

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

$$2\alpha\beta$$

$$\frac{2x}{3}$$

$$\frac{\alpha\beta}{2}$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

$$\gamma \frac{1-\beta}{4}$$

$$(3\gamma\delta)$$

$$-\psi$$

$$7+x$$

ΑΛΓΕΒΡΑ

002
ΚΛΣ
ΣΤ2Β
1083

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

Ψηφιοποιήθηκε από το Ίνστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤ

89

ΣΧΒ

Σουμμεριόν, Νάξος.

ΑΛΓΕΒΡΑ



ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΑΛΤΕΡΑ



ΔΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗ ΚΥΒΕΡΝΗΣΙΣ

ΣΤ 89 ΣΧΒ
Σαυζαρίον, Νήγ. ρ.
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

(Συμπληρωθεῖσα διὰ τοῦ κεφαλαίου περὶ Παραγώγων κ.τ.λ.
ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Καθηγητοῦ Δ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΥ)

Δ' Ε' καὶ ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



ΕΛΛΑΣ



21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

002
ΚΛΣ
ΣΤ2Β
1083

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ
ὑπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.
(Πλὴν ἐπὶ πλὴν ἴσον σύν, πλὴν ἐπὶ σύν ἴσον πλὴν).
Διοφάντου Ἀριθμητικῶν Α'

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ
ΕΛΛΗΝΣΑΤΟ

Ο. Ε. Ν. Β.
αδξ. ἀριθ. εισαγ. 2205 - 1979

Τὸ παρὸν βιβλίον δεόν νά διαφυλαχθῇ καὶ
διὰ τὴν Ε' καὶ ΣΤ' τάξιν εἰς τὴν ὁποίαν ἐπίσης
δὰ χρησιμοποιηθῇ.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α' ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ * ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

§ 1. Ἡ ἙΑλγεβρα εἶναι κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστῆμης ὅπως καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ, ἀλλ' εἶναι γενικωτέρα αὐτῆς ἀσχολεῖται δὲ κατὰ τρόπον γενικὸν μὲ τὴν λύσιν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς γενικοὺς ἀριθμοὺς (τοὺς ὁποῖους χρησιμοποιεῖ ἐνίοτε καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ, καθὼς π. χ. διὰ τὴν παράστασιν ἑνὸς χρηματικοῦ κεφαλαίου K , τοῦ τόκου T κ.λ.π.).

§ 2. Εἰς τὴν ἙΑλγεβραν χρησιμοποιοῦνται κυρίως, ἐκτὸς τῶν ἀραβικῶν συμβόλων, $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ κ.τ.λ., γράμματα τοῦ ἀλφάβητου διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Λέγομεν π.χ. α δραχμαί, ἀντὶ νὰ εἰπωμεν εἰς ὠρισμένος ἀριθμὸς δραχμῶν. Ἡ τοιαύτη χρησιμοποίησις τῶν γραμμάτων εἶναι μὲν αὐθαίρετος, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ παραστήσωμεν ὠρισμένον ἀριθμὸν ἢ ὠρισμένην ποσότητα μὲ ἓν γράμμα, τὸ α π.χ. ἢ τὸ β ἢ τὸ γ κ.τ.λ., ἀλλὰ τὸ ὠρισμένον αὐτὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν τοῦ ζητήματος, παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν

* Ἡ λέξις ἙΑλγεβρα ὀφείλει τὴν προέλευσίν της εἰς τὸν τίτλον ἑνὸς ἀρχαιοτάτου ἀραβικοῦ μαθηματικοῦ βιβλίου « $AL - JEBR$ W'AL MUGABALAH ».

Ὡς πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἙΑλγέβρας διακρίνομεν κυρίως τρεῖς περιόδους.

Κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ἡ ὁποία καλεῖται ρητορική, ἐπικρατεῖ ἡ χρῆσις λέξεων καὶ τῆς ἀφηγήσεως, χωρὶς νὰ χρησιμοποιῶνται σύμβολα. Κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν συχνὴ μόνον ἐπαναληπτικὴ ἀφήγησις ἀσκεῖ τὸν ἀσχολούμενον μὲ τὸ μάθημα τῆς ἙΑλγέβρας. Εἰς τὸ κατώτατον αὐτὸ στάδιον τῆς ἀναπτύξεως τοῦ μαθήματος αὐτοῦ παρέμειναν καὶ αὐτοὶ οἱ Ἕλληνες μέχρι τοῦ 1ου αἰῶνος μ. Χ., ἐνῶ οἱ Ἀραβες, οἱ Ἀρχαῖοι Ἰταλοὶ καὶ Γερμανοὶ παρέμειναν μέχρι τοῦ 13ου αἰῶνος μ. Χ.

Ἡ δευτέρα περίοδος ἐξελιξέως τῆς ἙΑλγέβρας, ἡ ὁποία καλεῖται συγκεκομμένη, ἀρχίζει ἀφ' ὅτου μερικαὶ ἐκφράσεις ἤρχισαν νὰ παρουσιάζωνται συγκε-

ή την αυτήν ποσότητα. Κατὰ συνήθειαν, ή όποία έπεκράτησε, χρησιμοποιοϋνται τὰ πρῶτα μικρά γράμματα τοϋ (έλληνικοϋ ή ξένου) άλφαβήτου, τὰ α, β, γ, δ..., διὰ τήν παράστασιν γνωστών αριθμών ή ποσοτήτων, τὰ δέ τελευταία χ, ψ, ω, φ,... διὰ τήν παράστασιν άγνωστων ή ζητούμενων ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: άν α όκάδες έμπορεύματός τινος τιμώνται β δραχμάς, και ζητῶμεν τήν τιμήν γ όκάδων τοϋ αϋτοϋ έμπορεύματος, παριστάνομεν τόν ζητούμενον αριθμόν π.χ. με χ και θά έχωμεν, ότι $\chi = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma$ δραχ.

Ένίοτε χρησιμοποιοϋμεν εις τήν "Αλγεβραν διαδοχικά γράμματα διὰ τήν παράστασιν ίσαρίθμων όμοειδών αριθμών ή ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: άν ποσόν Α δραχμών μερισθῇ εις τέσσαρα πρόσωπα αναλόγως τεσσάρων διαφόρων αριθμών, π.χ. τών κ, λ, μ, ν και ζητῶνται τὰ μερίδια αϋτών, παριστάνομεν τὰ ζητούμενα μερίδια π.χ. με χ, ψ, z, ω και θά έχωμεν:

$$\chi = \frac{A \cdot \kappa}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad \psi = \frac{A \cdot \lambda}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad z = \frac{A \cdot \mu}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}, \quad \omega = \frac{A \cdot \nu}{\kappa + \lambda + \mu + \nu}.$$

Ένίοτε χρησιμοποιοϋμεν έν μόνον γράμμα με δείκτας μικρούς άκεραίους αριθμούς, 1, 2, 3,... (ή με ένα, δύο, τρεις τόνους).

κοιμέναι εις βιβλία. Πρῶτος έκπρόσωπος τῆς περιόδου αϋτῆς είναι ό "Έλλην μαθηματικός Διόφαντος τῆς 'Αλεξανδρείας τὸ δεύτερον ήμισυ τῆς τρίτης έκατονταετηρίδος μ.Χ., ό όποίος έχρησιμοποίησε σημαντικήν συντομίαν εις μαθηματικές έκφράσεις εις τὸ έργον του περι 'Αλγέβρας, θεωρείται δέ οϋτος και θεμελιωτής αϋτῆς.

Η τρίτη περίοδος τῆς 'Αλγέβρας χαρακτηρίζεται ώς **συμβολική**. Πρῶτοι οί άρχαίοι Αίγύπτιοι παρουσιάζονται χρησιμοποιοϋντες μερικούς συμβολισμούς εις τὰς μαθηματικές έκφράσεις, αί όποίαι παρελήφθησαν και έπεξετάθησαν βαθμηδόν υπό τών 'Ινδών.

Κατὰ τὰ μέσα τοϋ 15ου αιώνος μ.Χ. φαίνεται πλέον επικρατοϋσα ή συμβολική γραφή τῆς 'Αλγέβρας και τών Μαθηματικῶν έν γένει. Οϋτω τὸ 1494 χρησιμοποιοϋνται ώς σύμβολα υπό τοϋ 'Ιταλοϋ LUCA PACIOLI γράμματα τοϋ άλφαβήτου, τὰ όποία βραδύτερον άντικατεστάθησαν υπό τοϋ I. WIDMANN με τὰ + και -. Η γενικώτερα και εύρυτέρα όμως χρησιμοποιήσις τοϋ συμβολισμοϋ όφείλεται εις τόν Γάλλον F. VIÈTE (1591), ή όποία συνεπληρώθη κατὰ τήν έποχήν δύο διασήμων μαθηματικών, τοϋ Γερμανοϋ LEIBNITZ και τοϋ 'Αγγλου NEWTON. Οϋτοι συνετέλεσαν σπουδαίως όχι μόνον εις τήν μεγάλην προαγωγήν τών Μαθηματικῶν έν γένει, αλλά και εις τήν διεθνοποίησιν των, με τήν χρησιμοποίησιν συμβόλων διεθνούς μορφῆς.

διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Π.χ. ἂν τοκίσῃ τις τρία διάφορα ποσὰ μὲ ἀντίστοιχα διάφορα ἐπιτόκια καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ (ἀπὸ κεφάλαια καὶ τόκους) μετὰ π.χ. ἐν ἔτος, παριστάνομεν τὰ τοκιζόμενα κεφάλαια π.χ. μὲ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, τὰ ἐπιτόκια π.χ. διὰ τῶν τ_1, τ_2, τ_3 καὶ τὸ ζητούμενον ποσὸν διὰ τοῦ χ .

$$\text{Οὕτω θὰ ἔχωμεν } \chi = \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{\tau_1}{100}\right) + \alpha_2 \cdot \left(1 + \frac{\tau_2}{100}\right) + \alpha_3 \cdot \left(1 + \frac{\tau_3}{100}\right).$$

Εἰς τὴν Ἀλγεβραν χρησιμοποιοῦμεν τὰ γνωστὰ σύμβολα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ + (σύν) διὰ τὴν πρόσθεσιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων, τὸ - (πλὴν ἢ μείον) διὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸ $\times$ ἢ $\cdot$ (ἐπὶ) διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, τὸ : (διὰ ἢ πρὸς) διὰ τὴν διαίρεσιν, ἐπίσης τὸ $\sqrt{\quad}$ (ριζικόν) διὰ τὴν ἐξαγωγήν τῆς (τετραγωνικῆς) ρίζης κ.τ.λ. καθὼς καὶ ἄλλα σύμβολα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὰ ἐπόμενα.

Ὅταν ἐν ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν συμβόλων καὶ τῶν ἐκφράσεων τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας, τότε λέγομεν συνήθως, ὅτι τὸ ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν **γλῶσσαν τῆς Ἀλγέβρας** ἢ μὲ **ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν** ἢ καὶ ἀπλῶς ἐκτίθεται **ἀλγεβρικῶς**.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1. Ἄν 10 χιλιάδ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 100 δραχμαί, πόσον τιμῶνται 120 χιλιάδ. αὐτοῦ; Λύσατε τὸ πρόβλημα καὶ ἀκολουθῶς νὰ τὸ γενικεύσῃτε χρησιμοποιοῦντες γενικοὺς ἀριθμοὺς (γράμματα) καὶ νὰ λύσῃτε τὸ γενικευμένον πρόβλημα.

2. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 5, $\frac{3}{4}$, 13,5. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των; Γενικεύσατε τὸ πρόβλημα χρησιμοποιοῦντες γράμματα καὶ λύσατε αὐτό.

3. Γράψατε τρεῖς ἀριθμοὺς γενικοὺς καὶ εὑρετε τὰ διπλάσιά των, τὰ τριπλάσιά των, τὰ νιπλάσιά των.

4. Δίδεται εἰς ἀριθμὸς π.χ. ὁ α . Πῶς παριστάνονται τὰ $\frac{5}{8}$, τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ αὐτοῦ;

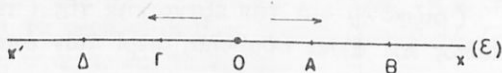
5. Σημειώσατε τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β , τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου ἀπὸ τὸν πρῶτον, τὸ γινόμενόν των, τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

6. Γράψατε μὲ τί ἰσοῦται τὸ κεφάλαιον K δρχ., τὸ ὁποῖον, τοκιζόμενον ἐπὶ X ἔτη πρὸς $E\%$, δίδει τόκον T καὶ εὑρετε πόσον εἶναι τὸ K , ὅταν, ἀντὶ τῶν X, E, T , θέσῃτε ὠρισμένους ἀριθμοὺς.

Β' ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ *

§ 3. Καθώς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, μέτρησις ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους λέγεται ἢ σύγκρισις αὐτοῦ μὲ ἄλλο ὁμοειδές του, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς μονὰς μετρήσεως. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους εἶναι ἀριθμὸς τις, ὁ ὁποῖος λέγομεν, ὅτι παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ μετρηθέντος ἢ αὐτὸ τὸ μετρηθέν.

*Ἐστω εὐθεῖα τις (ϵ) , ἐπὶ τῆς ὁποίας διακρίνομεν δύο φοράς (σχ. 1), μίαν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτῆς π.χ. Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Α, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **θετικὴν** φοράν καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Γ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἀρνητικὴν** φοράν.



Σχ. 1

Καλοῦμεν **θετικὸν** μὲν τμήμα τῆς (ϵ) πᾶν μέρος αὐτῆς, ἂν θεωρῇται διαγραφόμενον ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, **ἀρνητικὸν** δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν. Οὕτως, ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) διακρίνομεν τμήματα αὐτῆς θετικά ὡς τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ καὶ ἀρνητικά ὡς τὰ ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ. Τὰ μὲν θετικὰ τμήματα τῆς εὐθείας μετροῦμενα ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως (ἥτοι ὑπὸ ἑνὸς τμήματος θετικοῦ, τὸ ὁποῖον ὀρίζομεν αὐτοβούλως), ἔστω τοῦ ΟΑ, παριστῶνται ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποῖους καλοῦμεν **θετικούς**, τὰ δὲ ἀρνητικά ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποῖους καλοῦμεν **ἀρνητικούς**. Πρὸς παράστασιν τῶν τιμῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα διακρίνομεν εἰς θετικά καὶ ἀρνητικά, μεταχειριζόμεθα τοὺς καλουμένους θετικούς καὶ ἀρνητικούς ἀριθμούς, καὶ δεχόμεθα ὅτι :

Εἰς ἕκαστον θετικὸν ἀριθμὸν παριστάνοντα τὴν τιμὴν ποσοῦ ἢ μεγέθους τινὸς θετικοῦ, ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς παριστάνων τὴν τιμὴν ἀρνητικοῦ ποσοῦ ἢ μεγέθους ἀντιστοίχου τοῦ θετικοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως : Εἰς ἕκαστον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, παριστάνοντα ἀρνητικὸν ποσὸν ἢ μέγεθος, ἀντιστοιχεῖ εἰς θετικὸς, ἂν τὰ ποσὰ ἢ μέγεθῃ ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν.

* Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τῆς (Ἀλεξανδρείας) ἐχρησιμοποίησεν ἀρνητικούς ἀριθμούς.

Οἱ τοιοῦτοι ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται, ὅτι ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μὲν πλῆθος μονάδων, ἀλλ' ἕκαστος χαρακτηρίζεται ὡς **ἀντίθετος** τοῦ ἄλλου. Π.χ. ἔστω, ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δρχ. διδομεν τὸ γινώρισμα, ὅτι εἶναι κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχομεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δρχ., ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ 6 δρχ. κέρδος καὶ 6 δρχ. ζημία τοῦ ἀνθρώπου αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς **ἀντίθετοι ἀριθμοί**.

Ὅμοιόν τι συμβαίνει καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις. Π.χ. ἂν διανύσῃ τις ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ, ἀπὸ ἑν ὠρισμένον σημεῖον αὐτῆς ἑνα ἀριθμὸν μέτρων, π.χ. 200 μ., πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας (ἔστω πρὸς βορρᾶν) καὶ ἔπειτα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 200 μ. πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν (ἔστω πρὸς νότον) ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε προηγουμένως καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, 200 μ. πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν καὶ 200 μ. πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας, λέγονται **ἀντίθετοι ἀριθμοί**.

Γενικώτερον δεχόμεθα, ὅτι εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς (ἀκεραίων, κλασματικῶν, ἀσυμμέτρων), ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄλλος ἀντίθετος αὐτοῦ, καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς τὴν ἀντίθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, τοῦ μέχρι τοῦδε γνωστοῦ, τὸ σύμβολον + (σύν), πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου, τὸ σύμβολον - (πλήν). Τὸ σύμβολον + τιθέμενον πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ (ἀριστερά του) λέγεται **θετικὸν πρόσημον** (ἢ **σῆμα**), τὸ δὲ - **ἀρνητικὸν πρόσημον** (ἢ **σῆμα**). Οὕτως οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 6 μονάδας, γράφονται + 6 καὶ - 6, ἀπαγγέλλονται δὲ ὡς ἑξῆς: σύν ἕξ καὶ πλήν ἕξ. Συνήθως παραλείπεται τὸ + εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπομένως, ὅταν εἰς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δὲν ἔχη πρὸ αὐτοῦ σύμβολον, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὸ +.

Κατὰ ταῦτα, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ + 6 καὶ - 6 γράφονται καὶ οὕτως: 6 καὶ - 6. Ὅμοίως, ἀντίθετοι εἶναι οἱ ἀριθμοί:

23 καὶ - 23, οἱ $\frac{3}{5}$ καὶ $-\frac{3}{5}$, οἱ 6,15 καὶ - 6,15, οἱ - 5 καὶ 5, οἱ - 3,6 καὶ 3,6 κ.τ.λ.

Ἄν εἰς ἀριθμὸς παριστάνεται π.χ. μὲ α, ὁ ἀντίθετός του παριστάνεται μὲ - α.

§ 4. Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται **δμόσημοι**, αν έχουν το αυτό πρόσημον (είτε το + είναι είτε το -). Ούτως δμόσημοι λέγονται οί αριθμοί +3, +12, επίσης οί 5, 23, 5, 15, 17, 3, καθώς και οί -7, $-\frac{3}{4}$, $-2\frac{1}{2}$, -6.

Δύο αριθμοί λέγονται **έτερόσημοι**, εάν ο μὲν εἰς ἔχη πρόσημον + ή οὐδέν τοιοῦτον, ο δὲ ἄλλος τὸ -. Ούτως οί αριθμοί +8 και -3 λέγονται έτερόσημοι. Όμοίως έτερόσημοι λέγονται οί -15 και $+\frac{5}{9}$, οί 2,15 και $-6\frac{3}{4}$, οί 7 και -12.

Οί μὲν αριθμοί, οί όποιοί ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον + (ή οὐδέν τοιοῦτον) λέγονται **θετικοί αριθμοί**, οί δὲ ἔχοντες τὸ - λέγονται **άρνητικοί αριθμοί**, και ὑποτίθεται ότι, αν οί θετικοί παριστάνουν ποσά ή μεγέθη θετικά, οί άρνητικοί θά παριστάνουν άρνητικά τοιαῦτα, αν τὰ παριστῶμενα ποσά ἐπιδέχωνται αντίθεσιν. Οί θετικοί και άρνητικοί αριθμοί και τὸ 0 (μηδέν) λέγονται με έν όνομα **σχετικοί** (πρὸς διάκρισιν από τούς κατωτέρω καλομένους άπολύτους αριθμούς). Ὡστε :

Καλοῦμεν θετικὸν αριθμὸν οἰονδήποτε αριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς) διάφορον τοῦ μηδενός 0, ἔχοντα τὸ πρόσημον + ή οὐδέν τοιοῦτον. Καλοῦμεν άρνητικὸν αριθμὸν οἰονδήποτε αριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς), διάφορον τοῦ 0, τοῦ όποίου τὸ πρόσημον εἶναι τὸ -.

Όταν λέγωμεν, ἔστω αριθμὸς α, ο τοιοῦτος αριθμὸς δύναται νά εἶναι θετικὸς ή άρνητικὸς ή και μηδέν.

§ 5. Καλοῦμεν **άπόλυτον αριθμὸν** ή **άπόλυτον τιμὴν** ή και μέτρον ενός θετικοῦ μὲν αριθμοῦ ή τοῦ 0 αὐτὸν τὸν αριθμὸν, ενός άρνητικοῦ δὲ τὸν αντίθετόν του (θετικόν). Ούτως οί άπόλυτοι αριθμοί τῶν αριθμῶν +3, +5, $+\frac{1}{2}$, +0,45 εἶναι οί 3, 5, $\frac{1}{2}$, 0,45, τῶν δὲ -1, $-4\frac{3}{4}$, -8,5 εἶναι οί 1, $4\frac{3}{4}$, 8,5. τοῦ 0 άπόλυτος εἶναι τὸ 0. Τῶν σχετικῶν αριθμῶν -6, +2, -3,5, $-3\frac{1}{2}$ αντίστοιχοί άπόλυτοι εἶναι οί 6, 2, 3,5, $3\frac{1}{2}$.

Τὴν άπόλυτον τιμὴν ή τὸ μέτρον ενός αριθμοῦ π.χ., τοῦ -5, σημειώνομεν συμβολικῶς οὔτως : $|-5|$, ήτοι τὸ σύμβολον παρα-

στάσεως τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι δύο μικραὶ εὐθεΐαι $| \cdot |$, μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται ὁ ἀριθμός. Γράφομεν λοιπὸν $|-5| = 5$. Ὅμοιως ἔχομεν $|+6| = 6$, $|-7\frac{1}{2}| = 7\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἐν γένει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἀριθμοῦ α παριστάνομεν οὕτως: $|\alpha|$. Καὶ ἂν μὲν ὁ α εἴναι θετικὸς ἢ 0, τότε $|\alpha| = \alpha$, ἔαν δὲ εἶναι α ἀρνητικὸς τότε $|\alpha| = -\alpha$.

Οἱ ἀπόλυτοι καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ.τ.λ., λέγονται **φυσικοὶ ἀριθμοὶ**.

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **ἀπολύτως ἴσοι ἢ ἀπολύτως ἰσοδύναμοι**, ἂν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι, καθὼς π.χ. οἱ 5 καὶ -5, καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως:

$|5| = |-5|$. Ἐπίσης οἱ $3\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{13}{4}$ εἶναι ἀπολύτως ἰσοδύναμοι, διότι $|3\frac{1}{4}| = |-\frac{13}{4}|$. Ὡστε:

Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀπολύτως ἴσοι.

Τὸ σύμβολον τῆς μὴ ἰσότητος (καὶ τῆς μὴ ἰσοδυναμίας) δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ $\neq$ καὶ ἀπαγγέλλεται: **διάφορον**. Ἦτοι, ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α δὲν εἶναι ἴσος (οὔτε ἰσοδύναμος) πρὸς ἄλλον β , συμβολίζομεν αὐτὸ οὕτως: $\alpha \neq \beta$ καὶ ἀπαγγέλλομεν, α διάφορον τοῦ β .

Γενικῶς, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, π.χ. α καὶ β , εἶναι ἀπολύτως ἴσοι, γράφομεν $|\alpha| = |\beta|$.

§ 6. Ἰσοὶ ἢ ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους ἀπολύτους τιμὰς, καθὼς π.χ. οἱ 3 καὶ $\frac{6}{2}$, οἱ -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον, αἱ δ' ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι, π.χ. τῶν 3 καὶ $\frac{6}{2}$, καθὼς καὶ τῶν -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ τὸ σύμβολον $=$ (ἴσον) τιθέμενον μεταξὺ αὐτῶν, ἦτοι γράφομεν $3 = \frac{6}{2}$, ἐπίσης $-4 = -\frac{12}{3}$. Σημειωτέον, ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερωνύμους κλασματικούς ἀριθμούς εἰς ἀντιστοίχους ἰσοδυνάμους αὐτῶν ὁμωνύμους, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους τὰς ἀπολύτους των τιμὰς καὶ νὰ διατηρήσωμεν τὰ πρόσημα αὐτῶν. Οὕτω π.χ., ἀντὶ τῶν $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{8}$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἰσοδυνάμους των $\frac{4}{8}$, $-\frac{6}{8}$, $-\frac{1}{8}$.

' Α σ κ ή σ ε ι ς

7. Εύρετε ποσά επιδεχόμενα αντίθεσιν, και αριθμούς αντίθετους παριστάνοντας ταῦτα (ἐνεργητικὸν και παθητικὸν ἐπιχειρήσεως, κέρδος και ζημία, περίουσία και χρέος, μέλλων και παρελθὼν χρόνος κ.τ.λ.).

8. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν 5, 12, -3, -8, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{7}$, $-\frac{4}{9}$, 6, 15, 7, 45, 0, 12, -34, 85.

9. Γράψατε διαφόρους ὁμοσήμους ἀριθμούς και τρεῖς μὴ ὁμοσήμους. Γράψατε δύο ἀντιθέτους ἀριθμούς και τὰς ἀπολύτους τιμὰς των.

10. Ποῖαι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν 3, -13, -15, 28, -3, 5, 13 $\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{9}$, 17, 2, -42, 18, $-\frac{6}{9}$, $2\frac{1}{5}$. Συμβολίσατε αὐτάς.

11. Σημειώσατε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α, -α, -β, +β.

12. Εύρετε δύο ἴσους ἢ ἰσοδυνάμους πρὸς τὸν $-\frac{1}{2}$, τὸν $\frac{1}{5}$ τὸν 2, τὸν 6 και τὸν -3.

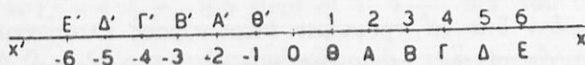
13. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 6, -2, 5, -6, 15, $-3\frac{1}{4}$. Εύρετε δι' ἕκαστον αὐτῶν ἓνα ἰσοδυναμὸν του.

14. Ἐπὶ τίνος εὐθείας λαμβάνομεν ἀπὸ τίνος σημείου αὐτῆς Ο τὰ θετικὰ τμήματα τῆς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ..., και παριστάνομεν αὐτὰ μετὰ τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς 1, 2, 3, 4, ..., ἂν τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα μετὰ τὸ ΟΑ. Πῶς θὰ παρασταθοῦν τὰ ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ', ..., ἴσα ἀπολύτως μὲν πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀλλ' ἔχοντα φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀντίθετον τῆς ΟΑ ;

15. Εύρετε τὰ μεγέθη ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὥς ἄνω εὐθείας, τὰ ὅποια θὰ παριστάνουν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0, 45, καθὼς και οἱ ἀντίθετοι τούτων.

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 7. Ἐστω εὐθεῖα τις $x'x$. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο, τὸ ὁποῖον ὀρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ



Σχ. 2

τὸ μηδὲν (0). Ὅρίζομεν ὥς θετικὴν μὲν φορὰν ἐπ' αὐτῆς π.χ. τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x , ὥς ἀρνητικὴν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x' .

Ἄν λάβωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΟΘ ὡς μονάδα μετρήσεως καὶ τὸ μήκος αὐτοῦ ἴσον πρὸς 1 μ. π.χ., τότε τὸ μὲν τμήμα ΟΘ θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $+1$, ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΘ (σχ. 2).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁδοιπὸρος διατρέχει δύο μέτρα ἐπὶ τῆς Οκ ἀπὸ τὸ Ο. Θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν μὲ τὸ τμήμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον ἔχει μήκος δύο μονάδων τῆς εὐθείας x'x. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν, ἂν καὶ ἄλλος ὁδοιπὸρος διατρέξῃ δύο μέτρα ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς Οκ' Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ'. Οὕτω προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν τοὺς σχετικούς ἀριθμούς μὲ τμήματα τῆς εὐθείας x'x, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν ἢ ἄξονα ἢ καὶ εὐθεῖαν τῶν τετμημένων**, τοῦ μήκους αὐτῶν μετρομένου ἀπὸ ὠρισμένου σημείου ταύτης, π.χ. ἀπὸ τοῦ Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχὴ ἢ ἀφετηρία ἐπὶ τοῦ ἄξονος**. Τὸ μήκος τμήματος παριστάνοντος ὠρισμένον ἀριθμὸν εἶναι ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς. Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π.χ. μετὰ δύο ἔτη ($+2$ ἔτη), λαμβάνομεν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ἐν τμήμα ΟΑ ἔχον μήκος δύο μονάδων καὶ τὸ τμήμα αὐτὸ ΟΑ λέγομεν ὅτι παριστάνει τὸ διάστημα $+2$ ἐτῶν. Ὁμοίως χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (-3 ἔτη) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΒ', τῆς εὐθείας, ἔχοντος (ἀπόλυτον) μήκος 3 μονάδων.

Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον εὐθείας, ἔστω τὸ Ο, καὶ διευθύνωνται ἐπ' αὐτῆς ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἰς μὲ ταχύτητα π.χ. 5 χλμ. πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν, ὁ δὲ πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν μὲ ταχύτητα 4 χιλμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος π.χ. ΟΔ, ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΓ', ἀντιθέτου φορᾶς τοῦ πρώτου καὶ ἔχοντος μήκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) ἴσον πρὸς 4 μονάδας μήκους.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμόμετρον κ.τ.λ.

Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς σχετικούς ἀριθμούς καὶ μὲ

σημεία τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἂν ὀρίσωμεν τὸ σημείον π.χ. Θ , ἄκρον τοῦ τμήματος αὐτῆς $O\Theta$ ἔχοντος μήκος $+1$, ὅτι παριστάνει τὴν $+1$, εὐρίσκομεν, ὅτι τὰ σημεία $A, B, \Gamma, \dots$ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $+2, +3, +4, \dots$ ἂν τὰ $A, B, \Gamma, \dots$ εἶναι τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων $OA, OB, OG, \dots$, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ $+2, +3, +4, \dots$

Ἐὰν ἐκ τοῦ O καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ O πρὸς x' , λάβωμεν ὁμοίως τὸ τμήμα $O\Theta'$ μὲ μήκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) μιᾶς μονάδος, τὸ Θ' παριστάνει τὸν -1 . Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὐρίσκομεν τὰ σημεία $A', B', \Gamma', \dots$ τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $-2, -3 -4, \dots$ (σχ. 2).

Ὁμοίως εὐρίσκομεν τὸ σημείον, τὸ ὅποιον παριστάνει ἓνα κλασματικὸν ἀριθμὸν, π.χ. τὸν $\frac{1}{2}$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν τμήμα αὐτῆς μὲ μήκος ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, π.χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν φορὰν Ox μὲν ἀπὸ τὸ O , ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικός, πρὸς τὴν Ox' δὲ ἂν εἶναι ἀρνητικός. Τὸ μέρος Ox τῆς εὐθείας $x'x$ λέγεται **θετικὸν μέρος** τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (ἢ ἡμιευθεῖα Ox) ἢ τοῦ ἄξονος ἢ τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεία, τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Τὸ Ox' τῆς εὐθείας $x'x$ λέγεται **ἀρνητικὸν μέρος** (ἢ ἡμιευθεῖα Ox') καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεία, τὰ ὅποια παριστάνουν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Ἡ φορὰ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x λέγεται θετική, ἡ δὲ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x' ἀρνητική, ἐκάστη δὲ σημειοῦται μὲ ἓν βέλος, παρακείμενον εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἡμιευθεῖαν καθὼς εἰς τὸ σχ 1.

2. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

§ 8. Δεχόμεθα ὅτι: Πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δύναται νὰ γίνη ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.

$$\text{Π.χ. } \delta 3 = 1 + 1 + 1. \quad \text{Ὁ } 2\frac{3}{5} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

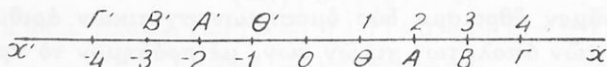
Καθ' ὅμοιον τρόπον δεχόμεθα ὅτι:

Πᾶς ἀρνητικός ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνη ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.

Οὕτω δεχόμεθα π.χ., ὅτι ὁ -3 γίνεται ἐκ τῆς -1 , ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φορές. Ὁ $-\frac{3}{5}$ π.χ. γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{5}$ τῆς -1 , ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φορές.

Ἐστω ἀρνητικὸς τις ἀριθμὸς, π.χ. ὁ -4 , ὅστις παριστάνει ἀρνητικὸν τι μέγεθος, π.χ. τὸ $ΟΓ'$ ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, μετρηθὲν ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς $ΟΘ$. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ $ΟΓ'$ ὑπὸ τῆς $ΟΘ$ παριστάνομεν μὲ $\frac{ΟΓ'}{ΟΘ} = -4$ (σχ. 3).

Ἀλλὰ τὸ $ΟΓ'$ γίνεται ἐκ τοῦ $ΟΘ'$ (δηλαδή ἐκ τοῦ $ΟΘ$ ἀφοῦ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $ΟΘ'$) καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς -4 ἐκ τῆς ἀρ-



σχ. 3

νητικῆς μονάδος -1 , διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς τέσσαρας φορές.

Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι :

Πᾶς ἀρνητικός ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνη ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῆς καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον.

Οὕτω δεχόμεθα, ὅτι ὁ -7 γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φορές ὡς προσθετέον. Ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρίς ὡς προσθετέον.

Ἀσκήσεις

16. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν -5 , -6 , -10 , -50 ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς ;

17. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{4}{9}$ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος ;

18. Πώς σχηματίζεται εκ τῆς θετικῆς μονάδος ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 0,4, 0,45, 0,385, 1,25 καὶ πῶς ἕκαστος τῶν ἀντιστοιχῶν ἀντιθέτων αὐτῶν ;

Γ'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΧΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

§ 9. "Εστω, ὅτι εἷς ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησίν του ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας 15 000 δρχ. καὶ ἄλλην ἡμέραν ἐκέρδισεν 40 000 δρχ.

Προφανῶς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 55 000 δρχ. "Αν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἦτοι με $+ 15\,000$ δρχ. καὶ $+ 40\,000$ δρχ., θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα αὐτῶν τὸ $(15\,000 + 40\,000)$ δρχ. $= 55\,000$ δρχ. "Αν ἔχωμεν δύο ἄλλους ὁμοσήμους ἀριθμοὺς π.χ. $- 35$ καὶ $- 15$, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων τὸν ἀριθμὸν $-(35 + 15)$, ἦτοι τὸν $- 50$.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἐξῆς ὀρισμὸν :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των, με πρόσημον τὸ πρόσημον τῶν ἀριθμῶν.

"Εστω, ὅτι ἔμπορος μίαν ἡμέραν ἐζημιώθη ἀπὸ μίαν πώλησιν 50 000 δρχ. καὶ ἐντὸς τῆς αὐτῆς ἡμέρας ἐκέρδισεν ἀπὸ μίαν ἄλλην πώλησιν 15 000 δρχ. Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς πωλήσεις ὁ ἔμπορος ἐζημιώθη $(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. "Ητοι ἐζημιώθη 35 000 δρχ. "Αν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἦτοι με $- 50\,000$ δρχ. τὴν ζημίαν καὶ με $+ 15\,000$ δρχ. τὸ κέρδος, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμά των τὸν ἀριθμὸν $-(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. $= - 35\,000$ δρχ. Ὁμοίως θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. $+ 40$ καὶ $- 30$ εἶναι ὁ $(+ 40 - 30) = + 10$. "Ητοι :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὴν διαφορὰν (τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν) τῶν ἀπολύτων τιμῶν, με πρόσημον τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν.

"Αν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίθετοι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ μηδέν.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $- 40$ καὶ $+ 40$ εἶναι τὸ 0.

"Εστω, ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς π.χ. $+ 24$ καὶ 0. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ 0 εἶναι 0, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα $+ 24 + 0 = + 24$.

τό $-6 + 0 = -6$, τὸ ἄθροισμα τῶν 0 καὶ -25 ἰσοῦται μέ -25 κ.τ.λ.
 "Ἦτοι :

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μηδέν, ἰσοῦται μέ τὸν ἄλλον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις, μέ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν, λέγεται **πρόσθεσις**, συμβολίζεται δὲ ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν μέ τὸ $+$ (σὺν ἢ καὶ) τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται **προσθετέοι**.

Διὰ τὰ ἀποφεύγεται ἡ σύγχυσις μεταξὺ τοῦ συμβόλου $+$ τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ προδήμου $+$ ἢ $-$ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, συνήθως τίθεται ὁ ἀριθμὸς μέ τὸ πρόσημόν του ἐν παρενθέσει, οὕτω δὲ ἐμφανίζεται ἕκαστος ἀριθμὸς μέ τὸ πρόσημόν του ὡς ἐν ὅλον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$\begin{aligned} (+5) + (+3) &= (+8) = +8 = 8, & (-6) + (+10) &= (+4) = +4 = 4, \\ & & (-8) + 0 &= (-8) = -8, \\ (+8) + (-9) &= (-1) = -1, & (+7) + 0 &= (+7) = +7 = 7, \\ & & 0 + (-9) &= (-9) = -9. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι, ἂν α καὶ β παριστάνουν δύο σχετικούς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Διότι εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς οὐδεὶς περιορισμὸς τίθεται ποῖος ἐκ τῶν δύο προσθετέων θὰ τεθῇ πρῶτος, τὸ δὲ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά τῶν ἀπολύτων τιμῶν των δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σειρὰν ἢ ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα, τὸ νὰ προστεθῇ ἀριθμὸς π.χ. β εἰς τὸν α , δηλαδή νὰ εὐρεθῇ τὸ $\alpha + \beta$, εἶναι τὸ αὐτὸ μέ τὸ νὰ προστεθῇ ὁ α εἰς τὸν β , ἦτοι μέ τὸ νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\beta + \alpha$.

10. Δοθέντων περισσοτέρων τῶν δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κ.τ.λ. καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων καὶ παριστάνομεν μέ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὐρίσκομεν, ἂν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β , εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν γ , εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν δ κ.τ.λ.

Σημειώνομεν μέ $(\alpha + \beta)$ τὸ εὐρισκόμενον ἄθροισμα τῶν α καὶ β , ἦτοι θέτομεν $\alpha + \beta = (\alpha + \beta)$.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Παριστάνομεν μέ $(\alpha + \beta + \gamma)$ τὸ εὐρισκόμενον ἄθροισμα τῶν

α, β, γ ἤτοι θέτομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma)$ ἢ καὶ

$(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$ καὶ ἔχομεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta) + \gamma + \delta = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma)$.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \beta + \gamma) + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon).$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν καὶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ κ.τ.λ.

Π. χ.

$$(-3) + (+5) = +2 = 2,$$

$$(-3) + (+5) + (+7) = (+2) + (+7) = +9 = 9,$$

$$\text{ἄρα καὶ } (-3) + (5) + (+7) + (+1) = (+9) + (+1) = 10.$$

Παρατήρησις. Ὅταν οἱ διὰ τὴν πρόσθεσιν ὀριζόμενοι ἀριθμοὶ δὲν δίδονται μὲ γράμματα, διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἄθροισμάτων, δεχόμεθα πρὸς εὐκολίαν νὰ γράψωμεν αὐτοὺς κατὰ σειρὰν τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μὲ τὸ πρόσημόν του, παραλείποντες τὸ σύμβολον τῆς προσθέσεως. Οὕτω π.χ., ἀντὶ νὰ ἔχωμεν τὸ $(+4) + (+7) + (-6) + (-7) + (+1)$.

γράφομεν τὸ $+4 + 7 - 6 - 7 + 1$ καὶ εὐρίσκομεν

$$+4 + 7 - 6 - 7 + 1 = 11 - 6 - 7 + 1 = +5 - 7 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

Ὅμοίως, ἀντὶ π.χ. τοῦ $(-4) + \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) + (-2)$, γρά-

$$\begin{aligned} \text{φομεν } -4 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - 2 \text{ καὶ εὐρίσκομεν } -4 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - 2 = \\ -3\frac{1}{3} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{10}{3} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{30}{9} - \frac{4}{9} - 2 = -\frac{34}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{52}{9} = -5\frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμας πρώτη. 19. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

$$\alpha') 5 + (+3)$$

$$\beta') (+7) + (+1,4)$$

$$\gamma') (+4) + (+6) + (+8)$$

$$\delta') \frac{4}{9} + \left(+\frac{2}{3}\right) \quad \varepsilon') \left(+7\frac{1}{3}\right) + \left(+3\frac{1}{5}\right) \quad \sigma\tau') (+3) + \left(+4\frac{1}{2}\right) + \left(+8\frac{1}{4}\right)$$

$$\zeta') (-4) + (-6) \quad \eta') (-10) + \left(-8\frac{1}{2}\right) \quad \theta') (-4) + \left(-3\frac{1}{2}\right) + \left(-7\frac{1}{3}\right)$$

$$\iota') \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) \quad \iota\alpha') (-4,5) + (-5,3) \quad \iota\beta') (-4) + (-5) + (+8) + \left(-3\frac{1}{2}\right)$$

‘Ο μ α ς δ ε υ τ έ ρ α . 20. Νά εύρεθοῦν τὰ εξαγόμενα :

$$\begin{aligned} \alpha') -5+3 & \quad \beta') +5-8-7+3 & \gamma') -3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}-2\frac{1}{5} \\ \delta') -3-5+6-7-8 & \quad \epsilon') -3+5\frac{1}{2}-3+4-7 & \sigma\tau') +4-8-6+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9 \\ \zeta') -3,5+7,4-8,5+6\frac{1}{2}-\frac{3}{4} & \quad \eta') -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0,25+3,7. \end{aligned}$$

‘Ο μ α ς τ ρ ί τ η . 21. Κερδίζει τις 234 000 δρχ., έπειτα χάνει 216 400 δρχ. Κερδίζει πάλιν 215 700 δρχ. και χάνει εκ νέου 112 000 δρχ. Γράψατε τους δοθέντας αριθμούς άλγεβρικώς και εύρετε αν εκέρδισεν ή έχασε τελικώς και πόσον.

22. Έμπορος αύξάνει τὸ ενεργητικόν του κατά 128 000 δρχ., τὸ δὲ παθητικόν κατά 312 400 δρχ. Γράψατε τους δοθέντας αριθμούς άλγεβρικώς και εύρετε ποίαν μεταβολήν παθαίνει τὸ κεφάλαιόν του.

23. Σώμα θερμανθὲν από 0° έλαβε θερμοκρασίαν 17,6°. Έπειτα έψύχθη κατά 19,1° και τέλος έθερμάνθη κατά 3,1°. Γράψατε τους δοθέντας αριθμούς άλγεβρικώς και εύρετε αν ηύξηθη ή ήλαττώθη τελικώς ή άρχική του θερμοκρασία και πόσον.

24. Έμπορος έχει εις τὸ ταμείον του 250 000 δρχ. ‘Οφείλει μὲν εις διαφόρους 174 500 δρχ., 136 000 δρχ., και 19 450 δρχ., τοῦ όφείλουν δὲ 34 000 δρχ., και 14 500 δρχ. και 29 000 δρχ. Γράψατε τους δοθέντας αριθμούς άλγεβρικώς και εύρετε τὸ άθροισμά των. Τί ποσόν θά τοῦ μείνι, αν εισπράξη και πληρώση τὰ όφειλόμενα;

25. Έμπορος είχεν 180 000 δρχ. και επλήρωσεν 120 000 δρχ., εισέπραξεν 74 000 δρχ., επλήρωσε 14 800 δρχ. και εισέπραξε 39 400 δρχ. Γράψατε τους δοθέντας αριθμούς άλγεβρικώς και εύρετε τὸ άθροισμά των. Τί ποσόν τοῦ έμεινεν ή πόσην ζημίαν έχει;

26. Κινητόν άνεχώρησεν από έν σημείον Ο ώρισμένης εύθείας και διήνυσεν επ’ αὐτῆς διάστημα +58,4 μ., έπειτα από τήν θέσιν αὐτήν -19,3 μ. επί τῆς εύθείας, απ’ εκεί +23,7 μ. και πάλιν από τήν τελευταίαν θέσιν -95,8 μ. πάντοτε επί τῆς εύθείας. Ποία είναι ή απόστασις τῆς τελευταίας θέσεώς του από τὸ Ο;

Ι. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 11. Τὸ άθροισμα σχετικῶν αριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, αν άλλαχθῇ ή θέσις τῶν προσθετέων.

Έστω τὸ άθροισμα τῶν σχετικῶν αριθμῶν α, β, γ, δ, Έχομεν : $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$. ‘Αλλ’ είναι $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, άρα και $(\alpha+\beta)=(\beta+\alpha)=\beta+\alpha$. Έπομένως $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=(\beta+\alpha)+\gamma+\delta=(\beta+\alpha+\gamma)+\delta=\beta+\alpha+\gamma+\delta$.

‘Ομοίως έχομεν :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\beta + \alpha + \gamma) + \delta = \delta + (\beta + \alpha + \gamma) = \delta + \beta + \gamma + \alpha.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Εἰς τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τινὰς ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι, ἂν θέλωμεν π.χ. νὰ ἔχωμεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = (\alpha + \gamma + \epsilon) + \beta + \delta$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \gamma + \epsilon + \beta + \delta = (\alpha + \gamma + \epsilon) + \beta + \delta. \text{ Ὡστε :}$$

**Τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὰς αὐτὰς ιδιότη-
τας μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἥτοι ἰσχύει
ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῶν θέσεων τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀν-
τικαταστάσεως μερικῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των.**

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ἐπίσης ὅτι :

**Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο μὴ ὁμοσή-
μους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἔχον-
τας τὸ πρόσημον +, χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —, οὕτω δὲ προ-
κύπτουν δύο ἑτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς
ἀνωτέρω καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα
τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.**

Κατὰ ταῦτα, διὰ τὸ ἄθροισμα π.χ.

$$-3 + (-5) + (+2) + (+3) + (-7) + (+6)$$

ἢ διὰ τὸ ἴσον τοῦ $-3-5+2+3-7+6$ ἔχομεν :

$$-3-5-7 = -15, \quad +2+3+6 = 11 \quad \text{καὶ τέλος} \quad -15+11 = -4,$$

ἥτοι :

$$-3-5+2+3-7+6 = -4$$

$$\text{ἢ } (-3) + (-5) + (+2) + (+3) + (-7) + (+6) = (-4) = -4.$$

Ὅμοίως διὰ τὸ ἄθροισμα π.χ.

$$(+4) + (-5) + 0 + \left(-\frac{4}{5}\right) + (+6)$$

ἢ διὰ τὸ ἴσον τοῦ $4-5+0-\frac{4}{5}+6$ ἔχομεν :

$$4-5+0-\frac{4}{5}+6 = 4+0+6-5-\frac{4}{5} = 10-5-\frac{4}{5} = 4-\frac{4}{5}.$$

Ὅμοίως ἔχομεν π.χ.

$$-6+4+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+2 = 4+\frac{1}{7}+2-\frac{1}{5}-6 = \frac{43}{7}-\frac{31}{5} = \frac{215}{35}-\frac{217}{35} = -\frac{2}{35}.$$

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως αὐτῆς δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γρά-

φωμεν χωριστὰ ὅλους τοὺς ἐνδιαμέσους θετικούς καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικούς προσθετοὺς, ἀλλὰ σχηματίζομεν κατ' εὐθείαν τὰ μερικά ἄθροισματα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν καὶ ἀκολουθῶς τὸ τελικὸν ἄθροισμα τούτων π. χ. $+3+0-1-2+1-6+4=8-9=-1$,

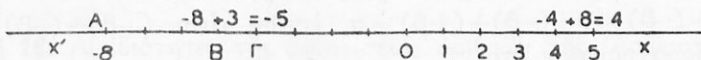
$$2-1+6-\frac{1}{3}+5-\frac{1}{4}-2=13-3\frac{7}{12}=9\frac{5}{12}.$$

Ἐπίσης (ἂν εὐκολυνώμεθα) εὐρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, προσθέτοντες εἰς τὸν πρῶτον προσθετέον τὸν δεύτερον, εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸν τρίτον κ.τ.λ. καὶ γράφομεν τὸ τελικὸν ἄθροισμα χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰ ἐνδιάμεσα (μερικά ἐξαγόμενα).

Π.χ. διὰ τὸ $3-5+6-7+2-1$ λέγομεν $+3-5$ ἴσον -2 (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν), ἀκολουθῶς λέγομεν $-2+6$ ἴσον $+4$ (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν) καὶ ἐν συνεχείᾳ λέγομεν $+4-7$ ἴσον -3 · ἀκολουθῶς λέγομεν $-3+2$ ἴσον -1 , ἀκολουθῶς $-1-1$ ἴσον -2 . Ἄρα, λέγομεν, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι -2 .

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 12. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἔστω Α, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -8 ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτως εὐρισκόμενον σημεῖον, ἔστω Β, παριστάνει τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)=-5$ (σχ. 4).



Σχ. 4

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει π.χ. τὸ ἄθροισμα $-4+(+8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4 , ἔστω τὸ Γ, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους, ὅτε εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, ἔστω Δ, παριστάνον τὸ $-4+8=+4$.

" Α σ κ η σ ι ς

27. Εὑρετε τὰ κατωτέρω ἐξαγόμενα κατὰ τὸν συντομότερον τρόπον καὶ ἀπεικονίσате αὐτά :

$$\alpha') -3 + 5 - 8 - 7 - 11 - 15 + 6 + 0 - 3 \quad \beta') 16 - 53 + 47 - 5 - 6 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 11$$

$$\gamma') -\frac{4}{5} + \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - 5 - 7 - 2 + 1 - 13 \quad \delta') -13,5 + 17,18 - 5,6 - 7,8 - 15$$

$$\epsilon') -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 5\frac{1}{4} - 25,4 - 2.$$

2. Α Φ Α Ι Ρ Ε Σ Ι Σ

§ 13. Ἐστωσαν π.χ. δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ $+7$ καὶ -5 . Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $(+7) + (+5)$, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν $(+7)$ προσθέσωμεν τὸν $(+5)$, ἀντίθετον τοῦ (-5) . Ἄν εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $(+7) + (+5)$ προσθέσωμεν τὸν δευτέρον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, τὸν -5 , θὰ εὕρωμεν

$$(+7) + (+5) + (-5) = (+7)$$

ἥτοι τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐκ τῶν δοθέντων. Ἐν γένει :

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ὑπάρχει εἰς τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν ἓνα τῶν δοθέντων, δίδει τὸν ἄλλον.

Πράγματι, ἂν α , β εἶναι δύο δοθέντες σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν β π.χ. νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α , σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ δευτέρου β , τὸν $-\beta$. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς $\alpha + (-\beta)$ εἶναι ὁ ζητούμενος. Διότι, ἂν αὐτὸς προστεθῇ εἰς τὸν β , θὰ ἔχωμεν $\beta + \alpha + (-\beta) = \alpha + (-\beta) + (+\beta) = \alpha$, ἐπειδὴ εἶναι $(+\beta) + (-\beta) = 0$.

Παρατηρητέον ὅτι :

Δοθέντος οἰουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ὑπάρχει εἰς καὶ μόνον ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν δοθέντα, δίδει ἄθροισμα τὸν ἴδιον. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ 0.

Πράγματι, ἔχομεν π.χ. $\alpha + 0 = \alpha$, $\beta + 0 = \beta$ κ.τ.λ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι :

Τὸ μηδὲν εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς οἰονδήποτε ἄλλον, δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.

§ 14. Καλοῦμεν διαφοράν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α , τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν β , δίδει ἄθροισμα τὸν α .

Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, εἶναι ὁ $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$.

Ὡστε ἡ διαφορά τοῦ β ἀπὸ τὸν α εἶναι $\alpha - \beta$. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ διαφορά α μείον β εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν α προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ β .

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὴν διαφοράν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α , καλεῖται **ἀφαίρεσις**· ὁ α καλεῖται **μειωτέος**, ὁ β **ἀφαιρετέος**, τὸ δὲ σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ $-$ (πλήν), τιθέμενον μεταξὺ τοῦ α καὶ β , ἥτοι γράφομεν $\alpha - \beta$

Παραδείγματα : $(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = (+3) = 3$,
 $(-5) - (-6) = (-5) + (+6) = 1$, $(-3) - 0 = (-3) + 0 = (-3) = -3$.
 $(-\frac{2}{3}) - (+\frac{1}{6}) = (-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{6}) = (-\frac{4}{6}) + (-\frac{1}{6}) = (-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{6}$
 $0 - (-7) = 0 + (+7) = (+7) = +7 = 7$, $0 - (+5) = 0 + (-5) = (-5) = -5$.

§ 15. **Παρατήρησις.** Ἡ διαφορά ἀριθμοῦ τινος π.χ. α ἀπὸ τὸ 0 ἰσοῦται μὲ $0 - \alpha = -\alpha$, ἥτοι μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ α . Ἄρα :

Ἐνῶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διαφύρου τοῦ 0. π.χ. τοῦ 3 ἀπὸ τὸ 0, εἶναι ἀδύνατος, μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη καὶ πᾶσα ὁμοία εἶναι δυνατή.

Π.χ. $0 - (+3) = 0 + (-3) = -3$, $0 - (+1) = 0 + (-1) = -1$,
 $0 - 4 = -4$, $0 - (+3,25) = 0 + (-3,25) = -3,25$.

§ 16. Αἱ ιδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμας πρώτη. 28. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ διαφοραὶ :

α') $8 - (-4)$ β') $-18 - (+19)$ γ') $-14 - (-7)$ δ') $0,9 - (-9,13)$

$$\epsilon') 2,25 - (-1,65) \quad \sigma\tau') 2 \frac{5}{6} - \left(-3 \frac{1}{3}\right) \quad \zeta') 9 \frac{1}{7} - \left(-7 \frac{1}{3}\right)$$

$\eta')$ Δείξτε, ότι είναι $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$.

Όμως δευτέρα. 29. Εύρετε τὰ εξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$\alpha') 120 + 19 - (-18) \quad \beta') -17 - (-4) + (+8) \quad \gamma') -5 \frac{1}{2} + \left(-6 \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$\delta')$ Δείξτε, ότι είναι $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$.

30. Εύρετε τὰ εξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$\alpha') 2 - 7 \quad \beta') 8 - 10 \quad \gamma') 1,5 - 2,2 \quad \delta') 15 - 230 \quad \epsilon') 1,25 - 9,65$$

$\sigma\tau')$ Δείξτε, ότι είναι $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$.

Όμως τρίτη. 31. Αύξάνει τις τὸ ἐνεργητικὸν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικὸν του κατὰ 1 564,20 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

32. Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικὸν του κατὰ 15 484,3 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικὸν του κατὰ 162 384,70 δρχ. Ποίαν μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

33. Ἀναχωρεῖ τις ἔκ τινος ὠρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ 238 μέτρα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α 4 846 μέτρα :

34. Χάνει τις 15 016,3 δρχ. Πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 8 958 ,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὧν εἶχεν ἀρχικῶς ;

Ι. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

§ 17. Ἐστω τὸ $(+5) - (+3) - (-4)$. Διὰ νὰ εὐρωμεν αὐτὸ ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ $(+5)$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(+3)$, ὅτε εὐρίσκομεν $(+2)$. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο $(+2)$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ (-4) καὶ εὐρίσκομεν $(+2) - (-4) = (+2) + (+4) = +6$.

Ἡ ἀνωτέρω ἐκφρασις καὶ ἄλλαι παρόμοιαι λέγονται **ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα**. Ἦτοι :

Ἄλγεβρικὸν ἀθροῖσμα λέγεται μία ἀκολουθία προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται ἐπὶ σχετικῶν ἀριθμῶν.

§ 18. Ἐστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἀθροῖσμα $\alpha - (+\beta) + (-\gamma) - (-\delta)$ Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta)$

Διότι

$$\begin{aligned} &\text{Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ} \\ &\alpha - (+\beta) + (-\gamma) - (-\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ} \\ &\alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta) \end{aligned}$$

1) 'Από τὸ α θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(+ \beta)$.

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὗρεθῇ, θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\gamma)$.

3) 'Απὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(-\delta)$

1) Εἰς τὸ α θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\beta)$ · ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ α τὸ $(+ \beta)$ (κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ἀφαιρέσεως).

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὗρεθῇ θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\gamma)$.

3) Εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ προσθέσωμεν τὸ $(+\delta)$ · ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ $(-\delta)$.

Ἐπομένως εἶναι: $\alpha - (+\beta) + (-\gamma) - (-\delta) = \alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta)$.

Ἦτοι, ἐν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον τοῦ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀντιστρόφως. Π.χ.

$$\alpha + (-\beta) + (+\gamma) + (-\delta) = \alpha - (+\beta) + (+\gamma) - (+\delta).$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι:

Ὅταν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀριθμὸς τις ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ $+$ τότε ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς προστίθεται, ἐνῶ ὅταν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ $-$ τότε ἡ ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἢ προστίθεται ὁ ἀντίθετός του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι, ἂν α εἶναι ἀριθμὸς τις (διάφορος τοῦ 0), τὸ $+ \alpha$ παριστάνει τὸν α, ἐνῶ τὸ $- \alpha$ παριστάνει τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Οὕτως ἔχομεν: $+(+5) = +5$.

$$- (+7) = -7, \quad + (-3) = -3, \quad - (-6) = 6.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐκ τῶν $+$ καὶ $-$, δύναται νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ἓν μόνον, τὸ $+$ μὲν, ἂν τὰ δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἶναι τὰ αὐτά, μὲ τὸ $-$ δέ, ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα δὲν εἶναι τὰ αὐτά.

Ἦτοι: 1) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $++$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

2) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $--$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

3) Ἄν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $+-$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$, καὶ

4) "Αν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $- +$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$.

Οὕτως ἔχομεν $(+3)-(-6)+(-8)-(+7)-(-1)=$

$$(+3)+(+6)+(-8)+(-7)+(+1)=3+6-8-7+1=10-15=-5$$

§ 19. Καλοῦμεν ὄρους ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὅποιοι τὸ ἀποτελοῦν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει τὸ πρόσημόν του $+$ ἢ $-$.

Οὕτως εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\epsilon$ οἱ ὅροι του εἶναι $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, -\epsilon$. Κατὰ ταῦτα.

Πᾶν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων του.

Π.χ. τὸ $(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $(+5), -(-4), \left(+\frac{2}{5}\right), -(-8)$, ἥτοι τῶν $+5, +4, +\frac{2}{5}, +8$, καὶ ἔχομεν $(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)=5+4+\frac{2}{5}+8=17+\frac{2}{5}=17\frac{2}{5}$.

Συμφώνως μὲ τὰς ιδιότητες διὰ τοὺς προσθετέους μιᾶς προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, ἔχομεν ὅτι :

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ὄρων του. Π.χ. εἶναι $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\epsilon-\eta=\epsilon-\beta+\gamma-\eta+\alpha-\delta$.

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ὄρους του μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως, δυνάμεθα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἓνα ὄρον μὲ τὸ ἄθροισμα ἄλλων, τῶν ὁποίων αὐτὸς εἶναι ἄθροισμα.

"Ἡτοι :

Ἰσχύει καὶ δι' ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως προσθετέων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Π.χ. $-(-5)+(-7)-(+4)=5-7-4=(5-7)-4=-2-4=-6$,
 $10-(+7)+(-3)=(7+3)-(+7)+(-3)=7+3-7-3=10-10=0$.

Ἀφοῦ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον του ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς σχετικὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν σχετικὸν ἀριθμόν τοὺς ὄρους τοῦ ἀθροίσματος, ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\Pi. \chi. \alpha + (\beta - \gamma + \delta - \epsilon) = \alpha + \beta - \gamma + \delta - \epsilon.$$

Διὰ τὰ προσθέσωμεν δοθέντα ἀλγεβρικά ἄθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἐν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μὲ ὅρους τοὺς τῶν δοθέντων ἄθροισμάτων καὶ ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει.

$$\Pi. \chi. (\alpha + \beta - \gamma + \delta) + (-\epsilon + \zeta - \eta) = \alpha + \beta - \gamma + \delta - \epsilon + \zeta - \eta.$$

§ 20. Ὄταν εἰς δοθὲν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων του, προκύπτει ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀντίθετον τοῦ δοθέντος (ἦτοι τὸ ἐξαγόμενόν του θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀντίθετος τοῦ ἐξαγομένου ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ δοθέντος ἄθροίσματος).

Διότι, διὰ τὰ εὗρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἄθροίσματος, θὰ εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του, ἔστω δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Α. Ἐπειτα θὰ εὗρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ὅρων του, καὶ ἔστω ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Β. Ἄν μὲν εἶναι Α μεγαλύτερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(A - B)$. Ἄν δὲ εἶναι τὸ Α μικρότερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $-(B - A)$.

Ἄν εἶναι $A = B$, τότε τὸ δοθὲν ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ 0.

Ὄταν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα ἐκάστου ὅρου τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἄθροίσματος, οἱ θετικοὶ ὅροι θὰ γίνουν ἀρνητικοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ θὰ γίνουν θετικοί. Εἰς τὸ νέον αὐτο ἄθροισμα, τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του θὰ ἔχη ἀπόλυτον τιμὴν Β, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν ὅρων αὐτοῦ θὰ ἔχη ἀπόλυτον τιμὴν Α.

Ἄν λοιπὸν εἶναι ὁ Α μεγαλύτερος τοῦ Β, τὸ ἐξαγόμενον (τοῦ νέου ἄθροίσματος) θὰ ἰσοῦται μὲ $-(A - B)$, ἂν δὲ τὸ Α εἶναι μικρότερον τοῦ Β, τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(B - A)$, ἂν δὲ εἶναι $A = B$, τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 0.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δι' ἀλλαγῆς τοῦ προσήμου τῶν ὅρων προκύπτωντος ἄθροίσματος εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἐξαγομένου τοῦ δοθέντος ἄθροίσματος, ὅταν δὲ $A = B$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 0, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίθετον τὸ 0.

§ 21. Διὰ τὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ σχετικὸν ἀριθμὸν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοὺς

δρους τοῦ ἄθροίσματος καὶ καθένα μὲ ἡλλαγμένον τὸ πρόσημον.

Π.χ. ἔχομεν $-(\alpha - (\beta - \gamma + \delta)) = -\alpha + \beta + \gamma - \delta$.

Διότι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως) ἀρκεῖ νὰ προσθῶμεν εἰς τὸ $-\alpha$ τὸ ἀντίθετον τοῦ $\beta - \gamma + \delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν, τὸ $-\beta + \gamma - \delta$.

§ 22. Ἐνίοτε παραλείπομεν παρένθεσιν, ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἄθροισμα ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς ὑπάρχη τὸ $+$, γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος ἕκαστον μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σῆμα, ἂν δὲ πρὸ αὐτῆς ὑπάρχη τὸ $-$, τότε γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἄθροίσματος, ἀλλ' ἕκαστον μὲ ἀντίθετον τοῦ πρὸ αὐτοῦ προσήμου. Π.χ. ἔχομεν :

$$\begin{aligned} + (3 - 5 + 6 - 7) &= 3 - 5 + 6 - 7, & (-\alpha - \beta + \gamma - \delta) &= -\alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ -(3 - 5 + 6 - 7) &= -3 + 5 - 6 + 7, & -(-\alpha - \beta + \gamma - \delta) &= \alpha + \beta - \gamma + \delta. \end{aligned}$$

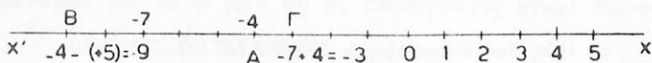
Ἀντιστόφως. Ἐνίοτε εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκυλῶν []), καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς θέσωμεν τὸ $+$, ἕκαστος ὅρος ἐντὸς αὐτῆς θὰ ἔχη τὸ πρόσημον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, ἂν δὲ θέσωμεν πρὸ αὐτῆς τὸ $-$, ἕκαστος τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὁρων θὰ ἔχη τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ δοθὲν ἄθροισμα.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. ἔχομεν } -3 + 5 - 7 - 8 + 15 - 6 &= -3 + 5 - 7 + (-8 + 15 - 6) \\ -3 + 5 - 7 - 8 + 15 - 6 &= -3 + 5 - 7 - (8 - 15 + 6) \\ \alpha + \beta - \gamma + \delta - \epsilon &= \alpha + \beta + (-\gamma + \delta - \epsilon). \\ \alpha + \beta - \gamma + \delta - \epsilon &= \alpha + \beta - (\gamma - \delta + \epsilon). \end{aligned}$$

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ἢ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 23. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς :
Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $-4 - (+5) = -4 - 5 = -9$.
Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4 , ἔστω τὸ Α, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν καὶ προχωροῦμεν ἐπ' αὐτῆς ἀριστερά αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας, ὅτε εὐρίσκομεν, ἔστω τὸ σημεῖον Β,

τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν διαφοράν $-4 - (+5) = -9$ (σχ. 5). Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφοράν π.χ. $-7 - (-4) = -7 + 4 = -3$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου, ἔστω Δ, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -7 κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιά αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ εὐρίσκομεν σημεῖον, ἔστω Γ, παριστάνον τὴν διαφοράν -3 .



Σχ. 5

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις

35. Εὑρετε τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα καὶ παραστήσατε αὐτὰ γεωμετρικῶς.

$$\alpha') 2 - 3 + 5 - 7 - 6 + 7 - 11$$

$$\beta') -3 - 2\frac{1}{2} + 4 - 8 - 7 - \frac{4}{5}$$

$$\gamma') (-4 + 5 - 8) + (3 - 2 - 7 + 4)$$

$$\delta') \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 4\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 5 - 8\right)$$

$$\varepsilon') \left(3 - 5 - 6 - 7\frac{1}{2} - 3\right) - \left(2 - 6 + 4 - \frac{1}{2}\right) \sigma\tau') - \left(3\frac{1}{2} - 4 - 6\right) + 7 - \left(3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 3\right).$$

36. Εἰς τὸ $3 - 5 - 4 + 7 - 8 - 1 - 15$ θέσατε μόνον τοὺς ὁρους τρίτον, πέμπτον καὶ ἕκτον ἐντὸς παρενθέσεως καταλλήλως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $+$ καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως τὸ $-$.

37. Εἰς τὸ ἄθροισμα $-6\frac{1}{2} + 7 - 12 - 7 + 5 - \frac{3}{4}$ θέσατε μόνον τοὺς ὁ-

ρους πρῶτον, τρίτον καὶ τελευταῖον καταλλήλως ἐντὸς παρενθέσεως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $-$, καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως νὰ τεθῇ τὸ $+$.

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

§ 24. Πολλαπλασιασμὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον β λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν σχηματίζεται ἐκ τοῦ α τρίτος ἀριθμὸς, ὅπως ὁ β δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται παράγοντες (ὁ α πολλαπλα-

σιαστέος και δ β **πολλαπλασιαστής**). Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **γινόμενον**, τὸ δὲ σύμβολον τῆς πράξεως εἶναι τὸ $\cdot$ ἢ τὸ $\times$ (ἐπὶ), τιθέμενον μεταξύ τῶν παραγόντων. Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν α καὶ β συμβολίζεται μὲ $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν μὲ $\alpha\beta$. Ὅταν ὁ εἰς τῶν παραγόντων εἶναι 0, τὸ γινόμενον ὀρίζεται ἴσον μὲ 0. Ἦτοι π.χ. $\alpha \cdot 0 = 0$, $0 \cdot \alpha = 0$, $(-3) \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

α') Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον θετικόν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον, π.χ. τοῦ $(+4)$ ἐπὶ ἄλλον π.χ. τὸν $(+3)$, ἀνάγεται εἰς τὴν εὗρεσιν τρίτου ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου $(+4)$, ὅπως ὁ δεύτερος $(+3)$ δύναται νὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὴν $+1$. Ἐπειδὴ ὁ $(+3) = 1+1+1$, θὰ ἔχωμεν $(+4) \cdot (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12$.

Ὀμοίως $(-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24$.

Π.χ. τὸ $(-9) \cdot \frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ εὗρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ -9 καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἦτοι ἔχομεν: $(-9) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4} \cdot 3 = \left(-\frac{27}{4}\right) = -6\frac{3}{4}$. Ἐπομένως:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου.

β) Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν.

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$.

Τὸ (-3) δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον τρίς. Ἀρα, διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$, θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $(+8)$, δηλαδὴ τὸν (-8) , καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς ὡς προσθετέον. Ἦτοι θὰ εἶναι:

$$(+8) \cdot (-3) = (-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον λέγομεν, ὅτι $(-8) \cdot (-3) = (+8) \cdot 3 = 24$. Ἀρα:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

$$\Pi. \chi. \text{ είναι } (+9) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{45}{6}, \quad (-5) \cdot (-6) = 30.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα :

§ 25. Διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν δύο σχετικούς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς των καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ + μὲν ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δὲ ἂν εἶναι ἐτερόσημοι.

§ 26. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι $\alpha\beta = \beta\alpha$. Διότι κατὰ τὴν εὗρεσιν τοῦ γινομένου τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο παραγόντων α, β εἶναι ἀδιάφορον ποίος ἐκ τῶν παραγόντων λαμβάνεται κατὰ σειρὰν πρῶτος ἢ δεύτερος. Ἐπομένως, ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων (δι' ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς), ἰσχύει καὶ διὰ δύο σχετικούς παράγοντας.

§ 27 Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὀρίζομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν.

$$\Pi. \chi. 3 \cdot (-5) \cdot (-4) = [3 \cdot (-5)] \cdot (-4) = (-15) \cdot (-4) = 60.$$

$$\text{Ἐν γένει ἔχομεν : } \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta) \cdot \gamma$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta) \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha\beta\gamma) \cdot \delta = (\alpha\beta\gamma\delta)$$

$$\text{Ἦτοι : } \alpha') (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-5) = (-15) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-5) \\ = (+30) \cdot (-1) \cdot (-5) = (-30) \cdot (-5) = +150.$$

$$\beta') (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (+5) = (+6) \cdot (-1) \cdot (+5) = (-6) \cdot (+5) = -30$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσσημον δὲ τὸ + μὲν ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ἢ 0, τὸ — δὲ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ θέσις τῶν παραγόντων.

Ἄν εἰς τῶν παραγόντων γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι 0 τὸ γινόμενον εἶναι 0.

$$\Pi. \chi. (+5) \cdot (-3) \cdot 0 \cdot (+6) = (-5) \cdot 0 \cdot (+6) = 0 \cdot (+6) = 0.$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ + 1 Ή ΕΠΙ - 1

§ 28. Παρατηρούμεν ὅτι, πολλαπλασιασμός σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ + 1 μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ - 1 δὲ τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτως ἔχομεν $\alpha \cdot (+1) = \alpha$, $\alpha \cdot (-1) = -\alpha \cdot (+1) = -\alpha$,

$$1 \cdot (+\alpha) = (+\alpha) \cdot (+1) = +\alpha,$$

$$(-1) \cdot (+\alpha) = (+\alpha) \cdot (-1) = (-\alpha) \cdot (+1) = -\alpha,$$

$$(-1) \cdot (-\alpha) = (-\alpha) \cdot (-1) = (+\alpha) \cdot (+1) = +\alpha,$$

$$\text{Π.χ. εἶναι: } (-4) \cdot 1 = 1 \cdot (-4) = (-1) \cdot 4 = -4, \quad (+5) \cdot 1 = 1 \cdot (+5) = 5$$

$$(-5) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5) = +5, \quad \frac{7}{5} \cdot (-1) = (-1) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = -\frac{7}{5}$$

Αἱ ιδιότητες τοῦ γινομένου ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἢ ἀπόδειξις δὲ εἶναι εὐκόλος.

Οὕτω π.χ., ἂν $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\rho\alpha = \rho\beta$, ὅπου α , β , ρ εἶναι οἰοδηήποτε ἀριθμοί.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

Ὅ μ ᾱ ς π ρ ὠ τ η. 38. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$\alpha) (-5) \cdot (+8) \quad \beta) (+18) \cdot (-4) \quad \gamma) (-7) \cdot (+15)$$

$$\delta) (-7) \cdot (-7) \quad \epsilon) (8,4) \cdot (-6,6) \quad \sigma\tau) (-9,8) \cdot (8,5) \cdot (4,3) \cdot (2,3)$$

ζ) Δείξατε ὅτι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta$, ὅταν α , β , γ , δ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὅ μ ᾱ ς δ ε υ τ ῆ ρ α 39. Ὅμοίως εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$$\alpha) (-3,9) \cdot (-7,6) \quad \beta') (+9,46) \cdot (-3,5)$$

$$\gamma') (-9) \cdot (-7) \cdot (-3) \quad \delta') \left(+4\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{6}\right) \cdot (-6,8)$$

40. Ὅμοίως τὰ:

$$\alpha') (-16) \cdot 14 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right) \quad \beta') (-3,1) \cdot (+6) \cdot (+8) \cdot (-7)$$

$$\gamma') (+7) \cdot (-4) \cdot (+8) \cdot (+5) \quad \delta') 0,6 \cdot \left[(+9,74) - 0,9 \cdot (+6,5) \right] \cdot 0,3$$

41. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα:

$$\alpha') (-3) \cdot (-4,1) \cdot (-2) + 8 \cdot (-2,4) \cdot (-5)$$

$$\beta') (-5,1) \cdot (-3,2) \cdot (-1) - 12 \cdot (-3,2) \cdot (-4) \cdot (-7) - 20$$

$$42. \text{Εὑρετε τὰ: } \alpha') \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (2+5-8)$$

$$\beta') (-32) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,4\right) - \frac{4}{5} \left[0,01 + 0,01 \cdot (-5,4) \right]$$

43. Εύρετε τὸ $0,53 \cdot (-12) \cdot (-3-4) + 19 \cdot (-0,45)$.

44. Εύρετε τὰ :

$$\alpha') (-5) \cdot (-8) \quad \beta') \left(-\frac{53}{4}\right) \cdot 1 \quad \gamma') \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\delta') (-3) \cdot (-5) \cdot 4 \cdot 0 \quad \epsilon') (-3) \cdot 6 \cdot 0 \cdot (-7)$$

στ') Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon = (\alpha \cdot \epsilon) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

ζ') Δείξατε, ὅτι $(\alpha\beta\gamma) \cdot (\delta\epsilon\zeta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon \cdot \zeta$, ὅπου οἱ παράγοντες α, β, γ καὶ οἱ δ, ϵ, ζ , εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

4. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

§ 29. Ὡς γνωστόν, ἀντίστροφος ἀριθμὸς π.χ. τοῦ 5 (τῆς Ἀριθμητικῆς) καλεῖται τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 5, δίδει γινόμενον $\frac{1}{5} \times 5 = 1$. Ἐστω σχετικὸς ἀριθμὸς α , διάφορος τοῦ μηδενός. Τὴν ἔκφρασιν **διάφορος** θὰ παριστάνωμεν μὲ τὸ συμβολὸν $\neq$, θὰ γράφωμεν δὲ $\alpha \neq 0$ καὶ θὰ ἀπαγγέλλωμεν: α διάφορον τοῦ μηδενός. Καλοῦμεν **ἀντίστροφον** τοῦ α ($\neq 0$) τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν ἀντίστροφον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α καὶ πρόσσημον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ α , ἥτοι τὸν $\frac{1}{\alpha}$. Π.χ. ἀντίστροφος τοῦ $-\frac{1}{8}$ εἶναι ὁ -8 , τοῦ -6 ὁ $-\frac{1}{6}$, τοῦ $-3,4$ ὁ $-\frac{1}{3,4} = -\frac{10}{34} = -\frac{5}{17}$, τοῦ $+1$ ὁ $+1$ καὶ τοῦ -1 ὁ -1 .

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ($\neq 0$) ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του ἰσοῦται μὲ 1. Π.χ. τὸ γινόμενον $8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$, τοῦ $-\frac{1}{8} \cdot (-8) = +\frac{8}{8} = +1$ κ.τ.λ.

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν α καὶ β (ἐνῷ εἶναι $\beta \neq 0$) ὑπάρχει τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β , δίδει γινόμενον τὸν α .

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν μὲ γ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\gamma \cdot \beta = \alpha$. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\gamma \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \gamma \cdot \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Καὶ τῷ ὄντι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν γ ἢ τὸν ἴσον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ β , ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta} = \alpha$.

§ 30. Διαίρεσις σχετικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β ($\neq 0$)
λέγεται ἡ πρᾶξις, μετὰ τὴν ὁποίαν εὐρίσκεται τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς γ , ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β , δίδει γινόμενον τὸν α .

Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ α λέγεται **διαιρετέος**, ὁ β **διαιρέτης**, καὶ ὁ ζητούμενος γ **πηλίκον**, τὸ δὲ σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ $(:)$ (**διὰ ἢ πρὸς**) καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν α καὶ β . Τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha : \beta$ συμβολίζομεν καὶ μετὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται δὲ ἡ παράστασις αὕτη **κλασματική ἢ ἀλγεβρικὸν κλάσμα** μετὰ **ἀριθμητὴν** τὸν α καὶ **παρονομαστήν** τὸν β , καὶ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \frac{1}{\beta}$.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον π.χ. $(+8) : (+2)$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχη πρόσσημον $+$. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $(+2)$ πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἀφοῦ ὁ διαιρετέος $(+8)$ εἶναι θετικός. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2 πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8, θὰ εἶναι ἴση μετὰ $8 : 2 = 4$.

Ἦτοι ἔχομεν $(+8) : (+2) = (+4)$.

Ἐστω, ὅτι ζητεῖται $(+8) : (-2)$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχη τὸ πρόσσημον $-$. Διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην (-2) πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος $(+8)$ εἶναι θετικός.

Ἀρα ἔχομεν $(+8) : (-2) = (-4)$. Ἐπίσης εὐρίσκομεν, σκεπτόμενοι ὁμοίως, ὅτι εἶναι :

$$(-8) : (-2) = +4, \quad (-5) : 2 = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}. \quad \text{Ἀρα :}$$

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ πρόσσημον θετικὸν μὲν ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δὲ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

$$\text{Παραδείγματα : } (-5) : (+6) = -\frac{5}{6}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{6}{5} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}, \quad (-15) : (-5) = +\frac{15}{5} = +3.$$

Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος. Διότι ἂν π.χ. ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $(-6) : 0$, ζητεῖται ἀριθμός, ὁ ὅποιος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0, δίδει γινόμενον τὸ -6 . Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι πᾶς ἀριθμός πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἀλλ' οὐδὲ νὰ δημιουργήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν εἶναι δυνατόν, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ 0 δυνατὴν. Διότι, ἂν π.χ. ὑπῆρχε νέος τοιοῦτος ἀριθμός, ἔστω ὁ α , ὁ ὅποιος θὰ εἶναι πηλίκον τοῦ $-6 : 0$, θὰ ἔχωμεν $-6 = 0 \cdot \alpha$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5, προκύπτουν ἴσοι. Ἦτοι $-6 \cdot 5 = 0 \cdot \alpha \cdot 5$. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, εὐρίσκομεν $-6 \cdot 5 = 0 \cdot 5 \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha$ (ἐπειδὴ εἶναι $0 \cdot 5 = 0$). Ἀλλὰ τὸ μὲν $-6 \cdot 5 = -30$, τὸ δὲ $0 \cdot \alpha = -6$ (ἐξ ὑποθέσεως), ὅρα θὰ ἔχωμεν $-30 = -6$, τὸ ὅποιον εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 0 διὰ τινος ἀριθμοῦ ($\neq 0$) δίδει πηλίκον 0. Οὕτως π.χ. $0 : (-7) = 0$ Διότι εἶναι $0 \cdot (-7) = 0$.

Αἱ ιδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι σχετικοί, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρῶτη. 45. Νὰ εὐρεθῶν τὰ πηλικά:

$$\alpha') (+2) : (-7) \quad \beta') (-45) : (+9) \quad \gamma') (-49) : 49 \quad \delta') (-1944) : (-36)$$

$$\epsilon') (+0,95) : (+0,5) \quad \sigma\tau') (-349) : 1,8 \quad \zeta') (-1425) : (-32,1)$$

η') Νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha : \beta = (\alpha \cdot \gamma) : (\beta \cdot \gamma)$, ἂν τὰ α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὁ μᾶς δευτέρα. 46. Εὐρετε τὰ ἐξαγόμενα:

$$\alpha') 3 \frac{2}{3} : \left(-1 \frac{4}{9}\right) : 8 \quad \beta') (-9,6) : 0,7 : 6 \frac{1}{2}$$

$$\gamma') (-1) : 4 : (-3) : \left(-\frac{1}{3}\right) : (+2)$$

47. Ὁμοίως τὰ:

$$\alpha') (-34) : (-9-8), \quad \beta') (-18) : 9-(-4) : 2, \quad \gamma') (-25) : (-5) : (-5) : (-5)$$

48. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἄγνωστος x . ὥστε νὰ εἶναι:

$$\alpha') (-40) \cdot x = 160 \quad \beta') (-6) \cdot x = 24 \quad \gamma') 12 \cdot x = 48$$

$$\delta') (-3) \cdot x = (-15) \quad \epsilon') (3,14) \cdot x = -18,84 \quad \sigma\tau') \left(-\frac{36}{7}\right) \cdot x = \frac{7}{12}$$

49. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\alpha') \alpha : \beta = (\alpha : \rho) : (\beta : \rho), \text{ ἔνθα } \alpha, \beta, \rho, \text{ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ } (\rho \neq 0).$$

$$\beta') (\alpha\beta\gamma) : \alpha = \beta\gamma \quad \gamma') \alpha : (\beta \cdot \gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma.$$

Δ' ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ *

§ 31. Τὰ κλάσματα με ὅρους σχετικούς ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **ἀλγεβρικά κλάσματα**, ἔχουν τὰς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων με ὅρους ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς ἀποδεικνύονται δὲ αὐταὶ εὐκόλως καὶ διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ἐξ αὐτῶν.

1η. Πᾶς σχετικὸς ἀριθμὸς α π.χ. δυνατόν νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα με παρονομαστήν 1, διότι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$.

2α. Ἐὰν εἰς κλάσμα ὁ παρονομαστής του εἶναι ἴσος με τὸν ἀριθμητὴν του, τὸ κλάσμα ἰσοῦται με 1, ἥτοι ἔχομεν π.χ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

3η. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$) χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}, \quad \gamma \neq 0.$$

4η. Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν δύο ὀρων κλάσματος χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του. Διότι ἀλλαγὴ τῶν σημάτων τῶν δύο ὀρων τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ αὐτὸ με τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκάστου ὀρου ἐπὶ (-1) .

Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}, \quad \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}, \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}, \quad \frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.$$

5η. Δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα διὰ διαιρέσεως τῶν ὀρων του με τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } -\frac{6}{4} = -\frac{6:2}{4:2} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \delta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\delta}, \quad \frac{4 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \delta \cdot \gamma} = \frac{4 \cdot \beta}{\delta \cdot \gamma}.$$

* Πρῶτος ὁ Ἑλλήν μαθηματικὸς Διόφαντος (τῆς Ἀλεξανδρείας) ἔδωκεν αὐτοτελεῖ σημασίαν εἰς τὰ κλάσματα.

6η. Δοθέντων κλασμάτων (περισσοτέρων τοῦ ἑνός) με διαφόρους παρονομαστές, δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἰσάριθμα αὐτῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς αὐτά, ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου τῶν δοθέντων με τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.

$$\text{Π.χ. ἔχομεν γιὰ τὰ κλάσματα } \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{\beta \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1 \cdot \beta \cdot \beta_2}{\beta_1 \cdot \beta \cdot \beta_2}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_2 \cdot \beta \cdot \beta_1}{\beta_2 \cdot \beta \cdot \beta_1},$$

εἶναι δὲ τὰ εὐρεθέντα ὁμώνυμα.

Εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθέντα ἑτερόνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν του (ἂν εἶναι τοῦτο σκόπιμον).

7η. Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα με ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

$$\text{Π.χ. ἔχομεν } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}, \frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}.$$

8η. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα τοῦ δοθέντος.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν } \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\alpha}, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha \cdot \beta'}{\beta \cdot \alpha'},$$

$$1 : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\gamma} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\gamma}{1}\right)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta \cdot \gamma}.$$

Ἀσκήσεις

50. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

$$\frac{-25}{-15}, \frac{-3}{48}, \frac{-121}{-4 \cdot 11}, \frac{5}{-8} \cdot \frac{4}{-9} \cdot \frac{1}{2}, \frac{3}{-2} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{2}{-11} \cdot \frac{11}{-120}$$

51. Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἐπόμενα κλάσματα με τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν των :

$$\begin{array}{ll}
 \alpha') \quad \frac{2}{-3}, \quad \frac{-5}{8}, \quad \frac{1}{-2}, & \delta') \quad \frac{-3}{8}, \quad \frac{4}{-25}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{1}{3} \\
 \beta') \quad \frac{-3}{4}, \quad \frac{-4}{9}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5} & \epsilon') \quad \frac{-5}{7}, \quad \frac{4}{21}, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{-5}{8}, \quad \frac{1}{2} \\
 \gamma') \quad \frac{-11}{15}, \quad \frac{32}{-45}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{7}{5} & \sigma\tau') \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-5}{6}, \quad \frac{-7}{8}, \quad \frac{1}{4}
 \end{array}$$

Ε'. ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 32. Καθώς (εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν), τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ ἓνα ἀριθμὸν, π.χ. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, καλοῦμεν **τετάρτην δύναμιν** τοῦ 3 καὶ παριστάνομεν αὐτὸ μὲ τὸ 3^4 , οὕτω καὶ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων, π.χ. τὸ $(-5) \cdot (-5)$, καλεῖται **δευτέρα δύναμις** τοῦ (-5) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ $(-5)^2$. Ὁμοίως τὸ $(-3) \cdot (-3)$ λέγεται **δευτέρα δύναμις** τοῦ (-3) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ $(-3)^2$. Τὸ $(+9) \cdot (+9) \cdot (+9)$ παριστάνεται μὲ $(+9)^3$ καὶ λέγεται **τρίτη δύναμις** τοῦ $(+9)$. Τὸ $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^3$ καὶ λέγεται **τρίτη δύναμις** τοῦ (-7) . Ἐν γένει :

Καλοῦμεν δύναμιν ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν.

Ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται **ἐκθέτης τῆς δυνάμεως**, ὁ δὲ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται **βάσις τῆς δυνάμεως**. Ἡ **δευτέρα δύναμις** ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **τετράγωνον** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ **τρίτη δύναμις** καὶ **κύβος** τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$, $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^4$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Ἐν γένει, τὸ $\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}}$, ὅπου τὸ α φανερώνει σχετικὸν

ἀριθμὸν, τὸ δὲ μ φυσικόν. Τὸ α^{μ} καλεῖται **μιοστή (μῆ) δύναμις** τοῦ α .

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

ὅπου τὸ n παριστάνει ἀριθμὸν φυσικόν. Ἦτοι :

Πᾶσα δύναμις τῆς -1 με ἐκθέτην ἄρτιον ἀριθμόν, ἰσοῦται με 1 , με ἐκθέτην δὲ περιττὸν ἰσοῦται με -1 .

Ἐπομένως εἶναι $(-1)^n = \pm 1$ καὶ εἶναι $+1$ μὲν ἂν n ἄρτιος, -1 δὲ ἂν n περιττός.

Ἀσκήσεις

52. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

α') $(-6)^3$ β') $(-9)^2$ γ') $(+8)^6$ δ') $(-3)^3$ ε') $(-7)^6$ στ') $(-1)^3$

53. Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ φυσικόν, εἶναι ἀριθμὸς θετικός· περιττὸν δὲ ἐκθέτην ἔχουσα εἶναι ἀρνητικός.

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ α^1 ΚΑΙ α^0 ΩΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 33. Κατὰ τον ὀρισμὸν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἔχομεν ὅτι π.χ.

$$\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὀρίζει τὴν δύναμιν ταύτην διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων αὐτοῦ. Ἄν δεχθῶμεν ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ δι' ἐκθέτας (ἀκεραίους) μικροτέρους τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\alpha^{2-1} = (\alpha \cdot \alpha) : \alpha$.

Ἀλλὰ τὸ α^{2-1} ἰσοῦται με α^1 τὸ δὲ $(\alpha \cdot \alpha) : \alpha = \mu \epsilon \alpha$. Ἀρα εἶναι $\alpha^1 = \alpha$. Τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἐξῆς ὀρισμὸν τοῦ α^1 .

Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἰσοῦται με αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τ' ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν, ὅτι $\alpha^{1-1} = \alpha : \alpha = 1$ ἀλλὰ ὁ $\alpha^{1-1} = \alpha^0$. Ἀρα εἶναι $\alpha^0 = 1$, ὅταν εἶναι τὸ $\alpha \neq 0$.

Οὕτως ἔχομεν τὸν ἐξῆς ὀρισμὸν τοῦ α^0 :

Τὸ α^0 , ὅπου τὸ α εἶναι ἀριθμὸς τις $\neq 0$, ἰσοῦται με τὴν μονάδα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(-3)^0 = 1, \quad 47^0 = 1, \quad (-10)^0 = 1, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

$$(-2)^1 = -2, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}, \quad 4,3^1 = 4,3$$

3. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 34. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι :

Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἡ ἰδιότης αὕτῃ ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς, οἱ δὲ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον π.χ. $\alpha^3 \cdot \alpha^2$ θὰ εἶναι $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ καὶ ἐπομένως τὸ

$$\alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5.$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι π.χ. εἶναι $\chi^4 \cdot \chi^3 = \chi^7$ καὶ ἐν γένει τὸ γινόμενον $\alpha^m \cdot \alpha^n$, ὅπου τὸ m καὶ n εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ α σχετικὸς τις ἀριθμὸς, ἰσοῦται μὲ τὸ α^{m+n} .

Διότι ἔχομεν, ὅτι $\alpha^m = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_m \text{ παράγοντες}$, $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n \text{ παράγοντες}$
ἐπομένως εἶναι $\alpha^m \cdot \alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_m \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{(m+n) \text{ παράγοντες}} = \alpha^{m+n}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha^m \cdot \alpha^n \cdot \alpha^p \cdot \dots \cdot \alpha^l = \alpha^{m+n+p+\dots+l}$, ὅπου τὸ α εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς, τὰ δὲ $m, n, p, \dots, l$ φυσικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων ἐνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

54. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha') (-2)^2 \cdot (-2)^3 & \beta') (-3)^4 \cdot (-3)^2 & \gamma') (-5)^2 \cdot (-5)^3 \\ \delta') (1,5)^3 \cdot (1,5)^2 & \epsilon') \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 & \\ \sigma\tau') (-5,1)^3 \cdot (5,1)^4 & \zeta') (0,5)^5 \cdot (0,5)^{10} \cdot (0,5)^3 & \end{array}$$

* Ἡ 4η δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸν ἔργον του «Ἀριθμητικὰ βιβλία» VI, καθὼς καὶ ὑπὸ τοῦ Ἡρώωνος, **δυναμοδύναμις**, ἡ 5η δύναμις καλεῖται **δυναμόκυβος**, ἡ 6η **κυβόκυβος**, τὸ $\frac{1}{x}$ λέγεται **ἀριθμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^2}$ **δυναμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^3}$ **κυβοστόν**, καὶ τὸ $\frac{1}{x^6}$ **κυβοκυβοστόν**.

§ 35. Ἐστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸ $[(-5)^3]^2$. Τοῦτο ἰσοῦται $(-5)^8$.
 $(-5)^8 = (-5)^{3+3+2} = (-5)^{3 \cdot 2}$.

Ἐστω, ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(2^3)^2$. Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἰσων μὲ τὸ 2^3 , ἤτοι τὸ $2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2}$. Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι εἶναι $(\alpha^3)^4 = \alpha^{3 \cdot 4}$ καὶ ἐν γένει, ὅτι $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$, ὅπου α εἶναι μὲν σχετικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ φυσικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἄν δυνάμεις τις ἀριθμοῦ σχετικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

55. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

$$\begin{array}{lll} \alpha') [(-2)^2]^3 & \beta') [(-3)^2]^2 & \gamma') [(-1)^2]^3 \\ \delta') [(-1)^3]^3 & \epsilon') \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^2 \right]^2 & \sigma\tau') [(-10)^2]^3 \end{array}$$

56. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

$$\begin{array}{lll} \alpha') [(0,2)^2]^4 & \beta') [(0,4)^2]^2 & \gamma') [(1,5)^2]^3 \\ \delta') [(0,5)^2]^3 \cdot [(-3)^4]^2, \left[\left(-\frac{4}{5} \right)^2 \right]^3 & \epsilon') [(-5)^2]^3 & \sigma\tau') \left[\left[\left(-\frac{4}{5} \right)^2 \right]^3 \right]^6 \end{array}$$

§ 36. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον σχετικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα.

Πράγματι ἔχομεν, ὅτι (ἂν τὸ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς)

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{aligned} [(-5) \cdot (-3)]^3 &= (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) = \\ &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-5)^3 \cdot (-3)^3 \end{aligned}$$

καὶ γενικῶς, ὅτι

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\nu &= \underbrace{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdots (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \\ &= \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta}_{\nu \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdots \gamma}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu \end{aligned}$$

§ 37. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι **σχετικοὶ ἀριθμοί**, ὑψοῦνται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὁρῶν τοῦ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Οὕτως ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$, διότι τὸ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\overbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdots \beta}^{\mu \text{ παράγοντες}}} = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν φυσικόν, τὰ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς σχετικούς.

Ἀσκήσεις

57. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$\alpha') [(-2) \cdot (-3)]^2$$

$$\beta') [(+1) \cdot (-2)]^4$$

$$\gamma') [(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)]^2$$

$$\delta') [2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-2)]^2$$

$$\epsilon') [(-2) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 1 \cdot 0,5]^3$$

$$\sigma\tau') [(-1) \cdot (-2) \cdot (+3)]^3$$

$$\zeta') \left[\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \right]^3$$

$$\eta') \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \right]^2$$

$$\theta') \left[(-5)^2 \cdot (-6)^3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \right]^2$$

$$\iota') \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]^2$$

$$\iota\alpha') \left[2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot (-0,1) \right]^2$$

$$\iota\beta') \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{-3}{7} \cdot 0,4 \right]^3$$

$$\iota\gamma') \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \right]^4$$

§ 38. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὗρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως 2^5 διὰ τῆς 2^2 . Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$. Ἦτοι ὅτι :

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου μείον τοῦ διαιρέτου.

Ἡ ιδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βᾶσις τῶν δυνάμεων εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς, οἱ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον,

$$(-5)^4 : (-5)^2 = \frac{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}{(-5) \cdot (-5)} = (-5) \cdot (-5) = (-5)^2 = (-5)^{4-2}$$

$$\text{ὁμοίως τὸ } (-3)^6 : (-3)^3 = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \\ (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^3 = (-3)^{6-3}.$$

Ἐν γένει τὸ πηλίκον

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\mu - \nu \text{ παράγοντες}} = \alpha^{\mu - \nu}$$

ὅπου α παριστάνει σχετικόν τινα ἀριθμὸν καὶ μ , ν φυσικούς, ὁ δὲ μ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν .

Παρατήρησις. Ἡ εἰς τὴν § 34 σημασία τοῦ α^0 καὶ α^1 προκύπτει καὶ ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ιδιότης τοῦ γινομένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θεωρουμένων τῶν α^0 καὶ α^1 ὡς δυνάμεων τοῦ α . Πράγματι, ἔχομεν τότε $\alpha^0 \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^0 + \mu = \alpha^{\mu}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα $\alpha^0 \cdot \alpha^{\mu}$ καὶ α^{μ} διὰ τοῦ α^{μ} , εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $\alpha^0 = 1$.

Ὀμοίως ἔχομεν $\alpha^1 \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{1+\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \alpha$, καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ α^{μ} ἔχομεν $\alpha^1 = \alpha$.

Ἀσκήσεις

58. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\alpha') x^5 \cdot x^3 \quad \beta') \psi^3 \cdot \psi^4 \quad \gamma') x^5 \cdot x \quad \delta') (-x^4)^2 \quad \epsilon') (-\beta^5)^3 \quad \sigma\tau') x^2 \cdot x \\ \zeta') x^{2\nu} \cdot x \cdot (-x)^{2\nu} \quad \eta') x^{2\nu-1} \cdot x \cdot (-x) \quad \theta') x^{2\nu} \cdot (-x)^3 \quad \iota') x^{2\nu-1} \cdot x^{2\nu} \\ \psi^{3\mu-1} \cdot \psi^2.$$

59. Ὀμοίως τὰ :

$$\alpha') (4\alpha\beta)^2 \quad \beta') (-3\chi\psi)^3 \quad \gamma') (5x^2)^2 \quad \delta') (-\chi\psi\omega)^1 \quad \epsilon') \left(-\frac{2}{3} x^2\psi\right)^2 \\ \sigma\tau') \left(-\frac{1}{5} \chi\psi^2\right)^3 \quad \zeta') \left(-\frac{3}{4} x^2\right)^0 \quad \eta') \left(\frac{5}{8} x^{2\nu}\right)^0 \\ \theta') \left(\frac{5}{8} x^2\psi\right)^3 \cdot (4\alpha\beta)^{\mu} \cdot (3\alpha^2\beta^3)^2.$$

60. Νὰ εὑρετε τὰ :

$$\alpha') 2^5 : 2^3 \quad \beta') (-2)^5 : (-2)^3 \quad \gamma') (-7)^9 : (-7)^6 \\ \delta') (-3)^5 : (-3)^2 \quad \epsilon') \left(-\frac{3}{7}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^3 \quad \sigma\tau') (-5,3)^6 : (-5,3) \\ \zeta') [(-3) \cdot 5 \cdot 7]^7 : (-3 \cdot 5 \cdot 7)^4 \quad \eta') [(-1) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 7]^{10} : [(-1) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 7]^6$$

4. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 39. Έστω, ότι θέλουμε να εϋρωμεν τί παριστάνει τὸ σύμβολον α^{-1} , ὅπου τὸ α εἶναι σχετικὸς τις ἀριθμὸς $\neq 0$.

Ἄν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ θεμελιώδης ιδιότης τοῦ γινομένου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ εἰς ἐκ τῶν ἐκθετῶν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς π.χ. -1 , θὰ ἔχωμεν $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{1-1} = \alpha^0 = 1$.

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = 1$ διὰ τοῦ α^1 , εϋρίσκομεν $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha^1}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ καὶ γενικῶς $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, ὅπου τὸ n παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν, τὸ δὲ α σχετικὸν $\neq 0$. Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἐξῆς ὁρισμὸν τῆς σημασίας δυνάμεως μὲ ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἐκθέτην.

Δύναμεις τις ἀριθμοῦ ($\neq 0$), μὲ ἐκθέτην δοθέντα ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν, παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, παρονομαστὴν δὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

$$\text{Κατὰ ταῦτα εἶναι : } 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}, \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8.$$

Γενικῶς $\alpha^{-|v|} = \frac{1}{\alpha^{|v|}}$, ἔνθα v σχετικὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς.

§ 40. Αἱ ιδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι οἰοδιήποτε ἀκέραιοι σχετικοὶ ἀριθμοί.

$$\text{Οὕτω π.χ. ἔχομεν } \alpha^3 \cdot \alpha^{-5} = \alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2}$$

$$\alpha^{-3} \cdot \alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^8} = \alpha^{-8} = \alpha^{-3-5}$$

$$\alpha^{-|u|} : \alpha^{-|v|} = \frac{1}{\alpha^{|u|}} : \frac{1}{\alpha^{|v|}} = \frac{1}{\alpha^{|u|}} \cdot \alpha^{|v|} = \alpha^{|v|} \cdot \alpha^{-|u|} = \alpha^{|v|-|u|} = \alpha^{-|u|-(-|v|)}$$

Ἐπίσης ἔχομεν, ὅτι $(\alpha \cdot \beta)^{-|v|} = \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^{|v|}} = \frac{1}{\alpha^{|v|} \cdot \beta^{|v|}}$, ὅπου v παριστάνει σχετικὸν ἀριθμὸν ἀκέραιον.

Παρατήρησης: Μετά την παραδοχήν τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ἀρνητικούς ἀκεραίους, ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτας ἀκεραίους ἰσχύει πάντοτε, ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως (δηλαδή καί ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρέτου). Οὕτω π.χ. ἔχομεν:

$$\alpha^5 : \alpha^7 = \frac{\alpha^5}{\alpha^7} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} = \alpha^{5-7}.$$

$$\text{Ὁμοίως } \alpha^{-2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2 \cdot \alpha^3} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}.$$

Ἀσκήσεις

61. Νά εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$5^{-3}, (3,5)^{-2}, 7^{-2}, 20^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}, (-1)^{-2n}, (-1)^{-(2n+1)}$$

$$62. \text{Ὁμοίως τῶν: } (-1)^{-3}, (-0,01)^{-4}, \frac{1}{2^{-3}}, \frac{1}{5^{-2}}, \frac{1}{(-7)^{-4}}$$

63. Θέσατε κατωτέρω ὅπου $x=1, -2, -3$ καί εὑρετε μέ τί ἰσοῦνται τὰ ἐξαγόμενα τῶν: α') $5x^{-1} + 7x + 3x^{-1}$ β') $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$

64. Νά εὑρεθῇ μέ τί ἰσοῦνται τά: $2^5 \cdot 2 \cdot 2^0 \cdot 2^{-2}, 4^{-3} \cdot 4^3, \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-3}$

65. Ὁμοίως τά:

α') $\alpha^{-2} \cdot \alpha^{-4} \cdot \alpha^0 \cdot \alpha^5$ β') $2^3 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{-8}$ γ') $(7^{-8} : 7^{-9}) \cdot 3^{-3}$ δ') $(2\alpha\beta)^{-2}$
 ε') $x^v \cdot x^{2v} : x^v$ στ') $5^2 : 5^{-4}$ ζ') $(3\alpha^{-3} \cdot \beta^{-2} \cdot \gamma^{-4})^{-2} \cdot (-2\alpha^2\beta^{-2})^2$

66. Εὑρετε τά:

α') $5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 13 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^{-3}$
 β') $4 \cdot 6^3 - 5 \cdot (-6)^3 + 7 \cdot (-6)^3 + 9 \cdot (-6)^3 + 13 \cdot 6^3$
 γ') $5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^5 + 8 \cdot 2^6 + 11 \cdot 2^5 - 7 \cdot 2^6$

δ') $0,75 \cdot \alpha^5 - 0,5 \cdot \alpha^4 - 0,9 \cdot \alpha^6 + 0,7 \cdot \alpha^4 + 0,8 \cdot \alpha^5 - 1,2 \cdot \alpha^4$, ὅταν $\alpha = 5$

67. Εὑρετε τά:

α') $32 \cdot 4^{-3}$ β') $81 \cdot 3^{-3}$ γ') $\frac{2^{-5}}{4^{-3}}$ δ') $\frac{3^{-3}}{9^{-1}}$ ε') $\frac{10^{-3}}{10^{-2}}$ στ') $\frac{(-6)^{-2}}{(-9)^{-2}}$
 ζ') $\frac{(-10)^{-5}}{(-15)^{-2}}$ η') $\frac{5}{5^{-2}} + \frac{10}{10^{-1}} + \frac{-10^2}{10^{-3}} - 100^2$

ΣΤ'. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 41. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι ἂν δύο ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι, π.χ. οἱ 5 καί 8, σημειώνομεν τὴν σχέσιν τῶν αὐτῶν μέ τὸ $5 < 8$ ἢ $8 > 5$, ἡ ὁποία καλεῖται ἀνισότης, τὸ δὲ σύμβολον τῆς

άνισότητος είναι τὸ $\langle \eta \rangle$. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἂν εἰς ἀνίσους (θετικούς) ἀριθμούς προσθέσωμεν ἴσους, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν. Δεχόμενοι, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἶναι σχετικός, ἔχομεν, προσθέτοντες τὸν -5 π.χ. εἰς τοὺς δύο ἀνίσους ἀριθμούς 5 καὶ 8 , ὅτι $5 + (-5) \langle 8 + (-5)$ ἢ $0 \langle 3$. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνίσους ἀριθμούς 5 καὶ 8 προσθέσωμεν τὸν -8 , θὰ ἔχωμεν $5 + (-8) \langle 8 + (-8)$ ἢ $-3 \langle 0$.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ὀρίζομεν ὅτι :

Τὸ 0 εἶναι μικρότερον μὲν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, μεγαλύτερον δὲ παντὸς ἀρνητικοῦ.

Οὕτως, ἂν ὁ σχετικός ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha > 0$, ἂν δὲ τὸ α εἶναι ἀρνητικός ἀριθμὸς, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha < 0$. Κατὰ ταῦτα εἶναι πάντοτε $|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$.

§ 42. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $5 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 5 καὶ 0 προσθέσωμεν τὸ (-7) π.χ., εὐρίσκομεν : $5 + (-7) > 0 + (-7)$ ἢ $-2 > -7$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων ὁδηγούμενοι ὀρίζομεν ὅτι :

Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μικρότερος, ἐνῶ εἶναι γνωστόν, ὅτι ἐκ δύο θετικῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος.

§ 43. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $8 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 8 καὶ 0 προσθέσωμεν π.χ. τὸν -3 , εὐρίσκομεν $8 + (-3) > 0 + (-3)$ ἢ $5 > -3$.

Ὅριζομεν λοιπὸν ὅτι : **πᾶς θετικός ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ**, π.χ. $+5 > -13$, $+0,3 > -25$.

§ 44. Λέγομεν, ὅτι **σχετικός τις ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος μὲν ἄλλου, ἂν ἡ διαφορά τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶναι θετική, μικρότερος δὲ ἂν εἶναι ἀρνητική.**

Κατὰ ταῦτα, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἄνισοι, καὶ ὁ α μεγαλύτερος τοῦ β , σημειώνομεν τὴν σχέσιν ταύτην συμβολικῶς μὲ $\alpha > \beta$ ἢ $\beta < \alpha$, ἡ ὁποία καλεῖται **ἀνισότης** καὶ τότε ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι θετικός ἀριθμὸς. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται **μέλη τῆς ἀνισότητος**. Παρατηρητέον, ὅτι ἂν $\alpha > \beta$, ὁ β εἶναι μικρό-

τερος τοῦ α , ἥτοι εἶναι $\beta < \alpha$. Διότι, ἂν $\alpha - \beta =$ θετικός, τὸ $(\beta - \alpha) =$ ἀρνητικός ἀριθμός. Διὰ ταῦτα αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\beta < \alpha$ λέγονται **ἰσοδύναμοι**.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν αὐτοὺς κατὰ σειράν, ὥστε νὰ βαίνουν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μεγαλύτερον των. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τοὺς σχετικoὺς ἀριθμοὺς $+5, -\frac{2}{3}, +6, -7, -15, +\frac{3}{4}, 0, -1, -6$, ἔχομεν τὴν κατωτέρω τοποθέτησιν αὐτῶν, παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μικρότερος εἶναι ὁ -15 καὶ ὁ μεγαλύτερος ὁλων ὁ $+6$.

$$-15 < -7 < -6 < -1 < -\frac{2}{3} < 0 < +\frac{3}{4} < +5 < +6.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

§ 45. Ἐστῶσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, ὅτε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\alpha - \beta =$ θετικός ἀριθμός καὶ $\gamma - \delta =$ θετικός ἀριθμός.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικός ἀριθμός, καὶ $\gamma - \delta$ ὁμοίως θετικός, τὸ $\alpha - \beta + \gamma - \delta$ θὰ εἶναι θετικός, ἥτοι τὸ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) =$ θετικός. Ἐπομένως εἶναι καὶ $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, οὕτως ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν.

Οὕτω π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰς $-5 > -12$ καὶ $-3 > -10$, προσθέτοντες τοὺς μεγαλύτερους καὶ τοὺς μικροτέρους χωριστά, εὐρίσκομεν : $-5 - 3 > -12 - 10$ ἢ $-8 > -22$.

§ 46. Ἐστῶ, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε θὰ εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικός.

Ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) =$ θετικός, ἔπεται ὅτι $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Ἦτοι :

Ἄν εἰς ἀνίσους σχετικοὺς ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν.

Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$, θὰ εἶναι $\alpha - \gamma > \beta - \delta$. Διότι ἔχομεν $\alpha - \beta =$ θετικός ἀριθμός, $\delta - \gamma =$ θετικός ἀριθμός. Ἀλλ' εἶναι $(\alpha - \beta) + (\delta - \gamma) =$ θετικός ἀριθμός $= \alpha - \beta + \delta - \gamma = (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) =$ θετικός ἀριθμός, ἄρα $\alpha - \gamma > \beta - \delta$, π.χ. $+5 > -2$, $-9 < -4$ καὶ $5 + 9 > -2 + 4$ ἢ $+14 > +2$.

