

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

19721

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΟΓΕΙΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ



21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε ΤΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2012

ΕΛΛΑΣ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2012

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ *)

§ 1. Πρότασις (άπλη, κατηγορική) ἢ δήλωσις. — Ἡ ἔννοια τῆς ἀπλῆς προτάσεως ἢ δηλώσεως, ἀκριβέστερον τῆς «*λογικῆς προτάσεως*», θεωρεῖται ὡς μία πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὀρισμὸν. Εἰς τὸ συντακτικόν, λ.χ., ἡ (ἀπλή) πρότασις ὀρίζεται ὡς «*λόγος συντομώτατος (προφορικὸς ἢ γραπτὸς) μὲ ἐντελῶς ἀπλοῦν περιεχόμενον*».

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν (κλασσικὴν λογικὴν) διὰ τοῦ ὅρου «*πρότασις ἢ δήλωσις*» ἐννοοῦμεν μίαν ἔκφρασιν μὲ νόημα, ἀκριβέστερον ἐννοοῦμεν τὸ *περιεχόμενον*, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν διὰ μιᾶς προτάσεως μὲ τὴν ἐννοίαν τοῦ *συντακτικοῦ* καὶ διὰ τὸ ὁποῖον δυνάμεθα κατὰ ἀκριβῶς ἓνα τρόπον νὰ ἀποφανθῶμεν, ἂν εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδές, ἀποκλείοντες ἄλλην περίπτωσιν. Οὕτω, π.χ., ἡ ἔκφρασις :

«*ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος*»,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι ἀληθές.

Ὁμοίως ἡ ἔκφρασις :

«*ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι πρῶτος*»,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι ψευδές.

Τὸ περιεχόμενον λοιπὸν μιᾶς προτάσεως (λογικῆς προτάσεως) ἐπιδέχεται ἀ ν α γ κ α σ τ ι κ ῶς ἓνα καὶ μόνον ἓνα τῶν χαρακτηρισμῶν «*ἀληθές*», «*ψευδές*»· οὐδέποτε ὅμως εἶναι καὶ ἀληθές καὶ ψευδές (*ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως*).

Τὰς προτάσεις, ὡς γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως, τὰς παριστάνομεν συμβολικῶς μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, κατὰ προτίμησιν μὲ $p, q, r, \dots$

Ἐὰν μία πρότασις p εἶναι ἀληθής, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι αὕτη ἔχει «*τιμὴν ἀληθείας α* » καὶ γράφομεν $\tau(p) = \alpha$, ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι ψευδής, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι ἔχει «*τιμὴν ἀληθείας ψ* » καὶ γράφομεν $\tau(p) = \psi$. Ἐπομένως, ἐὰν πρότασις εὐρεθῇ ἔχουσα συγχρόνως καὶ τὰς δύο τιμὰς ἀληθείας α καὶ ψ , τότε τοῦτο ἀποτελεῖ ἀντίφασιν.

* Θεμελιωτῆς τῆς Λογικῆς τῶν προτάσεων ὑπῆρξεν ὁ στωϊκὸς φιλόσοφος Χρύσιππος (281–208 π.Χ.).

Παραδείγματα: 1ον: 'Η έκφρασις $p: «O 2 + 3i \equiv (2,3) \text{ είναι μιγαδικός αριθμός}»$ είναι μία πρότασις (λογική πρότασις), καθόσον τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθές, ἥτοι $\tau(p) = \alpha$.

2ον: 'Η έκφρασις $q: «O \sqrt{2} \text{ είναι ρητὸς ἀριθμὸς}»$ είναι μία λογική πρότασις, καθόσον τὸ περιεχόμενον τῆς εἶναι ψευδές, ἥτοι $\tau(q) = \psi$.

3ον: 'Η έκφρασις « $\delta \text{ ἀριθμὸς } x \text{ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ } 10$ » δὲν εἶναι πρότασις, διότι δὲν ἐπιδέχεται ἓνα τῶν χαρακτηρισμῶν «*ἀληθής*», «*ψευδής*».

Εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων καὶ γενικώτερον τῶν ἐκφράσεων, ἰδίως δὲ εἰς τὰ Μαθηματικά, συναντῶμεν ὅρους καὶ σύμβολα, ὅπως π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα: «*μιγαδικὸς ἀριθμὸς*», «*ρητὸς ἀριθμὸς*», « $2 + 3i$ », « $\sqrt{2}$ » καὶ πλῆθος ἄλλα παρόμοια, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν *καθορισμένην καὶ μόνιμον σημασίαν εἰς ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπεξεργασίας ἐνὸς θέματος*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλοῦμεν τοὺς ὅρους καὶ τὰ σύμβολα **σταθεράς**. Ἀντιθέτως εἰς τὸ παράδειγμα 3 τὸ σύμβολον x δὲν ἔχει μοναδικὴν σημασίαν, δύναται λ.χ. τὸ x νὰ εἶναι εἰς οἰοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ἀκόμη εἰς οἰοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὴν ἐκφρασιν $2x = 6$. Ὁμοίως εἰς τὴν ἐκφρασιν $x^2 + \sqrt{2} > y^3$ τὰ σύμβολα x καὶ y (ἄρα καὶ τὰ x^2 καὶ y^3) ἔχουν ἀκαθόριστον καὶ μὴ μόνιμον σημασίαν, κατέχουν δὲ τὴν θέσιν δύο οἰωνδήποτε, ἀπὸ μίαν εἰδικὴν κατηγορίαν ἀντικειμένων, λ.χ. τὸ x εἶναι εἰς οἰοσδήποτε φυσικὸς καὶ τὸ y εἰς οἰοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς. Τὰ τοιαῦτα σύμβολα ὀνομάζομεν **μεταβλητάς**. Φανερόν εἶναι πλέον ὅτι ἐκφράσεις περιέχουσαι μεταβλητάς δὲν εἶναι προτάσεις.

§ 2. Προτασιακὸς τύπος ἢ ἀνοικτὴ πρότασις.— Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι μία ἐκφρασις περιέχουσα μεταβλητάς δὲν ἔχει νόημα προτάσεως, καθόσον δὲν γνωρίζομεν ἂν τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθές ἢ ψευδές. Μία τοιαύτη ἐκφρασις γίνεται πρότασις, ὅταν αἱ ἐν λόγω μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν με σταθεράς ὀρισμένης κατηγορίας. Οὕτως ἡ ἐκφρασις:

« $\delta x \text{ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ } 10$ »

θὰ γίνῃ πρότασις, ἂν ἡ μεταβλητὴ x ἀντικατασταθῇ με ἓνα οἰονδήποτε πραγματικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν λ.χ. ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 12, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις: « $\delta 12 \text{ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ } 10$ » με τιμὴν ἀληθείας α . Ἐὰν πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 7, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις: « $\delta 7 \text{ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ } 10$ » με τιμὴν ἀληθείας ψ . Ὁμοίως ἡ ἐκφρασις:

« $\delta \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς } x \text{ διαιρεῖ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν } y$ »

γίνεται πρότασις, ἔαν ἀντικατασταθοῦν π.χ. τὸ $x = 5$ καὶ $y = 35$ με τιμὴν ἀληθείας α , καθὼς καὶ διὰ $x = 7$, $y = 33$ με τιμὴν ἀληθείας ψ . Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὑπάρχουν ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y ἀπὸ δύο καθοριζόμενα σύνολα, ἐν προκειμένῳ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν καὶ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐκφρασις γίνεται ἀληθῆς πρότασις καὶ ἄλλα ζεύγη τιμῶν τῶν x καὶ y , διὰ τὰ ὁποῖα αὕτη γίνεται ψευδῆς πρότασις.

Αἱ ἐκφράσεις: « $\delta x \text{ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ } 10$ », « $\delta \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς } x \text{ διαιρεῖ}$

τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν y » κ.ἄ. καλοῦνται **προτασιακοὶ τύποι** ἢ **ἀνοικταὶ πρότασεις**, ἄλλως **προτασιακαὶ συναρτήσεις** μιᾶς, ἀντιστοίχως δύο μεταβλητῶν.

Γενικῶς : Προτασιακὸς τύπος (ἢ ἀνοικτὴ πρότασις) μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται **μία ἔκφρασις**, ἢ **ὁποία περιέχει μίαν ἢ περισσότερας μεταβλητάς**, καὶ ἢ **ὁποία καθίσταται πρότασις τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ στοιχεῖα ἐνὸς ἢ περισσοτέρων συνόλων.**

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις καὶ αἱ ἀνισώσεις εἶναι προτασιακοὶ τύποι.

Χάριν συντομίας συμβολίζομεν τοὺς προτασιακοὺς τύπους μὲ μίαν μεταβλητὴν π.χ. τὴν x διὰ τῶν : $p(x), q(x), r(x), \dots$, μὲ δύο μεταβλητάς π.χ. τὰς x, y διὰ τῶν : $p(x, y), q(x, y), \dots$, καὶ γενικῶς διὰ n μεταβλητάς : $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι : ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει ἐν σύνολον ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως τὸ ζεύγος τῶν μεταβλητῶν (x, y) ἐν σύνολον ζευγῶν ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως ἐν σύνολον n -άδων ἀντικειμένων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ἡ ἔκφρασις $p, \dots$. Τὸ σύνολον αὐτὸ καλοῦμεν **σύνολον ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν, διὰ τὰς ὁποίας ὁ προτασιακὸς τύπος καθίσταται ἀληθὴς πρότασις, καλεῖται **σύνολον τιμῶν ἀληθείας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν προτασιακοῦ τύπου περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι, ἐν γένει, ἐν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ἢ γενικώτερον n -άδων ἀντικειμένων. Οὕτως εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον $p(x, y) : «3x + y = 8»$, ὡς σύνολον ἀναφορᾶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, δηλ. τὸ σύνολον ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι τὸ σύνολον (δύων) τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y) , τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα $3x + y = 8$, λ.χ. τὰ ζεύγη $(1, 5), (2, 2), \left(\frac{5}{3}, 3\right)$ κ.ἄ.

Σημειώσεις : Προφανῶς οἱ συμβολισμοὶ $p(x)$ καὶ $p(y)$ νοοῦνται ὡς ταυτόσημοι, ἥτοι τὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν μεταβλητὴν δὲν μεταβάλλει τὸ εἶδος τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Κατὰ συνέπειαν, ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν, δίδει ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν.

§ 3. Ποσοδεῖκται.—Ἐστω $p(x)$ εἰς προτασιακὸς τύπος καὶ Ω τὸ σύνολον ἀναφορᾶς του. Τότε τὸ σύνολον Ω χωρίζεται εἰς δύο σύνολα, ἥτοι εἰς τὸ σύνολον Ω_a , διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ προτασιακὸς τύπος $p(x)$ γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας α καὶ τὸ σύνολον Ω_ψ , διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ $p(x)$ γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας ψ .

Πολλάκις διὰ νὰ διατυπώσωμεν προτάσεις, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ Μαθηματικά, προτάσσομεν τοὺς καλουμένους **ποσοδεῖκτας**.

Οἱ ποσοδεῖκται, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, εἶναι δύο, ἥτοι :

1). Ὁ καλούμενος **ὕπαρξιακὸς ποσοδεῖκτης**, συμβολιζόμενος μὲ « $\exists$ », ὅστις ἀναγιγνώσκεται «*ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἓν...*» εἴτε καὶ ἄλλως «*διὰ μερικά...*».

2). 'Ο καλούμενος **καθολικός ποσοδείκτης**, συμβολιζόμενος με « $\forall$ », ὅστις ἀναγιγνώσκεται «διὰ κάθε...» εἴτε καὶ ἄλλως «δι' ὅλα τὰ...».

Οἱ ποσοδεῖται προτάσσονται προτασιακῶν τύπων οὕτω :

1). « $\exists x p(x)$ » ἀναγιγνώσκεται : «ὑπάρχει ἐν τουλάχιστον x , ὥστε νὰ ἰσχύη $p(x)$ », εἴτε καὶ οὕτω «διὰ μερικά x , ἰσχύει $p(x)$ ».

2). « $\forall x p(x)$ » ἀναγιγνώσκεται : «διὰ κάθε x ἰσχύει $p(x)$ » εἴτε καὶ οὕτω «δι' ὅλα τὰ x ἰσχύει $p(x)$ ».

Παρατηροῦμεν τώρα τὰ ἑξῆς : Ἄν $p(x)$ εἶναι εἰς προτασιακὸς τύπος, λ.χ. «ὁ x εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς» καὶ Ω εἶναι τὸ σύνολον ἀναφορᾶς, εἰς τὸ παράδειγμά μας, λ.χ. τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε :

1). Ἡ ἔκφρασις « $\exists x p(x)$ » εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη λαμβάνει τὴν τιμὴν α τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον Ω_α δὲν εἶναι κενὸν (δηλαδὴ τὸ σύνολον Ω_ψ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Ω) καὶ τὴν τιμὴν ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον Ω_α εἶναι κενὸν (ἦτοι τὸ $\Omega_\psi = \Omega$).

2). Ἡ ἔκφρασις « $\forall x p(x)$ » εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη λαμβάνει τὴν τιμὴν α τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\Omega_\alpha = \Omega$ (δηλαδὴ τὸ Ω_ψ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ κενὸν) καὶ τιμὴν ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν Ω_α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Ω (δηλαδὴ τὸ Ω_ψ εἶναι διάφορον τοῦ κενοῦ).

Προτάσεις τῶν μορφῶν 1) καὶ 2) καλοῦνται *ὕπαρξιακαί*, ἀντιστοίχως *ποσοτικαὶ* προτάσεις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι : **Μία ὑπαρξιακὴ ἀντιστοίχως μία ποσοτικὴ πρότασις εἶναι πάντοτε μία λογικὴ πρότασις.**

Παράδειγματα : 1ον : Ἐάν $p(x)$ εἶναι ὁ προτασιακὸς τύπος : « $x + 5 \geq 13$ » μετὰ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις : « $\forall x p(x)$ », ἔκτενῶς ἢ : « $\forall x, x \in \mathbf{N}$ μετὰ $x + 5 \geq 13$ », εἶναι ψευδής, διότι τὸ $\Omega_\alpha = \{8, 9, 10, \dots\}$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{N}$, ἐνῶ ἡ πρότασις : « $\exists x p(x)$ », ἔκτενῶς ἢ : « $\exists x, x \in \mathbf{N}$ μετὰ $x + 5 \geq 13$ », εἶναι ἀληθής, διότι τὸ σύνολον τιμῶν ἀληθείας $\Omega_\alpha = \{8, 9, \dots\}$ εἶναι διάφορον τοῦ κενοῦ.

2ον : Ἐάν $p(x)$ εἶναι ὁ προτασιακὸς τύπος : « $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ » μετὰ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις : « $\forall x p(x)$ » λαμβάνει τὴν τιμὴν α , διότι $\Omega_\alpha \equiv \mathbf{R}$.

Ἐπίσης ἢ : « $\exists x p(x)$ » λαμβάνει τὴν τιμὴν α , διότι τὸ Ω_ψ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ κενὸν σύνολον.

3ον : Ἐάν $p(x)$: « $x^2 + x + 1 < 0$ » μετὰ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις :

« $\forall x p(x)$ » ἔκτενῶς ἢ : « $\forall x, x \in \mathbf{R}$ μετὰ $x^2 + x + 1 < 0$ » εἶναι ψευδής, διότι Ω_α εἶναι τὸ κενὸν σύνολον καὶ συνεπῶς Ω_α γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$.

Ἐπίσης ἡ πρότασις :

« $\exists x p(x)$ » ἔκτενῶς ἢ : « $\exists x, x \in \mathbf{R} : x^2 + x + 1 < 0$ » λαμβάνει τὴν τιμὴν ψ , διότι $\Omega_\alpha = \emptyset$.

Οί ποσοδείκται προτάσσονται καί προτασιακῶν τύπων δύο ἡ περισσοτέρων μεταβλητῶν οὕτω :

$\forall x \forall y p(x,y)$, δηλαδή διὰ κάθε x καὶ κάθε y ἰσχύει $p(x,y)$.

$\exists x \exists y p(x,y)$, δηλαδή ὑπάρχει (τούλάχιστον) ἐν x καὶ ἐν y , ὥστε νὰ ἰσχύη $p(x,y)$.

$\forall x \exists y p(x,y)$, δηλαδή διὰ κάθε x ὑπάρχει ἐν y , ὥστε νὰ ἰσχύη $p(x,y)$.

$\exists x \forall y p(x,y)$, δηλαδή ὑπάρχει x , ὥστε διὰ κάθε y νὰ ἰσχύη $p(x,y)$.

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις εἶναι λογικαὶ προτάσεις.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἐπιτρέπεται μετάθεσις $\forall x \forall y$ καὶ $\exists x \exists y$, ἥτοι ἰσχύει :

$$\forall x \forall y p(x,y) \equiv \forall y \forall x p(x,y)$$

$$\exists x \exists y p(x,y) \equiv \exists y \exists x p(x,y).$$

Τοῦτο δὲν ἐπιτρέπεται εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις, ὡς δεικνύει τὸ κάτωθι :

Παράδειγμα : Ἐστω $p(x,y)$ ὁ προτασιακὸς τύπος : «Ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y »· μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις :

$\forall x \exists y p(x,y)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν α , ἐνῶ ἡ πρότασις

$\exists y \forall x p(x,y)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν ψ .

Ἡ πρώτη ἐκφράζει : «διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἰς μεγαλύτερος», ἐνῶ ἡ δευτέρα ἐκφράζει : «ὑπάρχει εἰς ἀριθμὸς, ὥστε κάθε ἄλλος νὰ εἶναι μικρότερος».

§ 4. Σύνθετοι προτάσεις. — Ἄς θεωρήσωμεν τὴν πρότασιν :

«ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς».

Αὕτη εἶναι μία ἀπλή λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ἀληθείης». Αὕτη ἐκφράζει μίαν ιδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἐν ἀντικείμενον (πρᾶγμα), δηλ. ὁ ἀριθμὸς 4, ἥτοι τὴν ιδιότητα :

(1)

«... εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς».

Προφανῶς ἡ ιδιότης αὕτη ἀναφέρεται καὶ εἰς ἄλλα ἀντικείμενα (ἀριθμούς). Οὕτως, ἐὰν εἰς τὴν θέσιν τοῦ 4 γράψωμεν τὸ 7, τότε ἡ πρότασις :

«ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς»,

εἶναι ἐπίσης λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ψευδής». Τὴν ιδιότητα (1) καλοῦμεν ἐν «κατηγόρημα».

Αἱ προτάσεις : «ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς», «ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς», δὲν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο ἢ περισσότερας ἄλλας προτάσεις, δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ μὲ τὴν πρότασιν :

(1)

«Οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 12 εἶναι ἄρτιοι».

Αὕτη εἶναι μία λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας α , ἀλλὰ χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας προτάσεις, ἥτοι :

(2)

«ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος» καὶ «ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι ἄρτιος».

Ἐδῶ ὁ σύνδεσμος «καί» παίζει ἓνα ρόλον σχηματισμοῦ μιᾶς νέας προτάσεως, τῆς (1) ἐκ τῶν δύο ἀπλῶν προτάσεων (2). Τὴν ὡς ἂνω πρότασιν (1) καλοῦμεν **σύνθετον πρότασιν**.

Γενικῶς : Μία πρότασις καλεῖται σύνθετος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν συνίσταται ἐξ ἀπλῶν προτάσεων συνδεδεμένων μεταξύ των με διάφορα συνδετικά, τὰ ὅποια καλοῦμεν **λογικοὺς συνδέσμους**.

Γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων θεωροῦνται ὡς **λογικοὶ σύνδεσμοι** αἱ ἐκφράσεις : «καί», «εἴτε», «ἐάν...», «τότε...», «τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν», ἐπίσης ἡ ἔκφρασις «ὄχι», ὅταν τίθεται πρὸ μιᾶς προτάσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων ὁ μὲν «ὄχι» εἶναι **μονομελὲς** σύνδεσμος, διότι προτάσσεται μιᾶς προτάσεως, οἱ ὑπόλοιποι ὅμως εἶναι **διμελεῖς**, διότι συνδέουν δύο προτάσεις.

Παραδείγματα συνθέτων προτάσεων.

α). «Ὁ ἀριθμὸς 3 εἴτε ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι περιττός».

β). «Ἐάν ὁ 4 εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος».

γ). «Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 16 εἶναι ἄρτιος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2».

δ). «Ὅχι ὁ 3 εἶναι ἄρτιος» = «ὁ 3 δὲν εἶναι ἄρτιος».

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω σύνθετοι προτάσεις εἶναι **λογικαὶ προτάσεις** με τιμὴν ἀληθείας α. Κατὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ἀνωτέρω συνθέτων προτάσεων εὐκόλως διαπιστοῦνται ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας των ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων, ἐξ ὧν αὗται συνίστανται.

Εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων δεχόμεθα γενικῶς ὅτι ἐκ δύο λογικῶν προτάσεων συνίσταται διὰ συνθέσεως αὐτῶν με ἓνα ἐκ τῶν λογικῶν συνδέσμων «καί», «εἴτε», «ἐάν...», «τότε...», «τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν» μία νέα λογικὴ πρότασις. Ἐπίσης ἐκ μιᾶς προτάσεως (λογικῆς) διὰ προτάξεως τῆς ἀρνήσεως «ὄχι», προκύπτει μία λογικὴ πρότασις.

Αἱ προτάσεις θεωροῦμεναι εἴτε μεμονωμένως, εἴτε ἐντὸς **λογικοῦ συνδυασμοῦ** μετ' ἄλλων προτάσεων, ὅμως ὡς ἐν σύνολον, ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μελέτης τοῦ μέρους ἐκείνου τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, τὸ ὅποιον καλεῖται **Προτασιακὸς Λογισμὸς**.

§ 5. Ἀλγεβρα (λογισμὸς) τῶν προτάσεων. — Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει ἐν σύνολον ἀπλῶν λογικῶν προτάσεων, τὸ ὅποιον συμβολίζομεν με Π · τὰ στοιχεῖα, ἐξ ὧν τὸ Π συνίσταται, δηλ. τὰς προτάσεις, συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὴν § 1, με τὰ γράμματα $p, q, r, s, \dots$. Δεχόμεθα ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς ἐκάστην πρότασιν p ἐκ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς ἐκ τῶν δύο χαρακτηρισμῶν : «ἀληθὴς» (α), «ψευδὴς» (ψ), ἤτοι δεχόμεθα ὅτι ὑφίσταται μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Π εἰς τὸ διμελὲς σύνολον $\{\alpha, \psi\}$: Γράφομεν δέ :

$$\tau : \Pi \rightarrow \{\alpha, \psi\} \text{ ἢ καὶ ἄλλως } \text{P} \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}.$$

Διὰ τῆς μονοσημάντου ταύτης ἀπεικονίσεως τ ἐκάστη πρότασις p λαμβάνει ἀκριβῶς μίαν τιμὴν $\tau(p)$ ἐν $\{\alpha, \psi\}$, τὴν καλουμένην **τιμὴν ἀληθείας** τῆς προτάσεως p .

Θεωρούμεν τώρα τους κάτωθι λογικούς συνδέσμους, τη βοήθεια των οποίων εφοδιάζομεν τὸ σύνολον Π τῶν ἀπλῶν προτάσεων μὲ «*λογικὰς πράξεις*» :

1). Ὁ σύνδεσμος «*καί*», ὅστις συμβολίζεται μὲ « $\wedge$ » καὶ διαβάζεται «*σύνδεξις*», ἡ «*καί*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνεζεύξεως*.

2). Ὁ σύνδεσμος «*εἴτε*» ἢ «*ἢ*», ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ « $\vee$ » καὶ διαβάζεται «*διάζευξις*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς (*ἐγκλειστικῆς*) *διαζεύξεως*.

3). Ἡ ἔκφρασις «*ἐάν... τότε...*», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\implies$ » καὶ διαβάζεται «*ἐπεται*», «*συνεπάγεται*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνεπαγωγῆς*.

4). Ἡ ἔκφρασις «*τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν*», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\iff$ » καὶ διαβάζεται «*ἐπεται καὶ ἀντιστρόφως*» ἢ «*συνεπάγεται καὶ ἀντιστρόφως*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς (*λογικῆς*) *ισοδυναμίας*.

5). Ὁ λογικὸς σύνδεσμος «*ὄχι*», ὅστις συμβολίζεται μὲ « $\sim$ » καὶ διαβάζεται «*ὄχι*» ἢ «*δέν*», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *ἀρνήσεως*.

Δεχόμεθα τώρα τὰ ἑξῆς : α). Ἐάν εἰς τῶν τεσσάρων πρώτων συνδέσμων τεθῇ μεταξύ δύο οἰωνδήποτε ἀπλῶν προτάσεων p καὶ q ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία καλεῖται *σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος*. Ἦτοι διὰ κάθε ζεύγος ἀπλῶν προτάσεων p καὶ q ἐκ τοῦ Π αἱ προτάσεις : $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \implies q$, $p \iff q$ εἶναι σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος. Φανερόν εἶναι ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ζεύγους p καὶ q ἐπιτρέπεται νὰ συμπίπτουν, ἤτοι αἱ

$$p \vee p, \quad p \wedge p, \quad p \implies p, \quad p \iff p,$$

εἶναι ἐπίσης σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος διὰ κάθε πρότασιν p ἐκ τοῦ Π.

β). Ἐάν ὁ πέμπτος λογικὸς σύνδεσμος τεθῇ πρὸ τυχούσης προτάσεως ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, καλουμένη ἐπίσης *πρώτης βαθμίδος*, ἤτοι $\sim p$ εἶναι σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος.

§ 6. Πράξεις μεταξύ λογικῶν προτάσεων. — Δι' ἐκάστην σύνθετον πρότασιν πρώτης βαθμίδος ὀρίζεται ἀκριβῶς μία τιμὴ ἐν $\{ \alpha, \psi \}$ τῇ βοήθειᾳ τῶν κατωτέρω πινάκων. Ἡ τιμὴ τῆς συνθέτου προτάσεως ἐν $\{ \alpha, \psi \}$, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ *τιμὴ ἀληθείας τῆς συνθέτου προτάσεως*, ὀρίζεται πλήρως ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας ἐκάστης τῶν ἀπλῶν προτάσεων ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται καὶ τοῦ τρόπου συνδέσεως αὐτῶν πρὸς σχηματισμὸν τῆς συνθέτου προτάσεως, οὐχὶ ὅμως ἀπὸ τὸ περιεχόμενον αὐτῶν.

Οἱ διάφοροι τρόποι συνδέσεως ἀπλῶν προτάσεων πρὸς σχηματισμὸν συνθέτου τοιαύτης, ἀποτελοῦν τὰς «*λογικὰς πράξεις*» μεταξύ τῶν προτάσεων.

Αἱ θεμελιώδεις λογικαὶ πράξεις εἶναι αἱ ἑξῆς :

1. **Σύνδεξις :** Τὰ ἐξαγόμενα τῆς λογικῆς πράξεως τῆς *συνεζεύξεως* $\wedge$ παρέχονται σχηματικῶς, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προη-

γυμμένης τάξεως, διὰ τοῦ κάτωθι πίνακος καλουμένου **πίνακος τιμῶν ἀληθείας** τῆς συζεύξεως $p \wedge q$.

(1)

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

Δυνάμει τοῦ ἔναντι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \wedge q)$ τῆς προτάσεως $p \wedge q$ ὀρίζεται ἴση μὲ α, δηλαδὴ $\tau(p \wedge q) = \alpha$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q) = \alpha$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \wedge q$ εἶναι ἴση μὲ ψ, ἥτοι $\tau(p \wedge q) = \psi$.

᾽Ωστε: Ἡ σύζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἀμφότεραι αἱ προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.

Παράδειγμα: Ἐστωσαν αἱ προτάσεις:

p: «Ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς» καὶ q: «Ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς».

Τότε ἡ σύζευξις αὐτῶν $p \wedge q$: «Ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς» εἶναι μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ψευδὴς (διὰ τὴν ;).

2. Ἐγκλειστικὴ διάζευξις:

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \vee q)$ τῆς προτάσεως $p \vee q$ ὀρίζεται ἴση μὲ ψ, ἥτοι $\tau(p \vee q) = \psi$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q) = \psi$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \vee q$ εἶναι ἴση μὲ α.

(2)

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

᾽Ωστε: Ἡ (ἐγκλειστικὴ) διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν μία τοῦλάχιστον τῶν (ἀπλῶν) προτάσεων εἶναι ἀληθὴς.

Παράδειγμα: Εἶναι ἀληθὴς ἢ εἶναι ψευδὴς ἡ πρότασις:

«Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος»;

Ἀπάντησις: Ἡ σύνθετος αὕτη πρότασις εἶναι ἀληθὴς, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p τὴν πρότασιν: «Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον» καὶ διὰ q τὴν πρότασιν: «Ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος», ἔχομεν $\tau(p) = \psi$ καὶ $\tau(q) = \alpha$. Ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω πίνακα (2), ἡ σύνθετος πρότασις:

$p \vee q$: «ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος» εἶναι ἀληθὴς.

3. Συνεπαγωγὴ:

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \implies q)$ τῆς προτάσεως $p \implies q$ ὀρίζεται ἴση μὲ ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \alpha$ καὶ $\tau(q) = \psi$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \implies q$ εἶναι ἴση μὲ α, ἥτοι:

(3)

p	q	$p \implies q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

$\tau(p \implies q) = \alpha$.

᾽Ωστε: Ἡ συνεπαγωγὴ $p \implies q$ εἶναι ψευδὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ p εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ q εἶναι ψευδὴς. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθὴς.

Πῶς φαίνεται ὅτι ἡ συνεπαγωγὴ δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ λογικὴ πρᾶξις;

Παράδειγμα: Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση: « $(3 = 4) \implies (7 > 2)$ »;

Απάντησις: Ἡ πρόταση είναι αληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p τὴν: « $3 = 4$ » καὶ διὰ q τὴν: « $7 > 2$ », παρατηροῦμεν ὅτι ἡ p είναι ψευδής (ψ) καὶ ἡ q είναι αληθής (α). Συνεπώς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (3), ἡ σύνθετος πρόταση:

$$p \implies q: \text{«ἐὰν } 3 = 4, \text{ τότε } 7 > 2\text{»}$$

είναι αληθής.

Παρατηρήσεις: Ἄλλοι τρόποι διατυπώσεως τῆς συνεπαγωγῆς $p \implies q$ είναι καὶ οἱ ἑξῆς:

1. « p είναι ικανή συνθήκη διὰ q »
2. « q είναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ p »
3. «ὑπόθεσις: p , συμπέρασμα: q »
4. « p , ὅθεν q »
5. « p , ἄρα q »
6. « q συνάγεται ἐκ τοῦ p ».

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνεπαγωγή: «Ἐὰν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι ἴσα, τότε αἱ γωνίαι των είναι ἴσαι μίᾳ πρὸς μίαν».

Ἡ ὑπόθεσις p : «τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι ἴσα» είναι **ικανή συνθήκη** διὰ τὸ συμπέρασμα τῆς ἰσότητος τῶν ἀντιστοιχῶν γωνιῶν.

Τὸ συμπέρασμα q : «αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων είναι ἴσαι μίᾳ πρὸς μίαν» είναι **ἀναγκαία συνθήκη** διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων· δηλαδὴ δὲν δύνανται τὰ τρίγωνα νὰ είναι ἴσα χωρὶς αἱ γωνίαι των νὰ είναι ἴσαι μίᾳ πρὸς μίαν.

4) Λογικὴ ἰσοδυναμία.

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \iff q)$ τῆς προτάσεως $p \iff q$ ὁρίζεται ἴση μὲ α , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q)$. ὅθεν ἡ τιμὴ $\tau(p \iff q)$ είναι ἴση μὲ ψ , ἂν, καὶ μόνον ἂν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

(4)

p	q	$p \iff q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Ὡστε: Ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία είναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ δύο προτάσεις είναι συγχρόνως ἀληθεῖς ἢ συγχρόνως ψευδῆς.

Ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία είναι ἀντιμετθετική

λογικὴ πρᾶξις; Νὰ σχηματισθῇ ὁ σχετικὸς πίναξ ἀληθείας.

Παράδειγμα: Είναι αληθής ἢ είναι ψευδής ἡ πρόταση: « $(2 = 5) \iff (4 > 7)$ »;

Απάντησις: Ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία είναι αληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p : « $2 = 5$ » καὶ διὰ q : « $4 > 7$ », ἔχομεν $\tau(p) = \psi$ καὶ $\tau(q) = \psi$. Ἐπομένως, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (4), ἡ σύνθετος πρόταση:

$$p \iff q: \text{«Ὁ } 2 = 5 \text{ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν } 4 > 7\text{»}$$

είναι αληθής.

Παρατηρήσεις: α). Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς (λογικῆς) ἰσοδυναμίας ἐννοοῦμεν ὅτι ἰσχοῦν αἱ ἑξῆς ιδιότητες:

1. $p \iff p$
2. $(p \iff q) \iff (q \iff p)$
3. $(p \iff q \wedge q \iff r) \implies (p \iff r)$.

β). Άλλοι τρόποι λεκτικής διατυπώσεως της ισοδυναμίας « $p \iff q$ » είναι και οι εξής :

1. « p εάν, και μόνον εάν, q ».
2. « p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη διὰ q ».
3. « p πρέπει και αρκεί q ».
4. « p και q είναι λογικώς ισοδύναμοι» ή απλώς «ισοδύναμοι».
5. « $p \implies q$ και αντίστροφως».

Σημειώσεις: Εάν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p \iff q$ δύο προτάσεων ὑφίσταται ἐξ ὁρίσμου, τότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\iff$, ἥτοι γράφομεν $p \iff q$.

5) Ἀρνήσεις: Κατὰ τὴν λογικὴν αὐτὴν πράξιν διὰ κάθε πρότασιν p δεχόμεθα μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς «ὄχι p », συμβολιζομένη « $\sim p$ », ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ p εἶναι ψευδής, ψευδὴς δὲ ἂν ἡ p εἶναι ἀληθής. Οὕτως ὁ πίναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀρνήσεως « $\sim p$ » εἶναι ὁ κάτωθι :

(5)	p	$\sim p$
	α	ψ
	ψ	α

Δυνάμει τοῦ ἑναντι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(\sim p)$ τῆς προτάσεως $\sim p$ ὁρίζεται πάντοτε διάφορος (ἀντίθετος) τῆς τιμῆς $\tau(p)$ τῆς προτάσεως p .

Ὅθεν, ἐὰν $\tau(p) = \alpha$, τότε $\tau(\sim p) = \psi$ καὶ ἐὰν $\tau(p) = \psi$, τότε $\tau(\sim p) = \alpha$.

Ὅστε: Αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ $\sim p$ εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι.

Παράδειγμα: Εάν p : «ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς» νὰ εὗρεθῇ ἡ τιμὴ $\tau(\sim p)$ τῆς προτάσεως $\sim p$.

Λύσις: Ἐχομεν $\tau(p) = \psi$, ἄρα $\tau(\sim p) = \alpha$, ἔνθα :

$\sim p$: «ὄχι ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς» = «ὁ $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς».

Παρατήρησις: Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὡς σύνδεσμος καὶ ἡ ἔκφρασις «ἢ μόνον ... ἢ μόνον ...», ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « $\underline{\vee}$ » ἢ « ∇ ». Τῇ βοήθειᾳ τοῦ ἀνωτέρω συνδέσμου σχηματίζεται ἡ λεγομένη ἀποκλειστικὴ διάζευξις. Οὕτως, ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων p, q συμβολίζεται μὲ: $p \underline{\vee} q$ ἢ $p \nabla q$ καὶ ἀναγιγνώσκεται «ἢ μόνον p ἢ μόνον q ». Ἡ σύνθετος πρότασις $p \underline{\vee} q$, κατατασσομένη καὶ αὕτη εἰς τὴν πρώτην βαθμίδα εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ q εἶναι διάφοροι, ψευδὴς δέ, ὅταν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ q εἶναι ἴσαι.

(6)	p	q	$p \underline{\vee} q$
	α	α	ψ
	α	ψ	α
	ψ	α	α
	ψ	ψ	ψ

Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἑναντι πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως $p \underline{\vee} q$.

Δυνάμει τοῦ πίνακος τούτου, ἡ τιμὴ $\tau(p \underline{\vee} q)$ τῆς προτάσεως $p \underline{\vee} q$ ὁρίζεται ἴση μὲ α , τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) \neq \tau(q)$ καὶ $\tau(p \underline{\vee} q) = \psi$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q)$.

Ὅστε: Ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ μία εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἄλλη ψευδής.

Παράδειγμα 1ον : Είς τὰ Μαθηματικά ἡ ἔκφρασις : «ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ β» ὀρίζεται ὡς ἐξῆς :

$$\alpha \geq \beta \iff \alpha > \beta \quad \eta \quad \alpha = \beta.$$

ορσ

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ποία ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως : « $4 \geq 3$ ».

Ἀπάντησις : Δυνάμει τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν : « $4 > 3$ ἢ $4 = 3$ ». Αὕτη ὁμως εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν μὲ p τὴν πρότασιν : « $4 > 3$ » καὶ μὲ q τὴν : « $4 = 3$ », ἔχομεν : $\tau(p) = \alpha$ καὶ $\tau(q) = \psi$. Ἐπὶ πλέον δὲ οὐδέποτε ἕνας ἀριθμὸς εἶναι καὶ μεγαλύτερος καὶ ἴσος ἐνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἐπομένως ἡ σύνθετος πρότασις :

« $4 > 3$ ἢ $4 = 3$ » ἀποτελεῖ μίαν ἀποκλειστικὴν διάζευξιν, συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (6), ἔχομεν : $\tau(p \vee q) = \alpha$.

Σημείωσις . Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : « $3 \geq 3$ » καὶ γενικῶς « $x \geq x$ » $\forall x \in \mathbb{R}$ (διὰ τὴν ;).

Παράδειγμα 2ον : Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 1 διὰ τὴν λογικὴν πρότασιν ἢ δήλωσιν, τί εἶναι ἡ ἔκφρασις : «Ἡ δήλωσις εἶναι μία ἀληθὴς ἢ ψευδὴς πρότασις».

Ἀπάντησις : Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ἀποκλειστικὴ διάζευξις, διότι ἡ (λογικὴ) πρότασις ἢ δήλωσις εἶναι ἢ μόνον ἀληθὴς (καὶ ὄχι ψευδής), ἢ μόνον ψευδὴς (καὶ ὄχι ἀληθής). Δηλαδὴ ἡ δήλωσις οὐδέποτε εἶναι καὶ ἀληθὴς καὶ ψευδής.

Παράδειγμα 3ον : Ἐστω μία οἰκογένεια μὲ δύο τέκνα, ἀμφότερα ἀγόρια. Ἐστω p ἡ πρότασις : «Τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι» καὶ q ἡ πρότασις : «Τὸ μικρότερον τέκνον εἶναι ἀγόρι». Νὰ ἀποδόσῃτε λεκτικῶς τὴν σύνθετον πρότασιν $p \vee q$ καὶ νὰ εὑρῇτε τὴν τιμὴν ἀληθείας ταύτης.

Ἀπάντησις : Ἡ σύνθετος πρότασις $p \vee q$ σημαίνει :

$p \vee q$: «Ἡ μόνον τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι ἢ μόνον τὸ μικρότερον».

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν :

«Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἕνα ἀγόρι καὶ ἕνα κορίτσι».

Προφανῶς ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ψ (=ψεῦδος). Εἰς τὸ αὐτὸ συμπεράσμα καταλήγομεν καὶ ἐκ τοῦ πίνακος 6, ἂν ληθῇ ὑπ' ὅψιν ὅτι : $\tau(p) = \alpha$, $\tau(q) = \alpha$.

Ἦσπερ : $\tau(p \vee q) = \psi$.

Ἀνακεφαλαίωσις. Οἱ ἑξ ἀνωτέρω πίνακες τιμῶν ἀληθείας τῶν λογικῶν πράξεων τῆς συζύξεως, ἐγκλειστικῆς διαζύξεως, ἀποκλειστικῆς διαζύξεως, συνεπαγωγῆς, ἰσοδυναμίας καὶ ἀρνήσεως δύο προτάσεων p , q συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

p	q	Σύζευξις	Ἐγκλ. Διάζ.	Ἀπ. Διάζ.	Συνεπαγωγή	Ἰσοδυναμία	Ἀρνήσεις	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \implies q$	$p \iff q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

§ 7. Ταυτολογίες και αυτοαντιφάσεις.

1). **Ταυτολογία**. Μία σύνθετος πρότασις A , εις την οποίαν εμφανίζονται αϊ άπλαι πρότασεις $p_1, p_2, \dots, p_k$ εκ του συνόλου Π , καλείται μία **ταυτολογία** τότε, και μόνον τότε, αν η τιμή αληθείας αυτής είναι ή α ($=$ αλήθεια), διά κάθε «συνδυασμόν» τιμών αληθείας των άπλων προτάσεων $p_1, p_2, \dots, p_k$. Αϊ ταυτολογίες συμβολίζονται με πρόταξιν του συμβόλου : $\vdash$, ήτοι :

$\vdash A$ σημαίνει : *ή πρότασις A είναι μία ταυτολογία.*

Αξιόλογοι ταυτολογίες είναι αϊ εξής :

- 1). *Νόμος της ταυτότητος* : $\vdash p \implies p$.
- 2). *Νόμος διπλής άρνήσεως* : $\vdash p \iff \sim (\sim p)$.
- 3). *Νόμος αποκλείσεως τρίτου* : $\vdash p \vee (\sim p)$.
- 4). *Νόμος αντιφάσεως* : $\vdash \sim [p \wedge (\sim p)]$.

Τό ότι είναι ταυτολογίες, φαίνεται σαφώς εκ των κάτωθι πινάκων :

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$p \wedge (\sim p)$	$p \implies p$	$p \iff \sim (\sim p)$	$p \vee \sim p$	$\sim [p \wedge (\sim p)]$
α	ψ	α	ψ	α	α	α	α
ψ	α	ψ	ψ	α	α	α	α

Παρατηρήσεις : 1). Ωρισμένοι ταυτολογίες, λόγω της γενικής ισχύος των, καλούνται **άρχει ή νόμοι**. Παραδείγματα τοιούτων ταυτολογιών είναι αϊ άνωτέρω ταυτολογίες (1), (3), (4), αϊ όποια είναι τρεις εκ των τεσσάρων νόμων της Λογικής του 'Αριστοτέλους *).

Οί νόμοι της Λογικής του 'Αριστοτέλους είναι οί κάτωθι τέσσαρες :

- α'). *Ο νόμος της ταυτότητος*
- β'). *Ο νόμος της αντιφάσεως*
- γ'). *Ο νόμος του άποχωρώντος λόγου και*
- δ'). *Ο νόμος της του τρίτου αποκλείσεως.*

2). Η ταυτολογία (3), κατά την οποίαν εκ δύο αντιφατικών προτάσεων p και $\sim p$ ή μία είναι αληθής και ή άλλη ψευδής, μέση κατάστασις δέν χωρεί, καλείται και **άρχη** της του μέσου ή τρίτου αποκλείσεως.

Παράδειγμα : Να δειχθῇ ότι ή κάτωθι **ισοδυναμία** :

$$\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q \quad (\text{Νόμος του De Morgan})$$

είναι ταυτολογία.

* Θεμελιωτής της Λογικής, γενικώς ως έπιστήμης των νόμων της σκέψεως, υπήρξεν ό εκ Σταγειρών της Μακεδονίας μέγας φιλόσοφος 'Αριστοτέλης (384 - 321 π.Χ.).

Λύσις: Σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας :

p	q	~ p	~ q	p ∧ q	~ (p ∧ q)	~ p ∨ ~ q	~ (p ∧ q) ⇔ ~ p ∨ ~ q
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας εἶναι πάντοτε α, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία εἶναι ταυτολογία.

Ὡστε : $\vdash \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

Σημείωσις : Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὁ ἕτερος νόμος τοῦ De Morgan.

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

2). Αὐτοαντιφάσεις. Μία σύνθετος πρότασις B, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται αἱ ἀπλάι προτάσεις $p_1, p_2, \dots, p_k$, καλεῖται αὐτοαντίφασις τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τιμὴ ἀληθείας αὐτῆς εἶναι ψ (= ψεῦδος), διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἀπλῶν προτάσεων $p_1, p_2, \dots, p_k$ ἢ συντομώτερον, ὅταν ἡ ἄρνησις αὐτῆς εἶναι μία ταυτολογία.

Μία αὐτοαντίφασις συμβολίζεται μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου $\sim \vdash$.

Παράδειγμα : Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \equiv B(p, q)^*)$ εἶναι αὐτοαντίφασις.

Λύσις : Σχηματίζομεν τὸν πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς προτάσεως B (p, q).

p	q	~ q	p ⇒ q	p ∧ ~ q	B (p, q)	~ B (p, q)
α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως B (p, q) εἶναι πάντοτε ψ, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q. Ἐπίσης ἐκ τῆς τελευταίας στήλης τοῦ ἀνωτέρω πίνακος βλέπομεν ὅτι : $\sim B(p, q)$ εἶναι ταυτολογία. Ἄρα : $\sim \vdash B(p, q)$.

Γενικὴ παρατήρησις. Τὰ ἀναπτυχθέντα μέχρι τοῦδε περὶ λογισμοῦ τῶν προτάσεων ἰσχύουν καὶ ἂν εἰς τοὺς ἀνωτέρω πίνακας τὰ σύμβολα p

* Ἐνταῦθα τὸ σύμβολον « $\equiv$ » σημαίνει : συντόμως συμβολίζομεν τὴν ἀριστερὰ πρότασιν μὲ...

καί η ἀντικατασταθοῦν μὲ προτασιακοὺς τύπους (ἀνοικτὰς προτάσεις), τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἀληθές ἢ ψευδές θὰ ἀναφέρηται εἰς τὸ σύνολον τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν τῶν ἐν λόγῳ προτασιακῶν τύπων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐστωσαν αἱ ἀνοικταὶ προτάσεις :

p : «Ὁ x εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς», q : «Ὁ x εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς».

- α). Νὰ γραφοῦν ὑπὸ συμβολικὴν μορφήν αἱ κάτωθι ἐκφράσεις :

1. «Ὁ x δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς»,
2. «Ὁ x δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς»,
3. «Ὁ x εἶναι ρητὸς καὶ ὄχι φυσικὸς ἀριθμὸς».

- β). Νὰ διατυπωθοῦν μὲ λέξεις οἱ κάτωθι (λογικοὶ) τύποι :

$p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge \sim q$, $p \vee \sim q$, $q \implies p$, $\sim p \iff \sim q$.

2. Τί σημαίνει ἐκάστη τῶν κάτωθι λογικῶν προτάσεων ;

α) $(5 < 7) \wedge (7 < 8)$, β) $\sim (\alpha = \beta)$,
γ) $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$.

3. Ἐχουν νόημα συνθέτου προτάσεως αἱ ἐκφράσεις ;

α) «σχῆμα $\vee$ τύπος». β) $7 \iff 3$. γ) «Ἀνατολὴ $\vee$ Δύσις».
(Ἀπάντησις : ὄχι (διὰ τὴν ;)).

4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν κάτωθι συνθέτων προτάσεων :

α) $(4 = \frac{12}{3}) \vee (3 = 8)$, β) $(3 \cdot \frac{1}{7} < 5) \implies (2 = 2)$,
γ) $(7 = 4 + 3) \implies (2 > 5)$, δ) $(2 = 3) \iff (5 = 7)$,
ε) $(27 = 3 \cdot 8) \vee (5^2 = 25)$, στ) $(2 > 5) \iff (3 = 8)$.

5. Δικαιολογήσατε διὰ τὴν πρότασιν : «Ἐάν ὁ Περικλῆς ἦτο ποταμός, τότε ὁ Παρθενὼν εὑρίσκεται εἰς τὰς Ἀθήνας» εἶναι ἀληθὴς.

6. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἐπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι ταυτολογία.

α) $\sim (p \wedge q) \iff (p \implies \sim q)$, β) $p \wedge q \implies p \vee q$,
γ) $p \wedge (p \vee q) \iff p$, δ) $p \vee (p \wedge q) \iff p$,
ε) $(p \implies q) \iff (\sim p) \vee q$, στ) $(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$,
ζ) $[p \wedge (p \implies q)] \iff q$, η) $[(p \implies q) \wedge (p \implies \sim q)] \iff \sim p$,
θ) $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \iff (p \implies r)$, ι) $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

7. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἐπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι αὐτοαντίφασις.

α) $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$, β) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$,
γ) $\sim (p \wedge q) \iff \sim (\sim p \vee \sim q)$, δ) $\sim p \wedge \sim q \iff p \vee q$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

§ 8. Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου.— Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, ὡς καὶ ἡ ἔννοια τῆς λογικῆς προτάσεως, θεωρεῖται ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὀρισμὸν, ὡς ἔννοια μὴ δυναμένη ν' ἀναχθῇ εἰς ἄλλην ἔννοιαν.

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ δεχόμεθα ὅτι ἐπιτρέπεται πολλὰ ἀντικείμενα σαφῶς καθωρισμένα καὶ διακεκριμένα μεταξύ των νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἓν *νέον ἀντικείμενον*, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *τὸ σύνολον τῶν θεωρουμένων ἀντικειμένων*.

Τὰ ἀντικείμενα συμβολίζονται συνήθως μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Ἐν σύνολον ἀντικειμένων συμβολίζεται μὲ ἓν κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. Σ, A, X , χωρὶς βεβαίως τοῦτο νὰ εἶναι ὑποχρεωτικόν, π.χ. εἰς τὴν γεωμετρίαν συμβαίνει συχνὰ τὸ ἀντίστροφον. Τὰ ἀντικείμενα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, τὰ ὁποῖα ὀρίζουν ἓν σύνολον, λ.χ. τὸ Σ , καλοῦνται εἰς τὴν «γλῶσσαν τῶν συνόλων», *στοιχεῖα* τοῦ συνόλου Σ , πολλὰκίς δὲ καὶ *σημεῖα τοῦ συνόλου* Σ .

Δι' ἓν τυχόν στοιχεῖον x καὶ δι' ἓν τυχόν σύνολον Σ δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει μία μόνον ἀπὸ τὰς σχέσεις :

1) $x \in \Sigma$ (δηλαδὴ τὸ x ἀνήκει εἰς τὸ Σ ἢ τὸ x εἶναι στοιχεῖον τοῦ Σ).

2) $x \notin \Sigma$ (δηλ. τὸ x δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Σ ἢ τὸ x δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Σ).

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς «σχέσεως ἰσότητος» ὀρισμένης μεταξύ τῶν στοιχείων του, βάσει τῆς ὁποίας θεωροῦμεν ταῦτα, ἐὰν δὲν συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $=$, ὡς διακεκριμένα μεταξύ των. Ἀκριβέστερον : *δεχόμεθα ὅτι κάθε σύνολον Σ στοιχείων $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, y, z, \dots$ εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ μία σχέσιν ἰσότητος, ἥτοι ὅτι: διὰ κάθε ζεύγος στοιχείων x, y ἐκ τοῦ Σ εἶναι βέβαιον καὶ κατὰ ἓνα ἀκριβῶς τρόπον ($\equiv$ μονοσημάντως), ἂν τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὁπότε γράφομεν $x = y$, ἢ διάφορα, ὁπότε γράφομεν $x \neq y$. Ἡ σχέση αὕτη πληροῖ τὰς ἐξῆς χαρακτηριστικὰς ιδιότητας ($\equiv$ ἀξιώματα) τῆς ἰσότητος :*

α) $x = x \quad \forall \quad x \in \Sigma$ (αὐτοπαθὲς ιδιότης)

β) ἂν $x = y$, τότε $y = x$ (συμμετρικὴ ιδιότης)

γ) ἂν $x = y$ καὶ $y = z$, τότε $x = z$ (μεταβατικὴ ιδιότης).

Τὴν ὡς ἄνω ἰσότητα, ἡ ὁποία ὀρίζει τὸ Σ (διακρίνει τὰ στοιχεῖα του) καλοῦμεν «*βασικὴν ἰσότητα*» πρὸς διάκρισιν ἀπὸ κάθε ἄλλην «*ἰσότητα*» ὀριζομένην ἐν Σ .

Προσέξαιτε! Τὸ σύμβολον $=$ συμβολίζει τὴν βασικὴν ἰσότητα καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ $\equiv$, τοῦ ὁποίου ἡ σημασία ἔχει ἤδη ἐξηγηθῇ.

Παραδείγματα συνόλων.

1. Το σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, . . . , ν, . . . Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα : $\mathbf{N}$.

2. Το σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν : 0, +1, -1, +2, -2, . . . , +ν, -ν, . . . Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα : $\mathbf{Z}$.

3. Το σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ : $\mathbf{Q}$.

4. Το σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα $\mathbf{R}$, ἐνῶ μὲ τὰ σύμβολα $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}_0^+$ συμβολίζομεν τοὺς θετικούς πραγματικούς ἀριθμούς, ἀντιστοίχως τοὺς μὴ ἀρνητικούς πραγματικούς ἀριθμούς.

5. Το σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα $\mathbf{C}$. Οὕτω, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω συμβολισμῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$1 \in \mathbf{N}, -\frac{2}{3} \in \mathbf{N}, \sqrt{2} \in \mathbf{Q}, \sqrt{2} \in \mathbf{R}^+, -\frac{7}{8} \in \mathbf{Q}^+, -2 \in \mathbf{Z}, 3+5i \in \mathbf{C}.$$

§ 9. Παράστασις συνόλου.— Συνήθεις τρόποι παραστάσεως ἐνὸς συνόλου εἶναι οἱ κάτωθι δύο :

α). Δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἕκαστον σύνολον ὀρίζεται διὰ δηλώσεως (ἀναγραφῆς) ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς αὐτό. Οὕτω, π.χ., τὸ σύνολον μὲ στοιχεῖα αὐτοῦ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4 θὰ συμβολίζωμεν γράφοντες τὰ στοιχεῖα του μεταξύ ἀγκίστρων, ἥτοι :

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

Κατὰ τὸν συμβολισμόν τοῦτον δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μεταξύ τῶν ἀγκίστρων. Ὅθεν τά : $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4, 2\}$, $\{2, 3, 4, 1\}$ κ.τ.λ. συμβολίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον. Γενικῶς : $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ συμβολίζει ἐν σύνολον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα α, β, γ καὶ ἄλλα ἀκόμη, τὰ ὁποῖα ἐκ τοῦ τρόπου δηλώσεως τῶν α, β, γ ἐννοοῦνται καὶ — χάριν συντομίας — παραλείπονται.

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται ὡς κάτωθι :

$$\mathbf{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}^*).$$

β). Διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων του. Ὁ ἀνωτέρω τρόπος παραστάσεως ἐνὸς συνόλου δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ πρακτικῶς (τούλάχιστον) εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ μεγάλον ἀριθμὸν στοιχείων, λ.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν κατοίκων τῆς Εὐρώπης καὶ θεωρητικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων λ.χ. τοῦ συνόλου $\mathbf{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς τὰ σύνολα ὀρίζονται δι' ἰδιοτήτων ἀναφερομένων εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ὅλα τὰ ἀντικείμενα μιᾶς ὀρισμένης ἰδιότητος θεωροῦμεν ὡς ἐν σύνολον. Ἄν ἡ ἰδιότης συμβολίζεται μὲ : $p(\)$, τότε $p(x)$ συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν ἢ ἄλλως τὴν συνθήκην : «τὸ ἀντικείμενον x ἔχει τὴν ἰδιότητα $p(\)$ ».

* Τὸ σύμβολον $\equiv$ (ἴσον) σημαίνει, ὅπου συναντᾶται, «τὸ αὐτὸ δυνάμει ὀρισμοῦ (εἴτε συμβολισμοῦ) μὲ».

Με $\{x : p(x)\}$ συμβολίζομεν τότε τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων μετὰ τὴν ιδιότητα $p(\)$. Οὕτως, ἂν λ.χ. $p(\)$ συμβολίζῃ τὴν ιδιότητα :

«... εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»,

τότε $p(x)$ συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν : «ὁ x εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Αὕτῃ καθίσταται λογικὴ πρότασις, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μετὰ ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος μάλιστα, ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι ἄρτιος καθιστᾷ τὴν πρότασιν ἀληθῆ. Τότε τὸ $\{x : p(x)\}$ συμβολίζει τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Πρὸς ἀποφυγὴν παρερμηνειῶν καὶ ἀντινομιῶν δεχόμεθα ὅτι μία ιδιότης $p(\)$ ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἓν ὠρισμένον σύνολον Ω . Ἐὰν τώρα ἓν ἀντικείμενον $\alpha \in \Omega$ τεθῇ ἐν $p(\)$, ἥτοι ἂν γράψωμεν $p(\alpha)$, τότε τὸ $p(\alpha)$ συμβολίζει μίαν λογικὴν πρότασιν, διὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον, ἂν αὕτη εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Τότε διὰ τοῦ συμβόλου :

$\{x \in \Omega : p(x)\}$ εἴτε ἄλλως $\{x \in \Omega | p(x)\}$

ὀρίζεται ἓν ὑποσύνολον A τοῦ Ω , τοῦ ὁποῖου τὰ στοιχεῖα καὶ μόνον αὐτὰ εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ $x \in \Omega$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ $p(x)$, ὡς λογικὴ πρότασις, λαμβάνει τὴν τιμὴν «ἀληθής». Ὡστε δεχόμεθα ὅτι : *Διὰ κάθε σύνολον Ω καὶ μίαν ιδιότητα $p(\)$ ὀρίζεται διὰ τοῦ συμβόλου $\{x \in \Omega : p(x)\}$ πάντοτε ἓν σύνολον, τοῦ ὁποῖου στοιχεῖα εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ $x \in \Omega$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ πρότασις $p(x)$ εἶναι ἀληθής.*

Ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω σημασίαν θὰ θεωρῶμεν εἰς τὰ ἐπόμενα τὸ σύμβολον : $\{x \in \Omega : p(x)\}$. Ἐπομένως, ἐὰν $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$, τότε εἶναι :

$\forall x, x \in A \iff p(x)$ ἀληθής.

Παράδειγμα : Ἐστω ὁ προτασιακὸς τύπος $p(x) : \langle x^2 - 3x + 2 = 0 \rangle$ μετὰ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν $p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν εἶναι : 1, 2.

Ἐπομένως τό : $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ εἶναι τὸ διμελὲς σύνολον $\{1, 2\}$.

Παρατήρησις : Τὸ σύμβολον « : » ἢ « | » ἀναγιγνώσκειται «τοιοῦτον, ὥστε», τὸ δὲ πρὸ τοῦ ὡς ἄνω συμβόλου γράμμα δημιουργεῖ τὸ σύνολον συμφώνως πρὸς τὴν μετὰ τοῦτο συνθήκην.

§ 10. Τὸ κενὸν σύνολον.— Δεχόμεθα τὴν ὑπαρξιν ἐνὸς συνόλου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν «τὸ κενὸν σύνολον» καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μετὰ $\{\}$ ἢ ἄλλως μετὰ $\emptyset$. Τοῦτο εἶναι ἓν σύνολον, εἰς τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον ἀνήκει, ἥτοι διὰ κάθε ἀντικείμενον x ἰσχύει $x \notin \emptyset$. Οὕτω τὸ σύνολον : $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}$ εἶναι τὸ κενόν. Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν τό : $\{x \in \mathbf{R} : x \neq x\} \equiv K$, διαπιστώνομεν ἀμέσως ὅτι τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἔχῃ στοιχεῖα, ἥτοι $\forall x \in \mathbf{R}$ ἰσχύει $x \notin K$.

§ 11. Ὑποσύνολον ἄλλου συνόλου. Ὑπερσύνολον. Ἰσότης δύο συνόλων.

Ἐστωσαν A καὶ B δύο μὴ κενὰ σύνολα.

α). Θὰ λέγωμεν : «Τὸ σύνολον A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B » εἴτε ἄλλως «τὸ A περιέχεται ($\equiv$ ἐγκλείεται) εἰς τὸ B » καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μετὰ : $A \subseteq B$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε $x \in A$ ἔπεται $x \in B$.

Ο άνωτέρω όρισμός με χρήση τών συμβόλων τής λογικής διατυπώνεται συντόμως ούτω :

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

ορισ

β). Θα λέγωμεν : «Τό σύνολον A είναι υπερόύνολον του B » και θα συμβολίζωμεν τούτο με « $A \supseteq B$ » τότε, και μόνον τότε, αν τό B είναι υποσύνολον του A .

Ητοι :

$$A \supseteq B \iff B \subseteq A$$

ορισ

Τό σύμβολον « $\supseteq$ » αναγιγνώσκεται «περιέχει τό» ή άλλως «έγκλείει τό».

γ). Θα λέγωμεν : «Τό A είναι γνήσιον υποσύνολον του B » και θα συμβολίζωμεν τούτο με $A \subset B$ τότε, και μόνον τότε, αν τό $A \subseteq B$ και υπάρχει εν (τουλάχιστον) $y \in B$ με $y \notin A$.

Ητοι :

$$A \subset B \iff (\forall x \in A \implies x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A)$$

ορισ

δ). Θα λέγωμεν : «Τό A είναι ίσον με τό B » και θα συμβολίζωμεν τούτο με $A = B$ τότε, και μόνον τότε, αν ισχύουν συγχρόνως : $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Συντόμως ό όρισμός ούτος δίδεται ως κάτωθι :

$$A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

ορισ

Ο όρισμός ούτος είναι ισοδύναμος με :

$$(A = B) \iff (\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (y : y \in B \implies y \in A) \iff (x \in A \iff x \in B)$$

Εάν τά σύνολα A, B δέν είναι ίσα γράφομεν : $A \neq B$ (A διάφορον του B).

Ωστε :

$$A \neq B \iff \sim (A = B)$$

Κατόπιν τούτου ό όρισμός του γνήσιου υποσυνόλου διατυπώνεται συντόμως ούτω :

$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ και } A \neq B$$

ορισ

Ισχύουν αί κάτωθι ιδιότητες :

- 1). $A \subseteq A$, διά κάθε σύνολον A (αυτοπαθής)
- 2). Εάν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \implies A = B$ (άντισυμμετρική)
- 3). Εάν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma \implies A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική).

Σημείωσις : Μία σχέσις, ήτις είναι αυτοπαθής, άντισυμμετρική και μεταβατική καλείται σχέσις διατάξεως. Η σχέσις « $\subseteq$ » είναι όθεν σχέσις διατάξεως.

Παρατηρήσεις : 1). Έκαστον σύνολον είναι υποσύνολον του έαυτού του.

2). Έκαστον σύνολον δέν είναι γνήσιον υποσύνολον του έαυτού του (διاتی ;)

3). Τό κενόν σύνολον θεωρείται έξ όρισμού ως υποσύνολον κάθε συνόλου.

4). Δι' ἕκαστον σύνολον ἐκ n στοιχείων ὑπάρχουν 2^n ὑποσύνολα. Τὸ σύνολον ὧν ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Σ καλεῖται **δυναμοσύνολον** τοῦ συνόλου Σ καὶ συμβολίζεται μὲν: $\mathcal{P}(\Sigma)$.

5). Πρέπει νὰ γίνεταί διάκρισις μεταξύ τῶν συμβόλων « $\in$ », τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «ἀνήκει εἰς...» καὶ « $\subseteq$ », τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «περιέχεται», διότι τὸ μὲν « $\in$ » συσχετίζει στοιχεῖον πρὸς σύνολον, τὸ δὲ « $\subseteq$ » σύνολον πρὸς σύνολον, εἰς δὲ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων στοιχεῖον καὶ σύνολον παίζουν διαφορετικούς ρόλους. Τοιοῦτοτρόπως ἐξηγεῖται διατὶ πάντοτε ἰσχύει $\{ \alpha \} \neq \alpha$. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ τελευταίου δίδομεν τὸ ἐξῆς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα: Μία κασετίνα, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα διαβήτην καὶ τίποτε ἄλλο δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα μὲ τὸν διαβήτην.

§ 12. Βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς. — Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν ἑνὸς «ζητήματος» θεωρῶμεν τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς γενικωτέρου συνόλου Ω , τότε τὸ Ω καλεῖται **βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς**, (ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ — κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ζητήματος — ἀναφέρονται ὅλα τὰ ἄλλα σύνολα). Γενικῶς εἰς κάθε «ζήτημα» ποῦ ἀφορᾷ σύνολα, ἐπιβάλλεται νὰ καθορίζηται πρῶτα τὸ βασικὸν σύνολον, τοῦ ὁποίου ὑποσύνολον ὀφείλει νὰ εἶναι κάθε ἄλλο σύνολον, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ὑπ' ὅψιν ζητήματος. Ἄλλως ὑπάρχει κίνδυνος νὰ περιπέσωμεν εἰς ἀντιφάσεις (ἀντινομίας). Οὕτω π.χ. εἰς ἕν πρόβλημα ἐπιπεδομετρίας βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπίσης εἰς ἕν πρόβλημα ἀλγέβρας αἱ μεταβληταὶ ποῦ θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τοὺς ἀντιστοίχους προτασιακοὺς τύπους θὰ ἀναφέρονται εἰς ἕν γενικὸν σύνολον λ.χ. εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο θὰ εἶναι τὸ βασικὸν σύνολον δι' ὅλα τὰ ὑποσύνολα, τὰ ὁποῖα θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τὸ πρόβλημα.

Τὸ βασικὸν σύνολον διαφέρει ἀπὸ πρόβλημα εἰς πρόβλημα καὶ μάλιστα πολυτάκις παραλείπεται ὁ ἀκριβὴς καθορισμὸς του, διότι ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ προβλήματος καθορίζεται καὶ τὸ ἴδιον.

Πράξεις μεταξύ συνόλων.

Ἄς θεωρήσωμεν ἕν βασικὸν σύνολον Ω , μὴ κενὸν καὶ τελείως ὀρισμένον (λ.χ. $\Omega = \mathbf{R}$), τοῦ ὁποίου τὰ ὑποσύνολα ἃς συμβολίσωμεν μὲ κεφαλαῖα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου $A, B, \dots, X, Y$. τότε δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ἕν σύνολον, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ $\mathcal{P}(\Omega)$, καὶ τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ Ω . Τοῦτο ὀρίζεται καὶ μὲ ἰδιότητα ὡς ἐξῆς:

$$\mathcal{P}(\Omega) \equiv \{ X : X \subseteq \Omega \} \equiv \{ X : \forall x \in X \implies x \in \Omega \}.$$

Μεταξὺ στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathcal{P}(\Omega)$ δυνάμεθα τώρα νὰ ὀρίσωμεν πράξεις ὡς ἐξῆς:

Ἐστῶσαν $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ καὶ $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. τότε ὀρίζεται:

§ 13. Τομή δύο συνόλων.— Καλείται τομή του A με το B και συμβολίζεται με $A \cap B$ το κάτωθι σύνολο :

$$A \cap B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B\}$$

Ούτως, εάν $A = \{0, 1, 3, 4\}$ και $B = \{1, 2, 3, 5\}$, τότε $A \cap B = \{1, 3\}$.
 Έκ του ανωτέρου ορισμού συνάγεται ότι :

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad \text{και} \quad A \cap \Omega = \Omega \cap A = A \quad \text{διὰ κάθε} \quad A \subseteq \Omega.$$

Εάν η τομή δύο συνόλων είναι το κενόν σύνολο τότε, και μόνον τότε, τὰ σύνολα καλοῦνται ξένα μεταξύ των.

§ 14. Ἡ τομή συνόλων καὶ ἡ σύζευξις.— Ἐστώσαν δύο σύνολα A, B ὀριζόμενα διὰ περιγραφῆς καὶ $p(x), q(x)$ ἀντιστοίχως οἱ προτασιακοὶ τύποι μεταβλητῆς x με σύνολο ἀναφορᾶς τὸ Ω , ἥτοι ἔστωσαν :

$$A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}.$$

Ἀς σχηματίσωμεν τὸ σύνολο $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \wedge q(x)\}$, δηλαδή τὸ σύνολο (δύο) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν συγχρόνως ἀληθεῖς προτάσεις τοὺς προτασιακοὺς τύπους $p(x), q(x)$. Προφανῶς τότε τὸ Σ εἶναι ἡ τομή τῶν συνόλων A, B . Ὡστε :

$$A \cap B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \cap \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \wedge q(x)\}.$$

Παράδειγμα: Ἐστώσαν τὰ σύνολα :

$$A \equiv \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad B \equiv \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\}.$$

Ὁ προτασιακὸς τύπος: « $x^2 - 5x + 6 = 0$ » καθίσταται ἀληθὴς πρότασις διὰ $x = 2$ ἢ $x = 3$, ἐξ ἄλλου ὁ προτασιακὸς τύπος: « $x^2 - 9 = 0$ » γίνεται ἀληθὴς πρότασις διὰ $x = 3$ ἢ $x = -3$. Τομή τῶν συνόλων A καὶ B εἶναι τὸ μονομελὲς ἢ μονοστοιχειακὸν σύνολο $\{3\}$ · συμβολικῶς γράφομεν :

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge (x^2 - 9 = 0)\} = \{3\}.$$

§ 15. Ἐνώσεις συνόλων.— Καλεῖται ἔνωσις τοῦ A με το B καὶ συμβολίζεται με $A \cup B$ τὸ κάτωθι σύνολο :

$$A \cup B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B\}$$

Ούτως, εάν $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, τότε $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ἐκ τοῦ ανωτέρω ορισμοῦ συνάγεται ὅτι :

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad \text{καὶ} \quad A \cup \Omega = \Omega \cup A = \Omega \quad \text{διὰ κάθε} \quad A \subseteq \Omega,$$

καθὼς καὶ :

$$\forall x : x \in A \implies x \in (A \cup B) \quad \text{καὶ} \quad \forall y : y \in B \implies y \in (A \cup B),$$

ἥτοι: $A \subseteq A \cup B$ καὶ $B \subseteq A \cup B$ διὰ κάθε $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

§ 16. Ἡ ἔνωσις συνόλων καὶ ἡ (ἐγκλειστικὴ) διάζευξις.— Ἐστώσαν τὰ σύνολα: $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$. Θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολο $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}$, ἥτοι τὸ σύνολο, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν προτασιακὸν τύπον

$p(x)$ είτε τον $q(x)$ αληθή πρότασιν και μόνον αυτές. Προφανώς το Σ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ένωση των δύο συνόλων A και B . Όστε :

$$A \cup B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \cup \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}.$$

Παράδειγμα :

Έστω : $A \equiv \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 7\}$, $B \equiv \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 12\}$

τότε : $A \cup B \equiv \{x \in \mathbb{R} : (2 < x \leq 7) \vee (5 \leq x \leq 12)\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 12\}.$

§ 17. Διαφορά δύο συνόλων (συνολοθεωρητική διαφορά). – Ως (συνολοθεωρητική) διαφοράν του συνόλου A πλὴν το B , συμβολιζομένη με $A - B$, ὀρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A - B \equiv \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Οὕτως, ἐὰν $A \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B \equiv \{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \eta\}$, τότε $A - B = \{\gamma\}$. Ὅμοίως, ἐὰν $A \equiv \mathbb{R}$ ($\equiv$ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν), $B \equiv \mathbb{Q}$ ($\equiv$ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρρητῶν (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν.

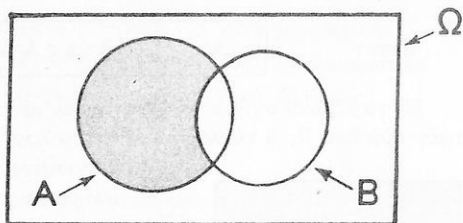
Σχηματικῶς τὸ $A - B$ παρίσταται μετὰ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ A εἰς τὸ παραπλευρῶς διάγραμμα τοῦ Venn (σχ. 1).

Ἐὰν τὰ A καὶ B ὀρίζωνται διὰ περιγραφῆς (§ 9, β), ἦτοι, ἐὰν

$$A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \text{ καὶ}$$

$$B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}, \text{ τότε :}$$

$$A - B \equiv \{x \in \Omega : p(x) \wedge \sim q(x)\}^*.$$



Σχ. 1

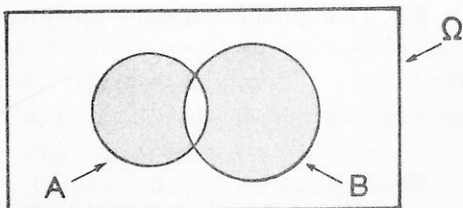
§ 18. Διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴ διαφορά δύο συνόλων. Ὡς διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴν διαφοράν, συντόμως **συμμετροδιαφοράν**, δύο συνόλων A καὶ B , τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου : $A \vdash B$ καὶ διαβάζομεν : « A σὺν B » ἢ « A κόντρα σὺν B », ὀρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A \vdash B \equiv \{x \in \Omega : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Εἶναι συνεπῶς :

$$A \vdash B = (A - B) \cup (B - A).$$

Εἰς τὸ παραπλευρῶς διάγραμμα τοῦ Venn παρίσταται ἡ **συμμετρικὴ διαφορά** $A \vdash B$ ἀπὸ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τῶν συνόλων A καὶ B (σχ. 2).



Σχ. 2

* Τὸ σύμβολον : $\equiv$ σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, «ἴσον ἐξ ὀρίσμου».

§ 19. Τὸ διαζευκτικὸν ἄθροισμα καὶ ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις.
 "Εστώσαν τὰ σύνολα : $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$ · τότε εἶναι :

$$A \vdash B \equiv \{x \in \Omega : (p(x) \wedge \sim q(x)) \vee (q(x) \wedge \sim p(x))\}.$$

Θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}$, ἥτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἢ μόνον τὸν προτασιακὸν τύπον $p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν εἴτε ἢ μόνον τὸν $q(x)$ ἀληθῆ πρότασιν. Προφανῶς τὸ Σ εἶναι ἡ συμμετρικὴ διαφορὰ τῶν δύο συνόλων A, B .

"Ωστε : $A \vdash B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \vdash \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \vee q(x)\}$.

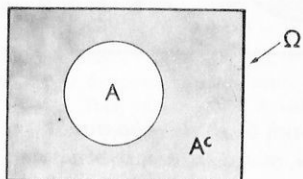
Σημ. Ἐὰν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδὴ τὰ σύνολα A, B εἶναι ξένα μεταξύ των, τότε :
 $A \vdash B = A \cup B$.

§ 20. Συμπληρωματικὸν σύνολον. — "Εστω Ω τὸ βασικὸν σύνολον καὶ A ἓν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ω , τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A , καλεῖται **συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ A** , ἄλλως **συμπλήρωμα τοῦ A** ὡς πρὸς τὸ (ὑπερσύνολον) Ω καὶ συμβολίζεται μέ : A^c , ἢ A' , ἢ $\bar{A}$, ἢ $C_\Omega A$.

"Ωστε :

$$A^c \equiv_{\text{ορα}} \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.$$

Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα τὸ ὀρθογώνιον μὲ τὴν περίμετρόν του παριστᾷ τὸ βασικὸν σύνολον Ω , ὁ κύκλος τὸ ὑποσύνολον A , τὸ δὲ « ἀπομένον » ἀπὸ τὸ Ω ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχ. 3 παριστᾷ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A .



Σχ. 3

Ἰσχύουν προφανῶς αἱ ἐξῆς ἰσότητες :

$$C_\Omega \Omega \equiv \Omega^c = \emptyset \quad \text{καὶ} \quad C_\Omega \emptyset \equiv \emptyset^c = \Omega.$$

Παράδειγμα :

$$\text{Ἐὰν } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{καὶ} \quad A = \{2, 4\}$$

$$\text{τότε :} \quad A^c = \{1, 3, 5\}.$$

Σημ. Διὰ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί :

$$\forall x, x \in A \implies x \notin A^c \quad \text{καὶ} \quad \forall x, x \in A^c \implies x \notin A.$$

§ 21. Τὸ συμπλήρωμα καὶ ἡ ἄρνησις. — "Εστω $p(x)$ εἰς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς Ω καὶ σύνολον ἀληθείας τὸ A , ἥτοι : $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$, τότε :

$$\forall x, x \in A \iff p(x) \text{ ἀληθὴς πρότασις,}$$

ἄρα ἡ ἄρνησίς της εἶναι ψευδής, ἥτοι $\sim p(x)$ ψευδής. Ἐπὶ πλέον :

$$\forall x, x \notin A \iff p(x) \text{ ψευδής, ἄρα } \sim p(x) \text{ ἀληθὴς πρότασις.}$$

Οὕτω τὸ σύνολον : $\{x \in \Omega : \sim p(x)\}$, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ : $\sim p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν, εἶναι τὸ συμπλήρωμα A^c τοῦ A .

"Ωστε : Ἐὰν $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$, τότε $A^c \equiv \{x \in \Omega : \sim p(x)\}$.

Παράδειγμα : 'Εάν $\Omega \equiv \mathbf{N}$ και $p(x) : \llcorner \text{Ο } x \text{ είναι ἄρτιος φυσικὸς ἀριθμὸς} \llcorner$, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : p(x)\}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν πε-
ριττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι τό : $A^c \equiv \{x \in \mathbf{N} : \sim p(x)\}$.

§ 22. Ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν συνόλων.— Βάσει τῶν προηγου-
μένων ὁρισμῶν ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν πράξεων :

A). Τῆς τομῆς.

$\alpha_1)$ $A \cap \Omega = A$, ἥτοι τὸ βασικὸν σύνολον εἶναι οὐδέτερον στοιχείον τῆς πράξεως $\cap$.

$\alpha_2)$ $A \cap B = B \cap A$, ἥτοι ἡ πράξις $\cap$ εἶναι μεταθετική.

$\alpha_3)$ $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$, ἥτοι ἡ πράξις $\cap$ εἶναι προσεταιριστική.

$\alpha_4)$ $A \cap A = A$, ἥτοι ἡ πράξις $\cap$ εἶναι ἀδύναμος.

$\alpha_5)$ $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

$\alpha_6)$ Ἰσχύει $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

B). Τῆς ἑνώσεως.

$\beta_1)$ $A \cup B = B \cup A$, ἥτοι ἡ πράξις $\cup$ εἶναι μεταθετική.

$\beta_2)$ $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, ἥτοι ἡ πράξις $\cup$ εἶναι προσεταιριστική.

$\beta_3)$ $A \cup A = A$, ἥτοι ἡ πράξις $\cup$ εἶναι ἀδύναμος.

$\beta_4)$ $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.

$\beta_5)$ Ἰσχύει : $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

Ἰσχύουν ἐπὶ πλέον αἱ κάτωθι δύο ἐπιμεριστικαὶ ἰδιότητες :

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Γ). Τῆς διαφορᾶς.

$\gamma_1)$ $A - B = A \cap B^c$

$\gamma_2)$ $A - (A - B) = A \cap B$.

$\gamma_3)$ $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$.

$\gamma_4)$ $(A - B) \cup B = A \cup B$, ἥτοι ἡ ἑνώσις δὲν εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρὸς τὴν διαφοράν.

$\gamma_5)$ Ἰσχύει : $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$.

Δ). Τοῦ διαζευκτικοῦ ἀθροίσματος.

$\delta_1)$ $A \dot{+} B = B \dot{+} A$.

$\delta_2)$ $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$.

$\delta_3)$ $A \dot{+} \emptyset = A, A \dot{+} \Omega = A^c, A \dot{+} A = \emptyset, A \dot{+} A^c = \Omega$.

$\delta_4)$ $A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$.

$\delta_5)$ $A^c \dot{+} B^c = A \dot{+} B$.

$\delta_6)$ $A \cup B = A \dot{+} B \dot{+} A \cap B$.

Ε). Τοῦ συμπληρώματος.

$\varepsilon_1) (A^c)^c = A$ διὰ κάθε $A \subseteq \Omega$.

$\varepsilon_2) A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = \Omega$.

$\varepsilon_3) \text{ 'Ισχύει: } A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

§ 23. Νόμοι τοῦ De Morgan.— 'Ισχύουν οἱ κάτωθι δύο τύποι :

$$1. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad 2. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

'Απόδειξις τοῦ τύπου 1.

α) $\forall x: x \in (A \cap B)^c \implies x \notin (A \cap B) \implies x \notin A \vee x \notin B$ τοῦτο δηλοῖ ὅτι :
 $x \in A^c \vee x \in B^c$, ἥτοι $x \in (A^c \cup B^c)$. 'Αρα $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ (1.α)

β) $\forall y: y \in (A^c \cup B^c) \implies (y \in A^c) \vee (y \in B^c)$ τοῦτο δηλοῖ :
 $(y \notin A) \vee (y \notin B)$, ὅθεν $y \notin (A \cap B) \implies y \in (A \cap B)^c$.

'Αρα: $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. (1.β)

'Εκ τῶν (1.α) καὶ (1.β) ἔπεται ἀμέσως ὁ τύπος 1.

'Ο τύπος 2 ἀποδεικνύεται ἤδη εὐκόλως (πῶς ;).

Σημειώσεις : 'Η ἀπόδειξις θὰ ἡδύνατο νὰ γίνηται καὶ ὡς ἑξῆς :

'Εστω $A \equiv \{x: p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x: q(x)\}$, τότε κατὰ τὰς §§ 14, 21 ἔχομεν ἀντιστοίχως $A \cap B \equiv \{x: p(x) \wedge q(x)\}$ καὶ

$$(A \cap B)^c \equiv \{x: \sim(p(x) \wedge q(x))\}.$$

'Αλλά: $\sim(p(x) \wedge q(x)) \iff \sim p(x) \vee \sim q(x)$ (§ 7, παρδ. 1).

'Επομένως :

$$(A \cap B)^c \equiv \{x: \sim(p(x) \wedge q(x))\} = \{x: \sim p(x) \vee \sim q(x)\} = \{x: \sim p(x)\} \cup \{x: \sim q(x)\} = A^c \cup B^c.$$

§ 24. Διαγράμματα τοῦ Venn καὶ λογισμὸς τῶν προτάσεων.—'Ε-

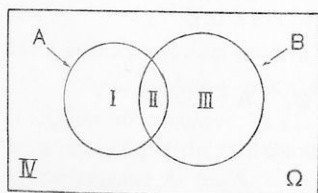
στωσαν δύο σύνολα $A \equiv \{x \in \Omega: p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega: q(x)\}$, τὰ ὁποῖα παρίστανται διὰ κύκλων εἰς τὸ σχ. 4, ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω . Θὰ ζητήσωμεν νὰ ὀρίσωμεν τὸ :

$$\Gamma \equiv \{x \in \Omega: p(x) \implies q(x)\},$$

ἥτοι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν συνεπαγωγὴν $p(x) \implies q(x)$ ἀληθῆ πρότασιν. 'Ὡς γνωστὸν ἡ συνεπαγωγὴ $p(x) \implies q(x)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις :

1) 'Εάν p καὶ q εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς προτάσεις.

2) 'Εάν p ψευδὴς καὶ q ἀληθὴς καὶ 3) 'Εάν ἀμφότερα εἶναι ψευδεῖς.



Σχ. 4

Δυνάμει τοῦ ἑναντι σχήματος ὁ προτασιακὸς τύπος $p(x)$ καθίσταται ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς εἰς τὰς «περιοχὰς» I, II, ὁ δὲ $q(x)$ διὰ τιμὰς τῶν περιοχῶν II, III. 'Ο $p(x)$ καθίσταται ψευδὴς καὶ ὁ $q(x)$ ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς περιοχῆς III. Τέλος, καθίστανται ἀμφότεροι ψευδεῖς διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x εἰς τὴν περιοχὴν IV.

Οὕτω τὸ σύνολον $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \implies q(x)\}$ ἔχει ὡς εἰκόνα, εἰς τὸ σχ. 4, τὰ σημεῖα τῶν περιοχῶν II, III, IV. Ἀλλὰ αἱ περιοχαὶ II, III καὶ IV εἶναι ἀκριβῶς ἡ εἰκόνα τοῦ συνόλου $A^c \cup B$.

Ἄρα : $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \implies q(x)\} = A^c \cup B$.

§ 25. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων. — Ἄς θεωρήσωμεν δύο μὴ κενὰ σύνολα A καὶ B , ὑποσύνολα ἐνὸς βασικοῦ συνόλου Ω . Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σύνολα σχηματίζεται (ὀρίζεται) ἐν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *καρτεσιανὸν γινόμενον* *με̐* *πρῶτον παράγοντα τὸ A καὶ δεῦτερον τὸ B* καὶ συμβολίζεται με̐ $A \times B$: τὸ νέον τοῦτο σύνολον ὀρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$A \times B \equiv \{(\alpha, \beta) : \forall \alpha \in A \text{ καὶ } \forall \beta \in B\}$$

Τὸ στοιχεῖον $(\alpha, \beta) \in A \times B$ καλεῖται *ἐν διατεταγμένον ζευγος** ὅθεν τὸ $A \times B$ ὀρίζεται ὡς τὸ σύνολον πάντων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) , με̐ $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$.

Τὰ στοιχεῖα α καὶ β τοῦ ζεύγους καλοῦνται ἀντιστοιχῶς *πρῶτη* καὶ *δεύτερα συντεταγμένη* (ἢ *προβολή*) τοῦ ζεύγους.

Ἡ βασικὴ ἰσότης ὀρίζεται ἐν $A \times B$ ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \iff \alpha = \alpha' \text{ καὶ } \beta = \beta'.$$

Ἐὰν $A = B$, τότε τὸ $A \times A$ συμβολίζεται με̐ A^2 .

Τὸ σύνολον Δ τῶν ζευγῶν (α, α) με̐ $\alpha \in A$ καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ A^2 . Προφανῶς $\Delta \subseteq A^2$.

Ἐὰν $A = \emptyset$ ἢ $B = \emptyset$, τότε ὀρίζομεν : $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Παράδειγμα : Ἐὰν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta\}$, τότε :

$$A \times B \equiv \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\} \text{ ἐνῶ}$$

$$B \times A \equiv \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$A \times B \neq B \times A.$$

Γενικῶς : Εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δὲν ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ιδιότης.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀρίζεται τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον με̐ περισσοτέρους ἀπὸ δύο παράγοντας π.χ. ἂν A, B, Γ εἶναι μὴ κενὰ ὑποσύνολα τοῦ Ω , ὀρίζομεν ὡς καρτεσιανὸν γινόμενον A ἐπὶ B ἐπὶ Γ καὶ συμβολίζομεν με̐ $A \times B \times \Gamma$ τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A \times B \times \Gamma \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \in A, \beta \in B \text{ καὶ } \gamma \in \Gamma\},$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν «*διατεταγμένων τριάδων*» $(\alpha, \beta, \gamma) \forall \alpha \in A, \beta \in B$ καὶ $\gamma \in \Gamma$.

Σημείωσις : Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*) καὶ σχηματίζομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον :

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \{(x, y) : \forall x \in \mathbf{R} \text{ καὶ } \forall y \in \mathbf{R}\},$$

ἥτοι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

* Τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλεῖται συχνά: *Εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν* εἴτε ἄλλως *Εὐκλείδειος χώρος διαστάσεως 1*.

Τὸ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^2$ καλεῖται, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας, Εὐκλείδειον ἐπίπεδον ἢ Εὐκλείδειος χώρος διαστάσεως δύο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Νὰ ὀρίσθωιν καὶ δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ κάτωθι σύνολα :
 1) $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 50\}$, 2) $B \equiv \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ διαιρετὴς τοῦ } 24\}$,
 3) $\Gamma \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 \leq x \leq 29 \text{ τῆς μορφῆς } v^2 + 1 \text{ μὲ } v \in \mathbf{N}\}$, 4) $\Delta \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 < x < 6\}$.
9. Νὰ ὀρίσθωιν καὶ διὰ περιγραφῆς ἕκαστον τῶν ἀκολουθῶν συνόλων :
 1) $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 2) $B \equiv \{1, 4, 9\}$, 3) $\Gamma \equiv \{2, 4, 6, 8, 10\}$,
 4) $\Delta \equiv \{\alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega\}$, 5) $E \equiv \{11, 13, 15, 17, 19\}$, 6) $\Sigma \equiv \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.
10. Δίδονται τὰ σύνολα :
 $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : 3 < x \leq 7\}$ καὶ $B \equiv \{5, 6, 7, 4\}$. Νὰ δεიχθῇ ὅτι : $B = A$.
11. Ἐὰν $A \equiv \{x \in \mathbf{R} : 3x = 21\}$ καὶ $y = 7$, εἶναι $y = A$;
12. Ἐὰν $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 25 = 0\}$ καὶ $\Gamma = \{5\}$, εἶναι $\Gamma \subset B$;
13. Δίδεται τὸ σύνολον : $A \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθῆς καὶ ποῖα ὄχι ; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησιν.
 1) $\{\alpha\} \in A$, 2) $\alpha \subset A$, 3) $\{\gamma\} \subset A$, 4) $\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, 5) $\{\emptyset, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A$.
14. Ἐὰν $A \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, νὰ ἀναγραφῶν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$.
15. Τὸ δυναμοσύνολον ἐνὸς συνόλου ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον ;
16. Ἐὰν Δ_{18} εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων διαιρετῶν τοῦ 18 καὶ Δ_{42} τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 42, ὀρίσατε τὰ σύνολα $\Delta_{18} \cap \Delta_{42}$ καὶ $\Delta_{18} \cup \Delta_{42}$.
17. Ἐὰν A, B, Γ ὑποσύνολα ἐνὸς βασικοῦ συνόλου Ω , δεῖξατε ὅτι :
 1) $A \cap (A \cup B) = A$ καὶ $A \cup (A \cap B) = A$, 2) $(A - B) \cap B = \emptyset$,
 3) $A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$, 4) $(A - B) \cup (A - B^c) = A$,
 5) Ἐὰν $\Gamma \cap A = B \cap A$ καὶ $\Gamma \cup A = B \cup A \implies B = \Gamma$,
 6) $A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$, 7) $(A \cup B) + (A \cap B) = A + B$,
 8) $A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$, 9) $A - (B - A) = A$, 10) $A + (A + B) = B$.
18. Δίδεται ὡς βασικὸν σύνολον τὸ $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Νὰ ὀρίσθωιν τὰ ὑποσύνολά του A, B, Γ (δι' ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τοῦ De Morgan), γνωστοῦ ὄντος ὅτι :
 $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap \Gamma = \{2, 3\}$, $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Ἀκολουθῶς νὰ ὀρίσθωιν καὶ τὰ : $A \cap (A \cup B)$, $\Gamma \cap (A \cup B)$.
19. Δίδονται τὰ σύνολα : $A \equiv \{1, 2, 5\}$, $B \equiv \{2, 4\}$. Νὰ ὀρίσθωιν τὰ :
 1) $A \times B$, 2) $B \times A$, 3) A^2 , 4) B^2 , 5) $A \times (A \cap B)$.
20. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τυχόντα ἀντικείμενα, νὰ δεიχθῇ ὅτι :
 $(\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma, \delta\}, \{\gamma\}\}) \implies (\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta)$.
21. Δίδονται διὰ περιγραφῆς τὰ σύνολα :
 $A \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 3x = x\}$.
 Παραστήσατε τὰ κάτωθι σύνολα διὰ περιγραφῆς καὶ ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των :
 1) $A \cap B$, 2) $A \cup B$, 3) $A - B$, 4) $B - A$, 5) $A + B$.
22. Ἐὰν $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$, δεῖξατε ὅτι τὸ σύνολον τιμῶν ἀληθείας τῆς ἰσοδυναμίας $p(x) \iff q(x)$ εἶναι τό : $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, ἥτοι :
 $\{x \in \Omega : p(x) \iff q(x)\} = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$.

§ 26. Εἰσαγωγή. — "Ὡς παρακολογησώμεν τὰς ἐκφωνήσεις τῶν κατωτέρω προτάσεων :

1). Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n + 1).$$

2). 'Εὰν $a > -1$, δείξατε ὅτι ἰσχύει : $(1 + a)^n \geq 1 + na$, διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n .

3). Τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος n κορυφὰς ἰσοῦται μὲ :

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

4). Διὰ $n \in \mathbb{N}$ μὲ $n \geq 4$ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1$.

5). Δείξατε ὅτι : $\forall n \in \mathbb{N}$ ὁ ἀριθμὸς $7^{2n} + 16n - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 64.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκφωνήσεων παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικὰ προτάσεις, ἐξαρτώμεναι ἀπὸ ἓνα φυσικὸν ἀριθμὸν n , τῶν ὁποίων τὴν ἀλήθειαν θέλομεν νὰ δείξωμεν διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἐνὸς δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ n_0 .

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοιούτων προτάσεων ἐφαρμόζομεν εἰδικὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον γνωστὴν ὡς : «**Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή**».

"Ὡστε : **Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή** καλεῖται μία γενικὴ μέθοδος ἀποδείξεως, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται προκειμένου ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται φυσικὸς ἀριθμὸς n , ἀληθεύει διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίαν κατὰ βάσιν ἀρχὴν στηρίζεται ἡ ἐν λόγω ἀποδεικτικὴ μέθοδος.

§ 27. Θεμελιώδεις ιδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ἄξιωμα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ Peano*).

Τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὀρίζεται τῇ βοήθειᾳ τῶν κάτωθι ἀξiomάτων :

Ἄξιωμα I. Ὁ 1 εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι $1 \in \mathbb{N}$.

Ἄξιωμα II. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἷς, καὶ μόνον εἷς, «ἐπόμενος» φυσικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι $\forall n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$.

Ἄξιωμα III. Δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς n μὲ ἐπόμενον τὸν 1, ἥτοι $n + 1 \neq 1$ (ἀκριβέστερον $n + 1 > 1$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ἄξιωμα IV. Δύο φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἐπόμενον εἶναι ἴσοι, ἥτοι $\forall n \in \mathbb{N}$ καὶ $\forall m \in \mathbb{N}$ μὲ $n + 1 = m + 1 \implies n = m$.

* G. Peano (1858 - 1932). Ἱταλὸς μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος.

