

61. Ήδη ανέπτυξε
φωδότημα. Παρά λήθη λήθη λήθη

1879.714
48
αντίστασης
ΠΕΡΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

ΤΗΣ ΥΛΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ Ι. ΣΟΥΛΗ

ΠΤΥΧΙΟΓΡΟΦ ΤΗΣ ΕΝ ΠΑΡΙΣΙΟΙΣ ΣΧΟΛΗΣ ΤΩΝ ΓΕΩΓΡΑΦΟΠΟΙΩΝ, ΝΟΜΟΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΗ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛῃ



Α. Ι. Σουλής
ΑΘΗΝΗΣΙ

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΗΣ ΦΙΛΟΚΑΛΙΑΣ

33 — ΟΔΟΣ ΣΟΦΟΚΛΕΟΥΣ — 33

1879



ΤΩ ΣΕΒΑΣΤΩ ΜΟΙ ΘΕΙΩ

ΚΥΡΙΩ ΚΥΡΙΩ

ΣΩΤΗΡΙΩ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΩ

ΠΡΟΕΔΡΩ ΤΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΒΟΥΛΗΣ

ΚΤΑ. ΚΤΑ. ΚΤΑ.

ΕΙΣ ΕΝΔΕΙΞΙΝ

ΒΑΘΥΤΑΤΟΥ ΣΕΒΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΞΑΙΡΕΤΟΥ ΥΠΟΛΗΨΕΩΣ

ΤΗΝΔΕ ΤΗΝ ΣΥΓΓΡΑΦΗΝ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ

ΤΟΙΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΑΙΣ

Ἀντὶ παντός προλόγου νομίζομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς ὅσα ἐν τῇ ἡμετέρᾳ περὶ τοῦ παρόντος ἡμῶν συγγράμματος ἀγγελία εἶπομεν καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὸν σκοπὸν καὶ τοὺς λόγους, δι' οὓς ἀπεφασίσαμεν τὴν διὰ τοῦ τύπου ἔκδοσιν αὐτοῦ. Τοῦτο μόνον ἄς μᾶς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἀντὶ 14 περίπου τυπογραφικῶν φύλλων τὸ ἔργον ἡμῶν ἀπετελέσθη ἐξ 23, καὶ ἀντὶ 120 περίπου ξυλογραφικῶν σχημάτων παρενεθέσαμεν 165 τοιαῦτα. Εἰς τὴν σπουδαίαν δὲ ταύτην αὐξήσιν προέβημεν θελήσαντες νὰ καταστήσωμεν τὸ ἡμέτερον ἔργον ὅσῳ τὸ δυνατόν πληρέστερον, πρακτικώτερον καὶ χρησιμώτερον καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς παρ' ἡμῖν πρακτικοὺς Ἀρχιτέκτονας, οἵτινες εἰς πᾶσαν περίστασιν δύνανται νὰ συμβουλευώμενται πάντοτε ἐπιτυχῶς τοὺς ἐν αὐτῷ πολυαρίθμους Πίνακας, ἐν οἷς θέλουσιν εὐρίσκει ἀμέσως καὶ ἄνευ οὐδενὸς ὑπολογισμοῦ πᾶν ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὴν οἰκονομικὴν καὶ σερεῶν κατασκευὴν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἐκτελουμένων ἔργων, καθιστάμενοι οὕτω καὶ εἰς ἑαυτοὺς καὶ εἰς τοὺς πελάτας αὐτῶν ὠφελιμώτεροι.

Ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου, ἂν καὶ ὑπέστη τοσαύτην ὥς ὅλας τὰς ἐπόψεις αὐξήσιν, θέλει μείνει ἡ αὐτὴ διὰ τοὺς εὐαρεσθηθέντας μετὰ τοσαύτης προθυμίας νὰ παράσχωσιν ἡμῖν τὴν ἑαυτῶν συνδρομὴν συνδρομητάς, διὰ δὲ τοὺς μὴ τοιούτους ὠρίσθῃ μόνον εἰς δραχμὰς νέας 12.

Παρακαλοῦμεν ἐν τέλει πάντας τοὺς Κυρίους συνδρομητάς ἡμῶν νὰ δεχθῶσι τὰς ἡμετέρας εὐχαριστίας, ἰδίᾳ δὲ τὸν τότε Ὑπουργὸν τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως ἀξιότιμον Κ^{ον} Θ. Δηλιγιάννην, ὅστις προθυμώτατα ἐζήτησε καὶ ἔτυχε διὰ τὸ ἡμέτερον ἔργον παρὰ τῆς Βουλῆς πιστώσεως διὰ 40 ἀντίτυπα.

Ἄν οἱ κατὰ καιροὺς Ὑπουργοὶ τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως ἐδείκνυνον τὴν αὐτὴν νοήμονα καὶ πρόθυμον εἰς τοιαῦτα ἔργα ὑποστήριξιν, οἷαν ὁ ἀξιότιμος Κ^{ος} Θ. Δηλιγιάννης, βεβαίως ἡ ἡμετέρα πατρίς ἤθελε πρὸ πολλοῦ ἔχει καὶ ἄλλα πολλὰ ἔργα κατὰ πολὺ ἀνώτερα καὶ χρησιμώτερα τοῦ ἡμετέρου.

Ἰδοὺ τί ἐδημοσιεύομεν τότε διὰ τῆς ἀγγελίας ἡμῶν :

« Ἐν τῶν σπουδαιοτέρων καὶ ἀναγκαιοτάτων εἰς τοὺς Ἀρχιτέκτονας καὶ Μηχανικοὺς μαθημάτων εἶναι ἀναντιρρήτως καὶ τὸ περὶ **ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΓΑΛΗΣ** πραγματευόμενον μέρος τῆς Μηχανικῆς. Δι' αὐτοῦ διδασκόμεθα πῶς δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν τὰ πάχνη τῶν πρὸς οἰκοδομὴν οἰκιῶν, κατασκευὴν ξυλίνων καὶ σιδηρῶν γεφυρῶν, στεγῶν κτλ. χρησίμων οὐσιῶν, δι' ὧν αἱ κατασκευαζόμεναι οἰκοδομαί, γέφυραι, στέγαι κτλ. νὰ ᾧσιν ὅσω τὸ δυνατόν οἰκονομικώτεραι καὶ ἀσφαλέστεραι. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἡμέτεροι Ἀρχιτέκτονες καὶ Μηχανικοί, οἱ μὴ γνωρίζοντες ξένας γλώσσας στεροῦνται τοιοῦτου βιβλίου, ἰδίᾳ δὲ οἱ ἐν τῷ ἡμέτέρῳ Πολυτεχνείῳ διδασκόμενοι τὴν ἀρχιτεκτονικὴν καὶ μηχανικὴν, ἐνομίσαμεν ὅτι ἡδυνάμεθα νὰ φανῶμεν κατὰ τι χρήσιμοι αὐτοῖς ἐκδίδοντες διὰ τοῦ τύπου τὸ ὑφ' ἡμῶν πρὸ δύο περίπου ἐτῶν διδασκόμενον ἐν τῷ ἡμέτέρῳ Πολυτεχνείῳ περὶ ἀντιστάσεως τῆς ὕλης μάθημα.

» Τὸ ἔργον ἡμῶν τοῦτο θέλει ἀποτελεῖσθαι ἐκ 14 περίπου τυπογραφικῶν φύλλων καὶ θέλει περιέχει 120 περίπου ξυλογραφήματα· ἐπειδὴ δὲ ἡ χρῆσις αὐτοῦ εἶναι λίαν περιορισμένη, ἐνομίσαμεν ἀπολύτως ἀναγκαῖον νὰ ἐπικαλεσθῶμεν τὴν συνδρομὴν τῆς Σ. Κυβερνήσεως καὶ πάντων τῶν ἐνδιαφερομένων.

» Ἡ τιμὴ τοῦ βιβλίου ὠρίσθη εἰς δραχμὰς νέας 10, πληρωτέας ἅμα τῇ παραλαβῇ αὐτοῦ. »

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 3 Ἰανουαρίου 1879

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΣΟΥΛΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝ Τῷ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙῳ ΑΘΗΝΑΝ
ΚΑΙ Τῇ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚῇ ΣΧΟΛῇ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἀντικείμενον τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης.....	Σελ. 1
Τρόπος ἐνεργείας τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πρὸς διάρρηξιν σώματος τινος.....	2
Διάρρηξις τῶν σωμάτων κατ' ἐφελκυσμόν.....	2
» » » κατὰ διάτμησιν.....	2
» » » κατὰ θλίψιν.....	2
» » » κατὰ κάμψιν.....	2
» » » κατὰ στρέψιν.....	3

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ

Σχέσις τῆς ἐπιμηκύνσεως ῥάβδου τινὸς πρὸς τὸ φορτίον, πρὸς τὸ μήκος αὐτῆς, πρὸς τὴν ἐγκάρσιον αὐτῆς τομὴν καὶ πρὸς τὴν ἐλαστικότητα τῆς ὕλης.....	4
Σχέσις τοῦ ἐφελκύνοντος βάρους πρὸς τὴν τάνυσιν τῶν μορίων τῆς ἐφελκυομένης ῥάβδου.....	7
Πίναξ περιέχων τὰς ὕλας, τὰς τιμὰς τοῦ $\frac{\mu}{M} = \epsilon$ ἀναφερομένης εἰς τὰ παριστῶντα τὰ ὅρια τῆς ἐλαστικότητος τῶν ὑλῶν φορτία, αὐτὰ τὰ φορτία καὶ τὰς τιμὰς τοῦ E.....	9
Πίναξ περιέχων τὰ βάρη, τὰ παράγοντα αὐθωρεὶ διὰ τῆς ἐφελκύνσεως τὴν διάρρηξιν τῶν σωμάτων, καὶ τὰ φορτία, εἰς τὸν ἐφελκυσμόν τῶν ὁπίων δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν τὰ σώματα ἄνευ κινδύνου.....	12
Τύπος, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν ω ἐφελκυομένης τινὸς ῥάβδου ὑπὸ δεδομένου φορτίου καὶ τάνάπαλιν.....	15
Προσδιορισμὸς τοῦ πάχους τῶν λεβήτων τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν.....	16
Ἐμπειρικοὶ τύποι πρὸς εὑρεσιν τοῦ πάχους τῶν λεβήτων, σιδηρῶν σωλήνων κτλ.....	20
Τύποι, δι' ὧν προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν σφαιρῶν.....	22

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ

Τύπος, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν ω βάρβδου τινὸς ὑποκειμένης εἰς τὴν διάτμησιν δεδομένου φορτίου καὶ τάνάπαλιν.....	Σελ. 24
Περὶ παλυλίστων ἢ δικεφάλων ἤλων	26
Περὶ κοχλιοφόρων ἤλων	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΘΑΙΓΕΩΣ

Σχέσις τῆς σμικρύνσεως δοκοῦ τινος πρὸς τὸ θλίβον φορτίον, πρὸς τὸ μῆκος αὐτῆς, πρὸς τὴν ἐγκάρσιον αὐτῆς τομὴν καὶ πρὸς τὴν ἐλαστικότητα τῆς ὕλης	33
Σχέσις μεταξὺ τοῦ ὕψους M στύλου τινός, τῆς μικροτέρας διαστάσεως α τῆς τομῆς αὐτοῦ καὶ τοῦ θλίβοντος φορτίου.....	36
Πίναξ Ῥοντλέ περιέχων τὰ φορτία, εἰς ᾗ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑπο- βάλωμεν εἰς θλίψιν τὰ σώματα.....	37
Τύπος, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν ω θλιβομένης τινὸς δοκοῦ ὑπὸ δεδομένου φορτίου καὶ τάνάπαλιν	38
Τύποι τοῦ Ἀγγλοῦ φυσικοῦ Ὀδγκινσῶνος πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐγκαρ- σίου τομῆς τῶν ξυλίνων στύλων.....	43
Τύποι τοῦ Ἀγγλοῦ φυσικοῦ Ὀδγκινσῶνος πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ἐκ χυτοσιδήρου στύλων	47
Τύποι τοῦ Ἀγγλοῦ μηχανικοῦ Λόβε πρὸς εὐρεσιν τῆς τομῆς τῶν ἐκ καθαροῦ σιδήρου καὶ ἐκ χυτοσιδήρου στύλων.....	51
Πίναξ περιέχων τὰ φορτία καὶ τὰς διαμέτρους τῶν πλήρη κυλινδρι- κῶν στύλων ἐκ καθαροῦ σιδήρου ἢ ἐκ χυτοσιδήρου.....	53
Πίναξ περιέχων τὰ ἐλάχιστα πάχη τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν χυτηρίων εἰς τοὺς ἐκ χυτοσιδήρου κοίλους στύλους	54
Περὶ λίθων καὶ λιθοδομῆς.....	59
Πίναξ περιέχων τὰ φορτία, εἰς τὴν διαρκῆ θλίψιν τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν τὸ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας στύ- λου ἐκ φυσικῶν ἢ τεχνιτῶν λίθων καὶ ἀποτελουμένου ἐξ ἐνός ἀδιαίρετου τεμαχίου	62
Τύπος τοῦ Ἀγγλοῦ φυσικοῦ Φερμπαῖν πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πά- χους τῶν σωλῆνων, τῶν ὑποκειμένων εἰς θλίψιν.....	67
Τόξα ἐκ χυτοῦ σιδήρου πρὸς κατασκευὴν σιδηρῶν γεφυρῶν.....	68

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΑΜΨΕΩΣ

Σελ.

Δοκός πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτερον καὶ φέ- ρουσα εἰς τοῦτο φορτίον καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν	74
Ῥοπαὶ ἀδρανείας ἐπιφανειῶν τινῶν	83
Παρατήρησις τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Μοραντιέ ὡς πρὸς τὴν θλίψιν, εἰς ἣν δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν ἀσφαλῶς τὰς σιδηρᾶς δοκοὺς...	86
Δοκός πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν τῶν ἄκρων αὐτῆς, ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτε- ρον καὶ φέρουσα φορτία ἐνεργοῦντα ἐπὶ δεδομένων σημείων αὐτῆς καὶ καθέτως τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν.....	89
Δοκός πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτερον καὶ φέ- ρουσα φορτίον, ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μήκος καὶ πλάτος αὐτῆς καὶ ἐνεργοῦν καθέτως ἐπὶ τῶν ἰνῶν τῆς δοκοῦ	90
Ἐξίσωσις τῆς ἐγκάρσιου τομῆς δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης Β φορτίον εἰς τὸ ἐλεύ- θερον ἄκρον, καὶ ὑπ' ὅψιν λαμβανομένου καὶ τοῦ ἰδίου αὐτῆς βάρους.....	91
Ἐξίσωσις τῆς ἐγκάρσιου τομῆς δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον, φερούσης δὲ φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μήκος καὶ πλάτος αὐτῆς καὶ ὑπ' ὅψιν λαμβανομένου καὶ τοῦ ἰδίου αὐτῆς βάρους.....	94
Στερεὰ ἴσης ἀντιστάσεως.....	95
Δοκός πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτερον καὶ φέ- ρουσα φορτίον Β εἰς τοῦτο καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν, πρὸς δὲ ὑποκειμένης ταῦτοχρόνως καὶ εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς δυνάμεως Τ ἐνεργοῦσης κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἰνῶν	102
Δοκός στηριζομένη διὰ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων ἐπὶ δύο στερεῶν καὶ ισοῦψῶν στηριγμάτων καὶ φέρουσα φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν.....	106
Στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως τῆς ἀνωτέρω δοκοῦ	111
Δοκός στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψῶν στηριγμά- των καὶ φέρουσα φορτίον ὅχι εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἀλλ' εἰς ἕτε- ρόν τι σημεῖον.....	112
Δοκός στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψῶν στηριγμά- των καὶ φέρουσα φορτίον ἔνθεν καὶ ἔνθεν τοῦ μέσου αὐτῆς...	113
Δοκός στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψῶν στηριγμά-	

των καὶ φέρουσα πολλὰ φορτία ἐνεργοῦντα εἰς πολλὰ σημεῖα	Σελ. 116
Δοκός στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψων στηριγμάτων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς	118
Στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως δοκοῦ στηριζομένης διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψων στηριγμάτων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένης	121
Ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ στηριζομένης διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψων στηριγμάτων, ὁμοιομόρφως φορτωμένης καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ ὑπ' ὅψιν λαμβανομένου καὶ τοῦ ἑαυτῆς βάρους	124
Δοκός πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ φέρουσα φορτίον Β εἰς τὸ μέσον. Ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς	126
Δοκός πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη	131
Διερεῦνήσεις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένης	131
Στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη	134
Δοκός πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς, στηριζομένη διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος καὶ φέρουσα Β φορτίον εἰς τι σημεῖον αὐτῆς	139
Διερεῦνήσεις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς στηριζομένης διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος καὶ φερούσης Β φορτίον εἰς τι σημεῖον	142
Δοκός πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς, στηριζομένη διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος καὶ φέρουσα φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς	143
Διερεῦνήσεις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς, στηριζομένης διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη	144
Ἀνακεφαλαίωσις τῶν τύπων τῆς κάμψεως	149
Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῶν ζυλίνων δοκῶν, τῶν ὑποκειμένων εἰς κάμψιν	153
Περὶ ἀξόνων ὑδραυλικῶν τροχῶν, ὀδοντοτῶν τροχῶν κλπ.	155
Περὶ βέλους	162

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΤΡΕΨΕΩΣ

Σελ.

Γενική ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ τινος ὑποκειμένης εἰς στρέψιν	187
Πίναξ περιέχων τοὺς ἐμπειρικοὺς τύπους, δι' ὧν ὑπολογίζονται αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν εἰς στρέψιν ὑποκειμένων σωμάτων	193

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΓΑΛΗΣ
ΕΙΣ ΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΡΩΝ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣ ΤΙΝΟΣ
Ἡ ΓΕΦΥΡΑΣ Ἡ ΜΗΧΑΝΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΑΤΩΜΑΤΩΝ

Περὶ πατωμάτων	199
Πίναξ περιέχων τὰς διαστάσεις, ἃς πρέπει νὰ ἔχωσιν αἱ δοκοὶ τῶν πατωμάτων	204

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΤΕΓΩΝ

Περὶ ξυλίνου ἀπλοῦ ζευκτοῦ	214
Περὶ ξυλίνου συνθέτου ζευκτοῦ	220
Ζευκτὸν Παλαδίου	222
Πίναξ περιέχων τὰς κλίσεις τῶν ζευκτῶν	224
Πίναξ περιέχων τὰς ὑπὸ τοῦ ἀνέμου ἐνεργουμένας θλίψεις ἐπὶ ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας στέγης	225
Πίναξ περιέχων τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον φορτίον τῶν συνήθων στεγῶν, κτλ.	226
Πίναξ περιέχων τοὺς ἀπλουστεροὺς τύπους, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τῶν ἀμειβόντων τῶν ξυλίνων ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν τῆς στέγης Παλαδίου	228

	Σελ.
Πίναξ δίδων τὰς διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τῶν ξυλίνων δοκῶν, τῶν ἀποτελουσῶν τοὺς ἀμείβοντας τῶν ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν τῆς στέγης Παλαδίου.	230
Πίναξ περιέχων τοὺς ἀπλουστεροὺς τύπους, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τῶν ἀμειβόντων τῶν ξυλίνων συνθέτων ζευκτῶν. .	234
Πίναξ δίδων τὰς διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τῶν ξυλίνων δοκῶν τῶν ἀποτελουσῶν τοὺς ἀμείβοντας τῶν συνθέτων ζευκτῶν. .	236
Πίναξ δίδων τὰς διαστάσεις τῶν στρωτήρων, τῶν ὑποβασταζόντων ἐλαφρὰν ὀροφὴν ἄνευ πατώματος δι' ἀπλᾶ καὶ σύνθετα ζευκτὰ	239
Πίναξ δίδων τὰς διαστάσεις τῶν στρωτήρων, τῶν ὑποβασταζόντων πᾶ- τωμα, ἐφ' οὗ ἀποθηκεύονται ἀγροτικά προϊόντα.	241
Περὶ σιδηρῶν ζευκτῶν.	242

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

ΠΕΡΙ ΓΕΦΥΡΩΝ

Συνήθεις ξύλιναι γέφυραι	249
Γέφυραι κατὰ τὸ ἀμερικανικὸν σύστημα	257
Εὐθύγραμμαι σιδηραὶ γέφυραι.	284
Ἐφαρμογὴ τῆς θεωρίας τῶν σιδηρῶν εὐθυγράμμων γεφυρῶν ἐπὶ τινος παραδείγματος.	288
Προσδιορισμὸς τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίων, δι' ὧν θὰ συν- δεῶνται πρὸς ἄλληλα δύο τεμάχια τῆς καθέτου πλακὸς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ.	307
Προσδιορισμὸς τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίων δι' ὧν θὰ συν- δεῶνται πρὸς ἄλληλα δύο τεμάχια τῆς ὀριζοντίου πλακὸς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ.	310
Προσδιορισμὸς τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίων, δι' ὧν συν- δεῶνται αἱ ὀριζόντιαι πλάκες, πλακὸς δοκοῦ τινος ἐχούσης τομὴν διπλοῦν ταῦ μετὰ καθέτου πλακὸς.	312

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΗΧΑΝΩΝ

Προσδιορισμὸς τοῦ πάχους τοῦ ἀτμοκυλίνδρου	318
Προσδιορισμὸς τῆς διαμέτρου τοῦ βάντρου.	319
Προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τοῦ διωστήρος καὶ τοῦ ζυγώματος.	320

Προσδιορισμός τῆς διαμέτρου τῶν κομβίων ἢ στροφύγγων	321
Προσδιορισμός τῶν διαστάσεων τοῦ ζυγοῦ.....	323
Προσδιορισμός τῶν διαστάσεων τοῦ σφονδύλου.....	324

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΙΝ ΧΩΜΑΤΩΝ ΤΟΙΧΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΒΑΘΡΩΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΤΩΝ ΓΕΦΥΡΩΝ

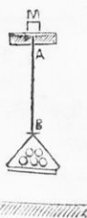
Εὔρεσις τοῦ γενικοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζεται τὸ πάχος τῶν τοίχων τῆς ὑποστηρίξεως τῶν χωμάτων ἐπιχώσεώς τινος.....	329
Πίναξ περιέχων τοὺς εἰδικωτέρους τύπους, δι' ὧν προσδιορίζομεν τὰ πάχη τῶν τοίχων τῆς ὑποστηρίξεως τῶν χωμάτων ἐπιχώ- σεώς τινος.....	333
Εὔρεσις τοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν τοίχων τῶν δεξαμενῶν	334
Εὔρεσις τοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν βάθρων τῶν γεφυρῶν.....	337
Εὔρεσις τοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν ἀκροβάθρων τῶν ἐχουσῶν ἄντυγα ἡμικύκλιον γεφυρῶν.....	339
Εὔρεσις τοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν ἀκροβάθρων τῶν ἐχουσῶν ἄντυγα τόξον κύκλου γεφυρῶν.....	344
Εὔρεσις τοῦ τύπου, δι' οὗ προσδιορίζομεν τὸ πάχος τῶν ἀκροβάθρων τῶν ἐχουσῶν ἄντυγα λαβὴν κανίστρου γεφυρῶν	347
Πίναξ περιέχων τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων, ἐχουσῶν ἄντυγα ἡμικύκλιον.....	353
Πίναξ περιέχων τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων, ἐχουσῶν ἄντυγα τόξον κύκλου	354
Πίναξ περιέχων τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων, ἐχουσῶν ἄντυγα λαβὴν κανίστρου.....	357

ΠΕΡΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἡ περὶ ἀντιστάσεως τῆς ὕλης πραγματευομένη ἐπιστήμη στηρίζεται ἐπὶ τῆς Φυσικῆς καὶ τῆς Μηχανικῆς. Ἡ μὲν Φυσικὴ παρέχει αὐτῇ τὰς ἀναγκαίας γνώσεις περὶ συστάσεως τῶν διαφόρων σωμάτων καὶ ἰδίως ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὴν πρὸς ἄλληλα ἔλξιν καὶ ὥθησιν τῶν μορίων αὐτῶν, ἐκ δὲ τῆς Μηχανικῆς δανεῖζεται τοὺς νόμους τῆς ἰσορροπίας καὶ κινήσεως τῶν σωμάτων.

Γινώσκομεν πάντες καὶ ἰδίῳις ὁμμασι βλέπομεν καθ' ἐκάστην, ὅτι τὰ φυσικὰ σώματα ὑπόκεινται εἰς θραύσεις ἢ ρήξεις καὶ διαιρέσεις, ὅταν ἐπ' αὐτῶν ἐνεργῶσι μεγάλαι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Παραδείγμα-τος χάριν, τὸ σιδηροῦν σύρμα AB (Σχ. 1), οὗτινος τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων εἶναι στερεῶς προσηλωμένον εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ δὲ ἕτερον φέρει πλάστιγγα, μακύνεται, ὅταν θέτωμεν ἐπὶ τῆς πλάστιγγος βάρος τι, ἢ δὲ μήκυνσις αὐτοῦ αὐξάνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, καθόσον τὰ ἐπὶ τῆς πλάστιγγος τιθέμενα βάρη βαίνουνσι αὐξανόμενα, μέχρις οὗ ἐπὶ τέλους διασπᾶται, ὅταν ταῦτα υπερβῶσιν ὅριόν τι, ὅπερ ἐξαορτᾶται ἐκ τοῦ πάχους τοῦ σύρματος καὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς τοῦτο εἶναι κατασκευασμένον.



Σχ. 1

Ἡ περὶ ἀντιστάσεως τῆς ὕλης πραγματευομένη ἐπιστήμη προσδιορίζει ἐκ τῶν προτέρων διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ, πότε ὑπάρχει κίνδυνος διαρρήξεως ἢ θλάσεως σώματός τινος καὶ πότε δὲν ὑπάρχει, ὅταν αἱ ἐντάσεις τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργουσῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ᾖναι γνωσταί. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις

ἐνεργοῦσι κατὰ πέντε διαφόρους τρόπους πρὸς διάρρηξιν σώματός τινος.

1^{ον} Κατ' ἐφελκυσμὸν ἢ διάτασιν.

2^{ον} Κατὰ διατομὴν ἢ διάτμησιν.

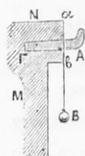
3^{ον} Κατὰ πίεσιν ἢ θλίψιν.

4^{ον} Κατὰ κάμψιν, καὶ

5^{ον} Κατὰ στρέψιν.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργοῦσα δύναμις τείνη νὰ αὐξήσῃ τὸ μῆκος αὐτοῦ (Σχ. 1), καὶ αὐξηθῇ ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε νὰ ἐπιφέρῃ τὴν ῥῆξιν τοῦ σώματος, ἡ οὕτω προκύπτουσα ῥῆξις γίνεται κατ' ἐφελκυσμὸν ἢ διάτασιν.

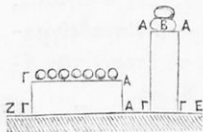
Ἡ προκύπτουσα ῥῆξις γίνεται κατὰ διάτμησιν ἢ διατομὴν, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις ἐνεργῇ κατὰ διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰσῶν τοῦ σώματος καὶ ὑπερβῇ τὸ ὑπὸ τῆς πείρας προσδιωρισμένον ὄριον· π. χ. ὅταν δοκὸς τις ξυλίνη ἢ σιδηρὰ ΓΑ ᾔναι ἐντεθειμένη ἐντὸς τοίχου (Σχ. 2) καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Α ἐφαρμώσωμεν βάρος τι Β ἀρκούντως μέγα, ὥστε νὰ ἐπέλθῃ ἡ ῥῆξις αὐτῆς εἰς τὸ ἐφ' οὗ τὸ βάρος ἐφαρμόζεται σημεῖον Α, τότε ἡ οὕτω προκύπτουσα διάρρηξις τοῦ σώματος γίνεται κατὰ διατομὴν ἢ διάτμησιν.



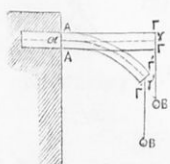
Σχ. 2

Κατὰ πίεσιν ἢ θλίψιν γίνεται ἡ διάρρηξις τοῦ σώματος, ὅταν

ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσα δύναμις τείνη νὰ σμικρύνῃ τὸ μῆκος τοῦ σώματος, καὶ αὐξηθῇ ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε νὰ ἐπιφέρῃ τὴν διάρρηξιν αὐτοῦ, ὡς λ. χ. ὅταν ἐπὶ τινος στήλης ΑΑΓΓ στερεῶς ἐφαρμοσμένης ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ (Σχ. 3 καὶ 4) θέσωμεν ἐπαρκῆ βάρη Β, ὥστε νὰ θραυθῇ αὕτη, τότε ἡ διάρρηξις λέγεται γενομένη κατὰ πίεσιν ἢ θλίψιν.



Σχ. 3 καὶ 4



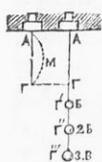
Σχ. 5

Κατὰ κάμψιν γίνεται ἡ διάρρηξις τοῦ σώματος, ὅταν ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσα δύναμις ἐνεργῇ οὕτως, ὥστε μέρος τῶν ἰσῶν τοῦ σώματος νὰ διατείνωνται καὶ μέρος νὰ πιέζονται. Π. χ. ὅταν τὸ βάρος Β ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ ἄκρου Γ τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 5), ἥς τὸ ἕτερον ἄκρον Α εἶναι στερεῶς ἐντετοιχισμένον, τότε αἱ μὲν ἄνωθεν τοῦ ἄξονος αὐτῆς τοῦ σώματος ἐπιμηκύνονται, αἱ δὲ κάτωθεν τούτου σμικρύνονται, τὸ δὲ σῶμα θραύεται, ὅταν ἡ ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τὸν ἄνωτέρω ῥηθέντα τρό-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ

2. Διὰ πειραμάτων ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ἐπιμήκυνσεις, ἃς λαμβάνει ῥάβδος τις ὑποκειμένη εἰς ἐφελκυσμόν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν φορτίων, ὅταν ταῦτα δὲν ὑπερβαίνωσιν ὠρισμένον τι ὅριον, κληθὲν ὅριον τῆς ἐλαστικότητος τῆς ἐξ ἧς ἀποτελεῖται τὸ σῶμα ὕλης. Τὸ ὅριον τοῦτο δι' ἕκαστον σῶμα εὐρέθη διὰ πειραμάτων ἐκτελεσθέντων ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ ἐμπείρων Φυσικῶν καὶ Μηχανικῶν.



Σχ. 7

Πρὸς τοῦτο λαμβάνουσι ῥάβδον τινὰ ΑΓ, σιδηρὰν π. χ., καὶ τὸ μὲν ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς Α καθιστῶσιν ἀκίνητον ὡς παριστᾷ τὸ Σχ. 7, ἐκ δὲ τοῦ ἐτέρου ἄκρου αὐτῆς Γ ἐξαρτῶσι βάρος τι Β, καὶ παρατηροῦσιν ὅτι τότε τὸ ἀρχικὸν μῆκος ΑΓ τῆς ῥάβδου, ὅπερ χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ Μ, αὐξάνει κατὰ ποσότητά τινα ΓΓ' καλουμένην ἐπιμήκυνσιν, ἣν παραστήσωμεν διὰ μ. Διπλασιάζουσιν ἔπειτα τὰ βάρη Β, καὶ παρατηροῦσιν, ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις γίνεται ΓΓ'' διπλασία τῆς πρώτης. Ὄταν τριπλασιάζωσι, τετραπλασιάζωσι κτλ. τὰ βάρη, ἡ ἐπιμήκυνσις γίνεται τριπλασία, τετραπλασία κτλ. μέχρις ὁρίου τινός, πέραν τοῦ ὁποίου ἡ παρατηρηθεῖσα ἀναλογία μεταξὺ τοῦ μεγέθους τῶν βαρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν παραγομένης ἐπιμήκυνσεως παύει ὑφισταμένη. Τὸ ὅριον δὲ τοῦτο, ὅπερ εὐρίσκεται, ὡς προεῖπομεν δι' ἕκαστον σῶμα πειραματικῶς, ὠνομάσθη ὑπὸ τῶν Φυσικῶν καὶ Μηχανικῶν ὅριον τῆς ἐλαστικότητος τοῦ σώματος.

Παρατήρησις 4. Ὄταν τὸ παραγαγὼν τὴν ἐπιμήκυνσιν βάρος Β ἀφαιρῇται, ἡ παραχθεῖσα ἐπιμήκυνσις τοῦ σώματος καταστρέφεται καὶ τὸ σῶμα ἐπανακτᾷ τὸ ἀρχικὸν αὐτοῦ μῆκος, ὅταν τὸ βάρος Β δὲν ᾖ ἴσον ἢ μεγαλειότερον τοῦ προσδιορισθέντος ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος τοῦ σώματος. Τότε δὲ λέγεται συνήθως ὅτι ἡ φυσικὴ ἐλαστικότης τοῦ σώματος δὲν ἠλλοιώθη.

Παρατήρησης 2. Όταν τὸ παραγαγὸν τὴν ἐπιμήκυνσιν βάρους B ᾗναι ἴσον ἢ μεγαλειότερον τοῦ ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος τοῦ σώματος καὶ ἀφαιρεθῇ τοῦτο μετὰ τὴν σιγμιαίαν ἐπ' αὐτοῦ ἐνέργειαν, τότε ἡ ῥάβδος δὲν ἐπανερχεται εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῆς θέσιν, ἀλλὰ διατηρεῖ ἔχως τι τῆς ἐπ' αὐτῆς παραχθείσης ἐπιμηκύνσεως. Όταν δὲ τὸ τοιοῦτο συμβαίνει, τότε λέγουσιν ὅτι ἡ φυσικὴ ἐλαστικότης τοῦ σώματος ἡλλοιώθη.

Παρατήρησης 3. Ἡ φυσικὴ ἐλαστικότης τῶν σωμάτων ἀλλοιοῦται καὶ ὑπὸ βάρους μικροτέρου τοῦ ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος αὐτοῦ, ἐνίοτε δὲ καὶ ὑπὸ βάρους ἴσου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁρίου, ὅταν τοῦτο, ἀντὶ νὰ ἐνεργήσῃ ἐπ' ἐλάχιστον χρόνον, ἀφίεται ἐνεργοῦν ἐπὶ πολὺ. Τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει ὅτι ἡ διάρκεια τῆς ἐνεργείας τοῦ βάρους ἔχει ἐπὶ ῥοίαν ἐπὶ τῆς ἐλαστικότητος τῶν σωμάτων.

3. Διὰ πειραμάτων ἀπεδείχθη ἐπίσης, ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς τῆς ῥάβδου ΑΓ, δηλ. ἂν λάβωμεν δύο σιδηρᾶς ῥάβδους ΑΓ καὶ ΑΔ (Σχ. 8), ἐχούσας μῆκος μὲν τὸ αὐτό, ἥτοι $ΑΓ = ΑΔ = Μ$, ἐγκαρσίους δὲ τομᾶς, ἡ μὲν ΑΔ ω , ἡ δὲ ΑΓ 2ω , διπλάσιαν τῆς ΑΔ, καὶ ἐξαρθήσωμεν τὸ αὐτὸ βάρους B ἐξ ἐκατέρας ῥάβδου, θέλομεν ἶδει, ὅτι τῆς μὲν ῥάβδου ΑΔ τὸ μῆκος θὰ αὐξήσῃ κατὰ ΔΔ', τῆς δὲ ΑΓ κατὰ ΓΓ', καὶ ὅτι τὸ $ΔΔ' = 2ΓΓ'$, δηλ. ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις ΓΓ' τῆς ΑΓ ῥάβδου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΔ' τῆς ῥάβδου ΑΔ, τῆς ἐχούσης διατομὴν τὸ ἥμισυ τῆς διατομῆς τῆς ΑΓ.



Σχ. 8

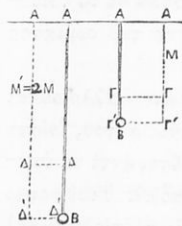
Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ ἐπιμηκύνσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐγκαρσίων τομῶν, ἥτοι ὅτι ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\omega : 2\omega = \Gamma\Gamma' : \Delta\Delta' \quad \text{ἢ} \quad \frac{\omega}{2\omega} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Delta\Delta'} = \frac{1}{2}.$$

4. Διὰ πειραμάτων ἐπίσης ἀπεδείχθη, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν δύο ῥάβδους τῆς αὐτῆς φύσεως, εἴτε σιδηρᾶς εἴτε ξυλίνας κτλ., ΑΓ καὶ ΑΔ (Σχ. 9), ἐχούσας τὴν αὐτὴν ἐγκάρσιον τομὴν ω , ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ΑΔ νὰ ᾖ διπλάσιον τοῦ τῆς ΑΓ, καὶ ἀνηρτήσωμεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Γ καὶ Δ τὸ αὐτὸ βάρους B, τῶν ἐτέρων ἄκρων Α καὶ Α καθισταμένων ἀκινήτων, ἡ ἐπιμήκυνσις ΔΔ' τῆς ῥάβδου ΑΔ εἶναι διπλάσια τῆς ἐπιμηκύνσεως ΓΓ' τῆς ῥάβδου ΑΓ, δηλ. ὅτι αἱ ἐπιμηκύνσεις εἶναι ἀνάλογοι

τῶν μηκῶν M καὶ M' , ὅταν τὸ ἐφελκύνον βάρος ᾖ τὸ αὐτό, ὡς καὶ ἡ ἐγκάρσιος τομὴ, ἥτοι ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$M : M' = \Gamma\Gamma' : \Delta\Delta' \quad \eta \quad \frac{M}{M'} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Delta\Delta'} = \frac{\mu}{\mu'}.$$



Σχ. 9

5. Ἐπίσης διὰ πειραμάτων ἀπεδείχθη ὅτι, ἂν λάβωμεν πολλὰς ῥάβδους τῆς αὐτῆς διατομῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους, ἀλλὰ διαφόρου φύσεως, δηλ. ξύλινον, σιδηρᾶν, χάλκινον κτλ., αἱ ἐπιμήκυνσεις δὲν εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ ἀνάλογοι τῆς ἐλαστικότητος τῆς ἐξ ἧς ἀποτελεῖται ἐκάστη ὕλης. Τὴν ἐλαστικότητα ταύτην παριστῶσι διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{E}$, τὸ δὲ E καλοῦσι συντελεστὴν τῆς ἐλαστικότητος.

6. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἐξάγεται ὁ κάτωθεν ἐμπειρικός τύπος (1), ὅστις δίδει τὴν ἐπιμήκυνσιν, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἐφελκύνοντος βάρους, τοῦ μήκους τῆς ῥάβδου, τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αὐτῆς καὶ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐλαστικότητος,

$$\mu = \frac{BM}{\omega E} \quad (1).$$

Τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ (1) εἰσερχόμενα γράμματα παριστῶσι τὰς κάτωθεν σημειωμένας ποσότητες, ἥτοι

μ , τὴν ἐπιμήκυνσιν

B , τὸ ἐφελκύνον βάρος

M , τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῆς ἐφελκυσμένης ῥάβδου

ω , τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τῆς ἐφελκυσμένης ῥάβδου

E , τὸν συντελεστὴν τῆς ἐλαστικότητος.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) πορίζομεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς

$$\frac{\mu}{M} = \frac{B}{\omega E} \quad (2).$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{M}$, ὅπερ συνήθως παριστῶσι συντομίας χάριν διὰ τοῦ γράμματος ϵ , ἐκφράζει τὴν κατὰ μέτρον ἐπιμήκυνσιν.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (2) ὑποθέσωμεν τὸ $\mu = M$, ἥτοι $\frac{\mu}{M} = 1$, καὶ τὸ $\omega = 1$, τότε θέλομεν ἔχει $1 = \frac{B}{E}$, ἥ $E = B$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ὁ συντελε-

στής τῆς ἐλαστικότητος E παριστᾷ τὸ βάρος, ὅπερ ἤθελε παραγάγει ἐπιμήκυνσιν ἴσην μὲ τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῆς δοκοῦ, ἐχούσης ἐγκάρσιον τομὴν ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου, δηλ. ἤθελε διπλασιάσει τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῆς ράβδου χωρὶς νὰ ἀλλοιωθῇ ποσῶς ἡ ἐλαστικότης αὐτῆς.

7. Ὁ συντελεστὴς τῆς ἐλαστικότητος E τῶν διαφόρων ὑλῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ πειραμάτων, διότι τὰ εἰς ἐφελκυσμὸν ὑποβαλλόμενα σώματα θλῶνται πρὶν ἢ ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτῶν γείνη ἴση τῷ ἀρχικῷ μῆκει, τοῦτου δ' ἔνεκα προσδιορίζεται διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ράβδους τινὰς διαφόρου φύσεως, εἶον ξυλῖνας, σιδηρᾶς κτλ., καὶ ὑποβάλλομεν αὐτάς εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν ὠρισμένου βάρους B , διὰ καταλλήλων δὲ ἐργαλείων προσδιορίζομεν ὅσον ἔνεστι ἀκριβῶς τὴν ἐπιμήκυνσιν μ , τὸ ἀρχικὸν μῆκος M καὶ τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ω , καὶ ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ τῶν B , M , μ καὶ ω τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ E , ἥτοι

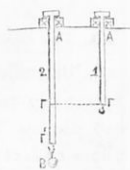
$$E = \frac{B \times M}{\mu \omega} \quad (3).$$

Σημειώσεις. Συνήθως ὁ συντελεστὴς τῆς ἐλαστικότητος E ἀνάγεται εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας καὶ παρίσταται οὕτω διὰ μεγάλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν πορίζομεθα τοὺς ἀναγομένους εἰς τὸ ἑκατοστὸν τετραγωνικόν, ἢ χιλιοστὸν τετραγωνικόν, καὶ τοῦτο πρὸς ἀποφυγὴν τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, τῶν παριστῶντων τὸ E .

8. Ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ ἐφελκυσμοῦ ἐξάγομεν τὸ βάρος B , ὅπερ δύναται νὰ παραγάγῃ τὴν ἐπιμήκυνσιν $\mu = \Gamma \Gamma'$ (Σχ. 40) ἐπὶ δεδομένης ράβδου $A\Gamma$ ἐφαρμοζόμενον. Τοῦτο δὲ προσδιορίζει ὁ τύπος

$$B = \frac{\mu \omega E}{M} \quad (4).$$

Τὸ βάρος τοῦτο παριστᾷ ἐπίσης τὴν τάνυσιν τῶν ἐλατηρίων μορίων τῆς ράβδου $A\Gamma'$ ἐν τῇ θέσει (2) (Σχ. 40). Τῷ ὄντι, τῆς ράβδου $A\Gamma$ μὴ ὑποκειμένης εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν οὐδενὸς βάρους, ὡς δεικνύει ἡ θέσις (1) (Σχ. 40), τὰ μόρια τῆς ὕλης κατέχουσι τὴν σχετικὴν αὐτῶν θέσιν, ἣν ἡ φύσις ὥρισεν αὐτοῖς, ἡ δὲ ἔλξις καὶ ὥθησις τῶν μορίων ἰσοῤῥοποῦσιν. Ἡ δὲ τῆς ράβδου $A\Gamma$ ὑποβαλλομένης εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τοῦ βάρους B , ὡς παριστᾷ ἡ θέσις (2) (Σχ. 40), τὸ μὲν μῆκος αὐτῆς αὐξάνει κατὰ τὴν ποσότητα $\Gamma \Gamma'$,



Σχ. 40

τὸ δὲ πάχος ω ἐλαττοῦται κατὰ ποσότητά τινα, καὶ τὰ κενά, ἅπερ καλοῦνται πόροι τοῦ σώματος, μεγαλύνονται. Τούτου ἕνεκα ἡ ὑπὸ τῆς φύσεως ὠρισμένη ἰσορροπία μεταξὺ τῆς ἔλξεως καὶ ὠθήσεως τῶν μορίων τῆς ῥάβδου ΑΓ ἐν τῇ θέσει (1) κατεστράφη μὲν ἀφ' ἐνὸς ὑπὸ τοῦ βάρους Β, ὅπερ τείνει νὰ θλάσῃ αὐτήν, ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἡ ἔλξις τῶν μορίων τοῦ σώματος ΑΓ' ἐν τῇ θέσει (2) γίνεται μεγαλειτέρα τῆς ἐν τῇ θέσει (1) καὶ τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὰ μόρια εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, ἣν εἶχον ἐν τῇ θέσει (1), ἀλλὰ δὲν κατορθοῖ τοῦτο, εἰμὴ, ὅταν τὸ βάρος Β ἀρθῇ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ μόρια τῆς ῥάβδου ΑΓ' μένουσιν ἐν τῇ θέσει, ἣν κατέλαβον τῇ ἐνεργείᾳ τοῦ βάρους Β, ἔπεται ὅτι τὸ βάρος Β, ὅπερ ἐνεργεῖ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἵνα αὐξήσῃ ἔτι περισσότερον τὸ μῆκος ΑΓ', καὶ ἡ συνισταμένη τῶν ἔλξεων ὅλων τῶν μορίων, ἥτις καλεῖται ἐλατήριος δύναμις τοῦ σώματος καὶ ἐνεργεῖ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα ἐπαναφέρῃ τὰ μόρια τοῦ σώματος εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν σχετικὴν θέσιν, εἰσὶν ἴσαι. Ἐπομένως ἔχομεν

$$B = T = \frac{\mu \omega E}{M} = \omega E \quad (5)$$

παριστῶντες διὰ Τ τὴν τάνυσιν τῶν μορίων, ἥτοι τὴν συνισταμένην τῶν ἔλξεων τῶν μορίων.

9. Ἐκ τῶν ὑπὸ διακεκριμένων Φυσικῶν καὶ Μηχανικῶν ἐπὶ διαφορῶν σωμάτων γενομένων πειραμάτων ἐξάγεται ὁ κάτωθεν πίναξ Α', ὅστις δίδει τὸν συντελεστὴν Ε ἀναφερόμενον εἰς τε τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας καὶ εἰς τὸ τετραγωνικὸν χιλιοστόν, τὸ φορτίον τὸ δεικνύον τὸ ὄριον τῆς ἐλαστικότητος ἀναφερόμενον εἰς ἐπιφάνειαν ἐνὸς τετραγωνικοῦ χιλιοστοῦ¹, καὶ τὴν παραγομένην κατὰ μέτρον ἐπιμήκυνσιν ὑπὸ βάρους ἴσου τῷ ὀρίῳ τῆς ἐλαστικότητος.

¹ Ὀνομάζουσι τετραγωνικὸν χιλιοστόν οἱ Μηχανικοὶ καὶ Ἀρχιτέκτονες τὴν τετραγωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἥς ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ χιλιοστόν τοῦ μέτρου. Ὡσαύτως τετραγωνικὸν ἑκατοστόν ὀνομάζουσι συντομίας χάριν τὴν τετραγωνικὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ἔχουσαν πλευρὰν τὸ ἑκατοστόν τοῦ μέτρου καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΙΝΑΞ ΠΡΩΤΟΣ

Περιέχωρ τὰς ὕλας, τὰς τιμὰς τοῦ $\frac{\mu}{M} = 1$ ἀναφερομένας εἰς τὰ παριστῶντα τὰ ὄρια τῆς ἐλαστικότητος τῶν ὑλῶν φορτία, αὐτὰ τὰ φορτία καὶ τὰς τιμὰς τοῦ E, ἀναφερομένας εἰς τὸ τετραγωνικὸν χιλιοστόν καὶ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ὑλαι, εἰς ὧν ἀποτελοῦνται τὰ εἰς ἐλκυσμὸν ὑποθαλλόμενα σώματα	Τιμὰς τοῦ $\frac{\mu}{M} = 1$ ἀναφερομένης εἰς τὰ φορτία τὰ παριστῶντα τὰ ὄρια τῆς ἐλαστικότητος καὶ ἐπὶ τετραγωνικοῦ χιλιοστοῦ ἐπιφανείας ἀναφερόμενα	Φορτία παριστῶντα τὰ ὄρια τῆς ἐλαστικότητος καὶ ἐπὶ τετραγωνικοῦ χιλιοστοῦ ἐπιφανείας ἀναφερόμενα	Τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐλαστικότητος E	
			Ἀναφερομένης εἰς τὸ τετραγωνικὸν χιλιόγρ.	Ἀναφερομένης εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας
ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ		χιλιόγρ.	χιλιόγρ.	χιλιόγραμμα
Δρῦς ἰσχυρά	$\frac{1}{600} = 0,00167$	2,00	1200	1.200.000.000
Ἑλάτη	$\frac{1}{850} = 0,00117$	2,17	1300	1.300.000.000
Πεύκη	$\frac{1}{470} = 0,00210$	3,13	1300	1.300.000.000
Μελία (εἶδος πεύκης)	$\frac{1}{885} = 0,00113$	1,27	1120	1.120.000.000
Πτελέα	$\frac{1}{515} = 0,00193$	1,007	970	670.000.000
Λάριξ (εἶδος πεύκ. κουκουν.)	$\frac{1}{620} = 0,00102$	1,73	517	517.000.000
ΣΙΔΗΡΙΚΑ				
Μαλακ. σίδηρ. εἰς λεπτ. σύρμ.	$\frac{1}{1250} = 0,00080$	14,73	18000	18.000.000.000
Σίδηρ. εἰς ῥάβδ. (τοῦ ἐμπορ.)	$\frac{1}{1520} = 0,00066$	12,20	20000	20.000.000.000
Χάλυψ γερμαν. καλῆς ποιότητος εἰς ἕλατον βεβαμμέν.	$\frac{1}{835} = 0,00120$	25,00	21000	21.000.000.000
Χυτὸς χάλυψ καλῆς ποιότητ.	$\frac{1}{4500} = 0,000222$	66,00	30000	30.000.000.000
Χυτοσίδηρος λεπτόκοκκος ..	$\frac{1}{1200} = 0,00083$	10,00	12000	12.000.000.000
Χυτοσίδηρος φαίος, ἀγγλικὸς	$\frac{1}{1400} = 0,00078$	6,00	7693	7.693.000.000
Σύρμα ἐκ χαλκοῦ	"	"	13100	13.100.000.000
Σύρμα ἐξ ὀρει. χαλκοῦ (Laiton)	$\frac{1}{742} = 0,00133$	13,00	10000	10.000.000.000
Ὀρει. χαλκος χυτὸς (Laiton)	$\frac{1}{1320} = 0,00076$	4,80	6430	6.430.000.000
Ὀρει. χαλ. πυροβόλ. (Bronge)	$\frac{1}{1590} = 0,00063$	2,00	3200	3.200.000.000
Μολύβδιν. σύρμα πάχ. 0,004	$\frac{1}{1490} = 0,00067$	0,40	600	600.000.000
Μολύβδιν. σύρμα πάχ. 0,006	$\frac{1}{1000} = 0,00100$	0,40	800	800.000.000
Συνήθης χυτὸς μόλυβδος ...	$\frac{1}{477} = 0,00210$	1,00	500	500.000.000

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος Α' καὶ διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ἐφελκυσμοῦ (1), δεδομένου τοῦ βάρους B, ὅπερ πρέπει νὰ ᾖ πάντοτε μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ τοῦ ὀρίου τῆς ἐλαστικότητος, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν ἢ τὴν ἐπιμήκυνσιν μ , τῶν ποσοτήτων B, M καὶ ω οὕτων γνωστών, ἢ τὸ βᾶρος B τὸ δυνάμενον νὰ παραγάγῃ δεδομένην ἐπιμήκυνσιν κατὰ μέτρον, οὕσαν μικροτέραν ἢ ἴσην οὐδέποτε δὲ μεγαλύτεραν τῆς ἐν τῷ πίνακι Α' δεικνυμένης, τῶν λοιπῶν ποσοτήτων ὑποτιθεμένων γνωστών.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα

1^η. *Νὰ εὕρεθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις, ἡ παραχθισομένη ὑπὸ βάρους 5000 χιλιογράμμων ἐπὶ κυλινδρικῆς σιδηρᾶς ράβδου, μήκους 8 μέτρων καὶ διαμέτρου 0,04 τοῦ μέτρου,*
 ἠθέλομεν εὕρει ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ τύπῳ (1) 5000 ἀντὶ τοῦ B, 8 ἀντὶ τοῦ M, $0,0004 \times 3,14$ ἀντὶ τοῦ ω , καὶ 20.000.000.000 ἀντὶ τοῦ E, ὅτι ἡ παραγομένη ἐπιμήκυνσις μ ᾖ ἴση μὲ 0^η,00159.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα

2^η. *Νὰ εὕρεθῇ τὸ βᾶρος, τὸ παραγαγὸν ἐπιμήκυνσιν 0^η,005 ἐπὶ κυλινδρικῆς σιδηρᾶς ράβδου μήκους 20 μέτρων καὶ διαμέτρου 0,06 τοῦ μέτρου,*

ἠθέλομεν εὕρει ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ αὐτῷ τύπῳ (1) 0,005 ἀντὶ τοῦ μ , 20 ἀντὶ τοῦ M, $0,0009 \times 3,14$ ἀντὶ τοῦ ω , καὶ 20.000.000.000 ἀντὶ τοῦ E, ὅτι τὸ παραγαγὸν τὴν ἐπιμήκυνσιν βάρους B εἶναι ἴσον μὲ 45300 χιλιόγραμμα.

10. Ἐκ διαφόρων πειραμάτων, ἐκτελεσθέντων ὑπὸ τῶν κκ. Πονσλέ, Μορέν καὶ ἄλλων μηχανικῶν, ἀπεδείχθη, καὶ ἰδίως διὰ τὸν σίδηρον καὶ χυτοσίδηρον, ὅτι αἱ εἰς ἐφελκυσμὸν ὑποβαλλόμεναι ράβδοι δὲν λαμβάνουσιν μὲν ἀκριβῶς τὸ ἀρχικὸν αὐτῶν μῆκος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ φορτίου, ὅσονδῃποτε μικρὸν καὶ ἂν ᾖ τοῦτο, ἀλλ' ὅτι, ἐπειδὴ τὸ μένον ἔχνος ἐκ τῆς παραχθείσης ἐπιμηκύνσεως εἶναι ἐλάχιστον, δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι καὶ οἱ πρῶτοι ἐκτελέσαντες ὅμοια ἐπὶ τοῦ ἐφελκυσμοῦ πειράματα, πρὸς δὲ ὅτι αἱ σιδηραὶ ράβδοι, αἱ μὲν μὴ ὑποκείμεναι εἰς κρούσεις καὶ δονήσεις ἀντέχουσι ἐπὶ πολὺν χρόνον εἰς βάρη ἔστω καὶ ὀλίγον διαφέροντα τοῦ βάρους, ὅπερ παράγει ἀμέσως τὴν θραῦσιν, αἱ δὲ ὑποκείμεναι εἰς κρούσεις καὶ δονήσεις δὲν ἀντέχουσι πολὺ, καὶ ὅτι τέλος διάφορα δείγματα σιδηρῶν ράβδων τῆς αὐτῆς φύ-

σεως καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ χυτηρίου προερχόμενα δὲν ἀντέχωσιν ἰσάκεις, δηλαδὴ θλῶνται ἀμέσως οὐχὶ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ βάρους, ἀλλ' ὑπὸ διαφόρων καὶ ἀνίσων βαρῶν.

Τούτων ἕνεκα ἐγένετο παραδεκτὸν ὑφ' ὅλων τῶν μηχανικῶν νὰ ὑποβάλλωνται ἐν τῇ πράξει τὰ ὑλικά εἰς μονίμους ἐφελκυσμοὺς βαρῶν πολλῶ κατωτέρων τῶν φορτίων, τῶν παραγόντων διὰ τῆς στιγμιαίας ἐνεργείας τῶν τὴν διάρρηξιν αὐτῶν, καὶ ὡς ἐξῆς·

Τὰ μὲν μέταλλα εἰς τὸ $\frac{1}{6}$.

Τὴν δὲ ξυλείαν καὶ λίθους εἰς τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ παράγοντος τὴν διάρρηξιν φορτίου.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐσχηματίσθη ὁ κάτωθεν Β' πίναξ, περιέχων ἐν μὲν τῇ πρώτῃ αὐτοῦ στήλῃ τὰς μᾶλλον διὰ τὰς οἰκοδομὰς χρησίμους ὕλας, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὰ φορτία, τὰ παράγοντα διὰ τῆς στιγμιαίας αὐτῶν ἐνεργείας τὴν διάρρηξιν τοῦ σώματος, καὶ ἐν τῇ τρίτῃ τὰ φορτία, ἅτινα δύνανται ἄνευ κινδύνου νὰ υποβαστάζωσι διαρκῶς τὰ εἰς ἐφελκυσμὸν ὑποβαλλόμενα σώματα.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Περιέχων τὰ βάρη, τὰ παράγοντα αὐθωρεὶ διὰ τῆς ἐφελκύσεως τῇ διαδροῇξιν τῶν ἀντιστοιχοῦντων σωμάτων καὶ τὰ φορτία, εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῶν ὁποίων θνύμεθα τὰ ὑποβάλλωμεν τὰ σώματα ἄνευ κινδύνου, ὅταν ταῦτα θὰ ἐνεργῶσι ἐπ' αὐτῶν οὐχὶ στιγμαίως, ἀλλὰ διαρκῶς καὶ ἐπὶ πολὺν χρόνον.

Ἔλασι, ἃ ὡς ἀποτελοῦνται τὰ σώματα	Φορτίον κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας	
	παράγον, ἐν αἰσθητὴ τῇ διαδροῇξιν	διενέον τὸ ἔργον μέχρις οὗ ἀσφαλὲς θνύμεθα τὰ ὑποβάλλωμεν εἰς ἐφελκυσμὸν τὰ σώματα
ΣΥΛΛΕΙΞΙΣ	χιλ.	χιλ.
Δρύς, κατὰ μῆκος τῶν ἰνῶν τῆς ἐφελκυσμένης { δυνατῇ	8,00	0,80
	6,00	0,60
	4,00	0,40
Πεύκη, ἐφελκυσμένη κατὰ μῆκος τῶν ἰνῶν τῆς...	8,00	0,80
Μελία, " " " " " "	12,00	1,20
Μηλέα, " " " " " "	6,90	0,69
Πεύκη, ἐφελκυσμένη κατὰ πλάτος	0,42	0,04
Δρύς, " " " " " "	1,60	0,16
Πτελέα, " " " " " "	1,23	0,12
Δρύϊνος δοκός, ἥς τὸ μῆκος ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν τεμαχιῶν δι' ἐγκοπῆς καὶ σιδηρῶν συνδεδεμένων, ἐφελκυσμένη κατὰ μῆκος	4,00	0,40
Δοκὸς ἐκ πεύκης, ἥς τὸ μῆκος ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν τεμαχιῶν στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένων, κατὰ μῆκος ἐφελκυσμένη	3,00	0,30

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ

ΜΕΤΑΛΛΑ	χιλ.	χιλ.
Σφυρηλατός σιδήρος, μικρά δείγματα	60,00	10,00
Σφυρηλατός σιδήρος εις ράβδους	40,00	6,66
Σιδηρά ελάσματα διά κατασκευὴν λεβήτων, σιδηρῶν γεφυρῶν κτλ.	36,00	6,00
Σιδηρῶν σύρμα	50,00	8,00
Καλώδιον ἐκ σιδηρῶν συρμάτων χρησιμεύον διὰ κρεμαστὰς γεφύρας κτλ.	30,00	5,00
Σιδηρὰ ἄλυσις	24,00	4,00
Χυτοσίδηρος φαίος { ὀρθία χύσις	13,50	2,25
{ ὀριζόντιος χύσις	12,50	2,17
Χάλυψ { καλῆς ποιότητος καὶ εἰς μικρά δείγματα	100,00	16,67
{ κακῆς ποιότητος	36,00	6,00
{ μεσαίας ποιότητος	75,00	12,50
Ὀρείχαλκος διὰ πυροβόλα (μπροῦντζος)	23,00	3,83
Χαλκὸς ἐρυθροῦς { ῥινισμένος κατὰ μήκος	21,00	3,50
{ σφυρηλατός	25,00	4,17
{ χυτός	13,40	2,33
Χαλκὸς κίτρινος	12,60	2,10
Τόξα ἢ τεμάχια χρησιμεύοντα διὰ συνδέσμους ἐκ καθαρῷ σφυρηλατοῦ σιδήρου ἢ ἐκ χυτοσιδήρου φαίου	42,00	4,20
Σύρμα ἐξ ἐρυθροῦ χαλκοῦ { καλῆς ποιότητος	50,00	8,33
{ κακῆς ποιότητος	40,00	6,00
Διαμέτρου ἐνὸς ἕως δύο χιλιοσῶν { καλῆς ποιότητος	85,00	14,16
Σύρμα ἐκ κίτρινου χαλκοῦ { μεσαίας ποιότητος	50,00	8,33
Διαμέτρου ἀπὸ 0 ^α ,001 ἕως 0,002 { κακῆς ποιότητος	34,00	5,67
Σύρμα ἐκ λευκοχρῶσου διαμέτρου 0,127	3,00	0,50
Χυτὸς κασσίτερος	6,00	0,83
Ὀρείχαλκος (ζίνγκος) { χυτός	5,00	1,28
{ ῥινισμένος	1,35	0,21
Μόλυβδος { χυτός	1,28	0,22
{ ῥινισμένος	1,36	0,22
Σύρμα ἐκ μολύβδου διαμέτρου 0 ^α ,004		

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ

ΚΑΛΩΔΙΑ		χιλ.	χιλ.
Καλώδιον ἐκ κανάβεως, καινόν, { διαμέτρου 0 ^α ,013 ἕως 0 ^α ,014 {	καλῆς ποιότητος ..	8,80	4,40
	μετρίας ποιότητος ..	6,00	3,00
	κακῆς ποιότητος ..	4,00	2,00
Καλώδιον ἐκ κανάβεως παλαιόν καὶ μεταχειρισμένον		4,20	2,10
Ἰμάς δερμάτινος ἐκ μαύρου δέρματος.....			0,20
ΛΙΘΟΙ			
Τιτανόλιθος τῆς Πορτλάνδης.....		77,00	7,70
" λευκός λεπτόκοκκος.....		14,00	1,40
" συμπαγῆς λιθογραφικός.....		30,00	3,00
" ἀμμώδης σκληρός.....		22,90	2,29
" ωολιτικός.....		13,70	1,37
Ὀπτόπλινθοι {	καλῶς ἐψημένοι.....	19,50	1,95
	μετρίως ".....	8,00	0,80
Γυψοκονία ἐξ ἄσβεστου	καλῶς κατεσκευασμένη.....	11,70	1,17
	μετρίως καλή.....	5,80	0,58
	συνήθης κατασκευή.....	4,00	0,40
	μὲ παχεῖαν ἄσβεστον, ἡλικίας 14 ἐτῶν	4,20	0,42
	" " " κακῆς ποιότητος	0,75	0,075
Ἀμμοκονία {	" συνήθης ὑδραυλικῇ ἄσβεστον.....	9,00	0,90
	" ὑδραυλικωτάτην ἄσβεστον.....	13,00	1,30
	" ὑδραυλικόν χῶμα (σιμάν).....	9,60	0,96

11. Διὰ τοῦ δευτέρου πίνακος καὶ διὰ τῆς σχέσεως, τῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἐφελκυομένης ράβδου καὶ τοῦ ἐφελκύνοντος βάρους, ἥτις καλεῖται καὶ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς (διότι δι' αὐτῆς ὀρίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, ὅταν τὸ ἐφελκύνον βάρος ᾖ ἡμετέροιο), εὐρίσκομεν εὐκόλως τὴν διατομὴν ω ἢ τὸ βάρος B , ὅταν πάντα τὰ ἄλλα ᾖ ἡμετέροια.

Πρὸς τοῦτο καλέσωμεν B τὸ ἐφελκύνον βάρος, ω τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τοῦ ἐφελκυομένου σώματος εἰς τετραγωνικὰ μέτρα ἢ χιλιοστά ἢ ἑκατοστά, καὶ P τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλλωμεν ἑκάστην μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς τὸ σῶμα ἀποτελεῖται ὕλης, καὶ

ὅπερ δίδει ἡ τρίτη στήλη τοῦ δευτέρου πίνακος. Θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$\omega P = B \quad (1)$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἀμέσως τὴν τιμὴν ω τῆς ἐγκαρσίου τομῆς

$$\omega = \frac{B}{P} \quad (2).$$

Ἰνα δὲ δείξωμεν τίνι τρόπῳ γίνεται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (2) πρὸς εὕρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ω , λύομεν τὰ κάτωθεν ἐκτιθέμενα τρία προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. *Νὰ ὁρισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς βάκτρον ἐκ ξύλου δρυός, ὑψοῦντος βάρους 7000 χιλιογράμμων.*

ΛΥΣΙΣ. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (2) δίδει $\omega = \frac{7000}{0.60} = 11667$ τετραγωνικά χιλιοστά· ἵνα δὲ ὁρίσωμεν κατὰ τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ω , δέον νὰ γνωρίζωμεν τὸ εἶδος τῆς τομῆς. Ἐστω ὅτι ἡ τομὴ ω εἶναι τετραγωνικὴ καὶ a ἡ πλευρὰ αὐτῆς ἔχομεν $a^2 = 11667$ καὶ $a = \sqrt{11667}$, ἢ $a = 108 \text{ χιλ.} = 0,108$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. *Νὰ ὁρισθῇ ἡ διάμετρος τῶν κρίκων σιδηρᾶς ἀλύσεως, ἰκαρῆς καὶ ἀντέχῃ εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν βάρους 1500 χιλ.*

ΛΥΣΙΣ. Ἐστω δ ἡ ζητούμενη διάμετρος εἰς χιλιοστά τοῦ μέτρου, ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς διατομῆς τοῦ κρίκου εἶναι $\omega = \frac{3.14 \times \delta^2}{4} = 0,7854 \delta^2$, καὶ τῶν δύο διατομῶν $2\omega = 2 \times 0,7854 \delta^2$, ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον (2) ἔχομεν τὴν κάτωθεν ἐξίσωσιν, τὴν δίδουσαν τὴν διάμετρον $\frac{1500}{4} = 2 \times 0,7854 \delta^2$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\delta = 15 \text{ χιλ.}, 4 = 0^{\mu}, 0154$

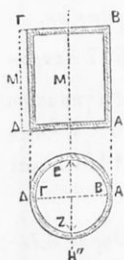
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. *Ἰμὰς ἐκ μαύρου δέρματος πάχους $0^{\mu}, 005$ πρόκειται νὰ μεταδῶσιν ἔντασιν 125 χιλιογράμμων ἀπὸ κυλινδρῶν εἰς κύλινδρον διὰ τὴν κίνησιν τῶν ἐργαλείων ἐργοστασίου τινός, καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πλάτος τοῦ ἱμάντος.*

ΛΥΣΙΣ. Καλοῦντες α τὸ ζητούμενον πλάτος ἐκπεφρασμένον εἰς χιλιοστά τοῦ μέτρου, ἔχομεν $\omega = 5 \times \alpha$, καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (2) δίδει $\alpha \times 5 = \frac{125}{0.20}$ ἢ $\alpha = \frac{125}{5 \times 0.20} = 125 \text{ χιλ.}, 5 = 0^{\mu}, 125$.

12. Διὰ τοῦ τύπου τοῦ ἐφελκυσμοῦ (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου καὶ τῶν δεδομένων τοῦ δευτέρου πίνακος δυνάμεθα νὰ εὕρω-

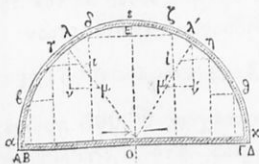
μεν τὰ πάχη, ἅτινα πρέπει νὰ ἔχωσιν οἱ λέβητες τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν, οἱ σηδηροὶ τῶν ὑδραγωγείων σωλήνες, κτλ. ὅταν μᾶς ᾖται δεδομένη ἡ φύσις τοῦ σωλήνος καὶ ἡ ἐνεργοῦσα ἐσωτερικὴ θλίψις.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὗρωμεν τὸν τύπον, τὸν δίδοντα τὸ πάχος E κενοῦ τινὸς κυλίνδρου $AB\Gamma\Delta$, ὑφισταμένου δεδομένην ἐσωτερικὴν θλίψιν. Πρὸς τοῦτο ἄς παραστήσωμεν διὰ Θ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ἐσωτερικῆς θλίψεως ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν, ἀναφερομένην εἰς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, π. χ. εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, δι' ϵ τὸ ζητούμενον πάχος τοῦ κενοῦ κυλίνδρου $AB\Gamma\Delta$, διὰ δ τὴν διάμετρον αὐτοῦ καὶ διὰ M τὸ μῆκος.



Σχ. 11 καὶ 12

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι, ἵνα ὁ κύλινδρος διαβῇ εἰς δύο, δεόν νὰ τμηθῇ κατὰ δύο ἐκ διαμέτρου ἀντικειμένους γεννητοῖρας, π. χ. κατὰ τὰς AB καὶ $\Delta\Gamma$ (Σχ. 11 καὶ 12), τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων $ΑΔ$ καὶ $ΒΓ$ (Σχ. 11) μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν, τοῦ κυλίνδρου θεωρουμένου ἄνευ βάσεων, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τοὺς σωλήνας τῶν ὑδραγωγείων. Ἀφ' ἑτέρου δυνάμεθα εὐκόλως ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἐνεργοῦμένη ἐσωτερικὴ θλίψις ἐπὶ τῆς κοίτης ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας $B\epsilon\Gamma$, $AB\Gamma\Delta$ ἢ $B\zeta\Gamma$, $AB\Delta\Gamma$ (Σχ. 11 καὶ 12) ἰσοῦται τῇ θλίψει, τῇ ἐνεργοῦμένη ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας $BO\Gamma$, $AB\Delta\Gamma$ (Σχ. 11, 13), δηλ. ἡ συνισταμένη τῶν θλίψεων, τῶν ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῆς κοίτης ἡμικυλινδρικής ἐπιφανείας $B\epsilon\Gamma$, ἰσοῦται τῇ συνισταμένη τῶν θλίψεων, τῶν ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας $BO\Gamma$, τῆς ἐχούσης μῆκος τὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ πλάτος τὴν διάμετρον αὐτοῦ.



Σχ. 13

Πρὸς τοῦτο ἄς θεωρήσωμεν χάριν συντομίας τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐν μέτρον μῆκος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἄς διαιρέσωμεν τὴν κοίτην ἡμικυλινδρικήν ἐπιφάνειαν, τὴν ἔχουσαν βάσιν τὴν ἡμιπεριφέρειαν $B\epsilon\Gamma$, εἰς πολλὰ μικρὰ ἴσα μέρη, ἔχοντα βάσιν τὰ ἐλάχιστα τὸ μῆκος τόξα $αβ$, $βγ$, $γδ$, $δε$, $εζ$, $ζη$, $ηθ$ καὶ $θκ$, καὶ ὕψος ἐν μέτρον. Ἡ ἐπιφάνεια ἐκάστου τῶν μερῶν τούτων θέλει παρίσταται τότε διὰ τοῦ τόξου τῆς βάσεώς του, αἱ δὲ ἐπ' αὐτῶν ἐνεργοῦσαι ἐσωτερικαὶ θλίψεις θέλουσι παρασταθῇ διὰ

τῶν γινομένων τῶν τόξων ἐπὶ Θ. Π. χ. ἂν θεωρήσωμεν τὰ δύο ἀντίστοιχα τόξα γδ καὶ ζη, αἱ ἐπὶ τούτων ἐνεργοῦσαι ἐσωτερικαὶ θλίψεις εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ παρίστανται διὰ τῶν γινομένων γδ.Θ καὶ ζη.Θ, διέρχονται διὰ τῶν μέσων λ καὶ λ' τῶν τόξων γδ καὶ ζη καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ εἰς θν τὰ τόξα ἀνήκουσι κύκλου. Τούτου τεθέντος, ἂς παραστήσωμεν τὰς ἴσας θλίψεις γδ.Θ καὶ ζη.Θ, διὰ τῶν εὐθειῶν λμ καὶ λ'μ' καὶ ἀποσυνθέσωμεν ταύτας εἰς τὰς συνιστώσας λν, νμ καὶ λ'ν', ν'μ'. Βλέπομεν ὅτι αἱ μὲν ὀριζόντιοι συνιστῶσαι νμ καὶ ν'μ', ὡς ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, συμμηδενίζονται, αἱ δὲ κάθετοι λν καὶ λ'ν', ὡς ἴσαι μετὰξὺ των, ἔχουσι μίαν συνισταμένην, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο καὶ διευθυνομένην κατὰ τὴν ΟΕ. Ἡ συνιστῶσα λν ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον λμ. συν μλν, ἢ Θ.γδ συν γιδ, ἢ Θ.γι, διότι γδ συν διγ = γι, τοῦ ἐλαχίστου τὸ μήκος τόξου γδ δυναμένου νὰ θεωρηθῇ ὡς εὐθεῖα γραμμὴ. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον Θ.γι δεικνύει προφανῶς, ὅτι ἡ κάθετος συνιστῶσα τῆς θλίψεως, τῆς ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ τόξου γδ, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς Θ ἐπὶ τὴν προβολὴν γι τοῦ τόξου γδ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΔ. Ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι αἱ ἐπὶ τῶν τόξων αβ, βγ, ... ηθ, θκ ἐνεργοῦσαι ἐσωτερικαὶ θλίψεις ἰσοῦνται μὲ τὰ γινόμενα τοῦ Θ ἐπὶ τὰς προβολὰς τῶν τόξων αβ, βγ ... ηθ, θκ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ΑΔ. Ἐπομένως ἡ ὀλικὴ συνισταμένη τῶν μερικῶν τούτων θλίψεων θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων

$$\Theta \times \text{προβ. τόξου } \alpha\beta, \Theta \times \text{προβ. τόξου } \beta\gamma, \dots$$

ἥτοι μὲ $\Theta \times (\text{προβ. τόξου } \alpha\beta + \text{προβ. τόξου } \beta\gamma + \dots)$,

τουτέστι μὲ τὴν θλίψιν Θ ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἡμιπεριφερείας BEΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΓ, ἥτοι θέλομεν ἔχει, ὅτι ἡ ὀλικὴ θλίψις ἐπὶ τῆς κοίλης ἐπιφανείας BEΓ, τῆς ἐχούσης βάσιν τὴν ἡμιπεριφέρειαν BEΓ καὶ ὕψος ἐν μέτρον εἶναι ἴση μὲ $\Theta \times \text{ΒΓ}$.

Ἀφ' ἐτέρου ἡ θλίψις, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τῆς ἐχούσης βάσιν τὴν ΒΓ καὶ ὕψος ἐν μέτρον (Σχ. 13), εἶναι καὶ αὕτη ἴση μὲ $\Theta \times \text{ΒΓ} \times 1,00 = \Theta \times \text{ΒΓ}$, τουτέστι ἴση μὲ τὴν θλίψιν, ἣν ὑφίσταται ἡ κοίλη ἐσωτερικὴ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνεια, ἡ ἔχουσα βάσιν τὴν ἡμιπεριφέρειαν BEΓ.

Ὅτι εἴπομεν διὰ τὸ μέρος τοῦ κυλίνδρου, τὸ ἔχον βάσιν τὴν ἡμιπεριφέρειαν BEΓ καὶ ὕψος ἐν μέτρον, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ πᾶν

ὅμοιον μέρος τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου, ὥς καὶ διὰ τὸν ὅλον κύλινδρον, δηλ. ὅτι ἡ θλίψις, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς κοίλης ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ΒΕΓ, ΑΒΓΔ (Σχ. 11, 12), ἰσοῦται τῇ θλίψει τῇ ἐνεργοῦσᾳ ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης βάσιν τὴν διάμετρον ΒΓ τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 13, 14). Τοῦθ' ὅπερ προεπιθέμεθα ἀρχόμενοι ν' ἀποδείξωμεν.

13. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐκόλως καὶ πειραματικῶς ὡς ἐξῆς. Λαμβάνομεν λέβητά τινα, ἔχοντα ἐγκάρσιον τομήν, οἷαν δεικνύει τὸ σχ. 13 ἰσορροποῦμεν τὸ βάρος αὐτοῦ δι' ἐτέρων βαρῶν, καταλλήλως διατεθειμένων πρὸς τοῦτο, θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ ἀτμόν, καὶ βλέπομεν ὅτι ἡ τοῦ ἀτμοῦ ἐντὸς τοῦ λέβητος ἐνέργεια οὐδεμίαν παράγει κίνησιν τοῦ λέβητος, οὔτε πρὸς τὰ ἄνω οὔτε πρὸς τὰ κάτω· τοῦτο δὲ ἀποδεικνύει ὅτι ἡ θλίψις, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς κοίλης ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ΒΕΓ τοῦ λέβητος ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίθετον θλίψιν, τὴν ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τῇ ἐπιπέδου ἐπιφανείας ΒΓ.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ρ τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν ἀσφαλῶς εἰς ἐφελκυσμὸν τὴν μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς εἶναι κατεσκευασμένος ὁ λέβης ὕλης, θέλομεν ἔχει τοῦ Ρ διδομένου ὑπὸ τοῦ προηγουμένου πίνακος Β', τὴν παρέχουσαν ἡμῖν τὸ πάχος τοῦ λέβητος ἐξίσωσιν

$$2. \epsilon. \text{M. P} = \delta. \text{M. } \Theta \quad (1),$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν γινόμενον ε.Μ παριστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς διατομῆς ΑΒ, τὸ 2.ε.Μ τὰς δύο ἐπιφανείας ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 11, 12), καθ' ἃς τείνει νὰ διαχωρισθῇ ὁ κύλινδρος, τὸ δὲ ὀλικὸν γινόμενον 2.ε.Μ.Ρ παριστᾷ τὴν συνισταμένην τῶν ἀτομικῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν ἐπιφανειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὡσαύτως τὸ μὲν δ.Μ εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΒΓ, ΑΒΓΔ (Σχ. 11, 12), τὸ δὲ δ.Μ.Θ παριστᾷ τὴν ἀπὸ τῆς ἐξωτερικῆς θλίψεως ὑπεροχὴν τῆς ἐσωτερικῆς κατὰ τὰς διευθύνσεις ΟΕ καὶ ΟΖ, τὴν τείνουσαν νὰ διαρρήξῃ τὸν κύλινδρον κατὰ δύο ἀντικειμένους γεννητήριās ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 11, 12). Λοιπὸν κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) ὅπως μὴ ὁ κύλινδρος διαρραγῇ, πρέπει ἡ ἐλατήριος δύναμις τῶν μέρων τοῦ σώματος νὰ ἰσορροπῇ τὴν ἐσωτερικὴν θλίψιν.

14. Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1) πορίζομεθα ἀμέσως τὸ ζητούμενον πάχος ε τοῦ κυλίνδρου, τοῦ δυναμένου ἀσφαλῶς νὰ ὑποβληθῇ εἰς ἐσωτερικὴν θλίψιν μεγαλειτέραν τῆς ἐξωτερικῆς κατὰ Θ καὶ κατὰ τετραγωνικὴν

μέτρον ἐπιφανείας, ὅταν οὐδὲν ἐλάττωμα ὑπάρχῃ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ, τοῦτέστι ἔχομεν

$$\varepsilon = \frac{\delta \cdot \Theta}{2P} \quad (2).$$

Ὁ τύπος (2) δίδει ἐν τῇ περὶ ἧς ὁ λόγος περιπτώσει τὸ θεωρητικὸν πάχος τοῦ λέβητος κτλ., ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν χύσιν τῶν μετάλλων παρειαίγονται πολλάκις ἐλλείψεις, ἀδυνατοῦσαι τὴν στερεότητα αὐτῶν, τὰ ἐργοστάσια, τὰ κατασκευάζοντα τοὺς ἀτμολέβητας, ὑδραυλικοὺς σωλήνας κτλ., πρὸς πρόληψιν παντὸς ἀπεικταίου ἀδξάνουσι τὸ ὑπὸ τοῦ τύπου (2) διδόμενον θεωρητικὸν πάχος αὐτῶν εἰς κατὰ ποσότητά τινα ε', ἥτις συνήθως μεταβάλλεται ἀπὸ 0,04 μέχρι 0,003, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐν τῷ κατωτέρῳ πίνακι.

Ἄντὶ λοιπὸν τοῦ θεωρητικοῦ τύπου (2) κάμνουσι χρῆσιν τοῦ ἐμπειρικοῦ

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{\delta \Theta}{2P} \quad (3).$$

Συνήθως ἡ ἐσωτερικὴ θλίψις ἐκφράζεται εἰς ἀτμοσφαίρας ἀντὶ νὰ δίδεται κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ὡς ὑποθέτει ὁ τύπος (3). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει πρέπει ὁ τύπος (3) νὰ μετασχηματισθῇ. Τοῦτο δὲ εἶναι λίαν εὐκόλῳ γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας ἐπὶ ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου παραγομένη πίεσις ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος 40333 χιλιογράμμων. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δεδομένη ἐσωτερικὴ θλίψις εἶναι $N+1$ ἀτμοσφαιρῶν, τότε Θ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $N \times 40333$, καὶ ὁ τύπος (3) γίνεται

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{\delta N \times 40333}{2P} \quad (4).$$

Διὰ τοῦ τύπου (4), ἐν ᾧ θέτουσιν ἀντὶ τοῦ P καὶ ε' τὰς πειραματικῶς εὐρεθείσας δι' ἕκαστον εἶδος ὕλης τιμὰς αὐτῶν, σχηματίζουν κατὰ τὸν ἐξῆς πίνακα τὸν εἰς ἕκαστον εἶδος ἀντιστοιχοῦντα τύπον, ὅστις δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ε , ὅταν τὸ N καὶ δ ᾖναι γνωστά.

Εμπειρικοί τύποι πρὸς εὑρεσιν τοῦ πάχους τῶν λεβήτων,
σιδηρῶν σωλῆνων κτλ.

Τίτλοι, ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται οἱ λέβητες, οἱ σωλῆνες κτλ.	Τύποι ἐφαρμοστικοὶ πρὸς εὑρεσιν τοῦ πάχους αὐτῶν ε.	Τίτλοι τοῦ Ρ
Διὰ σιδηροῦς λέβητας ἀτμοκι- νήτων μηχανῶν	$\varepsilon = 0^{\mu},003 + 0^{\mu},0018N.δ$	3.000.000
Διὰ σωλῆνας ἐκ χυτοσιδήρου ὀρθίως χυνομένους	$\varepsilon = 0,008 + 0,0016N.δ$	3.000.000
Διὰ σωλῆνας ἐκ χυτοσιδήρου ὀριζοντίως χυνομένους . . .	$\varepsilon = 0,0085 + 0,00238N.δ$	2.170.000
Διὰ μολυβδίνους σωλῆνας	$\varepsilon = 0,005 + 0,00242N.δ$	2.130.000
Διὰ σωλῆνας ἐκ χαλκοῦ ἐλασμα- τοποιημένου	$\varepsilon = 0,004 + 0,001476N.δ$	3.500.000
Διὰ σωλῆνας ἐξ ὀρειχάλκου . .	$\varepsilon = 0,004 + 0,00629N.δ$	833.000
Διὰ ξυλίνους σωλῆνας	$\varepsilon = 0,027 + 0,0323N.δ$	160.000
Διὰ σωλῆνας ἐκ φυσικῶν λίθων	$\varepsilon = 0,03 + 0,0369N.δ$	140.000
Διὰ σωλῆνας ἐκ τεχνιτῶν λίθων	$\varepsilon = 0,04 + 0,0538N.δ$	96.000
Διὰ κυλίνδρους τῶν ἀτμομηχαν.	$\varepsilon = 0,01 + 0,0065N.δ$	800.000

15. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν δίδομεν ἐνταῦθα τὴν λύσιν σχετικῶν
τινῶν προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πάχος μολυβδίνου σωλῆνος διαμέ-
τρου $0^{\mu},003$, δι' οὗ πρὸκειται ἡ διοχετευθῇ ὕδωρ ἀπὸ τόπον εἰς
τόπον καὶ ὑπὸ θλίψιν παραγομένην ὑπὸ ὑδατίνης στήλης ἑκατὸν
μέτρων ὕψους.

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν σχετικὸν τύπον $\varepsilon = 0,005 + 0,00242Nδ$,
ἀντὶ τοῦ δ καὶ Ν τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν $0,003$ καὶ 9 (διότι ἡ
ὑπὸ ὕψους 100 μέτρων παραγομένη πίεσις εἶναι 10 περίπου ἀτμο-
σφαιρῶν), θέλομεν εἶχει,
 $\varepsilon = 0^{\mu},005 + 0^{\mu},00242 \times 9 \times 0,003 = 0^{\mu},0056534$ ἢ $\varepsilon = 0^{\mu},006$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πάχος τῶν σιδηρῶν σωλῆνων δια-
μέτρου $0^{\mu},30$, δι' ὧν διοχετεύεται ὕδωρ ἀπὸ δεξαμενῆς εἰς ἑτέραν
ὑπὸ θλίψιν δέκα ἀτμοσφαιρῶν.

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν σχετικὸν τύπον ἀντὶ δ καὶ N τὰς τιμὰς αὐτῶν 0,30 καὶ 9, θέλομεν ἔχει

$$\varepsilon = 0,008 + 0,0016 \times 9 \times 0,30 = 0^{\mu},01232.$$

16. Οἱ λέβητες τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν ἔχουσι συνήθως σχῆμα κυλινδρικὸν περατούμενον εἰς τὰ ἄκρα ὑπὸ ἡμισφαιρίων, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 14, οἱ δὲ κύλινδροι, ἐν οἷς κινεῖνται τὰ κινήτηρια αὐτῶν ἔμβολα, περιορίζονται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας ὡς δεικνύει τὸ σχ. 11. Εἰς τὸν προσδιορισμὸν δὲ τοῦ θεωρητικοῦ πάχους αὐτῶν ε δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν τὴν δύναμιν οὔτε τῶν ἡμισφαιρίων τῶν λεβήτων BΚΓ καὶ ΑΛΔ (Σχ. 14) οὔτε τῶν ἐπι-



Σχ. 14

πέδων βάσεων τῶν κυλινδρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ (Σχ. 11), τοῦτο δὲ συντείνει μᾶλλον εἰς τὴν ἐπαύξησιν τῆς ἰσχύος τῶν λεβήτων καὶ κυλινδρῶν. Ἐνδέχεται ὅμως πολλάκις ἡ διάβρηξις αὐτῶν νὰ γείνη κατὰ τὰς ἐγκαρσίους διατομὰς ΒΓ ἢ ΑΔ (Σχ. 11, 14), ἐπομένως πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν προσέτι ἂν τὸ ὁρισθὲν θεωρητικὸν πάχος $\varepsilon = \frac{\delta\theta}{2p}$ διὰ τὸν κύλινδρον ΑΒΓΔ ἀρμόζει καὶ διὰ τὰς ἐγκαρσίους διατομὰς αὐτῶν ΒΓ καὶ ΑΔ (Σχ. 11, 14), ἵνα οὗτο ὦμεν πληρέστατα ἀσφαλεῖς ποιοῦντες χρῆσιν τῶν ἀνωτέρω ἐμπειρικῶν τύπων πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις, ἡ παριστῶσα τὴν ἰσορροπίαν μεταξὺ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῆς διατομῆς ΒΓ π. χ. καὶ τῆς ἐσωτερικῆς θλίψεως, εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\pi\delta \cdot \varepsilon_1 p = \frac{1}{4} \pi \delta^2 \cdot \theta \quad (5),$$

ἥς τὸ πρῶτον μέλος παριστᾷ τὴν δύναμιν τῶν ἐλατηρίων μορίων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τῆς ἐχούσης δὲ διάμετρον ἐσωτερικὴν καὶ ε_1 πάχος, τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς παριστᾷ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ἐσωτερικῆς θλίψεως ἀπὸ τῆς ἐξωτερικῆς, τῆς τεινούσης δι' ἐφελκυσμοῦ νὰ διαρρήξη τὸν κύλινδρον κατὰ τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ΒΓ. Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (5) ἐξάγομεν ἀμέσως τὴν ἐξῆς

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta\theta}{4p} \quad (6),$$

ἥτις μᾶς παρέχει τὸ ζητούμενον πάχος ε_1 .

Παραβάλλοντες τὰ πάχη ε καὶ ε_1 , τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν τύπων (6) καὶ (2), βλέπομεν ὅτι τὸ πάχος ε εἶναι διπλάσιον τοῦ ε_1 . Ἐπομένως δίδοντες εἰς ὅλον τὸν λέβητα τὸ αὐτὸ πάχος, τὸ ἀρμόζον εἰς τὸν κορμὸν ΑΒΓΔ (Σχ. 11, 14), εἴμεθα ἐκ τῶν προτέρων βέβαιοι, ὅτι οὐδένα κίνδυνον διατρέχομεν ὡς πρὸς τὴν στερεότητα αὐτοῦ κατὰ τὰς ἐγκαρσίους διατομὰς ΑΔ καὶ ΒΓ.

17. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν, ἣν καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ πάχους τῶν λεβήτων καὶ κυλίνδρων, εὐρίσκομεν πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους ε τῶν σφαιρῶν, τῶν ὑποκειμένων εἰς ἐφελκυσμὸν δεδομένης ἐσωτερικῆς θλίψεως, τὸν αὐτὸν τύπον (5), ὃν εὕρομεν καὶ διὰ τὰς ἐγκαρσίους τομὰς ΑΔ καὶ ΒΒ (Σχ. 11, 14) τῶν λεβήτων καὶ κυλίνδρων, ἥτοι

$$\text{πδ. ε. P} = \frac{1}{4} \pi d^2 \Theta \quad (5),$$

ἐξ ἧς

$$\varepsilon = \frac{\delta \Theta}{4P} \quad (6).$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν τύπον (6) τὰς τιμὰς τοῦ P, τὰς ἀρμοζούσας δι' ἕκαστον εἶδος σφαίρας, εὐρίσκομεν τοὺς κάτωθεν ἐν χρήσει τύπους.

1^{ον} Διὰ σφαῖραν ἐκ σφυρηλατημένου σιδήρου

$$\varepsilon = \frac{\Theta \cdot \rho}{13.333.333}.$$

2^{ον} Διὰ σφαῖραν ἐκ χυτοσιδήρου

$$\varepsilon = \frac{\Theta \cdot \rho}{4.500.000}.$$

3^{ον} Διὰ σφαῖραν ἐκ χαλκοῦ ἐρυθροῦ σφυρηλατημένου

$$\varepsilon = \frac{\Theta \cdot \rho}{8.333.333}.$$

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὸ μὲν Θ παριστᾷ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ἐσωτερικῆς θλίψεως ἀπὸ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας, τὸ δὲ ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ

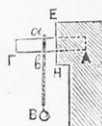
18. Ίδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 1) ὅτι τὰ σώματα διαρρήγνυνται καὶ κατὰ διάτμησιν, ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις ἐνεργῇ κατὰ διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν τοῦ σώματος, καὶ ὑπερβῇ ὥρισμένον τι ὄριον.

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὁρίου τούτου διάφοροι μηχανικοὶ ἐποίησαν πειράματα ἐπὶ διαφόρων σωμάτων, καὶ ἰδίως ἐπὶ τοῦ σιδήρου, διότι συνήθως οἱ ἐκ σιδήρου σύνδεσμοι ὑπόκεινται εἰς διάτμησιν, ὡς λ. χ. αἱ ἀλύσεις, τὰ παλύλιτα (δικέφαλοι ἥλοι), δι' ὧν συνδέονται τὰ σιδηρὰ ἐλάσματα πρὸς κατασκευὴν τῶν λεβήτων τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν, σιδηρῶν γεφυρῶν κτλ., εὗρον δέ, ὅτι τὰ εἰς διάτμησιν ὑποκείμενα σώματα διαρρήγνυνται, ὅταν τὸ φορτίον ἐξισωθῇ μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ φορτίου τοῦ κατ' ἐφελκυσμὸν παράγοντος τὴν διάρρηξιν τοῦ αὐτοῦ σώματος. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὰ ἐν τινι οἰκοδομῇ ἢ μηχανῇ κτλ. εἰς διάτμησιν ὑποκείμενα σώματα οὐδέποτε πρέπει νὰ ὑποβάλλωνται εἰς τὴν διαρκῇ ἐνέργειαν δυνάμεων μεγαλειτέρων τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν φορτίων, ἅτινα κατ' ἐφελκυσμὸν ἐνεργοῦνται ἐπὶ τῶν αὐτῶν σωμάτων οὐδεμίαν δύναμιν νὰ ἐπιφέρωσιν ἐπ' αὐτῶν βλάβην, καὶ ὧν τὸ μέγεθος παρέχει ἡμῖν ἡ τρίτη στήλη τοῦ δευτέρου πίνακος.

Ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐφελκυσμοῦ οὕτω καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὴν σχέσιν, τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ εἰς διάτμησιν ὑποκειμένου σώματος καὶ τοῦ κατὰ διάτμησιν ἐνεργοῦντος βάρους, ἣτις καλεῖται καὶ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς.

Πρὸς τοῦτο, ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος, ὅπερ ἐνεργεῖ νὰ διάρρήξῃ τὴν ἐντετοιχισμένην δοκὸν ΑΓ (Σχ. 15) κατὰ τὴν διατομὴν αβ, τὴν οὖσαν πλησίον τῆς ἐντοιχίσεως ΕΗ, ἣτις καλεῖται τομὴ τῆς πακτώ-

σεως (ἡ δοκὸς ΑΓ τοῦ σχ. 45 καλεῖται συνήθως πεπακτωμένη εἰς τὸ ἐν ἄκρον καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον), ὡ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αβ, Ρ' τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ᾧ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς διάτμησιν ἐκάστην μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς ἀποτελεῖται τὸ σῶμα ὕλης, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν



Σχ. 45

$$\omega P' = B \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἡ τὴν τιμὴν τοῦ ω , ὅταν τὸ Β ᾖ γινωστόν, ἡ τὸ Β, ὅταν τὸ ω ᾖ δεδομένον, τοῦ Ρ' ὄντος πάντοτε ἴσου μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ διὰ Ρ ἐν τῷ περὶ ἐρελκυσμοῦ κεφαλαίῳ παρασταθέντος βάρους.

19. Χάριν ἀσκήσεως ἂς λύσωμεν προβλήματα τινά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. Νὰ ὁρισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς σιδηρᾶς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 45), ὅπως ἀσφαλῶς αὕτη ὑποβασιάζῃ δεδομένον βάρος 5000 χιλιογράμμων ἐνεργοῦν πλησίον τῆς πακτώσεως ΕΗ.

Λύσις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) ἐξάγομεν

$$\omega = \frac{B}{P'} \quad (2),$$

λαμβάνοντες δὲ ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ τετραγωνικὸν χιλιοστόν καὶ θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) 5000 ἀντὶ Β καὶ ἀντὶ τοῦ Ρ' τὰ δύο τρίτα τοῦ Ρ, ὅπερ κατὰ τὸν δεύτερον πίνακα εἶναι ἴσον μὲ 6 χιλιόγραμμα, εὐρίσκομεν $\omega = \frac{5000}{4} = 1250$ τετραγωνικὰ χιλιοστά.

Ἦνα δὲ ὁρίσωμεν καὶ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς ω πρέπει προφανῶς νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸ εἶδος τῆς τομῆς. Ἀς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι αὕτη εἶναι ὀρθογώνιος, καὶ ἔστωσαν α καὶ β αἱ ζητούμεναι διαστάσεις αὐτῆς. Θέλομεν ἔχει

$$\alpha\beta = 1250 \quad (3).$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) περιέχει δύο ἀγνώστους, τὴν α καὶ β, καὶ ἐξ αὐτῆς δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς δίδοντες ἀθαίρετόν τινα τιμὴν εἰς τὴν ἄλλην. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν δύο διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ῥάβδου τὴν μίαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατ' ἀρέ-

σκαιαν, ὁδηγούμενοι πρὸς τοῦτο ὑπὸ τῆς πείρας, τὴν δὲ ἑτέραν προσδιορίζομεν διὰ τοῦ ἀνωτέρω εὑρεθέντος τύπου (3).

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου δὲ προβλήματος ἂν λάβωμεν $\theta = 0^{\mu}, 10$, ἐκ τῆς ἐξίσωσως (3) εὐρίσκουμεν

$$\alpha = \frac{5000}{100} = 12\%, \delta = 0^{\mu}, 0125.$$

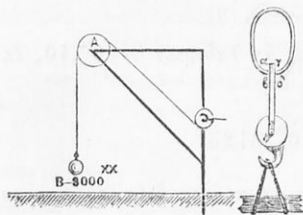
Ἡ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτὴ καὶ ἐν τῇ πράξει, διότι εὐρίσκουμεν σίδηρον πάχους $12\frac{1}{2}$ χιλιοστών τοῦ μέτρου.

Ἄν ὅμως ἀντὶ βάρους 5000 χιλιογράμμων εἴχομεν 4000, τότε λαμβάνοντες $\theta = 0^{\mu}, 10$, ἠθέλομεν εὑρεῖ διὰ τοῦ τύπου (3) $\alpha = 0^{\mu}, 0025$, τὸ πάχος δὲ τοῦτο δὲν εἶναι παραδεκτὸν ἐν τῇ πράξει, διότι ἐκτὸς τοῦ ὅτι δυσκόλως εὐρίσκει τις πρὸς ἀγορὰν σίδηρον πάχους $2\frac{1}{2}$ χιλιοστών τοῦ μέτρου, καὶ ἡ δοκὸς δὲν θά ᾔνοι ἰκανὴ νὰ ἀνθέξῃ οὔτε εἰς ὥθησίν τινα ἐξωτερικὴν, ἐνεργοῦσαν καθέτως ἐπὶ τῆς προόψεως ΑΓ, οὔτε εἰς τὴν ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος παραγομένην ῥεῦδωσιν. Ἡ ἀντίφασις δὲ αὕτη τοῦ ὑπολογισθέντος πάχους πρὸς τὸ ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένον ἐλάχιστον πάχος προέρχεται οὐχὶ ἐκ τοῦ τύπου (3), ἀλλὰ ἐκ τοῦ κατ' ἀρέσκειαν ληφθέντος ὕψους τῆς δοκοῦ. Τῷ ὄντι, ἂν λάβωμεν $\theta = 0^{\mu}, 04$, θέλομεν εὑρεῖ διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (3) $\alpha = 0^{\mu}, 00625$, ὅπερ εἶναι ὀλίγον τι μεγαλειότερον τοῦ ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένου ἐλαχίστου πάχους τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων, δηλ. τοῦ τῶν 6 χιλιοστών τοῦ μέτρου. Τὴν ἀνωτέρω δὲ μικρὰν ἐρεῦνην ἐποιήσαμεν χάριν τῶν μαθητῶν, ἵνα καταδείξωμεν τούτοις πόσον πρέπει νὰ ᾔνοι προσεκτικοὶ εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς μιᾶς τῶν δύο διαστάσεων τῆς τομῆς δοκοῦ τινος, ἵνα ἡ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐριζομένη ἑτέρα μὴ προσκρούῃ πρὸς τὰς ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένας διαστάσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ διάμετρος τῶν κρίκων σιδηρᾶς ἀλύσειος, δι' ἧς νὰ δυνάμεθα ἀσφαλῶς διὰ τοῦ γερανοῦ (Σχ. 16) νὰ ὑψώμεν βάρη μέχρι 3000 χιλιογράμμων.

Λύσις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ὅπως τὸ φορτίον καταπέσῃ, πρέπει εἰς κρίκος τῆς ἀλύσειος νὰ διαρρήχθῃ ταυτοχρόνως κατὰ τὰς δύο διατομὰς αβ καὶ γδ (Σχ. 16). Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ φορτίου Β ἐνεργεῖ νὰ διαρρήξῃ τὸν κρίκον κατὰ τὴν τομὴν αβ καὶ τὸ ἕτερον ἥμισυ κατὰ τὴν τομὴν γδ· ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ δύναμις ἐκάστου κρίκου τῆς ἀλύσειος εἶναι $2\omega P'$, ω οὔσης τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ

τομῆς καὶ P' παριστῶντος τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δύνα-
μεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς διάτμησιν τὴν
μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς ὁ κρίκος
ἀποτελεῖται ὕλης. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δύνα-
μις τοῦ κρίκου πρέπει νὰ ἰσορροπῇ τὸ
τεῖνον νὰ διατμήσῃ τὸν κρίκον φορτίον
B, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν



Σχ. 16

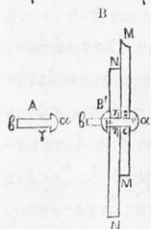
$$2\omega P' = B \quad (4),$$

ἐν ᾗ ἀντικαθιστῶντες 3000 ἀντὶ B, 4
ἀντὶ P' (διότι λαμβάνομεν ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ τετραγωνικὸν
χιλιοστόν), καὶ $\frac{3.14. \delta^2}{4}$ ἀντὶ ω καὶ λύοντες τὴν οὕτω προκύπτουσιν ἐξί-
σωσιν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον δ , τὴν παριστῶσαν τὴν ζητούμενην τοῦ
κρίκου διάμετρον, εὐρίσκομεν $\delta = 21^{\circ} 84' = 0^{\circ} 02184$.

ΠΕΡΙ ΠΑΛΥΛΙΤΩΝ ἢ ΔΙΚΕΦΑΛΩΝ ΠΛΩΝ

20. Καλοῦσι παλύλιτα ἢ δικεφάλους ἥλους τοὺς σιδηροὺς ἥλους αβ
(Σχ. 47), δι' ὧν συνδέουσι τὰ σιδηρὰ ἐλάσματα τῶν λεβήτων, τῶν
ἀτμοκινήτων μηχανῶν, τῶν σιδηρῶν δοκῶν, τῶν γεφυρῶν, στεγῶν κτλ.

Τὰ παλύλιτα κατασκευάζονται ἐκ σιδήρου πρώτης ποι-
ότητος καὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸν κυλινδρικὸν κορ-
μὸν γβ καὶ τὴν κεφαλὴν α, ἥτις εἶναι τμήμα σφαίρας
(Σχ. 47, Α). Ἡ δὲ σύνδεσις τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων,
π. χ. τῶν MM καὶ NN (Σχ. 47, Β), διὰ τῶν παλυλί-
των γίνεται ὡς ἐξῆς.



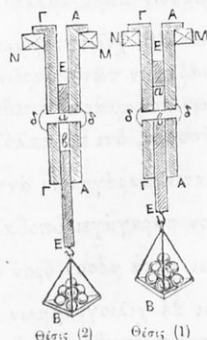
Σχ. 17

Ἐν πρώτοις τὰ σιδηρὰ ἐλάσματα MM καὶ NN δια-
τρυπῶνται κατὰ κυκλικὰς ὁπὰς εε, ηη, ἐχούσας διάμε-
τρον ἴσην τῇ τοῦ παλυλίτου, ἔπειτα τίθενται εἰς ἐπα-
φὴν οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι κυκλικαὶ αὐτῶν ὁπαὶ εε καὶ ηη νὰ ἀντιστοι-
χῶσι, ἀποτελοῦσαι συνεχῇ ὁπῇ. Τούτου γενομένου, τὰ μὲν σιδηρὰ
ἐλάσματα διὰ καταλλήλων ἐργαλείων διατηροῦνται εἰς ἡν ἔλαβον πρὸς
ἄλληλα θέσιν, τὸ δὲ παλύλιτον αβ πυρακτοῦται μέχρις ἐρυθροῦ φαιού
καὶ εἰσάγεται ἀμέσως εἰς τὴν κυλινδρικήν ὁπὴν εεηη (Σχ. 47, Β) ὑπὸ
ἐργάτου, κρατοῦντος ἰσχυρῶς τὴν κεφαλὴν α εἰς ἐπαφὴν τοῦ ἐλάσματος
MM διὰ καταλλήλου ἐργαλείου, ἔχοντος κοίλωμα σφαιρικόν, ἐν ᾧ αὕτη

ἀκριβῶς εἰσέρχεται, ἕτερος δὲ ἐργάτης ἐπιθέτει ἐπὶ τῆς κορυφῆς θ τὸ σφαιρικὸν κοῖλον ὁμοίου ἐργαλείου καὶ κρατεῖ τοῦτο στερεῶς εἰς ἐπαφήν τοῦ ἄκρου θ, ἐνῶ ταυτοχρόνως τρίτος ἐργάτης διὰ σφύρας κυττῶ ἐπὶ τοῦ ἐργαλείου τούτου μέχρις οὗ τὸ πεφυρακτωμένον ἄκρον αὐτοῦ θ λάβῃ τὸ ἡμισφαιρικὸν σχῆμα Β' (Σχ. 17, Β). Ἐπειδὴ δὲ τὸ παλύνειτον κατὰ τὴν τοποθέτησίν του ἦτο θερμὸν, ἔπεται ὅτι, ὅταν τοῦτο ψυχρανθῇ, τὸ μῆκος μν αὐτοῦ θὰ ἐλαττωθῇ καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ παρειαὶ τῶν κεφαλῶν α καὶ Β' τῶν ἀποτελεσθέντων ἡμισφαιρίων θέλουσι συσφίγγει ἰσχυρῶς τὰ πρὸς σύνδεσιν σιδηρὰ ἐλάσματα MM, NN καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν ἀδιαίρετον σῶμα.

21. Ὡς ἐν ἀρχῇ τοῦ κεφαλαίου τούτου εἴπομεν τὰ παλύνειτα ὑπόκεινται εἰς διάτμησιν (τουτέστιν, ἂν θλασθῶσιν διὰ τῆς ἐνεργείας ἐξωτερικῶν δυνάμεων, θὰ θλασθῶσι κατὰ διάτμησιν), ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀντίστασις αὐτῶν εἰς τὴν θλάσιν μεγάλως συντείνει εἰς τὴν στερεότητα τῶν δι' αὐτῶν κατασκευασμένων λεβήτων, σιδηρῶν δοκῶν κτλ., πολλοὶ καὶ διακεκριμένοι μηχανικοὶ, καὶ ἰδίως οἱ κκ. Κλαίρκ, Γκουαὶν καὶ Λαβαλλαί, ἔκαμον εἰδικὰ πειράματα πρὸς εὔρεσιν τῆς δυνάμεως αὐτῶν. Πρῶτος δὲ ὁ κ. Κλαίρκ ἔκαμε πρὸς τοῦτο τὰ ἐξῆς πειράματα.

Ἐλαβε τρία σιδηρὰ ἐλάσματα καὶ ἐν παλύνειτον διαμέτρου 0^μ,0223, καὶ τὰ μὲν δύο ἄκρα ἐλάσματα ΑΑ καὶ ΓΓ (Σχ. 18) διετρύπησε κατὰ μίαν κυκλικὴν ὀπὴν διαμέτρου ἴσης τῇ τοῦ παλύνειτου, τὸ δὲ ἐν τῷ μέσῳ τρίτον ΕΕ κατὰ ὀρθογώνιον ὀπὴν αβ, τῆς ὁποίας αἱ διαστάσεις ἦσαν μεγαλείτεροι τῆς διαμέτρου τοῦ παλύνειτου. Μετὰ ταῦτα ἐτοποθέτησε τὰ τρία σιδηρὰ ἐλάσματα ὡς δεικνύει ἡ θέσις (1) τοῦ σχ. 18, καὶ συνέδεσε ταῦτα διὰ τοῦ παλύνειτου δδ οὕτως, ὥστε τοῦτο νὰ ἐφάπτηται μόνον τῆς κάτω βάσεως θ τῆς ὀπῆς τοῦ μεσαίου ἐλάσματος ΕΕ. Τῶν ἐλασμάτων δὲ διατεθέντων ὡς δεικνύει ἡ θέσις (1) τοῦ σχ. 18, ἐξήρτησεν ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ μεσαίου ἐλάσματος ΕΕ πλάστιγγα, ἐφ' ἧς ἔθετε διαδοχικῶς διάφορα βάρη, ἵνα ἴδῃ ποῖον βῆρος ἤθελεν ὑπερνικήσει τὴν ἐπὶ τῶν δύο ἄκρων ἐλασμάτων τριβὴν τοῦ μεσαίου, τὴν προσγινόμενὴν ἐκ τῆς ὑπὸ τῶν κεφαλῶν τοῦ παλύνειτου παραγομένης συσφίγγεως. Διὰ τοῦ πειράματος δὲ τούτου ὁ κύριος Κλαίρκ εὔρεν ὅτι, ἐνόσω τὰ ἐπὶ



Σχ. 18

τῆς πλάστιγγος τιθέμενα βάρη ἦσαν μικρότερα τῶν 5670 χιλιογράμμων, τὸ μεσαῖον ἔλασμα ΕΕ διέμενεν ἀκίνητον διατηροῦν τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν (Σχ. 48, 4), ἅμα δ' ὡς ταῦτα ἐγένοντο 5670 χιλιόγραμμα, τότε τὸ ἔλασμα ΕΕ ἐκινήθη πρὸς τὰ κάτω καὶ ἐξηκολούθη κινούμενον μέχρις οὗ ἡ ἄνω βάσις α ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ παλυλίτον δδ, ὡς δεικνύει τοῦτο ἡ θέσις (2) τοῦ σχ. 48. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι δλόκληρον τὸ βάρος τῶν 5670 χιλιογράμμων καταναλίσκεται εἰς τὴν ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς, τῆς παραγομένης ἐκ τῆς ὑπὸ τοῦ παλυλίτου συσφίγγεως τῶν ὑπ' αὐτοῦ συνδεομένων σιδηρῶν ἐλασμάτων, καὶ προσέτι ὅτι, ἵνα ὑπερνικηθῇ ἡ τριβή, ἡ παραγομένη ἐπὶ ἐπιφανείας ἐνὸς μόνου χιλιοστοῦ τετραγωνικοῦ, ἀπαιτεῖται βάρος 14 περίπου χιλιογράμμων, διότι ἡ τριβὴ ἡ παραχθεῖσα ὑπὸ τοῦ παλυλίτου δδ, οὕτινος ἡ ἐπιφάνεια ἦτο 390 τετραγωνικά χιλιοστά ὑπερνικήθη μὲ βάρος 5670 χιλιογράμμων. Μετὰ τὸν Κλαίρκ ὅμοια πειράματα ἔκαμον καὶ οἱ μηχανικοὶ Γκουαὶν καὶ Λαβαλλαὶ καὶ εὗρον ὅτι ἀπαιτεῖται κατὰ μέσον ὅρον βάρος 12 χιλ. πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς, τῆς παραγομένης ἐπὶ ἐπιφανείας ἐνὸς τετραγωνικοῦ χιλιοστοῦ.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω πειραμάτων ἀποδεικνύεται σαφῶς ὅτι τὸ βάρος, ὅπερ ὑπερνικᾷ τὴν ὑπὸ τοῦ παλυλίτου εἰς τὰ ἐπὶ τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων παραγομένην τριβὴν εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ εὐρεθέντος βάρους τῶν 36 χιλιογράμμων, ὅπερ κατ' ἐφελκυσμὸν ἐνεργοῦν παράγει τὴν διάρρηξιν τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων. Δι' ἐτέρων καταλλήλως ἐκτελεσθέντων πειραμάτων ἀπεδείχθη προσέτι, ὡς ἐν ἀρχῇ τοῦ κεφαλαίου τούτου εἵπομεν, ὅτι τὰ παλύλιτα αὐτὰ καθ' ἑαυτά, ὑποβαλλόμενα εἰς διάτμησιν παράγουσιν ἀντίστασιν ἴσην μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστάσεως, ἣν ἤθελον παραγάγει ὑποβαλλόμενα εἰς ἐφελκυσμὸν, τουτέστιν ὅτι ἀπαιτεῖται κατὰ μέσον ὅρον δύνამις ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 36 χιλιογράμμων, ἥτοι 24 χιλιογράμμων δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας, ὅπως παραχθῇ ἡ θλάσις αὐτῶν.

22. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἐξάγεται, ὅτι πρὸς θλάσιν ἐνὸς παλυλίτου, συνδέοντος δύο σιδηρὰ ἐλάσματα, ἀπαιτεῖται κατὰ μέσον ὅρον δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας δύνამις ἴση μὲ 36 χιλιόγραμμα ($12^2 + 24^2$). διότι ἡ δύνამις αὕτη πρέπει ταυτοχρόνως νὰ ὑπερνικήσῃ καὶ τὴν τριβὴν (12^2) καὶ τὴν εἰς τὴν διάτμησιν

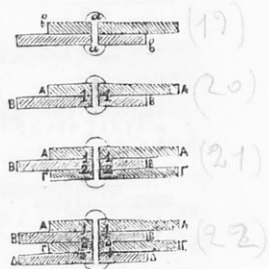
ἀντίστασιν τοῦ παλυλίου (24%), ἐπομένως ἔτι δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν αὐτὸ εἰς τὴν διαρκῆ ἐνέργειαν φορτίου 6 χιλιογράμμων κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας, ὥπως καὶ ὅταν τοῦτο ὑπόκειται εἰς ἐφελκυσμόν, χωρὶς νὰ διατρέχωμεν τὸν ἐλάχιστον κίνδυνον. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ δύναμις ἐνὸς παλυλίου, συνδέοντος δύο σιδηρὰ ἐλάσματα καὶ ὑποκειμένου εἰς διάτμησιν κατὰ μίαν διατομὴν (Σχ. 19), εἶναι ἴση μὲ $\frac{6\pi d^2}{4}$ χιλιόγραμμα.

Σημείωσις 1. Ὅταν δύο σιδηρὰ ἐλάσματα συνδέονται ὡς δεικνύει τὸ σχ. 19, πρέπει ἡ ἀπόστασις αβ νὰ ἦναι τοῦλάχιστον ἴση μὲ τὴν διάμετρον δ τοῦ παλυλίου. Συνήθως ἐν τῇ πράξει ἡ ἀπόστασις αβ λαμβάνεται ἴση μὲ 0^μ,03.

Σημείωσις 2. Ἡ δύναμις τοῦ παλυλίου, τοῦ συνδέοντος δύο σιδηρὰ ἐλάσματα (Σχ. 20), εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας μιᾶς τομῆς ω ἐπὶ τὸ φορτίον P, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν εἰς διάτμησιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας, καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ωP· διότι ἀρκεῖ νὰ διατμηθῇ τοῦτο κατὰ τὴν διατομὴν (1—1), ἵνα διασπασθῇ ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος σύνδεσμος τῶν ἐλασμάτων Α καὶ Β. Ὅταν δὲ τοῦτο συνδέῃ τρία σιδηρὰ ἐλάσματα Α, Β, Γ (Σχ. 21), τότε ἡ δύναμις του εἶναι διπλασία τῆς προηγουμένης, ἤτοι 2ωP· διότι, ὅπως διασπασθῇ ὁ δι' αὐτοῦ παραγόμενος σύνδεσμος τῶν τριῶν ἐλασμάτων, πρέπει τὸ παλύλιον νὰ διατμηθῇ ταῦτοχρόνως κατὰ τὰς δύο διατομὰς (1—1), (2—2). Ὡσαύτως, ὅταν τὸ παλύλιον συνδέῃ τέσσαρα ἐλάσματα Α, Β, Γ, Δ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 22, ἡ δύναμις αὐτοῦ εἶναι 3ωP, διότι τὸ παλύλιον πρέπει νὰ τμηθῇ ταῦτοχρόνως κατὰ τὰς τρεῖς τομὰς (1—1), (2—2) καὶ (3—3), ἵνα διασπασθῇ ὁ δι' αὐτοῦ παραγόμενος σύνδεσμος τῶν τεσσάρων ἐλασμάτων.

Ἐν γένει δέ, ὅταν τὸ παλύλιον συνδέῃ ν σιδηρὰ ἐλάσματα, ἡ δύναμις αὐτοῦ εἶναι (ν—1) ωP· διότι τὸ παλύλιον πρέπει ταῦτοχρόνως νὰ τμηθῇ εἰς (ν—1) τομὰς, ἵνα διασπασθῇ ὁ σύνδεσμος τῶν δι' αὐτῶν συνδεομένων ἐλασμάτων.

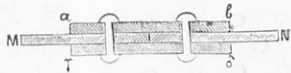
Σημείωσις 3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν παλυλίων, τῶν συνδεόντων δύο σι-



σχ. 19—22

(4), (2), (3), (4), (5), ἄτινα παρήγαγεν ἡ κατασκευὴ τῶν πέντε ὀπῶν, ἐν αἷς θὰ εἰσδύσωσι τὰ πέντε παλῦλιτα (τῶν παλυλίτων διὰ τὴν σύνδεσιν τῶν ἐλασμάτων ὄντων πέντε καθ' ὑπόθεσιν), νὰ ἀνθίσταται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς αὐτῆς δυνάμεως Δ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ἐπιφάνεια $\alpha\beta + \gamma\delta + \epsilon\zeta + \eta\theta + \iota\lambda + \mu\nu$ τῆς τομῆς NN νὰ ᾖ ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τομῆς MM, ἥς τὸ πάχος ὑπελογίσθη διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ἐφελκυσμοῦ οὕτως, ὥστε νὰ ἀντέχῃ ἀσφαλῶς εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς αὐτῆς δυνάμεως Δ.

Σημείωσις 5. Πολλάκις ἡ σύνδεσις τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων γίνεται ὅχι δι' ἐπικαλύψεως μέρους τινὸς τοῦ μὲν ἐπὶ τοῦ δέ, ὡς ἐν τῷ σχ. 23 ἐδείχθη διὰ τῆς διατομῆς ΠΠ, ἀλλ' ὡς δεικνύται διὰ τοῦ σχ. 24, ἔνθα τὰ μὲν δύο ἐλάσματα M καὶ N ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ μέσον καὶ καλύπτονται

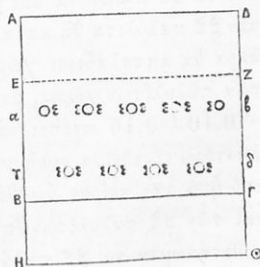


Σχ. 24

ταὶ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν διὰ τῶν μικρῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$.

Ὅταν ἡ σύνδεσις γίνεται ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη (Σχ. 24), πρέπει τότε τὰ πάχη τῶν δύο ἐλασμάτων $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ νὰ ᾖ τὸ ἐλάχιστον ἴσα, ἂν ὅχι καὶ μεγαλύτερα, μὲ τὸ πάχος τοῦ σιδηροῦ ἐλάσματος MN, καὶ ἐπειδὴ συνήθως τὸ πάχος τοῦ $\alpha\beta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τοῦ $\gamma\delta$, ἔπεται ὅτι τὸ πάχος τῶν $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ θὰ ᾖ τὸ ἡμισυ τοῦ πάχους τοῦ MN.

Σημείωσις 6. Ὅταν πάντα τὰ παλῦλιτα δὲν ᾖ δυνατὸν νὰ τοποθετηθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 23, τότε ταῦτα τίθενται ἢ εἰς δύο σειράς, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 25, ἢ εἰς τρεῖς ἢ τέσσαρας κτλ., ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 26 καὶ 27.



Σχ. 25

Σημείωσις 7. Ὅταν ὁ διὰ τοῦ τύπου (1) τῆς ἀνωτέρω 3ης σημειώσεως ὁρισθεὶς ἀριθμὸς ν τῶν παλυλίτων δὲν εὐρίσκηται ἀκέραιος, ἀλλὰ κλασματικὸς περιεχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, α καὶ β π. χ., τότε λαμβάνουσιν ὡς τιμὴν τοῦ ν τὸν ἀκέραιον β, τὸν ὄντα μεγαλύτερον τοῦ εὑρεθέντος κλάσματος.

Πρὸς τούτοις δὲ πολλάκις αὐξάνουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων ὅχι κατὰ πολλοστὸν μέρος τῆς μονάδος, ἀλλὰ κατὰ περισσοτέρας μο-

νάδας καὶ οὕτω τοποθετοῦσι πλείονα τῶν ὑπολογισθέντων παλύλιτα.

○ ε ○ ε ○ ε ○ ε ○

○ ε ○ ε ○ ε ○

○ ε ○ ε ○ ε ○ ε ○

Σχ. 26

Τοῦτο δὲ συμβαίνει ὁσάκις διὰ τῆς ἐπ' εὐθείας γραμμῆς τοποθετήσεως τοῦ ὑπολογισθέντος ἀριθμοῦ αὐτῶν ὁ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν παλυλίτων χώρος εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ ὑπὸ τῆς πείρας ὑποδειχθέντος ὁρίου, τοῦ ἀρμόζοντος

εἰς τε τὴν καλὴν σύνδεσιν τῶν ἐλασμάτων καὶ εἰς τὴν εὐκολίαν αὐτῆς τῆς συνδέσεως, ὅταν τὰ παλύλιτα τεθῶσιν ἐπὶ γ σειρῶν π. χ., μεγαλύτερος δὲ τοῦ αὐτοῦ ὁρίου, ὅταν τεθῶσιν ἐπὶ γ+1 σειρῶν. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς τῶν παλυλίτων αὐξάνει καὶ γίνεται ἴσος

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

Σχ. 27

μὲ τὸν ὑπὸ τῆς πείρας ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν διὰ γ+1 σειράς. Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων, τὸν ἀπαιτούμενον διὰ τὴν σύνδεσιν δύο σιδηρῶν ἐλασμάτων πρὸς κατασκευὴν ἐνὸς μέτρου μήκους λέβητός τινος, ἔχοντος ἐσωτερικὴν

διάμετρον ἐνὸς μέτρου καὶ ὑφισταμένου ἐσωτερικῶς τὴν πίεσιν ατμοῦ ὃ ἀτμοσφαιρῶν δυνάμεις, ἠθέλομεν εὑρεῖ διὰ τοῦ ἀνωτέρω εὑρεθέντος τύπου (1) $v=21,9$ τῆς διαμέτρου δ τοῦ παλυλίτου λαμβανομένης ἴσης μὲ $0^{\mu},02$. Τώρα, ἐὰν λάβωμεν $v=22$ καὶ τοποθετήσωμεν καὶ τὰ 22 παλύλιτα ἐπὶ μιᾶς σειρᾶς, εὐρίσκομεν $e=0^{\mu},021$ (διότι τὰ μὲν 22 παλύλιτα θὰ καταλάβωσι χώρον $22 \times 0,02 = 0^{\mu},44$, τὰ δὲ δύο ἄκρα θὰ καταλάβωσι χώρον $2 \times 0^{\mu},05 = 0^{\mu},10$, καὶ ὁ μένων μεταξὺ τῶν παλυλίτων χώρος, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν $4,00 - 0,44 - 0,10 = 0,46$ πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 24 ἴσα μέρη), ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ e , ἥτοι ὁ ἀριθμὸς $0^{\mu},021$ εἶναι μικρότερος τοῦ ὑπὸ τῆς πείρας ὀρισθέντος ὁρίου $0,04$, ἔπεται ὅτι ἡ τοποθέτησις καὶ τῶν 22 παλυλίτων ἐπὶ μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀδύνατος. Ἐὰν ὅμως τοποθετήσωμεν τὰ 22 παλύλιτα ἐπὶ δύο σειρῶν, θέλομεν εὑρεῖ ὡς τιμὴν τοῦ $e = \frac{1.46}{21} = 0^{\mu},0695$, ὅπερ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ὁρίου $0^{\mu},04$, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπομάκρυνσις δύο διαδοχικῶν παλυλίτων κατὰ $0^{\mu},0695$ ἐνδέχεται εἰς ὀρισμένας περιστάσεις νὰ ᾔηται παρὰ τοὺς εἰς τὰ ἐργαστᾶσια κοινῶς παραδεδεγμένους κανόνας, παραδέχονται τὴν κανονικὴν τῶν παλυλίτων ἀπόστασιν $0^{\mu},04$ καὶ αὐξάνουσι τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν οὕτως, ὥστε τιθέμενα ἐπὶ δύο σειρῶν νὰ καλύπτωσι τὸν ὅλικὸν μῆκος τῆς

συνδέσεως. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι θέλομεν εὑρεῖ διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν γ τῶν παλυλίων 34 ἀντὶ 22.

Τὰ ἀνωτέρω περὶ παλυλίων ἐκτεθέντα ἀρκοῦσι νομίζομεν πρὸς ὁδηγίαν τῶν μηχανικῶν καὶ ἀρχιτεκτόνων, οἱ δὲ θέλοντες νὰ λάβωσι περὶ σπουδύτερας περὶ τούτων γνώσεις δύνανται νὰ συμβουλευθῶσι τὰ εἰδικὰ συγγράμματα, ὧν χρῆσιν ποιοῦσι πάντα τὰ ἐργαστάσια.

ΠΕΡΙ ΚΟΧΛΙΟΦΟΡΩΝ ἩΛΩΝ

23. Καλοῦσι κοχλιοφόρους ἥλους (κοινῶς βίδας) εἶδος ἥλων, οἷτινες δὲν διαφέρουσι τῶν παλυλίων εἰμὴ κατὰ ταῦτα, ὅτι ἡ μετὰ τῶν κυλινδρικῶν αὐτῶν κορμῶν συνεχομένη κεφαλὴ, ἀντὶ νὰ ᾖ σφαιρική, εἶναι πρισματική, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν ἄκρον φέρει ἐξωτερικῶς ἑλικας, ἐπὶ τῶν ὁποίων κοχλιοῦται ἡ ἑτέρα πρισματική αὐτῶν κεφαλὴ, ἡ φέρουσα ἐσωτερικῶς ὁμοίους ἑλικας καὶ καλουμένη ἕνεκα τούτου *περικόχλιον*. Διὰ τῶν τοιούτων κοχλιοφόρων ἥλων συνδέουσι συνήθως τὰς ξυλίνους δοκοὺς τῶν οἰκοδομῶν, τὰ ἐκ χυτοσιδήρου τεμάχια τῶν ἀτμομηχανῶν, ταχυπιστηρίων καὶ ἐν γένει τὰ διάφορα μέρη τῶν τοιούτων μηχανῶν, ἅτινα κατασκευάζονται κατ' ἰδίαν ἕκαστον καὶ συνδέονται δι' αὐτῶν, ἵνα ἀποτελέσωσιν ἓν ὅλον.

24. Αἱ ἐπὶ τῶν κοχλιοφόρων ἥλων ἐνεργοῦσαι πρὸς θλάσιν δυνάμεις ἐνεργοῦσιν ἢ κατ' ἐφελκυσμὸν ἢ κατὰ διάτμησιν. Ἐπειδὴ δὲ συνήθως αἱ κατὰ διάτμησιν ἐνεργοῦσαι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις τείνουσι νὰ θλάσωσι τόσον τὸν κορμὸν τοῦ κοχλιοφόρου ἥλου, ὅσον καὶ τὰς ἑλικας αὐτοῦ, καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἑλίκων διὰ τῶν ἐλικουργίδων ὀργάνων ὁ σίδηρος σκληρυνόμενος καθίσταται ἀδυνατώτερος, οἱ μηχανικοὶ καὶ μηχανουργοὶ ἀντὶ νὰ ὑποβάλωσιν αὐτοὺς εἰς τὸ σύνηθες φορτίον τῶν 4¹/₂ παραδέχονται ὡς μεῖζον ὅριον τὸ φορτίον τῶν 2¹/₂·80 κατὰ τετραγωνικὸν χιλιστὸν ἐπιφανείας.

Τούτου τεθέντος, ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος δ τοῦ κοχλιοφόρου ἥλου προσδιορίζεται εὐκόλως, ὅταν τὸ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦν φορτίον B ᾖ γνωστόν, διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς διατμήσεως

$$\frac{1}{4} \pi \delta^2 \cdot 2,80 = B \quad (1)$$

ἐξ οὗ εὐρίσκομεν ἀμέσως

$$\delta = 0,675 \sqrt{B} \quad (2).$$

Ἡ διάμετρος τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου, τοῦ ὀρίζοντος τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῶν σπειρῶν τῶν ἐλίκων, λαμβάνεται συνήθως ἴση μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ τῆς ἐσωτερικῆς, τὸ δὲ βῆμα τῆς ἑλικος ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου δ . Τὸ ὕψος δὲ τοῦ περικοχλίου λαμβάνεται ἢ ἴσον μὲ τὴν διάμετρον δ , ὅταν τὸ περικόχλιον, ἅπαξ τεθὲν ἐν τῇ θέσει του, δὲν μετακινῆται πλέον, ἢ μὲ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς διαμέτρου δ , ὅταν τὸ περικόχλιον ἀποσπᾶται συχνάκις ἐκ τῆς θέσεώς του χάριν ἐπιχρίσεως τῶν δι' αὐτοῦ συνδεομένων τεμαχίων μηχανικῆς τιнос.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ἑλικας, ἐχούσας καὶ τριγωνικὰ ἢ τετραγωνικὰ σπειρώματα



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΘΑΛΙΨΕΩΣ

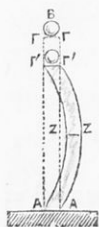
25. "Οταν σώμα τι θλίβεται υπό τινος εξωτερικῆς δυνάμεως καὶ αἰ κατὰ τὴν φορὰν ταύτης διαστάσεις τοῦ σώματος δὲν εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε νὰ καμφθῇ τοῦτο ἐπαισθητῶς, τότε τοῦτο συμπυκνοῦται ὀλίγον κατ' ὀλίγον καὶ τέλος θραύεται, ὅταν ἡ θλίβουσα αὐτὸ δύναμις φθάσῃ εἰς τὸ ὑπὸ τῆς πείρας ὀριζόμενον ὅριον. Πρὸς εὗρεσιν τοῦ ὁρίου τούτου καὶ δι' ἕκαστον εἶδος ὕλης ἐγένοντο ὑπὸ διακεκριμένων φυσικῶν καὶ μηχανικῶν διάφορα πειράματα, δι' ὧν ἀπεδείχθη ὅτι, ἐνὸς μὲν τὸ θλίβον βάρος δὲν ὑπερβαίνει τὸ φορτίον, ὅπερ παριστᾷ τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος τοῦ σώματος, ἡ σμίκρυνσις AA' δοκοῦ τινος $AA\Gamma\Delta$ (Σχ. 28) εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ θλίβοντος βάρους B καὶ τοῦ μήκους ἢ ὕψους AG , ὅταν τὸ ὕψος τοῦτο δὲν ᾔῃαι μεγαλύτερον τοῦ δεκαπλασίου τῆς μικροτέρας διαστάσεως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ω τῆς δοκοῦ, ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογος τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς ω καὶ τοῦ συντελεστοῦ E τῆς ἐλαστικότητος τῆς ἐξ ἧς αὕτη ἀποτελεῖται ὕλης· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ σμίκρυνσις AA' δίδεται διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου, δι' οὗ καὶ ἡ ἐπιμήκυνσις τῆς αὐτῆς δοκοῦ, ὅταν ὑπὸκῃται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τοῦ φορτίου B . Ἐπομένως θέλομεν ἔχει παριστῶντες διὰ μ τὴν ὑπὸ τοῦ βάρους B ἐπὶ τοῦ σώματος, τοῦ ἔχοντος μῆκος μὲν M , ἐγκάρσιον τομὴν ω καὶ ἐλαστικότητα E , παραγομένην σμίκρυνσιν



$$\mu = \frac{B \cdot M}{\omega \cdot E} \quad (1).$$

26. Διὰ πειραμάτων ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ξύλινοι ἰδίως στύλοι, οἱ ὑποβαστάζοντες ἐπὶ τῆς ἄνω αὐτῶν κορυφῆς φορτίον τι, κάμπτονται ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 29, ὅταν τὸ ὕψος αὐτῶν AG ᾔῃαι μεγαλύτερον τοῦ δεκαπλασίου τῆς μικροτέρας διαστάσεως τῆς ἐγκαρ-

σίῳ αὐτῶν τομῆς, καὶ ὅτι θραύονται συνήθως ἐν τῷ μέσῳ τοῦ ὕψους αὐτῶν καὶ ὑπὸ φορτίου μικροτέρου ἐκείνου, ὕπερ παράγει τὴν θλάσιν ὁμοίας φύσεως στύλου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν μὲν ἐγκάρσιον τομὴν, ἀλλ'



ΣΧ. 29

ὕψος μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ δεκαπλάσιον τῆς μικροτέρας αὐτῆς διαστάσεως.

Τοῦτου ἕνεκα ὁ διακεκριμένος Γάλλος μηχανικὸς Ροντλέ, λαβὼν ὑπ' ὄψιν τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐκτελεσθέντων πειραμάτων ἐπὶ στύλων ἐχόντων ἴσας βάσεις καὶ ὕψη ἄνισα, εὗρεν ὅτι ἡ πρὸς θλάσιν ἀντίστασις αὐτῶν ἐλαττοῦται κατὰ τινα γεωμετρικὴν περίπου κλίμακα, ὅταν ὁ λόγος τοῦ ὕψους αὐτῶν πρὸς τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν αὐξάνη κατ' ἑτέραν κλίμακα, ἀποτελοῦσαν ἀριθμητικὴν περίπου πρόοδον. Τὴν σχέσιν δὲ ταύτην, τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακαλυφθεῖσαν καὶ ἐν τῇ περὶ οἰκοδομῆς πραγματεία του δημοσιευθεῖσαν, παριστᾷ ὁ κάτωθεν πίναξ, ἐν ᾧ ἡ μὲν πρώτη ὀριζόντιος σειρὰ δεικνύει τὸν λόγον τοῦ ὕψους τοῦ στύλου πρὸς τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὴν ἀντίστασιν αὐτοῦ, ἀναφερομένην εἰς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου, τοῦ ἔχοντος τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις ἴσας μὲ τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς βάσεως τοῦ στύλου.

ΠΙΝΑΞ ΤΟΥ ΡΟΝΤΛΕ

Περιέχωρ τὰς τιμὰς, τὰς παριστώσας τὴν τοῦ στύλου ἀντίστασιν, ἀναφερομένην εἰς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου, ὅταν ὁ λόγος $\frac{M}{a}$ τοῦ μήκους αὐτοῦ M ὡς πρὸς τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς βάσεως του a αὐξάνη κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Τίμῃ τοῦ $\frac{M}{a} = T \cdot \sin$	1 ἕως 10	12	24	36	48	60	72
Ἀντίστασις τοῦ στύλου ἀναφερομένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

27. Ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐφελκυσμοῦ οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς θλίψεως ἐγένετο παραδεκτὸν ὑπ' ὅλων τῶν μηχανικῶν νὰ ὑποβάλλωνται ἐν τῇ πράξει τὰ ὕλινά εἰς μονίμους θλίψεις βαρῶν πολλῶ κατωτέρων τῶν φορτίων,

τῶν παραγόντων διὰ τῆς στιγμιαίας ἐνεργείας των τὴν διάρρηξιν αὐτῶν, καὶ ὡς ἐξῆς.