*Αν δοθοῦν ἀνισότητες σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, $\epsilon > \zeta$, $\eta > \theta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$.

Διότι εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, $\gamma - \delta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. $\epsilon - \zeta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, $\eta - \theta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. *Αρα $(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) + (\epsilon - \zeta) + (\eta - \theta) =$ θετικὸς ἀριθμὸς ἢ $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \zeta + \eta - \theta =$ θετικὸς ἢ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta - \beta - \delta - \zeta - \theta =$ θετικὸς ἢ $(\alpha + \gamma + \epsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \theta) =$ θετικὸς, δηλαδὴ $\alpha + \gamma + \epsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \theta$. Π.χ. εἶναι $+5 > 0$, $+6 > -15$, $-8 > -20$, ἄρα $+5 + 6 + (-8) > 0 + (-15) + (-20)$ ἢ $+3 > -35$.

§ 47. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς. *Αν $\lambda > 0$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἴσα ἐπὶ λ , θὰ ἔχωμεν $(\alpha - \beta) \cdot \lambda =$ θετικὸς $\times$ θετ. = θετικὸς ἀριθμὸς, ἢ $\alpha\lambda - \beta\lambda =$ θετικὸς ἀριθμὸς. Ἐπομένως εἶναι $\alpha\lambda > \beta\lambda$.

*Ἐστω τώρα, ὅτι εἶναι $\lambda < 0$. *Αν τὰ ἴσα $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν λ , θὰ εὗρωμεν $(\alpha - \beta) \cdot \lambda =$ θετικὸς $\times$ ἀρν. = ἀρνητικὸς ἀριθμὸς. Ἐπομένως εἶναι $\alpha\lambda - \beta\lambda =$ ἀρν. ἥτοι $\alpha\lambda < \beta\lambda$. Ἦτοι :

Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ θετικὸν μὲν ἀριθμὸν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φορὰν, ἐπὶ ἀρνητικὸν δὲ ἀντιστρέφεται.

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5 > -8$ ἔχομεν $-5 \cdot 4 > -8 \cdot 4$, ἥτοι $-20 > -32$, ἐνῶ ἐκ τῆς $6 < 10$ εὐρίσκομεν μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ -2 τὴν $6 \cdot (-2) > 10 \cdot (-2)$ ἢ $-12 > -20$. *Αν $\alpha < \beta$, εἶναι $\alpha \cdot [-|\lambda|] > \beta \cdot [-|\lambda|]$.

*Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος ἔχομεν ὅτι :

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ -1 , ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.

Π.χ. ἐκ τῆς $3 < 5$ ἔχομεν $3 \cdot (-1) > 5 \cdot (-1)$ ἢ $-3 > -5$.

§ 48. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^m > \beta^m$, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ m φυσικὸς. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἔχωμεν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, εἶναι δὲ α , β , γ , δ , θετικοί, θὰ εἶναι καὶ $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$. Διότι ἀφοῦ εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha - \beta = \text{θετ. ἀριθ.} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \beta + \text{θετ. ἀριθ.}$$

$$\gamma - \delta = \text{θετ. ἀριθ.} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \delta + \text{θετ. ἀριθ.}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὐ-

ρίσκομεν $\alpha\gamma = \beta\delta + \beta \cdot \text{θετικόν} + \delta \cdot \text{θετ.} + \text{θετ.} \times \text{θετικόν}$. Δηλαδή :

$$\alpha\gamma - \beta\delta = \text{θετικός αριθμός. Έπομένως είναι } \alpha\gamma > \beta\delta.$$

Κατά ταῦτα, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω : $\alpha \cdot \alpha > \beta \cdot \beta$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2$. Ὀμοίως εὐρίσκομεν $\alpha^3 > \beta^3$ καὶ γενικῶς $\alpha^\mu > \beta^\mu$, (μ φυσικὸς ἀριθμὸς).

Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $\alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$, ἂν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ φυσικὸς ἀριθμὸς.

Διότι, ἀφοῦ εἶναι $\alpha > \beta$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\beta}$, εὐρίσκομεν $\frac{\alpha}{\alpha \cdot \beta} > \frac{\beta}{\alpha \cdot \beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$. Ὀμοίως εὐρίσκομεν $\alpha^{-2} < \beta^{-2}$, καὶ γενικῶς $\alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$, (μ φυσικὸς).

Οὕτως ἂν $|\alpha| > |\beta|$, θὰ εἶναι $|\alpha|^{\mu} > |\beta|^{\mu}$ καὶ $|\alpha|^{-\mu} < |\beta|^{-\mu}$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

68. Δείξατε ὅτι, ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Τί συμβαίνει, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀρνητικοί ;

69. α') Δείξατε ὅτι, ἐὰν εἶναι $\alpha > 1$, θὰ εἶναι $\alpha^\mu < 1$, ἂν τὸ μ < 0 .

β') Ἐὰν εἶναι $0 < \alpha < 1$, θὰ εἶναι $\alpha^\mu > 1$, ἂν τὸ μ < 0 .

γ') Ἐὰν εἶναι $\alpha > 1$, θὰ εἶναι $\alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^0 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3$.

70. Δείξατε ὅτι, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἀλλὰ $\alpha < 1$, θὰ εἶναι $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^0 > \alpha > \alpha^2 > \alpha^3$.

71. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ ποία ἀνισότης συνδέει αὐτὰ, τὰ προκύπτουντα ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν μελῶν τῆς $-8 > -23$ διὰ 2, $-\frac{1}{5}$, $-0,58$.

72. Νὰ εὐρεθῇ διὰ τίνος τιμῆς τοῦ x ἰσχύουσιν αἱ

$$-5x < 30, 3x < 39, (-3) \cdot (-2) \cdot x < -4,8 \cdot (-22).$$

73. Νὰ εὐρεθῇ τίνος τιμῆς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ x, ἵνα ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης

$$\frac{3}{4} \cdot x < -\frac{5}{8}, -0,6x < -32, -0,8 \cdot (-3) \cdot x < 120 \cdot \frac{4}{5},$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-0,6) \cdot x < -\frac{2}{5} \cdot (0,4) \cdot (-0,2).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου I.

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας

καὶ σύντομος ἱστορικὴ ἐπισκόπηση αὐτῆς (διάκρισις τριῶν περιόδων ἀναπτύξεως τῆς Ἀλ-

Σύμβολα

+ (σύν ἢ καὶ) προσθέσεως

- (πλὴν) ἀφαιρέσεως

+ σῆμα ἢ πρόσσημον θετ. ἀριθ.

γέβρας· περίοδος ρητορική, συγκεκομμένη, συμβολική).

Διόφαντος. "Ελλην μαθηματικός (4ον αιώνα π.Χ.), ό θεμελιωτής τής 'Αλγέβρας.

Θετικοί καί άρνητικοί άριθμοί, $|α|$ θετικός, $-|α|$ άρνητικός
'Ορισμός σχετικῶν άριθμῶν (τό σύνολον τῶν θετικῶν, άρνητικῶν καί τό 0).

— σῆμα ἢ πρόσσημον άρν. άριθμ.
 $|α|$ άπόλυτος τιμή σχετ. άριθμ. α
 $|α|$ = θετικός άριθμός
 $-|α|$ = άρνητικός άριθμός
= ἴσον, $\neq$ διάφορον

$$\begin{aligned} + \cdot + &= +, & - \cdot - &= +, & + \cdot - &= - \\ & & - \cdot + &= - \\ + : + &= +, & - : - &= +, & + : - &= - \\ & & - : + &= - \end{aligned}$$

'Ορισμός άθροίσματος σχετικῶν άριθμῶν. 'Ιδιότητες τής προσθέσεως.

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$2) \alpha + \beta + \gamma + \delta = \beta + \delta + \alpha + \gamma = \dots$$

$$3) \alpha + \beta + \gamma + \delta = (\delta + \beta) + \gamma + \alpha = \dots \quad 4) \alpha + (\beta + \gamma) + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

'Ο όρισμός τής αφαιρέσεως σχετικῶν άριθμῶν β άπό άλλον α, ἤτοι $\alpha - \beta$, $0 - \alpha = -\alpha$.

'Ακολουθία δύο συμβόλων + ἢ -: άν εἶναι τὰ αὐτὰ = +, άν εἶναι άντίθετα = -.

'Ορισμός άλγεβρικοῦ άθροίσματος $\alpha - (+\beta) - (+\gamma) - (-\delta) = \alpha - \beta - \gamma + \delta$.

Τοῦτο τρέπεται εἰς άθροισμα σχετικῶν άριθμῶν $\alpha - \beta - \gamma + \delta = \alpha + (-\beta) + (-\gamma) + (+\delta)$.

Δι' άλγεβρικόν άθροισμα ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τής προσθέσεως. Σημασία παρενθέσεως ἢ άγκύλης μέ προσθετέους έντός αὐτῆς

$$\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha + (-\beta + \gamma - \delta).$$

Πολλαπλασιασμός δύο σχετικῶν άριθμῶν. Τό γινόμενον δύο όμοσήμων εἶναι θετικόν. Τό γινόμενον δύο έτεροσήμων εἶναι άρνητικόν. 'Ιδιότητες τοῦ γινομένου σχετικῶν άριθμῶν.

$$1) \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \text{ (νόμος τής άλλαγῆς τής θέσεως τῶν παραγόντων).}$$

$$2) (\alpha + \beta + \gamma) \rho = \alpha \rho + \beta \rho + \gamma \rho \text{ (έπιμεριστικός νόμος).}$$

$$3) \alpha \beta \gamma \delta = (\alpha \beta) \cdot \gamma \delta = (\alpha \gamma) \cdot \beta \delta. \quad 4) \alpha \cdot (\beta \gamma) \cdot \delta = \alpha \beta \gamma \delta.$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \alpha \cdot (-1) = -\alpha.$$

Διαιρέσεις σχετικῶν άριθμῶν α δι' άλλου β ($\neq 0$) $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$

Τὸ πηλίκον ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικόν,
τὸ πηλίκον ἑτεροσήμων εἶναι ἀρνητικόν.

Διαιρέσεις διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος.

Ὁρισμός δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

$\alpha^{\mu} = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha$, $|\mu|$ παράγοντες

$\alpha^{-|\mu|} = \frac{1}{\alpha^{|\mu|}}$, $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, μ, ν ἀκέραιοι ἀριθμοί.

$\alpha^0 = 1$, ($\alpha \neq 0$), $\alpha^1 = \alpha$, $(-1)^2 = +1$, $(-1)^{2\nu+1} = -1$,
(-1) $^{\nu} = \pm 1$ (+ ἂν ν ἄρτιος, - ἂν ν περιττός)

$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, μ, ν , σχετικοὶ ἀκέραιοι.

Ἀνισότητες μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν.

$|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$, ἂν $\alpha - \beta > 0$, $\alpha > \beta$, ἂν $\alpha < \beta$, $\gamma > \delta$, τότε
 $\alpha + \gamma > \beta + \delta$, ἂν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha < -\beta$, ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha|\lambda| > \beta|\lambda|$.
ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha \cdot (-|\lambda|) < \beta \cdot (-|\lambda|)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Α'. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 49. Ἀλγεβρική παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων (χρησιμοποιοιμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας πρὸς παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων) ἢ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων συνδεομένων μὲ ἀλγεβρικά σύμβολα τῶν πράξεων.

Ἐάν δοθοῦν οἱ σχετικοὶ γενικοὶ ἀριθμοὶ π.χ. α , β , γ , καὶ προστεθοῦν οἱ α , καὶ β , εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων προστεθῇ ὁ γ , θὰ ἔχωμεν (ὡς γνωστόν,) ἐξαγόμενον $(\alpha+\beta)+\gamma$, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ **ἀλγεβρικός τύπος**.

Ἐάν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β ἀφαιρεθῇ ὁ γ , θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\beta)-\gamma$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐπίσης ἀλγεβρικός τύπος.

Τὸ $\alpha-(\beta-\gamma)$ λέγεται ἀλγεβρικός τύπος, φανερώνει δέ, ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορά $\beta-\gamma$.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha$ παριστάνομεν συντόμως μὲ τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον 3α . Ὀμοίως γράφομεν ἐπίσης $\underbrace{\alpha+\alpha+\dots+\alpha}_{\mu \text{ προσθετέοι}} = \alpha\mu$,

τό δὲ $\underbrace{-\alpha-\alpha-\alpha\dots-\alpha}_{\nu \text{ προσθετέοι}} = -\nu\alpha$, τὸ $-\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} = -\frac{5}{3}\alpha$

Τὰ διάφορα σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν Ἀλγεβραν διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ πρόσημον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ σύν (+) ἢ τὸ πλὴν (-), τὸ γινόμενον ($\cdot$), τὸ πηλίκον ($:$), τὸ ἄθροισμα (+), τὴν διαφοράν (-), τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ($\sqrt{}$) ἀριθμῶν, τὸ ἴσον (=), τὸ διάφορον ($\neq$), τὸ μεγαλύτερον (>) κ.τ.λ. καλοῦμεν **ἀλγεβρικά σύμβολα**.

Οὕτως ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις εἶναι αἱ: $(\alpha+\beta)$, $6\alpha+\beta-8\gamma$, α , 5α , $\beta\cdot\gamma$, $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$, $(-5-3):6+13-10$, $6\alpha^2-\alpha$.

Ἐκ τούτων ἡ $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β . Ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει, τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$. Ἡ παράστασις α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α , κ.τ.λ.

§ 50. Δύο άλγεβρικοί παραστάσεις λέγονται **ισοδύναμοι**, εάν προκύπτει ή μία από την άλλην διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ιδιοτήτων τῶν πράξεων. Οὕτω π.χ. αἱ $\alpha^2 + \alpha\beta$ καὶ $\alpha(\alpha + \beta)$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι, ἂν εἰς τὴν δευτέραν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦ α ἐπὶ τὸ $(\alpha + \beta)$, εὐρίσκομεν τὴν πρώτην $\alpha^2 + \alpha\beta$. Ἐπίσης αἱ $\alpha + \beta$ καὶ $\beta + \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Τὴν ἰσότητα δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλοῦμεν **ταυτότητα** καὶ σημειώνομεν αὐτὴν ἐνίοτε καὶ μὲ τὸ σύμβολον $\equiv$ τιθέμενον μεταξύ τῶν ἰσοδυνάμων παραστάσεων, π.χ. $\alpha^2 + \alpha\beta \equiv \alpha(\alpha + \beta)$, $\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha$, ἀπαγγέλλομεν δὲ οὕτως, α^2 σὺν $\alpha\beta$ ἰσοδύναμον τοῦ α ἐπὶ α σὺν β , τὸ α σὺν β ἰσοδύναμον τοῦ β σὺν α .

1. ΕΙΔΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 51. Ἀλγεβρική παράστασις λέγεται **ρητή***, εάν ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων τῆς εἶναι σημειωμένη ρίζα τις. Καθὼς αἱ :

$$\alpha, \quad 3\alpha\sqrt{3}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + \alpha^2\beta, \quad \frac{x}{3\sqrt{13}} + \psi.$$

Παράστασις ἀλγεβρική λέγεται **ἄρρητος***, εάν δὲν εἶναι ρητή. Π.χ. αἱ $\alpha + \sqrt{\beta}$, $\alpha - \sqrt{\alpha^5 \cdot \beta}$, $6\sqrt{\chi + \psi}$ εἶναι παραστάσεις ἄρρητοι.

Ἀλγεβρική παράστασις λέγεται **ἀκεραία**, εάν δὲν περιέχῃ διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων τῆς π.χ. αἱ παραστάσεις $\alpha + \beta$, $8\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^2\beta + \gamma$, $\frac{4}{5}\alpha^2$ λέγονται ἀκεραῖαι.

Κλασματική λέγεται μία ρητὴ παράστασις ἀλγεβρική, ἂν περιέχῃ διαίρεσιν τοῦλάχιστον δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων τῆς π.χ. αἱ κατωτέρω :

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2 - \beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{3\alpha^2}{5} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}, \quad 3\alpha^{-2}$$

λέγονται **κλασματικαὶ ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα**, ἐπεὶδὴ ἡ πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β , ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $\alpha + \beta$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ α^2 κ.ο.κ.

* Ἀσκήσεις

74. Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ρηταί ; ἄρρητοι, ἀκεραῖαι ; κλασματικά ; Διατί ;

* Εἰς Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον ὀφείλονται αἱ ὀνομασίαι ρητὴ, ἄρρητος.

$$\alpha') 9\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 \quad \beta') \sqrt{28\alpha^2\beta} \quad \gamma') 8\sqrt{\chi\psi} - 9\alpha \quad \delta') \frac{\alpha}{\beta} + \frac{19\beta}{\gamma}$$

75. Αι παραστάσεις $\alpha') \sqrt{\alpha^2}$ $\beta') \sqrt{(\alpha + \beta)^2}$ $\gamma') \frac{7\gamma}{\sqrt{8^3}}$ είναι ρηταί ή άρ-

ρητοί; Διατί; $\delta')$ Εύρετε παραστάσεις, αι όποια φαινομενικώς είναι άρρητοι.

76. Αι κατωτέρω παραστάσεις είναι άκέραιαι ή κλασματικάί; Διατί;

$$\alpha') \frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha} \quad \beta') \frac{16\alpha(\alpha - \beta)^2}{(\alpha - \beta)} \quad \gamma') \frac{6\gamma^2 \cdot x \cdot \psi^2}{5\gamma \cdot x \cdot \psi^2} \quad \delta') \frac{3\alpha^2 + \beta}{\alpha\beta}$$

2. ΠΕΡΙ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 52. Μονώνυμον λέγεται άλγεβρική παράστασις, εις την οποίαν ούτε πρόσθεσις ούτε άφαιρέσις εύρίσκεται σημειωμένη.

Π. χ. αι παραστάσεις: α , $-6\chi\psi^2$, $\frac{3}{7}\alpha\beta\gamma\delta$, $-\frac{8\alpha\beta}{9\gamma\delta}$ λέγονται μονώνυμα.

Άκέραιον λέγεται έν μονώνυμον, εάν μόνον πολλαπλασιασμόν επί τών γραμμάτων του περιέχη. Εάν δέ περιέχη καί διαίρεσιν τουλάχιστον δι' ένός τών γραμμάτων του, λέγεται **κλασματικόν** μονώνυμον. Ούτως, εκ τών άνωτέρω μονωνύμων τὰ μέν τρία πρώτα είναι άκέραια, τὸ δέ τελευταίον κλασματικόν.

Ρητόν λέγεται έν μονώνυμον, αν δέν έχη ρίζαν εις έν τουλάχιστον τών γραμμάτων του. Ούτω τὰ $\frac{3\alpha^2\beta}{\gamma}$, $\sqrt{5\alpha^2\beta}$ είναι ρητά μονώνυμα.

Άρρητον λέγεται έν μονώνυμον, αν δέν είναι ρητόν.

Εάν εις τὸ μονώνυμον ύπάρχη αριθμητικός τις παράγων γράφεται ούτος πρώτος καί λέγεται (**αριθμητικός**) **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου. Ούτως, εις τὰ άνωτέρω μονώνυμα οί συντελεσταί κατά σειράν είναι οί: $1, -6, \frac{3}{7}, -\frac{8}{9}$.

Τὸ άλλο μέρος τοῦ μονωνύμου δύναται νά λέγεται **κύριον ποσόν** αὐτοῦ, είναι δέ αὐτό, εις τὰ άνωτέρω μονώνυμα κατά σειράν

$$\alpha, \chi\psi^2, \alpha\beta\gamma\delta, \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Εις τὰ μονώνυμα, τὰ (φαινομενικώς) μὴ έχοντα (αριθμητικόν) συντελεστήν, έννοοῦμεν τοιοῦτον τὸν $+1$, ή -1 . Π.χ. τοῦ

α (ἀριθμητικός) συντελεστής είναι $+1$, διότι ο α δύναται νὰ γραφῇ $1 \cdot \alpha$, ἐνῶ τοῦ $-\alpha$ εἶναι ὁ -1 , ἐπεὶ γράφεται $-1 \cdot \alpha$.

Ἄν ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἐνὸς ἀριθμητικοὶ παράγοντες εἰς ἓν μονώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς μὲ τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον γράφεται ὡς πρῶτος παράγων αὐτοῦ καὶ εἶναι ὁ ἀριθμητικός συντελεστής τοῦ μονωνύμου. Οὕτως, ἂν ἔχωμεν $-\alpha^2\beta \cdot \frac{4}{5}\gamma^3$, γράφομεν $(-1) \cdot \frac{4}{5}\alpha^2\beta \cdot \gamma^3$ ἢ $-\frac{4}{5}\alpha^2\beta\gamma^3$ καὶ ὁ $-\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμητικός συντελεστής τοῦ μονωνύμου τούτου.

Καλοῦμεν συντελεστήν ἐνὸς γράμματος (ἢ τοῦ γινομένου περισσότερων παραγόντων μονωνύμου) τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ, π.χ. εἰς τὸ $\alpha^3\chi^2$, συντελεστής τοῦ χ^2 εἶναι ὁ α^3 , εἰς τὸ $-3\alpha^2\beta\chi\psi$ συντελεστής τοῦ $\chi\psi$ εἶναι τὸ $-3\alpha^2\beta$.

Δύο μονώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ἂν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σῆμα τῶν (ἀριθμητικῶν) συντελεστῶν αὐτῶν, ὡς τὰ $25\alpha^2$ καὶ $-25\alpha^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τοῦ $7\alpha^3\beta$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 1, τοῦ $\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2\gamma$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμὸς του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶναι 0. Π.χ. τὸ μονώνυμον $3\alpha^2$ εἶναι 0 βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β . Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3\alpha^2$ τὸ $3\alpha^2\beta^0$, ἐπεὶ εἶναι $\beta^0 = 1$. Καὶ τῷ ὄντι, εἶναι $3\alpha^2\beta^0 = 3\alpha^2 \cdot 1 = 3\alpha^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα τοῦ ἐνὸς γράμματά του, λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποῖους ἔχουν τὰ γράμματα αὐτὰ εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τὸ μονώνυμον $\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β , τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ β καὶ γ , τρίτου ὡς πρὸς τὰ α καὶ γ , καὶ ἑκτοῦ ὡς πρὸς τὰ α, β, γ .

Άσκησης

77. Εύρετε τὸν συντελεστήν καὶ τὸ κύριον ποσὸν ἐκάστου τῶν κάτωθι μονωνύμων :

$$\begin{array}{llll} \alpha) 3\alpha^2\beta^3 & \beta) -5\alpha^4\beta^6 & \gamma) -\alpha & \delta) -3x\psi^2 \\ \epsilon) 2x^2 & \sigma\tau) -\frac{4}{5}x^3 & \zeta) -\frac{x^3}{4} & \eta) 0,1 \cdot x^2 \\ \theta) -4,56x^3 & \iota) -\frac{3}{4}\alpha^2 & \iota\alpha) -\frac{5}{8}\alpha^25\beta \cdot (-8)\beta^2 & \end{array}$$

78. Ὅμοιως τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν τῶν κάτωθι, καθὼς καὶ τὸν συντελεστήν τοῦ α , τοῦ x^3 , τοῦ β^2 :

$$\alpha') \frac{5}{8}\alpha\beta \quad \beta') -\frac{x}{3} \quad \gamma') -\frac{21}{4}x^3 \quad \delta') 3,4x^2 \quad \epsilon') \frac{5}{6}\alpha\beta^2$$

79. Ὅμοιως τῶν κάτωθι, τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν καὶ τὸν συντελεστήν τοῦ α , τοῦ x , τοῦ β , τοῦ ψ , τοῦ x^2 :

$$\begin{array}{llll} \alpha') 2 \cdot (-3) \cdot 4\psi & \beta') -25\alpha \cdot 6 \cdot \beta & \gamma') 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)x \cdot (-7)\psi & \delta') \frac{3\alpha^2\beta}{4\alpha\gamma} \\ \epsilon') -\frac{4x}{\psi} & \sigma\tau') -\frac{5x^2}{\psi^2} & \zeta') -\frac{2}{5}x^2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)\psi & \eta') \frac{2}{3}x \cdot (-4) \cdot (3\alpha x) \end{array}$$

80. Τίνος βαθμοῦ εἶναι καθέν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς πρὸς α , ὡς πρὸς β , ὡς πρὸς γ , ὡς πρὸς α καὶ β , ὡς πρὸς α , β , γ ;

$$\alpha) 15\alpha^2\beta\gamma^2 \quad \beta') 121\alpha^3\beta^2\gamma \quad \gamma) -24\alpha\beta^3\gamma^4 \quad \delta) -13\alpha^3\beta^2\gamma^4$$

81. Ὅρίσατε ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τῶν ἀσκήσεων 79 εἶναι ἀκέραια καὶ ὀρίσατε τίνος βαθμοῦ εἶναι καθέν : $\alpha')$ ὡς πρὸς α , $\beta')$ ὡς πρὸς β , $\gamma')$ ὡς πρὸς x , $\delta')$ ὡς πρὸς ψ , $\epsilon')$ ὡς πρὸς α καὶ β , $\sigma\tau')$ ὡς πρὸς x καὶ ψ .

I. ΟΜΟΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

§ 53. Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν, διαφέρουν δὲ κατὰ τοὺς (ἀριθμητικούς) συντελεστάς των (ἂν διαφέρουν). Οὕτω τὰ μονώνυμα $6\alpha, \frac{2}{8}\alpha, -23\alpha$ εἶναι ὅμοια, ὡς διαφέροντα μόνον κατὰ τοὺς (ἀριθμητικούς) συντελεστάς των. Ἐπίσης τὰ $-\frac{39}{47}\beta, 6\beta, -17\beta$ εἶναι ὅμοια, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθὼς καὶ τὰ $12\alpha^2\beta, -15\alpha^2\beta, 23\alpha^2\beta, -\alpha^2\beta$, ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $\alpha^2\beta$.

Μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα αὐτῶν, ἂν ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Ούτω τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta\gamma$, $-6\alpha^2\beta\delta^2$, $218\alpha^2\beta\delta$ είναι ὁμοία ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτῶν α καὶ β .

II. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 54. Καλοῦμεν **ἄθροισμα** δοθέντων μονωνύμων (ἢ καὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) τὴν ἀλγεβρικήν παράστασιν, ἡ ὁποία προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τὰ δοθέντα μονώνυμα (ἢ τὰς δοθείσας παραστάσεις) τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, καθέν μετὰ τὸ πρὸ αὐτοῦ σήμα.

Οὕτως ἡ πρόσθεσις τῶν μονωνύμων $4\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^2}$ δίδει ὡς ἄθροισμα τὸ $4\alpha^2 - 15\beta^2 + \frac{6}{\gamma^2}$.

Ἡ πράξις, μετὰ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν λόγῳ μονωνύμων (ἢ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

§ 55. Τὸ **ἄθροισμα** δοθέντων ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὁμοίον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστήν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων.

Ἔστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων 3α καὶ 4α . Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ $3\alpha + 4\alpha$, τὸ ὁποῖον $=$ μετὰ $(3+4)\alpha$. Διότι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον (κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον), εὐρίσκομεν $(3+4)\alpha = 3\alpha + 4\alpha$.

Ἐπίσης ἔχομεν π.χ. $-3\alpha + 4\alpha + \frac{2}{3}\alpha - 13\alpha = (-3 + 4 + \frac{2}{3} - 13)\alpha$, καί, ἐπειδὴ εἶναι $-3 + 4 + \frac{2}{3} - 13 = -12 + \frac{2}{3} = -\frac{36}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$, ἔπεται ὅτι ἔχομεν ἐξαγόμενον τὸ $-\frac{34}{3}\alpha$.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $-\frac{3}{4}\alpha^2$, $\frac{5}{8}\alpha^2$, $4\alpha^2$, $-7\alpha^2$ εἶναι :

$$-\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{5}{8}\alpha^2 + 4\alpha^2 - 7\alpha^2 = \left(-\frac{6}{8} + \frac{5}{8} - 3\right)\alpha^2 = \left(-\frac{1}{8} - 3\right)\alpha^2 = -3\frac{1}{8}\alpha^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $\chi^2\psi$, $-3\chi^2\psi$, $7\chi^2\psi$ $-\frac{4}{9}\chi^2\psi$ εἶναι :

$$\chi^2\psi - 3\chi^2\psi + 7\chi^2\psi - \frac{4}{9}\chi^2\psi = \left(1 - 3 + 7 - \frac{4}{9}\right)\chi^2\psi = \left(5 - \frac{4}{9}\right)\chi^2\psi = 4\frac{5}{9}\chi^2\psi.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων $+2\alpha^2\beta$, $-6\alpha^2\beta$, $+13\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$ εἶναι :

$$2\alpha^2\beta - 6\alpha^2\beta + 13\alpha^2\beta - \alpha^2\beta = (2 - 6 + 13 - 1)\alpha^2\beta = 8\alpha^2\beta.$$

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων, μὲ τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶνται αὐτὰ μὲ ἓν τοιοῦτο ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμὰ τῶν καλεῖται **ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων**.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

82. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α') $9\mu + 4\mu$	β) $-10\mu + (-6\mu)$	γ) $-4\mu + 6\mu$	δ) $5\mu + (-9\mu)$
ε) $8\alpha + \alpha + 9\alpha$	στ) $\rho - 7\rho + (6\rho - 3\rho)$	ζ') $7x + (-8x) + 6x + x$	
	η') $9\alpha + (-6\alpha + \alpha)$	θ') $-x + 9x + [(-6x) + 9x]$	

83. Εὐρετε τὸ ἐξαγόμενον τῶν :

α') $3x^2 - 5x^2 + 8x^2 - 3x^2$	β') $4\alpha x^3 - 4\beta x^3 - 5\gamma x^3$
γ') $3\alpha^2\beta x^2 - 2\alpha^2\beta x^3 - 6\alpha^2\beta x$	δ') $4x\psi^3 - 5x^2\psi^5 + 3x^3\psi^3 - 10x^4\psi^3$

$$\epsilon') \frac{5}{2} x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{2} \alpha^2 - 2x^2 + \alpha x + 1 \frac{1}{2} \alpha^2$$

84. Ἐκτελέσατε τὴν ἀναγωγὴν μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι καὶ εὐρετε τὸ ἄθροισμὰ τῶν :

$$7 \frac{3}{4} x^2\psi, -x, 19 \frac{3}{8} \phi^2, 1,75x, -8 \frac{3}{8} \psi.$$

$$5 \frac{5}{12} x, -1,125\psi, -0,25x^2\psi, 0,625\phi^2.$$

85. Νὰ γίνη ἡ ἀναγωγὴ μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι

$$\alpha') 3\alpha^2\beta, -8\chi\psi^3, 3\alpha^2\beta, 32\chi\psi^3, 0,35\alpha^2\beta, -0,25\chi\psi^3, -0,5\alpha^2\beta.$$

$$\beta') 30\chi\psi^2, -24\alpha^2\beta^3\gamma, 16\chi\psi^2, -12,3\alpha^2\beta^3\gamma, -0,75\alpha^2\beta^3\gamma,$$

$$\gamma') -6\alpha^2\beta\gamma, 12\alpha^2\beta\gamma, -7\alpha^2\beta\gamma, -3,6\alpha^2\beta\gamma, 0,3\alpha^2\beta\gamma, 7,5\alpha^2\beta\gamma.$$

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 56. Καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκύπτον, ἔαν τὰ εἰς τὴν παράστασιν ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν, μὲ ἀριθμούς ὠρισμένους καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται εἰς αὐτήν.

(Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων, θὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε ὁ μὲν παρονομαστής τῆς παραστάσεως, ἔαν ἔχη τοιοῦτον, νὰ μὴ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδέν, ἡ δὲ ὑπὸ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ποσότης νὰ λαμβάνῃ τιμὴν θετικὴν ἢ μηδέν).

Οὕτω, ἐὰν εἶναι $\alpha = 3$, ἡ παράστασις 4α ἔχει τὴν τιμὴν $4 \cdot 3 = 12$.

Ἡ παράστασις $\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, ὅταν $\alpha = 3$, ἔχει τὴν τιμὴν $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$, ἡ παράστασις $\frac{9}{14} \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{9}{14} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 135$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 5$, ἡ παράστασις $3\alpha^2 + 2\gamma - 5\beta$ ἔχει τὴν τιμὴν $3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 12 + 10 - 5 = 17$.

Ἐὰν εἶναι $x = 2$, $\psi = 3$, $\omega = 4$, ἡ παράστασις $\frac{8x^2\psi}{3\omega^3}$ ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{2}$.

Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἰσοδύναμοι δίδουν ἴσους ἀριθμούς, ὅταν τὰ γράμματά των ἀντικατασταθοῦν μὲ τὰς αὐτάς, ἀλλὰ ὁποιασδήποτε τιμὰς.

Π.χ. αἱ $\alpha + \beta$ καὶ $\beta + \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι παραστάσεις καὶ δίδουν ἴσους ἀριθμούς, ἂν τεθῇ π.χ. $\alpha = 1$, $\beta = -5$, ὅτε $\alpha + \beta = 1 - 5 = -4 = -5 + 1$.

Ἀσκήσεις

86. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

$$\alpha') -6x + 7\psi + (-3x),$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 3, \psi = 4$$

$$\beta') -9x + (-7\psi) + (-3\psi) + (-6x)$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 3, \psi = -4$$

87. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

$$\alpha') \alpha^3 - 6\alpha^2\beta + \beta^3,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } \alpha = 2, \beta = 6.$$

$$\beta') \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta)}{6\alpha - 2\beta},$$

$$\text{ὅταν εἶναι } \alpha = 2, \beta = 5.$$

88. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

$$\alpha') (\alpha + \beta) \cdot [\alpha^2 - (\beta^2 - 6\alpha\gamma)],$$

$$\text{ὅταν εἶναι } \alpha = -5, \beta = 2, \gamma = -3$$

$$\beta') \sqrt{\alpha^3 - 2\beta} - 4\gamma - 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta} \cdot (\alpha + \gamma) \quad \text{ὅταν εἶναι } \alpha = 9, \beta = -4, \gamma = 3$$

89. Ἐὰν τεθῇ $\varphi(x) = 3^x$, νὰ δεიχθῇ, ὅτι εἶναι $\varphi(2) \cdot \varphi(4) = \varphi(6)$

90. Ἐὰν τεθῇ $\varphi(x) = 4x^2 + 4x - 3$ καὶ $\psi(x) = 9(x + 8)$, δείξατε, ὅτι $\varphi(5) = \psi(5)$

91. Ἐὰν $\varphi(x, \psi, z) = (x + \psi + z)(x + \psi - z)(x - \psi - z)$ δείξατε ὅτι:

$$\varphi(0, 1, 2) + \varphi(0, -1, -2) = 0.$$

4. ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 57. Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονώνυμων (τὰ ὅποια δὲν εἶναι πάντα ὅμοια).

Π.χ. τὸ $\frac{3\alpha\beta}{\gamma} + 5\alpha^3 - \frac{6\alpha^2\gamma}{3\beta} + 15$ εἶναι πολυώνυμον καὶ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονώνυμων $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$, $5\alpha^3$, $-\frac{6\alpha^2\gamma}{3\beta}$, 15.

Ἐν πολυώνυμον λέγεται **ρητόν**, ἐὰν ἕκαστον τῶν προσθετέων του μονώνυμων εἶναι ρητόν.

Ἀκέραιον λέγεται ἓν πολυώνυμον, ἐὰν ὅλοι οἱ προσθετέοι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα. **Ἄρρητον** λέγεται ἓν πολυώνυμον, ἂν τουλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι μονώνυμον ἄρρητον, καὶ τέλος **κλασματικὸν** λέγεται, ἐὰν τοῦλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι κλασματικὸν μονώνυμον.

Οὕτω τὸ $3\alpha^2 + 5\alpha\beta\gamma - 13\gamma^2$ λέγεται ἀκέραιον πολυώνυμον, εἶναι δὲ ἄθροισμα τῶν μονώνυμων: $3\alpha^2$, $5\alpha\beta\gamma$, $-13\gamma^2$.

Τὸ $\frac{3}{4}x^2\psi + \frac{5}{8}\frac{x^3}{\psi} - \frac{4}{9}\psi^2 + 6$ λέγεται ρητόν πολυώνυμον

Τὸ $\sqrt{x} + 4x^2 - 6\sqrt{x-7}$ λέγεται ἄρρητον πολυώνυμον.

Ὅμοίως τὸ $-\frac{3}{4x} - \frac{5}{8}x^2 + \frac{4}{9}\frac{x}{\psi} - 7$ λέγεται κλασματικὸν πολυώνυμον.

Ἐκαστον μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ **ὅρος** αὐταῦ, δύναται δὲ εἷς ὅρος νὰ εἶναι ἀριθμὸς τις σχετικὸς.

Εἷς τοιοῦτος ὅρος δύναται νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ἔχει γράμματα καὶ καθὲν μὲ ἐκθέτην μηδέν, ἢ νὰ θεωρηθῇ ὡς μονώνυμον βαθμοῦ 0 ὡς πρὸς οἰαδήποτε γράμματα.

Ὁρος πολυωνύμου λέγεται συνήθως θετικὸς μὲν ἐὰν ἔχη ἀριθμητικὸν συντελεστήν θετικόν, ἀρνητικὸς δὲ ἐὰν ἔχη ἀρνητικὸν ἀριθμητικὸν συντελεστήν.

Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται **διώνυμον** μὲν, ἐὰν ἔχη δύο ὅρους, καθὼς τὰ $\alpha + \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$, $x^2 + 6$, **τριώνυμον** δέ, ἐὰν ἔχη τρεῖς ὅρους, καθὼς τὰ $x^2 + \lambda x - 8$, $\alpha + \beta - \gamma$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

§ 58. Δοθέντος ἀκεραίου πολυωνύμου καλοῦνται **ὅμοιοι ὅροι**, τὰ ὅμοια μονώνυμα αὐτοῦ.

Δοθέντος άκεραίου πολυωνύμου με όμοίους όρους δυνάμεθα ν' άντικαταστήσωμεν αύτούς με τó άλγεβρικόν άθροισμά των.

Ούτω π.χ. εις τó άκεραιον πολυώνυμον $6\alpha\psi^3 + \frac{3}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 - 7\alpha\psi^3 + 2\alpha^2\psi^2$ οί όροι $6\alpha\psi^3$, $\frac{3}{5}\alpha\psi^3$, $-7\alpha\psi^3$ είναι όμοιοι και έχουν άλγεβρικόν άθροισμα $(6 + \frac{3}{5} - 7)\alpha\psi^3 = -\frac{2}{5}\alpha\psi^3$. Άντικαθιστῶμεν λοιπόν εις τó δοθέν πολυώνυμον τούς τρείς όμοίους όρους του με τó $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3$ και έχομεν, αντί του δοθέντος, τó άκεραιον πολυώνυμον $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 + 2\alpha^2\psi^2$, τó όποϊον λέγεται **άνηγμένον** πολυώνυμον του δοθέντος και είναι ίσοδύναμον αύτου.

Τήν ίσοδυναμίαν συμβολίζομεν ένίστε και με τó $\equiv$ (σύμβολον τής ταυτότητος), ήτοι θέτομεν :

$$6\alpha\psi^3 + \frac{3}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 - 7\alpha\psi^3 + 2\alpha^2\psi^2 \equiv -\frac{2}{5}\alpha\psi^3 - 2\alpha^3\psi - \psi^4 + 2\alpha^2\psi^2$$

$$\text{Όμοίως έχομεν π.χ. } 5\chi^3\psi + \chi^4 - 3\chi^3\psi + 2\chi^4 - 5\chi^2\psi^2 + \chi^3\psi - 2\chi^2\psi^2 \equiv (1+2)\chi^4 + (5-3+1)\chi^3\psi + (-5-2)\chi^2\psi^2 \equiv 3\chi^4 + 3\chi^3\psi - 7\chi^2\psi^2.$$

§ 59. Βαθμός άκεραίου πολυωνύμου ως πρὸς έν γράμμα του, λέγεται ό μέγιστος τῶν έκθετῶν τούς όποίους έχει τó γράμμα τούτο εις τούς όρους του πολυωνύμου. Έάν ό έκθέτης ούτος είναι 1, 2, 3, τó πολυώνυμον λέγεται **πρώτου, δευτέρου, τρίτου... βαθμοῦ** ως πρὸς τó γράμμα τούτο. Ούτω τó $3\alpha^2 - 5\alpha\beta\gamma - 12\gamma^3$ είναι δευτέρου βαθμοῦ ως πρὸς α και τρίτου ως πρὸς γ, πρώτου δέ ως πρὸς β.

Βαθμός άκεραίου πολυωνύμου ως πρὸς δύο, τρία . . . γράμματα αύτου, καλεῖται ό μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ως πρὸς τά γράμματα ταῦτα.

Ούτω τó $3\chi^2 - 2\chi\psi + 2\chi - 7$ είναι δευτέρου βαθμοῦ ως πρὸς τά χ και ψ. Τό $5\alpha^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 13\beta\gamma$ είναι τετάρτου βαθμοῦ ως πρὸς α, β, γ, και τρίτου ως πρὸς β, γ.

Έστω τó άκεραιον πολυώνυμον $8\chi + \chi^2 + 16$. Έάν γράψωμεν αύτό, ὥστε οί έκθέται του γράμματος χ νά βαίνουν αύξανόμενοι άπό όρου εις όρον, δηλαδή ως εξής : $16 + 18\chi + \chi^2$, λέγομεν ότι τó πολυώνυμον τούτο είναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς άνιούσας δυνάμεις του γράμματος χ**. Όμοίως, εάν γράψωμεν αύτό, ὥστε οί

ἐκθέται τοῦ χ νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ οὕτω : $\chi^2 + 8\chi + 16$, λέγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ , ἀνηγμένον.

Ἐν γένει πᾶν πολυώνυμον δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς τὸ ἀνωτέρω, κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

92. Τὰ κάτωθι πολυώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς α , ὡς πρὸς x ; ὡς πρὸς α καὶ x ; Διατάξτε αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ τὰς κατιούσας τοῦ x , μετὰ τὰς δυνατὰς ἀναγωγάς.

$$\alpha') 3\alpha^2x^4 - 6\alpha x^6 - 28\alpha^3x^3 + 27\alpha^6 + x^6 - 54\alpha^5x + 9\alpha^4x^2$$

$$\beta') -3x^6 - \alpha^6 + 7\alpha x^5 + 27\alpha^5x + 0,7\alpha^4x^2 - 0,7\alpha^2x^4 - \alpha^3x^3$$

$$\gamma') 16x^6 + \frac{2}{3}\alpha x^5 + 15\alpha^5x + 7\alpha^6 - 7\alpha^6 - 7\alpha^4x^2 + \frac{1}{12}\alpha^2x^4 - 11\alpha^3x^3$$

$$\delta') -2\alpha^5x - 3x^6 + 13\alpha^6x + 3\alpha^6 - \frac{5}{2}\alpha^2x^4 + 6\alpha^3$$

Β'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 60. Καλοῦμεν ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων, τὸ πολυώνυμον τὸ ἔχον ὡς ὅρους τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων καὶ ἕκαστον μὲ τὸ σῆμα του.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4$ καὶ $-\beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x$, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν καὶ ὡς ἐξῆς :

$$(3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4) + (-\beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x)$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2x + \beta^3 + 6 + \alpha^4 - \beta^3 - 8 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2x$.

Ἐπεὶδὴ ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ $5\alpha^2x + 3\alpha^4 - 2$.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποῖαν εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων, λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ περισσοτέρων τῶν δύο πολυωνύμων, (τὰ ὁποῖα πρὸς εὐκολίαν ὑποθέτομεν ἀνηγμένα), ἐκτελοῦμεν δὲ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὁρων εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἔαν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Συνήθως, όταν πρόκειται να εϋρωμεν τὸ ἄθροισμα (ἄνηγμένων) πολυωνύμων, ἐχόντων μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, γράφομεν τὸ ἐν κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὥστε οἱ ὁμοιοὶ ὅροι νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην (καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατὸν) διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγή τούτων. Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$\begin{aligned} & 5\alpha^5 - 4\alpha^3\beta^2 + 8\alpha^4\beta - 7\alpha\beta^4\gamma^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma + \gamma^3 \\ & 2\alpha^2\beta^3\gamma + 6\alpha^5 - 12\alpha^4\beta + 2\alpha^3\beta^2 - \alpha\beta^4\gamma^2 - 3\gamma^3 \\ & - 2\alpha^5 - 6\alpha^4\beta + 9\alpha^2\beta^3\gamma - 12\alpha^3\beta^2 + \alpha\beta^4\gamma^2 - 7\gamma^3 \end{aligned}$$

γράφομεν πρῶτον αὐτὰ ὡς ἐξῆς :

$$\begin{aligned} & 5\alpha^5 + 8\alpha^4\beta - 4\alpha^3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma - 7\alpha\beta^4\gamma^2 + \gamma^3 \\ & 6\alpha^5 - 12\alpha^4\beta + 2\alpha^3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^3\gamma - \alpha\beta^4\gamma^2 - 3\gamma^3 \\ & - 2\alpha^5 - 6\alpha^4\beta - 12\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3\gamma + \alpha\beta^4\gamma^2 - 7\gamma^3 \end{aligned}$$

Ἀκολουθῶς κάμνομεν τὴν ἀναγωγήν ὁμοίων ὁρων, τῶν κειμένων εἰς τὰς αὐτὰς στήλας καὶ εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$9\alpha^5 - 10\alpha^4\beta - 14\alpha^3\beta^2 + 13\alpha^2\beta^3\gamma - 7\alpha\beta^4\gamma^2 - 9\gamma^3$$

Ὅμοιως ὡς ἀνωτέρω ὀρίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

” Α Σ Κ Η Σ Ι Σ

93. Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

$$\begin{array}{lll} \alpha') & 2\alpha - 5\beta + 2\gamma, & 2\alpha + 3\beta + \gamma, & -3\alpha - 2\gamma \\ \beta') & 2x^2 - 2x\psi + 3\psi^2, & -x^2 + 5x\psi + 4\psi^2, & x^2 - 2x\psi - 6\psi^2 \\ \gamma') & 2\alpha\beta + 3\alpha\gamma + 6\alpha\beta\gamma, & -5\alpha\beta + 2\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma, & 3\alpha\beta - 2\beta\gamma \\ \delta') & \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{3}x\psi - \frac{1}{4}\psi^2, & -x^2 - \frac{2x\psi}{3} + 2\psi^2, & \frac{2x^2}{3} - x\psi - \frac{5}{4}\psi^2 \\ \epsilon') & \frac{5x^2}{8} - \frac{x\psi}{3} + \frac{3\psi^2}{8}, & -\frac{3x^2}{4} + \frac{14x\psi}{15} - \psi^2, & \frac{x^2}{2} - x\psi + \frac{\psi^2}{5} \end{array}$$

2. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 61. Καλοῦμεν ἀφαίρεσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἔστω Β ἀπὸ ἄλλης Α, τὴν εὖρεσιν τρίτης Γ, ἡ ὁποία προστιθεμένη εἰς τὴν Β δίδει ἄθροισμα τὴν Α. Τὸ ἐξαγόμενον Γ τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **διαφορά** τῶν Α καὶ Β.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Διότι, ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $-α^2$ ἀπὸ τοῦ $α^3ψ$ καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ δ, θὰ εἶναι

$$δ = α^3ψ - (-α^2).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἔχωμεν

$$δ + (-α^2) = α^3ψ$$

Προσθέτοντες εἰς τὰ ἴσα τὸ $α^2$ εὐρίσκομεν $δ + (-α^2) + α^2 = α^3ψ + α^2$ καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν $-α^2$ καὶ $α^2$, ἔχομεν $δ = α^3ψ + α^2$

Ὀμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ π.χ. τοῦ $α^2β$ ἀπὸ τοῦ $3α^2β + 6αβ^2 - β^3$ εἶναι $3α^2β + 6αβ^2 - β^3 - α^2β = 2α^2β + 6αβ^2 - β^3$.

Ἐὰν ζητεῖται π.χ. ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $α^3χ - α^2ψ + α^3$ νὰ ἀφαιρεθοῦν περισσότερα τοῦ ἐνὸς μονώνυμα, ἔστω τὰ $α^3χ$, $-3α^2ψ^3$, $-α^4$ $2αψ^2$ ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ πρῶτον μονώνυμον, ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ δεύτερον καὶ ἀκολουθῶς ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ (συντομώτερον) προσθέτομεν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ ἀθροισμα τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν δοθέντων μονωνύμων, ἕκαστον μὲ ἀντίθετον σῆμα. Ἦτοι ἔχομεν κατὰ ταῦτα :

$$α^3χ - α^2ψ + α^3 - α^2χ + 3α^2ψ^3 + α^4 - 2αψ^2.$$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον πρόσημόν του.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον, καθὼς καὶ ἀνωτέρω. Οὕτω ἡ διαφορὰ τοῦ $3α^2χ - 9α^3χ^2 - 6α^2χ^2$ ἀπὸ τοῦ $9α^3χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2$, τὴν ὁποίαν σημειώνομεν ὡς ἐξῆς :

$$(9α^2χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2) - (3α^2χ - 9α^3χ^2 - 6α^2χ^2)$$

$$\text{εἶναι } 9α^2χ + 18α^3χ^2 - α^2χ^2 - 3α^2χ + 9α^3χ^2 + 6α^2χ^2$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων

$$6α^2χ + 27α^3χ^2 + 5α^2χ^2.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθὲν πολυώνυμον ἄλλο τοιοῦτο, ἐν πρῶτοις δι' ἕκαστον εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ ἀνηγμένον, ἐὰν δὲ ἔχουν μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, συνήθως διατάσσομεν ταῦτα κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, καθὼς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ μὲ ἡλλαγμένα τὰ πρόσημα τῶν ὄρων των.

Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν τοῦ

$$9α^3 - 8α^2β + 5αβ^2 - 7β^3 \text{ ἀπὸ τοῦ } 7α^3 + 2α^2β + 9αβ^2 - 11β^3 - 4γ^2.$$

γράφομεν

$$7\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 - 11\beta^3 - 4\gamma^2 \\ - 9\alpha^3 + 8\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2 + 7\beta^3$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὄρων εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν

$$-2\alpha^3 + 10\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - 4\beta^3 - 4\gamma^2.$$

Ἀσκήσεις

94. α') Νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ $4x^2 + 3x\psi + 3\psi^2$ ἀπὸ τὸ $x^2 - x\psi + 2\psi^2$

β') Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ τὸ $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

γ') Ἀπὸ τὸ $\alpha^2x^2 + 4\alpha x\psi - 3\alpha\beta\psi^2$ τὸ $4\alpha\beta\psi^2 - 5\alpha x\psi - 2\alpha^2x^2$

δ') Ἀπὸ τὸ $10\alpha\mu - 15\beta\nu - \gamma\rho + 5\delta\lambda$ τὸ $-9\alpha\mu + 2\beta\nu - 5\delta\lambda - \gamma\rho$

ε') Ἀπὸ τὸ $4\psi^2 + x^2 - 4x\psi - 3x + 4$ τὸ $\psi^2 + x^2 + 2x\psi - 4\psi - 2x$

95. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $2,5x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{9}\alpha^2$ τὸ $2x^2 - \alpha x - 0,5\alpha$

96. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\frac{x^2}{4} - 6x + \frac{9}{15}$ τὸ $-\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{9} + \frac{1}{5}$.

3. ΠΕΡΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΓΚΥΛΩΝ

§ 62. Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνομεν, ὡς εἶδομεν, κλείοντες ἕκαστον αὐτῶν ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκύλης) καὶ συνδέοντες ταύτας μὲ τὸ + ἢ - τῆς πράξεως.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2$ καὶ $-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma$ παριστάνομεν μὲ $(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2) + (-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma)$

καὶ ἰσοῦται τοῦτο μὲ $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \gamma$

Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων παριστάνεται μὲ

$$(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2) - (-\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma)$$

καὶ ἰσοῦται μὲ $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta - \gamma$.

Ἐκ τούτων ἐπεταὶ ὅτι :

Ἐὰν μὲν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχομεν ὄρους, ὑπάρχῃ τὸ +, δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὄρων, ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ τὸ -, τὴν παραλείπομεν, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὄρων.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$

Διότι τὸ -, τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως, σημαίνει, νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta - \gamma + \delta$ ἀπὸ τὸ α καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσθε-

σωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μὲ ἡλλαγμένον τὸ πρόσημόν του.

Ὅμοιως ἔχομεν :

$$\alpha - [-(\beta + \gamma) + (\alpha - \beta) - \gamma + \alpha] = \alpha + (\beta + \gamma) - (\alpha - \beta) + \gamma - \alpha = \\ = \alpha + \beta + \gamma - \alpha + \beta + \gamma - \alpha = -\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, καὶ ἂν μὲν θέτωμεν τὸ σῆμα + πρὸ αὐτῆς ἕκαστος ὅρος διατηρεῖ τὸ σῆμα του ἐντὸς ταύτης, ἂν δὲ τὸ -, οἱ ὅροι γράφονται ἕκαστος μὲ ἡλλαγμένον τὸ σῆμα του ἐντὸς αὐτῆς. Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$$\alpha - \beta - \gamma = \alpha + (-\beta - \gamma) = \alpha - (\beta + \gamma).$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁ μᾶς πρώτη. 97. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

$$\alpha') 3x - (7x - 5\psi) \quad \text{ὅταν } x = \psi = 3.$$

$$\beta') 3x + 6\psi - 9\omega + (14x - 7\psi + 9\omega) \quad \text{ὅταν } x = 6, \psi = 3, \omega = 4.$$

$$\gamma') \theta - (\mu - \nu) \quad \text{ἐὰν εἶναι } \theta = x + 9\psi - 6\omega, \mu = 4x - 7\psi + 2\omega, \nu = x + \psi + \omega.$$

Ὁ μᾶς δευτέρα. 98. Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω πράξεις, ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι καὶ εὑρετε τὰς τιμὰς τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

$$\alpha') \alpha - [\alpha - (\alpha - 1)] \quad \text{ὅταν } \alpha = 1$$

$$\beta') 5,8\alpha^2 - 8,2\alpha^2 - (\alpha^2 - 0,4) + 0,6 \quad \text{ὅταν } \alpha = 2$$

$$\gamma') -[-(-x)] - [-(-\psi)] \quad \text{ὅταν } x = \psi = -1$$

$$\delta') -[+(-x)] - [-+(-x)] \quad \text{ὅταν } x = 2$$

$$\epsilon') -[-((\beta + \gamma - \alpha))] + [-(-(\alpha - \beta + \gamma))] \quad \text{ὅταν } \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1.$$

99. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$2 - 2x + 7x^3 - x^4 + x^5, \quad x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - x^5 \quad \text{καὶ } x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5.$$

Νὰ εὐρεθῇ : α) Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, β) τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ ἀκολουθῶς ἡ διαφορά τοῦτου ἀπὸ τοῦ τρίτου, γ') νὰ προστεθῇ ἡ διαφορά τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸ τρίτον.

Ὁ μᾶς τρίτη. 100. Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστάσεις, ὥστε οἱ ὅροι των ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐξῆς νὰ εἶναι εἰς παρένθεσιν ἢ ἀγκύλῃν ἔχουσιν πρὸ αὐτῆς : α') τὸ σῆμα +, β') τὸ σῆμα - :

$$x^3 + 7x^2 - 3x - 5, \quad -5x^4 - (3x^3 - 8x^2) - 6x + 9, \quad 13x - 16x^2 + 19x^3 - 14x + 5\gamma$$

101. Νὰ εὑρεθοῦν τά :

$$\alpha') x + \psi + \omega + \phi, \quad \beta') x - \psi - \omega + \phi, \quad \gamma') \psi - (x + \omega - \phi), \quad \text{ὅταν τεθῇ :}$$

$$x = 3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2, \quad \psi = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2, \quad \omega = 9\alpha^2 - 5\alpha\beta + 3\beta^2, \quad \phi = 11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta$$

Ὁ μᾶς τετάρτη. 102. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτοῦν α μαθηταί, εἰς τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι τῶν

εις την πρώτην. Πόσους μαθητάς έχουν ἐν ὄλῳ αἱ τρεῖς τάξεις; Πόσους ἔχουν αἱ δύο πρώται τάξεις περισσοτέρους τῆς τρίτης;

103. Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β, ὁ Α ἔχει x δρχ. καὶ οἱ δύο ὁμοῦ μ δρχ. Ἄν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β 3 δρχ., πόσας θὰ ἔχη ἕκαστος;

104. Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δρχ. ἢ ὁ Α, ὁ Γ διπλασίας τοῦ Β, ὁ δὲ Α ἔχει μ δρχ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς;

4. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 63. Καλοῦμεν γινόμενον δοθεῖσῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὴν παράστασιν, ἣ ὁποία ἔχει παράγοντας τὰς δοθείσας παραστάσεις.

Ἡ πράξις, μετὰ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραστάσεων λέγεται **πολλαπλασιασμός** αὐτῶν.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $5\alpha^2\beta^2\gamma$ καὶ $3\beta\gamma^2$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω: $(5\alpha^2\beta^2\gamma) \cdot (3\beta\gamma^2)$, ἰσοῦται μετὰ $5\alpha^2\beta^2\gamma \cdot 3\beta\gamma^2$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων τῶν μονωνύμων καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν θὰ ἔχωμεν

$$5\alpha^2\beta^2\gamma \cdot 3\beta\gamma^2 = 5 \cdot 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \gamma^2 = 15\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ὁδηγούμενοι λέγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων, **πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητικούς συντελεστάς των καὶ δεξιά τοῦ γινομένου των γράφομεν καθένα γράμμα, ὑπάρχον εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μετὰ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τοῦτο εἰς τὰ δοθέντα.**

Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου μονωνύμων ὡς πρὸς ἐν ἡ περισσότερα γράμματά του, ἰσοῦται μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά. Π.χ. τὸ $(5\alpha^2\beta\gamma) \cdot (-2\alpha\beta^2\gamma^3\delta) = -10\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta$ εἶναι βαθμοῦ ὡς πρὸς α , β , γ , δ $4+7=11$, ὅπου 4 εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου παράγοντος καὶ 7 ὁ τοῦ δευτέρου ὡς πρὸς τὰ α , β , γ , δ .

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

105. Νὰ εὕρεθῶν τὰ γινόμενα:

$$\alpha') x^7 \cdot (-x^3) \cdot \psi^4 \cdot \psi^4 \quad \beta') (-x^4 \cdot x) \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^6 \cdot \alpha^2 \quad \gamma') (x^2)^3 \cdot (\beta^3)^4 \quad \delta') x^{n+2} \cdot x^{2n} \cdot x$$

ε') $x^{3\nu+1} \cdot x \cdot x^{2\nu-2} \cdot x^2$, στ') $(7x\psi\omega) \cdot (4x^2\psi^2)$ ζ') $(-x \cdot \psi\omega) \cdot (x^2 \cdot \psi^2 \cdot \omega^2)$
 106. Εύρετε τὰ α') $(-2,5\alpha^2\beta x)^2$, β') $(-0,3\alpha\beta\gamma^2)^3$, γ') $(-2\alpha\beta^2\gamma x^2)^4$
 107. Εύρετε τὰ :

α') $\alpha^2 \cdot (-\alpha^2 x - 1)$, β') $(-x\nu - 1\psi\mu - 3)$ $(-x\nu - 1\psi\mu - 1)$, γ') Πώς ύψουµεν μονώνυµον εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὸν κύβον ἢ εἰς δύναµιν µὲ ἀκέραιον ἐκθέτην ; Π.χ.
 µὲ τί ἰσοῦται τὸ $(6\alpha\beta^2)^2$, τὸ $\left(\frac{3}{4} x^3\psi\right)^3$, τὸ $(25\alpha^2\beta^2\gamma)^5$;

5. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΩΝΥΜΟΝ

§ 64. Ἐστω ὅτι θέλοµεν νὰ εὕρωµεν τὸ γινόμενον
 $(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2) \cdot 2\alpha$.

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυµον εἶναι ἄθροισµα τῶν ὄρων του, θὰ ἔχωµεν $(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2) \cdot 2\alpha = [\alpha^2 + (-3\alpha\beta) + \beta^2] \cdot 2\alpha$.

Ἐπειδὴ ἔχοµεν πολλαπλασιασµὸν ἀθροίσµατος σχετικῶν ἀριθµῶν ἐπὶ ἄλλον ἀριθµόν, εὐρίσκοµεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω γινόμενον ἰσοῦται µὲ $\alpha^2 \cdot 2\alpha + (-3\alpha\beta) \cdot 2\alpha + \beta^2 \cdot 2\alpha = 2\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2$.

Ὁµοίως εὐρίσκοµεν ὅτι :

$$(5\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 7\beta^3) \cdot (-3\alpha\beta) = -15\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3 - 21\alpha\beta^4. \text{ Ὡστε :}$$

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωµεν πολυώνυµον ἐπὶ μονώνυµον, πολλαπλασιάζοµεν καθένα τῶν ὄρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυµον καὶ προσθέτοµεν τὰ ἐξαγόμενα.

Ἐάν ἔχωµεν νὰ πολλαπλασιάσωµεν μονώνυµον ἐπὶ πολυώνυµον, δυνάµεθα νὰ ἐναλλάξωµεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸ πολυώνυµον ὡς ἓνα σχετικὸν ἀριθµόν, ἐπειδὴ εἶναι ἄθροισµα τῶν ὄρων αὐτοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωµεν νὰ πολλαπλασιάσωµεν πολυώνυµον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυµον. Π.χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma - \alpha) = (\beta + \gamma - \alpha) \cdot \alpha \text{ καὶ τοῦτο } = \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha^2.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁµὰς πρώτη. 108. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τῶν ἐξαγοµένων αἱ ἀριθµ. τιµαὶ διὰ τὰς διδοµένas τιµὰς τῶν γραµµάτων.

α')	$3\alpha x(\alpha^2 - 4\alpha x + x^2)$	ὅταν $x = -1$, $\alpha = 2$
β')	$(3\alpha + 7\beta)\alpha - (9\beta - 5\alpha)\beta$	» $\alpha = 2$, $\beta = -3$
γ')	$(3\alpha^2 + 7\beta^2)\alpha\beta - (9\alpha^2 - 8\beta^2)\alpha\beta$	» $\alpha = -1$, $\beta = -2$
δ')	$(3\alpha^2\beta^3 + 7\beta^2) \cdot 3\alpha^2\beta^2 - (9\alpha^3\beta^3 - 8\beta^2) \cdot 2\alpha^2\beta^2$	» $\alpha = -1$, $\beta = -2$

Ὁ μὰς δευτέρα. Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα :

109. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι προχωροῦντες ἐπ' εὐθείας πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Ὁ α' διανύει καθ' ἡμέραν α+μ χλμ. καὶ ὁ β' 2 χλμ. ὀλιγώτερα τοῦ α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμ. ;

110. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι α. Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ εἶναι μ. Πότε καὶ πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του ;

111. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χλμ. ἡμερησίως. μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων γ χλμ ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχώρησός τοῦ α' ;

6. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 65. Καλοῦμεν γινόμενον δύο πολυωνύμων, τὸ πολυώνυμον τὸ προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν, ἥτοι τὸ ἔχον παράγοντας τὰ δύο πολυώνυμα.

Ἐπειδὴ ἕκαστον πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των καὶ ἀκολουθῶς ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, πρὸς εὐκολίαν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἐπόμενα παραδείγματα.

1ον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον	$(2x^2 - x + 3)(x - 4).$
Γράφομεν	$2x^2 - x + 3$
	$x - 4$
(1) μερικὸν γινόμενον	$2x^3 - x^2 + 3x$
(2) » »	$-8x^2 + 4x - 12$
(3) τελικὸν »	$2x^3 - 9x^2 + 7x - 12$

Τὰ (1), (2) εὐρίσκονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ x καὶ ἐπὶ -4 , λέγονται δὲ μερικά γινόμενα.

Τὸ (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέγεται τελικὸν γινόμενον.

2ον. Ἐστω τὸ γινόμενον $(4\chi^5 - 3\chi^4 + \chi^2 - 1)(\chi^3 - \chi + 2)$. Ὅμοίως
ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν

$$\begin{array}{r}
 4\chi^8 - 3\chi^7 \quad + \chi^5 \quad - \chi^3 \\
 -4\chi^6 + 3\chi^5 \quad - \chi^4 \quad + \chi \\
 + 8\chi^5 - 6\chi^4 \quad + 2\chi^2 \quad - 2 \\
 \hline
 4\chi^8 - 4\chi^7 - 4\chi^6 + 12\chi^5 - 6\chi^4 - 2\chi^3 + 2\chi^2 + \chi - 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{μερικὸν γινόμενον} \\
 \text{»} \quad \text{»} \\
 \text{τελικὸν} \quad \text{»}
 \end{array}$$

§ 66. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ
α' ὅρου $4\chi^5$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν α' ὅρον χ^3 τοῦ πολλα-
πλασιαστοῦ δίδει τὸν α' ὅρον $4\chi^8$ τοῦ γινομένου. Ὅμοίως τὸ γι-
νόμενον τῶν δύο τελευταίων ὁρῶν αὐτῶν -1 καὶ 2 δίδει τὸν τελευ-
ταῖον ὅρον -2 τοῦ γινομένου. Ἐπομένως :

Ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων
(ἀνηγμένων) εἶναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς
ἀνιούσας δυνάμεις ἐνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντι-
στοίχων ἄκρων ὁρῶν (τῶν πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν
τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου διατεταγμένου
ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Ἄρα τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων θὰ ἔχη τοῦλάχιστον δύο ὅρους καὶ δὲν δύναται νὰ εἶναι μονώνυμον.

§ 67. Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων
ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν
τῶν παραγόντων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

112. Εὑρετε τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν δοθέντων ὡς καὶ
τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $(x^2 + 4x + 3) \cdot (1 - x^2)$	ἀν τεθῇ ὅπου $x = -1$
β') $(x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 5x + 3)$	» » » $x = -1$
γ') $(x^2 - 2x^2 + 8) \cdot (x^2 - 2x - 2)$	» » » $x = 3$
δ') $(3a^2 - 2a + 5a^3 - 1) \cdot (a - 3 - 4a^2)$	» » » $a = 3$

113. Ὅμοίως :

α') $(4a^{2n} + 1 + 6a^n + 3 + 9a^2) \cdot (2a^n + 4 - 3a^3)$
β') $(x^{12} - x^4\psi^2 + x^6\psi^4 - x^3\psi^6) \cdot (x^3 + \psi^2)$

$$\begin{aligned} \gamma') & (\alpha\mu - \beta \cdot \alpha\mu - 1 \cdot x + \gamma \cdot \alpha\mu - 2 \cdot x^2)(x^2 - \mu + \beta \cdot \alpha^1 - \mu \cdot x - \gamma \cdot \alpha\mu \cdot x^2) \\ \delta') & ([x\alpha(\beta - 1)] + \psi\beta(\alpha - 1)][x\alpha(\beta - 1)] - \psi\beta(\alpha - 1)] \\ \epsilon') & (x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 1) \\ \sigma\tau') & (2\alpha + \beta - 3\gamma)(2\alpha + \beta + 3\gamma)(\beta - 3\gamma - 2\alpha) \\ & \theta\epsilon\iota\omicron\tau\omicron\tau\epsilon\varsigma \epsilon\iota\varsigma \delta\lambda\alpha \delta\pi\omicron\upsilon \alpha = 1, \beta = 2, x = \psi = -1. \end{aligned}$$

7. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ

§ 68. Παραστάσεις τῆς μορφῆς :

$$(\alpha + \beta)^2, (\alpha - \beta)^2, (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta), (\alpha + \beta)^3, (\alpha - \beta)^3, \dots$$

παρουσιάζονται συχνὰ καὶ εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα τὰ εὐρίσκόμενα, ἔαν εἰς ἐκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως ἔχομεν :

$$1\omicron\nu. (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

$$2\omicron\nu. (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2. \text{ Ἦτοι:}$$

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ σὺν (ἢ πλὴν) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

$$3\omicron\nu. \text{ Ἐπίσης εὐρίσκομεν: } (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2. \text{ Ἦτοι}$$

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν των, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ μειωτέου πλὴν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφαιρετέου.

$$\begin{aligned} 4\omicron\nu. \text{ Ἐπίσης εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι: } (\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta) \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3. \end{aligned}$$

$$5\omicron\nu. \text{ Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν } -\beta \text{ ἀντὶ τοῦ } +\beta, \text{ προκύπτει } (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2(-\beta) + 3\alpha(-\beta)^2 + (-\beta)^3$$

$$\text{ἢ} \quad (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

Εὐκόλως εὐρίσκομεν δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἀκόμη ὅτι :

$$6\omicron\nu. (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

$$7\omicron\nu. (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$$

$$8\omicron\nu. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) - (\alpha x + \beta \psi)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2.$$

$$\begin{aligned} 9\omicron\nu. (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + \psi^2 + \zeta^2) - (\alpha x + \beta \psi + \gamma \zeta)^2 &= \\ &= (\alpha\psi - \beta x)^2 + (\beta \zeta - \gamma \psi)^2 = (\gamma x - \alpha \zeta)^2 \end{aligned}$$

Αἱ δύο ἀνωτέρω ἰσότητες 8 καὶ 9 λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

Ἀσκήσεις

114. Δείξτε, ότι είναι :

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2.$$

115. 'Εάν τεθῇ $x = 2\psi + 3\omega$, δείξτε ότι είναι $x^3 - 8\psi^3 - 27\omega^3 - 18x\psi\omega = 0$.

116. 'Εάν τεθῇ $\alpha + \gamma = 2\beta$, δείξτε, ότι είναι $(\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \gamma^2$

117. 'Εάν τεθῇ $x + \psi = 1$, δείξτε, ότι είναι $x^3(\psi + 1) - \psi^3(x + 1) - x + \psi = 0$.

118. 'Εάν τεθῇ $x = \alpha - \beta$, θὰ εἶναι $(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(2\beta - \gamma) - \beta\gamma + \beta^2 = 0$.

119. 'Εάν τεθῇ $\varphi(x_1) = 3x_1^2 - x_1 + 1$, δείξτε ότι είναι

$$\varphi(x_1 + 1) - \varphi(x_1) - 2\varphi(0) = 6x_1.$$

120. 'Εάν τεθῇ $\varphi(x) = 3x^2 + 7x$ καὶ $\psi(x) = 6x + 10$, δείξτε ότι είναι

$$\alpha') \varphi(x+1) - \varphi(x) = \psi(x), \quad \beta') \psi(x+1) - \psi(x) = 6.$$

121. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, δείξτε ότι :

$$\alpha') (\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \tau^2$$

$$\beta') (\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 + 3\alpha\beta\gamma = \tau^3$$

$$\gamma') 2(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma) + \alpha(\tau - \beta)(\tau - \gamma) + \beta(\tau - \alpha)(\tau - \gamma) + \gamma(\tau - \beta)(\tau - \alpha) = \alpha\beta\gamma$$

122. Δείξτε ότι $\alpha^4 + \beta^4 + (\alpha + \beta)^4 = 2\alpha^2\beta^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)^2$.

123. 'Ομοίως : $\alpha') \alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

$\beta') (\psi - \omega)^2 + (x - \psi)^2 + 3(x - \psi)(x - \omega)(\psi - \omega) = (x - \omega)^3$.

124. 'Ομοίως : $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

125. 'Ομοίως : $x^2(\psi - \omega) + \psi^2(\omega - x) + \omega^2(x - \psi) + (\psi - \omega)(\omega - x)(x - \psi) = 0$.

2. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 69. Λέγομεν ὅτι ἀκέραιόν τι μονώνυμον εἶναι **διαιρετὸν** δι' ἄλλον, ἂν δύναται νὰ εὐρεθῇ τρίτον τοιοῦτο, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ β' δίδει γινόμενον τὸ α'. Τὸ οὕτως εὐρισκόμενον μονώνυμον καλεῖται **πηλίκον** τῆς διαιρέσεως τῶν δύο δοθέντων, τὰ ὅποια λέγονται **διαιρετέος** καὶ **διαιρέτης**.

*Εστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ $24\alpha^7$ διὰ τοῦ $8\alpha^5$, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτως $24\alpha^7 : 8\alpha^5$.

'Εάν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον μὲ Π, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὀρισμὸν $\Pi \cdot 8\alpha^5 = 24\alpha^7$. Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 8, εὐρίσκομεν $\Pi \cdot \alpha^5 = 24\alpha^7 : 8$ ἢ $\Pi \cdot \alpha^5 = 3\alpha^7$. Διαιροῦντες καὶ τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ τοῦ α^5 , ἔχομεν $\Pi = 3\alpha^7 : \alpha^5 = 3\alpha^{7-5} = 3\alpha^2$, ἥτοι $\Pi = 3\alpha^2$.

'Ομοίως εὐρίσκομεν π.χ. ὅτι $20\alpha^5\beta^6 : (-4\alpha\beta^3) = -5\alpha^4\beta^3$.

'Εκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

"Ἵνα γινόμενόν τι σχετικῶν παραγόντων εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας αὐτοῦ καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον.

Προσέτι ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων διαιροῦμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ (ἀριθμητικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην.

§ 70. Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ διαιρέτου, παραλείπομεν τοὺς κοινούς παράγοντάς των, ἔαν ὑπάρχουν, καὶ σχηματίζομεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων μονωνύμων εἶναι **κλασματικὸν** ἢ παράστασις **κλασματική**. Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν $20\alpha^2\beta^2\gamma^4 : -5\alpha\beta^3\gamma^7$ παραλείπομεν τοὺς κοινούς παράγοντας 5, α , β^2 , γ^4 τοῦ διαιρέτου καὶ διαιρετέου καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$4\alpha : -\beta\gamma^3 = \frac{4\alpha}{-\beta\gamma^3} = -\frac{4\alpha}{\beta\gamma^3}.$$

" Α σ κ η σ ι ς

126. Νὰ εὕρεθῶν τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha') 9\mu^4\psi^5 : -3\mu^2\psi^2 & \beta') -12x^5\psi^3 : 11x^2\psi^4 & \gamma') 0,5x^2\psi^3 : -0,2x\psi \\ \delta') 0,45\alpha^2\beta^3\gamma^4 : 0,9\beta^3\gamma^3 & \epsilon') -12\mu^4\nu^5 : 16\mu^4\nu & \sigma\tau') 4\alpha\beta^4 : 0,25\alpha\beta^5\gamma\delta^4 \\ & \zeta') -\frac{7}{9} \alpha^5\beta^4\gamma^2 : 0,8\alpha^5\beta^5 \end{array}$$

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 71. Καλοῦμεν διαίρεσιν δοθέντος πολυώνυμου (διαιρετέου) διὰ μονωνύμου (διαιρέτου) τὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρισκομεν (ἂν ὑπάρχῃ) πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄρων του, ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμον (διαιρετὸν) διὰ μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(1) (7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3):\alpha\beta = 7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2$$

$$(2) (42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega):(-6\alpha) = -7\chi+8\psi-3\omega$$

$$(3) (-80\alpha^5-24\alpha^{10}):8\alpha^3 = -10\alpha^2-3\alpha^7$$

Ἐὰν πολυώνυμον διαιρῇται διὰ μονωνύμου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα :

$$(1) 7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3 = \alpha\beta \cdot (7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2)$$

$$(2) 42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega = (-6\alpha) \cdot (-7\chi+8\psi-3\omega)$$

$$(3) -80\alpha^5-24\alpha^{10} = 8\alpha^3 \cdot (-10\alpha^2-3\alpha^7) = -8\alpha^3 \cdot (10\alpha^2+3\alpha^7)$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Ἄν πάντες οἱ ὅροι δοθέντος πολυωνύμου ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως ὡς παράγοντα γινομένου, τοῦ ὁποῦ οἱ ἄλλοι παράγοντες εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ τεθέντος ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κοινοῦ παράγοντος.

Π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πολυώνυμον ὡς κοινὸς διαιρέτης ἐλήφθη τὸ $\alpha\beta$ καὶ ἐτέθη ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὸ β' μέρος τῆς (1). Εἰς τὸ δεύτερον πολυώνυμον ἐλήφθη ὡς διαιρέτης τὸ -6α καὶ εἰς τὸ τρίτον τὸ $-8\alpha^3$ καὶ ἐτέθησαν ἐκτὸς τῶν παρενθέσεων εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) καὶ (3).

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

127. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλικά τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ νὰ τραπῇ ἀκούθως ὁ διαιρετέος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἐπαληθεύσατε καὶ τὰς ἰσότη-
τας, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

$$\alpha') (14x^3\psi^2-28x^4\psi^2):(2x^2\psi^2)$$

$$\text{ὅταν } x=2, \psi=-2$$

$$\beta') (x+\psi) \cdot (\alpha-\beta) : (x+\psi)$$

$$» \quad x=\psi=4, \alpha=\beta=1$$

$$\gamma') (8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2):(-4\alpha^2\beta^2)$$

$$» \quad \alpha=3, \beta=2$$

$$\delta') (x\mu+z\cdot\psi^n+2x\mu+1+\psi^{n+1}-x\mu\psi^{n+2}):x\mu\psi^n$$

$$» \quad x=4, \psi=1, \mu=n=-1$$

128. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ

$$\alpha') \alpha\chi + \beta\chi, \beta') 49\alpha\beta + 63\alpha, \gamma') 56\chi\psi - 72\chi\omega, \delta') 0,35\alpha\beta - 0,49\alpha\gamma.$$

$$\epsilon') 2,3\alpha^4\beta^5 - 2,5\alpha^6\beta^4, \sigma\tau') \alpha^3x^3\psi + 3\alpha^2\beta x^2\psi + 3\alpha\beta^2x\psi^2 - x\psi^4,$$

$$\zeta') 12 \frac{2}{3} \alpha^2\beta - 14,25\alpha^5\beta^5 - 15 \frac{5}{6} \alpha^6\beta^5 \quad 11 \frac{1}{12} \alpha^5\beta^1$$

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ * ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 72. Καλοῦμεν διαίρεσιν (ἄκεραίου) πολυωνύμου (διαιρέτου) διὰ (ἄκεραίου) πολυωνύμου (διαιρέτου) τὴν πράξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν, ἂν ὑπάρχῃ, τρίτον πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

*Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α , ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3 . Ἐπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι $\alpha^3 : \alpha = \alpha^2$. Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. Διότι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. εὐρίσκομεν :

$$\alpha^2(\alpha + 1) = \alpha^3 + \alpha^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) - (\alpha^3 + \alpha^2) = 2\alpha^2 + 3\alpha + 1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασις τις ἀκόμῃ, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\alpha + 1$ νὰ δίδῃ $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$. *Ἦτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμῃ τὸ $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$. Ἐχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀπλουστερά τῆς δοθείσης, διότι ὁ διαιρετέος ταύτης εἶναι προφανῶς ἀπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶναι $2\alpha^2 : \alpha = 2\alpha$. Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha + 1$, δηλαδὴ τὸ $2\alpha \cdot (\alpha + 1) = 2\alpha^2 + 2\alpha$, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$, εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον $(2\alpha^2 + 3\alpha + 1) - (2\alpha^2 + 2\alpha) = \alpha + 1$

Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον ἀλλ' ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμῃ τὸ $\alpha + 1$ διὰ τοῦ $\alpha + 1$.

*Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς νέας αὐτῆς διαιρέσεως εἶναι 1, τὸ δὲ

*Ἡ διαίρεσις διὰ πολυωνύμου δὲν παρουσιάσθη πρὸ τοῦ 16ου αἰῶνος.

υπόλοιπον 0. Ὡστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶναι $\alpha^2 + 2\alpha + 1$, τὸ δὲ υπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀκολούθως :

Γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθι τούτου τὸ πηλίκον καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἐκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον πρόσημον καὶ προσθέτομεν. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἐκάστοτε ὑπόλοιπα ἀφαίρέσεων.

(διαιρετέος)	$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$		$\alpha + 1$ (διαιρέτης)
	$-\alpha^3 - \alpha^2$		$\alpha^2 + 2\alpha + 1$
πρῶτον μερικὸν υπόλοιπον	$2\alpha^2 + 3\alpha + 1$	(1)	(πηλίκον)
	$-2\alpha^2 - 2\alpha$		
δεύτερον μερικὸν υπόλοιπον	$\alpha + 1$	(2)	
	$-\alpha - 1$		
τελικὸν υπόλοιπον	0	(3)	

Αἱ παραστάσεις (1), (2) λέγονται μερικὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ υπόλοιπον, τελικὸν υπόλοιπον τῆς ὅλης διαιρέσεως.

§ 73. Ἐν γένει διὰ τὴν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, ὅταν εἶναι δυνατὴ ἡ διαίρεσις, ἀποδεικνύεται ὅτι :

α) Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι διατεταγμένοι* κατὰ τὰς κατιούσας (ἢ ἀνιούσας) δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Διότι ἔστω $\Delta + \Delta' + \Delta'' + \dots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου καὶ $\delta + \delta' + \delta'' + \dots$ τῶν τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων π.χ. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν μὲ $\Pi + \Pi' + \Pi'' + \dots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ

* Ἡ διάταξις πολυωνύμων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γράμματός των διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν, συναντᾶται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον τοῦ NEWTON « Arithmetica Universalis » (1707). Τὸ 1760 παρουσιάζεται τὸ θέμα βελτιωμένον ἀπὸ διδακτικῆς πλευρᾶς.

πηλίκου διατεταγμένου όμοίως ως προς τó αυτό γράμμα. Κατά τόν όρισμόν τής διαιρέσεως έχομεν ότι

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' \dots = (\delta + \delta'' + \delta''' + \dots) \cdot (\Pi + \Pi' + \Pi'' \dots)$$

Άλλά τó γινόμενον $\delta \cdot \Pi$ τοῦ δευτέρου μέλους τής ισότητος ταύτης παριστάνει τόν όρον, ó όποιος έχει τόν μεγαλύτερον έκθέτην τοῦ γράμματος, ως προς τó όποιον ύπετέθησαν διατεταγμένα τά πολυώνυμα, έπομένως θά ίσοῦται μέ τόν πρώτον όρον Δ τοῦ πρώτου μέλους. Ήτοι έχομεν ότι : $\delta \cdot \Pi = \Delta$ καί $\Pi = \Delta : \delta$, ήτοι τó Π είναι πηλίκον τοῦ Δ διá τοῦ δ . Άρα :

Διά νά εύρωμεν τόν α' όρον τοῦ πηλίκου τής διαιρέσεως δύο (άκεραίων) πολυωνύμων διατεταγμένων κατά τās κατιούσας δυνάμεις ενός γράμματός των, άρκεί νά διαιρέσωμεν τόν α' όρον τοῦ διαιρετέου διá τοῦ α' όρου τοῦ διαιρέτου.

Θά συμβή τó αυτό, άν τά τρία πολυώνυμα (τοῦ διαιρετέου, διαιρέτου καί πηλίκου) είναι διατεταγμένα κατά τās ανιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν οἱ πρώτοι κατά σειράν όροι των, θά είναι οἱ τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ καί ó όρος τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου θά ίσοῦται μέ τó γινόμενον τοῦ όρου κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου επί τόν τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ πηλίκου.

β) Έάν έχωμεν ένα ἢ περισσοτέρους κατά σειράν έκ τῶν πρώτων όρων τοῦ πηλίκου, καί τó γινόμενον αὐτῶν επί τόν διαιρέτην αφαιρέσωμεν άπό τόν διαιρετέον, εύρίσκομεν διαφοράν, ἢ όποία καλεῖται μερικόν υπόλοιπον τής διαιρέσεως. Άν τούτου, διατεταγμένου όμοίως, διαιρεθῇ ó πρώτος όρος διá τοῦ πρώτου όρου τοῦ διαιρέτου θά δώσῃ τόν έπόμενον όρον τοῦ πηλίκου.

Διότι, άν παραστήσωμεν μέ Π μέν τόν πρώτον όρον τοῦ πηλίκου (ἢ τó άθροισμα τῶν γνωστῶν κατά σειράν έκ τῶν πρώτων όρων αὐτοῦ), μέ P τó άθροισμα τῶν λοιπῶν όρων τούτου, μέ Δ τόν διαιρέτην καί μέ Δ' , τόν διαιρέτην (διατεταγμένων όλων όμοίως), θά έχωμεν $\Delta = \Delta' \cdot (\Pi + P) = \Delta' \cdot \Pi + \Delta' \cdot P$. Αφαιρούντες τó τó $\Delta' \cdot \Pi$ άπό τά ίσα, εύρίσκομεν $\Delta - \Delta' \cdot \Pi = \Delta' \cdot P$ (τó όποιον καλοῦμεν μερικόν υπόλοιπον τής γενομένης διαιρέσεως). Άλλ' έκ τής ισότητος αὐτῆς έπεται $(\Delta - \Delta' \cdot \Pi) : \Delta' = P$. Δηλαδή τó P , ήτοι οἱ λοιποὶ όροι τοῦ πηλίκου, θά εύρεθοῦν άν διαιρέσωμεν τó

$\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ διὰ τοῦ διαιρέτου Δ' . Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Δ' , θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ P , ἥτοι τὸν ἀμέσως ἐπόμενον μετὰ τὸν Π , ὅρον τοῦ πηλίκου.

§ 74. Καλοῦμεν **πρῶτον μερικὸν υπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων τὸ εὐρισκόμενον, ἔαν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Δεύτερον μερικὸν υπόλοιπον, τῆς ἐν λόγῳ διαιρέσεως λέγεται τὸ εὐρισκόμενον, ἔαν ἀπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν υπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζομεν **τρίτον μερικὸν υπόλοιπον**, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου ἀπὸ τὸ δεύτερον μερικὸν υπόλοιπον· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἄν τὸ τελευταῖον υπόλοιπον διαιρέσεως εἶναι 0, ἡ διαίρεσις λέγεται **τελεία**, ἄλλως λέγεται **ἀτελής**.

§ 75. Ἐν γένει ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν ἓν (ἁκέριον) πολυώνυμον Δ διὰ τοῦ Δ' , διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, καὶ ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου ὥς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Καὶ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν ἂν ἡ διαίρεσις αὐτῶν εἶναι τελεία, ἀρχίζομεν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον καὶ θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ὅρων τοῦ πηλίκου καθὼς καὶ μίαν σειρὰν πολυωνύμων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι **πρῶτον, δεύτερον** κ.τ.λ. μερικά υπόλοιπα τῆς διαιρέσεως. Ὁ βαθμὸς τῶν υπολοίπων, ὥς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ γράμμα, θὰ βαίνειν ἐλαττούμενος. Διότι μετὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ πρώτου υπολοίπου π.χ. δὲν θὰ ὑπάρχη εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρέτου, δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν διαιρετέον, οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρου βαθμοῦ, δὲν θὰ ὑπάρχουν εἰς τὴν διαφοράν, ἥτοι

τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου. Ὅμοίως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, δίδει τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὅρος, διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, δίδει τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Ὅμοίως προχωροῦντες παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὑπολοίπου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του τοῦλάχιστον κατὰ μίαν μονάδα.

Ὅμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εὕρωμεν ὅρους τινὰς τοῦ πηλίκου, ἂν θέλωμεν νὰ συνεχίσωμεν τὴν πράξιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου νὰ εἶναι διαιρέτος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Πρὸς τοῦτο, πρέπει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου τούτου νὰ μὴ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἐπειδὴ οἱ βαθμοὶ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων βαίνουν ἐλαττούμενοι, θὰ καταλήξωμεν μετὰ τινὰς πράξεις ἢ εἰς ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου.

Ἐπομένως, δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς χ , π.χ. τῶν Δ καὶ Δ' , μὲ βαθμὸν τοῦ Δ ὄχι κατώτερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ Δ' ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των χ , ὑπάρχει ἐν πολυώνυμον ἔστω Π , τοιοῦτον ὥστε, νὰ εἶναι τὸ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi$ πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς χ καὶ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Δ' . Τὸ Π εὕσκεται, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πράξιν τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ τοῦ Δ' ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη.

Ἄν τεθῇ $\Delta - \Delta' \cdot \Pi = Y$, θὰ εἶναι $\Delta = \Delta' \cdot \Pi + Y$. Τὰ οὕτως εὕρισκόμενα Π καὶ Y καλοῦνται **πηλίκον** καὶ **ὑπόλοιπον** τῆς **μη τελείας** ἢ **ἀτελοῦς** ταύτης διαιρέσεως. Ἐὰν τὸ $Y = 0$, ἔχομεν περίπτωσιν τελείας διαιρέσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μὲν τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν ὅτι :

Ὁ διαιρέτος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον.
Εἰς δὲ τὴν ἀτελεῖ ὅτι :

Ὁ διαιρέτος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

Ἐστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8 \quad \text{διὰ τοῦ} \quad x^2 - 4x - 2$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ἔχομεν :

(διααιρετός)	$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8$	$x^2 - 4x - 2$ (διαιρέτης)
	$-x^4 + 4x^3 + 2x^2$	$x^2 + 2x + 3$ (πηλίκον)
πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον	$2x^3 - 5x^2 - 19x - 8$	
	$-2x^3 + 8x^2 + 4x$	
δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον	$3x^2 - 15x - 8$	
	$-3x^2 + 12x + 6$	
τελικὸν ὑπόλοιπον	$-3x - 2$	

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $-3x - 2$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $x^2 - 4x - 2$, ἔπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιον μονώνυμον ἢ πολυνώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $x^2 - 4x - 2$, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $-3x - 2$. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ τὸ $-3x - 2$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀτελοῦς ταύτης διαίρεσεως, τὸ δὲ $x^2 + 2x + 3$ πηλίκον αὐτῆς.

§ 76. Παρατηρήσεις. Πολυνώνυμόν τι δὲν εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, διατεταγμένων καὶ τῶν δύο ὁμοίως πρὸς ἓν γράμμα των :

1ον. Ὄταν ὁ α' ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς ἐκ τῶν εὐρισκομένων μερικῶν ὑπολοίπων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου.

2ον. Ὄταν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

3ον. Ὄταν εἶναι διαιρετὸς μὲν ὁ α' ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἀντιστοιχῶς, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως δὲν εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 129. Νὰ γίνουν αἱ ἐξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν

των :

α') $(2x^3 - 7x^2 - 7x + 4) : (2x - 1)$

β') $(6x^3 + 2x^2 + 11x + 10) : (3x - 2)$

$$\begin{aligned} \gamma') & (x^4+x^2+1):(x^2+x+1) & \delta') & (x^3-6x^2+12x-18):(x^2-4x+4) \\ \epsilon') & (10x^5-21x^4-10x^2-40x):(5x^2-3x+8) & \sigma\tau) & (1+\alpha^5+\alpha^{10}):(\alpha^2+\alpha+1) \\ \zeta') & (\alpha^4+\beta^4):(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) & \eta') & (1-6x^5+x^6):(1-2x+x^2) \\ & & \theta') & (x^5-41x-120):(x^2+4x+5). \end{aligned}$$

Ὅμως δευτέρα. 130. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

$$\begin{aligned} \alpha') & (x^{3\nu}-3x^{2\nu}\psi\nu+3x^\nu\psi^{2\nu}-\psi^{3\nu}): (x^\nu-\psi^\nu). \\ \beta') & (9\alpha^x+3\alpha^{4x}+14\alpha^{3x}+2): (\alpha^{2x}+5\alpha^x+1), \\ \gamma') & (x^{8\nu}-\psi^{8\nu}): (x^{5\nu}-x^{4\nu}\psi\rho+x^\nu\psi^{4\rho}-\psi^{5\rho}), \\ \delta') & (\alpha^{4\mu}+4\alpha^{2\mu}x^{2\nu}+16x^{4\nu}): (\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu x^\nu+4x^{2\nu}), \\ \epsilon') & (x^{\mu+\nu}\psi^\nu-4x^{\mu+\nu-1}\psi^{2\nu}-27x^{\mu+\nu-2}\psi^{3\nu}+42x^{\mu+\nu-3}\psi^{4\nu}): \\ & (x^\mu+3x^{\mu-1}\psi^\nu-6x^{\mu-2}\psi^{2\nu}). \end{aligned}$$

Ὅμως τρίτη. 131. Δείξατε ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου δύο ἀκεραίων (ἀ-
ηγμένων) πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου
πλὴν τὸν τοῦ διαιρέτου. Ἐξηγήσατε τοῦτο μὲ τρία διάφορα παραδείγματα.

1. ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΟΣ ΤΟ x ΔΙΑ ΤΟΥ $x \pm \alpha$ ἢ ΔΙΑ ΤΟΥ $\alpha x \pm \beta$

§ 77. Ἐστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς
διαίρεσεως $(x^3-3x^2+3x+2):(x-1)$.

Ἐὰν μὲ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ μὲ τὸ u τὸ ὑπόλοι-
πον τῆς πράξεως, θὰ ἔχωμεν :

$$(x^3-3x^2+3x+2) = \rho(x-1) + u \quad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον u δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην,
διότι ὁ διαιρέτης εἶναι πρῶτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (τὸ δὲ ὑπόλοι-
πον εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου).

Ἡ σχέση (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , ἄρα καὶ διὰ τὴν
 $x=1$. Θέτοντες εἰς αὐτὴν $x=1$, εὐρίσκομεν

$$1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+2=u, \text{ ἥτοι } u=3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ ἐὰν ἐκ-
τελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι $\Pi(x)$, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι πολυ-
ώνυμον περιέχον τὸ x , παριστάνει τὸν διαιρετέον, τὸ $\rho(x)$ τὸ πη-
λίκον καὶ τὸ u τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαίρεσεως διὰ τοῦ $(x-\alpha)$, τὸ
ὁποῖον δὲν θὰ περιέχῃ τὸν x .

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ u εἶναι ἴσον μὲ $\Pi(\alpha)$, δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξα-
γόμενον τὸ προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου
γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x , τὸ α , ἥτοι τὴν τιμὴν, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ
 $x-\alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

Πράγματι έχουμε ότι $\Pi(x) = \rho(x) \cdot (x - \alpha) + u$.

Εάν θέσωμεν όπου x το α λαμβάνομεν :

$$\Pi(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + u \quad \eta \quad \Pi(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot 0 + u = u.$$

Εστω ή διαιρέσεις $(x^6 - \alpha^6) : (x + \alpha)$

Το υπόλοιπον εύρίσκεται, εάν εις τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x , τὸ $(-\alpha)$, ἥτοι τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $x + \alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0. Διότι τὸ $x + \alpha = x - (-\alpha)$. Ὡστε ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6 - \alpha^6) : [x - (-\alpha)]$. Εάν κάμωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x = (-\alpha)$ εἰς τὸν διαιρετέον, εύρίσκομεν ὅτι τὸ υπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^6 - \alpha^6 = \alpha^6 - \alpha^6 = 0$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολωνύμου περιέχοντος τὸ x , διὰ τοῦ $x \pm \alpha$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅπου x τὸ $-\alpha$ ἢ τὸ α εἰς τὸ πολωνύμου καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τούτου, ἥτοι νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $x \pm \alpha$.

Οὕτω τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4 + \alpha^4) : (x + \alpha)$ εἶναι τὸ $(-\alpha)^4 + \alpha^4 = \alpha^4 + \alpha^4 = 2\alpha^4$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολωνύμου $\Pi(x)$ διὰ $\alpha x + \beta$ εύρίσκεται, ἂν τεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἡ τιμὴ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $\alpha x + \beta$. Διότι, ἂν $\Pi(x)$ παριστάνῃ τὸν διαιρετέον, $\rho(x)$ τὸ πηλίκον καὶ u τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, θὰ ἔχομεν

$$\Pi(x) = \rho(x) \cdot (\alpha x + \beta) + u.$$

Θέτοντες $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτήν, εύρίσκομεν

$$\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \rho\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot (-\beta + \beta) + u = u, \quad \eta \text{τοι} \quad \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = u.$$

§ 78. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι :

Πολωνύμὸν τι $\Pi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\alpha x \pm \beta$, ἂν τὸ $\Pi\left(\mp \frac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ἴσον μὲ 0.

Οὕτω τὸ $x^m - \alpha^m$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - \alpha$, διότι τὸ υπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^m - \alpha^m = 0$, ($\alpha \neq 0$).

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $x - \alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x + \alpha$, ὅταν τὸ μ ἄρτιος ἀριθμός, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός.

Διότι, εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = \alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$.

εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶναι $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = -2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x + \alpha$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός, διότι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = -\alpha^\mu + \alpha^\mu = 0$. ἀλλ' ὅχι ὅταν τὸ μ εἶναι ἄρτιος, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = \alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὲς πρώτη. 132. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

$$\alpha') (2x^2 + x - 9) : (x - 2)$$

$$\beta') (x^2 + 6x + 7) : (x + 2)$$

$$\gamma') (x^4 + 17x^3 - 68x - 33) : (x - 0,5)$$

$$\delta') (27x^3 + 1) : (3x + 1)$$

Ὁ μὲς δευτέρα. 133. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις.

$$\alpha') (81x^4 - 256) : (3x - 4)$$

$$\beta') (8a^3 + b^3) : (2a + b)$$

$$\gamma') (32x^5 + 243) : (2x + 3)$$

$$\delta') (64x^6 - 1) : (2x + 1)$$

$$\epsilon') (1 + x^2) : (1 + x)$$

$$\sigma\tau') (\alpha^{10} + \beta^{10}) : (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\zeta') (\alpha^{12} - \beta^{12}) : (\alpha^4 - \beta^4)$$

$$\eta') (x^{16} + \psi^{16}) : (x^8 + \psi^8)$$

$$\theta') (x^{15} + \psi^{10}) : (x^3 + \psi^2)$$

$$\iota') (x^{18} - \psi^{18}) : (x^6 - \psi^6)$$

Ὁ μὲς τρίτη. 134. Εὑρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις.

$$\alpha') (\psi^m - 1) : (\psi^n - 1) \quad \beta') (\mu^6 - \nu^{12}) : (\mu^2 - \nu^3) \quad \gamma') (\alpha^{2n} + \mu + \beta^{2n} + \mu) : (\alpha + \beta)$$

$$\delta') (\psi^{12} - \omega^4) : (\psi^3 + \omega)$$

$$\epsilon') (x^{4n} - 1) : (x^n - 1)$$

12. ΠΗΛΙΚΑ ΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x \pm \alpha)$

§ 79. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu - \alpha^\mu$ ἢ τοῦ $x^\mu + \alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x - \alpha$, ὅπου $\mu > 0$ καὶ ἄκεραιος. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν, εὐρίσκομεν πηλίκον τὸ $x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \alpha^3 x^{\mu-4} + \dots + \alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0 διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, $2\alpha^\mu$ δὲ διὰ τὴν δευτέραν.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{\mu} - \alpha^{\mu}) : (x + \alpha)$ ὡς πηλίκον $x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \dots - \alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2v+1} + \alpha^{2v+1}) : (x + \alpha)$ εὐρίσκομεν πηλίκον $x^{2v} - \alpha x^{2v-1} + \dots + \alpha^{2v}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2v-1} - \alpha^{2v+1}) : (x + \alpha)$ εὐρίσκομεν πηλίκον $x^{2v} - \alpha x^{2v-1} + \dots + \alpha^{2v}$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^{2v+1}$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(x^4 - \alpha^4) : (x - \alpha) = x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$$

$$(x^6 - \alpha^6) : (x + \alpha) = x^5 - \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 - \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x - \alpha^5$$

$$(x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 \quad \text{καὶ ὑπόλοιπον } 2\alpha^3$$

$$(x^3 + \alpha^3) : (x + \alpha) = x^2 - \alpha x + \alpha^2$$

§ 80. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμον τι εἶναι **ὁμογενές βαθμοῦ** τινὸς ὡς πρὸς ὠρισμένα γράμματά του ἂν πάντες οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Π.χ. τὸ

$x^3 + 5\alpha x^2 - 12\alpha x^2 + \alpha^3$ εἶναι ὁμογενές γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α καὶ x . Τὸ $5x\psi - 8x^2 + 4\psi^2$ εἶναι ὁμογενές β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ ψ .

Ὅμογενές γραμμικὸν λέγεται πολυώνυμον τι ὡς πρὸς ὠρισμένα γράμματα αὐτοῦ, ἂν εἶναι ὁμογενές α' βαθμοῦ ὡς πρὸς αὐτά, π.χ. τὸ $3\alpha x - 5\beta\psi + 8\gamma\omega$ ὡς πρὸς τὸ α, β, γ ἢ ὡς πρὸς τὰ x, ψ, ω .

Οὕτω τὰ ἀνωτέρω πηλικά τῶν διαιρέσεων $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x \pm \alpha)$ εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ βαθμοῦ $\mu-1$ ὡς πρὸς x καὶ α .

Π.χ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^4 - \alpha^4) : (x - \alpha)$ εἶναι τὸ $x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$ ὁμογενές πολυώνυμον γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ α .

Ἀσκήσεις

135. Εὑρετε τὰ πηλικά καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἀπὸ μνήμης :

$$\alpha') (x^3 + \beta^3) : (\alpha + \beta) \quad \beta') (x^3 - \beta^3) : (\alpha - \beta) \quad \gamma') (x^2 - \beta^2) : (\alpha + \beta)$$

$$136. \alpha') (x^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) : (x^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$\beta') (x^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3) : (x^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

137. Εὑρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλικά καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων :

$$\alpha') (x^5 + \psi^6) : (x + \psi) \quad \beta') (x^6 - \psi^6) : (x - \psi) \quad \gamma') (x^3 + \psi^3) : (x + \psi)$$

$$\delta') (x^5 + \psi^6) : (x - \psi) \quad \epsilon') (x^7 + 1) : (x + 1) \quad \sigma\tau') (x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha)$$

138. Εὑρετε τίνων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x \pm \alpha)$ εἶναι τέλεια πηλικά τὰ κάτωθι :

$$\alpha') x^2 + \alpha x + \alpha^2 \quad \beta') x^2 - x + 1 \quad \gamma') x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\delta') \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 \quad \epsilon') x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - \alpha^3 x + \alpha^4$$

139. Εύρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha^{5n} - \beta^{5n}) : (\alpha^n - \beta^n)$, χωρὶς νὰ ἐκτελέσητε τὴν πράξιν (τὸ ν ὑποτίθεται ἀκέραιος > 0).

140. Ὅμοίως τῆς διαιρέσεως $(7\rho + 1) : 8$, ἂν τὸ ρ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ περιττός. Παρατηρήσατε ὅτι τὸ $8 = 7 + 1$. Εύρετε καὶ ἄλλα τοιαῦτα παραδείγματα τελειῶν διαιρέσεων.

141. Δείξατε ὅτι τὸ $(\alpha + \beta + \gamma)^{\mu} - \alpha^{\mu} - \beta^{\mu} - \gamma^{\mu}$ διαιρεῖται διὰ τῶν $\alpha + \beta$, $\alpha - \gamma$, $\beta + \gamma$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός καὶ θετικὸς ἀριθμὸς.

142. Δείξατε ὅτι ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x , διαιρῆται διὰ τοῦ $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $x - \alpha$, διὰ τοῦ $x - \beta$ καὶ διὰ τοῦ $x - \gamma$.

13. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 81. Ἐστω μονώνυμον ἀκέραιον, πχ. τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρῶτους τοῦ παράγοντας, θὰ εὔρωμεν ὅτι εἶναι $24 = 2^3 \cdot 3$. Ἀρα τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma = 2^3 \cdot 3\alpha^2\beta^3\gamma$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονωνύμου εἶναι οἱ 2, 3, α , β , γ . Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἔχοντος (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν ἀκέραιον ἀριθμὸν, γίνεται εὐκόλως, διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν του εἰς πρῶτους παράγοντας.

Τοῦναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἀπλοῦν, εἶναι δυνατὴ εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις καὶ ἐκ τούτων ἀναφερόμεν τινὰς κατωτέρω.

Ἡ περίπτωση. Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν τινα παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εὐκόλως εἰς γινόμενον παραγόντων.

Οὕτω τὸ $\alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu = \mu \cdot (\alpha + \beta - \gamma)$.

Ὅμοίως τὸ $\mu\alpha + \mu = \mu(\alpha + 1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^3 + 6x\psi = 2x(x^2 + 3\psi)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

143. Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰς κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') 8\alpha^2\beta - 6\alpha^3 + 4\alpha\beta$$

$$\beta') 4\alpha x^2\psi - 82\psi^2 - 4x\psi$$

$$\gamma') 8\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 2\alpha^2\beta^2\gamma^3$$

$$\delta') 15\alpha^3x - 10\alpha^2\psi + 5\alpha^3\omega$$

$$\epsilon') \alpha^3\gamma\psi^3 + 2\alpha^2\gamma^2\psi^2 - \alpha^2\gamma\psi^2$$

$$\sigma\tau) 3\beta^3\gamma^3 + 2\beta^2\gamma^2 - 6\beta\gamma^3$$

$$\zeta') x^2\psi^2\omega^2 - x^3\psi^3\omega^3 + x^2\psi^3\omega$$

$$\eta') \alpha\beta^2\gamma^3 - 2\alpha^2\beta^2\gamma + 3\alpha^2\beta^3\gamma$$

$$\theta') 6\alpha^2 - 12\alpha^3 \quad \iota') 3x^2 - 7x^4$$

$$\iota\alpha') 8x^2\psi^2 + 16x\psi\omega - 24x^2\psi^2\omega^2$$

2α περίπτωσης. Ἐὰν εἶναι δυνατόν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἐκάστην τούτων νὰ ὑπάρχη ὁ αὐτὸς παράγων, τότε τρέπεται ἐν γένει τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$ εἶναι ἴσον μὲ

$$(\alpha\gamma + \alpha\delta) + (\beta\gamma + \beta\delta) = \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$$

Ἀσκήσεις

144. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha + x$$

$$\beta') x^3 - x^2\omega - x\psi^2 + \psi^2\omega$$

$$\gamma') \alpha\beta x - \alpha\beta\psi + \gamma\delta x - \gamma\delta\psi$$

$$\delta') \alpha x^2 - \beta x^2 + \alpha - \beta$$

$$\epsilon') \alpha^2\gamma \pm \beta^2\delta \pm \beta^2\gamma + \alpha^2\delta$$

$$\sigma\tau') \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 \pm \alpha\beta\gamma \pm \beta\gamma^2$$

$$\zeta') 1 + \gamma - \gamma^2 x\psi - \gamma^3 x\psi$$

$$\eta') 6x^3 - 10x\psi^3 - 15\psi^4 + 9x^2\psi$$

$$\theta') 2x(x - \psi) - 6\alpha(x - \psi)$$

$$\iota') x^3 + 2(x^2 - 1) - 1$$

$$\iota\alpha') \alpha x + \beta x - \gamma x + \alpha\psi + \beta\psi - \gamma\psi$$

$$\iota\beta') \alpha^5 + 2(\alpha^3 + 1) + 1$$

3η περίπτωσης. Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον διωνύμου, τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων. Οὕτω τὸ

$$x^2 + 2x\psi + \psi^2 = (x + \psi)(x + \psi) = (x + \psi)^2.$$

Ὀμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha - 3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)(4\alpha - 3\beta).$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$x^4 - 2x^2\psi + \psi^2 = (x^2 - \psi)^2 = (x^2 - \psi)(x^2 - \psi).$$

Ἀσκήσεις

145. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') \mu^2\nu^2 \pm 16\mu\nu\alpha^2 + 64\alpha^4 \quad \beta') \alpha^2\beta^6\gamma^6 \pm 2\alpha\beta^2\gamma^3x^8 + x^{16} \quad \gamma') x^6 \pm 34x^3 + 289$$

$$\delta') (x + \psi)^2 - 4\omega(x + \psi) + 4\omega^2 \quad \epsilon') (\alpha - \beta)^2 - 6(\alpha - \beta)\gamma^3 + 9\gamma^6$$

$$\sigma\tau') (\phi + \omega^2)^2 + 8\phi + 8\omega^2 + 16$$

4η περίπτωσης. Ἐὰν διώνυμόν τι εἶναι διαφορὰ δύο τετρα-

γώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἄθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν δοθέντων τετραγώνων καθ' ἣν τάξιν εὐρίσκονται τὰ δοθέντα τετράγωνα.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν} \quad 16x^2 - 9\psi^2 = (4x + 3\psi)(4x - 3\psi).$$

$$\text{Ὅμοίως τὸ} \quad 25 - 16\alpha^2 = (5 + 4\alpha)(5 - 4\alpha).$$

Ἀσκήσεις

146. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\alpha^2\beta^2 - 1$	β') $4\alpha^2 - 49\beta^2$	γ') $121\alpha^2 - 36\beta^2$	δ') $49x^{14} - \psi^{12}$
ε') $81\alpha^4\beta^2 - \gamma^4$	στ') $4\alpha^2\gamma - 9\gamma^3$	ζ') $20\alpha^3\beta^2 - 5\alpha\beta^2$	η') $3\alpha^5 - 12\alpha^3\gamma^2$
θ') $1 - 400x^4$	ι') $4x^{16} - \psi^{20}$	ια') $9x^2 - \alpha^6$	ιβ') $16x^{17} - 9x\psi^6$

5η περίπτωσης. Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, οὕτως ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων. Οὕτως ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Π.χ. ἔχομεν ὅτι : $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2 = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - 9\gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 - 9\gamma^2 = (\alpha - \beta + 3\gamma)(\alpha - \beta - 3\gamma)$. Ὅμοίως $12\alpha\beta + 9x^2 - 4\alpha^2 - 9\beta^2 = 9x^2 - (4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2) = 9x^2 - (2\alpha - 3\beta)^2 = (3x - 2\alpha + 3\beta)(3x + 2\alpha - 3\beta)$.