Ἀξίωμα V. Κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ 1 καὶ μαζὺ μὲ οἰονδήποτε φυσικὸν ἀριθμὸν v ἀνήκει εἰς αὐτὸ καὶ ὁ ἐπόμενός του $v + 1$, συμπίπτει μὲ τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι, ἂν ἐν ὑποσύνολον S τοῦ συνόλου N πληροῖ τὰς ἐξῆς δύο ιδιότητες :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 1 \in S \\ \text{(b)} \quad \forall v \in S \implies v + 1 \in S \end{array} \right\} \implies S \equiv N.$$

Τὸ τελευταῖο ἀξίωμα χαρακτηρίζεται καὶ ὡς «ἀρχὴ τῆς μαθηματικῆς ἢ τελείας (πλήρους) ἐπαγωγῆς» τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι :

§ 28. Θεώρημα (τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).—Ἐὰν διὰ μίαν πρότασιν $p(v)$, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς v , εἶναι γνωστὸν ὅτι :

1) Ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $v = 1$, ἥτοι $p(1)$ ἀληθὴς καὶ ἐπὶ πλεόν

2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ $v = k$, ἀποδεικνύεται ὅτι αὕτη ἀληθεύει καὶ διὰ $v = k + 1$, ἥτοι $p(k + 1)$ ἀληθὴς, ἂν $p(k)$ ἀληθὴς καὶ τοῦτο διὰ κάθε $k \in N$, τότε ἡ πρότασις $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν v .

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μὲ χρήσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς διατυπῶνται συντόμως οὕτω :

$$\{p(1) \wedge [p(k) \text{ ἀληθὴς} \implies p(k + 1)]\} \text{ ἀληθὴς} \implies p(v) \text{ ἀληθὴς} \quad \forall v \in N$$

Ἀπόδειξις : Ἐστω S τὸ σύνολον (δλων) τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ $p(v)$ εἶναι ἀληθής, ἥτοι ἔστω

$$S \equiv \{v \in N : p(v)\}.$$

τὸ σύνολον τοῦτο δὲν εἶναι κενόν, διότι τὸ $1 \in S$ ἐφ' ὅσον $p(1)$ ἀληθής. Ἐπὶ πλεόν, ἂν $k \in S$, τότε καὶ $k + 1 \in S$, διότι, ἂν $k \in S$, τότε $p(k)$ ἀληθής, ὅθεν (ὑπόθ. 2) καὶ $p(k + 1)$ ἀληθής, συνεπῶς $k + 1 \in S$. Ὡστε τὸ S ἔχει τὰς ιδιότητας (a) καὶ (b) τοῦ ἀξιώματος V, συμπίπτει ὅθεν μὲ τὸ σύνολον N . Κατὰ συνέπειαν ἡ (λογικὴ) πρότασις $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν v .

Παρατήρησις : Συμβαίνει πολλάκις μία πρότασις $p(v)$ νὰ ἔχῃ νόημα διὰ τιμὰς τοῦ v μεγαλυτέρας ἢ ἴσας ὠρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ v_0 . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἰσχύει (προφανῶς) ὑπὸ τὴν ἐξῆς ὁμῶς διατύπωσιν μὲ χρήσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς :

$$\{p(v_0) \wedge [p(k) \text{ ἀληθὴς} \implies p(k + 1)]\} \text{ ἀληθὴς} \implies p(v) \text{ ἀληθὴς} \quad \forall v \in N : v \geq v_0$$

ἥτοι : Ἐὰν μία πρότασις $p(v)$ ἀληθεύῃ διὰ $v = v_0$ καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἀληθεύει διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v , ἔστω $v = k > v_0$, ἀποδείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν τιμὴν $v = k + 1$, τότε ἡ πρότασις $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $v \geq v_0$.

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα στηρίζεται ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς Μαθηματικῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς. Κατ' αὐτὴν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀληθεῖαν μιᾶς προτάσεως $p(v)$ ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς :

α). 'Αποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως διὰ $v = 1$, (ἐφ' ὅσον διὰ $v = 1$ ἔχει νόημα). 'Εάν διὰ $v = 1$ ἡ πρότασις δὲν ἔχη νόημα, τὴν ἐπαληθεύομεν διὰ τὸν ἐλάχιστον φυσικὸν ἀριθμὸν v_0 , διὰ τὸν ὁποῖον ἔχει νόημα.

β). 'Υποθέτοντες ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $v = k$, $k \in \mathbb{N}$, δηλ. $p(k)$ ἀληθής, ἀποδεικνύομεν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀληθείας τῆς $p(k)$ πιθανῶς δὲ καὶ τοῦ $p(1)$ τὴν ἀλήθειαν τῆς $p(k+1)$.

γ). Συμπεραίνομεν, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1η : Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν v ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{1}{2} v \cdot (v + 1). \quad (i)$$

'Απόδειξις : "Ὡς συμβολίσωμεν διὰ τοῦ S τὸ σύνολον τῶν $v \in \mathbb{N}$, διὰ τὰ ὅποια ἡ (i) ἀληθεύει. Τότε $1 \in S$, διότι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ $v = 1$, καθ' ὅτι :

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1).$$

'Υποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς k ἀνήκει εἰς τὸ S . Τότε ἡ (i) ἀληθεύει δι' αὐτὸν τὸν (φυσικὸν) ἀριθμὸν k ἥτοι εἶναι :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2} k \cdot (k + 1).$$

'Εάν προσθέσωμεν τὸ $k + 1$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = \\ &= \frac{1}{2} k (k + 1) + (k + 1) = \frac{k (k + 1) + 2 (k + 1)}{2} = \frac{1}{2} (k + 1) \cdot [(k + 1) + 1]. \end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἂν ἡ (i) ἀληθεύῃ διὰ $v = k$, τότε ἡ (i) ἀληθεύει καὶ διὰ $v = k + 1$, ὅθεν ἂν $k \in S$, τότε $k + 1 \in S$. "Αρα κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἔχομεν $S \equiv \mathbb{N}$. 'Επειδὴ δὲ τὸ S εἶναι τὸ σύνολον τῶν $v \in \mathbb{N}$ διὰ τὰ ὅποια ἡ (i) ἀληθεύει, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν v .

2α : "Αν $a > -1$ καὶ $v \in \mathbb{N}$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(1 + a)^v \geq 1 + va \quad (\text{ἀνισότης τοῦ Bernoulli}). \quad (ii)$$

'Απόδειξις : α). Διὰ $v = 1$ ἰσχύει ὡς ἰσότης, ἐπειδὴ :

$$(1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a.$$

β). "Εστω ὅτι διὰ $v = k$ ($k \in \mathbb{N}$) ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, δηλαδή ἔστω ὅτι :

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka. \quad (p)$$

'Εκ τῆς ἀληθείας τῆς (p) θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (ii) ἰσχύει καὶ διὰ $v = k + 1$, ἥτοι :

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a, \quad (q)$$

δηλαδή θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς συνεπαγωγῆς (p) $\implies$ (q).

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας άμφοτέρα τά μέρη τής (p) επί τόν θετικόν άριθμόν $(1 + \alpha)$ έχομεν διαδοχικώς :

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha) (1 + \alpha) = 1 + k\alpha^2 + (k + 1)\alpha \geq 1 + (k + 1)\alpha,$$

$$\text{ήτοι : } (1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\alpha.$$

Άρα όταν άληθεύη ή (p), άληθεύει και ή (q), συνεπώς ή άποδεικτέα άνισότης (ii) άληθεύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν ν.

$$3\eta : \text{Διά κάθε φυσικόν άριθμόν } n \geq 4 \text{ νά δειχθῇ ὅτι : } \left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1. \quad (\text{iii})$$

Απόδειξις : Διά $n = n_0 = 4$ ή άνισότης ισχύει, διότι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 5 = 4 + 1.$$

Έστω ὅτι διά $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 4$) ή άνισότης (iii) ισχύει, ήτοι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k + 1.$$

Έξ αὐτῆς θά δείξωμεν ὅτι ή άνισότης (iii) ισχύει και διά $n = k + 1$, ήτοι ὅτι :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k + 1) + 1.$$

$$\text{Πράγματι, ἔπειδή} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{2}(k + 1)$$

άρκει νά δείξωμεν ὅτι :

$$\frac{3}{2}(k + 1) > (k + 1) + 1 \quad \eta \quad \frac{3}{2}(k + 1) - (k + 1) > 1,$$

$$\text{δηλαδή : } k + 1 > 2.$$

Η τελευταία ὁμως άνισότης ισχύει (διότι $k \geq 4$). Όθεν ή άποδεικτέα άνισότης

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1$$

ισχύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν $n \geq 4$.

Παρατηρήσεις : Πολλάκις, διά νά άποδείξωμεν ὅτι μία πρότασις $p(n)$ άληθεύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν ν, άποδεικνύομεν τήν άλήθειαν αὐτῆς δι' ένα σημαντικόν άριθμόν διαδοχικῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ ν, λ.χ. διά $n = 1, 2, \dots, n_0$ και άκολουθῶς συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη θά άληθεύη διά κάθε $n \in \mathbb{N}$ (άτελής έπαγωγή). Η μέθοδος αὕτη οδηγεί πολλάκις εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα και δέν πρέπει νά τήν μεταχειριζώμεθα. Έν κλασσικόν παράδειγμα τοιαύτης πλάνης εἶναι ή έξῆς ψευδῆς πρότασις τοῦ Euler :

«Έάν ν φυσικός άριθμός, τότε ὁ άριθμός $(n^2 - n + 41)$ εἶναι πρώτος».

Η παράστασις $n^2 - n + 41$ διά $n = 1, 2, 3, \dots, 40$ δίδει πρώτους άριθμούς (μη έχοντας δηλ. άλλον διαιρέτην εκτός τοῦ έαυτοῦ των και τῆς μονάδος), ὁμως διά $n = 41$ δίδει :

$$n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2,$$

δηλ. άριθμόν μη πρώτον.

‘Ομοίως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ἔκφρασις $2^{2^v} + 1$ δίδει διὰ $v = 1, 2, 3, 4$ πρώτους ἀριθμούς δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ εἰρημένη ἔκφρασις δίδει πρώτους ἀριθμούς διὰ πάντας τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, καθ’ ὅσον διὰ $v = 5$ ἢ ἐν λόγῳ ἔκφρασις δίδει σύνθετον ἀριθμόν.

Ἐπίσης δὲν ἀρκεῖ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως διὰ $v = k + 1$, μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $v = k$. Πρέπει ὅπωςδήποτε νὰ ἀποδεικνύμεν τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς διὰ $v = 1$ (ἢ, ἂν δὲν ἔχη νόημα διὰ $v = 1$, ἀποδεικνύμεν τὴν ἀλήθειαν διὰ $v = v_0$, ἐνθα v_0 ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς ἀριθμὸς, δι’ ὃν ἔχει νόημα ἡ πρότασις). Περί τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὴν ἐξῆς ψευδῆ πρότασιν :

« Διὰ $v \in \mathbb{N}$ ἰσχύει : $v = v + 17$ ».

Πράγματι, ὡς παραλείψωμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀληθεύει διὰ $v = 1$.

Ἐποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀληθὴς διὰ $v = k$, ἥτοι : $k = k + 17$, τότε ἔχομεν

$$k + 1 = (k + 17) + 1$$

$$\eta \quad k + 1 = (k + 1) + 17,$$

δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $v = k + 1$ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ $v = k$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι : εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καὶ αἱ δύο υποθέσεις 1) καὶ 2) τοῦ θεωρήματος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς πληροῦνται, ἵνα εἶναι τὸ συμπέρασμα ἀληθές.

§ 29. Γενικεύσεις τοῦ Θεωρήματος τῆς τελείας Ἐπαγωγῆς. —

Ἐκτὸς τῆς μορφῆς τῆς (ἀπλῆς) τελείας ἐπαγωγῆς, τὴν ὁποίαν ἀνεπτύξαμεν προηγουμένως, ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλαι μορφαὶ αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι παρέχονται ὑπὸ τῶν κάτωθι δύο θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρομεν ἄνευ ἀποδείξεως.

§ 30. Θεώρημα I.— Ἐὰν $p(v)$ εἶναι μία (λογικὴ) πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς v , ἡ ὁποία πληροῖ τὰς ἐξῆς υποθέσεις : 1) « $p(1)$ εἶναι ἀληθὴς» 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$ μὲ $v < k$, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $p(v)$ ἀληθεύει καὶ διὰ $v = k$ καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k \in \mathbb{N}$ μὲ $k > 1$, τότε : ἡ $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Ἐφαρμογή. Νὰ δειχθῇ (διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς) ὅτι ἡ ἀνισότης :

$$2^{10^v} > 10^{3^v} \text{ ἀληθεύει διὰ κάθε } v \in \mathbb{N}.$$

Ἀπόδειξις : Διὰ $v = 1$ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, ἥτοι $2^{10} > 10^3$.

Ἐστω ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ κάθε $v < k$ (καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k \in \mathbb{N}$ μὲ $k > 1$), ὁπότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$2^{10} > 10^3 \text{ καὶ } 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)},$$

ἐκ τῶν ὁποίων διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει : $2^{10k} > 10^{3k}$, ἥτοι ἡ ἐν λόγῳ ἀνισότης ἰσχύει καὶ διὰ $v = k$ συνεπῶς ἰσχύει $2^{10^v} > 10^{3^v}$ διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$.

§ 31. Θεώρημα II.— Ὑποθέσεις : 1) Ἰσχύει : « ἡ $p(1)$ καὶ $p(2)$ εἶναι ἀληθεῖς », 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύουν αἱ $p(k-2)$ καὶ $p(k-1)$ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $p(k)$ ἀληθεύει καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k \in \mathbb{N}$ μὲ $k > 2$.

Συμπέρασμα : ἡ $p(v)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Έφαρμογή. Νά δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n ἰσχύει :

$$S_n \equiv (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = \text{πολ. } 2^n.$$

Ἀποδείξεις : Διὰ $n = 1$ καὶ $n = 2$ ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$S_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 = 3 \cdot 2^1$$

$$S_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 = 7 \cdot 2^2.$$

Ἄρα ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $n = 1$ καὶ $n = 2$.

Ἐστω ὅτι αὕτη ἰσχύει διὰ $n = k-2$, $k-1$ (διὰ τυχὸν $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$), ἤτοι :

$$S_{k-2} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-2} + (3 - \sqrt{5})^{k-2} = \text{πολ. } 2^{k-2} \quad \text{καὶ}$$

$$S_{k-1} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-1} + (3 - \sqrt{5})^{k-1} = \text{πολ. } 2^{k-1}.$$

Θὰ δειξωμεν τότε ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ $n = k$.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν μὲ ρίζας $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ καὶ $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Αὕτη εἶναι ἡ $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Εὐκόλως τῶρα διαπιστοῦται ὅτι :

$$(3 + \sqrt{5})^k + (3 - \sqrt{5})^k \equiv S_k = 6 S_{k-1} - 4 S_{k-2}$$

καὶ ἐπομένως :

$$S_k = 6 \cdot \text{πολ. } 2^{k-1} - 4 \cdot \text{πολ. } 2^{k-2} = \text{πολ. } 2^k,$$

ἤτοι ἡ ἐν λόγω πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $n = k$.

Ἄρα ἡ πρότασις, δυνάμει τοῦ θεωρήματος II, ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νά ἀποδειχθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς αἱ κάτωθι προτάσεις :

$$1. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3. 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$4. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$5. \frac{(n+1)(n+2) \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

24. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n , νά δειχθῇ ὅτι :

$$1. \text{Ὁ ἀριθμὸς } 7^{2n} + 16n - 1 \text{ διαιρεῖται διὰ τοῦ } 64$$

$$2. \text{ » } 3^{4n+2} + 2^{6n+3} \text{ » » » } 17$$

$$3. \text{ » } 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \text{ » » » } 54.$$

25. Ἐάν n τυχὸν φυσικὸς ἀριθμὸς, νά ἀποδειχθοῦν ἐπαγωγικῶς αἱ ἀνισότητες :

$$1. (1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha, \quad \delta\text{που } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$2. (1-\alpha)^n < \frac{1}{1+n\alpha}, \quad \delta\text{που } 0 < \alpha \leq 1$$

$$3. \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad 4. \left(1 + \frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6},$$

$$5. \frac{n^2}{2} < 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{(n+1)^2}{2}.$$

26. Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ θετικοὶ ἀριθμοί, διάφοροι τοῦ 1, νά δειχθῇ ὅτι :

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) > 2^n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

27. 'Εάν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ και $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, δείξτε ότι :

1. $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \geq 1 + \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2. $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n) \geq 1 - \sigma_n$, όπου όμως $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 1.$

3. $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{1 - \sigma_n}$, όπου όμως $\sigma_n < 1.$

4. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

28. Να δειχθῇ (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος n -κορυφὰς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\frac{n(n-3)}{2}$.

29. Να δειχθοῦν (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) αἱ κάτωθι ἀνισότητες :

1. $2^n > n^3 \quad \forall n \geq 10, \quad 2. \sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n} \quad \forall n > 3,$

3. $2^{-\mu} < 10^{-\nu}$, διὰ κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με : $\mu > \frac{10}{3} \nu,$

4. $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n} > \frac{2}{3} \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

30. Να ἀποδειχθῇ ὅτι : $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

31. 'Ομοίως $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

32. Να ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ διαιρεῖται διὰ 9, $\forall n \in \mathbb{N}.$

33. 'Εάν θ ἀριθμὸς θετικὸς $\neq 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ ἰσχύει ἡ ἀνισότης :

$$\frac{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2n}}{\theta + \theta^3 + \dots + \theta^{2n-1}} > 1 + \frac{1}{\theta}.$$

34. 'Εάν $\alpha^2 - \beta^2 \gamma = \text{πολ} \cdot 4$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ με $\gamma \geq 0$, τότε δείξτε ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n ἰσχύει :

$$S_n \equiv (\alpha + \beta \sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta \sqrt{\gamma})^n = \text{πολ} \cdot 2^n.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 32. **Όρισμός.** — 'Απόλυτος τιμή ενός πραγματικού αριθμού καλείται ούτος ούτος ο αριθμός, εάν είναι θετικός ή μηδέν, ο αντίθετός του, εάν ο αριθμός είναι αρνητικός.

'Η απόλυτος τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και αναγιγνώσκεται: «*απόλυτος τιμή του α* » *). 'Ως άμεσον συνέπειαν του άνωτέρω όρισμού έχομεν :

$$|\alpha| = \alpha, \quad \text{εάν } \alpha \geq 0$$

$$\text{και } |\alpha| = -\alpha, \quad \text{εάν } \alpha < 0.$$

$$\text{Ούτω: } |2| = 2, \quad |0| = 0, \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = -\left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}.$$

'Εκ του άνωτέρω όρισμού προκύπτει ότι :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{είναι: } |\alpha| \geq 0.$$

'Αναλυτικώτερον έχομεν :

$$|\alpha| > 0 \iff \alpha \neq 0$$

$$\text{και } |\alpha| = 0 \iff \alpha = 0.$$

*Οθεν ή παράστασις $|\alpha|$ είναι μη άρνητικός αριθμός.

'Εντεϋθεν έπεται ο έξης ισοδύναμος όρισμός τής άπολύτου τιμής πραγματικού αριθμού :

'Απόλυτος τιμή (ή μέτρον) ενός πραγματικού αριθμού α καλείται ο μη άρνητικός αριθμός, ο όποιος όρίζεται ούτω :

$$|\alpha| \stackrel{\text{ορισ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{εάν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{εάν } \alpha < 0 \end{cases}$$

* Τό σύμβολον $|\alpha|$ ως και ή όνομασία του, όφείλονται εις τόν Γερμανόν μαθηματικόν Karl Weierstrass (1815 - 1897).

§ 33. Ίδιότης I. — Οί αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί έχουν ίσας απόλυτους τιμές,

ήτοι :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies |-a| = |a|$$

Ἀπόδειξις : Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

(i). Ἐάν $a > 0$, ὁπότε $-a < 0$, $\implies |a| = a$ καὶ $|-a| = -(-a) = a$.

Ἔθεν : $|a| = |-a|$.

(ii). Ἐάν $a = 0$, ὁπότε καὶ $-a = 0$, $\implies |a| = 0$ καὶ $|-a| = 0$.

Ἔθεν : $|a| = |-a|$.

(iii). Ἐάν $a < 0$, ὁπότε $-a > 0$, $\implies |a| = -a$ καὶ $|-a| = -a$.

Ἔθεν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν : $|a| = |-a|$.

Ὡστε : $\forall a \in \mathbf{R} \implies |-a| = |a|$.

Πόρισμα. — Ἐάν $a, \beta \in \mathbf{R} \implies |a - \beta| = |\beta - a|$.

§ 34. Ίδιότης II. — Ἐάν a πραγματικὸς ἀριθμὸς, τότε :

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Ἀπόδειξις : Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

(i). Ἐάν $a \geq 0 \implies |a| = a$ καὶ ἐπομένως : $-|a| \leq a \leq |a|$.

Ἔθεν καί : $-|a| \leq a \leq |a|$.

(ii). Ἐάν $a < 0 \implies |a| = -a$ καὶ ἐπομένως : $-|a| = a < |a|$.

Ἔθεν καί : $-|a| \leq a \leq |a|$.

Οὐδέποτε εἶναι : $-|a| < a < |a|$.

Ὡστε :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies -|a| \leq a \leq |a|$$

Παρατήρησις : Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔπεται ἀμέσως :

$$\forall x \in \mathbf{R} \implies |x| + x \geq 0 \text{ καὶ } |x| - x \geq 0.$$

§ 35. Ίδιότης III. — Τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἥτοι ἰσχύει :

$$\forall a \in \mathbf{R} \implies |a|^2 = a^2$$

Ἀπόδειξις : Ἐάν $a \geq 0 \implies |a| = a$ καὶ ἄρα $|a|^2 = a^2$.

Ἐάν $a < 0 \implies |a| = -a$ καὶ συνεπῶς $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.

Ὡστε : $\forall a \in \mathbf{R} \implies |a|^2 = a^2$.

Σπουδαία παρατήρησις. Ἐάν $a \in \mathbf{R} \implies |a|^2 \neq a^2$.

Οὕτως, ἐάν $a \in \mathbf{C}$, δηλαδὴ $a = x + iy$, ($y \neq 0$) $\implies |a|^2 \neq a^2$ (διὰ τὴν ;).

Κατά ταῦτα ἡ ἰσότης $|α|^2 = α^2$ συνεπάγεται τὸ πραγματικὸν τοῦ $α$ καὶ τὸ διάφορον $|α|^2 \neq α^2$ συνεπάγεται ὅτι ὁ $α$ εἶναι τῆς μορφῆς $λ + μi$, συμβολικῶς $(λ, μ)$, ὅπου $λ, μ \in \mathbb{R}$ καὶ $μ \neq 0$.

Πόρισμα 1ον. — Γενικώτερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N} \implies \begin{cases} |x|^{2v} = x^{2v} \\ |x|^{2v+1} = \begin{cases} x^{2v+1}, & \text{ἐὰν } x \geq 0 \\ -x^{2v+1}, & \text{ἐὰν } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Πόρισμα 2ον. — Ἐὰν $α \in \mathbb{R}$ καὶ $v \in \mathbb{N} \implies \sqrt[2v]{α^{2v}} = |α|$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{ἐὰν } x > 0 \\ -x, & \text{ἐὰν } x < 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } x = 0. \end{cases}$$

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις δυνάμεθα ὅθεν νὰ γράφωμεν : $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 36. Ἰδιότης IV. — Διὰ κάθε ζεύγος $(ε, x)$ πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $ε > 0$, ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$|x| \leq ε \iff -ε \leq x \leq ε.$$

Ἀπόδειξις : Ἔστω ὅτι ἰσχύει : $|x| \leq ε \implies |x|^2 \leq ε^2$ ἢ κατὰ τὴν ἰδιότητα III : $x^2 \leq ε^2$ ἢ $x^2 - ε^2 \leq 0$ ἢ $(x - ε)(x + ε) \leq 0$.

Αὕτη, κατὰ τὰ γνωστά, ἀληθεύει διὰ : $-ε \leq x \leq ε$.

Ὡστε : $|x| \leq ε \implies -ε \leq x \leq ε$.

Ἀντιστρόφως : Ἔστω τώρα ὅτι ἰσχύει :

$$-ε \leq x \leq ε \implies (x + ε) \geq 0 \wedge (x - ε) \leq 0,$$

ἄρα $(x + ε)(x - ε) \leq 0$ ἢ $x^2 - ε^2 \leq 0$ ἢ $x^2 \leq ε^2$, τότε συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα 2 τῆς προηγουμένης ἰδιότητος, ἐπειδὴ καὶ $ε > 0$, ἔχομεν : $|x| \leq ε$.

Ὡστε : $-ε \leq x \leq ε \implies |x| \leq ε$.

Ἄρα : $\forall (ε, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : |x| \leq ε \iff -ε \leq x \leq ε$

Παρατηρήσεις : Ὅμοίως ἀποδεικνύονται αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι :

1η. $-ε < x < ε \iff |x| < ε, \text{ ὅπου } ε > 0$

2α. $(x < -ε \text{ ἢ } x > ε) \iff |x| > ε, \text{ ὅπου } ε > 0.$

Ἐφαρμογαί. 1η : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$2 \leq x \leq 8 \iff |x - 5| \leq 3.$$

Πράγματι, ἐκ τῶν $2 \leq x \leq 8 \iff -3 \leq x - 5 \leq 3 \iff |x - 5| \leq 3$.

2α : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$|x - x_0| < ε \iff x_0 - ε < x < x_0 + ε.$$

Πράγματι : $|x - x_0| < ε \iff -ε < x - x_0 < ε \iff x_0 - ε < x < x_0 + ε$.

Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 37. Ἰδιότης V.—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων,

ἥτοι :

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων (ιδιότης II) :

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$$

$$-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq (|\alpha| + |\beta|)$$

καὶ κατὰ τὴν προηγούμενην ιδιότητα, ἔχομεν :

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad (5.1)$$

Παρατήρησις : Ἡ ἰσότης ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν : $\alpha\beta \geq 0$ (διὰτί ;).

Ὅθεν μία πολὺ χρήσιμος πρότασις εἶναι ἡ ἐξῆς :

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \geq 0. \quad (5.2)$$

Πόρισμα Iον.—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν,

ἥτοι :

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (5.3)$$

Πράγματι, ἐὰν εἰς τὴν (5.1) θέσωμεν ἀντὶ β τὸ $-\beta$, θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |-\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Τὸ ἴσον ἰσχύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν : $\alpha\beta \leq 0$ (διὰτί ;).

Ὅθεν ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \leq 0. \quad (5.4)$$

Πόρισμα 2ον.—Ἐὰν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ μὲ $n \geq 2$ ἰσχύει :

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκόλος διὰ τῆς μαθηματικῆς (τελείας) ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ $n = 2$ ἰσχύει (§ 37).

Ἐφαρμογή : Ἐὰν $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ καὶ $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |\alpha \pm \beta| < \varepsilon$.

Πράγματι, δι' ἐφαρμογῆς τῶν (5.1) καὶ (5.3) ἔχομεν :

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ἀρα :

$$|\alpha \pm \beta| < \varepsilon.$$

§ 38. Ἰδιότης VI. — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἰση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἷανδήποτε τάξιν,

$$\text{ἦτοι: } \boxed{\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a - \beta| \geq |a| - |\beta| \text{ καὶ } |a - \beta| \geq |\beta| - |a|}$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\alpha = \alpha + \beta - \beta = \beta + (\alpha - \beta)$, ἔχομεν κατὰ τὴν ιδιότητα V:

$$|\alpha| = |\beta + (\alpha - \beta)| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|, \text{ ἔς οὗ: } |\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|. \quad (6.1)$$

Ὀμοίως: $\beta = \beta + \alpha - \alpha = \alpha + (\beta - \alpha)$. Ἄρα:

$$|\beta| = |\alpha + (\beta - \alpha)| \leq |\alpha| + |\beta - \alpha| = |\alpha| + |\alpha - \beta|, \text{ ἔς οὗ: } |\alpha - \beta| \geq |\beta| - |\alpha|. \quad (6.2)$$

Πόρισμα. — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἰση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἷανδήποτε τάξιν,

$$\text{ἦτοι: } \boxed{\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a + \beta| \geq |a| - |\beta| \text{ καὶ } |a + \beta| \geq |\beta| - |a|} \quad (6.3)$$

Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὰς (6.1) καὶ (6.2) νὰ τεθῇ ἀντὶ β τὸ $-\beta$.

§ 39. Ἰδιότης VII. — Διὰ κάθε ζευγὸς πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει:

$$\boxed{||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta|}$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν (6.1), (6.2) καὶ (6.3) ἔχομεν:

$$\text{ἀφ' ἑνός: } |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha \pm \beta| \quad (7.1)$$

$$\text{καὶ ἀφ' ἑτέρου: } |\beta| - |\alpha| \leq |\alpha \pm \beta| \text{ ἢ } -|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| - |\beta|. \quad (7.2)$$

Ἐκ τῶν (7.1) καὶ (7.2) συνάγομεν τὴν διπλὴν ἀνισότητα:

$$-|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha \pm \beta|$$

ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ιδιότητα IV, γράφεται:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta|. \quad (7.3)$$

Κατ' ἀκολουθίαν, βάσει καὶ τῆς ιδιότητος V, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies ||a| - |\beta|| \leq |a \pm \beta| \leq |a| + |\beta|} \quad (7.4)$$

Παρατηρήσεις. Ἐκ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀποδειχθεῖσων εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, μετὰ τῶν ἀντιστοιχῶν πορισμάτων, συνάγομεν ὅτι:

$$\boxed{\forall a, \beta \in \mathbb{R} \implies |a| - |\beta| \leq ||a| - |\beta|| \leq |a \pm \beta| \leq |a| + |\beta|} \quad (7.5)$$

Ἀσκήσεις. Ἐξετάσατε πότε εἰς τὰς σχέσεις (7.5) ἰσχύει τὸ ἴσον.

Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 40. Ἰδιότης VIII. — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Ἦτοι :

$$|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$$

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 35, πόρισμα 2ον) ἰσχύει :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Ἀρα :

$$|a\beta| = \sqrt{(a\beta)^2} = \sqrt{a^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{\beta^2} = |a| \cdot |\beta|. \quad (8.1)$$

Πόρισμα 1ον. — Ἐὰν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ μὲ $n \geq 2$ ἰσχύει :

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1} \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \dots |a_{n-1}| \cdot |a_n| \quad (8.2)$$

Ἡ ἀπόδειξις εὐκόλος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ $n = 2$ ἰσχύει (§ 40).

Πόρισμα 2ον. — Ἐὰν $a \in \mathbb{R}$ καὶ $n \in \mathbb{N}$ ἰσχύει πάντοτε :

$$|a^n| = |a|^n$$

Προφανῶς, ἀρκεῖ εἰς τὴν (8.2) νὰ τεθῇ : $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n = a$.

Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 41. Ἰδιότης IX. — Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

Ἦτοι :

$$\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}, \quad \text{ἐνθα } \beta \neq 0.$$

Ἀπόδειξις. Προφανῶς, ἔχομεν : $\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta$ (ὑποτίθεται $\beta \neq 0$) καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν ιδιότητα VIII θὰ εἶναι :

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \cdot |\beta|, \quad \text{ἐξ οὗ : } \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|.$$

Ὡστε :

$$\forall a, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0 \implies \left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}$$

Πόρισμα. — Διὰ κάθε $a \in \mathbb{R}$ μὲ $a \neq 0$ καὶ $k \in \mathbb{Z}$ ἰσχύει :

$$|a^k| = |a|^k.$$

Παραδείγματα εφαρμογής των άνωτέρω ιδιοτήτων.

Παράδειγμα 1ον: 'Εάν $\alpha < \beta$ δείξτε ότι η παράσταση :

$$A \equiv ||\alpha - x| + |\beta - x||$$

διατηρεί σταθεράν τιμήν, όταν τὸ x μεταβάλλεται μεταξύ των α καὶ β , δηλαδή $\alpha < x < \beta$.

Ἀπόδειξις: 'Επειδὴ $\alpha < x < \beta$ ἔχομεν :

$$\begin{array}{l} \alpha - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow |\alpha - x| = x - \alpha \\ \Rightarrow |\beta - x| = \beta - x \end{array} \right| \Rightarrow A \equiv |x - \alpha + \beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha,$$

δηλ. ἡ παράσταση A εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x , ἐφ' ὅσον βεβαίως $\alpha < x < \beta$.

Παρατήρησις: Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ όταν $\alpha \leq x \leq \beta$. Τί συμβαίνει διὰ $x < \alpha$ ἢ $x > \beta$;

Παράδειγμα 2ον: 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία :

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| \iff \alpha\beta < 0.$$

Ἀπόδειξις: 'Εκ τῆς ἰσότητος $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta|$ λαμβάνομεν τήν :

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = (|\alpha + \beta|)^2 \quad \text{ἢ} \quad (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

ἢ $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ἢ $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$. "Αρα : $\alpha\beta < 0$, καθόσον, ἐάν ἦτο $\alpha\beta \geq 0$, θὰ ἦτο, ἐξ ὀρισμοῦ, $|\alpha\beta| = \alpha\beta$.

Ἀντιστρόφως: 'Εάν $\alpha\beta < 0 \implies |\alpha\beta| = -\alpha\beta$ ἢ $|\alpha||\beta| = -\alpha\beta$

$$\text{ἢ} \quad -2|\alpha||\beta| = 2\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{ἢ} \quad |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 \quad \text{ἢ} \quad (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2.$$

Ὅθεν :

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta|.$$

Παράδειγμα 3ον: 'Εάν $x \in \mathbb{R}$ μέ : $-2 \leq x \leq 3$, δείξτε ὅτι :

$$|x^2 + 4x - 2| \leq 23.$$

Ἀπόδειξις: "Εχομεν (Πορ. 2ον, § 37).

$$|x^2 + 4x - 2| \leq |x|^2 + 4|x| + 2.$$

Τώρα ἐκ τῶν $-2 \leq x \leq 3 \implies -3 \leq x \leq 3 \implies |x| \leq 3$, ἐξ ἧς : $x^2 \leq 9$.

Συνεπῶς :

$$|x^2 + 4x - 2| \leq 9 + 12 + 2 = 23.$$

Παράδειγμα 4ον: 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καὶ $\alpha^2 \neq \beta^2$, δείξτε ὅτι :

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} + \frac{|\alpha| - |\beta|}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

Λύσις: Προφανῶς, ἡ $\alpha^2 \neq \beta^2$ δίδει : $|\alpha| \neq |\beta|$, ὅθεν καὶ $\alpha \neq \beta$.

'Εκ τῆς (7.5) § 39 ἔχομεν :

$$|\alpha| - |\beta| \leq ||\alpha| - |\beta||, \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \quad \text{καὶ} \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

$$\text{"Οθεν : } \frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} \leq 1, \quad \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} \leq 1, \quad \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 1$$

και εξ αυτων, δια προσθεσεως κατα μελη, λαμβανουμεν :

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} + \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

Π α ρ α δ ε ι γ μ α 5ον : Έαν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \beta (\alpha + 2\beta) \neq 0$, δείξτε ότι αι ανισότητες :

$$\left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1, \quad \left| \frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1$$

είναι λογικώς ισοδύναμοι, δηλαδή ή αλήθεια τής μιᾶς συνεπάγεται τήν αλήθειαν τών υπολοίπων.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : i). Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ή πρώτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right|^2 < 1 \quad \eta \quad 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \quad \eta \quad 3\alpha^2 < 3\beta^2 \quad \eta \quad \alpha^2 < \beta^2,$$

εξ ου : $|\alpha| < |\beta|$ και ἐπειδὴ $|\beta| > 0$, ἐπεται $\frac{|\alpha|}{|\beta|} < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$, ἥτοι,

ισχύουσιν τῆς πρώτης, ισχύει και ή δευτέρα.

Ἦδη, ἐκ τῶν δύο πρώτων, διᾱ πολλαπλασιασμοῦ κατᾱ μελη, λαμβανουμεν :

$$\frac{|2\alpha + \beta|}{|\alpha + 2\beta|} \cdot \frac{|\alpha|}{|\beta|} < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{2\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1.$$

(ii). Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ή δευτέρα. Τότε ἀκολουθοῦντες ἀντίθετον πορείαν φθάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας εἰς τήν πρώτην. Ἀκριβέστερον ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad \eta \quad \alpha^2 < \beta^2 \quad \eta \quad 3\alpha^2 < 3\beta^2 \quad \eta \quad 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2$$

$$\eta \quad (2\alpha + \beta)^2 < (\alpha + 2\beta)^2 \quad \eta \quad \left(\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right)^2 < 1, \quad \text{καῑ κατᾱ τήν § 35, πορ. 2ον,}$$

$$\text{ἔχομεν : } \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἐντεῦθεν, ἐκ ταύτης καῑ τῆς $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$, διᾱ πολλαπλασιασμοῦ κατᾱ μελη, λαμβανουμεν τήν τρίτην.

(iii). Τέλος ἔστω ὅτι ἀληθεύει ή τρίτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left| \frac{\alpha(\beta + 2\alpha)}{\beta(\alpha + 2\beta)} \right| < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \cdot \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἐπεται ὅτι θᾱ ισχύη ή μία τουλάχιστον τῶν ἀνισοτήτων :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad \eta \quad \left| \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \right| < 1.$$

Ἰσχύουσιν δὲ τῆς μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων, ισχύει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰς περιπτώσεις (i) καῑ (ii) καῑ ή ἄλλη.

Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω καὶ δύο εἰδικὰ παραδείγματα· προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

Παράδειγμα βον : Διὰ τοῦ συμβόλου $\max(\alpha, \beta)$, ἀντιστοίχως $\min(\alpha, \beta)$, συμβολίζομεν τὸν μέγιστον (maximum), ἀντιστοίχως τὸν ἐλάχιστον (minimum), ἐκ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β , τοὺς ὁποίους ὀρίζομεν οὕτω :

$$\max(\alpha, \beta) \equiv \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } \alpha \geq \beta \\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta > \alpha \end{cases}$$

$$\min(\alpha, \beta) \equiv \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } \alpha < \beta \\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta \leq \alpha \end{cases}$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν $\max(\alpha, \beta)$ καὶ $\min(\alpha, \beta)$ συναρτήσῃ τῶν α καὶ β καὶ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Λύσις : I. Ἐὰν $\alpha \geq \beta$ ἔχομεν :

$$\max(\alpha, \beta) = \alpha = \frac{\alpha + \beta + (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2}$$

$$\min(\alpha, \beta) = \beta = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2}$$

II. Ἐὰν $\alpha < \beta$ ἔχομεν :

$$\max(\alpha, \beta) = \beta = \frac{\alpha + \beta + (\beta - \alpha)}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$$

$$\min(\alpha, \beta) = \alpha = \frac{\alpha + \beta - (\beta - \alpha)}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$$

Παράδειγμα 7ον : Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 + \xi x + \eta$ καὶ ἰσχύουν : $|\xi| = 2\eta$ καὶ $\eta > 1$,

νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} \geq 2.$$

Ἀπόδειξις : Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι :

$$\xi^2 - 4\eta = 4\eta^2 - 4\eta = 4\eta(\eta - 1) > 0, \text{ διότι } \eta > 1,$$

ἄρα τὸ τριωνύμου ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, διὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν :

$$\rho_1 + \rho_2 = -\xi \quad (1)$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \eta. \quad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{\xi}{\eta}. \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), ἂν λάβωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἔχομεν :

$$\left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right| = \left| -\frac{\xi}{\eta} \right| \quad \eta \quad \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{|\rho_1 \rho_2|} = \frac{|\xi|}{|\eta|} = \frac{|\xi|}{\eta}, \text{ διότι } \eta > 0.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $|\xi| = 2\eta$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{|\rho_1 + \rho_2|}{|\rho_1| \cdot |\rho_2|} = \frac{|\xi|}{\eta} = \frac{2\eta}{\eta} = 2. \quad (4)$$

Άλλά, (ιδιότητα V, § 37) : $|ρ_1| + |ρ_2| \geq |ρ_1 + ρ_2|$ οπότε, λόγω και της (4),

$$\text{έχουμε : } \frac{|ρ_1| + |ρ_2|}{|ρ_1| \cdot |ρ_2|} \geq \frac{|ρ_1 + ρ_2|}{|ρ_1| \cdot |ρ_2|} = 2,$$

$$\text{ή } \frac{1}{|ρ_1|} + \frac{1}{|ρ_2|} \geq 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Έάν $α, β \in \mathbb{R}$, νά αποδειχθούν αί ισοδυναμίες :

$$1. \quad ||α| - |β|| = |α - β| \iff αβ \geq 0,$$

$$2. \quad α|β| - β|α| = 0 \iff |α + β| \geq |α - β|.$$

36. Εύρετε τās άκεραίες τιμές του x διά τās όποίας είναι :

$$1) \quad |x| < 3,2, \quad 2) \quad |x| > 1,8 \text{ και } |x| \leq 5.$$

37. Έάν $α < β < γ < δ$, νά εύρεθῇ πότε ἡ παράσταση :

$$A \equiv |α - x| + |β - x| + |γ - x| + |δ - x|$$

διατηρεῖ σταθεράν τιμήν.

38. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μέ τύπον :

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}.$$

Νά αποδειχθῇ ότι :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{έάν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{έάν } |x| > 1. \end{cases}$$

39. Έάν $α, β, γ \in \mathbb{R}$ μέ $αβγ \neq 0$, νά αποδειχθῇ ότι :

$$\frac{α^2 + β^2}{|α| + |β|} + \frac{β^2 + γ^2}{|β| + |γ|} + \frac{γ^2 + α^2}{|γ| + |α|} \geq |α + β + γ|.$$

40. Διά ποίας πραγματικές τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού ἡ παράσταση :

$$y \equiv \sqrt[n]{\frac{x}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}} + \frac{2^n}{\sqrt[n]{2 - |x| + 2x^2 - |x|^3}}, \quad (n = \text{φυσικός αριθμός} > 1).$$

41. Έάν $α, β \in \mathbb{R}$, δείξατε ότι : $α|β| + β|α| \leq αβ + |αβ|$. Πότε ισχύει τὸ = ;

42. Έάν $x, y \in \mathbb{R}$ μέ $x < 0$ και $y = |5 - 3x| - 2|x|$, νά αποδειχθῇ ότι : $|x| - |y| \leq 5$.

43. Έάν $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ και ισχύει :

$$\frac{|x|y| + y|x|}{|xy|} = 2,$$

νά αποδειχθῇ ότι οί αριθμοί x και y είναι όμοσημοί.

$$44. \text{ Έάν } x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pm y, \quad \text{νά αποδειχθῇ ότι : } \frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} \geq 1.$$

$$45. \text{ Έάν } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } 2x + y + 4 = 0, \text{ νά αποδειχθῇ ότι : } |x| + |y| \geq 2.$$

$$46. \text{ Έάν } α < β < γ < δ, \text{ νά αποδειχθῇ ότι : } |β - γ| < |α - δ|.$$

47. Έάν οί συντελεστές τῆς εξίσωσης $x^2 + γx + δ = 0$ πληροῦν τās σχέσεις :

$$|1 + γ + δ| = |1 - γ + δ| \text{ και } |γ| > 1 + |δ|,$$

δείξατε ότι ἡ ἐν λόγω εξίσωσις έχει ρίζας πραγματικές και άνίσους.

48. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma \neq 0$, νά αποδειχθῇ ὅτι αἱ σχέσεις :

$$\beta - \delta < |\alpha - \gamma| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad |\gamma| < |\beta| \quad (2)$$

συνεπάγονται τὴν :

$$\left| \frac{\delta}{\beta} \right| - \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| < 2.$$

49. 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καὶ $|\alpha| > 1$, δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης : $\beta = \frac{\alpha}{1-|\alpha|}$

συνεπάγεται τὰς :

$$|\beta| > 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{\beta}{1-|\beta|}.$$

50. 'Εάν $x, y, z \in \mathbb{R}$, δείξατε ὅτι :

$$|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| \geq |x| + |y| + |z|.$$

51. Δείξατε ὅτι : $\max(0, 2x) - \min(0, 2x) = 2|x|$.

52. Δείξατε ὅτι ἐξ ἐκάστης τῶν σχέσεων :

$$\left| \frac{2x+3y}{3x+2y} \right| < 1, \quad \left| \frac{y}{x} \right| < 1, \quad \left| \frac{2xy+3y^2}{2xy+3x^2} \right| < 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}, x(3x+2y) \neq 0)$$

ἔπονται αἱ ἄλλαι δύο.

53. 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, νά αποδειχθῇ ὅτι : $\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$.

54. 'Εάν οἱ $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbb{R}$, εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$\alpha = \frac{x}{1 + |x| + |y| + |z|}, \quad \beta = \frac{y}{1 + |x| + |y| + |z|}, \quad \gamma = \frac{z}{1 + |x| + |y| + |z|}$$

νά ὑπολογισθοῦν οἱ x, y, z συναρτήσῃ τῶν α, β, γ .

55. 'Εάν $x \in \mathbb{R}$ καὶ $|2x + 9| = 3|x + 2|$, νά ὑπολογισθῇ ἡ $|x|$.

56. Διὰ πᾶν ζεύγος τιμῶν τῶν x, y ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$|x^2 - 3y + 1| = |3y - x^2 - 1|.$$

57. 'Εάν $x, y \in \mathbb{R}$ καὶ $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$, δείξατε ὅτι : $|x| = |y|$.

58. 'Εάν $\alpha^2 = \beta\gamma$ καὶ $2|\beta + \gamma| + |\gamma| > 6 + \beta\gamma$, νά δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι :

$$\eta \quad (|\gamma| < 2, |\beta| > 3) \quad \eta \quad (|\gamma| > 2, |\beta| < 3).$$

59. 'Εάν $|x| > |y|$, δείξατε ὅτι :

$$\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} + \frac{|x|}{|x|-|y|} - \frac{|y|}{||x|-|y||} \geq 2.$$

60. 'Εάν $\gamma > 1$, $|\beta| = 2\gamma$, δείξατε ὅτι αἱ ρίζαι x_1, x_2 τῆς ἐξίσωσως $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ πληροῦν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 2.$$

61. 'Εάν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, νά δειχθῇ ὅτι :

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}.$$

62. 'Εάν $x \neq y$, δείξατε ὅτι :

$$|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| < |x-y|.$$

63. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ καὶ $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) \neq 0$, δείξατε ὅτι :

$$\frac{|\alpha|}{|\beta + \gamma|} + \frac{|\beta|}{|\gamma + \alpha|} + \frac{|\gamma|}{|\alpha + \beta|} \geq \frac{3}{2}.$$

64. Μεταξύ ποίων ορίων μεταβάλλεται ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, όταν διὰ τούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύη η ἀνισότης :

$$\left| \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha + \beta} \right| < 1.$$

65. Ἐάν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$|\xi| < \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|\alpha|}.$$

66. Ἐάν $\frac{|x| + 1}{x - 1} = \frac{y - 1}{|y| + 1}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $x, y \geq 0$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

67. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν : $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$ μὲ συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς καὶ ρίζας ρ_1, ρ_2 . Ἐάν $|\rho_2| \leq |\rho_1|$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + |\beta|} \leq (1 + \sqrt{2}) \cdot |\rho_1|$.

68. Ἐάν $|y - \varphi| < |x - \omega|$ καὶ $|\omega| < |\varphi|$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left| \frac{y}{\varphi} \right| - \left| \frac{x}{\omega} \right| < 3, \quad (\text{ὑποτίθεται: } \omega, \varphi \neq 0).$$

69. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta xy - \gamma y^2 = 0$. Ἐάν μεταξὺ τῶν ριζῶν x_1, x_2 καὶ τῶν συντελεστῶν αὐτῆς ὑφίστανται αἱ σχέσεις :

$$\frac{|x_1 + x_2|}{|x_1 + x_2| + |x_1 x_2|} = |\alpha|, \quad 1 - |\alpha| = \frac{2}{|\beta|}, \quad \alpha\gamma = -6,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$y = \pm \frac{1}{3}.$$

70. Ἐάν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως $x^4 + \alpha x^2 + \beta = 0$ καὶ εἶναι $|\xi| < 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε :

$$\left| \alpha \xi^2 + \frac{\beta}{2} \right| < |\xi|^2 + \left| \frac{\beta}{2} \right|.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$.

Θὰ ἐκθέσωμεν κατωτέρω τὸν τρόπον ἐπιλύσεως, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, μερικῶν μορφῶν ἐξισώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὑπείσέρχονται ἀπόλυτοι τιμαὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀγνώστων.

§ 42. I. Ἐπίλυσις τῆς ἐξίσωσως $a|x| + \beta = 0$, μὲ $a, \beta \in \mathbb{R}$ καὶ $a \neq 0$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α'). Ἐστω $x > 0$, τότε (ἐξ ὁρισμοῦ) ἔχομεν $|x| = x$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεταί :

$$\alpha x + \beta = 0, \quad \text{ἐξ οὗ: } x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x θὰ εἶναι δεκτὴ, ἐάν ἱκανοποιῇ τὴν $x > 0$. Δηλαδή :

$$-\frac{\beta}{\alpha} > 0. \quad (1)$$

Ἐνταῦθα, ἐάν $\alpha\beta > 0$, δηλ. ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, ἡ (1) δὲν ἀληθεύει καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

Ἐάν ὁμως $\alpha\beta < 0$, δηλ. οἱ α καὶ β εἶναι ἐτερόσημοι, ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, τὴν $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

β'). Έστω $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και η δοθείσα εξίσωση γίνεται :

$$-ax + \beta = 0, \text{ εξ ου : } x = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Η τιμή αυτή του x θα είναι δεκτή, εάν πληροί την $x < 0$. Δηλαδή :

$$\frac{\beta}{\alpha} < 0. \quad (2)$$

Η (2), προφανώς, αληθεύει διὰ $\alpha\beta < 0$.

Ωστε, η εξίσωση $\alpha|x| + \beta = 0$ είναι **αδύνατος**, ή άλλως **έστερημένη λύσεως** ως προς x , όταν οι πραγματικοί αριθμοί α και β είναι όμοσημοι, έχει δέ αυτή λύσεις $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x = \frac{\beta}{\alpha}$, όταν οι α και β είναι ετερόσημοι. Είς την δευτέραν περίπτωσιν λέγομεν ότι η εξίσωση $\alpha|x| + \beta = 0$ είναι **ισοδύναμος** πρὸς τήν :

$$x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

γ'). Εάν $\beta = 0$, ἔχομεν $\alpha|x| = 0$, και συνεπῶς $|x| = 0$, εξ ου $x = 0$. Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $\alpha x + \beta = 0$	
$\alpha\beta > 0$	$\alpha x + \beta = 0$ αδύνατος
$\alpha\beta < 0$	$\alpha x + \beta = 0 \implies x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$
$\beta = 0$	$\alpha x + \beta = 0 \implies x = 0.$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωση : $2|x| - 3 = 0$.

Λύσις : Ἐχομεν, ἐν προκειμένῳ, $\alpha = 2$, $\beta = -3$ και ἐπειδὴ $\alpha\beta = -6 < 0$ ἡ εξίσωση $2|x| - 3 = 0$ ἔχει τὰς λύσεις : $x = \pm \frac{3}{2}$.

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωση : $4|x| = -7$.

Λύσις : Ἡ εξίσωση γράφεται $4|x| + 7 = 0$. Ἐνταῦθα εἶναι $\alpha = 4$, $\beta = 7$ και ἐπειδὴ $\alpha\beta = 28 > 0$, ἡ δοθείσα εξίσωση εἶναι **αδύνατος**.

§ 43. II. Ἐπίλυσις εξισώσεως τῆς μορφῆς : $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$ (1), με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'). Εάν $x > 0$, ἔχομεν ἐξ ὀρισμοῦ $|x| = x$ και ἡ δοθείσα εξίσωση γίνεται :

$$\alpha x + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha + \beta)x = -\gamma. \quad (2)$$

Εάν $\alpha + \beta \neq 0$, ἡ (2) δίδει : $x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$.

Διὰ νὰ εἶναι δεκτὴ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x , πρέπει νὰ ἰκανοποιῇ τὴν $x > 0$.
 Δηλαδή πρέπει :

$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta} > 0 \quad \eta \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta} < 0 \quad \eta \quad \gamma(\alpha+\beta) < 0.$$

Ἐὰν $\alpha+\beta=0$, ἡ (2) γίνεται $0x=-\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ $\gamma \neq 0$, αὕτη εἶναι ἀδύνατος. Συνεπῶς καὶ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

β'). Ἐὰν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$-\alpha x + \beta x + \gamma = 0 \quad \eta \quad (\beta - \alpha)x = -\gamma \quad \eta \quad (\alpha - \beta)x = \gamma. \quad (3)$$

Ἐὰν $\alpha - \beta \neq 0$, ἡ (3) δίδει : $x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$.

Διὰ νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x δεκτὴ, πρέπει νὰ ἰκανοποιῇ τὴν $x < 0$.

Δηλαδή : $\frac{\gamma}{\alpha - \beta} < 0$, ἔξ οὗ : $\gamma(\alpha - \beta) < 0$.

Ἐὰν $\alpha - \beta = 0$, δηλ. $\alpha = \beta$, ἡ (3) εἶναι ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον $\gamma \neq 0$. Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

γ'). Ἐὰν $x = 0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\gamma = 0$ καὶ ἐφ' ὅσον $\gamma \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $a x + \beta x + \gamma = 0$	
$\gamma(\alpha+\beta) < 0$	$a x + \beta x + \gamma = 0 \implies x = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$
$\alpha + \beta = 0$	ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.
$\gamma(\alpha - \beta) < 0$	$a x + \beta x + \gamma = 0 \implies x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$
$\alpha - \beta = 0$	ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.

Σημειώσεις : Διὰ $\beta = 0$ ἔχομεν τὴν μορφήν I (§ 42).

Ἀσκήσεις : Ἐξετάσατε τὰς κάτωθι ἰδιαιτέρας περιπτώσεις :

(i). $\beta = 1$, $\gamma = 0$, (ii). $\alpha = \pm 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

Παραδείγματα : 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $3|x| + 2x - 4 = 0$.

Λύσις : Λαμβάνοντες τὰς ἐκφράσεις $\alpha + \beta$, $\gamma(\alpha + \beta)$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = 3 + 2 = 5 \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma(\alpha + \beta) = -4 \times 5 = -20 < 0.$$

Πληροῦνται ὅθεν αἱ συνθῆκαι τῆς περιπτώσεως α') καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοθεῖσα

ἐξίσωσις ἐπιδέχεται ὡς λύσιν τὴν : $x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{4}{5}$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha - \beta = 3 - 2 = 1 \neq 0$ καὶ $\gamma(\alpha - \beta) = -4 \times 1 = -4 < 0$,

ή δοθείσα εξίσωσις επιδέχεται ως (άρνητικήν) ρίζαν τήν :

$$x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = \frac{-4}{1} = -4.$$

2ον : Να επιλυθῇ ἡ εξίσωσις : $|x| + x + 2 = 0$. (ε)

Λύσις : Ἐστω $x > 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (ε) γίνεται :

$$x + x + 2 = 0 \quad \eta \quad 2x = -2, \quad \xi\varsigma \text{ οὗ : } x = -1.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὑπετέθη $x > 0$, ἡ τιμὴ $x = -1$ ἀπορρίπτεται.

Ἐστωὶ τῶρα $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ (ε) δίδει : $-x + x + 2 = 0$, δηλ. $2 = 0$ (ἀδύνατος).

Διὰ $x = 0$ ἡ (ε) δίδει ἐπίσης $2 = 0$ (ἀδύνατος).

Ἄρα ἡ εξίσωσις $|x| + x + 2 = 0$ δὲν ἔχει λύσιν.

Τοῦτο ἄλλωστε τὸ ἀνεμείναμεν, διότι ἐν προκειμένῳ ἔχομεν $\alpha = 1$, $\beta = 1$, ὁπότε : $\alpha - \beta = 1 - 1 = 0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ εξίσωσις (ε) εἶναι ἀδύνατος.

§ 44. III. Ἐπίλυσις εξισώσεως τῆς μορφῆς : $\alpha x^2 + \beta |x| + \gamma = 0$ (1), ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ καὶ $\alpha \neq 0$.

Ἐπειδὴ διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι : $x^2 = |x|^2$, ἡ δοθείσα εξίσωσις γράφεται : $\alpha |x|^2 + \beta |x| + \gamma = 0$, ἡ ὁποία εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς $|x|$.

Ἐὰν θέσωμεν $|x| = y$, ἡ ἀνωτέρω εξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ |x| = y, \end{cases}$$

ὕπὸ τὸν ὅρον ὅτι μόνον αἱ (πραγματικαὶ) μὴ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς εξισώσεως ὡς πρὸς y μᾶς παρέχουν τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Ἐπομένως ἡ (1) θὰ ἔχῃ λύσιν, ἐφ' ὅσον ἔχει, τοῦλάχιστον, μίαν ρίζαν πραγματικὴν μὴ ἀρνητικὴν ἡ εξίσωσις :

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0. \quad (2)$$

Ἀναλυτικώτερον διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1η : Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, ἡ (2) ἔχει ρίζας μιγαδικὰς καὶ συνεπῶς ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

2α : Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ἡ (2) ἔχει τὴν διπλὴν ρίζαν $y = -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ συνεπῶς :

(i). Ἐὰν $-\frac{\beta}{2\alpha} > 0$, δηλ. $\alpha\beta < 0$, τότε ἡ (1) θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τὰς :

$$x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

(ii). Ἐὰν $-\frac{\beta}{2\alpha} < 0$, δηλ. $\alpha\beta > 0$, τότε ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

3η : Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς, ὁπότε :

(i). Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι θετικαὶ

καὶ ἐὰν καλέσωμεν αὐτὰς y_1 καὶ y_2 , τότε ἡ (1) θὰ ἔχῃ ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῶν εξισώσεων $|x| = y_1$ καὶ $|x| = y_2$, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν $x = \pm y_1$ καὶ

$x = \pm y_2$, ήτοι ή (1) θα ἔχη εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην 4 ρίζας, τὰς :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = -y_2.$$

(ii). Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$, ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἀρνητικαί, ὁπότε ή (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει (ἐν $\mathbb{R}$).

(iii). Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, ή (2) ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους, ἔστω τὰς $y_1 < 0 < y_2$, ὁπότε ή (1) θα ἔχη ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῆς $|x| = y_2$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν :

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = -y_2.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$			(1)
$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$.		
$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	$-\frac{\beta}{2\alpha} > 0$	$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \implies x = \pm \frac{\beta}{2\alpha}$	
	$-\frac{\beta}{2\alpha} < 0$	ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.	
$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	$\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$	ή $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει 4 ρίζας.	
	$\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$	ή εξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.	
	$\frac{\gamma}{\alpha} < 0$	ή $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει 2 ρίζας.	

Μερικὴ περίπτωσις : Ἐὰν $\gamma = 0$, ἔχομεν τὴν εξίσωσιν :

$$\alpha|x|^2 + \beta|x| = 0 \quad \text{ή} \quad |x| \cdot (\alpha|x| + \beta) = 0, \quad \text{ὁπότε :$$

$$\text{ή} \quad |x| = 0, \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας} \quad x = 0.$$

$$\text{ή} \quad \alpha|x| + \beta = 0, \quad \text{ή ὁποία ἔχει ἤδη μελετηθῇ εἰς τὴν § 42.}$$

Π α ρ α δ ε ἱ γ μ α τ α : 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, ή εξίσωσις :

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0.$$

Λ ὕ σ ι ς : Ἡ δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται : $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$. (1)

Θέτομεν $|x| = y$ ($y > 0$) καὶ ή (1) γίνεταί :

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y_1 = 2$ καὶ $y_2 = 3$. Ἀρα $|x| = 2$ καὶ $|x| = 3$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν : $x = \pm 2$ καὶ $x = \pm 3$.

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εξισώσεως εἶναι :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$$

2ον : Να επιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^2 - 4|x| - 12 = 0$. (2)

Λύσεις : Ἐπειδὴ εἶναι $x^2 = |x|^2$, θέτοντες $|x| = y$ ($y > 0$) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$y^2 - 4y - 12 = 0$,
ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $y = 6$ καὶ $y = -2$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$|x| = 6 \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad |x| = -2 \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν : $x = \pm 6$.

Ἡ (4) εἶναι ἀδύνατος.

Ἐπομένως, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι : $x_1 = 6$ καὶ $x_2 = -6$.

Παρατήρησις : Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, ἐξισώσεων τῆς μορφῆς : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma |x| + \delta = 0$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$. (1)

Λύσεις : Διὰ $x = 0$ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

Ἐστω $x > 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$ ἢ $x^2 - x - 6 = 0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς :
 $x = 3$ καὶ $x = -2$. Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ.

Ἐστω τώρα $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$x^2 - 3x - 2x - 6 = 0 \quad \text{ἢ} \quad x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Αὕτη ἔχει ρίζας τὰς : $x = 6$ καὶ $x = -1$.

Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ $x = -1$, ὡς πληροῦσα τὴν συνθήκην : $x < 0$.

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι : $x = 3$ καὶ $x = -1$.

§ 45. IV. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς : $|A(x)| + |B(x)| + \dots + |P(x)| + Q(x) = 0$ (1), ὅπου $A(x), B(x), \dots, P(x), Q(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x μὲ πραγματικούς συντελεστές. — Διὰ τὴν εὑρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) ἐξετάζομεν τὰ πρόσημα τῶν $A(x), B(x), \dots, P(x)$, ἥτοι τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x καὶ βάσει τῶν προσήμων τούτων ἐξαλείφομεν τὰ ἀπόλυτα, δηλαδὴ ἀντικαθιστῶμεν τὰς παραστάσεις μὲ ἀπολύτους τιμὰς, διὰ τῶν ἴσων των, κατὰ τὸν ὀρισμὸν, ἄνευ ἀπολύτων, εὐρίσκοντες οὕτως εἰς ἕκαστον διάστημα τιμῶν τοῦ x καὶ μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν πρὸς τὴν (1). Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐφ' ὅσον εὐρίσκονται ἐκάστοτε εἰς τὸ ἀντίστοιχον διάστημα μεταβολῆς τοῦ x , εἶναι δεκταὶ ὡς λύσεις διὰ τὴν (1), ἄλλως ἀπορρίπτονται.

Παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (IV) πρὸς πλήρη κατανόησιν τοῦ θέματος.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, ἡ ἐξίσωσις :

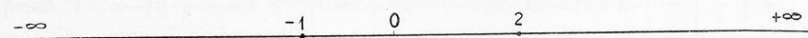
$$-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5. \quad (1)$$

Λύσεις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$|x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0. \quad (2)$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ x , αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν ἐκάστην παράστασιν εὐρισκομένην ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι κατὰ σειρὰν : $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

Τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x τοποθετοῦμεν ἐπὶ ἄξονος κατὰ τάξιν αὐξοντος μεγέθους, ὡς κάτωθι φαίνεται :



Διακρίνομεν ἤδη τὰς ἀκολουθούς περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $-\infty < x < -1$, τότε θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x+1| = -x-1 \\ |x| = -x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \right\} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x-3(-x+2)+5(-x-1)-2x+5=0 \\ x < -1 \end{array} \right\} (\Sigma_1).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x = -\frac{6}{5}$ (δεκτή), ὡς πληροῦσα τήν : $x < -1$.

β'). Ἐὰν $-1 \leq x < 0$, θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = -x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \right\} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ -1 \leq x < 0 \end{array} \right\} (\Sigma_2).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x = -\frac{4}{5}$ (δεκτή), ὡς πληροῦσα τήν : $-1 \leq x < 0$.

γ'). Ἐὰν $0 \leq x < 2$, τότε :

$$\left. \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = x \\ |x-2| = -x+2 \end{array} \right\} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 0 \leq x < 2 \end{array} \right\} (\Sigma_3).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x = -\frac{4}{7}$ (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν : $0 \leq x < 2$.

δ'). Ἐὰν $2 \leq x < +\infty$, θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x| = x \\ |x-2| = x-2 \end{array} \right\} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 2 \leq x \end{array} \right\} (\Sigma_4).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x = -16$ (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν : $2 \leq x < +\infty$.

Ὡστε, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι : $x = -\frac{6}{5}$ καὶ $x = -\frac{4}{5}$.

Παρατήρησις : Πρὸς ταχύτεραν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) σχηματίζομεν τὸν εἰς τὴν ἐπομένην σελίδα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν τὰ πρόσθημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἐκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ x , καθὼς ἐπίσης ἀναγράφομεν καὶ τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς αὐτὰ ἰσοδύναμους πρὸς τὴν (1) ἐξισώσεις :

x	x-2	x	x+1	$ x-3 x-2 +5 x+1 -2x+5=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$	-	-	-	$-x+3(x-2)-5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x=-\frac{6}{5} \in (-\infty, -1)$, δεκτή.
-1	-	-	0	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x=-\frac{4}{5} \in [-1, 0)$, δεκτή.
0	-	0	+	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x=-\frac{4}{5} \notin [0, 2)$, άπορριπτ.
2	-	+	+	$+x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x=-\frac{4}{5} \notin [0, 2)$, άπορριπτ.
$+\infty$	+	+	+	$x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x=-16 \notin [2, +\infty)$, άπορρ.

Παράδειγμα 2ον : Να εύρεθούν αι πραγματικοί λύσεις της εξίσωσης :

$$|x^2-5x+6|-2|x-1|+2x-3=0.$$

Λύσεις : Θέτομεν :

$A \equiv x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, τότε: $\frac{x}{A} \begin{array}{c} -\infty \\ + \\ 2 \\ - \\ 3 \\ + \\ +\infty \end{array}$

και $B \equiv x-1$, τότε: $\frac{x}{B} \begin{array}{c} -\infty \\ - \\ 1 \\ + \\ +\infty \end{array}$

*Ηδη σχηματίζομεν, ως και προηγουμένως, τόν ακόλουθον πίνακα :

x	A	B	$ x^2-5x+6 -2 x-1 +2x-3=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$	+	-	$x^2-5x+6+2(x-1)+2x-3=0$	Ρίζαι μιγαδικαί (άπορρίπτονται).
1	+	0	$x^2-5x+6+2(x-1)+2x-3=0$	$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$, δεκτή μόνον ή :
	+	+	$x^2-5x+6-2(x-1)+2x-3=0$	$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \in [1, 2]$.
2	-	+	$-(x^2-5x+6)-2(x-1)+2x-3=0$	Ρίζαι μιγαδικαί (άπορρίπτονται).
3	-	0	$-(x^2-5x+6)-2(x-1)+2x-3=0$	Ρίζαι μιγαδικαί (άπορρίπτονται).
	+	+	$x^2-5x+6-2(x-1)+2x-3=0$	$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$, δεκτή μόνον ή :
$+\infty$	+	+	$x^2-5x+6-2(x-1)+2x-3=0$	$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \in [3, +\infty)$.

*Εκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος καθίσταται φανερόν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ὡς μόνος πραγματικὰς ρίζας ἔχει τάς: $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Παράδειγμα 3ον : Να ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$|2x - |2x - 1|| = -\lambda^2 x. \quad (1)$$

Λύσεις : Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1) θὰ πρέπει νὰ εἶναι $x \leq 0$. Τούτου τεθέντος, ἔπεται ὅτι :

$2x \leq 0$ ἢ $2x-1 \leq -1$ ἢ $2x-1 < 0$, ἄρα $|2x-1| = -2x+1$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$|2x - (1-2x)| = -\lambda^2 x \quad \text{ἢ} \quad |4x - 1| = -\lambda^2 x. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $x \leq 0$, ἔπεται $4x - 1 < 0$, ἄρα $|4x - 1| = 1 - 4x$ καὶ ἡ (2) γίνεται :

$$1 - 4x = -\lambda^2 x.$$

Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 4x = -\lambda^2 x \\ x \leq 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} (4 - \lambda^2)x = 1 \\ x \leq 0 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $\lambda = \pm 2$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (3) γίνεται : $0 \cdot x = 1$, καὶ εἶναι ἀδύνατος, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x . Ἄρα καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.

β'). Ἐὰν $\lambda \neq \pm 2$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (3) δίδει :

$$x = \frac{1}{4 - \lambda^2}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη πρέπει νὰ πληροῖ τὴν $x \leq 0$. Δηλαδή πρέπει :

$$\frac{1}{4 - \lambda^2} \leq 0 \quad \eta \quad 4 - \lambda^2 \leq 0 \quad \eta \quad \lambda^2 \geq 4 \quad \eta \quad \lambda^2 - 4 \geq 0 \quad \eta \quad (\lambda + 2)(\lambda - 2) \geq 0.$$

Ἐκ ταύτης ἔπεται ὅτι : $\lambda \leq -2$ καὶ $\lambda \geq 2$. Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\lambda \neq \pm 2$, ἔπεται ὅτι :

$$\lambda < -2 \quad \text{καὶ} \quad \lambda > 2.$$

Ὡστε, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἔχει λύσιν μόνον, ὅταν :

$$\lambda < -2 \quad \text{καὶ} \quad \lambda > 2.$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 46. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$, ἀνισώσεων μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, ἐργαζόμεθα ἐκάστοτε κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν τρόπον ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τῆς ἀντιστοίχου μορφῆς, ὡς ἐξετέθησαν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους (§§ 42, 43, 44, 45).

Ὅπως εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, οὕτω καὶ εἰς τὰς ἀνισώσεις εὐρίσκομεν εἰς ἕκαστον διάστημα μεταβολῆς τοῦ ἀγνώστου καὶ μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ἰσοδύναμον ἀνίσωσιν πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Αἱ τομαὶ τῶν διαστημάτων (λύσεων) ἐκάστης ἰσοδυναμίου ἀνισώσεως μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου διαστήματος τιμῶν τοῦ ἀγνώστου, ἀποτελοῦν τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀνισώσεων διαφόρων μορφῶν.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $\frac{|x| - 5}{3} > \frac{x - 8}{4}$ (1)

Λύσις : α). Ἐὰν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x - 5}{3} - \frac{x - 8}{4} > 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x > -4 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα :

$$x \geq 0.$$

(2)

β). 'Εάν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και ή (1) ισοδυναμεί με τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-x-5}{3} - \frac{x-8}{4} > 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -7x > -4 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{4}{7} \\ x < 0 \end{array} \right\} \text{συμβιβασταί.}$$

*Αρα : $x < 0$. (3)

'Εκ τῶν (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι ή (1) ἀληθεύει διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2ον : Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ή παράστασις : $\sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}$. (1)

Λύσις : Διὰ νὰ ἔξη νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ή παράστασις πρέπει :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10|x| + 3 &\geq 0, \text{ ή ἐπειδὴ } x^2 = |x|^2 \\ 3|x|^2 - 10|x| + 3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Θέτοντες $|x| = y$ ($y \geq 0$), ἔχομεν τὸ ισοδύναμον πρὸς τήν (2) σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} 3y^2 - 10y + 3 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(y-3)\left(y - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \\ y \geq 0. \end{array} \right\}$$

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα πληροῦται διὰ : $y \geq 3$ καὶ $0 \leq y \leq \frac{1}{3}$.

Τότε ὁμως ἔχομεν :

$$|x| \geq 3 \quad \text{καὶ} \quad |x| \leq \frac{1}{3}.$$

'Η πρώτη γράφεται : $x^2 \geq 9$ ή $x^2 - 9 \geq 0$ ή $(x-3)(x+3) \geq 0$
καὶ ἀληθεύει διὰ : $x \leq -3$ καὶ $x \geq 3$.

'Η δευτέρα, ὡς γνωστὸν (§ 36), εἶναι ισοδύναμος πρὸς τήν : $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

*Ὅθεν, ή παράστασις $\sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰς ἐξῆς τιμὰς τοῦ x :

$$-\infty < x \leq -3, \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad 3 \leq x < +\infty.$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, ή ἀνίσωσις :

$$|x+1| - 2|x| + |x-1| - \frac{2x+4}{5} > 0. \quad (1)$$

Λύσις : 'Εργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον μετὸν ἐκτεθέντα εἰς τήν προηγούμενην παράγραφον :

Αἱ τιμαὶ τοῦ x , αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὰς παραστάσεις τὰς ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, εἶναι κατὰ σειράν αἱ ἐξῆς : $x = -1, 0, 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Θέτομεν : } A \equiv x+1 \\ B \equiv x \\ \Gamma \equiv x-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{x}{A} \begin{array}{c} -\infty \quad -1 \quad +\infty \\ - \quad + \end{array} \\ \frac{x}{B} \begin{array}{c} -\infty \quad 0 \quad +\infty \\ - \quad + \end{array} \\ \frac{x}{\Gamma} \begin{array}{c} -\infty \quad 1 \quad +\infty \\ - \quad + \end{array} \end{array}$$

Καταρτίζουμεν ακόλουθως τὸν κατωτέρω πίνακα, εἰς τὸν ὅποιον σημειοῦμεν τὰ πρόσσημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ x , ὡς ταῦτα καθορίζονται ὑπὸ τῶν εἰς τὴν προηγουμένην σελίδα πινακίων, καθὼς ἐπίσης ἀναγράφομεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους, εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τιμῶν τοῦ x , ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν (1) ἀνίσωσεις.

x	A	B	Γ	$ x+1 -2 x + x-1 -\frac{2x+4}{5} > 0$	Συμπεράσματα
$-\infty$	-	-	-	$-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$\Rightarrow x < -2$. Ἄρα:
-1	-	-	-	$-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$x \in (-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$
0	+	-	-	$(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$\Rightarrow x > -\frac{3}{4}$. Ἄρα:
0	+	-	-	$(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$x \in (-\frac{3}{4}, +\infty) \cap [-1, 0) = (-\frac{3}{4}, 0)$
1	+	+	-	$(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$. Ἄρα:
1	+	+	-	$(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap [0, 1) = [0, \frac{1}{2})$
$+\infty$	+	+	+	$(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$\Rightarrow x < -2$. Ἄρα:
$+\infty$	+	+	+	$(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0$	$x \in (-\infty, -2) \cap [1, +\infty) = \emptyset$.

Λύσεις τῆς (1) θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῶν κάτωθι συστημάτων :

$$\alpha'). \left. \begin{aligned} -(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+4 < 0 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < -2 \\ x < -1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.} \end{array}$$

$$\text{Ἄρα: } -\infty < x < -2.$$

$$\beta'). \left. \begin{aligned} (x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8x+6 > 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x > -\frac{3}{4} \\ -1 \leq x < 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.} \end{array}$$

$$\text{Ἄρα: } -\frac{3}{4} < x < 0.$$

$$\gamma'). \left. \begin{aligned} (x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 12x-6 < 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < \frac{1}{2} \\ 0 \leq x < 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{συμβι-} \\ \text{βασταί.} \end{array}$$

$$\text{Ἄρα: } 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

$$\delta'). \left. \begin{aligned} (x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5} > 0 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+4 < 0 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x < -2 \\ x \geq 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ἀσυμβι-} \\ \text{βασταί.} \end{array}$$

$$\text{Ὡστε, ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ: } x < -2 \text{ καὶ } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 4ον : Να επιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις :

$$||x| - 5| > ||3x| - 3|. \quad (1)$$

Λύσις : Ὑποῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :

$$(|x| - 5)^2 > (3|x| - 3)^2 \quad \text{ἢ} \quad (|x| - 5)^2 - (3|x| - 3)^2 > 0$$

$$\text{ἢ} \quad (4|x| - 8)(-2|x| - 2) > 0 \quad \text{ἢ} \quad 8(|x| - 2)(|x| + 1) < 0. \quad (2)$$

Ἀλλὰ $|x| + 1 > 0$, διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$, κατὰ συνέπειαν ἐκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$|x| - 2 < 0 \quad \text{ἢ} \quad |x| < 2, \quad \text{ἐξ οὗ} : -2 < x < 2.$$

Παράδειγμα 5ον : Να δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x , ἰσχύει ἡ σχέσησις :

$$|x - 2| + |2x - 1| \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Δια ποίας τιμᾶς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης :

Λύσις : Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 3, ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα μετὰ τῶν σχετικῶν συμπερασμάτων :

x	$x - 2$	$2x - 1$	$ x - 2 + 2x - 1 \geq \frac{3}{2}$	Συμπέρασμα
$-\infty$	—	—	$-(x - 2) - (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$	$-\infty < x < \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	—	0	$-(x - 2) + (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \leq x < 2$
2	0	+	$(x - 2) + (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$	$2 \leq x < +\infty$
$+\infty$	+	+	$(x - 2) + (2x - 1) \geq \frac{3}{2}$	

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν ὅτι ἡ σχέσησις (1) ἰσχύει διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ἡ ἰσότης, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἰσχύει διὰ $x = \frac{1}{2}$.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$.

§ 47. 1. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{aligned} \alpha|x| + \beta|y| &= \gamma \\ \alpha_1|x| + \beta_1|y| &= \gamma_1 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀνεξάρτητοι τῶν x, y .

Θέτομεν $|x| = x_1, |y| = y_1$ καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 &= \gamma \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 &= \gamma_1 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Τὸ σύστημα (2), ὑποτιθεμένου ὅτι : $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$, ἔχει λύσιν τήν :

$$x_1 = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad y_1 = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

Ἐπειδὴ δι' οἰανδήποτε τιμὴν τῶν x καὶ y εἶναι $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$, τὸ σύστημα (1) θὰ ἔχη λύσιν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geq 0, \quad \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geq 0.$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων :

$$|x| = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad |y| = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta},$$

τὰς ὁποίας εὐρίσκομεν ὡς ἐξετέθη εἰς τὴν § 42.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} 3|x| - 2|y| &= 10 \\ 5|x| + 3|y| &= 23 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Λύσις : Θέτομεν $|x| = x_1$, $|y| = y_1$ καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 - 2y_1 &= 10 \\ 5x_1 + 3y_1 &= 23 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Λύοντες τοῦτο, ἔχομεν : $x_1 = 4$, $y_1 = 1$.

Τότε αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων :

$$\left. \begin{aligned} |x| &= 4 \\ |y| &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \begin{aligned} x &= \pm 4 \\ y &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ὡστε, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (1) εἶναι τὰ ζεύγη :

$(x=4, y=1)$, $(x=4, y=-1)$, $(x=-4, y=1)$, $(x=-4, y=-1)$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Λύσις : Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται καὶ οὕτω :

$$\left. \begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x|^2 + |y|^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x \cdot y| &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ἀπὸ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἔχομεν : $x=0$ ἢ $y=0$.

Διὰ $x=0$ ἔχομεν ἓκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος $|y|=1$, ἐξ οὗ $y = \pm 1$ καὶ διὰ $y=0$ ἔχομεν $|x|=1$, ἐξ οὗ : $x = \pm 1$.

Ὡστε, αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι :

$$(x=0, y=1), (x=0, y=-1), (x=1, y=0), (x=-1, y=0).$$

§ 48. II. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{aligned} \alpha |x| + \beta |y| + \gamma x + \delta y &= k \\ \alpha' |x| + \beta' |y| + \gamma' x + \delta' y &= k' \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ σταθεροὶ ὅροι εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς τέσσαρας περιπτώσεις :

α'). $x \geq 0, y \geq 0$, ὅποτε $|x| = x, |y| = y$ καὶ τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \gamma) x + (\beta + \delta) y &= k \\ (\alpha' + \gamma') x + (\beta' + \delta') y &= k' \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Αἱ μὴ ἀρνητικαὶ λύσεις αὐτοῦ εἶναι λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Συνεχίζομεν τὴν ἐπίλυσιν θεωροῦντες ἀκόμη τὰς περιπτώσεις :

$$\beta'). \quad x \geq 0, y < 0, \quad \gamma'). \quad x < 0, y \geq 0, \quad \delta'). \quad x < 0, y < 0.$$

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\left. \begin{aligned} x |y| + y |x| &= -6 \\ |x| + 2 |y| + x + 2y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Λύσις : Ἐκ τῆς πρώτης παρατηροῦμεν ὅτι : $x \neq 0$ καὶ $y \neq 0$.

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $x > 0, y > 0$, τότε ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$$xy + yx = -6 \quad \text{ἢ} \quad xy = -3, \text{ τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι } xy > 0.$$

β'). Ἐὰν $x > 0, y < 0$, τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεῖσῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$$-xy + xy = -6 \quad \text{ἢ} \quad 0 = -6 \quad (\text{ἀδύνατον}).$$

γ'). Ἐὰν $x < 0, y > 0$, τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεῖσῶν ἐξισώσεων δίδει ἐπίσης

$$xy - xy = -6 \quad \text{ἢ} \quad 0 = -6 \quad (\text{ἀδύνατον}).$$

δ'). Ἐὰν $x < 0, y < 0$, τότε ἐκ τῆς πρώτης τῶν δοθεῖσῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν : $xy = 3$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν : $x = 1$ καὶ $y = 3$ ἢ $x = 3$ καὶ $y = 1$ ἢ $x = -1$ καὶ $y = -3$ ἢ $x = -3$ καὶ $y = -1$, καθ' ὅσον οἱ x καὶ y πρέπει, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, νὰ εἶναι ἀκέραιοι.

Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $x < 0, y < 0$, ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος πληροῦται ὑπὸ τῶν ζευγῶν : $(x = -1, y = -3)$ ἢ $(x = -3, y = -1)$.

Ἀλλὰ τὰ ζεύγη αὐτά, ὥς εὐκόλως διαπιστοῦνται, πληροῦν καὶ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ὅθεν αἱ ζητούμεναι λύσεις εἶναι τὰ ζεύγη :

$x = -1$
$y = -3$

καὶ

$x = -3$
$y = -1$

§ 49. III. 'Επίλυσις συστημάτων ειδικῶν μορφῶν.—Παραθέτομεν κατωτέρω παραδείγματα ἐπιλύσεως συστημάτων ειδικῶν τινων μορφῶν :

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον : Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν x καὶ y , αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα :

$$|x + y - 7| + x + y = 7 \quad (1)$$

$$x - 3y = 0. \quad (2)$$

$$\text{Λ ύ σ ι ς : } \text{'Εκ τῆς (2) λαμβάνομεν : } x = 3y. \quad (2')$$

Δυνάμει ταύτης ἡ πρώτη γίνεται :

$$|3y + y - 7| + 3y + y = 7 \quad \eta \quad |4y - 7| + 4y = 7. \quad (3)$$

Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $4y - 7 \geq 0$, δηλ. $4y \geq 7$ ἢ $y \geq \frac{7}{4}$, θὰ ἔχωμεν : $|4y - 7| = 4y - 7$, ὁπότε ἡ (3) γίνεται : $4y - 7 + 4y = 7$ ἢ $8y = 14$, ἐξ ἧς : $y = \frac{7}{4}$. Ἡ τιμὴ ὅμως αὕτη δὲν εἶναι δεκτὴ, καθ' ὅσον δὲν εἶναι ἀκεραία.

β'). Ἐὰν $4y - 7 < 0$, δηλ. $y < \frac{7}{4}$, θὰ ἔχωμεν $|4y - 7| = -(4y - 7)$ καὶ ἡ (3) γίνεται : $-(4y - 7) + 4y = 7$ ἢ $0 \cdot y = 0$, ἥτοι ταυτότης ὡς πρὸς y .

Ἐπειδὴ ὅμως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, πρέπει τὸ y νὰ εἶναι ἀκέραιον καὶ μὴ ἀρνητικόν ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸν περιορισμόν, πρέπει νὰ εἶναι $y < \frac{7}{4}$, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ y εἶναι : $y = 0$ ἢ $y = 1$, ὁπότε ἐκ τῆς (2') ἔχομεν ἀντιστοίχως $x = 0$ ἢ $x = 3$.

Ὡστε, αἱ ζητούμεναι ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶναι :

$$(x = 0, y = 0) \quad \text{καὶ} \quad (x = 3, y = 1).$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον : Νά ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, τὸ σύστημα :

$$4|x - 2| + |y - 1| = 5 \quad (1)$$

$$4x - 3y = 6. \quad (2)$$

Λ ύ σ ι ς : Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς τέσσαρας περιπτώσεις :

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 1η : Ἐὰν $x - 2 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left| \begin{array}{l} 4(x - 2) + (y - 1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right. \quad \eta \quad \left| \begin{array}{l} 4x + y = 14 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right., \quad \text{ἐξ οὗ : } \left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2. \end{array} \right.$$

Τὸ ζεῦγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ $x = 3$ καὶ $y = 2$ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x - 2 \geq 0$ καὶ $y - 1 \geq 0$.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 2α : Ἐὰν $x - 2 \geq 0$, $y - 1 < 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left| \begin{array}{l} 4(x - 2) - (y - 1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right. \quad \eta \quad \left| \begin{array}{l} 4x - y = 12 \\ 4x - 3y = 6 \end{array} \right., \quad \text{ἐξ οὗ : } \left| \begin{array}{l} x = \frac{15}{4} \\ y = 3. \end{array} \right.$$

Επειδή η τιμή $y = 3$ δεν ικανοποιεί την $y - 1 < 0$, αί τιμαί $x = -\frac{15}{4}$, $y = 3$ δεν αποτελούν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσης 3η: Ἐάν $x - 2 < 0$, $y - 1 \geq 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -4(x-2) + (y-1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}, \text{ ἐξ οὗ: } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$$

Επειδή η τιμή $y = -2$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη $y - 1 \geq 0$, αί τιμαί $x = 0$, $y = -2$ δεν αποτελούν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσης 4η: Ἐάν $x - 2 < 0$, $y - 1 < 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -4(x-2) - (y-1) = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}, \text{ ἐξ οὗ: } \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Τὸ ζεύγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αί τιμαί $x = \frac{9}{8}$ καὶ $y = -\frac{1}{2}$ ικανοποιούν τὰς συνθήκας $x - 2 < 0$ καὶ $y - 1 < 0$.

Ὅθεν αἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} x = 9/8 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$, αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

- $2|x| - 3 = 0$,
- $\frac{3}{5}|x| - 2x = 7$,
- $\frac{3x+5}{3|x|+5} = -2$,
- $x^2 - 7|x| + 12 = 0$,
- $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$,
- $x^2 - 4x + 2|x| - 3 = 0$,
- $|x|^3 - 5|x^2| - 17|x| + 21 = 0$,
- $|x^3| - |3x^4| + 2 = 0$,
- $|x| - |x-1| = 5 - 3x$,
- $2x - 3|x+3| - 5|x+1| + 4|x-5| + 6 = 0$,
- $|2x-1| - 3|x-1| = 1$,
- $|2x-1| + |x| + |4x+1| - 3|x-3| + 7 = 0$,
- $|x-2| - 3|x-1| + 2x - 5 = 0$,
- $|x-2| + x^2 - 4x + 10 = 0$,
- $|x^2 - 3x + 2| + |x-4| - 13 = 0$,
- $\frac{1}{|x-1|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} = 0$
- $|x^3 - 3x^2 + 2x - 1| = |x^3 - 1| + |3x^3 - 2x|$.

72. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

- $2x + 3|x| = \lambda x + 2$,
- $|x - |x-1|| = \lambda x + 1$,
- $|x-3| - \lambda|x-1| = 2$,
- $\lambda|x| + 3x = -1$,
- $|\mu-1|x + (\mu-1)|x| = \mu^2 - 1$.

73. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις:

- $|3x| - 2 > |x| + 8$,
- $3|x| + 4|x-1| > 5$,
- $2|x| + x > 10$,
- $\frac{3|x|+1}{4} - \frac{4-x}{3} > 1$,
- $|2x+1| + |6x| > 9$,
- $\frac{|2x^2-5|}{3|x|} > \frac{|x|+1}{2}$,
- $|x|^3 - 4x^2 + |x| + 6 > 0$,
- $|x-1| + |x-2| - 1 < 2x$,

9. $|2x+1|-4|x-3|-|x-4|>3$, 10. $|x|+|x-1|+|x-2|>9$,
 11. $||x|+x|-|x|-x|<|x-2|$, 12. $|x-1|+|x-2|+|x-3|<x+1$.

* 74. Νά επιλυθούν και νά διερευνηθούν αί ανισώσεις :

1. $\lambda|x|+2x>2\lambda-3$, 2. $|x-1|+\lambda|x-2|>1$.

75. Νά δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματική τιμὴν τοῦ x ἰσχύει ἡ σχέση :

$$f(x) = \left| x + \frac{5}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x-2| \geq \frac{9}{2}.$$

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης ;

76. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων ;

$$A \equiv \sqrt{|x|+2|x|-4}, \quad B \equiv \sqrt{|x^2+8x-9|-24}.$$

77. Νά επιλυθούν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 2|x|+3|y|=11 \\ 3|x|-5|y|=7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3|x|-2|y|=5 \\ |x|+3|y|=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} |x|-2y=3 \\ x+|y|=6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} |2x-3y|=12 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} |x-1|+|y-3|=4 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} |x|+|y-1|=3 \\ |x|+|y-2|=4 \end{cases}$

78. 'Ομοίως τὰ κάτωθι :

1. $\begin{cases} |x-2y|+|x+y-1|=2 \\ x+3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2|x-y|+|x+y-3|=9 \\ 2x+3y=19 \end{cases}$

79. 'Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$ νά επιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} |x|+|y|=\alpha \\ \alpha y=x^2. \end{cases}$$

80. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} y+y|x|=6 \\ |y|-|x|=2. \end{cases}$$

81. Νά εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη τῶν ἀκεραίων x, y , τὰ ὅποια ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις :

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0 \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$$

82. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} x^2=yz \\ |y+z|>x^2+1. \end{cases}$$

ἐνθα οἱ z, y ἔχουν τὰς ἐλαχίστας ἀπολύτους τιμὰς

83. Νά επιλυθῇ καὶ νά διερευνηθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} |\lambda x+y|=2x \\ 3x+5y=2. \end{cases} \quad \text{ἐνθα } \lambda \in \mathbb{R}.$$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

84. 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τί συμπεραίνετε ἐκ τῆς σχέσεως $|\alpha|+|\beta| \neq 0$;

85. 'Εάν $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$, μὲ $\alpha\beta \neq 0$, ἰσχύουν δὲ αἱ δύο σχέσεις :

$$x = \alpha(|\alpha|+|\beta|) \quad \text{καὶ} \quad y = \beta(|\alpha|+|\beta|),$$

τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x|+|y|}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

καὶ ἀντιστρόφως, αἱ δύο τελευταῖαι συνεπάγονται τὰς δύο πρώτας.

86. 'Εάν $\alpha\beta \neq 0$ και $\alpha^2 < 16\beta^2$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{15}{4}.$$

87. 'Εάν $|\alpha| > 1$, δείξατε ὅτι :

$$\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| - 1 < |\alpha| < \left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right|.$$

88. 'Εάν $(x \neq y) \in \mathbb{R}$ και διάφοροι τοῦ μηδενός, δείξατε ὅτι :

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \left[\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right] = 1.$$

89. 'Εάν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς α ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν $|\alpha| < \sqrt{2} - 1$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{|1-\alpha|}{1-|\alpha|} < \sqrt{2} + 1.$$

90. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbb{R}$, δείξατε ὅτι ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$\alpha = \frac{x}{|y| + |z|}, \quad \beta = \frac{y}{|z| + |x|}, \quad \gamma = \frac{z}{|x| + |y|},$$

ἔπονται αἱ σχέσεις :

$$|\alpha\beta\gamma| \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} \geq 6.$$

91. 'Ἴνα ἡ ἰσότης $|\alpha|x| + \beta x| = |\alpha|x| + \beta x|$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x , πρέπει καὶ ἀρκεῖ : $\alpha + \beta \geq 0$ καὶ $\alpha - \beta \geq 0$.

92. Νά ἐξετάσῃτε, ἐὰν αἱ σχέσεις $\alpha + \beta \geq 0$ καὶ $\alpha - \beta \leq 0$ εἶναι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθήκαι, ἵνα ἡ ἰσότης $|\alpha|x| + \beta x| = |\beta|x| + \alpha x|$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x .

93. 'Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καὶ $|x| = \alpha x + \beta x + 1$, νά ὑπολογισθῇ ὁ x , ὥστε νά εἶναι : $|\alpha + \beta| < 1$.

94. Νά εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ x , εἰς τὰ ὁποῖα ἡ παράστασις :

$$y = |x - 5| + |3x + 1| + |2x - 3|$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x .

95. Δείξατε διὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β ὅτι ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$$

ἔπονται αἱ :

$$|2\beta - 1| < 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἔπεται ἡ πρώτη.

96. 'Ἴνα ἡ ἰσότης $|\alpha|x| + \beta x| = A|x| + Bx$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x , πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$A = \frac{|\alpha + \beta|}{2} + \frac{|\alpha - \beta|}{2} \quad \text{καὶ} \quad B = \frac{|\alpha + \beta|}{2} - \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

97. 'Εάν $x, y, z \in \mathbb{R}$ καὶ $x^2 + y^2 = z^2$, $|x + y| < \frac{z}{|z| + 1}$, τότε : $||x| - |y|| < 3$.

98. Νά εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ x καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ λ , ἵνα ἡ παράστασις : $y = |\lambda^2 x + 1| + |2\lambda x + 3|$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x .

99. Δίδεται ἡ παράστασις : $y = \left| x + \frac{3}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x - 2|$, νά εὑρεθοῦν :

1). Αἱ ἐκφράσεις αὐτῆς ἄνευ τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x .
2). Βάσει τούτων νά εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς, ὅταν τὸ x διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

100. 'Εάν αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^2 + \xi x + \eta = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ οἱ συντελεσταὶ ξ καὶ η πληροῦν τὴν σχέσιν $\xi^2 - 2\eta^2 < \xi|\eta|$, νά δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξίσωσως $\eta x^2 + \xi x + 1 = 0$ πληροῦν τήν : $|\rho_1| - |\rho_2| < 2$.

101. Έκ τῆς σχέσεως: $x_1 = \frac{y_1}{1 + |y_1|}$ ἔπονται αἱ σχέσεις:

$$1 - |x_1| > 0 \quad \text{καὶ} \quad y_1 = \frac{x_1}{1 - |x_1|} \quad \text{καὶ ἀντιστρέφως.}$$

Ἐνῶ ἐκ τῶν σχέσεων:

$$x_1 = \frac{y_1}{1 + |y_1| + |y_2|}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 + |y_1| + |y_2|}$$

ἔπονται αἱ σχέσεις:

$$1 - |x_1| - |x_2| > 0, \quad y_1 = \frac{x_1}{1 - |x_1| - |x_2|}, \quad y_2 = \frac{x_2}{1 - |x_1| - |x_2|} \quad \text{καὶ ἀντιστρέφως.}$$

102. Ἐάν $|\lambda| < 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐξ ἐκάστης τῶν σχέσεων:

$$|x + \lambda y| < |\lambda x + y|, \quad |x| < |y|, \quad |x^2 + \lambda xy| < |\lambda xy + y^2|$$

ἔπονται αἱ ἄλλαι δύο σχέσεις.

