον τοῦ διαιρέτου
δ = κατάλοιπον τοῦ δοκιμαζομένου ὑπολοίπου	γ = κατάλοιπον τοῦ δοκιμαζομένου πηλίκου

Ἄν ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης: κατάλοιπον τοῦ $(\beta\gamma + \delta) \neq \alpha$, τότε ἡ δοκιμαζομένη διαίρεσις δέν ἐξετελέσθη ὀρθά. "Αν ἰσχύη ἡ ἰσότης: κατάλοιπον τοῦ (βγ+δ) = α, τότε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη πιθανῶς ὀρθά, δέν ἀποκλείεται ὅμως καί ἡ περίπτωσις τά εὑρεθέντα πηλίκον καί ὑπόλοιπον νά διαφέρουν ἀπό τά ὀρθά κατά πολλαπλάσια τοῦ 9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Χωρίς νά ἐκτελέσετε τήν ἀντίστοιχον πρᾶξιν διαιρέσεως νά εὕρετε τά ὑπόλοιπα τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων:
204 διά 4 , 342 διά 5 , 473 διά 25 , 730 διά 9 , 2211 διά 3, 4009 διά 9 , 10967 διά 25 , 524103 διά 25 , 15023 διά 1000, 625437 διά 9, 1254678 διά 10000.

2) Χωρίς νά ἐκτελέσετε τάς διαιρέσεις νά εὕρετε ποῖοι ἀπό τούς ἀριθμούς

171 , 439 , 12490 , 75237 , 602408, 1200342

εἶναι διαιρετοί διά 2, ποῖοι διά 3, ποῖοι διά 4, ποῖοι διά 5 , ποῖοι διά 9 καί ποῖοι διά 25.

3) Συμπληρώσατε τό ψηφίον πού λείπει εἰς τούς ἀριθμούς

30;4 , ;5730 , 1246; , 836;57

κατά τρόπον ὥστε οἱ προκύπτοντες ἀριθμοί νά εἶναι διαιρετοί διά 9.

4) Νά εὕρετε τόν μικρότερον ἀκέραιον πού πρέπει καί ἀρκεῖ νά προσθέσετε εἰς τόν ἀριθμόν 803642 διά νά προκύψη ἀριθμός διαιρετός ἀντιστοίχως διά 3 ἤ διά 4 ἤ διά 9.

5) Πῶς φαίνεται ἀμέσως, ἄν ἐφαρμόσετε κάποιο κριτήριον διαιρετότητος, ὅτι οἱ ἀκέραιοι 117 , 303 , 3237 δέν εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί ;

6) Νά ἐπαληθεύσετε μέ δύο παραδείγματα τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου μέ τέσσερα ἤ περισσότερα ψηφία διά 8 (ἤ διά 125) εἶναι τό ἴδιον μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά 8 (ἤ διά 125) τοῦ ἀριθμοῦ τόν ὁποῖον σχηματίζουν ὅπως εἶναι γραμμένα, τά τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀκεραίου.
Προσπαθήσατε νά ἐξηγήσετε αὐτήν τήν ἰδιότητα μέ τρόπον ὅμοιον πρός ἐκεῖνον πού ἐχρησιμοποιήθη εἰς τήν διαίρεσιν ἑνός ἀκεραίου διά 4 ἤ διά 25. Ποῖον κριτήριον διαιρετότητος διά 8 (ἤ διά 125) προκύπτει ἀπό τήν ἰδιότητα ;

7) Παραστήσατε μέ α τόν μικρότερον ἀπό τρεῖς διαδοχικούς ἀκεραίους. Πῶς παριστάνονται τότε οἱ ἑπόμενοι δύο ; καί ποία

εἶναι ἡ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ; Μήπως ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε ἀπό τήν παράστασιν αὐτήν ὅτι γενικῶς τό ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετόν διά 3 ;
Δώσατε δύο ἀριθμητικά παραδείγματα διά τήν ἰδιότητα αὐτήν.

8) Ἐπαληθεύσατε εἰς δύο παραδείγματα τήν ἑξῆς γενικήν ἰδιότητα: Ἐάν δύο ἀκέραιοι α καί β (ὁ $\alpha \geqslant \beta$) δίδουν ἴσα ὑπόλοιπα, ὅταν διαιρεθοῦν μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν γ, τότε ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά γ.

9) Μέ τήν βοήθειαν τῆς προηγουμένης ἰδιότητος προσπαθήσατε νά δείξετε τά ἑξῆς: Ἐάν α εἶναι ἕνας ἀκέραιος καί α΄ ὁ ἀκέραιος πού προκύπτει ἀπό τόν α μέ ἀλλαγήν τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων τοῦ α, τότε ἡ διαφορά μεταξύ α καί α΄ εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά 9. Δώσατε καί δύο ἀριθμητικά παραδείγματα.

10) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ δύο πράξεις

$$13^3 \cdot 12^2 \quad \text{καί} \quad (8^3 \cdot 5^2) : (4^2 \cdot 5)$$

καί τά ἀποτελέσματα νά ἐλεγχθοῦν μέ τήν βοήθειαν τοῦ 9.
Νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις τοῦ 105243 διά 6790 καί τό ἀποτέλεσμα νά ἐλεγχθῆ μέ τό 9.

§ 3. Ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας.

3.1 Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός $\alpha > 1$ ἤ εἶναι πρῶτος, ὅπως π.χ. ἄν $\alpha = 7$, ἤ εἶναι σύνθετος, ἄν π.χ. $\alpha = 90$.
Εἰς τήν δευτέραν αὐτήν περίπτωσιν ὁ α ἰσοῦται μέ ἕνα γινόμενον ἐντελῶς ὡρισμένων πρώτων ἀριθμῶν πού ἐξαρτῶνται φυσικά ἀπό τόν ἀριθμόν α καί καλοῦνται πρῶτοι παράγοντες τοῦ α. Τούς παράγοντας αὐτούς τούς εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες διαδοχικάς τελείας διαιρέσεις μέ διαιρέτας πρώτους ἀριθμούς. Π.χ. διά τόν σύνθετον ἀριθμόν 90 ἔχομεν τήν ἑξῆς σειράν διαιρέσεων. Ὁ ἐλάχιστος πρῶτος διαιρέτης τοῦ 90 εἶναι ὁ 2· ἔχομεν $90 = 2 \cdot 45$. Ὁ ἐλάχιστος πρῶτος διαιρέτης τοῦ 45 εἶναι ὁ 3· ἔχομεν $45 = 3 \cdot 15$ καί ἑπομένως $90 = 2 \cdot 3 \cdot 15$. Ὁ 15 εἶναι σύνθετος καί ἔχει ἐλάχιστον πρῶτον διαιρέτην τόν 3· ἐπειδή

$15 = 3\cdot 5$ θά ἔχωμεν $90 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$. Τό τελευταῖον αὐτό γινόμενον δέν περιέχει πλέον σύνθετον παράγοντα, γράφεται δέ συντομώτερα ἔτσι: $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$.

Αἱ διαδοχικαί τέλειαι διαιρέσεις τάς ὁποίας ἐκάμαμεν διά νά τό εὕρωμεν, διατάσσονται πρακτικῶς μέ τόν σχηματικόν τρόπον πού ὑποδεικνύομεν παραπλεύρως.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ἄρα $90 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2\cdot 3^3\cdot 5$

<u>3.2</u> Ἤδη οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί ἐγνώριζον ὅτι, ὅταν δοθῇ ὁ σύνθετος ἀκέραιος α, ὁποιανδήποτε πορείαν διαδοχικῶν διαιρέσεων καί ἄν ἀκολουθήσωμεν, θά φθάσωμεν τελικῶς εἰς τό ἴδιον πάντοτε γινόμενον πρώτων παραγόντων· μόνον ἡ σειρά τῶν παραγόντων ἠμπορεῖ νά εἶναι διαφορετική.

Καλοῦμεν τώρα ἀνάλυσιν ἑνός ἀκεραίου $α > 1$ εἰς πρώτους παράγοντας ἤ αὐτόν τόν ἴδιον ἀριθμόν α, ἐάν εἶναι πρῶτος, ἤ ἐάν εἶναι σύνθετος, τό γινόμενον τῶν ἐντελῶς ὡρισμένων πρώτων ἀριθμῶν πρός τό ὁποῖον ἰσοῦται ὁ α. Ἐάν εἰς τό γινόμενον αὐτό παρουσιάζονται παράγοντες ἴσοι μεταξύ τους, τότε κατά κανόνα τούς ἀντικαθιστοῦμεν μέ μίαν δύναμιν.

Π.χ. ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας τοῦ 19 εἶναι ὁ 19 καί τοῦ 4680 τό γινόμενον $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 13 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$.

Ἡ ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα, ὅπως θά ἴδωμεν εἰς τά ἑπόμενα. Ἐδῶ θά ἀναφέρωμεν μόνον μίαν ἐφαρμογήν της.

<u>3.3</u> Ἄς πάρωμεν τόν ἀκέραιον

$$α = 90 = 2\cdot 3^2\cdot 5 = 2^1\cdot 3^2\cdot 5^1$$

καί ἔστω δ ἕνας διαιρέτης του μεγαλύτερος ἀπό τό 1, π.χ. ὁ 15. Ἄν ἀναλύσωμεν τόν δ εἰς πρώτους παράγοντας

$$δ = 15 = 3\cdot 5 = 2^0\cdot 3^1\cdot 5^1,$$

θά διαπιστώσωμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις αὐτή δέν περιέχει παράγοντας διαφορετικούς ἀπό τούς 2 , 3 , 5 τῆς ἀναλύσεως τοῦ α καί ὅτι οἱ ἐκθέται των εἰς τήν ἀνάλυσιν τοῦ δ εἶναι μικρότεροι ἤ ἴσοι τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν εἰς τήν ἀνάλυσιν τοῦ α Αὐτή ἡ ἰδιότης ἰσχύει γενικά: ἐάν α εἶναι ἕνας ἀκέραιος > 1 καί δ ἕνας διαιρέτης του ἐπίσης > 1 , τότε ἡ ἀνάλυσις τοῦ δ εἰς πρώτους δέν θά περιέχη παράγοντας ἄλλους ἀπό τούς πρώτους παράγοντας τῆς ἀναλύσεως τοῦ α καί αὐτούς θά τούς περιέχη εἰς δυνάμεις τό πολύ ἴσας ἀντιστοίχως.

Κατά ταῦτα οἱ διαιρέται τοῦ $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ θά εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu}$, ὅπου $\kappa = 0$ ἤ 1 , $\lambda = 0$ ἤ 1 ἤ 2 καί $\mu = 0$ ἤ 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀναλύσατε εἰς πρώτους παράγοντας τούς ἀκεραίους : 107 , 525 , 660 , 882 , 1859.

2) Ὁ ἐλάχιστος πρῶτος παράγων (ἤ διαιρέτης) τοῦ 247 εἶναι ὁ 13. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος πρῶτος παράγων του ; Ὁ ἐλάχιστος πρῶτος παράγων τοῦ 629 εἶναι ὁ 17· ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος πρῶτος παράγων του ;

3) Ἀναλύσατε εἰς πρώτους παράγοντας τόν ἀκέραιον 1125. Ἕνας διαιρέτης τοῦ 1125 ποίους πρώτους παράγοντας ἠμπορεῖ νά ἔχη ; καί τόν καθένα εἰς ποίαν δύναμιν τόν πολύ ;

4) Ἀναλύσατε εἰς πρώτους παράγοντας τά <u>τετράγωνα</u> τῶν ἀκεραίων

$7,\ 6 = 2 \cdot 3,\ 15 = 3 \cdot 5,\ 12 = 2^2 \cdot 3,\ 18 = 2 \cdot 3^2,\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$

Θά παρατηρήσετε ὅτι οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων εἰς τάς ἀναλύσεις αὐτάς εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοί. Ἡ ἰδιότης αὐτή ἰσχύει διά τήν ἀνάλυσιν εἰς πρώτους παράγοντας τοῦ τετραγώνου κάθε ἀκεραίου. Ἐπαληθεύσατέ την καί εἰς ἄλλα παραδείγματα.

5) Ἀναλύσατε εἰς πρώτους παράγοντας τούς ἀριθμούς

324 , 1225 , 1296 , 1521 , 1764.

Βάσει τῶν ἀναλύσεων αὐτῶν νά εὕρετε τίνων ἀκεραίων τετράγωνα εἶναι οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

6) Διατί οἱ ἀκέραιοι μέ τάς ἀκολούθους ἀναλύσεις

$2^3 \cdot 5^2 \quad , \quad 3^2 \cdot 7 \quad , \quad 5 \cdot 11^2 \quad , \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

δέν ἠμποροῦν νά εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων ;

§ 4. Κοινοί διαιρέται δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων. Μέγιστος κοινός διαιρέτης.

4.1 Ἄς λάβωμεν δύο ἀκεραίους ἀριθμούς , π.χ. τούς 12, 18, καί ἄς σχηματίσωμεν τό σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ καθενός χωριστά :

σύνολον διαιρετῶν τοῦ 12 : $A = \{1,2,3,4,6,12\}$,

σύνολον διαιρετῶν τοῦ 18 : $B = \{1,2,3,6,9,18\}$.

Ἄς μορφώσωμεν τώρα τήν τομήν T τῶν συνόλων A καί B:

$$T = A \cap B = \{1,2,3,6\}.$$

Ἡ τομή αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό τούς κοινούς διαιρέτας τοῦ 12 καί τοῦ 18, δηλαδή ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς πού διαιροῦν ἀκριβῶς καί τόν 12 καί τόν 18. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τό σύνολον T περιέχει ἕνα ἐλάχιστον στοιχεῖον, τό 1, ἕνα μέγιστον στοιχεῖον τό 6, καί ὅτι ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ 6.

Ἄς λάβωμεν τώρα τρεῖς ἀκεραίους, π.χ. τούς 5 , 0 , 10 ,καί ἄς ἐργασθῶμεν μέ ὅμοιον τρόπον:

σύνολον διαιρετῶν τοῦ 5 : $\Gamma = \{1,5\}$,

σύνολον διαιρετῶν τοῦ 0 : $\Phi = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$,

σύνολον διαιρετῶν τοῦ 10: $\Delta = \{1,2,5,10\}$.

Ἄρα

σύνολον κοινῶν διαιρετῶν τῶν (5,0,10)

$$= \Gamma \cap \Phi \cap \Delta = \{1,5\} = \text{σύνολον διαιρετῶν τοῦ } 5.$$

Γενικῶς ἰσχύουν τά ἑξῆς: Ἄς εἶναι α,...,μ δύο ἤ περισσότεροι ἀκέραιοι ἀπό τους ὁποίους ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$, π.χ. ἔστω $\alpha \neq 0$. Τό σύνολον K τῶν κοινῶν διαιρετῶν τους, περιέχει ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖον, τό 1, καί εἶναι πεπερασμένον διότι ὅλα τά στοιχεῖα του εἶναι $\leqslant \alpha$. Ἑπομένως τό σύνολον K περιέχει ἕνα μέγιστον στοιχεῖον, πού εἶναι ὁ μέγιστος

κοινός διαιρέτης τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν α,...,μ.
Ὁ μέγιστος αὐτός κοινός διαιρέτης ἔχει τήν σπουδαίαν ἰδιότητα, τό σύνολον τῶν διαιρετῶν του νά ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν α,...,μ. Ἔτσι τούς κοινούς διαιρέτας δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων τούς εὑρίσκομεν προσδιορίζοντες τούς διαιρέτας ἑνός μόνον ἀκεραίου.
Εἰς τό ἑξῆς θά παριστάνωμεν τόν μέγιστον κοινόν διαιρέτην τῶν α,...,μ μέ τήν συντομογραφίαν μ.κ.δ. (α,...,μ). Ἔχομεν λοιπόν τήν ἰδιότητα:

σύνολον κοινῶν διαιρετῶν τῶν (α,...,μ)

= σύνολον διαιρετῶν τοῦ μ.κ.δ. (α,...,μ).

Π.χ. μ.κ.δ. (8,0,50,40) = μ.κ.δ.(8,50,40) = 2,
σύνολον κ.δ. (8,0,50,40) = $\{1,2\}$ = σύνολον διαιρετῶν τοῦ 2.

4.2 Ἀριθμοί πρῶτοι μεταξύ τούς (ἤ πρῶτοι πρός ἀλλήλους)

Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ περίπτωσις κατά τήν ὁποίαν μ.κ.δ. τῶν θεωρουμένων ἀκεραίων εἶναι ὁ ἀριθμός 1. Οἱ θεωρούμενοι ἀκέραιοι λέγονται τότε πρῶτοι μεταξύ τους. Π.χ. ὁ 6 εἶναι πρῶτος πρός τόν 17, ἐπειδή μ.κ.δ. (6,17) = 1. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί 4,6,11 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, ἐπειδή

μ.κ.δ. (4,6,11) = 1.

4.3 Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου. I) Ἄς θεωρήσωμεν τόν μ.κ.δ. (16,36,14) = 2 καί ἄς ἀντικαταστήσωμεν τόν 36 μέ τήν διαφοράν 36 - 16 = 20 θά παρατηρήσωμεν ὅτι

μ.κ.δ. (16, 36, 14) = μ.κ.δ.(16,20,14).

Γενικῶς, ὁ μ.κ.δ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων δέν ἀλλάζει ἄν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἐξ αὐτῶν μέ τήν διαφοράν μεταξύ αὐτοῦ καί ἑνός ἄλλου ἀπό τούς δοθέντας.
II) Μία συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

῎Ας πάρωμεν πάλιν τόν μ.κ.δ. (16,36,14) καί ἄς διαιρέσωμεν τόν 36 διά 16· θά λάβωμεν ὑπόλοιπον 4 καί θά διαπιστώσωμεν ὅτι

$$\mu.\kappa.\delta.\ (16,36,14) = \mu.\kappa.\delta.\ (16,4,14)$$

Γενικῶς, ὁ μ.κ.δ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων δέν ἀλλάζει, ἄν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἐξ αὐτῶν μέ τό ὑπόλοιπον πού εὑρίσκομεν διαιροῦντες αὐτόν μέ ἕνα ἄλλον ἀπό τούς δοθέντας.

<u>4.4 Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος</u>. Εἰς τήν τελευταίαν ἰδιότητα βασίζεται μία μέθοδος διά νά εὑρίσκωμεν, μέ διαδοχικάς διαιρέσεις, τόν μ.κ.δ. δύο ἀκεραίων, χωρίς νά γνωρίζωμεν, προηγουμένως τό σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τους. Ἡ μέθοδος ὠνομάσθη <u>Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος</u>, ἀπό τό ὄνομα του μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ Εὐκλείδου πού τήν ἐδίδαξε εἰς τά "Στοιχεῖα του". Ἔστω π.χ. ὅτι ζητεῖται ὁ μ.κ.δ.(648,150). Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 648 διά 150 εἶναι 48, ἄρα μ.κ.δ. (648,150) = μ.κ.δ. (48,150). Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 150 διά 48 εἶναι 6, ἄρα μ.κ.δ.(48,150) = = μ.κ.δ(48,6). Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 48 διά 6 εἶναι 0, ἄρα μ.κ.δ.(48,6) = μ.κ.δ.(0,6) = 6. Ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου γίνεται μέ τόν ἀκόλουθον σχηματικόν τρόπον:

πηλίκα		4	3	8
ἀριθμοί	648	150	48	6
ὑπόλοιπα	48	6	0	

<u>Κανών</u>. Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀκεραίων α, β, ὅπου $\alpha \geqslant \beta > 0$, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τόν α διά β. Ἐάν τό ὑπόλοιπον υ_1 τῆς διαιρέσεως εἶναι $= 0$, τότε μ.κ.δ.(α,β) = β. Ἐάν $\upsilon_1 > 0$ τότε διαιροῦμεν τόν β διά υ_1. Ἐάν τό προκύπτον ὑπόλοιπον υ_2 εἶναι $= 0$, τότε μ.κ.δ.(α,β) = υ_1, ἐάν $\upsilon_2 > 0$, τότε διαιροῦμεν τόν υ_1 διά υ_2 καί συνεχίζομεν τήν ἐργασίαν μέ ὅ-

μοιον τρόπον μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν διαίρεσιν μέ ὑπόλοιπον 0. (Αὐτό θά συμβῆ κατ'ἀνάγκην, ἐπειδή οἱ ἀκέραιοι $\beta, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots$ γίνονται ὁλοέν μικρότεροι). Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως, πού εἶναι τελεία, εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.(α,β).

<u>4.5 Μ.κ.δ. περισσοτέρων ἀπό δύο ἀκεραίων.</u> Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ μ.κ.δ.(360,480,784). Εὑρίσκομεν πρῶτα μέ τόν Εὐκλείδειον ἀλγόριθμον ὅτι μ.κ.δ.(360,480) = 120. Ὅπως γνωρίζομεν, οἱ διαιρέται τοῦ 120 ταυτίζονται μέ τούς κοινούς διαιρέτας τῶν (360,480).

Ἄρα

$$\text{μ.κ.δ.}(360,480,784) = \text{μ.κ.δ.}(120,784).$$

Ἐφαρμόζοντες μίαν δευτέραν φοράν τόν Εὐκλείδειον ἀλγόριθμον εὑρίσκομεν: μ.κ.δ.(120,784) = 8. Ἄρα

$$\text{μ.κ.δ.}(360,480,784) = 8.$$

Ὥστε, διά νά εὕρωμεν τόν μέγιστον κοινόν διαιρέτην τριῶν ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων, τούς κατατάσσομεν εἰς μίαν σειράν καί εὑρίσκομεν διαδοχικά: 1ον τόν μ.κ.δ. τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς, 2ον τόν μ.κ.δ. τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς καί τοῦ εὑρεθέντος μ.κ.δ., 3ον τόν μ.κ.δ. τοῦ τετάρτου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς καί τοῦ νέου εὑρεθέντος μ.κ.δ., καί οὕτω καθεξῆς μέχρι καί τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς. Τό τελικόν ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινός διαιρέτης ὅλων τῶν δοθέντων ἀκεραίων καί ἑπομένως εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν χρησιμοποιηθεῖσαν κατάταξίν τους εἰς σειράν.

<u>4.6 Ἄλλος τρόπος προσδιορισμοῦ τοῦ μ.κ.δ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων.</u> Ὁ τρόπος αὐτός βασίζεται εἰς τήν ἀνάλυσιν τῶν θεωρουμένων ἀκεραίων εἰς πρώτους παράγοντας, διά

τήν περίπτωσιν φυσικά πού ὅλοι οἱ δοθέντες ἀκέραιοι εἶναι > 1. Ἡ περίπτωσις αὐτή εἶναι ἡ μόνη πού χρειάζεται νά ἐξετάσωμεν, διότι ἐάν ἕνας ἐκ τῶν δοθέντων εἶναι $= 0$, τότε αὐτός ἠμπορεῖ νά παραλειφθῆ χωρίς νά μεταβληθῆ ὁ ζητούμενος μ.κ.δ., καί ἐάν ἕνας ἐκ τῶνδοθέντων εἶναι $= 1$, τότε προφα- ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. εἶναι $= 1$.

Ἄς ἀναζητήσωμεν τώρα μέ τόν δεύτερον αὐτόν τρόπον τόν μ.κ.δ(360,480,784).

Ἀναλύομεν τούς δοθέντας τρεῖς ἀκεραίους εἰς πρώτους παράγοντας:

$$360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5 \ , \quad 480 = 2^5\cdot 3\cdot 5 \ , \quad 784 = 2^4\cdot 7^2.$$

<u>Κοινός πρῶτος παράγων</u> εἰς τάς τρεῖς ἀναλύσεις εἶναι μόνον ὁ 2 καί ἡ ἐλαχίστη δύναμις μέ τήν ὁποίαν ἐμφανίζεται εἶναι ἡ 2^3.

Ὁ μ.κ.δ. (360,480,784) δέν ἠμπορεῖ νά ἔχη ἄλλον πρῶτον παράγοντα ἀπό τόν 2 καί τοῦτον θά τόν ἔχη εἰς τήν ἐλαχίστην δύναμιν ἡ ὁποία ἐμφανίζεται εἰς τάς ἀναλύσεις. Ἄρα μ.κ.δ.(360,480,784) = 8.

Ὁμοίως διά νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ.(96,240,168) ἀναλύομεν πρῶτα τούς τρεῖς ἀκεραίους εἰς πρώτους παράγοντας:

$$96 = 2^5\cdot 3 \ , \quad 240 = 2^4\cdot 3\cdot 5 \ , \quad 168 = 2^3\cdot 3\cdot 7.$$

Κοινοί πρῶτοι παράγοντες εἰς τάς ἀναλύσεις εἶναι ὁ 2 καί ὁ 3, ὁ 2 παρουσιάζεται μέ ἐλαχίστην δύναμιν τήν 2^3, ὁ 3 μέ ἐλαχίστην δύναμιν τήν 3^1. Ὁ μ.κ.δ.(96,240,168) θά ἔχη ὡς μόνους παράγοντας αὐτούς τούς κοινούς 2 καί 3, ἕκαστον ὑψωμένον εἰς τήν ἐλαχίστην δύναμιν μέ τήν ὁποίαν παρουσιάζεται εἰς τάς ἀναλύσεις. Ἔτσι ἔχομεν

$$\text{μ.κ.δ}(96,240,168) = 2^3\cdot 3^1 = 24.$$

Κανών. Διά νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων > 1, τούς ἀναλύομεν εἰς τούς πρώτους παράγοντάς των.

Εάν αί άναλύσεις δέν περιέχουν κανένα κοινόν είς όλας πρῶτον παράγονται, τότε ό ζητούμενος μ.κ.δ εἶναι = 1. 'Εάν ὑπάρχουν ἕνας ἤ περισσότεροι πρῶτοι παράγοντες κοινοί είς ὅλας τάς άναλύσεις, τότε ὁ μ.κ.δ. ἔχει αὐτόν ἤ αὐτούς ὡς μόνους παράγοντας, ἕκαστον ὑψωμένον είς τήν ἐλαχίστην δύναμιν μέ τήν ὁποίαν παρουσιάζεται είς τάς ἀναλύσεις τῶν θεωρουμένων ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὕρετε τό σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν τριῶν ἀκεραίων 15, 20, 30 προσδιορίζοντες 1ον τά τρία σύνολα τῶν διαιρετῶν τοῦ καθενός των χωριστά καί 2ον τήν τομήν τῶν τριῶν αὐτῶν συνόλων. Ποῖος εἶναι λοιπόν ὁ μ.κ.δ.(15,20,30);

2) Νά εὕρετε μέ τόν Εὐκλείδειον ἀλγόριθμον τόν μ.κ.δ(348,96) καί τόν μ.κ.δ.(120,226).

3) 'Η διαίρεσις ἑνός ἀκεραίου α διά 72 ἀφήνει ὑπόλοιπον 64. Ποῖος εἶναι ὁ μ.κ.δ. τοῦ α καί τοῦ 72;

4) 'Εφαρμόζοντες ἐπανειλημμένα τήν ἰδιότητα 4.3,ΙΙ) τοῦ μ.κ.δ. σχηματίζομεν τόν πίνακα τῶν ἀριθμῶν πού βλέπετε παραπλεύρως καί εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως ὅτι μ.κ.δ.(96,160,220) = 4. Προσπαθήσατε νά ἐξηγήσετε τόν τρόπον τῆς ἐργασίας.

96	160	220
96	64	28
12	8	28
4	8	4
4	0	0

5) Νά εὕρετε τόν μ.κ.δ.(288,320) καί τόν μ.κ.δ.(252, 396,468) μέ τήν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.

6) Γνωρίζετε ὅτι διαιροῦντες τούς ἀκεραίους 132 καί 284 διά x θά εὕρετε ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 17 καί 8. Ἄρα ποίων ἀκεραίων κοινός διαιρέτης εἶναι ὁ x ; Καί ποία εἶναι ἑπομένως ἡ τιμή τοῦ x ;

7) Δίδεται ὁ ἀκέραιος 1524 καί ζητεῖται ἕνας ἀκέραιος x διά τόν ὁποῖον νά ἔχωμεν $x < 1524$ καί μ.κ.δ.(1524,x) = 127. Προσδιορίσατε τάς τέσσαρας τιμάς τάς ὁποίας ἠμπορεῖ νά ἔχη ὁ x.

8) Τέσσερα εὐθύγραμμα τμήματα μέ ἀντίστοιχα μήκη 240m, 165 m , 210 m καί 255 m ἐμετρήθησαν μέ τό ἴδιον εὐθύγραμμον τμῆμα· τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθ-

μοί. Ποῖον ἠμπορεῖ νά εἶναι τό μῆκος εἰς μέτρα τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος;

9) Πρόκειται νά στρώσωμεν μίαν πλατεῖαν σχήματος ὀρθογωνίου καί διαστάσεων 240 dm × 560 dm (dm = δεκατόμετρον = ἕνα δέκατον τοῦ μέτρου) μέ ἴσας τετραγωνικάς πλάκας μικροτέρας τοῦ 1 m^2 καί μεγαλυτέρας τοῦ 4 dm^2. Μέ πόσα dm ἠμπορεῖ νά ἰσοῦται ἡ πλευρά τῶν πλακῶν ;

10) Ἕνας ἀνθοπώλης ἔχει 150 λευκά, 240 ρόζ καί 180 κόκκινα γαρύφαλα. Κατά πόσους τρόπους ἠμπορεῖ νά σχηματίση μέ αὐτά ὁμοίας ἀνθοδέσμας (δηλαδή ἀνθοδέσμας μέ ἴσον ἀριθμόν λευκά, ἴσον ἀριθμόν ρόζ καί ἴσον ἀριθμόν κόκκινα γαρύφαλα) ὅταν ἡ κάθε ἀνθοδέσμη δέν πρέπη νά περιέχη περισσότερα ἀπό 60 γαρύφαλα καί κανέναν γαρύφαλον δέν μένη ἀχρησιμοποίητον ;

11) Εἰς ἕνα ἀριθμόν x ἀτόμων ἐμοιράσθησαν ἐξ ἴσου 16995 δρχ. μίαν πρώτην φοράν καί 64890 δρχ μία δευτέραν φοράν. Διά τόν ἀριθμόν x εἶναι γνωστόν ὅτι περιελαμβάνετο μεταξύ 100 καί 200. Πόσα ἦσαν τά ἄτομα καί πόσας δραχμάς ἔλαβε ἕκαστος ;

§ 5. Κοινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον.

5.1 Πολλαπλάσια ἑνός ἀκεραίου. Ὅπως γνωρίζομεν, πολλαπλάσια ἑνός ἀκεραίου λέγονται τά γινόμενά του μέ τούς διαφόρους ἀκεραίους ἀριθμούς 0,1,2,3,4,... , Ἔτσι ἔχομεν:

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 0 $= \{0\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 1 $= \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 2 $= \{0,2,4,6,8,\dots\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 3 $= \{0,3,6,9,12,\dots\}$,

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 0 ἔχει ἕνα μόνον στοιχεῖον, τό 0· ἀντιθέτως τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων ἑνός ἀκεραίου $\varphi > 0$ ἔχει ἀπειράριθμα στοιχεῖα μέ ἐλάχιστον, ὄχι μηδενικόν στοιχεῖον τόν ἀριθμόν φ.

5.2 Μία ἰδιότης τῶν πολλαπλασίων ἑνός ἀκεραίου. Ἄς θεωρήσωμεν τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων ἑνός ἀκεραίου, π.χ. τοῦ 5 :

$$\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,\ldots\},$$

καί ἄς ἐκτελέσωμεν μίαν πρόσθεσιν ἤ μίαν ἀφαίρεσιν ἤ ἕνα πολλαπλασιασμόν ἐπί ὁποιωνδήποτε στοιχείων του· θά διαπιστώσωμεν ὅτι τό ἐξαγόμενον εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ συνόλου. Π.χ.

$$10 + 15 = 25, \quad 35 - 5 = 30, \quad 5 \cdot 10 = 50.$$

Γενικῶς, αἱ τρεῖς πράξεις πρόσθεσις, ἀφαίρεσις καί πολλαπλασιασμός, ὅταν ἐκτελεσθοῦν ἐπί πολλαπλασίων ἑνός καί τοῦ ἰδίου ἀκεραίου, ἔχουν πάντοτε ὡς ἐξαγόμενα πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ. Ἀντιθέτως, τό ἀκριβές πηλίκον δύο πολλαπλασίων τοῦ ἰδίου φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἠμπορεῖ νά μή εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ· π.χ. 15 : 5 = 3, ὅπου τό 3 δέν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἐνῶ οἱ δύο ὅροι τῆς διαιρέσεως εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5.

5.3 Κοινά πολλαπλάσια δύο φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἄς πάρωμεν δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 3 καί 4, καί ἄς σχηματίσωμεν τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ καθενός χωριστά:

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 3 : $A = \{0,3,6,9,12,15,18,21,\ldots\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 4 : $B = \{0,4,8,12,16,20,24,28,\ldots\}$,

Ἄν μορφώσωμεν τώρα τήν τομήν τῶν δύο συνόλων A,B, θά εὕρωμεν

$A \cap B = \{0,12,24,36,\ldots\}$ = σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 12.

Ἡ τομή αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά πολλαπλάσια τοῦ 3 καί τοῦ 4 (μέ ἄλλας λέξεις, ἀπό τούς ἀκεραίους πού διαιροῦνται ἀκριβῶς καί διά 3 καί διά 4), ἔχει ἕνα ἐλάχιστον, ὄχι μηδενικόν στοιχεῖον, τό 12, καί ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 12.

Ὁμοίας παρατηρήσεις ἠμποροῦμεν νά κάμωμεν, ἄν λάβωμεν τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς. Π.χ. ἔχομεν

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 3: $A = \{0,3,6,9,12,15,18,21,\dots\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 4: $B = \{0,4,8,12,16,20,24,28,\dots\}$,

σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 5: $\Gamma = \{0,5,10,15,20,25,30,\dots\}$

καί ἑπομένως

$A \cap B \cap \Gamma = \{0,60,120,180,\dots\}$ = σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 60.

Γενικῶς ἰσχύουν τά ἑξῆς: Ἄς εἶναι α,...,μ δύο ἤ περισσότεροι φυσικοί ἀριθμοί. Τό σύνολον Π τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τους περιέχει ἀπειράριθμα στοιχεῖα, διότι μεταξύ ἄλλων περιέχει τό γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καθώς καί τά πολλαπλάσιά του. Ὅπως ὅμως γνωρίζομεν , ἕνα σύνολον ἀποτελούμενον ἀπό δύο ἤ περισσοτέρους ἀκεραίους ἔχει ἕνα ἐλάχιστον, ὄχι μηδενικόν στοιχεῖον. Ἄρα καί τό σύνολον Π τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν α,...,μ ἔχει ἕνα ἐλάχιστον,ὄχι μηδενικόν στοιχεῖον, πού λέγεται <u>ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον</u> τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν. Τό ἐλάχιστον αὐτό κοινόν πολλαπλάσιον ἔχει τήν σπουδαίαν ἰδιότητα , τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων του νά ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν α,...,μ . Ἔτσι τά κοινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν τά εὑρίσκομεν προσδιορίζοντες τά πολλαπλάσια ἑνός μόνον φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Εἰς τά ἑπόμενα θά παριστάνωμεν τό ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν α,...,μ μέ τήν συντομογραφίαν ε.κ.π.(α,...,μ). Ἔχομεν λοιπόν τήν ἰδιότητα:

σύνολον κοινῶν πολλαπλασίων τῶν α,...,μ .

= σύνολον πολλαπλασίων τοῦ ε.κ.π. (α,...,μ)

Π.χ.

$$\text{ε.κ.π.}(4,6,48) = 48$$

καί

σύνολον κοινῶν πολλαπλασίων τῶν 4,6,48 = $\{0,48,96,\dots\}$
= σύνολον πολλαπλασίων τοῦ 48.

5.4 Εὕρεσις τοῦ ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἀρχίζομεν μέ δύο χρησίμους παρατηρήσεις.

I) Ἐάν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς τῶν ὁποίων ζητεῖται τό ε.κ.π. διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα ἄλλον ἐξ αὐτῶν, τότε ἡ παράλειψίς του ἀφήνει ἀμετάβλητον τό ζητούμενον ε.κ.π. Π.χ.

$$\text{ε.κ.π.}\ \{1,4,24\} = \text{ε.κ.π.}\ \{4,24\} = 24.$$

II) Ἐάν ἕνας ἀπό τούς θεωρουμένους ἀριθμούς εἶναι πολλαπλάσιον ὅλων τῶν ἄλλων (δηλαδή διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπό ὅλους τούς ἄλλους) τότε αὐτός εἶναι τό ζητούμενον ε.κ.π. Π.χ.

$$\text{ε.κ.π.}(4,6,24) = 24.$$

Ἔστω τώρα ὅτι ζητοῦμεν τό ε.κ.π.(28,60,75), ὅπου κανείς ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι διαιρέτης ἑνός ἄλλου. Ἀναλύομεν τούς ἀριθμούς εἰς τούς πρώτους παράγοντάς των:

$$28 = 2^2\cdot 7\ ,\ 60=2^2\cdot 3\cdot 5\ ,\ 75 = 3\cdot 5^2.$$

Τό ζητούμενον ε.κ.π. εἶναι διαιρετόν διά 28, ἄρα ἡ ἀνάλυσίς του εἰς πρώτους παράγοντας πρέπει νά περιέχῃ τούς παράγοντας $2^2\cdot 7$. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ ἀνάλυσις αὐτή πρέπει νά περιέχῃ τούς παράγοντας $2^2\cdot 3\cdot 5$ καθώς καί τούς $3\cdot 5^2$. Ὁ ἐλάχιστος ἀκέραιος πού εἰς τήν ἀνάλυσίν του περιέχει ὅλους αὐτούς τούς πρώτους παράγοντας εἶναι ὁ $2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$. Ἄρα

$$\text{ε.κ.π.}(28,60,75) = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7 = 2100.$$

Κανών. Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν, παραλείπομεν ὅσους εἶναι διαιρέται ἄλλων μεταξύ τῶν δοθέντων καί ἀναλύομεν τούς ὑπολειπομένους εἰς τούς πρώτους παράγοντάς των. Ἐάν ὅλαι αἱ ἀναλύσεις περιέχουν ἕνα μόνον καί τόν ἴδιον πρῶτον παράγοντα, τότε τό ε.κ.π. εἶναι ἡ μεγίστη δύναμις μέ τήν ὁποίαν ὁ παράγων αὐτός ἐμφανίζεται εἰς τάς ἀναλύσεις. Ἐάν αἱ ἀναλύσεις περιέχουν διαφόρους πρώτους παράγοντας, τότε τό ζητούμενον ε.κ.π. εἶναι τό γινόμενον τῶν μεγίστων δυνάμεων μέ τάς ὁποίας οἱ παράγοντες αὐτοί, κοινοί καί μή κοινοί, ἐμφανίζονται εἰς τάς ἀναλύσεις. Π.χ.

$$\text{ε.κ.π.}(2^3\cdot 5^3\cdot 11, 2\cdot 5\cdot 7^2, 3\cdot 11^2) = 2^3\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^2 = 17787000$$

<u>5.5</u> Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων ἠμποροῦμεν νά ἐργασθῶμεν καί ὡς ἑξῆς: Παράδειγμα:

60	20	40	8	
15	5	10	2	4
15	5	5	1	2
3	1	1	1	5

ε.κ.π.(60,20,40,8) = 4·2·5·3 = 120

Γράφομεν τούς δοθέντας ἀκεραίους εἰς μίαν ὁριζόντιον σειράν καί χαράσσομεν εἰς τά δεξιά των μίαν κατακόρυφον γραμμήν. Ἐάν δύο ἤ περισσότεροι ἐκ τῶν ἀκεραίων ἔχουν ἕνα κοινόν διαιρέτην > 1, τότε σημειώνομεν τόν διαιρέτην αὐτόν δεξιά ἀπό τήν κατακόρυφον γραμμήν, διαιροῦμεν μέ αὐτόν ἐκείνους ἐκ τῶν ἀκεραίων πού εἶναι διαιρετοί καί γράφομεν κάτωθέν τους τά ἀκριβῆ πηλίκα.