Ἀσκήσεις

146α. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\beta^2 - x^2 + 4\alpha x - 4\alpha^2$	β') $\alpha^2 - x^2 - \psi^2 - 2x\psi$
γ') $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 16\alpha^2\beta^2$	δ') $4x^2 - 9\alpha^2 + 6\alpha - 1$
ε') $x^4 - x^2 - 2x - 1$	στ') $2x\psi - x^2 + \alpha^2 - \psi^2$
ζ') $\alpha^4\psi + 2\alpha^2\psi\beta^2\psi - \gamma^2\psi + \beta^4\psi$	η') $x^{2\nu} - 2x\psi^\nu + \psi^{2\nu} - 4\omega^{2\nu}$
ς') $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2\alpha\beta - 2\gamma\delta$	ι') $\alpha^2 - x^2 + 2(\alpha\beta - 3x\psi) + \beta^2 - 9\psi^2$
ια') $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 - 2(\alpha\delta - \beta\gamma)$	ιβ') $4(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)^2$

6η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta).$$

$$\text{Π.χ. τὸ} \quad x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

7η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ τὸ μὲν β εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀρι-

θμῶν, ἔστω τῶν ρ καὶ ρ' , τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν $\beta = \rho + \rho'$, $\gamma = \rho\rho'$. Ἄρα :

$$x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + (\rho + \rho')x + \rho\rho' = x^2 + \rho x + \rho'x + \rho\rho' = (x^2 + \rho x) + (\rho'x + \rho\rho') = x(x + \rho) + \rho'(x + \rho) = (x + \rho)(x + \rho').$$

Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2 + 8x + 15$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $8 = 5 + 3$ καὶ $15 = 3 \cdot 5$. Διὰ τοῦτο ἔχομεν :

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5).$$

9η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $ax^2 + \beta x + \gamma$, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς γινόμενον φέροντες πρῶτον αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν, ἥτοι γράφοντες αὐτὴν οὕτως : $\alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$, ὅτε ἄρκει νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha}$. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν $ax^2 + \beta x + \gamma = \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 x^2 + \alpha\beta x + \alpha\gamma)$. Θέτομεν $ax = \omega$ ὅτε ἔχομεν, ἀντὶ τῆς δοθείσης παραστάσεως, τὴν $\frac{1}{\alpha} (\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma)$.

Ζητοῦμεν τώρα νὰ τρέψωμεν τὸ $\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma$ εἰς γινόμενον. Ἐστω λοιπὸν ὅτι εὐρέθη $\omega^2 + \beta\omega + \alpha\gamma = (\omega - \rho_1)(\omega - \rho_2)$. Θέτομεν $\omega = ax$ καὶ εὐρίσκομεν $(ax - \rho_1)(ax - \rho_2)$, ἄρα ἡ δοθεῖσα παραστασις τρέπεται εἰς τὴν $\frac{1}{\alpha} (ax - \rho_1)(ax - \rho_2)$.

Ἐστω π.χ. ἡ παράστασις $3x^2 - x - 2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς : $\frac{1}{3} (3 \cdot 3x^2 - 3x - 3 \cdot 2)$. Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ $3x$ τὸ ω , δηλαδὴ ἂν θέσωμεν $3x = \omega$, εὐρίσκομεν

$$3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3} (\omega^2 - \omega - 6).$$

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2 - \omega - 6$ εἰς τὸ $(\omega - 3)(\omega + 2)$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3} (\omega - 3)(\omega + 2).$$

Γράφομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον αὐτοῦ $3x$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{1}{3} (3x - 3)(3x + 2) = \frac{3}{3} (x - 1)(3x + 2) = (x - 1)(3x + 2).$$

Ἦτοι : $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$.

9η περίπτωσης. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἄθροισμα ἢ

διαφορὰ δύο κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$ ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π.χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐπομένως εἶναι: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

Ὀμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶναι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^6+\psi^9=(x^2+\psi^3)(x^4-x^2\psi^3+\psi^6)$.

Τὸ $(x-\psi)^3+\omega^3=(x-\psi+\omega)[(x-\psi)^2-(x-\psi)\omega+\omega^2]=$
 $(x-\psi+\omega)(x^2+\psi^2-2x\psi-x\omega+\psi\omega+\omega^2)$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρώτη. 147. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α') $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$	στ') $\alpha^8+\beta^4$	ια') $16\alpha^4-17\alpha^2+1$
β') $4x^2-21x^2\psi^2+9\psi^4$	ζ') $\alpha^4+\alpha^2\psi^2+\psi^4$	ιβ') $16\lambda^4+\gamma^4$
γ') $\lambda^2+\lambda^2+1$	η') $25x^4+31x^2\psi^2+16\psi^4$	ιγ') $\alpha^2+17\alpha-390$
δ') $4\alpha^4-13\alpha^2+1$	θ') $\alpha^4+4\beta^4$	ιδ') $\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$
ε') $4x^4-37x^2\psi^2+9\psi^4$	ι') $9\alpha^6-15\alpha^4+1$	

Ὁ μᾶς δευτέρα. 148. Ἐπίσης νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α') $4x^2+13x+3$	δ') $x^3\pm 64$	ζ') $8\alpha^3\pm\beta^6$
β') $6x^2+17x+12$	ε') $343\pm x^3$	η') $216\mu^3\pm\nu^6$
γ') $11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2$	στ') $\alpha^2\beta^3\pm 343$	

Ὁ μᾶς τρίτη. 149. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κατωτέρω παραστάσεις διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν περιπτώσεων.

α') $(x+\psi)^2-1-x\psi(x+\psi+1)$	β') $\alpha^4-\beta^4+2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$
γ') $(x^2-4)^2-(3x-2)(x+2)^2$	δ') $\alpha^2\gamma^2+\beta\gamma-\alpha^2\gamma-\beta$
ε') $x(2+x)-\psi(2+\psi)$	στ') $\alpha^3-\beta^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\alpha+\beta$
ζ') $4x+4\alpha\nu+x^2-4\alpha^2-\nu^2+4$	η') $x^4\psi^4-4x^2+4-\psi^2-4x^2\psi^2+4x\psi$
θ') $x^2\psi-3x\psi^2-3x^3-\psi^3$	ι') $\alpha\beta(x^2+1)+x(\alpha^2+\beta^2)$
ια) $\pi\nu(\mu^2+1)+\mu(\pi^2+\nu^2)$	

4. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 82. Καλοῦμεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην (μ.κ.δ.) δοθέντων ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀριθμητικούς συντελεστὰς ἀκεραίους, τὸν μ.κ.δ. τῶν κυρίων ποσῶν των, μὲ συντελεστὴν τὸν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν των.

Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀρι-

ριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας, ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ παραστάσεων, μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους, ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Οὕτω ὁ μ.κ.δ. τῶν $6\alpha^2\beta^3 = 2 \cdot 3 \cdot \alpha^2\beta^3$, $9\alpha^3\beta^2 = 3^2\alpha^3\beta^2$, $16\alpha^4\beta^3 = 2^4 \cdot \alpha^4\beta^3$, εἶναι τὸ $\alpha^2\beta^2$

Ὁ μ.κ.δ. τῶν $\alpha^2 - \alpha\beta = (\alpha - \beta)\alpha$, $\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha - \beta)^2$ καὶ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ εἶναι τὸ $\alpha - \beta$.

§ 83. Καλοῦμεν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἀκεραίους, τὸ ἐ.κ.π. τῶν κυρίων ποσῶν αὐτῶν, μὲ συντελεστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του.

Ὁ κανὼν τῆς εὐρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους), ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως

Οὕτω τὸ ἐ.κ.π. τῶν $18\alpha^3\beta^2 = 2 \cdot 3^2\alpha^3\beta^2$, $9\alpha\beta^2 = 3^2 \cdot \alpha\beta^2$, $12\alpha\beta = 2^2 \cdot 3\alpha\beta$, εἶναι τὸ γινόμενον $2^2 \cdot 3^2\alpha^3\beta^2 = 36\alpha^3\beta^2$.

Ἀσκήσεις

150. Νὰ εὐρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων :

$$\alpha') 121\alpha^2 \quad 168\alpha^4\beta^2$$

$$\beta') 36\alpha^3x, \quad 28x^3\psi$$

$$\delta) (x-1)^2(x+2)^3, \quad (x-1)(x+3)^3$$

$$\epsilon') 35x^2(\mu+\nu)^2, \quad (\mu+\nu)^3, \quad 20x^3(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2, \quad 45x^4(\mu+\nu)^3(\mu-\nu)^3$$

$$\epsilon') x^3+2x^2-3x, \quad 2x^3+5x^2-3x$$

$$\sigma\tau') 1-x, \quad (1-x^2)^2, \quad (1-x)^3$$

$$\zeta') x^4+\alpha x^3+\alpha^3x+\alpha^4, \quad x^4+\alpha^2x^2+\alpha^4$$

151. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων

$$\alpha') 18x(\alpha+2\beta)^2, \quad 9x\psi(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta), \quad 18x^2\psi^2(\alpha-2\beta)^2$$

$$\beta') 3x^4+3x, \quad 5x^3-5x, \quad 10x^2+10x$$

$$\gamma') 14\alpha^4(\alpha^3-\beta^3), \quad 21\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2, \quad 6\alpha^3\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\delta') \mu^3-\mu\nu^3, \quad \mu^2+\mu\nu-2\nu^2, \quad \mu^2-\mu\nu-2\nu^2$$

$$\epsilon') x^4-(\pi^2+1)x^2+\pi^2, \quad x^4-(\pi+1)^2x^2+2(\pi+1)\pi x-\pi$$

Γ'. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 84. Καθώς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο σχετικῶν ἀριθμῶν παριστάνεται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π.χ. τῶν ἀκεραίων τοιούτων $-5\alpha^2 + \beta^3$ καὶ $8\gamma^3 + 9\alpha$ παριστάνεται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{-5\alpha^2 + \beta^3}{8\gamma^3 + 9\alpha}$.

Τοῦτο, ὡς καὶ πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἐν γένει ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα**.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 85. Ἐπειδὴ οἰαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ ἀκέραiai ἀλγεβρικοί καὶ παραστάσεις, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, οἱ ὅροι αὐτοῦ παριστάνουν σχετικούς ἀριθμούς (διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των, διὰ τὰς ὁποίας δὲν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής των) ἔπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ιδιότητας τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Οὕτως, ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινὸς κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται.

$$\text{Κατὰ ταῦτα ἔχομεν π.χ. } \frac{37\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4} = \frac{3 \cdot 19\alpha^3\beta\gamma^2}{2 \cdot 19\alpha^2\beta^3\gamma^4} = \frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}.$$

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τρέψωμεν δοθὲν ἀλγεβρικὸν ρητὸν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους ἀπλουστεροῦς τοῦ δοθέντος. Πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιοῦμεν, ἂν εἶναι δυνατόν, τὸν μ.κ.δ. τῶν ὁρῶν του, τρέποντες αὐτοὺς εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

§ 86. Ἀπλοποιήσις ἀλγεβρικοῦ τινὸς ρητοῦ κλάσματος λέγεται ἡ εὑρεσις ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου του καὶ ἔχοντος ὅρους ἀπλουστεροῦς. Ἡ ἀπλοποιήσις καὶ τῶν ρητῶν κλασμάτων ἀνάγεται εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἀπλοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν τοιούτων. Ἡτοι :

Διὰ νὰ ἀπλοποιήσωμεν ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαι-

ροῦμεν τοὺς ὅρους του διὰ τινος κοινοῦ διαιρέτου των τρέποντες τούτους εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

Οὕτως ἔχομεν π.χ. διὰ τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6} \quad \text{ἔχομεν} \quad \frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6} = \frac{(\alpha+5)(\alpha+3)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} = \frac{\alpha+5}{\alpha+2}.$$

Τοῦτο εὐρέθη, ἀφοῦ πρῶτον οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος ἐτράπησαν εἰς γινόμενα καὶ ἀκολουθῶς οἱ ὅροι τοῦ προκύψαντος ἰσοδυνάμου κλάσματος διηρέθησαν διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὁρῶν του ἤτοι μὲ τὸ $\alpha+3$.

§ 87. Ἀνάγωγον λέγεται ἐν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα καὶ ἐπομένως δὲν ἀπλοποιεῖται. Ὁ κανὼν καθ' ὃν τρέπεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἰς ἀνάγωγον ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικά ρητὰ κλάσματα καὶ πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιεῖται ὁ μ.κ.δ. τῶν ὁρῶν του, ἐκάστου τούτων τρεπομένου εἰς γινόμενον παραγόντων (ἂν εἶναι δυνατόν). Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^3} = \frac{2^2 \cdot \alpha^2\beta^2\gamma}{2 \cdot 3\alpha\beta^2\gamma^3} = \frac{2\alpha}{3\gamma^2} \quad (\mu.κ.δ. \text{ εἶναι } \delta \ 2\alpha\beta^2\gamma).$$

Ἐπίσης εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \quad (\delta \ \mu.κ.δ. \text{ εἶναι } \tau\omicron \ \alpha-1).$$

Ἐπίσης εὐρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2} = \frac{(x+\alpha+\beta) \cdot (x+\alpha-\beta)}{(x+\alpha+\beta) \cdot (x+\beta-\alpha)} = \frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha} \\ (\mu.κ.δ. \ \delta \ x+\alpha+\beta).$$

Ἀ σ κ η σ ι ς

152. Νὰ τραποῦν εἰς ἀνάγωγα τὰ κλάσματα :

$$\begin{array}{llll} \alpha') \frac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2} & \beta') \frac{45\alpha^2\beta^2\gamma^3}{9\alpha^2\beta^2\gamma} & \gamma') \frac{46x^2\psi^2}{39x^3\psi^5} & \delta') \frac{98x\psi-24\psi^3}{24x^2-32x\psi} \\ \epsilon') \frac{x^3-\psi^3}{x^2-\psi^2} & \sigma\tau') \frac{x^2-\psi^2}{x^2+\psi^3} & \zeta') \frac{x^4-6561}{x^2-81} & \eta') \frac{\alpha\beta\gamma+9\beta\gamma-5\gamma^2}{2\alpha\beta\delta\rho+18\beta\delta\rho-10\gamma\delta\rho} \\ \theta') \frac{\alpha x+\beta\psi+\alpha\psi+\beta x}{\alpha\psi+2\beta x+2\alpha x+\beta\psi} & \iota') \frac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} & & \\ & \iota\alpha') \frac{\alpha(\alpha-\beta)^2+4\alpha^2\beta+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta)+2\alpha\beta+\beta(\alpha+\beta)} & \iota\beta') \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} & \end{array}$$

§ 88. Διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδυνάμια των ὁμώνυμα ἀλγε-

βρικά ρητά κλάσματα, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

Ἔστωσαν π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{\beta}{6\alpha}$, $\frac{\alpha}{9\beta}$, $\frac{1}{4\alpha^2\beta}$, $\frac{1}{18\alpha^2\beta^3}$ Τὸ ἐ. κ. π.

παρονομαστῶν εἶναι τὸ $3^2 \cdot 2^2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^3$. Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν εὐρίσκομεν κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3$, $4\alpha^2\beta^2$, $9\beta^2$, 2 .

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐκάστου τῶν δοθέντων κλασμάτων κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ πηλικά ταῦτα, εὐρίσκομεν (ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων) τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{9\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{2}{36\alpha^2\beta^3}.$$

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{4(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)}, \quad \frac{5}{8(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}.$$

Τρέπομεν τοὺς παρονομαστὰς τούτων εἰς γινόμενα καὶ ἔχομεν, ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων, τὰ ἐξῆς ἰσοδύναμά των ἀντιστοίχως

$$\frac{1}{4(\alpha+\beta)^3}, \quad \frac{5}{8(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha-\beta)^2}, \quad (2)$$

Τὸ ἐ.κ.π. τούτων εἶναι $8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2$. Τὰ πηλικά τούτων δι' ἐκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2$, $5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, $8(\alpha+\beta)^3$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων (2) ἐπὶ τὰ πηλικά αὐτὰ ἀντιστοίχως, εὐρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων κλασμάτων

$$\frac{2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{5 \cdot 5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{9 \cdot 8(\alpha+\beta)^3}{5 \cdot 8(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}.$$

Ἀσκήσεις

153. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα μὲ κοινὸν παρονομαστήν τοῦ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων :

$$\begin{aligned} \alpha') \quad & \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x+1}. & \beta') \quad \frac{\mu}{3x^2\psi^2}, \quad \frac{\nu}{8x\psi^3}, \quad \frac{\rho}{9x^4\psi^3}, \quad \frac{6}{24x^2\psi^4}. \\ \gamma') \quad & \frac{\alpha^2}{(x^2-4)(x-1)}, \quad \frac{\alpha}{(x+2)(x+1)}, \quad \frac{3}{x^2-4x+3}. \\ \delta') \quad & \frac{x^2}{\rho(\alpha\mu+\mu^2)}, \quad \frac{x}{\rho^2(\alpha^2-\alpha\mu)}, \quad \frac{1}{\rho^3(\alpha^2-\mu^2)}. \end{aligned}$$

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ $\frac{0}{0}$ ΚΑΙ $\frac{\alpha}{0}$

§ 89. Καθώς εἶδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἂν τύχη νὰ ἔχωμεν διαίρεσιν τοῦ $0 : 0$, τὸ πηλίκον εἶναι ἀόριστον, δηλαδή τὸ πηλίκον δύναται νὰ εἶναι οἷοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμὸς, ἔστω α , διότι $\alpha \cdot 0 = 0$. Διὰ τοῦτο, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι ρητοῦ κλάσματος λαμβάνουν τὴν τιμὴν 0 δι' ὠρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων τῶν, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος διὰ τὰς τιμὰς ταύτας θεωρεῖται, ὅτι εἶναι **ἀόριστος**.

Ἐστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$. Ἄν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x = \alpha$ εὐρίσκομεν $\frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-\alpha} = \frac{0}{0}$. Διὰ τοῦτο ἡ παράστασις $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$, παρουσιάζεται ὡς ἀόριστος διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x .

Παρατηροῦμεν ὁμῶς, ὅτι, ἂν εἶναι τὸ $x \neq \alpha$, ἔχομεν $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = x + \alpha$, καὶ ἂν εἰς τοῦτο τεθῇ $x = \alpha$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 2α καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Ἡ εὐρεθεῖσα αὕτη τιμὴ 2α εἶναι καὶ ἡ (ἀληθὴς) τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$. Διὰ ταῦτα, ὅταν συμβαίῃ ρητὸν ἐν γένει ἀλγεβρικὸν κλάσμα νὰ γίνεταί $\frac{0}{0}$ διὰ τινὰ δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός του, ἵνα εὐρωμεν τὴν ἀληθεῖ τιμὴν του, ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ προκύπτον ἐκ τοῦ δοθέντος μετὰ τὴν ἀπλοποιήσιν τῶν ὁρῶν του. Ἐὰν καὶ εἰς τὸ προκύπτον κλάσμα παρουσιάζεται παρόμοιον φαινόμενον, ἐργαζόμεθα καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὁμοίως.

Ἄν θέλωμεν τὴν τιμὴν π.χ. διὰ τὸ $\frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha^3-4\alpha^2+5\alpha-2}$, ὅταν $\alpha = 1$, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι τούτου, ὅταν $\alpha = 1$, λαμβάνουν ἕκαστος τὴν τιμὴν 0 . Ἀλλὰ καὶ ἐκ τούτου διακρίνομεν, ὅτι οἱ ἐν λόγῳ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha-1$, (ἀφοῦ, ὅταν $\alpha = 1$, μηδενίζονται).

Διαιροῦμεν λοιπὸν ἕκαστον τῶν ὁρῶν του μὲ $\alpha-1$ καὶ εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος $\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha^2-3\alpha+2}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τούτου οἱ ὅροι ἔχουν τὴν τιμὴν 0 ἕκαστος, ὅταν $\alpha=1$. Καὶ τούτου οἱ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha-1$, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς

διαίρεσεις εἰς ἕκαστον τῶν ὁρῶν, εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$.

Θέτομεν εἰς τοῦτο $\alpha = 1$ καὶ εὐρίσκομεν $\frac{0}{1-2} = 0$. Αὕτῃ εἶναι ἡ ἀληθῆς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha = 1$.

Ὅταν ἐργαζώμεθα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὐρίσκομεν, ἀντὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἰσοδύναμόν του, διὰ τὸ ὅποιον δὲν ὑπάρχει διὰ τὰς θεωρουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων, ἀόριστος τιμὴ τούτου, τότε λέγομεν ὅτι **αἶρομεν τὴν ἀοριστίαν** τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἄν δοθὲν ἀλγεβρικὸν κλάσμα δὲν εἶναι ρητόν, τότε δὲν ἔχομεν ὠρισμένον ἀπλοῦν κανόνα διὰ νὰ ἄρῳμεν τὴν ἀοριστίαν του. Ἀλλὰ συνήθως ἐπιδιώκομεν (ἂν εἶναι δυνατὸν) νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος μὲ ρητὸν παρονομαστήν καὶ νὰ ἐπιτύχωμεν ὁμοίως τὴν ἀποβολὴν τῆς ἀοριστίας. Π. χ. $\frac{\alpha-5}{\sqrt{\alpha-1}-2}$, ὅπου $\alpha = 5$, λαμβάνει τιμὴν ἀόριστον. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τοὺς ὁρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{\alpha-1} + 2$, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν τοῦ δοθέντος.

$$\frac{(\alpha-5)(\sqrt{\alpha-1} + 2)}{\alpha-5} = \sqrt{\alpha-1} + 2. \text{ Αὕτη, ὅταν } \alpha = 5, \text{ λαμβάνει τὴν τιμὴν}$$

ἡ ὁποία εἶναι καὶ (ἀληθῆς) τιμὴ καὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha = 5$.

§ 90. Ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha-1} + 2$ λέγεται **συζυγῆς** τῆς $\sqrt{\alpha-1} - 2$.

Ἐν γένει δύο διώνυμα λέγονται **συζυγῇ**, ὅταν οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀντίθετοι· δηλαδὴ ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$ καὶ $A - B$.

Π.χ. αἱ $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ καὶ $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ εἶναι συζυγῇ διώνυμα ἢ συζυγεῖς παραστάσεις.

§ 91. Ἐστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{9x^3}{x-2}$, ὅταν $x = 2$. Ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτό, τὸ x μὲ τὸ 2, εὐρίσκομεν

$$\frac{9 \cdot 2^3}{2-2} = \frac{9 \cdot 8}{0} = \frac{72}{0}$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ἐνίοτε ἡ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ κλάσματος διὰ τινὰ δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος λαμβάνει μορφήν κλάσματος μὲν, ἀλλ' ἔχοντος παρονομαστήν τὸ 0 καὶ ἀριθμητὴν ὠρισμένον τινὰ ἀριθμὸν $\neq 0$.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι ἡ τιμὴ κλάσματός τινος εἶναι ἡ $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμὸν τινὰ ὠρισμένον ($\neq 0$). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι :

Ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$ οὐδεμίαν ἔχει ἔννοϊαν ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\alpha}{0}$ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ (ὅσον-δήποτε μεγάλου).

Καὶ ὅτι μὲν τὸ $\frac{\alpha}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοϊαν, φαίνεται ἐκ τούτου : οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α , ἀφοῦ τὸ 0 ἐπὶ οἷονδήποτε ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενον δίδει γινόμενον 0.

Ἐξ ἄλλου ὁμως, ἂν ὁ παρονομαστής ἐνὸς κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν ὠρισμένον $\alpha \neq 0$ ἐλαττωῖται, τότε τὸ κλάσμα αὐξάνεται ἀπολύτως. Οὕτω π.χ. τὸ $\frac{\alpha}{0,001} = 1000\alpha$, ἐνῶ τὸ $\frac{\alpha}{0,0001} = 10\,000\alpha$ εἶναι δὲ τὸ δεύτερον τοῦτο μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου του, ἐνῶ ὁ παρονομαστής τούτου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του.

Οὕτως, ὅσον ὁ παρονομαστής ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ 0, τόσοι ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος γίνεται ἀπολύτως μεγαλύτερα καὶ τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν. Ἄν συμβαίῃ τοῦτο διὰ τὸ $\frac{\alpha}{0}$, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{0}$ τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον ἢ εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὅσον εἶναι τὸ $\alpha > 0$ ἢ τὸ $\alpha < 0$. Τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον $\pm \infty$ (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον).

Διὰ τοῦτο πάντοτε εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὑποθέτομεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ 0.

Ἀ σ κ η σ ι ς

154. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{x^3+2x}{x}, \text{ όταν } x=0, \beta') \frac{\psi^4-\alpha^4}{\psi^2-\alpha^2}, \text{ όταν } \psi=\alpha, \gamma') \frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}, \text{ όταν } x=\alpha,$$

$$\delta') \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}, \text{ όταν } \alpha=\beta, \epsilon') \frac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}, \text{ όταν } x=\alpha,$$

$$\sigma\tau') \frac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}, \text{ όταν } x=\alpha, \zeta') \frac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}, \text{ όταν } x=1, \eta') \frac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}, \text{ όταν } \alpha=1,$$

$$\theta') \frac{\sqrt[3]{\alpha \cdot \alpha - \beta} + \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta^2}}{\sqrt[3]{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha^2 (\alpha - \beta)}, \text{ όταν } \alpha = \beta.$$

3. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 92. Ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀριθμητικῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαιρέσιν ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἄν τὰ δοθέντα ρητὰ ἐν γένει κλάσματα εἶναι ἑτερόνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν (ἀφοῦ τρέψωμεν τούτους εἰς γινόμενα) καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς κλασματικούς ἀριθμούς.

$$\text{Ἔστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα } \frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta} + \frac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta} +$$

$\frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ $4\alpha^2-9\beta^2 = (2\alpha+3\beta)(2\alpha-3\beta)$. Τὰ πηλίκα τούτου δι' ἐκάστου τῶν παρανομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2\alpha+3\beta$, $2\alpha-3\beta$ καὶ 1. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ ἀντιστοίχως καὶ εὐρίσκομεν

$$\frac{(2\alpha+3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2} + \frac{(2\alpha-3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2} + \frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2} = \frac{(2\alpha+3\beta)^2 + (2\alpha-3\beta)^2 + 2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}.$$

Ἀσκήσεις

155. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων, διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{2}{2x+5} + \frac{4}{3x+17} - \frac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+17)}, \quad \text{ὅταν } x=2,$$

$$\beta') \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}, \quad \text{ὅταν } \alpha=1, \beta=-1, \gamma=2,$$

$$\gamma') \frac{1-2x}{3(x^2-2x+1)} + \frac{1+x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{6(x+1)}, \quad \text{ὅταν } x=2.$$

$$\delta') \frac{\alpha^2 + \alpha\gamma}{\alpha^2\gamma - \gamma^3} - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2\gamma + 2\alpha\gamma^2 + \gamma^3} + \frac{28}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{3}{\alpha + \gamma},$$

$$\varepsilon') \frac{x^3\psi - x\psi^3}{x^6 - \psi^6} + \frac{x}{x^3 - \psi^3} - \frac{\psi}{x^3 + \psi^3},$$

$$\sigma\tau') \frac{x^2 - (2\psi - 3\omega)^2}{(3\omega + x)^2 - 4\psi^2} + \frac{4\psi^2 - (3\omega - x)^2}{(x + 2\psi)^2 - 9\omega^2} + \frac{\omega^2 - x^2}{x + \omega},$$

$$\zeta') \frac{x}{x - \psi} - \frac{\psi}{x + \psi} - \frac{x^2}{x^2 + \psi^2} + \frac{\psi^2}{\psi^2 - x^2}.$$

$$\eta') \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^4 - \beta^4} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{1}{\alpha - \beta} \right).$$

156. 'Εάν θέσωμεν $\varphi(x) \equiv x + 2$, $\pi(x) \equiv x^2 + 2x + 4$, $\psi(x) \equiv x - 2$ και

$$\omega(x) \equiv x^2 - 2x + 4, \text{ δείξατε ότι είναι } \frac{\pi(x) \cdot \omega(x)}{\varphi(x) \cdot \omega(x) - \pi(x) \cdot \psi(x)} = \frac{x^4 + 4x^2 + 16}{16}.$$

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 93. Ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ρητὰ ἀλγεβρικά κλάσματα. Οὕτω π.χ.

$$\xi\chi\omicron\mu\epsilon\nu \quad \frac{12x^2\psi}{7\omega\varphi^2} \cdot \frac{14\omega^2\varphi}{3x\psi^2} = \frac{12x^2\psi \cdot 14\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2 \cdot 3x\psi^2} = \frac{12 \cdot 14x^2\psi\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2 \cdot 3x\psi^2} = \frac{8x\omega}{\psi\varphi}.$$

Παρατηρητέον, ὅτι εἰς γινόμενον κλασμάτων δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιούμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων, μὲ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατόν (τρέποντες πρὸς εὐκολίαν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων εἰς γινόμενα). Π.χ. εἶναι

$$\frac{\alpha + x}{\alpha - x} \cdot \frac{\alpha - x}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\alpha + x}{\alpha^2 + x^2}$$

$$\text{'Επίσης } \frac{x(\alpha + x)}{\alpha(\alpha - x)} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha - x)^2}{x^2(\alpha + x)^2} = \frac{x(\alpha + x)}{\alpha(\alpha - x)} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha - x)(\alpha - x)}{x^2(\alpha + x)(\alpha + x)} = \frac{\alpha(\alpha - x)}{x(\alpha + x)}.$$

Ὁ κανὼν διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ τοῦ κλάσματος ἐν γένει. Οὕτω π.χ. τὸ

$$\frac{12\alpha^2}{\beta^2} : \frac{3\alpha\beta^2}{10} = \frac{12\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{10}{3\alpha\beta^2} = \frac{120\alpha^2}{3\alpha\beta^4} = \frac{40\alpha}{\beta^4}.$$

$$\text{Τὸ } \frac{15(\alpha + \beta)}{22(\alpha - \beta)} : \frac{5(\alpha + \beta)^2}{11(\alpha - \beta)} = \frac{15(\alpha + \beta)}{22(\alpha - \beta)} \cdot \frac{11(\alpha - \beta)}{5(\alpha + \beta)^2} = \frac{3}{2(\alpha + \beta)}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁ μᾶς πρώτη. 157. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha') \frac{\alpha x + \alpha \psi}{\gamma x - \gamma \psi} \cdot \frac{\gamma x^2 - \gamma \psi^2}{\beta x + \beta \psi} \qquad \beta') \frac{3x^2 - 6x\psi + 3\psi^2}{x + \psi} \cdot \frac{x^3 + \psi^3}{6(\lambda - \psi)},$$

$$\gamma') \left(1 + \frac{x^4 - 2x^2\psi^2 + \psi^4}{4x^2\psi^2}\right) (x^4 - 2x^2\psi^2 + \psi^4).$$

$$\delta') \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta}{\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\delta - \beta\delta}\right), \quad \epsilon') \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + 4\beta^2} \cdot \frac{\alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - 4\beta^2},$$

$$\sigma\tau') \left(\alpha^4 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + \alpha\beta x^2}{\alpha x + 1} \cdot \frac{\alpha x}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\zeta') \left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(\alpha - 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^6 - 1},$$

$$\eta') \left(2 + \frac{\mu}{\mu - 3}\right) \left(\frac{9 - \mu^2}{4 - \mu^2}\right) \left(\frac{2 - \mu}{\mu^2 + \mu - 6}\right) - \left(\frac{2}{\mu + 2}\right)$$

Ὁ μᾶς δευτέρα. 158. Ἐχει τις 5λ δραχ. Ἐκ τούτων ἐξοδεύει πρῶτον τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ ἑβδομον καὶ τέλος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

159. Ἐχει τις $\beta - 1$ δραχμάς καὶ ἐξοδεύει τὸ τέταρτον αὐτῶν καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

160. Ἐχει τις α δραχμάς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 90 δραχ. καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσαι δραχ. τοῦ μένουν ;

161. Ἐχει τις γ δραχμάς καὶ χάνει πρῶτον τὰ δύο ἑβδομα αὐτῶν, ἔπειτα τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμὴν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ;

162. Ἀπὸ μίαν βρῦσιν τρέχουν 7 ὄκ. ὕδατος εἰς 5δ. Ἀπὸ ἄλλην 9 ὄκ. εἰς 4δ Πόσαι ὁκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἔαν ἡ μὲν πρώτη τρέχη, ἐπὶ τδ, ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 2δ βραδύτερον, κλείσουν δὲ συγχρόνως ;

Ὁ μᾶς τρίτη. 163. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειούμενας τιμὰς τῶν γραμμάτων των.

$$\alpha') \frac{12x\psi^2}{7\alpha^2\beta} : \frac{8x^2\psi}{25\alpha\beta^2}, \quad \beta') \frac{12\alpha^2}{5\gamma^3\beta^2} : \frac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^2}, \quad \text{ὅταν } x = \psi = 1, \alpha = 2, \beta = \gamma = 3,$$

$$\gamma') \alpha^3 : \left(\alpha^2 : \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \delta') \frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2} : \left(\frac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2} : 4\beta^2\gamma\right), \quad \text{ὅταν } \alpha = \beta = \gamma = -3,$$

$$\epsilon') \frac{\alpha}{\alpha^3 + \beta^3} : \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1\right), \quad \sigma\tau') \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{x^2 - \psi^2}\right) : \left(\frac{\alpha^4 - \beta^4}{x^4 - 2x^2\psi^2 + \psi^4}\right),$$

$$\zeta') \frac{\alpha^2 + \alpha x - \alpha \psi + x \psi}{\alpha^2 - \alpha x - \alpha \psi + x \psi} : \frac{\alpha^2 - \alpha x + \alpha \psi - x \psi}{\alpha^2 + \alpha x - \alpha \psi - x \psi}, \quad \text{ὅταν } \alpha = 1, x = \psi = 3,$$

$$\begin{aligned} \eta') & \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2-1} \right), \\ \theta') & \left[\frac{\alpha^3}{\beta^3} - \frac{\beta^3}{\alpha^3} - 3 \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) + 5 \right] : \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^2, \\ \iota') & \left[\frac{x-\alpha}{(x+\alpha)^2} + \frac{x+\alpha}{(x-\alpha)^2} \right] : \left[\frac{1}{(x+\alpha)^2} - \frac{1}{x^2-\alpha^2} + \frac{1}{(x-\alpha)^2} \right], \\ \iota\alpha') & \left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta} + \frac{\alpha}{\alpha-2\beta} \right) : \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} \end{aligned}$$

Ὅμως τετάρτη. 164. Ἐχει τις α δραχμὰς. Τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ πέμπτον αὐτοῦ. Ἐξοδεύει τὰ 0,25 τῶν ὅσων οὕτως ἔχει καὶ αὐξάνει ὅσα τοῦ μένουν κατὰ τὰ 0,5 αὐτῶν. Πόσα ἔχει εἰς τὸ τέλος ;

165. Ἐχων τις α δραχμὰς, τὰς αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτῶν. Ἐξοδεύει ἔπειτα 5.000 δραχμὰς καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτοῦ, ἐξοδεύει δὲ πάλιν 5.000 δραχμὰς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέλος ;

166. Χωρικός τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν $16\alpha + 30$ αὐγὰ πρὸς πώλησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὰ 0,5 τῶν ὅσων ἔφερε καὶ ἔν αὐγὸν ἐπὶ πλεόν· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπελοίπου τὰ 0,5 καὶ ἀκόμη ἓν αὐγόν. Ὅμοίως ἐπώλησε καὶ διὰ τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν. Πόσα αὐγὰ τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος ;

5. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 94. Δοθὲν κλάσμα λέγεται **σύνθετον**, ἂν τουλάχιστον εἰς τῶν ὁρῶν του δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἀκεραία ἀλγεβρική παράστασις. **Ἀπλοῦν** λέγεται ἓν κλάσμα, ὅταν δὲν εἶναι σύνθετον.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{3x}{4x-1}$ εἶναι σύνθετον, διότι ὁ παρονομαστής

αὐτοῦ εἶναι κλασματική παράστασις.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ἔπεται ὅτι ἔχομεν

$$\frac{3x}{4x-1} = 3x : \frac{4x-1}{4\psi} = 3x \cdot \frac{4\psi}{4x-1} = \frac{12x\psi}{4x-1}$$

Ἐν γένει :

Ἵνα κλάσμα σύνθετον καταστήσωμεν ἀπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Συντομώτερος τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἀπλοῦν εἶναι ὁ ἑξῆς :

Εὐρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τοῦ

ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὄρους τοῦ δοθέντος κλάσματος

Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{\frac{\alpha}{\alpha-x} - \frac{\alpha}{\alpha+x}}{\frac{x}{\alpha-x} + \frac{x}{\alpha+x}}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν $\alpha-x$ καὶ $\alpha+x$

εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $(\alpha-x)(\alpha+x)$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὄρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x) - \alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x) + (\alpha-x)x} = \frac{\alpha^2 + \alpha x - \alpha^2 + \alpha x}{\alpha x + x^2 + \alpha x - x^2} = \frac{2\alpha x}{2\alpha x} = 1.$$

Ἀσκήσεις

167. Νὰ τραποῦν εἰς ἀπλὰ τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εὕρεθῶν σὶ τιμὰς των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$$\alpha') \frac{\frac{x}{\mu} + \frac{\psi}{\mu}}{\frac{\omega}{\mu}}, \quad \beta') \frac{\frac{2\mu+v}{\mu+v} + 1}{1 + \frac{v}{\mu+v}}, \quad \gamma') \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + 1}, \quad \delta') \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x - \frac{1}{x}}$$

ὅταν $x = \psi = \omega = \mu = 4$, $v = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

$$\epsilon') \frac{\frac{x+\psi}{1}}{x+\psi + \frac{1}{x+\psi}}, \quad \sigma\tau') \frac{\left(x-\psi - \frac{4\psi^2}{x-\psi}\right)\left(x+\psi - \frac{4x^2}{x+\psi}\right)}{3(x+\psi) - \frac{8x\psi}{x+\psi}}$$

ὅταν $x = 2$, $\psi = 1$.

168. Νὰ ἀπλοποιηθῶν τὰ κλάσματα.

$$\alpha') \frac{\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}}, \quad \beta') \frac{\frac{1-(x\psi-\psi\omega)^2}{(x\psi-1)^2-\psi^2\omega^2}}{(\psi\omega-1)^2-x^2\psi^2}, \quad \gamma') \frac{\frac{x+1}{x} - \frac{\psi-1}{\psi} + \frac{\omega+1}{\omega}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega}}$$

169. Ἐὰν τεθῇ

$$(\varphi)x = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{καὶ} \quad (\psi) = \frac{\psi-1}{\psi+1}, \quad \text{εὔρετε τὸ} \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(\psi)}{1 + \varphi(x) \cdot \varphi(\psi)}$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου II.

Ὅρισμός ἀλγεβρικής παραστάσεως (ἀκεραία, κλασματική, ρητή, ἄρρητος παράστασις).

Σύμβολα : $\sqrt{\quad}$ ριζικόν, $\equiv$ ταυτότητος ἢ ἰσοδυναμίας ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἰσοδύναμοι παραστάσεις. Ὅρισμός ταυτότητος παραστάσεων

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

(αἱ ταυτότητες ἀληθεύουν δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των).

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ὅρισμός μονωνύμου, διωνύμου, πολυνύμου (ἀκέραιον, κλασματικόν, ρητόν, ἄρρητον μονώνυμον ἢ πολυνύμον).

Ἀριθμητικὸς συντελεστής μονωνύμου, συντελεστής μονωνύμου, ὡς πρὸς γράμμα του ἢ ὡς πρὸς γινόμενον παραγόντων του.

Ὅμοια μονώνυμα (ἀντίθετα μονώνυμα). Ἀναγωγή ὁμοίων μονώνυμων. Αἱ 4 πράξεις μὲ μονώνυμα.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυνύμου πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα του. Ὅμογενές ἀκέραιον πολυνύμον, ὡς πρὸς γράμματά του.

Ὅμογενές γραμμικόν. Διατεταγμένον ἀκέραιον πολυνύμον κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γραμμάτων του. Ἀνηγμένον (ἀκέραιον) πολυνύμον.

Αἱ 4 πράξεις μὲ (ἀκέραια) πολυνύμα καὶ μονώνυμα ἢ μὲ πολυνύμα.

Αἱ πράξεις στηρίζονται ἐπὶ τῶν πράξεων καὶ ἰδιοτήτων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων.

Διαιρέσεις (ἀκεραίου) πολυνύμου δι' ἄλλου διατεταγμένου ὁμοίως. Εὐρίσκομεν τὸν ἀ' ὅρον τοῦ πηλίκου ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀ' ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀ' ὅρου τοῦ διαιρέτου. Εὐρεσις τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου μετὰ τὸν ἀ' ὅρον.

Σχέσις διαιρετέου, διαιρέτου, πηλίκου καὶ ὑπολοίπου. Σχέσις ὑπολοίπου καὶ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν των.

Ἀξιοσημεῖωτοι ταυτότητες

$$1) (\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$2) (\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$$

$$3) (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$4) (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x + \alpha\beta\gamma$$

$$5) (x^2 + \psi^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha x + \beta \psi)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2$$

$$6) (x^2 + \psi^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta \psi + \gamma \omega)^2 =$$

$$= (\alpha\psi - \beta x)^2 + (\beta\omega - \gamma \psi)^2 + (\gamma x - \alpha\omega)^2$$

Αἱ δύο τελευταῖαι λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

‘Υπόλοιπον υ διαιρέσεως πολυωνύμου $\Pi(x) : (x \pm \alpha)$ είναι

$$u = \Pi(\mp \alpha)$$

‘Υπόλοιπον υ διαιρέσεως πολυωνύμου $\Pi(x) : (\alpha x \pm \beta)$ είναι

$$u = \Pi\left(\mp \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^u - \alpha^u) : (x - \alpha) = x^{u-1} + \alpha x^{u-2} + \alpha^2 x^{u-3} + \dots + \alpha^{u-1}$$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^{2v+1} + \alpha^{2v+1}) : (x \pm \alpha) = x^{2v} \mp \alpha x^{2v-1} + \dots + \alpha^{2v}$$

Τροπή άκεραίας άλγεβρικής παραστάσεως εις γινόμενον παραγόντων (διάκρισις έννέα περιπτώσεων).

‘Ορισμός ρητού άλγεβρικού κλάσματος (με όρους άλγεβρικών παραστάσεις).

Παραστάσεις, τών οποίων ή τιμή παρουσιάζεται, ως άόριστος

$\frac{0}{0}$. Άρσις τής άοριστίας. Συζυγεΐς παραστάσεις $A + B$ και $A - B$

$\sqrt{A} + \sqrt{B}$ και $\sqrt{A} - \sqrt{B}$.

‘Ορισμός συνθέτου κλάσματος, άπλοποίησις αυτού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Α'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ *

§ 95. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x = 15$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ x γίνῃ 5, ἡ ἰσότης ἐπαληθεύεται. Πράγματι, ὅταν $x=5$, εἶναι $3 \cdot 5 = 15$, ἥτοι $15 = 15$. Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἥτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ α καὶ β δι' οἰωνδήποτε ἀριθμῶν π.χ. μὲ $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 3$ ἢ μὲ $\alpha = 5$ καὶ $\beta = -7$, παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι ἀντιστοίχως, ἥτοι $4 = 4$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $-2 = -2$ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ ὠρισμένα γράμματά των λάβουν ἀρμοδίας τιμὰς καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πᾶσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ἐξισώσεις** τὰς δὲ ἄλλας **ταυτοτήτας**. Ὡστε :

Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον, ὅταν ἐν γράμμα ἢ ὠρισμένα γράμματα αὐτῆς λάβουν ἀρμοδίας τιμὰς

Καλοῦμεν ἀγνώστους ἐξισώσεως τὰ γράμματά της, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὠρισμέναις τιμὰς, διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὐτή.

§ 96. **Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων λέγονται οἱ ἀριθμοὶ (ἢ αἱ ποσότητες), οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν λέγονται δὲ αὗται καὶ **ρίζαι** αὐτῆς.** Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεως μὲ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου χ, ψ, ω κ.τ.λ.

* Ἡ χρῆσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἀγνώστον ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Αἰγυπτίου Ahmes ἀλλὰ μόνον μὲ παραδείγματα. Ἡ ἐπιστημονικὴ διαμόρφωσις τοῦ ζητήματος ὀφείλεται εἰς τὸν Ἑλληνα Διόφαντον καὶ τὸν Ἑρωνα (1ον αἰῶνα π.Χ.).

Λύσεις δὲ ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς.

§ 97. Δύο ἐξισώσεις λέγονται **ἰσοδύναμοι**, ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, ἥτοι : ἐὰν πᾶσα ρίζα τῆς α' ἐξισώσεως εἶναι ρίζα καὶ τῆς β' καὶ πᾶσα τῆς β' εἶναι καὶ τῆς α'.

Αἱ ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται **μέλη** αὐτῆς (πρῶτον καὶ δεύτερον). Ἐκαστον μέλος ἐξισώσεως εἶναι ἐν γένει ἄθροισμα προσθετέων, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται **ὅρος** τῆς ἐξισώσεως.

§ 98. Ἐξίσωσις τις λέγεται **ἀριθμητική** μὲν, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὄρων τῆς περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων, **ἐγγράμματος** δὲ ἐὰν δὲν συμβαίνει τοῦτο. Οὕτως ἡ $8x+12x=3-4x$ εἶναι ἀριθμητική, ἐνῶ ἡ $3x-5\alpha=8\beta+2$ εἶναι ἐγγράμματος.

§ 99. Μία ἐξίσωσις λέγεται **ἀκεραία**, ἂν οἱ ὅροι τῆς εἶναι παραστάσεις ἀκεραῖαι, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς, καθὼς π.χ. ἡ $\alpha \sqrt{\alpha - \beta x^2 - 2\beta x} = \gamma$.

Κλασματική λέγεται μία ἐξίσωσις, ἂν τουλάχιστον εἷς τῶν ὄρων τῆς εἶναι κλασματικὴ παράστασις, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς, π.χ. ἡ $\frac{3}{x+1} - \frac{7}{x^2-1} + 4 = 0$.

Ρητή μὲν λέγεται μία ἐξίσωσις, ἂν οὐδεὶς τῶν ὄρων τῆς ἔχῃ ρίζαν ἐπὶ τῶν ἀγνώστων τῆς. **Ἄρρητος** δέ, ἂν δὲν εἶναι ρητή, π.χ. ἡ $\sqrt{x^2+2} = 6$ εἶναι ἄρρητος.

§ 100. Θ' ἀποδείξωμεν τὴν ἐξῆς ιδιότητα τῶν ἐξισώσεων :

Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὴν αὐτὴν ποσότητα, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Πράγματι ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $8x=32$. (1)

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν πχ. τὸν 6, προκύπτει ἡ $8x+6=32+6$ (2), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ (1) ἔχει τὴν ρίζαν 4, ἐπεὶδὴ εἶναι $8 \cdot 4 = 32$ (1'). Ἀλλ' ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν 6, προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $8 \cdot 4 + 6 = 32 + 6$ (2'). Θέτομεν εἰς τὴν (2) $x=4$ καὶ εὐρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ α' μέλους $8 \cdot 4 + 6$, ἐκ δὲ τοῦ β' $32 + 6$.

Ἄλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶναι ἴσα, ὡς εἶδομεν (2'). Ἄρα ἡ ρίζα 4 τῆς (1) εἶναι καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν 4, διότι ὅταν τεθῇ $x = 4$ εἰς αὐτήν, εὐρίσκομεν $8 \cdot 4 + 6 = 32 + 6$ (2'). Ἄν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 6, ἔχομεν $8 \cdot 4 = 32$ (1'). Θέτομεν εἰς τὴν (1) τὴν ρίζαν τῆς (2) $x = 4$ καὶ εὐρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ α' μέλους τῆς $8 \cdot 4$, ἐκ δὲ τοῦ β' 32. Ἄλλ' αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι (1'). Ἦτοι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι ρίζα καὶ τῆς (1). Ὅμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶσαν ἐξίσωσιν, ὡς καὶ ὅταν προστίθεται παράστασις περιέχουσα τὸν ἄγνωστον.

§ 101. Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἐν μέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x - \beta = \alpha$.

Ἐάν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν β , λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης $x - \beta + \beta = \alpha + \beta$ ἢ $x = \alpha + \beta$. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει καὶ ἐάν εἰς τὴν δοθείσαν ἐξίσωσιν μεταφέρωμεν τὸ $-\beta$ ἐκ τοῦ α' μέλους εἰς τὸ β' μετὰ τὸ ἀντίθετόν του πρόσημον. Ὅμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x + \beta = \alpha$ λαμβάνομεν $x = \alpha - \beta$, ἂν μεταφέρωμεν τὸ β εἰς τὸ β' μέλος μετὰ ἀντίθετον αὐτοῦ πρόσημον. Ἄρα:

α'). Εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς ἄλλο μετὰ ἡλλαγμένον τὸ πρόσημόν του.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι:

Ἄν ὅρος τις ὑπάρχῃ εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως μετὰ τὸ αὐτὸ πρόσημον, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείψωμεν, ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθείσαν.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $\gamma - x = \alpha - \beta$. (3)

Ἐάν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μέλος τῆς μετὰ ἀντίθετον πρόσημον, εὐρίσκομεν: $\beta - \alpha = x - \gamma$ ἢ $x - \gamma = \beta - \alpha$. (4)

Ἡ (4) προκύπτει ἐκ τῆς (3) καὶ ἐάν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον καθενὸς τῶν ὁρῶν αὐτῆς. Ὡστε:

β'). Ἐάν ἀλλάξωμεν τὰ σήματα πάντων τῶν ὁρῶν ἐξισώσεως, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Προφανῶς ἔχομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A = B$, ὅπου τὰ A, B , παριστᾷ-

νουν τὰ δύο μέλη αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A - B = B - B$ ἢ μὲ τὴν $A - B = 0$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ὅτι :

γ'). Δοθείσης ἐξισώσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμόν της τῆς μορφῆς $A=0$, ἂν μεταφέρωμεν καταλλήλως ὅλους τοὺς ὅρους τῆς δοθείσης εἰς τὸ α' μέλος της καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ A .

§ 102. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἐξῆς ιδιότητα τῶν ἐξισώσεων :

Ἐὰν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἐπὶ τὴν αὐτὴν (γνωστὴν) ποσότητα ($\neq 0$), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $7x=35$ (1). Λέγομεν ὅτι ἡ $\frac{7x}{3} = \frac{35}{3}$ (2) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=5$, ἐπειδὴ διὰ $x=5$ ἔχομεν $7 \cdot 5 = 35$. Θέτομεν $x=5$ εἰς τὴν (2) καὶ εὐρίσκομεν ἀπὸ μὲν τὸ α' μέλος της $\frac{7 \cdot 5}{3}$, ἀπὸ δὲ τὸ β' τὸ $\frac{35}{3}$. Οἱ ἀριθμοὶ αὗτοὶ εἶναι ἴσοι, διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους $7 \cdot 5$ καὶ 35 , ἀφοῦ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 3. Ἐπομένως ἡ ρίζα $x=5$ τῆς (1) εἶναι ρίζα καὶ τῆς (2). Ἀντιστρόφως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν 5, διότι ἂν τεθῇ εἰς αὐτὴν $x=5$, εὐρίσκομεν $\frac{7 \cdot 5}{3} = \frac{35}{3}$. Ἀλλὰ οἱ $7 \cdot 5$ καὶ 35 εἶναι ἴσοι, διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους $\frac{7 \cdot 5}{3}$ καὶ $\frac{35}{3}$, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 3. Οὕτω καὶ ἡ (1) ἔχει τὴν ρίζαν $x=5$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A=B$ ἢ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς $A-B=0$. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη της ἐπὶ λ ($\neq 0$), λαμβάνομεν τὴν $\lambda(A-B)=0$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης. Διότι πᾶσα ρίζα τῆς $A-B=0$ ἐπαληθεύει αὐτήν, ἀλλ' ἐπαληθεύει καὶ τὴν $\lambda(A-B)=0$, διότι $\lambda \neq 0$ καὶ $A-B=0$. Ἀλλὰ καὶ πᾶσα ρίζα τῆς $\lambda(A-B)=0$, εἶναι καὶ τῆς $A-B=0$, ἀφοῦ $\lambda \neq 0$, ἦτοι ἡ ρίζα αὐτὴ εἶναι καὶ ρίζα τῆς $A=B$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ 0, προκύπτει $0=0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ 0

είναι αδύνατος, έπεται ότι ή άνωτέρω ιδιότης δέν ίσχύει, όταν ό αριθμός, μέ τόν όποιον πολλαπλασιάζομεν ή διαιρούμεν τά μέλη εξίσωσης, είναι ή γίνεται 0. Διά τοϋτο, άν ό πολλαπλασιαστικής ή ό διαιρέτης είναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τών άγνώστων τής δοθείσης εξίσωσης, ή προκύπτουσα εξίσωσις είναι ίσοδύναμος μέ τήν δοθείσαν μόνον διά τας τιμάς αϋτών τών γραμμάτων, αί όποίαι δέν μηδενίζουν τήν παράστασιν. Π.χ. άν ό πολλαπλασιαστικής ή ό διαιρέτης είναι $\alpha-\beta$, πρέπει νά είναι $\alpha-\beta \neq 0$ (σημειώνομεν αϋτό και οϋτως $\alpha \neq \beta$). Διότι, άν είναι $\alpha-\beta \neq 0$, επανερχόμεθα εις τήν προηγούμενην εξετασθείσαν περίπτωση.

Άν ό πολλαπλασιαστικής ή ό διαιρέτης είναι παράστασις έχουσα ένα ή περισσοτέρους άγνώστους τής δοθείσης εξίσωσης ή προκύπτουσα εξίσωσις δέν είναι πάντοτε ίσοδύναμος μέ τήν δοθείσαν. Π.χ. ή εξίσωσις $3x=4$ και ή προκύπτουσα εκ ταύτης μέ πολλαπλασιασμόν τών μελών της επί $(x-2)$, ήτοι ή $3x(x-2) = 4(x-2)$ δέν είναι ίσοδύναμοι. Διότι ή β' έχει και τήν ρίζαν 2 (καθώς φαίνεται, άν θέσωμεν αντί τοϋ x τó 2 εις αϋτήν), ένω ή α' δέν τήν έχει.

Έξ άλλου, άν έχωμεν π.χ. τήν εξίσωσιν $(x+5)(x-4) = 0$ και διαιρέσωμεν τά μέλη της διά $x+5$, εύρίσκομεν τήν $x-4=0$, ή όποία δέν έχει τήν ρίζαν $x=-5$ τής δοθείσης.

2. ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΣ

§ 103. Καλοϋμεν **άπαλοιφήν τών παρονομαστών** εξίσωσης τήν εύρεσιν ίσοδυναμού προς αϋτήν εξίσωσης άνευ παρονομαστών.

$$\text{*Έστω ή εξίσωσις } \frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9.$$

Έάν τά δύο ίσα πολλαπλασιάσωμεν επί τó έ.κ.π. τών παρονομαστών 3 και 11, δηλαδή επί 33 και άπλοποιήσωμεν, λαμβάνομεν τήν $11x-3x+3=33x-297$. Η εξίσωσις αϋτή είναι άπηλλαγμένη παρονομαστών και ίσοδύναμος μέ τήν δοθείσαν. Έν γένει :

Έάν δοθείσα εξίσωσις είναι κλασματική (ρητή) δυνάμεθα νά εύρωμεν ίσοδύναμόν της άκεραίαν, εάν πολλαπλασιάσω-

μεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της καὶ ἀπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων.

Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ β' μέλος μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι τὸ μηδέν, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ α' μέλος αὐτῆς ὑπὸ τὴν μορφήν $\frac{A}{B}$, ἀντὶ δὲ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως νὰ ἔχωμεν τὴν $\frac{A}{B} = 0$ (1), ὅπου A, B εἶναι πολυώνυμα ἀκεραία ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Ἐὰν δι' οὐδεμίαν τιμὴν τῶν ἀγνῶστων μηδενίζονται συγχρόνως τὸ A καὶ B, τότε διὰ νὰ εἶναι $\frac{A}{B} = 0$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $A=0$ (2), ὅτε αἱ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐὰν ὅμως ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν ἀγνῶστων, δι' ἐκάστην τῶν ὁποίων μηδενίζεται τὸ A καὶ B, τότε αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν (2), ἀλλὰ δυνατόν νὰ μὴ ἐπαληθεύουν τὴν (1). Διότι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τὸ $\frac{A}{B}$ παρουσιάζεται ὅτι ἔχει τιμὴν ἀόριστον καὶ ἡ ἀληθὴς τιμὴ του δύναται νὰ μὴ εἶναι μηδέν.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις: $\frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}$ (2). Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. καὶ ἀπλοποιοῦντες εὐρίσκομεν: $(x-4)(x-6)(x-8)(x-9) - (x-5)^2(x-8)(x-9) - (x-7)(x-5)(x-6)(x-9) + (x-8)^2(x-5)(x-6) = 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκεραία καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν, διότι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ἐπαληθεύουσα αὐτὴν καὶ τὴν $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9) = 0$.

Πρὸς συντομίαν διὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὁρῶν τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου καὶ νὰ παραλείψωμεν τοὺς παρονομαστές. Π.χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{5} - 1 = \frac{2}{3}$ παρατηροῦμεν ὅτι ἐ.κ.π. τῶν παρο-

νομαστῶν της εἶναι τὸ 60 καὶ τὰ 15, 12, 60, 20 εἶναι τὰ ἀντίστοιχα πηλικά τοῦ 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. Ἐπὶ τὰ πηλικά αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὁρῶν, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πλέον τοὺς παρονομαστές. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $45x - 24x + 12 - 60 = 40$.

§ 104. Καλοῦμεν βαθμὸν ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $A = 0$, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι (ἀκέραιον ἀνηγμένον) πολυώνυμον, περιέχον ἓνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου τούτου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Π.χ. ἡ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x , ἡ $3x^2\psi - 4\psi^2 + 2x - 1 = 0$ εἶναι γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ψ , ἡ $2x - 3 = 0$ εἶναι α' βαθμοῦ ὡς πρὸς x .

3. ΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 105. Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 7 = 14 - 4x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν καταλλήλως εἰς τὸ α' μέλος, τὸ δὲ -7 εἰς τὸ β', εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης

$$3x + 4x = 14 + 7.$$

Ἐκτελοῦντες εἰς τὸ α' καὶ β' μέλος αὐτῆς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων, εὐρίσκομεν $7x = 21$. Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ x , προκύπτει ἡ $x = 3$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀληθεύει, ὅταν $x = 3$. Ἀρα καὶ ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ 3.

$$\text{Ἐστω ἡ ἐξίσωσις } \frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ταύτης κατὰ σειρὰν ἐπὶ 11, 3, 33, 33, (ὅπου τὸ 33 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῆς) καὶ εὐρίσκομεν $11x - 3x + 3 = 33x - 297$.

Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν $x = 12$. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μετὰ ἓνα ἀγνώστον, 1ον ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, ἐὰν ἔχη (ἤτοι εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν), 2ον ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον, 3ον χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἀγνώστον ἀπὸ τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτὸν εἰς τὴν νέαν ἐξίσωσιν γράφοντες τοὺς μὲν εἰς τὸ ἓν μέλος, τοὺς δὲ εἰς τὸ ἄλλο μέλος, 4ον ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων καὶ 5ον διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως μετὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$170. \alpha') x + 17 = 8x + 1, \quad \beta') 5x - 4 = 38 - x.$$

$$171. \alpha') 6x + 25 = 31 + 2x, \quad \beta') 4(3x + 5) - 60 = 2x$$

$$172. \alpha') 11(2x - 15) - x = 6, \quad \beta') \alpha x = \alpha + 1 + x.$$

$$173. \alpha') 4\alpha^2 x - 1 = x + 2\alpha, \quad \beta') \beta x + \alpha x = 1.$$

$$174. \alpha') \frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{3} - \frac{4x-5}{5} = 4, \quad \beta') 2 - \frac{7x-1}{6} = 3x - \frac{19x+3}{4}.$$

$$175. \frac{5x+1}{3} + \frac{19x+7}{9} - \frac{3x-1}{2} = \frac{7x-1}{6}.$$

$$176. 11 - \left(\frac{3x-1}{4} + \frac{2x+1}{3} \right) = 10 - \left(\frac{2x-5}{3} + \frac{7x+1}{8} \right).$$

4. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x + \beta = 0$

§ 106. Ἐὰν ἀπὸ δοθεῖσαν ἀκεραίαν ἢ κλασματικὴν (ρητὴν) ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν πάντων τῶν ὄρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων προκύπτει ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x , αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν $\alpha x + \beta = 0$. ὅπου τὰ α , β εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί.

Ὅταν λέγωμεν θὰ **διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta = 0$** . ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἐξῆς ἐρωτήσεις :

1ον. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν ρίζαν ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσοτέρας ἢ καὶ οὐδεμίαν ;

2ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὰ α καὶ β , διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν καὶ τί διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἢ οὐδεμίαν ;

Ἐκ τῆς $\alpha x + \beta = 0$ εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x = -\beta$

1ον. Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, ἥτοι ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ὠρισμένη καὶ λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις **ἔχει μίαν μόνην ρίζαν ἢ μίαν μόνην λύσιν.**

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0x = -\beta$ ἢ $0 = -\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπεὶδὴ ὑπετέθη $\beta \neq 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ἀδύνατος** ἢ ὅτι **οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.**

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = 1 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$. Ἀντ' αὐτῆς

εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $3x-18-2x=6+x-2$ ἢ τὴν $0x=22$ ἢ $0=22$, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος, ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0 \cdot x = 0$ ἢ $0=0$ καὶ προφανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἰανδήποτε τιμὴν. Λέγομεν δὲ ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ταυτότης** πρὸς x ἢ ὅτι εἶναι **ἀόριστος**.

§ 107. Παρατήρησις. Ὄταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦμενον πλησιάζῃ διηνεκῶς πρὸς τὸ 0, τότε λέγομεν ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x τείνει εἰς τὸ 0, συμβολίζομεν δὲ αὐτὸ οὕτως: $\alpha \rightarrow 0$. Ἀλλὰ τότε, ἂν τὸ β εἶναι ὠρισμένος ἀριθμὸς $\neq 0$, τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ διηνεκῶς αὐξάνεται ἀπολύτως, καὶ λέγομεν ὅτι τείνει εἰς τὸ $+\infty$ μὲν, ἂν εἶναι $\beta > 0$, εἰς τὸ $-\infty$ δέ, ἂν εἶναι $\beta < 0$, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὅσον $\beta > 0$ ἢ $\beta < 0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x + \beta = 0$

§ 108. Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$.

1ον. Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει μία ρίζα, ἡ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

2ον. Ἄν εἶναι $\alpha=0$, $\beta \neq 0$ δὲν ὑπάρχει ρίζα.

Ὄταν εἶναι $\beta \neq 0$ καὶ ὠρισμένον, ἀλλὰ τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ $\rightarrow 0$, ἡ ρίζα τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἂν $\beta > 0$ ἢ εἰς τὸ $-\infty$, ἂν $\beta < 0$.

3ον. Ἄν εἶναι $\alpha=0$, $\beta=0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος· ἀληθεύει μὲ κάθε x .

Ἀσκήσεις

Ὁ μὲς πρώτη. 177. Εὐρετε τὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

$$\alpha') \frac{3}{2}x - 5 + x = \frac{x-10}{2} + 2x,$$

$$\delta') \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} + 1 = \frac{(\alpha+\beta)x + \alpha\beta}{\alpha\beta},$$

$$\beta') 2x - 5 = \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{2},$$

$$\epsilon') \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - 3 = 2x - 7,$$

$$\gamma') \frac{x-\alpha}{2} + \frac{x+\beta}{3} = \frac{5x}{6} - 1,$$

$$\sigma\tau') \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{6} + 2.$$

178. Ποίας σχέσεις πρέπει να πληρούν το α και β , ίνα ή $\frac{\alpha x - \beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - \alpha$,
έχη μίαν λύσιν, ούδεμίαν ή είναι άόριστος.

179. Προσδιορίσατε το α , ώστε ή $\frac{\alpha x - 1}{3} + \frac{x + 1}{2} = 4$ να είναι άδύνατος.

Ό μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 180. Να γίνη ή λύσις και ή έπαλήθευσις τών έξισώσεων: $\alpha')$ $27x - 5(2x - 4) = 6(3x - 5) + 5(2x - 1)$.

$$\beta') \frac{2(3x-5)}{3} - \frac{25(x+2)}{12} = \frac{5(3x+2)}{2} + 33$$

$$\gamma') x - \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} \right) - \left(\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} \right) - \frac{5x}{6} = 65$$

$$\delta') \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{6} \right)$$

$$\epsilon') \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{19}{(x-3)(x-4)} = \frac{19}{(x-2)(x-4)},$$

$$\sigma\tau') \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2} + \frac{4}{x^2(x-2)} = 0.$$

Ό μ α ς τ ρ ί τ η. 181. Λύσατε και έπαλήθεύσατε τας έξισώσεις:

$$\alpha') (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)x = 2\alpha^2, \quad \beta') (\alpha^2 + \beta^2)x + 2\alpha\beta x = \alpha^3 + \beta^3,$$

$$\gamma') 2\mu(x-\mu) - 2\nu(\nu-x) = (\mu+\nu)^2 - (\mu-\nu)^2,$$

$$\delta') (x+1)^2 - \alpha(5-3\alpha+2x) = (x-2\alpha)^2 + 5, \quad \epsilon') \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\alpha+\beta} = 2\alpha + \beta.$$

$$\sigma\tau') \frac{\beta x + \alpha}{2\alpha^2\beta} + \frac{x-1}{3\beta^2} = \frac{3\beta^2 + 7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}, \quad \zeta') \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha_1 x + \beta_1},$$

$$\eta') \frac{8\alpha}{(x+2)^2} + \frac{8\beta}{(x-2)^2} - \frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2} = -(\alpha+\beta).$$

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 109. Πρόβλημα λέγεται πρότασις, εις την οποίαν ζητείται να εύρεθῇ ἓν ἢ περισσότερα άγνωστα εξαρτώμενα από άλλα γνωστά ἢ δεδομένα. Τά διδόμενα και τά ζητούμενα τοῦ προβλήματος εἶναι ἓν γένει σχετικοί αριθμοί, τὰ δὲ περιεχόμενα εἰς αὐτὸ ποσὰ μετρούμενα μὲ τὴν μονάδα αὐτοῦ ἕκαστον παριστάνονται μὲ ἀριθμούς.

§ 110. Λύσις ἐνὸς προβλήματος λέγεται ἡ εὔρεσις τῶν ζη-

τουμένων αγνώστων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα παριστάνομεν συνήθως με γράμματα $\chi, \psi, \omega, \dots$, τὰ δὲ γνωστὰ με ἀριθμούς ἢ με γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Διὰ νὰ λυθῇ ἓν πρόβλημα, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὠρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **ὅρους** τοῦ προβλήματος. Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὀρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα, καλοῦμεν **ἐπιτάγματα**.

Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνει κατὰ 6. Τὸ ἐπίταγμα εἶναι ὅτι: **τὸ διπλάσιον εἶναι μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6.**

Ἐπομένως, ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμός παρασταθῇ με x , τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $2x$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $2x$ θὰ ὑπερβαίνει τὸ x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις $2x$ καὶ $x+6$ νὰ εἶναι ἴσαι. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2x = x + 6$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 6$.

Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμός παριστάνει τὴν τιμὴν ποσοῦ τινός, τὸ ὁποῖον ἔνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καλοῦμεν **περιορισμούς**. Π.χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ζητῆται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμός πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός.

Ἐν γένει διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον. Εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ τοὺς περιορισμούς αὐτοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρῶται ἐκφράζουν τὰς σχέσεις τὰς συνδεούσας τὰ ζητούμενα με τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

2ον. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τινες εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα.

3ον. Ἐξετάζομεν ἂν οἱ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθέντες ἀριθμοὶ πληροῦν καὶ τοὺς περιορισμούς τοῦ προβλήματος.

§ 111. α') Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

Ἔστω ὅτι x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $4x$, τὸ δὲ $x+60$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ἡυξημένον κατὰ 60. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι $4x=x+60$ ἢ $3x=60$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν $x=20$ καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 25, τὸ δὲ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλύτερου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 50. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶναι $25-x$, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλύτερου $6x$, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου $4(25-x)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ $6x-4(25-x)$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ 50, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $6x-4(25-x)=50$ ἢ $6x+4x-100=50$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=15$. Ἀρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 15 καὶ $25-15=10$.

γ') Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{7}{11}$ κάμνει αὐτὸ ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$.

Ἄν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, θὰ ἔχωμεν : $\frac{7-x}{11+x} = \frac{1}{4}$, ἐκ τῆς λύσεως, τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = -5\frac{2}{3}$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

182. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μείον 19.

183. Εὐρετε ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττούμενον κατὰ 2 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον του συν 17.

184. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{17}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$.

185. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς $-5, 6, 8$, δίδει ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν ζητούμενον.

186. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ κατὰ 4 γίνεται ἴσος μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ μείον 8.

187. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὄρους τοῦ $\frac{29}{42}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ 0,5 ;

188. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάμνουν 170 ;

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 112. α') Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία καὶ οἱ δύο δὲ μαζὶ ἔχουν 45. Πόσα ἔχει ἕκαστος ;

Περιορισμός. Προφανῶς οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἄν μὲ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τὰ τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν μὲ τὸ $4x$ καὶ τῶν δύο μὲ τὸ $4x+x$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $4x+x=45$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=9$. Ἦτοι ἡ Μαρία εἶχεν 9 καὶ ὁ Ἰωάννης $4 \cdot 9=36$ μῆλα καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Ὁρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βᾶσις εἶναι 4 μ. μεγαλύτερα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος 3 μ. μικρότερον. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $x \cdot x=x^2$. Ἡ βᾶσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ τότε μὲ $x+4$, τὸ ὕψος του μὲ $x-3$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι $(x+4)(x-3)$. Πρέπει νὰ εἶναι :

$(x+4)(x-3)=x^2$ ἢ $x^2+4x-3x-12=x^2$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν $x=12$.

Ὡστε ἡ μὲν βᾶσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος $12+4=16$ μ. τὸ δὲ ὕψος $12-3=9$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

γ') Ὁ Α ἔκτελεῖ ἐν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον ;

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν (ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 5), παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι τὸ ἔργον,

εις μίαν ημέραν θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἀφοῦ ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν θὰ ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{7}$. Ὁ Β ἐκτελεῖ εἰς 1 ἡμέραν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$ ἢ $5x + 7x = 35$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 2\frac{11}{12}$.

Ὡστε καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

189. Ἐχει τις 100 ὀκάδας οἶνον τῶν 9,50 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον οἶνον τῶν 9 δρχ. κατ' ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμίξει, διὰ νὰ κοστίζη, ἢ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 9,2 δρχ. ;

190. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων συγχρόνως κινούμενα ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν διανύει 5 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ 5,5 χλμ. Εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν τόπων εἶναι 60 χλμ. ;

191. 40 ὀκάδες ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἁλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 30 ὀκ. τοῦ νέου μίγματος περιέχουν 2 ὀκ. ἁλατος ;

192. Πόσον κοστίζει ἓν κτῆμα, ἂν τὰ τρία πέμπτα τῆς ἀξίας αὐτοῦ σὺν 250 000 δρχ. ἀποτελοῦν τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς μείον 200 000 δρχ. ;

193. Ἀτμάμαξα διανύουσα 48 χλμ. τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν 20π βραδύτερον ἄλλης (ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου) καὶ διευθυνομένη ὁμοίως, συνηντήθη δὲ μετ' αὐτὴν μετὰ 2 ὥρας καὶ 20π μετὰ τὴν ἀναχώρησίν της. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ;

194. Κρονὸς πληροὶ δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἄλλος πληροὶ αὐτὴν εἰς 10 ὥρας καὶ τρίτος πληροὶ αὐτὴν εἰς 30 ὥρας. Ἄν καὶ οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ ;

195. Ὑπέρτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 6.000 δρχ. καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἄν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 5.000 δρχ. πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐνδυμασία ;

III. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 113. α') Δέκα ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐπλήρωσαν

500 δρχ. Ἄν ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν 60 δρχ. καὶ ἐκάστη τῶν γυναικῶν 40 δρχ. πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Περιορισμός. Παρατηρητέον, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέρατοι καὶ θετικοί, ἄλλως ἢ λύσις δὲν δύναται νὰ εἶναι δεκτή.

Ἄν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, ὁ τῶν ἀνδρῶν θὰ εἶναι $10-x$. Ὅλοι οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν $60(10-x)$ δρχ. ὅλαι δὲ αἱ γυναῖκες $40x$ δρχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $60(10-x) + 40x = 500$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 5$ γυναῖκες, ὁπότε οἱ ἄνδρες, εἶναι $10-5 = 5$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

β') Ἀπὸ 80 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά, αἱ μὲν γυναῖκες ἦσαν τὰ 0,8 τῶν ἀνδρῶν, τὰ δὲ παιδιά τὰ ἑπτὰ πέμπτα τῶν ἀνδρῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά ;

Ἄν x παριστάνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $0,8x$ καὶ ὁ τῶν παιδιῶν $\frac{7}{5}x$. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $x + 0,8x + \frac{7}{5}x = 80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 25$.

Ὡστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 25, αἱ γυναῖκες $25 \cdot 0,8 = 20$ καὶ τὰ παιδιά $25 \cdot \frac{7}{5} = 35$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

196. Εἰς μίαν ἐκλογὴν μεταξὺ δύο ὑποψηφίων ἐψήφισαν 12 400 ἐκλογεῖς καὶ ἔλαβεν ὁ ἐκλεγείς 5 153 ψήφους περισσότερας τοῦ ἀποτυχόντος, εὐρέθησαν δὲ καὶ 147 λευκαὶ ψήφοι. Πόσας ψήφους ἔλαβεν ἕκαστος ;

197. Ἐὰν ὁμιλὸς τις εἶχε τὸ ἑβδομὸν τῶν μελῶν τοῦ ὀλιγώτερον τῶν ὄσων ἔχει, θὰ εἶχεν 120 μέλη. Πόσα μέλη ἔχει ;

198. Τὸ τριπλάσιον τοῦ πέμπτου ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 7 δίδει τὸ 34. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

199. Τίς εἶναι ὁ ἀκέρατος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 2 δίδει τὸ 23 ;

200. Νὰ εὐρεθῇ ἀκέρατος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 7 ἢ διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα διαφέρουν κατὰ 4.

201. Εἰχέ τις πορτοκάλια καὶ ἐπώλησε τὰ τρία πέμπτα αὐτῶν. ἠγόρασεν ἔπειτα 33 πορτοκάλια καὶ εἶχεν οὕτως 9 περισσότερα τῶν ὄσων εἶχεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα εἶχε ;

§ 114. α') Ἡ ἡλικία ἑνὸς πατρὸς εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των ;

Ἄν μὲ x παρασταθῇ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἰς ἔτη, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $3x$ ἔτη, πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ $3x$ νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὴν δυνατὴν ἀνθρωπίνην ἡλικίαν.

Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ ἦτο $x-8$ ἔτη, τοῦ δὲ πατρὸς $3x-8$ ἔτη καὶ πρέπει νὰ εἶναι $3x-8=4(x-8)$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=24$. Ἄρα ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ εἶναι 24, τοῦ δὲ πατρὸς $24 \cdot 3 = 72$ ἔτη καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Ἐκ δύο ἀνθρώπων, ὁ μὲν ἔχει 1800 δρχ. καὶ δαπανᾷ 50 δρχ. καθ' ἑκάστην ἡμέραν, ὁ δὲ ἔχει 1000 δρχ. καὶ δαπανᾷ 30 δρχ. ἡμερησίως. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσα ποσά ;

Ἄν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ μὲ x , ὁ μὲν θὰ δαπανήσῃ $50x$ δρχ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1800-50x)$ δρχ., ὁ δὲ $30x$ καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1000-30x)$ δρχ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι: $1800-50x=1000-30x$ ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x=40$. Ἄλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, διότι μετὰ 40 ἡμέρας καὶ οἱ δύο ἄνθρωποι δὲν θὰ ἔχουν τίποτε.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

202. Ὁ Ἑλλην μαθηματικός, συγγραφεὺς τῆς Ἀλγέβρας, Διόφαντος ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἑβδόμον αὐτῆς, μετὰ τὸν γάμον του καὶ πέντε ἔτη ἀκόμη, ὅτε ἀπέκτησε υἱόν, ὁ ὁποῖος ἔζησε τὸ ἡμῖσις ἢ ὅσον ὁ πατὴρ του· ἔζησε δὲ ὁ Διόφαντος ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος ;

203. Ἐχει τις ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης του· αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν δύο εἶναι 28 ἔτη ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς. Πόσῃν ἡλικίαν ἔχει ἕκαστος ;

204. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουν ὁμοῦ ἡλικίαν 24 ἐτῶν, ἐνῷ ἕκαστος εἶναι κατὰ δύο ἔτη μεγαλύτερος τοῦ ἀμέσως ἐπομένου του. Ποιοὶ εἶναι αἱ ἡλικίαι των ;

205. Εἶναι τις 40 ἐτῶν καὶ ἔχει θυγατέρα 16 ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τῆς θυγατρὸς θὰ εἶναι ἡ ἦτο τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς ;

206. Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 70. 'Ο δεύτερος διαιρούμενος διά τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1. 'Ο τρίτος διαιρούμενος διά τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

207. 16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ δύο πέμπτα ἐνὸς ἔργου ἐργαζόμενοι 9 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἑκάστην. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται 15 ἐργάται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας ;

208. Πατὴρ τις εἶναι 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 28 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχη ἡλικίαν διπλάσιαν τῆς τοῦ υἱοῦ του ;

209. Διψηφίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

210. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἐλαττωθῇ κατὰ 18, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εὐρισκόμενος ἀριθμὸς. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

V. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

§ 115. α') Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἡ ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ x ἔτη. Τότε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $\alpha + x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς $\beta + x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha + x = 3(\beta + x) \quad (1) \quad \text{καὶ } x > 0.$$

Ἄν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνῃ πρὸ x ἐτῶν, ὁ πατὴρ θὰ ἦτο τότε $\alpha - x$, ὁ δὲ υἱὸς $\beta - x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha - x = 3(\beta - x) \quad (2) \quad \text{κοὶ } x > 0.$$

Ἄλλ' ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἀπὸ τὴν (1), ἂν τὸ x ἐκείνης γίνῃ $-x$. Τοῦτο φανερώνει ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ θετικαὶ τῆς (2) καὶ ἐπομένως ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὰς θετικὰς ρίζας τῆς (1) ἀντιστοιχεῖ λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιουμένη εἰς τὸ μέλλον· εἰς τὰς ἀρνητικὰς ρίζας τῆς (1) ἀντιστοιχεῖ λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιηθεῖσα εἰς τὸ παρελθόν.

$$\text{Λύοντες τὴν (1) εὐρίσκομεν } x = \frac{\alpha - 3\beta}{2}.$$

Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι τοῦ μὲν πατρὸς $\alpha + \frac{\alpha - 3\beta}{2}$ δηλ. $\frac{3(\alpha - \beta)}{2}$ τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta + \frac{\alpha - 3\beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι θετικαί, διότι ὑποτίθεται $\alpha > \beta$.

Ὡστε ἡ τιμὴ τοῦ x γίνεται δεκτὴ.

Καὶ ἂν μὲν $\alpha - 3\beta > 0$, εἶναι $x > 0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἄν $\alpha - 3\beta < 0$, εἶναι $x < 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν. Ἄν $\alpha - 3\beta = 0$, εἶναι $x = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

β') Ἄν ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι α καὶ τοῦ Παύλου β ἐτῶν, πότε ἡ τοῦ Πέτρου θὰ εἶναι ἢ ἦτο διπλασία τῆς τοῦ Παύλου;

Ὑποτίθεται ὅτι α, β, μ εἶναι θετικοὶ καὶ $\mu \neq 1, \alpha \neq \beta$. Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνη μετὰ x ἔτη.

Πρέπει νὰ εἶναι $\alpha + x = \mu(\beta + x)$ (1) καὶ $x > 0$.

Ἄν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνεῖ πρὸ x ἐτῶν, πρέπει νὰ εἶναι:

$$\alpha - x = \mu(\beta - x) \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad x > 0.$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ ἡ (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) ἐὰν τὸ x ἐκείνης γίνη $-x$, συνάγεται ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι θετικαὶ τῆς (2) καὶ συνεπῶς ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\mu - 1)x = \alpha - \mu\beta$, ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ $\mu - 1 \neq 0$ διότι ὑποτίθεται $\mu \neq 1$, εὐρίσκομεν $x = \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$.

Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι, τοῦ μὲν Πέτρου $\alpha + \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ δηλ. $\frac{\alpha(\mu - 1) + \alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ τοῦ δὲ Παύλου $\beta + \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ δηλ. $\frac{\beta(\mu - 1) + \alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τῆς ἀνθρωπίνης ἡλικίας.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ $\mu \neq 1$ ἐξ ὑποθέσεως, διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις: Ἐστω $\mu > 1$ τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha > \beta$, διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἡλικίαι $\frac{\mu(\alpha - \beta)}{\mu - 1}$, $\frac{\alpha - \beta}{\mu - 1}$. Ἀλλως, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι καὶ $\alpha > \mu\beta$ θὰ εἶναι $x > 0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἄν $\alpha < \mu\beta$, θὰ εἶναι $x < 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν, ἂν δὲ $\alpha = \mu\beta$, θὰ εἶναι $x = 0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

Ἐστω $\mu < 1$ τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha < \beta$ διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἀνωτέρω ἡλικίαι, θὰ συμβαίνουν δὲ τὰ ἀντίθετα ἂν $\alpha > \mu\beta$ ἢ $\alpha < \mu\beta$.

γ') Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ κινητὸν κινούμενον ἐπὶ εὐθείας ΑΓ ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ μέτρων κατὰ 1^η πρὸς τὴν φορὰν ΑΓ. Μετὰ α^ς ἀναχωρεῖ ἀπὸ τόπον Β κείμενον μ μέτρα ὀπισθεν τοῦ Α, ἄλλο κινητὸν κινούμενον ὁμαλῶς πρὸς τὴν αὐτὴν φο-

ρὰν μὲ τὸ πρῶτον καὶ μὲ ταχύτητα τ' μέτρων κατὰ 1° . Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο κινητὰ ;

Ὑποτίθεται ὅτι $\tau' > \tau$, διότι ἄλλως οὐδέποτε τὸ δεύτερον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον.

Ἐστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου. Τότε, χρόνος κινήσεως εἶναι τοῦ μὲν πρώτου x τοῦ δὲ ἄλλου $x - \alpha$ δευτερόλεπτα. Διανυθέντα διαστήματα κατὰ τοὺς χρόνους αὐτοὺς εἶναι τx μέτρα ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ $\tau'(x - \alpha)$ ὑπὸ τοῦ ἄλλου. Πρέπει τὸ β' διάστημα νὰ ὑπερβαίνη τὸ πρῶτον κατὰ μ μέτρα, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\tau'(x - \alpha) = \tau x + \mu$ (1) καὶ $x > 0$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\tau' - \tau = 0$, διότι $\tau' > \tau$ ἐξ ὑποθέσεως, εὐρίσκομεν $x = \frac{\mu + \tau'\alpha}{\tau' - \tau}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι θετική, ἀφοῦ $\tau' > \tau$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ μ, τ', α ἐπίσης θετικά. Ἐπομένως γίνεται δεκτὴ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁ μ ἄ ς π ρ ὠ τ η. (Γενικά). 211. Ἐργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος εἰς β ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι ;

212. Οἱ μὲν ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἀμάξης ἔχουν περιφέρειαν μήκους α μέτρων, οἱ δὲ ὀπίσθιοι β μέτρων. Ποίαν ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ ἡ ἀμαξά, ἂν οἱ ἐμπρόσθιοι κάμνουν ν περιστροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων ;

213. Δαπανᾷ τις τὸ νιοστὸν τοῦ εἰσοδήματός του διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{\alpha}$ αὐτοῦ διὰ κατοικίαν, τὸ $\frac{1}{\beta}$ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{\gamma}$ δι' ἄλλα ἐξοδα καὶ τοῦ περισσεύουν μ δραχμαί. Ποῖον εἶναι τὸ εἰσόδημά του ; (μερικὴ περίπτωσις $\nu = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 8$, $\mu = 30\,000$).

214. Ταξιδιώτης θέλει νὰ διανύσῃ α χιλιόμετρα εἰς η ἡμέρας. Μετὰ ταξείδιον β ἡμερῶν λαμβάνει ἐντολὴν νὰ ἐπιστρέψῃ γ ἡμέρας ἐνωρίτερον. Πόσον διάστημα ὀφείλει νὰ διανύσῃ καθ' ἡμέραν ; (μερικὴ περίπτωσις $\alpha = 300$, $\eta = 18$, $\beta = 7$ καὶ $\gamma = 3$).

215. Ποσὸν τι α διενεμήθη μεταξὺ τῶν A, B, Γ , εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τοῦ A πρὸς τὸ μέρος τοῦ B ἔχει λόγον ἴσον μὲ $\mu : \nu$, τὸ δὲ τοῦ B πρὸς τὸ τοῦ Γ ἴσον μὲ $\rho : \lambda$. Τίνα τὰ τρία μέρη ;

216. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν τὸ μὲν πρὸς $\epsilon\%$, τὸ δὲ πρὸς $\epsilon'\%$ καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον τ . Τίνα τὰ κεφάλαια ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι K ;

217. Ἐργάτης τελειώνει ἐν ἔργον εἰς 2 ἡμέρας, ἄλλος εἰς ν ἡμέρας καὶ τρίτος εἰς $\left(\mu + \frac{\nu}{2}\right)$ ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον ἐργαζόμενοι καὶ οἱ τρεῖς μαζί ;

218. Κεφάλαιόν τι προεξοφλούμενον διὰ ν ἡμέρας μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 2% ὑφίσταται ἐκπτώσιν α δραχμῶν πρισσότερον ἢ ἂν προεξωφλεῖτο μὲ ἑσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ;

Ἄ μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 219. Χωρική ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν, τὸ ὅποιον εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησεν πάλιν τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν εἰς τὸ τέλος τῆς ἔμεινεν 1 αὐγόν ;

220. Χωρική ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγά εἶχε πρὸς 1,50 δρχ. ἕκαστον. Ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 1,60 δρχ. ἕκαστον καὶ δὲν ἐξημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς ;

221. Βρύσις πληροὶ δεξαμενὴν εἰς τρεῖς ὥρας· ἄλλη τὴν πληροὶ εἰς 4 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν, ἂν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ;

Ἄ μ α ς τ ρ ί τ η (Κινήσεως). 222. Ἐκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζὸς διατρέχων 60 χλμ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν ;

223. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων 525 χιλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησιν των. Ἐὰν ὁ μὲν εἰς διανύσῃ 50 χλμ., ὁ δὲ ἄλλος 55 χιλ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν ;

224. Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται εὐθυγράμμως σῶμα τι διανύον 32 μ. εἰς 48 καὶ διευθύνεται πρὸς Β. Μετὰ 38 ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν ΑΒ κινούμενον καὶ διανύον 60 μέτρα εἰς 56. Πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον σῶμα ;

225. Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἀμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν Β διανύουσα 30 χιλ. καθ' ὥραν. Μίαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸν Β ἀμαξοστοιχία διανύουσα 50 χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν Α θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώτην ;

226. Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπὸ τινος τόπου διανύων 12 χλμ. τὴν ὥραν. Τρεῖς ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν. α') Πότε θὰ προηγηται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 χλμ ; β') Πότε θὰ προηγηται ὁ δευτερος τοῦ πρώτου 50 χιλιόμετρα ;

227. Τὴν 10ην πρωϊνὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α διανύων 12 χλμ. καθ' ὥραν. Ποῖαν ὥραν πρέπει ν' ἀναχωρήσῃ δευτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 χλμ. καθ' ὥραν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς τρεῖς ὥρας ;

228. Ἀπὸ σημείου περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως α' καὶ β' (α)β' εἰς 16. Πότε θὰ συναντηθοῦν ἂν διευθύνωνται α') ἀντιθέτως β') πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ;

229. Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητὰ διανύοντα ταύτην εἰς

χρόνους t_1 και t_2 (t_1, t_2): Πότε θα συναντηθούν δια 1ην, 2αν,...νην φοράν, αν κινούνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν;

230. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δείκται τῶν ὥρων καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου;

231. Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δείκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν δια 1ην, 2αν, 3ην, τελευταίαν φοράν;

232. Πότε μετὰ τὴν μεσημβρίαν οἱ δείκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος σχηματίζουν γωνίαν α° δια 1ην, 2αν, 3ην,... τελευταίαν φοράν;

233. Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δια 1ην φοράν;

234. Κύνων διώκει ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει τοῦ κυνὸς 60 πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὕτη κάμνη 9 πηδήματα, ὁ κύων κάμνει 6. Ἀλλὰ τρία πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκεῖνης. Μετὰ πόσα πηδήματα αὐτοῦ θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων;

Β'. ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 116. α') Ταξιδεύων τις λαμβάνει μαζί του 350000 δραχ. καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8000 δραχ.

Ἐὰν ταξιδεύσῃ ἐπὶ δύο ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot 2$ δραχ., ἐὰν ἐπὶ τρεῖς, τέσσαρας ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot 3$ δραχ., $8.000 \cdot 4$ δραχ. καὶ ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot x$ δραχ., θὰ τοῦ μείνουν δὲ καὶ $350.000 - 8.000x$ δραχ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἂν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\psi = 350.000 - 8.000x$ δραχ. καὶ ἐὰν εἶναι τὸ $x=5$, τὸ $\psi = 350.000 - 8.000 \cdot 5 = 350.000 - 40.000 = 310.000$ δραχ.

β') Εἰς ποδηλάτης διήνυσεν 21 χιλ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὠρισμένον τόπον. Ἀπὸ τοῦτον ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του καὶ διήνυσεν 17 χιλμ. καθ' ὥραν.

Μετὰ x ὥρας διήνυσεν $17x$ χιλμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δὲ ἐν ὅλῳ $21 + 17x$ χιλμ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ψ τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\psi = 21 + 17x$. (1)

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ

τὸν ὠρισμενον τόπον, δηλαδή, ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ ἐκ τῆς ἰσότητος (1).

Π.χ. ἂν τὸ $x = 2$, θὰ ἔχωμεν $\psi = 21 + 17 \cdot 2 = 21 + 34 = 55$. Ἄν εἶναι $x = 3$, τότε $\psi = 21 + 17 \cdot 3 = 21 + 51 = 72$.

Αἱ ποσότητες x καὶ ψ , αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, λέγονται **μεταβληταί**. Ἐνῶ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ἕν πρόβλημα λέγονται **σταθεραί**. Π.χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ἀνωτέρω ταξειδιώτης μαζί του καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ὠρισμένον τόπον, εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης ψ συνδέεται μὲ τὴν x οὕτως, ὥστε, ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τιμὴν τινὰ ὠρισμένην, εὐρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τῆς ψ . Ἡ μεταβλητὴ x , εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαίρετως τὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν θέλομεν, καλεῖται **ανεξάρτητος μεταβλητὴ**, ἡ δὲ ψ , τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x , καλεῖται **συνάρτησις τῆς x** . Ἐν γένει:

Ἐὰν δύο μεταβληταὶ x καὶ ψ , συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς x νὰ εὐρίσκωμεν ἀντιστοιχοῦς τιμὰς τῆς ψ , τότε ἡ ψ θὰ λέγεται **συνάρτησις τῆς x** , ἡ δὲ x **ανεξάρτητος μεταβλητὴ**.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτίνος αὐτοῦ. Διότι ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ψ τὸ ἐμβαδὸν του, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἶναι $\psi = \pi x^2$ καὶ τὸ μὲν π εἶναι ἀριθμὸς ὠρισμένος (ἴσος μὲ 3,141 μὲ προσέγγισιν), τὸ δὲ ψ εὐρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὠρισμένη τις τιμὴ. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν ὠρισμένην a , εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Διότι ἔχομεν ὅτι $\psi = \frac{1}{2} ax$, ἂν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ψ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

235. Εὑρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου (χρόνος ἐργασίας καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κ.τ.λ.).

236. Εὑρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διανυόμενον

διάστημα και ή ταχύτης εις τὸ κενόν, τὸ διάστημα και ή ταχύτης κ.τ.λ.). Ὅμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

§ 117. Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως. Ἐστω μία συνάρτησις ψ , ή ὅποια εἶναι ἴση με $13+5x$. Ἦτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν $\psi=13+5x$. (1)

Ἐάν εις τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, \dots$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ , ἂν θέσωμεν εις τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμὰς του. Οὕτως ἔχομεν ὅτι :

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 0, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot 0 = 13,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 1, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot 1 = 18,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = -2, \quad \text{τὸ } \psi = 13 + 5 \cdot (-2) = 3.$$

Ὅμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $\psi = 144 - 6x$ ἔχομεν ὅτι :

$$\text{ὅταν εἶναι } x = 0, \quad \psi = 144 - 6 \cdot 0 = 144,$$

$$\text{ὅταν εἶναι } x = -1, \quad \psi = 144 + 6 \cdot 1 = 150.$$

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π.χ. ή ψ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x , και διὰ δοθείσας τιμὰς τοῦ x γράψωμεν, τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ , καθὼς εις τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

237. Σχηματίσατε διὰ τὰς τιμὰς $x = 1, 2, 3, 4, 5, -1, x = -2, -3, -\frac{1}{2}$

τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha) \psi = 3x + 5, \quad \beta) \psi = 8x - 25, \quad \gamma) \psi = x, \quad \delta) \psi = -x.$$

238. Ὅμοίως τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = \frac{3}{4}x - 62, \quad \beta') \psi = \frac{x^2}{2} - 3x - 7.$$

$$239. \text{ Ὅμοίως τῶν } \alpha') \psi = \frac{4}{19}x^2 + \frac{3}{8}x + 9, \quad \beta') \psi = 600 - 35x^2 + \frac{13}{15}x.$$

2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 118. Καθὼς τοὺς σχετικούς ἀριθμοὺς παριστάνομεν με σημεία τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ή τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν με σημεία τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου

μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x + 1$. (1)

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν 1, ἔχομεν $\psi = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

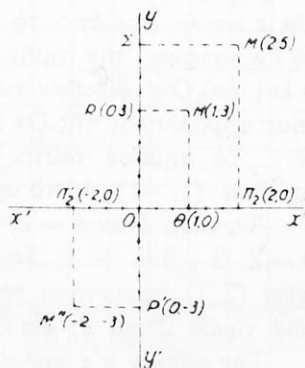
Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων $x'x$ καὶ ἐπ' αὐτοῦ εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου $O\Theta = 1$), τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν $x = 1$. Τὴν τιμὴν τῆς ψ θὰ παριστάνωμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον μὲ ἓν σημεῖον μιᾶς ἄλλης εὐθείας $\psi'\psi$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν $x'x$ εἰς τὸ σημεῖον O . Ταύτης τὸ μὲν $O\psi$ εἶναι τὸ τμήμα τῶν θετικῶν τιμῶν τῆς ψ , τὸ δὲ $O\psi'$, τὸ τῶν ἀρνητικῶν (σχ. 6).

Οὕτως ἡ τιμὴ τῆς $\psi = 3$ θὰ παριστάνηται ὑπὸ τοῦ σημείου P τῆς $O\psi$, ἐνῶ εἶναι $(OP) = 3$. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν $O\psi$ καὶ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν Ox , αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M . Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 3$ τῆς συναρτήσεως $\psi = 2x + 1$. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = 2$ καὶ $\psi = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου M' , τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Pi_2 M'$, παραλλήλου πρὸς τὴν $O\psi$ ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς $x'x$, παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x = 2$ καὶ τῆς $\Sigma M'$, παραλλήλου πρὸς τὴν Ox ἐκ τοῦ σημείου Σ , τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $\psi = 5$. Διὰ τὴν τιμὴν $x = -2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$\psi = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3.$$

Εὐρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π'_2 ἐπὶ τῆς $x'x$, τὸ P' ἐπὶ τῆς $\psi'\psi$ καὶ τὸ M'' τομὴν τῆς ἐκ τοῦ Π'_2 , παραλλήλου πρὸς τὴν $\psi'\psi$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ P' παραλλήλου πρὸς τὴν $x'x$, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = -2$, $\psi = -3$ τῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐν γένει καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχοῦσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνηται μὲ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς



Σχ. 6.

τὰς εὐθείας $x'x$ καὶ $\psi\psi$. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν $\psi\psi$ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, ἡ δὲ πρὸς τὴν $x'x$ ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\psi\psi$.

Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς :

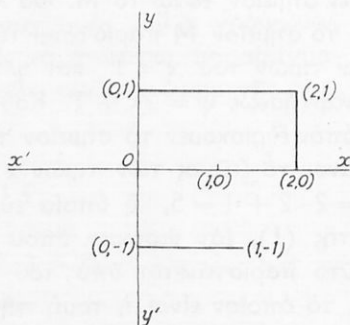
Ἐκ τοῦ σημείου τῆς $x'x$ (ἢ τῆς $\psi\psi$) τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς x (ἢ τῆς ψ) φέρομεν τμήμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\psi\psi$ (ἢ τὴν $x'x$) καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιὰ), ἂν ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) εἶναι θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ ἀριστερά), ἂν εἶναι ἀρνητική.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x - 3$, ὅταν $x = 1$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 1 - 3 = -1$. Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1, καὶ -1 τῆς x καὶ ψ , ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν -1 τῆς ψ ἐπὶ τοῦ $O\psi'$ φέρωμεν τμήμα εὐθείας παράλληλον τῆς Ox καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν μὲ (1, -1) εἰς τὸ σχῆμα 7.

Ὅμοίως, ὅταν $x = 2$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 2 - 3 = +1$. Τὸ δὲ σημεῖον (2, 1) παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 1, κ.ο.κ.

Τὴν εὐθεῖαν $x'x$ καλοῦμεν συνήθως **ἄξονα τῶν x** ἢ τῶν **τε-**

τμημένων, τὴν δὲ εὐθεῖαν $\psi\psi$ **ἄξονα τῶν ψ** ἢ τῶν **τεταγμένων**, τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα **ἄξονας τῶν συντεταγμένων x καὶ ψ** . Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὀριζόντιον, τὸν δὲ τῶν ψ κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τῶν x καὶ ψ καλοῦμεν ἀντιστοιχῶς **τετμημένην** καὶ **τεταγμένην** τοῦ σημείου τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα καλοῦμεν **συντεταγμένας τοῦ σημείου**.



Σχ. 7.

Άσκησης

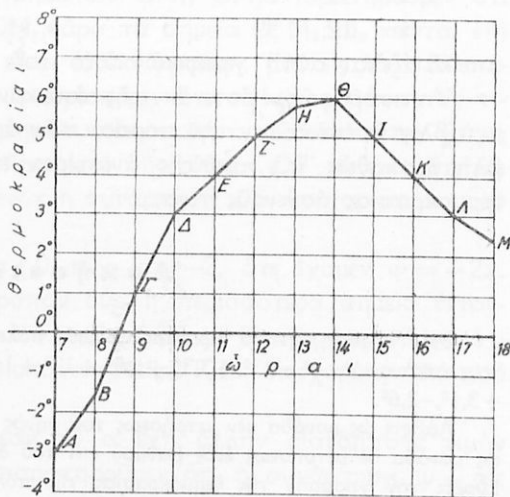
240. Παραστήσατε με σημεία τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ x :

α') $y = x + 2$, β') $y = \frac{1}{2}x + 1$ γ') $y = \frac{3}{4}x - 2$, ὅταν $x = 0, 1, 2, -1, -2$

241. $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}x^2$, ὅταν $x = 0, 1, 3, 4$.

242. α') $y = \frac{1}{2}x^2 - x^3$, β') $y = -\frac{3}{4}x^2 + 5$, ὅταν $x = 0, -1, -2, 2, 3$.

§ 119. Παρατήρησις. Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἐστω π.χ.: ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμότερον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἓνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὠρισμένον τμήμα, ὡς μονάδα μήκους, ἢ ὁποίαθὰ παριστάνη, τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x , ἔστω ἴσον μὲ 0,01 μ. Ἐπίσης ἓνα ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y , ἔστω τὸ 0,01 μ, τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνη τὸν ἓνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὗρωμεν τὰ σημεία, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν



Σχ. 8

ἡμερῶν τοῦ μηνὸς καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου), συνδέομεν τὰ διαδοχικὰ σημεία ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐξῆς μὲ τμήματα εὐθειῶν. Ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν οὕτως εὗρισκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται συνήθως **γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν

τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς παρατηροῦντες αὐτὴν π.χ. δις τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμὴν, τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν, καλοῦμεν συνήθως **γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς**.

Ταύτας κατασκευάζομεν συνήθως ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου, ἐνίοτε δὲ παραλείπονται οἱ ἄξονες, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα. Π.χ. ἂν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατὰ τινὰ ἡμέραν δίδεται ὡς ἑξῆς :

ὥρα	7	-3^0	ὥρα	13	$5,7^0$
»	8	$-1,5^0$	»	14	6^0
»	9	1^0	»	15	5^0
»	10	3^0	»	16	4^0
»	11	4^0	»	17	3^0
»	12	5^0	»	18	$2,4^0$

ἀπεικονίζεται αὕτη γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος 8.

Ἀντιστρόφως ἐνίοτε ἐκ τῆς ἀπεικονίσεως τῆς μεταβολῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἐννοοῦμεν τὴν πορείαν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καθὼς π.χ. ἐκ τῆς ἀνωτέρω εἰκόνης τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας ἀσθενοῦς τινος.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

243. Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶναι διὰ τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν $4^0, -2,3^0, +3,3^0, +6,5^0, +13^0, +16,6^0, +17,8^0, +19,5^0, +13,9^0, +9^0, +3,1^0, -2,6^0$.

Λάβετε ὡς μονάδα μὲν μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01μ. ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ 0,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

244. Ἡ αὐξήσις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 54 χιλιάδες καὶ κατὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ἦτο 56, 46, 38, 32, 35, 37, 48, 52, 87, 79, 69, 90, 97 χιλιάδες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ y τὸ 0,05 μ. Ἀπεικονίσατε τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως.

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = ax + b$

§ 120. Ἡ συνάρτησις $y = ax + b$, ὅπου τὸ a εἶναι σταθε-

ρά τις ποσότης $\neq 0$ και $\beta = 0$, παριστάνει εὐθείαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων O .

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ $\alpha > 0$, π.χ. $\alpha = 1$, ὅτε ἡ συνάρτησις εἶναι $\psi = x$. Ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (1), τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (2)

Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (σχ. 9) τὰ σημεία τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (1) τῆς x καὶ τὰ σημεία ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (2) τῆς ψ , παρατηροῦμεν ὅτι, τὰ σημεία τὰ παριστάνοντα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2), \dots$ κεῖνται ἐπὶ μιᾷς εὐθείας γραμμῆς, ἔστω τῆς OG .

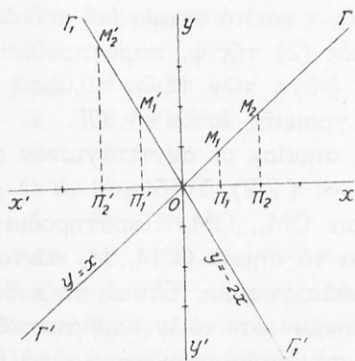
Διότι ἔστω ὅτι M_1 εἶναι τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(1,1)$ καὶ M_2 τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(2,2)$. Συνδέομεν τὸ O μὲ τὰ M_1, M_2 δι' εὐθυγράμμων τμημάτων OM_1, OM_2 . Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι γων $xOM_1 = \gamma \omega \nu xOM_2$, ἄρα τὰ σημεία O, M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, δηλαδή ἡ OM_1M_2 εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὰς τιμὰς $-1, -2, -3, \dots$, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς $-1, -2, -3, \dots$, τὰ δὲ σημεία, τὰ ὅποια παριστάνουν τὰ ζεύγη $(-1, -1)$, $(-2, -2), \dots$, κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας OG , ἡ ὅποια εἶναι προέκτασις τῆς OG . Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = x$, παριστάνει τὴν εὐθείαν GG' (σχῆμα 9).

Ἐστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$, π.χ. $\alpha = -2$, ὅτε ἔχομεν $\psi = -2x$. Εὐρίσκομεν καθ' ὅμοιον τρόπον δύο ἢ περισσότερα σημεία θέτοντες π.χ. $x=0$, ἔπειτα $x=1$, $x=-1, \dots$ Οὕτω δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = -2x$ παριστάνει εὐθείαν G_1G_1' διερχομένην διὰ τοῦ σημείου O .

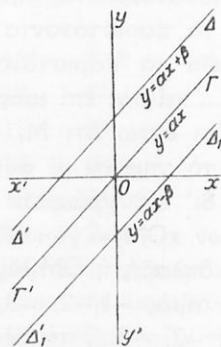
Ὅμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχη ἄλλην οἰανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x$ παριστάνει εὐθείαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τοῦ O .

§ 121. Τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x + \beta$ (ἂν εἶναι $\alpha, \beta \neq 0$) δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην ἐκάστου σημείου τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $\psi = \alpha x$, προσθῶμεν τὴν ποσότητα β . Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθείαν $\psi = \alpha x$ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἄνω ἢ κάτω, καθ' ὅσον τὸ β εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς. Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x + \beta$ παριστάνει εὐθείαν γραμμὴν (σχ. 10).

Ἡ ἐξίσωσις $\psi = \beta$ παριστάνει τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τεταγμένην β . Προφανῶς ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπέχουσιν ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις $\psi = \beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x .



Σχ. 9



Σχ. 10

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ $x = \alpha$ παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ καὶ ἀπέχουσιν ἀπόστασιν α ἀπὸ αὐτόν.

Ἡ $\psi = 0$ παριστάνει τὸν ἄξονα τῶν x , ἡ δὲ $x = 0$ τὸν ἄξονα τῶν ψ . Ἡ ἐξίσωσις $\psi = x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $xO\psi$, ἡ δὲ $\psi = -x$ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν $x'O\psi$ (σχ. 9).

Ἀσκήσεις

Εὑρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ κάτωθι συναρτήσεις:

245. α) $\psi = 3x$

β') $\psi = x + 3$,

γ') $\psi = 0,5x$.