103. Ἐάν $\alpha, \beta, v \in \mathbf{Z}$ καὶ $\alpha\beta = -1$, $v \geq 5$, $x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2v} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(v-1)}$,

νὰ δεიχθῇ ὅτι: $40|x| \leq \sqrt[3]{3}$.

104. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἔνθα $\beta < \gamma < 0$. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐάν

$$\rho_1, \rho_2 (\rho_1 > \rho_2) \quad \text{εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, θὰ εἶναι: } |\rho_2| < \rho_1 < 1 + |\beta|.$$

105. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξίσωσεως:

$$\alpha|x|^3 + \beta x^2 + \beta|x| + \alpha = 0,$$

ἵνα αὕτη ἔχη τὸ ἀνώτερον δυνατόν πλῆθος πραγματικῶν ριζῶν.

106. Ἐάν $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$ καὶ $|\alpha| - |\beta| > 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ δὲν δύναται νὰ ἔχη ἀμφοτέρως τὰς ρίζας τῆς ἀκεραίας.

107. Δείξατε ὅτι διὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β, γ ἀπὸ τὰς σχέσεις: $2|\beta| \leq \alpha \leq \gamma$, ἔπεται ὅτι: $\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$. Κατόπιν τούτου δείξατε ὅτι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦν-
τες τὰς ἄνω σχέσεις εἶναι μόνον οἱ $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, ἐφ' ὅσον $\alpha\gamma = 1 + \beta^2$.

108. Ἐστω β πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ τοιοῦτος, ὥστε $|\beta| < 1$. Ἐστω ἐπίσης x πραγματικὸς ἀριθμὸς κείμενος ἀλγεβρικῶς μεταξύ 0 καὶ β .

Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\left| \frac{\beta - x}{1 + x} \right| < |\beta|$.

109. Ἐάν ξ_1, ξ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$ μὲ πραγματικὸς συντελε-
στὰς καὶ ἰσχὺ: $0 < |\xi_1| < |\xi_2|$,

νὰ δειχθῇ ὅτι: $2\alpha^2 - \beta - \left| \frac{\beta}{2} \right| < \left| \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \right|^2 < 2\alpha^2 - \beta$.

110. Ἐάν $v > 0$ καὶ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι:

$$\left| \alpha + \beta + \frac{v - \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right| \geq |\sqrt{3}v| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \left| \alpha + \beta + \gamma + \frac{v - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \right| \geq \left| \sqrt{\frac{8v}{3}} \right| \quad (2)$$

111. Δίδονται τὰ τριώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \mu\acute{\epsilon} \quad |\alpha'| < \alpha.$$

Ἐάν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) αἱ ρίζαι τοῦ $f(x)$ καὶ ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$, νὰ ἀποδει-
χθῇ ἡ ἰσοδυναμία:

$$(|f(x)| \geq \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}) \iff (x_1 = \rho_1 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \rho_2).$$

112. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$x^2 + x + \lambda|x| + 1 = 0.$$

Νὰ ὀρισθῇ ὁ λ ὥστε αὕτη νὰ ἔχη τέσσαρας ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

113. 'Εάν $x, y, z \in \mathbf{R}$ νά δειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως :

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 \leq 4x^2z^2 \quad (1)$$

ἐπὶ τὰς αἰσχέσεις :

$$||x| - |y|| \leq |z| \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad |z| \leq |x| + |y| \quad (3)$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐπεται ἡ πρώτη.

114. 'Εάν $x, y, z \in \mathbf{R} - \{0\}$ καὶ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$x^2y^2 + x^2z^2 = y^2z^2 \quad \text{καὶ} \quad x^2 + z^2 > |xz| + |zy|,$$

νά δειχθῇ ὅτι :

$$1) \quad |x| < |y| < |z|$$

$$2) \quad \frac{x^2 + y^2}{z^2} < \frac{|x| + |y|}{|z|}.$$

115. Τοῦ x λαμβάνοντος τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος μὲ ἄκρα τὰ α καὶ γ νά εὑρεθῇ τὸ

$$\text{σημεῖον τῆς παραστάσεως : } y = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{|\gamma - x|}} + \frac{\beta - \gamma}{\sqrt{|\alpha - x|}} + \frac{\gamma - \alpha}{\sqrt{|\beta - x|}}, \quad \text{εἰς τὰς κάτωθι}$$

περιπτώσεις :

$$1). \quad \text{Διὰ } x < \alpha < \beta < \gamma$$

$$2). \quad \text{Διὰ } \alpha > \beta > \gamma > x.$$

'Υπόδειξις : Θέσατε $\sqrt{|\alpha - x|} = k$, $\sqrt{|\beta - x|} = \lambda$, $\sqrt{|\gamma - x|} = \mu$ καὶ ἐκφράσατε τὴν παράστασιν y συναρτήσει τῶν k, λ, μ .

116. 'Εάν $|\alpha| + |\beta| = 1$, ἔνθα $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\left\{ |\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \right\}^2 + \left\{ |\beta| + \left| \frac{1}{\beta} \right| \right\}^2 \geq \frac{25}{2}.$$

117. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ μὲ $\alpha \gamma \neq 0$ καὶ $|\rho_1| \neq |\rho_2|$,

ἔνθα ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως. 'Εάν $M \equiv \max \left\{ \left| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right|, \left| \frac{\rho_2}{\rho_1} \right| \right\}$, δείξατε ὅτι :

$$1). \quad 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right| - 1 < M < 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$$

$$2). \quad 1 < \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|$$

$$3). \quad \text{Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων εἶναι } \beta \neq 0.$$

118. Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 2|x-1| + |y+1| &= 7 \\ |x-2| + |y| + x-y &= 4. \end{aligned}$$

119. 'Ομοίως τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{z^2}{2|yz| - y^2} \\ 0 < x &\leq \frac{3}{3 + |y + 2|}. \end{aligned}$$

120. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$(x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2$$

$$16z^2 - 56 \left| \frac{x}{y} \right| + 45 < 0$$

$$x^2 + y^2 + |xy| < 64.$$

121. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha|x|^3 + \beta|x|^2 + \beta|x| + \alpha = 0,$$

δείξατε ὅτι αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων :

$$|x| + 1 = 0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \alpha|x|^2 + (\beta - \alpha)|x| + \alpha = 0 \quad (2).$$

'Επιλύσατε τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

122. Έάν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}$, δείξτε ότι :

$$(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0 \iff \min(\alpha, \beta) \leq x \leq \max(\alpha, \beta).$$

123. Έάν $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ είναι οιαδήποτε κλάσματα με $\beta_k > 0$ ή $\beta_k < 0$

$\forall k = 1, 2, \dots, n$, νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\min\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} \leq \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

124. Έάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καὶ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{|\alpha| - |\beta|} \quad \text{καὶ} \quad |\alpha| > |\beta| > 0,$$

νά αποδειχθῇ ὅτι θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ σχέσεις :

$$\alpha = \frac{\beta\gamma}{|\gamma| - |\beta|} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{\alpha\gamma}{|\alpha| + |\gamma|}.$$

125. Έάν οἱ x, y, ω πραγματικοὶ ἀριθμοί, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\left|\frac{1}{y + \omega}\right| + \left|\frac{1}{\omega + x}\right| + \left|\frac{1}{x + y}\right| \geq \frac{9}{2} \left(\frac{1}{|x| + |y| + |\omega|}\right).$$

126. Νά λυθῇ τὸ σύστημα :

$$3x - 5|y| = 1$$

$$x|y| + y|x| = 4.$$

127. Έάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$$

$$xyz < 0 \quad \text{καὶ}$$

$$x^{2v+1} - y|y| = 0,$$

νά αποδειχθῇ ὅτι οἱ x, y εἶναι θετικοί.

128. Έάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦν τὴν σχέσιν :

$$|\alpha + \beta| + |\beta + \gamma| + |\gamma + \alpha| \geq \alpha\beta\gamma (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|),$$

νά αποδειχθῇ ὅτι θὰ πληροῦν καὶ τὴν σχέσιν :

$$\alpha\beta\gamma \leq 2.$$

129. Έάν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως : $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$, τοιαύτη ὥστε $|\xi| > 1$, εἶναι δὲ ἐπὶ πλέον : $|\alpha_0| > \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|)$, τότε δείξτε ὅτι :

$$1 < |\xi| < 2.$$

130. Έάν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου : $x^2 - 2\alpha x + \beta$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\beta \neq 0$ καὶ ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι του μὲ $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, θέσωμεν δέ :

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \quad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \quad \text{καὶ} \quad \lambda = 2\left|\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right|,$$

νά αποδειχθῇ ὅτι :

α). Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ ἄνιστοι.

β). Ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$1. \quad \lambda - 1 < M < \lambda, \quad 2. \quad \lambda > 2, \quad 3. \quad \frac{1}{\lambda} < m < \frac{1}{\lambda - 1}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

I. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 50. Έννοια του πολυωνύμου. — Έστω $\mathbf{R}$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἓν σύμβολον x , καλούμενον «**μεταβλητὴ**»^{*}), τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὴν οὐδένα πραγματικὸν ἀριθμὸν παριστᾷ, μετὰ τοῦ ὁποῖου ὅμως σημειοῦμεν πράξεις τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{R}$, ὡς ἑάν ἦτο καὶ τὸ x εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ γενικώτερον εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς. Οὕτως ἡ παράστασις x^k , ὅπου k φυσικὸς ἀριθμὸς, θὰ συμβολίζῃ ἀπλῶς μίαν μορφήν γινομένου $xx \dots x$, ὅπου τὸ x θὰ περιλαμβάνεται ὡς παράγων k φορές, ὁμοίως ἡ παράστασις ax^k , ὅπου $a \in \mathbf{R}$ καὶ $k \in \mathbf{N}$, θὰ συμβολίζῃ μίαν μορφήν γινομένου τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a ἐπὶ τὸ σύμβολον x^k . Ὅριζομεν ἀκόμη, ὅτι τὸ $x^0 = 1$, ὁπότε $ax^0 = a$ διὰ κάθε $a \in \mathbf{R}$. Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν κάτωθι ὅρισμόν :

Καλεῖται **ἀκέραιον πολυώνυμον** τοῦ x , κάθε ἔκφρασις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (1)$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ n φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν. Οἱ $\alpha_k \in \mathbf{R}$ καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολυωνύμου. Τὸ α_0 θεωρεῖται ὡς συντελεστὴς τοῦ x^0 . Αἱ ἐκφράσεις τῆς μορφῆς $\alpha_k x^k$, ἔνθα k φυσικὸς ἢ μηδέν, καλοῦνται **ἀκέραια μονώνυμα** καὶ ἀποτελοῦν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

Ἡ παράστασις (1) εἶναι ἓν νέον σύμβολον^{**}), δηλ. δέν σημαίνει πρόσθεσιν, οὔτε ἄλλην τινὰ πρᾶξιν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) καὶ τῆς μεταβλητῆς x . Ἡ σημασία τῆς παραστάσεως (1), δηλ. τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου, θὰ προκύψῃ κατωτέρω κατόπιν ὀρισμένων ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας θὰ ὀρίσωμεν ἐπ' αὐτῆς.

Κατωτέρω ἀντὶ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x θὰ λέγωμεν ἀπλῶς καὶ πολυώνυμον τοῦ x .

Διὰ τὰ πολυώνυμα τῆς μεταβλητῆς x μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς θὰ χρησιμοποιώμεν τοὺς συμβολισμοὺς : $f(x), \varphi(x), \pi(x), g(x), \dots$

^{*} Διὰ τοῦ ὅρου «**μεταβλητὴ**» x ἐννοοῦμεν ἓν σύμβολον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὸ τυχὸν στοιχεῖον ἐνὸς συνόλου ἀριθμῶν. Ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ τῆς μεταβλητῆς x καὶ τοῦ ἀγνώστου x , τὸν ὁποῖον συναντῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις. Ἡ μὲν μεταβλητὴ x εἶναι ἀπλῶς ἓν σύμβολον καὶ ἔπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμὴν, ἐνῶ ὁ ἀγνώστος x ἔχει προσδιοριστέαν τιμὴν.

^{**} Τὸ x κατὰ τὴν παράστασιν (1) ἐνὸς πολυωνύμου παίζει τὸν ρόλον ἐνὸς ἀκαθορίστου συμβόλου, ἄλλως ἀκαθορίστου μεταβλητῆς.

Οὕτω θὰ γράψωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (2)$$

ἐνθα τὸ σύμβολον « $\equiv$ » σημαίνει ὅτι διὰ τοῦ $f(x)$ παρίσταται τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ β' μέλος.

Ἐὰν $\alpha_n \neq 0$, τότε ὁ ἐκθέτης n τῆς μεταβλητῆς x καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ πολυωνύμου (2). Ὡστε :

Βαθμὸς ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς x , τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Οὕτω τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, ὁ βαθμὸς εἶναι 3, ἐνῶ τοῦ πολυωνύμου $(x) \equiv 2x^2 - \sqrt{3}x + 1$, ὁ βαθμὸς εἶναι 2.

Ἐὰν $n = 0$, τότε ἔχομεν τὸ **σταθερὸν πολυώνυμον**, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν σταθερὸν μόνον ὅρον καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἐφ' ὅσον ὁ σταθερὸς ὅρος $\alpha_0 \neq 0$, θὰ ὀμιλῶμεν περὶ πολυωνύμου **βαθμοῦ μηδέν**, δηλαδὴ κάθε σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς α θεωρεῖται ὡς πολυώνυμον τοῦ x , βαθμοῦ μηδέν, ἐφ' ὅσον $\alpha \neq 0$. Οὕτω, λ.χ., ὁ ἀριθμὸς 4 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ μηδέν, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $4 \equiv 4x^0$.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ (2) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, τότε τὸ $f(x)$ λέγεται **πλήρες πολυώνυμον** τοῦ x , ἄλλως λέγεται **ἐλλιπές**.

Τὸ πολυώνυμον νιοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n, \quad \alpha_n \neq 0 \quad (3)$$

δηλ. κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x .

Κάθε πολυώνυμον δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ πέραν τοῦ βαθμοῦ του, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐπισυνάψωμεν ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον (3), βαθμοῦ n , δύναται νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \dots + \alpha_{n+k} x^{n+k} \quad (4)$$

μὲ $\alpha_n \neq 0$ καὶ $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = \alpha_{n+k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δύο πολυώνυμα μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος ὁρῶν, προσθέτοντες εἰς τὸ μικροτέρου βαθμοῦ πολυώνυμον ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου (2) εἶναι μηδέν, τότε τὸ $f(x)$ καλεῖται **μηδενικὸν πολυώνυμον**. Ὡστε : Τὸ **ἀκέραιον πολυώνυμον** :

$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots, n$
καλεῖται **μηδενικὸν πολυώνυμον** ἢ **πολυώνυμον ἐκ ταυτότητας ἴσον** πρὸς μηδέν ἐν $\mathbb{R}$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πάντες οἱ συντελεσταὶ του εἶναι μηδέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν :

$$f(x) \equiv 0$$

καὶ ἀναγινώσκομεν : « $f(x)$ ἐκ ταυτότητας ἴσον πρὸς μηδέν ».

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ὁ ὀρισμὸς τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου δίδεται συντόμως οὕτω :

Ἐὰν $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$, τότε :

$$f(x) \equiv 0 \iff \alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.$$

Πολύωνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα πρὸς μηδὲν οὐδένα βαθμὸν ἔχουν.

Ἐὰν τὸ $f(x)$ δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον γράφομεν : $f(x) \not\equiv 0$.

§ 51. Ἀλγεβρα (λογισμὸς) τῶν πολυωνύμων.— Ἀς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x με συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν με $R[x]$: τὰ στοιχεῖα ἐξ ὧν τὸ $R[x]$ συνίσταται, δηλ. τὰ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον μέ : $f(x)$, $\varphi(x)$, $\pi(x)$, ...

Ὡς γνωστὸν (§ 8) ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη με τὴν ἔννοιαν μιᾶς σχέσεως βασικῆς ἰσότητος. Ἡ βασικὴ ἰσότης ὀρίζεται ἐν $R[x]$ οὕτω :

Ἐὰν $f(x)$, $\varphi(x) \in R[x]$ καὶ εἶναι :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θὰ λέγωμεν ὅτι : τὰ δύο πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ εἶναι ἴσα, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὁμοβαθμίων ὄρων εἶναι ἴσοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x)$$

καὶ ἀναγινώσκομεν : « $f(x)$ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ $\varphi(x)$ ».

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ἡ βασικὴ ἰσότης ἐν $R[x]$ ὀρίζεται συντόμως οὕτω :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \iff \alpha_k = \beta_k \text{ διὰ κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Προφανῶς δύο μηδενικά πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $R[x]$ δυνάμεθα τώρα νὰ ὀρίσωμεν πράξεις ὡς ἐξῆς : Ἐστωσαν $f(x)$, $\varphi(x) \in R[x]$, τότε *) :

α). Καλοῦμεν **ἄθροισμα** τῶν πολυωνύμων $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ $\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ : $f(x) + \varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον :

$$(\alpha_n + \beta_n) x^n + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_0 + \beta_0).$$

* Δεχόμεθα, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι τὰ πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὄρων. Ἐὰν τὰ $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὄρων, προσθέτομεν εἰς τὸ πολυώνυμον με ὀλιγωτέρους ὄρους, τοὺς ἀπαιτούμενους ὄρους με συντελεστὰς μηδέν.

β). Καλοῦμεν **ἀντίθετον** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ: $-\varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον :

$$(-\beta_n) x^n + (-\beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (-\beta_1) x + (-\beta_0)$$

καὶ γράφομεν :

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_n x^n - \beta_{n-1} x^{n-1} - \dots - \beta_1 x - \beta_0.$$

γ). Καλοῦμεν **διαφορὰν** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ ἀπὸ τοῦ πολυώνυμου $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ: $f(x) - \varphi(x)$, τὸ πολυώνυμον $f(x) + [-\varphi(x)]$. Ἦτοι ἡ διαφορὰ $f(x) - \varphi(x)$ δύο πολυωνύμων $f(x)$, $\varphi(x)$ ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα τοῦ $f(x)$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

Δυνάμει τῶρα τῶν α καὶ β ἡ διαφορὰ $f(x) - \varphi(x)$ εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$$(\alpha_n - \beta_n) x^n + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - \beta_1) x + (\alpha_0 - \beta_0).$$

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων προκύπτουν ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

1. Τὸ σύνολον τῶν πολυωνύμων $R[x]$ εἶναι «κλειστόν» ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, δηλ. τὸ ἄθροισμα δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ $R[x]$ ἀνήκει εἰς τὸ $R[x]$.

2. Τὸ πολυώνυμον συμβολίζει ἓν ἄθροισμα ὄρων τῆς μορφῆς $\alpha_k x^k$.

3. Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ιδιότητα, ἥτοι: ἔὰν $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύουν :

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_2(x) + \pi_1(x) \text{ καθὼς καὶ}$$

$$\pi_1(x) + [\pi_2(x) + \pi_3(x)] = [\pi_1(x) + \pi_2(x)] + \pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ἥτοι, ἔὰν $\varphi(x) \equiv 0$, τότε ἰσχύει :

$$f(x) + \varphi(x) \equiv f(x) + 0 \equiv f(x) \text{ διὰ κάθε } f(x) \in R[x].$$

Παρατήρησις : Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Οὕτω :

Ἐὰν k εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $g(x)$ βαθμῶν n καὶ m ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$k \leq \max(n, m).$$

Τὸ ὅτι οὗτος δύναται νὰ εἶναι μικρότερος φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἄν $f(x) \equiv 5x^4 + 4x^3 - 3x + 1$ καὶ $g(x) \equiv -5x^4 + 3x^3 - 2x + 2$, τότε εἶναι :

$$f(x) + g(x) \equiv 7x^3 - 5x + 3.$$

δ). Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο μονωνύμων αx^n καὶ βx^m τὸ μονώνυμον $\alpha \beta x^{n+m}$, ἥτοι :

$$(\alpha x^n) \cdot (\beta x^m) = \alpha \beta x^{n+m}.$$

ε). Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x)$, $g(x)$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ $f(x) \cdot g(x)$, τὸ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰ $f(x)$ καὶ $g(x)$ βάσει τοῦ «*εἰςμεριστικοῦ νόμου*», ἥτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν

όλους τούς όρους του $f(x)$ επί έκαστον όρον του $g(x)$ καί προσθέσωμεν όλα τά προκύπτοντα μερικά γινόμενα : Ούτως, εάν

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \quad \text{καί}$$

$$g(x) \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_\mu x^\mu,$$

τότε τò γινόμενον αὐτῶν εἶναι τò πολυώνυμον :

$$\begin{aligned} \pi(x) \equiv f(x) \cdot g(x) &= \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) x + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0) x^2 + \\ &+ (\alpha_0 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_0) x^3 + \dots + \alpha_n \beta_\mu x^{n+\mu}. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι : ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτουν τῶρα τὰ ἑξῆς :

1. Τò σύνολον τῶν πολυωνύμων $R[x]$ εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, δηλ. τò γινόμενον δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ $R[x]$ ἀνήκει πάντοτε εἰς τὸ $R[x]$.

2. Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ιδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ἥτοι ἐὰν $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύει :

$$[\pi_1(x) + \pi_2(x)] \pi_3(x) = \pi_1(x) \pi_3(x) + \pi_2(x) \pi_3(x).$$

3. Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ιδιότητα, ἥτοι ἐὰν $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύουν :

$$\pi_1(x) \cdot \pi_2(x) = \pi_2(x) \cdot \pi_1(x)$$

$$\pi_1(x) [\pi_2(x) \pi_3(x)] = [\pi_1(x) \pi_2(x)] \cdot \pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ εἶναι τò πολυώνυμον $f(x) \equiv 1$, ἥτοι ἰσχύει :

$$f(x) \cdot \phi(x) \equiv 1 \cdot \phi(x) \equiv \phi(x) \quad \text{διὰ κάθε } \phi(x) \in R[x].$$

στ'). Καλοῦμεν **ν-οστήν δύναμιν** ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0$ καὶ συμβολίζομεν ταύτην μὲ $[f(x)]^n$, τò πολυώνυμον :

$$[f(x)]^n \stackrel{\text{opσ}}{=} f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x),$$

ὅπου οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι n τὸ πλῆθος.

Συνέπειαι τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ εἶναι :

$$1. [f(x)]^n \cdot [f(x)]^m = [f(x)]^{n+m}$$

$$2. [[f(x)]^m]^n = [f(x)]^{mn}$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]^n = [f(x)]^n \cdot [g(x)]^n.$$

Παρατήρησις : Τò σύνολον $R[x]$ τῶν πολυωνύμων μὲ πραγματικούς συντελεστὰς ἐφωδιασμένον μὲ δύο πράξεις : τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς αὗται ὠρίσθησαν ἀνωτέρω καὶ αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς προαναφερθείσας ιδιότητας, ἀποτελεῖ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μιᾶς θεμελιώδους ἀλγεβρικής ἐννοίας, τῆς τοῦ **δακτυλίου**, ἐννοίαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

‘Ο δακτύλιος οὗτος λέγεται «πολυωνυμικός δακτύλιος» καὶ συμβολίζεται με $R[x]$.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω δύο θεωρήματα :

§ 52. Θεώρημα I.—Ἐὰν $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε ἀναγκαίᾳ καὶ ἰκανῇ συνθήκῃ διὰ νὰ εἶναι $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0$ εἶναι $f(x) \equiv 0$.

Ἀπόδειξις : α). Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαίᾳ. Ἐστω ὅτι $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0$ καὶ $f(x) \not\equiv 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Ἐφ’ ὅσον $f(x) \not\equiv 0$, ὑπάρχει συντελεστής αὐτοῦ $\alpha_v \neq 0$ (ν βαθμὸς τοῦ $f(x)$). Ἐπίσης ἐφ’ ὅσον $\varphi(x) \not\equiv 0$, ὑπάρχει συντελεστής αὐτοῦ $\beta_\mu \neq 0$ (μ βαθμὸς τοῦ $\varphi(x)$). Τότε τὸ γινόμενον $f(x) \cdot \varphi(x)$ θὰ περιλαμβάνῃ ὡς ὅρον τὸν $\alpha_v \beta_\mu x^{v+\mu}$ με $\alpha_v \beta_\mu \neq 0$ καὶ ἐπομένως $f(x) \cdot \varphi(x) \not\equiv 0$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα $f(x) \equiv 0$.

β). Ἡ συνθήκη εἶναι ἰκανή. Πράγματι, ἂν $\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ $f(x) \equiv 0$, τότε : $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0 \cdot (\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0) \equiv (0 \cdot \beta_\mu) x^\mu + (0 \cdot \beta_{\mu-1}) x^{\mu-1} + \dots + (0 \cdot \beta_1) x + (0 \cdot \beta_0) \equiv 0 \cdot x^\mu + 0 \cdot x^{\mu-1} + \dots + 0x + 0 \equiv 0$.

§ 53. Θεώρημα II.—Ἐὰν $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x) \in R[x]$ καὶ εἶναι $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε διὰ νὰ εἶναι $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv g(x) \cdot \varphi(x)$, πρέπει καὶ ἄρκεῖ νὰ εἶναι $f(x) \equiv g(x)$.

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἡ $f(x) \cdot \varphi(x) \equiv g(x) \cdot \varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$f(x)\varphi(x) - g(x)\varphi(x) \equiv 0$$

$$\eta \quad \varphi(x) \cdot [f(x) - g(x)] \equiv 0$$

καὶ ἐπειδὴ $\varphi(x) \not\equiv 0$, κατὰ τὸ θεώρημα I, ἡ τελευταία σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$f(x) - g(x) \equiv 0, \quad \text{δηλαδή:} \quad f(x) \equiv g(x).$$

Ἀξιόλογος σημείωσις : Ἐξ ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε συμπερασμάτων συνάγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων $R[x]$ με συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πράξεις, τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ιδιότης. Ἐξ ἄλλου (θεώρ. I) γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσον με τὸ μηδὲν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἓν τούλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Πάντα ταῦτα χαρακτηρίζουν τὸ σύνολον $R[x]$ τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς μίαν «ἀκεραίαν περιοχὴν». Περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ δακτυλίου καὶ τῆς ἀκεραίας περιοχῆς θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

§ 54. Ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου.—Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν § 50 εἰς ἓν πολυώνυμον $f(x)$ σημειοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι, ἂν τὸ x ἀντικατασταθῇ με τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α , δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν, ὅποτε προκύπτει εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ $f(\alpha)$ καὶ καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διὰ $x = \alpha$. Οὕτως, ἔαν

$$f(x) \equiv 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x - 5$$

$$\text{θὰ εἶναι:} \quad f(2) = 2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 - 5 = -3.$$

Ὁ ἀριθμὸς -3 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τὴν τιμὴν $x=2$. Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον διὰ $x=3$ δίδει: $f(3)=46$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος (γινομένου) δύο πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα (γινόμενον) τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολυωνύμων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων προκύπτει ὅτι: **δύο ἐκ ταυ-τότητος ἴσα πολυώνυμα ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς**. Πράγματι, ἐάν

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

καὶ $f(x) \equiv \varphi(x)$, ὅτε $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, $\dots$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_0 = \beta_0$ (βλ. § 51) θὰ εἶναι καὶ: $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν α , διότι:

$$f(\alpha) \equiv \alpha_n \alpha^n + \alpha_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \alpha_1 \alpha + \alpha_0 =$$

$$= \beta_n \alpha^n + \beta_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \beta_1 \alpha + \beta_0 \equiv \varphi(\alpha).$$

Τέλος, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου, προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμη-τικὴ τιμὴ παντὸς μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πάντοτε πρὸς τὸ μηδέν, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x .

Παρατήρησις: Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ σύμβολον x ἐν τῷ πολυωνύ-μῳ $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ δύναται νὰ ἀντί-κατασταθῇ δι' οἰοῦνδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, δι' ὃ καὶ καλεῖται μεταβλητὴ τοῦ πολυωνύμου. Διὰ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν x ἀντιστοιχεῖ εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς $y = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ἥτοι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ὀρίζει μίαν συνάρτησιν, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ $f(x)$, μὲ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν $\mathbf{R}$, μὲ τύπον:

$$y = f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (1)$$

Αἱ συναρτήσεις τοῦ τύπου (1) καλοῦνται **πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις ἢ ἀκέ-ραιοι ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ x** .

Ὅρίζομεν ὅτι δύο πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ λέγονται ἐκ ταυτότητος ἴσαι καὶ σημειοῦμεν $f(x) \equiv \varphi(x)$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἐάν αὗται εἶναι ἴσαι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$.

Ἐάν βεβαίως δύο πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ μὲ πραγματικούς συντελε-στὰς εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἔχουν δηλαδὴ τοὺς αὐτοὺς συντελεστὰς, ταῦτα ὀρίζουν ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$ καὶ ἴσας πολυωνυμικὰς συναρτήσεις.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις θὰ γίνεταί ἡ χρῆσις τῆς ἐκφράσεως: «*Θεωροῦμεν τὴν ἀπει-κόνησιν*

$$f: x \longrightarrow \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

τοῦ $\mathbf{R}$ ἐν τῷ $\mathbf{R}$ ». Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως θὰ ἐννοῶμεν ὅτι θεωροῦμεν τὴν συ-νάρτησιν f ὠρισμένην ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}$ μὲ τιμὰς ἐν $\mathbf{R}$, ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ διὰ } x \in \mathbf{R}.$$

§ 55. Έννοια της ρίζης ενός πολυωνύμου. — Έστω τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (1)$$

τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν διὰ $x = \rho$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἤτοι $f(\rho) = 0$, τότε ὁ ρ καλεῖται **ρίζα** τοῦ πολυωνύμου (1).

Π.χ. τοῦ πολυωνύμου $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, -2, -3, διότι εἶναι : $f(1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(-3) = 0$.

Ἐὰν ἔν ἀκέραιον πολυώνυμον ἐξισώσωμεν μὲ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν μίαν **ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν**.

Οὕτως, ἐκ τοῦ πολυωνύμου (1) ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν n βαθμοῦ :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0. \quad (2)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x δὲν εἶναι πλέον ἡ *μεταβλητή*, ἀλλὰ μία ρίζα τοῦ πολυωνύμου (1). Αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2). Ἀξίζει νὰ τονισθῇ ὅτι εἶναι ἐντελῶς διάφορος ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ ἀπὸ τὴν ἔννοιαν $f(x) \equiv 0$ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ x εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ καὶ ἐπομένως ἔχει προσδιοριστέαν τιμὴν, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ x εἶναι ἡ «μεταβλητὴ» τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ καὶ ἐπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμὴν.

Ἐν πολυώνυμον ἔχει ἔννοιαν ἀκόμη καὶ ἂν τὸ σύμβολον x ἀντικατασταθῇ μὲ μιγαδικούς ἀριθμούς, συνεπῶς τὸ πολυώνυμον (1) δυνατόν νὰ ἔχη καὶ μιγαδικὰς ρίζας.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + 1$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμούς :

$$-1, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν τῆς ρίζης :

Καλεῖται ρίζα ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \not\equiv 0$ κάθε ἀριθμὸς πραγματικὸς ἢ μιγαδικός, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ μηδενίζει.

Συντόμως ὁ ὅρισμός οὗτος δίδεται ὡς ἐξῆς :

$$\text{Ὁ } \rho \text{ εἶναι ρίζα τοῦ } f(x) \iff f(\rho) = 0.$$

ορσ

Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, πραγματικὴ ἢ μιγαδική, λέγεται **ἀλγεβρικὸς ἀριθμός**. Ἀκριβέστερον : *Εἰς ἀριθμὸς $\zeta \in \mathbb{C}$ λέγεται ἀλγεβρικὸς ὑπεράνω τοῦ $\mathbb{R}$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, ἥτοι $f(x) \in R[x]$, μὲ $f(\zeta) = 0$* . Εἰς ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸς, καλεῖται **ὑπερβατικός**. Ὑπερβατικός ἀριθμός εἶναι, λ.χ., ὁ γνωστὸς ἀριθμός $\pi = 3,14159 \dots$ ὡς καὶ ὁ ἀριθμός e , περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος εἰς ἐπόμενον κεφάλαιον.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἄρρητοι, ἀλλὰ δὲν ἔπεται ὅτι κάθε ἄρρητος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ π καὶ e .

Εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἀλγεβραν καὶ τὴν Θεωρίαν τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 56. Θεώρημα τοῦ D' Alembert. — Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς (ἢ μιγαδικούς) ἀριθμούς, βαθμοῦ $n \geq 1$, ἔχει ἐντὸς τοῦ συνόλου $\mathbb{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μίαν τοῦλάχιστον ρίζαν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας*. Τοῦτο διευτυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ D' Alembert κατὰ τὸ 1764, ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις ὑπ' αὐτοῦ δὲν ἦτο αὐστηρά. Ἡ πρώτη αὐστηρὰ ἀπόδειξις ἐγένετο τὸ 1799 παρὰ τοῦ Gauss. Ἐκτοτε ἐδόθησαν καὶ ἄλλαι ἀποδείξεις (Cauchy, κ.ἄ.).

Τὸ θεώρημα τοῦ D' Alembert ἐξασφαλίζει μὲν τὴν ὑπαρξιν ρίζης (πραγματικῆς ἢ μιγαδικῆς) διὰ κάθε πολυώνυμον βαθμοῦ $n \geq 1$, δὲν παρέχει ὁμως μέθοδον εὐρέσεως ταύτης.

Ἡ ἀναζήτησις μεθόδων διὰ τὴν εὐρεσιν ριζῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως n βαθμοῦ συνίσταται εἰς τὴν εὐρεσιν γενικῶν τύπων, διὰ τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ἐκφράζονται συναρτήσῃ τῶν συντελεστῶν αὐτῆς διὰ τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ριζικῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὰς ἐξισώσεις μέχρι τετάρτου βαθμοῦ εἶναι δυνατόν νὰ εὐρεθοῦν τοιοῦτοι τύποι. Ὁ Abel ἀπέδειξεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν, εἰς κάθε περίπτωσιν, νὰ εὐρεθοῦν γενικοὶ τύποι διὰ τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ μεγαλύτερου τοῦ τετάρτου.

§ 57. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων — Μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.

Ἡ ἰσότης τῶν συντελεστῶν τῶν ὁμοβαθμίων ὄρων δύο ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων (§ 51) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς ἐνὸς πολυωνύμου εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πληροῖ τοῦτο ὠρισμένης συνθήκας. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς **μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν**. Ὡς ἴδωμεν πῶς ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος αὕτη εἰς συγκεκριμένα παραδείγματα :

Ἐφαρμογὴ 1η : Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν α, β, γ οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma + 12)x - 6\gamma.$$

Λύσις : Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ -(\gamma + 12) &= -13 \\ -6\gamma &= \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ \gamma + 12 &= 13 \\ 6\gamma &= -\beta \end{aligned} \right\}.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν :

$$\alpha = -1, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 1.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ εὐρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ τρίτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδέν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα :

$$f(x) - f(x-1) \equiv x^2.$$

Ἀκολουθῶς, βάσει αὐτοῦ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2, \quad (v \in \mathbb{N}).$$

Λύσις : Τὸ ζητούμενον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς : $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ προσδιοριστέοι συντελεσταί. Ἐπειδὴ $f(0) = 0$ θὰ πρέπει $\delta = 0$ καὶ τὸ πολυώνυμον γίνεται : $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.

Λόγω τῆς ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &\equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv \\ &\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2. \end{aligned}$$

Ἐξ αὐτῆς, συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων (§ 51), προκύπτει :

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 3\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} \alpha &= 1/3 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= 1/6. \end{aligned}$$

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι :

$$f(x) \equiv \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ταυτότητος $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ εὐρίσκομεν, θέτοντες διαδοχικῶς $x = 1, x = 2, \dots, x = v$:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ f(v) - f(v-1) &= v^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν :

$f(v) - f(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2$, ἢ ἐπειδὴ $f(0) = 0$ ἔχομεν τελικῶς :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = f(v) = \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{6} v = \frac{v(v+1) \cdot (2v+1)}{6}.$$

Ἐφαρμογή 3η : Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα :

$$\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad v \in \mathbb{N}, \quad \alpha_v \beta_v \neq 0$$

ἀνεξάρτητον τοῦ x , εἶναι ἡ : $\frac{\alpha_v}{\beta_v} = \frac{\alpha_{v-1}}{\beta_{v-1}} = \dots = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$.

Ἀπόδειξις : Ἐστω ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x , ἥτοι, ὅτι ἰσοῦται, οἰουδήποτε ὄντος τοῦ x , πρὸς ἀριθμὸν k . Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} \equiv k \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \eta \quad \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 &\equiv k \beta_v x^v + k \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \\ &+ k \beta_1 x + k \beta_0. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοτήτας :

$$\alpha_n = k\beta_n, \alpha_{n-1} = k\beta_{n-1}, \dots, \alpha_1 = k\beta_1, \alpha_0 = k\beta_0.$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \dots = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}. \quad (2)$$

Ἦτοι, ἐδείχθη ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἰκανή. Πράγματι· ἂν ἰσχύῃ ἡ (2) καὶ καλέσωμεν k τοὺς ἴσους λόγους, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_n = k\beta_n, \alpha_{n-1} = k\beta_{n-1}, \dots, \alpha_1 = k\beta_1, \alpha_0 = k\beta_0.$$

Τὸ δοθὲν κλάσμα τότε γράφεται :

$$\frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{k(\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0)}{\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} = k,$$

ἦτοι, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x καὶ ἴσον πάντοτε πρὸς $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$(2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha) \text{ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.}$$

132. Ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν λ καὶ μ διὰ τὰς ὁποίας τὸ πολυώνυμον :

$$(\lambda - 1)x^2 + (2\mu + 2)x + (\lambda + \mu - 3) \text{ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ;}$$

133. Ἐάν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, δείξτε ὅτι τὸ $f(x) \equiv (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)$ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

134. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ , ἵνα τὸ πολυώνυμον $2x^2 + 4x + 5$ ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος μὲ : $\alpha(x + 2)(x + 3) + \beta x(x - 1) + \gamma$.

135. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4 \text{ εἶναι τετράγωνον τοῦ τριωνύμου } x^2 - x + \gamma.$$

136. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x ;

$$\alpha) \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 10x + 4}, \quad \beta) \frac{4x^2 - 5x - 1}{8x^2 - 10x + 1}, \quad \gamma) \frac{2x^3 - 6x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + x - 1}.$$

137. Προσδιορίσατε τὰ λ, μ , ἵνα τὰ κλάσματα :

$$\alpha) \frac{(\lambda - 1)x^2 + (\mu + 1)x + 1}{x^2 + 5x + 1} \quad \beta) \frac{x^2 + (\lambda - \mu)x + \lambda\mu}{4x^2 + (2\lambda - \mu)x + \lambda - \mu}$$

ἔχουν τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ x .

138. Λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ εἶναι τέλειος κύβος, τότε καὶ μόνον τότε, ἔαν τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν : $\alpha(x + k)^3$, $k \in \mathbf{R}$. Κατόπιν τούτου, δείξτε ὅτι αἱ ἰκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθήκαι, ἵνα τὸ $f(x)$ εἶναι τέλειος κύβος, εἶναι : $\beta^3 = 27\alpha^2\delta$, $\gamma^3 = 3\alpha\gamma$. Ἀκολούθως δείξτε ὅτι τὸ πολυώνυμον : $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ εἶναι τέλειος κύβος.

139. Προσδιορίσατε τὰ λ, μ, ν , ἵνα ἡ παράστασις

$$\frac{(\lambda - 1)x^3 + (\mu + 1)x^2 + (\nu - 1)x - 15}{3x^3 - 6x^2 + x - 5}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x .

140. 'Εάν τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\gamma^2 = \delta \alpha^2$ καὶ $(4\beta - \alpha^2)^2 = 64\delta$.

141. Προσδιορίσατε τὰ A, B, Γ ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$\frac{2x^2 + 10x - 3}{(x+1)(x^2-9)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{\Gamma}{x-3}.$$

'Υπόδειξις: Ἐκτελέσατε πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἐξισώσατε τοὺς ἀριθμητὰς τῶν δύο μελῶν.

142. Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ τετάρτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδὲν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα: $f(x) - f(x-1) \equiv x^3$. Βάσει τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, $n \in \mathbb{N}$.

143. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma = 30$, νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α , β , γ , ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{(\alpha-2)x^2 + (\beta-4)x + \gamma-6}{x^2 + 2x + 3}$ ἔχη τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ x.

144. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α , β , γ , δ οὕτως, ὥστε:

$$\alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

145. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z$$

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ εἶναι:

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad \Gamma = \gamma, \quad \Delta = \delta, \quad E = \epsilon, \quad Z = \zeta.$$

Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων

§ 58. Τελεία διαιρέσεις.—'Εστωσαν $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ πολυωνυμικοῦ δακτυλίου $R[x]$. Θὰ λέγωμεν:

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \neq 0$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι: Τὸ $f(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\varphi(x)$, ἢ τὸ $f(x)$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $\varphi(x)$, ἢ ἡ διαιρέσις $f(x) : \varphi(x)$ εἶναι τελεία, ἢ ἀκόμη τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖ (ἀκριβῶς) τὸ $f(x)$ καὶ γράφομεν $\varphi(x) | f(x)$.

Κατόπιν τοῦ συμβολισμοῦ τούτου ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς δίδεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\varphi(x) | f(x) \iff \exists \pi(x) \in R[x] : f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x).} \quad (2)$$

'Εάν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ $\varphi(x) \neq 0$, τότε γράφομεν: $\varphi(x) \nmid f(x)$.

Τὰ πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ καὶ $\pi(x)$ καλοῦνται ἀντιστοίχως διαιρετέος, διαιρέτης καὶ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$.

Ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ.

α). 'Εάν ν , μ ($\nu \equiv \mu$) καὶ λ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ τῶν $f(x)$, $\varphi(x)$ καὶ

$\pi(x)$ θά ἔχωμεν (§ 51, ε) $\mu + \lambda = \nu$, ὅτε $\lambda = \nu - \mu$, ἤτοι: «ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου».

β). Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς μὴ μηδενικοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ καὶ δίδει πηλίκον μηδέν. Πράγματι ἰσχύει: $0 \equiv \varphi(x) \cdot 0$.

γ). Πᾶν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς σταθεροῦ πολυωνύμου $\neq 0$, (δηλ. σταθερᾶς ποσότητος $\neq 0$). Πράγματι, ἔαν

$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ $\varphi(x) = c^*$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ ἔχομεν τὴν προφανῆ ταυτότητα:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c \cdot \left\{ \frac{\alpha_\nu}{c} x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{c} x^{\nu-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{c} x + \frac{\alpha_0}{c} \right\},$$

ὅπου τὸ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι τὸ πηλίκον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (2) καὶ τοῦ θεωρήματος § 52, προκύπτει τὸ μονοσήμαντον τοῦ πηλίκου. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ πρότασις:

Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x)$, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς ἓν πολυώνυμον $\pi(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x).$$

Πράγματι, ἔαν ὑπῆρχε καὶ ἕτερον πολυώνυμον $\pi_1(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_1(x),$$

τότε θὰ ἴσχυε: $\varphi(x)[\pi(x) - \pi_1(x)] \equiv 0$, καὶ ἐπειδὴ $\varphi(x) \neq 0$, θὰ εἶναι, κατὰ τὸ θεωρήμα § 52, $\pi(x) - \pi_1(x) \equiv 0$, ἔξ οὗ: $\pi(x) \equiv \pi_1(x)$.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύομεν τὰ κάτωθι θεωρήματα:

§ 59. Θεώρημα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid f(x) \cdot \sigma(x)$, διὰ κάθε πολυώνυμον $\sigma(x) \in R[x]$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\varphi(x) \mid f(x)$ ἔχομεν: $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$, ὅθεν καί:

$$f(x) \sigma(x) \equiv \varphi(x) \cdot [\pi(x) \cdot \sigma(x)] \equiv \varphi(x) \cdot \pi_1(x),$$

ἐνθα $\pi_1(x) \equiv \pi(x) \cdot \sigma(x)$, δηλαδή: $\varphi(x) \mid f(x) \sigma(x)$.

Παρατήρησις: Διὰ $\sigma(x) = c$ ἰσχύει: Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid cf(x)$, $c \in \mathbf{R}$.

§ 60. Θεώρημα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f_1(x)$ καὶ $\varphi(x) \mid f_2(x) \implies \varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$.

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν: $f_1(x) \equiv \pi_1(x) \cdot \varphi(x)$

$$f_2(x) \equiv \pi_2(x) \cdot \varphi(x).$$

Ὅθεν: $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv [\pi_1(x) \pm \pi_2(x)] \cdot \varphi(x)$,

ἤτοι $\varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῆς παρατηρήσεως τοῦ θεωρήματος § 59 προκύπτει τὸ κάτωθι:

* Τὸ γράμμα c εἶναι τὸ ἀρχικὸν τῆς λέξεως constant = σταθερά καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ σύμβολον $\mathbf{C} \equiv$ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (Complex numbers).

§ 61. Θεώρημα. — 'Εάν $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \dots, \varphi(x) \mid f_n(x)$, τότε $\varphi(x) \mid c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$, ἔνθα $c_1, c_2, \dots, c_n$ τυχοῦσαι σταθεραί.

§ 62. Θεώρημα. — 'Εάν $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \dots, \varphi(x) \mid f_n(x)$, τότε $\varphi(x) \mid f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$.

'Η ἀπόδειξις ὡς εὐκολος παραλείπεται.

Πόρισμα. — 'Εάν $\varphi(x) \mid f(x) \implies \varphi(x) \mid [f(x)]^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

§ 63. Θεώρημα. — 'Εάν $\varphi(x) \mid f(x)$ καὶ $f(x) \mid \varphi(x) \implies f(x) = c \cdot \varphi(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

'Α πό δ ε ι ξ ι ς. 'Εχομεν $f(x) \equiv \pi_1(x) \cdot \varphi(x)$
καὶ $\varphi(x) \equiv \pi_2(x) \cdot f(x)$
συνεπῶς $f(x) \equiv \pi_1(x) \pi_2(x) f(x)$ καὶ ἐπειδὴ $f(x) \not\equiv 0$
κατὰ τὸ θεώρημα § 53 προκύπτει: $\pi_1(x) \pi_2(x) \equiv 1$.

Τότε ὁμως ἕκαστον τῶν πολωνύμων $\pi_1(x), \pi_2(x)$ πρέπει νὰ εἶναι βαθμοῦ μηδέν, δηλαδὴ σταθεραὶ (διὰ τὴν ;).

'Ωστε $\pi_1(x) = c_1, \pi_2(x) = c_2$, ἔνθα $c_1, c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

'Αρα $f(x) \equiv c_1 \varphi(x)$ ἢ $\varphi(x) \equiv c_2 f(x)$, ὁπότε $f(x) = \frac{1}{c_2} \varphi(x)$, δηλαδὴ γενικῶς:
$$f(x) = c \cdot \varphi(x).$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. 'Εκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

'Εάν $\varphi(x) \mid f(x) \implies c \varphi(x) \mid f(x)$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Οἱ διαιρέται $\varphi(x)$ καὶ $c \varphi(x)$ τοῦ $f(x)$ καλοῦνται **ισοδύναμοι διαιρέται**. 'Εξ ὧν τῶν ἰσοδυνάμων διαιρετῶν ἑνὸς πολωνύμου $f(x)$ ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει ὡς συντελεστὴν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ x τὴν μονάδα, καλεῖται **κύριος διαιρέτης**.

§ 64. Ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως. — 'Εν γένει ἡ διαίρεσις δύο τυχόντων ἀκεραίων πολωνύμων δὲν εἶναι τελεία. Εἰς τρόπον διὰ νὰ ἐλέγχωμεν ἂν ἓν πολωνύμου διαιρῇ ἓν ἄλλο εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

'Εστωσαν, π.χ., τὰ πολωνύμου $2x^2 - 7x + 6$ καὶ $3x + 1$. 'Ινα τὸ δεῦτερον διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ πρῶτον, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολωνύμου $\pi(x)$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x). \quad (1)$$

'Επειδὴ, ὡς ἐλέχθη § 58, ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἔπεται ὅτι τὸ $\pi(x)$ πρέπει νὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἥτοι τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta$. Τότε ἡ (1) γίνεται:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)(\alpha x + \beta) \equiv 3\alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)x + \beta,$$

ὁπότε, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο πολωνύμων, θὰ ἔχωμεν συγχρόνως:

$3\alpha = 2$	'Η πρώτη τούτων δίδει $\alpha = \frac{2}{3}$. Διὰ $\alpha = \frac{2}{3}$ καὶ $\beta = 6$
$\alpha + 3\beta = -7$	ἢ δευτέρα δὲν ἀληθεύει, διότι:
$\beta = 6.$	$\frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18\frac{2}{3} \neq -7.$

Συνεπῶς δὲν ὑπάρχει πολυώνυμον $\pi(x)$ πληροῦν τὴν (1), ἄρα τὸ $2x^2 - 7x + 6$ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $3x + 1$. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι κατ' ἐξαιρέσειν μόνον ἡ διαιρέσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι τελεία.

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἀντὶ τῆς ταυτότητος (1) τῆς § 58 ἰσχύει ἡ καλουμένη ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως, ἡ ὁποία διαμορφοῦται καὶ ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ κάτωθι θεώρημα :

Θεώρημα.—Δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$, βαθμῶν ν καὶ μ ἀντιστοίχως ($\mu \geq 0$), ὑπάρχουν πάντοτε δύο μονοσημάντως ὀρισμένα πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ ἐκ τοῦ $R[x]$ τοιαῦτα, ὥστε :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \quad (2)$$

καὶ βαθμὸς $\upsilon(x) <$ βαθμὸς $\varphi(x)$.

Τὸ $\pi(x)$ καλεῖται ἀκέραιον πηλίκον ἢ ἀλγοριθμικὸν πηλίκον (συντόμως πηλίκον) καὶ τὸ $\upsilon(x)$ καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$, ἡ δὲ ταυτότης (2) ἡ συνδέουσα διαιρετέον, διαιρέτην, πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον καλεῖται ταυτότης τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ πολυώνυμα :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_\nu \neq 0)$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0, \quad (\beta_\mu \neq 0).$$

Θὰ ἀποδείξωμεν :

α). Τὴν ὑπαρξιν τῶν $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$. Πρὸς τούτοις διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1η : Ἐὰν $\nu < \mu$, τότε τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\pi(x) \equiv 0$ καὶ $\upsilon(x) \equiv f(x)$, ὅτε ἡ (2) ἰσχύει, διότι ἔχομεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot 0 + f(x).$$

Περίπτωσις 2α : Ἐὰν $\nu \geq \mu$, τότε διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον $\alpha_\nu x^\nu$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $\beta_\mu x^\mu$ τοῦ διαιρέτου λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} x^{\nu-\mu}$, τὸ ὁποῖον ὅς καλέσωμεν $\pi_1(x)$, ἥτοι :

$$\pi_1(x) \equiv \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} x^{\nu-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην $\varphi(x)$ ἐπὶ τὸ $\pi_1(x)$ λαμβάνομεν ὡς γινόμενον τὸ πολυώνυμον :

$$\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} x^{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \cdot x^{\nu-2} + \dots + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_0 x^{\nu-\mu},$$

τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ $f(x)$ κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον $\alpha_\nu x^\nu$.

Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν :

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv \left(\alpha_{\nu-1} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{\nu-1} + \left(\alpha_{\nu-2} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{\nu-2} + \dots$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\upsilon_1(x)$ τὸ πολυώνυμον τοῦ δευτέρου μέλους, ἔχομεν :

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv \upsilon_1(x)$$

$$\text{ἢ } f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) + \upsilon_1(x), \text{ με βαθμὸν } \upsilon_1(x) \leq \nu - 1. \quad (3)$$

Τότε: (i). 'Εάν $\nu - 1 < \mu$ ή (3) αποδεικνύει τὸ θεώρημα.

(ii). 'Εάν $\nu - 1 \geq \mu$, ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τῶν $u_1(x)$ ὡς διαιρέτεον καὶ $\varphi(x)$ ὡς διαιρέτην, λαμβάνομεν:

$$u_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + u_2(x), \text{ μὲ βαθμὸν } u_2(x) < \text{βαθμοῦ } u_1(x).$$

'Εάν τώρα εἶναι πάλιν: βαθμὸς $u_2(x) \geq \mu (= \text{βαθμὸς } \varphi(x))$, συνεχίζομεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν $u_2(x)$ καὶ $\varphi(x)$, ἥτοι: θὰ ὑπάρχῃ πάλιν ἐν πηλίκον $\pi_3(x)$ καὶ ἐν πολυώνυμον $u_3(x)$, ὥστε νὰ εἶναι:

$$u_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_3(x) + u_3(x), \text{ μὲ βαθμὸν } u_3(x) < \text{βαθμ. } u_2(x).$$

Οἱ βαθμοὶ τῶν $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ βαίνουνσιν διαδοχικῶς ἐλαττούμενοι, ἄρα θὰ φθάσωμεν τελικῶς εἰς ἐν πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ μ τοῦ $\varphi(x)$, ὅτε θὰ λήξῃ ἡ ἐργασία αὕτη. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\pi_1(x) + u_1(x) \\ u_1(x) &\equiv \varphi(x)\pi_2(x) + u_2(x) \\ u_2(x) &\equiv \varphi(x)\pi_3(x) + u_3(x) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dots\dots\dots$$
$$u_k(x) \equiv \varphi(x)\pi_{k+1}(x) + u_{k+1}(x),$$

ὅπου τὸ $u_{k+1}(x)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ μ τοῦ $\varphi(x)$. 'Αθροίζοντες τὰς ἰσότητας (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς ἀπλοποιήσεις:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \{ \pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \} + u_{k+1}(x).$$

Θέτοντες: $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \equiv \pi(x)$ καὶ $u_{k+1}(x) = u(x)$, φθάνομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) + u(x), \text{ μὲ βαθμ. } u(x) < \mu (= \text{βαθμὸς } \varphi(x)).$$

β). Τὸ μονοσήμαντον τῆς παραστάσεως (2).

Τὸ ζεῦγος τῶν πολυωνύμων $\pi(x)$ καὶ $u(x)$ εἶναι τὸ μόνον διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ (2), διότι, ἐὰν εἶναι καὶ:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x), \text{ μὲ βαθμὸν } u'(x) < \mu,$$

τότε: $\pi'(x) \equiv \pi(x)$ καὶ $u'(x) \equiv u(x)$.

Πράγματι, ἐπειδὴ:

$$\varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x),$$

ἔχομεν: $[\pi(x) - \pi'(x)]\varphi(x) \equiv u'(x) - u(x). \quad (5)$

'Η ταυτότης (5) δὲν δύναται νὰ ἰσχύῃ, εἰμὴ μόνον ἂν $\pi(x) - \pi'(x) \equiv 0$ καὶ $u'(x) - u(x) \equiv 0$, δηλαδὴ:

$$\pi(x) \equiv \pi'(x) \text{ καὶ } u(x) \equiv u'(x),$$

διότι ἄλλως τὸ πρῶτο μέλος τῆς (5) εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ $\geq \mu$, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ $< \mu$.

Τὸ θεώρημα ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ταυτότητος διαιρέσεως (2).

1). 'Εάν $u(x) \equiv 0$, τότε ἐκ τῆς (2) προκύπτει ἡ ταυτότης (1) τῆς τελείας διαιρέσεως.

2). Ἐκ τῆς (2) ἔπεται : $\varphi(x) \mid f(x) - u(x)$, δηλαδή ἡ διαφορὰ τοῦ διαιρετέου μείν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ διαιρέτου.

3). Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

4). Ἐὰν $\varphi(x) \not\equiv 0$ ἡ ταυτότης (2) γράφεται :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{u(x)}{\varphi(x)},$$

μὲ βαθμὸν $u(x) < \text{βαθμὸν } \varphi(x)$.

Τὸ πολυώνυμον $\pi(x)$ καλεῖται «τὸ ἀκέραιον μέρος» καὶ τὸ $\frac{u(x)}{\varphi(x)}$ «τὸ γνήσιον κλασματικὸν μέρος» τοῦ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

5). Ἡ μέθοδος τὴν ὁποῖαν ἠκολουθήσαμεν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς δίδει ἕναν ἀλγόριθμον διὰ τοῦ ὁποῖου δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν τὰ πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $u(x)$.

Παράδειγμα. Ἐὰν $f(x) = x^3 - 1$, $\varphi(x) = x + 1$ εὑρετε τὰ μονοσημάντως ὠρισμένα πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $u(x)$, ὥστε νὰ εἶναι :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x), \text{ μὲ βαθμ. } u(x) < \text{βαθμ. } \varphi(x) = 1.$$

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} u_1(x) &\equiv f(x) - \pi_1(x) \cdot \varphi(x) = (x^3 - 1) - x^2 \cdot (x + 1) = -x^2 - 1, & \pi_1(x) &= x^2 \\ u_2(x) &\equiv u_1(x) - \pi_2(x) \cdot \varphi(x) = -x^2 - 1 - (-x)(x + 1) = x - 1, & \pi_2(x) &= -x \\ u_3(x) &\equiv u_2(x) - \pi_3(x) \cdot \varphi(x) = (x - 1) - 1(x + 1) = -2, & \pi_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

*Ἀρα :

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x) = x^2 - x + 1 \\ u(x) &= u_3(x) = -2. \end{aligned}$$

Πόρισμα I. — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $x - a$ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ $x = a$, ἥτοι :

$$v = f(a)$$

Γενικώτερον, ἰσχύει ὅτι : Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ εἶναι :

$$v = f\left(-\frac{\beta}{a}\right)$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ρίζης ἐνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου καὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος συμπεραίνομεν :

Πόρισμα II. — Ἐὰν ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x) \iff x - \rho \mid f(x)$, ἥτοι :

$$f(\rho) = 0 \iff f(x) \equiv (x - \rho) \cdot \pi(x),$$

ἐνθα $\pi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x , ἥτοι $\pi(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων

§ 65. Θεώρημα. — Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρῇται δι' ἑνὸς ἐκάστου τῶν διωνύμων : $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_\mu)$, ἔνθα $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ ἀριθμοὶ διαφοροὶ ἀλλήλων ἀνὰ δύο, τότε θὰ διαιρῇται (ἀκριβῶς) καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\mu)$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Ἐστω ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τῶν διωνύμων $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_\mu)$, τότε κατὰ τὸ πόρισμα II τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ ἔχωμεν : $f(\rho_1) = 0, f(\rho_2) = 0, \dots, f(\rho_\mu) = 0$.

Ἐστω $\pi_1(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x - \rho_1)$, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1) \cdot \pi_1(x) \quad (1)$$

ἥτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\mu = 1$.

Δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει διὰ $\mu = k$, ἥτοι δεχόμεθα ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k) \cdot \pi_k(x). \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ $\mu = k + 1$.

Πράγματι· ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (2) $x = \rho_{k+1}$, θὰ ἔχωμεν :

$$f(\rho_{k+1}) \equiv (\rho_{k+1} - \rho_1)(\rho_{k+1} - \rho_2) \dots (\rho_{k+1} - \rho_k) \cdot \pi_k(\rho_{k+1}).$$

Ἐπειδὴ $f(\rho_{k+1}) = 0$ καὶ $\rho_{k+1} - \rho_j \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$ θὰ εἶναι :

$$\pi_k(\rho_{k+1}) = 0.$$

Τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, τὸ $\pi_k(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x - \rho_{k+1}$ καὶ ἔστω $\pi_{k+1}(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\pi_k(x) : (x - \rho_{k+1})$, τότε :

$$\pi_k(x) \equiv (x - \rho_{k+1}) \cdot \pi_{k+1}(x). \quad (3)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς τελευταίας ταυτότητος, ἡ (2) γράφεται :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)(x - \rho_{k+1}) \cdot \pi_{k+1}(x)$$

ἥτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $\mu = k + 1$, ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μ .

Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

§ 66. Θεώρημα. — Ἐάν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

μηδενίζεται διὰ n διαφορικοὺς τιμὰς τοῦ x , τὰς : $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$, τότε θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης :

$$f(x) \equiv a_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_{n-1})(x - \rho_n).$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \dots = f(\rho_{n-1}) = f(\rho_n) = 0$, ἔπεται, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν διωνύμων :

$$x - \rho_1, x - \rho_2, \dots, x - \rho_{n-1}, x - \rho_n.$$

Τότε όμως, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινόμενου :

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v),$$

καθόσον :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \cdots \neq \rho_{v-1} \neq \rho_v \neq \rho_1.$$

Ἄρα, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v) \cdot \pi, \quad (1)$$

ὅπου π τὸ πηλίκον.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι βαθμοῦ v , καθὼς καὶ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον π θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha_v x^v$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου x^v τοῦ διαιρέτου. Δηλαδή :

$$\pi = \frac{\alpha_v x^v}{x^v} = \alpha_v,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1})(x - \rho_v). \quad (2)$$

Π α ρ α τ ῆ ρ η σ ι ς. Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ταυτότητα (2) εἶναι $\rho_1 = \rho_2$, τότε τὸ γινόμενον $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ γίνεται $(x - \rho_1)^2$ καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα ρ_1 εἶναι **διπλῇ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος δύο**. Ὁμοίως ἔαν εἶναι $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, τότε τὸ γινόμενον $(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$ γίνεται $(x - \rho_1)^3$ καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα ρ_1 εἶναι **τριπλῇ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος τρία**.

Διὰ νὰ εἴμεθα περισσότερον ἀκριβεῖς δίδομεν τὸν κάτωθι γενικὸν ὅρισμόν :

Μία ρίζα ρ ἐνὸς πολυωνύμου $f(x)$, διαφόρου τοῦ μηδενικοῦ, θὰ λέγομεν ὅτι εἶναι πολλαπλῇ τάξεως k , ἢ εἶναι βαθμοῦ πολλαπλότητος k (k ἀκέραιος ≥ 1), τότε καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$(x - \rho)^k \mid f(x) \quad \text{καὶ} \quad (x - \rho)^{k+1} \nmid f(x).$$

Ἐὰν $k = 1$, τότε ἡ ρίζα ρ λέγεται **ἀπλῇ**, ἔαν $k = 2$ **διπλῇ**, κ.ο.κ.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἔαν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ ἔχῃ μίαν ρίζαν ρ βαθμοῦ πολλαπλότητος k , τότε ὁ βαθμὸς v αὐτοῦ εἶναι $\geq k$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει τώρα ἡ ἐξῆς σπουδαία πρότασις :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα εἰς ἀριθμὸς ρ εἶναι ρίζα, βαθμοῦ πολλαπλότητος k , ἐνὸς πολυωνύμου $f(x)$, εἶναι : νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$(1) \quad f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x) \quad \text{καὶ} \quad (2) \quad \varphi(\rho) \neq 0.$$

Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι ς : Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία. Πράγματι, τὸ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$, προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ $f(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x - \rho)^k$, ἄρα ἔχομεν :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x).$$

Ἐξ ἄλλου, ἔαν ᾗτο $\varphi(\rho) = 0$, τότε $x - \rho \mid \varphi(x)$, δηλ. $\varphi(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$ καὶ ἐπομένως θὰ ἴσχυε :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot \pi(x), \quad \text{δηλ.} \quad (x - \rho)^{k+1} \mid f(x), \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ἡ συνθήκη εἶναι ἰκανή. Πράγματι, ὑποθέσωμεν ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

$$\mu\acute{\epsilon} \quad \varphi(\rho) \neq 0. \quad (2)$$

Ἡ (1) δεικνύει, ὅτι πράγματι τὸ $f(x)$, εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x - \rho)^k$, ἥτοι $(x - \rho)^k \mid f(x)$.

Ἐὰν καὶ $(x - \rho)^{k+1} \mid f(x)$, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον $g(x)$, ὥστε :

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot g(x) \\ \eta \quad f(x) &\equiv (x - \rho)^k \cdot (x - \rho) g(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\varphi(x) \equiv (x - \rho) \cdot g(x). \quad (4)$$

Ἡ (4), διὰ $x = \rho$, γίνεται :

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &\equiv 0 \cdot g(\rho) \\ \eta \quad \varphi(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν (2). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι : Εἰς κάθε ρίζαν πολυωνύμου $f(x) \not\equiv 0$ ἀντιστοιχεῖ *μονοσημάντως* εἰς μέγιστος ἀκέραιος $k \geq 1$. Ἐὰν συνεπῶς τὸ πολυώνυμον $f(x)$, βαθμοῦ n , ἔχῃ ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ καὶ ἐκάστην μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \alpha_n (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdots (x - \rho_k)^{\lambda_k}, \\ \text{ἐνθα εἶναι} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k &= n, \quad (k \leq n). \end{aligned}$$

Ἡ παράστασις αὕτη, ἣτις εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένη διὰ κάθε πολυώνυμον, ἂν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ θέσις τῶν παραγόντων ἐν αὐτῇ, καλεῖται : *« ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων »*.

Ἐφαρμογή : Τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς κάτωθι :

$$f(x) \equiv (x - 1)^2 (x + 1)^3 (x + 2),$$

ἥτοι ἔχει τὰς ρίζας 1, -1, -2 εἰς βαθμοὺς πολλαπλότητος ἀντιστοίχως 2, 3, 1.

§ 67. Θεώρημα. — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μηδενίζεται διὰ $n+1$ τιμὰς τοῦ x , διαφόρους μεταξύ των, τότε τοῦτο εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ $n+1$ διάφοροι ἀλλήλων τιμαὶ τοῦ x :

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}$$

μηδενίζουν τὸ πολυώνυμον $f(x)$. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_n (x - \rho_1) (x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n). \quad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1), διὰ $x = \rho_{n+1}$, γίνεται :

$$f(\rho_{n+1}) \equiv \alpha_n (\rho_{n+1} - \rho_1)(\rho_{n+1} - \rho_2) \cdots (\rho_{n+1} - \rho_n) = 0, \text{ καθόσον } f(\rho_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δέ: $\rho_{v+1} \neq \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_v$, θὰ εἶναι:

$$(\rho_{v+1} - \rho_1)(\rho_{v+1} - \rho_2) \dots (\rho_{v+1} - \rho_v) \neq 0,$$

ὅτε ἐκ τῆς (2), ἔπεται ὅτι: $\alpha_v = 0$. Τότε ὁμοίως τὸ πολυώνυμον $f(x)$ γίνεται:

$$f(x) \equiv \alpha_{v-1} x^{v-1} + \alpha_{v-2} x^{v-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (3)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ εἰς τὸ πολυώνυμον (3) ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\alpha_{v-1} = 0$.

Ὁμοίως προχωροῦντες εὐρίσκομεν ὅτι: $\alpha_{v-2} = 0, \alpha_{v-3} = 0, \dots, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = 0$.

Ὡστε, ἀπεδείχθη ὅτι: $\alpha_v = \alpha_{v-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$. (4)

Ἡ (4) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Ἐφ α ρ μ ο γ ῆ: Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv (x-a)^2 (\beta-\gamma) + (x-\beta)^2 (\gamma-a) + (x-\gamma)^2 (a-\beta) + (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Λ ὅ σ ι ς: Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι: $f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$.

Ἐπειδὴ τὸ $f(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του ἔπεται, ὅτι τὸ $f(x)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πόρισμα I.— Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ v , ἔχει v τὸ πολὺ διαφόρους ρίζας.

Πόρισμα II.— Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μηδενίζεται δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ x , τότε τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πόρισμα III.— Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\phi(x)$, βαθμῶν v , λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμὰς διὰ $v+1$ διαφόρους τιμὰς τοῦ x , τότε τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

§ 68. Θεώρημα.— Ἐὰν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f_1(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_v \neq 0$$

$$f_2(x) \equiv \beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0, \quad \beta_v \neq 0$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς v διαφόρους ἀλλήλων ρίζας $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$, τότε:

$$\frac{\beta_v}{\alpha_v} = \frac{\beta_{v-1}}{\alpha_{v-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι ς: Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 66), θὰ ἔχωμεν

$$f_1(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v) \quad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \beta_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v). \quad (2)$$

Ἡ σχέσηις (2) γράφεται:

$$f_2(x) \equiv \frac{\beta_v}{\alpha_v} \cdot \alpha_v (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_v) \equiv \frac{\beta_v}{\alpha_v} f_1(x). \quad (3)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\beta_v}{\alpha_v} = k$, ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$f_2(x) \equiv k \cdot f_1(x), \text{ δηλαδή:}$$

$$\beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \equiv k \alpha_v x^v + k \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + k \alpha_1 x + k \alpha_0,$$

καί ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\beta_v = k\alpha_v, \quad \beta_{v-1} = k\alpha_{v-1}, \quad \dots, \quad \beta_1 = k\alpha_1, \quad \beta_0 = k\alpha_0 \quad (4)$$

$$\eta \quad \boxed{\frac{\beta_v}{\alpha_v} = \frac{\beta_{v-1}}{\alpha_{v-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}} \quad (5)$$

Ἀντιστροφῶς : Ἐστω ὅτι ἀληθεύει ἡ (5). Θέτομεν τοὺς ἴσους λόγους (5) ἴσον μὲ k , ὅτε ἔχομεν :

$$\text{Τότε :} \quad \beta_v = k\alpha_v, \quad \beta_{v-1} = k\alpha_{v-1}, \quad \dots, \quad \beta_1 = k\alpha_1, \quad \beta_0 = k\alpha_0.$$

$$f_2(x) \equiv k\alpha_v x^v + k\alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + k\alpha_0 \equiv k(\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0),$$

$$\eta \text{τοι :} \quad f_2(x) \equiv k f_1(x).$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ὅτι κάθε ρίζα τοῦ $f_1(x)$ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f_2(x)$.

Παρατήρησις : Αἱ ἰσότητες (4) δὲν ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (5), ὅταν εἰς τῶν συντελεστῶν β_j , $j = 0, 1, 2, \dots, v$, π.χ. ὁ $\beta_{v-\lambda}$, εἶναι μηδέν. Ἐκ τῆς (4), ἡ σχέση $\beta_{v-\lambda} = k \cdot \alpha_{v-\lambda}$ μᾶς δίδει καὶ $\alpha_{v-\lambda} = 0$, ὅτε τὰ πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$ δὲν θὰ ἔχουν τὸν ὅρον μὲ τὸ $x^{v-\lambda}$ καὶ ἀπὸ τὰς ἰσοτήτων (5) θὰ λείπη ὁ λόγος $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$. Ἐὰν πάλιν τὸ $\alpha_{v-\lambda}$ εἶναι μηδέν, ὁ λόγος $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$ δὲν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ συνεπῶς καὶ πάλιν μεταξύ τῶν λόγων τῶν ἰσοτήτων (5) δὲν θὰ ὑπάρχη ὁ λόγος $\frac{\beta_{v-\lambda}}{\alpha_{v-\lambda}}$.

§ 69 Θεώρημα. — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$, μὲ πραγματικούς συντελεστὰς $\alpha_v, \alpha_{v-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$, δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$), τότε θὰ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ αὐτοῦ $\alpha - i\beta$.

Ὑποτίθεται ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ 2.

Ἀπόδειξις : Ἐστω $\varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha + i\beta$ καὶ $\alpha - i\beta$, ἥτοι :

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)] [x - (\alpha - i\beta)] \equiv x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Τὸ $f(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ $\varphi(x)$ θὰ δώσῃ, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 64), πηλίκον ἀκέραιον πολυώνυμον, ἔστω τὸ $\pi(x)$ καὶ πρωτοβάθμιον ὑπόλοιπον μὲ πραγματικούς συντελεστὰς, ἔστω τὸ $\gamma x + \delta$. Τότε, κατὰ τὴν ταυτότητα διαιρέσεως ἀκεραίων πολυωνύμων, θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $f(\alpha + i\beta) = 0$ καὶ $\varphi(\alpha + i\beta) = 0$, ἐκ τῆς (1) ἔπεται :

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \delta = 0$$

$$\eta \quad (\alpha\gamma + \delta) + i\beta\gamma = 0, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \begin{cases} \alpha\gamma + \delta = 0 \\ \beta\gamma = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\beta \neq 0$, ἔπεται, ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2), $\gamma = 0$. Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν (2), προκύπτει $\delta = 0$.

Διὰ $\gamma = \delta = 0$ ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει :

$$f(\alpha - i\beta) \equiv \varphi(\alpha - i\beta) \pi(\alpha - i\beta)$$

καὶ ἔπειδὴ $\varphi(\alpha - i\beta) = 0$, θὰ εἶναι : $f(\alpha - i\beta) = 0$, ἥτοι τὸ $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha - i\beta$.

Γενικώτερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 70. Θεώρημα.—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον, μὲ πραγματικούς συντελεστάς, δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$) εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος k , θὰ δέχεται ἐπίσης ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ του $\alpha - i\beta$ καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος k .

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Πόρισμα I.—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, μὲ πραγματικούς συντελεστάς, ἔχῃ μιγαδικὰς ρίζας, τὸ πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

Πόρισμα II.—Ἀκέραιον πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ μὲ πραγματικούς συντελεστάς ἔχει τοῦλάχιστον μίαν πραγματικὴν ρίζαν, ἀρτίου δὲ βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ πάσας τὰς ρίζας του μιγαδικὰς.

§ 71. Θεώρημα.—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ ρητοὺς συντελεστάς δέχεται ρίζαν τὴν $\alpha + \sqrt{\beta}$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}^+$, $\beta \neq \theta^2$, ὅπου $\theta \in \mathbb{Q}$) θὰ δέχεται ἐπίσης καὶ τὴν $\alpha - \sqrt{\beta}$ καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ : $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2}$.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2} \equiv (x - \sqrt{2})(x - i).$$

Ἐὰν $f(x)$ εἶναι τὸ ζητούμενον πολυώνυμον, τότε, ἔπειδὴ διαιρεῖται διὰ $x - \sqrt{2}$, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $x + \sqrt{2}$, ὁμοίως ἔπειδὴ διαιρεῖται διὰ $x - i$, δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 69, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $x + i$, ὅθεν, δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 65, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i) \equiv (x^2 - 2)(x^2 + 1) \equiv x^4 - x^2 - 2.$$

§ 72. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

Ἐφαρμογή 1η : Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικούς ἀριθμοὺς α, β , ἵνα τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$.

Λύσις. Ἐπειδὴ θέλομεν τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ νὰ διαιρῆται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$, ἔπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $x-2$ καὶ διὰ $x-3$.

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$f(2) = -8\alpha + 2\beta + 14 = 0, \quad \text{ἥτοι} \quad 4\alpha - \beta = 7 \quad (1)$$

$$f(3) = -18\alpha + 3\beta + 33 = 0, \quad \text{ἥτοι} \quad 6\alpha - \beta = 11. \quad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν :

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1.$$

Σημείωσις : Τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς α καὶ β τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ δι' ἄλλων τρόπων. Ἐφαρμόσατε ἕναν ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν α καὶ β .

Ἐφαρμογὴ 2α : Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ $x+1$ δίδει ὑπόλοιπον 2, διαιρούμενον διὰ $x-2$ δίδει ὑπόλοιπον 11 καὶ διὰ $x+3$ δίδει ὑπόλοιπον 6. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x+3)$.

Λύσις : Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι :

$$f(-1) = 2, \quad f(2) = 11, \quad f(-3) = 6. \quad (1)$$

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x+1)(x-2)(x+3),$$

τὸ ὅποιον εἶναι τρίτου βαθμοῦ, θὰ δώσῃ ἐν πηλίκον $\pi(x)$ καὶ ἐν ὑπόλοιπον τὸ πολὺ δευτέρου βαθμοῦ, ἔστω $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x+1)(x-2)(x+3) \cdot \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) διαδοχικῶς $x = -1$, $x = 2$, $x = -3$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (1), λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6. \end{cases}$$

Λύοντες τὸ σύστημα (Σ) εὐρίσκομεν : $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

Ὡστε, τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι : $x^2 + 2x + 3$.

§ 73. Σχέσεις μεταξύ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου. — Ἐστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_n \neq 0)$$

μὲ ρίζας $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$.

Ὡς γνωστὸν ἰσχύει :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \alpha_n (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n). \quad (1)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ $\alpha_n \neq 0$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεῦτερον μέλος, τὸ ὅποιον καὶ διατάσσομεν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x , ἔχομεν :

$$x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x^{n-1} + \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \equiv x^n - (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n) x^{n-1} + (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \dots + \rho_{n-1} \rho_n) x^{n-2} - \dots + (-1)^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n.$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσοβαθμίων ὁρων λαμβάνομεν τὰς σχέσεις :

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{v-1} + \rho_v &= -\frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_v} \\ S_2 &\equiv \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_v + \rho_2\rho_3 + \cdots + \rho_2\rho_v + \cdots + \rho_{v-1}\rho_v &= +\frac{\alpha_{v-2}}{\alpha_v} \\ S_3 &\equiv \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_v + \cdots + \rho_{v-2}\rho_{v-1}\rho_v &= -\frac{\alpha_{v-3}}{\alpha_v} \\ &\cdots &\cdots \\ S_v &\equiv \rho_1\rho_2\rho_3 \cdots \rho_{v-1}\rho_v &= (-1)^v \frac{\alpha_0}{\alpha_v} \end{aligned}$$

Αἱ σχέσεις αὗται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι γνωστὰι ὡς σχέσεις τοῦ Vieta.

Διὰ τῶν σχέσεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ἔχουν δοθῇ αἱ ρίζαι.

Ἐφαρμογὴ 1η : Δίδεται τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8.$$

Ἐὰν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ $f(x)$, νὰ εὗρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

Λύσις : Ἰσχύει προφανῶς ἡ ἰσότης :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 - 2(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3). \quad (1)$$

$$\text{Ἄλλὰ :} \quad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{καὶ} \quad \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \frac{4}{2} = 2. \quad (3)$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2) καὶ (3), γίνεται :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ εὗρεθῇ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύο ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\rho_1 = 5$ καὶ $\rho_2 = i$.

Λύσις : Ἐστω $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ τὸ ζητούμενον πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ.

Προφανῶς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ ἐν λόγω πολυώνυμου εἶναι : $\rho_3 = -i$, (διατί;))

Τότε, συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις τοῦ Vieta, θὰ ἔχωμεν :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= -\frac{\beta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 5 &= -\frac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 1 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 &= -\frac{\delta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & & 5 &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= -5\alpha \\ \gamma &= \alpha \\ \delta &= -5\alpha. \end{aligned}$$

Ὅθεν τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι :

$$f(x) \equiv \alpha(x^3 - 5x^2 + x - 5).$$

* Διαιρετότης ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ διωνύμου $(x - \alpha)^v$.

§ 74. Θεώρημα. — Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x - \alpha)^v$, $v \in \mathbb{N}$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad f_{v-1}(\alpha) = 0,$$

ἔνθα $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{v-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ πηλίκον τῶν διαιρέσεων :

$$f(x) : (x - \alpha), \quad f_1(x) : (x - \alpha), \quad \dots, \quad f_{v-2}(x) : (x - \alpha).$$

Ἀπόδειξις : Ἐστω $\varphi(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $(x - \alpha)^v$, τότε ἔχομεν : $f(x) \equiv (x - \alpha)^v \cdot \varphi(x)$. (1)

Διὰ $x = \alpha$ ἡ (1) δίδει $f(\alpha) = 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - \alpha$. Ἐὰν $f_1(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ $x - \alpha$, τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ $x - \alpha$, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_1(x) \equiv (x - \alpha)^{v-1} \cdot \varphi(x). \quad (2)$$

Διὰ $x = \alpha$ ἡ (2) δίδει $f_1(\alpha) = 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πολυώνυμον $f_1(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - \alpha$. Ἐὰν $f_2(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $f_1(x) : x - \alpha$, τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) διὰ $x - \alpha$, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_2(x) \equiv (x - \alpha)^{v-2} \cdot \varphi(x). \quad (3)$$

Διὰ $x = \alpha$ ἡ (3) δίδει $f_2(\alpha) = 0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ $f_2(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - \alpha$.

Προχωροῦντες, καθ' ὅμοιον τρόπον, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς $v - 1$ τάξεως εἶναι :

$$f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha) \cdot \varphi(x). \quad (v)$$

Διὰ $x = \alpha$ ἡ σχέσηis αὕτη γίνεται $f_{v-1}(\alpha) = 0$, δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον $f_{v-1}(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - \alpha$.

Ἀντιστροφή. Ἐφ' ὅσον $f(\alpha) = 0, f_1(\alpha) = 0, \dots, f_{v-1}(\alpha) = 0$, θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x - \alpha) f_1(x) \\ f_1(x) &\equiv (x - \alpha) f_2(x) \\ f_2(x) &\equiv (x - \alpha) f_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{v-1}(x) &\equiv (x - \alpha) f_v(x) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :} \\ &f(x) \equiv (x - \alpha)^v f_v(x), \\ &\text{ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ πολυώνυμον } f(x) \text{ διαιρεῖται διὰ } (x - \alpha)^v. \end{aligned} \right.$$

Παρατηρήσεις. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ τινος δυνάμεως τοῦ $x - \alpha$ ἐργαζόμεθα πολλάκις ὡς ἑξῆς :

Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐστω ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $(x - \alpha)^2$. Τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2 \cdot \varphi(x). \quad (1)$$

Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν :

$$x - \alpha = y \iff x = y + \alpha \quad (2)$$

καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$f(y + \alpha) \equiv y^2 \cdot \varphi(y + \alpha), \quad (3)$$

ὅπου $f(y + \alpha)$ καὶ $\varphi(y + \alpha)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y .

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι τὸ $f(y + \alpha)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ y^2 . Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ τὸ $f(y + \alpha)$ νὰ στερεῇται σταθεροῦ καὶ πρωτοβαθμίου ὅρου, ἥτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(y + \alpha) \equiv \alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \dots + \alpha_3 y^3 + \alpha_2 y^2.$$

Ὅμοιως ἵνα τὸ $f(x)$ διαιρῇται διὰ $(x - \alpha)^3$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $f(y + \alpha)$ νὰ διαιρῇται διὰ y^3 , ἥτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς : $f(y + \alpha) \equiv \alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \dots + \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3$, διότι διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (2) προκύπτει ὅτι :

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^3 \cdot \pi(x) \iff f(y + \alpha) \equiv y^3 \cdot \pi(y + \alpha).$$

Ἐφαρμογὴ 1η : Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x - 1)^2$.

Λύσις. Διὰ $x = 1$ ἔχομεν :

$$f(1) = n - (n+1) + 1 = 0.$$

Ἄρα τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὐρίσκομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x - 1) \cdot [nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)]. \quad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $f_1(x) \equiv nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ παρατηροῦμεν ὅτι : $f_1(1) = n - (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = n - n = 0$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f_1(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - 1$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$f_1(x) \equiv (x - 1) \pi(x). \quad (2)$$

Ἐνεκα αὐτῆς, ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv (x - 1)^2 \cdot \pi(x),$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $(x - 1)^2$.

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $(x - 2)^2$.

Ἀπόδειξις : Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν :

$$x - 2 = y \iff x = y + 2$$

καὶ ἔχομεν : $f(y+2) = (y+2)^4 - 9(y+2)^3 + 25(y+2)^2 - 24(y+2) + 4$.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὐρίσκομεν :

$$f(y+2) \equiv y^4 - y^3 - 5y^2 = y^2(y^2 - y - 5)$$

ἢ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $y = x - 2$ ἔχομεν :

$$f(x) \equiv (x-2)^2 \cdot [(x-2)^2 - (x-2) - 5],$$

ἢ ὁποῖα φανερώνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-2)^2$.

* Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων.

§ 75. Θεώρημα Ιον. — Ἐὰν $u_1(x)$ καὶ $u_2(x)$ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f_1(x) : \delta(x)$ καὶ $f_2(x) : \delta(x)$, $\delta(x) \not\equiv 0$, ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x) \iff u_1(x) \equiv u_2(x).$$

Ἀπόδειξις : Ἐστω $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$, τότε $f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot \pi(x)$. (1)

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$f_1(x) \equiv \delta(x) \pi_1(x) + u_1(x), \quad \text{βαθμ. } u_1(x) < \text{βαθμ. } \delta(x) \quad (2)$$

$$f_2(x) \equiv \delta(x) \pi_2(x) + u_2(x), \quad \text{βαθμ. } u_2(x) < \text{βαθμ. } \delta(x). \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) [\pi_1(x) - \pi_2(x)] + u_1(x) - u_2(x).$$

Ἀλλὰ, δυνάμει τῆς (1), ἡ διαίρεσις $[f_1(x) - f_2(x)] : \delta(x)$ εἶναι τελεία καὶ ἐπομένως :

$$u_1(x) - u_2(x) \equiv 0, \quad \text{ἐξ οὗ : } u_1(x) \equiv u_2(x).$$

Ἀντιστροφή : Ἐστω ὅτι $u_1(x) \equiv u_2(x)$ καὶ ὅτι :

$$f_1(x) \equiv \delta(x) \cdot \pi_1(x) + u_1(x) \quad \text{καὶ} \quad f_2(x) \equiv \delta(x) \pi_2(x) + u_1(x).$$

Τότε θὰ ἔχομεν :

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot [\pi_1(x) - \pi_2(x)] \implies \delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x).$$

§ 76. Θεώρημα 2ον. — Ἐὰν $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f_1(x) : \delta(x), f_2(x) : \delta(x), \dots, f_n(x) : \delta(x)$, τότε αἱ διαιρέσεις $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] : \delta(x)$ καὶ $[u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] : \delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις : Ἐχομεν, ἂν συμβολίσωμεν τὰ πολυώνυμα ἀπλῶς μὲ f, δ, π, u ἀντὶ $f(x), \delta(x), \pi(x), u(x)$, τὰς σχέσεις :

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} f_1 \equiv \delta\pi_1 + u_1 \\ f_2 \equiv \delta\pi_2 + u_2 \\ f_3 \equiv \delta\pi_3 + u_3 \\ f_n \equiv \delta\pi_n + u_n \end{array} & \begin{array}{l} \text{Αὗται προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν :} \\ f_1 + f_2 + \dots + f_n \equiv \delta(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n). \\ \text{Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :} \\ (f_1 + f_2 + \dots + f_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \equiv \delta(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n). \end{array} \end{array}$$

Ἡ τελευταία ταυτότης δηλοῖ ὅτι τὸ δ διαιρεῖ τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ καὶ $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ἐπομένως, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕκαστον τούτων διαιρούμενον διὰ τοῦ $\delta(x)$ δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

§ 77. Θεώρημα 3ον. — Αί υποθέσεις του θεωρήματος 2, τότε αἱ διαιρέσεις $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)] : \delta(x)$ καὶ $[v_1(x) \cdot v_2(x) \cdots v_n(x)] : \delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις: Τὰς σχέσεις (σ) τῆς προηγούμενης παραγράφου πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$f_1 f_2 \dots f_n \equiv \delta \cdot \pi + (v_1 v_2 \dots v_n), \quad (1)$$

ἐνθα π ἄκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$[f_1 f_2 \dots f_n] - [v_1 v_2 \dots v_n] \equiv \delta \cdot \pi,$$

ἢ ὁποία καὶ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παρατήρησις: Τὰ θεωρήματα 2 καὶ 3 ἰσχύουν καὶ ἂν ἀκόμη δὲν ἀντικατασταθοῦν ὅλα τὰ πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ διὰ τῶν ὑπολοίπων, ἀλλὰ μόνον μερικὰ ἐξ αὐτῶν.

Πόρισμα.— Ἐὰν $u(x)$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : \delta(x)$, τότε αἱ διαιρέσεις $[f(x)]^v : \delta(x)$ καὶ $[u(x)]^v : \delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἐφαρμογή: Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι ἄκერαιοι μὴ ἀρνητικοί, νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta}$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ :

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ἀπόδειξις: Ὁ διαιρετέος γράφεται :

$$(x^4)^\alpha x^3 + (x^4)^\beta x^2 + (x^4)^\gamma x + (x^4)^\delta.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $x^4 : x^3 + x^2 + x + 1$ εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 1. Ἄρα τὰ γινόμενα $(x^4)^\alpha \cdot x^3$ καὶ $1^\alpha \cdot x^3$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον (βλ. θεώρ. 3ον καὶ πόρισμα). Ὀμοίως τὰ γινόμενα $(x^4)^\beta \cdot x^2$ καὶ $1^\beta \cdot x^2$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ $(x^4)^\gamma x$ καὶ $1^\gamma \cdot x$ ἀφ' ἑνὸς καὶ $(x^4)^\delta$ καὶ 1^δ ἀφ' ἑτέρου. Ἐπομένως τὰ πολυώνυμα :

$$x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta} \text{ καὶ } 1^\alpha x^3 + 1^\beta x^2 + 1^\gamma x + 1^\delta \equiv x^3 + x^2 + x + 1$$

διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^3 + x^2 + x + 1)$ εἶναι μηδέν. Ὅθεν ἡ διαίρεσις $(x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta}) : (x^3 + x^2 + x + 1)$ εἶναι τελεία.

*** Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $x^n - a$, ἐνθα $n \in \mathbb{N}$.**

Ἐστω ἐν ἄκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, βαθμοῦ k, καὶ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς ν, μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ k τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, ἥτοι : $\nu \leq k$.

Τότε ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις :

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x) \equiv x^{\nu-1} \cdot f_{\nu-1}(x^\nu) + x^{\nu-2} f_{\nu-2}(x^\nu) + \cdots + x f_1(x^\nu) + f_0(x^\nu), \quad (1)$$

ὅπου $f_{\nu-1}(x^\nu), f_{\nu-2}(x^\nu), \dots, f_1(x^\nu), f_0(x^\nu)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x^ν .

Πράγματι: οί εκθέται τῶν ὄρων τοῦ $f(x)$ θὰ εἶναι ἡ πολλαπλάσια τοῦ v ἢ πολλαπλάσια τοῦ v ἢ ὑψημμένα κατὰ 1 ἢ πολ. v + 2 ἢ πολ. v + 3, κ.ο.κ. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ v θὰ δίδουν τὸ $f_0(x^v)$. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολ. v + 1 θὰ δίδουν τὸ $xf_1(x^v)$. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ εκθέται εἶναι πολ. v + 2 θὰ δίδουν τὸ $x^2f_2(x^v)$ κ.ο.κ.

Σημείωσις: Τὴν ὥς ἄνω πρότασιν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν αὐστηρότερον διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογή: Ἐστω $f(x) \equiv 3x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x + 3$ καὶ ἔστω ὅτι $v = 3$.

Δυνάμει τῆς ἄνωτέρω προτάσεως τὸ $f(x)$ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $f(x) \equiv x^2(8x^3 - 4) + x(3x^6 - 3x^3 + 7) - (5x^6 - 2x^3 - 3)$.

§ 78. Θεώρημα. — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ τεθέντος ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(x^v) + x^{v-2} f_{v-2}(x^v) + \dots + xf_1(x^v) + f_0(x^v)$$

διὰ τοῦ διωνύμου $x^v - \alpha$ εἶναι:

$$v(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(\alpha) + x^{v-2} f_{v-2}(\alpha) + \dots + xf_1(\alpha) + f_0(\alpha).$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ θεωρήματος § 76 προκύπτει ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x^v - \alpha)$ εἶναι: $v(x) \equiv u_{v-1}(x) + u_{v-2}(x) + \dots + u_1(x) + u_0(x)$, ὅπου $u_{v-1}(x)$, $u_{v-2}(x)$, ..., $u_1(x)$, $u_0(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων: $x^{v-1} f_{v-1}(x^v) : (x^v - \alpha)$, $x^{v-2} f_{v-2}(x^v) : (x^v - \alpha)$, ..., $xf_1(x^v) : (x^v - \alpha)$, $f_0(x^v) : (x^v - \alpha)$. Τὸ ὑπόλοιπον ὅμως τῆς διαιρέσεως τοῦ $f_{v-1}(x^v)$ διὰ τοῦ $x^v - \alpha$ εἶναι τὸ $f_{v-1}(\alpha)$, διότι, ἐὰν τεθῇ $x^v = y$, τότε, ὥς γνωστὸν (§ 64, πρόσημα I), τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f_{v-1}(y) : (y - \alpha)$ εἶναι $u = f_{v-1}(\alpha)$. Ἐξ ἁλλοῦ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ x^{v-1} διὰ τοῦ $x^v - \alpha$ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ x^{v-1} , διότι εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ ὁ διαιρετέος ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Ἀρα τὸ γινόμενον $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(x^v)$ καὶ τὸ $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(\alpha)$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^v - \alpha$ δίδουν τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^{v-1} \cdot f_{v-1}(\alpha) : (x^v - \alpha)$ εἶναι τὸ $x^{v-1} f_{v-1}(\alpha)$. Ὅθεν $u_{v-1}(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(\alpha)$.

Ὁμοίως $u_{v-2}(x) \equiv x^{v-2} f_{v-2}(\alpha)$, ..., $u_1(x) \equiv xf_1(\alpha)$, $u_0(x) \equiv f_0(\alpha)$. Ἀρα:

$$v(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(\alpha) + x^{v-2} f_{v-2}(\alpha) + \dots + xf_1(\alpha) + f_0(\alpha).$$

Πόρισμα. — Διὰ νὰ διαιρῇται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv x^{v-1} f_{v-1}(x^v) + x^{v-2} f_{v-2}(x^v) + \dots + xf_1(x^v) + f_0(x^v)$$

διὰ τοῦ $x^v - \alpha$, πρέπει καὶ ἄρκεῖ νὰ εἶναι:

$$f_{v-1}(\alpha) = 0, f_{v-2}(\alpha) = 0, \dots, f_1(\alpha) = 0, f_0(\alpha) = 0.$$

Ἐφαρμογαί: 1η: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ διὰ τοῦ διωνύμου $x^3 + 2$.

Λύσις: Τὸ $f(x)$ γράφεται: $f(x) \equiv x^2(2x^3 - 2) - x(3x^3 - 3) + (4x^3 - 4)$. Ἐὰν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου $x^3 = -2$, λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον:

$$v(x) \equiv -6x^2 + 9x - 12.$$

2α : 'Εάν α, β, γ θετικοί άκέραιοι, νά εύρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ άκέραιου πολυώνυμου $f(x) \equiv x^{3\alpha} + x^{3\beta+1} + x^{3\gamma+5}$ διὰ τοῦ $x^3 - 2$.

Λύσις : Τὸ $f(x)$ γράφεται :

$$f(x) \equiv x^2 \cdot (x^3)^{\gamma+1} + x(x^3)^{\beta} + (x^3)^{\alpha}.$$

'Εάν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου $x^3 = 2$, λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον.

$$v(x) \equiv 2^{\gamma+1} \cdot x^2 + 2^{\beta} \cdot x + 2^{\alpha}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

146. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ οὕτως, ὥστε νά πληροῦν τὴν σχέσιν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, τὸ δὲ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ νά λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 7 διὰ $x = 1$.