Κάτωθεν τῶν ἀκεραίων πού δέν εἶναι διαιρετοί γράφομεν τούς ἰδίους ὑτούς ἀριθμούς. Τήν παραπάνω ἐργασίαν τήν ἐπαναλαμβάνομεν μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν ὁριζόντιον σειράν πού νά ἀποτελῆται ἀπό ἀκεραίους οἱ ὁποῖοι δέν ἔχουν ἀνά δύο κοινόν διαιρέτην > 1. Τό ζητούμενον ε.κ.π. ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν διαιρετῶν πού ἐγράφαμεν δεξιά ἀπό τήν κατακόρυφον πολλαπλασιασμένον μέ τό γινόμενον τῶν ἀριθμῶν πού ἐλάβαμεν εἰς τήν τελευταίαν σειράν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχηματίσετε τό σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 καί ἔπειτα τό ὑποσύνολον ἐκείνων ἐξ αὐτῶν πού περιέχονται μεταξύ 50 καί 100.

2) Νά σχηματίσετε τό σύνολον τῶν παλλαπλασίων τοῦ καθενός ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 6 καί 9 καί ἔπειτα τήν τομήν τῶν τριῶγ αὐτῶν συνόλων. Ποῖον εἶναι τό ε.κ.π.(2,6,9);

3) Ποῖοι ἀπό τούς ἀριθμούς 567, 985, 1470, 3948 καί 15480 διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 2 καί ποῖοι διά 5 ; Ἐπομένως ποῖοι ἀπό τούς ἀριθμούς αὐτούς εἶναι κοινά πολλαπλάσια τοῦ 2 καί τοῦ 5 ;

4) Ποῖοι ἀπό τούς ἀριθμούς 7134 , 963 , 2274 , 4617 εἶναι κοινά πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2 καί 3 ;

5) Πολλαπλασιάσατε τό 21 διαδοχικῶς ἐπί 1,2,3,4,... μέχρις ὅτου εὕρετε γινόμενον διαιρούμενον ἀκριβῶς διά 12. Ποῖον εἶναι λοιπόν τό ε.κ.π.(12,21) ;
Εὑρῆτε μέ ὅμοιον τρόπον τό ε.κ.π. (70,84).

6) Εὑρῆτε τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν
α) $2^3\cdot3^2\cdot5$ καί $2^2\cdot3\cdot5\cdot7$,
β) $2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7$, $2\cdot3\cdot5\cdot11$ καί $2\cdot5\cdot7^2$,
γ) 756 καί 792 ,
δ) 1512 , 1584 καί 1784.

7) Προσδιορίσατε τόν ἐλάχιστον ἀκέραιον ὁ ὁποῖος ἀφήνει ὑπόλοιπον 1, ὅταν διαιρεθῆ εἴτε διά 3 εἴτε διά 5 εἴτε διά 6. Ὁμοίως τόν ἐλάχιστον ἀκέραιον ὁ ὁποῖος ἀφήνει ὑπόλοιπον 10 ὅταν διαιρεθῆ εἴτε διά 35 εἴτε διά 28 εἴτε διά 42.

8) Νά εὕρετε τόν μ.κ.δ. καί τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν $A = 2\cdot3\cdot5^2\cdot7$ καί $B = 2^2\cdot3^4\cdot5$. Ἔπειτα νά συγκρίνετε τό γινόμενον $A\times B$ μέ τό γινόμενον μ.κ.δ.(Α,Β)× ε.κ.π.(Α,Β). Τί παρατηρεῖτε ; Τό ἴδιον διά τούς $A' = 175$ καί $B' = 38$.

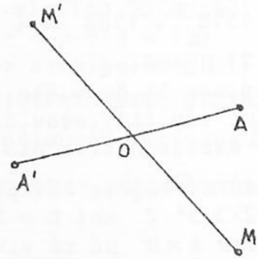
9) Τά πλοῖα μιᾶς ἀκτοπλοϊκῆς γραμμῆς ἀναχωροῦν ἀπό τόν Πειραιᾶ κάθε 4 ἡμέρας, μιᾶς ἄλλης γραμμῆς κάθε 5 ἡμέρας καί μιᾶς τρίτης γραμμῆς κάθε 6 ἡμέρας. Ἄν αἱ ἀναχωρήσεις τῶν πλοίων καί τῶν τριῶν γραμμῶν ἔγιναν τήν ἰδίαν ἡμέραν μετά πόσας ἡμέρας θά ἐπαναληφθῆ τοῦτο ;

10) Τρία κινητά σημεῖα M_1 , M_2 , M_3 ἐκτελοῦν περιφοράς ἐπάνω εἰς τρεῖς περιφερείας τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου περί τό κοινόν κέντρον Ο τῶν περιφερειῶν. Τό M_1 ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιφοράν εἰς 252 sec (δευτερόλεπτα), τό M_2 εἰς 308 sec καί τό M_3 εἰς 198 sec. Ὑποθέτομεν ὅτι κατά μίαν χρονικήν στιγμήν καί τά τρία κινητά εὑρίσκονται ἐπί μιᾶς ὡρισμένης ἡμιευθείας ΟΑ τοῦ ἐπιπέδου.
Μετά πόσα δευτερόλεπτα τά τρία κινητά θά εὑρίσκωνται πάλιν συγχρόνως ἐπί τῆς ἡμιευθείας ΟΑ ;

Κεφάλαιον Ι΄

§ 1. Συμμετρία ὡς πρός σημεῖον εἰς τό ἐπίπεδον

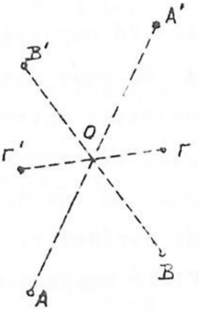
1.1 Συμμετρικόν ἑνός σημείου. Ἔστω Ο ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί Α ἕνα τυχόν ἄλλο σημεῖον του. Χαράσσομεν τό τμῆμα ΑΟ καί τό προεκτείνομεν πέραν τοῦ Ο κατά ἕνα τμῆμα ΟΑ΄ ἴσον μέ ΑΟ. Τό σημεῖον Α΄, εἰς τό ὁποῖον καταλήγομεν, λέγεται συμμετρικόν τοῦ Α ὡς πρός Ο.



Ὡς συμμετρικόν Ο΄ τοῦ Ο ὡς πρός Ο ὁρίζομεν φυσικά τό Ο, δηλαδή Ο ≡ Ο. Σύμφωνα μέ αὐτόν τόν ὁρισμόν, ἄν Μ΄ εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ Μ ὡς πρός Ο, τότε συμμετρικόν τοῦ Μ΄ ὡς πρός Ο εἶναι τό Μ. Διά τοῦτο τά δύο σημεῖα Μ καί Μ΄ λέγονται συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός Ο. Τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ΄ πού ἑνώνει δύο ὁποιαδήποτε συμμετρικά σημεῖα ὡς πρός Ο περνᾶ λοιπόν ἀπό τό Ο καί ἔχει ὡς μέσον του τό σημεῖον Ο: ΜΟ = ΟΜ΄. Τό Ο λέγεται κέντρον τῆς θεωρουμένης συμμετρίας. Κατά ταῦτα τό κέντρον μιᾶς συμμετρίας εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνα ζεῦγος (Β,Β΄) συμμετρικῶν σημείων ἐκ τῆς συμμετρίας· πράγματι τό κέντρον ταυτίζεται τότε μέ τό μέσον τοῦ τμήματος ΒΒ΄.

Παρατηροῦμεν τώρα τό ἑξῆς: Ἄν στρέφωμεν τό ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του περί τό σημεῖον Ο κατά γωνίαν 180^0, τότε κάθε σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου θά ἔλθῃ εἰς τήν θέσιν τοῦ συμμετρικοῦ του Α.

<u>1.2 Συμμετρικόν ἑνός σχήματος.</u> Ἕνα σχῆμα S τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα σύνολον $\{A, B, \Gamma, \ldots\}$ σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἄν τῶν διαφόρων σημείων Α,Β,Γ,... τοῦ S θεωρήσωμεν τά συμμετρικά Α΄, Β΄, Γ΄,... ὡς πρός Ο, τότε θά προκύψῃ ἕνα σύνολον $\{A', B', \Gamma', \ldots\}$ σημείων; τό σύνολον αὐτό θά εἶναι ἕνα σχῆμα S΄ πού λέγεται <u>συμμετρικόν τοῦ S ὡς πρός Ο</u>. Ἀντιστρόφως <u>συμμετρικόν τοῦ S΄ ὡς πρός Ο</u> θά εἶναι τό S. Τά δύο σχήματα λέγονται <u>συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός Ο.</u>



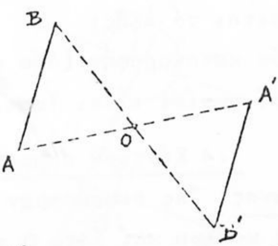
Ἐπειδή μέ μίαν στροφήν τοῦ ἐπιπέδου περί τό Ο κατά γωνίαν 180° τό σύνολον

$$S = \{A, B, \Gamma, \ldots\}$$

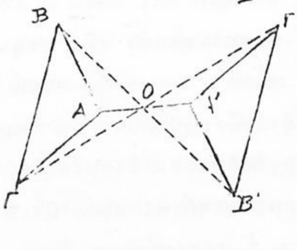
θά ἔλθῃ εἰς την θέσιν τοῦ συνόλου

$$S' = \{A', B', \Gamma', \ldots\}$$

συμπεραίνομεν ὅτι δύο σχήματα συμμετρικά ὡς πρός Ο εἶναι ἐφαρμόσιμα τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου, ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἔτσι π.χ. τό συμμετρικόν ἑνος τμήματος ΑΒ εἶναι ἕνα ἴσον τμῆμα Α΄Β΄ μέ ἄκρα τά σημεῖα Α΄, Β΄ πού εἶναι συμμετρικά τῶν ἄκρων Α, Β τοῦ ΑΒ.

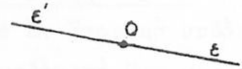


Τό συμμετρικόν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἕνα ἴσον τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μέ κορυφάς τά σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ πού εἶναι τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ τοῦ ΑΒΓ.

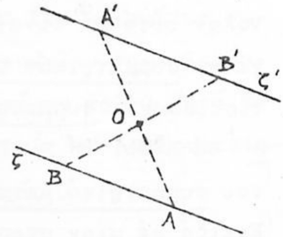


1.3 Μερικαί ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις.

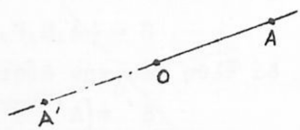
I) Τό συμμετρικόν ε΄μιᾶς εὐθείας ε πού διέρχεται ἀπό τό κέντρον συμμετρίας Ο εἶναι ἡ ἰδία εὐθεία ε.



II) Τό συμμετρικόν μιᾶς εὐθείας ζ ἡ ὁποία δέν διέρχεται ἀπό τό κέντρον συμμετρίας Ο εἶναι μία εὐθεῖα ζ΄ παράλληλος πρός τήν ζ.

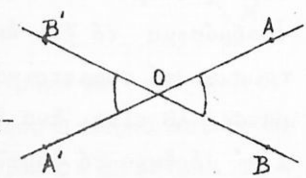


III) Τό συμμετρικόν μιᾶς ἡμιευθείας ΟΑ ὡς πρός τήν ἀρχήν της Ο εἶναι ἡ ἀντίθετος ἡμιευθεῖα ΟΑ΄, δηλαδή ἡ ἡμιευθεῖα πού ἔχει ἀρχήν τό Ο, φορέα τόν ἴδιον μέ τήν ἡμιευθεῖαν ΟΑ ἀλλά φοράν ἀντίθετον.

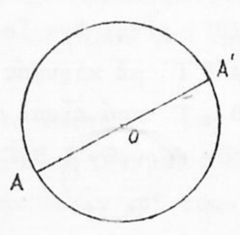


IV) Τό συμμετρικόν μιᾶς κυρτῆς γωνίας ∢(ΟΑ,ΟΒ) ὡς πρός τήν κορυφήν της Ο εἶναι ἡ κατακορυφήν (ἡ ἀντικόρυφος) κυρτή γωνία ∢(ΟΑ΄,ΟΒ΄). Ἀπό τήν ἰσότητα δύο συμμετρικῶν σχημάτων ἕπεται τό ἑξῆς:

Δύο κατακορυφήν (δύο ἀντικόρυφοι) κυρταί γωνίαι εἶναι ἴσαι.



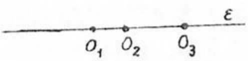
1.4 Κέντρον συμμετρίας ἑνός σχήματος. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου καί ἔστω Ο τό κέντρον της. Τό συμμετρικόν τῆς περιφερείας ὡς πρός Ο εἶναι προφανῶς αὐτή ἡ ἰδία περιφέρεια· πράγματι τά ἄκρα Α καί Α΄ μιᾶς ὁποιασδήποτε διαμέτρου εἶναι σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός Ο. Δι΄αὐτό λέγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἔχει κέντρον συμμετρίας τό κέντρον της



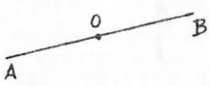
Ο. Δι'όμοιον λόγον ένας κύκλος (ένας κυκλικός δίσκος) έχει κέντρον συμμετρίας τό κέντρον του Ο.

Γενικώς, ένα σχήμα S τοῦ ἐπιπέδου ἔχει κέντρον συμμετρίας ἕνα σημεῖον Ο, ὅταν τό συμμετρικόν S΄ τοῦ S ὡς πρός Ο εἶναι αὐτό τό ἴδιον τό S, μέ ἄλλας λέξεις ὅταν τό S΄συμπίπτη μέ τό S. Τά σημεῖα τοῦ S εἶναι τότε ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός Ο καί μία στροφή τοῦ ἐπιπέδου περί τό Ο κατά γωνίαν 180^0 φέρνει τό S εἰς ἐφαρμογήν μι τόν ἑαυτόν του.

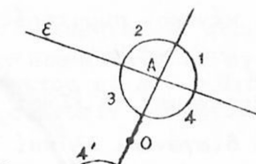
Ἰδού τώρα μερικά παραδείγματα σχημάτων πού ἔχουν ἕνα ἤ περισσότερα κέντρα συμμετρίας.



Ι) Μία (ἀπεριόριστος) εὐθεῖα ε ἔχει κέντρον συμμετρίας κάθε σημεῖον της, ἄρα ἔχει ἀπειράριθμα κέντρα συμμετρίας. Ἀντιθέτως μία ἡμιευθεῖα Αx δέν ἔχει κανένα κέντρον συμμετρίας.



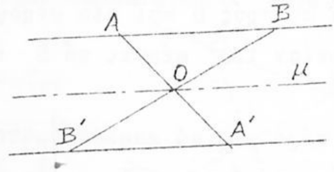
Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει ἕνα μοναδικόν κέντρον συμμετρίας, τό μέσον του Ο.



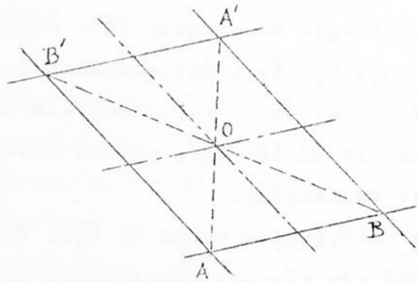
ΙΙ) Ἄς θεωρήσωμεν τό σχῆμα S πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο παραλλήλους εὐθείας ε καί ε΄ καί μίαν τέμνουσαν τ. Ἄς εἶναι Α καί Α΄ τά σημεῖα τομῆς τῆς τ μέ τάς εὐθείας ε καί ε΄ καί Ο τό μέσον τοῦ τμήματος ΑΑ΄. Τό Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ S, διότι τά συμμετρικά τῶν ε, ε΄καί τ ὡς πρός Ο εἶναι ἀντιστοίχως τά ε΄, ε καί τ. Ἰδού τώρα ἕνα ἀξιοσημείωτον συμπέρασμα ἀπό τήν ἰδιότητα τοῦ S νά ἔχη κέντρον συμμετρίας τό Ο. Αἱ γωνίαι $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ πού σχηματίζον ται γύρω είς τό σημεῖον τομῆς Α ἔχουν ὡς συμμετρικά τους σχήματα τάς γωνίας $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}'$ ἀντιστοίχως αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται γύρω είς τό σημεῖον τομῆς Α΄· ἄρα ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$\hat{1} = \hat{1}' , \hat{2} = \hat{2}' , \hat{3} = \hat{3}' , \hat{4} = \hat{4}'$$

III) Μία ἀπεριόριστος ταινία ἔχει ἀπειράριθμα κέντρα συμμετρίας: τά διάφορα σημεῖα τῆς μεσοπαραλλήλου της μ. Είς τό σχῆμα ἐσημειώθη ἕνα ἀπό αὐτά, τό Ο.



IV) Ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΑ΄Β΄ εἶναι τομή δύο ταινιῶν.



Τό σημεῖον Ο είς τό ὁποῖον τέμνονται αἱ μεσοπαράλληλοι τῶν δύο ταινιῶν εἶναι κοινόν κέντρον συμμετρίας τῶν δύο ταινιῶν· ἄρα τό Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας (καί μάλιστα τό μόνον) τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΑ΄Β΄. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν τά ἑξῆς:

α) Αἱ διαγώνιοι ΑΑ΄καί ΒΒ΄τέμνονται είς τό Ο καί ἔχουν τό σημεῖον τοῦτο ὡς μέσον.

β) Αἱ ἀπέναντι πλευραί ΑΒ καί Α΄Β΄εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός Ο καί ἐπομένως ἴσαι.

Ὁμοίως εἶναι ἴσαι αἱ ἀπέναντι πλευραί ΒΑ΄ καί Β΄Α.

Είδικῶς λοιπόν τό ὀρθογώνιον καί τό τετράγωνον, πού εἶναι παραλληλόγραμμα, ἔχουν κέντρον συμμετρίας τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Είς τάς επομένας ασκήσεις είναι σκόπιμον τό συμμετρικόν ἑνός σχήματος νά χαραχθῆ καί νά σημειωθῆ μέ μολύβι χρώματος διαφορετικοῦ ἀπό ἐκεῖνο πού ἐχρησιμοποιήθη διά τό ἀρχικόν σχῆμα.

1) Ἐπάνω εἰς τετραγωνισμένον χαρτί ἠμπορεῖτε νά εὕρετε χωρίς σχεδιαστικά ὄργανα τό συμμετρικόν ἑνός σημειοσυνόλου πού ἀποτελεῖται ἀπό κόμβους τοῦ τετραγωνισμοῦ, ἀρκεῖ τό κέντρον συμμετρίας νά εἶναι καί αὐτό κόμβος.
Μέ αὐτόν τόν τρόπον νά εὕρετε τά συμμετρικά δύο σημειοσυνόλων

$$E_1 = \{A,B,\Gamma\} \quad \text{καί} \quad E_2 = \{\Delta,E,Z,H\}$$

πού ἀποτελοῦνται ἀπό τρεῖς ἀντιστοίχως τέσσαρας κόμβους ὡς πρός δύο κόμβους O_1 καί O_2 ἀντιστοίχως.

2) Σχεδιάσατε ἕνα κυρτόν πεντάγωνον μέ κορυφάς πέντε κόμβους καί προσδιορίσατε τό συμμετρικόν του ὡς πρός μίαν ἀπό τάς κορυφάς αὐτάς. Κατόπιν ἀντιγράψατε τό ἕνα ἀπό τά δύο πεντάγωνα ἐπάνω εἰς διαφανές καί ἐπαληθεύσατε ὅτι τό ἀντίγραφον αὐτό εἶναι ἐφαρμόσιμον εἰς τό ἄλλο πεντάγωνον.

3) Νά σχεδιάσετε ἐπάνω εἰς τό τετραγωνισμένον χαρτί τά κεφαλαῖα γράμματα Α , Γ , Ε, Ν οὕτως ὥστε τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα τέμνονται ἤ τελειώνουν τά εὐθύγραμμα τμήματά τους νά συμπίπτουν μέ κόμβους τοῦ τετραγωνισμοῦ. Κατόπιν νά προσδιορίσετε τά συμμετρικά τῶν σχεδιασμένων γραμμάτων ὡς πρός ἕνα κόμβον τοῦ χαρτιοῦ.

4) Νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτην τό συμμετρικον ἑνός τμήματος ΑΒ ὡς πρός κέντρον συμμετρίας 1ον ἕνα σημεῖον O_1 εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ τμήματος μέ $AO_1 > O_1B$ καί 2ον ἕνα σημεῖον O_2 ἀνῆκον εἰς τήν προέκτασιν τοῦ ΒΑ πέραν ἀπό τό Α.

5) Ἀφοῦ πάρετε ἐπί εὐθείας 4 διαδοχικά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ διά τά ὁποῖα νά ἔχετε τάς σχέσεις $B\Gamma = 2AB$ καί $\Gamma\Delta = AB$, νά προσδιορίσετε τά συμμετρικά τους A', B', Γ', Δ' ὡς πρός Β. Ποῖαι σχέσεις ἰσχύουν μεταξύ τῶν τμημάτων $A'B'$, $B'\Gamma'$, $\Gamma'\Delta'$;

6) Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καί ἔπειτα τό συμμετρικόν του ὡς πρός κέντρον συμμετρίας 1ον τήν κορυφήν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας καί 2ον τό μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

7) Νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνον καί τό συμμετρικόν του ὡς πρός τό μέσον μιᾶς πλευρᾶς του. Τί σχῆμα ἀποτελεῖ ἡ ἕνωσις τῶν δύο τετραγώνων πού κατεσκευάσατε ;

8) Σχεδιάσατε ἕνα ἡμικύκλιον ἀκτῖνος 2 cm μέ κέντρον τό Ο καί περατώνουσαν διάμετρον τό τμῆμα ΑΟΒ. Ἐντός αὐτοῦ νά χαράξετε ἕνα δεύτερον ἡμικύκλιον μέ περατώνουσαν διάμετρον τό τμῆμα ΟΒ. Διαγραμμίσατε τό χωρίον πού ἀπομένει ὅταν ἀπό τό μεγαλύτερον ἡμικύκλιον ἀφαιρέσετε τό μικρότερον καί αὐτοῦ τοῦ χωρίου κατασκευάσατε τό συμμετρικόν ὡς πρός Ο.

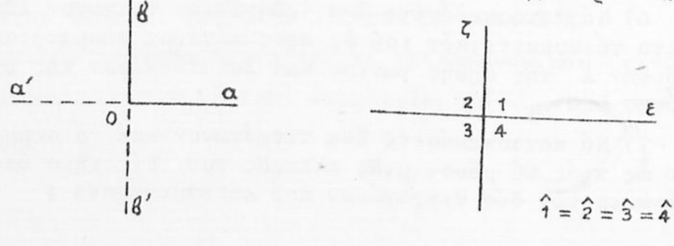
9) Τό συμμετρικόν γ΄ μιᾶς περιφερείας γ ὡς πρός ἕνα σημεῖον Ο εἶναι μία ἴση περιφέρεια, ὅπως γνωρίζετε. Ἑπομένως διά νά χαράξετε τήν γ΄, ὅταν σᾶς δοθῇ ἡ γ, ἀρκεῖ νά προσδιορίσετε τό κέντρον της Κ΄ · τοῦτο ταυτίζεται φυσικά μέ τό συμμετρικόν τοῦ κέντρου Κ τῆς γ ὡς πρός Ο. Ἔχοντες αὐτά ὑπ΄ ὄψιν χαράξατε τό συμμετρικόν μιᾶς περιφερείας ἀκτῖνος 1 cm ὡς πρός ἕνα σημεῖον Ο κείμενον ἐπάνω εἰς τήν περιφέρειαν. Τί παρατηρεῖτε ;

10) Ὅπως γνωρίζετε, ἐάν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ στραφῇ περί τό κέντρον συμμετρίας του Ο κατά γωνίαν 180^{0}, τό σχῆμα πού λαμβάνετε συμπίπτει μέ τό ἀρχικόν τετράγωνον. Μήπως τήν σύμπτωσιν αὐτήν ἠμπορεῖτε νά τήν ἐπιτύχετε καί μέ ἄλλας στροφάς τῆς ἰδίας φορᾶς περί τό Ο ; Ποῖον σύνολον ἀριθμῶν λαμβάνετε ὅταν ἐκφράσετε εἰς μοίρας τά μεγέθη ὅλων τῶν διαφόρων στροφῶν τῆς ἰδίας φορᾶς περί τό Ο αἱ ὁποῖαι φέρουν εἰς σύμπτωσιν μέ τόν ἑαυτόν του τό τετράγωνον ΑΒΓΔ ;

11) Σχεδιάσατε δύο παραλλήλους εὐθείας ε καί ε΄ καί ἐπάνω εἰς αὐτάς νά πάρετε δύο ἡμιευθείας Αx καί Α΄x΄ ἀντιθέτου φορᾶς. Νά ἐπαληθεύσετε τώρα ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τό ζεῦγος τῶν ἡμιευθειῶν Αx καί Α΄x΄ ἔχει κέντρον συμμετρίας τό μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΑ΄.
Προσπαθήσατε νά ἐξηγήσετε διατί συμβαίνει αὐτό.

§ 2. Κάθετοι εὐθεῖαι.

2.1 Ἔστω ∢(Οα, Οβ) μία ὀρθή γωνία, δηλαδή τό ἥμισυ μιᾶς ἀποπλατυσμένης. Ἄν προεκτείνωμεν τάς πλευράς της πέραν ἀπό τό



Ο, θά λάβωμεν δύο (άπεριορίστους) εὐθείας α΄Οα καί β΄Οβ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν περί τό Ο 4 ὀρθάς καί ἐπομένως 4 ἴσας μεταξύ τους γωνίας. Ἀντιστρόφως, ἄν δύο εὐθεῖαι ε καί ζ τέμνωνται καί σχηματίζουν περί τό σημεῖον τῆς τομῆς των 4 ἴσας γωνίας, τότε ἡ καθεμία ἀπό τάς γωνίας αὐτάς θά εἶναι ὀρθή.

Αὐτά μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν.

Ορισμός. Δύο (ἀπεριόριστοι) εὐθεῖαι ἑνός ἐπιπέδου λέγονται κάθετοι ἡ μία πρός τήν ἄλλην καί, συντόμως, κάθετοι, ὅταν τέμνωνται καί ἡ μία τουλάχιστον ἀπό τάς 4 γωνίας που σχηματίζουν περί τό σημεῖον τομῆς εἶναι ὀρθή· τότε καί αἱ ἄλλαι 3 γωνίαι εἶναι ἐπίσης ὀρθαί.

Τήν καθετότητα τήν σημειώνομεν μέ τό σύμβολον $\perp$

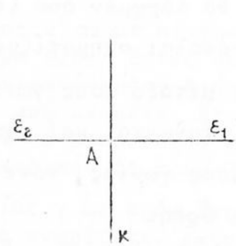
Ἔτσι γράφομεν: ε $\perp$ ζ .

Μία ἡμιευθεῖα ἤ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι κάθετα πρός μίαν ἄλλην ἡμιευθεῖαν ἤ τμῆμα, ὅταν οἱ φορεῖς των, δηλαδή αἱ εὐθεῖαι τῶν ὁποίων εἶναι μέρη, εἶναι κάθετοι. Π.χ. αἱ πλευραί τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνός γνώμονος εἶναι κάθετοι, δύο συνεχόμεναι πλευραί ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι κάθετοι, ἐπίσης δύο συνεχόμεναι ἀκμαί ἑνός κύβου, τέλος εἰς τόν τετραγωνισμένον χάρτην εἶναι χαραγμένα δύο συστήματα παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων καί κάθε τμῆμα τοῦ ἑνός συστήματος εἶναι κάθετον πρός κάθε τμῆμα τοῦ ἄλλου συστήματος.

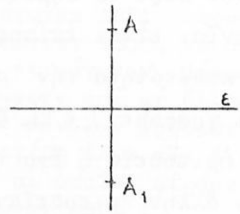
2.2 Κάθετος ἀπό δεδομένον σημεῖον πρός δεδομένην εὐθεῖαν. Ἄς εἶναι ε μία εὐθεῖα καί Α ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἀπό τάς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχονται ἀπό τό Α μία μόνον εἶναι κάθετος πρός τήν ε. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωσις: Τό Α κεῖται ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ε.

Ἡ ε χωρίζεται τότε εἰς δύο ἡμιευθεί-ας $Αε_1$ καί $Αε_2$. Διπλώνομεν τό ἐπίπεδον κατά τρόπον ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα $Αε_2$ νά ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μέ τήν ἡμιευθεῖαν $Αε_1$. Ἡ εὐθεῖα κ πού προκύπτει ἀπό τήν δίπλωσιν περνᾶ ἀπό τό σημεῖον Α καί εἶναι ἡ μόνη κάθετος πρός τήν ε ἀπό τό Α.

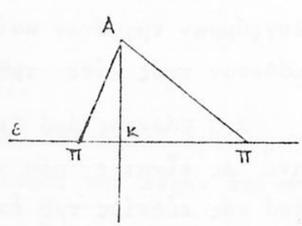


2α περίπτωσις: Τό Α δέν κεῖται ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ε.
Διπλώνομεν τότε τό ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς εὐθείας ε. Τό σημεῖον Α θά ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μέ ἕνα δεύτερον, ἐντελῶς ὡρισμένον σημεῖον $Α_1$ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀποδιπλώνομεν τώρα τό ἐπίπεδον καί χαράσσομεν τήν εὐθεῖαν $ΑΑ_1$.



Ἡ εὐθεῖα αὐτή περνᾶ ἀπό τό Α καί εἶναι ἡ μόνη κάθετος ἀπό τό Α πρός τήν ε.

2.3 Ἀπόστασις σημείου ἀπό εὐθεῖαν. Ἔστω Α ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μή κείμενον ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ε. Θεωροῦμεν τήν κάθετον πρός τήν ε ἀπό τό Α καί ἔστω Κ τό σημεῖον τῆς τομῆς της μέ τήν ε. Τό Κ λέγεται ἴχνος τῆς καθέτου πρός τήν ε ἀπό τό Α. Ἄς παραβάλωμεν τώρα τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΚ πρός τά ἄλλα ἀπειράριθμα τμήματα ΑΠ πού ἑνώνουν τό Α μέ τά διάφορα ἀπό τό Κ σημεῖα Π τῆς εὐθείας ε.



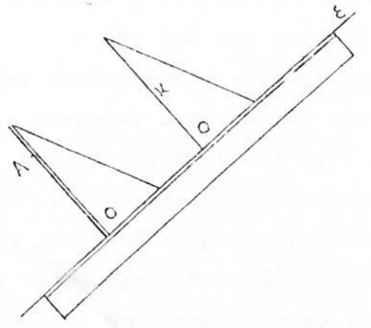
Θά διαπιστώσωμεν ὅτι τό ΑΚ εἶναι μικρότερον ἀπό κάθε ΑΠ. Τήν ἰδιότητα αὐτήν τήν διατυπώνομεν ὡς ἑξῆς:

Τό κάθετον τμῆμα ΑΚ από τό Α ἕως εἰς τήν ε εἶναι μικρότερον ἀπό κάθε πλάγιον τμῆμα ΑΠ ἀπό τό Α ἕως τήν ε.

Ἄς ἐκλέξωμεν τώρα μίαν μονάδα μήκους (π.χ. τό cm) καί ἄς μετρήσωμεν μέ αὐτήν τό κάθετον τμῆμα ΑΚ. Θά προκύψη ἕνας ἀριθμός, τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΚ, πού λέγεται ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπό τήν εὐθεῖαν ε. Τό ἴδιον μῆκος λέγεται καί ἀπόστασις τῆς εὐθείας ε ἀπό τό σημεῖον Α. Ὁ ὁρισμός τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπό τήν ε ἐδόθη διά τήν περίπτωσιν ὅπου τό Α δέν εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Διά τήν περίπτωσιν ὅπου τό Α εἶναι σημεῖον τῆς ε, ὁρίζομεν φυσικά ὡς ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπό τήν ε τό μηδέν.

2.4 Χάραξις τῆς καθέτου μέ τόν κανόνα καί τόν γνώμονα.

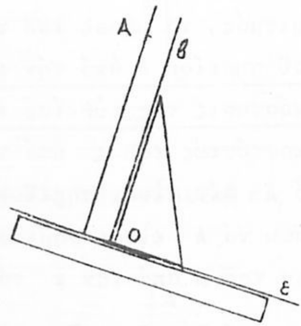
Ἔστω ε μία εὐθεῖα καί Α ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ζητεῖται νά χαράξωμεν τήν κάθετον πρός τήν ε ἀπό τό Α μέ τήν βοήθειαν τοῦ κανόνος καί τοῦ γνώμονος.



1ος τρόπος. Τοποθετοῦμεν τήν ἀκμήν τοῦ κανόνος κατά μῆκος τῆς εὐθείας ε καί ἐφαρμόζομεν εἰς τήν ἀκμήν αὐτήν τήν μικροτέραν ἀπό τάς δύο καθέτους πλευράς τοῦ γνώμονος. Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά κ τοῦ γνώμονος εἶναι τότε κάθετος πρός τήν ε, παραμένει δέ κάθετος καί ὅταν ὁ γνώμων μετακινηθῆ ὀλισθαίνων κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κανόνος. Μετακινοῦμεν λοιπόν τόν γνώμονα μέ ὀλίσθησιν κατά μῆκος τοῦ κανόνος μέχρις ὅτου ἡ πλευρά του κ περάση ἀπό τό δοθέν σημεῖον Α. Κρατοῦντες τότε τόν γνώμονα σταθερόν χαράσσομεν εὐθεῖαν κατά μῆκος τῆς πλευρᾶς κ. Αὐτή ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

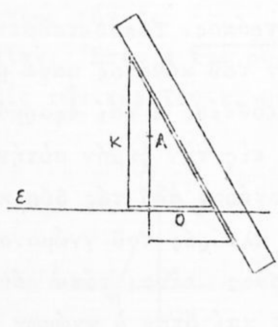
Παρατήρησις. Ἡ παραπάνω χάραξις προϋποθέτει φυσικά ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπό τήν ε δέν ὑπερβαίνει τό μῆκος τῆς μεγαλυτέρας κ ἀπό τάς δύο καθέτους πλευράς τοῦ γνώμονος.

Ἄν τό ὑπερβαίνη, τότε χαράσσομεν πρῶτα μίαν βοηθητικήν κάθετον β πρός τήν ε εἰς μικράν ἀπόστασιν ἀπό τό Α κατ'ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ μας.



Ἔπειτα χαράσσομεν μίαν παράλληλον πρός τήν β ἀπό τό σημεῖον Α χρησιμοποιοῦντες τόν κανόνα καί τόν γνώμονα κατά γνωστόν τρόπον ἡ παράλληλος αὐτή εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος καί ἡ προέκτασίς της μέχρι τῆς ε μᾶς παρέχει τό ἴχνος της ἐπί τῆς ε.

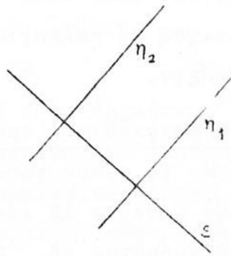
2ος τρόπος. Τοποθετοῦμεν τήν μικροτέραν ἀπό τάς δύο καθέτους πλευράς τοῦ γνώμονος κατά μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας ε εἰς τρόπον ὥστε ὁ γνώμων νά καλύπτη τό σημεῖον Α. Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά κ θά εἶναι τότε ⊥ ε. Ἔπειτα ἐφαρμόζομεν εἰς τήν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος τήν ἀκμήν τοῦ κανόνος. Κρατοῦντες τώρα τόν κανόνα σταθερόν ὀλισθαίνομεν κατά μῆκος του τόν γνώμονα μέχρις ὅτου ἡ πλευρά του κ περάση ἀπό τό σημεῖον Α. Εἰς τήν θέσιν αὐτήν τοῦ γνώμονος χαράσσομεν εὐθεῖαν κατά μῆκος τῆς πλευρᾶς του κ· ἡ εὐθεῖα αὐτή εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



Παρατήρησις. Καί ὁ 2ος αὐτός τρόπος προϋποθέτει ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπό τήν ε εἶναι ≤ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς κ τοῦ γνώμονος. Ἀπέναντι τοῦ 1ου τρόπου ὁ 2ος ἔχει τό πλεονέκτημα νά παρέχη ἀκριβέστερα τό ἴχνος τῆς καθέτου ἀπό τό Α πρός τήν ε.

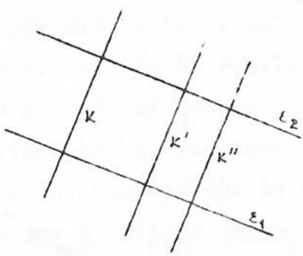
2.5 Εὐθεῖαι κάθετοι πρός μίαν καί τήν αὐτήν εὐθεῖαν.

Δύο εὐθεῖαι η_1 καί η_2 κάθετοι πρός τήν ἰδίαν εὐθεῖαν ε εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.



Ἀντιστρόφως, δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ε_1 καί ε_2 ἔχουν ἀπειραρίθμους κοινάς καθέτους κ, κ', κ'',..., διότι κάθε κάθετος πρός τήν μίαν ε_1 ἀπό αὐτάς εἶναι κάθετος καί πρός τήν ἄλλην ε_2.

Συμβολικῶς αἱ δύο αὐταί ἰδιότητες ἠμποροῦν νά διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς:

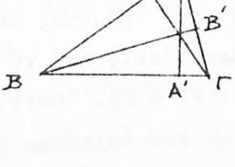


$$\left.\begin{array}{l}\eta_1 \perp \varepsilon \\ \eta_2 \perp \varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \eta_1 \parallel \eta_2$$

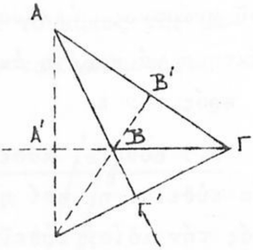
καί

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \\ \kappa \perp \varepsilon_1\end{array}\right\} \Rightarrow \kappa \perp \varepsilon_2$$

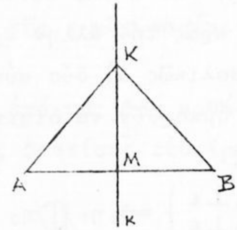
2.6 Ὕψη τριγώνου. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον. Τό κάθετον τμῆμα ΑΑ΄ ἀπό τήν κορυφήν Α ἕως εἰς τήν ἀπέναντι πλευράν ΒΓ λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου ἀντίστοιχον εἰς τήν πλευράν ΒΓ. Ἡ (ἀπεριόριστος) εὐθεῖα πού φέρει τό τμῆμα τοῦτο καί εἶναι ἡ ἀπό τό Α κάθετος πρός τήν εὐθεῖαν ΒΓ, λέγεται ἐπίσης ὕψος τοῦ τριγώνου.



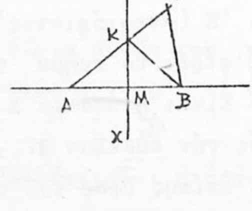
Μία προσεκτική χάραξις τῶν τριῶν ὑψῶν ἑνός τριγώνου μᾶς κάμνει νά πιστεύσωμεν ὅτι αἱ τρεῖς αὐταί εὐθεῖαι περνοῦν ἀπό ἕνα καί τό ἴδιον σημεῖον (πού λέγεται ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου). Ἡ σπουδαία αὐτή ιδιότης τῶν ὑψῶν ἑνός τριγώνου θ᾽ἀποδειχθῆ μέ συλλογισμούς εἰς ἄλλην τάξιν.