Τὰ μὲν μέταλλα εἰς τὸ $\frac{1}{6}$,

τὴν δὲ ξυλείαν εἰς τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ παράγοντος τὴν διάρρηξιν φορτίου.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁ Ροντλὲ ἐσχημάτισε τὸν κάτωθεν Γ' πίνακα, δίδοντα τὰ μόνιμα φορτία, εἰς ἃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας, ὅταν ἡ ὕλη, ἐξ ἧς εἶναι κατασκευασμένος ὁ στύλος ἢ τὸ υποστήριγμα, καὶ ὁ λόγος τοῦ ὕψους Μ πρὸς τὴν μικροτέραν διάστασιν α τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αὐτῆς ᾗναι γνωστά.

ΠΙΝΑΞ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχωρ τὰ φορτία, εἰς ἃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν εἰς θλίψιν τὰ σώματα, ὅταν ταῦτα θὰ ἐνεργῶσιν ἐπ' αὐτῶν οὐχὶ στιγμιαίως, ἀλλὰ διαρκῶς.

Ἔλασι, εἰς ὧν ἀποτελοῦνται τὰ σώματα	Μόνιμον βῆρος, ὅπου δύναται διαρκῶς νὰ υποστασῇ ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας στύλου, ὅστινος ὁ λόγος $\frac{M}{a}$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Ροντλὲ διεγείσσαν κλίμακα						
	1-10	12	24	36	48	60	1',66
Δρῦς ἀγγλικῆς πρώτης ποιότητος.	40%	33%	20%	13%,33	6%,66	3%,33	1',66
Δρῦς, ἐλάτη, πεύκη, καλ. ποιότη.	30	25	15	10	5	2,50	1,25
Δρῦς ἀδύνατος.....	20	17	10	7	3,50	1,75	0,85
Ἐλάτη ἀδύνατος.....	10	8	5	3,30	1,65	0,85	0,40
Σιδηρὸς καθαρὸς καλῆς ποιότη.	1000	800	300	300	150	75	38
Χυτοσίδηρος καλῆς ποιότητος	2000	1600	1000	700	350	175	90

28. Ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐφελκυσμοῦ καὶ τῆς διατμήσεως οὕτω καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὴν σχέσιν, τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ εἰς θλίψιν ὑποκειμένου σώματος καὶ τοῦ θλίβοντος αὐτὸ βάρους, ἥτις καλεῖται καὶ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς.

Πρὸς τοῦτο, ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος, ὅπερ ἐνεργεῖ νὰ θλάσῃ τὸν στύλον $AA\Gamma\Gamma$ (Σχ. 29), ω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αὐτοῦ, M τὸ ὕψος αὐτοῦ AG , α τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ω , καὶ P τὸ φορτίον, εἰς θ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν εἰς θλίψιν ἐκάστην μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς δ στύλος ἀποτελεῖται ὅλης, θέλωμεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$\omega \cdot P = B \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα ἡ τὸ ω , ὅταν τὸ B καὶ $\frac{M}{\alpha}$ ᾖναι δεδομένα, ἡ τὸ B , ὅταν τὸ ω καὶ $\frac{M}{\alpha}$ ᾖναι γνωστά, τοῦ P λαμβανομένου ἐκ τοῦ ἀνωτέρω Γ' πίνακος.

29. Χάριν ἀσκήσεως ἃς λύσωμεν προβλήματα τινά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ ἐποβαστάξῃ διαρκῶς στύλος ἐκ ξύλου δρυὸς καλῆς ποιότητος, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος M εἶναι 4 μέτρων, ἡ δὲ ἐγκαρσίου τομὴ τετράγωνος, οὗτος ἡ πλευρὰ α εἶναι $0^{\text{m}},30$.

Λύσις. Λαμβάνοντες τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου ὡς μονάδα (διότι πρόκειται περὶ ξυλείας καὶ τὰ εἰς τὴν ἀνωτέρω πίνακα Γ' περιεχόμενα φορτία ἀναφέρονται εἰς τὸ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας) καὶ παρατηροῦντες ὅτι, ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἐνταῦθα $\frac{400}{30}$ ἢ $\frac{40}{3}$ ἢ 13 ὡς ἔγγιστα, τὸ κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἀρμόζον φορτίον εἶναι κατὰ τὸν Γ' πίνακα 25 χιλιόγραμμα, εὐρίσκουμεν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1) $B = 30 \times 30 \times 25 = 22500 \chi\lambda.$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς στύλου ἐκ ξύλου δρυὸς, ὑποβαστάζοντος φορτίον 5000 χιλιόγραμμων, καὶ ἔχοντος ὕψος 4 μέτρων.

Λύσις. Πρὸς εὐρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ εἶδος αὐτῆς καὶ τὴν ποιότητα τῆς ξυλείας. Ἄς υποθέσωμεν ὅτι ἡ τομὴ εἶναι τετράγωνος καὶ ἡ δρυς ἀδύνατος. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρὸς εὐρεσιν τοῦ φορτίου, τοῦ ἀρμόζοντος κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατο-

στὸν ἐπιφανείας, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀκριβῶς καὶ τὸν λόγον $\frac{M}{\alpha}$, τοῦθ' ὕπερ δὲν εἶναι δυνατὸν ἐπὶ τοῦ προκειμένου, διότι ἡ πλευρὰ α τοῦ τετραγώνου εἶναι ἄγνωστος, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον, ἡ δὲ λύσις αὐτοῦ καὶ παντὸς ἐτέρου τῆς αὐτῆς φύσεως, γίνεται διὰ δοκιμῶν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς καὶ κατ' ἀρέσκειαν ὅτι ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἴσος μὲ 42 καὶ ἐκ τοῦ Γ' πίνακος εὐρίσκομεν ὡς ἀρμόζον φορτίον δι' ἑκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας 17 χιλιόγραμμα, ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον (1) εὐρίσκομεν $\alpha^2 \times 47 = 5000$, ἐξ οὗ πορίζομεθα $\alpha = \sqrt{297} = 17^{\circ} = 0^{\mu}, 47$. Ἴνα δὲ ἡ λύσις αὕτη γείνη παραδεκτὴ, πρέπει νὰ ἴδωμεν, ἂν ἡ ὑπόθεσις ἡμῶν $\frac{M}{\alpha} = 42$ εἶναι ἀληθής. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν $\frac{M}{\alpha} = \frac{400}{17} = 23,5$, ἥτοι σχεδὸν 24, ὅπερ εἶναι πολὺ μεγαλειότερον τοῦ παραδεχθέντος ἀριθμοῦ 42. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω λύσις δὲν εἶναι παραδεκτὴ, καὶ ποιοῦμεν νέαν ὑπόθεσιν ἐπὶ τοῦ λόγου $\frac{M}{\alpha}$, καὶ λύομεν ἐκ δευτέρου τὸ πρόβλημα.

Ὑποθέτομεν δεύτερον ὅτι ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀνωτέρω εὐρεθέντα ἀριθμὸν 23,50 ἢ 24, καὶ εὐρίσκομεν διὰ μὲν τοῦ Γ' πίνακος ὡς ἀρμόζον φορτίον δι' ἑκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας 40 χιλ., διὰ δὲ τοῦ τύπου (1) $\alpha = \sqrt{500} = 22^{\circ} = 0^{\mu}, 22$.

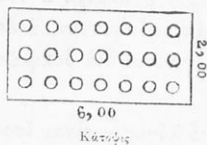
Καὶ πάλιν, ἵνα παραδεχθῶμεν τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν $0^{\mu}, 22$ ὡς ὀρθήν, πρέπει νὰ ἴδωμεν ἂν ὁ ἀληθὴς λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ληφθέντος ἀριθμοῦ 24.

Διαιροῦντες λοιπὸν τὸ ὕψος τῆς στήλης 4 μέτρα διὰ τῆς εὐρεθείσης πλευρᾶς $0^{\mu}, 22$ εὐρίσκομεν $\frac{M}{\alpha} = \frac{400}{22} = 18$, καὶ ἐπειδὴ ἡ οὕτω εὐρεθεῖσα τιμὴ 18 εἶναι μικροτέρα τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ληφθέντος ἀριθμοῦ 24, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τιμὴ 22 τῆς ἀγνώστου πλευρᾶς α εἶναι παραδεκτὴ.

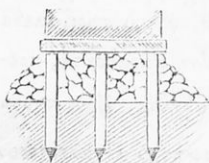
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς πασσάλων διὰ τὴν θεμελίωσιν τοῦ ποδὸς γεφύρας τινός.

Λύσις. Ὅπως εὗρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πασσάλων, τοὺς ὁποίους

πρέπει νὰ εἰσάξωμεν διὰ τοῦ πασσαλοπήκτου ἐντὸς τοῦ φυσικοῦ ἐδάφους, ἵνα ἐπ' αὐτῶν ἀσφαλῶς θεμελιώσωμεν ἢ τὸν πῶδα ἢ τὸ ἀκροστήριγμα γεφύρας τινὸς (Σχ. 32, 31, 30), πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον τῶν πασσάλων, τὸ βάρος B, ὑπὲρ οἱ πάσσαλοι θὰ ὑποβάσται, καὶ τὸν χῶρον τοῦ ἐδάφους, ἐν οἷς πάσσαλοι θὰ καταλάβωσι, δηλ. τὴν κάτοψιν τῆς θεμελιώσεως τοῦ ποδὸς ἢ τοῦ ἀκροστήριγματος τῆς γεφύρας.



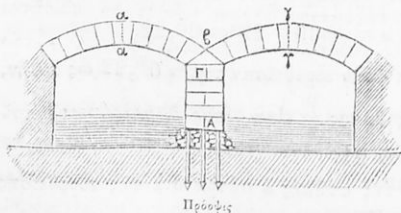
Σχ. 30



Σχ. 31

Καὶ ἡ μὲν διάμετρος τῶν πασσάλων λαμβάνεται κατ' ἀρέσκειαν, ὑπ' ὅψιν ὅμως λαμβανόμενων πάντοτε τῶν τοπικῶν δυσχερειῶν καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπὸ τοῦ τόπου τῆς ἐξαγωγῆς εἰς τὸν τόπον ἔνθα ἡ γέφυρα πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ μεταφορὰν αὐτῶν, ὁ δὲ χῶρος, ἐν οἷς πάσσαλοι θὰ καταλάβωσι, προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ μηχανικοῦ, τοῦ δίδοντος τὸ σχέδιον τῆς κατασκευασθησομένης γεφύρας, τὸ δὲ βάρος B ὑπολογίζεται εὐκόλως, ὅταν αἱ διαστάσεις τῆς γεφύρας κατὰ τὸ εἶδος αὐτῆς ᾖναι γνωστά.

Τούτων τεθέντων, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διάμετρος τῶν πασσάλων



Σχ. 32

εἶναι ἴση μὲ $0^{\text{m}},20$, ὅτι ἡ κάτοψις τῆς θεμελιώσεως τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ὑποτιθεμένου ὅτι πρόκειται περὶ θεμελιώσεως ποδὸς, ἔχει μῆκος 6 μέτρων καὶ πλάτος 2 μέτρων, καὶ ὅτι τὸ βάρος B εἶναι ἴσον μὲ 120000 χιλιόγραμμα.

Παριστῶντες διὰ N τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν πασσάλων, καὶ λαμβάνοντες τὸν ἀριθμὸν 20 χιλ. ὡς μόνιμον φορτίον ἐκάστου τετραγωνικοῦ ἑκατοστοῦ ἐπιφανείας τῆς ἐγκυρσίου τομῆς τοῦ πασσάλου (διότι ὁ λόγος $\frac{M}{\delta}$ εἶναι σπανίως μεγαλειότερος τοῦ ἀριθμοῦ 10, καὶ τοῦτο διότι συνήθως μεταξὺ τῶν πασσάλων καὶ περὶ αὐτῶν ῥίπτουσι

φυσικούς λίθους, ὡς δεικνύει τὸ (Σχ. 31), δι' ὧν καὶ ἡ κοίτη τοῦ ποταμοῦ προφυλάττεται ἀπὸ τῆς ὑπὸ τοῦ ὀρμητικῶς ῥέοντος ὕδατος παραγομένης συνήθως ἐν αὐτῷ ὑποσκάψεως, καὶ τῶν πασσάλων ἡ κάμψις ἐμποδίζεται), θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$N \times 20 \times 3,14 \times \frac{20^2}{4} = 120000 \quad (1),$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν εὐκόλως

$$N = \frac{120000}{6280} = 19,10 \quad \eta \quad N = 19$$

διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν πασσάλων πρέπει προφανῶς νὰ ᾖ ἀκέραιος.

Σημείωσις 1. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ δύο πασσάλων ἀπόστασις λαμβάνεται συνήθως ἴση μὲ $0^{\mu},80$, πολλάκις αὐξάνουσι τὸν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ εὐρεθέντα ἀριθμὸν N κατὰ μονάδας τινάς, ὅταν ἡ ἀπόστασις αὕτη τοποθετημένου τοῦ ὑπολογισθέντος ἀριθμοῦ πασσάλων εὐρίσκηται οὕσα μεγαλειτέρα τοῦ ὁρίου $0^{\mu},80$. Π. χ. ὁ ἀνωτέρω εὐρεθεὶς ἀριθμὸς 19 πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 2 μονάδας, ἵνα διὰ τῆς τοποθετήσεως 21 πασσάλων εἰς τρεῖς σειράς, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 30, ἡ μεταξὺ δύο τούτων ἀπόστασις ᾖ ἴση μὲ $0^{\mu},80$.

Σημείωσις 2. Ὁ σπουδαῖος κίνδυνος, ὃν διατρέχει γέφυρα, ἐπὶ πασσάλων στηριζομένη, δὲν προέρχεται συνήθως ἐκ τῆς θλάσεως τῶν πασσάλων ὑπὸ τοῦ ὑπ' αὐτῶν βασταζομένου βάρους (διότι τὸ τοιοῦτον οὐδέποτε συνέβη), ἀλλ' ἐκ τῆς ἐπὶ πλέον εἰσδύσεως τινῶν ἐξ αὐτῶν ἐντὸς τῆς κοίτης τοῦ ποταμοῦ, τοῦθ' ὕπερ παραλύνει τὸν μεταξὺ αὐτῶν σύνδεσμον καὶ παράγει πολλάκις τὴν ἐντελῇ αὐτῆς καταστροφὴν.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ τριβή, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ πασσάλου, εἶναι ἡ μόνη αἰτία, ἔνεκα τῆς ὁποίας ἐμποδίζεται ἡ περαιτέρω ἐντὸς τοῦ ἐδάφους εἰσόδους αὐτοῦ, καὶ ὅταν αὕτη φθάσῃ τὸ μέγιστον ὅριον, ὅπερ μόνον διὰ τῆς πείρας δύναται νὰ ὀρισθῇ, τότε οὐδεὶς φόβος ὑπάρχει περὶ τῆς περαιτέρω εἰσδύσεως τοῦ πασσάλου ὑπὸ τοῦ βάρους τῆς γεφύρας, καὶ ἐπομένως πᾶς κίνδυνος περὶ κατακαθίσεως καὶ βλάβης τῆς γεφύρας ἐκλείπει.

Τὰ ὑπὸ τῆς πείρας ὑποδειχθέντα καὶ παρὰ τῶν μηχανικῶν παραδεχθέντα ὡς ὅρια τῆς μὴ περαιτέρω ἐν τῷ ἐδάφει εἰσδύσεως τῶν πασσάλων διὰ τοῦ πασσαλοπήκτου εἶναι τὰ ἐξῆς.

1^{ον} "Όταν οί πάσσαλοι ἦναι προωρισμένοι νά υποβαστάζωσι βάρος 60 χιλιογράμμων κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικόν, ἤτοι πάσσαλος διαμέτρου 0^μ,33, νά υποβαστάζῃ βάρος 50000 χιλιογράμμων, διαμέτρου δὲ 0^μ,23 νά υποβαστάζῃ βάρος 25000 χιλ., τότε ἡ εἰσδυσίς τοῦ πασσάλου διὰ πασσαλοπήκτου, ἔχοντος βάρος 300 χιλιογράμμων καὶ πίπτοντος ἐξ ὕψους 1^μ,30, πρέπει νά προβῇ ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε εἴκοσι πέντε συνεχεῖς κρούσεις τοῦ πασσάλου διὰ τοιοῦτου πασσαλοπήκτου νά μὴ ἐπιφέρωσιν εἰσδυσιν αὐτοῦ μείζονα τῶν 0^μ,0045. Τὸ τοιοῦτο καλοῦσιν οἱ μηχανικοὶ ἄρρησιν τοῦ πασσάλου εἰς τὴν περαιτέρω εἰσδυσιν, καὶ ὅταν ἡ εἰσδυσίς τοῦ πασσάλου φθάσῃ τὸ ὄριον τοῦτο, τότε οἱ μηχανικοὶ διατάσσουσι τὴν παῦσιν τῆς περαιτέρω εἰσδύσεως αὐτοῦ, διότι ἀφ' ἐνὸς μὲν εἶναι βέβαιον (ἐκ τῆς πείρας βεβαίως ὀδηγηθέντες) ὅτι δύνανται ἀσφαλῶς καὶ ἄνευ κινδύνου θλάσεως τοῦ πασσάλου ἢ κατακαθίσεως τῆς γεφύρας νά φορτώσωσι 60 χιλ. ἕκαστον ἑκατοστὸν τετραγωνικόν ἐπιφανείας τῆς κεφαλῆς τοῦ πασσάλου, ἀφ' ἑτέρου δὲ γνωρίζωσι ἐκ τῆς πείρας, ὅτι ἡ κεφαλὴ τοῦ πασσάλου ὡς καὶ αὐτὸς ὁ πάσσαλος δύναται νά συντριβῇ ὑπὸ τοῦ πασσαλοπήκτου, ὅταν τις θελήσῃ νά προχωρήσῃ τὴν εἰσδυσιν αὐτοῦ πέραν τοῦ ἀνωτέρω ὀρισθέντος ὁρίου.

2^{ον} "Όταν οἱ πάσσαλοι ἦναι προωρισμένοι νά υποβαστάζωσι μέτριον φορτίον, τουτέστι 10 ἕως 12 χιλιογράμμων κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικόν ἐπιφανείας, ἤτοι 8000 ἕως 10000 χιλιογράμματα ὅταν ὁ πάσσαλος ἔχῃ διάμετρον 0^μ,33, τότε ἡ εἰσδυσίς τοῦ πασσάλου διὰ τοῦ ὡς ἀνωτέρω περιγραφέντος πασσαλοπήκτου πρέπει νά προβῇ ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε εἴκοσι πέντε συνεχεῖς κρούσεις τοῦ πασσάλου διὰ τοῦ πασσαλοπήκτου νά μὴ ἐπιφέρωσιν εἰσδυσιν αὐτοῦ μείζονα μὲν τῶν 0^μ,05, ἔλαττον δὲ τοῦ 0^μ,03, ἐν ἄλλαις λέξεσι ἡ περαιτέρω εἰσδυσίς τοῦ πασσάλου νά παύσῃ, ἅμα ὡς αὕτη φθάσῃ ἀριθμὸν τινα περιεχόμενον μεταξὺ τῶν 0^μ,05 καὶ 0^μ,03.

Παρατήρησις. Ἡ πρώτη περίπτωσις δὲν εἶναι τόσον συνήθης καὶ ἐφαρμόζεται εἰς θεμελιώσεις μεγάλων γεφυρῶν, δι' αἷς μεταχειρίζονται ξυλείαν πρώτης ποιότητος· ἡ δὲ δευτέρα εἶναι συνηθεστέρα ὡς ἐπιτρέπουσα τὴν χρῆσιν ξυλείας μετρίας ποιότητος καὶ προλαμβάνουσα τὴν σύντριψιν τῶν πασσάλων κατὰ τὴν πῆξιν αὐτῶν διὰ τοῦ πασσαλοπήκτου.

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΑΓΓΛΟΥ ΟΔΓΚΙΝΣΩΝΟΣ

40. Πρὸς εὗρεσιν τῆς ἐγκάρσιου τομῆς τῶν ξυλίνων στύλων ἢ στηριγμάτων, τῶν ὑποβασταζόντων δεδομένον βάρος B, ἢ πρὸς εὗρεσιν τούτου, ὅταν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τοῦ στύλου ᾖναι δεδομένη, οἱ Ἀγγλοὶ μηχανικοὶ δὲν λαμβάνουσιν ὑπ' ὄψιν τὸν ἀνωτέρω Γ' πίνακα τοῦ Ροντλέ, ἀλλὰ μεταχειρίζονται τοὺς ἐμπειρικοὺς τύπους, τοὺς δοθέντας ὑπὸ τοῦ Ἀγγλοῦ φυσικοῦ Ὁδγκινσῶνος, καὶ τοὺς ὁποίους οὗτος ἐξήγαγε ἐξ ἰδίων πειραμάτων, ἅτινα ἐξετέλεσεν ἐπὶ ἀγγλικῆς ξυλείας, ἥς συνήθως ἡ ποιότης εἶναι ἀρίστη.

Οἱ τύποι δὲ οὗτοι παρίστανται ὑπὸ τοῦ κάτωθεν πίνακος.

ΠΙΝΑΞ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχωρ τοὺς τύπους τοῦ Ἀγγλοῦ φυσικοῦ Ὁδγκινσῶνος
διὰ τὴν ξυλείαν

Ποιότης τῆς ξυλείας	Σχῆμα τῆς ἐγκάρσιου τομῆς	
	Τετραγώνου	Ὀρθογώνιου
Δρῦς δυνατὴ	$B = 256,5 \frac{\alpha^4}{M^2}$	$B = 256,5 \frac{\alpha^6}{M^2}$
Δρῦς ἀδύνατος.....	$B = 180 \frac{\alpha^4}{M^2}$	$B = 180 \frac{\alpha^6}{M^2}$
Ἐλάτη δυνατὴ καὶ πεύκη ριτινώδης...	$B = 214,2 \frac{\alpha^4}{M^2}$	$B = 214,2 \frac{\alpha^6}{M^2}$
Ἐλάτη ἀδύνατος καὶ πεύκη κυτρίνη..	$B = 160 \frac{\alpha^4}{M^2}$	$B = 160 \frac{\alpha^6}{M^2}$

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω τύποις τοῦ Ὁδγκινσῶνος τὸ μὲν α παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἢ τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τοῦ στύλου καὶ ἐκτιμᾶται εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, τὸ δὲ β παριστᾷ τὴν μεγαλειτέραν διάστασιν τῆς ὀρθογωνίου τομῆς καὶ ἐκτι-

μάται ἐπίσης εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, τὸ δὲ M παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ στύλου καὶ ἐκτιμᾶται εἰς δέκατα τοῦ μέτρου, καὶ τὸ B εἶναι τὸ φορτίον, ὅπερ ὁ στύλος δύναται νὰ ὑποβαστάξῃ ἀσφαλῶς, ὅταν ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ δὲν ὑπερβαίῃ τὸν ἀριθμὸν 60, δηλ. ὅταν ἔχομεν $\frac{M}{\alpha} = \eta < 60$.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΟΥ ΟΔΓΚΙΝΣΩΝΟΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕΝΩΝ
ΦΟΡΤΙΩΝ ΠΡΟΣ ΤΑ ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ ΤΟΥ ΡΟΝΤΛΕ ΔΙΔΟΜΕΝΑ

41. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι αἱ ἐκ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος εὐρισκόμεναι διὰ τὰ φορτία τιμαὶ εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλείτεραι τῶν ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ παρεχομένων, ὅταν ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha} = \eta < 40$.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἴσος μὲ 40, ὅτι ὁ στύλος εἶναι ἐκ δρυὸς καλῆς ποιότητος, καὶ ἔχει τὰς ἐξῆς διαστάσεις $M=0^{\mu}, 10$, $\alpha=0^{\mu}, 04$ καὶ $\epsilon=0^{\mu}, 01$. Θέλομεν εὑρεῖ διὰ μὲν τοῦ τύπου τοῦ Ὀδγκινσῶνος $B=256\chi^{\lambda}, 5$, διὰ δὲ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ $B'=40$ χιλιόγραμμα, καὶ παραβάλλοντες πρὸς ἄλληλα τὰ φορτία ταῦτα, βλέπομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Ὀδγκινσῶνος δοθὲν φορτίον B εἶναι περίπου ἐξαπλάσιον τοῦ φορτίου B' , τοῦ δοθέντος ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι τὸ φορτίον $B=256\chi^{\lambda}, 50$ εἶναι καὶ μεγαλείτερον τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ φορτίου, τοῦ παράγοντος τὴν σύντριψιν τοῦ στύλου, ὅπερ διὰ τὴν καλῆς ποιότητος δρῦν καὶ ἐξ ἀγγλικῶν ὑλοτομίων προερχομένην εἶναι 400 χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, τοῦ $\frac{M}{\alpha}$ ὄντος $= \eta < 40$.

42. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ὅταν ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ ᾖ μεγαλείτερος τοῦ 40, τὰ διὰ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος εὐρισκόμενα φορτία, καίτοι ὄντα πάντοτε μεγαλείτερα τῶν ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ διδομένων, οὐχ ἥττον τείνουσι νὰ κατασταθῶσιν ἴσα πρὸς ταῦτα, καὶ τοῦτο διότι τὰ μὲν ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος διδόμενα φορτία ἐλαττοῦνται ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τοῦ ὕψους M τῶν στύλων, ἐνῷ τὰ ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ διδόμενα φορτία ἐλαττοῦνται ἀναλόγως τοῦ ὕψους. Π. χ. σημειοῦντες διὰ B τὰ φορτία τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος καὶ B' τὰ ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ

χορηγούμενα καὶ υποθέτοντες ὅτι ὁ στύλος εἶναι ἐκ δρυὸς ἀγγλικῆς καὶ καλῆς ποιότητος, τοῦ ὁποῖου αἱ διαστάσεις τῆς τομῆς εἶναι $\alpha = 0^{\mu},01$ καὶ $\epsilon = 0^{\mu},01$, θέλομεν εὑρεῖ τὰς ὑπὸ τοῦ κάτωθεν πίνακος δεδομένας τιμὰς τοῦ B καὶ B', ὅταν ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ 10 μέχρι 70.

Τιμὰὶ τοῦ α	Τιμὰὶ τοῦ ε	Τιμὰὶ τοῦ ω	Τιμὰὶ τοῦ M	Τιμὰὶ τοῦ $\frac{M}{\alpha}$	Τιμὰὶ τοῦ B	Τιμὰὶ τοῦ B'
0 ^μ ,01	0 ^μ ,01	0 ^μ ,0001	0 ^μ ,10	10	236 ^λ ,30	40 ^λ ,00
"	"	"	0 ^μ ,20	20	64,00	24,00
"	"	"	0 ^μ ,30	30	28,00	17,00
"	"	"	0 ^μ ,40	40	16,00	10,00
"	"	"	0 ^μ ,50	50	10,00	6,00
"	"	"	0 ^μ ,60	60	7,00	3,33
"	"	"	0 ^μ ,70	70	5,00	1,66

43. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἐξάγεται, ὅτι οἱ μὲν Ἀγγλοὶ μηχανικοὶ εἶναι πολυμηρότεροι τῶν ἄλλων καὶ υπολογίζουσι τὰς διαστάσεις τῶν ξυλίνων στύλων διὰ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος, οἵτινες δίδουσιν ἐξαγόμενα ἀρμόζοντα εἰς τὴν λεπτότητα τῶν οἰκοδομῶν, τῶν ἀπαιτούντων τὴν χρῆσιν ἐκλεκτῆς ξυλείας, οἷα συνήθως εἶναι ἡ ἀγγλική, ἐνῶ οἱ Γάλλοι μηχανικοί, ἀποβλέποντες μᾶλλον εἰς τὴν στερεότητα τῶν οἰκοδομῶν ἢ τὸ κομψὸν αὐτῶν, μεταχειρίζονται τὸν πίνακα τοῦ Ῥοντλέ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ξυλίνων στύλων τῶν προωρισμένων νὰ υποβαστάξωσι δεδομένα βάρη.

Ἐπεὶ δὲ ἐν Ἑλλάδι συνήθως ἡ ξυλεία εἶναι μετρίας ποιότητος, διὰ τοῦτο φρονοῦμεν ὅτι καὶ οἱ Ἕλληνες μηχανικοὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἢ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ξυλίνων στύλων, ὅταν τὸ ὑπ' αὐτοῦ υποβασταχθῆσόμενον βᾶρος ᾖναι δεδομένον, ἢ τοῦ βάρους, ὅταν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τοῦ ξυλίνου στύλου ᾖναι δεδομένη, πρέπει νὰ μεταχειρίζονται μᾶλλον τὸν πίνακα τοῦ Ῥοντλέ (ἢ τοὺς τύπους τοῦ Ὀδγκινσῶνος.)

44. Πρὸς ἀσκήσιν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν χρῆσιν τῶν τύπων τοῦ

Ὁδγκινσῶνος καὶ παραβολὴν τῶν ἐξαγομένων, τῶν δεδομένων ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω τύπων καὶ ὑπὸ τοῦ πίνακος τοῦ Ροντλέ, λύομεν τὰ δύο πρῶτα ἐκ τῶν τριῶν προηγουμένων προβλήματα, τὰ διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Ροντλέ ὑπολογισθέντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. *Νὰ εὕρεθῇ τὸ βάρος B, ὅπερ δύναται νὰ υποβα-
στάξῃ στύλος ἐκ δρυὸς καλῆς ποιότητος, ἔχων ὕψος 4 μέτρων καὶ
ἐγκάρσιον τομὴν τετράγωνον, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 0^μ,30.*

Λύσις. Τὰ δεδομένα ἐνταῦθα εἶναι $\alpha = 30$ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ $M = 40$ δέκατα τοῦ μέτρου, ἐπομένως θέλομεν ἔχει διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ὁδγκινσῶνος $B = 256,5 \frac{30^4}{40^2} = 429852$ χιλιόγραμμα. Ἐνῶ διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Ροντλέ εὕρομεν προηγουμένως ὅτι $B = 22500$ χιλιόγραμμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. *Νὰ εὕρεθῇ ἡ πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς τομῆς στύ-
λου ἐκ δρυὸς ἀδυνάτου, ἔχοντος ὕψος 4 μέτρων, καὶ προσωρισμένον
νὰ υποβαστάξῃ βάρος 5000 χιλιόγραμμων.*

Λύσις. Τὰ δεδομένα εἶναι $B = 5000$, $M = 40$. Ταῦτα δὲ θέτοντες εἰς τὸν τύπον $B = 480 \frac{\alpha^4}{M^2}$ καὶ λύοντες αὐτὸν ὡς πρὸς τὸ α , εὐρίσκομεν $\alpha^4 = \frac{5000 \times 40^2}{480} = 44444$ ἢ $\alpha = \sqrt[4]{44444} = 45$ περίπου ἑκατοστὰ τοῦ μέ-
τρου, ἐνῶ διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Ροντλέ εὕρομεν $\alpha = 22$ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΣΤΥΛΩΝ ΕΚ ΧΥΤΟΣΙΔΗΡΟΥ

45. Ὁ αὐτὸς Ἀγγλος φυσικός, ὅστις διὰ πειραμάτων εὔρε τοὺς ἐν τῷ πίνακι Δ' ἐκτεθέντας τύπους, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὰ ὑπὸ ξυλίνου στύλου δυνάμενα νὰ υποβασταχθῶσι φορτία, ἔκαμεν ἐπίσης πολλὰ πειράματα πρὸς εὔρεσιν τῶν φορτίων, τῶν παρὰ γόντων διὰ τῆς συνθλιπτικῆς αὐτῶν ἐνεργείας τὴν θλάσιν τῶν ἐκ χυτοσιδήρου κυλινδρικῶν στύλων, ὧν μεγάλη χρῆσις ἀπὸ τινος χρόνου γίνεται εἰς τὰς οἰκοδομάς.

Ἐκ τῶν πειραμάτων δὲ τούτων ὠδηγηθεὶς ὁ Ὁδγκινσῶν εὔρεν ἐμπειρικοὺς τύπους, δίδοντας τὰ ὑπὸ ἐκ χυτοσιδήρου κυλινδρικῶν στύλων δυνάμεθα νὰ υποβασταχθῶσιν ἀσφαλῶς φορτία, ὅταν ἡ διάμετρος καὶ τὸ ὕψος αὐτῶν ᾖναι δεδομένα καὶ τὰνάπαλιν.

Οἱ τύποι οὗτοι, οἱ καλούμενοι συνήθως τύποι τοῦ Ὀδγκινσῶρος διὰ τοὺς ἐκ χυτοσιδήρου στύλους, εἶναι οἱ ἐξῆς δύο

$$B = 1780 \frac{\delta^{3,6}}{M^{1,7}} \quad (1)$$

διὰ στύλους πλήρεις κατὰ τὸ σχ. Α.

$$\text{καὶ} \quad B = 1780 \frac{\delta_1^{3,6} - \delta_2^{3,6}}{M^{1,7}} \quad (2)$$

διὰ στύλους κοίλους κατὰ τὸ σχ. Β.

Ἐν τῷ τύπῳ (1) τὸ μὲν δ παριστᾷ τὴν διάμετρον τοῦ στύλου, ἐκπεφρασμένην εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, τὸ δὲ M τὸ ὕψος τοῦ στύλου ἐκπεφρασμένον εἰς δέκατα τοῦ μέτρου, καὶ τὸ B τὸ φορτίον, ὑπὲρ ὃ στύλος δύναται νὰ υποβαστάζῃ ἀσφαλῶς



Σχ. Α

Ἐν δὲ τῷ τύπῳ (2) τὸ μὲν δ_1 παριστᾷ τὴν ἐξωτερικὴν διάμετρον τοῦ στύλου καὶ τὸ δ_2 τὴν ἐσωτερικὴν, ἀμφότεραι δὲ αὐταὶ ἐκφράζονται εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Τὸ δὲ M παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ στύλου, ἐκπεφρασμένον εἰς δέκατα τοῦ μέτρου, καὶ τὸ B τὸ φορτίον, ὑπὲρ ὃ στύλος δύναται ἀσφαλῶς νὰ υποβαστάζῃ.



Σχ. Β

46. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν χρῆσιν τῶν τύπων τῆς ἀνωτέρω παραγράφου λύομεν τὰ ἐξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ υποβαστάζῃ στύλος πλήρης ἐκ χυτοσιδήρου, ὕψους 4 μέτρων καὶ διαμέτρον 0^μ,20.

Λύσις. Ἐνταῦθα τὰ δεδομένα εἶναι $\delta = 20$ καὶ $M = 40$, καὶ ἄγνοστον τὸ B , ὅπερ εὐρίσκομεν θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ δ καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν τὸν τύπον

$$B = 1780 \frac{20^{3,6}}{40^{1,7}},$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα διὰ τῶν λογαρίθμων

$$\log. B = \log. 1780 + 3,6 \log. 20 - 1,7 \log. 40$$

$$\eta \quad \log. B = 3,2504200 + 3,60 \times 1,3010300 - 1,70 \times 1,6020599$$

$$\eta \quad \log. B = 5,2106262,$$

ἐπομένως $B = 162410$ χιλιόγραμμα.

*Αν ἠθέλωμεν νὰ λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα κατὰ τὸν πίνακα τοῦ Ροντλέ, ἠθέλωμεν εὔρει:

$$B = \omega \cdot 1000^2 = 3,14 \times 10^2 \times 1000^2 = 314000 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Νὰ εὔρεθῇ ἡ διάμετρος στύλου πλήρους ἐκ χυτοσιδήρου, ὅρους 6 μέτρων καὶ ὑποβαστάζοντος φορτίον 5000 χιλιόγραμμων.

Λύσις. Ἀντικαθιστώντες ἐν τῷ τύπῳ (1) ἀντὶ τοῦ B καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν 5000 καὶ 60, καὶ λύοντες αὐτὸν ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ἄγνωστον δ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\delta^{3,6} = \frac{5000 \times 60^{1,7}}{1780}$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα διὰ τῶν λογαρίθμων

$$3,60 \log. \delta = \log. 5000 + 1,7 \log. 60 - \log. 1780$$

$$\eta \quad 3,60 \log. \delta = 4,6989700 + 1,7 \times 1,7781512 - 3,2504200$$

$$\text{ἐπομένως} \quad \log. \delta = \frac{4,4744070}{3,60} = 1,2420575$$

$$\eta \quad \delta = 17^{ix}, 46 \quad \eta \quad \delta = 0^{ix}, 1746.$$

Λύοντες δὲ τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Ροντλέ θέλωμεν εὔρει $\delta = 0,134$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. Νὰ εὔρεθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ κοίλος στύλος ἐκ χυτοσιδήρου, ὅρους 4 μέτρων καὶ διαμέτρον ἐσωτερικῆς μὲν $0^{ix}, 45$, ἐξωτερικῆς δὲ $0^{ix}, 20$.

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) ἀντὶ τοῦ δ_1 , τὴν τιμὴν τοῦ 20 καὶ ἀντὶ τοῦ δ καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν 15 καὶ 40, θέλωμεν ἔχει

$$B = 1780 \frac{20^{3,6} - 15^{3,6}}{40^{1,7}} \quad (\alpha')$$

Πρὸς εὔρεσιν δὲ τῆς τιμῆς τοῦ B ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (α') ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις ἰδίᾳ τὸν ἀριθμὸν $20^{3,6} - 15^{3,6}$ διὰ τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς

$$\log. 20^{3,6} = 3,6 \log. 20 = 3,6 \times 1,3040300 = 4,6837080$$

$$\text{ἐπομένως} \quad 20^{3,6} = 48273. \quad \text{το } 48273 \text{ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ } 20^{3,6}$$

Ὡσαύτως

$$\log. 15^{3,6} = 3,6 \log. 15 = 3,6 \times 1,1760912 = 4,2339283, \quad \text{καὶ } 15^{3,6}$$

ἐπομένως

$$15^{3,6} = 17136$$

καὶ

$$20^{3,6} - 15^{3,6} = 48273 - 17136 = 31137.$$

ὡς ἐν λογαρίθμῳ καὶ ποσὶ ἐν ἡμετέρῳ 3 ἐκ 4

Τὴν τιμὴν δὲ ταύτην θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α') ἔχομεν

$$B = 1780 \frac{34137}{40^{1,7}} \quad (6')$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\log. B = \log. 1780 + \log. 34137 - 1,7 \log. 40$$

$$\eta \quad \log. B = 3,2504200 + 4,4932768 - 1,7 \times 1,6020599$$

$$\eta \quad \log. B = 5,0204950,$$

$$\text{ἐπομένως} \quad B = 104760 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Παραβάλλοντες δὲ τὰς λύσεις τοῦ 4^{ου} καὶ 3^{ου} προβλήματος, βλέπομεν ὅτι, ὁ κοῖλος στύλος, ὁ ἔχων ὕψος καὶ ἐξωτερικὴν διάμετρον ἴσα μὲ τὸ ὕψος καὶ τὴν διάμετρον τοῦ πλήρους στύλου, πάχος δὲ $2\frac{1}{2}$ εκατοστῶν τοῦ μέτρου, ὑποβαστάζει βάρος σχεδὸν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ βάρους, τὸ ὁποῖον ὑποβαστάζει ὁ πλήρης στύλος. Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνομεν ὅτι οἱ κοῖλοι στύλοι εἶναι οἱ μᾶλλον κατάλληλοι διὰ στηρίγματα οἰκοδομῶν, καὶ τούτων συνήθως γίνεται χρῆσις.

Τὸ συμπέρασμα δὲ τοῦτο γίνεται μᾶλλον κατάδηλον ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ πάχος ἢ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος δ, τοῦ κοίλου ἐκ χυτοσιδήρου στύλου, τοῦ ἔχοντος ὕψος 4 μέτρων, ἐξωτερικὴν διάμετρον 0^μ,25 καὶ ὑποβαστάζοντος φορτίον 162410 χιλιόγραμμα.

Λύσις. Τὰ δεδομένα εἶναι $\delta_1 = 25$, $B = 162410$ καὶ $M = 40$, ἄγνωστος δὲ τὸ δ, οὗτινος τὴν τιμὴν εὐρίσκομεν διὰ τοῦ τύπου (2), ὅστις μᾶς δίδει ἀμέσως

$$\delta_1^{3,6} - \delta^{3,6} = \frac{BM^{1,7}}{1780}$$

$$\text{καὶ} \quad \delta^{3,6} = \delta_1^{3,6} - \frac{BM^{1,7}}{1780}$$

καὶ θέτοντες ἐν αὐτῷ τὰς τιμὰς τοῦ δ_1 , B καὶ M ἔχομεν

$$\delta^{3,6} = 25^{3,6} - \frac{162410 \times 40^{1,7}}{1780} = 107790 - 48273 = 59517$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad 3,6 \log. \delta = \log. 59517$$

$$\eta \quad \log. \delta = \frac{\log. 59517}{3,6} = \frac{4,7746410}{3,6} = 1,3262891$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \delta = 21^{\text{ix}}, 19 \quad \eta \quad \delta = 0^{\text{u}}, 2149.$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν ε τὸ πάχος τοῦ κοίλου στύλου θέλομεν ἔχει

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 - \delta}{2} = \frac{0,5 - 0,21492}{2} = \frac{0,038}{2} = 0^{\text{u}}, 019$$

$$\eta \text{ σχεδὸν} \quad \varepsilon = 0^{\text{u}}, 02.$$

Παραβάλλοντες ἤδη τὰς λύσεις τοῦ 1^{ου} καὶ 4^{ου} προβλήματος, βλέπομεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ στύλοι, δηλ. καὶ ὁ πλήρης στύλος διαμέτρου 0^u, 20 καὶ ὁ κοῖλος στύλος ἐξωτερικῆς διαμέτρου 0^u, 25 καὶ πάχους 0^u, 02, δύναται νὰ ὑποβαστάζωσι ἀσφαλῶς τὸ αὐτὸ βάρος τῶν 162410 χιλιογράμμων.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμετρος 0^u, 25 καταλαμβάνει ἐν τῇ οἰκοδομῇ χώρον κατ' ὀλίγον διαφέροντα τοῦ ὑπὸ τῆς διαμέτρου 0^u, 20 καταλαμβάνομένου, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ἀντικατάστασις τοῦ πλήρους στύλου διαμέτρου 0^u, 20 ὑπὸ κοίλου στύλου διαμέτρου 0^u, 25 οὐδεμίαν μεταβολὴν φέρει εἰς τὰ κενὰ τῆς οἰκοδομῆς, ἵνα ἴδωμεν ποία τῶν δύο λύσεων εἶναι προτιμητέα, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὸ ζήτημα ὑπὸ οἰκονομικὴν μόνον ἔποψιν, δηλ. ποῖος στύλος τιμᾶται ὀλιγώτερον ὥς ἔχων ὀλιγώτερον βάρος, διότι ὁ σίδηρος πληρώνεται κατὰ βάρος.

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν

Διὰ μὲν τὸν πλήρη στύλον διαμέτρου 0^u, 20 καὶ ὕψους 4^u, 00 βάρος = $7200^2 \times 4,00 \times 3,14 \times 0,10^2 = 904^{\text{χιλ.}}, 32$ διότι τὸ μὲν γινόμενον $4,00 \times 3,14 \times 0,10^2$ παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ στύλου διαμέτρου 0^u, 20 καὶ ὕψους 4^u, 00 εἰς κυβικὰ μέτρα, τὸ δὲ 7200 χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου χυτοσιδήρου.

Διὰ δὲ τὸν κοῖλον στύλον διαμέτρου ἐξωτερικῆς 0^u, 25, πάχους 0^u, 02 καὶ ὕψους 4^u, 00, θέλομεν ἔχει

$$\text{Βάρος} = 7200 \times 4,00 \times 3,14 (0,125^2 - 0,105^2) = 415^{\text{χιλ.}}, 98.$$

Τὰ ἀνωτέρω βάρη πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν εἰς χρήματα, ἵνα ἴδωμεν ποῖος στύλος τιμᾶται ὀλιγώτερον, πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος.

Συνήθως ὁ χυτοσίδηρος πλήρους στύλου πληρώνεται πρὸς 30 λεπτά τὸ χιλιόγραμμον ἐνῶ ὁ τοῦ κοίλου στύλου πληρώνεται πρὸς 35 λεπτά τὸ χιλιόγραμμον. Ἐπομένως ἡ ἀξία τῶν στύλων εἶναι

$$\text{Τοῦ μὲν πλήρους στύλου} \dots 904,32 \times 0^{\text{δρ}},30 = 271^{\text{δρ}},29$$

$$\text{Τοῦ δὲ κοίλου στύλου} \dots 445,98 \times 0^{\text{δρ}},35 = 145^{\text{δρ}},59$$

$$\text{Διαφορὰ ἐπὶ ἑλαττον} \dots 125^{\text{δρ}},70$$

Ἐκ τῆς παραβολῆς δὲ τῶν δύο τιμῶν βλέπομεν ὅτι ὁ κοῖλος στύλος τιμᾶται ὀλιγώτερον τοῦ πλήρους κατὰ 126 σχεδὸν δραχμάς, καὶ ἐπομένως εἶναι προτιμητέος τοῦ πλήρους στύλου ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς οἰκονομίας, τὴν ὁποίαν πάντοτε πρέπει νὰ ἐπιδιώκωσιν οἱ μηχανικοί, οἱ ἀρχιτέκτονες κτλ. εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν τε δημοσίων καὶ ἰδιωτικῶν οἰκοδομῶν, ποιοῦντες κατάλληλον χρῆσιν τῶν διαφόρων τύπων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης οὕτως, ὥστε μετὰ τῆς στερεότητος τῆς οἰκοδομῆς νὰ ἐπιτυχῇται καὶ ἡ δυνατὴ χρηματικὴ οἰκονομία.

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΑΓΓΛΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΛΟΒΕ ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΕΚ ΚΑΘΑΡΟΥ ΣΙΔΗΡΟΥ
ΚΑΙ ΕΚ ΧΥΤΟΣΙΔΗΡΟΥ ΠΑΝΡΕΙΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥΣ ΣΤΥΛΟΥΣ

47. Ὁ Ἀγγλος μηχανικὸς Λόβε, ἰδὼν ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος διὰ τοὺς ἐκ χυτοσιδήρου στύλους ἀπαιτεῖ μεγάλην προσοχήν, διότι τὸ ὕψος ἐκτιμᾶται εἰς δέκατα τοῦ μέτρου καὶ ἡ διάμετρος εἰς ἑκατοστά, πρὸς δὲ ὅτι οἱ τύποι τοῦ Ὀδγκινσῶνος ἀναφέρονται μόνον διὰ τοὺς κοινοτέραν ἔχοντας τὴν χρῆσιν ἐκ χυτοσιδήρου στύλους, καὶ οὐχὶ καὶ διὰ στύλους ἐκ καθαροῦ σιδήρου, ὧν ἐνίοτε γίνεται χρῆσις εἰς τινὰς ἐξαιρετικὰς περιστάσεις, ἐπρότεινε τὴν χρῆσιν ἀπλουστερῶν τύπων, ἐν οἷς τὸ τε ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τοῦ στύλου ἐκτιμῶνται διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ οἵτινες δίδουσι σχεδὸν τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα.

Οὔτοι δὲ εἶναι οἱ ἐξῆς·

Διὰ μὲν τὸν χυτοσίδηρον

$$B = \frac{P\omega}{4,45 + 0,00337\left(\frac{M}{\delta}\right)^2} \quad (1)$$

Διὰ δὲ τὸν σίδηρον

$$B = \frac{P\omega}{4,55 + 0,0005\left(\frac{M}{\delta}\right)^2} \quad (2).$$

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὸ μὲν ω παριστᾷ τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τοῦ στύλου, ἐκπεφρασμένην εἰς ἑκατοστὰ τετραγωνικά, τὸ M τὸ ὕψος τοῦ στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, τὸ δ τὴν διάμετρον τοῦ στύλου καὶ ταύτην εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, τὸ δὲ P τὸ μεγαλύτερον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς θλίψιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς ὁ στύλος ἀποτελεῖται ὕλης. Τὸ φορτίον τοῦτο P εὗρέθη πειραματικῶς καὶ εἶναι διὰ μὲν τὸν χυτοσίδηρον ἴσον μὲ 4250 χιλιόγραμμα δι' ἑκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας, διὰ δὲ τὸν καθαρὸν σίδηρον ἴσον μὲ 600 χιλιόγραμμα δι' ἑκαστον ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας.

Θέτοντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους, ἀντὶ τοῦ ω τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{4} \times 3,14 \times \delta^2$ ἢ $\frac{\delta^2}{1,273}$ (διότι ἔχομεν $\frac{3,14}{4} = \frac{1}{1,273}$) καὶ ἀντὶ P τὴν ἀρμόζουσαν τιμὴν του, μετασχηματίζομεν τούτους εἰς τοὺς κάτωθεν.

Διὰ μὲν τοὺς ἐκ χυτοσιδήρου στύλους

$$B = \frac{4250\delta^4}{4,85\delta^2 + 0,0043M^2} \quad (3).$$

Διὰ δὲ τοὺς ἐκ καθαρῷ σιδήρου στύλους.

$$B = \frac{600\delta^4}{4,97\delta^2 + 0,00064M^2} \quad (4).$$

Διὰ τῶν τύπων (3) καὶ (4), τῶν ἀναφερομένων εἰς στύλους πλήρεις, ὁ Λόβε ἐσχημάτισε τὸν κάτωθεν πίνακα, τὸν δίδοντα ἢ τὸ φορτίον B , ὕπερ ὃ στύλος δύνανται ἀσφαλῶς νὰ ὑποβαστάξῃ, ὅταν ἡ διάμετρος καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ ᾖναι γνωστά, ἢ τὴν διάμετρον τοῦ στύλου, ὅταν τὸ φορτίον B καὶ τὸ ὕψος τοῦ στύλου ᾖναι δεδομένα.

ΠΙΝΑΞ ΗΜΗΠΤΟΣ

Περιέχων τὰς διαστάσεις τῶν ἐκ χυτοσιδήρου ἢ καθαροῦ σιδήρου πλῆρων στύλων καὶ τὰ φορτία, ἅτινα οἱ στύλοι οὗτοι δύνανται νὰ υποβαστάζωσιν ἀσφαλῶς.

Διάμετρος στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Υψὺς στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Φορτίον τῶν στύλων		Διάμετρος στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Υψὺς στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Φορτίον τῶν στύλων		Διάμετρος στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Υψὺς στύλου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου	Φορτίον τῶν στύλων	
		ἐκ χυτοῦ σιδήρου	ἐκ καθαροῦ σιδήρου			ἐκ χυτοῦ σιδήρου	ἐκ καθαροῦ σιδήρου			ἐκ χυτοῦ σιδήρου	ἐκ καθαροῦ σιδήρου
3	100	8742	6736	10	200	33014	26934	20	400	140036	107816
	110	7929	6368		230	27348	23316		430	124163	104620
	120	7232	6414		300	21823	23566		500	110192	101263
	130	6569	6244		330	17362	21786		530	98003	97799
	140	5985	6068		400	14318	20040		600	87112	94263
	150	5463	5891		430	11839	18371		630	78224	90703
	160	4337	5713		500	9920	16806		700	70249	87143
	180	4210	5358		530	8413	15360		730	63316	83623
	200	3376	5010		600	7212	14038		800	57273	80100
	220	3086	4674						830	51991	76773
	240	2663	4333						900	47339	73484
	260	2318	4033		300	39669	28720		1000	39682	67226
6	280	2038	3771	12	330	32679	27070	23			
	300	1803	3509		400	27138	23387		400	264758	173739
					430	22793	23716		430	240888	172226
	130	9917	9113		500	19323	22091		500	218837	168463
	173	8169	8390		530	16339	20336		530	198730	164491
	200	6789	8036		600	14283	19066		600	180360	160349
	223	3698	7326		630	12442	17689		630	164238	156078
	230	4830	7010		700	10921	16410		700	149630	131713
	273	4134	6317						800	124936	142837
	300	3371	6030		300	78781	60641		900	103230	133933
	323	3110	5613		330	67106	38228		1000	89490	123230
	330	2730	5207		400	37306	33667				
8	200	17630	16202	13	430	49169	33024				
	223	13234	13307		500	42423	30332				
	230	13228	14797		530	36833	47693				
	273	11342	14083		600	32216	43090				
	300	10130	13379		630	28339	42362				
	323	8941	12688		700	23079	40133				
	330	7936	12018		730	22321	37813				
	373	7080	11373		800	19973	33613				
	400	6349	10736								
	430	5176	9612								
	500	4290	8390								

Σημείωσις Οἱ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι Ε' περιεχόμενοι ἀριθμοὶ ἐξαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὰ φορτία, τὰ παράγοντα τὴν θλάσιν τῶν στύλων.

48. Ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τῶν ἐκ χυτοσιδήρου κοίλων στύλων συνήθως προσδιορίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ Ὀδγκινσῶνος, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐξετέθη. Δυνάμεθα ὅμως νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τοὺς τύπους τοῦ Λόβις ἢ τὸν ἐκ τούτων σχηματισθέντα πίνακα Ε' πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἀνωτέρω διαμέτρου, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξῆς δύο ἀρχάς.

Πρώτη ἀρχή. Ἡ στερεότης ἐνὸς κοίλου στύλου, ἔχοντος διάμετρον ἐξωτερικὴν Δ, καὶ ἐσωτερικὴν δ, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν στερεοτήτων δύο ἰσοῦσιν πλήρων στύλων, ἐχόντων διαμέτρους ὁ μὲν τὴν Δ, ὁ δὲ τὴν δ. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, καλοῦντες Β τὸ βάρος, ὑπερ ἀσφαλῶς δύναται νὰ υποβαστάσῃ ὁ κοῖλος στύλος, ὁ ἔχων ἐξωτερικὴν διάμετρον Δ καὶ ἐσωτερικὴν δ, Β' τὸ βάρος, ὑπερ δύναται νὰ υποβαστάξῃ ἰσοῦσιν πλήρης στύλος διαμέτρου Δ, καὶ Β'' τὸ βάρος, ὑπερ ἐπίσης δύναται νὰ υποβαστάξῃ ἕτερος ἰσοῦσιν πλήρης στύλος διαμέτρου δ, θέλομεν ἔχει

$$B = B' - B'' \quad (\alpha').$$

Δευτέρα ἀρχή. Τὸ ἐλάχιστον πάχος τῶν ἐκ χυτοσιδήρου κοίλων στύλων δὲν δύναται νὰ ᾔηται οἷονδήποτε, ἀλλ' ὀρίζεται κατὰ τινας ἐμπειρικοὺς κανόνας παραδεδεγμένους ἐν τοῖς χυτηρίοις, ὡς δεικνύει ὁ κάτωθεν πίναξ ΣΤ'.

ΠΙΝΑΞ ΕΚΤΟΣ

Περιέχων τὰ ἐλάχιστα πάχη, τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν χυτηρίων εἰς τοὺς ἐκ χυτοσιδήρου κοίλους στύλους, τοὺς χρησιμεύοντας ὡς στηρίγματα εἰς τὰς οἰκοδομάς.

Ὑψος τῶν στύλων εἰς μέτρα.....	2—3	3—4	4—6	6—8
Ἐλάχιστον πάχος τῶν στύλων εἰς χιλιοστά τοῦ μέτρου	12	15	20	25

Τούτων οὕτως ἐχόντων ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τοῦ Λόβε ἢ ἡ χρῆσις τοῦ πίνακος Ε' πρὸς εὗρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου τῶν κοίλων στύλων γίνεται ὡς ἑξῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΛΟΒΕ

49. Ἐστω Δ ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τοῦ κοίλου στύλου, ἥτις προσδιορίζεται πάντοτε ὑπὸ τοῦ ἀρχιτέκτονος κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ρυθμοῦ τῆς ἀρχιτεκτονικῆς, Μ τὸ ὕψος αὐτοῦ, καὶ Β τὸ βάρος, ὅπερ οὗτος πρόκειται νὰ υποβαστάζῃ. Τὸ βάρος τοῦτο υπολογίζεται ἀκριβῶς ἐκ τῶν προτέρων, γνωστοῦ ὄντος τοῦ σχεδίου τῆς οἰκοδομῆς.

Ἐστω πρὸς τούτοις δ ἡ ζητούμενη ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ κοίλου στύλου, Β' τὸ βάρος, ὅπερ στύλος πλήρης ὕψους Μ καὶ διαμέτρου δ δύναται ἀσφαλῶς νὰ υποβαστάζῃ.

Ἐστω προσέτι Β'' τὸ βάρος, ὅπερ στύλος πλήρης, ὕψους Μ καὶ διαμέτρου Δ, δύναται ἀσφαλῶς νὰ υποβαστάζῃ. Τὸ βάρος τοῦτο εὕρεσται ἢ διὰ τοῦ τύπου τοῦ Λόβε ἢ διὰ τοῦ πίνακος Ε', διότι τὸ Δ καὶ Μ εἶναι γνωστά.

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει διὰ μὲν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς πρώτης ἀρχῆς

$$B' = B'' - B \quad (1),$$

διὰ δὲ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ Λόβε.

$$B' = \frac{4250\delta^4}{4,85\delta^2 + 0,0043M^2} \quad (2).$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσews (1) εὕρισκομεν τὸ βάρος Β', διότι τὸ Β'' καὶ Β εἶναι γνωστά, ἐκ δὲ τῆς ἐξίσωσews (2) προσδιορίζομεν τὴν ἄγνωστον δ, γνωστῶν ὄντων τοῦ Β' καὶ Μ, λύοντες τὴν διτετραγωνικὴν τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\delta^4 - \frac{4,85 \cdot B'}{4250} \delta^2 - \frac{0,0043M^2 \cdot B'}{4250} = 0 \quad (3)$$

κατὰ τοὺς γνωστοὺς τῆς Ἀλγέβρας κανόνας, καὶ εὕρισκομεν διὰ τὴν ἄγνωστον δ τέσσαρας τιμὰς, ἐξ ὧν δύο εἶναι θετικαὶ καὶ δύο ἀρνητικαί. Ἡμεῖς δὲ πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τῆς δ, μίαν ἐκ τῶν δύο θετικῶν καὶ ἐκ τούτων τὴν μεγαλειτέραν, ἥτις εἶναι ἡ κάτωθεν

$$\delta = \sqrt{\frac{4,85B'}{2 \times 4250}} + \sqrt{\left(\frac{4,85B'}{2 \times 4250}\right)^2 + \frac{0,0043M^2 \cdot B'}{4250}}$$

ΑΓΣΙΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ Ε'

50. Όπως δείξωμεν τὸν τρόπον τῆς χρήσεως τοῦ πίνακος Ε' πρὸς εὑρεσιν τοῦ πάχους τῶν κοίλων στύλων, λύομεν τὸ κάτωθεν πρόβλημα.

Νὰ προσδιορισθῇ τὸ πάχος κοίλου στύλου ἐκ χυτοσιδήρου, ὕψους 4 μέτρων, καὶ ἐξωτερικῆς διαμέτρου 0^μ,20, δι' οὗ πρόκειται νὰ ὑποβαστάζηται διαρκῶς βάρος 83000 χιλιογράμμων.

Ἀνατρέχοντες εἰς τὸν πίνακα Ε' εὐρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος Β', ὑπερὸ πλήρης στύλος διαμέτρου 0^μ,20 καὶ ὕψους 4 μέτρων δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ εἶναι ἴσον μὲ 440056 χιλιόγραμμα.

Ἐπομένως κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν ἔχομεν

$$B' = B'' - B = 440056 - 83000 = 57056 \text{ χιλ.}$$

Ἀνατρέχοντες πάλιν εἰς τὸν πίνακα Ε' εὐρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος 57056 χιλιόγραμμα περιέχεται μεταξὺ τῶν βαρῶν 27158 καὶ 57306, καὶ τὸ μὲν 27158 ἀνταποκρίνεται εἰς στύλον ὕψους 4 μέτρων καὶ διαμέτρου 0^μ,42, τὸ δὲ 57306 εἰς στύλον ὕψους 4 μέτρων καὶ διαμέτρου 0^μ,45.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος 57056 πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸ 57306 ἢ πρὸς τὸ 27158, διὰ τοῦτο δυνάμεθα ἀνευ φόβου ὡς πρὸς τὴν στερεότητα τοῦ κοίλου στύλου νὰ παραδεχθῶμεν ὡς ἐσωτερικὴν διάμετρον αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 0^μ,45, τὸν ἀρμόζοντα εἰς τὸ βάρος 57306 καὶ οὕτω τὸ ζητούμενον πάχος ἔσεται

$$\varepsilon = \frac{0,20 - 0,45}{2} = 0^{\mu},025.$$

Τὸ πάχος δὲ τοῦτο εἶναι παραδεκτόν, διότι εἶναι μεγαλειότερον τοῦ απαιτουμένου ἐλαχίστου πάχους 0^μ,045.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Ὀδγκινσῶνος θέλομεν εὑρεῖν

$$\delta = 0^{\mu},46 \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon = \frac{0,20 - 0,46}{2} = 0^{\mu},02.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ βάρος $B' = B'' - B$ δὲν περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν πίνακα Ε, οὔτε πλησιάζει πολὺ πρὸς ἓνα τῶν δύο ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται, τότε πρὸς εὑρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου πρέπει ἢ νὰ παραδεχθῶμεν ὡς τιμὴν τῆς ζητουμένης διαμέτρου δ τὴν

διάμετρον, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν μικρότερον τῶν δύο ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Β', καὶ τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν εἰς τὸν Ε' πίνακα, ἢ, ἂν θέλωμεν μεγαλειτέραν προσέγγισιν, νὰ εὐρώμεν τὴν τιμὴν τῆς δ διὰ τοῦ τύπου τοῦ Λόβε ἢ τοῦ Ὁδγκινσῶνος, ἢ τέλος πρὸς ἀποφυγὴν τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Λόβε ἢ τοῦ Ὁδγκινσῶνος καὶ ἀπαιτούσης καὶ χρόνον καὶ προσοχὴν πολὺν, νὰ παραδεχθῶμεν ἐν πρώτοις ἐκ τῶν δύο διαμέτρων, τῶν δεδομένων ὑπὸ τοῦ πίνακος Ε', καὶ ἀντιστοιχοῦσῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Β', τὴν ἀρμόζουσαν εἰς τὸν μεγαλειτέρον ἀριθμὸν, καὶ ἔπειτα ἐκ ταύτης νὰ ἀφαιρέσωμεν ποσότητά τινα ἀνάλογον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν Β' καὶ τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς τὴν παραδεχθεῖσαν διάμετρον.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν $B = 100000$ χιλιόγραμμα, ἡθέλωμεν εὐρεῖ, τοῦ ὕψους τοῦ στύλου καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διαμέτρου αὐτοῦ ὄντων ὡς καὶ ἀνωτέρω, $B' = B'' - B = 140056 - 100000 = 40056$, ὅπερ περιέχεται μὲν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 27158 καὶ 57306, δὲν δύναται ὅμως νὰ ἐξισωθῇ οὔτε μὲ τὸν ἀριθμὸν 27158 οὔτε μὲ τὸν 57306. Ἐπομένως πρὸς εὐρεσιν τῆς ζητουμένης ἐσωτερικῆς διαμέτρου δ παραδεχόμεθα κατ' ἀρχὰς ὡς τιμὴν τῆς ζητουμένης ἀγνώστου δ, τὴν διάμετρον $0^{\mu}, 42$, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμὸν 27158 καὶ εὐρίσκομεν

$$\varepsilon = \frac{0,20 - 0,42}{2} = 0,04.$$

Ἡ ἀνωτέρω γενομένη παραδοχὴ τῆς διαμέτρου $0^{\mu}, 42$ ὄχι μόνον εἶναι ἐπιτετραμμένη, ἀλλὰ παρέχει καὶ ἐξαγόμενα, δίδοντα μεγαλειτέραν ἀσφάλειαν καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὴν στερεότητα τῆς οἰκοδομῆς.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἔχωμεν μεγαλειτέραν προσέγγισιν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ πάχους ε, χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας ἐφαρμόζομεν ἢ τὸν τύπον τοῦ Λόβε ἢ τὸν τοῦ Ὁδγκινσῶνος καὶ ἔχομεν διὰ μὲν τοῦ τύπου τοῦ Λόβε

$$\delta = \sqrt{\frac{1,83}{2 \times 1230} 40036 + \sqrt{\left(\frac{1,83}{2 \times 1230}\right)^2 40036^2 + \frac{0,0043 \times 400^2 \times 40036}{1230}}}$$

$$\text{καὶ} \quad \delta = 14^{\mu}, 5 \quad \text{ἢ} \quad \delta = 0^{\mu}, 145$$

$$\varepsilon = \frac{0,20 - 0,145}{2} = \frac{0,055}{2} = 0^{\mu}, 0275$$

διὰ δὲ τοῦ τύπου τοῦ Ὀδγκινσῶνος

$$\delta^{3,6} = 20^{3,6} - \frac{100000 \times 40^{4,7}}{4780} = 48544$$

καὶ $\delta = 45^{1\kappa}, 0 \quad \eta \quad \delta = 0^{\mu}, 450$

καὶ $\varepsilon = \frac{0,20 - 0,45}{2} = 0^{\mu}, 025.$

Τρίτον. Ποιοῦντες χρῆσιν ὡς πρότερον τοῦ πίνακος Ε' λαμβάνομεν ἐν πρώτοις ὡς τιμὴν τοῦ δ τὴν διάμετρον $0^{\mu}, 45$, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν ἀριθμὸν 57306, ὅστις εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 40056. Τοῦτου δὲ γενομένου πρὸς εὑρεσιν τῆς ἀφαιρετέας διαφορᾶς σχηματίζομεν τὴν ἀναλογία

$$(57306 - 27158) : (0,45 - 0,42) = (57306 - 40056) : \chi,$$

ἐξ ἧς

$$\chi = \frac{(57306 - 40056)(0,45 - 0,42)}{(57306 - 27158)} = \frac{47250 \times 0,03}{30148} = 0,046$$

ἐπομένως $\delta = 0,450 - 0,046 = 0,404$

καὶ $\varepsilon = \frac{0,200 - 0,404}{2} = \frac{0,066}{2} = 0^{\mu}, 033.$

Παραβάλλοντες ἤδη τὰς ἀνωτέρω τρεῖς λύσεις, βλέπομεν ὅτι αἱ τιμαί, αἱ διδόμεναι διὰ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος καὶ Λόβε, εἶναι σχεδὸν ἴσαι, ὅτι ἡ δευτέρα λύσις εἶναι προτιμωτέρα τῶν δύο ἄλλων, ὡς οἰκονομικωτέρα ὑπὸ χρηματικὴν ἐποψίν, καὶ ὅτι ἡ τρίτη λύσις, ἡ πλησιάζουσα περισσότερον εἰς τὴν δευτέραν, εἶναι καὶ αὕτη παραδεκτὴ, διότι ἡ μὲν χρηματικὴ ζημία σχετικῶς ὡς πρὸς τὴν τῆς δευτέρας λύσεως εἶναι μικρά, ἡ δὲ λύσις τῶν τοιούτων ζητημάτων διὰ τοῦ πίνακος Ε' ἐκτὸς τοῦ ὅτι παρέχει ἡμῖν μεγάλας εὐκολίας εἰς τὴν ταχεῖαν εὑρεσιν τῆς ζητουμένης διαμέτρου, πολλάκις προφυλάττει τοὺς πρωτοπείρους ἀπὸ λάθης, εἰς δὲ εὐκόλως ὑποπίπτουσι οἱ ἐπιχειροῦντες τὴν λύσιν τῶν τοιούτων ζητημάτων διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος καὶ Λόβε.

Ἐννοεῖται οἰκοθεν ὅτι, ὁσάκις τὸ διὰ τοῦ υπολογισμοῦ εὕρισκόμενον πᾶχος εἶναι μικρότερον τοῦ ἐν τοῖς χυτηρίοις παραδεδεγμένου ὡς

ἐλαχίστου πάχους, πρέπει νὰ παραδεχόμεθα ἀμέσως τὸ δεύτερον, ὡς τιμὴν τοῦ ζητουμένου πάχους διὰ τὸν κοῖλον στύλον, οὗτινος χρῆσιν προτιθέμεθα νὰ κάμωμεν.

Παρατηρήσεις. Τὰ πάχη τῶν κυλινδρινῶν στύλων, κοίλων ἢ μὴ, πρέπει πάντοτε νὰ ὑπολογίζωμεν ἢ διὰ τῶν τύπων τοῦ Ὀδγκινσῶνος καὶ Λόβε ἢ διὰ τοῦ πίνακος Ε', οὐδέποτε δὲ διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Ῥοντλέ.

ΠΕΡΙ ΛΙΘΩΝ ΚΑΙ ΛΙΘΟΔΟΜΗΣ

50. Ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν διακεκριμένων μηχανικῶν Ῥοντλέ, Γκωνταίν, Ῥεμὴ καὶ Βίκα ἐκτελεσθέντων πειραμάτων ἐπὶ τῶν λίθων ἐξάγονται ἐν γένει τὰ ἑξῆς.

1^{ον} Ὅτι ἐκ τῶν φυσικῶν ἰδιοτήτων τῶν λίθων, οἷον τῆς σκληρότητος, τοῦ εἰδικοῦ βάρους, τοῦ χρώματος κτλ., δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν καὶ περὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν παρεχομένης εἰς τὴν διάρρηξιν ἀντιστάσεως, τουτέστι νὰ συμπεραίνωμεν πόσον φορτίον παράγει διὰ τῆς πίεσεως τὴν θραῦσιν τοῦ λίθου.

2^{ον} Ὅτι οἱ λίθοι, οἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ λατομείου ἐξαγόμενοι καὶ τῆς αὐτῆς ὄντες φύσεως, δὲν παρέχουσι πάντες τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν συνήθως, ἀλλ' οἱ μὲν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ λατομείου λίθοι, οἱ ὑποστάντες τὴν ἐπιρροίαν τῆς ἀτμοσφαίρας, ἄλλοτε εἶναι ὀλιγώτερον καὶ ἄλλοτε περισσότερον σκληροί, ἢ οἱ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν λίθοι, οἱ μὴ ὑποστάντες τὴν ἐπιρροίαν τῆς ἀτμοσφαίρας. Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀμμώδεις λίθοι, οἱ ὄντες ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ λατομείου, ἢ οἱ ἐξορυχθέντες μὲν ἐκ τῶν ἐγκάτων τοῦ λατομείου ἀλλ' ἀφελθέντες ἐπὶ τινα χρόνον εἰς τὸ ὑπαιθρον, ἵνα διὰ τῆς ἐπιρροίας τῆς ἀτμοσφαίρας ἐξατμισθῇ τὸ ὕδωρ αὐτῶν, τὸ κοινῶς καλούμενον ὕδωρ τοῦ λατομείου, γίνονται σκληρότεροι τῶν εὐρισκομένων ἐντὸς τοῦ λατομείου καὶ τῶν νεωστὶ ἐξορυχθέντων καὶ μὴ ὑποστάντων εἰσέτι τὴν ἐπιρροίαν τῆς ἀτμοσφαίρας.

3^{ον} Ὅτι ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς.

4^{ον} Ὅτι ἡ ἀντίστασις λίθων τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ στρώματος τοῦ λατομείου ἐξαχθέντων εἶναι μεγαλειτέρα, ὅταν ἔχωσι κυβικὸν σχῆμα, πρὸς δὲ ὅτι ἡ ἀντίστασις λίθου, τοῦ ἔχοντος σχῆμα

κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύβον, τουτέστι κυλίνδρου, οὗτινος ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ τὰ ἐγδοήκοντα ἑκατοστὰ τῆς τοῦ κύβου, τοῦ ἔχοντος τὰς διαστάσεις τοῦ ἴσας τῷ ὕψει τοῦ κυλίνδρου, ἐὰν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς μιᾶς βάσεώς του καὶ ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἐνεργῇ ἡ θλιπτικὴ δύναμις, ἐὰν δὲ στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς γεννητρίας καὶ ἡ θλίψις ἐνεργῇ ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου γεννητρίας, ἡ ἀντίστασις εἶναι τὰ τριάκοντα δύο ἑκατοστὰ τῆς τοῦ κύβου, ἡ δὲ ἀντίστασις τῆς σφαίρας εἶναι τὰ εἴκοσι ἕξ ἑκατοστὰ τῆς τοῦ κύβου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

5^{ον} "Οτι οἱ σκληροὶ λίθοι ὀλίγον ὑποχωροῦσιν εἰς τὴν πίεσιν καὶ διαρῶννυνται αἰφνυδίως μεταβαλλόμενοι εἰς λεπτότατα φύλλα ἢ λεπτὰ πρίσματα ἐν εἴδει βελονῶν, ἅτινα μεταβάλλονται ἐπὶ τέλους εἰς κόνιν, ὅταν τὸ πιέζον φορτίον φθάσῃ τὸ ἐν αὐθωρεὶ παράγον τὴν διάρρηξιν.

6^{ον} "Οτι οἱ μαλακοὶ λίθοι κατὰ τὰς πρώτας στιγμὰς τῆς διάρρηξεως τῶν, τουτέστιν ὅταν τὸ βάρος πλησιάζῃ τὸ φορτίον, τὸ παράγον ἐν αὐθωρεὶ τὴν διάρρηξιν, χωρίζονται εἰς πληθὺν μικρῶν πυραμίδων ἢ κόνων, ὧν αἱ βάσεις διατίθενται ἐναλλάξ καὶ ἀντιστρόφως ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 33.



Σχ. 33

7^{ον} "Οτι ἡ ἀντίστασις τῶν λιθίνων στηριγμάτων, οἷον τοίχων, στύλων, στηλῶν κτλ. ἐλαττοῦται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καθόσον ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ περισσοτέρων τεμαχίων λίθων.

8^{ον} "Οτι εἰς τὰς συνήθεις οἰκοδομὰς οἱ μὲν τοῖχοι ἐκ λελαξαμένων λίθων μεγάλων διαστάσεων πρέπει νὰ φορτῶννυνται τὸ πολὺ μέχρι τοῦ $\frac{1}{10}$, οἱ δὲ ἐκ κοινῆς λιθοδομῆς τὸ πολὺ μέχρι τοῦ $\frac{1}{20}$ τοῦ βάρους ἐκείνου, ὅπερ ἐπιφέρει τὴν θλάσιν τοῦ ἀδυνατωτέρου τῶν ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ὁ τοῖχος λίθων, τουτέστιν ὅταν διὰ τὴν κατασκευὴν τοῖχου τινὸς γείνη χρῆσις λίθων σκληρῶν καὶ μαλακῶν ἀναμιξ, τότε πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους τοῦ τοῖχου πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὸ $\frac{1}{40}$ ἢ τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ φορτίου, τοῦ ἀναγομένου εἰς τὴν ἀντίστασιν τοῦ μαλακοῦ λίθου, ὡς ἀδυνατωτέρου, καὶ ὅχι τοῦ σκληροῦ.

Ἐκ τῶν αὐτῶν πειραμάτων ἐξάγεται ὁ κάτωθεν πίναξ Ζ', ὅστις δίδει τὰ φορτία, εἰς ἃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλλωμεν τοὺς λιθί-

ΠΙΝΑΞ ΕΒΔΟΜΟΣ

Ποιοτήτες και ουσίαι τῶν ρωσικῶν ἢ ταχινικῶν λίθων, εἰς ὧν ἀποτελεῖται ὁ στυλός	Βάρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου	Φορτίον, ὅπερ δύναται ἀσφαλῶς νὰ υποφέρει ἕκαστον τετραγωνικόν ἕκατ.
	χιλ.	χιλ.
Λάβρα σκληρὴ τοῦ Βεζουβίου	2600	59
Λάβρα μαλακὴ τῆς Νεαπόλεως	1970	23
Πορφυροῦς λίθος	2870	247
Πράσσινος γρανίτης τῶν Βοσγίων ὁρέων	2830	62
Γρανίτης λευκοφαιος (gris) τῆς Βρετανίας (ἐπ. Γαλλίας)	2740	63
» » τῆς Νορμανδίας	2660	70
» » τῶν Βοσγίων ὁρέων	2640	42
Ἀμμόλιθος (grès) σκληρὸς χρώματ. λευκοῦ ἢ ἐρυθροῦ	2300	87
Ἀμμόλιθος μαλακός (grès), (ὡς ἐν Πύργῳ Ἡλείας) ...	2490	0,40
ΤΙΤΑΝΟΛΙΘΟΙ		
Μέλαν μάρμαρον τῆς Φλάνδρας	2720	79
Λευκὸν μάρμαρον (δι' ἀγάλματα κτλ.)	2690	31
Μελανόλιθος σκληρὸς περιέχων καὶ ὄστρακα	2630	63
Βραχόλιθος τοῦ (Chatillon) καθαρ. καὶ ἔχων ὀλίγα ὄστρακ.	2290	17
Βραχόλιθος μαλακός	2080	13
Λίθος μαλακὸς ἀντέχων εἰς τὸ ὕδωρ, ὡς ὁ τῶν Παρισίων	1800	6
Τιτανόλιθος σκληρὸς (ὡς ὁ τῶν Παρισίων)	2360	31
» μαλακός » »	2070	12
ΟΠΤΟΠΛΙΝΘΟΙ		
Ὅπτοπλινθοι σκληροὶ καὶ καλῶς ἐψημένοι	1360	15
» ἐρυθροὶ	2170	6
» ὀλίγον ἐρυθροὶ	2090	4
» πολὺ ἐψημένοι καὶ κρυσταλλωμένοι ..	2090	10
ΓΥΓΟΣ		
Γύγος δι' ὕδατος κατασκευασθεῖς		2,99
» μετὰ σκύρων ἐν εἴδει πετροκονιάματος		3,28
ΑΜΜΟΚΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΕΤΡΟΚΟΝΙΑΜΑ		
Ἀμμοκονία κοινὴ ἐκ παχείας ἀσβέστου καὶ ἄμμου ...		3,30
» ἀπὸ Ciment ἢ κεραμοκονία		4,80
» ἐκ πουζολάνης τῆς Νεαπόλεως ἢ τῆς Ῥώμ. ..		3,70
Πετροκονίαμα ἐκ καλῆς ἀμμοκονίας καὶ σκύρων (Beton) ἡλικίας 18 μηνῶν		4,00
Καὶ ἡ ἡμετέρα θηρακονία πρέπει νὰ ἀνάγεται εἰς τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἀμμοκονίας (δὲν ὑπάρχουσι πειράματα)		

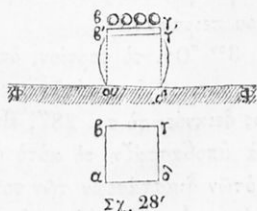
Σημειώσεις. Ὄταν πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ φορτίον τοίχου τινός, ἐὰν μὲν οὗτος ἦναι κατεσκευασμένος ἐκ λελαξευμένων λίθων, (μεγάλων ἀγγωναρίων) καὶ ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὸ πᾶχος δὲν ὑπερβαίῃ τὸ ὅριον 10—12, τότε θέλομεν λάβει τὸ ἥμισυ τοῦ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πέλματι δεικνυμένου φορτίου ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῶν λίθων, ὧν χρῆσιν ποιοῦμεν ἐν τῇ λιθοδομῇ, ἐὰν δὲ ἦναι ἀπλῆς τοιχοποιίας, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἐν τῷ πέλματι σημειουμένου φορτίου. Ἡ ἐκ μικρῶν λελαξευμένων λίθων ἀποτελουμένη τοιχοποιία, θεωρεῖται ὡς ἀπλοτοιχία καὶ λαμβάνεται καὶ διὰ ταύτην τὸ τέταρτον τοῦ ἐν τῷ πέλματι σημειουμένου φορτίου.

51. Τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτελεσθέντα πειράματα πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τε σμικρύνσεως, τῆς παραγομένης εἰς τὰ σώματα ὑπὸ δεδομένης θλιπτικῆς δυνάμεως, καὶ τοῦ φορτίου, εἰς τὴν διαρκῆ θλίψιν τοῦ ὁποίου δυνάμεθα ἀσφαλῶς νὰ ὑποβάλλωμεν ταῦτα, ἐγένοντο μόνον ἐπὶ σωμάτων, τὰ ὅποια στηριζόμενα ἐπὶ στερεοῦ τινος ἐπιπέδου διὰ τῆς μιᾶς τῶν ἐδρῶν ἢ βάσεων αὐτῶν, θλιβόμενα δὲ ὑπὸ θλιπτικῆς τινος δυνάμεως ἐνεργούσης ὁμοιομόρφως ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἑδρας καὶ καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν αὐτῆς, ἔχουσι τὴν λοιπὴν παράπλευρον αὐτῶν ἐπιφάνειαν ἐλευθέραν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 28 τῆς 25 παραγράφου, καὶ δύνανται ἐπομένως νὰ ἐξογκῶνται ἐλευθέρως, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 28', μέχρις οὗ θραυσθῶσι, ὅταν ἡ ἐπ' αὐτῶν ἐνεργοῦσα θλιπτικὴ δύναμις φθάσῃ τὸ ὑπὸ τῆς πείρας ὁρισθὲν ὅριον.

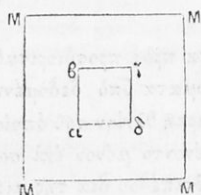
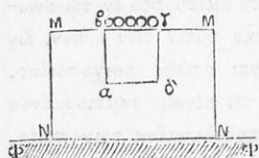
Δὲν ἐγένοντο δὲ μέχρι σήμερον εἰδικὰ πειράματα ὑπ' οὐδενὸς μηχανικοῦ ἢ φυσικοῦ καὶ ἐπὶ σωμάτων, τῶν ὁποίων ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια νὰ περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ στερεοῦ τινος σώματος ἢ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ σώματος, οὗτινος μέρος μόνον τῆς ἄνω αὐτοῦ ἐπιφανείας πιέζεται, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 28'', ἵνα εὐρεθῇ καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ νόμος τῆς σμικρύνσεως αὐτῶν, ὡς καὶ τὸ φορτίον εἰς τὴν θλίψιν τοῦ ὁποίου ἀσφαλῶς θὰ ἡδυνάμεθα νὰ ὑποβάλλωμεν τοιαῦτα σώματα.

52. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν λοιπὸν τὰ ἑξῆς.

1^{ον} Ὅτι τὰ ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφαις τοῦ κεφαλαίου τού-



του ἐκτεθέντα πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τε σμικρύνσεως, τῆς παραγομένης ὑπὸ δεδομένης θλιπτικῆς δυνάμεως ἐπὶ τῶν ἐφ' ὧν αὕτη ἐνεργεῖ διαφόρων σωμάτων, ὡς καὶ τοῦ φορτίου, εἰς τὴν διαρκῆ θλίψιν τοῦ



Σχ. 28''

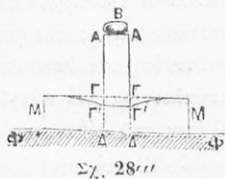
ὁποίου δυνάμεθα ἀσφαλῶς νὰ υποβάλλωμεν τὰ διάφορα στηρίγματα ἢ στύλους ἀναφέρονται μόνον εἰς σώματα, τῶν ὁποίων ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι ἐλευθέρα ὡς δεικνύουσι τὰ προηγούμενα σχήματα 28, 29, 31 κτλ., οὐχὶ δὲ καὶ ὅταν αὕτη ᾖ περιωρισμένη πανταχόθεν ὡς δεικνύει τὸ σχ. 28''.

2^{ον} Ὅτι ἡ σμίκρυνσις, ἡ παραγομένη ὑπὸ δεδομένης θλιπτικῆς δυνάμεως ἐπὶ τινος σώματος, οὗτινος ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι πανταχόθεν περιωρισμένη, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 28'', εἶναι μικρότερα τῆς σμικρύνσεως, τῆς παραγομένης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ὑπὸ τῆς αὐτῆς συνθλιπτικῆς δυνάμεως, ὅταν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ᾖ ἐλευθέρη, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 28', διότι τὸ περίφραγμα MNMN τοῦ σχ. 28'', ἐμποδίζον τὴν ἐξόγκωσιν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αβγδ, τὴν δεικνυομένην ἐν τῷ σχήματι 28', συντείνει εἰς τὴν ἐλάττωσιν τῆς σμικρύνσεως τοῦ μήκους τοῦ σώματος βγδα (Σχ. 28'' πρόσφιν). Κατὰ πόσον δὲ ἡ σμίκρυνσις αὕτη εἶναι μικρότερα, τοῦτο εἶναι ἄγνωστον, ὡς μὴ γενομένων εἰδικῶν περὶ τούτου πειραμάτων.

3^{ον} Ὅτι τὸ φορτίον, ὅπερ δύναται νὰ υποβαστάξῃ ἀσφαλῶς σῶμα τι, οὗτινος ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι πανταχόθεν περιωρισμένη, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 28'', εἶναι μεγαλύτερον ἐκείνου, τὸ ὅποῖον δύναται νὰ υποβαστάξῃ τὸ αὐτὸ σῶμα, ἢ ἕτερον τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ τῶν αὐτῶν διαστάσεων τῶν τοῦ σχ. 28'', ὅταν ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια ᾖ ἐλευθέρη, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 28'. διότι τὸ περίφραγμα MNMN τοῦ σχ. 28'', ὡς ἐμποδίζον τὴν ἐξόγκωσιν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αβγδ, συντείνει εἰς τὴν ἐπαύξησιν τῆς ἐλατηρίου δυνάμεως τῶν μορίων τοῦ σώματος, κατὰ πόσον δὲ συντείνει, τοῦτο εἶναι ἄγνωστον, ὡς μὴ γενομένων εἰδικῶν περὶ τούτου πειραμάτων.

4^{ον} Ὅτι τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρω 3^{ον} ἐδαφίῳ ἐκτεθέντα ἐφαρμόζονται καὶ

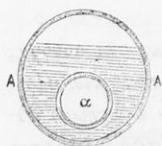
ἐπὶ σωμάτων, πιεζομένων ὑπὸ δυνάμεως, ἐνεργούσης ὁμοιομόρφως οὐχὶ καθ' ὅλην τὴν ἄνω αὐτοῦ ἐπιφάνειαν, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ μέρους τινὸς αὐτῆς, καὶ ἰδίως εἰς τὸ μέσον ὡς δεικνύει τὸ σχ. 28'''. Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ σιδηροῦς στύλος ΑΑΓΓ θλίβῃ ὁμοιομόρφως μόνον τὸ μέρος ΓΓ τῆς λιθίνης βάσεως ΜΜ, τὸ κατέχον τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ ἄνω ὁριζόντιος ἐπιφάνεια ἐνδίδει, καὶ τὸ ΓΓ κατέρχεται εἰς τὴν θέσιν Γ'Γ', ἡ δὲ ἐλατήριος δύναμις τῆς λιθίνης βάσεως ΜΜ δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἀντιστάσεως τῶν μορίων τοῦ τεμαχίου Γ'Γ'ΔΔ, ἀλλὰ σχεδὸν ἐκ τῆς τῶν ὅλων τῆς βάσεως ΜΜ, διότι τὰ περίρξ τοῦ τεμαχίου Γ'Γ'ΔΔ μόρια τῆς βάσεως ΜΜ, ἕνεκα τῆς συνοχῆς αὐτῶν μετὰ τῶν τοῦ τεμαχίου Γ'Γ'ΔΔ λαμβάνουσι τρόπον τινὰ μέρος εἰς τὴν παρεχομένην ἀντίστασιν καὶ ὑποβοηθοῦσι τὴν ἐλατήριον δύναμιν τῶν μορίων Γ'Γ'ΔΔ, ἵνα ἰσορροπίσωσι τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐνεργούσαν ὑπὸ τοῦ βάρους Β ἐπὶ τοῦ Γ'Γ' θλίψιν, καὶ οὕτω ἡ ἀρχικῶς ὁριζόντιος ἐπιφάνεια ΜΓΓΜ κάμπεται καὶ γίνεται ΜΓ'Γ'Μ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 28'''. Τοῦτο δὲ καθημερινῶς βλέπομεν καὶ μὲ γυμνοὺς ὀφθαλμοὺς, ὁσάκις ἐπὶ λίαν ἐλαστικοῦ σώματος, οἷα ὁ κηρός, ὁ μόλυβδος κτλ., ἐντυποῦμεν σφραγίδα. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ἐπὶ πάντων ἐν γένει τῶν σωμάτων, ὡς ἐλαστικῶν καὶ τούτων, ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ παρατηρηθῇ ἢ δι' ἰσχυρῶν φακῶν.



53. Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἐπιβεβαιοῦνται καὶ ὑπὸ τῆς πείρας, διότι βλέπομεν, π. χ., ὅτι αἱ λίθινοι βάσεις, ἐφ' ὧν στηρίζονται οἱ σιδηροὶ στύλοι τῶν οἰκοδομῶν, ὡς λ. χ. ἡ βάση ΜΜ τοῦ στύλου ΑΑΓΓ', νὰ ἀντέχῃ εἰς τὴν θλίψιν τοῦ βάρους Β, ἔπερ ὁ στύλος ὑποβαστάζει, ἐνῶ τοῦτο εἶναι πολὺ μεγαλειότερον τοῦ φορτίου ἐκείνου, ὅπερ ἀσφαλῶς δύναται νὰ ὑποφέρῃ τὸ τεμάχιον Γ'Γ'ΔΔ ἂν ἐφ' ὅλης αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας ἐνῆργει τὸ αὐτὸ βάρος. Τοῦτο δὲ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἐξηγήσωμεν ἄλλως εἰμὴ παραδεχόμενοι ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς βάσεως ΜΜ συντείνει εἰς τὴν στερεότητα αὐτῆς. Ὡσαύτως οἱ ἄρμοι τῆς θλάσεως τῶν λιθίνων γεφυρῶν ἀντέχουσιν εἰς τὴν θλίψιν, τὴν παραγομένην ἐπ' αὐτῶν ὑπὸ τοῦ βάρους τῆς γεφύρας, ἐνῶ καθὰ διδάσκει ἡ γεφυροποιία ἡ θλίψις αὕτη δὲν ἐνεργεῖται ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἄρμου τῆς θλάσεως, ἀλλὰ ἐπὶ ἐλαχίστου μόνον μέρους αὐτῆς καὶ ἐφαπτομένως τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης τῆς ἀψίδος, ἥτις καλεῖται Ἀρτυξ.

Καὶ ἐπὶ τῆς περιστάσεως ταύτης, ἂν δὲν παραδεχθῶμεν ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἄρμου τῆς θλάσεως ἔρχεται τρόπον τινὰ ἐπίκουρος τῆς λεπτοτάτης ταινίας, τῆς ἀπ' εὐθείας θλιβομένης ὑπὸ τοῦ βάρους τῆς γεφύρας, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐξηγήσωμεν τίνι τρόπῳ οἱ θολικταὶ λίθοι τοῦ ἄρμου τῆς θλάσεως ἀντέχουσιν εἰς τὴν θλίψιν τοῦ ὑπερβολικοῦ βάρους τῆς γεφύρας καὶ δὲν θραύονται· διότι ἡ θλίψις, ἡ ἐνεργούσα ἐπὶ τῆς λεπτοτάτης ταύτης ταινίας τοῦ ἄρμου, εἶναι πολλάκις μεγαλειτέρα καὶ αὐτοῦ τοῦ φορτίου, τοῦ παράγοντος ἐν ἀκαρεῖ τὴν θλάσιν τοῦ λίθου, καὶ ἐν τούτοις ὁ λίθος δὲν διαρρήγνυται.

54. Εἰς τὸ περὶ ἐφελκυσμοῦ κεφάλαιον εἶδομεν πῶς εὐρίσκομεν τὸ

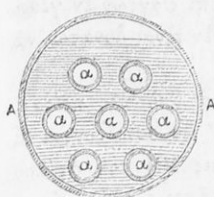


Σχ. 34

πάχος τῶν λεβήτων τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν, τῶν σιδηρῶν σωλήνων τῶν ὑδραγωγείων κτλ., τῶν ὑφισταμένων ἐσωτερικῶς τὴν θλίψιν τοῦ ἀτμοῦ ἢ τοῦ ὕδατος, ἐνταῦθα δὲ θέλομεν πραγματευθῆ περὶ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ πάχους τῶν σωλήνων, τῶν κειμένων ἐντὸς τῶν λεβήτων, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα

34 καὶ 35, καὶ ὑφισταμένων ἐξωτερικῶς τὴν θλίψιν τοῦ ἀτμοῦ.

Οἱ μηχανικοί, ἵνα αὐξήσωσι τὴν θερμαντικὴν ἐπιφάνειαν καὶ παραγάγωσι τὴν εἰς τὴν ταχείαν κίνησιν τῶν μηχανῶν ἀναγκαίαν ποσότητα ἀτμοῦ, μεταχειρίζονται συνήθως ἐσωτερικούς σωλήνας, ὡς παριστῶσι τὰ σχήματα 34



Σχ. 35

καὶ 35. Διὰ τῶν σωλήνων τούτων, τῶν περικαλυπτομένων πάντοτε ὑπὸ τοῦ ὕδατος, διέρχονται αἱ φλόγες τῶν καμίνων μετὰ τοῦ παραγομένου θερμοτάτου ρεύματος ἀέρος καὶ οὕτω παράγεται εὐκολώτερον καὶ ταχύτερον ἡ ἀναγκαία εἰς τὴν ταχείαν κίνησιν αὐτῶν ποσότης

ἀτμοῦ. Ἀλλ' οἱ ἐσωτερικοὶ οὗτοι σωλήνες ὑφίστανται τότε ἐξωτερικῶς, ἐκ τῶν ἔξω δηλαδὴ πρὸς τὰ ἔσω, τὴν ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ ἐπὶ τοῦ περικυκλοῦντος αὐτοὺς ὕδατος παραγομένην πίεσιν, ἐπομένως ὑπόκεινται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἰς πίεσιν καὶ ὅχι εἰς ἐφελκυσμόν, πρέπει δὲ νὰ ἔχωσι τὸ ἀναγκαῖον πάχος, ὥπως μὴ διαρρήγῃσι.

Πρὸς προσδιορισμὸν δὲ τῆς θλίψεως ἢ τοῦ φορτίου, τοῦ παράγοντος τὴν διάρρηξιν τῶν ἐσωτερικῶν σωλήνων, ἐγένοντο πειράματα ὑπὸ τοῦ

Ἀγγλου φυσικοῦ Φερμπαίν, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξάγεται ὁ κάτωθι ἐμπειρικός τύπος

$$B = \frac{E\varepsilon^2}{M\Delta} \quad (1).$$

Τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (1) γράμματα παριστῶσι, τὸ μὲν B τὴν θλίψιν εἰς χιλιόγραμμα, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ τετραγωνικοῦ ἑκατοστοῦ ἐπιφανείας, ἵνα παραγάγωμεν τὴν διάρρηξιν τοῦ σωλῆνος· τὸ M , τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος ἐκπεφρασμένον εἰς μέτρα· τὸ Δ , τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τοῦ σωλῆνος εἰς μέτρα καὶ ταύτην ἐκπεφρασμένην· τὸ ε , τὸ πάχος τοῦ σωλῆνος καὶ τοῦτο εἰς μέτρα ἐκπεφρασμένον, καὶ τὸ E τὸν συντελεστὴν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελεῖται ὁ σωλὴν, καὶ ὅστις ἔχει τὰς κάτωθι τιμὰς, ἐξαχθεύσας ἐκ τῶν αὐτῶν πειραμάτων τοῦ Φερμπαίν καὶ ἄλλων μηχανικῶν,

$E=400000$ διὰ τοὺς σωλῆνας ἐκ σιδηρῶν ἐλασμάτων,

$E=600000$ διὰ σωλῆνας ἐξ ἐρυθροῦ χαλκοῦ,

$E=700000$ διὰ σωλῆνας ἐξ ὀρειχάλκου.

Ὁ ἀνωτέρῳ τύπος (1) δίδει τὴν θλίψιν B κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας, τὴν παράγουσαν τὴν διάρρηξιν τοῦ σωλῆνος, τοῦ ἔχοντος πάχος ε , μῆκος M καὶ διάμετρον Δ . Ἐπομένως ὁ τύπος, ὁ δίδων τὸ πάχος ε , ὅπερ πρέπει νὰ ἔχῃ σωλὴν μῆκους M καὶ διαμέτρου Δ , ἵνα ὑποφέρῃ ἀσφαλῶς τὴν θλίψιν B κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας θέλει εἶναι

$$6B = \frac{E\varepsilon^2}{M\Delta} \quad (2),$$

διότι κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τὰ μέταλλα πρέπει νὰ ὑποβάλλωνται εἰς τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς θλίψεως, τῆς παραγούσης τὴν διάρρηξιν αὐτῶν.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρῳ τύπου (2) ἐξάγομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου ε ἥτις εἶναι

$$\varepsilon^2 = \frac{6B.M\Delta}{E} \quad (3)$$

καὶ

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{6B.M\Delta}{E}} \quad (4).$$

ΤΟΞΑ ΕΚ ΧΥΤΟΣΙΔΗΡΟΥ

55. "Ότε τὸ πρῶτον ἔκαμον χρῆσιν τοῦ χυτοσιδήρου πρὸς κατασκευὴν σιδηρῶν γεφυρῶν, σκοπὸν προσέθεντο τὴν ἀντικατάστασιν τῶν θολίτων λίθων διὰ σιδηρῶν, καὶ διὰ τοῦτο τῆς πρώτης κατασκευασθείσης σιδηρᾶς γεφύρας ἐν Παρισίοις τὸ τόξον ΓΑΕ (Σχ. 36) ἀπετελεῖτο ἐκ μικρῶν σιδηρῶν τεμαχίων, ἐχόντων τὸ σχῆμα τῶν θολίτων λίθων τῶν λιθίνων γεφυρῶν ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἤτο εἶδος τι ἀπομιμήσεως τῶν λιθίνων γεφυρῶν. Κατόπιν ὅμως κατασκευάσθησαν ἐν Παρισίοις ἄλλαι σιδηραὶ γέφυραι ἐκ χυτοσιδήρου, τῶν ὁποίων τὰ τόξα τῶν ἀψίδων ἀπετελοῦντο ἐκ μεγάλων κοίλων τεμαχίων, ὡς εἶδος σωλήνων δίχα τετμημένων κατὰ μῆκος, καὶ συνδεδεμένων ἀλλήλοις πρὸς σχηματισμὸν τῆς ἀψίδος διὰ κοχλιοφόρων ἡλων. Τὸ δὲ κενὸν τῶν τόξων τούτων ἦτο πεπληρωμένον διὰ ξυλίνων τόξων, ἐχόντων ἀκριβῶς τὸ σχῆμα τῶν τόξων τούτων, ὥστε αἱ γέφυραι αὗται ἦσαν εἶδος τι ξυλίνης γεφύρας περιβεβλημένης ἐξωτερικῶς ὑπὸ θώρακος ἐκ χυτοσιδήρου.

Ἡδὲ δὲ σπανίως κατασκευάζουσιν τὰς ἀψίδας τῶν γεφυρῶν ἐκ σιδήρου, διότι προτιμῶνται αἱ λίθιναι ἀψίδες, καὶ ὁσάκις αἱ τοπικαὶ περιστάσεις δὲν ἐπιτρέπουσι τὴν κατασκευὴν λιθίνης ἀψίδος, τότε συνήθως προτιμῶσι νὰ κατασκευάζουσιν εὐθυγράμμους σιδηρᾶς γεφύρας, περὶ ὧν θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς παρούσης συγγραφῆς. Οὐχ ἦττον ἐνίοτε κατασκευάζουσιν καὶ ἀψίδας ἐκ χυτοσιδήρου, ὁσάκις τὸ τόξον αὐτῶν εἶναι πολὺ ἀνοικτόν, τῶν ὁποίων ἡ ἐγκάρσιος τομὴ δὲν εἶναι κοίλη, ἀλλὰ πλήρης καὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου.

56. Ἐν γένει τὰ σιδηρᾶ τόξα ὑπὸκεινται εἰς θλίψεις, αἵτινες ἐνεργοῦσι καθέτως τῶν ἐγκαρσίων τομῶν αὐτῶν, ἀπαραλλάκτως ὅπως καὶ εἰς τοὺς θολίτας λίθους τῶν λιθίνων γεφυρῶν. Ἐπομένως τὴν μεγαλειτέραν θλίψιν ὑποφέρουσιν αἱ τομαὶ ΓΓ καὶ ΕΕ, δι' ὧν ἡ ἀψὶς ΓΑΕ (Σχ. 36) στηρίζεται ἐπὶ τῶν βάθρων ΜΝΗ, ὡς τοῦτο συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν λιθίνων γεφυρῶν, τῶν ἔχουσιν ἀνοικτὰ τόξα.

"Όπως δὲ εἰς τὰς λιθίνους γεφύρας ὑπάρχει ὀριζοντία δύναμις, καλουμένη ὠθησις, προερχομένη ἐκ τῆς θλίψεως τῆς ἐνεργουμένης ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀψίδος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως, καὶ ἥτις τείνει νὰ ἀνατρέψῃ πρὸς τὰ ἔξω τὰ βάθρα ἢ ἀκρόβαθρα τῆς ἀψίδος, οὕτω καὶ ἐνταῦθα τὸ

σιδηροῦν τόξον ΓΑΕ ὥθει τὰ ἀκρόβαθρα ΜΝΓΓΗ, ΜΝΕΕΗ, ἵνα ἀνα-
τρέψῃ ταῦτα πρὸς τὰ ἔξω.

Τὴν ὥθησιν δὲ ταύτην, ἣν συνήθως παριστῶσι διὰ τοῦ γράμματος Ω, προσδιορίζουσιν εὐκόλως, ὅταν ᾖναι γνωστὸν τὸ σημεῖον α, ὁπότεν διέρχεται ἡ θλίψις Τ, ἡ ἐπὶ τοῦ ἄρμου ΓΓ ἢ ΕΕ ἐνεργοῦσα καὶ ἥτις εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ὠθήσεως Ω καὶ τοῦ βάρους Β τοῦ ἡμίσεως τόξου ΓΑ ἢ ΕΑ μετὰ τοῦ φορτίου του. Καὶ διὰ μὲν τὰς λιθίνους γε-
φύρας ὑπάρχει ἰδίᾳ πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ σημείου τούτου θεωρία, ἀναπτυσσομένη ἐν τῇ γεφυροποιίᾳ, διὰ δὲ τὰς σιδηρᾶς γεφύρας αὕτη εἶναι ὅλως περιττή, διότι γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο α εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ ΓΓ ὡς καὶ ὅλα τὰ κέντρα τῶν θλίψεων, τουτέστιν ὅτι ἡ γραμμὴ τῆς θλίψεως διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ὀρθογωνίων ἐγκαρσίων τομῶν, ἥτοι περιλαμβάνει τὰ κέντρα τῶν βα-
ρυτήτων αὐτῶν.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ Β τὸ βάρος τοῦ ἰδίου τόξου ΓΑΑΓ ἢ ΑΑΕΕ (Σχ. 36) καὶ τὸ πρόσθετον βάρος, ὅπερ θὰ ὑποβαστάζῃ τὸ τόξον ΓΑ ἢ ΑΕ, δι' Ω τὴν ἄγνωστον ὥθησιν, καὶ ἄς καταδιβάσωμεν ἐκ τοῦ σημείου α τὴν κάθετον αγ, τὴν παριστῶσαν τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος. Λαμ-
θάνοντες ἀκολουθῶς ὑπὸ δεδομένην κλίμακα $\alpha\gamma = B$, φέροντες ἔπειτα τὴν ἐφαπτομένην αδ εἰς τὸ μεσαῖον τόξον αΚα, τὸ περιέχον τὰ κέντρα τῶν βαρυτήτων τῶν ἐγκαρσίων τομῶν ὡς ἀνωτέρω ἐρρέθη, ἐκ δὲ τοῦ ση-
μείου γ φέροντες τὴν ὀριζόντιον γδ, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρί-
γωνον αγδ, οὗτινος ἡ μὲν πλευρὰ γδ παριστᾷ κατὰ τὴν ἀνωτέρω κλί-
μακα τὴν ἔντασιν τῆς ζητουμένης ὠθήσεως, ἡ δὲ ὑποτείνουσα αδ τὴν
ζητουμένην θλίψιν, ἣν χάριν συντομίας σημειοῦμεν διὰ τοῦ γράμματος Τ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου δὲ αγδ πορίζομεθα ἀμέσως κατὰ γνωστὸν τριγω-
νομετρικὸν θεώρημα

$$\gamma\delta = \alpha\gamma \epsilon\phi\omega \quad \text{καὶ} \quad \alpha\delta^2 = \alpha\gamma^2 + \delta\gamma^2$$

θέτοντες ἀντὶ τῶν γραμμῶν γδ, αγ, αδ τὰ ὑπ' αὐτῶν παριστάμενα
ποσὰ θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\Omega = B \epsilon\phi\omega \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad T^2 = B^2 + \Omega^2 \quad (2).$$

Ἄλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου αοΚ πορίζομεθα

$$\epsilon\phi\omega = \frac{oK}{o\alpha} = \frac{\rho - \epsilon}{\mu}$$

παριστῶντες διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα αK τοῦ τόξου $\alpha K \alpha$, διὰ ϵ τὸ βέλος σK τοῦ τόξου καὶ διὰ μ τὸ ἡμιάνοιγμα $\sigma \alpha$ τῆς ἀψίδος.

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ ἐφω τὴν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς $\frac{\rho - \epsilon}{\mu}$ ἔχομεν

$$\Omega = B \frac{\rho - \epsilon}{\mu} \quad (3)$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὸν τύπον (2) ἀντὶ Ω τὴν τιμὴν τοῦ $B \frac{\rho - \epsilon}{\mu}$ θέλομεν ἔχει ἐν τέλει τὴν ἐξίσωσιν

$$T^2 = B^2 + B^2 \left(\frac{\rho - \epsilon}{\mu} \right)^2 = B^2 \left(1 + \frac{(\rho - \epsilon)^2}{\mu^2} \right) \quad (4)$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τιμὴν τοῦ T , ἥτοι

$$T = B \sqrt{1 + \frac{(\rho - \epsilon)^2}{\mu^2}} \quad (5)$$

Σημείωσις. Συνήθως τὸ κυκλικὸν τόξον $\alpha K \alpha$ τῆς ἀψίδος (Σχ. 36) ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον τῆς παραβολῆς, τῆς ἐχούσης τὸ σημεῖον K κορυφὴν, ἄξονα τῶν τετμημένων τὴν KK καὶ τῶν τεταγμένων τὴν ἐκ τῶν δύο σημείων $\alpha \alpha$ διερχομένην εὐθεῖαν, ὅταν τὸ βέλος ϵ ᾖ μικρόν.

Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην αἱ τιμαὶ τοῦ Ω καὶ T , αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων (3) καὶ (5), ἀπλοποιοῦνται, διότι τότε ἔχομεν διὰ τὴν παραβολὴν

$$\epsilon \phi \omega = \frac{\sigma \alpha}{\sigma \theta} = \frac{\mu}{2\epsilon} \quad (6)$$

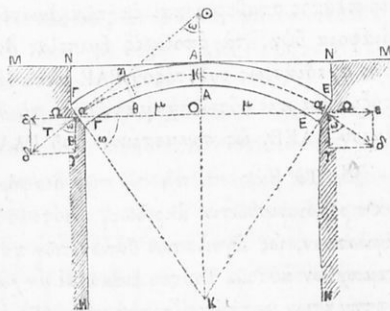
ὡς οὐσης τῆς ὑφαπτομένης $\sigma \theta$ διπλασίας τῆς τετμημένης σK , ἣν παριστᾷ τὸ βέλος ϵ

$$\text{καὶ} \quad \Omega = B \epsilon \phi \omega = B \frac{\mu}{2\epsilon} \quad (7)$$

$$\text{καὶ} \quad T = B \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4\epsilon^2}} \quad (8).$$

57. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς μεγαλειτέρας θλίψεως T χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πάχος τοῦ βάρους, πρὸς δὲ καὶ τὰς διαστά-

σεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ΓΓ ἢ ΕΕ τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ, ὅταν θέλωμεν τὸ ὅλον τόξον τῆς ἀψίδος νὰ ᾖται ἰσοπαχές. Ἐὰν ὁμως θέλωμεν ἡ ἀψὶς νὰ ᾖται στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως (καὶ καλεῖται στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως ἐκεῖνο, οὗτινος ὅλαι αἱ ἐγκαρσῖαι τομαὶ ὑποφέρουσι τὴν αὐτὴν θλίψιν ἢ τὸν αὐτὸν ἐφελκυσμὸν), τότε ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαφόρων παχῶν τῆς ἀψίδος γίνεται ὡς ἑξῆς.



ΣΧ. 36

Διαιροῦμεν ἐν πρώτοις τὸ τόξον Κα (Σχ. 36) εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, κατὰ μέτρον π. χ., καὶ προσδιορίζομεν τὰ βάρη π, π', π'' ἐκάστου τεμαχίου τοῦ τόξου μετὰ τοῦ προσθέτου βάρους, ἔπειτα εὐρίσκομεν τὰς συνισταμένας $T_1, T_2, T_3, \dots, T$ τῶν ἀνωτέρω βαρῶν π, (π + π'), (π + π' + π''), ..., Β, καὶ τῆς ὀθήσεως Ω, ἥτις εἶναι σταθερά, ἀπαρallάκτως ὡς καὶ ὅταν πρόκηται περὶ λιθίνων γεφυρῶν.

Τούτων δὲ γενομένων καὶ τῶν συνισταμένων $T_1, T_2, T_3, \dots, T$ ὁρισθῶσιν, τὰ πάχη τῶν τμημάτων, εἰς ἃ τὸ τόξον Κα διηρέθη, εὐρίσκονται ἐκ τῶν κάτωθι τύπων, παριστωμένων δι' $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega$, τῶν ἐγκαρσίων τομῶν ΑΑ, ΕΕ, ... ΓΓ.

$$(1) \quad \omega = \frac{\Omega}{P} \quad \text{διὰ τὴν τομὴν ΑΑ}$$

$$(2) \quad \omega_1 = \frac{T_1}{P} \quad \text{διὰ τὴν ἐπομένην, τὴν ἀπέχουσαν ἐν μέτρῳ τῆς ΑΑ}$$

$$(3) \quad \omega_2 = \frac{T_2}{P} \quad \text{διὰ τὴν κατόπιν, τὴν ἀπέχουσαν δύο μέτρα τῆς ΑΑ}$$

$$(4) \quad \omega_3 = \frac{T_3}{P} \quad \text{διὰ τὴν ἀκόλουθον καὶ ἀπέχουσαν τρία μέτρα τῆς ΑΑ}$$

$$\cdot \quad \cdot = \cdot$$

$$(v) \quad \omega = \frac{T}{P} \quad \text{διὰ τὸ ἄκρον ΓΓ}$$

Αἱ διχοστάσεις τῶν ὀρθογωνίων τομῶν ω , ω_1 , ω_2 , ω , εἶναι δύο, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, ἐπομένως πρὸς προσδιορισμὸν αὐτῶν λαμβάνουσι τὸ πλάτος σταθερὸν καὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προσδιορίζουσι τὰ διάφορα ὕψη, τὰ ὁποῖα ἐξ ἡμισείας διὰ τῆς παραδεχθείσης κλίμακός τῆς σχεδιάσεως τοῦ τόξου ΓΑΕ μεταφέρουσι ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τοῦ τόξου Κα καὶ οὕτω σχηματίζουν τὸ ἡμισυ τόξον ΓΑΑΓ, τὸ δὲ ἕτερον ἡμισυ ΑΑΕΕ, ὡς συμμετρικὸν τοῦ ΓΑΑΓ, θέλει ἔχει τὰ αὐτὰ ὕψη.

58. Τὰ βάρη π , π' , π'' τῶν διαφόρων τεμαχίων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσιν ἀκριβῶς, διότι τὸ βάρος τοῦ τόξου ΓΑΑΓ εἶναι ἄγνωστον, ὡς ἀγνώστων ὄντων τῶν παχῶν καὶ πλατῶν τῶν διαφόρων τεμαχίων αὐτοῦ. Τούτου ἕνεκα οἱ μηχανικοὶ πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων ζητημάτων μεταχειρίζονται μίαν τῶν ἐξῆς δύο μεθόδων.

Πρώτη μέθοδος. Ἐν πρώτοις παραλείπουσι τὸ βάρος τοῦ ἰδίου τόξου ΓΑΕΕΓ καὶ λαμβάνουσιν ὑπ' ὄψιν μόνον τὸ βάρος τοῦ καταστρώματος καὶ τὸ βάρος τῆς δοκιμῆς τῆς γεφύρας, ὅπερ εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος τῆς Γεφύρας. Διὰ τοῦ βάρους δὲ τούτου προσδιορίζουσι ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη τὰ διάφορα ὕψη τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ, τοῦ πλάτους αὐτοῦ λαμβανομένου κατ' ἀρέσκειαν. Εἴτα διὰ τὸν ἥδη ὀρισθειῶν διαστάσεων τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ προσδιορίζουσι τὸ βάρος αὐτοῦ, ὅπερ προσθέτοντες εἰς τὸ τοῦ καταστρώματος καὶ τὸ τῆς δοκιμῆς καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων εἰσάγοντες εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνωτέρω τύπους προσδιορίζουσι δι' αὐτῶν ἕτερα ὕψη τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ, τὰ ὁποῖα θέλουσι διαφέρειν κατὰ τι τῶν προηγουμένων πρώτων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζουσι καὶ τρίτα καὶ τέταρτα κτλ. ὕψη καὶ ἐξακολουθοῦσιν οὕτω τὰς δοκιμὰς μέχρις οὗ τὰ ὕψη τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ δύο διαδοχικῶν δοκιμῶν εὐρεθῶσι σχεδὸν ἴσα ἢ ἐλίγον τι διαφέροντα ἀλλήλων. Συνήθως παραδέχονται τὰ ἀποτελέσματα τῆς δευτέρας δοκιμῆς καὶ δὲν προχωροῦσι ἐπὶ πλέον τὰς δοκιμὰς.

Δεύτερα μέθοδος. Ἐπειδὴ συνήθως εἰς τὰς σιδηρᾶς γεφύρας τὸ βάρος τῆς δοκιμῆς, ὅπερ λαμβάνουσι ἴσον μὲ 400 χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας διὰ τὰς συνήθεις γεφύρας, τὰς προωρισμένας εἰς τὴν διάβασιν τῶν φορηγῶν ἀμαξῶν, τῶν ἀμαξῶν κτλ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος τῆς γεφύρας, τὸ καλούμενον σταθερὸν βάρος, διὰ τοῦτο εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους εἰσάγουσι τὸ διπλάσιον βάρος τῆς δοκιμῆς, ὅπερ ἐκ τῶν προτέρων εἶναι

γνωστών, όταν τὸ πλάτος τῆς γεφύρας ἦναι ὀρισμένον ἐκ τοῦ σχεδίου, καὶ προσδιορίζουσι τὰ διάφορα ὕψη τοῦ τόξου ΓΑΕΕΓ, ὅταν τοῦτο πρέπη νὰ ἦναι στερεὸν ἕως ἀντιστάσεως, ἢ τὸ ὕψος μόνον τῆς ΓΓ διατομῆς, ὅπερ θὰ ἦναι τὸ αὐτὸ δι' ἅπαν τὸ τόξον ΓΑΕΕΓ, ὅταν τοῦτο πρέπη νὰ ἦναι ἰσοπαχές.

Σημείωσις. Συνήθως οἱ μηχανικοὶ τὰ ἐκ χυτοσιδήρου τόξα τῶν γεφυρῶν δὲν ὑποβάλλουσιν ἕνεκα τῆς θερμοκρασίας εἰς θλίψιν μείζονα τῶν 2 χιλιογράμμων κατὰ χιλιοστὸν τετραγωνικόν, διότι ἡ μὲν αὐξησις τῆς θερμοκρασίας τείνει νὰ αὐξήσῃ τὴν θλίψιν Γ, αὐξανόμενου δι' αὐτῆς τοῦ μήκους τοῦ τόξου ΓΑΕ, ἡ δὲ ἐλάττωσις τῆς θερμοκρασίας παράγει θλίψιν ἀντίστροφον, δηλ. ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ Α. Τούτου ἕνεκα οἱ μηχανικοὶ λαμβάνουσι πάσας τὰς δυνατάς προφυλάξεις πρὸς ἀποσόβησιν τοῦ κινδύνου, τοῦ προερχομένου ἐκ τῆς αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως τῆς θερμοκρασίας, ἥτις συνεπιφέρει αὐξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ μήκους τοῦ τόξου ΓΑΕ.

Ὅ,τι εἵπομεν διὰ τὰ ἐκ χυτοσιδήρου τόξα τῶν γεφυρῶν καὶ ἄλλων ἀψίδων, τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὰ ξύλινα τόξα τῶν ξυλίνων γεφυρῶν, ὡς καὶ διὰ τὰ ἐκ καθαροῦ σιδήρου ἢ χάλυβος τόξα.

Συνήθως αἱ ἀψίδες τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν κατασκευάζονται ἐκ χυτοσιδήρου, ὡς εὐκολώτερον λαμβάνοντος τοῦ μετάλλου τούτου τὸ σχῆμα τῶν ἀψίδων διὰ τῆς χύσεως αὐτοῦ ἐν τοῖς πρὸς τοῦτο κατασκευαζομένοις τύποις.

Αἱ τιμαὶ τοῦ Ρ διὰ τὰ τόξα ἐν γένει εἴτε γεφυρῶν εἴτε ἄλλων ἀψίδων εἶναι 10 μὲν χιλιογράμμων διὰ δρυὶν ἢ ἐλάττην ἢ πεύκην καλῆς ποιότητος καὶ δι' ἕκαστον ἑκατοστὸν τετραγωνικόν, 2 δὲ χιλιογράμμων διὰ χυτοσιδήρον ἢ σιδήρον δι' ἕκαστον τετραγωνικόν χιλιοστόν. Ἄν ὅμως διὰ καταλλήλου διευθετήσεως τῶν ἀποτελούντων τὴν σιδηρᾶν ἀψίδα τεμαχίων οὐδετερωθῇ ἡ ἐνέργεια τῆς θερμοκρασίας ὡς πρὸς τὴν θλίψιν, τότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν 4 καὶ ἐνίοτε καὶ 6 χιλιογράμματα διὰ τιμὴν τοῦ Ρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

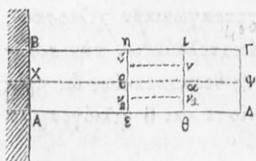
ΠΕΡΙ ΚΑΜΨΕΩΣ

59. Ὄταν σῶμά τι ξύλινον ἢ σιδηροῦν κτλ. ὑφιστάμενον τὴν ἐνέργειαν ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως κάμπεται, τότε μέρος τῶν ἰνῶν αὐτοῦ διατείνεται καὶ μέρος πιέζεται, καὶ τὸ σῶμα θλάται εἴτε κατὰ τὰς ἐφελκυομένας ἴνας, εἴτε κατὰ τὰς θλιβομένας, ὅταν ἡ ἐνέργεια τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἀυξήσῃ καὶ φθάσῃ τὸ ὑπὸ τῆς πείρας ὀρισθὲν ὅριον τοῦ ἐφελκυσμοῦ ἢ τῆς θλίψεως.

Αἱ εἰς κάμψιν ὑποκείμεναι δοκοὶ οἷασδὴποτε φύσεως οἰκοδομῆς τινος θλῶνται κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους, διότι πολλαὶ καὶ διαφοραὶ εἶναι αἱ θέσεις, ἃς λαμβάνουσιν αὗται ἐν τῇ οἰκοδομῇ. Τούτου ἕνεκα ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ θέλομεν ἐξετάσει ἀπάσας τὰς ἐν τῇ πράξει παρουσιαζομένας περιστάσεις θλάσεως δοκοῦ τινος διὰ τῆς κάμψεως. Καὶ ἐν πρώτοις ἃς λάβωμεν ὑπ' ὄψιν

Δοκὸν πεπακτωμένην εἰς τὸ ἐν ἄκρον, ἐλευθέραν δὲ εἰς τὸ ἕτερον καὶ φέρουσαν εἰς τοῦτο φορτίον καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῆς ἐνεργοῦν.

Ἐστω π. χ. ἡ δοκὸς ΑΒΓΔ (Σχ. 37) πεπακτωμένη εἰς τὸ ἄκρον ΑΒ



Κατὰ μῆκος τομή

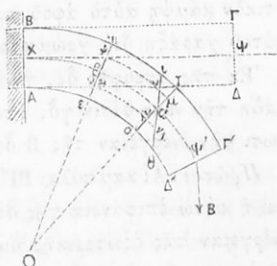
Σχ. 37

καὶ ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτερον ΓΔ, ἧς τινος πρόκειται νὰ εὐρώμεν τὸ πάχος, ὅπως μὴ θλασθῇ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως Β, τῆς ἐνεργούσης εἰς τὸ ἄκρον Γ καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῆς.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ἐν πρώτοις ὅτι ἐνόσω μὲν εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτῆς ΓΔ δὲν ἐνεργεῖ δυνάμεις τις, τὸ δὲ μῆκος αὐτῆς

ΑΔ, δὲν εἶναι πολὺ μέγα, ὥστε τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ νὰ κάμπτῃ αὐτήν, ἡ δοκὸς μένει σχεδὸν ὀριζόντιος, ὡς ἐξ ἀρχῆς ἐτοποθετήθη (Σχ. 37), καὶ ὅτι αἱ ἐγάρσιαι αὐτῆς τομαί, ὡς λ. γ. ἡ εη καὶ θι. εἶναι

παράλληλοι, ἅμα δ' ὡς ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργήσῃ δύναμις τις ἐξωτερικὴ B, π. χ. τὸ βάρος φορτίου τινὸς κρεμασμένου ἐπὶ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Δ ἢ τιθεμένου ἐπὶ τῆς δοκοῦ εἰς τὸ Γ, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἡ δοκὸς κάμπτεται καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν ABΓ'Δ', ἣν δεικνύει τὸ σχῆμα 38, καὶ ὅτι αἱ ἄνωθεν ἴνες αὐτῆς, ὡς λ. χ. ἡ BG, αὐξάνουσι τὸ μῆκος, αἱ δὲ κάτωθεν, ὡς λ. χ. ἡ AD, ἐλαττοῦνται. Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνομεν ὅτι ἐν τῷ μεταξὺ ὑπάρχει μία οὐδετέρα ἐπιφάνεια, παράλληλος τῶν ἐπιφανειῶν BG' ἢ AD', ἣτις χωρίζει τὰς ἴνας, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος αὐξάνει, ἀπὸ τῶν ἰνῶν, ὧν τὸ μῆκος ἐλαττοῦται, καὶ τῆς ὁποίας ἐπομένως αἱ ἴνες μένουσιν ἀμετάβλητοι. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται ἐπιφάνεια τῶν ἀμεταβλήτων ἰνῶν.

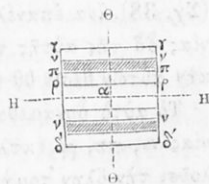


Κατὰ μῆκος τομή

Σχ. 38

Ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἀμεταβλήτων ἰνῶν ἐν τοῖς σχήμασι 37 καὶ 38 παρίσταται διὰ τῆς εὐθείας XΨ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη XΨ περιέχει τὰ κέντρα τῶν βαρυτήτων τῶν ἐγκαρσίων τομῶν AB, εη, θι, ΓΔ, ὡς παρακατιόντως θέλομεν ἀποδείξει καὶ καλεῖται εἰδικώτερον μέση ἔς.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι αἱ ἄνωθεν τῆς XΨ ἴνες ὑπόκεινται εἰς ἐφελκυσμόν, διότι τὸ μῆκος αὐτῶν αὐξάνει, αἱ δὲ κάτωθεν ταύτης εἰς θλίψιν, διότι τὸ μῆκος αὐτῶν ἐλαττοῦται. Ἐκ τούτου συνάγωμεν ὅτι καὶ ἡ ἔλξις καὶ ἡ ὥθησις τῶν ἐλατηρίων μορίων τοῦ σώματος τίθενται εἰς ἐνέργειαν, ἵνα ἐξουδετερώσωσι τὴν ἐνέργειαν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B.



Ἐγκάρσιος τομή

Σχ. 39

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τῆς σχέσεως, τῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τοῦ σώματος καὶ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B, τῆς ἐνεργούσης νὰ θλάσῃ τὸ σῶμα διὰ κάμψεως, θεωρήσωμεν δύο διαδοχικὰς τομὰς πολλὰ πλησίον ἀλλήλων, λ. χ. τὴν εη καὶ θι (Σχ. 37), καὶ ἴδωμεν τί συμβαίνει εἰς ταύτας, ὅταν ἡ ὀριζόντιος δοκὸς ABΓΔ, ἡ δι' ἐστιγμένων γραμμῶν ἐν τῷ σχήματι 38 παριστωμένη, κάμπτεται καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν ABΓ'Δ'. Αἱ διατομαὶ εη καὶ θι, αἱ οὖσαι παράλληλοι πρὸ τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως B, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 37 καὶ 38, παύουσι τοῦ νὰ ἦναι τοιαῦται καὶ ἡ διατομή θι (Σχ. 38) στρέφεται περί

τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος HH (Σχ. 39), τοῦ διερχομένου ἐκ τοῦ κέντρου α τῆς ἐγκαρσίου τομῆς $\gamma\gamma\delta\delta$ (Σχ. 39) καὶ λαμβάνει τὴν κεκλιμένην θέσιν $\gamma\delta$, ὅταν ἡ δύναμις B ἐνεργήσῃ καὶ κάμψῃ τὴν δοκὸν $AB\Gamma\Delta$.

Τοῦτο δύναται τις νὰ ἴδῃ εὐκόλως, ἐὰν λαβὼν σῶμά τι λίαν ἐλαστικὸν κάμψῃ αὐτὸ ἀφοῦ προηγουμένως ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ χαράξῃ διὰ χρώματος τὴν περίμετρον δύο παραλλήλων τομῶν.

Ἐκ τῆς στροφῆς δέ, ἣν ἡ τομὴ $\theta\iota$ κάμνει περὶ τὸν ἄξονα HH , ἵνα λάβῃ τὴν νέαν θέσιν $\gamma\delta$, ὅπως αἱ ἐλατήριοι αὐτῆς δυνάμεις ἰσορροπήσωσι τὴν ἐνέργειαν τῆς B δυνάμεως, ἐξάγομεν τὰ ἑξῆς.

Πρῶτον. Αἱ καμπύλαι $B\Gamma'$ καὶ $\Lambda\Delta'$, ὧν τὸ σχῆμα λαμβάνουσι ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω ἐπιφάνεια τῆς δοκοῦ $AB\Gamma\Delta$, ὅταν αὕτη κάμπηται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B , σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς περιστροφικὰς κινήσεις, ἃς ἡ δοκὸς κάμνει στρεφόμενη περίξ τῶν διαφόρων ὀριζοντίων ἄξόνων, τῶν διερχομένων διὰ τῶν μέσων τῶν ἐγκαρσίων τομῶν αὐτῆς, ὡς $\lambda. \chi.$ περίξ τοῦ ἄξονος HH , τοῦ διερχομένου ἐκ τοῦ σημείου α , μέσου τῆς τομῆς $\theta\iota$: διότι, ὅταν ἡ τομὴ $\theta\iota$ στρέφεται καὶ λαμβάνῃ τὴν θέσιν $\gamma\delta$, ὁλόκληρον τὸ τεμάχιον $\theta\iota \Delta\Gamma'$ συμμετέχει τῆς αὐτῆς κινήσεως.

Δεύτερον. Ἀπαντα τὰ μόρια τῆς μὲν ταινίας $\gamma\gamma$ τῆς τομῆς $\gamma\gamma\delta\delta$ (Σχ. 38, 39) ἐφελκύνονται ὑπὸ τῶν ἰσαριθμῶν μορίων τῆς ταινίας $\iota\iota$ (Σχ. 38), ἵνα ἐπανέλθωσιν εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν θέσιν $\iota\iota$, τῆς δὲ ταινίας $\delta\delta$ τῆς αὐτῆς τομῆς ὠθοῦνται, ἵνα καὶ ταῦτα λάβωσι τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν θέσιν $\theta\theta$ (Σχ. 38, 39).

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν καὶ διὰ τὰς λοιπὰς ὀριζοντίους ταινίας $\nu\nu$, $\pi\pi$, $\rho\rho$, κτλ. καὶ τὰς $\nu_1\nu_1$, $\pi_1\pi_1$, $\rho_1\rho_1$, κτλ., αἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν ὅλην τομὴν $\gamma\gamma\delta\delta$.

Τρίτον. Ἐπειδὴ αἱ ἑλξεις τῶν μορίων τῶν ταινιῶν $\gamma\gamma$, $\nu\nu$, $\pi\pi$, $\rho\rho$ κτλ., τῶν ὄντων ἄνωθεν τοῦ ἄξονος HH , εἶναι ἴσαι μεταξὺ τῶν (αἱ ἑλξεις τῶν μορίων τῆς $\gamma\gamma$ εἶναι ἴσαι μεταξὺ τῶν, αἱ ἑλξεις δὲ τῶν μορίων τῆς ταινίας $\nu\nu$ εἶναι μὲν ἴσαι μεταξὺ τῶν, οὐχὶ δὲ καὶ πρὸς τὰς τῆς $\gamma\gamma$. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται καὶ διὰ τὰς λοιπὰς ταινίας), ὡς καὶ αἱ ὠθήσεις τῶν μορίων τῶν ταινιῶν $\delta\delta$, $\nu_1\nu_1$, $\pi_1\pi_1$, $\rho_1\rho_1$, κτλ., τῶν ὄντων κάτωθεν τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι εἰς τὰ σημεία ι , ν , κτλ., δ , ν_1 , κτλ., ἐνεργοῦσιν αἱ συνισταμένοι αὐτῶν, καὶ ὅτι τὸ σχῆμα 38 παριστᾷ μίαν κατὰ μέγεθος τομὴν τῆς δοκοῦ κατὰ τὸν ἄξονα $\theta\theta$ (Σχ. 39).

Τέταρτον. Ἡ ἔλξις τῶν μορίων τῆς ταινίας γγ καὶ ἡ ὥθησις τῶν μορίων τῆς ταινίας δδ εἶναι ἴσαι· διότι καλοῦντες κ τὴν ἔλξιν τῶν μορίων τῆς γγ καὶ κ₁ τὴν ὥθησιν τῶν μορίων τῆς δδ, ὡ δὲ καὶ ω₁ τὰς ἐπιφανείας τῶν μορίων τῶν ταινιῶν γγ καὶ δδ, ἔχομεν ἐξ ὕψων γνωρίζομεν περὶ ἐφελκυσμοῦ καὶ θλίψεως

$$\kappa = \frac{\omega \cdot E \cdot \gamma}{\alpha \ell} \quad (1)$$

$$\kappa_1 = \frac{\omega_1 \cdot E \cdot \delta \theta}{\alpha \ell} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ω εἶναι ἴσον μὲ τὸ ω₁, διότι ἡ ταινία γγ περιέχει τόσα μόρια, ὅσα καὶ ἡ δδ, καὶ ἡ ἐπιμήκυνσις ιγ τῆς ἰνὸς κ₁ εἶναι ἴση μὲ τὴν σμίκρυνσιν δθ τῆς ἰνὸς εθ, διότι τὸ σημεῖον α εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους γδ, καὶ τὸ Ε εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἀνωτέρω τύπους, διότι παριστᾷ τὸν συντελεστὴν τῆς ἐλαστικότητος τῆς αὐτῆς ὕλης, ἔπεται ὅτι τὸ κ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κ₁.

Ὅτι εἴπομεν διὰ τὰ μόρια τῶν ταινιῶν γγ καὶ δδ, τὸ αὐτὸ δυνατόν ἐστι εἰπεῖν καὶ διὰ τὰ μόρια δύο ἐταίρων ταινιῶν ἰσάκεις ἀπεχουσῶν τοῦ ἄξονος ΗΗ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἔπεται, ὅτι ἐκάστη ἔλξις συνδυαζομένη μὲ τὴν ἴσην αὐτῇ ὥθησιν, εἶναι δύο ἴσαι, ἀντίθετοι καὶ παράλληλοι δυνάμεις καὶ ἀποτελοῦσιν ἐπομένως ζεύγη δυνάμεων, τείναντα νὰ στρέψωσι τὴν τομὴν γδε περὶ τὸ κέντρον αὐτῆς α, ἵνα ἐπαναφέρωσι αὐτὴν εἰς τὴν ἀρχικὴν τῆς θέσιν ιθ, καὶ ὅτι αἱ ἐλατήρια αὐταὶ δυνάμεις τῶν μορίων τῆς τομῆς γγδδ, ἐπειδὴ ἀποτελοῦσι ζεύγη δυνάμεων, ἔχουσι συνισταμένην ἴσην τῷ μηδενί.

Πέμπτον. Ἡ μέση ἐκ ΧΨ δὲν ἀλλοιοῦται, δηλαδὴ τὸ ἀρχικὸν αὐτῆς μῆκος (Σχ. 37) δὲν μεταβάλλεται ποσῶς, ἀλλὰ μένει τὸ αὐτὸ καὶ ἐν τῷ σχήματι 38 καὶ μετὰ τὴν κάμψιν τῆς δοκοῦ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ συνισταμένη τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῆς τομῆς γγδδ ὡς καὶ πάσης ἄλλης διατομῆς εἶναι μηδέν, ἡ δοκὸς δὲν λαμβάνει οὐδεμίαν μεταγωγικὴν κίνησιν. Ἐνεκα δὲ τῆς ιδιότητος ταύτης τῆς μέσης ἰνὸς ὠνομάζεται αὕτη συνήθως καὶ *γραμμὴ τῶν ἀμεταβλητῶν ἰνῶν* ὡς καὶ ἀνωτέρω τοῦτο ἐρρέθη καὶ ἀπεδείχθη διὰ γενικῶν φράσεων.

Ἑκτον. Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἐκάστης διατομῆς ταυτίζεται μὲ

τὸ κέντρον α , ὁποῦθεν διέρχεται ὁ ἄξων HH τῆς στροφῆς, καὶ ἐπομένως ἡ αὐτὴ μέση ξ $X\Psi$ περιέχει καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρυτήτων ὅλων τῶν ἐγκαρσίων τομῶν.