147. 'Εάν $v \in \mathbb{N}$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv (x+1)^{2v} - x^{2v} - 2x - 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ : $2x^3 + 3x^2 + x$.

148. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ : $(x-3)(x+2)$.

149. Νά προσδιορισθοῦν τὰ k καὶ λ καὶ νά εύρεθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου : $f(x) \equiv x^3 - 8x^2 - 8\lambda x + k$, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι : $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3$.

150. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον : $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-1)^2$.

151. Νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β , ἵνα τὸ πολυώνυμον : $f(x) \equiv x^{v+1} + \alpha x + \beta$ διαιρῆται διὰ τοῦ $(x-1)^2$ καὶ νά εύρεθῇ τὸ πηλίκον.

152. 'Ακέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ $x-2$ δίδει ὑπόλοιπον 12, διαιρούμενον δὲ διὰ $x-3$ δίδει ὑπόλοιπον 17. Νά εύρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x)$: $(x-2)(x-3)$.

153. 'Εάν τὸ πολυώνυμον $x^3 + \alpha x + \beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x-k)^2$, δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν α καὶ β ὑφίσταται ἡ σχέσις : $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^3 = 0$.

154. 'Εάν διὰ τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ x τὰ τριώνυμα :

$$(\alpha-2)x^2 + (2\beta-1)x + \gamma \quad \text{καὶ} \quad x^2 + 5x + \alpha + 1$$

λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς, νά προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ .

155. 'Εάν άκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρῆται διὰ τοῦ $x-3$, νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x-5)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x-2$.

156. 'Εάν τὸ πολυώνυμον : $f(x) \equiv x^v + \xi x^v + \eta x^v$, ($v \in \mathbb{N}$, $v \geq 2$) εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου $\phi(x) \equiv x^2 - (\alpha\gamma + \beta\zeta)x + \alpha\beta\gamma\zeta$, τότε θά ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\frac{\xi}{\alpha^v} + \frac{\eta}{\beta^v} + 1 = 0.$$

(Υπόδειξις : 'Αναλύσατε τὸ $\phi(x)$ εἰς γινόμενον παραγόντων κτλ.).

157. Νά δειχθῇ ὅτι, ἐάν $\alpha \neq \beta$, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)$ εἶναι :

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

'Εφαρμογὴ εἰς τὴν διαίρεσιν : $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 9) : (x-3)(x-2)$.

158. Εὑρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ ἐξίσωσις : $x^3 - 3\alpha x + 2\beta = 0$ ἔχη διπλὴν ρίζαν.

159. Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β ὥστε ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 24x - 72 = 0$ νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}$. Ἀκολουθῶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

160. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διὰ τοῦ $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$ εἶναι $u(x) \equiv 4x - 7$, νὰ δεიχθῇ ὅτι $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 4$.

161. Δείξατε ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ $x^2 - \alpha^2$ εἶναι τό :

$$u(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

162. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν k καὶ λ τὸ πολυώνυμον : $f(x) \equiv 3x^4 - kx^3 + 5x^2 - 9x + \lambda$ διαιρεῖται διὰ $x^2 - 1$;

163. Ἐὰν $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\alpha^3 + \alpha^2x + \alpha y + z = 1$$

$$\beta^3 + \beta^2x + \beta y + z = 1$$

$$\gamma^3 + \gamma^2x + \gamma y + z = 1.$$

(Ὑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(t) \equiv t^3 + xt^2 + yt + (z-1)$ ἔχει ρίζας α, β, γ).

164. Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ $x^2 + x + 1$ δίδει ὑπόλοιπον $x - 1$, διαιρούμενον δὲ διὰ $x^2 - x + 1$ δίδει ὑπόλοιπον $2x + 1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x)$: $(x^4 + x^2 + 1)$.

(Ὑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι : $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$).

165. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τῆς ὁποίας ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ ποία συνθήκη ὑπάρχει μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξίσωσεως καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς.

166. Ἐὰν $k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^{3k+2} + x^{3\lambda+1} + x^{3\mu}$ διαιρεῖται διὰ $x^2 + x + 1$.

167. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς διαιρεῖται διὰ τοῦ $x^2 - 2x + 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι : $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 3$.

168. Ἐὰν -4 καὶ -164 εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f(x)$: $(x+1)$ καὶ $f(x)$: $(x-3)$ ἀντιστοίχως, τότε νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x)$: $(x^2 - 2x - 3)$. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ μὲ ρίζας $0, 2, -2$, ποία ἡ ἄλῃ ρίζα του ;

169. Ἐὰν $n \in \mathbb{N}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον : $x^{4n+2} - (2n+1)x^{2n+2} + (2n+1)x^{2n} - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x^2 - 1)^2$.

170. Εὑρετε τὴν μεταξὺ τῶν α, β, γ , ὁ σχέσηιν, ἵνα αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου : $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ πληροῦν τὴν σχέσιν : $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho_3$.

171. Νὰ ὀρισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ νὰ διαιρῇται διὰ τῆς μεγαλύτερας δυνατῆς δυνάμεως τοῦ $x - 1$.

172. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$ καὶ $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$ μὲ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ἔχουν μίαν πραγματικὴν ρίζαν κοινὴν, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$1) \rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = -2\alpha, \quad 2) |\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \frac{3}{2}, \quad \text{ἐνθα } \rho_1, \rho_2, \rho_3 \text{ εἶναι ρίζαι τοῦ } f(x).$$

173. Δείξατε ὅτι διὰ κάθε ρίζαν ρ τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$, μὲ πραγματικούς συντελεστὰς, ἰσχύει ἡ ἀνισότης :

$$|\rho| < 1 + |\alpha_{n-1}| + |\alpha_{n-2}| + \dots + |\alpha_1| + |\alpha_0|.$$

174. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^2 + \alpha x + \beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) καὶ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς η μὲ $\eta \geq 2$. Ἐὰν m καλέσωμεν τὸν $\max \{ |f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)| \}$, τότε δείξατε ὅτι :

$$m \equiv \max \{ |f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)| \} \geq \eta.$$

175. Εύρετε τήν μεταξύ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σχέσιν, ἵνα αἱ ρίζαι $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ τοῦ πολυωνύμου $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ συνδέωνται ξιά τῆς σχέσεως: $\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 + \rho_4$.

176. Ἐάν τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ἔχῃ διπλὴν ρίζαν ἀριθμὸν ρ καὶ εἶναι $\rho \leq 0$ ἢ $\rho \geq 1 + \sqrt{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq \rho^2 + 2\rho.$$

177. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ $x^2 - 2\rho x + \rho^2$ εἶναι τὸ: $\pi(\rho)x + f(\rho) - \rho\pi(\rho)$, ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $[f(x) - f(\rho)] : (x - \rho)$.

178. Ἀκέριον πολυώνυμον διαιρούμενον διὰ $x + 2$ διδὲι ὑπόλοιπον 7, διαιρούμενον διὰ $x - 3$ διδὲι ὑπόλοιπον 17. Τί ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ ἂν τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ $x^2 - x - 6$; Προσδιορίσατε ἔν τοιοῦτον πολυώνυμον. Ὑποθέσατε ἀκολουθῶς ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι τρίτου βαθμοῦ καὶ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $2x^2 + x - 3$. Ποῖον εἶναι τότε τοῦτο;

179. Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ καὶ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου:

$$f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

πληροῦν τὰς σχέσεις: $|\rho_1| = 2 | \rho_2 | = 3 | \rho_3 |$, τότε δείξατε ὅτι: $|\alpha\beta| < 11 |\gamma|$.

180. Δίδεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ πραγματικούς συντελεστές:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Θέτομεν $|x| = \theta$, ὑποθέτοντες $\theta \neq 1$, καὶ $m \equiv \max \{ |\alpha_0|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|, |\alpha_n| \}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|f(x)| \leq m \cdot \frac{\theta^{n+1} - 1}{\theta - 1}.$$

II. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

‘Ομογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα.

§ 79. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί. — Ὡς εἰς τὴν § 50 ὥρισθη ἡ ἔννοια τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς μὲ συντελεστὰς πραγματικούς ἀριθμούς, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον εἰσάγεται καὶ ἡ ἔννοια τοῦ πολυωνύμου ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν $x, y, z, \dots, t$.

Ἐπειδὴ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς ἐφαρμογὰς ποὺ συναντῶμεν εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον αἱ μεταβληταὶ δὲν εἶναι περισσότεραι τῶν τριῶν, διὰ τοῦτο κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν x, y, z αἱ δὲ προτάσεις αἱ ὁποῖαι θὰ διατυπωθοῦν γενικεύονται, ἔν γένει, καὶ διὰ πολυώνυμα περισσότερων μεταβλητῶν.

Κατόπιν τούτου δίδομεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς:

α). Ἀκέριον μονώνυμον τῶν x, y, z καλεῖται πᾶσα ἔκφρασις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^k y^l z^m \quad (1)$$

ὅπου α (σταθερὸς) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ k, l, m φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδέν. Ὁ ἀριθμὸς α καλεῖται **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου (1), τὰ δὲ σύμβολα x, y, z καλοῦνται **μεταβληταί**. Τὸ ἄθροισμα $k + l + m$ τῶν ἐκθετῶν, ἐφ’ ὅσον $\alpha \neq 0$, καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ μονωνύμου (1). Ἐάν $k = l = m = 0$ καὶ $\alpha \neq 0$ τὸ μονώνυμον (1) ἀνάγεται εἰς τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν α καὶ λέγομεν εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι **βαθμοῦ μηδέν**. Ἐάν $\alpha = 0$, τότε τὸ μονώνυμον κα-

λείται **μηδενικόν** καὶ δὲν ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν βαθμὸν του. Τέλος ἂν $\alpha \neq 0$, λέγομεν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι ὡς πρὸς x βαθμοῦ k , ὡς πρὸς y βαθμοῦ λ , ὡς πρὸς z βαθμοῦ μ , ὡς πρὸς x καὶ y βαθμοῦ $k + \lambda$, κ.ο.κ. Οὕτω, π.χ., τὸ μονώνυμον : $-3x^2yz^3$ εἶναι βου βαθμοῦ, ἐνῶ ὡς πρὸς x καὶ z εἶναι βαθμοῦ 5ου.

β'). Δύο μονώνυμα καλοῦνται **ὅμοια** (ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των), ἂν ἐν τῇ παραστάσει των ἔχουν τὰς αὐτὰς μεταβλητάς καὶ ἐκάστην μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, διαφέρουν δὲ (ἂν διαφέρουν) μόνον κατὰ τοὺς συντελεστές των. Οὕτω, π.χ., τὰ μονώνυμα : $-3x^2yz^3$, $2x^2yz^3$ εἶναι ὅμοια.

Τὰ μὴ ὅμοια μονώνυμα καλοῦνται **ἀνόμοια**.

Τὰ μονώνυμα τῆς μορφῆς : $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καὶ $-\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καλοῦνται **ἀντίθετα**.

Δύο μὴ μηδενικά μονώνυμα $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καὶ $\beta x^\nu y^\rho z^\sigma$ καλοῦνται **ἐκ ταυτότητος ἴσα** καὶ γράφομεν $\alpha x^k y^\lambda z^\mu \equiv \beta x^\nu y^\rho z^\sigma$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\alpha = \beta, \quad k = \nu, \quad \lambda = \rho, \quad \mu = \sigma.$$

γ'). Τὸ **ἄθροισμα** τῶν ἀκεραίων μονωνύμων : $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}, \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \dots, \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}$ παρίσταται οὕτω :

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \dots + \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}.$$

Ἐὰν δὲ τὰ ὡς ἄνω μονώνυμα εἶναι ὅμοια τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μονώνυμον ὁμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστήν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων, ἥτοι :

$$\alpha_1 x^k y^\lambda z^\mu + \alpha_2 x^k y^\lambda z^\mu + \dots + \alpha_n x^k y^\lambda z^\mu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) x^k y^\lambda z^\mu.$$

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἁθροίσματος τῶν ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται **ἀναγωγή** αὐτῶν.

Ἡ **διαφορὰ** δύο μονωνύμων ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου μονωνύμου.

Γινόμενον τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}, \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \dots, \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}$ καλεῖται τὸ μονώνυμον : $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n x^{k_1+k_2+\dots+k_n} y^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n}$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως συνάγομεν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων μὴ μηδενικῶν μονωνύμων ὡς πρὸς ἐκάστην μεταβλητὴν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων ὡς πρὸς τὴν ἐν λόγῳ μεταβλητὴν.

Ἀκέραιον μονώνυμον λέγομεν ὅτι εἶναι **διαιρετὸν** δι' ἄλλου, μὴ μηδενικοῦ, ἀκεραίου μονωνύμου, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον δίδει τὸ πρῶτον, ἥτοι ὅταν τὸ πηλίκον τῶν δύο μονωνύμων εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $12x^3y^2z^5$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου $4x^2yz^3$, διότι τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $3xyz^2$.

δ'). Ἀκέραιον **πολυνώνυμον** τῶν x, y, z καλεῖται, κάθε ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων τῶν x, y, z , ἐκ τῶν ὁποίων δύο τοῦλάχιστον εἶναι ἀνόμοια, ἥτοι ἐν ἀκέραιον πολυνώνυμον τῶν x, y, z εἶναι μία παράστασις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \dots + \alpha_n x^{k_n} y^{\lambda_n} z^{\mu_n}, \quad (2)$$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (σταθεροί) πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $k_i, \lambda_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$

ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολυώνυμου (2). Τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πολυώνυμον (2), καλοῦνται **ὄροι** αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., ἡ παράστασις :

$$5x^3y^2z - 3xy^3z + 2x^2yz^3 - 7xy$$

εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, y, z μὲ ὅρους τὰ μονώνυμα :

$$5x^3y^2z, -3xy^3z, 2x^2yz^3, -7xy.$$

Διὰ τὰ πολυώνυμα v μεταβλητῶν $x, y, z, \dots, t$ θὰ χρησιμοποιῶμεν τοὺς συμβολισμούς :

$$f(x, y, z, \dots, t) \text{ ἢ } \varphi(x, y, z, \dots, t) \text{ ἢ } \pi(x, y, z, \dots, t) \text{ ἢ } g(x, y, z, \dots, t) \text{ κ.λ.π.}$$

Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον (2) τῶν μεταβλητῶν x, y, z γράφεται :

$$f(x, y, z) \equiv \alpha_n x^{k_n} y^{l_n} z^{m_n} + \dots + \alpha_2 x^{k_2} y^{l_2} z^{m_2} + \alpha_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1}. \quad (3)$$

Καλοῦμεν « **ἀνηγμένον** » ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν ἐκτελεσθῇ αἱ σημειωθεῖσαι πράξεις καὶ ἡ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων.

Κατωτέρω λέγοντες «**πολυώνυμον**» θὰ ἐννοῶμεν «**ἀκέραιον ἀνηγμένον πολυώνυμον**».

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς πολυωνύμου $f(x, y, z, \dots)$, v τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο καλεῖται πάλιν **μηδενικὸν πολυώνυμον** ἢ **πολυώνυμον ἐκ ταυτοτήτος ἴσον πρὸς μηδέν**.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν ἐπίσης : $f(x, y, z, \dots) \equiv 0$. Εἰς τὴν ἀντίθετον δὲ περίπτωσιν γράφομεν : $f(x, y, z, \dots) \not\equiv 0$.

Βαθμὸς ἑνός, μὴ μηδενικοῦ, ἀκέραιου πολυωνύμου καλεῖται ὁ μέγιστος βαθμὸς τῶν μονωνύμων αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y, z) \equiv 3xy^3 - 6x^5 + 3x^2y^3z^2 - 5z^4, \text{ εἶναι ἐβδόμου βαθμοῦ.}$$

Βαθμὸς ἑνός πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς ταύτης. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον $f(x, y, z)$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x εἶναι 5ου βαθμοῦ, ὡς πρὸς y 3ου καὶ ὡς πρὸς z 4ου βαθμοῦ.

ε'). Ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x, y, z, \dots)$ τοῦ ὁποίου πάντες οἱ ὄροι (ὄχι ὁμοιοί) εἶναι μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $x, y, z, \dots$ καλεῖται **ὁμογενές**. Ὁ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὄρων τοῦ καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολυωνύμου.

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $f(x, y, z, \dots)$, v βαθμοῦ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἓνα ἀκριβῶς τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x, y, z, \dots) \equiv f_n(x, y, z, \dots) + f_{n-1}(x, y, z, \dots) + \dots + f_0(x, y, z, \dots), \quad (4)$$

ἐνθα $f_k(x, y, z, \dots)$, $k = 0, 1, 2, \dots, v$ εἶναι ὁμογενές πολυώνυμον k βαθμοῦ ὁμογενείας ἢ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον καὶ $f_v(x, y, z, \dots) \not\equiv 0$.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z, \dots)$ ἔχει γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν (4) λέγομεν ὅτι τοῦτο ἔχει διαταχθῇ εἰς **ὁμογενεῖς ομάδας**.

Κατόπιν τούτων ἔν ἀκέραιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν x, y, z δύναται νὰ διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας ὡς κάτωθι :

$$f(x,y,z) \equiv \alpha_0 + [\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z] + [\alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 + \alpha_6z^2 + \alpha_7xy + \alpha_8xz + \alpha_9yz] + \\ + \alpha_{10}x^3 + \alpha_{11}y^3 + \alpha_{12}z^3 + \alpha_{13}x^2y + \alpha_{14}x^2z + \alpha_{15}y^2x + \dots,$$

ἔνθα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ οἱ συντελεσται τοῦ πολυωνύμου.

στ'). Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον πολυωνύμων τριῶν καὶ γενικῶς n μεταβλητῶν ὀρίζεται ὡς ἀκριβῶς καὶ διὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὰ πολυώνυμα n τὸ πλῆθος μεταβλητῶν μὲ πραγματικούς συντελεστὰς ἀποτελοῦν *δακτύλιον*, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μέ: $R[x,y,z,\dots]$.

Ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, περιεχόντων τὰς αὐτὰς μεταβλητάς, ὀρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Ἀκριβέστερον λέγομεν ὅτι :

Δύο ἀκέραια πολυώνυμα $f(x,y,z,\dots)$ καὶ $\varphi(x,y,z,\dots)$ εἶναι ἴσα ἢ ἐκ ταυτότητος ἴσα, καὶ γράφομεν $f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots)$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν σύγκεινται ἀπὸ ἴσα μονώνυμα ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ, ἂν ἡ διαφορὰ των εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Ἡτοι :

$$f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \iff f(x,y,z,\dots) - \varphi(x,y,z,\dots) \equiv 0$$

ορσ

Οὕτω, π.χ., τὰ πολυώνυμα :

$f(x,y) \equiv \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x + \epsilon y + \theta$ καὶ $\varphi(x,y) \equiv 2x^2 - 3xy + y^2 + 5x + 4$ θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1, \delta = -5, \epsilon = 0, \theta = 4.$$

ζ'). Καλοῦμεν *ἀριθμητικὴν τιμὴν* τοῦ πολυωνύμου $f(x,y,z,\dots)$ διὰ $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma, \dots$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοί, τὸν ἀριθμὸν $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z,\dots)$ ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητάς $x,y,z,\dots$ διὰ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων n μεταβλητῶν καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου προκύπτει ὅτι :

Ἐὰν $f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \implies f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ καὶ ἔαν $f(x,y,z,\dots) \equiv 0 \implies f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0$ διὰ κάθε n -άδα τιμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ τῶν $x, y, z, \dots$ ἀντιστοίχως.

Παρατήρησις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν, διατάσσομεν συνήθως αὐτὰ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις :

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $f(x,y,z)$, n βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x , δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x κατὰ μοναδικὸν (μονοσήμαντον) τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_n(y,z) x^n + f_{n-1}(y,z) x^{n-1} + \dots + f_1(y,z) x + f_0(y,z), \quad (4)$$

ἔνθα $f_n(y,z), f_{n-1}(y,z), \dots, f_0(y,z)$ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν μεταβλητῶν y,z καὶ $f_n(y,z) \neq 0$.

Προφανώς ή διάταξις αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς :

Συλλέγομεν πρῶτον τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ x εἰς τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν v καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸ x^v , ὅτε ἔχομεν ὡς συντελεστὴν τοῦ x^v ἓν γένει πολυώνυμον τῶν y καὶ z , τὸ ὅποιον καλοῦμεν $f_v(y, z)$. Ἀκολουθῶς συλλέγομεν τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ x εἰς τὴν δύναμιν $v-1$ καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸν x^{v-1} καὶ ἔχομεν οὕτω ὡς συντελεστὴν τοῦ x^{v-1} ἓν γένει πολυώνυμον τῶν y καὶ z , τὸ ὅποιον καλοῦμεν $f_{v-1}(y, z)$. Προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον συλλέγομεν τέλος τοὺς ὅρους οἱ ὅποιοι δὲν ἔχουν τὴν μεταβλητὴν x καὶ οἱ ὅποιοι ἀπαρτίζουσιν τὸν τελευταῖον προσθετέον $f_0(y, z)$ τοῦ ἀναπτύγματος (4).

Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον $f(x, y, z)$, ἔδν εἶναι βαθμοῦ μ ὡς πρὸς μίαν ἄλλην μεταβλητὴν π.χ. τὴν y δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ y , δηλ. νὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$f(x, y, z) \equiv f_{\mu}(x, z) y^{\mu} + f_{\mu-1}(x, z) y^{\mu-1} + \dots + f_1(x, z) y + f_0(x, z), \quad (4')$$

ἔνθα $f_{\mu}(x, z), f_{\mu-1}(x, z), \dots, f_0(x, z)$ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν x, z καὶ $f_{\mu}(x, z) \neq 0$.

Ἐφαρμογή. Τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y, z) \equiv 5x^4y^2z^3 - 3x^2yz^5 + 2x^3z - x^4y + 4yx - 7xy^2z + 3z - 2y$$

διατάσσεται κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x ὡς κάτωθι :

$$f(x, y, z) \equiv (5y^2z^3 - y)x^4 + (2z - 3yz^5)x^3 + (4y - 7y^2z)x + (3z - 2y).$$

η'). Ἀνάλογοι προτάσεις πρὸς τὰ θεωρήματα I καὶ II τῶν §§ 52, 53 διατυπῶνται καὶ διὰ πολυώνυμα περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν, ἥτοι :

1ον : Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x, y, z, \dots)$ καὶ $\varphi(x, y, z, \dots)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἐνὼ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, τότε τὸ ἄλλο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Δηλαδή :

Ἐὰν $f(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots) \equiv 0$ καὶ $\varphi(x, y, z, \dots) \neq 0 \implies f(x, y, z, \dots) \equiv 0$.

2ον : Ἐὰν $f(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots) \equiv g(x, y, z, \dots) \cdot \varphi(x, y, z, \dots)$ καὶ $\varphi(x, y, z, \dots) \neq 0$, τότε : $f(x, y, z, \dots) \equiv g(x, y, z, \dots)$.

Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν.

§ 80. Τελεία διαιρέσεις. — Ἡ τελεία διαιρέσεις ἀκεραίων πολυωνύμων περισσότερων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν ὀρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι :

Τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $\varphi(x, y, z, \dots)$ διαιρεῖ τὸ $f(x, y, z, \dots)$ καὶ γράφομεν $\varphi(x, y, z, \dots) \mid f(x, y, z, \dots)$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x, y, z, \dots)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x, y, z, \dots) \equiv \varphi(x, y, z, \dots) \cdot \pi(x, y, z, \dots). \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z, \dots)$ *διαιρεῖται* (ἀκριβῶς) ἢ εἶναι *διαιρετὸν* διὰ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x, y, z, \dots)$ ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ διαιρέσις $f(x, y, z, \dots) : \varphi(x, y, z, \dots)$ εἶναι *τελεία*.

Τὸ πολυώνυμον $\pi(x, y, z, \dots)$ καλεῖται ἐπίσης *πηλίκον* τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x, y, z, \dots) : \varphi(x, y, z, \dots)$. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον $f(x, y) \equiv x^3 + y^3$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $\varphi(x, y) \equiv x^2 - xy + y^2$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x, y) \equiv x + y$.

Είναι φανερόν ότι τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x,y,z,\dots) : \varphi(x,y,z,\dots)$, ἤτοι τὸ πολυώνυμον $\pi(x,y,z,\dots)$, ὁρίζεται μονοσημάντως· πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο πολυώνυμον $\pi_1(x,y,z,\dots)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots), \quad (2)$$

τότε, δυνάμει τῶν (1) καὶ (2), θὰ εἶχομεν :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots)$$

καὶ ἐπομένως :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot [\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots)] \equiv 0 \quad (3)$$

Ἀλλὰ $\varphi(x,y,z,\dots) \neq 0$, ὅθεν (§ 79, η) θὰ εἶναι :

$$\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots) \equiv 0 \quad \eta \quad \pi(x,y,z,\dots) \equiv \pi_1(x,y,z,\dots)$$

Δηλαδή ἐν μόνον πηλίκον ὑπάρχει.

Σημείωσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμων περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν δὲν ἰσχύει ἐν ἀνάλογον θεώρημα πρὸς τὸ τῆς § 64. Κατὰ ταῦτα :

Δοθέντων δύο πολυωνύμων $A(x,y)$ καὶ $B(x,y)$ δὲν ὑπάρχουν πάντοτε δύο πολυώνυμα $Q(x,y)$ καὶ $R(x,y)$ (μὲ βαθμὸν τοῦ $R(x,y)$ μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ $B(x,y)$) τοιοῦτων, ὥστε :

$$A(x,y) \equiv B(x,y) \cdot Q(x,y) + R(x,y).$$

Παράδειγμα : $A(x,y) \equiv x^3 + 2xy^2 - x + 1$, $B(x,y) \equiv x + y - 1$.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μερικά βασικά θεωρήματα διαιρετότητος.

§ 81. Θεώρημα.— Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ διωνύμου $x - y$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν : $f(y,y,z) \equiv 0$, δηλ. καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὅταν εἰς αὐτὸ τεθῇ ἀντὶ x τὸ y .

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $x - y \mid f(x,y,z)$, τότε, ἐὰν καλέσωμεν $\pi(x,y,z)$ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x,y,z) : (x - y)$, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z) \quad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ x διὰ τοῦ y λαμβάνομεν :

$$f(y,y,z) \equiv 0. \quad (2)$$

Ἀντιστροφή. Ἐστω ὅτι ἰσχύει ἡ (2) καὶ ὅτι v εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ $f(x,y,z)$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x . Τότε τὸ $f(x,y,z)$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_v(y,z)x^v + f_{v-1}(y,z)x^{v-1} + \dots + f_1(y,z)x + f_0(y,z).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διείρεσιν τοῦ $f(x,y,z)$ διὰ $x - y$, θὰ εὕρωμεν ἐν πηλίκον $\pi(x,y,z)$ καὶ ἐν ὑπόλοιπον μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x , δηλ. ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ περιέχον τὸ x , ἀλλὰ μόνον τὰς μεταβλητὰς y καὶ z .

Ἐὰν $u(y,z)$ καλέσωμεν τὸ ἐν λόγῳ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z) + u(y,z). \quad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὸ x μὲ τὸ y καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) λαμβάνομεν :

$$u(y,z) \equiv f(y,y,z) \equiv 0,$$

δηλαδή τὸ $u(y,z)$ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ὅτε ἡ (3) γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z), \quad \text{δηλαδή} \quad (x - y) \mid f(x,y,z).$$

§ 82. Θεώρημα. — 'Εάν άκέραιον πολώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρῆται δι' ένόδς έκάστου τών διωνύμων: $x-y, y-z, z-x$, τότε θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου :

$$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$$

καί άντιστρόφως.

'Α πό δ ε ι ξ ι ς. 'Εφ' όσον, έξ ύποθέσεως, τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ $x-y$ θά έχωμεν, έάν $\pi_1(x,y,z)$ καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y) \cdot \pi_1(x,y,z). \quad (1)$$

'Εάν εἰς τὴν (1) τεθῇ ὅπου y τὸ z λαμβάνομεν :

$$f(x,z,z) \equiv (x-z) \cdot \pi_1(x,z,z). \quad (2)$$

'Επειδὴ ὁμως τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ $y-z$, θά εἶναι (§ 81) $f(x,z,z) \equiv 0$.

Τότε ὁμως ἐκ τῆς (2) προκύπτει : $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$, διότι $x-z \neq 0$.

'Εκ τῆς $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$ προκύπτει ὅτι τὸ πολώνυμον $\pi_1(x,y,z)$ διαιρεῖται (άκριβῶς) διὰ $y-z$, ὅθεν θά έχωμεν, έάν $\pi_2(x,y,z)$ καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης :

$$\pi_1(x,y,z) \equiv (y-z) \pi_2(x,y,z). \quad (3)$$

'Η (1), λόγω τῆς (3), γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z) \pi_2(x,y,z). \quad (4)$$

'Εάν εἰς τὴν (4) τεθῇ ὅπου z τὸ x λαμβάνομεν :

$$f(x,y,x) \equiv (x-y)(y-x) \cdot \pi_2(x,y,x). \quad (5)$$

'Επειδὴ ὁμως τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $z-x$, θά εἶναι $f(x,y,x) \equiv 0$.

Τότε ὁμως ἐκ τῆς (5) προκύπτει : $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$, διότι $(x-y)(y-x) \neq 0$.

'Αλλά $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$ δηλοῖ ὅτι τὸ πολώνυμον $\pi_2(x,y,z)$ διαιρεῖται (άκριβῶς) διὰ τοῦ $z-x$. Ἄρα :

$$\pi_2(x,y,z) \equiv (z-x) \cdot \pi(x,y,z), \quad (6)$$

ἐνθα $\pi(x,y,z)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\pi_2(x,y,z) : (z-x)$.

'Η (4), δυνάμει τῆς (6), γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)(z-x) \cdot \pi(x,y,z).$$

Συνεπῶς τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται άκριβῶς καί διὰ τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$.

Τὸ άντίστροφον εἶναι προφανές.

Δι' αναλόγου τρόπου άποδεικνύεται καί τὸ κάτωθι :

§ 83. Θεώρημα. — 'Εάν άκέραιον πολώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρῆται :

(i) διὰ $x+y, y+z, z+x \iff$ διαιρεῖται καί διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$

(ii) διὰ $x, y, z, \iff \gg \gg \gg x \cdot y \cdot z$

(iii) διὰ $x+y-z, y+z-x, z+x-y \iff \gg \gg \gg (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τά προηγούμενα θεωρήματα ίσχύουν γενικῶς διὰ κάθε πολώνυμον $f(x,y,z,\dots, t)$, v τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, αἱ δέ άποδείξεις εἶναι πανομοιότυποι τῶν άνωτέρω ὡς καί διὰ πολώνυμα τριῶν μεταβλητῶν.

'Ε φ α ρ μ ο γ ῆ. 'Εάν v φυσικὸς άριθμός, νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^{2v+1} - x^{2v+1} - y^{2v+1} - z^{2v+1}$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου : $(x+y)(y+z)(z+x)$.

Λ ό σ ι ς. Ἀντικαθιστώντες τὸ x μὲ τὸ $-y$ εἰς τὸ $f(x,y,z)$ εὔρισκομεν :

$$f(-y,y,z) \equiv (-y+y+z)^{2v+1} - (-y)^{2v+1} - y^{2v+1} - z^{2v+1} \equiv z^{2v+1} + y^{2v+1} - y^{2v+1} - z^{2v+1} \equiv 0.$$

Ἄρα τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται (άκριβῶς) διὰ $x+y$. Ὁμοίως άποδεικνύεται ὅτι διαιρεῖται διὰ $y+z$ καί $z+x$. Τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὸ τελευταῖον θεωρήμα τὸ $f(x,y,z)$ θά διαιρῆται καί διὰ τοῦ γινομένου $(x+y)(y+z)(z+x)$.

'Ομογενή πολυώνυμα

§ 84. 'Ορισμοί.— Εἰς τὴν παράγραφον 79 εἶδομεν ὅτι: *Ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται ὁμογενὲς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὅλοι οἱ ὅροι του, δηλαδὴ τὰ μονώνυμα (μὴ μηδενικά) ἐξ ὧν σύγκειται εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν.*

Ὁ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὅρων του καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολυωνύμου. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv 2x^3 - y^3 + 3z^3 + x^2y + y^2z - z^2x + 3xyz$ εἶναι ὁμογενὲς, τρίτου βαθμοῦ. Ἐπίσης τὸ πολυώνυμον $\varphi(x,y) \equiv x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3$ εἶναι ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας, ἐνῶ τὸ πολυώνυμον: $g(x,y) \equiv x^2 + y^2 + xy + x + y$ δὲν εἶναι ὁμογενές.

Ἐστω τώρα ἐν ὁμογενὲς πολυώνυμον $f(x,y,z)$, βαθμοῦ ὁμογενείας v , τότε ὁ τυχὼν ὅρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha x^k y^p z^\mu$, ἔνθα α (σταθερὸς) πραγματικός ἀριθμὸς καὶ k, p, μ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδὲν τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $k + p + \mu = v$. Ὁ ὅρος οὗτος, ἐὰν τὰ x, y, z ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν γινομένων: $\lambda x, \lambda y, \lambda z$, ἔνθα λ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς, $\lambda \neq 0$, γίνεται:

$$\alpha(\lambda x)^k (\lambda y)^p (\lambda z)^\mu \equiv \alpha \cdot \lambda^{k+p+\mu} x^k y^p z^\mu \equiv \lambda^v \cdot \alpha x^k y^p z^\mu,$$

ἥτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^v . Ἐφ' ὅσον ὁ τυχὼν ὅρος τοῦ πολυωνύμου $f(x,y,z)$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^v , ἔπεται ὅτι καὶ τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^v . Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἐξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου:

Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z, \dots)$ καλεῖται ὁμογενὲς, v βαθμοῦ, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots) \equiv \lambda^v \cdot f(x, y, z, \dots)$$

διὰ κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ καὶ $(x, y, z, \dots) \neq (0, 0, 0, \dots)$.

Παράδειγμα: Τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ, διότι ἔχομεν:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 - 3(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z) \equiv \lambda^3 \cdot (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \equiv \lambda^3 \cdot f(x, y, z).$$

Ἀσκήσις. Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν ἀνωτέρω δύο ὁρισμῶν τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου.

Ἰδιότητες τῶν Ὀμογενῶν πολυωνύμων

§ 85. Ἰδιότης I.— Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ βαθμῶν ὁμογενείας v καὶ μ ἀντιστοίχως. Τότε θὰ ἔχομεν:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^v \cdot f(x, y, z) \quad (1)$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z). \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \cdot \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{v+\mu} \cdot f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z) \quad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς βεβαιώνει ὅτι τὸ γινόμενον $f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)$ τῶν δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον $v + \mu$ βαθμοῦ ὁμογενείας.

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁμογενοῦς καὶ ἑνὸς μὴ ὁμογενοῦς πολυωνύμου καθὼς καὶ τὸ γινόμενον δύο μὴ ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον μὴ ὁμογενὲς (διατί;))

§ 86. Ἰδιότης II.— Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενές, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Ἀπόδειξις. Ἐστῶσαν $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\pi(x, y, z)$ ἀντιστοίχως ὁ διαιρετός, ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως καὶ v , μ ($v > \mu$) ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ ὁμογενείας τῶν $f(x, y, z)$ καὶ $\varphi(x, y, z)$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(x, y, z) \quad (1)$$

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^v \cdot f(x, y, z) \quad (2)$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z). \quad (3)$$

Ἡ ταυτότης (1), ἐὰν τὰ x, y, z ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν λx , λy , λz γίνεται :

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \cdot \pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

ἢ δυνάμει τῶν (2) καὶ (3) :

$$\lambda^v \cdot f(x, y, z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x, y, z) \cdot \pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (4)$$

Διαιροῦντες τὰς (4) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$\pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{v-\mu} \cdot \pi(x, y, z),$$

ἢ ὅποια δηλοῖ ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον βαθμοῦ ὁμογενείας $v - \mu$.

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης II ἀποδεικνύεται συντομώτερον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἔχοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν παρατήρησιν τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε ὁμογενὲς πολυώνυμον. Περὶ τοῦτου βεβαιούμεθα ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων :

Ἐάν $f(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ)

καὶ $\varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ (» » δευτέρου »)

τότε τὸ ἄθροισμά των, ἥτοι τὸ πολυώνυμον :

$$\sigma(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + \varphi(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 3xyz$$

δὲν εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ x, y, z .

Ἀντιθέτως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ πολυώνυμα :

$$f(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ})$$

$$g(x, y, z) \equiv x^2y + y^2z + z^2x + 5xyz \quad (\text{ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ})$$

τότε καὶ τό :

$$\tau(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + g(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + 2xyz$$

εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ μάλιστα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας.

Γενικώς: Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ὁμογενῶν πολυωνύμων θὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον, ἐὰν τὰ πολυώνυμα τὰ ὁποῖα προστίθενται εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 8xy$ εἶναι ὁμογενὲς δευτέρου βαθμοῦ ὁμογενείας.

182. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv 8x^2y - 5x^2y^2 + 3xy^3$ εἶναι ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας.

183. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv 5x^3 - y^3 + 2z^3 + x^2y + y^2z - z^2x + 3xyz$ εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ ὁμογενείας.

184. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv 9x^5y^3 + 3x^4y^4 - 14xy^7$ εἶναι ὁμογενὲς, ὁγδούτου βαθμοῦ ὁμογενείας.

(Νὰ γίνη εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀσκήσεις χρῆσις τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ).

185. Ὁμοίως, τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ, δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y) \equiv x^5 - 5x^4y + 6x^3y^2 - 5x^2y^3 + xy^4 - y^5$$

εἶναι ὁμογενὲς 5ου βαθμοῦ ὁμογενείας.

186. Δίδονται τὰ πολυώνυμα: $f(x,y) \equiv x^3 + 2xy^2 + x^2y + xy + x + y,$

$$\varphi(x,y,z) \equiv 3x^2y^2z^2 - 2xy^2z^2 + y^2z - 7x^4yz.$$

Εἶναι ὁμογενῆ; Ἐν καταφατικῇ περιπτώσει νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογενείας τῶν.

Συμμετρικὰ πολυώνυμα

§ 87. Βοηθητικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί. — α'). Ἐστωσαν n τὸ πλήθος διάφορα ἀλλήλων διατεταγμένα στοιχεῖα $x_1, x_2, \dots, x_n$, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου E , ἥτοι $E \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Καλεῖται μετὰ θέσις τῶν n αὐτῶν στοιχείων κάθε ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

Οὕτω, π.χ., ἐὰν $E \equiv \{x, y, z\}$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$x \leftrightarrow y, \quad y \leftrightarrow x, \quad z \leftrightarrow z,$$

τότε αὕτη εἶναι μία μετὰ θέσις τῶν στοιχείων τοῦ τριμελοῦς συνόλου E .

Τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν (μετὰ θέσιν) παριστῶμεν συμβολικῶς οὕτω:

$$\left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y & x & z \end{array} \right) \text{ ἢ ἀπλούστερον } \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & x & z \end{array} \right)^*$$

Μεταθέσεις τοῦ τριμελοῦς συνόλου $\{x, y, z\}$ εἶναι καὶ αἱ ἑξῆς:

$$\left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & y & z \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & z & y \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ z & x & y \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ z & y & x \end{array} \right).$$

Ὡστε ἐκ τοῦ τριμελοῦς συνόλου $\{x, y, z\}$ λαμβάνομεν $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ μεταθέσεις.

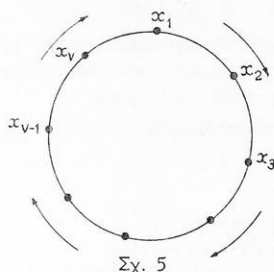
*) Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἐκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ.

Εἰς ἔν ἐπόμενον κεφάλαιον θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : Τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ἐνὸς συνόλου ἐκ n στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Μία εἰδικὴ περίπτωσις μεταθέσεως εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου E ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπόμενόν του, τὸ δὲ τελευταῖον στοιχεῖον x_n εἰς τὸ πρῶτον x_1 . Δηλαδή ἡ μετάθεσις :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n & x_1 \end{pmatrix}$$

Μία τοιαύτη μετάθεσις καλεῖται : **κυκλικὴ μετάθεσις**.



Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως ἐὰν τὰ n διατεταγμένα στοιχεῖα $x_1, x_2, \dots, x_n$ φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ μιᾶς περιφερείας κύκλου καὶ θεωρήσωμεν ἓν κινητὸν τὸ ὁποῖον διαγράφει τὴν περιφέρειαν (σχ. 5) κατὰ τὴν φορὰν ποὺ δεικνύουν τὰ βέλη, τότε τὸ κινητὸν μετὰ τὸ x_1 θὰ συναντήσῃ τὸ x_2 , μετὰ τὸ x_2 τὸ x_3 ... καὶ τέλος μετὰ τὸ x_n θὰ συναντήσῃ πάλιν τὸ x_1 .

Κυκλικαὶ μεταθέσεις ἐκ δύο στοιχείων καλοῦνται εἰδικώτερον **ἀντιμεταθέσεις**.

β'). Ὡς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1$ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y . Ἐὰν ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητὰς x καὶ y , δηλ. ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ y καὶ ἀντὶ y τὸ x θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον $f(y,x) \equiv y^2 + x^2 - 3y + 2x + 1$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι διάφορον τοῦ $f(x,y)$, ἥτοι ἔχομεν : $f(y,x) \neq f(x,y)$.

Ἀντιθέτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 3(x+y) - 5$$

καὶ ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητὰς του προκύπτει πολυώνυμον ἐκ ταυτοτήτος ἴσον πρὸς τὸ δοθέν, ἥτοι ἐν προκειμένῳ ἰσχύει : $f(y,x) \equiv f(x,y)$.

Ὁμοίως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν :

$$f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του x, y, z μίαν οἰανδήποτε μετάθεσιν,

λ.χ. τήν : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$, ἥτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ z , ἀντὶ y τὸ x καὶ ἀντὶ z τὸ y θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον :

$$f(z,x,y) \equiv z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy.$$

Εἶναι δέ :

$$f(z,x,y) \equiv f(x,y,z).$$

Τὰ πολυώνυμα τῶν δύο τελευταίων παραδειγμάτων καλοῦνται : **συμμετρικά**. Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἐξῆς ὅρισμόν τοῦ συμμετρικοῦ πολυωνύμου.

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται **συμμετρικόν** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἴανδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του προκύπτῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτοτήτος ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Οὕτως, ἔὰν $f(x,y,z)$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς x,y,z θὰ ἔχωμεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(z,x,y) \equiv f(y,x,z) \equiv f(z,y,x) \equiv f(x,z,y) \equiv f(x,y,z).$$

γ'). Ἐὰς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y). \quad (1)$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ πολυώνυμον δὲν εἶναι συμμετρικόν, κατὰ τὸν δοθέντα ὅρισμόν, διότι, ἔὰν λάβωμεν τὴν μετάθεσιν $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του, θὰ προκύψῃ πολυώνυμον $f(z,y,x)$ διάφορον τοῦ δοθέντος.

Ἀντιθέτως, ἔὰν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του x,y,z ἐφαρμόσωμεν τὴν κυκλικὴν μετάθεσιν, ἥτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ y , ἀντὶ y τὸ z καὶ ἀντὶ z τὸ x , εἰς ἔχωμεν :

$$f(y,z,x) \equiv y^2(z-x) + z^2(x-y) + x^2(y-z). \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(x,y,z).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1) εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν. Ὡστε :

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται κυκλικῶς συμμετρικόν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἷαςδήποτε κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του προκύψῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι κάθε συμμετρικόν πολυώνυμον εἶναι καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν, τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει (διαιτί;).

Κατωτέρω εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ πολυώνυμον εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν θὰ τονίζωμεν τοῦτο ἰδιαίτερώς.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμου δύο μεταβλητῶν αἱ ἔννοιαι : «συμμετρικόν πολυώνυμον» καὶ «κυκλικῶς συμμετρικόν πολυώνυμον» εἶναι ταυτόσημοι.

Ἰδιότητες τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων

§ 88. Ἰδιότης I.—Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων εἶναι πάντοτε συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς εὐκόλος παραλείπεται.

§ 89. Ἰδιότης II.—Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων (τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν) εἶναι συμμετρικόν πολυώνυμον.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ καὶ $\pi(x,y,z)$ ἀντιστοίχως ὁ διαιρετέος, διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων $f(x,y,z)$ καὶ $\varphi(x,y,z) \neq 0$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x,y,z) \cdot \pi(x,y,z). \quad (1)$$

Διὰ μιᾶς τυχούσης μεταθέσεως τῶν x, y, z π.χ. τῆς $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$, ἡ (1)

γίνεται :

$$\begin{aligned} f(z, x, y) &\equiv \varphi(z, x, y) \cdot \pi(z, x, y) \\ \eta \quad f(x, y, z) &\equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(z, x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

διότι τὰ πολυώνυμα $f(x, y, z)$ καὶ $\varphi(x, y, z)$ ὑπετέθησαν συμμετρικά.

Διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\pi(z, x, y) \equiv \pi(x, y, z).$$

Ὅμοιως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ οἰαδήποτε ἄλλη μετάθεσις τῶν x, y, z καθιστᾷ τὸ πηλίκον $\pi(x, y, z)$ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτό· ὅθεν τὸ $\pi(x, y, z)$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Π α ρ α τ ῆ ρ η σ ι ς. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα $f(x, y, z)$ καὶ $\varphi(x, y, z)$ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικά, τότε τὸ πηλίκον $\pi(x, y, z)$ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον.

§ 90. Ἰδιότης III.—Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x, y, z)$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, z καὶ διαιρῆται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $\varphi(x, y, z) \neq 0$ (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται διὰ παντὸς πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ $\varphi(x, y, z)$ δι' οἰασδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

Ἀ π ὅ δ ε ι ξ ι ς. Ἐστω $\pi(x, y, z)$ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x, y, z) : \varphi(x, y, z)$, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) \cdot \pi(x, y, z). \quad (1)$$

Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (1) ἐκτελέσωμεν μίαν οἰανδήποτε μεταθέσιν τῶν x, y, z π.χ. τὴν $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$, τὸ πρῶτον μέλος δὲν βλάπτεται, διότι τὸ $f(x, y, z)$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος γίνεται : $\varphi(y, x, z) \cdot \pi(y, x, z)$, καὶ ἐπομένως ἡ (1) γράφεται :

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(y, x, z) \cdot \pi(y, x, z). \quad (2)$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὸ $f(x, y, z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $\varphi(y, x, z)$.

Ὅμοιως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ $f(x, y, z)$ διαιρεῖται διὰ παντὸς ἄλλου πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ $\varphi(x, y, z)$ δι' οἰασδήποτε ἄλλης μεταθέσεως τῶν x, y, z .

Σ η μ ε ῖ ω σ ι ς. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z)$ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ἡ ἰδιότης III ἰσχύει ὑπὸ τὴν ἐξῆς ὁμοῦ διατύπωσιν :

Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x, y, z)$ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, z καὶ διαιρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $\varphi(x, y, z) \neq 0$ (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν πολυωνύμων $\varphi(y, z, x)$ καὶ $\varphi(z, x, y)$, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ $\varphi(x, y, z)$ διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

Πόρισμα. — Κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρετὸν διὰ $x-y$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$, διαιρετὸν διὰ $x+y$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+y)(y+z)(z+x)$, διαιρετὸν δὲ διὰ $x+y-z$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

§ 91. Ἰδιότης IV. — Ἐὰν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y)$ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-y$, θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $(x-y)^2$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ $x-y$ διαιρεῖ τὸ $f(x,y)$ ὑπάρχει πολυώνυμον $\pi(x,y)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y) \equiv (x-y) \cdot \pi(x,y). \quad (1)$$

$$\text{Τότε :} \quad f(y,x) \equiv (y-x) \cdot \pi(y,x). \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἔπειδὴ τὸ $f(x,y)$ ὑπετέθη συμμετρικόν, ἔπεται :

$$(x-y) \cdot \pi(x,y) \equiv (y-x) \cdot \pi(y,x)$$

$$\eta \quad (x-y) [\pi(x,y) + \pi(y,x)] \equiv 0. \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $x-y \neq 0$, ἐκ τῆς (3) ἔπεται :

$$\pi(x,y) + \pi(y,x) \equiv 0,$$

η ἀντικαθιστώντες τὸ x διὰ τοῦ y ἔχομεν :

$$\pi(y,y) + \pi(y,y) \equiv 0, \quad \text{δηλ.} \quad \pi(y,y) \equiv 0,$$

συνεπῶς τὸ $\pi(x,y)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-y$. Κατὰ ταῦτα ὑπάρχει πολυώνυμον $\phi(x,y)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$\pi(x,y) \equiv (x-y) \cdot \phi(x,y).$$

Τότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x,y) \equiv (x-y)^2 \cdot \phi(x,y),$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι τὸ $f(x,y)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ $(x-y)^2$.

§ 92. Μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων. — Ἡ γενικὴ μορφή τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων μέχρι τρίτου βαθμοῦ εἶναι :

α'). Διὰ δύο μεταβλητὰς x καὶ y .

$$1). \text{ Πρωτοβάθμια :} \quad \alpha(x+y) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

$$2). \text{ Δευτεροβάθμια :} \quad \alpha(x^2+y^2) + \beta xy + \gamma(x+y) + \delta, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \\ \alpha \neq 0 \quad \eta \quad \beta \neq 0.$$

$$3). \text{ Τριτοβάθμια :} \quad \alpha(x^3+y^3) + \beta(x^2y+y^2x) + \gamma xy + \delta(x+y) + \epsilon, \quad \alpha, \beta, \dots, \epsilon \in \mathbf{R} \\ \text{καὶ} \quad \alpha \neq 0 \quad \eta \quad \beta \neq 0.$$

β'). Διὰ τρεῖς μεταβλητὰς x, y, z .

$$1). \text{ Πρωτοβάθμια :} \quad \alpha(x+y+z) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

$$2). \text{ Δευτεροβάθμια :} \quad \alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx) + \gamma(x+y+z) + \delta. \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq 0.$$

3). Τριτοβάθμια : $\alpha(x^3 + y^3 + z^3) + \beta(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + \gamma xyz + \delta(x^2 + y^2 + z^2) + \varepsilon(xy + yz + zx) + \theta(x + y + z) + \eta$, $\varepsilon\eta\theta\alpha$
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \eta \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon\eta\theta\alpha$ τουλάχιστον τῶν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

Ἄς ἀποδείξωμεν τὸ α_2 τῶν ἀνωτέρω :

Πράγματι· κάθε πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + Ey + \Theta \quad (1)$$

ἐνθα $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta$ (σταθεροὶ) πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὅχι ὅλοι ὑποχρεωτικῶς $\neq 0$.

Διὰ νὰ εἶναι τοῦτο κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει νὰ παραμένῃ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτό, δι' οἵαδήποτε κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν x, y (ἀντιμεταθέσεως).

Δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν x καὶ y προκύπτει τὸ πολυώνυμον :

$$f(y, x) \equiv Ay^2 + Bx^2 + \Gamma yx + \Delta y + Ex + \Theta, \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ πολυώνυμον (1), ἥτοι :

$$Ay^2 + Bx^2 + \Gamma yx + \Delta y + Ex + \Theta \equiv Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + Ey + \Theta.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος (§ 79) δύο πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν ἔχομεν : $Ay^2 \equiv Bx^2$, $Bx^2 \equiv Ax^2$, $\Gamma yx \equiv \Gamma xy$, $\Delta y \equiv Ey$, $Ex \equiv \Delta x$, $\Theta = \Theta$, ἐξ ὧν :

$$A = B, \quad \Delta = E.$$

Θέτοντες $A = B = \alpha$, $\Gamma = \beta$, $\Delta = E = \gamma$ καὶ $\Theta = \delta$ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1), πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς :

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta xy + \gamma(x + y) + \delta.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὐρίσκονται καὶ αἱ γενικαὶ μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων, τὰς ὁποίας ἀνεγράψαμεν ἀνωτέρω.

§ 93. Τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα. — Ἄς θεωρήσωμεν ν μεταβλητὰς $x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε τὰ ἀπλούστερα συμμετρικὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς αὐτὰς εἶναι τὰ κάτωθι :

$$S_1 \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$S_2 \equiv x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$S_3 \equiv x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n \equiv x_1x_2x_3 \dots x_n.$$

Τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα καλοῦνται **στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα** τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Οὕτω, π.χ., τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα δύο μεταβλητῶν x, y εἶναι τὰ :

$$S_1 = x + y \quad \text{καὶ} \quad S_2 = xy,$$

τριῶν μεταβλητῶν x, y, z εἶναι :

$$S_1 = x + y + z, \quad S_2 = xy + yz + zx, \quad S_3 = xyz.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι : Πᾶν ἀκέραιον συμμετρικὸν πολυώνυμον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ πάντοτε κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον συναρτήσῃ τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων.

Οὕτω, π.χ., τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον :

$$f(x, y) \equiv x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3 \quad (1)$$

γράφεται :

$$f(x, y) \equiv (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 2xy(x + y) \equiv (x + y)^3 - 5xy(x + y)$$

$$\begin{aligned} \eta \quad \alpha \nu : \quad S_1 &= x + y \quad \text{και} \quad S_2 = xy, \\ \text{τότε :} \quad f(x, y) &\equiv S_1^3 - 5 S_1 S_2, \end{aligned}$$

ήτοι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον (1) ἔχει ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων τῶν μεταβλητῶν του.

§ 94. Ὁμογενῆ καὶ κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα.— Εἶναι φανερόν ὅτι ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νὰ εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του χωρὶς συγχρόνως νὰ εἶναι καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν ὡς πρὸς αὐτάς καὶ ἀντιστρόφως, δύναται νὰ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν χωρὶς νὰ εἶναι καὶ ὁμογενὲς συγχρόνως. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις καθ' ἃς ἐν ἀκέραιον πολυώνυμον ἔχει συγχρόνως ἀμφοτέρας τὰς ιδιότητες τῆς ὁμογενείας καὶ τῆς κυκλικῆς συμμετρίας. Ἐν τοιοῦτον πολυώνυμον δύναται νὰ προκύψῃ ἀπὸ ἐν κυκλικῶς συμμετρικόν πολυώνυμον, ἐὰν παραλειφθοῦν οἱ ὅροι αὐτοῦ οἱ καταστρέφοντες τὴν ὁμογένειαν. Οὕτως εὐρίσκομεν, π.χ., ὅτι τὰ μόνα ὁμογενῆ καὶ συγχρόνως κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν x, y, z εἶναι τῶν κάτωθι μορφῶν :

- 1). Πρώτου βαθμοῦ : $\alpha(x + y + z), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$
- 2). Δευτέρου βαθμοῦ : $\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + yz + zx), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- 3). Τρίτου βαθμοῦ : $\alpha(x^3 + y^3 + z^3) + \beta(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + \gamma xyz, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$

Ὅλα τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα τῆς § 93 εἶναι συγχρόνως καὶ ὁμογενῆ.

Προφανῶς ἰσχύει ἡ πρότασις :

Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν καὶ κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν (διατί ;).

§ 95. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.— Αἱ μέχρι τοῦδε προτάσεις ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν πολυωνύμων χρησιμεύουν πολλὰκις διὰ νὰ μετατρέπωμεν ταχέως εἰς γινόμενα παραγόντων διάφορα ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα, ὅπως γίνεται φανερόν ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α 1ον. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y, z) \equiv (x - y)(x^2 + y^2) + (y - z)(y^2 + z^2) + (z - x)(z^2 + x^2).$$

Λ ὀ σ ι ς : Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x = y$ εἶναι $f(y, y, z) \equiv 0$, ἄρα τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $x - y$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν θὰ διαιρῇται (§ 90, πόρισμα) καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x - y)(y - z)(z - x)$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ κυκλικῶς συμμετρικά, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ, ἀφοῦ τὸ $f(x, y, z)$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης τρίτου. Θὰ εἶναι δηλαδή τοῦτο τῆς μορφῆς : $\alpha(x + y + z)$, ἐνθα α σταθερὸς ἀριθμός.

Κατόπιν τούτων θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$(x - y)(x^2 + y^2) + (y - z)(y^2 + z^2) + (z - x)(z^2 + x^2) \equiv \alpha(x + y + z)(x - y)(y - z)(z - x) \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z . Δίδομεν εἰς τὰ x, y, z μία τριάδα ἀυθαίρετων

τιμών, αἱ ὁποῖαι ὁμως δὲν μηδενίζουν τὸν διαιρέτην $(x-y)(y-z)(z-x)$. π.χ. $x = 1, y = 2, z = 0$ καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\alpha = 1$.

Ἐπομένως :

$$(x-y)(x^3+y^3) + (y-z)(y^3+z^3) + (z-x)(z^3+x^3) \equiv (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x).$$

Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α 2ον. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

Λ ὕ σ ι ς : Ἐὰν εἰς τὸ $f(x,y,z)$ τεθῇ ἀντὶ x τὸ $-y$ εὐρίσκομεν $f(-y,y,z) \equiv 0$. Ἄρα τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x+y$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι συμμετρικὸν θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+y)(y+z)(z+x)$. Ἐπειδὴ ὁμως τὸ $f(x,y,z)$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν πέμπτου βαθμοῦ, ὃ δὲ διαιρέτης $(x+y)(y+z)(z+x)$ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν τρίτου βαθμοῦ, ἔπεται ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν δευτέρου βαθμοῦ, ἥτοι τῆς μορφῆς :

$$\alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx), \text{ ἔνθα } \alpha, \beta \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοί.}$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \equiv (x+y)(y+z)(z+x) \cdot [\alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx)]. \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z .

Θέτοντες εἰς τὴν (1), π.χ., $x = y = z = 1$ εὐρίσκομεν :

$$\alpha + \beta = 10. \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ ἀκόλουθως εἰς τὴν (1) $x = 0, y = 2, z = -1$ εὐρίσκομεν :

$$5\alpha - 2\beta = 15. \quad (3)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὐρίσκομεν : $\alpha = 5, \beta = 5$ καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι :

$$5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

§ 96. Σύντομος γραφὴ ἀθροισμάτων καὶ γινομένων.—Ἐνίοτε παρυσιάζονται ἀθροίσματα τῆς μορφῆς :

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad \alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta), \text{ κ.τ.λ.}$$

Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ παριστάνομεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς (ἀντιστοίχως) :

$$\Sigma\alpha, \quad \Sigma\alpha\beta, \quad \Sigma\alpha^2(\beta - \gamma).$$

Ὅμοίως χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον Π διὰ τὴν συμβολικὴν γραφὴν γινομένων. Οὕτω, π.χ., τὸ γινόμενον : $(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$ παριστάνομεν συμβολικῶς μέ :

$$\Pi(\beta - \gamma).$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

187. Νὰ γραφοῦν πλήρως αἱ ἀκόλουθοι ἐκφράσεις :

$$\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma), \quad \Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)^3, \quad \Sigma(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha\gamma - \beta^3).$$

188. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\alpha^2(\beta + \gamma) + 3\alpha\beta\gamma \equiv (\Sigma\alpha) \cdot (\Sigma\beta\gamma).$$

189. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\beta\gamma(\beta + \gamma) + 2\alpha\beta\gamma \equiv \Pi(\beta + \gamma).$$

190. Ὅμοίως ὅτι : $\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha)^3 - (\Sigma\beta\gamma)^3 = \alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^3 - \Sigma\beta^3\gamma^3 = \Pi(\alpha^3 - \beta\gamma).$

191. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν :

$$\frac{\Sigma\alpha^3(\beta - \gamma)}{\Sigma(\beta - \gamma)^3}, \quad \frac{\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)^3}{\Pi(\beta - \gamma)}.$$

192. Νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 \equiv \Sigma \alpha^3 + 3\Sigma \alpha^2(\beta + \gamma) + 6\alpha\beta\gamma.$$

193. Ὁμοίως ὅτι :

$$(\Sigma \alpha)^2 = \Sigma \alpha^2 + 2\Sigma \alpha\beta.$$

194. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐκφράσεις :

$$\alpha). \Sigma \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \beta). \Sigma \frac{\beta + \gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \gamma). \Sigma \frac{\alpha^3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}.$$

195. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ $\Sigma \frac{4\alpha^2 - 1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν α, β, γ .

Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος;

196. Ἐάν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, καὶ διάφοροι ἀλλήλων, νά ὑπολογισθῇ τὸ :

$$\left(\Sigma \frac{\alpha}{\beta - \gamma} \right) \left(\Sigma \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \right).$$

197. Νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha\gamma - \beta^2) = (\Sigma\beta\gamma)(\Sigma\beta\gamma - \Sigma\alpha^2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

198. Ἐάν $f(0, y, z) \equiv 0$ καὶ $f(-x, y, z) \equiv f(x, y, z)$, τότε τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x, y, z)$ διαιρεῖται διὰ x^2 . Ἐάν δὲ ἐπὶ πλέον τὸ $f(x, y, z)$ εἶναι καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον, τότε θὰ διαιρῇται διὰ $x^2 y^2 z^2$.

199. Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β , ἵνα τὸ πολυώνυμον :

$$f(x, y) \equiv 4x^4 + 12x^3y + \alpha x^2y^2 + \beta xy^3 + y^4 \text{ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου.}$$

200. Ἐάν τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον $f(x, y)$ διαιρῇται διὰ $(x - y)^{2k+1}$, τότε θὰ διαιρῇται καὶ διὰ $(x - y)^{2k+2}$, $k \in \mathbb{N}$.

201. Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

$$\begin{aligned} \alpha) & x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y), & \beta) & x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + 8xyz, \\ \gamma) & x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz, & \delta) & x(y^4-z^4) + y(z^4-x^4) + z(x^4-y^4), \\ & \epsilon) & (x-y)(x+y)^2 + (y-z)(y+z)^2 + (z-x)(z+x)^2. \end{aligned}$$

202. Ὁμοίως αἱ κάτωθι :

$$\begin{aligned} \alpha) & (x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5 \\ \beta) & (y-z)^2(y+z-2x) + (z-x)^2(z+x-2y) + (x-y)^2(x+y-2z). \end{aligned}$$

203. Νά ἀπλοποιηθοῦν αἱ ρηταὶ παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3 + z^2(x-y)^3}{(x-y)(y-z)(z-x)}, \quad \beta) \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)}.$$

204. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z) \equiv x^v(y-z) + y^v(z-x) + z^v(x-y)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\varphi(x, y, z) \equiv (x-y)(y-z)(z-x)$ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $v \geq 2$. Νά εὑρεθῇ τὸ πηλίκον διὰ $v = 3$ ἀνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

205. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον : $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, λαμβάνει τὴν μορφήν : $f \equiv S_1^2 - 3S_1S_2 + 3S_3$, ἔνθα S_1, S_2, S_3 τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα ἀντιστοίχως πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου βαθμοῦ τῶν μεταβλητῶν x_1, x_2, x_3, x_4 .

206. Ἴνα τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$.

207. Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ :

$$\begin{aligned} \alpha) & \Sigma yz(y^2 - z^2), & \beta) & \Sigma(y+z)^3 - 2\Sigma x^3 + 6xyz, \\ \gamma) & \Sigma x(y+z)^2 - 4xyz, & \delta) & (x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4. \end{aligned}$$

208. Νά προσδιορισθῇ πολυώνυμον $f(x,y,z)$ ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν 2ου βαθμοῦ τοιοῦτον, ὥστε: $f(0,1,1) = 5$ καὶ $f(0,0,1) = 6$.

209. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$3x^2 + 12y^2 + 10z^2 + 26yz + 17zx + 13xy$$

εἶναι γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων 1ου βαθμοῦ ὁμογενείας, νά εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα αὐτά.

210. Νά δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z) \equiv x^v [z^2(x-y)^2 - y^2(z-x)^2] + y^v [x^2(y-z)^2 - z^2(x-y)^2] + z^v [y^2(z-x)^2 - x^2(y-z)^2],$$

$v \in \mathbb{N}$, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινόμενου $P \equiv (x-y)(y-z)(z-x)$. Ποῖον τὸ πηλίκον;

211. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y) \equiv \alpha + \beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + \delta xy + \varepsilon(x^3+y^3) + \lambda(x^2y+xy^2)$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$F(X,Y) \equiv \alpha + \beta X + (\delta - 2\gamma)Y + \gamma X^2 + (\lambda - 3\varepsilon)XY + \varepsilon X^3,$$

ὅπου $X = x + y$ καὶ $Y = xy$.

212. Νά δεიχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z) \equiv 12 [(x+y+z)^{2v} - (x+y)^{2v} - (y+z)^{2v} - (z+x)^{2v} + x^{2v} + y^{2v} + z^{2v}], \quad v \in \mathbb{N}, \quad v \geq 2$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου:

$$\varphi(x,y,z) \equiv (x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4.$$

(Ὑποδείξεις: Παρατηρήσατε ὅτι τὸ $\varphi(x,y,z)$ καὶ $f(x,y,z)$ μηδενίζονται διὰ $x=0, y=0, z=0$ καὶ ὅτι $x+y+z \mid f(x,y,z)$).

III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 97. Ὁρισμός.— Καλοῦμεν **ρητὸν κλάσμα** ὡς πρὸς x τὸ πηλίκον $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

δύο ἑκκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x , δηλαδὴ κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς:

$$k(x) \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (1)$$

ὅπου $\alpha_i, \beta_j, i = 0, 1, \dots, \mu, j = 0, 1, \dots, \nu$, πραγματικοὶ ἀριθμοί, μ καὶ ν ἀκέραιοι θετικοί* καὶ $\alpha_\mu \neq 0, \beta_\nu \neq 0$.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων ἀκεραίων πολυωνύμων δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν τὸ ρητὸν κλάσμα (1) εἰς ἄθροισμα ἄλλων ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς ἐπίτευξιν ὅμως τῆς ἀναλύσεως ταύτης, πρέπει ὁ ἀριθμητὴς τῆς (1), δηλ. τὸ πολυώνυμον $f(x)$ νά εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, δηλ. ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ ($\mu \geq \nu$), ἡ ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν κλάσματος μὲ βαθμὸν ἀριθμητοῦ μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

* Διὰ $\mu = \nu = 0$ τὸ $k(x)$ γίνεταί $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$, ἥτοι εἶναι μία σταθερά, διὰ $\nu = 0, \mu \geq 1$ τὸ $k(x)$ γίνεταί ἐν πολυώνυμον.

Ἐφαρμογή. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἀνάλυσιν:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$x^2 + x + 1 \equiv A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x-2). \quad (2)$$

Ἡ ταυτότης (2) διὰ $x = 1, 2, 3$ δίδει ἀντιστοίχως: $A_1 = \frac{3}{2}, A_2 = -7, A_3 = \frac{13}{2}$.

Ὅθεν:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{3}{2(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2(x-3)}.$$

Περὶ πτωσις II. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ ἔχῃ πραγματικὰς καὶ πολλαπλὰς ρίζας ἢ γενικώτερον ἀπλὰς καὶ πολλαπλὰς πραγματικὰς ρίζας, ἥτοι ἂν εἶναι, π.χ., τῆς μορφῆς:

$\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^k \dots (x-\rho_\mu)^\lambda$, μὲ $1 + 1 + k + \dots + \lambda = \nu$,
τότε τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \frac{B_1}{x-\rho_3} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-\rho_3)^k} + \dots + \frac{M_1}{x-\rho_\mu} + \dots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda},$$

ὅπου $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καταλλήλως προσδιοριζόμενοι.

Ἄς ἐργασθῶμεν διὰ τὸ ἀπλούστερον ἐπὶ παραδειγμάτων.

Ἐφαρμογή 1η: Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}. \quad (1)$$

Ἐκ ταύτης, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα:

$$x^2 + 4x + 7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2). \quad (2)$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεῦτερον μέλος τῆς (2) εὐρίσκομεν:

$$x^2 + 4x + 7 \equiv (A+B_1)x^2 + (6A+5B_1+B_2)x + (9A+6B_1+2B_2). \quad (3)$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν μελῶν τῆς (3) λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$A + B_1 = 1, \quad 6A + 5B_1 + B_2 = 4, \quad 9A + 6B_1 + 2B_2 = 7.$$

Λύνοντας το σύστημα τούτο εύρισκουμε :

$$A = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -4.$$

Όθεν :

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}.$$

Εφαρμογή 2α : Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα : $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις : Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀνάλυσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3 \cdot (x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Εργαζόμενοι ἥδη, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἐφαρμογὴν, εύρισκουμε :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -3, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -5,$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητούμενη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

Περίπτωσις III. Ἐὰν τὸ ρητὸν κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n},$$

ὅπου ὁ βαθμὸς τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος τοῦ $2n$, n ἀκέραιος ≥ 1 καὶ β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\beta^2 - 4\gamma < 0$, τότε ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n}.$$

Ἰνα καταστήσωμεν σαφέστερον τὸ πρᾶγμα, ὡς ἐργασθῶμεν ἐφ' ἐνὸς παραδείγματος.

Εφαρμογή. Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις : Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $x^2 - x + 1$ ἔχει μιγαδικὰς ρίζας, ἐπὶ πλεόν δὲ τὸ κλάσμα $\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$ πληροῖ ὅλας τὰς ὑποθέσεις τῆς περιπτώσεως III, ὅρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - x + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2 - x + 1)^3}. \quad (1)$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$x^5 + 1 \equiv (A_1 x + B_1)(x^2 - x + 1)^2 + (A_2 x + B_2)(x^2 - x + 1) + A_3 x + B_3.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεῦτερον μέλος καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν ἓν πρωτοβάθμιον σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, τὸ ὁποῖον λυόμενον δίδει :

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 2, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = -3, \quad A_3 = -1, \quad B_3 = 2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} \equiv \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} + \frac{x - 3}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^3}.$$

Περίπτωσης IV. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ ἔχη ρίζας πραγματικὰς καὶ μιγαδικὰς ἀπλᾶς ἢ πολλαπλᾶς, τότε ἰσχύουν συγχρόνως αἱ περιπτώσεις II καὶ III.

Ἐφαρμογή. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων.

Λύσις : Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γράφεται $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$, ἥτοι ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀπλᾶς καὶ μιγαδικὰς πολλαπλᾶς (διπλᾶς), ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὰς περιπτώσεις II καὶ III, θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι ἀνάλυσιν :

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+1)^2}. \quad (1)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς (1) ἐπὶ $(x^2-1)(x^2+1)^2$ προκύπτει :

$$x+2 \equiv A_1(x+1)(x^2+1)^2 + A_2(x-1)(x^2+1)^2 + (B_1x+\Gamma_1)(x^2-1)(x^2+1) + (B_2x+\Gamma_2)(x^2-1),$$

ὅθεν τελικῶς :

$$x+2 \equiv (A_1+A_2+B_1)x^6 + (A_1-A_2+\Gamma_1)x^4 + (2A_1+2A_2+B_2)x^3 + (2A_1-2A_2+\Gamma_2)x^2 + (A_1+A_2-B_1-B_2)x + (A_1-A_2-\Gamma_1-\Gamma_2).$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν τῶν δύο ἴσων πολυωνύμων προκύπτει τὸ κάτωθι γραμμικὸν σύστημα :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 &= 0 \\ A_1 - A_2 + \Gamma_1 &= 0 \\ 2A_1 + 2A_2 + B_2 &= 0 \\ 2A_1 - 2A_2 + \Gamma_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 - B_2 &= 1 \\ A_1 - A_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2 &= 2. \end{aligned}$$

Λύνοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν :

$$A_1 = \frac{3}{8}, \quad A_2 = -\frac{1}{8}, \quad B_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_2 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_2 = -1$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις : Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου x^2+x+1 εἶναι ἀρνητική. Ἀρα τὸ κλάσμα δέχεται τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$2x+1 \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+\Gamma)(x+1) \quad (2)$$

$$\text{ἢ} \quad 2x+1 \equiv (A+B)x^2 + (A+B+\Gamma)x + (A+\Gamma). \quad (3)$$

συνεπῶς :

$$A+B=0, \quad A+B+\Gamma=2, \quad A+\Gamma=1.$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν : $A=-1, B=1, \Gamma=2$.

Ὅθεν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \equiv -\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Σημ. Ταχεία εύρεσις των Α, Β, Γ.

Ἐκ τῆς ταυτότητος (2) διὰ $x = -1 \implies A = -1$.

» » » » » $x = 0 \implies A + \Gamma = 1$, ἐξ ἧς: $\Gamma = 2$.

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^2 εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς (3) εὐρίσκομεν :

$$0 = A + B \implies B = 1.$$

2α. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων ὡς παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος.

Λύσις : Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος γράφεται :

$$(x^2 + x)(x^2 + 1) \equiv x(x+1)(x^2 + 1)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{(x^2 + x)(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β' μέρος :

$$1 \equiv (A + B + \Gamma)x^3 + (A + \Gamma + \Delta)x^2 + (A + B + \Delta)x + A. \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει τὸ κάτωθι σύστημα :

$$A + B + \Gamma = 0, \quad A + \Gamma + \Delta = 0, \quad A + B + \Delta = 0, \quad A = 1.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν : $A = 1, B = -\frac{1}{2}, \Gamma = -\frac{1}{2}, \Delta = -\frac{1}{2}$.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{1}{(x^2 + x)(x^2 + 1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

3η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3}$ εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύσις : Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι πολὺννυμον μεγαλύτερου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τρέποντες τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (2) τῆς § 97.

$$\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3} \equiv (x+2) + \frac{5x-7}{(x-3)(x+1)}.$$

Ἔργαζόμενοι ἤδη εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5x-7}{(x-3)(x+1)}$, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν I, εὐρίσκομεν ὅτι τοῦτο ἴσοῦται μέ :

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}$$

*Ἀρα ἔχομεν :

$$\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3} \equiv (x+2) + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}.$$

4η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}.$$

Λύσις : Ἐχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα :

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} \equiv \frac{A}{2v-1} + \frac{B}{2v+1}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(2v+1) + B(2v-1) \\ \eta \quad 1 &\equiv 2(A+B)v + (A-B) \end{aligned}$$

Όπότε :

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτού εύρισκόμεν : $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

Όθεν :

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right). \quad (1)$$

Έκ της (1) λαμβάνομεν :

$$\text{Διά } v = 1 : \quad \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Διά } v = 2 : \quad \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\text{Διά } v = 3 : \quad \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\dots\dots\dots$$
$$\text{Διά } v = v : \quad \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right).$$

Προσθέτοντες τὰς ὡς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη, εύρισκόμεν :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2v-1) \cdot (2v+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2v+1} \right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

213. Νά ἀναλυθοῦν εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων τὰ κάτωθι ρητὰ κλάσματα :

- 1) $\frac{1}{(x^2-4)(x+1)}$, 2) $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$, 3) $\frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$, 4) $\frac{1}{(1+x^2)^2 \cdot (1+x)}$
5) $\frac{x^5+2}{(x^3+x+1)^3}$, 6) $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^3}$, 7) $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$, 8) $\frac{10x^2+32}{x^3 \cdot (x-4)^3}$.

214. Όμοίως :

- 1) $\frac{3x+4}{x^2-9x+14}$, 2) $\frac{3x^2-5x-6}{x^3-6x^2+11x-6}$, 3) $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$, 4) $\frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}$,
5) $\frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}$, 6) $\frac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}$, 7) $\frac{x^3}{x^3-3x+2}$, 8) $\frac{7x-10}{(3x-4)(x-1)^2}$.

215. Νά ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων τὸ κλάσμα : $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$.

216. Όμοίως τὸ : $\frac{x+1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$.

217. Τὸ κλάσμα $\frac{1}{(v+1)(v+2)}$ νά ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοηθεῖα τῆς ἀναλύσεως ταύτης νά εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(v+1)(v+2)}.$$

218. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{v(v+2)}$ καὶ τῇ βοηθεῖα τῆς ἀναλύσεως ταύτης νά εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα : $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{v(v+2)}$.

$$219. \text{ Δείξτε ότι: } \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3v-1)(3v+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{3v+2}.$$

220. Νά αναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{v(v+1)(v+2)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων με παρονομαστὰς ἀντιστοίχως $v(v+1)$ καὶ $(v+1)(v+2)$ καὶ τῇ βοηθεῖα τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v(v+1)(v+2)}.$$

221. Ἀναλύσατε τὸ κλάσμα $\frac{1}{(v+1)(v+2)\dots(v+k)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἐν νὰ ἔχη παρονομαστήν τὸ $(v+1)(v+2)\dots(v+k-1)$ καὶ τὸ ἕτερον τὸ $(v+2)(v+3)\dots(v+k-1)(v+k)$.

IV. ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 99. Ὁρισμός.— Καλοῦμεν διώνυμον ἐξίσωσιν με ἓναν ἄγνωστον, κάθε ἀκεραῖαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$\boxed{Ax^k + Bx^\mu = 0} \quad (1)$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος, A καὶ B πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (συντελεσταί), μὴ ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ x , με $A \cdot B \neq 0$ καὶ k, μ ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί, διάφοροι ἀλλήλων καὶ οὐχὶ ἀμφοτέροι μηδέν.

§ 100. Ἐπίλυσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως (1).— Θὰ δείξωμεν εὐθὺς ἀμέσως ὅτι: πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς διωνύμου ἐξισώσεως $y^n \pm 1 = 0$, ὅπου n φυσικὸς ἀριθμὸς.

Πράγματι: ἂν ὑποθετῇ, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι $k > \mu \geq 0$ ἡ (1) γίνεται:

$$x^\mu (Ax^{k-\mu} + B) = 0$$

καὶ εἶναι ἰσοδύναμος με τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$$x^\mu = 0 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad Ax^{k-\mu} + B = 0. \quad (3)$$

Ἡ (2) ἔχει ρίζαν $x = 0$ εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος μ .

Ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος με τὴν: $x^{k-\mu} = -\frac{B}{A}$, ἡ ὁποία, ἂν τεθῇ $v = k - \mu$, $v \in \mathbb{N}$, καὶ $-\frac{B}{A} = \alpha$, γίνεται:

$$\boxed{x^v = \alpha} \quad (4)$$

Τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (4), πραγματικῶν καὶ μιγαδικῶν, εἶναι v , αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ α , καὶ εὐρίσκονται, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς μίαν τῶν ἐπομένων παραγράφων, διὰ τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

Ἐν τούτοις ὁμως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (4) καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐστω γ ἡ πρωτεύουσα νιοστή ρίζα τοῦ $|\alpha|$, ἥτοι $\gamma = \sqrt[v]{|\alpha|}$, ἐξ οὗ: $\gamma^v = |\alpha|$.

Τότε: ἐὰν $\alpha > 0 \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἡ (4) γράφεται: $x^v = \gamma^v$ ἢ $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^v = 1$, ἐνῶ

ἐὰν $\alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$ καὶ ἡ (4) γράφεται: $x^v = -\gamma^v$ ἢ $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^v = -1$.

Θέτομεν $\frac{x}{\gamma} = y$ καὶ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως:

$$y^v - 1 = 0 \quad (5) \quad \text{καὶ} \quad y^v + 1 = 0 \quad (6)$$

Ἐπομένως ἡ ἐπίλυσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς διωνύμου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (5) ἢ (6).

Πρὸς ἐπίλυσιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις I: Ἐὰν $v = 2\rho + 1$, δηλ. v περιττός, τότε:

Ἡ (5) γίνεται: $(y-1)(y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \dots + y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων: $y-1=0$ καὶ $y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \dots + y + 1 = 0$ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τελευταία εἶναι ἀντίστροφος.

Ὁμοίως ἡ (6) γίνεται: $(y+1)(y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \dots - y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων: $y+1=0$ καὶ $y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \dots - y + 1 = 0$.

Περίπτωσις II: Ἐὰν $v = 2\rho$, δηλ. v ἄρτιος, τότε:

Ἡ $y^v + 1 = 0$ γίνεται: $y^{2\rho} + 1 = 0$ ἢ $y^\rho + \frac{1}{y^\rho} = 0$, ἡ ὁποία διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $y + \frac{1}{y} = z$ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν ρ βαθμοῦ.

Τέλος διὰ $v = 2\rho$ ἡ (5) γίνεται: $y^{2\rho} - 1 = 0$ ἢ $(y^\rho - 1)(y^\rho + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων: $y^\rho - 1 = 0$ καὶ $y^\rho + 1 = 0$, ἑκάτερα τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς μίαν τῶν προηγουμένων μορφῶν.

§ 101. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν διωνύμων ἐξισώσεων:

Παράδειγμα 1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$2x^5 + 3x^2 = 0.$$

Λύσις: Αὕτη γράφεται $x^2(2x^3 + 3) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x^2 = 0$ καὶ $2x^3 + 3 = 0$.

Ἡ πρώτη ἔχει τὴν διπλὴν ρίζαν $x_1 = x_2 = 0$.

Ἡ δευτέρα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν: $x^3 + \frac{3}{2} = 0$. Θέτομεν $x = y \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ καὶ ἡ τελευταία γίνεται: $\frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2} = 0$ ἢ $y^3 + 1 = 0$ ἢ $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $y = -1$ καὶ $y^2 - y + 1 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει: $y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν $x = y \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_5 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Παράδειγμα 2ον: Να επιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$x^4 + 81 = 0. \quad (1)$$

Λύσις: Αὕτη γράφεται: $x^4 + 3^4 = 0$ ἢ $\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 1 = 0. \quad (2)$

Θέτομεν: $\frac{x}{3} = y$ (3) καὶ ἡ (2) γίνεται $y^4 + 1 = 0.$

Αὕτη γράφεται: $(y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0$ ἢ $(y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y^2 - \sqrt{2}y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$$y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0.$$

Αὗται λυόμεναι δίδουν ἀντιστοιχῶς: $y = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$ καὶ $y = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3) ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης:

$$x_1 = \frac{3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_2 = \frac{3(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}, \quad x_3 = \frac{3(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_4 = \frac{3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}.$$

Παράδειγμα 3ον: Να εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος.

Λύσις: Ἐστω x ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$x^3 = 1 \quad \text{ἢ} \quad x^3 - 1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $x = 1$ καὶ $x^2 + x + 1 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει:

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Ἐπομένως αἱ ζητούμεναι ρίζαι εἶναι:}$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0, \quad \rho_2 \rho_3 = 1, \quad \rho_2 = \rho_3^2, \quad \rho_3 = \rho_2^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

222. Να επιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$$\begin{array}{llll} 1) x^3 - 5 = 0, & 2) x^4 + 2 = 0, & 3) x^4 + 16 = 0, & 4) 3x^4 + 7 = 0, \\ 5) 8x^3 - 27 = 0, & 6) 8x^3 + 125 = 0, & 7) 32x^5 + 1 = 0, & 8) x^{12} - 1 = 0. \end{array}$$

223. Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ μιγαδικαὶ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος, δεῖξτε ὅτι:

$$\begin{array}{ll} 1) (1 + \rho_2)^4 = \rho_1, & 2) (1 + \rho_1 - \rho_2)^3 - (1 - \rho_1 + \rho_2)^3 = 0, \\ 3) (1 + 2\rho_1 + 3\rho_2)(1 + 3\rho_1 + 2\rho_2) = 3, & 4) (1 - \rho_1 + \rho_2)(1 + \rho_1 - \rho_2) = 4. \end{array}$$

224. Να εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς ἀρνητικῆς μονάδος.

225. Να εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν i καὶ $-i$.

Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Τύπος τοῦ De Moivre.

§ 102. Ὁρισμὰ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$.—Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ μὲ $z \neq 0$ καὶ $x, y \in \mathbb{R}$. ἔχουν τότε ἔννοιαν ἐν $\mathbb{R}$ αἱ παραστάσεις:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{καὶ ὁ } z \text{ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:}$$

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ: $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

καὶ $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1,$

τὰ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δύνανται νὰ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον καταλλήλου γωνίας φ , ἥτοι:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (2)$$

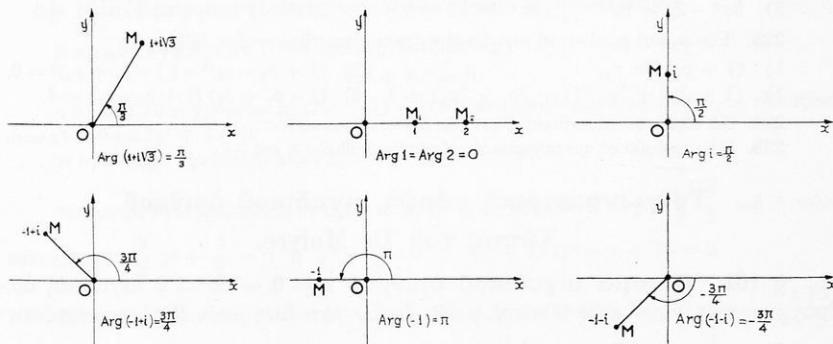
Ὡς γνωστόν, ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος γωνίαι, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς σχέσεις (2), τὰ δὲ μέτρα αὐτῶν εἰς ἀκτίνια διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2π . Ἐκ τούτων ὑπάρχει ἁ κ ρ ι β ὥ ς μία, ἡ ὁποία πληροῖ τὰς (2) καὶ ἐπὶ πλέον τὴν συνθήκην: $-\pi < \varphi \leq \pi$. Ταύτην καλοῦμεν: τὸ **βασικὸν** (πρωτεῦδον) **ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ** $z = x + iy$ ($\neq 0$) καὶ **συμβολίζομεν** μὲ: **Argz** (Argument = ὄρισμα).

Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α: Διὰ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $z = 1 + i\sqrt{3}$ ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

ἐξ οὗ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$, ὥστε: $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Γεωμετρικῶς τὸ ὄρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z παριστᾷ τὴν κυρτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμιάξων Ox μετὰ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνος OM , τῆς παριστώσης τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν z , ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν κάτωθι σχημάτων (βλ. Σχ. 6).



Σχ. 6

§ 103. Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἐστω εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$. Ὄρίζεται τότε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον αὐτοῦ,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \text{ και τὸ ὄρισμά του } \operatorname{Arg} z = \varphi \text{ και ἰσχύουν, ὡς εἶδομεν ἄνω-} \\ \text{τέρω:} \quad \text{συν}\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$x = \rho \text{ συν}\varphi, \quad y = \rho \eta\mu\varphi$$

και ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$x + iy = \rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi) \quad (2)$$

Ἡ μορφή εἰς τὸ 2ον μέλος τῆς (2) καλεῖται: **Τριγωνομετρικὴ μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ** $z = x + iy$.

Οὕτως εἶναι, π.χ., (βλ. και σχῆμα 6, § 102):

$$\begin{aligned} 1 &= 1 (\text{συν}0 + i \eta\mu0), & -1 &= 1 (\text{συν}\pi + i \eta\mu\pi), \\ i &= 1 \left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i \eta\mu\frac{\pi}{2} \right), & -i &= 1 \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right), \\ 1 + i\sqrt{3} &= 2 \left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i \eta\mu\frac{\pi}{3} \right), & -1 - i &= \sqrt{2} \left(\text{συν}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right), \\ -1 + i &= \sqrt{2} \left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i \eta\mu\frac{3\pi}{4} \right), & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1 \left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i \eta\mu\frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Κάθε λοιπὸν μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$ ἔχει ἀκριβῶς μίαν τριγωνομετρικὴν παράστασιν $z = \rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi)$, ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ z (ἢ ἄλλως τὸ μέτρον τοῦ z) και φ τὸ βασικὸν ὄρισμά του ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Ἀντιστρόφως: Διὰ κάθε διατεταγμένον ζεύγος (ρ, φ) με $\rho > 0$ και $-\pi < \varphi \leq \pi$ ὑπάρχει ἀκριβῶς εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$ με τριγωνομετρικὴν μορφήν: $z = \rho (\text{συν}\varphi + i \eta\mu\varphi)$. οὗτος εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς με $x = \rho \text{ συν}\varphi$ και $y = \rho \eta\mu\varphi$.

Κατόπιν τούτων ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \text{ συν}\varphi \\ y &= \rho \eta\mu\varphi \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{συν}\varphi &= \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\rho} \end{aligned} \right.$$

Παρατήρησις: Ἐπειδὴ $\text{συν}\varphi = \text{συν}(2k\pi + \varphi)$ και $\eta\mu\varphi = \eta\mu(2k\pi + \varphi)$, ὅπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ἡ παράστασις (2) γράφεται ὑπὸ τὴν γενικωτέραν μορφήν:

$$z = x + iy = \rho [\text{συν}(\varphi + 2k\pi) + i \eta\mu(\varphi + 2k\pi)] \quad (3)$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται τώρα τὸ κάτωθι:

§ 104. Θεώρημα.— Δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν εἶναι ἴσοι τότε, και μόνον τότε, ἂν ἔχουν ἴσα μέτρα και ὀρίσματα διαφέροντα κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

Ἀποδείξεις. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν :

$$\rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2),$$

θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \sin\varphi_1 &= \rho_2 \sin\varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \sin^2\varphi_1 = \rho_2^2 \sin^2\varphi_2 \\ \rho_1 \eta\mu\varphi_1 &= \rho_2 \eta\mu\varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \eta\mu^2\varphi_1 = \rho_2^2 \eta\mu^2\varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \rho_1^2 (\sin^2\varphi_1 + \eta\mu^2\varphi_1) &= \\ = \rho_2^2 (\sin^2\varphi_2 + \eta\mu^2\varphi_2), \end{aligned}$$

ἐξ οὗ : $\rho_1^2 = \rho_2^2$ καὶ ἐπειδὴ $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, ἔπεται : $\rho_1 = \rho_2$,

ὁπότε θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin\varphi_2 \\ \eta\mu\varphi_1 &= \eta\mu\varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad \text{ἐξ οὗ : } \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Ἀντιστροφή. Ἐὰν $\rho_1 = \rho_2$ καὶ $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, θὰ ἔχωμεν :

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2, \quad \eta\mu\varphi_1 = \eta\mu\varphi_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2).$$

Χρήσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς πράξεις.— Ἡ τριγωνομετρικὴ μορφή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἀπλούστερον τὸν πολλαπλασιασμόν, τὴν διαίρεσιν καὶ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀκριβέστερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

§ 105. Θεώρημα.— Τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἰς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μιγάδων, ὄρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων αὐτῶν. Ἦτοι, ἐὰν :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας θὰ ἔχωμεν :
 $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1) (\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) = \rho_1 \rho_2 [(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \eta\mu\varphi_1 \eta\mu\varphi_2) + i (\sin\varphi_1 \eta\mu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1 \sin\varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$

§ 106. Πόρισμα.— Ἐὰν $z_1 = \rho_1(\sin\varphi_1 + i \eta\mu\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\sin\varphi_2 + i \eta\mu\varphi_2) \dots$
 $\dots z_n = \rho_n(\sin\varphi_n + i \eta\mu\varphi_n)$,

τότε :

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)] \quad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις νὰ δοθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον :

$$[2(\sin 30^\circ + i \eta\mu 30^\circ)] \cdot [\sqrt{2}(\sin 40^\circ + i \eta\mu 40^\circ)] \cdot [\sqrt{3}(\sin 50^\circ + i \eta\mu 50^\circ)].$$

Λύσις : Ἐχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} & [2(\sin 30^\circ + i \eta\mu 30^\circ)] \cdot [\sqrt{2}(\sin 40^\circ + i \eta\mu 40^\circ)] \cdot [\sqrt{3}(\sin 50^\circ + i \eta\mu 50^\circ)] = \\ & = 2 \sqrt{2} \sqrt{3} [\sin(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ) + i \eta\mu(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ)] = \\ & = 2 \sqrt{6} (\sin 120^\circ + i \eta\mu 120^\circ) = 2 \sqrt{6} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i \sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{6} + 3i \sqrt{2}. \end{aligned}$$

§ 107. Θεώρημα.—'Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z (\neq 0)$ έχει μέτρον μὲν τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου του, ὄρισμα δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ ὁρίσματός του.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι, ἂν $z = \rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)$ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} [\rho(\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1} &= \frac{1}{\rho(\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)} = \frac{1(\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi)}{\rho(\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)(\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi)} = \\ &= \frac{\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi}{\rho(\sigma \nu^2 \varphi + \eta \mu^2 \varphi)} = \frac{1}{\rho} (\sigma \nu \varphi - i \eta \mu \varphi) = \frac{1}{\rho} [\sigma \nu (-\varphi) + i \eta \mu (-\varphi)]. \end{aligned}$$

Κατὰ ταῦτα :

$$[\rho(\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1} = \frac{1}{\rho} [\sigma \nu(-\varphi) + i \eta \mu(-\varphi)].$$

Τῇ βοήθειᾳ τώρα τῶν θεωρημάτων τῶν § § 105, 107, ἔπεται ἀμέσως τὸ κάτωθι :

§ 108. Θεώρημα.—Τὸ πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὸ πηλίκον τῶν μέτρων των καὶ ὄρισμα τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίσμάτων των. "Ητοι, ἔάν :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sigma \nu \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sigma \nu \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\sigma \nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i \eta \mu(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

'Υ π ό δ ε ι ξ ι ς. "Εχομεν : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα. Νά εὑρεθῇ τὸ πηλίκον : $\frac{-2}{1+i}$.