246. α') $\psi = x - \frac{2}{3}$,

β') $\psi = \frac{x}{2} - x$,

γ') $\psi = -\frac{5x}{6} - \frac{1}{8}$.

247. α') $\psi = -\frac{3}{2}$,

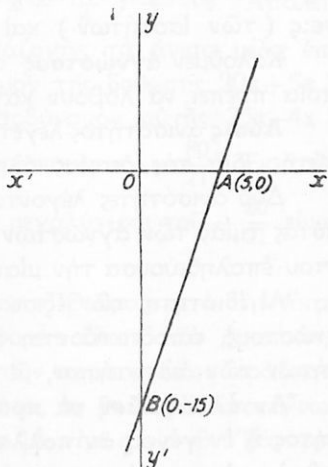
β') $\psi = 5 - 2x$,

γ') $\psi - 3 = \frac{x-1}{2}$.

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 122. Έστω μία εξίσωσις τοῦ α' βαθμοῦ π.χ. ἡ $3x-15=0$ (1)
Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν μὲ ψ, ἔχομεν τὴν συνάρ-
τησιν $\psi=3x-15$. Θέτομεν π.χ. $x=0$,
ὅτε εὐρίσκομεν $\psi=-15$. Θέτομεν $x=1$,
ὅτε εὐρίσκομεν $\psi=3\cdot 1-15=-12$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ σημεία $(0,-15)$
καὶ $(1,-12)$ τῆς εὐθείας. Ἄρα δυ-
νάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὴν
(σχ. 11). Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς
τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὸν
ἄξονα τῶν x , ἥτοι τὴν τετμημένην
τοῦ σημείου αὐτοῦ. Οὕτως εὐρίσκο-
μεν, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ἔχει
τετμημένην 5. Αὐτὴ εἶναι ἡ ρίζα
τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι εἰς
αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ τεταγμένη $\psi=0$.
Ὡστε ρίζα εἶναι ὁ 5. Τοῦτο ἐπα-
ληθεύομεν καὶ μὲ τὴν λύσιν τῆς δοθεί-
σης ἐξισώσεως. Ἐκ τούτου καὶ ἄλ-
λων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι :



Σχ. 11

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν ρίζαν ἐξι-
σώσεως α' βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν
εὐθεῖαν, τὴν ὁποῖαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha x+\beta$ καὶ νὰ
εὐρωμεν τὴν τομὴν ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x .

Γ'. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 123. Έστω π.χ. ἡ ἀνισότης $3x > 15$. Προφανῶς ἀληθεύει αὐ-
τὴ, μόνον, ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ 5, ἐνῶ ἡ $\alpha^2+\beta > 2\alpha\beta$
ἀληθεύει δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν α καὶ β , διαφορετικὰς μεταξύ
των. Π.χ. ἂν εἶναι $\alpha=2$ καὶ $\beta=1$, ἔχομεν :

$$2^2+1 > 2\cdot 2\cdot 1, \text{ ἢ } 5 > 4.$$

Ὅπως τὰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνο-
μεν εἰς ταυτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις, οὕτω καὶ τὰς ἀνισότητας,
αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνομεν εἰς δύο εἴδη : Ἐκείνας ἐκ

τούτων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν δι' οἰασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν ὠρισμένα γράμματα των λαμβάνουν καταλλήλους τιμὰς. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ταυτότητας ἀνισοτήτων** ἢ λέγομεν ὅτι αὗται **ἀντιστοιχοῦν εἰς ταυτότητας** ἰσοτήτων, ἐνῶ αἱ ἄλλαι **ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐξισώσεις** (τῶν ἰσοτήτων) καὶ ἰσχύουν ὑπὸ συνθήκας.

Καλοῦμεν **ἀγνώστους** ἀνισότητος τὰ γράμματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη.

Λύσις ἀνισότητος λέγεται ἡ εὑρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνῶστων αὐτῆς, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει αὕτη.

Δύο ἀνισότητες λέγονται **ισοδύναμοι**, ἐὰν ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνῶστων αὐτῶν, ἥτοι ἂν οἰασδήποτε τιμὴ ἀγνώστου ἐπαληθεύουσα τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν ἄλλην.

Αἱ ιδιότητες τῶν ἐξισώσεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀνισότητος μὲ ἀγνώστους, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀνισότητων, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι :

Ἄν ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα πάντων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος ἢ ἐν γένει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος μὲν τῆς δοθείσης, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἀνιστραφῇ ἡ φορὰ αὐτῆς.

Π.χ. ἡ $3x - 5 > 6x$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $-3x + 5 < -6x$, ἢ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἂν τὰ μέλη τῆς πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ -1 . Διὰ τοῦτο ἐπιδιώκομεν κατὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστών ἀνισότητος νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ θετικὴν ποσότητα π.χ. ἐπὶ τὸ κατάλληλον τετράγωνον ποσότητος.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα ἀντὶ δοθείσης ἀνισότητος μὲ ἀγνώστους νὰ θεωροῦμεν ἰσοδύναμόν της τῆς μορφῆς $A > 0$, ὅπου A εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς ἀνισότητος.

Βαθμὸς ἀνισότητος, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἐν μέρος εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι 0, λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους· π.χ. ἡ ἀνισότης $3x^2 - 5x + 1 < 0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x .

Διὰ τὴν λύσιν ἀνισότητος τοῦ α' βαθμοῦ ἐργαζόμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν λύσιν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $2x + 3 - (x + 1) > 5$. Ἐχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $2x + 3 - x - 1 > 5$. Ἐκ ταύτης μετὰ

τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ -1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν, ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $x > 3$. Ἄρα πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἐστω πρὸς λύσιν καὶ ἡ ἀνισότης $x + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} - 4$. Ἀπαλείφωμεν τοὺς παρονομαστὰς πολλαπλασιάζοντες τὰ ἄνισα μέλη ἐπὶ $4 \cdot 5 = 20$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $20x + 5x > 4x - 80$. Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $25x - 4x > -80$ ἢ τὴν $21x > -80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x > -\frac{80}{21}$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $-\frac{80}{21}$ εἶναι λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος.

Ἐν γένει ἡ ἀνισότης μὲ ἓνα ἄγνωστον α' βαθμοῦ μετὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν ὅλων τῶν ὅρων τῆς εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων, ἀνάγεται εἰς τὴν μορφήν $\alpha x + \beta > 0$, ὅπου, α , β ὑποτίθενται γνωσταὶ ποσότητες. Αὕτῃ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\alpha x > -\beta$. Ἐὰν μὲν εἶναι $\alpha > 0$, εὐρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν τῆς $x > -\frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha < 0$, ἔχομεν τὴν $x < -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄν εἶναι $\alpha = 0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης $\alpha x + \beta > 0$ γίνεται $\beta > 0$, ἐπαληθευομένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , ἂν εἶναι τὸ $\beta > 0$, δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι τότε ταυτότης ἀνισότητος. Ἄν ὅμως εἶναι $\beta < 0$, ἡ ἀνισότης εἶναι ἀδύνατος.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁ μ ᾶ ς π ρ ὶ τ η. 284. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

$$\alpha') -3x > \frac{5}{3},$$

$$\beta') -4x - 9 > 0,$$

$$\gamma') 0,5x + 5 > 0,$$

$$\delta') -9x - 18 < 0,$$

$$\epsilon') 9x + 7 > 0,$$

$$\sigma\tau') -7x - 48 > 0,$$

$$\zeta') 0,6x - 5 > 0,25(x - 1),$$

$$\eta') -9x + 32 > 0,$$

$$\theta') 0,5x - 1 > 0,7x - 1,$$

$$\iota') (x+1)^2 < x^2 + 3x - 5. \quad \kappa\alpha') \frac{x-3}{x-4} > 0.$$

249. Εὑρετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὰς ἀνισότητας $2x + 3 < 4$ καὶ $x - 5 > -8$.

250. Δύο σημεία Α καὶ Β ἀπέχουν ἀπόστασιν $(AB) = 2\gamma$. Τρίτον σημεῖον

έχει θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $(AM) + (BM) = 2\alpha$, ὅπου $\alpha > \gamma$. Πῶς μεταβάλλονται αἱ ἀποστάσεις (AM) καὶ (BM) , ἂν τὸ M κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABM ;

251. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν σημείων A καὶ B , διευθύνονται δὲ πρὸς συνάντησίν των. Ἄν ἡ ταχύτης των μεταβάλλεται μεταξύ τῶν t_1 καὶ t'_1 τοῦ ἑνὸς καὶ t_2 καὶ t'_2 τοῦ ἄλλου, μεταξύ τίνων χρόνων θὰ γίνη ἡ συνάντησις καὶ εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A , ἂν εἶναι $(AB) = \alpha$.

Ὅμως δευτέρα. 252. α') Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ἰσότητος ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης.

β') Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta > 0$ καὶ $\alpha \neq \beta$, δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 2$.

253. Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά, διαιρέσωμεν μὲ τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης, ἂν τὰ μέλη αὐτῆς εἶναι ὁμόσημά· ἄλλως, ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται.

254. Λύσατε τὴν κάτωθι ἀνισότητα μὲ ἄγνωστον τὸν x ,

$$\frac{mx+n}{\alpha+\beta} - \frac{kx-\lambda}{\alpha-\beta} < \frac{mx-n}{\alpha-\beta} + \frac{kx-\lambda}{\alpha+\beta},$$

ἐὰν εἶναι $(\alpha^2 - \beta^2)(\beta\mu + \alpha\kappa) < 0$, ἢ > 0

255. α') Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ ἂν α, β, γ δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι.

β') Ἄν, α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, θὰ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου III.

Ὁρισμός ἐξισώσεως, ἄγνωστων ἐξισώσεων, ριζῶν ἐξισώσεως.

Ορισμὸς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως. Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως. Ἐξισώσεις ἀριθμητικῆ, ἐγγράμματος, ρητῆ, ἀκεραία, κλασματικῆ (ὡς πρὸς τοὺς ἄγνωστους αὐτῆς).

Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις (ἂν τᾶσα ρίζα ἐκάστης τῶν ἐξισώσεων εἶναι ρίζα καὶ τῶν ἄλλων). Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων:

1ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A + \lambda = B + \lambda$ εἶναι ἰσοδύναμοι,

2ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A\rho = B\rho$ ($\rho \neq 0$) εἶναι ἰσοδύναμοι,

Ὁρισμὸς ἀπαλοιφῆς παρονομαστῶν ἐξισώσεως. Ἀναγωγή ἐξισώσεως εἰς τὴν μορφήν $A = 0$. Ὁρισμὸς βαθμοῦ ἐξισώσεως (ὡς πρὸς τοὺς ἄγνωστους της). Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$, $x = -\beta : \alpha$ (ἂν $\alpha \neq 0$), ἀδύνατος ἂν $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, ἀόριστος ἂν $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Ὁρισμὸς προβλήματος, ἐπιτάγματος, περιορισμοῦ. Διάκρι-

σις γενικοῦ προβλήματος ἀπὸ ἀριθμητικοῦ. Ὅρισμός διερευνήσεως προβλήματος.

Ὅρισμός σταθερᾶς καὶ μεταβλητῆς ποσότητος. Ὅρισμός συναρτήσεως τοῦ x (παραδείγματα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς Φυσικῆς).

Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως καὶ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἀπεικόνισις τιμῶν συναρτήσεως. Τετμημένη, τεταγμένη (συντεταγμένοι σημεῖοι). Ἀξονες συντεταγμένων (ὀρθογώνιοι).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = ax$ (εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = ax + \beta$ (εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{\beta}{a}, 0)$).

Γραφικὴ παράστασις τῆς $x = a$ (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν ψ).

Γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \beta$. (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x). Ἡ $x = 0$ παριστάνει τὸν ἄξονα ψ , ἡ $\psi = 0$ τὸν ἄξονα τῶν x , ἡ $\psi = x$ τὴν διχοτόμον εὐθεῖαν τῆς γωνίας $xO\psi$ τῶν ἀξόνων, ἡ $\psi = -x$ τὴν διχοτόμον τῆς ψ γωνίας $x'O\psi$.

Γραφικὴ λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἀνισότητες πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον. (Ὅρισμός ἀνισότητος, ταυτότητος ἀνισότητος, ἀγνώστων ἀνισότητος, λύσεως ἀνισότητος, ἰσοδυνάμων ἀνισοτήτων, βαθμοῦ ἀνισότητος) Λύσις τῆς ἀνισότητος $ax + \beta > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

Α'. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 124. Ἐστώσαν δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους x καὶ ψ καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ

$$x + \psi = 10, \quad x - \psi = 2.$$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐκάστου τῶν ἀγνώστων $x = 6$ καὶ $\psi = 4$. λέγομεν τότε, ὅτι ἀποτελοῦν **σύστημα** δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἐν γένει :

Καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις συστήματος περιέχουν τοὺς ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, λέγεται τοῦτο σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **λύσιν** συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Δύο ἢ περισσότερα συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ἰσοδύναμα, ἂν ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἥτοι ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις ἐκάστου ἐκ τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ ὅλων τῶν ἄλλων.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἢ περισσότεράς τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἰσοδυνάμων των, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_3 = B_3,$$

ὅπου τὰ $A_1, B_1, \dots$, παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα

$$A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 - B_2 = 0, \quad A_3 - B_3 = 0.$$

Λέγομεν, ὅτι ἐξίσωσίς τις εἶναι **λελυμένη** ὡς πρὸς ἓνα τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, π.χ. πρὸς τὸν x , ἂν εἶναι τῆς μορφῆς $x = A$, ὅπου τὸ A δὲν περιέχει τὸν ἀγνώστον x .

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ 125. α') Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐξῆς ιδιότητα τῶν συστημάτων

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερας αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν, εὐρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.

$$\text{Ἐστω π.χ. τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} 2x - 3\psi = 1, \\ x + \psi = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Ἄν προσθέσωμεν τὰς (1) κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μίαν, ἔστω τὴν πρώτην, ἐκ τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν $2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3$, εὐρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3 \\ x + \psi = 3, \end{cases} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x = 2$ καὶ $\psi = 1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμούς.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1, \\ 2 + 1 = 3. \end{cases} \quad (1')$$

Ἄν τὰς ἰσότητες αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 + 3$. (2')

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα καὶ εἰς τὸ σύστημα (2) τὰ x καὶ ψ μὲ τὸ 2 καὶ 1, εὐρίσκομεν δὲ ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1$ καὶ $2 + 1$. Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ αὗτοὶ εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως μὲ $1 + 3$ καὶ 3, ὥς φαίνεται εἰς τὴν (2') καὶ τὴν δευτέραν τῶν (1'). Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὅμοιως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἀρα τὸ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ιδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

β') Θὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὴν ἐξῆς ιδιότητα :

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία ἐξ αὐτῶν εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς ἓνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸν μὲ

την τιμήν του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἰς τινας μόνον), εὐρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.

$$\text{Ἐστω π.χ. τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ x - \psi = 2, \end{cases} \quad (1)$$

τοῦ ὁποῖου ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς x . Ἐὰν τὴν τιμήν $2\psi + 1$ τοῦ x ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, εὐρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ 2\psi + 1 - \psi = 2, \end{cases} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x = 3$, $\psi = 1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς

$$3 = 2 \cdot 1 + 1, \quad 3 - 1 = 2. \quad (1')$$

Ἄν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ θέσωμεν εἰς τὸ (2), εὐρίσκομεν ἕκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἴσους ἀριθμοὺς, διότι εἶναι αὐτὴ ἡ πρώτη τοῦ (1), ἕκ δὲ τοῦ πρώτου μέλους τῆς δευτέρας τοῦ συστήματος (2) προκύπτει ὁ ἀριθμὸς (2') $2 \cdot 1 + 1 - 1$ ἢ ὁ $3 - 1$, ἐπεὶ δὲ τὸ $2 \cdot 1 + 1$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμήν τοῦ 3 τοῦ x . Ἐπομένως τὸ ἐξαγόμενον (2') ἰσοῦται μὲ 2, ὡς φαίνεται καὶ ἕκ τῆς δευτέρας τῶν (1'). Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὅμοίως δεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΙΣΙΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

§ 126. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν π.χ. τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Ἐπιδιώκομεν πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (ἢ μίαν ἐξ αὐτῶν) εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους τούτων εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων των π.χ.

τοῦ x νὰ εἶναι ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν (ἥτοι τὰ μέλη αὐτῆς) ἐπὶ τὸν 3 (συντελεστήν τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν -2 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην). Τὸν πολλαπλασιασμόν τοῦτον σημειώνομεν γράφοντες παραπλευρῶς ἐκάστης τῶν ἐξισώσεων τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς, ὡς κατωτέρω.

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \quad (1)$$

$$\text{καὶ εὐρίσκομεν τὸ σύστημα} \begin{cases} 6x + 9\psi = 24 \\ -6x - 8\psi = -22 \end{cases} \quad (2)$$

Προφανῶς τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσodύναμα. Προσθέτομεν τώρα τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2) κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μὲ μίαν τῶν προστεθεισῶν τοῦ (2) ἢ μὲ μίαν τοῦ (1), ἔστω μὲ τὴν πρώτην, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$(2) \text{ καὶ τὸ (1). Δηλαδή τὸ σύστημα } \begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ \psi = 2 \end{cases} \quad (3) \text{ εἶναι ἰσο-}$$

δύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ (3) καὶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ , αἱ ὁποῖαι θὰ εὑρεθοῦν, θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1).

Ἄλλ' ἐπεὶδὴ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi = 2$, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x + 3\psi = 8$ τὸ ψ μὲ τὸ 2, εὐρίσκομεν $2x + 3 \cdot 2 = 8$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 1$. Ὡστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ εἶναι αἱ $x = 1$, $\psi = 2$. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ (1) ἀντὶ τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 2$, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως συστήματος λέγεται **μέθοδος ἀπαλοιφῆς** διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ διὰ τῆς προσθέσεως.

Διότι δι' αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν α') νὰ μετασχηματίζωμεν τὰς ἐξισώσεις εἰς ἰσοδυνάμους τῶν, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀντίθετοι καὶ β') διὰ τῆς προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη νὰ προκύπτῃ μία ἐξίσωσις μὲ ἓνα μόνον ἀγνώστον, ἥτοι **ἀπαλείφομεν τὸν ἄλλον ἀγνώστον**.

Διὰ νὰ μετασχηματίζωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοιχῶς τὰ

μέλη τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὰ πηλικά τοῦ ἐ.κ.π. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου δι' ἑκάστον ἐξ αὐτῶν λαμβανομένων καταλλήλως τῶν προσήμων αὐτῶν.

$$\text{Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα} \begin{cases} 12x + 5\psi = 17 \\ -8x + 7\psi = -1 \end{cases} \quad (1'')$$

τὸ ἐ.κ.π. τῶν 12 καὶ 8 εἶναι τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24 : 12=2 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24 : 8 = 3.

$$2 \quad 12x + 5\psi = 17$$

$$3 \quad -8x + 7\psi = -1$$

καὶ λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (2'') ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1'')

$$\begin{cases} 24x + 10\psi = 34 \\ -24x + 21\psi = -3 \end{cases} \quad (2'')$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2'') κατὰ μέλη προκύπτει ἐξίσωσις $31\psi = 31$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\psi = 1$ καὶ ἀκούθως ἐργαζόμενοι ὡς ἄνωτέρω, εὐρίσκομεν $x = 1$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὰς πρῶτη. 256. Νὰ λυθοῦν τὰ ἐπόμενα συστήματα καὶ νὰ γίνη ἡ ἐπαλήθευσις μετὰ τὴν εὐρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνῶστων.

$$\alpha') \begin{cases} 3x + 4\psi = 10 \\ 4x + \psi = 9 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{\psi}{4} = 6 \\ \frac{x}{4} + \frac{\psi}{6} = \frac{17}{3} \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{x}{13} - \frac{\psi}{7} = \\ = 6x - 10\psi - 8 = 0 \end{cases}$$

$$257. \alpha') \begin{cases} 6\psi - 5x = 18 \\ 12x - 9\psi = 0 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} 7,2x + 3,6\psi = 54 \\ 2,3x - 5,9\psi = 22 \end{cases}$$

$$258. \alpha') \begin{cases} (x+5)(\psi+7) - (x+1)(\psi-9) = 12 \\ 2x + 10 - (3\psi+1) = 0 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} 0,3x - 0,2\psi = 0,01 \\ 1,2x - 0,6\psi = 0,6 \end{cases}$$

$$259. \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \beta^3 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha^3 + \beta^3 \end{cases}$$

$$260. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = 3x - 7\psi - 37 = 0. \end{cases}$$

$$261. \begin{cases} \frac{x+3}{5} = \frac{8-\psi}{4} = \frac{3(x+\psi)}{8} \end{cases}$$

$$262. \begin{cases} \frac{x}{0,2} + \frac{\psi}{0,5} = 12,3 \\ \frac{x}{0,6} + \frac{\psi}{0,8} = 5,55 \end{cases}$$

Ὁ μ ἄ ς δ ε υ τ ἑ ρ α . Ν ἂ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἐπόμενα συστήματα :

$$263. \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

$$264. \begin{cases} (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = \alpha^2 + \beta^2 \\ (\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)\psi = \alpha^2 - \beta^2 \end{cases}$$

$$265. \begin{cases} \alpha(x - \psi) + \beta(x + \psi) = 4\alpha\beta \\ (\alpha - \beta)x - \beta\psi = \alpha\psi \end{cases}$$

$$266. \begin{cases} \alpha(x + \beta) = 2\beta\psi \\ \beta(x + \alpha) - \beta^2 = \beta\psi \end{cases}$$

$$267. \begin{cases} (\alpha + \beta)x - \alpha\psi = \alpha^2 \\ \beta x - (\alpha - \beta)\psi = \beta^2 \end{cases}$$

II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙ' ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 127. Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἐξῆς : Ἀπομονώνομεν τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν x , ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων. Ἦτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν $x = \frac{8-3\psi}{2}$.

Αὕτη μὲ τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν τὸ κατωτέρω σύστημα (2) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1)

$$\begin{cases} x = \frac{8-3\psi}{2} \\ 3x + 4\psi = 11. \end{cases} \quad (2)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἢ τοῦ (2) καὶ εὐρίσκομεν $3 \cdot \frac{8-3\psi}{2} + 4\psi = 11$, ἡ ὁποία μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1).

Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς τὸ ψ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν τὸ ψ μὲ τὸ 2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἢ εἰς τὴν $x = \frac{8-3\psi}{2}$, ὅτε εὐρίσκομεν $x = \frac{8-6}{2} = 1$.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς λύσεως συστήματος καλοῦμεν συνήθως μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.

Άσκησης

268. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα καὶ ἐπαληθεύσατε αὐτά :

$$\alpha') \begin{cases} 7x = 18 + \frac{5\psi}{3} \\ 0,75x + 2\psi = 15 \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x = \alpha + \psi \\ \lambda x + \mu\psi = \nu \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \alpha x = \alpha^2 - \beta\psi \\ \alpha x - \beta\psi = \beta^2 \end{cases}$$

$$269. \alpha') \begin{cases} \psi = 3\alpha - \frac{x}{2} \\ \frac{2\psi}{5} - x = 2\beta \end{cases}$$

$$\beta') \begin{cases} x = 4\alpha - \psi \\ \frac{x+\psi}{3} - \frac{x-\psi}{2} = \alpha \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{\psi}{3} \\ 2x + 3\psi = 5 \end{cases}$$

III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ

§ 128. Ἐστω ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς :
Ἀπομονώνομεν τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν x εἰς τὴν πρώτην καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἦτοι λύομεν κάθε μίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν x θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστὸν καὶ εὐρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x = \frac{8-3\psi}{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x = \frac{11-4\psi}{3}$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3\psi}{2} = \frac{11-4\psi}{3}$, ἡ ὁποία μὲ μίαν ἐκ τῶν δοθεῖσῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x , ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὐρίσκομεν $x = 1$.
Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως συστημάτων καλοῦμεν συνήθως μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως.

Παρατήρησις. Καθὼς διακρίνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅταν λέγωμεν, ὅτι μεταξὺ δύο ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος ἀπαλείφομεν τὸν ἓνα ἀγνώστου, ἐννοοῦμεν μὲ αὐτό, ὅτι ἐκφράζομεν τὸ ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου.

Άσκησης

Όμας πρώτη. 270. Να λυθούν τα κάτωθι συστήματα και να γίνουν ή επαλήθευσις αὐτῶν :

$$\alpha') \begin{cases} 3x + 5\psi = 20 \\ 3x + 10\psi = 0 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1 \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta} = 1 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \alpha x - \beta \psi = \gamma(\alpha - \beta) \\ x + \psi = \gamma \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{\psi}{\alpha - \beta} = 2\alpha \\ \frac{x - \psi}{2\alpha\beta} = \frac{x + \psi}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} x + \psi = \alpha + \beta \\ \beta x + \alpha \psi = 2\alpha\beta \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} (x : \alpha) - (\psi : \beta) = \alpha^2\beta \\ (x : \alpha^2) + (\psi : \beta^2) = -\beta^2 \end{cases}$$

Όμας δευτέρα. 271. Να λυθούν τα κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου και να γίνουν ή επαλήθευσις αὐτῶν ;

$$\alpha') \begin{cases} 2(x + 2\psi) = 3(2x - 3\psi) + 10 \\ 2(2x - \psi) = 8(3\psi - x) + 3 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (5x + 7\psi) : (3x + 11) = 13 : 7 \\ (11x + 27) : (7x + 5\psi) = 19 : 11 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = 2\alpha\beta \\ (\alpha + \gamma)x + (\alpha - \gamma)\psi = 2\alpha\gamma \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 \\ \beta x + \alpha \psi = \beta^2 \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} - \frac{\psi}{\beta - \alpha} = 2\alpha^2\beta \\ \frac{x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\psi}{\beta^2 - \alpha^2} = 2\alpha\beta \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \alpha^2 \\ \alpha x - \beta \psi = \beta^2 \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \lambda x - \mu \psi = \delta \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} \frac{13}{x + 2\psi + 4} + \frac{3}{4x - 7\psi + 6} = 0 \\ \frac{3}{6x - 5\psi + 1} - \frac{15}{3x + 2\psi + 5} = 0 \end{cases}$$

Όμας τρίτη. 272. Να λυθούν και να επαλήθευθούν τα συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} 2(3x - \psi) = 3(4x + \psi) + 5 \\ 3(x - 3\psi) = 5(3\psi - x) \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \alpha x + 1 = \alpha \psi + \beta x \\ \beta \psi + 1 = \alpha \psi + \beta x \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{\psi} = \frac{10}{x\psi} \\ \frac{5}{3x} + \frac{3}{4\psi} = \frac{49}{12x\psi} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha^2 - \beta^2)\psi = 2\alpha^2\beta^2 \\ (\alpha^2 + \gamma^2)x + (\alpha^2 - \gamma^2)\psi = 2\alpha^2\gamma^2 \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} \frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{\psi}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} \\ \frac{x}{\alpha - \beta} + \frac{\psi}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

$$\sigma\tau') \begin{cases} \frac{0,1}{x + 7\psi + 5} + \frac{3,5}{7x - 9\psi + 19} = 0 \\ \frac{3,5}{6x - 5\psi + 3} - \frac{0,9}{0,1x - 4,5\psi - 1} = 0 \end{cases} \quad \zeta') \begin{cases} \gamma x + \alpha \psi = \alpha(\beta + 1) + \gamma(\beta - 1) \\ x = \frac{\alpha(\beta - \gamma\psi) + \gamma(2\alpha\beta - \gamma)}{\alpha\gamma} \end{cases}$$

3. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases} \quad (1)$$

§ 129. Υποθέτομεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι ὅλοι μηδενικοί. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha \neq 0$.

Τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος λυομένη πρὸς x , τοῦ ὁποῖου ὁ συντελεστὴς εἶναι $\neq 0$, δίδει $x = \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha}$.

Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x εἰσαχθῇ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $\alpha_1 \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha} + \beta_1 \gamma = \gamma_1$, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὴν $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\psi = \alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} x &= \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\psi &= \alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις :

1ον. $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) θὰ ἔχῃ τότε μίαν μόνην λύσιν, τὴν $\psi = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ εἰσαγομένη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) δίδει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ x , τὴν $x = \frac{\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (2), καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ (1) ἔχει μίαν λύσιν, εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ὅταν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι μηδενικοὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἐπομένως παρέλκει ἡ ὑπόθεσις τοῦ νὰ μὴ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ὅλοι μηδενικοί.

Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ λέγεται **ὀρίζουσα** τοῦ συστήματος (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν :

Ἄν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν.

2ον. $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) γίνεται μετὰ κάθε ψ . $0 = \alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι πράγματι ἡ $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$ ἴση μετὰ μηδέν, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) ἀληθεύει μετὰ κάθε ψ καὶ οὕτω τὸ σύστημα (2) ἀνάγεται εἰς μόνην τὴν $x = \frac{\gamma - \beta \psi}{\alpha}$.

Αυτή έχει άπειρους λύσεις, διότι δυνάμεθα νά δώσωμεν τυχοῦσαν τιμήν εἰς τὸν ψ καὶ νά εὑρεθῇ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως τοῦ x , ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x .

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα (2) καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδυναμὸν του (1) εἶναι **ἀόριστον**.

*Αν ὅμως ἡ παράστασις $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$ εἶναι $\neq 0$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) εἶναι ἀδύνατος, ὁπότε καὶ τὸ σύστημα (2) καθὼς καὶ τὸ (1) εἶναι **ἀδύνατον**.

*Ὅταν ὅμως εἶναι $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\gamma_1 \neq \alpha_1\gamma$. Καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ α , τὸ ὁποῖον εἶναι $\neq 0$, εὐρίσκομεν ὅτι $\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha}$, ὁπότε $\beta\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma\beta}{\alpha}$.

*Αρα καὶ $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq \frac{\alpha_1\beta\gamma}{\alpha} - \beta_1\gamma$.

δηλ. $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq \gamma \frac{(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)}{\alpha}$ ἤτοι $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma \neq 0$

διότι $\frac{\gamma(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)}{\alpha} = 0$, ἀφοῦ $\alpha_1\beta - \alpha\beta_1 = 0$ ἐξ ὑποθέσεως.

*Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι ἂν $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0$, τότε καὶ $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma = 0$.

Ὡστε :

*Ὅταν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι μηδενική, χωρὶς νά εἶναι μηδενικοὶ ταυτοχρόνως καὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀόριστον ἢ ἀδύνατον. Καὶ ἀόριστον μὲν θὰ εἶναι ὅταν εἶναι ταυτοχρόνως μηδενικὴ καὶ μία οἰαδήποτε ἐκ τῶν παραστάσεων $\alpha_1\gamma - \alpha_1\gamma$ ἢ $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$, ἀδύνατον δὲ ὅταν μία ἐκ τῶν παραστάσεων αὐτῶν εἶναι $\neq 0$.

Παρατήρησις I. Εἶναι δυνατόν ἡ λύσις ἐνὸς γενικοῦ προβλήματος νά ὀδηγήσῃ εἰς σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ νά εἰσαχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδενικοί. Τότε τὸ (1) γίνεται $0 = \gamma$.

$$0 = \gamma_1.$$

μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ .

Καὶ τότε φαίνεται ὅτι ἂν οἱ γ, γ_1 εἶναι μηδενικοὶ καὶ οἱ δύο, τὸ σύστημα ἀληθεύει μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ .

Λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀόριστον μὲ πλήρη ἀοριστίαν**. *Αν ὅμως εἰς ἐκ τῶν γ ἢ γ_1 εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Παρατήρησις II. Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ εὐρίσκεται ὡς ἐξῆς

Γράφονται αὶ ἐξισώσεις ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Τότε πολ/ζονται οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ τῆς πρώτης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς δευτέρας καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιρεῖται τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὐρίσκονται καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων τῶν ἀγνώστων x , ψ , ἀφοῦ πρῶτον μεταφερθοῦν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ οἱ ὅροι οἱ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκάστου ἀγνώστου θὰ παραλείπεται νοερῶς ἡ στήλη αὐτοῦ τοῦ ἀγνώστου καὶ θὰ πολ/ζονται οἱ ὅροι τῆς ἐπομένης στήλης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς ἄλλης στήλης, παραλειπομένου τοῦ ἀγνώστου ποὺ περιέχεται εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τῶν στηλῶν, ἀπὸ τὸ πρῶτον δὲ γινόμενον θὰ ἀφαιρῇται τὸ δεύτερον. Παρονομαστής εἶναι ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος. Πχ. Ἔστω τὸ σύστημα

$$0,3x + 0,1\psi = 1,2$$

$$2x = 5\psi - 5,6$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἔχομεν

$$0,3x + 0,1\psi - 1,2 = 0$$

$$2x - 5\psi + 5,6 = 0$$

$$\text{Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν } x = \frac{0,1 \cdot 5,6 - (-5) \cdot (-1,2)}{0,3 \cdot (-5) - 2 \cdot (0,1)} = \frac{-5,44}{-1,7} = 3,2.$$

$$\psi = \frac{-1,2 \cdot 2 - 0,3 \cdot 5,6}{0,3 \cdot (-5) - 2 \cdot (0,1)} = \frac{-4,08}{-1,7} = 2,4.$$

$$\text{ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ } \begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$$

§ 130. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν λύσιν ἐνὸς ἐγγραμμάτου συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εὐρίσκομεν τὴν ὀρίζουσαν αὐτοῦ. Καὶ τότε, λαμβάνοντες τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὀρίζουσα αὐτὴ εἶναι $\neq 0$ θὰ ἔχωμεν ὑπ' ὅψιν ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω μηχανισμόν. (Παρατ. II).

Ἐπειτα λαμβάνομεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι μηδενικὴ καὶ εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς, αἱ ὁποῖαι τὴν μηδενίζουν. Ἀντικαθιστῶντες τότε εἰς τὸ σύστημα

τὰ γράμματα μὲ τὰς τιμὰς αὐτάς, ἀναγνωρίζομεν εὐκόλως ἂν αἱ δύο ἐξισώσεις ἀνάγωνται εἰς μίαν, ὅποτε ἔχομεν **ἀοριστίαν**, ἢ ἂν εἶναι **ἀσυμβίβαστοι**, ὅποτε τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐφαρμογή. Ἐστω τὸ σύστημα $\lambda x + \psi = 2$.

$$x + \psi = 2\lambda.$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος, ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\lambda x + \psi - 2 = 0$.

$$x + \psi - 2\lambda = 0.$$

Ὅριζουσα τοῦ συστήματος εἶναι $\lambda - 1$.

1ον. Ἐὰν $\lambda - 1 \neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν,

$$\text{τὴν } x = \frac{-2\lambda + 2}{\lambda - 1} = \frac{-2(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = -2$$

$$\psi = \frac{-2 + 2\lambda^2}{\lambda - 1} = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda - 1} = 2(\lambda + 1)$$

2ον. Ἐὰν $\lambda - 1 = 0$, τότε $\lambda = 1$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν τεθῇ ἀντὶ λ τὸ 1, $x + \psi = 2$ $x + \psi = 2$

Ἡτοι τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν :

τὴν $x + \psi = 2$ καὶ ἀληθεύει ὅταν $x = 2 - \psi$ ὅπου ψ αὐθαίρετος.

Εἶναι ἐπομένως ἀόριστον.

Παρατήρησις. Ποσότης τις, ὡς π.χ. ἡ λ , ἡ ὁποία δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, καλεῖται **παραμέτρος**.

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη 273. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} \lambda x + \psi = 2 \\ x + \lambda \psi = 2\lambda + 1 \end{cases} & \beta') \begin{cases} \lambda x - 2\psi = \lambda \\ (\lambda - 1)x - \psi = 1 \end{cases} & \gamma') \begin{cases} x + (3\lambda - 1)\psi = 0 \\ \lambda \psi - 4x = \lambda - 4 \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} \psi = \lambda + 2x \\ 3\psi - \lambda = x + 3 \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} x + \psi = 1 \\ \lambda x + \psi = 1 \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} (\lambda^2 - 1)x - \psi = \lambda \\ 2x - \psi = \lambda - 1 \end{cases} \end{array}$$

274. Τίνα τῶν κάτωθι συστημάτων ἔχουν μίαν λύσιν, εἶναι ἀόριστα ἢ ἀδύνατα :

$$\begin{array}{lll} \alpha') \begin{cases} 3x - 5\psi = 2 \\ -3x + 5\psi = 7 \end{cases} & \beta') \begin{cases} 2x + 7\psi - 4 = 0 \\ 5x + 21\psi - 12 = 0 \end{cases} & \gamma') \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\psi}{3} = 1 \\ 7x + 2\psi = 6 \end{cases} \\ \delta') \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = -1 \\ \frac{2x}{3} + \frac{\psi}{2} = 5 \end{cases} & \epsilon') \begin{cases} 2\alpha x - \beta \psi = 3 \\ \frac{\alpha x}{2} - \frac{\beta \psi}{6} = 2 \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1 \\ \beta x + \alpha \psi = \alpha \beta \end{cases} \end{array}$$

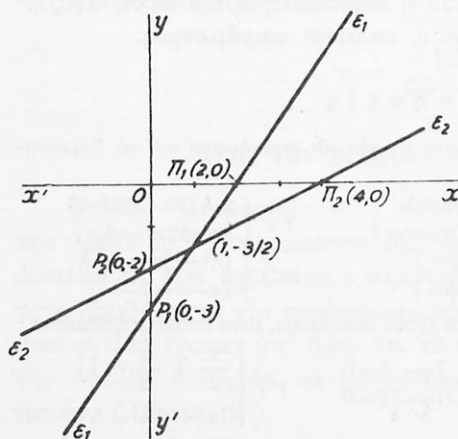
Ὅ μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 275. Λύσατε καὶ διειρενήσατε τὰ κατωτέρω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \alpha') \begin{cases} 2x-3\psi=5\beta-\alpha \\ 3x-2\psi=\alpha+5\beta \end{cases} & \beta') \begin{cases} \alpha(x-\psi)+\beta(x+\psi)=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x-\beta\psi=\alpha\psi \end{cases} \\ \gamma') \begin{cases} 3x-\psi=2(\alpha+\beta)^2 \\ 3\psi-x=2(\alpha-\beta)^2 \end{cases} & \delta') \begin{cases} \alpha(x-\psi+\beta)+\beta^2=\beta\psi \\ \alpha(\psi-\alpha-\beta)+\beta x=\beta\psi \end{cases} \\ \epsilon') \begin{cases} \frac{x}{x-\alpha}+\frac{\psi}{\psi-\beta}=2 \\ \alpha x+\beta\psi=2\alpha\beta \end{cases} & \sigma\tau') \begin{cases} x+\psi=\frac{2\beta\gamma(\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma)}{\alpha\beta\gamma-2\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2} \\ \alpha(x-\alpha^2)+\beta(\psi+\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2 \end{cases} \end{array}$$

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 131. Ἐστω τὸ σύστημα
$$\begin{cases} 3x-2\psi=6 \\ x-2\psi=4 \end{cases} \quad (1)$$

Λύοντες αὐτὸ εὐρίσκομεν $x=1$, $\psi=-\frac{3}{2}$. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεύγος τῶν τιμῶν $(1, -\frac{3}{2})$, κεῖται ἐπὶ ἐκάστης τῶν εὐθειῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2 , τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἐπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ϵ_1 καὶ ϵ_2 ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (1).



Σχ. 12

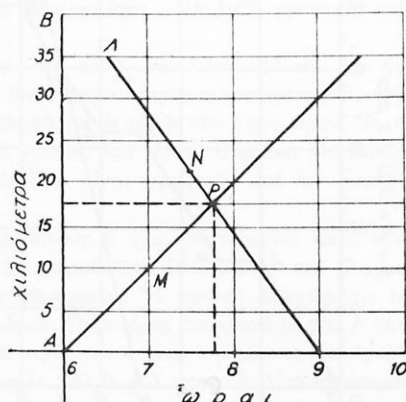
Ἄρα διὰ νὰ λύσωμεν ἐν σύστημα α' βαθμοῦ δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων γραφικῶς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν τῶν παριστανόμενων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (σχ. 12).

Ἐφαρμογαί. 1η) Ἴππεὺς ἀναχωρεῖ τὴν 6ην πρωϊνὴν ὥραν ἀπὸ τοῦ τόπου Α, διὰ νὰ μεταβῇ εἰς τὸν Β. Ἡ μίσειαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Β ποδηλάτης διευθυνόμενος πρὸς τὸν Α διὰ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ὥς ὁ ἵππεὺς. Ποίαν ὥραν καὶ εἰς

τὸν Α διὰ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ὥς ὁ ἵππεὺς. Ποίαν ὥραν καὶ εἰς

ποίαν απόστασιν από τοῦ Α θὰ συναντηθοῦν, ἂν ὁ μὲν ἵππεὺς διανύῃ 10 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ ποδηλάτης 14 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ απόστασις ΑΒ εἶναι 35 χλμ.

Παριστάνομεν τὰς ὥρας μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τὰς ἀποστάσεις μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν y (τῶν ἀξόνων τεμνομένων ἐνταῦθα εἰς τὸ Α). Δεχόμεθα ὅτι ἐκάστη ὑποδιαίρεσις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x θὰ παριστάνῃ χρόνον διαφέροντα κατὰ 1 ὥραν τῆς παρακειμένης τῆς καὶ ἐκάστη ἐπὶ τοῦ y κατὰ 5 χλμ. Οὕτω μετὰ 1 ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἵππεὺς θὰ εὐρίσκηται εἰς θέσιν παριστανομένην ὑπὸ τοῦ Μ ἔχοντος τετμημένην 7 ὥρ. καὶ τεταγμένην 10 χλμ., ἐνῶ ἡ πορεία του παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΜ



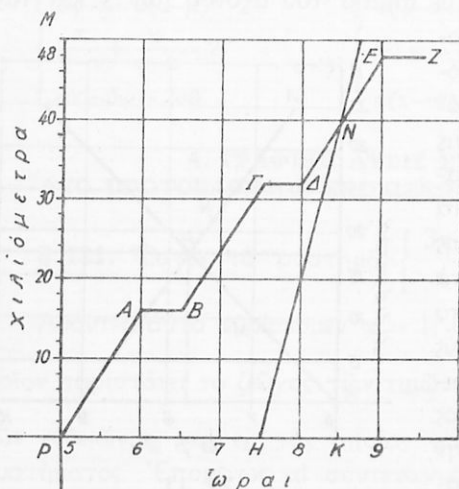
Σχ. 13

Ἡ θέσις τοῦ ποδηλάτου κατὰ τὴν ἀναχώρησίν του παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Λ (6,5, 35) καὶ εἰς τὸ τέλος 1 ὥρ. μετ' αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Ν μὲ τεταγμένην $35-14=21$ χλμ. Ἡ πορεία τούτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΝ. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο κινητῶν ἐπὶ τοῦ δρόμου ΑΒ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ (7, 75 ὥρ. 17,5 χλμ.). Ἀρα ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὰς 7 ὥρ. 45 καὶ εἰς ἀπόστασιν 17,5 χλμ. ἀπὸ τοῦ Α (σχ. 13).

2) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ τὴν 5ην πρωϊνὴν ὥραν ἐκ τόπου Ρ διευθυνόμενος πρὸς τὸν Μ διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν καὶ σταθεύων πάντοτε ἐπὶ 30λ μετὰ ἀπὸ πορείαν 1 ὥρας. Ζητεῖται : α') ποίαν ὥραν θὰ ἔχῃ διανύσῃ 48 χλμ. ἀπὸ τοῦ Ρ, β') ποίαν ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ρ θὰ συναντηθῇ μὲ αὐτοκίνητον ἀναχωρήσαν ἐκ τοῦ Ρ τὴν 7ην ὥραν 30λ πρωϊνὴν, τὸ ὁποῖον κινεῖται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν διανύων 40 χλμ. τὴν ὥραν.

Ἔργαζόμενοι καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δρόμος τοῦ ποδηλάτου ἀπὸ τῆς 5ης ὥρας μέχρι

τῆς 6ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος PA (σχ. 14), ὅπου τὸ P παριστάνει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Ὁ δρόμος ἀπὸ τῆς 6,5ης ὥρας μέχρι τῆς 7,5ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ



Σχ. 14

Ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου δίδεται ὑπὸ τῆς εὐθείας HN, ἐνῶ ἔχομεν H (7,5, 0) καὶ τέμνει ἡ HN τὴν τεθλασμένην γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον N ἔχον τετμημένην 8,5 ὥρας καὶ τεταγμένην 40 χλμ. Ἐπομένως ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ τὴν 8ὴν ὥραν 30λ εἰς ἀπόστασιν 40 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου P.

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν

276. Παραστήσατε γραφικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὰς πορείας α') ἐνὸς αὐτοκινήτου καὶ μιᾶς ἀμαξοστοιχίας, β) μιᾶς δευτέρας ἀμαξοστοιχίας καὶ μιᾶς τρίτης. Τὰ μὲν δύο πρῶτα κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου P, τὰ δὲ δύο ἄλλα ἐκ τοῦ M. Τὸ αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ τὴν 13ην ὥραν 5λ καὶ φθάνει εἰς τὸ M τὴν 15ην ὥρ. 57λ μετὰ σταθμεύσει 5λ, 4λ, 2λ, 1λ εἰς ἕκαστον τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν A, B, Γ, Δ, E. Ἡ ἐκ τοῦ P ἀμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα τὴν 15ην ὥραν 25λ φθάνει εἰς τὸ M ἀνευ σταθμεύσεως τὴν 16ην ὥρ. 5λ. Ἡ ἐκ τοῦ M ἀναχωροῦσα τὴν 13ην ὥρ. 20λ φθάνει εἰς τὸ P τὴν 16ην ὥρ. 45λ μετὰ σταθμεύσεως 2λ, 3λ, 4λ, 5λ εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμούς Δ, Γ, B, A. Ἡ τρίτη ἀμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ M τὴν 14ην ὥραν φθάνει εἰς τὸ P τὴν 15ην ὥραν 55λ μετὰ στάθμευσιν 3λ

εις τὸν Α. Ἡ ἀπόστασις ΡΜ εἶναι 131 χλμ., ἡ δὲ τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν ἀπὸ τοῦ Ρ εἶναι 51 χλμ., 66 χλμ., 80 χλμ., 95 χλμ., 122 χλμ., καὶ αἱ κινήσεις ὑποτίθενται ὁμαλαί. Εὗρετε γραφικῶς ποῦ συναντῶνται τὰ κινητὰ ἀνὰ δύο καὶ νὰ γίνουν αἱ πρέπουσαι ἐπαληθεύσεις.

277 Ἐκ δύο προσώπων τὸ ἐν ἔχει 63 500 δρχ. τὸ ἄλλο 125 000 δρχ. Κατ' ἔτος τοῦ μὲν α' αὐξάνεται τὸ ποσὸν κατὰ 8 000 δρχ. τοῦ δὲ β' ἐλαττοῦται κατὰ 12 500 δρχ. Μετὰ πόσα ἔτη αἱ περιουσίαι θὰ εἶναι ἴσαι ; Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ δι' ὑπολογισμοῦ.

278. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν ὁ μὲν ἐκ τοῦ τόπου Μ τὴν 8ην ὥραν, ὁ δὲ ἐκ τοῦ Ν τὴν 9ην ὥραν 48λ καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησιν ὁ εἰς τοῦ ἄλλου. Ὁ Α συναντᾷ τὸν Β τὴν 11ην ὥραν φθάνει εἰς τὸν Ν τὴν 13ην ὥραν. Ἄν ἡ ἀπόστασις ΜΝ εἶναι 60 χλμ., νὰ εὗρεθῇ ὁ χρόνος, καθ' ὃν ὁ Β φθάνει εἰς τὸν Μ καὶ ἡ ταχύτης ἐκάστου ποδηλάτου. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ, γραφικῶς καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

279. Μία τροchioδρομικὴ γραμμὴ ΑΒ μήκους 8 χλμ. διατρέχεται κατὰ δύο ἀντιθέτους φορὰς ὑπὸ ἀμαξῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναχωροῦν ἀνὰ 10 λ διανύουσαι 12 χλμ. τὴν ὥραν περιλαμβανομένων καὶ τῶν σταθμεύσεων. Ἡ πρώτη ἀναχώρησις ἐκ τῶν Α καὶ Β γίνεται συγχρόνως τὴν 6ην ὥραν. Πλεοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α τὴν 8ην ὥραν 12λ διευθυνόμενος πρὸς τὸ Β με ταχύτητα 4 χλμ. τὴν ὥραν. Νὰ εὗρεθῇ α') πόσας ἀμαξὰς θὰ συναντήσῃ ἐρχομένης ἐκ τοῦ Β, β') πόσαι ἀμαξὶ ἐρχόμεναι ἐκ τοῦ Α θὰ τὸν συναντήσουν. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ γραφικῶς καὶ ἡ ἐπαλήθευσις λογιστικῶς.

280. Εὗρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν :

$$\alpha') 2x + 3\psi = 1,$$

$$\text{καὶ } \psi - 3x = 4.$$

$$\beta') 0,3x + 0,1\psi = 1,2$$

$$» 2x - 5\psi + 5,6 = 0.$$

$$\gamma') 0,4x + 0,3\psi - 0,45 = 0,$$

$$» 1,6x + 0,4\psi + 1 = 0.$$

$$\delta') \frac{x-1}{3} = \frac{\psi+4}{7}$$

$$» x - 2\psi = 0.$$

$$\epsilon') \frac{x-\psi}{3} - \frac{\psi-x}{7} + 1 = 10,$$

$$» x - 7\psi = 0.$$

$$\sigma\tau') \frac{1}{x} - \frac{2}{\psi} = \frac{2}{x\psi},$$

$$» x + \psi = 3.$$

5. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

§ 132. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων με τρεῖς ἀγνώστους π.χ. τὸ

$$\begin{cases} x + 2\psi + 3\omega = 14 \\ 2x + \psi + \omega = 7 \\ 3x + 2\psi + 2\omega = 13 \end{cases} \quad (1)$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν. Οὕτω μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφομεν π.χ. τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} 2 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 2x+\psi+\omega=7 \\ \hline & 3\psi+5\omega=21 \end{array}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἔστω τὴν δευτέραν, μὲ τὴν οὕτως εὐρεθεῖσαν $3\psi+5\omega=21$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τὸ

$$\begin{cases} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 3x+2\psi+2\omega=13 \end{cases} \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τώρα τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (2) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 3 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 3x+2\psi+2\omega=13 \\ \hline & 4\psi+7\omega=29 \end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) μὲ τὴν προκύψασαν $4\psi+7\omega=29$. Ἄς ἀντικαταστήσωμεν τὴν τρίτην καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (3) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1)

$$\begin{cases} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 4\psi+7\omega=29 \end{cases} \quad (3)$$

Μεταξὺ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3) ἀπαλείφομεν τὸν ψ καὶ εὐρίσκομεν $\omega=3$. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο τελευταίων τοῦ (3), ἔστω τὴν τρίτην, μὲ τὴν $\omega=3$ καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (4)

$$\begin{aligned} x+2\psi+3\omega &= 14 \\ 3\psi+5\omega &= 21 \\ \omega &= 3 \end{aligned} \quad (4)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ προηγούμενα. Ἀντικαθιστῶμεν

τὸ ω μὲ τὴν τιμὴν τοῦ εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi=2$. Τέλος, ἐὰν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ψ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (1) ἢ τοῦ (4), εὐρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι $x=1$, $\psi=2$ καὶ $\omega=3$.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) λύομεν καὶ δι' ἀπαλοιφῆς μὲ ἀντικατάστασιν ὡς ἐξῆς: Λύομεν τὴν μίαν τοῦ (1), ἔστω τὴν πρώτην, ὡς πρὸς τὸν ἓνα τῶν ἀγνώστων π.χ. ὡς πρὸς x θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς. Οὕτως εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=14-2\psi-3\omega \quad (2')$$

Αὕτῃ μὲ τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ (1) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Τὴν τιμὴν ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις τοῦ (1) καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις

$$\text{μὲ δύο ἀγνώστους} \quad \begin{cases} 2(14-2\psi-3\omega) + \psi + \omega = 7 \\ 3(14-2\psi-3\omega) + 2\psi + 2\omega = 13 \end{cases}$$

$$\text{καὶ μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν} \quad \begin{cases} 3\psi + 5\omega = 21 \\ 4\psi + 7\omega = 29 \end{cases}$$

Αὗται μὲ τὴν (2') ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω , ἥτοι $\psi=2$ καὶ $\omega=3$. Ἀκόλουθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2') καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$.

Τὸ δοθέν σύστημα (1) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως καὶ δι' ἀπαλοιφῆς ἀγνώστων μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τῆς συγκρίσεως.

Ἀ σ κ η σ ι ς

281. Λύσατε τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) διὰ τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.

$$\S 133. \text{ Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα } \begin{cases} 4x-5\omega+2\phi = 0 \\ 3x+2\omega+7\phi = 28 \quad (1) \\ x-\omega+2\phi = 5 \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ κ_1 , τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ κ_2 καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη,

μέ τα μέλη ἀντιστοιχῶς τῆς τρίτης ἐξισώσεως, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$$(4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1)x - (5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1)\omega + (2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2)\phi = 28\kappa_2 + 5. \quad (2)$$

Αὐτὴ με τὰς δύο πρώτας, π.χ. τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον αὐτοῦ. Ἄν θέσωμεν ἴσον με 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τῶν ω καὶ ϕ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2)

$$\begin{cases} 5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1 = 0 \\ 2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

καὶ λύοντες τὸ σύστημα αὐτὸ ὡς πρὸς κ_1 καὶ κ_2 , εὐρίσκομεν

$$\kappa_1 = -\frac{11}{93}, \quad \kappa_2 = -\frac{8}{39}.$$

Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν $\left(-\frac{44}{39} - \frac{24}{39} + 1\right)x = -\frac{224}{39} + 5$ καὶ $x=1$.

Ἄν θέσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ ϕ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2) ἴσον με 0 ἕκαστον, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{cases} 4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1 = 0 \\ 2\kappa_1 + 7\kappa_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (4) εὐρίσκομεν

$$\kappa_1 = -\frac{1}{22}, \quad \kappa_2 = -\frac{3}{11}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν (2), εὐρίσκομεν

$$\left(-\frac{5}{22} + \frac{6}{11} + 1\right)\omega = \frac{84}{11} - 5 \quad \text{καὶ} \quad \omega = 2.$$

Ὅμοιως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ϕ καὶ εὐρίσκομεν, ἂν θέσωμεν ἴσον με 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τοῦ x καὶ ω

$$\begin{cases} 4\kappa_1 + 3\kappa_2 + 1 = 0 \\ 5\kappa_1 - 2\kappa_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ τούτου εὐρίσκομεν $\kappa_1 = -\frac{5}{23}, \kappa_2 = -\frac{1}{23}$ καὶ τέλος $\phi = 3$.

Ἡ μέθοδος αὕτη, ἡ ὁποία εἶναι γενικωτέρα τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς ἀγνώστου διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὴν λύσιν συστήματος καὶ με περισσοτέρους τῶν τριῶν ἀγνώστους, καλεῖται δὲ μέθοδος τοῦ Βézout.

§ 134. Ἐν τέλει διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ μ ἀγνώστους, ἀπαλείβομεν μεταξύ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν καὶ ἐκάστης τῶν μ-1 ἄλλων ἐξισώσεων ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀγνώστον. Οὕτω προκύπτουν μ-1 νέαι ἐξισώσεις μὲ μ-1 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὁμοίως λαμβάνοντες τὰς νέας μ-1 ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἐξῆς. Οὕτω προκύπτουν μ-2 ἐξισώσεις μὲ μ-2 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτω προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τελευταία θὰ ἔχῃ ἓνα ἀγνώστον, ἡ προτελευταία δύο, ἡ πρὸ αὐτῆς τρεῖς καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς, ἡ δὲ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύοντες τὴν τελευταίαν εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἐνὸς ἀγνώστου. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν ἄλλον ἀγνώστον, προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς μέχρι τῆς πρώτης, ὅτε εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἀγνῶστων.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὰς πρώτη. 282. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} 2x+7\psi-11\omega=10 \\ 5x-10\psi+3\omega=-15 \\ -6x+12\psi-\omega=31 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{x+2\psi}{5x+6\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{3\psi+4\omega}{x+2\psi} = \frac{11}{4} \\ x+\psi+\omega=12 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x-2\psi+3\omega-3\phi=2 \\ \psi-2\omega+3\phi-4x=4 \\ \omega-2\phi+3x-4\psi=-4 \\ \phi-2x+3\psi-4\omega=-8 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x-\psi+\omega=7 \\ 2x=\omega \\ 8\psi=5\omega \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} 3x+6\psi-2\omega+9\phi=20 \\ 4\psi-6x+5\omega-5\phi=-5 \\ 2\omega-3x+8\psi-3\phi=-1 \\ 9\phi+10\psi+3\omega-6x=24 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} 0,5x+0,3\psi=0,15 \\ 0,4x-0,2\omega=-0,22 \\ 0,3\psi+0,4\omega=0,95 \end{cases}$$

$$\zeta') \left\{ x + \frac{\psi}{2} = \psi + \frac{\omega}{3} = \omega + \frac{x}{4} = 100 \right.$$

Ὁ μὰς δευτέρα. 283. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha') \begin{cases} ax + \psi + \omega = a^2 \\ x + a\psi + \omega = 3a \\ x + \psi + a\omega = 2 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} ax + \psi = (\alpha + \beta)(\alpha + 1) \\ \psi - \omega = \gamma \\ x + (\alpha + \beta)\omega = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \alpha x + \beta \psi + \gamma \omega = 3\alpha\beta\gamma \\ \frac{x}{\alpha-1} = \frac{\psi}{\beta-1} = \frac{\omega}{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \alpha x = \beta \psi = \gamma \omega \\ x + \psi + \omega = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} x + \alpha(\psi + \omega) = \kappa \\ \psi + \beta(\omega + x) = \lambda \\ \omega + \gamma(x + \psi) = \mu \end{cases}$$

$$\sigma\tau') \begin{cases} x + \kappa\psi + \lambda\omega = \alpha \\ \psi + \kappa\omega + \lambda x = \beta \\ \omega + \kappa x + \lambda\psi = \gamma \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x + \psi + \omega = 0 \\ (\beta + \gamma)x + (\gamma + \alpha)\psi + (\alpha + \beta)\omega = 0 \\ \beta\gamma x + \alpha\gamma\psi + \alpha\beta\omega = 1 \end{cases}$$

$$\eta') \begin{cases} x + \psi + \omega = 1 \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = \kappa \\ \alpha^2 x + \beta^2 \psi + \gamma^2 \omega = \kappa^2 \end{cases}$$

6. ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΩΝ

§ 135. Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματα τινὰ στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Τὸ εἶδος τῶν τεχνασμάτων αὐτῶν δέν εἶναι ὠρισμένον καὶ φανερόν διὰ κάθε σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν.

$$\text{Οὕτω π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος} \begin{cases} x + 6\psi + 7\omega = 30 \\ x : \psi : \omega = 6 : 8 : 3 \end{cases} \quad (1)$$

γράφομεν τὰς δευτέρας ἐξισώσεις ὡς ἐξῆς : $\frac{x}{6} = \frac{\psi}{8} = \frac{\omega}{3}$, ὅτε θὰ εἶναι $\frac{x}{6} = \frac{6\psi}{48} = \frac{7\omega}{21} = \frac{x + 6\psi + 7\omega}{75} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$. Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν $\frac{x}{6} = \frac{2}{5}$ καὶ $x = \frac{12}{5}$, $\frac{6\psi}{48} = \frac{2}{5}$, $\psi = \frac{2 \cdot 48}{5 \cdot 6} = \frac{16}{5}$, $\frac{7\omega}{21} = \frac{2}{5}$, $\omega = \frac{2 \cdot 21}{5 \cdot 7} = \frac{6}{5}$.

Τὸ αὐτὸ ἀνωτέρω σύστημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἐξῆς :

$$\text{Θέτομεν } \frac{x}{6} = \frac{\psi}{8} = \frac{\omega}{3} = \tau. \text{ Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν } x = 6\tau,$$

$\psi = 8\tau$, $\omega = 3\tau$. Τὰς τιμὰς τῶν x, ψ, ω θέτομεν εἰς τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ εὐρίσκομεν $6\tau + 6 \cdot 8\tau + 7 \cdot 3\tau = 30$ ἢ

$$75\tau = 30, \quad \tau = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}. \text{ Οὕτως ἔχομεν } x = 6\tau = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\psi = 8\tau = 8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}, \quad \omega = 3\tau = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x + \psi = 5 \\ \psi + \omega = 8 \\ \omega + \phi = 9 \\ \phi + \tau = 11 \\ \tau + x = 9 \end{cases} \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν

$$2x + 2\psi + 2\omega + 2\phi + 2\tau = 42, \quad \text{ἄρα } x + \psi + \omega + \phi + \tau = 21.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην καὶ τρίτην τῶν ἐξισώσεων τῶν (2) καὶ εὐρίσκομεν $x + \psi + \omega + \phi = 14$. Τὰ μέλη ταύτης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ τῆς προηγουμένης καὶ εὐρίσκομεν $\tau = 21 - 14$ ἢ $\tau = 7$. Θέτομεν εἰς τὴν τετάρτην $\tau = 7$ καὶ εὐρίσκομεν $\phi + 7 = 11$, ἄρα $\phi = 4$. Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν $\tau = 7$ καὶ εὐρίσκομεν $7 + x = 9$, ἄρα $x = 2$. Θέτομεν εἰς τὴν πρώτην $x = 2$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 3$. Θέτομεν εἰς τὴν δευτέραν $\psi = 3$ καὶ εὐρίσκομεν $\omega = 5$.

$$\text{Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} x + \psi + \omega = 15 \\ x + \psi + \tau = 16 \\ x + \omega + \tau = 18 \\ \psi + \omega + \tau = 30 \end{cases} \quad (3)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος καὶ εὐρίσκομεν $3(x + \psi + \omega + \tau) = 79$, ἄρα

$$x + \psi + \omega + \tau = \frac{79}{3} \quad (4)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\tau = \frac{79}{3} - 15 = \frac{79-45}{3} = \frac{34}{3}$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\omega = \frac{79}{3} - 16 = \frac{79-48}{3} = \frac{31}{3}$.

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τρίτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{79}{3} - 18 = \frac{79-54}{3} = \frac{25}{3}$.

Τέλος ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) τὰ τῆς τελευταίας τῶν δοθεισῶν καὶ εὐρίσκομεν $x = \frac{79}{3} - 30 = \frac{79-90}{3} = -\frac{11}{3}$.

Άσκησης

Όμας πρώτη. 284. Να λυθούν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{18} \\ 3x + 2\psi + \omega = 34 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{\psi}{3} = 2x\psi \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\phi}{\delta} \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega + \delta\phi = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} - \frac{\gamma}{\omega} = \lambda \\ \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \mu \\ -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \nu \end{cases} \quad \zeta') \begin{cases} \mu x = \nu \psi = \rho \omega \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = \delta \end{cases}$$

$$\eta') \begin{cases} \psi\omega + x\omega + x\psi = 12x\psi\omega \\ 3\psi\omega - 4x\omega + 5x\psi = 15x\psi\omega \\ 4\psi\omega - 3x\omega + 12x\psi = 13x\psi\omega \end{cases} \quad \theta') \begin{cases} \frac{1}{3x-2\psi+1} + \frac{1}{x+2\psi-3} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2\psi-3} - \frac{1}{3x-2\psi+1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\iota') \begin{cases} \frac{x\psi}{5x+4\psi} = 3 \\ \frac{\psi\omega}{3\psi+5\omega} = 7 \\ \frac{\omega x}{2\omega+3x} = 6 \end{cases} \quad \kappa') \begin{cases} 3x + 7\psi = 23x\psi \\ 3\omega + 8x = 38x\omega \\ 5\psi - 6\omega = 2\psi\omega \end{cases}$$

Όμας δεύτερα. 285. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} (p+\mu)x - (p-\mu)\psi = 2\nu\rho \\ (\mu+\nu)\psi - (\mu-\nu)\omega = 2\mu\rho \\ (\nu+\rho)\omega - (\nu-\rho)x = 2\mu\nu \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (\omega+x)\mu - (\omega-x)\nu = 2\psi\omega \\ (x+\psi)\nu - (x-\psi)\rho = 2x\omega \\ (\psi+\omega)\rho - (\psi-\omega)\mu = 2\psi x \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} 3\psi\omega + 2x\omega - x\psi = x\psi\omega \\ 30\psi\omega + 12x\psi - 18x\omega = 13x\psi\omega \\ 18x\psi + 24\psi\omega - 42x\omega = 5x\psi\omega \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} \frac{10}{2x+3\psi} - \frac{49}{2x-3\omega} = -4\frac{7}{8} \\ \frac{2}{2x+3\psi} - \frac{6}{5\psi-4\omega} = -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2x-3\omega} \right) - \frac{3}{5\psi-4\omega} = 0 \end{cases}$$

Ὅμας τρίτη. 286. Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$$

γραφικῶς, ἥτοι τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἅπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

287. Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ ψ ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 136. Λέγομεν ὅτι πρόβλημά τι εἶναι πρωτοβαθμίου συστήματος ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἂν ἡ λύσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτου προβλήματος σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐπιταγμάτων, λύομεν τὸ σύστημα αὐτῶν καὶ ἐξετάζομεν, ἂν ἡ λύσις πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ἵνα αὕτη εἶναι δεκτή.

Ι. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

α') Ἄν ὁ **A** δώσῃ **10000** δρχ. εἰς τὸν **B**, θὰ ἔχῃ οὗτος **τριπλάσια** τοῦ **A**. Ἐὰν ὁ **B** δώσῃ **20000** δρχ. εἰς τὸν **A**, θὰ ἔχῃ ὁ **A** **διπλάσια** τοῦ **B**. Πόσας δρχ. ἔχει ὁ καθείς;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὰς δρχ. τοῦ **A** καὶ ψ τὰς τοῦ **B**, δώσῃ δὲ **10000** δρχ. ὁ **A** εἰς τὸν **B**, τὰ μὲν ἀπομένοντα χρήματα εἰς τὸν **A** θὰ εἶναι $(x-10000)$ δραχμαί, τὰ δὲ τοῦ **B** θὰ εἶναι $(\psi+10000)$ δραχμαί καὶ θὰ ἔχωμεν $3(x-10000) = \psi+10000$.

Ἐὰν ὁ **B** δώσῃ **20 000** δρχ. εἰς τὸν **A**, θὰ εἶναι $x+20000=2(\psi-20000)$.

$$\begin{cases} 3(x-10000) = \psi+10000 \\ x+20000 = 2(\psi-20000), \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $x=28000$ δρχ., $\psi=44000$ δρ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

β') Νὰ εὐρεθῇ **διψήφιος** ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι **10**, ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία του νὰ προκύπτῃ τὸ **τριπλάσιον** τοῦ ἀριθμοῦ.

Περιορισμός. Ἄν μὲ ψ παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μὲ τὸ x τὸ τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $10\psi+x$, τὰ δὲ x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι μονοψήφιοι > 0 .

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρῶτη. 284. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{18} \\ 3x + 2\psi + \omega = 34 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{\psi}{3} = 2x\psi \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\phi}{\delta} \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega + \delta\phi = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} - \frac{\gamma}{\omega} = \lambda \\ \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \mu \\ -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\psi} + \frac{\gamma}{\omega} = \nu \end{cases} \quad \zeta') \begin{cases} \mu x = \nu \psi = \rho \omega \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = \delta \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} \psi\omega + x\omega + x\psi = 12x\psi\omega \\ 3\psi\omega - 4x\omega + 5x\psi = 15x\psi\omega \\ 4\psi\omega - 3x\omega + 12x\psi = 13x\psi\omega \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} \frac{1}{3x-2\psi+1} + \frac{1}{x+2\psi-3} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2\psi-3} - \frac{1}{3x-2\psi+1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\theta') \begin{cases} x + \alpha\psi + \alpha^2\omega + \alpha^3 = 0 \\ x + \beta\psi + \beta^2\omega + \beta^3 = 0 \\ x + \gamma\psi + \gamma^2\omega + \gamma^3 = 0 \end{cases} \quad \iota') \begin{cases} \frac{x\psi}{5x+4\psi} = 3 \\ \frac{\psi\omega}{3\psi+5\omega} = 7 \\ \frac{\omega x}{2\omega+3x} = 6 \end{cases} \quad \kappa') \begin{cases} 3x + 7\psi = 23x\psi \\ 3\omega + 8x = 38x\omega \\ 5\psi - 6\omega = 2\psi\omega \end{cases}$$

Ὁ μᾶς δευτέρα. 285. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} (p+\mu)x - (p-\mu)\psi = 2\nu\rho \\ (\mu+\nu)\psi - (\mu-\nu)\omega = 2\mu\rho \\ (\nu+\rho)\omega - (\nu-\rho)x = 2\mu\nu \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (\omega+x)\mu - (\omega-x)\nu = 2\psi\omega \\ (x+\psi)\nu - (x-\psi)\rho = 2x\omega \\ (\psi+\omega)\rho - (\psi-\omega)\mu = 2\psi x \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} 3\psi\omega + 2x\omega - x\psi = x\psi\omega \\ 30\psi\omega + 12x\psi - 18x\omega = 13x\psi\omega \\ 18x\psi + 24\psi\omega - 42x\omega = 5x\psi\omega \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} \frac{10}{2x+3\psi} - \frac{49}{2x-3\omega} = -4\frac{7}{8} \\ \frac{2}{2x+3\psi} - \frac{6}{5\psi-4\omega} = -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2x-3\omega} \right) - \frac{3}{5\psi-4\omega} = 0 \end{cases}$$

Ὁ μὰς τρίτη. 286. Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$$

γραφικῶς, ἥτοι τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἅπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

287. Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ ψ ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 136. Λέγομεν ὅτι πρόβλημά τι εἶναι πρωτοβαθμίου συστήματος ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἂν ἡ λύσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτου προβλήματος σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐπιταγμάτων, λύομεν τὸ σύστημα αὐτῶν καὶ ἐξετάζομεν, ἂν ἡ λύσις πληροῖ τοὺς περιορισμούς τοῦ προβλήματος, ἵνα αὕτη εἶναι δεκτὴ.

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

α') Ἄν ὁ **A** δώσῃ 10000 δρχ. εἰς τὸν **B**, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλάσια τοῦ **A**. Ἐάν ὁ **B** δώσῃ 20000 δρχ. εἰς τὸν **A**, θὰ ἔχῃ ὁ **A** διπλάσια τοῦ **B**. Πόσας δρχ. ἔχει ὁ καθείς;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐάν μὲ x παραστήσωμεν τὰς δραχ. τοῦ **A** καὶ ψ τὰς τοῦ **B**, δώσῃ δὲ 10000 δρχ. ὁ **A** εἰς τὸν **B**, τὰ μὲν ἀπομένοντα χρήματα εἰς τὸν **A** θὰ εἶναι $(x-10000)$ δραχμαί, τὰ δὲ τοῦ **B** θὰ εἶναι $(\psi+10000)$ δραχμαί καὶ θὰ ἔχωμεν $3(x-10000) = \psi+10000$.

Ἐάν ὁ **B** δώσῃ 20 000 δρχ. εἰς τὸν **A**, θὰ εἶναι $x+20000=2(\psi-20000)$.

$$\text{Ὡστε ἔχομεν τὸ σύστημα} \quad \begin{cases} 3(x-10000) = \psi+10000 \\ x+20000 = 2(\psi-20000), \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $x=28000$ δρχ., $\psi=44000$ δρ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

β') Νὰ εὐρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 10, ἐάν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία του νὰ προκύπτῃ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ.

Περιορισμός. Ἄν μὲ ψ παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μὲ τὸ x τὸ τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $10\psi+x$, τὰ δὲ x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι μονοψήφιοι > 0 .

Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + \psi = 10 \\ 10\psi + x = 3(10x + \psi). \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $\psi = 8 \frac{1}{18}$, $x = 1 \frac{17}{18}$. Ἐπομένως ἡ λύσις ἀπορρίπτεται, ἦτοι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

γ') Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ θὰ ἀπέχουν τὸ ἐν τοῦ ἄλλου 12 μέτρα μὲν ἔαν κινηθοῦν ἐπὶ 12^{ος} πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, 204 μέτρα δὲ ἔαν πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καθενὸς (κινουμένων ὁμαλῶς) ;

Ἐστω x μέτρα ἡ ταχύτης τοῦ α' καὶ ψ ἡ τοῦ β' κατὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ 12^{ος} τὸ α' θὰ διατρέξῃ $12x$ μ. καὶ τὸ β' 12ψ μ. ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶναι $(12x - 12\psi)$ μ. ἔαν ἔχουν τὴν αὐτὴν καὶ $(12x + 12\psi)$ μ. ἔαν τὴν ἀντίθετον. Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 12x - 12\psi = 12 \\ 12x + 12\psi = 204 \end{cases} \quad \text{ἢ τὸ ἰσοδύναμον} \quad \begin{cases} x - \psi = 1 \\ x + \psi = 17 \end{cases}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὐρίσκομεν $x = 9$ μ., $\psi = 8$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτὴ.

δ') Ἐχει τις οἶνον δύο ποιότητων· τῆς μὲν α' ἡ $\delta\kappa\alpha$ τιμᾶται α δρχ. τῆς δὲ β' , β δρχ. Πόσας $\delta\kappa\alpha$ δας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἐκάστης ποιότητος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ $\delta\kappa\alpha$ δων τιμώμενον γ δρχ. κατ' $\delta\kappa\alpha$ ν (χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν) ;

Ἐστω ὅτι θὰ λάβῃ x $\delta\kappa\alpha$ δας ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ ψ ἐκ τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα
$$\begin{cases} x + \psi = \mu \\ \alpha x + \beta \psi = \gamma \mu \end{cases}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὐρίσκομεν $x = \frac{(\beta - \gamma)\mu}{\beta - \alpha}$, $\psi = \frac{(\gamma - \alpha)\mu}{\beta - \alpha}$.

Διερεύνησις. Ἴνα ὑπάρχῃ μία μόνη λύσις, πρέπει $\beta - \alpha \neq 0$ ἢ $\beta \neq \alpha$. Καὶ ἂν εἶναι $\beta > \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha < \gamma < \beta$, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ νὰ εἶναι θετικάι. Ἄν εἶναι $\beta < \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\beta < \gamma < \alpha$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄν εἶναι $\beta = \alpha$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ἄλλως τε τότε δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος περὶ μίγματος.

Ἐν γένει διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶναι $\beta > \gamma > \alpha$ ἢ $\beta < \gamma < \alpha$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

288. Παιδίον λέγει εις άλλο: «Εάν μου δώσης τὸ ἡμισυ τῶν μήλων σου, θὰ ἔχω 40 μήλα». Τοῦ ἄλλο ἀπαντᾷ: «Δὸς μου σὺ τὸ ἡμισυ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω 35». Πόσα μήλα ἔχει καθέν;

289. Νὰ εὑρεθῶν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α' εἶναι τριπλάσιος τοῦ β' καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ α' μείον τὸ τριπλάσιον τοῦ β' νὰ ἰσοῦται μὲ 42.

290. Νὰ εὑρεθῶν δύο ἀριθμοί τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μείον τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου νὰ ἰσοῦται μὲ 5 καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μείον 25 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαπενταπλάσιον τοῦ δευτέρου.

291. Ὁ Ἰέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κατασκευάσουν στέφανον ἀπὸ χρυσὸν βάρους 7 465 γραμ. Ἦνα εὐρη ὁ Ἀρχιμήδης, ἐρωτηθεὶς μήπως ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε χρυσὸν δι' ἀργύρου, ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς ὕδωρ καὶ ἔχασεν οὗτος 467 γραμ. τοῦ βάρους του. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 καὶ ὁ ἀργυρὸς 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἀργυρὸς;

292. Δίδει ὁ Α εἰς τὸν Β μ δραχ. καὶ ἔχει ὁ Β διπλάσια τοῦ Α. Δίδει ὁ Β εἰς τὸν Α μ δραχ. καὶ ἔχει ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;

293. Δύο κινητὰ ἀπέχοντα α μέτρα μεταξύ των κινεῦνται ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ἀναχωρήσαντα συγχρόνως. Ὄταν μετὰ τ δευτερόλεπτα συνητηθήσαν τὸ ἓν εἶχεν διατρέξει β μέτρα περισσότερα τοῦ ἄλλου. Ποίᾳ ταχύτητος εἶχον;

294. Ἐκ δύο τόπων ἀπέχόντων α μέτρα ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ κινούμενα ὁμαλῶς. Ἄν μὲν κινεῦνται ἀντιθέτως, συναντῶνται μετὰ λ₁ ὥρας, ἂν δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν, συναντῶνται μετὰ λ₂ ὥρας. Ποίᾳ ταχύτητος εἶχον;

295. α ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐπλήρωσαν ἐν ὁλῳ β δραχ. Ἐκ τῶν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε γ δραχ. καὶ ἐκ τῶν γυναικῶν ἕκαστη δ δραχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; Μερικὴ περίπτωσις α=6, β=260, γ=50, δ=30.

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 137. α') Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 21 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων του, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, μὲ ψ τῶν δεκάδων καὶ μὲ ω τὸ τῶν μονάδων (ἐνῷ τὰ x, ψ, ω πρέπει νὰ εἶναι ἀκέρατοι θετικοὶ μονοψήφιοι), ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ $100x + 10\psi + \omega$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x + \psi + \omega = 21 \\ x + \omega = 2\psi \\ 100x + 10\psi + \omega - 90 = 100\psi + 10x + \omega, \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $x=8$, $\psi=7$, $\omega=6$. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 876.

β') Ὁ Α καὶ ὁ Β μαζὶ ἐργαζόμενοι τελειώνουν ἐν ἔργον εἰς 5 ἡμέρας, ὁ Α καὶ ὁ Γ εἰς 6 ἡμέρας, ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς 5,5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α, Β, Γ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον ;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Λύσις. Ἐστώσαν x, ψ, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{\psi}$ καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἄρα οἱ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi}$ τοῦ ἔργου καὶ αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ. Διότι ἀφοῦ εἰς 5 ἡμέρας ἐκτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὡστε ἔχομεν $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{5}$.

Ὅμοιως ἐργαζόμενοι εὐρίσκομεν τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{5,5} \end{cases} \quad (1)$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες τὰ ἐξαγόμενα διὰ 2 εὐρίσκομεν $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{181}{660}$.

Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν πρώτην τῶν (1) εὐρίσκομεν $\frac{1}{\omega} = \frac{49}{660}$. Ἄρα $\omega = \frac{660}{49} = 13 \frac{23}{49}$.

Ὅμοιως εὐρίσκομεν $\psi = 9 \frac{21}{71}$ καὶ $x = 10 \frac{50}{61}$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α.

Ὁ μ α ς π ρ ω τ η. 296. Τρεῖς ἄνθρωποι εἶχον ποσὸν τι χρημάτων ἕκαστος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειράν νὰ διπλασιάσῃ καθεὶς τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὐρέθη ἕκαστος μὲ 1600 δρχ. Τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς ;

297. Τρεις άνθρωποι ήγόρασαν κτήμα αντί 64 000 δρχ. 'Ο πρώτος θὰ ἡ-
δύνατο νὰ πληρώσῃ ὁλόκληρον τὸ ποσόν, ἂν ὁ δεύτερος τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{5}{8}$
τῶν ὧσων εἶχεν. 'Ο δεύτερος θὰ ἡδύνατο νὰ πληρώσῃ τὸ ποσόν, ἂν ὁ τρίτος
τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{8}{9}$ τῶν ἰδικῶν του. 'Ο τρίτος διὰ νὰ πληρώσῃ, τοῦ ἔλλειπε τὸ
ἡμισυ τῶν ὧσων εἶχεν ὁ πρῶτος καὶ τὰ $\frac{3}{16}$ τῶν ὧσων εἶχεν ὁ δεύτερος. Πόσα
εἶχεν ἕκαστος ;

298. Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν αὐγά. 'Εὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ $\frac{1}{7}$ καὶ ἡ τρίτη τὸ
 $\frac{1}{13}$ τῶν ἰδικῶν της εἰς τὴν δευτέραν, θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐ-
γῶν. 'Εὰν καὶ αἱ τρεῖς ἐξ ἀρχῆς εἶχον 360 αὐγά, πόσα εἶχεν ἕκαστη ;

299. Νὰ εὐρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων
εἶναι 17, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων,
καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 396 εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα
δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;

300. Νὰ εὐρεθῶν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἡμίθροισμα
τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι 120, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τὸ δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς
τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ πρώτου νὰ ἰσοῦται μὲ 62, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦ-
ται μὲ 190.

'Ο μὰς δευτέρα. (Διάφορα). 301. 'Εχει τις κεφάλαιον 54 000 δρχ. καὶ
65 000 δρχ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 3 840 δρχ. καὶ ἐκ τῶν δύο. 'Εὰν τὸ πρῶ-
τον ἔτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως, θὰ ἐλάμβανε
55 δρχ. περισσοτέρας ὥς τόκον ἢ πρίν. Ποῖα τὰ ἐπιτόκια ;

302. Ποσὸν 8100 δρχ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τῶν
μὲν α' καὶ β' νὰ εἶναι 2 : 3, τῶν δὲ β' καὶ γ' 3 : 4. Ποῖα τὰ μερίδια ;

303. 'Αγοράζει τις δύο εἶδη ὑφασμάτων, ἐκ τοῦ μὲν πρώτου 5 μ. ἐκ δὲ τοῦ
δευτέρου 6 μ. ἀντὶ 1220 δρχ. 'Επειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνῆλλαξε τὰ δύο εἶδη, ἐξημιώ-
θη ὁ ἀγοραστής 20 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἶδους ;

304. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὁμορρόπως μὲν ἔχουν
συνισταμένην 16 kg. ἀντιρρόπως δὲ 2kg. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις καθεμιᾶς τούτων ;

305. 'Ο Α λέγει εἰς τὸν Β : δός μου 10 ἐκ τῶν μῆλων σου καὶ θὰ ἔχω 1,5 τῶν
ἰδικῶν σου. 'Ο Β ἀπαντᾷ : δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια
τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα εἶχεν ὁ καθεὶς ;

'Ο μὰς τρίτη (Κινήσεως). 306. 'Εκ δύο σημείων ἀπεχόντων 1500 μ.
ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. 'Όταν συν-
ηγήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι
ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ;

307. 'Απὸ δύο τόπων ἀπεχόντων 8 μ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶν-
ται μετὰ t_1 δ. 'Εὰν μὲν ἠϋζάνετο ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ λ%, ἡ δὲ τοῦ δευ-
τέρου ἡλαττώνετο κατὰ λ₁%, θὰ συνηντῶντο μετὰ t_2 δ. Ποῖαι εἶναι αἱ ταχύτη-
τες αὐτῶν ; Νὰ γίνῃ διερεύνησις.

308. Ἀπὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου 45° κινούνται ἐπ' αὐτοῦ δύο κινητὰ ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 3δ. Ἐὰν κινούνται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν συναντῶνται μετὰ 5δ. Πόσων μοιρῶν τόξον διανύει κάθε κινητὸν εἰς 1δ ;

Ἄς τ ε τ ἄ ρ τ η. 309. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι δύο τρίτα τοῦ τῶν μονάδων. Ἄν γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερός του.

310. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 9. Ἄν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ τριάκοντα ἐξ τεσσαρακοστὰ ἑβδομα τοῦ ἀριθμοῦ.

311. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἡμισι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἄν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

312. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεῦτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὐρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου IV.

Ὁρισμὸς συστήματος ἐξισώσεων (σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων).

Ὁρισμὸς τῆς λύσεως συστήματος ἐξισώσεων.

Ὁρισμὸς ἰσοδυνάμων συστημάτων (ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις οἰκουμένητε ἐξ αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ τῶν ἄλλων συστημάτων.).

Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.

1ον Τὰ συστήματα π.χ. $A = B, A_1 = B_1, A_2 = B_2$

εἶναι ἰσοδύναμα. $A = B, A_1 = B_1, A_1 + A_2 = B_1 + B_2$

2ον Τὰ συστήματα π.χ.

$A(x, \psi, \omega) = B(x, \psi, \omega), x = \phi(\psi, \omega), \Gamma(x, \psi, \omega) = \Delta(x, \psi, \omega)$

$A[\phi(\psi, \omega), \psi, \omega] = B[\phi(\psi, \omega), \psi, \omega], x = \phi(\psi, \omega),$

$\Gamma[\phi(\psi, \omega), \psi, \omega] = \Delta[\phi(\psi, \omega), \psi, \omega]$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁρισμὸς βαθμοῦ συστήματος ἐξισώσεων (ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του).

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους α' βα-

θμοῦ (μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀγνώστου, δι' ἀντικαταστάσεως, διὰ συγκρίσεως).

$$\text{Διερεύνησις τοῦ συστήματος} \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἄν } \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0 \text{ μία λύσις} \quad x &= \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \\ \psi &= \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \end{aligned}$$

Ἄν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Τί ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν « ἀπαλείφομεν ἓνα ἄγνωστον π.χ. μεταξὺ δύο ἐξισώσεων ».

Ὅρισμός τῆς παραμέτρου μιᾶς ἐξισώσεως, χρησιμοποίησις αὐτῆς διὰ τὴν διερεύνησιν ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐξισώσεων.

Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (κατασκευὴ τῶν παριστανομένων εὐθειῶν καὶ τομὴ αὐτῶν.)

Λύσις συστήματος μὲ τὴν μέθοδον τοῦ **Bézout**.

Λύσις συστήματος μ ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ μ ἀγνώστους. Λύσις συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ τεχνάσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Α'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 138. Καλοῦμεν δευτέραν, τρίτην, ..., νιοστήν (ἢ νιοστής τάξεως) ρίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑφύμενος εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, ..., νιοστήν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα.

Τὴν δευτέραν*, τρίτην, ..., νιοστήν ρίζαν ἑνὸς ἀπολύτου ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ α συμβολίζομεν μὲ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, ..., $\sqrt[n]{\alpha}$ καὶ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, (\sqrt[3]{\alpha})^3 = \alpha, \dots, (\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha.$$

Τὸ σύμβολον $\sqrt[n]{\alpha}$ λέγεται **ριζικόν**, ἢ ὑπ' αὐτὸ ποσότης **ὑπόρριξος ποσότης**, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ρίζης τῆς ὑπόρριζου ποσότητος, λέγεται **δείκτης τῆς ρίζης**. Οὕτως εἰς

τὴν παράστασιν $\sqrt[n]{\alpha}$ ὑπόρριξος ποσότης εἶναι τὸ α καὶ δείκτης ὁ ν. Εἰς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐννοεῖται δείκτης ὁ 2.

Ρίζα τις λέγεται **ἄρτίας** ἢ **περιττῆς τάξεως**, ἂν ὁ δείκτης αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός. Οὕτως αἱ ρίζαι $\sqrt[5]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$ εἶναι τάξεως περιττῆς, αἱ δὲ $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[8]{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$ εἶναι τάξεως ἄρτίας.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

§ 139. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἐξῆς βοηθητικὴν πρότασιν.

Ἐάν αἱ μιοσταὶ δυνάμεις δύο ὁμοσήμεων ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

* Ὁ Rafaello Rombelli τὸ 1572 εἰς τὸ βιβλίον του «Algebra» ἔκαμε χρῆσιν τῶν $\sqrt{-\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha}$.

Διότι, ἂν π.χ. εἶναι $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$, ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ α, β ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\mu} : \beta^{\mu} = 1$, ἢ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = 1, \text{ ἄρα } \frac{\alpha}{\beta} = 1, \text{ ἀφοῦ } \frac{\alpha}{\beta} \text{ εἶναι θετικὸς, καὶ συνεπῶς } \alpha = \beta.$$

§ 140. α') Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ρίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους, μίαν δὲ περιττῆς τάξεως (θετικὴν).

Διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑφούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν, ἐνῶ ἀφ' ἑτέρου μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑφούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμὸν.

Ἐκ τῶν δύο ριζῶν μιᾶς ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ θετικὴ συμβολίζεται κατὰ συνθήκην μὲ τὸ οἰκτεῖον ριζικὸν ἄνευ προσήμου, ἡ δὲ ἀρνητικὴ μὲ τὸ αὐτὸ ριζικὸν ἔχον ἀριστερὰ τὸ πρόσημον —. Οὕτω, ἂν α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, τὸ σύμβολον $\sqrt[\mu]{\alpha}$ σημαίνει: ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α . Ἡ ἀρνητικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α συμβολίζεται μὲ τὸ $-\sqrt[\mu]{\alpha}$.

β') Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μόνον μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, ἀρνητικὴν, οὐδεμίαν δὲ ἀρτίας τάξεως.

Διότι μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑφούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν. ἐνῶ οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) ὑφούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίαν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν.

³
"Εστω π.χ. ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὕτῃ εἶναι -2 , διότι εἶναι $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἶναι $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι εἶναι $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Ἐπομένως ἔχομεν $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ ἐδημιουργήθη κατὰ τὰ μέσα τῆς 5ης ἑκατονταετηρίδος π.Χ. κυρίως ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον καλεῖται «Δήλιον πρόβλημα», δηλαδή τῆς εὐρέσεως τοῦ x , ὥστε νὰ εἶναι $x^3 = 2\alpha^3$ ἢ $x = \alpha \sqrt[3]{2}$ καὶ τοῦ προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως μιᾶς οἰασδήποτε γωνίας. Τὰ προβλήματα αὐτὰ καθὼς καὶ τὸ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀπησχόλησαν ὄχι μόνον τοὺς μαθηματικούς τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς, ἀλλὰ καὶ τοὺς τότε μορφωμένους κύκλους, ἐπὶ πλέον δὲ καὶ διασήμους μαθηματικούς ὧλων τῶν προηγμένων, χωρῶν. Ἀπεδείχθη ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λυθοῦν μὲ μαθηματικὴν ἀκρίβειαν καὶ μάλιστα μόνον μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κυρίως γεωμετρικῶν ὀργάνων, τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι:

Ἡ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως ἰση μὲ τὴν ρίζαν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἀντιστοίχου ἀπολύτου ἀριθμοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

313. Δείξατε ὅτι πᾶσα ρίζα τῆς 1 εἶναι $+1$ ἢ -1 . Διὰ τί; Πᾶσα ρίζα τοῦ 0 εἶναι 0. Διὰ τί;

314. Εὑρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{\pm 125}$, $\sqrt[3]{+64}$.

315. Εὑρετε τὰ $3-\sqrt[3]{4}$, $\alpha+\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha+\sqrt[3]{\beta^3}$.

316. Ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{\alpha^2} = \alpha$ πότε εἶναι ἀκριβής; Διὰ τί;

317. Ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{(\alpha^2)^3} = \alpha^2$ εἶναι ἀκριβής καὶ διὰ τί;

318. α') Εὑρετε τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[5]{-27} - \sqrt[5]{-32}$.

Ὁμοίως τὰ: β') $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{16}$, γ') $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{-32}$, δ') $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$
 ε') $\sqrt[3]{x^4\psi^4}$, στ') $\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{-8}$, ζ') $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$, η') $(3+\sqrt[3]{2})(3-\sqrt[3]{2})$, θ') $\sqrt[3]{\alpha^6}$.

§ 141. Ἵνα ρίζα ἀπολύτου ἀριθμοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Λέγομεν δηληδὴ ὅτι εἶναι $(\sqrt[p]{\alpha})^p = \sqrt[p]{\alpha^p}$. (1) Διότι ἂν τὰς παραστάσεις αὐτὰς ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν, εὐρίσκομεν ἐξαγόμενα ἴσα, ὅρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ (ὡς ὁμόσημοι) εἶναι ἴσοι. Πράγματι εἶναι

$$\left[(\sqrt[p]{\alpha})^p \right]^\mu = (\sqrt[p]{\alpha})^{p\mu} = \left[(\sqrt[p]{\alpha})^\mu \right]^p = \alpha^p \text{ καὶ } (\sqrt[p]{\alpha^p})^\mu = \alpha^p.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ιδιότης δὲν ἀληθεύει ἂν πρόκειται διὰ τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ. Διότι τότε, ἂν ὑψωθῇ ἡ ρίζα αὕτη εἰς ἀρτίαν δύναμιν γίνεται θετικὸς ἀριθμός, ἐνῶ ἂν ὑψωθῇ μόνον τὸ ὑπόρριζον εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, μένει ἀριστερὰ τοῦ ριζικοῦ τὸ πρόσημον — καὶ ἔχομεν ἀρνητικὸν ἀποτέλεσμα.

Κατωτέρω τὴν ὑπόρριζον ποσότητα θὰ ὑποθέτωμεν θετικὴν, ἐκ τῶν δύο δὲ ριζῶν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ θὰ θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικὴν.

§ 142. Ἄν εἰς τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείψωμεν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[3 \cdot 2]{\alpha^{5 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\alpha^5}$ ἂν $\alpha > 0$. Διότι ὑποϋντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἰς τὴν $3 \cdot 2$ δύναμιν εὐρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα, ἄρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὡς ὁμόσημοι εἶναι ἴσοι. Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[3 \cdot 2]{\alpha^{5 \cdot 2}})^{3 \cdot 2} = \alpha^{5 \cdot 2}$ καὶ $(\sqrt[3]{\alpha^5})^{3 \cdot 2} = (\alpha^5)^2 = \alpha^{5 \cdot 2}$. Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha^{\rho \mu}} = (\sqrt[\mu]{\alpha^{\rho}})^{\mu} = \alpha^{\rho}$. Καὶ ἀντιστρόφως:

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ιδιότητος αὐτῆς γίνεται, ὅπως καὶ τῆς προηγούμενης.

§ 143. Ἄν εἰς τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπάρχῃ παράγων θετικὸς μὲ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης, δύναται νὰ ἐξαχθῇ οὗτος ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\mu]{\beta}$ ἂν $\alpha > 0$. Διότι ἔχομεν $(\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu} \cdot \beta})^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta$ καὶ $(\alpha \sqrt[\mu]{\beta})^{\mu} = \alpha^{\mu} (\sqrt[\mu]{\beta})^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta$. Καὶ ἀντιστρόφως:

Παράγων τις θετικὸς ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν τὴν ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

Π.χ. εἶναι $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$, $\alpha \cdot \sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\mu} \cdot \beta}$ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ὡς ἄνωτέρω.

Ἀ σ κ η σ ι ς

319. Ἀπλοποιήσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις:

$$\alpha') \sqrt{\alpha^5}, \sqrt[3]{\alpha^6}, \sqrt[5]{\alpha^{25}}, \sqrt[7]{\alpha^{28}}, \sqrt{5^4}, \sqrt[3]{4^6}.$$

$$\beta') \sqrt[5]{9^{10}}, \sqrt[11]{8^{22}}, \sqrt[7]{\alpha^{4v}}, \sqrt[2v+1]{\alpha^{4v+2}}.$$

$$\gamma') \sqrt[3]{64^2}, \sqrt[9]{125^4}, \sqrt[5]{\pm 32^3}.$$

ραστάσεις ύψωθουν εἰς τὴν μ δύναμιν, δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα.

Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[\mu]{\alpha} \cdot \sqrt[\mu]{\beta} \cdot \sqrt[\mu]{\gamma})^\mu = (\sqrt[\mu]{\alpha})^\mu \cdot (\sqrt[\mu]{\beta})^\mu \cdot (\sqrt[\mu]{\gamma})^\mu = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.

καὶ $(\sqrt[\mu]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma})^\mu = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$. Ὀμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha} : \sqrt[\mu]{\beta} = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}} = \sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}}$,

ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}, \quad \sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{32:2} = \sqrt{16} = 4.$$

§ 147. α') Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζικῶν ἔχόντων διαφόρους δείκτας καὶ θετικὰ ἢ ἀπόλυτα ὑπόρριζα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἴσα των, ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἀκολουθῶς ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα. Οὕτω θὰ ἔχωμεν π.χ.

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2^4} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2^4}, \quad \sqrt[3]{20^2} : \sqrt{5} = \sqrt[6]{20^4} : \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{20^4 : 5^3}.$$

Ἡ ἐξαγωγή τῆς ρίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγήν τῆς ρίζης ἀκεραίας παραστάσεως ἐν γένει, ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμὸν, ὥστε ὁ παρονομαστής νὰ ἔχη ὑπόρριζον ποσότητα δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν δείκτην τῆς ρίζης. Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\sqrt[4]{\frac{5}{8}} = \sqrt[4]{\frac{5}{2^3}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 2}{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{10}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}$$

Γενικῶς, ἂν ὁ παρονομαστής κλασματικῆς παραστάσεως ἔχη ριζικόν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κατάλληλον παράστασιν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς ἄλλην μὲ παρονομαστὴν ἄνευ ριζικοῦ. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὴν παράστασιν

$\frac{\gamma}{\alpha + \sqrt{\beta}}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὴν **συζυγῇ παράστασιν** τῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$, ἥτοι ἐπὶ τὴν $\alpha - \sqrt{\beta}$, (ἐνῶ ὑποτίθεται $\alpha - \sqrt{\beta} \neq 0$), εὐρίσκομεν

$$\frac{\gamma}{\alpha + \sqrt{\beta}} = \frac{\gamma(\alpha - \sqrt{\beta})}{(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta})} = \frac{\gamma(\alpha - \sqrt{\beta})}{\alpha^2 - \beta}$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

320. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\alpha') \sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{6}, \quad \beta') \sqrt{45\alpha^3} + \sqrt{124\alpha^3} - \sqrt{320\alpha^3},$$

$$\gamma') \sqrt{\frac{114 \cdot 5}{7^2}} + \sqrt{\frac{12^2 \cdot 5^3}{7^3 \cdot 13^4}} \cdot 13^2 - \sqrt{\frac{11^2 \cdot 13^2}{7 \cdot 5^2}}.$$

321. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

$$\alpha') x\sqrt{x-1}, \quad \beta') 3\sqrt{5}, \quad \gamma') \alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \delta') 2\sqrt{\frac{6}{2}}, \quad \epsilon') 7\sqrt{\frac{1}{49}}.$$

322. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδύναμους αὐτῶν ἐχούσας ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην :

$$\alpha') \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[4]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[12]{\alpha}, \quad \beta') \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[12]{\alpha}, \quad \gamma') \sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[6]{\beta}, \sqrt[12]{\gamma}.$$

323. Νὰ γίνῃ ἀπλοποιήσις τῶν ριζῶν.

$$\alpha') \sqrt[4]{64}, \quad \beta') \sqrt[6]{48}, \quad \gamma') \sqrt[3]{64}, \quad \delta') \sqrt[2\mu]{\alpha^\mu}.$$

324. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$\alpha') \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}, \quad \beta') \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}, \quad \gamma') \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{30}, \quad \delta') \sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha},$$

$$\epsilon') \sqrt{x\psi} : \sqrt{\frac{\psi}{x}}, \quad \sigma\tau') \sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{3\beta}, \quad \zeta') \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}.$$

325. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :

$$\alpha') \sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{2}, \quad \beta') \sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875}, \quad \gamma') \sqrt[3]{x^4} : \sqrt[3]{x}, \quad \delta') \sqrt[3]{6\alpha^4} : \sqrt[3]{2\alpha}.$$

326. Νὰ εὑρεθῇ τό: $\alpha') (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})^2$, $\beta') (2\sqrt{x} + 8\sqrt{x^2}) \cdot \sqrt[3]{x}$

$$\gamma') (\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha}) \cdot \sqrt[4]{\alpha}.$$

327. Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μέ ρητοὺς παρονομαστὰς.

$$\alpha') \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \beta') \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma') \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}, \quad \delta') \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}, \quad \epsilon') \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

2. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ

§ 148. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τὸν $\alpha^{\frac{1}{2}}$, ὅπου τὸ α παριστάνει ἀριθμὸν τινα θετικόν. Ὅρίζομεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ παριστάνει τὴν θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α , ἥτοι θέτομεν $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, ὅτε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, ἄρα $(\alpha^{\frac{1}{2}})^2 = \alpha$.

Κατὰ ταῦτα :

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2, \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Ἄν δοθῇ τὸ $\alpha^{\frac{1}{v}}$, ἐνῶ εἶναι $v > 0$ καὶ ἀκέραιος, ὀρίζομεν ὅτι $\alpha^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{\alpha}$, ὑποθέτοντες ὅμως $\alpha > 0$ ὅταν ὁ v εἶναι ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $(\alpha^{\frac{1}{v}})^v = (\sqrt[v]{\alpha})^v = \alpha$, ἄρα $(\alpha^{\frac{1}{v}})^v = \alpha$.

Ἄν ἔχωμεν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{v}}$, ἐνῶ εἶναι μ καὶ v ἀκέραιοι καὶ θετικοί, θέτομεν $\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}$, ὑποθέτοντες $\alpha > 0$ ἂν v ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $(\alpha^{\frac{\mu}{v}})^v = (\sqrt[v]{\alpha^\mu})^v = \alpha^\mu$, ἥτοι : $(\alpha^{\frac{\mu}{v}})^v = \alpha^\mu$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ

$$\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \alpha^{\mu \cdot \frac{1}{v}} = \alpha^{\frac{1}{v} \cdot \mu} \quad \eta \quad \alpha^{\frac{\mu}{v}} = (\alpha^\mu)^{\frac{1}{v}} = \left(\alpha^{\frac{1}{v}}\right)^\mu, \quad \eta \quad \alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[v]{\alpha}\right)^\mu.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης ἰσχύει ἄνευ περιορισμοῦ, ἐπεὶ δὲ θεωροῦμεν ἐκ τῶν δύο ριζῶν ἐκάστης ἀρτίας τάξεως μόνον τὴν θετικὴν.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν } 100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = \sqrt{1\,000\,000} = 1000.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἐξῆς ὀρισμὸν τῆς δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα.

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην κλάσμα ἔχον ὄρους ἀκεραίους καὶ θετικούς παριστάνει ἢ τὴν ρίζαν τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπόρριζον τὸν ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἢ τὴν δύναμιν μὲ βάσιν τὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος καὶ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.

§ 149. Ἄν ὁ ἐκθέτης τῆς $\alpha^{\frac{\mu}{v}}$ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸν ἰσοδύναμὸν τοῦ $\frac{\mu p}{v p}$ τοῦ p παριστάνοντος ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, εἶναι δὲ ἐπὶ πλέον καὶ ὁ α θετικός, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \alpha^{\frac{\mu p}{v p}}, \quad \text{διότι εἶναι } \alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu} \quad (\S 148)$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ } \alpha^{\frac{\mu p}{v p}} = \sqrt[v p]{\alpha^{\mu p}} \quad (\S 148)$$

$$= \sqrt[v]{\alpha^\mu} \quad (\S 142).$$

Ἡ ισότης αὐτὴ ὅμως δὲν ἀληθεύει ἂν $\alpha < 0$. Οὕτω π.χ.
 $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$, διότι $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} < 0$, ἐνῶ $(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ δειξωμεν καὶ ἄλλας ιδιότητες τῶν ριζῶν, καθὼς καὶ νὰ τρέψωμεν ρίζας εἰς ἄλλας ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, ὑποθέτοντες ὅμως τὴν βάσιν α θετικὴν πρὸς ἀποφυγὴν χονδροειδῶν σφαλμάτων.

§ 150. α') Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὀρίσωμεν τὸ $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Δεχόμενοι τοῦτο ὡς δύναμιν τοῦ α καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ιδιότης τοῦ γινομένου τῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν

$$\alpha^{+\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \alpha^0 = 1.$$

Διαιρουντες τὰ ἴσα μέλη τῆς ισότητος $\alpha^{+\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = 1$ διὰ τοῦ $\alpha^{+\frac{1}{2}}$, εὐρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha^{+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ἥτοι $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Ὁμοίως εὐρίσκο-

μεν $\alpha^{-\frac{1}{v}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{v}}} = \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha}}$ (ὅπου τὸ v εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀρι-

θμός). Καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\mu}{v}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{v}}} = \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha^\mu}}$ (ἂν τὰ μ καὶ v εἶναι θετικοὶ

καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ 0). Ἦτοι :

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ ($\neq 0$) μὲ ἐκθέτην δοθὲν ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσας ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\alpha^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}}, \quad 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}.$$

Άσκησεις

$$328. \text{Τί σημαίνει } \alpha') \alpha^{\frac{1}{2}}; \beta') \alpha^{\frac{1}{2}}; \gamma') \alpha^{-\frac{3}{8}}; \delta') 32^{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{12}};$$

$$329. \text{Εύρετε τὰ : } \alpha') (3-2^{-\frac{1}{3}}) \cdot (3+2^{-\frac{1}{3}}), \beta') (\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}) \cdot (\alpha-\beta^{-\frac{1}{2}}), \\ \gamma') (2^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}) \cdot (2^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}), \delta') \left(2^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}} + 1 \right)^2,$$

$$\epsilon') \alpha^{0,8} \cdot \alpha^{1,4} \cdot \alpha^{-0,2}, \sigma\tau') x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{2}{3}}, \zeta') x^{-\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{5}}, \eta') \alpha^{\frac{1}{4,2}} : \alpha^{-0,8}$$

$$\theta') \alpha^{-1,4} : \alpha^{1,2}, \iota') 8^{\frac{4}{5}} \cdot 4^{-\frac{1}{5}}.$$

$$330. \text{'Ομοίως τὰ : } \alpha') \left(\alpha^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}}, \beta') \left(\alpha^{\frac{2}{3}} \right) \left(-\frac{3}{4} \right), \gamma') \left(\alpha^{-\frac{5}{6}} \right) \left(-\frac{4}{5} \right) \cdot \alpha^{-\frac{3}{4}} \\ \delta') 25^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}}, \epsilon') 49^{-\frac{2}{2}} \cdot 9^{-\frac{5}{2}}, \sigma\tau') 49^{-\frac{3}{2}} \cdot 5^{-\frac{4}{3}} : 256^{\frac{3}{4}} \cdot 256^{-\frac{4}{2}}$$

$$\zeta') \frac{36^{-\frac{5}{2}} + 169^{-\frac{4}{2}}}{8^{-\frac{5}{3}} + 27^{-\frac{4}{3}}}, \eta') \frac{125^{-\frac{2}{3}} + 49^{\frac{6}{2}}}{144^{-\frac{3}{2}} - 64^{\frac{2}{2}}}.$$

331. Νά τραποῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς ἰσοδύναμους τῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστάς.

$$\alpha') \frac{x + \sqrt{\psi}}{x - \sqrt{\psi}}, \beta') \frac{\alpha \sqrt{\beta} + \beta \sqrt{\alpha}}{\alpha + \sqrt{\beta}}, \gamma') \frac{x\psi}{\sqrt{\psi^3 - \sqrt{x\psi^2}}}, \delta') \frac{\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha-\beta}} \\ \epsilon') \frac{4\sqrt{5}-20}{\frac{2}{3}\sqrt{10}-5\sqrt{\frac{1}{2}}}, \sigma\tau') \frac{5-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \zeta') \frac{8\sqrt{12}-12\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}, \eta') \frac{6}{1+\sqrt{2}}$$

3. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΡΙΖΗΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 151. Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ τὸ ὑψωθῆ γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμιν τινα, ἄρκει νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολλαπλασιάσθωσιν τὰ ἐξαγόμενα. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εὐρίσκεται, ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι :

Διὰ τὸ εὐρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου ἄρκει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2.

$$\text{Οὕτως ἔχομεν } \sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6} = 25^{\frac{1}{2}} \cdot (\alpha^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (\beta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{(\frac{6}{2})} = 5\alpha^2\beta\gamma^3.$$

$$\text{'Ομοίως } \sqrt{16\alpha^2\beta^4} = 4\alpha\beta^2$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξάγεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματικοῦ μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἐκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν
$$\sqrt{\frac{9\alpha^6\beta^2\gamma^4}{16\delta^2\epsilon^4}} = \frac{3\alpha^3\beta\gamma^2}{4\delta\epsilon^2}$$

Ἐὰν παράγοντός τινος δὲν ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβῶς (δηλαδή, ἂν ὁ ἐκθέτης του δὲν διαιρῇται διὰ τοῦ 2), ἀφήνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειουμένην τὴν πρᾶξιν ἥ, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, ὥστε νὰ ἐξάγεται ἡ ρίζα του τοῦλάχιστον ἐνός.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν
$$\sqrt{24\alpha^2\beta^3\gamma} = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \beta \cdot \gamma} = 2\alpha\beta\sqrt{6\beta\gamma}.$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

332. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἐξῆς μονωνύμων :

α') $64\alpha^4\gamma^2\beta^8$, β') $\frac{4}{9}\alpha^2\beta^2\gamma$, γ') $\frac{\beta^3\gamma^3\delta^5}{4\alpha^4}$, δ') $\frac{32\alpha^2\beta^4\gamma^2}{45\delta^4\epsilon^6}$,
 ε') $\frac{125}{64}\alpha^3\beta^4\gamma$, στ') $\frac{9x^2\psi^4}{64\alpha^4\beta^2}$, ζ') $\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma\eta^6}{16\epsilon^3\delta^3\theta^8}$,

333. Νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἐξῆς μονωνύμων :

α') $8\alpha^9\beta^3\gamma^9$, β') $64\alpha^2\beta^3\gamma^9$, γ') $-\frac{8\alpha^3\beta^5\gamma^6}{125\delta^3\epsilon}$, δ') $\frac{8\alpha^3\beta\gamma^6}{27\beta^4\epsilon^4}$

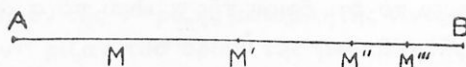
Β' ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

§ 152. Ὅρισμός. α') Μέγεθος ἡ ποσότης λέγεται μεταβλητὴ μὲν, ἂν λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς, **σταθερὰ** δέ, ἂν μένη ἀμετάβλητος, ἐνῶ ἄλλαι, μετὰ τῶν ὁποίων συνδέεται μεταβάλλονται. Π.χ. ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, ἐνῶ τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἢ ἡ ἀξία ἐνὸς ἐμπορεύματος ἐξαρτᾶται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἢ ἀπὸ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

β') Λέγομεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητὴ λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν ἔχει ὅριον ἢ τείνει εἰς ποσότητά τινα σταθεράν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τινος καὶ ἐφ' ἐξῆς ἀπολύτως θεωρούμεναι, διαφέρουσιν ἐκάστη τῆς σταθερᾶς κατὰ ποσότητα, ὅσον θέλομεν μικράν.