2.7 Μεσοκάθετος τμήματος. Ἔστω AB ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καί M τό μέσον του. Ἡ εὐθεῖα κ πού εἶναι κάθετος πρός τήν εὐθεῖαν AB εἰς τό σημεῖον της M λέγεται μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB. Ἐάν διπλώσωμεν τό ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς εὐθείας κ, τά σημεῖα τῆς κ θά παραμείνουν τό καθένα εἰς τήν θέσιν τους, τό σημεῖον ὅμως A θά ἔλθη εἰς σύμπτωσιν μέ τό σημεῖον B. Ἄρα τό εὐθύγραμμον τμῆμα πού ἑνώνει τυχόν σημεῖον K τῆς κ μέ τό ἄκρον A τοῦ τμήματος AB εἶναι ἴσον μέ τό τμῆμα KB πού ἑνώνει τό K μέ τό ἄλλο ἄκρον τοῦ AB. Ὥστε κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἑνός τμήματος ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος.



Ἀντιθέτως, ἕνα σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου μή ἀνῆκον εἰς τήν μεσοκάθετον κ τοῦ τμήματος AB ἔχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπό τά σημεῖα A καί B : PA ≠ PB. Ὥστε, ἐάν ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχη ἐξ ἴσου ἀπό τά σημεῖα A καί B, τότε

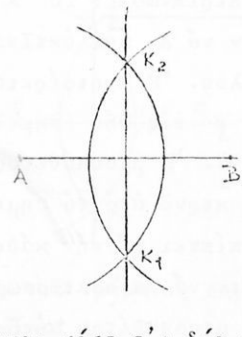


αὐτό τό σημεῖον θά ἀνήκη εἰς τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΒ. Παρατηροῦμεν λοιπόν τό ἑξῆς: Τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἑνός τμήματος ΑΒ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον Ε σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν ἰδιότητα: κάθε στοιχεῖον τοῦ Ε ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ καί κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπό τά ἄκρα αὐτά Α,Β εἶναι στοιχεῖον τοῦ Ε. Συμβολικῶς ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν αὐτήν τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ Ε ὡς ἑξῆς:

$$K \in E \iff KA = KB.$$

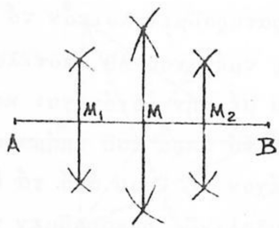
Τό σημειοσύνολον Ε ὠνομάσθη, ἤδη ἀπό τούς ἀρχαίους Ἕλληνας, γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τά σημεῖα Α καί Β. Ὁ γεωμετρικός αὐτός τόπος συμπίπτει λοιπόν μέ τό σύνολον τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΒ.

2.8 Κατασκευή μεσοκαθέτου μέ κανόνα καί διαβήτην. Ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τήν ἀκόλουθον κατασκευήν της (σχεδίασίν της) μέ κανόνα καί διαβήτην. Μέ κέντρον τό σημεῖον Α καί ἄνοιγμα διαβήτου μεγαλύτερον (κατ' ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ) ἀπό τό ἥμισυ τοῦ τμήματος ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Μέ τό ἴδιον ἄνοιγμα καί μέ κέντρον Β γράφομεν δευτέραν



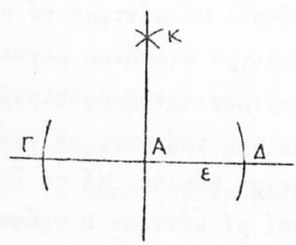
περιφέρειαν. Αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται τότε εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τά K_1 καί K_2· τά σημεῖα αὐτά ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τά Α καί Β : $AK_1 = BK_1$; $AK_2 = BK_2$.
Ἄρα ἡ εὐθεῖα $K_1 K_2$ εἶναι ἡ ζητουμένη μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

Παρατήρησις. Ἡ μεσοκάθετος $K_1 K_2$ θά κόψη τό τμῆμα ΑΒ εἰς τό μέσον του Μ. Ἔχομεν τοιουτοτρόπως μίαν μέθοδον νά διαιρώυμεν ἕνα τμῆμα εἰς δύο ἴσα μέρη χρησιμοποιοῦντες τόν κανόνα καί τόν διαβήτην. Ἐφαρμόζοντες τήν ἰδίαν κατασκευήν εἰς τό καθένα ἀπό τά δύο ἡμίση ΑΜ καί ΜΒ διαιροῦμεν τό τμῆμα ΑΒ εἰς $2\cdot 2 = 4 = 2^2$ ἴσα μέρη. Ἐπαναλαμβάνοντες τήν κατασκευήν εις τό καθένα ἀπό τά τέσσερα ἴσα μέρη, διαιροῦμεν τό ΑΒ εἰς $2\cdot 4 = 8 = 2^3$ ἴσα μέρη κ.ο.κ.



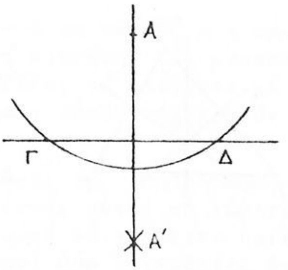
2.9 Κατασκευή τῆς καθέτου πρός μίαν εὐθεῖαν ἀπό ἕνα σημεῖον μέ χρῆσιν τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου. Ἀπό τήν παραπάνω κατασκευήν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος κατασκευή τῆς καθέτου πρός μίαν εὐθεῖαν ε ἀπό ἕνα σημεῖον Α.

1η περίπτωσις: Τό Α κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ε. Τότε μέ κέντρον τό Α καί ἀκτῖνα τῆς ἐκλογῆς μας γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἡ περιφέρεια αὐτή τέμνει τήν ε εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τά Γ καί Δ. Ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΓΔ περνᾶ ἀπό τό σημεῖον Α, ἄρα συμπίπτει μέ τήν κάθετον πού θέλομεν νά κατασκευάσωμεν. Ἐπειδή τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς γνωρίζομεν ἤδη ἕνα σημεῖον , τό Α , ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν μέ τόν τρόπον πού ἐξεθέσαμεν προηγουμένως ἕνα ἀκόμη σημεῖον της Κ. Ἡ εὐθεῖα ΚΑ εἶναι τότε ἡ ζητουμένη κάθετος.



2α περίπτωσις: Τό Α δέν κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ε.

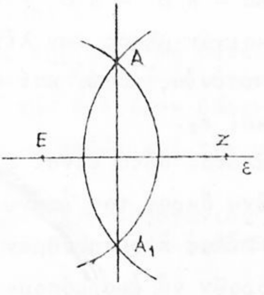
1ο τρόπος κατασκευῆς. Γράφομεν πάλιν περιφέρειαν κύκλου



μέ κέντρον τό Α , φροντίζομεν μόνον ἡ περιφέρεια αὐτή νά τέμνη τήν εὐθεῖαν ε, παίρνοντες τήν ἀκτῖνα της ἀρκετά μεγάλην.

Ἄς εἶναι Γ καί Δ τά δύο σημεῖα τομῆς· θά εἶναι ΓΑ = ΔΑ ἄρα τό Α ἀνήκει είς τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΓΔ καί ἡ ζητουμένη κάθετος συμπίπτει μέ τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος τούτου. Διά νά τήν κατασκευάσωμεν ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν μέ τόν ἐκτεθέντα τρόπον ἕνα ἀκόμη σημεῖον της Α΄, κατά προτίμησιν ἀπό τό μέρος τῆς εὐθείας ε, τό ὁποῖον δέν περιέχει τό σημεῖον Α. Ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

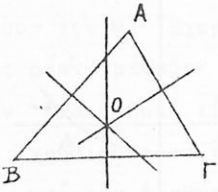
<u>2ος τρόπος κατασκευῆς</u>. Παίρνομεν ἐπάνω είς τήν ε δύο σημεῖα Ε καί Ζ ὄχι πολύ κοντά τό ἕνα πρός τό ἄλλο.

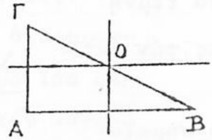


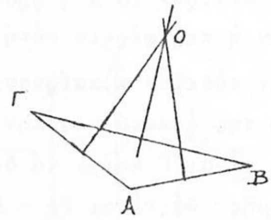
Μέ κέντρον τό Ε καί ἀκτῖνα ΕΑ γράφομεν μίαν πρώτην περιφέρειαν. Μέ κέντρον τό Ζ καί ἀκτῖνα ΖΑ γράφομεν μίαν δευτέραν περιφέρειαν. Αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται είς τό σημεῖον Α καί είς ἕνα ἀκόμη, ἔστω τό $Α_1$. Ἡ εὐθεῖα ε πού ὁρίζεται ἀπό τά δύο σημεῖα Ε καί Ζ εἶναι ἐκ κατασκευῆς μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $ΑΑ_1$, ἄρα ἡ $ΑΑ_1$ εἶναι ἡ κάθετος πρός τήν ε ἀπό τό Α.

<u>2.10 Μεσοκάθετοι τριγώνου.</u> Ἄν κατασκευάσωμεν προσεκτικά τάς μεσοκαθέτους $κ_1$, $κ_2$, $κ_3$ τῶν πλευρῶν ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ , θά σχηματίσωμεν τήν γνώμην ὅτι αἱ τρεῖς αὐταί εὐθεῖαι περνοῦν ἀπό ἕνα καί τό ἴδιον σημεῖον.

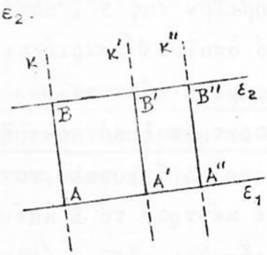
Μήπως βλέπετε διατί αὐτό πρέπει νά συμβαίνη ;







<u>Πλάτος ταινίας</u>. Ἔστω ἡ ταινία πού ὁρίζεται ἀπό τάς δύο παραλλήλους εὐθείας ε_1 καί ε_2 . Ἄν χαράξωμεν καθέτους κ , κ΄, κ″,... πρός τήν ε_1 , αὐταί θά εἶναι, ὅπως εἴδαμεν, παράλληλοι μεταξύ των καί κάθετοι πρός τήν ε_2.



Τά εὐθύγραμμα τμήματα AB, A΄B΄, A″B″,... πού εἶναι τομαί τῆς ταινίας μέ τάς καθέτους κ , κ΄, κ΄,... ἀντιστοίχως, εἶναι μεταξύ τους ἴσα:

AB = A΄B΄ = A″B″ = ...

Τό κοινόν μῆκος των λέγεται <u>πλάτος</u> τῆς ταινίας καθώς καί <u>ἀπόστασις</u> τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2.

Τό πλάτος αὐτό εἶναι $\leqslant$ τοῦ μήκους κάθε τμήματος πού ἔχει τό ἕνα ἄκρον του ἐπάνω εἰς τήν ε_1 καί τό ἄλλο ἐπάνω εἰς τήν ε_2. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι δύο ταινίαι πού ἔχουν ἴσα πλάτη ἠμποροῦν νά ἐφαρμόσουν ἡ μία μέ τήν ἄλλην; ἄρα εἶναι ἴσα σχήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὕρετε εἰς τήν αἴθουσαν τῆς τάξεώς σας ὑλικάς πραγματοποιήσεις εὐθειῶν καθέτων μεταξύ τους.

2) Νά κατασκευάσετε τήν συμπληρωματικήν γωνίαν δοθείσης ὀξείας γωνίας.

3) Νά λάβετε ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν τρία διαδοχικά ση-

μεῖα Α, Β, Γ διά τά ὁποῖα εἶναι ΑΒ = 6 cm καί ΒΓ = 4 cm. Ἔπειτα νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτην τάς μεσοκαθέτους τῶν τμημάτων ΑΒ , ΒΓ καί ΑΓ. Τέλος νά ἐλέγξετε μέ μετρήσεις μηκῶν τήν ἰδιότητα τῶν καθέτων αὐτῶν νά περνοῦν ἀπό τά μέσα τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων.

4) Νά σχεδιάσετε , χρησιμοποιοῦντες τό μοιρογνωμόνιον, μίαν γωνίαν $\angle(Ox,Oy)$ 40 μοιρῶν καί ἐντός αὐτῆς νά λάβετε δύο σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά σημεῖα αὐτά νά χαράξετε ἡμιευθείας Αx΄ καί Βx΄ καθέτους πρός Οx καί δύο ἡμιευθείας Αy΄ καί Βy΄΄ καθέτους πρός Βy. Ἔπειτα μέ τό μοιρογνωμόνιον νά μετρήσετε τάς γωνίας $\angle$ (Αx΄, Αy΄) καί $\angle$ (Βx΄, Βy΄΄). Τί παρατηρεῖτε ;

5) Χαράξατε μίαν περιφέρειαν κέντρου Ο καί μίαν ἀκτῖνα της ΟΑ. Ἔπειτα νά κατασκευάσετε τήν κάθετον πρός τήν ΟΑ εἰς τό σημεῖον Α. Ἡ κάθετος αὐτή (πού λέγεται ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εις τό σημεῖαν Α) ἔχει ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον μέ τήν περιφέρειαν· ἄραγε βλέπετε διατί συμβαίνει αὐτό ;

6) Νά χαράξετε δύο καθέτους διαμέτρους εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 2 cm καί νά κατασκευάσετε εἰς τά ἄκρα των τάς καθέτους εὐθείας. Τό τετράπλευρον μέ κορυφάς τά 4 σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων τί τετράπλευρον εἶναι ;

7) Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνον μέ δοθεῖσαν βάσιν ΒΓ. Πόσα τέτοια τρίγωνα ὑπάρχουν ; Καί τί ἰδιότητα ἔχουν αἱ κορυφαί των αἱ ἀπέναντι εἰς τήν δοθεῖσαν βάσιν ;

8) Νά χαράξετε ταινίαν πλάτους 6 cm καθώς καί τήν μεσοπαράλληλόν της.

9) Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσόπλευρον, ἕνα ὀρθογώνιον καί ἕνα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καί νά προσδιορίσετε τά ὀρθόκεντρά τους.

10) Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον καί ἕνα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καί νά προσδιορίσετε τό κοινόν σημεῖον τῶν τριῶν μεσοκαθέτων τους.

11) Χαράξατε ἕνα κύκλον καί μίαν χορδήν του ΑΒ. Κατασκευάσοτε ἔπειτα τήν μεσοκάθετον τῆς χορδῆς αὐτῆς. Ἄν ἡ κατασκευή σας ἔγινε μέ προσοχήν, ἡ μεσοκάθετος θά περνᾶ ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου. Μήπως βλέπετε διατί αὐτό πρέπει νά συμβαίνη ;

12) Χρησιμοποιοῦντες αὐτά πού ἐμάθατε περί τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ἐξηγήσατε τήν ἀκόλουθον κατασκευήν: Θέλομεν νά χαράξωμεν μίαν περιφέρειαν πού νά δι-

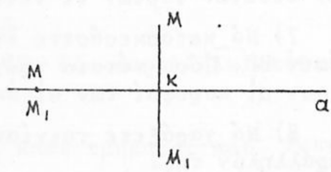
έρχεται ἀπό τρία σημεῖα Α , Β , Γ μή κείμενα ἐπ'εὐθείας. Πρός τοῦτο κατασκευάζομεν τάς μεσοκαθέτους τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΒΓ καί προσδιορίζομεν τό σημεῖον Ο τῆς τομῆς των. Τό σημεῖον αὐτό Ο εἶναι τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

13) Δύο περιφέρειαι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται εἰς δύο σημεῖα T_1 καί T_2. Νά ἐξηγήσετε διατί ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $T_1 T_2$.

§ 3. Συμμετρία ὡς πρός εὐθεῖαν εἰς τό ἐπίπεδον

3.1 Συμμετρικόν ἑνός σημείου ὡς πρός εὐθεῖαν. Ἔστω μία ὡρισμένη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί Μ ἕνα τυχόν σημεῖον του.

Ἄν τό Μ δέν κεῖται ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν α, κατασκευάζομεν τό κάθετον τμῆμα ΜΚ ἀπό τό Μ ἕως εἰς τήν α καί τό προεκτείνομεν κατά ἕνα τμῆμα KM_1 = = ΜΚ. Τό σημεῖον M_1, εἰς τό ὁποῖον καταλήγομεν, λέγεται συμμετρικόν τοῦ Μ ὡς πρός τήν εὐθεῖαν α. Ἄν τό Μ κεῖται ἐπάνω εἰς τήν εὐθείαν α, τότε ὡς συμμετρικόν του M_1 εἶναι φυσικόν νά ὁρίσωμεν τό ἴδιον τό Μ. Ἡ εὐθεῖα α λέγεται ἄξων τῆς συμμετρίας.



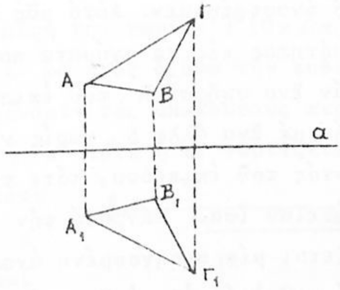
Σύμφωνα μέ αὐτούς τούς ὁρισμούς, ἄν M_1 εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ Μ ὡς πρός α, τότε συμμετρικόν τοῦ M_1 ὡς πρός α εἶναι τό Μ. Διά τοῦτο τά δύο σημεῖα Μ καί M_1 λέγονται συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός α.

Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς: Ι) Ἄν διπλώσωμεν τό ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς εὐθείας α, κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θά συμπέση μέ τό συμμετρικόντου ὡς πρός α. II) "Αν στρέψωμεν ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον περί τόν ἄξονα συμμετρίας α κατά ἡμίσειαν στροφήν (δηλαδή κατά 180°), τότε κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θά ἔλθη εἰς τήν θέσιν τοῦ συμμετρικοῦ του ὡς πρός α. III) "Αν τό σημεῖον M δέν κεῖται ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα α, τότε τό συμμετρικόν του M_1 εἶναι διάφορον ἀπό τό M, τό τμῆμα MM_1 εἶναι $\perp$ α καί ἔχει τό μέσον του K ἐπάνω εἰς τόν α, ἐπομένως ὁ ἄξων α εἶναι <u>μεσοκάθετος</u> τοῦ τμήματος MM_1.

<u>3.2 Συμμετρικόν ἑνός σχήματος ὡς πρός εὐθεῖαν.</u> "Ενα σχῆμα S τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἕνα σύνολον

$S = \{A, B, \Gamma, \dots\}$

σημείων τοῦ ἐπιπέδου. "Αν τῶν διαφόρων σημείων A, B, Γ,... τοῦ S θεωρήσωμεν τά συμμετρικά A_1, B_1, Γ_1,... ὡς πρός τήν εὐθεῖαν α, θά λάβωμεν ἕνα σημειοσύνολον

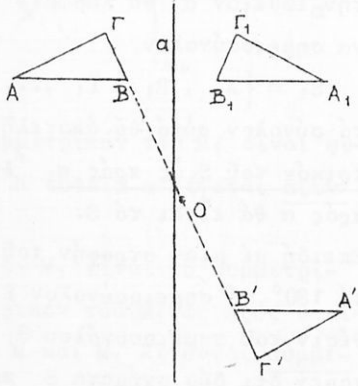


$S_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1, \dots\}$

τό σύνολον αὐτό θά ἀποτελῆ ἕνα σχῆμα S_1 πού λέγεται <u>συμμετρικόν τοῦ S ὡς πρός α.</u> 'Αντιστρόφως συμμετρικόν τοῦ S_1 ὡς πρός α θά εἶναι τό S.

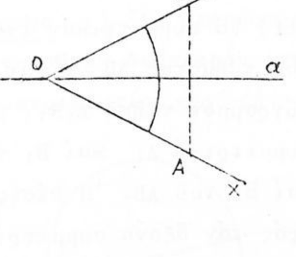
'Επειδή μέ μίαν στροφήν τοῦ ἐπιπέδου περί τήν εὐθεῖαν α κατά 180° τό σημειοσύνολον $S = \{A, B, \Gamma, \dots\}$ ἔρχεται εἰς τήν θέσιν τοῦ σημειοσυνόλου $S_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1, \dots\}$, συμπεραίνομεν ὅτι δύο σχήματα S καί S_1 συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός α εἶναι ἐφαρμόσιμα, ἄρα καί ἴσα. Πρέπει ὅμως νά προσέξωμεν τό ἑξῆς: 'Η ἡμίσεια στροφή τοῦ ἐπιπέδου περί τήν α, ἀναστρέφει, δηλαδή ἀναποδογυρίζει τό ἐπίπεδον, κάμνει τήν κάτω ὄψιν τοῦ ἐπιπέδου ἄνω ὄψιν καί τήν ἄνω ὄψιν κάτω ὄψιν. Ὥστε, μέ τήν ἀναστροφήν τοῦ ἐπιπέδου περί τήν α, ἡ κάτω ὄψις τοῦ σχήματος S ἦλθε εἰς ἐφαρμογήν μέ τήν ἄνω ὄψιν τοῦ S_1. Δι'αὐτό τά δύο σχήματα S καί S_1 εἶναι ἐφαρμόσιμα ὕστερα ἀπό ἀναστροφήν τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν.

Χωρίς ἀναστροφήν τοῦ ἑνός, μέ ἁπλῆν ὀλίσθησίν του ἐντός τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ἐν γένει ἀδύνατον νά τό φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν μέ τό ἄλλο. Π.χ. τό συμμετρικόν ꟼ τοῦ Ρ ὡς πρός α δέν ἠμπορεῖ νά ἐφαρμόσῃ μέ τό Ρ , ἐνόσω δέν τό ἀναστρέφομεν. Αὐτό μᾶς κάμνει νά διακρίνωμεν δύο εἰδῶν ἰσότητας εἰς τά σχήματα πού κεῖνται ἐπί ἑνός ἐπιπέδου. Ἐάν ἕνα σχῆμα R τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά ἔλθῃ εἰς ἐφαρμογήν μέ ἕνα ἄλλο S χωρίς νά ἀναστραφῇ, μόνον μέ ὀλίσθησιν ἐντός τοῦ ἐπιπέδου, τότε τά σχήματα R καί S λέγονται <u>κατ' εὐθεῖαν ἴσα</u>. Ἐάν διά τήν ἐφαρμογήν τῶν δύο σχημάτων χρειάζεται μία προηγουμένη ἀναστροφή τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν, τότε τά δύο σχήματα λέγονται <u>κατ'ἀναστροφήν ἴσα</u>. Σύμφωνα μέ ὅσα ἤδη γνωρίζομεν, δύο σχήματα τοῦ ἐπιπέδου συμμετρικά ὡς πρός ἕνα σημεῖον του Ο εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἴσα, ἐνῶ δύο σχήματα συμμετρικά ὡς πρός μίαν εὐθεῖαν α εἶναι κατ'ἀναστροφήν ἴσα.



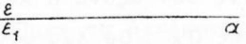
3.3. Μερικαί ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις συμμετρίας ὡς πρός εὐθεῖαν.

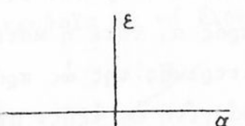
I) Τό συμμετρικόν μίας ἡμιευθείας Ox ἡ ὁποία ἔχει τήν ἀρχήν της O ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα συμμετρίας α, εἶναι μία ἡμιευθεῖα Ox_1. Διά νά τήν προσδιορίσωμεν, ἀρκεῖ νά κατασκευάσωμεν τό συμμετρικόν A_1 ἑνός σημείου A τῆς Ox, τό ὁποῖον νά εἶναι διάφορον ἀπό τό O, καί νά χαράξωμεν τήν ἡμιευθεῖαν OA_1.

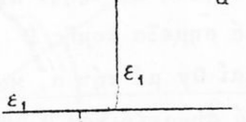


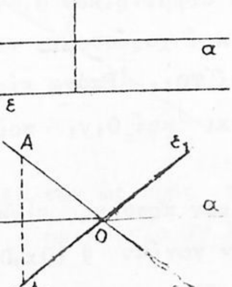
Ἐπειδή μέ τήν δίπλωσιν τοῦ ἐπιπέδου κατά μῆκος τῆς εὐθείας α ἡ ἡμιευθεῖα Ox θά συμπέση μέ τήν Ox_1, αἱ δύο γωνίαι $\sphericalangle(O\alpha, Ox)$ καί $(O\alpha, Ox_1)$ θά εἶναι κατ' ἀναστροφήν ἴσαι καί ἑπομένως ἡ εὐθεῖα α θά χωρίζη εἰς δύο ἴσα μέρη τήν γωνίαν $\sphericalangle(Ox, Ox_1)$.

II) Τό συμμετρικόν μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεῖαν α εἶναι μία εὐθεῖα ε_1. Διακρίνομεν τάς ἀκολούθους περιπτώσεις: 1η) Ἡ ε συμπίπτει μέ τήν α· τότε ἡ ε_1 ταυτίζεται μέ τήν ε. 2α) Ἡ ε εἶναι $\perp \alpha$· τότε ἡ ε_1 συμπίπτει μέ τήν ε. 3η) Ἡ ε εἶναι παράλληλος πρός α· τότε καί ἡ ε_1 εἶναι παράλληλος πρός α. Αἱ δύο ταινίαι (α, ε) καί (α, ε_1) ἐφαρμόζουν ἡ μία ἐπάνω εἰς τήν ἄλλην, ἄν διπλώσωμεν τό ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς α, ἄρα εἶναι ἴσαι καί ἔχουν τό ἴδιον πλάτος. Ἡ ταινία $(\varepsilon, \varepsilon_1)$, πού χωρίζεται ἀπό τήν α εἰς τάς δύο ἴσας ταινίας (α, ε) καί (α, ε_1), ἔχει διπλάσιον πλάτος. 4η) Ἡ ε τέμνει τόν ἄξονα α εἰς τό O. Ἄρα διά νά τήν προσδιο-



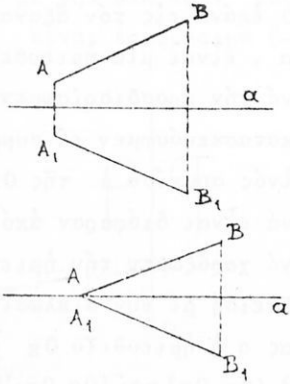




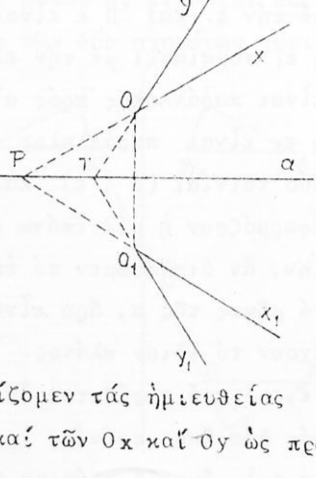


ρίσωμεν ἀρκεῖ νά κατασκευάσωμεν τό συμμετρικόν A_1 ἑνός σημείου A τῆς ε διαφορετικοῦ ἀπό τό O καί νά χαράξωμεν τήν OA_1.

III) Τό συμμετρικόν ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ἕνα ἴσον εὐθύγραμμον τμῆμα A_1B_1; μέ ἄκρα τά συμμετρικά A_1 καί B_1 τῶν ἄκρων A καί B τοῦ AB. Ἡ θέσις τοῦ AB ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας α ἠμπορεῖ νά παρουσιάση ὀκτώ διαφόρους περιπτώσεις. Ἀπό αὐτάς μόνον δύο ἐσχεδιάσθησαν εἰς τό σχῆμα παραπλεύρως. Εὑρῆτε καί σχεδιάσατε τάς ὑπολοίπους ἕξη.

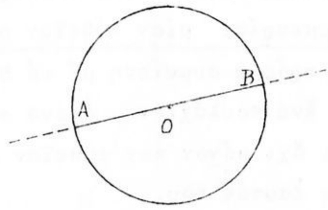


IV) Τό συμμετρικόν μιᾶς γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ ὡς πρός α εἶναι μία κατ'ἀναστροφήν ἴση γωνίαν $\sphericalangle(O_1x_1,O_1y_1)$. Ἄν ἡ κορυφή τῆς γωνίας O δέν κεῖται ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα α καί αἱ πλευραί της Ox, Oy δέν εἶναι παράλληλοι πρός α, τότε ἡ κατασκευή τῆς συμμετρικῆς της ὡς πρός α ἠμπορεῖ νά γίνη ὡς ἑξῆς: Προσδιορίζομεν τά σημεῖα τομῆς P καί T τῶν Ox καί Oy μέ τήν α, κατασκευάζομεν τό συμμετρικόν O_1 τοῦ O ὡς πρός α καί χαράσσομεν τάς εὐθείας PO_1 καί TO_1. Ἐπάνω εἰς αὐτάς προσδιορίζομεν τάς ἡμιευθείας O_1x_1 καί O_1y_1 πού εἶναι συμμετρικαί τῶν Ox καί Oy ὡς πρός α.

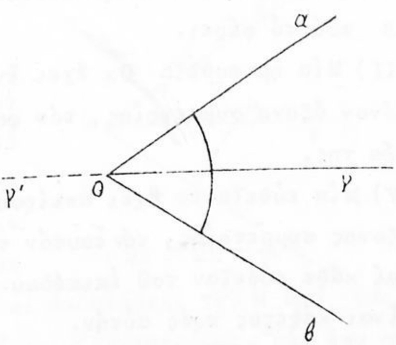


Ἄξιον προσοχῆς εἶναι τοῦτο: Ἐάν μία ἡμιευθεῖα $O\omega$ διαγράφη τήν γωνίαν $\sphericalangle(Ox,Oy)$ στρεφομένη περί τό O κατά μίαν ὡρισμένην φοράν ἀπό τήν θέσιν Ox εἰς τήν θέσιν Oy, τότε ἡ συμμετρική ἡμιευθεῖα $O_1\omega_1$ θά διαγράφη τήν συμμετρικήν γωνίαν $\sphericalangle(O_1x_1, O_1y_1)$ στρεφομένη περί τό O_1 κατ' ἀντίθετον φοράν.

3.4 Ἄξων συμμετρίας ἑνός σχήματος. I) Ἄς θεωρήσωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου καί μίαν τυχοῦσαν διάμετρόν της AOB. Ἄν στρέψωμεν τό ἐπίπεδον τῆς περιφερείας περί τήν εὐθεῖαν AB κατά γωνίαν 180^0, θά λάβωμεν μίαν περιφέρειαν πού συμπίπτει μέ τήν ἀρχικήν. Ἑπομένως τό συμμετρικόν σχῆμα τῆς περιφερείας αὐτῆς ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεῖαν AB εἶναι ἡ ἰδία περιφέρεια. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι μία περιφέρεια ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν φορέα τυχούσης διαμέτρου της. Μέ ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι καί ἕνας κύκλος ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν φορέα τυχούσης διαμέτρου του.



II) Ἔστω $\sphericalangle(O\alpha, O\beta)$ μία γωνία. Ἠμποροῦμεν νά διπλώσωμεν τό ἐπίπεδόν της κατά τρόπον ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα $O\alpha$ νά ἔλθη εἰς σύμπτωσιν μέ τήν ἡμιευθεῖαν $O\beta$. Ἔστω $\gamma' O\gamma$ ἡ εὐθεῖα πού προκύπτει ἀπό τήν δίπλωσιν αὐτήν καί $O\gamma$ ἡ ἡμιευθεῖα της πού κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς γωνίας $\sphericalangle(O\alpha, O\beta)$. Ἡ $O\gamma$ χωρίζει τήν γωνίαν αὐτήν εἰς δύο γωνίας $\sphericalangle(O\gamma, O\alpha)$ καί $\sphericalangle(O\gamma, O\beta)$ πού εἶναι συμμετρικαί μεταξύ των ὡς πρός τήν εὐθεῖαν $\gamma' O\gamma$, ἄρα καί ἴσαι. Διά τοῦτο ἡ ἡμιευθεῖα $O\gamma$ λέγε-

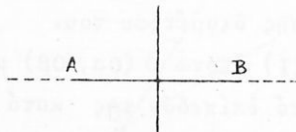


ται <u>διχοτόμος</u> τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (Οα , Οβ). Εἶναι τώρα φανερόν ὅτι τό συμμετρικόν σχῆμα τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (Οα , Οβ) ὡς πρός τήν εὐθεῖαν γ΄Ογ εἶναι ἡ γωνία $\sphericalangle$ (Οβ, Οα) πού διαφέρει ἀπό τήν $\sphericalangle$ (Οα , Οβ) μόνον κατά τήν τάξιν μέ τήν ὁποίαν λαμβάνονται αἱ πλευραί της. Δι΄αὐτό λέγομεν ὅτι μία γωνία ἔχει <u>ἄξονα συμμετρίας</u> τόν φορέα τῆς διχοτόμου της.
Γενικῶς λέγομεν ὅτι ἕνα σχῆμα S τοῦ ἐπιπέδου ἔχει <u>ἄξονα συμμετρίας μίαν εὐθεῖαν α</u>, ὅταν τό συμμετρικόν $S_α$ τοῦ S ὡς πρός α συμπίπτη μέ τό S. Ὅταν ἕνα σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου ἔχη ἕνα τουλάχιστον ἄξονα συμμετρίας, τότε τό σχῆμα αὐτό εἶναι ὄχι μόνον κατ΄εὐθεῖαν ἀλλά καί κατ΄ἀναστροφήν ἴσον μέ τόν ἑαυτόν του.

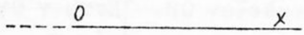
<u>3.5 Παραδείγματα σχημάτων πού ἔχουν ἄξονας συμμετρίας.</u>

I) Ὅπως εἴδαμεν, ἡ περιφέρεια καί ὁ κύκλος ἔχουν ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας, τάς διαφόρους εὐθείας πού περνοῦν ἀπό τό κέντρον τους.

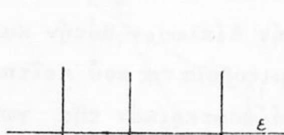
II) Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τήν μεσοκάθετόν του καί τήν εὐθεῖαν ΑΒ πού τό φέρει.



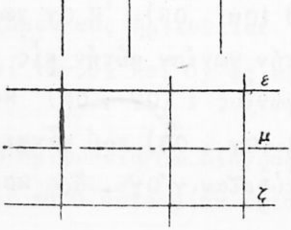
III) Μία ἡμιευθεῖα Οx ἔχει ἕνα μόνον ἄξονα συμμετρίας, τόν φορέα της.



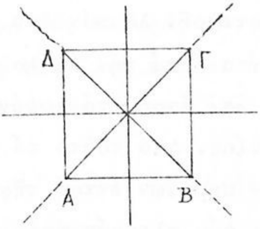
IV) Μία εὐθεῖα ε ἔχει ἀπείρους ξονας συμμετρίας, τόν ἑαυτόν της καί κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου πού εἶναι κάθετος πρός αὐτήν.



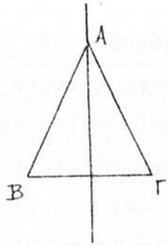
V) Μία ταινία (ε,ζ) ἔχει ἀπειραρίθμους ἄξονας συμμετρίας: τήν μεσοπαράλληλόν της μ καί κάθε



εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρός τάς εὐθεί-
ας ε , ζ.



VI) Τό τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας: τούς δύο φορεῖς τῶν διαγωνίων του καθώς καί τάς δύο εὐθείας πού συνδέουν τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν.

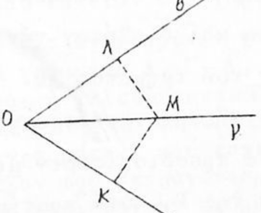


VII) Ἕνα ἰσοσκελές ἀλλ' ὄχι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τήν μεσοκάθετον τῆς βάσεώς του(ἡ μεσοκάθετος αὐτή περνᾶ ἀπό τήν κορυφήν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου). Ἑπομένως ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας, τάς μεσοκαθέτους τῶν τριῶν πλευρῶν του.

Ἕνα μή ἰσοσκελές τρίγωνον δέν ἔχει κανένα ἄξονα συμμετρίας.

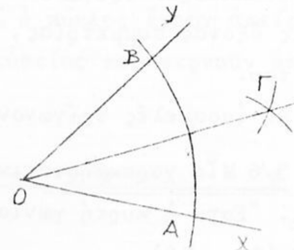
3.6 Μία χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς διχοτόμου κυρτῆς γωνίας. Ἔστω ἡ κυρτή γωνία

∢ (Οα , Οβ) ,



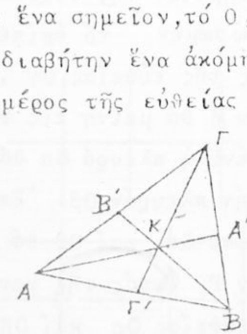
Ογ ἡ διχοτόμος της καί Μ τυχόν σημεῖον τῆς διχοτόμου. Ἄν διπλώσωμεν τό ἐπίπεδον κατά μῆκος τῆς εὐθείας Ογ , τό σημεῖον Μ θά μείνη εἰς τήν θέσιν του ἐνῶ ἡ πλευρά Οα θά συμπέση μέ τήν πλευράν Οβ. Ἑπομένως αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τάς εὐθείας Οα καί Οβ θά εἶναι ἴσαι. Ἀντιστρόφως, ἐάν ἕνα σημεῖον Ρ ἐντός τῆς γωνίας ∢ (Οα , Οβ) ἀπέχη ἐξ ἴσου ἀπό τάς εὐθείας Οα καί Οβ , τότε αὐτό τό σημεῖον Ρ θά ἀνήκη είς τήν διχοτόμον Oγ τῆς γωνίας. Τά σημεῖα τῆς διχοτόμου ἀποτελοῦν λοιπόν ἕνα σύνολον E σημείων τά ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἀκόλουθον ἰδιοτητα: κεῖνται ἐντός τῆς γωνίας καί ἔχουν τό καθένα ἴσας ἀποστάσεις ἀπό τάς πλευράς τῆς γωνίας. Διά τοῦτο τό σύνολον E λέγεται γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἐντός τῆς γωνίας τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τάς δύο πλευράς της.

3.7 Χάραξις τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας μέ κανόνα καί διαβήτην. Ἔστω ἡ κυρτή γωνία $\measuredangle(Ox\ ,\ Oy)$. Μέ κέντρον τήν κορυφήν O καί ἀκτῖνα τῆς ἐκλογῆς μας γράφομεν ἕνα τόξον περιφερείας πού νά τέμνη τάς πλευράς τῆς γωνίας, ἔστω είς τά σημεῖα A καί B ἀντιστοίχως. Τό τρίγωνον AOB εἶναι ἰσοσκελές (ἐπειδή $OA = OB$) καί ὁ ἄξων συμμετρίας του εἶναι συγχρόνως διχοτόμος τῆς γωνίας AOB τοῦ τριγώνου καί μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB.



Ἐπομένως διά νά χαράξωμεν τήν διχοτόμον κατασκευάζομεν μέ κανόνα καί διαβήτην τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB. Ἐπειδή αὐτῆς τῆς μεσοκαθέτου γνωρίζομεν ἤδη ἕνα σημεῖον, τό O, ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν μέ κανόνα καί διαβήτην ἕνα ἀκόμη σημεῖον της Γ, κατά προτίμησιν ἀπό τό μέρος τῆς εὐθείας AB είς τό ὁποῖον δέν κεῖται τό O.