Λύσις : "Εχομεν :

$$\begin{aligned} \frac{-2}{1+i} &= \frac{-2+0i}{1+i} = \frac{2(\sigma \nu 180^\circ + i \eta \mu 180^\circ)}{\sqrt{2}(\sigma \nu 45^\circ + i \eta \mu 45^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{2}} [\sigma \nu(180^\circ - 45^\circ) + \\ &+ i \eta \mu(180^\circ - 45^\circ)] = \frac{2}{\sqrt{2}} (\sigma \nu 135^\circ + i \eta \mu 135^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i. \end{aligned}$$

§ 109. Θεώρημα (De Moivre).—'Η νιοστή δύναμις μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὴν νιοστὴν δύναμιν τοῦ μέτρου τοῦ μιγάδος καὶ ὄρισμα τὸ v —πλάσιον τοῦ ὁρίσματος αὐτοῦ. "Ητοι, ἔάν :

$$z = \rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi) \implies z^v = \rho^v [\sigma \nu (v\varphi) + i \eta \mu (v\varphi)]$$

$$\eta \quad \boxed{[\rho (\sigma \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)]^v = \rho^v [\sigma \nu (v\varphi) + i \eta \mu (v\varphi)]} \quad (\tau)$$

'Ο τύπος (τ) ὁ ὁποῖος δίδει τὴν νιοστὴν δύναμιν ἐνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα : τ ὕ π ο ς τ ο ὗ De Moivre*)

* De Moivre (1667-1754). Γάλλος μαθηματικός.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς παραγράφου 106 θέσωμεν :

$$z_1 = z_2 = \dots = z_v = \rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi), \text{ τότε προκύπτει ὁ (τ).}$$

Παρατήρησις I: Τὸ θεώρημα τοῦ De Moivre δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἐπίδειξις: Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $v = 2$. Ὑποθέσαστε ὅτι ἰσχύει διὰ $v = k$ καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ $v = k + 1$.

Παρατήρησις II: Ὁ τύπος τοῦ De Moivre ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ v εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός. Πράγματι, ἔχομεν :

$$[\rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)]^{-k} = \{[\rho (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)]^{-1}\}^k = \{\rho^{-1} \cdot [\sigma\upsilon\nu (-\varphi) + i \eta\mu (-\varphi)]\}^k = \rho^{-k} \cdot [\sigma\upsilon\nu (-k\varphi) + i \eta\mu (-k\varphi)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ρίζαι μιγαδικῶν ἀριθμῶν

§ 110. Ὅρισμός.— Διοθέντος ἐνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $a \neq (0,0)$ καλοῦμεν νιοστήν ρίζαν αὐτοῦ, (συμβολισμός: $\sqrt[v]{a}$), κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν z τοιοῦτον, ὥστε: $z^v = a$, ἥτοι :

$$\sqrt[v]{a} = z \iff z^v = a \quad (1)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν (1). Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποδείξωμεν τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 111. Θεώρημα (ὕπαρξιν νιοστῆς ρίζης μιγάδος).—

Ἐὰν $a = \rho (\sigma\upsilon\nu\theta + i \eta\mu\theta)$, $a \neq 0$, εἶναι τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμὸς, ὑπάρχουν ἀκριβῶς v διάφοροι ἀλλήλων νιοσταὶ ρίζαι αὐτοῦ, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις :

$$z^v = a \quad (1)$$

ἔχει ἀκριβῶς v διαφόρους ἀλλήλων ρίζας, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἐκ τοῦ τύπου :

$$z_k = \sqrt[v]{\rho} \left[\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) + i \eta\mu \left(\frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) \right],$$

ἐνθα $k = 0, 1, 2, \dots, (v-1)$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς :

$$z = r (\sigma\upsilon\nu\varphi + i \eta\mu\varphi)$$

ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1). Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ De Moivre, ἔχομεν :

$$r^v [\sigma\upsilon\nu(v\varphi) + i \eta\mu(v\varphi)] = \rho \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i \eta\mu\theta). \quad (2)$$

Ἡ (2) ὁμῶς ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν :

$$r^v = \rho \quad \text{καὶ} \quad v\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$r = \sqrt[v]{\rho}^* \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{v}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*) $\sqrt[v]{\rho}$ εἶναι ἡ θετικὴ νιοστὴ ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ρ .

“Ωστε :

$$z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\sigma \nu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i \eta \mu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοί, ὀριζόμενοι ὑπὸ τῆς (3) διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k , οἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (1).

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ν μόνον ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι διάφοροι μεταξὺ των, διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k . Ἀκριβέστερον θὰ δείξωμεν ὅτι :

Ἐὰν ὁ ἀκεραῖος ἀριθμὸς k λάβῃ τὰς τιμὰς $0, 1, 2, \dots, \lambda, \dots, \mu, \dots, \nu-1$ ἀπὸ τὴν (3) προκύπτουν ἀντιστοίχως ν ἀριθμοί: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$ διάφοροι ἀλλήλων καὶ ὅτι ἂν k λάβῃ τιμὴν διάφορον τῶν $0, 1, 2, \dots, \nu-1$, δηλ. ἂν $k \geq \nu$ ἢ $k < 0$, τότε ὁ προκύπτων ἀπὸ τὴν (3) μιγαδικὸς ἀριθμὸς z θὰ συμπίπτῃ πρὸς ἓνα τῶν $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$.

Πράγματι, ἄς δώσωμεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὸ k τὰς ν διαδοχικὰς τιμὰς: $0, 1, 2, \dots, (\nu-1)$, τότε ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν ν ἀριθμοὺς $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$, οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον $\sqrt[n]{\rho}$, ὁρίσματα δὲ ἀντιστοίχως τὰ :

$$\frac{\theta}{\nu}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{\nu}, \quad \frac{\theta + 4\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta + 2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Οἱ ν οὗτοι ἀριθμοὶ $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{\nu-1}$ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, διότι, ἂν δύο τυχόντες ἐξ αὐτῶν ἦσαν ἴσοι, ἔστω οἱ z_λ καὶ z_μ , ἔνθα $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq \mu$ καὶ $0 \leq \lambda, \mu < \nu$, θὰ ἔπρεπε :

$$\frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu} - \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu} = 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Δηλαδή:} \quad \lambda - \mu = k'\nu, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Εἶναι ὅμως $0 < |\lambda - \mu| < \nu$ καὶ ἐπομένως $0 < |k'\nu| < \nu$ ἢ $0 < |k'| < 1$ ἄτοπον, διότι δι' οὐδὲν $k' \in \mathbb{Z}$ εἶναι $0 < |k'| < 1$.

“Ωστε: $z_\lambda \neq z_\mu \quad \forall \quad \lambda, \mu \in [0, \nu-1], \quad \lambda \neq \mu \quad \text{καὶ} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}.$

Ἀς ἴδωμεν τώρα τί συμβαίνει, ἂν ὁ k λάβῃ ἀκεραίας τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[0, \nu-1]$, δηλαδή τί συμβαίνει διὰ $k \geq \nu$ ἢ $k < 0$.

Ἐφ' ὅσον $k \in [0, \nu-1]$, ἔαν καλέσωμεν λ τὸ πηλίκον καὶ k_1 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $k : \nu$ θὰ εἶναι: $k = \lambda\nu + k_1$, ὅπου λ καὶ k_1 ἀκεραῖοι μὲ $0 \leq k_1 < \nu$, δηλ. $k_1 \in [0, \nu-1]$.

Ἐχομεν δὲ τότε :

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\sigma \nu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} + i \eta \mu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\sigma \nu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) + i \eta \mu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\sigma \nu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) + i \eta \mu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) \right] = z_{k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, \nu-1. \end{aligned}$$

Ήτοι, αν $k \neq 0, 1, 2, \dots, v-1$, δηλ. αν $k \geq v$ ή $k < 0$, τότε ο προκύπτων εκ της (3) μιγαδικός αριθμός z συμπίπτει προς έναν των $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{v-1}$.

Ωστε, πράγματι, υπάρχουν ακριβώς v διάφοροι αλληλίων αριθμοί, οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωσιν :

$$z^v = a = \rho(\sin\theta + i \eta\mu\theta).$$

Ούτοι δίδονται υπό του τύπου :

$$z_k = \sqrt[v]{\rho} \cdot \left[\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{v}\right) + i \eta\mu\left(\frac{\theta + 2k\pi}{v}\right) \right] \quad (4)$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$.

Παρατηρήσεις. Έκ του ανωτέρω θεωρήματος προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $a \neq 0$ έχει ακριβώς v νιοστάς ρίζας, δηλ. το σύμβολον $\sqrt[v]{a}$ έχει v διαφόρους τιμές (τάς (4)), είναι δηλαδή, ως άλλως λέγομεν, v -σήμαντον.

Ούτω, π.χ., $\sqrt[4]{4} = \pm 2$, $\sqrt[4]{25} = \pm 5$, $\sqrt[4]{2} = \pm \sqrt{2}$, όπου το σύμβολον $\sqrt[4]{}$ της τετραγωνικής ρίζης έχει την γνωστήν διά πραγματικούς αριθμούς έννοιαν.

Κατά ταύτα :

Είς την περιοχὴν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (ἀκόμη καὶ ἂν ὁ ἀριθμὸς a εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς, δηλαδὴ γράφεται οὕτω, $a = \alpha + i0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$) εἰς τὸ σύμβολον $\sqrt[4]{}$ δίδομεν διττὴν σημασίαν, ἥτοι ἀκριβέστερον :

Με $\sqrt[4]{a}$, ὅπου $a \in \mathbb{C}$, ὁρίζονται καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $z^2 = a$ αὗται συμπίπτουν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $a = 0$.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω σημασίας τοῦ συμβόλου $\sqrt[4]{}$ ἐν $\mathbb{C}$, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς λύσεις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως : $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, διὰ τοῦ τύπου :

$$x = \frac{-b + \sqrt[4]{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Εφαρμογαί : 1η : Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt[3]{8i}$.

Λύσις : Ἐχομεν : $8i = 8 \left(\sin \frac{\pi}{2} + i \eta\mu \frac{\pi}{2} \right)$ καὶ ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8i} &= \sqrt[3]{8 \left(\sin \frac{\pi}{2} + i \eta\mu \frac{\pi}{2} \right)} = \sqrt[3]{8} \left(\sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \eta\mu \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Διὰ } k = 0: \quad 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \eta\mu \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\text{Διὰ } k = 1: \quad 2 \left(\sin \frac{5\pi}{6} + i \eta\mu \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Διὰ } k = 2: \quad 2 \left(\sin \frac{3\pi}{2} + i \eta\mu \frac{3\pi}{2} \right) = 0 - 2i = -2i.$$

$$2a: \text{Νὰ εὐρεθῇ ἡ } \sqrt[4]{2+2i\sqrt{3}}.$$

Λύσις: Ἐχομεν: $2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ καὶ ὁ τύπος (4) τῆς § 111 διὰ $v=4$, $\rho=4$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ δίδει:

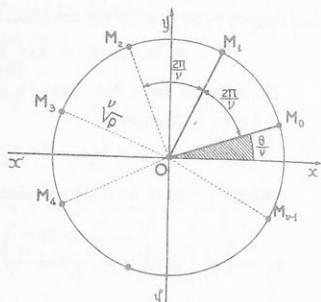
$$\begin{aligned} z_k &\equiv \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{4} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου διὰ $k=0, 1, 2, 3$ εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\eta\mu\frac{\pi}{12}\right), & z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\eta\mu\frac{7\pi}{12}\right), \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\eta\mu\frac{13\pi}{12}\right), & z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\eta\mu\frac{19\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

§ 112. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν νιοστῶν ριζῶν μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.—Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $a=\rho(\cos\theta+i\eta\mu\theta)$, μὲ νιοστὰς ρίζας τὰς κάτωθι:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[v]{\rho} \left[\cos\frac{\theta}{v} + i\eta\mu\frac{\theta}{v} \right] \\ z_1 &= \sqrt[v]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{v} + \frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + \frac{2\pi}{v}\right) \right] \\ z_2 &= \sqrt[v]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{v} + \frac{4\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + \frac{4\pi}{v}\right) \right] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$



Σχ. 7

$$z_{v-1} = \sqrt[v]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{v} + (v-1)\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{v} + (v-1)\frac{2\pi}{v}\right) \right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ a ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι $|z_k| = \sqrt[v]{\rho}$, $k=0, 1, \dots, (v-1)$, καὶ ὁρίσματα τοιαῦτα, ὥστε ἀπὸ τινος ἀρχικῆς τιμῆς $\frac{\theta}{v}$ αὐξάνουν διαρκῶς κατὰ $\frac{2\pi}{v}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν λάβωμεν τὰς εἰκόνας αὐτῶν $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{v-1}$ εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον, αὗται θὰ κεῖνται ἐπὶ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτίνος $\sqrt[v]{\rho}$, θὰ εἶναι δὲ κορυφαὶ κανονικοῦ v -πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

§ 113. Έφαρμογαί τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν διωνύμων ἐξισώσεων.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^v - 1 = 0$. (1)

Λύσις : Αὕτη γράφεται $x^v = 1$. Ἐπειδὴ $1 = 1$ (συν0 + i ημ0), ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει ἀμέσως διὰ $v = v$, $\rho = 1$, $\theta = 0$:

$$x_k = \text{συν} \frac{2k\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2k\pi}{v}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, v-1. \quad (2)$$

Δι' ἐκάστην τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ k προκύπτει ἐκ τῆς (2) καὶ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἄρα ἡ (1) ἔχει v ρίζας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος**.

Διὰ $k = 0$ ἔχομεν ἐκ τῆς (2) τὴν ρίζαν $x_0 = 1$. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον τοῦ De Moivre εἶναι :

$$\text{συν} \frac{2k\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2k\pi}{v} = \left(\text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

αἱ v νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι αἱ δυνάμεις :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{v-1},$$

$$\text{ὅπου :} \quad \omega = \text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v}.$$

Σ η μ. Κάθε ρίζα x_k τῆς μονάδος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ δίδῃ τὰς ἄλλας ρίζας ὡς δυνάμεις αὐτῆς, καλεῖται **ἀρχικὴ ν-οστή ρίζα τῆς μονάδος**. Π.χ. ἡ $x_1 = \text{συν} \frac{2\pi}{v} + i \eta\mu \frac{2\pi}{v} \equiv \omega$ εἶναι ἀρχικὴ ν-οστή ρίζα τῆς μονάδος, διότι :

$$x_0^v = x_0, \quad x_1^v = x_1, \quad x_2^v = x_2, \quad x_3^v = x_3, \dots, x_{v-1}^{v-1} = x_{v-1}.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^6 + 64i = 0$.

Λύσις : Ἐχομεν :

$$x^6 = -64i = 64(-i) = 64 \left(\text{συν} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Ἄρα ἡ τυχούσα ἑκτὴ ρίζα θὰ εἶναι κατὰ τὸν τύπον (4) τῆς μορφῆς :

$$x_k = \sqrt[6]{64} \left[\text{συν} \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) + i \eta\mu \left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{Διὰ } k = 0 \text{ εἶναι : } x_0 = 2 \left(\text{συν} \frac{\pi}{12} - i \eta\mu \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Διὰ } k = 1 \text{ εἶναι : } x_1 = 2 \left(\text{συν} \frac{\pi}{4} + i \eta\mu \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i). \quad \kappa.λ.π.$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Λύσις. Θέτομεν πρῶτον τὸν $1 + i\sqrt{3}$ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν :

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{ἄρα :} \quad 1 + i\sqrt{3} = \rho (\text{συν}\theta + i \eta\mu\theta) = 2 \cdot \left(\text{συν} \frac{\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\pi}{3} \right).$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (4) τῆς § 111 διὰ $v = 3$, $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ δίδει :

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left[\text{συν} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \eta\mu \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right] = \sqrt[3]{2} \cdot \left[\text{συν} \frac{(6k+1)\pi}{9} + i \eta\mu \frac{(6k+1)\pi}{9} \right].$$

Έκ του τύπου τούτου διὰ $k = 0, 1, 2$ εύρισκόμεν τὰς ζητούμενας ρίζας, ἴτοι :

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\sigmaυν \frac{\pi}{9} + i \etaμ \frac{\pi}{9} \right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\sigmaυν \frac{7\pi}{9} + i \etaμ \frac{7\pi}{9} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\sigmaυν \frac{13\pi}{9} + i \etaμ \frac{13\pi}{9} \right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

226. Νὰ τεθοῦν ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν οἱ κάτωθι μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ :

$$\alpha) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \beta) -3 + 4i, \quad \gamma) \sqrt{3} - 3i, \quad \delta) 2 + 2\sqrt{3}i, \quad \epsilon) 3\sqrt{3} + 3i,$$

$$\sigma\tau) -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad \zeta) -\sqrt{3} + i, \quad \eta) \frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}, \quad \theta) 1 + \sigmaυν\iota + i\etaμ\iota.$$

227. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα τοῦ :

$$\left[\frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^3.$$

228. Δείξατε διὰ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι : $2 \times (-3) = -6$ καὶ $(-2) \times (-3) = +6$.

229. Ἐάν v φυσικὸς ἀριθμὸς, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha). (\sigmaυν\theta - i\etaμ\theta)^v = \sigmaυν(v\theta) - i\etaμ(v\theta)$$

$$(\beta). (\sigmaυν\theta + i\etaμ\theta)^{-v} = \sigmaυν(-v\theta) + i\etaμ(-v\theta).$$

230. Ἐάν $z = \sigmaυν\theta + i\etaμ\theta$ καὶ $v \in \mathbb{N}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$z^v + z^{-v} = 2\sigmaυν(v\theta)$$

$$z^v - z^{-v} = 2i\etaμ(v\theta).$$

231. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) (1+i)^{12} = -64, \quad \beta) (1+i)^{-6} = (2i)^{-3}, \quad \gamma) (1+i)^{10} = 32i,$$

$$\delta) (\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}, \quad \epsilon) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{13} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \sigma\tau) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{17} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

232. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ $\etaμ3\theta$ συναρτήσῃ τοῦ $\etaμ\theta$ καὶ τὸ $\sigmaυν3\theta$ συναρτήσῃ τοῦ $\sigmaυν\theta$ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

233. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\alpha) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{24}, \quad \beta) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3 + i^{258}, \quad \gamma) (\sigmaυν 12^\circ + i\etaμ 12^\circ)^{10} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

234. Νὰ ἐπιλυθοῦν (τριγωνομετρικῶς) αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

$$\alpha). x^3 = 1 - i\sqrt{3}, \quad \beta) x^6 \pm 64 = 0, \quad \gamma) 4x^7 + 1 = 0, \quad \delta) x^3 + 8i = 0,$$

$$\epsilon). x^{12} + 1 = 0, \quad \sigma\tau) x^4 = -8 - 8\sqrt{3}i, \quad \zeta) x^5 = -\sqrt{3} + i, \quad \eta) 3x^5 + 24x^2 = 0.$$

235. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑκταὶ ρίζαι τοῦ : $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.

236. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ : $-8 + 8i\sqrt{3}$.

237. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα τοῦ ἀριθμοῦ $(1 + \sigmaυν\theta + i\etaμ\theta)^2$.

238. Δίδεται : $E = (1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8$. Δείξατε ὅτι : $E = -2^8$.

(Ὑπόδειξις : Νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν).

239. Δείξτε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = \sin \theta + i \eta \mu \theta$ δύναται να τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :
 $z = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}$, ὅπου λ κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ λ .

240. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \quad (1+i)^v + (1-i)^v = 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \sin \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N}$$

$$\beta) \quad (1+i)^v - (1-i)^v = i 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \eta \mu \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N}.$$

241. Ἐὰν ω_k , $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$ εἶναι αἱ v -οσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha) \quad 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{v-1} = 0$$

$$\beta) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{v-1} = 1.$$

242. Γράψατε τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $1 + i\sqrt{3}$ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν καὶ δείξα-
 τε ὅτι :

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

243. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ ρητὸν κλάσμα εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων :

$$\frac{1}{x^4 + 4}$$

Ὑποδείξεις : Παρατηρήσατε ὅτι : $x^4 + 4 \equiv (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

244. Δείξτε ὅτι :

$$\frac{(\sin 70^\circ + i \eta \mu 70^\circ)^5}{(\sin 40^\circ + i \eta \mu 40^\circ)^5} = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} + i).$$

245. Νὰ ἐπιλυθῇ (τριγωνομετρικῶς) ἡ ἐξίσωσις $x^6 + 64 = 0$. Νὰ σημειωθοῦν τὰ ὀρί-
 σματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ;

246. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ λ , μ , ἵνα ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός : $\sqrt{2}$ ($\sin 45^\circ + i \eta \mu 45^\circ$) εἴ-
 ναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως : $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0$.

247. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως .

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^v - 1 = 0.$$

248. Δείξτε ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$(1+z)^{2v} + (1-z)^{2v} = 0$ παρέχονται ὑπὸ τῆς σχέσεως : $z = i \epsilon \varphi \frac{2k+1}{4v} \Pi$, ὅπου τὸ k λαμ-
 βάνει τὰς τιμὰς : $0, 1, 2, \dots, 2v-1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 114. Εισαγωγικαὶ ἔννοιαι.— α'). Διαστήματα. Ἐστώσαν α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ *) μὲ $\alpha < \beta$ τότε καλοῦμεν :

1ον. «*Ἀνοικτὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β* » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ (α, β) τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$:

$$(\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha < x < \beta\}.$$

Τὰ σημεῖα (δηλαδή οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) α καὶ β καλοῦνται καὶ «*ἄκρα τοῦ διαστήματος*» (α, β) , τὸ δὲ σημεῖον $\frac{\alpha + \beta}{2}$ «*μέσον*» ἢ ἄλλως «*κέντρον*» τοῦ διαστήματος. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα (α, β) δὲν συμπεριλαμβάνονται τὰ ἄκρα α καὶ β τοῦ διαστήματος, ἦτοι $\alpha \notin (\alpha, \beta)$ καὶ $\beta \notin (\alpha, \beta)$.

Παράδειγμα : $(3, 8) \equiv \{x \in \mathbf{R} : 3 < x < 8\}$

2ον. «*Κλειστὸν διάστημα μὲ ἄκρα α, β* » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $[\alpha, \beta]$ τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$:

$$[\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνονται καὶ τὰ δύο ἄκρα α καὶ β , ἦτοι $\alpha, \beta \in [\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα : $[-1, +1] \equiv \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq +1\}.$

3ον. «*Κλειστὸν ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα α, β* » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $[\alpha, \beta)$ τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$:

$$[\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha \leq x < \beta\}.$$

Εἰς τὸ $[\alpha, \beta)$ συμπεριλαμβάνεται μόνον τὸ ἀριστερὸν ἄκρον α , οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ β , ἦτοι $\alpha \in [\alpha, \beta)$, ἀλλὰ $\beta \notin [\alpha, \beta)$.

* Ὡς γνωστὸν τὸ σύνολον τῶν ρητῶν (συμμέτρων) καὶ ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) καλεῖται σύνολον τῶν *πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Τὸ σύνολον τοῦτο καλοῦμεν καὶ «*εὐθείαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*» (ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας)· οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ θεωροῦνται τότε ὡς *σημεῖα τῆς εὐθείας*. Διὰ τὰ σημεῖα χρησιμοποιοῦμεν τὰ αὐτὰ σύμβολα μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ταυτοποίησης αὕτη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας βασίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀντιστοιχίας τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἐνὸς ἄξονος ὑφίσταται μία ἀμφοιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, δηλαδή εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν ὀρισμένον σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ ἀντιστρόφως.

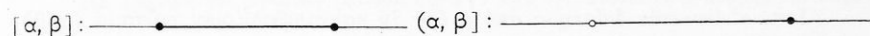
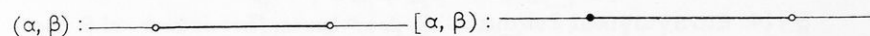
40ν. «'Ανοικτὸν ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα με ἄκρα α, β » καὶ συμβολίζομεν τοῦτο με $(\alpha, \beta]$ τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$:

$$(\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbf{R} : \alpha < x \leq \beta\}.$$

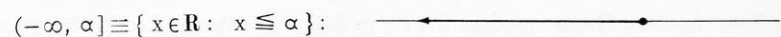
Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνεται μόνον τὸ δεξιὸν ἄκρον β , οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ ἀριστερόν, ἥτοι $\alpha \in (\alpha, \beta]$, ἀλλὰ $\beta \in (\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα : $(0, 1] \equiv \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\}.$

Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὰ ὡς ἂν διαστήματα παρίστανται με εὐθύγραμμα τμήματα ὡς κάτωθι :



Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων, ἔχομεν καὶ τὰ ἀκόλουθα διαστήματα :



τὰ ὁποῖα καλοῦνται «ἀπέραντα» (ἀριστερά, ὡς τὰ δύο πρῶτα, ἀντιστοίχως δεξιὰ, ὡς τὰ δύο τελευταῖα), ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ προηγούμενα τὰ ὁποῖα καλοῦνται «πεπερασμένα».

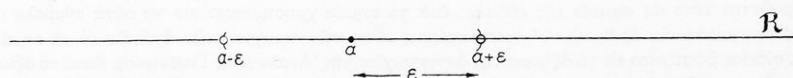
Τὰ διαστήματα ταῦτα παρίστανται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν δεξιὰ σχημάτων.

Ὑπάρχουν ἐν ὅλῳ ἐννέα τύποι διαστημάτων. Ἐνίστε θὰ γράφωμεν :

$\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ συμβολίζομεν συχνὰ τὰ διαστήματα ἐν $\mathbf{R}$ με τὸ γράμμα Δ .

Σημ. Τὰ σύμβολα $-\infty$ (πλὴν ἁπειρον) καὶ $+\infty$ (σὺν ἁπειρον) δὲν παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς. Ταῦτα χρησιμοποιοῦνται ἀνωτέρω μόνον πρὸς εὐκολίαν εἰς τὸν συμβολισμόν.

β'). Περιοχὴ σημείου ἐν $\mathbf{R}$. Ἐστω ἐν σημείον $\alpha \in \mathbf{R}$ καὶ ε εἷς θετικὸς ἀριθμὸς ($\varepsilon > 0$). Κάθε ἀνοικτὸν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ καλεῖται «περιοχὴ τοῦ σημείου α με κέντρον τὸ α καὶ ἀκτῖνα ε ».



Γενικώτερον : «Περιοχὴ ἐνὸς σημείου ξ » καλεῖται κάθε ἀνοικτὸν διάστημα (α, β) τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημείον ξ , ἥτοι $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Ούτω, λ.χ., τὸ διάστημα $(1, 2)$ εἶναι περιοχὴ τοῦ $\sqrt{2}$, διότι $\sqrt{2} \in (1, 2)$.

γ'). **Ἀπόστασις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλων.** Ἐστώσαν $x \in \mathbf{R}$ καὶ $y \in \mathbf{R}$. Καλοῦμεν «ἀπόστασιν τοῦ x ἀπὸ τοῦ y » τὸν μὴ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $|x - y|$, συμβολίζομεν δὲ ταύτην μὲ $d(x, y)$. Ὡστε εἶναι :

$$d(x, y) \stackrel{\text{ορισ.}}{=} |x - y| \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Αὕτη ἔχει τὰς ἑξῆς ιδιότητες :

$$d_1 : d(x, y) \geq 0 \quad \text{καὶ} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$d_2 : d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{συμμετρικὴ ιδιότης})$$

$$d_3 : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{τριγωνικὴ ιδιότης}).$$

Ἀπόδειξις. Αἱ d_1 καὶ d_2 εἶναι προφανεῖς, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς $d(x, y)$ καὶ τῶν γνωστῶν ιδιοτήτων τῶν ἀπολύτων τιμῶν. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν d_3 .

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ιδιότητα (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἔχομεν :

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Σημείωσις. Τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ τὴν ἀπόστασιν d , ὡς αὕτη ὠρίσθη ἀνωτέρω, λέγομεν ὅτι εἶναι εἰς «μετρικὸς χώρος» καὶ γράφομεν $(\mathbf{R}, d)$. Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι : ἐν σύνολον E εἶναι εἰς μετρικὸς χώρος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν εἰς κάθε ζευγὸς (x, y) στοιχείων αὐτοῦ ἀντιστοιχῇ εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς $d(x, y)$, ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἀπόστασις τῶν $x \in E, y \in E$** καὶ ὅστις πληροῖ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ιδιότητες d_1, d_2, d_3 .

Ἀσκήσις. Ἐὰν $d(x, y)$ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ $x \in \mathbf{R}$ ἀπὸ τοῦ $y \in \mathbf{R}$ δείξατε ὅτι καὶ ἡ $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ἔχει τὰς ἀνωτέρω ιδιότητες d_1, d_2, d_3 , ἥτοι, ὅτι καὶ ἡ $d^*(x, y)$ εἶναι ἐπίσης μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}$.

δ'). **Μήκος διαστήματος.** Ἐστω Δ ἐν διάστημα (ἐν $\mathbf{R}$) μὲ ἄκρα α, β «ἡ ἀπόστασις $|\alpha - \beta|$ καλεῖται τὸ μήκος τοῦ διαστήματος Δ » καὶ συμβολίζεται μὲ $\mu(\Delta)$. Ὡστε εἶναι :

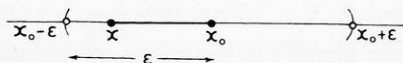
$$\mu(\Delta) \stackrel{\text{ορισ.}}{=} |\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta).$$

Οὕτω διὰ τὴν περιοχὴν $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ ἔχομεν ὡς μήκος τῆς τὸ 2ε .

Μία χρήσιμος παρατήρησις εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἐστω $x_0 \in \mathbf{R}$ καὶ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ἡ περιοχὴ τοῦ x_0 μὲ ἄκτινα ε . Τότε ἰσχύει :

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \iff |x - x_0| < \varepsilon$$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὴν κάτωθι εἰκόνα :



Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

§ 115. Όρισμοί.— Γνωρίζομεν ήδη, από τὰ μαθήματα τῶν προηγουμένων τάξεων, τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως· ἄς ἐπαναλάβωμεν ἐνταῦθα τὸν ὅρισμόν της :

Καλοῦμεν συνάρτησιν μὲ πεδίου ὁρισμοῦ ἓνα σύνολον A καὶ πεδίου τιμῶν ἓνα σύνολον B (τὰ A, B ὑποτίθενται $\neq \emptyset$) κάθε μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ A εἰς τὸ B . Γράφομεν δέ :

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad A \ni x \longrightarrow f(x) \in B.$$

Ἐστω τώρα μία συνάρτησις α μὲ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν B , αὕτη θὰ συμβολισθῇ οὕτω :

$$\alpha: N \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad N \ni v \longrightarrow \alpha(v) \in B.$$

Κάθε συνάρτησις ὡς ἡ ἀνωτέρω α καλεῖται : «μία ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου B ». Εἰδικῶς, ἂν $B \subseteq \mathbb{R}$ ἡ ἀκολουθία α καλεῖται : «ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν».

Ὡστε : ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτησις μὲ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ N εἰς τὸ $\mathbb{R}$.

Τὴν τιμὴν $\alpha(v)$ μιᾶς ἀκολουθίας α συνηθίζομεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν μὲ α_v , γράφοντες δηλαδή τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν v ὡς κάτω δείκτην τοῦ α . Αἱ τιμαὶ μιᾶς ἀκολουθίας α καλοῦνται «ὄροι» αὐτῆς καὶ δυνάμεθα νὰ καταχωρίσωμεν αὐτοὺς εἰς ἓνα πίνακα ὡς κάτωθι :

1	2	3	. . .	v	. . .
α_1	α_2	α_3	. . .	α_v	. . .

εἰς τὸν ὁποῖον παραλείπεται συνήθως ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας, ἥτοι :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \quad (1)$$

Ὁ ὅρος α_1 καλεῖται πρῶτος ὅρος τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας, ὁ α_2 δεύτερος ὅρος καὶ γενικῶς ὁ α_v νιοστός ἢ γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας (1).

Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ χρησιμοποιῶμεν πολλὰκις τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν :

$$\text{«ἡ ἀκολουθία } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \text{»}$$

Δι' αὐτῆς ἐννοοῦμεν, ὅτι θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν $\alpha: N \longrightarrow \mathbb{R}$ ὁρίζομένην οὕτω :

$$\alpha(v) = \alpha_v \quad \text{διὰ κάθε } v \in N.$$

Συντομώτερον μία ἀκολουθία παρίσταται καὶ οὕτω :

$$\alpha_v, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως } \alpha_v, \quad v \in N.$$

Θὰ δώσωμεν τώρα μερικὰ παραδείγματα ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι ἡ ἀκολουθία :

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς n , ἥτοι $a_n = n$.

2. Ἡ ἀκολουθία :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{n}$, ἥτοι $a_n = \frac{1}{n}$.

3. Ἡ ἀκολουθία : $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

4. Ἡ ἀκολουθία : $c, c, c, \dots, c, \dots$ (ἐνθα $c \in \mathbb{R}$).

Ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 4 καλεῖται : «ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $a_n = c$, $n = 1, 2, \dots$ ». Ὅθεν ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 3, εἶναι ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $a_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$.

5. Ἡ ἀκολουθία : $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \dots$

6. Ἐὰν ἀπεικονίσωμεν τοὺς περιττοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 0 καὶ τοὺς ἀρτίους φυσικοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 1, θὰ προκύψῃ ἡ ἀκολουθία :

$$0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$$

Συνήθως ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow a_n = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } n \text{ ἄρτιος} \\ 0, & \text{ἂν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

7. Ἡ ἀκολουθία : $a_n = \frac{2n}{n+3}$, $n = 1, 2, \dots$, γράφεται ἔκτενῶς :

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2n}{n+3}, \dots$$

Παρατήρησις. Ἐνίοτε ὁ δείκτης n τοῦ a_n λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμὰς : $0, 1, 2, 3, \dots$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται :

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

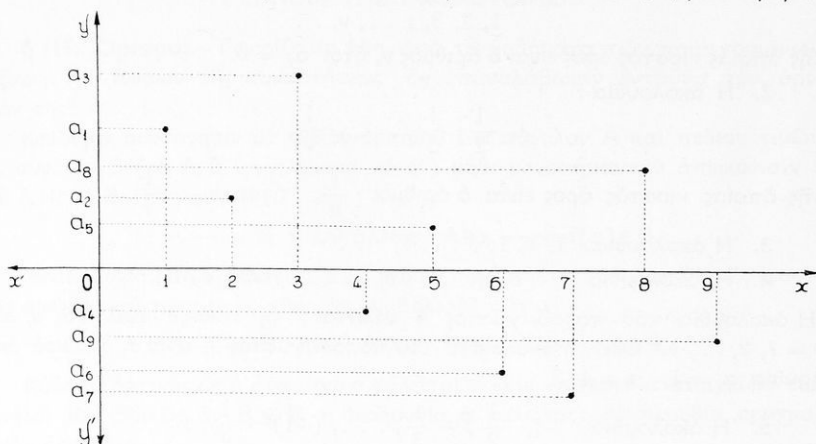
ὁ δὲ ὅρος a_{n-1} εἶναι τότε ὁ «νιοστὸς ὅρος» τῆς ἀκολουθίας.

§ 116. Γραφικὴ παράστασις ἀκολουθίας. — Ἐστω a_n , $n = 1, 2, \dots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ διάγραμμα αὐτῆς εἶναι τότε τὸ σύνολον :

$$\{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots\} \equiv \Sigma$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ καὶ οὐχὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Σ εἶναι (προφανῶς) διάφορα μεταξύ των καὶ παρίστανται διὰ «μεμονωμένων» σημείων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν μεμονωμένων σημείων εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀκολουθίας a_n , $n = 1, 2, \dots$.

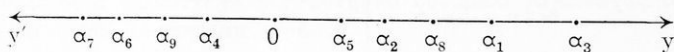
Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα παρίστανται ἑννέα ὄροι μιᾶς ἀκολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$



Σχ. 8

Ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὰς τεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, δι' ὧν παρίσταται γραφικῶς ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$, ἔχομεν τὴν συνήθη ἐπὶ ἑνὸς μόνου ἄξονος παράστασιν τῆς ἀκολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$

Οὕτως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἔχομεν :



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

249. Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας : $\alpha_n = \frac{2n+1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$

250. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας : $\beta_n = \frac{1}{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$

251. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν : 2, 4, 6, 8, ... ὑπὸ τὴν μορφήν α_n , $n = 1, 2, \dots$

252. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 3, 5, 7, ... ὑπὸ τὴν μορφήν β_n , $n = 1, 2, \dots$

253. Γράψατε τοὺς ἑπτὰ πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

254. Ὅμοίως γράψατε τοὺς ἑννέα πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

255. Ὅμοίως γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὄρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

§ 117. Φραγμένη ακολουθία.—α'). Έστω ή ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$

έκτενώς ή :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Διά την άνωτέρω ακολουθίαν παρατηρούμεν ότι ισχύει :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots$$

ήτοι, όλοι οί όροι τής ακολουθίας ταύτης είναι μικρότεροι ή ίσοι του πραγματικού αριθμού 1. λέγομεν δέ ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη προς τά άνω**» από τόν αριθμόν 1.

Γενικώς : Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_n, n=1, 2, \dots$ καλείται **φραγμένη προς τά άνω έν R** τότε, και μόνον τότε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός s τοιοϋτος, ώστε να ισχύη :

$$\alpha_n \leq s \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ο αριθμός s καλείται «**άνω φράγμα τής ακολουθίας** $\alpha_n, n=1, 2, \dots$ ». Ούτως, ό αριθμός 1 είναι άνω φράγμα τής ακολουθίας $\alpha_n = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$

Προφανώς, αν s είναι έν άνω φράγμα μις ακολουθίας, τότε και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του s είναι επίσης άνω φράγμα τής ακολουθίας.

β'). Έν αντίθεσει προς τας ακολουθίας, αί όποιαι είναι φραγμένα προς τά άνω έν **R**, υπάρχουν ακολουθίαι, τών όποιων όλοι οί όροι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι ενός πραγματικού αριθμού. λ.χ. ή ακολουθία $\alpha_n = 2n, n=1, 2, \dots$, εκτενώς :

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

Διά την ακολουθίαν ταύτην παρατηρούμεν ότι ισχύει :

$$2 \leq \alpha_n = 2n \quad \text{διά κάθε } n = 1, 2, \dots,$$

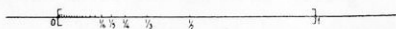
λέγομεν δέ ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη προς τά κάτω**» από τόν αριθμόν 2. Γενικώς : Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_n, n=1, 2, \dots$ καλείται **φραγμένη προς τά κάτω έν R** τότε, και μόνον τότε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός σ τοιοϋτος, ώστε να ισχύη :

$$\sigma \leq \alpha_n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ο αριθμός σ καλείται «**κάτω φράγμα τής ακολουθίας** $\alpha_n, n=1, 2, \dots$ ».

γ'). Τέλος υπάρχουν ακολουθίαι, αί όποιαι είναι και προς τά άνω και προς τά κάτω φραγμένα έν **R**. λ.χ. ή ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$, διότι ισχύει :

$$0 \leq \alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$



ήτοι, όλοι οί όροι της ανήκουν εις τò κλειστόν διάστημα $[0, 1]$, λέγομεν δέ εις την περίπτωση αύτην, ότι ή ακολουθία αύτη είναι «**φραγμένη**».

Γενικώς : Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών α_n , $n = 1, 2, \dots$ καλεῖται φραγμένη ἐν $\mathbf{R}$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ακολουθία αὕτη εἶναι καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω φραγμένη ἐν $\mathbf{R}$, ἥτοι, ἂν s εἶναι ἐν ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$ καὶ σ τὸ ἀντίστοιχον κάτω φράγμα, τότε ἰσχύει :

$$\sigma \leq \alpha_n \leq s \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ἄν τώρα φ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῶν $|\sigma|$ καὶ $|s|$, τότε ἡ (1) συνεπάγεται, ἂν ἔνός μὲν :

$$\alpha_n \leq s \leq |\sigma| \leq \varphi \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}$$

ἂν ἑτέρου δέ :

$$\alpha_n \geq \sigma \geq -|\sigma| \geq -\varphi \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα ἰσχύει τότε :

$$-\varphi \leq \alpha_n \leq \varphi \quad \forall \quad n \in \mathbf{N} \quad (2)$$

ἡ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_n| \leq \varphi \quad \forall \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (3), τότε προφανῶς ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη, διότι ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (2). Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη ἐν $\mathbf{R}$ (ἢ καὶ ἄλλως «ἀπολύτως φραγμένη ἐν $\mathbf{R}$ ») τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς φ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_n| \leq \varphi \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Ὁ ἀριθμὸς φ καλεῖται φράγμα, ἀκριβέστερον «ἀπόλυτον φράγμα» τῆς ἀκολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$ ἐν $\mathbf{R}$.

Φραγμένη ἀκολουθία εἶναι π.χ. ἡ $\frac{2\eta\mu\nu}{\nu^3}$, $\nu = 1, 2, \dots$, διότι ἰσχύει :

$$\left| \frac{2\eta\mu\nu}{\nu^3} \right| = \frac{2|\eta\mu\nu|}{\nu^3} \leq \frac{2}{\nu^3} \leq 2 \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \dots$$

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_n = \frac{4 \sin 3\nu}{5\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad \text{διότι :}$$

$$|\alpha_n| = \left| \frac{4 \sin 3\nu}{5\nu} \right| = \frac{4|\sin 3\nu|}{5\nu} \leq \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\nu} \leq \frac{4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \dots$$

Ἀντιθέτως αἱ ἀκολουθίαι :

$$1, 4, 9, 16, \dots, \nu^2, \dots$$

$$\text{καὶ} \quad 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^\nu, \dots$$

δὲν εἶναι φραγμέναι (διατί ;).

§ 118. Ἐστω μία ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν α_n , $n = 1, 2, \dots$, π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$ καὶ μία συνθήκη π.χ. ἡ : $\alpha_n < \frac{1}{998}$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\nu = 1, 2, 3, \dots, 998$ ἥτοι, ἂν $\nu \in \{1, 2, 3, \dots, 998\}$, ἡ συνθήκη $\alpha_n < \frac{1}{998}$

δὲν πληροῦται, ἀντιθέτως ἂν $v = 999, 1000, 1001, \dots$, ἥτοι ἂν καλέσωμεν $v_0 \equiv 999$, τότε διὰ κάθε δείκτην $v \geq v_0 = 999$ ἡ συνθήκη : $\alpha_v = \frac{1}{v} < \frac{1}{998}$ πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου α_v , λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι : «τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ πληροῦν τὴν ὡς ἄνω συνθήκην».

Γενικῶς : ἂν α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ λέγωμεν : «τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_v , $v = 1, 2, \dots$ πληροῦν μίαν συνθήκην ἢ ιδιότητα» τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ συνθήκη ἢ ἡ ιδιότης πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου α_v διὰ κάθε δείκτην $v \in \mathbb{N}$ ἐξαιρέσει ἐνὸς πεπερασμένου συνόλου δεικτῶν, δηλαδὴ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ εἰς δείκτης $v_0 \in \mathbb{N}$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε δείκτην $v \geq v_0$, ὁ ὅρος α_v πληροῖ τὴν συνθήκην ἢ ιδιότητα αὐτήν.

§ 119. Ἐστωσαν δύο ἀκολουθίαι : α_v , $v = 1, 2, \dots$ καὶ β_v , $v = 1, 2, \dots$ ἔκτενῶς αἱ :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \dots, & \alpha_v, & \dots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \dots, & \beta_v, & \dots \end{array}$$

Μεταξὺ αὐτῶν ὀρίζονται τὰ κάτωθι :

Ἰσότης. Αἱ α_v , $v = 1, 2, \dots$ καὶ β_v , $v = 1, 2, \dots$ καλοῦνται ἴσαι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ : $\alpha_v = \beta_v$ διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Ἀθροισμα τῆς α_v , $v = 1, 2, \dots$ καὶ β_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $(\alpha_v + \beta_v)$, $v = 1, 2, \dots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_v + \beta_v, \dots$

Διαφορά τῆς α_v , $v = 1, 2, \dots$ μείον β_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $\alpha_v - \beta_v$, $v = 1, 2, \dots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_v - \beta_v, \dots$

Γινόμενον ἐνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ξ ἐπὶ τὴν ἀκολουθίαν α_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία : $\xi \alpha_v$, $v = 1, 2, \dots$, ἔκτενῶς ἡ ἀκολουθία :

$$\xi \alpha_1, \xi \alpha_2, \dots, \xi \alpha_v, \dots$$

Γινόμενον τῆς α_v , $v = 1, 2, \dots$ ἐπὶ τὴν β_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $\alpha_v \beta_v$, $v = 1, 2, \dots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_v \beta_v, \dots$

Πηλίκον τῆς α_v , $v = 1, 2, \dots$ διὰ β_v , $v = 1, 2, \dots$ με $\beta_v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$, καλεῖται ἡ ἀκολουθία, ἡ ὅποια ἔχει ὅρους τὰ πηλικά τῶν ἀντιστοίχων ὁρῶν τῶν ἐν λόγῳ ἀκολουθιῶν, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $\frac{\alpha_v}{\beta_v}$, $v = 1, 2, \dots$ ἔκτενῶς ἡ :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_v}{\beta_v}, \dots$$

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκολουθίας α_v , $v = 1, 2, \dots$ με $\alpha_v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$, καλεῖται ἡ ἀκολουθία : $\sqrt{\alpha_v}$, $v = 1, 2, \dots$ ἔκτενῶς ἡ :

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_v}, \dots$$

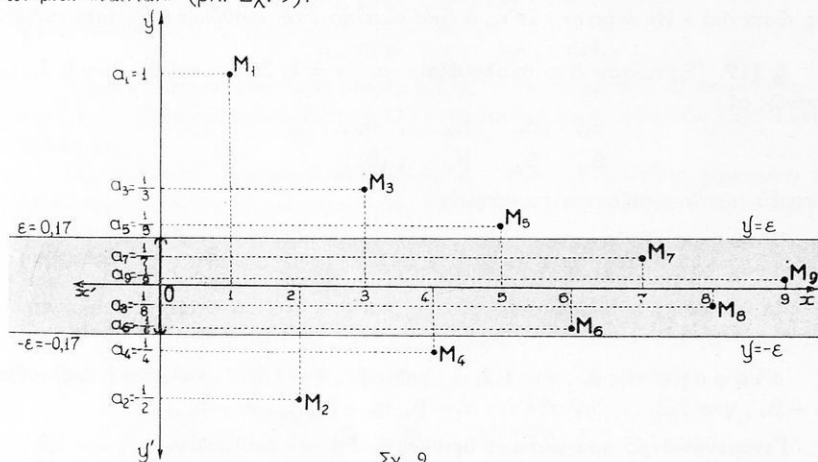
§ 120. **Όρισμός.**—Έστω ή ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ με γενικόν όρον

$$\alpha_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \text{ ήτοι ή ακολουθία :}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \dots$$

Αύτη παρίσταται γραφικῶς ὡς εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα ἐμφαίνεται.

Ἐὰς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ε , π.χ. τὸν $\varepsilon = 0,17$, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς εὐθείας μετὰ ἐξισώσεις $y = \varepsilon = 0,17$ καὶ $y = -\varepsilon = -0,17$, αἱ ὅποια εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὀρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων μίαν «ταινίαν» (βλ. Σχ. 9).



Σχ. 9

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας, ἐνῶ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $n = 6$ καὶ «πέραν» ἀντίστοιχα σημεῖα, ἥτοι τὰ $M_6, M_7, M_8, \dots$ εὐρίσκονται ὅλα ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon$ καὶ $y = -\varepsilon$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5 , ἥτοι οἱ ὅροι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἐνῶ οἱ ἀπὸ τοῦ δείκτου $n = 6$ καὶ πέραν ἀντίστοιχοι ὅροι, ἥτοι οἱ $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \dots$ κεῖνται ὅλοι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, δηλαδὴ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενός, καθόσον τὸ $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ γράφεται καὶ οὕτω : $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$.

Ὅποτε : $-\varepsilon < \alpha_n < +\varepsilon \quad \forall \quad n \geq n_0 = 6 \quad (\varepsilon = 0,17)$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq n_0 = 6.$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἕνα ἄλλον θετικὸν ἀριθμὸν ε , μικρότερον τοῦ προηγουμένου, π.χ. τὸν $\varepsilon = 0,09$, καὶ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἀνωτέρω, τότε καταλήγομεν

είς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ σημεία $M_1, M_2, \dots$ καὶ M_{11} κείνται ἔκτος τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon = 0,09$ καὶ $y = -\varepsilon = -0,09$, ἐνῶ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $v = 12$ καὶ πέραν ἀντίστοιχα σημεία, ἥτοι τὰ $M_{12}, M_{13}, \dots, M_v, \dots$ εὐρίσκονται ἐντὸς τῆς ἐν λόγω ταινίας, δηλαδή αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τούτων, ἥτοι οἱ ὅροι: $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_v, \dots$ τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας κείνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἥτοι ἰσχύει:

$$-\varepsilon < \alpha_v < +\varepsilon \quad \forall v \geq v_0 = 12 \quad (\varepsilon = 0,09)$$

ἢ ἰσοδυνάμως:

$$|\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 = 12.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἐκάστην ἐκλογὴν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὑπάρχει εἰς δείκτης v_0 , ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ε , ἥτοι $v_0 = v_0(\varepsilon)$. Οὕτω, διὰ $\varepsilon = 0,17$ ἔχομεν, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, $v_0 = v_0(\varepsilon) = 6$, ἐνῶ διὰ $\varepsilon = 0,09$ ἔχομεν $v_0 = v_0(\varepsilon) = 12$.

Τὴν ἐν λόγω ἀκολουθίαν α_v , $v = 1, 2, \dots$ μὲ $\alpha_v = (-1)^{v-1} \cdot \frac{1}{v}$, ἢ ὁποῖα πληροῖ τὰ ἀνωτέρω χαρακτηρίζομεν ὡς «**μηδενικὴν ἀκολουθίαν**».

Γενικῶς: *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται **μηδενικὴ ἀκολουθία** καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha_v \rightarrow 0$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν: διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος, ἐν γένει, ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:*

$$|\alpha_v| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } v \geq v_0(\varepsilon).$$

Συντόμως, μὲ χρῆσιν τῶν γνωστῶν μας συμβόλων, ὁ ὀρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_v \rightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) : |\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$$

§ 121. Παραδείγματα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.

1ον. Ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $\alpha_v = 0$, $v = 1, 2, \dots$ εἶναι *μηδενικὴ ἀκολουθία*.

2ον. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_v = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ εἶναι *μηδενικὴ*, διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ ἐδῶ εἰς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$ *) τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε $v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\text{ἰσχύει: } |\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{v} \leq \frac{1}{v_0} < \varepsilon, \text{ διότι ἐκ τῆς } v_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{v_0} < \varepsilon.$$

Ἵσχυεῖ ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } v_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \right) : |\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0.$$

* Τοῦτο συμπεραίνομεν, διότι ἰσχύει: $|\alpha_v| = \frac{1}{v} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon}$.

Άρα :
$$\alpha_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Σημειώσεις : Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ υπενθυμίζει τας άποσβεσνυμένας άναπηθήσεις μιᾶς έλαστικής σφαίρας επί ένός έπιπέδου. Τό ύψος εις τό όποϊον άνέρχεται ή σφαίρα εις έκάστην άναπήθησιν είναι μικρότερον τών προηγούμενων και τελικῶς ή σφαίρα ίσορροπεύει επί τοῦ έπιπέδου αὐτοῦ (ύψος άναπηθήσεως μηδέν).

3ον. Ἡ ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$, διότι $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\epsilon)$, και ὡς τοιοῦτος δύναται επίσης νά ληφθῇ εις φυσικὸς αριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\epsilon}$ (διατί ;) τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη :

$$|\alpha_n| = |(-1)^n \cdot \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0(\epsilon).$$

Σημειώσεις : Η ακολουθία τοῦ παραδείγματος (3) υπενθυμίζει τας άποσβεσνυμένας αιώρησεις ένός έκκρεμοῦς ή ένός έλατηρίου περί τήν θέσιν ίσορροπίας αὐτοῦ.

4ον. Ἡ ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική, διότι διὰ τυχόντα θετικὸν αριθμὸν ϵ υπάρχει δείκτης $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$, και ὡς τοιοῦτος δύναται νά ληφθῇ ἐδῶ εις φυσικὸς αριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\epsilon^2}$, τοιοῦτος, ὥστε: διὰ κάθε $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$ ἰσχύει : $|\alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon$, διότι ἐκ τῆς: $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon$.

Ὡστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νά ληφθῇ } n_0 > \frac{1}{\epsilon^2} \right) : |\alpha_n| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Άρα :
$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

§ 122. Ἰδιότης I. — Διὰ μίαν ακολουθίαν α_n , $n = 1, 2, \dots$ πραγματικῶν αριθμῶν ἰσχύει :

$$\text{Ἐὰν } \alpha_n \rightarrow 0 \iff -\alpha_n \rightarrow 0 \text{ ὡς καὶ } |\alpha_n| \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις : Πράγματι· διότι, ἂν $|\alpha_n| < \epsilon$, τότε θά εἶναι και :

$$|-\alpha_n| = |\alpha_n| < \epsilon \quad \text{καθὼς ἐπίσης καὶ } ||\alpha_n|| = |\alpha_n| < \epsilon.$$

Ἀντιστροφή : ἂν : $-\alpha_n \rightarrow 0$, τότε $|-\alpha_n| < \epsilon$, δηλαδή $|\alpha_n| < \epsilon$, ἄρα $\alpha_n \rightarrow 0$, ὁπότε και $|\alpha_n| \rightarrow 0$.

§ 123. 'Ιδιότης II. — 'Εάν ή ακολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική, τότε και ή προκύπτουσα εκ ταύτης διὰ προσθήκης ή διαγραφής ενός πεπερασμένου πλήθους όρων είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : 'Η $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, τότε και ή ακολουθία: $b_n = \frac{1}{n+4}$, $n = 1, 2, \dots$

έκτενώς ή :

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

ή όποία προκύπτει διὰ διαγραφής τών τεσσάρων πρώτων όρων της $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

§ 124. 'Ιδιότης III. — Κάθε μηδενική ακολουθία είναι φραγμένη.

'Ητοι : 'Εάν $a_n \rightarrow 0$, τότε a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. 'Ας εφαρμόσωμεν τόν όρισμόν της μηδενικής ακολουθίας διὰ $\varepsilon = 1 > 0$, τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ώστε νά ισχύη :

$$|a_n| < 1 \quad \forall \quad n > \nu_0. \quad (1)$$

'Εστω τώρα $A \equiv \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{\nu_0}|)$.

Τότε θά έχωμεν :

$$|a_n| \leq A < A + 1 \quad \forall \quad n = 1, 2, \dots, \nu_0. \quad (2)$$

'Εκ τών (1) και (2) προκύπτει :

$$|a_n| < A + 1 \equiv \varphi \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

'Οθεν ή a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. 'Η άνωτέρω ιδιότης δέν αντιστρέφεται, ήτοι κάθε φραγμένη ακολουθία δέν είναι πάντοτε μηδενική. Περί τούτου βεβαιούμεθα από τὸ ἐξής παράδειγμα :

'Εστω ή ακολουθία : $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ έκτενώς ή ακολουθία :

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

Αὕτη είναι φραγμένη, διότι : $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall \quad n = 1, 2, 3, \dots$, ἐν τούτοις όμως αὕτη δέν είναι μηδενική (διὰτί ;).

'Αντιθέτως ή ακολουθία $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη, διότι ισχύει :

$$|a_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{καί συγχρόνως } a_n \rightarrow 0.$$

§ 125. 'Ιδιότης IV. — Τὸ ἄθροισμα ή ή διαφορά δύο μηδενικῶν ακολουθιῶν είναι μηδενική ακολουθία.

'Ητοι :

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies a_n \pm b_n \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν αἱ α_n καὶ β_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμόν μηδενικῆς ἀκολουθίας: Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu'_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu''_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ὥστε νὰ ἰσχύη:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq \nu'_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu'_0 \quad (1)$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq \nu''_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu''_0. \quad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\nu_0(\varepsilon)$ τὸν μέγιστον τῶν $\nu'_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu''_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ἥτοι ἂν $\nu_0(\varepsilon) \equiv \max(\nu'_0, \nu''_0)$, τότε διὰ κάθε $n \geq \nu_0(\varepsilon)$, αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) πληροῦνται συγχρόνως καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq \nu_0(\varepsilon),$$

ἥτοι: $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$ καὶ $|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon$ διὰ κάθε $n > \nu_0(\varepsilon)$.

Αἱ τελευταῖαι ἀνισότητες μᾶς πληροφοροῦν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι: $\alpha_n + \beta_n$, καὶ $\alpha_n - \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικαί.

§ 126. Ἰδιότης V.—Τὸ γινόμενον μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπὶ φραγμένην εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

$$\text{Ἦτοι: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Ἐὰν} \quad \alpha_n \rightarrow 0 \\ \beta_n, n = 1, 2, \dots \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \implies \alpha_n \beta_n \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις: Ἐστω ϕ ἓν φράγμα τῆς ἀκολουθίας β_n , $n = 1, 2, \dots$. Τότε ἔχομεν: $|\beta_n| \leq \phi$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$ (1)

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha_n \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\frac{\varepsilon}{\phi} > 0$, ὑπάρχει δείκτης

$\nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\phi}\right)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{\phi} \quad \text{διὰ κάθε} \quad n \geq \nu_0. \quad (2)$$

Τότε ὅμως, διὰ κάθε $n \geq \nu_0$, ἔχομεν δυνάμει τῶν (1) καὶ (2) ὅτι:

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{\phi} \cdot \phi = \varepsilon.$$

Ὡστε ἐδείχθη ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\phi}\right) : |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu_0.$$

Ἀρα: $\alpha_n \beta_n \rightarrow 0$.

§ 127. Ίδιότης VI.— Τὸ γινόμενον δύο, ἢ γενικότερον ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους, μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

$$\text{Ἦτοι : } \left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν } a_n \rightarrow 0 \\ \beta_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \beta_n \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις. Ἡ $\beta_n, n=1, 2, \dots$ ὡς μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι (ιδιότης III) φραγμένη, ἄρα ἡ $a_n \beta_n, n=1, 2, \dots$, ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην εἶναι (ιδιότης V) μηδενικὴ ἀκολουθία.

Παράδειγμα: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \beta_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \beta_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$

Ἀσκήσις: Ἀποδείξατε τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα ἀνεξαρτήτως τῶν προηγούμενων ιδιοτήτων, ἀλλὰ μόνον τῇ βοήθειᾳ τοῦ ὁρίσμου μηδενικῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τῶν ιδιοτήτων IV καὶ V ἔπονται ἀμέσως αἱ κάτωθι δύο ιδιότητες :

§ 128. Ίδιότης VII.— Ἐὰν $a_n \rightarrow 0$, τότε $\xi a_n \rightarrow 0$ διὰ κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

Οὕτως, ἐκ τῆς $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0.$

§ 129. Ίδιότης VIII.— Διὰ κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, ἐὰν $\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow 0 \\ \beta_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi a_n + \eta \beta_n \rightarrow 0.$

§ 130. Ίδιότης IX.— Ἐὰν $\beta_n \rightarrow 0$ καὶ διὰ μίαν ἀκολουθίαν $a_n, n=1, 2, \dots$ ἰσχύη : $|a_n| \leq |\beta_n|$ διὰ κάθε $n=1, 2, \dots$, τότε ἡ ἀκολουθία $a_n, n=1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικὴ.

$$\text{Ἦτοι : } \left. \begin{array}{l} \text{Ἐὰν } |a_n| \leq |\beta_n| \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \\ \beta_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ὅτι $\beta_n \rightarrow 0$ ἔπεται : Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη :

$$|\beta_n| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Τότε ὁμως ἔχομεν :

$$|a_n| \leq |\beta_n| < \varepsilon, \quad \text{ἦτοι } |a_n| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Ἀρα :

$$a_n \rightarrow 0.$$

Ἐφαρμογή: Δείξατε ὅτι : $a_n = \frac{1}{n^2 + n + 1} \rightarrow 0.$

Πράγματι :

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n} \quad \text{καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα (ἐπειδὴ } \frac{1}{n} \rightarrow 0) \text{ εἶναι } a_n \rightarrow 0.$$

τητα (ἐπειδὴ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$) εἶναι $a_n \rightarrow 0.$

§ 131. Παραδείγματα εφαρμογής τῶν ἀνωτέρω ιδιοτήτων.

Παράδειγμα 1ον. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = \omega^n$, $n = 1, 2, \dots$ μὲ ω σταθερὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. α). Διὰ $\omega = 0 < 1$ εἶναι προφανές.

β). Διὰ $\omega \neq 0$, ἔχομεν: $0 < |\omega| < 1 \implies \frac{1}{|\omega|} > 1$. Ἀρα $\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta$, $\theta > 0$ καὶ ἐπομένως:

$$|a_n| = |\omega^n| = |\omega|^n = \frac{1}{(1+\theta)^n} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (§ 28, παρ. 2), ἥτοι τὴν ἀνισότητα:

$$(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

ἔχομεν: $(1+\theta)^n > n\theta \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$

Τότε ἡ (1) δίδει:

$$|a_n| = |\omega^n| < \frac{1}{n\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ἐπειδὴ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, δυνάμει τῶν ιδιοτήτων VII καὶ IX εἶναι καὶ $a_n = \omega^n \rightarrow 0$.

Ὡστε ἡ ἀκολουθία:

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots, \omega^n, \dots$$

μὲ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενική.

Οὕτω, π.χ., αἱ ἀκολουθίαι: $\frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, $\frac{1}{10^n}$, $n = 1, 2, \dots$, 3^{-n} , $n = 1, 2, \dots$

εἶναι πᾶσαι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι.

Παράδειγμα 2ον. Ἡ ἀκολουθία: $a_n = a\omega^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ μὲ $|\omega| < 1$ καὶ $a \in \mathbb{R}$, ἥτοι ἡ: $a, a\omega, a\omega^2, a\omega^3, \dots, a\omega^n, \dots$, εἶναι μηδενική.

Πράγματι: δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος καὶ τῆς ιδιότητος VII.

Παράδειγμα 3ον. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = \sqrt[n]{n^2+2} - \sqrt[n]{n^2+1}$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι: $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$. Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt[n]{n^2+2}$, $y = \sqrt[n]{n^2+1}$,

ἔχομεν:

$$|a_n| = \left| \sqrt[n]{n^2+2} - \sqrt[n]{n^2+1} \right| = \left| \frac{(\sqrt[n]{n^2+2})^n - (\sqrt[n]{n^2+1})^n}{\sqrt[n]{n^2+2} + \sqrt[n]{n^2+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2} + \sqrt[n]{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} < \frac{1}{n}.$$

Ἀρα, ἐπειδὴ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, δυνάμει τῆς ιδιότητος IX, προκύπτει ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία:

$$a_n = \sqrt[n]{n^2+2} - \sqrt[n]{n^2+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{εἶναι μηδενική.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

256. Δείξτε ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι εἶναι μηδενικαὶ:

$$1) \frac{n}{n^3+n+1}, \quad 2) \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}, \quad 3) \frac{1+\sqrt[n]{n}}{n^3}, \quad 4) \sqrt[n]{n^2+3} - \sqrt[n]{n^2+1}.$$

257. Ὁμοίως αἱ ἀκολουθίαι:

$$1) \frac{n\mu + \sigma n^3 \nu}{\sqrt[n]{n}}, \quad 2) n^{3/2} \cdot (\sqrt[n]{n^4+4} - n^2), \quad 3) \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}, \quad 4) n \cdot (\sqrt[n]{n^4+4} - n^2).$$

258. Διὰ $\varepsilon > 0$, νὰ προσδιορισθῇ δείκτης $n_0 = n_0(\varepsilon)$, ὥστε διὰ $n \geq n_0(\varepsilon)$, νὰ εἶναι

$$|a_n| < \varepsilon,$$

όπου: $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ είναι:

$$1) \alpha_n = \frac{2}{n^2 + n}, \quad 2) \alpha_n = \frac{3}{4n^2 - 2n}, \quad 3) \alpha_n = \frac{\eta\mu n + \sigma\upsilon\nu^3 n}{\sqrt{n}}, \quad 4) \alpha_n = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2}}.$$

259. Εάν η ακολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική, θά είναι μηδενική και η $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$.

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ.

§ 132. Όρισμός.— Έστω η ακολουθία:

$$\alpha_n = \frac{3n + 1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Διὰ τὴν ὡς ἄνω ἀκολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει: $\alpha_n - 3 = \frac{1}{n}$, ἥτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n - 3, n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\frac{3n+1}{n}, n = 1, 2, \dots$ «συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3».

Γενικῶς θὰ λέγωμεν: «ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α ἢ ἄλλως τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ: $\alpha_n \rightarrow \alpha$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία $(\alpha_n - \alpha), n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1 - \alpha, \alpha_2 - \alpha, \alpha_3 - \alpha, \dots, \alpha_n - \alpha, \dots$$

εἶναι μηδενική.

Τὸν ἀριθμὸν α καλοῦμεν «ὄριο» ἢ «ὀριακὴν τιμὴν» τῆς ἀκολουθίας $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ καὶ γράφομεν: ὅρ $\alpha_n = \alpha$ ἢ ἄλλως $\lim \alpha_n = \alpha$.

Τὸ $\lim$ εἶναι συγκοπὴ τῆς λατινικῆς λέξεως *limes* = ὄριον καὶ χρησιμοποιεῖται διεθνῶς.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι:

ἡ $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ εἶναι μία μηδενική ἀκολουθία $\Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim \alpha_n = 0$.

Ὅθεν ὁ ὁρισμὸς τῆς συγκλινούσης ἀκολουθίας διατυπῶται συντόμως οὕτως:

$$\lim \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim (\alpha_n - \alpha) = 0$$

ορσ

Οὕτω διὰ τὸ παράδειγμά μας ἔχομεν:

$$\lim \frac{3n+1}{n} = 3, \text{ διότι } \lim \left(\frac{3n+1}{n} - 3 \right) = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

§ 133. Πρότασις.— Ἡ ὀριακὴ τιμὴ μιᾶς συγκλινούσης ἀκολουθίας εἶναι μονοσημάντως ὀρισμένη, δηλ. κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία ἔχει ἀκριβῶς ἓνα ὄριο.

Ἄ π ὀ δ ε ι ξ ις.— Εάν συνέβαινε $\alpha_n \rightarrow \alpha$ καὶ συγχρόνως $\alpha_n \rightarrow \alpha'$ μὲ $\alpha \neq \alpha'$, τότε θὰ ἔπρεπε αἱ: $\alpha_n - \alpha, n = 1, 2, \dots$ καὶ $\alpha_n - \alpha', n = 1, 2, \dots$ νὰ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι, συνεπῶς καὶ ἡ διαφορὰ των, ἥτοι ἡ ἀκολουθία:

$$\beta_n \equiv (\alpha_n - \alpha) - (\alpha_n - \alpha') = \alpha' - \alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μηδενική· αυτή όμως είναι σταθερά, ήτοι $\beta_n = \alpha' - \alpha$ διὰ κάθε $n=1, 2, \dots$ είναι ὅθεν μηδενική τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\alpha' - \alpha = 0$ (διατί ;).

Διὰ τὰς συγκλινούσας ἀκολουθίας ἰσχύει τὸ κάτωθι :

§ 134. Θεώρημα.—(Ίσοδύναμοι ὁρίσμοι συγκλινούσης ἀκολουθίας).

Ἐστω $a_n, n=1, 2, \dots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν· αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι :

(i). Ἡ ἀκολουθία $a_n, n=1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν a , ἥτοι $\lim a_n = a, a \in \mathbb{R}$.

(ii). Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἡ ὅπερ τὸ αὐτό :

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

Ἀπόδειξις. (i) $\implies$ (ii). Πράγματι· $\lim a_n = a \implies \lim(a_n - a) = 0$, τὸ ὅποιον, δυνάμει τοῦ ὁρίσμου τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, σημαίνει ὅτι :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε } n \geq n_0 \text{ ἰσχύει :}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

(ii) $\implies$ (i). Πράγματι· δυνάμει τοῦ ὁρίσμου τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας ἡ πρότασις (ii) δηλοῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n - a, n=1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική, τότε ὅμως, κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῆς συγκλινούσης ἀκολουθίας, ἔπεται ὅτι : $\lim a_n = a$.

Παραδείγματα συγκλινουσῶν καὶ μὴ συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν :

1ον· Ἡ ἀκολουθία $a_n = 1, n=1, 2, \dots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία : $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1, διότι ἡ ἀκολουθία $a_n - 1, n=1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Γενικῶς κάθε «σταθερά ἀκολουθία» : $c, c, c, \dots, c, \dots$ διὰ $c \in \mathbb{R}$, συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν c .

2ον· Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = \frac{2n-1}{3n}, n=1, 2, \dots$

συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{2}{3}$, ἥτοι· $\lim a_n = \lim \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$.

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν :

$$\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3n} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}, \quad n=1, 2, \dots$$

καὶ ἐπειδὴ :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{ἔπεται :} \quad \lim \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Ὁμοίως εἶναι :

$$\lim \frac{3n-5}{4n} = \frac{3}{4} \quad (\text{διατί ;}).$$

Δίδομεν κατωτέρω καὶ δύο παραδείγματα ἀκολουθιῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συγκλίνουν ἐν $\mathbb{R}$ · προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

3ον· Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = (-1)^n, n=1, 2, \dots$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbb{R}$.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = (-1)^n, n=1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς τινὰ ἀριθμὸν $x \in \mathbb{R}$. Τότε διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ὑπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|(-1)^n - x| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Είδικῶς :

$$|(-1)^{v_0} - x| < \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad |(-1)^{v_0+1} - x| < \frac{1}{2},$$

διότι $v_0 \geq v_0$ καὶ $v_0 + 1 \geq v_0$. Τότε ὁμως ἔχομεν :

$$|(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = |(-1)^{v_0} - x + x - (-1)^{v_0+1}| \leq |(-1)^{v_0} - x| + |x - (-1)^{v_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\text{ἥτοι :} \quad |(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| < 1. \quad (1)$$

$$\text{'Αλλὰ :} \quad |(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = 2. \quad (2)$$

*Εκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι $2 < 1$, ἄτοπον. Ἐπειδὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία $(-1)^v$, $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$ ὀδηγεῖ εἰς ἄτοπον, συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

4ον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_v = v$, $v = 1, 2, \dots$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

*Απόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $1, 2, \dots, v, \dots$ συγκλίνει πρὸς τινὰ ἀριθμὸν $y \in \mathbf{R}$. Τότε δοθέντος $\varepsilon = \frac{1}{3}$, ὑπάρχει δείκτης $v_0 \in \mathbf{N}$ τοιοῦτος, ὥστε :

$$|v - y| < \frac{1}{3} \quad \forall \quad v \geq v_0.$$

Είδικῶς :

$$|v_0 - y| < \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad |v_0 + 1 - y| < \frac{1}{3},$$

διότι : $v_0 \geq v_0$ καὶ $v_0 + 1 \geq v_0$. Τότε ὁμως ἔχομεν :

$$1 = |(v_0 + 1) - v_0| \leq |v_0 + 1 - y| + |y - v_0| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{ἥτοι :} \quad 1 < \frac{2}{3}.$$

*Επειδὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_v = v$, $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$ ὀδηγεῖ εἰς ἄτοπον, συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη ἡ ἀκολουθία δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

§ 135. Ἰδιότης I. — Ἐστω ἡ ἀκολουθία a_v , $v = 1, 2, \dots$. Τότε ἰσχύει :

$$\text{'Εὰν} \quad a_v \rightarrow a \implies -a_v \rightarrow -a$$

*Απόδειξις. Πράγματι· ἐπειδὴ $a_v \rightarrow a \implies (a_v - a) \rightarrow 0$, τότε ὁμως (§ 122, ιδ. I) καὶ ἡ $-(a_v - a) = -a_v + a$, $v = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ἥτοι : $-a_v - (-a) \rightarrow 0$. Ἄρα : $-a_v \rightarrow -a$.

§ 136. Ἰδιότης II. — Ἐστω ἡ ἀκολουθία a_v , $v = 1, 2, \dots$. Τότε ἰσχύει :

$$\text{'Εὰν} \quad a_v \rightarrow a \implies |a_v| \rightarrow |a|$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδὴ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἀκολουθία $|a_v|$, $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς τὸ $|a|$ δὲν συνεπάγεται ὅτι $a_v \rightarrow a$.

*Απόδειξις. Πράγματι· ἀπὸ $a_v \rightarrow a \implies (a_v - a) \rightarrow 0$, τότε ὁμως (§ 122, ιδ. I) καὶ $|a_v - a| \rightarrow 0$.

Ἀλλὰ $|\alpha_n| - |\alpha| \leq |\alpha_n - \alpha| \rightarrow 0$, ἄρα καὶ $(|\alpha_n| - |\alpha|) \rightarrow 0$ (§ 130, ἰδ. IX)

Τότε ὅμως : $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$.

Τὸ ὅτι τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε δεῖκνυται τὸ ἐξῆς παράδειγμα :

Ἡ ἀκολουθία : $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ δὲν συγκλίνει (διατί;) καὶ ὅμως ἡ ἀκολουθία : $|1|, |-1|, |1|, |-1|, \dots, |(-1)^{n+1}|, \dots$ συγκλίνει εἰς τὸ 1.

Παρατηρήσεις : 1). Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική, τότε ἡ ιδιότης II, ὡς εἰδείχθη § 122, ἀντιστρέφεται, ἥτοι, ἂν $|\alpha_n| \rightarrow 0 \implies \alpha_n \rightarrow 0$.

2). Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος II συνάγεται ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ γράψωμεν :

$$\lim |\alpha_n| = |\lim \alpha_n|$$

ἥτοι : Τὸ ὅριον τῆς ἀπολύτου τιμῆς μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ὁρίου αὐτῆς.

§ 137. Ἰδιότης III. — Ἐστώσαν αἱ ἀκολουθίαι α_n , $n = 1, 2, \dots$ καὶ β_n , $n = 1, 2, \dots$. Τότε ἰσχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow a \\ \beta_n \rightarrow a \end{array} \right\} \implies \alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐπειδὴ $\alpha_n \rightarrow a$ καὶ $\beta_n \rightarrow a$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν :

$$(\alpha_n - a) - (\beta_n - a) = \alpha_n - \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

εἶναι μία μηδενικὴ ἀκολουθία.

§ 138. Ἰδιότης IV. — Κάθε συγκλίνουσα ἐν $\mathbb{R}$ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.

Ἦτοι : **Ἐάν $\alpha_n \rightarrow a \implies \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη**

Ἀπόδειξις. Πράγματι ἀπὸ $\alpha_n \rightarrow a \implies (\alpha_n - a) \rightarrow 0$, τότε ὅμως (ἰδ. III, § 124) ἡ $\alpha_n - a$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη, ἥτοι ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς $\theta > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_n - a| \leq \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ἀλλὰ :

$$|\alpha_n| - |\alpha| \leq |\alpha_n - \alpha|$$

ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἔχομεν :

$$|\alpha_n| - |\alpha| \leq \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή :

$$|\alpha_n| \leq |\alpha| + \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad n = 1, 2, \dots$$

ἢ

$$|\alpha_n| \leq \phi \quad \text{διὰ κάθε} \quad n = 1, 2, \dots$$

ὅπου $\phi = |\alpha| + \theta$.

Ἄρα ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη.

Παρατηρήσεις : α'). Ἡ ιδιότης IV ἰσχυρίζεται ὅτι μία ἀκολουθία ἡ ὁποία συγκλίνει ἐν $\mathbb{R}$ εἶναι φραγμένη. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδή κάθε φραγμένη ἀκολουθία δὲν εἶναι πάντοτε συγκλίνουσα. Περί τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὸ ἐξῆς παράδειγμα : Ἡ ἀκολουθία $(-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, ἂν καὶ εἶναι φραγμένη δὲν συγκλίνει (βλ. πρδ. 3, § 134).

β'). 'Η ιδιότης IV είναι επίσης χρήσιμος προκειμένου να αποδείξωμεν ότι ώρισμένοι ακολουθαί δέν συγκλίνουν έν R. Ούτως, ή ακολουθία 1, 2, ..., ν, ... δέν συγκλίνει έν R, διότι αὕτη δέν είναι φραγμένη (διατί ;).

§ 139. 'Ιδιότης V.—Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν συγκλίνει ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν τῶν ὁρίων αὐτῶν.

"Ητοι :

$$\left. \begin{array}{l} \text{'Εὰν} \\ \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \implies \alpha_n \pm \beta_n \rightarrow \alpha \pm \beta$$

'Απόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ιδιότητα μόνον διὰ τὸ ἄθροισμα, ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν διαφοράν $\alpha_n - \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Πράγματι· ἐπειδὴ $\alpha_n \rightarrow \alpha$ καὶ $\beta_n \rightarrow \beta$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθαί καὶ τὸ ἄθροισμά των :

$$(\alpha_n - \alpha) + (\beta_n - \beta) = (\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta), \quad n = 1, 2, \dots$$

εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

"Αρα :

$$\alpha_n + \beta_n \rightarrow \alpha + \beta.$$

Παρατηρήσεις : 1). 'Η ἀνωτέρω ιδιότης γράφεται συνήθως ὡς ἐξῆς :

$$\lim(\alpha_n \pm \beta_n) = \lim \alpha_n \pm \lim \beta_n.$$

"Ητοι : Τὸ ὅριον ἁθροίσματος (ἀντιστοίχως διαφοράς) δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα (ἀντιστοίχως διαφοράν) τῶν ὁρίων αὐτῶν.

2). 'Η ἀνωτέρω ιδιότης ἰσχύει καὶ διὰ πεπερασμένης τὸ πλῆθος συγκλινούσας ἀκολουθίας, ἥτοι :

$$\lim(\alpha_n + \beta_n + \dots + x_n) = \lim \alpha_n + \lim \beta_n + \dots + \lim x_n.$$

3). 'Η ἀνωτέρω ιδιότης δέν ἰσχύει διὰ συγκλινούσας ἀκολουθίας ἀπείρου πλῆθους. Περὶ τούτου πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἐξῆς παραδείγματος.

"Εστω εὐθύγραμμον τμήμα AB μήκους ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὸ ὅποιον διαιροῦμεν εἰς ν ἴσα μέρη, ἐνθα $n \in \mathbb{N}$. Τότε τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

ἐάν ἐχῃ ν προσθετέους, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς : $\frac{1}{n} \cdot n = 1$, διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

'Εάν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα διὰ τὸ ὡς ἄνω ἄθροισμα ἔχομεν :

$$\lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0,$$

ἥτοι ψευδές, καθ' ὅσον τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ἐλήφθη μὲ μήκος ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

§ 140. 'Ιδιότης VI.—'Εστω ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ Τότε ἰσχύει :

$$\text{'Εὰν} \quad \alpha_n \rightarrow \alpha \implies \lambda \alpha_n \rightarrow \lambda \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

'Απόδειξις. Πράγματι· διότι ἡ ἀκολουθία :

$$\lambda \alpha_n - \lambda \alpha = \lambda(\alpha_n - \alpha), \quad n = 1, 2, \dots$$

εἶναι μηδενικὴ, καθόσον ἡ ἀκολουθία $\alpha_n - \alpha$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενικὴ.

Παρατηρήσεις: Έκ του συμπεράσματος της ανωτέρω ιδιότητας συνάγεται ότι επιτρέπεται να γράφωμεν :

$$\lim(\lambda \cdot \alpha_n) = \lambda \cdot \lim \alpha_n, \quad \text{διὰ κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ μὲ } \lambda = \text{σταθερόν.}$$

Οὕτω :

$$\lim \frac{5}{v} = 5 \cdot \lim \frac{1}{v} = 5 \cdot 0 = 0.$$

Έκ τῶν ιδιοτήτων V καὶ VI ἔπεται εὐκόλως ἡ :

§ 141. Ἰδιότης VII.—Ἐστωσαν αἱ ἀκολουθίαι $\alpha_n, \beta_n, n = 1, 2, \dots$ Τότε ἰσχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \implies \xi \alpha_n + \eta \beta_n \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

§ 142. Ἰδιότης VIII.—Τὸ γινόμενον δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν συγκλίνει πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἦτοι :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \implies \alpha_n \beta_n \rightarrow \alpha \beta$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι· ἡ ἀκολουθία :

$\alpha_n \beta_n - \alpha \beta = \alpha_n \beta_n - \beta_n \alpha + (\beta_n \alpha - \alpha \beta) = \beta_n (\alpha_n - \alpha) + \alpha (\beta_n - \beta), \quad n = 1, 2, \dots$
εἶναι μηδενική, διότι ἂφ' ἑνὸς μὲν ἡ $\alpha_n - \alpha \rightarrow 0$ καὶ $\beta_n, n = 1, 2, \dots$ ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη, ἄρα $\beta_n (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0$, ἂφ' ἑτέρου δὲ $\beta_n - \beta \rightarrow 0$ καὶ α σταθερά, ἄρα $\alpha (\beta_n - \beta) \rightarrow 0$. Ἐπομένως ἡ $\alpha_n \beta_n - \alpha \beta, n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία, ὡς ἄθροισμα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν, ὅθεν : $\alpha_n \beta_n \rightarrow \alpha \beta$.

Παρατηρήσεις: 1). Τὸ συμπέρασμα τῆς ανωτέρω ιδιότητος γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς :

$$\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim \beta_n.$$

Ἦτοι : Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων.

2). Ἡ ανωτέρω ιδιότης ἰσχύει γενικώτερον διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένον τὸ πλῆθος, ἦτοι : $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \gamma_n \cdots x_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim \beta_n \cdot \lim \gamma_n \cdots \lim x_n$.

Τὸ ὅτι ἡ ανωτέρω ιδιότης δὲν ἰσχύει, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δὲν εἶναι πεπερασμένον, πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος : Ἐστω ἡ ἀκολουθία :

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{v}\right), \quad v = 1, 2, \dots$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα VIII θὰ ἔχωμεν :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right) \cdots \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right),$$

ἀλλὰ $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right) = 1 + \lim \frac{1}{v} = 1 + 0 = 1$ καὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = 1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \equiv e = 2,7182818 \dots$

§ 143. Ίδιότης ΙΧ.—'Εάν $\beta_v \rightarrow \beta \neq 0$ και $\beta_v \neq 0$ διά κάθε $v = 1, 2, \dots$, τότε ή ακολουθία $\frac{1}{\beta_v}$, $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\beta}$, ἥτοι :

$$\lim \frac{1}{\beta_v} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_v}$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἔχομεν :

$$\frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \beta_v}{\beta \beta_v} = -\frac{1}{\beta \beta_v} \cdot (\beta_v - \beta), \quad v = 1, 2, \dots$$

ή ακολουθία ὁμως $\beta \cdot \beta_v$, $v = 1, 2, \dots$ ὡς συγκλίνουσα πρὸς τὸ β^2 εἶναι φραγμένη, ὁπότε καὶ ή ακολουθία $\frac{1}{\beta \cdot \beta_v}$, $v = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη (διὰτί ;), ἐξ ἄλλου ή $\beta_v - \beta$, $v = 1, 2, \dots$ εἶναι μία μηδενική ακολουθία, ὅθεν καὶ ή :

$$\frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta}, \quad v = 1, 2, \dots$$

εἶναι μηδενική ακολουθία, ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην ακολουθίαν.

Ἄρα :

$$\lim \frac{1}{\beta_v} = \frac{1}{\beta}.$$

§ 144. Ίδιότης Χ.—'Εάν $\alpha_v \rightarrow \alpha$, $\beta_v \rightarrow \beta \neq 0$ καὶ εἶναι $\beta_v \neq 0$ διά κάθε $v = 1, 2, \dots$, τότε ἰσχύει :

$$\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim \alpha_v}{\lim \beta_v}$$

Ὑπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις ἀπλουστάτη, ἂν ληθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ιδιότητες VIII καὶ IX.

§ 145. Ίδιότης ΧΙ.—'Εάν δύο ακολουθίαι α_v καὶ β_v , $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνουν καὶ ἰσχύη $\alpha_v \leq \beta_v$, $v = 1, 2, \dots$, τότε θὰ ἔχωμεν : $\lim \alpha_v \leq \lim \beta_v$.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν α καὶ β τὰ ὅρια τῶν α_v , $v = 1, 2, \dots$ καὶ β_v , $v = 1, 2, \dots$ ἀντιστοίχως, ἥτοι $\lim \alpha_v = \alpha$ καὶ $\lim \beta_v = \beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\alpha \leq \beta$.

Ἐν πρώτοις ἔχομεν $\beta_v - \alpha_v \geq 0$ διά κάθε $v = 1, 2, \dots$. Ἐξ ἄλλου ή ακολουθία $\beta_v - \alpha_v \rightarrow \beta - \alpha$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διά κάθε $\varepsilon > 0$ θὰ ἔχωμεν :

$$(\beta - \alpha) - \varepsilon < \beta_v - \alpha_v < (\beta - \alpha) + \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 = v_0(\varepsilon).$$

Ἐάν ἦτο $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - \beta > 0$ καὶ ή ἀνωτέρω ἀνισότης διά $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ γίνεται :

$$2(\beta - \alpha) < \beta_v - \alpha_v < 0 \quad \text{διά κάθε } v \geq v_0(\varepsilon),$$

δηλαδή $\beta_v < \alpha_v$ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τήν ὑπόθεσιν.

Ἄρα :

$$\alpha \leq \beta.$$

Θεωρούμετες την β_n , $n = 1, 2, \dots$ ή την α_n , $n = 1, 2, \dots$ ως σταθεράν ακολουθίαν έχομεν άντ.στοίχως τὰ κάτωθι πορίσματα:

Πόρισμα Ι.— Έάν οί όροι ακολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι από τινος δείκτου καί πέραν μικρότεροι ή ίσοι αριθμού β , τότε ισχύει : $\lim \alpha_n \leq \beta$.

Ήτοι :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \alpha_n \leq \beta, \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Πόρισμα ΙΙ.— Έστω ή ακολουθία β_n , $n = 1, 2, \dots$ Τότε ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \beta_n \rightarrow \beta \\ \alpha \leq \beta_n, \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta = \lim \beta_n$$

§ 146. Ίδιότης ΧΙΙ.— Έστωσαν αί ακολουθίαι α_n , β_n , γ_n , $n = 1, 2, \dots$ Τότε ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \beta_n \rightarrow \alpha, \quad \gamma_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \leq \alpha_n \leq \gamma_n, n = 1, 2, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$$

Άπόδειξις. Άπό $\beta_n \rightarrow \alpha$ έπεται : διά κάθε $\epsilon > 0$ ύπάρχει δείκτης $n_1(\epsilon)$ τοιούτος, ώστε νά ισχύη : $\alpha - \epsilon < \beta_n < \alpha + \epsilon$ διά κάθε $n \geq n_1(\epsilon)$.

Όμοίως από $\gamma_n \rightarrow \alpha$ έπεται ότι ύπάρχει δείκτης $n_2(\epsilon)$ τοιούτος, ώστε νά ισχύη :

$$\alpha - \epsilon < \gamma_n < \alpha + \epsilon \quad \text{διά κάθε } n \geq n_2(\epsilon).$$

Τότε όμως, εάν $n_0 = \max [n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)]$, θα έχωμεν διά κάθε $n \geq n_0$

$$\alpha - \epsilon < \beta_n \leq \alpha_n \leq \gamma_n < \alpha + \epsilon,$$

ήτοι

$$\alpha - \epsilon < \alpha_n < \alpha + \epsilon$$

ή ισοδυνάμως

$$|\alpha_n - \alpha| < \epsilon \quad \text{διά κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα :

$$\lim \alpha_n = \alpha.$$

§ 147. Παραδείγματα εφαρμογής τών άνωτέρω ιδιοτήτων.

Παράδειγμα Ιον : Δείξτε ότι :

$$\lim \frac{2n^2 + 4n - 7}{3n^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Λύσις. Διαιρούμεν αριθμητήν καί παρονομαστήν του κλάσματος διά της μεγαλύτερας δυνάμεως του n , δηλ. διά n^2 καί ή ακολουθία γράφεται :

$$\frac{2n^2 + 4n - 7}{3n^2 + 1} = \frac{2 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}}.$$

Αί ακολουθία όμως $\frac{4}{v} = 4 \cdot \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$, $\frac{1}{v^2}$, $v = 1, 2, \dots$ και $\frac{7}{v^2} = 7 \cdot \frac{1}{v^2}$, $v = 1, 2, \dots$ είναι πᾶσαι μηδενικάι ακολουθίαι. Ἐπομένως ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} &= \lim \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}} = \frac{\lim \left(2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{\lim \left(3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \\ &= \frac{2 + \lim \frac{4}{v} - \lim \frac{7}{v^2}}{3 + \lim \frac{1}{v^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ὡστε : } \lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2}{3} \equiv \text{μὲ τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν}$$

μεγιστοβαθμίων ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

Γενικῶς : Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

Π α ρ ἄ δ ε ι γ μ α 2ον : Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία a_v , $v = 1, 2, \dots$, ἡ ὁποία ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$a_v \equiv \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3}$$

εἶναι μηδενική.

Λ ὕ σ ι ς. Διαιροῦμεν ἀριθμητήν καὶ παρονομαστήν τοῦ κλάσματος διὰ τῆς μεγαλύτερας δυνάμεως τοῦ v , δηλ. διὰ v^5 , ὅτε λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα:

$$\frac{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}}.$$

$$\text{Ἀλλὰ } \lim \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5} \right) = \lim \frac{1}{v^2} - \lim \frac{1}{v^3} + \lim \frac{1}{v^5} = 0 - 0 + 0 = 0$$

$$\text{καὶ } \lim \left(1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right) = 1 + 2 \lim \frac{1}{v} - 3 \lim \frac{1}{v^5} = 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 1.$$

Τότε, δυνάμει τῆς ιδιότητος X τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, ἔχομεν :

$$\lim a_v \equiv \lim \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = \lim \frac{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = \frac{\lim \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^5} \right)}{\lim \left(1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Γενικῶς : Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Παράδειγμα 3ον. Νά εὑρεθῇ τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας a_n , $n=1, 2, \dots$ μὲ

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha}, \quad \text{ἐνθα } \alpha > 0.$$

Λύσις (i). Θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\alpha > 1$, τότε εἶναι καὶ $\sqrt[n]{\alpha} > 1$. Θέτοντες $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \varepsilon_n$, ὅπου $\varepsilon_n > 0$, ἔχομεν: $\alpha = (1 + \varepsilon_n)^n$ ἢ, κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἐφαρμογὴ 2α, § 28),

$$\alpha = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n > n\varepsilon_n$$

$$\text{ὁπότε: } 0 < \varepsilon_n < \alpha \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{'Αλλὰ } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \frac{1}{n} = 0 \text{ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§146) } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

$$\text{'Οθεν } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 1.$$

(ii). Ἐστω ὅτι $\alpha < 1$, τότε εἶναι καὶ $\sqrt[n]{\alpha} < 1$.

$$\text{Θέτοντες } \sqrt[n]{\alpha} = \frac{1}{1 + \varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n > 0, \text{ ἔχομεν:}$$

$$\alpha = \frac{1}{(1 + \varepsilon_n)^n} \leq \frac{1}{1 + n\varepsilon_n} < \frac{1}{n \cdot \varepsilon_n} \implies \varepsilon_n < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{'Αλλὰ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ καὶ ἐπομένως } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

$$\text{'Οθεν } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1.$$

(iii). Διὰ $\alpha = 1$, τότε $\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{1} = 1$, ἄρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

Παράδειγμα 4ον. Δείξατε ὅτι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει $\sqrt[n]{n} > 1$ διὰ κάθε $n = 2, 3, \dots$ ὅθεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$(1) \quad \sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^n, \quad \text{ὅπου } \delta_n > 0 \text{ διὰ κάθε } n = 2, 3, \dots$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν: $\sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^n$ ἢ κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli

$$(2) \quad \sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + n\delta_n > n\delta_n$$

$$\eta \quad 0 < \delta_n < \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$\text{'Αλλὰ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 \text{ (βλ. πρδ. 4, § 121) καὶ συνεπῶς } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

$$\text{Τότε ὅμως } 1 + \delta_n \rightarrow 1 + 0 = 1 \text{ καὶ } (1 + \delta_n)^n \rightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\text{'Οθεν ἐκ τῆς (1) ἔχομεν: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Παράδειγμα 5ον.

Έάν $\lim a_n = a$, $a_n > 0$, $a \neq 0 \implies \lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Απόδειξις. Προφανώς ισχύει :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Επομένως :

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |a_n - a|.$$

Αλλά $a_n - a \rightarrow 0$ (διότι $a_n \rightarrow a$), και συνεπώς $\sqrt{a_n} - \sqrt{a} \rightarrow 0$.

Οθεν : $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Παρατηρήσεις :

1). Έκ του συμπεράσματος του παραδείγματος 5 συνάγεται ότι επιτρέπεται να γράφουμε :

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$$

ήτοι : τὰ σύμβολα $\lim$ και $\sqrt{}$ επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά της ακολουθίας a_n , $n = 1, 2, \dots$.

2). Με τὰς υποθέσεις του παραδείγματος 5 ισχύει γενικώτερον :

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \text{ ἔνθα } k \in \mathbb{N} \text{ (διατί;)}. \quad \text{Λ Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ}$$

260. Νά εὑρεθοῦν, ἔάν ὑπάρχουν, τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μὲ γενικοὺς ὁρους :

$$1) \quad a_n = \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 5n + 7}, \quad 2) \quad a_n = \sqrt{1 + \frac{4}{n}}, \quad 3) \quad a_n = \frac{n}{n^2 + 3},$$

$$4) \quad a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2, \quad 5) \quad a_n = \frac{2n^3 - 3n + 2}{5n^3 + 7}, \quad 6) \quad a_n = \sqrt[3]{\frac{8n^2 + 5}{64n^2 + n + 1}}$$

261. Διά $\varepsilon > 0$, νά προσδιορισθῇ δείκτης $n_0 = n_0(\varepsilon)$, ὥστε διὰ $n \geq n_0(\varepsilon)$ νὰ εἶναι :

$$\left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

262. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = (-1)^n \cdot n$, $n = 1, 2, \dots$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbb{R}$.

263. Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία $a_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$

264. Εἶναι ἡ ἀκολουθία $a_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$ φραγμένη ;

265. Έάν ἡ ἀκολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη, δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία : $\frac{1}{n} \cdot a_n$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη καὶ ἰσχύει :

$$\lim \frac{1}{n} a_n = 0.$$

266. Δείξατε ὅτι : $\lim \frac{n^4 - 4n^3 + n + 6}{2n^4 + 7n^2 + 2n - 1} = \frac{1}{2}$.

267. Έάν ἡ ἀκολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει ἐν $\mathbb{R}$, δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία b_n , $n = 1, 2, \dots$, ὅπου $b_n = a_{n+1} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει ἐν $\mathbb{R}$ καὶ ἰσχύει :

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n.$$

268. Δείξατε ὅτι : $\lim \sqrt[n]{n^2 + n} = 1$.

ΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ

§ 148. Όρισμοί.— Η ακολουθία $\alpha_n = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ή ακολουθία:
 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$

διατηρεί προφανώς την διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή ἰσχύει

$$n < \mu \implies 2^n = \alpha_n < \alpha_\mu = 2^\mu.$$

Γενικῶς μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν διατηροῦσα, ὡς καὶ ή $\alpha_n = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$ τήν διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλεῖται «**γνησίως αὐξουσα**». Ἀκριβέστερον διὰ μίαν ακολουθίαν α_n , $n = 1, 2, \dots$ ὀρίζομεν :

Ἡ ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ καλεῖται **γνησίως αὐξουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύη : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Κατ' ἀναλογίαν ὀρίζομεν :

Ἡ ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ καλεῖται **γνησίως φθίνουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύη : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Οὕτως ή ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι διὰ πᾶν n εἶναι :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = \alpha_{n+1}.$$

Ἐς θεωρήσωμεν ἤδη τήν ακολουθίαν : $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$. Διὰ τήν ἐν λόγω ακολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$n < \mu \implies \alpha_n \leq \alpha_\mu$$

λέγομεν δὲ εἰς τήν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ή ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι **αὐξουσα**.

Ἀκριβέστερον : θὰ λέγωμεν ὅτι ή ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι **αὐξουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύη : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Ὅμοίως : Ἡ ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι **φθίνουσα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύη : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Οὕτω, λ.χ., ή ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$ εἶναι φθίνουσα (μὴ αὐξουσα). Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι μία ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι **γνησίως μονότονος** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι γνησίως αὐξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Ἀντιστοίχως δὲ λέγομεν ὅτι ή α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι **μονότονος**, ἂν αὕτη εἶναι αὐξουσα ή φθίνουσα. Προφανῶς κάθε γνησίως μονότονος ακολουθία εἶναι καὶ μονότονος, δὲν ἰσχύει ὁμως τὸ ἀντίστροφον (διαιτῇ ;)

Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς ακολουθίας χρησιμοποιοῦμεν τὰ κάτωθι σύμβολα :

$$\alpha_n \uparrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \text{γνησίως αὐξουσα}$$

$$\alpha_n \downarrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \text{γνησίως φθίνουσα}$$

$$\alpha_n \uparrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \text{αὐξουσα}$$

$$\alpha_n \downarrow \iff \alpha_n \text{ εἶναι } \text{φθίνουσα}.$$

Ἡ ἀκολουθία : $\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \dots$ με ὅλους τοὺς ὅρους της ἴσους με α ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ (μοναδική) περίπτωσης ἀκολουθίας, ἡ ὁποία εἶναι συγχρόνως αὐξοῦσα καὶ φθίνουσα. Δηλαδή ἰσχύει :

Ἡ $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ εἶναι σταθερὰ $\Leftrightarrow$ ἡ $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ εἶναι ταυτοχρόνως αὐξοῦσα καὶ φθίνουσα.

Εἶναι προφανές ὅτι κάθε αὐξοῦσα ἀκολουθία εἶναι πάντοτε φραγμένη κάτωθεν με κάτω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον της, ἐνῶ κάθε φθίνουσα ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἄνωθεν με ἄνω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς. Ὅθεν ὡς ἂν καταπτέρω λέγομεν ὅτι : μία μονότονος ἀκολουθία εἶναι φραγμένη, θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε : ἂν μὲν εἶναι αὐξοῦσα ἡ γνησίως αὐξοῦσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἐν ἄνω φράγμα, ἂν δὲ εἶναι φθίνουσα ἡ γνησίως φθίνουσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἐν κάτω φράγμα.

§ 149. Τὸ μονότονον καὶ ἡ σύγκλις ἀκολουθίας.— Ἀς θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἀκολουθίαν $v^n, n = 1, 2, \dots$, ἥτοι τὴν :

$$1, 4, 9, 16, \dots, v^n, \dots$$

καὶ δεύτερον τὴν ἀκολουθίαν $\frac{v}{v+1}, n = 1, 2, \dots$, ἥτοι τὴν :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{v}{v+1}, \dots$$

Δι' ἀμφοτέρας παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι αὐξοῦσαι καὶ μάλιστα γνησίως αὐξοῦσαι ἀκολουθίαι. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη δὲν εἶναι φραγμένη (πρβλ. § 117), οὕτε δὲ συγκλίνει πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα, δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$\frac{v}{v+1}, n = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη, διότι : $\left| \frac{v}{v+1} \right| = \frac{v}{v+1} \leq 1$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη συγκλίνει καὶ μάλιστα $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{v+1} = 1$.

Τὸ γεγονός ὅτι ἡ αὐξοῦσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία $\frac{v}{v+1}, n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει γενικῶς διὰ κάθε αὐξοῦσαν καὶ φραγμένην ἀκολουθίαν. Ἀκριβέστερον δεχόμεθα τὸ ἀκόλουθον ἄξιωμα :

§ 150. Ἀξίωμα.— Κάθε μονότονος καὶ φραγμένη ἀκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\mathbf{R}$.

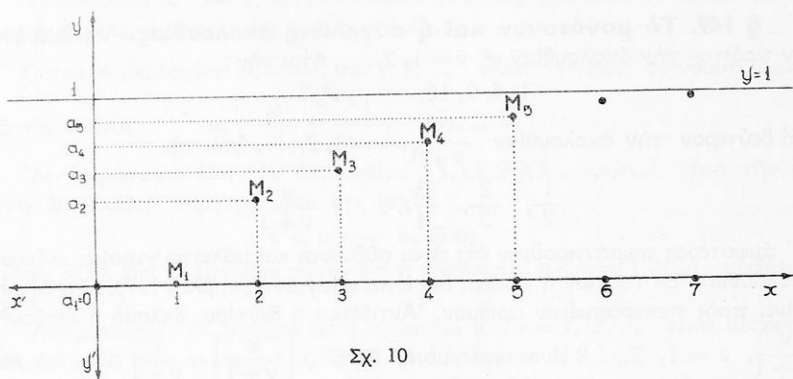
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄνωτέρω ἄξιωμα ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὁρίου εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ὑπὸ ὠρισμένης ὑποθέσεως. Δὲν παρέχει βεβαίως οὐδεμίαν ἔνδειξιν περὶ τοῦ πῶς θὰ ὑπολογισθῇ σαφῶς τὸ ὅριον, ὅπως δὲ ὅμως εἶναι σπουδαῖον νὰ γνωρίζωμεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις ὅτι μία ἀκολουθία συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$, διότι τότε εἴμεθα περισσότερον εἰς θέσιν νὰ υπολογίσωμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος ἔπονται αἱ εἰδικώτεροι προτάσεις :

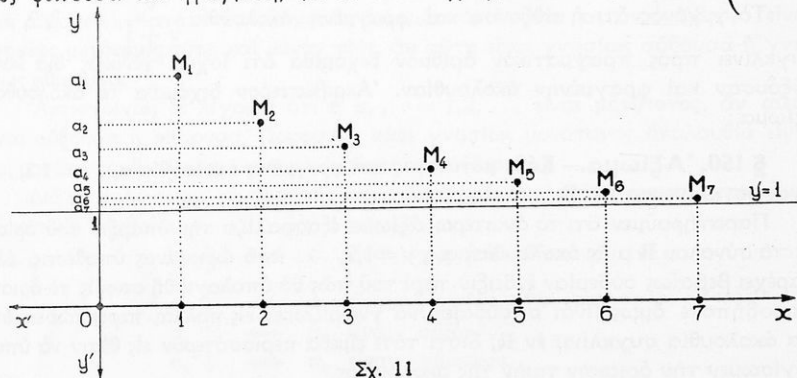
α). Ἐάν μία ἀκολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι αὐξουσα καὶ ἔχει ἐν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν s , τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει : $\lim a_n \leq s$.

β). Ἐάν μία ἀκολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχει ἐν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν σ , τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει : $\sigma \leq \lim a_n$.

Παράδειγμα 1ον : Ἡ ἀκολουθία $\frac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι προφανῶς αὐξουσα καὶ φραγμένη (διότι : $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$), ὁθεν συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ 1. Δίδομεν εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα τοὺς πέντε πρῶτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\frac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$



Παράδειγμα 2ον : Ἡ ἀκολουθία $1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι προφανῶς φθίνουσα καὶ φραγμένη, μὲ ἐν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 1 (διότι :



$1 < 1 + \frac{1}{v}$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$), επομένως συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μεγάλυ-
τερον ἢ ἴσον τοῦ 1.

Εἰς τὸ σχῆμα (11) τῆς ἔναντι σελίδος δίδομεν τοὺς ἐπτὰ πρῶτους ὄρους
τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v = 1 + \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$

Παρατηρήσεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐξούσης καὶ μὴ φραγμένης
ἀκολουθίας $\alpha_v = v^2$, $v = 1, 2, \dots$, ἡ ὁποία δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν
ἀριθμὸν, λέγομεν ὅτι αὕτη ἀπειρίζεται θετικῶς. Ἀλλὰ καὶ γενικώτερον διὰ μίαν
αὐξουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν α_v , $v = 1, 2, \dots$ θὰ λέγωμεν ὅτι
αὕτη «ἀπειρίζεται θετικῶς», ἢ ἄλλως «συγκλίνει πρὸς τὸ $+\infty$ » ἢ ἀκόμη «τείνει
πρὸς τὸ $+\infty$ » (τὸ σύμβολον $+\infty$ ἀναγινώσκεται: «σὺν ἄπειρον»).

Κατ' ἀναλογίαν διὰ μίαν φθίνουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν πρα-
γματικῶν ἀριθμῶν α_v , $v = 1, 2, \dots$, θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη «ἀπειρίζεται ἀρνη-
τικῶς» ἢ ἄλλως «συγκλίνει πρὸς τὸ $-\infty$ » ἢ ἀκόμη «τείνει πρὸς τὸ $-\infty$ » (τὸ σύμ-
βολον $-\infty$ ἀναγινώσκεται: «πλὴν ἄπειρον»).

§ 151. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν μονοτόνων ἀκολουθιῶν

Παράδειγμα 1ον. Ἐστω ἡ ἀκολουθία τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἰς δοθέντα
κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ἥτοι ἡ ἀκολουθία:

$$E_3, E_4, E_5, \dots, E_v, \dots$$

ὅπου E_v τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲν v πλευρᾶς.

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

$$E_3 < E_4 < E_5 < \dots < E_v < E_{v+1} < \dots$$

ἥτοι, ἡ ἀκολουθία E_v , $v = 3, 4, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξουσα. Ἐπὶ πλέον αὕτη εἶναι
πρὸς τὰ ἄνω φραγμένη μὲν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν, ὅστις παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν
ἐνὸς οἰοῦδήποτε περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κυρτοῦ πολυγώνου. Ὅθεν, δυνά-
μει τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀκολουθία E_v , $v = 3, 4, \dots$
συγκλίνει πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν. Τὸν πραγματικὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, δηλ.
τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας E_v , $v = 3, 4, \dots$, καλοῦμεν, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμε-
τρίας, ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Παράδειγμα 2ον: Μελετήσατε τὴν ἀκολουθίαν:

$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ..., $a_v = \sqrt{2 + a_{v-1}}$, ...
ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν.

Λύσις: Προφανῶς ἔχομεν: $a_1 < a_2$. Ἐστω ὅτι: $a_k < a_{k+1}$, τότε
 $2 + a_k < 2 + a_{k+1}$ ἢ $\sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}}$, δηλαδή $a_{k+1} < a_{k+2}$. Ἀρα,
δυνάμει τοῦ θεωρ. τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), θὰ ἔχωμεν: $a_v < a_{v+1}$ διὰ κάθε
 $v = 1, 2, \dots$, ἥτοι ἡ ἀκολουθία $a_v = \sqrt{2 + a_{v-1}}$, $v = 2, 3, \dots$ εἶναι γνησίως αὐ-
ξουσα (μονότονος).

Ἐξετάζομεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν ἂν εἶναι φραγμένη ἄνωθεν. Πράγματι: $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$, ἔστω ὅτι καὶ $\alpha_{v-1} < 2$, τότε $2 + \alpha_{v-1} < 4$, ἐξ οὗ: $\sqrt{2 + \alpha_{v-1}} < 2$ δηλ. $\alpha_v < 2$. Ἀρα, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἰσχύει: $\alpha_v < 2$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$, ἥτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v = \sqrt{2 + \alpha_{v-1}}$, $v = 2, 3, \dots$ μὲ $\alpha_1 = \sqrt{2}$ εἶναι φραγμένη ἄνωθεν.

Ἐπομένως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος § 150, ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ 2 (διὰ τι;).

Ἐστω λοιπὸν $\alpha = \lim \alpha_v$, τότε λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\alpha_v = \sqrt{2 + \alpha_{v-1}}$ ἔχομεν (ἐπειδὴ $\lim \alpha_v = \lim \alpha_{v+1} = \alpha$):

$$\lim \alpha_v = \lim \sqrt{2 + \alpha_{v-1}} = \sqrt{2 + \lim \alpha_{v-1}}$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha = \sqrt{2 + \alpha} \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0, \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν:} \\ \alpha = 2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = -1.$$

Ἡ ρίζα $\alpha = -1$ ἀπορρίπτεται, διότι τὸ ὅριον α πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, καθ' ὅσον ὅλοι οἱ ὅροι τῆς αὐξοῦσης ἀκολουθίας α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

$$\text{Ὅθεν:} \quad \lim \alpha_v = 2.$$

Παράδειγμα 3ον. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ μὲ:

$$\alpha_{v+1} = \frac{2\alpha_v + 4}{3} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 0$$

συγκλίνει ἐν **R**. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας;

$$\text{Ἀπόδειξις. Προφανῶς} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad \left(\text{διότι: } \alpha_1 = 0 < \frac{2\alpha_1 + 4}{3} = \frac{4}{3} \right).$$

Ἐστω ὅτι $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ δηλ. $\alpha_{k+1} - \alpha_k > 0$, τότε εἶναι καὶ $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$, διότι:

$$\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_{k+1} + 4}{3} - \frac{2\alpha_k + 4}{3} = \frac{2(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{3} > 0.$$

Ἀρα $\alpha_v < \alpha_{v+1}$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$, ἥτοι ἡ ἀκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι αὐξουσα. Αὕτη εἶναι καὶ φραγμένη μὲ ἐν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 5, ἥτοι $|\alpha_v| \leq 5 \quad \forall \quad v = 1, 2, \dots$ Πράγματι: $|\alpha_1| = 0 \leq 5$. Ἐστω ὅτι ἰσχύει: $|\alpha_k| \leq 5$, θὰ δειξωμεν ὅτι καί: $|\alpha_{k+1}| \leq 5$. Πράγματι: ἔχομεν:

$$|\alpha_{k+1}| = \left| \frac{2\alpha_k + 4}{3} \right| \leq \frac{2|\alpha_k| + 4}{3} \leq \frac{2 \cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} \leq 5.$$

Ἀρα α_v , $v = 1, 2, \dots$ φραγμένη ἄνωθεν, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ αὐξουσα, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, συγκλίνει ἐν **R** πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ πέντε.

Ἐστω $x = \lim \alpha_v$, τότε ἔχομεν:

$$x = \lim \alpha_{v+1} = \lim \frac{2\alpha_v + 4}{3} = \frac{2x + 4}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad 3x = 2x + 4, \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν:} \quad x = 4.$$

Ὅθεν ἡ α_v , $v = 1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4, δηλ. $\lim \alpha_v = 4$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 4ον : Μελετήσατε την ακολουθία : $a_n, n = 1, 2, \dots$ με

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) \quad \text{και} \quad a_1 = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{3}{\theta} \right), \quad \text{ένθα } \theta > 0,$$

ώς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας;

Λ ύ σ ι ς. Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι : $a_n > 0$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν, ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ἐνθα $x, y > 0$:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{3}{a_{n-1}}} = \sqrt{3}, \quad \text{ἤτοι } a_n \geq \sqrt{3} \quad \text{διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \quad (\text{διότι : } a_n^2 \geq 3 \iff 3 - a_n^2 \leq 0),$$

ἤτοι : $a_n \geq a_{n+1}$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $a_n, n = 1, 2, \dots$ εἶναι φθίνουσα. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ φραγμένη ἐκ τῶν κάτω, διότι

$$a_n \geq \sqrt{3} \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \text{θὰ συγκλίνει ἐν } \mathbf{R}.$$

Ἐστω x τὸ $\lim a_n$, τότε εἶναι καί :

$$x = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\lim a_n + \frac{3}{\lim a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right)$$

ἢ $x^2 = 3$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν : $x = \sqrt{3}$ καὶ $x = -\sqrt{3}$ (ἀπορρίπτεται).

Ὅθεν :

$$\lim a_n = \sqrt{3}.$$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

269. Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῶν κάτωθι ἀκολουθιῶν :

α) $1 + \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$, β) $\alpha + (v-1)\omega, v = 1, 2, \dots$, γ) $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, v = 1, 2, \dots$

δ) $\frac{1}{v(v+1)}, v = 1, 2, \dots$, ε) $(-1)^{v+1} \alpha \omega^{v-1}, v = 1, 2, \dots$, στ) $\frac{\sqrt{v+1}}{v}, v = 1, 2, \dots$

270. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν $a_n, n = 1, 2, \dots$, αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι φραγμέναι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι :

1) $a_n = \frac{2v}{v^2 + 1},$

2) $a_n = \frac{v \eta \mu 3v}{v^2 + 1},$

3) $a_n = \frac{v^2 + 1}{2v},$

4) $a_n = \frac{1}{v} \eta \mu \frac{\pi v}{2},$

5) $a_n = v \cdot 3^{-v},$

6) $a_n = \frac{\eta \mu v + \sigma \nu^3 5v}{v^3 \cdot \sqrt{v}}.$

271. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μονότοναι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι ; Καθορίσατε τὸ εἶδος μονοτονίας διὰ τὰς μονοτόνους ἐξ αὐτῶν. Ποῖαι εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖαι αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ των ;

272. Ὑπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν $a_n, n = 1, 2, \dots$ με γενικοὺς ὅρους :

1) $a_n = \frac{3v + 2}{v^2 + 1},$

2) $a_n = \frac{3v^2 - 5}{v^2},$

3) $a_n = \left(\frac{2v^2 - 3}{3v^2 - 2} \right)^2,$

$$4) \alpha_v = \sqrt{\frac{3v^2 + 2}{4v^2 + v + 1}}, \quad 5) \alpha_v = \frac{\sqrt{v} - 1}{\sqrt{v} + 1}, \quad 6) \alpha_v = \frac{v + 1}{v \cdot \sqrt{v}},$$

$$7) \alpha_v = (\sqrt{v+1} - \sqrt{v}) \cdot \sqrt{v + \frac{1}{2}}, \quad 8) \alpha_v = \sqrt{v + \sqrt{v}} - \sqrt{v - \sqrt{v}}.$$

273. Όμοιος :

$$1) \alpha_v = \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 3v + 1}, \quad 2) \alpha_v = \frac{2v^2 + 3v - 1}{5v^2 - v + 7}, \quad 3) \alpha_v = \frac{v^4 + 2}{v^2 - 4} - \frac{2v^5 - 3v^3}{2v^3 + 1},$$

$$4) \alpha_v = \sqrt{v^2 + v} - v, \quad 5) \alpha_v = \frac{1 + 2 + \dots + v}{v^2}, \quad 6) \alpha_v = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + v^2}{v^3}.$$

274. Έάν $\lim \alpha_v = \alpha$ και $p \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι : $\lim (\alpha_v^p) = \alpha^p$, δηλ. $\lim (\alpha_v^p) = (\lim \alpha_v)^p$.

275. Διά $\varepsilon > 0$, να προσδιορισθεί δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$, ώστε διά $v \geq v_0(\varepsilon)$, να είναι $|\alpha_v| < \varepsilon$,

όπου $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ είναι :

$$1) \alpha_v = \frac{1}{2v + 1}, \quad 2) \alpha_v = \frac{v - 1}{v^2 + 1}, \quad 3) \alpha_v = \frac{\eta \mu v + 2 \sigma \nu 5v}{\sqrt{v}}, \quad 4) \alpha_v = \sqrt{v + 1} - \sqrt{v}.$$

Έφαρμογή διά $\varepsilon = 10^{-6}$.

276. Να αποδειχθεί ότι :

$$1) \lim \sqrt{\frac{9v^2}{v^2 + 3}} = 3, \quad 2) \lim \sqrt[3]{\frac{v^2 + v - 1}{27v^2 - 4}} = \frac{1}{3}.$$

277. Να αποδειχθεί ότι αί ακολουθεί :

$$\alpha_v = \frac{2v^2 - 1}{3v^2 + 2}, \quad \beta_v = \frac{2v + 3}{3v - 2}, \quad \gamma_v = \sqrt{\frac{4v - 3}{9v + 5}}, \quad v = 1, 2, \dots$$

είναι συγκλίνουσες και έχουν κοινόν όριον.

278. Δίδονται αί ακολουθεί :

$$\alpha_v = v^2, \quad \beta_v = v, \quad \gamma_v = v^3, \quad v = 1, 2, \dots$$

Να αποδειχθεί ότι :

$$(i) \lim \alpha_v = \lim \beta_v = \lim \gamma_v = +\infty$$

$$(ii) \lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = +\infty, \quad \lim \frac{\gamma_v}{\beta_v} = +\infty, \quad \lim \frac{\gamma_v}{\alpha_v} = +\infty$$

$$(iii) \lim \frac{\alpha_v}{\gamma_v} = \lim \frac{\beta_v}{\alpha_v} = \lim \frac{\beta_v}{\gamma_v} = 0.$$

279. Γνωστού όντος, ότι $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e$, να εύρεθούν τὰ όρια τών ακολουθειών

$\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, αί όποια όρίζονται υπό τών τύπων :

$$1) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{2v}\right)^v, \quad 2) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v-1}\right)^{v-1}, \quad 3) \alpha_v = \left(1 - \frac{1}{v^2}\right)^v.$$

280. Να αποδειχθεί ότι :

$$\lim \left[\frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \right] = 1$$

(Υπόδειξις : Προσθέσατε κατά μέλη τās προφανείς ανίσότητας :

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}, \quad k = 1, 2, \dots, v \text{ και εφαρμόσατε τήν ιδιότητα XII, § 146).}$$

281. Να λυθῇ ἡ ἀνισότης :

$$\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

282. Δείξτε ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι εἶναι μονότοναι καὶ φραγμέναι :

$$1) \quad \alpha_v = \frac{v+1}{v}, \quad 2) \quad \alpha_v = \frac{1}{v^2+1}, \quad 3) \quad \alpha_v = \frac{v}{v^2+1}, \quad 4) \quad \alpha_v = \frac{4v+1}{5v}.$$

283. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ μέ :

$$\alpha_{v+1} = \sqrt{1 + \alpha_v} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 1$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα, φραγμένη καὶ ὅτι : $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

284. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, μέ $\alpha_{v+1} = \sqrt{4\alpha_v + 3}$ καὶ $\alpha_1 = 5$.

Νὰ δευχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄριόν της.

(Υπόδειξις : Δείξτε ὅτι εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη κάτωθεν ὑπὸ τοῦ $\sqrt{3}$ κτλ.).

285. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι :

$$\alpha_1 = \theta > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_{v+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_v + \frac{\lambda^2}{\alpha_v} \right), \quad 0 < \lambda < \theta, v = 1, 2, \dots$$

Νὰ δευχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄριόν της.

(Υπόδειξις : Στηριχθῆτε ἐπὶ τῆς γνωστῆς ἀνισότητος $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ καὶ δείξτε ὅτι ἡ ἐν λόγω ἀκολουθία εἶναι φραγμένη καὶ φθίνουσα).

286. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ μέ : $\alpha_{v+1} = \frac{3\alpha_v + 1}{4}$ καὶ $\alpha_1 = 0$ εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ τῆς μονάδος. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

(Υπόδειξις : Προχωρήσατε ὡς εἰς τὸ παράδειγμα 3, § 151).

287. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ μέ : $\alpha_{v+1} = \sqrt{2\alpha_v}$ καὶ $\alpha_1 = 1$ εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη. Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

288. Μελετήσατε ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν τὴν ἀκολουθίαν : $\beta_v, v = 1, 2, \dots$

$$\text{μέ : } \beta_{v+1} = \frac{3\beta_v - 4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } v = 1, 2, \dots \quad \text{καὶ } \beta_1 = -3.$$

Ποῖον τὸ ὄριον τῆς ἐν λόγω ἀκολουθίας ;

289. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία : $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ μέ :

$$\alpha_{v+1} = \alpha + \alpha_v^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \text{ὅπου} \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα καὶ ὅτι συγκλίνει εἰς τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξίσωσως : $t^2 - t + \alpha = 0$.

290. Δείξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v, \quad v = 1, 2, \dots$$

εἶναι γνησίως αὐξουσα.

291. Νὰ εὐρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τῶν ἀκολουθιῶν μὲ γενικοὺς ὅρους :

$$1) \quad \alpha_v = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + v^3}{v^4}, \quad 2) \quad \alpha_v = \frac{2v^2(v-3+4v^2)}{5(v-1)^3(3v+4)}.$$

292. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e$, νὰ εὐρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

$$1) \quad \alpha_v = \left(1 - \frac{1}{v} \right)^v, \quad 2) \quad \alpha_v = \left(1 + \frac{2}{v} \right)^v, \quad 3) \quad \alpha_v = \left(1 + \frac{3}{v} \right)^v.$$

293. Δείξτε ότι η ακολουθία :

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

294. Να αποδειχθεί ότι :

$$1) \quad \lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}_n^+$$

γνωστού όντος, ότι :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

295. Έάν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ δείξτε ότι :

$$\lim (\sqrt[n]{(n + \alpha)(n + \beta)} - n) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

296. Δείξτε ότι αί ακολουθίαί α_n , $n = 1, 2, \dots$, αί όποίαί όρίζονται ύπό τών κάτωθι τύπων, είναι πᾶσαι μηδενικάί :

$$1) \quad \alpha_n = \frac{2^n}{n!}, \quad 2) \quad \alpha_n = \frac{n!}{n^n}, \quad 3) \quad \alpha_n = \frac{2^n \cdot n!}{(3n)^n},$$

όπου τὸ σύμβολον $n!$ (n παραγοντικόν) παρίστα τὸ γινόμενον : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \equiv n!$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 152. Εἰσαγωγή. — Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ὠρίσαμεν τὴν ἐννοίαν τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ιδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ μελετήσωμεν τρεῖς εἰδικὰς κατηγορίας ἀκολουθιῶν, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἔχει καὶ μίαν χαρακτηριστικὴν ιδιότητα. Ἀναλόγως τῆς χαρακτηριστικῆς ταύτης ιδιότητος διακρίνομεν τὰς ἀκολουθίας αὐτάς, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **π ρ ο ὅ δ ο υ ς**, εἰς : α) Ἀριθμητικὰς προόδους, β) Ἀρμονικὰς προόδους καὶ γ) Γεωμετρικὰς προόδους.

I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 153. Ὅρισμοί. — Ἐστω α_n , $n = 1, 2, \dots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ ἀκολουθία* :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots \quad (1)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἢ πρόοδος κατὰ διαφορὰν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἕκαστος ὅρος τῆς (ἐκτὸς τοῦ πρώτου) προκύπτῃ ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ».

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς, ὅστις προστίθεται εἰς κάθε ὅρον τῆς προόδου διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἐπόμενον, καλεῖται «*λόγος*» τῆς ἀριθμ. προόδου καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα ω . Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) καλοῦνται **ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου**.

Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκολουθία :

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots \quad (2)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = 2$.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots \quad (3)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = -3$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τὸν ὁποῖον διευτυπώσαμεν ἄνωτέρω, συνάγομεν ὅτι : ἂν α_n καὶ α_{n+1} εἶναι δύο διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον ω , τότε θὰ ἔχωμεν :

$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega, \quad n = 1, 2, \dots$

(4)

Ἐκ τῆς (4) προκύπτει : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἑξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς προόδου :

Ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας δύο οἰωνδῆ-
ποτε διαδοχικοὶ ὄροι τῆς ἔχουν διαφορὰν, ἥ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν πάντοτε
ἀριθμὸν, ὅστις καλεῖται **λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου**.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τῶρα τὰ ἑξῆς :

α'). Ἐὰν ὁ λόγος ω εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, τότε $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$ ἢ $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ διὰ
κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλ. ἡ πρόοδος α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξοῦσα (ἄρα
καὶ αὐξοῦσα).

β'). Ἐὰν $\omega < 0$, τότε $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλ. ἡ πρόοδος
 α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα. Οὕτως ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος (2) εἶναι
γνησίως αὐξοῦσα, ἐνῶ ἡ (3) εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν τετριμμένην περίπτωσιν καθ' ἣν $\omega = 0$, ἡ ἀριθμη-
τικὴ πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία ἰσων ἀριθμῶν (σταθερὰ ἀκολουθία) καὶ ὥς
τοιαύτη εἶναι τότε, καὶ μόνον τότε συγχρόνως αὐξοῦσα καὶ φθίνουσα, ὥς ἐλέχθη
καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον.

Ἰδιότητες τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

§ 154. Ἰδιότης I.— Ὁ νιοστὸς ὄρος α_n ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὄρον
 α_1 καὶ λόγον ω εὐρίσκεται, ἂν εἰς τὸν πρῶτον ὄρον αὐτῆς προστεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ
λόγου ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν προηγούμενων αὐτοῦ ὄρων.

*Ἦτοι :

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \omega$$

(1)

Ἀποδείξις. Διὰ $n = 1$ ἡ (1) προφανῶς ἀληθεύει.

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ $n = k$, ἥτοι ὅτι ἰσχύει : $\alpha_k = \alpha_1 + (k - 1) \omega$.

Ἐξ αὐτῆς, διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ λόγου ω , ἔχομεν :

$\alpha_k + \omega = \alpha_1 + (k - 1) \omega + \omega$. Ἀλλὰ $\alpha_k + \omega = \alpha_{k+1}$ (ὁρισμὸς ἀριθμ. προόδου).

*Ἀρα : $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + (k - 1) \omega + \omega$ ἢ $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + k\omega = \alpha_1 + [(k + 1) - 1] \omega$,
ἥτοι ἡ ἰδιότης I ἀληθεύει καὶ διὰ $n = k + 1$, ἐπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τε-
λείας ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε $n = 1, 2, \dots$

Ἐφαρμογή : Νὰ εὑρεθῇ ὁ 15ος ὄρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 7, 15, 23, 31,...

Λύσις : Ἐνταῦθα ἔχομεν : $\alpha_1 = 7$, $\omega = 8$, $n = 15$, $\alpha_{15} =$;

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \omega$ εὐρίσκομεν :

$$\alpha_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 8 = 7 + 14 \cdot 8 = 119.$$

Παρατηρήσεις : α'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μία ἀριθμητικὴ πρόο-
δος εἶναι τελείως ὀρίσμενη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὄρος τῆς α_1 καὶ ὁ λόγος τῆς ω , διότι τότε οἱ
ὄροι τῆς θὰ εἶναι ἀντιστοιχῶς :

1ος ὄρος,	2ος ὄρος,	3ος ὄρος,	4ος ὄρος,	5ος ὄρος, ...
α_1 ,	$\alpha_1 + \omega$,	$\alpha_1 + 2\omega$,	$\alpha_1 + 3\omega$,	$\alpha_1 + 4\omega, \dots$

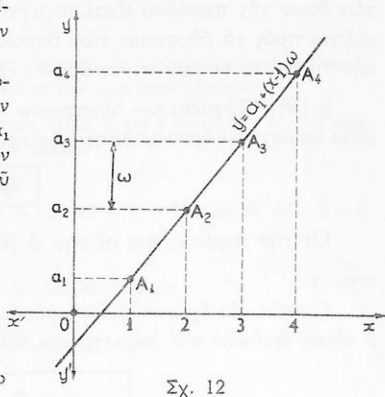
(2)

β'). Ο τύπος (1) είναι μία εξίσωσις μεταξύ των τεσσάρων μεταβλητών α_n , α_1 , n , ω . 'Ως πρὸς ἐκάστην μεταβλητὴν ἡ εξίσωσις εἶναι πρῶτου βαθμοῦ· ἄρα ἐὰν δοθοῦν αἱ τιμαὶ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὴν τετάρτην, ἐπιλύοντες μίαν εξίσωσιν πρῶτου βαθμοῦ.

γ'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως (β) ἀγόμεθα εἰς μίαν «γεωμετρικὴν παράστασιν» τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὄρον τὸν α_1 καὶ λόγον ω . Πράγματι· ἂς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων Ox , Oy καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἀξόνου Ox τὰς διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ n , δηλ. $n = 1, 2, \dots$

Σημειοῦμεν ἀκολουθῶς τὰ σημεῖα :

A_1 μὲ συντεταγμένας 1 καὶ α_1 .
 A_2 » » 2 καὶ $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$
 A_3 » » 3 καὶ $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega$
 $\dots$
 A_n » » n καὶ $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$
 $\dots$



Σχ. 12

Τὰ μεμονωμένα αὐτὰ σημεῖα δίδουν μίαν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὄρον τὸ α_1 καὶ λόγον ω . Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν εξίσωσιν τῆς γραμμῆς (εὐθείας), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, ἄρκει εἰς τὸν τύπον (1) νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ n μὲ τὸ x καὶ τὸ α_n μὲ τὸ y , τότε :

$$y = \alpha_1 + (x-1)\omega. \quad (\epsilon)$$

§ 155. Ἰδιότης II. — Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόδοον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὄρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὄρων ἰσάκεις ἀπεχόντων (ἰσαπεχόντων) τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων.

Ἀποδείξις : Ἐστω μία ἀριθμητικὴ πρόδοος μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὄρων καὶ λόγον ω . Ἐὰν ἡ πρόδοος ἔχη n ὄρους $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, τότε οἱ ὄροι α_1 καὶ α_n εἶναι οἱ ἄκροι ὄροι. Δύο δὲ ὄροι τῆς προόδου λέγονται «ἰσαπέχοντες» τῶν ἄκρων, ἐὰν ὁ εἰς ἔχη τόσους ὄρους πρὸ αὐτοῦ, ὅσους ὁ ἄλλος μετ' αὐτοῦ. Οὕτω, λ.χ., οἱ ὄροι α_2 καὶ α_{n-1} εἶναι ἰσαπέχοντες. Ὁμοίως οἱ : α_3, α_{n-2} .

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι :

$$\alpha_2 + \alpha_{n-1} = (\alpha_1 + \omega) + \alpha_{n-1} = \alpha_1 + (\alpha_{n-1} + \omega) = \alpha_1 + \alpha_n$$

$$\alpha_3 + \alpha_{n-2} = (\alpha_2 + \omega) + \alpha_{n-2} = \alpha_2 + (\alpha_{n-2} + \omega) = \alpha_2 + \alpha_{n-1} = \alpha_1 + \alpha_n$$

$$\alpha_4 + \alpha_{n-3} = (\alpha_3 + \omega) + \alpha_{n-3} = \alpha_3 + (\alpha_{n-3} + \omega) = \alpha_3 + \alpha_{n-2} = \alpha_1 + \alpha_n \text{ κ.ο.κ.}$$

Ὡστε, ἐὰν οἱ n ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδοον, τότε :

$$(\alpha_2 + \alpha_{n-1}) = (\alpha_3 + \alpha_{n-2}) = \dots = \alpha_1 + \alpha_n.$$

Οὕτω, π.χ., οἱ ὀκτὼ ἀριθμοὶ : 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 εὐρίσκόμενοι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, πληροῦν τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα, διότι εἶναι :

$$3 + 17 = 20, \quad 5 + 15 = 20, \quad 7 + 13 = 20, \quad 9 + 11 = 20.$$

Παρατήρησης : 'Εάν υπάρχει «μεσαῖος ὅρος», ἤτοι ὅρος προηγούμενος καὶ ἐπόμενος τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὄρων (καὶ τοῦτο θὰ συμβαίνει ὁσάκις τὸ πλήθος τῶν ὄρων τῆς προόδου εἶναι περιττόν), τότε τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου ὄρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων. Π.χ., ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τῶν πέντε ὄρων : 3, 5, 7, 9, 11, τότε $3 + 11 = 5 + 9 = 2 \cdot 7$.

§ 156. Πόρισμα.— 'Αναγκαῖα καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, καθ' ἣν τὰς ἐξ ἑξῆς γράφονται, εἶναι :

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma} \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ καλεῖται **ἀριθμητικὸς μέσος** τῶν α καὶ γ .

Γενικῶς ἐὰν ἔχωμεν n ἀριθμοὺς $a_1, a_2, \dots, a_n$ καλοῦμεν **ἀριθμητικὸν μέσον** τῶν n αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ παριστῶμεν τοῦτον μὲ M_A , τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν :

$$\boxed{M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}} \quad (2)$$

§ 157. Ἰδιότης III.— Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ τῶν n πρώτων ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}} \quad (1)$$

'Απόδειξις. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἢ ἀπόδειξις ὅμως αὕτη, ὡς εὐκολος, ἐπαφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην. Θὰ δώσωμεν μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν, ἢ ὁποία στηρίζεται εἰς τὴν προηγούμενην ἰδιότητα :

Γράφομεν ἄφ' ἑνός : $\Sigma_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
καὶ ἄφ' ἑτέρου : $\Sigma_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$.

Προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ἢ ἐπειδὴ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$ (λόγῳ τῆς ἰδιότη. II)
καὶ αἱ παρενθέσεις εἶναι n τὸ πλήθος, θὰ ἔχωμεν :

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{ἢ} \quad \Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Πόρισμα.— Τὸ ἄθροισμα Σ_n τῶν n πρώτων ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσῃ τοῦ πρώτου ὄρου $a_1 = a$, τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πλήθους n τῶν ὄρων, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\Sigma_n = \frac{[2a + (n-1)\omega] \cdot n}{2}} \quad (2)$$

Παρατήρησης. Οί δύο τύποι :

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega \quad \text{και} \quad \Sigma_v = \frac{(\alpha_1 + \alpha_v) \cdot v}{2}$$

περιέχουν πέντε άγνωστους, τούς $\alpha_1, \alpha_v, \omega, v, \Sigma_v$.

Έάν λοιπόν μās δοθούν οί τρείς έξ αútων, τότε οί άνωτέρω δύο τύποι άποτελούν σύστημα δύο έξισώσεων με δύο άγνώστους, λύοντες δέ τοútο εύρίσκομεν τούς ύπολοίπους δύο.

Έφαρμογή. Άριθμητικής προόδου ό πρώτος όρος είναι 2 και ό ένδέκατος 92. Νά εύρεθῇ ἡ πρόοδος και τό άθροισμα τών 20 πρώτων όρων αútης.

Λύσις : Έχομεν $\alpha_1 = 2, \alpha_{11} = 92, \omega = ;, \Sigma_{20} = ;$

Έκ τοϋ τύπου $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$ έχομεν διά $v = 11, 92 = 2 + 10 \cdot \omega$, έξ οϋ : $\omega = 9$.

Άρα ἡ πρόοδος είναι : 2, 11, 20, 29, 38, . . .

Εξ άλλου έκ τοϋ τύπου : $\Sigma_v = \frac{[2\alpha + (v-1)\omega] \cdot v}{2}$ λαμβάνομεν διά $v = 20$

$$\Sigma_{20} = \frac{(4 + 19 \cdot 9) \cdot 20}{2} = 1750.$$

§ 158. Παρεμβολή αριθμητικῶν ενδιαμέσων. — Όρισμοί :

Οί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ καλοϋνται **αριθμητικοί ενδιαμέσοι** δοθέντων αριθμῶν α, τ τότε, και μόνον τότε, αν ἡ πεπερασμένη ακολουθία :

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$$

είναι μία αριθμητική πρόοδος.

Δοθέντων δύο αριθμῶν α, τ καλοϋμεν **παρεμβολήν μ αριθμητικῶν ενδιαμέσων** τήν εύρεσιν μ αριθμῶν $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ τοιούτων, ώστε ἡ ακολουθία :

$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$ νά είναι αριθμητική πρόοδος.

Διά τήν εύρεσιν τῶν ὡς ανω αριθμητικῶν ενδιαμέσων ἀρκεῖ νά ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον τῆς αριθμητικῆς προόδου : $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$.

Έάν παραστήσωμεν με ω' τὸν λόγον τῆς προόδου αútης, τότε, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὁρων της είναι $\mu + 2$, ό τ θα είναι ό όρος ό κατέχων τήν $\mu + 2$ τάξιν και συνεπῶς θα ἰσοϋται με : $\alpha + (\mu + 2 - 1)\omega' = \alpha + (\mu + 1)\omega'$.

Όστε :

$$\tau = \alpha + (\mu + 1)\omega'$$

*Αρα :

$$\omega' = \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1} \quad (1)$$

Ό τύπος οϋτος καλεῖται **τύπος παρεμβολῆς αριθμητικῶν ενδιαμέσων** ἡ συντόμως **τύπος τῆς αριθμητικῆς παρεμβολῆς**.

Όρισθέντος, έκ τοϋ τύπου (1), τοϋ «λόγον παρεμβολῆς» ω' , οί ζητούμενοι αριθμοί είναι οί :

$$x_1 = \alpha + \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \quad x_2 = \alpha + 2 \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \dots, x_\mu = \alpha + \mu \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}.$$

Έφαρμογή : Μεταξύ των αριθμών 9 και 41 να παρεμβληθούν 7 αριθμητικοί ενδιάμεσοι.

Λύσις : 'Ο τύπος (1) της § 158 δίδει διά $\tau = 41, \alpha = 9, \mu = 7$

$$\omega' = \frac{41-9}{7+1} = 4$$

και ή ζητουμένη πρόοδος είναι ή :

9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41.

§ 159. Συμμετρική παράστασις τών ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου πεπερασμένου πλήθους ὄρων. — Ἐπειδὴ εἰς διάφορα προβλήματα ἀριθμητικῶν προόδων εἰσέρχονται τρεῖς ἢ περισσότεροι ἄγνωστοι διὰ τοῦτο πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων, ἴδια ὅταν δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὅψιν τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσης 1η : Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὄρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχη $(2\nu + 1)$ ὄρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ ἓν γράμμα λ.χ. μὲ x καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ω, γράφομεν τὴν πρόοδον ὡς ἐξῆς :

$$x - \nu\omega, \dots, x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega, \dots, x + \nu\omega.$$

Περίπτωσης 2α : Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὄρων (ἔστω 2ν).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο « μεσαῖοι » ὅροι τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μὲ : $x - \lambda$ καὶ $x + \lambda$, ὅτε ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι :

$$\omega = (x + \lambda) - (x - \lambda) = 2\lambda. \quad \text{Τότε ἡ πρόοδος γράφεται ὡς ἐξῆς :}$$

$$x - (2\nu - 1)\lambda, \dots, x - 3\lambda, x - \lambda, x + \lambda, x + 3\lambda, \dots, x + (2\nu - 1)\lambda.$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x δὲν εἶναι ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου.

Έφαρμογή : Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

Λύσις : Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν μεσαῖον ὄρον τῆς προόδου καὶ μὲ ω τὸν λόγον, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι : $x - \omega, x, x + \omega$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} (x - \omega) + x + (x + \omega) &= 33 \\ (x - \omega) \cdot x \cdot (x + \omega) &= 1287 \end{aligned} \right\} \quad \eta \quad \begin{aligned} 3x &= 33 \\ x(x^2 - \omega^2) &= 1287 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ἡ (1) δίδει ἀμέσως $x = 11$. Τότε ἡ (2) λυομένη ὡς πρὸς ω δίδει : $\omega = \pm 2$.

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι : 9, 11, 13 ἢ 13, 11, 9.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

297. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὄρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὄρος καὶ ὁ λόγος εἶναι ρίζαι τῆς ἐξίσωσως : $x^2 - 5x + 6 = 0$.

298. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου ἐὰν $\alpha_1 = 3$ καὶ $\alpha_{12} = 80$.

299. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

300. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πλήθους αὐτῶν.

301. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

(Υπόδειξις : Χρησιμοποιήσατε την ταυτότητα : $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ και θέσατε διαδοχικῶς $x = 1, 2, \dots, n$ ἐπὶ πλέον λάβατε ὑπ' ὄψιν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀσκήσεως 299).

302. Ἐὰν $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ καὶ $\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, ὑπολογίσατε τὸ Σ_3 ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ταυτότητος : $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ καὶ ἀκολουθῶς δείξατε ὅτι : $\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2$.

303. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ ἀριθμοῦ 11.

304. Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον δίδονται ἐκ τῶν πέντε στοιχείων $\alpha_1, \omega, n, \alpha_n, \Sigma_n$ τρία οἰαδήποτε. Πόσα διάφορα προβλήματα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ποῖα; Εἰς ἑκαστὸν πρόβλημα νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀγνωστα συναρτήσει τῶν ἐκαστοτε γνωστῶν καὶ νὰ γίνῃ, ὅπου ἀπαιτεῖται, ἡ σχετικὴ διερεύνησις.

305. Ὅρίσατε τὸν k οὕτως, ὥστε οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου : (i) $3k, k+4, k-1$, (ii) $3k-7, k+2, 12-2k$.

306. Δείξατε ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ : $x = \alpha^2 - \beta\gamma, y = \beta^2 - \alpha\gamma, z = \gamma^2 - \alpha\beta$

εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν λόγων τῶν δύο αὐτῶν προόδων;

307. Νὰ εὐρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος ἀριθμ. προόδου γνωστοῦ ἐντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ n ἰσοῦται πρὸς : $3n^2 + n$.

308. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἄθροισμα ἐκ n ὁρων :

$$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots$$

(Υπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι : $\alpha_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$).

309. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 34 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι οὕτως, ὥστε νὰ προκύψῃ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 11 ὁρους. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι οὗτοι;

310. Δείξατε ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ , καθ' ἣν τάξιν δίδονται, ἀνήκουν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον (χωρὶς κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι διαδοχικοὶ) εἶναι : ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{\beta - \alpha}{x + 1} = \frac{\gamma - \beta}{y + 1}$$

ἔχει ἀκεραῖαν καὶ θετικὴν λύσιν ὡς πρὸς x, y , ἐνθα x εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὁρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τῶν εὐρισκομένων μεταξὺ α καὶ β καὶ y τῶν εὐρισκομένων μεταξὺ β καὶ γ .

311. Ἐξετάσατε ἂν οἱ ἀριθμοὶ : $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ἀποτελοῦν ὁρους (οἰασδήποτε τάξεως) μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

312. Πόσους ἀριθμ. ἐνδιάμεσους πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 19, ὥστε ὁ δεῦτερος ἐνδιάμεσος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν τελευταῖον ἐνδιάμεσον λόγον ἴσον μὲ $1/6$.

313. Νὰ εὐρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 26, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των πρὸς 214.

314. Ὁ τέταρτος καὶ ὁ ὄγδοος ὅρος ἀριθμ. προόδου ἔχουν ἄθροισμα 18, οἱ δὲ κύβοι των ἔχουν ἄθροισμα 3402. Νὰ εὐρεθῇ ἡ πρόοδος.

315. Νὰ εὐρεθοῦν πέντε ἀριθμοὶ, ἀποτελοῦντες διαδοχικοὺς ὁρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 45 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $137/180$.

316. Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα Σ_n τῶν n πρώτων ὁρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $n \in \mathbb{N}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\Sigma_n = 8n^2 - n$. Νὰ εὐρεθῇ ἡ τάξις τοῦ ὁρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τιμὴν 263.

317. Τὰ ἀθροίσματα τῶν n πρώτων ὁρων δύο ἀριθμητικῶν προόδων ἔχουν λόγον $\frac{7n+2}{n+1}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $n \in \mathbb{N}$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν πέμπτων ὁρων τῶν δύο προόδων.

318. 'Εάν οι θετικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αποτελούν αριθμητικήν πρόοδον, νά αποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσηεις :

$$\frac{\alpha + \delta}{2} > \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

319. Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξίσωσως $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ καὶ αἱ ρίζαι ρ_3, ρ_4 τῆς $x^2 - (5\alpha - 4)x + \beta = 0$, γραφόμεναι κατὰ τὴν τάξιν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

320. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόδοον.

321. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσηεις μεταξὺ τῶν α, β, γ , ὥστε αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξίσωσως : $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

II. ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 160. Ὁρισμός. — *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

εἶναι ἀρμονικὴ πρόοδος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \quad (2)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Οὕτως, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

εἶναι ἀρμονικὴ πρόοδος, διότι οἱ ἀντίστροφοί των, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, 3, 5, 7, 9, ...

ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόδοον (μὲ λόγον $\omega = 2$).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ τῆς ἀρμονικῆς προόδου συνάγομεν, ὅτι ζητήματα ἀφορῶντα ἀρμονικὴν πρόδοον ἀνάγονται εἰς ἐπίλυσιν ζητημάτων τῆς ἀντιστοίχου ἀριθμητικῆς προόδου. Ἐνεκα τούτου θὰ μελετήσωμεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ιδιότητας τῶν ἀρμονικῶν προόδων ὑπὸ μορφήν ἐφαρμογῶν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

§ 161. Εὗρεσις τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου τῆς ὁποίας δίδονται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι. — Ἐστω ἡ ἀρμονικὴ πρόοδος :

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

$$\text{Τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν ταύτης, ἡ ἀκολουθία : } \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \quad (2)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$.

Ἀλλὰ ὁ νιοστός ὅρος τῆς (2) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1) τῆς § 154, ἥτοι :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \\ \eta \quad \frac{1}{a_n} &= \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2} = \frac{a_1(n-1) - a_2(n-2)}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

*Αρα ο νιοστός όρος a_n τής άρμονικής προόδου (1) είναι τότε ό :

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 (n-1) - a_2 (n-2)} \quad (3)$$

§ 162. Συνθήκη, ίνα οί άριθμοί a, β, γ είναι, κατά την δοθείσαν τάξιν, διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου.

Έφ' όσον οί άριθμοί a, β, γ είναι, κατά την δοθείσαν τάξιν, διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου, οί αντίστροφοί των $\frac{1}{a}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, κατά τόν δοθέντα όρισμόν (§ 160), είναι διαδοχικοί όροι άριθμητικής προόδου καί συνεπώς (§ 156) θα έχωμεν :

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \quad \eta \quad \beta = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma}}$$

*Αρα :

$$\beta = \frac{2a\gamma}{a + \gamma} \quad (1)$$

*Αλλά καί άντιστρόφως, έάν άληθεύη ή (1), τότε οί τρεις άριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου (διατί;).

"Οθεν : **Ίκανή καί άναγκαία συνθήκη, ίνα οί άριθμοί a, β, γ είναι, κατά την δοθείσαν τάξιν, διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου είναι ή ισότης (1).**

Είς την περίπτωσιν αὐτήν ό β καλεῖται **άρμονικός μέσος** τών a καί γ .

Γενικώς : Δοθέντων n αριθμῶν $a_1, a_2, \dots, a_n$ καλοῦμεν **άρμονικόν μέσον** αὐτῶν καί τόν συμβολίζομεν διά M_H , τόν αριθμόν :

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (2)$$

Παρατήρησις : Ή σχέσις (1) δύναται νά λάβη την μορφήν :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} \quad (\text{διατί;}) \quad (3)$$

Κατά ταῦτα, ή **άναγκαία καί ίκανή συνθήκη, ίνα οί άριθμοί a, β, γ είναι, κατά την δοθείσαν τάξιν, διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου, είναι οί άριθμοί a, β, γ νά αποτελοῦν ά ρ μ ο ν ι κ ή ν ά ν α λ ο γ ί α ν.**

§ 163. Παρεμβολή άρμονικῶν ένδιαμέσων.—Οί άριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ καλοῦνται **άρμονικοί ένδιάμεσοι** δοθέντων αριθμῶν a, τ τότε, καί μόνον τότε, αν ή άκολουθία : $a, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \tau$ είναι άρμονική πρόοδος.

Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν α , τ καλοῦμεν *παρεμβολὴν μ ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων*, τὴν εὑρεσιν μ ἀριθμῶν $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu$, τ νὰ εἶναι ἁρμονικὴ πρόοδος.

Τίθεται τῶρα τὸ ἑξῆς *πρόβλημα* :

Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ τ νὰ παρεμβληθοῦν μ ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\tau}$. Ἐκ τοῦ τύπου (1) (§ 158) τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς εὐρίσκομεν ἐν προκειμένῳ :

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}. \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται *τύπος τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς*.

Ὅρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου ω' εὐρίσκομεν τοὺς μ ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους τῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\tau}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοι των θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι μ ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν α καὶ τ , ἥτοι θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + 2 \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}, \quad \dots, \quad x_\mu = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \mu \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1) \alpha \tau}}.$$

Ε φ α ρ μ ο γ ῆ. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{5}{11}$ νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο παρεμβάλομεν πέντε ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων, ἥτοι μεταξὺ $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$.

Ὁ τύπος (1), διὰ $\tau = \frac{5}{11}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\mu = 5$ δίδει : $\omega' = \frac{3}{10}$.

Τότε οἱ πέντε ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$ εἶναι οἱ : $\frac{7}{10}$, 1 , $\frac{13}{10}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{19}{10}$ κατὰ συνέπειαν οἱ ζητούμενοι ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοι των, ἥτοι :

$$\frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}.$$

καὶ ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι : $\frac{5}{2}, \frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}, \frac{5}{11}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

322. Νὰ εὐρεθῇ ὁ 31ος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \dots$ καὶ ὁ 8ος ὅρος τῆς προόδου : $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \dots$

323. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ k οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ : $1 + k, 3 + k, 9 + k$, καθ' ἣν τάξιν δίδονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

324. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου, να αποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{5\alpha - 3\beta}{\alpha\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}.$$

325. 'Εάν $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}, \beta, \frac{\beta + \gamma}{1 - \beta\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι ἀριθμ. προόδου, τότε οἱ $\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι ἀρμονικῆς προόδου.

326. Νὰ παρεμβληθοῦν 19 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι καὶ 19 ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. 'Εάν δὲ ξ εἶναι εἰς ἀριθμητικὸς ἐνδιάμεσος καὶ η ὁ ἀντίστοιχος ἀρμονικὸς θὰ εἶναι :

$$\xi + \frac{6}{\eta} = 5.$$

327. 'Εάν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ συνιστοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

συνιστοῦν ἐπίσης ἀρμονικὴν πρόδον.

328. 'Εάν οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$1) \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \beta} + \frac{\gamma + \beta}{2\gamma - \beta} > 4$$

$$2) \beta^2 (\alpha - \gamma)^2 = 2 [\gamma^2 (\beta - \alpha)^2 + \alpha^2 (\gamma - \beta)^2].$$

329. 'Εάν οἱ α, β, γ συνιστοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} = 2.$$

330. 'Εάν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, νὰ αποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = (n-1)\alpha_1\alpha_n.$$

331. Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὄρων μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου εἶναι $\frac{33}{40}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν εἶναι 15. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

332. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $15x^3 - 46x^2 + 36x - 8 = 0$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι τῆς εὐρίσκονται ἐν ἀρμονικῇ προόδῳ.

333. 'Εάν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ εἶναι ὅροι ἀρμονικῆς προόδου καὶ ἰσχύουν : $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha$ καὶ $\alpha_5 = \beta_5 = \beta$, νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha_2\beta_3$.

334. 'Εάν ἡ παράστασις : $\alpha(\beta - \gamma)x^2 + \beta(\gamma - \alpha)xy + \gamma(\alpha - \beta)y^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εὐρίσκονται ἐν ἀρμονικῇ προόδῳ.

335. 'Εάν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ὅροι ἀρμονικῆς προόδου τάξεως λ, μ, ν ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης :

$$(\mu - \nu)\alpha + (\nu - \lambda)\beta + (\lambda - \mu)\gamma = 0.$$

336. Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, οὐχὶ κατ' ἀνάγκην διαδοχικοὶ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς εὐρεθείσης συνθήκης ἐξετάσατε ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{32}$ ἀνήκουν εἰς ἀρμονικὴν πρόδον καὶ ποίαν.

337. 'Εάν αἱ ρίζαι x_1, x_2, x_3 τῆς ἐξίσωσεως : $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0, \beta \neq 0$, ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, θὰ εἶναι :

$$3\alpha\beta\gamma - \gamma^2 = 2\beta^3.$$

III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 164. *Ορισμοί.— *Εστω $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός. Θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ ἀκολουθία* :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

(1)

είναι μία γεωμετρική πρόοδος ή πρόοδος κατά πηλίκον τότε, και μόνον τότε, αν *έκαστος όρος της, από τοῦ δευτέρου και έφεξής, προκύπτει εκ τοῦ προηγούμενου του διά πολλαπλασιασμοῦ επί ένα και τόν αυτόν σταθερόν αριθμόν»*.

Ο σταθερός αυτός αριθμός καλείται **λόγος** τής γεωμετρικής προόδου και παρίσταται συνήθως και αυτός με τὸ γράμμα ω .

Οί όροι τής ακολουθίας (1) καλούνται και **όροι** τής γεωμετρικής προόδου. Οὕτως ή ακολουθία :

$$2, -4, 8, -16, 32, -64, \dots \quad (2)$$

είναι μία γεωμετρική πρόοδος με λόγον $\omega = -2$.

Όμοίως ή ακολουθία :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (3)$$

είναι μία γεωμετρική πρόοδος με λόγον $\omega = \frac{1}{2}$.

Έκ τοῦ δοθέντος όρισμοῦ τής γεωμετρικής προόδου συνάγομεν ότι : εάν a_n και a_{n+1} είναι δύο διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγον ω , θα έχωμεν :

$$a_{n+1} = a_n \cdot \omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Έκ τής (4) προκύπτει : $a_{n+1} : a_n = \omega$ και τοῦτο διά κάθε $n = 1, 2, \dots$

Έντεῦθεν έπεται ὁ έξής ισοδύναμος όρισμός τής γεωμετρικής προόδου :

Γεωμετρική πρόοδος είναι μία ακολουθία αριθμῶν, τής οποίας τὸ πηλίκον $a_{n+1} : a_n$ δύο οίονδήποτε διαδοχικῶν όρων της ισούται με τόν αυτόν πάντοτε αριθμόν, ὁ οποῖος καλείται λόγος τής γεωμετρικής προόδου.

Έκ τοῦ άνωτέρω όρισμοῦ συνάγομεν τώρα τὰ έξής :

(i). Έάν $|\omega| > 1$, τότε $|a_{n+1}| > |a_n|$ διά κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ή γεωμετρική πρόοδος a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι **άπολύτως αύξουσα**.

Οὕτως ή πρόοδος (2) είναι άπολύτως αύξουσα.

(ii). Έάν $|\omega| < 1$, τότε $|a_{n+1}| < |a_n|$ διά κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλ. ή γεωμετρική πρόοδος a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι **άπολύτως φθίνουσα**.

Οὕτως ή πρόοδος (3) είναι άπολύτως φθίνουσα, διότι $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$.

Παρατήρησις. Έάν $|\omega| = 1$, δηλαδή $\omega = \pm 1$, έχομεν :

(i). Διά $\omega = 1$ ή γεωμ. πρόοδος είναι μία ακολουθία ίσων αριθμῶν (σταθερά ακολουθία $a_n = a_1$, $\forall n = 1, 2, \dots$) και ὡς τοιαύτη είναι συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα.

(ii). Διά $\omega = -1$ ή γεωμετρική πρόοδος είναι άπολύτως σταθερά, διότι : $|a_{n+1}| = |a_n \cdot \omega| = |a_n| = |a_1|$ και ὡς τοιαύτη είναι συγχρόνως άπολύτως αύξουσα και φθίνουσα.

Ίδιότητες της γεωμετρικής πρόοδου

§ 165. Ίδιότης I.— Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος της ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου αὐτῆς ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσιν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν, ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὄρων.

Ἦτοι :

$$a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(1)

Ἀπόδειξις : Ἡ ἰδιότης προφανῶς ἰσχύει διὰ $n = 1$.

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ $n = k$, ἤτοι ὅτι ἰσχύει : $a_k = a_1 \cdot \omega^{k-1}$.

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει $a_k \cdot \omega = a_1 \cdot \omega^k$. Ἀλλὰ $a_k \cdot \omega = a_{k+1}$ (ὁρισμὸς γεωμ. πρόοδου).

Ἄρα :

$$a_{k+1} = a_1 \cdot \omega^k = a_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$$

ἤτοι, ἡ ἰδιότης ἀληθεύει καὶ διὰ $n = k + 1$, ἐπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν n .

Ἐφαρμογ αἱ. 1η : Νὰ εὑρεθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς πρόοδου : $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

Λύσις. Ἐχομεν $a_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega = 2, \quad n = 7, \quad a_7 = ;$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) εὐρίσκομεν : $a_7 = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 32$.

2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος n τῶν ὄρων μιᾶς γεωμετρικῆς πρόοδου ἡ ὁποία ἔχει :

$$a_1 = 6, \quad \omega = 2, \quad a_n = 3072.$$

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον $a_n = a_1 \cdot \omega^{n-1}$ θέτομεν ἀντὶ τῶν a_1, ω, a_n τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$3072 = 6 \cdot 2^{n-1} \quad \eta \quad 2^{n-1} = 512.$$

Ἐπειδὴ $512 = 2^9$ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται :

$$2^{n-1} = 2^9, \quad \text{ἐξ οὗ : } n - 1 = 9 \quad \eta \quad n = 10.$$

Παρατήρησις : Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μίᾳ γεωμετρικῇ πρόοδῳ εἶναι τελείως ὠρισμένη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της a_1 καὶ ὁ λόγος της ω , διότι τότε οἱ ὅροι της θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

1ος ὅρος	2ος ὅρος	3ος ὅρος	4ος ὅρος	5ος ὅρος . . .
$a_1,$	$a_1 \omega,$	$a_1 \omega^2,$	$a_1 \omega^3,$	$a_1 \omega^4, \dots$ κ.ο.κ.

§ 166. Ίδιότης II.— Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὄρων τὸ γινόμενον δύο ὄρων ἰσάκεις ἀπεχόντων τῶν ἄκρων, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὄρων, ἐὰν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων εἶναι περιττόν, τότε ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὄρων.

Ἀπόδειξις. α') Ἐστω μία γεωμ. πρόοδος μὲ n ὄρους : $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ καὶ λόγον ω . Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$a_2 \cdot a_{n-1} = (a_1 \omega) \cdot \left(\frac{a_n}{\omega} \right) = a_1 a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = (a_1 \omega^2) \cdot \left(\frac{a_n}{\omega^2} \right) = a_1 \cdot a_n$$

καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁ εἰς ἔχη k ὅρους πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴσος μέ: $\alpha_1 \cdot \omega^k$, τότε ὁ ἔχων k ὅρους μετ' αὐτὸν θὰ εἶναι ἴσος μέ: $\frac{\alpha_n}{\omega^k}$ συνεπῶς τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ὁρων εἶναι: $(\alpha_1 \omega^k) \cdot \left(\frac{\alpha_n}{\omega^k}\right) = \alpha_1 \alpha_n$.

β'). Ἐστω ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὁρων εἶναι περιττόν, τότε ὑπάρχει μεσαῖος ὁρος, ἔστω ὁ α_λ . Ἐξ ὁρίσμου εἶναι $\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda-1} \cdot \omega$ καὶ $\alpha_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}$.

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν:

$$\alpha_\lambda^2 = (\alpha_{\lambda-1} \cdot \omega) \cdot \left(\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}\right) = \alpha_{\lambda-1} \cdot \alpha_{\lambda+1} = \alpha_1 \alpha_n,$$

ἥτοι ὁ μεσαῖος ὁρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὁρων.

§ 167. Πόρισμα I.— Ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ , καθ' ἣν τάξιν γράφονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου εἶναι:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha \gamma} \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ β καλεῖται **γεωμετρικὸς μέσος** ἢ **μέσος ἀνάλογος** τῶν α καὶ γ .

Γενικῶς: Καλοῦμεν **γεωμετρικὸν μέσον** n^* *πραγματικῶν ἀριθμῶν* $a_1, a_2, \dots, a_n$ καὶ *συμβολίζομεν* τοῦτον μὲ M_G , *τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν*, *ὅστις ὀρίζεται* οὕτω:

$$\boxed{M_G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (2)$$

§ 168. Πόρισμα II.— Τὸ γινόμενον $\Pi_n \equiv a_1 a_2 \dots a_n$ τῶν n πρώτων ὁρων γεωμετρικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\Pi_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n} \quad (1)$$

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\Pi_n = a_1^n \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}}, \text{ ὅπου } \omega \text{ ὁ λόγος τῆς προόδου. (Διατί;).} \quad (2)$$

§ 169. Ἰδιότης III.— Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n$ τῶν n πρώτων ὁρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον $\omega \neq 1$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\Sigma_n = \frac{a_n \omega - a_1}{\omega - 1}} \quad (1)$$

Ἀποδείξις: Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος:

$$\Sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2)$$

ἐπὶ τὸν λόγον ω εὐρίσκομεν:

$$\omega \Sigma_n = a_1 \omega + a_2 \omega + \dots + a_n \omega \quad (3)$$

* θετικῶν.

Ἀφαιρούντες κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (2) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\alpha_1 \omega = \alpha_2, \alpha_2 \omega = \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \omega = \alpha_n,$$

εὐρίσκομεν :

$$\omega \Sigma_n - \Sigma_n = \alpha_n \omega - \alpha_1 \quad \text{ἢ} \quad (\omega - 1) \cdot \Sigma_n = \alpha_n \omega - \alpha_1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος, διὰ $\omega \neq 1$, προκύπτει :

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}.$$

Ἀσκησις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος (1) τοῦ ἄθροισματος διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

§ 170. Πρόρισμα.— Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ τῶν n πρώτων ὄρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον $\omega \neq 1$ δίδεται συναρτήσῃ τοῦ πρώτου ὄρου α_1 , τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πλήθους n τῶν ὄρων του ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1 (\omega^n - 1)}{\omega - 1} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς γεωμ. προόδου, χωρὶς νὰ παρίσταται ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸν νιοστὸν ὄρον αὐτῆς.

Ἐφαρμογή : Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ πρώτων ὄρων τῆς προόδου :

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

Λύσις : Εἰς τὸν τύπον (1) (§ 170) θέτοντες $\alpha_1 = 2$, $\omega = 3$, $n = 8$ λαμβάνομεν :

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

Παρατηρήσεις : α'). Ἐάν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόδον εἶναι $\omega = 1$ οἱ τύποι (1) τῶν § 169, 170 διὰ τὸ Σ_n δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν (διατί;). Εἰς τὴν ἐιδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν, δηλ. ἐάν $\omega = 1$, ἡ πρόδος ἔχει ὅλους τοὺς ὄρους τῆς ἴσους μὲ τὸν πρῶτον καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων ἰσοῦται μὲ : $\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1 = n \cdot \alpha_1$.

β'). Οἱ δύο τύποι :

$$\alpha_n \omega = \alpha_1 \omega^{n-1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τοὺς α_1 , α_n , ω , n , Σ_n . Ἐάν λοιπὸν μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ὑπολοίπους δύο ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἐν λόγω συστήματος εἶναι, ἐν γένει, εὐκόλος πλὴν τῶν ἐξῆς δύο περιπτώσεων :

(i). Ἐάν ζητοῦνται οἱ α_1 καὶ ω . Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν :

$$(\Sigma_n - \alpha_n) \omega^n - \Sigma_n \omega^{n-1} + \alpha_n = 0. \quad (3)$$

(ii). Ἐάν ζητοῦνται οἱ α_n καὶ ω . Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha_1 \omega^n - \Sigma_n \omega + (\Sigma_n - \alpha_1) = 0. \quad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εἶναι n βαθμοῦ καὶ ἐάν μὲν ὁ $n \leq 4$ αὗται ἐπιλύονται, ἐάν ὅμως ὁ $n > 4$, πρᾶγμα συνθέστερον, τότε δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις αὐτῶν μὲ τὰς στοιχειώδεις γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ παρουσιαζόμενα προβλήματα ἐπιλύονται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων, τὴν θεωρίαν τῶν ὁποίων ἀναπτύσσομεν εἰς τὴν τῶν ἐπομένων κεφαλalaίων.

Εφαρμογή 1η : Γεωμετρικής πρόδου αποτελουμένης εξ ὀκτώ ὄρων ὁ τελευταῖος ὄρος τῆς ἰσοῦται πρὸς 384 καὶ ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς 2. Νὰ εὕρεθῇ ὁ πρῶτος ὄρος τῆς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς.

Λύσις : Ἐστῶσαν α_1 ὁ πρῶτος ὄρος, ω ὁ λόγος καὶ α_v ὁ νιοστὸς ὄρος τῆς γεωμ. πρόδου.

Ἐκ τῶν τύπων $\alpha_v = \alpha_1 \omega^{v-1}$ καὶ $\Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ διὰ $\omega = 2$, $v = 8$, $\alpha_v = 384$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\alpha_1 = 3$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ α_1 μὲ τὸ ἴσον του εὐρίσκομεν :

$$\Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765.$$

Εφαρμογή 2α : Εἰς γεωμετρικὴν πρόδου μὲ πρῶτον ὄρον τὸ 5 ὁ ἑβδομος ὄρος τῆς ἰσοῦται πρὸς 3645. Νὰ εὕρεθῇ ἡ πρόδος καὶ νὰ υπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπτά πρώτων ὄρων τῆς.

Λύσις : Ἐκ τῶν τύπων $\alpha_v = \alpha_1 \omega^{v-1}$ καὶ $\Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$, διὰ $\alpha_1 = 5$, $v = 7$, καὶ $\alpha_7 = 3645$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\omega^6 = 729$, ἐξ ἧς : $\omega = \pm 3$.

Διὰ $\omega = 3$ ἡ πρόδος εἶναι : 5, 15, 45, 135, ... (3)

Διὰ $\omega = -3$ ἡ πρόδος εἶναι 5, -15, 45, -135, ... (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὐξουσα, ἡ δευτέρα δὲν εἶναι οὔτε αὐξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὁμως ἀπολύτως αὐξουσα καὶ μάλιστα γνησίως.

Ἐκ τῆς (2) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ω μὲ τὰς τιμὰς του $+3$ καὶ -3 εὐρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \quad \Sigma'_7 = \frac{3645 (-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Τὸ πρῶτον ἄθροισμα ἀναφέρεται εἰς τὴν πρόδου (3), τὸ δεύτερον εἰς τὴν πρόδου (4).

§. 171. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων.— Ὑποσέψεις. Οἱ ἀριθμοὶ

$x_1, x_2, \dots, x_\mu$ καλοῦνται **γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β , τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πεπερασμένη ἀκολουθία :

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta \quad (1)$$

εἶναι γεωμετρικὴ πρόδος.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β καλοῦμεν **παρεμβολὴν μ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** τὴν εὕρεσιν μ ἀριθμῶν $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία :

$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ νὰ εἶναι γεωμετρικὴ πρόδος.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ὡς ἄνω γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς πρόδου (1). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω τὸν λόγον τῆς πρόδου αὐτῆς τότε, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος ὄλων τῶν ὄρων τῆς εἶναι $\mu + 2$, ὁ β θὰ κατέχη τὴν $\mu + 2$ θέσιν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} \quad \eta \quad \beta = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}$$

*Αρα :

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

(1)

Ο τύπος (1) καλείται **τύπος παρεμβολής γεωμετρικών ενδιάμεσων** ή συντόμως **τύπος της γεωμετρικής παρεμβολής**.

Η παρεμβολή γεωμετρικών ενδιάμεσων είναι δυνατή εις όλες τὰς περιπτώσεις, πλην τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α , β εἶναι ἑτερόσημοι ($\alpha\beta < 0$) καὶ τὸ πλῆθος τῶν παρεμβαλομένων ὄρων περιττὸς ἀριθμὸς (διατί;).

Ὅρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου ω , οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι :

$$x_1 = \alpha \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad x_2 = \alpha \left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^2, \dots, x_\mu = \alpha \left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^\mu.$$

Ἐφαρμογή. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 48 νὰ παρεμβληθοῦν **τρεῖς** γεωμ. ἐνδιάμεσοι.

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου (1) διὰ $\alpha = 3$, $\beta = 48$ καὶ $\mu = 3$, λαμβάνομεν :

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16}, \quad \text{ἐξ οὗ : } \omega = 2.$$

Συνεπῶς οἱ ζητούμενοι γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ : 6, 12, 24.

§ 172. Συμμετρικὴ παράστασις τῶν ὄρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου πεπερασμένου πλῆθους ὄρων.— Πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων εἰς διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδίᾳ ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου καλὸν εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1η : Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὄρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχη $(2\nu + 1)$ ὄρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος, τὸν ὅποιον συμβολίζομεν μὲ x καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ω γράφομεν τὴν πρόοδον ταύτην ὡς ἐξῆς :

$$\frac{x}{\omega^\nu}, \dots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \dots, x\omega^\nu.$$

Περίπτωσις 2α : Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὄρων, ἔστω 2ν .

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι ἰσαπέχοντες τῶν ἄκρων,

τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μὲ : $\frac{x}{\lambda}$ καὶ $x\lambda$, ὅτε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι :

$\omega = x\lambda : \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$ καὶ ἡ πρόοδος γράφεται τότε ὡς ἐξῆς :

$$\frac{x}{\lambda^{\nu+1}}, \dots, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, \dots, x\lambda^{\nu+1}.$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x δὲν εἶναι ὁρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὡς ἐλέχθη, εἶναι λ^2 .

Έφαρμογή. Νά εύρεθούν τέσσερες πραγμ. ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμ. προόδου, ἐὰν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729 καὶ ὁ τέταρτος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο μεσαίων.

Λύσις : Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, περίπτωσις 2α, παριστῶμεν τοὺς ζητούμενους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x}{\lambda^3}, \quad \frac{x}{\lambda}, \quad x\lambda, \quad x\lambda^3.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{x}{\lambda^3} \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot x\lambda \cdot x\lambda^3 = 729$$

$$\eta \quad x^4 = 729 = 27^2, \quad \epsilon\acute{\iota}\varsigma \omicron\upsilon : \quad x = \pm 3 \sqrt[3]{3}.$$

Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ἔχομεν : $x\lambda^3 = \left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot (x\lambda) = x^2$ η $\lambda^3 = x$, ἐκ

τῆς ὁποίας εύρίσκομεν : $\lambda = \pm \sqrt[3]{3}$.

Διὰ $x = 3 \sqrt[3]{3}$ καὶ $\lambda = \sqrt[3]{3}$ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι : 1, 3, 9, 27.

Διὰ $x = -3 \sqrt[3]{3}$ καὶ $\lambda = -\sqrt[3]{3}$ εύρίσκομεν πάλιν τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς.

§ 173. Ἐξάσκηση ἀπειρώτων ὄρων ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου.— Ἐστω μία γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὄρον τὸ α καὶ λόγον ω, ἥτοι ἔστω ἡ πρόοδος :

$$\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \dots, \alpha\omega^{v-1}, \dots \quad (1)$$

Ἄς συμβολίσωμεν μὲ Σ_v τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὄρων τῆς (1), τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_v = \frac{\alpha(\omega^v - 1)}{\omega - 1}.$$

Ἐστω τώρα ὅτι ὁ λόγος ω τῆς (1) πληροῖ τὴν συνθήκην : $0 < |\omega| < 1$, δηλαδὴ ἡ (1) εἶναι ἀπολύτως φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος, τότε ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 174. Θεώρημα.— Διὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ε (ὅσονδήποτε μικρὸν) ὑπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\epsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\left| \Sigma_v - \frac{\alpha}{1 - \omega} \right| < \epsilon \quad \text{διὰ κάθε } v \geq v_0.$$

Ἡ ὅπερ τὸ αὐτό : $\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \frac{\alpha}{1 - \omega}.$

Ἀπόδειξις. Πράγματι : $\Sigma_v = \alpha + \alpha\omega + \dots + \alpha\omega^{v-1}$

$$\eta \quad \Sigma_v = \frac{\alpha\omega^v - \alpha}{\omega - 1} \quad \eta \quad \Sigma_v = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha}{1 - \omega} \omega^v.$$

Ἡ ἀκολουθία ὅμως ω^v , $v = 1, 2, \dots$ μὲ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενικὴ (βλ. Κεφ. V § 131, παράδειγμα 1ον).

Ὅθεν : $\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma_v = \frac{\alpha}{1 - \omega}$, διότι $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1 - \omega} \cdot \omega^v = 0$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὁδηγοῦμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὅρισμόν :

Καλοῦμεν **ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς ἀπολύτως φθινοῦσης γεωμετρικῆς προόδου** μὲ **πρῶτον ὄρον τὸν α καὶ λόγον ω** τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$ πρὸς τὸν ὁποῖον συγκλίνει τὸ ἄθροισμα Σ_n τῶν n πρώτων ὄρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Γράφομεν δὲ συμβολικῶς :

$$\Sigma_{\infty} \quad \eta \quad \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} + \dots = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ὡστε :

$$\text{Ἐὰν } |\omega| < 1 \implies \Sigma_{\infty} \equiv \Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega} \quad (1)$$

Λέγομεν δὲ τότε : «Τὸ **ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων γεωμετρικῆς προόδου** μὲ **πρῶτον ὄρον τὸν α καὶ λόγον ω** μὲ $0 < |\omega| < 1$ ἰσοῦται μὲ : $\frac{\alpha}{1-\omega}$ ».

Σημ. Ἐὰν $\alpha = 1$ τότε : $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-\omega}.$

Ἐφαρμογή 1η : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα : $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots$

Λύσις : Οἱ ἄπειροι προσθετοὶ τοῦ ἀθροίσματος συνιστοῦν γεωμ. πρόδοον μὲ πρῶτον ὄρον $\alpha = 4$ καὶ λόγον $\omega = \frac{1}{3}$. Ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1),

ἦτοι : $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = 6.$

Ἐφαρμογή 2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4,513513...

Λύσις : Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4,513513... γράφεται :

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \dots$$

Ἀλλὰ $\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \dots = \frac{\frac{513}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$

Ἀρα : $4,513513 \dots = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}.$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 4,513513... , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων αὐξάνει ἀπεριόριστως, τείνει πρὸς τὸν ρητὸν ἀριθμὸν $\frac{4509}{999}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

338. Χαρακτηρίσατε τὰς κάτωθι προόδους ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὸ εἶδος μονοτονίας :

α) 12, 6, 3, ..., β) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$, γ) 3, -6, 12, ..., δ) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$

339. "Εστω ή γεωμ. πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81, ... Δείξτε ότι αϊ διαφοραϊ μεταξύ δύο διαδοχικῶν ὤρων σχηματίζουν μίαν νέαν γεωμ. πρόοδον. 'Η ιδιότης αὕτη δύναται νά γενικευθῇ δι' οϊανδήποτε γεωμ. πρόοδον;

340. Προσδιορίσατε τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x οὕτως, ὥστε οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὄρους γεωμ. προόδου: 1) $x - 2$, $2x$, $7x + 4$, 2) $2x - 2$, $3x + 6$, $12x + 6$.

341. Νά εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὤρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις: α) $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$, $\Sigma_n = 5460$, β) $\alpha_4 = 13$, $\alpha_6 = 117$, $\alpha_n = 9477$,

γ) $\alpha_1 = 4$, $\alpha_n = 972$, $\Sigma_n = 1456$, δ) $\alpha_n = 81$, $\omega = \frac{3}{4}$, $\Sigma_n = 781$.

342. Νά σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτον ὄρον τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξίσωσως $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$ καὶ ὡς λόγον τὴν μεγαλυτέραν ρίζαν. Ἐπὶ πλέον νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὤρων αὐτῆς, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι τριπλάσιον τῆς τρίτης ρίζης τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως.

343. Νά παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῆς μικροτέρας καὶ τῆς μεγαλυτέρας ρίζης τῆς ἐξίσωσως $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

344. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα n γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων παρεμβαλλομένων μεταξύ 1 καὶ α ἰσοῦται πρὸς:

$$\frac{v+1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{v+1}{\sqrt{\alpha^v}} - 1 \right) : \left(\frac{v+1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right).$$

345. Γεωμετρικῆς προόδου ἔξ ὀκτῶ ὤρων τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὤρων εἶναι 40, τῶν δὲ ὑπολοίπων τὸ ἄθροισμα εἶναι 3240. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρῶτος ὄρος τῆς προόδου.

346. Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὤρων φθινούσης γεωμ. προόδου εἶναι 65, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὤρων τῆς 81. Νά εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

347. Ἀπολύτως φθινούσης γεωμ. προόδου ὁ πρῶτος ὄρος τῆς εἶναι τὸ $1/2$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὤρων τῆς, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὤρων τῆς εἶναι 20. Νά εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

348. Νά εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμ. πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν 52 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 1456.

349. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὤρων ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 12, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπείρων ὤρων τῆς εἶναι 48. Νά εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

350. Νά εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἄθροίσματα:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots \quad \beta) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$\gamma) \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots \quad (\alpha > \beta > 0).$$

351. Πρὸς ποῖον ἀριθμὸν τείνει τὸ πηλίκον τοῦ ἄθροίσματος: $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2v} + \dots$ διὰ τοῦ ἄθροίσματος: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^v + \dots$, ὅταν τὸν $v \rightarrow \infty$.

352. Νά εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα ἐκ τῶν ὁποίων παράγονται τὰ κάτωθι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα:

1) 0, 17651651..., 2) 2,341702702..., 3) 27,327575..., 4) 3,7292929...

353. Εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς a συνδεδόμεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ εὐρίσκομεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸν νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς. Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τριγώνων.

354. Ἐὰν α , β , γ , δ εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι γεωμ. προόδου νά δειχθῇ:

$$1) (\alpha + \delta) \cdot (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$$

$$2) (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = (\alpha - \delta)^2.$$

355. Νά υπολογισθῇ ἡ παράστασις: $\sqrt{\alpha\beta} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{\dots\dots\dots}$, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν εἶναι ἀπεριόριστον.

356. Ἐάν αἱ πλευραὶ τριγώνου σχηματίζουν γεωμ. πρόοδον νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \omega < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

357. Τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z ἔχουν ἄθροισμα 147, ἐάν οἱ x, y, z εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου καὶ εἰ x, z, y γεωμετρικῆς προόδου, νὰ εὕρεθουν οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἀριθμοί.

358. Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἰσχύει:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad \gamma^2 - \beta\delta = 0, \quad \text{τότε θὰ εἶναι: } |\alpha - \delta| \geq 3|\beta - \gamma|.$$

359. Ἐάν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

360. Ἐάν $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ καὶ $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ: $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

361. Ἐάν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καὶ M_A, M_G, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μέσος ἀριθμητικὸς, μέσος γεωμετρικὸς καὶ μέσος ἀρμονικὸς αὐτῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$M_A \geq M_G \geq M_H. \quad (\text{ἀνισότης τοῦ Cauchy}).$$

362. Ἐάν $x \geq 0, y \geq 0$ δείξατε ὅτι:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \geq x^{1/3} \cdot y^{2/3}$$

Πότε ἰσχύει τὸ ἴσον;

363. Τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χωρίζομεν εἰς ομάδας ὡς ἀκολούθως:

$$1, (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, \dots, 12), (13, 14, \dots, 22), (23, 24, \dots), \dots$$

Νὰ εὕρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς n -οστῆς ομάδος συναρτῇται τοῦ n καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν n -οστήν ομάδα ἰσοῦται πρὸς:

$$(3n-2) \cdot \left[(n-1)^2 + \frac{n^2+1}{2} \right].$$

364. Ἐάν S_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν n ὄρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ω καὶ S_2 τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν ὄρων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$S_2 - \frac{1}{n} S_1^2 = \frac{1}{12} n \omega^2 (n^2 - 1).$$

$$\textbf{365.} \text{ Ἐάν } F(x) \equiv \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \cdot \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \cdot \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}} \cdot \dots$$

νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$F\left(\frac{33}{55}\right) = \frac{132}{187}.$$

366. Νὰ δειχθῇ ὅτι: ἐάν τὸ ἄθροισμα n ὄρων ἀριθμητικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγους κατὰ σειρὰν $1, 2, 3, \dots$ εἶναι n^2 , τότε οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν ἀποτελοῦν φθίνουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἢ ὁποῖα καὶ νὰ ὀρίσθῃ.

367. Νὰ εὕρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἀποτελοῦν: α). Ἀριθμητικὴν πρόοδον, β). Γεωμετρικὴν πρόοδον.

368. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ k οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$ νὰ ἀποτελοῦν πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν καὶ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

(‘Υπόδειξις. Λάβετε υπ’ όψιν τὰ συμπεράσματα τῆς προηγούμενης άσκήσεως).

369. Χωρίζομεν 4200 άντικείμενα εἰς $n + 1$ ομάδας οὕτως, ὥστε ἡ πρώτη ομάδα νά περιλαμβάνη 5 άντικείμενα, ἡ δευτέρα 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νά εὕρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ομάδων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὑπολειπομένων άντικειμένων.

370. Ἐάν οἱ $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὁ μὲν α εἶναι μέσος ἀριθμητικὸς τῶν β καὶ γ , ὁ δὲ x μέσος ἀρμονικὸς τῶν y, z νά ἀποδειχθῇ ὅτι : ὁ αx εἶναι μέσος γεωμετρικὸς τῶν $\beta \gamma$ καὶ

$$\gamma z \text{ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν : } \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}.$$

371. Ἐάν οἱ διάφοροι ἀλλήλων θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρικῆς ἢ ἀρμονικῆς προόδου, νά ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $n \geq 2$ ἰσχύει ἡ ἀνίσότης :

$$\alpha^n + \gamma^n > 2\beta^n.$$

(‘Υπόδειξις. Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

372. Ἐστω ἡ ἀκολουθία : $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ (1), διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι :

$$\alpha_{n+2} = \xi \cdot \alpha_{n+1} + \eta \cdot \alpha_n \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (\xi, \eta \in \mathbf{R}).$$

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἐάν ὁ λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία (1) εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

373. Ἐάν S_n εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\alpha = -5$ καὶ ὁ λόγος $\omega = -\frac{3}{4}$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \text{ καὶ } \forall n \in \mathbf{N}, \text{ μὲ } n > 3 \left(\frac{20}{7\varepsilon} - 1 \right) \right) \implies \left| -\frac{20}{7} - S_n \right| < \varepsilon.$$

Ποῖον τὸ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 175. Συμβολισμός άθροισμάτων.— Έπειδή συχνότατα συναντῶμεν άθροίσματα τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

χρησιμοποιοῦμεν, διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ ἀπλουστέραν γραφήν, τὸ ἑλληνικὸν γράμμα Σ πρὸς συμβολισμόν τῶν ἐν λόγῳ άθροισμάτων. Οὕτω γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος, δηλαδή ἡ συμβολικὴ ἔκφρασις $\sum_{k=1}^n \alpha_k$ ἀναγιγνώσκεται : «*άθροισμα τῶν (ἀριθμῶν) α_k ἀπὸ $k=1$ ἕως $k=n$* ». Ὁ συμβολισμός $k=1$ κάτωθεν τοῦ συμβόλου Σ σημαίνει ὅτι 1 εἶναι ἡ πρώτη τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ δείκτης k , ἐνῶ ὁ συμβολισμός $k=n$ άνωθεν τοῦ συμβόλου Σ σημαίνει ὅτι ὁ δείκτης k θὰ διατρέξῃ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n . Τέλος τὸ σύμβολον Σ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς ὁρους ποὺ ἐλάβομεν θέτοντες διαδοχικῶς $k=1, k=2, k=3, \dots, k=n$.

Συμβατικῶς κατωτέρω θὰ θέτωμεν : $\sum_{k=1}^1 \alpha_k \equiv \alpha_1$.

Δυνάμει τῶν άνωτέρω ἔχομεν τώρα :

$$\alpha). 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \equiv \sum_{k=1}^{10} k$$

$$\beta). 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 \equiv \sum_{k=1}^9 k^2$$

$$\gamma). x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \equiv \sum_{k=3}^{12} x_k$$

$$\delta). \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_9 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5) + (\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9) = \sum_{k=1}^5 \alpha_k + \sum_{k=6}^9 \alpha_k$$

$$\text{ἤτοι : } \sum_{k=1}^9 \alpha_k = \sum_{k=1}^5 \alpha_k + \sum_{k=6}^9 \alpha_k.$$

Γενικώτερον ἔχομεν :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=p+1}^n \alpha_k, \quad p \in \mathbb{N} \text{ καὶ } p < n.$$

Δίδομεν κατωτέρω μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ συμβόλου Σ .

Παράδειγμα 1ον : Είς τήν παράγραφον 28 ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι :

$$1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}.$$

Τήν σχέσιν ταύτην γράφομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ συμβόλου Σ , συντόμως οὕτω :

$$\sum_{k=1}^v k = \frac{v(v+1)}{2}.$$

Παρατήρησις. Ἄλλα ἀξιοσημεῖωτα ἀθροίσματα, τὰ ὅποια συναντᾷ κανεῖς εἰς τὰς ἐφαρμογὰς, εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς :

$$\alpha). 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 \equiv \sum_{k=1}^v k^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$$

$$\beta). 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 \equiv \sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4}, \text{ ἥτοι ἰσχύει : } \sum_{k=1}^v k^3 = \left[\sum_{k=1}^v k \right]^2$$

$$\gamma). 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + v^4 \equiv \sum_{k=1}^v k^4 = \frac{v(v+1)(2v+1)(3v^2+3v-1)}{30}.$$

Ἀσκησις : Ἀποδείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν (α), (β), (γ) διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Παράδειγμα 2ον : Εἰς τὴν § 50 ὥρισamen, ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x , βαθμοῦ v , εἶναι μία ἀλγεβρική παράστασις τῆς μορφῆς :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_v x^v. \quad (1)$$

Ἡδη δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὸ πολυώνυμον (1) συντόμως οὕτω :

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^v \alpha_k x^k, \quad \alpha_k \in \mathbf{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, v \quad \text{καὶ} \quad \alpha_v \neq 0.$$

§ 176. Βασικαὶ ιδιότητες τοῦ συμβόλου Σ .— Αἱ ἀκόλουθοι ιδιότητες ἐπιτρέπουσιν ἓνα ἄνετον λογισμόν τῇ βοηθείᾳ τοῦ συμβόλου Σ .

i). Ἐὰν $\alpha_k = \alpha$ διὰ κάθε $k = 1, 2, \dots, v$, τότε ἰσχύει : $\sum_{k=1}^v \alpha_k = v\alpha$.

Εἰδικῶς, ἐὰν $\alpha = 1$ ἔχομεν : $\sum_{k=1}^v \alpha_k \equiv \sum_{k=1}^v 1 = v$.

ii). Ἰσχύει ἡ προσθετικὴ ιδιότης, ἥτοι :

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k \quad \text{καὶ} \quad \sum_{k=1}^v (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k - \sum_{k=1}^v \beta_k.$$

iii). Ἐὰν λ σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς (μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ δείκτου k), τότε ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^v \lambda \alpha_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (\text{ιδιότης ὁμογενείας}).$$

iv). Ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^v (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^v \beta_k, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

ν). 'Ισχύει :

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_v - \alpha_0 \quad (\text{ιδιότης συμπτύξεως}).$$

Άσκηση 15 : 'Αποδείξτε τὰς ἀνωτέρω πέντε ιδιότητες τοῦ συμβόλου Σ.

Παρατήρησης. Μέχρι τώρα ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς δείκτην τὸ γράμμα k . Τοῦτο εἶναι αὐθαίρετον καὶ οὐδὲνα ρόλον παίζει, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα καὶ ἄλλο γράμμα, ὡς δείκτην. Οὕτως ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v \equiv \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{p=1}^v \alpha_p = \sum_{v=1}^v \alpha_v.$$

'Επίσης αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ δείκτης δύνανται νὰ μεταβάλλωνται, τότε ὅμως θὰ μεταβάλλεται συγχρόνως καὶ ὁ ὑπὸ τὸ σύμβολον Σ δείκτης, οὕτω λ.χ. ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = \sum_{k=1}^5 \alpha_k = \sum_{k=0}^4 \alpha_{k+1} = \sum_{k=11}^{15} \alpha_{k-10},$$

δηλαδὴ : δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν (ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν) τὸν δείκτην ὑπὸ τὸ σύμβολον Σ, ἄρκει νὰ ἐλαττώσωμεν (ἢ νὰ αὐξήσωμεν) κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὰ ὅρια (τὰς ἄκρας τιμὰς) τοῦ συμβόλου Σ.