Ἐὰν συμβαίνει τοῦτο, ἡ σταθερὰ αὕτη ποσότης λέγεται ὅριον τῆς μεταβλητῆς.

Παραδείγματα : 1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἐν κινητὸν Μ, κινούμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 15) ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνόμενον πρὸς τὸ Β καὶ διαγράφει εἰς 1^ο τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, φθάνει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Μ' κείμενον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Σχ. 15

Κινούμενον ὁμοίως φθάνει μετὰ 1^ο ἀκόμη εἰς τὸ Μ'' μέσον τῆς Μ'Β', μετὰ 1^ο φθάνει εἰς τὸ μέσον Μ''' τῆς Μ'Β' καὶ προχωρεῖ ὁμοίως. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κινητόν, προχωροῦν οὕτω πρὸς τὸ Β, πλησιάζει αὐτὸ διηνεκῶς, ἀλλ' οὐδέποτε φθάνει εἰς τὸ Β. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ποσότης μεταβλητῇ, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ αὐξάνεται διηνεκῶς καὶ πλησιάζει τὴν σταθερὰν ἀπόστασιν ΑΒ, ἔχει δηλαδὴ ὄριον τὴν ΑΒ. Τὸνναντίον ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ἐπίσης μεταβλητῇ ποσότης ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῆς ἐλαττοῦνται κατὰ τὴν κίνησιν καὶ πλησιάζουν διηνεκῶς τὸ 0, ἥτοι ἔχει ὄριον τὸ 0.

2ον. Ἐστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,3333....., ὁ ὁποῖος δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$

Ἡ τιμὴ ἐκάστου τῶν κλασμάτων τούτων μετὰ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ προηγουμένου του. Ἐπομένως ὅταν θεωροῦμεν τὰ κλάσματα ταῦτα, δυνάμεθα προχωροῦντες ἀρκούντως νὰ εὕρωμεν ἐν κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅσον θέλομεν μικρόν. Ἦτοι αἱ τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν τούτων κλασμάτων ἐλαττοῦνται καὶ ἔχουν ὄριον τὸ μηδέν (θεωρούμενον ὡς ἐν ἄπειρον πλήθος τιμῶν).

Τὸ ἄθροισμα κλασμάτων τινῶν ἐκ τούτων εἶναι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, μικρότερον τοῦ $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ καὶ ὅσον περισσότερους ὅρους προσθέτομεν τόσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητῇ x (λαμβάνουσα ἄπειρον πλήθος τιμῶν) ἔχει ὄριον ποσότητά τινα σταθερὰν α ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ τῆς σταθερᾶς ἀπὸ τινος αὐτῶν καὶ ἐξῆς :

α) Δύναται νά γίνη ἀπολύτως μικρότερα οἰουδήποτε ἀριθμοῦ θετικοῦ ὅσονδήποτε μικροῦ.

β') Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν δύναται νά γίνη (ἀπολύτως) ἴση μὲ τὸ μηδέν.

Συμβολίζομεν τὸ ὅτι ὄριον τῆς x εἶναι τὸ α ὡς ἑξῆς :

$$\text{or } x = \alpha \quad \eta \quad x \rightarrow \alpha.$$

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

§ 153. α') Ἐὰν τὸ ὄριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι τὸ 0, τὸ $\text{or}(\lambda x)$, ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ ($\lambda \neq 0$), εἶναι ἴσον μὲ 0.

Διότι ἀφοῦ αἱ τιμαὶ τοῦ x δύνανται νά γίνουν ἀπὸ τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, ὅσονδήποτε μικραὶ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ λ θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ιδιότητα.

β') Τὸ ὄριον τοῦ ἀθροίσματος πεπερασμένου ἀριθμοῦ μεταβλητῶν ποσοτήτων $x, \psi, \omega, \dots$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀθροισμα τῶν ὁρίων τῶν προσθετέων.

Ἔστω, ὅτι τὰ ὄρια τῶν $x, \psi, \omega, \dots$ εἶναι ἀντιστοίχως, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Τότε δεικνύεται, ὅτι τὸ ὄριον $(x + \psi + \omega + \dots) = \text{or } x + \text{or } \psi + \text{or } \omega + \dots = \alpha + \beta + \gamma + \dots$, ἂν τὰ $x, \psi, \omega, \dots$ εἶναι πεπερασμένα τὸ πλῆθος.

γ') Ἐὰν ὄριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι α , τὸ ὄριον τοῦ λx , ὅπου λ εἶναι σταθερὰ τις ($\neq 0$) εἶναι ἴσον μὲ $\lambda \alpha$.

Διότι ἀφοῦ $\text{or } x = \alpha$, θὰ εἶναι $\text{or}(x - \alpha) = 0$, ἐπομένως τὸ $\text{or}(\lambda(x - \alpha)) = 0$, ἥτοι $\text{or}(\lambda x - \lambda \alpha) = 0$, δηλαδὴ $\text{or}(\lambda x) = \lambda \alpha$.

δ') Ἐὰν τὸ ὄριον μεταβλητῆς τινος x ἰσοῦται μὲ α , τὸ ὄριον τοῦ $\frac{x}{\lambda}$, ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ ($\neq 0$), ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\lambda}$.

$$\text{Διότι εἶναι } \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot x, \text{ καὶ } \text{or } \frac{x}{\lambda} = \text{or } \frac{1}{\lambda} \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

ε') Τὸ ὄριον γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων (πεπερασμένων τὸ πλῆθος) μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων των.

Ἔστω, ὅτι x καὶ ψ εἶναι μεταβληταὶ ποσότητες καὶ α, β τὰ ὄριά των ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι τότε $\text{or}(x \cdot \psi) = \text{or } x \cdot \text{or } \psi = \alpha \cdot \beta$.

Ἡ ιδιότης ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

στ') Το ὅριον τῆς ν^{ης} δυνάμεως ποσότητος μεταβλητῆς ἰσοῦται μέ τὴν ν^{ην} δύναμιν τοῦ ὁρίου τῆς μεταβλητῆς.

Διότι, ἂν εἶναι $ορ x = \alpha$, θὰ ἔχωμεν $ορ(x^v) = ορ(x \cdot x \dots x) = ορ x \cdot ορ x \dots$
 $= (ορ x)^v = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha = \alpha^v$, ἥτοι $ορ(x^v) = (ορ x)^v = \alpha^v$.

ζ') Το ὅριον τῆς ν^{ης} ρίζης μεταβλητῆς τινος ποσότητος ἰσοῦται μέ τὴν ν^{ην} ρίζαν τοῦ ὁρίου τῆς μεταβλητῆς.

η') Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ ἐκάστη ἔχη ὅριον, τὰ ὁριά των εἶναι ἴσα.

Ἐστω, ὅτι αἱ μεταβληταὶ x, ψ λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ $ορ x = \alpha$, $ορ \psi = \beta$, τότε εἶναι $\alpha = \beta$, ἥτοι $ορ x = ορ \psi$.

θ') Ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ μεταβλητῶν ποσοτήτων ἔχουν σταθερὸν λόγον, ἐκάστη δὲ τούτων ἔχη ὅριον ($\neq 0$), ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μέ τὸν λόγον τῶν ὁρίων των.

Ἐστωσαν x, ψ δύο μεταβληταὶ ποσότητες καὶ $ορ x = \alpha (\neq 0)$
 $ορ \psi = \beta (\neq 0)$. Ἄν εἶναι $\frac{x}{\psi} = \rho$ σταθερὸν, τότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \rho$, ἥτοι :

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ορ x}{ορ \psi}.$$

Γ' ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 154. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2. Αὕτη δὲν εἶναι ἀκέραιός τις ἀριθμός. Διότι, $1^2 = 1$ καὶ $2^2 = 4$. Ἄλλ' οὔτε ὑπάρχει ἄλλος τις ἀριθμός ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μέ 2. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμός δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, αὐτὸς δύναται νὰ

παρασταθῇ μέ κλάσμα ἀνάγωγον, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$. Τότε θὰ εἶναι $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = 2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ, ἀφοῦ τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι ἀνάγωγον, τὸ $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μέ 2.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν $\sqrt{5}$, τὴν $\sqrt{7}$ κ.τ.λ.

Ἀναζητοῦντες τὴν $\sqrt{2}$ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1,1, 1,2 1,3...1,7 1,8 1,9 2 καὶ σχηματίζομεν ἀκολούθως τὰ τετράγωνα τούτων 1 1,21 1,44 1,69 2,25... Παρατηροῦμεν, ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μέ τὸν 2 καὶ ὅτι ὁ 2 πριέχεται μεταξύ

τῶν 1,96 καὶ 2,25 τετραγώνων τῶν 1,4 καὶ 1,5 δύο διαδοχικῶν τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Ἦτοι εἶναι $1,4^2 < 2 < 1,5^2$.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1,4 1,41 1,42 1,43..... 1,49 1,5. Ἐπειδὴ ὁ 2 δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον ἐνὸς ἐκ τούτων, περιέχεται μεταξύ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὐρίσκομεν, ὅτι εἶναι $1,41^2 < 2 < 1,42^2$. Ἐπομένως ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ 1,41 καὶ 1,42. Ὁμοίως προχωροῦμεν καὶ εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ τῶν 1,414 καὶ 1,415, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ αὗτοί διαφέρουν κατὰ ἓν χιλιοστόν. Ἄν προχωρήσωμεν ἀκόμη, εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστόν χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐν γένει, λοιπόν, ἂν προχωρήσωμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως). Ἄρα, ἕκαστος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν κατὰ μείζονα λόγον θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τὴν $\sqrt{2}$ κατὰ ποσότητα ὅσον καὶ ἂν θέλωμεν μικράν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ = μὲ ὄριον ἐνὸς τῶν ὡς ἄνω εὐρισκομένων ἀριθμῶν, ἥτοι θεωροῦμεν ὡς $\sqrt{2}$ τὸν ἓνα ἐκ τῶν ὡς ἀνωτέρω εὐρισκομένων ἀριθμῶν· ἔχει δὲ αὐτὸς ἅπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ με κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν $\sqrt{2}$ καλοῦμεν **ἀσύμμετρον**.

Τοιοῦτους ἀριθμοὺς εὐρίσκομεν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν καλουμένων **ἀσυμμέτρων μεγεθῶν** πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως αὐτῶν.

Ἐν γένει καλοῦμεν **ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ἐκείνους, οἵτινες ἔχουν ἅπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν**. Καὶ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σῆμα + (ἢ οὐδὲν πρόσημον) ἢ τὸ -. **Συμμέτρους** δὲ καλοῦμεν τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικούς ἐν γένει).

Κατὰ ταῦτα ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ὁ 1,41421 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ. Ὅμοίως οἱ ἀριθμοὶ 2,14159.... καὶ 2,71828.... εἶναι ἀσύμμετροι (ἔχοντες ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, δεχόμεθα συνήθως, ὅτι οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γίνουν ἀπὸ τὴν μονάδα ἢ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς 0,1. 0,01. 0,001.... διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῶν ὡς προσθετέων, πρὸς δέ, ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ ἀριθμοὺς ἔχοντας μὲν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐπαναλαμβάνονται ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς ὁμοίως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγομεν, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέων τῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος) δεκαδικῶν μονάδων 0,1. 0,01. 0,001 κ.τ.λ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα ὅτι :

Σύνολον πλῆθους ἐκ τῶν αὐτῶν ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων, ἐξ ἐκάστης τῶν ὁποίων δὲν εἶναι περισσότεραι τῶν ἑννέα, θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί, ὅσαδῆποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται οὗτοι.

Καὶ μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δεχόμεθα ὅτι διατηροῦνται οἱ ὁρίσμοι τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν συμμέτρων, δεικνύεται δὲ ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμός (καὶ ἡ ὑψωσις εἰς δύναμιν) καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν $\alpha:\beta$ ($\beta \neq 0$). Ἐπίσης δεικνύεται, ὅτι ἰσχύουν καὶ ἐπ' αὐτῶν αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες πράξεων.

Εἰς τὰς πράξεις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς. Οὕτως ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μόνον κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἐπὶ τῶν συμμέτρων δὲ τούτων ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνες.

Ἀριθμὸς τις θετικὸς σύμμετρος (γραμμένος ὡς δεκαδικὸς) λέγεται **μεγαλύτερος** ἄλλου τοιούτου, ὁ ὁποῖος λέγεται **μικρότερος** τοῦ πρώτου, ἂν περιέχῃ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἐκάστης δεκαδικῆς τάξεως τοῦ δευτέρου καὶ ἄλλας ἀκόμη, καθὼς ὁ 2,5349 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2,53439856.

§ 155. Δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ ἀσύμμετροι λέγονται **ἴσοι**, ἂν πᾶς

ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,9999... εἶναι ἴσοι. Διότι ἔστω ἀριθμὸς τις μικρότερος τῆς 1 π.χ. ὁ $\frac{147}{148}$. Αὐτὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$, ἐπειδὴ ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τὴν 1 κατὰ $\frac{1}{1000}$, ὁ δὲ $\frac{147}{148}$ κατὰ $\frac{1}{148}$, ἥτοι περισσότερον. Ἐπομένως ὁ $\frac{147}{148}$, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 0,999, εἶναι ἀκόμη μικρότερος καὶ τοῦ 0,9999. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου· ὅσαδήποτε πηφία τοῦ 0,99999... καὶ ἂν λάβωμεν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, ἅρα εἶναι $1 = \text{ὄριον } 0,9999...$ καὶ θέτομεν $1 = 0,9999...$ καὶ $0,01 = 0,009999...$ κ.τ.λ.

Κατὰ ταῦτα δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ σύμμετροι γραμμένοι ὡς δεκαδικοὶ θὰ εἶναι ἴσοι : 1ον. Ἄν πάντα τὰ δεκαδικὰ πηφία των τῆς αὐτῆς τάξεως εἶναι τὰ αὐτὰ ἢ 2ον, ἂν τινὰ μὲν πηφία των ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐφ' ἑξῆς εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἀμέσως ἐπόμενον ψηφίον τούτων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του (τῆς αὐτῆς τάξεως) τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, τὰ δὲ ἐπόμενα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνίσων ψηφίων εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ ἄλλου πάντα εἶναι 0 (τὰ ὁποῖα καὶ παραλείπονται). Ἄν δὲν συμβαίνει τοῦτο, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι. Οὕτω π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,1539999, καὶ 3,154 θεωροῦνται, ὅτι εἶναι ἴσοι, καθὼς καὶ οἱ 0,54327 καὶ 0,54326999, ἐνῶ οἱ 3,1452... καὶ 3,1478... εἶναι ἄνισοι καὶ $3,1478... > 3,1452...$

Παρατηρήσεις. α') Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα καὶ μὲ ἀσύμμετρος ἀριθμοὺς. Π.χ. ἐκ τῶν ἀσύμμετρων 3,14153... καὶ 3,141298... ὁ α' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β'.

β') Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha + \sqrt{\beta}$ καὶ $\gamma + \sqrt{\delta}$, ὅπου α, γ , σύμμετροι οἱ δὲ β, δ θετικοὶ καὶ σύμμετροι ἀλλὰ μὴ τέλεια τετράγωνα εἶναι ἴσοι μόνον ὅταν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$.

Πράγματι. Ἡ ἰσότης $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\alpha - \gamma) + \sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$. Ἐπομένως, διὰ νὰ ἀληθεύῃ πρέπει ὅπωςδήποτε νὰ εἶναι $((\alpha - \gamma) + \sqrt{\beta})^2 = \delta$, δηλ. $(\alpha - \gamma)^2 + \beta + 2(\alpha - \gamma)\sqrt{\beta} = \delta$ ἢ $2(\alpha - \gamma)\sqrt{\beta} = \delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2$. Ἄν ἦτο $\alpha \neq \gamma$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ $\alpha - \gamma$ καὶ συμπεραίνομεν, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ ἀλη-

θεύη ή $\sqrt{\beta} = \frac{\delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2}{\alpha - \gamma}$. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{\beta}$ ἴσος μὲ ἓνα σύμμετρον $\frac{\delta - \beta - (\alpha - \gamma)^2}{\alpha - \gamma}$, πρᾶγμα ἀδύνατον. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha = \gamma$. Καὶ τότε διὰ νὰ εἶναι ἴσοι οἱ $\alpha + \sqrt{\beta}$, $\gamma + \sqrt{\delta}$ πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$ καὶ συνεπῶς $\beta = \delta$, ἀφοῦ β, δ θετικοί. Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ προφανῶς.

Ἀσκήσεις

334. Δείξατε, ὅτι ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου ἡ τρίτη δύναμις ἰσοῦται μὲ 7 δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος οὔτε κλασματικός καὶ ὅτι ὑπάρχει ἀσύμμετρος. Εὑρετε τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

335. Δείξατε κατ' ἀναλογίαν ὅτι, ἂν ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικός δὲν ἔχη ὡς νιοστήν ρίζαν (ν ἀκέραιος καὶ θετικός) ἀκέραιον δὲν ἔχει οὔτε κλασματικόν ἀλλ' ἔχει ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

336. Δείξατε ὅτι εἶναι $0,3567999... = 3,568$

Ποῖος ἐκ τῶν 18,1557... καὶ 18,1452921... εἶναι μεγαλύτερος καὶ διατί;

337. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν 3,14124... 0,68456... 1,72345... καὶ 12,53652 μὲ προσέγγισιν δεκάκισ χιλιοστοῦ.

338. Εὑρετε τὸ $\sqrt{19} \pm \sqrt{3}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

339. Εὑρετε τὴν διαφορὰν 3,542754... - 6,37245... μὲ προσέγγισιν δεκάκισ χιλιοστοῦ.

340. Εὑρετε τὴν διαφορὰν $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ καὶ τὴν $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Δ'. ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 156. Καθὼς εἶδομεν, οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζαν ἀρτίας τάξεως. Ἄν θέλωμεν νὰ ἔχουν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ τετραγωνικὴν ρίζαν, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι νὰ γίνωνται ἀπὸ νέαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ὀρίζομεν ἴσον μὲ -1. Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλοῦμεν **φανταστικούς**, τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν θὰ καλοῦμεν **πραγματικούς**. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καλοῦμεν **φανταστικὴν μονάδα** καὶ τὴν παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον* i, τὴν δὲ

* Ὁ συμβολισμὸς $i = \sqrt{-1}$ ἐχρησιμοποιήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ F. Gauss ἀλλ' ὁ Euler (2777) εἰσήγαγεν ὀριστικῶς τὴν παράστασιν αὐτήν.

ἀντίθετόν της i με $-i$. Οὕτως ἂν ἔχωμεν $x^2 = -1$, ὀρίζομεν τὸ $x^2 = -1 = i^2$ καὶ $x = \sqrt{-1} = i$, εἶναι δὲ κατὰ σειρὰν $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Ἐκ τῆς i ἡ μέρους αὐτῆς δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέου οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι $2i = i + i$, $3i = i + i + i$, $\frac{4}{9}i = \frac{1}{9}i + \frac{1}{9}i + \frac{1}{9}i + \frac{1}{9}i$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται καὶ οἱ χαρακτηριζόμενοι ὡς ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$. ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς -1 , ἡ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα της. Π.χ. εἶναι $-4i = (-i) + (-i) + (-i) + (-i)$.

Οὕτω, κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας, φανταστικὰς με ἀντίθετα πρόσημα. Π.χ. ὁ -25 ἔχει τετραγ. ρίζαν τοὺς $5i$ καὶ $-5i$ διότι $(5i)^2 = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$. Καὶ $(-5i)^2 = (-5)^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$.

Ἐκ τῶν δύο τετραγ. ριζῶν ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἔχουσα πρόσημον $+$ ὀνομάζεται **πρωτεύουσα** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ συμβολίζεται με τὸ οἰκτεῖον ριζικὸν χωρὶς πρόσημον ἀριστερά, ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτω ὁ συμβολισμὸς $\sqrt{-2}$ σημαίνει: ἡ πρωτεύουσα τετραγ. ρίζα τοῦ -2 καὶ ἔχομεν $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι αἱ τετραγ. ρίζαι τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ συνοδευόμεναι με τὸ σύμβολον i .

§ 157. Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων. ἦτοι ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων ἢ τῶν παραγόντων, ὁ νόμος τῆς ἀντικαταστάσεως τινῶν ἐξ αὐτῶν με τὸ ἄθροισμὰ των καὶ ἀντιστρόφως καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πραγματικοῦ καὶ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται **μιγαδικὸς ἀριθμὸς** ἢ ἀπλῶς **μιγάς**.

Οὕτως οἱ $7+6i$, $3-5i$, $-9-7i$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

§ 158. Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\alpha + \beta i$ ἢ συμβολικῶς (α, β) , ἦτοι ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$. Ἄν

εἶναι $\alpha=0$, τότε $(0,\beta)=\beta i$, ἥτοι φανταστικὸς ἀριθμὸς. *Αν εἶναι $\beta=0$, τότε $(\alpha,0)=\alpha$, ἥτοι πραγματικὸς ἀριθμὸς. Ὁ $(0,0)=0$.

§ 259. Δύο μιγάδες, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται ἐνίοτε καὶ ἀπλῶς φανταστικὸς, λέγονται συζυγεῖς ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ πρόσημον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$ καὶ $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς (μιγάδες), καθὼς καὶ οἱ $-5i$ καὶ $5i$, καὶ ἐν γένει οἱ (α,β) καὶ $(\alpha,-\beta)$ εἶναι συζυγεῖς φανταστικοὶ ἀριθμοί, ὅπου α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἵοιδήποτε.

1. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 160. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν γίνεται καθὼς καὶ τῶν πραγματικῶν καὶ δίδει ἄθροισμα πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν ἢ μιγαδικὸν ἀριθμὸν ἢ μηδέν.

Π.χ. εἶναι: $8i+5i=13i$, $(0,\beta)+(0,\delta)=0+\beta i+0+\delta i=0+(\beta+\delta)i=(\beta+\delta)i$. Ὁμοίως $-17i-6i=-23i$, $5+3i+6-3i=11$, $18i-5i=13i$, ἐνῶ $15i-15i=0$, $(0,\beta)-(0,\beta)=\beta i-\beta i=0$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμὸν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον. Οὕτως ἔχομεν ὅτι:

$$(0,1)\cdot(0,1)=i\cdot i=i^2=-1, \quad (-i)\cdot(-i)=(-i)^2=i^2=-1, \\ \text{ἢ } (0,-1)^2=(-i)\cdot(-i)=i^2=-1, \quad (0,1)^3=i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i, \\ (0,1)^4=i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=+1.$$

Γενικῶς εἶναι $(0,1)^{4v}=i^{4v}=(i^4)^v=1$, $i^{4v+1}=i^{4v}\cdot i=1\cdot i=i$,

$$(0,1)^{4v+2}=i^{4v+2}=i^{4v}i^2=1\cdot(-1)=-1,$$

$$(0,1)^{4v+3}=i^{4v+3}=i^{4v}i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

Ἡ διαίρεσις καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι δὲ

$$(0,\alpha):(0,\beta)=\alpha i:\beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta},$$

$$(\alpha,0):(0,\beta)=\alpha:\beta i=\frac{\alpha}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta i i}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=-\frac{\alpha}{\beta} i.$$

§ 161. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτως ἔχομεν ὅτι:

$$(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i=(\alpha+\gamma,\beta+\delta),$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta) - (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)i = (\alpha - \gamma, \beta - \delta), \\
 (\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \beta\gamma i + \alpha\delta i + \beta\delta i^2 = \\
 &= \alpha\gamma - \beta\delta + (\beta\gamma + \alpha\delta)i = (\alpha\gamma - \beta\delta, \beta\gamma + \alpha\delta). \\
 (\alpha, \beta) : (\gamma, \delta) &= (\alpha + \beta i) : (\gamma + \delta i) = \\
 &= \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right).
 \end{aligned}$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 162. Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς πραγματικός.

$$\begin{aligned}
 \text{Οὕτω τὸ ἄθροισμα: } (\alpha, \beta) + (\alpha, -\beta) &= (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = \\
 &= \alpha + \beta i + \alpha - \beta i = 2\alpha = (2\alpha, 0).
 \end{aligned}$$

§ 163. Ἐὰν ζητῇται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν (α, β) , $(\alpha, -\beta)$, ἦτοι τῶν $\alpha + \beta i$ καὶ $\alpha - \beta i$, ἔχομεν $(\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2, 0)$. Ἦτοι :

Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι πραγματικός ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἐνὸς τούτων.

Καλοῦμεν μέτρον μιγάδος ἢ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$, τὴν (θετικὴν) τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ $(\alpha, -\beta) = \alpha - \beta i$. Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον τοῦ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καὶ τοῦ $(\alpha, -\beta) = \alpha - \beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, τοῦ $(0, \beta) = \beta i$ καὶ τοῦ $(0, -\beta) = -\beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\beta^2} = \beta > 0$. Π.χ. τὸ μέτρον $(4, -3) = 4 - 3i$ εἶναι τὸ $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, τοῦ $(0, \pm 3) = \pm 3i = 0 \pm 3i$ τὸ $\sqrt{3^2} = 3$.

§ 164. Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καὶ $(\gamma, \delta) = \gamma + \delta i$ εἶναι μετὰξὺ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει } (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i &= 0 \\
 \text{ἢ } (\alpha - \gamma) &= -(\beta - \delta)i = (\delta - \beta)i.
 \end{aligned}$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα $\alpha - \gamma$ καὶ $(\delta - \beta)i$, εὐρίσκομεν $(\alpha - \gamma)^2 = (\delta - \beta)^2 \cdot i^2 = (\delta - \beta)^2 \cdot (-1) = -(\delta - \beta)^2$.

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶναι $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα μὲ 0, ἐνῶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν, ὅτι θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι :

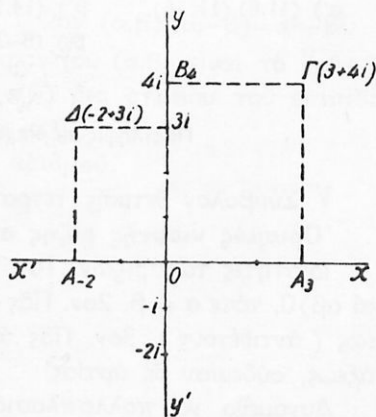
Ἐάν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μεταξύ των θὰ εἶναι χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικά καὶ τὰ φανταστικά μέρη αὐτῶν καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξύ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικούς ἀριθμούς.

3. ΣΗΜΕΙΑ ΟΡΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΜΙΓΑΔΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 165. Καθὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν θέλωμεν, ὀρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν, οὕτω καὶ οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ὀρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ ὀρίζομεν, ὅτι τὸ ἄκρον τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν ψ μήκους μιᾶς μονάδος ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ O καὶ πρὸς τὴν φορὰν $O\psi$ παριστάνει τὴν φανταστικὴν μονάδα i . Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμούς $2i, 3i, \dots \beta i, \dots (\beta > 0)$, ἂν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ O τμήμα ἴσον μὲ $2, 3, \dots \beta, \dots$ μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν $O\psi$, τὰ ὁποῖα λέγομεν, ὅτι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐάν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν $O\psi'$, θὰ λέγωμεν, ὅτι αὐτὰ ὀρίζονται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν $-i, -2i, -3i, \dots, -\beta i, \dots$ καὶ παριστάνουν τοὺς ἀριθμούς τούτους (σχ. 15α).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ μιγάδος τινὸς ἀριθμοῦ, π.χ. ὑπὸ τοῦ $(3,4)=3+4i$, εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ τῆς $x'x$ τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, τὸ B_4 παριστάνον τὸν $4i$ ἐπὶ τῆς $\psi'\psi$ καὶ ἀκολουθῶς σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον OA_3B_4 , τούτου δὲ ἡ τετάρτη κορυφή Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν



Σχ. 15α

$(3,4)=3+4i$. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει, θὰ λέγωμεν, ὅτι ὁ μιγάς ἀριθμὸς $(\alpha, \beta)=\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου ἧ ὅτι ὀρίζει τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον

ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$ καὶ $\psi'\psi$.

Σημειώσεις. Καλοῦμεν **ὄρισμα** τοῦ μιγάδος π.χ. $(3,4)=3+4i$ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεία Ox μέ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα OG , τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν $(3,4)=3+4i$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ὄρισμα τοῦ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ Ox μέ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα OM , ἂν τὸ M παριστάνῃ τὸν $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$.

Ἀσκήσεις

341. Παραστήσατε με σημεία τοὺς μιγάδας :

α') $2-0,74i$ β') $5+3i$ γ') $6-3i$ δ') $-0,75-0,62i$ ε') $(2,4)=2+4i$
 στ') $(3,-4)$ ζ') $(2,-0,64)$ η') $(5,2)$ θ') $(6,-3)$.

342. Εὑρετέ τὰ ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ἀνὰ δύο.

343. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ παρασταθοῦν αὐτὰ διὰ τῶν σημείων :

$$\alpha') (5,3) \cdot (7,3), \beta') (2,2)^2, \gamma') (2,-7) \cdot (9,-2), \delta') (6,7) \cdot (6,-7).$$

344. Ὁμοίως τῶν κάτωθι :

$$\alpha') (11, 8) \cdot (11, -8), \quad \beta') (14, 15) \cdot (14, -15), \quad \gamma') (3+i\sqrt{2}) \cdot (4-3i\sqrt{2}).$$

$$\delta') (8-7i\sqrt{3}) : (5+4i\sqrt{3}).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου V.

$\sqrt{}$ Σύμβολον θετικής τετραγωνικής ρίζης.

Ὁρισμός νιοστῆς ρίζης σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

ἰδιότητες τῶν ριζῶν. 1ον. Ἄν $\alpha^m = \beta^m$, μ ἄκεραῖος καὶ θετικὸς καὶ $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha = \beta$. 2ον. Πᾶς ἀριθμὸς $|a|$ ἔχει δύο ρίζας ἄρτίας τάξεως (ἀντιθέτους). 3ον. Πᾶς ἀριθμὸς $-|a|$ ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, οὐδεμίαν δὲ ἄρτίας.

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετικὴ. Ἐξαγωγή ρίζης-ἄλλης ρίζης ποσότητός τινος θετικῆς. Τροπὴ ριζῶν μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἄλλας ἴσας μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην. Γινόμενον ἢ πηλίκον ριζῶν, ὅταν τὰ ὑπόρριζα εἶναι θετικά.

Όρισμός δυνάμεων με κλασματικών εκθέτην.

Πότε λέγομεν $orx=0$ ή $orx=\alpha (\neq 0)$,

Ίδιότητες τῶν ὀρίων: ἂν $orx=0$, τότε $or(\lambda x)=0$, $\lambda =$ σταθερόν, ἂν $orx=\alpha$, τότε $or(\lambda x)=\lambda\alpha$, $or(x+\psi+\omega+\dots+\phi)=orx+or\psi+or\omega+\dots+or\phi$, $or(x\cdot\psi)=orx\cdot or\psi$, ὅριον $(x:\psi)=orx:or\psi$,

(ἂν $or\psi \neq 0$), $or(x^\nu)=(orx)^\nu$, $(or\sqrt[\nu]{x})=\sqrt[\nu]{orx}$.

Όρισμός ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ (παριστανομένου ὑπὸ μορφῇν δεκαδικοῦ μέ ἀπειρα τὸ πλήθος δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.)

Όρισμός φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

$$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$$

Όρισμός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. $\alpha+\beta i=(\alpha,\beta)$.

Όρισμός συζυγῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν (α,β) καὶ $(\alpha,-\beta)$.

Πράξεις μέ μιγάδας ἀριθμούς:

$$1ον \ (\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\beta+\delta) \quad 2ον. \ (\alpha,\beta)-(\gamma,\delta)=(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$$

$$3ον \ (\alpha,\beta) \cdot (\gamma,\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta,\beta\gamma+\alpha\delta). \quad 4ον \ (\alpha,\beta):(\gamma,\delta)=$$

$$\left(\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}, \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} \right).$$

Ίδιότητες μιγάδων ἀριθμῶν:

$$1ον \ \text{ἂν} \ (\alpha,\beta)=0, \ \text{τότε} \ \alpha=0, \ \beta=0. \quad 2ον \ (\alpha,\beta) \cdot (\alpha,-\beta)=\alpha^2+\beta^2.$$

Όρισμός μέτρου μιγάδος. Μέτρον τοῦ (α,β) εἶναι τὸ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Γεωμετρικὴ παράστασις μιγάδος (α,β) διὰ σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων xOy μέ συντεταγμένας α,β .

Όρισμός ὀρίσματος μιγάδος ἀριθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Α'. ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ*

§ 166. Ἡ γενικὴ μορφή τῆς ἐξίσωσως δευτέρου βαθμοῦ μέ ἓνα ἄγνωστον τὸν x εἶναι ἡ $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (1), ὅπου τὰ a, b, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς πραγματικοὺς ἢ παραστάσεις γνωστές, καλοῦνται δὲ **συντελεσταί**, τὸ δὲ γ καὶ σταθερὸς ὅρος τῆς (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$. Ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $a \neq 0$, διότι ἂν $a = 0$, τότε ἡ (1) θὰ ἦτο a' βαθμοῦ.

Ἡ (1) λέγεται **πλήρης**, ἂν οἱ a, b, γ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός [σὺμβολίζομεν δὲ τοῦτο οὕτως: $(a, b, \gamma) \neq (0, 0, 0)$]. Ἄν εἶναι $b = 0$, ἡ (1) θὰ ἔχη τὴν μορφήν $ax^2 + \gamma = 0$, ἂν $\gamma = 0$, γίνεται $ax^2 + bx = 0$, ἂν δὲ εἶναι $b, \gamma = 0$, ἡ (1) θὰ εἶναι μορφῆς $ax^2 = 0$.

Ἐκάστη τῶν ἀνωτέρω τριῶν τελευταίων μορφῶν λέγεται ἐξίσωσις μὴ **πλήρης**.

Αἱ ρίζαι ἐξίσωσως λέγονται **σύμμετροι** ἢ **ἀσύμμετροι**, ἂν αὗται εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Αἱ ρίζαι ἐξίσωσως λέγονται **πραγματικοὶ** ἢ **φανταστικοὶ** (ἢ **μιγαδικοὶ**), ἂν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ φανταστικοὶ (ἢ **μιγάδες**).

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 167. Ἐὰν ἐξίσωσως ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις ἔχουσα τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἐνὸς τῶν δύο μελῶν αὐτῆς.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $A = B$ (1), ὅπου τὰ A καὶ B παριστάνουν τὰ δύο μέλη αὐτῆς. Ἐὰν ταύτης ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A^2 = B^2$ (2).

* Τὰς ἐξίσωσεις δευτέρου βαθμοῦ μέ ἓνα ἄγνωστον ἀνέπτυξε τὸ πρῶτον ὁ Ἑλλήν μαθηματικὸς Διόφαντος.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

Πράγματι πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι ρίζαι καὶ τῆς (2). Διότι, ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ρίζας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ A εἶναι ἴση μὲ τὴν ὁμοίως προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ B . Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ A)²=(μὲ τὴν τοῦ B)². Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι ἡ (2) εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A^2-B^2=0$, ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτως: $(A-B)(A+B)=0$. Ἰνα αὕτη ἐπαληθεύηται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἰς τῶν παραγόντων $A-B$ ἢ $A+B$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ 0. Ἐὰν μὲν εἶναι $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1), ἂν δὲ εἶναι $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A=-B$. Ἄρα ἡ $A^2=B^2$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

2. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \gamma = 0$

§ 168. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2 - 48 = 2x^2$ (1)

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἰσοδύναμόν της $3x^2 = 48$, ἢ τὴν $x^2 = 16$. Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς $x=4$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον. Ἄρα ἡ $x^2 = 16$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x=4$ καὶ τῆς $x=-4$. Δηλαδή αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ 4 καὶ -4.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξίσωσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$ (ἐνῷ εἶναι $\alpha \neq 0$) ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2 = -\gamma$ ἢ τὴν $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἐπειδὴ αὕτη προκύπτει ἀπὸ τὴν $x = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, ἂν τὰ μέλη της ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, αἱ ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς $\alpha x^2 + \gamma = 0$, εἶναι αἱ $x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἐὰν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι πραγματικά, ἐνῷ ἂν $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, θὰ εἶναι φανταστικά συζυγεῖς.

Δηλαδή ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς ρίζας θὰ εἶναι

$\rho_1 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}, \rho_2 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ εἰς τὴν α' περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν β'

$$x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{(-1)\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{i^2 \frac{\gamma}{\alpha}},$$

$$\text{ἥτοι } \rho_1 = i \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad \rho_2 = -i \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

*Εστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2+25=0$. Εἶναι $\alpha=5$, $\gamma=25$ καὶ

$$x=\pm\sqrt{-5} \text{ δηλ. } x=\pm i\sqrt{5}.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2=0$, ὅπου $\alpha \neq 0$, προφανῶς ἔχει ρίζαν τὴν $x=0$

Ἀσκήσεις

345. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\alpha') 4x^2-3=x^2+6, \quad \beta') 9x^2-0,2=3x^2+15, \quad \gamma') \frac{9x}{4} + \frac{x-1}{x} = 1.$$

346. Ὅμοίως αἱ :

$$\alpha') \frac{x^2-\alpha^2}{5} - \frac{x^2-\beta^2}{2} = \frac{1}{3}, \quad \beta') (x+7)(x-7)=32, \quad \gamma') 7(2x+5)(2x-5)=44,$$

$$\delta') 8\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right) = 946, \quad \epsilon') x^2 - 12 - 2\sqrt{11} = 0.$$

347. Ὅμοίως αἱ :

$$\alpha') \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = 171, \quad \beta') (7+x)(9-x) + (7-x)(9+x) = 76,$$

$$\gamma') \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^4} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

3. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x = 0$

§ 169. *Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2+5x=0$ (1)

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω : $x(3x+5)=0$. Τὸ γινόμενον $x(3x+5)$ γίνεται 0, ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ 0. Δηλαδή, ὅταν εἶναι $x=0$ καὶ ὅταν $3x+5=0$.

*Εκ ταύτης εὐρίσκομεν $x=-\frac{5}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

*Ὑποθέτωμεν, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x = 0$ (ἐνῶ εἶναι $\alpha \neq 0$), Γράφομεν αὐτὴν οὕτω : $x(\alpha x + \beta) = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις

348. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις : $\alpha') 6x^2-8x+7x^2=12x-8x$.

$$\beta') \frac{3}{4} x^2 = \frac{7x}{3} - \frac{x}{3}$$

$$\gamma') \frac{x^2}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} = \frac{x^2 + \alpha x}{\alpha \beta},$$

$$\delta') \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{x}{\alpha + \beta} = \frac{x^2 - x}{\alpha - \beta},$$

$$\epsilon') \frac{(\alpha - x)^4 - (x - \beta)^4}{(\alpha - x)^2 - (x - \beta)^2} = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$349. \text{ 'Ομοίως αί: } \alpha') 1,6x^2 - 0,8x + 1,7x^2 = 1,2x - 8x, \beta') 2,2x^2 - 7x = 1,4x$$

4. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

§ 170. Διά νά λύσωμεν τήν εξίσωσιν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
($\alpha \neq 0$), θεωροῦμεν τήν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νά καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη της ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ β^2 , ὅτε εὐρίσκομεν τήν $4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτω: $(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν (1), προκύπτει δὲ ἀπὸ τήν $2\alpha x + \beta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον ἄρα ἔχει τὰς ρίζας τῶν $2\alpha x + \beta = \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$.

Ἐκ τούτων εὐρίσκομεν $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. Ἦτοι, ἂν καλέσωμεν ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους εὐρίσκομεν τὰς ρίζας οἵας-δήποτε μορφῆς εξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ εξίσωσις $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Εἶναι τὸ $\alpha = 3$, τὸ $\beta = -5$ καὶ τὸ $\gamma = 2$. Ἐπομένως εὐρίσκομεν $\rho_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 24}}{6}$, $\rho_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 24}}{6}$. Ἦτοι $\rho_1 = 1$ καὶ $\rho_2 = \frac{2}{3}$.

Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ εξίσωσις $4x^2 + 25 = 0$.

Ἐχομεν $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $\gamma = 25$. Ἐπομένως εὐρίσκομεν

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{-4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4}, \quad \rho_2 = \frac{-\sqrt{-4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \quad \eta \quad \rho_1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot i}{2 \cdot 4} = \frac{5}{2} i, \quad \rho_2 = -\frac{5}{2} i.$$

Ἀσκήσεις

Ὅμως πρῶτη. 350. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς εξισώσεις:

$$\alpha') 3x^2 - 3x = 8, \quad \beta') 3x^2 - \frac{2}{3}x = 25, \quad \gamma') x^2 - \frac{3}{4}x = 3x + 1, \quad \delta') x^2 - x - 2 = 0.$$

351. 'Ομοίως τὰς: α') $x^{-2}-12x^{-1}+27=0$, β') $9x^{-2}-21x^{-1}+12=0$,
 γ') $(x-1)(x-2)=0$, δ') $x^2=\sqrt{3}(2x-\sqrt{3})$, ε') $\sqrt{3}x^2+\sqrt{19}x+\sqrt{5}=0$,
 στ') $(x-1)^2-(3x+8)^2=(2x+5)^2$, ζ') $(6x-1)^2+(3x+4)^2-(5x-2)(5x+2)=53$,
 η') $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2=0$, θ') $\frac{x(2x+8)}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2=320$,
 ι') $x+\frac{2}{x}=2(1+\sqrt{6})$.

'Ο μ ἄ ς δ ε υ τ έ ρ α. 352. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις:

α') $x^2+9ax-10a^2=0$, β) $x^2-2ax-3a^2=0$ γ') $x^2=5a(10a+x)$
 δ') $x(\alpha+x)=\alpha^2\beta(\beta-1)$, ε') $x^2-2(\alpha+8)x+32\alpha=0$, στ') $x^2-2(\alpha+\beta)x+4\alpha\beta=0$
 ζ') $x+\frac{1}{x}=\alpha+\beta+1$, η') $\frac{(2x-\beta)^2}{2x-\alpha+\beta}=\beta$, θ') $\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(2\alpha x-\frac{\beta^2}{\gamma}\right)=0$,
 ι') $\frac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$, ια') Δείξατε, ὅτι, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,

$\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν, πρέπει (καὶ ἀρκεῖ) νὰ ἔχωμεν:
 $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$. (Ἐν ρ_1 ἡ κοινὴ ρίζα, εὑρετὲ τὰ ρ_1^2 , ρ_1 , ἐκ τῶν
 $\alpha\rho_1^2+\beta\rho_1+\gamma=0$, $\alpha_1\rho_1^2+\beta_1\rho_1+\gamma_1=0$, καὶ ἂν εὑρεθῇ $\rho_1^2=\kappa$, $\rho_1=\lambda$, θέσατε $\lambda^2=\kappa$)

'Ο μ ἄ ς τ ρ ί τ η. 353. α') Ἐὰν ὁ συντελεστής τοῦ x^2 τῆς ἐξίσωσως β' βαθμοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$4x^2-23x=-30.$$

β') Ἐὰν ὁ συντελεστής τοῦ x^2 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστής τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=2$

§ 171. Ἐνίοτε λύομεν τὴν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ δι' ἀμέσου ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ εὐκόλως. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+7x-60=0$. Τρέποντες τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων ἔχομεν τὴν $(x+12)(x-5)=0$. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου μέλους ἰσοῦται μέ 0, ἀρκεῖ $x+12=0$ ἢ $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν $x=-12$, $x=5$.

Μὲ τὴν προηγουμένην πορείαν δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π.χ. ἂν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $x(x^2-x-6)=0$ ἢ $x(x-3)(x+2)=0$. Αὕτη δὲ ἔχει ρίζας τὰς $x=0$, $x=3$, $x=-2$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3-8=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν

της $x^3-2^3=0$, ἢ τὴν $(x-2)(x^2+2x+4)=0$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὰς ρίζας, ἅν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x-2=0$, $x^2+2x+4=0$. Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $x=2$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x=-1 \pm i\sqrt{3}$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις διὰ τροπῆς τοῦ πρώτου μέλους ἐκάστης εἰς γινόμενον παραγόντων :

$$354. \alpha') x^3-x^2-2x=0, \beta') 4x^3-4x^2-x+1=0, \gamma') x^3+9x^2+27x+27=0,$$

$$355. \alpha') x^3+\alpha x^2+\alpha x+1=0, \beta') x^3-\lambda x^2+2\lambda x-(\lambda+1)=0$$

$$\gamma') x^3+8+3(x^2-4)=0.$$

$$356. \alpha') x^3+\alpha x^2+\alpha x+\alpha^2=0 \quad \beta') x^4+4x^3+4x^2+x=0,$$

$$\gamma') \alpha^4(\alpha+x)^4-\alpha^4x^4=0.$$

$$357. \alpha') x^5-x^4-x+1=0, \beta') x^6-12x^4+48x^2-64=0,$$

$$\gamma') x^3+\alpha x \pm (\alpha+1)=0.$$

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΛΥΟΜΕΝΑΙ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 172. Ἐνίοτε ἐξισώσεις τινές β' βαθμοῦ ἢ καὶ ἀνωτέρου ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν ἀπλουστερῶν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ μὲ τὴν χρησιμοποίησιν βοθητικῶν ἀγνώστων. Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις

$$(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)-84=0.$$

Διὰ τὴν λύσιν αὐτῆς θέτομεν $x^2-5x=\omega$, ὅτε εὐρίσκομεν $\omega^2-8\omega-84=0$.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν $\omega=4 \pm 10$, ἥτοι $\omega_1=14$, $\omega_2=-6$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς τοῦ ω εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-5x=\omega$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2-5x=14$, $x^2-5x=-6$. Ἐκ τῆς λύσεως ἐκάστης τούτων εὐρίσκομεν $x=7$ καὶ $x=-2$ ἐκ τῆς α' καὶ $x=3$, $x=2$ ἐκ τῆς β' . Ἀρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $-2, 2, 3, 7$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$358. (6x-1)^2-11(6x-1)+28=0. \quad 359. 2(x-7)^2+4(x-7)-2=0.$$

$$360. (x+1)^2+2\frac{(x^2-0,25)}{2x-1}+0,5=8,75. \quad 361. (2x-\alpha)^2-\beta(2x-\alpha)-2\beta^2=0.$$

$$362. (3x-2\alpha+\beta)^2+2\beta(3x-2\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2. \quad 363. (x^2+3)^2-7(x^2+3)-60=0.$$

$$364. (x^2+7x)^2-6(x^2+7x)-16=0, \quad 365. (x^2-7x)^2-13(x^2-7x+18)+270=0.$$

$$366. \left(2x+4-\frac{3}{x}\right)\left(2x-\frac{3}{x}+2\right)-35=0. \quad 367. \left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2-\frac{26}{5}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)+1=0.$$

6. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

§ 173. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, θὰ ἔχωμεν, ὡς εἶδομεν.

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν εἶναι τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι.

Ἐὰν τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἐπεὶ δὴ δὲ τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ γράφεται καὶ οὕτω : $-(4\alpha\gamma - \beta^2) = i^2(4\alpha\gamma - \beta^2)$, ἔπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ρίζαι εἶναι συζυγεῖς φανταστικά, ἥτοι :

$$\rho_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἐξῆς πίνακα :

1ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι

2ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες (ἢ φανταστικά) συζυγεῖς.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Εἶναι $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 24 = 1$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικά καὶ ἄνιστοι.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

Εἶναι $\alpha = 3$, $\beta = -12$, $\gamma = 12$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 144 - 144 = 0$. Ἀρα αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικά καὶ ἴσαι.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - 3x + 4 = 0$ εἶναι $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 32 = -23$. Ἀρα αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι μιγάδες συζυγεῖς.

Ἀσκήσεις

Ὅμας πρώτη. 368. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν :

$$\alpha') x^2 - 15x + 16 = 0 \quad \beta') x^2 + 4x + 17 = 0 \quad \gamma') x^2 + 9x - 7 = 0$$

$$\delta') x^2 - 3x - 21 = 0, \quad \epsilon') x^2 = 1 - 7x, \quad \sigma\tau') 2x + 3 = x^2.$$

369. Δείξτε, ότι αι ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι πραγματικά, ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι πραγματικοί :

$$\alpha') \frac{\alpha^2}{x-\gamma} + \frac{\beta^2}{x-\delta} = 1, \quad \beta') \alpha^2 x^2 + \beta \gamma x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$\gamma') x^2 = \pi (x + 2\pi). \quad \delta') \frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-\gamma} = 0.$$

370. Δείξτε, ότι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικά, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν $x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + 2\beta(\alpha + \gamma) + 3\alpha\gamma = 0$.

371. 'Εὰν ἡ $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ ἔχη ρίζας πραγματικές, δείξτε, ότι καὶ ἡ ἐξίσωσις $\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma - 1 = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικές.

372. Δείξτε, ότι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι ρηταί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι ρητοί :

$$\alpha') x^2 - 5\alpha x + 4\alpha^2 = 0, \quad \beta') x(x + 2\beta) - 24\beta^2 = 0, \quad \gamma') \alpha\beta\gamma x^2 - (\alpha^2\beta^2 + \gamma^2)x + \alpha\beta\gamma = 0.$$

$$373. \text{'Ομοίως τῶν : } \alpha') (\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 2(\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta - \gamma) = 0.$$

$$\beta') (4\alpha^2 - 9\gamma^2\delta^2)x^2 + 4\alpha(\alpha\gamma^2 + \beta\delta^2)x + (\alpha\gamma^2 + \beta\delta^2)^2 = 0.$$

374. Δείξτε, ότι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν συμμετρους ρίζας, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι :

$$\alpha') x^2 = \alpha^2(2\alpha^2 - x), \quad \beta') 2x^2 + (\gamma + 4)x + 2\gamma = 0, \quad \gamma') 2\gamma x^2 - c\beta(x - 2\delta) = 4\gamma\delta x.$$

$$\delta') 2x^2 + (6\alpha - 10\kappa)x - 30\alpha\kappa = 0.$$

375. Δείξτε, ότι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + px + \kappa = 0$ ἔχει συμμετρους ρίζας, ὅταν :

$$\alpha') \kappa = \left(\frac{\pi + \lambda}{2} \right) \left(\frac{\pi - \lambda}{2} \right). \quad \beta') \pi = \lambda + \frac{\kappa}{\lambda} \text{ μὲ } \lambda, \kappa \text{ συμμετρους.}$$

376. Δείξτε, ότι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι φανταστικά, ἂν α, β, γ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\neq 0$ καὶ $\beta \neq \gamma$.

$$\alpha') \alpha^2\beta x^2 - 2\alpha\beta x + 2\beta = 0, \quad \beta') x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

$$\gamma') x^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}x + 17\alpha\beta = 0, \quad \delta') x^2 \pm 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 = 0.$$

377. Δείξτε, ότι ἡ ἐξίσωσις $(\alpha x + \beta)^2 + (\alpha_1 x + \beta_1)^2 = 0$ ἔχει ρίζας φανταστικές ἐὰν $\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1 \neq 0$.

378. 'Εὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ εἶναι φανταστικά, δείξτε, ότι καὶ αἱ τῆς $ax^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2\beta + \gamma + \alpha = 0$ εἶναι ἐπίσης φανταστικά.

379. Δείξτε, ότι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $8\alpha^2 x(2x - 1) + \beta^2 = 0$ εἶναι φανταστικά, αἱ τῆς $4\alpha^2 x^2 + \beta^2(4x + 1) = 0$ θὰ εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι.

'Ο μὰς δὲ ν τ ἐ ρ α. 380. Διὰ τίνας τιμὰς τοῦ μ αἱ κατωτέρω ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικές καὶ ἴσας ;

$$\alpha') 2\mu x^2 + (5\mu + 2)x + 4\mu + 1 = 0, \quad \beta') 0,5\mu x^2 - (2\mu - 1)x = 3\mu - 2,$$

$$\gamma') (\mu + 1)x^2 + 3(\mu - 1)x + \mu - 1 = 0, \quad \delta') (2\mu - 3)x^2 + \mu x + \mu - 1 = 0.$$

7. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

§ 174. 'Εκ τοῦ τύπου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

$$\text{Έχουμε: } \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (1)$$

Ἐὰν μὲν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$, ἔὰν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\rho_1 \rho_2 = \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς συζυγεῖς ποσότητες $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἥτοι τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν $-\beta$ καὶ $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ἐπομένως τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι $\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 4\alpha\gamma$. Ἄρα ἔχομεν $\rho_1 \rho_2 = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Π.χ. τῆς ἐξίσωσως $3x^2 - 5x + 6 = 0$ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{5}{3}$, τὸ δὲ γινόμενον $\frac{6}{3} = 2$.

§ 175. Δοθέντος τοῦ ἁθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς διὰ τῆς λύσεως ἐξισώσεως β' βαθμοῦ.

Πράγματι, ἂν β εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Διότι, ἂν x παριστάνῃ τὸν ἓνα ἀριθμὸν, ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\beta - x$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $x(\beta - x) = \gamma$ ἢ $x^2 - \beta x + \gamma = 0$. (1)

Ὁ εἰς τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσως (1). Ὁ ἄλλος ἀριθμὸς θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ ἄλλη ρίζα τῆς (1), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν αὐτῆς εἶναι β , ὅσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν. Π.χ. ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι -4 καὶ τὸ γινόμενον -45 , οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς $x^2 + 4x - 45 = 0$, ἥτοι οἱ 5 καὶ -9 .

§ 176. Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄν τὸ α τείνῃ εἰς τὸ 0 , ἄλλὰ $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $\beta x + \gamma = 0$, τῆς ὁποίας ἡ ρίζα εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta}$. Ἡ ἄλλη ρίζα τῆς δοθείσης ἐξίσωσως θὰ τείνῃ εἰς τὸ $\pm \infty$. Πράγματι

ἔπειδὴ τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει εἰς τὸ $(\pm)$ ἄπειρον, ἡ δὲ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως
 τείνει εἰς τὸ $-\frac{\gamma}{\beta}$, ἡ ἄλλη θὰ τείνη εἰς τὸ $\pm \infty$.

Ἀσκήσεις

Ὁ μᾶς πρῶτη. 381. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν
 τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν :

$$\alpha') 2x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \beta') 3x^2 + 8x - 12 = 0, \quad \gamma') x^2 - 7x + 10 = 0.$$

$$382. \text{Ὁμοίως τῶν:} \quad \alpha') x^2 + 2\alpha x = 3\alpha^2 \quad \beta') x^2 - 4\alpha x = -3\alpha^2.$$

383. Εὕρετε τὴν ἄλλην ρίζαν τῶν ἐξισώσεων :

$$\alpha') x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \text{ἂν ἡ μία εἴναι 2,}$$

$$\beta') x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0. \quad \text{ἂν ἡ μία εἴναι } \frac{1}{3},$$

$$\gamma') x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \text{ἂν ἡ μία εἴναι } \alpha.$$

Ὁ μᾶς δευτέρα. 384. α') Ἄν ρ_1, ρ_2 εἴναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εὐ-
 ρετε τὸ $\rho_1 - \rho_2$ διὰ τῶν α, β, γ .

β') Νὰ εὕρεθῇ τὸ $\rho_1^2 + \rho_2^2$ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ καὶ ἀκολου-
 θῶς τὸ $\rho_1^3 + \rho_2^3$ διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

385. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφορὰν, τὸ ἄθροισμα τῶν τε-
 τραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + px + k = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὐτή.

386. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων
 χωρὶς νὰ λυθοῦν αὐταί :

$$\alpha') x^2 - 9x + 10 = 0, \quad \beta') x^2 + 5x - 7 = 0, \quad \gamma') 3x^2 + 7x - 6 = 0.$$

387. Προσδιορίσατε τὸ λ , ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν
 τῆς ἐξισώσεως $x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 3) = 0$ νὰ εἴναι μ.

388. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξύ τῶν β καὶ γ , ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξι-
 σώσεως $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχουν λόγον λ .

389. Εὕρετε σχέσιν τῶν α, β, γ , ἵνα, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
 εἶναι ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν .

390. Προσδιορίσατε τὰ β καὶ γ , ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως
 $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, εἶναι 4, τῶν δὲ κύβων τῶν 208.

391. Προσδιορίσατε τὸν ν , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως
 $(\alpha - \beta)x^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)x + \nu = 0$ νὰ εἶναι ἴσαι ἢ νὰ ἔχουν γινόμενον 1.

392. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως
 $3x^2 - 10x + \gamma = 0$ νὰ εἶναι μιγαδικαί ; Νὰ ἔχουν γινόμενον $-0,75$;

393. Προσδιορίσατε τὸ γ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8x + \gamma = 0$ νὰ
 πληροῦν τὰς ἐξῆς σχέσεις. α') $\rho_1 = \rho_2$, β') $\rho_1 = 3\rho_2$, γ') $\rho_1\rho_2 = \pm 1$.

394. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς σχέσεις : α') $3\rho_1 = 4\rho_2 + 3$, β') $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 40$.

8. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $ax^2+bx+\gamma=0$

§ 177. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶναι τὸ πρόσημον ἐκάστης τῶν ριζῶν αὐτῆς, ἂν εἶναι πραγματικά, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ εἶναι $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{a}$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{a}$, ἔπεται, ὅτι ἔχομεν τὸν ἐξῆς πίνακα.

Πρόσημα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+\gamma=0$.
 ἂν $\beta^2-4a\gamma > 0$.

1ον. Ἄν εἶναι $\frac{\gamma}{a} > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι· θετικοὶ μὲν ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{a} > 0$, ἀρνητικοὶ δέ, ἂν εἶναι τὸ $-\frac{\beta}{a} < 0$.

2ον. Ἄν εἶναι $-\frac{\gamma}{a} < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἐτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλύτερα ἢ θετικὴ μὲν, ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{a} > 0$, ἢ ἀρνητικὴ δέ, ἂν τὸ $-\frac{\beta}{a} < 0$.

3ον. Ἄν εἶναι $\frac{\gamma}{a} = 0$, ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ 0, ἡ δὲ ἄλλη μὲ $-\frac{\beta}{a}$.

*Εἰσὼ π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$.

*Ἐχομεν $\beta^2-4a\gamma=64-48=16=\text{θετικός}$. Ἄρα αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικά. Ἐπειδὴ δὲ $\rho_1\rho_2=12 > 0$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-8 < 0$, θὰ εἶναι ἀρνητικά.

* Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

395. Εὑρετε τὸ σῆμα τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὐται :

$$\alpha') x^2-8x+12=0, \quad \beta') 6x^2-15x-50=0, \quad \gamma') 7x^2+14x-1=0.$$

396. Ὅμοιως τῶν ἐξῆς :

$$\alpha') 7x^2-5x-1=0, \quad \beta') x^2-3x-4=0, \quad \gamma') 3x^2-4x-2=0,$$

$$\delta') x^2-3x+2=0, \quad \epsilon') x^2+3x+1=0, \quad \sigma\tau') 5x^2-15x-1=0.$$

9. ΤΡΟΠΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2+bx+\gamma=0$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ x

§ 178. Ἐστω ὅτι ζητεῖται νὰ τραπῇ τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$

εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου, θὰ εἶναι

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad (1)$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες τὸ $\alpha \neq 0$ γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἐξῆς :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ μὲ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\rho_1 + \rho_2)$ ἐκ τῆς (1)

καὶ τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ μὲ τὸ $\rho_1 \rho_2$ ἐκ τῆς (2) εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha [x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \rho_2] = \alpha (x^2 - \rho_1 x - \rho_2 x + \rho_1 \rho_2) = \\ &= \alpha [(x - \rho_1)x - \rho_2(x - \rho_1)] = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2). \end{aligned}$$

Ἦτοι τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

Διακρίνομεν τῶρα τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

1ον. Ἄν αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

2ον. Ἄν εἶναι $\rho_1 = \rho_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)^2$.

3ον. Ἄν εἶναι $\rho_1 = \lambda + \delta i$, $\rho_2 = \lambda - \delta i$ (μιγάδες συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν $x - \rho_1 = (x - \lambda) - \delta i$, $x - \rho_2 = (x - \lambda) + \delta i$, καὶ

$$\alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha [(x - \lambda) - \delta i][(x - \lambda) + \delta i] = \alpha [(x - \lambda)^2 + \delta^2].$$

Ἄρα : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha [(x - \lambda)^2 + \delta^2]$. Ἦτοι :

Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον μὲν τοῦ α ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x , ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνιστοι, εἰς γινόμενον δὲ τοῦ α ἐπὶ ἓν τέλειον τετράγωνον ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες (συζυγεῖς).

Π.χ. διὰ τὸ $2x^2 - 3x - 2$, τοῦ ὁποῖου αἱ ρίζαι εἶναι 2 καὶ $-0,5$, ἔχομεν $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x + 0,5)$.

Διὰ τὸ $2x^2 - 12x + 18$, τοῦ ὁποῖου αἱ ρίζαι εἶναι ἴσαι μὲ 3, ἔχομεν $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$.

10. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΑΥΤΟΥ

§ 179. Ὅταν δοθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 ἐνὸς τριωνύμου β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x , τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x - \rho_1)(x - \rho_2) = x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \rho_2$

πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παράγοντά τινα σταθερόν. Ἦτοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλειπομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ εἶναι ἴσον μὲ $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-3)\left(\frac{2x-1}{2}\right) = \frac{2x^2-7x+3}{2}$, τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁ μ ᾶ ς π ρ ῶ τ η 397. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα :

$$\alpha') x^2-9x+18 \quad \beta') x^2+4x+3, \quad \gamma') 2x^2+3x-2,$$

$$\delta') 2x^2+12x+18 \quad \epsilon') x^2-4x-5, \quad \sigma\tau') x^2-5x+6,$$

398. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

$$\alpha') \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, \quad \beta') \frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}, \quad \gamma') \frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}.$$

Ὁ μ ᾶ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 399. Εὕρετε ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους ἔχουσιν ρίζας :

$$\alpha') 3 \text{ καὶ } 0,5 \quad \beta') 3 \pm \sqrt{2}, \quad \gamma') 4 \pm \sqrt{5}, \quad \delta') \pm i\sqrt{2}$$

$$\epsilon') \alpha \pm \beta, \quad \sigma\tau') \alpha \pm \sqrt{\beta}, \quad \zeta') \alpha \pm i\sqrt{\beta}, \quad \eta') \alpha \pm \sqrt{\alpha}.$$

400. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας ρίζας τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

$$\alpha') \frac{2x-5}{9x} - \frac{8}{x-15} = 1, \quad \beta') x^2 = \sqrt{3}(2x-\sqrt{3}),$$

$$\gamma') x^2 + \beta \left(\frac{x-\alpha}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \right) = 2\alpha\beta(x-\alpha\beta).$$

401. Σχηματίσατε τὴν ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσιν ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{17}x + \sqrt{5} = 0$.

402. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας ρίζας τοὺς κύβους τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων : $\alpha') 2x(x-\alpha) = \alpha^2$, $\beta') x^2 + \alpha x = \alpha^2\beta(\beta+1)$.

403. Σχηματίσατε τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τῆς εἶναι 7, τοῦ πρωτοβαθμίου -14 καὶ ἡ μία τῶν ριζῶν -5.

404. Ἐάν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἢ τῆς $x^2 + \pi x + \kappa = 0$, σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας τὰς κάτωθι ρίζας :

$$\alpha') x_1^2, x_2^2, \quad \beta') -x_1^2, -x_2^2, \quad \gamma') x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, \quad \delta') x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2,$$

$$\epsilon') x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_1, \quad \sigma\tau') x_1^2 + x_2, x_1 + x_2^2, \quad \zeta') \frac{x_1 + x_2}{-2x_2}, \frac{x_1 + x_2}{2x_1},$$

$$\eta') \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \gamma x_1^2 - \beta x_1 x_2 + \alpha x_2^2, \quad \theta') \frac{x_1}{x_2^3}, \frac{x_2}{x_1^3}.$$

405. Ἐάν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha') (\alpha x_1 + \beta)^2 + (\alpha x_2 + \beta)^2, \quad \beta') (\beta x_1^2 + \gamma)(\beta x_2^2 + \gamma),$$

$$\gamma') (\gamma x_1 + \beta)^{-2} + (\gamma x_2 + \beta)^{-2}$$

406. Ἐάν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $5x^2 - 12x + 1 = 0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $x_1^3 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_2^3$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

407. Ἐάν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x - 35 = 0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{x_1 + x_2}{x_1} - \frac{x_1 + x_2}{x_2}$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

11. ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ΔΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 180. Ἐστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμὰς. Ἄν αἱ ρίζαι αὐτοῦ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\rho_1 < \rho_2$), θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

α') Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μικρότεραι τοῦ ρ_1 , ἐπομένως καὶ τοῦ ρ_2 . Τότε τὰ $x - \rho_1, x - \rho_2$ εἶναι ἀρνητικὰ, τὸ δὲ $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ (ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων) εἶναι θετικόν, καὶ τὸ $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ θὰ ἔχη τὸ πρόσημον τοῦ α .

β') Ἐστω, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_2 , ἐπομένως καὶ τοῦ ρ_1 . Τότε τὰ $x - \rho_1$ καὶ $x - \rho_2$ εἶναι θετικὰ, ἐπίσης καὶ τὸ $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ γινόμενον $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ θὰ ἔχη τὸ πρόσημον τοῦ α .

γ') Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_1 , ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ ρ_2 , ἥτοι $\rho_1 < x < \rho_2$. Τότε τὸ μὲν $x - \rho_1$ εἶναι θετικόν, τὸ $x - \rho_2$ ἀρνητικόν, τὸ δὲ $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ εἶναι ἀρνητικόν (ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμεων παραγόντων), ἄρα τὸ $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α .

δ') Ἄν αἱ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες ἀριθμοὶ ἐν γένει, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πραγματικὴν καὶ διάφορον τῶν ριζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α . Διότι, ἂν μὲν εἶναι $\rho_1 = \rho_2$ τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)^2$. Ἦτοι ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α διὰ κάθε $x \neq \rho_1$. Ἄν δὲ αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἐπομένως ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α . Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Όταν τὸ x λάβῃ τιμὴν πραγματικὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α , ἐνῶ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην, μεταξύ τῶν ριζῶν ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α .

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

408. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικὰς ; ἀρνητικὰς ;

$$\alpha') 2x^2 - 16x + 24, \quad \beta') -2x^2 + 16x - 24, \quad \gamma') 2x^2 - 16x + 32, \quad \delta') 0,75x^2 - 6x + 1.$$

$$\epsilon') x^2 - 7x - 1, \quad \sigma\tau') x^2 + x - 1, \quad \zeta') 2x^2 - 6x - 3,$$

409. Ὅμοιως τὰ τριώνυμα :

$$\alpha') -2x^2 - 16x - 32, \quad \beta') 2x^2 - 16x + 40, \quad \gamma') -2x^2 + 16x - 40, \quad \delta') -x^2 - 3x + 2.$$

12. ΘΕΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΡΙΖΑΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

§ 181. Δοθέντος τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ ἀριθμοῦ πραγματικοῦ ἔστω λ , ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν (ὑποτιθεμένων πραγματικῶν) ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τεθῇ $x = \lambda$ εἰς τὸ τριώνυμον, ἔαν τὸ $\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$ ἔχη πρόσημον ἀντίθετον τοῦ προσήμου τοῦ α , τότε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ὁ δὲ λ περιέχεται μεταξύ τούτων.

Ἐὰν ὁμως τὸ $\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$ ἔχη τὸ πρόσημον τοῦ α , τότε ὁ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου, ἔστω ρ_1, ρ_2 (ἐνῶ ὑποτίθεται $\rho_1 < \rho_2$). Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν ὁ λ εἶναι μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1 , ἢ μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρ_2 .

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὐρεθῇ, ἂν εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος ἀπὸ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχεται μεταξύ τῶν ριζῶν. Διότι ἂν εἶναι μικρότερος ἀπὸ τοιοῦτον ἀριθμόν, τότε, δεδομένου, ὅτι εἶναι ὁ λ ἐκτὸς τῶν ριζῶν, θὰ εἶναι προφανῶς πρὸ αὐτῶν. Ἐνῶ ἂν εἶναι μεγαλύτερος τοιοῦτου ἀριθμοῦ, θὰ εἶναι ὁ λ μετὰ τὰς ρίζας.

Ἀριθμὸς ὁμως περιεχόμενος μεταξύ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 εἶναι ὁ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλ. τὸ ἡμίαρθοισμα αὐτῶν, διότι ἐκ τῆς $\rho_1 < \rho_2$ προκύπτουν αἱ $2\rho_1 < \rho_1 + \rho_2$ καὶ $\rho_1 + \rho_2 < 2\rho_2$, δηλ. $2\rho_1 < \rho_1 + \rho_2 < 2\rho_2$, ὁπότε $\rho_1 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} < \rho_2$.

Ἄν λοιπὸν εἶναι $\lambda < -\frac{\beta}{2\alpha}$, ὁ λ θὰ εἶναι πρὸ τῶν ριζῶν, καὶ ἂν $\lambda > -\frac{\beta}{2\alpha}$, ὁ λ θὰ εἶναι μετὰ τὰς ρίζας.

Ἐκ τούτων ὀρίζεται ἡ θέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω, ὅτι δίδεται τὸ τριώνυμον x^2+3x-2 καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τοῦ -1 π.χ. ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου, χωρὶς νὰ εὕρεθοῦν αὐται.

Εὐρίσκομεν πρῶτον τὸ σημεῖον τοῦ $(-1)^2+3(-1)-2$. Τοῦτο δίδει ἐξαγόμενον $1-3-2=-4$, δηλαδή ἑτερόσημον τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ x^2 εἰς τὸ δοθὲν τριώνυμον. Ἄρα ὁ -2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Ἐστω, ὅτι διὰ τὸ αὐτὸ τριώνυμον ζητοῦμεν τὴν θέσιν π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας του, χωρὶς νὰ εὕρεθοῦν αὐται. Εἶναι $1^2+3\cdot 1-2=2$, δηλαδή ὁμόσημον τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ x^2 . Ἐπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι $\Delta = 9+8 > 0$. Τὸ ἡμίθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{3}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $1 > -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$, ὁ 1 θὰ εἶναι μετὰ τὰς ρίζας, δηλ. μεγαλύτερος τῆς μεγαλύτερας ρίζης.

2ον. Ἐστω τὸ τριώνυμον $-3x^2+2x+1$ καὶ ὅτι ζητοῦμεν τὴν θέσιν τοῦ 0, ὡς πρὸς τὰς ρίζας του, χωρὶς νὰ εὕρεθοῦν αὐται.

Θέτομεν $x=0$ εἰς τὸ τριώνυμον καὶ εὐρίσκομεν $-3\cdot 0^2+2\cdot 0+1=1$, ἥτοι ἐξαγόμενον ἑτερόσημον τοῦ $a=-3$ συντελεστοῦ τοῦ x^2 εἰς τὸ δοθὲν τριώνυμον. Ἄρα τὸ 0 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου. Διὰ τὸ αὐτὸ τριώνυμον, ἂν ζητοῦμεν τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ 2, ἔχομεν $-3\cdot 2^2+3\cdot 2+1=-12+6+1=-5$, ἥτοι ὁμόσημον τοῦ $a=-3$. Ἐπειτα εὐρίσκομεν, ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι $\Delta=4+12 > 0$. Ἄρα τὸ 2 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου. Εἶναι $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2(-3)} = \frac{1}{3}$ καὶ $2 > \frac{1}{3}$, ἄρα τὸ 2 εἶναι μετὰ τὰς ρίζας, δηλ. μεγαλύτερον τῆς μεγαλύτερας ρίζης τοῦ τριωνύμου.

Ἀσκήσεις

410. Τίς ἡ θέσις τῶν 1, 7, 5, -5 , -1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων :

α') $x^2+3x-4=0$,

β') $2x^2+7x-1=0$,

γ') $x^2-4x+3=0$.

411. Εὑρετε τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ α') $\frac{3}{4}$ β') -1 , γ') $0,5$ δ') $-0,25$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἐκάστου τῶν τριωνύμων :

$$\alpha') 2x^2 - 6x + 1,$$

$$\beta') -x^2 + x - 4,$$

$$\gamma') 7x^2 - 4x - 1,$$

$$\delta') \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - 1,$$

$$\epsilon') 3x^2 + 6x - 4,$$

$$\sigma\tau') -x^2 - 7x - 2,$$

$$\zeta') \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 1,$$

$$\eta') 4x^2 - 7x + 1,$$

$$\theta') 0,5x^2 + 0,6x - 1.$$

13. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 182. Ἐάν, ὅταν $x = \lambda_1$ καὶ $x = \lambda_2$ (ὅπου οἱ λ_1, λ_2 εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των), τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἐπειδὴ, ἂν αἱ ρίζαι ἦσαν ἴσαι ἢ μιγαδικαὶ τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ οὐδέποτε θὰ ἠλλαξέ πρόσημον, ὥστε νὰ ἐλάβανε τιμὰς ἑτεροσήμους· πάντοτε θὰ ἦτο ὁμόσημον τοῦ α (§ 180 δ'). Μεταξύ δὲ τῶν λ_1 καὶ λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Διότι, ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἐπειδὴ διὰ $x = \lambda_1, x = \lambda_2$ αἱ τιμαὶ τοῦ τριωνύμου εἶναι ἑτερόσημοι ἐξ ὑποθέσεως, μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α καὶ ἡ ἄλλη ἑτερόσημος τοῦ α .

Ἄρα, εἰς ἐκ τῶν λ_1, λ_2 θὰ εἶναι ἐντὸς τῶν ριζῶν καὶ ὁ ἄλλος ἐκτὸς αὐτῶν.

Οὕτως ἂν $\lambda_2 > \lambda_1$ καὶ $\rho_2 > \rho_1$ θὰ ἔχωμεν ἡ τὴν διάταξιν $\rho_1 \lambda_1 \rho_2 \lambda_2$ ἢ τὴν $\lambda_1 \rho_1 \lambda_2 \rho_2$ ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται, ὅτι μεταξύ λ_1, λ_2 περιέχεται μία μόνον ρίζα, εἴτε ἡ ρ_2 εἴτε ἡ ρ_1 .

Ἐπὶ τῆς ιδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς : διὰ νὰ εὑρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξίσωσεως κατὰ προσέγγισιν (ἂν δὲν εὐρίσκωνται ἀκριβῶς).

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2 - 2x - 3 = 0$.

Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμοὺς (πραγματικοὺς), ὥστε τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὑρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2 - 2x - 3$, νὰ εἶναι ἑτερόσημα. Ὅταν $x = 0$, εὐρίσκομεν -3 , ὅταν $x = 1$, εὐρίσκομεν 3 . Ἐπομένως μεταξύ 0 καὶ 1 περιέχεται μία

ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1, δηλαδὴ θέτομεν $x=0,5$, ὅτε εὐρίσκομεν $2-4=-2$. ἔπομένως ἡ ἀνωτέρω ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ 1. Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶναι 0,75 καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $x=0,75$ εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Ὅταν $x=-1$, ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἀρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ -1 . (Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὑρετε αὐτήν). Τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς εὐρέσεως πραγματικῶν ριζῶν κατὰ προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ὁμοίως καὶ εἰς ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

412. Εὑρετε μὲ προσέγγισιν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσεγγίσεως (ἐὰν δὲν εὐρίσκωνται ἀκριβῶς καὶ μὲ εὐκολίαν).

- | | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------|
| α') $x^2-5x+3=0$, | β') $3x^2-6x+2=0$, | γ') $2x^2+3x-8=0$, |
| δ') $x^3-3x^2+5x-1=0$, | ε') $2x^2+6x-5=0$, | στ') $x^3+x-1=0$, |
| ζ') $x^4-3x^2+4x-3=0$, | η') $x^4-3x^2-x+1=0$. | |

14. ΛΥΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 183. Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x , εἶναι ἐν γένει τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, ἢ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ (ὅπου ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha \neq 0$).

Ἡ δευτέρα μορφή ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σήματα πάντων τῶν ὄρων, ὅτε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Ὡστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ (1) παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1 , ρ_2 τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου τῆς (1) καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω $\rho_1 < \rho_2$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Ζητοῦμεν νὰ εὐρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x , διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι θετικόν.

Ἄν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον, ὡς γνωστόν, γίνεται θετικόν διὰ $x < \rho_1$ καὶ $x > \rho_2$. Ἀρα αἱ τιμαὶ τοῦ x , αἱ ἐπαληθεύουσιν τὴν

άνισότητα, είναι πάντες οί πραγματικοί αριθμοί οί μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1 καί οί μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ρ_2 τοῦ τριωνύμου.

Ἄν εἶναι $\alpha < 0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x , αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξύ τῶν ρ_1 καί ρ_2 , τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει σημα ἀντίθετον τοῦ α , δηλαδὴ θετικόν. Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν (1) εἶναι πάντες οί πραγματικοί αριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξύ ρ_1 καί ρ_2 .

Ἄν αἱ ρίζαι ρ_1 καί ρ_2 εἶναι ἴσαι καὶ εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν διάφορον τῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι θετικόν. Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοί αριθμοί ἐκτὸς τῆς ρ_1 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

Ἄν ὅμως εἶναι τὸ $\alpha < 0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται διὰ καμμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x . Διότι τότε εἶναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)^2$ καὶ ἄφοῦ τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, τὸ $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι ἀρνητικόν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x , ἐκτὸς τῆς ρ_1 , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται.

Ἄν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν μὲν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x , ἂν εἶναι $\alpha > 0$, δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶναι $\alpha < 0$. Διότι τὸ τριώνυμον τῆς (1) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἥτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

Ἐστω π.χ., ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2 - 2x + 8 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 - 2x + 8$ εἶναι μιγάδες καὶ εἶναι $\alpha = 1 > 0$. Ἀρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x^2 - x - 6 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 - x - 6$ εἶναι αἱ -2 καὶ 3 καὶ τὸ $\alpha = 1 > 0$. Ἐπομένως αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα εἶναι αἱ $x > 3$ καὶ $x < -2$.

§ 184. Ἐστω, ὅτι ἔχομεν π.χ. τὴν ἀνισότητα.

$$x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 7x + 3)(x^2 + x + 1) > 0$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ $x^2 + x + 1$ ἔχει ρίζας φανταστικάς, ἄρα ἔχει τιμὴν θετικὴν δι' οἰανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x . Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπομένην,

$$x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 7x + 3) > 0. \quad (2)$$

Ο πρώτος παράγων x μηδενίζεται όταν $x = 0$, ο δε δεύτερος $x^2 - 3x + 2$, όταν $x = 1$, $x = 2$ και ο τρίτος παράγων $2x^2 + 7x + 3$, όταν $x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$

Αί πέντε αὐταὶ τιμαὶ τοποθετοῦνται κατὰ σειρὰν μεγέθους εἶναι $-3 < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2$.

α') Όταν $x < -3$, ο πρώτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι ἀρνητικός, ὁ $(x^2 - 3x + 2)$ θὰ ἔχη τὸ σῆμα τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 , όταν $x < 1$, ἐπομένως καὶ όταν $x < -3 < 1$, τὸ $x^2 - 3x + 2$ θὰ ἔχη τὸ πρόσσημον θετικόν. Ὁμοίως, ὁ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) ὁ $2x^2 + 7x + 3$, όταν $x < -3$, θὰ ἔχη τὸ πρόσσημον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 , ἤτοι θετικόν. Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων τῆς (2) εἶναι ἀρνητικόν.

β') Όταν εἶναι $-3 < x < -\frac{1}{2}$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι ἀρνητικός ὁ δεύτερος θετικός (διότι τὸ x ἔχει τιμὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν του) καὶ ὁ τρίτος εἶναι ἀρνητικός (διότι ὁ x ἔχει τιμὴν κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν του). Ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι θετικόν.

γ') Όταν εἶναι $-\frac{1}{2} < x < 0$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι ἀρνητικός οἱ ἄλλοι δύο θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀρνητικόν.

δ') Όταν $0 < x < 1$, ὁ πρώτος παράγων εἶναι θετικός, ὁ δεύτερος θετικός καὶ ὁ τρίτος θετικός, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν εἶναι θετικόν.

ε') Όταν ληφθῇ $1 < x < 2$, ὁ πρώτος καὶ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι θετικοί, ὁ δεύτερος ἀρνητικός, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι ἀρνητικόν.

στ') Τέλος ἂν ληφθῇ $x > 2$, οἱ τρεῖς παράγοντες τῆς (2) εἶναι θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται, όταν $-3 < x < -\frac{1}{2}$ ἢ όταν $0 < x < 1$ ἢ όταν $x > 2$.

Ἐν γένει, ἂν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$, ὅπου A, B, Γ , παριστάνουν πολυώνυμα ὡς πρὸς x πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ, εὐρίσκομεν πρῶτον διὰ τίνας τιμὰς τοῦ x ἕκαστον τῶν A, B, Γ , γίνεται θετικόν καὶ διὰ τίνας γίνεται ἀρνητικόν. Τοῦτο εὐρίσκομεν βοηθούμενοι ἀπὸ τὰς ρίζας ἑκάστου τῶν A, B, Γ .

Ἀκολουθῶς ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x κρατοῦμεν ὥς λύσεις τῆς ἀνισότητος ἐκείνας, διὰ τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma$ γίνεται θετικόν.

§ 185. Ἄν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $\frac{A}{B} > 0$, ἀνάγωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B > 0$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἄνισα ἐπὶ B^2 , ὅτε λαμβάνομεν $\frac{A \cdot B^2}{B} > 0$ ἢ $A \cdot B > 0$, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐξετάσωμεν χωριστὰ πότε εἶναι $A > 0$ καὶ $A < 0$, καθὼς καὶ πότε εἶναι $B > 0$ καὶ $B < 0$ καὶ ἀκολουθῶς νὰ κρατήσωμεν ἐκείνας ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\frac{A}{B}$ εἶναι θετικόν.

*Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $1 + \frac{x-4}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} > 0$ ἢ τὴν $\frac{(x-3)(x-1) + (x-4)(x-1) - (x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} > 0$, καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμείων ὄρων (εἰς τὸν ἀριθμητὴν) ἔχομεν τὴν $\frac{x^2-4x+1}{(x-3)(x-1)} > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ x^2-4x+1 εἶναι $2 \pm \sqrt{3}$, αἱ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς τελευταίας ἀνωτέρω ἀνισότητος αἱ 1 καὶ 3. Θέτοντες $x=1$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον $-2 < 0$. Ἄρα τὸ 1 περιέχεται μετὰξὺ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Θέτομεν $x=3$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος καὶ εὐρίσκομεν $9-12+1=-2 < 0$. Ἄρα ἡ ρίζα 3 τοῦ παρονομαστοῦ περιέχεται μετὰξὺ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Οὕτως ἔχομεν $2-\sqrt{3} < 1 < 3 < 2+\sqrt{3}$.

Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι, ὅταν εἶναι $x < 2-\sqrt{3}$, ἢ $x > 2+\sqrt{3}$ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος εἶναι θετικοί, ἥτοι αὕτη ἐπαληθεύεται. Ἐπίσης ὅτι, ὅταν $1 < x < 3$ καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀρνητικοί, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{x^2-4x+1}{(x-3)(x-1)}$ εἶναι θετικόν καὶ ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Ἐνῶ ὅταν $2-\sqrt{3} < x < 1$ ἢ $3 < x < 2+\sqrt{3}$, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται, διότι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἐτερόσημοι καὶ ἐπομένως τὸ κλάσμα γίνεται ἀρνητικόν.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὲς πρώτη. 413. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες :

$$\alpha') x^2+3x-4 > 0, \quad \beta') x^2+3x-6 > 0, \quad \gamma') \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} < -2.$$

414. Εὑρετε τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς ἐπαληθεύουσας τὰς δύο ἀνισότητας :

$$\alpha') x^2-12x+32 > 0 \text{ καὶ } x^2-13x+22 < 0, \quad \beta') x^2-3x+2 > 0 \text{ καὶ } 4x^2+5x+1 < 0$$

415. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες :

$$\alpha') \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1, \quad \beta') \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-2} > 0, \quad \gamma') 3 + \frac{1}{3-x} > \frac{1}{5x+1}.$$

Ὁ μὲς δεύτερα. 416. Νὰ λυθοῦν αἱ κατωτέρω ἀνισότητες, ἂν εἶναι $\alpha(\beta(\gamma(\delta: \alpha')(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)) > 0, \quad \beta')(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0$.

417. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες :

$$\alpha') 4x^3-10x^2+18x < 0, \quad \beta') 3x^3-5x^2+2x > 0, \quad \gamma') x^3-x^2+4x > 0.$$

418. Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ , ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2 + (\mu-1)x + 2\mu = 8$ ἔχη ρίζας πραγματικές ; μιγάδας ;

419. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχη ὁ λ , ἵνα ἡ $x^2 + (2\lambda+1)x > -19$ ἐπαληθεύηται διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ;

15. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ΔΙΑ ΠΑΣΑΣ ΤΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 186. Ἐστω π.χ. τὸ τριώνυμον $7x^2-5x+6$.

*Ἀν παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ ψ , θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν

$$\psi = 7x^2 - 5x + 6 \quad (1)$$

*Ἀν τὸ x ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν τιμὴν πραγματικὴν π.χ. μὲ $x=3$, τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν τιμὴν $7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6$. (2)

*Ἀν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν $3+\epsilon$, ὅπου τὸ ϵ παριστάνει ποσότητά τινα πραγματικὴν, θὰ ἔχωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ψ τὴν $\psi = 7(3+\epsilon)^2 - 5(3+\epsilon) + 6 = 7(3^2 + 2 \cdot 3\epsilon + \epsilon^2) - 5 \cdot 3 - 5\epsilon + 6 = (7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6) + 7 \cdot 2 \cdot 3\epsilon + 7\epsilon^2 - 5\epsilon$. (3)

Ἐὰν ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν (3) τοῦ ψ ἀφαιρέσωμεν τὴν προηγούμενην τιμὴν αὐτοῦ (2), εὐρίσκομεν διαφορὰν τὴν

$$7(3+\epsilon)^2 - 5(3+\epsilon) + 6 - 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 7 \cdot 2 \cdot 3\epsilon + 7\epsilon^2 - 5\epsilon. \quad (4)$$

*Ἀν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ϵ εἶναι ποσότης ὅσον θέλομεν μικρὰ ἀπολύτως, τότε καὶ ἡ ποσότης (4) γίνεται ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἀπολύτως). Διότι ἕκαστος τῶν ὄρων τῆς περιέχει τὸ ϵ , τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν, ὅσον θέλομεν (ἀπολύτως). Πα-

ρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι εἰς ἐλαχίστην (ἀπολύτως) μεταβολὴν τῆς τιμῆς 3 τοῦ x ἀντιστοιχεῖ ἐλαχίστη (ἀπολύτως) μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως (1). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι :

Τὸ τριώνυμον (1) εἶναι συνεχὲς ὡς πρὸς x ἢ συνεχὲς συνάρτησις τοῦ x διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x = 3$.

Ἄλλ' οἰαδιήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν (1), εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι συνεχὲς συνάρτησις τοῦ x διὰ πᾶσαν τοιαύτην τιμὴν τούτου.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι πᾶν τριώνυμον τῆς μορφῆς ax^2+bx+c εἶναι συνεχὲς συνάρτησις διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀρίζομεν τὴν συνέχειαν οἰασδήποτε συνάρτησεως τοῦ x . Ἄν δὲ συνάρτησις τις δὲν εἶναι συνεχὲς διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x , λέγεται **ἀσυνεχὲς** διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ τινος πραγματικῆς τιμῆς λ εἰς ἄλλην μ λαμβάνον συνεχῶς τὰς ἐνδιάμεσους τιμὰς τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν λ καὶ μ , τὸ τριώνυμον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $a\lambda^2+b\lambda+c$ εἰς τὴν τιμὴν $a\mu^2+b\mu+c$ λαμβάνον τιμὰς ἐν συνεχείᾳ.

β') Ἐὰν μεταβλητὴ τις x λαμβάνῃ ἄπειρον πλῆθος πραγματικῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμὸν θετικὸν (ὅσονδήποτε μεγάλον), τότε λέγομεν ὅτι αὕτη **τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον** ($+\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $\rightarrow +\infty$. Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἀπὸ τινος καὶ ἐφ' ἐξῆς εἶναι μικρότεραί παντὸς ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ (ὅσονδήποτε μικροῦ), λέγομεν, ὅτι ἡ x **τείνει εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον** ($-\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $x \rightarrow -\infty$.

Ἐστω τὸ τριώνυμον ax^2+bx+c , ὅπου $a \neq 0$. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πᾶσας τὰς ἐνδιάμεσους πραγματικὰς τιμὰς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἐξῆς :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μὲν εἶναι $a > 0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ πρόσσημον τῆς ποσότητος, ἢ ὁποῖα εἶναι ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἂν δὲ εἶναι $a < 0$, θὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρόσσημον αὐτῆς.

1ον. Ἐστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha > 0$. Ὄταν τὸ $x \rightarrow -\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \rightarrow +\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὠρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, μένει διαφορά, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ὡστε, ὅταν $x \rightarrow -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ λαμβάνον τιμὰς μικροτέρας τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετικόν καὶ ἐλαττοῦται συνεχῶς

Ὄταν τὸ x γίνῃ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται 0, τὸ δὲ τριώνυμον γίνεται $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$. Ὄταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ συνεχῶς τείνει εἰς τὸ $+\infty$ ἡ ποσότης $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετική καὶ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τὸ 0 τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

Ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

2ον. Ἐστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$. Ὄταν τὸ $x \rightarrow -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $-\infty$, διότι τὸ μὲν $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνει εἰς τὸ $+\infty$, ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] \rightarrow -\infty$, ἐπεὶ δὲ εἶναι $\alpha < 0$.

Ὄταν τὸ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ τριώνυμον γίνεται $-\alpha \cdot \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$.

Ὄταν τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει πάλιν εἰς τὸ $-\infty$, ἐνεκα τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha < 0$. Ἥτοι:

Ὄταν τὸ $\alpha > 0$ καὶ τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty \dots -\frac{\beta}{2\alpha} \dots +\infty$, τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$, μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται συνεχῶς μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν δὲ εἶναι τὸ $\alpha < 0$, διὰ τὴν αὐτὴν συνεχῆ μεταβολὴν τοῦ x , τὸ τριώνυμον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$, γίνεται $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἐλαττοῦται πάλιν συνεχῶς μέχρι $-\infty$.

γ') Ὄταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης, εἶναι μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν πλησίον αὐτῆς, τότε λέγομεν, ὅτι αὕτη εἶναι μέγιστον τῆς μεταβλητῆς.

Τούναντίον, ἔαν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶναι μικροτέρα τῶν ἄλλων γειτονικῶν τιμῶν αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὴν ἐλάχιστον τῆς μεταβλητῆς

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι :

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ἐλάχιστον ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τοῦ $\eta - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha < 0$, τὸ τριώνυμον ἔχει μέγιστον, ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ μέγιστη τιμὴ τοῦ $\eta - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Ἐστω π.χ. τὸ τριώνυμον $3x^2 - 6x + 7$. Τὸ $\alpha = 3 > 0$. ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ἐλάχιστον, ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{6} = 1$.

Θέτοντες $x = 1$ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου εἶναι 4.

Ἀ σ κ η σ ι ς

420. Δι' ἕκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x συμβαίνει τοῦτο :

$$\alpha') -x^2 + 4x + 3,$$

$$\beta') 19x^2 - 7x + 3,$$

$$\gamma') x^2 - 7x - 13,$$

$$\delta') 15x^2 + x - 7,$$

$$\epsilon') -x^2 + 3x - 6,$$

$$\sigma\tau') 9,5x^2 - 0,25x - 2.$$

16. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

§ 187. Ἐστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ὅπου εἶναι $\alpha \neq 0$) διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ θέτομεν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (1)

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ὑποθέτοντες, ὅτι ἕκαστον ζευγὸς τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ παριστάνεται μὲ ἓν σημεῖον ἔχον τετμημένην τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ τεταγμένην τὴν τιμὴν τοῦ ψ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$ καὶ $\psi'O\psi$.

1ον. Ὅταν εἶναι τὸ $\alpha > 0$.

Γνωρίζομεν, ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνεται μὲ μίαν καμπύλην γραμμὴν, τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην ἀντιστοίχως τιμὰς τῶν x καὶ ψ τῆς ἐξίσωσεως (1). Ἦτοι

ή ἐν λόγῳ γραμμὴ θὰ ἔχῃ κλάδον συνεχῇ (ἄνευ διακοπῆς τινος), ὁ ὁποῖος θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν $\psi 0x'$ καὶ εἶναι πολὺ μεμακρυσμένον (τετμημένην $x \rightarrow -\infty$ καὶ τεταγμένην $y \rightarrow +\infty$), κατερχόμενος δὲ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α (ἄνω ἢ κάτω τῆς $0x$), ἔχον

τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τεταγμένην δὲ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 16).

Ὅταν τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνεται συνεχῶς τείνουν εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ἐξίσωσις (1) λέγομεν, ὅτι παριστάνει ἄλλον συνεχῇ κλάδον γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν $x0\psi$, μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $+\infty$.

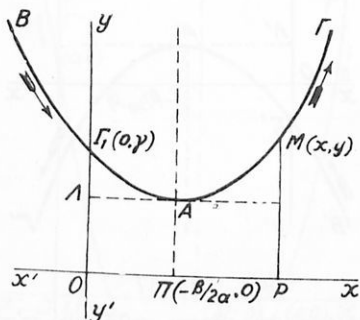
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1), ὅταν τὸ α εἶναι θετικόν, παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ (σχ. 16).

2ον. Ὅταν τὸ $\alpha < 0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

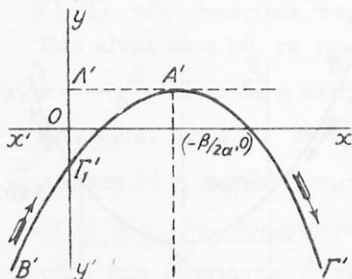
Ἐπομένως διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἓνα συνεχῇ κλάδον, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον εἰς τὴν γωνίαν $x'0\psi'$, τοῦ ὁποῖου ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη τείνουν εἰς τὸ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α' (ἄνω ἢ κάτω τῆς $0x$), τοῦ ὁποῖου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 17).

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τριώνυμον, ἄρα καὶ τὸ y , ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς λέγομεν ὅτι παριστάνει



Σχ. 16

συνεχῆ κλάδον (καμπύλης) γραμμῆς, ὁ ὁποῖος κατέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A' καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον κείμενον εἰς τὴν γωνίαν $xO\psi'$ μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τείνουσας εἰς τὸ $+\infty$ καὶ $-\infty$ (σχ. 17) ἀντιστοίχως.



Σχ. 17

Διὰ νὰ εὐρώμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ , παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x=0$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $x=0$, εἰς τὴν (1), εὐρίσκομεν $\psi=\gamma$. Ὡστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα $\psi O'\psi$ εἰς τὸ σημεῖον Γ . ἢ Γ' , ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ .

Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου, ὅταν τεθῇ εἰς αὐτὸ $x=\rho_1$, ἢ $x=\rho_2$, ἔχομεν $\psi=0$.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας ρ_1 καὶ ρ_2 . Ἄν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι φανταστικοὶ ἢ μιγάδες ἀριθμοὶ, ἡ καμπύλη (πραγματικῶς) δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x .

Δυνάμεθα νὰ εὐρώμεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης θέτοντες $x=1, 2, 3, \dots$ ὅτε εὐρίσκομεν $\psi=\alpha+\beta+\gamma$, $\psi=4\alpha+2\beta+\gamma$, $\psi=9\alpha+3\beta+\gamma, \dots$ Οὕτως εὐρίσκομεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.

$$(1, \alpha+\beta+\gamma), \quad (2, 4\alpha+2\beta+\gamma), \quad (3, 9\alpha+3\beta+\gamma) \dots$$

Ἐπίσης θέτομεν $x=-1, -2, -3$ καὶ εὐρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἄν θέλωμεν, θέτομεν x ἴσον μὲ ἄλλας τιμὰς π.χ. $x=\pm 0,1, \pm 0,2, \dots$ $x=\pm 2,1 \pm 2,2 \dots$ καὶ εὐρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης.

§ 188. Παρατήρησις. Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1), καλεῖται **παραβολή**, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ προσήμου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

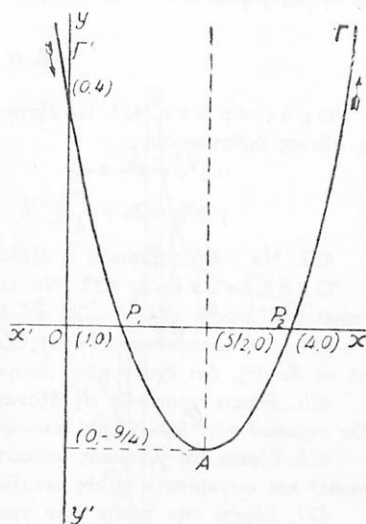
Ἐφαρμογή. Ἐστω τὸ τριωνύμου $\psi = x^2 - 5x + 4$. Ἐχομεν

$$\psi = x^2 - 5x + 4 + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$

ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Οὕτως ἡ καμπύλη ἔχει συνεχῇ κλάδον Γ'Α ἀρχόμενον ἀπὸ σημείου με τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $-\infty$ καὶ $+\infty$ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (σχ. 18).

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ ψ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον συνεχῇ κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τεινούσας εἰς $+\infty$.



Σχ. 18

Ὅταν τὸ $x=0$, τὸ ψ εἶναι ἴσον με 4. Ἄρα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον Γ' (0,4). Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεία (1,0) καὶ (4,0), ἐπεὶδὴ εἶναι $\rho_1=1$ καὶ $\rho_2=4$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα σημεία τῆς καμπύλης θέτομεν π.χ. $x=2$ καὶ εὕρισκομεν $\psi=4-10+4=-2$, $x=-2$, ὅτε $\psi=4+10+4=18$, $x=3$, ὅτε $\psi=9-15+4=-2$, $x=-3$, ὅτε $\psi=9+15+4=28$.

Οὕτως ἔχομεν ὡς σημεία τῆς καμπύλης τὰ :

$$(2, -2) \quad (-2, 18), \quad (3, -2), \quad (-3, 28).$$

Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=ax^2+bx+\gamma$ παριστανομένη γραμμὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x , θὰ ὀρίσῃ τὰ σημεία αὐτὰ με τὰς τετμημένας τῶν. Ἄλλ' αὐτὰ θὰ εἶναι ρίζαι τοῦ τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma$, ἐπεὶδὴ θὰ ἔχωμεν $\psi=0$.

Ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς κατὰ τὸν τρόπον

αυτόν, δηλαδή, όταν κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ εὕρωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x , λέγεται **γραφικὴ λύσις τῆς ἐξίσωσης**
 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Ἀσκήσεις

Ὁ μ α ς π ρ ὶ τ η. 421. Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν συναρτήσεων εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους :

$$\alpha') \psi = x^2 - x - 3,$$

$$\beta') \psi = 3x^2 - 7x + 3,$$

$$\gamma') \psi = 2x + \frac{x^2}{4},$$

$$\delta') \psi = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{5}x - 1.$$

422. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 7x + 11 = 0$ (Θέσατε $\psi = x^2 - 7x + 11$)

Ὁ μ α ς δ ε υ τ έ ρ α. 423. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \psi^2 = 25$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

424. Νὰ κατασκευασθοῦν εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους αἱ γραμμαὶ $\psi = x^2$, $x = \psi^2$ καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν χορδὴν.

425. Εὐρετε γραφικῶς εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν $8\psi = x^2$ καὶ $x = -\psi^2$.

426. Εὐρετε τὰς γραφικὰς παραστάσεις εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τῶν $\psi = x^2$ καὶ $\psi = 8x^2$ καὶ συγκρίνατε αὐτὰς μεταξύ των.

427. Εὐρετε τὴν τομὴν τῶν γραμμῶν $x^2 + \psi^2 = 100$ καὶ $x + \psi = 5$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

17. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$

§ 189. Ἐστω πρῶτον ἡ $\psi = \frac{1}{x}$. (1)

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ καὶ εὕρισκομεν $\psi = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ Λαμβάνομεν ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$ (σχ. 19) καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $O\Theta$, $O\Lambda$, ἐπὶ τῶν Ox καὶ $O\psi$ παριστάνοντα τὸ $+1$ ἐπὶ ἐκάστου ἄξονος. Ἀκολουθῶς εὕρισκομεν τὰ σημεία, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας $(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), \dots$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ (σχ. 19).

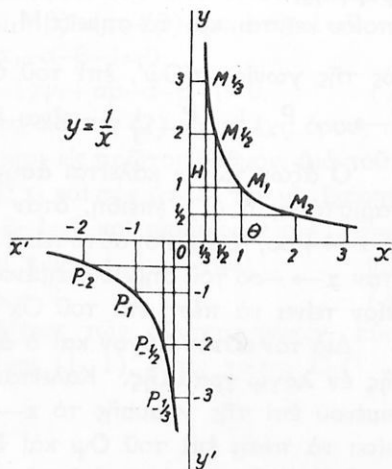
Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνη τιμὰς θετικὰς αὐξανόμενας, τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἐλαττουμένας, ὅταν δὲ τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ $\psi \rightarrow 0$. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας

($x \rightarrow +\infty, \psi \rightarrow 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox , ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O . Θέτομεν τώρα εἰς τὴν (1) $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = 2, 3, 4, \dots$, ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν τὰ σημεῖα μὲ συντεταγμένας $(\frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{3}, 3),$

$(\frac{1}{4}, 4), \dots$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ $M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}},$

$M_{\frac{1}{4}}, \dots$,

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς θετικὰς ἐλαττωμένας, καὶ τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς, ἀλλ' αὐξανόμενας, ὅταν δὲ $x \rightarrow 0$, τὸ $\psi \rightarrow +\infty$. Τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας ($x \rightarrow 0, \psi \rightarrow +\infty$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος $O\psi$, ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O . Θέτοντες εἰς τὴν (1) $x = \alpha > 0$ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{1}{\alpha} > 0$. Ἡ ἐξίσωσις



Σχ. 19

λοιπὸν (1) λέγομεν, ὅτι παριστάνει μίαν γραμμὴν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots, M$ ($x \rightarrow +\infty, \psi \rightarrow 0$), καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}}, M_{\frac{1}{4}}, \dots, M'$ ($x \rightarrow 0, \psi \rightarrow +\infty$) καὶ ἔχει τὸ σχ. 19.

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -1, -2, -3, \dots, x \rightarrow -\infty$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι $\psi = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \psi \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς). Οὕτω ἔχομεν τὰ σημεῖα

$P_{-1}(-1, -1), P_{-2}(-2, -\frac{1}{2}), P_{-3}(-3, -\frac{1}{3}), \dots, P$ ($x \rightarrow -\infty, \psi \rightarrow 0$), κεῖνται δὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἐνῶ τὸ σημεῖον ($x \rightarrow -\infty, \psi \rightarrow 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ Ox' .

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, x \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς), ὅτε εὐρίσκομεν $\psi = -2, -3, -4, \dots, \psi \rightarrow -\infty$. Τὰ ση-

μεια $P - \frac{1}{2}, P - \frac{1}{3}, P - \frac{1}{4}, \dots, P (x \rightarrow 0, \psi \rightarrow -\infty)$ κείνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1),

Οὕτω λοιπὸν λέγομεν, ὅτι ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **κλάδοι τῆς γραμμῆς**, τὸ ἓν τῶν ὁποίων κείται ἐντὸς τῆς γωνίας $xO\psi$, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου κείνται καὶ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \dots, M_{\frac{1}{2}}, M_{\frac{1}{3}}, \dots$, καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς τῆς γωνίας $x'O\psi'$, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου κείνται καὶ τὰ σημεῖα $P_{-1}, P_{-2}, \dots, P_{-\frac{1}{2}}, P_{-\frac{1}{3}}, \dots$ εἶναι δὲ διὰ $x = \alpha < 0$ τὸ $\psi = \frac{1}{\alpha} < 0$.

Ὁ ἄξων τῶν x καλεῖται **ἀσύμπτωτος** τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει, ἡ (1), ἐπειδὴ, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow +\infty$, τὸ σημεῖον αὐτὸ τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox , καθὼς ἐπίσης, ὅταν $x \rightarrow -\infty$ τοῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox' .

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἄξων τῶν ψ καλεῖται **ἀσύμπτωτος τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς**. Καλεῖται δὲ οὕτως ἐπειδὴ, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow 0$ (ἐκ θετικῶν τιμῶν), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ $O\psi$ καὶ ὅταν σημείου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \rightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ $O\psi'$.