Τῶνόντι, ἂν καλέσωμεν κ , κ' , κ'' , κτλ. τὰς ἐλλείψεις τῶν μορίων ἀπὸ τοῦ σημείου ι μέχρι τοῦ κέντρου α , καὶ κ_1 , κ_2 , κ_3 , κτλ. τὰς ὠθήσεις τῶν μορίων ἀπὸ τοῦ σημείου δ μέχρι τοῦ κέντρου α , καὶ ω , ω' , ω'' , κτλ. ω_1 , ω_2 , ω_3 κτλ. τὰς ἐπιφανείας τῶν ἀνωτέρω μορίων καὶ υ , υ' , υ'' , κτλ. υ_1 , υ_2 , υ_3 , κτλ. τὰς ἀποστάσεις τῶν μορίων ι , ν , κτλ., δ , μ , κτλ. ἀπὸ τοῦ κέντρου α , καὶ παραστήσωμεν διὰ Σ τὴν ἀπόστασιν $\alpha\delta$ τῶν τομῶν $\epsilon\eta$, $\theta\iota$, ἔχομεν τὴν κάτωθεν ἐξίσωσιν (3), ἥτις ἐκφράζει ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς θεωρουμένης διατομῆς $\gamma\gamma\delta\delta$ (Σχ. 39) εἶναι μηδέν.

$$\kappa + \kappa' + \kappa'' + \dots + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \dots = 0 \quad (3).$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ τῶν κ , κ' , κ'' , κτλ. καὶ κ_1 , κ_2 , κ_3 , κτλ. τὰς τιμὰς αὐτῶν, αἵτινες ἐξάγονται ἐκ τῶν ἀνωτέρω γεωνικῶν τύπων (1) καὶ (2) τοῦ ἐφελκυσμοῦ καὶ τῆς θλίψεως, μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς τὴν κάτωθι (4)

$$\frac{\omega \cdot E \cdot \gamma}{\Sigma} + \frac{\omega' \cdot E \cdot \mu \nu}{\Sigma} + \dots + \frac{\omega_1 \cdot E \cdot \delta \theta}{\Sigma} + \frac{\omega_2 \cdot E \cdot \mu_1 \nu_1}{\Sigma} + \dots = 0 \quad (4).$$

Οἱ παράγοντες $\frac{\gamma}{\Sigma}$, $\frac{\mu \nu}{\Sigma}$, ..., $\frac{\delta \theta}{\Sigma}$, $\frac{\mu_1 \nu_1}{\Sigma}$, ... κτλ. ἰσοῦνται τοῖς $\frac{\upsilon}{\rho}$, $\frac{\upsilon'}{\rho}$, $\frac{\upsilon''}{\rho}$, ..., $\frac{\upsilon_1}{\rho}$, $\frac{\upsilon_2}{\rho}$, $\frac{\upsilon_3}{\rho}$, ... κτλ., ρ οὔσης τῆς ἀκτίνος τῆς καμπυλότητος τοῦ τόξου $\alpha\delta$, ἥτοι ἡ $\alpha\delta$. Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τῆς ὁμοιότητος τοῦ τριγώνου $\alpha\alpha\delta$ μὲ τὰ τρίγωνα $\alpha\gamma\iota$, $\alpha\mu\nu$, ... $\alpha\delta\theta$, $\alpha\mu_1\nu_1$, ... κτλ., διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $\alpha\alpha\delta$ καὶ $\alpha\gamma\iota$ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\iota\gamma : \alpha\delta = \alpha\gamma : \alpha\delta \quad \eta \quad \iota\gamma : \Sigma = \upsilon : \rho,$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\frac{\iota\gamma}{\Sigma} = \frac{\upsilon}{\rho}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν λοιπῶν τριγώνων $\alpha\mu\nu$, ... $\alpha\delta\theta$, $\alpha\mu_1\nu_1$, ... κτλ. μὲ τὸ $\alpha\alpha\delta$ εὐρίσκομεν

$$\frac{\mu \nu}{\Sigma} = \frac{\upsilon'}{\rho}, \quad \frac{\delta \theta}{\Sigma} = \frac{\upsilon_1}{\rho}, \quad \frac{\mu_1 \nu_1}{\Sigma} = \frac{\upsilon_2}{\rho}.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ εἰς τὴν (4) ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ $\frac{v}{\rho}$, $\frac{v'}{\rho}$... κτλ. τὰ ἴσα αὐταῖς $\rightarrow \frac{v}{\rho}$, $\frac{v'}{\rho}$... κτλ. μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (4) εἰς τὴν κάτωθι (5)

$$\frac{\omega \cdot E \cdot v}{\rho} + \frac{\omega' \cdot E \cdot v'}{\rho} + \dots + \frac{\omega_1 E \cdot v_1}{\rho} + \frac{\omega_2 \cdot E \cdot v_2}{\rho} + \dots = 0 \quad (5),$$

$$\frac{E}{\rho} (\omega v + \omega' v' + \dots + \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \dots) = 0 \quad (6).$$

Ἐὰν δὲ σημειώσωμεν δι' Ω τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς γγδδ καὶ Z_1 τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου α τῆς στροφῆς, ἔχομεν

$$\Omega \cdot Z_1 = \omega v + \omega' v' + \dots + \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 \quad (7).$$

Τὴν ἐξίσωσιν (7) πορίζομεθα ἐκ τῆς μηχανικῆς, ἥτις μᾶς διδάσκει τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ προσδιορίζωμεν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος σώματός τινος.

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσεως (7) παριστᾷ τὸν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παράγοντα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (6) καὶ ἀντικαθιστῶντες τοῦτον διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΩZ_1 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{E}{\rho} \cdot \Omega \cdot Z_1 = 0 \quad (7),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$Z_1 = 0.$$

Τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς διατομῆς γγδδ ταυτίζεται μὲ τὸ κέντρον τῆς στροφῆς α , τοῦθ' ὕπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἐβδωμον. Ἐπειδὴ αἱ ἐλατήριοι δυνάμεις τῶν μορίων τῆς τομῆς γγδδ δίδουσι μόνον ζεύγη δυνάμεων, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει ἰσορροπία μετὰ τῆς ἐνεργείας τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B καὶ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων, ἔπεται ὅτι ἡ ῥοπή τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B ὡς πρὸς τὸ κέντρον α τῆς στροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀλγεβρικῇ ἀθροίσματι τῶν ῥοπῶν τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς τομῆς γγδδ ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον α τῆς στροφῆς. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (8)

$$B \cdot \psi \alpha = x \cdot v + x' \cdot v' + x'' \cdot v'' + \dots + x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + \dots \quad (8),$$

ἥς τὸ πρῶτον μέλος παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B ὡς πρὸς τὸ σημεῖον α, τὸ δὲ δεύτερον μέλος τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς τομῆς γγδδ ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον α.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (8) ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν $\kappa, \kappa',$ κτλ. τὰς γνωστὰς ἤδη τιμὰς αὐτῶν, καὶ θέτοντες καὶ τὸν κοινὸν παράγοντα E ἐκτὸς παρενθέσεως, εὐρίσκομεν τὴν κάτωθι (9)

$$B.\psi\alpha = E \left(\frac{u.\omega_1.\gamma}{\Sigma} + \frac{u'.\omega'_{1'}.\mu\nu}{\Sigma} + \dots + \frac{u_1.\omega_1.\delta\theta}{\Sigma} + \frac{u_2.\omega_2.\mu_1\nu_1}{\Sigma} + \dots \right) \quad (9).$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει (9) ἀντὶ τῶν $\frac{\gamma}{\Sigma}, \frac{\mu\nu}{\Sigma}, \frac{\delta\theta}{\Sigma}, \frac{\mu_1\nu_1}{\Sigma}$... κτλ. τὰ ἴσα αὐτοῖς $\frac{u}{\rho}, \frac{u'}{\rho}, \dots, \frac{u_1}{\rho}, \frac{u_2}{\rho} \dots$ κτλ. μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (9) εἰς τὴν κάτωθι 40

$$B.\psi\alpha = \frac{E}{\rho} (\omega u^2 + \omega' u'^2 + \dots + \omega_1 u_1^2 + \omega_2 u_2^2 + \dots) \quad (40).$$

Γνωρίζομεν ἀφ' ἑτέρου ἐκ τῆς μηχανικῆς, ὅτι ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ποσότης τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (40) παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς ἀδρανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς γγδδ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα HH, τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος α (Σχ. 39). Σημειοῦντες δὲ ταύτην χάριν συντομίας διὰ I καὶ θέτοντες αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει ἀθροίσματος εἰς τὴν ἐξίσωσιν (40) ἔχομεν

$$B.\psi\alpha = \frac{E}{\rho} \cdot I \quad (41).$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ $\frac{1}{\rho}$ διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\Sigma u}$, ὅπερ ἐξάγομεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω εὐρεθείσης ἰσότητος $\frac{u}{\rho} = \frac{\gamma}{\Sigma}$, μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (41) εἰς τὴν κάτωθι (42)

$$B.\psi\alpha = EI \frac{\gamma}{u.\Sigma} \quad (42).$$

Καλοῦντες δὲ P τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς ἐφαλκυσμὸν τὴν μονάδα ἐπιφανείας τῆς ὕλης, ἐξ ἥς ἀποτελεῖται ἡ δοχός, ἔχομεν ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐφαλκυσμοῦ

$$P = \frac{E \cdot \gamma}{\Sigma} \quad (13)$$

καὶ ἀντισταθόντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (12) τὸ P ἀντὶ τοῦ $\frac{E \cdot \gamma}{\Sigma}$ μετασχηματίζομεν τὴν (12) εἰς τὴν κάτωθι (14) ἐξίσωσιν, ἥτοι

$$B \cdot \psi \alpha = \frac{PI}{\nu} \quad (14).$$

Τὴν ἐξίσωσιν (14) μετεσχηματίζομεν εἰς τὴν (12) θεωρήσαντες τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αβθ καὶ αιγ, ἐκ δὲ τῆς (12) μετέβημεν εἰς τὴν (14) βοηθείᾳ τοῦ τύπου τοῦ ἐφελκυσμοῦ. Ἐάν ὅμως θεωρήσωμεν τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αβθ καὶ αδθ, τότε ἐκ τῆς (11) μεταβαίνομεν εἰς τὴν κάτωθι

$$B \cdot \psi \alpha = EI \frac{\delta \theta}{\nu_1 \Sigma} \quad (15)$$

καὶ διὰ τοῦ τύπου τῆς θλίψεως, καλοῦντες P_1 τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς θλίψιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται, μεταβαίνομεν εἰς τὴν κάτωθι (16), ἥτοι θέλομεν ἔχει

$$B \cdot \psi \alpha = \frac{P_1 I}{\nu_1} \quad (16).$$

Ἡ ἐξίσωσις (14) διαφέρει τῆς (16) μόνον κατὰ τὸ P, διότι τὸ ν καὶ ν_1 εἶναι ἴσα, ὥς παριστῶντα ἀμφοτέρω τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους γδ τῆς τομῆς γγδδ (Σχ. 39). Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκασίου τομῆς, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὴν ῥοπὴν τῆς ἀδρανείας I, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὡς φορτίον κατὰ μονάδα ἐπιφανείας τὸ μικρότερον τῶν δύο ποσοτήτων P_1 καὶ P, π. χ. πρέπει νὰ λαμβάνωμεν διὰ μὲν τὸν χυτοσίδηρον τὸ φορτίον, τὸ ἀναγόμενον εἰς τὸν ἐφελκυσμόν, διὰ δὲ τὸν καθαρὸν σίδηρον τὸ φορτίον, τὸ ἀναγόμενον εἰς τὴν θλίψιν, ὅταν ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ πρὸς τὸ ὕψος αὐτῆς δὲν ὑπερβαίνει τὸ ὅριον 10—12, διὰ τοῦτο αἱ δύο ἐξισώσεις (14) καὶ (16) ταυτίζονται εἰς μίαν, καὶ ἔχομεν καλοῦντες P τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμόν ἢ θλίψιν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται

$$B \cdot \psi \alpha = \frac{PI}{\nu} \quad (17).$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (17) καλεῖται ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, διότι ἐκ ταύτης, ὡς θέλομεν ἰδεῖ κατωτέρω ἐν τῇ λύσει προβλημάτων τινῶν, προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, ὅταν τὸ B ᾖναι δεδομένον. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέλος αὐτῆς παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἢ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ὅταν αὐτὰ ᾖναι πλείονες τῆς μιᾶς, ὡς πρὸς μίαν οἰανδήποτε τομὴν τῆς δοκοῦ, τὸ δὲ δεύτερον μέλος τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς θεωρουμένης διατομῆς.

60. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσεως (17) αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ μοχλοβραχίων ψ αὐξάνῃ ἢ ἐλαττοῦται, διότι τὸ P εἶναι τὸ αὐτὸ διὰ πᾶσαν διατομὴν τῆς δοκοῦ ABΓΔ' (Σχ. 38), καὶ γίνεται μέγιστον, ὅταν τὸ ψ γείνη ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ XΨ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσεως (17) γίνεται μέγιστον, ὅταν τὸ πρῶτον γείνη τοιοῦτο, καὶ ἐπειδὴ τὰ I καὶ υ εἶναι σταθερά, ὅταν ἡ δοκὸς ᾖναι ἰσοπαχὴς, διὰ τοῦτο ὁ μεγαλύτερος κίνδυνος διὰ τὰς ἰσοπαχεῖς δοκοὺς εἶναι εἰς τὴν πᾶκτωσιν AB.

Τῶντι καλοῦντες P τὸ μέγιστον φορτίον, τὸ ἀναγόμενον εἰς τὴν πᾶκτωσιν AB (Σχ. 39) καὶ P' τὸ φορτίον, τὸ ἀναγόμενον εἰς οἰανδήποτε ἑτέραν τομὴν, τὴν γδ π. χ., ἔχομεν

$$B.\psi = \frac{P \cdot I}{\upsilon} \quad \text{διὰ τὴν διατομὴν γδ,}$$

$$B.\Psi X = \frac{P I}{\upsilon} \quad \text{διὰ τὴν τομὴν AB τῆς πακτώσεως}$$

καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $B \times \Psi X > B.\psi$, ἔπεται ἡ κάτωθι ἀνισότης

$$\frac{P I}{\upsilon} > \frac{P' I}{\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad P > P',$$

τοῦθ' ὅπερ δηλοῖ ὅτι ἡ πᾶκτωσις ὑποφέρει περισσότερον ἢ πᾶσα ἄλλη διατομὴ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐκ δύο διατομῶν τῆς αὐτῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὸ ἄκρον ΓΔ', ἐνθα ἐνεργεῖ ἡ δύναμις B, ὑποφέρει ὀλιγώτερον.

Τούτου ἕνεκα, ὁσάκις θέλομεν ἢ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δοκοῦ ἰσοπαχοῦς, τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B οὔσης γνωστῆς, ἢ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ βᾶρος B, ὅπερ δεδομένη δοκὸς πρέπει νὰ ὑποβαστάξῃ εἰς τὸ ἄκρον τῆς, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς

ἐγκαρσίου τομῆς, τὴν ἀναγομένην εἰς τὴν πᾶκτωσιν, καὶ ἥτις εἶναι ἡ κάτωθι

$$B.M = \frac{PI}{L} \quad (A).$$

Ἡ ἐξίσωσις (A) πηγάζει ἐκ τῆς (17), ἀφοῦ θέσωμεν M ἀντὶ ψα. Τὸ M εἶναι τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς πακτώσεως μέχρι τοῦ σημείου ἐνθα ἐνεργεῖ ἡ δύναμις B.

61. Ἐπειδὴ αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς πάσης δοκοῦ, πεπακτωμένης εἰς τὸ ἐν ἄκρον καὶ ἐλευθέρως εἰς τὸ ἕτερον, ὑποκειμένης δὲ εἰς κάμψιν διὰ τῆς ἐνεργείας ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἐμπεριέχονται εἰς τὸ I τῶν τύπων (17) καὶ (A), διὰ τοῦτο πρὸς εὐκολίαν τῶν μαθητῶν σημειοῦμεν τὰς τιμὰς τοῦ I, τὰς ἀναγομένας εἰς ἕκαστον εἶδος ἐπιφανείας, καὶ ἰδίως εἰς τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει, παραλαμβάνοντες ταύτας ἐκ τῆς μηχανικῆς.

Λύται δὲ εἶναι αἱ ἐξῆς.

$$I = \frac{\alpha^3}{12}, \quad \text{δι' ὀρθογώνιον ἐπιφάνειαν (Σχ. 40)}$$

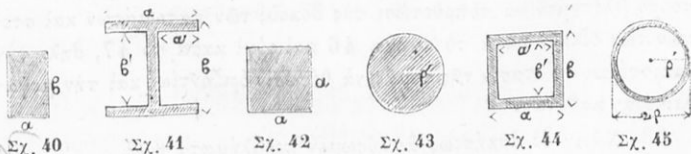
$$I = \frac{\alpha^3 - 2\alpha'\epsilon'^3}{12}, \quad \text{δι' ἐπιφάνειαν διπλοῦ ταῦ (Σχ. 41)}$$

$$I = \frac{\alpha^4}{12}, \quad \text{διὰ τετραγωνικὴν ἐπιφάνειαν (Σχ. 42)}$$

$$I = \frac{\pi \rho^4}{4}, \quad \text{διὰ κυκλικὴν ἐπιφάνειαν (Σχ. 43)}$$

$$I = \frac{\alpha^3 - \alpha'\epsilon'^3}{12}, \quad \text{δι' ὀρθογώνιον ἐπιφάνειαν ἐσωτερικῶς κενὴν (Σχ. 44)}$$

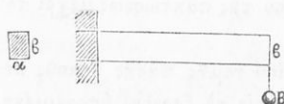
$$I = \pi \frac{\rho^4 - \rho'^4}{4}, \quad \text{διὰ κοίλην κυκλικὴν τομὴν (Σχ. 45)}$$



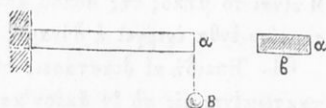
62. Ὅταν δοκὸς τις ἰσοπαχὴς καὶ ὀρθογώνιος τοποθετῇται, ὡς δεῖ-
κνύει τὸ σχῆμα 46, δηλ. τὸ ὕψος β νὰ ᾔηται κάθετον καὶ οὐχὶ ὀριζόν-

τιον, ὡς παριστᾷ τὸ σχῆμα 47, τότε αὕτη ὑποβαστάζει εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς βάρος μεγαλύτερον ἐκείνου, ὅπερ ἡ αὐτὴ δοκὸς, ἡ ἑτέρα ὁμοίας φύσεως καὶ τῶν αὐτῶν διαστάσεων δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ διατεθειμένη ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 47.

Πρὸς ἀποδείξιν τούτου ἔστωσαν B καὶ B' τὰ βάρη, ἅτινα δύναται νὰ



ΣΧ. 46



ΣΧ. 47

ὑποβαστάζῃ ἡ αὐτὴ δοκὸς διατεθειμένη ὡς παριστῶσι τὰ σχήματα 46 καὶ 47, M τὸ μῆκος αὐτῆς καὶ α καὶ β αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (A) δίδει τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις

$$B \times M = \frac{P \cdot \alpha \beta^3}{\frac{1}{2} \beta} = \frac{P \alpha \beta^2}{6} \quad \text{διὰ τὴν δοκὸν τοῦ σχήματος 46.}$$

$$B' \times M = \frac{P \cdot \beta \alpha^3}{\frac{1}{2} \alpha} = \frac{P \beta \alpha^2}{6} \quad \text{διὰ τὴν δοκὸν τοῦ σχήματος 47.}$$

Παραβάλλοντες δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{P \alpha \beta^2}{6}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{P \beta \alpha^2}{6}$, διότι καθ' ὑπόθεσιν τὸ β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ α. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἀνισότητα

$$B \cdot M > B' \times M \quad \text{ἢ} \quad B > B',$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα οἱ ξυλουργοὶ γνωρίζουσιν ἐκ πείρας, καὶ διὰ τοῦτο βλέπομεν νὰ τοποθετῶσι τὰς δοκοὺς τῶν πατωμάτων καὶ στεγῶν τῶν οἰκιῶν κατὰ τὸ σχῆμα 46 καὶ οὐχὶ κατὰ τὸ 47, δηλ. τὴν μικροτέραν διάστασιν τῆς τομῆς νὰ θέτωσιν ὀριζοντίως καὶ τὴν μεγαλύτεραν καθέτως.

63. Χάριν δὲ ἀσκήσεως ἂς λύσωμεν προβλήματα τινά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ διαρκῶς εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτῆς, τοῦ ἑτέρου ὄντος

πεπακτωμένου, σιδηρᾶ δοκὸς μήκους 3 μέτρων, καὶ τομῆς ὀρθογωνίου κενῆς ἐσωτερικῶς, ἥς αἱ διαστάσεις εἶναι $\alpha = 0^{\mu}, 20$, $\beta = 0^{\mu}, 20$, $\alpha' = 0^{\mu}, 18$ καὶ $\beta' = 0^{\mu}, 18$.

Λύσις. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (Α) δίδει

$$B \times 3,00 = \frac{P(0,20 \times 0,20^3 - 0,18 \times 0,18^3)}{6 \times 0,20} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ πρὸς τὸ ὕψος αὐτῆς εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι $\frac{300}{20} = 15$, καὶ ἐπειδὴ πρόκειται περὶ κληροῦ σιδήρου, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὡς τιμὴν τοῦ P τὸν ἀριθμὸν 6000000, ὅν θέτοντες ἀντὶ τοῦ P εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) καὶ ἐπιλύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὸ B, εὐρίσκομεν

$$B = \frac{6000000(0,20^4 - 0,18^4)}{6 \times 0,20 \times 3,00} = 917 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ διαρκῶς εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον, τοῦ ἑτέρου ὄντος πεπακτωμένου, σιδηρᾶ δοκὸς μήκους 3 μέτρων καὶ τομῆς διπλοῦ ταῦ ὀρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶναι $\alpha = 0^{\mu}, 20$, $\beta = 0^{\mu}, 36$, $\alpha' = 0^{\mu}, 095$, $\beta' = 0^{\mu}, 34$.

Λύσις. Τὰ δεδομένα ἐνταῦθα εἶναι $\alpha = 0^{\mu}, 20$, $\beta = 0^{\mu}, 36$, $2\alpha' = 0^{\mu}, 19$, $\beta' = 0^{\mu}, 34$ καὶ $M = 3^{\mu}, 00$, ἡ δὲ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (Α) δίδει

$$B \times 3,00 = \frac{P(0,20 \times 0,36^3 - 0^{\mu}, 19 \times 0,34^3)}{6 \times 0,36} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ πρὸς τὸ ὕψος εἶναι $\frac{300}{0,36} = 8 + \frac{1}{3}$, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν $P = 6000000$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) λυομένη ὡς πρὸς τὸ B δίδει

$$B = \frac{6000000(0,20 \times 0,36^3 - 0,19 \times 0,34^3)}{3 \times 6 \times 0,36}$$

$$\eta \quad B = \frac{1000000(0,0093312 - 0,00746776)}{3 \times 0,36} = 1725 \text{ χιλ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{ον}. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος, ὅπερ δύναται νὰ ὑποβαστάζῃ διαρκῶς εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον, τοῦ ἑτέρου ὄντος

πεπακτωμένου, σιδηρᾶ δοκὸς μήκους 3 μέτρων καὶ τομῆς ὀρθογωνίου διαστάσεων $\alpha=0^{\mu},04$ καὶ $\epsilon=0^{\mu},20$.

Λύσις. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (A) δίδει

$$B.3,00 = \frac{6000000 \times 0,04 \times 0,20^2}{6 \times 3,00} = 533 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Ἐλάβωμεν $P=6000000$, διότι ὁ λόγος $\frac{M}{\epsilon}$ εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι $\frac{3.00}{0.20} = 15$.

Παρατήρησις 1. Παραβάλλοντες τὰς λύσεις τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς δοκοὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ βάρος, διότι καὶ τὸ μήκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίου τομῆς εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὰς τρεῖς δοκοὺς, καὶ ὅτι ἡ ἰσχυροτέρα τῶν τριῶν ἀνωτέρω δοκῶν εἶναι ἡ δευτέρα, ἡ ἔχουσα διπλοῦν ταῦ τομὴν, διότι αὕτη δύναται νὰ ὑποβαστάξῃ μεγαλειότερον βάρος εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς ἢ αἱ δύο ἄλλαι.

Παρατήρησις 2. Διὰ μεγάλας σιδηρᾶς γεφύρας γίνεται συνήθως χρῆσις δοκῶν, ὧν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ εἶναι ὀρθογώνιος καὶ ἐσωτερικῶς κενή, καὶ οὐχὶ διπλοῦν ταῦ, ἂν καὶ εἶναι αὕτη ἰσχυροτέρα, διότι ἡ ἐπὶ τῶν στηριγμάτων τοποθέτησις καὶ ἰσορροπία τούτων κατὰ τὴν διάβασιν τῶν ἀμειωστοιχιῶν τοῦ σιδηροδρόμου καὶ κατὰ τὴν πνοὴν σφοδροῦ ἀνέμου εἶναι μᾶλλον σταθερὰ πάσης ἄλλης δοκοῦ. Διὰ μετρίου ὅμως μεγέθους σιδηρᾶς γεφύρας γίνεται χρῆσις συνήθως δοκῶν, ὧν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ εἶναι διπλοῦν ταῦ.

Παρατήρησις 3. Ὁ Γάλλος μηχανικὸς Μοραντιέ, ὁ κατασκευάσας πολλὰς σιδηρᾶς γεφύρας ἐν Γαλλίᾳ καὶ συγγράψας περὶ γεφυροποιᾶς ἐν γένει, ἔθετο τὴν ἑξῆς ἀρχήν.

Τὸν σίδηρον τῶν δοκῶν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν δυνάμεθα ἀσφαλῶς καὶ ἄνευ κινδύνου νὰ ὑποβάλωμεν εἰς θλίψιν ἢ ἐφελκυσμὸν 6 χιλιογράμμων κατὰ χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας ἐγκαρσίου τομῆς, ὅταν ὁ λόγος τοῦ μὲν μήκους τῆς δοκοῦ πρὸς τὸ πλάτος αὐτῆς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 46 καὶ 80, τοῦ δὲ μήκους πρὸς τὸ ὕψος τῆς δοκοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 40 καὶ 15. Ἐν ἄλλαις λέξεσι καλοῦντες M τὸ μήκος τῆς δοκοῦ, α τὸ πλάτος καὶ ϵ τὸ ὕψος, ὅταν ἔχωμεν τὰς κάτωθεν ἰσότητας

$$\frac{M}{\alpha} = \eta < 80 \quad \text{και} \quad \frac{M}{\epsilon} = \eta < 15.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^ο. Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ξυλίνης δοκοῦ μήκους 3 μέτρων καὶ τομῆς ὀρθογωνίου, ἣτις διὰ μὲν τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς εἶναι πεπακτωμένη, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου ὑποβαστάζει βάρος 500 χιλιογράμμων.

Λύσις. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (A) δίδει

$$500 \times 3 = \frac{P\alpha\epsilon^2}{6} \quad (1).$$

Ὅπως θέσωμεν τὴν κατάλληλον τιμὴν τοῦ P εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ ὕψος ϵ τῆς δοκοῦ, διότι ὁ λόγος $\frac{M}{\epsilon}$ εἶναι συνέκθεις αὐτοῦ.

Ἀς ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμὴν γνωστὰς τὰς διαστάσεις α καὶ ϵ , ἥτοι ἂς λάβωμεν τὰς κατ' ἀρέσκειαν καὶ περίπου ὕσαι εἶναι αἱ διαστάσεις ἄλλων γνωστῶν ὁμοίων παραδειγμάτων καὶ ἂς ὑποθέσωμεν $\alpha = 0^{\text{m}}, 20$ καὶ $\epsilon = 0^{\text{m}}, 40$.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{M}{\epsilon}$ εἶναι ἐνταῦθα μικρότερος τοῦ 10, διότι ἔχομεν $\frac{M}{\epsilon} = \frac{3.00}{0.40} = 7,5$, ἡ τιμὴ τοῦ P εἶναι 30 χιλιόγραμμα δι' ἑκαστον ἑκατοστὸν τετραγωνικόν.

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ α , ϵ καὶ P τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ ἀντὶ M οὐχὶ 3 μέτρα, ἀλλὰ τὸ ἰσοδύναμον 300 ἑκατοστά τοῦ μέτρου, διότι τὸ ἑκατοστὸν ἐλήφθη ὡς μονὰς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ α , ϵ καὶ P, ἔχομεν

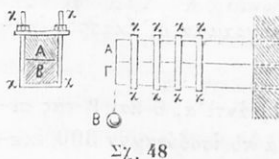
$$500 \times 300 = \frac{30 \times 20 \times 40^2}{6} \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεῦτερον μέλος τῆς ἐξίσωσεως (2) εἶναι ὀλίγον τι μεγαλύτερον τοῦ πρώτου, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι ἀνωτέρω διαστάσεις εἶναι παραδεκταί, διότι διὰ τῆς παραδοχῆς τούτων εἴμεθα ἐκ τῶν προτέρων βέβαιοι, ὅτι ἡ δοκὸς μας θὰ ὑποφέρῃ θλίψιν ὀλίγον τι μικρότεραν τῶν 30 χιλιογράμμων κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, καὶ οὐδένα κίνδυνον θὰ διατρέχῃ ὑφισταμένη τὴν ἐνέργειαν βάρους 500 χιλιογράμμων.

Ἡ ἀνωτέρω λύσις εἶναι καὶ λογική, διότι δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν εἰς τὸ ἐμπύριον δοκοὺς διαστάσεων $0^{\mu}, 20$ πλάτους καὶ $0^{\mu}, 40$ ὕψους. Αὐτὸ τοῦτο ἐκφράζουσιν συνήθως οἱ ἔμποροι λέγοντες ὅτι ἡ δοκὸς εἶναι διαστάσεων εἴκοσι μὲ τεσσαράκοντα καὶ σημειοῦσιν εἰς τὰ βιβλία τῶν ὑπολογισμῶν ὑπὸ τὴν ἐξῆς κλασματικὴν μορφήν $\frac{20}{40}$. Προκειμένου περὶ σιδήρου οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{20}{40}$ παριστῶσι χιλιοστὰ τοῦ μέτρου καὶ ὅχι ἑκατοστὰ, ὡς ἐπὶ ξυλίνων δοκῶν.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ βάρος, ὅπερ ἡ πεπακτωμένη δοκὸς πρέπει νὰ υποβαστάζῃ διαρκῶς εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον, ᾗτο 2000 χιλιόγραμμα ἀντὶ 500 χιλιογράμμων, ἠθέλομεν εὐρεῖ λαμβάνοντες $\alpha = 0,20$, $\beta = 2 \times 0^{\mu}, 40 = 0^{\mu}, 80$ (διότι, ἔταν τὸ φορτίον B τετραπλασιάζεται, τὸ δὲ πλάτος α τῆς δοκοῦ μένῃ τὸ αὐτό, τὸ ὕψος β τῆς δοκοῦ διπλασιάζεται). Τοῦτο δὲ ἐξάγεται εὐκόλως καὶ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσης (1).

Ἐπειδὴ δὲ δοκοὺς διαστάσεων $\frac{20}{80}$ δυσκόλως εὕρισκει τις εἰς τὸ ἐμπύριον, διὰ τοῦτο οἱ μηχανικοί, ἀρχιτέκτονες κτλ. λαμβάνουσι δύο δοκοὺς ἢ τρεῖς ἢ καὶ περισσοτέρας κατὰ τὴν ἀνάγκην καὶ συνδέουσι ταύτας στερεῶς διὰ σιδηρῶν στεφανῶν κκ, ὡς παριστᾷ τὸ σχῆμα 48. Αἱ τοιοῦτου εἶδους δοκοὶ καλοῦνται ὡπλισμένοι δοκοί.



Οἱ σιδηροὶ στέφανοι κκ συνήθως τίθενται πεπυκνωμένοι, ὅπως ψυχρινόμενοι συσφίγγωσιν ὅσον οἷόν τε περισσότερον τὰς δοκοὺς, καὶ οὕτω αὗται ἀποτελέσωσι μίαν καὶ ἀδιείρετον.

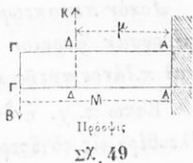
64. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (A) τῆς ἐγκαρσίου τομῆς πάσης ἰσοπαχοῦς δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον ἐφαρμόζεται καὶ ἔστι ἐπὶ τῆς δοκοῦ ταύτης ἐνεργῶσιν πολλοὶ παράλληλοι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, διότι αἱ ἐνέργειαι τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων προστίθενται, τουτέστιν εἶναι ἴση μὲ τὴν τῆς συνισταμένης αὐτῶν, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ῥοπή τῶν ἐλαττηρίων δυνάμεων πάσης διατομῆς τῆς θεωρουμένης δοκοῦ ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἄθροισματι τῶν

ροπῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν περιεχομένων μεταξύ τῆς θεωρουμένης τομῆς καὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου.

Παριστῶντες δὲ χάριν συντομίας τὴν ῥοπὴν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων διὰ τοῦ γράμματος X , ἔχομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς καὶ ὑπὸ τὴν ἐξῆς μορφήν

$$X = \frac{PI}{\nu} \quad (A').$$

65. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δοκὸς τις $AA\Gamma\Gamma$ εἶναι πεπικτωμένη εἰς τὸ ἐν τῶν ἄκρων αὐτῆς AA καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον $\Gamma\Gamma$ (Σχ. 49) καὶ ἐπὶ ταύτης ἐνεργοῦσι καθέτως τῶν ἰνῶν τῆς δύο ἐξωτερικαὶ δυνάμεις B καὶ K , ὧν ἡ πρώτη B καθ' ὑπόθεσιν ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἄκρου $\Gamma\Gamma$, ἡ δὲ δευτέρα K , ἀντιθέτου φορᾶς τῆς B , ἐπὶ τῆς τομῆς $\Delta\Delta$, ἥς ἡ ἀπὸ τῆς πακτώσεως AA ἀπόστασις αὐτῆς εἶναι μ καὶ ὅτι μᾶς ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς $AA\Gamma\Gamma$, ἥς τὸ ὅλον μῆκος ἦναι καθ' ὑπόθεσιν M .



Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (A') ὡς πρὸς τὴν τομὴν τῆς πακτώσεως AA καὶ ὡς πρὸς τὴν τομὴν $\Delta\Delta$, ἐνθα ἐνεργεῖ ἡ δύναμις KK δίδει τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις

$$(1) \quad BM - K\mu = \frac{PI}{\nu} \quad \text{διὰ τὴν πάκτωσιν } AA$$

$$(2) \quad B(M - \mu) = \frac{PI}{\nu} \quad \text{διὰ τὴν τομὴν } \Delta\Delta.$$

Ἐκ τῶν δύο δὲ ἀνωτέρω ἐξισώσεων πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἐκείνην, ἥς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τὸ μεγαλείτερον, παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν $BM - K\mu > B(M - \mu)$, θέλομεν προσδιορίσει τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), ἂν δὲ $BM - K\mu < B(M - \mu)$, τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2).

Παρατήρησις 4. Ὅταν ἡ δύναμις K ἦναι τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὴν B , τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) γίνεταί $BM + K\mu$ καὶ εἶναι πάντοτε μεγαλείτερον τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως (2). Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ὁ κίνδυνος τῆς διαρρήξεως ὑφίσταται κατὰ τὴν πάκτωσιν AA τῆς δοκοῦ.

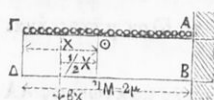
Παρατήρησις 2. "Όταν ἔχωμεν $B(M-\mu) > BM - K\mu$, τότε ὁ κίνδυνος τῆς διαρρήξεως ὑφίσταται κατὰ τὴν διατομὴν $\Delta\Delta$, ἔνθα ἐνεργεῖ ἡ δυνάμις K .

Ἐπίσης κίνδυνος διαρρήξεως ὑπάρχει κατὰ τὴν διατομὴν $\Delta\Delta$, ὅταν ἔχωμεν $BM - K\mu = 0$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων B καὶ K διέρχεται διὰ τῆς πακτώσεως AA , ἥτις οὐδεμίαν κάμψιν ὑποφέρει, ὑπόκειται δὲ μόνον εἰς διάτμησιν ὑπὸ τῆς συνισταμένης $K - B$.

66. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχωμεν ἐνταῦθα ὑπ' ὅψιν

Δοκὸν πεπακτωμένην εἰς τὸ ἐν ἄκρον, ἐλευθέραν εἰς τὸ ἕτερον καὶ φέρουσαν φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς καὶ ἐνεργοῦν καθέτως ἐπὶ τῶν ἰσῶν τῆς δοκοῦ.

Ἐστω π. χ. ἡ δοκὸς $ΑΓΒ$ (Σχ. 50) πεπακτωμένη εἰς τὸ $ΑΒ$ καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον $ΓΔ$, καὶ φέρουσα καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ



Σχ. 50

πλάτος αὐτῆς φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ἵνα αὕτη δύναται ἀσφαλῶς νὰ ὑποβαστάζῃ διαρκῶς φορτίον θ κατὰ τρέχον μέτρον, ἢ $M\theta$ φορτίον καθ' ὅλον τὸ μῆκος M τῆς δοκοῦ.

"Όπως καὶ ἐπὶ τοῦ ζητήματος τῆς § 59 οὕτω καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν, ὅτι ἡ ῥοπή τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ θεωρουμένης τινος διατομῆς, τῆς καὶ παραδείγματος χάριν, καὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου $ΓΔ$, ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς θεωρουμένης διατομῆς καὶ, καὶ ὅτι αὕτη παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{PI}{\sigma}$.

Σημειοῦντες δὲ διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τῆς διατομῆς καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον $ΓΔ$, θέλομεν ἔχει τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (1)

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon \chi^2 \quad (1),$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν $\frac{PI}{\sigma}$ παρίσταται τὴν ῥοπήν τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς διατομῆς καὶ, τὸ δὲ $\frac{1}{2} \epsilon \chi^2$ τὴν ῥοπήν τοῦ φορτίου ἀπὸ καὶ μέχρι $ΓΔ$: διότι τὸ μὲν φορτίον τοῦτο παρίσταται διὰ τῆς συνισταμένης $\epsilon \chi$,

τῆς ἐνεργούσης εἰς τὸ μέσον τῆς ἡΔ ἀποστάσεως, ἕνεκα τοῦ παραλλήλου τῶν ἐνεργουσῶν καθέτων δυνάμεων, ὃ δὲ μοχλοβραχίων εἶναι $\frac{1}{2}\chi$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (1), ἣτις καλεῖται ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ηθ, πορίζεσθαι τὴν ἐξίσωσιν, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν πάκτωσιν AB, ὑποθέτοντες $\chi = M$, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (2), τὴν καλουμένην ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς πατώσεως AB

$$\frac{PI}{\upsilon} = \frac{1}{2} \epsilon M^2 \quad (2).$$

Σημειοῦντες δὲ τὸ ὀλίγον φορτίον ϵM τῆς δοκοῦ AΓΔB (Σχ. 50) διὰ B, μετασχηματίζομεν τὴν (2) εἰς τὴν κάτωθιν (B)

$$\frac{PI}{\upsilon} = \frac{BM}{2} \quad (B).$$

Ἐὰν δὲ παραβάλωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (B) μετὰ τὴν (A) τῆς § 60, ἣτις εἶναι

$$\frac{PI}{\upsilon} = BM \quad (A),$$

βλέπομεν ὅτι τὸ βάρος B, ὁμοιομόρφως διανεμόμενον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος τῆς δοκοῦ AΓ (Σχ. 50), παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὅπερ ἤθελε παραγάγει τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους τοῦτου B, τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἄκρου Γ. Τοῦτο δὲ συνήθως ἐννοοῦσιν, ὅταν λέγωσιν ὅτι ἡ δοκὸς AΓ εἶναι διπλασίας δυνάμεως ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς, ἢ εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον Γ.

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως (2) ἢ (B) προσδιορίζομεν ἡ τὰς διαστάσεις α καὶ γ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ AΓΔB, ὅταν τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον ϵ ᾖ ἡναι γνωστὸν ἢ ἀντιστρόφως, προσδιορίζομεν τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον ϵ , ὅταν αἱ διαστάσεις α καὶ γ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ ᾖναι γνωσταί, τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ ὄντος πάντοτε γνωστοῦ καὶ τοῦ βάρους τῆς ἰδίας δοκοῦ παραλειπομένου, ὅταν τὸ μήκος αὐτῆς ᾖναι μικρόν, ὡς τοῦτο ὑπετέθη πρὸς εὔρεσιν τῆς ἐξίσωσως (2) ἢ (B).

67. Ὅταν τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ ABΓΔ (Σχ. 37) ᾖναι μέγα καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ ἑαυτῆς βάρος εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐξίσωσως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου

τομῆς τῆς πακτώσεως τῆς δοκοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 37), τῆς φερούσης φορτίον Β εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον ΓΔ, δὲν εἶναι ἡ εὐρεθεῖσα (Α), ἀλλ' ἡ κάτωθι (Γ)

$$\frac{PI}{\upsilon} = BM + \frac{1}{2} \epsilon M^2 = M \left(B + \frac{\epsilon M}{2} \right) \quad (\Gamma),$$

τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος $\frac{PI}{\upsilon}$ παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῶν ἐλαττηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς τομῆς ΑΒ, τοῦ δὲ δευτέρου μέλους τὸ μὲν ΒΜ παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τοῦ φορτίου Β, τοῦ ἐνεργοῦντος εἰς τὸ ἄκρον ΓΔ, τὸ δὲ $\frac{1}{2} \epsilon M^2$ παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τοῦ βάρους τῆς ἰδίας δοκοῦ, ὅπερ εἶναι ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς, καὶ ὅπερ παρίσταται διὰ ϵM , ϵ ὄντος τοῦ βάρους ἑνὸς τρέχοντος μέτρου δοκοῦ.

Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (Γ) προσδιορίζομεν ἢ τὸ βάρος Β, ὅταν αἱ διαστάσεις τῆς δοκοῦ ᾖναι δεδομέναι, ἢ τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, ὅταν τὸ μῆκος Μ αὐτῆς καὶ τὸ βάρος Β ᾖναι δεδομένα.

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (Γ) ὡς πρὸς μὲν τὸ Β οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει, ὡς πρὸς τὰς διαστάσεις ὅμως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς παρουσιάζει μικράν τινα δυσκολίαν, διότι τὸ βάρος Μῆ τῆς ἰδίας δοκοῦ εἶναι συνέκθεσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αὐτῆς. Παραδείγματος χάριν τὸ βάρος ὀρθογωνίου πρισματικῆς δρυίνης δοκοῦ, ἥς αἱ διαστάσεις εἶναι α, γ καὶ Μ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $\alpha \times \gamma \times M \times 4400$ χιλιόγραμμα, διότι τὸ μὲν $\alpha \times \gamma \times M$ παριστᾷ τὸν ὄγκον τῆς δοκοῦ εἰς κυβικά μέτρα, τὸ δὲ 4400 χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου δρυίνου ξυλείας. Τοῦτου ἕνεκα οἱ μηχανικοὶ ἀντὶ νὰ λύσῃ κατ' εὐθεῖαν τὴν ἐξίσωσιν (Γ) διὰ τῶν κανόνων τῆς ἀλγέβρας, πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, λύουσι αὐτὴν διὰ δοκιμῶν ὡς ἐξῆς.

Λαμβάνουσι κατ' ἀρέσκειαν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ὀδηγούμενοι βεβασίως ἀπὸ ἄλλα παραπλήσια παραδείγματα, καὶ διὰ τῶν διαστάσεων τούτων προσδιορίζουσι τὸ βάρος ϵ . Μετὰ ταῦτα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (Γ) θέτουσι τὰς τιμὰς τῶν P, I, υ , B, ϵ καὶ Μ, καὶ ἐκτελοῦσι τὰς σεσημειωμένας πράξεις. Καὶ ἂν μὲν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (Γ) εὐρεθῇ ἴσον ἢ σχεδὸν ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, πα-

ραδέχονται ὁριστικῶς τὰς κατ' ἀρέσκειαν ληφθείσας τιμὰς τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ἄλλως τε αὐξάνουσι ἢ ἐλαττοῦσι ταύτας κατὰ τι, ὅταν τὸ πρῶτον μέλος εὐρεθῇ μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου μέλους, καὶ ἐκτελοῦσιν ὡς ἀνωτέρω τὰς αὐτὰς ἐκ νέου πράξεις, μέχρις οὗ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (Γ) κατασταθῇ σχεδὸν ἴσον τῷ δευτέρῳ.

68. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (Γ) διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης μεθόδου, ἐφαρμόζομεν ταύτην εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἐξῆς προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου ἐγκαρσίου τομῆς δρυϊνῆς δοκοῦ μήκους 3 μέτρων, ὅπως αὕτη διὰ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου, τοῦ ἐτέρου ὄντος πεπακτωμένου, ὑποδαστάζῃ διαρκῶς βάρος 500 χιλιογράμμων, λαμβανομένου ὑπ' ὅλῃν καὶ τοῦ βάρους αὐτῆς.*

Λύσις. Λαμβάνοντες κατ' ἀρέσκειαν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς α καὶ γ , ἔστω $\alpha = 0^{\mu}, 20$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 40$, ὑπολογίζοντες δὲ τὸ βάρος θ , ὅπερ ἐνταῦθα εἶναι ἴσον μὲ $0,20 \times 0,40 \times 4400 = 88$ χιλιόγραμμα καὶ θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (Γ) ἀντὶ $P, I, u, \theta, \alpha, \gamma$ καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{30 \times 20 \times 40^2}{6} = 300 \left(500 + \frac{88 \times 3,00}{2} \right)$$

$$\eta \quad 160000 = 189000 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ληφθεῖσαι κατ' ἀρέσκειαν τιμαὶ τοῦ α καὶ γ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀρμοζουσῶν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος, καὶ ἐπομένως ὅτι πρέπει νὰ αὐξήσωμεν ταύτας κατὰ τι. Ὑποθέτομεν λοιπὸν $\alpha = 0^{\mu}, 25$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 45$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς αὐτὰς πράξεις. Εὐρίσκομεν οὕτω

$$\theta = 0^{\mu}, 25 \times 0^{\mu}, 45 \times 4400 = 423 \chi\lambda., 74 \quad \eta \quad 424 \chi\lambda.,$$

ἵνα ἔχωμεν ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀντεισάγοντες δὲ εἰς τὴν (Γ) ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τοῦ $P, I, u, \theta, \alpha, \gamma$ καὶ M καὶ ἐκτελοῦντες τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις εὐρίσκομεν

$$253125 = 205800 \quad (2).$$

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος εἶναι μεγαλύτερον

τοῦ δευτέρου συμπεραίνομεν ὅτι αἱ νέαι τιμαὶ τοῦ α καὶ γ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ἀρμοζουσῶν. Δι' ὃ πρέπει νὰ λάβωμεν ἄλλας τιμὰς εὐλίγον τι μικροτέρας τῶν ἀνωτέρω. Ὑποθέτομεν λοιπὸν $\alpha = 0^{\mu}, 25$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 40$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς αὐτάς, ἃς καὶ προηγουμένως πράξεις. Εὐρίσκομεν οὕτω $\theta = 0,25 \times 0,40 \times 1100 = 110$ χιλιόγραμμα καὶ ἐκ τῆς (Γ) ἐξίσωσως πορίζομεθα ὡς καὶ ἀνωτέρω τὴν κάτωθι:

$$200000 = 199500 \quad (3),$$

τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι σχεδὸν ἴσον μὲ τὸ δεύτερον, ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ διαστάσεις $\alpha = 0^{\mu}, 25$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 40$ ἀρμοζουσι εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, καὶ παραδεχόμεθα ὁριστικῶς ταύτας.

69. Ἐὰν ἡ πεπακτωμένη δοκὸς εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον ἔχῃ τόσῳ μέγα μῆκος, ὥστε τὸ ἑαυτῆς βάρος νὰ ἐπενεργῇ ἐπ' αὐτῆς καὶ νὰ παράγῃ κάμψιν, πρὸς δὲ ἵνα καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη (Σχ. 50), τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς εἶναι ὁμοία μὲ τὴν (2), τὴν ἐν τῇ παραγράφῳ 66 ὁρισθεῖσαν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ θ τῆς (2) ἐξίσωσως πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ τὸ βάρος θ_1 ἐνὸς τρέχοντος μέτρου δοκοῦ καὶ τὸ βάρος θ_2 , τὸ παριστῶν τὸ φορτίον τὸ ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐφ' ἐκάστου μέτρου μήκους τῆς δοκοῦ ἐν ἄλλαις λέξεσι θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ θ τὸ ἴσον αὐτῷ $\theta_1 + \theta_2$, θέλομεν ἔχει τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (Δ), ἥτις θὰ ἵνα ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, ὅταν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, ἦτοι

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{1}{2} M^2 (\theta_1 + \theta_2) \quad (\Delta).$$

Ἡ λύσις δὲ τῆς ἐξίσωσως ταύτης ὡς πρὸς μὲν τὸν προσδιορισμὸν τοῦ φορτίου θ_2 κατὰ τρέχον μέτρον εἶναι εὐκαλός, ὡς πρὸς δὲ τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων α καὶ γ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς γίνεται διὰ δοκιμῶν ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω παραγράφῳ ἐξετέθη.

70. Χάριν ἀσκήσεως λóομεν τὸ κάτωθι πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ διαστάσεις α καὶ γ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς δρυένου πρισματικῆς δοκοῦ μήκους 3 μέτρων, πεπακτωμένης εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον, φερούσης δὲ φορτίον 1002 χιλιογράμμων ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς.

Λύσις. Τὰ δεδομένα ἐνταῦθα εἶναι $P = 30$ χιλιόγραμμα κατὰ τε-

τραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας, $M=300$ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, $\epsilon_2 = \frac{1002}{3} = 334$ χιλιογράμματα ἀνὰ μέτρον ἢ $\frac{334}{100}$ ἀνὰ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, ἵνα δὲ εὐρωμεν τὰ ζητούμενα, λαμβάνομεν καὶ ἐνταῦθα κατ' ἀρέσκειαν $\alpha = 0,20$ καὶ $\gamma = 0,40$ καὶ εὐρίσκομεν $\epsilon_1 = \alpha \times \gamma \times 1100 = 0,20 \times 0,40 \times 1100 = 88$ χιλιογράμματα ἀνὰ πᾶν μέτρον ἢ $\frac{88}{100}$ ἀνὰ πᾶν ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, θέτοντες δὲ εἰς τὸν τύπον (Δ) τὰς ἀνωτέρω τιμὰς ἔχομεν

$$\frac{30 \times 20 \times 40^2}{6} = \frac{1}{2} 300^2 \left(\frac{88}{100} + \frac{334}{100} \right) \quad (1)$$

ἢ ἐκτελοῦντες τὰς ἐν τῇ (1) ἐξισώσει σεσημειωμένας πράξεις

$$160000 = 189900 \quad (2).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς εὐρεθείσης ἰσότητος (2) εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι τιμαὶ $\alpha = 0,20$ καὶ $\gamma = 0,40$ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀρμοζουσῶν. Αὐξάνομεν ἀκολουθῶς ταύτας ἢ τὴν μίαν τούτων καὶ λαμβάνομεν $\alpha = 0^{\mu}, 25$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 40$ καὶ πράττοντες ὡς ἀνωτέρω εὐρίσκομεν διὰ τῶν νέων τούτων τιμῶν $\epsilon_1 = 0,25 \times 0,40 \times 1100 = 110$ χιλιογράμματα ἀνὰ πᾶν μέτρον ἢ $\frac{110}{100}$ ἀνὰ πᾶν ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, καὶ διὰ τοῦ τύπου (Δ) θέτοντες ἐν αὐτῷ ἀντὶ ϵ_1 τὴν τιμὴν του καὶ ἀντὶ ϵ_2 , P , I , ν , καὶ M τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, πορίζομεθα

$$\frac{30 \times 25 \times 40^2}{6} = \frac{1}{2} 300^2 \left(\frac{110}{100} + \frac{334}{100} \right) \quad (3)$$

ἢ ἐκτελοῦντες τὰς ἐν τῇ (3) σεσημειωμένας πράξεις

$$200000 = 199800 \quad (4).$$

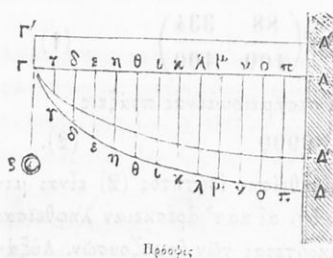
Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι σχεδὸν ἴσον μὲ τὸ δεύτερον, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ τιμαὶ $\alpha = 0^{\mu}, 25$ καὶ $\gamma = 0^{\mu}, 40$ ἀρμόζουσι εἰς τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος.

ΣΤΕΡΕΑ ΙΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

71. Εἶδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι ὁ κίνδυνος τῆς διαρρήξεως δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον, ἐλευθέρας δὲ εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης φορτίον B ἢ εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον ἢ ὁμοιομόρφως

διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, εἶναι εἰς τὴν τομὴν τῆς πακτώσεως, τουτέστιν ἡ πάκτωσις ὑποφέρει περισσότερον πάσης ἄλλης διατομῆς. Τοῦτου ἕνεκα δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις ἐκάστης διατομῆς τῆς δοκοῦ οὕτως, ὥστε αὐταὶ νὰ ὑποφέρωσι ὑπὸ τοῦ βάρους B ὅσον καὶ ἡ πάκτωσις. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον στερεὸν καλεῖται τότε στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως.

72. Καὶ ἐν πρώτοις ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ



Πρόοψις

Σχ. 51

σχήμα, ὑπὲρ πρέπει νὰ ἔχῃ ὀρθογώνιός τις δοκὸς πεπακτωμένη εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς $\Lambda\Delta$ καὶ φέρουσα φορτίον B ἐπὶ τοῦ ἐτέρου Γ , ὅντος ἐλευθέρου (Σχ. 51).

Ἐκ τῆς γενικῆς θεωρίας τῆς κάμψεως, ἂν ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐξεθέσαμεν, γνωρίζομεν ὅτι διὰ πᾶσαν διατομὴν αὐτῆς, τὴν ἐς παρὰδείγματος χάριν, ἡ ῥοπή τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως B , ἢ τῶν ἐξω-

τερικῶν δυνάμεων τῶν ἐνεργουσῶν ἐπὶ τοῦ τμήματος $\epsilon\Gamma$ τῆς δοκοῦ, ἂν ὑπάρχωσι πλείονες τῆς μιᾶς δυνάμεως, ὡς πρὸς τὴν διατομὴν ἐς, ἂν ἔχομεν ὑπ' ὄψιν, ἰσοῦται τῇ ῥοπῇ τῶν ἐλαττωρῶν δυνάμεων τῶν μορίων τῆς αὐτῆς διατομῆς ἐς. Ἐπομένως καλοῦντες χ τὴν ἀπόστασιν τῆς διατομῆς ἐς ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου Γ , ἔνθα ἐνεργεῖ τὸ βᾶρος B , ἔχομεν τὴν κάτωθι γνωστὴν ἐξίσωσιν.



Σχ. 52

$$B\chi = \frac{PI}{u} \quad (1).$$

ἢ καλοῦντες α καὶ β τὰς ζητούμενας διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου τομῆς ἐς (Σχ. 52), καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ I καὶ u διὰ τῶν γνωστῶν αὐτῶν τιμῶν, ἔχομεν

$$B\chi = \frac{P\alpha\beta^3}{6} \quad (2).$$

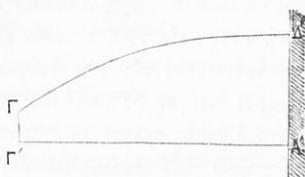
Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (2), περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους, τὴν χ , α καὶ β , δὲν δύναται νὰ μᾶς χορηγήσῃ ὠρισμένης τιμᾶς διὰ τὸ α καὶ β , ἐπομένως τὸ ζήτημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν διαστάσεων α καὶ β εἶναι

ἀπροσδιόριστον. Τούτου ἕνεκα πρέπει μίαν τῶν δύο διαστάσεων α καὶ β νὰ λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν σταθεράν δι' ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ, καὶ ὡς τοιαύτην λαμβάνομεν τὸ πλάτος αὐτῆς α κατὰ τὰ ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένα.

Σημειοῦντες δὲ τὸ ἄγνωστον ὕψος β διὰ τοῦ γράμματος ψ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) εἰς τὴν κάτωθι (3)

$$B\chi = \frac{P\alpha\psi^2}{6} \quad (3).$$

Ἡ ἀνωτέρω δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις (3) παριστᾷ παραβολήν, καθὰ διδάσκει ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία, ἐπομένως λαμβάνοντες τὸ μὲν Γ ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, τὴν $\Gamma\Lambda$ ὡς ἄξονα τῶν χ καὶ τὴν κάθετον $\Gamma\beta$ ὡς ἄξονα τῶν ψ , σχηματίζομεν τὴν καμπύλην $\Gamma\Delta$ καὶ οὕτω ἡ πρόσψις τῆς δοκοῦ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ σχήματος $\Lambda\Gamma\Delta$ (Σχ. 51). Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν σημείων Δ , ρ , π , σ , ... γ , Γ τοῦ τμήματος τῆς παραβολῆς $\Delta\Gamma$, διαιροῦμεν τὸ μῆκος $\Lambda\Gamma$ τῆς δοκοῦ εἰς πολλὰ ἴσα ἢ ἄνισα μέρη, π. χ., ἂν τὸ μῆκος $\Lambda\Gamma$ ᾖ $4^{\mu}, 30$, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς δεκατρία ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁμοίων θὰ ᾖ $0^{\mu}, 40$, εἰς δὲ τὴν ἐξίσωσιν (3) θέτοντες ἀντὶ χ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς $0^{\mu}, 40$, $0^{\mu}, 20$, $0^{\mu}, 30$ κτλ. καὶ λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς τὸ ψ εὐρίσκομεν τὰς κάτωθεν τιμὰς



Σχ. 53

$$\psi_1^2 = \gamma\gamma^2 = \frac{6.B.0,40}{P.\alpha}, \quad \text{ὅταν} \quad \chi = \Gamma\gamma = 0^{\mu}, 40$$

$$\psi_2^2 = \delta\delta^2 = \frac{6.B.0,20}{P.\alpha}, \quad \text{ὅταν} \quad \chi = \Gamma\delta = 0^{\mu}, 20$$

$$» = » = » \quad » \quad »$$

$$» = » = » \quad » \quad »$$

$$\psi_{13}^2 = \Lambda\Lambda^2 = \frac{6.B.4,30}{P.\alpha}, \quad \text{ὅταν} \quad \chi = \Gamma\Lambda = 4^{\mu}, 30,$$

Παρατήρησις 1. Αί ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) εὐρίσκόμεναι τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Καὶ ἐν μὲν τῇ ἀναλυτικῇ γεωμετρίᾳ ποιοῦσι χρῆσιν ἀμφοτέρων τούτων λαμβάνοντες τὴν μὲν ἀνωθεν τὴν δὲ κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων ΓΑ, ἐν τῇ ἀντιστάσει ὅμως τῆς ὕλης παραδέχονται μόνον τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ ψ , καὶ λαμβάνουσι ταύτας ἢ κάτωθεν τοῦ ἄξονος ΓΑ ὡς εἰς τὸ σχῆμα 51, ἢ ἀνωθεν ὡς εἰς τὸ σχῆμα 53. Τοῦτο δὲ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον ὁ μηχανικὸς ἢ ὁ ἀρχιτέκτων θέλει νὰ δώσῃ εἰς τὴν δοκόν. Π. χ. τὰ λίθινα στηρίγματα τῶν ἐξωστῶν τῶν οἰκιδῶν ἔχουσι τὸ σχῆμα 51, διότι ἡ ἀνω ἐπιφάνεια αὐτῶν, ἐφ' ἧς θὰ στηρίζονται αἱ μαρμαρίναι πλάκες τοῦ ἐξώστου, πρέπει νὰ ᾔναι ὀριζόντιος.

Παρατήρησις 2. Διὰ τὸ σημεῖον Γ, ὅπερ ἐλήφθη ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει $\psi = 0$. Τοῦτο δὲ δηλοῖ ὅτι τὸ ἐλεύθερον ἄκρον Γ τῆς δοκοῦ δὲν ἔχει ὕψος παρὰ μόνον πλάτος α καὶ ἡ τομὴ αὐτῆς εἰς τὸ Γ θὰ ᾔναι εὐθεῖα γραμμὴ. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τοιοῦτον ἀντίκειται εἰς τὴν θεωρίαν τῆς διάτμησης, διότι εἰς τὸ Γ τὸ βάρος Β ἐνεργεῖ ἀπ' εὐθείας κατὰ διάτμησην, ἵνα τμήσῃ τὴν δοκόν, διὰ τοῦτο ἡ δοκὸς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἀρμόζον πάχος, ὅπως ἀντέχῃ εἰς τὴν διάτμησην τοῦ βάρους Β. Τὸ πάχος δὲ τοῦτο προσδιορίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\alpha \times \epsilon \times \rho' = B$, ἐξ οὗ εὐρίσκομεν

$$\epsilon = \frac{B}{\alpha \cdot \rho'} = \Gamma \Gamma'.$$

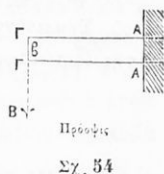
Ἴνα δὲ ἡ δοκὸς ᾔναι στερεὰ καὶ ἀντέχῃ καὶ εἰς τὴν διάτμησην τοῦ βάρους Β, πρέπει τὰς τετμημένας τῆς καμπύλης ΔΓ, τὰς οὕσας μικρότερας τοῦ ΓΓ', νὰ ἀυξήσωμεν τόσον, ὥστε νὰ ᾔναι ἴσαι μὲ τὴν ΓΓ'. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α'Γ' παράλληλον τῇ ΑΓ' καὶ ἀπέχουσαν ταύτης κατὰ ΓΓ', καὶ ἐκ τῆς εὐθείας ταύτης, θεωρουμένης ὡς ἄξονος τῶν χ , φέρομεν τὰς ὑπολογισθείσας τετμημένας ρρ, ππ, κτλ. καὶ οὕτω σχηματίζομεν νέαν καμπύλην τὴν ΓΔ' ἐλίγον τι διαφέρουσαν τῆς προηγουμένης ΓΔ. Ἐπομένως ἡ μὲν πρόοψις τῆς δοκοῦ, τῆς παριστάσεως τὸ σχῆμα τοῦ ἴσης ἀντιστάσεως στερεοῦ θέλει εἶσθαι Α'Γ'ΓΔ (Σχ. 51), ἡ δὲ κάτωψις ὀρθογώνιον, οὗτινος αἱ διαστάσεις θὰ ᾔναι Μ καὶ α.

Σημείωσις. Ἐὰν ἐκ τῶν δύο διαστάσεων α καὶ ϵ τῆς τομῆς λάβωμεν ὡς σταθερὰν οὐχὶ τὸ πλάτος α , ὡς συνήθως τοῦτο γίνεται καὶ ὡς

άνωτέρω ὑποθέσαμεν, ἀλλὰ τὸ ὕψος ϵ , τότε, σημειοῦντες διὰ ψ τὸ ζή-
τούμενον πλάτος α , θέλομεν πορισθῇ ἐκ τῆς γενικῆς ἐξίσωσως (2) τὴν
κάτωθι (4), ἥτοι

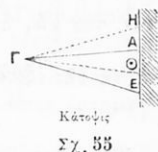
$$B.\chi = \frac{P.\epsilon^2.\psi}{6} \quad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη, οὕσα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, παριστᾷ εὐθεϊαν γραμ-
μὴν, τὴν ΓΕ (Σχ. 53). Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ
μὲν πρόοψις τῆς δοκοῦ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ ὀρ-
θογωνίου ΑΑΓΓ (Σχ. 54) ἔχοντος μῆκος ΑΓ ἴσον μὲ
Μ καὶ ὕψος ϵ , ἡ δὲ κάτωψις διὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ
ἢ τοῦ δι' ἐστιγμένων γραμμῶν παριστωμένου τριγώ-
νου ΗΓΘ, διότι εἰς τὴν ἀντίστασιν τῆς ὕλης ἐπιτρέ-
πεται νὰ λάβωμεν ΗΘ ἴσον μὲ ΑΕ καὶ ΑΗ ἴσον μὲ ΑΘ.



Σχ. 54

73. Ἐν τῇ ἀνωτέρω παραγράφῳ 72 ἴδομεν τίνι τρόπῳ προσδιορί-
ζομεν τὴν πρόοψιν καὶ κάτωψιν ὀρθογωνίου πρισματικῆς δοκοῦ, πεπακ-
τωμένης εἰς τὸ ἐν ἄκρον καὶ φερούσης φορτίον εἰς τὸ ἕτερον ἐλεύθερον
αὐτῆς ἄκρον, ἐν τῇ παρουσίᾳ δὲ παραγράφῳ θέλομεν
δείξει πῶς προσδιορίζομεν τὴν πρόοψιν καὶ κάτωψιν
δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἐν ἄκρον, ἐλευθέρως δὲ
εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης φορτίον ϵ κατὰ τρέχον
μέτρον ὁμοιομόρφως διανεμημένον.



Σχ. 53

Ἐστω ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 56) μῆκους Μ, πεπακτω-
μένη εἰς τὸ ἄκρον Α, ἐλευθέρως εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον Γ, καὶ φέρουσα
φορτίον ϵ κατὰ τρέχον μέτρον ἢ Μ ϵ καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς καὶ
ὁμοιομόρφως διανεμημένον κατὰ μῆκος καὶ πλάτος τῆς δοκοῦ, καθέ-
τως δὲ ἐπὶ τῶν ἰνῶν αὐτῆς ἐνεργούν.

Σημειοῦντες διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τομῆς τινος, τῆς $\eta\theta$, παραδείγ-
ματος χάριν, ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ, θέλομεν ἔχει δι' αὐτὴν κατὰ τὰ προ-
λεχθέντα τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{PI}{\psi} = \frac{1}{2}\epsilon\chi^2 \quad (1),$$

ἢ ὑποθέτοντες ὅτι πρόκειται περὶ πρισματικῆς δοκοῦ καὶ σημειοῦντες
δι' α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς $\eta\theta$, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν
άνωτέρω ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ μὲν τοῦ I τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{\alpha\gamma^3}{12}$, ἀντὶ δὲ τοῦ
 ψ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{2}\gamma$, ἔχομεν

$$\frac{P\alpha\gamma^2}{6} = \frac{1}{2}\epsilon\chi^2 \quad (2).$$

Ἐπειδὴ αἱ διαστάσεις α καὶ γ εἶναι ἀμφοτέρω ἀγνώσται, πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν μίαν τούτων κατ' ἀρέσκειαν δίδοντες εἰς αὐτὴν τιμὴν τινὰ ἐξ ἄλλων παρομοίων παραδειγμάτων λαμβανομένων.

Συνήθως λαμβάνουσι κατ' ἀρέσκειαν τὴν ὀριζόντιον διάστασιν α τῆς δοκοῦ. Σημειοῦντες λοιπὸν τὴν ἀγνώστον γ διὰ ψ , ποριζόμεθα ἀμέσως ἐκ τῆς ἐξίσωσews (2) τὴν κάτωθι (3)

$$\frac{P\alpha\psi^2}{3} = \epsilon\chi^2 \quad (3).$$

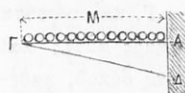
καὶ ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ρίζας ἔχομεν τὴν ἐξῆς

$$\left(\sqrt{\frac{P\alpha}{3}}\right)\psi = (\sqrt{\epsilon})\chi \quad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις (4), οὕσα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ΓΔ, ἣν ὀρίζομεν ὑποθέτοντες $\chi=0$ καὶ $\chi=M$ καὶ εὐρίσκον-

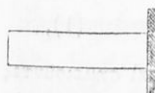
τες ἐκ τῆς ἐξίσωσews (4) $\psi=0$ καὶ $\Delta\Delta = \frac{(\sqrt{\epsilon}) \cdot M}{\sqrt{\frac{P\alpha}{3}}}.$

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ μὲν πρόοψις τῆς δοκοῦ, τῆς παριστά-
σης τὸ σχῆμα τοῦ στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως, εἶναι
τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ἡ δὲ κάτωψις τὸ ὀρθογώνιον
ΑΓΔΑ (Σχ. 57).



Πρόοψις

Σχ. 56



Κάτωψις

Σχ. 57

Παρατήρησις 1. Ἡ διάστασις $\Delta\Delta$, ἡ εὐρεθεῖσα
διὰ τῆς ἐξίσωσews (4), πρέπει νὰ ᾖ ἴση ἢ με-
γαλειτέρα τῆς διαστάσεως $\Delta\Delta'$, τῆς προσδιορίζο-
μένης διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς διατμήσεως, διότι πᾶσα διατομὴ τῆς
δοκοῦ ΑΓ πρέπει νὰ ᾖ ἱκανή, ὥπως αὕτη ἀνθί-
σταται εἰς τὴν διάτμησιν τοῦ βάρους, τοῦ περιεχο-
μένου μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ ἄκρου.

Ὅθεν καλοῦντες P τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς ду-
νάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμὸν ἢ θλίψιν τὴν
μονάδα ἐπιφανείας τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἡ δοκὸς ΑΓ ἀπο-
τελεῖται, καὶ P' τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν

εἰς διάτμησιν τὴν αὐτὴν μονάδα ἐπιφανείας τῆς δοκοῦ, πρέπει νὰ ἔχω-
μεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τὴν κάτωθι ἰσότητα ἢ ἀνισότητα

$$\frac{(\sqrt{\epsilon})M}{\sqrt{\frac{P\alpha}{3}}} = \eta > \frac{\epsilon M}{\alpha P'} \quad (5).$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης (5) πρέπει νὰ πληροῦται διὰ πᾶσαν διατομὴν τὴν ΑΓ' δοκοῦ. Παραδείγματος χάριν, διὰ τὴν καθ' ἡμέραν διατομὴν πρέπει νὰ ἔχωμεν, καλοῦντες χ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ,

$$\frac{(\sqrt{\epsilon}) \cdot \chi}{\sqrt{\frac{P\alpha}{3}}} = \eta > \frac{\epsilon \cdot \chi}{\alpha P'} \quad (6).$$

Παρατήρησις 2. Εἰς περίστασιν, καθ' ἣν ἡ ἰσότης ἢ ἀνισότης (5) δὲν πληροῦται μὲ τὰς διαστάσεις α καὶ χ , τὰς ὁρισθείσας διὰ τοῦ τύ-
που τῆς κάμψεως, τότε δεόν νὰ ὁρισθῶσιν αὗται διὰ τοῦ τύπου τῆς
διατμήσεως. Τὸ αὐτὸ ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ἡ δοκὸς ΑΓ' πρόκειται νὰ
ᾖ ἰσοπαχὴς.

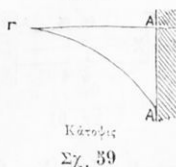
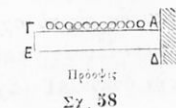
Σημείωσις. Ἐάν πρὸς προσδιορισμὸν μιᾶς τῶν δύο διαστάσεων α
καὶ χ τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τῆς δοκοῦ λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν ὅχι
τὴν ὀριζόντιον διάστασιν α , ὡς ἀνωτέρω ἐπράξαμεν, ἀλλὰ τὸ ὕψος χ ,
τότε τὴν ἐξίσωσιν (2) μετασχηματίζομεν εἰς τὴν κάτωθι (7) παρι-
στῶντες ἐν αὐτῇ τὸ α διὰ ψ .

$$\frac{P\chi^2}{3} \cdot \psi = \epsilon \chi^2 \quad (7),$$

ἥτις εἶναι δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις καὶ παριστᾷ
παραβολήν. Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν ὅτι ἡ κάτω-
ψις τῆς δοκοῦ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ σχήματος
59, ἡ δὲ πρόψις διὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΕΔ. (Σχ. 58).

74. Τὰ ἐν ταῖς ἀνωτέρω παραγράφοις 72 καὶ
73 ἐκτεθέντα ἐφαρμόζονται καὶ διὰ δοκόν, τῆς
ὁποίας ἡ ἐγκάρσιος τομὴ εἶναι κύκλος, διπλοῦν
ταῦ, κτλ. πρὸς εὔρεσιν τοῦ σχήματος αὐτῆς, ἵνα
ἀποτελῇ στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως.

Σημείωσις. Ὅταν καὶ τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν,



τότε πρὸς εὐρεσιν τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως ὀρθογωνίου δοκοῦ ἐφαρμόζομεν τὰς κάτωθι ἐξισώσεις, ἥτοι

$$\frac{P \cdot \alpha \gamma^2}{6} = \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \chi^2 \quad (2)^{\text{dis}}$$

διὰ δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτομένην, καὶ

$$\frac{P \cdot \alpha \gamma^2}{6} = B \cdot \chi + \frac{1}{2} \epsilon_2 \cdot \chi^2 \quad (2)^{\text{dis}}$$

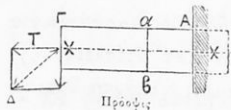
διὰ δοκὸν φέρουσαν φορτίον B εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον.

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω τύποις τὸ μὲν ϵ_1 εἶναι τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον, καὶ τὸ ϵ_2 τὸ βάρος ἐνὸς τρέχοντος μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ.

75. Ἄς ὑποθέσωμεν ἐνταῦθα ὅτι πρόκειται περὶ

Δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τοῦτο καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν, πρὸς δὲ ὑποκειμένης ταυτοχρόνως καὶ εἰς τὸν ἐφαλκυσμὸν τῆς δυνάμεως T, ἐνεργοῦσης κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἰνῶν.

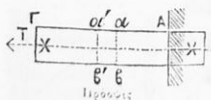
Ἐν τῇ παραγράφῳ 59 καὶ ἐπομένοις ἐπραγματεύθημεν περὶ δοκοῦ πεπακτωμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης



Σχ. 60

φορτίον ἢ φορτία ἐνεργοῦντα καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν πρᾶξιν, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς συγγραφῆς ταύτης, τὸ περὶ ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης πραγματευόμενον, ἐνδέχεται νὰ παρου-

σιασθῇ περίπτωσις, καθ' ἣν αἱ ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις νὰ μὴ ᾔναι κάθετοι ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν τῆς δοκοῦ, ἀλλὰ πλάγιοι ὡς εἰς τὸ σχῆμα 60, διὰ τοῦτο ἐν τῇ παρουσίᾳ παραγράφῳ θέλομεν ἐξετάσει καὶ τὴν περίπτωσιν ταύτην. Πρὸς τοῦτο ἂς θεωρήσωμεν τὴν δοκὸν ΑΓ (Σχ. 60) πεπακτωμένην εἰς τὸ ἄκρον Α, ἐλευθέραν εἰς



Σχ. 61

τὸ ἕτερον ἄκρον Γ, ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ ἡ πλάγια δύναμις Δ, καὶ ἂς ἴδωμεν τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς.

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἡ δύναμις Δ δύναιται νὰ ἀποσυντεθῇ εἰς τὰς συνιστώσας αὐτῆν B καὶ T (Σχ. 60), ἐξ ὧν ἡ μὲν B ἐνεργεῖ καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν τῆς δοκοῦ, ἡ δὲ T κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἰνῶν, καὶ ὅτι

τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἐνεργειῶν τῆς B καὶ T εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐνεργείας τῆς Δ δυνάμεως.

Παρατηροῦμεν πρὸς τούτοις, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως, τῆς διδούσης τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 60), πρέπει νὰ ἐξισώσωμεν τὴν ὀλικὴν κατὰ μέτρον ἐπιμήκυνσιν, ἢ σμίκρυνσιν, τὴν ὑπὸ τῆς πείρας ἐπιτρεπομένην, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ μονάδα ἐπιμηκύνσεων ἢ σμικρύνσεων, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν δυνάμεων B καὶ T, διότι αἱ ἐπιμηκύνσεις ἢ σμικρύνσεις, αἱ παραγόμεναι ὑπὸ τῶν δυνάμεων τούτων ἐπιπροστίθενται, ἵνα παρέξωσι τὴν ὀλικὴν ἐπιμήκυνσιν ἢ σμίκρυνσιν τῆς δοκοῦ ΑΓ.

Καλοῦντες ὅθεν ἰ τὴν κατὰ μονάδα ἐπιμήκυνσιν, τὴν ὑπὸ τῆς πείρας ἐπιτρεπομένην, ἰ' καὶ ἰ'' τὰς κατὰ μονάδα ἐπιμηκύνσεις, τὰς παραγομένας ὑπὸ τῶν δυνάμεων T καὶ B, P τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμὸν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται ὕλης, καὶ ω τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τῆς δοκοῦ, θέλομεν ἔχει τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (1), τὴν δίδουσαν τὴν ὀλικὴν ἐπιμήκυνσιν, ἥτοι

$$i = i' + i'' \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ δὲ τύπου τοῦ ἐφελκυσμοῦ $\frac{\mu}{M} = \frac{B}{\omega \cdot E}$ πορίζομεθα ἄφ' ἐνὸς τὸν τύπον

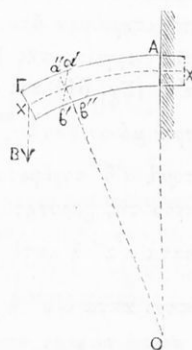
$$\frac{\mu}{M} = \frac{P \cdot \omega}{\omega \cdot E} \quad (2)$$

ἢ, παριστῶντες τὸ $\frac{\mu}{M}$, τὸ ἐκφράζον τὴν ὀλικὴν ἐπιμήκυνσιν ἢ σμίκρυνσιν τὴν ἐπιτρεπομένην ὑπὸ τῆς πείρας, διὰ τοῦ i,

$$i = \frac{P}{E} \quad (3),$$

ἄφ' ἑτέρου δὲ τὴν ὑπὸ τῆς δυνάμεως T παραγομένην κατὰ μονάδα ἐπιμήκυνσιν αα', ὡς πρὸς τινὰ διατομὴν αβ (Σχ. 61)

$$\frac{\alpha\alpha'}{\Lambda\alpha} = \frac{T}{\omega \cdot E} \quad (4)$$



Πρόβλημα

Σχ. 62

ἢ, παριστῶντες τὴν κατὰ μονάδα ἐπιμήκυνσιν $\frac{\alpha\alpha'}{\Lambda\alpha}$ διὰ τοῦ ι' ,

$$\iota' = \frac{T}{\omega \cdot E} \quad (5).$$

Ὅπως δὲ εὕρωμεν τὴν κατὰ μονάδα παραγομένην ἐπιμήκυνσιν ἢ σμίκρυνσιν ὑπὸ τῆς δυνάμεως B , τῆς τεινύσεως νὰ κάμψῃ τὴν δοκόν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διατομὴ $\alpha\beta$ παραδείγματος χάριν (Σχ. 61) διὰ τῆς ἐνεργείας τῆς T δυνάμεως μετατοπίζεται καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν $\alpha'\beta'$ (Σχ. 61) καὶ οὕτως ἡ δοκὸς $\Lambda\Gamma$ ἐπιμηκύνεται κατὰ τρέχον μέτρον μόνον κατὰ $\frac{\alpha\alpha'}{\Lambda\alpha}$, διὰ δὲ τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως B (Σχ. 62) ἡ τομὴ $\alpha'\beta'$ στρέφεται περίξ τοῦ ἄξονος, τοῦ διερχομένου ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητός της, καὶ οὕτως ἡ μὲν ἄνω ἴς $\Lambda\alpha'$ ἐπιμηκύνεται κατὰ $\alpha'\alpha''$ ἢ κατὰ $\frac{\alpha'\alpha''}{\Lambda\alpha'}$ κατὰ τρέχον μέτρον, ἡ δὲ κάτω ἴς $\Lambda\beta'$ σμικρύνεται κατὰ $\beta'\beta''$ ἢ $\frac{\beta'\beta''}{\Lambda\beta'}$ κατὰ τρέχον μέτρον. Ὅθεν πρὸς εὗρεσιν τῆς κατὰ μονάδα ἐπιμηκύνσεως $\frac{\alpha'\alpha''}{\Lambda\alpha'}$ ἢ σμικρύνσεως $\frac{\beta'\beta''}{\Lambda\beta'}$, λαμβάνομεν τὸν γνωστὸν τύπον (42) τῆς παραγράφου 59, ἥτοι τὸν

$$B \cdot \Gamma\alpha' = E \cdot I \frac{\alpha'\alpha''}{\Lambda\alpha'} \times \frac{1}{\upsilon} \quad (6)$$

διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν, καὶ

$$B \cdot \Gamma\alpha' = E \cdot I \frac{\beta'\beta''}{\Lambda\beta'} \times \frac{1}{\upsilon} \quad (7)$$

διὰ τὴν σμίκρυνσιν.

Παριστῶντες δὲ τὸ $\frac{\alpha'\alpha''}{\Lambda\alpha'}$ διὰ τοῦ ι'' ὡς καὶ τὸ $\frac{\beta'\beta''}{\Lambda\beta'}$, διότι ἡ ἐπιμήκυνσις $\frac{\alpha'\alpha''}{\Lambda\alpha'}$ εἶναι ἴση τῇ σμικρύνσει $\frac{\beta'\beta''}{\Lambda\beta'}$, καὶ τὴν ῥοπήν $B \cdot \Gamma\alpha'$ διὰ τοῦ γράμματος X , ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) ἢ (7) πορίζομεθα

$$\iota'' = \frac{X \cdot \upsilon}{E \cdot I} \quad (8).$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς ἐξίσωσιν (4) ἀντὶ ι , ι' καὶ ι'' τὰς τιμὰς αὐτῶν ἔχομεν τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν (9), ἥτοι

$$\frac{P}{E} = \frac{T}{\omega E} + \frac{X \cdot \upsilon}{E \cdot I} \quad (9),$$

η

$$P = \frac{T}{\omega} + \frac{X \cdot \upsilon}{I} \quad (10),$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τὰς ἐμπεριεχομένας εἰς τὸ ω καὶ τὸ I .

Ὅταν τὸ $\frac{T}{\omega}$ ᾖναι ἐλάχιστόν τι μέρος τοῦ $\frac{X \cdot \upsilon}{I}$, τότε χάριν ἀπλοποιήσεως τοῦ τύπου (10) παραλείπουσιν αὐτὸ καὶ οὕτω ἡ ἐξίσωσις (10) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς:

$$P = \frac{X \cdot \upsilon}{I} \quad \eta \quad \frac{PI}{\upsilon} = X \quad (11),$$

ἥτις εἶναι ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις (A) τῆς κάμψεως.

76. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (10) ἀρμόζει διὰ τὰς ἵνας, τὰς κειμένας ἄνωθεν τῆς μέσης ἰνὸς XX, διότι ἐκφράζει τὴν ὀλικὴν ἐπιμήκυνσιν τῶν ἰνῶν τῆς δοκοῦ. Διὰ τὰς ἵνας δέ, τὰς κειμένας κάτωθεν τῆς μέσης ἰνὸς XX, τὸ ζεύγος $B \cdot \Gamma \alpha' = X$ παράγει σμίκρυνσιν ἐκπεφρασμένην ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν διὰ τοῦ $\frac{\epsilon'' \epsilon'}{A \epsilon'}$, ἥτις εἶναι ἴση τῇ κατὰ μονάδα ἐπιμήκυνσει ϵ'' . Ἐπομένως αἱ κάτωθεν ἵνες ὑπόκεινται εἰς ἐπιμήκυνσιν ἢ σμίκρυνσιν ἐκπεφρασμένην διὰ τῆς διαφορᾶς $\epsilon' - \epsilon''$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) ἐνταῦθα γίνεταί

$$\epsilon = \epsilon' - \epsilon'' \quad (\alpha)$$

καὶ θέτοντες ἀντὶ ϵ , ϵ' , καὶ ϵ'' τὰς ἀνωτέρω εὐρεθείσας τιμὰς αὐτῶν καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἔχομεν

$$P = \frac{T}{\omega} - \frac{X \cdot \upsilon}{I} \quad (12).$$

Πρὸς προσδιορισμὸν ὅμως τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἐξίσωσιν (10), τὴν δίδουσιν μεγαλειτέρας διαστάσεις καὶ ὅχι τὴν (12).

Σημείωσις 1. Ἐὰν ἡ δύναμις T , ἀντὶ νὰ ἐφελκύνῃ τὴν δοκόν, θλίβῃ αὐτήν, τότε αἱ αὐταὶ ἐξισώσεις χρησιμεύουσι πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ μὲν (10) ἐκφράζει τὴν ὀλικὴν κατὰ μονάδα σμίκρυνσιν, ἡ δὲ (12) τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ὑπὸ τῆς δυνάμεως T παραγομένης σμικρύνσεως καὶ τῆς ὑπὸ τοῦ ζεύγους X παραγομένης ἐπιμήκυνσεως.

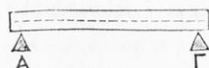
Σημείωσις 2. Αἱ αὐταὶ ἐξισώσεις (10) καὶ (12) ἀρμόζουσι καὶ ὅταν

ἐπὶ τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 60) ἐνεργοῦσι πολλαὶ δυνάμεις, ἡ βάρος ὁμοιο-
μόρφως μὲν διανεμημένον καθ' ὅλον τὸ μήκος τῆς δοκοῦ ΑΓ, ἀλλ' οὐχὶ
καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν, μὲ μόναν τὴν διαφο-
ράν, ὅτι τότε, γενομένης τῆς ἀποσυνθέσεως ὅλων τῶν δυνάμεων αὐτῆς
Δ, ἡ δύναμις Τ θὰ παριστᾷ τὴν συνισταμένην ὅλων τῶν δυνάμεων,
τῶν ἐνεργοῦσων κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δοκοῦ ΑΓ, τὸ δὲ Χ τὸ ἄθροι-
σμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων, τῶν καθέτως ἐνεργοῦσων ἐπὶ τῆς δοκοῦ
ΑΓ, ὡς ἐνεργεῖ καὶ ἡ δύναμις Β (Σχ. 60).

77. Ὡς ἐν ἀρχῇ τοῦ κεφαλαίου τούτου εἴπομεν (§ 59) αἱ εἰς κάμ-
ψιν ὑποκείμενοι δοκοὶ θλῶνται κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους.
Καὶ ἐν μὲν τῇ παραγράφῳ 59 καὶ λοιπαῖς ἐξητάσαμεν τρόπον τινὰ θλά-
σεως, ἥδη θέλομεν ἐξετάσει ἕτερον τρόπον θλάσεως δοκοῦ διὰ κάμ-
ψεως, καὶ πρὸς τοῦτο ἃς λάβωμεν ὑπ' ὄψιν

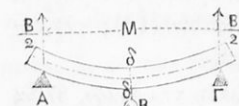
Δοκὸν στηριζομένην διὰ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων ἐπὶ δύο στερεῶν
ισοϋψῶν καὶ ὀριζοντίῳ στηριγμάτων, καὶ φέρουσαν φορτίον τι εἰς
τὸ μέσον αὐτῆς καὶ καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν ἐνεργοῦν.

Ἐστω π. χ. ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 63), ἥτις στηρίζεται διὰ τῶν δύο
αὐτῆς ἄκρων ἐπὶ τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ, ἅτινα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέ-
δου καὶ ὧν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις εἶναι Μ.
Πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὸ πάχος αὐτῆς, ὅπως
μὴ θλασθῇ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως Β,
τῆς ἐνεργοῦσης εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους αὐτῆς ΑΓ καὶ καθέτως ἐπὶ
τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν.



Πρόσψις

Σχ. 63



Πρόσψις

Σχ. 64

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ μήκος Μ τῆς δοκοῦ, τὸ πε-
ριεχόμενον μεταξὺ τῶν στηριγμάτων Α καὶ
Γ, δὲν ᾔηται πολὺ μέγα, ὥστε τὸ βάρος τῆς
ἰδίᾳς δοκοῦ νὰ κάμπηται αὐτὴν, ἡ δοκὸς μένει
σχεδὸν ὀριζοντία, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 63,
ὅταν οὐδεμίᾳ ἐξωτερικῇ δυνάμει ἐνεργῇ ἐπ'
αὐτῆς, καὶ ὅτι ἅμ' ὡς ἐπ' αὐτῆς ἐνεργήσῃ
δυνάμις τις, τὸ βάρος Β παραδείγματος χά-
ριν, ἡ δοκὸς κάμπεται ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 64. Ἐνεκα τῆς παραγο-
μένης κάμψεως αἱ μὲν ἄνω αὐτῆς ἴνες ὑπὸκεινται προφανῶς εἰς θλίψιν,
αἱ δὲ κάτω εἰς ἐφελκυσμόν, καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ μέσον δ εἶναι

ὀριζόντιος. Ἵνα δὲ μὴ καταπέσῃ ἡ δοκὸς ἀλλὰ μένῃ ἐν ἡ ἐτέθη θέσει, πρέπει τὰ στηρίγματα Α καὶ Γ νὰ ᾖναι ἰκανῶς ἰσχυρά, ὅπως ἀντέχουσι εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς κατὰ διάτμησιν ἐνεργούσης δυνάμεως $\frac{B}{2}$, διότι τὸ βάρος Β ἀποσυντίθεται εἰς δύο ἴσας συνιστώσας ἐνεργούσης ἐπὶ τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ.

Ἐπειδὴ ἡ δοκὸς κάμπεται, ὥς δεικνύει τὸ σχῆμα 64, καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ μέσον αὐτῆς δ, ἔνθα ἡ δύναμις ἐνεργεῖ, εἶναι ὀριζόντιος, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν δοκὸν ΑΓ (Σχ. 64) ὡς πεπακτωμένην εἰς τὸ μέσον δδ, ἐλευθέραν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Γ καὶ φέρουσαν φορτίον $\frac{1}{2}B$ εἰς ἕκαστον τῶν ἄκρων Α καὶ Γ. Ἐπομένως πρὸς εὐρεσιν τοῦ πάχους τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον (Α), ὅτε θέλομεν ἔχει

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{1}{2}B \times \frac{1}{2}M = \frac{BM}{4} \quad (E).$$

78. Ἐὰν παραβάλλωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (Ε) μὲ τὴν (Α) τῆς παραγράφου 59, βλέπομεν ὅτι ἡ αὐτὴ δοκὸς ΑΓ, τιθεμένη ἐπὶ δύο στερεῶν στηριγμάτων, υποβάσται βάρους τετραπλάσιον ἐκείνου, ὅπερ ἤθελεν υποβάσται ἡ αὐτὴ δοκὸς, ἐὰν ἐπακτοῦτο εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐτέρου ἐλευθέρου ἄκρου ἔφερε τὸ φορτίον.

Τῶντοι, ἂν καλέσωμεν Β καὶ Β' τὰ βάρη ταῦτα, πρὸς προσδιορισμὸν αὐτῶν θέλομεν ἔχει

$$\frac{PI}{\nu} = MB', \quad \text{διὰ τὴν πεπακτωμένην δοκὸν εἰς τὸ ἐν ἄκρον καὶ φέρουσαν Β' φορτίον ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου.}$$

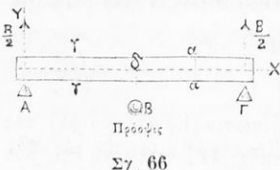
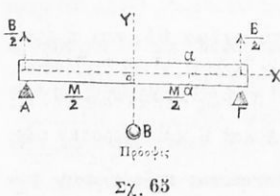
$$\frac{PI}{\nu} = M \frac{B}{4} \quad \text{διὰ δοκὸν στηριζομένην ἀπλῶς ἐπὶ δύο στηριγμάτων, καιμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶναι ἴσα, διότι αἱ δύο δοκοὶ ἔχουσι τὰς αὐτὰς διαστάσεις καὶ εἶναι καὶ τῆς αὐτῆς φύσεως, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ δεύτερα αὐτῶν μέλη θέλουσιν εἶναι ἴσα, ἐπομένως θέλομεν ἔχει

$$MB' = M \frac{B}{4}, \quad \text{ἢ} \quad B = 4B',$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

79. Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (E) δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν καὶ διὰ τῆς ἀναλύσεως, λαμβάνοντες ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων τὴν μέσην ἵνα τῆς δοκοῦ καὶ ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων τὴν ἐπὶ τῆς μέσης ἰνὸς κἀθετον ἀγομένην ἢ ἀπὸ τοῦ μέσου ο (Σχ. 65), ἢ ἀφ' ἐνὸς τῶν δύο στηριγμάτων Α καὶ Γ (Σχ. 66). Τὸν ἄξονα δὲ τῶν τεταγμένων Υ λαμβάνομεν εἰς τὸ μέσον μὲν τῆς δοκοῦ,



ὅσακις ὑπάρχει, ὡς θέλομεν ἀποδείξει τοῦτο κατωτέρω, συμμετρία (π. χ. ὅταν τὸ βάρος Β ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ἢ ὅταν δύο ἴσα βάρη ἐνεργῶσιν ἐπὶ δύο σημείων τῆς δοκοῦ, ἰσάκις ἀπεχόντων τοῦ μέσου αὐτῆς, ἢ ὅταν ἡ δοκὸς ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη κτλ.) εἰς τὸ ἐν δὲ τῶν στηριγμάτων τῆς δοκοῦ, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ συμμετρία. Ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ προκειμένου ζητήματος τὸ βάρος Β (Σχ. 65) ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ΑΓ καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ δύο τμήματα οΑ καὶ οΓ εἶναι συμμετρικά, διότι εἰς

τὰ ἄκρα Α καὶ Γ ἐνεργοῦσιν δυνάμεις ἴσαι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, αὐταὶ δὲ εἶναι αἱ ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ, ἐκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους Β, τοῦ ἐνεργούντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἔπεται ὅτι θέλομεν εὗρεν τὸ αὐτὸ πάχος τῆς δοκοῦ εἴτε λάβωμεν ὑπ' ὅψιν τὸ τμήμα οΑ εἴτε τὸ τμήμα οΓ. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ μέσον τοῦ μήκους ΑΓ, δηλ. τὸ σημεῖον ο (Σχ. 65). Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἂς λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 65), ἄξονας τῶν συντεταγμένων τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας οΧ καὶ οΥ (Σχ. 65), καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ τμήμα οΓ τῆς δοκοῦ. Ἴνα εὗρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκρασίου αὐτῆς τομῆς παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ βάρος Β δύναται νὰ ἀποσυντεθῇ εἰς δύο συνιστώσας, ἐνεργοῦσας ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Γ, ὅτι αἱ συνιστώσαι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἄλληλας, καὶ μὲ τὸ $\frac{B}{2}$, διότι τὸ σημεῖον ο, ἔνθα τὸ βάρος Β ἐνεργεῖ, εἶναι τὸ μέσον τοῦ μήκους ΑΓ καὶ ὅτι, ἐπειδὴ ὑπάρχει ἰσορροπία, διότι ἡ δοκὸς δὲν κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς

δυνάμειος B, ἕκαστον τῶν στηριγμάτων A καὶ Γ παράγει ἀντίδρασιν, ἴσην μὲν μὲ τὴν συνιστῶσαν $\frac{B}{2}$ πλὴν ἀντιθέτως ταύτης ἐνεργοῦσαν, δηλ. ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 6ῶ, καὶ προσέτι ὅτι δυνάμεθα ἀντεισάγοντες ἀντὶ τῶν στηριγμάτων A καὶ Γ τὰς ἀντιδράσεις αὐτῶν $\frac{B}{2}$ νὰ θεωρήσωμεν τὴν δοκὸν ὅλως ἐλευθέραν. Οὕτω θέλωμεν ἔχει ὑπ' ὄψιν μας τρεῖς δυνάμεις: τὴν B, ἐνεργοῦσαν εἰς τὸ σημεῖον ο ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, τὴν $\frac{B}{2}$ ἐνεργοῦσαν εἰς τὸ σημεῖον A ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὴν $\frac{B}{2}$ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐνεργοῦσαν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τούτου τεθέντος, ἂς εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς μιᾶς οἰασδῆποτε διατομῆς τῆς δοκοῦ, π. χ. τῆς αα.

Καλοῦντες χ τὴν ἀπόστασιν τῆς τομῆς αα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ο, καὶ μ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους ΑΓ, δηλ. τὸ οΓ, θέλωμεν ἔχει ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς αα, τὴν ἐξῆς

$$\frac{PI}{\sigma} = (\mu - \chi) \frac{1}{2} B \quad (1).$$

Τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ δεύτερον μέλος αὐξάνει, ὅταν τὸ χ ἐλαττωῖται, καὶ γίνεται μέγιστον, ὅταν τὸ χ γένηται μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ τὰς αὐτὰς μεταβολὰς ὑφίσταται καὶ τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος, ἔπεται ὅτι ἡ τομὴ, ἡ διερχομένη ἐκ τῆς ἀρχῆς ο, διατρέχει τὸν μεγαλείτερον κίνδυνον πάσης ἄλλης διατομῆς, περιεχομένης μεταξὺ τῶν σημείων ο καὶ Γ. Ἐπομένως, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς οΓ νὰ ᾖ ἰσοπαχὴς, πρέπει πρὸς εὐρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν τομὴν τὴν τρέχουσαν τὸν μεγαλείτερον κίνδυνον, καὶ ἥτις ἐνταῦθα εἶναι, ὡς ἀνωτέρω ἐβρέθη, ἡ διερχομένη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ο τομὴ. Ἡ ἐξίσωσις δὲ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τῆς διερχομένης ἐκ τῆς ἀρχῆς ο εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{\mu}{2} \cdot B \quad (2),$$

ἥτις εὐρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἐὰν ἐν αὐτῇ τεθῇ ἡ τιμὴ αὐτῆς, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι μηδέν.

Τὴν ἐξίσωσιν (2) μετασχηματίζομεν θέτοντες ἀντὶ μ τὸ ἴσον αὐτῶν $\frac{M}{2}$, εἰς τὴν ἐπομένην

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{MB}{4} \quad (3),$$

ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσαν ἐξίσωσιν (E).

80. Εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (E) φθάνομεν καὶ ὅταν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων λάβωμεν ὅχι εἰς τὸ μέσον, ἀλλ' ἐπὶ τοῦ ἐνὸς τῶν δύο στηρίγματων.

Τῷ ὄντι, ἂς λάβωμεν τὸν ἄξονα τῶν Υ' εἰς τὸ ἐν ἄκρον, π. χ. εἰς τὸ σημεῖον Α (Σχ. 66). Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην θέλομεν ἔχει δύο ἐξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, μίαν διὰ τὸ τμήμα δΓ τῆς δοκοῦ, καὶ ἑτέραν διὰ τὸ τμήμα Αδ αὐτῆς· διότι εἰς μὲν τὸ τμήμα δΓ ἐνεργεῖ μόνον ἡ ἀντίδρασις τοῦ στηρίγματος Γ, τείνουσα νὰ κάμψῃ τὴν δοκὸν πρὸς τὰ ἄνω, εἰς δὲ τὸ Αδ ἐνεργοῦσιν ταυτοχρόνως δύο δυνάμεις· ἡ Β εἰς τὸ μέσον δ, τείνουσα νὰ κάμψῃ τὴν δοκὸν πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἡ $\frac{B}{2}$ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τείνουσα νὰ κάμψῃ αὐτὴν πρὸς τὰ ἄνω.

Αἱ ἐξισώσεις δὲ αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = (M - \chi) \frac{B}{2} \quad (1)$$

διὰ τὴν τομὴν αα τοῦ τμήματος δΓ.

$$\frac{PI}{\nu} = (M - \chi') \frac{B}{2} - \left(\frac{M}{2} - \chi' \right) B \quad (2)$$

διὰ τὴν τομὴν γγ τοῦ τμήματος Αδ.

Τὸ χ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ $\frac{M}{2}$ ἕως Μ, τὸ δὲ χ' τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{M}{2}$. Τὰ δὲ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων καθίστανται μέγιστα, τῆς μὲν πρώτης ὅταν $\chi = \frac{M}{2}$, τῆς δὲ δευτέρας ὅταν $\chi' = \frac{M}{2}$.

Ποιοῦντες ὅθεν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις $\chi = \frac{M}{2}$ καὶ $\chi' = \frac{M}{2}$ εὐρίσκομεν

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{BM}{4} \quad (3)$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{BM}{4} \quad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) πηγάζει ἐκ τῆς (1) καὶ ἡ (4) ἐκ τῆς (2), ἀμφότεραι δὲ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν E, καὶ τοῦτο ἐπρόκειτο νὰ δεῖξωμεν.

81. Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τῆς ἀνωτέρου παραγράφου ἂν καὶ φαίνονται ὅτι διαφέρουσι μετὰξὺ τῶν, οὐχ ἥττον ταυτίζονται, ὅταν αἱ διατομαὶ αα καὶ γγ ἰσάκεις ἀπέχωσι τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ.

Πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ διατομαὶ αα καὶ γγ ἰσάκεις ἀπέχωσι τοῦ μέσου δ, καὶ ἂς παρστήσωμεν τὸ Αγ διὰ χ' καὶ τὸ Αα διὰ χ . Θέλωμεν τότε εἶναι

$$\chi' = \text{Αγ} \quad \text{καὶ} \quad \chi = \text{Αα} = \text{ΑΓ} - \text{Γα} = \text{Μ} - \chi',$$

θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς ἀνωτέρου παραγράφου ἀντὶ χ τὸ ἴσον αὐτῷ $\text{Μ} - \chi'$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς δυνατὰς ἀπλοποιήσεις ἐπὶ τῆς (2) εὐρίσκομεν

$$\frac{\text{PI}}{\gamma} = (\text{Μ} - \chi) \frac{\text{B}}{2} = \frac{\text{B}}{2} (\text{Μ} - \text{Μ} + \chi') = \frac{\text{B}}{2} \chi' \quad (5)$$

διὰ τὴν αα τομὴν

$$\frac{\text{PI}}{\gamma} = (\text{Μ} - \chi') \frac{\text{B}}{2} - \left(\frac{\text{Μ}}{2} - \chi' \right) \text{B} = \frac{\text{B}}{2} \chi' \quad (6).$$

διὰ τὴν τομὴν γγ.

Παραβάλλοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6), βλέπομεν ὅτι αὗται εἶναι αἱ αὐταί, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ μὲν (6) τῆς τομῆς γγ ἀναφέρεται εἰς τὴν Α ἀρχὴν, καὶ τὸ χ' παριστᾷ τὴν Αγ, ἡ δὲ (2) τῆς αα τομῆς ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀρχὴν Γ, καὶ τὸ χ' αὐτῆς παριστᾷ τὴν αΓ.

Ἐκ τῆς ταυτίσεως δὲ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι εἴτε λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τὸ στήριγμα Α εἴτε τὸ στήριγμα Γ, πάντοτε εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς φθάνομεν, ὅταν τὸ βᾶρος B ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, δηλ. ὅταν ὑπάρχῃ συμμετρία. Τοῦτου ἕνεκα πρέπει κατὰ προτίμησιν νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων εἰς τὸ μέσον, ἵνα ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ὑπὸ ἀπλουστέραν μορφήν.

82. Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 65) νὰ ᾖναι στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε λαμβάνομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\text{PI}}{\gamma} = (\mu - \chi) \frac{\text{B}}{2} \quad (1)$$

μιᾶς οἰασδὴποτε τομῆς, τῆς αα παραδείγματος χάριν, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας οX καὶ οY (Σχ. 65) καὶ ἐκ ταύτης προσδιορίζομεν ἢ τὴν πρόσφυιν τῆς δοκοῦ ἢ τὴν κάτοψιν αὐτῆς ἀπαρραλλάκτως, ὅπως ἐπράξαμεν καὶ ὅταν ἡ δοκὸς ΑΓ ἦτο πεπακτωμένη εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐτέρου ἐλευθέρου ἄκρου αὐτῆς ἔφερε τὸ φορτίον B.

Ἐφαρμόζοντες καὶ ἐνταῦθα ὅ,τι εἴπομεν ἐν τῇ § 72 κτλ., θέλομεν ἴδει, προκειμένου περὶ δοκοῦ ὀρθογωνίου π. χ., ὅτι ἐὰν μὲν ἡ βάσις α ληφθῇ σταθερά, ἢ πρόσφιν θὰ ἦναι τμήμα παραβολῆς, ἐὰν δὲ τὸ ὕψος β ληφθῇ σταθερόν, ἢ κάτοψιν θὰ ἦναι τρίγωνον.

83. Ἐὰν ἡ δοκὸς, ἢ στηριζομένη ἀπλῶς διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στηριγμάτων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου κειμένων, φέρῃ φορτίον ὅχι εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἀλλ' εἰς ἕτερόν τι σημεῖον, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς προσδιορίζεται διὰ τῆς ἀναλύσεως ὡς ἑξῆς.

Ἐστω π. χ. ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 67) στηριζομένη ἐπὶ τῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου κειμένων στηριγμάτων Α καὶ Γ, καὶ ἔστω B τὸ φορτίον, ὅπερ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς διατομῆς γγ, ἀπεχούσης ἀπὸ μὲν τοῦ στηρίγματος Α κατὰ μ', ἀπὸ δὲ τοῦ Γ στηρίγματος κατὰ μ. Ἐστω πρὸς τούτοις M τὸ ὅλικόν μῆκος ΑΓ αὐτῆς. Καλοῦντες K' καὶ K τὰς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ καὶ λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ ἐν τῶν στηριγμάτων, π. χ. τὸ Γ, καὶ ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς οX καὶ οY, ἔχομεν

$$K = \frac{B \cdot \mu'}{M}, \quad K' = \frac{B \cdot \mu}{M}$$

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B \cdot \mu}{M} (M - \chi) \quad (1)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς διὰ τὸ τμήμα γΑ, ἐν ᾧ τὸ χ λαμβάνει τιμὰς μεταβαλλομένης ἀπὸ τοῦ μ μέχρι τοῦ M. Καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B \cdot \mu}{M} (M - \chi) - B(\mu - \chi) \quad (2)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς διὰ τὸ τμήμα Γγ, ἐν ᾧ τὸ χ λαμβάνει τιμὰς μεταβαλλομένης ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ μ.

Ἐάν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖναι στερεὸν ἔσης ἀντιστάσεως, τότε προσδιορίζομεν τὰ πᾶχη τῆς δοκοῦ τοῦ μὲν τμήματος $\Gamma\Gamma'$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), τοῦ δὲ τμήματος $\Delta\Gamma$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2). Ἐάν ὅμως θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖναι ἰσοπαχὴς, τότε ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ἐκείνην, ἥ ἐ μέγιστη τιμὴ εἶναι μεγαλειτέρα. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προηγουμένως νὰ εὗρωμεν τὰς μεγίστας τιμὰς τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἵνα ἴδωμεν ποία τούτων εἶναι ἡ μεγαλειτέρα.

Διερευνῶντες δὲ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) βλέπομεν, ὅτι τὰ δεύτερα μέλη αὐτῶν γίνονται μέγιστα ὅταν $\chi = \mu$, καὶ ὅτι ὅταν $\chi = 0$, τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) γίνεται μηδέν, καὶ ὅταν $\chi = M$, τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) γίνεται μηδέν. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ὁ κίνδυνος τῆς θλάσεως εἶναι εἰς τὴν τομὴν $\gamma\gamma'$, ἐνθα ἐνεργεῖ τὸ βᾶρος B καὶ ὅτι αἱ μέγιστα τιμαὶ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσαι, διότι διὰ τὴν διατομὴν $\gamma\gamma'$ μία μόνον ἐξίσωσις ὑπάρχει.

Θέτοντες λοιπὸν μ ἀντὶ χ εἰς μίαν τῶν ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεων, εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς $\gamma\gamma'$, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ $\Delta\Gamma$.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B \cdot \mu \cdot \mu'}{M} \quad (3).$$

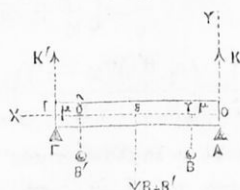
Παρατήρησις. Ἐάν ἔχωμεν $\mu = \mu' = \frac{M}{2}$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (3) γί-

νεται

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{BM}{4} \quad (4).$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (E) τῆς παραγράφου 77.

84. Ἐάν ἡ δοκὸς $\Delta\Gamma$ (Σχ. 68), ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῶν δύο ἰσοϋψῶν στηριγμάτων A καὶ Γ , φέρῃ φορτίον ἐνθεν καὶ ἐνθεν τοῦ μέσου αὐτῆς, π. χ. φέρῃ φορτίον B εἰς τὸ σημεῖον γ καὶ B' εἰς τὸ σημεῖον δ , ἡ ἐξίσωσις ἐγκαρσίου τινὸς αὐτῆς τομῆς εὐρίσκεται εὐκόλως καὶ ὡς ἐξῆς.



Σχ. 68

Καλοῦντες K τὴν ἀντίδρασιν τοῦ στηρίγματος A καὶ K' τὴν τοῦ Γ , μ καὶ μ' τὰς ἀποστάσεις $\gamma\sigma$ καὶ $\delta\Gamma$, καὶ M

τὸ μῆκος ΑΓ λαμβάνοντες δὲ ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ ἐν τῶν δύο στῆριγμάτων, π. χ. τὸ Α, καὶ ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς οΧ καὶ οΥ, ἔχομεν

1^{ον} Ἀντιδράσεις

$$K = \frac{B' \cdot \mu'}{M} + \frac{B(M - \mu)}{M}, \quad \text{διὰ τὸ στῆριγμα Α,}$$

$$K' = \frac{B \cdot \mu}{M} + \frac{B'(M - \mu')}{M}, \quad \text{διὰ τὸ στῆριγμα Γ.}$$

2^{ον} Ἐξισώσεις τῶν ἐγκαρσίων τομῶν

$$\frac{PI}{\upsilon} = K'(M - \chi) \quad (1)$$

διὰ τὸ τμήμα δΓ,

$$\frac{PI}{\upsilon} = K'(M - \chi) - B'(M - \mu' - \chi) \quad (2)$$

διὰ τὸ τμήμα γδ, καὶ

$$\frac{PI}{\upsilon} = K'(M - \chi) - B'(M - \mu' - \chi) - B(\mu - \chi) \quad (3)$$

διὰ τὸ τμήμα ογ.

Αἱ ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) μετασχηματίζονται εἰς τὰς κάτωθι τιθεμένης ἐν αὐτοῖς ἀντὶ τῆς ἀντιδράσεως K' τῆς γνωστῆς αὐτῆς τιμῆς

$$\frac{PI}{\upsilon} = \left(\frac{B\mu}{M} + \frac{B'(M - \mu')}{M} \right) (M - \chi) \quad (4)$$

$$\frac{PI}{\upsilon} = \left(\frac{B\mu}{M} + \frac{B'(M - \mu')}{M} \right) (M - \chi) - B'(M - \mu' - \chi) \quad (5)$$

$$\frac{PI}{\upsilon} = \left(\frac{B\mu}{M} + \frac{B'(M - \mu')}{M} \right) (M - \chi) - B'(M - \mu' - \chi) - B(\mu - \chi) \quad (6)$$

Τὸ χ λαμβάνει τιμὰς ἐν μὲν τῇ ἐξισώσει (1) ἢ (4) ἀπὸ τοῦ $M - \mu'$ μέχρι τοῦ M , ἐν δὲ τῇ (2) ἢ (5) ἀπὸ τοῦ μ μέχρι τοῦ $M - \mu'$, καὶ ἐν τῇ (3) ἢ (6) ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ μ . Καὶ ἂν μὲν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 68) νὰ ᾖ στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε τὰ πάχη τοῦ μὲν τμήματος δΓ θὰ προσδιορίσωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4), τοῦ δὲ τμήμα-

τος γδ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) καὶ τοῦ τμήματος ογ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (6). Ἄν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾔναι ἰσοπαχῆς, τότε πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκείνην τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων, ἥς ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι μεγαλειτέρα. Πρὸς τοῦτο δὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς μεγίστας τιμὰς τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων (4), (5) καὶ (6).

Ὅθεν διασκοποῦντες τὰς ἐξισώσεις (4) (5) καὶ (6) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ μὲν τὸ τμήμα δΓ ὁ μεγαλειότερος κίνδυνος τῆς θλάσεως εἶναι εἰς τὴν τομὴν δ, ἐνθα ἐνεργεῖ τὸ βάρος Β', διὰ δὲ τὸ τμήμα γδ, ὁ μέγιστος κίνδυνος εἶναι εἰς τὴν τομὴν ε, ἐνθα ἐνεργεῖ ἡ συνισταμένη $B+B'$, καὶ διὰ τὸ τμήμα ογ εἰς τὴν τομὴν γ ἐνθα ἐνεργεῖ τὸ βάρος Β. Ἐπομένως ὅπως εὕρωμεν τὰς ζητούμενας μεγίστας τιμὰς τῶν δευτέρων μελῶν, θέτομεν ἀντὶ τοῦ χ ἐν μὲν τῇ ἐξισώσει (4) τὴν τετμημένην τοῦ σημείου δ, ἐν τῇ (5) τὴν τετμημένην τοῦ σημείου ε καὶ ἐν τῇ (6) τὴν τετμημένην τοῦ σημείου γ, ἥτοι τὰς κάτωθι τιμὰς

$$\chi = M - \mu' \quad \text{ἐν τῇ (4) ἐξισώσει.}$$

$$\chi = \mu + \frac{B'(M - \mu - \mu')}{B + B'} \quad \text{ἐν τῇ (5) ἐξισώσει}$$

$$\text{καὶ } \chi = \mu \quad \text{ἐν τῇ (6) ἐξισώσει,}$$

καὶ ἔχομεν

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B\mu\mu'}{M} + B'\mu' - \frac{B'\mu'^2}{M} \quad (7)$$

διὰ τὴν διατομὴν δ,

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B^2\mu}{B+B'} \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) + \frac{2.BB'\mu\mu'}{M(B+B')} + \frac{B'^2\mu'}{(B+B')} \left(1 - \frac{\mu'}{M} \right) \quad (8)$$

διὰ τὴν διατομὴν ε, καὶ

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{B'\mu\mu'}{M} + B\mu - \frac{B\mu^2}{M} \quad (9)$$

διὰ τὴν διατομὴν γ.

Παρατήρησις 4. Ὑπὸ τὴν γενικὴν ταύτην μορφήν δὲν δύναται τις ευκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (7), (8) καὶ (9) νὰ διακρίνη ποίας τούτων τὸ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ μεγαλειότερον, ἀλλὰ θέτοντες τὰς

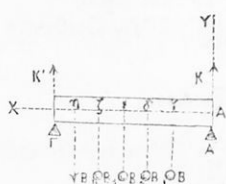
τιμὰς τοῦ B, B', μ, μ' καὶ M ἐκάστου μερικοῦ προβλήματος εἰς τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἐξισώσεις, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν εἶδει εὐκόλως ποίας τὸ δεύτερον μέλος εἶναι μεγαλύτερον, ἵνα ταύτην λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ.

Παρατήρησις 2. Ἐὰν ἔχωμεν $\mu = \mu'$ καὶ $B = B'$, τότε αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις (7), (8) καὶ (9) ταυτίζονται εἰς μίαν, τὴν ἑξῆς

$$\frac{Pl}{u} = B\mu \quad (10).$$

Τοῦτο δὲ δηλοῖ ὅτι, ὅταν δύο βάρη ἴσα τίθενται συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, π. χ. εἰς τὰ σημεῖα γ καὶ δ (Σχ. 68), αἱ τομαὶ γ καὶ δ, ἀπ' εὐθείας τὰ βάρη ἐνεργοῦσι, ὑποφέρωσιν ὅσον καὶ ἡ εἰς τὸ μέσον ε τῆς δοκοῦ τιμὴ.

85. Ἐὰν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 69), ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῶν δύο ἰσοῦψων



Σχ. 69

στηριγμάτων Α καὶ Γ, φέρη πολλὰ φορτία ἐνεργοῦντα καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῆς εἰς πολλὰ σημεῖα, οἷον εἰς τὰ γ, δ, ε, κτλ. (Σχ. 69), ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς καὶ ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης εὐρίσκεται εὐκόλως ὡς καὶ ἀνωτέρω, διὰ τῶν ἀντιδράσεων Κ καὶ Κ' τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ, αἵτινες προσδιορίζονται εὐκόλως διὰ τῆς

μηχανικῆς. Παραδείγματός χάριν, ἂν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ στήριγμα Α καὶ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου ὅ,τι εἵπομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον, θέλομεν εὑρεῖ τὰς κάτωθι ἐξισώσεις.

$$K = \frac{B(M - \mu)}{M} + \frac{B_1(M - \mu_1)}{M} + \frac{B_2(M - \mu_2)}{M} + B_3 \frac{(M - \mu_3)}{M} + \frac{B_4(M - \mu_4)}{M}$$

ἀντίδρασις τοῦ στηρίγματος Α.

$$K' = \frac{B\mu}{M} + \frac{B_1\mu_1}{M} + \frac{B_2\mu_2}{M} + \frac{B_3\mu_3}{M} + \frac{B_4\mu_4}{M}$$

ἀντίδρασις τοῦ στηρίγματος Γ.

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \mu_1) \quad (4)$$

διὰ τὴν τομὴν η .

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \mu_2) - B_4(\mu_4 - \mu_3) \quad (2)$$

διὰ τὴν τομὴν ζ .

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \mu_2) - B_4(\mu_4 - \mu_2) - B_3(\mu_3 - \mu_2) \quad (3)$$

διὰ τὴν τομὴν ϵ .

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \mu_1) - B_4(\mu_4 - \mu_1) - B_3(\mu_3 - \mu_1) - B_2(\mu_2 - \mu_1) \quad (4)$$

διὰ τὴν δ τομὴν.

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \mu) - B_4(\mu_4 - \mu) - B_3(\mu_3 - \mu) - B_2(\mu_2 - \mu) - B_1(\mu_1 - \mu) \quad (5)$$

διὰ τὴν γ τομὴν.

Τὰ δὲ δεδομένα τοῦ ζητήματος τούτου (Σχ. 69), δι' ὧν εὐρέθησαν αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις εἶναι τὰ ἑξῆς

B , βάρος ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον γ τῆς δοκοῦ,

B_1 , βάρος ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον δ τῆς δοκοῦ,

B_2 , βάρος ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον ϵ τῆς δοκοῦ,

B_3 , βάρος ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον ζ τῆς δοκοῦ,

B_4 , βάρος ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον η τῆς δοκοῦ,

$\mu = A\gamma$, $\mu_1 = A\delta$, $\mu_2 = A\epsilon$, $\mu_3 = A\zeta$, $\mu_4 = A\eta$ καὶ $M = A\Gamma$.

Παρατήρησις 1. Ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς $A\Gamma$ (Σχ. 69) νὰ ᾖται ἰσοπαχῆς, τότε δι' ἕκαστον μερικὸν παράδειγμα πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς πρέπει ἐκ τῶν ἀνωτέρω πέντε ἐξισώσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς νὰ λαμβάνωμεν ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος εἶναι μεγαλύτερον.

Παρατήρησις 2. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς $A\Gamma$ (Σχ. 69) νὰ ᾖται στερεὸν ὕλης ἀντιστάσεως, τότε τὰ πάχη τῶν διαφόρων τμημάτων τῆς δοκοῦ $A\Gamma$ θέλωμεν ὑπολογίζει ἰδίᾳ ἕκαστον καὶ ὡς ἑξῆς: ἥτοι, τοῦ μὲν τμήματος $\eta\Gamma$ διὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ἀντικαθιστῶντες τὸ μ_4 διὰ τῆς ἀγνώστου χ , καὶ δίδοντες εἰς ταύτην τιμὰς ἀπὸ $\chi = \mu_4$ μέχρι $\chi = M$.

Τοῦ δὲ τμήματος ζη διὰ τῆς ἐξισώσεως (2) ἀντικαθιστῶντες τὸ μ_3 διὰ τοῦ χ καὶ δίδοντες εἰς τὴν ἄγνωστον τιμὰς ἀπὸ $\chi = \mu_3$ μέχρι $\chi = \mu_4$.

Τοῦ δὲ τμήματος εζ διὰ τῆς ἐξισώσεως (3) ἀντικαθιστῶντες τὸ μ_2 διὰ χ καὶ δίδοντες εἰς τὸ χ τιμὰς ἀπὸ $\chi = \mu_2$ μέχρι $\chi = \mu_3$.

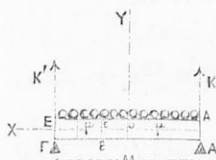
Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον προσδιορίζομεν τὰ πάχη τῶν ἐγκαρσίων τομῶν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) τῶν τμημάτων δε, δγ θέτοντες ἐν αὐταῖς χ ἀντὶ τοῦ μ_1 καὶ μ καὶ δίδοντες εἰς τὴν ἄγνωστον χ τιμὰς ἀπὸ $\chi = \mu_1$ μέχρι $\chi = \mu_2$, ὅταν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν (4), καὶ ἀπὸ $\chi = \mu$ μέχρι $\chi = \mu_1$, ὅταν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν (5).

Τοῦ δὲ τμήματος Αγ τὰ πάχη τῆς ἐγκαρσίου τομῆς προσδιορίζομεν ἐκ τῆς κάτωθι ἐξισώσεως (6), ἐν ᾗ ἡ χ λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ $\chi = 0$ μέχρι $\chi = \mu_1$

$$\frac{PI}{U} = K'(M - \chi) - B_4(\mu_1 - \chi) - B_3(\mu_3 - \chi) - B_2(\mu_2 - \chi) - B_1(\mu_1 - \chi) - B(\mu - \chi) \quad (6).$$

Σημειώσεις. Τὰ ἐν τῇ ἀνωτέρῳ παραγράφῳ ἐκτεθέντα ἀρκοῦσι πρὸς ἐδηγίαν τῶν μαθητῶν, ἵνα ἐπιλύσῃ πᾶν ζήτημα ἐμοίᾳς φύσεως καὶ ὅταν αἱ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις ἦναι ὁσαιδήποτε καὶ ὅποιαισδήποτε ἐντάσεως καὶ φορᾶς.

86. Ἐὰν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 70), ἡ στηριζομένη ἐπὶ δύο ἰσοῦψων στηριγμάτων Α καὶ Γ, φέρῃ πλεῖστα φορτία ἰσοβαρῆ, τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ συμμετρικῶς κείμενα κατ' ἀναφορὰν ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, τότε αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δοκὸς ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ πλάτος αὐτῆς, ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοιαύτης δοκοῦ προσδιορίζεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς.



Σχ. 70

Ἐστω π. χ . ἡ δοκὸς ΑΓ, ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῶν δύο ἰσοῦψων στηριγμάτων Α καὶ Γ (Σχ. 70) καὶ ἅ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῆς δοκοῦ (τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, ὑπερ καὶ τοῦτο εἶναι φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον παραλείπομεν ἐπὶ τοῦ παρόντος, παρακατιόντες δὲ θέλομεν ἶδει τίνι τρόπῳ λαμβάνομεν καὶ τοῦτο ὑπ' ὄψιν), καὶ Μ ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν δύο στηριγμάτων Α καὶ Γ, ἥτις θεωρεῖται καὶ μῆκος τῆς δοκοῦ.

Ἐπειδὴ ἔνθεν καὶ ἔνθεν τοῦ μέσου ο τῆς δοκοῦ αὕτη εἶναι συμμετρικῶς φορτωμένη, λαμβάνομεν ἕνεκα τῆς συμμετρίας ταύτης ὡς ἀρχὴν

τῶν συντεταγμένων τὸ σημεῖον ο καὶ θεωροῦμεν μόνον τὸ ἐν τῶν δύο τμημάτων οΑ καὶ οΓ αὐτῆς πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐξίσωσως ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς.

Λαμβάνοντες τὰς καθέτους εὐθείας οχ καὶ οψ ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ καλοῦντες μ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος οΓ, Κ καὶ Κ τὰς ἴσας ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ καὶ χ τὴν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ο ἀπόστασιν ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς εε, θέλωμεν ἔχει

$$K = \mu \cdot \epsilon \quad (1)$$

δι' ἀντίδρασιν τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{PI}{\nu} = \mu \epsilon (\mu - \chi) - \frac{(\mu - \chi)^2}{2} \epsilon \quad (2)$$

ἢ, ἐκτελοῦντες τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας ἐργασίας καὶ ἀναγωγάς, τὴν

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{\epsilon}{2} (\mu^2 - \chi^2) \quad (3)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς εε.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (3) προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, ἂν αὕτη θέλωμεν νὰ ᾖται ἰσοπαχής, ἢ τὰς διαστάσεις τῶν ἐγκαρσίων τομῶν αὐτῆς, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως.

Παραδείγματος χάριν, ἂν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 70) νὰ ᾖται ἰσοπαχής, τότε πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν ἐκεῖνης τῆς διατομῆς, ἥτις διατρέχει τὸν μεγαλειέτερον κίνδυνον, καὶ ὡς τοιαύτη δὲ ἐνταῦθα εἶναι ἡ τομὴ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ο· διότι ἡ ἐξίσωσις (3) δεικνύει ὅτι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς γίνεται μέγιστον, ὅταν ἡ χ γείνηται ἴση μὲ τὸ μηδέν.

Ὅθεν ὑποθέτοντες $\chi = 0$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὐρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς τομῆς ο, τῆς διατρεχούσης τὸν μεγαλειέτερον κίνδυνον, τὴν ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{\epsilon \mu^2}{2} \quad (4)$$

ἐξ ἧς θὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ.

Παρατήρησις. Καλοῦντες Β τὸ ὅλικόν φορτίον, τὸ ὁμοιομόρφως δια-

νεμημένον καθ' ὅλον τὸ μήκος τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 70), θέλωμεν ἔχει $B=M\epsilon=2\mu\epsilon$. Ἀντείσχοντες δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (4) $\frac{B}{2}$ ἀντὶ $\mu\epsilon$, $\frac{M}{2}$ ἀντὶ τοῦ μ θέλωμεν ἔχει

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{B\mu}{4} = \frac{BM}{8} \quad (\Sigma T).$$

Παραβάλλοντες δὲ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (ΣΤ) πρὸς τὸν τύπον Ε τῆς παραγράφου 77 βλέπομεν ὅτι ἡ αὐτὴ δοκὸς ΑΓ, φορτωμένη ὁμοιόμορφως καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς, δύναται νὰ υποβαστάζη φορτίον διπλάσιον ἐκείνου, ὅπερ ἤθελεν υποβαστάζει αὕτη, ἂν ἦτο φορτωμένη μόνον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

87. Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 70) νὰ ᾖ στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν (3) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου καὶ ἐκ ταύτης νὰ προσδιορίσωμεν, δίδοντες εἰς τὴν χ τιμὰς κατ' ἀρέσκειαν, τὰς διαστάσεις τῶν ἀντιστοιχοῦσων τομῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἂς υποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν ἡ τομὴ τῆς δοκοῦ νὰ ᾖ ὀρθογώνιος καὶ ἂς παραστήσωμεν δι' α καὶ γ τὰς διαστάσεις αὐτῆς. Θέλωμεν ἔχει

$$I = \frac{\alpha\gamma^3}{12}, \quad \nu = \frac{1}{2}\gamma$$

καὶ θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ τοῦ I καὶ ν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν, θέλωμεν εὑρεῖ τὴν ἐξῆς

$$\frac{P \cdot \alpha \gamma^2}{6} = \frac{\epsilon}{2} (\mu^2 - \chi^2) \quad (6).$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη δεικνύει ὅτι, ὅταν μὲν τὸ πλάτος α τῆς δοκοῦ ᾖ σταθερὸν καὶ τὸ ὕψος γ μεταβλητόν, ἡ πρόοψις τῆς δοκοῦ θὰ παριστᾷ τμήμα ἑλλείψεως, δηλ. ἡ ἐπιφάνεια θὰ ὀρίζεται ἀπὸ τὸν ὀριζόντιον ἄξονα τῶν χ καὶ ἀπὸ τεμάχιον ἑλλείψεως περιεχόμενον μεταξὺ τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ, ἡ δὲ κάτωψις αὐτῆς θὰ ᾖ ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις M καὶ α' ὅταν δὲ τὸ ὕψος γ ᾖ σταθερὸν καὶ τὸ πλάτος α μεταβλητόν, ἡ κάτωψις τῆς δοκοῦ θὰ ᾖ τμήμα παραβολῆς, ἡ δὲ πρόοψις ὀρθογώνιον, ἔχον διαστάσεις M καὶ γ . Διότι σημειοῦντες διὰ ψ τὴν ἄγνωστον α ἢ γ ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (6) πορίζομεθα

$$\frac{P\alpha}{6}\psi^2 + \frac{\ell}{2}\chi^2 = \frac{\ell}{2}\mu^2 \quad (7)$$

διὰ τὴν πρόψιν, ὅταν τὸ γ ᾖναι ἄγνωστον, καὶ

$$\frac{\ell}{2}\chi^2 + \frac{P\gamma^2}{6}\psi = \frac{\ell}{2}\mu^2 \quad (8)$$

διὰ τὴν κάτοψιν, ὅταν τὸ α ᾖναι ἄγνωστον.

88. Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου πρὸς εὗρεσιν τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ ἵσης ἀντιστάσεως γίνεται κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας. Χάριν δὲ ἀσκήσεως, τῶν μαθητῶν ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν (7) εἰς ἓν μερικὸν παράδειγμα.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν ξυλίνην τινὰ δοκὸν ἐρθογώνιον μήκους 20 μέτρων, στηριζομένην διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοϋψῶν στηριγμάτων, καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένην μὲ βάρος 300 χιλιογράμμων κατὰ τρέχον μέτρον, καὶ ὅτι λαμβάνοντες κατὰ τὸ σύνθηες σταθερὸν τὸ πλάτος αὐτῆς καὶ ἴσον μὲ $0^{\mu},30$ πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὴν πρόψιν αὐτῆς, ἵνα ἔχομεν στερεὸν ἵσης ἀντιστάσεως.

Τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος εἶναι ἐνταῦθα

$$\mu = 40 \text{ μέτρα, } \ell = 300 \text{ χιλιογράμματα, } \alpha = 0,30$$

θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ τῶν α , ℓ καὶ μ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν καὶ ἀντὶ τοῦ P τὴν γνωστὴν αὐτοῦ τιμὴν 600.000, θέλομεν ἔχει

$$\frac{600.000 \times 0,30}{6}\psi^2 + \frac{300}{2}\chi^2 = \frac{300}{2}40^2$$

$$\psi \quad 30000\psi^2 + 150\chi^2 = 45000$$

Ἴνα δὲ λύσωμεν τὴν εὐρεθεῖσαν ἐξίσωσιν (9) καὶ εὗρωμεν τὴν πρόψιν τῆς δοκοῦ, διακροῦμεν τὸ μήκος μ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, π. χ. εἰς δέκα, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει διὰ τὴν χ τὰς ἐξῆς δέκα τιμὰς 0, 1, 2, ... 10, ἃς θέτοντες διαδοχικῶς ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐξίσώσει (9), εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῆς ψ , τὰς παριστώσας τὸ ὕψος τῶν ἀντιστοιχοῦσων τομῶν. Τούτου γενομένου, ἄγομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ καθέτως ἐκ τῶν σημείων τῶν διακρίσεων 0, 1, 2 ... 10, καὶ

λαμβάνομεν πρὸς τὸ κάτω μέρος αὐτῶν μεγέθη ἴσα μὲ τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῆς ψ , ἐπαναλαμβάνομεν δὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν καὶ ἐπὶ

τοῦ ἐτέρου ἡμίσεως τοῦ ἄξονος καὶ ἐνοῦντες τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν, τῶν παριστωσῶν τὰς τιμὰς τῆς ψ , σχηματίζομεν τὴν καμπύλην, τὴν παριστῶσαν μετὰ τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος τοῦ χ τὴν πρὸψιν τῆς δοκοῦ (Σχ. 71).

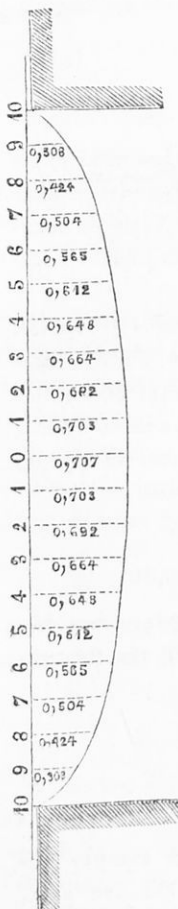
Σημείωσις. Ὡς καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 72 εἵπομεν ὁ μὲν τύπος τῆς κάμψεως δίδει ὕψος μηδὲν εἰς τὰ ἄκρα τῆς δοκοῦ δι' ὧν στηρίζεται ἐπὶ τῶν στηριγμάτων, ἀλλ' οἱ μηχανικοὶ δίδουσι τὸ ἀρμόζον πᾶχος, ὥπως τὰ ἄκρα ἀνθίστανται εἰς τὴν διάτμησιν τοῦ βάρους. Ἐπομένως καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ἄκρα τῆς δοκοῦ δηλ. εἰς τὰς διαιρέσεις 40 καὶ 10 ἐδώσαμεν πᾶχος τῆς δοκοῦ οὐχὶ μηδέν, ἀλλὰ $0^{\prime\prime},025$, ὅπερ εὔρομεν διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως.

89. Ἐὰν ἡ δοκὸς ΑΓ, ἡ ἔχουσα καθ' ὑπόθεσιν μῆκος $M=2\mu$ (Σχ. 70), πλὴν τοῦ βάρους $2\mu b$, τοῦ ὁμοιομήρους διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, ὑποβαστάζῃ καὶ ἕτερον βᾶρος B , ἐνεργούν εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως ἐπὶ τῆς διευσθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῆς, τότε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων λαμβανομένης εἰς τὸ μέσον ο τῆς δοκοῦ, θέλει εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{1}{2}(B\mu - \chi) + \frac{b}{2}(\mu^2 - \chi^2) \quad (1).$$

Διὰ τῆς ἀνωτέρω δὲ ἐξίσωσεως (1) προσδιορίζομεν τὴν καμπύλην τοῦ στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται τοιαύτη, ἂν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται ἰσοπαχῆς, ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξίσωσεως (1) προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, τῆς ὑποκειμένης εἰς τὸν μεγαλείτερον κίνδυνον, καὶ ταύτας λαμβάνομεν δι' ἅπαν τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ.