Ἐφαρμογὴ 1η : Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\sum_{k=1}^v (2k-1) = \sum_{k=1}^v 2k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \cdot \frac{v(v+1)}{2} - v = v^2.$$

Ὡστε :

$$\sum_{k=1}^v (2k-1) = v^2.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ ἀπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :

$$\frac{\sum_{v=1}^v (3v^2 + 5v)}{\sum_{v=1}^v (3v^2 - 3v)}.$$

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{v=1}^v (3v^2 + 5v)}{\sum_{v=1}^v (3v^2 - 3v)} &= \frac{3 \sum_{v=1}^v v^2 + 5 \sum_{v=1}^v v}{3 \sum_{v=1}^v v^2 - 3 \sum_{v=1}^v v} = \frac{3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 5 \frac{v(v+1)}{2}}{3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 3 \frac{v(v+1)}{2}} = \\ &= \frac{v(v+1)(v+3)}{v(v+1)(v-1)} = \frac{v+3}{v-1}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

374. Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἄθροισματα :

$$\begin{aligned} \alpha) \sum_{k=1}^v k(k+1), \quad \beta) \sum_{k=1}^v \frac{1}{k(k+1)}, \quad \gamma) \sum_{k=1}^v (k^2 + 5k + 3), \\ \delta) \sum_{k=1}^v (k^3 + 7k^2 + 12k), \quad \epsilon) \sum_{k=1}^v k(k+2)(k+4), \quad \sigma\tau) \sum_{k=1}^v (k^4 + 3k^3 + 4k^2). \end{aligned}$$

375. Τὰ κάτωθι ἄθροισματα νὰ γραφοῦν διὰ χρήσεως τοῦ συμβόλου Σ καὶ ἀκολούθως νὰ υπολογισθοῦν :

$$\begin{aligned} \alpha) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + v \cdot (v+3), \quad \beta) 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5, \\ \gamma) 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3v-2)^2, \quad \delta) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2v-1)^2. \end{aligned}$$

376. Νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^4}{4} + \frac{v^3}{2} + \frac{v^2}{4}$$

377. Νά ἀπολοπιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\alpha) \frac{\sum_{v=1}^k (v^4 + 6v^3 + 5v^2)}{\sum_{v=1}^k (v^4 + 2v^3 + v^2)}, \quad \beta) \frac{\sum_{v=1}^k (2v^3 - v)}{\sum_{v=1}^k (v^2 - v)}, \quad \gamma) \frac{\sum_{v=1}^k (v^3 + 3v^2 + 2v)}{k^2 + 5k + 6}.$$

378. Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ καὶ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης τῶν Cauchy – Schwarz.

$$\left(\sum_{k=1}^v \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^v \alpha_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^v \beta_k^2 \right).$$

379. Ἐάν $v \in \mathbb{N}$ δείξατε ὅτι εἶναι :

$$\left[\sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right]^2 \leq v \left(2 - \frac{1}{v} \right).$$

380. Νά ἀποδειχθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὅτι, διὰ $v \geq 1$, εἶναι :

$$\alpha). \frac{v^3}{3} < \sum_{k=1}^v k^2 < \frac{(v+1)^3}{3}, \quad \beta). \left\{ \sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right\}^2 < 2v.$$

§. 177. Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς.— Ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἔχει δοθῇ μία ἀκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ τῆς ὁποίας οἱ ὅροι :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots \quad (1)$$

εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$, ὀρίζομεν τὸ ἄθροισμα :

$$\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (2)$$

τῶν πρώτων v ὄρων τῆς (1). Οὕτως ἔχομεν :

$$\sigma_1 = \alpha_1, \quad \sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \sigma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μορφώνομεν μία νέαν ἀκολουθίαν σ_v , $v = 1, 2, \dots$ μὲ ὄρους

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_v, \dots \quad (3)$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄθροίσματα τῶν ὄρων τῆς (1).

Τὴν ἀκολουθίαν (3) συμφωνοῦμεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν οὕτω :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots \quad \text{ἢ συντόμως } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

ἢ συντομώτερα καὶ ἀκριβέστερα : $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$. (4)

Τὸ συμβολικὸν ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots$ ἢ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καλεῖται **σειρὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_v , $v \in \mathbb{N}$** . Κάθε ὅρος τῆς (3), δηλ. κάθε ἄθροισμα $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ καλεῖται «**μερικὸν ἄθροισμα**» ἢ καὶ «**τμήμα τῆς σειρᾶς**» (4). Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1), δηλαδή οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$ καλοῦνται «**ὅροι τῆς σειρᾶς**», ὁ δὲ α_v εἰδικώτερον καλεῖται «**γενικὸς ὅρος**» τῆς σειρᾶς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι: διὰ τοῦ ὅρου **σειρὰ** ἐννοοῦμεν ἐν μαθηματικὸν σύμβολον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1).

Σημείωση : Δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυσις τῆς ἔννοιας τῆς ἀκολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_n μέ τήν ὀρισθεῖσαν ἀνωτέρω ἔννοιαν τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ τῶν ἀντικειμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὗται καίτοι σχηματίζονται μέ τοὺς αὐτοὺς ὅρους εἶναι δύο ἔννοιαι ἐντελῶς διάφοροι.

Παραδείγματα σειρῶν :

1ον. Ἐστω ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$

Διὰ τὴν ὥς ἄνω σειράν ἔχομεν :

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 3, \quad \sigma_3 = 6, \dots, \sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

2ον. Ἐστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = \omega^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, ἔκτενῶς ἡ :

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \dots, \omega^{n-1}, \dots \quad (1)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν μέ πρῶτον ὅρον τὸ 1 καὶ λόγον τὸ ω . Τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1), ἥτοι τὴν :

$$\sigma_n \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

καλοῦμεν «**γεωμετρικὴν σειράν**» καὶ τὴν συμβολίζομεν, κατὰ τὰ λεχθέντα, οὕτω :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Σημείωση : Ἐνίοτε ἡ ἀρίθμησις τῶν ὁρῶν μιᾶς σειρᾶς ἀρχεῖται μέ δέικτην $n = 0$, τότε γράφομεν :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

Οὕτως ἡ γεωμετρικὴ σειρά (2) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n + \dots$$

3ον. Ἡ σειρά : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$, (γεωμετρικὴ σειρά μέ λόγον $\omega = \frac{1}{2}$) μέ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\sigma_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4ον. Ἡ σειρά : $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) + \dots$ μέ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\begin{aligned} \sigma_n &\equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Παρατήρησις : Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας τὴν ὁποίαν εἶδομεν εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁλοκληρώματος, ἔννοιαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

§ 178. Σύγκλιση σειράς. — Θεωρήσωμεν τὴν σειράν τοῦ παραδείγματος 3 τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἥτοι τὴν σειράν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^v} + \cdots, \text{ μὲ μερικὸν ἄθροισμα } \sigma_v \equiv 2 - \frac{1}{2^{v-1}}.$$

Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων :

$$\sigma_v = 2 - \frac{1}{2^{v-1}}, \quad v = 1, 2, 3, \dots,$$

εὐκόλως διαπιστοῦμεν, ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 2, ἥτοι $\lim \sigma_v = 2$, καθόσον

$$\lim \frac{1}{2^{v-1}} = 0. \text{ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ σειρά } \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \text{ συγκλίνει}$$

$$\text{πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ γράφομεν : } \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2.$$

Ὅμοιως ἔστω ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$ μὲ μερικὸν ἄθροισμα (§ 98)

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2v+1} \right). \text{ Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων :}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2v+1} \right), \quad v = 1, 2, \dots$$

βλέπομεν ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν $1/2$, ἥτοι εἶναι $\lim \sigma_v = 1/2$, καθόσον

$$\lim \frac{1}{2v+1} = 0. \text{ Ἄρα ἡ σειρά } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} \text{ συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν}$$

$1/2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν :

Θὰ λέγωμεν ὅτι : ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν σ

καὶ θὰ γράφωμεν $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = \sigma$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν

ἄθροισμάτων $\sigma_v \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_v$, $v = 1, 2, 3, \dots$ συγκλίνη πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν σ .

Συντόμως :

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v = \sigma \iff \lim_{\text{ορσ}} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \cdots + a_v) \equiv \lim_{k=1}^v \sum_{k=1}^v a_k = \sigma$$

Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς σ , πρὸς τὸν ὁποῖον συγκλίνει ἡ ἀκολουθία σ_v , $v = 1, 2, \dots$ καλεῖται «**ἄθροισμα τῆς σειράς** $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ ». Δηλαδή καλοῦμεν ἄθροισμα

τῆς σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, τὸ ὅριον τοῦ ἄθροίσματος τῶν n πρώτων ὄρων αὐτῆς.

“Οθεν όσάκις γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots = \sigma \quad \eta \quad \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$$

έννοοῦμεν ότι ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ είναι συγκλίνουσα και τó άθροισμά της είναι σ .

Έάν όλοι οί όροι τής σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ είναι θετικοί, ή άκολουθία s_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι αύξουσα και διά νά συγκλίνη θά πρέπει νά είναι φραγμένη, άλλως ή s_n , $n = 1, 2, \dots$ ώς αύξουσα και μή φραγμένη (βλ. § 150, παρατ.) άπειρίζεται θετικώς.

Είς τήν περίπτωσην αύτήν λέγομεν ότι «ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ άπειρίζεται θετικώς» και γράφομεν συμβολικώς : $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$.

“Ωστε :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty \iff \lim_{\sigma \rightarrow \infty} s_n \equiv \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \equiv \lim_{k=1}^n \sum_{k=1}^v \alpha_k = +\infty$$

Οὕτως ή γεωμετρική σειρά :

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^v = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

με μερικόν άθροισμα :

$$s_n \equiv 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

άπειρίζεται θετικώς, διότι $\lim s_n = \lim (2^n - 1) = +\infty$, καθόσον ή άκολουθία s_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι αύξουσα και μή φραγμένη.

Κατ’ ανάλογον τρόπον όρίζομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = -\infty \iff \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} s_n \equiv \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \equiv \lim_{k=1}^n \sum_{k=1}^v \alpha_k = -\infty$$

Είς τās δύο τελευταίās περιπτώσεις λέγομεν ότι «ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει κατ’ έκ-δοχήν».

Τέλος υπάρχουν σειραί, αί όποιαί δέν συγκλίνουν, ούτε πρὸς πραγματικόν αριθμόν, ούτε πρὸς έν τῶν συμβόλων $+\infty$ ή $-\infty$. Μία τοιαύτη σειρά καλεῖται «άποκλίνουσα» ή «κυμαινομένη». Οὕτως, εάν $\alpha_v = (-1)^{v+1}$, $v = 1, 2, \dots$, τότε ή σειρά, ή όποία μορφώνεται έκ τής άκολουθίας α_v , $v = 1, 2, \dots$ άποκλίνει. Πράγματι, ή άκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ δύναται νά γραφή :

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

και έξ αύτής λαμβάνομεν :

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + (-1) = 0, s_3 = 1 + (-1) + 1 = 1, s_4 = 0, \dots$$

$1, 0, 1, 0, \dots$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν συνάγομεν τώρα ὅτι :

α). Ἡ σειοῦ ἔχει ἄθροισμα $\iff$ συγκλίνει πρὸς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν.

γ). Ἡ σειρά ἀποκλίνει (κυμαίνεται).

Παρατήρησης 2α: Έκ του ὀρίσμου συγκλίσεως σειρᾶς, συνάγομεν ὅτι: προκειμένου νὰ ἐξετάσωμεν ἐάν μία σειρά συγκλίνη ἢ ὀχι καὶ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά της, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: *Εὕρισκομεν συναρτήσῃ τοῦ ν τὸ ἄθροισμα σ_n τῶν ν πρώτων ὀρων της (μερικὸν ἄθροισμα)* – ἐάν τοῦτο δύναται νὰ εὕρεθῇ – καὶ ἀκολουθῶς *εὕρισκομεν τὸ $\lim \sigma_n$* . Ἐάν τὸ $\lim \sigma_n$ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς σ , τότε ἡ σειρά συγκλίνει καὶ ἔχει ἄθροισμα σ , ἐάν τὸ $\lim \sigma_n = +\infty$ ἢ $-\infty$, τότε ἡ σειρά ἀπειρίζεται θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς (ἀντιστοίχως) καὶ τέλος ἐάν τὸ $\lim \sigma_n$ δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἡ σειρά ἀποκλίνει.

Ἄς ἴδωμεν πῶς θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω εἰς συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον : Να αποδειχθῇ ὅτι ἡ «δεκαδικὴ σειρά»

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v} \equiv \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} + \dots$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Πράγματι, έχουμε :

$$\sigma_v = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^v} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{v-1}} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10} \right)^v.$$

"Οθεν :

$$\lim \sigma_v = \frac{1}{3}, \quad \text{διότι} \quad \lim \frac{1}{10^v} = 0.$$

Παράδειγμα 2ον : Νά μελετηθῇ ἡ σειρά :

$$\alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (v-1)\omega] + \dots \quad (\alpha \neq 0)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδοον.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν (§ 157) ἔχομεν :

$$\sigma_v = \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (v-1)\omega] = \frac{2\alpha + (v-1)\omega}{2} \cdot v$$

*Αρα :

$$\lim \sigma_v = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \omega > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \omega < 0. \end{cases}$$

"Οθεν : Κάθε σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδοον συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν, ἀκριβέστερον : ἀπειρίζεται θετικῶς μὲν, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος πρόδοος εἶναι αὐξουσα ($\omega > 0$), ἀρνητικῶς δέ, ἐὰν ἡ πρόδοος εἶναι φθίνουσα ($\omega < 0$).

Παράδειγμα 3ον : Νά μελετηθῇ ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν ἡ γεωμετρικὴ σειρά :

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} + \dots \quad (\alpha \neq 0) \quad (1)$$

διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λόγου ω .

Λύσις : Τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὅρων τῆς (1) εἶναι :

$$\sigma_v = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} = \alpha \cdot \frac{\omega^v - 1}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^v}{1 - \omega}.$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $|\omega| < 1$, δηλ. $-1 < \omega < 1$, τότε, ὡς δείχθη εἰς τὴν § 174, εἶναι $\lim \sigma_v = \frac{\alpha}{1 - \omega}$ καὶ ἐπομένως ἡ γεωμετρικὴ σειρά συγκλίνει (ἐν $\mathbb{R}$).

β'). Ἐὰν $\omega > 1$, τότε ἡ ἀκολουθία ω^v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι αὐξουσα καὶ μὴ φραγμένη, ἄρα $\lim \omega^v = +\infty$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου $\sigma_v = \frac{\alpha(\omega^v - 1)}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{\omega - 1} \cdot (\omega^v - 1)$, ἔχομεν :

$$\lim \sigma_v = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \alpha < 0. \end{cases}$$

γ'). Ἐὰν $\omega = 1$, τότε ἡ σειρά εἶναι : $\alpha + \alpha + \alpha + \dots$ καὶ ἐπειδὴ $\sigma_v = v\alpha$, ἔχομεν : $\lim \sigma_v = +\infty$ ἢ $-\infty$, καθόσον $\alpha > 0$ ἢ $\alpha < 0$ (ἀντιστοίχως).

δ'). Ἐὰν $\omega = -1$, τότε ἡ σειρά εἶναι : $\alpha - \alpha + \alpha - \alpha + \dots$, ὁπότε :

$$\sigma_1 = \alpha, \quad \sigma_2 = \alpha + (-\alpha) = 0, \quad \sigma_3 = \alpha + (-\alpha) + \alpha = \alpha, \quad \sigma_4 = 0, \dots$$

καὶ γενικῶς :

$$\sigma_v = \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } v \text{ περιττὸς} \\ 0, & \text{ἐὰν } v \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

"Ἦτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι : $\alpha, 0, \alpha, 0, \dots$

Αὕτη δὲν συγκλίνει. "Οθεν διὰ $\omega = -1$, ἡ σειρά (1) ἀποκλίνει.

είναι. 'Εάν $\omega < -1$, τότε η σειρά (1) γίνεται: $\alpha - \alpha\omega + \alpha\omega^2 - \alpha\omega^3 + \dots \pm \alpha\omega^k \mp \dots$

'Επειδή $\omega < -1$, τότε $|\omega| > 1$, έπεται $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n = +\infty$ ή $-\infty$, καθόσον ό n είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχως, όθεν τό $\sigma_n = \frac{\alpha}{\omega - 1} (\omega^n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$ ούδέν όριον έχει καί κατά συνέπειαν ή (1) άποκλίνει. Συνοψίζοντας τά άνωτέρω έχομεν :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \omega^n \equiv \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^n + \dots = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\omega}, & \text{έάν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{έάν } \omega \geq 1 \text{ καί } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{έάν } \omega \geq 1 \text{ καί } \alpha < 0 \\ \text{άποκλίνει, έάν } \omega \leq -1. \end{cases}$$

Ούτως ή σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \equiv \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$, συγκλίνει πρós τόν πραγματικόν άρι-

θμόν.
$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \text{ διότι } |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

'Αντιθέτως ή σειρά :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots, \text{ άποκλίνει, διότι } \omega = -1.$$

"Ας ίδωμεν τώρα καί έν παράδειγμα σειράς τής όποίας δέν δυνάμεθα νά εύρωμεν τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής.

Παράδειγμα 4ον. 'Η σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1)$$

καλεϊται άρμονική, διότι έκαστος όρος τής (έκτός τοῦ πρώτου) είναι μέσος άρμονικός εκείνων πού τόν περιέχουν.

Θά άποδείξωμεν ότι ή ως άνω σειρά άπειρίζεται θετικώς.

"Εστω $S_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ ή άκολουθία τών μερικών άθροισμάτων τής

(1). Εύκόλως διαπιστοῦμεν ότι ή S_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα άκολουθία θετικών όρων, ήτοι ισχύει :

$$S_n < S_{n+1} \text{ διὰ κάθε } n = 1, 2, \dots$$

"Ας υποθέσωμεν ότι ή S_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη έν $\mathbf{R}$. Τότε, συμφώνως πρós τό αξίωμα (§ 150), ή S_n , $n = 1, 2, \dots$ ως αύξουσα καί φραγμένη άκολουθία συγκλίνει· έστω δέ ότι :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

'Επειδή $S_n \rightarrow S$ έπεται ότι : διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ (άρα καί διὰ $\varepsilon = \frac{1}{4}$) ύπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}$ τοιοῦτος, ώστε :

$$|S_n - S| \leq \frac{1}{4} \text{ διὰ κάθε } n \geq n_0.$$

*Όθεν, έάν $m \geq n_0$ καί $n \geq n_0$ έχομεν :

$$|S_m - S_n| = |(S_m - S) + (S - S_n)| \leq |S_m - S| + |S_n - S| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Εϊδικώς έάν $n \geq n_0$ καί $m = 2n$ έχομεν :

$$|S_{2n} - S_n| \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

'Εξ άλλου, έάν $n > 1$ έχομεν :

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{'Αλλά: } \frac{1}{v+1} > \frac{1}{2v}, \quad \frac{1}{v+2} > \frac{1}{2v}, \dots, \frac{1}{2v} \cong \frac{1}{2v} \quad \text{διὰ κάθε } v > 1.$$

Οθεν :

$$S_{2v} - S_v = \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{2v} > \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v} + \dots + \frac{1}{2v} = v \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}.$$

όποτε συνάγεται ότι :

$$|S_{2v} - S_v| = S_{2v} - S_v > \frac{1}{2}, \quad (3)$$

το όποιον αντιφάσκει πρὸς τὴν (2). Ἐπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία S_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη ὁδηγεῖ εἰς ἀτοπον. Συνεπῶς, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς, ὡς αὐξοῦσα καὶ μὴ φραγμένη, ἀπειρίζεται θετικῶς, ἥτοι $\lim S_v = +\infty$ ὁπότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἔχομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty.$$

§ 180. Μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν n πρώτων ὀρων σειρᾶς.— Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν n πρώτων

ὀρων σειρᾶς τινος ἀναλόγως τῆς μορφῆς τοῦ γενικοῦ ὀρου αὐτῆς. Ὑπάρχουν ὁμως καὶ σειραὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων, λ.χ. ἡ ἁρμονικὴ σειρὰ $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$. Παραδείγματα ἀθροίσεως σειρῶν, δηλ.

εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν n πρώτων ὀρων των, συναρτήσῃ τοῦ n , ἔχομεν ἤδη γνωστὰ τὰ ἀθροίσματα τῶν n πρώτων ὀρων ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων. Δὲν ὑπάρχει ὁμως γενικὴ μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος s_n τῶν n πρώτων ὀρων οἰασδὴποτε σειρᾶς. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐξετάσωμεν μόνον ὠρισμένας περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ εὐρέσεις τοῦ ἀθροίσματος s_n τῶν n πρώτων ὀρων σειρῶν μὲ γενικὸν ὄρον a_v εἰδικῆς μορφῆς.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς I. Ἐὰν ὁ γενικὸς ὄρος a_v τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $a_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$ (1), ὅπου $\varphi(v)$ συνάρτησις τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v (ἀκολουθία), τότε τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων αὐτῆς s_n εἶναι :

$$s_n = \varphi(1) - \varphi(n+1) \quad (2)$$

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν $a_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$, $v = 1, 2, \dots, n$, ἔχομεν :

$$\alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2)$$

$$\alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n = \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \varphi(1) - \varphi(n+1)$$

ἢ

$$s_n = \varphi(1) - \varphi(n+1).$$

Παρατήρησης. 'Εάν υπάρχει το $\lim \varphi(v)$ και είναι k , τότε εκ τῆς (2) έχουμε :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim \sigma_v = \varphi(1) - k.$$

Ἐφαρμογή 1η : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2}$$

καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς.

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὄρος αὐτῆς εἶναι : $\alpha_v = \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2}$.

Ἐπειδὴ $2v+1 = (v+1)^2 - v^2$ θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_v = \frac{(v+1)^2 - v^2}{v^2(v+1)^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v+1)^2} = \varphi(v) - \varphi(v+1), \quad \text{ὅπου } \varphi(v) = \frac{1}{v^2}$$

τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὴν (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 1 - \frac{1}{(v+1)^2}$$

$$\text{καὶ} \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2} = \lim \sigma_v = 1, \quad \text{διότι } \lim \frac{1}{(v+1)^2} = 0.$$

Ἐφαρμογή 2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\frac{4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v + \dots \quad (\Sigma)$$

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὄρος τῆς σειρᾶς (Σ) εἶναι : $\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v$.

Πρὸς μετασχηματισμὸν τοῦ γενικοῦ ὄρου, ἀναλύομεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{v+3}{v(v+1)}$ εἰς ἄθροισμα δύο ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν :

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}.$$

Ἐξ αὐτῆς, ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 98), εὐρίσκομεν $A = 3$, $B = -2$, ὅτε ἔχομεν :

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{3}{v} - \frac{2}{v+1}.$$

Τότε ὁ γενικὸς ὄρος τῆς σειρᾶς γίνεταί :

$$\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v = \frac{3}{v} \cdot \frac{2^v}{3^v} - \frac{2}{v+1} \cdot \frac{2^v}{3^v} = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}} - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v},$$

ἥτοι ὁ α_v ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$, ὅπου $\varphi(v) = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}}$.

Τότε, κατὰ τὸν τύπον (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 2 - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v}, \quad \text{διότι } \varphi(1) = 2.$$

Ἄρα :

$$\lim \sigma_v = 2 - \lim \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v} = 2 - \lim \frac{2}{v+1} \cdot \lim \left(\frac{2}{3}\right)^v = 2 - 0 = 2.$$

Ἦτοι ἡ σειρά (Σ) συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

Περίπτωσις II. Ἐάν ὁ γενικός ὅρος a_n τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} a_n$ δύνανται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2), \text{ ὅπου } A + B + \Gamma = 0 \quad (3)$$

τότε τὸ ἄθροισμα σ_n τῶν n πρώτων ὀρων αὐτῆς εἶναι :

$$\sigma_n = A \varphi(1) - \Gamma \varphi(2) - A \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2) \quad (4)$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n \{ A \varphi(k) + B \varphi(k+1) + \Gamma \varphi(k+2) \} = A \sum_{k=1}^n \varphi(k) + B \sum_{k=1}^n \varphi(k+1) + \\ &+ \Gamma \sum_{k=1}^n \varphi(k+2) = A \sum_{k=-1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k+2) + \Gamma \sum_{k=1}^n \varphi(k+2) = \\ &= A \{ \varphi(1) + \varphi(2) \} + A \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \varphi(2) + B \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + B \varphi(v+1) + \\ &+ \Gamma \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2) + \Gamma \{ \varphi(v+1) + \varphi(v+2) \} = A \varphi(1) + (A+B) \varphi(2) + \\ &+ (B+\Gamma) \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2) + (A+B+\Gamma) \sum_{k=1}^{n-2} \varphi(k+2). \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = 0$, ὅτε $A + B = -\Gamma$, $B + \Gamma = -A$, ἔχομεν :

$$\sigma_n = A \varphi(1) - \Gamma \varphi(2) - A \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2).$$

Ἐφαρμογή : Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{3v+2}{v(v+1) \cdot (v+2)} + \dots \quad (5)$$

Λύσις : Ἀναλύομεν τὸν γενικὸν ὅρον $a_n = \frac{3v+2}{v(v+1)(v+2)}$ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἀπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτοντες :

$$\frac{3v+2}{v(v+1)(v+2)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} + \frac{\Gamma}{v+2}$$

εὐρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, $A = B = 1$ καὶ $\Gamma = -2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι : $A + B + \Gamma = 0$ καὶ ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς (5) ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+1) + \Gamma \varphi(v+2), \text{ ὅπου } \varphi(v) = \frac{1}{v}.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (4) εὐρίσκομεν :

$$\sigma_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{v+1} - 2 \frac{1}{v+2} = 2 - \frac{1}{v+1} - \frac{2}{v+2}.$$

Παρατήρησις. Γενικῶς, ἔάν $a_n = A \varphi(v) + B \varphi(v+k) + \Gamma \varphi(v+\lambda)$ μὲ $A + B + \Gamma = 0$, τότε τὸ σ_n ὑπολογίζεται.

Περίπτωσις III. Ἐάν ὁ γενικός ὅρος a_n τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} a_n$ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$a_n = f(v) + \varphi(v) + g(v),$$

ὅπου $f(v)$, $\varphi(v)$, $g(v)$ εἶναι οἱ γενικοὶ ὅροι σειρῶν, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ εὐρεσις τοῦ ἁθροίσματος τῶν n πρώτων ὀρων, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων αὐτῆς ὑπολογίζεται.

$$a_v = \frac{2^v - 1}{2^{2^v - 2}}, \text{ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς } (\equiv \text{ἄθροισμα ἀπείρων ὄρων της}).$$
$$\alpha_v = \frac{2^v - 1}{2^{2^v - 2}} = \frac{2^v}{2^{2^v - 2}} - \frac{1}{2^{2^v - 2}} = \frac{4}{2^v} - \frac{4}{4^v},$$

Τότε :

διὰ $v = 1$	έχομεν :	$\alpha_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}$
διὰ $v = 2$	» :	$\alpha_2 = 4 \cdot \frac{1}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{4^2}$
.....		
διὰ $v = v$	» :	$\alpha_v = 4 \cdot \frac{1}{2^v} - 4 \cdot \frac{1}{4^v}$

$$\begin{aligned}\sigma_v &\equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_v = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^v} \right) - 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^v} \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2^{v+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - 4 \cdot \frac{\frac{1}{4^{v+1}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = 4 \left(1 - \frac{1}{2^v} \right) - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^v} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{v-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{v-1}}\end{aligned}$$
$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim \sigma_v = \frac{8}{3}.$$
$$\alpha_v = f(v) \cdot x^v, \text{ όπου } f(v) \text{ άκέραιον πολυώνυμον του } v,$$

Παράδειγμα 1ον. Νά υπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{v=1}^{\infty} v x^{v-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + vx^{v-1} + \dots$$

$$\Sigma_v \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1}. \quad (1)$$
$$x \Sigma_v = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + vx^v. \quad (2)$$
$$(1-x)\Sigma_v = 1 + x + x^2 + \dots + x^{v-1} - vx^v.$$

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι $1 + x + x^2 + \dots + x^{v-1} = \frac{x^v - 1}{x - 1}$, γίνεται :

$$(1-x) \cdot \Sigma_v = \frac{x^v - 1}{x - 1} - vx^v$$

$$\Sigma_v = \frac{1 - x^v}{(1 - x)^2} - \frac{vx^v}{1 - x}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νά αποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n} + \dots \quad (1)$$

εἶναι :

$$\frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}.$$

Λύσις. Ὁ γενικός ὄρος τῆς (1), δηλ. ὁ $\frac{n+1}{3^n}$ εἶναι γινόμενον τοῦ νιοστοῦ ὄρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (τῆς : 2, 3, ..., n , $n+1$, ...) καὶ τοῦ νιοστοῦ ὄρου μιᾶς γεωμετρικῆς (τῆς : $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$), ἥτοι εἶναι ὁ νιοστός ὄρος μιᾶς **μικτῆς προόδου** *).

Θέτομεν :

$$\Sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{3} \Sigma_n = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n+1}{3^{n+1}}. \quad (3)$$

Δι' ἀφαίρεσεως τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$\frac{2}{3} \Sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

καὶ τελικῶς :

$$\Sigma_n = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}.$$

Περίπτωσις V : Ἐὰν ὁ γενικός ὄρος μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀκεραία ρητὴ συνάρτησις τοῦ n , δηλαδή $\alpha_n = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ γενικός ὄρος εἶναι : $\alpha_n = 12n^2 - 6n + 1$.

Λύσις : Ἐστω $\sigma_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{v=1}^n \alpha_v \equiv \sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1)$, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Λόγῳ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ συμβόλου Σ (βλ. § 176) ἔχομεν :

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1) = \sum_{v=1}^n 12v^2 - \sum_{v=1}^n 6v + \sum_{v=1}^n 1$$

$$\text{ἢ } \sigma_n = 12 \sum_{v=1}^n v^2 - 6 \sum_{v=1}^n v + \sum_{v=1}^n 1 = 12 \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 6 \cdot \frac{v(v+1)}{2} + v = v^2(4v+3).$$

Παράδειγμα 2ον. Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots \quad (\Sigma)$$

* **Μικτὴ πρόοδος** καλεῖται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, ἕκαστος ὄρος τῆς ὁποίας προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀντιστοίχων (ὁμοταξίων) ὄρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ μιᾶς γεωμετρικῆς.

Λύσις. 'Εν πρώτοις εύρίσκομεν τὸν γενικὸν ὅρον τῆς σειρᾶς (Σ). Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν γινομένων τῆς δοθείσης σειρᾶς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5, ..., οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδον λόγου 2, συνεπῶς ὁ πρῶτος ὁρος τοῦ γινομένου τοῦ γενικοῦ ὁρου τῆς σειρᾶς θὰ εἶναι ὁ: $1 + (v-1) \cdot 2 = 2v-1$.

Ὁμοίως: ὁ γενικὸς ὁρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 3, 5, 7, ... εἶναι $2v+1$
 » » » » » 5, 7, 9, ... » $2v+3$.

Ὁ γενικὸς ὁθεν ὁρος τῆς δοθείσης σειρᾶς εἶναι: $(2v-1)(2v+1)(2v+3)$.

Τότε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὁρων τῆς (Σ) εἶναι:

$$\begin{aligned} \sigma_v &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2v-1)(2v+1)(2v+3) = \sum_{v=1}^v (2v-1)(2v+1)(2v+3) = \\ &= \sum_{v=1}^v (8v^3 + 12v^2 - 2v - 3) = 8 \sum_{v=1}^v v^3 + 12 \sum_{v=1}^v v^2 - 2 \sum_{v=1}^v v - 3 \sum_{v=1}^v 1 = \\ &= 8 \cdot \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 12 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 2 \frac{v(v+1)}{2} - 3v \end{aligned}$$

καὶ τελικῶς:

$$\sigma_v = v(2v^3 + 8v^2 + 7v - 2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

381. Νὰ γραφοῦν οἱ ἑπτὰ πρῶτοι ὅροι τῶν ἀκολουθῶν σειρῶν:

α). $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{v^2+1}$, β). $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$, γ). $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1+v}{1+v^2}$, δ). $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v}{v(v+1)}$.

382. Νὰ εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκολουθῶν σειρῶν:

α) $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3^v}$, β) $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^v$, γ) $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^v$.

383. Νὰ εύρεθῇ μία σειρά τῆς ὁποίας ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι:

α). $\left(1 - \frac{1}{2^v}\right)$, $v = 1, 2, \dots$, β). $\frac{v}{v+1}$, $v = 1, 2, \dots$.

384. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+2)}$ εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα $\frac{3}{4}$.

385. Νὰ εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$, ὅπου $\alpha_v = \frac{1}{(3v-2)(3v+1)}$.

386. Ὁμοίως τῆς σειρᾶς: $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(v+1)(v+2)} + \dots$

387. Νὰ εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὁρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον:

$\alpha_v = \frac{v+2}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^v$ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμά της.

388. Νὰ εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὁρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον:

$\alpha_v = \frac{2^v - 1}{3^{v+1}}$ καὶ ἀκολουθῶς νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \frac{1}{2}$.

389. Νὰ εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὁρων τῶν σειρῶν, τῶν ὁποίων οἱ γενικοὶ ὅροι εἶναι:

α) $3v^2 - v$, β) $8v^3 - 1$, γ) $8v^3 - 3v^2$, δ) $v^2 + 3v + 2$.

390. Νὰ εύρεθοῦν οἱ γενικοὶ ὅροι τῶν κάτωθι σειρῶν καὶ ἀκολουθῶς τὰ ἄθροίσματα τῶν v πρώτων ὁρων αὐτῶν.

α). $1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + \dots$ β). $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots$

391. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν n πρώτων ὀρων τῶν ἀκολουθῶν σειρῶν.

α) $1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+3) + \dots$

β) $1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \dots$

γ) $4\alpha + 5\alpha^2 + 6\alpha^3 + \dots + (n+3)\alpha^n + \dots$

392. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

εἶναι :

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

393. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{5^{n+1} - 4n - 5}{16 \cdot 5^{n-1}}$.

394. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

395. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+2)(v+3)} = \frac{5}{36}$.

396. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

Ἰδιότητες συγκλίσεως σειρῶν

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἀποδείξωμεν μερικὰς βασικὰς ἰδιότητες συγκλινουσῶν σειρῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων δύναται τις νὰ συνδυάσῃ συγκλινούσας σειρὰς κατὰ ποικίλους τρόπους. Θὰ ἀναφέρωμεν ἐπίσης μίαν πολὺ ἀπλὴ συνθήκην, ἥ ὁποία εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν σύγκλισιν, ἐπὶ πλεόν δὲ κατάλληλος, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, προκειμένου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μία σειρὰ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

§ 181. Ἰδιότης I.— Ἐὰν μία σειρὰ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (1) εἶναι συγκλίνουσα μετὰ ἄθροισμα $a \in \mathbf{R}$, τότε καὶ ἡ σειρὰ : $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$ (2), ἥ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν διὰ παραλείψεως τῶν k πρώτων ὀρων τῆς, εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.

Ἀπόδειξις : Ἐστώσαν σ_n , $n = 1, 2, \dots$ καὶ t_n , $n = 1, 2, \dots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, ἥτοι :

$$\sigma_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (3)$$

$$t_n \equiv a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n} \quad (4)$$

Τὸ (πεπερασμένον) ἄθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ εἶναι εἰς πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἂς καλέσωμεν s , ἥτοι : $s \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

Θέτομεν : $\sigma_{k+n} \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+n}$, ὅτε ἔχομεν :

$$\sigma_{k+n} = s + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n}$$

$$\eta \quad \sigma_{k+n} - s = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n} \quad (5)$$

Ἡ (5), δυνάμει τῆς (4), γίνεται :

$$\sigma_{k+v} - s = t_v, \quad v = 1, 2, \dots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν : $\lim \sigma_{k+v} - s = \lim t_v$. (6)

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\lim \sigma_v = \alpha$, ἄρα καὶ $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_{k+v} = \alpha$, ἡ ἰσότης (6) δίδει :

$$\lim t_v = \alpha - s.$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς σειρᾶς (2) συγκλίνει ὅτε, κατὰ τὸν ὅρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ σειρὰ (2) συγκλίνει.

Παρατήρησις. Παρατηροῦμεν ὅτι παραλείποντες τοὺς k πρώτους ὅρους μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$, τὸ ἄθροισμα αὐτῆς α ἐλαττοῦται κατὰ τὸ ἄθροισμα s τῶν παραλειπομένων ὀρων. Προφανῶς ἐὰν ἡ (1) δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$, τότε καὶ ἡ (2) ἐπίσης δὲν συγκλίνει. Οὕτως αἱ σειραὶ (1) καὶ (2) εἶναι πάντοτε τῆς αὐτῆς φύσεως, δηλαδὴ ἡ καὶ αἱ δύο συγκλίνουναι ἐν $\mathbf{R}$ (ἀσχετῶς ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα) ἢ καὶ αἱ δύο μὴ συγκλίνουναι. Ἀντιστρέφοντες τοὺς ρόλους τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ σύγκλισις ἢ μὴ μιᾶς σειρᾶς δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς προσθέσωμεν ἐν πεπερασμένον πληθὺς ὀρων. Οὕτως ἡ σειρὰ :

$$\sum_{v=11}^{\infty} \frac{1}{v} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots,$$

ὥς προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀρμονικῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ διὰ παραλείψεως τῶν δέκα πρώτων ὀρων τῆς, ἀπειρίζεται θετικῶς.

§ 182. Ἰδιότης II.—Ἐστωσαν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta$

δύο συγκλίνουσai σειραί. Τότε :

1). Ἐὰν $\lambda \in \mathbf{R}$, ἡ σειρὰ $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα $\lambda \alpha$,

ἥτοι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v) = \lambda \alpha = \lambda \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v,$$

δηλαδὴ διὰ τὰς συγκλινούσας σειράς, ὅπως καὶ διὰ τὰ συνήθη ἄθροίσματα, ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

2). Ἡ σειρὰ $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν $\alpha + \beta$,

ἥτοι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v) = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v.$$

Ἀπόδειξις : Ἐστωσαν s_v , $v = 1, 2, \dots$ καὶ t_v , $v = 1, 2, \dots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῶν σειρῶν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ ἀντιστοίχως, τότε :

$$\begin{aligned} s_v &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v \\ t_v &= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v, \quad v = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1). 'Εάν s'_n είναι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$, ἔχομεν :

$$s'_n = \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \dots + \lambda \alpha_n = \lambda (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \lambda \cdot s_n.$$

'Εκ ταύτης ἔχομεν : $\lim s'_n = \lim (\lambda \cdot s_n) = \lambda \cdot \lim s_n = \lambda \alpha$, διότι $\lim s_n = \alpha$.

'Εκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (\lambda \alpha_v)$ συγκλίνει καὶ μάλιστα πρὸς τὸ $\lambda \cdot \alpha$.

2). 'Εάν s_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$, θὰ εἶναι :

$$s_n \equiv (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = s_n + t_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

"Οτε : $\lim s_n = \lim (s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = \alpha + \beta$, διότι ἐξ ὑποθέσεως $\lim s_n = \alpha$, $\lim t_n = \beta$.

Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ συγκλίνει εἰς τὸ $\alpha + \beta$.

'Εκ τῶν συμπερασμάτων (1) καὶ (2) τῆς ιδιότητος II ἔπεται ἡ γενικωτέρα ιδιότης :

§ 183. 'Ιδιότης III.—'Εάν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta$ μὲ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ἐπὶ πλέον δὲ ξ καὶ η τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\xi \alpha_v + \eta \beta_v) = \xi \alpha + \eta \beta.$$

Εἰδικῶς διὰ $\xi = 1$, $\eta = -1$ ἔχομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v - \beta_v) = \alpha - \beta = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v - \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v.$$

'Ε φ α ρ μ ο γ ῆ : 'Η σειρά $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^v}$ συγκλίνει, διότι : $\frac{1}{3 \cdot 2^v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^v}$, ἐπὶ πλέον δὲ ἡ $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει καὶ μάλιστα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 § 178 ἰσχύει $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2$, ὁθεν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^v} = \frac{1}{3} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

§ 184. 'Ιδιότης IV.—'Εάν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει (ἐν $\mathbb{R}$), τότε :

α'). ἡ ἀκολουθία s_n , $n = 1, 2, \dots$ τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι φραγμένη,
β'). ἡ ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική.

'Απόδειξις. α'). 'Εάν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$, τότε $\lim s_n = \alpha$ καὶ ἡ ἀκολουθία s_n , $n = 1, 2, \dots$ ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη (βλ. § 138).

β'). Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον συμπέρασμα, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{διὰ κάθε } n = 2, 3, \dots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν : $\lim \alpha_n = \lim (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \lim \sigma_n - \lim \sigma_{n-1} = \alpha - \alpha = 0$.
Αἱ συνθῆκαι (α) καὶ (β) τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος εἶναι **ἀναγκαῖαι**, ἀλλ' οὐχὶ καὶ **ἱκαναί**. Οὕτως ὑπάρχουν μὴ συγκλίνουσαι σειραὶ διὰ τὰς ὁποίας ἡ (α) ἢ ἡ (β) ἰσχύει : Π.χ. ἡ σειρά : $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$ ἀποκλίνει (βλ. § 178), ἐν τούτοις ὁμως ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων της εἶναι φραγμένη.

Ἐπίσης ἡ ἀρμονικὴ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ ἀπειρίζεται θετικῶς, ἐν τούτοις ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ εἶναι μηδενική.

Πόρισμα.— Ἐστω α_n , $n = 1, 2, \dots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν με $\lim \alpha_n \neq 0$, τότε ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_n$ δὲν συγκλίνει ἐν **R**.

Παράδειγμα : Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{3v+5}$ δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, διότι :

$$\lim \frac{2v+1}{3v+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Συμπέρασμα : Θὰ προχωρῶμεν εἰς τὴν μελέτην μιᾶς σειρᾶς ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, μόνον ἐφ' ὅσον ὁ γενικὸς της ὅρος συγκλίνει εἰς τὸ μηδέν.

§ 185. Ἰδιότης V.— Ἐὰν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνη καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_n$ δὲν συγκλίνη ἐν **R**, τότε ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ δὲν συγκλίνει ἐν **R**.

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ $\beta_n = (\alpha_n + \beta_n) - \alpha_n$ καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, κατὰ τὴν ιδιότητα III ἡ σύγκλις τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_n$. Ἀποκλείεται συνεπῶς ἡ σύγκλις τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$, ἐφ' ὅσον ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_n$ δὲν συγκλίνει ἐν **R**.

Παράδειγμα : Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{2^v} \right)$ δὲν συγκλίνει (ἐν **R**), διότι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει.

Παρατήρησις : Ἐὰν αἱ σειραὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_n$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_n$ ἀμφότεραι δὲν συγκλίνουν ἐν **R**, τότε ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ δυνατὸν νὰ συγκλίνη, δυνατὸν ὁμως καὶ νὰ μὴν συγκλίνη ἐν **R**.

Παράδειγμα : Ἐάν $\alpha_n = \beta_n = 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, τότε ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v) = +\infty$,
 ἐάν ὅμως $\alpha_n = 1$ καὶ $\beta_n = -1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, τότε ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

397. Ποῖαι σειραὶ μὲ γενικοὺς ὅρους τοὺς κάτωθι εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖαι ὄχι :

$$1). \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{-v}, \quad 2). \alpha_v = \frac{1}{v}, \quad 3). \alpha_v = \frac{\sqrt{v+1} - \sqrt{v}}{v}.$$

398. Ἐάν $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ καὶ $\beta_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι δύο ἀκολουθίαι τοιαῦται, ὥστε :

$$\alpha_v = \beta_v - \beta_{v+1} \quad \forall \quad v = 1, 2, \dots,$$

τότε ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ ἀκολουθία $\beta_v, v = 1, 2, \dots$ συγκλίνη. Εἰς τὴν περίπτωσησιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \beta_1 - l, \quad \text{ὅπου } l = \lim \beta_v.$$

(Ὑπόδειξις : $\sigma_v \equiv \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=1}^v (\beta_k - \beta_{k+1}) = \beta_1 - \beta_{v+1}$ κ.τ.λ.).

399. Δεῖξατε ὅτι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2 + v} = 1$$

(Ὑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι : $\alpha_v = \frac{1}{v^2 + v} = \frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \equiv \beta_v - \beta_{v+1}$

καὶ ἀκολουθῶς λάβετε ὑπ' ὄψιν τὸ συμπέρασμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως).

§ 186. Σειραὶ μὲ θετικοὺς ὅρους.— Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ θεωρήσωμεν σειρὰς μὲ ὅρους θετικούς, δηλ. σειρὰς αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐξ ἀκολουθιῶν $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, ὅπου $\alpha_v \geq 0$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$. Τότε ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_v \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι πάντοτε αὐξουσα καὶ ἐπομένως ἡ σειρά : **α')** **συγκλίνει** πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία $\sigma_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη, **β')** **ἀπειρίζεται θετικῶς** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία $\sigma_v, v = 1, 2, \dots$ **δὲν** εἶναι φραγμένη.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν βασικὴν πρότασιν, δυνάμει τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐξακριβώσωμεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἐάν μία σειρά μὲ θετικούς ὅρους συγκλίνη ἢ ἀπειρίζεται θετικῶς συγκρίνοντες αὐτὴν πρὸς μίαν ἄλλην γνωστὴν σειράν, δι' ἣ καὶ ἡ πρότασις αὕτη καλεῖται «**κριτήριον συγκρίσεως σειρῶν**».

§ 187. Κριτήριον συγκρίσεως.— Ἐάν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ εἶναι δύο σειραὶ

τοιαῦται, ὥστε : $0 \leq \alpha_v \leq \beta_v$, διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$

Τότε : (1) Ἐάν $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνη, τότε καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει.

(2) Ἐάν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἀπειρίζεται θετικῶς, τότε καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

Ἀπόδειξις τῆς (1). Ἐστώσαν $s_v, v = 1, 2, \dots$ καὶ $t_v, v = 1, 2, \dots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ ἀντιστοίχως.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\alpha_v \leq \beta_v$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$ ἔχομεν, ὅτι :

$$s_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v \equiv t_v. \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει, ἡ ἀκολουθία $t_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη (βλ. § 184), τότε ὁμως, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῆς (1), καὶ ἡ $s_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη ἄνωθεν καὶ ἐπειδὴ $\alpha_v \geq 0 \quad \forall v = 1, 2, \dots$, ἡ ἀκολουθία $s_v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι αὐξοῦσα καὶ φραγμένη, ἄρα συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \leq \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$.

Ἀπόδειξις τῆς (2). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει. Τότε, συμφώνως πρὸς τὴν (1), ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει, ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἀπειρίζεται θετικῶς. Ἀρα ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ ὡς σειρά θετικῶν ὄρων καὶ μὴ συγκλίνουσα ἐν $\mathbf{R}$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

Ἐφαρμογὴ 1η : Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{2^v(v+1)}$ συγκλίνει, διότι : $\frac{v}{2^v(v+1)} < \frac{1}{2^v}$,

$v = 1, 2, \dots$ καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς § 178.

Ἐφαρμογὴ 2α : Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ $p \in \mathbf{R}$ μὲ $p \leq 1$.

Πράγματι, ἐὰν $p \leq 1$, τότε $v^p \leq v \quad \forall v \in \mathbf{N}$. Ὅθεν $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{v^p}, v = 1, 2, \dots$. Ἀλλὰ ἡ ἀρμονικὴ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}, p \leq 1$, ἀπειρίζεται θετικῶς, συμφώνως πρὸς τὸ δεύτερον συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν.

Οὕτω διὰ $p = \frac{1}{2} < 1$ ἔχομεν ὅτι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \equiv 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{v}} + \dots = +\infty.$$

Ἐφαρμογὴ 3η : Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ συγκλίνει διὰ $p \in \mathbf{R}$ μὲ $p > 1$.

Πράγματι, αὕτη γράφεται :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{16^p} + \frac{1}{17^p} + \dots + \frac{1}{31^p} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Επειδή είναι :

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{2^{2p-2}},$$

$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}} = \frac{1}{2^{3p-3}}, \dots,$$

έπεται ότι οι όροι της σειράς (1), (ήτοι αί παρενθέσεις) είναι μικρότεροι των αντίστοιχων όρων της σειράς :

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2p-2}} + \frac{1}{2^{3p-3}} + \dots \quad (2)$$

Η σειρά (2), επειδή είναι $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, συγκλίνει (διατί;). Τότε όμως, συμφώνως προς το πρώτον συμπέρασμα του κριτηρίου συγκρίσεως, θα συγκλινή και η (1).

Όστε, διά $p \in \mathbf{R}$, $p > 1$ η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ συγκλίνει (έν $\mathbf{R}$).

Παρατήρησης : Η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$, όπου p τυχών πραγματικός αριθμός, καλείται *άρμονική σειρά* p -τάξεως και ως εδείχθη εις τὰς ἐφαρμογὰς 2 και 3 ισχύει :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει}, & \text{αν } p > 1. \end{cases}$$

Διά $p = 1$ ἔχομεν τὴν ἄρμονικὴν σειράν $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ (βλ. πρδ. 4, § 179).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

400. Νὰ εὐρεθῇ ποῖα ἐκ τῶν κατωτέρω σειρῶν εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖα ὄχι :

1. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4},$

2. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v + 1}{2v},$

3. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 - 3v + 2}{v^4},$

4. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v - 1}{v^2},$

5. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{v} + 1}{v^3},$

6. $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{\sqrt{v}}{v + \sqrt{v}}.$

401. Ἀποδείξατε ὅτι : Ἐὰν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ εἶναι δύο σειραὶ θετικῶν ὀρων καὶ

$$\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = A,$$

ὅπου $A > 0$, τότε ἡ καὶ αὐτὴ δύο σειραὶ εἶναι συγκλίνουσαι ἢ καὶ αὐτὴ δύο ὄχι.

(Ὑπόδειξις : Δείξατε ὅτι : $\frac{1}{2} A \leq \frac{\alpha_v}{\beta_v} \leq \frac{3}{2} A$ τελικῶς διὰ κάθε $v \in \mathbf{N}$).

402. Στηριζόμενοι εἰς τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως ἐξετάσατε ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰς ἀκολουθοῦσας σειράς :

1) $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2 - 2v - 1}$ (Ὑπόδειξις : Θεωρήσατε ὡς $\beta_v = \frac{1}{v^2}$)

2) $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v + 3}{2v^2 - 1},$ 3) $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v + 2}{2v^3 + v^2 - 1},$ 4) $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3v - 1}{v^4 + 1}.$

§ 188. Σειραὶ ἀπολύτως συγκλίνουσai.—Θὰ λέγωμεν ὅτι :

Ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει ἀπολύτως τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὄρων της, δηλαδή ἡ :

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_v| + \dots$$

συγκλίνει πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν $a_v \geq 0 \quad \forall v = 1, 2, \dots$, τότε $|a_v| = a_v$ καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει, ἂν, καὶ μόνον ἂν, συγκλίνει ἀπολύτως. Ἐὰν ὅμως μερικοὶ ἐκ τῶν ὄρων a_v εἶναι θετικοὶ καὶ μερικοὶ ἀρνητικοί, τότε ἀπλὴ σύγκλισις καὶ ἀπόλυτος σύγκλισις δὲν εἶναι τὸ αὐτό.

Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 189. Θεώρημα : Ἐὰν μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἀπλῶς. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε.

Ἀπόδειξις : Ἐστω ὅτι ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει ἀπολύτως.

Θέτομεν : $\beta_v = |a_v| - a_v$ διὰ κάθε $v = 1, 2, \dots$

Τότε ἔχομεν :

$$0 \leq \beta_v = |a_v| - a_v \leq |a_v| + |a_v| \leq 2 \cdot |a_v| \quad \forall v = 1, 2, \dots \quad (1)$$

ἔχομεν δεχθῆ ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$ συγκλίνει. Τότε ὁμως ἐκ τῆς (1) προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὸ γνωστὸν κριτήριον συγκρίσεως, ὅτι καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει.

Κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει, διότι ἐκ τῆς $\beta_v = |a_v| - a_v$ ἔχομεν :

$$a_v = |a_v| - \beta_v, \quad v = 1, 2, \dots \quad \text{καὶ αἱ σειραὶ } \sum_{v=1}^{\infty} |a_v|, \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v, \text{ συγκλίνουν.}$$

$$\text{Παράδειγμα : Ἡ σειρά } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \equiv -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots$$

συγκλίνει.

$$\text{Πράγματι, ἔχομεν : } \left| \frac{(-1)^v}{v^2} \right| = \frac{1}{v^2}, \quad v = 1, 2, \dots$$

Ἀλλὰ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$ συγκλίνει, ὅθεν καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2}$ συγκλίνει ἀπολύτως, ὁπότε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, αὕτη συγκλίνει καὶ ἀπλῶς.

Παρατηρήσεις: α'). Ἐὰν ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἰσχύει :

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} a_v \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |a_v|.$$

β'). Το αντίστροφο του ανωτέρω θεωρήματος δεν αληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, δυνατόν μία σειρά να συγκλίνει, ενώ η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της να μην συγκλίνει.

Συμπέρασμα. 'Η έννοια ὅθεν τῆς ἀπολύτου συγκλίσεως εἶναι «*ίσχυροτέρα*» τῆς έννοιας τῆς ἀπλῆς συγκλίσεως.

Παράδειγμα 2ον : Δείξτε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta \mu v}{2^v}$ συγκλίνει.

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left| \frac{\eta \mu v}{2^v} \right| \leq \frac{1}{2^v} \quad \forall v \in \mathbf{N}.$$

Ἀλλά, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παρδ. 1 § 178, ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει, ὅθεν καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{\eta \mu v}{2^v} \right|$ συγκλίνει, δηλαδή ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta \mu v}{2^v}$ συγκλίνει ἀπολύτως. Τότε ὅμως αὕτη θὰ συγκλίνει καὶ ἀπλῶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

403. Ποῖα ἐκ τῶν ἀκολουθῶν σειρῶν εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσai; Ποῖα εἶναι συγκλίνουσai; Ποῖα δὲν συγκλίνουν ἐν $\mathbf{R}$;

$$1. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v-2}{v^3+1}, \quad 2. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{1}{(2v)^2}, \quad 3. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin v}{1+v^2},$$

$$4. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \eta \mu \left(v^{-\frac{3}{2}} \right), \quad 5. \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v}{v+1}, \quad 6. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{\sqrt[v]{v}}.$$

404. Ἐὰν $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ συγκλίνει, δείξτε ὅτι καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v^2$ συγκλίνει. Δώσατε ἀκλούθως ἐν παράδειγμα ἐκ τοῦ ὁποῖου νὰ ἐμφαίνεται ὅτι δὲν ἰσχύει πάντοτε τὸ ἀντίστροφο.

405. Ἐστω $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = \alpha$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v^2 = \beta$, $\alpha_v > 0 \quad \forall v = 1, 2, \dots$, δείξτε ὅτι :

$$\alpha^2 > \beta.$$

§ 190. Παράστασις πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ δεκαδικὰς σειράς.

Ἐστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_v = \frac{\psi_v}{10^v}$, $v = 0, 1, 2, \dots$, ἔκτενῶς ἡ :

$$\psi_0, \frac{\psi_1}{10}, \frac{\psi_2}{10^2}, \frac{\psi_3}{10^3}, \dots, \frac{\psi_v}{10^v}, \dots$$

ὅπου ψ_0 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_v, \dots$ εἶναι ψηφία, δηλαδή ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μέ :

$$0 \leq \psi_v \leq 9 \quad \forall v \in \mathbf{N}.$$

Θεωρήσωμεν τὴν ἀντίστοιχον σειρὰν $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v$, ἥτοι τὴν :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_v}{10^v} + \dots \quad (1)$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν «δεκαδικὴν σειρὰν» ἢ καὶ ἄλλως «δεκαδικὸν ἀριθμὸν» μὲ ἀκέραιον μέρος ψ_0 καὶ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία $\psi_1, \psi_2, \dots$. Ταύτην συμβολίζομεν συντόμως καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_n \dots$$

Ἄς μελετήσωμεν τώρα, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν δεκαδικὴν σειρὰν (1). Τὸ ἄθροισμα σ_n τῶν n πρώτων ὄρων (μερικὸν ἄθροισμα) εἶναι :

$$\sigma_n = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_{n-1}}{10^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ἀναλυτικώτερον ἔχομεν :

$$\sigma_1 = \psi_0, \quad \sigma_2 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10}, \quad \sigma_3 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2}, \quad \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\sigma_{n+1} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{\psi_n}{10^n}, \dots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\psi_0 \leq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} \leq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} \leq \dots$$

δηλαδὴ ἰσχύει :

$$\sigma_n \leq \sigma_{n+1} \quad \text{καὶ τοῦτο-διὰ κάθε } n = 1, 2, 3, \dots,$$

ἤτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὐξουσα. Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ

$$\frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (διατί;)}$$

ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $\psi_0 + 1$. Ἐπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, Κεφ. V, ἡ ἀκολουθία (2), ὡς αὐξουσα καὶ φραγμένη συγκλίνει πρὸς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν $\xi \leq \psi_0 + 1$, ἤτοι : $\lim \sigma_n = \xi$. Τότε ὁμως καὶ ἡ δεκαδικὴ σειρὰ (1) συγκλίνει, ἐξ ὁρισμοῦ, καὶ ἰσχύει :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{10^n} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots = \\ = \lim \sigma_n = \xi.$$

Ἐδείχθη ὅθεν τὸ ἐξῆς :

§ 191. Θεώρημα.— Μία δεκαδικὴ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{10^n} \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots$

συγκλίνει πάντοτε καὶ ὁρίζει ἀκριβῶς ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ξ .

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὁρισμὸν :

§ 192. Ὁρισμός.— Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς ξ παρίσταται ὡς μία δεκαδικὴ σειρὰ ἢ ἔχει δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα $\psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία δεκαδικὴ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{10^n}$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots$$

Σημ. Το ψ_0 καλεῖται τὸ «ἀκέραιον μέρος», τὰ δὲ $\psi_1, \psi_2, \dots$ τὰ «δεκαδικὰ ψηφία» τοῦ ἀναπτύγματος.

Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικά τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα :

§ 193. Θεώρημα παραστάσεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς.— Διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ξ ὑπάρχει ἀκριβῶς μία παράστασις αὐτοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς, ἥτις :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_v \dots \equiv \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\psi_v}{10^v},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ δεκαδικὰ ψηφία δὲν εἶναι ὅλα ἐννέα, ἀπὸ τινος θέσεως καὶ πέραν.

Οὕτω, π.χ.

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{3} = 0,333\dots & \parallel & \frac{1}{2} = 0,5000\dots \\ 3,27 = 3,27000\dots & \parallel & \sqrt{2} = 1,414213564\dots \\ \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \dots = 7,2500\dots \end{array}$$

Παρατήρησις : Διὰ τὸ 3,27 ἀντιστοίχως τὸ $1/2$ ὑπάρχουν καὶ αἱ παραστάσεις $3,27 = 3,269999\dots$ ἀντιστοίχως $1/2 = 0,4999\dots$

Αὗται ὅμως ἀποκλείονται, διότι ἐπαναλαμβάνεται ἀπὸ τινος θέσεως καὶ πέραν τὸ ψηφίον 9.

Ἐφαρμογή : Νὰ εὑρεθῇ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ $7/11$.

Λύσις : Ἐστω ὅτι εἶναι : $\frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots$ (1)

Ἡ (1) γράφεται καὶ οὕτω :

$$0 + \frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots$$

ἄρα $\psi_0 = 0$ καὶ ἐπομένως :

$$\frac{7}{11} = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \dots + \frac{\psi_v}{10^v} + \dots \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει :

$$\frac{70}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \dots + \frac{\psi_v}{10^{v-1}} + \dots$$

ἢ

$$6 + \frac{4}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \dots$$

ἄρα $\psi_1 = 6$ καὶ ἐπομένως :

$$\frac{4}{11} = \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \frac{\psi_4}{10^3} + \dots \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει :

$$\frac{40}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \dots$$

ἢ

$$3 + \frac{7}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \dots$$

ἄρα $\psi_2 = 3$ κ.ο.κ.

Οὕτω τελικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{7}{11} = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots = 0,6363\dots$$

*** § 194. Γινόμενα πραγματικών αριθμών με πεπερασμένους τὸ πλήθος παράγοντας.**— Πολλάκις παρουσιάζονται γινόμενα τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n.$$

Διὰ τὴν συντομωτέραν γραφὴν χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἑλληνικὸν γράμμα Π διὰ τὸν συμβολισμόν τῶν γινομένων τούτων. Γράφομεν :

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n.$$

Τὸ πρῶτον μέλος ἀναγινώσκεται : *Γινόμενον τῶν (ἀριθμῶν) α_k ἀπὸ $k=1$ ἕως $k=n$.* Τὸ σύμβολον Π σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, θέτοντες διαδοχικῶς $k=1, k=2, \dots, k=n$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ἔπεται ὅτι :

$$\alpha'). \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad \beta'). \prod_{k=1}^{v+1} \alpha_k = \alpha_{k+1} \cdot \prod_{k=1}^v \alpha_k, \quad \gamma'). \prod_{k=1}^v \alpha = \alpha^v.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ιδιότητες γινομένων :

$$1). \prod_{k=1}^v (\alpha_k \beta_k) = \left(\prod_{k=1}^v \alpha_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^v \beta_k \right)$$

$$2). \prod_{k=1}^v (\lambda \cdot \alpha_k) = \lambda^v \cdot \prod_{k=1}^v \alpha_k$$

$$3). \prod_{k=1}^v \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\alpha_v}{\alpha_0}, \quad \alpha_k \neq 0 \quad \forall \quad k=0, 1, 2, \dots, v.$$

$$\text{Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Δείξατε ὅτι : } \prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{v}.$$

Πράγματι εἶναι :

$$\prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{v-1}{v} = \frac{1}{v}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$406. \text{Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : } \prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{v+1}{2v}.$$

$$407. \text{Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : } \lim \left(\prod_{k=2}^v \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

408. Ἐὰν $x \neq 1$, δείξατε ὅτι :

$$\prod_{k=1}^v (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^v}}{1 - x}.$$

Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ὅταν $x = 1$;

$$409. \text{Νὰ εὑρεθῇ τὸ } \lim_{v \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^v \frac{v^3 - 1}{v^3 + 1}.$$

$$410. \text{Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης : } \prod_{k=0}^v \left(1 + \frac{1}{2k+1} \right) > (2v+3)^{1/2}.$$

*** § 195. Άπειρογινόμενα.**— Έστω α_n , $n=1, 2, \dots$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Καλούμεν **άπειρογινόμενο** με όρους (είτε άλλως *παράγοντας*) τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ την παράστασιν :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots,$$

δηλαδή γινόμενο με άπειρους παράγοντας.

Έν τοιοῦτον γινόμενον συμβολίζομεν διὰ τοῦ συμβόλου : $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, ἥτοι :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots \quad (1)$$

Ἐκαστον γινόμενον

$$\gamma_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \equiv \prod_{k=1}^n \alpha_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

καλεῖται **μερικὸν γινόμενον** τοῦ ἀπειρογινόμενου (1).

Τὰ πρῶτα ἀπειρογινόμενα ἐδόθησαν ὑπὸ τῶν μεγάλων μαθηματικῶν Viète (1646) καὶ Wallis (Οὐώλλις).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἑνὸς ἀπειρογινόμενου, ἔπεται ὅτι :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k) = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 + \alpha_k).$$

*** § 196. Σύγκλισις ἑνὸς ἀπειρογινόμενου (πραγματ. ἀριθμῶν).**

Θὰ λέγωμεν : τὸ ἀπειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει πρὸς

ἓνα ἀριθμὸν γ καὶ θὰ γράφωμεν $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \gamma$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \pm \infty$

καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύη : $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \alpha_k = \gamma$.

Συντόμως :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \gamma \iff \lim_{\text{ορσ}} \prod_{k=1}^n \alpha_k = \gamma, \quad \gamma \neq 0, \pm \infty$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right]$.

Λύσις : Ἔχομεν :

$$1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Κατὰ ταῦτα :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left[1 - \frac{2}{k(k+1)} \right] &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+1) \cdot (n+2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

Ὅθεν :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left[1 - \frac{2}{k(k+1)} \right] = \frac{1}{3}, \text{ καὶ συνεπῶς } \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 2ον : Τὰ ἀπειρογνόμενα $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)$ καὶ $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right)$ δὲν συγκλίνουν πρὸς πεπερασμένον ἀριθμὸν.

Πράγματι, διὰ τὸ πρῶτον ἔχομεν :

$$\gamma_v \equiv \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{1}{k}\right) = v + 1, \quad \text{ἄρα } \lim \gamma_v = +\infty,$$

ἐνῶ διὰ τὸ δεύτερον :

$$\gamma'_v \equiv \prod_{k=1}^v \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{v+1}, \quad \text{ἄρα } \lim \gamma'_v = 0.$$

Διὰ τὸ πρῶτον θὰ λέγωμεν ὅτι **συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ $+\infty$** .

Διὰ τὸ δεύτερον θὰ λέγωμεν ὅτι **συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ 0**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

411. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\prod_{v=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{v^3 + 1}\right) = \frac{2}{3}$.

412. Νὰ μελετηθοῦν ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰ κάτωθι ἀπειρογνόμενα :

1. $\prod_{v=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{v}\right), \quad 2. \prod_{v=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{v^2 - 1}\right).$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

413. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^v (k^3 + 3k^2 - k + 1) = \frac{v}{4} (v^3 + 6v^2 + 5v + 4).$$

414. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σειρὰ $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v^2 - 1}$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{4}$.

415. Δείξτε ὅτι :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v + 1/2)(v + 3/2)(v + 5/2)} = \frac{2}{3}.$$

416. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

417. Ἐὰν $\sum_{k=1}^v \alpha_k = 3v^2 + 4v$, νὰ εὑρεθῇ τὸ $\sum_{k=1}^{v-1} \alpha_k$ καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ὁ α_v .

418. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς : $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots$

419. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$$

420. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{1}{6} \pi^2, \quad \text{νὰ δεიχθῇ ὅτι : } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^3 (v+1)^3} = 10 - \pi^2.$$

421. Δείξτε ὅτι ἡ σειρὰ $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{v+2}}$ συγκλίνει (ἐν $\mathbf{R}$), ἐνῶ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ

τὴν σειρὰν : $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v \sqrt{v+1}}.$

422. Να εξετασθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, ἡ σειρὰ μὲ γενικὸν ὄρον $\alpha_n = \frac{3n-1}{n^4+1}$.

* 423. Ἐὰν $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ καὶ $p, q \in \mathbb{R}^+$ μὲ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{Ἀνισότης τοῦ Hölder}).$$

* 424. Δείξατε ὅτι :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \alpha_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

425. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod_{\mu=1}^{n-1} \mu \cdot \prod_{\mu=2}^n (\mu^2 + \mu + 1)}{\prod_{\mu=3}^{n+1} \mu \cdot \prod_{\mu=1}^{n-1} (\mu^2 + \mu + 1)} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{3}.$$

426. Δείξατε ὅτι :

$$\prod_{v=1}^n \frac{1}{1 + \frac{m}{v+c}} = \prod_{v=m+1}^{n+m} \left(1 - \frac{m}{v+c} \right).$$

427. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \cdot \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

428. Να μελετηθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὸ ἀπείρογινόμενον :

$$\prod_{v=1}^{\infty} \frac{(v+1)^2}{v(v+2)}.$$

429. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^2 + \beta x - \gamma$ μὲ ρίζας $\rho_1 < \rho_2$, τοῦ ὁποῖου οἱ συντελεστὰς εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν $1 + 2\beta < 4\gamma$. Να ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\rho_1 < \prod_{v=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{v^2} \right) < \rho_2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

I. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγικαὶ ἔννοιαι

§ 197. Δυνάμεις με ἐκθέτην ἄρρητον ἀριθμόν.—Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν ὥρισamen δυνάμεις με ἐκθέτην ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ἥτοι με ἐκθέτην ρητὸν ἀριθμόν καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ιδιότητας αὐτῶν, τὰς ὁποίας καὶ ὑπενθυμίζομεν ἐνταῦθα :

Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ καὶ $x, y \in \mathbb{Q}$, ($\mathbb{Q}$ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε ἰσχύουν αἱ κάτωθι ιδιότητες :

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y} \\ 2) & \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 3) & (\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \\ 4) & (\alpha^x)^y = \alpha^{xy}. \end{array}$$

Ἐπὶ πλέον :

5) Ἐὰν $x < y$, τότε ἰσχύει :

$$\alpha^x \begin{cases} < \alpha^y & \text{διὰ } \alpha > 1 \\ = \alpha^y & \text{διὰ } \alpha = 1 \\ > \alpha^y & \text{διὰ } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Ὡστε : Διὰ $\alpha > 0$ τὸ σύμβολον α^x εἶναι τελείως ὠρισμένον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἐκθέτης x εἶναι τυχὼν ρητὸς ἀριθμός.

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον γενικεύομεν, ἔστω καὶ στοιχειωδῶς, τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως με ἐκθέτην τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμόν. Πρὸς τοῦτο ὀρίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου α^x , ὅταν ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος, ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ ἐξῆς συγκεκριμένον παράδειγμα :

Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὀρίσωμεν τὴν δύναμιν $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν αὐξουσαν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν ρ_n , $n = 1, 2, \dots$ με $\lim \rho_n = \sqrt{2}$, π.χ. τὴν ἀκολουθίαν :

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots, \quad (1)$$

ἢ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸν ἄρρητον $\sqrt{2}$.

Σχηματίζομεν ἀκολουθίαν τῶν ἀκολουθίαν α^{ρ_n} , $n = 1, 2, \dots$ τῶν δυνάμεων με ρητοὺς ἐκθέτας, ἐκτενῶς τὴν ἀκολουθίαν :

$$\alpha^1, \alpha^{1.4}, \alpha^{1.41}, \alpha^{1.414}, \alpha^{1.4142}, \alpha^{1.41421}, \dots \quad (2)$$

Ἐὰν $\alpha > 1$, τότε κατὰ τὴν ιδιότητα 5, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^1 < \alpha^{1.4} < \alpha^{1.41} < \alpha^{1.414} < \alpha^{1.4142} < \dots < \alpha^{1+1} = \alpha^2,$$

ἥτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη, συνεπῶς συγκλίνει (§ 150).

Ἐὰν πάλιν $0 < \alpha < 1$ ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη καὶ ὡς τοιαύτη πάλιν συγκλίνει.

Τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας (2), τὸ ὁποῖον ὡς ἐλέχθη ὑπάρχει $\forall \alpha \in \mathbf{R}^+$, ὀρίζομεν ὡς τὴν δύναμιν $\alpha^{\sqrt{2}}$.

*Ἐστω τώρα x τυχὼν ἄρρητος ἀριθμός, ἔχων, δυνάμει τοῦ θεωρήματος (§ 193), δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα :

$$x = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n} + \dots$$

καὶ α εἰς θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Δεχόμεθα, ἀνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι $\alpha > 1$ καὶ $x > 0$. Θέτομεν :

$$x_n = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \dots + \frac{\psi_n}{10^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία (3) εἶναι μία αὐξουσα ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον $\psi_0 + 1$ (διατί;). Ἐπειδὴ ἕκαστος ὅρος τῆς ἀκολουθίας x_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι ρητὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις α^{x_n} ἔχει μίαν ἐντελῶς καθωρισμένην ἔννοιαν. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha > 1$, ἔχομεν :

$$\alpha^{\psi_0} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10}} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2}} < \dots < \alpha^{\psi_0 + 1}, \quad (4)$$

ἥτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας α^{x_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$ εἶναι αὐξουσα καὶ μάλιστα γνησίως, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τὸν $\alpha^{\psi_0 + 1}$, ἄρα θὰ συγκλίνη πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $\alpha^{\psi_0 + 1}$ (§ 150).

Ἐὰν πάλιν $0 < \alpha \leq 1$ ἡ ἀκολουθία α^{x_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$ εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ κάτω καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι πάλιν συγκλίνουσα.

Ὡστε, διὰ κάθε $\alpha \in \mathbf{R}^+$ ὑπάρχει τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας α^{x_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$

Ἐξ ὀρισμοῦ θέτομεν τώρα :

$$\alpha^x = \lim_{\text{ορσ}} \alpha^{x_n}$$

*Ἦτοι : Ὀρίζομεν ὡς δύναμιν τοῦ α εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην x , τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας :

$$\alpha^{\psi_0}, \alpha^{\psi_0 \psi_1}, \alpha^{\psi_0 \psi_1 \psi_2}, \dots, \alpha^{\psi_0 \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n}, \dots$$

* **Σημειώσεις.** Ἐν προκειμένῳ ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς :

1). Ἐὰν δύο ἀκολουθίαι x_n , x_n^* , $n = 1, 2, \dots$ ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνουν ἀμφότεραι εἰς τὸν ἄρρητον x , τότε αἱ ἀκολουθίαι α^{x_n} , $\alpha^{x_n^*}$, $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνουν ἐπίσης εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ α^x καὶ καλοῦμεν δύναμιν τοῦ α εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην x .

2). Αί γνωσταί ιδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ρητοῦς ἐκθέτας, τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παρούσης παραγράφου, ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ἀρρήτους ἀριθμούς, κατὰ συνέπειαν μέ ἐκθέτας τυχόντας πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἐν τῇ πράξει, ἡ δύναμις a^x , ὅπου x ἄρρητος, ἀντικαθίσταται διὰ τῆς προσεγγισεῶς τῆς a^p , ὅπου p ρητὸς ἐπαρκῶς προσεγγίζων τὸν ἄρρητον ἀριθμὸν x .

Ἔννοια τοῦ λογαρίθμου

§ 198. Λογάριθμος μέ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $a \neq 1$.

Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικά ὅτι: *Διὰ κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν a , διάφορον τῆς μονάδος ($0 < a \neq 1$) καὶ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν $\theta > 0$, ὑπάρχει ἀκριβῶς εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς x (ρητὸς ἢ ἄρρητος), εἰς τὸν ὁποῖον ὑψούμενος ὁ a δίδει τὸν θ ,*

ἥτοι:

$$a^x = \theta \quad (1)$$

Ὁ μονοσημάντως ὀριζόμενος πραγματικὸς ἀριθμὸς x , ὅστις πληροῖ τὴν (1), καλεῖται «**λογάριθμος τοῦ θ ὡς πρὸς βάσιν a** » καὶ συμβολίζεται οὕτω:

$$x = \log_a \theta \quad (2)$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν:

$$\log_a \theta = x \iff a^x = \theta \quad (3)$$

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὀρισμὸν τοῦ λογαρίθμου μέ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $a \neq 1$.

Λογάριθμος ἐνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ θ , ὡς πρὸς βάσιν a ($0 < a \neq 1$), καλεῖται ὁ ἐκθέτης εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις a διὰ νὰ δώσῃ τὸν θ .

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), δίδει:

$$a^{\log_a \theta} = \theta \quad (4)$$

Παραδείγματα:

1) $\log_{10} 100 = 2$, διότι $10^2 = 100$	5) $\log_{10} 0,001 = -3$, διότι $10^{-3} = 0,001$
2) $\log_2 8 = 3$, » $2^3 = 8$	6) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$, » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
3) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$	7) $\log_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$, » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$
4) $\log_{1/3} 9 = -2$, » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	8) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{2}$, » $(3)^{1/2} = \sqrt[3]{3}$

Γενικὴ παρατήρησις. Παντοῦ κατωτέρω, οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν

τούς λογαρίθμους, θα θεωρούνται **θετικοί**. Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὀρίζομεν, οὔτε μεταχειριζόμεθα.

§ 199. Βάσις λογαρίθμων — λογαριθμικὰ συστήματα.— Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς α , ὅστις εἶναι θετικὸς καὶ διάφορος τῆς μονάδος, καλεῖται **βάσις** τῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ ὡς βάσις α δύναται νὰ ληφθῇ οἷοσδήποτε θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθοῦν διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα. Τὰ χρησιμοποιούμενα ὅμως εἶναι τὰ ἑξῆς :

1ον. Τὸ δεκαδικὸν λογαριθμικὸν σύστημα. Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10. Ὁ λογάριθμος ἐνὸς ἀριθμοῦ θ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται **δεκαδικὸς λογάριθμος** καὶ συμβολίζεται ἀπλῶς $\log \theta$ ἀντὶ $\log_{10} \theta$.

Οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι καλοῦνται καὶ «*κοινοὶ λογάριθμοι*» ἢ «*Briggs λογάριθμοι*»*) καὶ χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς τὰ στοιχειώδη μαθηματικὰ διὰ πρακτικοὺς κυρίως σκοποὺς.

2ον. Τὸ Νεπέριον λογαριθμικὸν σύστημα).** Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς $e = 2,71828 \dots$, ὅστις, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς ἐπόμενον κεφάλαιον, εἶναι τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v, v=1,2,\dots$

Ὁ λογάριθμος ἐνὸς ἀριθμοῦ θ εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ καλεῖται «*νεπέριος λογάριθμος*»**) ἢ «*φυσικὸς λογάριθμος*» τοῦ θ καὶ συμβολίζεται διεθνῶς μὲ « $\log \theta$ » εἴτε « $\ln \theta$ » παραλειπομένου τοῦ δείκτου e , ἥτοι καὶ εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ἀντὶ $y = \log_e \theta$ γράφομεν $y = \log \theta$ ἢ $y = \ln \theta$. Οἱ νεπέριοι λογάριθμοι χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς θεωρητικὰς μελέτας καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ ὡς ἄνω σύστημα δεσπάζει τῶν ἄλλων συστημάτων κυρίως εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $\alpha \neq 1$ προκύπτει ὅτι εἰς κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς y , ὅστις ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha^y = x.$$

Τοιοῦτοτρόπως ὀρίζεται μία συνάρτησις, ἡ $y = f(x) \equiv \log_{\alpha} x$ μὲ πεδῖον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\mathbf{R}^+$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδῖον τιμῶν τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἥτοι :

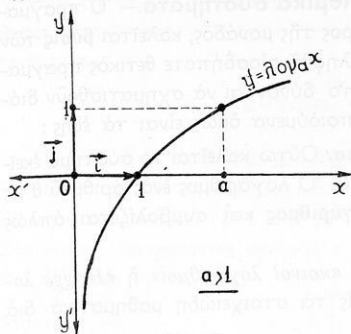
$$\mathbf{R}^+ \ni x \longrightarrow y = f(x) \equiv \log_{\alpha} x \in \mathbf{R}.$$

Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις $f: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ ὀνομάζεται **λογαριθμικὴ συνάρτησις** καὶ ὅπως θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν αὕτη εἶναι «*ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $x = a^y$* ».

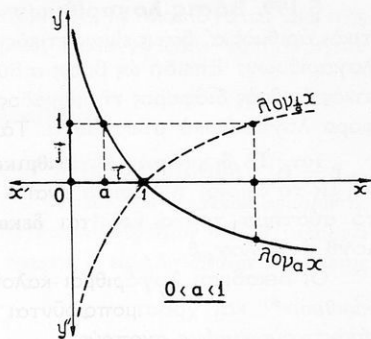
* Πρὸς τιμὴν τοῦ Ἀγγλοῦ Μαθηματικοῦ Henry Briggs (1556–1630), ὅστις πρῶτος ἔλαβεν ὡς βάσιν τῶν λογαρίθμων τὸν ἀριθμὸν 10.

** Πρὸς τιμὴν τοῦ John Napier (1550–1617), ὅστις ἐπενόησε πρῶτος τοὺς λογαρίθμους καὶ ἔλαβεν ὡς βάσιν τὸν ἀριθμὸν $e = 2,7182 \dots$

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $y = \log_a x$ δίδεται, κατὰ πρόχειρον σχεδίασιν, εἰς τὰ κάτωθι σχήματα.



Σχ. 13



Σχ. 14

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω γραφικῶν παραστάσεων ἐννοοῦμεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς :

- 1). Ἐκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνου θετικοῦ ἀριθμοῦ.
- 2). Ἐκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἓνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμόν.
- 3). Ὅταν ἡ βάση συστήματος τινὸς λογαρίθμων εἶναι > 1 , οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους θετικούς, ἐνῶ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, τὸ ἀντίθετον δὲ συμβαίνει, ὅταν ἡ βάση εἶναι < 1 .
- 4). Ὅταν ἡ βάση a εἶναι > 1 , αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δὲ $a < 1$, αὐξανόμενου τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττοῦται ὁ λογάριθμος.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$a > 1$	$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$ καὶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$ καὶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὰ ἀνωτέρω σχήματα (Σχ. 13 καὶ Σχ. 14).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

430. Προσδιορίσατε τὸν x ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

- 1) $\log_4 x = 3$, 2) $\log x = -3$, 3) $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = x$, 4) $\log_{\sqrt{3}} (9 \sqrt{3}) = x$,
- 5) $\log_{1/2} \frac{27}{8} = x$, 6) $\log_8 x = -\frac{7}{3}$, 7) $\log_{2a} \sqrt{2a} = x$, 8) $\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{32}} \right) = x$.

431. Εύρετε την άγνωστον βάσιν $x \in \mathbf{R}^+$, $x \neq 1$, εκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

$$1) \log_x 25 = 2, \quad 2) \log_x 16 = \frac{2}{3}, \quad 3) \log_x 5 = \frac{1}{3}, \quad 4) \log_x \left(\frac{81}{16}\right) = 4.$$

432. 'Υπολογίσατε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως τὰς :

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0,01.$$

433. 'Υπολογίσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις :

$$\begin{aligned} \alpha) & \frac{\log_3 81 - \log_8 64}{\log_{0,5} 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 4 \sqrt{2}} \\ \beta) & \frac{\log_3 9 \sqrt{3} : \log_{49} 7}{\log_5 \frac{1}{125} - \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 27 \cdot \log_{1/2} 64} \\ \gamma) & \frac{-5 + \log_7 (\log_{2a} 2a) - 4 \log_a \sqrt{a}}{\log_3 27 + 7 \cdot \log_{0,1} 10 + \log 0,001} \end{aligned}$$

434. 'Εάν $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \neq 1$ καὶ καλέσωμεν : $x = \log \sqrt{\alpha}$, $y = \log_a \alpha^2$, $z = \log_a \alpha^4$, νὰ ἀποδείξηθῃ ὅτι :

$$xyz = x + y + z + 2.$$

435. Νὰ ἀποδείξηθῇ ὅτι ὁ $\log 3$ εἶναι ἀριθμὸς ἄρρητος (= ἀσύμμετρος).

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

§ 200. Ἰδιότης I.— Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τὸ μηδέν, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς, ἥτοι :

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\log_a a = 1} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ὡς ἐκθέτου, ἔχομεν :

$$\alpha^0 = 1 \implies \log_a 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^1 = \alpha \implies \log_a \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

§ 201. Ἰδιότης II.— Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν ὡς πρὸς βάσιν a ($0 < a \neq 1$), ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο (θετικοί) ἀριθμοὶ καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν a . Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \iff x = \log_a \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \iff y = \log_a \theta_2. \quad (1)$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \eta \quad \alpha^{x+y} = \theta_1 \theta_2.$$

‘Αλλά ή τελευταία ισότης δεικνύει ότι :

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

“Ωστε :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < a \neq 1 \quad \Rightarrow \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

Πόρισμα.—Εάν $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει :

$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \dots \cdot \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \dots + \log_a \theta_n$$

ή όπερ τὸ αὐτό :

$$\log_a \left(\prod_{k=1}^n \theta_k \right) = \sum_{k=1}^n \log_a \theta_k$$

‘Η απόδειξις εύκολος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας έπαγωγῆς.

Παράδειγμα. Έχομεν π.χ. $\log (7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = \log 7 + \log 5 + \log 4 + \log 3$

καί αντίστροφως : $\log 5 + \log 3 + \log 6 + \log 2 = \log (5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2) = \log 180$.

§ 202. ‘Ιδιότης III.—Ο λογάριθμος πηλίκου δύο αριθμῶν (θετικῶν) ὡς πρὸς βάσιν a ($0 < a \neq 1$), ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μείον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

‘Απόδειξις. Έστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο αριθμοί (θετικοί) καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν a . Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$a^x = \theta_1 \Leftrightarrow x = \log_a \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad a^y = \theta_2 \Leftrightarrow y = \log_a \theta_2.$$

‘Εξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$a^x : a^y = \theta_1 : \theta_2 \quad \eta \quad a^{x-y} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

‘Αλλά ή τελευταία ισότης δεικνύει ότι :

$$\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = x - y = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

“Ωστε :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < a \neq 1 \quad \Rightarrow \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

Οὕτως ἔχομεν π.χ. $\log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5$

καί ἀντιστρόφως : $\log 7 - \log 13 = \log 7/13$.

Πόρισμα I.—Οἱ ἀντίστροφοι αριθμοί ἔχουν ἀντιθέτους λογαρίθμους.

Πράγματι :

$$\log_a \left(\frac{1}{\theta} \right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

Πόρισμα II.— Δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι τότε, και μόνον τότε, αν οι λογάριθμοι αυτών, ως προς την αυτήν βάση, είναι ίσοι, ήτοι :

$$\log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$$

‘Η απόδειξις εύκολος.

‘Αξιόλογος παρατήρησις. Δέον νά ἔχωμεν πάντοτε ὑπ’ ὄψιν ὅτι :

$$\log_a (\theta_1 + \theta_2) \neq \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a (\theta_1 - \theta_2) \neq \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2 \neq \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta_1 : \log_a \theta_2 \neq \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

§ 203. ‘Ιδιότης IV.— ‘Ο λογάριθμος οἰασδήποτε δυνάμεως ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.

‘Απόδειξις. Ἐστω ὅτι εἶναι $\log_a \theta = x$, ἔνθα $\theta \in \mathbb{R}^+$ καὶ $0 < a \neq 1$. Ἐὰν θ^k , $k \in \mathbb{R}$, εἶναι μία δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ θ , τότε, ἐπειδὴ $\theta = a^x$, ἔχομεν $\theta^k = (a^x)^k = a^{kx}$.

Ἐκ ταύτης, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, προκύπτει :

$$\log_a \theta^k = k \cdot x = k \cdot \log_a \theta.$$

“Ωστε :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R} \quad \left\| \begin{array}{l} 0 < a \neq 1 \end{array} \right\| \implies \log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$$

§ 204. ‘Ιδιότης V.— ‘Ο λογάριθμος οἰασδήποτε ρίζης, μὲ ὑπόρριζον θετικόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὑπόρριζου διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

‘Απόδειξις. Ἡ ἀνωτέρω ιδιότης ἀποτελεῖ πόρισμα τῆς προηγουμένης ιδιότητος. Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα $\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$, νὰ τεθεῇ π.χ. $k = \frac{1}{v}$.

Λαμβάνομεν τότε :

$$\log_a \theta^{\frac{1}{v}} = \log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta.$$

“Ωστε :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{N} \quad \left\| \begin{array}{l} 0 < a \neq 1 \end{array} \right\| \implies \log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta$$

$$\text{Οὕτως ἔχομεν π.χ. } \log \sqrt[3]{205} = \frac{1}{3} \log 205$$

$$\text{καὶ ἀντιστρόφως : } \frac{1}{5} \log 1014 = \log \sqrt[5]{1014}.$$

§ 205. Ίδιότης VI.—'Εάν ή βάσις a τών λογαρίθμων εἶναι > 1 , οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικούς λογαρίθμους, ἐνῶ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a \theta > 0 \iff \theta > 1 \\ \log_a \theta < 0 \iff 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

Ἀποδείξεις. Ἐστω ὅτι $\log_a \theta > 0$: ἐκ τῆς $a > 1$ προκύπτει :

$$a^{\log_a \theta} > 1^{\log_a \theta}$$

Ἐξ οὗ : $\theta > 1$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω $\theta > 1$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ $a^{\log_a \theta} > 1^{\log_a \theta}$. Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ $a > 1$, προκύπτει : $\log_a \theta > 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ δευτέρα ἰσοδυναμία.

Πόρισμα.—Τῆς βάσεως a τών λογαρίθμων οὐσης > 1 , ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μεγαλύτερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } a > 1, \text{ τότε : } \log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$$

§ 206. Ίδιότης VII.—'Εάν ή βάσις a τών λογαρίθμων εἶναι : $0 < a < 1$, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους, ἐνῶ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικούς λογαρίθμους, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a \theta < 0 \iff \theta > 1 \\ \log_a \theta > 0 \iff 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

Ὑποδείξεις. Παρατηρήσατε ὅτι : $\log_a \theta = -\log_{1/a} \theta$ καὶ ἐφαρμόσατε ἀκολουθῶς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Πόρισμα.—Τῆς βάσεως a τών λογαρίθμων οὐσης θετικῆς καὶ μικροτέρας τῆς μονάδος, ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μικρότερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως, ἥτοι :

$$\text{'Εάν } 0 < a < 1, \text{ τότε : } \log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καθίσταται φανερόν, ὅτι μετὰ τὴν βοήθειαν ἐνὸς «*λογαριθμικοῦ πίνακος*», περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω, δυνάμεθα νὰ ἀπλοποιήσωμεν ἕνα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν καὶ τοῦτο διότι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα γινόμενον μετὰ ἕνα ἄθροισμα, ἕνα πηλίκον μετὰ μίαν διαφορὰν, μίαν ἐξαγωγήν ρίζης μετὰ μίαν διαίρεσιν κ.τ.λ.

Εἰς τὴν τελευταίαν μάλιστα περίπτωση ὁ λογαριθμικὸς ὑπολογισμὸς εἶναι ἀναπόφευκτος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ριζικοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων

1η. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ $\log_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right)$ ὑπὸ μορφήν ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος λογαρίθμων.

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\log_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right) = \log_3 (3\alpha^2) - \log_3 (5\beta \cdot \sqrt[4]{\gamma}) = \log_3 3 + \log_3 \alpha^2 - (\log_3 5 + \log_3 \beta + \log_3 \sqrt[4]{\gamma})$$

$$= 1 + 2 \log_3 \alpha - \log_3 5 - \log_3 \beta - \frac{1}{4} \log_3 \gamma.$$

2α. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τοῦ

$$\log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}}, \quad \text{ἐνθα } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Λύσις. Ἐχομεν :

$$\log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}} = \log (3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \log (5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}) =$$

$$= \left[\log 3 + 3 \log \alpha + \frac{1}{4} (2 \log \beta + \log \gamma) \right] - \left[\log 5 + 2 \log \beta + \frac{1}{3} (2 \log \alpha + \log \beta + 2 \log \gamma) \right]$$

$$= \log 3 - \log 5 + \frac{7}{3} \log \alpha - \frac{11}{6} \log \beta - \frac{5}{12} \log \gamma.$$

$$3\eta. \text{ Ἐὰν } \log_e i = -\frac{Rt}{L} + \log_e I \implies i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα γράφεται :

$$\log_e i - \log_e I = -\frac{Rt}{L} \quad \eta \quad \log_e \frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ λογαρίθμου ἔχομεν ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος :

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I}, \quad \text{ἐξ οὗ : } i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

4η. Ἐὰν $\alpha > \beta > 0$ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, δεῖξτε ὅτι :

$$\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta).$$

Ἀπόδειξις : Ἐχομεν :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \quad \eta \quad (\alpha - \beta)^2 = 9\alpha\beta \quad \eta \quad \alpha - \beta = 3 \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\eta \quad \frac{\alpha - \beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Τότε ὁμως θὰ ἔχωμεν καί :

$$\log \left(\frac{\alpha - \beta}{3} \right) = \log \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta).$$

5η. Νὰ δεიχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος :

$$\frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log (\sqrt{2} - 1).$$

Λύσις. Παρατηρούμεν ότι : $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$.

$$\begin{aligned} \text{'Αρα: } \frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) &= \frac{7}{16} \log (\sqrt{2} + 1)^2 - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \\ &= \frac{7}{8} \log (\sqrt{2} + 1) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = -\frac{25}{8} \log (\sqrt{2} + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

'Αλλά κατά τὸ πόρισμα I § 202 ἔχομεν :

$$-\log (\sqrt{2} + 1) = \log \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) = \log (\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

'Η (1), λόγω τῆς (2), γίνεται :

$$\frac{7}{16} \log (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \log (\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log (\sqrt{2} - 1).$$

§ 207. Μετάβασις ἐξ ἑνὸς λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς ἕτερον (ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων).— Αἱ ἀνωτέρω ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἀναφέρονται ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν. Πολλάκις ὅμως παρουσιάζονται, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, λογάριθμοι ὡς πρὸς διαφορετικὰς βάσεις, ὅτε ὁ λογι-
σμός, ἂν ὄχι ἀδύνατος, δὲν εἶναι εὐκολος καὶ διὰ τοῦτο ἐκείνῳ τὸ ὁποῖον ἐπιδιώ-
κομεν, εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, εἶναι : πάντες οἱ λογάριθμοι νὰ ἀναφερθοῦν ὡς πρὸς
τὴν αὐτὴν βᾶσιν.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κάτωθι θεωρήματος :

Θεώρημα.— 'Εὰν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν
τινὰ α , εὐρίσκομεν τὸν λογάριθμόν του, ὡς πρὸς νέαν βάσιν β , ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν
γνωστὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν α) διὰ τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως β , ὡς
πρὸς τὴν παλαιάν, ἥτοι :

$\begin{aligned} \forall \quad \theta \in \mathbb{R}^+ \\ \theta < \alpha \neq 1 \\ \theta < \beta \neq 1 \end{aligned}$	$\implies \log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$	(τ)
--	---	-----

'Απόδειξις. "Εστω x ὁ λογάριθμος τοῦ θ , ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν β , ἥτοι
ἔστω ὅτι :

$$\log_{\beta} \theta = x. \quad (1)$$

Τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, θὰ ἔχωμεν ;

$$\beta^x = \theta. \quad (2)$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (2), ὡς πρὸς βάσιν
 α , εὐρίσκομεν :

$$x \log_{\alpha} \beta = \log_{\alpha} \theta, \quad \text{ἐξ οὗ : } x = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}.$$

'Η τελευταία ἰσότης, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ (1), γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

Παρατήρησις. 'Ο τύπος (τ) παρέχει τὸν κανόνα εὐρέσεως τῶν λογαρίθμων
ὡς πρὸς τὸ λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν β , ἐὰν φυσικὰ γνωρίζωμεν τοὺς λο-

γαρίθμους ως πρὸς τὸ σύστημα μὲ βάσιν τὸ α. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑπάρχουν λογαριθμικοὶ πίνακες ὡς πρὸς βάσιν 10, δυνάμεθα, τῇ βοήθειᾳ τοῦ τύπου (τ) χωρὶς τὴν σύνταξιν νέων πινάκων, νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον οἰοῦδη-ποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς οἰανδήποτε βάσιν θέλομεν.

Ὁ τύπος (τ), ἐὰν ληθῇ $\alpha = 10$, δίδει ὡς πρὸς βάσιν 10 ὑπάρχουν πίνακες, γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta} \quad (\tau')$$

Πόρισμα.—Τὸ γινόμενον τῶν λογαρίθμων δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν διαφόρων τῆς μονάδος ἐκατέρου ἔχοντος βάσιν τὸν ἕτερον εἶναι ἡ μονάς.

Πράγματι, διὰ $\theta = \alpha$ ὁ τύπος (τ) δίδει :

$$\log_{\beta} \alpha = \frac{\log_{\alpha} \alpha}{\log_{\alpha} \beta} = \frac{1}{\log_{\alpha} \beta}, \text{ καθ' ὅσον } \log_{\alpha} \alpha = 1.$$

Ὁθεν :

$$\log_{\alpha} \beta \times \log_{\beta} \alpha = 1$$

Ἀξιοσημείωτος ισότης.