Κατὰ ταῦτα λέγομεν, ὅτι ἡ (1) παριστάνεται ἀπὸ δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται ὡς ἓν ὅλον, ὡς μία γραμμὴ, ἡ ὁποία καλεῖται **ὑπερβολή**, οἱ δὲ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς καὶ λέγονται **ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς** αὐτῆς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν τὴν παράστασιν π. χ. τῆς $\psi = \frac{2}{x}$, τῆς $\psi = -\frac{2}{x}$ καὶ ἐν γένει τῆς $\psi = \frac{\beta}{x}$, ὅπου $\beta > 0$ ἢ $\beta < 0$, καλεῖται δὲ πᾶσα γραμμὴ παριστανομένη ὑπὸ τοιαύτης ἐξισώσεως **ὑπερβολῆς**, ἡ ὁποία ἔχει ἀσύμπτωτους τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἀσκήσεις

428. Εὐρετε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = -\frac{1}{x},$$

$$\beta') \psi = \frac{2}{x},$$

$$\gamma') \psi = -\frac{2}{x}$$

$$\delta') \psi = \frac{3}{x},$$

$$\epsilon') \psi = -\frac{3}{x},$$

$$\sigma\tau') x\psi = 10.$$

429. Ὁμοίως τῶν :

$$\alpha') x = \frac{1}{\psi}, \quad \beta') x = -\frac{1}{\psi}, \quad \gamma') x = \frac{2}{\psi}, \quad \delta') x = -\frac{5}{\psi}, \quad \varepsilon') x\psi = -4.$$

$$\S 190. \text{Ἐστω ἡ συνάρτησις } \psi = \frac{x+1}{x-1} \quad (1)$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς: $\psi(x-1) = (x+1)$ ἢ $x\psi - \psi - x - 1 = 0$.
Θέτομεν εἰς αὐτὴν $x = x_1 + \alpha$, $\psi = \psi_1 + \beta$, ὅπου τὸ α καὶ β δὲν ἔχουν ὁρισθῆ καὶ εὐρίσκομεν $(x_1 + \alpha) \cdot (\psi_1 + \beta) - (\psi_1 + \beta) - (x_1 + \alpha) - 1 = 0$

$$\text{ἢ } x_1\psi_1 + \alpha\psi_1 + \beta x_1 + \alpha\beta - \psi_1 - x_1 - \alpha - \beta - 1 = 0$$

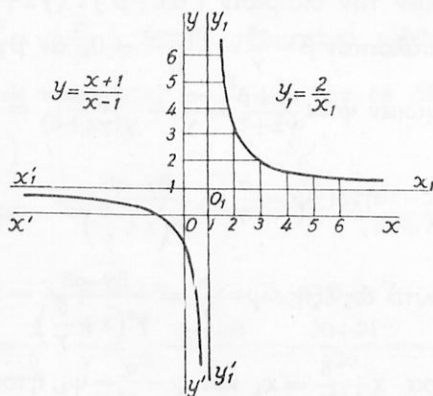
$$\text{ἢ } x_1\psi_1 + (\beta-1)x_1 + (\alpha-1)\psi_1 + \alpha\beta - \alpha - \beta - 1 = 0. \quad (2)$$

Προσδιορίζομεν τώρα τὰ α, β οὕτως, ὥστε ἡ (2) νὰ μὴ ἔχη ὅρους περιέχοντας μόνον τὸν x_1 , ψ_1 καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν. Διὰ τοῦτο θέτομεν τὸν συντελεστὴν $(\beta-1)$ τοῦ x_1 καὶ τὸν $(\alpha-1)$ τοῦ ψ_1 , ἕκαστον ἴσον μὲ 0. Οὕτω θέτομεν $\alpha-1=0$, $\beta-1=0$ καὶ εὐρίσκομεν $\alpha=1$, $\beta=1$.

$$\text{Τοιοιουτρόπως ἡ (2) γίνεταί } x_1\psi_1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{ἢ } x_1\psi_1 = 2 \quad (4)$$

Ἐστώσαν $x'Ox$, $\psi'O\psi$ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων. Εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $(1, 1)$, ἔστω τοῦτο $O_1(1, 1)$



Σχ. 20

Διὰ τοῦ O_1 φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας ἔστω τὰς $x_1'O_1x_1$ (παράλληλον τοῦ ἄξονος $x'Ox$) καὶ $\psi_1'O_1\psi_1$ (παράλληλον τοῦ ἄξονος $\psi'O\psi$) (σχ. 20).

Παρατηρούμεν, ὅτι ἐξίσωσις (4) γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς :

$$\psi_1 = \frac{2}{x_1} \quad (5)$$

Ἐὰν λοιπὸν ληφθοῦν ὡς ἄξονες συντεταγμένων αἱ εὐθεῖαι $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$ καὶ ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἄξονας αὐτοὺς ἡ (5), αὕτη παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τῆς, τοὺς ἄξονας αὐτοὺς $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$, Ἀλλ' ἡ ἐν λόγῳ ὑπερβολὴ εἶναι ἡ ἰδίᾳ καὶ ἂν ἔχωμεν ἄξονας τοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας $x'_1 O_1 x_1$, $\psi'_1 O_1 \psi_1$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $x'_1 O_1 x_1$, ἔχει τεταγμένην ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$ ἴσην μὲ 1, διὰ τοῦτο ὁ ἄξων $x'_1 O_1 x_1$ ἔχει ἐξίσωσιν $\psi = 1$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$. Ἐπίσης ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $\psi'_1 O_1 \psi_1$ ἔχει τετμημένην $x=1$ ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα τῶν ἁξόνων.

§ 191. Ἐστω τώρα ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$.

Ἄν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha x + \beta) : (\gamma x + \delta)$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ὑπόλοιπον $\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} \neq 0$, ἂν $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$

$$\text{Οὕτω θὰ ἔχωμεν } \psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma x + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

$$\text{ἥτοι } \psi = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)}.$$

$$\text{Γράφομεν τοῦτο ὡς ἐξῆς: } \psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)}.$$

$$\text{Θέτομεν τώρα } x + \frac{\delta}{\gamma} = x_1 \text{ καὶ } \psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \psi_1, \text{ ἥτοι}$$

$$x = x_1 - \frac{\delta}{\gamma}, \quad \psi = \psi_1 + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

$$\text{Οὕτως, ἀντὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἔχομεν τὴν } \psi_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 \cdot x_1}$$

$$\text{ἢ } x_1 \psi_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \quad (2) \text{ ἢ } x_1 \psi_1 = u_1, \text{ ἂν τεθῇ } \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} = u_1.$$

Εύρισκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$, ἔστω τοῦτο $O_1\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ καὶ δι' αὐτοῦ φέρομεν εὐθείας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$ ἀντιστοιχῶς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Οὕτως ἡ $\psi_1 = \frac{y_1}{x_1}$ ἀναφερομένη πρὸς τοὺς νέους αὐτοὺς ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας αὐτοὺς. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας τοὺς ἀρχικοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$ παριστάνει τὴν ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας, ἥτοι τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἶναι $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν x , τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

*Ἄν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\alpha, \beta, \delta \neq 0$, ἔχομεν $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta}$, δηλαδὴ $\psi = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, \frac{\beta}{\delta}\right)$

Παράδειγμα. *Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{3x-5}{6x+7}$ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους.

*Ἐχομεν $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\delta = 7$,

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{6}, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{7}{6}, \quad \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} = -\frac{30+21}{36} = -\frac{51}{36} = -\frac{17}{12}.$$

*Ἀρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x_1\psi_1 = -\frac{17}{12}$ ὡς πρὸς νέους ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, Ἡ ἀρχὴ τῶν νέων ἰσόνων ἔχει συντεταγμένας ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας, οἱ ὁποῖοι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον $O_1\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς.

Άσκησης

430. Να γίνη ή γραφική παράστασις τῶν συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = \frac{2x-1}{2x+1},$$

$$\beta') \psi = \frac{2x-3}{4x+1},$$

$$\gamma') x = \frac{2\psi-4}{3\psi+1}$$

$$\delta') x = \frac{2}{\psi+4},$$

$$\epsilon') x = \frac{-3\psi+4}{2\psi+1},$$

$$\sigma\tau') x\psi + 2x - 3\psi + 1 = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Α'. ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

1. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

§ 192. Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἓνα ἄγνωστον (ἔστω τὸν x) διτετράγωνον, ἔάν, μετὰ τὴν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὀρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὰς ἀναγωγάς, ἔχη τὴν μορφήν $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, ($\alpha \neq 0$) (1)

Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Ἄν τὸ x^2 ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ψ καὶ ἐπομένως τὸ x^4 μὲ τὸ ψ^2 , θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2 - 25\psi + 144 = 0$.

Λύοντες ταύτην εὐρίσκομεν $\psi = \frac{25 \pm 7}{2}$, ἥτοι τὰς ρίζας αὐτῆς $\psi_1 = 16$ καὶ $\psi_2 = 9$.

Ἄρα εἶναι $x^2 = 16$ καὶ $x^2 = 9$, ἐξ ὧν εὐρίσκομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης $x = \pm 4$ καὶ $x = \pm 3$.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν $x^2 = \psi$, ὅτε θὰ εἶναι $x^4 = \psi^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma = 0$. (2)

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2), θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ψ καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ ψ_1 καὶ ψ_2 . Διὰ τὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (1), δηλαδή τὰς τιμὰς τοῦ x , θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητά $x^2 = \psi$, ὅπου ψ τὰς τιμὰς αὐτοῦ ψ_1, ψ_2 , ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2 = \psi_1$, καὶ $x^2 = \psi_2$, ἐκ τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν $x = \pm \sqrt{\psi_1}$ καὶ $x = \pm \sqrt{\psi_2}$. Ἦτοι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι

$$\sqrt{\psi_1}, -\sqrt{\psi_1}, \sqrt{\psi_2}, -\sqrt{\psi_2}.$$

Ἄλλ' αἱ τιμαὶ ψ_1 καὶ ψ_2 εἶναι, καθὼς γνωρίζομεν, αἱ

$$\psi_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \psi_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2, ρ_3 καὶ ρ_4 τὰς ρίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, & \rho_2 &= -\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, & \rho_4 &= -\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετραγώνως ἐξίσωσις $x^4 - 10x^2 = -9$. Ἐχομεν $\alpha = 1, \beta = -10, \gamma = 9$.

Ἐπομένως $\rho_1 = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{64}}{2}} = 3, \rho_2 = -3, \rho_3 = 1, \rho_4 = -1$.

2ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. Ἐχομεν $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$.

Ἐπομένως εἶναι $\rho_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2}} = \sqrt{2}, \rho_2 = -\sqrt{2}, \rho_3 = 1, \rho_4 = -1$.

Ἀσκήσεις

431. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α') $9x^4 + 1 = 10x^2$, β') $x^4 - 26x^2 = -25$, γ') $10x^4 - 21 = x^2$,
δ') $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$, ε') $x^2 + 9x - 2 = 6,25$, στ') $9 + x^4 - 10x^2 = 0$

ζ') $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{2}{x}} = \frac{x}{2}$, η') $\frac{(x+2)(x-2)}{5} = \left(\frac{2}{x}\right)^2$

θ') $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{5} - \frac{(x^2-1)(x^2-2)}{2} = 3$.

432. α') $\alpha x^4 - (\alpha^2\beta^2 + 1)x^2 + \alpha\beta^2 = 0$, β') $\alpha^4 + \beta^4 + x^4 = 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2x^2 + \beta^2x^2)$.
γ') $4(x^4 + \gamma^6) - 17\gamma^3x^2 = 0$, δ') $\alpha^2(\alpha^2 - 2x^2) + \beta^2(\beta^2 - 2x^2) + x^4 = 0$.

433. α') $\alpha^2 \left[1 \pm \left(\frac{\beta}{x} \right)^2 \right] = \beta^2 + x^2$, β') $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \right)^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2\beta \right) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2$,

γ') $\left[59 - 2 \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right] \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 = 225$, δ') $x^4 - 2(\mu^2\nu^2 + \rho^2)x^2 + (\mu^2\nu^2 - \rho^2)^2 = 0$.

ε') $x^4 - \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta\gamma)x^2 + (\alpha\beta\gamma)^3 = 0$.

μέ τὸ 0 δίδει τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0,$$

ἢ ὅποια εἶναι ἀντίστροφος δ' βαθμοῦ καὶ γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς: (ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ $x \neq 0$)

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Θέτομεν $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε εὐρίσκομεν

$$6(\psi^2 - 2) - 35\psi + 62 = 0 \quad \text{ἢ} \quad 6\psi^2 - 35\psi + 50 = 0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δο-

θείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{καὶ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \quad \text{ἢ} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Αἱ ρίζαι τούτων εἶναι αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$. Ἄρα, ἀνὰ δύο οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίστροφοι.

2ον. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$.

Θέτομεν $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε $x^2 + \frac{1}{x^2} = \psi^2 - 2$, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω εὐρίσκομεν $\psi^2 - 2 + \psi + 1 = 0$ ἢ $\psi^2 + \psi - 1 = 0$.

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Ἄρα, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὐρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2 = 0, \quad 2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0.$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

445. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$$\alpha') x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad \beta') x^3 + x^2 - x - 1 = 0, \quad \gamma') x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\delta') x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0, \quad \epsilon') x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0, \quad \sigma\tau') x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\zeta') x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \eta') 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0, \quad \theta') 2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0,$$

$$\iota') 5x^4 + 26x^3 - 26x - 5 = 0, \quad \iota\alpha') x^4 - 4x^3 + 4x - 1 = 0,$$

$$\iota\beta') x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0, \quad \iota\gamma') 3x^4 + x^3 - 24x^2 + x + 3 = 0.$$

435. Εύρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας :

$$\alpha') \pm 3, \pm 1, \quad \beta') \pm \alpha, \pm \sqrt{\alpha}, \quad \gamma') \pm 0,5, \pm 4i, \quad \delta') \pm 3, \pm i.$$

Ὁ μ ᾱ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 436. Εύρετε τριώνυμα ἔχοντα ὡς ρίζας τὰς :

$$\alpha') \pm i \text{ καὶ } \pm \frac{2}{3}, \quad \beta') \pm 0,2 \text{ καὶ } \pm 0,75, \quad \gamma') \pm \alpha, \pm 2\alpha, \quad \delta') \pm (\alpha-i), \pm (\alpha+i), \\ \epsilon') \pm 0,75 \text{ καὶ } \pm 2i, \quad \sigma\tau') \pm 2, \pm 3i.$$

Ὁ μ ᾱ ς τ ρ ῖ τ η. 437. Εύρετε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, ὅταν τὸ x εἶναι ἑκτὸς τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν αὐτοῦ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ (ἂν εἶναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$), δηλ. ἂν $x < \rho_1$ ἢ $x > \rho_4$ καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ριζῶν, δηλ. ἂν εἶναι $\rho_1 < x < \rho_2, \rho_2 < x < \rho_3$ καὶ $\rho_3 < x < \rho_4$. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις, ὅταν εἶναι $\alpha > 0$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$. Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο ρίζαι π.χ. αἱ ρ_3, ρ_4 εἶναι συζυγεῖς φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαὶ καὶ ὅταν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, ὅτε δύο εἶναι συζυγεῖς καὶ ἄλλαι δύο πάλιν συζυγεῖς).

438. α') Διερευνήσατε ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-2)x^4 + 4(\lambda+3)x^2 + \lambda - 1 = 0$.

β') Ὁμοίως τὴν ἐξίσωσιν $x^4 - (3\lambda+4)x^2 + (\lambda+1)^2 = 0$.

439. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda^2+3 = 0$ ποῖαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχη τὸ λ , διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ρίζαι κατὰ 1;

3. ΤΡΟΠΗ ΔΙΠΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΑΠΛΑ

§ 194. Ἐστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=1, \beta=-6, \gamma=1$, ἔχομεν ὡς ρίζας

$$\pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-4}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}} \text{ καὶ } \pm \sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κατελήξαμεν εἰς παραστάσεις μὲ διπλᾶ ριζικά τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, πότε εἶναι δυνατόν τὰς τοιαύτας παραστάσεις νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ ἀπλᾶ ριζικά

$$\text{Θὰ δείξωμεν ὅτι } \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \quad (1)$$

ἂν εἶναι $A > 0$ καὶ τὸ $A^2 - B$ εἶναι (τέλειον τετράγωνον), ἔστω $= \Gamma^2$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} + \sqrt{\omega}$ (2) ὅπου ψ, ω θετικοὶ σύμμετροι καὶ ὁ εἰς τούλάχιστον μὴ τέλειον τετράγωνον.

Τότε ἡ (2) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν τετραγωνίζοντες τὰ μέλη της, δηλ. μὲ τὴν

$$A + \sqrt{B} = \psi + \omega + 2\sqrt{\psi\omega} \quad (3)$$

‘Αλλ’ ἡ (3), εἰς τὴν ὁποῖαν οἱ A , $\psi + \omega$ εἶναι σύμμετροι ὁ δὲ B θετικός καὶ $\sqrt{B}$ ἀσύμμετρος, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀληθεύῃ παρὰ μόνον ἂν εἶναι :

$$\begin{aligned} A &= \psi + \omega \\ B &= 4\psi\omega \end{aligned} \quad (4) \quad (\S 155 \text{ Παρ. } \beta')$$

Τότε θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ $\sqrt{B} = 2\sqrt{\psi\omega}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ
 ἡ $A - \sqrt{B} = \psi + \omega - 2\sqrt{\psi\omega} = (\sqrt{\psi} - \sqrt{\omega})^2$.

Συνεπῶς θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = |\sqrt{\psi} - \sqrt{\omega}|$$

Διὰ νὰ τραποῦν λοιπὸν αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ὅπου $A > 0$, $B > 0$ εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἀπλᾶ ριζικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύῃ τὸ σύστημα (4), τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ :

$$\begin{aligned} A &= \psi + \omega \\ \frac{B}{4} &= \psi\omega \end{aligned} \quad (5)$$

μὲ ψ , ω θετικούς καὶ συμμετρους

Λύσεις τοῦ συστήματος (5) εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσσεως

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0 \quad (6)$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς ὅμως εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι ὅταν $A^2 - B > 0$

Θὰ εἶναι καὶ σύμμετροι, ὅταν $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Τέλος ἐπειδὴ ἔχουν γινόμενον $\frac{B}{4}$ θετικόν, ἀφοῦ $B > 0$, θὰ εἶναι καὶ θετικά, ὅταν τὸ A , ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν, εἶναι θετικόν.

Ὡστε : αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἀπλᾶ ριζικά, ὅταν $A > 0$ καὶ τὸ $A^2 - B$, δηλαδή τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ συζυγές, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τῆς (6) εἶναι αἱ $\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$, $\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$, ὅταν $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον π.χ. ἴσον μὲ Γ^2 , γράφονται $\frac{A + \Gamma}{2}$, $\frac{A - \Gamma}{2}$ καὶ ἔχομεν τοὺς τύπους μετατροπῆς :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}},$$

διότι αἱ ἀνωτέρω ρίζαι ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ψ καὶ ω καὶ εἶναι ἢ $\frac{A+\Gamma}{2}$ ἢ μεγαλύτερα. Κατὰ ταῦτα, διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{6 \pm \sqrt{32}}$, ὅπου τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ συζυγὲς εἶναι $36 - 32 = 4$ καὶ συνεπῶς ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ ἴση μὲ 2 θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{6-2}{2}} = \sqrt{4} \pm \sqrt{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Ἐστω ἀκόμη ἡ παράστασις $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Εἶναι $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ καὶ $\sqrt{1} = 1$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Ἀ σ κ η σ ι ς

440. Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄλλας ἐχούσας ἀπλὰ ριζικά :

$$\alpha') \sqrt{5 + \sqrt{24}}, \quad \beta') \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}, \quad \gamma') \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}, \quad \delta') \sqrt{\alpha^2 + \beta + 2\alpha\sqrt{\beta}}.$$

$$\epsilon') \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \sigma\tau') \sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \zeta') \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}},$$

$$\eta') \sqrt{x + x\psi - 2x\sqrt{\psi}}, \quad \theta') \sqrt{3 + \sqrt{5}}.$$

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ Β' ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΥΤΗΣ

§ 195. Ἐστω π.χ. ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις $5 - x = \sqrt{x-5}$, ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὸ ἔν μέλος τῆς ριζικὸν β' τάξεως μὲ ὑπόρριζον παράστασιν ἔχουσιν τὸν ἄγνωστον x .

Ἄν ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς εἰς τὸ τετράγωνον, εὐρίσκομεν $(5-x)^2 = x-5$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(x-5)^2 - (x-5) = 0$ ἢ μὲ τὴν $(x-5)(x-5-1) = 0$ ἢ τὴν $(x-5)(x-6) = 0$. Αὕτη ἔχει τὰς

ρίζας $x=5$ και $x=6$. Ἐκ τούτων μόνον ἡ $x=5$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἐνῶ ἡ $x=6$ ἐπαληθεύει τὴν $5-x=-\sqrt{x-5}$.

Ἐξίσωσις τις λέγεται **μέ τετραγωνικὴν ρίζαν ἢ μέ ριζικὸν δευτέρας τάξεως**, ἂν (μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομασῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὄρων εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τὰς ἀναγωγὰς) ἔχη τουλάχιστον ἓν ριζικὸν μέ δείκτην 2 καὶ οὐδὲν μέ δείκτην ἀνώτερον τοῦ 2, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος.

$$\text{Ἔστω ἡ ἐξίσωσις } 4 + \sqrt{x^2+5} = x-1. \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὴν, ἐπιδιώκομεν νὰ ἀπαλλαγῶμεν ἀπὸ τὸ ριζικόν, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν ἄλλην ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν. Πρὸς τοῦτο ἀπομονώνομεν τὸ ριζικόν, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχη εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς μόνον τὸ ριζικόν. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{x^2+5} = x-1-4 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{x^2+5} = x-5 \quad (1')$$

Ὑψοῦντες τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν

$$x^2+5 = (x-5)^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2+5 = x^2-10x+25 \quad \text{ἢ} \quad 10x = 20 \quad (2)$$

$$\text{ἡ ὁποία ἔχει τὰς ρίζας τῆς (1) καὶ τῆς } -\sqrt{x^2+5} = (x-5) \quad (3)$$

Λύοντες τὴν (2) εὐρίσκομεν $x = 2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν $x = 2$ εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν, ὅτι δὲν ἐπαληθεύεται, ἐνῶ ἐπαληθεύεται ἡ (3).

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις μέ ριζικὰ β' τάξεως

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7 \quad (1)$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν (ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ νέον ριζικόν) (2) $\sqrt{(x+5)(2x+8)} = 36-3x$.

Ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8) = (36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν εὐρίσκομεν

$$x^2-288x+1136 = 0.$$

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι 4 καὶ 284. Θέτοντες διαδοχικῶς $x = 4$ καὶ $x = 284$ εἰς τὴν δοθεῖσαν (1) εὐρίσκομεν, ὅτι μόνον ἡ 4 τὴν ἐπαληθεύει, ἐνῶ ἡ 284 εἶναι ρίζα τῆς $2\sqrt{(x+5)(2x+8)} = -(36-3x)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μέ ριζικὸν β' τάξεως, ἀπομονώνομεν αὐτό, ὥστε ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξίσωσεως εἰς τὸ τετράγωνον νὰ λαμβάνωμεν ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν· ἀκολουθῶς

λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ρίζαι τῆς εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης.

§ 196. Ἐν γένει ἐὰν, διὰ τὰ εὐρωμεν ἀπὸ δοθείσαν ἄρρητον ἐξίσωσιν ἄλλην ρητὴν, κάμνωμεν διαδοχικὰς ὑψώσεις εἰς τὸ τετράγωνον, τότε ἡ τελικῶς προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων μελῶν των (τοῦ δευτέρου ἐκάστης μέλους ὑποτιθεμένου 0).

Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} = 0 \quad (1)$$

ὅπου τὰ A, B, Γ περιέχουν τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως.

Δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν ἐξ αὐτῆς ἄλλην ρητὴν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ τὴν δοθείσαν λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμόν της.

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{\Gamma}.$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν

$$A + B + 2\sqrt{AB} = \Gamma, \text{ καὶ ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της}$$

$$2\sqrt{AB} = \Gamma - A - B.$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν τὴν

$$4AB = A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 2A\Gamma + 2AB - 2B\Gamma$$

$$\text{ἢ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης } A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 2A\Gamma - 2AB - 2B\Gamma = 0 \quad (2)$$

Ἡ (2) ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἑξῆς τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} &= 0, & \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{\Gamma} &= 0 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} &= 0, & \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ἄν πολλαπλασιάσωμεν ταύτας κατὰ μέλη εὐρίσκομεν τὴν (2). Πράγματι, ἔχομεν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας ἐκ τῶν (3) μὲ πολλαπλασιασμόν τῶν μελῶν των $A - (\sqrt{B} + \sqrt{\Gamma})^2 = 0$

$$\text{ἢ } (A - B - \Gamma) - 2\sqrt{B\Gamma} = 0 \quad (4)$$

Μὲ πολλαπλασιασμόν τῶν μελῶν τῶν δύο τελευταίων ἐκ τῶν (3) εὐρίσκομεν $(A - B - \Gamma) + 2\sqrt{B\Gamma} = 0 \quad (5)$

Ἄν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς (4) καὶ (5), εὐρίσκομεν τὴν (2).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $A = B$ καὶ ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς π.χ. εἰς τὴν μῆν δύναμιν, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$A^μ = B^μ$, αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ μόνον, ὅταν τὸ $μ$ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς, ἐνῶ ὅταν τὸ $μ$ εἶναι ἄρτιος ἢ $A^μ = B^μ$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$ (ὑποτιθεμένου ὅτι χρησιμοποιοῦμεν μόνον πραγματικούς ἀριθμούς).

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἐν μέλος δοθείσης ἐξίσωσως εἶναι 0, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ τὴν ὑψωσιν τῶν μελῶν τῆς δοθείσης εἰς δύναμιν οἷανδήποτε ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Διότι διὰ νὰ εἶναι π.χ. ἡ δύναμις $A^μ$ ἴση μὲ 0, πρέπει νὰ εἶναι $A=0$. Δηλαδή πᾶσα ρίζα τῆς $A^μ = 0$, εἶναι ρίζα καὶ τῆς $A=0$, καὶ ἀντιστρόφως

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+15} + \sqrt{x} = 15$.

Ὑψώνομεν τὰ μέλη τῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν τὴν

$$x+15+2\sqrt{x^2+15x}+x=225.$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης $2\sqrt{x^2+15x} = 210-2x$

$$\text{ἢ } \sqrt{x^2+15x} = 105-x$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὐρίσκομεν

$$x^2+15x=11025-210x+x^2$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμόν της $225x=11025$ καὶ $x=49$. Θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν $x=49$ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἐπαληθεύεται.

§ 197. Γενικώτερον, ὅταν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἄρρητος, δυνάμεθα μὲ ὑψώσεις τῶν μελῶν τῆς εἰς καταλλήλους δυνάμεις νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας ἡ λύσις νὰ εἶναι εὐκόλος, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης.

Ἐστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{x-3}+x+3 = x+5$.

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ εὐρίσκομεν $\sqrt[4]{x-3}=2$. Ὑψώνομεν εἰς τὴν 4ην δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν $x-3=16$ καὶ $x=19$.

Πρέπει νὰ θέσωμεν $x=19$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶναι ρίζα αὐτῆς τὸ 19. Πράγματι παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $x=19$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις

441. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐπόμεναι ἐξίσωσεις :

$$\alpha') 2\sqrt{x+8}=28, \quad \beta') \sqrt[3]{3x+7}=3, \quad \gamma') \sqrt[3]{4x-40}=10,$$

$$\delta') \sqrt{x+9} = 5\sqrt{x-3}, \quad \epsilon') \sqrt[3]{10x-4} = \sqrt[3]{7x+11}.$$

442. 'Ομοίως αὶ ἐξῆς ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt{32+x} &= 16-\sqrt{x}, & \beta') \sqrt{\frac{15}{4}+x} &= \frac{3}{2}+x, & \gamma') \sqrt{x}-\sqrt{x-5} &= \sqrt{5}, \\ \delta') \sqrt{x+20}-\sqrt{x-1} &= 3, & \epsilon') \sqrt{x+15}-7 &= 7-x-13, \\ \sigma\tau') \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}, & \zeta') \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} &= 3. \end{aligned}$$

443. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐπόμεναι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt{\alpha+\sqrt{x}} + \sqrt{\alpha-\sqrt{x}} &= \sqrt{x}, & \beta') \frac{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}{\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{x-\beta}} &= \frac{2x-\alpha-\beta}{2\alpha}, \\ \gamma') \sqrt{x^2+3x+10}-x &= 2, & \delta') 6x-\sqrt{(3x+4)(12x-23)} &= 4, \\ \epsilon') \sqrt{x+7}-\sqrt{x+5} &= 2, & \sigma\tau') \sqrt{29x+6} + \sqrt{29x-9} &= 15, \\ \zeta') 9x-2 &= 5\sqrt{6x^2-7x-8}, & \eta') \sqrt{8x+13}-8\sqrt{x^2-11x+14} &= 9, \\ \theta') \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}} &= 4, & \iota') \sqrt{1-\sqrt{1-x}} + \sqrt{x} &= 1. \\ \kappa\alpha') \sqrt[3]{x-\alpha} + \sqrt[3]{x+\alpha} - 1 &= \sqrt[3]{x^2-\alpha^2} \end{aligned}$$

444. 'Ομοίως αὶ κάτωθι :

$$\begin{aligned} \alpha') \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+7} &= \sqrt[3]{8x+19}, & \beta') \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} &= 0, \\ \gamma') (1-\alpha x) \sqrt{1+\beta x} &= (1+\alpha x) \sqrt{1-\beta x}, & \delta') \sqrt{\alpha x} - 1 &= -0,125 + 0,5\sqrt{\alpha x - 0,5} \end{aligned}$$

5. ΠΕΡΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 198. α') 'Εξίσωσις τις μὲ ἓνα ἄγνωστον (τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεῦτερον μέλος εἶναι μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) λέγεται **ἀντίστροφος**, ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῆς, τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι· ὅταν ὁμως τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ ἐπὶ πλεόν ἔχη μεσαῖον ὅρον, οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταὶ πρέπει νὰ εἶναι μόνον ἴσοι.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καθὼς καὶ ἡ $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$.

* Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστροφῆς ἐξισώσεως ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν Α. De Moivre (1667-1754), Γάλλον μαθηματικὸν μετανάστην εἰς Λονδῖνον.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καὶ ἡ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἰς ἐξίσωσιν ἀντίστροφον, π.χ. εἰς τὴν $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, τεθῇ $\frac{1}{x}$ ὅπου x καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς προκυπτούσης $\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \alpha = 0$, προκύπτει ἡ ἀρχικῶς δοθεῖσα ἐξίσωσις

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἂν ἐξίσωσις ἀντίστροφος ἔχῃ ρίζαν ἀριθμὸν τινα, $\neq \pm 1$ θὰ ἔχῃ ρίζαν καὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Θὰ δεῖξωμεν κατωτέρω, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τρίτου, τετάρτου καὶ πέμπτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

β') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν $x = -1$, ἐπαληθεύεται. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)$. Ἄν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha$ διὰ τοῦ $x+1$, εὐρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha$. Ἐπομένως ἔχομεν

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = (x+1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha] = 0.$$

Ἡ μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ποοφανῶς ἡ $x = -1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$.

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $x-1$. Ἄν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐρίσκομεν ὅτι $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = (x-1)[\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha]$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $x=1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0$.

$$\delta') \text{ Ἐστω ἡ ἐξίσωσις } \alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$$

$$\text{Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἐξῆς: } \alpha(x^4 - 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0.$$

$$\eta \alpha(x^2 - 1)(x^2 + 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0 \quad \eta \quad (x^2 - 1)[\alpha(x^2 + 1) + \beta x] = 0.$$

Εἶναι φανερόν ὅτι δύο μὲν ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 1 = 0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x^2 + 1) + \beta x = 0$.

ε') Έστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (1)

Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ x^2 ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς

τοῦ $x \neq 0$ καὶ εὐρίσκομεν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0$

$$\eta \alpha \left(x + \frac{1}{x^2} \right) + \beta \left(x + \frac{1}{x} \right) + \gamma = 0 \quad (2)$$

Θέτομεν* $x + \frac{1}{x} = \psi$ ὅτε $\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = \psi^2$ ἢ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \psi^2$ καὶ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \psi^2 - 2.$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν $x^2 + \frac{1}{x^2}$ καὶ $x + \frac{1}{x}$, εὐρίσκομεν $\alpha(\psi^2 - 2) + \beta\psi + \gamma = 0$, ἡ ὁποία εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ψ . Ἄν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν, εὐρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ ψ , τὰς ὁποίας ἄς παραστήσωμεν μὲ ψ_1 καὶ ψ_2 .

Ἀντικαθιστῶμεν κάθε μίαν τῶν τιμῶν τοῦ ψ εἰς τὴν $x + \frac{1}{x} = \psi$

καὶ ἔχομεν $x + \frac{1}{x} = \psi_1$ καὶ $x + \frac{1}{x} = \psi_2$ ἢ $x^2 - x\psi_1 + 1 = 0$, $x^2 - x\psi_2 + 1 = 0$,

ἦτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x . Ἐὰν λύσωμεν αὐτὰς, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

στ') Έστω ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις πέμπτου βαθμοῦ

$$\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0.$$

Αὕτη, ὅταν τεθῇ $x = -1$, ἐπαληθεύεται, ἄρα ἔχει τὴν ρίζαν $x = -1$ καὶ τὸ α' μέλος τῆς διαιρεῖται διὰ τοῦ $x + 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν πηλίκον.

$$\alpha x^4 + (\beta - \alpha)x^3 + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha$$

Τοῦτο τιθέμενον ἴσον μὲ 0, δίδει ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν

ζ') Ἄν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x^2 - \gamma x - \beta x - \alpha = 0,$$

παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἔχει ρίζαν $x = 1$, ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς διαιρεῖται διὰ $x - 1$. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τιθέμενον ἴσον

* Ἡ ἀντικατάστασις $x + \frac{1}{x} = \psi$ ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γάλλου

Lagrange.

** Τὸ ὄνομα ἀντίστροφος ἐξίσωσις ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (1707 - 1781).

2. ΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 193. Ἐάν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τεθῇ $x^2 = \psi$, θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τοῦ δοθέντος τὸ $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma$. Ἐάν αἱ ρίζαι τούτου παρασταθοῦν μὲ ψ_1, ψ_2 , θὰ εἶναι $\alpha \psi^2 + \beta \psi + \gamma = \alpha(\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)$. Ἄρα, ἂν τεθῇ εἰς τοῦτο $\psi = x^2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha(x^2 - \psi_1)(x^2 - \psi_2) = \alpha(x - \sqrt{\psi_1})(x + \sqrt{\psi_1})(x - \sqrt{\psi_2})(x + \sqrt{\psi_2})$.

Ἐπομένως, ἂν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ παριστάνουν τὰς ρίζας τοῦ δοθέντος τριώνυμου (ἥτοι τεθῇ $\sqrt{\psi_1} = \rho_1, -\sqrt{\psi_1} = \rho_2, \sqrt{\psi_2} = \rho_3, -\sqrt{\psi_2} = \rho_4$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$, ἥτοι τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τέσσαρας πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x .

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^4 + x^2 - 12$, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -12$, εὐρίσκομεν $\psi_1 = 3, \psi_2 = -4$. Ἄρα $\rho_1 = \sqrt{3}, \rho_2 = -\sqrt{3}, \rho_3 = 2i, \rho_4 = -2i$, ἥτοι κατὰ τάξιν μεγέθους αἱ ρίζαι τοῦ τριώνυμου (αἱ πραγματικαὶ μόνον, διότι αἱ φανταστικαὶ δὲν διακρίνονται κατὰ μέγεθος) εἶναι $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2i, 2i$ καὶ τὸ τριώνυμον εἶναι ἴσον μὲ

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διτετράγωνον τριώνυμον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας του. Ἐάν αὗται εἶναι π.χ. $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, τὸ τριώνυμον θὰ εἶναι τὸ

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$$

πολλαπλασιασμένον ἐπὶ σταθερὸν τινα παράγοντα

Π.χ. τὸ τριώνυμον μὲ ρίζας $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -i, i$ θὰ εἶναι τὸ προκύπτον ἐκ τοῦ $\alpha \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + i)(x - i)$ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, ὅπου τὸ α παριστάνει σταθερὸν τινα παράγοντα.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὅ μ ᾱ ς π ρ ὶ τ η. 434. Νὰ τραποῦν τὰ ἐπόμενα τριώνυμα εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

α') $4x^4 - 10x^2 + 4$, β') $7x^4 - 35x^2 + 28$, γ') $\alpha^2\beta^2\psi^4 - (\alpha^4 + \beta^4)\psi^2 + \alpha^2\beta^2$
 δ') $\psi^4 - 4\alpha\beta\psi^2 - (\alpha^3 - \beta^3)^2$, ε') $\lambda^4\psi^4 + \lambda^2(\alpha^2 - \beta^2)\psi^2 - \alpha^2\beta^2$, στ') $\psi^4 - (\alpha + 1)\alpha\psi^2 + \alpha^3$

$$1δ') 2x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 2 = 0, \quad 1ε') x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0,$$

$$1στ') x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

446. 'Ομοίως νὰ λυθούν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+x+1)(x+1)^2} = \frac{25}{18} \quad \beta') x^5 = \frac{35x-6}{35-6x}, \quad \gamma') x^4 = \frac{11x-6}{6x-11},$$

$$\delta') \frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)} = \frac{4}{15} \quad \epsilon') \frac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{9}{5}.$$

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΩΝΥΜΟΙ

§ 199. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^4-1=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον $x^4=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει προφανῶς τὴν ρίζαν $x=1$, ἔχει δὲ καὶ τὴν $x=-1$, διότι $(-1)^4=1$.

Ἐστω ἡ $x^3+1=0$. Θεωροῦμεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς $x^3=-1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ -1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως, ἐπειδὴ $(-1)^3=-1$. Ἐκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἔχουσα δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος τῆς (τοῦ β' ὄντος 0) καλεῖται **διώνυμος ἐξίσωσις**.

Ἐξίσωσιν διώνυμον καλοῦμεν ἐν γένει μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ἓνα ἄγνωστον π.χ. τὸν x , ἂν ἔχη μόνον δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος τῆς (τοῦ β' ὑποτιθεμένου 0). Πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$. (1), ὅπου k, λ , εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ($\alpha, \beta \neq 0$) πραγματικοί. Ἐὰν εἶναι $k > \lambda$ γράφομεν τὴν (1) ὡς ἐξῆς :

$$x^\lambda (\alpha x^{k-\lambda} + \beta) = 0$$

Αὕτη ἔχει τὴν ρίζαν $x=0$ καὶ τὰς ρίζας τῆς $\alpha x^{k-\lambda} + \beta = 0$. Θετομεν πρὸς εὐκολίαν $k-\lambda = \nu$, $-\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^\nu = \gamma$. Διὰ τὴν λύσιν ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι :

$\alpha')$ Ἄν τὸ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τοῦλάχιστον δύο ρίζας (πραγματικὰς), ἂν εἶναι $\gamma > 0$.

Διότι, ὡς γνωστόν, ἂν π.χ. τεθῇ $\nu=2\lambda$, θὰ ἔχωμεν $x^{2\lambda} = \gamma$. Ἀλλ' αὕτη προκύπτει ἀπὸ τὴν $x^\lambda = \sqrt[\lambda]{\gamma}$, ἂν τὰ μέλη ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον. Ἀρα ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x^\lambda = \sqrt[\lambda]{\gamma}$ καὶ τῆς $x^\lambda = -\sqrt[\lambda]{\gamma}$.

Οὕτως αἱ ρίζαι τῆς $x^\nu = \gamma$ εἶναι αἱ $x = \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\frac{\nu}{2\lambda}]{\sqrt[\lambda]{\gamma}}$, $x = -\sqrt[\nu]{\gamma} = -\sqrt[\frac{\nu}{2\lambda}]{\sqrt[\lambda]{\gamma}}$, ἂν τὸ $\gamma > 0$ καὶ τὸ $\nu=2\lambda$ (ἄρτιος).

Ἀλλ' ἂν εἶναι $\gamma < 0$, ἡ ἐξίσωσις $x = \gamma$ δὲν ἔχει καμμίαν πραγματικὴν ρίζαν. Πράγματι παρατηροῦμεν ὅτι, ἐν ὅσῳ τὸ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, ἔχομεν $(-|x|)^\nu = |x|^\nu > 0$.

β') "Αν τὸ ν εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς καὶ τὸ $\gamma > 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον θετικὴν ρίζαν, ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην περιττὸν ἀριθμὸν ἔχει τὸ σῆμα τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπομένως μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑφούμενος εἰς τὴν νιοστὴν περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικόν, δηλαδή ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[n]{\gamma}$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν. Ἐὰν εἶναι τὸ $\gamma < 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἀρνητικὴν ρίζαν, διότι ἂν τεθῇ τὸ $-x_1$, ἀντὶ τοῦ x , θὰ ἔχωμεν $(-x_1)^n = \gamma$, ἢ $(x_1)^n = -\gamma$.

Οὕτως ἐπανήλθομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, διότι εἶναι $-\gamma > 0$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(x_1)^n = -\gamma$ ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[n]{-\gamma}$, ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x = -\sqrt[n]{\gamma}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^6 - 1 = 0$ ἔχει ρίζας (πραγματικὰς) τὰς $x = \pm 1$, ἄρα τὸ $x^6 - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $x^6 - 1$ διὰ τοῦ $x^2 - 1$, εὐρίσκομεν πηλίκον $x^4 + x^2 + 1$. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $x^4 + x^2 + 1 = 0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι φανταστικάι.

2ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^3 + 8 = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν (πραγματικὴν) τὴν $x = \sqrt[3]{-8} = -2$. Ἄρα τὸ $x^3 + 8$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x + 2$. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι $x^2 - 2x + 4$. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x + 4 = 0$.

3ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^4 + 16 = 0$, ἢ $x^4 = -16$ δὲν ἔχει ρίζαν (πραγματικὴν), ἐπειδὴ ἀρτία δύναμις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Ἀσκήσεις

447. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') x^3 \pm 343 = 0, \quad \beta') 8x^3 \pm 125 = 0, \quad \gamma') x^3 \pm 1331 = 0$$

$$\delta') \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{9} \cdot \frac{x + 1}{x - 1}, \quad \epsilon') \frac{2 - x^2}{2 + x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^3 + 4x^2 + 9},$$

$$\sigma\tau') \frac{9x^3 + 7}{2} - \left[x^3 - \frac{(x^3 - 2)}{7} \right] = 36.$$

448. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha') x^5 - (x^3 + 8)(x^2 + 5) + 4x^2(x + 2) + 32 = 0, \quad \beta') \frac{3x^3 + 20}{16} = \frac{4x^3 - 3}{2x^3 - 4} + \frac{x^3}{4}.$$

449. 'Ομοίως αἱ κάτωθι :

$$\alpha') \frac{1}{1-\alpha\gamma} + \frac{1}{1-\alpha-\gamma} = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^3, \quad \beta') (1-\alpha\gamma)^{-1}x^3 + \frac{(1-\alpha-\gamma)^{-1}}{x-3} = 1.$$

$$\begin{aligned} \gamma') x^4 \pm 1 &= 0 \text{ (γράψατε } x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = 0), & \delta') x^5 \pm 1024 &= 0, & \epsilon') x^5 \pm 1 &= 0, \\ \sigma\tau') x^6 \pm 729 &= 0, & \zeta') x^{2\nu+1} \pm 1 &= 0, & \eta') x^7 \pm 1 &= 0, & \theta') x^{2\nu} \pm 1 &= 0, \\ \iota') x^4 \pm 256 &= 0 \text{ (θέσατε } x=4\psi), & \iota\alpha') x^5 \pm 3125 &= 0, & \iota\beta') x^{10} \pm 1 &= 0, \\ \gamma\epsilon') x^6 \pm 1 &= 0, & \iota\delta') x^4 \pm 14641 &= 0, & \iota\epsilon') x^{12} \pm 1 &= 0, \end{aligned}$$

7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΟΝ ΤΙΜΗΝ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 200. α') Έστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3|x|-5=0$, ὅπου $|x|$ παριστάνει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x , τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τὰς ἐπαληθευούσας τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν

Έκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3|x|=5$, καὶ $|x| = \frac{5}{3}$. Ἡ τιμὴ $x = \frac{5}{3}$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, καθὼς καὶ ἡ $x = -\frac{5}{3}$, διότι $|- \frac{5}{3}| = \frac{5}{3}$. Ὡστε ἡ δοθεῖσα ἔχει ρίζας τὰς $\pm \frac{5}{3}$, ταύτας δὲ ἔχει καὶ ἡ $(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3}) = 0$. Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3}) = 0$ ἢ τὴν $x^2 = \frac{25}{9}$.

Έστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$) (1)

Αν α, β εἶναι ὁμόσημοι, ὅτε $\alpha\beta > 0$, τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι πάντοτε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἥτοι $\neq 0$, ἐπομένως ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει ὡς πρὸς x .

Αν εἶναι $\alpha\beta < 0$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1), $|x| = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$. Οὕτως ἡ (1), (ἐὰν $\alpha\beta < 0$), ἔχει ρίζας τὰς $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Παράδειγμα. Έστω ἡ ἐξίσωσις $-4|x| + 12 = 0$.

Ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $|x| = 3$ καὶ αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = 3^2$.

β') Έστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0) \quad (2)$$

*Αν θέλωμεν νὰ εἶναι $x > 0$, ἐπειδὴ $|x| = x$, ἡ (2) γράφεται καὶ οὕτως: $\alpha x + \beta x + \gamma = 0$ (2'), ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = \frac{-\gamma}{\alpha + \beta}$ (ἂν εἶναι $\alpha + \beta \neq 0$), ἡ τιμὴ αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὴν $x > 0$, ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0$ ἢ $\frac{\gamma}{\alpha + \beta} < 0$, ἢ $\gamma(\alpha + \beta) < 0$.

*Αν θέλωμεν νὰ εἶναι $x < 0$, τότε ἐπειδὴ $|x| = -x$, ἡ (2) γράφεται οὕτως: $-\alpha x + \beta x + \gamma = 0$ (2''), ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = -\frac{\gamma}{\beta - \alpha}$, (ἂν $\beta - \alpha \neq 0$). Αὕτῃ ἱκανοποιεῖ τὴν $x < 0$ ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta - \alpha} < 0$.

$$\text{ἢ } -\gamma(\beta - \alpha) < 0, \text{ ἢ } \gamma(\beta - \alpha) > 0$$

*Αρα, ἂν $\alpha \neq -\beta$ καὶ $\gamma(\alpha + \beta) < 0$, ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν $x_1 = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0$, ἂν δὲ εἶναι $\gamma(\beta - \alpha) > 0$, τότε ἔχει τὴν $x_2 = -\frac{\gamma}{\beta - \alpha}$, ἂν $\alpha \neq \beta$.

*Αν $\alpha = \beta$, τότε ἔχει ρίζαν τὴν $x = -\frac{\gamma}{2\alpha}$ ἂν $\alpha\gamma < 0$.

Παρατήρησις. Διὰ $x = 0$, ἡ (2) δὲν ἐπαληθεύεται, ἂν εἶναι $\gamma \neq 0$.

*Αν $\gamma = 0$, $\beta = 1$ ἡ (2) γίνεται $\alpha|x| + x = 0$ (3) καὶ $|x| = -\frac{x}{\alpha}$, ἄλλ' ἐπειδὴ εἶναι $|x| = x$, ὅταν εἶναι $x > 0$ καὶ $|x| = -x$, ὅταν εἶναι $x < 0$, ἔπεται ὅτι ἡ $|x| = -\frac{x}{\alpha}$ ἀνάγεται εἰς τὴν $x = -\frac{x}{\alpha}$ μὲν κατὰ τὴν α' περίπτωσιν ($x > 0$), εἰς τὴν $x = \frac{x}{\alpha}$ δὲ κατὰ τὴν β' ($x < 0$), ἔχουν δὲ αὗται μόνον ρίζαν $x = 0$, ἂν εἶναι $\alpha^2 \neq 1$. *Αν $\alpha = +1$, τότε ἡ $|x| = \frac{x}{\alpha}$ γίνεται $|x| = -x$ καὶ ἔχει ρίζαν πᾶσαν ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ τὴν $x = 0$. *Αν $\alpha = -1$, ἔχομεν $|x| = x$ καὶ αὕτῃ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ $x = 0$.

Παραδείγματα. 1ον. *Εστω, ἡ ἐξίσωσις $2|x| + 3x - 4 = 0$.

*Εχομεν $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$, $\gamma(\alpha + \beta) = -20 < 0$. *Αρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x = \frac{-\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{4}{5}$.

2ον. *Εστω ἡ ἐξίσωσις $-2|x| + x + 1 = 0$.

Εἶναι $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\gamma(\alpha + \beta) = 1 \cdot (-2 + 1) = -1 < 0$, ἄρα $x = \frac{-1}{1 - 2} = 1$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως. *Αλλ' εἶναι καὶ $\gamma(\beta - \alpha) = 1(1 + 2) = 3 > 0$ ἄρα $x = -\frac{1}{3}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

χει ἓν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς x_1, x_2 . Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμὰς του εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ εὐρίσκομεν ἓν γένει δύο τιμὰς διὰ τὸ ψ , ἥτοι τὰς $\psi = \alpha - x_1 = \psi_1$, $\psi = \alpha - x_2 = \psi_2$. Οὕτως ἔχομεν δύο ζεύγη λύσεων τοῦ δοθέντος συστήματος, τὰ $x = x_1$, $\psi = \alpha - x_1 = \psi_1$ καὶ $x = x_2$, $\psi = \alpha - x_2 = \psi_2$.

Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι [ἔνεκα τῆς (3)] $x_1 + x_2 = \alpha$, ἔπεται, ὅτι $\alpha - x_1 = x_2$, $\alpha - x_2 = x_1$. Ἄρα τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1) εἶναι τὰ $x = x_1$, $\psi = x_2$ καὶ $x = x_2$, $\psi = x_1$.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x - \psi = \beta$, $x\psi = \gamma$ (1'). Εὐρίσκομεν $\psi = x - \beta$ καὶ εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν β' τῶν (1') εὐρίσκομεν $x^2 - \beta x - \gamma = 0$. (2')

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ἓν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς $x = x_1$, $x = x_2$. ἐπομένως ἔχομεν $x = x_1$, $\psi = x_1 - \beta$ καὶ $x = x_2$, $\psi = x_2 - \beta$.

Ἐπειδὴ, ἔνεκα τῆς (2'), εἶναι $x_1 + x_2 = \beta$, εὐρίσκομεν ὅτι τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1') εἶναι τὰ $x = x_1$, $\psi = -x_2$ καὶ $x = x_2$, $\psi = -x_1$.

3ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^2 + \psi^2 - \rho^2 = 0$, $\alpha x + \beta \psi + \gamma = 0$ (1). Ὑποθέτομεν $\beta \neq 0$ καὶ εὐρίσκομεν ἐκ τῆς β' τοῦ (1) $\psi = -\frac{\gamma + \alpha x}{\beta}$ (2). Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν α' τῶν (1) καὶ εὐρίσκομεν

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2\alpha\gamma x + \gamma^2 - \beta^2\rho^2 = 0 \quad (3)$$

ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικά, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2\rho^2) \geq 0$ ἢ $\gamma^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2$.

Ἐὰν πληροῦται ἡ συνθήκη αὕτη, θὰ εὕρωμεν δύο τιμὰς τοῦ x πραγματικάς, ἔστω τὰς x_1, x_2 , καὶ ἀκολουθῶς δύο τιμὰς τοῦ ψ , ἥτοι θὰ ἔχωμεν τὰ ἐξῆς ζεύγη λύσεων τοῦ (1)

$$x = x_1, \psi = -\frac{\alpha x_1 + \gamma}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad x = x_2, \psi = -\frac{\alpha x_2 + \gamma}{\beta},$$

τὰ ὁποῖα περιορίζονται εἰς ἓν μόνον, ἂν εἶναι $\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2$.

Ἄν αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι φανταστικά, θὰ συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ψ

$$4\text{ον. Ἐστω τὸ σύστημα} \begin{cases} x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 14 \\ x + \psi + \omega = 6 \\ x - \psi + \omega = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὐκόλως εὐρίσκομεν $2\psi = 6$, ἄρα $\psi = 3$, ὅτε ἐκ τῆς γ' τῶν δοθεισῶν εὐρίσκομεν $\omega = 3 - x$. Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) εὐρίσκομεν

$$x^2+9+(3-x)^2=14 \quad \eta \quad x^2-3x+2=0 \quad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν $x=1$, $x=2$. Οὕτως εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς $\omega=2$, $\omega=1$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξῆς τριάδας λύσεων τοῦ (1) $x=1$ $\psi=3$, $\omega=2$ καὶ $x=2$, $\psi=3$, $\omega=1$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$453. \quad \alpha') \begin{cases} 12x\psi+13\psi^2=25 \\ 4x-3\psi=1 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (x+\psi)(2x+3\psi)=180 \\ x-2\psi=3 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} x^2-x\psi+4\psi^2=1,5 \\ x-\psi=1,25 \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} (2-x)(9+\psi)=91 \\ x+\psi=9 \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} x^2+2(x\psi-24)+\psi^2=0 \\ x-\psi=1 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} x\psi-7(3x-\psi)+3=0 \\ 2x-\psi=0 \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x(\psi+1)+4=0 \\ \psi(x+1)+9=0 \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} 5=19 \cdot \frac{1-\psi-\psi^2}{1-x-x^2} \\ 2x-3\psi=2 \end{cases} \quad \theta') \begin{cases} \psi \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{9}{2} \\ \psi \cdot \frac{x-10}{x+10} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$454. \quad \alpha') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2 = 2 \\ \alpha\psi + \beta x = 0 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x\psi + \beta\psi^2 = 0 \\ \alpha x - \beta\psi = 2\alpha\beta \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2 = 1 \\ \frac{x}{\beta} - \frac{\psi}{\alpha} = 0 \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} (2\alpha - \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)\psi^2 = 4\alpha^3 \\ x + \psi = 2\alpha \end{cases}$$

$$\epsilon') \begin{cases} x^2 + 2\alpha\psi^2 = \alpha^2 + 1 \\ x + \psi = \alpha \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} 2x^2 - 3x\psi = 15\alpha - 10\alpha^2 \\ 3x + 2\psi = 12\alpha - 13 \end{cases}$$

$$455. \quad \alpha') \begin{cases} (x+\alpha)^2 - (\psi-\beta)^2 = 4(\alpha^2 - \beta^2) \\ x - \psi = \alpha + \beta \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (x+\alpha)^2 + (\psi+\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \\ x + \psi = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$456. \quad \alpha') \begin{cases} x^2 - x\psi = 2\alpha\beta + 2\beta^2 \\ x\psi - \psi^2 = 2\beta(\alpha - \beta) \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} (\beta x^2 + \alpha\psi^2)(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha\beta\gamma^2 \\ \alpha x + \beta\psi = \gamma \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \psi^2 = \frac{\alpha}{2} \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \\ (x+1)x + \psi^2 = \frac{\alpha}{4} (5\alpha + 4) \end{cases}$$

Ἐπίσης τὰ κατωτέρω :

$$457. \quad \alpha) \begin{cases} \psi^2 + 2\alpha \left(x^2 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ x^2 + 2\alpha\psi^2 = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \psi^2 = 2\alpha(\lambda+1) \left(x + \frac{\alpha\lambda}{2}\right) \\ 2\alpha x = \left(\frac{\psi}{\lambda+1}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma') \begin{cases} \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\psi^2}{2\beta^2\gamma^2x} = 2 \\ \psi^2 = \beta^2\gamma^2x \end{cases} & \delta') \begin{cases} \psi - x = 2\beta \\ \frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{\psi^2}{\alpha + \beta} = x + \psi \end{cases} \\
 458. & \alpha') \begin{cases} \beta^2x^2 - \alpha^2\psi^2 = \alpha^2\beta^2 \\ \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2 = 2\gamma\left(\psi + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}\right) \end{cases} & \beta') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (\beta\gamma)^2x + \psi^2 = 2\beta^2\gamma^2x \\ \left(\frac{\psi}{\beta\gamma}\right)^2 = x \end{cases} \\
 459. & \alpha') \begin{cases} \alpha\psi^2 - 2\beta^2\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ \alpha\psi^2 + 2\beta^2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \end{cases} & \beta') \begin{cases} \alpha(\psi^2 - \beta^2) - 2\beta^2x = 0. \\ 2\frac{x^2}{\alpha} + \frac{\psi}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases} \\
 & \gamma') \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\alpha - \beta}\right)^2 = x \\ \psi^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 x \end{cases} \\
 460. & \alpha') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 100 \\ x : \psi = 3 : 5 \end{cases} & \beta') \begin{cases} x^2 - \psi^2 = 56 \\ x : \psi = 9 : 5 \end{cases} \\
 & \gamma') \begin{cases} 24\psi(x - 5\psi) = (x + 2\psi)(5x - 24\psi) \\ 5x^2 - 72\psi^2 = 32 \end{cases} \\
 461. & \alpha') \begin{cases} x^2 + x\psi + \psi^2 = 79 \\ (x + \psi) : (x - \psi) = 5 : 2 \end{cases} & \beta') \begin{cases} x^2 - x\psi + \psi^2 = 91 \\ (x + \psi) : (x - \psi) = 8 : 3 \end{cases} \\
 & \gamma') \begin{cases} (x + 4)^2 = x\psi \\ \psi^2 = (\psi + 9)(x + 4) \end{cases} & \delta') \begin{cases} (x^2 + \psi^2)(x + \psi) = 1080 \\ (x^2 + \psi^2)(x - \psi) = 540 \end{cases} \\
 & \epsilon') \begin{cases} (x^2 - \psi^2)(2x - 3\psi) = 192 \\ (x^2 - \psi^2)(3x + \psi) = 1344 \end{cases}
 \end{aligned}$$

§ 203. Ἡ λύσις συστημάτων β' ἢ καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀνάγεται συνήθως εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων α' καὶ β' βαθμοῦ, ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ὠρισμένος κανὼν διὰ τὴν λύσιν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπιδιώκεται ἡ λύσις τῶν ἀπλουστερώων ἐκ τῶν ἐξισώσεων, ὡς πρὸς ἀριθμὸν τινα ἀγνώστων συναρτήσῃ τῶν λοιπῶν. Τὰς οὕτω εὐρίσκομένας τιμὰς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις καὶ ἐπιδιώκομεν νὰ εὕρωμεν μίαν μόνον ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ ἓνα ἀγνώστον, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν, ὅτε διευκολύνεται καὶ ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγνῶστων.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$x^3 + \psi^3 + 2x^2 - \psi = 9.$$

$$x + \psi = 3$$

Ἐκ τῆς δευτέρας εὐρίσκομεν $\psi=3-x$. Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $x^3+(3-x)^3+2x^2-3+x=9$ ἢ τὴν $11x^2-26x+15=0$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν $x_1=1$ $x_2=\frac{15}{11}$, ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν καὶ $\psi_1=2$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ ἐξῆς ζεύγη: $x_1=1$, $\psi_1=2$, $x_2=\frac{15}{11}$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^2+\psi^2=\alpha^2$, $x\psi=\beta^2$.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν καὶ τὴν $2x\psi=2\beta^2$, ὅτε εὐρίσκομεν $(x+\psi)^2=\alpha^2+2\beta^2$. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν τὰ μέλη τῆς $2x\psi=2\beta^2$ καὶ εὐρίσκομεν $(x-\psi)^2=\alpha^2-2\beta^2$, ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν $x+\psi=\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}$, $x-\psi=\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}$, καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὰ συστήματα :

$$\begin{aligned} x+\psi &= \sqrt{\alpha^2+2\beta^2} & x+\psi &= -\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi &= \sqrt{\alpha^2-2\beta^2} & x-\psi &= -\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{aligned}$$

εὐκόλως λυόμενα.

Ἐνίοτε εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀγνώστων, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὄρων τοῦ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Τότε διὰ καταλλήλου ἀπαλοιφῆς τῶν ἰσοβαθμίων τούτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων, εὐρίσκομεν ἐξίσωσιν α' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους. Αὕτῃ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τοῦ δοθέντος συστήματος. Οὕτως ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἀπλουστέρου συστήματος β' βαθμοῦ.

Παραδείγματα. 1ον. Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3x^2-5x\psi+4\psi^2-8x+7\psi=8 \\ 9x^2-15x\psi+12\psi^2+11x-3\psi=12. \end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν τὸ x^2 μεταξύ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ εὐρίσκομεν $35x-24\psi=-12$, ἢ ὁποία μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

2ον. Ἐστω τὸ σύστημα
$$\begin{cases} x^2+2x\psi-6\psi^2=208 \\ x\psi-2\psi^2=16. \end{cases}$$

Διαιρούντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\frac{x^2+2x\psi-6\psi^2}{x\psi-2\psi^2} = \frac{208}{16} \text{ ἢ } \frac{\frac{x^2}{\psi^2} + 2\frac{x}{\psi} - 6}{\frac{x}{\psi} - 2} = \frac{26}{2} = 13.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς $\frac{x}{\psi}$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν τιμὰς τοῦ $\frac{x}{\psi}$, ἄρα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ψ π.χ. συναρτήσει τοῦ x καὶ ἀκολούθως ἡ οὕτως εὐρίσκομένη πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς x, ψ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἄνωτέρω.

3ον. Ἐστω τὸ σύστημα $x^3+\psi^3=9$, $x+\psi=3$. Ὑποϋντες τὰ μέλη τῆς β' ἐξισώσεως εἰς τὴν τρίτην δύναμιν εὐρίσκομεν

$$x^3+3x^2\psi+3x\psi^2+\psi^3=27.$$

Ἐνεκα τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἡ ἄνωτέρω γίνεται $3x\psi(x+\psi)=27-9=18$ καὶ ἔνεκα τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν αὕτη γίνεται $x\psi=2$. Αὕτη μὲ τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ , τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἄνωτέρω.

Ἀσκήσεις

Ὁ μὲν πρῶτη. 462. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} x^2-x\psi=14 \\ x\psi-\psi^2=10 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2+\psi^2=73 \\ x\psi-\psi^2=15 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^2+\psi^2=157 \\ x\psi=66 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x^2+x\psi=125 \\ x\psi=50 \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} x^2+\psi x=169 \\ x\psi=60 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} x^2+\psi^2=\frac{25}{36} \\ 3x\psi=1 \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x^2+x\psi+\psi=121 \\ x^2+x\psi+x=126 \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} x^2+x\psi=187 \\ \psi^2+x\psi=102 \end{cases}$$

463. Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

$$\alpha') \begin{cases} x^2+9\psi^2=136 \\ x-3\psi=4 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 4(x+\psi)^2-5(x+\psi)=50 \\ 5(x-\psi)^2+6(x-\psi)=11 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^3-\psi^3=7 \\ x-\psi=1 \end{cases}$$

$$\delta') \begin{cases} x^3-\psi^3=\alpha \\ x-\psi=\beta \end{cases} \quad \epsilon') \begin{cases} x^4+\psi^4=17 \\ x+\psi=3 \end{cases} \quad \sigma\tau') \begin{cases} x^4+\psi^4=\alpha \\ x+\psi=\beta \end{cases}$$

$$\zeta') \begin{cases} x^4+\psi^4=\lambda \\ x-\psi=\mu \end{cases} \quad \eta') \begin{cases} x^5+\psi^5=\alpha \\ x+\psi=\beta \end{cases}$$

Ὁ μὲν δευτέρα. 464. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\alpha') \begin{cases} x+\psi=21-\sqrt{x\psi} \\ x^2+\psi^2=257 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} 2(x^2+\psi^2)+7(x+\psi)^2=1049 \\ 3x^2\psi^2-\left(2+\frac{1}{2}\right)x\psi=275 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} x + \psi + \sqrt{x + \psi - 2} = 14 \\ \frac{x^2 \psi^2}{2} - \frac{3x\psi}{-4} = 175,5 \end{cases} \quad \delta') \begin{cases} (x^2 + \psi^2)(x - \psi) = 41 \\ x\psi(x - \psi) = 30 \end{cases}$$

465. 'Ομοίως τὰ ἐξῆς :

$$\alpha') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = \sqrt{x^2 \psi^2 + 273} \\ \frac{x}{\psi} + \frac{\psi}{x} = 4 + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2 - \psi^2 = 21(x - \psi) \\ \frac{x-3}{\psi} = \frac{x\psi-26}{x\psi+2\psi} \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} \frac{2(x+\psi)-3}{5(x+\psi-4)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{-3}{x+\psi} \\ x:\psi = 40\psi:(x+3\psi) \end{cases}$$

466. 'Επίσης τὰ κάτωθι :

$$\alpha') \begin{cases} x^3 + \psi^3 = 973 \\ (x - \psi)^2 - 7(x + \psi) = 90 - x\psi \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} \sqrt{x(\sqrt{x^3} + \sqrt{\psi^3})} = 273 \\ x\sqrt{x\psi} + \psi^2 = 364 \end{cases}$$

$$\gamma') \begin{cases} x\psi = 72, \quad x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 289 \\ x + \psi + \omega = 29 \end{cases}$$

467. 'Επίσης τὰ :

$$\alpha') \begin{cases} x^2 - \psi\sqrt{x\psi} = 585 \\ \psi^2 = x\sqrt{x\psi} - 234 \end{cases} \quad \beta') \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 40 \\ x\psi = \omega \\ x + \psi = 8 \end{cases} \quad \gamma') \begin{cases} x^2 + \omega^2 - x(\psi + \omega) = 25 \\ \omega^2 + \psi^2 - \psi(x + \omega) = 16 \\ x^2 + \psi^2 - \omega(x + \psi) = 9 \end{cases}$$

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 204. Καλοῦμεν προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν εξισώσεων ἢ συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων ἀκολουθοῦμεν πορείαν ὁμοίαν πρὸς ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῶν εξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

1ον. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ἡὑξημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μετὰ 86 ;

Λύσις. Ἐστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ x εἶναι τὸ x^2 , τὸ μὲν τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι $3x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ $2x$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $3x^2 + 2x + 1 = 86$. Λύοντες ταύτην εὐρίσκομεν

$$x = 5 \text{ καὶ } x = -\frac{17}{3}.$$

2ον. Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίνει κατὰ 4 τὸν διαιρέτην ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x} - x = 4$ ἢ $x^2 + 4x - 96 = 0$. Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν $x = 8$ καὶ $x = -12$

3ον. Τὸ γινόμενον τῶν ὄρων κλάσματος εἶναι 120. Οἱ ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφηροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστήν καὶ προσεθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ τὸ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ὁ παρονομαστής του θὰ εἶναι $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x + 1 = \frac{120}{x} - 1$ ἢ $x^2 + x = 120 - x$ ἢ $x^2 + 2x - 120 = 0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως εὐρίσκομεν $x = 10$ καὶ $x = -12$. Ἐπομένως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος θὰ εἶναι οἱ 10 καὶ 12 ἢ -12 καὶ -10.

4ον. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ 0,75 αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν τὸν 16 διηρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,8 τοῦ ζητουμένου πλὴν 15 ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $0,75x + 1 = \frac{16}{0,8x - 15}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 20$ καὶ $x = -\frac{31}{12}$.

5ον. Νὰ εὐρεθοῦν δύο ἀκέραιοι περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι 8000.

Λύσις. Ἐστῶσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = 8000$ ἢ $8x = 8000$ καὶ $x = 1000$. Ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 2001 καὶ 1999.

6ον. Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν 3, 2, 5, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 342 νὰ εὐρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, ψ, ω , τοὺς ζητούμενους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 342$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ x, ψ , καὶ ω εἶναι

ανάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5 θὰ εἶναι $\frac{x}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega}{5}$. Ἐκ τούτου ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους μὲ ρ , $x=3\cdot\rho$, $\psi=2\cdot\rho$, $\omega=5\cdot\rho$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $9\rho^2+4\rho^2+25\rho^2=342$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\rho=\pm 3$ ἄρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\pm 9, \pm 6, \pm 15$.

7ον. Ἐγευμάτισαν 15 ἄτομα· οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 360 δρχ. ἐν ὅλῳ καὶ αἱ γυναῖκες ὁμοίως 360 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσαν ὁ καθείς, ἐὰν κάθε γυνὴ ἐδαπάνησεν 20 δρχ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός ;

Λύσις. Ἐστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε $15-x$ θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς μὲν ἀνδρὸς θὰ εἶναι $\frac{360}{x}$, καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{360}{15-x}$ δρχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $\frac{360}{15-x} = \frac{360}{x} - 20$ καὶ x θετικὸς καὶ < 15 . Λύοντες εὐρίσκομεν $x^2-51x+2700=0$ καὶ $x = \frac{51 \pm 39}{2} = \begin{matrix} \rightarrow 45 \\ \rightarrow 6 \end{matrix}$.

Ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἡ $x=45$ ἀποκλείεται, διότι δὲν εἶναι < 15 . Ὡστε εὐρίσκομεν 6 ἄνδρας καὶ $15-6=9$ γυναῖκας. Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος ἀνὴρ ἐδαπάνησε $360 : 6=60$ δρχ., ἐκάστη δὲ γυνὴ ἐδαπάνησε $360 : 9=40$ δρχ.

8ον. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.

Λύσις. Ἄν μὲ x καὶ ψ παραστήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $x-\psi=17$, $x^2+\psi^2=25^2=625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν $x=24$ καὶ $\psi=7$.

9ον. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε, ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος ΔΕ πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Λύσις Παριστάνομεν μὲ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ μὲ x

τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (ΑΔ). Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἐπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Ἦτοι θὰ εἶναι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{x^2}{\alpha^2}$. Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$, κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος· ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$ καὶ $x^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, $x = \frac{\alpha/\sqrt{2}}{2}$, ἐπεὶ δὴ πρέπει $x > 0$.

Π ρ ο β λ ῆ μ α τ α

468. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον νὰ εἶναι ἴσα.

469. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 0,5 αὐξανόμενα κατὰ 5 δίδουν, τὸν 35,1 διηρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὅποιον ἀποτελοῦν τὰ 0,3 τοῦ ζητουμένου μεῖον 2,5.

470. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέριοι διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι 202.

471. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἀκέριοι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

472. Νὰ χωρισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὸν 1620.

473. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος διαγώνιον 17 μ. καὶ ἐμβαδὸν 120 μ².

474. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν λόγον 3 : 4.

475. Ἡ διαφορά δύο ἀριθμῶν εἶναι 14 καὶ τὸ γινόμενόν των 1632. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

476. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ πενταπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης του γίνεται 500;

477. Ἡρωτήθη τις ποία εἶναι ἡ ἡλικία του καὶ ἀπεκρίθη : Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας μου ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαεξαπλάσιον τῆς ἡλικίας, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχω μετὰ 12 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία του ;

478. Δύο κρουνοί, ρέοντες συγχρόνως, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος δύναται νὰ τὴν πληρώσῃ, ἂν ὁ εἰς τούτων χρειάζεται μόνος 27 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου μόνου ;

479. Νὰ εὑρεθεῖν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 99 μ., καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι τὰ ἐννέα δέκατα ἑκτα τῆς ἄλλης.

480. Νὰ εὑρεθῶν αἱ διαστάσεις (βάσις καὶ ὕψος) ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι 51 μ. καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν ὀκτῶ δέκατα πέμπτα.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

1ον. (Τῆς χρυσεῖς Τομῆς)*. Δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ χωρίσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Λύσις. Ὡς παραστήσωμεν μὲ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας AB καὶ ἄς θεωρήσωμεν ἀρχὴν αὐτῆς τὸ A. Ἐστω Γ τὸ σημεῖον διαιρέσεως. Θέτομεν $AG = x$ ὁπότε $BG = \alpha - x$, καὶ πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$ ἥτοι $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὐρίσκομεν

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{-\alpha \pm \alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha(\pm\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Διερεύνησις. Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαὶ καὶ μὲ σήματα ἀντίθετα, ἐπεὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $-\alpha^2$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3. Ἐπομένως ἡ ρίζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σῆμα + τοῦ ριζικοῦ θὰ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α , ἄρα δίδει τὴν ζητούμενην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητικὴ. Ὡστε ἔχομεν $x = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς AB, ἀπὸ τοῦ A, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

2ον. Σῶμα τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενόν) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α . Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος u ;

Λύσις. Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Φυσικῆς), τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἄν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους γνωστούς ἐκ τῆς Φυσικῆς :

$$u = \alpha t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \tau = \alpha - g t \quad (1)$$

* Ἡ ὀνομασία **χρυσὴ τομὴ** ἐπεκράτησεν, ἐπεὶ τὴν αὐτὴν θεωρεῖται ὡς ἀρχὴ τοῦ ὥραιου εἰς τὴν ζωγραφικὴν, ἀρχιτεκτονικὴν καὶ τὴν πλαστικὴν τέχνην.

όπου τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμήν t καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ $9,81 \mu$. ἀνὰ δλ. (κατὰ προσέγγισιν).

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $gt^2 - 2at + 2u = 0$ (2)
ἐκ τῆς λύσεως δὲ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ t .

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (2) πραγμα-
τικαὶ εἶναι $a^2 - 2gu \geq 0$ ἢ $u \leq \frac{a^2}{2g}$. Ἐπομένως $u = \frac{a^2}{2g}$ εἶναι τὸ μέγιστον
ὑψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ κινητόν, ἂν ριφθῇ μὲ ταχύτητα
ἀρχικὴν a . Ἐὰν εἶναι $u = \frac{a^2}{2g}$, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἴσαι μὲ $\frac{a}{g}$. Ἐπομέ-
νως τὸ κινητόν χρειάζεται $\frac{a}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον
ὑψος. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ τὸ κινητόν ταχύτητα
ἴσην μὲ 0.

Πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1)
τὸ t μὲ τὸ $\frac{a}{g}$ εὐρίσκομεν ἐξαγόμενον 0, ἥτοι $\tau = a - \frac{ag}{g} = 0$.

Ἐὰν εἶναι $u < \frac{a^2}{2g}$, αἱ δύο ρίζαι τῆς πρώτης τῶν (1) εἶναι πρα-
γματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, ὁ δὲ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει αὐτάς, εἶναι
 $\delta \tau = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2gu}}{g}$. Αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ t ἀρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα.
Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορές δι' ἐκάστου σημείου κειμένου
ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει τὸ ὕψος u , μίαν ἀνερχόμενον
καὶ μίαν κατερχόμενον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μὲν μία τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t εἶναι
μεγαλύτερα, ἡ δὲ ἄλλη μικρότερα τοῦ $\frac{a}{g}$ κατὰ $\frac{\sqrt{a^2 - 2gu}}{g}$. Εἶναι εὐκο-
λον νὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητες [δηλαδή αἱ τιμαὶ τοῦ τ τῆς δευ-
τέρας τῶν (1)] εἶναι ἀντίθετοι. Ἄν τεθῇ $u=0$, θὰ ἔχωμεν $t=0$, καὶ
 $t = \frac{2a}{g}$. Τὸ $\frac{2a}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητόν
ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποῖου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρό-
νος, καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις, ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον, καθ' ὃν γίνεται
ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἂν ἐπέρασαν t^s ἀφ' ὅτου
ἀφῆθῃ νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἡκού-

σθη ὁ ἥχος ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος (ἢ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται).

Λύσις. Παριστάνομεν μὲ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος καὶ μὲ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα. Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: 1ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1 , τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ. 2ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2 , τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἥχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς ἀπόστασιν x .

Ἐχομεν τὸν ἐξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x = \frac{1}{2} g t_1^2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα, ὅταν δίδεται ὁ χρόνος κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶναι καὶ ἡ κίνησις κατὰ τὴν πτώσιν τοῦ λίθου. Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ $x = \tau t_2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα ἐκφραζόμενον μὲ τὴν ταχύτητα τ καὶ τὸν χρόνον t_2 κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου, εὐρίσκομεν $t_2 = \frac{x}{\tau}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{\tau} = t, \quad \eta \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{\tau} \quad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x

$$gx^2 - 2\tau(gt + \tau)x + g\tau^2 t^2 = 0 \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ t_1 εἶναι θετικὸν καὶ τὸ κατὰ τὴν (1) καὶ (2) ἴσον αὐτοῦ $t - \frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἥτοι $t - \frac{x}{\tau} > 0$ ἢ $x < \tau t$ (4)

Ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν τὸ $\tau^2(gt + \tau)^2 - g^2\tau^2 t^2$ ἢ τὸ $\tau^3(\tau + 2gt) > 0$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ριζῶν, εἶναι $\tau^2 t^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau(gt + \tau)}{g}$, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά. Ἐπομένως αἱ ρίζαι εἶναι θετικά. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ τὴν (4), τὸ $x < \tau t$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\tau t \cdot \tau t$ εἶναι δὲ αὗται ἄνισοι, ἔπεται, ὅτι ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τt καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τούτου, ἡ ὁποία καὶ θὰ εἶναι δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης (4). Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (3) εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σῆμα — τοῦ ριζικοῦ. Ἦτοι ἔχομεν $x = \frac{\tau}{g} \left[gt + \tau - \sqrt{\tau(\tau + 2gt)} \right]$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁ μ ᾱ ς π ρ ῶ τ η. (Γενικά). 481. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιστὸν μέρος ἐπὶ τὸ νιοστὸν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ; (Διερεύνησις).

482. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιπλάσιον ἐπὶ τὸ νιπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ; (Διερεύνησις).

483. Κεφάλαιον α δρχ. δίδει τόκον τ δρχ., ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τῆς διαρκείας τοῦ δανείου εἶναι κατὰ δ μεγαλύτερος τοῦ ἐπιτοκίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου. (Διερεύνησις· μερική περίπτωσις $\alpha=5400$ $\delta=2$, $\tau=1296$).

484. Κεφάλαιον α δρχ. ἔφερε τόκον τ δρχ. καὶ θὰ ἔδιδε τὸν αὐτὸν τόκον, ἂν ἐτοκίζετο μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐπὶ μ ἔτη περισσότερα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον. (Διερεύνησις· μερική περίπτωσις $\alpha=2100$, $\epsilon=1$, $\mu=1$, $\tau=420$).

485. Ἐκ δύο κεφαλαίων τὸ ἓν ἦτο κατὰ δ μικρότερον, ἀλλ' ἐτοκίσθη μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου καὶ ἔφερε τόκον ἐπὶ v_1 ἔτη t_1 δρχ. ἐνῶ τὸ ἄλλο εἰς v_2 ἔτη ἔφερε t_2 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια (Διερεύνησις. μερική περίπτωσις $\delta=6000$, $\epsilon=1$, $v_1=6$, $v_2=5$, $t_1=9000$, $t_2=7200$).

486. Ἐγοράσθη ὕφασμα ἀντὶ α δρχ. Ἐὰν ἕκαστον μέτρον τούτου ἐτιμᾶτο β δραχ. ὀλιγώτερον, θὰ ἠγοράζοντο γ μέτρα ἐπὶ πλέον. Πόσα μέτρα ἠγοράσθησαν καὶ πρὸς πόσας δρχ. τὸ μέτρον ; (Διερεύνησις).

487. Δίδεται τριγώνον μὲ πλευρὰς α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ μῆκος τοιοῦτον ὥστε, ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ αὐξηθοῦν ἢ ἐλαττωθοῦν κατ' αὐτό, νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου.

488. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ (ἀπεράντου) εὐθείας AB σημεῖον, ὥστε νὰ φωτίζεται ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο φωτεινὰς ἐστίας κειμένας εἰς τὰ σημεία Σ, Σ' τῆς εὐθείας, ἂν ἡ ποσότης τοῦ φωτός, τὸ ὁποῖον δέχεται μία ἐπιφάνεια ἀπὸ φωτεινῆς ἐστίας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐστίας (Διερεύνησις).

489. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τραπέζιον ἔχον περίμετρον 2τ.

490. Δοθέντος τριγώνου ὀρθογωνίου ABΓ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας αὐτοῦ ΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε α') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ α². β') τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ λ². γ') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀπὸ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ μ². (Διερεύνησις).

491. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου α') ἂν δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ, β') ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν, γ') ἡ περίμετρος 2τ καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

Ὁ μ ᾱ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 492. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐκ δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ 3, ἂν ἔχουν γινόμενον 54 ;

493. Ποίος άκέραιος άριθμός είναι κατά 29 μικρότερος του τετραγώνου του κατά μονάδα μικροτέρου αυτού;

494. Εύρετε δύο άριθμούς έχοντας γινόμενον 2, άν το άθροισμα των άντιστρόφων αυτών ίσούται με $1\frac{5}{12}$.

495. Εύρετε κλάσμα, του οποίου ο άριθμητής είναι κατά 4 μικρότερος του παρονομαστού. Έάν αύξηθῇ ο άριθμητής κατά 7 και έλαττωθῇ ο παρονομαστής κατά 5, διαφέρει του προηγούμενου κατά $1\frac{1}{15}$.

496. Έπιλήρωσέ τις 1600 δρχ. δια καφέ, 1800 δρχ. δια τείον, έλαβε δέ 40 χιλιογρ. καφέ επί πλέον του τείου. Πόσον εκόστιζε το χιλιογράμμου του καφέ, άν του τείου εκόστιζε 50 δρχ. επί πλέον;

497. Είς έκδρομήν αι γυναίκες ήσαν 3 όλιγώτεροι των άνδρων. Άν οι μέν άνδρες έπιλήρωσαν έν όλω 1750 δρχ. αι δέ γυναίκες 800 δρχ., πόσοι ήσαν οι άνδρες και αι γυναίκες, εάν καθείς των άνδρων έπιλήρωσε 50 δρχ. περισσότερον η καθεμία γυνή;

498. Είς 27 άνδρας και γυναίκας έπιληρώθησαν 2100 δρχ. δια τους άνδρας και 4200 δρχ. δια τας γυναίκας. Πόσαι ήσαν αι γυναίκες, άν καθεμία έπιληρώνετο 150 δρχ. όλιγώτερον του άνδρός;

499. Νά εύρεθῇ άριθμός άκέραιος, του οποίου το άθροισμα με την τετραγωνικήν ρίζαν αυτού είναι 272.

Ό μ α ς τ ρ ί τ η. (Γεωμετρικά). 500. Πόσον είναι το πλήθος σημείων μεταξύ, των οποίων δυνατόν να φέρωμεν 78 ευθείας συνδεούσας αυτά ανά δύο,

501. Ποιον έπίπεδον κυρτόν πολύγωνον έχει 104 διαγωνίους;

502. Έκ δύο έπίπέδων πολυγώνων το α' έχει 6 πλευράς επί πλέον του β' και τρεις και έν τρίτον φοράς περισσότερας διαγωνίους. πόσας πλευράς έχει καθέν;

503. Έάν αι πλευραι τετραγώνου αύξηθούν κατά 3 μ, το έμβαδόν του νέου θα είναι 2,25 φορές του άλλου. Πόση είναι η πλευρά αυτού;

504. Πόσον είναι το μήκος των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου έχοντας έμβαδόν 150 μ², άν ο λόγος των καθέτων πλευρών αυτού είναι 0,75;

505. Ίσοσκελοῦς τριγώνου η μέν βάσις είναι κατά 19 μ. μεγαλυτέρα του ύψους του, έκαστον δέ των σκελών του κατά 8 μ. μεγαλύτερον του ύψους του. Πόση είναι η βάσις και πόσον το ύψος του;

506. Τίνες αι διαστάσεις ορθογωνίου έχοντας έμβαδόν 192 μ², άν διαφέρουν κατά 4 μ.;

507. Ρόμβου η μέν πλευρά έχει μήκος 17 μ. αι δέ διαγωνίοι έχουν διαφοράν 14 μ. Πόσον μήκος έχει η μικρότερα διαγωνίός του;

508. Ποίαι αι διαστάσεις ορθογωνίου έγγεγραμμένου εις κύκλον ακτίνας 12,5 μ, άν η διαφορά αυτών είναι 17 μ.;

509. Εύρετε τας πλευράς δύο τετραγώνων έχόντων άθροισμα έμβαδών 8621 μ², άν το γινόμενον των διαγωνίων αυτών είναι 8540.

Ό μ α ς τ ε τ ά ρ τ η. (Συστημάτων). 510. Δύο κρουνοί ρέουν συγχρό-

νως και πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 2,4 ὥρας. Ὁ β' μόνος χρειάζεται 2 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ α'. Εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος τὴν πληροῖ μόνος ;

511. Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 20 000 δρχ. ὁ α' διὰ 2 μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μῆνας. Ὁ μὲν α' ἔλαβεν ἐν ὄλῳ 18 000 δρχ., ὁ δὲ 9 000. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος ;

512. Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30 000 δρχ. ἐτοκίσθησαν πρὸς 6%. Τὸ μὲν α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 1 280 δρχ. τὸ δὲ β' 840 δρχ. Ποῖα τὰ κεφάλαια ;

513. Νὰ εὕρεθoῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 62,5 καὶ ὁ μὲν α' ὑπερβαίνει τὸν β' κατὰ 4 ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3.

514. Εὐρετε διψήφιον ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει πέντε καὶ ἐν τρίτον, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

515. Εὐρετε τριψήφιον ἀριθμὸν, τοῦ ὁποῖου τὸ μὲν β' ψηφίον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶναι ὡς 124 : 7. Δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ προκύπτει ἀριθμὸς ἡῤῥξημένος κατὰ 594.

516. Εὐρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 21 τῶν δὲ τετραγώνων των 189.

517. Εἰς δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ τρία πέμπτα τοῦ χρόνου. καθ' ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρῳ. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β', μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἡνοίγοντο μαζὶ θὰ ἐπληροῦτο εἰς 6 ὥρας, θὰ ἔτρεχον δὲ ἐκ τῆς α' τὰ δύο τρίτα τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθη ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενὴν ;

Ὁ μ ἄ ς π έ μ π τ η. (Φυσικῆς). 518. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ. ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ ; (Παραβλέπεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος).

519. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος ριπτόμενος ἄνω κατακορύφως (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ. καὶ καταπέσῃ ;

520. Πόσῃ ἀρχικῇ ταχύτητι πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως ἄνω (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ ;

521. Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1 460 μ. σφαῖρα ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενόν) καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 μ ;

522. Ποῖαν πίεσιν ἑξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 χιλιογράμμων ;

523. Ἐπὶ πόσα δευτερόλεπτα κυλίστα σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς μῆκος 39,2 μ. καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ;

Περὶληψις περιεχομένων κεφαλαίου VII.

Ὁρισμὸς διτετραγώνου ἐξισώσεως $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$, ($a \neq 0$).
Ἀναγωγή αὐτῆς εἰς τὴν $ax^2 + bx + \gamma = 0$, ($x^2 = \psi$), ρίξει τῆς αἰ

$$\rho_1, \rho_2 = \pm \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\rho_3, \rho_4 = \pm \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)(x - \rho_4)$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, αί ρίζαι τοῦ τριωνύμου.

Τὸ πρόσθημον τοῦ τριωνύμου σπουδάζεται μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀνωτέρου γινομένου.

Τροπὴ διπλῶν ριζικῶν $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ εἰς ἀπλᾶ,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}, \text{ ἂν } \Gamma^2 = A^2 - B.$$

Ἐξισώσεις μετὰ ριζικὰ β' καὶ ἀνωτέρας τάξεως. Ἀπομόνωσις τοῦ ριζικοῦ καὶ ἀπαλλαγὴ ἀπ' αὐτοῦ, ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς.

Ἄν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἐν γένει ἄρρητος, ὑποῦμεν τὰ μέλη τῆς εἰς καταλλήλους δυνάμεις, ἵνα προκύψῃ ἐξίσωσις ἀπηλλαγμένη ριζικῶν, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης, καὶ πρέπει νὰ δοκιμάζωμεν, ἂν αἱ ρίζαι αὐτῆς ἐπαληθεύουν καὶ τὴν δοθεῖσαν.

Ὁρισμὸς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως. Αἱ γ' βαθμοῦ

$$\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0, \quad \alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

ἔχουν ἡ α' τὴν ρίζαν $x=1$ καὶ ἡ β' τὴν $x=-1$, ἀνάγονται δὲ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ (μετὰ διαίρεσιν τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων διὰ $x-1$, $x+1$ ἀντιστοίχως).

Διὰ τὴν λύσιν τῆς $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ τὴν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \beta \left(x + \frac{1}{x} \right) + \gamma = 0$ καὶ $x + \frac{1}{x} = \psi$, ὅτε ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

Ἡ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ ἔχει ρίζας τὰς $x=1$, $x=-1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ α' μέλους διὰ τοῦ x^2-1 .

Ἡ $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x \pm \alpha = 0$ ἔχει τὴν ρίζαν $x=\pm 1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἀντίστροφον ἐξίσωσιν δ' βαθμοῦ.

Ὁρισμὸς διωνύμου ἐξισώσεως $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$, ($\alpha, \beta \neq 0$, k, λ ἀκέρατοι θετικοί).

Τίθεται ὑπὸ μορφήν $x^\lambda (\alpha x^{k-\lambda} + \beta) = 0$, ($k > \lambda$) καὶ ἔχει ρίζας $x=0$

καὶ τὰς τῆς $\alpha x^{\kappa-\lambda} + \beta = 0$ ἢ τῆς $x^{\nu} = \gamma$, ($\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$, $\kappa-\lambda=\nu$). Διακρίνομεν περιπτώσεις α'), ἂν $\nu=2\mu$, β') ἂν $\nu=2\mu+1$, ὅπου μ φυσικός.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x| + \beta = 0$, εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν $x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ἂν $\alpha\beta < 0$, ἐνῶ, ἂν $\alpha\beta > 0$ δέν ἔχει ρίζαν.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$, ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$). Ἐν $\gamma(\beta-\alpha) > 0$, ἢ $\gamma(\alpha+\beta) < 0$, ἔχομεν μίαν λύσιν δι' ἐκάστην περίπτωσηιν.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, ($\alpha \neq 0$).

Ἡ $|x|^2 + 2\beta|x| + \gamma = 0$ ἔχει 4 ρίζας ἀνὰ δύο ἀντιθέτους, ἂν $\beta^2 - \gamma > 0$ καὶ $(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}) > 0$.

Ὁρισμός συστήματος ἐξισώσεων β' βαθμοῦ (ἂν ἔχη μόνον μίαν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ καὶ τὰς ἄλλας α' βαθμοῦ).

Λύσεις συστήματος ἐξισώσεων β' βαθμοῦ ἢ ἀνωτέρου (μετὰ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους).

Προβλήματα ἐξισώσεων καὶ συστημάτων β' βαθμοῦ (ἀριθμητικά, γενικά καὶ μετὰ διερεύνησιν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Α' ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

1. ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

§ 205. Ἀριθμητικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται ὄροι αὐτῆς, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἰς καθένα ὅρον διὰ τὴν δώσῃ τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ, καλεῖται **διαφορὰ** ἢ **λόγος** τῆς προόδου.

Ἄν μὲν ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἴναι ἀριθμὸς θετικὸς, οἱ ὄροι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται **αὐξουσα**, ἐὰν δὲ εἴναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, οἱ ὄροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ λέγεται **φθίνουσα**. Π.χ. ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν, 1, 2, 3, 4,... 48 εἶναι πρόοδος ἀριθμητικὴ αὐξουσα μέτῃ διαφορὰν 1, καθὼς καὶ ἡ 1, 2, 5,... 53 μέτῃ διαφορὰν 2, ἡ δὲ 35, 30, 25,..., 0 εἶναι φθίνουσα μέτῃ διαφορὰν -5.

Ἐὰν μὲν α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς προόδου καὶ μὲν ω τὴν διαφορὰν αὐτῆς, ὁ δεῦτερος, τρίτος,... ὅρος θὰ παριστάνεται μὲν $\alpha + \omega$, $\alpha + 2\omega$, $\alpha + 3\omega$, $\alpha + 4\omega$,... (1) Ἄρα :

Ἐκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲν τῶν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὄρων.

Οὕτως ὁ ὅρος τῆς προόδου (1) ὁ ἔχων π.χ. τὴν τριακοστὴν τάξιν ἰσοῦται μὲν $\alpha + 29\omega$, ὁ τὴν ἑξηκοστὴν πέμπτην τάξιν μὲν $\alpha + 64\omega$ κ.τ.λ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι :

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προ-

* Ἡ χρῆσις ἀριθμητικῶν προόδων χρονολογεῖται ἀπὸ 2000 - 1700 π.Χ. εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου Αἰμῆς μὲν τὸ πρόβλημα νὰ χωρισθοῦν 100 ἄρτοι εἰς 5 πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

όδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, οἰασδήποτε τάξεως ὅρον αὐτῆς, καὶ λέγομεν ὅτι τότε ἡ πρόοδος εἶναι ὠρισμένη.

Ἐὰν ν παριστάνῃ τὸ πλήθος τῶν ὁρων τῆς (1) καὶ τ τὸν ἔχοντα τὴν νιοστήν τάξιν ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶναι $n-1$ τὸ πλήθος καὶ θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha + (n-1)\omega$ (2)

Ἄν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς ω , εὐρίσκομεν $\omega = \frac{\tau - \alpha}{n-1}$. Ἄν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς α , εὐρίσκομεν $\alpha = \tau - (n-1)\omega$, ἂν δὲ λυθῇ πρὸς n , εὐρίσκομεν $n = 1 + \frac{\tau - \alpha}{\omega} = \frac{\omega + \tau - \alpha}{\omega}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι τὸ n ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός.

Παρατηρητέον, ὅτι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ὅρους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ δίδεται ὑπὸ τῶν $\beta - \alpha, \gamma - \beta, \delta - \gamma, \dots$

Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν μὲ ω , θὰ ἔχωμεν $\omega = \beta - \alpha, \omega = \gamma - \beta$ καὶ προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $2\omega = \gamma - \alpha$, ἄρα $\omega = \frac{\gamma - \alpha}{2}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ὁ ὅρος, ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον 3 καὶ διαφορὰν 5, ἰσοῦται μὲ $3 + (13-1)5 = 3 + 12 \cdot 5 = 3 + 60 = 63$.

2ον. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ ὅρος τῆς δεκάτης τάξεως εἶναι 31 καὶ τῆς εἰκοστῆς 61. Ἐχομεν, ὅτι ὁ δέκατος εἶναι $\alpha + 9\omega = 31$, ὁ εἰκοστός $\alpha + 19\omega = 61$, ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς β' ἰσότητος τὴν α' εὐρίσκομεν

$$10\omega = 61 - 31 = 30 \quad \eta \quad 10\omega = 30 \quad \text{καὶ} \quad \omega = 3.$$

Ἐπομένως εἶναι $\alpha + 9 \cdot 3 = 31$ καὶ $\alpha = 4$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι 4, 7, 10, 13,

I. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 206. Δοθέντων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξύ των ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α καὶ τ εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ n τὸ πλήθος τῶν παρεμβληθησομένων, τὸ πλήθος, τῶν ὁρων τῆς σχηματισθησομένης προόδου θὰ εἶναι $n+2$, ὁ πρῶτος ὅρος α καὶ ὁ τελευταῖος τ . Ἐπομένως

θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha + (v+1)\omega$, ἂν τὸ ω παριστάνῃ τὴν διαφορὰν τῆς προόδου. Ἐπομένως ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εὐρίσκομεν $\omega = \frac{\tau - \alpha}{v+1}$. Οὕτω σχηματίζεται ἡ πρόοδος ἐκ τοῦ α , τοῦ τελευταίου ὅρου τ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς.

Ἄν π.χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 16 ἀριθμοί, ὥστε μετ' αὐτῶν νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν, ἔχομεν $\alpha=1$, $\tau=4$, $v=16$, $\omega = \frac{4-1}{16+1} = \frac{3}{17}$ καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ $1, 1\frac{3}{17}, 1\frac{6}{17}, \dots, 4$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

524. Διὰ τὰς κάτωθι ἀριθμητικὰς προόδους εὑρετε ποῖαι εἶναι αὐξουσαι, ποῖαι φθίνουσαι καὶ διατί;

α') 3, 5, 7, 9... β') -15, -10, -5, 0, 5... γ') 0,5 1,5 2,5...

δ') 0,75 1 1,25 1,5... ε') 68, 64, 60... στ') -5, -5,3, -5,6, -5,9.

525. Εὑρετε τὸν δέκατον ὅρον τῆς α') 9, 13, 17... β') -3, -1, 1...
γ') τὸν ὄγδοον τῆς α, $\alpha+3\beta$, $\alpha+6\beta$...

526. Εὑρετε τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον με' ὅρον τῆς δεκάτης τάξεως 231 καὶ τῆς εἰκοστῆς 2681.

527. Εὑρετε τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, με' α' ὅρον α καὶ νιοστὸν τ . Μερικὴ περίπτωσις $\alpha=0,2$, $\tau=3,2$ καὶ $v=6$.

528. Εὑρετε τὸν α' ἐκ 10 ὁρων προόδου με' διαφορὰν 0,75 καὶ τελευταῖον 6,25.

529. Εὑρετε τὸ πλῆθος τῶν ὁρων προόδου με' α' ὅρον 3, τελευταῖον 9 καὶ διαφορὰν 2.

530. Εὑρετε τὸν ὅρον τῆς εἰκοστῆς τάξεως με' α' ὅρον 6.35 καὶ διαφορὰν -0,25.

531. Μεταξὺ τῶν 4 καὶ 25 νὰ παρεμβληθοῦν 6 ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος.

532. Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν.

533. Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάνει τὸ ἡμερονύκτιον;

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 207. Διὰ νὰ εὐρώμεν τύπον δίδοντα τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρων ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης ὠρισμένον ἀριθμὸν ὁρων, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἐξῆς ιδιότητα:

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, μὲ ὠρισμένον πλῆθος ὄρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὄρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὄρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων.

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \tau$, (1) ἡ διαφορὰ αὐτῆς ω καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων ν . Ἔχομεν ὅτι $\beta = \alpha + \omega$, $\gamma = \alpha + 2\omega$, $\tau = \lambda + \omega$ καὶ $\tau = \kappa + 2\omega$. Ἐπομένως $\lambda = \tau - \omega$ καὶ $\kappa = \tau - 2\omega$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς $\beta = \alpha + \omega$ καὶ $\lambda = \tau - \omega$, εὐρίσκομεν $\beta + \lambda = \alpha + \tau$, ὁμοίως ἐκ τῶν $\gamma = \alpha + 2\omega$ καὶ $\kappa = \tau - 2\omega$ εὐρίσκομεν $\gamma + \kappa = \alpha + \tau$ κ.ο.κ., ἥτοι $\alpha + \tau = \beta + \lambda = \gamma + \kappa \dots$

*Ὡς παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς προόδου μὲ Σ , ἥτοι: $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \kappa + \lambda + \tau$, ὅτε εἶναι καὶ $\Sigma = \tau + \lambda + \kappa + \dots + \gamma + \beta + \alpha$.

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν:

$$2\Sigma = (\alpha + \tau) + (\beta + \lambda) + (\gamma + \kappa) \dots + (\tau + \alpha)$$

$$2\Sigma = (\alpha + \tau)\nu. \text{ Ἐπομένως } \Sigma = \frac{(\alpha + \tau)\nu}{2} \quad (2), \text{ Ἥτοι:}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου μὲ ὠρισμένον πλῆθος ὄρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων τῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλῆθους τῶν ὄρων αὐτῆς.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha + (\nu - 1)\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, εὐρίσκομεν

$$\Sigma = \frac{[\alpha + \alpha + (\nu - 1)\omega]\nu}{2} = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu, \text{ ἥτοι } \Sigma = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὄρων τῆς 2, 5, 8, ... ἔχομεν $\alpha = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 10$ καὶ $\Sigma = \frac{(2 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 10}{2} = \frac{31 \cdot 5}{1} = 155$.

*Εφαρμογή. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 3 ὄρους, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

*Ἀν μὲ x παραστήσωμεν τὸν β' ὄρον τῆς προόδου καὶ μὲ ω τὴν διαφορὰν τῆς, οἱ τρεῖς ὄροι θὰ εἶναι $x - \omega$, x , $x + \omega$, τὸ ἄθροισμα τούτων $x - \omega + x + x + \omega = 3x = 33$, ἄρα $x = 11$. τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ὄρων $(x - \omega)x(x + \omega) = (x^2 - \omega^2)x$.

*Ἔχομεν λοιπὸν $x(x^2 - \omega^2) = 1287$. Θέτοντες $x = 11$ εὐρίσκομεν

* Οἱ τύποι $\Sigma = \nu(\alpha + \tau) : 2$, $\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega$, $\Sigma = \alpha\nu + [\nu\omega(\nu - 1)] : 2$ ἀναφέρονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον *Synopsis palmariorum* τοῦ W. Jones.

$11(121-\omega^2)=1287$, $121-\omega^2=117$, $\omega^2=121-117=4$, $\omega^2=\pm\sqrt{4}$
 $\omega=\pm 2$.

*Αρα ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι 9, 11, 13, ἢ 13, 11, 9. Γενικώτερον, ὅταν εἰς παρόμοια προβλήματα ἔχωμεν περιττὸν πλῆθος ὄρων καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἄθροισμά των, παριστάνομεν τὸν μεσαῖον ὄρον μὲ x π.χ., τὴν διαφορὰν μὲ ω , ἐνῶ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς, παριστάνομεν τοὺς δύο μεσαίους διαδοχικοὺς ὄρους μὲ $x-\omega$ καὶ $x+\omega$, ἥτοι ἡ διαφορὰ παριστάνεται μὲ 2ω , ὅτε εὐκόλως εὐρίσκομεν τὴν παράστασιν καὶ ἄλλων ὄρων τῆς προόδου.

Παραδείγματα. 1ον. Ζητοῦνται πέντε διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι α , τὸ δὲ γινόμενον γ . Παριστάνομεν κατὰ σειρὰν τὸν τρίτον ὄρον μὲ x , τὴν διαφορὰν μὲ ω , ὅτε ἔχομεν τοὺς ὄρους $x-2\omega$, $x-\omega$, x , $x+\omega$, $x+2\omega$. Ἐπομένως θὰ εἶναι ἄφ' ἑνὸς μὲν $x-2\omega+x-\omega+x+x+\omega+x+2\omega=\alpha$ ἢ $5x=\alpha$ $x=\frac{\alpha}{5}$, ἄφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-2\omega)(x-\omega)x(x+\omega)(x+2\omega)=\gamma$ ἢ $x(x^2-\omega^2)(x^2-4\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{5}$, ὅτε $\frac{\alpha}{5}(\frac{\alpha^2}{25}-\omega^2)(\frac{\alpha^2}{25}-4\omega^2)=\gamma$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι διτετράγωνος ὡς πρὸς ω καὶ λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ἀκολουθῶς ἔχομεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς.

2ον. Ζητοῦνται τέσσαρες διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ .

Παριστάνομεν τοὺς ὄρους μὲ $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, ὅτε θὰ ἔχωμεν $x-3\omega+x-\omega+x+\omega+x+3\omega=\alpha$ καὶ $x=\frac{\alpha}{4}$. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-3\omega)(x-\omega)(x+\omega)(x+3\omega)=\gamma$ ἢ $(x^2-\omega^2)(x^2-9\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{4}$ καὶ εὐρίσκομεν $(\frac{\alpha^2}{16}-\omega^2)(\frac{\alpha^2}{16}-9\omega^2)=\gamma$.

Αὕτη λυομένη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ ω , ἀκολουθῶς δὲ εὐρίσκομεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς.

3ον. Ἐστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ n , ἥτοι τὸ $1+2+3+4+\dots+n$. Ἄν

*Ἡ σχολὴ τῶν Πυθαγορείων (6η καὶ 5η ἑκατονταετηρίς π.Χ.) ἐγνώριζε τοὺς τύπους $1+2+3+\dots+n=n(n+1):2$, $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$, $1+3+5+\dots+2n-1=n^2$.

Σ_1 παριστάνη τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν $\Sigma_1 = \frac{(1+v)v}{2}$.

4ον. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, ..., $(2v-1)$, ἤτοι τὸ $1+3+5+7+\dots+2v-1$. Ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἶναι 2, ὁ πρῶτος ὅρος 1 καὶ ὁ τελευταῖος $2v-1$. Ἀρα ἔχομεν $1+3+\dots+2v-1 = \frac{v(1+2v-1)}{2} = v^2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὅμας πρώτη. 534. Νὰ εὕρεθῇ τὸ $1^2+2^2+3^2+\dots+v^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $(\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1^3$. Θέτομεν διαδοχικῶς $\alpha=0, \alpha=1, \alpha=2, \alpha=3, \dots, \alpha=v$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν καὶ προσθέτοντες τὰς προκύπτουσας ἰσότητες κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν μετὰ τὴν ἀπλοποίησιν.

$$(v+1)^3 = 3(1^2+2^2+\dots+v^2) + 3(1+2+\dots+v) + v+1.$$

Ἄν παραστήσωμεν μὲ Σ_2 , τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θέσωμεν δὲ $\Sigma_1 = 1+2+\dots+v$ εὐρίσκομεν $(v+1)^3 = 3\Sigma_2 + 3\Sigma_1 + v+1$ ἢ $\Sigma_2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$.

535. Νὰ εὕρεθῇ τὸ $1^3+2^3+3^3+\dots+v^3 = \Sigma_3$. Λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα $(1+\alpha)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1$. Θέτομεν $\alpha=0, \alpha=1, \alpha=2, \dots, \alpha=v$ καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως, ὅπως καὶ διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ Σ_2 , ὑποθέτοντες γνωστὰς τὰς τιμὰς Σ_1, Σ_2 .

536. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα α') τῶν 25 πρώτων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ; β') τῶν 30 πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν ; γ') τῶν 40 πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ;

537. Εὐρετε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ $-v$.

538. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὀρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ α' ὅρον 12, τελευταῖον 144 καὶ ἄθροισμα αὐτῶν 1014 ;

539. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ 14 ὀρων, ἂν ὁ α' εἶναι 8 καὶ τὸ ἄθροισμα 567.

540. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ 16 ὀρους, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 63 καὶ τὸ ἄθροισμα 728 ;

541. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὀρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα 456, διαφορὰν -12 καὶ τελευταῖον ὅρον 15 ;

542. Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις καὶ ἡ α' δόσις εἶναι 100 δραχμᾶς, ἡ β' 150 δρχ. ἡ γ' 200 δρχ. κ.ο.κ. ;

543. Ἄν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ 11ος 71, τίνες εἶναι οἱ τέσσαρες ὅροι ;

544. Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 12 ὀρους, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὀρων εἶναι 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70 ;

545. Εὐρετε τοὺς πέντε ὀρους ἀριθμητικῆς προόδου ἔχοντας γινόμενον 12320 καὶ ἄθροισμα 40.

*Ο μὰς δευτέρα. 546. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νιοστός ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὁρων τῆς προόδου $1, \frac{v-1}{v}, \frac{v-2}{v}, \frac{v-3}{v}, \dots$

547. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $1 \frac{1}{24}$.

548. Δείξατε, ὅτι εἶναι $\Sigma_1^2 = \Sigma_3$, ὅταν $\Sigma_1 = 1+2+\dots+v$, $\Sigma_3 = 1^3+2^3+\dots+v^3$.

549. Εὑρετε τὸ $1^2+4^2+7^2+\dots+(3v-2)^2$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $(3\alpha-2)^2=9\alpha^2-12\alpha+4$ καὶ θέσατε $\alpha=1,2,\dots,v$).

550. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$ θέτοντες $\alpha=1, 2, \dots, v$).

551. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+v(v+1)$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$ θέτοντες $\alpha=1, 2, \dots, v$).

552. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

2. ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

§ 208. Γεωμετρικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του μὲ πολλαπλασιασμόν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὄροι** αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὁρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἐπόμενον αὐτοῦ, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου.

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μεγαλύτερος τῆς 1, οἱ ὄροι **ἀπολύτως** θεωρούμενοι βαίνουν ἀυξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **αὔξουσα**, ἐὰν δὲ ὁ λόγος **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μικρότερος τῆς 1, οἱ ὄροι ἀπολύτως θεωρούμενοι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **φθίνουσα**.

Κατὰ ταῦτα, ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 4, 8, 16, ..., 64 ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν μὲ λόγον 2.

Ὅμοιως οἱ ἀριθμοὶ -5, -10, -20, -40, -80, ... ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον (ἀπολύτως) αὔξουσαν μὲ λόγον τὸν 2, ἐνῶ οἱ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ καὶ οἱ $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$

* Αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι ἐμφανίζονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου Αἰmes, ὅπου ζητεῖται νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ «7, 49, 343, 2401, 16 807 καὶ εὑρίσκεται ἄθροισμα 19 607».

ἀποτελοῦν (ἀπολύτως) φθινούσας γεωμετρικὰς προόδους μὲ ἀντιστοίχους λόγους τοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$.

Ἄν μὲ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ μὲ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν β' τάξιν θὰ εἶναι αω, ὁ ἔχων τὴν γ' τάξιν θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ α·ω·ω=αω² κ.ο.κ., ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτως:

$$\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \dots$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι:

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τότε ἡ πρόοδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὠρισμένη.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι:

Ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν α' ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὄρων.