3.8 Διχοτόμοι τριγώνου. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον. Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του λέγονται καί διχοτόμοι τοῦ τριγώνου. Ὅπως εἶναι φανερόν ἀπό τό διπλανόν σχῆμα, αἱ



δύο διχοτόμοι ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό Κ. Τό σημεῖον αὐτό ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ καθώς καί ἀπό τάς πλευράς ΒΑ καί ΒΓ. Ἄρα ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τάς δύο πλευράς ΓΑ καί ΓΒ. Συνεπῶς ἀνήκει καί εἰς τήν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{ΒΓΑ}$.

Ὥστε, αἱ τρεῖς διχοτόμοι ἑνός τριγώνου ἔχουν τήν ἰδιότητα νά διέρχωνται ἀπό ἕνα καί τό ἴδιον σημεῖον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εἰς τάς ἑπομένας ἀσκήσεις εἶναι σκόπιμον τό συμμετρικόν ἑνός σχήματος νά χαραχθῆ καί νά σημειωθῆ μέ μολύβι χρώματος διαφορετικοῦ ἀπό τό χρῶμα ἐκείνου πού ἐχρησιμοποιήθη διά τό ἀρχικόν σχῆμα.

1) Χρησιμοποιοῦντες τετραγωνισμένον χαρτί ἠμπορεῖτε νά εὕρετε χωρίς σχεδιαστικά ὄργανα τό συμμετρικόν, ὡς πρός ἕνα ἄξονα, ἑνός σημειοσυνόλου πού ἀποτελεῖται ἀπό κόμβους τοῦ τετραγωνισμοῦ, ἀρκεῖ ὁ ἄξων συμμετρίας νά συμπίπτη μέ μίαν ἀπό τάς εὐθείας τοῦ τετραγωνισμοῦ.
Νά χαράξετε λοιπόν ἕνα κυρτόν τετράπλευρον μέ κόμβους ὡς κορυφάς καί νά εὕρετε τό συμμετρικόν του ὡς πρός μίαν ὁριζόντιον εὐθεῖαν τοῦ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ σας. Νά χαράξετε ὁμοίως ἕνα μή κυρτόν πεντάγωνον καί νά εὕρετε τό συμμετρικόν του ὡς πρός μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν τοῦ χαρτιοῦ σας.

2) Νά σχεδιάσετε ἐπάνω εἰς τό τετραγωνισμένον χαρτί, τό ἕνα κάτω ἀπό τό ἄλλο, τά κεφαλαῖα γράμματα Α, Γ, Δ, Ε, Ν οὕτως ὥστε τά σημεῖα ὅπου τέμνονται ἤ τελειώνουν τά εὐθύγραμμα τμήματά τους νά συμπίπτουν μέ κόμβους κατόπιν νά προσδιορίσετε τά συμμετρικά σχήματα τῶν γραμμάτων, πού ἐσχεδιάσατε, ὡς πρός μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν τοῦ τετραγωνισμοῦ. Ἀπό τά συμμετρικά αὐτά σχήματα ποῖα παριστάνουν γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καί ποῖα ὄχι;

3) Νά χαράξετε ἕνα ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καί νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτην τό συμμετρικόν του ὡς πρός τήν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἡ ἕνωσις τῶν δύο τριγώνων πού ἐσχεδιάσατε ἀποτελεῖ ἕνα κυρτόν τετράπλευρον ἐπαληθεύσατε αὐτήν τήν ἰδιότητα.

4) Χαράξατε ἕνα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ ἀμβλεῖαν τήν γωνίαν Α καί κατασκευάσατε τό συμμετρικόν του ὡς πρός

ἄξονα τήν εὐθεῖαν ΑΒ.
Νά ἐπαληθεύσετε ὅτι ἡ ἕνωσις τῶν δύο τριγώνων ἀποτελεῖ ἕνα μή κυρτόν τετράπλευρον.

5) Σχεδιάσατε δύο ἴσας περιφερείας πού νά τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα. Τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τό ζεῦγος τῶν περιφερειῶν αὐτῶν ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, ποίους ;

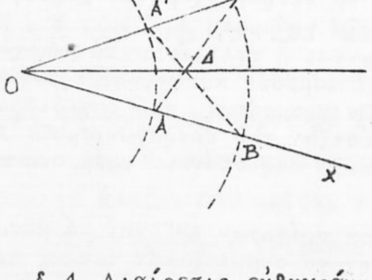
6) Νά χαράξετε δύο τεμνομένας εὐθείας ἐπάνω εἰς διαφανές χαρτί καί νά ἐπαληθεύσετε ὅτι εἶναι δυνατόν νά διπλώσωμεν τό χαρτί κατά δύο τρόπους οὕτως ὥστε αἱ χαραχθεῖσαι εὐθεῖαι νά συμπέσουν. Ποίαν γεωμετρικήν σχέσιν ἔχουν αἱ εὐθεῖαι πού προκύπτουν ἀπό τάς δύο διπλώσεις μέ τό ζεῦγος τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ;

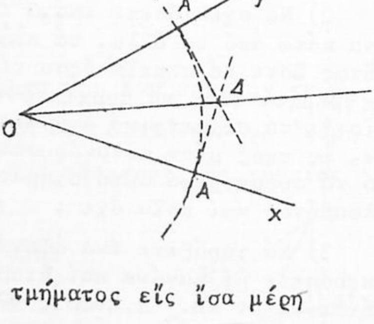
7) Νά χωρίσετε μέ κανονα καί διαβήτην μίαν γωνίαν 90^0 εἰς τέσσερα ἴσα μέρη καί νά ἐλέγξετε μέ τό μοιρογνωμόνιον τήν κατασκευήν σας.

8) Νά διχοτομήσετε δύο κατά κορυφήν γωνίας. Τί παρατηρεῖτε ;

9) Νά διχοτομήσετε δύο ἐφεξῆς γωνίας μέ ἄθροισμα 180^0. Τί παρατηρεῖτε ;

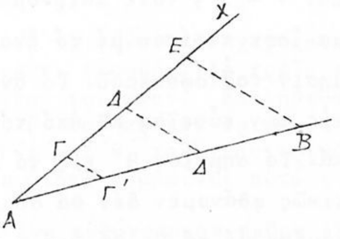
10) Νά περιγράψετε τάς ἀκολούθους δύο κατασκευάς τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $\measuredangle$ (Ox , Oy) καί νά προσπαθήσετε νά τάς δικαιολογήσετε χρησιμοποιοῦντες τάς ἰδιότητας τῆς συμμετρίας ὡς πρός ἄξονα :





§ 4. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ἴσα μέρη

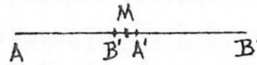
4.1 Εἰς τήν § 2.8 εἴδαμεν πῶς εἶναι δυνατόν νά χωρίσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς 2, εἰς $4 = 2^2$, εἰς $8 = 2^3$, γενικῶς εἰς $\nu = 2^{\lambda}$ ($\lambda = 1,2,3,4,\ldots$) ἴσα μέρη μέ διαδοχικάς διχοτομήσεις (δηλαδή διαιρέσεις εἰς δύο ἴσα μέρη). Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι λοιπόν ἐφαρμόσιμος μόνον ὅταν τό πλῆθος ν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τά ὁποῖα θέλομεν νά διαιρέσωμεν ἕνα τμῆμα, εἶναι ἴσον μέ μίαν δύναμιν τοῦ 2. Δι' αὐτό θά ἐκθέσωμεν τώρα μίαν ἄλλην μέθοδον διαιρέσεως ἑνός τμήματος ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη, ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός των ν ($\nu = 1,2,3,4,5,6,\ldots$).



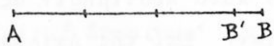
Ἄς εἶναι π.χ. ν = 3. Ἀπό τό ἄκρον Α τοῦ ΑΒ χαράσσομεν μίαν ἡμιευθεῖαν Αx πού νά σχηματίζη μέ τήν ἡμιευθεῖαν ΑΒ μίαν κατά προτίμησιν ὀξεῖαν γωνίαν. Ἐπί τῆς Αx λαμβάνομεν τρία ἴσα διαδοχικά τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ τό κοινόν μέγεθος τῶν τριῶν αὐτῶν τμημάτων ἠμπορεῖ νά εἶναι ὁποιοδήποτε, εἶναι ὅμως σκόπιμον νά πλησιάζη κατ' ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ μας τό ἕνα τρίτον τοῦ μεγέθους τοῦ ΑΒ. Ἀπό τά σημεῖα Γ καί Δ φέρομεν παραλλήλους πρός τήν εὐθεῖαν ΕΒ αἱ παράλληλοι αὐταί τέμνουν τό τμῆμα ΑΒ, ἔστω εἰς τά σημεῖα Γ΄καί Δ΄ Τά τμήματα ΑΓ΄, Γ΄Δ΄ καί Δ΄Β εἶναι τότε ἴσα καί ἑπομένως ταυτίζονται μέ τά ζητούμενα τρία ἴσα μέρη τοῦ ΑΒ.

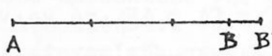
4.2 Παρατήρησις. Ὅταν τό πλῆθος ν τῶν ἴσων μερῶν εἶναι μικρόν, τότε ἠμποροῦμεν νά ἐκτελέσωμεν τόν χωρισμόν τοῦ ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη καί μέ τήν ἀκόλουθον πειραματιστικήν μέθοδον. Ἔστω π.χ. ν = 2. Παίρνομεν εἰς τόν διαβήτην μας ἕνα ἄνοιγμα α ἴσον περίπου μέ τό ἥμισυ τοῦ ΑΒ κατ' ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ. Μέ κέντρα τά Α, Β καί ἀκτῖνα τό ληφθέν ἄνοιγμα α γράφομεν δύο τόξα κύκλων τά ὁποῖα τέμνουν τό τμῆμα

AB, ἔστω εἰς τά σημεῖα A΄, B΄ ἀντιστοίχως. Τά σημεῖα αὐτά δέν θά συμπίπτουν κατά κανόνα, θά εὑρίσκωνται ὅμως τόσον πλησίον τό ἕνα πρός τό ἄλλο ὥστε νά εἶναι εὔκολον νά προσδιορίσωμεν μέ ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ μας τό μέσον M τοῦ τμήματος A΄B΄πού περιορίζουν. Τό M εἶναι τό ζητούμενον μέσον τοῦ AB.



Ἐάν ν = 3 , τότε παίρνομεν εἰς τόν διαβήτην μας ἕνα ἄνοιγμα ἴσον περίπου μέ τό ἕνα τρίτον τοῦ τμήματος AB κατ΄ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ. Τό ἄνοιγμα αὐτό τό μεταφέρομεν ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν AB ἀπό τό A πρός τό B τρεῖς φοράς διαδοχικά. Τό σημεῖον B΄ εἰς τό ὁποῖον τελικῶς φθάνομεν δέν θά συμπίπτη κατά κανόνα μέ τό B, θά ἀπέχη ὅμως ἀπό τοῦτο τόσον ὀλίγον ὥστε νά εἶναι δυνατόν νά ἐκτιμήσωμεν μέ τόν ὀφθαλμόν μας πόσον εἶναι τό τρίτον τοῦ τμήματος BB΄. Κατά τό τρίτον αὐτό θά πρέπει νά αὐξήσωμεν ἤ νά ἐλαττώσωμεν τό ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου μας διά νά ἔχωμεν τό ζητούμενον ἕνα τρίτον τοῦ τμήματος AB,μέ ἐπαρκῆ προσέγγισιν διά τάς σχεδιάσεις· αὔξησις χρειάζεται εἰς τήν περίπτωσιν πού τό B΄ εὑρίσκεται ἐντός τοῦ τμήματος AB, ἐλάττωσις, εἰς τήν περίπτωσιν πού τό B΄ εὑρίσκεται ἔξω τοῦ τμήματος AB.





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά διαιρέσετε ἕνα τμῆμα τῆς ἐκλογῆς σας εἰς 4 ἴσα μέρη, ἐφαρμόζοντες καί τάς τρεῖς μεθόδους τάς ὁποίας ἐγνωρίσατε.

2) Νά χωρίσετε ἕνα τμῆμα εἰς 3 διαδοχικά μέρη ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον εἶναι διπλάσιον τοῦ προηγουμένου του.

3) Νά χωρίσετε ἕνα τμῆμα εἰς δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου.

4) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τό μέσον $Α_1$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Πῶς ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν χρησιμοποιοῦντες τό $Α_1$ καί τήν ἐκτεθεῖσαν γενικήν μέθοδον διαιρέσεως ἑνός τμήματος εἰς ἴσα μέρη ;

5) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τό σημεῖον τομῆς Ο τῶν διαγωνίων ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ , νά τό χρησιμοποιήσετε διά νά διαιρέσετε εἰς δύο ἴσα μέρη τάς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου.

6) Ἀπό τάς κορυφάς Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ χαράξατε εὐθείας παραλλήλους πρός τάς ἀπέναντι πλευράς. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι πού ἐχαράξατε ὁρίζουν ἕνα νέον τρίγωνον. Ἐπαληθεύσατε τώρα τό ἑξῆς: Αἱ κορυφαί Α, Β, Γ τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν Β΄Γ΄, Γ΄Α΄, Α΄Β΄ τοῦ νέου τριγώνου. Μήπως ἠμπορεῖτε νά ἐξηγήσετε διατί συμβαίνει αὐτό ;

7) Ἕνας τρόπος νά χωρίσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη ($ν = 2,3,4,\ldots$) εἶναι καί ὁ ἑξῆς:
Ἔστω $ν = 5$. Χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπί τῆς ε, κατά τήν φοράν ἀπό τό Α πρός τό Β λαμβάνομεν πέντε ἴσα διαδοχικά τμήματα:

$$Γ_1Γ_2 = Γ_2Γ_3 = Γ_3Γ_4 = Γ_4Γ_5 = Γ_5Γ_6$$

Ἑνώνομεν τό σημεῖον Α μέ τό $Γ_6$ καί τό Β μέ τό $Γ_1$. Αἱ δύο εὐθεῖαι $ΑΓ_6$ καί $ΒΓ_1$ τέμνονται ἐντός τῆς ταινίας πού ὁρίζουν αἱ δύο παράλληλοι ΑΒ καί ε, ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς. Χαράσσομεν τάς εὐθείας $Γ_2Ο$, $Γ_3Ο$, $Γ_4Ο$ καί $Γ_5Ο$· αὗται τέμνουν τό τμῆμα ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Μ Ε Ρ Ο Σ   Τ Ρ Ι Τ Ο Ν

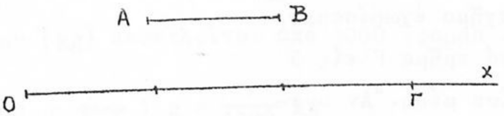
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

ΙΑ΄ Κλάσματα.

§ 1. Ἀκέραιοι καί κλασματικοί ἐκτελεσταί.

1.1 Ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνα τμῆμα ΑΒ, ἠμποροῦμεν πάντοτε μέ τήν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, νά τό ἐπαναλάβωμεν διαδοχικῶς ἐπί μιᾶς ἡμιευθείας Οx, ὅσας φοράς θέλομεν.

Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα τό τμῆμα ΑΒ ἐπανελήφθη τρεῖς φοράς ἐπί τῆς ἡμιευθείας Οx καί προέκυψε τό τμῆμα ΟΓ, τριπλάσιον τοῦ ΑΒ.



Γράφομεν

$$ΟΓ = 3 \times ΑΒ \quad ἤ \quad ΟΓ = 3ΑΒ.$$

Λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμεν τό τμῆμα ΑΒ ἐπί 3.
Ἐδῶ ὁ φυσικός ἀριθμός 3 ἐχρησιμοποιήθη ὡς ἐκτελεστής μιᾶς γεωμετρικῆς πράξεως.
Ἐάν ἀντί τοῦ 3 ἐχρησιμοποιεῖτο ὡς ἐκτελεστής ὁ 5, θά προέκυπτε ἕνα ἄλλο τμῆμα

$$ΟΔ = 5ΑΒ \;:$$

καί γενικῶς μέ ἐκτελεστήν ν, τό τμῆμα

$$ΟΝ = νΑΒ$$

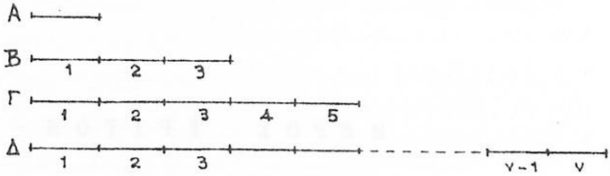
Σημείωσις: Εἰς τό ἑξῆς, χάριν συντομίας, θά ὀνομάζωμεν ἕνα τμῆμα μέ ἕνα μόνον κεφαλαῖον γράμμα, ὅπως εἰς τό κατωτέρω σχῆμα

$A = 1A$

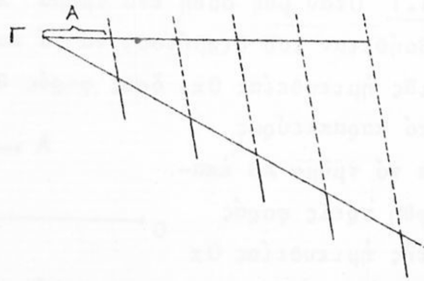
$B = 3A$

$\Gamma = 5A$

$\Delta = \nu A$



Ἐάν θέλωμεν τώρα νά ἐπανέλθωμεν ἀπό τό 3A, 5A ἤ νA εἰς τό A, γνωρίζομεν ἀπό τήν γεωμετρίαν πῶς νά χωρίσωμεν ἕνα τμῆμα εἰς 3 ἤ 5 ἤ, γενικά, εἰς ν ἴσα μέρη.



Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ἐχωρίσαμεν τό τμῆμα Γ εἰς 5 ἴσα μέρη. Ἄν ὀνομάσωμεν A τό ἕνα ἀπό αὐτά τά 5 ἴσα μέρη, θά λέγωμεν ὅτι τό A εἶναι τό ἕνα <u>πέμπτον</u> τοῦ Γ καί θά γράφωμεν:

$$A = \frac{1}{5} \times \Gamma \quad ἤ \quad \frac{1}{5}\Gamma$$

Αἱ ἰσότητες $\Gamma = 5A$ καί $A = \frac{1}{5}\Gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

$$\Gamma = 5A \Longleftrightarrow A = \frac{1}{5}\Gamma ,$$

καί γενικά : $N = \nu A \Longleftrightarrow A = \frac{1}{\nu} N$.

Ὁ νέος ἐκτελεστής $\frac{1}{5}$ πού μᾶς ἐπέτρεψε νά ἐπανέλθωμεν ἀπό τό τμῆμα Γ εἰς τό τμῆμα A θά λέγεται κλασματικός ἐκτελεστής καί εἰδικώτερα , ἐδῶ, <u>κλασματική μονάδα</u>.

Χρησιμοποιοῦντες ὡς ἐκτελεστήν ἕνα ἀκέραιον ἤ μίαν κλασματικήν μονάδα μεταβαίνομεν ἀπό ἕνα πρῶτον τμῆμα εἰς ἕνα ἄλλο δεύτερον τμῆμα, τελείως ὡρισμένον, ὅταν δοθῆ τό πρῶτον.

Οἱ ἐκτελεσταί 3 καί $\frac{1}{3}$, 5 καί $\frac{1}{5}$, ν καί $\frac{1}{\nu}$ λέγονται ἀντίστροφοι ἐκτελεσταί.

Κλασματικάς μονάδας χρησιμοποιοῦμεν καί εἰς ἄλλα μεγέθη κατά τήν μέτρησίν των.

Παραδείγματα:

1ον Ἡ δραχμή ἀποτελεῖται ἀπό 5 εἰκοσάλεπτα ἤ 10 δεκάλεπτα ἤ 2 πενηντάλεπτα:

$$1 \text{ δρχ} = 5 \text{ εἰκλ} \iff 1 \text{ εἰκλ} = \frac{1}{5} \text{ δρχ}$$

$$1 \text{ δρχ} = 10 \text{ δεκλ} \iff 1 \text{ δεκλ} = \frac{1}{10} \text{ δρχ}$$

$$1 \text{ δρχ} = 2 \text{ πενηντλ.} \iff 1 \text{ πενηντλ.} = \frac{1}{2} \text{ δρχ}$$

2ον Ἡ ὥρα (h) ἀποτελεῖται ἀπό 60 λεπτά (min)

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \iff 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$$

3ον Τό χιλιόγραμμον (kg) ἀποτελεῖται ἀπό 1000 γραμμάρια (g)

$$1 \text{ Kg} = 1000 \text{ g} \iff 1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{ kg}$$

<u>1.2. Κλάσματα:</u> Ὅπως ἀπό τήν ἀκεραίαν μονάδα σχηματίζομεν, μέ ἐπανάληψιν, κάθε ἄλλον φυσικόν ἀριθμόν, ἔτσι καί ἀπό κάθε κλασματικήν μονάδα σχηματίζομεν, μέ ἐπανάληψιν, νέους ἀριθμούς, τούς κλασματικούς :

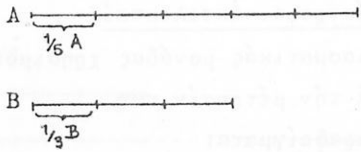
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Τάς διαφόρους κλασματικάς μονάδας καί τούς κλασματικούς ἀριθμούς ὀνομάζομεν μέ ἕνα ὄνομα κλάσματα.

Οἱ ἀριθμοί: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{15}{15}$ κ.ἄ. εἶναι κλάσματα.

<u>1.3. Ἀντίστροφοι ἀριθμοί:</u> Ὅπως ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς ἐκτελεστάς τούς φυσικούς ἀριθμούς καί τούς ἀντιστρόφους των (δηλαδή τάς κλασματικάς μονάδας) μέ ἀνάλογον τρόπον ἠμποροῦμεν νά χρησιμοποιήσωμεν ὡς ἐκτελεστάς καί τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

Παράδειγμα: Ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα, μέ ἐκτελεστήν $\frac{3}{5}$ ἠμποροῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἀπό τό τμῆμα Α τό νέον τμῆμα Β ἴσον μέ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ Α. Γράφομεν:



$$B = \frac{3}{5}A \Longleftrightarrow A = \frac{5}{3}B$$

$$B = 3\times\left(\frac{1}{5}A\right) = \frac{3}{5}A$$

Ἐάν τώρα θέλωμεν ἀπό τό τμῆμα Β νά ἐπανέλθωμεν εἰς τό Α πρέπει νά ἐπαναλάβωμεν 5 φοράς τό $\frac{1}{3}$ τοῦ Β.

$$A = 5\times\left(\frac{1}{3}B\right) = \frac{5}{3}B$$

Ἔχομεν λοιπόν τάς ἰσοδυνάμους σχέσεις:

$$B = \frac{3}{5}A \Longleftrightarrow A = \frac{5}{3}B$$

Τά κλάσματα $\frac{3}{5}$ καί $\frac{5}{3}$ καί γενικῶς, τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\beta}{\alpha}$ (α καί β φυσικοί ἀριθμοί) λέγονται ἀντίστροφοι ἀριθμοί.

Κάθε κλάσμα ἀποτελεῖται ἀπό δύο ὅρους: τόν ἀριθμητήν καί τόν παρονομαστήν. Εἰς τό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ α εἶναι ὁ ἀριθμητής καί ὁ β ὁ παρονομαστής.

1.4. Κλασματική γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: Εἶναι φανερόν ἀπό τό σχῆμα τῆς προηγουμένης παραγράφου ὅτι, ὅπως τό τμῆμα Α περιέχει 5 φοράς τό $\frac{1}{5}A$, ἔτσι καί ἡ μονάς 1 περιέχει 5 φοράς τήν κλασματικήν μονάδα $\frac{1}{5}$. Ἄν ἐχωρίζαμεν τήν μονάδα εἰς ν ἴσα μέρη, θά ἀπετελεῖτο ἀπό τά ν ἴσα μέρη της. Συμφωνοῦμεν λοιπόν νά γράφωμεν:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots = \frac{\nu}{\nu}, \text{ καί κατ' ἐπέκτασιν } \frac{1}{1} = 1$$

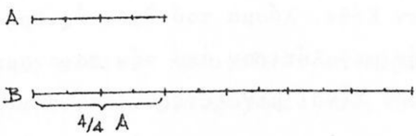
Κάθε κλάσμα λοιπόν πού ἔχει ἴσους ὅρους εἶναι ἴσον μέ τήν μονάδα.

Τώρα ἠμποροῦμεν κάθε ἀκέραιον νά τόν μετατρέψωμεν εἰς κλάσμα μέ ὅποιον θέλομεν παρονομαστήν.

Παράδειγμα: Νά μετατραπῇ ὁ 3 εἰς τέταρτα:

$$3 = 3 \times 1 = 3 \times \frac{4}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$$

Ἡ μετατροπή αὐτή φαίνεται σαφέστερα εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα:



Μέ ἐκτελεστήν τόν 3 ἐπεράσαμεν ἀπό τό τμῆμα Α πού ἐλάβαμεν ὡς μονάδα εἰς τό τμῆμα Β = 3Α. Ἀκολούθως ἐχωρίσαμεν τό τμῆμα Α εἰς 4 ἴσα μέρη:

$$A = 4 \times \frac{1}{4} A = \frac{4}{4} A .$$

Βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τό Β πού εἶναι τριπλάσιον ἀπό τό Α χωρίζεται εἰς $3 \times 4 = 12$ ἴσα μέρη.

$$B = 3A = 3 \times \frac{4}{4} A = \frac{4}{4} A + \frac{4}{4} A + \frac{4}{4} A = \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4}\right) A = \frac{12}{4} A.$$

Οἱ ἐκτελεσταί 3 καί $\frac{12}{4}$ εἶναι ἴσοι διότι καί οἱ δύο ἐφαρμοζόμενοι εἰς τό τμῆμα Α μᾶς δίδουν τό ἴδιον τμῆμα Β.

Ἐπομένως: $3 = \dfrac{3 \times 4}{4}$ καί γενικῶς $\alpha = \dfrac{\alpha \times \mu}{\mu}$, μ φυσ. ἀριθμός.

Ἐάν διά τόν ἀκέραιον 3 ἐκλέξωμεν ὡς παρονομαστήν τό 1 θά ἔχωμεν:

$$3 = \frac{3 \times 1}{1} = \frac{3}{1} \text{ καί γενικῶς } \alpha = \frac{\alpha \times 1}{1} = \frac{\alpha}{1}.$$

Τά κλάσματα πού προέρχονται ἀπό τήν ἰδίαν κλασματικήν μονάδα, μέ τήν ἐπανάληψίν της, τά ὀνομάζομεν ὁμώνυμα.

Παραδείγματα:

$\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{7}{7}, \frac{13}{7}$, ἐπίσης $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}$, κ.λ.π.

1.5 Σύγκρισις κλασμάτων μέ τήν μονάδα. Ἀπό ὅσα ἔχο–

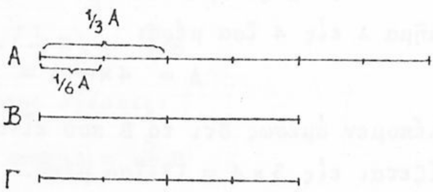
μεν μάθει ἕως τώρα διά τά κλάσματα συμπεραίνομεν ὅτι:

1ον Κάθε κλάσμα πού ἔχει ἴσους ὅρους εἶναι ἴσον μέ τήν μονάδα. $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff \alpha = \beta$

2ον Κάθε κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν μικρότερον ἀπό τόν παρονομαστήν εἶναι μικρότερον ἀπό τήν μονάδα. $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \iff \alpha < \beta$

3ον Κάθε λάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν μεγαλύτερον ἀπό τόν παρονομαστήν εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τήν μονάδα. $\frac{\alpha}{\beta} > 1 \iff \alpha > \beta$

<u>1.6 Κλάσματα ἰσοδύναμα.</u> Ἀπό τό τμῆμα Α ἄς σχηματίσωμεν τό τμῆμα Β $= \frac{2}{3}$Α καί τό τμῆμα Γ $= \frac{4}{6}$Α, ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα.



Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἐκτελεσταί $\frac{2}{3}$ καί $\frac{4}{6}$ μᾶς δίδουν ἀπό τό ἴδιον τμῆμα Α δύο ἴσα τμήματα, τά Β καί Γ. Δι αὐτό λέγομεν ὅτι οἱ ἐκτελεσταί $\frac{2}{3}$ καί $\frac{4}{6}$ εἶναι ἰσοδύναμοι καί θά ὀνομάζωμεν <u>ἰσοδύναμα</u> ἤ <u>ἴσα</u> τά κλάσματα $\frac{2}{3}$ καί $\frac{4}{6}$, θά γράφωμεν δέ :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Ἐάν ἀντί τοῦ ἐκτελεστοῦ $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ ἐπαίρναμεν ὡς ἐκτελεστήν τόν $\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3}$, θά εὑρίσκαμεν καί πάλιν ἕνα τμῆμα ἴσον μέ τά προηγούμενα Β καί Γ. Τό ἴδιον θά συνέβαινε καί μέ ἐκτελεστήν τόν $\frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$ καί γενικῶς μέ ἐκτελεστην τόν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 \times \nu}{3 \times \nu}$.

Τά κλασματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, ... , $\frac{\alpha}{\beta}$, τά ὁποῖα, ὅταν ἐφαρμοσθοῦν ὡς ἐκτελεσταί εἰς τό ἴδιον τμῆμα μᾶς δίδουν ἴσα τμήματα, λέγονται ἰσοδύναμα ἤ ἴσα καί ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύεται μέ ἕνα ἀπό αὐτά, συνήθως ἐκεῖνο πού ἔχει τούς μικροτέρους ὅρους. Τό ἀντιπροσωπευτικόν αὐτό κλάσμα ἔχει ὅρους πρώτους πρός ἀλλήλους καί λέγεται ἀνάγωγον.

Τά κλάσματα μιᾶς κλάσεως προκύπτουν ἀπό τό ἀνάγωγον ἐάν, κάθε φοράν, πολλαπλασιάσωμεν τούς ὅρους του μέ τόν ἴδιον φυσικόν ἀριθμόν.

Ἀντιστρόφως ἀπό ἕνα κλάσμα μιᾶς κλάσεως ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν τό ἀντιπροσωπευτικόν ἀνάγωγον, ἐάν διαιρέσωμεν τούς ὅρους του μέ τόν μέγιστον κοινόν διαιρέτην των.

Παράδειγμα:

$$\frac{670}{1072} = \frac{670:134}{1072\cdot 134} = \frac{5}{8}$$

	1	1	1	2
1072	670	402	268	134
402	268	134	0	

Μ.κ.δ. τῶν ὅρων 670 καί 1072 εἶναι 134 καί εὑρέθη μέ τόν Εὐκλείδειον ἀλγόριθμον.

1.7 Τά κλάσματα ὡς διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής ἑνός κλάσματος, μέ αὐτήν τήν σειράν, ἀποτελοῦν μαζύ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος. Αὐτό σημαίνει ὅτι δέν ἐπιτρέπεται οὔτε κατά τήν γραφήν, οὔτε κατά τήν ἐκφώνησιν νά ἀλλάξωμεν τήν σειράν πού ἀκολουθοῦν οἱ δύο ὅροι. Εἰς ἄλλην κλάσιν ἀνήκει τό $\frac{3}{4}$ καί εἰς ἄλλην τό $\frac{4}{3}$ καί ὡς ἐκ τούτου δέν εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἄς λάβωμεν δύο ἰσοδύναμα κλάσματα τῆς κλάσεως τοῦ $\frac{2}{3}$, π.χ.

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $4 \times 15 = 6 \times 10 \ (= 60)$

Ἐπίσης ἀπό τά ἴσα $\frac{8}{12} = \frac{18}{27}$ ἔχομεν:

$$8 \times 27 = 12 \times 18 \ (= 216)$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν ἔχω τά ἴσα γινόμενα

$$4 \times 12 = 6 \times 8 ,$$

εἶναι ὡς νά ἔχω τά ἰσοδύναμα κλάσματα:

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12}$$

Δύο λοιπόν ἰσοδύναμα κλάσματα ἔχουν τήν ἀκόλουθον χαρακτηριστικήν ἰδιότητα:

<u>Τά γινόμενα τοῦ ἀριθμητοῦ ἑκάστου μέ τόν παρονομαστήν τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα.</u>

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \Longleftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta}$$

<u>1.8 Τό κλάσμα ὡς πηλίκον διαιρέσεως.</u> Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νά μοιράσωμεν 3 δραχμάς εἰς 5 μαθητάς. Εἶναι φανερόν ὅτι ἀπό κάθε δραχμήν θά δώσωμεν εἰς κάθε μαθητήν 1 εἰκοσάλεπτον (1 δρχ = 5 εἰκλ.), ἀπό τάς τρεῖς δραχμάς λοιπόν θά λάβη ὁ κάθε μαθητής μερίδιον 3 εἰκοσάλεπτα

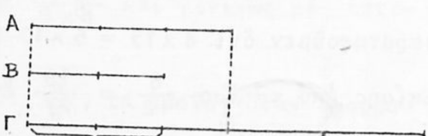
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \text{ δρχ} = 3 \text{ εἰκλ.}$$

Ἔχομεν λοιπόν τήν διαίρεσιν:

$3 : 5 = \frac{3}{5}$	3 διαιρετέος 5 διαιρέτης
$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{3}{5}$ ἀκριβές πηλίκον

<u>Κάθε κλάσμα λοιπόν εἶναι ἀκριβές πηλίκον διαιρέσεως μέ διαιρετέον τόν ἀριθμητήν καί διαιρέτην τόν παρονομαστήν του.</u>

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τώρα ὡς ἐκτελεστήν τόν $\frac{2}{3}$ εἰς τό τμῆμα Α = 1, μονάς μήκους. Θά εὕρωμεν τό



τμῆμα $B = \frac{2}{3} A$. Ἐάν τώρα εἰς τό τμῆμα B ἐφαρμόσωμεν ἐπελεστήν τόν 3, θά εὕρωμεν τό τμῆμα $\Gamma = 3B = 3 \times \left(\frac{2}{3} A\right) = \left(3 \times \frac{2}{3}\right) A = 2A$

Επομένως: $3 \times \frac{2}{3} = 2$ καί γενικῶς $\beta \times \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$

Τό γινόμενον κλάσματος μέ τόν παρονομαστήν του εἶναι ἴσον μέ τόν ἀριθμητήν του.

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι μέ τά κλάσματα ἐγενικεύσαμεν τήν τελείαν διαίρεσιν, εἰς τήν ὁποίαν, ὅπως ἐμάθαμεν, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{διαιρέτης} \times \text{πηλίκον} = \text{διαιρετέος}$$

Ἔχομεν λοιπόν τάς ἰσοδυνάμους σχέσεις:

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \beta \times \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

1.9 Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$, ὅπου α φυσικός καί β ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἕως τώρα ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἦτο δυνατή μόνον ὅταν ὁ β ἦτο πολλαπλάσιον τοῦ α , π.χ.

$$3x = 12 \Longleftrightarrow x = 12 : 3 = 4$$

Τώρα ὅμως ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$ εἶναι δυνατή διά κάθε τιμήν τῶν α καί β. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\alpha x = \beta \Longleftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$$

Πραγματικά: ἄν εἰς $\alpha x = \beta$ θέσωμεν $x = \frac{\beta}{\alpha}$, ἔχομεν

$$\alpha x = \alpha \times \frac{\beta}{\alpha} = \beta$$

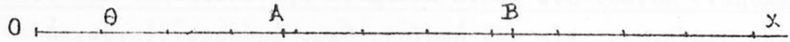
Σημείωσις. Εἰς τήν περίπτωσιν $\beta = 0$, ἔχομεν:

$$\alpha x = 0 \quad \text{καί συνεπῶς} \quad x = \frac{0}{\alpha} = 0.$$

Καί δι'αὐτό πρέπει, ὅπως εἴπαμεν ἀνωτέρω, ὁ α νά εἶναι φυσικός ἀριθμός. Διαίρεσις μέ διαιρέτην μηδέν δέν ἔχει νόημα.

1.10 Ρητοί ἤ σύμμετροι ἀριθμοί. Τά κλάσματα λοιπόν εἶναι ἀκριβῆ πηλίκα ἀκεραίων μέ φυσικούς ἀριθμούς καί λέγονται ρητοί ἤ σύμμετροι ἀριθμοί. Τό σύνολόν των παρίσταται διά τοῦ γράμματος Ρ καί ἀποτελεῖται ἀπό τήν ἕνωσιν τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καί τῶν μή ἀκεραίων πηλίκων ἑνός ἀκεραίου μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν.

1.11 Γραφική παράστασις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Τετμημένη σημείου. Τούς ρητούς ἀριθμούς ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν μέ σημεῖα ἐπάνω εἰς μίαν ἡμιευθεῖαν Οx.



Ἀρκεῖ νά λάβωμεν ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Οx ἕνα τμῆμα ΟΘ ὡς μονάδα μετρήσεως:

Ἔτσι ὁ ρητός ἀριθμός $3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$ παρίσταται μέ τό σημεῖον Α ἤ τό τμῆμα ΟΑ· καί ὁ $7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}$ μέ τό σημεῖον Β ἤ τό τμῆμα ΟΒ μέ μονάδα τό τμῆμα ΟΘ. Οἱ ρητοί ἀριθμοί $\frac{15}{4}$ καί $\frac{22}{3}$ πού ἐκφράζουν τά μέτρα τῶν τμημάτων ΟΑ καί ΟΒ, μέ μονάδα τό ΟΘ λέγονται ἀντιστοίχως τετμημέναι τῶν σημείων Α καί Β. Εἰς κάθε λοιπόν ρητόν ἀριθμόν ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Οx , τό ὁποῖον ἔχει ὡς τετμημένην τόν ρητόν αὐτόν ἀριθμόν· καί εἰς δύο ἀνίσους ρητούς ἀριθμούς, ἀντιστοιχοῦν δύο διαφορετικά σημεῖα τῆς ἡμιευθείας. Ἔτσι τό σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀντίστοιχον ἕνα σύνολον σημείων τῆς ἡμιευθείας Οx ,τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ σημειοσυνόλου τῆς ἡμιευθείας. Διότι, ὅπως θά μάθωμεν εἰς ἄλλην τάξιν, ὑπάρχουν σημεῖα τῆς ἡμιευθείας πού δέν ἀντιστοιχοῦν εἰς κανένα ρητόν ἀριθμόν. Τά σημεῖα αὐτά θά μᾶς ὁδηγήσουν εἰς τήν εἰσαγωγήν νέων ἀριθμῶν πού θά τούς ὀνομάσωμεν ἀσυμμέτρους.

1.12 Κλάσματα ἑτερώνυμα. Εἴδαμεν ὅτι τά κλάσματα πού παράγονται μέ τήν ἐπανάληψιν τῆς ἰδίας κλασματικῆς μονάδος λέγονται ὁμώνυμα.

Όταν έχωμεν κλάσματα προερχόμενα από διαφορετικάς κλασματικάς μονάδας, θά τά λέγωμεν ετερώνυμα : Τά κλάσματα

$$\frac{3}{8} = 3\times\frac{1}{8} \quad \text{καί} \quad \frac{3}{5} = 3\times\frac{1}{5}$$

είναι ετερώνυμα διότι προέρχονται άπο διαφορετικάς κλασματικάς μονάδας, τήν $\frac{1}{8}$ καί τήν $\frac{1}{5}$.

Τά ετερώνυμα κλάσματα είναι πάντοτε δυνατόν νά τραπούν είς ομώνυμα:

Άς υποθέσωμεν ότι έχομεν τά ανάγωγα κλάσματα $\frac{7}{12}$ καί $\frac{4}{15}$ πού αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικάς κλάσεις ισοδυναμίας καί άς σχηματίσωμεν τά ισοδύναμά των πολλαπλασιάζοντες τούς όρους εκάστου επί 2 , 3 , 4 ,...