Ἡ ἀνωτέρω δὲ ἐξίσωσις (1) δεικνύει ὅτι τὸ μέσον τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 70) ὑποφέρει τὸν μεγαλείτερον κίνδυνον, διότι διὰ $\chi=0$ τὸ δεύ-

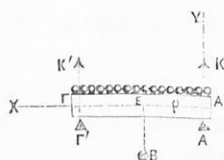


Σχ. 71

τερον μέλος αὐτῆς γίνεται μέγιστον. Ἐπομένως αἱ διαστάσεις τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ θὰ προσδιορισθῶσιν ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{1}{2} B\mu + \frac{\epsilon}{2} \mu^2 \quad (2).$$

90. Ἐὰν τὸ βάρος B δὲν ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ $ΑΓ$, ὡς ἀνωτέρω ὑπετέθη, ἀλλ' εἰς ἕτερον τι σημεῖον, τὸ E παραδείγματος χάριν (Σχ. 72), τότε ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ ἐν τῶν δύο ἄκρων A καὶ Γ , διότι ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει δὲν ὑπάρχει συμμετρία.



Σχ. 72

Λαμβάνοντες λοιπὸν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ ἄκρον A , παριστῶντες διὰ ρ τὴν ἀπόστασιν AE καὶ διὰ $M = 2\mu$ τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν στηριγμάτων A καὶ Γ , λαμβάνοντες τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας AX καὶ AY καὶ παριστῶντες διὰ K καὶ K' τὰς ἀντιδράσεις τῶν στηριγμάτων A καὶ Γ , θέλωμεν ἔχει

$$K = \epsilon\mu + \frac{B(M-\rho)}{M} \quad (4)$$

δι' ἀντίδρασιν τοῦ στηρίγματος A ,

$$K' = \epsilon\mu + \frac{B\rho}{M} \quad (2)$$

δι' ἀντίδρασιν τοῦ στηρίγματος Γ ,

$$\frac{PI}{\nu} = K'(M-\chi) - \frac{\epsilon}{2}(M-\chi)^2 \quad (3)$$

δι' ἐξίσωσιν ἐγκαρσίου τινος τομῆς τοῦ τμήματος $E\Gamma$, καὶ

$$\frac{PI}{\nu} = K'(M-\chi) - B(\rho-\chi) - \frac{\epsilon}{2}(M-\chi)^2 \quad (4)$$

δι' ἐξίσωσιν ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς τοῦ τμήματος AE .

Ἡ χ λαμβάνει τιμὰς ἐν μὲν τῇ (3) ἐξίσωσει ἀπὸ τοῦ ρ μέχρι M , ἐν δὲ τῇ (4) ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι ρ .

Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς $ΑΓ$ (Σχ. 72) νὰ ᾖ στερεὴν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε τοῦ μὲν τμήματος $E\Gamma$ τὰ πάχη πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ἐκ τῆς ἐξίσωσως (3), τοῦ δὲ τμήματος AE ἐκ τῆς (4).

Ἐάν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται ἰσοπαχής, τότε ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (4) θὰ λάβωμεν ὅπ' ὅψιν ἐκείνην, τῆς ὁποίας ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι μεγαλειτέρα.

Σημείωσις. Ὅτι εἵπομεν ἀνωτέρω ταυτὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ ὅταν ἡ δοκὸς ΑΓ, ἡ ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, φέρῃ πρὸς τοῦτοις ὄχι ἐν, ἀλλὰ πολλὰ ἄλλα βάρη ἐνεργοῦντα ἐπὶ ὀρισμένων σημείων τῆς δοκοῦ, δι' ἃ καὶ θεωροῦμεν ὅλως περιττὸν νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου.

91. Ὅταν τὸ μῆκος Μ τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 70), τῆς ὁμοιομόρφως φορτωμένης καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος, ᾖται ἀρκούντως μέγα, ὥστε τὸ ἑαυτῆς βάρος νὰ ἐπιφέρῃ κάμψιν, καὶ ὡς ἐκ τούτου νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτό, ὡς ἐπράξαμεν καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 86, τότε ἡ ἐξίσωσις (3) τῆς παραγράφου 86 μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐξῆς:

$$\frac{Pl}{\nu} = \frac{(b_1 + b_2)}{2} (\mu^2 - \chi^2) \quad (4),$$

ἐν ἣ τὸ μὲν b_1 παριστᾷ τὸ βάρος ἑνὸς τρέχοντος μέτρου δοκοῦ καὶ τὸ b_2 τὸ φορτίον κατὰ τρέχον μέτρον (διότι ἐνταῦθα τὸ φορτίον b κατὰ τρέχον μέτρον εἶναι ἴσον μὲ $b_1 + b_2$).

Ἐάν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται ἰσοπαχής, τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσεως (4) καθίσταται μέγιστον ὅταν $\chi = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεσθαι

$$\frac{Pl}{\nu} = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \mu^2 \quad (2).$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης προσδιορίζομεν ἡ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον b_2 , ὅταν αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ ᾖται δεδομέναι, ἡ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, ὅταν τὸ b_2 ᾖται δεδομένον. Καὶ ἡ μὲν λύσις τοῦ πρώτου ζητήματος, δηλ. τοῦ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ φορτίον b_2 , εἶναι εὐκόλος, ἡ λύσις ὅμως τοῦ δευτέρου ζητήματος παρουσιάζει δυσκολίας τινάς, διότι τὸ βάρος b_1 τῆς ἰδίας δοκοῦ εἶναι συνέκθεσις τῶν ἀγνώστων διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ. Τούτου ἕνεκα οἱ μηχανικοὶ ἀντὶ νὰ λύσωσι κατ' εὐθείαν τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ τῶν κανόνων τῆς ἀλγέβρας πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, λύουσιν αὐτὴν διὰ δοκιμῶν, ὅπως τοῦτο ἐγένετο καὶ ἐν ταῖς παραγράφοις 67, 68, 69 καὶ 70, εἰς ἃς παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην.

Σημειώσεις. "Ο,τι εἴπομεν ἀνωτέρω διὰ δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην, τῆς ὁποίας τὸ ἴδιον βάρος λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν πρὸς εὐρεσιν τῆς ἐξισώσεως ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς, τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ δοκὸν φέρουσαν φορτίον τι ἢ φορτία οὐχὶ ὁμοιομόρφως διανεμημένον, καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος, ἀλλ' ἐνεργοῦντα ἐπὶ ὠρισμένων σημείων καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἴδιον βάρος λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν. Ἡ περίστασις αὕτη εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία μετὴν τῆς § 67 καὶ ὁ μαθητὴς δύναται εὐκόλως νὰ λύσῃ καὶ τὸ τοιοῦτο ζήτημα.

92. Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκός, τῆς ὁποίας τὸ ἴδιον βάρος λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, νὰ ᾖ στερεδὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε ἡ λύσις τοῦ ζητήματος παρουσιάζει πολλὰς δυσκολίας. Λύεται ὅμως καὶ τοῦτο διὰ δοκιμῶν, ὅπως καὶ τὰ ἀνωτέρω.

Ἡ καταλληλοτέρα δὲ καθ' ἡμᾶς λύσις γίνεται ὡς ἐξῆς.

1^{ον} Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος ϵ_1 τῆς δοκοῦ ὑποτιθεμένης ἰσοπαχοῦς.

2^{ον} Τὸ βάρος τοῦτο ϵ_1 νὰ ληφθῇ ὡς σταθερὸν καὶ τοῦτο νὰ εἰσαχθῇ εἰς τοὺς γνωστούς τύπους

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} (\mu^2 - \chi^2) \quad (\kappa)$$

διὰ δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην, καὶ

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{B}{2} (\mu - \chi) + \frac{\epsilon_1}{2} (\mu^2 - \chi^2) \quad (\lambda)$$

διὰ δοκὸν φέρουσαν φορτίον B εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ.

3^{ον} Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (κ) καὶ (λ) νὰ προσδιορισθῶσι τὰ σχήματα τῶν δοκῶν, ἵνα αὗται ᾖσι στερεὰ ἴσης ἀντιστάσεως.

Διὰ τῆς ἀνωτέρω προτεινομένης λύσεως θέλωμεν ἔχει πάχνη ὀλίγον τι μεγαλείτερα τοῦ δέοντος, ἀλλὰ τοῦτο δὲν βλάπτει καθόσον ἀφορᾷ εἰς τὴν στερεότητα τοῦ ἔργου.

93. Εἴπομεν ἐν ἀρχῇ τοῦ κεφαλαίου τούτου, ὅτι αἱ εἰς κάμψιν ὑποκείμεναι δοκοὶ θλῶνται κατὰ πολλοὺς τρόπους, καὶ ὅτι θέλωμεν ἐξετάσει τὰς συνήθως ἐν τῇ πράξει παρουσιαζομένας περιπτώσεις, μέχρι τοῦδε δὲ ἐξητάσαμεν δύο περιπτώσεις τὰς ἐξῆς.

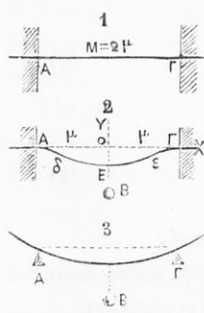
1^{ον} Δοκὸν πεπακτωμένην εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐλευθέραν εἰς τὸ ἕτερον, ἐφ' ἧς ἐνεργοῦσι δυνάμεις κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους.

2^η Δοκὸν στηριζομένην διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηριγμάτων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, καὶ φέρουσιν φορτίον κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους.

Ἡ δὲ μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τρίτης τινὸς περιπτώσεως, καθ' ἣν ἡ δοκὸς εἶναι πεπακτωμένη εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα αὐτῆς, καὶ φέρει φορτία κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους.

Καὶ ἐν πρώτοις ἔστω ἡ δοκὸς ΑΓ μήκους Μ (Σχ. 73, 1 καὶ 2), πεπακτωμένη εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Γ καὶ φέρουσα φορτίον Β εἰς τὸ μέσον, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς αὐτῆς.

Πρὸ τούτου δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 73, 1 καὶ 2), ἣτις παρίσταται διὰ τῆς μέσης ἰνὸς πρὸς εὐκολίαν τῆς κατασκευῆς τῆς καμπύλης, λέγεται ὅτι εἶναι πεπακτωμένη εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ, ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα μένωσιν ὀριζόντια ὡς δεικνύει τὸ σχ. 73, 1 καὶ 2 καθ' ὅλον τὸ χρονικὸν διάστημα τῆς ἐνεργείας τοῦ βάρους Β, ὅταν



Σχ. 73

ὅμως ταῦτα δὲν μένωσιν ὀριζόντια, ἀλλ' ἀνορθοῦνται ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 73, 3, τότε ἡ δοκὸς δὲν εἶναι πεπακτωμένη, καὶ θεωρεῖται ὡς στηριζομένη ἀπλῶς διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Γ.

Παρατηροῦμεν πρὸς τούτοις ὅτι, καθὰ ἐκ διαφόρων παρατηρήσεων ἐξάγεται καὶ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως ἀποδεικνύεται, ὅταν τὸ βάρος Β ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ (Σχ. 73, 2), ἡ καμπύλη, ἣν ἡ δοκὸς σχηματίζει, εἶναι τοιαύτη, ὥστε εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε καὶ Γ, δηλ. εἰς τὰ δύο ἄκρα καὶ εἰς τὸ μέσον, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ὀριζόντιος· ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Α μέχρι τοῦ δ ἡ καμπύλη στρέφει τὴν κυρτότητα αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω, ἀπὸ δὲ τοῦ δ μέχρι τοῦ ε πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἀπὸ τοῦ ε μέχρι τοῦ Γ πάλιν πρὸς τὰ ἄνω, ὥστε εἰς τὰ σημεῖα δ καὶ ε ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὴν καμπύλην καὶ διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα ταῦτα καλοῦνται σημεῖα καμπῆς. Τὰ μήκη δὲ Αδ καὶ εΓ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ἔχουσι τιμὴν $\frac{\mu}{2}$ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν καὶ 0,423μ, ὅταν ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη ὡς παρακατιόντες θέλομεν ἶδει.

94. Μετά τὰς ἀνωτέρω διασαφήσεις μεταβαίνομεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 73 2), τῆς πεπακτωμένης εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ φερούσης φορτίον Β εἰς τὸ μέσον. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ὡς ἐκ τῆς καμπῆς, ἂν λαμβάνει ἡ δοκός, αὕτη τείνει νὰ διαβραγῇ ταυτοχρόνως εἰς τρία σημεία, τὰ Α, Γ καὶ Ε, διότι ταῦτα ὑπόκεινται εἰς τὸν αὐτὸν κίνδυνον. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι τὸ βάρος Β ἐνεργεῖ ὡς ἂν ᾖτο διηρημένον εἰς τρία βάρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἐνεργῇ ἰδίᾳ καὶ ὡς ἐξῆς.

Τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ μέσου δοκοῦ, μήκους Μ καὶ τομῆς ἴσης τῇ ΑΓ καὶ στηριζομένης διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ τῶν ἰσοῦψων στηρίγματων Α καὶ Γ· τὸ δὲ εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῆς ἄκρου ἐντὸς τοῦ στερεοῦ στηρίγματος Α, ἐχούσης μῆκος $\frac{M}{2}$ καὶ τομὴν τὴν τῆς δεδομένης δοκοῦ ΑΓ· καὶ τὸ τρίτον ὡσαύτως εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου ἐντὸς τοῦ στερεοῦ στηρίγματος Γ, ἐχούσης μῆκος $\frac{M}{2}$ καὶ τομὴν τὴν τῆς δεδομένης δοκοῦ ΑΓ. Ὅθεν καλοῦντες Κ, Κ' καὶ Κ'' τὰ τρία ἀνωτέρω βάρη θέλομεν ἔχει

$$B = K + K' + K'' \quad (1)$$

$$\frac{KM}{4} = \frac{PI}{\nu} \quad (2)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς τομῆς τῆς πρώτης δοκοῦ,

$$\frac{K'M}{2} = \frac{PI}{\nu} \quad (3)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς τομῆς τῆς δευτέρας δοκοῦ, καὶ

$$\frac{K''M}{2} = \frac{PI}{\nu} \quad (4)$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς τομῆς τῆς τρίτης δοκοῦ.

Ἐὰν τὰ βάρη Κ, Κ' καὶ Κ'', εἰς αὐτὴν ὑποδιηρέθη τὸ Β, ἦσαν γνωστὰ ἢ ἐν τούτων, ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) ἠθέλομεν προσδιορίσει τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ βάρη Κ, Κ' καὶ Κ'' εἶναι ἄγνωστα, διὰ τοῦτο πρὸς εὐρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δεδομένης δοκοῦ ΑΓ μετασχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις

(2), (3) καὶ (4) πρὸς ἀπάλειψιν τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων K , K' καὶ K'' ὡς ἐξῆς.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη, τῆς μὲν ἐξίσωσως (2) ἐπὶ 4, τῶν δὲ ἐξίσωσεων (3) καὶ (4) ἐπὶ 2 ἔχομεν

$$KM = \frac{4PI}{v} \quad (5)$$

$$K'M = \frac{2PI}{v} \quad (6)$$

$$K''M = \frac{2PI}{v} \quad (7).$$

Προσθέτοντες ἔπειτα κατὰ μέλη τὰς εὐρεθείσας ἐξίσωσεις (5), (6) καὶ (7), καὶ θέτοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἐκτὸς παρενθέσεων, εὐρίσκουμεν

$$M(K + K' + K'') = \frac{PI}{v}(4 + 2 + 2) \quad (8)$$

$$\eta \quad MB = 3 \frac{PI}{v} \quad (Z).$$

Αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις (Z) εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, τῆς πεπακτωμένης εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἄκρα καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

95. Ἐὰν παραβάλωμεν τὴν ἐξίσωσιν (Z) μετὰ τὴν (A) τῆς § 59 καὶ τὴν E τῆς § 77, βλέπομεν ὅτι ἡ αὐτὴ δοκὸς AG, πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς, ὑποβαστάζει βάρος ὀκταπλάσιον μὲν ἐκείνου, ὅπερ ἤθελεν ὑποβαστάζει, ἂν ἐπακτοῦτο εἰς τὸ ἐν αὐτῆς ἄκρον καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, τοῦ ἐλευθέρου, ἔφερε τὸ φορτίον, διπλάσιον δὲ ἐκείνου, ὅπερ ἡ αὐτὴ δοκὸς ἤθελεν ὑποβαστάζει εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἂν διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς ἐστηρίζετο ἀπλῶς ἐπὶ δύο στερεῶν στηριγμάτων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

96. Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς AG, ἡ πεπακτωμένη διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς καὶ φέρουσα φορτίον B εἰς τὸ μέσον, νὰ ᾖναι στερεὸν ὥσθις ἀντιστάσεως, τότε πρέπει νὰ δανεισθῶμεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἐκ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως, διότι διὰ τῶν στοιχειωδῶν θεωριῶν τῆς παρούσης πραγματείας δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτήν.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι ἡ κάτωθι, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $οχ$ καὶ $οψ$, τῆς ἀρχῆς λαμβανομένης εἰς τὸ μέσον,

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{B}{4}(\mu - 2\chi) \quad (1).$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἡ χ λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι μ , τὸ δὲ μ παριστᾷ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους M τῆς δοκοῦ $ΑΓ$. Τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς τῆς ὑπὸ τῆς δοκοῦ σχηματιζομένης καμπύλης εὐρίσκονται ἐξισωμένου μὲ τὸ μηδὲν τοῦ δευτέρου αὐτῆς μέλους, ὅτε ἔχομεν $\chi = \frac{\mu}{2}$, ὡς ἀνωτέρω ἐρρήθη.

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτοῦ θεωρούμενον, γίνεται μέγιστον, ὅταν ἡ χ λάβῃ ὡς τιμὰς τὸ 0 καὶ τὸ μ . Ἐπομένως ποιοῦντες $\chi = 0$ καὶ $\chi = \mu$ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν τὰς κάτωθι μερικὰς ἐξισώσεις, ἀναφερομένας εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ καὶ εἰς τὴν πᾶκτωσιν, ἥτοι θέλομεν χ εἰ

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{B\mu}{4} = -\frac{BM}{8}, \quad \text{διὰ τὸ μέσον τῆς δοκοῦ,}$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{BM}{4} = \frac{BM}{8}, \quad \text{διὰ τὴν πᾶκτωσιν.}$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δηλοῦσιν, ὅτι αἱ πακτώσεις καὶ τὸ μέσον τῆς δοκοῦ διατρέχουσι τὸν αὐτὸν κίνδυνον, καὶ ὅτι τὸ βάρος B κάμπτει τὴν δοκὴν $ΑΓ$ εἰς μὲν τὸ μέσον E πρὸς τὰ ἄνω, εἰς δὲ τὰς πακτώσεις A καὶ Γ πρὸς τὰ κάτω· διότι ἡ ῥοπή τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὸ μέσον τῆς δοκοῦ καὶ θετικὴ διὰ τὰς πακτώσεις.

Τὴν ἐξίσωσιν (1) μεταχειριζόμεθα ὁσάκις θέλομεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖ στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως. Ἡ δὲ μέθοδος τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως εἶναι ἡ αὐτή, οἷαν ἐξεθέσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις, καὶ ὡς παρακατιόντες θέλομεν ἐκθέσει αὐτήν, ὅταν πραγματευθῶμεν περὶ δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ ὁμοιόμορφως φορτωμένης καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μήκος.

97. Ἐὰν ἡ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς πεπακτωμένη δοκὸς $ΑΓ$ (Σχ. 73, 2) φέρῃ φορτίον B ὅχι εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἀλλ' εἰς τι σημεῖον ἀπέχον κατὰ ρ καὶ ρ' ἐκ τῶν ἄκρων A καὶ Γ , τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ $ΑΓ$ εὐρίσκεται εὐκόλως,

ἐφαρμοζομένων καὶ ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν, ὃν ἐγένετο χοῆσις καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 94. Διότι τότε βλέπομεν προφανῶς ὅτι τὸ βάρος B ἐνεργεῖ νὰ θλάσῃ τὴν δοκὸν ταυτοχρόνως εἰς τρία σημεῖα, ἥτοι εἰς τὰ σημεῖον ἔνθα τὸ βάρος B ἐνεργεῖ ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῆς δοκοῦ καὶ εἰς τὰς δύο πακτώσεις A καὶ Γ. Ἐπομένως τὸ βάρος B δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διηρημένον εἰς τρία βάρη, τὰ K, K' καὶ K'', ἐνεργοῦντα ἐπὶ τριῶν δοκῶν τῆς αὐτῆς τῇ δεδομένη ΑΓ τομῆς, καὶ μήκους τῆς μὲν M, δηλ. τὸ μήκος τῆς δοκοῦ ΑΓ, τῆς δὲ ρ καὶ τῆς τρίτης ρ'. Καὶ ἡ μὲν ἔχουσα M μήκος θεωρεῖται ὡς δοκὸς στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦσιν στηριγμάτων καὶ φέρουσα τὸ φορτίον K εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἀπέχον ρ ἐκ τοῦ ἄκρου A καὶ ρ' ἐκ τοῦ Γ, αἱ δὲ δύο ἕτεραι, αἱ ἔχουσαι μήκη ρ καὶ ρ', θεωροῦνται ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ φέρουσαι τὰ φορτία K' καὶ K'' διὰ τῶν ἐλευθέρων αὐτῶν ἄκρων.

Ἐπομένως αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐγκαρσίων τομῶν τῶν τριῶν ἀνωτέρω δοκῶν εἶναι αἱ ἑξῆς

$$\frac{K\rho\rho'}{M} = \frac{PI}{\nu} \quad (1)$$

διὰ τὴν πρώτην δοκόν,

$$K'\rho = \frac{PI}{\nu} \quad (2)$$

διὰ τὴν δευτέραν δοκόν,

$$K''\rho' = \frac{PI}{\nu} \quad (3)$$

διὰ τὴν τρίτην δοκόν.

Πολλὰ πλάσιαζόντες δὲ τὰ δύο μέλη τῆς μὲν ἐξισώσεως (2) μὲ $\frac{\rho'}{M}$, τῆς δὲ ἐξισώσεως (3) μὲ $\frac{\rho}{M}$, καὶ προσθέτοντες ἀκολούθως κατὰ μέλη τὰς προκύπτουσας ἐξισώσεις καὶ τὴν (1) εὐρίσκομεν τὴν ἑξῆς

$$\frac{\rho\rho'}{2M} B = \frac{PI}{\nu} \quad (4),$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, παρέχουσα εὐκόλως καὶ τὰς διαστάσεις αὐτῆς.

Σημείωσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\rho = \rho'$, τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εὐρίσκομεν

$$\frac{MB}{8} = \frac{PI}{\nu} \quad (5),$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις (Z) τῆς παραγράφου 94.

98. Ἐάν ἡ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς πεπακτωμένη δοκὸς ΑΓ (Σχ. 73, 2) ἀντὶ νὰ φέρῃ εἰς τὸ μέσον Ε τὸ βάρος Β, φέρῃ τοῦτο καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐάν ἡ δοκὸς ΑΓ, ἡ ἔχουσα μῆκος $M=2\mu$, ᾗναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, τότε δὲν δυνάμεθα διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς καὶ πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν ὑψηλὴν ἀνάλυσιν, καὶ ἐκ ταύτης νὰ δανεισθῶμεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ἥτις εἶναι ἡ ἐπομένη, τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων λαμβανομένης λόγῳ συμμετρίας εἰς τὸ μέσον ο,

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{1}{6}(\mu^2 - 3\chi^2)\epsilon \quad (4).$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (4) τὸ μὲν ϵ παριστᾷ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῆς δοκοῦ, ἥς τὸ ἴδιον βάρος παραλείπεται, ὅταν τὸ μῆκος 2μ αὐτῆς δὲν ᾗναι πολὺ μέγα, ὥστε τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ νὰ συντείνῃ εἰς τὴν κάμψιν αὐτῆς, τὸ δὲ μ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους M τῆς δοκοῦ.

Διερευνῶντες δὲ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (4) βλέπομεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτοῦ θεωρούμενον, γίνεται μέγιστον ὅταν $\chi=0$ καὶ $\chi=\mu$. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι ὁ μεγαλύνουτος κίνδυνος εἶναι εἰς τὰς πακτώσεις καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ. Καλοῦντες λοιπὸν X_1 τὴν ἀπόλυτον ἀξίαν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (4) ὅταν $\chi=0$, καὶ X_2 τὴν ἀπόλυτον ὡσαύτως ἀξίαν τοῦ αὐτοῦ μέλους ὅταν $\chi=\mu$, ἔχομεν τὰς ἐξῆς δύο ἐξισώσεις, ἀναφερομένας εἰς τὰς τομὰς τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ καὶ τῆς πακτώσεως

$$\frac{PI}{\nu} = X_1 \quad (H)$$

διὰ τὸ μέσον τῆς δοκοῦ,

$$\frac{PI}{\nu} = X_2 \quad (Θ)$$

διὰ τὰς πακτώσεις Α καὶ Γ τῆς δοκοῦ.

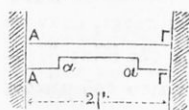
Αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ X_1 καὶ X_2 εἶναι αἱ ἐξῆς

$$X_1 = -\frac{6\mu^2}{6} \quad \text{καὶ} \quad X_2 = \frac{6\mu^2}{3}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ X_1 ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτοῦ θεωρούμενον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ X_2 , ἔπεται ὅτι ὁ μεγαλειότερος κίνδυνος εἶναι εἰς τὰς πακτώσεις καὶ οὐχὶ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ.

Σημείωσις 1. Ἐὰν ἡ πεπακτωμένη δοκὸς ΑΓ ἦναι ξύλινος καὶ ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς τεμαχίου, τότε αὕτη ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της πρέπει νὰ ἦναι ἰσοπαχῆς, διότι διὰ νὰ καταστήσωμεν ταύτην στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως δεόν νὰ δαπανήσωμεν ἡμερομίσθια ξυλουργοῦ καὶ οὕτω ἀντὶ χρηματικῆς οἰκονομίας θὰ ἔχωμεν μᾶλλον ζημίαν. Πρὸς εὐρεσιν δὲ τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν (Θ), τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν πάκτωσιν, ἵνα ἡμεθεα ἀσφαλεῖς περὶ τῆς στερεότητός της.

Ὅταν δὲ ἡ ξύλινος δοκὸς ἦναι ὠπλισμένη, τότε χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας προσδιορίζομεν δύο ἐγκαρσίους τομάς, μίαν διὰ τοῦ τύπου (Η) καὶ ἑτέραν διὰ τοῦ τύπου (Θ). Καὶ τὴν μὲν ἐκ τοῦ τύπου (Θ) ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς δοκοῦ καὶ ἐπὶ μήκους 0,185μ, ἥτοι εἰς τὰ τμήματα Αα καὶ Γα (Σχ. 74) τὴν δὲ ἐκ τοῦ τύπου (Η) ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου αὐτῆς μέρους αα οὕτως τὸ μή-



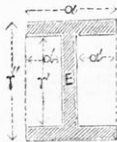
Σχ. 74

κος εἶναι $2\mu - 2 \times 0,185\mu = 1,630\mu$, ὡς θέλομεν ἀποδείξει τοῦτο παρακατιόντες.

Σημείωσις 2. Ἐὰν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 73, 2) ἦναι σιδηρᾷ καὶ ἔχῃ ὡς ἐγκάρσιον τομὴν διπλοῦν ταῦ, πρὸς δὲ ἀποτελεῖται αὕτη, ὡς συνήθως τοῦτο γίνεται διὰ τὰς δοκοὺς τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν, ἐκ πολλῶν φύλλων σιδηρῶν ἐλασμάτων, συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα διὰ παλυλίων, χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας πρέπει νὰ προσδιορίζομεν δύο ἐγκαρσίους τομάς, τὴν μὲν διὰ τὰ τμήματα Αα καὶ Γα (Σχ. 74) διὰ τοῦ τύπου (Θ), τὴν δὲ διὰ τὸ μεσαῖον τμήμα αα (Σχ. 74) διὰ τοῦ τύπου (Η), ὅπως εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτε ἐπρόκειτο περὶ τῆς ὠπλισμένης ξυλίνης δοκοῦ, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει δύο ἐγκαρσίους τομάς, τὴν Α (Σχ. 75) διὰ τὸ τμήμα αα (Σχ. 74), καὶ τὴν Β (Σχ. 76) διὰ τὰ τμήματα Αα καὶ Γα (Σχ. 74).

99. Πρὸς ἀπὸδείξιν τῶν ἀνωτέρω διερευνήσωμεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν (1), ἣν ἐδανείσθημεν ἐκ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως. Πρὸς τοῦτο δὲ

χάριν ευκολίας ἃς παραστήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, ὑπερ ἐκφράζει τὴν ῥοπὴν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, διὰ τοῦ γράμματος X, καὶ ἃς ἴδωμεν εἰς ποίας μεταβολὰς ὑπόκειται τοῦτο, ὅταν ἡ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ μ . Ὅταν ἡ χ λαμβάνῃ ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$ τὸ X λαμβάνει ἀπάσας τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $-\frac{1}{6}\mu^2\epsilon$ καὶ $+0$, ὅταν δὲ πάλιν ἡ χ λαμβάνῃ ἀπάσας

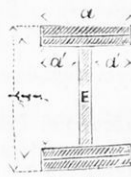


Σχ. 73

τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$ καὶ μ , τότε τὸ X λαμβάνει ἀπάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ 0 καὶ $\frac{1}{3}\mu^2\epsilon$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγομεν εὐκλῶς καὶ τὰ ἐξῆς συμπεράσματα.

1^{ον} Ἡ κυρτότης τῆς δοκοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς πακτώσεως μέχρι τοῦ σημείου δ (Σχ. 73, 2), τοῦ ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ μέσου κατὰ $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$, ἢ ἀπὸ τῆς πακτώσεως κατὰ $\mu - \frac{\mu}{\sqrt{3}} = \mu - 0,577\mu = 0,423\mu$, εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ ἄνω, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τούτου μέχρι τοῦ μέσου E, ἡ κυρτότης εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ κάτω. Τὰ αὐτὰ δὲ ἐπαναλαμβάνονται καὶ διὰ τὸ ἕτερον ἡμισυ τῆς δοκοῦ, ὥστε τὰ τμήματα Αδ καὶ Γε ἔχουσι τὴν κυρτότητα αὐτῶν πρὸς τὰ ἄνω ἐστραμμένην, τὸ δὲ τμήμα δε τῆς δοκοῦ ἔχει τὴν κυρτότητα πρὸς τὰ κάτω ἐστραμμένην.



Σχ. 76

2^{ον} Εἰς τὰ σημεία δ καὶ ε, τὰ ἀπέχοντα κατὰ $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$ ἀπὸ τοῦ μέσου E τῆς δοκοῦ καὶ προσδιοριζόμενα ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$-\frac{1}{6}(\mu^2 - 3\chi^2)\epsilon = 0,$$

ἢν εὐρίσκομεν ἐξισοῦντες τῷ μηδενὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσως (1), ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τέμνει ταύτην. Τούτου δὲ ἕνεκα τὰ σημεία ταῦτα καλοῦνται σημεία καμπῆς.

3^{ον} Μεταξὺ τῶν θετικῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει τὸ X, καὶ αἵτινες περιέχονται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ $\frac{1}{3}\mu^2\epsilon$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ θετικὴ τιμὴ $\frac{1}{6}\epsilon\mu^2$,

ἥτις ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτῆς θεωρουμένη εἶναι ἴση μὲ τὴν X_1 , δηλ. μὲ τὴν τιμὴν, ἣν τὸ X λαμβάνει ὅταν $\chi = 0$. ἐν ἄλλαις λέξεσι εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων $\Lambda\delta$ καὶ $\Gamma\epsilon$ (Σχ. 73, 2) τῆς δοκοῦ ὑπάρχει μία διατομή, ἥτις ὑποφέρει τόσον, ὅσον καὶ ἡ διατομή, ἡ κατέχουσα τὸ μέσον τῆς δοκοῦ. Ἡ ἀπόστασις δὲ τῆς διατομῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου E τῆς δοκοῦ προσδιορίζεται ἐκ τῆς κάτωθι ἐξίσωσως

$$\frac{1}{6}\epsilon\mu^2 = -\frac{1}{6}(\mu^2 - 3\chi'^2) \quad (\alpha),$$

ἣν εὐρίσκομεν ἐξισοῦντες τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσως (4) μὲ τὸ $\frac{1}{6}\epsilon\mu^2$. Ἐπιλύοντες δὲ ὡς πρὸς τὴν χ' τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (α) εὐρίσκομεν

$$\chi' = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \mu \text{ ἢ } \chi' = 0,815\mu \text{ καὶ } \Lambda\alpha = \mu - \chi' = \mu - 0,815\mu = 0,185\mu.$$

4^{ον} Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ X μεταβάλλονται διαδοχικῶς εἰς ἕκαστον μὲν τῶν τμημάτων $\Lambda\alpha$ καὶ $\Gamma\alpha$ (Σχ. 74) ἀπὸ $\frac{1}{6}\epsilon\mu^2$ μέχρι $\frac{1}{3}\epsilon\mu^2$, εἰς δὲ τὸ $\alpha\alpha$ ἀπὸ $\frac{1}{6}\epsilon\mu^2$ μέχρι 0 καὶ ἀπὸ 0 μέχρι $-\frac{1}{6}\epsilon\mu^2$, καὶ ἐπειδὴ εἰς μὲν τὰ τμήματα $\Lambda\alpha$ καὶ $\Gamma\alpha$ ἡ μεγαλειτέρα ροπή εἶναι εἰς τὴν πλάτωσιν καὶ ἔχει τιμὴν $\frac{1}{3}\mu^2\epsilon$, εἰς δὲ τὸ τμήμα $\alpha\alpha$ ἡ μεγαλειτέρα ροπή εἶναι εἰς τὸ μέσον καὶ ἔχει τιμὴν $\frac{1}{6}\mu^2\epsilon$, διὰ τοῦτο χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας δυνάμεθα νὰ δώσωμεν δύο πλάχη εἰς τὴν δοκὸν $\Lambda\Gamma$ (Σχ. 74). Καὶ διὰ μὲν τὰ τελευταῖα τμήματα $\Lambda\alpha$ καὶ $\Gamma\alpha$ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν μεγαλειτέραν ροπήν αὐτῶν, τὴν $\frac{1}{3}\mu^2\epsilon$, καὶ διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (6) νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, διὰ δὲ τὸ μεσαῖον τμήμα $\alpha\alpha$, νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν μεγαλειτέραν ροπήν αὐτοῦ $\frac{1}{6}\mu^2\epsilon$ καὶ διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (II) νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, ὡς ἀνωτέρω ἐν τῇ δευτέρᾳ σημειώσει τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἐβρέθη. Οὕτω ἡ πρόοψις τῆς δοκοῦ θέλει παρίστασθαι ὡς δεικνύει τὸ σχ. 74, ὅταν τὸ πλάτος αὐτῆς λαμβάνηται σταθερὸν καὶ ὅλον αὐτῆς τὸ μήκος.

100. Ἐὰν ἡ πεπλατωμένη δοκὸς $\Lambda\Gamma$ (Σχ. 73, 2) ᾖναι ἐκ χυτοσιδήρου ἢ χάλυδος, καὶ θέλωμεν χρηματικῆς οἰκονομίας ἕνεκα νὰ ᾖναι αὕτη στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, ὡς εὐκόλως τούτου κατορθουμένου διὰ

τῆς χρήσεως καταλλήλων τύπων, ἐντὸς τῶν ὁποίων ὁ χυτοσιδηρὸς ἢ ὁ χάλυψ χύνεται καὶ λαμβάνει τὸ σχῆμα αὐτῶν, τότε πρέπει, ὥς καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 74 εἵπομεν, ἐκ τῆς γενικῆς ἐξίσωσως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς νὰ προσδιορίσωμεν πολλὰς ἐγκαρσίους τομὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς ὠρισμένας τιμὰς τῆς χ , αἱ λαμβάνομεν κατ' ἀρέσκειαν.

Καὶ ἂν μὲν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ἡμῶν τὴν κάτωθι γνωστὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς παραγράφου 96

$$\frac{PI}{u} = -\frac{B}{4}(\mu - 2\chi) \quad (1).$$

Ἐὰν δὲ ἡ δοκὸς ᾖ γὰρ ὁμοιομόρφως φορτωμένη, τότε λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ἡμῶν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς παραγράφου 98, ἥτις εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{u} = -\frac{4}{6}b(\mu^2 - 3\chi^2) \quad (2).$$

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2), αἱ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως προσδιορίζομεναι, δὲν περιέχουσι τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, ὅπερ παρалаίπεται, ὅσάκις τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ δὲν εἶναι πολὺ μέγα.

101. Χάριν ἀσκήσεως ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) πρὸς εὔρεσιν τῆς προσόψεως ὀρθογωνίου δοκοῦ ἐκ χάλυβος, μήκους 20 μέτρων καὶ φερούσης φορτίον κατὰ τρέχον μέτρον 4000 χιλιogramμων.

Σημειοῦντες δι' α καὶ γ τὰς ἀγνώστους διαστάσεις πάσης ὀρθογωνίου τομῆς τῆς δοκοῦ καὶ θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ I καὶ u τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{P\alpha\gamma^2}{6} = -\frac{4}{6}b(\mu^2 - 3\chi^2) \quad (3).$$

Λαμβάνοντες δὲ τὴν διάστασιν α σταθεράν καὶ ἴσην μὲ $0^{\text{m}},05$, καὶ παραδεχόμενοι ὡς τιμὴν τοῦ P τὸν ἀριθμὸν 6000000, σημειοῦντες δὲ διὰ ψ τὴν ἀγνώστον γ , καὶ θέτοντες ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐξίσωσει (3) ἀντὶ P, α , b καὶ μ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ ἀπαλείφοντες τὸν παρονομαστήν 6, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$6000000 \times 0,05 \times \psi^2 = -4000(10^2 - 3\chi^2) \quad (4),$$

ἐξ ἧς

$$\psi^2 = -\frac{4}{300}(100 - 3\chi^2) \quad (5).$$

Πρὶν δ' ἢ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (5) παρατηροῦμεν ὅτι πρὸς εὐρεσιν τῶν τιμῶν τῆς ψ πρέπει νὰ θεωρῶμεν τὴν ἀπόλυτον ἀξίαν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξίσωσως (5) καὶ οὐχὶ τὴν σχετικὴν, διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν προέρχεται ἐκ τῆς λύσεως ἀλγεβρικοῦ τινὸς προβλήματος, ὅπερ ἐπιδέχεται καὶ φανταστικὰς τιμὰς, ἀλλ' ἐκ θεωρήματος τῆς μηχανικῆς, ὅπερ δὲν ἐπιδέχεται ἄλλας τιμὰς εἰμὴ μόνον θετικὰς. Γνωρίζομεν δὲ ἐκ τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος τῆς μηχανικῆς, ὅπερ ἐφηρμόσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 59 πρὸς εὐρεσιν τῆς γενικῆς ἐξίσωσως τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος $\frac{Pl}{J}$ τῆς γενικῆς ἐξίσωσως (2), ἐξ ἧς παρήχθη ἡ (5), φέρει ἐν ἑαυτῷ τὸ σημεῖον του καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ τοῦ δευτέρου μέλους $-\frac{1}{6}b(\mu^2 - 3\chi^2)$, ἵνα οὕτω ἔχωμεν ἐξαγόμενον μηδέν, ὅταν τὸ πρῶτον μέλος $\frac{Pl}{J}$ μεταφερθῇ εἰς τὸ δεύτερον, διότι τὸ ἐκεῖ ἐν συντόμῳ ἐφαρμοσθὲν θεώρημα τῶν ῥοπῶν ἔχει γενικῶς ὡς ἐξῆς.

Ὅταν πολλὰι δυνάμεις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι σώματος ἰσορροποῦνται, τότε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων τούτων ὡς πρὸς ἄξονά τινα εἶ.αι ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Τούτου δὲ ἔνεκα ἡ ἀξία τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξίσωσως (5) λαμβάνεται ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον αὐτῆς ἀξίαν πρὸς εὐρεσιν τῆς ἀντιστοιχοῦσας τιμῆς τῆς ψ .

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τῆς καμπύλης, τῆς παριστώσης τὴν πρόοψιν τῆς δοκοῦ, διαίρομεν τὸ μ , ὅπερ παριστᾷ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ, εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, π. χ. εἰς δέκα, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει διὰ τὴν χ ἑνδεκα τιμὰς ἀκεραίας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 10, καὶ δύο κλασματικὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰ σημεία δ τοῦ σχήματος 73, 2 καὶ α τοῦ σχήματος 74. Θέτοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας τῆς χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) προσδιορίζομεν τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τῆς ψ , ἃς τινὰς καταγράφομεν κατὰ τάξιν εἰς τὸν κάτωθι πίνακα Α'.

ΠΙΝΑΞ ΠΡΩΤΟΣ

Τιμαὶ τῆς χ	Τιμαὶ τῆς ψ	Τιμαὶ τῆς χ	Τιμαὶ τῆς ψ	Παρατηρήσεις
1	2	3	4	
0,5	1,43	6,00	0,323	Αἱ αὐταὶ τιμαὶ ἐπαναλαμβάνονται καὶ διὰ τὸ ἕτερον ἡμισυ τῆς δοκοῦ. Τὸ $\chi=5,77$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς καμπῆς δ καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, διότι εὐρωμεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἴση μὲ $\frac{x}{\sqrt{3}}=0,377\mu$. Τὸ δὲ $\chi=8,13$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων α, α (Σχ. 74), ἣν εὐρωμεν ἴσην μὲ $0,813\mu$.
1,00	1,438	7,00	0,791	
2,00	1,08	8,00	1,104	
3,00	0,982	8,13	1,436	
4,00	0,832	9,00	1,381	
5,00	0,377	10,00	1,63	
5,77	0			

Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ πίνακι αἱ μὲν τιμαὶ τῆς χ περιέχονται εἰς τὴν πρώτην καὶ τρίτην στήλην, αἱ δὲ τῆς ψ εἰς τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην στήλην. Καὶ αἱ μὲν τιμαὶ τῆς ψ τῆς δευτέρας στήλης ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς τῆς χ τῆς πρώτης, αἱ δὲ τῆς τετάρτης εἰς τὰς τῆς τρίτης.

Πάσης δὲ τιμῆς τῆς χ ἡ ἀντίστοιχος τῆς ψ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου σειρᾶς.

Παρατήρησις 1. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου πίνακος Α συνάγομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς ψ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, ἢτοι ἀπὸ $\chi=0$ μέχρι $\chi=5,77$, βαίνουνσιν ἐλαττούμεναι, ἀπὸ δὲ $\chi=5,77$ μέχρι $\chi=10$ βαίνουνσιν αὐξανόμεναι, καὶ ὅτι ἡ τιμὴ 1,63 τῆς ψ , ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $\chi=10$, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς 1,436 τῆς ψ , τῆς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὴν τιμὴν τῆς $\chi=0$, ἐπὶ $\sqrt{2}$. Πάντα δὲ ταῦτα ἦσαν γνωστὰ ἐκ τῆς γενομένης ἀνωτέρω διερευνήσεως τῆς γενικῆς ἐξισώσεως.

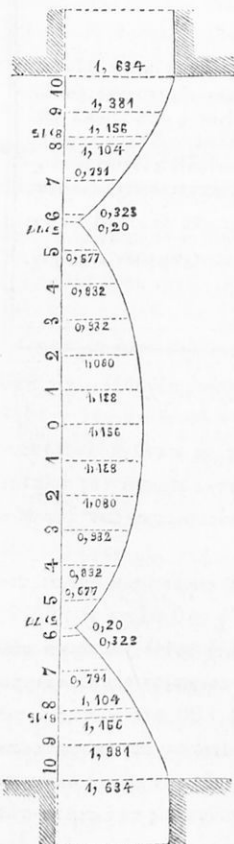
Παρατήρησις 2. Ἡ τιμὴ τῆς ψ , ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν τῆς $\chi=5,77$, εἶναι μηδὲν κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς κάμψως, πλὴν αὕτη δὲν εἶναι παραδεκτὴ, διότι ἡ δοκὸς πρέπει νὰ ἀνθίσταται ταὐτοχρόνως καὶ εἰς τὴν διάτμησιν τοῦ βάρους, ὅπερ ὑποφέρει τὸ ἡμισυ τῆς δοκοῦ. Ἐπομένως τὸ πάχος τῆς δοκοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς διατμήσεως

$$4 \times 50 \times \psi = 40000,$$

ἐξ οὗ εὐρίσκομεν

$$\psi = 200 \text{ χιλιοστά τοῦ μέτρου, ἥτοι } \psi = 0^{\circ}, 20.$$

Παρατήρησις 3. Πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς ψ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος Α αἱ οὐσαι μικρότεροι τοῦ $0^{\circ}, 20$, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ψ , ἡ ἐξέρχεται διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως, πρέπει κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σχήματος τῆς προσόψεως τῆς δοκοῦ νὰ ἀυξηθῶσι καὶ νὰ γίνωσιν ἴσαι μὲ $0^{\circ}, 20$.



Σχ. 77

Σημείωσις. Μετὰ τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις καὶ συμφώνως μὲ ταύτας σχηματίζομεν τὴν πρόβιν τῆς δοκοῦ ὡς φαίνεται ἐν τῷ σχήματι 77. Οἱ ἀριθμοὶ 0, 4, 2, ... 10, οἱ σημειωθέντες ἐπὶ τῆς ὀριζοντίου 40—40 δεικνύουσι τὰς τιμὰς τῆς χ τῶν στηλῶν (1) καὶ (3) τοῦ πίνακος Α', οἱ δὲ ἀριθμοί, οἱ σημειωθέντες κάτωθεν τῶν ἀνωτέρω δεικνύουσι τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς ψ καὶ παριστῶσι τὰ ὕψη τῶν διαφόρων τομῶν. Εἰς τὴν τιμὴν 5,77 τῆς χ ἐτέθη ὕψος τῆς δοκοῦ οὐχὶ μηδέν, ἀλλὰ $0^{\circ}, 20$ συμφώνως μὲ τὴν ἀνωτέρω 2^{αν} παρατήρησιν.

102. Ἐὰν τῆς εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα τῆς πεπακτωμένης δοκοῦ τὸ μήκος αὐτῆς 2μ εἶναι ἀρκούντως μέγα, ὥστε νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸ βάρος τῆς δοκοῦ, τότε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς θέλει εἶναι, καθ' ἃ ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις διδάσκει,

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{B}{4}(\mu - 2\chi) - \frac{1}{6}e_2(\mu^2 - 3\chi^2) \quad (1),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον Β εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{1}{6}(e_1 + e_2)(\mu^2 - 3\chi^2) \quad (2),$$

ὅταν ἡ δοκὸς ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὸ μὲν e_2 παριστᾷ τὸ βάρος

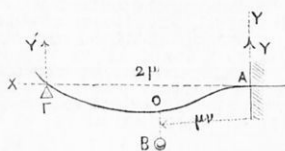
ἐνὸς τρέχοντος μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ, τὸ δὲ θ_1 τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον αὐτῆς.

Ἡ λύσις τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (1) καὶ (2) πρὸς προσδιορισμὸν τῶν φορτίων B ἢ θ_1 εἶναι εὐκόλος, πρὸς προσδιορισμὸν δὲ τῶν διαστάσεων τῆς δοκοῦ, ὅταν αὕτη πρόκειται νὰ ᾖ ἰσοπαχής, γίνεται ὡς ἐν ταῖς παραγράφους 67, 68, 69 καὶ 70 ἐξρέθη.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖ στερεὴν ἴσης ἀντιστάσεως, γνωστοῦ ὄντος τοῦ φορτίου, τότε τὸ σχῆμα τῆς προόψεως ἢ κατόψεως αὐτῆς ὀρίζεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἀφοῦ προηγουμένως προσδιορισθῇ τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, ὡς ἐν τῇ παραγράφῳ 92 ἐξρέθη.

103. Ἐξετάσαντες μέχρι τοῦδε τοὺς τρεῖς ἐκ τῶν τεσσάρων τρόπων, καθ' οὓς τὰ σώματα θλῶνται διὰ κάμψεως, μεταβαίνομεν νῦν εἰς τὴν ἐξέτασιν καὶ τοῦ τελευταίου τετάρτου τοῦ καὶ συνηθεστέρου, ὅταν δηλ. αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἐνεργῶσιν ὕπως θλάσωσι διὰ κάμψεως δοκὸν πεπακτωμένην διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ στηριζομένην διὰ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος.

Καὶ ἐν πρώτοις ἔστω ἡ δοκὸς ΑΓ μήκους 2μ (Σχ. 78), πεπακτωμένη εἰς τὸ ἄκρον Α, στηριζομένη δὲ διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου αὐτῆς Γ ἐπὶ τοῦ στερεοῦ στηρίγματος Γ, καὶ φέρουσα φορτίον Β εἰς τὸ σημεῖον ο, ἀπέχον κατὰ $\gamma\mu$ τῆς πακτώσεως Α, καὶ ἃς ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν ἐγκαρσίου τινὸς τῆς δοκοῦ ταύτης τομῆς. Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν ὑπάρχει συμμετρία, διότι μόνον τὸ ἐν ἄκρον τῆς δοκοῦ εἶναι πεπακτωμένον, διὰ τοῦτο ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων λαμβάνομεν τὸ πεπακτωμένον ἄκρον Α καὶ ὀρθογωνίους ἄξονας τὰς εὐθείας ΑΧ καὶ ΑΥ.



Σχ. 78

Καλοῦντες δὲ Υ' καὶ Υ'' τὰς ἀντιδράσεις, τὰς ἐνεργουμένας ἐπὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Γ, αἵτινες ἐνταῦθα εἶναι ἄνισοι, διότι τὸ μὲν Α εἶναι πεπακτωμένον, τὸ δὲ Γ ἐλεύθερον, θέλωμεν ἔχει κατὰ τὴν ὑψηλὴν ἀνά-
λυσιν τὰς ἐξισώσεις

$$Y' = \frac{v^2(6-v)}{8} \frac{B}{2} \quad (1),$$

$$Y = B - Y' = B - \frac{v^2(6-v)}{8} \frac{B}{2} \quad (2).$$

Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ βάρος τῆς ιδίαις δοκοῦ.

Τῶν δὲ ἀντιδράσεων οὕτω προσδιορισθεισῶν, αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς εὐρίσκονται εὐκόλως, εἶναι δὲ αὗται

$$\frac{PI}{\nu} = B(\nu\mu - \chi) - \frac{\nu^2(6 - \nu)}{8} \frac{B}{2}(2\mu - \chi) \quad (3)$$

διὰ τὸ τμήμα Αο, καὶ

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{\nu^2(6 - \nu)}{8} \frac{B}{2}(2\mu - \chi) \quad (4)$$

διὰ τὸ τμήμα οΓ.

Τὸ ἐν αὐταῖς ν λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 2, διότι τὸ βάρος Β δύναται νὰ ἐπενεργῇ ἐφ' ἐνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τῆς δοκοῦ ΑΓ, ἡ δὲ χ λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ νμ ἐν τῇ ἐξισώσει (3), καὶ ἀπὸ τοῦ νμ μέχρι τοῦ 2μ ἐν τῇ ἐξισώσει (4).

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (3) καὶ (4) καθίστανται μέγιστα τῆς μὲν (3), ὅταν ἡ χ γείνη 0, τῆς δὲ (4) ὅταν ἡ χ γείνη νμ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ πᾶκτωσις Α καὶ τὸ σημεῖον ο, ἐνθα τὸ βάρος Β ἐνεργεῖ, ὑποφέρουσι τὸν μεγαλύνον κίνδυνον. Ἐπομένως, ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ νὰ ᾖ ἰσοπαχής, τότε πρέπει ἐκ τῶν δύο τιμῶν, ἃς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) λαμβάνει, ὅταν ἡ χ γίνεται ἴση μὲ μηδὲν καὶ μὲ νμ, νὰ λάβωμεν τὴν μεγαλειτέραν, καὶ ταύτην νὰ ἐξισώσωμεν μὲ τὴν ῥοπήν $\frac{PI}{\nu}$ τῶν ἐλαττηρίων δυνάμεων τῶν μορίων· ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἐκ τῶν κάτωθι δύο ἐξισώσεων (5) καὶ (6) ἃς εὐρίσκομεν ποιοῦντες ἐν τῇ ἐξισώσει (3) $\chi = 0$ καὶ $\chi = \nu\mu$ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἐκείνην, ἥς τὸ δεύτερον μέλος εἶναι μεγαλειτέρον.

$$\frac{PI}{\nu} = B\mu\nu - \frac{\nu^2(6 - \nu)}{8} \frac{B}{2} 2\mu,$$

$$\eta \quad \frac{PI}{\nu} = \frac{B\mu\nu}{8} (8 - 6\nu + \nu^2),$$

$$\eta \quad \frac{PI}{\nu} = \frac{B\mu\nu}{8} (4 - \nu)(2 - \nu) \quad (5),$$

διὰ τὴν πᾶκτωσιν Α.

$$\frac{PI}{v} = -\frac{v^2(6-v)}{8} \frac{B}{2}(2\mu - \nu\mu),$$

$$\eta \quad \frac{PI}{v} = -\frac{B\mu v^2}{16}(2-v)(6-v) \quad (6)$$

διὰ τὸ σημεῖον ο.

Ἐάν δὲ θέλωμεν ἕκαστον τῶν τμημάτων Αο καὶ οΓ τῆς δοκοῦ ΑΓ νὰ ἔχῃ ἰδίαις διαστάσεις, τότε πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν διὰ μὲν τὸ τμήμα Αο τὴν ἐξίσωσιν (5), διὰ δὲ τὸ τμήμα οΓ τὴν ἐξίσωσιν (6).

104. Ἐάν θέλωμεν ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 78), ἡ φέρουσα φορτίον Β εἰς τὸ σημεῖον ο, νὰ ἦναι στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε πρὸς προσδιορισμὸν τῆς προόψεως ἢ κατόψεως αὐτῆς πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὰς γενικὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπ' αὐτῶν τὰς αὐτὰς πράξεις, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν προηγουμένων περιπτώσεων.

Σημείωσις. Αἱ διαστάσεις πάσης τομῆς τῆς δοκοῦ ΑΓ, εἴτε ἰσοπαχῆς εἶναι αὕτη εἴτε στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, πρέπει νὰ ἦναι ἂν οὐχὶ μεγαλείτεροι, τοῦλάχιστον ἴσαι μὲ τὰς διαστάσεις τὰς προσδιορισμένας ἐκ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως· διότι πᾶσα διατομὴ τῆς δοκοῦ ΑΓ ὑπόκειται ταυτοχρόνως καὶ εἰς τὴν διάτμησιν τοῦ βάρους Β. Ἐπομένως, ἂν μὲν ἡ δοκὸς ἦναι ἰσοπαχῆς καὶ αἱ διαστάσεις τῆς τομῆς, αἱ προσδιορισθεῖσαι διὰ τοῦ τύπου τῆς κάμψεως, ἦναι μικρότεροι τῶν διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως προσδιορισθεισῶν, πρέπει νὰ ἀπορρίψωμεν τὰς πρώτας καὶ νὰ παραδεχθῶμεν τὰς δευτέρας, τὰς διὰ τοῦ τύπου δηλαδὴ τῆς διατμήσεως εὐρισκομένας· ἂν δὲ ἡ δοκὸς ἦναι στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε πρέπει νὰ αὐξήσωμεν μόνον τὰς διαστάσεις ἐκείνων τῶν τομῶν, αἵτινες ἤθελον εὑρεθῇ ἔχουσαι ταύτας μικροτέρας τῶν διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως εὐρισκομένων.

105. Ἐάν τὸ φορτίον Β, ἀντὶ νὰ ἐνεργῇ εἰς τὸ σημεῖον ο (Σχ. 78), ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, τότε αἱ ἀντιδράσεις αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Γ καὶ προερχόμεναι ἢ μὲν ἐκ τῆς πακτώσεως, ἢ δὲ ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος, καὶ αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἐξάγονται εὐκόλως, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 103. Διότι, ἂν εἰς τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὑποθέσωμεν τὸ ν ἴσον μὲ τὴν μονάδα, θέλωμεν εὑρεῖ τὰς ἀρμοζούσας ἐξισώσεις εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, ἥτις εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς παραγράφου 103.

Ὅθεν ὑποθέτοντες $v=4$, θέλομεν ἔχει

$$\gamma' = \frac{5}{8} \times \frac{B}{2} \quad (1)$$

$$\gamma = B - \frac{5}{8} \cdot \frac{B}{2} = \frac{11}{8} \cdot \frac{B}{2} \quad (2)$$

$$\frac{PI}{v} = \frac{B}{16} (6\mu - 11\chi) \quad (3)$$

διὰ τὸ τμήμα Αο, καὶ

$$\frac{PI}{v} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{B}{2} (2\mu - \chi) \quad (4)$$

διὰ τὸ τμήμα οΓ.

Ὅτι εἴπομεν ἐν ταῖς παραγράφοις 103 καὶ 104, ὅταν τὸ φορτίον Β ἐνήργει εἰς τὸ σημεῖον ο, (Σχ. 78) ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ βάρος Β ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ.

106. Πρὸς εὐρεσιν τῆς καμπύλης, ἣν σχηματίζει ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 78), ἥτις εἶναι πεπαικωμένη εἰς τὸ ἄκρον Α διὰ δὲ τοῦ ἐτέρου ἄκρου αὐτῆς Γ στηρίζεται ἐπὶ στρεοῦ στηρίγματος καὶ φέρει φορτίον Β, ἡ εἰς τὸ σημεῖον ο ἢ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἃς διερευνήσωμεν τὰς γενικὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) τῆς ἐγκαρσίου τομῆς.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) τῆς § 103, ὅπερ χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ Χ, εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον μὲ $\frac{Bv\mu}{8}(4-v)(2-v)$, ὅταν ἡ χ ᾖ ἴση μὲ τὸ μηδέν. Ἐὰν δὲ ἡ χ λάβῃ διαδοχικῶς τιμὰς, περιεχομένας μεταξὺ τοῦ 0 καὶ

$$\chi' = \frac{42v^2 - 46v - 2v^3}{6v^2 - 46 - v^3} \mu,$$

ὅπερ εὐρίσκομεν ἐξισοῦντες μὲ τὸ μηδέν τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) ἐξισώσεως, τὸ Χ ἐλαττοῦται βαθμηδὸν καὶ λαμβάνει πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $\frac{Bv\mu}{8}(4-v)(2-v)$ καὶ τοῦ 0. Ἐὰν δὲ ἡ χ λάβῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν

των χ' και $\nu\mu$, τὸ X λαμβάνει διαδοχικῶς ἀπάσας τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν τιμῶν 0 καὶ $-\frac{B\nu\mu^2}{16}(2-\nu)(6-\nu)$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσews (4), ὅπερ παριστῶμεν διὰ X , εἶναι ἀρνητικόν, καὶ ὅταν ἡ χ λάβῃ διαδοχικῶς πᾶς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $\nu\mu$ καὶ 2μ , τὸ X , ὃν πάντοτε ἀρνητικόν, ἐλαττοῦται ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου του θεωρούμενον, καὶ λαμβάνει διαδοχικῶς ἀπάσας τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $-\frac{B\nu\mu^2}{16}(2-\nu)(6-\nu)$ καὶ 0, καὶ γίνεται 0, ὅταν ἡ χ λάβῃ τὴν τιμὴν 2μ .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κυρτότης τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους B , εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τῆς πακτώσεως A μέχρι τοῦ σημείου, τοῦ ἔχοντος τετμημένην $\chi' = \frac{12\nu^2 - 16\nu - 2\nu^3}{6\nu^2 - 16 - \nu^3}\mu$, ὅταν τὸ βάρος B ἀπέχῃ $\nu\mu$ ἀπὸ τῆς πακτώσεως, ἢ $\chi' = \frac{6}{41}\mu$, ὅταν τὸ βάρος B ἐνεργῇ εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, ἀπὸ δὲ τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην χ' μέχρι τοῦ ἄκρου Γ ἡ κυρτότης τῆς καμπύλης εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ κάτω καὶ ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον, τὸ ἔχον χ' ὡς τετμημένην, ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὴν καμπύλην καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται σημεῖον καμπῆς.

107. Ἐὰν ἡ δοκὸς AG (Σχ. 78), ἡ ἔχουσα μῆκος 2μ καὶ οὔσα πεπακτωμένη μὲν εἰς τὸ ἄκρον A , στηριζομένη δὲ εἰς τὸ ἕτερον Γ , εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, τότε αἱ μὲν ἀντιδράσεις Υ καὶ Υ' τῆς πακτώσεως A καὶ τοῦ στηρίγματος Γ , καθὰ διδάσκει ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις, εἶναι αἱ ἐξῆς

$$\psi' = \frac{3}{4}\mu\epsilon \quad (1)$$

ἀντίδρασις τοῦ σημείου Γ ,

$$\psi = \frac{5}{4}\mu\epsilon \quad (2)$$

ἀντίδρασις τῆς πακτώσεως A .

Ἡ δὲ γενικὴ ἐξίσωσις ἐγκαρσίου τινὸς τομῆς εἶναι ἡ κάτωθι

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{6}{2}(2\mu - \chi)^2 - \frac{3}{4}\mu^2(2\mu - \chi),$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{1}{4}\mu^2(2\mu^2 - 5\chi + 2\chi^2)$$

$$\frac{PI}{\nu} = -\frac{1}{8}\mu(4\mu - 2\chi)(2\chi - \mu) \quad (3).$$

Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) τὸ ϵ παριστᾷ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῆς δοκοῦ, τὸ δὲ μ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους ΑΓ τῆς δοκοῦ.

Καὶ ἐνταῦθα δὲ ὡς καὶ εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων λαμβάνεται ἐπὶ τῆς πακτώσεως Α, διότι δὲν ὑπάρχει συμμετρία.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ (3) ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΤΟΜΗΣ

108. Ὡς παραστήσωμεν χάριν συντομίας τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ Χ καὶ ἄς ἴδωμεν τίνας μεταβολὰς λαμβάνει τοῦτο, ὅταν ἡ χ λάβῃ διαδοχικῶς ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 2μ .

Ὅταν ἡ χ γείνηται μηδέν, τότε τὸ Χ εἶναι θετικὸν καὶ ἶσον μὲ $\frac{1}{2}\epsilon\mu^2$. ὅταν δὲ ἡ χ λάβῃ τὴν τιμὴν $\frac{\mu}{2}$, τότε τὸ Χ γίνεται μηδέν· ἐὰν δὲ ἡ χ λάβῃ διαδοχικῶς ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ 0 καὶ $\frac{\mu}{2}$, τότε τὸ Χ ἐλαττοῦται βαθμὴν καὶ λαμβάνει ἀπάσας τὰς θετικὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $\frac{1}{2}\epsilon\mu^2$ καὶ 0. Ὅταν δὲ τὸ χ λάβῃ διαδοχικῶς ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ $\frac{\mu}{2}$ καὶ 2μ , τότε τὸ Χ ἀπὸ μηδέν γίνεται ἀρνητικόν, καὶ βαίνει ἀνέξαρτον ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτοῦ θεωρούμενον, γίνεται δὲ μέγιστον καὶ ἶσον μὲ $\frac{9}{32}\epsilon\mu^2$, ὅταν $\chi = \frac{3}{4}\mu$, καθὰ ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις δείχνει, ἀκολουθῶς ἐλαττοῦται βαθμὴν, ἀνεξαρτήτως πάντοτε τοῦ σημείου αὐτοῦ θεωρούμενον, καὶ γίνεται μηδέν, ὅταν $\chi = 2\mu$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἐξάγομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

1^{ον} Ἡ κυρτότης τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει, εἶναι ἐστραμ-

μένη πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τῆς πακτώσεως Α μέχρι τοῦ σημείου, τοῦ ἔχοντος τετμημένην $\frac{\mu}{2}$, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τούτου μέχρι τοῦ ἄκρου Γ εἶναι ἐστραμμένη πρὸς τὰ κάτω.

2^{ον} Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην $\frac{\mu}{2}$, τέμνει τὴν καμπύλην, τούτου δ' ἕνεκα τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται σημεῖον καμπῆς.

3^{ον} Ἄν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖναι ἰσοπαχής, τότε πρὸς εὗρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκάρσιου τομῆς πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἡμῶν τὴν μεγαλειτέραν, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου, τιμὴν τοῦ Χ, ἥτοι

$$X_1 = \frac{1}{2} \epsilon \mu^2$$

καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon \mu^2 \quad (H)$$

νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ.

4^{ον} Ἄν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ μὴ ᾖναι μὲν στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, νὰ ἀποτελεῖται ὅμως ὑπὸ ἰσοπαχῶν τμημάτων χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας, τοῦθ' ὅπερ κατορθοῦται εὐκόλως εἰς τὰς σιδηρᾶς δοκοὺς, τὰς κατασκευαζομένας ἐκ φύλλων σιδηρῶν ἐλασμάτων συνδεδεμένων διὰ παλυλῖτων, τότε τοῦ μὲν τμήματος Αο = 0,49μ (Σχ. 79) τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (H), τοῦ δὲ οΓ = 4,81μ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{9}{32} \epsilon \mu^2 \quad (Θ)$$

διότι εἰς μὲν τὸ τμήμα Αο ἡ μεγαλειτέρα τιμὴ τοῦ Χ εἶναι $\frac{1}{2} \epsilon \mu^2$, εἰς δὲ τὸ οΓ ἡ μεγαλειτέρα τιμὴ τοῦ Χ, ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτῆς θεωρουμένη, εἶναι $\frac{9}{32} \epsilon \mu^2$.

Σημείωσις 4. Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ τμήμα Αο εἶναι ἶσον μὲ 0,49μ, τοῦτο δὲ εὐρίσκομεν ὡς ἐξῆς.

Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι $\frac{\mu}{2}$, τὸ Χ λαμβάνει ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $\frac{1}{2} \epsilon \mu^2$ καὶ 0,

ἔπεται ὅτι θὰ λάβῃ καὶ τὴν θετικὴν τιμὴν, τὴν οὖσαν ἴσην μὲ $\frac{9}{32}\epsilon\mu^2$ καὶ περιεχομένην μεταξὺ τῶν $\frac{1}{2}\epsilon\mu^2$ καὶ 0. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ σημεῖον ο, δι' ὃ ἡ τιμὴ τῆς X εἶναι ἴση μὲ $\frac{9}{32}\epsilon\mu^2$, ἐξισοῦμεν τὸ X μὲ $\frac{9}{32}\epsilon\mu^2$ καὶ ἔχομεν τὴν κάτωθεν ἐξίσωσιν,

$$\frac{9}{32}\epsilon\mu^2 = \frac{1}{4}\epsilon(2\mu^2 - 5\mu\chi' + 2\chi'^2) \quad (\alpha),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τετραμμένην χ' τοῦ σημείου ο.

Λύοντες λοιπὸν ὡς πρὸς τὸ χ' τὴν ἀνωτέρω δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (α) εὕρισκουμεν

$$\chi' = \frac{5}{4}\mu \pm \mu \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{44}{32}}$$

$$\eta \quad \chi' = \frac{5}{4}\mu - \frac{6}{5,65}\mu = 0,19\mu,$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \chi'' = \frac{5}{4}\mu + \frac{6}{5,65}\mu = 2,31\mu.$$

Ἡ πρώτη τιμὴ χ' εἶναι παραδεκτὴ καὶ προσδιορίζει τὸ σημεῖον ο, ἡ δὲ δευτέρα χ'' εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ὁλοκῶς μήκους 2μ τῆς δοκοῦ.

Σημείωσις 2. Αἱ διαστάσεις τοῦ τμήματος Αο, αἱ προσδιορίζονται ἐκ τοῦ τύπου τῆς κάμψεως $\frac{PI}{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon\mu^2$, πρέπει νὰ ᾖναι ἴσαι τοῦλάχιστον ἂν οὐχὶ καὶ μεγαλιέτεραι, τῶν διαστάσεων τῶν προσδιοριζομένων ὑπὸ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως

$$\omega = \frac{\gamma}{\rho'} = \frac{\frac{1}{4}\epsilon\mu^2}{\rho'}.$$

Ὡσαύτως καὶ διὰ τὸ τμήμα οΓ.

109. Ὁ προσδιορισμὸς δύο παχῶν τῆς δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 79), δηλ. ἄλλην τομὴν διὰ τὸ τμήμα Αο καὶ ἄλλην διὰ τὸ οΓ, εἶναι λίαν ὠφέλιμος ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς χρηματικῆς οἰκονομίας, ἰδίως δὲ ὅταν πρόκειται περὶ κατασκευῆς σιδηρῶν γεφυρῶν. Ἵνα δὲ καταστήσωμεν τοῦτο καταφανέστερον, ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω εἰς ἓν μερικὸν παράδειγμα· ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὰς διαστάσεις

σιδηρῆς δοκοῦ πεπλατωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῆς ἄκρου καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἐτέρου, ἐχούσης δὲ μῆκος 20 μέτρων, τομὴν ἐγκάρσιον διπλοῦν ταῦ, ὅπως αὕτη ὑποβαστάζη 4000 χιλιογράμμων βάρος κατὰ τρέχον μέτρον, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἰδίου αὐτῆς βάρους.

Τὰ δεδομένα ἐνταῦθα εἶναι $\mu=10$, $\epsilon=4000$

$$A\sigma=0,49\mu=0,49 \times 10=4^{\mu},90,$$

$$\Gamma\sigma=1,81\mu=1,81 \times 10=18^{\mu},10 \text{ καὶ } P=6.000.000.$$

Λαμβάνοντες δὲ κατ' ἀρέσκειαν τὴν ὀριζόντιον διάστασιν α τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ καὶ τὴν αὐτὴν δι' ἀμφοτέρω τὰ τμήματα $A\sigma$ καὶ $\sigma\Gamma$, (Σχ. 79) καὶ ἔστω $\mu\epsilon=0^{\mu},30$, τὸ δὲ πᾶχος $0^{\mu},02$, θέλομεν ἔχει (ἴδε σχ 75).

$$\alpha=0,30, \gamma=\psi, \nu=\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}\psi.$$

$$2\alpha'=0^{\mu},30-0^{\mu},02=0^{\mu},28, \quad \gamma'=\gamma-0,04=\psi-0,04.$$

$$I=\frac{\alpha\gamma^3-2\alpha'\gamma'^3}{12}=\frac{0,30 \times \psi^3-0,28(\psi-0,04)^3}{12}$$

$$\eta \quad I=\frac{0,02\psi^3+0,0336\psi^2-0,001344\psi+0,00001792}{12}$$

καὶ δι' ἐξισώσεις τῶν ἐγκαρσίων τομῶν $A\sigma$ καὶ $\sigma\Gamma$

$$\frac{6\,000\,000(0,02\psi^3+0,0336\psi^2-0,001344\psi+0,00001792)}{12 \cdot \frac{1}{2}\psi}=\frac{1}{2} \times 4000 \times 10^2 \quad (1)$$

διὰ τὸ τμήμα $A\sigma$, καὶ

$$\frac{6\,000\,000(0,02\psi^3+0,0336\psi^2-0,001344\psi+0,00001792)}{12 \cdot \frac{1}{2}\psi}=\frac{9}{32} \times 4000 \times 10^2 \quad (2)$$

διὰ τὸ τμήμα $\sigma\Gamma$.

Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς σεσημειωμένας πράξεις καὶ μεταφέροντες εἰς τὸ πρῶτον μέλος ὅλους αὐτῆς τοὺς ὅρους, ἔχομεν τὰς κάτωθι δύο τριτοβαθμίους ἐξισώσεις

$$20000\psi^3+33600\psi^2-413844\psi+17,92=0 \quad (3)$$

διὰ τὸ τμήμα $\sigma\Gamma$.

$$20000\psi^3+33600\psi^2-201344\psi+17,92=0 \quad (4)$$

διὰ τὸ τμήμα $A\sigma$.

Τούτων τῶν ἐξισώσεων ἡ λύσις γίνεται διὰ δοκιμῶν, διότι εἶναι τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ὀλίγα δὲ δοκιμαὶ ἀρκοῦσιν, ὥπως ἴδωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ψ περιέχεται τῆς μὲν (3) ἐξισώσεως μεταξὺ τῶν 1,65 καὶ 1,70, τῆς δὲ (4) μεταξὺ τῶν 2,40 καὶ 2,45.

Ἐπομένως λαμβάνοντες $\psi = 1^{\text{u}}, 70$ διὰ τὸ τμήμα οΓ καὶ $\psi = 2,45$ διὰ τὸ τμήμα Αο, δηλ. τιμὰς τῆς ψ ὀλίγον τι μεγαλειτέρας τῶν πραγματικῶν καὶ τοῦτο πρὸς περισσοτέραν ἀσφάλειαν, καὶ ὑπολογίζοντες τὰ βάρη τῶν τμημάτων Αο καὶ Γο, ἔχομεν λαμβάνοντες ὡς βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου σιδήρου 7200 χ^{u} , διὰ μὲν τὸ βάρος τοῦ τμήματος Αο

$$4,90(2 \times 0,30 \times 0,02 + 2,44 \times 0,02)7200 = 822\chi^{\text{u}}, 96$$

διὰ δὲ τὸ βάρος τοῦ τμήματος οΓ

$$18,10(2 \times 0,30 \times 0,02 + 1,66 \times 0,02)7200 = 5890\chi^{\text{u}}, 46$$

ἐπομένως τὸ ὅλικόν βάρος τῆς δοκοῦ ΑΓ εἶναι 6713 χ^{u} , 42

Ἄν δὲ ἡ δοκὸς ᾗτο ἰσοπαχὴς, τότε ἠθέλομεν λάβει ὑπ' ὄψιν μας τὰς μεγαλειτέρας διαστάσεις, δηλ. $\alpha = 0,30$ καὶ $\gamma = 2,45$, καὶ ἠθέλομεν εὑρεῖ βάρος $20(2 \times 0,30 \times 0,02 + 2,44 \times 0,02)7200 = 8668\chi^{\text{u}}, 80$. Παραβάλλοντες δὲ τὰ βάρη τῶν δύο ἀνωτέρω δοκῶν εὐρίσκομεν ὅτι ἡ πρώτη ζυγίζει ὀλιγώτερον τῆς δευτέρας κατὰ 1955 χ^{u} , 38. Ἐπειδὴ δὲ ὁ σίδηρος πληρώνεται κατὰ χιλιόγραμμον καὶ πρὸς δραχμὰς μίαν κατὰ μέσον ὄρον τὸ χιλιόγραμμον, θέλομεν ἔχει χρηματικὴν οἰκονομίαν, ποιῶντες χρῆσιν τῆς πρώτης δοκοῦ ἀντὶ τῆς δευτέρας, δραχμὰς 1955 περίπου.

Ἐκ τοῦ μερικοῦ τούτου παραδείγματος γίνεται κατὰδῆλον, ὅποιαν χρηματικὴν οἰκονομίαν δυνάμεθα νὰ πραγματοποιήσωμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν, προσδιορίζοντες δύο ὕψη τῆς δοκοῦ, τὸ μὲν διὰ τὸ τμήμα Αο, τὸ δὲ διὰ τὸ τμήμα οΓ, ἀντὶ νὰ κάμωμεν χρῆσιν ἰσοπαχοῦς δοκοῦ μὲ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος Αο.

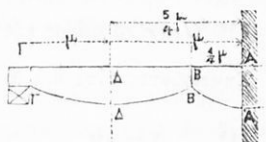
Τὰ ὀλίγα δὲ ταῦτα ἀρκοῦσι νομίζομεν πρὸς ὁδηγίαν τῶν θελούντων νὰ πραγματοποιήσῃ πᾶσαν δυνατὴν χρηματικὴν οἰκονομίαν ἄνευ βλάβης τῆς στερεότητος τῶν σιδηρῶν δοκῶν τῶν γεφυρῶν κτλ.

110. Ἐάν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται στερεὴν ἴσης ἀντιστάσεως, τοῦθ' ὕπερ εὐκόλως πραγματοποιεῖται προκειμένου περὶ δοκῶν ἐκ χυτοσιδήρου ἢ χάλυβος, τότε πρὸς εὑρεσιν τῶν διαφόρων παχῶν, τοῦ πλάτους τῆς δοκοῦ ὑποτιθεμένου κατὰ τὸ σύνθηδες σταθεροῦ, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν (3) τῆς παραγράφου 107, καὶ

δι' αὐτῆς θέλομεν προσδιορίζει τὰ διάφορα πάχη τῆς δοκοῦ, τὰ περιεχόμενα εἰς τὴν ῥοπήν τῆς ἀδρανείας I, δίδοντες εἰς τὴν χ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 ἕως 2μ.

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξίσωσης (3) γίνεται μηδέν, ὅταν τὸ χ λάβῃ τὰς τιμὰς $\frac{\mu}{2}$ καὶ 2μ, καὶ ἐπομένως τὰ διὰ τῆς ἐξίσωσης (3) διδόμενα πάχη τῆς δοκοῦ εἶναι τότε μηδέν, διὰ τοῦτο εἰς τὰ σημεία ταῦτα τῆς δοκοῦ, τὰ ἔχοντα τε-

τμημένους $\frac{\mu}{2}$ καὶ 2μ, προσδιορίζομεν τὰ πάχη αὐτῆς διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως.



Σχ. 80

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω ἐπὶ μερικοῦ τινος παραδείγματος γίνεται ὅπως καὶ ἐν ταῖς παραγράφοις 88 καὶ 101, ἡ δὲ εὐρεθησομένη πρόσοψις τῆς δοκοῦ θέλει ἔχει σχῆμα, οἷον δεικνύει τὸ σχῆμα 80.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΗΣ ΚΑΜΨΕΩΣ

111. Ἐκ τῶν ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ τῆς κάμψεως ἐκτεθέντων συνάγομεν ὅτι ὁ γενικὸς τύπος τῆς κάμψεως, ὁ παριστῶν τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ καὶ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν ἐνεργουσῶν πρὸς θλάσιν αὐτῆς, εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰς τέσσαρας περιπτώσεις, δηλ. ὅτι ἡ ῥοπή τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς τομῆς, ἥτις παρίσταται διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{PI}{\rho}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῆς θεωρουμένης τομῆς καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ἄκρων τῆς δοκοῦ καὶ καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰνῶν τῆς δοκοῦ ἐνεργουσῶν.

Τὴν ῥοπήν ταύτην χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος X, ὅτε θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$\frac{PI}{\rho} = X \quad (\alpha),$$

ἐν ᾧ τὸ X εἶναι μεταβλητὸν δι' ἐκάστην μερικὴν περίπτωσιν.

Πρὸς ταχεῖαν εὐρεσιν τῆς τιμῆς τῆς X, τῆς ἀναφερομένης εἰς ἐκάστην μερικὴν περίπτωσιν διὰ δοκὸν καθόλου ἢ τμηματικῶς ἰσοπαχῇ καταγράφομεν τὰς τιμὰς τούτου ἐν τῷ ἐπομένῳ ὁδῶ πίνακι.

ΠΙΝΑΞ Η'.

Περιέχων τὰς μεγίστας τιμὰς τοῦ X , τὰς ἀρμοζούσας εἰς ἐκάστην μερικὴν περίπτωσιν καὶ διὰ δοκὸν ἰσοπαχῇ ἢ καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς ἢ κατὰ τμήματα.

1^{ον} Ὄταν τὸ βάρος τῆς δοκοῦ παραλείπεται.

Σημειοῦντες τότε διὰ M ἢ 2μ τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ θέλομεν ἔχει

$$(1) \quad X = BM,$$

Ῥοπή εἰς τὴν πάντως ἐν δοκοῦ πεπαιγμένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον.

$$(2) \quad X = \frac{BM}{4},$$

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ στηριζομένης διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηρίγματων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

$$\text{ἢ} \quad X = \frac{B}{2} \cdot \mu,$$

$$(3) \quad X = \frac{BM}{8},$$

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον ἢ εἰς τὴν πάντως ἐν δοκοῦ πεπαιγμένης εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ φερούσης φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

$$\text{ἢ} \quad X = \frac{B\mu}{4},$$

$$(4) \quad X = \frac{3}{16} \cdot BM,$$

Ῥοπή εἰς τὴν πάντως ἐν δοκοῦ πεπαιγμένης διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῆς ἄκρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, φερούσης δὲ φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

$$\text{ἢ} \quad X = \frac{3}{8} \cdot B\mu,$$

$$(5) \quad X = \frac{5}{32} \cdot BM,$$

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ πεπαιγμένης διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου αὐτῆς ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, φερούσης δὲ φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

$$\text{ἢ} \quad X = \frac{5}{16} \cdot B\mu,$$

Ἡ τιμὴ (4) εἶναι μεγαλειτέρα τῆς (3) κατὰ $\frac{1}{32} BM$, ταύτην δὲ τὴν τιμὴν (4) πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὅταν ὄψιν, ὅταν πρόκηται ἡ δοκὸς νὰ ᾖ ἰσοπαχής.

$$(6) \quad X = \frac{6M^2}{2},$$

$$(7) \quad X = \frac{6\mu^2}{2},$$

$$\eta \quad X = \frac{6M^2}{8},$$

$$(8) \quad X = \frac{6\mu^2}{6},$$

$$\eta \quad X = \frac{6M^2}{24},$$

$$(9) \quad X = \frac{6\mu^2}{3},$$

$$\eta \quad X = \frac{6M^2}{12},$$

$$(10) \quad X = \frac{6\mu^2}{2},$$

$$\eta \quad X = \frac{6M^2}{8},$$

Ῥοπή εἰς τὴν πᾶκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου, ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον καὶ φερούσης ὁμοιομόρφως φορτίον δ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ στηριζομένης διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηρίγματων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου καὶ φερούσης ὁμοιομόρφως φορτίον δ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ φερούσης ὁμοιομόρφως φορτίον δ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Ἡ ῥοπή αὕτη ἐφαρμόζεται μόνον ἐπὶ μήκους 1,63μ, ἢ ἐπὶ 0,815μ ἐκατέρωθεν τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ, ὅταν θέλῃ τις νὰ δώσῃ δύο διαφορετικὰ πᾶχη εἰς τὴν δοκόν.

Ῥοπή εἰς τὴν πᾶκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ φερούσης ὁμοιομόρφως φορτίον δ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Αὕτη δὲ πρέπει νὰ λαμβάνηται ὑπ' ὄψιν, ὅταν πρόκηται ἡ δοκὸς νὰ ᾖ ἰσοποχῆς.

Ἡ ῥοπή αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ μόνον ἐπὶ μήκους 0,185μ ἀφ' ἐκάστου ἄκρου τῆς δοκοῦ, ὅταν τις θέλῃ νὰ δώσῃ δύο διαφορετικὰ πᾶχη εἰς τὴν δοκόν.

Ῥοπή εἰς τὴν πᾶκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος φερούσης δὲ ὁμοιομόρφως φορτίον δ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Αὕτη δὲ πρέπει νὰ λαμβάνηται ὑπ' ὄψιν, ὅταν πρόκηται ἡ δοκὸς νὰ ᾖ ἰσοπαχῆς.

Ἡ ῥοπή δὲ αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ μόνον ἐπὶ μήκους 0,19μ ἀπὸ τῆς πακτώσεως, ὅταν τις θέλῃ νὰ δώσῃ δύο διάφορα πᾶχη εἰς τὴν δοκόν.

$$(41) \quad X = \frac{9}{32} \epsilon \mu^2,$$

$$\eta \quad X = \frac{9}{128} \epsilon M^2$$

Ῥοπή εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἀπέχον ἀπὸ τῆς πακτώσεως κατὰ $\frac{5}{4}\mu$, δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, φερούσης δὲ ὁμοιομόρφως φορτίον ϵ κατὰ τρέχον μέτρον τοῦ μήκους αὐτῆς.

Ἡ ῥοπή αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ μόνον ἀπὸ τοῦ σημείου, τοῦ ἀπέχοντος τῆς πακτώσεως κατὰ $0,19\mu$, μέχρι τοῦ ἄκρου, δι' οὗ στηρίζεται ἡ δοκός, ἤτοι ἐν ὅλῳ ἐπὶ μήκους $1,81\mu$, ὅταν τις θέλῃ νὰ δώσῃ δύο διάφορα πάχη εἰς τὴν δοκόν.

2^{ον} Ὅταν τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Τότε σημειοῦντες διὰ ϵ_1 τὸ βάρος ἐνὸς τρέχοντος μέτρου τῆς δοκοῦ, διὰ ϵ_2 τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον, ὅταν ἡ δοκὸς ᾔναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, διὰ B τὸ ὅλον φορτίον, ὅταν τοῦτο ᾔναι συγκεντρωμένον εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, διὰ M ἢ 2μ τὸ μήκος τῆς δοκοῦ, θέλομεν ἔχει

$$(1) \quad X = BM + \frac{\epsilon_1 M^2}{2},$$

Ῥοπή εἰς τὴν πᾶκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ ἐλευθέρας εἰς τὸ ἕτερον.

$$(2) \quad X = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) M^2}{2},$$

Ἡ τιμὴ (1) ἐφαρμόζεται, ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον B εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον, ἡ δὲ τιμὴ (2), ὅταν ἡ δοκὸς ᾔναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

$$(3) \quad X = \frac{BM}{4} + \frac{\epsilon_1 M^2}{8},$$

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ στηριζομένης διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηρίγματων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου.

$$(4) \quad X = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu^2}{2},$$

Ἡ τιμὴ (3) ἀρμόζει εἰς δοκὸν φέρουσαν B φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ (4) εἰς δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

$$(5) \quad X = \frac{BM}{8} + \frac{\epsilon_1 M^2}{24},$$

Ῥοπή εἰς τὸ μέσον δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς.

$$(6) \quad X = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu^2}{6},$$

Ἡ τιμὴ (5) λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ (6), ὅταν ᾔναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, ἀμφοτέραι δὲ ἐφαρμόζονται μόνον ἐπὶ μήκους $1,63\mu$, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ἔχῃ δύο διάφορα πάχη.

$$(7) \quad X = \frac{BM}{8} + \frac{\epsilon_1 M^2}{12},$$

$$(8) \quad X = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu^2}{3},$$

$$(9) \quad X = \frac{3}{16} BM + \frac{\epsilon_1 M^2}{8}$$

$$(10) \quad X = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu^2}{2},$$

$$(11) \quad X = \frac{5}{32} BM + \frac{9}{128} \epsilon_1 M^2$$

$$(12) \quad X = \frac{9}{32} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu^2,$$

Ροπή εις τὴν πάκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς.

Ἡ τιμὴ (7) ἐφαρμόζεται εἰς δοκὸν φέρουσαν Β φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ (8), ὅταν αὕτη ᾖ ὁμοιομόρφως φορτωμένη. Αἱ (7) καὶ (8) λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὅσας ἡ δοκὸς πρόκειται νὰ ᾖ ἰσοπαχὴς καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς.

Αἱ αὐταὶ δὲ δύνανται νὰ ληφῶσιν ὑπ' ὄψιν καὶ μόνον διὰ μήκος $2 \times 0,185 \mu$ ἀφ' ἐκάστου ἄκρου, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ἔχῃ δύο διαφορὰ πάχην.

Ροπή εις τὴν πάκτωσιν δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ διὰ τοῦ ἑτέρου στηριζομένης ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος.

Ἡ τιμὴ (9) ἀρμόζει εἰς δοκὸν φέρουσαν Β φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ (10) εἰς δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

Αἱ τιμαὶ αὗται τῆς Χ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὅσας ἡ δοκὸς πρόκειται νὰ ᾖ ἰσοπαχὴς καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς.

Αἱ αὐταὶ δὲ τιμαὶ δύνανται ἐπίσης νὰ ληφῶσιν ὑπ' ὄψιν καὶ μόνον διὰ μήκος $0,19 \mu$ ἀπὸ τῆς πακτώσεως, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ἔχῃ δύο διαφορὰ πάχην.

Ροπή περὶ τὸ μέσον δοκοῦ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου στηριζομένης ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος.

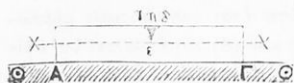
Ἡ τομὴ (11) ἀρμόζει εἰς δοκὸν φέρουσαν Β φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ (12) εἰς δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

Αἱ τιμαὶ αὗται λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὅσας ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀνισοπαχῶν τμημάτων καὶ ἐφαρμόζονται μόνον ἐπὶ μήκους $1,81 \mu$.

112. Τῶν εἰς κάμψιν ὑποκειμένων σωμάτων συνήθως βλῶνται πρῶτον αἱ ἐφελκυσμέναι ἴνες καὶ εἶτα αἱ θλιβόμεναι. Τοῦτο δὲ ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ ἐξῆς πειράματος.

Ἄς λάβωμεν μίαν ξύλινον δοκὸν, τὴν ΑΓ παραδείγματος χάριν, καὶ ἂς θέσωμεν τὰς ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ΘΘ (Σχ. 81), δια δὲ

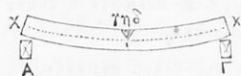
τοῦ πρίονος ἃς ἀποσπᾶσθωμεν τὸ τριγωνικὸν πρίσμα γδε (Σχ. 81), καὶ ἐπὶ τοῦ οὕτω σχηματισθεμένου κενοῦ διὰ τοῦ κοπάνου ἐμφυτεύσωμεν ὁρμητικῶς τὴν τριγωνικὴν σφήνα γδε (Σχ. 81), ἐκ τῆς αὐτῆς ἀπο-



Σχ. 81

τελουμένην ὕλης καὶ ὀλίγον τι παχυτέραν τοῦ παραχθέντος κενοῦ, ὥστε ἡ δοκὸς μετὰ τῆς σφήνης νὰ ἀποτελεῇ καὶ πάλιν ἓν σῶμα. Ἐὰν λάβωμεν τὴν οὕτω διασκευασθεῖσαν δοκὸν ΑΓ (Σχ. 81) καὶ

θέσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τῶν δύο στερεῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ, τῶν καίμενων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 82, δηλ. τὴν σφήνα πρὸς τὰ ἄνω, καὶ φορτῶσθωμεν τὴν δοκὸν εἴτε ὁμοιόμορφως εἴτε κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς, αὐξήσωμεν δ' ἔπειτα ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὸ φορτίον, μέχρις οὗ ἡ δοκὸς θλασθῇ, θέλωμεν ἰδεῖν ὅτι τὸ παραγαγὼν τὴν διάρρηξιν τῆς δοκοῦ βάρος εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος, ὅπερ παράγει τὴν διάρρηξιν τῆς αὐτῆς δοκοῦ, ὅταν αὕτη ᾖ πλῆρης, δηλ. πρὶν διασκευασθῇ ὡς ἀνωτέρω διὰ τῆς ἐν αὐτῇ ἐμφυτεύσεως τῆς σφήνης. Τοῦτο δὲ δηλοῖ ὅτι ἡ σφήν, πληροῦσα τὸ ἐκ τῆς ἀποκοφείως σχηματισθὲν κενὸν μέρος τῶν θλιβομένων ἰνῶν, καὶ ἐμποδίζουσα τὴν ἐπαφὴν τῶν ἐπιφανειῶν εγ καὶ εδ διατηρεῖ ἀμετάβλητον τὴν μέσσην ἴνα XX (Σχ. 82) καὶ οὕτω συντείνει εἰς τὴν στερεότητα τῆς δοκοῦ, ἥτις

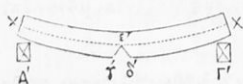


Σχ. 82

οὐδόλως ἐμειώθη ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως μέρους τῶν θλιβομένων ἰνῶν ἐνῶ, ἂν ἡ σφήν δὲν ἐνεφυτεύετο εἰς τὸ κενὸν τῆς δοκοῦ, τότε αἱ ἐπιφάνειαι εγ καὶ εδ, μὴ ἀπαντῶσαι οὐδὲν

πρόσκομμα, ἤθελον ἔλθαι εἰς ἐπαφὴν, καὶ οὕτω αἱ ἄνωθεν τῆς γραμμῆς XX ἴνες ἤθελον ἀποσπασθῇ ἐκ τῶν κάτω καὶ ἡ δοκὸς ἀπολέσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ πάχους αὐτῆς, καὶ κατὰ συνέχειαν ἡ δύναμις τις ἤθελεν ὑποδιπλασιασθῇ.

Ἐὰν τὴν ὡς ἀνωτέρω εἴρηται διασκευασμένην δοκὸν ΑΓ (Σχ. 81)



Σχ. 83

θέσωμεν ἐπὶ τῶν στηριγμάτων Α καὶ Γ ὅχι ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 82, ἀλλ' ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 83, τότε ὡς ἐκ τῆς κάμψεως, ἣν λαμβάνει ἡ δοκός, ἡ σφήν ἀποσπᾶται

καὶ πίπτει καὶ συνεπῶς ἡ δύναμις τῆς δοκοῦ ὑποδιπλασιάζεται, διότι μόνον τὸ ἥμισυ τῶν ἰνῶν ἐργάζεται πρὸς ἐξουδετέρωσιν τοῦ φορτίου, καὶ ἀρκεῖ τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου βάρους νὰ θλάσῃ αὐτήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἐξάγομεν τὸ ἐξ ἧς λίαν χρήσιμον εἰς τὴν πρᾶξιν συμέρασμα.

Ὅταν δοκῇ τις ξύλινος, ἢν πρόκειται νὰ μεταχειρισθῶμεν εἴτε εἰς πάτωμα εἴτε εἰς στέγην οἰκίας τινός, εἴτε καὶ εἰς ξυλίνην γέφυραν, ἔχῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς μόνον προσόψεως μικρόν τι ἐλάττωμα, εἶον μίαν ὁπῆν, προσελθούσαν ἐκ τῆς ἀποσπάσεως ῥόζου τινος, ἢ ῥήγμά τι ἐγκάρσιον μὴ προχωροῦν ὅμως πέραν τοῦ ἡμίσεως πάχους τῆς δοκοῦ, τότε δὲν πρέπει τὴν δοκὸν ταύτην νὰ θεωρῶμεν ὡς ἐλαττωματικὴν καὶ νὰ τὴν ἀπορρίπτωμεν, ἀλλὰ νὰ τὴν παραδεχόμεθα καὶ νὰ κάμνωμεν χρῆσιν αὐτῆς, ἀφοῦ προηγουμένως καθαρίσωμεν καλῶς τὸ ἐλαττωματικὸν μέρος αὐτῆς καὶ ἐμφυτεύσωμεν ἐν αὐτῇ καταλλήλους σφηκας, προσέχοντες πάντοτε νὰ θέτωμεν τὴν ἐλαττωματικὴν προσοψίν πρὸς τὰ ἄνω, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 82.

113. Ἐνταῦθα θέλομεν ἴδῃ πῶς ἐκ τῶν γενικῶν τύπων τῆς κάμψεως δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν μερικοὺς τινὰς τύπους, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὰς ἀναγκαίας διαστάσεις λίαν εἰδικῶν τινῶν χρησίμων ὀργάνων.

1^α Περὶ ἀξόνων ὑδραυλικῶν τροχῶν, ὀδοντοτῶν τροχῶν κ.λπ.

Ἐν γένει οἱ ἄξονες, ὡς ἐκ τῆς περιστροφικῆς αὐτῶν κινήσεως, εἶναι κυλινδρικοὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, καὶ θεωροῦνται ὡς δοκαὶ στηριζόμενοι ἐπὶ δύο στερεῶν στηριγμάτων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, καὶ φέροντες ἢ φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, ὡς π. χ. ὁ ἄξων τοῦ σπονδύλου, ἢ δύο ἴσα φορτία εἰς δύο σημεῖα αὐτοῦ ἰσάκεις ἀπέχοντα τοῦ μέσου ἢ τῶν ἁκρῶν αὐτοῦ, ὡς π. χ. ὁ ἄξων τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν.

Καλοῦντες λοιπὸν Β τὸ ἥμισυ τοῦ φορτίου, ὑπερ ὁ ἄξων ὑποθασάζει, μ τὴν ἀπὸ τοῦ πλησιεστέρου τῶν δύο στηριγμάτων ἀπόστασιν τοῦ σημείου, ἔνθα τὸ βάρος ἐνεργεῖ, καὶ δ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει θέτοντες εἰς τὸν γενικὸν τύπον (α) τῆς παραγράφου 411 ἀντὶ I, υ καὶ X τὰς τιμὰς αὐτῶν $\frac{\pi \delta^4}{4 \cdot 2}$, $\frac{1}{2} \delta$ καὶ Βμ., τὴν μερικὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{P \cdot \pi \delta^3}{32} = B\mu. \quad (1),$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν τὴν διάμετρον δ τοῦ ἰσοπαχοῦς ἄξονος λύοντες τὴν τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\delta^3 = \frac{32}{3 \cdot 14 \cdot P} \cdot B\mu. \quad (2)$$

114. Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον (2) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ P τὴν ἀρμύζουσαν εἰς ἕκαστον εἶδος ἀξόνων τιμὴν καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, θέλωμεν πορισθῇ τοὺς ἐξῆς πέντε μερικοὺς τύπους

$$\delta^3 = \frac{B\mu}{367968} \quad (3)$$

$$\delta^3 = \frac{B\mu}{735936} \quad (4)$$

$$\delta^3 = \frac{B\mu}{588750} \quad (5)$$

$$\delta^3 = \frac{B\mu}{58875} \quad (6)$$

$$\delta^3 = \frac{B\mu}{760000} \quad (7)$$

Ὁ πρῶτος τύπος $\delta^3 = \frac{B\mu}{367968}$ χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαμέτρου τῶν ἐκ χυτοσιδήρου ἀξόνων τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, δι' οὓς λαμβάνουσι $P=3750000$. διότι οἱ ἄξονες οὗτοι ὑπόκεινται καὶ εἰς τὰς τριβὰς τῆς ὑπὸ τοῦ ὕδατος παρὰσυρομένης ἅμμου καὶ εἰς κρούσεις.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου προσδιορίζομεν καὶ τὰς διαμέτρους τῶν ἀξόνων τῶν ὀδοντοτῶν τροχῶν, τοῦ ζυγοῦ τῶν μηχανῶν τῶν ἀτμοπλοίων, καὶ παντὸς ἐκ χυτοσιδήρου κατεσκευασμένου καὶ εἰς κρούσεις ὑποκειμένου ἄξονος.

Ὁ δεῦτερος τύπος $\delta^3 = \frac{B\mu}{735936}$ χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἐκ χυτοσιδήρου ἀξόνων τῶν σφονδύλων τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν, τῶν κανονιζόντων τὴν κίνησιν τῶν διαφόρων ὀργάνων τῆς εἰς ἦν ἀνήκουσι μηχανῆς, δι' οὓς λαμβάνουσι $P=7500000$. διότι οἱ ἄξονες οὗτοι δὲν ὑπόκεινται εἰς κρούσεις, πρὸς δὲ ἐπιχρῶνται τακτικῶς δι' ἐλαίου.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου προσδιορίζουσι καὶ τὰς διαμέτρους τῶν δευτερευόντων ἀξόνων. Καλοῦσι δὲ ἐν γένει εἰς τὰ ἐργαστάσια δευτερεύοντας ἄξονας τοὺς δεχομένους τὴν κίνησιν, τὴν παραγομένην ὑπὸ τῆς κινήτικῆς δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ, οὐχὶ ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ ἐμβόλου, ἀλλὰ διὰ μέσου δερματίνου ἱμάντος, ὡς λ. χ. οἱ ἄξονες, οἱ δεχόμενοι τὴν κίνησιν διὰ τῶν κυλίνδρων (τυμπάνων), ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῶν ὁποίων περιτυλίσσεται δερμάτινος ἱμάνς.

Ὁ τρίτος τύπος $\delta^3 = \frac{B\mu}{388730}$ χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἐκ σιδήρου δευτερευόντων ἀξόνων μηχανῆς τινος δι' οὗ λαμβάνουσι $P = 60,000,000$.

Ὁ τέταρτος τύπος $\delta^3 = \frac{B\mu}{38873}$ χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαμέτρου τῶν αὐτῶν ἀξόνων, ὅταν οὗτοι κατασκευάζωνται ἐκ ξυλείας καλῆς ποιότητος, καὶ δι' οὗ λαμβάνουσι $P = 600000$.

Ὁ δὲ τελευταῖος τύπος $\delta^3 = \frac{B\mu}{700000}$ χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀξόνων τῶν τροχῶν τῶν ἀμαξῶν ἐν γένει, οὗς κατασκευάζουσι ἐκ σιδήρου πρώτης ποιότητος καὶ δι' οὗ λαμβάνουσι $P = 7000000$.

Σημείωσις 1. Οἱ Ἀγγλοὶ ἐργοστασιάρχαι τῶν ἀμαξῶν ἐν γένει, δηλ. τῶν καινῶν ἀμαξῶν, τῶν τοῦ σιδηροδρόμου κτλ., ὑπὸ τῆς πείρας ὁδηγηθέντες δίδουσι τὰς ἐν τῷ κάτωθι πίνακι Θ' δεικνυμένας διαμέτρους, αἵτινες συμφωνοῦσι πληρέστατα μὲ τὰ ἐξαχθόμενα τοῦ τύπου (7).

ΠΙΝΑΞ Θ'.

Περιέχωρ τὰς ἐπὶ τῶν Ἀγγλῶν ἐργοστασιάρχων διδομένας διαμέτρους εἰς ἕκαστον εἶδος ἀμάξης

Εἶδος ἀμαξῶν	ἀριθμὸς τροχῶν	Πᾶρος ὑποκαταζόμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος	Ἀπόστασις τοῦ τροχῶν ἀπὸ τῆς ἐκκέντρου τοῦ σιδήρου ἡτοι τμῆς τοῦ μ.	Διάμετρος δεδομένη		Διάμετρος τῆς μεγάλης κεφαλῆς ὑπολογισθεῖσα διὰ τοῦ τύπου (7)
				μικρὰν κεφαλὴν	μικρὰν κεφαλὴν	
		χιλ.	μ.	μ.	μ.	μ.
Δίφρος μικρὸς	2	103	0,30	0,038	0,032	0,036
Καβριολὲς (ἄμαξα) . . .	2	296	0,23	0,041	0,035	0,046
Τετράτροχος ἄμαξα . . .	4	235	0,20	0,041	0,035	0,041
Ἐλαφρὸν λεωφορεῖον . .	4	148	0,23	0,043	0,038	0,043
Ἀμαξα (λαντώ)	4	400	0,23	0,031	0,038	0,033
Ταχυδρομικὴ ἄμαξα . . .	4	382	0,28	0,057	0,041	0,056
Φορτηγὸν δίτροχον	2	609	0,29	0,064	0,034	0,063
Ἀμαξα σιδηροδρόμου . .	4	1015	0,33	0,076	0,064	0,078
Τετράτροχος φορ. ἄμαξα	4	1420	0,33	0,086	0,069	0,084

Σημείωσις 2. Οἱ ἄξονες τῶν ἀνωτέρω τροχῶν ὑπόκεινται οὐ μόνον εἰς κάμψιν, ἀλλὰ καὶ εἰς στρέψιν. Ἐπομένως πρέπει νὰ ὑπολογίζωμεν

τὰς διαμέτρους αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως, καὶ ἐκ τῶν δύο εὐρεθησομένων τιμῶν τῶν διαμέτρων νὰ λαμβάνωμεν τὴν μεγαλύτεραν.

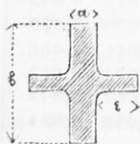
Συνήθως ἡ διὰ τῶν ἀνωτέρω μερικῶν τύπων προσδιοριζομένη διάμετρος εἶναι μεγαλειτέρα τῆς διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως εὐρισκομένης, οὐχ ἦττον οἱ μηχανικοὶ καὶ μηχανουργοὶ πρέπει νὰ λαμβάνωσιν ὑπ' ὄψιν καὶ τὸν κίνδυνον, τὸν προερχόμενον ἐκ τῆς στρέψεως, καὶ νὰ λαμβάνωσι τὴν μεγαλειτέραν τῶν εὐρεθησομένων τιμῶν.

2^α Περὶ βραχιόνων τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν καὶ ὑδραυλικῶν τροχῶν.

Οἱ βραχίονες τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, οἱ διὰ τοῦ γράμματος β ἐν τῷ σχήματι 85 παριστάμενοι, ὡς καὶ οἱ τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, κατασκευάζονται συνήθως ἐκ χυτοσιδήρου, ἡ δὲ ἐγκάρσιος αὐτῶν τομὴ εἶναι συνήθως ὡς παριστᾷ τὸ σχῆμα 84.

Ἡ δύναμις Δ , ἡ ἐνεργοῦσα ἐφαπτομένως εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν ὡς καὶ τῶν ὑδραυλικῶν, ἐκτιμᾶται εἰς χιλιόγραμμα καὶ προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς θεωρίας τῶν ὑδραυλικῶν ἢ ὀδοντωτῶν τροχῶν.

Συνήθως οἱ μικροὶ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ἀποτελοῦνται ἐξ ἐνὸς τεμαχίου, ἀλλ' οἱ μεγάλοι ὀδοντωτοὶ τροχοὶ καὶ οἱ ὑδραυλικοὶ σχηματίζονται, χάριν τῆς εὐκολίας τῆς μεταφορᾶς καὶ τοποθετήσεως αὐτῶν, ἐκ πολλῶν τεμαχίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει σχῆμα τοιῆς, οἵτινες κατὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν τροχῶν συναρμολογοῦνται καταλλήλως καὶ ἀσφαλῶς, ὥστε νὰ ἀποτελῶσι ἐν ὅλῳ συνεχές. Τούτου ἕνεκα πρὸς εὐρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν βραχιόνων θεωροῦσιν αὐτοὺς ὡς δοκοὺς πεπακτωμένους διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου εἰς τὸν κλοιόν, τὸν περιβάλλοντα τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς καὶ ὄντα στερεῶς συνδεδεμένον μετ' αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸ ἄκρον αὐτῶν φέροντας φορτίον ἶσον μὲ τὴν δύναμιν Δ , τὴν καθέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἰσῶν ἐνεργοῦσαν.



Σχ. 84

Καλοῦντες λοιπὸν α καὶ β τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τοῦ βραχιόνος (τῶν δύο ἐξοχῶν ϵ (Σχ. 84), αἱ οἱ ἐργοστασίαι διδουσιν εἰς τοὺς βραχιόνους πρὸς παρεμπόδισιν τῆς κάμψεως αὐτῶν, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν), μ. τὸ μῆκος τοῦ βραχιόνος ἀπὸ τοῦ κλοιοῦ μέχρι τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἐνθα ἐνεργεῖ ἡ δύναμις Δ , λαμβάνοντες $P = 7,500,000$ καὶ

θέτουντες εἰς τὸν γενικὸν τύπον (α) τῆς παραγράφου 111 ἀντὶ I, υ, X καὶ P τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν ἔχει τὴν μερικὴν ἐξίσωσιν.

$$ac^2 = \frac{\Delta \mu}{1250000} \quad (8).$$

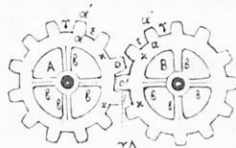
Λαμβάνοντες δὲ $\alpha = \frac{1}{3}b$, ὡς τοῦτο εἴθισται ἐν τῇ πράξει, μετασχηματίζομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (8) εἰς τὸν ἐξῆς

$$c^3 = \frac{\Delta \mu}{250000} \quad (9)$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα τὸ ζητούμενον ὕψος c .

3^{ον} Περὶ τῶν ὀδόντων τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν.

115. Οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοί, κυλινδρικοὶ ἢ κωνικοί, χρησιμεύουσιν εἰς τὴν ἀπὸ ὄργανου εἰς ὄργανον μετάδοσιν τῆς κινήσεως συνθέτου τινὸς μηχανῆς. Καὶ ὁ μὲν προσδιορισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων ἐκάστου τροχοῦ, τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης αὐτῶν καὶ τῆς δυνάμεως Δ, τῆς ἐνεργούσης εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὀδόντος ο τοῦ τροχοῦ A (Σχ. 85) διὰ μέσου τοῦ ὀδόντος τοῦ τροχοῦ B, ὅστις μεταδίδει τὴν κίνησιν εἰς τὸν A τροχόν, εἶναι ἀντικείμενον τοῦ εἰδικοῦ συγγράμματος, τοῦ πραγματευομένου περὶ ὀδοντωτῶν τροχῶν ὁ προσδιορισμὸς ὅμως τοῦ πάχους τῶν τε ὀδόντων καὶ τῶν βραχιόνων ἐκάστου τροχοῦ, ὅπως οὗτοι μὴ θλῶνται ἐκ τῆς δυνάμεως Δ, εἶναι ἀντικείμενον τοῦ παρόντος, τοῦ περὶ τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης πραγματευομένου.



Σχ. 85

Καὶ περὶ μὲν τῶν βραχιόνων b εἵπομεν ἀνωτέρω διὰ τίνος τύπου προσδιορίζομεν τὸ πάχος αὐτῶν. Περὶ δὲ τῶν ὀδόντων παρατηροῦμεν, ὅτι οὗτοι, ὡς ἀποτελοῦντες σῶμα ἀδιαίρετον μετὰ τῆς δακτυλοειδοῦς τῶν τροχῶν στεφάνης, θεωροῦνται ὡς δοκοί, πεπακτωμένοι διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν ἄκρου καὶ φέροντες ὀρισμένον φορτίον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ἐλευθέρου ἄκτος.

Καλοῦντες λοιπὸν α τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος εἰς τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν, η τοὶ εἰς τὴν πάκτωσιν, γ τὸ ὕψος τοῦ ὀδόντος $\alpha\alpha'$, π τὸ πλά-

τος τοῦ ὀδόντος παραλλήλως τοῦ ἄξονος, Δ τὴν δύναμιν, τὴν ἐνεργοῦσαν διὰ τοῦ ὀδόντος, ο' τοῦ τροχοῦ Β ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ ὀδόντος ο τοῦ τροχοῦ Α (Σχ. 85), καὶ θεωροῦντες τὴν ἥττονα εὐνοϊκὴν περίπτωσηιν, καθ' ἣν δύο μόνον ὀδόντες εἶναι εἰς ἐπαφὴν, ἐνῶ συνήθως εἰς τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχοὺς πλείονες τῶν δύο ὀδόντων συμπλέκονται, θέλομεν ἔχει θέτοντες εἰς τὸν γενικὸν τύπον (α) τῆς παραγράφου 111 ἀντὶ I, υ καὶ X τὰς τιμὰς αὐτῶν $\frac{\pi a^3}{12}$, $\frac{a}{2}$, καὶ Δ.γ τὴν μερικὴν ἐξίσωσιν

$$\pi a^3 = \frac{6 \cdot \Delta \cdot \gamma}{P} \quad (10)$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν τιμὴν τοῦ π ἢ α, ὅταν ἡ ἑτέρα τούτων ᾖναι γνωστὴ.

Συνήθως ἐν τῇ πράξει λαμβάνουσι

$\pi = 4\alpha$, Διὰ τροχοὺς καλῶς δι' ἐλαίου ἀλειμμένους καὶ ὦν ἡ ταχύτης τῆς ἀρχικῆς περιφερείας δὲν ὑπερβαίνει τὸ ὅριον 4^η, 50 κατὰ δευτερόλεπτον.

$\pi = 5\alpha$, Διὰ τοὺς αὐτοὺς τροχοὺς, ὅταν ἡ ταχύτης κατὰ δευτερόλεπτον ὑπερβαίνῃ τὸ 4^η, 50.

$\pi = 6\alpha$, Διὰ τροχοὺς συνήθως βρεχομένους ὑπὸ ὕδατος.

$\gamma = \eta < \frac{3}{2}$ Διὰ πάντας ἀνεξαίρετως τοὺς τροχοὺς.

$P = 200$ χιλιόγραμμα κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας διὰ τὸν χυτοσίδηρον.

$P = 430$ χιλιόγραμμα κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας διὰ τὸν χαλκὸν καὶ ὀρείχαλκον.

$P = 35$ χιλιόγραμμα κατὰ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας διὰ ξυλίνους ὀδόντας.

Λαμβάνοντες δὲ $\pi = 4\alpha$, $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$, καὶ θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (10) ἀντὶ τῶν π, γ τὰς μερικὰς τιμὰς αὐτῶν ἀντὶ δὲ τοῦ P τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτοῦ, τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, πορίζομεθα τοὺς ἐπομένους ἐμπειρικοὺς τύπους, ἐξ ὧν πορίζομεθα τὸ πάχος α τοῦ ὀδόντος ἐκπεφρασμένον εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.

$$\alpha = 0,105\sqrt{\Delta} \quad (11)$$

διὰ τὸν χυτοσιδήρον·

$$\alpha = 0,131\sqrt{\Delta} \quad (12)$$

διὰ τὸν χαλκὸν ἢ ὀρείχαλκον·

$$\alpha = 0,145\sqrt{\Delta} \quad (13)$$

διὰ ξυλίνους ὀδόντας.

Αἱ λοιπαὶ διαστάσεις τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, ἤτοι τὸ πάχος κ τῆς δακτυλοειδοῦς στεφάνης, τὸ μεταξὺ δύο ὀδόντων κενὸν ε, καὶ ὁ ἀριθμὸς N τῶν βραχιόνων ὠρίσθησαν ἐκ τῆς πείρας ὡς ἑξῆς.

$\kappa = \frac{2}{3}\alpha$, διὰ τροχοὺς ἐκ χυτοσιδήρου, ἢ χαλκοῦ, ἢ ὀρείχαλκου·

$\kappa = \alpha$, διὰ ξυλίνους τροχοὺς·

$\varepsilon = 1,067\alpha$, διὰ τροχοὺς καλῶς κατασκευασθέντας·

$\varepsilon = 1,10\alpha$, διὰ τροχοὺς μὴ καλῶς κατασκευασθέντας·

$N = 4$, ὅταν ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ ᾖ μικρότερα τοῦ $4^{\mu}, 30$ ·

$N = 6$, ὅταν ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ περιέχεται μεταξὺ $4^{\mu}, 30$ καὶ $2^{\mu}, 50$ ·

$N = 8$, ὅταν ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ περιέχεται μεταξὺ $2^{\mu}, 50$ καὶ $5^{\mu}, 00$ ·

$N = 10$, ὅταν ἡ διάμετρος περιέχεται μεταξὺ 5 καὶ 7 μέτρων.

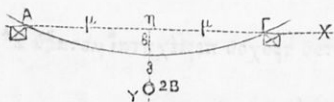
Παρατήρησις 1. Ὅταν τὰ διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων ὀριζόμενα πάχη τῶν ὀδόντων, τῶν βραχιόνων καὶ λοιπῶν ἐκ χυτοσιδήρου ἐργαλείων ᾖ μικρότερα τοῦ ἐλαχίστου πάχους, τοῦ εἰς τὰ χυτήρια παραδεδεγμένου, τότε πρέπει νὰ παραδεχώμεθα τὰ ἐλάχιστα πάχη τοῦ χυτηρίου, καίτοι ὄντα μείζονα τῶν ἀπαιτουμένων. Διὰ τῆς παραδοχῆς δὲ τούτων ἀφ' ἑνὸς ἔχομεν μείζονα ἀσφάλειαν καὶ ἀφ' ἑτέρου οὐδεμίαν χρηματικὴν ὑφιστάμεθα ζημίαν.

Παρατήρησις 2. Ὅταν οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ὑπόκηνται εἰς κρούσεις, τότε οἱ μηχανουργοὶ προσδιορίζουσι τὰς διαστάσεις τῶν τε βραχιόνων καὶ τῶν ὀδόντων διὰ τῆς πείρας μᾶλλον ἢ διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθέντων τύπων. Ἐκαστον δὲ κατὰστημα χυτηρίου ἔχει ἰδίους πίνακας πρὸς προσδιορισμὸν τῶν παχῶν τῶν διαφόρων ὑπ' αὐτοῦ κατασκευαζομένων

ἐργαλείων καὶ μηχανῶν. Τὰ πάχη ταῦτα ἐξαρθῶνται κατὰ μέγα μέρος ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τῆς καθαριότητος τοῦ χυτοσιδήρου, καὶ ἐκ τοῦ τρόπου τῆς χύσεως τῶν διαφόρων τεμαχίων μιᾶς μηχανῆς, οἱ δὲ μηχανουργοὶ καὶ πᾶς ὁ βουλόμενος νὰ ἀποκτήσῃ πλειοτέρας καὶ τελειότερας γνώσεις περὶ τούτου, δύνανται νὰ συμβουλευθῇ τοὺς πίνακας τούτους καὶ τὰ εἰδικὰ συγγράμματα τῶν χυτηρίων, διότι ἐν τῇ παρούσῃ πραγματείᾳ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερο περὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου.

ΠΕΡΙ ΒΕΛΟΥΣ

116. Εἶδομεν ἐν ταῖς προηγουμένοις ὅτι ἡ δοκός, ἡ στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν ὀριζοντίων στηριγμάτων, καθὼς καὶ ἡ πεπακτωμένη ἢ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς, ἢ διὰ τοῦ ἐνδὸς μόνου καὶ διὰ τοῦ ἑτέρου στηριζομένη ἢ μὴ ἐπὶ στερεοῦ τινος στηρίγματος, καὶ ὑποκείμεναι εἰς τὴν ἐνέργειαν φορτίου τινὸς κάμπτονται καὶ αἱ καμπύλαι, ἃς αὗται λαμβάνουσι, στρέφουσι τὴν κυρτότητά των ἢ πρὸς τὰ κάτω, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 86, ἢ πρὸς τὰ ἄνω, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 87.



Σχ. 86



Σχ. 87

Ἡ γραμμὴ ηθ (Σχ. 86) ἢ ΓΓ' (Σχ. 87), ἡ δεικνύουσα τὴν μεγαλειτέραν ἀπόστασιν τῆς καμπύλης ἀπὸ τῆς ὀριζοντίου εὐθείας ΑΓ καλεῖται βέλος, ὡς καὶ εἰς τὰς ἀψίδας τῶν γεφυρῶν.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης, ἣν δοκός τις ἰσοπαχῆς σχηματίζει, ὅταν ᾖται φορτωμένη εἰς τὸ μέσον ἢ ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς, εὐρίσκεται διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως, ἐξ ἧς θέλομεν δανεισθῇ ταύτην δι' ἐκάστην τῶν τεσσάρων περιπτώσεων.

117. Καὶ ἐν πρώτοις ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἰσοπαχῆς δοκός ΑΓ, ἧς πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὸ βέλος θ, ἢ τὸ μέγιστον βέλος, ὕπερ αὕτη ἀσφαλῶς δύναται νὰ λάβῃ, ὅταν φέρῃ ἢ φορτίον 2B ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς ἢ ᾖται ὁμοιομόρφως φορτωμένη φέρουσα φορτίον φ κατὰ τρέχον μέ-

τρον, στηρίζεται διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηριγμάτων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου. Καλοῦντες τότε 2μ τὸ μήκος τῆς δοκοῦ καὶ λαμβάνοντες δι' ἄξονας τῶν συντεταγμένων ἕνεκα τῆς συμμετρίας τὰς εὐθείας $\chi\chi$ καὶ $\eta\eta$, θέλομεν ἔχει καθ' ἃ ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις διδάσκει, τὰς ἐξῆς ἐξισώσεις πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης ΑΓ, ἣν σχηματίζει ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος δοκὸς (Σχ. 86).

$$\psi = \frac{B}{6EI}(\mu - \chi)(2\mu^2 + 2\mu\chi - \chi^2) \quad (1),$$

ὅταν αὕτη φέρῃ φορτίον $2B$ ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς, παραλειπομένου τοῦ ἰδίου βάρους, καὶ

$$\psi = \frac{\varphi}{24EI}(\mu^2 - \chi^2)(3\mu^2 - \chi^2) \quad (2),$$

ὅταν ἡ δοκὸς ᾖ καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη φέρουσα φορτίον φ κατὰ τρέχον μέτρον.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαφορῶν σημείων τῆς καμπύλης ΑΓ (Σχ. 86) καὶ ἡ κατασκευὴ αὐτῆς γίνεται κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἡ δὲ τιμὴ, ἣν τὸ ψ λαμβάνει, ὅταν τὸ χ γείνη ἴσον μὲ τὸ μηδέν, παριστᾷ τὸ βέλος τῆς καμπύλης· διότι, καθ' ἃ ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις διδάσκει, τὸ ψ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (1) καὶ (2) γίνεται μέγιστον, ὅταν τὸ χ γείνη ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Ὅθεν ὑποθέτοντες $\chi = 0$ εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) καὶ (2) καὶ παριστῶντες διὰ ϵ τὸ βέλος τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἢ τοῦ ὀλικοῦ βάρους $2B$, ἢ τοῦ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίου φ , θέλομεν ἔχει

$$\epsilon = \frac{1}{3} \frac{B\mu^3}{EI} \quad (3)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς φορτίον $2B$, καὶ

$$\epsilon = \frac{5}{24} \frac{\varphi\mu^4}{EI} \quad (4)$$

ὅταν ἡ δοκὸς ᾖ καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη φέρουσα φορτίον φ κατὰ τρέχον μέτρον.

Ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει τὸ βέλος ϵ διὰ μέσου τοῦ φορτίου 2B, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ E, I καὶ μ ᾖναι γνωσταί, ἢ τὰνάπαλιν, προσδιορίζομεν τὸ 2B διὰ τοῦ βέλους ϵ , ὅταν δυνηθῶμεν διὰ καταλλήλου χωροσταθμικοῦ ἐργαλείου νὰ μετρήσωμεν ἀκριβῶς τὸ βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς ἔλαβε ὑπὸ τὴν ἐπίβροϊαν τοῦ ἐπ' αὐτῆς ἐνεργοῦντος ἀγνώστου βάρους 2B. Ταῦτά δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν (4).

118. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἴδωμεν ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τοῦ βάρους 2B, τοῦ ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, καὶ τοῦ βάρους 2μφ, τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος 2μ αὐτῆς, ὅπως τὰ βέλη τῶν καμπύλων, ἃς ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐπίβροϊαν τοῦ ἐνεργοῦντος βάρους, ὧσιν ἴσα, πρέπει νὰ ἐξισώσωμεν τὰ δεῦτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (3) καὶ (4), ὅτε θελομεν ἔχει

$$\frac{1}{3} \times \frac{B\mu^3}{EI} = \frac{5}{24} \times \frac{\varphi\mu^4}{EI},$$

ἢ ἀπαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας καὶ διαιροῦντες διὰ 3 τὰ δύο μέλη,

$$B = \frac{5}{8} \mu \varphi \quad (5).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (5) βλέπομεν ὅτι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ φορτίου, τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ, συγκεντρούμενα εἰς τὸ μέσον αὐτῆς παράγουσι τὸ αὐτὸ βέλος, ὅπερ καὶ τὸ ὅλον βάρος, τὸ ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

119. Πρὸς εὐρυσιν δὲ τοῦ μεγίστου βέλους, ὅπερ ἀσφαλῶς δύναται νὰ λάβῃ ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 86), ἡ στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ τῶν στερεῶν ὀριζοντίων στηριγμάτων Α καὶ Γ καὶ φέρουσα ἢ φορτίον 2B ἐν τῷ μέσῳ ἢ φορτίον 2μφ ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὅψιν τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 117, τὰς παριστώσας τὰ βέλη, καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τῶν ἐγκαρσίων τομῶν ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, καὶ συνδυάζοντες αὐτάς καταλλήλως νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ ἄγνωστα B καὶ μφ καὶ οὕτω θέλομεν εὑρεῖ τὰς τιμὰς τῶν βελῶν διὰ τοῦ μεγίστου φορτίου P, καὶ τοῦ συντελεστοῦ E τῆς ἐλαστικότητος. Αἱ τιμαὶ αὗται θὰ παριστώσιν τὰ μέγιστα βέλη, ἅτινα ἡ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ ἀσφαλῶς.

Ὅθεν λαμβάνοντες τὰς ἄνω μνησθείσας ἐξισώσεις θέλομεν ἔχει

$$\epsilon = \frac{1}{3} \cdot \frac{B\mu^3}{EI} \quad (1),$$

$$\epsilon = \frac{5}{24} \cdot \frac{\varphi\mu^4}{EI} \quad (2),$$

$$\frac{PI}{\nu} = B\mu \quad (3),$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{\varphi\mu^2}{2} \quad (4).$$

Αί τὰ βέλη παριστῶσαι ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι αἱ (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 117, αἱ δὲ (3) καὶ (4) εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ. Συνδυάζοντες δὲ τὴν (1) μὲ τὴν (3) καὶ τὴν (2) μὲ τὴν (4) καὶ ἀπαλείφοντες τὸ B καὶ μφ, εὐρίσκομεν τὰς ἐξῆς ἐξισώσεις, δι' ὧν δίδονται τὰ μέγιστα βέλη τῆς δοκοῦ, ἥτοι

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P\mu^3}{Ev} \quad (5)$$

μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ ἀσφαλῶς ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ

$$\epsilon_1 = \frac{5}{42} \cdot \frac{P\mu^3}{Ev} \quad (6)$$

μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ ἀσφαλῶς ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους, ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος.

Παρατήρησις. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ καταλλήλου ἐργαλείου μετροῦμεν ἀπ' εὐθείας τὸ βέλος, ὅπερ ἔλαβε δοκὸς τις ξύλινος καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη, π. χ. ἡ δοκὸς στέγης οἰκίας τινός, καὶ ὅτι εὐρίσκομεν τοῦτο μεγαλειότερον τοῦ ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (6) χορηγούμενου, ὅταν ἐν αὐτῷ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ P καὶ E τὰς τιμὰς αὐτῶν 600000 καὶ 1.200.000.000, τὰς κοινῶς παραδεδεγμένας ἐν τῇ πράξει, καὶ ἀντὶ τοῦ μ καὶ ν τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους καὶ πάχους τῆς θεωρουμένης δοκοῦ.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ μηχανικὸς ἢ ὁ ἀρχιτέκτων πρέπει ἄνευ ἐνδυσασμοῦ νὰ εἴπῃ εἰς τὸν ἰδιοκτῆτην τῆς οἰκίας, ὅτι ἡ δοκὸς τῆς

στέγης είναι φορτωμένη ὑπὲρ τὸ δέον, δηλ. περισσότερον ἀφ' ὅ,τι ἐπι-
τρέπει ὁ ἀνωτέρω τύπος (4) τῆς παραγράφου ταύτης, ὁ δίδων τὸ βά-
ρος $2\mu\phi$ διὰ μέσου τοῦ P, καὶ ὅτι τούτου ἕνεκα δὲν ἐγγυᾶται περὶ τῆς
στερεότητος τῆς στέγης.

Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἔπεται ὅτι ἀφελύτως ἡ δοκὸς θὰ θλασθῇ, διότι
ἐνδέχεται ἐνίοτε δοκὸς τις νὰ λάβῃ βέλος μεῖζον τοῦ ἐπιτρεπομένου
ὑπὸ τοῦ τύπου (5) ἢ (6), καθ' ὅσον ἡ δοκὸς φέρει φορτίον τι εἰς τὸ
μέσον αὐτῆς ἢ εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, καὶ νὰ ἀντέχῃ εἰς τὸ
φορτίον, τὸ παράγον τὸ βέλος τοῦτο, ἂν ἡ ἐξ ἧς εἶναι κατασκευασμένη
ξύλεια εὐρίσκεται οὔσα ἀρίστης ποιότητος, διότι τότε αἱ ἀρμόζουσαι
τῇ ποιότητι ταύτῃ τιμαὶ τοῦ E καὶ P εἶναι μεῖζονες τῶν ἀνωτέρω,
δι' ὧν ὑπελογίσθη τὸ μέγιστον βέλος.

Ὡσαύτως ἂν τὸ μετρηθὲν βέλος τῆς ξυλίνης δοκοῦ εὐρεθῇ ἴσον ἢ
μικρότερον τοῦ διὰ τοῦ τύπου (6) εὐρισκόμενου, ὁ μηχανικὸς ἢ ὁ ἀρ-
χιτέκτων πρέπει νὰ εἴπῃ εἰς τὸν ἰδιοκτῆτην, ὅτι οὐδεὶς κίνδυνος περὶ
θλάσεως τῆς δοκοῦ ὑπάρχει, ἂν ἡ ξυλεῖα τῆς δοκοῦ ἦναι καλῆς ποιό-
τητος καὶ δὲν ἔχῃ αὕτη ἐσωτερικῶς ἐλάττωμά τι, π. χ. δὲν εἶναι σα-
ρακοφαγώμενη κτλ.

Ἐν γένει, ὁσάκις τὸ μετρούμενον βέλος δοκοῦ τινος εὐρίσκεται μεῖ-
ζον τοῦ ὑπολογιζομένου διὰ τοῦ τύπου (5) ἢ (6), ὁ μηχανικὸς πρέπει
ἄνευ ἐνδοιασμοῦ νὰ ἀποφαίνεται περὶ τοῦ κινδύνου χωρὶς ποσῶς νὰ
φοβῆται τὴν τυχὸν γενησομένην εἰς αὐτὸν ἐπίκρισιν ὑπὸ τῶν μὴ εἰδό-
των, ὅταν ὡς ἐκ τῆς ἀρίστης ποιότητος τῆς ξυλείας τῆς δοκοῦ συμβῇ
τὸ ἀντίθετον τῆς γνωμοδοτήσεώς του. Ἐπίσης καὶ ὅταν τὸ μετρούμε-
νον βέλος εὐρίσκεται μικρότερον τοῦ ὑπολογιζομένου διὰ τοῦ τύπου (5)
ἢ (6), πρέπει νὰ ἀποφαίνεται περὶ τῆς στερεότητος, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως
τῆς καλῆς ποιότητος τῆς ξυλείας καὶ τῆς μὴ ὑπάρξεως ἐλαττώματος
τινος. Ὅ,τι εἴπομεν διὰ τὰς ξυλίνους δοκοὺς, τοῦτ' αὐτὸ δυνάμεθα νὰ
εἴπωμεν καὶ διὰ δοκοὺς οἷας δῆποτε φύσεως.

120. Ἐπειδὴ συνήθως ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τῶν δοκῶν εἶναι συμμε-
τρικὴ καὶ ἡ μέση ἱεὶ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς, ἔπεται ὅτι, ἂν
παραστήσωμεν διὰ γ τὸ ὕψος τῆς δοκοῦ, θέλομεν ἔχει $u = \frac{1}{2}\gamma$. Θέτοντες
δὲ εἰς τοὺς τύπους (5) καὶ (6) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ τοῦ u
τὴν τιμὴν αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει τοὺς ἐξῆς εἰδικωτέρους τύπους, ἧτοι

$$\epsilon_0 = \frac{4}{3} \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu^2}{\gamma} \quad (7),$$

$$\epsilon_1 = \frac{5}{12} \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu^2}{\gamma} \quad (8),$$

ἢ διαιροῦντες διὰ 2μ , ἔχομεν τὸν λόγον τοῦ βέλους πρὸς τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ.

$$\frac{\epsilon_0}{2\mu} = \frac{4}{6} \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (9),$$

$$\frac{\epsilon_1}{2\mu} = \frac{5}{24} \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (10).$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9) καὶ (10) πορίζομεθα ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{(\frac{\epsilon_0}{2\mu})}{(\frac{2\mu}{\gamma})}$ καὶ $\frac{(\frac{\epsilon_1}{2\mu})}{(\frac{2\mu}{\gamma})}$ εἶναι σταθερά, ὅταν τὸ P καὶ E ᾖναι σταθερά, οἷον·

δήποτε καὶ ἂν ᾖναι τὸ σχῆμα τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦ νὰ ᾖναι αὕτη συμμετρική.

Αἱ τιμαὶ δὲ τοῦ P καὶ E , αἱ ὑπὸ τῶν μηχανικῶν ἐν τῇ πράξει γινόμεναι παραδεκταί, ὅταν πληροῦνται αἱ συνθῆκαι $\frac{2\mu}{\gamma} = \eta < 15$, καὶ $\frac{2\mu}{\alpha} < 80$, τοῦ α παριστῶντος τὸ πλάτος τῆς δοκοῦ, εἶναι αἱ ἐξῆς·

$$\left. \begin{array}{l} P=600.000 \\ E=4.200.000.000 \end{array} \right\} \text{ διὰ τὴν ξυλείαν,}$$

$$\left. \begin{array}{l} P=2.000.000 \\ E=12.000.000.000 \end{array} \right\} \text{ διὰ τὸν χυτοσίδηρον,}$$

$$\left. \begin{array}{l} P=6.000.000 \\ E=20.000.000.000 \end{array} \right\} \text{ διὰ τὸν σίδηρον.}$$

Τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τοῦ P καὶ E θέτοντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (9) καὶ (10) καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς μερικωτέρας,

$$\frac{C_0}{2\mu} = \frac{4}{42000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (11)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν εἰς τὸ μέσον φορτωμένην·

$$\frac{C_1}{2\mu} = \frac{4}{9600} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (12)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{C_0}{2\mu} = \frac{4}{36000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (13)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου, φορτωμένην εἰς τὸ μέσον·

$$\frac{C_1}{2\mu} = \frac{4}{28800} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (14)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου, ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{C_0}{2\mu} = \frac{4}{20000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (15)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν εἰς τὸ μέσον φορτωμένην·

$$\frac{C_1}{2\mu} = \frac{4}{46000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (16)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

121. Ἐὰν παραβάσωμεν τοὺς τύπους (13) καὶ (15) ἢ (14) καὶ (16) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου, βλέπομεν ὅτι ἡ ἐκ χυτοσιδήρου δοκὸς κάμπτεται ὀλιγώτερον τῆς ἐχούσης τὰς αὐτὰς διαστάσεις καὶ ἐκ καθαροῦ σιδήρου κατεσκευασμένης. Τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι ὁ καθαρὸς σιδηρὸς εἶναι ἐλαστικώτερος τοῦ χυτοσιδήρου, καὶ ὡς τοιοῦτος πρέπει νὰ προτιμᾶται διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν, τῶν προσωρισμένων εἰς τὴν διάθεσιν ἀμαξῶν διτρόχων καὶ σιδηροδρομικῶν ἀμαξοστοιχιῶν· διότι ὡς ἐκ τῆς ταχύτητος, μεθ' ἧς αἱ σιδηροδρομικαὶ ἀμαξοστοιχίαι ἢ τὰ βαρέα δίτροχα διέρχονται ἄνωθεν τῆς γεφύρας, ἀναπτύσσεται κεντρόφυξ δύναμις, ἥτις αὐξάνει τὸ ἀρχικὸν βέλος τῶν δοκῶν τῆς γεφύρας, καὶ ὡς ἐκ τούτου οἱ ἐκ χυτοσιδήρου δοκοὶ διατρέχουσι περισσότερον κίνδυνον θλάσεως ἢ αἱ ἐκ καθαροῦ σιδήρου. Αὕτη δὲ ἡ κεντρόφυξ δύναμις παρᾶγει πολλάκις τὴν θλάσιν τῶν δοκῶν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν τῶν σιδηροδρόμων, ὅταν ὁ διευθύνων τὴν σιδηροδρομικήν

κὴν ἀμαξοστοιχίαν μηχανουργὸς δὲν προλαμβάνη νὰ ἐλαττώσῃ, ὡς συνήθως τοῦτο γίνεται, τὴν μεγάλην ταχύτητα, ἣν αὕτη ἔχει καὶ ἀφ' ἧς τὴν ἀμαξοστοιχίαν νὰ διέλθῃ ἄνωθεν τῆς γεφύρας μὲ τοιαύτην ταχύτητα.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων (11), (12), (13), (14), (15) καὶ (16) προσδιορίζομεν τὸ μέγιστον βέλος μιᾶς δοκοῦ, ὅταν ἡ ἐγκάρσιος αὐτῆς τομὴ ᾖαι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸ μέσον αὐτῆς.