Ἐὰν μὲ τ παραστήσωμεν τὸν ὅρον τῆς νιοστῆς τάξεως γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης α' ὅρον α καὶ λόγον ω, θὰ ἔχωμεν $t = \alpha \cdot \omega^{n-1}$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν $\alpha = \frac{t}{\omega^{n-1}}$, καὶ $\omega = \sqrt[n-1]{\frac{t}{\alpha}}$. Π.χ. ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου 2, 6, 18,... εἶναι 2.3⁹, διότι εἶναι α=2, ω=3, ν=10.

Ἄν οἱ διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου παρασταθοῦν μὲ α, β, γ, δ,..., λ, τ καὶ ὁ λόγος τῆς μὲ ω, θὰ ἔχωμεν β=αω, γ=βω,..., ἄρα $\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \dots = \frac{\tau}{\lambda}$ καὶ $\alpha = \frac{\beta}{\omega}$, $\beta = \frac{\gamma}{\omega}$, ..., $\lambda = \frac{\tau}{\omega}$. Ἀρα β=αω, β = $\frac{\gamma}{\omega}$ καὶ β² = αγ.

§ 209. Τὸ γινόμενον δύο ὄρων γεωμετρικῆς προόδου ἰσάκεις ἀπεχόντων ἐκ τῶν ἄκρων ὄρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὄρων.

Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ ὄρους κατὰ σειρὰν α, β, γ, δ,... κ, λ, τ, καὶ λόγον τὸν ω.

Ἐχομεν $\begin{cases} \beta = \alpha\omega \\ \lambda = \frac{\tau}{\omega} \end{cases}$. Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ

μέλη, εύρισκομεν $\beta\lambda = \alpha\tau$. Ἐπίσης ἔχομεν $\begin{cases} \gamma = \alpha\omega^2 \\ \kappa = \frac{\tau}{\omega^2} \end{cases}$ καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν τούτων κατὰ μέλη $\gamma\kappa = \alpha\tau$. Οὕτως ἔχομεν $\alpha\tau = \beta\lambda = \gamma\kappa \dots$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων εἶναι ἀριθμὸς περὶττός, τότε θὰ ὑπάρχῃ εἰς ὄρος ἀπέχων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ὄρων, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι μεσαῖος ὄρος τῆς προόδου (ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του). Ἄν παρασταθῇ αὐτὸς μὲ μ, θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

$$\mu\mu = \beta\lambda = \alpha\tau \quad \eta \quad \mu^2 = \alpha\tau \quad \text{καὶ} \quad \mu = \sqrt{\alpha\tau}.$$

Ι. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 210. Δίδονται δύο ἀριθμοί, α , β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξύ αὐτῶν n ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων n' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω , τὸν λόγον τῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων αὐτῆς θὰ εἶναι $n + 2$, ὁ τελευταῖος, ὄρος $\beta = \alpha\omega^{n+1}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εύρισκομεν :

$$\omega^{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \omega = \sqrt[n+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

(ἂν $n+1 = \text{ἄρτιος}$, πρέπει $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, διὰ νὰ ἔχωμεν ὄρους πραγματικούς ἀριθμούς.). Ἐπομένως ἡ ζήτουμένη πρόοδος θὰ εἶναι

$$\alpha, \alpha \sqrt[n+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \alpha \sqrt[n+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \dots$$

Π.χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν ἑννέα ἀριθμοὶ μεταξύ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων n' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόο-

δον, ἔχομεν $n = 9$ καὶ $\omega = \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ἐπομένως ἡ πρόοδος εἶναι $1, 2^{\frac{1}{10}}, 2^{\frac{2}{10}}, 2^{\frac{3}{10}}, \dots$

Ἀσκήσεις

553. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι προόδων εἶναι αὐξουσai, ποῖα φθίνουσai καὶ διατί ;
 $\alpha')$ 5, 10, 20... $\beta')$ 3, -6, 12,... $\gamma')$ 7, -28, 112... $\delta')$ 135, 27, 5,4....

$$\epsilon') \frac{32}{81}, \frac{16}{27}, \frac{8}{9} \dots \sigma\tau') -4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$$

554. Νά εὑρεθῇ ὁ ὅρος τῆς ἐβδόμης τάξεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2, 6, 18...

555. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος γεωμετρικῆς προόδου μέ πρῶτον ὄρον τὸν 9 καὶ τέμπττον τὸν 144.

556. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς εἶναι 2, ὁ τελευταῖος 512 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων 9.

557. Νά εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 156,25, ὁ προτελευταῖος 62,5 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων 6.

558. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 6, ὁ δεύτερος 12 καὶ ὁ τελευταῖος 3 072 ;

559. Εἶναι δυνατόν νά εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μέ α' ὄρον 23,75, λόγον -0,925 καὶ τελευταῖον -7,375 ;

560. Εὑρετε τὸ πλῆθος τῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης τετάρτης τάξεως ὄρον 13, ἑκτῆς 117 καὶ τελευταῖον 9 477.

561. Εὑρετε τὸν λόγον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης τρίτης τάξεως ὄρον τὸν 12 καὶ ὀγδόης τὸν 384.

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 211. Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος, α , $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$, ..., $\alpha\omega^{n-1}$ ἐκ n ὄρων. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων αὐτῆς καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ μέ Σ , θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} \quad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ ω , ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον $\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^n$ τὴν (1) (κατὰ μέλη), προκύπτει $\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^n - \alpha$ ἢ $\Sigma \cdot (\omega - 1) = \alpha\omega^n - \alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκωμεν διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\omega - 1$ (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται $\neq 0$, δηλαδή $\omega \neq 1$) $\Sigma = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1}$ (2)

* Ἀν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην θέσωμεν τὸ τ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{n-1}$, τὸ δ-

* Ἡ Γενικὴ ἄθροισις ὄρων γεωμετρικῆς προόδου ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἑλλήνας κατ' ἐπέκτασιν τῆς ἀναλογίας $\alpha:x=x:\gamma$, ἐκρησιμοποιεῖτο δὲ τὸ πρῶτον ἢ α , $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$... Γενικωτέρα μορφή ἄθροίσεως παρουσιάζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον «*Algorithmus de Integris*» (1410) τυπωθὲν ἐν Παδοῦῃ (1483) καὶ ἐν Βενετίᾳ (1540) ὑπὸ τοῦ Ἰταλοῦ Prosdocimo de Beldomanti, ὁ ὁποῖος ἐκρησιμοποιήσας τὸν τύπον $\alpha + \alpha\varphi + \alpha\varphi^2 + \dots + \alpha\varphi^{n-1} = \alpha\varphi^{n-1} + (\alpha\varphi^{n-1} - \beta\alpha) : (\varphi - 1)$, ὅχι μὲ σύμβολα, ἀλλὰ μὲ παραδείγματα μόνον. Γενικὸν τύπον προσθέσεως ὄρων γεωμετρικῆς προόδου δίδει ὁ Γάλλος F. Viète (1540 - 1603, Παρίσιοι).

ποῖον παριστάνει τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς (1), θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

$$\Sigma = \frac{\alpha\omega^{v-1}\omega - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \text{ καὶ } \frac{\alpha\omega^v - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^v}{1 - \omega} \quad (3)$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν καὶ ὡς ἐξῆς :

$$^*\text{Ἐχομεν } \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} = \alpha(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{v-1}).$$

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{v-1}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\omega^v - 1) : (\omega - 1)$, ἄρα :

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} = \alpha \cdot \frac{\omega^v - 1}{\omega - 1} = \alpha \cdot \frac{1 - \omega^v}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^v}{1 - \omega}.$$

III. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ ΦΘΙΝΟΥΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 212. *Ἄν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι φθίνουσα * μὲ ἀπείρον πλῆθος ὄρων, δηλαδή ὅτι ἔχομεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (1') $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \dots$ (ἐπ' ἀπείρον), ἐνῶ τὸ ω εἶναι ἀπολύτως < 1 , τότε τὸ ω^n θὰ εἶναι ἀριθμὸς πολὺ μικρὸς, ὅταν τὸ n εἶναι πολὺ μεγάλος (θετικὸς). Ὅταν δὲ τὸ n ὑπερβαίνει πάντα δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τείνῃ εἰς τὸ ∞ , τὸ ω^n καθὼς καὶ τὸ $\alpha\omega^n$ γίνεται ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ λέγομεν, ὅτι **τείνει** εἰς τὸ 0.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς προόδου, τὸ $\Sigma = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1}$ γράψωμεν οὕτω : $\Sigma = \frac{\alpha - \alpha\omega^n}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1 - \omega}$ καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ $n \rightarrow \infty$, τότε λέγομεν, ὅτι προσθέτομεν τοὺς ἀπείρους ὁρους τῆς προόδου, ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν $\frac{\alpha}{1 - \omega}$ εἶναι ἀριθμὸς ὠρισμένος, τὸ δὲ $\alpha\omega^n \rightarrow 0$, θὰ ἔχωμεν ὡς ἄθροισμα τῆς (1') τὸ $\frac{\alpha}{1 - \omega}$, δηλαδή ἔχομεν :

$$\alpha + \alpha\omega + \dots + \alpha\omega^{v-1} = \frac{\alpha}{1 - \omega}, \quad \omega < 1, \quad v \rightarrow \infty. \quad ^*\text{Ἦτοι :$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τῶν πλῆθος ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν

* Ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$, ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἑλληνος μαθηματικοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ., Συρακοῦσαι).

πρώτον όρον, παρονομαστήν δέ τήν μονάδα ήλαττωμένην κατά τόν λόγον τής προόδου.

Κατά ταῦτα τὸ άθροισμα τῶν άπειρων όρων τής $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$, εἰς τήν όποίαν εἶναι $\omega = \frac{1}{2}$ καί $\alpha = 1$, εἶναι $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Τὸ άθροισμα τῶν άπειρων όρων τής προόδου $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ εἶναι $\frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Όμās πρώτη. 562. Νά εύρεθῇ τὸ άθροισμα τῶν όρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τήν όποίαν εἶναι:

α') $\alpha = 25$, $\omega = -3$, $v = 7$, β') $\alpha = 7$, $\tau = 5103$, $v = 7$, γ') $\tau = 0,0625$, $\omega = 0,5$, $v = 13$.

563. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν όρων γεωμετρικῆς προόδου μέ
α') $\alpha = 4$, $\omega = 4$, καί άθροισμα $\Sigma = 5460$, β') $\alpha = 4,6$, $\omega = 108$, $\Sigma = 54\,155,8$.

γ') $\alpha = 5$, $\tau = 1280$, $\Sigma = 2\,555$.

564. Νά εύρεθῇ τὸ άθροισμα εκάστης τῶν έπομένων προόδων, αἱ όποῖαι έχουν άπειρους όρους:

α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ β') $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$ γ') $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \dots$ δ') $0,86\,86\dots$

565. Εύρετε τὸ άθροισμα τῶν όρων τῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἱ όποῖαι προκύπτουν, άν μεταξύ α') τῶν $13,7$ καί $3507,2$ παρεμβληθοῦν 7 γεωμ. μέσοι, β') τῶν $48,6$ καί $0,2$ παρεμβληθοῦν 4 γεωμ. μέσοι.

566. Νά εύρεθῇ ὁ πρῶτος όρος καί τὸ άθροισμα τῶν όρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τήν όποίαν $\tau = 384$, $\omega = 2$, $v = 8$.

567. Νά εύρεθῇ τὸ άθροισμα α') $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$ (έπ' άπειρον).

(Παρατηρήσατε ὅτι εἶναι $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \dots$ (έπ' άπειρον).

β') $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$ (έπ' άπειρον).

* Ό Stiffel (1544) εἰς τὸ έργον του «Arithmetica Integra» έθεώρησε τὸ άθροισμα όρων γεωμετρικῆς προόδου $1 \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$ καί προσέθεσε πεπερασμένον πλῆθος όρων.

‘Ο μ ἄ ς δ ε υ τ ῆ ρ α. 568. “Α ν α > β > 0, ν ἄ ε ὑ ρ ε θ ο ὦ ν τ ἄ ἄ θ ρ ο ῖ σ μ α τ α

$$\alpha') \alpha^n + \beta \alpha^{n-1} + \beta^2 \alpha^{n-2} + \dots \quad \beta') \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots$$

569. Εἰς τετράγωνον (ἢ ἰσοπλευρον τρίγωνον) μέ μήκος τῆς πλευρᾶς του α, συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὐρίσκομεν νέον τοιοῦτο. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων (ἢ τριγώνων).

570. Εἰς κύκλον μέ μήκος τῆς ἀκτίνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπείρων τούτων κύκλων καὶ τετραγώνων.

571. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ τετάρτη εἶναι ἐννεαπλάσια τῆς δευτέρας.

572. Νὰ μερισθῇ ὁ 221 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ γ' ὁρος νὰ ὑπερβαίνει τὸν α' κατὰ 136.

573. Τὸ μὲν ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὁρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 248, ἡ δὲ διαφορά τῶν ἄκρων ὁρων εἶναι 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὁροι;

574. Δείξατε, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὁρων γεωμετρικῆς προόδου μέ ν ὁρους καὶ ἄκρους ὁρους α καὶ τ ἰσοῦται μέ $\sqrt[n]{\alpha\tau}$.

3. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

§ 213. Καλεῖται **ἄρμονικὴ** πρόοδος διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἂν οἱ ἀντίστροφοι τούτων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Π.χ. ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 5, 7,... ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν πρόοδον.

‘Ομοίως οἱ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν πρόοδον, ἐπεὶ δὴ οἱ 1, 2, 3,... ὀρίζουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ὁροι ἄρμονικῆς προόδου οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι 0, διότι οἱ ἀντίστροφοί των οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ θὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὁροι ἀριθμητικῆς προόδου δηλ. ἀριθμοὶ ὠρισμένοι, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$ ἢ $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ καὶ $\beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$. ‘Ο

β καλεῖται **μέσος ἄρμονικὸς** τῶν α, β, γ, εἶναι δὲ καὶ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$ ἢ $\beta\gamma + \alpha\beta = 2\alpha\gamma$, $\alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta - \alpha\gamma$, $(\alpha - \beta)\gamma = (\beta - \gamma)\alpha$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}$

*Αν δοθούν δύο αριθμοί π.χ. α, β και ζητείται να παρεμβληθοῦν μεταξύ αὐτῶν n ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἀρμονικὴν πρόοδον, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ θὰ εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ $n+2$ ὅρους, καὶ οἱ ἐνδιάμεσοι αὐτῶν εἶναι οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ τῶν ζητουμένων. Εὐρίσκουμεν τὸν λόγον, ἔστω ω , τῆς ἐν λόγῳ ἀριθμητικῆς προόδου, ὅτε

$$\omega = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{n+1},$$

σχηματίζουμεν τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Π.χ. ὁ ἐπόμενος τοῦ ὅρου $\frac{1}{\alpha}$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) :$
 $(n+1) = \frac{1}{\alpha} + (\alpha - \beta) : (n+1)\alpha\beta$, ὁ δὲ ἀντίστροφος τούτου ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετὰ τὸ πρῶτον ὅρος τῆς ἀρμονικῆς προόδου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

575. Εὑρετε τὴν ἀρμονικὴν πρόοδον μὲ 20 ὅρους, τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι α') $1, \frac{1}{2}$. β') $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. γ') $1, \frac{1}{3}$.

576. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καὶ 0,025 νὰ παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοί, ὥστε μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἀρμονικὴν πρόοδον.

Β' ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 214. Καλοῦμεν **λογάριθμον** ἀριθμοῦ τινὸς A ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία ἴσουςται μὲ τὸν A^* . Ἦτοι ἂν εἶναι $10^a = A$, τὸ a λέγεται **λογάριθμος** τοῦ A ὡς

* Καλοῦμεν **νεπέριον** λογάριθμον ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος παριστάνεται μὲ τὸ γράμμα e καὶ εἶναι $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ (ἐπ' ἀπειρον) ἢ $e = 2,718281828\dots$ Ὁ e δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως καὶ διὰ τοῦτο λέγεται καὶ **ὑπερβατικὸς** ἀριθμὸς (ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς $\pi = 3,14159\dots$). Ἡ ἐφεύρεσις τῶν νεπερίων λογαριθμῶν ὀφείλεται εἰς τὸν John Naper (1614), ὀλίγον δὲ βραδύτερον ὁ Briggs (1624) ἐδημοσίευσεν πίνακα δεκαδικῶν λογαριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι 20 000.

Μία ἐξίσωσις λέγεται **ἀλγεβρική**, ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς εἶναι ἀκέραιον πο-

πρὸς βάσιν 10 ἢ ἀπλῶς λογάριθμος τοῦ A καὶ σημειώνεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς: $\alpha = \log A$ ἢ $\log A = \alpha$, ἀπαγγέλλεται δὲ ἡ ἰσότης αὕτη οὕτως:

Ὁ λογάριθμος τοῦ A εἶναι ἴσος μὲ α .

Ἐπειδὴ εἶναι $10^0 = 1$ καὶ $10^1 = 10$, ἔπεται ὅτι:

Λογάριθμος τοῦ μὲν 1 εἶναι τὸ 0, τοῦ δὲ 10 ἡ 1.

Θὰ δειξωμεν τῶρα ὅτι:

Δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὑπάρχει εἰς μόνος λογάριθμος αὐτοῦ.

1ον. Ἐστω ἀριθμὸς $A > 0$. Λαμβάνομεν ἓνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν v καὶ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς $0, \frac{1}{v}, \frac{2}{v}, \frac{3}{v}, \dots$ καὶ τὰς δυνάμεις $10^0, 10^{\frac{1}{v}}, 10^{\frac{2}{v}}, 10^{\frac{3}{v}}, \dots$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν αὐξουσαν, ἐπειδὴ εἶναι $10^{\frac{1}{v}} > 1$ (διότι ἂν ἦτο $10^{\frac{1}{v}} \leq 1$ ὑποϋντες τὰ ἄνισα αὐτὰ εἰς τὴν v δύναμιν, θὰ εἴχομεν $10 \leq 1$). Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ τοῦ α' καὶ ἑξῆς, καὶ ἂν μὲν τύχη εἰς ἑξ' αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν A, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ A, ἂν δὲ δὲν συμβαίνει τοῦτο, θὰ περιέχεται ὁ A μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὄρων τῆς προόδου, ἔστω τῶν $10^{\frac{\mu}{v}}$ καὶ $10^{\frac{\mu+1}{v}}$, ἥτοι θὰ εἶναι $10^{\frac{\mu}{v}} < A < 10^{\frac{\mu+1}{v}}$.

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A, διαφέρουν κατὰ $10^{\frac{\mu+1}{v}} - 10^{\frac{\mu}{v}} = 10^{\frac{\mu}{v}} \cdot 10^{\frac{1}{v}} - 10^{\frac{\mu}{v}} = 10^{\frac{\mu}{v}} (10^{\frac{1}{v}} - 1)$.

Ἄλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἂν λάβωμεν καταλλήλως τὸ v . Διότι τὸ $10^{\frac{1}{v}} - 1$ δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ v ὑπερβαίνει κατάλληλον ἀριθμὸν. Τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ $10^{\frac{1}{v}}$ διηνεκῶς ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνεται τὸ v , πλησιάζει δὲ τὸ $10^{\frac{1}{v}}$ πρὸς τὴν 1.

λυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς εἶναι μηδέν. Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσως πρᾶγματικῇ ἢ μιγαδικῇ λέγεται **ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς**.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δὲν ἔπεται ὅτι κάθε ἀσύμμετρος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς. Παράδειγμα οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ e καὶ π .

όταν τὸ v τείνει εἰς τὸ ∞ . Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοί, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A , διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν (ὅταν λάβωμεν τὸ v ἀρκούντως μέγα), κατὰ μείζονα λόγον ὁ A θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ ἑκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν. Ἦτοι εἶναι ὁ A ὄριον ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν (κατὰ προσέγγισιν) τὸν A ἴσον μὲ ἑκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων (ὅταν τὸ v ληφθῇ ἀρκούντως μέγα), ἥτοι νὰ θέσωμεν $A = 10^{\frac{\mu}{v}}$, ὅτε εἶναι $\log A = \frac{\mu}{v}$ ἢ $10^{\frac{\mu+1}{v}} = A$, ὅτε $\log A = \frac{\mu+1}{v}$. Οἱ δύο οὗτοι λογάριθμοι τοῦ A διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{v}$, τὸ ὅποιον τείνει εἰς τὸ 0, ὅταν τὸ v τείνῃ εἰς ∞ .

2ον. Ἐστω ὅτι εἶναι $0 < A < 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι θὰ εἶναι $\frac{1}{A} > 1$. Ἐπομένως ὁ $\frac{1}{A}$ θὰ ἔχῃ λογάριθμον, ἔστω τὸν $\frac{\kappa}{\lambda}$, δηλαδή θὰ εἶναι $\frac{1}{A} = 10^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. Ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα, θὰ ἔχωμεν $A = \frac{1}{10^{\frac{\kappa}{\lambda}}} = 10^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$, ἐπομένως $\log A = -\frac{\kappa}{\lambda}$. Λέγομεν τώρα, ὅτι εἰς μόνος λογάριθμος τοῦ A ὑπάρχει. Διότι, ἐὰν εἶχομεν π.χ. $v = \log A$ καὶ $p = \log A$, θὰ ἦτο $10^v = A$, $10^p = A$ καὶ $10^v = 10^p$, ἄρα καὶ $10^{v-p} = 1$, ἐπομένως $v-p=0$ ἢ $v=p$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει ἓνα μόνον λογάριθμον, θετικὸν μὲν ἂν $A > 1$, ἀρνητικὸν δὲ ἂν $A < 1$.

Παρατηρήσεις. Ἀρνητικὸς ἀριθμὸς τις δὲν ἔχει (πραγματικόν) λογάριθμον, ἐπεὶ δι' οὐδεμίαν (πραγματικὴν) τιμὴν τοῦ x ἢ δύναμις 10^x δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν, διότι τὸ $10^x = \text{θετ. ἀριθμὸς}$, τὸ $10^{-x} = \frac{1}{10^x} = \text{θετικὸς ἀριθμὸς}$.

2α. Ἀριθμὸς τις σύμμετρος α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λογάριθμος τοῦ 10^α , εἶναι δὲ οὗτος ὁ μόνος, ὅστις ἔχει λογάριθμον τὸν α .

3η. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν σύμμετρον ἔχει λογάριθμον τὸν σύμμετρον τοῦτον ἐκθέτην, πᾶς δὲ ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἀσύμμετρον ἀριθμὸν.

Διότι, ἂν εἶχε λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμόν, θὰ ἦτο οὗτος ἴσος μὲ δύναμιν τοῦ 10 ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν σύμμετρον τοῦτον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$, ὅπου n ἀκέραιος, ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους $0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-n}$ ἢ οἱ ἴσοι των ἀντιστοίχως $0,1, 0,01, 0,001, \dots, 0,00\dots 01$ ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους $-1, -2, -3, \dots, -n$.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 215. α') Ὁ λογάριθμος γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἐστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha, \log B = \beta, \log \Gamma = \gamma$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\log(A \cdot B \cdot \Gamma) = \alpha + \beta + \gamma = \log A + \log B + \log \Gamma$.

Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν

$$10^\alpha = A, 10^\beta = B, 10^\gamma = \Gamma$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ταῦτα μέλη εὐρίσκομεν

$$10^\alpha \cdot 10^\beta \cdot 10^\gamma = A \cdot B \cdot \Gamma \quad \eta \quad 10^{\alpha+\beta+\gamma} = A \cdot B \cdot \Gamma.$$

Ἄλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει, ὅτι :

$$\log(A \cdot B \cdot \Gamma) = \alpha + \beta + \gamma = \log A + \log B + \log \Gamma.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παραγόντας.

Συνήθως, ὅταν δοθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων (ἢ μὴ) παραγόντων καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα περὶ λογαρίθμου γινομένου.

Π.χ. ἔχομεν $\log 420 = \log(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4) = \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 4$.

β') Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μείον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

Ἐστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha, \log B = \beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\log \frac{A}{B} =$

$\log A - \log B$. Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $10^\alpha = A, 10^\beta = B$, διαιροῦντες δὲ τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{A}{B} \quad \eta \quad 10^{\alpha-\beta} = \frac{A}{B}. \quad \text{Ἄλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι :}$$

$$\log \frac{A}{B} = \alpha - \beta = \log A - \log B.$$

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } \log 5^{\frac{2}{3}} = \log \frac{17}{3} = \log 17 - \log 3$$

γ') 'Ο λογάριθμος οιασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως αὐτῆς.

*Εστω, ὅτι εἶναι $\log A = \alpha$ καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν A μὲ ἐκθέτην μ οἷονδῆποτε. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\log A^\mu = \mu \cdot \log A$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\log A = \alpha$, θὰ ἔχωμεν $10^\alpha = A$ καὶ ὑποῦντες τὰ ἴσα εἰς τὴν μ δύναμιν εὐρίσκομεν $(10^\alpha)^\mu = A^\mu$ ἢ $10^{\mu \cdot \alpha} = A^\mu$. Ἀλλὰ ἡ ἰσότης αὕτη ὀρίζει, ὅτι $\log A^\mu = \mu \cdot \alpha = \mu \log A$.

$$\text{Κατὰ ταῦτα ἔχομεν } \log A^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \log A \text{ ἢ } \log \sqrt[v]{A} = \frac{\log A}{v}, \text{ ἥτοι:}$$

δ') 'Ο λογάριθμος ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου, διηρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

ε') Ἐάν εἶναι A, B δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ $A > B$, θὰ εἶναι καὶ $\log A > \log B$, ἐὰν ἡ βάση τῶν λογαρίθμων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος. Διότι ἀφοῦ εἶναι $A > B$, θὰ ἔχωμεν διαιροῦντες τὰ ἄνισα μὲ B , $\frac{A}{B} > 1$. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ $\frac{A}{B}$ εἶναι > 1 ἔχει λογάριθμον θετικόν, ἥτοι ἔχομεν $\log \frac{A}{B} > 0$, ἢ $\log A - \log B > 0$, ἄρα $\log A > \log B$.

Ἀ σ κ η σ ι ς

577. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

$$\alpha') \log 15 = \log 3 + \log 5,$$

$$\beta') \log 55 = \log 5 + \log 11.$$

$$\gamma') \log 2^{\frac{1}{3}} = \log 7 - \log 3,$$

$$\delta') \log 49 = 2 \log 7,$$

$$\epsilon') \log \sqrt{20} = (\log 20):2,$$

$$\sigma') \log \sqrt[64]{3} = 3(\log 647):2,$$

$$\zeta') 6 \log 32 = \log 32^6,$$

$$\eta') \log 5 + \log 7 + \log 4 = \log 140.$$

2. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

§ 216. Καλοῦμεν **χαρακτηριστικὸν** λογαρίθμου τινός, τὸν μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογάριθμος αὐτός.

*Εστω ἀριθμὸς τις, περιεχόμενος μεταξύ τοῦ 1 καὶ 10 π.χ. ὁ 7. Ἐπειδὴ $1 < 7 < 10$, ἔχομεν $\log 1 < \log 7 < \log 10$ ἢ $0 < \log 7 < 1$. *Η-

τοι ό λογάριθμος άριθμού περιεχομένου μεταξύ 1 και 10 έχει χαρακτηριστικόν 0.

*Αν άριθμός τις περιέχεται μεταξύ τών 10 και 100, π.χ. ό 47, έπειδή $10 < 47 < 100$, θά έχωμεν $\log 10 < \log 47 < \log 100$ ή $1 < \log 47 < 2$. *Ητοι πās τοιούτος άριθμός έχει λογάριθμον μέ χαρακτηριστικόν 1 κ.ο.κ. *Έπειδή όμως πās άριθμός περιεχόμενος α') μεταξύ 1 και 10 έχει άκέραιον μέρος μονοψήφιον, β') μεταξύ 10 και 100 έχει άκέραιον μέρος διψήφιον κ.ο.κ., έπεται ότι :

Τό χαρακτηριστικόν του λογαρίθμου άριθμού $A > 1$ έχει τόσας άκεραίας μονάδας, όσον είναι τό πλήθος τών ψηφίων του άκεραίου του μέρους ήλαττωμένον κατά 1.

Π.χ. τό χαρακτηριστικόν του $\log 235$ είναι 2, του 12,4 είναι 1, του 3 835,24 είναι 3 κ.τ.λ.

*Εστω τώρα άριθμός τις περιεχόμενος μεταξύ τών 0,1 και 1, π.χ. ό 0,34. *Έπειδή είναι $0,1 < 0,34 < 1$, έχομεν $\log 0,1 < \log 0,34 < \log 1$ ή $-1 < \log 0,34 < 0$. *Ητοι ό λογάριθμος παντός τοιούτου άριθμού περιέχεται μεταξύ τών διαδοχικών άκεραίων -1 και 0 και έχει συνεπώς χαρακτηριστικόν -1 ,

*Αν άριθμός περιέχεται μεταξύ τών 0,01 και 0,1 π.χ. ό 0,047, έπειδή είναι $0,01 < 0,047 < 0,1$ θά έχωμεν $\log 0,01 < \log 0,047 < \log 0,1$ ή $-2 < \log 0,047 < -1$, ήτοι ό λογάριθμος παντός τοιούτου άριθμού περιέχεται μεταξύ τών διαδοχικών άκεραίων -2 και -1 και έχει χαρακτηριστικόν τόν -2 .

*Έπειδή όμως πās άριθμός περιεχόμενος α') μεταξύ 0,1 και 1, όταν γραφή ως δεκαδικός θά έχη ένα μηδενικόν εις την άρχήν, β') μεταξύ 0,01 και 0,1, όταν γραφή ως δεκαδικός, θά έχη δύο μηδενικά εις την άρχήν μαζί μέ τό μηδενικόν του άκεραίου μέρους κ.ο.κ. έπεται ότι :

Τό χαρακτηριστικόν του λογαρίθμου (θετικού) άριθμού $A < 1$ γραμμένου ως δεκαδικού, έχει τόσας άρνητικές μονάδας, όσα και τά μηδενικά πού έχει εις την άρχήν μαζί μέ τό μηδενικόν του άκεραίου μέρους.

Π.χ. τό χαρακτηριστικόν του $\log 0,3$ είναι -1 , του $\log 0,0147$ ό -2 , του $\log 0,0076$ ό -3 κ.τ.λ.

*Αντιστρόφως, έκ τών προηγούμενων έπεται ότι :

***Αν τό χαρακτηριστικόν του λογαρίθμου ενός άριθμού A**

είναι θετικόν ἢ 0, ὁ ἀριθμὸς A θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἂν αὐξηθοῦν κατὰ 1.

Ἄν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ A εἶναι ἀρνητικόν, ὁ A γραφόμενος ὡς δεκαδικὸς θὰ ἔχῃ τόσα μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μετὰ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους, ὅσαι καὶ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ του.

Οὕτως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι -2, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς μετὰ 2 μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μετὰ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

§ 217. Ἐστω, ὅτι εἶναι $10^{\alpha} = A$. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ταῦτα ἐπὶ δυνάμιν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3 , θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha} \cdot 10^3 = A \cdot 10^3$ ἢ $10^{\alpha+3} = A \cdot 10^3$, καὶ κατὰ τὸν ὅρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν ὅτι $\log(A \cdot 10^3) = \alpha + 3$. Ἀλλ' ἔχομεν $\alpha = \log A$. Ἐπομένως εἶναι $\log(A \cdot 10^3) = \alpha + 3 = \log A + 3$.

Ὅμοιως, ἂν διαιρέσωμεν π.χ. διὰ τοῦ 10^3 τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha} = A$, εὐρίσκομεν ὅτι $\log(A : 10^3) = \log A - 3$. Ἦτοι:

Ἐὰν ἀριθμὸς τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) ἐπὶ τὸν 10, 100, 1000, ... ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1, 2, 3, . . . δηλ. κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἐπομένως μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μεταβάλλεται.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικά αὐτῶν.

Π.χ. ὁ λογάριθμος τοῦ	5	εἶναι	0,69897
	τοῦ 50	εἶναι	1,69897
	τοῦ 500	εἶναι	2,69897
ὁ λογάριθμος	τοῦ 0,5	εἶναι	-1 + 0,69897
	τοῦ 0,05	εἶναι	-2 + 0,69897 κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

578. Νὰ εὐρεθῇ τὸ χαρακτηριστικόν: α') λογ35. β') λογ4 513.
 γ') λογ9,5, δ') λογ0,80, λογ0,0003, λογ800, λογ8 000,
 ε') λογ0,00132, λογ132, λογ1320, στ') λογ397,451, λογ 3 974,51, λογ39,
 ζ') λογ $\frac{13}{3}$, η') λογ $\frac{1}{50}$, θ') λογ62 $\frac{2}{3}$, ι') λογ2 $\frac{1}{7}$, λογ0,5, λογ40.

579. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν 3, 5, 7, 1, 0, 12 ;

580. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν -1, -2, -3, -5, -9;

581. Ὁ λογάριθμος τοῦ 80 εἶναι 1,90309. Ποιοὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν ψηφίον τῶν λογαρίθμων των ;

582. Ποῖον γνῶρισμα ἔχει ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι ὁ 0,70586 ὁ 1,70586. ὁ -1+0,70586, ὁ -2+0,70586, ὁ -3+0,70586 καὶ διατί ;

3. ΤΡΟΠΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ΕΝ ΜΕΡΕΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΝ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 218. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τίνος προκύπτει, ὅτι ὁ λογάριθμος ὑπερβαίνει τὸ χαρακτηριστικόν του, ἀλλ' ἡ διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 1. Ἡ διαφορὰ αὕτη ἐκφράζεται συνήθως μὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν (κατὰ προσέγγισιν) καὶ λέγεται **δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου**, εἶναι δὲ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ τῶν μικροτέρων τῆς 1 (θετικῶν) ἀριθμῶν ὁ λογάριθμος εἶναι ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον ἴσον του μὲ ἀρνητικὸν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος.

*Εστω π.χ. ὁ (ὅλως) ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τίνος ὁ -2,54327 ἦτοι ὁ -2-0,54327.

Ἐὰν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν -1 καὶ τὸν +1, εὐρίσκομεν,
 $-2-1+1-0,54327=-3+1-0,54327=-3+1,00000$
 $0,54327$

$-3+0,45673$

τὸν ὁποῖον γράφομεν $\overline{3,45673}$ δηλαδὴ γράφομεν τὸ - ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι τοῦτο μόνον εἶναι ἀρνητικόν. Ὑπὸ τὴν μορφήν αὐτὴν φαίνεται, ὅτι χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος -3, διότι ὁ λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -3 καὶ -2, καὶ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, τὸ ἀναγραφόμενον δεκαδικὸν μέρος, διότι τοῦτο εἶναι ἡ διαφορὰ πού προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον -3+0,45673 ἀφαιρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ -3.

Παρατηρούμεν, ὅτι διὰ τὰ τρέψωμεν λογάριθμον ἀρνητικὸν εἰς ἓν μέρει ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κατὰ 1 καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιὰ δὲ τοῦ τοῦ γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τὸ 10 τῶν δὲ ἄλλων ἀπὸ τὸ 9.

Παρατήρησις. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται, καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγὰς τινὰς ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, καὶ αἱ ὁποῖαι φαίνονται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πρόσθεσις. Ἐστω ὅτι ζητεῖται π.χ. τὸ $2,57834 + 1,67943$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2 = 3$ καὶ $-1 = 2$ Οὕτως εὐρίσκομεν ἄθροισμα 2,25777.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$\overline{2},85643 + 2,24482 + \overline{3},42105 + 1,24207$$

Γράφομεν τοὺς προσθετέους ὡς κατωτέρω πρὸς εὐκολίαν καὶ ἀκολουθῶς προσθέτομεν τὰ ψηφία ὡς συνήθως

$$\begin{array}{r} 2,85643 \\ 2,24482 \\ \overline{3},42105 \\ 1,24207 \\ \hline 3,76437 \end{array}$$

Ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $-1 = 0$ καὶ -3 ἴσον -3 καὶ 2 ἴσον -1 καὶ -2 ἴσον -3 . οὕτω δὲ εὐρίσκομεν ἄθροισμα $\overline{3},76437$.

Ἀφαίρεσις. Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\overline{5},67893 - 8,75928$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ -8 ἴσον -7 , διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$ καὶ σὺν -5 ἴσον 2. Ἐπομένως ἡ διαφορὰ εἶναι 2,91965.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον. Ἐστω, ὅτι ζητοῦμεν $\overline{5},62893 \cdot 3$ Ἐχομεν $\overline{5},62893 \cdot 3 = -5 \cdot 3 + 0,62893 \cdot 3 = -15 + 1,88679 = \overline{14},88679$.

Διαιρέσις δι' ἀκέραιον. Ἐστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον π.χ. τοῦ $\overline{5},62891 : 3$. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $\overline{5},62891 : 3 = (-5 + 0,62891) : 3 = (-5 - 1 + 1 + 0,62891) : 3 = (-6 + 1,62891) : 3 = -2 + 0,54297 =$

$= \overline{2,54297}$. Ἐπειδὴ ὁ ἀρνητικὸς ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν καὶ προσθέτομεν περαιτέρω τὰς ἀπαιτουμένας μονάδας, ἵνα καταστῇ διαιρετός, καὶ ἀκολουθῶς ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

$$\begin{aligned} & \text{Ὅμοιως διὰ τὴν διαίρεσιν π.χ. } \overline{4,67837:9} \text{ ἔχομεν } \overline{4,67837:9} = \\ & = (-4+0,67837) : 9 = (-4-5+5+0,67837) : 9 = \\ & = (-9+5,67837) : 9 = -1+0,63093 \text{ ἢ } \overline{1,63093}. \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις

583. Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 2,34987, $\overline{6,97852}$, 9,82057.

584. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\overline{3,98090}$ ἀπὸ $\overline{8,30457}$, ὁ $\overline{9,93726}$ ἀπὸ τὸν $\overline{3,86565}$

585. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\overline{9,30942}$ ἐπὶ 3, 7, 42.

586. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλικά μέ 5 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ $\overline{9,93642}$ διὰ 8, 9, 12.

4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 219. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθῆται) διαφέρουν κατὰ 1 ἢ 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν $10^p < A < 10^{p+1}$ ἐνῶ τὸ p εἶναι ἀκέραιος, τὸ p λέγεται λογάριθμος τοῦ A κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι τὸ p εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A .

Ἄν ἔχωμεν $10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$, τὸ $\frac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ A κατὰ προσέγγισιν 0,1 κ.ο.κ.

Ἐστῶ, ὅτι ζητεῖται ὁ $\log A$ κατὰ προσέγγισιν 0,1 Ἄν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον μὲ $\frac{x}{10}$, θὰ ἔχωμεν

$$10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}$$

Ὑποῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν

$$10^x < A^{10} < 10^{x+1}$$

Ἄλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{10}

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001... Ἐπομένως :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01. . . , ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην ἢ εἰς τὴν 100ήν. . . δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100 . . .

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὅσα-δήποτε δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ. Π.χ. ἂν δοθῇ ἀριθμὸς τις A καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν δύο δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου του, ὑψώνομεν τὸν A εἰς τὴν 100ήν δύναμιν καὶ εὐρίσκομεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{100} , δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ A^{100} ἡλαττωμένον κατὰ μονάδα, καὶ αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸν θὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς σύνολον ἑκατοστῶν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

5. ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

§ 220. Ἐνῶ, ὡς εἶδομεν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὅσα-δήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Διὰ τῷτο ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὅποιοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες**, περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὐρίσκεται εὐκόλως, οἱ πίνακες περιέχουν ἐκάστου λογαρίθμου τὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Συνήθως μεταχειρίζομεθα πίνακας μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἡ δὲ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ ἐπομένου πίνακος (ληφθέντος ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis).

Τὸ μὲν σύνολον τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν εἶναι γραμμένον εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἰς τὴν ὀριζοντίαν σειρὰν μετὰ τὸ N . Ὁ λογάριθμος ἐκάστου ἀριθμοῦ εὐρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν

λογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

Ὁ ἀστερίσκος, ὁ ὁποῖος ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ εἰς τοὺς πίνακας, σημαίνει, ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἥλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἐπόμενα. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι : $\log 500 = 2,69897$, $\log 5000 = 3,69897$, $\log 5017 = 3,70044$, $\log 6053 = 3,70441$, $\log 5129 = 3,71003$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	923	940	949	958	966	975
1	984	292	*001	010	*018	027	*036	*044	053	062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003

Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις :

1ον. "Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θέλωμεν νὰ εὑρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

2ον. "Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινὸς θέλωμεν νὰ εὑρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν.

1η περίπτωση. α') Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δέν ἔχη περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὐρίσκωμεν αὐτὸ ὡς εἶδομεν ἀνωτέρω.

β') Ἐστὼ, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ἔχει δύο ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, π.χ. ὁ 507356.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 5, χωρίζοντες δὲ τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν

ἀριθμὸν 5073,56. Ἐπειδὴ, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶναι τὸ αὐτό, ἔπεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,56. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν 5073 καὶ 5074. Ἀρα ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,56 θὰ περιέχεται μεταξύ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐν τῶν πινάκων εὕρισκομεν, ὅτι $\log 5073 = 3,70526$ καὶ $\log 5074 = 3,70535$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶναι 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα δεχόμεθα ὅτι :

Αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5074, ὁ λογάριθμος αὐξάνεται κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,56 διὰ νὰ γίνῃ 5073,56, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9 \times 0,56 = 5,04$ ἢ κατὰ 5 περίπου ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ.

Ὡστε πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70526 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 5073,56 Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὕρισκομεν, ὅτι $\log 5073,56 = 3,70531$. Ἀρα ὁ $\log 5073,56 = 3,70531$.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι 5,07356, τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶναι 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τούτου θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 507356. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\log 5,07356 = 0,70531$.

2α περίπτωσις. α') Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὕρσκεται εἰς τοὺς πίνακας, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ εὕρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν εὕρσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος, καὶ σύνολον δεκάδων τὸν ἀριθμόν, τὸν εὕρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν (ἀριστερὰ) τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν εὕρσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος.

Π.χ. ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι 3,70140, τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,70140 εὕρσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, ὁ ἀντίστοιχος, ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία· ἄρα εἶναι ἀκριβῶς ὁ 5028.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ. 1,70552 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

β') Ἐστω, ὅτι δίδεται π.χ. ὁ λογάριθμος 2,70169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμὸς. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον εἰς τοὺς πίνακας εὐρίσκεται μεταξύ τοῦ 0,70165 καὶ τοῦ 0,70174, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 5031 καὶ 5032· καὶ οἱ μὲν λογάριθμοι τούτων διαφέρουν κατὰ 9 μονάδας, τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, οἱ δὲ ἀριθμοὶ κατὰ 1.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἄν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶναι 3,70165, αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1. Ἄν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70169, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος, ἥτοι κατὰ 0,44... Ὡστε ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι 0,70169, θὰ εἶναι ὁ 5031,44... ἔπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα εἶναι ὁ 503, 144.

Ἀσκήσεις

587. Νὰ εὐρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν :

0,003817, 1,141, 0,0845, 107,3 1 203, 13,07, 0,0004124.

588. Νὰ εὐρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν :

α') 95,348, β') 6,8372, γ') 0,98629, δ') $968\frac{3}{8}$ ε') 0,0364598,
στ') 6,3347. ζ') 326,537 η') 5278,37. θ') 15389,45.

589. Νὰ εὐρεθῇ ὁ x ἐκ τοῦ δεδομένου κατωτέρω λογαρίθμου αὐτοῦ :

α') $\log x = 0,63147$. β') $\log x = 1,72127$. γ') $\log x = 0,68708$.
δ') $\log x = \overline{3},92836$. ε') $\log x = \overline{4},38221$. στ') $\log x = 3,70032$.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 221. Μὲ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν ἄλλων ἀριθμῶν,

τὴν διαίρεσιν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμόν καὶ τὴν ἐξαγωγήν ρίζης εἰς διαίρεσιν.

Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν π.χ. τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὐρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν τούτους. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὅποιον θὰ εὕρωμεν, θὰ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὐρίσκομεν ἀκολούθως ἐκ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

1ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενον $-908,4 \times 0,05392 \times 2,117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου με x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν

$$\log x = \log 908,4 + \log 0,05392 + \log 2,117.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν, ὅτι :

$$\log. 908,4 = 2,95828, \quad \log 0,05392 = 2,73175, \quad \log 2,117 = 0,32572$$

Μὲ πρόσθεσιν τούτων προκύπτει, ὅτι $\log x = 2,01575$.

Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶναι ὁ 103,693, ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι τοῦτο $-103,693$.

$$2ον. \text{ Νὰ εὐρεθῇ ὁ } x, \text{ ἂν εἶναι } x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 \\ - \log 899,1 - \log 0,00337 - \log 23435$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

$\log 7,56$	$= 0,87852$	$\log 899,1$	$= 2,95381$
$\log 4667$	$= 3,66904$	$\log 0,00337$	$= 3,52763$
$\log 567$	$= 2,75358$	$\log 23435$	$= 4,36986$

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀνωτέρω εὐρίσκομεν

$$\log 7,56 + \log 4667 + \log 567 = 7,30114$$

$$\log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435 = 4,85130$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει $\log x = 2,44984$ καὶ εὐρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμόν ἔχομεν $x = 281,73$.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 0,000043461.

Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt{0,000043461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους

τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν $\log x = \frac{1}{2} \log 0,000043461$ ἢ $\log x = \frac{1}{2} \cdot \overline{5},63810$
 ἢ $\log x = \overline{3},81905$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται $x = 0,0065925$.

4ον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος $81^x = 10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$\log 81^x = \log 10, \text{ ἢ } x \cdot \log 81 = \log 10 = 1.$$

$$^* \text{ Ἀρα } x = \frac{1}{\log 81} \text{ ἢ } x = \frac{1}{1,90849} = \frac{100000}{190849} = 0,52397. \text{ } ^* \text{ Ἦτοι } x = 0,52397.$$

Ἀσκήσεις

590. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τῶν λογαρίθμων :

$$\begin{array}{llll} \alpha') 0,4326^3, & \beta') \sqrt[3]{12}, & \gamma') \sqrt[5]{0,07776}, & \delta') \sqrt[5]{13}, \\ \epsilon') -875,6348 \times 62,82407, & \sigma\tau') \sqrt[5]{25 \times 3696} : 0,0893462. \end{array}$$

591. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μήκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 2,51075 δακτύλους.

592. Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξύ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

593. Νὰ εὐρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος πίπτοντος εἰς τὸ κενὸν ἀνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ Λευκοῦ ὄρους).

7. ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΒΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 222. Ἄν ἔχωμεν $a^x = A$, τὸ x καλεῖται λογαρίθμος τοῦ A , ὡς πρὸς βάσιν a καὶ σημειώνεται συμβολικῶς $\log_a A = x$.

Ἐστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸν λογαρίθμον τοῦ A , ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω β .

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, ὡς πρὸς β τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $a^x = A$ εὐρίσκομεν $\log_\beta (a^x) = \log_\beta A$ ἢ $x \log_\beta a = \log_\beta A$. θέτοντες ἀντὶ τοῦ x τὸ ἴσον τοῦ $\log_a A$, εὐρίσκομεν $\log_a A \cdot \log_\beta a = \log_\beta A$. Ἦτοι :

Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λογαρίθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν a π.χ. καὶ θέλωμεν τὸν λογαρίθμόν του, ὡς πρὸς βάσιν β , πολλαπλασιάζομεν τὸν γνωστὸν λογαρίθμον (ὡς πρὸς βάσιν a) ἐπὶ τὸν λογαρίθμον τῆς βάσεως a , ὡς πρὸς τὴν βάσιν β .

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, ὡς πρὸς βάσιν 10, εὐρίσκομεν τοὺς νεπερίους λογαρίθμους αὐτῶν (ὡς πρὸς βάσιν τὸν e), ἂν τοὺς γνωστοὺς λογαρίθμους των πολλαπλασιάσωμεν

ἐπὶ $\log_e 10$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τοῦ νεπερίου λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εὐρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 μὲ πολλαπλασιασμόν τοῦ νεπερίου ἐπὶ $\log_{10} e$.

Παρατηρητέον, ὅτι εἶναι $\log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta = 1$. Διότι ὡς ἄνωτέρω εἶναι $\log_\beta A = \log_\alpha A \cdot \log_\beta \alpha$ καὶ ὁμοίως $\log_\alpha A = \log_\beta A \cdot \log_\alpha \beta$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $\log_\beta A \cdot \log_\alpha A = \log_\beta A \cdot \log_\alpha A \cdot \log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta$ ἢ $1 = \log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \beta$

Ἐπομένως εἶναι καὶ $\log_\beta \alpha = \frac{1}{\log_\alpha \beta}$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν 10) τοῦ ἀριθμοῦ $e = 2,718281828\dots$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 τὸν νεπερίον λογάριθμόν του μὲ πολλαπλασιασμόν τοῦ λογαρίθμου του ἐπὶ τὸν $\frac{1}{\log_{10} e}$, ὁ ὅποιος ἰσοῦται μὲ 0,434294481..

Σημείωσις. Καλοῦμεν **συλλογὰριθμόν** ἀριθμοῦ τινος τὸν λογάριθμον τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτως εἶναι συλλογὰ $= \log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$. Ἦτοι ὁ συλλογὰριθμος ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ.

Γ' ΠΕΡΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 223. Καλοῦμεν **ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν** τὴν ἐξίσωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος ὑπάρχει εἰς τὸν ἐκθέτην δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ἀριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστὴν $\neq 0$.

Π.χ. ἐκθετικά ἐξισώσεις εἶναι αἱ $5^{x^2-2x+2}=1$, $\alpha^{2x+3}=\alpha^2$.

Τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς ἐξισώσεις καλοῦμεν **ἀλγεβρικὰς** πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς. Τοῦτο γίνεται κυρίως, ὅταν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης μὲ ἓν μέλος τῆς τὴν 1, τὸ δὲ ἄλλο δύναμιν ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς $\neq 0$, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης περιέχει ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

*Εστω πρὸς λύσιν π.χ. ἡ ἐκθετική ἐξίσωσις $3^{3x} = \frac{1}{27}$.

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 27 εὐρίσκομεν
 $3^{3x} \cdot 27 = 1$ ἢ $3^{3x} \cdot 3^3 = 1$ ἢ $3^{3x+3} = 1$ ἢ $3^{3x+3} = 3^0$ (ἐπειδὴ $3^0 = 1$)

Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ἐπειδὴ ἴσαι δυνάμεις ἴσων βάσεων $\neq 0$ θὰ ἔχουν καὶ ἐκθέτας ἴσους) $3x+3=0$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $x=-1$.

*Εστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-3} + 3^{x-4}$

*Ἀπ' αὐτὴν εὐκόλως εὐρίσκομεν $\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}} = \frac{2^{x-1} \cdot 2^{-2} - 2^{x-3}}{3^{x-3} + 3^{x-4}} = 1$

$$\eta \frac{2^x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{3^x \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 2^x}{\frac{4}{81} \cdot 3^x} = \frac{3 \cdot 81 \cdot 2^x}{4 \cdot 8 \cdot 3^x} = \frac{3^5 \cdot 2^x}{2^3 \cdot 3^x} = \frac{2^x \cdot 2^{-5}}{3^x \cdot 3^{-5}} = \frac{2^{x-5}}{3^{x-5}} = 1$$

$$\eta \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν } x-5=0 \text{ καὶ } x=5$$

*Εστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετική ἐξίσωσις $a^{(\beta-x)x} = a^x$, ἐνῶ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι τὸ $a \neq$ τοῦ 0 καὶ τῆς 1. Διὰ νὰ εἶναι τότε αἱ δύο δυνάμεις τοῦ a ἴσαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι οἱ ἐκθέται αὐτῶν ἴσοι.

*Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τοῦ a ἔχομεν

$$(\beta-x)x = x \quad \eta \quad x^2 + x - \beta x = 0.$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ ταύτης εὐρίσκομεν $x=0$ καὶ $\beta-1$.

§ 224. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὀρίζεται καὶ σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, καθὼς καὶ ἡ λύσις αὐτοῦ.

*Εστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} \alpha^x \cdot \alpha^\psi = \alpha^3 \\ \frac{\alpha^x}{\alpha^\psi} = \frac{1}{\alpha^2} \end{cases}$ ὅπου $\alpha \neq 0$ καὶ $\alpha \neq 1$

Γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\begin{cases} \alpha^{x+\psi} = \alpha^3 \\ \alpha^{x-\psi} = \alpha^{-2} \end{cases} \quad \text{Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν} \quad \begin{cases} x+\psi = 3 \\ x-\psi = -2. \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως, τοῦ ὁποῦ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{5}{2}$ καὶ $x = \frac{1}{2}$.

*Ενίστε ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἢ συστήματος τοιούτων

ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

*Ἐστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24}=4096$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24) \cdot \log 2 = \log 4096.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ $\log 2$ εὐρίσκομεν

$$x^2-9x-24 = \frac{\log 4096}{\log 2} = \frac{3,61236}{0,30103} = 12.$$

*Ἦτοι $x^2-9x-24=12$, ἐξ ἧς $x=12$ καὶ $x=-3$.

*Ἐστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 3981312 \\ 2^y \cdot 5^x = 400000 \end{cases}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων εὐρίσκομεν τὸ ἰσο-

δύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθὲν $\begin{cases} x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 = \log 3981312 \\ y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 = \log 400000 \end{cases}$

Θέτοντες $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, εὐρίσκομεν

$$x \cdot \log 3 + 2y \cdot \log 2 = \log 3981312$$

$$2y \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 = 2 \log 400000$$

Ἐὰν τὴν πρώτην τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δευτέραν, εὐρίσκομεν $x(2 \log 5 - \log 3) = 2 \log 400000 - \log 3981312$, ἐκ τῆς ὁ-

$$\begin{aligned} \text{ποίας ἔχομεν } x &= \frac{2 \log 400000 - \log 3981312}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{2 \log (2^5 \cdot 10^5) - \log (2^{14} \cdot 3^6)}{2 \log 5 - \log 3} = \\ &= \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 - 2 \log 2 - \log 3} = 5 \end{aligned}$$

*Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὐρίσκομεν

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5}{5^5} = 2^7.$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $y=7$.

§ 225. Καλοῦμεν **λογαριθμικὴν** ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσαν λογαρίθμους τῶν ἀγνώστων αὐτῆς. Ὀμοίως ὀρίζεται καὶ σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

*Εστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 2\log\psi - \log x = 0,12494 \\ \log 3 + 2\log x + \log\psi = 1,73239. \end{cases}$$

Τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων γράφομεν καὶ ὡς ἐξῆς :
 $2\log x + \log\psi = 1,73239 - \log 3 = 1,73239 - 0,47712 = 1,25527.$

Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἀπαλείφομεν τὸ $\log x$ καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\log\psi = 1,50515$ καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν τῶν ἴσων διὰ 5 εὐρίσκομεν $\log\psi = 0,30103$, ἐξ ἧς καὶ $\psi = 2$.
 Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x = 3$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 594. \quad \alpha') \quad \alpha^x + \mu = \alpha^{2\mu}, \quad \beta') \quad \alpha^{3x+2} = \alpha^x + 4, \quad \gamma') \quad \gamma^{2-5x} = \gamma^x + 3. \\ \delta') \quad \beta(2x+1)(3x+4) = \beta(3x+1)(2x+5), \quad \epsilon') \quad (\alpha\mu)^{(x+3)} = \alpha^x + 2. \\ 595. \quad \alpha') \quad \alpha^{2x} + 3 \cdot \alpha^{3x+4} = \alpha^{4x+5}, \quad \beta') \quad 2^{2x} = 32, \quad \gamma') \quad (-2)^x = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta') \quad 5^x + 7 \cdot 5^x = 450, \quad \epsilon') \quad \sqrt{x} = \alpha^x, \quad \sigma\tau') \quad 2x^3 + 4x^2 + 1 = 320. \\ 596. \quad \alpha') \quad 2^x + 4^x = 272, \quad \beta') \quad \log x = \log 24 - \log 3, \quad \gamma') \quad 2^{x+1} + 4^x = 80. \\ \delta') \quad 5 \cdot \log x = \log 288 + 3 \log \frac{x}{2}, \quad \epsilon') \quad \log x = \log 192 + \log \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$\begin{aligned} 597. \quad \alpha') \quad \begin{cases} \alpha^{2x} \cdot \alpha^{3\psi} = \alpha^8 \\ \frac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3\psi}} = \frac{1}{\alpha^6} \end{cases}, \quad \beta') \quad \begin{cases} 5^{3x} \cdot 5^{4\psi} = 5^{18} \\ \frac{5^{2x}}{5^{7\psi}} = 5^{-17} \end{cases}, \quad \gamma') \quad \begin{cases} x + \psi = 95 \\ \log(x - \psi) = 3 \end{cases} \\ 598. \quad \alpha') \quad \begin{cases} x^2 + \psi^2 = 425 \\ \log x + \log \psi = 2, \end{cases}, \quad \beta') \quad \begin{cases} 5x^2 - 3\psi^2 = 11300 \\ \log x + \log \psi = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 599. \quad \alpha') \quad 3x = 177147, \quad \beta') \quad 3^{\frac{x}{2}} = 768, \quad \gamma') \quad 3^{\sqrt{x}} = 243. \\ 600. \quad \alpha') \quad 24^{3x-2} = 10\,000, \quad \beta') \quad 5^{x^2-3x} = 625, \quad \gamma') \quad x^{x^2-7x+12} = 1, \\ 601. \quad \alpha') \quad 6x^4 - 16x^2 + 8 = 7\,776, \quad \beta') \quad (\alpha \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^6 \cdot \alpha^7) \alpha^{2x-1} = v. \\ 602. \quad \alpha') \quad \begin{cases} x^4 + \psi^4 = 641 \\ \log(x\psi)^2 = 2, \end{cases}, \quad \beta') \quad \begin{cases} \log \frac{x}{\psi} = 0,5, \\ \log x\psi = 1,5 \end{cases}, \quad \gamma') \quad \begin{cases} \log x\psi = 3 \\ 5x^2 - 3\psi^2 = 11\,300. \end{cases} \\ 603. \quad \alpha') \quad \begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0,5 \\ 3\log x + 2\log \psi = 1,50515 \end{cases}, \quad \beta') \quad \begin{cases} \log \frac{x}{5} = \log 10 \\ \log x^3 + \log \psi^2 = \log 32. \end{cases} \end{aligned}$$

Δ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

§ 226. Προβλήματα **ἀνατοκισμού** ἢ **συνθέτου τόκου** λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπομένης χρονικῆς μονάδος.

Ὁ τόκος (καὶ τὰ προβλήματα τόκου), τὸν ὁποῖον ἐξετάζει ἡ Ἀριθμητικὴ, καλεῖται **ἀπλοῦς**, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ συνθέτου.

1ον. Δανείζει τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος ἢ μίαν ἐξαμηνίαν, τριμηνίαν κ.τ.λ.) τ δραχμὰς· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὄλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας ;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ 1 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμὰς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον $\alpha \cdot \tau$ δραχμὰς.

Ἐπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι $\alpha + \alpha\tau = \alpha(1 + \tau)$ δρχ.

Ἦτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1 + \tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον $\alpha(1 + \tau)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμῃ χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ $\alpha(1 + \tau) \cdot (1 + \tau)$ ἢ $\alpha(1 + \tau)^2$.

Ὡστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος $\alpha(1 + \tau)^2$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ $\alpha(1 + \tau)^\nu$. Ἄν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν μὲ Σ , θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha(1 + \tau)^\nu$.

Ἐκ ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐν ἑκ τῶν Σ , α , ν , τ , μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαριθμῶν (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

Ἄν κατὰ τὸν ἀνατοκισμὸν ὡς χρονικὴ μονὰς ληφθῇ τὸ ἔτος, ἡ δὲ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι ν ἔτη καὶ η ἡμέραι, παρατηροῦμεν, ὅτι μετὰ ν ἔτη τὸ κεφάλαιον α δρχ. θὰ γίνῃ $\alpha(1 + \tau)^\nu$. Τοῦτο τοκίζόμενον μὲ ἀπλοῦν τόκον πρὸς 100τ% (ὥστε τόκος τῆς 1 δρχ. εἰς 1 ἔτος νὰ εἶναι τ δρχ.) ἐπὶ η ἡμέρας δίδει τόκον

$$\frac{\alpha(1+\tau)^v \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{\alpha(1+\tau)^v \tau \cdot \eta}{360}$$

Οὕτω τὸ τελικὸν ποσὸν ἐκ τοῦ ἀνατοκισμοῦ θὰ εἶναι

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^v + \frac{\alpha(1+\tau)^v \tau \eta}{360} = \alpha(1+\tau)^v \cdot \left[1 + \frac{\tau \eta}{360} \right]$$

Σημείωσις. Ἀντὶ τοῦ τύπου τούτου χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὸν τύπον

$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$. Τοῦτο δικαιολογεῖται ἐκ τῶν ἐξῆς: Ἄν ὑποθετῇ, ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται ὄχι κατ' ἔτος ἀλλὰ κατ' ἡμέραν, τότε ὁ χρόνος ἀνατοκισμοῦ εἶναι v ἔτη καὶ η ἡμέραι $= (360 \cdot v + \eta)$ ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου 360 ἡμέρας. Ὁ τόκος κατ' ἡμέραν ἔστω, ὅτι εἶναι ψ , τότε ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιον μιᾶς μονάδος μετὰ 360 ἡμέρας θὰ γίνῃ $(1+\psi)^{360}$, ἀλλὰ τοῦτο $=$ με $1+\tau$, ἀφοῦ ἡ μία μονὰς δίδει τόκον τ εἰς ἓν ἔτος.

Ἄρα ἔχομεν $(1+\psi)^{360} = (1+\tau)$, $(1+\psi) = (1+\tau)^{\frac{1}{360}}$. Τὸ κεφάλαιον α δρχ. ἀνατοκίζομενον κατ' ἡμέραν ἐπὶ $(360v + \eta)$ ἡμέρας με τόκον ψ μιᾶς δρχ. εἰς μίαν ἡμέραν γίνεται $\alpha(1+\psi)^{360v + \eta}$ καὶ θέτοντες ἀντὶ τοῦ $(1+\psi)$ τὸ ἴσον του $(1+\tau)^{\frac{1}{360}}$ εὐρίσκομεν $\alpha(1+\tau)^{\frac{360v + \eta}{360}} = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$, $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}$

Εφαρμογαί. 1η. Δανεῖζει τις 150000 δρχ. με ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 % κατ' ἔτος· πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἐν ὄλῳ μετὰ 6 ἔτη ;

Ζητεῖται τὸ Σ καὶ ἔχομεν $\alpha = 150000$, $v = 6$, $\tau = 0,04$. Ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\Sigma = 150\,000 \cdot 1,04^6$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\log \Sigma = \log 150\,000 + 6 \log 1,04.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν

$\log 150\,000 = 5,17609$, $6 \log 1,04 = 6 \cdot 0,1703 = 0,10218$, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως $\log \Sigma = 5,27827$ καὶ ἐκ τούτου $\Sigma = 189\,787$.

Ἦτοι ὁ τοκίσας τὰς 150 000 δραχμὰς με ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4% θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὄλῳ 189 787 δρχ.

2α. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις με ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6%, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὄλῳ 500000 δρχ. ;

Ἐχομεν $\Sigma = 500\,000$, $\tau = 0,06$, $1+\tau = 1,06$ $v = 15$ καὶ ζητεῖται τὸ α .

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν $500\,000 = \alpha \cdot 1,06^{15}$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων εὐρίσκομεν
 $\log 500\,000 = \log \alpha + 15 \log 1,06$.

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\log \alpha = \log 500\,000 - 15 \log 1,06$. Ἐκ τῶν πι-
 νάκων εὐρίσκομεν $\log 500\,000 = 5,69897$ καὶ $15 \log 1,06 = 15 \cdot 0,2631$
 $= 0,37965$ καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως $\log \alpha = 5,31932$, ἐκ τοῦ ὁ-
 ποίου ἔπεται, ὅτι $\alpha = 208604,8$ δρχ.

3η. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 86200 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 5 ἔτη 104870 δραχμαί ;

Ἐχομεν $\alpha = 86\,200$, $n = 5$, $\Sigma = 104\,870$ καὶ ζητεῖται τὸ t .

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν :
 $104870 = 86\,200(1+t)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων
 τούτων εὐρίσκομεν $\log 104\,870 = \log 86\,200 + 5 \log(1+t)$, ἐκ τοῦ
 ὁποίου ἔπεται, ὅτι $5 \log(1+t) = \log 104\,870 - \log 86\,200$. Ἐκ τῶν
 πινάκων εὐρίσκομεν

$\log 104\,870 = 5,02065$, $\log 86\,200 = 4,93551$,
 ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\log 104\,870 - \log 86\,200 = 0,08514$
 καὶ $\log(1+t) = 0,08514 : 5 = 0,01703$. ἦτοι $(1+t) = 1,04$ καὶ $t = 0,04$.
 Αὐτὸς εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος, ἄρα ὁ ἐτήσιος τό-
 κος εἶναι 0,04 τοῦ κεφαλαίου. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%.

4η. Μετὰ πόσον χρόνον 208600 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 6% γίνονται 503750 δρχ ;

Ἐχομεν $\alpha = 208\,600$, $t = 0,06$, $\Sigma = 503750$ καὶ ζητεῖται τὸ n .
 Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὐρίσκομεν $503750 = 208600 \cdot 1,06^n$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὐρίσκομεν
 $\log 503750 = \log 208600 + n \cdot \log 1,06$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$n = \frac{\log 503750 - \log 208600}{\log 1,06}.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\log 503\,750 = 5,70222$, $\log 208\,600 = 4,31931$
 $\log 1,06 = 0,02531$. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι 0,38291.

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $n = \frac{0,38291}{0,02531} = 15$ ἔτη καὶ κάτι ἐπὶ πλέον < 1 .

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 16ου ἔτους, παρατη-
 роῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 15ου ἔτους αἱ 208 600 δρχ. γίνονται
 $208\,600 \cdot 1,06^{15} = 500\,000$ δρχ., ἔπομένως αἱ 503 750 δρχ. — 500 000 δρχ.

=3 750 δρχ, είναι τόκος άπλοϋς τῶν 500 000 δρχ. πρὸς 6% εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Λύομεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ άπλοϋ τόκου καὶ εὐρίσκομεν 45 ἡμ. τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμ.

Παρατήρησις. Ἄν ποσὸν α ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος μὲ τόκον τ τῆς μονάδος κατ' ἔτος, θὰ γίνη μετὰ ν ἔτη $\alpha(1+\tau)^{\nu}$ καὶ τοῦτο μετὰ η ἡμέρας ἀκόμη φέρει άπλοῦν τόκον $\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu} \cdot 100\eta\tau}{100 \cdot 360}$. Ἄρα γίνεται

ἐν ὄλῳ μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu} \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐξ οὗ

$$\log \Sigma = \log \alpha + \nu \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right),$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $1 + \frac{\eta\tau}{360} < 1+\tau$, ἔχομεν $\log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right) < \log(1+\tau)$.

Ἄρα ἡ διαίρεσις $(\log \Sigma - \log \alpha) : \log(1+\tau)$ δίδει πηλίκον ν καὶ ὑπόλοιπον $u = \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$.

Πράγματι ἔχομεν τότε $\log \Sigma - \log \alpha = \nu \log(1+\tau) + u$ ἢ

$\log \Sigma - \log \alpha = \nu \cdot \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἥτοι τὴν ἀνωτέρω σχέσιν

$$\log \Sigma = \log \alpha + \nu \cdot \log(1+\tau) + \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right).$$

Ἐκ τῆς $u = \log \left(1 + \frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐπειδὴ ἐκ τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται τὸ u (κατὰ προσέγγισιν), εὐκόλως προσδιορίζεται τὸ η.

Σημείωσις. Ἐνίοτε ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ τριμηνίαν, ἐνῷ τὸ ἐπιτόκιον ὀρίζεται κατ' ἔτος. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ὁ τόκος τῆς μονάδος τοῦ κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν t_1 εἶναι ὁ τόκος τῆς 1 μονάδος κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν καὶ τ ὁ τόκος αὐτῆς κατ' ἔτος, παρατηροῦμεν, ὅτι μία μονὰς κεφαλαίου μετὰ δύο χρονικὰς μονάδας, δηλαδὴ μετὰ δύο ἑξαμηνίας, θὰ γίνη ἀνατοκίζομένη $(1+t_1)^2$ καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $1+\tau$, διότι ἡ μία μονὰς μετὰ ἓν ἔτος δίδει τόκον τ καὶ γίνεται μὲ τὸν τόκον $1+\tau$, ἄρα ἔχομεν $(1+t_1)^2 = 1+\tau$ καὶ $t_1 = \sqrt{1+\tau} - 1$.

Ἄν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν t_2 παριστάνῃ τὸν τόκον τῆς μιᾶς μονάδος κεφαλαίου κατὰ τριμηνίαν, θὰ ἔχομεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω $(1+t_2)^4 = 1+\tau$ καὶ $t_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

604. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἂν ἀνατοκίσῃ κατ' ἔτος 5 600 δρχ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 5%;

605. Πατήρ τις κατέθεσεν εἰς Τράπεζαν 7500 δρχ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4,5%. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱὸς του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;

606. Πόσῃν αὐξήσιν παθαίνει κεφάλαιον 1 000 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καὶ 8 μῆ-
νας ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 4%;

607. Ποῖον κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος πρὸς 3,5% εἰς 20 ἔτη 3 730 850 δρχ.;

608. Τίς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45 896 000 δρχ. πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμ. μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 8%;

609. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4%, ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20 000 000 δρχ.;

610. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθῃ μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος κεφάλαιον 625 000 δρχ. ἐπὶ 15 ἔτη καὶ ἔγινεν 1 166 900 δρχ.;

611. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἂν 10 000 δρχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 224 770 δρχ. ἀνατοκίζομεναι;

612. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ' ἔτος διὰ νὰ τετραπλασιασθῇ μετὰ 31 ἔτη;

613. Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκίζομενον κατ' ἔτος κεφάλαιον 3 580 000 δρχ. πρὸς 4,5% γίνεται 56 000 000 δρχ.;

614. Πότε κατετέθησαν 630 000 δρχ. εἰς Τράπεζαν τινα μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4%, ἂν τὴν 1ην Ἀπριλίου 1956 εἶχον γίνει 969 800 δρχ.;

615. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσὸν τι πρὸς 3,5% διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ἢ τετραπλασιασθῇ;

616. Ὁ πληθυσμὸς ἐνὸς Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὄγδοηκοστὸν τοῦ προηγούμενου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

617. Μία πόλις ἔχει 8 000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτη-
σίως κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλο-
γίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5 000 κατοίκους;

Ε'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΩΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΩΝ

§ 227. 1ον. Καταθέτει τις εἰς τὴν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος 4,5% ποσὸν 205.000 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔ-
τους. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη;

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 205 000 δραχμῶν θὰ μείνῃ 15 ἔτη ἀνα-
τοκίζομένη πρὸς 4,5%. Ἐπομένως θὰ γίνῃ 205 000·1,045¹⁵.

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις θὰ

μείνη μόνον 14 ἔτη εἰς τὸν τόκον· ἄρα θὰ γίνη 205 000·1,045¹⁴
 Ὅμοίως ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γίνη
 205 000·1,045¹³ κ.ο.κ., ἢ τελευταία θὰ μείνη μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ
 γίνη 205 000·1,045.

Ὡστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν
 θὰ εἶναι 205 000·1,045¹⁵ + 205 000·1,045¹⁴ + ... + 205 000·1,045 ἢ
 205 000·1,045 + 205 000·1,045² + 205 000·1,045³ + ... + 205 000·1,045¹⁵

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὀ-
 ρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 1,045.

Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀρων
 γεωμετρικῆς προόδου, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ποσόν, ἔστω Σ, τὸ ὁποῖον
 θὰ λάβῃ, εἶναι $\Sigma = \frac{205000 \cdot 1,045^{15} \cdot 1,045 - 205000 \cdot 1,045}{1,045 - 1 = 0,045}$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma = 205\,000 \cdot 1,045 \cdot \frac{1,045^{15} - 1}{0,045}$$

Μὲ τοὺς λογαριθμοὺς εὐρίσκομεν πρῶτον τὸ 1,045¹⁵. Πρὸς
 τοῦτο ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x = 1,045^{15}$, $\log x = 15 \log 1,045 = 0,28680$,
 ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $x = 1,93552$. Ὡστε θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma = 205\,000 \cdot 1,045 \cdot \frac{0,93552}{0,045} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = 205\,000 \cdot \frac{1,045 \cdot 935,52}{45}$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαριθμοὺς τῶν δύο ἴσων ἔχομεν :

$$\log \Sigma = \log 205\,000 + \log 1,045 + \log 935,52 - \log 45$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν :

$$\log 205\,000 = 5,31175$$

$$\log 1,045 = 0,01912$$

$$\log 935,52 = 2,97105$$

$$\text{ἄθροισμα} = 8,30192$$

$$\log 45 = 1,65321$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὐρίσκομεν $\log \Sigma = 6,64871$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει
 $\Sigma = 4\,453\,600$, ἥτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 4 453 600 δρχ.

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέσῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστης χρονικῆς μονά-
 дос α δραχμὰς εἰς τινὰ Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμόν καὶ τόκον τ τῆς
 μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητεῖται δὲ πόσας δραχμὰς
 θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρώτη κατά-
 θεσις θὰ γίνη $\alpha(1+\tau)^0$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^{n-1}$ κ.ο.κ. ἢ τελευταία
 $\alpha(1+\tau)^n$, ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ
 $\alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \dots + \alpha(1+\tau)^n$. Ἄν παραστήσωμεν τὸ ἄθροι-

σμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ , θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha(1+\tau) \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ τὸ α , ἐὰν δοθῇ τὸ Σ , τὸ τ καὶ τὸ v .

2ον. Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμόν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ v χρονικὰς μονάδας ;

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-1$ χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{v-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-2$ χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{v-2}$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ τελευταία θὰ εἶναι μόνον α . Ὡστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \dots + \alpha(1+\tau)^{v-1}.$$

ἢ $\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^v - \alpha}{\tau} = \alpha \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α , τ , v . Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὐρίσκομεν ἐκκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α , ὅταν γνωρίζωμεν τὰ Σ , τ , v .

ΣΤ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ

§ 228. Χρεωλυσία λέγεται ἡ ἐντὸς ὠρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιον** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκισμομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

1ον. Ἐδανείσθη τις 1850000 δραχμὰς πρὸς 4,5% μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους· πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον ;

Τὸ ἀρχικὸν ποσόν τῶν 1 850 000 δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη 1 850 000·1,045¹². Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον

χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ $x \cdot 1,045^{11}$ μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται, ὅτι ἔμεινεν εἰς τὸν τόκον. Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ $x \cdot 1,045^{10}$, ἡ τρίτη $x \cdot 1,045^9$ κ.ο.κ., ἡ δὲ τελευταία θὰ μείνῃ x . Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ πληρωθοῦν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν, θὰ εἶναι

$$x + x \cdot 1,045 + x \cdot 1,045^2 + \dots + x \cdot 1,045^{11} \text{ ἢ } x \cdot \frac{1,045^{12} - 1}{0,045}.$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ὀφειλόμενον συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἦτοι θὰ ἔχωμεν :

$$x \cdot \frac{1,045^{12} - 1}{0,045} = 1\,850\,000 \cdot 1,045^{12}.$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο εὐρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $1,045^{12}$ θέτοντες αὐτὴν ἴσην π.χ. μετὰ τὸ ψ , ὅτε εἶναι $\psi = 1,045^{12}$ καὶ $\log \psi = 12 \log 1,045 = 0,22944$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi = 1,696$.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $1,045^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ $1,696$ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$x = \frac{1\,850\,000 \times 0,045 \times 1696}{696}, \text{ ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ λογαριθμήσεως λαμβάνομεν } \log x = \log 1\,850\,000 + \log 0,045 + \log 1696 - \log 696.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν

$$\log 1\,850\,000 = 6,26717$$

$$\log 0,045 = 2,65321$$

$$\log 1\,696 = 3,22943$$

$$\text{ἄθροισμα} = 8,14981$$

$$\log 696 = 2,84261$$

$$\text{Ἐπομένως } \log x = 5,30720.$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται, ὅτι $x = 202\,861,9$ δραχμαί.

Ἐν γένει, ἐὰν μετὰ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν μετὰ ἀνατοκισμὸν καθ' ὠρισμένην χρονικὴν μονάδα, μετὰ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα καὶ μετὰ ν τὸν πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$, ἡ δὲ ὀλικὴ ἀξία τῶν δόσεων ἐκ x δραχ. ἐκάστη θὰ εἶναι μετὰ ν χρονικὰς μονάδας

$$x(1+\tau) + x(1+\tau)^2 + \dots + x(1+\tau)^{\nu-1} \text{ ἢ } x \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}.$$

$$\text{Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν } x \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v \quad (1)$$

ἐκ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x .

Ἐνίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου π.χ. μετὰ κ ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $x \frac{(1+\tau)^{v-\kappa+1}-1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v$.

Διότι ἡ πρώτη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ μείνῃ ἐπὶ $v-\kappa$ ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{v-\kappa}$ ἡ ἔπομένη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{v-\kappa-1}$ κ.τ.λ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$x + x(1+\tau) + \dots + x(1+\tau)^{v-\kappa-1} + x(1+\tau)^{v-\kappa} = \frac{x(1+\tau)^{v-\kappa+1}-x}{\tau},$$

τὸ ὁποῖον θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha(1+\tau)^v$, ἥτοι ἔχομεν τὴν ἑξῆς σχέσιν:

$$x \frac{(1+\tau)^{v-\kappa+1}-1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v.$$

2ον. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη δι' ἑτησίου χρεωλυσίου 800000 δραχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%;

Ἔχομεν $x=800\,000$, $v=6$, $\tau=0,04$, ζητεῖται δὲ τὸ α . Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x , v , τ εὕρισκομεν τὴν σχέσιν $800000 \cdot \frac{1,04^6-1}{0,04} = \alpha \cdot 1,04^6$. Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς α εὕρισκομεν

$$\alpha = \frac{800000(1,04^6-1)}{0,04 \cdot 1,04^6}.$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $1,04^6$ καὶ ἀκολουθῶς εὕρισκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων $\alpha=4\,193\,636,3$ δραχμάς.

3ον. Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 2 000 000 δραχμῶν μὲ χρεωλυσίον 130 000 δραχμῶν ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3%;

Ἔχομεν $\alpha=2\,000\,000$, $x=130\,000$, $\tau=0,03$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) εὕρισκομεν:

$$130\,000 \cdot \frac{1,03^v-1}{0,03} = 2\,000\,000 \cdot 1,03^v$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν: $130\,000 \cdot 1,03^v - 130\,000 = 0,03 \cdot 2\,000\,000 \cdot 1,03^v$

$$\eta \quad 1,03^v \cdot (130\,000 - 0,03 \cdot 2\,000\,000) = 130\,000$$

$$\text{καὶ } 1,03^v = \frac{130\,000}{70\,000} = \frac{13}{7}.$$

Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων μελῶν ἔχομεν :
 $\nu \cdot \log 1,03 = \log 13 - \log 7$ ἢ $0,01284\nu = 1,11394 - 0,84510 = 0,26884$, ἐκ
 τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $\nu = 20,937$ ἔτη. Ἡτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνη μετὰ
 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι κατὰ τι μικροτέρα τῶν ἄλλων.
 Διὰ νὰ εὐρώμεν τὴν εἰκοστήν πρῶτην δόσιν, εὐρίσκομεν πόσον γίνεται
 τὸ δάνειον τῶν 2 000 000 δρχ. εἰς 21 ἔτη, δηλαδή τὸ $2\,000\,000 \cdot 1,03^{21}$
 δρχ., τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 3 720 590 δρχ., ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν
 ὅτι αἱ δόσεις ἐκ 130 000 δρχ. ἐκάστη εἰς τὸ τέλος τοῦ 21οῦ ἔτους
 γίνονται $130\,000 \cdot \frac{1,03^{20}-1}{0,03} \cdot 1,03 = 3\,597\,945$ δρχ. Ἡ διαφορὰ
 $3\,720\,590 - 3\,597\,945$ δρχ. = 122 645 δρχ. παριστάνει τὴν τελευ-
 ταίαν δόσιν.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

618. Ἐμπορὸς τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 350 000 δρχ. ἐκ
 τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος 4%. Πόσα θὰ λάβῃ
 εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

619. Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 10000 δρχ. πρὸς 5%.
 Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 130000 δρχ. ;

620. Ἡ διατροφή καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγράφοντο ὑπὸ τοῦ
 πατρὸς του εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἀνήρχοντο δὲ κατὰ μέσον ὅρον 20 000
 δρχ. ἑτησίως. Πόσα θὰ ἐγίνοντο αὐτὰ μετὰ 3 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ' ἔτος πρὸς
 3,5% ;

621. Πατὴρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡ-
 ρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνουν μετὰ 21 ἔτη
 250 000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑτησία κατάθεσις ;

622. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρέος 100 000
 δρχ. ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%, ἂν πληρῶνεται δι' ἑτησίων δόσεων ;

623. Χρέος ἐξοφλεῖται δι' ἴσων ἑτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ
 ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶναι 318 000 δρχ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5% ;

624. Ἐμπορὸς τις ἐδανείσθη 45 000 000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος 5%.
 Ἐὰν πληρῶνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 3 000 000 δρχ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ
 τὸ χρέος αὐτοῦ ;

625. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνη εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Καθεμία
 δόσις (ἐτησία) θὰ εἶναι 46 130 δρχ. θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον
 ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθέν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον
 εἶναι 4,5% ;

626. Κράτος ἐδανείσθη ποσόν τι πρὸς 3,75%. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησις του
 ἀρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου καὶ θὰ πληρῶνεται 158 800 000 δρχ.
 ἑτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθέν ποσόν ;

627. Χρέος ἔξ 1,5 ἑκατομμυρίου δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων ἐτησίων δανείων ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3,75% ;

628. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000000 δρχ. διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἔξ 1780300 δρχ. ἐκάστην ;

(Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν εὐρεθεῖσαν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20\,000\,000}{1\,780\,300}, \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμὸν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς δέν εἶναι γνωστὴ καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσεως θὰ εἶναι μεγαλύτερον, ὅσον τὸ τ εἶναι μικρότερον. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ μέ μικρότερον ἀριθμὸν τῆς ζητουμένης τιμῆς του, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20\,000\,000}{1\,780\,300}$.

Θέτοντες π.χ. $\tau=0,04$ εὐρίσκομεν

$$\frac{1}{0,04} \left(1 - \frac{1}{1,04^{16}} \right) = \left(1 - \frac{1}{1,04^{16}} \right) \cdot 25 = 11,6523$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) εὐρίσκομεν 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τώρα $\tau=0,045$ ἔπειτα $\tau=0,0475$ κ.ο.κ. προχωροῦντες προσεγγίζομεν περισσότερον πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τ).

629. Κατέθεσέ τις ἐπὶ 5 συνεχῇ ἔτη πρὸς 4% εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους ποσὸν τι καὶ εἰσέπραξεν ἔξ ἔτη μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς τελευταίας καταθέσεως 20 000 000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ κατάθεσις ;

630. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 1 250 000 δρχ. ἐπὶ 7 ἔτη πρὸς 6%. Τί ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δωδεκάτου ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

631. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὁκτὼ ἐτήσια καταθέσεις ἔξ 1 000 000 δρχ. ἐκάστη ἀποτελοῦν ποσὸν 102000000 δραχμῶν ;

632. Πόσαι καταθέσεις ἔξ 1 000 000 δρχ., αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους, ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἀποτελεσθῇ ποσὸν 2 457 839 000 δρχ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $5 \frac{1}{2}\%$;

633. Δικαιοῦται τις νὰ εἰσπράξῃ μετὰ 5 ἔτη ποσὸν 10 000 000 δρχ. Ἀντὶ τούτου ἐπιθυμεῖ νὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος ἐκάστου τῶν 5 ἐτῶν τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσόν. Ποῖον εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράττῃ τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

634. Ὄφειλει τις 15 000 000 δρχ. πληρωτέας τὴν 1ην Ἰουλίου 1949. Νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ὑποχρέωσις αὕτη μέ τρεῖς ἄλλας πρὸς ἴσας ἀλλήλας πληρωτέας τὴν 1ην Ἰουλίου 1950, 1951, καὶ 1952 (ἐπιτόκιον 6%).

635. Μὲ πόσας ἐξαμηνιαίας χρεωλυτικὰς δόσεις θὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20 000 000 δρχ. ἐὰν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται πρὸς 3% καθ' ἐξαμηνίαν, τὸ δὲ χρεωλύσιον εἶναι 1 000 000 δρχ. ;

636. Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 25 000 000 δρχ. πρὸς 7% ἐξοφλητέον

έντος 8 ετών. Τρεις μήνες μετά την κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικής δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὀλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλλῃ ;

657. Ἐδανείσθη τις τὸν Ἀπρίλιον 1942 ποσὸν 20 008 000 δρχ. ἐξοφλήτεον ἐντὸς 20 ἐτῶν πρὸς 6%. Καταβάλλων κανονικῶς τὰ μέχρι τοῦ 1950 χρεωλύσια ἐπιθυμῇ τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1950 νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του τελείως. Τί ποσὸν θὰ χρειασθῇ ;

638. Διὰ πόσον χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 100 000 000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἴναι 7%, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 10 000 000 δρχ. ;

639. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον δάνειον 250 000 000 δρχ. ἐξοφλεῖται ἐντὸς 15 ἐτῶν δι' ἐτησίων χρεωλύσιων 24 553 000 δραχμῶν ;

640. Ἐταιρεία τις δύναται νὰ διαθέτῃ ἐκ τῶν κερδῶν αὐτῆς 10 000 000. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ διαθέτουσα ἐπὶ εἰκοσαετίαν τὸ ἄνω ποσὸν διὰ χρεωλύσιον τοῦ δανείου τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

641. Εἰσπράττει τις ἐπὶ μίαν πενταετίαν καὶ εἰς τὸ μέσον ἐκάστου ἔτους 210 000 δραχμῶν αὐξανόμενου τοῦ ποσοῦ τούτου ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος κατὰ 7,5% (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Κατὰ τὴν ἐπομένην πενταετίαν εἰσπράττει ὁμοίως τὸ προηγούμενον ποσὸν 210 000 δρχ. ἡϋξημένον κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ἐνῶ ἀπὸ πενταετίας εἰς πενταετίαν ἐξακολουθεῖ ἡ αὐξησις τοῦ ποσοῦ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἀρχικοῦ καὶ κατὰ 7,5% ἐτησίως (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Πόσον θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τῆς 1ης, 2ας, 3ης, 4ης πενταετίας, ἂν ἀνετοκίζετο κατ' ἔτος πρὸς 5% ;

Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VIII.

Ὅρισμός ἀριθμητικῆς προόδου (αὔξουσα, φθίνουσα πρόοδος, ἂν ἡ διαφορὰ ἢ ὁ λόγος αὐτῆς $\omega > 0$ ἢ < 0). Ὁ νιοστός ὅρος $t = \alpha + (n-1)\omega$ (α = πρῶτος, ω ἡ διαφορὰ). Ἡ πρόοδος ὀρίζεται, ἂν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ.

Ὅρισμός παρεμβολῆς n ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου μεταξὺ ἀριθμῶν α, β . Ἐχομεν $\omega_1 = (\beta - \alpha) : (n+1)$, ἂν ω_1 εἴναι ἡ διαφορὰ τῆς προόδου. Ἰδιότης τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ κ.τ.λ., εἶναι $\alpha + t = \beta + \lambda = \gamma + \kappa \dots$

* Ἀθροισμα Σ τῶν ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου $\Sigma = (\alpha + t) \cdot n : 2$ ἢ $\Sigma = [2\alpha + (n-1)\omega] \cdot n : 2$.

Ὅρισμός γεωμετρικῆς προόδου (ἀπολύτως αὔξουσα ἢ φθίνουσα, ἂν ὁ λόγος ω εἴναι $|\omega| > 1$ ἢ < 1).

Ὁ νιοστός ὅρος $t = \alpha \omega^{n-1}$, α ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος.

* Ἀν $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \tau$ εἴναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον ω , εἶναι $\beta^2 = \alpha\gamma, \beta\lambda = \gamma\kappa = \alpha\tau$.

Παρεμβολὴ n ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α, β . Ἡ σχηματιζομένη πρόοδος θὰ ἔχῃ λόγον $\omega_1 = \sqrt[n+1]{\beta : \alpha}$.

*Αθροισμα n ὄρων γεωμετρικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda, \kappa, \tau$, τὸ $\Sigma = (\alpha\omega^n - \alpha) : (\omega - 1) = (\tau\omega - \alpha) : (\omega - 1) = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^n}{1-\omega}$. *Αθροισμα Σ τῶν ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου (μέ ἄπειρον πλῆθος ὄρων) $\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}$.

Ὅρισμός ἀρμονικῆς προόδου (ἂν οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὄρων τῆς ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον).

Ὅρισμός λογαρίθμου ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10 ἢ τὸν ἀριθμὸν e ($e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$). Ὁ e εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὑπερβατικός (καθὼς καὶ ὁ $\pi = 3,141\dots$)

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. Πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει λογάριθμον θετικὸν μὲν, ἂν $A > 1$, ἀρνητικὸν δέ, ἂν $A < 1$ (ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει λογάριθμον πραγματικόν).

$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$, $\log(A : B) = \log A - \log B$, $\log(A^n) = n \log A$.

Χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου. Τροπὴ ἀρνητικοῦ εἰς ἓν μέρει ἀρνητικόν.

Αἱ 4 πράξεις μὲ ἀριθμοὺς ἓν μέρει ἀρνητικούς. Λογαριθμικοὶ πίνακες, χρήσις αὐτῶν. Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων. Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως συστήματος λογαρίθμων.

Ὅρισμός ἐκθετικῶν ἐξισώσεων (αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀγνώστους εἰς τοὺς ἐκθέτας δυνάμειν). Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

Συστήματα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων καὶ λύσεις αὐτῶν.

Ὅρισμός λογαριθμικῆς ἐξισώσεως Λύσεις λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ὅρισμός τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Ἀξία Σ κεφαλαίου α ἀνατοκίζομένου ἐπὶ n ἔτη $\Sigma = \alpha(1+\tau)^n$, τ = τόκος μῆς μονάδος εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα. Εὗρεσις α') τοῦ Σ , β') τοῦ α , γ') τοῦ n (περίπτωσης καθ' ἣν τὸ n δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅτε ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^n \cdot (1+\eta\tau : 360).$$

Περίπτωσης ἀνατοκισμοῦ καθ' ἑξαμηνίαν $\tau_1 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1$, περίπτωσης ἀνατοκισμοῦ κατὰ τριμηνίαν $\tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1$.

Ὅρισμός προβλημάτων ἴσων καταθέσεων. Τελικὴ ἀξία Σ ἴσων καταθέσεων α μετὰ n ἔτη $\Sigma = (1+\tau)\alpha[(1+\tau)^n - 1] : \tau$ (ἂν ἡ ἐκάστοτε κατάθεσις γίνεται εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς χρονικῆς μονάδος)

ἢ $\Sigma = \alpha [(1 + \tau)^v - 1] : \tau$ (ἂν ἡ κατάθεσις γίνεται εἰς τὸ τέλος τῆς χρονικῆς μονάδος).

Ὁρισμὸς χρεωλυσίας. Τύπος εὐρέσεως τοῦ χρεωλυσίου x εἶναι :

$$x [(1 + \tau)^v - 1] : \tau = \alpha (1 + \tau)^v$$

ἢ γενικώτερον $x[(1 + \tau)^{v-k} - 1] : \tau = \alpha(1 + \tau)^v$, ἂν ἡ πρώτη καταβολὴ χρεωλυσίου γίνεται k ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου α ποσοῦ διὰ v ἔτη ($v > k$) μὲ τ τόκον μιᾶς μονάδος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Α'. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ) ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 229. Ὡς γνωστόν, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἡ $\alpha = 0$ ἔχομεν $|\alpha| = \alpha$, ἐνῶ ἂν $\alpha < 0$, $|\alpha| = -\alpha$. Π.χ. $|15| = 15$, $|-6| = 6$, $|0| = 0$.

Διὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς (πραγματικῶν) ἀριθμῶν ἔχομεν τὰς ἑξῆς ιδιότητες :

1η. Ἐστω π.χ. ὁ -12 . Ἐχομεν $|-12| = 12 = |12|$. Ἐπίσης $|-7| = 7 = |7|$. Γενικῶς, ἂν α εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς, ἔχομεν $|\alpha| = |\alpha|$.

2αν. Ἐστω π.χ. ὁ 15 . Ἐχομεν $|15| = 15$, ἐνῶ $-|15| = -15$. Ἄλλ' εἶναι $-15 < 15 = |15|$, ἄρα $-|15| < |15|$, ἐνῶ $|0| = 0 = -|0|$. Ἐν γένει ἔχομεν λοιπὸν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

3η. Ἐστω π.χ. ἡ $|3| < |6|$. Παρατηροῦμεν ὅτι $-|6| = -6$, $-|6| = -6 < 3 < |6| = 6$. Ὁμοίως $|-5| = |5| = 5$ καὶ $-|-5| = -|5| = -5 < |5| = 5$, ἥτοι $-|-5| = -5 < 5$. Ἐν γένει, ἂν εἶναι $|\alpha| \leq |\beta|$, θὰ ἔχωμεν $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$. Διότι ἐκ τῆς $|\alpha| \leq |\beta|$ εὐρίσκομεν (πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐπὶ -1), $-|\alpha| \geq -|\beta|$, ἥτοι $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ (κατὰ τὴν 2αν ιδιότητα) καὶ $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \leq |\beta|$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἥτοι $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ αὕτη, θὰ ἔχωμεν $|\alpha| \leq |\beta|$.

Π.χ. εἶναι $-|-8| < -3 < |-8|$ ἢ $-8 < -3 < 8$ καὶ $|-3| < |-8|$ ἢ $3 < 8$.

1. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

α') Ἐστω, ὅτι ζητεῖται ἡ $|5+8|$. Ἐχομεν $|5+8| = |13| = 13 = 5+8 = |5|+|8|$. Ἐστω ἡ $|-15-6|$. Ἐχομεν $|-15-6| = |-21| = |21| = 21 = 15+6 = |-15|+|-6|$. Ἐστω ἡ $|-20+8|$. Ἐχομεν $|-20+8| = |-12| = |12| = 12 < 20+8 = |-20|+|8|$, ἥτοι $|-20+8| < |-20|+|8|$.

Ἄν α , β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν α , β κ.τ.λ., ἥτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\alpha + \beta$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καὶ β , ἂν εἶναι ὁμόσημοι.

Ἄν α , β εἶναι ἑτερόσημοι, ἔχομεν $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ $\alpha + \beta$, θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α , β τὴν μικροτέραν αὐτῶν κ.τ.λ. ὥστε :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἄθροίσματος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἦτοι γενικῶς ἔχομεν :

Ἄν οἱ α , β εἶναι πραγματικοί, ἔχομεν $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, τὴν μὲν ἰσότητα δι' ὁμοσήμους (ἢ 0), τὴν δὲ ἀνισότητα δι' ἑτεροσήμους προσθετέους.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|.$$

Τὴν αὐτὴν ιδιότητα δεικνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

ἔχομεν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

Ἐπίσης ἔχομεν $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$. Μὲ τὴν πρόσθεσιν τούτων κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $-|\alpha| - |\beta| \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$
ἢ $-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, ἐπομένως εἶναι καὶ

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| = |\alpha| + |\beta|, \text{ δηλαδή } |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

β') **Θὰ δεῖξωμεν ὅτι :** $|\alpha \pm \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. ἔχομεν :

$$|\alpha| = |\alpha + \beta + (-\beta)| = |(\alpha + \beta) + (-\beta)| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$

ἦτοι $|\alpha| \leq |\alpha + \beta| + |\beta|$, ἐπομένως $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$.

Ὁμοίως ἔχομεν $|\beta| = |\beta + \alpha + (-\alpha)| \leq |\alpha + \beta| + |-\alpha| = |\alpha + \beta| + |\alpha|$
καὶ $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha + \beta|$, ἄρα $-(|\alpha| - |\beta|) \leq |\alpha + \beta|$.

Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν $|\alpha + \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. Ἐπίσης ἔχομεν $|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \geq ||\alpha| - |-\beta|| = ||\alpha| - |\beta||$ (ἐνεκα τῆς προηγούμενης σχέσεως), ἦτοι $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$. Ὡστε γενικῶς ἔχομεν

$$|\alpha \pm \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||.$$

γ') Ἄν εἶναι $|x - \psi| < \alpha$, $|\psi - \omega| < \alpha$ θὰ δεῖξωμεν ὅτι $|x - \omega| < 2\alpha$.

Διότι μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν δοθεισῶν ἀνισοτήτων κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $|x - \psi| + |\psi - \omega| < 2\alpha$. Ἀλλ' εἶναι $|x - \omega| = |(x - \psi) + (\psi - \omega)| \leq |x - \psi| + |\psi - \omega| < 2\alpha$, ἦτοι $|x - \omega| < 2\alpha$.

Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ιδιότητα αὐτὴν, λέγομεν συνήθως, ὅτι ἀπαλείφομεν τὸν ψ ἐκ τῶν x , ψ , ω μεταξύ τῶν δοθεισῶν ἀνισοτήτων.

2. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έχουμε $|8 \cdot 7| = |56| = 8 \cdot 7 = |8| \cdot |7|$. Επίσης $|-5 \cdot 9| = |-45| = 45 = 5 \cdot 9 = |-5| \cdot |9|$.

Εν γένει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, διότι οίσοιδήποτε και α να είναι οι σχετικοί αριθμοί α , β (όμόσημοι ή ετερόσημοι), διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τῶν, θὰ εὐρώμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α , β κ.τ.λ., ἥτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

3. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐστω $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$, ($\beta \neq 0$).

Διότι, ἂν τεθῇ $\frac{\alpha}{\beta} = \omega$, ἔχομεν $\alpha = \beta \cdot \omega$, $|\alpha| = |\beta \cdot \omega| = |\beta| \cdot |\omega|$

Ἐπομένως $|\omega| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, ἥτοι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$.

4. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ἐστω, ὅτι ἔχομεν $|\alpha^{|v|}|$, ὅπου v ἀκέραιος ($|v| > 0$).

Ἐχομεν $\alpha^{|v|} = \alpha \cdot \alpha \dots \alpha$, $|\alpha^{|v|}| = |\alpha \cdot \alpha \dots \alpha| = |\alpha| |\alpha| \dots |\alpha| = |\alpha|^{|v|}$.

Ἄν ἔχομεν $|\alpha^{-|v|}|$, θὰ εἶναι $|\alpha^{-|v|}| = |\alpha|^{-|v|}$. Διότι εἶναι $\alpha^{-|v|} = \frac{1}{\alpha^{|v|}}$,

$$|\alpha^{-|v|}| = \left| \frac{1}{\alpha^{|v|}} \right| = \frac{1}{|\alpha^{|v|}|} = |\alpha|^{-|v|} \text{ ἥτοι } |\alpha^{-|v|}| = |\alpha|^{-|v|}$$

Β'. ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 230. α') Τυχαιοί αριθμοί π.χ. οἱ 3, -5, -6, 12, 7, $\frac{1}{3}$, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ἀριθμὸν τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4..., λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν **μῖαν ἀκολουθίαν** ἀριθμῶν. Συνήθως ἕκαστος τῶν διδομένων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐξῆς γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του κατὰ τινὰ ὠρισμένον τρόπον π.χ. οἱ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$

Διὰ τοῦτο ἀκολουθία ἀριθμῶν καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . ., ἕκαστος τῶν ὁποίων (ἀπὸ τοῦ β' καὶ ἐξῆς) γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του κατὰ τина ὠρισμένον τρόπον.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀκολουθίαν ἀριθμοὶ λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἀκολουθίας.

β') Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν λέγεται **πεπερασμένου πλήθους** ἢ **πεπερασμένη** μὲν, ἂν ἀποτελῇται ἀπὸ πεπερασμένον πλήθος ὄρων, **ἀπέραντος** δέ, ἂν εἰς πάντα ἀκέραιον (θετικὸν ἀριθμὸν) ἀντιστοιχῇ εἰς τοιοῦτος τῆς ἀκολουθίας, ὅτε αὕτη ἔχει ἄπειρον πλήθος ὄρων.

Παριστάνομεν συμβολικῶς τὴν ἀκολουθίαν μὲ $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ἢ μὲ (x_v) καὶ λέγομεν: ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν ὄρων x_v , ὅπου ὑπατίθεται ὅτι τὸ $v=1, 2, 3, \dots$ Π.χ. ἡ ἀκολουθία τῶν ὄρων

$$(x_v) = \left(\frac{1}{v}\right) \text{ εἶναι (ὅταν } v = 1, 2, 3, \dots) \text{ ἢ } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{\rho}, \dots \quad (1)$$

$$\text{'Η ἀκολουθία τῶν ὄρων } (x_v) = (2^v) \text{ εἶναι ἢ } 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^p, \dots \quad (2)$$

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_v) = \left(\frac{v+1}{v}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{1+1}{1}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{3}, \dots \text{ ἢ } \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{\rho+1}{\rho}, \dots \quad (3)$$

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_v) = \left(\frac{(-1)^{v-1}}{v}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{(-1)^{1-1}}{1}, \frac{(-1)^{2-1}}{2}, \frac{(-1)^{3-1}}{3}, \frac{(-1)^{4-1}}{4}, \frac{(-1)^{5-1}}{5}, \dots, \text{ ἥτοι οἱ} \\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad (4)$$

Ἐὰν εἶναι $(x_v) = (-v)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$-1, -2, -3, -4, \dots \quad (5)$$

Ἡ ἀκολουθία τῶν ὄρων $(x_v) = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \dots$$

$$\text{ἥτοι ἐκ τῶν} \quad 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots \quad (6)$$

γ') Ἀκολουθία τις λέγεται **περιωρισμένη**, ἂν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἐκάστου τῶν ὄρων τῆς εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση ἀριθμοῦ τινος $(A > 0)$,

ἤτοι ἂν εἶναι $|x_n| \leq A$ ἢ $-A \leq x_n \leq A$, ὅτε ὁ A καλεῖται **φραγμός** ἢ **φράγμα** τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας.

Ἐὰν ὑπάρχη ἀριθμός τις A_1 , τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν $A_1 \leq x_n$, ὁ A_1 καλεῖται **ἀριστερός** ἢ **πρὸς τὰ κάτω φραγμός** τῆς ἀκολουθίας (x_n), ἐνῶ ἂν ὑπάρχη ἀριθμός τις A_2 , τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $x_n \leq A_2$, ὁ A_2 καλεῖται **δεξιός** ἢ **πρὸς τὰ ἄνω φραγμός** τῆς ἀκολουθίας.

Π.χ. διὰ τὴν (1) ἔχομεν $\frac{1}{v} < 1$, ἤτοι ἡ 1 εἶναι φραγμός αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω· φραγμός ταύτης εἶναι καὶ πᾶς ἀριθμός $\kappa > 1$. Διὰ τὴν (2) ἔχομεν $2 \leq 2^n$ καὶ εἶναι αὕτη περιορισμένη πρὸς τὰ ἀριστερά. Διὰ τὴν (4) ἔχομεν $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \left| \frac{\pm 1}{n} \right| \leq 1$ καὶ εἶναι αὕτη περιορισμένη πρὸς τὰ δεξιὰ. Διὰ τὴν (5) ἔχομεν $-n \leq -1$, τὸ δὲ -1 εἶναι φραγμός ταύτης πρὸς τὰ ἄνω.

δ') Ἀκολουθία τις (x_n) λέγεται **μονοτόνως αὐξουσα** ἢ **φθίνουσα**, ἐὰν διὰ πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἔχωμεν $x_n \leq x_{n+1}$ ἢ $x_n \geq x_{n+1}$ ἀντιστοίχως. Οὕτως ἐκ τῶν ἄνωτέρω ἀκολουθιῶν ἡ μὲν (2) εἶναι μονοτόνως αὐξουσα, διότι εἶναι π.χ. $2 < 2^2$, ἢ $2^2 < 2^2 \cdot 2$ ἢ $2^n < 2^{n+1}$, ἡ δὲ (1) εἶναι μονοτόνως φθίνουσα, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Παρατήρησις. 1η. Ἀκολουθία τις (x_n), διὰ τὴν ὁποῖαν ἡ διαφορά ($x_{n+1} - x_n$) εἶναι σταθερὰ $\lambda \neq 0$, εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος, αὐξουσα μὲν, ἂν $\lambda > 0$, φθίνουσα δέ, ἂν εἶναι $\lambda < 0$. Π.χ. ἡ $5 + 3$, $5 + 3 \cdot 2, \dots$, $(5 + 3 \cdot n), \dots$ ἔχει $\lambda = x_{n+1} - x_n = 5 + 3(n+1) - (5 + 3n) = 3$.

2α. Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν θετικῶν (x_n), διὰ τὴν ὁποῖαν ἔχομεν πηλίκον $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ σταθερὸν $= \omega \neq 1$, εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος, αὐξουσα μὲν, ἂν $|\omega| > 1$, φθίνουσα δέ, ἂν $|\omega| < 1$. Π.χ. ἡ $\frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \dots$ εἶναι γεωμ. πρόοδος φθίνουσα ἔχουσα $\omega = \frac{6}{2^{n+1}} : \frac{6}{2^n} = \frac{1}{2}$.

2. ΠΟΤΕ ΜΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΕΙΝΕΙ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

§ 231. α') Ἐστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία $\left(\frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

Ἐάν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ, π.χ. 0,0000001 δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ὅρον τῆς ἀκολουθίας, ὥστε ἕκαστος τῶν ἐπομένων του (ἀπειρων εἰς πληθύν) νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος οἰουδήποτε δοθέντος ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 0,0000001 = ε, τότε λέγομεν ὅτι ἡ $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ τείνει εἰς τὸ 0 καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως $\left(\frac{1}{10^n}\right) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0$. Πράγματι ἕκαστος τῶν ὄρων μετὰ τὸν 0,0000001, οἱ 0,00000001, 0,000000001,... εἶναι μικρότερος τοῦ ε καὶ οὕτως ἔχομεν ὅτι

$$\left(\frac{1}{10^n}\right) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0.$$

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ (διὰ $n = 1, 2, 3, \dots$) τείνει εἰς τὸ μηδέν, διότι ἂν π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{900}$, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου τῶν ὄρων $\frac{1}{901}, -\frac{1}{902}, \dots$ εἶναι μικρότερα τοῦ $\frac{1}{900}$.

Ἐν γένει λέγομεν, ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν** (x_n) $\rightarrow 0$ ἢ **ἔχει ὄριον τὸ 0**. ἂν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, (ὅσονδήποτε μικροῦ) δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἄλλον $\eta > 0$ καὶ ἀκεραῖον τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_{\eta}| < \varepsilon$, $|x_{\eta+1}| < \varepsilon$, $|x_{\eta+2}| < \varepsilon$, ἥτοι $|x_n| < \varepsilon$ διὰ πᾶσαν ἀκεραῖαν τιμὴν τοῦ $n \geq \eta$.

$$\beta') \text{ Ἐστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία } (x_n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2},$$

$$\text{ἥτοι ἡ } \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots$$

Ἄν δοθῇ $\varepsilon > 0$ καὶ θέλωμεν νὰ εἶναι $|x_n| < \varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸ n , ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$ ἢ $(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ καὶ $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$.

Ὡστε διὰ τιμὰς ἀκεραίας τοῦ $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ θὰ ἔχωμεν $|x_n| < \varepsilon$ καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία τείνει εἰς τὸ 0 ἢ ἔχει ὄριον τὸ 0.