Έχομεν:

$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{21}{36} = \frac{28}{48} = \frac{35}{60} = \frac{42}{72} = \dots$$

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{30} = \frac{12}{45} = \frac{16}{60} = \frac{20}{75} = \frac{24}{90} = \dots$$

Γίνεται αμέσως φανερόν ότι τά δύο ετερώνυμα κλάσματα $\frac{7}{12}$ καί $\frac{4}{15}$ ημπορούν νά αντικατασταθούν μέ τά ισοδύναμά των ομώνυμα $\frac{35}{60}$ καί $\frac{16}{60}$. Παρατηρούμεν επίσης ότι ο κοινός παρονομαστής 60 είναι τό ε.κ.π. τών παρονομαστών 12 καί 15 τών δύο αναγώγων κλασμάτων.

$$\frac{7}{12} = \frac{5\times7}{5\times12} = \frac{35}{60} \quad , \quad \frac{4}{15} = \frac{4\times4}{4\times15} = \frac{16}{60}$$

Κάθε κοινόν πολλαπλάσιον τών παρονομαστών 12 και 15 (δηλ. κάθε πολλαπλάσιον τού 60) ήμπορεί νά χρησιμοποιηθή διά νά τραπούν είς ομώνυμα δύο ετερόνυμα κλάσματα, διότι:

$$\frac{35}{60} = \frac{70}{120} = \frac{105}{180} = \dots , \text{ καί } \frac{20}{60} = \frac{40}{120} = \frac{60}{180} = \dots$$

Συμφέρει όμως νά προτιμούμεν τό ε.κ.π. διά νά έχωμεν ομώνυμα κλάσματα μέ όσον τό δυνατόν μικροτέρους όρους.

Παραδείγματα: 1ον) $\overset{6}{\frac{3}{5}}$, $\overset{5}{\frac{5}{6}}$, $\overset{3}{\frac{7}{10}}$ (ε.κ.π. = 30 $\boxed{\begin{matrix}30:5=6\\30:6=5\\30:10=3\end{matrix}}$

$$\frac{6\times 3}{6\times 5}=\frac{18}{30}\ ,\ \frac{5\times 5}{5\times 6}=\frac{25}{30}\ ,\ \frac{3\times 7}{3\times 10}=\frac{21}{30}$$

Τά έτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ έτράπησαν είς τά ίσοδύναμά των όμώνυμα

$$\frac{18}{30}\ ,\ \frac{25}{30}\ ,\ \frac{21}{30}$$

2ον) $\overset{5\times 7}{\frac{2}{3}}$, $\overset{3\times 7}{\frac{3}{5}}$, $\overset{3\times 5}{\frac{4}{7}}$ (ε.κ.π. 3×5×7) $\boxed{\begin{matrix}(3\times5\times7)\ :\ 3=5\times7\\(3\times5\times7)\ :\ 5=3\times7\\(3\times5\times7)\ :\ 7=3\times5\end{matrix}}$

$$\frac{5\times7\times2}{5\times7\times3}\ ,\ \frac{3\times7\times3}{3\times7\times5}\ ,\ \frac{3\times5\times4}{3\times5\times7}\ \text{ή}\ \frac{70}{105}\ ,\ \frac{63}{105}\ ,\ \frac{60}{105}$$

Είς τό δεύτερον παράδειγμα, έπειδή οί παρονομασταί είναι πρῶτοι πρός άλλήλους άνά δύο, ε.κ.π. των είναι τό γινόμενόν των.

Σπουδαία σημείωσις: "Οταν θέλωμεν νά τρέφωμεν έτερώνυμα κλάσματα είς όμώνυμα,πρέπει,πρίν άναζητήσωμεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν , νά τά κάμνωμεν άνάγωγα. "Ετσι έπιτυγχάνομεν τούς μικροτέρους δυνατούς ὅρους είς τά όμώνυμα καί εύκολυνόμεθα είς τάς πράξεις.

"Οταν δύο κλάσματα δέν άνήκουν είς τήν ίδίαν κλάσιν ίσοδυναμίας είναι ἄνισα.

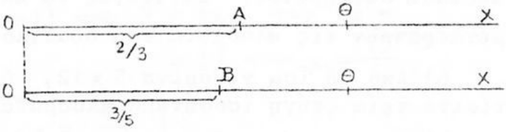
Διά νά τάσυγκρίνωμενν ὑπάρχουν δύο τρόποι:

1ον Νάτά παραστήσωμεν μέ σημεῖα έπάνω είς μίαν ἡμιευθεῖαν. Μεγαλύτερον θά εἶναι έκεῖνο πού τό παραστατικόν του σημεῖον άπέχει περισσότερον άπό τήν άρχήν.

2ον. Νά τά μετατρέψωμεν είς όμώνυμα (έάν εἶναι έτερώνυμα). Μεγαλύτερον θά εἶναι έκεῖνο πού θά ἔχη τόν μεγαλύτερον άριθμητήν.

Παράδειγμα: "Εστω ὅτι ἔχομεν νά συγκρίνωμεν τά ἄνισα κλάσματα $\frac{2}{3}$ καί $\frac{3}{5}$

Είς τό παραπλεύρως σχῆμα ἐπήραμεν ὡς μονάδα τό τμῆμα ΟΘ καί ἐφαρμόσαμεν εἰς αὐτό ὡς ἐκτελεστάς πρῶτα τό $\frac{2}{3}$ καί κατόπιν τό $\frac{3}{5}$.



Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθοῦμεν μέ τόν διαβήτην ὅτι ΟΑ > ΟΒ, ἐπομένως καί $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

Ἄς μετατρέψωμεν τώρα τά ἴδια κλάσματα εἰς ὁμώνυμα:

$$\overset{5}{\frac{2}{3}} , \overset{3}{\frac{3}{5}} \Longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \quad \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{10}{15} > \frac{9}{15} \Longrightarrow \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Ὁ δεύτερος αὐτός τρόπος συγκρίσεως δύο κλασμάτων εἶναι πρακτικώτερος καί αὐτόν θά ἐφαρμόζωμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐπάνω εἰς μίαν ἡμιευθεῖαν Οx νά ὁρίσετε ἕνα σημεῖον Γ, οὕτως ὥστε τό τμῆμα ΟΓ νά εἶναι τετραπλάσιον ἀπό ἕνα ἄλλο τμῆμα ΑΒ πού μᾶς ἔχη δοθῆ.

2) Νά χαράξετε ἕνα τμῆμα Α = 35 mm, ἕνα ἄλλο Β = 48 mm καί ἕνα ἄλλο Γ = 50 mm. Ποῖος ἐκτελεστής πρέπει νά ἐφαρμοσθῆ εἰς καθένα ἀπό τά τρία αὐτά τμήματα διά νά προκύψουν τά ἄλλα δύο;
(Κατά τόν τύπον: $B = \frac{48}{35} A \ldots$)

3) Νά χαράξετε δύο διαφορετικά τμήματα Α καί Β καί νά ἐφαρμόσετε εἰς τό Α τόν ἐκτελεστήν $\frac{3}{5}$ καί εἰς τό Β τόν $\frac{1}{3}$.

4) Νά εὑρεθῆ τό ἀντιπροσωπευτικόν ἀνάγωγον κλάσμα τῆς κλάσεως εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει καθένα ἀπό τά κλάσματα:

$$\frac{85}{136}, \quad \frac{125}{184}, \quad \frac{371}{561}, \quad \frac{235}{329}.$$

5) Τά κλάσματα $\frac{101}{1000}$ καί $\frac{111}{1011}$ εἶναι γραμμένα μέ τό δυαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως νά μετατραποῦν εἰς κλάσματα τοῦ δε-

καδικοῦ συστήματος. Ἀντιθέτως τά κλάσματα $\frac{2}{3}$ καί $\frac{7}{12}$ νά μετατραποῦν είς κλάσματα τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

6) Ἀπό τά ἴσα γινόμενα 5×12, 6×10, 4×15 νά σχηματίσετε τρία ζεύγη ἰσοδύναμα κλάσματα.

7) Ὁ μαθητής Α ἔχει 8 δρχ καί ὁ Β 15 δρχ. Ποῖον κλάσμα τῶν χρημάτων τοῦ Α ἔχει ὁ Β ; Ποῖον κλάσμα τῶν χρημάτων τοῦ Β ἔχει ὁ Α ; Ποῖος θά εἶναι ὁ συσχετισμός τῶν χρημάτων των, ὅταν ὁ Α δώση είς τό Β μίαν δραχμήν ;

8) Νά μετατραποῦν είς ὁμώνυμα τά κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{6}$ β) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{8}{15}$ γ) $\frac{58}{102}$, $\frac{57}{76}$, $\frac{185}{370}$

9) Νά καταταχθοῦν κατά μέγεθος, ἀπό τό μικρότερον πρός τό μεγαλύτερον οἱ ρητοί ἀριθμοί:

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$, 2, $\frac{19}{10}$, $\frac{5}{3}$. Ἐπίσης οἱ $\frac{341}{209}$ καί $\frac{561}{462}$.

10) Διά νά ἁπλοποιήσωμεν ἕνα κλάσμα δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τά κριτήρια διαιρετότητος καί νά καταλήξωμεν προοδευτικῶς είς τό ἀνάγωγον κλάσμα. Ἐφαρμόζοντες αὐτήν τήν μέθοδον νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα:

$\frac{15}{18}$, $\frac{20}{35}$, $\frac{48}{16}$, $\frac{36}{54}$, $\frac{198}{594}$, $\frac{1584}{2376}$

11) Νά ἁπλοποιήσετε νοερά τά ἀκόλουθα κλάσματα.

$\frac{7}{14}$, $\frac{13}{39}$, $\frac{36}{12}$, $\frac{5 \times 8 \times 3}{4 \times 6}$, $\frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^4 \times 3 \times 7}$, $\frac{7 \times 2 \times 3^3}{49 \times 6 \times 3^2}$

12) Νά γίνουν ἀνάγωγα τά κλάσματα:

$\frac{240}{520}$, $\frac{196}{336}$, $\frac{348}{638}$, $\frac{240}{312}$

13) Νά ἁπλοποιηθοῦν νοερά τά κλάσματα

$\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha\beta^2\gamma}{\alpha\beta^3\gamma^2}$, $\frac{48\alpha^2 x^2}{36\alpha x^2}$, $\frac{121\alpha^2\beta\gamma^2}{66\alpha\beta^2\gamma^2}$

14) Νά λυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1ον $3x = 5$	5ον $\frac{10-x}{2} = 5$	8ον $\frac{2}{3} = x - 1$
2ον $2x = 0$	6ον $\frac{3x-1}{4} = 2$	9ον $\frac{3(2x+1)}{5} = 5$
3ον $0x = 3$		
4ον $0x = 0$	7ον $\frac{12}{2x-1} = 3$	10ον $\frac{15}{2(3x-1)} = 3$

Ὁδηγίαι. Θά χρησιμοποιηθῆ ἀποκλειστικῶς καί μόνον ἡ σχέσις ἀντιστροφῆς, μεταξύ προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως καί μεταξύ πολλαπλασιασμοῦ καί διαιρέσεως. Παράδειγμα:

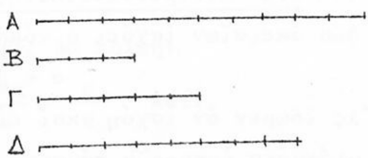
$$\frac{7}{3(x-1)} = 2 \iff 7 = 6(x-1) \iff 7 = 6x-6 \iff 6x = 13 \iff x = \frac{13}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{13}{6}}$$

§ 2. Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις κλασμάτων

2.1 Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τά ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{3}{10}$ καί $\frac{5}{10}$.

Ἄς τά ἐφαρμόσωμεν ὡς ἐκτελεστάς εἰς τό τμῆμα Α, ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα. Εὑρίσκομεν τά τμήματα:



$B = \frac{3}{10}A$ καί $Γ = \frac{5}{10}A$.

Εἰς τό ἴδιον τμῆμα Α ἄς ἐφαρμόσωμεν ὡς ἐκτελεστήν τό κλάσμα $\frac{8}{10}$ $(8 = 3+5)$. Εὑρίσκομεν τό τμῆμα $Δ = \frac{8}{10}A$.

Εἶναι ὅμως εὔκολον νά βεβαιωθοῦμεν μέ τόν διαβήτην ὅτι:

$$B + Γ = Δ \quad \text{ἤ} \quad \frac{3}{10}A + \frac{5}{10}A = \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{10}\right) A = \frac{8}{10} A$$

καί ἐπομένως:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{3+5}{10} \quad \text{καί γενικά}, \quad \frac{α}{π} + \frac{β}{π} = \frac{α+β}{π}.$$

Τό ἄθροισμα λοιπόν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ὁμώνυμον μέ αὐτά καί ἔχει ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν των.

2.2 Ἄθροισμα ἑτερωνύμων κλασμάτων. Ἐπειδή δύο ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται πάντοτε εἰς ὁμώνυμα, συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι πάντοτε δυνατή ἡ πρόσθεσις δύο τυχόντων κλασμάτων, ἀρκεῖ νά τά μετατρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, ἐάν δέν εἶναι.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν 3 εἰκοσάλεπτα καί 7 πεντάλεπτα, δηλαδή: $\frac{3}{5}$ δρχ καί $\frac{5}{20}$ δρχ

Ἔχομεν:

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{20}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$$

Πραγματικά τά τρία εἰκοσάλεπτα μᾶς κάμνουν, πρός 4 πεντάλεπτα τό καθένα, $3\times 4 = 12$ πεντάλεπτα, $\frac{12}{20}$ δρχ καί 12 πεντλ + 5 πενταλ = 17 πεντλ.

ἤ $$\frac{12}{20}\text{ δρχ}+\frac{5}{20}\text{ δρχ}=\left(\frac{12}{20}+\frac{5}{20}\right)\text{ δρχ}=\frac{17}{20}\text{ δρχ.}$$

<u>2.3 Ἀντιμεταθετικότης</u>. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

Ἄς ἴδωμεν ἄν ἰσχύῃ καί εἰς τά κλάσματα· καί ἐπειδή δύο κλάσματα ἠμποροῦν πάντοτε νά γίνουν ὁμώνυμα, ἄς λάβωμεν δύο ὁμώνυμα κλάσματα

Ἔχομεν: $\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\beta}{\varrho}=\frac{\alpha+\beta}{\varrho}$, $\frac{\beta}{\varrho}+\frac{\alpha}{\varrho}=\frac{\beta+\alpha}{\varrho}$

Ἐπειδή $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, θά εἶναι καί $\frac{\alpha+\beta}{\varrho}=\frac{\beta+\alpha}{\varrho}$

Ἄρα, $$\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\beta}{\varrho}=\frac{\beta}{\varrho}+\frac{\alpha}{\varrho}$$

Ἄν ἔχωμεν ἀκέραιον καί κλάσμα, ἰσχύει καί πάλιν ἡ ἀντιμεταθετικότης, ἀφοῦ ὁ ἀκέραιος γίνεται κλάσμα

$$3+\frac{5}{8}=\frac{8\times 3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{24}{8}+\frac{5}{8}=\frac{29}{8}$$

$$\frac{5}{8}+3=\frac{5}{8}+\frac{8\times 3}{8}=\frac{5}{8}+\frac{24}{8}=\frac{29}{8}$$

Ἐπομένως: $3+\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+3$.

<u>Εἰς τό ἄθροισμα λοιπόν δύο ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.</u>

<u>2.4 Ἀφαίρεσις.</u> Γνωρίζομεν ἀπό τούς ἀκεραίους ὅτι ἡ ἀφαίρεσις καί ἡ πρόσθεσις εἶναι δύο πράξεις ἀντίστροφοι. Αὐτό σημαίνει ὅτι, ὅταν ἰσχύῃ μία ἀπό τάς τρεῖς ἰσότητας:

1ον $\alpha + \beta = \gamma$, 2ον $\gamma - \beta = \alpha$ 3ον $\gamma - \alpha = \beta$,

ἰσχύουν καί αἱ ἄλλαι δύο. Δυνάμεθα λοιπόν νά μεταβαίνωμεν ἐλεύθερα ἀπό τήν μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς τά δύο ἄλλας.

$$\boxed{\alpha + \beta = \gamma \Longleftrightarrow \gamma - \beta = \alpha \Longleftrightarrow \gamma - \alpha = \beta.}$$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νά εὕρωμεν τήν διαφοράν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων (τά ἑτερώνυμα μετατρέπονται εἰς ὁμώνυμα).

Ἄς θέσωμεν:

$$\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{\varrho} = \frac{x}{\varrho} \qquad (1)$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν τῆς διαφορᾶς θά πρέπῃ:

$$\frac{\beta}{\varrho} + \frac{x}{\varrho} = \frac{\alpha}{\varrho} \text{ ἤ } \frac{\beta+x}{\varrho} = \frac{\alpha}{\varrho} \quad \text{καί:}$$

$$\beta + x = \alpha \Longleftrightarrow x = \alpha - \beta.$$

Ἡ (1) λοιπόν γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\alpha-\beta}{\varrho} = \frac{\gamma}{\varrho} \quad (\text{ἄν } \alpha - \beta = \gamma)$$

Ἡ διαφορά δύο ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι ἴση μέ κλάσμα ὁμώνυμον μέ αὐτά πού ἔχει ἀριθμητήν τήν διαφοράν τῶν ἀριθμητῶν.

Εἰς τούς ἀκεραίους εἴχαμεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\alpha - \beta = \gamma \Longleftrightarrow \alpha = \beta + \gamma \Longleftrightarrow \alpha - \gamma = \beta$$

Ἀπό αὐτάς συμπεραίνομεν τώρα τάς ἰσοδυναμίας:

$$\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\gamma}{\varrho} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\beta}{\varrho} + \frac{\gamma}{\varrho} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{\beta}{\varrho} ,$$

διότι ἡ ἀντίστοιχος πρᾶξις μεταφέρεται εἰς τούς ἀριθμητάς πού εἶναι ἀκέραιοι.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι αἱ πράξεις πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις εἶναι ἀντίστροφοι ἡ μία πρός τήν ἄλλην καί εἰς τό σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν.

2.5 Μικτοί ἀριθμοί. Εἴδαμεν εἰς προηγουμένην παράγραφον (1.9) ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$ (α φυσικός β, ἀκέραιος) εἶναι πάντοτε δυνατή καί μᾶς δίδει τήν λύσιν

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

Ἔστω τώρα πρός λύσιν ἡ ἐξίσωσις:

$$7x = 25 \iff x = \frac{25}{7}.$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι κάθε κλάσμα εἶναι πηλίκον διαιρέσεως μέ διαιρετέον τόν ἀριθμητήν καί διαιρέτην τόν παρονομαστήν. Ἐπομένως:

$$\frac{25}{7} = 25 : 7$$

Ἀλλά, κατά τά γνωστά μας:

$25 = 3 \times 7 + 4$ καί συνεπῶς

$$\frac{25}{7} = \frac{3\times7+4}{7} = \frac{3\times7}{7} + \frac{4}{7} = 3 + \frac{4}{7}$$

Ὁ ἀριθμός $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τήν μονάδα λέγεται καί μικτός καί γράφεται ἁπλούστερα $3\frac{4}{7}$ χωρίς τό σημεῖον τῆς προσθέσεως.

Κάθε κλασματικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τήν μονάδα ἠμπορεῖ νά πάρῃ μορφήν μικτοῦ καί κάθε μικτός ἠμπορεῖ νά πάρῃ μορφήν κλασματική.

$$2 + \frac{5}{6} = \frac{2\times6+5}{6} = \frac{17}{6}$$

2.6 Ἡ προσεταιριστικότης εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τά ὁμώνυμα κλάσματα (τά ἑτερώνυμα γίνονται πάντοτε ὁμώνυμα).

$$\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho} + \frac{\gamma}{\varrho} = \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho}\right) + \frac{\gamma}{2}.$$

θά ἔχωμεν κατά τά γνωστά:

$$\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho}\right) + \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{\alpha+\beta}{\varrho} + \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{(\alpha+\beta)+\gamma}{\varrho} = \frac{\alpha+(\beta+\gamma)}{\varrho} = \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta+\gamma}{\varrho} = \frac{\alpha}{\varrho} + \left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\gamma}{\varrho}\right)$$

Ἐπομένως: Εἰς τήν πρόσθεσιν τριῶν κλασμάτων ἰσχύει ἡ προσεταιριστικότης.

2.7 Γενίκευσις τῆς προσεταιριστικότητος. Ἀφοῦ ἕνα ὁποιονδήποτε ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῇ εἰς ἄθροισμα ἰσαρίθμων ὁμωνύμων κλασμάτων, ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως μεραφέρεται εἰς τούς ἀκεραίους ἀριθμητάς. Κάθε λοιπόν ἰδιότης τοῦ ἀθροίσματος ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύει καί εἰς τούς ρητούς. Ἐπομένως:

Ἕνα ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων.

Παράδειγμα:

$$2+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+2$$

Πραγματικαί :

$$2+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{20}{10}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{20+6+5+3}{10}=$$

$$=\frac{3+6+5+20}{10}=\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{20}{10}=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+2$$

Ἀφοῦ ἠμποροῦμεν νά ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν προσθετέων εἰς ἕνα ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι:

β) Εἰς ἕνα ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους ἀριθμούς μέ τό ἄθροισμά των καί ἀντιστρόφως, νά ἀναλύσωμεν ἕνα προσθετέον εἰς ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων ρητῶν ἀριθμῶν.

$$\alpha+\frac{\beta}{\gamma}+\delta+\frac{\varepsilon}{\zeta}+\eta \iff \left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\varepsilon}{\zeta}+\eta\right)+\alpha+\delta.$$

2.8 Ἰδιότητες εἰς τήν ἀφαίρεσιν. Γνωρίζομεν ἀπό τήν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων τήν ἰδιότητα:

$$\alpha-\beta=(\alpha\pm\mu)-(\beta\pm\mu), \quad \text{μέ} \quad \mu<\beta$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή τῆς ἀφαιρέσεως ἰσχύει καί εἰς τούς ρητούς ἀριθμούς, διότι, ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ α, β, μ εἶναι ρητοί, ἠμπορούμεν νά τούς μετατρέφωμεν είς κλάσματα ὁμώνυμα ὁπότε ἡ ἰδιότης μεταφέρεται είς τούς ἀκεραίους ἀριθμητάς :

$$2-\frac{3}{5}=\left(2\pm\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}\pm\frac{1}{2}\right) \quad \text{διότι:}$$

$$2-\frac{3}{5}=\frac{20}{10}-\frac{6}{10}=\frac{20-6}{10}=\frac{(20\pm 5)-(6\pm 5)}{10}=\frac{20\pm 5}{10}-\frac{6\pm 5}{10}$$

$$=\left(\frac{20}{10}\pm\frac{5}{10}\right)-\left(\frac{6}{10}\pm\frac{5}{10}\right)=\left(2\pm\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}\pm\frac{1}{2}\right)$$

Μέ ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι καί αἱ λοιπαί ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σέ συνδυασμόν μέ τήν πρόσθεσιν, ἰσχύουν καί είς τούς ρητούς.

Ὑπενθυμίζομεν συμβολικῶς τάς ἰδιότητας αὐτάς:

$$(\alpha-\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)-\beta=\alpha-(\beta+\gamma), \text{ μέ } \gamma\leqslant\alpha \;,\; \beta+\gamma\leqslant\alpha \;,$$

$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta=\alpha+(\beta-\gamma) \;, \text{ μέ } \gamma\leqslant\alpha \;,\; \gamma\leqslant\beta \;,$$

$$(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta) \;, \text{ μέ } \alpha\geqslant\beta \;,\; \delta\leqslant\gamma.$$

ὅπου α, β, γ, δ ρητοί ἀριθμοί.

§ 3 Πολλαπλασιασμός καί διαίρεσις κλασμάτων.

3.1 Πολλαπλασιασμός. Ὅπως τό γινόμενον δύο ἀκεραίων ἐκφράζει τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου μέ μέτρα τῶν διαστάσεων του τούς ἀκεραίους αὐτούς, ἔτσι καί τό γινόμενον δύο κλασμάτων ἐκφράζει τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου πού ἔχει διαστάσεις μέ μέτρα τά δύο πολλαπλασιαστέα κλάσματα.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$. Τό γινόμενον αὐτό θά ἐκφράζη τό ἐμβαδόν ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις $\frac{3}{4}$ καί $\frac{2}{5}$, ὅπως φαίνεται είς τό σχῆμα τῆς ἐπομενης σελίδος (γραμμοσκιασμένον ὀρθογώνιον).

Ἡ τετραγωνική μονάς ΑΒΓΔ ἔχει χωρισθῆ είς 5 ταινίας, ὁριζοντίους ἀπό τα ἀριστερά πρός τά δεξιά καί είς 4 κατακορύφους στήλας ἀπό τά κάτω πρός τά ἐπάνω.

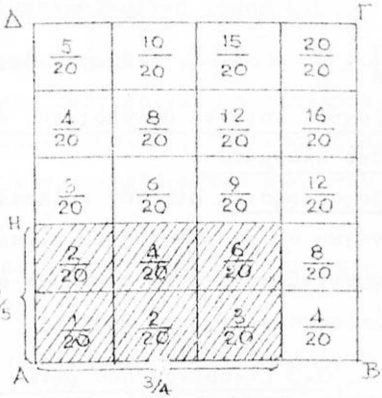
Αἱ ταινίαι αὐταί διασταυρώνονται καί χωρίζουν τήν τετραγωνικήν μονάδα εἰς

$4 \times 5 = 20$

ἴσα ὀρθογώνια.

Ἔτσι, καθένα ἀπό τά ἴσα αὐτά ὀρθογώνια εἶναι τό $\frac{1}{20}$ τῆς τετραγωνικῆς μονάδος.

Οἱ ἀριθμηταί τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων πού ἀναγράφονται εἰς τά 20 ἴσα ὀρθογώνια, ἔχουν ταχθῆ, ὅπως εἰς τόν



πυθαγόρειον πίνακα. Βλέπομεν καθαρά τώρα ὅτι ἡ κατακόρυφος ταινία τῶν $\frac{3}{4}$ διασταυρώνεται μέ τήν ὁριζόντιον ταινίαν τῶν $\frac{2}{5}$ εἰς τό ὀρθογώνιον πού περιέχει τό κλάσμα $\frac{6}{20} = \left(\frac{3 \times 2}{4 \times 5}\right)$

Ἐπομένως: $\boxed{\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}}$

Εἰς τόν ἴδιον πίνακα ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν καί ἄλλα γινόμενα, ὅπως π.χ. τό $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$.

Πραγματικά ἡ κατακόρυφος ταινία $\frac{3}{4}$ διασταυρώνεται μέ τήν ὁριζ. ταινίαν τῶν $\frac{4}{5}$ εἰς τό ὀρθογώνιον τῶν $\frac{12}{20}$.

Διά κάθε γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta}$ ἠμποροῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἕνα πίνακα ἀνάλογον μέ τόν ἀνωτέρω καί νά εὕρωμεν τό γινόμενον εἰς τήν διασταύρωσιν δύο ταινιῶν, ὅπως εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα.

Ἔχομεν λοιπόν: $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta$ φυσικοί ἀριθμοί).

Ἐπομένως: Τό γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα μέ ἀριθμητήν τό γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστήν τό γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

<u>3.2 Νόμος ἀντιμεταθέσεως</u>. Ἐπειδή $\frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} = \frac{\gamma \times \alpha}{\delta \times \beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma \times \alpha}{\delta \times \beta}$, ἕπεται ὅτι καί: $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\alpha}{\beta}$.

<u>Ἰσχύει λοιπόν, ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τό γινόμενον δύο κλασμάτων.</u>

<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς τόν πολλαπλασιασμόν κλασμάτων δέν εἶναι ἀνάγκη οἱ παράγοντες νά εἶναι κλάσματα ὁμώνυμα. Ἀπεναντίας, φροντίζομεν νά τά κάμνωμεν ἀνάγωγα (ἐάν δέν εἶναι) διά νά ἁπλουστεύωνται αἱ πράξεις.

<u>3.3 Γινόμενον δύο ρητῶν ἀριθμῶν</u>. Ὅταν ὁ ἕνας ἀπό τούς δύο παράγοντας εἶναι ἀκέραιος, τό γινόμενον εἶναι κλάσμα μέ παρονομαστήν τόν παρονομαστήν του κλασματικοῦ παράγοντος καί ἀριθμητήν τό γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέ τόν ἀριθμητήν τοῦ κλασματικοῦ παράγοντος: Πραγματικά:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{1 \times 4} = \frac{5 \times 3}{4}$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἰσχύει καί εἰς τό γινόμενον δύο ρητῶν ἀριθμῶν:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$$

<u>3.4 Προσεταιριστικότης</u>: Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά ὑπολογίσωμεν τό γινόμενον:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta}\right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad (1)$$

Ἔχομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta}\right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{(\alpha \times \gamma) \times \varepsilon}{(\beta \times \delta) \times \zeta} = \frac{\alpha \times (\gamma \times \varepsilon)}{\beta \times (\delta \times \zeta)}$$

καί:
$$\frac{\alpha}{\beta} \times \left(\frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma \times \varepsilon}{\delta \times \zeta} = \frac{\alpha \times (\gamma \times \varepsilon)}{\beta \times (\delta \times \zeta)}$$

Ἄρα:
$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta}\right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \left(\frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$$

Ἐπομένως: Ὁ νόμος τῆς προσεταιριστικότητος ἰσχύει καί εἰς τό γινόμενον τριῶν ρητῶν ἀριθμῶν (καί ἀκέραιος παράγων, ἐάν ὑπάρχη, γίνεται κλάσμα μέ παρονομαστήν τήν μονάδα).

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός κλασμάτων ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμόν ἀκεραίων καί εἰς τόν ἀριθμητήν καί εἰς τόν παρονομαστήν, τό δέ γινόμενον ἀκεραίων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν παραγόντων του, ἕπεται ὅτι καί:

Ἕνα γινόμενον ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειρά τῶν παραγόντων του.

3.5 Τό μηδέν ὡς παράγων. Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθοῦμεν ὅτι, ὅταν εἰς ἕνα γινόμενον παραγόντων ἕνας παράγων εἶναι μηδέν, τότε μηδενίζεται ὁλόκληρον τό γινόμενον.

$$\frac{3}{5}\times 5\times 0\times \frac{1}{2} = \frac{3\times 5\times 0\times 1}{5\times 2} = \frac{0}{5\times 2} = 0$$

3.6 Ἡ μονάς ὡς παράγων. Ἔχομεν: $1\times\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\times 1 = \frac{\alpha}{\beta}$

Ἡ μονάς λοιπόν εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον καί συνεπῶς ἠμπορεῖ νά παραλειφθῆ.

3.7 Γινόμενον κλάσματος μέ πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ του. Γνωρίζομεν (1.9) ὅτι:

$$\beta\times\frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν:

$56\times\frac{3}{8}$. Ὁ 56 γράφεται 7×8 ἐπομένως:

$$56\times\frac{3}{8} = (7\times 8)\times\frac{3}{8} = 7\times\left(8\times\frac{3}{8}\right) = 7\times 3 = 21$$

Τό γινόμενον, λοιπόν κλάσματος μέ διπλάσιον, τριπλάσιον,... ν/πλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ του εἶναι ἴσον ἀντιστοίχως μέ τό διπλάσιον, τριπλάσιον,..., ν/πλάσιον τοῦ ἀριθμητοῦ του.

$$(\nu\beta)\times\frac{\alpha}{\beta} = \nu\left(\beta\times\frac{\alpha}{\beta}\right) = \nu\alpha.$$

3.8 Γινόμενον ἀντιστρόφων ἀριθμῶν. Ἄς ὑπολογίσωμεν τό γινόμενον τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν:

$$\frac{5}{9}\times\frac{9}{5} = \frac{5\times 9}{9\times 5} = 1 \;,\; \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\beta\alpha} = 1$$

Ἀντιστρόφως: Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta} = 1$, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = 1 \Longleftrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \quad (1.7)$$

Ἑπομένως ὁ ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$.

Ἔχομεν, λοιπόν, τήν ἀκόλουθον χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν ἀντιστρόφων ρητῶν:

Δύο ἀντίστροφοι ρητοί ἀριθμοί ἔχουν γινόμενον τήν μονάδα.

3.9 Πολλαπλασιασμός κλάσματος μέ διαιρέτην τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ὁ πολ/σμός $5\times\frac{2}{15}$. Ἔχομεν:

$$5\times\frac{2}{15} = \frac{5\times 2}{15} = \frac{(5\times 2):5}{15:5} = \frac{2}{15:5} = \frac{2}{3}$$

Ὅταν, λοιπόν, ὁ παρονομαστής ἑνός κλάσματος διαιρεθῆ μέ ἕνα διαιρέτην του, τότε τό κλάσμα πολλαπλασιάζεται μέ αὐτόν τό φυσικόν ἀριθμόν.

3.10 Δυνάμεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ὅπως εἰς τούς ἀκεραίους ὠνομάσαμεν δύναμιν κάθε γινόμενον ἴσων ἀκεραίων παραγόντων, ἔτσι καί εἰς τούς ρητούς κάθε γινόμενον ἴσων ρητῶν παραγόντων ὀνομάζεται δύναμις καί γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\ldots\times\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu},$$

ἐάν τό πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων εἶναι μ .

Καί ἐπειδή:

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\ldots\times\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\times\alpha\times\alpha\times\ldots\times\alpha}{\beta\times\beta\times\beta\times\ldots\times\beta} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}},$$

συμπεραίνομεν ὅτι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$. Ἑπομένως:

Δύναμις κλάσματος μέ ἐκθέτην φυσικόν ἀριθμόν ἰσοῦται μέ κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν δύναμιν τοῦ ἀριθμητοῦ μέ τόν ἴδιον ἐκθέτην καί παρονομαστήν δύναμιν τοῦ παρονομαστοῦ μέ τόν ἴδιον ἐκθέτην.

Ὡς μηδενικήν δύναμιν παντός φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἔχομεν ὁρίση τό 1. Τό ἴδιον θά κάμωμεν καί εἰς τούς ρητούς ἀριθμούς τούς $\neq 0$. Θέτομεν:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0} = 1 \quad \text{μέ} \quad \frac{\alpha}{\mu} \neq 0.$$

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu+0} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}$,

ὅπως καί: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} \times 1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὑρεθοῦν νοερά τά ἀθροίσματα καί αἱ διαφοραί:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{12}$, $\frac{1}{7} + \frac{1}{9}$,

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, $1 - \frac{3}{5}$, $3 - 1\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$.

2) Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:

$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$, $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10}$, $\frac{5}{36} + \frac{4}{9} + \frac{3}{4} + 1\frac{1}{8}$.

3) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:

$\frac{31}{48} - \frac{1}{3} + \frac{3}{16}$, $5 - \frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6}$, $\frac{37}{12} - 2 + \frac{1}{4}$,

$\frac{52}{65} - \frac{14}{21} + \frac{77}{65}$, $\frac{15}{28} + \frac{198}{189} - \frac{186}{1116} - \frac{121}{462}$.

4) Νά ὑπολογισθῇ μέ τόν ἁπλούστερον δυνατόν τρόπον καθένα ἀπό τά ἀκόλουθα γινόμενα καί νά αἰτιολογιθῇ ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ.

$\frac{5}{8} \times 3$, $\frac{7}{12} \times 3$, $\frac{5}{9} \times 4$, $18 \times \frac{2}{3}$, $\frac{2}{18} \times 3$, $\frac{5}{36} \times 4$,

$\frac{5}{4} \times 36$, $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5}$, $\left(2\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{7}$, $\alpha \times \frac{1}{\alpha}$.

5) Τό ἴδιον διά τά γινόμενα:

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, $\frac{8}{17} \times \frac{4}{15}$, $\frac{19}{13} \times \frac{12}{15}$, $\frac{4}{7} \times \frac{17}{19}$, $\frac{5}{6} \times \frac{3}{5}$, $\frac{15}{16} \times \frac{4}{5}$,

$\frac{16}{25} \times \frac{35}{32}$, $\frac{121}{80} \times \frac{40}{132}$, $3\frac{1}{4} \times 1\frac{3}{13}$.

6) Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:

$$15\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{14}{15}\times\frac{3}{4} \quad , \quad 7\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{7}\times 12\times\frac{1}{25} \quad ,$$

$$\alpha\times\frac{\beta^2}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta^2}\times\frac{\delta^3}{\alpha^2} \quad , \quad \alpha\times\frac{\beta\gamma^2}{\delta^3}\times\frac{\delta^2}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\alpha^2}$$

7) Νά κατασκευάσετε ἕνα πίνακα ἀνάλογον μέ τόν πίνακα τοῦ σχήματος τῆς παραγράφου (3.1) καί νά ξεχωρίσετε τό ὀρθογώνιον πού ἔχει ἐμβαδόν

$$\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}$$

8) Ἕνα βαρέλι περιέχει 180 Kg κρασί. Ἀπό αὐτό ἐπωλήθησαν τά $\frac{2}{5}$ καί ἀπό ὅσον ἔμεινε τά $\frac{7}{9}$. Πόσα Kg κρασί ἔμειναν εἰς τό τέλος ;

Ἡ ἐπίλυσις ἀπεικονίζεται εἰς τάς ἀκολούθους πράξεις:

$$180 - \left[\frac{2}{5}\times 180 + \frac{7}{9}\times\left(\frac{3}{5}\times 180\right)\right]$$

9) Πατέρας καί υἱός ἐργαζόμενοι συγχρόνως σκάπτουν ἕνα ἀγρόν εἰς 3 ἡμέρας. Μόνος του ὁ πατέρας σκάπτει τόν ἴδιον ἀγρόν εἰς 4 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἠμπορεῖ νά σκάψη τόν ἀγρόν ὁ υἱός ἐργαζόμενος μόνος του ;

10) Ἀπό μίαν τάξιν μέ 60 μαθητάς τό $\frac{1}{12}$ ἀπερίφθησαν καί τά $\frac{2}{15}$ παρεπέμφθησαν εἰς μετεξέτασιν τόν Σεπτέμβριον.

Πόσοι μαθηταί ἀπερρίφθησαν , πόσοι παρεπέμφθησαν εἰς μετεξέτασιν καί πόσοι προήχθησαν. Ποῖον κλασματικόν μέρος τῆς τάξεως ἀποτελοῦν οἱ προαχθέντες;

11) Ἕνας ἐργάτης ἀρχίζει τήν ἐργασίαν του κατά τήν $6\frac{3}{4}$ πρωϊνήν ὥραν καί τήν τελειώνει κατά τήν $5\frac{1}{2}$ μεταμεσημβρινήν, ἀφοῦ διακόψη ἐπί 40 min διά πρόγευμα καί ἐπί $2\frac{5}{12}$ h δι᾽ἀνάπαυσιν. Ἐπί πόσας ὥρας εἰργάσθη καί πόσον θά πληρωθῆ ἐάν διά κάθε ὥραν ἐργασίας πληρώνεται 20 δρχ.

12) Εἰς ἕνα σχολεῖον ὁ κώδων τῆς προσευχῆς σημαίνει τήν $7\frac{3}{4}$ πρωϊνήν ὥραν. Ἡ προσευχή διαρκεῖ 6 min τά τρία πρῶτα διαλείμματα ἀπό 10 min καθένα καί τά δύο τελευταῖα ἀπό 12 min. Τό κάθε μάθημα διαρκεῖ 45 min . Ποίαν ὥραν σημαίνει ὁ κώδων τῆς ἐξόδου ἀπό τό τελευταῖον μάθημα;

Σημ. Τά λεπτά (min) θά τεθοῦν ὡς ἑξηκοστά τῆς ὥρας (h), θά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα καί αἱ ἀπαιτούμεναι πράξεις θά ἐκτελεσθοῦν εἰς τά κλάσματα.