122. Τὸν συντελεστὴν Ε τῆς ἐλαστικότητος δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν ἐκ τοῦ τύπου (3) ἢ (4) τῆς § 117, ὅταν διὰ καταλλήλου ἐργαλείου μετρήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ βέλος, ὅπερ δεδομένη δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἢ τοῦ βάρους 2B, τοῦ ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἢ τοῦ βάρους 2μφ, τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς.

123. Οἱ τύποι (1), (2), (3) καὶ (4) τῆς § 117 εἶναι ἐφαρμοστέοι καὶ δίδουσιν ἐξαγόμενον ταυτιζόμενον μὲ τὰ ἀποτελέσματα τῆς πείρας, ὡσάντις τὸ φορτίον 2B ἢ 2μφ δὲν ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῆς ἐλαστικότητος, ἐν ἄλλαις λέξεσι ἐνόσω τὰ φορτία 2B ἢ 2μφ εἶναι μικρότερα τοῦ φορτίου, τοῦ παριστῶντος τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος τῆς δοκοῦ, καὶ ὅπερ εὐρίσκομεν εἰς τὸν πρῶτον πίνακα τῆς παραγράφου 9, τότε τὸ ἀπ' εὐθείας μετρούμενον βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους 2B ἢ 2μφ, εὐρίσκεται ἴσον μὲ τὸ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ προσδιοριζόμενον ἐκ τοῦ τύπου (3) ἢ (4) τῆς παραγράφου 117.

124. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς ΑΓ (Σχ. 87), ἡ ἔχουσα μῆκος Μ, εἶναι πεπαικτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ ἐλευθέρᾳ διὰ τοῦ ἐτέρου, τότε αἱ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως εὐρισκόμεναι ἐξισώσεις, αἱ παριστῶσαι τὴν καμπύλην, ἣν αὕτη λαμβάνει ὑπὸ τῆς ἐπίρροιας τοῦ βάρους Β, ἐνεργοῦντος ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου ἢ τοῦ βάρους Μφ, τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος εἶναι αἱ ἐξῆς, τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων λαμβανομένης εἰς τὴν πᾶκτωσιν Α,

$$\psi = \frac{B}{EI} \left(\frac{M\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{6} \right) \quad (1),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον Β εἰς τὸ ἐλεύθερον αὐτῆς ἄκρον, καὶ

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi}{EI} \left(\frac{M^2\chi^2}{2} - \frac{M\chi^3}{3} + \frac{\chi^4}{12} \right) \quad (2),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ ὁμοιομόρφως φ φορτίον κατὰ τρέχον μέτρον.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἐν αἷς τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ δὲν συμπεριλαμβάνεται, προσδιορίζομεν τὴν καμπύλην, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους B ἢ Mφ κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἡ δὲ τιμὴ τῆς ψ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν M τῆς χ, παριστᾷ τὸ βέλος ΓΓ' τῆς δοκοῦ (Σχ. 87)· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέτοντες εἰς τὰς ἄνω ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀντὶ τῆς χ τὴν τιμὴν αὐτῆς M, καὶ ὑπολογίζοντες τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τῆς ψ, ἥτις παριστᾷ τὸ βέλος ΓΓ' (Σχ. 87), ὅπερ ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους B ἢ Mφ καὶ ὅπερ χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ ε, θέλομεν ἔχει

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \cdot \frac{BM^3}{EI} \quad (3),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον B ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου, καὶ

$$\varepsilon = \frac{3}{24} \cdot \frac{\varphi M^4}{EI} \quad (4),$$

ὅταν ἡ δοκὸς ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη φέρουσα φορτίον φ κατὰ τρέχον μέτρον.

125. Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν τύπων (3) καὶ (4) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου καὶ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ B διὰ μέσου τοῦ Mφ, θέλομεν ἔχει

$$B = \frac{3}{8} M\varphi \quad (5).$$

Ἡσχέσις αὕτη δεικνύει ὅτι τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου φορτίου Mφ, συγκεντρούμενα ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς δοκοῦ, παράγουσι τὸ αὐτὸ βέλος, ὅπερ καὶ τὸ ὅλον φορτίον Mφ, ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

126. Τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἀσφαλῶς δύναται νὰ λάβῃ ἡ δοκὸς ΑΓ (Σχ. 87), ἡ οὖσα πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ ἐλευθέρᾳ εἰς τὸ ἕτερον, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους τινός, ἐνεργοῦντος ἢ ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου, ἢ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος, εὐρίσκεται ὅπως καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 119 διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν τύπων τοῦ βέλους καὶ τῶν τύπων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, δηλ. διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξῆς τύπων·

$$\epsilon = \frac{BM^3}{3EI} \quad (1),$$

$$\epsilon = \frac{3}{24} \cdot \frac{\varphi M^4}{EI} \quad (2),$$

$$\frac{PI}{\upsilon} = BM \quad (3),$$

$$\frac{PI}{\upsilon} = \frac{\varphi M^2}{2} \quad (4).$$

Αί εξισώσεις (1) και (2) παριστῶσι τὰ βέλη, αἱ δὲ (3) καὶ (4) εἶναι αἱ εξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ διὰ φορτίον B εἰς τὸ ἄκρον ἢ Mφ ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

Συνδυάζοντες λοιπὸν τὴν εξίσωσιν (1) μὲ τὴν (3) καὶ τὴν (2) μὲ τὴν (4) καὶ παριστῶντες διὰ ϵ_0 τὸ μέγιστον βέλος, ὑπερ ἢ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους, ἐνεργούντος ἐπὶ τοῦ ἄκρου αὐτῆς καὶ διὰ ϵ_1 τὸ μέγιστον βέλος, ὑπερ αὐτῆς δύναται νὰ λάβῃ, ὅταν ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \frac{PM^2}{Eu} \quad (5),$$

$$\epsilon_1 = \frac{3}{42} \cdot \frac{PM^2}{Eu} \quad (6).$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων (5) καὶ (6) ὑπολογίζομεν τὰ μέγιστα βέλη, ἅπερ δοκὸς τις πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῆς ἄκρου καὶ ἐλευθέρα εἰς τὸ ἕτερον δύναται ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους τινός, ἐνεργούντος ἢ ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου ἢ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ.

Τὰ ὑπολογιζόμενα ταῦτα βέλη δυνατὸν δοκὸς τις νὰ ὑπερβῇ χωρὶς νὰ θλασθῇ ἢ καὶ τάνάπαλιν. Ἐπομένως καὶ ἐνταῦθα ἐφαρμόζεται ἡ παρατήρησις τῆς παραγράφου 419.

127. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς ἔχῃ συμμετρικὴν ἐγκάρσιον τομὴν, ὡς συνήθως τοῦτο συμβαίνει ἐν τῇ πράξει, θέλομεν ἔχει, καλοῦντες γ τὸ ὕψος αὐτῆς, $u = \frac{1}{2}\gamma$. Θέτοντες δὲ εἰς τοὺς τύπους (5) καὶ (6) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ τοῦ u τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{2}\gamma$, θέλομεν ἔχει τοὺς ἐξῆς εἰδι-
κωτέρους τύπους, ἥτοι

$$\epsilon_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{P \cdot M^2}{E \gamma} \quad (7),$$

$$\epsilon_1 = \frac{6}{42} \cdot \frac{P \cdot M^2}{E \gamma} \quad (8).$$

Διαιρούντες δὲ ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) διὰ τοῦ Μ καὶ ἀνάγοντες εἰς τοὺς ἐλάχιστους ὅρους τοὺς κλασματικούς συντελεστές, θέλομεν ἔχει τὰς ἐπομένους, αἵτινες δίδουσι τὸν λόγον τοῦ βέλους τῆς δοκοῦ πρὸς τὸ μήκος αὐτῆς,

$$\frac{\epsilon_0}{M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (9)$$

$$\frac{\epsilon_1}{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (10).$$

Αἱ ἐξισώσεις (9) καὶ (10) δεικνύουσιν ὅτι, ὅταν τὸ $\frac{P}{E}$ ᾖναι σταθερόν, ὅταν δηλ. αἱ τιμαὶ τοῦ Ρ καὶ Ε ᾖναι σταθεραί, οἱ λόγοι $\left(\frac{\epsilon_0}{M}\right)$ καὶ $\left(\frac{\epsilon_1}{M}\right)$ εἶναι ἐπίσης σταθεροί, ὅταν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τῆς δοκοῦ ᾖναι συμμετρική.

Ἐάν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (9) καὶ (10) θέσωμεν ἀντὶ τῶν Ρ καὶ Ε τὰς ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένας τιμὰς αὐτῶν, ἃς ἐσημειώσαμεν ἐν τῇ παραγράφῳ 120, θέλομεν πορισθῇ τοὺς κάτωθι μερικωτέρους τύπους

$$\frac{\epsilon_0}{M} = \frac{1}{3000} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (11)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν φέρουσα φορτίον ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου·

$$\frac{\epsilon_1}{M} = \frac{1}{4000} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (12)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{\epsilon_0}{M} = \frac{1}{9000} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (13)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου φέρουσαν φορτίον ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου·

$$\frac{\epsilon_1}{M} = \frac{1}{42000} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (14)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{\epsilon_0}{M} = \frac{1}{5000} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (15)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν φέρουσαν φορτίον ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου·

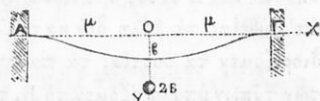
$$\frac{\epsilon_1}{M} = \frac{1}{6666} \cdot \frac{M}{\gamma} \quad (17)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

Σημειώσεις. Τὰ ἐν ταῖς παραγράφοις 121, 122, 123 λεχθέντα περὶ τῆς μείζονος ἐλαστικότητος τοῦ καθαροῦ σιδήρου ὡς πρὸς τὸν χυτοσιδήρον καὶ τῆς προτιμῆσεως αὐτοῦ διὰ τὰς σιδηρᾶς γεφύρας, περὶ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ E διὰ τῶν τύπων (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 124 καὶ περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (1), (2), (3) καὶ (4) τῆς παραγράφου 124, ἐνόσω τὰ φορτία B ἢ Mφ δὲν ὑπερβαίνουνσι τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος, ἐφαρμόζονται ἀπαραλλάκτως καὶ ἐνταῦθα.

128. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς AG (Σχ. 88), ἡ ἔχουσα μῆκος 2μ, ᾗναι πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς, τότε αἱ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως προσδιοριζόμεναι

ἐξισώσεις, αἱ παριστῶσαι τὴν καμπύλην, ἣν αὕτη λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐπίρροιν τοῦ βάρους 2B, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἢ τοῦ βάρους 2μφ, ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ'



Σχ. 88

ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος, εἶναι αἱ ἐπόμεναι, τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων λαμβανομένης ἕνεκα τῆς συμμετρίας εἰς τὸ μέσον ο τῆς δοκοῦ.

$$\psi = \frac{1}{EI} \cdot \frac{B}{2} \left(-\frac{\mu \chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} + \frac{\mu^3}{6} \right) \quad (1)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον 2B εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τοῦ φορτίου τῆς ἰδίας δοκοῦ παραλειπομένου

$$\psi = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\varphi}{6} \left(-\frac{\mu^2 \chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{4} + \frac{\mu^4}{4} \right) \quad (2)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ ὁμοιομόρφως φορτίον φ κατὰ τρέχον μέτρον, τοῦ τῆς ἰδίας δοκοῦ παραλειπομένου.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προσδιορίζομεν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τὴν καμπύλην, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους $2B$, ἐνεργούντος εἰς τὸ μέσον, ἢ $2\mu\phi$ ὁμοιομόρφως διανεμημένου κατ' ὅλον τὸ μήκος τῆς δοκοῦ.

Ποιοῦντες δὲ $\chi = 0$ καὶ ἐξάγοντες ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τῆς ψ (ἥτις εἶναι ἡ μεγίστη τῶν τεταγμένων τῆς καμπύλης (Σχ. 88), καὶ ἥτις ὡς ἐκ τούτου καλεῖται βέλος τῆς καμπύλης), ἔχομεν τοὺς ἐπομένους τύπους, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὸ βέλος, ὅπερ σημειοῦμεν διὰ τοῦ γράμματος ζ

$$\zeta = \frac{1}{12} \cdot \frac{B\mu^3}{EI} \quad (3),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς

$$\zeta = \frac{1}{24} \cdot \frac{\phi\mu^4}{EI} \quad (4),$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον ϕ κατὰ τρέχον μέτρον καὶ ὁμοιομόρφως διανεμημένον.

Διὰ τῶν τύπων (3) καὶ (4) προσδιορίζομεν ἡ τὰ βέλη, ὅταν τὰ φορτία $2B$ καὶ $2\mu\phi$ ᾖναι γνωστὰ καὶ ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς ἐλαστικότητος, τοῦ E ὄντος σταθεροῦ καὶ γνωστοῦ, ἢ ἀντιστρόφως, μετροῦντες ἀπ' εὐθείας τὰ βέλη διὰ καταλλήλων χωροσταθμικῶν ἐργαλείων προσδιορίζομεν τὰ φορτία, τὰ παραγαγόντα τὰ βέλη ταῦτα. Διὰ τῶν αὐτῶν τύπων ὑπολογίζομεν τὸ E , τῶν ζ , $2B$, ἢ ζ καὶ $2\mu\phi$ ὄντων γνωστών.

129. Ἐὰν δὲ παραβάλλωμεν τοὺς τύπους (3) καὶ (4) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου πρὸς τοὺς ὁμοιορίθμους τῆς παραγράφου 117, βλέπομεν ὅτι ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους $2B$ ἢ $2\mu\phi$ ἡ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς πεπακτωμένη δοκὸς λαμβάνει τὸ $\frac{1}{4}$ ἢ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν βελῶν, ἅτινα ἡ αὐτὴ δοκὸς ἡ ἐτέρα ὁμοίας φύσεως καὶ τῶν αὐτῶν διαστάσεων στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦσιν στηριγμάτων λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν αὐτῶν φορτίων. Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι ἡ ἐλευθέρως διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς στηριζομένη δοκὸς λαμβάνει ἀκινδύνως μεγαλύτερον βέλος τῆς πεπακτωμένης.

130. Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν τύπων (3) καὶ (4) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου καὶ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ B διὰ μέσου τοῦ $\mu\phi$, θέλομεν ἔχει

$$B = \frac{1}{2} \mu \varphi \quad (5).$$

Ἡ σχέσις αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μήκος τῆς δοκοῦ βάρους, συγκεντρούμενον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, παράγει τὸ αὐτὸ βέλος.

131. Ἐὰν συνδυάσωμεν τοὺς παρέχοντας τὸ βέλος τύπους μὲ τοὺς τύπους τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, ἐξάγομεν τοὺς τύπους, τοὺς δίδοντας τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς πεπακτωμένη δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ ἀσφαλῶς. Πρὸς τοῦτο δὲ ἔχομεν τὰς ἐξῆς πέντε ἐξισώσεις

$$\frac{PI}{v} = \frac{B\mu}{2} \quad (1),$$

$$\frac{PI}{v} = \frac{\varphi\mu^2}{6} \quad (2),$$

$$\frac{PI}{v} = \frac{\varphi\mu^2}{3} \quad (3),$$

$$\epsilon = \frac{1}{12} \frac{B\mu^3}{EI} \quad (4),$$

$$\epsilon = \frac{1}{24} \cdot \frac{\varphi\mu^4}{EI} \quad (5).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, τῆς φερούσης φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἡ (2) εἶναι ἡ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ μέσου τῆς δοκοῦ καὶ ἐφαρμόζεται ἐπὶ μήκους $0,845\mu$ ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου, ὡσάκις θέλωμεν ἡ μὲν ξύλινης δοκὸς νὰ ᾖται ὠπλισμένη, ἡ δὲ σιδηρὰ νὰ ἔχῃ τὸ σχῆμα 74. Ἡ (3) εἶναι ἡ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς πακτώσεως καὶ ἐφαρμόζεται ἡ μόνον ἐπὶ μήκους $2 \times 0,485\mu$, τουτέστι ἐπὶ μήκους $0,97\mu$ ἀφ' ἑκάστης πακτώσεως, δηλ. ἐπὶ τῶν τμημάτων Αα καὶ Γα τῆς δοκοῦ τοῦ σχήματος 74, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ἔχῃ πρόοψιν ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 74, ἢ ἐφ' ὅλου τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖται ἰσοπαχῆς καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτῆς. Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) εἶναι οἱ τύποι, οἱ δίδοντες τὰ ὑπὸ τοῦ βάρους παραγόμενα βέλη.

Συνδυάζοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (1) μὲ τὴν (4) καὶ τὴν (3) μὲ τὴν (5), ὡσάκις ἡ δοκὸς ᾖται ἰσοπαχῆς καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μήκος, καὶ τὴν

(2) μὲ τὴν (5) δοκὸς ἡ δοκὸς ἀποτελεῖται ὑπὸ τριῶν τμημάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ᾖναι ἰσοπαχές, ὥς δεικνύει τὸ σχῆμα 74, καὶ παριστῶντες διὰ ϵ_0 τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς δύναται νὰ λαμβάνῃ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ διὰ ϵ_1 καὶ ϵ_2 τὰ μέγιστα βέλη, ἅτινα ἰσοπαχὴς καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος δοκός, ἢ τμηματικῶς τοιαύτη (Σχ. 74) δύναται νὰ λαμβάνῃ ἀσφαλῶς, ὅταν ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (6),$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (7),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (8).$$

Διὰ τοῦ τύπου (6) ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς ἰσοπαχὴς δοκὸς δύναται ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ διὰ τοῦ τύπου (7), ὅταν ἡ αὐτὴ δοκὸς ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος· διὰ δὲ τοῦ τύπου (8) ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ τμηματικῶς ἰσοπαχὴς δοκὸς (Σχ. 74) δύναται ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ, ὅταν αὕτη ᾖναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Τὰ ὑπολογιζόμενα δὲ ταῦτα βέλη δυνατόν δοκός τις νὰ ὑπερβῇ χωρὶς νὰ θλασθῇ ἢ καὶ τάνάπαλιν. Ἐπομένως καὶ ἐνταῦθα ἐφαρμόζεται ἡ παρατήρησις τῆς παραγράφου 119.

Σημείωσις. Ἐὰν παραβάσωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους (6) καὶ (7) πρὸς τοὺς (5) καὶ (6) τῆς παραγράφου 119, βλέπομεν, ὅτι ἡ καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος ἰσοπαχὴς δοκὸς καὶ πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων δύναται νὰ λάβῃ μέγιστον βέλος τὸ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{3,3}$, ἐκείνων ἅτινα ἡ αὐτὴ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ, ὅταν στηρίζεται ἀπλῶς διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦσιν στηριγμάτων. Ἐπομένως ὁ μηχανικὸς πρὶν ἀποφανθῇ, περὶ τοῦ κινδύνου δοκοῦ τινος ὀφείλει προηγουμένως δι' ἐπισταμένης ἐρεύνης νὰ βεβαιωθῇ ἂν αὕτη ᾖναι πεπακτωμένη ἢ οὐ, ἵνα ἐφαρμώσῃ τὸν ἀρμόζοντα τύπον τοῦ μεγίστου βέλους.

132. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς ἔχῃ ἐγκάρσιον τομὴν συμμετρικὴν, ὥς συνήθως τοῦτο συμβαίνει, τότε καλοῦντες γ τὸ ὕψος τῆς δοκοῦ ἐν τῷ

μέσω αὐτῆς, ὅπερ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ ἢ δι' ὅλον τὸ μήκος τῆς δοκοῦ ἢ διὰ τὸ μεσαῖον μόνον τμήμα αὐτῆς αα (Σχ. 74), θέλομεν ἔχει $u = \frac{1}{2} \gamma$. Θέτοντες δὲ εἰς τοὺς τύπους (6), (7) καὶ (8) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ u τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{2} \gamma$, θέλομεν ἔχει τοὺς ἐπομένους εἰδικωτέρους τύπους, ἥτοι:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^3}{\gamma} \quad (9),$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^3}{\gamma} \quad (10),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^3}{\gamma} \quad (11).$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (9), (10) καὶ (11) θέσωμεν ἀντὶ P καὶ E τὰς γνωστὰς αὐτῶν τιμὰς, τὰς σημειωθείσας ἐν τῇ παραγράφῳ 120, καὶ διακρίσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη διὰ 2μ , θέλομεν πορισθῇ τοὺς ἐπομένους

$$\frac{\epsilon_0}{2\mu} = \frac{1}{24000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (12)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν φέρουσιν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{\epsilon_1}{2\mu} = \frac{1}{32000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (13)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{\epsilon_0}{2\mu} = \frac{1}{72000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (14)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου φέρουσιν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{\epsilon_1}{2\mu} = \frac{1}{96000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (15)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{\epsilon_0}{2\mu} = \frac{1}{40000} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (16)$$

διὰ σιδηρὰν δοκὸν φέρουσιν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{C_1}{2\mu} = \frac{1}{53333} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (17)$$

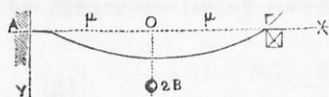
διὰ σιδηρᾶν δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{C_2}{2\mu} = \frac{1}{26666} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (18)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν τμηματικῶς ἰσοπαχῇ (ἴδε σχ. 74) καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

Σημείωσις. Παραβάλλοντες τοὺς τύπους (14) καὶ (15) μὲ τοὺς (16) καὶ (17) βλέπομεν ὅτι ὁ σίδηρος εἶναι ἐλαστικώτερος τοῦ χυτοσιδήρου καὶ ἐπομένως προτιμητέος εἰς τὴν κατασκευὴν σιδηρῶν γεφυρῶν, διὰ τοὺς ἐν τῇ παραγράφῳ 121 ἐκτεθέντας λόγους.

133. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς ΑΓ (σχ. 89), ἡ ἔχουσα μῆκος 2μ , ᾗναι πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῆς ἄκρου Α, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου Γ στηρί-



σχ. 89

ζεται ἐπὶ τοῦ στηρίγματος Γ, τότε αἱ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως προσδιοριζόμεναι ἐξισώσεις, αἱ παριστᾶσαι τὴν καμπύλην, ἣν αὕτη λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐπιρροίαν τοῦ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ἐνεργούντος βάρους $2B$,

ἢ τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς βάρους $2\mu\phi$, εἶναι αἱ κάτωθι, τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει συμμετρία, λαμβανομένης εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς πακτώσεως

$$\psi = \frac{B}{EI} \cdot \frac{1}{48} (48\mu\chi^2 - 11\chi^3) \quad (1)$$

$$\psi = \frac{B}{EI} \cdot \frac{1}{48} (5\chi^3 - 30\mu\chi^2 + 48\mu^2\chi - 16\mu^3) \quad (2)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τὸ δὲ ἴδιον αὐτῆς βᾶρος παραλείπεται.

Ἡ μὲν ἐξίσωσις (1) ἐφαρμόζεται εἰς τὸ τμήμα Αο τῆς δοκοῦ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς πακτώσεως Α καὶ τοῦ σημείου ο, ἔνθα τὸ βᾶρος $2B$ ἐνεργεῖ, ἡ δὲ ἐξίσωσις (2) ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἕτερον τμήμα οΓ τῆς δοκοῦ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ μέσου ο, ἔνθα τὸ βᾶρος $2B$

ἐνεργεῖ, καὶ τοῦ ἄκρου Γ, δι' οὗ ἡ δοκὸς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ στηρίγματος Γ. Καὶ

$$\psi = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{24} q \chi^2 (2\mu - \chi) (3\mu - \chi) \quad (3)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ ὁμοιομόρφως q φορτίον κατὰ τρέχον μέτρον, τοῦ βάρους τῆς ἰδίας δοκοῦ παραλειπομένου.

Διὰ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προσδιορίζομεν τὴν καμπύλην, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει, ὅταν ὑφίσταται εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους $2B$, διὰ δὲ τῆς ἐξισώσεως (3) προσδιορίζομεν ὡσαύτως τὴν καμπύλην, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει, ὅταν αὕτη ᾖ ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Καθ' ἃ δὲ ἡ ὑψηλὴ ἀνάλυσις, ἐξ ἧς ἐρανίσθημεν τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἐξισώσεις, διδάσκει, ἡ μεγαλειτέρα τιμὴ τῆς ψ ἡ καλουμένη καὶ βέλος, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τιμὰς $\chi' = 1,106\mu$, ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ $\chi'' = 1,456\mu$, ὅταν ἡ δοκὸς ᾖ ὁμοιομόρφως φορτωμένη. Ὅθεν ποιοῦντες $\chi = 1,106\mu$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ $\chi = 1,456\mu$ εἰς τὴν (3), θέλομεν ἔχει τοὺς κάτωθι τύπους, τοὺς παρέρχοντας τὰ ζητούμενα βέλη, ἥτοι

$$\epsilon = \frac{B}{EI} \cdot \frac{\mu^3}{3\sqrt{3}} \quad (4)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ

$$\epsilon = 0,0867 \frac{q \mu^4}{EI} \quad (5)$$

ὅταν ἡ δοκὸς φέρῃ ὁμοιομόρφως q φορτίον κατὰ τρέχον μέτρον.

Διὰ τῶν τύπων (4) καὶ (5) προσδιορίζομεν ἡ τὰ βέλη, ὅταν τὰ φορτία $2B$ καὶ $2\mu\phi$ ᾖναι γνωστὰ καὶ ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς ἐλαστικότητος, τοῦ E ὄντος σταθεροῦ καὶ γνωστοῦ, ἡ τὰ φορτία $2B$ καὶ $2\mu\phi$, τὰ παραγαγόντα δεδομένα βέλη, ἅτινα μετροῦμεν ἀπ' εὐθείας διὰ χωροσταθμικῶν ἐργαλείων. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ τύπων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν συντελεστὴν E , ὅταν θέσωμεν δεδομένα βάρη ἐπὶ τῆς δοκοῦ καὶ μετρήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς λαμβάνει.

134. Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου καὶ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ B διὰ μέσου τοῦ $\mu\phi$, θέλομεν ἔχει

$$B = 0,58\mu \cdot \phi \quad (6).$$

Σημείωσις. Ἄν καὶ τὰ βέλη, τὰ ὅποια ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τῆν ἐνέργειαν τοῦ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ἐνεργοῦντος βάρους $2B$ καὶ τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου βάρους $2\mu\phi$, δὲν ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην, ἵνα δικαιώμεθα νὰ ἐξισώσωμεν τὰ βέλη ταῦτα πρὸς πορισμὸν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (6), οὐχ ἦττον, ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις, ἥτις εἶναι $(1,456 - 1,406)\mu = 0,05\mu$, εἶναι μικρὰ ἐνὸς τοῦ μήκους τῆς δοκοῦ μ δὲν εἶναι πολὺ μέγα, δυνάμεθα ἐν τῇ πράξει ἄνευ μεγάλου σφάλματος νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἀμφοτέρω τὰ βέλη ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην, ἥς τὴν τιμὴν λαμβάνομεν μεταξὺ τῆς $\chi' = 1,405\mu$ καὶ $\chi'' = 1,456\mu$, παραδείγματος χάριν εἰς τὴν τετμημένην $\chi''' = 1,440\mu$.

135. Πρὸς εὗρεσιν δὲ τῶν τύπων, τῶν παρεχόντων τὰ μέγιστα βέλη, ἅτινα ἡ δι' ἐνὸς τῶν ἄκρων αὐτῆς πεπακτωμένη δοκὸς καὶ διὰ τοῦ ἐτέρου στηριζομένη ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος δύναται ἀσφαλῶς νὰ λάβῃ, συνδυάζομεν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν ὁμοίων προηγουμένων ζητημάτων, τοὺς τύπους τῆς ἐγκαρσίου τομῆς μὲ τοὺς τῶν βελῶν. Πρὸς τοῦτο δὲ θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς πέντε ἐξισώσεις

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{3}{4} B\mu \quad (1),$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{9}{32} \phi\mu^2 \quad (2),$$

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{2} \phi^2\mu^2 \quad (3),$$

$$\phi = \frac{B}{EI} \cdot \frac{\mu^3}{3\sqrt{5}} \quad (4),$$

$$\phi = 0,0867 \frac{\phi\mu^4}{EI} \quad (5).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς εἰς τὴν πᾶκτωσιν τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, τῆς φεροῦσης φορτίον $2B$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἡ (2) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τῆς ἀπεχούσης $\frac{8}{4}\mu$ ἀπὸ τῆς πακτώσεως, καὶ ἣν ἐφαρμόζομεν ἐπὶ μήκους $1,84\mu$, ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ἔχῃ πρόοψιν ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 79. Ἡ (3) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς πακτώσεως, ἣν μεταχειριζόμεθα, ὅταν θέλωμεν

ή δοκός νά ἦναι ἰσοπαχῆς καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, ἢ καὶ μόνον ἐπὶ μῆκους 0,19μ. ἀπὸ τῆς πακτώσεως, ἵνα ἡ δοκὸς ἔχῃ πρόοψιν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 79. Αἱ δὲ (4) καὶ (5) εἶναι οἱ τύποι οἱ δίδοντες τὰ βέλη.

Συνδυάζοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (1) μὲ τὴν (4) καὶ τὴν (3) μὲ τὴν (5), ὁσάκις ἡ δοκὸς ἦναι ἰσοπαχῆς καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, καὶ τὴν (2) μὲ τὴν (5), ὁσάκις ἡ δοκὸς θὰ ἀποτελῇται ἐκ δύο διαφόρων, ἀλλ' ἰσοπαχῶν τμημάτων ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 79, καὶ παριστῶντες διὰ ϵ_0 τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ δοκὸς δύναται νά λαμβάνῃ ἀσφαλῶς ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ διὰ ϵ_1 καὶ ϵ_2 τὰ μέγιστα βέλη, ἅτινα δοκὸς ἰσοπαχῆς καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς ἢ τμηματικῶς δύναται νά λαμβάνῃ ἀσφαλῶς, ὅταν ἦναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, θέλομεν ἔχει,

$$\epsilon_0 = \frac{4}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (6),$$

$$\epsilon_1 = 0,1734 \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (7),$$

$$\epsilon_2 = 0,3082 \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{\nu} \quad (8).$$

Διὰ τοῦ τύπου (6) ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς ἰσοπαχῆς δοκὸς δύναται ἀσφαλῶς νά λάβῃ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ διὰ τοῦ τύπου (7) ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ αὐτὴ δοκὸς δύναται νά λάβῃ ἀσφαλῶς, ὅταν ἦναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη· διὰ δὲ τοῦ (8) ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅπερ ἡ τμηματικῶς ἰσοπαχῆς δοκὸς (Σχ. 79) δύναται ἀσφαλῶς νά λάβῃ, ὅταν αὕτη εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Τὰ υπολογιζόμενα δὲ ταῦτα βέλη δυνατὸν δοκὸς τις νά υπερβῇ χωρὶς νά θλασθῇ ἢ καὶ τανάπαλιν. Ἐπομένως καὶ ἐνταῦθα ἐφαρμόζεται ἡ παρατήρησις τῆς παραγράφου 449.

Σημείωσις. Ἐὰν παραβάσωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους (6) καὶ (7) πρὸς τοὺς (5) καὶ (6) τῆς παραγράφου 449, βλέπομεν ὅτι ἡ καθ' ἅπαν αὐτῆς τὸ μῆκος ἰσοπαχῆς δοκός, ἐὰν ἦναι πεπακτωμένη μόνον διὰ

τοῦ ἐνὸς αὐτῆς ἄκρου διὰ δὲ τοῦ ἐτέρου στηρίζεται ἀπλῶς ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, δύναται νὰ λάβῃ μέγιστον βέλος τὸ $\frac{1}{1637}$ ἢ $\frac{1}{2,402}$ ἐκείνων τῶν βελῶν, ἅτινα ἡ αὐτὴ δοκὸς δύναται νὰ λάβῃ, ὅταν στηρίζεται ἀπλῶς διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοῦψῶν στηριγμάτων. Ἐπομένως ὁ μηχανικὸς πρὶν ἢ ἀποφανθῇ περὶ τοῦ κινδύνου δοκοῦ τινος, ὀφείλει προηγουμένως δι' ἐπισταμένης ἐρεῦνης νὰ βεβαιωθῇ ἂν αὕτη ᾗναι πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς μόνου ἄκρου αὐτῆς διὰ δὲ τοῦ ἐτέρου στηρίζεται ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, ἢ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς στηρίζεται ἐπὶ δύο ἰσοῦψῶν στηριγμάτων.

136. Ἐὰν ἡ ἰσοπαχὴς δοκὸς ἔχῃ συμμετρικὴν ἐγκάρσιον τομήν, ὡς συνήθως τοῦτο συμβαίνει, τότε καλοῦντες γ τὸ ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς ὕψος τῆς δοκοῦ καὶ ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ ἢ καθ' ἅπαν τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ ἢ διὰ τὸ μεσαῖον αὐτῆς τμήμα αα (Σχ. 79), θέλομεν ἔχει $u = \frac{1}{2}\gamma$. Θέτοντες δὲ εἰς τοὺς τύπους (6), (7) καὶ (8) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ τοῦ u τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{1}{2}\gamma$, θέλομεν ἔχει τοὺς κάτωθι εἰδικωτέρους τύπους, ἥτοι

$$\epsilon_0 = \frac{8}{9\sqrt{5}} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{\mu^2}{u} \quad (9),$$

$$\epsilon_1 = 0,4734 \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu^2}{\gamma} \quad (10),$$

$$\epsilon_2 = 0,3082 \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{2\mu^2}{\gamma} \quad (11).$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (9), (10) καὶ (11) θέσωμεν ἀντὶ P καὶ E τὰς γινωστὰς αὐτῶν τιμὰς, τὰς σημειωθείσας ἐν τῇ παραγράφῳ 120, καὶ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη διὰ 2μ , θέλομεν πορισθῇ τοὺς κάτωθι μερικωτέρους τύπους

$$\frac{\epsilon_0}{2\mu} = \frac{4}{20124} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (12)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν φέρουσαν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{\epsilon_1}{2\mu} = \frac{4}{23068} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (13)$$

διὰ ξύλινον δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{G_0}{2\mu} = \frac{4}{60362} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (14)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου φέρουσαν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{G_1}{2\mu} = \frac{4}{69204} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (15)$$

διὰ δοκὸν ἐκ χυτοσιδήρου ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{G_0}{2\mu} = \frac{4}{33540} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (16)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν φέρουσαν φορτίον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς·

$$\frac{G_1}{2\mu} = \frac{4}{38638} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (17)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν ὁμοιομόρφως φορτωμένην·

$$\frac{G_2}{2\mu} = \frac{4}{21630} \cdot \frac{2\mu}{\gamma} \quad (18)$$

διὰ τμηματικῶς ἰσοπαχῇ σιδηρᾶν δοκὸν (ἴδε σχ. 79) καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένην.

Σημείωσις. Διὰ τῆς παραβολῆς τῶν τύπων (14) καὶ (15) πρὸς τοὺς (16) καὶ (17) βλέπομεν ὅτι ὁ σίδηρος εἶναι ἐλαστικώτερος τοῦ χυτοσιδήρου καὶ ἐπομένως προτιμητέος εἰς τὴν κατασκευὴν σιδηρῶν γεφυρῶν διὰ τοὺς ἐν τῇ παραγράφῳ 121 ἐκτεθέντας λόγους.

137. Ἐὰν τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ παραληφθῇ, ὡς τοῦτο ἐγένετο μέχρι τοῦδε, ἀλλὰ πρέπει καὶ τοῦτο νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς τε καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους τινὸς καὶ τοῦ βέλους, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ἐνεργοῦντος βάρους, τότε παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαφορῶν τεταγμένων τῆς καμπύλης πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς τεταγμένας τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὸ φορτίον, ὅπερ ἡ δοκὸς ὑποβαστάζει, τὰς τεταγμένας τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὸ ἴδιον αὐτῆς βάρος, ὅπερ θεωρεῖται ὡς φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἂν καλέσωμεν ψ τὴν τεταγμένην τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ταυτόχρονον ἐνέργειαν τοῦ ἰδίου βάρους καὶ τοῦ ὅπερ φέρει φορτίου, ψ' τὴν τεταγμένην τῆς καμπύλης, ἣν ἡ

δοκός ἤθελε λάβει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν μόνον τοῦ ἰδίου βάρους, καὶ ψ' τὴν τεταγμένην τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς ἤθελε λάβει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ ὕπερ φέρει φορτίου, θέλομεν ἔχει τὴν σχέσιν

$$\psi = \psi' + \psi'' \quad (1).$$

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν καὶ περὶ τῶν βελῶν, καλοῦντες δηλαδὴ θ τὸ βέλος τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς λαμβάνει ὑπὸ τὴν ταυτῆ-χρονον ἐνέργειαν τοῦ ἰδίου βάρους καὶ τοῦ ὕπερ φέρει φορτίου, θ' τὸ βέλος τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς ἤθελε λάβει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν μόνον τοῦ ἰδίου αὐτῆς βάρους, καὶ θ'' τὸ βέλος τῆς καμπύλης, ἣν ἡ δοκὸς ἤθελε λάβει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ ὕπερ φέρει φορτίου, θέλομεν ἔχει τὴν ὁμοίαν τῇ ἀνωτέρω διὰ τὰς τεταγμένας σχέσιν

$$\theta = \theta' + \theta'' \quad (2).$$

Ὡς πρὸς δὲ τὸν προσδιορισμὸν τῶν μεγίστων βελῶν, παρατηροῦμέν ἐτι οἱ αὐτοὶ τύποι τῶν προηγουμένων παραγράφων ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην, καθ' ἣν λαμβάνεται ὑπ' ἑψὶν καὶ τὸ ἴδιον βάρος τῆς δοκοῦ.

Τῶνδ' ἐν, ἂν μὲν ἡ δοκὸς ᾖται ὁμοιομόρφως φορτωμένη, ἐπειδὴ καὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς βάρος εἶναι φορτίον ὁμοιομόρφως διανεμημένον, ἔπεται ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐγκαρσίου τινὸς αὐτῆς τομῆς δὲν μεταβάλλουσι μορφήν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίου φ διὰ τοῦ $\varphi_1 + \varphi_2$, (διὰ τοῦ φ_1 παριστᾶται τὸ βάρος ἐνὸς τρέχοντος μέτρου δοκοῦ, καὶ διὰ τοῦ φ_2 τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον αὐτῆς) καὶ ἐπομένως καὶ οἱ τύποι τῶν μεγίστων βελῶν μένουσιν οἱ αὐτοί. Ἄν δὲ ἡ δοκὸς φέρῃ φορτίον $2B_2$ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ὡς π. χ. εἰς τὰ ζητήματα τῶν παραγράφων 117, 128, 133, ἢ φορτίον B_2 εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ὡς π. χ. εἰς τὸ ζήτημα τῆς παραγράφου 124, τότε λαμβάνοντες τόσον ἓκ τοῦ βάρους τῆς ἰδίας δοκοῦ, ὅσον ἀρκεῖ τιθέμενον εἰς τὸ σημεῖον ἐνθα ἐνεργεῖ τὸ φορτίον νὰ παραγάγῃ τὸ αὐτὸ βέλος, ὕπερ παράγει μόνον τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, π. χ. ἂν πρόκειται περὶ τοῦ ζητήματος τῆς παραγράφου 117, λαμβάνομεν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ βάρους τῆς ἰδίας δοκοῦ, καὶ καλοῦντες τοῦτο $2B_1$, ὅταν πρόκειται περὶ τῶν ζητημάτων τῶν παραγράφων 117, 128 καὶ 133, ἢ B_1 , ὅταν πρόκειται περὶ τοῦ ζητήματος τῆς παραγράφου 124, καὶ $2B_2$ ἢ B_2 τὸ φορτίον, ὕπερ ἡ δοκὸς φέρει

εἰς τὸ μέσον ἢ ἄκρον αὐτῆς, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τε τοὺς τύπους τοῦ βέλους καὶ τῶν ἐγκαρσίων τομῶν τὸ B διὰ τοῦ $B_1 + B_2$, ἄγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ ἴδιον βάρος τῆς δοκοῦ παραλείπεται.

Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν ὅτι οἱ τύποι τοῦ μεγίστου βέλους δὲν μεταβάλλονται, καὶ ἐπομένως οἱ ἐν ταῖς ἀνωτέρω παραγράφοις εὑρεθέντες τύποι, δι' ὧν ὑπολογίζομεν τὸ μέγιστον βέλος, ὅταν τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ παραλείπεται, ἀρμόζουσι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τοῦτο λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Τὸ τοιοῦτον εἶναι κατὰδηλον καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν τύπων τῶν μεγίστων βελῶν, ἅτινα εἶναι συνέχσεις τοῦ συντελεστοῦ E καὶ τοῦ μεγίστου φορτίου P , καὶ οὐχὶ τῶν φορτίων $2B$ ἢ 2μ .

138. Τὰ ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις λεχθέντα ἐφαρμόζονται μόνον προκειμένου περὶ ἰσοπαχῶν δοκῶν· ἀλλ' ὅταν ἡ δοκὸς ᾖ στερεὴν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε, ἐπειδὴ ἡ ῥοπή τῆς ἀδρανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, δηλ. τὸ I , εἶναι συνέχσεις τῆς χ , ἡ διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως εὑρισκομένη ἐξίσωσις, ἡ παριστώσα τὴν ὑπὸ τῆς δοκοῦ σχηματιζομένην καμπύλην, εἶναι λίαν πολὺπλοκος, καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν λόγον περὶ ταύτης ἐν τῇ παρούσῃ συντόμῳ ἡμῶν συγγραφῇ. Καθ' ὅσον δ' ἀφορᾷ εἰς τὰ περὶ τοῦ βέλους, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ ἐξῆς.

Τὸ βέλος, ὅπερ λαμβάνει δοκὸς τις, ἔχουσα σχῆμα στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως, εἶναι διπλάσιον τοῦ βέλους, ὅπερ λαμβάνει ἰσοπαχῆς δοκὸς τῆς αὐτῆς φύσεως, εὑρισκομένη εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις, καὶ ἔχουσα τὸ αὐτὸ μῆκος, ἐγκάρσιον δὲ τομὴν ὁμοίαν καὶ ἴσην μὲ τὴν μεγίστην ἐγκάρσιον τομὴν τοῦ στερεοῦ ἴσης ἀντιστάσεως.

Τοῦτο ἀπεδείχθη διὰ πειραμάτων, ἀλλὰ καὶ θεωρητικῶς ἀποδεικνύεται ὡς ἐξῆς.

*Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὸ βέλος, ὅπερ δοκὸς, ἔχουσα μῆκος 2μ καὶ στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στηριγμάτων, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου, λαμβάνει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους $2B$, ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τῶν διαστάσεων τῶν ἐγκαρσίων αὐτῆς τομῶν προσδιορισθεῖσιν ὑπὸ βάρους $2B_1$ ἴσου ἢ μεγαλειτέρου τοῦ $2B$, καὶ ἐνεργοῦντος εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, θέλομεν εἶχει.

$$\frac{PI}{2} = X \quad (1)$$

εξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς καὶ

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{B\mu^3}{EI} \quad (2)$$

εξίσωσις, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὸ βέλος.

Ἐὰν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾔναι ἰσοπαχής, τότε καλοῦντες α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς, ὑποτιθεμένης ὀρθογωνίου, καὶ I_1 τὴν ῥοπὴν τῆς ἀδρανείας τῆς τομῆς, καὶ θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ X τὴν ἀρμόζουσαν τιμὴν αὐτοῦ $B_1\mu$, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς μερικὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{PI_1}{\frac{1}{2}Y} = B_1\mu \quad (3)$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὸ I_1 .

Ταύτην δὲ τὴν τιμὴν τοῦ I θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) προσδιορίζομεν τὸ βέλος θ_0 τῆς ἰσοπαχοῦς δοκοῦ ἐκ τοῦ ἐπομένου τύπου

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \frac{B\mu^3}{EI_1} \quad (4).$$

Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾔναι στερεὸν ἴσης ἀντιστάσεως, τότε πρὸς εὐρεσιν τοῦ βέλους αὐτῆς, ὕπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος θ_1 , πρέπει ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1) νὰ πορισθῶμεν τὴν ἀρμόζουσαν τιμὴν τοῦ I καὶ ταύτην νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὸ βέλος θ_1 .

Ἐπειδὴ δὲ τὸ X τῆς ἐξίσωσεως (1) λαμβάνει ἀπάσας τὰς τιμὰς, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν τιμῶν 0 καὶ $B_1\mu$, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ I μεταβάλλονται ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τῆς I_2 , ἥτις παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ I ὅταν πρόκηται περὶ ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, καὶ ἐπομένως ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ I , ἡ ἀρμόζουσα νὰ τεθῇ εἰς τὸν τύπον (2) πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ βέλους θ_1 δὲν εἶναι γνωστὴ ἐκ τῶν προτέρων.

Ἐὰν ὅμως πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ βέλους θ_1 λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ I τὴν μέσσην τιμὴν αὐτοῦ, τὴν περιεχομένην μεταξὺ τοῦ 0 καὶ I_1 , δηλ. τὴν $\frac{I_1}{2}$, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος I_2 καὶ ἀντεισάξωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), θέλομεν ἔχει

$$\epsilon_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{B\rho^3}{EI_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{B\rho^3}{EI_1} \quad (5)$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὸ βέλος ϵ_1 .

Παραβάλλοντες δὲ τοὺς τύπους (4) καὶ (5) εὐρίσκομεν τὴν ἐξῆς σχέσιν μεταξὺ τῶν βελῶν ϵ_0 καὶ ϵ_1

$$\epsilon_1 = 2\epsilon_0 \quad (6).$$

Ἡ σχέσις δὲ αὕτη ἀποδεικνύει ὅτι ἀνωτέρω εἴπομεν καὶ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν πραγμάτων.

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (6) ἀποδεικνύεται δι' ὁμοίων συλλογισμῶν καὶ ὅταν ἡ δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς στηριζομένη ἐπὶ δύο στερεῶν καὶ ἰσοϋψῶν στηριγμάτων δοκὸς εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη, ὥς καὶ ὅταν ἡ δοκὸς ᾖ καὶ ἡ πεπτακτομένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς ἡ δι' ἑνὸς μόνου καὶ διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου αὐτῆς στηρίζεται ἢ μὴ ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος, φέρει δὲ φορτίον $2B$ ἢ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ἢ ὁμοιομόρφως διανεμημένον καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μήκος.

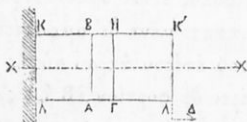
139. Ἐπειδὴ ἡ δοκὸς ἡ ἔχουσα σχῆμα στερεοῦ ἴσως ἀντιστάσεως λαμβάνει βέλος διπλάσιον τῆς ἰσοπαχοῦς, διὰ τοῦτο αὕτη διατρέχει μείζονα ἢ ἡ ἰσοπαχής, κίνδυνον θλάσεως, ὅταν ἐξωτερικὴ τις αἰτία τεῖνῃ θὰ αὐξήσῃ τὸ βέλος τοῦτο, ὥς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς δοκοὺς τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν κατὰ τὴν διάβασιν τῶν βαρέων διτρώχων ἢ τῆς σιδηροδρομικῆς ἀμαξοστοιχίας.

Τούτου ἕνεκα ὁ διακεκριμένος Γάλλος μηχανικὸς Μοραντιέ, περὶ οὗ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παράγραφον 63, συνεβούλευε τοῖς μαθηταῖς αὐτοῦ, ὅπως εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν οὐδέποτε ποιῶσι χρῆσιν δοκῶν ἐχόντων σχῆμα στερεοῦ ἴσως ἀντιστάσεως, ἀλλ' ἰσοπαχῶν. Τοῦτ' αὐτὸ καὶ ἡμεῖς συμβουλεύομεν μὲ μόνον τὴν διαφορὰν, ὅτι αἱ δοκοὶ τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν πρέπει νὰ ᾖναι χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας τμηματικῶς ἰσοπαχεῖς, ὥς δεκνύουσι τὰ σχ. 74 καὶ 79.

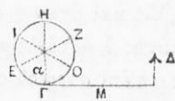
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΤΡΕΨΕΩΣ

140. Ὄταν δοκὸς τις πρισματικὴ ἢ κυλινδρική ᾖναι πεπακτωμένη διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου αὐτῆς ΚΛ (Σχ. 90) καὶ ὑφίσταται τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως τινος Δ, ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου αὐτῆς ἄκρου Κ'Λ' (Σχ. 90) διὰ μέσου τοῦ μοχλοῦ Μ (Σχ. 91) καὶ τεινύσης νὰ δώσῃ



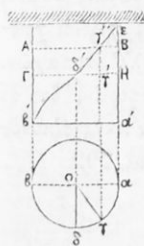
Σχ. 90



Σχ. 91

εἰς τὰς ἐγκαρσίους αὐτῆς τομὰς περιστροφικὴν κίνησιν περὶ τὸν ἄξονα ΧΧ τοῦ κυλίνδρου ἢ πρίσματος, τότε ὅλαι αἱ ἴνες τοῦ σώματος, αἵτινες πρὸ τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως ᾗσαν εὐθύγραμμοι καὶ παράλληλοι τοῦ ἄξονος ΧΧ, αὐξάνουσι τὸ μήκος καὶ μεταβάλλονται εἰς ἑλικας καὶ ἡ δοκὸς διαρρέγνυται, ὅταν ἡ ὑπὸ τῆς δυνάμεως Δ παραχθισομένη στρέψις ὑπερβῇ τὸ ὑπὸ τῆς πείρας ὀριζόμενον ὄριον.

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τῆς σχέσεως τῆς ὑπαρχούσης μεταξὺ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τοῦ σώματος καὶ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως Δ, τῆς ἐνεργούσης νὰ θλάσῃ τὸ σῶμα διὰ στρέψεως, ἃς θεωρήσωμεν δύο διαδοχικὰς καὶ λίαν πλησίον ἀλλήλαις κειμένας τομὰς, π. χ. τὰς ΑΒ καὶ ΓΗ (Σχ. 90 καὶ 91), καὶ ἃς ἴδωμεν τί τότε συμβαίνει ἐν αὐταῖς, ὅταν ἡ δοκὸς τείνῃ νὰ στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα ΧΧ.



Σχ. 92

Ἡ διατομὴ ΓΗ (Σχ. 90, 92) στρεφόμενη περὶ τὸν ἄξονα ΧΧ, τῆς τομῆς ΑΒ ὑποτιθεμένης ἀκινήτου, μεταβάλλει εἰς ἑλικας ὅλας τὰς παραλλήλους ἴνας, τὰς ἐνούσας τὰ μέρη τῆς τομῆς ΑΒ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων τῆς ΓΗ, ὡς λ. χ. τὴν εὐθύγραμμον ἴνα γ'γ'' εἰς τὴν καμπύλην γ'δ', ἣτις εἶναι μέρος τῆς ἑλικας εβ', εἰς ἣν μετεβλήθη ἡ εὐθύγραμμος ἴς εα', τοῦ μορίου α

διανύσαντος τὴν ὁδὸν αβ, ἣν ἐλάβομεν χάριν ευκολίας τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος μείζονα τῆς πραγματικῆς (Σχ. 92). Ἐκ τῆς μεταβολῆς δὲ ταύτης τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῶν ἰνῶν αὐξάνει καὶ κατὰ συνέπειαν τίθενται εἰς ἐνέργειαν αἱ ἑλξεις τῶν μορίων τῆς τομῆς AB, αἵτινες ἀνὰ δύο συνδυαζόμεναι παράγουσι ζεύγη δυνάμεων. Π.χ. τὰ μόρια Γ καὶ Η, τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τῆς τομῆς ΓΗ (Σχ. 90 καὶ 91), ἀπομακρυνόμενα τῶν ἀντιστοίχων τῶν μορίων Α καὶ Β τῆς τομῆς AB, ἐφελκύνονται ὑπὸ τούτων, ἵνα ἐπανέλθωσιν εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν θέσιν, καὶ οὕτω αἱ ἑλξεις τῶν μορίων Α καὶ Β παράγουσι ζεύγος δυνάμεων, τείνον νὰ περιστρέψῃ τὴν τομὴν ΓΗ ἀντιθέτως τῆς περιστροφικῆς κινήσεως, ἣν ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις Δ ἔδωκεν εἰς αὐτήν.

Ὅτι εἵπομεν περὶ τῶν μορίων Γ καὶ Η, τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ περὶ δύο ἄλλων ὁποιονδήποτε μορίων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ ἀνηκόντων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν κύκλου. Π.χ. τὰ Ε καὶ Ζ, ἢ Ι καὶ ο, κτλ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ ἐλατήρια δυνάμεις τῶν μορίων τῆς τομῆς AB παράγουσι ζεύγη δυνάμεων καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει ἰσορροπία μεταξὺ τούτων καὶ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως Δ, πρὸς εὐρεσιν τῆς ζητουμένης σχέσεως μεταξὺ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῆς τομῆς AB καὶ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως Δ πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν.

Ὅθεν καλοῦντες $x, x', x'' \dots$ κτλ. τὰς ἐλατηρίους δυνάμεις τῶν μορίων Γ, α, ... κτλ. καὶ $p, p', p'' \dots$ κτλ. τὰς ἀποστάσεις τῶν μορίων τούτων ἀπὸ τοῦ κέντρου (Σχ. 94), θέλομεν ἔχει τὴν σχέσιν

$$\Delta \times M = x \cdot p + x' \cdot p' + x'' \cdot p'' + \dots \quad (1).$$

Ἐκ πείρας δὲ γνωρίζομεν ὅτι ἡ δύναμις, ἡ παράγουσα στρέψιν τινὰ ἐπὶ δεδομένου σώματος, ἐνὸσω αὕτη δὲν ὑπερβαίνει τὸ ὄριον τῆς ἐλαστικότητος, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ω αὐτοῦ, τοῦ συντελεστοῦ E , τῆς ἐλαστικότητος τῆς στρέψεως καὶ τῆς παραχθείσης στρέψεως ϵ , τῆς ἀναφερομένης εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἐπομένως παριστῶντες διὰ K τὴν δύναμιν τὴν παραγαγοῦσαν ϵ στρέψιν κατὰ τρέχον μέτρον, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$K = \omega E \epsilon \quad (2).$$

Τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἐφαρμόζοντες καὶ ἐπὶ τῶν ἐλατηρίων δυνάμεων τῶν μορίων τῆς τομῆς AB (Σχ. 92), θέλομεν ἔχει διὰ τὴν ἐλατήριο δυνάμιν κ τοῦ μορίου γ'' παραδείγματος χάριν, ὕπερ ἐφελκύει τὸ δ', ἵνα ἐπαναφέρει αὐτὸ εἰς τὴν θέσιν γ'

$$\kappa = E_1 \omega \frac{\text{τόξον } \gamma\delta}{\gamma'\gamma''} \quad (3).$$

Τοῦ ω παριστῶντος τὴν τομὴν τοῦ μορίου δ' καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{\text{τόξον } \gamma\delta}{\gamma'\gamma''}$ τὴν κατὰ τρέχον μέτρον στρέψιν ι.

Ἐὰν καλέσωμεν Λ τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς πεπακτωμένης διατομῆς καὶ τῆς ἐρ' ἧς ἐνεργεῖ ἡ δυνάμεις Δ διατομῆς, ἵνα παραγάγῃ τὴν στρέψιν, ἥτοι τὸ εα' (Σχ. 92), ὕπερ δὲν μεταβάλλεται, Θ τὴν γωνιώδη στροφὴν, ἐκτετιμημένην εἰς μέτρα καὶ ρ τὴν ἀκτῖνα οἷ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως Δ ἡ ἴς εα' (Σχ. 92) ἔλαβε τὴν θέσιν εβ', τότε ἐκ τῶν ιδιοτήτων τῆς ἑλικοῦ θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς σχέσιν:

$$\frac{\text{τόξον } \gamma\delta}{\gamma'\gamma''} = \frac{\text{τόξον } \alpha\beta}{\epsilon\alpha'} = \frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda} \quad (4).$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ἀντὶ τοῦ $\frac{\text{τόξον } \gamma\delta}{\gamma'\gamma''}$ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda}$, μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς τὴν ἐξῆς

$$\kappa = \frac{E_1 \omega \cdot \Theta \cdot \rho}{\Lambda} \quad (5).$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὰς ἐλατηρίους δυνάμεις κ , κ' , κ'' ... κτλ. διὰ τῶν τιμῶν, τῶν ἐξαγομένων ἐκ τοῦ τύπου (5), καὶ θέτοντες ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα $\frac{E_1 \Theta}{\Lambda}$ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) εἰς τὴν ἐξῆς:

$$\Delta \times M = \frac{E_1 \Theta}{\Lambda} (\omega \rho^2 + \omega' \rho'^2 + \omega'' \rho''^2 + \dots) \quad (6).$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ποσότης παριστᾷ τὴν ῥοπήν τῆς ἀδρανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς AB τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸ κέντρον ο καὶ σημειοῦντες ταύτην διὰ τοῦ γράμματος I, μετατρέπομεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (6) εἰς τὴν ἐπομένην

$$\Delta.M = \frac{E.\Theta.I}{\Lambda} \quad (7),$$

ἥτις παριστᾷ τὴν ζητούμενην σχέσιν καὶ καλεῖται ἐξίσωσις τῆς ἐγκυρσίου τομῆς.

Ἐπειδὴ δὲ συνήθως τὰ εἰς στρέψιν ὑποκείμενα σώματα εἶναι κυλινδρικά, ὡς λ. χ. οἱ ἄξονες τῶν ὀδοντωτῶν τροχῶν, τὰ μηχανήματα, τὰ καλούμενα ἐργάται κτλ., διὰ τοῦτο θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον (7) ἀντὶ I τὴν εἰδικὴν αὐτοῦ τιμὴν $\frac{1}{2}\pi r^4$ καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ Θ , ῥέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς

$$\Theta.r = \frac{2.\Lambda.\Delta.M}{\pi.r^3.E_1} \quad (8).$$

141. Διὰ τῆς ἐξίσωσεως (7) ἢ (8) προσδιορίζομεν ἢ τὸν συντελεστήν E_1 μετροῦντες ἀπ' εὐθείας τὸ τόξον Θ τῆς στροφῆς, ἢ τὰν ἀπαλιν, τὸ τόξον Θ , γνωστοῦ ὕψους τοῦ συντελεστοῦ E_1 , τῶν ποσοτήτων Λ , Δ καὶ M ὑποτιθεμένων πάντοτε γνωστῶν κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις.

142. Ἐκ τῶν εἰς διάφορα ἐργαστάσια γινομένων πειραμάτων πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ συντελεστοῦ E_1 ἐξήχθησαν αἱ κάτωθι μέσαι τιμαὶ αὐτοῦ, αἵτινες ἐγένοντο σχεδὸν παρὰ πάντων παραδεκταὶ ἐν τῇ πράξει, ἀναφέρονται δὲ εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας.

Διὰ σίδηρον μαλακόν	$E_1 = 6.000.000.000$
Διὰ χάλυβα γερμανικόν	$E_1 = 6.000.000.000$
Διὰ χυτὸν χάλυβα πρώτης ποιότητος	$E_1 = 10.000.000.000$
Διὰ χυτοσίδηρον	$E_1 = 2.000.000.000$
Διὰ χαλκόν	$E_1 = 4.366.000.000$
Δι' ὀρείχαλκον	$E_1 = 4.066.000.000$
Διὰ δρῦν	$E_1 = 400.000.000$
Διὰ πεύκην	$E_1 = 433.000.000$

143. Διὰ τῶν αὐτῶν πειραμάτων, ἐξ ὧν ἐξήχθησαν αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τοῦ E_1 , αἱ ἀρμύζουσαι εἰς ἕκαστον εἶδος ὕλης, ἀπεδείχθη ὅτι κύλινδροι ἐκ χυτοσιδήρου ὑπέστησανγωνιώδη στρέψιν, τινὲς μὲν μέχρι 7° , τινὲς δὲ μέχρι 15° καὶ ἄλλοι μέχρι 20° καὶ ἐθλάσθησαν ἅμ' ὡς ἡ γωνία ὑπερέβη τὰ ἀνωτέρω ὅρια.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διὰ στρέψεως θλάσις τῶν ἐκ χυτοσιδήρου κυλίνδρων ἢ ἐξ ἄλλης οἰαςδήποτε ὕλης γίνεται ὑπὸ διαφόρους γωνίας, κατὰ τὴν διάφορον ποιότητα τῆς ἐξ ἧς σχηματίζονται ὕλης, διὰ τοῦτο πρὸς ἀσφάλειαν παρεδέχθησαν γενικῶς ἐν τῇ πράξει, ὅτι ἡ κατὰ τρέχον μέτρον στρέψις ἢ παριστανομένη διὰ τοῦ $\frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda}$ (ἴδε τύπον 4 § 140), ὅπερ παριστᾷ ὡσαύτως καὶ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἣν ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἑλικῆς ἐβ' (Σχ. 92) εἰς τὸ σημεῖον β' σχηματίζει μὲ τὴν γεννήτριαν, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὸ ὄριον $0^{\mu},000667$, ὅπερ ἀνταποκρίνεται εἰς γωνίαν $2',48''$, προκειμένου περὶ δευτερευόντων ἀξόνων, καὶ τὸ ὄριον $0^{\mu},000333$, προκειμένου περὶ πρωτευόντων ἀξόνων, ἢ ἀξόνων μηχανημάτων τινῶν, δι' ὧν ὑψοῦμεν βαρέα φορτία, ὡς λόγου χάριν ὁ γερανός, ὁ ἐργάτης κτλ. Πρὸς τοῦτο δὲ ἔλαβον ὑπ' ὄψιν τοὺς ἄξονας διαφόρων ἐργαλείων, ἐκτελούντων πολυχρόνιον εἰς τὰ ἐργαστάσια ὑπηρεσίαν καὶ διατηρουμένων ἐν καλῇ πάντοτε καταστάσει.

Παραδεχόμενοι ὅθεν $\frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda} = 0^{\mu},000667$ διὰ τοὺς δευτερεύοντας ἄξονας καὶ $\frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda} = 0^{\mu},000333$ διὰ τοὺς πρωτεύοντας ἄξονας, καὶ θέτοντες εἰς τὸν τύπον (8) τῆς παραγράφου 140 ἀντὶ τῶν E_1 , $\frac{\Theta \cdot \rho}{\Lambda}$ καὶ I τὰς τιμὰς αὐτῶν, εὐρίσκομεν τοὺς ἐπομένους μερικοὺς τύπους, οἵτινες καλοῦνται διὰ τοῦτο καὶ ἐμπειρικοὶ τύποι, καὶ παρέχουσιν ἡμῖν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν εἰς στρέψιν ὑποκειμένων σωμάτων.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ

Περιέχωρ τὸν ἐμπειρικοδὺς τύπου, δι' ὧν ὑπολογίζονται αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν εἰς στρέψιν ὑποκειμένων σωμάτων.

Σχήμα τῆς ἐγκαρσίου τομῆς	Υλὴ, ἐξ ἧς ἀποτελεῖται τὸ σπέρειον	ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΟΙ ΤΥΠΟΙ	
		Διὰ δευτερεύονταξ ἄξοναξ	Διὰ πρωτεύονταξ ἄξοναξ
Τετράγωνον πλευρᾶς θ	Σίδηρος ἢ χάλυψ	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{943280}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{471640}$
	Χυτοσίδηρος	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{314420}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{157210}$
	Ξυλεία {	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{62697}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{31348}$
		$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{68073}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{34036}$
	Σίδηρος ἢ χάλυψ	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{783880}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{392940}$
	Χυτοσίδηρος	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{262900}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{131450}$
Κύκλος πλήρηξ διαμέτρου θ	Ξυλεία {	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{52234}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{26117}$
		$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{56713}$	$\theta^3 = \frac{\Delta.M}{28356}$
	Σίδηρος ἢ χάλυψ	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{783880}$	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{392940}$
	Χυτοσίδηρος	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{262900}$	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{131450}$
	Σίδηρος ἢ χάλυψ	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{783880}$	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{392940}$
	Χυτοσίδηρος	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{262900}$	$\theta^4 - \delta'^4 = \frac{\Delta.M}{131450}$

144. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν εἰς τὴν χρῆσιν τῶν τύπων τοῦ ἀνωτέρου δεκάτου πίνακος λύομεν τὰ ἐξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{ον}. *Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐκ σιδήρου διάμετρος πρωτεύοντος ἄξονος κυλινδρου τιῆς (τυμπάνου), ὅπως οὗτος ἀνθίσταται ἀσφαλῶς εἰς τὴν στρέψιν δυνάμεως 6000 χιλιογράμμων, ἐνεργούσης διὰ μοχλοῦ μήκους 0,50 τοῦ μέτρου.*

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν γνωστὸν τύπον $\delta^3 = \frac{\Delta \cdot M}{392940}$ ἀντὶ τοῦ Δ καὶ M τὰς δεδομένas τιμὰς αὐτῶν 6000 καὶ 0,50 θέλομεν ἔχει

$$\delta^3 = \frac{6000 \times 0,50}{392940} = \frac{3000}{392940},$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα διὰ τῶν λογαριθμῶν

$$\log. \delta = \frac{\log. 3000 - \log. 392940}{3}$$

ἢ

$$\log. \delta = \overline{1},2942650,$$

ἐπομένως

$$\delta = 0^u,4969.$$

Παράδειγμα 2^{ον}. *Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐκ λυτosiδήρου διάμετρος τοῦ ἄξονος τοῦ τυμπάνου γερανοῦ τιῆς, ὅστις ἡ ἄλυσις ὑπόκειται εἰς ἐφελκυσμὸν δύο χιλιᾶδων χιλιογράμμων, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἐφ' ὃν ἐρεργεῖ τυμπάνου εἶναι 0^u,26.*

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν γνωστὸν τύπον $\delta^3 = \frac{\Delta \cdot M}{131450}$ ἀντὶ τοῦ Δ καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν 2000 καὶ 0,13 θέλομεν ἔχει

$$\delta^3 = \frac{2000 \times 0,13}{131450} = \frac{260}{131450}$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα διὰ τῶν λογαριθμῶν

$$\log. \delta = \frac{\log. 260 - \log. 131450}{3}$$

ἢ

$$\log. \delta = \overline{1},0987375$$

ἐπομένως

$$\delta = 0,42.$$

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω ἔξων ὑπόκειται καὶ εἰς κάμψιν, ἐπομένως πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διάμετρον αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦ γνωστοῦ

τύπου τῆς κάμψεως, καὶ ἐκ τῶν δύο διαμέτρων νὰ λάβωμεν τὴν ἔχουσαν μεγαλύτεραν τιμὴν. Ἐπειδὴ ὁ ἄξων εἶναι πρωτεύων καὶ ἐκ χυτοσιδήρου, ὁ ἐφαρμοστέος τύπος εἶναι ὁ (3) τῆς παραγράφου 114, ἥτοι ὁ ἐξῆς

$$\delta^3 = \frac{B \cdot \mu}{367968},$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα διὰ τῶν λογαρίθμων

$$\log. \delta = \frac{\log. B + \log. \mu - \log. 367968}{3} \quad (\alpha)$$

Τὸ B τοῦ παραδείγματος τούτου εἶναι $\frac{2000}{2} = 1000$, τὸ δὲ μ εἶναι μεταβλητὸν κατὰ τὸ εἶδος τῶν γερανῶν. Ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἄξωνος εἶναι $0^{\mu}, 44$, ἥτοι τὸ ἐλάχιστον, ὅπερ δύναται νὰ ἔχη γερανός τις καὶ ὅτι ἡ ἄλυσις ἡ περιτυλισσομένη εἰς τὸ τύμπανον εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θέλομεν ἔχει $\mu = 0,22$ καὶ διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (α) εὐρίσκομεν

$$\log. \delta = 2,9255366$$

ἐξ οὗ $\delta = 0^{\mu}, 08424$.

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι μικρότερα τῆς $0^{\mu}, 12$, τῆς εὐρεθείσης διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἄξωνος ἴσον μὲ 1 μέτρον, ὅπερ τὸ συνειθέστερον ἐν τῇ πράξει, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἄλυσις εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ τυμπάνου, τότε ἔχομεν $\mu = 0,50$ καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (α) πορίζομεθα

$$\log. \delta = 1,0445858, \quad \text{ἐπομένως } \delta = 0^{\mu}, 1108.$$

Καὶ ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ὀλίγον μικρότερα τῆς $0^{\mu}, 12$, τῆς εὐρεθείσης διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως.

Παράδειγμα 3^{ον}. Νὰ εὐρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ἐκ ξύλου δρυὸς ἄξονος ὑδραυλικοῦ τινος τροχοῦ, ἔχοντος ἐπιπέδους κώπας καὶ κινοῦντος τοὺς λίθους ὑδρομύλου τινός, ὑποτιθεμένου ὅτι

Τὸ ὕψος τῆς καταπτώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι	$2^{\mu}, 475$
Ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος κατὰ 1"	1200 λίτραι
Ἡ ἀκτίς τοῦ ὑδραυλικοῦ τροχοῦ	$3^{\mu}, 25$
Ἡ ταχύτης τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, δηλ. τοῦ ἄκρου τῶν κωπῶν	$1^{\mu}, 00$
Ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν εἰς τὸ 1'	3

Ὁ ὀδοντωτὸς τροχός, ὁ μεταδίδων τὴν κίνησιν εἰς τοὺς λίθους τοῦ ὑδρομύλου εἶναι προσηρμοσμένος ἐπὶ τοῦ ξυλίνου ἄξονος καὶ μεταξὺ τῆς μιᾶς τῶν δύο τελευταίων στεφανῶν τοῦ ὑδραυλικοῦ τροχοῦ καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο σημείων τῆς στηρίξεως τοῦ ἄξονος.

Τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος μεταξὺ τῶν δύο σημείων
τῆς στηρίξεως $8^{\mu}, 90$

Τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ 47500 χιλ.

Τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἄξονος διὰ μέσου πέντε στεφανῶν, ἐφ' ὧν εἶναι ἐφηρμοσμένοι αἱ κῶπαι

Τὸ μῆκος τῶν κοπῶν ἢ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τε-
λευταίων στεφανῶν $5^{\mu}, 90$

Τὸ μέσον τοῦ τροχοῦ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων στεφανῶν ἀπέχει ἀπὸ τῶν δύο σημείων τῆς στηρίξεως κατὰ $5^{\mu}, 20$ καὶ $3^{\mu}, 70$.

Ἡ θεωρητικὴ δύναμις τοῦ τροχοῦ, ἡ ἐνεργοῦσα εἰς τὸ ἄκρον τῶν κωπῶν, εἶναι κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν

$$\Delta = \frac{4200 \times 2,475}{4,00} = 2970 \text{ χιλ.}$$

Λύσις πρώτη διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως.

Θέτοντες εἰς τὸν γνωστὸν τύπον $\delta^3 = \frac{\Delta \cdot M}{26117}$ τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος ἀντὶ τοῦ Δ καὶ M τὰς τιμὰς αὐτῶν, ἔχομεν

$$\delta^3 = \frac{2970 \times 3,25}{26117},$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα διὰ τῶν λογαριθμῶν

$$\log. \delta = \frac{\log. 2970 + \log. 3,25 - \log. 26117}{3}$$

$$\log. \delta = 1,8559054, \quad \text{ἐπομένως } \delta = 0^{\mu}, 7176$$

Λύσις δευτέρα διὰ τοῦ τύπου τῆς κάρψεως.

Ἐπειδὴ τὸ ὀλικὸν βάρος τοῦ τροχοῦ ἐνεργεῖ ἐπὶ πέντε σημείων τοῦ ἄξονος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τοῦτο ἢ ὁμοιομόρφως διανεμημένον ἐπὶ μήκους $5,90$ ἢ συγκετρωμένον ὁλόκληρον εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους $5,90$, ὅπερ ἀπέχει ἐκ τῶν σημείων τῆς στηρίξεως κατὰ $5,20$ καὶ $3,70$.

Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὑποθέσει τὸ Β.μ. τοῦ γνωστοῦ τύπου $\delta^3 = \frac{B.\mu}{58873}$ τῆς παραγράφου 114, ὅπερ παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως, ἰσοῦται μὲ

$$\frac{17500 \times 3,70 \times 5,20}{8,90} - \frac{17500}{5,90} \times \frac{5,90}{2} \times \frac{5,90}{4}$$

$$\eta \quad 17500 \frac{(8 \times 3,70 \times 5,20 - 8,90 \times 5,9)}{8 \times 8,90} = 17500 \times 4,4917.$$

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸ αὐτὸ Β.μ. ἰσοῦται μὲ $\frac{17500 \times 3,70 \times 5,20}{8,90}$
 $= 17500 \times 2,2292.$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τύπος $\delta^3 = \frac{B.\mu}{58873}$ ἐφαρμόζεται διὰ δευτερεύοντος ξυλίνου ἄξονας, ὁ δὲ ἄξων τοῦ προκειμένου παραδείγματος εἶναι πρωτεύων, διὰ τοῦτο ὁ ἐφαρμοστέος τύπος εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν εἶναι ὁ ἐξῆς

$$\delta^3 = \frac{B.\mu}{\frac{1}{2} 58873} = \frac{B.\mu}{29437} \quad (\alpha),$$

ὃν πορίζομεθα ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (2) τῆς παραγράφου 113 λαμβάνοντες $P = 300000.$

Θέτοντες ὅθεν εἰς τὸν τύπον (α) ἀντὶ τοῦ Β.μ. τὰς δύο ἀνωτέρω εὐρεθείσας τιμὰς αὐτοῦ καὶ καλοῦντες δ ἢ δ' τὴν διάμετρον τοῦ ἄξονος, τὴν προσδιορισμένην διὰ τῆς πρώτης ἢ τῆς δευτέρας τιμῆς τοῦ Β.μ., θέλομεν ἔχει τοὺς τύπους

$$\delta^3 = \frac{17500 \times 4,4917}{29437} \quad (1),$$

$$\delta^3 = \frac{17500 \times 2,2292}{29437} \quad (2),$$

ἐξ ὧν διὰ τῶν λογαρίθμων πορίζομεθα

$$\log. \delta = \frac{\log. 17500 + \log. 4,4917 - \log. 29437}{3}$$

$$\log. \delta' = \frac{\log. 17500 + \log. 2,2292 - \log. 29437}{3}$$

$$\kappa \alpha \iota \quad \delta = 0^{\mu}, 96 \quad \kappa \alpha \iota \quad \delta' = 1^{\mu}, 10$$

Αἱ τιμαὶ δὲ αὗται τῆς διαμέτρου εἶναι μεγαλείτεραι τῆς ἀνωτέρω διὰ τοῦ τύπου τῆς στρέψεως προσδιορισθείσης.

Ἡ τιμὴ $0^{\circ},96$ τῆς διαμέτρου δ εἶναι ἡ ὀρθότερα, διότι τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ εἶναι μᾶλλον ὁμοιομόρφως διανεμημένον εἰς τὸ μῆκος $5,90$ παρὰ εἰς τὸ μέσον συγκεντρωμένον, ἡ δὲ τιμὴ $1^{\circ},10$ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, ὡςάκις θέλη τις νὰ ἔχῃ μείζονα ἀσφάλειαν, διότι ὁ τροχὸς ὑποκειται εἰς κρούσεις καὶ δὲν πρέπει ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ ὁ ἄξων νὰ καμφοθῇ. Ὑπὸ μαθηματικὴν δὲ ἀκρίβειαν θεωρούμενον τὸ παράδειγμα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ ζήτημα τῆς παραγράφου 85.

Σημείωσις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω λύσεως τῶν δύο τελευταίων παραδειγμάτων γίνεται κατὰδῆλον ὅ,τι ἐν τῇ δευτέρᾳ σημειώσῃ τῆς παραγράφου 114 εἴπομεν.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΓΑΛΗΣ ΕΙΣ ΤΟΝ
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΝ ΤΩΝ ΠΑΧΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΡΩΝ ΜΙΑΣ ΟΙΚΟ-
ΔΟΜΗΣ, Η ΓΕΦΥΡΑΣ Η ΑΤΜΟΚΙΝΗΤΟΥ ΜΗΧΑΝΗΣ

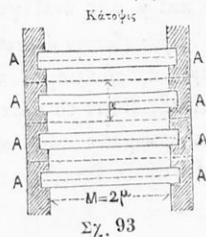
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΑΤΩΜΑΤΩΝ

145. Αἱ δοκοί, σιδηραῖ ἢ ξύλινοι, ἐφ' ὧν στηρίζεται τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφή οἰκοδομῆς τινος εἶναι ἰσοπαχεῖς, μολονότι δὲ τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι ἐντετοιχισμένα, οἱ δὲ τοῖχοι ἐντὸς τῶν ὁποίων εὐρίσκονται ταῦτα ἐμποδίζουσι τὴν ἀνύψωσιν αὐτῶν καὶ κρατοῦσι ταῦτα ὀρίζοντια, οὐχ ἥττον, πρὸς περισσotέραν ἀσφάλειαν, οἱ μηχανικοὶ καὶ οἱ ἀρχιτέκτονες θεωροῦσι ταύτας ὡς δοκοὺς στηριζομένας διὰ τῶν ἄκρων αὐτῶν ἐπὶ δύο ἰσοϋψῶν στηριγμάτων καὶ ὁμοιομῶρφως φορτωμένας καθ' ὅλον αὐτῶν τὸ μῆκος. Ἐπομένως ὁ ἐφαρμοστέος τύπος πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου αὐτῶν τομῆς εἶναι ὁ γνωστὸς τύπος (4) τῆς παραγράφου 86, ἥτοι ὁ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\sigma} = \frac{6\mu^2}{2} \quad (1).$$

Πρὸς εὑρεσιν δὲ τοῦ θ , ὅπερ παριστᾷ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῆς δοκοῦ ΑΑ (Σχ. 93), πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ βάρος αὐτῆς, τὸ βάρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου πατώματος καὶ ὀροφῆς τοῦ δωματίου ἢ τῆς αἰθούσης, οὗτινος μέρος ἀποτελεῖ ἡ δοκὸς καὶ ὅπερ καλεῖται μόνιμον φορτίον, καὶ τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον πρόσθετον βάρος, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τε τῶν ἐν τῷ δωματίῳ ἢ αἰθούσῃ



συναθροισμένων ανθρώπων και εκ του βάρους των εν αὐτῷ ὑπαρχόντων σκευῶν. Καλοῦντες δὲ θ_1 τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον πατώματος πρόσθετον φορτίον, ε τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν δύο συνεχῶν δοκῶν τοῦ αὐτοῦ πατώματος και M ἢ 2μ τὸ μῆκος τῶν δοκῶν τοῦ αὐτοῦ πατώματος (Σχ. 93), θέλομεν ἔχει

$$\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2) \quad \text{και} \quad \theta = \theta_3 \cdot \varepsilon$$

146. Ἐπειδὴ αἱ ξύλινοι δοκοὶ ἔχουσι συνήθως ὀρθογώνιον τομήν, αἱ δὲ σιδηραὶ ὀρθογώνιον ἢ διπλοῦν ταῦ, ἐὰν παραστήσωμεν δι' α και γ τὰς διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου τομῆς, και δι' α και γ , α' και γ' τὰς τοῦ διπλοῦ ταῦ και θέσωμεν ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (1) ἀντὶ τοῦ P και I τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, τὰς δὲ οὕτω προκυπτούσας ἐξισώσεις λύσωμεν ὡς πρὸς τὸ γινόμενον $\alpha\gamma^2$ ἢ $\frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{\gamma}$, θέλομεν ἔχει

$$\alpha\gamma^2 = \frac{\theta\mu^2}{2.000.000} \quad (2)$$

δι' ὀρθογώνιον σιδηρᾶν δοκόν,

$$\frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{\gamma} = \frac{\theta\mu^2}{2.000.000} \quad (3)$$

διὰ σιδηρᾶν δοκὸν τομῆς διπλοῦ ταῦ, και

$$\alpha\gamma^2 = \frac{\theta\mu^2}{200.000} \quad (4)$$

δι' ὀρθογώνιον ξύλινον δοκόν.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προσδιορίζομεν τὴν μίαν τῶν δύο διαστάσεων α και γ , τὰς δὲ λοιπὰς λαμβάνομεν κατ' ἀρέσκειαν, ὅταν τὸ θ και μ μᾶς ᾔηται γνωστά.

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ θ μέχρις οὗ ἐν Ἑλλάδι γίνωσι εἰδικὰ πειράματα πρὸς προσδιορισμὸν τῶν φορτίων θ_1 και θ_2 και κατασκευασθῇ ἴδιος πίναξ, δίδων τὸ φορτίον θ διὰ μέσου τῶν θ_1 , θ_2 και ε , πρέπει νὰ συμβουλευώμεθα τὸν παρακείμενον ἐνδέκατον πίνακα, τὸν κατασκευασθέντα ἐκ διαφόρων πειραμάτων ἐκτελεσθέντων ἐν Γαλλίᾳ.

ΠΙΝΑΞ ΕΝΔΕΚΑΤΟΣ

Περιέχων τὰς τιμὰς τῶν φορτίων δ_1 , δ_2 , δ_3 , ϵ καὶ δ , αἵτινες πρέπει νὰ ληθῶσιν ἐπ' ὅσων πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκυρσίου τομῆς τῶν δοκῶν τῶν πατωμάτων.

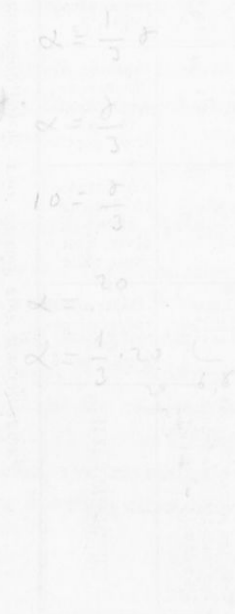
ΕΙΔΟΣ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣ	ΒΑΡΟΣ ΝΑΥΤΑ ΤΕΡΕΒΑΤ. METRONS	ΠΡΟΣΘΕΤΟΝ ΦΟΡΤΙΟΝ ἢ τοι ϵ_2	Ολικὸν βάρος κατὰ τετρα- γωνικὸν μέτρον ἢ τοι ϵ_3	Ἀριθμὸς ἀν- θρώπων ἀνα- στισσάμενων ἐπὶ τῷ πρὸς ἀντιδόφον	Ἀπόστασις τῶν δοκῶν ἀπὸ ἄλλων εἰς ἄλλον, ἢ τοι ϵ , τιμὴ τοῦ ϵ	Βάρος κατὰ τρεῖς μέρη ἢ τοι δ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ
Ἰδιωτικὰ οἰκία Δομῶντων οὐκ ἔχοντων ἢ γκαρβένον...	γλ. 150	γλ. 100	γλ. 250	1,3	μ. 0,70 0,70 0,70	γλ. 175 175 175	Ἐὰν 150 χιλίγραμμά εἰ- ναι τὸ βάρος ἑνὸς τετρ. μέ- τρου πατωμάτων μετ' ὅσο- ν φῆς κατὰ τὸ γλῶσ. σῶστη- μα, καὶ ὅ ἡ μὲν ὁροσὴ εἰ- ναι μετὰ γλῶσσι, τὸ δὲ πᾶ- σιμα ἐκ πολυγωνικῶν στρογγύλων.
Μικρὰ αἰθούσα ὑποδοχῆς.....	150	200	350	3,0	{ 0,50 0,60 0,50	{ 175 270 255	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Μεγάλῃ αἰθούσῃ ὑποδοχῆς.....	150	300	450	4,0	{ 0,40 0,50 0,40	{ 180 255 255	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Δημόσια κτίρια Γραφεῖα καὶ κοινὰ αἰθούσαι.....	180	200	350	3,0	{ 0,70 0,70 0,70	{ 245 330 330	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Αἰθούσαι δημοτικῆς συνδρομίσσεως Βουλευτηρίον καὶ.....	180	320	500	4,6	{ 0,55 0,70 0,60	{ 275 420 360	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Μεγάλῃ αἰθούσῃ διὰ σχολεῖα, συνε- λεύσεις καὶ.....	180	420	600	6,00	{ 0,50 0,40 0,35 0,70 0,55 0,45	{ 240 300 275 320 275 275	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Αἰθούσαι ἐμπορευμάτων ὀγκω- δῶν καὶ ὀλίγων ἐχόντων βάρος	50	450	500		{ 0,70 0,55 0,70 0,60	{ 275 275 300 300	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.
Αἰθούσαι διὰ βάρειά ἐμπορεῖ- μα, ὅσον Τελωνεῖα καὶ.....	100	900	1000		{ 0,50 0,50 0,50	{ 500 500 500	Ἐὰν αὐτὸ βάρος ἀνὰ μέ- τρα νὰ παραδεχθῶμεν ἀ- κινῶμενος καὶ διατεταένον ἰσὺν πατωμάτων μετ' ὁροσὴν μετρήσας.

147. Ἐν Γαλλίᾳ οἱ κατασκευάζοντες σιδηρᾶς δοκοὺς ἐργοστασιά-
ραι καὶ οἱ ἀρχιτέκτονες παρεδέχθησαν τὰς κάτωθι δεικνυμένας σχέ-
σεις μεταξὺ τοῦ ὕψους γ καὶ τοῦ πλάτους α τῆς δοκοῦ

$$\alpha = \frac{1}{3}\gamma \quad \text{διὰ ξυλίνους δοκοὺς}$$

$$\alpha = \frac{1}{5}\gamma \quad \text{διὰ σιδηρᾶς δοκοὺς,}$$

διὰ δὲ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος ΙΑ' καὶ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων με-
ταξὺ τοῦ γ καὶ α ὑπελόγισαν τὰς διαστάσεις γ διαφόρων δοκῶν διὰ
τῶν τύπων (2), (3) καὶ (4) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου, δίδοντες εἰς τὸ
 μ διαφοροὺς τιμὰς καὶ τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὰς ἰδιωτικὰς καὶ
δημοσίας οἰκοδομὰς, καὶ οὕτω ἐσχημάτισαν τὸν ἑπισθεν δωδέκατον
πίνακα, δι' οὗ ἀμέσως εὐρίσκουσι τὸ ὕψος γ δοκοῦ τινος, ἥς γινωρίζουσι
τὸ μῆκος καὶ τὸν προορισμόν.



Περιέχων τὰς διαστάσεις, ἃς πρέπει

ΕΙΔΟΣ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣ	Ὀλικὸν βάρος κατὰ τετραγ. μέτρον 6 ₈		Ἀπόστασις δοκῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ε.		Φορτίον κατὰ τετρίγων μέτρ. τῆς δοκοῦ 6=6 ₈		Μήκ. τῶν δοκῶν 2μ.		Τιμαὶ τῶν		Τιμὴς τῆς δοκοῦ τοῦ μήκ. διπλοῦ τοῦ, γ		ΣΙΔΗΡΟΙ ΔΟΚΟΙ	
	χιλ.	μέτρ.	χιλ.	μέτρ.	χιλ.	μέτρ.	1/2 μ ²	1/2 μ ² 6 ₈	μέτρ.	0,08 0,10 0,12 0,10 0,12 0,14 0,12 0,14 0,16 0,18	μέτρα τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνὸς τρέ- χοντος μ. δοκοῦ	χιλ.	13,23 11,00 " " 17,80 14,00 " " 26,13 20,00 " " " "
Δωμάτιον οἰκῆσιμον ἢ γραφεῖον	250	0,70	173	4,00	3,00	1,13	197	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18	0,0073 0,0136 0,006 0,0104 0,008 0,009 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00				
Γραφεῖα, μικρὰ αἴθουσα ὑποδοχῆς	350	0,70	243	3,00	1,123	276	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
				4,00	2,00	490	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
				5,00	3,123	766	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
				6,00	4,300	1102	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
				7,00	6,123	1500	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
Μεγάλη αἴθουσα ὑπο- δοχῆς	430	0,60	270	3,00	3,123	844	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
			270	6,00	4,30	1213	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
			270	7,00	6,123	1634	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
			270	8,00	8,00	2160	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					
			223	9,00	10,123	2278	0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22 0,26	0,0092 0,0138 0,0100	23,50 32,00 43,30 34,00 49,44 32,00					

ΩΔΕΚΑΤΟΣ

καὶ ἔχουσιν αἱ δοκοὶ τῶν πατωμάτων.

ΤΟΜΗΣ ΔΙΗΛΟΥ Τ ΤΩΝ ΕΡΓΩΣΤ.				ΣΤΑΘΡΑΙ ΔΟΚΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ			ΕΓΓΙΝΟΙ ΔΟΚΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ		
ΠΡΟΒΙΝΤΑΝΣΗΣ		ΠΟΝΤΑΤΑΡΗΣ		ἘΥΨΟΣ Υ	Πλάτος ἢ πλάτος α=1/5 γ	Βάρος ἐνός τρέχοντος μέτρ.	ἘΥΨΟΣ Υ	Πλάτος ἢ πλάτος α=1/3 γ	Βάρος ἐνός τρέχοντος μέτρ.
Πλάτος τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνός τρέχοντος μ. δοκοῦ	Πλάτος τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνός τρέχοντος μ. δοκοῦ						
μέτρα	χιλ.	μέτρα	χιλ.	μέτρ.	μέτρ.	χιλ.	μέτρ.	μέτρ.	κυβ. μ.
0,0076	10,09			0,099	0,020	13,40	0,181	0,060	0,0109
0,004	11,00	0,003	10,00						
		0,0103	14,97	0,120	0,024	22,40	0,219	0,073	0,0160
0,0067	14,81	0,007	13,00						
		0,014	20,63	0,140	0,028	30,50	0,254	0,083	0,0216
0,012	19,10	0,007	16,50						
0,008	20,00	0,008	20,00						
0,0063	13,32	0,0133	12,19	0,111	0,022	19,00	0,202	0,067	0,0135
		0,0032	10,20						
		0,0112	17,52	0,134	0,027	28,20	0,243	0,082	0,0201
0,008	16,23	0,007	16,50						
		0,0109	20,00	0,136	0,031	37,60	0,284	0,093	0,027
0,0109	24,23	0,0036	22,23						
		0,0128	29,49	0,177	0,036	49,60	0,322	0,107	0,0345
0,0092	26,34	0,0092	26,30						
				0,196	0,039	59,50	0,356	0,119	0,0424
0,0133	27,43	0,0130	24,00	0,162	0,032	40,30	0,291	0,098	0,0288
		0,012	23,60						
		0,0136	33,85	0,183	0,037	52,70	0,332	0,111	0,0369
0,0113	30,27	0,0116	30,40						
				0,202	0,040	62,90	0,367	0,122	0,0447
0,0130	40,00								
				0,221	0,044	75,70	0,402	0,134	0,0539
0,0183	50,86			0,223	0,045	78,80	0,409	0,136	0,0556
0,0201	54,41	0,008	40,00						

Περιέχωρ τὰς διαστάσεις, ἃς πρέπει

Συνέχεια

ΕΙΔΟΣ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣ	Ὀλικὸν βάρος κατὰ τετραγ. μέτρον ε ₃		Ἀπόστασις δοκῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ε.		Φορτίον κατὰ τετραγ. μέτ. τῆς δοκοῦ ε=ε ₃		Μήλ., τῶν δοκῶν 2μ.		Τιμαὶ τῶν		Υψὺς τῆς δοκοῦ το- μῆς διπλοῦ ταῦ, γ.		ΣΙΔΗΡΟΙ ΔΟΚΟΙ	
													ΜΟΔΕΛΗΣ	
	χιλ.	μέτρ.	χιλ.	μέτρ.			$\frac{1}{2}\mu^2$	$\frac{1}{2}\mu^2\phi$			Πάχος τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνὸς τρέ- χοντος μ. δοκοῦ		
Αἰθουσα δημοσίας συναθροίσεως, βουλευτηρίου κτλ. Ἀποθῆκαι ὀγκωδῶν ἐμπο- ρευμάτων καὶ ὀλίγων βα- ρέων.	500	0,70	350	4,00	2,00	700			0,14	0,16	0,007	21,20		
		9,70	350	5,00	3,125	1094			0,18	0,20	0,009	32,00		
		0,70	350	6,00	4,500	1375			0,22	0,26	0,0161	41,94		
		0,70	350	7,00	6,125	2144			0,21	0,26	0,010	34,00		
		0,55	275	8,00	8,00	2200			0,20	0,26	0,0195	48,80		
		0,45	225	9,00	10,125	2278			0,26	0,26	0,012	52,00		
											0,012	52,00		
Αἰθουσα διὰ μεγάλας συναθροίσεις διὰ συνελεύσεις, σχολεῖα κτλ.	600	0,70	420	5,00	3,125	1312			0,18	0,20	0,009	32,00		
		0,70	420	6,00	4,500	1890			0,22	0,26	0,01	34,00		
		0,60	360	7,00	6,125	2203			0,20	0,26	0,0131	38,90		
		0,40	240	8,00	8,00	1920			0,20	0,26	0,012	32,00		
									0,20	0,26	0,0139	40,80		
		0,33	210	9,00	10,125	2126			0,26	0,26	0,019	47,50		
		0,30	180	10,00	12,50	2250			0,26	0,26	0,012	52,00		
Ἀποθῆκαι διὰ βαρέα ἐμπο- ρεύματα, ὄϊον τελωνεῖα κτλ.	1000	0,70	700	4,00	2,00	1400			0,18	0,20	0,0107	34,38		
		0,70	700	5,00	3,125	2187			0,22	0,26	0,010	34,00		
		0,50	500	6,00	4,500	2250			0,20	0,26	0,020	49,60		
									0,26	0,26	0,020	52,00		
		0,35	350	7,00	6,125	2144			0,20	0,26	0,020	52,00		

ΔΩΔΕΚΑΤΟΣ

τὰ ἔχουσιν αἱ δοκοὶ τῶν πατωμάτων.

Συνέχεια

ΤΟΜΗΣ ΔΙΗΛΟΥ Τ ΤΩΝ ΕΡΓΟΣΤΑΣ.				ΣΙΔΗΡΟΙ ΔΟΚΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ			ΞΥΛΙΝΟΙ ΔΟΚΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ		
ΠΡΟΒΙΝΤΑΝΗΣ		ΜΟΝΤΑΤΑΙΡΗΣ							
Πάχος τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνός τρέ- χοντος μ. δοκοῦ	Πάχος τοῦ σιδήρου	Βάρος ἐνός τρέ- χοντος μ. δοκοῦ	Ἔψος γ	Πλάτος ἢ πλά- τος α=1/3 γ	Βάρος ἐνός τρέ- χοντος μ. δοκ.	Ἔψος γ	Πλάτος ἢ πλά- τος α=1/3 γ	Βάρος ἐνός τρέχοντος μ. δ. τοῦ δοκοῦ
μέτρα	χιλιόγρ.	μέτρα	χιλιόγρ.	μέτρα	μέτρ.	χιλ.	μέτρ.	μέτρ.	κυβ. μ.
0,0088	21,20	0,0074 0,008	17,00 20,00	0,152	0,030	35,50	0,276	0,092	0,0254
0,009	26,00	0,0126 0,0091	29,18 26,16	0,176	0,033	47,90	0,32	0,107	0,0342
0,013	40,00			0,199	0,0398	62,00	0,362	0,121	0,0438
0,0181	50,36			0,220	0,044	73,70	0,401	0,134	0,0537
0,018	53,72			0,222	0,0444	76,00	0,386	0,129	0,0498
0,020	54,41			0,225	0,045	78,80	0,409	0,136	0,0556
0,0133	33,70	0,0136	33,80	0,182	0,036	52,40	0,34	0,113	0,0384
0,019	52,22			0,211	0,042	69,00	0,384	0,128	0,0490
0,0148	43,67			0,223	0,043	78,10	0,404	0,135	0,0543
0,0178	52,50	0,008	43,00	0,213	0,043	71,30	0,386	0,129	0,0498
0,0197	53,72			0,220	0,044	73,30	0,40	0,133	0,0532
				0,224	0,045	78,50	0,407	0,136	0,0554
0,0153	36,77	0,0154	36,93	0,191	0,038	56,50	0,348	0,116	0,0404
0,0186	51,37	0,008	43,00	0,222	0,044	76,00	0,403	0,134	0,0540
0,0196	53,40	0,008	43,00	0,224	0,045	78,50	0,407	0,136	0,0554
0,0181	50,35	0,008	43,00	0,221	0,044	73,70	0,401	0,134	0,0480

Σημείωσις 1. Ἐν Ἑλλάδι γίνεται συνήθως χρήσις ξυλίνων δοκῶν, ὧν αἱ διαστάσεις εἶναι μείζονες τῶν ἐν τῷ IB' πίνακι σεσημειωμένων. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ ἀρχιτέκτων πρέπει νὰ προσδιορίζῃ τὴν μίαν τῶν δύο διαστάσεων α καὶ γ διὰ τοῦ τύπου (4) τῆς παραγράφου 146 ὑπολογίζων τὸ φορτίον β διὰ τοῦ πίνακος IA' καὶ τῆς γνωστῆς ἀποστάσεως ε τῶν δοκῶν. Δύναται ὅμως νὰ κάμῃ χρήσιν καὶ τοῦ πίνακος IB', ἐκλέγων τὰς ἐν τῷ ἐμπορείῳ εὑρισκομένας διαστάσεις α' καὶ γ' τῆς ξυλείας οὕτως, ὥστε νὰ ἔχῃ $\alpha\gamma^2 = \eta < \alpha'\gamma'^2$, τῶν α καὶ γ παριστώντων τὰς πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος ἐκ τοῦ πίνακος IB' εὑρισκομένας διαστάσεις.

Σημείωσις 2. Ἐσχάτως οἱ ἐν Ἀθήναις τέκτονες καὶ ἀρχιτέκτονες λαθόντες ὑπ' ὄψιν αὐτῶν εὐρωπαϊκῆς οἰκοδομᾶς, κατενόησαν τὴν χρηματικὴν οἰκονομίαν, ἣν δύνανται νὰ πορισθῶσι ποιῶντες χρήσιν ὀρθογωνίων ἀντὶ τετραγωνικῶν δοκῶν, οἷα συνήθως εἶναι αἱ ἐν τῷ ἐμπορείῳ εὑρισκόμεναι, πρὸς πραγματοποιήσιν δὲ τῆς οἰκονομίας ταύτης ἀγοράζουσι παχυτέρας τετραγωνικοὺς δοκοὺς καὶ διαιροῦσιν αὐτὰς διὰ τοῦ πρίονος εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σημείωσις 3. Ἐν Εὐρώπῃ κατασκευάζουσι συνήθως τὰ πατώματα τῶν μεγάλων τελωνειακῶν ἀποθηκῶν, τῶν καλουμένων Ντόκ ὡς καὶ ἐμπορικῶν τινῶν καταστημάτων ἐξ ἀμμοκονίας, ἀντὶ σανίδων, καὶ τοῦτο πρὸς πρόληψιν τῶν ἐκ τῆς πυρκαϊᾶς συμβαινόντων δυστυχημάτων. Τῶν ταιούτων δὲ πατωμάτων αἱ δοκοὶ εἶναι σιδηραῖ, τομῆς διπλοῦ ταῦ, καὶ κατασκευάζονται ἢ ἐκ σιδηρῶν ἐλασμάτων συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα διὰ παλυλίων, ὡς αἱ σιδηραῖ δοκοὶ τῶν γεφυρῶν, ἢ ἐξ ἐνὸς ἀδιαιρέτου τεμαχίου ἐκ χάλυβος, ὡς τὰ σιδηρὰ ἐλάσματα τῶν σιδηροδρόμων.

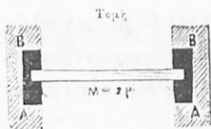
Κατ' ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις αἱ διαστάσεις τῶν δοκῶν ὑπολογίζονται ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\frac{PI}{\gamma} = \frac{\mu^2}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \epsilon$$

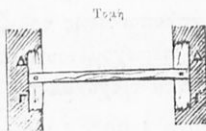
ἐν ᾧ τὸ μὲν ε παριστᾷ τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν τῶν δοκῶν, τὸ ϵ_1 τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον βάρος τοῦ ἐξ ἀμμοκονίας πατώματος, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἐκ συρμάτων σιδηροῦ πλέγματος τοῦ ὑποβαστάζοντος τὸ πάτωμα, καὶ τὸ ϵ_2 τὸ βάρος τῶν ἐμπορευμάτων, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἓν τετραγωνικὸν μέτρον πατώματος.

Καὶ ἐν Ἑλλάδι ἀπὸ τινος χρόνου γίνεται ἐνίοτε διὰ δοκοὺς πατωμάτων χρῆσις σιδηρῶν ἐλασμάτων, ὁμοίων τοῖς τοῦ σιδηροδρόμου, καλὸν δὲ ἤθελεν εἶναι, ἂν ἡ χρῆσις τούτων καθίστατο συχνοτέρα.

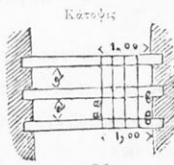
148. Ἐὰν ὁ ἀρχιτέκτων θέλῃ νὰ μεταχειρισθῇ δοκοὺς μικροτέρων διαστάσεων τῶν ὑπὸ τοῦ IB' πίνακος διὰ τὴν κατασκευὴν πατώματος τινος παρεχομένου, ἐφαρμόζων τὸν ἀρμόζοντα τύπον εἰς δοκὸν πεπακτωμένην δι' ἀμφοτέρων τῶν ἁκρῶν αὐτῆς καὶ ὁμοιομῶρως φορτωμένην καθ' ὅλον τὸ μῆκος, τότε πρέπει ἢ νὰ περιτομίσῃ διὰ λελαξευμένων λίθων AB, AB τὰ ἅκρα τῶν δοκῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 94, ἢ νὰ προσηλώσῃ στερεῶς αὐτὰ δι' ἡλῶν ἐπὶ ἐντετοιγισμένων δοκῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 95. Τοῦτ' αὐτὸ πρέπει νὰ πράξῃ καὶ ὁσάκις αἱ δοκοὶ



ΣΧ. 94



ΣΧ. 95



ΣΧ. 96

εἶναι προσωρισμένοι δι' αἰθουσῶν χοροῦ, διότι τὸ βάρος τῶν χορευόντων ἀνθρώπων δὲν εἶναι ἤρεμον, ὡς ὑποτίθῃσιν ὁ δωδέκατος πίναξ, ἐξ οὗ πορίζομεθα τὰς διαστάσεις αὐτῶν, ἀλλὰ κινητὸν, τοῦθ' ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς φορτίον μεῖζον τοῦ πραγματικοῦ.

149. Ἐπὶ τῶν δοκῶν πρὸς κατασκευὴν τοῦ πατώματος ἐπιτίθενται σανίδες, ὧν τὸ πάχος εἶναι συνήθως $0^{\mu},92$ ἢ $0^{\mu},05$. Αἱ ἔχουσιν πάχος $0^{\mu},05$ σανίδες διακρίνονται ἐν τῷ ἐμπορείῳ τῶν ἔχουσιν πάχος $0^{\mu},02$ διὰ τοῦ ἐπωνόμου πόρτιδες.

Αἱ ἐπὶ τῶν δοκῶν τοῦ πατώματος ἐπιτιθέμεναι σανίδες, ἐπειδὴ προσηλῶνται ἀμετακινήτως ἐπ' αὐτῶν δι' ἡλῶν, θεωροῦνται ὡς δοκοὶ πεπακτωμένην δι' ἀμφοτέρων τῶν ἁκρῶν αὐτῶν καὶ ὁμοιομῶρως φορτωμένην, διὰ δὲ τῶν γνωστῶν τύπων τῆς κάμψεως (Θ τῆς § 98) καὶ τῆς διατμήσεως (I τῆς § 48) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πάχος αὐτῶν. Ἐκ τῶν δύο δὲ εὑρεθησομένων τιμῶν αὐτοῦ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὴν μεγαλειτέραν.

Χάριν ἀσκήσεως λύομεν τὸ κάτωθι πρόβλημα.

Νὰ προσδιορισθῇ τὸ πάχος, ὅπερ πρέπει νὰ ἔχωσιν αἱ σανίδες, δι' ὧν θὰ κατασκευασθῇ τὸ πάτωμα δημοτικῆς τιπὸς σχολῆς, ἥς αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις εἶναι, μῆκος 20 μέτρα καὶ πλάτος 10 μέτρα.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει προηγουμένως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ϵ καὶ μ διὰ τῶν προηγουμένων δύο πινάκων ΙΑ' καὶ ΙΒ'. Πρὸς τοῦτο δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ πλάτος τῆς αἰθούσης τῆς δημοτικῆς σχολῆς εἶναι 40 μέτρων, τὸ μῆκος τῶν δοκῶν τοῦ πατώματος θὰ ᾔηται προφανῶς 40 μέτρων. Ἀνατρέχοντες δὲ εἰς τὸν πίνακα ΙΒ' εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μὲν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασις τῶν δοκῶν εἶναι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ $0^{\mu}30$, αἱ δὲ διαστάσεις αὐτῶν $\frac{40}{14}$. Καλοῦντες δὲ ϵ τὸ μεταξὺ δύο συνεχῶν δοκῶν ὑπάρχον κενὸν (Σχ. 96), ὅπερ παριστᾷ καὶ τὸ μῆκος 2μ τῶν σανίδων, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon = 0^{\mu}30 - 0^{\mu}14 = 0^{\mu}16 \quad \text{καὶ} \quad \mu = \frac{0,16}{2} = 0^{\mu}08.$$

Θεωροῦντες δὲ χάριν ἀπλοποιήσεως τοῦ ζητήματος ἐν μέτρον πλάτος τοῦ πατώματος, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ δύο συνεχῶν δοκῶν, καὶ σημειοῦντες διὰ ϵ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον αὐτοῦ, εὐρίσκομεν

$$\epsilon = 1,00 \times 1,00 \times 420^{\lambda} = 420^{\lambda},$$

διότι γνωρίζομεν ἐκ τοῦ πίνακος ΙΑ' ὅτι τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον πρόσθετον φορτίον εἶναι 420^{λ} .

Εὐρόντες οὕτω τὰ ζητούμενα ϵ καὶ μ μεταβαίνομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

1^{ον}. Λύσις διὰ τοῦ τύπου τῆς κάμψως.

Θέτοντες εἰς τὸν γνωστὸν τύπον Θ τῆς § 98, ἔχοι τὸν ἑξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{\epsilon \mu^2}{3}$$

ἀντὶ τοῦ P, ϵ καὶ μ τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, εὐρίσκομεν

$$\frac{600000 \cdot 1}{\nu} = \frac{420(0,08)^2}{3} \quad (1).$$

Καλοῦντες δὲ α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, ἔχομεν

$$I = \frac{\alpha \gamma^3}{12} = \frac{4,00 \times \gamma^3}{12} = \frac{\gamma^3}{12}$$

καὶ

$$\nu = \frac{\gamma}{2}$$

θέτοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ I καὶ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ τὴν οὕτω προκύψουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ γ^2 , εὐρίσκομεν

$$\gamma^2 = \frac{420(0,08)^2}{3 \times 400000} \quad (2)$$

καὶ ἐπομένως $\gamma = 0^{\mu},002989$ ἢ $\gamma = 0^{\mu},003$

2^{ον}. Λύσις διὰ τοῦ τύπου τῆς διατμήσεως.

Θέτοντες εἰς τὸν γνωστὸν τύπον (1) τῆς § 18, ἔστω τὸν ἐξῆς

$$\omega P' = B \quad (1)$$

ἀντὶ τοῦ P' καὶ B τὰς τιμὰς αὐτῶν εὐρίσκομεν

$$\omega \cdot 400000 = 420 \times 0,08 = 33,60 \quad (2)$$

καλοῦντες δὲ α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς ω , ἔχομεν

$$\omega = \alpha \gamma = 4,00 \times \gamma = \gamma,$$

θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ ω τὴν τιμὴν τοῦ καὶ τὴν οὕτω προκύψουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ γ , εὐρίσκομεν

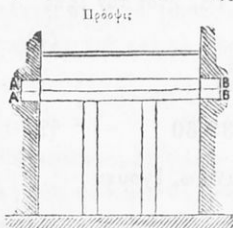
$$\gamma = \frac{33,60}{400000} = 0,00008499.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ δύο τιμῶν τῆς γ πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν μεγαλύτεραν, δηλ. τὴν 0,003, τὴν ὀρισθεῖσαν διὰ τοῦ τύπου τῆς κάμψεως.

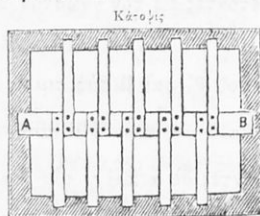
Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ πάχος τῶν σανίδων, ὧν γίνεται συνήθως χρήσις πρὸς κατασκευὴν τῶν πατωμάτων εἶναι $0^{\mu},02$ ἢ $0^{\mu},05$, καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ ἄλλων ὁμοίων εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἀρμόζον πάχος εἶναι $0^{\mu},003$, ὅπερ εἶναι κατὰ πολὺ μικρότερον τοῦ $0^{\mu},02$ καὶ $0^{\mu},05$, συνάγομεν ὅτι ἡ κατασκευὴ τῶν πατωμάτων ὅλων ἐν γένει τῶν οἰκοδομῶν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἀσφαλῶς διὰ σανίδων πάχους δύο ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, ὅταν αὗται δὲν ὑπὸ κηνηται εἰς φθοράν. Ἐπειδὴ ὅμως αὗται ὑπὸ κεινται εἰς τὴν φθοράν τῆς καθημερινῆς χρήσεως, ἥτις ἀφ' ἐνὸς μὲν ἐλαττοῖ τὸ ἀρχικὸν αὐτῶν πάχος, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξασθενεῖ καὶ τὴν δύναμιν αὐτῶν, διὰ τοῦτο συμβουλευόμεν τοὺς ἀρχιτέκτονας καὶ τέκτονας νὰ μεταχειρίζονται πάντοτε σανίδας πάχους $0^{\mu},05$ · δηλ. τοὺς πόντιδες διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πατωμάτων τῶν δημοσίων οἰκοδομῶν ὡς καὶ τῶν μεγάλων ἰδιωτικῶν οἰκοδομῶν.

150. Ἐνίοτε οἱ ἀρχιτέκτονες εὐρίσκονται εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ στηρίξωσι ἐπὶ δοκοῦ ἢ τὸ (τοιχοῦ) τῆς προσόψεως τῆς οἰκίας, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 97, ἢ τὰ ἄκρα τῶν δοκῶν τοῦ πατώματος μεγάλης τινὸς αἰθούσης, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 98.

Καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης περιπτώσεως (Σχ. 97) ἡ δοκὸς AB ὑποβαστάζει τὸ βάρος τῆς ἀνωθεν αὐτῆς τοιχοποιίας, τὸ βάρος τοῦ ἡμίσεως τοῦ πατώματος, ἂν τὰ ἄκρα τῶν δοκῶν αὐτοῦ στηρίζωνται ἐπὶ τῆς δοκοῦ AB (διότι συνήθως οἱ ἀρχιτέκτονες ἀποφεύγουσιν ὅσον τὸ δυνατόν τὸ



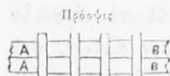
Σχ. 97



Σχ. 98

τοιχοῦτον), καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν βάρος τῆς στέγης. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει (Σχ. 98) ἡ δοκὸς AB, ἥτις τίθεται εἰς τὸ μέσον τῆς αἰθούσης, χρησιμεύει ὡς στήριγμα τῶν ἄκρων τῶν δοκῶν τοῦ πατώματος, ὅσας τὸ μῆκος αὐτῶν ἦναι μικρότερον τοῦ πλάτους τῆς αἰθούσης, καὶ ὑποβαστάζει τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους τοῦ πατώματος. Ἐν ἀμφοτέραις δὲ ταῖς περιπτώσεσιν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τῆς δοκοῦ ὑπολογίζεται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (4) τῆς § 86.

Καὶ ἂν μὲν ἡ δοκὸς AB (Σχ. 97 καὶ 98) ἦναι σιδηρᾷ, κατὰ προτίμησιν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ αὐτῆς πρέπει νὰ ἦναι διπλοῦν ταῦ, καὶ τότε προμηθευόμεθα εὐκόλως τοιαύτην ἀπὸ τίνος γνωστοῦ ἐργοστασίου. Ἀλλ' ὅσας δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν χρῆσιν σιδηρᾷ δοκοῦ, εἴτε διότι δὲν ὑπάρχουσιν ἐν τῷ τόπῳ ἐργοστάσια, ὡς συμβαίνει ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐν Ἑλλάδι, εἴτε διότι ἡ μεταφορὰ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ τόπου ἔνθα κατασκευάζεται εἰς τὸν τόπον τῆς χρησιμοποίησεως δὲν εἶναι



Σχ. 99

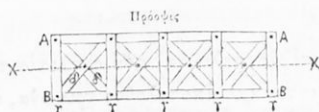


Σχ. 400

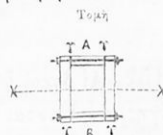
εὐκόλος, ἐλλείπει μέσων συγκοινωνίας, τότε ἐξ ἀνάγκης ποιούμεν χρῆσιν ξυλίνων δοκῶν, ἀπλῶν μὲν ὅταν ἐν τῷ ἐμπροσθέν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δοκοὺς ἐχούσας τὰς ὑπολογισθείσας διαστάσεις, ὠπλισμένων δέ, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 99 καὶ 100, ὅταν δύο δοκοὶ ἀποτελῶσι τὸ ὑπολογισθὲν

ὕψος τῆς δοκοῦ, τοῦ πλάτους αὐτῆς λαμβανομένου κατ' ἀρέσκειαν καθ' ἃ ἐν τῇ παρατηρήσει τοῦ προβλήματος 4 τῆς § 63 εἴπομεν.

151. Ἐνίοτε οἱ ἀρχιτέκτονες ποιοῦσι χρῆσιν συνθέτου δοκοῦ, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 401 καὶ 402, ἧτις καλεῖται ἀμερικανικὴ δοκός, διότι πρῶτοι οἱ Ἀμερικανοὶ ἔκαμον χρῆσιν τοιούτων δοκῶν πρὸς κατασκευὴν ξυλίνων γεφυρῶν, δι' ὧν διήρχετο σιδηρόδρομος.



Σχ. 401



Σχ. 402

Πρὸς εὗρεσιν δὲ τοῦ I τῆς δοκοῦ AABB (Σχ. 401 καὶ 402), ὕπερ εἰσέρχεται εἰς τὸν γνωστὸν τύπον (4) τῆς § 86, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸν ἄξονα XX, τὸν διερχόμενον ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως AB (Σχ. 401) ὡς μέσην ἵνα, διότι ἡ μὲν δοκὸς AA θλίβεται, ἡ δὲ BB ἐφελκύσσεται.

Καλοῦντες δὲ ὡ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς δοκοῦ AA ἢ BB ἀπὸ τοῦ ἄξονος XX, I_1 τὴν ροπὴν τῆς ἀδρανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ AA ἢ τῆς ἰσοπαχοῦς ταύτης BB ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς βαρύτερης αὐτῆς, I_2 τὴν ροπὴν τῆς ἀδρανείας τῆς AA ἢ BB ὡς πρὸς τὸν ἄξονα XX καὶ ὡ τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ἐκάστης τῶν δοκῶν AA, BB ὡς ἰσοπαχῶν, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$I = 2I_2, \quad I_2 = I_1 + \omega u^2$$

εἰς ὧν πορίζομεθα

$$I = 2I_1 + 2\omega u^2.$$

Οἱ δοκίσκοι γ, γ,...δ, δ,..., οἱ συνδέοντες στερεῶς τὰς δύο ὀριζοντίους δοκοὺς AA καὶ BB, ὑπάρχουν ἄλλοι μὲν εἰς θλίψιν, καὶ ἄλλοι εἰς ἐφελκυσμόν. Περὶ τούτου δὲ θέλομεν πραγματευθῆ ἐκτενέστερον εἰς τὸ περὶ γεφυρῶν κεφάλαιον.

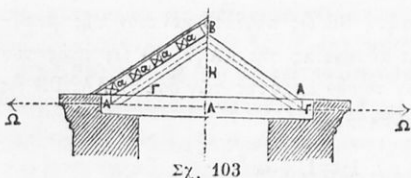
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΠΕΡΙ ΣΤΕΓΩΝ

152. Αἱ δοκοὶ ξύλινοι ἢ σιδηραῖ, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν σκελετὸν τῆς στέγης, συνδέονται ἂν τρεῖς τοῦλάχιστον καὶ ἀποτελοῦσι τρίγωνα, ὧν τὸ σχῆμα εἶναι ἀμετάβλητον. Ταῦτα δὲ οἱ τέκτονες καλοῦσι τὰ ζευκτὰ τῆς στέγης, καὶ τὰ μὲν ξύλινα ζευκτὰ εἶναι ἀπλᾶ ἢ σύνθετα, τὰ δὲ σιδηρὰ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἶναι σύνθετα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ παρακατιόντες.

Τὸ ἀπλοῦν ζευκτὸν ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν μερῶν AB, BG καὶ AG (Σχ. 103), καὶ τὰ μὲν AB καὶ BG καλοῦνται ἀμειβόμεναι, τὸ δὲ AG στρωτήρ.

Ὁ στρωτήρ χρησιμεύει πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῆς ὠθήσεως, τῆς παραγομένης ὑπὸ τῶν ἀμειβόντων ἐπὶ τῶν τοίχων ἢ στυλῶν, ἐφ' ὧν στηρίζεται, ὅταν δὲ λείπῃ ὁ στρωτήρ, τότε πρέπει νὰ ἰσχυροποιηθῶσιν ἐπαρκῶς οἱ τοῖχοι τῆς οἰκοδομῆς, ἵνα ἀντέχωσιν εἰς τὴν ὠθησιν τῶν ἀμειβόντων.



Σχ. 103

Ἄν καὶ αἱ δοκοὶ τῶν ζευκτῶν ᾖναι στερεῶς συνδεδεμέναι πρὸς ἀλλήλας εἰς τὰ σημεῖα A, B καὶ Γ δι' ἧλων ἢ διὰ σιδηρᾶς μὲν θήκης εἰς τὸ B, διὰ καταλλήλων δὲ ἐντομῶν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Γ, οὐχ ἥττον πρὸς περισσοτέραν ἀσφάλειαν, ὅταν πρόκηται νὰ ὁρισθῶσιν αἱ διαστάσεις τῶν ἀμειβόντων AB καὶ BG, θεωροῦνται οὗτοι ὡς δοκοὶ στηριζόμεναι ἀπλῶς διὰ τῶν ἁκρῶν αὐτῶν ἐπὶ δύο στερεῶν σημείων καὶ ὄχι ὡς πεπακτωμένοι. Ἴνα δὲ εὐρωμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ἀμειβόντων καὶ τοῦ στρωτήρος τοῦ ἀπλοῦ ζευκτοῦ ABΓ (Σχ. 103), πρέπει νὰ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, οἷον τὸ βάρος τῆς στέγης καὶ τῆς χιόνος καὶ ἡ ὠθησις τοῦ ἀνέμου, ἐνεργοῦσι πρὸς θλάσιν αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο δὲ ἃς καλέσωμεν

ϵ , τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῶν ἀμειβόντων τῶν ζευκτῶν.

ϵ_1 , τὸ βάρος ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου στέγης, ὅπερ θέλει περιλαμβάνει τὸ βάρος τῆς ζυλείας, τὸ τῶν κεράμων (ἐὰν ἡ οἰκοδομὴ ᾖ ἐστεγασμένη διὰ κεράμων), ἢ τὸ τῶν πλακῶν, λιθίνων ἢ μεταλλικῶν, τὸ τῆς χιόνος, ὅταν πρόκηται περὶ οἰκοδομῆς κατεσκευασμένης εἰς τόπους ἐνθα πίπτει χιὼν, λόγου χάριν εἰς τὰ βόρεια κλίματα, καὶ τὸ τῆς ἐφ' ἐκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου τῆς στέγης ὑπὸ τοῦ ἀνέμου παραγομένης ὠθήσεως, εἰς χιλιόγραμμα ἐκτιμωμένης, ὡς παρακατιόντες θέλομεν ἶδει.

M , τὸ μῆκος ἐκάστου τῶν ἀμειβόντων AB καὶ $B\Gamma$ (Σχ. 403).

2μ , τὸ μῆκος τοῦ στρωτῆρος AG , ὅπερ καλεῖται συνήθως ἀνοιγμα τοῦ ζευκτοῦ (Σχ. 403).

H , τὸ ὕψος BA (Σχ. 403) τοῦ ζευκτοῦ.

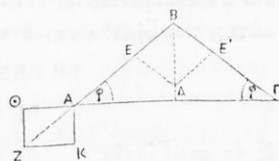
φ , τὴν γωνίαν BAG ἢ BGA , ἣν οἱ ἀμειβόντες σχηματίζουν μετὸν στρωτῆρα καὶ ἣτις καλεῖται συνήθως κλίσις τῶν ἀμειβόντων, καὶ

ϵ , τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν ζευκτῶν.

Θέλομεν ἔχει προφανῶς $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon$ καὶ $\Phi = M \cdot \epsilon$, καλοῦντες Φ τὸ ὅλικόν φορτίον, ὅπερ ἕκαστος τῶν ἀμειβόντων AB καὶ $B\Gamma$ ὑποβάσται.

Ἐπειδὴ οἱ ἀμειβόντες AB καὶ $B\Gamma$ θεωροῦνται ὡς δοκοὶ στηριζόμεναι διὰ τῶν ἄκρων αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B , B καὶ Γ καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμέναι καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῶν ὑπὸ βάρους ἐνεργούντος οὐχὶ καθέτως ἐπὶ τῆς διευσθύνσεως τῶν ἰνῶν αὐτῶν, ἀλλὰ πλαγίως, πρέπει πρὸς εὐρεσιν τῶν ζητούμενων διαστάσεων νὰ ἐφαρμόσωμεν ὅ,τι εἵπομεν εἰς τὴν σημείωσιν 2 τῆς § 76.

Πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν πρὸς εὐκολωτέραν σύνθεσιν καὶ ἀποσύνθεσιν τῶν δυνάμεων τὸ σχῆμα 404, ὅπερ παριστᾷ τοὺς ἄξονας τοῦ ζευκτοῦ $AB\Gamma$ (Σχ. 403), καὶ ἃς ἴδωμεν τίνι τρόπῳ γίνεται ἡ ἀποσύνθεσις καὶ σύνθεσις τῶν ἐπὶ τοῦ ζευκτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων.



Σχ. 104

Τὸ φορτίον $\Phi = M \cdot \epsilon$ τοῦ ἀμειβόντος AB ἀποσυντίθεται εἰς δύο ἴσας

συνιστώσας, ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἰσοῦται τῷ $\frac{M\beta}{2}$, καὶ ἐνεργοῦσιν ἡ μὲν ἐπὶ τοῦ σημείου Α, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ σημείου Β.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποσυντίθεται καὶ τὸ φορτίον $\Phi = M\beta$ τοῦ ἐτέρου ἀμειβοντος ΒΓ. Ἐπομένως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ἐνεργοῦσι καθέτως ἐπὶ τῆς ὀριζοντίου διευθύνσεως ΑΓ δυνάμεις ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη δὲ τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ φορτίου $M\beta$ τοῦ ἀμειβοντος, ἐπὶ δὲ τοῦ σημείου Β ἐνεργεῖ κάθετος δύναμις, ἴση προφανῶς μὲ τὸ ὅλον φορτίον $M\beta$ τοῦ ἀμειβοντος.

Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$AK = \frac{M\beta}{2} \quad \text{καὶ} \quad B\Delta = M\beta.$$

Αἱ μὲν ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις, οὐδὲν φέρουσιν ἀποτέλεσμα ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως τῶν τοίχων ἐφ' ὧν τὸ ζευκτὸν στηρίζεται, ἡ δὲ δύναμις ΒΔ, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β τοῦ ζευκτοῦ, τείνει χαλαροῦσα τοὺς συνδέσμους τῶν δοκῶν καὶ ὠθοῦσα τοὺς τοίχους πρὸς τὰ ἔξω νὰ καταβιάσῃ τὴν κορυφὴν, ὅταν λείπῃ ὁ στρωτὴρ αὐτῆς ΑΓ.

Ἡ ΒΔ δύναμις ἀποσυντίθεται εἰς δύο ἴσας συνιστώσας ΒΕ καὶ ΒΕ κατὰ τὰς διευθύνσεις ΒΑ καὶ ΒΓ τῶν ἀμειβόντων, ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ $\frac{M\beta}{2} \cdot \frac{M}{H}$, διότι ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΕΔΕ τῶν δυνάμεων ποριζόμεθα

$$BE : B\Delta = \eta\mu \frac{1}{2} B : \eta\mu (180^\circ - B) \quad (1),$$

ἀλλ' ἔχομεν

$$B = 180^\circ - 2\varphi, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{B}{2} = 90^\circ - \varphi$$

καὶ ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τῆς γωνίας Β τὴν τιμὴν αὐτῆς, ποριζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$BE : B\Delta = \eta\mu (90^\circ - \varphi) : \eta\mu 2\varphi \quad (2),$$

ἢ

$$BE : B\Delta = \sigma\upsilon\nu \varphi : \eta\mu 2\varphi \quad (3),$$

ἐξ ἧς ποριζόμεθα

$$BE = B\Delta \frac{\sigma\upsilon\nu \varphi}{\eta\mu 2\varphi} = B\Delta \frac{\sigma\upsilon\nu \varphi}{2 \eta\mu \varphi \sigma\upsilon\nu \varphi} = \frac{M\beta}{2} \cdot \frac{1}{\eta\mu \varphi} \quad (4),$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ ἡμ. φ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{H}{M}$ θελωμεν ἔχει

$$BE = \frac{M\mathcal{E}}{2} \cdot \frac{M}{H} \quad (5).$$

Αἱ δυνάμεις αὗται BE καὶ BE θλίβουσι τοὺς ἐπὶ τῶν σημείων A καὶ Γ στηρίζομένους ἀμείβοντας AB καὶ ΓB, ἐπομένως ἑκάτερος τούτων ὑπόκειται ταυτοχρόνως εἰς τε τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως ταύτης καὶ εἰς τὴν κάμψιν τοῦ φορτίου M $\mathcal{E}$, τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μήκος αὐτοῦ.

Αἱ αὗται δυνάμεις BE καὶ BE θλίβουσι διὰ τῶν ἀμειβόντων AB καὶ ΒΓ τὰ σημεῖα A καὶ Γ, ἐφ' ὧν στηρίζεται τὸ ζευκτόν, ἀπαρallάκτως ὅπως τὸ βάρος τοῦ θόλου μιᾶς λιθίνης ἀψίδος θλίβει τοὺς ἄρμους τῆς θλάσεως. Ἐπομένως ἑκατέρω τούτων μεταφερομένη εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Γ ἀποσυντίθεται εἰς δύο συνιστώσας, τὴν μὲν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ στρωτῆρος ΑΓ, τὴν δὲ κατὰ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτοῦ, ὡς δεικνύει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΖΚ. Καὶ αἱ μὲν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ στρωτῆρος ΑΓ καλοῦνται ὠθήσεις ἢ ἀντρώσεις, ὡς τείνουσαι νὰ ἀνατρέψωσι τοὺς τοίχους ἢ στύλους, ἐφ' ὧν τὸ ζευκτόν ΑΒΓ (Σχ. 103) στηρίζεται, αἱ δὲ κατὰ τὴν κάθετον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ στρωτῆρος θλίβουσι τὰ στηρίγματα τοῦ ζευκτοῦ καὶ συνετελοῦσιν εἰς τὴν στερέωσιν αὐτῶν. Τοῦτ' αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἀκρογεφυρώματα τῶν λιθίνων γεφυρῶν.

Ἡ ὠθησις ΑΘ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γράμματος Ω καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{M\mathcal{E} \cdot \mu}{2H}$, διότι ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΘΖΚ τῶν δυνάμεων συνάγομεν

$$\Omega = ΑΘ = ΑΖ \text{ συν } \varphi = \frac{M\mathcal{E} \cdot M}{2H} \text{ συν } \varphi \quad (6),$$

ἀλλ' ἔχομεν

$$\text{συν } \varphi = \frac{\mu}{M}$$

καὶ θέτοντες εἰς τὴν (6) ἀντὶ συν φ τὴν τιμὴν αὐτοῦ εὐρίσκομεν

$$\Omega = \frac{M\mathcal{E} \cdot M}{2H} \cdot \frac{\mu}{M} = \frac{M\mathcal{E} \cdot \mu}{2H} \quad (7).$$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου συνάγομεν ὡσαύτως

$$AK = AZ \text{ ἢ } \mu \cdot \varphi = \frac{M\epsilon \cdot M}{2H} \cdot \frac{H}{M} = \frac{M\epsilon}{2} \quad (8).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων περὶ ἀποσυνθέσεως καὶ συνθέσεως τοῦ βάρους τῆς στέγης, ἣν τὸ ζευκτὸν υποβαστάζει συνάγομεν τὰ ἐξῆς.

1^{ον} Ἐκάτερον τῶν στηριγμάτων A καὶ Γ, δηλ. τῶν τοίχων ἢ στυλῶν, ἐφ' ὧν τὸ ζευκτὸν ABΓ στηρίζεται, ὑποφέρει θλίψιν ἴσην μὲ Mϵ, τοῦθ' ὅπερ ἦτο γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων, διότι ἐκάτερον τούτων υποβαστάζει τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους τοῦ ζευκτοῦ, ὅπερ εἶναι 2Mϵ.

2^{ον} Ὁ στρωτῆρ AG ὑπόκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῶν ἀντήσεων Ω, καὶ εἰς τὴν κάμψιν τοῦ φορτίου τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτοῦ, ὡς αἰεὶ ἐπὶ τῶν στρωτήρων κατασκευάζεται πάτωμα καὶ τίθενται ἐπ' αὐτοῦ βάρη.

3^{ον} Ἐκάτερος τῶν ἀμειβόντων AB καὶ BG ὑπόκειται ταῦτοχρόνως εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως BE καὶ εἰς τὴν κάμψιν τοῦ βάρους Mϵ.

153. Εὐρεθειςτῶν ἤδη τῶν τε δυνάμεων τῶν ἐνεργουσῶν πρὸς θλάσιν τῶν ἀμειβόντων καὶ τοῦ στρωτήρος ζευκτοῦ τινος ἀπλοῦ καὶ τοῦ τρόπου τῆς ἐνεργείας αὐτῶν, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐφαρμοστέα ἐξίσωσις πρὸς εὐρεσιν τῶν διχαστάσεων τῶν ἐγκαρσίων αὐτῶν τομῶν εἶναι ἡ ἐξίσωσις (10) τῆς παραγράφου 75, ἥτοι ἡ ἐξῆς

$$P = \frac{T}{\omega} + \frac{X\upsilon}{I} \quad (\alpha).$$

Ἐν τῇ ἐξίσώσει ταύτῃ θέτοντες ἀντὶ τοῦ T καὶ X τὰς ἀρμοζούσας τιμὰς αὐτῶν, ὅταν πρόκηται περὶ ἀμειβόντων καὶ στρωτήρος, πορίζομεθα τὰς ἀκολουθοῦσας δύο ἐξίσωσεις

$$P = \frac{M^2 \cdot \epsilon}{2H\omega} + \frac{M\mu\epsilon \cdot \upsilon}{8 \cdot I} \quad (9),$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ἀμειβόντων

$$P = \frac{M\mu\epsilon}{2H\omega} + \frac{\mu^2 \epsilon' \cdot \upsilon}{2 \cdot I} \quad (10),$$

δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ στρωτήρος.

Σημείωσις 1. Ἡ δύναμις Ω , ἡ παριστῶσα τὴν ὥθησιν ἢ ἄντωσην, προσδιορίζεται καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ῥοπῶν.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τούτου, προκειμένου περὶ τῆς θλίψεως $M\theta$, τῆς ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ σημείου A , τοῦ βάρους $M\theta$ τοῦ ὁμοιομόρφως διανεμημένου καθ' ὅλον τὸ μῆκος AB τοῦ ἀμειβόντος (Σχ. 403) καὶ τῆς ὥθησεως Ω , τῆς ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ σημείου A καὶ λαμβανομένου τοῦ σημείου B ὡς ἄξονος τῶν ῥοπῶν, δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$M\theta \cdot \mu - \frac{M\theta \cdot \mu}{2} - \Omega H = 0 \quad (11),$$

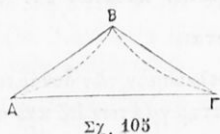
ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τιμὴν τοῦ Ω

$$\Omega = \frac{M\theta \cdot \mu}{2H} \quad (12),$$

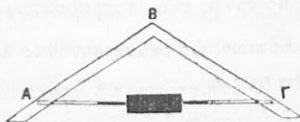
ἥτις τιμὴ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ προηγουμένως δι' ἄλλων συλλογισμῶν εὐρεθείση.

Σημείωσις 2. Ἐκ τοῦ τύπου (7) ἢ (12) συνάγομεν ὅτι ἡ ἄντωση Ω αὐξάνει ὅταν τὸ ἄνοιγμα 2μ τοῦ ζευκτοῦ αὐξάνῃ ἢ τὸ ὕψος H ἐλαττωθῇ. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, καὶ ἐνταῦθα ἡ ἄντωση εὐρίσκεται ἔχουσα τὴν αὐτὴν σχέσιν μὲ τὸ ἄνοιγμα καὶ τὸ ὕψος τοῦ ζευκτοῦ, οἷαν ἡ ἄντωση τῶν γεφυρῶν μὲ τὸ ἄνοιγμα καὶ τὸ βέλος αὐτῶν (ἴδε τύπον (7) τῆς παραγράφου 56).