γ') Λέγομεν ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν** x_n **τείνει ἢ ἔχει ὄριον τὸ ἀπειρον** καὶ σημειώνομεν τοῦτο μὲ $(x_n) \rightarrow \infty$ ἢ $\text{op}(x_n) = \infty$, ἂν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ $M > 0$ (ὅσονδήποτε μεγάλου)

δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν ἄλλον ἀκέραιον $H_M > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ $n > H_M$ νὰ ἔχωμεν $x_n > M$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία 1, 2, 3, 4, ... τείνει εἰς τὸ ∞ . Διότι ἂν π.χ. $M=315\,687$, ἔχομεν $H=315\,688$ καὶ διὰ $n > 315\,688$ εἶναι οἱ 315\,688, 315\,689... $> 315\,687$. ἥτοι ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or}(x_n) = \infty$.

Λέγομεν ὅτι ἀκολουθία τις ἀριθμῶν (x_n) τείνει ἢ ὅτι ἔχει ὅριον ἀριθμὸν ὠρισμένον A , ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_n - A) \rightarrow 0$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $(x_n) = \frac{n+1}{n}$ (διὰ $n = 1, 2, 3, \dots$) τείνει εἰς τὴν 1.

Διότι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \rightarrow 0$. Πράγματι ἔχομεν $\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n}$ καὶ $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, ἄρα $\left(\frac{n+1}{n}\right) \rightarrow 1$.

Ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, \dots, 5\frac{1}{2^n}, \dots$ ἔχει ὅριον τὸ 5. Διότι ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2} - 5, 5\frac{1}{4} - 5, \dots, 5\frac{1}{2^n} - 5, \dots$, ἥτοι $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^n}, \dots$ ἔχει ὅριον τὸ 0.

Ὅμοίως ἡ ἀκολουθία $-11, -11\frac{1}{2}, -11\frac{2}{3}, -11\frac{3}{4}, \dots$ ἔχει ὅριον τὸ -12 . Διότι ἡ $-11 - (-12), -11\frac{1}{2} - (-12), -11\frac{2}{3} - (-12)$, ἥτοι $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ἔχει ὅριον τὸ 0.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

α') Ἐὰν ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν $(x_n) \rightarrow 0$, τότε ἡ $|x_n| \rightarrow 0$ καὶ ἀντιστρόφως. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, καθ' ὃν ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow 0$.

β') Ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow 0$ τότε $\left(\frac{1}{x_n}\right) \rightarrow \infty$.

Ἐστω ἀριθμὸς $M > 0$ (ὅσονδὴποτε μεγάλος). Λέγομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς $n_M > 0$ θετικὸς ἀκέραιος, ὥστε διὰ $n_M > 0$ νὰ εἶναι $\left|\frac{1}{x_n}\right| > M$. Πράγματι, ἀφοῦ $(x_n) \rightarrow 0$, ὑπάρχει ἀριθμὸς $n_M > 0$, ὥστε ἂν $n > n_M$, νὰ ἔχωμεν $|x_n| < \frac{1}{M}$, ἄρα εἶναι καὶ $M \cdot |x_n| < 1$, ἢ $M < \frac{1}{|x_n|}$.

Δηλαδή διὰ $n > \eta_M$ έχουμε $\left| \frac{1}{x_n} \right| > M$. Ούτως, ή μὲν ἀκολουθία

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right) \rightarrow 0, \text{ ή δὲ } (1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots) \rightarrow \infty.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι, ἂν $\text{op}(x_n) = \infty$, ή $\left(\frac{1}{x_n} \right) \rightarrow 0$.

Ἐὰν $(x_n) \rightarrow 0$, καὶ $(\lambda x_n) \rightarrow 0$, ἂν λ σταθερὰ ποσότης. Διότι, ἀφοῦ $|x_n| < \varepsilon$ διὰ $n > \eta$, θὰ εἶναι $|\lambda x_n| = |\lambda| \cdot |x_n| < |\lambda| \cdot \varepsilon$, τὸ δὲ $|\lambda| \cdot \varepsilon$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδήποτε μικρόν, ὅταν γίνεταί τὸ ε ὅσον θέλομεν μικρόν, ἥτοι $(\lambda x_n) \rightarrow 0$.

γ') Ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n) = 0$, $(x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x'_n) = 0$, θὰ εἶναι :

$$1\text{ον. } (x_n + x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n + x'_n) = 0.$$

$$2\text{ον. } (x_n - x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n - x'_n) = 0.$$

$$3\text{ον. } (x_n \cdot x'_n) \rightarrow 0 \text{ ἢ } \text{op}(x_n \cdot x'_n) = 0.$$

1ον. Διότι, ἂν θέσωμεν $x_n + x'_n = \psi_n$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς $|\psi_n| = |x_n + x'_n| \leq |x_n| + |x'_n|$. Ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς $\varepsilon > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, δυνάμεθα δὲ νὰ εὑρωμεν ἀνὰ ἓνα ἀριθμὸν $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $n > \eta_1$ καὶ $|x'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $n > \eta_2$, ἀφοῦ $(x_n) \rightarrow 0$ καὶ $(x'_n) \rightarrow 0$. Ἄν παρασταθῇ μὲ η ὁ μεγαλύτερος τῶν η_1, η_2 , θὰ ἔχωμεν διὰ $n > \eta$ τὸ $|\psi_n| \leq |x_n| + |x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ἥτοι $|\psi_n| \rightarrow 0$, δηλαδή $(x_n + x'_n) \rightarrow 0$.

2ον. Ἐπειδὴ εἶναι $|x_n - x'_n| = |x_n + (-x'_n)| \leq |x_n| + |-x'_n| = |x_n| + |x'_n|$, ἥτοι $|x_n - x'_n| \leq |x_n| + |x'_n| < \varepsilon$, ἔπεται ὅτι καὶ $(x_n - x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n - x'_n) = 0$.

3ον. Προφανῶς ἔχομεν $|x_n \cdot x'_n| = |x_n| \cdot |x'_n|$, καὶ ἂν $\varepsilon > 0$ εἶναι καὶ $\sqrt{\varepsilon} > 0$. Ἄν λοιπὸν δοθέντος τοῦ $\varepsilon > 0$ εὑρεθοῦν οἱ $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $n > \eta_1$, καὶ $|x'_n| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $n > \eta_2$, τὸ δὲ η παριστάνῃ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν η_1, η_2 , θὰ ἔχωμεν διὰ $n > \eta$ τὸ $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ καὶ $|x'_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Ἀρα καὶ $|x_n \cdot x'_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

Ἐπομένως εἶναι $|x_n \cdot x'_n| < \varepsilon$, ἥτοι ἔχομεν $(x_n \cdot x'_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n \cdot x'_n) = 0$.

Π.χ. ἂν ἔχουμεν τὰς ἀκολουθίας $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{v}, \dots$ καὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^v}, \dots$ ἐκάστη τῶν ὁποίων τείνει εἰς τὸ 0, τότε ἡ $\left(1 \pm \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2^3}\right), \dots, \left(\frac{1}{v} \pm \frac{1}{2^v}\right), \dots$ καθὼς καὶ ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 2^2}, \frac{1}{3 \cdot 2^3}, \dots, \frac{1}{v \cdot 2^v}, \dots$ τείνουν εἰς τὸ 0.

Ἀσκήσεις

642. Νὰ εὐρεθῇ εἰς κατώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας $1, 3, 9, 27, \dots, 3^v, \dots$ ὕπάρχει πεπερασμένος ἀριθμὸς, ὅστις νὰ εἶναι ἀνώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας ταύτης καὶ διατῇ;

643. Αἱ ἀκολουθίαι, αἱ ὁποῖαι τείνουν εἰς τὸ $+\infty$, ἔχουν ἀνωτέρους φραγμοὺς; Διατῇ; Ἡ ἀκολουθία $-1, +1, -1, +1, \dots, (-1)^v, \dots$ τείνει πρὸς ἀριθμὸν τινα;

644. Νὰ εὐρεθῇ:

α) Ὁ 10ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $5, 100, 1125, \dots, v^2 \cdot 5^v, \dots$

β) Ὁ 5ος » » » $\frac{3}{2}, \frac{9}{\sqrt{2}-1}, \frac{27}{\sqrt{3}+1}, \dots, \frac{3^v}{\sqrt{v}-(-1)^v}, \dots$

γ) Ὁ 7ος » » » $2, 1, \frac{3}{5}, \dots, \frac{v+3}{v^2+1}, \dots$

645. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{v^2}, \dots$. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς η , ὥστε ἂν $v > \eta$, νὰ ἔχουμεν $\frac{1}{v^2} < 0,35$. Ἐπίσης νὰ ἔχουμεν $\frac{1}{v^2} < 0,00001$.

646. Δείξατε ὅτι, ἂν $(x_v) \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{op}(x_v) = \alpha$, $(\lambda x_v) \rightarrow \lambda \alpha$ ἢ $\text{op}(\lambda x_v) = \lambda \alpha$, ἂν λ σταθερὰ ποσότης. Δείξατε ὅτι, ἂν $(x_v) \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{op}(x_v) = \alpha$, $(x'_v) \rightarrow \beta$ ἢ $\text{op}(x'_v) = \beta$.

1ον) Τότε $(x_v + x'_v) \rightarrow \alpha + \beta$ ἢ $\text{op}(x_v + x'_v) = \text{op}x_v + \text{op}x'_v$.

2ον.) Εἶναι $(x_v \cdot x'_v) \rightarrow \alpha \cdot \beta$ ἢ $\text{op}(x_v \cdot x'_v) = \alpha \cdot \beta = \text{op}x_v \cdot \text{op}x'_v$.

3ον) $\left(\frac{x_v}{x'_v}\right) \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\text{op}\left(\frac{x_v}{x'_v}\right) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{op}x_v}{\text{op}x'_v}$ ἂν $(\beta \neq 0)$.

647. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $6\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, \dots, 6 + \frac{v}{v+1}, \dots$. Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς $\eta > 0$ ὥστε, ἂν $v \geq \eta$, νὰ εἶναι $|6 + \frac{v}{v+1} - 7| < 0,0025$.

648. Γενικώτερον εὐρετε τὸν η , ὥστε νὰ εἶναι $|6 + \frac{v}{v+1} - 7| < \epsilon$, ὅπου $\epsilon > 0$ ὅσονδήποτε μικρὸς. Πι συμπεραίνετε περὶ τῆς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας ταύτης;

649. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι $x_v = 5 + \frac{1}{v}$ καὶ $\psi_\mu = 6 - \frac{1}{\mu^2}$. Δείξατε ὅτι αὗται τείνουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6, ὅταν $v \rightarrow \infty$ καὶ $\mu \rightarrow \infty$.

4. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ

§ 232. 'Ορισμοί. α') 'Εάν μεταβλητή ποσότης, ἔστω x , λαμβάνη διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_n) , λέγομεν, ὅτι ὄριον τῆς x εἶναι τὸ 0, ἂν $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n) = 0$, σημειῶνομεν δὲ τοῦτο μὲ $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$. Π.χ., ἂν ἡ x λαμβάνη τὰς τιμὰς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, ἐπειδὴ εἶναι $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, λέγομεν, ὅτι $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$.

β') Λέγομεν, ὅτι ὄριον μεταβλητῆς x εἶναι ἀριθμὸς τις ὠρισμένος α , ἂν ἡ x λαμβάνη διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_n) καὶ ἡ $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(x_n - \alpha) = 0$. Σημειῶνομεν δὲ τοῦτο μὲ $(x - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or}x = \alpha$.

Ἄν $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$, τότε καὶ $kx \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(kx) = 0$, ὅπου τὸ k εἶναι ἀριθμὸς τις ὠρισμένος (σταθερός). Διότι ὅταν ἡ $(x_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$ καὶ ἡ $(kx_n) \rightarrow 0$ ἢ $\text{op}(kx) = 0$.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ἂν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or}x = \alpha$, τὸ $kx \rightarrow k\alpha$ ἢ $\text{op}(kx) = k\alpha$, ὅπου k παριστάνει ὠρισμένον τινὰ (σταθερὸν) ἀριθμόν. Διότι ὅταν $x \rightarrow \alpha$, τὸ $(x - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $k(x - \alpha) \rightarrow 0$ ἢ $(kx - k\alpha) \rightarrow 0$, ἄρα $kx \rightarrow k\alpha$ ἢ $\text{op}(kx) = k\alpha$.

γ') Λέγομεν, ὅτι ὄριον μεταβλητῆς x εἶναι τὸ ἄπειρον (∞) , ἂν ἡ x λαμβάνη διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῶν ὀρων ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ σημειῶνομεν δὲ μὲ $x \rightarrow \infty$ ἢ $\text{or}x = \infty$. εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$, θὰ ἔχωμεν τὸ $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ἢ $\text{op} \frac{1}{x} = \infty$, καὶ ἀντιστρόφως, ἂν $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ἢ $\text{op} \frac{1}{x} = \infty$, θὰ ἔχωμεν καὶ $x \rightarrow 0$ ἢ $\text{or}x = 0$.

5. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΠΗΛΙΚΟΥ, ΔΥΝΑΜΕΩΣ, ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

§ 233. α') 'Εάν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or}x = \alpha$, $\psi \rightarrow \beta$ ἢ $\text{or}\psi = \beta$, τότε $(x + \psi) \rightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{op}(x + \psi) = \text{or}x + \text{or}\psi$

Διότι ἂν x_n καὶ ψ_n εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ , ἐπειδὴ αἱ $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $(\psi_n - \beta) \rightarrow 0$, καὶ ἡ $(x_n + \psi_n - \alpha - \beta) \rightarrow 0$, ἥτοι ἔχομεν $(x + \psi - \alpha - \beta) \rightarrow 0$, ἄρα $(x + \psi) \rightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{op}(x + \psi) = \text{or}\psi + \text{or}x$. Ἡ ιδιότης αὕτη ἰσχύει δι' ὅσαςδὴποτε

μεταβλητάς $x, \psi, \omega, \dots$ έχουσας όρια, άλλ' όταν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι πεπερασμένον. Διότι ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα μὲ ἀπειρον πλῆθος προσθετέων $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots$, ὅπου $x \rightarrow \infty$ ἢ $ορ x = \infty$, τὸ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ἢ $ορ \frac{1}{x} = 0$. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος προσθετέων θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ 0, ἂν ἴσχυεν ἡ ιδιότης, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο (τοῦ x αὐξανομένου διηλεκτῶς) δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{x}{x} = 1$.

β') Ἄν $x \rightarrow 0$ ἢ $ορ x = 0$, $\psi \rightarrow 0$ ἢ $ορ \psi = 0$, θὰ ἔχωμεν καὶ $(x\psi) \rightarrow 0$ ἢ $ορ(x\psi) = ορ x \cdot ορ \psi$. Διότι, ἀφοῦ $x \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$, ἔαν (x_n) καὶ (ψ_n) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ , θὰ τείνη ἐκάστη τούτων εἰς τὸ 0, ἄρα καὶ $(x_n \psi_n) \rightarrow 0$, ἥτοι $x\psi \rightarrow 0$ ἢ $ορ(x\psi) = ορ x \cdot ορ \psi$.

Ἄν ἔχωμεν $x \rightarrow \alpha, \psi \rightarrow \beta$, ὅπου α, β εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, θὰ εἶναι $(x\psi) \rightarrow \alpha\beta$ ἢ $ορ(x\psi) = ορ x \cdot ορ \psi = \alpha \cdot \beta$. Διότι, ἀφοῦ $x \rightarrow \alpha$ καὶ $\psi \rightarrow \beta$, ἂν (x_n) καὶ (ψ_n) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τῶν x, ψ , θὰ εἶναι $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ καὶ $(\psi_n - \beta) \rightarrow 0$. Ἄρα καὶ ἡ ἀκολουθία $[(x_n - \alpha)(\psi_n - \beta)] \rightarrow 0$ ἢ $[(x_n \psi_n) - (\alpha\psi_n) - (\beta x_n) + \alpha\beta] \rightarrow 0$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος ἔχομεν

$$ορ(x_n \psi_n) + ορ[-(\alpha\psi_n)] + ορ[-(\beta x_n)] + \alpha\beta = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ορ(\beta x_n) = \beta\alpha$ καὶ $ορ(\alpha\psi_n) = \alpha\beta$, ἔπεται ὅτι :

$$ορ(x_n \psi_n) = \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha\beta = \alpha\beta \text{ ἢ } ορ(x_n \psi_n) = \alpha\beta = ορ x \cdot ορ \psi.$$

Ἡ ιδιότης αὕτη περὶ τοῦ γινομένου μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

γ') Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων έχουσῶν ὅρια, ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρέτου (ὅταν τὸ ὅριον τούτου εἶναι $\neq 0$).

Ἐστω ὅτι $ορ x = \alpha, ορ \psi = \beta (\neq 0)$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $ορ \frac{x}{\psi} = \frac{ορ x}{ορ \psi} = \frac{\alpha}{\beta}$. Διότι ἂν x_n, ψ_n εἶναι ἀκολουθίαι τῶν x, ψ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι $ορ(x_n) = \alpha, ορ(\psi_n) = \beta$ καὶ $ορ(\psi_n - \beta) = 0$, ἄρα $|\psi_n - \beta| < \frac{1}{2} |\beta|$.

Ἀλλὰ ἔχομεν $|\psi_n| = |\beta + (\psi_n - \beta)| \geq |\beta| - |\psi_n - \beta|$ καὶ

$|\psi_v| > |\beta| - \frac{1}{2} |\beta| = \frac{1}{2} |\beta|$, ήτοι $|\psi_v| > \frac{1}{2} |\beta|$ και $|\frac{1}{\psi_v}| < \frac{2}{|\beta|}$. Ούτως, ο αριθμός $\frac{2}{|\beta|}$ είναι (δεξιός) φραγμός της ακολουθίας $\frac{1}{\psi_v}$.

Σχηματίζομεν την διαφοράν

$$\frac{x_v}{\psi_v} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta x_v - \alpha \psi_v}{\beta \psi_v} = \frac{\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)}{\beta \psi_v}$$

και παρατηρούμεν, ότι ο (άριθμητής) $\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)$ είναι ακολουθία τείνουσα εις τὸ μηδέν, διότι $\text{or}[\beta(x_v - \alpha) - \alpha(\psi_v - \beta)] = \text{bor}(x_v - \alpha) - \alpha \text{or}(\psi_v - \beta) = 0$, ἕκαστος δὲ ὅρος της πολλαπλασιάζεται

ἀντιστοίχως ἐπὶ $\frac{1}{\beta \psi_v} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\psi_v}$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ὠρισμένου ἀριθμοῦ, τοῦ $\frac{1}{\beta} \cdot \frac{2}{|\beta|}$. Ἄρα εἶναι $\text{or}\left(\frac{x_v}{\psi_v} - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$ και

$$\text{or} \frac{x_v}{\psi_v} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{or} x_v}{\text{or} \psi_v} \quad \text{ἢ} \quad \text{or} \frac{x}{\psi} = \frac{\text{or} x}{\text{or} \psi}.$$

Εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι ἂν $x \rightarrow \alpha$ ἢ $\text{or} x = \alpha$, τότε $(x^\mu) \rightarrow \alpha^\mu$ ἢ $\text{or}(x^\mu) = \alpha^\mu = (\text{or} x)^\mu$.

*Ἐστω α') ὁ μ ἀκέραιος καὶ θετικός. Ἔχομεν $x^\mu = x \cdot x \cdots x$. Ἄρα $\text{or}(x^\mu) = \text{or}(x \cdot x \cdots x) = \text{or} x \cdot \text{or} x \cdots \text{or} x = (\text{or} x)^\mu = \alpha'^\mu$.

β') Ἄν ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, ἔστω $\mu = -|v|$, ἔχομεν $x^{-|v|} = \frac{1}{x^{|v|}}$ και $\text{or}(x^{-|v|}) = \text{or}\left(\frac{1}{x^{|v|}}\right) = \frac{1}{\text{or}(x^{|v|})} = \frac{1}{(\text{or} x)^{|v|}} = (\text{or} x)^{-|v|} = (\text{or} x)^\mu = \alpha'^\mu$.

γ') Ἄν τὸ μ εἶναι κλασματικός ἀριθμός, π.χ. $\mu = \frac{\kappa}{\lambda}$, θέτομεν $\psi = x^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, ὅτε (ὕψουντες τὰ ἴσα εἰς τὴν λ δύναμιν) εὐρίσκομεν $\psi^\lambda = x^\kappa$ και $\text{or}(\psi^\lambda) = \text{or}(x^\kappa)$ ἢ $(\text{or} \psi)^\lambda = (\text{or} x)^\kappa$, ἔκ τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν $\text{or} \psi = (\text{or} x)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἢτοι $\text{or}\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right) = (\text{or} x)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = (\text{or} x)^\mu$. Κατὰ ταῦτα $\text{or} \sqrt[\lambda]{x} = \sqrt[\lambda]{\text{or} x}$. Ἄν λοιπὸν εἶναι $\text{or} x = \alpha$, τότε $\text{or} \sqrt[\lambda]{x} = \sqrt[\lambda]{\alpha}$.

6. ΠΩΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΜΕΝ ΑΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΟΣΟΤΗΣ ΕΧΗ ΟΡΙΟΝ

§ 234. Ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς τὸ πλῆθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν αὐξανόμεναι, μένουσι δὲ (ἀπὸ τίνος καὶ ἑξῆς) μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ, ἢ μεταβλητὴ ἔχει ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ἢτοι, ἂν $x_v < A$, ἢ ἀκολουθία $(x_v) \rightarrow \alpha \leq A$.

Ἐστω ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν μικρότεροι ἀριθμοῦ τινος A .

Ἄν ὁ A περιλαμβάνεται, π.χ. μεταξύ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 καὶ 6, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς δύνανται νὰ ὑπερβαίνουν τινὰς ἐκ τῶν 0, 1, 2, 3, 4, 5, ἀλλὰ θὰ μένουν μικρότεροι τοῦ 6, ἐπειδὴ αὗται μένουν μικρότεροι τοῦ $A < 6$.

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς, εἶναι ὁ 5. Σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 5,1. 5,2. 5,3. 5,4. 5,5. 5,6. 5,7. 5,8. 5,9. 6.

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 5, θὰ ὑπερβαίνουν ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς ἀριθμοὺς τινὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἔστω καὶ τὸν 5,7, ἀλλὰ ὅτι θὰ εἶναι μικρότεροι π.χ. τοῦ 5,8.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 5,7. 5,71. 5,72. 5,73. 5,74. 5,75. 5,76. 5,77. 5,78. 5,79. 5,8.

Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς μεγαλύτεραι τοῦ 5,7, θὰ ὑπερβαίνουν αὗται ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς τινὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων ἀριθμῶν, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸ 5,8 (ὡς εἶδομεν).

Ἐστω ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ ὁ 5,73, καὶ ὅτι αὗται θὰ μένουν μικρότεροι τοῦ 5,74.

Ἐξακολουθοῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ θὰ ἔχωμεν π.χ. ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὸν ἀριθμὸν 5,738426, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸν 5,738427, ὅστις διαφέρει τοῦ 5,738426 κατὰ ἓν ἑκατομμυριοστόν. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὁμοίως ὅσον θέλομεν, θὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς περιέχονται μεταξύ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοί.

Ἄν τὸ μικρότερον τῶν ἀριθμῶν τούτων παραστήσωμεν μὲ α , αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς) διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸν α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὅσον θέλομεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ α . Ἐπομένως εἶναι ὅριον τοῦ $x = \alpha$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ A ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ A .

Τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ συμβαίνει, ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ τινος

και ἐξῆς διαφέρουν ἀπολύτως τοῦ Α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν, ὥστε θὰ ἔχωμεν ἐν γένει, ὅτι ὄριον τοῦ $x \leq A$.

Ὅμοιως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἂν ἀντὶ τῶν ἀκεραίων 5 καὶ 6 ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων π.χ. τῶν ρ καὶ $\rho+1$ (ἐνῶ ὁ ρ δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ 0).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς πλῆθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ μένουν (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς) μεγαλύτεραι δοθέντος ἀριθμοῦ Β, ἥτοι ἂν $x_n \geq \beta$, τότε ἡ ἀκολουθία $(x_n) \rightarrow \beta \geq B$.

Διότι, ἂν π.χ. αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμεναι καὶ εἶναι πάντοτε μεγαλύτεραι τοῦ Β (ἀπὸ τινος καὶ ἐξῆς), τότε αἱ τιμαὶ τοῦ $-x$ θὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $-B$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\text{or}(-x) \leq -B$ καὶ $\text{or}x \geq B$.

Ἀσκήσεις

650. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἐξῆς μεταβλητῶν ποσοτήτων :

$$\alpha') 1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 1. \quad \beta') 1 + \frac{7}{x^2}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 2,$$

$$\gamma') 3x^3 + 6x^2, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \delta') \frac{x^2+1}{x+3}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow -2.$$

651. Ὅμοιως τῶν ἐξῆς :

$$\alpha') \frac{(x-k)^2 - 2kx^3}{x(x+k)}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \beta') \frac{5}{3x^2 + 5x}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

$$\gamma') \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty. \quad \delta') -\alpha^2 x^5 + \beta x + \gamma, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

$$\epsilon') \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow 0. \quad \sigma\tau') \frac{5x^2 - 5x}{x}, \quad \text{ἂν } x \rightarrow \infty.$$

652. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον τοῦ $\frac{1}{x-5}$, ἂν $x \rightarrow 5$ μὲ τιμὰς $\alpha') x < 5$, $\beta') x > 5$

653. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον τῆς μεταβλητῆς $3x^2 - 5$, ἂν $x \rightarrow 3$, τῆς $\frac{2}{\psi^2} + 4\psi$, ἂν $\psi \rightarrow 2$ καὶ τῆς $2\omega^2 - 4\omega - 5$, ἂν $\omega \rightarrow 0$. Ἐκ τῶν εὑρεθέντων ὁρίων νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον $\left(3x^2 - 5 + \frac{2}{\psi^2} + 4\psi + 2\omega^2 - 4\omega - 5\right)$.

654. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὄριον $\left(\frac{2}{x} - \frac{5}{\psi^2} + 4\omega^2\right)$, ἂν $x \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 2$ καὶ $\omega \rightarrow 3$

655. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς παραστάσεως $\frac{3x^2 - 5\omega^2 + 4\psi}{2x^2 - 5}$, ἂν $x \rightarrow -5$, $\omega \rightarrow 0$

καὶ $\psi \rightarrow -3$.

656. "Αν $x \rightarrow 3$, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὄριον τοῦ

$$\alpha') \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3}, \quad \beta') \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 4x + 3},$$

7. ΠΕΡΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 235. Ὁρισμοί. "Αν α καὶ β παριστάνουν δύο πραγματικούς ἀριθμούς (ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha < \beta$), καλοῦμεν κλειστὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β , τὸ σύνολον τῶν (πραγματικῶν) ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν α καὶ β , εἰς τοὺς ὁποίους περιλαμβάνονται καὶ οἱ α , β καὶ σημειώνομεν μὲ $\alpha \cdots \beta$ ἢ (α, β) . "Όταν μεταβλητὴ τις x λαμβάνη πάσας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος τούτου, σημειώνομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς: $\alpha \leq x \leq \beta$.

"Αν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x τὰς ἀνηκούσας εἰς ἓν διάστημα παριστάνωμεν μὲ σημεῖα μιᾶς εὐθείας (τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν x), τὸ κλειστὸν διάστημα $\alpha \leq x \leq \beta$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος AB , ὅπου τὸ A παριστάνει τὸν α , τὸ B τὸν β , ἀνήκουν δὲ εἰς τὸ AB καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **περιοχὴν τῆς τιμῆς x_1** τοῦ σημείου $M_1(x_1)$ (ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν τιμὴν $x = x_1$) μὲ μῆκος 2ϵ , τὸ διάστημα $x_1 - \epsilon < x_1 < x_1 + \epsilon$.

Συνάρτησις τις $\psi = \varphi(x)$ λέγεται ὠρισμένη μὲν $\alpha')$ διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x , π.χ. τὴν $x=2$, ἂν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ὠρισμένη διὰ $x=2$, δηλαδή ἂν εἶναι ὠρισμένη ἡ τιμὴ $\varphi(2)$, $\beta')$ εἰς τὴν περιοχὴν δὲ τινὰ τοῦ x , ἂν εἶναι ὠρισμένη δι' ἐκάστην τιμὴν τῆς περιοχῆς ταύτης.

"Εστω συνάρτησις τις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x , ἡ $\psi = \varphi(x)$ ὠρισμένη εἰς τινὰ περιοχὴν τῆς τιμῆς $x = x_0$. "Αν $x_0 + (x_v)$ παριστάνη ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τῆς περιοχῆς τοῦ x_0 διαφόρων τοῦ x_0 καὶ ἡ $[x_0 + (x_v)] \rightarrow x_0$, αἱ δὲ τιμαὶ $\varphi[x_0 + (x_v)]$ τείνουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὄριον, π.χ. τὸ λ , οἷαδῆποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκολουθία (x_v) , τότε λέγομεν ὅτι $\varphi(x) \rightarrow \lambda$ ἢ $\text{ορ}\varphi(x) = \lambda$ ὅταν $x \rightarrow x_0$ ἢ $\text{ορ}x = x_0$.

"Εστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi = x^2$. "Αν ὑποθέσωμεν ὅτι $x=3$, ἔχομεν $\varphi(3) = 3^2$.

"Αν θέσωμεν $x = 3 + (\epsilon_v)$, ὅπου (ϵ_v) παριστάνει μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τείνουσαν εἰς τὸ 0, ἥτοι $\text{ορ}(\epsilon_v) = 0$, θὰ ἔχωμεν $\varphi[3 + (\epsilon_v)] = [3 + (\epsilon_v)]^2$.

Όταν $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon_n) \rightarrow 0$ ή $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{op}(\epsilon_n) = 0$, τότε $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [3 + (\epsilon_n)] \rightarrow 3$, ήτοι $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [3 + (\epsilon_n)] = 3$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [3 + (\epsilon_n)]^2 \rightarrow 3^2$, ήτοι $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [3 + (\epsilon_n)]^2 = 3^2$. Έπομένως έχουμε, ότι $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi[3 + (\epsilon_n)] = [3 + (\epsilon_n)]^2$ τείνει εις τὸ 3^2 , δηλαδή $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi[3 + (\epsilon_n)] = \phi(3) = 3^2$.

Επειδή συμβαίνει τοῦτο διὰ τὴν συνάρτησιν $\phi(x) = x^2$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $x=3$, λέγομεν ὅτι $\phi(x) = x^2$ εἶναι **συνεχῆς**, ὅταν $x=3$. Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ $\phi(x) = x^2$ εἶναι συνεχῆς καὶ δι' οἰανδήποτε ἄλλην τιμὴν τοῦ x .

Ἐν γένει **συνεχῆς** λέγεται συνάρτησις τις $\psi = \phi(x)$ διὰ τινὰ τιμὴν τῆς $x = x_0$, ἂν εἰναι ὠρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς x_0 καὶ ἂν δι' ἐκάστην ἀκολουθίαν (x_n) τείνουσαν πρὸς τὴν τιμὴν x_0 , ὅταν $n \rightarrow \infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\phi(x_n)$ τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\phi(x_0)$. Τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Λέγομεν ὅτι ἡ $\psi = \phi(x)$ εἶναι συνεχῆς διὰ $x=x_0$, ἂν δοθέντος οἰουδήποτε ἀριθμοῦ $\epsilon > 0$ (ὅσονδήποτε μικροῦ) ἔχωμεν ὅτι:

$$\text{op}[\phi(x_0 + \epsilon) - \phi(x_0)] = 0 \text{ ὅταν } \text{op} \epsilon = 0, \text{ ἢ } \begin{cases} \text{op} \phi(x_0 + \epsilon) = \phi(x_0) \\ \text{op} \epsilon = 0. \end{cases}$$

Ἐστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi = 3x^2$. Θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἂν αὕτη εἶναι συνεχῆς διὰ $x=1$. Ἐχομεν $\phi(1) = 3 \cdot 1^2$. Θέτομεν $x = 1 + \epsilon$, ὅτε $\phi(1 + \epsilon) = 3(1 + \epsilon)^2$ καὶ $\phi(1 + \epsilon) - \phi(1) = 3(1 + \epsilon)^2 - 3 \cdot 1^2 = 3(1^2 + 2 \cdot \epsilon + \epsilon^2) - 3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 2 \cdot \epsilon + 3 \cdot \epsilon^2$.

Όταν $\epsilon \rightarrow 0$ ἢ $\text{op} \epsilon = 0$, τότε τὸ $\phi(1 + \epsilon) - \phi(1)$ δηλαδή τὸ ἴσον αὐτοῦ $3 \cdot 2 \cdot \epsilon + 3 \cdot \epsilon^2$ ἔχει ὄριον τὸ 0 (κατὰ τὸν κανόνα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος), ἥτοι $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\phi(1 + \epsilon) - \phi(1)] = 0$ ἢ $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(1 + \epsilon) = \phi(1)$, ὅταν $\text{op} \epsilon = 0$.

Ἐπομένως ἡ $\phi(x) = 3x^2$ εἶναι συνεχῆς διὰ $x=1$.

Ἀσυνεχῆς λέγεται συνάρτησις τις $\psi = \phi(x)$ διὰ $x=x_0$ ὅταν, καὶ ἂν εἰναι ὠρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς τιμῆς x_0 , δὲν εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

1ον. Όταν ἡ $\phi(x)$ ἔχη σταθερὰν τιμὴν, π.χ. 5, εἶναι συνεχῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

2ον. Ἄν δύο συναρτήσεις $\phi_1(x)$ καὶ $\phi_2(x)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x , εἶναι συνεχῆς καὶ ἡ $\phi_1(x) \pm \phi_2(x)$ διὰ τὴν αὐτὴν τι-

μήν, καθώς και ή $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$ και ή $\varphi_1(x) : \varphi_2(x)$, όταν ή $\varphi_2(x)$ είναι διάφορος του 0 διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x .

Συνάρτησις τῆς μορφῆς $\psi = x, x^2, x^3, \dots$ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

Πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς ax^μ , ὅπου τὸ a εἶναι σταθερὰ ποσότης, τὸ δὲ μ ἀκέραιος καὶ θετικός, εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Πᾶσα δὲ συνάρτησις ἄθροισμα ὄρων τῆς μορφῆς ax^μ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Π.χ. ή $3x^2 - 5x + 6$.

Πᾶσα ρητὴ συνάρτησις, ἥτοι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x , εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν ὁ παρονομαστής εἶναι διάφορος τοῦ 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

Α'. ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ *

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 236. Ἐστω τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ x ἡ $\psi = \sigma(x)$ συνεχὴς εἰς τὸ ὠρισμένον διάστημα (α, β) καὶ ἥτις διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x , τὴν x_0 , περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ λαμβάνει τὴν ὠρισμένην τιμὴν ψ_0 τοῦ ψ , ἥτοι εἶναι $\psi_0 = \sigma(x_0)$. Ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν x_0 δώσωμεν αὐξησίν τινα ϵ , ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ θὰ λάβῃ αὐξησίν τινα η , ἥτοι θὰ εἶναι $\psi_0 + \eta = \sigma(x_0 + \epsilon)$ καὶ ἐπομένως:

$$\eta = \sigma(x_0 + \epsilon) - \sigma(x_0).$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὑπετέθη συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α, β) ἔπεται, ὅτι δι' ὅρ $\epsilon = 0$ θὰ εἶναι καὶ ὀρη $= 0$.

Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\eta}{\epsilon} = \frac{\sigma(x_0 + \epsilon) - \sigma(x_0)}{\epsilon}$ ἔχῃ ὄριον ὠρισμένον, ὅταν ἡ μὲν τιμὴ $x = x_0$ μένῃ σταθερά, ἡ δὲ αὐξησις ϵ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ὄριον τοῦτο καλεῖται **παράγωγος** τῆς συναρτήσεως $\psi = \sigma(x)$ διὰ $x = x_0$ καὶ σημειοῦται οὕτω: ψ' ἢ $\sigma'(x)$. Ἦτοι:

Παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $\psi = \sigma(x)$ διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ x καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὐξησις αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ἔχῃ παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x , τότε σημειοῦμεν αὐτὴν οὕτω: ψ' ἢ $\sigma'(x)$.

§ 237. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς x , διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον αὐτῆς, δίδομεν πρῶτον εἰς τὸ x μίαν αὐξησιν, τὴν ὁποίαν καὶ παριστῶμεν δὲ τοῦ

*Τὰ ἀπὸ τῆς § 236 καὶ ἐξῆς ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ ὑπὸ τοῦ κ. Λεων. Ἀδαμopoulos ὑποβληθέντος βιβλίου τῆς Ἀλγέβρας.

συμβόλου Δx και υπολογίζομεν τὴν ἀντίστοιχον αὐξησιν τῆς συναρτήσεως, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ $\Delta\psi$ καὶ κατόπιν εὐρίσκομεν τὸ ὄριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ὅταν $\text{ορ}\Delta x=0$. Διὰ νὰ ἔχωμεν παράγωγον πρέπει δι' $\text{ορ}\Delta x=0$ νὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\Delta\psi=0$. διότι ἐὰν $\text{ορ}\Delta\psi=\alpha\neq 0$, τότε $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\infty$ ἤτοι :

Ἵνα μία συνάρτησις ἔχῃ παράγωγον, πρέπει νὰ εἶναι συνεχής, χωρὶς ὅμως καὶ ὁ ὅρος αὐτὸς νὰ εἶναι ἐπαρκής.

Διότι ἐκ τοῦ $\text{ορ}\Delta x=0$ καὶ $\text{ορ}\Delta\psi=0$ δὲν ἔπεται, ὅτι ἀναγκαίως ὑπάρχει καὶ το $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=x$. Τότε $\Delta\psi=x+\Delta x-x=\Delta x$, ἐπομένως $\psi'=\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\text{ορ}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$. Ὡστε :

Ἡ παράγωγος τοῦ x εἶναι ἡ μονάς.

2ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=5x^2$. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὐξησιν Δx , θὰ ἔχωμεν

$$\Delta\psi=5(x+\Delta x)^2-5x^2=5x^2+10x\Delta x+5(\Delta x)^2-5x^2=10x\Delta x+5(\Delta x)^2$$

$$\text{καὶ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{10x\cdot\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}=10x+5\Delta x.$$

Ὅταν δὲ $\text{ορ}\Delta x=0$, τότε $\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=10x$ ἢ $\psi'=10x$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha x^5$ εἶναι $\psi'=5\alpha x^4$ καὶ γενικῶς τῆς $\psi=\alpha x^\mu$ (μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος) ἡ παράγωγος εἶναι $\psi'=\alpha\cdot\mu\cdot x^{\mu-1}$.

3ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{x}$. Θὰ εἶναι $\psi+\Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}$,

$$\text{καὶ } \Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x} \text{ καὶ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \text{ ἢ (§ 85)}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{[\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \text{ ἢ}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \text{ καὶ ἐπομένως διὰ } \text{ορ}\Delta x=0,$$

$$\text{θὰ εἶναι } \text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ Ὡστε: } (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

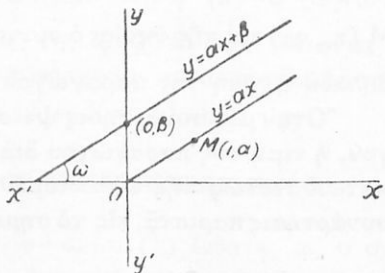
4ον. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι σταθερά. Τότε ἡ αὐξησις

$\Delta\psi$ είναι μηδέν, συνεπώς $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=0$ και επομένως ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \psi' = 0$. *Ητοι:

Ἡ παράγωγος σταθερᾶς είναι μηδέν.

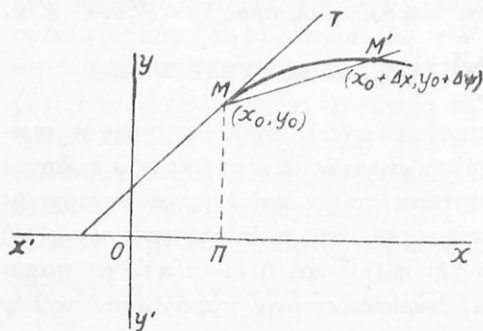
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

§ 238. *Εστω ἡ συνάρτησις $\psi = ax + \beta$. Γνωρίζομεν, ὅτι αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς διερχομένην εὐθεῖαν $\psi = ax$, ἣτις ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου $O(0,0)$ καὶ τοῦ σημείου $M(1, \alpha)$ (σχ. 21). *Εὰν κληθῇ ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος Ox , θὰ ἔχωμεν $\epsilon\phi\omega = \alpha$. Τὸ α λέγεται καὶ **συντελεστής κατευθύνσεως** τῆς εὐθείας $\psi = ax + \beta$.



Σχ. 21.

*Εστω ἤδη τυχοῦσα συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$. *Εστω δὲ MM' καμπύλη εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ (σχ. 22).



Σχ. 22.

Εἰς τὴν τιμὴν $x = x_0$, τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ψ_0 , τῆς συναρτήσεως, ὁπότε τὸ σημεῖον $M(x_0, \psi_0)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης. *Εὰν εἰς τὸ x δώσωμεν μίαν αὐξησιν Δx , ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ μίαν αὐξησιν $\Delta\psi$ καὶ τὸ σημεῖον $M'(x_0 + \Delta x, \psi_0 + \Delta\psi)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς κα-

μπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων M καὶ M' θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi = ax + \beta$ ἐπαληθευομένη ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων M καὶ M' , ὥστε θὰ ἔχωμεν $\psi_0 + \Delta\psi = a(x_0 + \Delta x) + \beta$ καὶ $\psi_0 = ax_0 + \beta$. ἀφαιροῦντες δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ

μέλη ἔχομεν $\Delta\psi = \alpha \Delta x$ ἢ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \alpha$, ἥτοι ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς εὐθείας MM' εἶναι ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$. Ἀλλὰ ὅταν $\text{op}\Delta x = 0$, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχῆς, θὰ εἶναι καὶ $\text{op}\Delta\psi = 0$. Καὶ ἐπειδὴ ὑπέ-
 τέθη, ὅτι ἔχει παράγωγον, θὰ εἶναι $\text{op}\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \psi'$, τὸ δὲ σημεῖον M'
 τείνει νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ M , ὁπότε ἡ χορδὴ MM' θὰ ἔχῃ ὡς ὁ-
 ρικὴν θέσιν τὴν ἐφαπτομένην MT τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον
 $M(x_0, \psi_0)$ καὶ τῆς ὁποίας ὁ συντελεστής κατευθύνσεως εἶναι τὸ $\text{op}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$,
 δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ $x=x_0$. Ἄρα :

**Ὅταν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ διὰ τιμὴν $x = x_0$ ἔχῃ παράγω-
 γον, ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x = x_0$ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν
 κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ἡ
 συνάρτησις παριστᾷ, εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ἔχον τετμημένην x_0 .**

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστής κατευθύνσεως μιᾶς εὐθείας ἰσοῦται καὶ μὲ
 τὴν εφω, ἔνθα ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ
 ἄξονος $x'x$, ἔπεται ὅτι :

**Ἐὰν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως διὰ τινα τιμὴν τοῦ
 $x = x_0$ εἶναι μηδέν· ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον,
 τὸ ἔχον τετμημένην x_0 , εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$.**

3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΑΛΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 239. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \phi(\omega)$, ὅπου ψ συνεχῆς συν-
 ἄρτησις τῆς ω καὶ $\omega = \sigma(x)$ ἐπίσης συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x , ὁπότε
 καὶ ψ θὰ εἶναι συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x καὶ λέγεται συνάρτησις
 συναρτήσεως. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \phi(\omega)$
 ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς ω τὴν $\phi'(\omega)$ καὶ ἡ $\omega = \sigma(x)$ ἔχει πα-
 ράγωγον ὡς πρὸς x τὴν $\sigma'(x)$, εὐρίσκομεν τὴν παράγωγον τοῦ ψ
 ὡς πρὸς x ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν εἰς τὸ x δοθῇ ἡ αὐξησις Δx , τότε ἡ $\psi'(x)$ θὰ εἶναι τὸ ὁ-
 ριον τοῦ λόγου $\frac{\phi(\omega + \Delta\omega) - \phi(\omega)}{\Delta x}$, ὅταν $\text{op}\Delta x = 0$.

Ἀλλὰ πρὸς τὴν αὐξησιν Δx ἀντιστοιχεῖ αὐξησις $\Delta\omega$ τῆς ω ,
 ἥτοι εἶναι $\Delta\omega = \sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)$ καὶ ἐπομένως

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega} &= \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x} \cdot \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta\omega} = \\ &= \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega} \cdot \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x},\end{aligned}$$

ἀλλὰ ὅταν $\text{or}\Delta x=0$ εἶναι καὶ $\text{or}\Delta\omega=0$ καὶ $\text{or}\Delta\psi=0$, καθότι αἱ συναρτήσεις ψ , ω ὑπετέθησαν συνεχεῖς καὶ ὅτι ἔχουσι παράγωγον.

Ἀλλὰ εἶναι $\text{or} \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega} = \varphi'(\omega)$, $\text{or} \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x} = \sigma'(x) = \omega'_x$ καὶ $\text{or} \frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x} = \psi'(x)$ ὅθεν $\psi'(x) = \varphi'(\omega) \cdot \omega'_x$.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi = (3x^2 - 5)^6$. Θέτοντες $3x^2 - 5 = \omega$ θὰ ἔχωμεν $\psi = \omega^6$, ἥτοι συνάρτησιν συναρτήσεως ὅποτε $\psi' = 6\omega^5 \cdot \omega'_x$ ἢ $\psi' = 6(3x^2 - 5)^5 \cdot 6x$ ἢ $\psi' = 36x(3x^2 - 5)^5$.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 240. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi + \omega + \upsilon$ (1) ἔνθα φ , ω , υ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσιν ἀντιστοιχῶς παραγώγους τὰς φ' , ω' , υ' , καὶ τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν παράγωγον ψ' . Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἀπὸ τινος τιμῆς αὐτῆς μίαν αὐξησιν Δx , αἱ συναρτήσεις φ , ω , υ θὰ λάβωσιν ἀντιστοιχῶς αὐξήσεις $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta\upsilon$. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις φ , ω , υ ὑπετέθησαν συνεχεῖς ἔχουσαι παράγωγον, θὰ εἶναι δι' $\text{or}\Delta x=0$ καὶ $\text{or}\Delta\varphi=0$, $\text{or}\Delta\omega=0$, $\text{or}\Delta\upsilon=0$. Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν $\Delta\psi$ τὴν ἀντίστοιχον αὐξησιν τῆς συναρτήσεως ψ , θὰ ἔχωμεν $\psi + \Delta\psi = (\varphi + \Delta\varphi) + (\omega + \Delta\omega) + (\upsilon + \Delta\upsilon)$ (2). Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἀπὸ τὴν (2), θὰ ἔχωμεν $\Delta\psi = \Delta\varphi + \Delta\omega + \Delta\upsilon$ (3). Ἐκ ταύτης ἔπεται, ὅτι $\text{or}\Delta\psi = \text{or}\Delta\varphi + \text{or}\Delta\omega + \text{or}\Delta\upsilon$ (4). Καὶ ἐπειδὴ δι' $\text{or}\Delta x=0$ εἶναι καὶ $\text{or}\Delta\varphi=0$, $\text{or}\Delta\omega=0$, $\text{or}\Delta\upsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{or}\Delta\psi=0$ ἥτοι ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi + \omega + \upsilon$ εἶναι καὶ αὕτῃ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x . Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) διὰ Δx ἔχομεν $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ καὶ δι' $\text{or}\Delta x=0$ εἶναι :

$$\text{or} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \text{or} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \text{or} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \text{or} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} \quad \text{ἢ} \quad \psi' = \varphi' + \omega' + \upsilon'. \quad \text{Ὡστε :}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν συναρτήσεων τοῦ x , ἔχουσῶν παραγώγους, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 241. Έστω ή συνάρτησις $\psi = \omega \cdot \phi$, ένθα ω και ϕ συνεχείς συναρτήσεις του x έχουσαι παράγωγον. Έργαζόμεναι ώς προηγουμένως έχομεν $\psi + \Delta\psi = (\phi + \Delta\phi)(\omega + \Delta\omega)$ και $\psi = \phi\omega$, συνεπώς

$$\Delta\psi = \omega\Delta\phi + \phi\Delta\omega + \Delta\phi\Delta\omega, \quad (1)$$

διαιροῦντες δέ άμφοτέρα τά μέλη τής (1) διά Δx έχομεν:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \omega \frac{\Delta\phi}{\Delta x} + \phi \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \cdot \Delta\omega \quad \text{και έπομένως}$$

$$\text{or } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \omega \cdot \text{or } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} + \phi \cdot \text{or } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \text{or } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \cdot \text{or } \Delta\omega. \quad (2)$$

Έάν δέ $\text{or } \Delta x = 0$, έξ ύποθέσεως θά είναι $\text{or } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \phi'$, $\text{or } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} = \omega'$

και $\text{or } \Delta\omega = 0$ και ή (2) γίνεται $\psi' = \omega\phi' + \omega'\phi$. Έάν είναι $\psi = \omega \cdot \phi \cdot \nu$ και θεωρήσωμεν τώ $\omega \cdot \phi$ ώς ένα παράγοντα, θά έχωμεν κατά τώ προηγούμενον $\psi = (\omega\phi)\nu' + \nu(\omega\phi)'$ ή $\psi' = \omega\phi\nu' + \omega\phi'\nu + \nu\phi\omega'$.
 Ώστε :

Ή παράγωγος του γινομένου πολλών συναρτήσεων τής αὐτῆς μεταβλητῆς x , έχουσών παραγώγους, ίσοῦται μέ τώ άθροισμα τών γινομένων τής παραγώγου έκάστης τούτων επί τώ γινόμενον τών άλλων συναρτήσεων.

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΕΠΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΝ ΤΟΥ Χ

§ 242. Έστω ή συνάρτησις $\psi = \alpha\omega$ (α σταθερά). Θά έχωμεν $\psi' = \alpha\omega' + \alpha'$, αλλά $\alpha' = 0$ άρα $\psi' = \alpha\omega'$. Ήτοι :

Ή παράγωγος του γινομένου σταθεράς επί συνάρτησιν του x ίσοῦται μέ τώ γινόμενον τής σταθεράς επί την παράγωγον τής συναρτήσεως.

Έστω $\psi = \omega^n$, ένθα ω συνεχῆς συνάρτησις του x και n άκέραιος και θετικός. Έπειδή $\psi = \omega \cdot \omega \cdot \omega \dots \omega$, θά είναι κατά τά προηγούμενα $\psi' = \omega' \cdot \omega^{n-1} + \omega' \cdot \omega^{n-1} + \dots + \omega' \cdot \omega^{n-1}$ (n προσθετέοι) ή $\psi' = n\omega^{n-1} \cdot \omega'$.
 Ήτοι :

Ή παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως του x ίσοῦται μέ τόν έκθέτην τής δυνάμεως επί την κατά μονάδα μικροτέραν δύναμιν τής συναρτήσεως του x και επί την παράγωγον τής βάσεως.

Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι ὁ x , τότε ἡ σχέσις ἀπλοποιεῖται· ἦτοι ἐὰν $\psi = x^u$, τότε $\psi' = \mu x^{u-1}$, ἐπειδὴ $x' = 1$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = 5x^3$ · ἡ παράγωγος εἶναι $\psi' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

2ον. Ἐστω $\psi = (5x^2 + 2)^3$ · ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = 3(5x^2 + 2)^2 \cdot (5x^2 + 2)' = 3(5x^2 + 2)^2 10x = 30x(5x^2 + 2)^2$$

3ον. Ἐστω $\psi = (3x^3 - 2x^2 + 3x - 6)^3$ ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = 3(3x^3 - 2x^2 + 3x - 6)^2 \cdot (9x^2 - 4x + 3).$$

4ον. Ἐστω $\psi = (3x^2 + 2)(5x + 1)$ · ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi' = (3x^2 + 2)(5x + 1)' + (5x + 1)(3x^2 + 2)' \quad \eta$$

$$\psi' = (3x^2 + 2)5 + (5x + 1)6x \quad \eta$$

$$\psi' = 15x^2 + 10 + 30x^2 + 6x \quad \eta \quad \psi' = 45x^2 + 6x + 10.$$

7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ x

§ 243. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\omega}{\phi}$, ἔνθα ω καὶ ϕ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσιν παραγώγους τὰς ω' καὶ ϕ' . Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὐξησιν Δx αἱ συναρτήσεις ω , ϕ , ψ λαμβάνουν ἀντιστοιχῶς αὐξήσεις $\Delta\omega$, $\Delta\phi$, $\Delta\psi$, εἶναι δὲ $\psi + \Delta\psi = \frac{\omega + \Delta\omega}{\phi + \Delta\phi}$. Ἐκ ταύτης

$$\text{καὶ τῆς } \psi = \frac{\omega}{\phi} \text{ προκύπτει } \Delta\psi = \frac{\omega + \Delta\omega}{\phi + \Delta\phi} - \frac{\omega}{\phi} \quad \eta \quad \Delta\psi = \frac{\phi\Delta\omega - \omega\Delta\phi}{(\phi + \Delta\phi)\phi},$$

$$\text{ὅθεν } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\phi \frac{\Delta\omega}{\Delta x} - \omega \frac{\Delta\phi}{\Delta x}}{(\phi + \Delta\phi)\phi}, \text{ ἐὰν δὲ } \text{or } \Delta x = 0, \text{ θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέ-}$$

$$\text{σεως } \text{or } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} = \omega', \text{ or } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \phi', \text{ καὶ } \text{or}(\phi + \Delta\phi) = \phi + \text{or}\Delta\phi = \phi, \text{ ὁπότε}$$

$$\text{θὰ εἶναι } \text{or } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\phi \cdot \text{or } \frac{\Delta\omega}{\Delta x} - \omega \cdot \text{or } \frac{\Delta\phi}{\Delta x}}{\text{or}(\phi + \Delta\phi) \cdot \phi} \quad \eta \quad \psi' = \frac{\phi\omega' - \omega\phi'}{\phi^2}. \quad \text{Ἦτοι :}$$

Ἡ παράγωγος πηλίκου δύο συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ x , ἔχουσῶν παραγώγους, εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρονομαστοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως
 $\psi = \frac{x^2-5x+3}{5x-1}$. Θὰ εἶναι $\psi' = \frac{(5x-1)(x^2-5x+3)' - (x^2-5x+3)(5x-1)'}{(5x-1)^2}$ ἢ
 $\psi' = \frac{(5x-1)(2x-5) - (x^2-5x+3) \cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2-2x-10}{(5x-1)^2}$.

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΟΥ Χ

§ 244. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sqrt{\omega}$, ἔνθα ω συνάρτησις τῆς τοῦ x , ἔχουσα παράγωγον τὴν ω' . Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὐξησιν Δx , αἱ συναρτήσεις ψ καὶ ω λαμβάνουσιν ἀντιστοίχως αὐξήσεις $\Delta\psi$ καὶ $\Delta\omega$, αἱ ὁποῖαι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\psi + \Delta\psi = \sqrt{\omega + \Delta\omega}$ καὶ $\psi = \sqrt{\omega}$ προκύπτει ὅτι $\Delta\psi = \sqrt{\omega + \Delta\omega} - \sqrt{\omega}$ ἢ

$$\Delta\psi = \frac{[\sqrt{\omega + \Delta\omega} - \sqrt{\omega}][\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}]}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}} \quad \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}} \quad \text{καὶ ὅρ} \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\text{ὅρ} \frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\text{ὅρ}[\sqrt{\omega + \Delta\omega} + \sqrt{\omega}]} \quad \text{ἢ} \quad \psi' = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}.$$

Σημείωσις. Τοῦτο ἰσχύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x , αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουσιν τὴν συνάρτησιν ω .

Ἄρα :

Ἡ παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης συναρτήσεως τινος τοῦ x , ἔχουσης παράγωγον, ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi = \sqrt{x^2-4x+1}$. Θὰ εἶναι

$$\psi' = \frac{(x^2-4x+1)'}{2\sqrt{x^2-4x+1}} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Ἀσκήσεις

657. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

α') $\psi = (x^3-2x+5) + (3x^2-8x-1)$. β') $\psi = (5x^3+2x^2-3x+1) - (2x^2-4x+6)$,

γ') $\psi = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + (\alpha x^2 - \beta x) + (\alpha x^2 + \gamma) + (\alpha^2 - \beta\gamma)$,

δ') $\psi = (x-3)(x+4)$, ε') $\psi = (x^2+3)(2x^2-3x+1)$, στ') $\psi = (2x-1)(3x+1)(4x-2)$,

ζ') $\psi = x^3(2x^2-5)(3x^3-1)$, η') $\psi = \frac{x}{x^2-1}$, θ') $\psi = \frac{x}{x+1}$, ι') $\psi = \frac{3x-3}{4x-6}$,

ια') $\psi = \frac{x(x-3)}{(3x-1)^2}$, ιβ') $\psi = \sqrt{x^2-3x-5}$, ιγ') $\psi = 3x-4\sqrt{x}$, ιδ') $\psi = 2x^2-3+3\sqrt{x^2-2x}$.

9. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

§ 245. Έστω ή συνάρτησις $\psi=2x^5$ ή παράγωγος της είναι $\psi'=10x^4$. Άλλά παρατηρούμεν, ότι ή παράγωγος αυτή είναι νέα συνάρτησις τοῦ x ἔχουσα καὶ αὐτὴ παράγωγον, ἥτις λέγεται **δευτέρα παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ'' , ἥτοι $\psi''=(10x^4)'=40x^3$. Άλλά καὶ ή παράγωγος αὐτὴ ἔχει παράγωγον, ἥτις καλεῖται **τρίτη παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ''' κ.ο.κ. Καὶ γενικῶς, ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\varphi(x)$ ἔχη παράγωγον ψ' διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τινι διαστήματι (α, β) , εἶναι δὲ ή παράγωγος αὐτὴ συνάρτησις τοῦ x , εἶναι δυνατὸν καὶ αὐτὴ νὰ ἔχη παράγωγον καλουμένην δευτέραν παράγωγον τῆς δοθείσης καὶ σημειοῦται ψ'' . Όμοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην, τετάρτην κ.ο.κ. παράγωγον τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως.

Ἀ σ κ η σ ι ς

658. Να εὐρεθοῦν ή πρώτη καὶ ή δευτέρα παράγωγος τῶν κάτωθι συναρτήσεων : α') $\psi = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, β') $\psi = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 6$, γ') $\psi = (2x-3)^3$,

$$\delta') \psi = \sqrt{1-x},$$

$$\epsilon') \psi = \frac{x^2+3}{x+2},$$

$$\sigma\tau') \psi = \sqrt{3x^2+5}.$$

10. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 246. Αἱ συναρτήσεις $\psi = \eta\mu x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu x$, $\psi = \epsilon\varphi x$, $\psi = \sigma\varphi x$, $\psi = \tau\epsilon\mu x$, $\psi = \sigma\tau\epsilon\mu x$ καλοῦνται **κυκλικαὶ συναρτήσεις**. Ἡ μεταβλητὴ x εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν εἰς ἀκτίνια μέτρον τοῦ τόξου.

Συνέχεια κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐκ τῆς τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι τὸ $\eta\mu x$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ τόξον x **τείνῃ εἰς τὸ μηδέν**.

1. **Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ ἡμιτόνου.** Ἐὰν εἰς αὐξήσιν ϵ τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὐξήσις η τοῦ $\eta\mu x$, θὰ εἶναι

$$\eta = \eta\mu(x+\epsilon) - \eta\mu x = 2\eta\mu \frac{\epsilon}{2} \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $|\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)| \leq 1$ καὶ ἡ $\frac{\epsilon}{2}$ τείνει εἰς τὸ μηδεν μετὰ τοῦ ϵ , ἔπεται ὅτι δι' $\sigma\rho\epsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\sigma\rho\eta=0$ · ἄρα ή συνάρτησις $\psi = \eta\mu x$ εἶναι συνεχής.

II. Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ συνημιτόνου. Ἐὰν εἰς αὐξήσιν ϵ τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὐξήσις η τοῦ $\sin x$, θὰ εἶναι

$$\eta = \sin(x+\epsilon) - \sin x = -2\eta\mu \frac{\epsilon}{2} \eta\mu \left(x + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

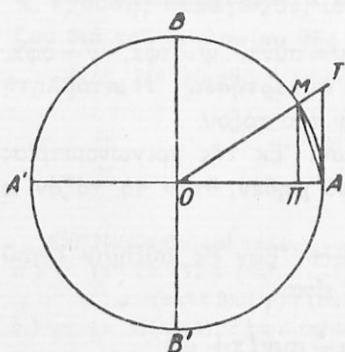
Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $|\eta\mu \left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)| \leq 1$ καὶ $\eta\mu \frac{\epsilon}{2}$ τείνει μετὰ τοῦ ϵ εἰς τὸ μηδέν, ἔπεται ὅτι δι' $\text{ορ}\epsilon = 0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\eta = 0$. ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi = \sin x$ εἶναι συνεχῆς.

III. Συνέχεια τῶν ἄλλων κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐπειδὴ $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$ ἥτοι ἡ $\epsilon\phi x$ εἶναι πηλίκον δύο συνεχῶν συναρτήσεων, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι συνεχῆς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἄλλας συναρτήσεις.

$$\sigma\phi x = \frac{\sin x}{\eta\mu x}, \quad \tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sigma\tau\epsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x}.$$

$$I. \text{ΟΡΙΟΝ ΤΟΥ } \frac{x}{\eta\mu x} \text{ ΟΤΑΝ } \text{ορ}x = 0.$$

§ 247. 1ον. Ἐστω, ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM}) = x$ τείνει εἰς τὸ μηδέν ἐκ τιμῶν θετικῶν. Εἶναι $\eta\mu x = (\overline{PM})$ καὶ $\epsilon\phi x = (\overline{AT})$.



Σχ. 23

Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἔμ. τριγ. $(OAM) < \text{ἔμ. κυκ. τομ } (OAM) < \text{ἔμ. τριγ. } (OAT)$ ἢ $\frac{1}{2} (OA) \eta\mu x < \frac{1}{2} (OA)x < \frac{1}{2} (OA) \epsilon\phi x$ ἢ $\eta\mu x < x < \epsilon\phi x$, καὶ ἔπειδὴ $\eta\mu x > 0$, ἔπεται ὅτι $1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sin x}$. Ἄλλ' ὅταν $\text{ορ}x = 0$, ἔπειδὴ ἡ συνάρτησις $\sin x$ εἶναι συνεχῆς καὶ $\sin 0 = 1$, θὰ εἶναι $\text{ορ}\sin x = 1$. Ἐπομένως καὶ ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$,

ὅστις περιέχεται μεταξύ δύο ἀριθμῶν τεινόντων πρὸς τὴν μονάδα, θὰ ἔχη ὅριον τὴν μονάδα, ἥτοι $\text{ορ } \frac{x}{\eta\mu x} = 1$, ὅταν $\text{ορ}x = 0$.

2ον. Ἐστω ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM}) = x$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Τότε, ἐὰν γράψωμεν $x = -x'$, θὰ εἶναι $x' > 0$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{x}{\eta\mu x} = \frac{-x'}{\eta\mu(-x')} = \frac{-x'}{-\eta\mu x'} = \frac{x'}{\eta\mu x'}$, ὅταν δὲ τὸ x τείνη εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν, τὸ x' τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐκ θετικῶν τιμῶν, ὁπότε $\text{op} \frac{x'}{\eta\mu x'} = 1$ καὶ συνεπῶς $\text{op} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$. Ὡστε :

$$\text{op} \frac{x}{\eta\mu x} = 1, \text{ ὅταν } \text{op} x = 0.$$

II. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 248. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \eta\mu x$, θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{\eta\mu(x+\Delta x) - \eta\mu x}{\Delta x} \\ \text{ἢ} \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{2\eta\mu \frac{\Delta x}{2} \text{ συν}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \text{ συν}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

ἐὰν δὲ $\text{op} \Delta x = 0$, θὰ εἶναι $\text{op} \frac{\Delta x}{2} = 0$, ἄρα $\text{op} \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ καὶ

$\text{op} \text{συν}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \text{συν} x$ ὥστε $(\eta\mu x)' = \text{συν} x$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τοῦ $\eta\mu x$ εἶναι $\text{συν} x$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

III. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 249. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \text{συν} x$, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{\text{συν}(x+\Delta x) - \text{συν} x}{\Delta x} \\ \text{ἢ} \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta x} &= \frac{-2\eta\mu \frac{\Delta x}{2} \eta\mu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \eta\mu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει εὐκόλως, ὅτι $(\text{συν} x)' = -\eta\mu x$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τοῦ $\text{συν} x$ εἶναι $-\eta\mu x$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

IV. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΕΦΑΙΠΤΟΜΕΝΗΣ

§ 250. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \epsilon\phi x$. Ἐπειδὴ $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, ἔπεται, ὅτι $(\epsilon\phi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)' - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ἢ $(\epsilon\phi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, ἄρα $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Ἦτοι :

Ἡ παράγωγος τῆς $\epsilon\phi x$ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ $\sigma\upsilon\nu^2 x$.

V. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $\sigma\phi x$, $\tau\epsilon\mu x$, $\sigma\tau\epsilon\mu x$.

§ 251. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι εὐρίσκομεν, ὅτι $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $(\tau\epsilon\mu x)' = \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $(\sigma\tau\epsilon\mu x)' = -\frac{\sigma\phi x}{\eta\mu x}$.

Ἀ σ κ η σ ι ς

659. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων :

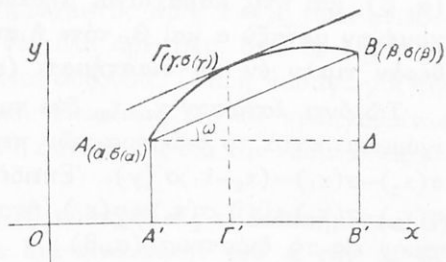
α') $\psi = \alpha\eta\mu x$, β') $\psi = \eta\mu 2x$, γ') $\psi = \sigma\upsilon\nu 7x$, δ') $\psi = \epsilon\phi 3x$, ε') $\psi = \sigma\phi 4x$,
στ') $\psi = \tau\epsilon\mu^2 x$, ζ') $\psi = \sigma\tau\epsilon\mu^2 x$, η') $\psi = \eta\mu^2 x$, θ') $\psi = \sigma\upsilon\nu^2 x$, ι') $\psi = x^2 \eta\mu 3x$
α') $\psi = x^2 \sigma\upsilon\nu^2 x$, ιβ') $\psi = x^2 \epsilon\phi 3x$, ιγ') $\psi = \sqrt{\eta\mu x}$, ιδ') $\psi = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$,
ιε') $\psi = \sigma\upsilon\nu/\sqrt{x^2 + 1}$.

Β' ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ
ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΑΥΞΗΣΕΩΝ

§ 252. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$, ὠρισμένη, συνεχῆς καὶ ἔχουσα παράγωγον διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα (α, β) . Ὡς γνωστὸν ἡ συνάρτησις αὕτη $\psi = \sigma(x)$ παρίσταται ὑπὸ καμπύλης. Ἐὰν ἐπὶ ταύτης θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα $A(\alpha, \sigma(\alpha))$ καὶ $B(\beta, \sigma(\beta))$ καὶ φέρωμεν τὴν χορδὴν AB καὶ τὴν AD παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 24), τότε θὰ εἶναι πρὸφανεὶς $AD = \beta - \alpha$ καὶ $DB = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ADB εὐρίσκομεν, ὅτι $\frac{DB}{AD} = \frac{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)}{\beta - \alpha} = \epsilon\phi\omega = \text{συντελεστής κατευθύνσεως τῆς χορδῆς } AB$. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου AB τῆς καμπύλης $\psi = \sigma(x)$ ὑπάρχει ἓνα τοῦλάχιστον σημεῖον Γ ἔχον τε-

τιμημένην γ περιεχομένην μεταξύ α και β και τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB . Ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἔχει συντελεστήν κατευθύνσεως τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ διὰ $x = \gamma$, ἥτοι $\sigma'(\gamma)$, ἐπεὶ δὲ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν AB πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)}{\beta - \alpha} = \sigma'(\gamma)$ ἢ

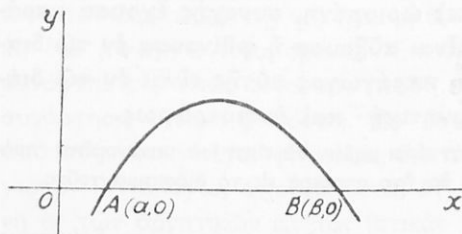


Σχ. 24

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν τινι διαστήματι (α, β) ἔχουσα παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α, β) , ὑπάρχει εἰς τουλάχιστον ἀριθμὸς γ μεταξύ α καὶ β περιεχόμενος τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha)\sigma'(\gamma)$.

2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLÉ

§ 253. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχὴς καὶ ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α, β) καὶ ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη ἡ παριστῶμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα $A(\alpha, 0)$ καὶ $B(\beta, 0)$. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων ἀνξήσεων θὰ ὑπάρχη μία τουλάχιστον τιμὴ τοῦ x μεταξύ α καὶ β τοιαύτη, ὥστε $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha)\sigma'(\gamma)$.



Σχ. 25

ἀλλὰ ἐπεὶ δὲ $\sigma(\beta) = 0$, $\sigma(\alpha) = 0$ καὶ $\beta - \alpha \neq 0$, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι $\sigma'(\gamma) = 0$. Ἦτοι :

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι (α, β) μηδενίζεται διὰ $x = \alpha$ καὶ $x = \beta$, ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμὴ γ τοῦ x μεταξύ α καὶ β , διὰ τὴν ὁποῖαν ἡ παράγωγος μηδενίζεται.

§ 254. *Θεώρημα.* Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι (α, β) , καὶ ἥτις παράγωγος μηδενίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν περιεχομένην μεταξύ α καὶ β , τότε ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι (α, β) .

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν x_1, x_2 , δύο τιμαὶ τοῦ x μεταξύ α καὶ β περιεχόμεναι· κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\gamma)$. Ἐπεὶ δὲ ὁμῶς $\sigma'(\gamma) = 0$, ἔπεται ὅτι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = 0$ ἢ $\sigma(x_2) = \sigma(x_1)$, ἥτοι ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα (α, β) .

§ 255. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α, β) . Ἐστωσαν δὲ δύο τιμαὶ τοῦ x αἱ x_2 καὶ x_1 , ἐνθα $x_2 > x_1$, μεταξύ α καὶ β περιεχόμεναι. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι :

$$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\gamma).$$

Ἐπεὶ δὲ $x_2 - x_1 > 0$, ἔπεται, ὅτι $\sigma(x_2) - \sigma(x_1)$ καὶ $\sigma'(\gamma)$ θὰ εἶναι ὁμόσημα, ἥτοι, ἐὰν μὲν $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) > 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὐξουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) > 0$, ἐὰν δὲ $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) < 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) < 0$. Ὡστε :

Μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχῆς ἔχουσα παράγωγον ἐν τινι διαστήματι, εἶναι αὐξουσα ἢ φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ· καὶ ἀντιστρόφως.

Σημείωσις. Ἡ παράγωγος ἐάν εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι διὰ μεμονωμένους τιμὰς τοῦ x , διότι ἄλλως ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα τοῦτο.

§ 256. Ἐστω, ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς εἰς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἥτις εἶναι ἐπίσης συνεχῆς συνάρτησις τοῦ x .

1ον. Ἐστω, ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ $x = x_0$ εἶναι αὐξουσα, ὁπότε καὶ ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι θετικὴ, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκείθεν ἡ συνάρτησις γίνεται φθίνουσα. Τότε ἡ παράγωγός της καθίσταται ἀπὸ θετικὴ ἀρνητικὴ· καὶ ἐπεὶ δὲ ἡ παράγωγος ὑπετέθη συνεχῆς συνάρτησις, ἔπεται ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ θετικὴ ἀρνητικὴ,

θα διέλθῃ διὰ τῆς τιμῆς 0, ἥτοι $\sigma'(x_0) = 0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ γίνεται μεγίστη.

2ον. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς $x = x_0$ εἶναι φθίνουσα, ὁπότε ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι ἀρνητική, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκεῖθεν ἡ συνάρτησις γίνεται αὐξουσα. Τότε ἡ παράγωγός της ἀπὸ ἀρνητικὴ καθίσταται θετικὴ· ἐπομένως, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, θὰ εἶναι $\sigma'(x_0) = 0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ γίνεται ἐλαχίστη. Ἦτοι:

Ὅταν μία συνάρτησις $\sigma(x)$ συνεχῆς εἴς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον διέρχεται διὰ τина τιμὴν τοῦ x τὴν x_0 δι' ἑνὸς μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, ἡ παράγωγος αὐτῆς μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, δηλαδή $\sigma'(x_0) = 0$, ἂν συμβαίῃ νὰ εἶναι καὶ συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν ἡ παράγωγος συνεχοῦς τινος συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἴς τι διάστημα (α, β) μηδενίζεται διὰ τина τιμὴν τοῦ x τὴν x_0 , ἡ συνάρτησις αὕτη διὰ τὴν τιμὴν x_0 διέρχεται διὰ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος μηδενίζεται ἐκ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν.

Τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι ἡ παράγωγος ψ' μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικὰς καὶ ἔστωσαν δύο τιμαὶ τῆς ψ' , ἥτοι ἡ θετικὴ διὰ $x = x_0 - \varepsilon$ καὶ ἡ ἀρνητικὴ διὰ $x = x_0 + \varepsilon$, ἔνθα $\sigma\varepsilon = 0$. Ἐπειδὴ $\sigma'(x_0 - \varepsilon) > 0$, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι αὐξουσα, ἐπειδὴ δὲ $\sigma'(x_0 + \varepsilon) < 0$, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι φθίνουσα. Ἐφ' ὅσον δὲ ἡ ψ ὑπέτεθη συνεχῆς καὶ ἀπὸ αὐξουσα γίνεται φθίνουσα, ἔπεται ὅτι αὕτη ἔχει διὰ $x = x_0$ μέγιστον. Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν ἡ παράγωγος μεταβαίῃ ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς τιμὰς, ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἐλαχίστου διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x = x_0$.

§ 257. Ἐστω 1ον) ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ ὠρισμένη, συνεχῆς εἰς τι διάστημα (α, β) , ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἔχει μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν $x = x_1$ ἢ δὲ παράγωγος ψ' εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι $\sigma'(x_1) = 0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικὰς, ἄρα ἡ ψ' εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγός της ψ'' , ἥτις εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς δοθείσης, εἶναι ἀρνητικὴ.

Ἐστω 2ον) ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ τινὰ τιμὴν $x=x_2$ ἔχει ἐλάχιστον ἡ δὲ παράγωγος αὐτῆς εἶναι συνεχῆς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι $\sigma'(x_2)=0$, μεταβαίνουσα ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς ἄρα, ἡ ψ' εἶναι συνάρτησις αὐξοῦσα καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγος τῆς ψ'' εἶναι θετική. Ὡστε:

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ συνεχῆς εἰς τὸ διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον ψ' , ἔχῃ διὰ $x=x_1$ μέγιστον, τότε ἡ δευτέρα αὐτῆς παράγωγος ψ'' εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x , ἐὰν δὲ ἡ ψ ἔχῃ διὰ $x=x_2$ ἐλάχιστον, τότε ἡ δευτέρα παράγωγος ψ'' εἶναι θετικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x .

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi=x^2-8x+5$. Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ταύτης λαμβάνει χώραν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x , διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ἡ πρώτη παράγωγος $\psi'=2x-8$, ἥτοι διὰ $x=4$, ἐπειδὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἡ ψ' εἶναι συνεχῆς. Ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi=x^2-8x+5$ διὰ $x=4$ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα παράγωγος $\psi''=2$ εἶναι πάντοτε θετικὴ, ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ $x=4$ ἔχει ἐλάχιστον $\psi=-11$.

2ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{x^3}{3} - 9x + 12$. Ἡ $\psi' = x^2 - 9$, τῆς ὁποίας ρίζαι εἶναι $x_1=3, x_2=-3$, ἔχει $\psi''=2x$, ἥτις διὰ $x=3$ εἶναι $\psi''=6 > 0$ διὰ καὶ $x=-3$ εἶναι $\psi''=-6 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτησις διὰ $x=3$ ἔχει ἐλάχιστον ὅπερ ἰσοῦται μὲ -6 καὶ διὰ $x=-3$ ἔχει μέγιστον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 30.

§ 258. Ἐστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\sigma(x)}{\phi(x)}$, ἔνθα $\sigma(x)$ καὶ $\phi(x)$ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἔστω ὅτι διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, ἥτοι $\frac{\sigma(\alpha)}{\phi(\alpha)} = \frac{0}{0}$. Ἐπειδὴ $\sigma(\alpha) = 0$ καὶ $\phi(\alpha) = 0$, ἡ ψ γράφεται $\psi = \frac{\sigma(x)}{\phi(x)} = \frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{\phi(x)-\phi(\alpha)}$ ἢ $\frac{\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}}{\frac{\phi(x)-\phi(\alpha)}{x-\alpha}}$ Καὶ ἐὰν ὑποθεθῇ ὅτι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha} = 0$, τότε τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}$, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔχει ὅριον τὴν παρά-

γωγον διὰ $x = \alpha$, ἤτοι τὴν $\sigma'(\alpha)$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{x - \alpha}$ ἔχει ὄριον $\varphi'(\alpha)$. Ἀρα ἐὰν $\sigma\rho x = \alpha$ καὶ $\varphi'(\alpha) \neq 0$, ἔχομεν

$$\sigma\rho\psi = \sigma\rho. \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}. \text{ Ὡστε:}$$

Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, τὸ ὁποῖον διὰ $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, εἶναι ὁ λόγος $\frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, ὅταν $\varphi'(\alpha) \neq 0$.
(Κανὼν τοῦ Hospital).

Σημείωσις. Ἐάν καὶ ὁ λόγος τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$, τότε λαμβάνομεν τὸν λόγον τῶν δευτέρων παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x = \alpha$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 14}$ διὰ $x = 2$. Τὸ κλάσμα τοῦτο διὰ $x = 2$ λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$. Ἀρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος τούτου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παραγώγων τῶν ὁρῶν τοῦ διὰ $x = 2$, ὅποτε ἔχομεν $\psi = \frac{2x - 5}{2x - 9}$, θέτοντες δὲ $x = 2$ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΠΟΥΔΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 259. Πρὸς σπουδὴν τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως, 1ον καθορίζομεν τὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὅποια ἡ συνάρτησις εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχής· 2ον εὐρίσκομεν τὴν παράγωγον, τῆς ὁποίας καθορίζομεν τὸ σημεῖον· 3ον εὐρίσκομεν τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως· 4ον εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ $x = \pm \infty$ καὶ $x = 0$ καὶ ἐὰν εἶναι δυνατὸν καθορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ x , αἵτινες μηδενίζουν τὴν συνάρτησιν· 5ον σχηματίζομεν συνοπτικὸν πῖνακα ὅλων τῶν ἀνωτέρω· 6ον κατασκευάζομεν τὴν καμπύλην τὴν παριστῶσαν τὴν συνάρτησιν.

Ἐφαρμογαί: α') Συνάρτησις $\psi = ax + \beta$. 1ον. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . 2ον. Ἡ παράγωγος ψ' εἶναι ἴση πρὸς α ἤτοι $\psi' = \alpha$, ἐπομένως διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

1η περίπτωση: $\alpha > 0$. Ὁ πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

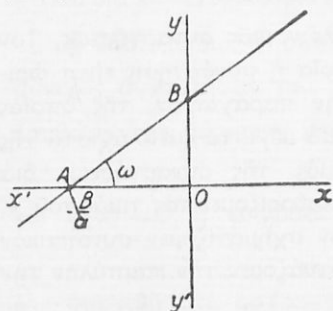
x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$		
ψ'		+	+		
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ἡ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ὀξείαν, διότι $\psi' = \epsilon\phi\omega = \alpha > 0$ (σχ. 26).

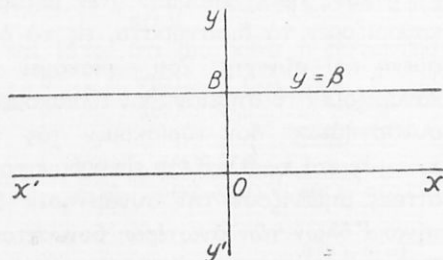
2α περίπτωση: $\alpha < 0$. Ὁ πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$		
ψ'		-	-		
ψ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ἡ γραμμὴ ἢ παριστῶσα τὰς μεταβολὰς εἶναι εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ἀμβλείαν, διότι $\psi' = \epsilon\phi\omega = \alpha < 0$.



Σχ. 26



Σχ. 27

3η περίπτωση: $\alpha = 0$. Ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερὰ καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (σχ. 27).

β') 'Η συνάρτησις $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. 1ον. 'Η συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .

2ον. 'Η παράγωγος αὐτῆς εἶναι $\psi' = 2\alpha x + \beta$, ἥτις, ἐὰν τὸ $\alpha > 0$, εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$ ἐὰν δὲ τὸ $\alpha < 0$, εἶναι θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

3ον. Αἱ ρίζαι τῆς πρώτης παραγώγου $\psi' = 2\alpha x + \beta$ εἶναι $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ἄρα διὰ τὴν τιμὴν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. 'Η δὲ δευτέρα παράγωγος $\psi'' = 2\alpha$ εἶναι θετικὴ δι' $\alpha > 0$, ἀρνητικὴ δὲ δι' $\alpha < 0$. ἔπομένως ἡ συνάρτησις, ὅταν $\alpha > 0$, ἔχει διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἐλάχιστον $\psi = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$, ἔχει διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ μέγιστον $\psi = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

4ον. Διὰ $x = \pm\infty$, ἐὰν $\alpha > 0$, $\psi = +\infty$, ἐὰν δὲ $\alpha < 0$, $\psi = -\infty$.

Πίναξ τῶν μεταβολῶν

$\alpha > 0$	x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
	ψ'		- 0 +	
	ψ''		+	
	ψ	$+\infty$	$\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ ἐλάχιστον	$+\infty$
$\alpha < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
	ψ'		+ 0 -	
	ψ''		-	
	ψ	$-\infty$	$\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ μέγιστον	$-\infty$

Παράδειγμα. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = x^2 - 6x + 8$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὠρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x .
 Ἡ παράγωγος $\psi' = 2x - 6$ διὰ $x < 3$ εἶναι $\psi' < 0$, διὰ $x > 3$ εἶναι $\psi' > 0$. Διὰ $x = 3$ εἶναι $\psi' = 0$, ἐπειδὴ δὲ $\psi'' = 2 > 0$, ἐπέεται ὅτι διὰ $x = 3$ ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον $\psi = \frac{32-36}{4} = -1$.

Διὰ $x = \pm \infty$ ἐπειδὴ $\alpha > 0$, $\psi = +\infty$.

Διὰ $x = 0$, $\psi = 8$, διὰ $x = 2$ καὶ $x = 4$, $\psi = 0$.

Ἀσκήσεις

660. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha') \psi = x + 3, & \beta') \psi = -3x + 1, & \gamma') \psi = x^3 + 3, & \delta') \psi = x^2 - 5x + 6, \\ \varepsilon') \psi = x^3 - 8, & \sigma\tau') \psi = x(x-1)^2, & \zeta') \psi = x^2 + 3x + 2, & \eta') \psi = x^3 - 5x - 4. \end{array}$$

661. Νὰ εὐρεθοῦν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων:

$$\alpha') \psi = x^2 - 3x + 2, \quad \beta') \psi = 3x^3 + 2x^2, \quad \gamma') \psi = x^3 - 36x.$$

662. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων:

$$\begin{array}{llll} \alpha') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 + 7x^2 - 5x - 3} & \text{διὰ } x = 1, & \beta') \psi = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x - 3} & \text{διὰ } x = 3, \\ \gamma') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} & \text{διὰ } x = 2, & \delta') \psi = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24} & \text{διὰ } x = 2. \end{array}$$

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 260. Ἐστω τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x , ἡ ψ . Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἐλάχιστην αὐξησιν Δx , ἡ συνάρτησις λαμβάνει ὁμοίως ἀντίστοιχον αὐξησιν $\Delta \psi$. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν $\text{or} \Delta x = 0$ εἶναι καὶ $\text{or} \Delta \psi = 0$ καὶ $\text{or} \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = \psi'$, συνεπῶς καὶ $\text{or} \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta x} - \psi' \right) = 0$.

Ἐκ ταύτης ἐπέεται ὅτι $\frac{\Delta \psi}{\Delta x} - \psi' = \varepsilon$ (1), ἂν $\text{or} \varepsilon = 0$. Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς $\Delta \psi$ καὶ ἔχομεν $\Delta \psi = \psi' \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$. Ἦτοι:

Ἡ αὐξήσις συνεχοῦς συναρτήσεως τοῦ x ἐχούσης παράγωγον ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἐλάχιστην αὐξησιν Δx τοῦ x , ἀποτελεῖται ἀφ' ἐνὸς ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου ἐπὶ Δx καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ Δx ἐπὶ ἀριθμὸν ε , ὃ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν αὐξησιν Δx καὶ ἔχει ὄριον μηδέν, ὅταν $\text{or} \Delta x = 0$.

Τὸ γινόμενον $\psi' \Delta x$ καλεῖται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως ψ καὶ σημειοῦται $d\psi = \psi' \Delta x$. (1)

Ἐάν $\psi=x$ εἶναι $\psi'=1$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει $dx=\Delta x$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $d\psi=\psi'dx$. (2)

Ἐκ τῆς (2) παρατηροῦμεν· 1ον ὅτι, ἵνα μία συνάρτησις ἔχη διαφορικόν, πρέπει νὰ ἔχη παράγωγον καὶ 2ον ὅτι πρὸς εὐρεσιν τοῦ διαφορικοῦ μιᾶς συναρτήσεως πολλαπλασιάζομεν τὴν παράγωγον αὐτῆς ἐπὶ dx . Οὕτως ἐάν $\psi=2x^3$, θὰ εἶναι $d\psi=6x^2dx$.

Ἀσκήσεις

663. Νὰ εὐρεθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$$\alpha') \psi = 3x,$$

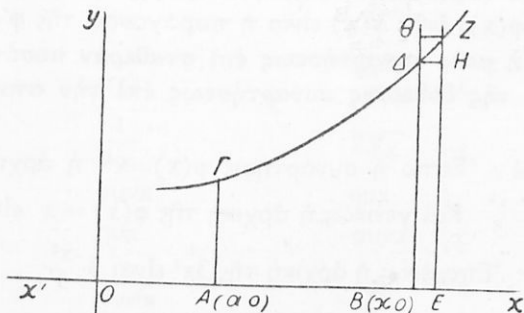
$$\beta') \psi = 7x^3,$$

$$\gamma') \psi = 3x^2 - 5x + 6,$$

$$\delta') \psi = \frac{3x}{x+1}, \quad \epsilon') \psi = \frac{x^2-3}{x^2+1}, \quad \sigma\tau') \psi = \sqrt{3x^2}, \quad \zeta') \psi = \sqrt{x^2-2x+1},$$

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΕΜΒΑΔΟΥ

§ 261. Ἐστω $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ MN ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ. Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σταθερὸν σημεῖον $A(\alpha, 0)$ καὶ τὸ μεταβλητὸν $B(x, 0)$, καὶ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς τεταγμένας AG καὶ BD τῶν σημείων G καὶ D τῆς καμπύλης οὕτω δὲ ὀρίζεται τὸ χωρίον $ABGD$, τοῦ ὁποίου ἔστω E τὸ ἐμβαδὸν (σχ. 28).



Σχ. 28

Εἶναι προφανές, ὅτι μετατιθεμένου τοῦ μεταβλητοῦ σημείου B , ἥτοι μεταβαλλομένου τοῦ x , μεταβάλλεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν E , ἐπομένως τὸ E εἶναι συνάρτησις τοῦ x . Ἐπίσης εἶναι φανερόν ὅτι, ἐφ'ὅ-

σον ή συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ είναι συνεχής δι' αύξησιν τοῦ x κατὰ $\Delta x = (BE)$, ή αύξησις ΔE τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου $B\Delta ZE$ καὶ ὅτι δι' $\text{op}\Delta x = 0$ θὰ εἶναι καὶ $\text{op}\Delta E = 0$, ἥτοι τὸ E εἶναι καὶ αὐτό, συνεχής συνάρτησις τοῦ x . Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, εἶναι $(B\Delta HE) < (B\Delta ZE) < (B\Theta ZE)$ ἢ ἐὰν τεθῇ $(\Delta\Theta) = \Delta\psi$, θὰ εἶναι $\psi \cdot \Delta x < \Delta E < (\psi + \Delta\psi) \cdot \Delta x$ διαιροῦντες δὲ διὰ Δx ἔχομεν :

Ἐὰν μὲν $\Delta x > 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} < \psi + \Delta\psi$, ἐὰν δὲ $\Delta x < 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} > \psi + \Delta\psi$,

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν $\text{op}\Delta x = 0$, εἶναι καὶ $\text{op}\Delta\psi = 0$, ἔπεται ὅτι $\text{op} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \psi$.

Ἀλλὰ $\text{op} \frac{\Delta E}{\Delta x} = E'$, ἄρα $E' = \psi$, ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $E'dx = \psi dx$.

6. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΑΥΤΩΝ

§ 262. Ἐστω ή συνάρτησις $\psi = 5x^2 - 7x$ ἔχουσα παράγωγον $\psi' = 10x - 7$. Ἡ συνάρτησις $\psi = 5x^2 - 7x$ λέγεται **ἀρχική** συνάρτησις ή καὶ **παράγουσα** τῆς $\psi' = 10x - 7$. Ἦτοι :

Ἀρχική συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$ λέγεται μία ἄλλη συνάρτησις, ἐὰν ὑπάρχη, ἥτις, ἔχει ὡς παράγωγον τὴν δοθεῖσαν.

§ 263. Ἐστω ή συνάρτησις $\alpha\varphi(x)$, ἐνθα α σταθερά. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι $(\alpha\varphi(x))' = \alpha\varphi'(x)$, ἥτοι ή ἀρχική τῆς συναρτήσεως $\alpha\varphi'(x)$ εἶναι $\alpha\varphi(x)$, ἐνθα $\varphi(x)$ εἶναι ή παράγουσα τῆς $\varphi'(x)$. Ὡστε

Ἡ ἀρχική μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερὰν ποσότητα εἶναι ή παράγουσα τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθερὰν ποσότητα.

Παράδειγμα : Ἐστω ή συνάρτησις $\varphi(x) = x^4$. ή ἀρχική αὐτῆς : εἶναι ή $f(x) = \frac{x^5}{5}$. Καὶ γενικῶς ή ἀρχική τῆς $\varphi(x) = x$ εἶναι $f(x) = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ ($\mu \neq -1$) : Ἐπομένως ή ἀρχική τῆς $3x^4$ εἶναι $3 \cdot \frac{x^5}{5}$.

§ 264. Ἐστω ή συνάρτησις $\psi = \varphi(x) + \sigma(x) + f(x)$ ἔχουσα ὡς παράγωγον τὴν $\psi' = \varphi'(x) + \sigma'(x) + f'(x)$ · συνεπῶς ή ἀρχική τῆς $\psi' = \varphi'(x) + \sigma'(x) + f'(x)$ εἶναι ή $\psi = \varphi(x) + \sigma(x) + f(x)$. Ἀλλὰ αἱ $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, $f(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀρχικαὶ τῶν $\varphi'(x)$, $\sigma'(x)$, $f'(x)$. Ὅθεν :

Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων ἔχουσῶν ἀρχικὰς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.

Παράδειγμα : Ἐπειδὴ αἱ ἀρχικαὶ τῶν $3x^2$, $6x$, 5 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ x^2 , $3x^2$, $5x$, ἔπεται ὅτι ἡ ἀρχικὴ τῆς $\psi = 3x^2 - 6x + 5$ εἶναι ἡ $x^2 - 3x^2 + 5x$.

§ 265. Ἐστω μία συνάρτησις τοῦ x ἡ $\varphi(x)$ ὠρισμένη ἐν τινι διαστήματι καὶ ἔχουσα ὡς ἀρχικὴν τὴν συνάρτησιν $f(x)$. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως πρέπει $f'(x) = \varphi(x)$ · ἀλλὰ καὶ $(f(x) + c)' = \varphi(x)$, ἔνθα c σταθερά. Ἄρα ἡ $\varphi(x)$ θὰ ἔχη ὡς ἀρχικὰς καὶ τὰς συναρτήσεις $f(x) + c$, ἔνθα c εἶναι οἷοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμός.

7. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 266. Εἰς τὸ περὶ παραγῶγων κεφάλαιον εἴχομεν εὖρει τὰς παραγῶγους ὠρισμένων συναρτήσεων· τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν εὐκόλως εὐρίσκομεν τὰς ἀρχικὰς ὠρισμένων τοιούτων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

Συναρτήσεις	Ἀρχικαὶ
x^μ	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$
αx^μ	$\frac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$\eta \mu x + c$
$\eta \mu x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\epsilon \varphi x + c$
$-\frac{1}{\eta \mu^2 x}$	$\sigma \varphi x + c$

§ 267. Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις ἡ παράγουσα μιᾶς συναρτήσεως $\sigma(x)$ καλεῖται καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ $\sigma(x)dx$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\int \sigma(x)dx$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x) + c$ καὶ $d \int \sigma'(x)dx = \sigma'(x)dx$
 Ἡτοι :

Ἡ ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ διαφορίσις εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι.

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερόν ὅτι ἐξ ἐκάστου κανόνος διαφορίσεως προκύπτει ἀντίστοιχος κανὼν ὁλοκληρώσεως καὶ ἀντιστρόφως μόνον, ὅτι κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν πρέπει νὰ προσθέσωμεν ποσότητα c ἀνεξάρτητον τῆς ἐκάστοτε μεταβλητῆς.

Ἀσκήσεις

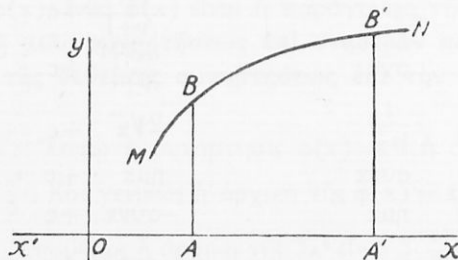
664. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \alpha') \int 3x dx, & \quad \beta') \int 9x^2 dx, & \quad \gamma') \int x^{-4} dx, & \quad \delta') \int x^{-5} dx, \\ \epsilon') \int -\frac{1}{x^3} dx, & \quad \sigma') \int \frac{7}{x^6} dx, & \quad \zeta') \int (3x^3 + 2x^2 - 5x + 6) dx, & \quad \eta') \int (6x^3 - 7x^2 - 3x) dx, \\ \theta') \int (x+2)^2 dx, & \quad \iota') \int (x-1)^3 dx, & \quad \iota\alpha') \int \iota\beta') \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx, & \quad \int \sigma\upsilon\nu 2x dx, \\ \gamma') \int \eta\mu 2x dx, & \quad \iota\delta') \int \sigma\upsilon\nu 3x dx, & \quad \iota\epsilon') \int \eta\mu 3x dx. \end{aligned}$$

8. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 268. Ἐστω μία συνεχὴς συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ καὶ MN ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι $\int \sigma(x)dx = f(x) + c$. Ἐστώσαν δὲ $(\overline{OA}) = \alpha$



Σχ. 29

καὶ $(\overline{OA'}) = x$. Ἄν κληθῇ E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου $ABB'A'$ (σχ.29) θὰ εἶναι $dE = \sigma(x)dx$, συνεπῶς

$$E = \int \sigma(x)dx = f(x) + c \quad (1)$$

οἰουδήποτε ὄντος τοῦ x . Ἐπειδὴ δὲ διὰ $x = \alpha$ θὰ εἶναι $E = 0$, ἡ ἰσότης

(1) γίνεται $0=f(\alpha)+c$, εκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $c=-f(\alpha)$, ὁπότε $E=f(x)-f(\alpha)$. Αὕτη διὰ $x=(OA')=\beta$ δίδει $(ABB'A')=f(\beta)-f(\alpha)$. Ἡ διαφορὰ $f(\beta)-f(\alpha)$ παρίσταται συμβολικῶς

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) dx,$$

ἐὰν $f'(x)=\sigma(x)$ καὶ καλεῖται **ὠρισμένον ὀλοκλήρωμα**.

Τὰ α καὶ β καλοῦνται **ὄρια** τοῦ ὀλοκληρώματος, τὸ μὲν α κατώτερον, τὸ δὲ β ἀνώτερον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ $\int \sigma(x) dx$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀόριστον ὀλοκλήρωμα**. "Ωστε :

Ἐὰν δοθῇ καμπύλη παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(x)$, ὀρισθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα B καὶ B' ἔχοντα ἀντιστοιχῶς τετμημένας α καὶ β , τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου $(ABB'A')$ θὰ εἶναι :

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) dx = f(\beta) - f(\alpha), \text{ ἐὰν } f'(x) = \sigma(x).$$

Ἀσκήσεις

665. Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 - 5x + 6$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν τομῶν τῆς $x'x$ καὶ τῆς καμπύλης ταύτης.

666. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν συνάρτησιν $x^2 - 6x + 5$.

667. Ἐὰν B εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις $\psi = x^2 + 2x - 3$ τέμνει τὸν ἄξονα $\psi'\psi$, καὶ A' καὶ A αἱ τομαὶ μὲ τὸν ἄξονα $x'x$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν $A'OB$ καὶ OBA .

668. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi = \eta \mu x$ ἀπὸ 0 ἕως π .

669. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς συνημιτονοειδοῦς $\psi = \sigma \nu x$ ἀπὸ θ ἕως $\frac{\pi}{2}$.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

	Σελίς
Όρισμός τῆς Ἀλγέβρας καὶ σύντομος ἱστορικὴ ἐπισκόπησις αὐτῆς	5 - 7
Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ	8 - 12
Γραφικὴ παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν	12 - 14
Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος	14 - 15
Πράξεις μὲ σχετικούς ἀριθμούς (Πρόσθεσις)	16 - 19
Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως	19 - 21
Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις ἀθροίσματος	21 - 22
Ἀφαίρεσις	22 - 24
Ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα	24 - 28
Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις διαφορᾶς σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος	28 - 29
Πολλαπλασιασμὸς	29 - 31
Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ $+1$ ἢ ἐπὶ -1	32 - 33
Διαίρεσις	33 - 35
Κλάσματα ἀλγεβρικά	36 - 38
Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας φυσικοὺς ἀριθμούς	38 - 39
Περὶ τῶν συμβόλων α^1 καὶ α^0 ὡς δυνάμεων	39
Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων	40 - 43
Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς	44 - 45
Περὶ ἀνισοτήτων μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν	45 - 47
Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων	47 - 49
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου I	49 - 51

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	52 - 53
Εἶδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	53 - 54
Περὶ μονωνύμων	54 - 56
Ὁμοία μονώνυμα	56 - 57
Πρόσθεσις μονωνύμων	57 - 58
Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως	58 - 59
Περὶ πολυνύμων	60 - 62
Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυνύμων (Πρόσθεσις πολυνύμων)	62 - 63

	Σελίς
Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	63 - 65
Περὶ παρενθέσεως καὶ ἀγκυλῶν	65 - 67
Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων	67 - 68
Γινόμενον πολωνύμου ἐπὶ μονωνύμου	68 - 69
Γινόμενον πολωνύμων	69 - 71
Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοὶ	71 - 72
Διαιρέσις ἀκεραίων μονωνύμων	72 - 73
Διαιρέσις πολωνύμου διὰ μονωνύμου	73 - 74
Διαιρέσις πολωνύμου διὰ πολωνύμου	75 - 81
Ὑπόλοιπον διαιρέσεως πολωνύμου περιέχοντος τὸ x διὰ τῶν $x \pm \alpha$ ἢ διὰ τοῦ $\alpha x \pm \beta$	81 - 83
Πηλικά τῶν διαιρέσεων $x^m \pm \alpha^m$ διὰ $x \pm \alpha$	83 - 85
Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόν- των (περιπτώσεις ἐννέα)	85 - 89
Μ κ δ. καὶ ἑ.κ.τ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων	89 - 90
Περὶ ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	91
Ἰδιότητες ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	91 - 93
Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$	94 - 97
Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	97 - 98
Πολλαπλασιασμός καὶ διαιρέσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων	98 - 100
Σύνθετα κλάσματα	100 - 101
Περὶ λήψις περιεχομένων κεφαλαίου II	101 - 103

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον—Ὅρισμοὶ καὶ ἰδιότητες ἐξισώσεων	104 - 108
Ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως	108 - 110
Λύσις ἐξισώσεως Α' βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον	110 - 111
Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$	111 - 112
Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$	112 - 113
Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων	113 - 114
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος δὲν ἔχει περιορισμόν	115 - 116
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς	116 - 117
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος θε- τικὸς	117 - 118
Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος περιέχεται μεταξὺ ὁρίων	119 - 120
Προβλήματα γενικά	120 - 124
Περὶ συναρτήσεων.—Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως	124 - 126
Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως	126
Ἀπεικόνισις τιμῶν συναρτήσεως	126 - 130

Γραφική παράσταση της συναρτήσεως $\psi = ax + b$	Σελίς 130 - 132
Γραφική λύσις τῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ	133
Περὶ ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον	133 - 136
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου III	136 - 137

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ	138
Ἰδιότητες τῶν συστημάτων	139 - 140
Μέθοδοι λύσεως συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστους	140
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν	140 - 143
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως	143 - 144
Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως	144 - 145
Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς $\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$	146 - 148
Λύσις τοῦ συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \end{cases}$	148 - 149
Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἄγνωστους	149 - 153
Συστήματα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἄγνωστους	153 - 157
Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων	157 - 160
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ	160
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἄγνωστους	160 - 163
Προβλήματα συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἄγνωστους	163 - 165
Περίληψις περιεχομένου κεφαλαίου IV	165 - 167

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ τῶν ριζῶν σχετικῶν ἀριθμῶν	168
Ἰδιότητες τῶν ριζῶν	168 - 174
Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς	174 - 177
Περὶ τῆς ρίζης μονωνύμων	177 - 178
Περὶ ὁρίων	178 - 180
Ἰδιότητες τῶν ὁρίων	180 - 181
Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν	182 - 185
Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	185 - 186
Πράξεις ἐπὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	186 - 187
Ἰδιότητες τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν	187 - 188

Σημεία οριζόμενα με μιγάδας αριθμούς	Σελίς 188 - 190
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου V	190 - 191

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περί εξισώσεων δευτέρου βαθμού	192
Ἰδιότητες τῶν εξισώσεων	192 - 193
Λύσις τῆς εξισώσεως $ax^2 + \gamma = 0$	193 - 194
Λύσις τῆς εξισώσεως $ax^2 + \beta x = 0$	194 - 195
Λύσις τῆς εξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	195 - 197
Ἐξισώσεις λυόμεναι με βοηθητικούς ἀγνώστους	197
Περί τοῦ εἶδους τῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	198 - 199
Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς εξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	199 - 201
Περί τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$	202
Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων πα- ραγόντων ὡς πρὸς x	202 - 203
Εὗρεσις τριωνύμου β' βαθμοῦ ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ	203 - 205
Πρόσημα τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ..	205 - 206
Θέσις ἀριθμοῦ (πραγματικοῦ) ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου	206 - 208
Εὗρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ κατὰ προσέγγισιν	208 - 209
Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ	209 - 213
Περί τῶν τιμῶν τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ διὰ πάσας τὰ πρα- γματικὰς τιμὰς τοῦ x	213 - 216
Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = ax^2 + \beta x + \gamma$	216 - 220
Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$	220 - 226
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VI	226 - 227

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς εξισώσεις β' βαθμοῦ	228
Διτετράγωνοι εξισώσεις	228 - 229
Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $ax^4 + \beta x^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων	229 - 231
Τροπὴ διπλῶν τινῶν ριζικῶν εἰς ἀπλᾶ	231 - 232
Ἐξισώσεις με ριζικὰ β' καὶ ἀνωτέρας τῆς β' τάξεως	232 - 236
Περί ἀντιστρόφων εξισώσεων	236 - 240
Ἐξισώσεις διώνυμοι	240 - 242
Ἐξισώσεις α' καὶ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώ- στου	242 - 244
Λύσεις τῆς εξισώσεως τῆς μορφῆς $a x ^2 + \beta x + \gamma = 0$	244
Συστήματα δευτέρου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ	245 - 251

Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ	251 - 255
Προβλήματα γενικά	255 - 260
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VII	260 - 262

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περί προόδων.—Πρόοδοι ἀριθμητικά	263 - 264
Παρεμβολή ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου	264 - 265
Ἐθροίσμα ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου	265 - 269
Πρόοδοι γεωμετρικά	269 - 271
Παρεμβολή ὄρων γεωμετρικῆς προόδου	271 - 272
Ἐθροίσμα ὄρων γεωμετρικῆς προόδου	272 - 273
Ἐθροίσμα ἀπείρων ὄρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου	273 - 275
Ἀρμονική πρόοδος	275 - 276
Περί λογαρίθμων	276 - 279
Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων	279 - 280
Περί τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου	280 - 283
Τροπή ἀρνητικοῦ δεκαδικοῦ εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν	283 - 285
Λογάρισμος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν	285 - 286
Περί λογαριθμικῶν πινάκων	286 - 289
Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων	289 - 291
Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων	291 - 292
Περί ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων	292 - 295
Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ	296 - 300
Προβλήματα ἴσων καταθέσεων	300 - 302
Προβλήματα χρεωλυσίας	302 - 307
Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VIII	307 - 309

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

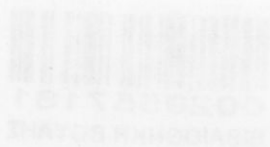
Ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν	310
Ἀπόλυτος τιμὴ ἄθροίσματος ἀριθμῶν	310 - 311
Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἀριθμῶν	312
Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο ἀριθμῶν	312
Ἀπόλυτος τιμὴ δυνάμεως ἀριθμοῦ	312
Περί ἀκολουθίας ἀριθμῶν	312 - 314
Πότε μία ἀκολουθία τείνει πρὸς τὸ μηδέν	314 - 315
Ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν	316 - 319
Περί ὁρίου μεταβλητῆς ποσότητος	319
Περί ὁρίου ἄθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, δυνάμεως μεταβλητῶν ποσοτήτων	319 - 321

Πώς διακρίνομεν ἄν μεταβλητὴ ποσότης ἔχη ὄριον	321 - 324
Περὶ συνεχείας τῶν συναρτήσεων	324 - 326

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Περὶ παραγῶγων	327 - 329
Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγῶγου	329 - 330
Παράγωγος συναρτήσεως ἄλλης συναρτήσεως	330 - 331
Παράγωγος ἀθροίσματος συναρτήσεων τοῦ x	331
Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων τοῦ x	332
Παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν τοῦ x	332 - 333
Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων τοῦ x	333 - 334
Παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ x	334
Παράγωγοι διαφόρων τάξεων	335
Παράγωγοι κυκλικῶν συναρτήσεων	335 - 336
Ὅριον τοῦ $\frac{x}{\eta\mu x}$, ὅταν $\alpha\eta x = 0$	336 - 337
Παράγωγος ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης, $\sigma\phi x$, $\tau\epsilon\mu x$, $\sigma\tau\epsilon\mu x$	337 - 338
Χρήσις τῶν παραγῶγων διὰ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων	338
Θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων	338 - 339
Θεώρημα τοῦ Roll	339 - 343
Μέθοδος σπουδῆς τῶν μεταβολῶν συναρτήσεων τῇ βοήθειᾳ τῶν παραγῶγων	343 - 346
Διαφορικὸν συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς	346 - 347
Παράγωγος καὶ διαφορικὸν ἐμβαδοῦ	347 - 348
Ἀρχικαὶ συναρτήσεις καὶ χρησιμότης αὐτῶν	348 - 349
Ἀρχικαὶ συναρτήσεις ὠρισμένων συναρτήσεων	349 - 350
Χρησιμότης ἀρχικῶν συναρτήσεων	350 - 351
Πίναξ περιεχομένων	353





ΕΛΛΑΣ



21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ



0020557181
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΙΔ' 1972 (ΙΧ) - ΑΝΤ. 62.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2235 / 5 - 4 - 1972

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ : ΑΛ. & ΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ - ΒΙΒΛ. Π. ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - Κ. ΚΟΥΚΙΑΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