3.11 Διαίρεσις. Γνωρίζομεν νά λύωμεν τήν έξίσωσιν $αx = β$, ὅταν ὁ α εἶναι φυσικός καί ὁ β ἀκέραιος ἀριθμός. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι οἱ ἀριθμοί $α \neq 0$ καί β εἶναι ρητοί καί ἔστω πρός λύσιν ἡ ἐξίσωσις,

$$\frac{3}{4}x = \frac{5}{7}$$

Πολλαπλασιάζομεν τά δύο μέλη της μέ τόν $\frac{4}{3}$, ἀντίστροφον τοῦ $\frac{3}{4}$. Ἔχομεν τότε:

$$\frac{4}{3}\times\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{4}{3}\times\frac{5}{7} \quad ἤ \quad \left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)x = \frac{4}{3}\times\frac{5}{7}$$

καί $x = \frac{4}{3}\times\frac{5}{7} = \frac{20}{27}$

Ὁ $x = \frac{20}{27}$ εἶναι, λοιπόν, ρητός ἀριθμός πού, ὅταν πολλαπλασιασθῆ μέ τόν $\frac{3}{4}$ μᾶς δίδει γινόμενον τόν $\frac{5}{7}$. Διά τοῦτο λέγεται πηλίκον διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{7}$ διά $\frac{3}{4}$ καί γράφομεν, ὅπως εἰς τήν τελείαν διαίρεσιν:

$$x = \frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7}\times\frac{4}{3} = \frac{20}{27}$$

Ἡ ἐξίσωσις λοιπόν $\frac{3}{4}x = \frac{5}{7}$ ἔχει λύσιν

$$x = \frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7}\times\frac{4}{3}$$

Ἄλλο παράδειγμα:

$$5x = \frac{3}{4} \cdot \text{ λύσις: } x = \frac{3}{4} : 5 = \frac{1}{5}\times\frac{3}{4}$$

Πηλίκον λοιπόν ρητοῦ ἀριθμοῦ β μέ ρητόν $α \neq 0$ λέγεται ὁ ρητός ἀριθμός $\frac{1}{α}\times β$, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῆ μέ τόν α μᾶς δίδει γινόμενον τόν β.

Πραγματικά: $α\times\left(\frac{1}{α}\times β\right) = \left(α\times\frac{1}{α}\right)\times β = 1\times β = β.$

3.12 Γενικός κανών τῆς διαιρέσεως. Ἀπό τά ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν τόν ἀκόλουθον κανόνα:

Κάθε πηλίκον ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον τοῦ διαιρετέου μέ τόν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

<u>3.13 Διαίρεσις μέ διαιρέτην τοῦ ἀριθμητοῦ.</u> Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν: $\frac{15}{4} : 5$

Ἐφαρμόζομεν τόν γενικόν κανόνα τῆς διαιρέσεως

$$\frac{15}{4} : 5 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4} = \frac{15:5}{4}$$

<u>Διά νά διαιρέσωμεν λοιπόν ἕνα κλάσμα μέ ἕνα διαιρέτην τοῦ ἀριθμητοῦ του, διαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν χωρίς νά θίξωμεν τόν παρονομαστήν.</u>

<u>3.14 Ἐπιμεριστικότης.</u> Ἐμάθαμεν εἰς τούς ἀκεραίους τήν ἐπιμεριστικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί τῆς διαιρέσεως ὡς πρός τήν πρόσθεσιν καί τήν ἀφαίρεσιν.

(1) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (4) $(\beta+\gamma) : \alpha = (\beta:\alpha) + (\gamma:\alpha)$

(2) $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$ (5) $(\beta-\gamma) : \alpha = (\beta:\alpha) - (\gamma:\alpha)$

(3) $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$

Ἡ ἰδία ἐπιμεριστικότης ἰσχύει καί εἰς τά κλάσματα. Παραδείγματα:

(1) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 5}{5\cdot 6}$

(2) $\frac{3}{5}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5}\cdot 2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 2}{5} - \frac{3\cdot 3}{5\cdot 4}$

(3) $\left(3+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{7}\right) = 3\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7} =$

$= \frac{3\cdot 3}{4} + \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} + \frac{3\cdot 3}{7} + \frac{2\cdot 2}{5\cdot 7}$

(4) $\left(\frac{4}{5} \pm \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3}\right) \pm \left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$

$= \frac{4\cdot 3}{5\cdot 2} \pm \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}$

<u>3.15 Σύνθετα κλάσματα.</u> Ὅπως τό πηλίκον δύο ἀκεραίων (διαιρέτης $\neq 0$) παίρνει κλασματικήν μορφήν, ἔτσι καί τό πηλίκον δύο ρητῶν γράφεται καί μέ κλασματικήν μορφήν. Θά προκύψη, τότε, νέας μορφῆς κλάσμα πού τό ὀνομάζομεν <u>σύνθετον κλάσμα:</u>

Παραδείγματα:

$$\frac{3}{5} : 7 = \frac{\frac{3}{5}}{7} \quad , \quad 5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{\frac{3}{4}} \quad , \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$$

Ἡ μετάβασις ἀντιθέτως ἀπό ἕνα σύνθετον κλάσμα εἰς τό ἰσοδύναμόν του ἁπλοῦν γίνεται μέ μίαν διαίρεσιν:

$$\frac{3}{\frac{5}{7}} = 3 : \frac{5}{7} = 3\times\frac{7}{5} = \frac{21}{5} \quad , \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}\times\frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Εἰς τό ἴδιον ἀποτέλεσμα φθάνομεν συντομώτερα, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος μέ τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἁπλῶν κλασμάτων πού περιέχονται εἰς αὐτό:

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{5\times 3}{\frac{2}{3}\times 3} = \frac{15}{2} \quad , \quad \frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{12}} = \frac{\frac{5}{8}\times 24}{\frac{7}{12}\times 24} = \frac{5\times 3}{7\times 2} \ ,$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}} = \frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times 12}{\left(1+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\right)\times 12} = \frac{2\times4+5\times2+3\times3}{1\times12+3\times3+5} = \frac{8+10+9}{12+9+5} \quad (3.7)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΙΣ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1) Ἔστω ὅτι εἰς τούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ προσθέτομεν τόν φυσικόν ἀριθμόν α. Τό νέον κλάσμα $\frac{1+\alpha}{2+\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό $\frac{1}{2}$ καί τόσον μεγαλύτερον, ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός α. Παράδειγμα:

$$\frac{1}{2} < \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} \ , \ \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1} \ , \ldots , \ \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < \frac{1001}{1002} \ \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τό $\frac{1001}{1002}$ διαφέρει ἀπό τήν 1 κατά : $1-\frac{1001}{1002} = \frac{1}{1002}$. Ἠμποροῦμεν λοιπόν νά πλησιάσωμεν ὅσον θέλομεν πρός τήν μονάδα τήν τιμήν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ προσθέτοντες εἰς τούς δύο ὅρους του τόν ἴδιον ἀρκετά μεγάλον ἀριθμόν. Δέν ἠμποροῦμεν ὅμως νά τό ἐξισώσωμεν πρός τήν μονάδα, ὅσον μεγάλος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός πού προσθέτομεν εἰς τούς ὅρους του.
Αὐτό συμβαίνει σέ κάθε κλάσμα μικρότερον ἀπό τήν 1.

2) Νά ἐξετάσετε μέ ἀνάλογον τρόπον τί συμβαίνει είς ἕνα κλάσμα μεγαλύτερον ἀπό τήν μονάδα, ὅταν προσθέτωμεν είς τούς δύο ὅρους του ἕνα ἀριθμόν διαρκῶς μεγαλύτερον.

3) Νά ἐξετάσετε τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ὅταν ἀπό τούς δύο ὅρους του ἀφαιροῦμεν ἕνα ἀριθμόν διαρκῶς μεγαλύτερον, ἀλλά πάντοτε μικρότερον ἀπό τόν μικρότερον ὅρον του. (δύο περιπτώσεις: $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ καί $\frac{\alpha}{\beta} > 1$).

4) Ἐπιμεριστικότης. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:

$$6\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right), \quad 12\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right), \quad 7\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\right),$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\times\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \quad \left(2+\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\right)$$

5) Διαιρέσεις Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα:

$$1:\frac{1}{5}, \quad 1:\frac{1}{\nu}, \quad 8:\frac{4}{5}, \quad \left(2\frac{1}{3}\right):\left(1\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$1:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \quad \left(3+\frac{5}{8}\right):\left(4+\frac{5}{6}\right), \quad \left(2-1\frac{1}{3}\right):\left(2-\frac{5}{6}\right)$$

6) Σύνθετα κλάσματα. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί α,β,γ, δ,ε,ζ,η ἀπό τάς κατωτέρω ἰσότητας:

$$\alpha=\frac{\frac{2}{3}}{2}, \quad \beta=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}, \quad \gamma=\frac{2}{\frac{3}{5}}, \quad \delta=\frac{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-1}, \quad \varepsilon=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$\zeta=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{\frac{1}{2}}}, \quad \eta=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}.$$

7) Ἀριθμητικαί τιμαί. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:

$x+y+\omega$ καί $2x-3y+\omega$

(ὅταν $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{3}$ καί $\omega=\frac{1}{8}$.

8) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:

x^2-y+3 καί x^2-y^2+5, ὅταν: $x=\frac{5}{9}$ καί $y=\frac{3}{4}$

9) Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος:

$\frac{2\alpha+3\beta-1}{3\alpha-2\beta+1}$, ὅταν: $\alpha=\frac{5}{6}$ καί $\beta=\frac{5}{12}$.

10) Ἕνα βαρέλι περιέχει λάδι εἰς ποσότητα ἴσην μέ τά $\frac{3}{4}$ τῆς χωρητικότητός του. Ἀφαιροῦμεν 50 Kg καί ἀπομένει ποσότης ἴση μέ τό περιεχόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς χωρητικότητός του. Ζητεῖται: α) νά εὑρεθῆ ἡ χωρητικότης του. β) Πόσα Kg λάδι περιεῖχεν ἀρχικῶς καί γ) Πόσα Kg βενζίνη ἠμπορεῖ νά χωρέση τό βαρέλι αὐτό, ἐάν τό λάδι ἔχει εἰδ. βάρος $\frac{91}{100}$ καί ἡ βενζίνη $\frac{73}{100}$.

11) Μία ἐλαστική σφαῖρα ἀφήνεται νά πέση ἐλευθέρως εἰς τό πάτωμα καί ἀναπηδᾶ κάθε φοράν, εἰς τά $\frac{2}{3}$ τοῦ προηγουμένου ὕψους. Ἀφοῦ προσέκρουσεν εἰς τό πάτωμα 3 φοράς ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 48 cm. Ἀπό ποῖον ὕψος ἀφέθη νά πέση.

12) Μία δεξαμενή τροφοδοτεῖται μέ νερό ἀπό μίαν πηγήν ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νά τήν γεμίση εἰς 7 ὥρας. Πόσον νερό τῆς παρέχει εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας, ἐάν ἡ χωρητικότης της εἶναι 50 m^3 ;

13) Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε $110\frac{5}{6}$ m ὕφασ. πρός 23 δρχ/m. Ἀπό αὐτό ἐπώλησε τά $\frac{3}{4}$ πρός 27 δρχ καί τό ὑπόλοιπον πρός $21\frac{1}{2}$ δρχ. Ἐκέρδισεν ἤ ἐζημίωσεν καί πόσον ;

14) Ἕνας κρουνός γεμίζει μίαν δεξαμενήν εἰς 7 ὥρας, ἐνῶ ἕνας ἄλλος τήν ἀδειάζει εἰς 12 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θά γεμίση ἡ δεξαμενή, ἐάν εἶναι κενή καί ἀνοιχθοῦν συγχρόνως οἱ δύο κρουνοί ;

15) Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν ἕνα ὕφασμα πρός 20 δρχ/m. Ἐπώλησεν τό ἥμισυ πρός 24 δρχ/m , τό $\frac{1}{6}$ πρός 20 δρχ/m, τό $\frac{1}{12}$ πρός 30 δρχ/m καί τό ὑπόλοιπον πρός 27 δρχ/m. Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ἐκέρδισε συνολικῶς 220 δρχ , πόσα μέτρα ἦτο ὁλόκληρον τό ὕφασμα ;

Σημείωσις. Κατά τήν λύσιν ὑποθέτομεν ὅτι τό ὕφασμα ἦτο 12 m ἤ ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 12 καί ἀφοῦ εὕρωμεν πόσα ἐκέρδισεν ἀπό τά 12 m εἶναι εὔκολον, πλέον νά προχωρήσωμεν εἰς τήν λύσιν.

16) Ἀπό τά χρήματα πού εἶχα ἐξώδευσα τό $\frac{1}{3}$, ἀκολούθως τά $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου καί τέλος τά $\frac{3}{8}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καί μοῦ ἔμειναν 15 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχα καί πόσα ἐξώδευσα κάθε φοράν.

17) Ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα ἐπωλήσαμεν τά $\frac{2}{5}$ καί κατόπιν

τά $\frac{5}{12}$ τοῦ ὑπολοίπου καί ὅσον ἀπέμεινεν ἐπωλήθη πρός 4,95 δρχ / m καί ἀπέδωσε εἴσπραξιν 1386 δρχ. Πόσα μέτρα ἦτο τό ὕφασμα ;

18) Δυνάμεις τῶν κλασμάτων. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{1}{5}\right)^3, \left(\frac{5}{8}\right)^2, \left(2+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1-\frac{3}{5}\right)^2, \left(2+\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^3, \left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right)^2, \left(\frac{35}{47}+\frac{87}{125}+\frac{132}{561}\right)^0$$

§ 4. Δεκαδικά κλάσματα καί δεκαδικοί ἀριθμοί.

4.1 Δεκαδικαί κλασματικαί μονάδες. Κάθε κλάσμα πού ἔχει παρονομαστήν μίαν δύναμιν τοῦ 10 λέγεται δεκαδικόν κλάσμα. Π.χ.

$$\frac{3}{10}, \frac{5}{100}, \frac{17}{1000}, \ldots, \frac{\alpha}{10^\nu} \quad (\alpha, \text{ ἀκέραιος})$$

Ἀντί $\frac{5}{100}$, $\frac{17}{1000}$, γράφομεν συντομώτερα $\frac{5}{10^2}$, $\frac{17}{10^3}$, κ.λ.π.

Αἱ δεκαδικαί κλασματικαί μονάδες εἶναι αἱ ἀκόλουθοι κατά τάξιν φθίνοντος μεγέθους :

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε μία δεκαδική κλασματική μονάς εἰς τήν ἀνωτέρω κλίμακα εἶναι δεκαπλασία ἀπό τήν ἀμέσως ἑπομένην της (πρός τά δεξιά) καί ὑποδεκαπλασία ἀπό τήν ἀμέσως προηγουμένην της (πρός τά ἀριστερά):

$$\frac{1}{10} = 10\cdot\frac{1}{100}, \frac{1}{100} = 10\times\frac{1}{1000}, \ldots$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι:

$$\ldots 10^3 = 10\cdot 10^2, 10^2 = 10\cdot 10^1, 10^1 = 10\cdot 10^0 \quad (10^0 = 1)$$

Συνδυάζοντες τάς δύο αὐτάς κλίμακας ἔχομεν τήν ἀκόλουθον πλήρη κλίμακα τῶν ἀκεραίων καί τῶν κλασματικῶν δεκαδικῶν μονάδων κατά φθίνουσαν τάξιν μεγέθους ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά:

$$\ldots\ 10^3\ ,\ 10^2\ ,\ 10^1\ ,\ 10^0 = 1\ ,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \ldots$$

Ἡ δεκαδική αὐτή κλῖμαξ εἶναι ἀπεριόριστη καί πρός τά ἀριστερά καί πρός τά δεξιά. Μέ τήν βοήθειάν της γράφομεν τά δεκαδικά κλάσματα μέ ἁπλουστέραν μορφήν, ὅπως φαίνεται ἀπό τά ἀκόλουθα παραδείγματα:

α) $$\frac{3875}{10^3} = \frac{3\cdot10^3+8\cdot10^2+7\cdot10+5}{10^3} = \frac{3\cdot10^3}{10^3} + \frac{8\cdot10^2}{10^3} + \frac{7\cdot10}{10^3} + \frac{5}{10^3}$$

$$= 3 + \frac{8}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 3,875$$

$$\boxed{\frac{3875}{10^3} = 3,875}$$

Ἀριστερά ἀπό τό κόμμα, πού τό ὀνομάζομεν καί ὑποδιαστολήν, εὑρίσκονται κατά σειράν τά ψηφία τῶν ἀκεραίων μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων, κ.λ.π. Δεξιά ἀπό τό κόμμα εὑρίσκονται, κατά σειράν, τά ψηφία τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν χιλιοστῶν κ.λ.π., ἐάν ὑπάρχουν καί ἄλλα.

β) $$\frac{20705}{10^3} = \frac{2\cdot10^4+7\cdot10^2+5}{10^3} = \frac{2\cdot10^4}{10^3} + \frac{7\cdot10^2}{10^3} + \frac{5}{10^3}$$

$$= 20 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^3} = 20,705$$

$$\boxed{\frac{20705}{10^3} = 20,705}$$

Εἰς τήν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν πού δέν ὑπάρχουν ἐτοποθετήσαμεν τό μηδέν.

γ) $$\frac{125}{10^4} = \frac{1\cdot10^2+2\cdot10+5}{10^4} = \frac{1\cdot10^2}{10^4} + \frac{2\cdot10}{10^4} + \frac{5}{10^4} =$$

$$= \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 0,0125$$

$$\boxed{\frac{125}{10^4} = 0,0125}$$

Αἱ κεναί θέσεις συνεπληρώθησαν καί πάλιν μέ μηδενικά.

Ἀντιστρόφως, ὁ ἀριθμός 7,05 γράφεται μέ τήν κανονικήν κλασματικήν του μορφήν ὡς ἑξῆς:

$7,05 = \frac{705}{10^2}$. Διότι: $7,05 = 7 + \frac{5}{10^2} = \frac{705}{10^2}$

Τά δεκαδικά κλάσματα μέ τήν νέαν μορφήν των τά ὀνομάζομεν <u>δεκαδικούς ἀριθμούς</u>.

Οἱ ἀριθμοί: 20,705 0,0125 7,05 εἶναι δεκαδικοί ἀριθμοί.

<u>4.2 Ἴσοι δεκαδικοί ἀριθμοί.</u> Ἐάν τά ἴσα κλάσματα: $\frac{351}{10^2} = \frac{3510}{10^3} = \frac{35100}{10^4} = \ldots$ γραφοῦν εἰς δεκαδικήν μορφήν, θα ἔχωμεν: $3,51 = 3,510 = 3,5100 = \ldots$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι μηδενικά τοποθετούμενα δεξιά ἀπό τό δεκαδικόν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δέν μεταβάλλουν τήν τιμήν του ἑπομένως δύνανται νά παραλειφθοῦν, ἐάν ὑπάρχουν. Τό ἴδιον συμβαίνει, ὅπως γνωρίζομεν, ἐάν τοποθετήσωμεν μηδενικά εἰς τήν ἀρχήν τοῦ ἀκεραίου, πρός τά ἀριστερά. Αὐτό γίνεται συχνά εἰς τά εἰσιτήρια τῶν λεωφορείων καί εἰς τά λαχεῖα, χάριν ὁμοιομορφίας, διά νά ἔχουν ὅλοι οἱ ἀριθμοί τό ἴδιον πλῆθος ψηφίων.

<u>4.3 Πρόσθεσις.</u> Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ἡ πρόσθεσις:

$$0,875 + 47,5 + 1,85$$

Δίδομεν εἰς τούς προσθετέους κλασματικήν μορφήν καί ἐκτελοῦμεν τήν πρόσθεσιν, ἀφοῦ τρέψωμεν τά κλάσματα εἰς ὁμώνυμα:

$$0,875 + 47,5 + 1,85 = \frac{875}{10^3} + \frac{475}{10} + \frac{185}{10^2} = \frac{875}{10^3} + \frac{47500}{10^3} + \frac{1850}{10^3}$$

$$= \frac{875+47500+1850}{10^3} = \frac{50225}{10^3} = 50,225$$

Αὐτό τό παράδειγμα μᾶς ὑποδεικνύει ὅτι ἠμποροῦμεν νά κάμωμεν τήν πρόσθεσιν, ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους, γράφοντες τούς προσθετέους τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλον, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί καί τά ψηφία τῶν μονάδων τῆς ἰδίας τάξεως νά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἰδίαν στήλην. Τά κενά πρός τά δεξιά καί πρός τά ἀριστερά, τά συμπληρώνομεν μέ μηδενικά, διά νά ἀποφεύγωμεν λάθη.

Παράδειγμα:

00,875	0,875	875
47,500	47,5	47500
01,850	1,85	1850
50,225	50,225	50225

4.4 Ἀφαίρεσις. Ὅσα εἴπαμεν διά τήν πρόσθεσιν ἰσχύουν καί εἰς τήν ἀφαίρεσιν. Ἐδῶ μάλιστα πρέπει νά καταβάλωμεν μεγαλυτέραν προσοχήν κατά τήν προσθήκην τῶν ἀπαραιτήτων μηδενικῶν εἰς τά δεξιά τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ μειωτέου.

Παραδείγματα:

1ον $17,5 - 8,375 = 17,500 - 8,375 = 9,125$

$87 - 13,75 = 87,00 - 13,75 = 73,25$

17,500	87,00
8,375	13,75
9,125	73,25

Παραπλεύρως σημειώνεται ἡ διάταξις τῶν πράξεων.

4.5 Πολλαπλασιασμός. Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμός τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

$$5,8 \times 3,75$$

Προσφεύγομεν εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀντιστοίχων δεκαδικῶν κλασμάτων:

$$5,8 \times 3,75 = \frac{58}{10} \times \frac{375}{10^2} = \frac{58 \times 375}{10 \times 10^2} = \frac{21750}{10^3} = 21,750$$

Ἔχομεν λοιπόν νά ἐκτελέσωμεν τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀκεραίων 58×375 εἰς τόν ἀριθμητήν καί κατόπιν νά χωρίσωμεν τρία δεκαδικά ψηφία εἰς τά δεξιά τοῦ εὑρεθέντος γινομένου.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται παραπλεύρως. Ἑπομένως: Κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἀδιαφοροῦμεν ἀρχικῶς διά τήν ὕπαρξιν τῶν ὑποδιαστολῶν καί ἐκτελοῦμεν τήν πρᾶξιν, ὅπως ἀκριβῶς εἰς τούς ἀκεραίους. Εἰς τό εὑρεθέν ὅμως γινόμενον χωρίζομεν, ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά, τόσα δεκαδικά ψηφία, ὅσον εἶναι τό πλῆθος ὅλων τῶν δεκαδικῶν ψηφίων πού περιέχονται καί εἰς τούς δύο παράγονας καί χρησιμοποιοῦμεν, ἐάν χρειασθῆ, μηδενικά διά νά συμπληρώσωμε τό ἀπαιτούμενον πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων μέχρι τῆς θέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς.

$$\begin{array}{r} 3,75 \\ 5,8 \\ \hline 3000 \\ 1875 \\ \hline 21,750 \end{array}$$

Παραδείγματα:

α) $17 \times 0,004 = 0,068$

β) $3,1 \times 0,002 = 0,0062$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 0,004 \\ \hline 0,068 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,1 \\ 0,002 \\ \hline 0,0062 \end{array}$$

4.6 Διαίρεσις μέ διαιρέτην ἀκέραιον. Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις 35 : 8

Γνωρίζομεν ὅτι τό ἀκριβές πηλίκον εἶναι:

$$35 : 8 = \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}$$

Ἀλλά ὁ ἀκέραιος 35 ἠμπορεῖ νά γραφῆ:

$$35 = 35,000$$

Ἄς δοκιμάσωμεν νά ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν, ὅπως εἰς τούς ἀκεραίους, σύμφωνα με τον γνωστόν μας τρόπον, ὅπως φαίνεται παραπλεύρως.

$$\begin{array}{r|l} 35,000\ldots & 8 \\ \cline{2-2} 3,0 & 4,375 \\ 0,60 & \\ 0,040 & \\ 0 & \end{array}$$

Ὅταν δεξιά ἀπό τό πρῶτον ὑπόλοιπον 3, πού εἶναι ἀκέραιος, ἐτοποθετήσαμεν τό 0, ὁ σχηματισθείς ἀριθμός 30 σημαίνει πλέον δέκατα $\left(3,0 = \frac{30}{10}\right)$. Ἑπομένως τό δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τό 3, εἶναι καί αὐτό δέκατα καί δι᾽αὐτό ἐτοποθετήσαμεν πρό αὐτοῦ τήν ὑποδιαστολήν καί τό νέον ὑπόλοιπον 6 θά εἶναι ἐπίσης δέκατα. Μέ τήν προσθήκην ὅμως δεξιά του ἑνός μηδενικοῦ ἔχομεν $0,6 = 0,60 = \frac{60}{100}$. Διά τοῦτο τό νέον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τό 7, θά εἶναι, καί αὐτό, ἑκατοστά, ὅπως καί τό νέον ὑπόλοιπον 0,04, τό οποῖον τρεπόμενον εἰς χιλιοστά γίνεται $0,04 = 0,040 = \frac{40}{1000}$. Τό τελευταῖον ὅμως αὐτό ὑπόλοιπον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καί ἐπομένως τό τέλειον πηλίκον $\frac{35}{8}$ εἶναι ἰσοδύναμον μέ τόν δεκαδικόν ἀριθμόν:

$$\frac{35}{8} = 4,375$$

Τά κλάσματα δηλαδή $\frac{35}{8}$ καί $\frac{4375}{1000}$ ἀνήκουν εἰς τήν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας.

Συνήθως κατά τήν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως παραλείπονται αἱ ὑποδιαστολαί εἰς τά δεκαδικά ὑπόλοιπα. Ἡ δεκαδική τάξις ἑκάστου ὑπολοίπου συνάγεται ἀπό τήν ἀντίστοιχον τάξιν τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου:

```
35,000 | 8
 30    |------
  60   | 4,375
   40
    0
```

```
8 | 1
--+--
8 | 8
```

Ἐπαλήθευσις

```
   4,375
x      8
--------
  35,000
```

Ἀντί τῆς ἐπαληθεύσεως διά τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἠμποροῦμεν νά κάμωμεν τήν δοκιμήν μέ τήν μέθοδον τῶν καταλοίπων ὡς πρός 9.

Μέ τήν ἀνωτέρω διαίρεσιν ἐπετύχαμεν νά δώσωμεν δεκαδικήν μορφήν εἰς τό κλάσμα $\frac{35}{8}$.

Μέ ὅμοιον τρόπον ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν δεκαδικήν μορφήν καί εἰς ἄλλα κλάσματα. Ὄχι ὅμως εἰς ὅλα. Παραδείγματα:

1ον $\frac{67}{125} = 0,536$

```
67,000... | 125
0450      |------
 0750     | 0,536
  000
```

2ον $\frac{3}{4} = 0,75$

3,00	4
20	0,75
0	

3ον $\frac{9}{11} = 0,818181...$

9,0000	11
020	0,8181...
90	
020	
9	

Παρατηροῦμεν ὅτι τό τελευταῖον αὐτό κλάσμα εἶναι ἀδύνατον νά λάβη τερματιζομένην δεκαδικήν μορφήν ὅπως συμβαίνει εἰς τά προηγούμενά του παραδείγματα, διότι τά διαδοχικά ὑπόλοιπα, ὅπως καί τά δεκαδικά ψηφία, ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς, τά ἴδια καί μέ τήν ἰδίαν σειραν.
Τά κλάσματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ τρέπονται εἰς μή τερματιζομένους δεκαδικούς ἀριθμούς καί θά τά ἐξετάσωμεν εἰς ἄλλην παράγραφον.

4.7 Πηλίκον μέ προσέγγισιν. Πρόβλημα. Ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα 40 m θέλομεν νά κατασκευάσωμεν 7 ἐνδυμασίας τοῦ ἰδίου μεγέθους. Πῶς θά τό χωρίσωμεν εἰς 7 ἴσα μέρη ;
Τό μέτρον ἔχει, ὅπως γνωρίζομεν, τάς ἑξῆς δεκαδικάς ὑποδιαιρέσεις μέχρι τοῦ χιλιοστοῦ:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} \ , \ 1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} \ , \ 1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m} .$$

Γράφομεν λοιπόν 40,000 ἀντί τοῦ ἴσου του 40 καί ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν ὅπως φαίνεται παραπλεύρως. Ἐπειδή ὅμως μένει ὑπόλοιπον 2 χιλιοστά (0,002) γράφομεν:

40,000	7
50	5,714
10	
30	
2	

40 : 7 ≃ 5,714 καί ἐκφωνοῦμεν: 5 μέτρα καί 714 χιλ. κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ. (Ἐδῶ ἡ προσέγγισις εἶναι κατ'ἔλλειψιν (ἤ ἐκ τῶν κάτω)
Αν γράφωμε : 7 ≃ 5,715, θά ἔχωμεν πάλιν προσέγγισιν

ἑνός χιλιοστοῦ, ἀλλά καθ'ὑπεροχήν (ἤ ἐκ τῶν ἄνω). Ἔτσι τό ἀκριβές πηλίκον $\frac{40}{7}$ περιέχεται μεταξύ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν 5,714 καί 5,715

$$\boxed{5{,}714 < \frac{40}{7} < 5{,}715}$$

Ἐάν μᾶς ἦτο ἀρκετός μικρότερος βαθμός ἀκριβείας, θά ἐγράφαμεν: $40 : 7 \simeq 5{,}71$ κατά προσέγγισιν ἑκατοστοῦ

διότι: $$\boxed{5{,}71 < \frac{40}{7} < 5{,}72}$$

καί ἀκόμη μικρότερος,

$40 : 7 \simeq 5{,}7$ κατά προσέγγισιν δεκάτου

διότι: $$\boxed{5{,}7 < \frac{40}{7} < 5{,}8}$$

Κάθε φοράν ὁ βαθμός ἀκριβείας ἐξαρτᾶται ἀπό τήν φύσιν τοῦ ζητήματος. Εἰς τό ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι ἀρκετή ἡ προσέγγισις τοῦ ἑνός ἑκατοστοῦ, ἀφοῦ πρόκειται περί ὑφάσματος διά μίαν ἐνδυμασίαν. Ἐάν ἐπρόκειτο περί βάρους ἐμπορεύματος λιανικῆς πωλήσεως ἀρκετή θά ἦτο ἡ προσέγγισις τοῦ ἑνός γραμμαρίου. Προκειμένου ὅμως περί ἀποστάσεων ὅπως π.χ. μεταξύ Ἀθηνῶν καί Θεσσαλονίκης πού εἶναι 593 χιλιόμετρα,μία προσέγγισις, ἀκόμη καί 100 m, εἶναι ἀρκετή. Ἀπό τάς δύο προσεγγίσεις , τήν κατ'ἔλλειψιν καί τήν καθ'ὑπεροχήν, θά προτιμοῦμεν τήν πλησιεστέραν πρός τήν ἀκρίβειαν. Ἐάν δηλ. τό τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον ἀπό τό ἥμισυ τοῦ διαιρέτου, θά λαμβάνωμεν τήν κατ'ἔλλειψιν.ἐάν ὅμως εἶναι μεγαλύτερον, θά λαμβάνωμεν τήν καθ'ὑπεροχήν.

Ἔστω ἀκόμη πρός ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις: 3,125 : 4· χρησιμοποιοῦμεν καί πάλιν τόν συνήθη τρόπον:

$3,125 : 4 = 0,78125$

3,125	4
32	0,78125
05	
10	
20	
0	

Καί ἄν θέλωμεν προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστοῦ, γράφομεν:

$3,125 : 4 \simeq 0,78$

Ὅταν λοιπόν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως μέ τόν συνήθη τρόπον εἶναι ἀμέσως δυνατή καί γίνεται ὅπως εἰς τούς ἀκεραίους, ἀρκεῖ νά προσέχωμεν, ὥστε τό κάθε νέον ψηφίον τοῦ πηλίκου νά ἀνήκῃ εἰς τήν ἰδίαν δεκαδικήν τάξιν μέ τόν ἑκάστοτε μερικόν διαιρετέον.

4.8 Διαιρέτης δεκαδικός ἀριθμός. Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις:

$$7,1 : 1,25$$

Προσφεύγομεν πάλιν εἰς τά κλάσματα:

$$7,1 : 1,25 = \frac{71}{10} : \frac{125}{100} = \frac{71}{10} \times \frac{100}{125} = \frac{710}{125} = 56,8$$

Διάταξις τῆς πράξεως:

710,00	125
085 00	56,8
10 00	
0	

Γενικῶς: $\alpha : \frac{\beta}{0} = \alpha \cdot \frac{10^{\nu}}{\beta} = \frac{\alpha \cdot 10^{\nu}}{\beta}$

Ὅταν λοιπόν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός, καταλήγομεν εἰς τήν ἐκτέλεσιν διαιρέσεως μέ διαιρέτην ἀκέραιον, ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καί διαιρέτην μέ τήν κατάλληλον δύναμιν τοῦ 10, ὥστε ὁ διαιρέτης νά γίνῃ ἀκέραιος (χωρίς μηδενικά εἰς τό τέλος), ἐνῶ ὁ διαιρετέος ἠμπορεῖ, καί αὐτός, νά γίνῃ ἀκέραιος ἤ καί νά μείνῃ δεκαδικός.

Παραδείγματα:

α) $3 : 0,625 = 3 : \frac{625}{1000} = 3 \times \frac{1000}{625} = \frac{3000}{625} = 4,8$

3000	625
5000	4,8
000	

β) $7{,}564 : 1{,}25 = 7{,}564 : \dfrac{125}{100} =$

$= 7{,}564 \times \dfrac{100}{125} = \dfrac{756{,}4}{125}$

756,4	125
006 40	6,0512
0 150	
250	
00	

4.9 Πολλαπλασιασμός καί διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ με δύναμιν τοῦ 10.

Ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ μίαν δύναμιν τοῦ 10 ἐκτελεῖται μέ μετατόπισιν τῆς ὑποδιαστολῆς, τόσας θέσεις πρός τά δεξιά, ὅσας μονάδας ἔχη ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10. Παραδείγματα:

α) $3{,}125 \times 10^2 = 312{,}5$ $\left(3{,}125 \times 10^2 = \dfrac{3125}{10^3} \times 10^2 = \dfrac{3125}{1[illegible]} = 312{,}5\right)$

β) $3{,}8 \times 10^3 = 3800$ $\left(3{,}8 \times 10^3 = \dfrac{38}{10} \times 10^3 = 38 \times 10^2 = 3800\right)$

Ἀντιστρόφως ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ δύναμιν τοῦ 10 ἐκτελεῖται συντόμως, ἐάν μεταθέσωμεν τήν ὑποδιαστολήν, τόσας θέσεις πρός τά ἀριστερά, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10.

Παραδείγματα:

α) $87{,}5 : 10^2 = 0{,}875$, διότι $10^2 \times 0{,}875 = 87{,}5$

β) $3{,}1 : 10^3 = 0{,}0031$, διότι $10^3 \times 0{,}0031 =$ [illegible]

γ) $378{,}5 : 10^2 = 3{,}785$, διότι $10^2 \times 3{,}785 = 378{,}5$

4.10 Ἀκέραιος διαιρέτης περατούμενος εἰς μηδενικά. Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ἡ διαίρεσις: $8{,}74 : 2500$.

Ἔχομεν:

$8{,}74 : 2500 = 8{,}74 : (10^2 \times 25) = (8{,}74 : 10^2) : 25 = 0{,}0874 : 25$

ἐπομένως:

$$\boxed{8{,}74 : 2500 = 0{,}0874 : 25}$$

Ὅταν λοιπόν ὁ ἀκέραιος διαιρέτης περατοῦται εἰς μηδενικά, τά παραλείπομεν διαιροῦντες συγχρόνως τόν διαιρετέον διά 10, 10^2, 10^3,..., ἄν τά παραλειπόμενα μηδενικά εἶναι ἀντιστοίχως 1,2,3,...

4.11 <u>Ἀνάγωγα κλάσματα τρεπόμενα εἰς τερματιζομένους δεκαδικούς ἀριθμούς</u>. Γνωρίζομεν ὅτι κάθε δεκαδικός ἀριθμός λαμβάνει κλασματικήν μορφήν μέ ἀριθμητήν ἀκέραιον καί παρονομαστήν μίαν δύναμιν τοῦ 10. Παράδειγμα:

$$35,125 = \frac{35125}{1000} = \frac{35125}{10^3} = \frac{35125}{2^3 \times 5^3}$$

Ἄς τρέψωμεν τώρα τό δεκαδικόν κλάσμα $\frac{35125}{1000}$ εἰς ἀνάγωγον διαιροῦντες τούς ὅρους του διά τοῦ μ.κ.δ. των 125

Ἔχομεν $\frac{35125}{1000} = \frac{35125:125}{1000:125} = \frac{281}{8} = \frac{281}{2^3}$

Ἐπίσης: $0,628 = \frac{628}{1000} = \frac{628:4}{1000:4} = \frac{157}{250} = \frac{157}{2 \times 5^3}$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι κάθε τερματιζόμενος δεκαδικός ἀριθμός μετατρεπόμενος εἰς ἀνάγωγον κλάσμα διατηρεῖ εἰς τόν παρονομαστήν του ὡς μόνους πρώτους παράγοντας ἕνα τουλάχιστον ἀπό τούς 2 καί 5.

Ἡ ἰδιότης αὐτή τῶν τερματιζομένων δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι χαρακτηριστική. Πραγματικά:

Ἔστω τό ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{147}{40} = \frac{147}{2^3 \times 5}$ πού δέν περιέχει εἰς τόν παρονομαστήν του κανένα πρῶτον παράγοντα διαφορετικόν ἀπό τούς 2 καί 5. Ἄς πολλαπλασιάσωμεν τούς ὅρους του ἐπί 5^2. Ἔχομεν:

$$\frac{147}{40} = \frac{147}{2^3 \times 5} = \frac{147 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{147 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{147 \times 25}{10^3} = \frac{3675}{1000} = 3,675$$

Ἐπίσης:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{625}{10^3} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι: <u>Διά νά τρέπεται ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα εἰς τερματιζόμενον δεκαδικόν ἀριθμόν πρέπει καί ἀρκεῖ</u>

ὁ παρονομαστής του νά μή περιέχη κανένα πρῶτον παράγοντα διαφορετικόν ἀπό τούς 2 καί 5.

4.12 Περιοδικοί δεκαδικοί ἀριθμοί: Ἄς ἐπιχειρήσωμεν τώρα νά δώσωμεν μορφήν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τό κλάσμα $\frac{8}{55}$. Γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τοῦτο δέν τρέπεται εἰς τερματιζόμενον δεκαδικόν ἀριθμόν, ἀφοῦ ὁ παρονομαστής του $55 = 5 \times 11$ περιέχει τόν 11 πού εἶναι διαφορετικός ἀπό τούς 2 καί 5. Ἐπειδή κατά τήν ἐκτέλεσιν της διαιρέσεως κάθε μερικόν ὑπόλοιπον θά εἶναι μικρότερον πό τόν διαιρέτην 55, θά εὕρωμεν κάποτε, συνεχίζοντες τήν διαίρεσιν, ἕνα ἀπό τά προηγούμενα ὑπόλοιπα. Ἀπό τήν στιγμήν αὐτήν τά νέα ὑπόλοιπα καί τά ψηφία τοῦ πηλίκου θά ἐπαναλαμβάνωνται τά ἴδια καί μέ τήν ἰδίαν σειράν διαδοχῆς.

$$\begin{array}{l|l} 8,00\ldots & 55 \\ \hline 2\;50 & 0,145145\ldots \\ \;\;300 & \\ \;\;\;250 & \\ \;\;\;\vdots & \end{array} \qquad \boxed{\frac{8}{55} = 0,145145\ldots}$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι τά κλάσματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ τρέπονται εἰς μή τερματιζομένους δεκαδικούς ἀριθμους.
Καί ἐπειδή τά δεκαδικά ψηφία των ἀρχίζουν κάποτε νά ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς, τά ὀνομάζομεν περιοδικούς δεκαδικούς ἀριθμούς. Τό τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους πού ἐπαναλαμβάνεται λέγεται περίοδος.
Εἰς τά προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς δέν παρουσιάζεται πρακτική ἀνάγκη νά χρησιμοποιηθοῦν οἱ περιοδικοί δεκαδικοί ἀριθμοί, διότι εἰς τούς ὑπολογισμούς μας ενδιαφερόμεθα, κάθε φοράν , διά μίαν προσέγγισιν συνήθως ἑκατοστοῦ ἤ χιλιοστοῦ. Ἐνδιαφέρει ὅμως νά γνωρίζωμεν τά κλάσματα πού μετατρέπονται εἰς ἕνα δοθέντα περιοδικόν δεκαδικόν ἀριθμόν.
Ὀνομάζομεν ἁπλοῦς περιοδικούς ἀριθμούς, ἐκείνους πού ἡ πε-

ρίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετά τήν ὑποδιαστολήν ὅπως τούς:

0.4545...   7,3636...   0,0505...   κ.λ.π.