154. Οἱ ἀμειβόντες τῶν ζευκτῶν κάμπτονται συνήθως, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 405. Τοῦτο δὲ δύναται τις νὰ ἴδῃ ἐπὶ μονορόφων οἰκιῶν ἢ ἐργαστηρίων ἰστάμενος ἄνωθεν τῆς στέγης τούτων, π. χ. εἰς τὸ παράθυρον μιᾶς διορόφου οἰκίας.



Σχ. 405



Σχ. 406

Πρὸς ἐλάττωσιν δὲ τῆς κάμψεως τῶν ἀμειβόντων, ἀντικαθιστῶσι τὸν ξύλινον στρωτῆρα $ΑΓ$ διὰ σιδηροῦ, αποτελουμένου ἐκ δύο ἴσων τεμαχίων συνδεδεμένων διὰ κοιλίου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 406. Διὰ τῆς περιστρέψεως δὲ τοῦ κοιλίου ἐλαττωῦται τὸ ἀρχικὸν μῆκος τοῦ στρωτῆρος $ΑΓ$ καὶ παράγεται ἄντωση ἀντίθετος τῆς $ΑΘ$ (Σχ. 404), ἥτις ἐξουδετερώνει ἐν μέρει τὴν κάμψιν τῶν ἀμειβόντων.

Ἦν ἑκάτερος τῶν ἀμειβόντων ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως $\frac{M^2 \phi}{2H}$, ἥτις ὠρίσθη ἀνωτέρω διὰ τὸ ἀπλοῦν ζευκτὸν τοῦ σχ. 403, καὶ εἰς τὴν κάμψιν τοῦ ἡμίσεως βάρους $M\phi$, διότι ὁ ἀμείβων AB ἢ BF θεωρεῖται ὡς δοκὸς στηριζομένη ἐπὶ τῶν τριῶν σημείων A, E, B καὶ ἐπομένως ἐκάτερον τῶν τμημάτων AE καὶ EB θεωρεῖται ἰδίᾳ ὡς δοκὸς στηριζομένη ἐπὶ δύο σημείων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Τῶν ἐπὶ τῶν συνθέτων ζευκτῶν ἐνεργουσῶν δυνάμεων εὐρεθισῶν, αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς ἐκάστου τετραγώνου αὐτῶν (σχ. 407) εἶναι αἱ ἑξῆς

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} M\phi \text{ συν } \varphi}{P} \quad (1),$$

διὰ τὰ στηρίγματα ZE

$$\omega = \frac{M\phi \text{ συν } \varphi \text{ συν } \psi + \frac{1}{2} B'}{P} \quad (2),$$

διὰ τὸν ὀρθοστάτην BD

$$P = \frac{\Omega}{\omega} + \frac{X\psi}{I} \quad (3),$$

ἢ θέτοντες τὰς γνωστὰς τιμὰς τοῦ Ω καὶ X .

$$P = \frac{\frac{M\phi \cdot \mu}{2H} + \frac{5}{16} B' \frac{\mu}{H}}{\omega} + \frac{\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \psi}{I}$$

διὰ τὸν στρωτήρα AF , καὶ

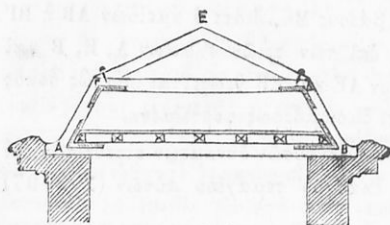
$$P = \frac{\frac{M^2 \phi}{2H}}{\omega} + \frac{\frac{M\phi \mu}{32} \cdot \psi}{I} \quad (4)$$

διὰ τοὺς ἀμείβοντας.

Σημειώσεις. Ἐν τῇ πράξει πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν διαστάσεων τῶν ἀμειβόντων παραλείπουν τὸν πρῶτον ὅρον $\frac{M^2 \phi}{2H}$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (4), διπλασιάζουσι δὲ τὸν δεύτερον ὅρον καὶ κάμνουσι χρῆσιν τοῦ ἐπομένου ἀπλουστέρου τύπου

$$P = \frac{M\phi \mu^2}{16} \times \frac{\psi}{I} \quad (5).$$

156. Εἰς τὰς μεγαλουπόλεις τῆς Εὐρώπης, ἔνθα τὰ γήπεδα εἶναι ὑπερτετιμημένα γίνεται χρῆσις στέγης κατὰ τὸ σχῆμα 108, ἥτις κα-



Σχ. 108

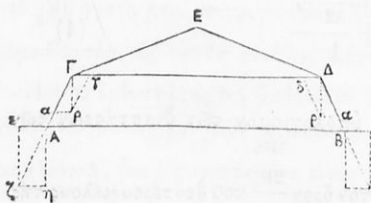
λεῖται στέγη Παλαδίου, διότι ὁ Παλάδιος ἐφεύρε καὶ ἐφῆρμοσε τὸ εἶδος τοῦτο τῆς στέγης.

Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κατοικίσιμον καὶ καλεῖται ὑπερῶν. Ἐπὶ τῶν στρωτῆρων ΑΒ κατασκευάζεται πάτωμα, ἐπὶ δὲ τῶν

ΓΔ ὁροφή. Τὸ στέγασμα δὲ τῶν παρεῖων ΑΓΕ καὶ ΓΔΒ κατασκευάζεται ἐκ μολύβδου ἢ ψευδαργύρου.

Αἱ διαστάσεις τῶν ἀμειβόντων ΓΕ καὶ ΕΔ καὶ τοῦ στρωτῆρος ΓΔ προσδιορίζονται διὰ τῶν τύπων 9 καὶ 10 τῆς § 453, αἵτινες ἀρμόζουσιν εἰς τὸ ἀπλοῦν ζευκτόν.

Αἱ δοκοὶ ΑΓ καὶ ΒΔ τῶν προσόψεων, ἐπεὶ εἶναι στερεῶς συνδεδεμέναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ σιδηρῶν γωνιῶν καὶ κοχλιωδῶν ἡλῶν μὲ τὸν στρωτῆρα ΑΒ τοῦ πατώματος, θεωροῦνται ὡς πεπακτωμέναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ὡς στηριζόμεναι διὰ τῶν ἐτέρων αὐτῶν ἄκρων ἐπὶ τῶν σημείων Γ καὶ Δ τοῦ στρωτῆρος ΓΔ, ὁμοιομόρφως δὲ φορτωμέναι καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῶν καὶ συνάμα ὑποκείμεναι καὶ εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως $\Gamma\alpha = \frac{M\beta}{\eta\mu\varphi}$ (Σχ. 409), ἥτις μετὰ τῆς Γγ ἀποτελεῖ τὴν συνισταμένην $\Gamma\Gamma' = M\beta$ καὶ παριστᾷ τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους τῆς



Σχ. 109

στέγης ΓΕΔ (τὸ Μ παριστᾷ τὸ μῆκος ΓΕ καὶ ΕΔ τοῦ ἀμειβόντος καὶ τὸ β τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον αὐτοῦ).

Ὁ στρωτῆρ ΑΒ ὑπόκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς ἀντώσεως $\Omega = \Lambda\epsilon = M\beta$ συνεφ φ καὶ εἰς τὴν κάμψιν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος φορ-

τίου τοῦ πατώματος. Ἐπομένως θεωρεῖται ὡς δοκὸς στηριζομένη ἐπὶ δύο σημείων Α καὶ Β, φέρουσα ὁμοιομόρφως καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς τὸ φορτίον $2\mu\beta''$ καὶ συνάμα ὑποκείμενη εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς ἀντώσεως Ω .

Τὸ φορτίον β' προσδιορίζεται εὐκόλως διὰ τοῦ ἑνδεκάτου καὶ δωδεκάτου πίνακος.

157. Πρὸς ἐφαρμογὴν δὲ τῶν ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις εὐρεθέντων τύπων εἰς ἕκαστον μερικὸν παράδειγμα πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ βάρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου στέγης, διότι τὸ φορτίον β, ὕπερ εἰσέρχεται εἰς τοὺς ἀνωτέρω εὐρεθέντας γενικοὺς τύπους εἶναι, ὡς γνωρίζομεν (ἴδε § 152), συνέκθεσις τούτου.

Πρὸς τοῦτο παραθέτομεν τοὺς κάτωθι πίνακας ἐξαχθέντες ἐκ τῶν ἐν Εὐρώπῃ γενομένων πειραμάτων, τοὺς ὁποίους ἐπωφελῶς δύνανται νὰ συμβουλευῶνται οἱ ἀρχιτέκτονες καὶ διὰ τὰς ἐν Ἑλλάδι οἰκοδομάς.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχωρ τὰς κλίσεις τῶν ζευκτῶν, δηλ. τὴν γωνίαν φ , καὶ τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον βάρος ἐκάστου εἵδους στεγάσματος.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑ- ΤΟΣ	ΚΛΙΣΙΣ ΤΗΣ ΣΤΕΓΗΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΜΕΙΒΟΝΤΩΝ		Βάρος ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου στεγάσματος εἰς χιλιόγραμμα.	Βάρος τῆς ἐν ἐκάστῳ τε- τραγωνικῷ μέτρῳ εἰσερχομέ- νης ἐργείας, ἐκτεταγμένου εἰς κυβικά μέτρα	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
	εἰς ὡς ἐκπετραχθέντων ἀκτῶν	διὰ τοῦ λογισμοῦ ἢ παρασκευῆς			
Ψαθί	43°	1,00	χιλ. 60	κυβ. μ. 0,063	Ἡ πέμπτη στήλη περιέχει τὸν κύβον τῶν καθρονίων καὶ στανί- δων τῆς στέγης.
Σανίδες	43°	1,00	20—23	0,030	
Κοῦλοι κέραμοι μὴ συνδεδεμέ- νοι δι' ἀμμο- κονίας	27°—30°	1,96—1,66	73—90	0,038	Ὅταν ἡ στέγη στε- γάζεται διὰ κυρτῶν κεραμῶν, τότε πρὸς ἀποφυγὴν μὲν τῆς ἐκ- βυστάσεως τῶν οὐμῶν ὕδατων ὑπὸ τῶν κε- ραμῶν, ἡ κλίσις τῆς στέγης δὲν πρέπει νὰ ᾖ μικροτέρα τῶν 15°, πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τῆς ὀλισθήσεως τῶν κεραμῶν τῶν συγκρα- τούμενων διὰ τῆς τρι- βῆς αὐτῶν ἐπὶ τῶν σανίδων τῆς στέγης ἡ κλίσις αὐτῆς δὲν πρέ- πει νὰ ὑπερβῇ τὰς 30°.
Κοῦλοι κέρα- μοι συνδεδεμέ- νοι δι' ἀμμοκο- νίας (κολυμ- βητὰ)	27°—30°	1,96—1,66	136	0,068	
Κέραμοι ἐπίπε- δοι τῆς Εὐρ. παλαιᾶς					Αἱ λίθινοι πλάκες τῆς Εὐρώπης δὲν ὁμοιά- ζουσι τὰς ἐν Ἑλλάδι. αὐταὶ δὲ εἶναι χρώ- ματος μελανοῦ καὶ πάχους 0,003 τοῦ μέ- τρου, ὡς αἱ ὑπὸ τῶν παίδων εἰς γραφὴν με- ταχειριζόμεναι εἰς τὰ δημοτικὰ σχολεῖα.
κατασκευῆς.... νέας	40°—60°	1,19—0,38	60—88	0,063	
κατασκευῆς....	15°—20°	3,73—2,73	43	0,033	
Πλάκες λίθινοι					
συνήθεις.....	23°—43°	1,33—1,00	30—33	0,036	
νεωτέρως κατα					
σκευῆς.....	15°—33°	3,73—1,53	27—33	0,036	
Ψευδόρυγρος					
τζίγκο) ἀρ. 14)	18°—21°	3,07—2,60	8,30	0,042	
Φύλλα χαλκοῦ	18°—21°	3,07—2,60	14,00	0,042	
Φύλλα σιδήρου)					
γαλβανισμένου)	18°—21°	3,07—2,60	8,30	0,042	

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχωρ τὰς ὑπὸ τοῦ ἀνέμου ἐνεργουμένης θλίψεις ἐπὶ ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας στέγης, καθέτως ὑπ' αὐτοῦ προσβαλλομένης.

ΤΑΧΥΤΗΣ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ ΚΑΤΑ 1'' ΕΙΣ ΜΕΤΡΑ	ΘΑΥΡΤΗΣ ΕΙΣ ΧΙΛΙΟΓΡΑΜΜΑ
3,00	1,047
3,00	2,908
8,00	7,443
10,83	13,691
14,00	22,793
20,00	46,320
40,00 λατλαψ	186,080

Σημειώσεις. Κατὰ μέσον ὅρον ἐν κυβικὸν μέτρον ξυλείας, ἐκ πεύκης μὲν ἢ ἐλάτης ζυγίζει 550 χιλ., ἐκ δρυὸς δὲ ζυγίζει 900 χιλιόγραμμα.

Ἡ χιὼν ζυγίζει δεκάκις ὀλιγώτερον ἴσου ὅγκου ὕδατος. Ἐπομένως ἐν κυβικὸν μέτρον χιόνος ζυγίζει 400 χιλιόγραμμα.

Εἰς τὰ μέρη ἐνθα πίπτει χιὼν οἱ ἀρχιτέκτονες παραδέχονται πάχος 0,25 τοῦ μέτρου, ἐπομένως παραδέχονται 25 χιλιόγραμμα βάρους δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας στέγης.

Ἐν Εὐρώπῃ ἡ ὑπὸ τοῦ ἀνέμου παραγομένη θλίψις ἐπὶ τῶν στεγῶν δὲν εἶναι πολὺ μεγάλη καὶ δύναται τις νὰ παραλείψῃ ταύτην, καθ' ὅσον εἶναι καὶ διαβατική, οὐχ ἥττον οἱ ἀρχιτέκτονες πρὸς περισσοτέραν ἀσφάλειαν παραδέχονται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν αὐτῶν θλίψιν 5 χιλιόγραμμων ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ταχύτητα ἀνέμου 6 μέτρων.

158. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο πινάκων (δεκάτου τρίτου καὶ δεκάτου τετάρτου) καὶ τῶν ἐν τῇ ἀνωτέρω σημειώσει ἐκτεθέντων ἐξαγομεν τὸν κάτωθι πίνακα δέκατον πέμπτον, περιέχοντα τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον φορτίον τῶν συνήθων στεγῶν, τὸ μῆκος τῶν ἀμειβόντων συνεκθέσει τοῦ ἡμιανοίγματος μ, καὶ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον τῶν ἀμειβόντων, ὡς καὶ τὸ ὀλικὸν τούτων φορτίον.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Ψάλλιστόχορου γαλ- θασμένου	Υ' ευδόχου (τρίγυρος)	Υπίπεδοι κέραι	Λίθνοι πλάκας ευρωπαϊκά	Κοίλοι κέραι, συν- δεσμένοι δι' αμ- μονίας	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
Κλίσεις των άμειβόν- των	20°	20°	40°	40°	30°	(1) Είς τὸ βάρος τοῦτο περιλαμ- βάνεται καὶ τὸ βάρος τῆς ξυλείας τῆς στέγης τὸ ἀ- ναφερόμενον εἰς τὴν ἑκὴν στήλην τοῦ 13ου πίνα- κος, τὸ βάρος τῆς χύνης πά- χους 0 ^α ,25 καὶ ἡ θλίψις τοῦ ἀνέ- μου ἔχοντος τα- χύτητα 6 μέτρ.
Μήκος τοῦ άμειβόν- τος	1,064μ	1,064μ	1,214μ	1,214μ	1,155μ	
Βάρος ἑνὸς τετρα- γωνικοῦ μέτρου στε- γασματος εἰς χιλιό- γραμ. (1)	65	65	125	100	200	
Ἐπιφάνεια στεγά- σματος ἀπὸ ζευκτοῦ εἰς ζευκτὸν καὶ δι' ἁ- ποστάσεις αὐτῶν ἀ- πὸ ἀξόνος εἰς ἀξόνα.						
1) ε = 3,50	3,724μ	3,724μ	4,240μ	4,240μ	4,043μ	
2) ε = 2,00	2,128μ	2,128μ	2,428μ	2,428μ	2,310μ	
3) ε = 3,00	3,192μ	3,192μ	3,642μ	3,642μ	3,465μ	
Φορτίον κατὰ τρεῖ- χον μέτρον ἐκάστου άμειβόντος, ἤτοι τι- μὰ τοῦ θ.						
1) θ = 3,50θ ₁	227,50	227,50	437,50	350,00	700,00	
2) θ = 2,00θ ₁	130,00	130,00	250,00	200,00	400,00	
3) θ = 3,00θ ₁	195,00	195,00	437,50	300,00	600,00	
Ὀλικὸν φορτίον ἐκά- στου άμειβόντος, ἤ- τοι τιμὰ τοῦ Μθ.						
1) δι' ε = 3,50	242,06μ	242,06μ	531,00μ	425,00μ	808,6μ	
2) δι' ε = 2,00	138,32μ	138,32μ	303,5μ	242,8μ	462,0μ	
3) δι' ε = 3,00	207,48μ	207,48μ	455,25μ	364,20μ	693,0μ	

159. Πρὸς εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν καὶ διότι ὁ πρῶτος ὅρος $\frac{M^2 \epsilon}{2H\omega}$ τῆς ἐξίσωσews (9) τῆς παραγράφου 153 εἶναι συνήθως ἐλάχιστον τι μέρος τοῦ δευτέρου ὅρου $\frac{M\mu\theta}{8} \cdot \frac{\nu}{1}$, παραλείπεται τοῦτον καὶ μετα-
χειρίζονται διὰ τοὺς άμειβόντας τῶν άπλῶν ζευκτῶν τὸν άπλούστερον
τύπον τῆς κάμψεως

$$P = \frac{M\mu\theta}{8} \cdot \frac{\nu}{1} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τομὴ τῶν ξυλίνων δοκῶν, δι' ὧν κατασκευάζονται συνήθως τὰ ζευκτὰ τῶν οἰκοδομῶν, εἶναι ὀρθογώνιος τομή, καλοῦντες α καὶ γ τὰς διαστάσεις αὐτῆς καὶ θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ 1 καὶ υ τὰς τιμὰς αὐτῶν, μετασχηματίζομεν τοῦτον εἰς τὸν ἐξῆς ἀπλούστερον

$$\alpha\gamma^2 = \frac{6M\mu\epsilon}{8P} \quad (2).$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέτοντες ἀντὶ τοῦ $M\epsilon$ τὰς τιμὰς αὐτοῦ, τὰς ἐξαγομένους ἐκ τοῦ δεκάτου πέμπτου πίνακος, ἀντὶ δὲ τοῦ P τὰς κοινῶς παραδεδεγμένους τιμὰς διὰ τὴν ξυλείαν τῶν ζευκτῶν, δηλαδή $P=700000$, προκειμένου περὶ ἀκατεργάστων δοκῶν, ὧν τὸ $\alpha=\gamma$, $P=800000$, προκειμένου περὶ δοκῶν ὀρθογωνισθεισῶν διὰ τοῦ πελέκους, καὶ τοιαῦται: εἶναι αἱ τοῦ ἐμπορίου δοκοί, ὧν τὸ $\alpha=0,9\gamma$, καὶ $P=1000000$, προκειμένου περὶ δοκῶν ὀρθογωνισθεισῶν διὰ τοῦ πρίονος, ὧν τὸ $\alpha=0,75\gamma$, καὶ ἀντὶ τοῦ α τὰς ἀνωτέρω μνησθείσας τιμὰς αὐτοῦ, εὐρίσκομεν τοὺς μερικωτέρους τύπους, οὓς καταγράφομεν εἰς τὸν ἐπόμενον δέκατον ἑκτον πίνακα.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΕΚΤΟΣ

Περιέχωρ τοὺς ἀπλουστέρους τύπους, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τῶν ἀμειβόρτων τῶν ξυλίνων ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν τῆς στέγης Παλαδίου, ὅταν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ᾦται $3^μ,50$ ἢ $3^μ,00$ ἢ $2^μ,00$.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	μ.	ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΟΙ ΤΥΠΟΙ		
		Δι' ἀκκιτεργάστους δοκούς $\alpha=\gamma$ $P=700000$	Διὰ τοῦ πελέκειος ὀρθογωνισμένους δοκούς $\alpha=0,9\gamma$ $P=800000$	Διὰ τοῦ πρίονος ὀρθογωνισμένους δοκούς ἀρίστης ποιότητος $\alpha=0,73\gamma$ $P=1000000$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σιδήρος	3,50	$\gamma^3=0,00026\mu^2$	$\gamma^3=0,00023\mu^2$	$\gamma^3=0,00024\mu^2$
Λίθινοι πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ	»	$\gamma^3=0,00043\mu^2$	$\gamma^3=0,00044\mu^2$	$\gamma^3=0,00043\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι..	»	$\gamma^3=0,00037\mu^2$	$\gamma^3=0,00036\mu^2$	$\gamma^3=0,00033\mu^2$
Κοτλιοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκονίας συνδε- δεμένοι ὡς ἐν Ἑλλ.	»	$\gamma^3=0,00087\mu^2$	$\gamma^3=0,00084\mu^2$	$\gamma^3=0,00081\mu^2$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σιδήρος	3,00	$\gamma^3=0,000223\mu^2$	$\gamma^3=0,000216\mu^2$	$\gamma^3=0,000207\mu^2$
Λίθινοι πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ	»	$\gamma^3=0,00039\mu^2$	$\gamma^3=0,00038\mu^2$	$\gamma^3=0,00036\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι..	»	$\gamma^3=0,00049\mu^2$	$\gamma^3=0,00048\mu^2$	$\gamma^3=0,00046\mu^2$
Κοτλιοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκονίας συνδε- δεμένοι ὡς ἐν Ἑλλ.	»	$\gamma^3=0,00074\mu^2$	$\gamma^3=0,00072\mu^2$	$\gamma^3=0,00069\mu^2$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σιδήρος	2,00	$\gamma^3=0,00013\mu^2$	$\gamma^3=0,00014\mu^2$	$\gamma^3=0,000138\mu^2$
Λίθινοι πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ	»	$\gamma^3=0,00026\mu^2$	$\gamma^3=0,00023\mu^2$	$\gamma^3=0,00024\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι..	»	$\gamma^3=0,00033\mu^2$	$\gamma^3=0,00032\mu^2$	$\gamma^3=0,00030\mu^2$
Κοτλιοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκονίας συνδε- δεμένοι ὡς ἐν Ἑλλ.	»	$\gamma^3=0,00030\mu^2$	$\gamma^3=0,00048\mu^2$	$\gamma^3=0,00046\mu^2$

160. Διὰ τῶν τύπων τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ὑπολογίζομεν τὰ ὕψη τῶν δοκῶν, τῶν ἀποτελουσῶν τοὺς ἀμείβοντας τῶν ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν τῆς στέγης Παλαδίου, ὅταν τὸ ἀνοιγμα τοῦ ζευκτοῦ, δηλ. τὸ 2μ, ᾖ γινωστὸν ἐκ τοῦ διαγράμματος τῆς οἰκοδομῆς.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰ συνήθη ἀνοίγματα τῶν ζευκτῶν καὶ λύοντες τοὺς ἀνωτέρω τύπους ὡς πρὸς ταῦτα, σχηματίζομεν τὸν κάτωθι δέκατον ἑβδομον πίνακα, δι' οὗ εὐρίσκομεν ἀμέσως τὸ πλάτος α καὶ τὸ ὕψος γ τῶν δοκῶν τῶν ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν τῆς στέγης Παλαδίου.

Ὁ πίναξ οὗτος εἶναι λίαν χρήσιμος διὰ τοὺς ἀρχιτέκτονας, διότι δι' αὐτοῦ πορίζονται ἀμέσως τὰ πλάχη τῶν δοκῶν, ὧν ἔχουσι χρεῖαν, χωρὶς νὰ ᾖναι ἠναγκασμένοι νὰ ὑπολογίσωσι ταῦτα διὰ τῶν τύπων τοῦ δεκάτου ἑκτοῦ πίνακος.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ

Δίδων τὰς διαστάσεις α καὶ γ τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τῶν δοκῶν,
τῆς στέγης Παλαδίου διὰ τὰ

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Ἀνοίγμα τῶν ἀμειβόντων ἤτοι τιμὴ τοῦ q μ.	Ἀπόστασις τῶν ξυρτῶν ἀπὸ ἀξόνος εἰς ἄξονα, ἤτοι τιμὴ τοῦ e	Ἀκατέργαστοι δοκοὶ γ = α	Διὰ τοῦ πελέκειος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ α=0,9γ		Διὰ τοῦ πρίνουος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ α=0,75γ	
				γ	α	γ	α
	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.
Ψευδάργυρος ἢ γαλβανι- σμένος σίδηρος	5,00	3,50	0,118	0,117	0,107	0,114	0,086
	6,00		0,133	0,131	0,117	0,130	0,098
	8,00		0,161	0,159	0,143	0,157	0,118
	10,00		0,187	0,184	0,163	0,182	0,137
	12,00		0,211	0,208	0,187	0,203	0,144
Λίθινοι πλάκες μέλαναι τῆς Εὐρώπης, πάχους μ. μ. 0,0025 ἕως 0,003.	5,00	3,50	0,141	0,140	0,126	0,139	0,104
	6,00		0,160	0,158	0,142	0,157	0,118
	8,00		0,194	0,192	0,173	0,190	0,143
	10,00		0,224	0,223	0,201	0,220	0,163
	12,00		0,253	0,251	0,226	0,250	0,188
Ἐπίπεδοι κέραμοι	5,00	3,50	0,153	0,152	0,137	0,149	0,112
	6,00		0,173	0,171	0,154	0,168	0,126
	8,00		0,209	0,207	0,186	0,204	0,153
	10,00		0,243	0,240	0,216	0,237	0,178
	12,00		0,274	0,270	0,243	0,261	0,200
Κοτλοὶ κέραμοι δι' ἄμμο- κονίας συνδεδεμένοι ὡς ἐν Ἑλλάδι	5,00	3,50	0,176	0,174	0,157	0,172	0,129
	6,00		0,199	0,196	0,176	0,194	0,146
	8,00		0,240	0,237	0,213	0,233	0,176
	10,00		0,279	0,276	0,240	0,273	0,203
	12,00		0,313	0,311	0,280	0,307	0,230

ΕΒΔΟΜΟΣ

τῶν ἀποτελουσῶν τοὺς ἀμειβοῦντας τῶν ἀπλῶν ζευκτῶν καὶ τῶν
συνήθῃ αὐτῶν ἀνοίγματα.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Ἀνοίγματα τῶν ἀμειβοῦντων ἢτοι τῆς τοῦ 2 μ.	Ἀπόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα, ἢτοι τιμὴ τοῦ α	Ἀνατέραςτοι δοκοὶ $\gamma = \alpha$	Διὰ τοῦ πελέκειως ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha=0,9\gamma$		Διὰ τοῦ πρίονος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha=0,73\gamma$	
				γ	α	γ	α
Ψευδάργυρος ἢ γαλβανι- σμένος σιδήρεος	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.
	5,00		0,111	0,110	0,099	0,108	0,081
	6,00		0,126	0,124	0,111	0,123	0,092
	8,00	3,00	0,152	0,151	0,136	0,149	0,112
	10,00		0,177	0,175	0,157	0,173	0,129
	12,00		0,200	0,198	0,178	0,193	0,146
Λίθινοι πλάκες μέλαναι τῆς Εὐρώπης, πάχους μ μ 0,0023 ἕως 0,003	5,00		0,134	0,133	0,120	0,131	0,098
	6,00		0,152	0,150	0,143	0,148	0,111
	8,00	3,00	0,184	0,182	0,164	0,179	0,136
	10,00		0,214	0,212	0,190	0,203	0,156
	12,00		0,241	0,239	0,215	0,235	0,176
Ἐπίπεδοι κέραμοι	5,00		0,143	0,144	0,130	0,142	0,106
	6,00		0,164	0,163	0,147	0,160	0,120
	8,00	3,00	0,198	0,197	0,177	0,193	0,146
	10,00		0,231	0,230	0,207	0,226	0,169
	12,00		0,260	0,258	0,232	0,253	0,191
Κοῖλοι κέραμοι δι' ἀμμο- κονίας συνδεδεμένοι ὡς ἐν Ἑλλάδι	5,00		0,167	0,165	0,148	0,163	0,122
	6,00		0,188	0,186	0,167	0,184	0,138
	8,00	3,00	0,228	0,226	0,203	0,223	0,167
	10,00		0,264	0,262	0,236	0,258	0,193
	12,00		0,298	0,296	0,266	0,292	0,219

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΕΒΔΟΜΟΣ

(Συνέχεια)

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	"Ανοίγμα των ἀμεινόντων ἤτοι τιμὴ τοῦ q μ.	"Απόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ κέντρου εἰς κέντρο ἤτοι τιμὴ τοῦ ε	"Ακατέργαστοι δοκοὶ $\gamma = \alpha$	Διὰ τοῦ πελέκτους ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha=0,9\gamma$		Διὰ τοῦ πρίονος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha=0,73\gamma$	
				γ	α	γ	α
	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.
Ψευδάργυρος ἢ γαλβανι- σμένος σίδηρος	3,00	2,00	0,098	0,096	0,086	0,093	0,071
	6,00		0,110	0,108	0,097	0,107	0,080
	8,00		0,134	0,131	0,118	0,130	0,097
	10,00		0,155	0,152	0,137	0,151	0,113
	12,00		0,173	0,171	0,154	0,170	0,127
Λίθινοι πλάκες μέλαναι τῆς Εὐρώπης πάχους μ μ 0,0025 ἕως 0,003	3,00	2,00	0,118	0,117	0,107	0,114	0,086
	6,00		0,133	0,131	0,117	0,130	0,098
	8,00		0,161	0,159	0,143	0,157	0,118
	10,00		0,187	0,184	0,163	0,182	0,137
	12,00		0,211	0,208	0,187	0,203	0,144
Ἐπίπεδοι κέραμοι	3,00	2,00	0,127	0,126	0,113	0,123	0,092
	6,00		0,144	0,142	0,128	0,139	0,104
	8,00		0,174	0,172	0,153	0,168	0,126
	10,00		0,202	0,200	0,180	0,196	0,147
	12,00		0,228	0,226	0,203	0,221	0,166
Κοτλοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκονίας συνδε- μένοι ὡς ἐν Ἑλλάδι	3,00	2,00	0,147	0,144	0,130	0,142	0,106
	6,00		0,166	0,163	0,147	0,160	0,120
	8,00		0,200	0,197	0,177	0,193	0,146
	10,00		0,233	0,230	0,207	0,226	0,169
	12,00		0,262	0,258	0,232	0,253	0,191

Παρατήρησις. Παραβάλλοντες τὰς τιμὰς τῶν α καὶ γ τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἀπόστασιν $3^{\mu},50$ μὲ τὰς τιμὰς τῶν α καὶ γ τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἀπόστασιν $2^{\mu},00$, τοῦ ἀνοίγματος τῶν ζευκτῶν ὄντος τοῦ αὐτοῦ, βλέπομεν ὅτι ἡ μεγίστη διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $0^{\mu},05$.

161. Ὅπως διὰ τοῦ δεκάτου πέμπτου πίνακος καὶ τῆς ἐξιśώσεως (4) τῆς παραγράφου 159 ἐσχηματίσαμεν τοὺς πίνακας 16^{ν} καὶ 17^{ν} διὰ τὰ ἀπλᾶ ζευκτά, οὕτω διὰ τοῦ αὐτοῦ 15^{ου} πίνακος καὶ τῆς ἐξιśώσεως (5) τῆς § 155 σχηματίζομεν τοὺς ἐπομένους πίνακας 18^{ν} καὶ 19^{ν} διὰ τὰ σύνθετα ζευκτά, τὰ κατασκευαζόμενα διὰ ξυλίων δοκῶν.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΟΓΔΟΥΣ

Περιέχωρ τὸς ἀπλουστέρους τύπους, δι' ὧν προσδιορίζονται αἱ διαστάσεις τῶν ξυλίνων συνθέτων ζευκτῶν.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Ἀπόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ ἑαυτοῦ εἰς ἑαυτὸν ε	ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΟΙ ΤΥΠΟΙ		
		Δι' ἀκατεργάστους δοκούς $\alpha=\gamma$ $P=700000$	Διὰ τοῦ πελέκειως ὠρθογωνισμένους δοκούς $\alpha=0,9\gamma$ $P=800000$	Διὰ τοῦ πρίονος ὠρ- θογωνισμένους δοκούς $\alpha=0,75\gamma$ $P=1000000$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σίδηρος.	3,50	$\gamma^3=0,00013\mu^2$	$\gamma^3=0,000126\mu^2$	$\gamma^3=0,00012\mu^2$
Λιθινοὶ πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ.....	»	$\gamma^3=0,000225\mu^2$	$\gamma^3=0,00022\mu^2$	$\gamma^3=0,000215\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι	»	$\gamma^3=0,000285\mu^2$	$\gamma^3=0,00028\mu^2$	$\gamma^3=0,000265\mu^2$
Κοτλοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκον. συνδεδε- μένοι ὡς ἐν' Ἑλλάδι.	»	$\gamma^3=0,000435\mu^2$	$\gamma^3=0,00042\mu^2$	$\gamma^3=0,000405\mu^2$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σίδηρος.	3,00	$\gamma^3=0,0001115\mu^2$	$\gamma^3=0,000108\mu^2$	$\gamma^3=0,0001035\mu^2$
Λιθινοὶ πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ.....	»	$\gamma^3=0,000193\mu^2$	$\gamma^3=0,00019\mu^2$	$\gamma^3=0,00018\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι	»	$\gamma^3=0,000245\mu^2$	$\gamma^3=0,00024\mu^2$	$\gamma^3=0,00023\mu^2$
Κοτλοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκον. συνδεδε- μένοι ὡς ἐν' Ἑλλάδι.	»	$\gamma^3=0,00037\mu^2$	$\gamma^3=0,00036\mu^2$	$\gamma^3=0,000345\mu^2$
Ψευδάργυρος ἢ γαλ- βανισμένος σίδηρος.	2,00	$\gamma^3=0,000075\mu^2$	$\gamma^3=0,00007\mu^2$	$\gamma^3=0,000069\mu^2$
Λιθινοὶ πλάκες εὐ- ρωπαϊκαὶ.....	»	$\gamma^3=0,00013\mu^2$	$\gamma^3=0,000125\mu^2$	$\gamma^3=0,00012\mu^2$
Ἐπίπεδοι κέραμοι	»	$\gamma^3=0,000165\mu^2$	$\gamma^3=0,00016\mu^2$	$\gamma^3=0,00015\mu^2$
Κοτλοὶ κέραμοι δι' ἀμμοκον. συνδεδε- μένοι ὡς ἐν' Ἑλλάδι.	»	$\gamma^3=0,00025\mu^2$	$\gamma^3=0,00024\mu^2$	$\gamma^3=0,00023\mu^2$

Παρατήρησις. Παρατηρητέον ὅτι ἐκ τοῦ δεκάτου ἔκτου πίνακος ἡ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀμέσως τὸν δέκατον ὀγδοον διαιροῦντες διὰ 2 τοὺς συντελεστὰς τοῦ μ^2 . Ὡσαύτως καὶ ἐκ τοῦ δεκάτου ἐβδόμου πίνακος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸν δέκατον ἑννατον διαιροῦντες τὰς τιμὰς τῶν α καὶ γ διὰ τῆς κυβικῆς ρίζης τοῦ 2, ἥτοι διὰ $\sqrt[3]{2}$, ἥτις εἶναι ἴσην μὲ 1,25 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν α καὶ γ τοῦ δεκάτου ἐβδόμου πίνακος ἡ μεγίστη διαφορά αὐτῶν διὰ τὰς ἀποστάσεις $3^{\mu}, 50$ καὶ $2^{\mu}, 00$ εἶναι $0^{\mu}, 05$, αὕτη δὲ διαιρουμένη διὰ τοῦ 1,25 γίνεται μόνον $0^{\mu}, 04$, τουτέστι λίαν μικρά, διὰ τοῦτο τὸν ἐπόμενον 19^{ον} πίνακα ἐσχηματίσαμεν μόνον δι' ἀποστάσεις τῶν ζευκτῶν 3,50. Προεκτείναμεν δὲ αὐτὸν μέχρι ἀνοίγματος 20 μέτρων πρὸς εὐκολίαν τῶν ἀρχιτεκτόνων.

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΕΝΝΑΤΟΣ

Δίδωρ τὰς διαστάσεις α καὶ γ τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τῶν δοκῶν, τῶν ἀποτελουσῶν τοὺς ἀμειβορτας τῶν συνθέτων ζευκτῶν διὰ τὰ συνήθη ἀροίγματα αὐτῶν.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Ἀνοίγματα τῶν ἀμειβορτων ἢτοι τιμὴ τοῦ α μ.	Ἀπόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ ἑαυτοῦ εἰς ἑαυτὰ, ἢτοι τιμὴ τοῦ ϵ μ.	Ἀκατέργαστοι δοκοὶ γ καὶ α μ.	Διὰ τοῦ πυλέκειως ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha = 0,9\gamma$		Διὰ τοῦ πρίονος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ $\alpha = 0,75\gamma$	
				γ	α	γ	α
				μ.	μ.	μ.	μ.
Ψευδάργυρος ἢ γαλβανι- σμένος σιδήρος	3,00	3,50	0,094	0,093	0,084	0,091	0,068
	6,00		0,106	0,103	0,094	0,104	0,078
	8,00		0,129	0,127	0,114	0,123	0,094
	10,00		0,150	0,147	0,132	0,143	0,109
	12,00		0,168	0,166	0,150	0,164	0,123
	14,00		0,183	0,183	0,163	0,180	0,137
	16,00		0,203	0,200	0,180	0,197	0,148
	18,00		0,219	0,216	0,194	0,213	0,159
	20,00		0,233	0,232	0,208	0,229	0,172
Λίθινοι πλάκες μέλαναι τῆς Εὐρώπης πάχους μ 0,0025 ἔως μ 0,003	3,00	3,50	0,113	0,112	0,101	0,111	0,084
	6,00		0,128	0,126	0,114	0,123	0,094
	8,00		0,153	0,154	0,138	0,153	0,113
	10,00		0,179	0,178	0,160	0,176	0,132
	12,00		0,202	0,201	0,181	0,200	0,150
	14,00		0,223	0,221	0,199	0,219	0,164
	16,00		0,243	0,241	0,217	0,240	0,180
	18,00		0,263	0,261	0,233	0,259	0,194
	20,00		0,282	0,280	0,252	0,278	0,209
Ἐπίπεδοι κέραμοι	3,00	3,50	0,122	0,121	0,109	0,119	0,089
	6,00		0,138	0,137	0,123	0,134	0,101
	8,00		0,167	0,166	0,149	0,163	0,122
	10,00		0,194	0,192	0,173	0,182	0,136
	12,00		0,219	0,216	0,194	0,209	0,156
	14,00		0,241	0,239	0,213	0,233	0,176
	16,00		0,263	0,262	0,236	0,257	0,192
	18,00		0,283	0,283	0,253	0,278	0,208
	20,00		0,303	0,303	0,273	0,298	0,223

ΠΙΝΑΞ ΔΕΚΑΤΟΣ ΕΝΝΑΤΟΣ

(Συνέχεια)

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Αντικείμενα των ἀμειβόντων ἢτοι τιμὴ τοῦ ὅρου ἢ ἀπόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα, ἢτοι τιμὴ τοῦ ε	Ἀκτινίστοι δοκοὶ γ = α	Διὰ τοῦ πελέκειος ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ α=0,9γ		Διὰ τοῦ πρίνου ὀρθο- γωνισμένοι δοκοὶ α=0,73γ	
			γ	α	γ	α
	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.	μ.
Κοῦλοι κίεραμοι δι' ἀμμοκονίας συνδε- νοι ὡς ἐν Ἑλλάδι	3,00	3,50	0,141	0,139	0,123	0,138
	6,00		0,139	0,137	0,141	0,133
	8,00		0,192	0,190	0,170	0,188
	10,00		0,223	0,221	0,199	0,218
	12,00		0,232	0,249	0,224	0,246
	14,00		0,277	0,274	0,247	0,271
	16,00		0,303	0,299	0,269	0,296
	18,00		0,328	0,324	0,292	0,320
	20,00		0,332	0,348	0,313	0,343
						0,257

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν ζευκτῶν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα εἶναι 3^μ,00 ἢ 2^μ,50 ἢ 2^μ,00 δυνάμεθα νὰ μεταχειριζόμεθα τὰ πάχη τὰ διδόμενα ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος. Ἄλλως τε ὑπολογίζομεν ταῦτα ἀπ' εὐθείας διὰ τῶν μερικῶν τύπων τοῦ δεκάτου ἐγδόου πίνακος.

162. Ὅπως διὰ τοῦ πίνακος δεκάτου πέμπτου, τοῦ δίδοντος τὸ βάρος θ , καὶ τῶν ἐξισώσεων

$$P = \frac{M\mu\theta}{8} \cdot \frac{\nu}{1} \quad \text{καὶ} \quad P = \frac{M\mu\theta}{46} \cdot \frac{\nu}{1}$$

ἐσχηματίσαμεν πίνακα, δίδοντας ἀμέσως τὰ πάχη τῶν ἀμειβόντων τῶν ζευκτῶν, οὕτω διὰ τοῦ αὐτοῦ δεκάτου πέμπτου πίνακος, τοῦ δεκάτου τρίτου, τοῦ δίδοντος τὸ $\frac{\mu}{11}$ διὰ τὰ διάφορα εἶδη τῶν στεγασμάτων, καὶ τοῦ τύπου 40 τῆς § 453, ἢτοι τοῦ

$$P = \frac{M\mu\theta}{2H\omega} + \frac{\mu^2\theta'}{2} \cdot \frac{\nu}{1} \quad (\alpha)$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν ϵ παριστᾷ τὸ βάρος τῆς στέγης, τὸ δὲ ϵ' τὸ ἴδιον βάρος τοῦ στρωτήρος, ὅπερ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ἰδίως διὰ τοὺς ξυλίνους στρωτήρας, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἕτερον πίνακα λίαν χρήσιμον εἰς τοὺς ἀρχιτέκτονας· διότι δι' αὐτοῦ θέλομεν εὐρίσκει ἀμέσως τὰ πάχη τῶν στρωτήρων, τῶν μὴ ὑποβασταζόντων πρόσθετον βάρος καὶ ὑποκειμένων ταύτοχρόνως εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς ἀντώσεως.

Ἐν τῇ πράξει ὁ ἀνωτέρω τύπος (α) διὰ μὲν τοὺς ξυλίνους στρωτήρας, ὧν ἡ ἐγκάρσιος τομὴ εἶναι συνήθως τετραγωνική, μετασχηματίζεται εἰς τὸν ἑξῆς

$$\gamma^3 = 0,000000714 M \epsilon \frac{\mu}{H} + 0,00000428 \frac{\omega}{\gamma} \pi \mu^2 \quad (2),$$

ἐὰν ἀντὶ τοῦ ϵ' θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $\omega \pi$ (τοῦ π παριστῶντος τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου ξυλείας καὶ τοῦ ω τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τοῦ στρωτήρος), καὶ ἀντὶ τῶν μ , I καὶ P τὰς τιμὰς αὐτῶν $\frac{1}{2}\gamma$, $\frac{1}{12}\alpha\gamma^3$ καὶ 700000 καὶ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸ γ^3 . διὰ δὲ τοὺς σιδηροὺς στρωτήρας, ὧν συνήθως τὸ πάχος εἶναι ἐλάχιστον καὶ δι' οὗς, ὡς ἐκ τούτου, παραλείπουσι μὲν τὸν δεύτερον ὅρον $\frac{\mu^2 \omega}{2} \cdot \frac{\mu}{I}$ τῆς (α) ἐξισώσεως, ὡς ὄντα ἐλάχιστον ἀπέναντι τοῦ πρώτου ὅρου $\frac{M \mu \epsilon}{2 H \omega}$, αὐξάνουσι δὲ τοῦτον κατὰ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ, μετασχηματίζεται εἰς τοὺς ἐπομένους δύο τύπους

$$\gamma^3 = \frac{25}{8} \cdot \frac{M \epsilon}{6000000} \times \frac{\mu}{H} \quad (3),$$

$$\gamma^3 = \frac{5 \times 1,273}{8} \times \frac{M \epsilon}{6000000} \cdot \frac{\mu}{H} \quad (4),$$

ἐὰν ἀντὶ τοῦ ω θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $\alpha\gamma$ ἢ $\frac{1}{3}\gamma^2$ (προκειμένου περὶ στρωτήρος ὀρθογωνίου, δι' ὃν συνήθως λαμβάνουσι $\alpha = \frac{1}{3}\gamma$) ἢ τὸ $\frac{3,14 \omega^2}{4}$ (προκειμένου περὶ κυλινδρικοῦ στρωτήρος), ἀντὶ δὲ τοῦ P τὴν τιμὴν αὐτοῦ 600000.

Ἡ ἐξίσωσις (3) ἀρμόζει εἰς ὀρθογωνίους στρωτήρας καὶ ἡ (4) εἰς κυλινδρικούς.

163. Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) καὶ τῶν ἀνω μνησθέντων πινάκων σχηματίζομεν τὸν ἐπόμενον εἰκοστὸν πίνακα, δι' οὗ εὐρίσκομεν ἀμέσως τὰ πάχη τῶν στρωτήρων.

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ

Δίδωρ τὰς διαστάσεις τῶν στρωτήρων, τῶν ὑποβασταζόντων ἐλα-
φρὰν ὀροφὴν ἄνευ πατώματος διὰ ἀπλῆ καὶ σύνθετα ξενκτά.

ΕΙΔΟΣ ΣΤΕΓΑΣΜΑΤΟΣ	Μήκος τοῦ στρώ- τηρος μ	Πλάτος τῶν ξενκτῶν ἀπὸ ἄλλου ἐκ μ	Ἀκτέρχαστοι δοκοὶ P = 700000 α = γ γ² = 0,000000714 M μ + 0,00000428 ω π μ²	ΣΙΔΗΡΟΣ ΚΑΘΑΡΟΣ		
				Ὁρθογώνιος τομή α = 1 γ γ² = 25 M μ 8 60000000 × μ Π	Κοιλή τομή μ M μ 8 60000000 × μ Π	Προσῆκον μ 8 60000000 × μ Π
Ψευδάργυρος	μ	μ	μ	μ	μ	μ
γ γαλβανισμένο	5,00		0,031	0,0294	0,0039	0,0149
σίδηρος	6,00		0,061	0,0323	0,0063	0,0166
M μ = 246,0 μ	8,00	3,50	0,084	0,0373	0,0075	0,0188
μ	10,00		0,113	0,0413	0,0083	0,021
H = 2,73	12,00		0,148	0,0457	0,0091	0,023
φ = 20°						
Λίθινοι εὐρωπαῖ- οι καὶ πλάκες	5,00		0,04	0,0258	0,0032	0,013
M μ = 423 μ	6,00		0,053	0,0281	0,0036	0,014
μ	8,00	3,50	0,084	0,0326	0,0063	0,017
H = 1,20	10,00		0,107	0,0334	0,0071	0,019
φ = 40°	12,00		0,143	0,0400	0,0080	0,020
Ἐπίπεδοι κέραμοι	5,00		0,050	0,0287	0,0037	0,0145
M μ = 331 μ	6,00		0,060	0,0315	0,0063	0,0160
μ	8,00	3,50	0,063	0,0363	0,0073	0,0184
H = 1,20	10,00		0,112	0,0410	0,0082	0,0206
φ = 30°	12,00		0,147	0,0430	0,0090	0,0225
Κοῦλοι κέραμοι	5,00		0,068	0,043	0,0081	0,022
M μ = 808 μ	6,00		0,079	0,047	0,0082	0,024
μ	8,00	3,50	0,104	0,057	0,011	0,027
H = 1,66	10,00		0,144	0,061	0,012	0,031
φ = 30°	12,00		0,169	0,066	0,013	0,034

Σημειώσεις 4. Παραβάλλοντες τὰ πάχη τῶν ξυλίνων στρωτήρων τοῦ εἰκοστοῦ πίνακος πρὸς τὰ πάχη τῶν ξυλίνων ἀμειβόντων τῶν πινάκων 48^{ου} καὶ 49^{ου}, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα, τουτέστι τὰ πάχη τῶν ἀμειβόντων καὶ τοῦ στρωτήρος τοῦ αὐτοῦ ζευκτοῦ, βλέπομεν ὅτι τὰ τῶν ἀμειβόντων εἶναι πάντοτε μεγαλείτερα τῶν τοῦ στρωτήρος. Παραδείγματος χάριν, προκειμένου περὶ συνθέτου ζευκτοῦ ἀνοίγματος 42 μέτρων καὶ διὰ στέγασμα ἐκ κοίλων κεράμων, ὡς συνειθίζεται ἐν Ἑλλάδι, βλέπομεν ὅτι οἱ μὲν ἀμειβόντες τοῦ ζευκτοῦ θὰ ἔχωσι πάχος 0^μ,25, ὁ δὲ στρωτὴρ αὐτοῦ θὰ ἔχῃ πάχος 0^μ,469.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὴν καλὴν καὶ στερεὰν σύνδεσιν τοῦ ζευκτοῦ, ὁ στρωτὴρ πρέπει νὰ ἔχῃ πάχος τοῦλάχιστον ἴσον τῷ τοῦ ἀμειβόντος, συμπεραίνομεν ὅτι δίδοντες καὶ εἰς τοὺς στρωτήρας τῶν ζευκτῶν τὸ πάχος τῶν ἀμειβόντων, ὅπως τοῦτο γίνεται ἐν τῇ πράξει, ἔχομεν πλεονασμα πάχους καὶ ἐπομένως μείζονα ἀσφάλειαν.

Σημειώσεις 2. Ἐὰν ὁ στρωτὴρ πρόκηται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ὡς δοκὸς πατώματος ὡς λ. χ. ὁ AB (Σχ. 440) τῆς στέγης τοῦ Παλαδίου, τότε τὸ πάχος αὐτοῦ ὀρίζεται ἐκ τοῦ δωδεκάτου πίνακος, τοῦ ἀρμόζοντος εἰς τὰς δοκοὺς τῶν πατωμάτων.

164. Ἐὰν πρόκηται οἱ στρωτήρες τῶν ζευκτῶν, ὧν ἡ μεταξὺ ἀπόστασις εἶναι 3^μ,50, νὰ δεχθῶσι πάτωμα, ὅπως ἐπ' αὐτοῦ τίθονται ἀγροτικά προϊόντα, οἷον σίτος, ἀραβόσιτος κτλ., τότε πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ γνωστὴ γενικὴ ἐξίσωσις

$$P = \frac{M\mu\epsilon}{2H\omega} + \frac{\mu^2\epsilon'}{2} \cdot \frac{\nu}{1} \quad (1),$$

ἐν ᾗ τὸ ϵ' παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ πατώματος καὶ τοῦ ἐπ' αὐτοῦ τεθησομένου ἀγροτικοῦ προϊόντος. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὅλων τῶν ἀγροτικῶν προϊόντων ὁ σίτος εἶναι βαρύτερος, παραδεχόμενοι στρώμα σίτου 0^μ,60 πάχους καὶ ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ πατώματος, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon' = 3,50 \times 0,60 \times 750\% = 1575\%.$$

Ἐπειδὴ δ' ἀφ' ἐτέρου ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου (1) εἶναι ἐλάχιστος ἀπέναντι τοῦ δευτέρου (διότι τὸ φερτίον ϵ' εἶναι μέγα), δυνάμεθα ἄνευ μεγάλου σφάλματος νὰ παραλείψωμεν τοῦτον καὶ νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν ἀπλούστερον τύπον

$$P = \frac{\mu^2\epsilon'}{2} \cdot \frac{\nu}{1} \quad (2),$$

ὅστις εἶναι ὁ γνωστὸς τύπος τῆς κάμψεως.

Ἐάν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ μ τὰς συνήθεις τιμὰς αὐτοῦ, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἐπόμενον εἰκοστὸν πρῶτον πίνακα, ὅστις εἶναι χρησιμώτατος εἰς τοὺς ἀρχιτέκτονας.

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Δίδωρ τὰς διαστάσεις τῶν στρωτήρων, τῶν ὑποβασταζόντων πάτωμα ἐφ' οὗ ἀποθηκεύονται ἀγροτικά προϊόντα

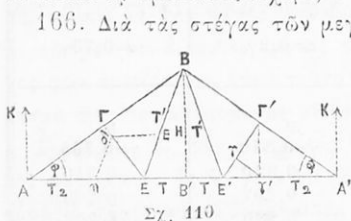
Μήκος στρωτήρος	Ἀκατέργαστοι δοκοί	Διὰ τοῦ πελέκειος ὀρθογωνισμένοι δοκοί	Διὰ τοῦ πρίονος ὀρθογωνισμένοι δοκοί
2μ	$\alpha=\gamma$	$\alpha=0,9\gamma$	$\alpha=0,73\gamma$
μ	μ	μ	μ
12	$\gamma=0,343$	$\gamma=0,340$	$\gamma=0,336$
10	0,323	0,320	0,316
8	0,300	0,297	0,293
6	0,272	0,270	0,266
5	0,237	0,234	0,230

165. Πολλάκις εἰς τὰ μεγαλοπρεπῆ δημόσια κτίρια, ὡς λόγου χάριν εἰς τὴν ἀκαδημίαν τῶν Ἀθηνῶν, μεταχειρίζονται διὰ λόγους ἀρχιτεκτονικοῦς ζευκτὰ ἄνευ στρωτήρων. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐπειδὴ οἱ ξύλινοι ἀμείβοντες AB καὶ ΓΒ (Σχ. 403) δυσκόλως δύνανται νὰ συνδεθῶσιν τόσῳ στερεῶς κατὰ τὴν κορυφὴν αὐτῶν Β, ὥστε νὰ ἀποτελῶσι μίαν συνεχῆ καὶ ἀδιαίρετον δοκόν, μεταχειρίζονται σιδηροῦς ἀμείβοντας τομῆς διπλοῦ ταῦ τῶν δὲ τοιούτων ζευκτῶν οἱ ἀμείβοντες AB καὶ ΓΒ συνδέονται εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῶν Β τόσῳ στερεῶς, ὥστε τὸ ἀποτελούμενον σχῆμα ABΓ θεωρεῖται ὡς μία καὶ ἀδιαίρετος δοκὸς στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς Α καὶ Γ ἐπὶ δύο στερεῶν καὶ ἰσοϋψῶν σημείων καὶ ἑνωιομόρφως φορτωμένη. Ὁ εἰς τὸ σημεῖον Β σύνδεσμος πρέπει νὰ ἦναι ἀρκετὰ ἰσχυρὸς, ὥστε νὰ καταστρέφῃ τὴν ἐκ τῆς ἐπὶ τῶν πλευρῶν πίεσεως παραγομένην ἄντωσην ω. Καθόσον δ' ἀφορᾷ εἰς τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ ABΓ, αὗται προσδιορίζονται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\frac{PI}{\omega} = \frac{\mu^2}{2} \quad (4).$$

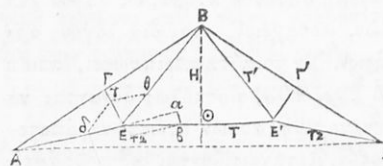
τοῦ 2μ παριστῶντος τὸ ἄνοιγμα ΑΓ καὶ τοῦ ϵ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον, προσδιοριζόμενον ἐκ τοῦ δεκάτου πέμπτου πίνακος.

Σημείωσις. Τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τῶν τοιούτων σιδηρῶν ζευκτῶν στηρίζονται ἐπὶ τῶν τοίχων ὅχι ἀπ' εὐθείας, ἀλλὰ διὰ μέσου κινητοῦ τροχοῦ ἐκ χυτοσιδήρου πρὸς διευκόλυνσιν τῆς κινήσεως, ἣν ταῦτα λαμβάνουσι συνεπεῖα τῆς αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως τῆς θερμοκρασίας. Διότι, ἂν ἡ ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ μήκους 2μ τῶν ζευκτῶν παραγομένη κίνησις παρεμποδισθῇ, οἱ τοῖχοι θέλουσιν ὑφίστασθαι ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω ὤθησιν, ἥτις δύναται ἐκ τῆς ὑπερμέτρου αὐξήσεως τῆς θερμοκρασίας νὰ καταστῇ ἀρκούντως ἰσχυρά, ὥστε νὰ ἀνατρέψῃ αὐτούς.



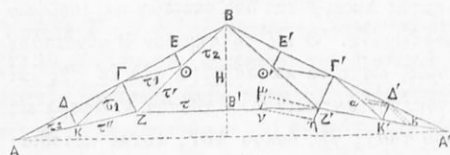
Σχ. 110

τῶν κατασκευάζονται ἐκ σιδηρῶν ἐλασμάτων καὶ ἔχουσι τομὴν σχήματος διπλοῦ ταῦ, τὰ στηρίγματα αὐτῶν ΓΕ, ΓΖ, ΕΘ καὶ ΑΚ ἐκ χυ-



Σχ. 111

πρὸς εὐρεσιν δὲ τῶν παχῶν αὐτῶν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐπ' αὐτῶν ἐνεργούσας δυνάμεις καθὼς καὶ τὸν τρόπον τῆς ἐνεργείας αὐτῶν.



Σχ. 112

τοῦ, τοῦ παριστωμένου διὰ τοῦ σχήματος 110. Οἱ ἀμείβοντες ΑΒ καὶ Α'Β τοῦ ζευκτοῦ τούτου, ἐπεὶ δὲ δὲν εἶναι στερεῶς συνδεδεμένοι

τῶν δημοσίων ἀγορῶν, μεγάλων ἀποθηκῶν κτλ. ποιοῦσι χρῆσιν ζευκτῶν ἐκ σιδήρου, ὧν τὰ σχήματα παρίστανται διὰ τῶν 110, 111, καὶ 112 σχημάτων. Οἱ ἀμείβοντες ΑΒ, Α'Β τῶν ζευκτῶν τού-

των ἐκ χυτοσιδήρου, οἱ δὲ ἐλαστικῆς ΑΕ, ΕΒ, ΕΕ', ΑΖ, ΖΒ, ΚΓ καὶ ΓΘ, μετὰ τῆς κορυφῆς τῶν ὀπίσμων συνδέονται τὰ στηρίγματα τῶν ἀμείβοντων, ἐκ καθαροῦ σιδήρου καὶ εἶναι συνήθως κυλινδρικοί.

Πρὸς τοῦτο δὲ θέλωμεν ἐξετάσει ἰδίᾳ ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω τριῶν εἰδῶν τῶν ζευκτῶν.

167. Καὶ ἐν πρώτοις ἀρχόμεθα ἀπὸ τοῦ ζευ-

μεταξύ των εἰς τὸ B, ὡς ὑπετέθη εἰς τὸ ζευκτὸν τῆς παραγράφου 465 ἤθελον περιστροφῇ περὶ τὸ σημεῖον τῆς κορυφῆς αὐτῶν B, ἂν ἔλειπεν ὁ συγκαρτῶν αὐτοὺς στρωτῆρ EE'. Ὅθεν ὁ στρωτῆρ EE' πρέπει νὰ ἦναι ἀρκούντως ἰσχυρὸς, ὥστε νὰ καταστρέφῃ τὴν ἀντῶσιν ω, ἥτις εὐρέθη ἴση μὲ $\frac{M\varphi}{2}$ ἐν τῇ § 452. Ἐπομένως, ἐὰν καλέσωμεν T τὴν τάνουσιν τοῦ στρωτῆρος EE', θέλομεν ἔχει

$$T = \omega = \frac{M\varphi}{2H}$$

Ἐκαστον τῶν στηριγμάτων EG καὶ E'Γ' ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν τοῦ βάρους $\frac{1}{2}M\theta$ προβαλλομένου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΕ. Καλοῦντες δὲ τὴν θλίψιν ταύτην Θ, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$\Theta = \frac{1}{2}M\theta \text{ συν } \varphi,$$

τοῦ φ παριστῶντος τὴν κλίσιν ἑκατέρου τῶν ἀμειβόντων καὶ εἰς βαθμὸς ἐκτιμωμένην.

Ἐκαστος τῶν ἔλκυστήρων EB καὶ AE ἢ BE' καὶ E'A' ὑπόκειται εἰς τὴν τάνουσιν, τὴν παραγομένην ὑπὸ τῆς θλίψεως $\Gamma\gamma = \Theta = \frac{1}{2}M\theta \text{ συν } \varphi$ διὰ τῶν στηριγμάτων ΓΕ καὶ Γ'E'. διότι, ἵνα ὑπάρχῃ ἰσορροπία, πρέπει αἱ τανύσεις τῶν ἔλκυστήρων EB καὶ EA ὡς καὶ αἱ τῶν BE' καὶ E'A' νὰ δίδωσι συνισταμένην ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς θλίψεως Θ. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν T' τὴν τάνουσιν ἑκάστου τῶν ἔλκυστήρων θέλομεν διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων Eεδη εὐρεῖ εὐκόλως $E\epsilon = E\eta = T'$. Τὸ δὲ μέγεθος τῆς δυνάμεως Eε ἢ Eη προσδιορίζεται ἢ γεωμετρικῶς διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ παραλληλογράμμου τῆς δυνάμεως, ἢ τριγωνομετρικῶς ὡς ἑξῆς. Τῷ ὄντι, ἐκ τοῦ τριγώνου Eηδ πορίζομεθα ἀμέσως

$$T' = E\eta = E\delta \frac{\text{συν } \varphi}{\eta\mu 2\varphi} = \frac{1}{2}M\theta \frac{\text{συν } \varphi}{\eta\mu 2\varphi},$$

διότι τὸ τρίγωνον Eηδ εἶναι ἰσοσκελές.

Ὁ ἔλκυστῆρ AE ἐκτὸς τῆς τανύσεως T' ὑποφέρει καὶ τὴν τάνουσιν T, τὴν παραγομένην διὰ τοῦ στρωτῆρος EE', ὅθεν καλοῦντες T_2 τὴν τάνουσιν αὐτοῦ ἔχομεν

$$T_2 = T + T'.$$

Καθόσον δ' ἀφορᾷ εἰς τοὺς ἀμειβόντας AB καὶ A'B, οὗτοι ὑπόκεινται εἰς κάμψιν, ὡς καὶ οἱ τοῦ σχήματος 409.

Μετά τὴν εὕρεσιν τῶν ἐνεργουσῶν δυνάμεων καὶ τοῦ τρόπου τῆς ἐνεργείας αὐτῶν θέλομεν ἔχει πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν διαφόρων τεμαχίων τοῦ ζευκτοῦ (Σχ. 440) κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τοῖς περὶ ἐφελκυσμοῦ, θλίψεως καὶ κάμψεως κεφαλαίοις τὰς ἐξῆς ἐξισώσεις

$$\omega = \frac{T}{P} \quad (1)$$

διὰ τὸν ἑλκυστήρα EE' ,

$$\omega = \frac{T'}{P} \quad (2)$$

διὰ τοὺς ἑλκυστήρας BE καὶ BE' ,

$$\omega = \frac{T_2}{P} \quad (3)$$

διὰ τοὺς ἑλκυστήρας AE καὶ $A'E'$,

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}M\phi \text{ συν } \varphi}{P} \quad (4)$$

διὰ τὰ στήριγμα $ΓΕ$ καὶ $ΓΕ'$,

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{M\phi}{46} \quad (5)$$

διὰ τοὺς ἀμείβοντας AB καὶ $A'B$ ὡς καὶ διὰ τοὺς τοῦ σχ. 407 (ὅρα σημ. § 455).

168. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν καὶ διὰ τὸ ζευκτὸν τοῦ σχήματος 444 εὕρισκομεν

$$T = \frac{M\phi}{2H}$$

διὰ τάνυσιν τοῦ ἑλκυστήρος EE , οὗτινος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς B ἀπόστασις $B\Theta$ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος H ,

$$T' = E\delta$$

διὰ τάνυσιν τῶν ἑλκυστήρων EB καὶ BE' . Αὕτη δὲ προσδιορίζεται εὐκόλως ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων, ὅπερ σχηματίζομεν λαμβάνοντες $E\gamma = \frac{M\phi}{2}$ συν $\varphi + T_3$, τοῦ T_3 ὄντος ἴσου μὲ $E\epsilon$ καὶ προσδιοριζομένου ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $Ea\beta\epsilon$, δι' οὗ ἀποσυνθέτομεν τὴν τάνυσιν $T = E\beta$ εἰς δύο ἑτέρας, τὰς Ea καὶ $E\epsilon$, ἐνεργούσας κατὰ τὰς διευθύνσεις AE καὶ $ΓΕ$ καὶ παριστωμένας διὰ τῶν γραμμάτων T_1 καὶ T_3 .

$$T_2 = T' + T_1$$

διὰ τάνυσιν τῶν ἑλκυστήρων ΑΕ καὶ Α'Ε', τῆς T_1 παριστώσης τὴν Εα καὶ εὐρισκομένης διὰ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου Εαβε.

Τὰς τιμὰς τῶν ἀνωτέρω εὐρεθεισῶν τανύσεων T' , T_2 καὶ T_3 προσδιορίζομεν ἢ διὰ τῆς κλίμακος ἢ τριγωνομετρικῶς, τούτων δὲ γενομένων γνωστῶν, αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν διαφόρων τεμαχίων τοῦ ζευκτοῦ (Σχ. 444) θέλουσιν εἶναι οἱ ἑξῆς

$$\omega = \frac{T}{P} \quad (1)$$

διὰ τὸν ἑλκυστῆρα ΕΕ',

$$\omega = \frac{T'}{P} \quad (2)$$

διὰ τοὺς ἑλκυστῆρας ΒΕ καὶ ΒΕ',

$$\omega = \frac{T_2}{P} \quad (3)$$

διὰ τοὺς ἑλκυστῆρας ΑΕ καὶ Α'Ε',

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}M\epsilon \text{ συν } \varphi + T_3}{P} \quad (4)$$

διὰ τὰ στηρίγματα ΓΕ, Γ'Ε',

$$\frac{PI}{v} = \frac{M\mu\epsilon}{46} \quad (5)$$

διὰ τοὺς ἀμείβοντας ΑΒ καὶ ΒΑ', ὡς καὶ διὰ τοὺς τοῦ σχ. 407 (ὄρα σημ. § 455).

Σημείωσις. Διὰ τὰ ζευκτὰ τῶν σχημάτων 440 καὶ 444 ἐγένοντο ἐν Εὐρώπῃ πειράματα πρὸς ἄμεσον προσδιορισμὸν τῶν ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν ζευκτῶν ὑφισταμένων τανύσεων, ἐκ τῶν πειραμάτων δὲ τούτων ἀπεδείχθη, ὅτι αἱ ἀνωτέρω διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ὁρισθεῖσαι τανύσεις, εἶναι σχεδὸν ἴσαι μὲ τὰς ἐκ τῶν πειραμάτων ἐξαχθείσας.

169. Καὶ διὰ τὸ ζευκτὸν τοῦ σχήματος 442 ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν εὐρίσκομεν

$$T = \frac{M\epsilon\mu}{2H}$$

διὰ τάνυσιν τοῦ ἑλκυστήρος ΖΖ', οὗτινος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἀπόστασις ΒΒ' παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος Η.

$$\Theta = \frac{1}{4} M \epsilon \text{ συν } \varphi$$

διὰ θλίψιν τῶν στηριγμάτων ΔΚ, ΕΘ, Ε'Θ' καὶ Κ'Δ', διότι ἕκαστον τούτων ὑποδαστάζει τὸ ἥμισυ τοῦ βάρους ΑΓ ἢ τὸ τέταρτον τοῦ ΑΒ, ἐκτιμωμένου κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΔΚ ἢ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΕΘ.

Ἐκαστος τῶν ἐλκυστήρων ΚΓ, ΓΘ, Κ'Γ' καὶ Γ'Θ' ὑποφέρει τάνυσιν T_1 , ἣν εὐρίσκομεν διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων ἀποσυνθέτοντες τὴν θλίψιν $\frac{1}{4} M \epsilon$ συν φ κατὰ τὰς διευθύνσεις ΚΓ καὶ ΚΑ· διότι αἱ δύο τανύσεις τῶν τεμαχίων ΚΓ καὶ ΚΑ τοῦ ζευκτοῦ πρέπει νὰ ἰσορροπῶσι τὴν θλίψιν τοῦ στηρίγματος ΔΚ. Τοῦτ' αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν καὶ διὰ τὰς θλίψεις τῶν στηριγμάτων ΕΘ, Ε'Θ' καὶ Δ'Κ'.

Ἐκάτερον τῶν στηριγμάτων ΓΖ καὶ Γ'Ζ' ὑποφέρει τὴν θλίψιν τοῦ ἡμίσεως τοῦ βάρους τῆς ὑπὸ τοῦ ΔΕ ὑποδασταζομένης στέγης, ἐκτιμωμένου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΖ, τὴν θλίψιν τὴν ἐπιφερομένην ὑπὸ τῆς συνισταμένης τῶν τανύσεων T_1 καὶ T_1 , ἥτις εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{4} M \epsilon$ συν φ , καὶ τὴν θλίψιν τοῦ Ζ'η = τ, ἣν εὐρίσκομεν ἀποσυνθέτοντες τὴν τάνυσιν T τοῦ ἐλκυστήρος ΖΖ' εἰς δύο δυνάμεις κατὰ τὰς διευθύνσεις Ζ'Α' καὶ Ζ'Γ'. Ὡστε καλοῦντες Θ_1 τὴν θλίψιν ἐκάστου τῶν ἐλκυστήρων ΓΖ καὶ Γ'Ζ', θέλομεν ἔχει

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} M \epsilon \text{ συν } \varphi + \tau.$$

Ἡ θλίψις Θ_1 , ἣ ἐπὶ τῶν σημείων Ζ καὶ Ζ' ἐνεργοῦσα καταστρέφεται ὑπὸ τῶν τανύσεων T' καὶ T' τῶν ἐλκυστήρων ΖΘ καὶ ΖΚ ἢ Ζ'Θ' καὶ Ζ'Κ'. Ἐπομένως ἡ T' προσδιορίζεται ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων.

Ἐκάτερος τῶν ἐλκυστήρων ΖΚ καὶ Ζ'Κ' ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω τανύσεως T' ὑποφέρει καὶ τὴν τάνυσιν $\tau' = Z'\mu$, ὥστε ἐκάτερος τούτων ὑποφέρει τάνυσιν $T'' = T' + \tau'$.

Ἐκάτερος τῶν ἐλκυστήρων ΒΘ καὶ Β'Θ' ἐκτὸς τῆς τανύσεως T_1 , ὑποφέρει καὶ τὴν τάνυσιν T' , τὴν μεταδιδομένην αὐτῷ διὰ τοῦ ἐλκυστήρος ΖΘ ἢ Ζ'Θ'. Ὡστε καλοῦντες T_2 τὴν τάνυσιν ἐκατέρου τούτων θέλομεν ἔχει

$$T_2 = T' + T_1.$$

Ἐκάτερος δὲ τῶν ἐλκυστήρων ΑΚ ἢ Α'Κ' ὑποφέρει τὴν τάνουσιν τοῦ ΚΖ ἢ Κ'Ζ' καὶ τὴν τοῦ ΚΓ ἢ Κ'Γ', ὥστε καλοῦντες T_3 τὴν τάνουσιν ταύτην θέλομεν ἔχει

$$T = T'' + T_1 = T' + T_1 + \tau'.$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν τὰ ἀνωτέρω θέλομεν ἔχει τὰς σχέσεις

$T_3 = T' + T_1 + \tau'$	διὰ τοὺς ἐλκυστήρας ΑΚ καὶ Α'Κ'
$T'' = T' + \tau'$	» » » ΚΖ καὶ Κ'Ζ'
T'	» » » ΖΘ καὶ Ζ'Θ'
$T_2 = T' + T_1$	» » » ΒΘ καὶ Β'Θ'
T_1	» » » ΓΚ, ΓΘ καὶ Γ'Κ', Γ'Θ'
$\Theta = \frac{1}{4} M \ell \sin \varphi$	» » » ΔΚ, ΕΘ καὶ Δ'Κ' καὶ Ε'Θ'
$\Theta_1 = \frac{1}{2} M \ell \sin \varphi + \tau$	» » » ΓΖ καὶ Γ'Ζ'
$T = \frac{M \ell \mu}{2H}$	» » » ΖΖ'

Εὐρόντες οὕτω τὰς ἐνεργούσας τανύσεις καὶ τὰς ἐπιφερομένας θλίψεις ἐπὶ τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ ὑπ' ὧσιν ζευκτοῦ, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν ἀκολουθοῦντες τοὺς γνωστοὺς κανόνες τὰς ἐγκαρσίους τομὰς τῶν ἀνωτέρω διαφόρων αὐτοῦ μερῶν.

Ἄς μεταβῶμεν καὶ εἰς τοὺς ἀμείβοντας ΑΒ καὶ Α'Β. Ἐκάτερος τούτων στηρίζεται ἐπὶ πέντε στερεῶν στηριγμάτων καὶ θεωρεῖται ὡς δοκὸς ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ τομῆς προσδιορίζεται διὰ τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως, τῆς ἐφαρμοζομένης εἰς δοκὸν στηριζομένην ἐπὶ πολλῶν στηριγμάτων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένην καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἂν ἓν τὰ ὅρια τῆς παρούσης συγγραφῆς δὲν μᾶς ἐπιτρέπουσι νὰ ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα τὴν θεωρίαν ταύτην, καὶ ἂν ἑτέρου κατὰ τὸν διακεκριμένον Γάλλον μηχανικὸν Μοραντιὲ τὰ διὰ τῆς θεωρίας ταύτης εὐρισκόμενα πᾶσι εἶναι σχεδὸν τὰ αὐτὰ μὲ τὰ εὐρισκόμενα διὰ τῆς παρ' αὐτοῦ ἐφαρμοσθείσης εἰς τὴν κατασκευὴν πολλῶν σιδηρῶν γεφυρῶν ἀπλουστεράς μεθόδου, διὰ ταῦτα θέλομεν ἐφαρμόσει ἐνταῦθα πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τοῦ ἀμείβοντος ΑΒ ἢ Α'Β τὴν πρὸς τοῦτο ἀπλουστεράν τοῦ Μοραντιὲ μέθοδον.

Κατὰ ταύτην τὰ μὲν πρὸς τὰ ἄκρα μέρη ΑΔ καὶ ΕΒ τῆς ἐπὶ τῶν πέντε σημείων Α, Δ, Γ, Ε, Β στηριζομένης δοκοῦ ΑΒ θεωροῦνται ὡς

πεπακτωμένα εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε (ἐνεκα τοῦ ἀντιρρόπου βάρους τῶν μερῶν ΔΒ καὶ ΑΕ), καὶ στηριζόμενα ἀπλῶς ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, τὰ δὲ ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς κείμενα ΔΓ καὶ ΓΕ ὡς πεπακτωμένα εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Δ καὶ Γ, Γ καὶ Ε. Τούτων οὕτω θεωρουμένων, ἐπειδὴ ἡ δοκὸς, ἡ πεπακτωμένη εἰς τὸ ἕτερον αὐτῆς ἄκρον καὶ στηριζομένη ἀπλῶς ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος διὰ τοῦ ἐτέρου ὑπὸκειται εἰς μεγαλύντερον κίνδυνον ἢ ἡ εἰς ἀμφοτέρα αὐτῆς τὰ ἄκρα πεπακτωμένη, εἶναι φανερόν ὅτι, ἐὰν προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις ἑνὸς τῶν ἄκρων μερῶν ΑΔ ἢ ΕΒ καὶ τὸ εὐρεθησόμενον πᾶχος θεωρήσωμεν ὡς τὸ ἀρμόζον πᾶχος ἐπὶ τῆς ὅλης δοκοῦ, θέλομεν ἔχει ἀφ' ἑνὸς ἐπαρκεστάτην ἀσφάλειαν καὶ ἀφ' ἐτέρου θέλομεν ἀποφύγει τὰς παρυσιαζόμενας πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως δυσκολίας.

Ὅθεν καλοῦντες Μ τὸ μῆκος ΑΒ τῆς δοκοῦ, 2μ τὸ ἄνοιγμα ΑΑ' τοῦ ζευκτοῦ, καὶ παραλείποντες τὰς θλίψεις, τὰς ἐπιφερομένας ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β ὑπὸ τῶν τανύσεων T_2 καὶ T_3 καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ τρίμημα ΑΔ, οὕτινος τὸ μῆκος εἶναι $\frac{M}{4}$, τὴν ἐξίσωσιν (II) τῆς παραγράφου 408, θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{M\mu\beta}{428} \quad (4),$$

ἐν ᾗ πρὸς περισσοτέραν ἀσφάλειαν καὶ διότι παραλείπουσι τὰς θλίψεις, τὰς ἐνεργούσας ἐπὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, λαμβάνουσι ἀντὶ τῆς ὅλης τιμῆς τοῦ Ρ μόνον τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (4) $\frac{P}{2}$ ἀντὶ τοῦ Ρ πορίζομεθα τὸν ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{M\mu\beta}{64} \quad (2),$$

ὅστις καλεῖται ἐμπειρικός τύπος καὶ χρησιμεύει, ὡς προσέπομεν, εἰς τὴν ἄμεσον καὶ ταχεῖαν εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν ἀμειβόντων τοῦ ζευκτοῦ, τοῦ ἔχοντος σχῆμα οἷον τὸ τοῦ 442.

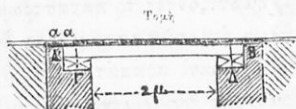
Φρονοῦμεν ὅτι τὰ ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις περὶ σιδηρῶν ζευκτῶν λεχθέντα ἀρκοῦσι πρὸς ὁδηγίαν τῶν ἀρχιτεκτόνων εἰς τὴν εὑρεσιν τῶν παχῶν τῶν διαφόρων τεραχίων οἰουδὴποτε σχήματος ζευκτοῦ, δι' ὃ μεταβάλλομεν ἀμέσως εἰς τὰ περὶ γεφυρῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

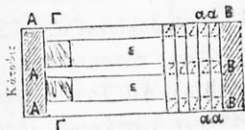
ΠΕΡΙ ΓΕΦΥΡΩΝ

Α' ΣΥΛΙΝΑΙ ΓΕΦΥΡΑΙ

170. Τὰ σχήματα 113 καὶ 114 παριστῶσι μίαν τῶν ἀπλουστέρων ξυλίνων γεφυρῶν, ἥς τὸ ἄνοιγμα ὑποτίθεται 4 ἕως 5 μέτρων. Αἱ κατὰ μῆκος πρισματικαὶ δοκοὶ AB (Σχ. 114) ἀποτελοῦνται ὑφ' ἐνὸς ἀδικορέτου τεμαχίου καὶ θεωροῦνται ὡς δοκοὶ στηριζόμεναι διὰ τῶν ἁκρῶν



Σχ. 113



Σχ. 114

αὐτῶν Α καὶ Β καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμέναι καθ' ἅπαν αὐτῶν τὸ μῆκος. Ἐπομένως πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκατασκευῆς αὐτῶν τομῆς πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον (4) τῆς παραγράφου 86, τοιούτεστι τὸν ἑξῆς

$$\frac{Pl}{v} = \frac{6\mu^2}{2} \quad (4),$$

ἐν ᾧ τὸ 6 , ὡς γνωστὸν, παριστᾷ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον, καὶ εὐρίσκεται γνωστῶν ὄντων τοῦ βάρους τῆς δοκοῦ, τοῦ βάρους τοῦ ξυλίνου καταστρώματος τῆς γεφύρας καὶ τοῦ μεγίστου δυνατοῦ βάρους τῶν δι' αὐτῆς διερχομένων φορτηγῶν ἁμαξῶν κτλ.

Καὶ καθ' ὅσον μὲν ἀφορᾷ εἰς τὸ βᾶρος τοῦ καταστρώματος, τοῦτο εὐρίσκεται εὐκόλως, ὅταν τὸ πάχος τῶν δοκίσκων α , α σχ. 114 ᾖναι γνωστὸν τὸ βᾶρος ὁμῶς τῶν φορτηγῶν ἁμαξῶν, ζώων κτλ. δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἀκριβῶς, διότι αἱ φορτηγαὶ ἁμαξαὶ διαφέρουσιν ἀπὸ τόπου εἰς τόπον. Τούτου ἕνεκα οἱ μηχανικοὶ παρεδέχθησαν ὡς μέγιστον πρόσθετον βᾶρος κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ κα-

ταστρώματος τῆς γεφύρας· 400 μὲν χιλιογράμμων προκειμένου περὶ γεφύρας, δι' ἧς θὰ διέρχωνται φορτηγαὶ ἅμαξαι, 200 δὲ χιλιογράμμων προκειμένου περὶ γεφύρας, δι' ἧς θὰ διέρχωνται μόνον ζῶα φορτηγά, ἐφιπποὶ καὶ πεζοί.

Καλοῦντες λοιπὸν ϵ_1 τὸ βάρος ἐνὸς τρέχοντος μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ AB, ϵ_2 τὸ βάρος ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου καταστρώματος τῆς γεφύρας καὶ ε τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν δύο συνεχῶν κατὰ μῆκος δοκῶν (ὅρα σχ. 114), θέλομεν ἔχει

$$\epsilon = (\epsilon_2 + 400)\varepsilon + \epsilon_1 \quad (2)$$

διὰ γέφυραν, δι' ἧς θὰ διέρχωνται φορτηγαὶ ἅμαξαι,

$$\epsilon = (\epsilon_2 + 200)\varepsilon + \epsilon_1 \quad (3)$$

διὰ γέφυραν προσωρισμένην εἰς τὴν διάβασιν φορτηγῶν ζώων, ἐφιππων καὶ πεζῶν.

171. Οἱ δοκίσκοι α , α (σχ. 114), οἱ σχηματίζοντες τὸ κατάστρωμα τῆς γεφύρας προσηλθύνονται στερεῶς δι' ἡλῶν ἐπὶ τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν AB καὶ AB. Τοῦτου ἕνεκα θεωροῦνται ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι διὰ ἀμφοτέρων τῶν ἡκίων αὐτῶν καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμέναι. Ἐπομένως ἡ ἐφαρμοστέα ἐνταῦθα ἐξίσωσις πρὸς εὔρεσιν τοῦ πάχους αὐτῶν εἶναι ἡ (θ) τῆς παραγράφου 98, τουτέστι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{\epsilon \nu^2}{3} \quad (1),$$

ἐν ᾗ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον ϵ εὑρίσκεται, παραλειπομένου τοῦ βάρους τοῦ δοκίσκου ὡς ἐλαχίστου, ἐκ τῶν τύπων

$$\epsilon = 400 \times \epsilon_2 \quad \text{ἢ} \quad \epsilon = 200 \times \epsilon_2,$$

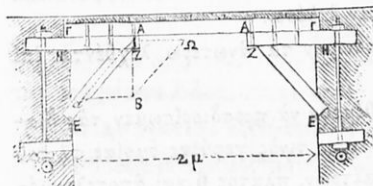
τοῦ ϵ_2 παριστῶντος τὸ πλάτος τοῦ δοκίσκου α .

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀπόστασις ε τῶν δοκῶν AB καὶ AB ᾖναι μικρά, τότε τὸ πάχος τῶν δοκίσκων α πρέπει νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς διατμήσεως, καὶ ἐκ τῶν δύο εὑρεθησομένων διαφόρων τιμῶν νὰ ληφθῇ ἡ μεγαλειτέρα.

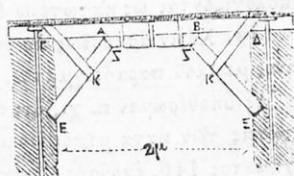
172. Ὅταν τὸ ἄνοιγμα τῆς γεφύρας ᾖναι μεγαλειότερον τῶν ὁ μέτρων καὶ ὁ ποταμός, ἐφ' οὗ αὕτη πρόκειται νὰ ἀνεγερθῇ, δὲν παρὰ σὺρρη κορμούς δένδρων καὶ ὀγκολίθους, τότε ἡ γέφυρα κατασκευάζεται ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 115 καὶ 116.

Ἡ δοκὸς ΓΓ τοῦ σχ. 445, ὡς καὶ ἡ ΓΔ τοῦ σχ. 446 ἀποτελεῖται ἢ ὑφ' ἐνὸς τεμαχίου ἢ ὑπὸ τριῶν, ἐν ἀμφοτέροις δὲ ταῖς περιπτώσεσι αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκάρσιος αὐτῆς τομῆς προσδιορίζονται ὅπως καὶ αἱ τῆς ΑΒ τοῦ σχήματος 443, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ μῆκος 2μ εἶναι διὰ μὲν τὴν τοῦ σχ. 445 τὸ ΑΑ, διὰ δὲ τὴν τοῦ σχ. 446 τὸ ΓΑ ἢ ΒΔ.

Ἡ δοκὸς ΗΖ τοῦ σχήματος 445 πρέπει, ὅπως ἀντέχη εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς ἀντῶσεως Ω, ἥτις εὐρίσκεται διὰ τῆς ἀποσυνθέσεως τοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐνεργοῦντος βάρους Β εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις ΖΩ καὶ Ζα, πρέπει νὰ στερεοῦται καλῶς διὰ σιδηρᾶς ῥάβδου ΗΘ, τιθεμένης ἐντὸς τῆς τοιχοποιίας. Ἡ ἐξουδετέρωσις δὲ τῆς ἀντῶσεως Ω γίνεται καὶ διὰ τῆς δοκοῦ ΖΖ, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 446.



Σχ. 445



Σχ. 446

Ἡ δοκὸς ΖΕ (Σχ. 445 καὶ 446) ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως Ζα, ἐπομένως ἡ ἐγκάρσιος αὐτῆς τομὴ προσδιορίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς θλίψεως, ἵνα δὲ προλάβωμεν τὴν κάμψιν αὐτῆς μεταχειρίζομεθα τὸ ἀντιστήριγμα ΓΚ (Σχ. 446), ὅπερ ἀποτελεῖται συνήθως ἐκ δύο δοκῶν τιθεμένων ἐκατέρωθεν τῆς δοκοῦ ΖΕ.

Ἡ δοκὸς ΗΖ τοῦ σχ. 445, ἕνεκα τῆς σιδηρᾶς ῥάβδου ΗΘ, εἶναι πεπακτωμένη εἰς τὸ ἄκρον Η καὶ ἐλευθέρη εἰς τὸ Ζ, φέρει δὲ φορτίον Β εἰς τὸ ἄκρον Ζ καὶ συνάμα εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη. Ἡ ἐγκάρσιος λοιπὸν αὐτῆς τομὴ προσδιορίζεται εὐκόλως διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (Γ) τῆς § 67.

Ἡ δοκὸς ΖΖ τοῦ σχήματος 446 ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν τῆς ἀντῶσεως Ω καὶ συγχρόνως εἶναι ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος. Ἐπομένως ἡ ἐγκάρσιος αὐτῆς τομὴ προσδιορίζεται εὐκόλως διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (10) τῆς παραγράφου 75.

173. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς χειμάρρους, ὧν τὰ ὕδατα παρασύρουσι συνή-

θως κορμούς δένδρων ή εγκολίθους, δέν έπιτρέπεται ή χρήσις τών στηριγμάτων ΕΖ και ΓΚ (Σχ. 445 και 446), μεταχειρίζεσθαι δοκούς, ών τò σχήμα ήνχι ή εϋθύγραμμον (Σχ. 443) ή άπλουν ζευκτόν, ώς τò ΑΒΓ τού σχήματος 403, ή τραπέζιον, ή άμερικανική δοκός.

Και όταν μέν τò σχήμα τής δοκού ήναι εϋθύγραμμον ή τρίγωνον, ή τραπέζιον, τότε, έπειδή διά τών έγκαρσίων δοκίσκων τò βάρος τού ήμίσεως καταστρώματος τής γεφύρας μεταδίδεται έφ' έκατέρας τών κατά μήκος δοκών, εις πολλά σημεία, ή δοκός θεωρεΐται ώς στηριζομένη διά τών δύο άκρων αϋτής και όμοιομόρφως φορτωμένη καθ' όλον αϋτής τò μήκος. Έπομένως αί διαστάσεις αϋτής ύπολογίζονται ώς και αί τής δοκού τού σχήματος 443 (§ 470).

Όταν δέ τò σχήμα τής δοκού ήναι ώς δεικνύει τò σχήμα 404, τουτέστι δοκός κατά τò άμερικανικόν σύστημα, τότε αί διαστάσεις αϋτής ύπολογίζονται ώς κατωτέρω θέλομεν εκθέσει.

174. Χάριν άσκήσεως άς εφαρμόσωμεν τά άνωτέρω λεχθέντα επί τινος μερικού παραδείγματος.

Άς ύποθέσωμεν π. χ., ότι προτιθέμεθα νά προσδιορίσωμεν τās διαστάσεις τών κατά μήκος δοκών ξυλίνης τινός γεφύρας όμοίας τή τού σχήματος 446, έχούσης μήκος 40 μέτρων, πλάτος 6 και άποτελουμένης εκ πέντε κατά μήκος ίσοπαχών δοκών, άπεχουσών ισάκεις άπ' άλλήλων.

Έπειδή κατά τās γενομένας ύποθέσεις τò ύφ' εκάστης δοκού ύποβασταζόμενον βάρος θέλει εΐναι τò $\frac{1}{4}$ τού όλου φορτίου τής γεφύρας, θέλομεν έχει $e = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$, 50. Καθ' όσον δ' άφορξ εις τò βάρος τού όλου καταστρώματος, έπειδή μās ήναι άγνωστοι αί ζητούμεναι διαστάσεις τών δοκών, ύποθέτομεν ότι τούτο μετά τού βάρους τών δοκών εΐναι 200 χιλιδόγραμμα κατά τετραγωνικόν μέτρον, ότε θέλομεν έχει

$$b = (200 + 400)e = 600 \times 1,50 = 900 \chi\lambda.$$

Έάν πρòς τούτοις ύποθέσωμεν ότι ή έφ' ής πρόκειται νά κατασκευασθῇ ή γέφυρα θέσις έπιτρέπεί νά λάβωμεν τò ΓΕ ίσον με $2\frac{1}{2}$, 50, θέλομεν έχει $\Gamma\Lambda = \beta\Delta = 2\frac{1}{2}$, 50, έπομένως

$$ZZ = 40^2 - (\Gamma\Lambda + \beta\Delta) = 5,00, \text{ και } B = \mu b = (2,50 + 1,25)900 = 3375$$

Έπειδή δέ τò τρίγωνον ΓΖΕ εΐναι ίσοσκελές θέλομεν έχει εκ τού παραλληλογράμμου τών δυνάμεων (Σχ. 445)

$$\Omega = B = 3375 \text{ χιλιογράμμια,}$$

$$\text{673} \quad Zx = \sqrt{\Omega^2 + B^2} = \sqrt{2B^2} = \sqrt{2 \times 3375^2} = 4773 \text{ χλ.}$$

Ἀφοῦ οὕτως εὗρομεν τὰς ἐνεργούσας δυνάμεις $\mathcal{E}$, B , Ω καὶ Zx , μᾶς εἶναι λίαν εὐκόλῳ νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὰς ζητούμενας διαστάσεις τῶν διαφορίων τεμαχίων μιᾶς τῶν πέντε ὀμοειδῶν κατὰ μῆκος δοκῶν.

Πρὸς τοῦτο διὰ μὲν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{P}{\omega} = \frac{\mathcal{E}\mu^2}{2} \quad (1)$$

εὐρίσκωμεν τὰς διαστάσεις τῶν μερῶν ΓA καὶ BA , διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$P = \frac{\Omega}{\omega} + \frac{X\upsilon}{I} \quad (2)$$

τὰς τοῦ μέρους ZZ καὶ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\omega = \frac{Zx}{P} \quad (3)$$

τὰς τοῦ μέρους EZ .

175. Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις λύονται ὥς ἑξῆς·

Ἴνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), θέτομεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῶν P , μ , υ καὶ I τὰς γνωστὰς αὐτῶν τιμὰς 600000, 4^{μ} , 25, $\frac{1}{2}\gamma$ καὶ $\frac{\alpha\gamma^3}{12}$, τῆς ἐγκάρσιου τομῆς τῆς δοκοῦ οὗσης ὀρθογωνίου, καὶ ἀντὶ τοῦ $\mathcal{E}$ τὴν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσαν τιμὴν αὐτοῦ 900, καὶ θέλωμεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{600000 \alpha\gamma^2}{6} = \frac{900 \times 1,25^2}{2}$$

ἐξ ἧς, λαμβάνοντες τὸ πλάτος α τῆς δοκοῦ κατ' ἀρέσκειαν καὶ ἴσον μὲ $0^{\mu}, 30$, πορίζομεθα

$$\gamma^2 = \frac{4406,3}{2 \times 100000 \times 0,30} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 0^{\mu}, 4577.$$

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως (2) θέτομεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῶν P , X καὶ Ω τὰς γνωστὰς αὐτῶν τιμὰς καὶ ἀντὶ ω καὶ υ καὶ I τὰς τιμὰς αὐτῶν $\alpha\gamma$, $\frac{1}{2}\gamma$ καὶ $\frac{\alpha\gamma^3}{12}$, καὶ θέλωμεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$600000 = \frac{3375}{\alpha\gamma} + \frac{900 \times 2,5^2 \times \frac{\gamma}{2}}{\frac{\alpha\gamma^3}{12}}$$

ἐξ ἧς, λαμβάνοντες α ὡς ἀνωτέρω ἴσον μὲ $0^{\mu},30$ καὶ ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς εὐρίσκουμεν τὴν τριτοβάθμιον ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον γ ἐξίσωσιν

$$148000\gamma^3 - 3375\gamma = 33750 \quad (\alpha'),$$

ἣν λύομεν διὰ δοκιμῶν ὡς ἐξῆς·

Ἐποθέτομεν ἐν πρώτοις γ ἴσον μὲ $0^{\mu},50$ καὶ θέτομεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ γ^3 καὶ γ τὰς τιμὰς αὐτῶν $0,125000$ καὶ $0,50$. Θέλομεν ἔχει

$$148000 \times 0,125000 - 3375 \times 0,50 = 33750,$$

$$\eta \quad 22500 - 1687,5 = 33750 \quad \eta \quad 20812,5 = 33750.$$

Ἐπειδὴ δὲ εὗρομεν ἰσότητα, ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κατ' ἀρέσκειαν δοθεῖσα τῷ γ τιμὴ $0^{\mu},50$ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀληθοῦς.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον γ ἴσον μὲ $0^{\mu},60$ καὶ ἃς θέσωμεν ἐκ νέου εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (α') ἀντὶ τοῦ γ^3 καὶ γ τὰς νέας τιμὰς αὐτῶν $0,216000$ καὶ $0,60$. Θέλομεν ἔχει μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων

$$38880 - 2025 = 33750 \quad \eta \quad 36755 = 33750,$$

ἐπειδὴ δὲ εὗρομεν ἰσότητα, ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι μεγαλειότερον τοῦ δευτέρου, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα τῷ γ τιμὴ $0^{\mu},60$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀληθοῦς.

Ἡ ζητούμενη λοιπὸν τιμὴ τῆς γ περιέχεται ἀναγκαίως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $0,50$ καὶ $0,60$.

Ἄς λάβωμεν λοιπὸν $\gamma = 0^{\mu},55$ καὶ ἃς ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (α') τὰς αὐτὰς ἀντικαταστάσεις καὶ πράξεις. Θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα

$$29934 - 1856,25 = 33750 \quad \eta \quad 28077 = 33750,$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι μικρότερον τοῦ δευτέρου. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ζητούμενη τιμὴ τῆς γ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ $0^{\mu},55$, καὶ ἐπομένως περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $0,55$ καὶ $0,60$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡδυνάμεθα παρατείνοντες τὰς δοκιμὰς νὰ πλησιάζωμεν περισσότερον τὰ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ ζητούμενη τιμὴ τῆς γ ὅρια. Ἄλλ' ἐπειδὴ ἐν τῇ πράξει λαμβάνουσι συνήθως τὴν τιμὴν τοῦ γ κατὰ τινὰ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου μεγαλειτέραν τῆς

ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (α') προσδιοριζομένης, ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν νέα πλησιέστερα πρὸς ἄλληλα ὄρια, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν $0^{\text{h}}, 60$ ὡς ἐκείνην, ἣν ὀφείλομεν νὰ παραδεχθῶμεν ἐν τῇ προκειμένη περιπτώσει.

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως (3) πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ P , ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λόγου $\frac{M}{\gamma}$, πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν τοῦτον γνωστόν. Ἐςω λοιπὸν $\frac{M}{\gamma} = 36$.

Ἀνατρέχοντες εἰς τὸν Γ' πίνακα τῆς § 27 εὐρίσκομεν $P = 40$, καλοῦντες δὲ α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς ω ἐκπεφρασμένας εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ τῶν P , ω καὶ 2α τὰς γνωστὰς αὐτῶν τιμὰς, θέλομεν ἔχει

$$\alpha\gamma = \frac{4773}{40} = 477,3 \quad (\alpha').$$

Λαμβάνοντες δὲ πάλιν $\alpha = 0,30$, ὡς καὶ διὰ τὴν δοκὸν ZZ , καὶ λύνοντες τὴν ἐξίσωσιν (α') ὡς πρὸς τὸ γ εὐρίσκομεν εὐκόλως

$$\gamma = \frac{477,3}{30} = 15^{\text{sec}}, 76, \text{ ἢ } \gamma = 0^{\text{h}}, 4576.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\frac{M}{\gamma} = \frac{3,67}{0,4576} = 23$ εἶναι μικρότερος τοῦ ὑποτεθέντος 36, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $\gamma = 0^{\text{h}}, 4576$ εἶναι μὲν μεγαλειτέρα τῆς ἀρμοζούσης, ἀλλὰ δυνάμεθα πρὸς περισσοτέραν ἀσφάλειαν νὰ παραδεχθῶμεν ταύτην.

Σημείωσις 1. Συμβαίνει πολλάκις ἕνεκα ἐλλείψεως καταλλήλων μέσων συγκοινωνίας νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅπου δεῖ δοκοὺς ZZ , ἐχούσας τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας διαστάσεις $\frac{60}{30}$. Τότε ἀντὶ 5 θέτομεν 7 κατὰ μῆκος δοκοὺς, οὕτω δὲ ἐλαττοῦμεν τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν ϵ , ἐπομένως καὶ τὸ βάρος ϵ , καὶ ὑπολογίζομεν ἐκ νέου ὡς ἀνωτέρω τὰς διαστάσεις τῶν δοκῶν GA , ZZ καὶ EZ , καὶ ἂν ἴδωμεν ὅτι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προμηθευθῶμεν δοκοὺς τῶν εὑρεθεισῶν διαστάσεων, παραδεχόμεθα ὀριστικῶς τὴν νέαν ταύτην διάταξιν τῆς γεφύρας, εἰ δὲ μὴ, τοποθετοῦμεν 8 ἀντὶ 7 κατὰ μῆκος δοκοὺς καὶ ὑπολογίζομεν ἐκ νέου τὰς διαστάσεις αὐτῶν καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὐρωμεν δοκοὺς, οὓς δυνάμεθα εὐκόλως νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸν τόπον, ἐν ᾧ προτιθέμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γέφυραν.

Σημείωσις 2. Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι οἱ μηχανικοὶ πρὸς εὐκολωτέραν λύσιν τοῦ ζητήματος παραδέχονται ὅτι τὸ σταθερὸν βάρος τῆς γεφύ-

ρας είναι 200 χιλιογράμμων κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ καταστρώματος. Ἵνα δὲ πεισθῶμεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἶναι ἐπαρκής, θυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη, ὅτε αἱ διαστάσεις τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν αὐτῆς ὠρίσθησαν, τὸ σταθερὸν βάρος, ὅπερ ὑποβαστάζει μίαν τούτων.

Πρὸς τοῦτο θέλομεν ἔχει

1 ^{ον}	τὸ βάρος τῆς δρυϊνῆς δοκοῦ ΓΑΒΔ, ὅπερ εἶναι	
	$0,30 \times 0,16 \times 10 \times 1000 =$	480%,
2 ^{ον}	τὸ βάρος τῆς δρυϊνῆς δοκοῦ ΖΖ, ὅπερ εἶναι	
	$0,30 \times 0,60 \times 5,00 \times 1000 =$	900,
3 ^{ον}	τὸ βάρος τῶν ἐγκαρσίων δοκίσκων καὶ τοῦ	
	ξύλινου καταστρώματος, ὅπερ εἶναι	
	$0,10 \times 1,50 \times 1000 \times 10 =$	4500,
	Τὸ ὅλον τῶν βαρῶν	<u>2880% λ.</u>

Διαιροῦντες δὲ τὸ βάρος τοῦτο διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 15, ὅστις παριστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν περιεχομένην μετὰξὺ δύο διαδοχικῶν δοκῶν καὶ ἥς τὸ βάρος ἡ μίαν τούτων ὑποβαστάζει ($1,50 \times 10 = 15$), θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον 192 χιλιογράμματα, τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο, ὡς γνωστὸν, θέλει παριστᾷ τὸ σταθερὸν βάρος ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου καταστρώματος τῆς γεφύρας.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ εὑρεθὲν βάρος 192 χιλ. εἶναι μικρότερον τοῦ 200 χιλ., ὅπερ ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῶν διαφόρων τεμαχίων τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ παραδοχὴ τῶν 200 χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας, ὡς σταθερὸν βάρος αὐτῆς, εἶναι βᾶσιμος.

Ἄν τὸ διὰ τοῦ ἀνωτέρω ὑπολογισμοῦ ὀρισθὲν βάρος ἦτο μεγαλύτερον τῶν 200 χιλ., τότε διὰ τοῦ νέου τούτου βάρους καὶ τοῦ προσθέτου ἠθέλομεν εὑρεῖ τὸ κατὰ τρέχον μέτρον φορτίον θ, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν προσδιορίσει τὰς νέας διαστάσεις τῶν τεμαχίων ΓΑ, ΒΔ, ΖΖ καὶ ΖΕ, αἱ παραδεχόμεθα ὀριστικῶς, ἂν αὗται δὲν διαφέρουσι πολὺ τῶν πρώτων, εἰ δὲ μὴ, διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου προβαίνομεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν νέων διαστάσεων, μέχρις οὗ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν λύσεων εὑρεθῇ ἀσήμαντος.

Σημειωτέον δὲ ἐν παρόδῳ ὅτι ἡ πρώτη λύσις, ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῆς παραδοχῆς τῶν 200 χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας

καταστρώματος, ὡς σταθερὸν βάρος, εἶναι πάντοτε παραδεκτὴ, διότι τὸ ἀληθές σταθερὸν βάρος οὐδέποτε υπερβαίνει τὰ 200 χιλιόγραμμα, ὡς ἐπέστημεν ἤδη διὰ τῶν ἀνωτέρω γενομένων ὑπολογισμῶν.

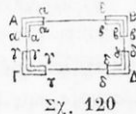
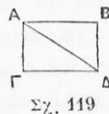
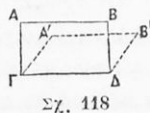
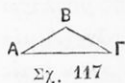
Β' ΓΕΦΥΡΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

176. Ἐν Ἀμερικῇ τὸ πρῶτον κατεσκευάσθησαν ἐκ μικρῶν τεμαχίων μεγάλαι ξύλιναι δοκοί, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 121, διὰ γεφύρας, ἐχούσας μέγα ἄνοιγμα. Τοιούτων δὲ δοκῶν δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν χρῆσιν καὶ ἐν Ἑλλάδι πρὸς κατασκευὴν γεφυρῶν εἴτε ἐπὶ ποταμῶν εἴτε ἐπὶ χειμάρρων, ὅσας τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν ἦναι μέγα καὶ ἡ ἐπὶ τόπου μεταφορὰ τῶν ἀναγκάσιων ἀδιαιρέτων δοκῶν εἶναι ἀδύνατος ἢ καὶ δυσκολωτάτη.

Πρὶν δὲ ἡ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν τοιούτου εἶδους δοκῶν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

1^{ον} Σύμπλεγμα τι δοκῶν ξυλίνων ἢ σιδηρῶν εἶναι στερεὸν καὶ ἀμετάβλητον τὸ σχῆμα, ὅταν αἱ γωνίαι αὐτοῦ μένωσιν ἀμετάβλητοι.

2^{ον} Ἐξ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων γεωμετρικῶν σχημάτων μόνον τὸ τρίγωνον ἔχει τὴν ιδιότητα τοῦ νὰ μὴ μεταβάλλωνται αἱ γωνίαι αὐτοῦ, ὅταν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μένωσι σταθερά (Σχ. 117).

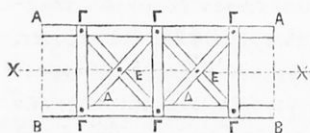


3^{ον} Παντός τετραπλεύρου καὶ ἰδίως ξυλίνου αἱ γωνίαι μεταβάλλονται εὐκόλως, καὶ ὅταν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ δὲν μεταβάλλωνται (Σχ. 118).

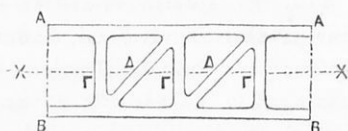
4^{ον} Ἴνα αἱ γωνίαι τετραπλεύρου τινὸς (Σχ. 118) μένωσιν ἀμετάβλητοι, πρέπει νὰ τεθῇ μία τοὐλάχιστον διαγώνιος. Ἐὰν τεθῇ π. χ. ἡ ΑΔ, τότε αἱ γωνίαι Β καὶ Γ δὲν δύνανται νὰ ἐλαττωθῶσιν ἢ αὐξηθῶσιν, χωρὶς νὰ ἐλαττωθῇ ἢ αὐξηθῇ καὶ τὸ μήκος τῆς διαγωνίου ΑΔ (Σχ. 119).

5^{ον} Τὸ ἀμετάβλητον τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου τινὸς δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ καὶ διὰ τῆς προσθήκης γωνιαίων καὶ ἐπαρκῶς ἰσχυρῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων, οἷα τὰ αα, ββ, κτλ. (Σχ. 120), δι' ὧν ἐξουδετεροῦνται αἱ ἐξωτερικαὶ ἐνέργειαι, αἱ τείνουσαι νὰ μεταβάλλωσι τὸ σχῆμα αὐτοῦ.

6^{ον} Τὸ μὲν σχῆμα 119 ἀρμύζει εἰς ξυλίνας καὶ σιδηρᾶς δοκοὺς, τὸ δὲ σχῆμα 120 ἀρμύζει ἰδίως εἰς σιδηρᾶς δοκοὺς, οὐδέποτε δὲ εἰς ξυλίνας, διότι ἡ σύνδεσις τῶν σιδηρῶν γωνιῶν αα, ββ, κτλ. μετὰ τῶν ξυλίνων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου χαλαροῦται πάντοτε μετὰ παρέλευσιν ὀλίγου χρόνου, ἐνῶ τὸ τοιοῦτον οὐδέποτε συμβαίνει εἰς τὰς σιδηρᾶς.

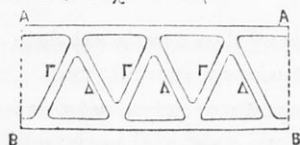


Σχ. 121

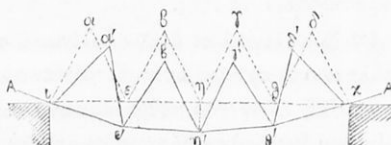


Σχ. 122

7^{ον} Τὸ μὲν σχῆμα 121 ἀρμύζει εἰς ξυλίνας δοκοὺς καὶ σιδηρᾶς ἐκ καθαροῦ σιδήρου, τὰ δὲ σχήματα 122 καὶ 123 ἀρμύζουσιν ἰδίως εἰς δοκοὺς ἐκ χυτοσιδήρου.



Σχ. 123

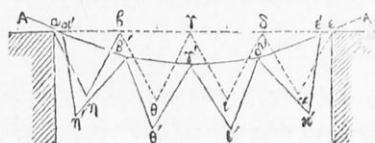


Σχ. 124

8^{ον} Αἱ ὀριζόντιαι δοκοὶ ΑΑ καὶ ΒΒ τῶν σχημάτων 121, 122 καὶ 123 ὑπὸκεινται αἱ μὲν ἄνω κείμεναι ΑΑ εἰς θλίψιν, αἱ δὲ ὑποκάτω ΒΒ εἰς ἐφελκυσμόν, καθόσον δ' ἀφορᾷ εἰς τοὺς μεταξὺ αὐτῶν τιθεμένους συνδέσμους Γ, Δ καὶ Ε, οὗτοι εἰς οὐδὲν ἄλλο συντείνουσιν ἢ εἰς

τὸ νὰ αὐξήσῃσι τὴν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΧΧ, τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους ΑΒ, ῥοπὴν τῆς ἀδρανείας τῶν δύο ὀριζοντίων ΑΑ καὶ ΒΒ.

Τοῦτο δὲ πειραματικῶς ἀποδεικνύεται διὰ τῶν σχημάτων 124 καὶ 125.



Σχ. 125

Καὶ τὸ μὲν σχῆμα 124 διὰ τῶν ἐστιγμένων γραμμῶν δεικνύει ὅτι, πρὶν ἢ ἀφαιρεθῇ ἡ ἄνω ὀριζόντιος δοκὸς αδ, αἱ κορυφαὶ α, β, γ καὶ δ, τῶν τριγώνων εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου εὐθείας καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν ἀποστάσεις δὲν μεταβάλλονται· ἅμα δ' ὡς αὕτη ἀφαιρεθῇ, αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων μεταβάλλονται, ἐπομένως καὶ αἱ κορυφαὶ αὐ-

$$A\alpha' = A\beta \epsilon\phi\psi = B \epsilon\phi\psi \quad (1),$$

$$A\beta' = \frac{A\beta}{\sigma\upsilon\nu\psi} = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu\psi} \quad (2).$$

Ἡ συνιστώσα $A\alpha'$ ἐφελκύει τὸ τεμάχιον $\Lambda\Gamma$ τῆς ὑποκάτω ὀριζοντίου δοκοῦ, ἡ δὲ $A\beta'$ πιέζει τὸν σύνδεσμον $\Lambda\Lambda'$, τείνουσα νὰ μετατοπίσῃ τὸ ἄκρον Λ' τῆς ἄνω δοκοῦ. Ἀλλ' ἵνα τὸ Λ' μείνῃ ἀμετακίνητον, πρέπει τὰ τεμάχια $\Lambda'\Gamma$ καὶ $\Lambda'\Gamma'$ νὰ παραγάγωσιν ἀντενεργείας, ὧν ἡ συνισταμένη νὰ ᾖται ἴση καὶ ἀντίθετος τῇ συνιστώσῃ $A\beta'$. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν $\Lambda'\beta_2 = A\beta'$ καὶ σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων, θέλομεν εὑρεῖ τὰς συνιστώσας $\Lambda'\alpha_2$ καὶ $\Lambda'\beta_3$, ὧν ἡ μὲν $\Lambda'\alpha_2$ ἐλκύνει τὸ τεμάχιον $\Lambda'\Gamma$, ἡ δὲ $\Lambda'\beta_3$ θλίβει τὸ τεμάχιον $\Lambda'\Gamma'$, τὰ δὲ μεγέθη αὐτῶν εὐρίσκονται διὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $\Lambda'\alpha_2\beta_2$, ἐν ᾧ ἔχομεν

$$\Lambda'\alpha_2 = \Lambda'\beta_2 = A\beta' = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu\psi} \quad (3),$$

$$\Lambda'\beta_3 = \frac{\Lambda'\beta_2 \times \acute{\eta}\mu. 2\psi}{\acute{\eta}\mu. \phi} = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu\psi} \cdot \frac{2\acute{\eta}\mu. \psi \sigma\upsilon\nu\psi}{\acute{\eta}\mu. \phi}$$

$$\text{ἢ} \quad \Lambda'\beta_3 = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu\psi} \times \frac{2\acute{\eta}\mu. \psi \sigma\upsilon\nu\psi}{\sigma\upsilon\nu\psi} = 2B \epsilon\phi\psi \quad (4).$$

Ἡ εὐρεθεῖσα ἐφελκυστικὴ δύναμις $\Lambda'\alpha_2$ ἐνεργεῖ διὰ μέσου τῆς δοκοῦ $\Lambda'\Gamma$ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ καὶ τείνει νὰ μετατοπίσῃ αὐτό, ἐὰν δὲ μεταφέρωμεν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀποσυνθέσωμεν εἰς τὰς δύο συνιστώσας $\Gamma\alpha_4$ καὶ $\Gamma\beta_3$, ὧν ἡ μὲν $\Gamma\alpha_4$ ἔλκει τὸ τεμάχιον $\Gamma\Delta$, ἡ δὲ $\Gamma\beta_3$ πιέζει τὸ τεμάχιον $\Gamma\Gamma'$, θέλομεν ἔχει ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $\Gamma\alpha_4\beta_3$

$$\Gamma\beta_3 = \Gamma\alpha_3 = \Lambda'\alpha_2 = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu\psi} \quad (5),$$

$$\Gamma\alpha_4 = \Gamma\alpha_3 \times \frac{\acute{\eta}\mu. 2\psi}{\acute{\eta}\mu. \phi} = 2B \epsilon\phi\psi \quad (6).$$

Τὸ δεύτερον λοιπὸν τεμάχιον $\Gamma\Delta$ ἔλκεται ταυτοχρόνως ὑπὸ τῶν δυνάμεων $\Lambda\alpha$ καὶ $\Gamma\alpha_4$, ἐπομένως ἡ ἐλκύνουσα αὐτὸ δύναμις θέλει εἶναι ἡ συνισταμένη αὐτῶν, θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\Lambda\alpha + \Gamma\alpha_4 = B \epsilon\phi\psi + 2B \epsilon\phi\psi = 3B \epsilon\phi\psi \quad (7).$$

Ἡ συνιστώσα $\Gamma\epsilon_3$, ἡ θλίβουσα τὸ τεμάχιον $\Gamma\Gamma'$, μεταφερομένη εἰς τὸ σημεῖον Γ' ἀποσυντίθεται εἰς τὰς δύο συνιστώσας $\Gamma'\gamma$ καὶ $\Gamma'\delta$, ὧν ἡ μὲν $\Gamma'\gamma$ ἐφελκύζει τὸ τεμάχιον $\Gamma'\Delta$, ἡ δὲ $\Gamma'\delta$ θλίβει τὸ τεμάχιον $\Gamma'\Delta'$, τὰ δὲ μεγέθη αὐτῶν εὐρίσκονται διὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $\Gamma'\gamma\epsilon_4$, ἐν ᾧ ἔχομεν

$$\Gamma'\gamma = \Gamma'\epsilon_4 = \Gamma\epsilon_3 = \frac{B}{\sigma_{\text{υν}} \psi} \quad (8)$$

$$\Gamma'\delta = \Gamma\alpha_4 = 2B \epsilon\phi \psi \quad (9).$$

Τὸ δεύτερον λοιπὸν τεμάχιον $\Gamma'\Delta'$ τῆς ἄνω δοκοῦ $\Lambda'\Lambda'$ θλίβεται ταυτοχρόνως ὑπὸ τῶν δύο δυνάμεων $\Lambda'\epsilon_3$ καὶ $\Gamma'\delta$, ἐπομένως ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργουμένη θλίψις ἰσοῦται μὲ

$$\Lambda'\epsilon_3 + \Gamma'\delta = 2B \epsilon\phi \psi + 2B \epsilon\phi \psi = 4B \epsilon\phi \psi \quad (10).$$

Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν θέλομεν ἶδει 1^{ον} ὅτι ἕκαστον μὲν τῶν τεμαχίων $\Lambda\Lambda'$, $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ κτλ., τῶν ἐκατέρωθεν τοῦ μέσου E τῆς δοκοῦ εὐρισκομένων, ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν δυνάμεως ἴσης τῷ $\frac{B}{\sigma_{\text{υν}} \psi}$, ἕκαστον δὲ τῶν τεμαχίων $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta$ κτλ. ὑπόκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν δυνάμεως ἴσης τῇ $\frac{B}{\sigma_{\text{υν}} \psi}$. 2^{ον} ὅτι τὰ τεμάχια $\Lambda\Gamma'$, $\Gamma'\Delta'$ κτλ. τῆς ἄνω ὀριζοντίου δοκοῦ ὑπόκεινται εἰς θλίψιν, ἥς ἡ τιμὴ βαίνει ἀνέξάνουσα καθόσον μεταβαίνομεν ἀπὸ τὸ ἄκρον πρὸς τὸ μέσον κατὰ τὸν ἐξῆς νόμον.

ἀπὸ	Λ' εἰς Γ'	$2B \epsilon\phi \psi$	διὰ τὸ $\Lambda'\Gamma'$
ἀπὸ	Γ' εἰς Δ'	$4B \epsilon\phi \psi$	διὰ τὸ $\Gamma'\Delta'$
ἀπὸ	Δ' εἰς Δ'	$6B \epsilon\phi \psi$	διὰ τὸ 3 ^{ον} τεμάχιον
»	»	»	»
»	»	»	»

ἀπὸ ν εἰς ν $2\nu B \epsilon\phi \psi$ διὰ τὸ ν τεμάχιον τῆς δοκοῦ
τὸ κατέχον τὸ μέσον αὐτῆς,

ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἄνω δοκὸς $\Lambda'\Lambda'$ ἀποτελεῖται ἐκ 2ν ἴσων ἀλλήλοις τεμαχίων. 3^{ον} ὅτι τὰ τεμάχια $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta$ κτλ. τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ, τὰ ἐκατέρωθεν τοῦ μέσου κείμενα, ὑπόκεινται εἰς ἐφελκυσμὸν, οὗτινος ἡ τιμὴ βαίνει ἀνέξάνουσα κατὰ τὸν ἐξῆς νόμον

ἀπὸ Α εἰς Α'	B ἐφ ψ	διὰ τὸ σημεῖον Α
ἀπὸ Γ εἰς Α	3B ἐφ ψ	» τὴν πλευρὰν ΓΑ
ἀπὸ Δ εἰς Γ	5B ἐφ ψ	» » » ΓΔ
»	»	»
»	»	»

ἀπὸ ν εἰς ν $(2ν+4)B$ ἐφ ψ διὰ τὸ ν τεμάχιον τῆς δοκοῦ
τὸ κατέχον τὸ μέσον αὐτῆς.

Καλοῦντες δὲ υ τὸ ὕψος τῆς ὠπλισμένης δοκοῦ, ἥτοι τὴν ἀπόστασιν τῆς δοκοῦ Α'Α' ἀπὸ τῆς ΑΔ, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\mu}{\nu} = ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ \quad (\alpha),$$

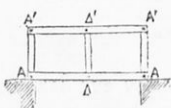
$$\text{ἐφ } \psi = \frac{4}{2} \frac{ΑΓ}{\nu} = \frac{4}{2} \frac{\mu}{\nu \nu} \quad (\beta),$$

$$(2\nu+4)B \text{ ἐφ } \psi = \frac{2\nu+4}{2\nu} \cdot \frac{B\mu}{\nu} = \left(4 + \frac{4}{2\nu}\right) \frac{B\mu}{\nu} \quad (\gamma),$$

$$2\nu B \text{ ἐφ } \psi = 2\nu B \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{\mu}{\nu \nu} = \frac{B\mu}{\nu} \quad (\delta).$$

Παρατήρησις 1. Οἱ τύποι (γ) καὶ (δ) δεικνύουσιν ὅτι ἡ θλίψις καὶ ἡ ἔλξις, αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ἄνω καὶ κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ, τείνουσι νὰ ἐξισωθῶσι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν βαίνει αὐξάνων.

Ἐὰν τὸ ν γείνη ἄπειρον, τότε ἡ θλίψις ἐξισοῦται τῇ ἔλξει, ἡ δὲ τιμὴ αὐτῆς γίνεται $\frac{B\mu}{\nu}$. Ὁ ἀριθμητὴς δὲ Βμ τοῦ κλάσματος τούτου παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς ἀντιδράσεως Β τοῦ ἑνὸς τῶν στηριγμάτων, ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ. Ἡ σχέσις αὕτη ἐπιβεβαιουῖται καὶ διὰ τῆς θεωρίας τῆς κάμψεως. Καὶ πράγματι, ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ ν εἶναι ἄπειρον, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἄνω καὶ κάτω ὀριζόντιος δοκὸς (Σχ. 126)



Σχ. 127

ἀποτελεῖται ἐκάστη ἐξ ἑνὸς ἀδιαιρέτου τεμαχίου.

Ὅθεν, ἂν θεωρήσωμεν τὰς δοκοὺς ταύτας οὕτω στερεῶς συνδεδεμένας, διὰ τριῶν π. χ. ὀρθοστατῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 127, ὥστε νὰ θεωρῇται ὡς μία δοκὸς καὶ καλέσωμεν κ₁ τὴν ἐλαττέριον δύναμιν τῶν μορίων τῆς δοκοῦ Α'Α' καὶ κ τὴν τῶν μορίων τῆς δοκοῦ ΑΑ, υ τὸ ὕψος ΔΔ' καὶ 2μ τὸ μῆκος Α'Α', λάβωμεν δὲ τὰς ῥοπὰς τῶν κ, κ₁ καὶ Β ὡς πρὸς τὸ σημεῖον δ, μέσον τῶν ΔΔ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς κάμψεως

$$\kappa_1 \frac{1}{2} v + \kappa_2 \frac{1}{2} v = B\mu \quad (\varepsilon).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κ_1 ἰσοῦται τῷ κ , ὡς εἶδομεν ἐν τῇ γενικῇ θεωρίᾳ τῆς κάμψεως (§ 59), ἡ ἐξίσωσις (ε) μεταβάλλεται καὶ γίνεται

$$\kappa v = B\mu \quad (\zeta),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

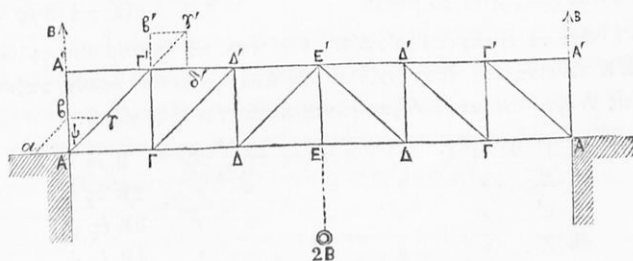
$$\kappa = \frac{B\mu}{v} \quad (\eta),$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Παρατήρησις 2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἔπεται ὅτι τὰ τεμάχια ΑΑ', ΓΓ' κτλ. Α'Γ, Γ'Δ κτλ., τὰ συνδέοντα τὰς δύο ὀριζοντίους δοκοὺς ΑΑ καὶ Α'Α' (Σχ. 426), εἰς οὐδὲν ἄλλο συντείνουσι ἢ εἰς τὸ νὰ ὑποβάλωσιν εἰς τὴν αὐτὴν θλίψιν ὅλας τὰς ἵνας τῆς Α'Α' δοκοῦ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν ἐφελκυσμὸν τὰς ἵνας τῆς δοκοῦ ΑΑ, ὡς εἰ ἡ στροφὴ ἐγίνετο περὶ τινὰ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους ΑΑ'.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι αἱ διαστάσεις τῶν δύο ὀριζοντίων δοκῶν ΑΑ καὶ Α'Α' (Σχ. 426), ὅταν ἐκάστη τούτων ἀποτελῇται ἢ ἐξ ἑνὸς ἀδιαίρετου τεμαχίου, ἢ ἐκ πολλῶν μὲν τεμαχίων, στερεῶς ὅμως συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα, ὥστε νὰ θεωροῦνται ὡς ἀποτελοῦντα ἓν ἀδιαίρετον τεμάχιον, προσδιορίζονται ἐκ τῆς γνωστῆς γενικῆς ἐξίσωσεως τῆς κάμψεως, ὡς ἄξονος τῆς στροφῆς λαμβανομένου τοῦ διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους ΑΑ' διερχομένου.

178. Τὸ σχῆμα 428 παριστᾷ ἑτέραν διάταξιν ὠπλισμένης δοκοῦ,



Σχ. 428

ἧς ἐγένετο χρῆσις εἰς τὴν κατασκευὴν σιδηρᾶς τινος γεφύρας, δι' ἧς διέρχεται ἡ μεταξὺ Παρισίων καὶ Μασσαλίας σιδηροδρομικὴ γραμμὴ.

Καὶ ἐπὶ τῆς δοκοῦ ταύτης, ἥς τὸ μὲν μῆκος εἶναι 2μ , τὸ δὲ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ἐνεργοῦν φορτίον $2B$ ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν, οἷαν καὶ ἐπὶ τῆς δοκοῦ τοῦ σχήματος 126, τουτέστι συνθέτοντες καὶ ἀποσυνθέτοντες τὰς ἐπ' αὐτῆς ἐνεργοῦσας ἐξωτερικὰς δυνάμεις ὥς δεικνύουσι τὰ δι' ἐστιγμένων γραμμῶν παριστώμενα παραλληλόγραμμα τῶν δυνάμεων, θέλομεν φάσθαι εἰς τὰ ἐξῆς συμπεράσματα.

1^{ον} Ὅτι ὅλαι αἱ κεκλιμέναι δοκοὶ $ΑΓ'$, $ΓΔ'$, $ΔΕ'$ κτλ., αἱ ἐκατέρωθεν τοῦ ἄξονος $Ε'Ε$ κείμεναι, ὑπόκεινται εἰς τὴν θλίψιν τῆς αὐτῆς δυνάμεως $\frac{B}{\sin \psi}$.

2^{ον} Ὅτι ὅλαι αἱ κάθετοι δοκοὶ $ΑΑ'$, $ΓΓ'$, $ΔΔ'$ κτλ. αἱ ἐκατέρωθεν τοῦ ἄξονος $Ε'Ε$ εὐρισκόμεναι, ὑπόκεινται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν δυνάμεως ἴσης τῷ βάρει B .

3^{ον} Ὅτι ὁ ἄξων $Ε'Ε$ ὑπόκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς δυνάμεως $2B$.

4^{ον} Τὰ τεμάχια $ΑΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$ κτλ. τὰ ἐκατέρωθεν τοῦ ἄξονος $Ε'Ε$ εὐρισκόμενα καὶ ἀποτελοῦντα τὴν κάτω ὀριζόντιον δοκόν, ὑπόκεινται εἰς ἐφελκυσμὸν δυνάμεως αὐξανομένης κατὰ τὸν ἐξῆς νόμον.

τὸ A	ἐφελκύεται	ὑπὸ	δυνάμεως	ἴσης	τῷ	B	ἐφ' ψ
τὸ Γ	»	»	»	»	»	$2B$	ἐφ' ψ
τὸ Δ	»	»	»	»	»	$3B$	ἐφ' ψ
τὸ E	»	»	»	»	»	$4B$	ἐφ' ψ
τὸ Z	»	»	»	»	»	$5B$	ἐφ' ψ
»	»	»	»	»	»	»	»
»	»	»	»	»	»	»	»

ὁ ν' σύνδεσμος, ἥτοι τὸ μέσον ($\nu' + 1$) B ἐφ' ψ

5^{ον} Ὅτι τὰ τεμάχια $\Gamma\Delta'$, $\Delta'E'$, $E'Z'$ κτλ. τὰ ἐκατέρωθεν τοῦ ἄξονος $Ε'Ε$ κείμενα καὶ ἀποτελοῦντα τὴν ἄνω ὀριζόντιον δοκόν, ὑπόκεινται εἰς θλίψιν δυνάμεως αὐξανομένης κατὰ τὸν ἐξῆς νόμον.

τὸ Γ'	θλίβεται	ὑπὸ	δυνάμεως	ἴσης	τῷ	B	ἐφ' ψ
τὸ Δ'	»	»	»	»	»	$2B$	ἐφ' ψ
τὸ E'	»	»	»	»	»	$3B$	ἐφ' ψ
τὸ Z'	»	»	»	»	»	$4B$	ἐφ' ψ
»	»	»	»	»	»	»	»
»	»	»	»	»	»	»	»

ἡ κορυφή τοῦ ν'' τριγώνου, ἥτοι τὸ μέσον » $\nu'B$ ἐφ' ψ .

Καλοῦντες δὲ υ τὸ ὕψος τῆς ὠπλισμένης δοκοῦ, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\mu}{\nu'} = \Lambda\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta\Xi \quad (\alpha)$$

$$\epsilon\phi\psi = \frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma\Gamma'} = \frac{\mu}{\nu'u} \quad (\beta)$$

$$(\nu' + 1)B \epsilon\phi\psi = \left(1 + \frac{1}{\nu'}\right) \frac{B\mu}{u} \quad (\gamma)$$

$$\nu'B \epsilon\phi\psi = \frac{B\mu}{u} \quad (\delta)$$

Εἶναι νομίζομεν περιττὸν νὰ προσθέσωμεν ὅτι αἱ παρατηρήσεις 1 καὶ 2 τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης περιπτώσεως.

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 126 ΚΑΙ 128

179. * Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ 2μ , ψ καὶ u εἰς ἀμφοτέρω τὰ σχήματα ἦναι τὰ αὐτά, καὶ ὅτι τὸ μῆκος 2μ τοῦ σχήματος 128 διηρέθη εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν ἴσων τεμαχίων ἢ τὸ μῆκος 2μ τοῦ σχήματος 126, τουτέστιν ὅτι ἔχομεν $\nu' = 2\nu$, καὶ ἂς συγκρίνωμεν πρὸς ἀλλήλας τὰς εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῶν κατὰ τὰ σχήματα 126 καὶ 128 συνδέσμων ἐνεργούσας δυνάμεις. Θέλομεν εὐκόλως πορισθῇ τὰ ἐξῆς.

1^{ον} Ὅτι αἱ θλίψεις, ἂς ὑποφέρουσιν αἱ κεκλιμέναι πλευραὶ τοῦ σχήματος 126 εἶναι ἴσαι μὲ τὰς θλίψεις, ἂς ὑποφέρουσιν αἱ κεκλιμέναι πλευραὶ τοῦ σχήματος 128.

2^{ον} Ὅτι οἱ ἐφελκυσμοί, οὓς ὑποφέρουσιν αἱ κεκλιμέναι πλευραὶ $\Lambda\Gamma$, $\Gamma'\Delta$ κτλ. τοῦ σχήματος 126 ἔχουσι λόγον πρὸς τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ἐφελκυσμοὺς τῶν καθέτων πλευρῶν $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ κτλ. τοῦ σχήματος 128, ὃν λόγον ἔχει τὸ $\frac{1}{\sin\psi}$ πρὸς τὴν μονάδα, τουτέστιν ὅτι οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐφελκυσμοὶ σχηματίζουσι τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν

$$\frac{B}{\sin\psi} : B = \frac{1}{\sin\psi} : 1$$

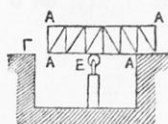
3^{ον} Ὅτι οἱ ἐφελκυσμοὶ ἢ τανύσεις, αἱ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ τῶν σχημάτων 126 καὶ 128 εἶναι αἱ αὐταὶ διὰ τὰ ἰσάκεις ἀπέχοντα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῶν δοκῶν σημεῖα.

4^{ον} "Οτι αἱ θλίψεις, αἷς ὑποφέρουσι τὰ τεμάχια τῆς ἄνω ὀριζοντίου δοκοῦ τοῦ σχήματος 126, εἶναι μικρότεροι τῶν θλίψεων, αἷς ὑποφέρουσι τὰ αὐτὰ τεμάχια τοῦ σχήματος 128, τουτέστιν ὅτι ἐκ τῶν δύο τεμαχίων, τῶν ἰσάκεις ἀπεχόντων τῶν ἄκρων Α' καὶ Γ', τὸ τεμάχιον τοῦ σχήματος 126 ὑποφέρει ὀλιγώτερον ἢ τὸ τοῦ σχήματος 128. Π. χ. ἡ κορυφή Γ' τοῦ σχήματος 126 ὑποφέρει ὀλιγώτερον τῆς Ε' τοῦ σχ. 128.

"Επεταὶ λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι, ἂν καὶ ἡ διάταξις τῆς ὀπλισμένης δοκοῦ κατὰ τὸ σχῆμα 128 ἔχῃ διπλάσιον ἀριθμὸν συνδέσμων ἢ ἡ διάταξις τῆς κατὰ τὸ σχῆμα 126, οὐχ ἥττον παρέχουσιν τὴν αὐτὴν στερεότητα ἀμφότεραι. Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι τὰ τὰς δύο ὀριζοντίους δοκοὺς συνδέοντα διάμεσα στηρίγματα εἰς οὐδὲν ἄλλο χρησιμεύουσιν ἢ εἰς τὸ νὰ αὐξάνωσι τὴν τῶν ὀριζοντίων δοκῶν δύναμιν.

Παρατήρησις 1. Ὁ Γάλλος στρατηγὸς *Morain* ἐξετέλεσε διάφορα πειράματα ἐπὶ ὀπλισμένων δοκῶν κατὰ τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 128. Ἐκ τούτων δὲ ἀπεδείχθη ὅτι, ὁσάκις ἡ σύνδεσις τῶν διαφόρων κορυφῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἀποτελούντων τὸ σύστημα, γίνεται στερεὰ καὶ ἀμετάβλητος, τὰ διάφορα τεμάχια αὐτῆς δύνανται ἀσφαλῶς νὰ ὑποφέρωσι τὰς διὰ τῆς ἀνωτέρω θεωρίας εὐρεθείσας θλίψεις καὶ ἐφελκυσμούς· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν τοιούτων ὀπλισμένων δοκῶν δυσκόλως κατορθοῦται νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ ἀπαιτούμενη στερεὰ καὶ ἀμετάβλητος σύνδεσις τῶν μερῶν τῆς δοκοῦ, διὰ τοῦτο ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὰ διάφορα τεμάχια, τὰ ἀποτελοῦντα τὴν ὀπλισμένην δοκόν, δὲν δύνανται νὰ ὑποφέρωσι θλίψεις καὶ ἐφελκυσμούς ἴσους τοῖς ὑπὸ τῆς θεωρίας παρεχομένοις.

Παρατήρησις 2. Αἱ ὀπλισμέναι σιδηραὶ δοκοὶ κατασκευάζονται συνήθως παρὰ τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ ἢ χειμάρρου καὶ πλησίον τῆς θέσεως, ἔνθα πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἡ γέφυρα, μετὰ δὲ τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς κατασκευῆς αὐτῶν κυλίσονται διὰ καταλλήλων ὀργάνων ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 129, καὶ τοποθετοῦνται ἐπὶ τῆς ὀρισθείσης ἐκάστη θέσεως. Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὸν χρόνον τῆς τοποθετήσεως ἐκάστης δοκοῦ, μέχρις οὗ τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων φθάσῃ ἐπὶ τοῦ μεσαίου βοηθητικοῦ στηρίγματος Ε καὶ τοῦ ἄκρου Γ, μέγα μέρος αὐτῆς μένει ἀναγκάτως κρεμασμένον, πάντα τὰ τεμάχια τοῦ κρεμασμένου τμήματος αὐτῆς θέλουσιν ὑπὸκεισθαι εἰς τὴν



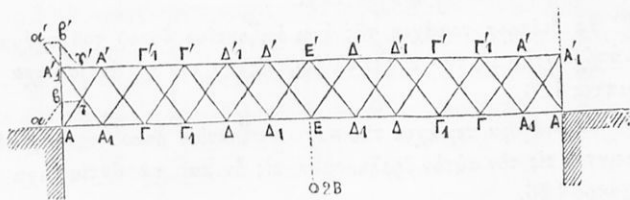
Σχ. 129

ἐνέργειαν δυνάμεων ἀλλοίων τῶν υπολογισθεῖσων διὰ τὴν ὀριστικὴν θέσιν τῆς δοκοῦ. Οὕτω λόγου χάριν ἐν τῇ ὑπὸ τοῦ σχήματος 129 παριστωμένῃ θέσει ἡ μὲν ἄνω ὀριζοντία δοκὸς θὰ ὑπόκηται εἰς ἐφελκυσμὸν, ἐνῶ ὑπελογίσθη ὡς ὑποκειμένη εἰς θλίψιν, καὶ ἡ κάτω ὀριζοντία δοκὸς θὰ ὑπόκηται εἰς θλίψιν, ἐνῶ ὑπελογίσθη ὡς ὑποκειμένη εἰς ἐφελκυσμὸν. Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πάντα τὰ τεμάχια τῆς δοκοῦ πρέπει νὰ ἀποτελῶνται ἐκ καθαροῦ σιδήρου καὶ οὐχὶ τὰ μὲν εἰς ἐφελκυσμὸν ὑποκείμενα ἐν τῇ ὀριστικῇ θέσει τῆς δοκοῦ νὰ ἀποτελῶνται ἐκ καθαροῦ σιδήρου, τὰ δὲ εἰς θλίψιν ἐκ χυτοσιδήρου, διότι, ὡς προείπομεν, κατὰ τὸν χρόνον τῆς τοποθετήσεως τῆς δοκοῦ τὰ ἐκ χυτοσιδήρου τεμάχια θὰ ὑποβληθῶσιν εἰς ἐφελκυσμὸν καὶ ὡς ἐκ τούτου κινδυνεύουσι νὰ θλασθῶσι.

Ἐπειδὴ συνέβη πολλάκις ἕνεκα τῆς μεταβολῆς ταύτης τῶν ἐνεργειῶν τῶν δυνάμεων πολλαὶ σιδηραὶ δοκοὶ κατὰ τὸν χρόνον τῆς τοποθετήσεως αὐτῶν νὰ ὑποστῶσι σπουδαίας ἀλλοιώσεις, ὅχι μόνον πρέπει νὰ καταβάλληται μεγάλη προσοχὴ κατὰ τὴν τοποθέτησιν αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ τὰ μέρη ἐκάστης νὰ κατασκευάζωνται στερεώτερα.

Παρατήρησις 3. Εἰς τὸ σχῆμα 128 ἡ ἀντίδρασις Β ἀποσυνετέθη εἰς δύο συνιστώσας ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α καὶ οὐχὶ ὡς πρὸς τὸ Α', διότι εἰς μὲν τὸ Α ὑπάρχουσιν αἱ ῥάβδοι ΑΓ καὶ ΑΓ' ἵνα ἐξουδετερώσωσι τὴν ἐνέργειαν αὐτῆς, ἐνῶ εἰς τὸ Α' ὑπάρχει μόνον ἡ ΑΓ' ῥάβδος, ἡ δὲ διαγώνιος Α'Γ' λείπει.

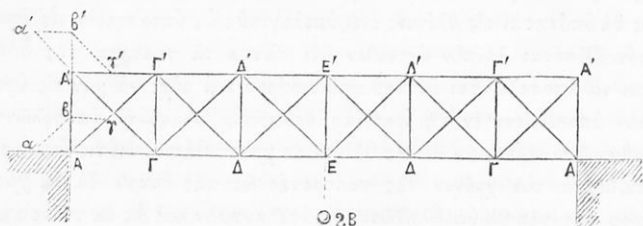
180. Τὰ σχήματα 130 καὶ 131 παριστῶσιν ἄλλους τρόπους κατασκευῆς ὠπλισμένης δοκοῦ. Τὸ σχῆμα 130 παριστᾷ τὸ σύμπλεγμα δύο



Σχ. 130

ὠπλισμένων δοκῶν ὁμοίων ταῖς ὑπὸ τοῦ σχήματος 126 παριστωμέναις. Διότι, ἂν διχάσωμεν κατὰ μῆκος τὴν δοκὸν τοῦ σχήματος 126 θέλομεν σχηματίσει δύο ὅμοια σχήματα, ἔχοντα πᾶχος τὸ ἕμισυ τοῦ ἀρ-

χικοῦ, ἐάν δὲ ἀντιστρέψωμεν τὸ ἐν τούτων καὶ ἐνώσωμεν τὴν κάτω δοκὸν αὐτοῦ μὲ τὴν ἄνω τοῦ ἐτέρου καὶ τὴν ἄνω τοῦ πρώτου μὲ τὴν κάτω τοῦ δευτέρου, θέλομεν ἀποτελέσει τὴν ὑπὸ τοῦ σχήματος 430 παριστωμένην ὠπλισμένην δοκόν.



Σχ. 431

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ σχῆμα τῆς ὠπλισμένης δοκοῦ 431 παράγεται ἐκ τοῦ διχασμοῦ κτλ. τοῦ σχήματος 428. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζομεθα λοιπὸν τὰ ἑξῆς.

1^{ον} Οἱ σύνδεσμοι ΑΑ', Α₁Γ₁', ΓΓ' κτλ. τοῦ σχήματος 430, οἱ ἐκαστέρωθεν τοῦ μέσου Ε τῆς δοκοῦ καίμενοι, ὑπόκεινται εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως $\frac{B}{2 \sin \psi}$, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δυνάμεως, τῆς θλιβούσης τοὺς ΑΑ', ΓΓ' κτλ. συνδέσμους τοῦ σχήματος 426.

2^{ον} Οἱ σύνδεσμοι Α₁Α₁, Α'Γ, Γ₁'Γ₁ κτλ. τοῦ σχήματος 430, οἱ ἐκαστέρωθεν τοῦ μέσου Ε καίμενοι, ὑπόκεινται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς δυνάμεως $\frac{B}{2 \sin \psi}$, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δυνάμεως, τῆς ἐφελκυσμένης τοὺς συνδέσμους τοῦ σχήματος 426.

3^{ον} Τὰ διάφορα τεμάχια τῆς ἄνω ὀριζοντίου δοκοῦ τοῦ σχήματος 430 ὑπόκεινται εἰς τὴν αὐτὴν θλίψιν, εἰς ἣν καὶ τὰ ἀντίστοιχα τοῦ σχήματος 426.

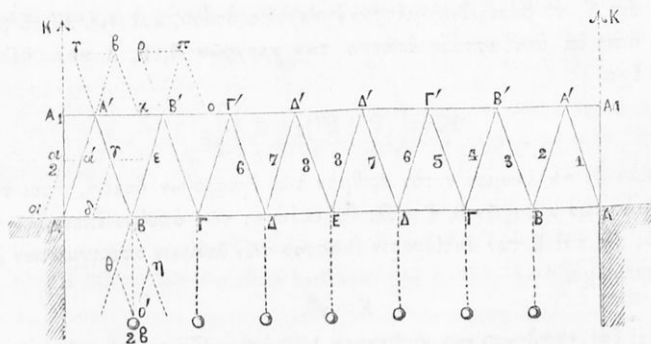
4^{ον} Τὰ διάφορα τεμάχια τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ τοῦ σχ. 430 ὑπόκεινται εἰς τὸν αὐτὸν ἐφελκυσμὸν, εἰς ὃν καὶ τὰ ἀντίστοιχα τοῦ σχήματος 426.

5^{ον} Τὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ περὶ τῶν σχημάτων 434 καὶ 430.

Παρατήρησις 4. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὅτι αἱ ἐγκάρσιαι τομαὶ τῶν μὲν πλαγίων καὶ καθέτων συνδέσμων τῶν σχημάτων 430 καὶ 434

θέλουσιν εἶναι τὰ ἥμισυ τῶν ἐγκαρσίων τομῶν τῶν σχημάτων 126 καὶ 128, τῶν δὲ ὀριζοντίων αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τῶν ὀριζοντίων τῶν σχημάτων 126 καὶ 128. Ἐπομένως τὸ ὀλικὸν βάρος ἢ ὁ ὀλικὸς ὄγκος, τῆς κατὰ τὰ σχήματα 126 καὶ 128 σιδηρᾶς ἢ ξυλίνης ὀπλισμένης δοκοῦ θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τῶν κατὰ τὰ σχήματα 130 καὶ 131 ὀπλισμένων δοκῶν. Ἐκ τούτου λοιπὸν ἔπεται ὅτι ἡ μὲν δαπάνη διὰ τὴν προμήθειαν τῆς ὕλης ἔσεται ἡ αὐτὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς ὀπλισμένας δοκοῦς, ἡ δὲ δαπάνη τῆς κατασκευῆς τῶν δοκῶν κατὰ τὰ σχήματα 130 καὶ 131 ἔσεται μεγαλειτέρα τῆς ἀπαιτηθησομένης διὰ τὰς κατὰ τὰ σχήματα 126 καὶ 128 ὀπλισμένας δοκοῦς. Ὡστε ἐν συνόλῳ ἡ δαπάνη τῆς κατασκευῆς δοκῶν κατὰ τὰ σχήματα 130 καὶ 131 θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀπαιτηθησομένης δαπάνης διὰ τὴν κατασκευὴν δοκῶν κατὰ τὰ σχήματα 126 καὶ 128, τῆς στερεότητος ἀμφοτέρων οὗσης τῆς αὐτῆς.

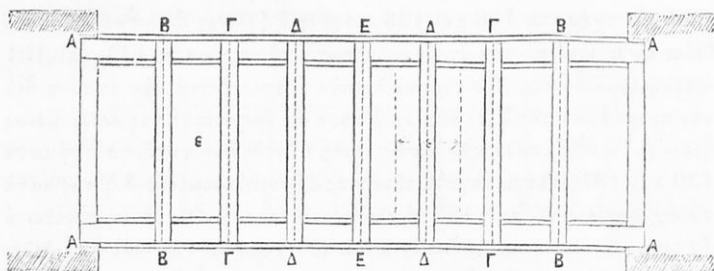
181. Αἱ μέχρι τοῦδε δι' ὀπλισμένων δοκῶν κατασκευασθεῖσαι καὶ κατασκευαζόμεναι γέφυραι ἔχουσιν συνήθως τὴν ὑπὸ τῶν σχημάτων 132 καὶ 133 δεικνυομένην διάταξιν, ὧν τὸ μὲν 132 παριστᾷ τὴν πρόοψιν τῆς γεφύρας, τὸ δὲ 133 τὴν κάτοψιν αὐτῆς. Ὡς δὲ ἐκ τοῦ



Σχ. 132

σχήματος τῆς κατόψεως (Σχ. 133) φαίνεται ἡ γέφυρα ἀποτελεῖται ἐκ δύο κατὰ μῆκος δοκῶν ΑΑ, ΑΑ, σιδηρῶν μὲν, ὅταν πρόκηται περὶ σιδηρᾶς γεφύρας, ξυλίνων δέ, ὅταν πρόκηται περὶ ξυλίνης καὶ ἐξ ἐγκαρσίων δοκῶν ΒΒ, ΓΓ κτλ. σιδηρῶν ἢ ξυλίνων, ἐφ' ὧν ἐπιτίθεται καὶ στερεῶς προσηλωταὶ τὸ κατὰστρωμα τῆς γεφύρας, ὅπερ συνήθως εἶναι

ξύλινον, ἐνίοτε δὲ κατασκευάζεται καὶ ἐξ ὀπτῶν πλίνθων, ἀποτελουσῶν μικρὰς ἀψίδας ἐφ' ὧν ἐπιστρώνονται σκύρα καὶ ἀποτελεῖται στρώμα ὅμοιον τῷ τῶν κοινῶν ὁδῶν.



ΣΧ. 133

Τούτων τεθέντων, πρὸς εὐρεσιν τῶν ἐφ' ἐκάστου τεμαχίου τῆς ὀπλισμένης δοκοῦ 132 καὶ 133 ἐνεργουσῶν δυνάμεων παριστῶμεν διὰ λ τὸ μῆκος τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, ἥτοι τὸ πλάτος τῆς γεφύρας, δι' ε τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν δύο συνεχῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, διὰ ϵ' τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον βάρος τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας, διὰ ϵ'' τὸ πρόσθετον βάρος τὸ καλούμενον καὶ βάρος τῆς δοκιμῆς, καὶ διὰ ϵ_3 τὸ βάρος ἐνὸς μέτρου ἐγκαρσίου δοκοῦ, καὶ διὰ 2ϵ τὸ βάρος, ὅπερ θὰ ὑποβαστάζῃ ἐκάστη τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ κτλ. θέλομεν ἔχει

$$2\epsilon = \left((\epsilon' + \epsilon'')\epsilon + \epsilon_3 \right) \frac{\lambda}{2}.$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν ν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν Β, Γ κτλ. ἐφ' ἐκάστης τῶν ὁποίων ἐπενεργεῖ τὸ βάρος 2ϵ , καὶ K τὴν ἀντίδρασιν ἐκάστου τῶν λιθίνων στηριγμάτων Α, θέλομεν ἔχει

$$K = \nu\epsilon.$$

Καὶ ἐπὶ τῆς δοκοῦ τοῦ σχήματος 132 ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν, ἣν καὶ ἐπὶ τῆς δοκοῦ τοῦ σχήματος 126, πορίζομεθα τὰ ἑξῆς.

4^{ον} Ἡ δύναμις $Ax_2 = K$ ἀποσυντίθεται εἰς δύο συνιστώσας, τὰς Ax καὶ Ax' κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δοκῶν ΒΑ καὶ ΑΑ'. Καὶ ἡ μὲν $Ax = K$ ἐφ' ὧν ἐφελκύνει τὴν κορυφὴν Α, ἡ δὲ $Ax' = \frac{K}{\sin \psi}$ θλίβει τὴν δοκὸν ΑΑ'.

2^{ον} Ἡ συνιστώσα Αα' διὰ τῆς δοκοῦ ΑΑ' ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ συνδέσμου τῆς κορυφῆς Α', ἵνα δὲ ἐξουδετερωθῇ, πρέπει τὰ τεμάχια Α'Β' καὶ Α'Β νὰ παρέχῃσι τὰς ἀπαιτούμενας ἀντιδράσεις. Ἐπομένως ἡ Αα' ἢ ἡ ἴση αὐτῇ Α'β ἀποσυντίθεται εἰς δύο συνιστώσας, τὰς Α'γ καὶ Α'κ, ὧν ἡ Α'γ = Α'β = $\frac{K}{\text{συν } \psi}$ ἐφελκύνει τὴν ῥάβδον Α'Β, ἡ δὲ Α'κ = 2Κ ἐφ' ὅθι θλίβει τὴν Α'Β'.

3^{ον} Τὸ βάρος 2β, τὸ ἐνεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον Β, ἀποσυντίθεται εἰς δύο ἴσας συνιστώσας, τὰς Βη καὶ Βθ, ὧν ἡ τιμὴ εὐρίσκεται διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων Βηθδ, ἐξ οὗ πορίζομεθα

$$Βη : Βδ = \eta \mu. \psi : \eta \mu. \varphi,$$

ἢ

$$Βη : 2β = \eta \mu. \psi : \eta \mu. 2\psi,$$

ἢ

$$Βη : 2β = \eta \mu. \psi : 2\eta \mu. \psi \text{ συν } \psi$$

ἐπομένως

$$Βη = \frac{2β \eta \mu. \psi}{2 \eta \mu. \psi \text{ συν } \varphi} = \frac{β}{\text{συν } \psi}$$

4^{ον} Ὁ σύνδεσμος Β τοῦ τεμαχίου Α'Β ὑπόκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς δυνάμεως Α'γ — Βη = Βγ = $\frac{K}{\text{συν } \psi} - \frac{β}{\text{συν } \psi} = \frac{\nu β - β}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu - 1)β}{\text{συν } \psi}$.

5^{ον} Ἡ Βγ = $\frac{(\nu - 1)β}{\text{συν } \psi}$, ἡ ἐφελκύνουσα τὴν κορυφὴν Β τοῦ συνδέσμου Α'Β, ἀποσυντίθεται εἰς δύο συνιστώσας, τὰς Βδ καὶ Βε, ὧν αἱ τιμαὶ προσδιορίζονται διὰ τοῦ παραλληλογράμμου Βεγδ τῶν δυνάμεων, ἐξ οὗ πορίζομεθα

$$Βε = Βγ = \frac{(\nu - 1)β}{\text{συν } \psi} \quad \text{καὶ} \quad Βδ = 2(\nu - 1)β \text{ ἐφ } \psi$$

6^{ον} Ἡ Βδ = 2(ν - 1)β ἐφ' ὅθι ἐφελκύνει τὴν ῥάβδον ΒΑ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α, προστιθεμένης δὲ καὶ τῆς ἐτέρας ἐφελκυστικῆς δυνάμεως Αα, θέλομεν εὑρεῖν ὅτι ἡ ὅλική δύναμις, ἡ ἐφελκύνουσα τὴν ῥάβδον ΒΑ, εἶναι ἴση μὲν νβ ἐφ' ὅθι + 2(ν - 1)β ἐφ' ὅθι = (3ν - 2)β ἐφ' ὅθι.

7^{ον} Ἡ συνιστώσα Βε ἐλαττουμένη κατὰ Βθ, ἥτις εἶναι μία τῶν συνιστωσῶν τοῦ βάρους 2β, πιέζει τὴν ῥάβδον ΒΒ'. Ὡστε ἡ δύναμις, ἡ θλίβουσα τὴν ῥάβδον ΒΒ', εἶναι ἴση μὲν τὴν $\frac{(\nu - 1)β}{\text{συν } \psi} - \frac{β}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu - 2)β}{\text{συν } \psi}$.

8^{ον} Ἡ δύναμις Βε — Βθ = Β'π = $\frac{(\nu - 2)β}{\text{συν } \psi}$ μεταφερομένη εἰς τὴν κο-

ρυφήν Β' ἀποσυντίθεται εἰς δύο συνιστώσας, τὰς Β'ρ καὶ Β'ο, ὧν αἱ τιμαὶ προσδιορίζονται διὰ τοῦ παραλληλογράμμου Β'οπρ τῶν δυνάμεων, ἐξ οὗ πορίζομεθα

$$B'ρ = B'π = \frac{(ν-2)ε}{\text{συν } ψ} \quad \text{καὶ} \quad B'ο = 2(ν-2)ε \epsilon\phi\psi$$

Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν συλλογισμῶν μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν κορυφήν Ε, ἥτις εἶναι τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, καὶ ἀριθμοῦντες κατὰ τάξιν τοὺς κεκλιμένους συνδέσμους, ὡς δεικνύει τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Ε (Σχ. 132) ἤμισυ τεμάχιον, ἐξάγομεν τὰ ἐξῆς ἐξαγόμενα.

Α'ν Θλίψεις τῶν κεκλιμένων ῥάβδων τῶν παραλλήλων τῇ ΑΑ', τῶν κατεχουσῶν θέσεις περιττὰς

ἐπὶ τῆς	ΑΑ',	$\frac{K}{\text{συν } \psi} = \frac{\nu\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	BB',	$\frac{K-2\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-2)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	ΓΓ',	$\frac{K-4\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-4)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	ΔΔ',	$\frac{K-6\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-6)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	»	»
ἐπὶ τῆς ι δοκοῦ		$\frac{K-(i-1)\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-(i-1)\epsilon)}{\text{συν } \psi}$

Β'ν Ἐφελκυσμοὶ τῶν παραλλήλων τῇ Α'Β ῥάβδων, τῶν κατεχουσῶν τάξεις ἀρτίας

ἐπὶ τῆς	Α'Β,	$\frac{K}{\text{συν } \psi} = \frac{\nu\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	Β'Γ,	$\frac{K-2\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-2)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	Γ'Δ,	$\frac{K-4\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-4)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	Δ'Ε,	$\frac{K-6\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-6)\epsilon}{\text{συν } \psi}$
»	»	»
ἐπὶ τῆς ι δοκοῦ,		$\frac{K-(i-2)\epsilon}{\text{συν } \psi} = \frac{(\nu-(i-2)\epsilon)}{\text{συν } \psi}$

Γ^{ον} Θλίψεις τῶν διαφόρων τεμαχίων τῆς ἄνω ὀριζοντίου δοκοῦ.

$\varepsilon\pi_i$	$\tau\sigma\bar{u}$	$A'B',$	$2K \varepsilon\varphi\psi = 2\nu\beta \varepsilon\varphi\psi$
»	»	$B'\Gamma',$	$4(K-\beta) \varepsilon\varphi\psi = 4(\nu-1)\beta \varepsilon\varphi\psi$
»	»	$\Gamma'\Delta',$	$6(K-2\beta) \varepsilon\varphi\psi = 6(\nu-2)\beta \varepsilon\varphi\psi$
»	»	$\Delta'\Delta',$	$8(K-3\beta) \varepsilon\varphi\psi = 8(\nu-3)\beta \varepsilon\varphi\psi$
»	»	»	»
»	»	»	»

ἐπὶ τοῦ τεμαχίου ι, τῆς ἀριθμήσεως ἀρ-
χομένης ἐκ τοῦ ἐνὸς τῶν δύο ἄκρων Α καὶ } = 2ι(ν - ι + 1)β ἐφ ψ
βαινούσης πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ

Δ^{ον} Ἐφελκυσμοὶ τῶν διαφόρων τεμαχίων τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ.

ἐπὶ τοῦ	AB,	$K \varepsilon \varphi \psi = \nu \beta \varepsilon \varphi \psi$
»	BΓ,	$(3K - 2\beta) \varepsilon \varphi \psi = (3\nu - 2)\beta \varepsilon \varphi \psi$
»	ΓΔ,	$(5K - 8\beta) \varepsilon \varphi \psi = (5\nu - 8)\beta \varepsilon \varphi \psi$
»	ΔΕ,	$(7K - 18) \varepsilon \varphi \psi = (7\nu - 18)\beta \varepsilon \varphi \psi$
»	»	»
»	»	»

ἐπὶ τοῦ τεμαχίου ι, τῆς ἀριθμήσεως
ἀρχομένης ἐκ τοῦ ἐνὸς τῶν δύο ἄκρων } = [ν + 2(ι - 1)](ν - ι + 1)β ἐφ ψ
καὶ βαινούσης πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ

Παρατήρησις 1. Παραβάλλοντες τὰς θλιβούσας τὰς παραλλήλους τῇ ΑΑ' ῥάβδους δυνάμεις πρὸς τὰς ἐφελκυσούσας τὰς παραλλήλους τῇ Α'Β, βλέπομεν ὅτι αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς ἄνω ὀριζοντίου δοκοῦ, εἶναι ἴσαι· παραδείγματος χάριν, ἡ θλιβούσα τὴν πλευρὰν Α'Α εἶναι ἴση τῇ ἐφελκυσούσῃ τὴν Α'Β. Πρὸς τούτοις δὲ βλέπομεν ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται βαίνουσιν ἐλαττούμεναι καθόσον ἡ ἐφ' ἧς ἐνεργοῦσι ῥάβδος πλησιάζει πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ.

Παρατήρησις 2. Καλοῦντες υ τοῦ ὕψους ΑΑ τῆς δοκοῦ καὶ 2μ τὸ μῆκος αὐτῆς, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$\text{ἐφ } \psi = \frac{\frac{1}{2} AB}{\nu} = \frac{2\mu}{2(\nu+1)} = \frac{\mu}{(\nu+1)\nu}$$

Τὴν τιμὴν δὲ ταύτην τῆς ἐφ' ὅσοντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω γενικοὺς τύπους $2i(v-i+1)\epsilon$ ἐφ' ὅσον, $[v+2(i-1)](v-i+1)\epsilon$ ἐφ' ὅσον, τοὺς παριστῶντας τὴν θλίψιν καὶ τὸν ἐφελκυσμὸν τῶν ὀριζοντίων δοκῶν, οὗτοι γίνονται, ὁ μὲν πρῶτος

$$2i(v-i+1)\epsilon \frac{\mu}{(v+1)u} \quad (\alpha'),$$

ὁ δὲ δεύτερος

$$[v+2(i-1)](v-i+1)\epsilon \frac{\mu}{(v+1)u} \quad (\beta'),$$

ἐξ ὧν πορίζομεθα τὴν θλίψιν ἢ τὸν ἐφελκυσμὸν, ὃν ὑποφέρει τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, θέτοντες ἐν αὐτοῖς ἀντὶ τοῦ i τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{v+1}{2}$.

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (α') καὶ (β') ἀντὶ τοῦ i τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{v+1}{2}$ θέλομεν ἔχει

$$2i(v-i+1)\epsilon \frac{\mu}{(v+1)u} = \frac{v+1}{2} \epsilon \frac{\mu}{u} \quad (\gamma')$$

$$[v+2(i-1)](v-i+1)\epsilon \frac{\mu}{(v+1)u} = \left(\frac{v+1}{2} - \frac{1}{v+1} \right) \epsilon \frac{\mu}{u} \quad (\delta')$$

Οἱ τύποι (γ') καὶ (δ') δεικνύουσιν, ὅτι ἡ θλίψις καὶ ἡ ἑλξις, αἱ ἐνεργούσαι εἰς τὰ μέσα τῆς ἄνω καὶ κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ, τείνουσι νὰ κατασταθῶσιν ἴσαι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς v βαίνει αὐξάνων. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ θλίψις, ἡ ἐνεργούσα εἰς τὸ μέσον τῆς ἄνω δοκοῦ A_1A_2 (Σχ. 132), ὡς καὶ ὁ ἐφελκυσμὸς, ὁ ἐνεργὼν εἰς τὸ μέσον τῆς κάτω δοκοῦ $\Lambda\Lambda$, παρίστανται διὰ τοῦ τύπου

$$\frac{v+1}{2} \epsilon \frac{\mu}{u} \quad (\epsilon'),$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ K παρεστήσαμεν τὴν ἀντίδρασιν ἐκάστου τῶν δύο στηριγμάτων, θέλομεν ἔχει

$$K = v\epsilon$$

ἢ

$$K = \mu\epsilon = v\epsilon,$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ αὐτὴ ἀντίδρασις παρίσταται καὶ διὰ τοῦ $\mu\epsilon$.

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν τύπον (ε') ἀντὶ τοῦ $v\epsilon$ τὸ ἴσον αὐτῷ $\mu\epsilon$, μετασχηματίζομεν τοῦτον εἰς τὸν ἑξῆς

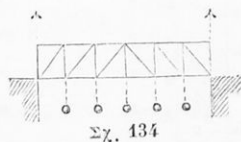
$$\frac{(\mu+1)\epsilon}{2} \cdot \frac{\mu}{u} \quad (\zeta').$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\frac{\mu}{2}$ ἐλίγον διαφέρει τοῦ $\frac{\mu+1}{2}$, ὅταν τὸ μ ᾖναι μέγα, διὰ τοῦτο ἀντὶ τοῦ τύπου (ζ') δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα τὸν τύπον (ζ') πρὸς προσδιορισμὸν ἢ τῆς θλίψεως ἢ τοῦ ἐφελκυσμοῦ, ὃν ὑποφέρει τὸ μέσον μιᾶς τῶν δύο ὀριζοντίων δοκῶν A_1A_1 ἢ AA (Σχ. 132), τοὔτεστι τὸν ἐξῆς

$$\frac{\mu\sigma}{2} \cdot \frac{\mu}{2} = \frac{\mu^2\sigma}{2\upsilon} \quad (\zeta').$$

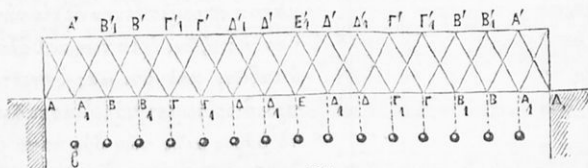
Ἀλλ' ἡ ποσότης $\frac{\mu^2\sigma}{2}$ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (ζ') παριστᾷ τὴν ῥοπήν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, τὸ δὲ $\frac{2}{\upsilon}$, ἥτοι τὸ πρῶτον μέλος τοῦ ἀνωτέρω τύπου (ζ'), τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς AA εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἢ τὴν θλίψιν τῆς A_1A_1 , συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ἐνταῦθα ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ὅ,τι εἵπομεν εἰς τὰς παρατηρήσεις 1 καὶ 2 τῆς παραγράφου 177.

182. Τὰ ἐν τῇ ἀνωτέρω παραγράφῳ λεχθέντα διὰ τὴν κατὰ τὸ σχῆμα 132 ὥπλισμένην δοκὸν ἐφαρμόζονται ἀπαρallάκτως καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ σχῆμα 134 ὥπλισμένης δοκοῦ.



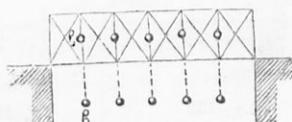
Σχ. 134

183. Τὰ σχήματα 135 καὶ 136 παριστῶσιν ἑτέρας διατάξεις ὥπλι-



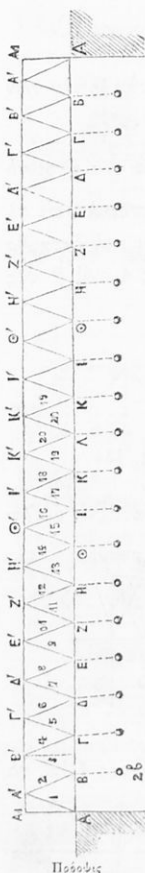
Σχ. 135

σμένων δοκῶν. Καὶ τὸ μὲν 135 παράγεται ἐκ τοῦ σχήματος 132, τὸ δὲ 136 ἐκ τοῦ 134 ἀπαρallάκτως ὅπως τὰ σχήματα 130 καὶ 134 παρήχθησαν ἐκ τῶν σχημάτων 126 καὶ 128. Ἐπομένως ὅσα εἵπομεν ἐν τῇ § 180 περὶ τῶν σχημάτων 130 καὶ 131 ἐφαρμόζονται καὶ ἐνταῦθα ἐπὶ τῶν σχημάτων 135 καὶ 136.



Σχ. 136

184. Αἱ κατὰ τὸ ἀμερικανικὸν σύστημα ὠπλισμένοι δοκοὶ εἶναι κατὰλληλοι διὰ ξυλίνας γεφύρας, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς θεωρίας τούτων εἵπομεν, ἀλλ' ὅχι καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν σιδηρῶν γεφυρῶν, διότι ἀφ' ἐνὸς ἐκ πειραμάτων ἐκτελεσθέντων ὑπὸ τοῦ Γάλλου στρατηγοῦ Μοραὶν ἀπεδείχθη ὅτι αἱ ὠπλισμένοι δοκοὶ κάμπτονται περισσότερον ἢ αἱ πλήρεις, αἱ ἔχουσαι μῆκος μὲν τὸ τῶν ὠπλισμένων, τομὴν δὲ διπλοῦν ταῦ,



Σχ. 137



Σχ. 138

καὶ ὑποκείμεναι εἰς τὴν ἐνέργειαν τῶν αὐτῶν δυνάμεων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι οὐδεμία οἰκονομία ὕλης γίνεται διὰ τῆς χρήσεως ὠπλισμένων κατὰ τὸ ἀμερικανικὸν σύστημα δοκῶν ἀντὶ δοκῶν τομῆς διπλοῦ ταῦ.

Ἵνα καταδείξωμεν τοῦτο ἐναργέστερον εἰς τοὺς πρωτοπείρους, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ κατασκευάσωμεν σιδηρὰν γέφυραν ἀνοίγματος 20 μέτρων καὶ πλάτους 5, ἀποτελεσθησομένην ἐκ δύο κατὰ μῆκος δοκῶν, ἐξ ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν καὶ ἐκ ξυλίνου καταστρώματος, προωρισμένην δὲ εἰς τὴν διάθασιν πεζῶν, ἐφίππων καὶ ἐλαφρῶν ἀμαξῶν, καὶ ὅτι μᾶς ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις καὶ τὸ βάρος μιᾶς τῶν δύο κατὰ μῆκος δοκῶν, κατασκευαζομένης ταύτης εἴτε ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 137 εἴτε πλήρους τομῆς διπλοῦν ταῦ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 139.

1^{ον} Εὗρεσις τοῦ βάρους τῆς ὠπλισμένης δοκοῦ κατὰ τὸ σχῆμα 137 καὶ 138.

Πρὸς εὗρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ὠπλισμένης ταύτης δοκοῦ, ἥς τὸ μὲν μῆκος εἶναι 20 μέτρων, τὸ δὲ ὕψος 1 μέτρον, πρέπει προηγου-

μένως νὰ εὕρωμεν τὰς δυνάμεις, τὰς ἐνεργούσας ἐφ' ἐκάστου τεμαχίου αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο δὲ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σταθερὸν βᾶρος τῆς γεφύρας ταύτης, τουτέστι τὸ βᾶρος τῶν σιδηρῶν ἐγκαρσίων δοκῶν καὶ τοῦ ξυλίνου καταστρώματος αὐτῆς, εἶναι 300 χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ καταστρώματος, τὸ δὲ πρόσθετον βᾶρος, τουτέστι τὸ τῶν πεζῶν, ἐφίππων, ἐλαφρῶν ἀμαξῶν εἶναι 200 χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον, πρὸς δὲ ὅτι ἐκατέρα τῶν κατὰ μῆκος δύο δοκῶν θέλει ὑποβαστάζει τὸ ἥμισυ βᾶρος τῆς γεφύρας.

Ἐπειδὴ ἡ δοκὸς διηρέθη εἰς εἴκοσι ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ 4 μέτρον, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$2\mu = 20 \text{ μέτρα}$$

$$\nu = 19, 2\beta = (300 + 200)2,50 = 1250 \chi^{\lambda}$$

$$\epsilon\phi\psi = \frac{\mu}{(\nu+1)\nu} = \frac{40}{(19+1)1,00} = 0^{\chi},50$$

$$\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{4}{\sqrt{4+\epsilon\phi^2\psi}} = \frac{4}{\sqrt{4+0,5^2}} = 0^{\chi},89.$$

Ἐφαρμόζοντες δὲ ἐνταῦθα τοὺς γνωστοὺς τύπους τῆς παραγράφου 484 εὐρίσκομεν τὰς δυνάμεις, τὰς ἐνεργούσας ἐφ' ἐκάστου τῶν κατὰ τάξιν ἡριθμημένων τεμαχίων τοῦ σχ. 137.

Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰ εὐρεθησόμενα ἐξαχγόμενα.

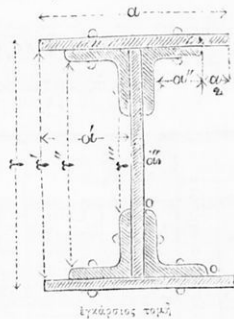


Fig. 139

Fig. 139

ΠΙΝΑΞ

Περιέχων τὰς δυνάμεις, τὰς ενεργούσας ἐφ' ἐκάστου τεμαχίου
τῆς κατὰ τὸ σχῆμα 437 ὡπλισμένης δοκοῦ.

Αὐξὼν ἀριθμὸς	Τὰ διαφύρα τεμαχία	Τεμαχία παρὰλληλα		Αὐξὼν ἀριθμὸς	Διάφύρα τεμαχία τῆς ἀνω ὀριζοντίου δοκοῦ	Θλίψεις ἅς ἐπιφέρουσι τὰ διαφύρα τεμαχία τῆς ἀνω ὀριζοντίου δοκοῦ	Διάφύρα τεμαχία τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ	Ἐφελκυσμοί, οὓς ὑποφέρουσι τὰ διαφύρα τεμαχία τῆς κάτω ὀριζοντίου δοκοῦ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
		ΑΑ'	Α'Β						
		ὑποκείμενα εἰς θλίψιν	ὑποκείμενα εἰς ἐφελκυσμὸν						
		ἐφαρμοστέοι τύποι							
		$(n-i+1)\delta$ συν ψ	$(n-i+2)\delta$ συν ψ			$2i(n-i+1)\delta\epsilon\phi\psi$		$i(n-i+1)\delta\epsilon\phi\psi$	
		χ	χ			χ	χ		
1	ΑΑ'	13342		1	Α'Β'	41875	ΑΒ	5937	Ὁ πῖναξ οὗτος περιέχει τὰς δυνάμεις τὰς ενεργούσας ἐπὶ τοῦ ημίσεως μόνον τῆς δοκοῦ, ἥτοι ἀπὸ τοῦ ακροῦ Α μέχρι τοῦ μ. Ἀτῆς δοκ., διότι ἕνεκα τῆς συμμετρίας αἱ αὐτὰι δυνάμεις ἐνεργοῦσι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐτέρου ημίσεως κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰξιν. Ὁ αὐτὸς πῖναξ δεικνύει ὅτι ἡ θλίψις ἢ ενεργούσα ἐπὶ τοῦ μέσου τεμαχίου Κ'Κ' τῆς ἀνω δοκοῦ δειναισχεδόν ῥη μετὸν ἐφελκυσμὸν τὸν ενεργούντα ἐπὶ τῷ μέσῳ Λ τῆς κάτω δοκοῦ.
2	Α'Β		13342	2	Β'Γ'	22500	ΒΓ	47187	
3	ΒΒ'	11938		3	Γ'Δ'	31875	ΓΔ	27187	
4	Β'Γ		11938	4	Δ'Ε'	40000	ΔΕ	33937	
5	ΓΓ'	10333		5	Ε'Ζ'	46873	ΕΖ	43437	
6	Γ'Δ		10333	6	Ζ'Η'	52300	ΖΗ	49686	
7	ΔΔ'	9129		7	Η'Θ'	56873	ΗΘ	54687	
8	Δ'Ε		9129	8	Θ'Ι'	60000	ΘΙ	58437	
9	ΕΕ'	7724		9	Ι'Κ'	61875	ΙΚ	60937	
10	Ε'Ζ		7724	10	Κ'Κ'	62300	ΚΛ	62187	
11	ΖΖ'	6320							
12	Ζ'Η		6320						
13	ΗΗ'	4913							
14	Η'Θ		4913						
15	ΘΘ'	3511							
16	Θ'Ι		3511						
17	ΙΙ'	2106							
18	Ι'Κ		2106						
19	ΚΚ'	702							
20	Κ'Λ		702						

Τῶν δυνάμεων εὐρεθισῶν, προσδιορίζομεν διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\omega = \frac{\Delta}{P}$ τοῦ ἐφελκυσμοῦ ἢ τῆς θλίψεως τὰς τομὰς τῶν τε κεκλιμένων ῥάβδων καὶ τῶν ὀριζοντίων, λαμβανομένων τούτων ἰσοπαχῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος τῶν κεκλιμένων ῥάβδων 4^η, 118 δὲν εἶναι μέγα, λαμβάνομεν 6 χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας ὡς τιμὴν τοῦ P.

Διαιροῦντες λοιπὸν τὰς δυνάμεις, τὰς περιεχομένας ἐν τῇ 3 καὶ 4 στήλῃ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6, καὶ τὰ οὕτω προκύπτοντα πηλίκα, τὰ παριστῶντα τὰς τομὰς τῶν διαφόρων κεκλιμένων ῥάβδων, πολλαπλασιάζοντες μὲ τὸν ἀριθμὸν 4, 118, τὸν παριστῶντα τὸ μῆκος ἐκάστης κεκλιμένης ῥάβδου, σχηματίζομεν τὸν ἐπόμενον πίνακα, δι' οὗ εὐρίσκομεν τοὺς μερικοὺς ὄγκους αὐτῶν, τὸν ὅλικὸν ὄγκον καὶ τὸ ὅλικόν βάρος τῆς δοκοῦ, πολλαπλασιάζοντες τὸν ὅλικὸν ὄγκον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7800, τὸν παριστῶντα εἰς χιλιόγραμμα τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου καθαροῦ σιδήρου.

Περιέχων τὰς ἐγκάρσιους τομὰς, τοὺς ὄγκους καὶ τὸ βάρος τῆς κατὰ τὸ σχῆμα 157 ὠπλισμένης δοκού

Δύον ἄκρος	Διάφορα καλόμενα τεμάχια	Μήκος ἐκάστου αὐτῶν	Τεμάχια παράλληλα τῆς ΑΑ'		Τεμάχια παράλληλα τῆς Α'Α		Μήκος τῶν ὀριζόντιων δοκῶν	Ἄνω ὀριζόντιος δοκὸς Α ₁ Α ₁		Κάτω ὀριζόντιος δοκὸς ΑΑ	
			ἐγκάρσιος τομὴ εἰς τετραγωνικὰ χιλιοστά	ὄγκος εἰς κυβικὰ μέτρα	ἐγκάρσιος τομὴ εἰς τετραγωνικὰ χιλιοστά	ὄγκος εἰς κυβικὰ μέτρα		ἐγκάρσιος τομὴ εἰς τετραγ. χιλιοστά	ὄγκος εἰς κυβικὰ μέτρα	ἐγκάρσιος τομὴ εἰς τετραγ. χιλιοστά	ὄγκος εἰς κυβικὰ μέτρα
1	ΑΑ'	μ 1,18	$\frac{13342}{6} = 2223$	0,0024853	$\frac{13342}{6} = 2223$	0,0024853	μ 20,00	Α ₁ Α ₁ =		ΑΑ =	
2	Α'Β	»	$\frac{11938}{6} = 1989$	0,0022257	$\frac{11938}{6} = 1989$	0,0022257		$\frac{62500}{6} =$		$\frac{62187}{6} =$	
3	ΒΒ'	»	$\frac{10533}{6} = 1755$	0,001962	$\frac{10533}{6} = 1755$	0,001962		10416	0,20832	10364	0,20728
4	Β'Γ	»	$\frac{9129}{6} = 1521$	0,00170	$\frac{9129}{6} = 1521$	0,00170					
5	ΓΓ'	»	$\frac{7724}{6} = 1287$	0,001438	$\frac{7724}{6} = 1287$	0,001438					
6	Γ'Δ	»	$\frac{6320}{6} = 1053$	0,001177	$\frac{6320}{6} = 1053$	0,001177					
7	ΔΔ'	»	$\frac{4915}{6} = 819$	0,000915	$\frac{4915}{6} = 819$	0,000915					
8	Δ'Ε	»	$\frac{3511}{6} = 585$	0,000654	$\frac{3511}{6} = 585$	0,000654					
9	ΕΕ'	»	$\frac{2106}{6} = 351$	0,000392	$\frac{2106}{6} = 351$	0,000392					
10	Ε'Ζ	»	$\frac{702}{6} = 117$	0,000131	$\frac{702}{6} = 117$	0,000131					
11	ΖΖ'	»									
12	Ζ'Η	»									
13	ΗΗ'	»									
14	Η'Θ	»									
15	ΘΘ'	»									
16	Θ'Ι	»									
17	ΙΙ'	»									
18	Ι'Κ	»									
19	ΚΚ'	»									
20	Κ'Α	»									
ἄθροισμα καὶ διὰ τὸ ἔτιρον ἡμισυ ὀλικὸν ἄθροισμα			0,013078 0,013078 0,026156		0,013078 0,013078 0,026156			0,20832 0,20832 0,41664		0,20728 0,20728 0,41456	
καὶ ὀλικὸν βάρος τῆς δοκού (0,026156 + 0,026156 + 0,41664 + 0,41456) 7800 χιλ. = 6891 χιλιόγραμμα											

2^η Εὑρεσις τοῦ βάρους τῆς πλήρους ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, τῆς ἐχούσης τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ ἐγκάρσιον τομὴν διπλοῦν ταῦ, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 438 καὶ 439.

Πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς πλήρους καὶ ἰσοπαχοῦς δοκοῦ, τῆς ἐχούσης μῆκος καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς ὠπισμένης δοκοῦ τοῦ σχήματος 437, ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον τῆς κάμψεως

$$\frac{Pl}{u} = X \quad (1)$$

Καλοῦντες δὲ α καὶ γ, α' καὶ γ' τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς, τῆς παριστωμένης ἐν τῷ διαγράμματι τοῦ σχήματος 439, παραλείποντες τὴν δύναμιν τῶν γωνιωδῶν συνδέσμων καὶ θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τῶν l, u καὶ X τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{P(\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3)}{6\gamma} = \frac{1}{2}\mu^3\epsilon \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ τὸν τύπον (2) ἀντὶ τῶν P, μ καὶ ε τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{6000000(\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3)}{6\gamma} = \frac{4250 \times 40^3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{\gamma} = \frac{4250 \times 40^3}{2000000} = 0,06250 \quad (4)$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσews (4) δύναται νὰ γείνη κατὰ δύο τρόπους. Κατὰ μὲν τὸν 1^{ον} τρόπον δίδομεν εἰς τὸ α, α' καὶ γ' τιμὰς κατ' ἀρέσκειαν καὶ προσδιορίζομεν τὴν γ, λύοντες τὴν προκύπτουσαν τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον γ. Κατὰ δὲ τὸν 2^{ον} τρόπον δίδομεν εἰς τὸ α καὶ γ, α' καὶ γ' τιμὰς κατ' ἀρέσκειαν καὶ ὑπολογίζομεν τὴν ἀξίαν τοῦ πρώτου μέλους, μέχρις οὗ τοῦτο καταστῇ ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος.

Οἱ μηχανικοὶ ἐφαρμόζουσι συνήθως καὶ κατὰ προτίμησιν τὸν δεῦτερον τρόπον τῆς λύσεως. Τοῦτον δὲ καὶ ἡμεῖς θέλομεν ἐφαρμόσει ἐνταῦθα. Πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν α=0^μ,465, γ=1^μ,00, γ'=0^μ,96 καὶ 2α'=0^μ,450 καὶ ἂς θέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (4). Θέλομεν ἔχει

$$\frac{0,465 \times 4,00^3 - 0,45 \times 0,96^3}{4,00} = 0,06250 \quad (5)$$

μετά δὲ τὴν ἐν τῷ πρώτῳ μέλει ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων ἔχομεν

$$0,066868 = 0,06250 \quad (6)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς προκυψάσης ἰσότητος (6) εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι τιμαὶ τῶν γ, γ', α καὶ 2α' εἶναι ὀλίγον τι μεγαλύτεραι τῶν ζητούμενων, καὶ δυνάμεθα μὲν ἂν θέλωμεν λόγῳ οἰκονομίας νὰ λάβωμεν νέας τιμὰς αὐτῶν ὀλίγον μικρότερας τῶν ἀνωτέρω καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ νέου τὴν ἀξίαν τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως (4), ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (6) δὲν εἶναι κατὰ πολὺν μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου, καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν λύσιν τοιούτων ζητημάτων ὀφείλομεν νὰ ἐπιδιώκωμεν τὴν στερεότητα, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν ὀριστικῶς τὰς ποσότητας $0^{\mu},465$, $4^{\mu},00$, $0^{\mu},45$ καὶ $0^{\mu},96$ ὡς τιμὰς τῶν α, γ, 2α' καὶ γ'.

Τῶν διαστάσεων δὲ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς προσδιορισθεῖσων, τὸ βάρος τῆς δοκοῦ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

1^{ον} Βάρος τῆς δοκοῦ ἄνευ τῶν γωνιωδῶν συνδέσμων

$$(2 \times 0,465 \times 0,02 + 0,96 \times 0,015) 20 \times 7800 = 5148 \text{ κιλ.}$$

2^{ον} Βάρος τῶν τεσσάρων γωνιωδῶν συνδέσμων, τῶν συνδεόντων τὰς δύο ὀριζοντίους πλάκας μετὰ τῆς καθέτου

$$4 \times 0,125 \times 0,01 \times 20 \times 7800 = 780 \text{ κιλ.}$$

Ὅλικόν βάρος τῆς δοκοῦ 5928 κιλ.

Ἐὰν δὲ παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ εὑρεθέντα βάρη τῆς δοκοῦ, βλέπομεν ὅτι τὸ βάρος τῆς πλήρους δοκοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ βάρους τῆς ὠπλισμένης, τοῦθ' ὑπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

185. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος εἰδομεν τίνι τρόπῳ τὰ περὶ ὠπλισμένων δοκῶν λεχθέντα ἐφαρμόζονται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων σιδηρᾶς τινας ὠπλισμένης δοκοῦ, προκειμένου περὶ κατασκευῆς σιδηρᾶς γεφύρας. Ἐν τῇ παραγράφῳ δὲ ταύτῃ θέλωμεν ἰδεῖν τίνι τρόπῳ δυνάμεθα διὰ τῆς αὐτῆς θεωρίας τῶν ὠπλισμένων

δοκῶν νὰ εὐρωμεν τὰς διαστάσεις τῶν διαφόρων μερῶν μιᾶς τῶν δύο κατὰ μῆκος δοκῶν ξυλίνης τινὸς γεφύρας.

Πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ χειμάρρου τινὸς ξυλίνην γέφυραν μῆκους 20 μέτρων καὶ πλάτος 5,00, προωρισμένην εἰς τὴν διάβασιν πεζῶν, ἐφίππων καὶ φορτηγῶν ἀμαξῶν, καὶ ὅτι μὴ δυνάμενοι, δι' οὓς ἐξεθέσαμεν λόγους ἐν τῇ § 473, νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὴν κατὰ τὸ σχῆμα 415 ἢ 416, προτιθέμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὴν διὰ δύο ὠπλισμένων δοκῶν, τεθησομένων εἰς τὰς κεφαλὰς, ἐκάστης τῶν ὁποίων ἡ πρόοψις ἔσεται ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 401 ἢ 436, ἡ κἀτοψις ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 433 καὶ ἡ ἐγκάρσιος αὐτῆς τομὴ ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 402. Ὑποθέτοντες δὲ καὶ ἐνταῦθα τὴν δοκὸν διηρημένην εἰς εἴκοσι ἴσα μέρη, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς ἴσον μὲ 1^μ,50 καὶ τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας τοῦ καταστώματος τῆς γεφύρας φορτίον ἴσον μὲ 600 χιλιόγραμμα, τουτέστι 200 μὲν χιλιόγραμμα διὰ σταθερὸν βάρος καὶ 400 διὰ πρόσθετον βάρος, θέλομεν ἔχει

$$2\mu = 20, \nu = 19, 2\beta = 600 \times 2,50 = 1500 \chi\lambda.$$

$$\epsilon\phi\psi = \frac{\mu}{(\nu+1)\nu} = \frac{40}{(19+1)1,50} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{4}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2\psi}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{3}{3,162} = 0,948$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ξύλιναι ὠπλισμέναι δοκοὶ κατασκευάζονται ἰσοπαχεῖς, διὰ τοῦτο πρὸς εὐρεσιν μὲν τοῦ πάχους τῶν συνδέσμων λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν μεγαλειτέραν ὀλιπτικὴν ἢ ἐφελκυστικὴν δύναμιν, ἥτις κατὰ τὰ ἐν τῇ § 483 λεχθέντα, εἶναι ἴση μὲ $\frac{\nu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\psi}$, πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ πάχους ἐκατέρας τῶν ὀριζοντίων δοκῶν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν δύναμιν, τὴν ἐνεργούσαν εἰς τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, τὴν παρασταθεῖσαν διὰ τοῦ τύπου (ε') τῆς § 484.

Καλοῦντες λοιπὸν ω τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ἐνὸς τῶν συνδέσμων καὶ ω' τὴν ἐγκάρσιον τομὴν μιᾶς τῶν δύο ὀριζοντίων δοκῶν, θέλομεν ἔχει

$$\omega = \frac{\nu\beta}{2P\sigma\upsilon\nu\psi} \quad (1)$$

$$\omega' = \frac{(\nu+1)\beta\mu}{2P\nu} \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀντὶ τῶν ν , ϵ , $\sigma\upsilon\psi$, μ , υ καὶ P τὰς γνωστὰς αὐτῶν τιμὰς, θέλομεν ἔχει

$$\omega = \frac{49 \times 750}{2 \times 600000 \times 0,948} = 0,0119 \quad (3)$$

$$\omega' = \frac{20 \times 750 \times 10}{2 \times 600000 \times 1,50} = 0,08334 \quad (4)$$

Καλοῦντες δὲ α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς ω καὶ α' καὶ γ' τὰς διαστάσεις τῆς ω' , καὶ λαμβάνοντες $\alpha = 0^{\mu}, 10$ καὶ $\alpha' = 0^{\mu}, 25$ πορίζομεθα ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (4)

$$\gamma = \frac{0,0119}{0,10} = 0^{\mu}, 119 \quad \eta \quad \gamma = 0^{\mu}, 12$$

καὶ
$$\gamma' = \frac{0,08334}{0,25} = 0,333 \quad \eta \quad \gamma' = 0^{\mu}, 34$$

Ἐπειδὴ δὲ ἑκατέρα τῶν ὀριζοντίων δοκῶν, δηλ. ἡ ἄνω καὶ κάτω, ἀποτελεῖται ἐκ δύο δοκῶν, ὡς δεικνύει ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τοῦ σχήματος 104, συνάγομεν ὅτι αἱ διαστάσεις ἑκάστης τῶν τεσσάρων ὀριζοντίων δοκῶν θὰ ᾖναι $17/23$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ξυλίνην γέφυραν ἀνοίγματος 20 μέτρων μὲ δοκοὺς ἐχούσας τομὴν μὲν διαστάσεων $17/23$ καὶ $10/12$, μῆκος δὲ 2 ἕως 4 μέτρα τὸ πολὺ, τοῦθ' ὅπερ εὐκολύνει μεγάλως τὴν κατασκευὴν τοιοῦτων γεφυρῶν εἰς μέρη ὀρεινὰ ἢ ἄλλως πῶς δύσβατα.

Τὰ περὶ ξυλίνων γεφυρῶν ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις ῥηθέντα καὶ ἡ ἐπὶ δύο μερικῶν παραδειγμάτων ἐφαρμογὴ αὐτῶν ἀρκοῦσιν, ἵνα ὁδηγήσῃ τοὺς πρωτοπείρους εἰς τὴν κατασκευὴν ξυλίνων γεφυρῶν.

Γον *Εὐθύγραμμαι σιδηραὶ γέφυραι.*

186. Εὐθύγραμμῆς τις σιδηρᾷ γέφυρα ἔχει ἐν ἡ περισσότερα ἀνοίγματα, καθόσον τὸ πλάτος τοῦ χειμάρρου ἢ ποταμοῦ εἶναι μικρὸν ἢ μέγα.

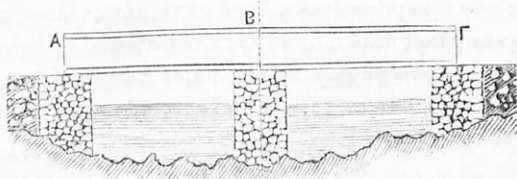


πρόοψις
Σχ. 140

Τὸ σχῆμα 140 παριστᾷ τὴν πρόοψιν γεφύρας τινός, ἐχούσης ἐν μόνον ἄνοιγμα, τὰ δὲ σχήματα 141 καὶ 142 παριστᾷ

τὰς πρόοψεις γεφυρῶν, ἐχουσῶν δύο ἢ τρία ἀνοίγματα.

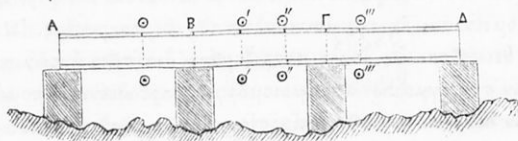
Αἱ σιδηρεῖ δοκοὶ AB (Σχ. 140) καὶ ABΓ (Σχ. 144) ἢ καὶ ABΓΔ (Σχ. 142) καλοῦνται κατὰ μῆκος δοκοί, καὶ στηρίζονται ἐπὶ τῶν βά-



Πρόσψις

Σχ. 141

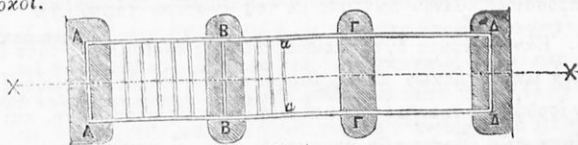
θρων καὶ ἀκροβάθρων τῆς γεφύρας, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἢ ἐκ λιθοδομῆς ἢ ἐκ σιδηρῶν στήλων, αἱ δὲ σιδηρεῖ δοκοὶ αα (Σχ. 143 καὶ 144),



Πρόσψις

Σχ. 142

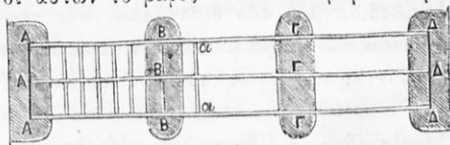
αἱ συνδέουσαι πρὸς ἀλλήλας τὰς κατὰ μῆκος δοκοὺς καλοῦνται ἐγκάρσιοι δοκοί.



Κάτωψις

Σχ. 143

Ἐπὶ τῶν ἐγκαρσίων τούτων δοκῶν στηρίζεται τὸ κατάστρωμα τῆς γεφύρας, καὶ δι' αὐτῶν τὸ βάρος τοῦ καταστρώματος μεταδίδεται εἰς



Κάτωψις

Σχ. 144

τὰς κατὰ μῆκος δοκοὺς· ὅθεν, ἐὰν καλέσωμεν εὐ τὸ μῆκος τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, ἢ, ὅπερ ταυτό, τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν δύο

τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν, θ_1 τὸ βάρος ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου καταστρώματος τῆς γεφύρας, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος βάρους τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, θ_2 τὸ κατὰ μέτρον ἴδιον βάρος ἐκάστης τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν, θ_3 τὸ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον πρόσθετον φορτίον, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ βάρος τῶν ἀμαξῶν, διτροχῶν κτλ. καὶ θ τὸ κατὰ μέτρον φορτίον ἐκάστης τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν, θέλομεν ἔχει τὸν τύπον

$$\theta = (\theta_3 + \theta_1)\varepsilon + \theta_2 \quad (A),$$

ὅστις δίδει τὸ κατὰ μέτρον φορτίον μιᾶς τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν.

187. Ἐὰν ἡ γέφυρα ἔχῃ ἓν μόνον ἀνοίγμα (Σχ. 140), αἱ κατὰ μῆκος δοκοὶ αὐτῆς, οἷα ἡ AB, στηρίζονται ἀπλῶς ἐπὶ τῶν δύο ἀκροβάθρων τῆς γεφύρας, καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν A καὶ B κινεῶνται ἐλευθέρως, ὅταν τὸ μῆκος ἀυξομειοῦται ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας. Ὡς ἐκ τούτου αὕτη θεωρεῖται ὡς δοκὸς στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο ἰσοϋψῶν στηριγμάτων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη. Ἐπομένως πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{1}{2} \theta \mu^2 \quad (B),$$

τοῦ θ προσδιοριζομένου πάντοτε ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (A).

188. Ἐὰν ἡ γέφυρα ἔχῃ πλείονα τοῦ ἐνὸς ἀνοίγματα, τότε ἐκάστη τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν αὐτῆς θεωρεῖται ὡς δοκὸς στηριζομένη ἐπὶ πολλῶν ἰσοϋψῶν στηριγμάτων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη, καὶ ἡ μεγίστη ῥοπή τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, δηλ. ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ X, προσδιορίζεται δι' εἰδικῆς θεωρίας τῆς ὑψηλῆς ἀναλύσεως, ἣν δὲν δύναμεθα ἐνταῦθα νὰ ἐκθέσωμεν. Τούτου ἕνεκα θέλομεν ἐφαρμόσει τὴν ἀπλουστεράν θεωρίαν, ἣν ὁ διακεκριμένος Γάλλος μηχανικὸς Μοραντιὲ ἐφήρμοσε πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν κατὰ μῆκος σιδηρῶν δοκῶν τῶν διαφόρων σιδηρῶν γεφυρῶν, ἃς οὗτος κατεσκεύασεν ὡς διευθυντὴς τῶν ἔργων τοῦ ἀπὸ Παρισίων εἰς Ὁρλεάνην σιδηροδρόμου.

Ἰδοὺ δὲ ἡ θεωρία αὕτη, ἡ δίδουσα λίαν εὐάρεστα πρακτικὰ ἀποτελέσματα.

1^{ον} Ὅταν ἡ γέφυρα ἔχῃ δύο ἀνοίγματα, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 141, ἡ κατὰ μῆκος δοκὸς ABΓ, καίτοι οὕσα μία συνεχῆς καὶ ἀδιαίρετος, οὐχ

ἥττον θεωρεῖται ὡς ἀποτελουμένη ἐκ δύο χωριστῶν τεμαχίων AB καὶ BG, ἐκάτερον δὲ τούτων ὡς δοκὸς στηριζομένη διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη. Ἐπομένως πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου τομῆς αὐτῶν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν περὶ τούτου γνωστὸν τύπον, ἥτοι τὸν (B) τῆς § 187.

2^{ον} Ἐὰν ἡ γέφυρα ἔχῃ τρία ἀνοίγματα, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 442, καὶ θέλωμεν αἱ κατὰ μῆκος δοκοὶ αὐτῆς νὰ ἦναι ἰσοπαχεῖς, τότε πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ ἐν τῶν δύο τελευταίων ἀνοιγμάτων, καὶ τὸ μεγαλύτερον, ὅταν ταῦτα ἦναι ἄνισα, π. χ. τὸ AB (σχ. 442), καὶ ἐὰν τὸ σταθερὸν βάρος τοῦ τμήματος BΓΔ τῆς γεφύρας (σχ. 442, 443) ἦναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ σταθεροῦ βάρους τοῦ θεωρουμένου τμήματος AB, ὑψημένου κατὰ τὸ πρόσθετον βάρος τῆς δοκιμῆς, τότε ἡ δοκὸς AB πρέπει νὰ θεωρῇται ὡς πεπακτωμένη εἰς τὸ ἐπὶ τοῦ βάρους στηριζόμενον ἄκρον αὐτῆς B, καὶ στηριζομένη διὰ τοῦ ἐτέρου ἄκρου A ἐπὶ τοῦ ἀκροβάθρου, καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη· ἐὰν δὲ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος βάρος ἦναι μικρότερον, τότε ἡ δοκὸς πρέπει νὰ θεωρῇται ὡς στηριζομένη διὰ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη.

Ὅταν πραγματοποιοῖται ἡ πρώτη ὑπόθεσις, τότε χάριν χρηματικῆς οἰκονομίας ἐφαρμόζομεν ὅ,τι εἴπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 108· τουτέστι τοῦ μὲν τμήματος $B\Theta = 0,19\mu$ προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{2} \epsilon \mu^2 \quad (\Gamma),$$

τοῦ δὲ τμήματος ΘA προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{9}{32} \epsilon \mu^2 \quad (\Delta).$$

Τὰς διαστάσεις ταύτας λαμβάνομεν καὶ διὰ τὰ τμήματα BΓ καὶ ΓΔ, ἥτοι τοῦ μὲν BΘ διὰ τὰ BΘ', ΓΘ'' καὶ ΓΘ''', τοῦ δὲ ΘA διὰ τὰ Θ'Θ'' καὶ Θ''Δ.

Ἐὰν τέλος θέλωμεν ἡ δοκὸς ABΓ νὰ ἦναι στερεὰν ἴσης ἀντιστάσεως, τοῦθ' ὅπερ εἶναι ἐπιβλαβὲς εἰς τὴν στερεότητα τῆς γεφύρας κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Μοραντιέ, ἣν ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ § 439, τότε τὰ μὲν τμήματα AB καὶ ΓΔ θεωροῦνται ἢ ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ στηριζόμεναι διὰ τοῦ ἐτέρου, ὅταν πληροῦ-

ται ἡ ἀνωτέρω ὀρισθεῖσα συνθήκη, ἥ ὡς δοκοὶ στηριζόμεναι διὰ τῶν ἄκρων αὐτῶν τὸ μεσαῖον ὕψος τμήμα ΒΓ θεωρεῖται ἡ ὡς δοκὸς πεπακτωμένη δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς, ὅταν τὸ σταθερὸν βάρος τῶν δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ ἦναι ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ σταθεροῦ βάρους τοῦ ΒΓ, ἡυξημένου κατὰ τὸ πρόσθετον βάρος, ἡ ὡς δοκὸς στηριζομένη ἀπλῶς διὰ τῶν ἄκρων αὐτῆς, ὅταν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δὲν πληροῦται. Ἐν ἀμφοτέραις δὲ ταῖς περιπτώσεσι τὸ σχῆμα τῆς προσόψεως ἢ κατόψεως τῆς δοκοῦ ΑΒΓ προσδιορίζεται ἐκ τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῶν παραγράφων 400 καὶ 440.

4^{ον} Ἐὰν ἡ γέφυρα ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ἀνοίγματα καὶ θέλωμεν αἱ κατὰ μῆκος δοκοὶ αὐτῆς νὰ ἦναι ἰσοπαχεῖς, τότε λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὸ μεγαλείτερον τῶν δύο τελευταίων ἀνοιγμάτων, καὶ ἐπειδὴ τὸ σταθερὸν βάρος τῶν λοιπῶν ἀνοιγμάτων εἶναι πάντοτε μεγαλείτερον τοῦ σταθεροῦ βάρους τοῦ ὑπ' ὄψιν ληφθέντος ἀνοίγματος, ἡυξημένου κατὰ τὸ πρόσθετον βάρος, τὸ τμήμα τοῦτο τῆς δοκοῦ θεωροῦμεν ὡς δοκὸν πεπακτωμένην εἰς τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων, τὸ στηριζόμενον ἐπὶ τοῦ βάθρου, καὶ στηριζομένην διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου ἐπὶ τοῦ ἀκροβάθρου, καὶ διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων (Γ) καὶ (Δ) προσδιορίζομεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου αὐτῆς τομῆς, ὡς καὶ ὅταν ἡ γέφυρα εἴχῃ τρία ἀνοίγματα.

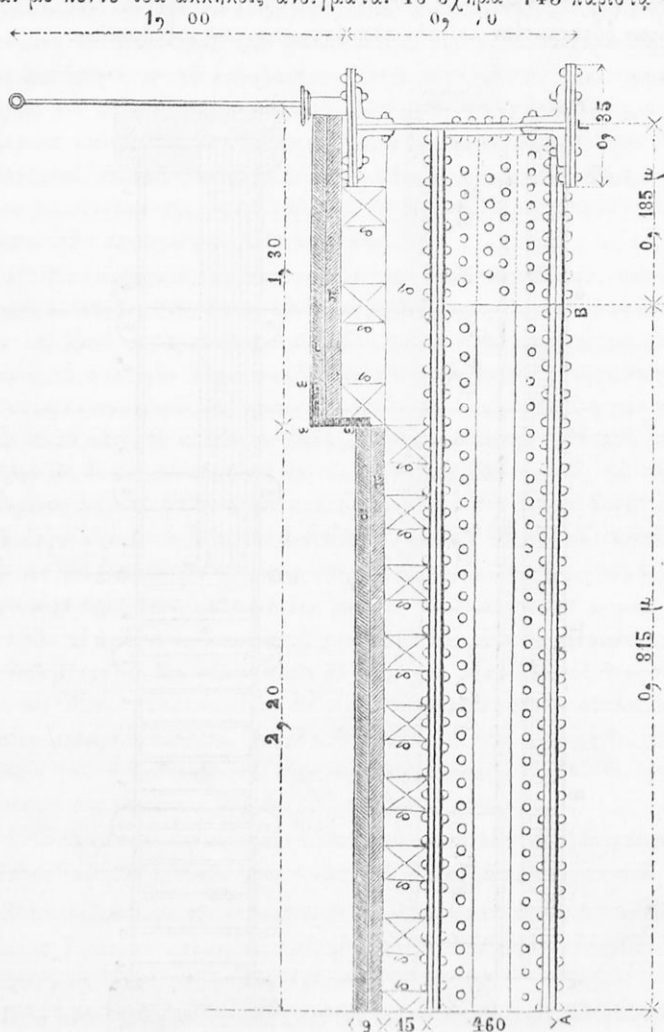
189. Αἱ ἐγκάρσιοι δοκοὶ αα (Σχ. 443, 444), ἐπειδὴ εἶναι στερεῶς συνδεδεμέναι διὰ δικεφάλων ἡλῶν μὲ τὰς κατὰ μῆκος δοκοὺς, θεωροῦνται ὡς δοκοὶ πεπακτωμένα δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῶν καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένα. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ ἦναι ἰσοπαχεῖς, πρὸς εὗρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς ἐγκαρσίου αὐτῶν τομῆς πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἐξισώσεις (Η) καὶ (Θ) τῆς παραγράφου 98.

190. Χάριν ἀσκήσεως ἐφαρμόζομεν τὰ ἀνωτέρω περὶ εὐθυγράμμων σιδηρῶν γεφυρῶν ῥηθέντα πρὸς λύσιν τοῦ ἐξῆς μερικοῦ ζητήματος.

Νὰ κατασκευάσωμεν σιδηρᾶν γέφυραν, ἔχουσαν μῆκος 50 μέτρων πλάτος 7 μέτρων καὶ προωρισμένην εἰς τὴν διάβασιν φορτηγῶν διτροχῶν, ἀμαξῶν, πεζῶν καὶ ἐρίπων.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει ἐν πρώτοις, ὀδηγούμενοι καὶ ἐξ ἄλλων κατασκευασμένων σιδηρῶν γεφυρῶν, νὰ ὀρίσωμεν τὸ εἶδος τῆς κατασκευαστέας, τουτέστιν ἂν θὰ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κατὰ μῆκος δοκῶν, ἂν τὸ κατὰστρομα αὐτῆς θὰ ἦναι ξύ-

δύο κατά μήκος δοκοὺς ΑΖ (Σχ. 146), με ξύλινον κατάστρωμα (Σχ. 147) καὶ με πέντε ἴσα ἀλλήλοις ἀνοίγματα. Τὸ σχῆμα 145 παριστᾷ τὴν



Σχ. 147

πρόσθιν τῆς γεφύρας, τὸ 146 τὴν κάτωσιν, καὶ τὸ 147 τὴν ἐγκάρσιον αὐτῆς τομὴν.

Μᾶς μένει νὰ εὐρώμεν τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν τε κατὰ μῆκος δοκῶν καὶ τῶν λοιπῶν μερῶν αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο δὲ δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν μίαν τῶν ἐξῆς δύο μεθόδων.

191. *Πρώτη μέθοδος.* Κατὰ τὴν πρώτην μέθοδον λαμβάνομεν πρῶτον κατ' ἀρέσκειαν καὶ ἐξ ἀναλογίας τὰς διαστάσεις ὧλων τῶν τεμαχίων τῆς κατασκευαστέας γεφύρας, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς διαστάσεις τῶν μερῶν κατασκευασμένης τινὸς γεφύρας, ἥς τὸ πλάτος καὶ τὸ ἄνοιγμα νὰ ἴναι ἴσον ἢ καὶ ὀλίγον τι μεγαλειότερον τῆς κατασκευαστέας, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τῶν γνωστῶν τύπων τῆς κάμψεως προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ P . Καὶ ἂν μὲν εὐρώμεν ὡς τιμὴν τοῦ P ἀριθμὸν ἴσον ἢ ὀλίγον τι μικρότερον τοῦ ἐν τῇ πράξει παραδεδεγμένου, δι' οὗ παριστῶμεν τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμὸν ἢ θλίψιν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἥς τὸ θεωρούμενον τεμάχιον ἀποτελεῖται ὅλης, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι διαστάσεις ἀρμόζουσι εἰς τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος ἡμῶν· ἂν ὅμως εὐρώμεν ὅτι ἡ ὑπολογισθεῖσα τιμὴ τοῦ P εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαι διαστάσεις εἶναι μικρότεραι ἢ μεγαλειέτεροι τῶν ἀρμόζουσων. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει πρέπει νὰ αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν ταύτας, καὶ διὰ τῶν νέων διαστάσεων νὰ υπολογίσωμεν ἐκ νέου τὴν τιμὴν τοῦ P , παρατείνομεν δὲ τὰς διὰ τοῦ τρόπου τούτου δοκιμὰς μέχρις οὗ εὐρώμεν τιμὴν τοῦ P ἴσην ἢ ὀλίγον τι μικροτέραν τῆς ἀληθοῦς.

192. *Δευτέρα μέθοδος.* Κατὰ τὴν δευτέραν μέθοδον θεωροῦμεν τὸ σταθερὸν βάρος τῆς γεφύρας ὡς γνωστὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ πρόσθετον βάρος, ὡς τοῦτο συνήθως συμβαίνει, καὶ διὰ τῶν γνωστῶν τύπων εὐρίσκομεν πρῶτον τὰς διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τῶν εὐρεθεισῶν τιμῶν τῶν διαστάσεων τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν εὐρίσκομεν, ἀκολουθοῦντες τὴν πρώτην μέθοδον, τὰς τῶν λοιπῶν αὐτῆς μερῶν.

193. Χάριν τῶν πρωτοπειρῶν ἃς ἐφαρμόσωμεν ἐνταῦθα ἀμφοτέρως τὰς μεθόδους εἰς τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου ζητήματος. Καὶ ἐν πρώτοις ἃς ἐφαρμόσωμεν τὴν πρώτην μέθοδον.

Α^{ον} *Πάχος τῶν πόρτιδων τοῦ καταστρώματος.*

Κατὰ τὸ παραδεχθὲν σχέδιον τῆς γεφύρας, οἱ μὲν ἐκ ξύλου δρυὸς

δοκίσχοι δ ἔχουσιν ὕψος $0^{\mu}, 15$, πλάτος $0^{\mu}, 12$ καὶ ἀπέχουσιν ἀλλήλων ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα $0^{\mu}, 267$, αἱ δὲ χονδροσανίδες πάχους $0^{\mu}, 06$, αἱ καλούμεναι πόντιδες καὶ παριστῶμεναι διὰ τοῦ γράμματος π εἰς τὸ διάγραμμα, ἐπειδὴ εἶναι στερεῶς προσηλωμένοι δι' ἥλων ἐπὶ τῶν δρυῖνων δοκίσκων, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς δοκαὶ πεπακτωμένοι δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῶν καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένοι. Ἐπειδὴ δὲ οἱ πόντιδες εἶναι ἰσοπαχεῖς, διὰ τοῦτο ὁ ἐφαρμοστέος τύπος εἶναι ὁ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{3} \epsilon \mu^2 \quad (1),$$

ἐξ οὗ ἐξάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ P καὶ ἔχομεν

$$P = \frac{4}{3} \frac{\epsilon \mu^3 \nu}{I} \quad (2).$$

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ϵ θεωροῦμεν ἓν μέτρον γεφύρας καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἓν κυβικὸν μέτρον ξυλείας ἐκ δρυὸς ζυγίζει 1100 χιλ., ἐκ πεύκης 600 χιλιογράμματα, καὶ ὅτι τὸ πάχος τῶν μὲν πόντιδων ὠρίσθη εἰς $0^{\mu}, 06$, τῶν δὲ ἐπ' αὐτῶν τιθεμένων ἐκ πεύκης σανίδων π εἰς $0^{\mu}, 025$, θέλομεν ἔχει

$$\begin{array}{rcl} \text{βάρος τῶν δρυῖνων πόντιδων} & & \\ 1,00 \times 0,06 \times 0,267 \times 1100 = & & 17,16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{βάρος τῶν σανίδων} & & \\ 1,00 \times 0,267 \times 0,025 \times 600 = & & 3,90 \\ \text{σταθερὸν βάρος} & & \hline & & 21,06 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{βάρος τῆς δοκιμῆς ἢ πρόσθετον βάρος} & & \\ 1,00 \times 0,267 \times 400 & & 106,80 \\ \text{ἄθροισμα ὀλικὸν} & & \hline & & 127,86 \end{array}$$

$$\text{ἐπομένως} \quad \epsilon = \frac{127,86}{0,267} = 478,80 \quad \eta \quad \epsilon = 480$$

τοῦ $0,267$ παριστῶντες τὴν ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπόστασιν τῶν δοκίσκων, ἦτοι τὸ 2μ .

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τοῦ ἐκ πόντιδων καταστρώματος εἶναι ὀρθογώνιος, ἔχομεν

$$I = \frac{\alpha \gamma^3}{12} = \frac{4,00 \times (0,06)^3}{12}$$

$$\text{και} \quad u = \frac{1}{2} 0,06 = 0,03,$$

διότι ελάβωμεν $\alpha = 4,00$ και $\gamma = 0,06$.

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἀντὶ τῶν I, u, b καὶ μ τὰς εὐρεθείσας τιμὰς αὐτῶν θέλωμεν ἔχει

$$P = \frac{1}{3} \frac{4480 \times (0,1335)^2 \times 0,03}{4,00 \times (0,06)^3} = 4764 \text{ χιλιόγραμ.}$$

διὰ θλίψιν ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἢ 0κλ., 4764 δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου.

Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ὅτι ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν δρυϊνῆς ξυλείας δύναται ἀσφαλῶς νὰ ὑποβληθῇ εἰς θλίψιν 30 χιλιογράμμων, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ δοθεῖσαι εἰς τὸ κατὰστροφμα διαστάσεις εἶναι μείζονες τῶν ἀπαιτουμένων, ἀλλ' ἔχοντες ἀφ' ἑτέρου ὑπ' ὄψιν τὰ περὶ πατωμάτων ἐν τῇ § 149 λεχθέντα, δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν τὰς ἀνωτέρω ἀυθαίρετως λεηθεύσας διαστάσεις ὡς ὀρθάς.

B^ν Διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῶν δρυϊνῶν δοκίσκων δ.

Αἱ δοκίσκοι δ, ἐπειδὴ προσηλοῦνται στερεῶς ἐπὶ τῶν ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν τῆς γεφύρας διὰ κοχλιοφόρων ἡλῶν, δύνανται καὶ οὗτοι νὰ θεωρηθῶσιν ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῶν καὶ ὁμοιομόρως φορτωμέναι. Ἐπομένως καὶ ἐνταῦθα πρέπει πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ P νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (2).

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ ἄξονος εἰς ἄξονα ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν ὠρίσθη εἰς δύο μέτρα, τὸ μῆκος τῶν δρυϊνῶν δοκίσκων ἰσοῦται μὲ 2 μέτρα, ἐπομένως θέλωμεν ἔχει μ ἴσον μὲ ἓν μέτρον.

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ b ἔχομεν

βάρος τῶν πόντιδων, ὑπερ ὑποβασιάζει ἐκάστη δοκίσκος δ

$$0,267 \times 2,00 \times 0,06 \times 1100 = 35,20$$

ὁμοίως βάρος τῶν ἐκ πεύκης σανίδων

$$0,267 \times 2,00 \times 0,025 \times 600 = 7,80$$

βάρος τῆς δοκίσκου

$$0,12 \times 0,15 \times 2,00 \times 4100 = \underline{39,60}$$

σταθερὸν βάρος

$$82,60$$

βάρος δοκιμῆς

$$0,267 \times 2,00 \times 400 = \underline{213,60}$$

ὅλικὸν βάρος

$$\underline{\underline{296,20}}$$

καὶ διαιροῦντες διὰ 2 τὸ εὑρεθὲν ὅλικὸν βάρος, εὐρίσκουμεν

$$C = \frac{296,20}{2} = 148 \chi\lambda., 10 \text{ ἢ } C = 150 \chi\lambda.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δοκὸς εἶναι ὀρθογώνιος, ἔχομεν

$$1 = \frac{\alpha \gamma^3}{12} = \frac{0,12 \times (0,15)^3}{12}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad u = \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \times 0,15 = 0,075.$$

Ἀντισταίγοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἀντὶ τῶν μ , C , 1 καὶ u τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν θέλομεν ἔχει

$$P = \frac{4}{3} \times \frac{150 \times (1,00)^2 \times \frac{0,15}{2}}{\frac{0,12 \times (0,15)^3}{12}} = 111111 \chi\lambda.$$

ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι ἕκαστον ἑκατοστὸν τετραγωνικὸν ὑποφέρει θλίψιν $111 \chi\lambda., 11$ ἢ $12 \chi\lambda.$ περίπου, ἐνῶ ἐκ τοῦ πίνακος Γ' τοῦ Φροντλέ (ἴδε § 27) γνωρίζομεν ὅτι, ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{M}{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ 47 περίπου, ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν δύναται νὰ υποβληθῇ ἀσφαλῶς εἰς θλίψιν $45 \chi\lambda.$ Ἐπεταὶ λοιπὸν ὅτι αἱ διὰ τὰς δρῦνους δοκίσκους ληφθεῖσαι διαστάσεις $\alpha = 0,12$ καὶ $\gamma = 0,15$ ἀρμόζουσι εἰς τὸ προκείμενον ζήτημα καὶ παραδεχόμεθα ταύτας ὁριστικῶς.

Γ^{ον} Προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν.

Ἐκάστη τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν, π. χ. ἡ ΘΘ, υποβαστάζει βάρος τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας δύο μέτρων μήκους, διότι ἡ ἀπὸ ἄξονος

εἰς ἄξονα ἀπόστασις τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν ὠρίσθη εἰς 2 μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δοκὸς ΘΘ, ἥς τὸ μῆκος εἶναι 7 μέτρα, εἶναι στερεῶς συνδεδεμένη μετὰ τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν τῆς γεφύρας καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη, ἡ πρὸς εὐρέσειν τοῦ P ἐφαρμοστέα ἐξίσωσις θέλει εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{3} \epsilon \mu^2 \quad (1),$$

ὅταν θέλωμεν ἡ δοκὸς νὰ ᾖ ἰσοπαχής, ὅταν δὲ προτιθέμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν πᾶσαν δυνατὴν οἰκονομίαν, πρέπει νὰ κάμωμεν χρῆσιν τοῦ τύπου

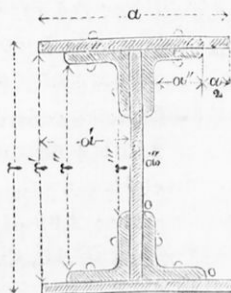
$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{6} \epsilon \mu^2 \quad (2)$$

διὰ τὸ τμήμα AB=0,815μ (Σχ. 447), καὶ τοῦ ἐπομένου

$$\frac{PI}{\nu} = \frac{4}{3} \epsilon \mu^2 \quad (3)$$

διὰ τὸ τμήμα BF=0,185μ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ πραγματοποιήσωμεν πᾶσαν δυνατὴν οἰκονομίαν καὶ ἅς λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὰ πάχη ἐκατέρων τῶν τμημάτων AB καὶ BF τῆς ὕλης δοκοῦ ΑΓ (Σχ. 447), τοῦτο δὲ δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ἀκινδύνως, τοσούτω μᾶλλον, καθόσον καὶ αἱ ἐγκαρσίοι δοκοὶ συνδέονται μετὰ τῶν κατὰ μῆκος τῆς γεφύρας διὰ στερεῶν σιδηρῶν γωνιῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 447. Ἵνα εὐρώμεν τὰς τιμὰς τοῦ I, εἰ καὶ ν, ἐξ ὧν θέλωμεν πορισθῇ διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων (2) καὶ (3) τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ P, πρέπει ἐκ τῶν προτέρων νὰ ὀρίσωμεν καὶ τὸ εἶδος τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ ΑΓ. Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι παραδεχόμεθα τὸ διπλοῦν ταῦ (Σχ. 448) ὡς τομὴν τῆς δοκοῦ, ὡς συνήθως τοῦτο γίνεται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν γεφυρῶν. Κατὰ τὸν διακεκριμένον μηχανικὸν Μοραντιέ, οἱ τέσσαρες γωνιώδεις σύνδεσμοι, οἱ συνδέοντες τὰς δύο ὀριζοντίους σιδηρὰς πλάκας μετὰ τῆς καθέτου πλάκας δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ I, ὅταν πρόκηται περὶ γεφύρας, προωρισμένης εἰς τὴν διάβασιν φορτηγῶν διτρόχων, ἀμαξῶν, ἐφίππων καὶ πεζῶν ὅταν ὁμοῦς πρόκηται



Σχ. 448

περὶ γεφύρας προσωρισμένης εἰς τὴν διάβασιν ἀμαξοστοιχιῶν, τότε αἱ γωνίαι αὗται καίτοι ἔχουσαι πᾶχος $0^{\mu},01$ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ I ὥς ἔχουσαι πᾶχος $0^{\mu},004$. Ὡστε ἡ τιμὴ τοῦ I ἔσεται εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν $\frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{12}$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $\frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha''\gamma''^3 - 2\alpha'''\gamma'''^3 - 2\alpha_2\gamma_2^3}{12}$. Ἐπειδὴ ἡ κατασκευαστέα γέφυρα ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν, θέλομεν ἔχει

$$I = \frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{12}$$

ἀντεισάγοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἀντὶ τοῦ I καὶ ὑ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὥς πρὸς τὸ P εὐρίσκομεν

$$P = \frac{\epsilon\mu^2\gamma}{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3} \quad (4).$$

Ἄς λάβωμεν τὰς τιμὰς τοῦ α καὶ γ , $2\alpha'$ καὶ γ' κατ' ἀρέσκειαν, καὶ ἔστωσαν αὗται $\alpha = 0^{\mu},12$, $\gamma = 0^{\mu},24$, $2\alpha' = 0^{\mu},41$ καὶ $\gamma' = 0^{\mu},22$. Ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἀντὶ τῶν $2\alpha'$, γ' , α , γ καὶ μ τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$P = \frac{6 \times (3,5)^2 \times 0,24}{0,12 \times (0,24)^3 - 0,41 \times (0,22)^3} \quad (5).$$

Πρὸς εὗρεσιν λοιπὸν τῆς τιμῆς τοῦ P μᾶς μένει μόνον νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ϵ .

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν

Βάρος τοῦ καταστρώματος, ἥτοι τιμὴ τοῦ $\epsilon_1\epsilon$

βάρος τῶν ἐκ πεύκης σανίδων

$$2,00 \times 1,00 \times 0,025 \times 600 = 30,00$$

βάρος τῶν πόντιδων

$$2,00 \times 1,00 \times 0,06 \times 1100 = 432,00$$

τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ βάρους τῶν 23 δρυῖνων δοκίσκων

μήκους 2,00 μέτρων, πλάτους $0^{\mu},12$ καὶ

ὑψους $0^{\mu},15$, ἥτοι

$$\frac{4}{7} \times 23 \times 2,00 \times 0,12 \times 0,15 \times 1100 = 430,00$$

βάρος καταστρώματος

$$292,00$$

βάρος ενός μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ ἤτοι τιμὴ τοῦ ϵ_2	
βάρος τῆς ἄνω ὀριζοντίου πλακὸς πλάτους $0^{\mu},42$ καὶ πάχους $0^{\mu},04$	
$0,42 \times 0,04 \times 7800 =$	9,86
βάρος τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακὸς	
$0,42 \times 0,04 \times 7800 =$	9,86
βάρος τῆς καθέτου πλακὸς ὕψους $0^{\mu},22$ καὶ πάχους $0^{\mu},04$	
$0,22 \times 0,04 \times 7800 =$	17,46
βάρος τῶν τεσσάρων γωνιῶν, μῆκος ἑκτολίγματος $0^{\mu},42$ καὶ πάχος $0^{\mu},04$	
$4 \times 0,42 \times 0,04 \times 7800 =$	39,44
βάρος τῶν δικεφάλων ἡλων κατὰ προσέγγισιν	43,68
ἄθροισμα	90,00
βάρος δοκιμῆς, ἤτοι τιμὴ τοῦ $\epsilon_3 \times \epsilon$	
$2,0 \times 4,00 \times 400 =$	800

ἀθροίζοντες δὲ τὰ ἀνωτέρω ὑπολογισθέντα φορτία εὐρίσκομεν

$$\epsilon = \epsilon_{1\epsilon} + \epsilon_3\epsilon + \epsilon_2 = 292 + 90 + 800 = 1482 \text{ χιλ.}.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ϵ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (5) καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας ἐργασίας εὐρίσκομεν

$$P = 7100000 \text{ χιλιόγραμμα}$$

Τοῦτο δὲ δηλοῖ ὅτι ἕκαστον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς θὰ ὑποφέρει θλίψιν 7 χιλιογράμμων.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν παρατήρησιν 5 τῆς παραγράφου 63 τὸν σίδηρον τῶν δοκῶν τῶν σιδηρῶν γεφυρῶν δυνάμεθα ἀσφαλῶς καὶ ἄνευ κινδύνου νὰ ὑποβάλλωμεν εἰς θλίψιν ἢ ἐφελκυσμὸν 6 χιλιογράμμων κατὰ χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας ἐγκαρσίου τομῆς, ὅταν πληρῶνται αἱ ἐξῆς σχέσεις

$$\frac{M}{\alpha} < 80 \quad \text{καὶ} \quad \frac{M}{\gamma} < 45,$$

τοῦ M παριστῶντος τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ, τοῦ α τὸ πλάτος αὐτῆς καὶ τοῦ γ τὸ ὕψος τῆς δοκοῦ· καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι οἱ λόγοι $\frac{M}{\alpha}$ καὶ $\frac{M}{\gamma}$ ἴσονται μὲ $\frac{7,00}{0,12} = 58,33$ καὶ $\frac{7,00}{0,24} = 29,16$, ὧν ὁ μὲν 58,33 ὥς μικρότερος τοῦ 80 πληροῖ τὴν μίαν τῶν δύο ἀνωτέρω συν-

θηκῶν, ὁ δὲ 29,16 ὡς μεγαλείτερος τοῦ 15 δὲν πληροῖ τὴν ἐτέραν, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ληφθεῖσαι διαστάσεις εἶναι μικρότεραι τῶν ἀρμοζουσῶν ἐπὶ τοῦ προκειμένου ζητήματος, διότι αὗται μᾶς ἄγουσιν εἰς θλίψιν μείζονα τῶν 6 χιλιογράμμων κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας, τοῦθ' ὅπερ δὲν ἐπιτρέπεται ὑπὸ τῆς πείρας, ἐπομένως πρέπει νὰ ἀξήσωμεν αὐτὰς οὕτως, ὥστε νὰ ἐκπληρῶσι συγχρόνως καὶ τὰς δύο ἀνωτέρω συνθήκας.

Ἐστῶσαν λοιπὸν

$$\alpha = \frac{M}{50} = \frac{7,00}{50} = 0,14,$$

$$\gamma = \frac{M}{15} = \frac{7,00}{15} = 0,466,$$

$$2\alpha' = 0,133 \text{ καὶ } \gamma' = 0,446.$$

Ἀντισταίγοντες τὰς νέας ταύτας τιμὰς τῶν α , γ , $2\alpha'$ καὶ γ' εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (4) θέλομεν ἔχει

$$P = \frac{\ell \times (3,5)^2 \times 0,466}{0,14 \times (0,466)^3 - 0,133 \times (0,446)^3} \quad (6),$$

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ φορτίου ℓ ἔχομεν

βάρος τοῦ καταστρώματος ἥτοι τιμὴ τοῦ ℓ_1 ὡς ἀνωτέρω	292,00
βάρος ἑνὸς μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ, ἥτοι τιμὴ τοῦ ℓ_2	
βάρος τῆς ἀνω ὀριζοντίου πλακὸς πλάτους $0^{\mu},14$ καὶ πάχους $0^{\mu},01$	
$0,14 \times 0,01 \times 7800 =$	10,92
βάρος τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακὸς	
$0,14 \times 0,01 \times 7800 =$	10,92
βάρος τῆς καθέτου πλακὸς ὕψους $0^{\mu},446$ καὶ πάχους $0^{\mu},007$	
$0,446 \times 0,007 \times 7800 =$	24,35
βάρος τῶν τεσσάρων γωνιῶν μῆκους ἑκταλίσγματος $0^{\mu},12$ πάχους $0^{\mu},007$	
$4 \times 0,12 \times 0,007 \times 7800 =$	26,20
βάρος τῶν διακεφάλων ἡλὼν κατὰ προσέγγισιν	13,61
ἄθροισμα	86,00

Βάρος δοκιμῆς, ἤτοι τιμὴ τοῦ $\epsilon_3 \times \epsilon$, ὡς ἀνωτέρω 800%λ.

Ἀθροίζοντες δὲ τὰ ἀνωτέρω ὑπολογισθέντα φορτία εὐρίσκομεν

$$\epsilon = \epsilon_1 \epsilon + \epsilon_2 \epsilon + \epsilon_3 = 292 + 86 + 800 = 1178\%λ.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ϵ εἰς τὴν ἀνωτέρω (6) ἐξίσωσιν καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις εὐρίσκομεν

$$P = 3600000 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς δὲ ταύτης τοῦ P πορίζομεθα ὅτι ἕκαστον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς θὰ ὑποφέρῃ θλίψιν 3%λ., 60.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ θλίψις αὕτη εἶναι μικροτέρα τῶν 6 χιλιογράμμων καὶ ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν α καὶ γ ἐλήφθησαν τοιαῦται, ὥστε νὰ ἐκπληρώσι τὰς περὶ οὗ ἀνωτέρω ὁ λόγος συνθήκας, συμπεραίνομεν ὅτι αὗται ἀρμόζουσι εἰς τὴν λύσιν τοῦ προκειμένου ζητήματος καὶ παραδεχόμεθα ταύτας ὀριστικῶς.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω λύσεως βλέπομεν, ὅτι ἂν καὶ αἱ δεύτεραι τιμαὶ τῶν διαστάσεων α καὶ γ τῆς ἐγκαρσίου τομῆς διπλοῦ ταῦ ἐλήφθησαν μεγαλειότεραι τῶν πρώτων, οὐχ ἦπτον, διότι ἡλαττώσαμεν τὸ πάχος τῆς καθέτου πλακῆς καὶ τῶν τεσσάρων γωνιῶν κατὰ τρία χιλιοστά τοῦ μέτρου, εὗρομεν ὅτι τὸ κατὰ μέτρον βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ διὰ τῶν δευτέρων διαστάσεων τῆς τομῆς εἶναι μικρότερον κατὰ 4 χιλιόγραμμα τοῦ βάρους, ὅπερ εὗρομεν διὰ τῶν πρώτων διαστάσεων. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν διαστάσεων α καὶ γ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν πᾶσαν τὴν δυνατὴν ἀσφάλειαν καὶ τὴν ποθητὴν οἰκονομίαν ὕλης.

Αἱ ἀνωτέρω προσδιορισθεῖσαι διαστάσεις τῶν α , γ , $2\alpha'$ καὶ γ' ἤτοι $\alpha = 0^{\mu}, 14$, $\gamma = 0,466$, $2\alpha' = 0,133$ καὶ $\gamma' = 0^{\mu}, 446$, εἶναι παραδεκταὶ διὰ τὴν τομὴν τοῦ τμήματος AB , ἵνα δὲ ἴδωμεν ἂν δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν α , γ , $2\alpha'$ καὶ γ' καὶ διὰ τὴν τομὴν τοῦ τμήματος $B\Gamma$, πρέπει εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (3) θὰ θέσωμεν ἀντὶ τῶν ϵ , μ , ν καὶ I τὰς εὐρεθείσας τιμὰς αὐτῶν, καὶ ἐκ τῆς οὕτω προκυπτούσης ἐξισώσεως νὰ ἐξάξωμεν τὴν τιμὴν τοῦ P , ἵνα βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας θλίψις ᾖναι ἴση, μικροτέρα ἢ μεγαλειτέρα τῶν 6 χιλιογράμμων.

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν

$$\mu = 3,50, \alpha = 0,14, \gamma = 0,466, 2\alpha' = 0,149 \text{ (διότι ὡς ἐκ τῆς συν-}$$

δέσεως τῆς ἐγκαρσίου δοκοῦ μετὰ τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ τῆς γεφύρας διὰ σιδηρῶν γωνιῶν ΒΓ (Σχ. 447), ὧν τὸ μῆκος λαμβάνεται τοῦλάχιστον ἴσον μὲ $0,485\mu = 0,485 \times 3,50 = 0^{\mu},647$, τὸ πάχος τῆς καθέτου πλακὸς τοῦ τμήματος ΒΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ πάχους τῆς καθέτου πλακὸς τοῦ τμήματος ΒΑ)

$$\gamma' = 0^{\mu},446, \quad \epsilon = 4472 \text{ χιλιογράμματα}$$

$$I = \frac{0,44 \times (0,466)^3 - 0,449 \times (0,446)^3}{42}, \quad u = \frac{1}{2} \times 0,466.$$

Ἀντεισάγοντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν α , γ , $2\alpha'$, γ' , μ , I , ϵ καὶ u εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3) καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ P εὐρίσκομεν

$$P = \frac{4}{3} \frac{4472 \times (3,50)^2 \times \frac{0,466}{2}}{0,44 \times (0,466)^3 - 0,449 \times (0,446)^3}$$

$$\frac{1}{2} P = \frac{2 \times 4472 \times (3,50)^2 \times 0,466}{0,00306978}$$

$$\frac{1}{2} P = 4329536 \text{ χιλιογράμματα}$$

διὰ θλίψιν ἐνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας, ἢ ὕπερ ταῦτο $P = 4^{\text{χιλ.}}, 33$ διὰ θλίψιν ἐνὸς τετραγωνικοῦ χιλιοστοῦ, ἥτις εἶναι μικρότερη τῶν 6 χιλιογράμμων.

Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ αὐταὶ διαστάσεις τῶν α , γ , καὶ γ' ἀρμόζουσι καὶ εἰς τὸ τμήμα ΒΓ τῆς δοκοῦ.

Δ^{ον} Προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῆς κατὰ μῆκος σιδηρᾶς δοκοῦ ΑΖ (Σχ. 445, 446).

Ἐπειδὴ ἡ γέφυρα ἔχει περισσότερα τῶν τριῶν ἀνοίγματα, διὰ τοῦτο, καθ' ἃ ἐν τῇ παραγράφῳ 488 ἐλέχθη, πρὸς εὑρεσιν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὸ ἐν τῶν δύο τελευταίων ἀνοιγμάτων, τὸ ΑΒ π. χ., ὅπερ θεωρεῖται ὡς δοκὸς πεπακτωμένη εἰς τὸ Β, στηριζομένη εἰς τὸ Α καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος.

Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου ἡ δοκὸς κατὰ τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ 439 λεχθέντα πρέπει νὰ ᾖ ἰσοπαχὴς, καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ πραγματοποιῶμεν καὶ τὴν δυνατὴν χρηματικὴν οἰκονομίαν, ἄνευ βλάβης τῆς στερεότητος, ἐφαρμόζομεν πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ ἡμῶν τοὺς ἐξῆς δύο τύπους:

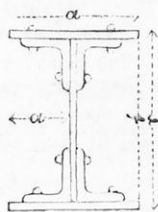
$$\frac{PI}{v} = \frac{9}{32} \epsilon \mu^2 \quad (1)$$

διὰ τὸ τμήμα $A_i = 4,81 \mu$ (σχ. 446), καὶ

$$\frac{PI}{v} = \frac{4}{2} \epsilon \mu^2 \quad (2)$$

διὰ τὸ τμήμα $B_i = 0,49 \mu$.

Ἐὰς προσδιορίσωμεν ἐν πρώτοις τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τοῦ τμήματος A_i , καὶ ἔστω ὅτι παραδεχόμεθα, ὡς συνήθως τοῦτο γίνεται, τὸ διπλοῦν ταῦ ὡς σχῆμα τῆς τομῆς ταύτης (σχ. 449). Πρὸς τούτοις ἂς λάβωμεν τὰς διαστάσεις α καὶ γ ἐντὸς τῶν ὑπὸ τῆς πείρας ὑποδειχθέντων καὶ ἐν τοῖς προηγούμενοις ὀρισθέντων ὁρίων καὶ ἔστω



σχ. 449

$$\alpha = \frac{M}{50} = \frac{10^4 \cdot 00}{50} = 0^{\mu},20, \quad \gamma = \frac{M}{12} = \frac{10^4 \cdot 00}{12} = 0^{\mu},833 \quad \eta \quad \gamma = 0^{\mu},84, \\ 2\alpha' = 0^{\mu},49 \text{ καὶ } \gamma' = 0,82.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τῶν v, I, μ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ P , θέλομεν εὑρεῖ

$$P = \frac{27}{16} \times \frac{\epsilon \mu^2 \gamma}{\alpha \gamma^3 - 2\alpha' \gamma'^3} = \frac{27}{16} \times \frac{6 \times 5^2 \times 0,84}{0,20(0,84)^3 - 0,49 \times (0,82)^3} \quad (3)$$

Πρὸς εὔρεσιν δὲ τοῦ ϵ , παρατηροῦμεν ὅτι ἑκατέρω τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν ὑποβαστάζει τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλκου βάρους τῆς γεφύρας, διότι τὸ ὅλον βάρος αὐτῆς ὑποβαστάζουσιν αἱ δύο κατὰ μῆκος δοκοί, ἐπομένως θέλομεν ἔχει

Βάρος τοῦ ἡμίσεως ξυλίνου καταστρώματος ἐπὶ μήκους 40 μέτρων καὶ πλάτους 7 μέτρων.

Περίκιναι σανίδες

$$\frac{1}{2} \times 40 \times 7,00 \times 0,025 \times 600 = 525,00$$

Πόντιδες ἐκ δρυὸς

$$\frac{1}{2} \times 40 \times 7,00 \times 0,06 \times 4400 = 2310,00$$

Δρύινοι δοκίσκοι 23 τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{1}{2} \times 23 \times 40 \times 0,45 \times 0,42 \times 4400 = 2277,00$$

Ἀθροισμα

$$5112,00$$

Βάρος τῶν ἡμίσεων τῶν ἐξ ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 7,00 \times 86 \chi\lambda. \quad 1806,00,$$

τοῦ 86 παριστῶντος τὸ βάρος ἑνὸς μέτρου ἐγκαρσίου δοκοῦ, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις εἶδομεν.

Βάρος δέκα μέτρων σιδηρῶν κιγκλίδων κατὰ προσέγγισιν 352,00

Τοῦ ὀλικοῦ σταθεροῦ φορτίου, ὅπερ ἑκατέρω τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν ὑποβαστάζει, εὐρεθέντος θέλομεν ἔχει προφανῶς τὸ κατὰ μέτρον φορτίον, ἥτοι τὸ $\epsilon_1 \times \epsilon$.

$$\epsilon_1 \times \epsilon = \frac{5112 + 1806 + 352}{40} = 727 \chi\lambda.$$

Βάρος ἑνὸς μέτρου τῆς ἰδίας δοκοῦ, ἥτοι τιμὴ τοῦ ϵ_2

Τῶν δύο ὀριζοντίων πλακῶν πάχους $0^{\mu},01$

$$2 \times 0,20 \times 0,01 \times 7800 = 31,20$$

Τῆς καθέτου πλακὸς πάχους $0^{\mu},01$

$$0,82 \times 0,01 \times 7800 = 63,96$$

Τῶν τεσσάρων γωνιωδῶν συνδέσμων πάχους

$0^{\mu},007$ καὶ ἐκτυλίγματος $0^{\mu},12$

$$4 \times 0,12 \times 0,007 \times 7800 = 26,20$$

Τῶν δικεφάλων ἡλων κατὰ προσέγγισιν 13,64

$$\text{Ἀθροισμα} \quad 135,00$$

Βάρος τῆς δοκιμῆς ἥτοι τομὴ τοῦ $\epsilon_3 \times \epsilon$

$$\epsilon_3 \times \epsilon = \frac{7,00}{2} \times 400 = 1400,00$$

Ἀθροίζοντες δὲ τὰ ἀνωτέρω ποσὰ εὐρίσκομεν τὴν ζητούμενην τιμὴν τοῦ ϵ , ἥτις εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\epsilon = \epsilon_1 \times \epsilon + \epsilon_3 \times \epsilon + \epsilon_2 = 727 + 135 + 1400 = 2262 \chi\lambda.$$

Τὴν τιμὴν δὲ ταύτην τοῦ ϵ ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις θέλομεν εὑρεῖ

$$P = 5848000 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Ἡ τιμὴ δὲ αὕτη τοῦ P σημαίνει, ὅτι ἕκαστον χιλιοστόν τετραγώ-

νικόν επιφανείας τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ τμήματος Αι τῆς δοκοῦ θὰ ὑποφέρῃ θλίψιν 5%,82, ἥτις εἶναι παραδεκτὴ, ὡς οὕσα μικροτέρα τῶν 6 χιλ.

Πρὸς προσδιορισμὸν δὲ τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τοῦ τμήματος Βι πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν, καθ' ὃ ἐν τοῖς προηγουμένοις εἴπομεν, τὸν τύπον (2). Πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τοῦτο, πρέπει προηγουμένως νὰ ἴδωμεν, ἂν αἱ ὁρισθεῖσαι διαστάσεις διὰ τὸ τμήμα Αι ἀρμόζουσιν ἢ ἔχι καὶ εἰς τὸ τμήμα Βι.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ θλίψεις, αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν τμημάτων Αι καὶ Βι, ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ῥοπαι X_1 καὶ X_2 : τοιούτῃ, καλοῦντες Θ_1 καὶ Θ_2 τὰς θλίψεις, τὰς ἐνεργοῦσας ἐπὶ τῶν τμημάτων Βι καὶ Αι, ἀναφερομένας εἰς τὸ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἐπιφανείας, θέλομεν ἔχει

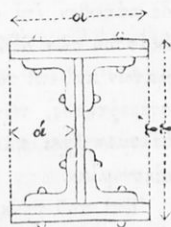
$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{\frac{1}{2} \mu^2 \epsilon}{\frac{9}{32} \mu^2 \epsilon} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9},$$

ἐπομένως

$$\Theta_1 = \Theta_2 \times \frac{16}{9} = 5,82 \times \frac{16}{9} = 10\% \cdot 35.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ θλίψις 10%,35 δὲν εἶναι παραδεκτὴ ἐν τῇ πράξει, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ διαστάσεις τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τοῦ τμήματος Βι πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλύτεραι τῶν τῆς τομῆς τοῦ τμήματος Αι, καὶ πρέπει νὰ προσδιορισθῶσιν ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ τύπου (2).

Πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὰς διαστάσεις καὶ τῆς τομῆς ταύτης (Σχ. 150), ἥτις βεβαίως πρέπει νὰ ἔχῃ σχῆμα διπλοῦν ταῦ, ἐν τὸς τῶν ὀρίων, τῶν ὑποδειχθέντων ὑπὸ τῆς πείρας, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha = 0'' \cdot 20$, $\gamma = 0'' \cdot 86$, $2\alpha' = 0'' \cdot 49$ καὶ $\gamma' = 0'' \cdot 82$.



Σχ. 150

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) ἀντὶ τῶν I, υ καὶ μ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ λύοντες τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸ Ρ εὐρίσκομεν

$$P = \frac{\frac{4}{2} \times 5^2 \cdot 00 \times \frac{0,86}{2}}{0,20 \times (0,86)^3 - 0,49 \times (0,82)^3} \quad (4).$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ θέτοντες ἀντὶ ϵ τὴν ἀνωτέρω εὐρεθεῖσαν τιμὴν αὐτοῦ 2262 χιλ., καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις εὐρίσκομεν

$$P = 648000 \text{ χιλιόγραμμα,}$$

Ἐκαστον λοιπὸν χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς τομῆς τοῦ τμήματος Βι τῆς δοκοῦ θά υποφέρῃ θλίψιν 6 χιλ., 48 καὶ ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς ἡ θλίψις αὕτη εἶναι ὀλίγον τι μεγαλειτέρα τῶν 6 χιλιογράμμων καὶ ἀφ' ἑτέρου δὲν εἶναι διαρκῆς, ἀλλὰ περιοδική, ὥσάκις δηλαδὴ διέρχωνται βαρέως φορτωμένα δίκροχα ἢ πληθὺς ἀνθρώπων, δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν τὰς ἀνωτέρω ὀρισθείσας διαστάσεις διὰ τὸ τμήμα Βι, οὗτινος τὸ μῆκος εἶναι 0,49 μ.

194. Παραβάλλοντες τὰ σχήματα 449 καὶ 450 βλέπομεν ὅτι ταῦτα δὲν διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰμὴ κατὰ τὸ πάχος τῶν ὀριζοντίων πλακῶν, διότι τὸ μὲν 449 σχῆμα ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὀριζοντίων πλακῶν ἑκατέρας τῶν ὁποίων τὸ πάχος εἶναι $0^{\mu},04$ καὶ τὸ πλάτος $0^{\mu},20$ καὶ μιᾶς καθέτου πλακὸς ὕψους $0^{\mu},82$ καὶ πάχους $0^{\mu},04$. τὸ δὲ 450 σχῆμα ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὀριζοντίων πλακῶν, ἑκατέρας τῶν ὁποίων τὸ πλάτος εἶναι 0,20 καὶ τὸ πάχος $0^{\mu},02$, καὶ μιᾶς καθέτου πλακὸς ὕψους $0^{\mu},82$ καὶ πάχους $0^{\mu},04$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τῆς προσθήκης δύο ὀριζοντίων πλακῶν, τῆς μὲν ἄνωθεν τῆς καθέτου, τῆς δὲ κάτωθεν, ἐπὶ μῆκους $0,49 \times \mu = 0,49 \times 5,00 = 0^{\mu},95$ ἑκατέρωθεν ἐκάστου τῶν ἀξόνων ΒΒ, ΓΓ, ΔΔ καὶ ΕΕ τῶν τεσσάρων μεσοστηριγμάτων καὶ ἐπὶ τῶν ἀκροστηριγμάτων Α καὶ Ζ, τῶν μὲν πρώτων λόγῳ στερεότητος, τῶν δὲ δευτέρων λόγῳ ὀριζοντιότητος τῆς ὅλης δοκοῦ, θέλομεν ἔχει πᾶσαν τὴν ποθητὴν ἀσφάλειαν καὶ πᾶσαν τὴν δυνατὴν οἰκονομίαν.

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ζητήματος ἡ πραγματοποιηθεῖσα οἰκονομία εἶναι $2 \times 2 \times 40 \times 0,20 \times 0,04 \times 7800 = 2496$ χιλιogr., διότι τὸ ὅλικὸν μῆκος τῆς μὲν δοκοῦ ΑΖ εἶναι 50 μέτρα, τῶν δὲ 2ξ τεμαχίων Αι, Βι, Γι, Δι, Ει καὶ ιΖ εἶναι ἴσον μὲ $(1,00 + 4 \times 2,00 + 1,00) = 10^{\mu}$.

Ἐπειδὴ δὲ κατ' ἐλάχιστον ὅρον ἑκαστον χιλιόγραμμον σιδήρου τιμᾶται δραχμῆς, ἔπεται ὅτι διὰ τῆς παραδοχῆς δύο ἐγκαρσίων τομῶν

πρὸς κατασκευὴν τῶν δύο κατὰ μῆκος σιδηρῶν δοκῶν τῆς γεφύρας θέ-
λομεν πραγματοποιήσῃ οικονομίαν τοῦλάχιστον 2496 δραχμῶν.

195. Εἴπομεν ἐν τῇ παραγράφῳ 490 ὅτι πρὸς εὗρεσιν τῶν διαστά-
σεων τῆς τομῆς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ γίνεται χρῆσις δύο μεθόδων,
εἰδομεν δὲ ἐν τοῖς προηγουμένοις πῶς ἐφαρμόζεται ἡ πρώτη, ἡ καὶ
συνειθεστέρα, ὡς παρέχουσα πᾶσαν τὴν δυνατὴν οικονομίαν. Ἐς ἐφαρ-
μόσωμεν ἐν τοῖς ἐπομένοις καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραδείγ-
ματος, καὶ πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν ἐν πρώτοις ὑπ' ὄψιν τὸ τμήμα Αι
τῆς δοκοῦ (Σχ. 446).

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 493 ἔδαφ. Δ' ἂντὶ τῶν I καὶ υ
τὰς τιμὰς αὐτῶν, τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ οὔσης διπλοῦν ταῦ, ὡς δεικνύει
τὸ σχῆμα 449, θέλομεν ἔχει

$$\frac{P \times \frac{\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3}{12}}{\frac{4}{2}\gamma} = \frac{9}{32}\theta\mu^2 \quad (5)$$

$$\frac{P(\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3)}{6\gamma} = \frac{9}{32}\theta\mu^2 \quad (6)$$

Θέτοντες δὲ εἰς ταύτην ἂντὶ τοῦ θ τὴν τιμὴν αὐτοῦ, ἣν λαμβάνο-
μεν ἴσῃν μὲ $2 \times 400 \times 3,50 = 2 \times 1400 = 2800\%$, καὶ ἂντὶ τοῦ μ
καὶ P τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν 5 μέτρα καὶ 6000000 χιλιόγραμμα,
θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{6000000(\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3)}{\gamma} = \frac{9 \times 2800 \times 5^2}{32} \quad (7)$$

ἣτις περιέχει τέσσαρας ἀγνώστους, ὧν τὰς τιμὰς τῶν τριῶν πρέπει νὰ
λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν.

Ἐς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι τὸ μὲν πλάτος τῶν ὀριζοντίων δοκῶν
εἶναι ἴσον μὲ $0^{\text{m}},20$ τὸ δὲ πάχος αὐτῶν τε καὶ τῆς καθέτου πλακὸς
ἴσον μὲ $0^{\text{m}},01$, θέλομεν ἔχει

$$\alpha = 0^{\text{m}},20, \quad 2\alpha' = 0^{\text{m}},49 \quad \text{καὶ} \quad \gamma' = (\gamma - 0,02).$$

Τὰς τιμὰς ταύτας θέτοντες ἐν τῇ ἀνωτέρῳ ἐξίσώσει (7) καὶ ἔκτε-
λοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν εὑρεῖ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν
τῶν ὁμοίων ὅρων τὴν τριτοβάθμιον ὡς πρὸς τὴν ἀγνώστον γ ἐξίσωσιν

$$40000\gamma^3 + 44400\gamma^2 - 49945,50\gamma + 4,52 = 0 \quad (8),$$

ὃν λύομεν διὰ δοκιμῶν ὡς ἑξῆς:

Δίδομεν ἐν πρώτοις ἐν τῇ ἐξισώσει (8) εἰς τὸ γ τιμὴν τινα κατ' ἀρέσκειαν, π. χ. ὑποθέτομεν $\gamma = 4$, καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς ἐν αὐτῷ σεσημειωμένας πράξεις, ὅτε θέλομεν εὑρεῖ

$$24404,52 - 49945,50 = 0 \quad (9)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς προκυψάσης ἰσότητος (9) εἶναι θετικόν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μονὰς εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ γ . Δίδομεν ἀκολουθῶς εἰς τὸ γ ἑτέραν τιμὰν μικροτέραν τῆς μονάδος, π. χ. ὑποθέτομεν $\gamma = 0,90$, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις εὐρίσκομεν

$$46525,52 - 47923,91 = 0 \quad (10)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς οὕτω προκυψάσης ἰσότητος (10) εἶναι ἀρνητικόν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ζητούμενη τιμὴ τοῦ γ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς κατ' ἀρέσκειαν δοθείσης νέας τιμῆς 0,90. Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ γ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,90 καὶ 4,00.

Ἄν ὑποθέσωμεν $\gamma = 0,95$, θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἰσότητα

$$48863,72 - 48949,72 = 0 \quad (11),$$

ὅς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀρνητικόν, ἂν δὲ ὑποθέσωμεν $\gamma = 0,96$, θέλομεν εὑρεῖ τὴν ἰσότητα

$$49357,76 - 49448,88 = 0 \quad (12),$$

ὅς τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικόν. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ζητούμενη τιμὴ τῆς γ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 0,95 καὶ μικροτέρα τοῦ 0,96, ἐπομένως περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,95 καὶ 0,96,

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠδυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν τὴν προσέγγισιν, ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν ὁρίων 0,95 καὶ 0,96 εἶναι μικρά, παραδεχόμεθα ὡς τιμὴν τοῦ γ τὸ μεγαλειτερον τούτων 0,96 καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς διαστάσεις τῆς τομῆς (Σχ. 449)

$$\alpha = 0^{\mu}, 20, \gamma = 0^{\mu}, 96, 2\alpha' = 0^{\mu}, 49 \text{ καὶ } \gamma' = 0^{\mu}, 94.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠδυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τοῦ τμήματος Bc, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι περιττόν, διότι ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῶμεν διὰ τὰ α , $2\alpha'$ καὶ γ' τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς, τουτέστιν $\alpha = 0^{\mu}, 20$, $2\alpha' = 0^{\mu}, 49$, $\gamma' = 0,94$, διὰ δὲ τὸ γ τὸν ἀριθμὸν 0,98, ἥτοι νὰ προσθέσωμεν δύο ὀριζοντίας πλάκας, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 450.

Σημείωσις 4. Διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου εὗρομεν, ὅτι τὸ ὕψος τῆς καθέτου πλακὸς εἶναι κατὰ $0^{\mu},42$ μεγαλειότερον τοῦ τῆς καθέτου πλακὸς ὕψους, τοῦ ὁρισθέντος διὰ τῆς πρώτης μεθόδου. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τῆς δευτέρας ταύτης μεθόδου ἔχομεν μὲν μείζονα ἀσφάλειαν, ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ πραγματοποιοῦμεν καὶ πᾶσαν δυνατὴν οἰκονομίαν.

Σημείωσις 2. Ἐὰν παραδεχθῶμεν τὰς διαστάσεις, τὰς εὐρεθείσας διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου, θέλομεν ἔχει ζημίαν χρηματικὴν δι' ἀμφοτέρας τὰς κατὰ μῆκος δοκοὺς, τὴν ἑξῆς:

$$2 \times 50 \times 0,12 \times 0,01 \times 7800 \times 1^{\delta\epsilon},00 = 936 \text{ δραχμαί,}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀσήμαντον, δυνάμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις νὰ μεταχειριζώμεθα κατὰ προτίμησιν τὴν δευτέραν μέθοδον πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν.

Παρατήρησις. Καὶ καθ' ἣν περίστασιν στερούμεθα σχεδίων κατεσκευασμένων γεφυρῶν πρὸς ὁδηγίαν μας, δυνάμεθα οὐχ ἥττον νὰ πραγματοποιήσωμεν πᾶσαν τὴν δυνατὴν οἰκονομίαν ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς.

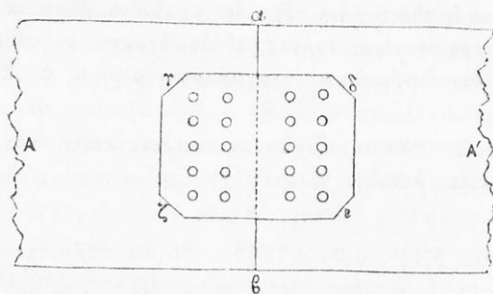
1^{ον} Διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον βοηθητικὰς τινὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τῶν κατὰ μῆκος δοκῶν, αἵτινες εἶναι πάντοτε, ὡς προείπομεν, κατὰ τι μεγαλιότεραι τῶν ἀναγκαιῶν. Ἐστώσαν λοιπὸν α, γ, 2^α καὶ γ' αὗται.

2^{ον} Διὰ τῶν διαστάσεων τούτων, προσδιορίζομεν τὸ βάρος τῆς ἰδίας δοκοῦ, διὰ δὲ τῆς πρώτης μεθόδου εὐρίσκομεν τὰς ὁριστικὰς διαστάσεις τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ.

196. Μας μένει πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ προσδιορισμοῦ ὅλων τῶν αποτελούντων τὴν κατασκευὴν σιδηρᾶς τινος γεφύρας μερῶν νὰ ὀρίσωμεν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλυλίων, δι' ὧν θέλουσι συνδέσθαι τὰ διάφορα τεμάχια ἢ τοῦ αὐτοῦ μέρους ἢ δύο διακεκριμένων μερῶν τῆς γεφύρας. Καὶ ἐν πρώτοις ἂς προσδιορίσωμεν τὸν ἐλάχιστον ἀριθμὸν τῶν παλυλίων, δι' ὧν θὰ συνδέωνται πρὸς ἄλληλα δύο τεμάχια Α καὶ Α' τῆς καθέτου πλακὸς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ (Σχ. 454).

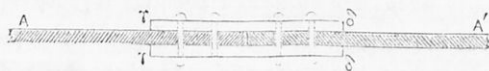
Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἡ διὰ τῶν παλυλίων σύνδεσις ἐκτελεῖται συνήθως ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 454 καὶ 452, καὶ ἐπειδὴ ἡ δύναμις αὐτῶν συνδυαζομένη μὲ τὴν δύναμιν τῶν ὀριζοντίων πλακῶν, ὧν οἱ ἄρμοι τῆς συνδέσεως δὲν ἀντιστοιχοῦσι συνή-

ὥς μὲ τοὺς ἄρμους αβ τῆς συνδέσεως τῶν τεμαχίων τῆς καθέτου πλακῆς, πρέπει νὰ καταστρέφῃ τὴν τε ἐφελκυστικὴν καὶ θλιπτικὴν



Σχ. 131

δύναμιν, τὴν παραγομένην ἐκ τῆς ροπῆς X, καὶ ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου ἡ μὲν ἐγκάρσιος τομὴ τῆς δοκοῦ καταστρέφει τὰς ἀνωτέρω δυνάμεις, ἔκαστον δὲ χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς τομῆς τοῦ δικεφάλου δύναται νὰ ὑποβληθῇ εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν 6 χιλιογράμμων, ὥς καὶ ἡ



Σχ. 132

ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ (§ 22), ὅταν ἡ σύνδεσις ᾖ ἐντελής, διὰ ταῦτα πρέπει τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τῶν τομῶν τῶν δικεφάλων νὰ ᾖ ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τομῆς τῆς καθέτου πλακῆς εἰς τὸ θεωρούμενον αὐτῆς μέρος.

Ἐπομένως καλοῦντες ν τὸν ἀριθμὸν τῶν δικεφάλων ἥλων, δ τὴν διάμετρον αὐτῶν, καὶ ω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς καθέτου πλακῆς τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, θέλομεν ἔχει

$$v \frac{\pi \delta^2}{4} = \frac{1}{2} \omega \quad (1)$$

ἐξ οὗ εὐρίσκομεν

$$v = \frac{2\omega}{\pi \delta^2} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (2) ἐφαρμόζεται ὁσάκις ἡ σύνδεσις τῶν σιδηρῶν ἐλασμάτων διὰ τῶν δικεφάλων ἥλων γίνεται μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν. Ἐπειδὴ

ὅμως ἡ σύνδεσις αὕτη δὲν γίνεται μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν, διότι συνήθως ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται ὅχι ἐν τοῖς ἐργοστασίοις, ἀλλ' ἐν ὑπαίθρῳ καὶ πλησίον τῆς θέσεως ἐνθα θὰ κατασκευασθῇ ἡ γέφυρα, διὰ ταῦτα οἱ μηχανικοὶ παραδέχονται 3 χιλιογράμματα ὡς δύναμιν ἐκάστου χιλιοστοῦ τετραγωνικοῦ ἐπιφανείας καὶ οὐχὶ 6, ὡς ἐῤῥέθη ἐν τῇ § 22, καὶ διπλασιάζουσιν οὕτω τὸν ἀριθμὸν τῶν δικεφάλων ἤλων τὸν διὰ τοῦ ἀνωτέρου τύπου (2) εὕρισκόμενον, ἢ, ὅπερ ταυτὸ, κάμνωσι χρῆσιν τοῦ ἐξῆς τύπου·

$$v = \frac{4\omega}{\pi\delta^2} \quad (3).$$

197. Τὰ ἐν τῇ ἀνωτέρῳ παραγράφῳ ῥηθέντα ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ ἡμέτερον παράδειγμα, θέλομεν ἔχει

$$\omega = 820 \times 10 = 8200 \text{ χιλιοστά τετραγωνικά}$$

$$\text{καὶ} \quad v = \frac{4 \times 8200}{3,14 \times \delta^2} \quad (4),$$

ἵνα δὲ διὰ τοῦ τύπου (4) εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ v , πρέπει ἐκ τῶν προτέρων νὰ ὀρίσωμεν τὴν διάμετρον τοῦ παλυλίου λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τοὺς ἐν τοῖς ἐργοστασίοις διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν παραδεδεγμένους κανόνας. Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τοῦτο ὅτι παραδεχόμεθα $\delta = 0^{\text{m}},020$. Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (4) ἀντὶ τοῦ δ^2 τὴν τιμὴν αὐτοῦ 400 τετραγωνικὰ χιλιοστά τοῦ μέτρου, θέλομεν ἔχει

$$v = \frac{4 \times 8200}{3,14 \times 400} = \frac{8200}{314} = 26 \text{ περίπου.}$$

Τοῦ ἀριθμοῦ δὲ v τῶν παλυλίων ὀρισθέντος, τὸ μήκος ἐκατέρου τῶν ἐλασμάτων γδῖς (Σχ. 151) προσδιορίζεται εὐκόλως ἐξ ὧσων εἴπομεν ἐν τῇ § 22, διότι τὸ ὕψος αὐτῶν εἶναι ὠρισμένον ἐκ τῶν προτέρων. Τοῦτο δὲ δὲν δύναται νὰ ᾔναι μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τῆς καθέτου πλακῆς τῆς δοκοῦ, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ 0,82, ἀλλὰ θὰ ᾔναι ἢ ἴσον ἢ μικρότερον. Συνήθως πρὸς εὐκολίαν τῆς τοποθετήσεως τῶν γωνιωδῶν συνδέσμων (σχ. 148) λαμβάνουσιν αὐτὸ μικρότερον καὶ ἴσον μὲ τὸ γ' .

Σημείωσις. Ἐὰν συμβῇ ἄρμός τις τῆς καθέτου πλακῆς νὰ εὕρισκῃται εἰς τὴν αὐτὴν διατομὴν μὲ τὸν ἄρμὸν τῶν ὀριζοντίων πλακῶν, τότε, ἐπειδὴ εἰς τὸ μέρος τοῦτο αἵ τε ὀρίζονται πλάκες καὶ ἡ κάθετος δὲν παρέχουσιν οὐδεμίαν ἀντίστασιν πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῆς ἐφελκυ-

στικῆς δυνάμεως, πρέπει ἡ δύναμις ὅλων τῶν παλυλίτων, τῶν συνδεόντων τὰς τε ὀριζοντίους καὶ τὴν κάθετον πλάκην, νὰ καταστρέφῃ τὴν ἐφελκυστικὴν δύναμιν, τὴν εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἐκ τῆς ῥοπῆς X παραγομένην. Ἐπομένως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παλυλίτων, ὅν σημειοῦμεν διὰ τοῦ γράμματος N, πρέπει εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3) νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ ω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ εἰς τὸ θεωρούμενον αὐτῆς μέρος.

Τοῦ ὅλικου ἀριθμοῦ N τῶν παλυλίτων εὐρεθέντος οὕτω, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν, τοῦ συνδεόντος τὰ δύο τεμάχια τῆς καθέτου πλακὸς εἰς τὸ μέρος τοῦτο, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ N τὸν ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων, δι' ὧν θὰ συνδεθῶσιν αἱ ὀριζόντιαι πλάκες.

Ὅθεν καλοῦντες ν' τὸν ἀριθμὸν, τὸν συνδεόντα δύο ὀριζόντια τεμάχια τῆς ἄνω ἢ κάτω ὀριζοντίου πλακὸς, περὶ οὗ παρακατιόντες θέλομεν ἶδει πῶς προσδιορίζεται, καὶ ν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων πρὸς σύνθεσιν τῆς καθέτου πλακὸς, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$v = N - 2v' \quad (5).$$

198. Ὅ,τι εἵπομεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίτων, δι' ὧν πρέπει νὰ συνδέωνται πρὸς ἄλληλα δύο τεμάχια τῆς καθέτου πλακὸς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ, ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίτων, δι' ὧν πρέπει νὰ συνδέωνται πρὸς ἄλληλα δύο τεμάχια τῆς καθέτου πλακὸς ἐκὰς τῆς τῶν ἐγκαρσίων σιδηρῶν δοκῶν.

199. Ἐκατέρω τῶν ὀριζοντίων πλακῶν τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ ἀποτελεῖται ἐκ πολλῶν τεμαχίων συνδεδεμένων πρὸς ἄλληλα διὰ παλυλίτων, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 24, ἄνευ τῆς πλακὸς γδ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ τῶν παλυλίτων, δι' ὧν συνδέονται δύο τεμάχια παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐφελκυστικὴ ἢ θλιπτικὴ δύναμις, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακὸς, προκειμένου περὶ ἐνώσεως δύο τεμαχίων αὐτῆς, ἢ ἡ θλιπτικὴ ἢ ἐφελκυστικὴ δύναμις, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἄνω ὀριζοντίου πλακὸς, προκειμένου περὶ ἐνώσεως δύο τεμαχίων τῆς ἄνω πλακὸς, πρέπει νὰ ᾖται ἴση μὲ τὴν δύναμιν τῶν δικεφάλων ἡλων.

Καλοῦντες λοιπὸν K τὴν ἐφελκυστικὴν ἢ θλιπτικὴν δύναμιν, τὴν ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τῆς ἄνω ἢ κάτω ὀριζοντίου πλακὸς, ν τὸν ζητούμενον

ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων, δ τὴν διάμετρον ἐκάστου αὐτῶν καὶ ὑποθέ-
τοντες τὴν σύνδεσιν ἐντελῆ, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$v \frac{\pi \delta^2}{4} \times 6 = K \quad (1)$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν

$$v = \frac{4K}{6\pi\delta^2} \quad (2)$$

Ἰνα δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) πορισθῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ v , πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ K . Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἐκάστην σύνδε-
σιν δύο τεμαχίων τῆς τε ἄνω καὶ κάτω ὀριζοντίου πλακῆς (διότι συνή-
θως αἱ συνδέσεις αὐτῶν εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου) ἡ ῥοπή τῶν
ἐλατηρίων δυνάμεων τῆς ἄνω καὶ κάτω ὀριζοντίου πλακῆς ὡς πρὸς τὸ
κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς ἐγκαρσίου τομῆς τῆς δοκοῦ, ὕπερ ὡς γνω-
ρίζομεν εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους τῆς τομῆς, πρέπει νὰ ἴσῃ
ἴση μὲ τὴν ῥοπήν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, εἰλημμένων καὶ τούτων ὡς
πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς τομῆς. Καλοῦντες δὲ X τὴν ῥοπήν τῶν ἐξω-
τερικῶν δυνάμεων καὶ γ τὸ ὕψος τῆς τομῆς τῆς δοκοῦ εἰς τὸ μέρος
τοῦτο, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$2K \frac{1}{2} \gamma = X \quad (3),$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν

$$K = \frac{X}{\gamma} \quad (4).$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ K ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2)
εὐρίσκομεν

$$v = \frac{4}{6} \times \frac{X}{\pi \delta^2 \gamma} \quad (5).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὡς γνωρίζομεν τὸ X εἶναι μεταβλητόν, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ
ἀριθμὸς v εἶναι μεταβλητός. Ἐν τῇ πράξει ὅμως λαμβάνουσι συνήθως
ὅπ' ὅψιν τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ X καὶ διὰ ταύτης προσδιορίζουσι τὸν
ἀριθμὸν v , ὃν λαμβάνουσι σταθερὸν δι' ὅλους τοὺς συνδέσμους. Οὕτω
δὲ πράττοντες θέλομεν ἔχει πλεόνασμα δυνάμεως, ὕπερ συντείνει εἰς
τὴν στερεότητα τῆς κατασκευῆς.

200. Τὰ ἐν τῇ ἀνωτέρω παραγράφῳ ῥηθέντα ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τῆς
κατὰ μῆκος δοκοῦ τοῦ προκειμένου παραδείγματος, θέλομεν ἔχει θέ-

τοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (5) ἀντὶ τοῦ X τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{1}{2}\mu^2\epsilon$
 $=\frac{1}{2}5^2 \times 2262 = 28275$, ἀντὶ τοῦ γ τὸ ἴσον αὐτῷ 0,86 καὶ ἀντὶ τοῦ

π καὶ δ τὰς τιμὰς αὐτῶν, λαμβάνοντες $\delta = 0^u, 02$, ὡς καὶ ἀνωτέρω

$$v = \frac{4}{6} \cdot \frac{28275}{3,14 \times 20^3 \times 0,86} = \frac{28275}{4620,24} = 17,4 \text{ ἢ } 18$$

201. Ἐπειδὴ αἱ ὀριζόντιαι πλάκες δοκοῦ τινος, ἐχοῦσης τομὴν διπλοῦν ταῦ, συνδέονται μετὰ τῆς καθέτου διὰ παλυλίτων, παρενθέσει τῶν γωνιωδῶν συνδέσμων (Σχ. 148), ἔπεται ὅτι, ἵνα ἡ δοκὸς ᾖ στερεά, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν ἐλάχιστον ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων, τὰ ὅποια πρέπει νὰ θέσωμεν καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς δοκοῦ ἢ ἀνά πᾶν αὐτῆς μέτρον, πρὸς σύνδεσιν ἑκατέρας τῶν ὀριζοντίων πλακῶν μετὰ τῆς καθέτου.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ μέρους τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας, ὅπερ ὑποβαστάζει δοκὸς τις σὺν τῷ ἀντιστοιχοῦντι προσθέτῳ βάρει, ἐνεργεῖ κατὰ διάτμησιν νὰ θλάσῃ τὰ παλύλιτα ταῦτα, καὶ ὅτι ἡ κατὰ διάτμησιν ἐνεργοῦσα αὕτη δύναμις βαίνει αὐξάνουσα ἀπὸ τοῦ μέσου πρὸς τὰ ἄκρα· διότι ἂν διαιρέσωμεν τὸ ὅλον μῆκος τῆς δοκοῦ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν πολλῶν ἴσων μερῶν, τὸ μὲν τεμάχιον, τὸ κατέχων τὸ μέσον τῆς δοκοῦ, θὰ ὑπόκηται εἰς τὴν διάτμησιν τῆς δυνάμεως β (παριστῶντες διὰ β τὸ φορτίον ἐκάστου τεμαχίου συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος βάρους τῆς δοκιμῆς), τὰ δὲ ἑκατέρωθεν τούτου ἀμέσως ἐπόμενα τεμάχια θὰ ὑπόκηνται εἰς τὴν διάτμησιν δυνάμεων, ἃς εὐρίσκομεν ἀποσυνθέτοντες τὸ ὅλον βάρος 3β τῶν τριῶν τεμαχίων εἰς δύο συνιστώσας, ἐνεργοῦσας ἐπὶ τῶν ἄκρων τῶν παρακειμένων τεμαχίων, ἅτινα εὐρίσκονται εἰς ἐπαρῆν μὲ τὰ ἐπόμενα τεμάχια, ἑκάτερον τῶν ὁποίων θὰ ὑπόκηται εἰς τὴν διάτμησιν δυνάμεων, ἃς εὐρίσκομεν ἀποσυνθέτοντες τὸ βάρος 5β εἰς δύο συνιστώσας, ἐνεργοῦσας ἐπὶ τῶν ἄκρων τῶν τρίτων τεμαχίων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παλυλίτων πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν κατὰ διάτμησιν ἐνεργοῦσαν μεγαλειτέραν δύναμιν καὶ ἐπειδὴ, ὡς γνωστὸν, ἡ μεγαλειτέρα αὕτη δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς δοκοῦ, διὰ ταῦτα καλοῦντες K τὴν δύναμιν ταύτην, ν τὸν ἀριθμὸν τῶν παλυλίτων, δ τὴν διάμετρον καὶ P τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ἃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς διάτμη-

σιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας ἐκάστου παλυλίου, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$2\pi \frac{\delta^2}{4} \times \nu \times P = K \quad (1),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τιμὴν τοῦ ν , ἥτοι

$$\nu = \frac{2K}{\pi \delta^2 P} \quad (2).$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν τύπον (2) θέσωμεν τὰς γνωστὰς τιμὰς τοῦ K , ὅταν πρόκηται περὶ δοκοῦ τινος ἐχούσης μῆκος 2μ καὶ στηριζομένης διὰ τῶν δύο ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ δύο στερεῶν στηρίγματων, ἢ πεπακτωμένης δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς, ἢ πεπακτωμένης διὰ τοῦ ἐνὸς καὶ στηριζομένης διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ τινος στηρίγματος, ὁμοιομόρφως δὲ φορτωμένης καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς, θέλομεν ἔχει τὰς ἐξῆς δύο μερικωτέρως ἐξισώσεις, τὴν μὲν

$$\nu = \frac{2\mu\epsilon}{\pi \delta^2 P} \quad (3)$$

διὰ δοκὸν στηριζομένην ἢ πεπακτωμένην δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῆς καὶ φέρουσαν φορτίον ϵ κατὰ μέτρον, καὶ τὴν

$$\nu = \frac{2 \times \frac{5}{4} \mu\epsilon}{\pi \delta^2 P} = \frac{5}{2} \times \frac{\mu\epsilon}{\pi \delta^2 P} \quad (4)$$

διὰ δοκὸν πεπακτωμένην διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου καὶ στηριζομένην διὰ τοῦ ἐτέρου ἐπὶ στερεοῦ στηρίγματος καὶ φέρουσαν φορτίον ϵ κατὰ μέτρον.