καί μικτούς ἐκείνους πού ἡ περίοδός των ἔχει ἀριστερά της δεκαδικά ψηφία πού δέν τῆς ἀνήκουν,

ὅπως: 0,14545...   2,37555...   κ.λ.π.

Ἄς εὕρωμεν, πρῶτον, τούς δεκαδικούς περιοδικούς ἀριθμούς πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς κλασματικάς μονάδας $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ ...

Ἔχομεν: $\frac{1}{9} = 0,11...$, $\frac{1}{99} = 0,0101...$, $\frac{1}{999} = 0,001001...$ κλπ

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$\frac{7}{9} = 0,77...$, $\frac{35}{99} = 0,3535...$, $\frac{87}{999} = 0,087087...$

Ἀπό τάς ἰσότητας αὐτάς συμπεραίνομεν ὅτι:

<u>Κάθε ἁπλοῦς περιοδικός δεκαδικός ἀριθμός <1 εἶναι ἴσος μέ τό κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν τήν περίοδόν του καί παρονομαστήν τόν ἀριθμόν πού ἀποτελεῖται ἀπό τόσα 9 ὅσα εἶναι τά ψηφία τῆς περιόδου.</u>

Ἔστω τώρα ὁ μικτός περιοδικός 0,32727... πολλαπλασιάζομεν αὐτόν καί διαιροῦμεν διά 10

$$0,32727... = \frac{3,2727...}{10}$$

Ὁ ἀριθμητής ὅμως εἶναι ἁπλοῦς περιοδικός ἀριθμός καί ἰσοῦται μέ

$$3 + \frac{27}{99} = \frac{3\times99+27}{99}$$

Επομένως:

$$0,32727... = \frac{3,2727...}{10} = \frac{3\times99+27}{990} = \frac{324}{990}$$

Είς τό ἴδιον ἀποτέλεσμα φθάνομεν συντομώτερα ἐάν, ἀντί $3\times99 + 27$, γράφωμεν:

$3\times(100-1) + 27 = (300-3) + 27 = 327 - 3$. Ἐπομένως:

$$0,32727... = \frac{3,2727...}{10} \quad \frac{3\times99+27}{990} \quad \frac{327-3}{990} \quad \frac{324}{990}$$

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$0,1755\ldots = \frac{175-17}{900} = \frac{158}{900}$$

$$3,0135135\ldots = \frac{30135-30}{9990} = \frac{30105}{9990}$$

Τά ἀνωτέρω παραδείγματα ἀπεικονίζουν τόν κανόνα τῆς μετατροπῆς μικτῶν περιοδικῶν ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

4.13 Λόγος δύο τμημάτων. Ὅταν μᾶς δοθῆ ἕνα τμῆμα Α καί ἕνας ρητός ἀριθμός λ, γνωρίζομεν πῶς νά κατασκευάσωμεν μέ ἐκτελεστήν τόν λ ἕνα τμῆμα Β, ὥστε νά εἶναι:

$$B = \lambda A \iff A = \frac{1}{\lambda} B$$

Ἐάν π.χ. $\lambda = \frac{3}{4}$, θά ἔχωμεν

(1) $B = \frac{3}{4} A \iff A = \frac{4}{3} B$

Ὁ ρητός ἀριθμός λ λέγεται λόγος τοῦ τμήματος Β πρός τό τμῆμα Α. Ἡ σχέσις (1) γράφεται καί:

(2) $$\frac{B}{A} = \frac{3}{4} \iff \frac{A}{B} = \frac{4}{3}$$

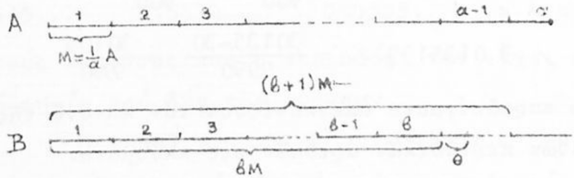
Ὅταν λοιπόν μᾶς ἔχη δοθῆ ἕνα τμῆμα Α καί ἕνας ρητός ἀριθμός λ, ἠμποροῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἕνα τμῆμα Β, τό ὁποῖον νά ἔχη λόγον πρός τό τμῆμα Α τόν ρητόν ἀριθμόν λ.

Τώρα θά ἴδωμεν πῶς, ὅταν ἔχωμεν δύο τμήματα Α καί Β, ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν τόν λόγον των λ.

Χωρίζομεν, κατά τά γνωστά μας, τό τμῆμα Α εἰς α ἴσα μέρη καί μέ μονάδα τό τμῆμα $\frac{1}{\alpha} A = M$ μετροῦμεν τό τμῆμα Β. Εἶναι δυνατόν ἡ μονάς $\frac{1}{\alpha} A = M$ νά χωρῆ ἀκριβῶς β φοράς εἰς τό τμῆμα Β. Λέγομεν τότε ὅτι τό τμῆμα Β ἔχει μέτρον ἤ μῆκος τόν ἀριθμόν β, ἐνῶ τό Α ἔχει μέτρον τόν ἀριθμόν α. Γράφομεν

$$A = \alpha M \quad \text{καί} \quad B = \beta M \ \left(M = \frac{1}{\alpha} A\right)$$

Εἶναι ὅμως δυνατόν ἡ μονάς μετρήσεως $M = \frac{1}{\alpha} A$ νά μή χωρῆ ἀκέραιον ἀριθμόν φοράς εἰς τό τμῆμα Β, ὅπως εἰς τό κατωτέρω σχῆμα. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό ἀκριβές μέτρον



τοῦ τμήματος Β περιέχεται μεταξύ βΜ καί τοῦ (β+1)Μ, διότι κατά τήν μέτρησιν ὑπολοίπεται τό μικρότερον ἀπό τήν μονάδα τμῆμα Θ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό Θ ἐμετρήθη μέ τό $\frac{1}{10}$Μ καί εὑρέθη $\Theta = \frac{3}{10}$ Μ. Τότε τό ἀκριβές μέτρον τοῦ τμήματος Β θά εἶναι·

$$B = \left(8+\frac{3}{10}\right)M = \frac{83}{10}\,M = 8{,}3\ M \quad (\text{ἐάν } \beta = 8)$$

Ἐάν ἡ μέτρησις τοῦ ὑπολοιπομένου τμήματος Θ μέ τό $\frac{1}{10}$ Μ μᾶς ἀφήνη καί πάλιν ἕνα ὑπόλοιπον Θ΄ μικρότερον ἀπό τό $\frac{1}{10}$ Μ καί θέλωμεν καλυτέραν προσέγγισιν, μετροῦμεν τό τμῆμα Θ΄μέ $\frac{1}{100}$ Μ καί ἔστω ὅτι εὑρήκαμεν $\Theta' = \frac{7}{100}$ Μ. Τό ἀκριβές, τότε, μέτρον τοῦ τμήματος Β θά εἶναι:

$$B = \left(\frac{83}{10}+\frac{7}{100}\right)M = \frac{837}{100}\,M = 8{,}37\ M$$

Εἶναι δυνατόν ὅμως καί πάλιν ἡ μέτρησις τοῦ τμήματος Θ΄ μέ τό $\frac{1}{100}$ Μ νά ἀφίνη ἕνα μικρόν ὑπόλοιπον Θ΄΄, τό ὁποῖον μετρούμενον μέ τό $\frac{1}{1000}$ Μ νά δίδη π.χ. $\frac{5}{1000}$ Μ ἤ νά ἀφίνη καί πάλιν ἕνα μικρόν ὑπόλοιπον. Εἰς τήν δευτέραν αὐτήν περίπτωσιν θά γράφωμεν:

$$B \simeq 8{,}375 \quad \text{κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ}$$

Ὅπως ὅμως ἀντιλαμβανόμεθα, ἡ προσέγγισις ἠμπορεῖ νά γίνεται διαρκῶς καλυτέρα, ἐφ᾽ὅσον δέν θά εἶναι δυνατόν νά εὑρεθῇ ἀκριβῶς τό μέτρον τοῦ τμήματος Β μέ μονάδα τό τμῆμα $M = \frac{1}{\alpha}$ Α καί τά οἱαδήποτε ὑποπολλαπλάσιά του, ὅσον μικρά καί ἄν εἶναι. Αὐτό συμβαίνει εἰς δύο τμήματα πού, ὅπως θά μάθωμεν εἰς τήν γεωμετρίαν, λέγονται ἀσύμμετρα μεταξύ τους (δέν ἔχουν δηλαδή κοινόν ὑποπολλαπλάσιον)· τό μέτρον τοῦ ἑνός μέ μονάδα τό ἄλλο λέγεται τότε ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εὑρήκαμεν κατά τόν ἀνωτέρω τρόπον τά μέτρα τῶν τμημάτων Α καί Β καί ὅτι αὐτά, ἀκριβῶς, ἤ μέ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν, εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ρητοί ἀριθμοί α καί β.

Ἔχομεν τότε: $A = \alpha M$ καί $B = \beta M$.

Ἐπειδή δέ $M = \frac{1}{\alpha} A$, θά ἔχωμεν, μέ ἀντικατάστασιν τοῦ Μ

$$B = \beta M = \beta \frac{1}{\alpha} A = \frac{\beta}{\alpha} A \quad \text{καί} \quad \lambda = \frac{\beta}{\sigma}$$

Ἡ ἰσότης $B = \frac{\beta}{\alpha} A$ γράφεται καί : $\boxed{\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}}$

Τό κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ πού εἶναι πηλίκον διαιρέσεως τοῦ β διά α λέγεται καί <u>λόγος</u> τοῦ ἀριθμοῦ β πρός τόν ἀριθμόν α. Καταλήγομεν λοιπόν εἰς τό συμπέρασμα ὅτι:

<u>Ὁ λόγος δύο τμημάτων εἶναι ἴσος μέ τόν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν μέ τήν ἰδίαν μονάδα.</u>

<u>Σημείωσις</u>. Ἀντί νά λάβωμεν ὡς μονάδα τό τμῆμα $\frac{1}{\alpha} A$, ἠμποροῦμεν νά χρησιμοποιήσωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως καί διά τά δύο τμήματα Α καί Β ἕνα ὁποιονδήποτε τμῆμα.

Ἡ μέτρησις τότε τῶν τμημάτων Α καί θά μᾶς ἔδιδε ἀντιστοίχως ὡς μέτρα, ἀκριβῶς ἤ κατά προσέγγισιν, δύο ρητούς ἀριθμούς μ καί ν. Θά εὑρίσκαμεν τότε ὅτι τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ κ $^{\mu}$ ἀνήκουν ἀκριβῶς ἤ μέ προσέγγισιν εἰς τήν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας.

Ἑπομένως: <u>ὁ λόγος τῶν μέτρων δύο τμημάτων εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν μονάδα μετρήσεώς</u> των.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά γραφοῦν ὑπό μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τά κλάσματα:

$$\frac{37}{1000}\,;\ \frac{524}{100}\,,\ \frac{135}{10^3}\,,\ \frac{8}{10^5}\,,\ \frac{3762}{10^4}\,,\ \frac{57{,}02}{10^3}$$

2) Νά τραποῦν εἰς τερματιζομένους δεκαδικούς ἀριθμούς ἤ εἰς δεκαδικούς περιοδικούς τά κλάσματα:

$$\frac{5}{8}\,,\ \frac{17}{20}\,,\ \frac{176}{125}\,,\ \frac{5}{9}\,,\ \frac{7}{12}\,,\ \frac{8}{11}$$

Ἐπίσης: (χωρίς νά γίνη διαίρεσις)

$$\frac{19}{2^3\times 5}\,,\ \frac{17}{25}\,,\ \frac{13}{40}\,,\ \frac{7}{2^4\times 5^2}$$

3) Νά εὑρεθῆ εἰς m τό ἄθροισμα:

α) 3,07 m + 28 dm + 9 cm + 18 mm

β) 0,87 m + 138 dm + 793 cm + 82 mm

Νά εὑρεθῆ εἰς m^2 τό ἄθροισμα:

0,27 m^2 + 283 dm^2 + 375 cm^2 + 87 mm^2

καί αἱ διαφοραί (εἰς m^2):

α) 3,2 m^2 − 175 dm^2 γ) 7,1 dm^2 − 375 mm^2

β) 1,2 m^2 − 3,75 cm^2 δ) (2,7 dm^2 + 37 cm^2) − 135 cm^2

4) Νά εὑρεθοῦν εἰς m^3 ὑπό μορφήν δεκ. ἀριθ. τά ἀθροίσματα:

α) 2,185 m^3 + 3786 dm^3 + 386000 cm^3

β) 785,36 dm^3 + 878600 cm^3 + 380000 mm^3

5) Νά εὑρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν ἀκολούθων πράξεων ὑπό μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

α) $\left(0{,}125+\frac{3}{4}\right)-\left(0{,}02+\frac{5}{8}\right)$

β) $\left(1\frac{4}{5}+20{,}8\right)-\left(1+\frac{17}{25}\right)$

γ) $\left(3-\frac{125}{100}\right)-\left(5-4\frac{1}{4}\right)$

6) Ἕνα πεντάδραχμον ἔχει πάχος 1,5 mm. Πόσον ὕψος ἔχει μία στήλη ἀπό 35 πεντάδραχμα, 1ον εἰς cm καί 2ον εἰς dm; Πόσον ὕψος ἔχουν τά $\frac{3}{4}$ τῆς στήλης;

Ἕνα ἄδετον βιβλίον ἔχει 390 σελίδας καί πάχος 1,56 cm χωρίς τό ἐξώφυλλον. Νά εὑρεθῇ εἰς mm τό πάχος τοῦ ἑνός φύλλου.

7) Μία κατοικία ἔχει 3 ὀρθογώνια δωμάτια μέ διαστάσεις: 1ον 4,25 m × 3,18 m , 2ον 3,85 m × 4,10 m καί 3ον 2,75 m × 3,48 m.
Πόσον ἐστοίχισε τό δάπεδον ἀπό μωσαϊκόν μαρμάρου πρός 110 δρχ / m^2;

8) Τρία τμήματα Α, Β, καί Γ ἐμετρήθησαν μέ τήν ἰδίαν μονάδα Μ καί εὑρέθησαν τά μέτρα των ὡς ἑξῆς:

$$A = \frac{5}{8} M \quad , \quad B = 2,25\ M \quad \text{καί} \quad \Gamma = 3\ M$$

Νά εὑρεθοῦν οἱ λόγοι: $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{\Gamma}$, $\frac{A}{\Gamma}$ καί οἱ ἀντίστροφοί των. (Οἱ λόγοι νά τεθοῦν ὑπό μορφήν ἁπλοῦ ἀναγώγου κλάσματος).

9) Ἕνα λειβάδι ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μέ διαστάσεις 125 m μῆκος καί 75,50 πλάτος καί πωλεῖται πρός 3500 δρχ. τό στρέμμα. Τό λειβάδι αὐτό πρόκειται νά ἀνταλλαγῇ μέ ἕνα ἄλλο πού πωλεῖται πρός 290 δρχ τά 100 m^2. Πόσον μῆκος πρέπει νά ἔχῃ τό δεύτερον αὐτό λειβάδι, ἐάν πρέπει καί αὐτό νά εἶναι ὀρθογώνιον καί νά ἔχῃ πλάτος 84 m ;

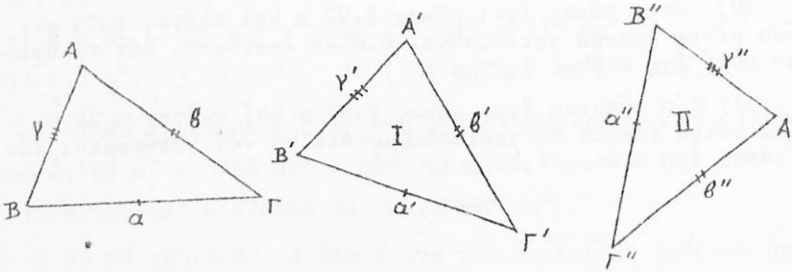
10) Ἕνας τάπης ἔχει μῆκος 8,92 m καί πλάτος 6,75 m. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάζονται διά νά ἐπενδυθῇ, ἐάν τό ὕφασμα αὐτό ἔχῃ πλάτος 1,20 m ;

11) Μία αἴθουσα ἔχει μῆκος 7,50 m καί πλάτος 6,25 m. Πόσα μέτρα τάπητα θά χρειασθοῦμεν διά νά τήν καλύψωμεν, ἐάν ὁ τάπης ἔχῃ πλάτος 1,25 m ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄

§ 1. Ἰσότης τριγώνων.

<u>1.1 Ἴσα τρίγωνα.</u> Ἄς κατασκευάσωμεν ἕνα τυχόν σκαληνόν, δηλ. ἀνισοσκελές, τρίγωνον ΑΒΓ καί ἄς τό ἀποτυπώσωμεν ἐπάνω εἰς διαφανές χαρτί. Ἄς τό μεταφέρωμεν τώρα εἰς τήν θέσιν Α΄Β΄Γ΄(Ι) καί ἀκολούθως, ἀφοῦ ἀναστρέψωμεν τό διαφανές, εἰς τήν θέσιν Α″Β″Γ″(ΙΙ)
Καθένα ἀπό τά δύο νέα τρίγωνα εἶναι ἴσον ἐκ κατασκευῆς μέ τό ἀρχικόν ΑΒΓ. Γενικῶς λέγομεν ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἠμποροῦν νά ἐφαρμώσουν τό ἕνα ἐπάνω εἰς τό ἄλλο,



δηλαδή νά ταυτισθοῦν μέ μίαν κατάλληλον μετακίνησιν.
Ἡ ταύτισις γίνεται ἤ μετά τήν ἀποτύπωσιν τοῦ ἑνός ἐπάνω εἰς τό διαφανές ἤ μετά ἀποκοπήν τοῦ ἑνός μέ φαλίδι.
Τά ἴσα στοιχεῖα, πλευράς ἤ γωνίας, τά ὀνομάζομεν <u>ὁμόλογα.</u>
Ἔχομεν λοιπόν τάς ἰσότητας:

$$\text{τργ}ΑΒΓ = \text{τργ}Α'Β'Γ'(Ι) = \text{τργ}Α''Β''Γ''(ΙΙ)$$

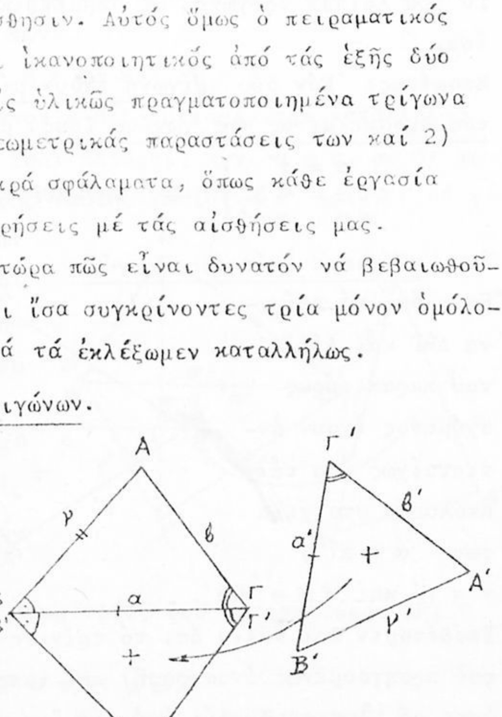
$$\alpha = \alpha' = \alpha'' , \quad \beta = \beta' = \beta'' , \quad \gamma = \gamma' = \gamma''$$

$$\measuredangle Α = \measuredangle Α' = \measuredangle Α'' , \measuredangle Β = \measuredangle Β' = \measuredangle Β'' , \measuredangle Γ = \measuredangle Γ' = \measuredangle Γ''$$

Σύμφωνα μέ ὅσα γνωρίζομεν (Κεφ. Ι, § 3.2), τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἠμπορεῖ νά ταυτισθῇ μέ τό ΑΒΓ μέ μίαν ἁπλῆν ὀλίσθησιν ἐντός τοῦ ἐπιπέδου καί λέγεται κατ'εὐθεῖαν ἴσον πρός τό ΑΒΓ. 'Αντιθέτως τό τρίγωνον Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ διά νά ταυτισθῇ μέ τό ἴσον του ΑΒΓ πρέπει προηγουμένως νά ἀναστραφῇ καί λέγεται κατ'ἀναστροφήν ἴσον πρός τό ΑΒΓ.

<u>1.2 Γνωρίσματα ἰσότητος τριγώνων.</u> Εἴδαμεν ἀνωτέρω πῶς ἐξακριβώνομεν τήν ἰσότητα δύο τριγώνων ἐπιθέτοντες τό ἕνα ἐπάνω εἰς τό ἄλλο εἴτε μέ ἁπλῆν ὀλίσθησιν, εἴτε μέ ἀναστροφήν καί ἀκολουθοῦσαν ὀλίσθησιν. Αὐτός ὅμως ὁ πειραματικός τρόπος ἐργασίας δέν εἶναι ἱκανοποιητικός ἀπό τάς ἑξῆς δύο ἀπόψεις: 1) ἀναφέρεται εἰς ὑλικῶς πραγματοποιημένα τρίγωνα καί ὄχι εἰς τάς νοεράς γεωμετρικάς παραστάσεις των καί 2) εἶναι συνυφασμένος μέ μικρά σφάλματα, ὅπως κάθε ἐργασία πού βασίζεται εἰς παρατηρήσεις μέ τάς αἰσθήσεις μας. Διά τοῦτο θά ἐξετάσωμεν τώρα πῶς εἶναι δυνατόν νά βεβαιωθοῦμεν ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα συγκρίνοντες τρία μόνον ὁμόλογα στοιχεῖα των, ἀρκεῖ νά τά ἐκλέξωμεν καταλλήλως.

<u>1ον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων.</u>



Ἔστω ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν ἀντιστοίχως ἴσα τά στοιχεῖα των $\alpha = \alpha'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ὀλισθαίνει καί τοποθετεῖται (ἀναστρεφόμενον, ἐάν χρειασθῇ), κατά τρόπον ὥστε νά ταυτισθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί αἱ δέ ἴσαι γωνίαι νά γίνουν ἐφεξῆς).

Εἶναι τώρα εὔκολον νά ἴδωμεν ὅτι ἡ $\alpha \equiv \alpha'$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν δύο τριγώνων ὡς κοινή διχοτόμος τῶν γωνιῶν ∢(ΒΑ΄, ΒΑ) καί ∢(ΓΑ,ΓΑ΄). (Τό συμμετρικόν τῆς κορυφῆς Α θά εἶναι Α΄, διότι ἡ ἡμιευθεῖα ΓΑ ἔχει συμμετρικήν τήν ΓΑ΄ καί ἡ ΒΑ τήν ΒΑ΄, ἐπομένως τό κοινόν σημεῖον Α τῶν ΓΑ καί ΒΑ θά ἔχῃ συμμετρικόν τό κοινόν σημεῖον Α΄ τῶν ΓΑ΄καί ΒΑ΄).

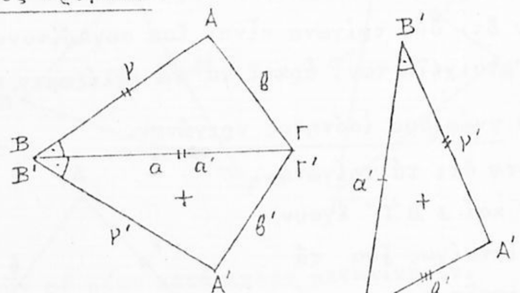
Τά δύο λοιπόν τρίγωνα, ὡς συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσα.

Επομένως: <u>'Εάν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευράν των ἴσην καί τάς προσκειμένας της γωνίας ἴσας, μίαν πρός μίαν,εἶναι ἴσα.</u>

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ ∢B &= ∢B' \\ ∢\Gamma &= ∢\Gamma' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{τργ.ΑΒΓ} = \text{τργ. Α΄Β΄Γ΄}$$

2ον <u>γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων.</u>

"Εστω ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τοῦ παραπλεύρως σχήματος ἔχουν ἀντιστοίχως ἴσα τά ἀκόλουθα στοιχεῖα των $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ καί $∢B = ∢B'$.



'Υποθέτομεν καί πάλιν ὅτι τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄μεταφέρεται (ἀφοῦ προηγουμένως ἀναστραφῇ) καί τοποθετεῖται κατά τρόπον, ὥστε νά ταυτισθοῦν δύο ἀπό τάς ἴσας πλευράς π.χ. $\alpha \equiv \alpha'$,αἱ δέ ἴσαι γωνίαι ∢Β καί ∢Β΄ νά γίνουν ἐφεξῆς. Τότε ἡ πλευρά $\alpha \equiv \alpha'$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας ∢(ΒΑ΄,ΒΑ), ὡς διχοτόμος της, καί αἱ κορυφαί Α καί Α΄ συμμετρικαί (διότι

ΒΑ΄= ΒΑ). Τά δύο τρίγωνα, λοιπόν, εἶναι συμμετρικά, ἄρα ἴσα. Ἐπομένως:

Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν ἀντιστοίχως δύο πλευρας των ἴσας, μίαν πρός μίαν, καί τήν ὑπ᾽αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τότε θά εἶναι ἴσα.

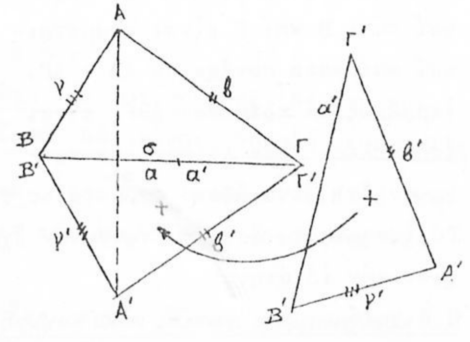
$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \alpha' \\ \gamma = \gamma' \\ \measuredangle B = \measuredangle B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{τργ. } ΑΒΓ = \text{τργ. } Α'Β'Γ'$$

3ον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων.

Ἔστω ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄τοῦ κατωτέρω σχήματος ἔχουν ἴσα τά στοιχεῖα των:

$$\alpha = \alpha' \quad , \quad \beta = \beta' \text{ καί } \gamma = \gamma$$

Ὑποθέτομεν ὅτι τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μεταφέρεται καταλλήλως ὥστε νά ταυτισθοῦν δύο ἴσαι πλευραί, π.χ. $\alpha' \equiv \alpha$, αἱ δέ προσκείμεναι πρός τάς πλευράς ταύτης γωνίαι ∢Β΄ καί ∢Γ΄νά γίνουν ἐφεξῆς τῶν ὁμολόγων των ∢Β καί ∢Γ. Τότε αἱ κορυφαί Β καί Γ τοῦ σχηματισθέντος τετραπλεύρου ΑΒΑ΄Γ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τάς κορυφάς Α καί Α΄ καί ἐπομένως ἀνήκουν είς τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΑ΄



Η ΒΓ λοιπόν εἶναι ἄξων συμμετρίας ροῦ τετραπλ.ύρου ΑΒΑ΄Γ καί συνεπῶς θά ἔχωμεν:

$$\text{τργ. } ΑΒΓ = \text{τργ. } Α'Β'Γ$$

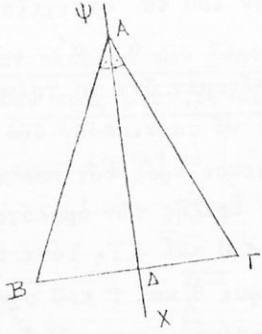
Ἐπομένως: Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν ἀντιστοίχως καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρός μίαν, εἶναι ἴσα.

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{τργ.} ΑΒΓ = \text{τργ.} Α'Β'Γ'$$

§ 2. Τό ἰσοσκελές τρίγωνον.

<u>2.1 Ἄξων συμμετρίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.</u> Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ λέγεται ἰσοσκελές ἐάν ἔχη δύο πλευράς του π.χ. τάς ΑΒ καί ΑΓ ἴσας. Ἡ κορυφή Α λέγεται τότε κορυφή τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καί ἡ ΒΓ, βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἡ κάθετος ΑΔ ἀπό τήν κορυφήν Α πρός τήν βάσιν ΒΓ λέγεται ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

<u>2.2 Ἄξων συμμετρίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.</u> Γνωρίζομεν ὅτι τό ἰσοσκελές τρίγωνον ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν μεσοκάθετον ΑΔ τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία συμπίπτει μέ τήν διχοτόμον τῆς γωνίας Α.



<u>Ἀντίστροφον.</u> Ἔστω τώρα ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ (ἴδιον σχῆμα) ἔχει ἄξονα συμμετρίας χψ διερχόμενον ἀπό τήν κορυφήν του Α. Αἱ κορυφαί τότε Β καί Γ εἶναι συμμετρικαί καί κατά συνέπειαν ΑΒ = ΑΓ, ἑπομένως τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐάν λοιπόν ἕνα τρίγωνον ἔχη ἕνα ἄξονα συμμετρίας θά εἶναι ἰσοσκελές

Τό ἰσοσκελές, λοιπόν, τρίγωνον ἔχει τήν ἀκόλουθον χαρακτηριστικήν ἰδιότητα:

<u>Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου.</u>

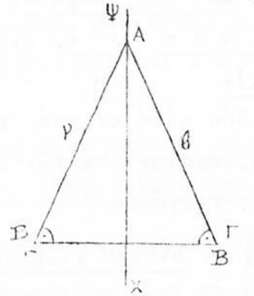
<u>Πορίσματα:</u> Ἐπειδή ὁ ἄξων συμμετρίας χψ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι συγχρόνως καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α) ἕπεται ὅτι:

1ον <u>Εἰς κάθε ἰσοσκελές τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς, ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως καί τό ὕψος ταυτίζονται.</u>

2ον <u>Εἰς κάθε ἰσοσκελές τρίγωνον αἱ γωνίαι τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι.</u>

<u>2.3 Τρίγωνον μέ δύο γωνίας ἴσας.</u> Ἔστω ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ παραπλεύρως σχήματος ἔχει ἴσας τάς γωνίας του Β καί Γ, θά ἔχωμεν τότε:

$\sphericalangle B = \sphericalangle \Gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$



Πράγματι ἄς φέρωμεν τόν ἄξονα συμμετρίας (μεσοκάθετον) τῆς πλευράς ΒΓ.

Μία στροφή 180^0 τοῦ τριγώνου ΑΒΓ περί τόν ἄξονα συμμετρίας θά ἀντιμεταθέση μέ ταύτισιν τάς ἴσας γωνίας Β καί Γ ἐπομένως καί τάς ἡμιευθείας ΒΛ καί ΓΑ, αἱ ὁποῖαι τότε, ὡς συμμετρικαί, θά τέμνωνται ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα συμμετρίας xy καί ἐπομένως:

$$\beta = \gamma$$

<u>Ἐάν λοιπόν ἕνα τρίγωνον ἔχη δύο γωνίας ἴσας, θά ἔχη καί τάς ἀπέναντί των πλευράς ἴσας· θά εἶναι, δηλαδή, ἰσοσκελές.</u>

<u>2.4 Ἰσόπλευρα τρίγωνα.</u> Ἀπό ὅσα ἐμάθαμεν διά τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα συμπεραίνομεν τάς ἀκολούθους ἰδιότητας τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων.

α) Τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας.

β) Τό ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον

γ) Τό ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον.

δ) Τά τρία ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ταυτίζονται μέ τάς τρεῖς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του καί μέ τάς τρεῖς μεσοκαθέτου τῶν λευρῶν του.

<u>2.5 Εἰδικά γνωρίσματα ἰσότητος ἰσοσκελῶν τριγώνων:</u>

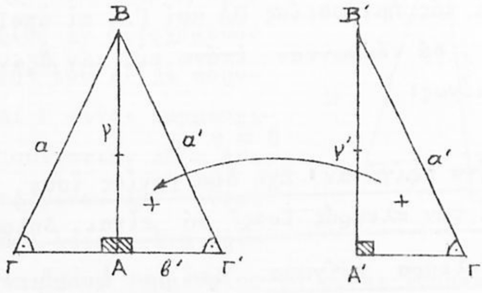
1ον Ἐάν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ἔχουν τάς βάσεις των ΒΓ = Β΄Γ΄ καί ∢Β = ∢Β΄ θά εἶναι ἴσα.

2) Ἐάν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ἔχουν ΑΒ = Α΄Β΄, καί ∢Α = ∢Α΄ θά εἶναι ἴσα (∢Α καί ∢Α΄ γωνίαι τῆς κορυφῆς).

Τά δύο αὐτά είδικά γνωρίσματα εἶναι πορίσματα τῶν γενικῶν γνωρισμάτων καί τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

§ 3. Εἰδικά γνωρίσματα ἰσότητος Ὀρθογωνίων τριγώνων.

3.1 1ον γνώρισμα. Ἔστω ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τοῦ κατωτέρω σχήματος ἔχουν ἀντιστοίως ἴσα τά



στοιχεῖα:

$$\gamma = \gamma' \quad \text{καί } ∢Γ = ∢Γ' \quad (∢Α \text{ καί} ∢Α' \text{ ὀρθαί γωνίαι})$$

-Θά ἔχωμεν τότε:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma = \gamma' \\ ∢Γ = ∢Γ' \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{τργ. ΑΒΓ} = \text{τρ.Α΄Β΄Γ΄}$$

Πράγματι ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μεταφέρεται (ἀναστρεφόμενον, ἐάν χρειασθῆ) καί τοποθετεῖται είς τρόπον ὥστε ἡ πλευρά του γ΄ νά ταυτισθῆ μέ τήν ἴσην της γ αἱ δέ ὀρθαί γωνίαι ∢Α καί ∢Α΄ νά γίνουν ἐφεξῆς.

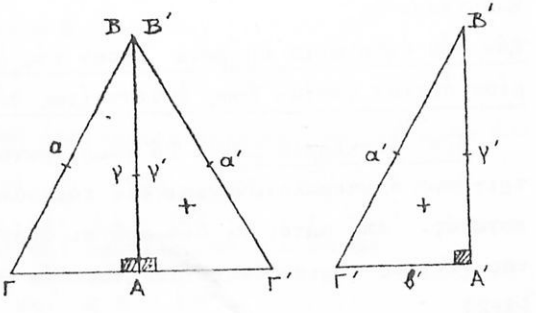
Τότε αἱ δύο ἄλλαι κάθετοι πλευραί θά ἀποτελέσουν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΓ΄ καί θά σχηματισθῆ τό τρίγωνον ΒΓΓ΄ μέ ἴσας τάς γωνίας του ∢Γ καί ∢Γ΄. Τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ἰσοσκελές, (2.3) μέ ἄξονα συμμετρίας τό ὕψος του, πού εἶναι ἡ πλευρά $\gamma \equiv \gamma'$. Ἑπομένως τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα ὡς συμμετρικά.

Ἐάν λοιπόν, δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν κάθετον πλευράν ἴσην καί τάς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσα.

3.2 2ον γνώρισμα. Ἔστω ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ (∢Α = ∢Α΄ = 90°) ἔχουν ἀντιστοίχως ἴσα τά στοιχεῖα των $\alpha = \alpha'$ καί $\gamma = \gamma'$. Θά ἔχωμεν τότε τό συμπέρασμα:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' \\ \gamma = \gamma'\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{τργ.ΑΒΓ} = \text{τργ.Α΄Β΄Γ΄}$$

Πράγματι ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μεταφέρεται (ἀφοῦ ἐνδεχομένως ἀναστραφῆ) καί τοποθετεῖται εἰς τρόπον ὥστε ἡ κάθετος πλευρά του γ΄ νά ταυτισθῆ μέ τήν ἴσην της γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δέ ὀρθαί γωνίαι ∢Α καί ∢Α΄ τῶν δύο τριγώνων νά γίνουν ἐφεξῆς.



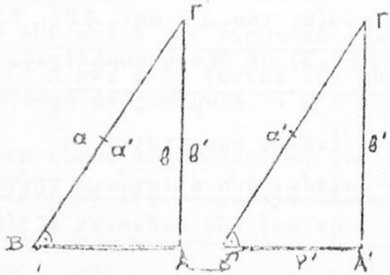
Παρατηροῦμεν ὅτι ἐσχηματίσθη καί πάλιν ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνον τό ΒΓΓ΄ μέ ἄξονα συμμετρίας τήν $\gamma \equiv \gamma'$. Τά δύο λοιπόν ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα, ὡς συμμετρικά.

Ἑπομένως:

Ἐάν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τάς ὑποτεινούσας των καί μίαν κάθετον πλευράν ἴσας ἀντιστοίχως θά εἶναι ἴσα.

3.3 3ον Γνώρισμα. Έστω ότι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ έχουν τά στοιχεῖα των $α = α΄$ καί $\sphericalangle Β = \sphericalangle Β΄$ θά έχωμεν τότε τό συμπέρασμα:

$$\left.\begin{array}{l} α = α΄ \\ \sphericalangle Β = \sphericalangle Β΄ \end{array}\right\} \Longrightarrow τργ.ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄$$



Ὑποθέτομεν ότι τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μεταφέρεται (ἀναστρεφόμενον, ἐάν χρειασθῆ) εἰς τρόπον ὥστε ἡ ὑποτείνουσά του α΄νά ταυτισθῆ μέ τήν ἴσην της α, τοῦ ΑΒΓ καί ἐπίσης νά ταυτισθοῦν αἱ ἴσαι ὀξεῖαι γωνίαι $\sphericalangle Β$ καί $\sphericalangle Β΄$. Τότε καί ἡ κορυφή Α΄ θά συμπέση μέ τήν κορυφήν Α, διότι ἀπό τό Γ μία καί μόνη κάθετος ἄγεται πρός τήν ΒΑ.

Ἐπομένως:

<u>Ἐάν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα έχουν τάς ὑποτεινούσας των καί μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσας ἀντιστοίχως θά εἶναι ἴσα.</u>

3.4 Ἀνακεφαλαίωσις. Τά γνωρίσματα ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων ἀνακεφαλαιώνονται εἰς τάς ἀκολούθους πέντε συνεπαγωγάς. Ἀπό αὐτάς αἱ δύο πρῶται ἀνάγονται εἰς τάς δύο πρώτας γενικάς περιπτώσεις ἰσότητος δύο τυχόντων τριγώνων (-1-2)

α΄. $\left.\begin{array}{l} β = β΄ \\ \sphericalangle Γ = \sphericalangle Γ΄ \end{array}\right\} \Longrightarrow τργ.ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄$ (διότι καί $Α = Α΄ = 1$ ὀρθ.).

β΄. $\left.\begin{array}{l} β = β΄ \\ γ = γ΄ \end{array}\right\} \Longrightarrow τργ.ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄$ (διότι καί $Α = Α΄ = 1$ ὀρθ.).