202. Τὰ ἐν τῇ ἀνωτέρω παραγράφῳ ῥηθέντα ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τοῦ προκειμένου παραδείγματος, θέλομεν ἔχει

$$\nu = \frac{2 \times 3,50 \times 1172}{3,14 \times 20^2 \times 6} = 4,09, \text{ ἢ } 2,$$

διὰ τὰς ἐγκαρσίους δοκοὺς, ὑποθέτοντες τὸν σύνδεσμον ἐντελῆ καὶ λαμβάνοντες δ ἴσον μὲ $0^{\mu},02$, καὶ

$$\nu = \frac{5}{2} \times \frac{5,00 \times 2262}{3,14 \times 20^2 \times 6} = 3,75, \text{ ἢ } 4$$

διὰ τὰς κατὰ μῆκος δοκοὺς, ὑποθέτοντες τὸν σύνδεσμον ἐντελῆ καὶ λαμβάνοντες δ ἴσον μὲ $0^{\mu},02$.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ σύνδεσις τῶν διαφόρων τεμαχίων τῆς γεφύρας γίνεται ὅχι εἰς τὸ ἐργαστάσιον, ἀλλὰ πλησίον τῆς θέσεως, ἔνθα πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἡ γέφυρα, τότε πρὸς ἀσφάλειαν πρέπει νὰ λαμβάνωμεν 3 χιλιόγραμμα διὰ δύναμιν ἐκάστου χιλιοστοῦ τετραγωνικοῦ ἐπιφανείας τοῦ παλυλίου, ἐπομένως εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (3) καὶ (4) πρέπει νὰ θέσωμεν ὡς τιμὴν τοῦ Ρ ὅχι 6 χιλιόγραμμα, ἀλλὰ 3 χιλιόγραμμα.

203. Διὰ τῶν ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις ἐκτεθέντων (190 — 202) εἶδομεν πῶς προσδιορίζονται τὰ διάφορα μέρη εὐθυγράμμου τινὸς σιδηρᾶς γεφύρας. Ὑπολείπεται νὰ εἶδωμεν ἂν ἡ κατὰ μῆκος δοκὸς τῆς γεφύρας, ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῶν τεσσάρων βάθρων Β, Γ, Δ καὶ Ε καὶ τῶν δύο ἀκροβάθρων Α καὶ Ζ (Σχ. 146), ἀντέχῃ εἰς τὴν θλίψιν τοῦ βάρους, τοῦ ἐνεργούντος ἐρ' ἐκάστου τῶν βάθρων Β, Γ, Δ καὶ Ε καὶ δὲν κάμπτεται εἰς τὰ μέρη ταῦτα.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων βάθρων τὰ μὲν Β καὶ Δ ὑποβαστάζει ἐκάτερον βάρος ἴσον μὲ $\mu\beta + \frac{3}{4}\mu\beta = \mu\beta\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}\mu\beta$, τὰ δὲ Γ καὶ Ε ὑποβαστάζει ἐκάτερον βάρος ἴσον μὲ $2\mu\beta$, διότι αἱ δοκοὶ ΒΑ καὶ ΕΖ θεωροῦνται ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι εἰς τὸ ἐν αὐτῶν ἄκρον (ἡ μὲν ΑΒ εἰς τὸ Β, ἡ δὲ ΕΖ εἰς τὸ Ε) καὶ στηριζόμεναι διὰ τοῦ ἐτέρου, αἱ δὲ δοκοὶ ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ ὡς δοκοὶ πεπακτωμέναι δι' ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων αὐτῶν. Ἐπομένως ὁ μεγαλειότερος κίνδυνος τῆς κάμψεως εἶναι εἰς τὰ βάρη Β καὶ Ε.

Ἐὰν δὲ ἐμβλέψωμεν μετὰ προσοχῆς εἰς τὸ σχῆμα 147, ὅπερ παρίσται τὴν ἡμιεγκάρσιον τομὴν τῆς γεφύρας καὶ δεικνύει τὸν τρόπον τῆς συνδέσεως τῶν ἐγκαρσίων αὐτῆς δοκῶν μεθ' ἐκατέρας τῶν κατὰ μῆκος, θέλομεν ἶδει, ὅτι τὸ βάρος τοῦ καταστρώματος τῆς γεφύρας, τῶν σιδηρῶν δοκῶν, καὶ τοῦ προσθέτου βάρους τῆς δοκιμῆς ἐνεργεῖ ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακῶς καὶ ἐπομένως οὐδεὶς κίνδυνος κάμψεως τῆς καθέτου πλακῶς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ ὑπάρχει. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς ἄλλας γεφύρας ἡ κάτω ὀριζόντιος πλάξ τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν δὲν ἐφάπτεται τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακῶς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ, καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ βάρος τοῦ καταστρώματος, τῶν ἐγκαρσίων δοκῶν καὶ τῆς δοκιμῆς μεταδίδεται ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῆς καθέτου πλακῶς τῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ καὶ ἐπὶ σημείων εὐρισκομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὀριζοντίου εὐθείας, ἧς ἡ ἀπὸ τῆς ἄνω πλακῶς

τῆς δοκοῦ ἀπόστασις εἶναι ἐλαχίστη, διὰ τοῦτο οἱ μηχανικοὶ ὀπλί-
ζουσι τὰ ἄνωθεν τῶν βάρων καὶ ἀκροβάθρων τεμάχια ἑκατέρας τῶν
κατὰ μῆκος δοκῶν, διὰ τῆς προσθήκης τῶν καθέτων πλακῶν β, α, γ,
μ, δ, ε, ζ, ζη, ηκ, καὶ θμ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆ-
μα 153, ὕπερ παριστᾷ τομὴν τῆς δοκοῦ με-
ταξὺ τῶν δύο ὀριζοντίων αὐτῆς πλακῶν.

Καὶ τὰ μὲν αη ἢ δζ εἶναι ἴσα μὲ τὸ πλάτος
τῆς κάτω ὀριζοντίου πλακὸς τῆς κατὰ μῆκος
δοκοῦ τὰ δὲ αδ ἢ ηζ πρέπει νὰ ᾔναι ἴσα ἢ μι-
κρότερα τοῦ πάχους τῶν βάρων.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς πάχος ἐκάστου τῶν ἀνωτέρω τεμαχίων $0^{\mu},94$,
καὶ ὡς μῆκος τῶν αδ καὶ ηζ τὸν ἀριθμὸν $0^{\mu},40$ ἐπειδὴ τὸ μὲν αη
εἶναι ἴσον μὲ $0,20$ τὸ δὲ μέγιστον φορτίον, ὕπερ θλίβει ἑκαστον τῶν
ἄνωθεν τῶν βάρων καὶ ἀκροβάθρων τεμαχίων τῆς δοκοῦ ὠρίσθη ἴσον
μὲ $\frac{9}{4}\mu\epsilon$, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$P'(αη + ηζ + ζδ + δα + μθ + νκ)10 = \frac{9}{4}\mu\epsilon \quad (1)$$

παριστῶντες διὰ P' τὴν θλίψιν, ἣν θὰ ὑποφέρῃ ἑκαστον χιλιοστὸν τε-
τραγωνικὸν ἐπιφανείας.

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ἀντὶ τῶν ακ, ηζ, ζδ, δα, μθ, νκ,
μ καὶ ε τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$P'(200 + 400 + 200 + 400 + 200 + 400)10 = \frac{9}{4}5 \times 2262,$$

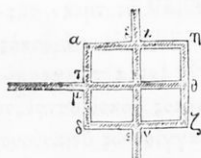
$$\eta \quad 18000P' = \frac{9}{4} \times 5 \times 2262,$$

ἔξ ἧς εὐρίσκομεν

$$P' = \frac{\frac{9}{4} \times 5 \times 2262}{18000} = 1\chi\iota\lambda., 41$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς μικροτέρας διαστάσεως αη τῆς τομῆς (Σχ. 153)
πρὸς τὸ ὕψος εἶναι ἴσος μὲ $\frac{0,82}{0,20}$ ἢ 4 περίπου, συμπεραίνομεν ὅτι ἑκα-
στον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας δύναται νὰ ὑποβληθῇ ἄνευ
κινδύνου εἰς θλίψιν 6 χιλιογράμμων.

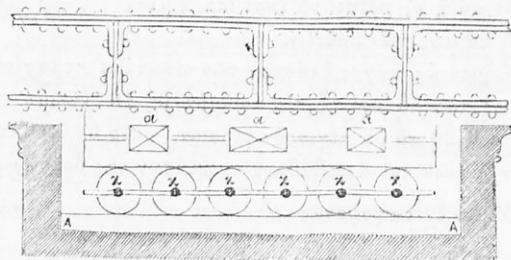
Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωτέρω εὐρεθεῖσα τιμὴ τοῦ P' εἶναι πολὺ μικρότερα



Σχ. 153

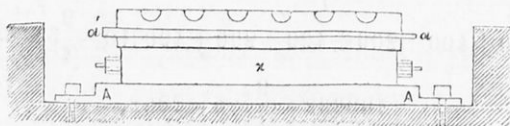
τῶν 6 χιλιογράμμων, πειθόμεθα ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ τι τὸ μῆκος αδ, ἂν τὸ πάχος τῶν βάρων δὲν ἐπιτρέπει νὰ λάβωμεν $\alpha=0,40$, ἄλλως τε πρὸς περισσotέραν ἀσφάλειαν παραδεχόμεθα τὸ $0^{\mu},40$ ὡς τιμὴν τῆς αδ.

204. Ἴνα ἡ δοκὸς κινῆται ἐλευθέρως ὁσάκις τὸ ἀρχικὸν μῆκος αὐτῆς ἕνεκα τῆς μεταβαλλομένης θερμοκρασίας μεταβάλλεται, αἱ κατὰ μῆκος δοκοὶ στηρίζονται ἐπὶ τῶν βάρων καὶ ἀκροβάθρων διὰ τοῦ φαλαγγίου ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα 154, 155 καὶ 156. Διὰ δὲ τῆς ἐκ



Σχ. 154

χυτοσιδήρου πλακὸς ΑΑ (Σχ. 154, 155 καὶ 156) τὸ ὑπὸ τῶν βάρων καὶ ἀκροβάθρων ὑποβασταζόμενον βάρος τῆς γεφύρας μεταδίδεται εὐχερέστερον καὶ κανονικώτερον ἐπ' αὐτῶν. Ἐπομένως αἱ διαστάσεις αὐ-



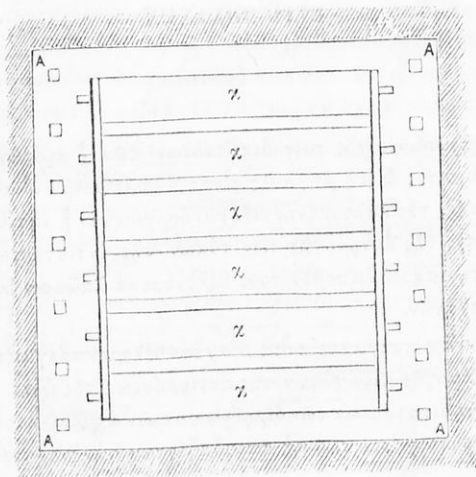
Σχ. 153

τῆς πρέπει νὰ ᾖναι τοιαῦται, ὥστε ἡ ὑπ' αὐτὴν ἐπιφάνεια τοῦ βάρου, τοῦ ὑποβαστάζοντος τὸ μεγαλείτερον φορτίον, νὰ ἀντέχη εἰς τὴν θλίψιν τοῦ φορτίου τούτου.

Καλοῦντες λοιπὸν α καὶ γ τὰς διαστάσεις τῆς πλακὸς Α εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ἐκτιμώμενας καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας φορτίον, εἰς τὴν θλίψιν τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ὑποβάλωμεν τὴν τοιχοποιίαν τῶν βάρων καὶ ἀκροβάθρων, πρέπει νὰ ᾖναι τὸ τέταρτον τοῦ ἐν τῷ ἐβδόμῳ πίνακι σημειουμένου φορτίου διὰ τοὺς ἐξ ὧν ἐκτίσθησαν ταῦτα λίθους, καὶ υποθέτοντες ὅτι τὸ

φορτίον τοῦτο εἶναι 4 περίπου χιλιογράμμα ἥτοι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 17, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$4 \times \alpha \times \gamma = \frac{9}{4} \mu\epsilon \quad (1).$$



Σχ. 136

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ πλάτος α πρέπει νὰ ᾖ μικρότερον τοῦ πάχους τοῦ βάρους, καὶ λαμβάνοντες τοῦτο ἴσον μὲ 60 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ τοῦ α καὶ μὲ τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$4 \times 60 \times \gamma = \frac{9}{4} \times 5 \times 2262 \quad (2)$$

$$\eta \quad 240\gamma = \frac{101790}{4} \quad (2),$$

$$\text{ἐπομένως} \quad \gamma = \frac{101790}{4 \times 240} = 1^{\mu},06 \text{ περίπου}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΗΧΑΝΩΝ

205. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τῶν διαφόρων τεμαχίων ἀτμοκινήτου τινὸς ἢ μὴ μηχανῆς εἶναι ἀντικείμενον ἰδιαιτέρου κλάδου ἐπιστήμης, τῆς καλουμένης *Μηχανουργίας*, ἐν ᾗ ἐκτίθεται ἐν ἐκτάσει ὁ τρόπος τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης καὶ εἰς ταύτην παραπέμπομεν τοὺς θέλοντας νὰ λάβωσιν ἐκτενεῖς γνώσεις περὶ μηχανῶν.

Ἐν τῇ παρούσῃ πραγματείᾳ διὰ βραχέων θέλομεν πραγματευθῆ μόνον περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστάσεων τῶν διαφόρων μερῶν ἀτμοκινήτου τινὸς μηχανῆς, καὶ τοῦτο χάριν τῶν μὴ σπουδάζόντων τὴν μηχανουργίαν μαθητῶν.

Ἄς λάβωμεν τὴν ἀπλουστάτην ἀτμοκίνητον μηχανήν, τὴν παριστωμένην ὑπὸ τοῦ σχήματος 157, καὶ ἃς ἴδωμεν τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαστάσεις τῶν διαφόρων αὐτῆς μερῶν ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ἐφ' οὗ ἀπ' εὐθείας ἐνεργεῖ ὁ ἀτμός.

1^{ον} Προσδιορισμὸς τοῦ πάχους ε τοῦ ἀτμοκυλίνδρου Κ.

Ἐπειδὴ ὁ ἀτμοκύλινδρος Κ ὑπὸκειται εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ ἐνεργοῦντος ἀτμοῦ, ὅστις τείνει νὰ διαρρήξῃ αὐτόν, καὶ ἐπειδὴ οὗτος κατασκευάζεται ἐκ χυτοσιδήρου, πρέπει πρὸς εὐρεσιν τοῦ πάχους αὐτοῦ ε νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἕτερον τῶν δύο γνωστῶν τύπων τῆς § 14, ἥτοι τὸν τύπον

$$\varepsilon = 0,008 + 0,0016N\delta \quad (1),$$

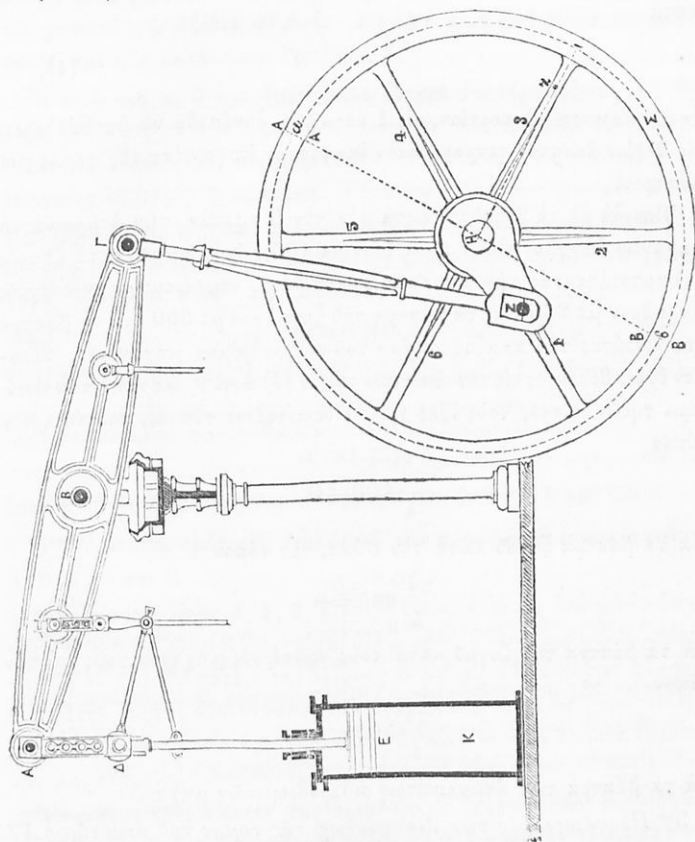
ὅταν οὗτος ἐχῇ καθέτως, καὶ τὸν τύπον

$$\varepsilon = 0,0085 + 0,00238N\Delta \quad (2),$$

ὅταν ὁ ἀτμοκύλινδρος ἐχῇ ὀριζοντίως.

2^{ον} Προσδιορισμός τῆς διαμέτρου δ τοῦ βάλκτρου ΕΔ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐκ χυτοσιδήρου κατασκευαζομένου βάλκτρου ΕΔ



Σχ. 137

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ, ἡ ἀπ' εὐθείας ἐν τῷ ἐμβόλῳ Ε ἐνεργούσα, μεταδίδεται δι' αὐτοῦ εἰς τὸ βάλκτρον ΕΔ. Ἐπομένως τὸ βάλκτρον ὑπόκειται εἰς τὴν θλίψιν τῆς δυνάμεως Θ, ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου Ε καὶ εἶναι ἴση μὲ $3,14 \frac{\Delta^2}{4} \times N \times 10333$ χιλιόγραμμα, τοῦ Δ παριστῶντος τὴν διάμετρον τοῦ ἐμβόλου Ε καὶ τοῦ γινομένου $N \times 10333$ τὴν ἐσωτερικὴν θλίψιν τοῦ ἀτμοῦ.

Καλοῦντες λοιπὸν δὲ τὴν διάμετρον τοῦ κυλινδρικοῦ βάκτρου ΕΔ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν γνωστὸν τύπον (1) τῆς § 28, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητά

$$\frac{\pi \delta^2}{4} \times P = \Theta \quad (1),$$

ἐν ᾗ P παριστᾷ τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλλωμεν εἰς θλίψιν ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας τῆς τομῆς τοῦ βάκτρου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ P τοῦτο κατὰ μὲν τὸν ἐφευρετὴν τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν Ἀγγλον Οὐάτ εἶναι ἴσον μὲ 400 χιλιόγραμμα, κατὰ δὲ τοὺς τελειοποιήσαντας τὴν χύσιν τοῦ χυτοσιδήρου νεωτέρους μηχανουργοὺς εἶναι ἴσον μὲ 200 διὰ τὰ βάκτρα τοῦ ζυγοῦ καὶ μὲ 500 διὰ τὰ βάκτρα τῆς κινούσης τὴν ἀμαξοστοιχίαν τοῦ σιδηροδρόμου μηχανικῆς, θέλομεν ἔχει, θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ P ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω τιμῶν αὐτοῦ, τοὺς ἐξῆς τρεῖς εἰδικωτέρους τύπους, τοῦτέστι τὸν τύπον

$$\frac{\pi \delta^2}{4} 400 = \Theta \quad (2)$$

διὰ τὰ βάκτρα ζυγοῦ κατὰ τὸν Οὐάτ, τὸν τύπον

$$\frac{\pi \delta^2}{4} 200 = \Theta \quad (3)$$

διὰ τὰ βάκτρα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τοὺς νεωτέρους μηχανουργοὺς καὶ τὸν τύπον

$$\frac{\pi \delta^2}{4} 500 = \Theta \quad (4)$$

διὰ τὰ βάκτρα τῶν ἀτμοκινήτων σιδηροδρομικῶν μηχανῶν.

3^{ον} Προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τοῦ διωστήρος ΓΖ καὶ τοῦ ζυγώματος ΔΑ.

Τὸ ζύγωμα ΔΑ καὶ ὁ διωστήρ ΓΖ κατασκευάζονται ἐκ χυτοσιδήρου, ὡς καὶ τὰ βάκτρα, ἐπειδὴ δὲ καὶ οὗτοι ὑπόκεινται εἰς τὴν αὐτὴν θλίψιν, εἰς ἣν καὶ τὰ βάκτρα, διὰ τοῦτο πρὸς εὐρεσιν τῆς τομῆς αὐτῶν ὡς πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1) τῆς § 28, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\omega P = \Theta \quad (1)$$

Ἡ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ εἰσακτέα τιμὴ τοῦ P ὑπέστη πολλὰς μεταβολὰς. Ἐν ἀρχῇ τῆς ἐφευρέσεως τῶν μηχανῶν καὶ ὅτε ἡ χύσις τοῦ

σιδήρου ἦτο ἀτελής, ἐλάμβανον $P=35$ χιλιόγραμμα δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας, μετὰ ταῦτα δέ, καθόσον ἡ χύσις τοῦ χυτοσιδήρου ἔβαινε τελειοποιουμένη, ἡ τιμὴ τοῦ P ἔβαινε ἀυξάνουσα, καὶ ἤδη λαμβάνουσι $P=500$.

Ἡ τιμὴ τοῦ ω , ἡ προσδιοριζομένη ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (4), ἀρμόζει μόνον εἰς τὰ δύο ἄκρα τοῦ διωστῆρος, εἰς τὸ μέσον ὅμως αὐτοῦ πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς πρὸς πρόληψιν τῆς τεινούςσης νὰ παραχθῇ κάμψις. Ὅθεν πρὸς εὕρεσιν τῆς τομῆς ω' τοῦ διωστῆρος ΓZ εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους αὐτοῦ, πρέπει νὰ κάμνωμεν χρῆσιν ἐνὸς τῶν δύο ἐπομένων ἐμπειρικῶν τύπων, τῶν συνήθως ἐν χρήσει παρὰ τοῖς ἐργοστασίσταρχαις, τοῦ τύπου

$$\omega' = 1,40\omega \quad (2)$$

ὅταν ὁ λόγος τοῦ μήκους ΓZ πρὸς τὴν διάμετρον δ τῆς τομῆς ω περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5, καὶ τοῦ τύπου

$$\omega' = 1,50\omega \quad (3)$$

ὅταν ὁ αὐτὸς λόγος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 35.

§ον Προσδιορισμὸς τῆς διαμέτρου τῶν κορυφῶν ἢ στροφύγγων Δ , A , B , Γ , Z καὶ H .

Οἱ μὲν στροφύγγες Δ , A , B , Γ καὶ Z ὑπόκεινται εἰς διάτμησιν ἕνεκα τῆς ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου E ἐνεργοῦσης θλίψεως Θ , ὁ δὲ στροφύγγς H ὑπόκειται εἰς τε τὴν διάτμησιν τῆς θλίψεως Θ καὶ εἰς τὴν στρέψιν, τὴν προερχομένην ἐκ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ σφονδύλου, ὅστις ὡς γνωστὸν ἔχει περιστροφικὴν κίνησιν καὶ κανονίζει τὴν κίνησιν τῶν λοιπῶν ὀργάνων τῆς μηχανῆς.

Ἐπομένως πρὸς εὕρεσιν τῆς διαμέτρου δ ἐκάστου τῶν στροφύγγων Δ , A , B , Γ καὶ Z πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον (4) τῆς § 18, ἥτοι τὸν ἑξῆς

$$\frac{\pi \delta^2}{4} P' = \Theta \quad (4)$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν Θ ἐκφράζει τὴν δύναμιν, τὴν τείνουσαν νὰ διατμήσῃ τὸν στροφύγγα, καὶ ἥς ἡ ἀξία ὠρίσθη ἀνωτέρω, τὸ δὲ P' τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ᾧ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ υποβάλωμεν εἰς διάτμησιν ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας

Ἐν τῇ § 48 εἶδομεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ P' εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ P , τοῦ ἀρμόζοντος εἰς τὸν ἐφελκυσμόν, ἥτοι 4 χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν χιλιοστὸν ἢ 400 κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν, ἐνταῦθα ὅμως οἱ μηχανουργοὶ παρεδέχθησαν 400 χιλιόγραμμα δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν.

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ P' τὴν τιμὴν αὐτοῦ 400, καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ δ , θέλομεν ἔχει

$$\delta = \sqrt{\frac{4\Theta}{400\pi}} \quad (2)$$

Πρὸς εὗρεσιν δὲ τῆς διαμέτρου δ τοῦ στρόφυγγος H , πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν διάτμησιν καὶ τὴν στρέψιν, καὶ ἐπομένως νὰ υπολογίσωμεν δύο διαμέτρους δ καὶ δ' . Καὶ τὴν μὲν δ νὰ προσδιορίσωμεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (2) τῆς διατμήσεως, τὴν δὲ δ' νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τῶν γνωστῶν τύπων τῆς στρέψεως

$$\delta'^3 = \frac{\Delta \cdot M}{434450} \quad (3)$$

ὅταν ὁ στρόφυγξ ᾖ ἐκ χυτοσιδήρου, ἢ διὰ τοῦ

$$\delta'^3 = \frac{\Delta M}{392940} \quad (4)$$

ὅταν ὁ στρόφυγξ ᾖ ἐκ καθαροῦ σιδήρου καὶ ἐκ τῶν δύο τιμῶν δ καὶ δ' τῆς διαμέτρου νὰ λάβωμεν τὴν μεγαλειτέραν.

Παρατήρησις. Οἱ μηχανουργοὶ ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω τύπων (3) καὶ (4) κάμνουσι χρῆσιν τοῦ τύπου

$$\delta' = 19 \sqrt[3]{\frac{N}{\mu}} \quad (5)$$

διὰ στρόφυγγας ἐκ χυτοσιδήρου, καὶ τοῦ τύπου

$$\delta' = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{\mu}} \quad (6)$$

διὰ στρόφυγγας ἐκ καθαροῦ σιδήρου, ἐν οἷς τὸ μὲν N παριστᾷ τὴν δύναμιν ἐκτιμηθεῖσαν εἰς ἵππους δυνάμεων, τὸ δὲ μ τὸν εἰς τὸ ἐν λεπτὸν τῆς ὥρας ἀριθμὸν τῶν στροφῶν τοῦ σφονδύλου.

6^{ον} Προσδιορισμός τῶν διαστάσεων τοῦ ζυγοῦ.

Ὁ ζυγὸς ΑΓ θεωρεῖται ὡς πεπακτωμένος εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ Β καὶ φέρων φορτίον ἐπὶ τῶν ἐλευθέρων ἄκρων αὐτοῦ Α καὶ Γ. Τὸ ἐπὶ τοῦ ἄκρου Α ἐνεργοῦν φορτίον εἶναι ἡ τὸ ἐμβόλον Ε θλίβουσα δύναμις τοῦ ἀτμοῦ, ἥτις μεταδίδεται εἰς αὐτὸ διὰ τοῦ βέλκρου ΕΔ καὶ τοῦ διωστήρος ΔΑ. Ἐπομένως ὁ ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει ἐφαρμοστέος τύπος εἶναι ὁ τύπος (Α) τῆς § 60, ἥτοι ὁ ἑξῆς

$$\frac{PI}{\nu} = BM \quad (1),$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν Β παριστᾷ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου Ε ἐνεργοῦσαν θλίψιν Θ, τὸ Μ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀλικοῦ μήκους τοῦ ζυγοῦ, ἥτοι τὸ μῆκος ΑΒ, καὶ τὸ Ρ τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμὸν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐξ ἧς κατασκευάζεται ὁ ζυγὸς ὕλης. Οἱ ζυγοὶ τῶν ἀτμοκινήτων μηχανῶν κατασκευάζονται συνήθως ἐκ χυτοσιδήρου καὶ ἔχουσι ἐγκάρσιον τομὴν διπλοῦν ταῦ. Καλοῦντες λοιπὸν α καὶ γ, α' καὶ γ' τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς, λαμβάνοντες

$$P = \frac{3730000}{2} = 1875000 \text{ καὶ ἀντιστάγοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1)}$$

ἀντὶ τῶν I, ν καὶ Ρ τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\frac{1875000(\alpha\gamma^3 - 2\alpha'\gamma'^3)}{6\gamma} = BM \quad (2).$$

Οἱ ἐργοστασιάρχαι παραδέχονται συνήθως μεταξὺ τῶν μεγεθῶν α, γ, α' καὶ γ' τὰς ἐξῆς σχέσεις

$$\gamma' = \frac{5}{6}\gamma, \quad \alpha' = \frac{1}{12}\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{1}{4}\gamma$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (2) θέτοντες λοιπὸν ἀντὶ τῶν α', γ' καὶ α τὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἐξαγομένους τιμὰς, θέλομεν ἔχει

$$\frac{1875000\left(\frac{\gamma^4}{4} - \frac{5\gamma^4}{36}\right)}{6\gamma} = BM \quad (3)$$

$$\frac{1875000\gamma^3}{54} = BM \quad (4)$$

ἢ

$$\gamma^3 = \frac{BM}{34722} \quad (5)$$

ἢ

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ ζυγοῦ οἱ μηχανουργοὶ δίδουσι ὕψος ἴσον μὲ $\frac{1}{3}\gamma$, τοῦ γ παριστῶντος τὸ εἰς τὴν πᾶκτωσιν Β ὕψος τοῦ ζυγοῦ, προσδιοριζομένου διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (5).

7^{ον} Προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ σφονδύλου.

Τὸ βάρος τοῦ σφονδύλου Σ (Σχ. 457) προσδιορίζεται ὅχι διὰ τῶν τύπων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης, ἀλλὰ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ κατωτέρω τύπου τῆς μηχανουργίας, τοῦ δίδοντος τὴν κανονικὴν κίνησιν αὐτοῦ. Χάριν δὲ τῶν μαθητῶν θέλομεν δεῖξει τὸν τρόπον τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ βάρους τούτου, δανειζόμενοι ἐκ τῆς μηχανουργίας τὸν τύπον, οὕτινος χρῆσιν ποιοῦσιν οἱ μηχανουργοί.

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὁ ἐξῆς·

$$B = M \frac{Nv}{\mu v^2} \quad (1),$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν Β παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ σφονδύλου, τὸ Ν τὴν δύναμιν τῆς μηχανῆς εἰς ἵππους ἐκπεφρασμένην, τὸ μ τὸν ἀριθμὸν τῶν στροφῶν τοῦ σφονδύλου εἰς τὸ 1^{λ.δ.}, τὸ υ τὴν ταχύτητα τῆς μέσης περιφερείας αα τοῦ σφονδύλου, τὸ Μ τὸν συντελεστὴν τοῦ συστήματος τῆς μηχανῆς καὶ τὸ ν ἕτερον συντελεστὴν τῆς ταχύτητος, δεικνύοντα κατὰ πόσον ἡ μεγίστη ταχύτης τοῦ σφονδύλου ὑπερβαίνει τὴν μέσην ταχύτητα.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον ἐπὶ τινος μερικοῦ παραδείγματος. Ἐστω π. χ. $N=20$, $v=40$, $Mv=223000$, $\mu=30$, $\Delta=4,00$, παριστῶντες διὰ Δ τὴν διάμετρον τῆς μέσης περιφερείας αα τοῦ σφονδύλου. Θέλομεν ἔχει

$$v = \frac{3,14 \times 4,00 \times 30}{60} = 6,28$$

$$\text{καὶ} \quad B = 223000 \frac{20}{30 \times (6,28)^2} = 3777 \quad (2).$$

Τοῦ βάρους Β τοῦ σφονδύλου εὑρεθέντος, ἵνα εὐρωμεν καὶ τὰς διαστάσεις τῆς τομῆς αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς προφανῆ ἐξίσωσιν

$$B = 7200 \times \omega \times 3,14 \times 4,00 \quad (3)$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν 7200 παριστᾷ τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου χυτοσιδήρου, ἐξ οὗ οἱ σφόνδυλοι κατασκευάζονται, ω τὴν τομὴν, καὶ 4,00 τὴν διάμετρον τῆς μέσης περιφερείας αα.

Ἐξισοῦντες δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) πορίζομεθα τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν

$$3777 = 7200 \times \omega \times 3,44 \times 4,00 \quad (4),$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν

$$\omega = \frac{3777}{7200 \times 3,44 \times 4,00} = 0,0417 \quad \eta \quad \omega = 417$$

ἑκατοστὰ τετραγωνικά.

Καλοῦντες δὲ α καὶ γ τὰς δύο διαστάσεις τῆς τομῆς ω , ἥτις συνήθως εἶναι ὀρθογώνιος, ἔχομεν

$$\alpha\gamma = 417 \quad (5)$$

λαμβάνοντες δὲ τὸ ὕψος γ ἴσον μὲ 3α ὡς τοῦτο εἴθισται ἐν τῇ μηχανουργίᾳ καὶ θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5) ἀντὶ τοῦ γ τὴν τιμὴν αὐτοῦ 3α , θέλομεν ἔχει

$$3\alpha^2 = 417 \quad (6)$$

ἐπομένως

$$\alpha = \sqrt{\frac{417}{3}} = 11,767 \text{ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.}$$

206. Διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (4) τῆς μηχανουργίας προσδιωρίσθησαν αἱ διαστάσεις α καὶ γ ἢ ἡ τομὴ ω τοῦ σφονδύλου ὑπὸ τὴν ἐποψιν τῆς κανονικῆς αὐτοῦ κινήσεως. Ὑπολείπεται δὲ ἤδη νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τῶν τύπων τῆς ἀντιστάσεως τῆς ὕλης, ὅτι ὁ σφόνδυλος, ὁ ἔχων τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας διαστάσεις, οὐδένα κίνδυνον διατρέχει ἐκ τῆς κεντροφύγου δυνάμεως, ἥτις τείνει νὰ διαβρῇξῃ αὐτὸν κατὰ δύο ἐκ διαμέτρου ἀντικειμένους διατομὰς, τὰς ΑΑ καὶ ΒΒ παραδείγματος χάριν.

Ἡ κεντρόφυξ αὕτη δύναμις, ἣν σημειοῦμεν διὰ τοῦ γράμματος K , ὑπολογίζεται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς μηχανικῆς

$$K = \frac{Bv'^2}{\gamma\rho'} \quad (1)$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν B παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ ἡμισφονδύλου, τὸ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὸ v' τὴν ταχύτητα τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος αὐτοῦ, καὶ τὸ ρ' τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος κ ἀπὸ τοῦ ἄξονος H .

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ ρ' καὶ v' τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ πλάτος ΑΑ τοῦ σφονδύλου Σ (Σχ. 457) εἶναι ἐλάχιστον ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς μέσης αὐτοῦ περιφερείας $\alpha\alpha$, δυνάμεθα νὰ πα-

ραδεχθῶμεν ὅτι ἅπασα ἡ μάζα τοῦ σφονδύλου εἶναι συγκετρωμένη ἐπὶ τῆς μέσης περιφερείας αα, ἥς τὴν ἀκτῖνα σημειῶμεν διὰ ρ .

Τούτου δὲ τεθέντος, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῆς ἡμιπεριφερείας αα, ἥτοι τὸ ρ' τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1), προσδιορίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς μηχανικῆς

$$\rho' = \frac{2\rho}{\pi} \quad (2)$$

ἡ δὲ ταχύτης $υ'$ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, δηλ. τοῦ σημείου κ, προσδιορίζεται διὰ τῆς ἀναλογίας

$$\rho : \rho' = u : u',$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν u παριστᾷ τὴν ταχύτητα τῆς μέσης περιφερείας αα, τὸ $υ'$ τὴν ταχύτητα τοῦ κέντρου κ, τὸ ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς μέσης περιφερείας αα, καὶ τὸ ρ' τὴν ἀπόστασιν Πκ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας εὐρίσκομεν τὸν τύπον

$$u' = \frac{\rho' u}{\rho} \quad (3)$$

ἐν ᾧ θέτοντες ἀντὶ τοῦ ρ' τὴν τιμὴν αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$u' = \frac{2\rho u}{\rho\pi} = \frac{2u}{\pi} \quad (4).$$

Εὐρεθέντων ἤδη τῶν τιμῶν τοῦ ρ' καὶ $υ'$, ἐὰν ἀντείσάζωμεν ταύτας εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1), θέλομεν ἔχει

$$K = \frac{B}{\gamma} \times \frac{\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}{\frac{2\rho}{\pi}} = \frac{B}{\gamma} \times \frac{2u^2}{\pi\rho} \quad (5).$$

Εὐρεθείσης οὕτω τῆς κεντροβύτου δυνάμεως K , τῆς ἐνεργούσης κατ' ἐφελκυσμόν, ἵνα διαρρήξῃ τὸν σφόνδυλον ταυτοχρόνως κατὰ τὰς διατομὰς ΑΑ καὶ ΒΒ, ἐὰν καλέσωμεν T τὴν ἀντίστασιν τοῦ μετάλλου, δηλ. τὸ φορτίον, εἰς ὃ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν εἰς ἐφελκυσμόν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, καὶ ω τὴν διατομὴν τοῦ σφονδύλου, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἐξῆς ἐξίσωσιν·

$$K = 2\omega T \quad (6)$$

ἐν ἣ θέτοντες ἀντὶ τοῦ K τὴν ἀνωτέρω εὐρεθείσαν τιμὴν αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$\frac{B \cdot 2v^2}{\gamma \cdot \pi r} = 2\omega T \quad (7)$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (7) θέτοντες ἀντὶ μὲν τοῦ B τὴν τομὴν αὐτοῦ $7200 \times \pi \times r \times \omega$, ἀντὶ δὲ τοῦ T τὴν γνωστὴν τιμὴν αὐτοῦ 2000000, μετασχηματίζομεν τοῦτον εἰς τὸν ἑξῆς

$$\frac{7200 \times \pi \times r \times \omega}{\gamma} \cdot \frac{2v^2}{\pi r} = 2\omega \times 2000000 \quad (8)$$

ἐξ οὗ πορίζομεθα

$$v^2 = \frac{2000000 \times \gamma}{7200} = \frac{2000000 \times 9,81}{7200}$$

ἢ

$$v = \sqrt{\frac{2000000 \times 9,81}{7200}} = 52^{\mu}, 19$$

Ἐκ τούτου πορίζομεθα

1^{ον} "Οτι, ὅταν ὁ σφονδύλος ἀποκτᾷ ταχύτητα 52 μέτρων εἰς τὸ 1 λ.δ., ἕκαστον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ τομῆς θὰ ὑποφέρῃ τὸν ἐφελκυσμὸν 2 χιλιογράμμων καὶ οὐδένα κίνδυνον διαρρήξεως θὰ διατρέχῃ.

2^{ον} "Οτι, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ σφονδύλου ὑπερβῇ τὰ 52 μέτρα εἰς τὸ 1 λ.δ., ἕκαστον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ τομῆς θὰ ὑποφέρῃ ἐφελκυσμὸν μείζονα τῶν 2 χιλιογράμμων καὶ ἐπομένως θὰ ὑπάρχῃ κίνδυνος διαρρήξεως αὐτοῦ.

3^{ον} "Οτι, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ σφονδύλου ᾖ μικρότερα τῶν 52 μέτρων εἰς τὸ 1 λ.δ., ἕκαστον χιλιοστὸν τετραγωνικὸν ἐπιφανείας τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ τομῆς θὰ ὑποφέρῃ ἐφελκυσμὸν ἐλάσσονα τῶν 2 χιλιογράμμων καὶ ἐπομένως οὐδεὶς κίνδυνος διαρρήξεως θὰ ὑπάρχῃ.

4^{ον} "Οτι, ἐπειδὴ ἡ μεγίστη ταχύτης τῶν σφονδύλων τῶν μέχρι τοῦδε κατασκευασθέντων ἀτμοκινήτων μηχανῶν δὲν φθάνει τὸν ἀριθμὸν 52, αἱ διαστάσεις αἱ προσδιοριζόμεναι ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς μηχανουργικῆς (ιδ. § 205) εἶναι αἱ ἀρμόζουσαι καὶ διὰ τὴν στερεότητα τῶν σφονδύλων.

207. Οἱ βραχίονες τοῦ σφονδύλου, οἱ παριστώμενοι ἐν τῷ σχήματι 157 διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κ.τ.λ. ὑπόκεινται καὶ οὗτοι εἰς τὸν ἐφελ-

κυσμὸν τῆς αὐτῆς κεντροφύγου δυνάμεως K . Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν τὸν σφόνδύλον διαρρήχθέντα ταυτοχρόνως κατὰ τὰς δύο ἀντικειμένους διατομὰς AA καὶ BB , ὅπως μὴ τὸ ἥμισυ τούτου, τὸ AB π. χ., ἀποσπασθῇ ἐκ τῆς πλήμνης H , πρέπει οἱ τρεῖς βραχιόνες, οἱ συγκρατοῦντες τὸ τεμάχιον AB τοῦ σφονδύλου Σ μετὰ τῆς πλήμνης H νὰ ἀντέχῳσι εἰς τὸν ἐφελκυσμὸν τῆς αὐτῆς κεντροφύγου δυνάμεως K . Ἐπεταὶ ἐντεῦθεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐγκαρσίων τομῶν τῶν τριῶν βραχιόνων 3, 4 καὶ 5 πρέπει νὰ ἰσοῦται τῇ ἐπιφανείᾳ τῶν δύο διατομῶν AA καὶ BB' τοῦ σφονδύλου, ἢ ὕπερ τὸ αὐτό, ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐγκαρσίων τομῶν τῶν ἑξ βραχιόνων νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τεσσάρων τομῶν τοῦ σφονδύλου, ἐπομένως θέλομεν ἔχει τὴν προφανῆ ἰσότητα

$$6\omega = 4\Omega \quad (1)$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν ω παριστᾷ τὴν τομὴν ἑνὸς τῶν βραχιόνων, τὸ δὲ Ω τὴν τομὴν τοῦ σφονδύλου.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν βραχιόνων ᾗναι ν , τότε ὁ τύπος (1) λαμβάνει τὴν γενικὴν μορφήν

$$\nu\omega = 4\Omega \quad (2)$$

ἔξ οὗ πορίζομεθα

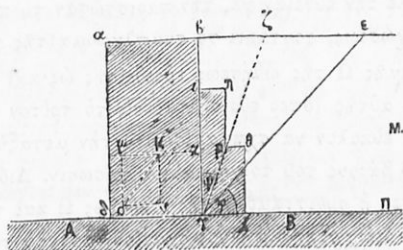
$$\omega = \frac{4\Omega}{\nu} \quad (3)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΙΝ ΧΩΜΑΤΩΝ ΤΟΙΧΩΝ, ΚΑΙ ΠΕΡΙ
ΒΑΘΡΩΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΤΩΝ ΓΕΦΥΡΩΝ

208. Τὰ ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ ἐκτεθησόμενα ἀνάγονται εἰς τὸ
 πρῆμα τῆς ἐφαρμοσμένης μηχανῆς, τὸ καλούμενον Γεφυροδοποιῖα, καὶ
 κινδυνάμεθα, ὡς ἀλλότρια τοῦ ἡμετέρου θέματος, νὰ παραλείψωμεν πα-
 ραπέμποντες τοὺς ἀναγνώστας ἡμῶν εἰς τὰ περὶ τούτου εἰδικὰ συγ-
 γράμματα. Ἄλλ' ἐπειδὴ ἀτυχῶς ἐν τῇ ἡμετέρᾳ γλώσσῃ δὲν ὑπάρχει
 μέχρι τοῦδε ἐκδεδωμένον σύγγραμμα περὶ Γεφυροδοποιίας, ἐνομίσαμεν
 ὅτι εὐκολύνομεν οὐκ ὀλίγον τοὺς ἡμετέρους μαθητάς, ἐὰν ἐν συντόμῳ
 ἐκθέσωμεν τὰ περὶ τούτων ἐνταῦθα.

Καὶ ἐν πρώτοις ἃς ἴδωμεν πῶς προσδιορίζεται τὸ πάχος τῶν τοί-
χων, δι' ὧν ὑποστηρίζομεν τὰ χρώματα ἐπιχώσεώς τινος. Ἄς ὑποθέσω-



27. 158

μεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πάχος αὐ τοῦ τοίχου
αβγδ (Σχ. 458), δι' οὗ προτιθέμεθα νὰ υποστηρίξωμεν τὰ χρώματα
τῆς ἐπιχώσεως Μ, ἥς ἡ ἄνω ἐπιφάνεια θε εἶναι ὀριζοντία.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ χρώματα τῆς ἐπιχώσεως M λαμβάνουσιν ἐφ' ἑαυτῶν κλίσιν τινὰ φ, παριστωμένην διὰ τῆς γωνίας εγΠ, ἣν σχηματίζει τὸ πρᾶνὲς αὐτῆς μέρος εγ μετὰ τῆς ὀρίζοντος γΠ. Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος γωνία εγΠ εἶναι διάφορος κατὰ τὴν διάφορον φύσιν τῶν

χωμάτων τῆς ἐπιχώσεως M , καὶ καλεῖται *γωνία τῆς τριβῆς*· διότι εἶναι τοιαύτη, ὥστε πᾶν σῶμα, τιθέμενον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου γε, μένει ἀκίνητον, καὶ κινεῖται ἀμέσως, ἂν ὡς ἡ γωνία $\epsilon\gamma\Pi$ κατασταθῇ μεγαλύτερα.

Ἐπεταὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου γε ἐν τῇ ἐπιχώσει M καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$ χωριζόμενον μέρος τῆς ἐπιχώσεως οὐδεμίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ τοίχου πίεσιν. Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἐπὶ τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$ ἐνέργειαν τοῦ ἐκ χώματος τριγωνικοῦ πρίσματος $\beta\gamma\epsilon$. Ἄν τὸ πρίσμα τοῦτο ἦτο συμπαγές, οὐδεμίαν προφανῶς καὶ τοῦτο ἤθελεν ἐπιφέρει ἐπὶ τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$ πρὸς τὰ ἔξω ὠθησιν. Ἀλλ' ἐπειδὴ συνήθως τὸ πρᾶγμα δὲν ἔχει οὕτως, ὁ τοίχος $\alpha\beta\gamma\delta$ ὑφίσταται πρὸς τὰ ἔξω ὑπὸ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος $\beta\gamma\epsilon$ ὠθησιν, ἥτις προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$\Omega = \frac{\Pi \Pi^2}{2} \epsilon \phi^2 \frac{1}{2} \psi \quad (1),$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν Ω παριστᾷ τὴν μεγίστην ὠθησιν τῶν χωμάτων τῆς ἐπιχώσεως M , τὴν τείνουσαν νὰ ἀνατρέψῃ τὸν τοίχον $\alpha\beta\gamma\delta$, τὸ Π τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου τῶν ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ ἐπιχώσις M χωμάτων, Π τὸ ὕψος $\gamma\delta$ τῆς ἐπιχώσεως M καὶ ψ τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ κάθετος $\beta\gamma$ μὲ τὴν εὐθείαν γε, τὴν παριστῶσαν τὸ πρᾶνές τῶν χωμάτων τῆς ἐπιχώσεως, τουτέστι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας ϕ .

209. Τῆς τιμῆς Ω τῆς ὠθήσεως εὐρεθείσης ὡς καὶ τοῦ σημείου κ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς (ὅπερ εὐρίσκεται εἰς τὸ τρίτον τοῦ ὕψους $\gamma\delta$), μᾶς εἶναι λίαν εὐκόλον νὰ σχηματίσωμεν τὴν μεταξὺ τῆς ὠθήσεως ταύτης καὶ τοῦ βάρους τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$ ἐξίσωσιν. Διότι, ἵνα ὑπάρξῃ ἰσορροπία, πρέπει ἡ συνισταμένη τῆς ὠθήσεως Ω καὶ τοῦ βάρους τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$ νὰ διέρχεται διὰ τινος σημείου, μεταξὺ τῶν δ καὶ γ κειμένου. Καὶ ὅταν μὲν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου δ , ἡ ὑπάρχουσα ἰσορροπία θέλει εἶναι ἀσταθής, ὅσῳ δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπομακρύνεται τοῦ ἄκρου δ πλησιάζον πρὸς τὸ μέσον τῆς $\delta\gamma$, τόσῳ ἡ ὑπάρχουσα ἰσορροπία καθίσταται εὐσταθεστέρα. Ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ τῶν σημείων δ καὶ γ ὑπάρχουσι πολλὰ σημεία, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν πολλὰς ἐξισώσεις πληροῦντας τὴν τῆς ἰσορροπίας συνθήκην, καὶ ἐπομένως νὰ εὐρωμεν πολλὰ πάχη τοῦ τοίχου $\alpha\beta\gamma\delta$, πληροῦντα τὸν προτιθέμενον σκοπόν. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν, ἀλγεβρικῶς θεωρούμενον, εἶναι

ἀπροσδιόριστον, ἀλλ' οἱ μηχανικοὶ πρὸς ἄρσιν τοῦ ἀπροσδιορίστου τούτου λύνουσι τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

1^{ον} Προσδιορίζουσι ἐν πρώτοις τὸ πάχος τοῦ τοίχου αβγδ εἰς τὴν στέψιν αὐτοῦ αβ, δηλ. εὐρίσκουσι τὴν πλευράν αβ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.

2^{ον} Αὐξάνουσι τὴν βάσιν δγ τοῦ τοίχου αβγδ κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ εὗρε-
θέντος πάχους τῆς στέψεως αβ, λαμβάνοντες πρὸς τὰ ἔσω γλ = $\frac{1}{3}$ αβ
καὶ λαμβάνουσιν τὸ δλ ὡς πάχος τῆς βάσεως τοῦ τοίχου.

3^{ον} Ἐνοῦσι τὸ σημεῖον β μὲ τὸ λ ἢ δι' εὐθείας γραμμῆς, ἣ προτι-
μώτερον, διὰ ὀρθογωνίως τεθλασμένης βιηρθλ, καὶ οὕτω εἰς τὴν ἐγκάρ-
σιον τομὴν τοῦ τοίχου δίδουσι τὸ σχῆμα αβιηρθλδ, ὅπερ συντείνει μᾶλ-
λον εἰς τὴν στερέωσιν. Διότι οὕτως ἀφ' ἑνὸς μέρους τῶν χωμάτων τοῦ
ὠθοῦντος πρίσματος βγε ἀφαιρεῖται, καὶ ἐπομένως ἑλαττοῦται ἡ ὀλικὴ
ὠθησις Ω, καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ χρώματα, τὰ ὑπερκείμενα τῶν βαθμίδων
ιη καὶ ρθ, πιέζουσι διὰ τοῦ βάρους αὐτῶν τὰς βάσεις ιη καὶ ρθ, καὶ ἐπο-
μένως συντείνουσιν εἰς τὴν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν τοῦ ὅλου.

210. Πρὸς εὗρεσιν δὲ τοῦ πάχους αβ τῆς στέψεως ἐφαρμόζουσι τὸ
θεώρημα τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον δ, διότι ὅταν ἡ συνισταμένη
διέρχεται διὰ τοῦ δ, ἡ ῥοπή αὐτῆς εἶναι μηδέν. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν
τὴν ἐξίσωσιν

$$\Omega \frac{1}{3} \Pi = \frac{\Pi' \Pi \chi^2}{2} \quad (2),$$

ἐν ᾗ τὸ μὲν πρῶτον μέλος παριστᾷ τὴν ῥοπήν τῆς ὠθήσεως Ω ὡς πρὸς
τὸ σημεῖον δ, τὸ δεύτερον τὴν ῥοπήν τοῦ βάρους τοῦ πρισματικοῦ τοί-
χου αβγδ, τοῦ ἔχοντος τομὴν ὀρθογώνιον, τὴν αβγδ, καὶ ὕψος ἐν μέ-
τρῳ (διότι θεωροῦμεν ἐν μέτρῳ μήκους τοῦ τοίχου τῆς ὑποστηρίξεως
πρὸς εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν) τὸ δὲ Π' τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέ-
τρου τῆς ἑξ ἧς κατασκευάζεται ὁ τοίχος τοιχοποιίας, Π τὸ ὕψος τοῦ
τοίχου, ὅπερ καθ' ὃ ἐν ταῖς προηγουμένοις εἴπομεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ
ὕψος τῆς ἐπιχώσεως M, καὶ χ τὸ ζητούμενον πάχος αβ τῆς στέψεως
τοῦ τοίχου.

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ Ω τὴν γνωστὴν
αὐτοῦ τιμὴν, ἣν πορίζομεθα ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς § 208 καὶ ἐκ

τῆς οὕτω προκυψούσης ἐξίσωσης ἐξάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ χ εὐρίσκομεν

$$\chi = H \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\Pi}{\Pi'} \epsilon^{\phi} \frac{1}{2} \psi} \quad (3).$$

211. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (3) πορίζομεθα τὴν τιμὴν τῆς χ , ὅταν τὰ Π , Π' , H καὶ ἡ γωνία ψ ᾖναι γνωστά. Καὶ τὸ μὲν H εἶναι πάντοτε γνωστόν, διότι παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ τοίχου $ab\gamma\delta$, ἢ τὸ ὕψος τῆς ἐπιχώσεως M , τὸ δὲ Π προσδιορίζομεν εὐκόλως ἢ διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας ζυγίσεως ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου χρωμάτων, ἐξ ὧν θὰ ἀποτελεσθῇ ἡ ἐπίχρωσις M , ἢ δανειζόμεθα τοῦτο ἐκ τῆς φυσικῆς, ἥτις περιέχει πίνακα δίδοντα τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν διαφόρων σωμάτων, ὡσαύτως καὶ τὸ Π' τὴν δὲ γωνίαν ψ εἶναι καλὸν νὰ προσδιορίζωμεν ἐκάστοτε διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας καταμετρήσεως τῆς κλίσεως, ἣν λαμβάνουσι τὰ χρώματα τῆς ἐπιχώσεως.

Ἐπειδὴ δὲ συνήθως εἶναι δύσκολον νὰ ἐκτελῶμεν ἐκάστοτε εἰδικὰ πειράματα πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ποσοτήτων Π , Π' καὶ τῆς γωνίας ψ , καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν σύνταξιν τῶν διαγραμμάτων καὶ ὑπολογισμῶν τῆς δαπάνης ἔργου τινὸς εἶναι ἀνάγκη ἐκ τῶν προτέρων νὰ ὀρίσωμεν τὸ πάχος ab τοῦ τοίχου, ἵνα δυνηθῶμεν νὰ εὐρωμεν τὸ ποσὸν τῆς δαπάνης, διὰ τοῦτο παραδεχόμεθα τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐκτελεσθέντων πειραμάτων πρὸς προσδιορισμὸν τῶν Π , Π' καὶ τῆς γωνίας ψ .

Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (3) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου ἀντὶ τῶν Π , Π' καὶ ψ τὰς ἐκ τῶν ἐκτελεσθέντων πειραμάτων ἐξαχθείσας αὐτῶν τιμὰς καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένas πράξεις, πορίζομεθα τοὺς κάτωθι εἰδικωτέρους τύπους, ὧν συνήθως γίνεται χρῆσις πρὸς εὐρεσιν τοῦ πάχους ab τῆς στέψεως τοῦ τοίχου $ab\gamma\delta$.

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Περιέχων τὸν εἰδικωτέρον τύπον, δι' ὃν προσδιορίζομεν τὰ πᾶσι τῆς στέγης τῶν τοίχων τῆς ὑποστηρίξεως τῶν χωμάτων ἐπιχώσεως τιμῶν.

ΕΙΔΟΣ ΛΙΘΟΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΤΟΙΧΟΥ THE MASONRY	Χώρα ἐκ ἀρπυρίων γῆς 1100 χίλιων. κατὰ κοδικὸν μέτρ.	Χώρα ἐκ ἀρπυρίων γῆς 1240 χιλίων. κατὰ κοδικὸν μέτρ.	Χώρα με- μιγμένη μετὰ γόνδρου καί- κων 1600 χιλ. κατὰ κοδ. μέτρ.	Χώρα με- μιγμένη μετὰ λαπτοχάλι- κων 1458 χιλίων. κατὰ κοδ. μέτρ.	"Αμμος 1340 χίλιων κατὰ κοδικὸν μέτρ.	Λιθοδόμη- τα 1730 χιλίων. κατὰ κοδικὸν μέτρ.	Χώρα ἐκ ἀρπυρίων γῆς 1380 χιλ. κατὰ κοδ. μέτρ.
Λιθοδομή ἐκ ὀπτοπλίνων ζυγίζου- σα 1730 χιλίων. κατὰ κοδικὸν μέτρ. Κοινὴ λιθοδομή ἐκ λογάδων λίθων ζυγίζουσα 2200 χιλίων. κατὰ κοδ. μ. Λιθοδομή ἐκ ἑστῶν λίθων ζυγίζουσα 2700 χιλίων. κατὰ κοδικὸν μέτρον Λιθοδομή ἐκ χαλίκων τῶν χειμάρ- ρων, ζυγίζουσα 2360 χιλ. κατὰ κοδ. μ. Λιθοδομή ἐκ ὀπτοπλίνων ἢ λογάδων λίθων, ζυγίζουσα 1930 χιλ. κατὰ κοδ. μ. Λιθοδομή ἀνευ ἀμμοκονίας καλου- μένη ξηρολίθια, ζυγίζουσα 1460 χι- λιόγραμμα κατὰ κοδικὸν μέτρον.....	χ=0,46Π χ=0,13Π χ=0,13Π χ=0,14Π χ=0,14Π χ=0,16Π χ=0,22Π	χ=0,17Π χ=0,16Π χ=0,14Π χ=0,15Π χ=0,17Π χ=0,24Π	χ=0,19Π χ=0,17Π χ=0,16Π χ=0,16Π χ=0,17Π χ=0,23Π	χ=0,19Π χ=0,17Π χ=0,15Π χ=0,16Π χ=0,18Π χ=0,26Π	χ=0,33Π χ=0,30Π χ=0,26Π χ=0,30Π χ=0,32Π χ=0,37Π	χ=0,24Π χ=0,22Π χ=0,17Π χ=0,21Π χ=0,23Π χ=0,30Π	χ=0,54Π χ=0,49Π χ=0,44Π χ=0,47Π χ=0,51Π χ=0,30Π

Σημειώσεις. Ὁ ἀνωτέρω πίναξ περιέχει τοὺς μερικοὺς τύπους, δι' ὧν εὐρίσκομεν τὰ πάχη τῶν τοίχων εἰς τὴν στέψιν αὐτῶν, ὅταν τὰ χῶματα τῆς ἐπιχώσεως M (Σχ. 458) δὲν ᾖναι ὑγρά. Ὅταν ὅμως τὰ χῶματα τῆς ἐπιχώσεως ὡς ἐκ τῶν ὑπερῶν ὑγρανθῶσι ὑπὲρ τὸ δέον, τότε μεταβάλλονται εἰς πηλόν, ἐπομένως ἡ γωνία ψ μεταβάλλεται, τὸ δὲ βάρος Π αὐξάνει, καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ τοίχος διατρέχει κίνδυνον καταπτώσεως. Πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ κινδύνου τούτου οἱ μηχανικοὶ κατασκευάζουσι ἐν τῷ τοίχῳ καὶ ἐν καταλλήλῳ θέσει μικρὰς ὀπάς, δι' ὧν τὸ ἐν τοῖς χῶμασι τῆς ἐπιχώσεως εἰσδύον ὕδωρ τῶν ὑπερῶν ἐκρέει καὶ οὕτως ἐμποδίζεται ἡ εἰς πηλὸν μετατροπὴ αὐτῶν. Αἱ πρὸς τοῦτο κατασκευαζόμεναι ὀπαὶ ἔχουσι σχῆμα ὀρθογωνίων καὶ κατασκευάζονται μετὰ μεγάλης προσοχῆς.

212. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) τῆς παραγράφου 210 ὑποθέσωμεν ψ ἴσον 90° , πορίζομεθα τὸν τύπον, τὸν ἀρμόζοντα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ πάχους τῶν τοίχων τῶν δεξαμενῶν, ὧν οἱ τοῖχοι ὑπόκεινται εἰς τὴν ὥθησιν τοῦ ἐν αὐταῖς ὑπάρχοντος ὕδατος. Θέλωμεν λοιπὸν εὑρεῖν ὑποθέτοντες $\psi = 90^\circ$ τὸν τύπον

$$\chi = H \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\Pi}{\Pi'}} \quad (3),$$

ἐν ᾧ τὸ γράμμα Π παριστᾷ τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου ὕδατος, τουτέστι ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 4000. Ὑποθέτοντες λοιπὸν $\Pi = 4000$ θέλωμεν εὑρεῖν τὸν ἀπλούστερον τύπον

$$\chi = H \sqrt{\frac{4000}{3\Pi'}} \quad (4),$$

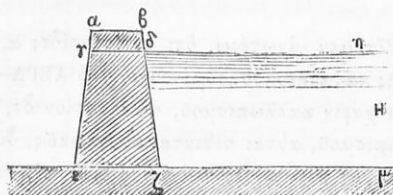
ἐξ οὗ πορίζομεθα τὸ χ , ὅταν τὸ εἶδος τῆς τοιχοποιίας, τουτέστι τὸ Π' , ᾖναι γνωστόν.

Ἐὰν ἡ τοιχοποιία ᾖναι ἀπλὴ λιθοδρομή, ὡς συνήθως τοῦτο συμβαίνει, τότε θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) ἀντὶ τοῦ Π' τὸν ἀριθμὸν 2200, τὸν παριστῶντα τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου τοιχοποιίας καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις θέλωμεν ἔχει τὸν ἀπλούστερον τύπον

$$\chi = 0,389H \quad (5),$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν χ παριστᾷ τὸ πάχος γὰρ τοῦ τοίχου ἀβέζε (Σχ. 459) εἰς τὴν στάθμην δὴ τοῦ ὕδατος, τὸ δὲ H τὸ βάθος τοῦ αὐτοῦ.

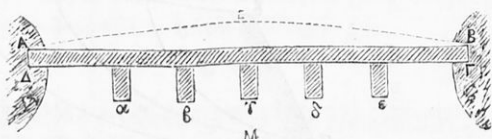
Ἡ ἐγκάρσιος τομὴ τῶν τοίχων, τῶν ὑποκειμένων εἰς τὴν ὠθήσιν τοῦ ὕδατος, εἶναι ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 159, δηλ. αἱ παρειαὶ αε καὶ βζ



Σχ. 159

ἔχουσι κλίσιν τινά, ἥτις συνήθως εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ὕψους Η, ἐνίοτε δὲ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$, κατὰ τὰς περιστάσεις.

213. Ὅταν τὸ μῆκος τοῦ πρὸς ὑποστήριξιν τῶν χωμάτων τοίχου ἐπιχώσεώς τινος ᾖναι μέγαν, τότε πρὸς πρόληψιν τῆς κάμψεως, ᾖναι ὁ τοίχος ΑΒΓΔ (Σχ. 160) λαμβάνει, ὡς δεικνύει ἡ ἐστιγμένη γραμ-



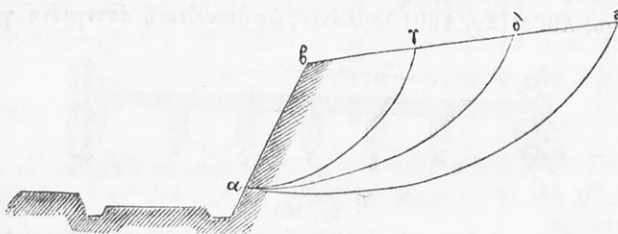
Σχ. 160

μή ΑΕΒ, ἕνεκα τῆς πρὸς τὰ ἔξω ὠθήσεως τῶν χωμάτων (διότι ὁ τοίχος ΑΒΓΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δοκὸς στηριζομένη εἰς τὰ ἅκρα Α καὶ Β καὶ ὁμοιομόρφως φορτωμένη καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῆς καὶ εἰς τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ἔνθα ἐνεργοῦσιν αἱ ὠθήσεις τῶν χωμάτων), τίθενται ἀντηρίδες α, β, γ κτλ. εἰς διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις. Αἱ ἀντηρίδες δὲ αὗται κατασκευάζονται ἐσωτερικῶς μὲν καὶ ἐξ ἀπλῆς λιθοδομῆς, ὅταν καὶ ὁ τοίχος ΑΒΓΔ ᾖναι κατασκευασμένος ἐξ ἀπλῆς λιθοδομῆς, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 160, ἐξωτερικῶς δὲ καὶ ἐκ ξηρολιθίας, ὅταν καὶ ὁ τοίχος ᾖναι κατεσκευασμένος ἐκ ξηρολιθίας· διότι ἐσωτερικῶς τιθέμεναι αἱ ἐκ ξηρολιθίας ἀντηρίδες οὐδόλως συντείνουσιν εἰς τὴν ἰσχυροποίησιν τοῦ τοίχου. Τὸ τοιοῦτο βλέπει τις εἰς ὅλους τοὺς ἀρχαίους τοίχους τῆς ὑποστηρίξεως τῶν χωμάτων, π.χ. εἰς τὸν περίβολον τοῦ ἐν Ἀθῇναις Ὀλυμπίου Διός. Ἡ δ' ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις δύο συνεχῶν ἀντηρίδων δὲν εἶναι ὠρισμένη, εἶναι δὲ συνήθως 10 ἢ 15

ἥ καὶ 20 μέτρων κατὰ τὴν φύσιν τοῦ ἐφ' οὗ θεμελιωθήσεται ὁ τοίχος ΑΒΓΔ ἐδάφους, κατὰ τὸ εἶδος τῶν χωμάτων τῆς ἐπιχώσεως Μ καὶ τὸ ὕψος αὐτῶν.

Σημείωσις. Εἵπομεν ἀνωτέρω, ὅτι αἱ ἀντηρίδες α, β, γ, δ καὶ ε τοῦ ἐκ λιθοδομῆς κατασκευασθησομένου τοίχου ΑΒΓΔ τίθενται ἐσωτερικῶς καὶ τοῦτο χάριν καλλωπισμοῦ, τὸ ἐναντίον δέ, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ λόγος καλλωπισμοῦ, αὗται τίθενται ἐξωτερικῶς, διότι οὕτως ἰσχυροποιοῦσι τὸν τοίχον περισσότερον ἀνθιστάμεναι εἰς τὴν κοίλωσιν αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦ ἰδίου αὐτῶν βάρους.

214. Τὰ ἀνωτέρω ρηθέντα ἐφαρμόζονται εἰς τὴν κατασκευὴν τοίχων ὑποστηριζόντων τὰ χώματα ἐπιχώσεώς τινος. Ἄλλ' ὅταν πρόκηται νὰ ὑποστηρίξωμεν τὰ χώματα τῆς παρειαῆς ἐκσκαφῆς τινος, π. χ. τὴν κλιτὸν αβ (Σχ. 464) τῆς τάφρου ὁδοῦ τινος οὔσης εἰς ἐκχῶμα, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τὸ πάχος τοῦ τοίχου,



Σχ. 161

διότι τὸ πρίσμα τῶν χωμάτων, τὸ ὠθοῦν τὸν τοίχον πρὸς τὰ ἔξω, εἶναι συνήθως ἄγνωστον, καὶ τοῦτο διότι τὰ χώματα τῆς ἐκσκαφῆς ὀλισθαίνουν συνήθως κατὰ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἀποτελούμενον ἐκ στρώματος λεπτοῦ ἀργίλλου διαχωρίζοντος δύο διάφορα στρώματα. Παραδείγματος χάριν ἐπὶ τοῦ σχήματος 464, τοῦ παριστῶντος τὴν ἐγκάρσιον τομὴν ἐκσκαφῆς τινος, τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον τῆς ὀλισθήσεως δυνατὸν νὰ κατέχῃ τὴν αγ θέσιν, ἢ τὴν αδ, ἢ τὴν αε κτλ. Ἐννοεῖται δὲ οἰκοθεν ὅτι τὸ πρίσμα αβγ ὡθεὶ ὀλιγώτερον ἢ τὸ πρίσμα αβδ, τὸ δὲ αβδ ὡθεὶ ὀλιγώτερον τοῦ αβε κτλ.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει οἱ μηχανικοὶ πρὸς στερεοποίησιν τῆς κλιτῆος αβ καταφεύγουσιν εἰς ἄλλα μέσα, ἅτινα δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκθέσωμεν ἐν τῇ παρούσῃ συγγραφῇ. Δι' ὃ καὶ παραπέμπομεν τοὺς θέλον-

τας νὰ λάβωσιν ἀκριβῆ τούτων γνώσιν εἰς τὸ ἀξιόλογον σύγγραμμα τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Μπρουέρ (Bruère), τὸ ἐπιγραφόμενον *συγγραφή περὶ ἰσχυροποιήσεως τῶν κλιτύων τῶν τάφρων, ὁδῶν, σιδηροδρόμων καὶ διωρύγων*.

215. Τὰ βάρη τῶν γεφυρῶν, τὰ καλούμενα καὶ μεσοστηρίγματα ἢ ποδαρικά, ὑπὸκεινται εἰς τὴν θλίψιν τοῦ βάρους μιᾶς ἀψίδος. Παραδείγματος χάριν, τὸ βᾶθρον ΓΑ (Σχ. 32) ὑποβάσπάζει τὸ βάρος τῶν ἐκατέρωθεν τούτου ἡμιαψίδων Βα καὶ Βγ, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος μιᾶς ἀψίδος, ὅταν αὐταὶ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα.

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ πάχους τοῦ ποδαρικοῦ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον (1) τῆς § 28, ἥτοι τὸν ἑξῆς

$$\omega P = B \quad (4)$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν ω παριστᾷ τὴν ἐγκάρσιον τομὴν τοῦ ποδαρικοῦ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου, τὸ P τὸ μέγιστον φορτίον, εἰς ᾧ ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας τῆς τοιχοποιίας τοῦ ποδαρικοῦ καὶ B τὸ βάρος τῆς ἀψίδος. Καλοῦντες δὲ χ τὸ ζητούμενον πάχος καὶ M τὸ μῆκος τοῦ ποδαρικοῦ, θέλομεν ἔχει

$$\omega = M\chi \quad (2)$$

καὶ ἀντείσχοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ ω τὴν τιμὴν αὐτοῦ $M\chi$ καὶ τὴν οὕτω προκύψουσαν ἐξίσωσιν λύοντες ὡς πρὸς τὸ χ , θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{B}{MP} \quad (3).$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν B' τὸ βάρος ἐνὸς μέτρου μήκους τῆς ἀψίδος, θέλομεν ἔχει

$$B = MB' \quad (4)$$

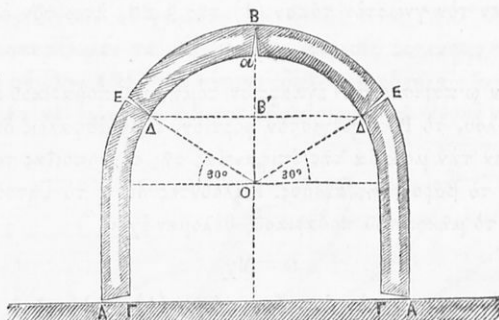
καὶ ἀντείσχοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὴν τιμὴν τοῦ B πορίζομεθα τὸν ἀπλούστερον τύπον

$$\chi = \frac{B'}{P} \quad (5)$$

ἐξ οὗ ἐξάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ , ὅταν τὸ B' καὶ τὸ P ᾖναι γνωστά.

216. Τὰ ἀκρόθια τῶν γεφυρῶν ὑπὸκεινται καὶ εἰς τὴν ὑπὸ τῆς ἀψίδος παραγομένην ἀντῶσιν καὶ εἰς τὴν θλίψιν τῆς συνισταμένης τῆς ἀντῶσεως ταύτης, τοῦ βάρους τῆς ἡμιαψίδος καὶ τοῦ ἑαυτῶν. Ἐπομέ-

νως ταῦτα πρέπει νὰ ἦναι ἀρκούντως ἰσχυρά, ὥπως ἐξουδετερωσι τὴν ἄντωση καὶ ὑποφέρωσι ταυτοχρόνως ἀκινδύνως τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐνεργουμένην θλίψιν. Πρῶτος ὁ Γάλλος μηχανικὸς Κλάπερον, ἐξετάσας ἐπισταμένως πολλὰς πεπτοκυτῆας ἀψίδας, διέγινωσε τὸν τρόπον καθ' ὃν αὗται καταπίπτουσιν, ὅταν τὰ ἀκρόβαθρα αὐτῶν δὲν ἦναι ἀρκούντως ἰσχυρά. Οὗτος παρατήρησεν, ὅτι ἀψὲς τις, ἥς ἡ ἄντυξ εἶναι ἡμικύκλιον, πρὶν ἢ καταπέσῃ διαρρήγνυται πρότερον ἐσωτερικῶς κατὰ τὴν κλεῖδα B, ἐξωτερικῶς κατὰ τοὺς ἄρμους ΔΕ, οὓς καλοῦσιν ἄρμους τῆς θλάσεως, καὶ ἐσωτερικῶς κατὰ τὴν βᾶσιν ΑΑ τῶν ἀκροβάθρων, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 462, καὶ ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν ἄρμῶν τῆς θλάσεως ἀπὸ τῆς



Σχ. 462

ἀρχῆς τῆς ἀψίδος, δηλ. ἡ ἀπόστασις OB', εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος OA, τουτέστι ἡ χορδὴ ΔΔ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ ὕψος OA. Ἐν τῇ θέσει ταύτῃ ἀμφότερα τὰ κυκλικὰ τεμάχια BΔ, BΔ θλίβουσι τὰ στηρίγματα ΔΓ, ΔΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ καὶ τείνουσι νὰ ἀνατρέψωσι ταῦτα πρὸς τὰ ἔξω διὰ περιστροφικῆς περὶ τὰ σημεῖα A, A κινήσεως, ἀπαρallάκτως ὥπως καὶ οἱ ἀμείβοντες AB καὶ BΓ τοῦ ἀπλοῦ ζευκτοῦ (Σχ. 403, § 452) θλίβουσι τὰ στηρίγματα A καὶ Γ. Ἐπομένως τὰ κυκλικὰ τεμάχια BΔ, BΔ τῆς ἀψίδος (Σχ. 462) παράγουσιν ὥπως καὶ οἱ ἀμείβοντες τοῦ ζευκτοῦ ὄθησιν, διότι ταῦτα δύνανται νὰ ἀφομοιωθῶσι πρὸς τοὺς ἀμείβοντας τῶν ζευκτῶν. Ἡ μόνη δὲ διαφορά, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων ἀμειβόντων τῶν ζευκτῶν καὶ τῶν καμπύλων ἀμειβόντων τῶν ἀψίδων, εἶναι ὅτι τῶν μὲν πρῶτων ἡ ὄθησις Ω προσδιορίζεται ἐκ τοῦ τύπου (7) τῆς § 452, τῶν δὲ δευτέρων ἐκ τοῦ τύπου (3) τῆς § 56.

μείου, κειμένου μεταξὺ τῶν ἄκρων Γ καὶ Θ, καὶ εἰ δυνατόν διὰ τοῦ μέσου τῆς ΓΘ, ἵνα ἡ βάσις ΓΘ τοῦ ἀκροβάθρου θλίβεται ἐκατέρωθεν ὁμοιομόρφως. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐν τῇ πράξει δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ ἀνωτέρω συνθήκη, διὰ τοῦτο οἱ μηχανικοὶ προσδιορίζουσι τὸ πᾶχος ΔΕ τοῦ ἀκροβάθρου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν, ὅταν δηλ. ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α, καὶ εἶτα λαμβάνουσι $\Gamma\Theta = \frac{3}{2}\Delta\epsilon$, καὶ τὸ οὕτω εὐρισκόμενον Θ ἐνοῦσι μὲ τὸ Ε ἢ δι' εὐθείας γραμμῆς ΘΕ ἢ διὰ τῆς τεθλασμένης Εηζ0πΘ.

Ἵνα λοιπὸν εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πᾶχος ΔΕ, ἐφαρμόζομεν τὸ γνωστὸν θεώρημα τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, καὶ ἔχομεν

$$\Omega(H + \alpha\chi') = B(\alpha'\Delta + \chi) + B_1\frac{\chi}{2} + B_2\psi + B_3\psi' \quad (1)$$

$$\eta \quad \Omega(H + \rho \text{ ἢ } \mu 30^0) = B(\rho - \rho \text{ συν } 30^0 + \chi) + B_1\frac{\chi}{2} + B_2\psi + B_3\psi' \quad (2)$$

$$\eta \quad \Omega(H + \rho \text{ ἢ } \mu 30^0) = B\rho(1 - \text{συν } 30^0) + B\chi + B_1\frac{\chi}{2} + B_2\psi + B_3\psi' \quad (3)$$

ἄλλ' ἐκ μὲν τοῦ παραλλήλογραμμοῦ τῶν δυνάμεων ἀγδε εὐρίσκομεν $\Omega = \alpha\gamma = \alpha\epsilon \text{ ἐφ } 30^0 = B \frac{\rho - \epsilon}{\mu}$, ἐκ δὲ τῶν πινάκων, τῶν διδόντων τὰ πραγματικά μεγέθη τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, εὐρίσκομεν $\text{ἢ } \mu 30^0 = 0,50$ καὶ $\text{συν } 30^0 = 0,866$.

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ τοῦ Ω, $\text{ἢ } \mu 30^0$ καὶ $\text{συν } 30^0$ τὰς εὐρεθείσας τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$B \frac{(\rho - \epsilon)}{\mu} (H + 0,50\rho) = B\rho(1 - 0,866) + B\chi + B_1\frac{\chi}{2} + B_2\psi + B_3\psi' \quad (4)$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα τὴν τιμὴν τοῦ χ, ὅταν προηγουμένως ὑπολογίσωμεν τὰ βάρη Β, Β₁, Β₂ καὶ Β₃, καὶ προσδιορίσωμεν διὰ τῶν γνωστῶν κανόνων τῆς μηχανικῆς τὰς ἀποστάσεις ψ καὶ ψ'.

219. Ἡ ἀνωτέρω εὐρεθεῖσα ἐξίσωσις (4) εἶναι γενικὴ καὶ ἀρμόζει εἰς τὴν κατασκευὴν πάντων τῶν θόλων, ὅποιοσδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ὁ προορισμὸς αὐτῶν, τουτέστι εἴτε οὗτοι ᾖναι προσωρισμένοι εἰς τὸ νὰ ὑποβαστάζωσι τὸ βάρος ὁδοστρώσεως τινος, ἢ καὶ τὸ βάρος τῶν χωμάτων ἐπιχώσεώς τινος, οἷαι αἱ συνήθως κατασκευαζόμεναι ἐπὶ τῶν γεφυρῶν, δι' ὧν διέρχονται αἱ σιδηροδρομικαὶ γραμμαί.

Ἐπειδὴ δὲ συνήθως οἱ θόλοι τῶν γεφυρῶν τῶν ὁδῶν κατασκευάζονται ἐκ ξεστῶν χαλίκων, τῶν ὁποίων τὸ κυβικὸν μέτρον ζυγίζει τόσον, ὅσον καὶ τὸ κυβικὸν μέτρον τῆς ἀπλοτοιχίας, καὶ ἐπειδὴ οὗτοι ὑποβάσταζοσι συνήθως μόνον τὴν ὁδοστρωσίαν, ἥς τὸ βάρος δύναται νὰ ἐξισωθῇ μὲ τὸ βάρος τῆς ἀπλοτοιχίας, διὰ τοῦτο ὁ ἀνωτέρω γενικὸς τύπος (4) δύναται νὰ ἀπλοποιηθῇ.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὴν τοιχοποιίαν νλειααΔ, ἥτοι τὸ βάρος $B_2 + B_3$, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὴν τοιχοποιίαν τοῦ ΔΕλκ, ἥς τὸ βάρος B' , ἂν καὶ ἦναι ὀλίγον τι μικρότερον τοῦ $B_2 + B_3$, συντελεῖ ὅμως εἰς τὴν αὐξήσιν τῆς ἰσορροπίας. Ὅθεν ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὸ $B_2\psi + B_3\psi'$ διὰ τοῦ $B'\frac{\chi}{2}$, θέλόμεν ἔχει

$$B\left(\frac{\rho - \epsilon}{\mu}\right)(H + 0,50\rho) = 0,134B\rho + B\chi + B_1\frac{\chi}{2} + B'\frac{\chi}{2} \quad (2)$$

Ἀλλ' ἔχομεν τὰς ἐξῆς γνωστὰς σχέσεις

$$B = 2200 Z\nu\alpha\alpha K = 2200(Z\nu\alpha\alpha K' - KK'\alpha)$$

$$\eta \quad B = 2200(Z\nu\alpha\alpha B - OK\alpha + OK'\alpha)$$

$$\eta \quad B = 2200\left(\mu'v - \frac{3,14\rho^2}{6} + \frac{1}{2}\mu^2 \epsilon\varphi 30^\circ\right) = 2200\left(\mu'v - \frac{3,14\rho^2}{6} + 0,2886\mu^2\right)$$

(σημειοῦντες διὰ μ' τὴν ἀπόστασιν Ζν, διὰ v τὸ ὕψος ΖΚ' καὶ διὰ 2200 τὸ βάρος ἐνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀπλοτοιχίας),

$$B' = 2200\Delta\kappa.\chi = 2200v'\chi \quad (\text{σημειοῦντες διὰ } v' \text{ τὸ ὕψος } \Delta\kappa)$$

$$B_1 = 2200H\chi.$$

Θέτοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (5) καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος 2200, θέλόμεν ἔχει

$$\left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right)\left(\frac{\rho - \epsilon}{\mu}\right)(H + 0,50\rho) = 0,134\rho\left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right) + \frac{\chi}{2}\left[2\left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right) + H\chi + v'\chi\right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \eta \left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right)\left(\frac{\rho - \epsilon}{\mu}\right)(H + 0,50\rho) - 0,134\rho\left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right) \\ = \chi\left(\mu'v - \frac{3,14}{6}\rho^2 + 0,2886\mu^2\right) + \frac{H + v'}{2}\chi^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως (7) πορίζομεθα τὴν τιμὴν τῆς χ , ἥτις ἀρμύζει εἰς τὴν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.

Ἐπειδὴ ὅμως ἐνταῦθα πρόκειται περὶ εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, διὰ τοῦτο πρὸς ἀπλοποίησιν τῆς ἐξίσωσως (7) δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν πρώτην δύναμιν τῆς χ , τοῦθ' ὅπερ αὐξάνει τὴν ἰσορροπίαν, πρὸς δὲ ἀντὶ μ' δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\mu + \varepsilon$, τοῦ μ παριστῶντος τὴν χορδὴν $K'A$, καὶ οὕτω θέλωμεν ἔχει, διαιροῦντες ταὐτοχρόνως καὶ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς χ^2

$$\chi^2 = \frac{2}{H + \mu'} \left\{ \left[\mu(\mu + \varepsilon) - \frac{3,14}{6} \rho^2 + 0,2866\mu^2 \right] \left(\frac{\rho - \varepsilon}{\mu} \right) (H + 0,30\rho) - 0,134\rho \right\} \quad (8),$$

ἐξ ἧς πορίζομεθα

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{H + \mu'} \left[\mu(\mu + \varepsilon) - \frac{3,14}{6} \rho^2 + 0,2866\mu^2 \right]} \sqrt{\frac{\rho - \varepsilon}{\mu} (H + 0,30\rho) - 0,134\rho} \quad (9)$$

ἀλλ' ἔχομεν προκειμένου περὶ ἀψίδος, ἥς ἡ ἀντυξ εἶναι ἡ μικύκλιον, τὰς ἐξῆς γνωστὰς σχέσεις

$$\mu = \rho \sin 30^\circ = 0,866\rho, \quad \varepsilon = \frac{\rho}{2}, \quad \frac{\rho - \varepsilon}{\mu} = \frac{\rho}{2\mu} = \frac{\rho}{2 \times 0,866\rho} = \frac{1}{1,732} = 0,577$$

Ἐπομένως, θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (9) ἀντὶ τῶν μ , ε , $\frac{\rho - \varepsilon}{\mu}$ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν καὶ παριστῶντες διὰ H' τὸ $H + \mu'$, θέλωμεν ἔχει

$$\chi = \sqrt{\frac{2\mu(0,866\rho + \varepsilon) - 0,298\rho^2}{H'}} \sqrt{0,577H + 0,154\rho} \quad (10)$$

Γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῆς Γεφυροποιίας ὅτι τὸ μὲν πᾶχος τοῦ θόλου, τουτέστι τὸ ε , προσδιορίζονται διὰ τῶν ἐξῆς δύο ἐμπειρικῶν τύπων

$$\varepsilon = 0,10\rho + 0,30 \quad (\alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{1 + 0,10\Delta}{3} \quad (\beta),$$

τοῦ μὲν Δ παριστῶντος τὸ ἀνοιγμα τῆς ἀψίδος, τοῦ δὲ ρ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (10) θέσωμεν χάριν ἀπλοποιήσεως τῶν λογισμῶν $0,10\rho$ ἀντὶ τοῦ ε , θέλωμεν ἔχει

$$\chi = \sqrt{0,966\rho - 0,298\rho^2} \sqrt{\frac{2(0,377H + 0,134\rho)}{H'}} \quad (11)$$

$$\eta \quad \chi = \sqrt{0,966\rho - 0,298\rho^2} \sqrt{\frac{2 \times 0,377H\rho + 0,23 \times 4 \times 2 \times 0,134\rho^2}{H'}} \quad (12)$$

$$\eta \quad \chi = \sqrt{0,966\rho - 0,149\Delta} \sqrt{\frac{0,377H\Delta + 0,23 \times 0,308\Delta^2}{H'}} \quad (13)$$

$$\eta \quad \chi = (0,966\rho - 0,149\Delta) \sqrt{\frac{0,377H\Delta + 0,23 \times 0,308\Delta^2}{H'(0,966\rho - 0,149\Delta)}} \quad (14)$$

ἀλλ' ἔχομεν $\rho = \epsilon + 0,60$ κατὰ τινα γνωστὴν ἐκ τῆς Γεφυροποιίας σχέσιν, ἐν ᾗ τὸ μὲν ϵ παριστᾷ τὸ βέλος, τὸ ϵ τὸ πάχος τῆς κλειδὸς καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,60 τὸ πάχος τῆς ὁδοστρώσεως μετὰ τῆς ὑπ' αὐτῆς ὑποστρώσεως τῶν χωμάτων. Θέτοντες δὲ ἀντὶ τῶν ϵ καὶ ϵ τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν πορίζομεθα τὰς ἐξῆς ἐτέρας δύο σχέσεις

$$\rho = 0,25\Delta + \epsilon + 0,60$$

$$\rho = 0,300\Delta + 0,90.$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (14) θέσωμεν ἀντὶ ρ τὴν τιμὴν αὐτοῦ, ὀρέλομεν ἔχει

$$\chi = [0,966(0,300\Delta + 0,90) - 0,149\Delta] \sqrt{\frac{0,377H\Delta + 0,23 \times 0,308\Delta^2}{H'[0,966(0,23\Delta + \epsilon + 0,60) - 0,149\Delta]}} \quad (15)$$

$$\eta \quad \chi = (0,869 + 0,140\Delta) \sqrt{\frac{0,377H\Delta + 0,23 \times 0,308\Delta^2}{H'[0,092\Delta + (0,38 + 0,966\epsilon)]}} \quad (A)$$

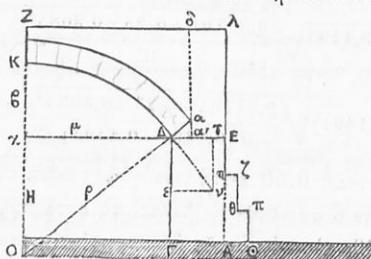
Τὸν τύπον τοῦτον παραβάλλοντες πρὸς τὸν ὑπὸ τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Λεβεγίου εὐρεθέντα, ἥτοι πρὸς τὸν κάτωθι

$$\begin{aligned} \chi &= (0,60 + 0,162\Delta) \sqrt{\frac{H + 0,25\Delta}{H'} \times \frac{0,865\Delta}{0,25\Delta + \epsilon}} \\ &= (0,60 + 0,162\Delta) \sqrt{\frac{0,865\Delta H + 0,25 \cdot 0,865\Delta^2}{H'(0,25\Delta + \epsilon)}} \quad (B) \end{aligned}$$

βλέπομεν ὅτι ἀμφότεροι ἔχουσι τὴν αὐτὴν μορφήν, διαφέρουσι δὲ μόνον κατὰ τι ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν Δ , $H\Delta$, Δ^2 , $\Delta H'$ καὶ H' , ἀλλ' ἀμφότεροι δίδουσι τὰ αὐτὰ περίπου ἐξαγόμενα, ὡς δύναται τις νὰ βε-

βαιωθῇ περὶ τοῦτου ἐφαρμοζὼν ἀμφοτέρους εἰς τὸ αὐτὸ μερικὸν παράδειγμα. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι δυνάμεθα πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους τῶν ἀκροβάθρων τῶν γεφυρῶν, τῶν ἐχόντων ἀνιυγα πλήρη ἀψίδα, τουτέστι ἡμικύκλιον, νὰ κάμωμεν χρῆσιν ἢ τοῦ τύπου (A) ἢ τοῦ (B).

220. Ἐάν ἡ ἀψὶς τοῦ θόλου δὲν ᾖ ἡμικύκλιον, ἀλλὰ τὸξον κύ-



Σχ. 164

κλου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 164, τότε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (1) τῆς § 218 ἀπλοποιεῖται, καὶ γίνεται

$$\Omega H = B\chi + B' \frac{E\alpha'}{2} + B'' \frac{\chi}{2} \quad (1),$$

ἐν ᾗ τὸ Ω παριστᾷ τὴν ὠθησιν $\Delta\gamma$, τὸ B τὸ βάρος τοῦ $KZ\delta\alpha\Delta$, τὸ B' τὸ βάρος τοῦ $\lambda\delta\alpha'E$, τὸ B'' τὸ βάρος τοῦ $E\Delta\Gamma\Lambda$, τὸ H τὸ ὕψος τοῦ ἀκροβάθρου $\Gamma\Delta$ καὶ τὸ χ τὸ ζητούμενον πάχος $E\Delta$ τοῦ ἀκροβάθρου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ ϵ τὸ βέλος $K\kappa$ τοῦ θόλου καὶ διὰ 2μ τὸ ἄνοιγμα αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξῆς γνωστὴν σχέσιν

$$\Omega = B' \frac{\mu^2 - \epsilon^2}{2\mu\epsilon}$$

Πρὸς τούτοις ἔχομεν, προκειμένου περὶ τοιχοποιίας τῶν κοινῶν γεφυρῶν, τὰς ἐξῆς γνωστὰς σχέσεις

$$B = 2200[(\mu + \epsilon)\chi Z - \Delta\kappa K] = 2200[(\mu + \epsilon)u - \Delta\kappa\chi],$$

τοῦ u παριστῶντος τὸ ὕψος χZ . Ἐάν δὲ ἀντὶ τοῦ ἡμιτομέως $\Delta\kappa\chi'$ λάβωμεν τὸ τρίγωνον $\Delta\kappa\chi$, τοῦθ' ὕπερ καθιστᾷ εὐσταθεστέραν τὴν ἰσορροπίαν, τότε ἡ τιμὴ τοῦ B ἀπλοποιεῖται καὶ γίνεται

$$B = 2200 \left(\mu u + u\epsilon - \frac{\mu\epsilon}{2} \right).$$

$$B' = 2200 \nu E\alpha'$$

καὶ ἀντικαθιστώντες τὸ $E\alpha'$ διὰ τοῦ $(E\Delta - \varepsilon)$, θέλομεν ἔχει

$$B' = 2200 \nu (E\Delta - \varepsilon) = 2200 \nu (\chi - \varepsilon)$$

ὡσαύτως ἔχομεν

$$B' = 2200 H \chi.$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ τῶν Ω , B , B' , B'' καὶ $E\alpha'$ τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας τιμὰς αὐτῶν, μετασχηματίζομεν ταύτην εἰς τὴν ἑξῆς

$$\left(\frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon}\right) \left(\mu\nu + \nu\varepsilon - \frac{\mu\varepsilon}{2}\right) H = \chi^2 \left(\frac{\nu + H}{2}\right) + \chi \left(\mu\nu - \frac{\mu\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2 \nu}{2} \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τῆς χ , τὴν ἀρμόζουσαν εἰς τὴν ἀσταθὴ ἰσορροπίαν.

Ἐπειδὴ ὅμως πρόκειται περὶ εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, διὰ τοῦτο πρὸς ἀπλοποίησιν τῶν λογισμῶν δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸν ὅρον, τὸν περιέχοντα τὴν πρῶτην δυνάμιν τῆς χ , καὶ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὴν ἑξῆς δίορον ἐξίσωσιν

$$\chi^2 = \frac{2}{(H + \nu)} \left[\left(\frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon} \right) \left(\mu\nu + \nu\varepsilon - \frac{\mu\varepsilon}{2} \right) \right] H = \frac{\varepsilon^2 \nu}{(H + \nu)} \quad (3)$$

$$\chi^2 = \frac{2}{H + \nu} \left[\left(\frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon} \right) \left(\mu\nu + \nu\varepsilon - \frac{\mu\varepsilon}{2} \right) \right] H \quad (4)$$

παραλείποντες τὸν διαφέροντα ὀλίγον τῆς μονάδος ἀρνητικὸν ὅρον $\frac{\varepsilon^2 \nu}{H + \nu}$.

Σημειοῦντες δὲ χάριν ἀπλοποιήσεως τὸ $H + \nu$ διὰ H' καὶ πολλαπλασιάζοντες καὶ διαιροῦντες ταὐτοχρόνως διὰ τοῦ $\frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon}$ τὸ δεῦτερον μέλος τῆς ἐξίσωσως (4), θέλομεν ἔχει

$$\chi^2 = \left(\frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon} \right)^2 \left(\mu\nu + \nu\varepsilon - \frac{\mu\varepsilon}{2} \right) \frac{2\mu\varepsilon}{\mu^2 - \varepsilon^2} \cdot \frac{2H}{H'} \quad (5)$$

ἔξ ἧς

$$\chi = \frac{\mu^2 - \varepsilon^2}{2\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\mu\nu + \nu\varepsilon - \frac{\mu\varepsilon}{2} \right) \frac{2\mu\varepsilon}{\mu^2 - \varepsilon^2} \cdot \frac{2H}{H'}} \quad (6)$$

Σημειοῦντες διὰ M τὸ ἄνοιγμα τῆς γεφύρας, δηλ. τὸ μῆκος 2μ , καὶ ἀντικαθιστώντες ἀντὶ τοῦ ν τὴν γνωστὴν τιμὴν αὐτοῦ $\varepsilon + \varepsilon + 0,60$ μετασχηματίζομεν τὸν τύπον (6) εἰς τὸν ἑξῆς

$$\chi = \frac{\mu^2 - \epsilon^2}{M\epsilon} \sqrt{2 \left[(\mu + \epsilon)(\epsilon + \epsilon + 0,60) - \frac{\mu\epsilon}{2} \right] \frac{MH\epsilon}{H'(\mu^2 - \epsilon^2)}} \quad (7)$$

$$\eta \quad \chi = \frac{4}{M} \sqrt{\left[(\mu + \epsilon)(\epsilon + \epsilon + 0,60) - \frac{\mu\epsilon}{2} \right] \frac{4(\mu + \epsilon)(\mu - \epsilon)}{\epsilon} \frac{2MH}{H'}} \quad (8)$$

παραλείποντες και την ποσότητα $0,60(\mu + \epsilon) - \frac{\mu\epsilon}{2}$, ητις συνήθως είναι αρνητική και τουτο χάριν απλοποιήσεως και διότι ουδόλως μεταβάλλει την υπάρχουσαν ισορροπίαν, θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{4}{M} \sqrt{(\mu + \epsilon)(\epsilon + \epsilon) \frac{4(\mu + \epsilon)(\mu - \epsilon)}{\epsilon} \frac{2MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \quad (9)$$

$$\eta \quad \chi = \frac{\epsilon + \epsilon}{M} \sqrt{(\mu + \epsilon)(\mu + \epsilon)(\mu - \epsilon) \frac{4}{\epsilon} \frac{2MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \quad (10)$$

$$\eta \quad \chi = \frac{\epsilon + \epsilon}{2\mu\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\mu + \epsilon} \sqrt{\mu^2 - \epsilon^2} \sqrt{\frac{MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \sqrt{2} \quad (11)$$

η παραλείποντες τὸ ϵ^2 τῆς μιᾶς ὑπορρίζου ποσότητος και τὸ $\sqrt{2}$ και αὐξάνοντες τὴν ὑπόρριζον ποσότητα ϵ κατὰ ϵ , θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{\sqrt{\epsilon + \epsilon} \sqrt{\mu + \epsilon}}{2} \sqrt{\frac{MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \quad (12)$$

και μεταβάλλοντες τὸ ϵ εἰς μ , ὅπερ εἶναι ἡ μεγαλύτερα τιμή, ἣν τὸ ϵ δύναται νὰ λάβῃ εἰς τὰς ἐχούσας ἀντυγα τρέξον κύκλου ἀψίδας, θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{\mu + \epsilon}{2} \sqrt{\frac{MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \quad (13)$$

$$\eta \quad \chi = \frac{2\mu + 2\epsilon}{4} \sqrt{\frac{MH}{H'(\epsilon + \epsilon)}} \quad (14)$$

ἀλλ' ἔχομεν $\epsilon = \frac{1+0,1M}{3} = 0,33 + 0,033M$ και θέτοντες εἰς τὸν τύπον (14) ἀντὶ τοῦ ϵ τὴν τιμὴν αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{0,66 + 0,066M + M}{4} \sqrt{\frac{MH}{H'(\ell + \varepsilon)}} \quad (15)$$

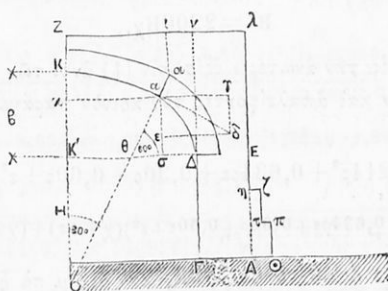
$$\chi = (0,465 + 0,266M) \sqrt{\frac{MH}{H'(\ell + \varepsilon)}} \quad (\Gamma)$$

Τὸν τύπον τοῦτον παραβάλλοντες πρὸς τὸν ἐξῆς

$$\chi = (0,33 + 0,242M) \sqrt{\frac{MH}{H'(\ell + \varepsilon)}} \quad (\Delta)$$

τὸν εὐρεθέντα ὑπὸ τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Λεβεγίου, βλέπομεν ὅτι εἶναι περίπου οἱ αὐτοί, καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ κάμωμεν χρῆσιν ἢ τοῦ (Γ) ἢ τοῦ (Δ), διότι ἀμφοτέρω διδούσι τὰ αὐτὰ περίπου ἐξαγόμενα.

221. Ἐὰν ἡ ἄντυξ τοῦ θόλου ἔχη σχῆμα λαβῆς κανίστρου κατασκευαζομένης μὲ τρία κέντρα, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 465, τότε ὁ ἄρμος τῆς θλάσεως σχηματίζει μετὰ τῆς ὁριζοντίου γωνίαν 45° . Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄρμος αα (Σχ. 465), ὁ διαχωρίζων τὸ τόξον Δα τοῦ μικροῦ κύκλου



Σχ. 465

ἀπὸ τοῦ τόξου αΚ τοῦ μεγάλου, σχηματίζει γωνίαν 60° , ἔπεται ὅτι ὁ ἄρμος τῆς θλάσεως θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ μικρὸν τόξον Δα. Πρὸς εὐκολίαν ὅμως τῶν ὑπολογισμῶν δυνάμεθα ἄνευ μεγάλου σφάλματος νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἄρμον τῆς θλάσεως τὸν ἄρμον αα, καὶ τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἰσορροπίας θέλει εἶναι ἡ ἐξῆς:

$$\Omega(H + \alpha\sigma) = B(\chi + \Delta\sigma) + (B' + B'')\frac{\chi}{2} \quad (1)$$

ἐν ἧ τὸ Ω παριστᾷ τὴν ὥθησιν αἰ, τὸ Β τὸ βάρος τοῦ ΖΚααζι, τὸ Β' τὸ βάρος τοῦ τμήματος λνΔΕ, τὸ Β' τὸ βάρος τοῦ τμήματος ΕΔΓΑ, τὸ Η τὸ ὕψος ΔΓ τοῦ ἀκροβάθρου, καὶ τὸ χ τὸ ζητούμενον πάχος ΕΔ.

Ἀλλ' ἔχομεν προκειμένου περὶ ἀπλοτηχίας

$$\Omega = B \text{ ἐφ } 60^\circ = B \text{ συνεφ } 30^\circ = 1,732B$$

$$B = 2200(Z\kappa\alpha\alpha\zeta\iota - o\kappa\alpha + o\alpha\kappa)$$

$$\eta \quad B = 2200 \left[(\alpha\kappa + \varepsilon)Z\kappa - \frac{3,14\kappa\alpha^2}{12} + \frac{1}{2}o\alpha\kappa\kappa \right]$$

ἡ, παριστῶντες τὴν μεγάλην ἀκτῖνα οα διὰ ρ καὶ τὴν μικρὰν ἀκτῖνα οα διὰ ρ', καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ μῆκη ακ, Ζκ, οκ καὶ ακ διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν ρ ἤμ 30°, ρ + ε + 0,60 - ρ συν 30°, ρ συν 30° καὶ ρ ἤμ 30,

$$B = 2200 \left[(\rho \text{ ἤμ } 30^\circ + \varepsilon)(\rho + \varepsilon + 0,60 - \rho \text{ συν } 30^\circ) - \frac{3,14}{12}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \text{ ἤμ } 30^\circ \text{ συν } 30^\circ \right]$$

$$\eta \quad B = 2200[(0,50\rho + \varepsilon)(\rho + \varepsilon + 0,60 - 0,866\rho) - 0,2616\rho^2 + 0,50.0,50 \times 0,866\rho^2]$$

$$\eta \quad B = 2200(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\varepsilon + 0,30\rho + 0,60\varepsilon + \varepsilon^2)$$

$$B' = 2200.\chi.E\lambda = 2200\chi\upsilon, \text{ παριστῶντες διὰ } \upsilon \text{ τὸ ὕψος } \lambda E$$

$$B'' = 2200H\chi.$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ τῶν Ω, Β, Β' καὶ Β'' τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ ἀπαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 2200, θέλομεν ἔχει

$$1,732(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\varepsilon + 0,30\rho + 0,60\varepsilon + \varepsilon^2)(H + \alpha\sigma) \\ = (0,0214\rho^2 + 0,634\rho\varepsilon + 0,30\rho + 0,60\varepsilon + \varepsilon^2)(\chi + \Delta\sigma) + (\chi\upsilon + H\chi)\frac{\chi}{2} \quad (2)$$

Παριστῶντες δὲ διὰ θ τὸ βέλος ΚΚ, καὶ διὰ μ τὸ ἡμιάνοιγμα ΔΚ' τῆς ἀψίδος, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θΚ'ο πορίζομεθα

$$\rho - \theta = o\kappa' = o\theta \text{ συν } 30^\circ = (\rho - \rho') \text{ συν } 30^\circ = 0,866(\rho - \rho')$$

$$\mu - \rho' = K'\theta = o\theta \text{ ἤμ } 30^\circ = (\rho - \rho') \text{ ἤμ } 30^\circ = 0,50(\rho - \rho')$$

λύνοντες δὲ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ρ καὶ ρ', αἵτινες εἶναι αἱ ἐξῆς

$$\rho' = 1,366\varepsilon - 0,366\mu \quad (\gamma')$$

$$\rho = 2,366\mu - 1,366\varepsilon \quad (\delta')$$

Πρὸς τοῦτοις ἔχομεν

$$\alpha\sigma = \rho' \text{ ἢ } 60^0 = 0,866\rho' = 0,866(1,366\epsilon - 0,366\mu)$$

$$\Delta\sigma = \rho' - \sigma\theta = \rho' - \rho' \text{ ἢ } 30^0 = \rho'(1 - \text{ἢ } 30^0) = 0,50\rho'$$

$$\text{ἢ } \Delta\sigma = 0,50(1,366\epsilon - 0,366\mu)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ $\alpha\sigma$, καὶ $\Delta\sigma$ τὰς τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned} 1,732(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)[\text{H} + 0,866(1,366\epsilon - 0,366\mu)] \\ = (0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)[\chi + 0,50(1,366\epsilon - 0,366\mu)] \\ + \frac{\nu + \text{H}}{2}\chi^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ἢ } 1,732(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)[\text{H} + 0,866(1,366\epsilon - 0,366\mu)] \\ = (0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)\chi + (0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho \\ + 0,60\epsilon + \epsilon^2)(0,683\epsilon - 0,183\mu) + \frac{\nu + \text{H}}{2}\chi^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Παραλείποντες δὲ τὸν ὅρον, τὸν περιέχοντα τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ χ πρὸς ἀπλοποιήσιν τῶν ὑπολογισμῶν καὶ διότι τὸ τοιοῦτο συντελεῖ εἰς τὴν εὐσταθεῖ ἰσορροπίαν, καὶ παριστῶντες διὰ H' τὸ $\text{H} + \nu$, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned} \frac{\text{H}'}{2}\chi^2 = 1,732(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)[\text{H} + 0,866(1,366\epsilon - 0,366\mu)] \\ - (0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)(0,683\epsilon - 0,183\mu) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{ἢ } \chi^2 = \frac{2}{\text{H}'}(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2)[1,732\text{H} + 1,3957\epsilon - 0,365\mu] \quad (6)$$

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν

$$\chi = \sqrt{2(0,0214\rho^2 + 0,634\rho\epsilon + 0,30\rho + 0,60\epsilon + \epsilon^2) \frac{1,732\text{H} + 1,3957\epsilon - 0,365\mu}{\text{H}'}} \quad (7)$$

Γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῆς Γεφυροποιίας ὅτι τὸ ϵ , ὕπερ παριστᾷ τὸ πᾶχος τοῦ θολίου λίθου τῆς κλειδός, εὐρίσκεται ἐκ τοῦ ἐμπειρικοῦ τύπου

$$\epsilon = 0,30 + 0,07\rho, \text{ τοῦ } \rho \text{ παριστῶντος τὴν μεγάλην ἀκτῖνα.}$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (7) ἀντὶ ϵ καὶ ϵ^2 τὰς τιμὰς αὐτῶν $0,07\rho$ καὶ $(0,07\rho)^2$ (χάριν ἀπλοποιήσεως παραλείπομεν τὸν ἀριθμὸν $0,30$ καὶ λαμβάνομεν $\epsilon = 0,07\rho$), θέλομεν ἔχει

$$\chi = \sqrt{2(0,0214\rho^2 + 0,634 \cdot 0,07\rho^2 + 0,30\rho + 0,60 \cdot 0,07\rho + (0,07\rho)^2) \frac{1,732\text{H} + 1,3957\epsilon - 0,365\mu}{\text{H}'}} \quad (8)$$

$$\eta \quad \chi = \sqrt{2(0,07068\rho^2 + 0,342\rho)} \sqrt{\frac{1,732H + 1,3937\epsilon - 0,365\mu}{H'}} \quad (9)$$

$$\eta \quad \chi = \sqrt{2(0,07068\rho^2 + 0,342)} \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{1,732H + 1,3937\epsilon - 0,365\mu}{H'}} \quad (10)$$

$$\eta \quad \chi = 2(0,07068\rho + 0,342) \sqrt{\frac{1,732H + 1,3937\epsilon - 0,365\mu}{2H'(0,07068\rho + 0,342)}} \quad (11)$$

καὶ ἀντικαθιστώντες ἀντὶ τοῦ ρ τὴν γνωστὴν τιμὴν αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$\chi = [0,634 + 2,0,07068(2,366\mu - 1,366\epsilon)] \sqrt{\frac{(1,732H + 1,3937\epsilon - 0,365\mu)(2,366\mu - 1,366\epsilon)}{2H'[0,07068(2,366\mu - 1,366\epsilon) + 0,342]}} \quad (12)$$

Γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῆς Γεφυροποιίας ὅτι ὁ λόγος τοῦ βέλους ϵ τῆς ἀψίδος πρὸς τὸ ἄνοιγμα αὐτῆς 2μ ἢ M λαμβάνει συνήθως ἐν τῇ πράξει τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,30 καὶ 0,50. Ἐάν λοιπὸν χάριν ἀπλοποιήσεως τοῦ τύπου (12) λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ $\frac{\epsilon}{2\mu}$ τὴν μέσην τιμὴν 0,40, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon = 0,8\mu \quad \text{καὶ} \quad \mu = \frac{\epsilon}{0,8}$$

καὶ ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ ϵ καὶ μ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (12) εὐρίσκομεν

$$\chi = [0,684 + 2,0,07068(2,366\mu - 1,366,0,8\mu)] \sqrt{\frac{(1,732H + 1,3937\epsilon - 0,365\frac{\epsilon}{0,8})(2,366\mu - 1,366,0,8\mu)}{2H'[0,07068(2,366\frac{\epsilon}{0,8} - 1,366\epsilon) + 0,342]}} \quad (13)$$

$$\eta \quad \chi = (0,684 + 0,09M) \sqrt{\frac{(1,732H + 0,9395\epsilon)1,2732\mu}{2H'(0,413\epsilon + 0,342)}} \quad (14)$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸν μὲν ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ παράγοντα μὲ 1,70, τὴν δὲ ὑπὲρῥίζον ποσότητα διαιροῦντες διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,70, ἤτοι διὰ τοῦ 2,89, θέλομεν ἔχει

$$\chi = (1,162 + 0,153M) \sqrt{\frac{(1,732H + 0,9395\epsilon)1,2732\mu}{2H'2,89(0,413\epsilon + 0,342)}} \quad (15)$$

θέτοντες δὲ ἀντὶ τοῦ μ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{M}{2}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, θέλομεν ἔχει

$$\chi = (1,162 + 0,453M) \sqrt{\frac{0,866HM + 0,469EM}{H'(0,673E + 1,977)}} \quad (E)$$

Τὸν τύπον τοῦτον παραβάλλοντες πρὸς τὸν ἐξῆς

$$\chi = (0,43 + 0,154M) \sqrt{\frac{H + 0,54E}{H' \cdot 0,165E + 1}} = (0,43 + 154M) \sqrt{\frac{0,84HM + 0,152EM}{H'(0,165E + 1)}} \quad (Z)$$

τὸν εὐρεθέντα ὑπὸ τοῦ Γάλλου μηχανικοῦ Λεβεγίου, βλέπομεν ὅτι εἶναι ὅμοιοι καὶ δίδουσι σχεδὸν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

222. Διὰ τῶν εὐρεθέντων τύπων (Α), (Γ) καὶ (Ε) προσδιορίζομεν τὸ πᾶχος τῶν ἀκροβάθρων πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῆς ἐνεργείας τῆς ὠθήσεως καὶ πραγματοποιήσιν τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Ἀλλ' ἵνα ἔμειθα βέβαιοι περὶ τῆς ἀσφαλείας τῆς γεφύρας, πρέπει μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ πᾶχους ΔΕ τοῦ ἀκροβάθρου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου, καὶ τοῦ ΘΓ εἰς τὴν βάσιν, νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ τοιχοποιΐα ἀντέχῃ εἰς τὴν θλίψιν, τὴν παραγομένην ὑπὸ τῆς συνισταμένης τῶν ἐνεργουσῶν δυνάμεων.

Πρὸς τοῦτο διὰ τῆς γνωστῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς εὐρίσκομεν τὴν συνισταμένην Σ τῆς ὠθήσεως Ω, τοῦ βάρους τῆς ἡμιαψίδος ΖΚΔΕΛ καὶ τοῦ ἀκροβάθρου ΔΕΘΓ (Σχ. 163, 164 καὶ 165), καὶ διαιροῦντες τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς Σ διὰ τοῦ ΘΑ, ἐκπεφρασμένου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, εὐρίσκομεν τὴν θλίψιν, ἣν ὑποφέρει ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν ἐπιφανείας τοῦ ἀκροβάθρου εἰς τὴν βάσιν. Ἐν ἄλλαις λέξεσι θέλομεν ἔχει τὸν ἐξῆς τύπον πρὸς εὐρεσιν τῆς θλίψεως ταύτης, ἣν σημειοῦμεν διὰ Ρ',

$$\Theta A \cdot P' = \frac{2}{3} \Sigma \quad (a)$$

ἐξ οὗ εὐρίσκομεν

$$P' = \frac{2}{3} \frac{\Sigma}{\Theta A} \quad (b)$$

Ἐὰν ἡ θλίψις Ρ' ᾖται ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ τετάρτου τοῦ φορτίου Ρ, τοῦ σημειωμένου ἐν τῷ ἐβδόμῳ πίνακι τῆς § 50, τότε συμπεραίνομεν ὅτι οὐδέναν κίνδυνον θλάσεως διατρέχει ἡ τοιχοποιΐα καὶ ἐπομένως τὴν τιμὴν τοῦ ΘΑ, τὴν κατ' ἀρέσκειαν ληφθεῖσαν ἴσην μὲ $\frac{1}{2}$ ΔΕ, παραδεχόμεθα ὀριστικῶς. Ἐὰν ὅμως ἡ θλίψις Ρ' εὐρεθῇ μεγαλειτέρα τοῦ

τετάρτου τοῦ φορτίου P, τότε αὐξάνομεν τὸ ΘΑ μέχρις οὗ ἐκ τοῦ τύπου (α) εὗρομεν τιμὴν τοῦ P' μικροτέραν τοῦ $\frac{P}{4}$, ἢ κάλλιον εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α) θέτομεν ἀντὶ τοῦ P' τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{P}{4}$ καὶ ἐκ τῆς οὕτω προκυψάσης ἐξισώσεως προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ ΘΑ.

223. Χάριν τῶν μαθητῶν καὶ τῶν τεκτόνων, τῶν μὴ γνωρίζοντων νὰ ὑπολογίζωσι, σχηματίζομεν διὰ τῶν εὐρεθέντων τύπων (Α), (Γ) καὶ (Ε) τοὺς ἐπομένους τρεῖς πίνακας, τοὺς δίδοντας τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ θόλου, διὰ τρία μόνον, τὰ μᾶλλον ἐν χρήσει, εἶδη ἀψίδων, ἥτοι τῶν ἐχουσῶν ἄντυγα ἡμικύκλιον, τόξον κύκλου, οὗτινος ὁ λόγος τοῦ βέλους πρὸς τὸ ἄνοιγμα εἶναι ἢ $\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{1}{8}$ ἢ $\frac{1}{7}$ (οἱ τρεῖς οὗτοι λόγοι εἶναι οἱ συνειθέστεροι), ἢ λαβὴν κανίστρου, σχηματιζομένην μὲ τρία κέντρα καὶ ἥς ὁ λόγος τοῦ βέλους πρὸς τὸ ἄνοιγμα εἶναι $\frac{1}{3}$. Ἐν τῇ πράξει ὁ λόγος $\frac{6}{M}$ εἰς τὰς λαβὰς κανίστρου μεταβάλλεται ἀπὸ 0,30 μέχρι 0,50, ἐπομένως τὰ ὑπολογισθησόμενα πάχη διὰ $\frac{6}{M} = \frac{1}{3}$ δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν καὶ ὅταν ὁ λόγος $\frac{6}{M}$ ᾖναι μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{3}$.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχωρ τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων ἔχουσῶν

ἄντυγα ἡμικύκλιον

Τύπος δι' οὗ ὑπελογίσθησαν τὰ πάχη ταῦτα

$$\chi = (0,869 + 0,140\Delta) \sqrt{\frac{(0,577H + 0,25 \ 0,308\Delta)\Delta}{H'(0,092\Delta + 0,58 + 0,966\varepsilon)}}$$

Διάμετρος τῆς ἁψίδος ἢ τοῦ τιμῆ τοῦ Δ	Πάχος τοῦ θολίστου λίθου εἰς τὴν κλειδα	ΠΑΧΟΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΓΧΗΝ ΤΗΣ ΑΨΙΔΟΣ, ΤΟΥ ΕΥΘΕΟΥ ΑΓΓΕΛΟΥ ΟΝΤΟΣ							
	$\varepsilon = 0,10\rho + 0,30$	0 ^α	1 ^α	2 ^α	3 ^α	4 ^α	5 ^α	6 ^α	8 ^α
μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
1	0,35	0,25	0,56	0,63	0,70	0,75	0,80	0,83	0,85
2	0,40	0,42	0,74	0,86	0,92	0,96	1,02	1,04	1,12
4	0,50	0,74	1,10	1,23	1,37	1,43	1,50	1,53	1,65
6	0,60	1,04	1,42	1,62	1,82	1,85	1,92	1,98	2,05
8	0,70	1,35	1,73	1,97	2,10	2,22	2,32	2,40	2,50
10	0,80	1,63	2,00	2,27	2,43	2,58	2,68	2,77	2,90
12	0,90	1,94	2,30	2,57	2,78	2,93	3,06	3,14	3,35
14	1,00	2,20	2,60	2,88	3,08	3,25	3,40	3,50	3,68
16	1,10	2,48	2,89	3,17	3,38	3,57	3,73	3,85	4,05
18	1,20	2,78	3,18	3,45	3,70	3,90	4,06	4,16	4,40
20	1,30	3,08	3,45	3,74	4,00	4,22	4,40	4,55	4,77
22	1,40	3,35	3,75	4,03	4,30	4,54	4,74	4,93	5,15
24	1,50	3,54	3,96	4,30	4,60	4,85	5,06	5,25	5,50
26	1,60	3,80	4,23	4,60	4,90	5,15	5,40	5,60	5,85
28	1,70	4,00	4,50	4,88	5,22	5,50	5,75	6,00	6,22
30	1,80	4,25	4,75	5,17	5,50	5,85	6,10	6,35	6,60
35	2,05	4,80	5,40	5,80	6,30	6,60	6,90	7,20	7,50
40	2,30	5,45	6,10	6,60	7,05	7,45	7,86	8,10	8,45
45	2,55	6,00	6,75	7,30	7,80	8,25	8,60	8,95	9,30
50	2,80	6,60	7,40	8,00	8,56	9,00	9,45	9,82	10,20

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχωρ τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων ἐχουσῶν ἄντυγα
τόξον κύκλου, οὗτινος ὁ λόγος τοῦ βέλους b πρὸς τὸ ἄνοιγμα
 M εἶναι $\frac{1}{3}$

Τύπος δι' οὗ ὑπελογίσθησαν τὰ πάχη

$$\chi = (0,165 + 0,266M) \sqrt{\frac{MH}{H'(\xi + \varepsilon)}}$$

Ἄνοιγμα τῆς ἀψίδος ἢτοι τιμὰ τοῦ M	Πάχος τοῦ θολίου εἰς τὴν κλειδα	ΠΑΧΟΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ ΤΟΥ ΘΟΛΟΥ, ΤΟΥ ΓΡΩΣ ΑΓΓΕΛΟΝ ΟΝΤΟΣ						
	$\frac{1+0,10M}{3}$	1 ^α	2 ^α	3 ^α	4 ^α	5 ^α	6 ^α	8 ^α
μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
1	0,37	0,40	0,43	0,45	0,47	0,48	0,50	0,55
2	0,40	0,60	0,70	0,77	0,82	0,83	0,85	0,90
4	0,46	1,00	1,25	1,33	1,43	1,50	1,55	1,60
6	0,53	1,35	1,70	1,90	2,02	2,12	2,20	2,30
8	0,60	1,65	2,10	2,35	2,56	2,70	2,80	3,00
10	0,70	1,90	2,50	2,82	3,05	3,20	3,40	3,55
12	0,73	2,12	2,80	3,20	3,50	3,70	3,90	4,15
14	0,80	2,50	3,27	3,35	4,10	4,32	4,56	4,85
16	0,86	2,56	3,40	3,93	4,33	4,60	4,80	5,12
18	0,93	2,75	3,66	4,25	4,70	5,00	5,30	5,60
20	1,00	2,90	3,90	4,55	5,05	5,40	5,76	6,00
22	1,06	3,07	4,15	4,87	5,42	5,78	6,20	6,50
24	1,13	3,20	4,40	5,17	5,76	6,15	6,60	6,95
26	1,20	3,40	4,60	5,45	6,10	6,50	7,00	7,32
28	1,26	3,50	4,80	5,70	6,40	6,85	7,40	7,76
30	1,33	3,60	5,00	5,95	6,66	7,17	7,75	8,15
35	1,50	3,90	5,50	6,55	7,30	7,95	8,60	9,10
40	1,66	4,10	5,85	7,02	8,00	8,64	9,40	9,95
45	1,83	4,25	6,10	7,40	8,50	9,22	10,10	10,70
50	2,00	4,30	6,20	7,70	8,90	9,70	10,65	11,30

Συνέχεια τοῦ εἰκοστοῦ τετάρτου πίνακος

$$\text{Τοῦ λόγου } \frac{\xi}{M} \text{ ὅτετος ἴσον με } \frac{4}{5}$$

Τύπος δι' οὗ ὑπελογίσθησαν τὰ πᾶχη

$$\chi = (0,465 + 0,266M) \sqrt{\frac{MH}{H'(\xi + \varepsilon)}}$$

Ἀνοιγμα τῆς ἀψίδος ἢ τοῖ- τιμαὶ τοῦ M	Πάχος τοῦ θολί- του εἰς τὴν κλειδα	ΠΑΧΟΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ ΤΟΥ ΟΘΛΟΥ, ΤΟΥ ΓΥΦΟΥ ΑΓΓΩΝ ΟΝΤΟΣ							
		$\frac{1+0,40M}{3}$	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	8 ^a
μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
1	0,37	0,40	0,43	0,48	0,50	0,54	0,52	0,53	
2	0,40	0,71	0,84	0,90	0,94	0,97	0,99	1,01	
4	0,46	1,30	1,58	1,72	1,82	1,87	1,92	1,97	
6	0,53	1,80	2,22	2,43	2,60	2,70	2,80	2,90	
8	0,60	2,22	2,82	3,14	3,33	3,48	3,62	3,76	
10	0,70	2,63	3,33	3,73	4,01	4,20	4,33	4,60	
12	0,73	3,02	3,86	4,36	4,70	4,96	5,14	5,40	
14	0,80	3,38	4,33	4,94	5,32	5,64	5,86	6,22	
16	0,86	3,66	4,82	5,48	5,92	6,27	6,58	6,98	
18	0,93	3,96	5,23	6,00	6,48	6,88	7,22	7,67	
20	1,00	4,28	5,63	6,47	7,02	7,46	7,84	8,34	
22	1,06	4,51	6,02	6,92	7,52	8,02	8,42	9,02	
24	1,13	4,78	6,34	7,33	8,00	8,52	8,97	9,62	
26	1,20	5,02	6,72	7,79	8,50	9,06	9,53	10,26	
28	1,26	5,23	7,00	8,14	8,90	9,51	10,04	10,80	
30	1,33	5,46	7,33	8,53	9,37	9,94	10,60	11,40	
35	1,50	6,06	8,13	9,56	10,52	11,18	11,93	12,87	
40	1,66	6,60	8,83	10,48	11,53	12,31	13,17	14,23	
45	1,83	7,04	9,47	11,39	12,50	13,33	14,32	15,54	
50	2,00	7,40	10,10	12,12	13,46	14,26	15,48	16,83	

Συνέχεια τοῦ εἰκοστοῦ τετάρτου πίνακος

$$\text{Τοῦ λόγου } \frac{\zeta}{M} \text{ ὅτετος ἴσων μὲ } \frac{4}{7}$$

Τύπος δι' οὗ ὑπελογίσθησαν τὰ πάχη

$$\chi = (0,465 + 0,266M) \sqrt{\frac{MH}{H'(\zeta + \varepsilon)}}$$

Ἀνοίγμα τῆς ἀψίδος ἢ τοῦ τιμᾶ τοῦ M	Πάχος τοῦ θαλάμου εἰς τὴν κλειδα	ΠΑΧΟΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ ΤΟΥ ΘΑΛΑΜΟΥ, ΤΟΥ ΓΥΡΟΥ ΑΥΤΩΝ ΟΝΤΟΣ						
		$\varepsilon = \frac{1+0,10M}{3}$						
		1 ^α	2 ^α	3 ^α	4 ^α	5 ^α	6 ^α	8 ^α
μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
1	0,37	0,41	0,48	0,51	0,53	0,54	0,55	0,56
2	0,40	0,79	0,94	1,00	1,03	1,06	1,08	1,10
4	0,46	1,48	1,79	1,94	2,04	2,10	2,14	2,21
6	0,53	2,12	2,59	2,83	2,99	3,10	3,17	3,20
8	0,60	2,68	3,32	3,64	3,89	4,03	4,14	4,35
10	0,70	3,16	3,98	4,44	4,75	4,92	5,05	5,29
12	0,73	3,69	4,66	5,23	5,57	5,84	6,05	6,32
14	0,80	4,12	5,30	5,95	6,40	6,76	6,92	7,23
16	0,86	4,55	5,90	6,67	7,16	7,60	7,80	8,13
18	0,93	4,95	6,43	7,32	7,92	8,42	8,61	9,00
20	1,00	5,37	6,97	8,00	8,63	9,17	9,42	9,86
22	1,06	5,65	7,52	8,60	9,27	9,87	10,23	10,77
24	1,13	6,02	8,00	9,17	9,90	10,55	10,94	11,67
26	1,20	6,37	8,50	9,77	10,48	11,18	11,61	12,46
28	1,26	6,70	8,90	10,26	11,11	11,87	12,32	13,40
30	1,33	7,00	9,29	10,75	11,73	12,55	13,03	14,10
35	1,50	7,67	10,32	11,93	13,16	14,11	14,87	16,00
40	1,66	8,32	11,23	13,17	14,56	15,14	16,40	17,82
45	1,83	8,86	12,14	14,32	15,78	17,00	17,97	19,54
50	2,00	9,55	12,92	15,21	16,95	18,30	19,38	21,13

ΠΙΝΑΞ ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΠΕΜΠΤΟΣ

Περιέχωρ τὰ πάχη τῶν ἀκροβάθρων τινῶν ἀψίδων ἔχουσῶν ἀντυγα
 λαβὴν καρίστρου κατασκευαζομένην μὲ τρία τόξα (τρίκεντρος)
 καὶ ἥς ὁ λόγος τοῦ βέλους ἔ πρὸς τὸ ἄνοιγμα M εἶναι $\frac{1}{3}$

Τύπος δι' οὗ ὑπελογίσθησαν τὰ πάχη

$$\chi = (1,462 + 0,453M) \sqrt{\frac{(0,866H + 0,469\epsilon)M}{H'(0,673\epsilon + 4,977)}}$$

Ἄνοιγμα τῆς ἀψί- δος ἢ τοῦ πλάτους τοῦ M	Πάχος τοῦ θολίου εἰς τὴν κλειδῶν	ΠΑΧΟΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΒΑΘΡΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ ΤΟΥ ΘΟΛΟΥ, ΤΟΥ ΓΡΩΣ ΑΙΤΕΝ ΟΝΤΟΣ							
		0 ^α	1 ^α	2 ^α	3 ^α	4 ^α	5 ^α	6 ^α	8 ^α
	$\epsilon = \frac{1 + 0,40M}{3}$								
μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
1	0,37	0,30	0,38	0,67	0,71	0,74	0,75	0,76	0,78
2	0,40	0,38	0,88	1,00	1,04	1,08	1,11	1,12	1,14
4	0,46	1,06	1,42	1,56	1,63	1,68	1,72	1,75	1,79
6	0,53	1,52	1,83	2,02	2,12	2,18	2,25	2,30	2,37
8	0,60	1,98	2,26	2,43	2,57	2,66	2,74	2,80	2,88
10	0,70	2,40	2,72	2,90	3,04	3,15	3,23	3,28	3,40
12	0,73	2,85	3,15	3,36	3,48	3,60	3,72	3,78	3,90
14	0,80	3,27	3,60	3,80	3,96	4,10	4,23	4,30	4,36
16	0,86	3,68	4,00	4,20	4,38	4,53	4,67	4,74	4,85
18	0,93	4,15	4,46	4,70	4,85	5,00	5,16	5,24	5,36
20	1,00	4,55	4,89	5,10	5,27	5,35	5,56	5,65	5,78
22	1,06	4,98	5,30	5,52	5,70	5,79	6,06	6,15	6,28
24	1,13	5,41	5,70	5,94	6,13	6,23	6,52	6,61	6,75
26	1,20	5,86	6,11	6,37	6,57	6,67	7,04	7,14	7,30
28	1,26	6,26	6,48	6,80	6,96	7,12	7,40	7,50	7,67
30	1,33	6,67	6,84	7,24	7,41	7,58	7,81	7,92	8,10
35	1,50	7,75	8,01	8,27	8,47	8,72	8,86	8,99	9,18
40	1,66	8,81	9,03	9,32	9,54	9,76	9,90	10,05	10,27
45	1,83	9,90	10,06	10,38	10,62	10,78	10,95	11,19	11,35
50	2,00	10,92	11,19	11,45	11,72	11,89	12,07	12,33	12,42

At home

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ¹

σελίδς	στίχος	ἀρτι	γράφη
3	4	ἴνες	ἴνες
3	30	ἀνηρτήσωμεν	ἀναρτήσωμεν
23		5000	1230
		100	100
23	20	ἔρευνην	ἔρευναν
43	10	ἀπαιτούντων	ἀπαιτουσῶν
46	31	δυνάμεθα	δυνάμενα
63	3	ληθίνης	λεθίνης
68	3	θολίτων	θολιτῶν
73	4	κάμπεται	κάμπεται
73	19	παρακατιόντως	παρακατιόντες
107	4	ἐνεργούσης	ἐνεργούσας
111	3	ἀνωτέρου	ἀνωτέρω
133	3	ἐλάττωμα	ἐλάττωμα
133	19	στηριζόμενοι	στηριζόμεναι
139	26	πεπακτωμένοι	πεπακτωμέναι
162	4	δύνανται	δύναται
163	19	ἐνδυσασμοῦ	ἐνδυσασμοῦ
187	16	θὰ αὐξήσῃ	νὰ αὐξήσῃ
221	24	$\frac{M\delta\mu^2}{16} \times \frac{v}{I}$	$\frac{M\delta\mu}{16} \times \frac{v}{I}$
222	1	μεγαλουπόλεις	μεγαλοπόλεις
222	7	ὀρθογωνισμένους	ὀρθογωνισμένας
233	21	ἀπόστατιν	ἀπόστασιν
283	4	στήλων	στηλῶν
310	2	πλάκων	πλάκα
318	23	0,008+0,0016Nδ	0,01+0,0063Nδ
318	23	0,0083+0,00238Nδ	0,013+0,0063Nδ
323	16	κεντροφύγου	κεντροφύγος
331	9	προτιμώτερον	προτιμότερον
333	6	μεγάλων	μέγα

¹ Τὰ ἐπαναλαμβανόμενα παροράματα διορθοῦνται ἀπ' αὐτῶν.

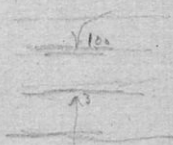
Προσπαθήσεις να τα κάνεις

Δίπλα σε κάθε ένα από τα σπέρματα
να βάλεις ένα μικρό κομμάτι από το ίδιο
σπέρμα, να είναι όπως και το πρώτο, να είναι
το ίδιο μέγεθος, να είναι το ίδιο χρώμα — "όταν ελέγξεις όλα τα σπέρματα
που θα φέρουν, όταν ελέγξεις από κάτω, τότε όλα τα σπέρματα
52 x 2 είναι οι ίδιοι 3 φύλλα —

Το 1501

Διακρίσεις από τον έναν ο οποίος τα διακρίνει από
το άλλο, ο οποίος διακρίνει τα σπέρματα, ο οποίος διακρίνει
τα σπέρματα —

Είναι ο οποίος διακρίνει τα σπέρματα από
τα άλλα.



Είναι το οποίο διακρίνει τα σπέρματα — 1 φύλλα
από κάτω, όταν ελέγξεις τα σπέρματα από τα κάτω
§ 2. Τα σπέρματα