γ΄. $\left.\begin{array}{l} γ = γ΄ \\ \sphericalangle Γ = \sphericalangle Γ΄ \end{array}\right\} \Longrightarrow τργ.ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄$

δ΄. $\left.\begin{array}{l} α = α΄ \\ γ = γ΄ \end{array}\right\} \Longrightarrow τργ.ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄$

ε.′ $\left.\begin{array}{r} \alpha = \alpha' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array}\right\} \Longrightarrow$ τργ. ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

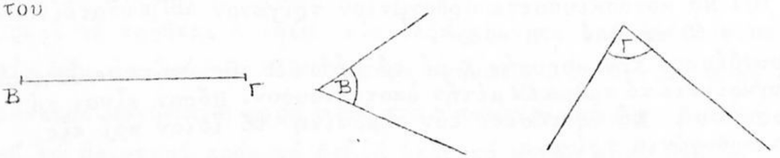
1) Νά κατασκευάσετε τρίγωνον ἀπό τά κατωτέρω στοιχεῖα του

α) Πλευρά $\alpha = 64$ mm , $\sphericalangle B = 72^0$, $\sphericalangle \Gamma = 59^0$

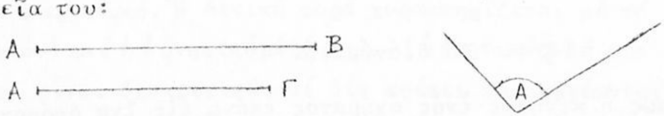
β) $\sphericalangle A = 108^0$, πλευρά $\gamma = 53$ mm καί $\beta = 67$ mm

γ) πλευρά $\alpha = 73$ mm , $\beta = 61$ mm καί $\gamma = 42$ mm

2) Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπό τά κατωτέρω στοιχεῖα του



3) Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπό τά κατωτέρω στοιχεῖα του:



4) Νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπό τά κατωτέρω στοιχεῖα του:

α) πλευρά $\beta = 48$ mm καί $\gamma = 59$ mm

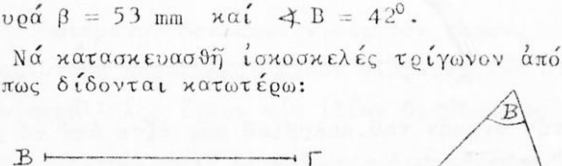
β) πλευρά $\beta = 56$ mm καί $\sphericalangle B = 62^0$

γ) πλευρά $\beta = 48$ mm καί ὑποτείνουσα $\alpha = 64$ mm

δ) ὑποτείνουσα $\alpha = 62$ mm καί $\sphericalangle B = 53^0$

ε) πλευρά $\beta = 53$ mm καί $\sphericalangle B = 42^0$.

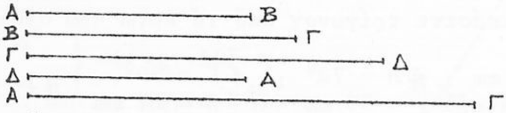
5) Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελές τρίγωνον ἀπό τά στοιχεῖα του, ὅπως δίδονται κατωτέρω:



6) Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελές τρίγωνον ἀπό τήν βάσιν του ΒΓ καί τό ὕψος ΑΔ, ὅπως δίδονται κατωτέρω:

7) Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ ἀπό τήν γωνίαν τῆς κορυφῆς $\sphericalangle A = 48^0$ καί τό ὕψος του ΑΔ = 63 mm.

8) Νά κατασκευασθῆ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἀπό τάς πλευράς του καί τήν διαγώνιον ΑΓ, ὅπως δίδονται κατωτέρω:



9) Νά κατασκευάσετε ἰσόπλευρον τρίγωνον μέ πλευράν $\alpha = 48$ mm.

10) Νά κατασκευάσετε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓμέὑπατείνουσαν $\alpha = 60$ mm καί $B = 40^0$.
Νά συνδέσετε τήν κορυφήν Α μέ τό μέσον Μ τῆς ὑποτεινούσηςκαί νάσυγκρίνετε τό τμῆμαΑΜ μέτήν ὑποτείνουσαν. Πόσον εἶναι τό μῆκος του; Νά ἐξετάσετε ἐάν συμβαίνη τό ἴδιον καί εἰς ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα.

§ 4. Τά διανύματα.

4.1 Ὅπως ἡ κίνησις ἑνός ὀχήματος ἐπάνω εἰς ἕνα δρόμον ἠμπορεῖ νά γίνη κατά δύο κατευθύνσεις, ἔτσι καί ἡ κίνησις ἑνός σημείου ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν ἠμπορεῖ, ἐπίσης, νά γίνη κατά δύο κατευθύνσεις.
Π.χ. Διά νά χαράξωμεν τό τμῆμα ΑΒ πρέπει:

νά κινήσωμεν τήν αἰχμήν τοῦ μολυβιοῦ μας εἴτε ἀπό τό Α πρός τό Β εἴτε ἀπό τό Β πρός τό Α. Ἐάν λοιπόν θέλωμεν νά γνωρίζωμεν ὄχι μόνον τό μέγεθος τοῦ δρόμου πού διήνυσε τό κινητόν (εἰς τήν περίπτωσίν μας ἡ αἰχμή τοῦ μολυβιοῦ) ἀλλά καί πρός ποίαν κατεύθυνσιν ἐκινήθη, θά πρέπη νά χρησιμοποιήσωμεν νέους τρόπους ἐκφράσεως καί νέα σύμβολα.

Ἔτσι, ὅταν θέλωμεν νά ὑποδείξωμεν ὅτι ἡ κίνησις ἔγινεν ἀπό τό Α πρός τό Β, θά γράφομεν : $\overline{AB}$ καί θά ἐκφωνοῦμεν: διάνυσμα ἄλφα - βῆτα. Ὅταν ἀντιθέτως θέλωμεν νά ὑποδείξωμεν ὅτι ἡ κίνησις ἔγινεν ἀπό τό Β πρός τό Α θά γράφωμεν $\overrightarrow{BA}$ καί καί θά ἐκφωνοῦμεν: διάνυσμα βῆτα - ἄλφα.

Διά νά διακρίνωμεν τάς δύο ἀντιθέτους κατευθύνσεις χρησιμοποιοῦμεν τούς ὅρους θετική φορά καί ἀρνητική φορά.

Ἡ θετική φορά ἠμπορεῖ νά ὁρισθῇ κατ'ἐλευθέραν ἐκλογήν μας, ἀρκεῖ νά τηρῆται ἡ ἰδία εἰς ὁλόκληρον τό ὑπό ἐξέτασιν θέμα. Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ὡς θετική φορά λαμβάνεται συνήθως ἡ φορά κατά τήν ὁποίαν γράφομεν, δηλαδή ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά (εἰς τό σχῆμα μας, ἀπό τό Α πρός τό Β). Ἡ ἀντίθετος φορά, ἀπό τό Β πρός τό Α, εἶναι τότε ἡ ἀρνητική. Ἡ θετική φορά χαρακτηρίζεται μέ τό σῆμα + (θετικόν) καί ἡ ἀρνητική μέ τό σῆμα − (ἀρνητικόν). Τά δύο αὐτά σήματα εἶναι διακριτικά καί δέν πρέπει νά συγχέωνται μέ τά ὅμοια τῶν "σύν" καί "πλήν" τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως.

Μία εὐθεῖα, ἐπί τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετική φορά, λέγεται προσανατολισμένη.

Κάθε προσανατολισμένη εὐθεῖα ἔχει, ἐκτός ἀπό τήν φοράν της, καί μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν εἰς τόν χῶρον.

Δύο εὐθεῖαι μή παράλληλοι ἔχουν διαφορετικήν διεύθυνσιν, ἐνῶ δύο παράλληλοι ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν.

4.2 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα διανυσμάτων. Ἕνα διάνυσμα καθορίζεται ἀπό τά ἀκόλουθα χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

α) Ἀπό τήν διεύθυνσίν του: δηλαδή ἀπό τήν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας πού τό φέρει.

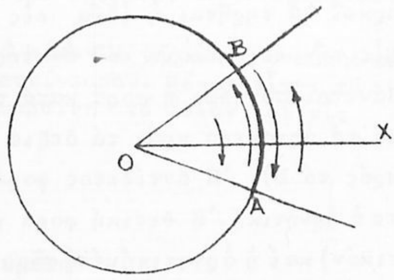
β) Ἀπό τήν φοράν του.

γ) Ἀπό τό μέγεθός του, δηλαδή τό μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος.

§ 5. Ὁ κύκλος

5.1 Προσανατολισμένα τόξα καί γωνίαι.

Ἔστω AB ἕνα τόξον περιφερείας (σχ. παραπλεύρως). Ἕνα σημεῖον ἠμπορεῖ νά κινηθῇ ἐπάνω εἰς τό τόξον ἤ ἀπό τό A πρός τό B ἤ ἀπό τό B πρός τό A. Ὁμοίως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ∢(OA,OB) ἠμπορεῖ νά διαγραφῇ ἀπό μίαν ἡμιευθεῖαν Ox, ἄν αὐτή

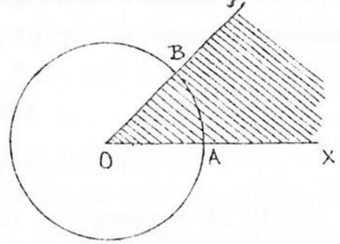


στραφῇ γύρω ἀπό τό O ἀπό τήν θέσιν OA πρός τήν θέσιν OB ἤ ἀπό τήν θέσιν OB πρός τήν θέσιν OA. Εἶναι χρήσιμον νά διακρίνωμεν τούς δύο αὐτούς τρόπους διαγραφῆς εἴτε τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ εἴτε τῆς γωνίας ∢(OA,OB). Πρός τόν σκοπόν αὐτόν καλοῦμεν <u>θετικήν</u> τήν μίαν ἀπό τάς δύο φοράς κινήσεως γύρω ἀπό τό O καί τήν ἄλλην <u>ἀρνητικήν</u>. Συμφωνοῦμεν ἐπίσης νά δηλώνωμεν μέ κάποιον τρόπον, π.χ. ἕνα βέλος, τήν φοράν διαγραφῆς, ὅπως εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα.

Θετική φορά περιστροφῆς ἐκλέγεται συνήθως ἡ ἀντίθετος πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

Μέ αὐτάς τάς προϋποθέσεις ἕνα τόξον καί ἡ περιφέρεια εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει λέγονται προσανατολισμέναι. Ἐπίσης καί ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ὑπό τάς ἰδίας προϋποθέσεις, εἶναι προσανατολισμένη.

Ένα τόξον λοιπόν προσανατολισμένης περιφερείας, όπως τό τόξον $\widehat{AB}$ τοῦ παραπλεύρως σχήματος, εἶναι θετικόν ἤ ἀρνητικόν, ἐάν ἡ κίνησις ἐπί τῆς περιφερείας, ἀπό τήν ἀρχήν του Α πρός τό τέλος του Β ἔγινε ἀντιστοίχως κατά τήν θετικήν ἤ τήν ἀρνητικήν φοράν.

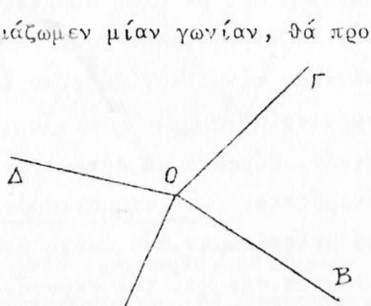


Εἰς τό ἑξῆς ὅλα τά τόξα πού θά ὀνομάζωμεν, θά τά θεωροῦμεν θετικά, ἐκτός ἐάν τά κατονομάσωμεν ὡς ἀρνητικά. Οὕτω τό τόξον ΒΑ, θεωρούμενον θετικόν, ἔχει ἀρχήν τό Β καί πέρας τό Α καί ἔχομεν:

$$\widehat{AB} + \widehat{BA} = 1 \text{ περιφέρεια (καί ὄχι μηδέν)}$$

Ὅταν τό σημεῖον Α κινούμενον ἐπάνω εἰς τήν περιφέρειαν κατά τήν θετικήν φοράν, γράφη τό τόξον $\widehat{AB}$, ἡ ἡμιευθεῖα $Ox(A \in Ox)$ γράφει τήν κυρτήν θετικήν γωνίαν (Ox,Oy), ἡ ὁποία συμβολίζεται: $\measuredangle(Ox,Oy)$. Ἐάν θέλωμεν νά ὑποδείξωμεν τήν ἀρνητικήν γωνίαν (Ox,Oy) θά γράφωμεν: $\measuredangle(Ox,Oy)$. Αὐτή εἶναι μή κυρτή ἀρνητική.

Ὅταν λοιπόν εἰς τό ἑξῆς θά ὀνομάζωμεν μίαν γωνίαν, θά προτάσσωμεν τήν ἀρχικήν πλευράν της καί θά προσημαίνωμεν μέ τό σύμβολον $\measuredangle$ τήν θετικήν καί μέ τό $\measuredangle$ τήν ἀρνητικήν. Ἔτσι εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα αἱ γωνίαι $\measuredangle(OA,OB)$, $\measuredangle(OB,O\Gamma)$ εἶναι κυρταί



ἐφεξῆς καί ἔχουν ὡς ἄθροισμα τήν ἐπίσης κυρτήν $\measuredangle(OA,O\Gamma)$.

Εἰς τό ἴδιον σχῆμα ἔχομεν:

$$\sphericalangle(OA,OB) + \sphericalangle(OB,O\Gamma) + \sphericalangle(O\Gamma,O\Delta) = \sphericalangle(\widehat{OA,O\Delta})$$

Ἡ γωνία $\sphericalangle(OA,O\Delta)$ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μή κυρτή.

Ἐπίσης: $\sphericalangle(OA,O\Gamma) - \sphericalangle(OB,O\Gamma) = \sphericalangle(OA,OB)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

§ 1. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

1.1. Αἱ συμμετρίαι. Εἰς προηγούμενα μαθήματα ἔχομεν διδαχθῆ τήν συμμετρίαν ὡς πρός κέντρον καί την συμμετρίαν ὡς πρός ἄξονα. Εἴδαμεν πῶς κατασκευάζομεν τό συμμετρικόν ἑνός σχήματος ὡς πρός κέντρον ἤ ὡς πρός ἄξονα ἐμελετήσαμεν ἐπίσης σχήματα πού ἔχουν ἰδικόν των κέντρον ἤ ἄξονα συμμετρίας. Γνωρίζομεν π.χ. ὅτι ὁ κύκλος ἔχει κέντρον συμμετρίας τό κέντρον του καί ἄξονας συμμετρίας τάς διαμέτρους του. Ἡ ταινία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν μεσοπαράλληλόν της καί κέντρον συμμετρίας κάθε σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου. Τό παραλληλόγραμμον ἔχει κέντρον συμμετρίας τήν τομήν τῶν διαγωνίων του. Τό ἰσοσκελές τρίγωνον ἔχει ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τήν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς κ.λ.π.

Λέγομεν ὅτι μέ μίαν συμμετρίαν ἕνα σχῆμα μετασχηματίζεται εἰς τό συμμετρικόν του. Τοῦτο, εἰς τήν συμμετρίαν ὡς πρός κέντρον εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἴσον πρός τό ἀρχικόν, ἐνῷ εἰς τήν συμμετρίαν ὡς πρός ἄξονα εἶναι κατ'ἀναστροφήν ἴσον πρός τό ἀρχικόν. Σύμφωνα μέ αὐτόν τόν τρόπον ἐκφράσεως, μία συμμετρία ὀνομάζεται μετασχηματισμός.

Θά μελετήσωμεν δύο ἀκόμη μετασχηματισμούς: Τήν παράλληλον μετατόπισιν καί τήν στροφήν.

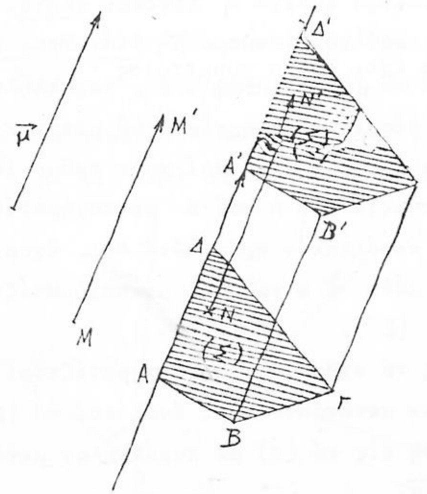
1.2 Παράλληλος μετατόπισις. Ἐμάθαμεν πῶς, μετακινοῦντες τόν γνώμονα ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον, ὥστε μία πλευρά του νά ὀλισθαίνη συνεχῶς κατά μῆκος τοῦ κανόνος, δυνάμεθα νά χαράξωμεν παραλλήλους , αἱ ὁποῖαι νά διέρχωνται ἀπό διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Κάτι ἀνάλογον ἐκάμαμεν καί μέ τό σχεδιαστικόν ὄργανον πού λέγεται ταῦ. Κατά τήν διαδρομήν τῆς μετακινήσεώς του λέγομεν ὅτι ὁ γνώμων ἤ τό ταῦ ὑποβάλλεται εἰς παράλληλον μετατόπισιν.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχει δοθῆ ἕνα διάνυσμα $\vec{\mu}$ μέσα εἰς τό ἐπίπεδον. Μέ ἀρχήν ἕνα τυχόν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζομεν τό διάνυσμα:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\mu}$$

Θεωροῦμεν τήν μετακίνησιν τοῦ σημείου Μ ἀπό τήν ἀρχικήν του θέσιν Μ εἰς τήν θέσιν Μ΄ καί λέγομεν ὅτι ὑπεβλήθη εἰς παράλληλον μετατόπισιν ἴσην μέ $\vec{\mu}$.

Αὐτό ἠμπορεῖ νά γίνη εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἔτσι ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον (Π) ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῆ μέ παράλληλον μετατόπισιν ἴσην μέ $\vec{\mu}$ εἰς τό ἐπίπεδον πού εἶναι ὁ ἴδιος ἑαυτός του. Ἕνα σχῆμα (Σ) μετασχηματίζεται μέ τήν ἰδίαν παράλληλον μετατόπισιν $\vec{\mu}$ εἰς ἄλλο σχῆμα (Σ΄). Τοῦτο εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἴσον πρός αὐτό, ἐάν μετασχηματισθῆ κατά τήν ἰδίαν παράλληλον μετατόπισιν $\vec{\mu}$ τό σύνολον τῶν σημείων του.



Κατά τήν παράλληλον μετατόπισιν $\vec{\mu}$, ἕνα σημεῖον Ν τοῦ σχήματος (Σ) μετασχηματίζεται εἰς τό Ν΄ τοῦ σχήματος (Σ΄) καί εἶναι $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{\mu}$. Τά σημεῖα Ν καί Ν΄ εἶναι δύο ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ.

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός τοῦ (Σ) εἰς τό (Σ΄) γίνεται κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον μέ συνεχῆ κίνησιν (ἀνωτέρω σχῆμα).

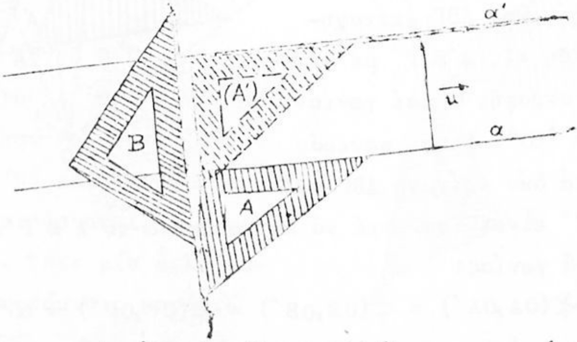
Ἔστω ε μία σταθερά εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου παράλληλος πρός $\overrightarrow{\mu}$ καί περιέχουσα δύο σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ), π.χ. τά Α καί Δ. Μετατοπίζομεν τό σχῆμα (Σ) οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα του ΑΔ νά συμπίπτη διαρκῶς μέ τήν σταθεράν εὐθεῖαν ε τοῦ ἐπιπέδου, τό δέ σημεῖον Α νά διαγράφη ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{\mu}$. Τό σύνολον τότε τῶν σημείων τοῦ (Σ) θά ἔχη μετασχηματισθῆ εἰς τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ (Σ΄) μέ παράλληλον μετατόπισιν ἴσην μέ $\overrightarrow{\mu}$.

Ἡ σταθερά εὐθεῖα ε λέγεται ὁδηγός τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως καί τό διάνυσμα $\overrightarrow{\mu}$, διάνυσμα τῆς μετατοπίσεως.

Κατά τόν μετασχηματισμόν τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως αἱ σχετικαί θέσεις τῶν σημείων τοῦ μετατοπιζομένου σχήματος παραμένουν ἀμετάβλητοι καί κάθε τμῆμα ΑΒ πού συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα του Α καί Β μετασχηματίζεται εἰς τμῆμα Α΄Β΄ ἴσον καί παράλληλον πρός αὐτό· δηλ. ἔχομεν πάντοτε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Ἐπίσης κάθε $\measuredangle$ ω τοῦ (Σ) μετασχηματίζεται εἰς τήν ἴσην τῆς $\measuredangle$ ω΄ τοῦ (Σ΄).

Ὅπως τό σχῆμα (Σ) μετασχηματίζεται εἰς τό (Σ΄) μέ τήν παράλληλον μετατόπισιν $\overrightarrow{\mu}$, ἔτσι καί τό (Σ΄) ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῆ εἰς τό (Σ) μέ παράλληλον μετατόπισιν ἀντίθετον πρός τήν $\overrightarrow{\mu}$.

Μέ τήν χρησιμοποίησιν τοῦ ταῦ οἱ σχεδιασταί μετασχηματίζουν μίαν εὐθεῖαν εἰς ἄλλας παραλλήλους πρός αὐτήν. Τό ἴδιον ἐπιτυγχάνουν καί μέ δύο γνώμονας ἤ μέ ἕνα γνώμονα καί ἕνα κανόνα. Ὅταν ὁ μετασχηματισμός γίνεται μέ δύο γνώμονας, ὁ ἕνας μένει ἀμετακίνητος. Εἰς τό κατωτέρω σχῆμα ἡ αὐθεῖα α ἔχει μετασχηματισθῆ εἰς τήν παράλληλόν της α΄μέ παράλληλον μετατόπισιν πλάτους $\vec{\mu}$, ὅσον εἶναι καί τό πλάτος τῆς ταινίας (α΄∥α). Ὁ γνώμων Β ἔμεινεν ἀμετακίνητος καί ἡ ὑποτείνουσά



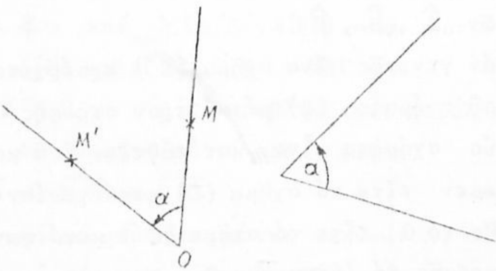
του ἐχρησίμευσεν ὡς ὁδηγός τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως. Ἀντί τοῦ γνώμονος Β ἠμπορούσαμεν νά χρησιμοποιήσωμεν κανόνα.

<u>1.3 Στροφή</u>. Δίδεται ἕνα σταθερόν σημεῖον Ο καί μία προσανατολισμένη γωνία α. Διά κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχει ἕνα σημεῖον Μ΄, ὥστε νά ἔχωμεν:

1ον $\measuredangle(OM, OM') = \measuredangle\alpha$

καί 2ον $OM = OM'$.

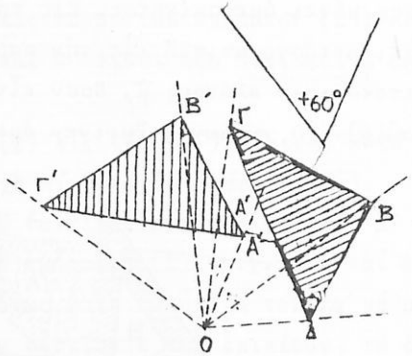
Λέγομεν τότε ὅτι τό σημεῖον Μ μετεσχηματίσθη εἰς Μ΄ μέ στροφήν περί τό Ο΄ ἴσην μέ $\measuredangle\alpha$.



Τό σημεῖον Ο λέγεται <u>κέντρον</u> τῆς στροφῆς καί ἡ γωνία $\measuredangle\alpha$, γωνία τῆς στροφῆς. Ἡ γωνία $\measuredangle(OM, OM')$ πρέπει ἀπαραιτήτως νά ἔχη τόν ἴδιον προσανατολισμόν μέ τήν $\measuredangle\alpha$.

Ἕνα σχῆμα (Σ) μετασχηματίζεται μέ στροφήν κατά γωνίαν $\measuredangle\alpha$

καί μέ κέντρον στροφῆς Ο εἰς τό σχῆμα (Σ΄), ἐάν μετασχηματισθῆ τό σύνολον τῶν σημείων του.
Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα τό τρίγωνον ΑΒΓ μετεσχηματίσθη εἰς Α΄Β΄Γ΄ μέ κέντρον στροφῆς Ο καί γωνίαν ∢ α = $^{+}60^{0}$. Εἶναι φανερόν ὅτι τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα. Διά νά κατασκευάσω τό Α΄Β΄Γ΄ἐσχημάτισα:



1ον Τά γωνίας:

$$∢(ΟΑ,ΟΑ΄) = ∢(ΟΒ,ΟΒ΄) = ∢(ΟΓ,ΟΓ΄) = 60^{0}$$

καί 2ον ἐπῆρα

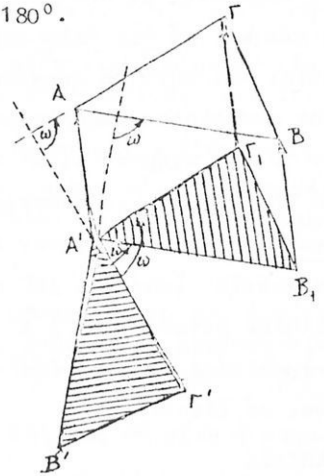
$$ΟΑ΄ = ΟΑ \ , \ ΟΒ΄ = ΟΒ \ , \ ΟΓ΄ = ΟΓ.$$

Αἱ κορυφαί Α΄, Β΄, Γ΄ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόλογοι τῶν Α,Β,Γ. Ὁμοίως αἱ πλευραί Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Α΄ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόλογοι τῶν ΑΒ , ΒΓ , ΓΑ καί αἱ γωνίαι $\widehat{Α}΄$, $\widehat{Β}΄$, $\widehat{Γ}΄$ ὁμόλογοι τῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$.
Ἐάν γενικῶς ἕνα σχῆμα (Σ΄) προέρχεται ἀπό μετασχηματισμόν τοῦ σχήματος (Σ) μέ κέντρον στροφῆς Ο καί γωνίαν ∢α, τά δύο σχήματα εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἴσα καί συμπίπτουν,ἐάν στρέφωμεν εἴτε τό σχῆμα (Σ) κατά γωνίαν $^{+}60^{0}$ μέ κέντρον στροφῆς τό Ο, εἴτε τό σχῆμα (Σ΄) κατά γωνίαν $^{-}60^{0}$ μέ κέντρον στροφῆς τό ἴδιον σημεῖον Ο.
Ἀπό ὅσα εἴπαμεν ἀνωτέρω ἐξάγεται τό συμπέρασμα ὅτι:
Τό συμμετρικόν σχήματος (Σ) ὡς πρός κέντρον συμμετρίας Ο εἶναι μετασχηματισμός στροφῆς κατά γωνίαν $^{+}180^{0}$ ἤ $^{-}180^{0}$ μέ κέντρον στροφῆς τό κέντρον συμμετρίας. Μέ ἄλλας λέξεις ἡ συμμετρία πρός κέντρον Ο εἶναι μία ειδική περίπτωσις στρο-

φῆς $^{+}180^{0}$ ἤ $^{-}180^{0}$ μέ κέντρον. στροφῆς τό κέντρον συμμετρίας καί γωνίαν στροφῆς $^{+}180^{0}$ ἤ $^{-}180^{0}$.

1.4 ῎Ισα σχήματα. ῎Εστω ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τοῦ παραπλεύρως σχήματος εἶναι κατ εὐθεῖαν ἴσα:

τργ. ΑΒΓ = τργ.Α΄Β΄Γ΄.



Φέρομεν ἐκ τοῦ Α΄ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$ καί καλοῦμεν ω τήν γωνίαν $\measuredangle(A'B', A'B_1)$. Δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί:

1ον) $\omega = 0^{0}$. Τότε μία ἁπλῆ παράλληλος μετατόπισις κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{A'A}$ φέρει τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἰς σύμπτωσιν μέ τό ΑΒΓ.

2ον) $\omega \neq 0$. Τότε στρέφομεν πρῶτα τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄περί τό Α΄κατά γωνίαν ω, ὁπότε θά μετασχηματισθῆ εἰς τό $A'B_1\Gamma_1$ μέ πλευράς παραλλήλους πρός τάς ὁμολόγους των τοῦ ΑΒΓ, διότι:

$$\measuredangle(A'B', A'B_1) = \measuredangle\omega \quad \text{καί} \quad \measuredangle(A'\Gamma', A'\Gamma_1) = \omega$$

ἤτοι: $A'B_1 = \parallel AB$, $A'\Gamma_1 = \parallel A\Gamma$, $B_1\Gamma_1 = \parallel B\Gamma$

᾿Εάν τώρα τό τρίγωνον $A'B_1\Gamma_1 = A'B'\Gamma'$ ὑποβληθῆ εἰς παράλληλον μετατόπισιν $\overrightarrow{A'A}$, θά συμπέση μέ τό ΑΒΓ , διότι

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma}.$$

Σημείωσις. ᾿Εάν ἡ κορυφή Α΄ συμπίπτη μέ τήν κορυφήν Α, τότε ἀρκεῖ μόνη ἡ στροφή περί τήν κορυφήν $A \equiv A'$ κατά γωνίαν $\measuredangle(A'B', AB) = \omega$, διά νά συμπέσουν τά δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄

Δυνάμεθα λοιπόν νά συμπεράνωμεν ὅτι δύο τρίγωνα κατ᾿εὐθεῖαν ἴσα δύνανται νά συμπέσουν μέ μίαν κατάλληλον στροφήν ἀκολουθουμένην ἀπό μίαν κατάλληλον παράλληλον μετατόπισιν.

Ὅτι συμβαίνει μέ δύο κατ'εὐθεῖαν ἴσα τρίγωνα, τό ἴδιον συμβαίνει καί μέ δύο ἄλλα τυχόντα κατ'εὐθεῖαν ἴσα σχήματα. Δύνανται καί αὐτά νά συμπέσουν μέ μίαν κατάλληλον στροφήν καί μίαν κατάλληλον παράλληλον μετατόπισιν.

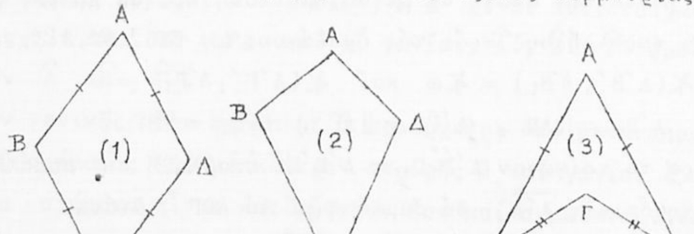
Ἐάν τά δύο σχήματα εἶναι κατ' ἀναστροφήν ἴσα, πρέπει, πρίν ἀπό τήν στροφήν, νά ἀναστραφῆ τό ἕνα ἀπό τά δύο.

Παρατήρησις. Τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ δύναται νά συμπέση μέ τό κατ'εὐθεῖαν ἴσον του ΑΒΓ καί ἐάν ὑποβληθῆ πρῶτα εἰς τήν παράλληλον μετατόπισίν $\overrightarrow{A'A}$ καί ἀκολούθως εἰς τήν στροφήν μέ κέντρον τό Α καί γωνίαν ∢ (Α΄Β΄, ΑΒ). Τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι τό ἴδιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συμμετρίας.

1) Ἀπό τά κατωτέρω σχήματα, τό πρῶτον εἶναι παραλληλόγραμμον μέ (1) ὅλας τάς πλευράς ἴσας καί λέγεται ῥόμβος. Τά ἄλλα δύο ἔχουν: ΑΒ = ΑΔ καί ΒΓ = ΓΔ καί λέγονται ῥομβοειδῆ. Νά εὕρετε καί νά χαράξετε τούς ἄξονας συμμετρίας ἑκά-



στου. Ποῖον ἀπό τά τρία ἔχει καί κέντρον συμμετρίας;

2) Ὑπάρχει κοινός ἄξων συμμετρίας μιᾶς περιφερείας καί μιᾶς εὐθείας; Ἐάν ὑπάρχη νά τόν ὁρίσετε.

3) Νά κατασκευάσετε μίαν περιφέρειαν μέ κέντρον Ο καί ἀκτίνα ρ = 35 mm καί μίαν ἡμιευθεῖαν Οx. Ἐπάνω εἰς τήν Οx νά λάβετε ΟΑ = 25 mm, ΟΒ = 35 mm καί ΟΓ = 48 mm καί νά φέρετε τάς καθέτους α, β, γ εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ. Πόσα κοινά σημεῖα καί ποῖα ὑπάρχουν μεταξύ τῆς περιφερείας καί κάθε μιᾶς ἀπό τάς εὐθείας α, β, γ ;

4) Ἡ εὐθεῖα πού ἔχει δύο κοινά σημεῖα μέ τήν περιφέρειαν λέγεται τέμνουσα. Ἡ εὐθεῖα πού ἔχει ἕνα κοινόν σημεῖον μέ τήν περιφέρειαν λέγεται ἐφαπτομένη καί ἡ εὐθεῖα πού δέν ἔχει κανένα κοινόν σημεῖον μέ τήν περιφέρειαν λέγεται ἐξωτερική. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἀπόστασις μιᾶς εὐθείας ἀπό τό κέντρον τῆς ἀνωτέρω περιφερείας, ἐν σχέσει μέ τήν ἀκτίνα, διά νά εἶναι τέμνουσα, ἐφαπτομένη, ἐξωτερική;

5) Εἰς τό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 3 νά ὁρίσετε τόν ἄξονα συμμετρίας καί τά κοινά συμμετρικά σημεῖα. Ποῖον εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ Β ;

Παράλληλοι μετατοπίσεις.

6) Νά κατασκευάσετε ἕνα κύκλον μέ κέντρον Ο καί ἀκτίνα ρ = 27 mm καί νά τόν ὑποβάλετε εἰς παράλληλον μετατόπισιν ΟΟ΄ = $\overline{\mu}$ μήκους 53 mm. Τί θέσιν θά ἔχουν μεταξύ των δύο ὁμόλογοι ἀκτίνες ;

Κατασκευάσετε τήν Ο΄Α΄ ὁμόλογον τῆς ΟΑ; πῶς θά γίνη ἡ κατασκευή ;

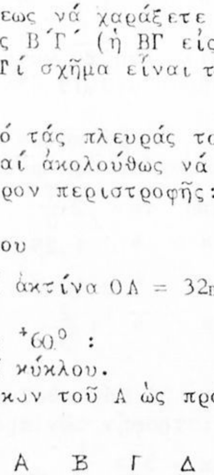
7) Εἰς τό σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νά χαράξετε μίαν χορδήν ΒΓ = 30 mm καί τήν ὁμόλογόν της Β΄Γ΄ (ἡ ΒΓ εἰς τόν κύκλον Ο , ἡ Β΄Γ΄ εἰς τόν κύκλον Ο΄). Τί σχῆμα εἶναι τό ΒΓ Β΄Γ΄ καί πόση ἡ περίμετρός του ;

8) Νά κατασκευάσετε τό τρίγωνον ΑΒΓ ἀπό τάς πλευράς του ΑΒ = 56 mm , ΒΓ = 63 mm καί ΓΑ = 42 mm καί ἀκολούθως νά τό ὑποβάλετε εἰς περιστροφήν $^{+}45^{0}$ μέ κέντρον περιστροφῆς:
α) τήν κορυφήν του Α
β) τήν τομήν τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του

9) Νά χαράξετε κύκλον μέ κέντρον Ο καί ἀκτίνα ΟΑ = 32mm καί μίαν χορδήν ΑΒ = 38 mm.
Νά ὑποβάλετε τήν χορδήν ΑΒ εἰς περιστροφήν $^{+}60^{0}$:
α) Μέ κέντρον περιστροφῆς τό κέντρον Ο τοῦ κύκλου.
β) Μέ κέντρον περιστροφῆς τό A_1 , συμμετρικόν τοῦ Α ὡς πρός τό κέντρον τῆς περιφερείας Ο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ ΤΟΥ Γ΄ ΜΕΡΟΥΣ.

Ι. Κλασματικοί καί δεκαδικοί ἀριθμοί.



1) Εἰς τά παραπλεύρως τμήματα νά ἐφαρμόσετε ὡς ἐκτελεστάς τούς κατωτέρω ρητούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:
εἰς τό Α τόν 0,75
εἰς τό Β τόν 0,333...
εἰς τό Γ τόν 1,25
εἰς τό Δ τόν $2\frac{2}{5}$.

Παράδειγμα: Ἐάν ἀπό ἕνα τμῆμα Α προκύπτει τό τμῆμα Α΄ μέ ἐκτελεστήν $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ θά γράψωμεν μετά τήν κατασκευήν τήν σχέσιν ἰσοδυναμίας

$$A' = \frac{7}{3}A \iff A = \frac{3}{7}A'$$

2) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:

α) $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$ β) $2{,}75 - 1\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$

γ) $3\frac{2}{5} - 2\frac{3}{10}$ δ) $3 - \left(1\frac{2}{5} - \frac{7}{10}\right)$

3) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά πολλαπλασιασθῆ καθένας ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς διά νά προκύψη ὁ παραπλεύρως του;

Ἀπό τόν 2 νά προκύψη ὁ 3
" " 3 " " " $\frac{1}{3}$
" " $1\frac{1}{2}$ " " " $\frac{1}{2}$
" " $3\frac{1}{2}$ " " " $2\frac{1}{3}$
" " $0{,}75$ " " " $0{,}25$

4) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά διαιρεθῆ καθένας ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς διά νά προκύψη ὁ παραπλεύρως του :

Ἀπό τόν $2\frac{7}{5}$ νά προκύψη ὁ 8
" " $1{,}25$ " " " 5
" " $0{,}1212\ldots$" " " $\frac{4}{11}$
" " $1\frac{2}{3}$ " " " $2\frac{1}{3}$

5) Νά λυθοῦν αἱ κατωτέρω ἐξισώσεις μέ τήν κατάλληλον ἀντιστροφήν τῶν πράξεων

$x - 3 = \frac{1}{2}$, $\frac{2x-1}{3} = 1$, $\frac{x-1}{2} = 0$

$\frac{5}{2x-1} = 1$, $\frac{7-3x}{3} = 2$; $\frac{8}{7-2x} = 2$

6) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{36}{48} - \left(\frac{50}{75} - \frac{18}{36}\right)$ β) $\frac{95}{125} + \frac{115}{138} - \frac{81}{108}$

7) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις,

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$, $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma-\alpha}$;

$\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta}$, $\alpha + \dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\alpha}$

ὅταν: 1ον $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 4$

2ον $\alpha = 1{,}25$, $\beta = 3$, $\gamma = 2{,}5$

3ον $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{3}$, $\gamma = 1$

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄ 1968 (VIII) - ΑΝΤ. 110.000 - ΣΥΜΒ. 1.633/18-7-68
Ἐκτυπ.: "Εν. Τσιγκογράφων Ἀθηνῶν ΣΥΝ. Π.Ε. Βιβλιοδ. Ἰω. Καμπανᾶς Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