Ὁ τύπος (τ), τῇ βοήθειᾳ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος, γράφεται :

$$\log_{\beta} \theta = \log_{\alpha} \theta \times \log_{\beta} \alpha$$

Σημ. Μνημονικὸς κανὼν : $\frac{\theta}{\beta} = \frac{\theta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐφαρμογὰί : 1η. Ἐὰν $\log_2 = 0,301$ καὶ $\log_5 = 0,698$ νὰ εὕρεθῇ ὁ $\log_{250}$ καὶ ὁ $\log_{250}$.

Λύσις : α) $\log_{250} = \log(2 \cdot 5^3) = \log 2 + 3 \log 5 = 0,301 + 3 \cdot 0,698 = 0,301 + 2,094 = 2,395$.

$$\beta) \log_{250} = \frac{\log_{250}}{\log 2} = \frac{2,395}{0,301} = 7,956.$$

2α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$k = \frac{(\log_2 5 + \log_5 5) \cdot \log_5 5}{\log_2 5 \cdot \log_5 5}$$

Λύσις : Ἐχομεν, δυνάμει τοῦ πορίσματος τῆς § 207 :

$$k = \frac{\left(\frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_5 3} \right) \cdot \frac{1}{\log_5 6}}{\frac{1}{\log_5 2 \cdot \log_5 3}} = \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 6} = 1.$$

§ 208. Συλλογάρριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ.—Καλεῖται συλλογάρριθμος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρὸς βάσιν α , ὁ λογάριθμος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ θ , ἥτοι τοῦ $\frac{1}{\theta}$ ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ σημειοῦται οὕτω :

συλλογ $_{\alpha}$ θ .

Έχουμε κατά ταῦτα :

$$\text{συλλογα } \theta = \log_a \frac{1}{\theta} = \log_a 1 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

Έντεῦθεν ἔπεται ἡ πρότασις :

Ὁ συλλογάριθμος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ θ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ θ .

Ὡστε :

$$\boxed{\text{συλλογα } \theta = \log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta} \quad (1)$$

Ἡ εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων ἐπιτρέπει νὰ ἀντικαθιστῶμεν μίαν διαφορὰν λογαρίθμων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των. Οὕτως ἔχομεν :

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \theta_1 + \text{συλλογα } \theta_2.$$

Σημ. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅτι :

$$\boxed{\log_a \theta + \text{συλλογα } \theta = 0} \quad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

436. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ιδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν :

$$1) \log_3 3x \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}, \quad 2) \log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{4 \sqrt{x} \cdot y^3}, \quad 3) \log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{18} \sqrt{2}},$$

$$4) \log \frac{3(x^2 - y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, \quad 5) \log \frac{5x^3 \sqrt[4]{y^2 z}}{7y^2 \cdot \sqrt{x^2 y z^2}}.$$

437. Εὑρετε τὴν τιμὴν τοῦ : $\log_2 \sqrt{32 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt[5]{2}}.$

438. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

$$1. \log 3 + 2 \log 4 - \log 12 = 2 \log 2$$

$$2. 3 \log 2 + \log 5 - \log 4 = 1$$

$$3. \frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{5} \log 32 = 2 \log 2 + \log 5$$

$$4. \log_\beta \frac{\alpha}{\beta \gamma} = \log_\beta \alpha + \text{συλλογα } \gamma - 1, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+, \beta \neq 1.$$

439. Ἐὰν $\log 2 = 0,30103$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

440. Δείξατε ὅτι : $x^{\log y} = y^{\log x}.$

441. Ἐὰν α, β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος, νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$y = \log (\alpha^2 - 1) + \log (\beta^2 - 1) - \log [(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2].$$

442. 'Εάν $\log_2 = 0,301$ και $\log_{14} = 1,146$ εύρετε τους έπομένους λογαρίθμους :

• $\log_{28}$, $\log_8$, $\log_5$, $\log_{56}$, $\log_{32}$, $\log \frac{4}{7}$, $\log \sqrt[5]{64}$, $\log_{35}$, $\log \sqrt[3]{70.000}$.

443. Δείξατε ότι : $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma \cdot \log_{\gamma} \alpha = 1$ διὰ κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$.

444. 'Εάν Ισχύη : $\log_x y = \log_y z \cdot \log_z x$, τότε θα είναι : $x = y$ ή $x = \frac{1}{y}$.

445. Γνωρίζοντας, ότι $\log 2 = \alpha$ και $\log 15 = \beta$, νά υπολογισθούν συναρτήσει των α και β αί παραστάσεις :

$$1) \log_3 \sqrt[5]{7,2}, \quad 2) \log \sqrt[5]{\frac{5^4}{3} \sqrt[4]{6}}.$$

446. 'Εάν $\log(x^2 y^3) = \alpha$ και $\log x - \log y = \beta$ νά έκφραστούν οί $\log x$ και $\log y$ συναρτήσει των α και β .

447. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ και θέσωμεν : $x = \log_{\alpha}(\beta \gamma)$, $y = \log_{\beta}(\gamma \alpha)$, $z = \log_{\gamma}(\alpha \beta)$ νά αποδειχθῇ ότι :

$$xyz = x + y + z + 2.$$

448. 'Εάν είναι $\log \alpha - \log \beta > 0$, τί συνάγεται διὰ τους αριθμούς α και β ;

449. Νά εύρεθῇ ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης :

$$2 (\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9.$$

450. 'Ομοίως :

$$\log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0.$$

451. 'Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$, διάφοροι ἀλλήλων και $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$, νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = 1.$$

452. 'Εάν οί α, β, γ εἶναι θετικοί και κατέχουν ἀντιστοίχως τὰς τάξεις μ, ν, ρ εἰς μίαν γεωμετρικὴν και μίαν ἀρμονικὴν πρόοδον, δείξατε ὅτι :

$$\alpha(\beta - \gamma) \log \alpha + \beta(\gamma - \alpha) \log \beta + \gamma(\alpha - \beta) \log \gamma = 0.$$

453. Νά εύρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v, \quad \text{μὲ γενικὸν ὄρον : } \alpha_v = \log 3^v.$$

454. 'Εάν οί αριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὄροι γεωμετρικῆς προόδου, νά αποδειχθῇ ὅτι οί λογάριθμοι ἐνὸς αριθμοῦ (θετικοῦ) ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὄροι ἀρμονικῆς προόδου.

455. 'Εάν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, διάφοροι τοῦ α , ὅπου $0 < \alpha \neq 1$, και εἶναι :

$$y = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} x}}, \quad z = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} y}}$$

τότε θα εἶναι :

$$x = \alpha^{\frac{1}{1 - \log_{\alpha} z}}.$$

456. 'Αριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὀρος εἶναι ὁ $\log \alpha$ και ὁ δεύτερος ὀρος τῆς ὁ $\log \beta$. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα Σ_v τῶν n πρώτων ὄρων τῆς εἶναι :

$$\Sigma_v = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\beta^v (v-1)}{\alpha^v (v-3)}.$$

457. 'Εάν $x, y \in \mathbf{R}^+$, δείξατε ὅτι ἰσχύει :

$$x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x.$$

458. 'Εάν $\alpha \in \mathbf{R}^+$ και $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ τοιοῦτοι, ὥστε $\mu > \nu$, νά αποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{\mu} \cdot \log (1 + \alpha^{\mu}) < \frac{1}{\nu} \cdot \log (1 + \alpha^{\nu}).$$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

§ 209. Όρισμός.— Καλεΐται δεκαδικός λογάριθμος αριθμού τινός $\theta > 0$, ό λογ₁₀θ, ήτοι ό λογάριθμος αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10.

Συνήθως τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ $\theta > 0$ καλοῦμεν καὶ ἀπλῶς λογάριθμον τοῦ θ καὶ ἀντὶ τοῦ συμβόλου λογ₁₀θ χρησιμοποιοῦμεν τό : λογθ (ἄνευ δείκτου).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ συμβολισμοῦ ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\boxed{\log \theta = x \iff 10^x = \theta} \quad (1)$$

Οὕτως, ἔχομεν π.χ.

$$\log 100 = \log 10^2 = 2, \quad \log 1000 = \log 10^3 = 3, \quad \log 0,01 = \log 10^{-2} = -2,$$

$$\log \sqrt[5]{10^3} = \log 10^{3/5} = \frac{3}{5}.$$

Γενικῶς : Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν ρητὸν (σύμμετρον) ἔχει λογάριθμον τὸν ρητὸν τοῦτον ἐκθέτην, ἥτοι :

$$\log 10^p = p, \quad \forall p \in \mathbb{Q}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $p \in \mathbb{Z}$, ό λογάριθμος τοῦ 10^p εἶναι ό ἀκέραιος ἀριθμὸς p . Οὕτως ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

x	...	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
λογ x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι δὲν εἶναι σύμμετροι δυνάμεις τοῦ 10, εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι. Πράγματι, ἂν θ εἶναι εἰς τοιοῦτος ἀριθμὸς καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι οὗτος ἔχει λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμὸν π.χ. τὸν $\frac{\mu}{\nu}$, ἔνθα $\mu \in \mathbb{Z}$,

$\nu \in \mathbb{N}$, δηλ. ὅτι εἶναι $\log \theta = \frac{\mu}{\nu}$, τότε $10^{\frac{\mu}{\nu}} = \theta$, ἄτοπον, λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως διὰ τὸν θ .

Οὕτω π.χ. ό λογ35 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, διότι ἂν ᾖτο : $\log 35 = \frac{\mu}{\nu}$,

ὅπου $\mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε θὰ εἴχομεν : $10^{\frac{\mu}{\nu}} = 35$ ἢ $2^\mu \cdot 5^\mu = 5^\nu \cdot 7^\nu$.

Ἡ τελευταία ὁμῶς ἰσότης εἶναι ἀδύνατος (διατί;).

Ἄρα ό λογ35 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ὡστε : Οἱ λογάριθμοι ὄλων τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν, ἐκτὸς τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10, δὲν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκριβῶς, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος (συνήθως ὑπολογίζονται κατὰ προσέγγισιν 0,00001).

Γενική παρατήρησης. Ἐν τοῖς ἐπομένοις γίνεται λόγος μόνον περὶ δεκαδικῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις $\alpha = 10 > 1$, προκύπτει ἐκ τῆς ιδιότητος VI (§ 205) ὅτι: οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἔχουν θετικούς δεκαδικούς λογαρίθμους, οἱ δὲ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν ἀρνητικούς λογαρίθμους.

§ 210. Χαρακτηριστικὸν καὶ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν $\log 557$.

Ἐπειδὴ $10^2 < 557 < 10^3$

θὰ ἔχωμεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριῶν μελῶν :

$$2 < \log 557 < 3.$$

Ἦτοι : $\log 557 = 2, \dots$

Δηλαδή : $\log 557 = 2 + d$, ὅπου d θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

Τὸ ἀκέραιον μέρος (εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 2) καλεῖται «**χαρακτηριστικόν**» τοῦ λογαρίθμου, ὁ δὲ θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος δεκαδικὸς ἀριθμὸς d καλεῖται «**δεκαδικὸν μέρος**» τοῦ λογαρίθμου.

Τὸ χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου, π.χ. τοῦ $\log \theta$, παρίσταται συμβολικῶς οὕτω : $[\log \theta]$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνὸς λογαρίθμου, καθίσταται φανερόν ὅτι ὡς χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου ὀρίζομεν τὸν *μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογάριθμος αὐτός.*

Οὕτως, ἔχομεν :

Ἐὰν $\log \alpha = 5,03426$, τότε $[\log \alpha] = 5$ καὶ $d = 0,03426$.

Ἐὰν $\log \beta = 0,63752$, τότε $[\log \beta] = 0$ καὶ $d = 0,63752$.

Ἐὰν $\log \gamma = -2,32715$, τότε $[\log \gamma] = -3$, διότι : $-3 < -2,32715 < -2$.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι μηδὲν μόνον διὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ 10. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ δεκαδικὸν μέρος λαμβάνεται ὡς θετικόν.

Ὡστε :

Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς.

Ἐὰν d εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ $\log \theta$ καὶ $[\log \theta]$ τὸ χαρακτηριστικόν, τότε ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\log \theta = [\log \theta] + d$$

προκύπτει :

$$d = \log \theta - [\log \theta]$$

Οὕτως ἔχομεν :

Ἐὰν $\log \theta = -3,45217$, τότε $[\log \theta] = -4$ καὶ $d = -3,45217 - (-4) = 0,54783$.

§ 211. Τροπὴ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου εἰς ἡμιαρνητικόν.— Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν μικρότερον τῆς μονάδος

είναι άρνητικοί, οί δέ τοιούτοι λογάριθμοι δέν εΐναι εϋχρηστοί εις τόν λογισμόν, διὰ τούτο τρέπομεν τούς άρνητικούς λογάριθμους εις «ήμιαρνητικούς», δηλαδή εις λογάριθμους τών όποίων **μόνον** τó άκέραιον μέρος (χαρακτηριστικόν) εΐναι άρνητικόν, τó δέ δεκαδικόν θετικόν.

Ή τροπή αύτη γίνεται ώς έξής :

Έστω π.χ. ό (όλως) άρνητικός λογάριθμος άριθμού τινός

$$\delta - 2,54327 \quad \text{ήτοι} \quad \delta : - 2 - 0,54327.$$

Έάν εις αυτόν προσθέσωμεν -1 και $+1$, όπερ δέν τόν μεταβάλλει, λαμβάνομεν :

$$-2 - 1 + 1 - 0,54327 = -3 + (1 - 0,54327) = -3 + 0,45673.$$

Όστε εΐναι : $-2,54327 = -3 + 0,45673.$

Άλλά τó άθροισμα τού άκεραίου άρνητικού μέρους -3 και τού δεκαδικού $0,45673$ συμφωνοϋμεν νά τó γράφωμεν, ώς έξής : $\bar{3},45673$ · δηλαδή γράφομεν τó πλην υπεράνω τού άκεραίου μέρους, ίνα δηλώσωμεν, ότι τούτο **μόνον** εΐναι άρνητικόν. Υπό τήν μορφήν αύτήν φαίνεται, ότι χαρακτηριστικόν τού λογαρίθμου εΐναι τó άκέραιον μέρος -3 , διότι ό λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξύ τών διαφοχικών άκεραίων -3 και -2 και δεκαδικόν μέρος τού λογαρίθμου, τó αναγραφόμενον δεκαδικόν μέρος, διότι τούτο εΐναι ή διαφορά, ή όποία προκύπτει, άν άπό τόν λογάριθμον $-3 + 0,45673$ άφαιρεθΐ τó χαρακτηριστικόν αύτου -3 .

Όμοίως έχομεν :

$$\begin{aligned} -3,75632 &= -3 - 0,75632 = -3 - 1 + 1 - 0,75632 = -4 + (1 - 0,75632) = \\ &= -4 + 0,24368 = \bar{4},24368. \end{aligned}$$

Έκ τών άνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν τόν κάτωθι κανόνα :

Κανών. Διά νά τρέψωμεν άρνητικόν λογάριθμον εις ήμιαρνητικόν, αξΐζανομεν τήν απόλυτον τιμήν τού άκεραίου κατά 1 και γράφομεν τó — υπεράνω τού εύρισκομένου άθροίσματος, δεξιά δέ τούτον γράφομεν ώς δεκαδικά ψηφία τās διαφοράς τών δεκαδικών ψηφίων τού δοθέντος, τού μέν τελευταίου (σημαντικού) άπό τού 10 τών δέ άλλων άπό τó 9 .

Ούτως, έχομεν π.χ.

Έάν $\log \theta = -3,85732$, θά έχωμεν : $\log \theta = \bar{4},14268.$

Έάν $\log \theta = -2,35724$, θά έχωμεν : $\log \theta = \bar{3},64276.$

§ 212. Ίδιότητες τών δεκαδικών λογαρίθμων.— α'). Τó χαρακτηριστικόν ένός λογαρίθμου εΐναι ό εκθέτης τής μεγαλυτέρας άκεραίας δυνάμεως τού 10 , ή όποία δέν υπερβαίνει τόν άριθμόν.

Άπόδειξις. Πράγματι· έάν 10^k εΐναι ή μεγαλυτέρα άκεραία δύναμις τού 10 ή μή υπερβαίνουσα τόν (θετικόν) άριθμόν θ , τότε θά έχωμεν :

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Έξ ου :

$$k \leq \log \theta < k + 1.$$

Άρα ό $\log \theta$ ή θά εΐναι ίσος μέ k ή μέ $k + d$, όπου $0 < d < 1$.

Όθεν τó χαρακτηριστικόν τού λογαρίθμου θ εΐναι ίσον πρός k .

β'). Το χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους αὐτοῦ, ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς θ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐὰν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ θ ἔχη k ψηφία, τότε ὁ θ περιέχεται μεταξὺ 10^{k-1} καὶ 10^k , ἥτοι θ ἔχουμεν :

$$10^{k-1} \leq \theta < 10^k.$$

Ἐξ οὗ : $(k-1) \leq \log \theta < k.$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log \theta$ εἶναι ἴσον πρὸς $(k-1)$.

Οὕτω π.χ. $\log 235 = 2, \dots$

$\log 5378,4 = 3, \dots$

$\log 3,748 = 0, \dots$

γ'). Το χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος γεγραμμένου ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅση εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς θ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος ($0 < \theta < 1$). Ἐὰν k εἶναι ἡ θέσις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν δεκαδικὴν μορφήν τοῦ θ , θ εἶναι :

$$10^{-k} \leq \theta < 10^{-k+1}$$

Ἐξ οὗ : $\log 10^{-k} \leq \log \theta < \log 10^{-k+1}$

ἢ $-k \leq \log \theta < -k+1.$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log \theta$ εἶναι ἴσον πρὸς $-k$.

Οὕτω π.χ. $\log 0,00729 = \bar{3}, \dots$

$\log 0,27508 = \bar{1}, \dots$

$\log 0,08473 = \bar{2}, \dots$

Παρατήρησις. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων δυνάμεθα νὰ εὕρισκωμεν νοερῶς (ἀπὸ μνήμης) τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως τῶρα ἐκ τῶν ἰδιοτήτων β' καὶ γ' ἔπεται ὅτι :

δ'). Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ (θετικοῦ) x εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ μηδέν, τότε ὁ ἀριθμὸς x ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ ἔν ἀκόμῃ. Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ x εἶναι ἡμιαρνητικὸς, τότε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x εἶναι τὸ μηδέν, τὸ δὲ πρώτον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ x μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν κατέχει τάξιν ἴσην μετὰ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Οὕτως, ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι $\bar{2}$, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς τῆς μορφῆς $0,0y_1y_2y_3y_4\dots$, ἔνθα $1 \leq y_1 \leq 9$.

ε'). 'Εάν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10^n , $n \in \mathbb{N}$, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ n μονάδας.

'Απόδειξις. Ἐστω ὁ θετικὸς ἀριθμὸς θ μὲ $\log \theta = y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$.

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν θ ἐπὶ 10^n , $n \in \mathbb{N}$ ἔχομεν τότε :

$$\begin{aligned} \log (10^n \cdot \theta) &= \log 10^n + \log \theta = n + \log \theta = n + y_0, y_1 y_2 y_3 \dots = \\ &= (y_0 + n), y_1 y_2 y_3 \dots \end{aligned} \quad (1)$$

'Ομοίως, διαιροῦντες τὸν θ διὰ τοῦ 10^n , $n \in \mathbb{N}$ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\theta}{10^n} \right) &= \log \theta - \log 10^n = -n + \log \theta = -n + y_0, y_1 y_2 y_3 \dots = \\ &= (y_0 - n), y_1 y_2 y_3 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) δεικνύουν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ $\theta \cdot 10^k$, $k \in \mathbb{Z}$, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ $\log \theta$, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως τοῦ $\log (\theta \cdot 10^k)$ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται, ἂν k ἀρνητικὸς ἀκέραιος) κατὰ k μονάδος ἐν σχέσει πρὸς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log \theta$.

Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 5, 50, 500, 5000, ... ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τὸν λογάριθμόν τους. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ :

$$0,5 \cdot 0,05 \cdot 0,005 \cdot 0,0005 \dots$$

Πόρισμα. — Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί των διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν των.

Οὕτως, ἐὰν εἶναι π.χ.	$\log 312,865 = 2,49536,$
τότε θὰ εἶναι :	$\log 31,2865 = 1,49536$
	$\log 0,312865 = 1,49536$
	$\log 31286,5 = 4,49536$
	$\log 3,12865 = 0,49536.$

§ 213. Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.— Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγὰς τινάς, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν. Ἐκτενέστερον ἔχομεν τὰ ἑξῆς :

α'). Πρόσθεσις λογαρίθμων. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς λογαρίθμους προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη, τὰ ὅποια εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἀθροίσμα τῶν ἀκεραίων μερῶν τῶν λογαρίθμων.

Π.χ. 1) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις : $\overline{5},57834 + \overline{3},67641$. Ἐχομεν :

$$\begin{array}{r} \overline{5},57834 \\ \overline{3},67641 \\ \hline \overline{7},25475 \end{array}$$

Προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των, ὡς συνήθως, καὶ ἔχομεν τελικὸν κρατούμενον 1, ὅτε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι :

$$1 + (-3) + (-5) = -7 = \overline{7}.$$

2) Νά γίνη ἡ πρόσθεσις : $\overline{2,85643} + 2,24482 + \overline{3,42105} + \overline{1,24207}$. Ἐχομεν :

$\overline{2,85643}$

2,24482

$\overline{3,42105}$

$\overline{1,24207}$

$\overline{3,76437}$

Ἐνταῦθα τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ συνεπῶς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι :

$$1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \overline{3}.$$

β'). Ἀφαίρεσις λογαρίθμων. Ἡ ἀφαίρεσις λογαρίθμων γίνεται, ὅπως καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνήθων δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δεκαδικῶν μερῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἐάν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν μερῶν προκύψῃ τελικῶς κρατούμενον, τοῦτο εἶναι θετικὸν καὶ προστίθεται (ἀλγεβρικῶς) μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀφαιρετέου, ἀκολουθῶς δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ μειωτέου.

Π.χ. 1) Νά γίνη ἡ ἀφαίρεσις : $\overline{2,83754} - \overline{5,32452}$. Ἐχομεν :

$\overline{2,83754}$

$\overline{5,32452}$

3,51302

Ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει κρατούμενον, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἰσοῦται πρὸς : $-2 - (-5) = 3$.

2) Νά γίνη ἡ ἀφαίρεσις : $\overline{3,48765} - \overline{2,75603}$. Ἐχομεν :

$\overline{3,48765}$

$\overline{2,75603}$

$\overline{2,73162}$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 1, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἰσοῦται πρὸς : $-3 - (-2 + 1) = -3 - (-1) = -2 = \overline{2}$.

3) Ὁμοίως ἔχομεν :

$\overline{2,95842}$

$\overline{5,67835}$

0,35893

2,72125

$\overline{5,76923}$

0,85632

$\overline{3,44972}$

5,28582

3,18919,

$\overline{6,82203}$,

2,90921,

$\overline{3,43543}$

Παρατήρησις. Ὡς γνωστὸν (§ 208) εἶναι :

$$\log \alpha - \log \beta = \log \alpha + \text{συλλογ}\beta,$$

ἥτοι ἡ ἀφαίρεσις ἑνὸς λογαρίθμου ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ συλλογαρίθμου του.

Ὑπολογισμὸς τοῦ συλλογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου του.

Ἐστω ὅτι εἶναι $\log \beta = 2,54675$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\text{συλλογ}\beta = -\log \beta = -2,54675. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ (§ 211)

$$-2,54675 = \overline{3,45325}, \text{ ἡ ἰσότης (1) γίνεται :}$$

$$\text{συλλογ}\beta = \overline{3,45325}.$$

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὁ ἔξης :

Κανὼν. Διὰ τὰ εὑρωμεν τὸν συλλογαρίθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποῖον γνωρίζομεν τὸν λογαρίθμον, προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τὸ $+1$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον, ἀκολουθῶς ἀφαιροῦμεν τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τοῦ 9, ἐκτὸς τελευταίου σημαντικοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

Ἐάν $\log \alpha = \bar{1},37260 \Rightarrow \text{συλλογα} = 0,62740$

Ἐάν $\log 0,06543 = \bar{2},81578 \Rightarrow \text{συλλογ } 0,06543 = 1,18422.$

γ'). Πολλαπλασιασμός ἑνὸς λογαρίθμου ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

ι). Ἐάν ὁ ἀκέραιος εἶναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον καὶ γράφομεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, τὸ δὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ γινόμενον τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον.

Π.χ. Νὰ γίνη ὁ πολλαπλασιασμός : $\bar{2},65843 \times 4$. Ἐχομεν :

$\bar{2},65843$

$\begin{array}{r} 4 \\ \hline \bar{6},63372 \end{array}$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 2, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν τοῦ γινομένου ἰσοῦται πρὸς : $(-2) \cdot 4 + 2 = -6 = \bar{6}$.

ii). Ἐάν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρνητικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν συλλογὰριθμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀκεραίου καὶ οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Π.χ. Νὰ γίνη ὁ πολλαπλασιασμός : $3,67942 \times (-4)$.

Ἐάν $\log x = \bar{3},67942 \Rightarrow \text{συλλογ } x = 2,32058$ καὶ συνεπῶς :

$$\bar{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232.$$

δ'). Διαιρέσεις ἑνὸς λογαρίθμου δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

1). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν $\log \theta$ διὰ θετικοῦ ἀκεραίου (φυσικοῦ) ἀριθμοῦ k , ἐφ' ὅσον μὲν $\log \theta > 0$ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς· ἐάν ὁμῶς ὁ $\log \theta$ εἶναι ἡμιαρνητικὸς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1α). Ἐάν ὁ k διαιρῇ (ἀκριβῶς) τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log \theta$, τότε διαιρούμεν χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ χωριστὰ τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ προσθέτομεν τὰ πηλικά.

1β). Ἐάν ὁ k δὲν διαιρῇ τὸ χαρακτηριστικὸν, τότε προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸν μικρότερον ἀρνητικὸν ἀκέραιον $-μ$ οὕτως, ὥστε νὰ καταστῇ διαιρετὸν διὰ τοῦ k , ἀκολουθῶς προσθέτομεν τὸν $+μ$ εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τὸ ὅποιον εἶναι τὸ μηδέν) τοῦ δεκαδικοῦ μέρους καὶ εὐρίσκομεν χωριστὰ τὰ πηλικά τῶν δύο αὐτῶν μερῶν διὰ τοῦ k , τὰ ὅποια καὶ προσθέτομεν τελικῶς.

Π.χ. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις : 1) $(\bar{6},54782) : 3$ καὶ 2) $(\bar{5},62891) : 3$:

Αὗται γίνονται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r|l} 1) & \begin{array}{r} \bar{6},54782 \\ \hline \bar{6} \\ 0 + 0,54782 \\ 24 \\ 07 \\ 18 \\ 02 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 3 \\ \hline \bar{2} + 0,18260 = \\ = \bar{2},18260 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2) & \begin{array}{r} \bar{5},62891 \\ \hline \bar{5} + \bar{1} + 1 + 0,62891 \\ \bar{6} + 1,62891 \\ \bar{6} \\ 0 + 1,62891 \\ 12 \\ 08 \\ 29 \\ 21 \\ 0 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 3 \\ \hline \bar{2} + 0,54297 = \\ = \bar{2},54297 \end{array} \end{array}$$

2. Διά νά διαιρέσωμεν τόν λογθ διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου k διαιροῦμεν τόν συλλογθ διὰ τοῦ $-k > 0$.

Π.χ. Νά γίνη ἡ διαίρεσις : $(5,92158) : (-2)$. Ἔχομεν :

Ἐάν $\log x = 5,92158 \implies \text{συλλογ} x = \overline{6},07842$, ὅτε θά ἔχωμεν :

$$(5,92158) : (-2) = (\overline{6},07842) : 2 = \overline{3},03921.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

459. Νά γίνουν ἡμιαρνητικοί οἱ λογάριθμοι :

- 1) $-2,32254$ 2) $-0,69834$ 3) $-1,27218$ 4) $-3,54642$
 5) $-0,41203$ 6) $-5,78952$ 7) $-0,00208$ 8) $-2,05024$.

460. Γράψατε τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

- 1) 135 2) 2050 3) 9,5 4) 0,003 5) 382,27
 6) 47,5 7) $\frac{17}{3}$ 8) 12,25 9) 0,56 10) 3041,7.

461. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν :

3, 5, 0, 1, 7, 4, 2 ;

462. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν : $-1, -2, -3, -4, -5, -7$;

463. Ἐάν $\log \alpha = \overline{1},63819$ καὶ $\log 4347 = 3,63819$, νά εὑρεθῇ ὁ α .

464. Δοθέντος ὅτι $\log 7 = 0,84510$, εὑρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$7 \cdot 10^3, \quad 7 \cdot 10^4, \quad \frac{7}{10^2}, \quad \frac{7}{10^5}.$$

465. Ἐάν $\log 7283 = 3,86231$, νά εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν :

$$0,7283, \quad 7,283, \quad 0,007283, \quad 728300, \quad 728,3.$$

466. Νά εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\log 724 - \log 7,24, \quad \log 0,65 - \log 6,5, \quad \log 17,62 - \log 1,762.$$

467. Νά εὑρεθοῦν οἱ συλλογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν μετὰ τοὺς κάτωθι λογαρίθμους :

1. $\overline{3},27284$ 2. 0,07257 3. 1,71824,
 4. 5,27203 5. $\overline{4},75304$ 6. $\overline{1},03275$.

468. Ἐάν $\log \alpha = \overline{2},29814$ καὶ $\log \beta = \overline{2},84212$, ὑπολογίσατε τὰ :

1. $\log \alpha + \log \beta$, 2. $\log \alpha - \log \beta$, 3) $3 \log \alpha + 5 \log \beta$,
 4. $2 \log \beta - \frac{3}{4} \log \alpha$, 5. $\frac{7}{5} (\log \alpha + \log \beta) - \frac{3}{4} (\log \alpha - \log \beta)$.

469. Νά εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $\overline{5},27214 + 3,4751 + \overline{1},81523 + 0,47214$
 2. $4,67471 + \overline{2},14523 + 0,67215 + \overline{3},04703$.

470. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $\overline{3},24518 + 1,41307 - \overline{2},47503$
 2. $0,03182 - \overline{4},27513 + \overline{3},82504 - \overline{1},08507$.

471. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $\overline{3},82307 \times 5$, 2. $0,24507 \times (-2)$, 3. $\overline{1},24513 \times 4$.

472. Νά εκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\overline{4},89524 : 3$, 2. $\overline{5},60106 : (-3)$, 3. $\overline{4},57424 : \left(-\frac{3}{7}\right)$,
4. $\overline{1},42118 : 4$, 5. $\overline{6},27508 : (-2)$, 6. $\overline{8},32403 : 4$.

473. Ἐὰν K εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι ἔχουν χαρακτηριστικὸν k καὶ Λ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων, τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστροφοι ἔχουν λογάριθμους μὲ χαρακτηριστικὸν $-\lambda$ ($\lambda > 0$), νὰ δεიχθῇ ὅτι :

$$\log K - \log \Lambda = k - \lambda + 1.$$

Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων

§ 214.—Εἶδομεν εἰς τὴν § 209 ὅτι, ἐκτὸς τῶν συμμετρῶν δυνάμεων τοῦ 10, πάντων τῶν ἄλλων θετικῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουν διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Ἐνεκα τούτου εὐρίσκουμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001). Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου $\log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$, ἔπεται ὅτι, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν > 1 , δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν < 1 .

Ἐξ ἄλλου εἶδομεν ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη : Ἀπὸ τὸ **χαρακτηριστικόν** του καὶ ἀπὸ τὸ **δεκαδικόν** του μέρους.

Τὸ χαρακτηριστικόν του ἐδείξαμεν εἰς τὴν § 212, πῶς ὑπολογίζεται ἀπὸ μνήμης.

Τὸ δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εἰς οἷονδήποτε ἐπιθυμητὸν βαθμὸν προσεγγίσεως μὲ δεκαδικὰ ψηφία, τῇ βοηθείᾳ μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά. Τῇ βοηθείᾳ τῶν μεθόδων τούτων τὸ δεκαδικόν μέρος τῶν λογαρίθμων ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10.000, εὐρέθη καὶ κατεγράφη εἰς πίνακας, οἱ ὅποιοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες** ἢ «**πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους**».

Τοιοῦτοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν. Εἷς περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 10.000 μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 11 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἄλλος μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τὰς συνήθεις ὁμως ἐφαρμογὰς ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίναξ, τοῦ ὁποῖου ὑπάρχουν καὶ Ἑλληνικαὶ ἐκδόσεις κατὰ τὸ σύστημα Dupuis.

Τοῦτον θὰ περιγράψωμεν συντόμως εἰς τὰ ἐπόμενα καὶ θὰ ἐκθέσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως αὐτοῦ.

§ 215. **Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.**— Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες Dupuis περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10.000. Ἡ διάταξις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων φαίνεται εἰς τὸν ἑναντι «πίνακα», ὅστις ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	236
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...
549	73957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, ἀνῶθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα Ν (Nombres = ἀριθμοί), εἰς δὲ τὰς ἑλληνικὰς ἐκδόσεις τὸ γράμμα Α (ἀριθμοί), εἶναι γραμμéναι αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν ὀριζοντίαν γραμμὴν μετὰ τοῦ Ν. Εἰς τὰς ἄλλας στήλας εἶναι γραμμéνα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαριθμῶν. Τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν δευτέραν στήλην βλέπομεν ὅτι ἐξέχουν, νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα, μέχρις οὗ ἀλλάξουν. Καὶ τοῦτο, διότι πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία κοινά.

Ὁ λογάριθμος ἐκάστου ἀριθμοῦ εὐρίσκεται ἐκεῖ ὅπου διασταυροῦνται αἱ δύο νοηταὶ γραμμαί, ἡ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἀγομένη κατακόρυφος καὶ ἡ ἐκ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀγομένη ὀριζοντία.

Ὁ ἀστερίσκος τὸν ὁποῖον βλέπομεν νὰ προτάσσεται τῶν τριῶν τελευταίων δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τινὰς λογαρίθμους, φανερώνει ὅτι τὰ δύο παραλειπόμενα πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἐπόμενα.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα καὶ βάσει τοῦ ἀνωτέρω «πίνακος», ἔχομεν ὅτι :

$$\begin{array}{lll}
 \log 500 = 2,69897, & \log 5047 = 3,70303, & \log 5084 = 3,70621 \\
 \log 503 = 2,70157, & \log 5128 = 3,70995, & \log 5017 = 3,70044 \\
 \log 512 = 2,70927, & \log 5129 = 3,71003, & \log 5060 = 3,70415.
 \end{array}$$

§ 216. Χρήσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας χρησιμοποιοῦμεν πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων :

- 1) Νὰ εὐρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ
- 2) Νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

§ 217. Πρόβλημα I.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου υποθέτομεν πρῶτον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε γεγραμμένος ὑπὸ δεκαδικῇ μορφῇ, καὶ δεύτερον, ὅτι χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακας. Οἱ πίνακες οὗτοι θὰ μᾶς δώσουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ θὰ τὸ εὑρωμεν ἀπὸ μνήμης, συμφώνως πρὸς τὰς ιδιότητας β' καὶ γ' τῆς § 212. Διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, δεόν νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι :

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐνὸς ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν καλουμένων σημαντικῶν ψηφίων, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται παραλείποντες τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν ὑποδιαστολὴν καὶ τὰ μηδενικά τὰ ὁποῖα τυχὸν ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ.

Συνεπῶς κατὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ καθιστῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀκέραιον, ἥτοι θὰ παραλείπωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν. Τοῦτο, ὡς εἶδομεν (§ 212, ιδ. ε'), δὲν μεταβάλλει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν ἀριθμῶν :

50,87 0,05087 508,70 5087000 5,0870

εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 5087.

Ἦδη πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος διακρίνομεν τὰς κάτωθι δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις α'. Ὁ ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, ἥτοι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων σημαντικῶν ψηφίων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἀφοῦ εὑρωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ, εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων, ἀρκεῖ νὰ εὑρωμεν τὸν ἐν λόγῳ ἀριθμὸν εἰς τοὺς πίνακας, ὡς ἐξετέθη εἰς προηγουμένην παράγραφον (§ 215).

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 1. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι τὸ αὐτὸ (§ 212) μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5682. Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ 5682, ὡς εἰς τοὺς πίνακας φαίνεται, εἶναι τὸ 75450. Ἀρα $\log 56,82 = 1,75450$.

Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{array}{l|l} \log 568,2 = 2,75450 & \log 0,8703 = \bar{1},93967 \\ \log 0,000507 = \bar{4},70501 & \log 3,74 = 0,57287. \end{array}$$

Περίπτωσις β'.—Ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, ἥτοι οὗτος ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων.

Εὐρίσκομεν πρῶτον, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν α', τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου. Κατόπιν, διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον γεγραμμένος πλεόν ὁ ἀριθμὸς, περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μὲ τέσσαρα ψηφία. Ἡ εὑρεσις ἐν συνεχείᾳ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἐπιτυγχάνεται ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν γνωστὴν ιδιότητα, καθ' ἣν :

Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ καὶ εἶναι $\alpha < \beta < \gamma \iff \log \alpha < \log \beta < \log \gamma$
καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν παραδοχὴν, καθ' ἣν :

Διὰ μικρὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν, αἱ μεταβολαὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους εἶναι ἀνάλογοι τῶν μεταβολῶν τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἀνωτέρω παραδοχὴ δὲν εἶναι τελείως ἀληθής, ἀκριβέστερον αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων δὲν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, θεωρήσωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους α καὶ $\alpha + 1$, $\alpha > 0$ καὶ καλέσωμεν δ τὴν διαφορὰν : $\log(\alpha + 1) - \log \alpha$, ἥτοι :

$$\delta = \log(\alpha + 1) - \log \alpha \quad \eta \quad \delta = \log \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

$$\eta \quad \delta = \log \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι : διὰ $\alpha \rightarrow \infty$, ὅτε $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$, ἔχομεν :

$$\log \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \rightarrow 0,$$

$$\eta \text{τοι} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Ὡστε, ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δὲν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλὰ ἐλαττοῦται καθ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνουν καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὐξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ ὁμως ἡ διαφορὰ αὕτη μένει ἐπὶ πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀμετάβλητος, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς ἔγγιστα, τὴν αὐξησιν τῶν λογαρίθμων ἀνάλογον πρὸς τὴν αὐξησιν τῶν ἀριθμῶν.

Κατόπιν τούτων, διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα ἐμφαίνεται.

Παράδειγμα Ιον : Νὰ εὕρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 1742,4.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζομεν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 1742,4. Ὁ δεσθεὶς ἀριθμὸς καὶ ὁ 1742,4 ἔχουν (§ 212) τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου των. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 1742,4.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐπειδὴ, προφανῶς, εἶναι :

$$1742 < 1742,4 < 1743,$$

ἔπεται ὅτι :

$$\log 1742 < \log 1742,4 < \log 1743.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης, ἐπειδὴ, ὡς ἐκ τῶν πινάκων φαίνεται, εἶναι :

$$\log 1742 = 3,24105 \quad \text{καὶ} \quad \log 1743 = 3,24130, \quad \text{προκύπτει :}$$

$$3,24105 < \log 1742,4 < 3,24130.$$

Ἦτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καὶ 3,24130, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ 25 μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ)

Ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν ἐπίσης ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ αὐξανόμενον κατὰ 2, 3, 4, 5, ... ἀκεραίας μονάδας ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατὰ 50, 75, 99, 125, ... μ.ε'.δ.τ.

Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὐξησιν τοῦ λογαρίθμου ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ $\log 1742 = 3,24105$ διὰ νὰ προκύψῃ ὁ $\log 1742,4$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ὁ $\log 17424$. Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1 ἀντιστοιχεῖ αὐξ. τοῦ λογ. κατὰ 25 μ.ε'.δ.τ

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0,4 & & & \\ & \gg & & & \gg & & \\ & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} x ; \\ \end{array}$$

*Αρα : $x = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\log 1742,4 = 3,24105 + 0,00010 = 3,24115$$

καὶ συνεπῶς

$$\log 17424 = 4,24115.$$

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l} \log 1742 = 3,24105 \\ \log 1743 = 3,24130 \\ \hline \Delta = 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αὐξησης ἀριθμῶν 1 αὐξησης λογαρίθμων 25 μ.ε'.δ.τ.} \\ \gg \quad \gg \quad 0,4 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad x ; \quad \gg \\ \hline x = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ μ.ε'.δ.τ.} \end{array}$$

*Αρα : $\log 17424 = 4,24105 + 0,00010 = 4,24115.$

Εὐρεθέντος ὅτι $\log 17424 = 4,24115$ ἔχομεν :

$$\log 17,424 = 1,24115, \quad \log 0,0017424 = \bar{3},24115,$$

$$\log 1,7424 = 0,24115, \quad \log 174,24 = 2,24115.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 24,3527.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι προφανῶς 1. Ἐὰν δὲ λαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει (§ 212) ἀμετάβλητον. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὐρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 2435,27.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἦτοι :

$$\begin{array}{l} \log 2435 = 3,38650 \\ \log 2436 = 3,38668 \\ \hline \Delta = 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Αὐξησης ἀριθμῶν 1 αὐξησης λογαρίθμων 18 μ.ε'.δ.τ.} \\ \gg \quad \gg \quad 0,27 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad x ; \quad \gg \\ \hline x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \approx 5 \text{ μ.ε'.δ.τ.} \end{array}$$

*Αρα : $\log 24,3527 = 1,38650 + 0,00005 = 1,38655.$

Σημειώσεις : Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες ὑπάρχουν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ἑκαστον τῶν ὁποίων φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τὴν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἐκαστον πινακίδιον διαιρεῖται δι' εὐθείας γραμμῆς εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ πρώτη φέρει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1,2, ..., 9, οἱ ὅποιοι φανερώνουν δέκατα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων αὐξήσεις εἰς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Τῇ βοήθειᾳ τούτων ὑπολογίζομεν ἀμέσως τὰς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς δοθείσας διαφορὰς (Δ) τῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦτο διότι ταῦτα δίδουν ἀπ' εὐθείας, διὰ τὰς διαφορὰς διαφορὰς Δ , τὰς τιμὰς :

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \quad \frac{\Delta \times 2}{10}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

Οὕτως, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ λογαρίθμου τοῦ παραδείγματος 2 γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πινακιδίου, τὸ ὁποῖον φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν $\Delta = 18$.

Εἰς τὸ πινακίδιον τοῦτο ἀπέναντι τοῦ 2 (στήλη α') εἶναι 3,6 καὶ ἀπέναντι τοῦ 7 εἶναι 12,6, ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ ψηφίον 7 παριστᾷ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2435,27 ἑκατοστά, ἦτοι μονάδας 10 φορές μικροτέρας, πρέπει νὰ λάβωμεν 1,26. Ὡστε εἰς αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 0,27 ἀντιστοιχεῖ αὐξησης τοῦ λογαρίθμου κατὰ $3,6 + 1,26 = 4,86 \approx 5 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$

18	
1	1,8
2	3,6
3	5,4
4	7,2
5	9,0
6	10,8
7	12,6
8	14,4
9	16,2

Διάταξις τῶν πράξεων.

	λογ 2435	= 3,38650	$\Delta = 18$
Εἰς αὐξησιν	0,2	αὐξησις λογ	3,6
» »	0,07	» »	1,26
ἄρα	λογ 2435,27	= 3,3865486	

καὶ ἐπειδὴ τὸ γον ψηφίον τοῦ δεκ. μέρους εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ 5ον ψηφίον. Ἄρα θὰ εἶναι λογ 2435,27 = 3,38655 καὶ κατ' ἀκολουθίαν λογ 24,3527 = 1,38655.

§ 218. Πρόβλημα II. (ἀντίστροφον).— Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ἐνεκα τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος ἀναγράφεται ἢ μὴ εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐπιτρέπει τὸν καθορισμὸν, συμφώνως πρὸς τὴν ιδιότητα δ' τῆς § 212, τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερον ἐργαζόμεθα ὡς κάτωθι :

Περίπτωσις α'.— Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν x , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι:

$$\log x = 2,62716.$$

Λύσις : Χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν 2 ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τὴν στήλην Ο τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν 62, ποῦ ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, ἀκολούθως ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τὰ ἔτερα τρία ψηφία 716. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ταῦτα κεῖνται εἰς τὴν 423ην ὀριζοντίαν γραμμὴν καὶ στήλην 8: τὰ ψηφία λοιπὸν, μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ ἡ διαδοχὴ αὐτῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθος 4, 2, 3, 8. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λοιπὸν θὰ εἶναι ὁ ἔχων 423 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, ἥτοι ὁ 4238. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λογάριθμός του ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ἔπεται (§ 212, δ') ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα ἔχομεν :

$$x = 423,8.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ. $\overline{3},75343$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,005668. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\overline{3} = -3$ φανερώνει ὅτι ὑπάρχουν τρία μηδενικά πρὸ τοῦ πρῶτου σημαντικοῦ ψηφίου 5 τοῦ 5668 (βλ. § 212, δ').

Σημειώσεις : Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν ἀριθμὸν x , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $\log x = 2,63022$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 022 δὲν εὑρίσκεται εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 63. Τότε ἀναζητοῦμεν αὐτὸ εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 62 φέρον ἔμπροσθέν του ἀστερίσκον (*). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ 022 μετ' ἀστερίσκου εὑρίσκεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ 62. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι συνεπῶς ὁ 426,8. Ὁμοίως εὑρίσκομεν :

$$\text{Ἐάν} \quad \log x = 2,63003, \quad \text{τότε} \quad x = 426,9$$

$$\text{»} \quad \log x = 2,63002, \quad \text{»} \quad x = 426,6.$$

Περίπτωσις β'.— Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.

1ον : Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὑρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν x , διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι :

$$\log x = 1,25357.$$

Λύσις : Παρατηρούμεν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον, ὡς προηγουμένως, εἰς τοὺς πίνακας εὐρίσκεται μεταξύ τοῦ 0,25334 καὶ τοῦ 0,25358, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 1792 καὶ 1793 ἀντιστοίχως. Ἦτοι ἔχομεν :

$$1,25334 < 1,25357 < 1,25358$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$17,92 < x < 17,93.$$

Ἡδη παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\Delta = 1,25358 - 1,25334 = 24 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

καὶ

$$\delta = 1,25357 - 1,25334 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἡ αὐξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν καὶ καταρτίζοντες τὴν ἀκόλουθον διάταξιν, ἔχομεν :

Αὐξησις λογαρίθμου κατὰ 24 μ.ε'.δ.τ. φέρει αὐξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1

» » » 23 » » » » » » » y;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0,958.$$

Προσθέτοντες εἰς τὸν 1792 τὸν 0,958 εὐρίσκομεν 1792,958, δηλαδὴ τὸ 958 τὸ προσαρτῶμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1792. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1792,958 ἔχει προφανῶς τὰ αὐτὰ μὲ τὸν x ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν, πλὴν ὅμως ἡ θέσις τῆς ὑποδιαστολῆς ἐν τῷ x κανονίζεται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ log x, ὅπερ ἐν προκειμένῳ εἶναι 1.

Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$x = 17,92958.$$

Συντομώτερον ἡ ἐργασία αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1,25357	1,25358	⇒	1793	24	1
1,25334	1,25334	⇒	1792	23	y;
Διαφοράι: δ = 23	Δ = 24		1		$y = 1 \times \frac{23}{24} = 0,958.$

Ἄρα :

$$x = 17,92958.$$

Σημείωσις : Ἡ διαφορά Δ τῶν ἄκρων τῶν λογαρίθμων, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ δοθεὶς λογάριθμος, καλεῖται **μεγάλη διαφορά** ἡ δὲ διαφορά δ τοῦ μικροτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ δοθέντος καλεῖται **μικρὰ διαφορά**.

2ον : Λίδεται ὅτι : $\log x = 3,47647$ καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ x.

Λύσις : Ἐκ τῶν πινάκων παρατηροῦμεν ὅτι :

$$3,47640 < 3,47647 < 3,47654$$

καὶ ἄρα

$$0,002995 < x < 0,002996.$$

Ἡδη, πρὸς εὐρεσιν τοῦ x, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

3,47647	3,47654	⇒	2996	14	1
3,47640	3,47640	⇒	2995	7	y;
Διαφοράι: δ = 7	Δ = 14		1		$y = 1 \times \frac{7}{14} = 0,5.$

Οὕτω τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ x εἶναι κατὰ σειρὰν 2, 9, 9, 5, 5. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι ὁ 0,0029955, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 3. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν :

$$\text{Ἐὰν } \log x = 0,47647, \text{ τότε } x = 2,9955$$

$$\text{» } \log x = 5,47647, \text{ » } x = 299550.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται τώρα ὁ ἀκόλουθος :

Κανὼν. Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκ τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, εἰς περὶ-
πτωσιν καθ' ἣν ὁ λογάριθμος (ἐνν. τὸ δεκαδικόν του μέρος) δὲν εὐρίσκεται εἰς τοὺς
πίνακας, παραθέτομεν δεξιὰ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν μι-
κρότερον τῶν λογαρίθμων τοῦ πίνακος μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ δοθεὶς λογάριθμος
περιέχεται, πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πληκτικῆς τῆς διαιρέσεως δ: Δ, ἐνθα δ ἡ
μικρὰ καὶ Δ ἡ μεγάλη διαφορά. Μετὰ ταῦτα καθορίζομεν τὴν θέσιν τῆς ὑποδια-
στολῆς, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων

§ 219. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῶν λογαριθμι-
κῶν πινάκων δυνάμεθα νὰ ἀνάγωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλας
ἀπλουστεράς, ἥτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαί-
ρεσιν, τὴν ὑψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ρι-
ζῶν εἰς διαίρεσιν. Οὕτω μὲ χρήσιν τῶν λογαρίθμων ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ
ὁποῖαι ἄλλως θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ δυσχερεῖς, ἂν μὴ δυναταί.

Τὰ ἐπόμενα παραδείγματα θὰ καταστήσουν περισσότερον σαφὲς πόσον
μεγάλως ἀπλοποιεῖ τὴν ἐκτέλεσιν διαφόρων πράξεων ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ λογισμοῦ
διὰ τῶν λογαρίθμων.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον :

$$x = 180,2 \times 35,32 \times 0,724.$$

Λύσις : Ἔχομεν :

$$\log x = \log 180,2 + \log 35,32 + \log 0,724.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\log 180,2 = 2,25575$$

$$\log 35,32 = 1,54802$$

$$\log 0,724 = \bar{1},85974$$

$$\log x = 3,6631$$

Ἄρα :

$$x = 4608.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὐρεθῇ ὁ x , ἐὰν εἶναι $x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}$.

Λύσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης παραστάσεως
ἔχομεν :

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 - (\log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

$$\log 7,56 = 0,87852$$

$$\log 4667 = 3,66904$$

$$\log 567 = 2,75358$$

$$7,30114$$

$$\log 899,1 = 2,95381$$

$$\log 0,00337 = \bar{3},52763$$

$$\log 23435 = 4,36986$$

$$4,85130.$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει :

$$\log x = 2,44984$$

Ἄρα :

$$x = 281,73.$$

Παράδειγμα 3ον : Νά εύρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ $8^{(8^*)}$.

Λύσις : Θέτοντες $x = 8^{(8^*)}$ καὶ $y = 8^8$ εὐρίσκομεν ὅτι :

$$x = 8^y \quad \text{καὶ} \quad \log x = y \cdot \log 8.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\log y = 8 \log 8 = 7,22472$, ἐπεταὶ ὅτι $y = 16777300$ περίπου καὶ

$$\log x = 16777300 \cdot \log 8 = 15151412.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ x θὰ ἔχῃ περίπου 15151413 ἀκέραια ψηφία.

Σημ. Ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων ἔπρεπε πρὸς εὐρεσιν τοῦ y νὰ κάμωμεν 7 πολλαπλασιασμούς καὶ πρὸς εὐρεσιν τοῦ x ἄλλους 16777300 περίπου πολλαπλασιασμούς.

Παράδειγμα 4ον : Νά ὑπολογισθῇ, κατὰ προσέγγισιν, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$x = \frac{27,32 \times (1,04)^{20} \times \sqrt[5]{0,003}}{\sqrt[4]{0,0042} \times (345,6)^2}.$$

Λύσις : Λαμβάνοντες λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔχομεν συμφώνως πρὸς τὰς ιδιότητες τῶν λογαρίθμων :

$$\log x = (\log 27,32 + 20 \cdot \log 1,04 + \frac{1}{5} \log 0,003) - \left(\frac{1}{4} \cdot \log 0,0042 + 2 \log 345,6 \right).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

Βοηθητικαὶ πράξεις

$$\log (1,04) = 0,01703$$

$$\frac{20}{0,34060}$$

$$\log 0,003 = \bar{3},47712$$

$$\frac{1}{5} \log 0,003 = \frac{\bar{3},47712}{5} = \frac{5 + 2,47712}{5} =$$

$$= \bar{1} + 0,49542 = \bar{1},49542$$

$$\log 0,0042 = \bar{3},62325$$

$$\frac{1}{4} \log 0,0042 = \frac{\bar{3},62325}{4} = \frac{\bar{4} + 1,62325}{4} =$$

$$= \bar{1} + 0,40581 = \bar{1},40581$$

$$\log 345,6 = 2,53857$$

$$\frac{2}{5,07714}$$

Τελικαὶ πράξεις

$$\log 27,32 = 1,43648$$

$$20 \cdot \log (1,04) = 0,34060$$

$$\frac{1}{5} \cdot \log (0,003) = \bar{1},49542$$

$$\text{*Αθροισμα} = 1,27250$$

$$\frac{1}{4} \log (0,0042) = \bar{1},40581$$

$$2 \cdot \log 345,6 = 5,07714$$

$$\text{*Αθροισμα} = 4,48295$$

Ἵσπερ εἶναι :

$$\log x = 1,27250 - 4,48295 = -3,21045 = \bar{4},78955.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὐρίσκομεν :

$$x = 0,000615957.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

474. Νά εύρεθῇ ὁ λογάριθμος ἐκάστου ἐκ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1. 0,2507

5. 6,8372

9. 85,007

2. 45,72

6. 5278,37

10. 0,0004124

3. 0,003817

7. 63,347

11. 326,537

4. 107,3

8. 25234

12. 14,1606

13. 0,00643598

15. 31,2865

17. $524 \frac{3}{8}$

14. 0,0682947

16. 5378,92

18. $4,72 + \frac{6}{7}$

475. Να εύρεθῇ ὁ θετικός ἀριθμὸς x , γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

1. $\log x = 2,48001$

5. $\log x = 4,87622$

9. $\log x = 0,70020$

2. $\log x = \bar{1},96895$

6. $\log x = 2,99348$

10. $\log x = 1,66325$

3. $\log x = 4,97534$

7. $\log x = \bar{1},79100$

11. $\log x = \bar{4},15050$

4. $\log x = \bar{3},69636$

8. $\log x = \bar{2},78000$

12. $\log x = 5,25865$

476. Να ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $82,75 \times 0,3974$

2. $25200 \times 3,1416$

3. $437 \times 0,5223$

4. $4,25 \times 308 \times 0,295$

5. $3,72 \times 7,8 \times 9312$

6. $3,14 \times 25,2 \times 395$

7. $56314 : 9$

8. $0,8276 : 25,2$

9. $10025 : 4,35$

10. $4,36^3$

11. $0,895^5$

12. $10,25^4$

13. $3,02^{10}$

14. $\sqrt[5]{2,8314}$

15. $\sqrt[10]{2}$

16. $\sqrt[4]{1,414}$

17. $\sqrt[3]{\pi}$

18. $9,35^2 \times 3,1416$

19. $18,2^3 \times 1,33$

20. $0,45^2 \times 2,25 \times \sqrt[3]{3}$

21. $\sqrt{\frac{27,3 \times 0,139}{4,5}}$

22. $\sqrt[3]{\frac{1258 \times 0,824}{2,5^2}}$

23. $\sqrt[4]{\frac{25,6 \times 0,312}{0,85}}$

477. Ἐπιλύσατέ τὰς κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^4 = 5\,832,6$

2. $x^5 = 0,0247$

478. Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον :

$$E = \sqrt[3]{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ὑπολογίσατε τὸ ἔμβαδὸν E ἐνὸς τριγώνου, εὖ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι :

$$\alpha = 202,5 \text{ m}, \quad \beta = 180,2 \text{ m} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 75,3 \text{ m} \quad (\tau = \frac{1}{2} \text{ περιμέτρου}).$$

479. Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ x , ὅστις ὀρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},$$

ὅπου

$$\alpha = 0,27355, \quad \beta = 29,534, \quad \gamma = 44,340.$$

480. Τρεῖς ἀριθμοὶ α , x , y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\alpha xy^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ον. Ὑπολογίσατε τὸ y , ἂν εἶναι $\alpha = 0,3$ καὶ $x = 1,8215$

2ον. Ὑπολογίσατε τὸ x , ἂν εἶναι $\alpha = 10$ καὶ $y = 0,5242$.

481. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται $\alpha_1 = 3$, $\omega = 8$ καὶ $\nu = 13$. Να εύρεθῇ ὁ 13ος ὅρος τῆς καὶ τὸ ἀθροισμα Σ_{13} τῶν ὁρων αὐτῆς.

482. Ἐπαληθεύσατε διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὰς ἀκολουθοῦσας ἰσότητες:

1. $\sqrt{\frac{577,8 \times 69}{0,75 \times 3,107}} = 6,431,$

2. $\sqrt{8,5273 \times 3} \sqrt[3]{51,3388} = 5,62962$

3. $\sqrt[3]{\frac{4,632 \times (2,96)^2}{81,3 \times 32,41}} = 0,225855,$

4. $\frac{312,415 \times \sqrt[3]{3,5781^2}}{17,1826^2 \times \sqrt[10]{0,002987^3}} = 14,1606.$

483. Να υπολογισθῇ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{4,37 \times \sqrt[3]{0,0004975}}{\sqrt[3]{0,312}} + \sqrt[3]{\frac{217^2 \times \sqrt{595}}{137 \times \sqrt[3]{0,03}}}$$

(Ὑπόδ. Ὑπολογίσατε χωριστὰ ἕκαστον ὅρον τῆς παραστάσεως καὶ προσθέσατε ἀκολουθῶς τὰ ἐξαγόμενα).

II. ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ἑκθετικαὶ ἐξισώσεις

§ 220. Ὅρισμοί.— Καλεῖται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις πᾶσα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν τοῦλάχιστον δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀγνωστον ἢ συνάρτησίν τινα τοῦ ἀγνωστοῦ.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις :

$$3^x = 81, \quad 2^{3x+1} - 5 \cdot 4^x + 3 = 0, \quad 5^{x^2-2x+3} = 1$$

εἶναι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

Ἐπίλυσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Αἱ συνηθέστεραι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις ἔχουσιν ἢ δύνανται νὰ λάβωσι μίαν τῶν ἀκολουθῶν μορφῶν :

α'). Ἑκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$a^x = \beta$$

(1)

ἐνθα $a, \beta \in \mathbb{R}^+$ καὶ $a \neq 1$.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἐκθετικῆς ἐξισώσεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις I.—Ὁ β εἶναι δύναμις τοῦ a ἢ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ a . Τότε, ἐὰν εἶναι $\beta = a^k$ θὰ ἔχωμεν : $a^x = a^k$ καὶ συνεπῶς $x = k$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $3^x = 729$.

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $729 = 3^6$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^x = 3^6 \quad \text{καὶ} \quad \text{δίδει} \quad x = 6.$$

Περίπτωσις II.—Ὁ β δὲν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ a . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$x \cdot \log a = \log \beta \quad \text{καὶ} \quad \text{συνεπῶς} \quad \theta\acute{\alpha} \quad \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad x = \frac{\log \beta}{\log a}.$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $2^x = \frac{5}{6}$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 6 \quad \eta \quad x = \frac{\log 5 - \log 6}{\log 2} = \frac{-0,07918}{0,30103} = -0,26303.$$

β'). Έκθετικά εξισώσεις της μορφής :

$$a^{g(x)} = \beta$$

(2)

Ένθα $g(x)$ είναι δεδομένη συνάρτησις τοῦ ἀγνώστου καὶ $a, \beta \in \mathbb{R}^+$ μὲ $a \neq 1$.

Προφανῶς διὰ $g(x) = x$ ἔχομεν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2) διακρίνομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ a καὶ β εἶναι ἢ μὴ δυνάμεις ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x^2-5x+11} = 243$.

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $243 = 3^5$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \text{ καὶ δίδει } x^2 - 5x + 11 = 5 \quad \eta \quad x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $x = 2$ καὶ $x = 3$, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $[3^{(x-1)}]^{(x^2-9)} = 1$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{(x-1)(x^2-9)} = 3^0 \text{ καὶ δίδει } (x-1)(x^2-9) = 0 \quad \eta \quad (x-1)(x-3)(x+3) = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x = 1$, $x = 3$, $x = -3$. Αὗται δὲ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{3x-2} = 437$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$(3x-2) \cdot \log 5 = \log 437 \quad \eta \quad 3x-2 = \frac{\log 437}{\log 5} \quad \eta \quad 3x-2 = \frac{2,64048}{0,69897}$$

$\eta \quad 3x-2 = 3,77767 \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς : } x = 1,92589.$

Παράδειγμα 4ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$a^{\beta^x} = \gamma, \quad (1)$$

Ένθα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ καὶ $a \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$\beta^x \cdot \log a = \log \gamma \quad \eta \quad \beta^x = \frac{\log \gamma}{\log a} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2), λαμβάνοντες ἐκ νέου τοὺς λογαρίθμους, εὐρίσκομεν :

$$x \cdot \log \beta = \log \left(\frac{\log \gamma}{\log a} \right)$$

η

$$x = \frac{1}{\log \beta} \cdot \log \left(\frac{\log \gamma}{\log a} \right) \quad (3)$$

Διὰ νὰ ἔχη νόημα τὸ δεῦτερον μέλος τῆς (3) πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\log \gamma}{\log a} > 0$. Τοῦτο ὑφίσταται ὅταν οἱ $\log \gamma$ καὶ $\log a$ εἶναι ὁμόσημοι, δηλ. ἢ ἀμφότεροι εἰς a καὶ γ νὰ εἶναι > 1 ἢ ἀμφότεροι < 1 .

γ'). Έκθετικά εξισώσεις της μορφής :

$$f(a^x) = g(a^x)$$

(3)

ένθα $a \in \mathbb{R}^+$.

Ειδικώς κατωτέρω θὰ μελετήσωμεν εξισώσεις τῶν μορφῶν :

$$\gamma_1: A\alpha^{2x} + B\alpha^x + \Gamma = 0$$

$$\gamma_2: A_1\alpha^{\mu_1x+\nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2x+\nu_2} + \dots + A_k\alpha^{\mu_kx+\nu_k} = 0,$$

ένθα $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, k$.

Αἱ εξισώσεις αὐταὶ ἀνάγονται εἰς τὴν μορφήν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$a^x = y$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωσις $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται : $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ καὶ ἐὰν τεθῇ : $2^x = y$,
ἔχομεν :

$$y^2 - 7y - 8 = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς εξίσωσεως αὐτῆς εἶναι : $y_1 = 8$ καὶ $y_2 = -1$.

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$2^x = 8 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 2^x = -1 \quad (2).$$

Ἡ εξίσωσις (1) γράφεται $2^x = 2^3$ καὶ δίδει : $x = 3$.

Ἡ εξίσωσις (2) εἶναι ἀδύνατος, διότι $2^x > 0$ διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ὡστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης εξίσωσεως εἶναι $x = 3$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωσις :

$$3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128.$$

Ἐπίλυσις : Αὕτη γράφεται :

$$3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128.$$

Ἐτόμεν $3^x = y$ καὶ ἔχομεν τὴν εξίσωσιν :

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128$$

$$\eta \quad 128y = 1152,$$

$$\epsilon\acute{\chi}\ \eta\varsigma: \quad y = 9.$$

Τότε ἔχομεν : $3^x = 9$ ἢ $3^x = 3^2$ καὶ ἄρα $x = 2$.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ εξίσωσις : $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$.

Ἐπίλυσις : Αὕτη γράφεται :

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

$$\eta \quad (5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0.$$

(1)

Ἐτόμεν $5^x = y$ καὶ ἔχομεν τὴν εξίσωσιν :

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0.$$

Αὕτη λυομένη δίδει :

$$y_1 = 5 \text{ καὶ } y_2 = -80.$$

Όθεν ή (1) είναι ισοδύναμος πρὸς τὸ ζεύγος τῶν ἐξισώσεων :

$$5^x = 5 \quad \text{καὶ} \quad 5^x = -80.$$

Ἡ πρώτη δίδει :

$$x = 1.$$

Ἡ δευτέρα εἶναι ἀδύνατος, διότι $5^x > 0$ διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ'). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$f(a^x) = g(\beta^x)$$

(4)

Συνήθεις περιπτώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\delta_1 : A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x$$

$$\delta_2 : A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν μορφήν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$$

Πράγματι, διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως δ_2 διὰ β^{2x} αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τὴν :

$$\delta_2' : A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ (1), ἡ ἐξίσωσις δ_2' γίνεται :

$$Ay^2 + By + \Gamma = 0.$$

Λυομένη αὕτη καὶ ἐφ' ὅσον $B^2 - 4A\Gamma \geq 0$, θὰ δώσῃ δύο πραγματικὰς ρίζας y_1 καὶ y_2 . Διὰ τὰς τιμὰς $y = y_1$ καὶ $y = y_2$ ἡ (1) δίδει τὰς ἐκθετικὰς ἐξισώσεις :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1 \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2, \quad \text{αἱ ὁποῖαι λύνονται κατὰ τὰ γνωστά.}$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}.$$

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3}$$

$$\eta \quad 2^x \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4.$$

Ἄρα εἶναι :

$$x = 4.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Διαιρούντες αμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 3^{2x} λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0. \quad (1)$$

Θέτομεν $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ καὶ ἡ (1) γράφεται : $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

Αὕτη ἔχει ρίζας : $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 1$ καὶ ἐπομένως ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Αὗται γράφονται :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

δίδουν ἀντιστοίχως : $x = -1$ καὶ $x = 0$.

ε'). Ἐκθετικά ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\{f(x)\}^{g(x)} = 1 \quad (5)$$

ἐνθα $f(x)$, $g(x)$ πολυωνμικαὶ συναρτήσεις τοῦ x .

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ἔχουν προφανῶς λύσεις τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

$$(i) \quad f(x) = 1$$

$$(ii) \quad g(x) = 0 \quad \text{καὶ} \quad f(x) \neq 0.$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1.$$

Ἐπίλυσις : (i). Αἱ ρίζαι τῆς $x^2 - 3x + 2 = 1$ εἶναι προφανῶς λύσεις τῆς δοθείσης.

Αὕτη γράφεται $x^2 - 3x + 1 = 0$ καὶ λυομένη δίδει :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

(ii). Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

προφανῶς ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν.

Εἶναι δὲ $x(x - 2) = 0$ καὶ $(x - 1)(x - 2) \neq 0$.

Ἄρα : $x = 0$.

Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας :

$$x = 0, \quad x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Παρατήρησις : Ἡ ἐξίσωσις $\{f(x)\}^{f(x)} = \beta$, ἐνθα $f(x)$ πολυωνμικὴ συνάρτησις τοῦ x , ἐπιλύεται, ὅταν τὸ β δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\beta = \alpha^a$. Θὰ ἔχωμεν τότε : $\{f(x)\}^{f(x)} = \alpha^a$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $f(x) = \alpha$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$(i). \quad x^x = 4, \quad (ii). \quad x^x = -1, \quad (iii). \quad (x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27.$$

(i) Ἐχομεν $4 = 2^2$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $x^x = 2^2$. Ἐκ ταύτης προκύπτει $x = 2$.

(ii) Ἐχομεν $-1 = (-1)^{-1}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $x^x = (-1)^{-1}$, ὅτε $x = -1$.

(iii). Έχουμε $27 = 3^3$ και συνεπώς θα είναι $(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 3^3$. Αύτη είναι
 Ισοδύναμος με την : $x^2 - 7x + 15 = 3$ ή $x^2 - 7x + 12 = 0$, ή όποια λυομένη δίδει :
 $x = 3$ και $x = 4$.

Εκθετικά Συστήματα

§ 221. Όρισμοί.— Καλείται **σύστημα εκθετικών εξισώσεων** με δύο ή περισσότερους άγνωστους, πᾶν σύστημα εξισώσεων ἐκ τῶν ὁποίων μία τοῦλάχιστον εἶναι ἐκθετική.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος συνιστοῦν **λύσιν** αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐκθετικῶν συστημάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν δυνάμεων καὶ τῶν λογαρίθμων καὶ τῆς εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐκτεθείσης θεωρίας ἐπιλύσεως τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32$$

$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27.$$

Ἐπίλυσις : Τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μετὰ τὸ :

$$2^{2x+y-2} = 2^5$$

$$3^{x+y-2} = 3^3.$$

Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκουμεν τὴν λύσιν : $x = 2, y = 3$.

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \quad (1)$$

$$2^y \cdot 5^x = 400000. \quad (2)$$

Ἐπίλυσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα :

$$x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 = \log 3981312 \quad (1')$$

$$y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 = \log 400000. \quad (2')$$

Θέτοντες $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2') ἐπὶ 2, εὐρίσκομεν :

$$x \log 3 + 2y \cdot \log 2 = \log 3981312 \quad (1'')$$

$$2x \log 5 + 2y \cdot \log 2 = \log 400000. \quad (2'')$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1'') καὶ (2'') εὐρίσκομεν :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \log 400000 - \log 3981312}{2 \log 5 - \log 3} = \frac{2 \cdot \log (2^8 \cdot 10^5) - \log (2^{14} \cdot 3^5)}{2 \log 5 - \log 3} = \\ &= \frac{10 - 10 \log 2 - 5 \log 3}{2 - 2 \log 2 - \log 3} = 5. \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὐρίσκομεν :

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5}{5^5} = 2^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $y = 7$.

Άρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι : $x = 5, y = 7$.

3ον : Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^y = y^x \quad (1)$$

$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

Ἐπίλυσις : Προφανῆς λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι : $x = y = 1$. Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι : $x > 0, y > 0$ καὶ $x \neq 1 \neq y$ εὐρίσκομεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$y \cdot \log x = x \cdot \log y \quad (1')$$

$$3 \cdot \log x = 2 \cdot \log y. \quad (2')$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1') καὶ (2') ἔχομεν : $\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$,

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $y = \frac{3x}{2}$. (3)

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεῖσῶν ἐξισώσεων ἔχομεν :

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \eta \quad x^3 = \frac{9}{4} x^2$$

ἢ $x^2 \left[x - \frac{9}{4}\right] = 0$, καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη $x > 0$, ἔπεται : $x = \frac{9}{4}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Ἐπομένως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη :

$$(x = 1, y = 1) \quad \text{καὶ} \quad \left(x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}\right).$$

Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις καὶ λογαριθμικὰ συστήματα

§ 222. Ὑποσέση. — α). Καλεῖται **λογαριθμικὴ ἐξίσωσις** πᾶσα ἐξίσωσις, ἥ ὁποία περιέχει τὸν λογάριθμον ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων αὐτῆς ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτῶν. Π. χ. αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι λογαριθμικαί :

$$3 \log x - \frac{1}{2} \log (2x + 1) = \log \sqrt{2x - 1} + 2$$

$$\log x + 3 \log y = 7$$

$$\log_2 (3x + 1) - \log x = \log_x (2x - 3).$$

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν λογαρίθμων. Πολλὰκις ὅμως ἡ ἐπίλυσις μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεων τῶν κάτωθι μορφῶν :

$$(i) \log x = y, \quad (ii) \log x = \log a, \quad (iii) \log f(x) = \log a,$$

$$(iv) \log_\beta f(x) = \log_\beta g(x),$$

ἐνθα a γνωστὸς θετικὸς ἀριθμὸς, $f(x)$ δὲ καὶ $g(x)$ γνωστὰ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι ὑπόκεινται εἰς τὸν περιορισμὸν $f(x), g(x) > 0$ καὶ β ἡ βᾶσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος ($0 < \beta \neq 1$).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ πορίσματος II, ἰδ. III τῆς § 202 προκύπτει τώρα ὅτι :

- (i) Ἡ ἐξίσωσις $\log x = y$ εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν : $x = 10^y$
 (ii) Ἡ » $\log x = \log \alpha$ » μετὰ τὸ σύστημα : $x = \alpha, \alpha > 0$
 (iii) Ἡ » $\log f(x) = \log \alpha$ » » » » : $f(x) = \alpha, \alpha > 0$
 (iv) Ἡ » $\log_{\beta} f(x) = \log_{\beta} g(x)$ » » » » : $f(x) = g(x), g(x) > 0$.

Σημείωσις : Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ληφθῇ ὡς πρὸς διαφοροὺς βάσεις, θὰ μετατρέπωνται πάντες ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

β'). Καλεῖται **σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων** πᾶν σύστημα ἐξισώσεων ἐκ τῶν ὁποίων μία τοῦλάχιστον εἶναι λογαριθμική.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος συνιστοῦν λύσιν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης θεωρίας ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα :

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{2} \log (x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt[3]{3}.$$

Ἐπίλυσις : Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εἶναι $x+2 > 0, x-3 > 0$, ὅτε $x > 3$.

Ἐπειδὴ $1 = \log 10$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$\log \sqrt{x+2} + \log \sqrt{x-3} = \log 10 + \log \sqrt[3]{3}$$

$$\eta \quad \log (\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}) = \log \cdot 10 \sqrt[3]{3}$$

$$\eta \quad \sqrt{(x+2) \cdot (x-3)} = 10 \sqrt[3]{3}$$

$$\eta \quad (x+2) \cdot (x-3) = 300$$

$$\eta \quad x^2 - x - 306 = 0.$$

$$\text{Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν :} \quad x = 18 \quad \text{καὶ} \quad x = -17.$$

Ἡ $x = -17$ ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν $x > 3$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\sqrt{x^{\log x}} = 10. \quad (1)$$

Ἐπίλυσις : **Περιορισμός :** πρέπει νὰ εἶναι $x > 0$.

Ἐψώνομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :

$$x^{\log x} = 100. \quad (2)$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2) καὶ ἔχομεν :

$$\log \sqrt{x} \cdot \log x = \log 100$$

$$\eta \quad \frac{1}{2} (\log x)^2 = 2$$

$$\eta \quad (\log x)^2 = 4$$

$$\text{καὶ ἄρα :} \quad \log x = \pm 2.$$

Ἐάν λάβωμεν $\log x = 2$ ἔχομεν $\log x = \log 100$, ἄρα: $x = 100$.

Ἐάν λάβωμεν $\log x = -2$ ἔχομεν $\log x = \log 0,01$, ἄρα: $x = 0,01$.

Παράδειγμα 3ον : Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\log \sqrt{2} (2 \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x + \log \sqrt{2} x) = 6. \quad (1)$$

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν :

$$2 \log_4 x \cdot \log_2 x + \log \sqrt{2} x = (\sqrt{2})^6 = 8. \quad (2)$$

Ὡς γνωστὸν (§ 207) εἶναι :

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \text{ἐνθα οἱ } \log x \text{ καὶ } \log a \text{ εἶναι ὡς πρὸς βάσιν } 10.$$

Λόγω αὐτοῦ ἔχομεν :

$$\log_4 x = \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{2 \log 2}, \quad \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}, \quad \log \sqrt{2} x = \frac{\log x}{\log \sqrt{2}} = \frac{2 \log x}{\log 2}.$$

Δυνάμει αὐτῶν ἡ (2) γίνεταί :

$$2 \frac{\log x}{2 \log 2} \cdot \frac{\log x}{\log 2} + \frac{2 \log x}{\log 2} = 8$$

$$\eta \quad \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\log x}{\log 2} \right) - 8 = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν :

$$\frac{\log x}{\log 2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\log x}{\log 2} = -4.$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν :

$$\log x = 2 \log 2 = \log 4, \quad \text{ἄρα} \quad x = 4$$

καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ὁμοίως ἔχομεν :

$$\log x = -4 \log 2 = \log 2^{-4} = \log \frac{1}{16}, \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{1}{16}.$$

Παράδειγμα 4ον : Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\log x + \log y = \log 14$$

$$3x - y = 1.$$

Ἐπίλυσις : Περιορισμός: $x > 0, y > 0$. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται :

$$\log (xy) = \log 14 \quad \text{καὶ} \quad \text{δίδει:} \quad xy = 14.$$

Ἐχομεν οὕτω νά ἐπιλύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$3x - y = 1$$

$$xy = 14.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο καὶ ἐπειδὴ πρέπει $x > 0, y > 0$ εὐρίσκομεν :

$$x = 7/3 \quad \text{καὶ} \quad y = 6.$$

Παράδειγμα 5ον : Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2}$$

$$y^{\sqrt{x} + 2} = x^{y-2}.$$

Ἐπίλυσις : Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος εἶναι : $x = y = 1$. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι :

$x > 0, y > 0$ καθὼς καὶ $x \neq 1 \neq y$.

Ἐκ τῆς πρώτης, λογαριθμίζοντες, λαμβάνομεν :

$$(\log y + 1) \cdot \log x = (\log x + 2) \cdot \log y$$

$$\eta \quad \log x \log y + \log x = \log x \log y + 2 \log y$$

$$\eta \quad \log x = \log y^2$$

καὶ συνεπῶς :

$$x = y^2.$$

(1)

Λόγω ταύτης ή δευτέρα εξίσωσης του συστήματος γράφεται :

$$y \sqrt{y^2+2} = y^{2(y-2)}.$$

Έκ ταύτης, έπειδή $y \neq 1$, λαμβάνομεν :

$$\sqrt{y^2+2} = 2(y-2), \quad \text{έξ ής:} \quad y = 6.$$

Διά $y = 6$ ή (1) δίδει : $x = 36$.

Άρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις :

$$(x = 1, y = 1), \quad (x = 36, y = 6).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

484. Νά ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

- $5\sqrt{x} = 625,$
- $3^{x^2-9x+11} = 27,$
- $\sqrt[3]{27^{x+1}} = 3^{2x-4},$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3},$
- $2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0,$
- $3^x - 4 \sqrt[3]{3^x} + 3 = 0,$
- $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}},$
- $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1},$
- $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x,$
- $(x^2 - 5x + 6)^{x^2-2x} = 1,$
- $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3},$
- $x^{x^4-26x^2+25} = 1.$

485. Όμοίως :

- $18^{8-4x} = (54 \sqrt{2})^{3x-2},$
- $\sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot \sqrt[5]{5},$
- $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}),$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^{3x-4},$
- $3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0,$
- $5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x,$
- $\sqrt[3]{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt[3]{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}.$

486. Νά ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

- $$\begin{aligned} 2^{3x+y} &= 32 \\ 3^{2x-y} &= 1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^y &= 243 \\ \sqrt[3]{1024} &= \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 4^{2x-9} \cdot 2^{3y-2} &= 1024 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-3} &= 3^{-2}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3^x - 2^{y+3} &= 15 \\ 2^y - 3^{x-3} &= 3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3^{xy} - y^x &= 1 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2^x &= 3y \\ 3^x &= 2y. \end{aligned}$$

487. Όμοίως :

- $$\begin{aligned} x^y &= y^x \\ x &= y^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^{x+y} &= y^3 \\ y^{x+y} &= x^3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{1/3} \\ y^{x+y} &= x^{1/3}. \end{aligned}$$

488. Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

- $$\begin{aligned} \alpha^x &= \beta^y \\ x^y &= y^x \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \alpha^x &= \beta^y \\ x^a &= y^b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x^a &= y^b \\ x^y &= y^x. \end{aligned}$$

489. Να επιλυθούν αί κάτωθι εξισώσεις :

1. $\log(x+1) + 2 \log \sqrt{5x} = 2$, 2. $\frac{1}{3} \log(x-2) + \log \sqrt[3]{4x+3} = \frac{2}{3}$,
3. $\log \frac{2x}{3} + \log \left(\frac{5x}{4} + 2 \right) = 2 \log(x-1)$, 4. $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$,
5. $x^{\log 3x - \log 5x} = 0,01$, 6. $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$, 7. $2^{\log x} + 2^{5 - \log x} = 12$,
8. $\frac{\log x}{\log x + 2} + \frac{\log x + 3}{\log x - 1} = \frac{11}{2}$, 9. $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$.

490. Όμοιως :

1. $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \cdot \log 3 + \log 178$
2. $(\log_3 x)^2 - 3^{\log_3 5 + (\log_3 3)^{-1}} = \log_3(x^6) - 9^{\log_3 \sqrt{3}}$, 3. $10 \cdot x^{\log x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$,
4. $x^{\frac{\log 3x}{10}} = 9 \cdot (3x)^{\log 9x^2}$, 5. $\log \sqrt[3]{x} \log_2 x \log_3 x \log_4 \sqrt{x} \log_5 x = 54$.

491. Διά ποίας τιμάς του θ η εξίσωση: $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 1 - (\log \theta)^2 = 0$ έχει ρίζας πραγματικές και ίσας ;

492. Να επιλυθούν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\log x - \log y = 1$
 $\log x^2 + \log y^2 = \log 32$
2. $\frac{x + \log y}{\sqrt{y^2} + 10} = 11 \sqrt{\frac{x}{y}}$
3. $\left(\frac{x}{5}\right)^{\log 5} = \left(\frac{y}{7}\right)^{\log 7}$
 $7^{\log x} = 5^{\log y}$
4. $x^{\log y} + y^{\log x} = 20$
 $\log \sqrt{xy} = 1$
5. $\frac{x^{\log y} + y^{\log x}}{\sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}}} = 200$
6. $(3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5}$
 $5^{\log x} = 3^{\log y}$

493. Όμοιως :

1. $x^{\log y} + y^{\log x} = 200$
 $\frac{x}{\sqrt{(\log x)^y \cdot (\log y)^x}} = 1024$
2. $\frac{\log y}{\sqrt{5^{4x}}} = 25$
 $\frac{x+2}{\sqrt{y^{\log y}}} = 10.000$
3. $y^x(1+y^x) = 10100$
 $\log \sqrt[xy]{x} - \log \sqrt{\frac{x}{y}} = 3$.
4. $(2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2$
 $y = 4x^2 \cdot y^{\log(2x)}$
5. $(3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5}$
 $x^{\log 5} = y^{\log 3}$

494. Να εύρεθούν αί πραγματικές λύσεις του συστήματος :

$$z^x = y^{2x}, \quad 2^{z-1} = 4^x, \quad x + y + z = 16.$$

495. Έάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, νά επιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\log_\alpha x \cdot \log_\beta y = \log_\alpha \beta, \quad \alpha^{\log_\alpha y} = \sqrt{x}.$$

496. Να επιλυθῇ ἡ εξίσωση :

$$\log(21^{\log x + 1} - 42) + \log 4 = \log 21 \cdot \log x + \log 76.$$

497. Όμοιως :

$$[\log_x(16x - 5 - x^2) + \log_x 2] \cdot \log_{x+5} x \cdot \log_x x = 2.$$

498. Να εύρεθούν αί τιμαί τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ θ , $\theta \in \mathbb{R}^+$, ἂν αἱ ρίζαι τῆς εξίσωσης :

$$\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0,$$

ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος :

$$y^{\log z} + z^{\log y} = 20, \quad \log \sqrt[3]{yz} = 1.$$

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Ι. Ἀνατοκισμός

§ 223. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι — Ὅρισμοί.— Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι τόκος λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὅποιον λαμβάνει τις δανείζων εἰς ἄλλον χρήματα, ἐπὶ πλεόν τοῦ δανειζομένου ποσοῦ. Τὸ ποσὸν τὸ ὅποιον δανείζει τις, λέγεται **κεφάλαιον**, ὃ δὲ τόκος εἶναι ἡ ἀμοιβὴ τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ δανειζόμενος διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ κεφαλαίου. Ὅταν τὸ κεφάλαιον μένη τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ὁ τόκος λέγεται **ἀπλοῦς**: λέγομεν δὲ τότε ὅτι τὰ χρήματα τοκίζονται **ἐπὶ ἀπλῷ τόκῳ**, ὃ δὲ τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον καλεῖται **ἐπιτόκιον**. Πολλάκις ὁμως ὁ τόκος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖ μαζὺ μὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπομένης χρονικῆς περιόδου. Οὕτως ὁ τόκος κεφαλαιοποιεῖται καὶ τοκίζεται ἐν συνεχείᾳ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ πρόσθεσις αὕτη τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἥτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου λέγεται **ἀνατοκισμός**, ὃ δὲ τόκος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται **σύνθετος**.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμόν καλεῖται «**ἐπιτόκιον**» ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον. Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὸν ἀνατοκισμόν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $1/100$ τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἀπλοῦ τόκου. Τοῦτο παρίσταται κατωτέρω μὲ τ (τ = τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἀπλοῦ τόκου).

Κεφάλαιόν τι λέγομεν ὅτι **ἀνατοκίζεται** ὅταν ὁ δανεισμός του γίνεται ἐπὶ ἀνατοκισμῷ.

Συνήθως ἡ χρονικὴ περίοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνατοκίζεται ἐν κεφάλαιον, εἶναι τὸ ἔτος ἢ ἡ ἑξαμηνία.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμόν διακρίνομεν **ἀρχικὸν** καὶ **τελικὸν** ἢ **σύνθετον κεφάλαιον**. Τὸ τελικὸν κεφάλαιον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ἠϋξημένον κατὰ τοὺς τόκους τοῦ δανειζομένου (ἀρχικοῦ) κεφαλαίου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα κατὰ τὸ ὅποιον διήρκεσε ὁ δανεισμός.

Τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ λύομεν διὰ τύπων, τοὺς ὁποῖους εὐρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολουθοῦ γενικοῦ προβλήματος.

§ 224. Πρόβλημα.— Κεφάλαιον k_0 δραχμῶν ἀνατοκίζεται διὰ n ἔτη μὲ ἐπιτόκιον τ δραχμῶν. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τελικὸν κεφάλαιον k_n .

Λύσις. Ἡ μία δραχμὴ θὰ φέρῃ μετὰ ἐν ἔτος τόκον τ , ἄρα αἱ k_0 δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους $k_0\tau$ δρχ. καὶ συνεπῶς τὸ κεφάλαιον k_0 δρχ. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνη :

$$k_0 + k_0\tau = k_0(1 + \tau)$$

ήτοι: τὸ κεφάλαιον k_0 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν (σταθερὸν) συντελεστὴν $(1 + \tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ εὐρίσκομεν, ὅτι αἱ $k_0 (1 + \tau)$ δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ γίνουν (μὲ τοὺς τόκους των): $k_0 (1 + \tau) \cdot (1 + \tau)$, ἥτοι $k_0 (1 + \tau)^2$ δραχμαὶ. Οὕτω μετὰ δύο ἔτη τὸ κεφάλαιον k_0 θὰ ἀνέλθῃ εἰς:

$$k_0 (1 + \tau)^2.$$

Ὅμοίως ἐργαζόμενοι εὐρίσκομεν ὅτι αἱ k_0 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ γίνουν:

$$k_0 (1 + \tau)^3.$$

Τέλος, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὐρίσκομεν ὅτι αἱ k_0 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους θὰ γίνουν: $k_0 (1 + \tau)^v$.

Ἄρα τὸ τελικὸν κεφάλαιον k_v δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$k_v = k_0 \cdot (1 + \tau)^v \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ k_0 , τ , v , k_v . Ἄν δίδωνται τὰ τρία ἐξ αὐτῶν, τότε λύομεν λογαριθμικῶς τοῦτον, ὡς πρὸς τὸν ἀπομένοντα ἄγνωστον.

Ἐνίοτε ὅμως ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται διὰ v ἔτη καὶ ἡμέρας τινὰς λ.χ. ἡ ἡμέρας, ($\eta < 360$), τότε πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τελικοῦ κεφαλαίου k σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Μετὰ παρέλευσιν v ἐτῶν αἱ k_0 δραχμαὶ θὰ γίνουν: $k_0 (1 + \tau)^v$. Τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ μείνῃ ἀκόμῃ ἐπὶ ἀπλῶ τόκῳ ἡ ἡμέρας ($\eta < 360$) καὶ τοῦτο διότι αἱ η ἡμέραι δὲν συνιστοῦν μίαν χρονικὴν περίοδον, ἥτοι ἓν ἔτος. Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἀπλοῦν τόκον τὸ ἐπιτόκιον εἶναι: $\epsilon = 100 \cdot \tau$, τὸ ποσὸν $k_0 (1 + \tau)^v$ θὰ δώσῃ εἰς η ἡμέρας τόκον:

$$\frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot 100 \tau \cdot \eta}{36000}, \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot \tau \eta}{360}.$$

Ἐπομένως τὸ τελικὸν κεφάλαιον μετὰ v ἔτη καὶ η ἡμέρας θὰ εἶναι:

$$k = k_0 (1 + \tau)^v + \frac{k_0 (1 + \tau)^v \cdot \tau \eta}{360}.$$

Ὅθεν:

$$k = k_0 (1 + \tau)^v \cdot \left(1 + \frac{\tau \eta}{360} \right) \quad (\eta < 360) \quad (2)$$

Σημ. Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀντὶ τοῦ τύπου (2) χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὴν κατὰ προσέγγισιν ἰσότητά (τύπον):

$$k = k_0 (1 + \tau)^v + \frac{\eta}{360} \quad (2')$$

Ὁ (2') δίδει σχεδὸν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον μὲ τὸν (2) καὶ εἶναι πλέον εὐχρηστος διὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς δὲν γίνεται κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἥτοι καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τρίμηνιαν ἢ κατὰ μῆνα κλπ. δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον $k_v = k_0 (1 + \tau)^v$ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ τ παριστᾷ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἓν

ἐκ τῶν διαστημάτων τούτων καὶ τὸ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων.

Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα, τότε τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι τὸ ἡμισυ ἢ τὸ τέταρτον ἢ τὸ δωδέκατον ἀντιστοίχως τοῦ ἐτησίου ἐπιτοκίου, ἀλλὰ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἐστω τ_1 τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὴν ἑξαμηνίαν καὶ τ τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὸ ἔτος. Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω (§ 224), εὐρίσκομεν ὅτι ἡ 1 δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ $(1 + \tau_1)$ καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ $(1 + \tau_1)^2$. Ἐπίσης ἡ μία δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἀνατοκίζομένη θὰ γίνῃ $(1 + \tau)$. Ἐπειδὴ ἡ μία δραχμὴ εἴτε καθ' ἑξαμηνίαν ἀνατοκισθῇ εἴτε κατ' ἔτος πρέπει νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, θὰ ἔχωμεν : $(1 + \tau_1)^2 = (1 + \tau)$ καὶ συνεπῶς εἶναι :

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 \quad (3)$$

Ὁ τύπος (3) συνδέει τὸ ἑξαμηνιαῖον καὶ τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον.

Ἄν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν τ_2 εἶναι τὸ τριμηνιαῖον ἐπιτόκιον, θὰ ἔχωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω :

$$(1 + \tau_2)^4 = 1 + \tau \quad \text{καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι :}$$

$$\tau_2 = \sqrt[4]{1 + \tau} - 1 \quad (4)$$

Ὁ τύπος (4) συνδέει τὸ τριμηνιαῖον καὶ τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον.

Παραδείγματα ἐπὶ τοῦ ἀνατοκισμοῦ

Παράδειγμα 1ον : Δανεῖζει τις 5.000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 6 % κατ' ἔτος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 8 ἔτη;

Λύσις : Ἐχομεν : $k_0 = 5000$, $\tau = 0,06$, $\nu = 8$, $1 + \tau = 1,06$.

Ὅθεν ὁ τύπος (1) τῆς § 224 γίνεται :

$$k_8 = 5000 \cdot (1,06)^8.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν :

$$\log k_8 = \log 5000 + 8 \cdot \log (1,06).$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶναι $\log 5000 = 3,69897$ καὶ $\log (1,06) = 0,02531$, λαμβάνομεν :

$$\log k_8 = 3,90145.$$

Ἐξ οὗ :

$$k_8 = 7969,83.$$

Ἦτοι ὁ τοκίσας τὰς 5000 μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6 % θὰ λάβῃ μετὰ 8 ἔτη ἐν ὅλῳ 7969,83 δραχμὰς.

Σημ. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς ἐγένετο ἐπὶ 8 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω π.χ. 72, τότε εἰς τὸν τύπον

$$k = k_0 (1 + \tau)^\nu \cdot \left(1 + \frac{\tau\eta}{360}\right)$$

τὸ μὲν $k_0 (1 + \tau)^v$ εἶναι 7969,83, τὸ δὲ

$$1 + \frac{\tau\eta}{360} \quad \text{εἶναι:} \quad 1 + \frac{72 \times 0,06}{360} = 1,012.$$

Ἄρα: $k = 7969,83 \times 1,012 = 8065,46.$

Παράδειγμα 2ον : Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τῆς θυγατρὸς του πρὸς 6 % κατ' ἔτος, διὰ νὰ ἔχῃ προῖκα δι' αὐτὴν 300.000 δρχ. ἅμα συμπληρώσῃ τὸ 20ον ἔτος;

Λύσις: Ἐχομεν $v = 20$, $k_v = 300000$, $\tau = 0,06$, $1 + \tau = 1,06$.

Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς k_0 γίνεται :

$$k_0 = \frac{k_v}{(1 + \tau)^v}. \quad (\alpha)$$

Ἡ (α) λογαριθμιζομένη δίδει :

$$\log k_0 = \log k_v - v \cdot \log (1 + \tau) \quad (\beta)$$

ἢ $\log k_0 = \log 300000 - 20 \cdot \log (1,06).$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $\log 300000 = 5,47712$ καὶ $\log(1,06) = 0,02531$ λαμβάνομεν :

$$\log k_0 = 4,97092.$$

Ἐξ οὗ: $k_0 = 93524.$

Παράδειγμα 3ον : Ἀνατοκίζει τις 80.000 δραχμὰς πρὸς 6 % ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 9 ἔτη, ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν;

Λύσις: Τὸ ἑξαμηνιαῖον ἐπιτόκιον τ_1 εὐρίσκόμενον ἐκ τοῦ τύπου

$$\tau_1 = \sqrt[12]{1 + \tau} - 1 \quad \text{εἶναι:} \quad \tau_1 = \sqrt[12]{1,06} - 1 = 0,0295.$$

Ἐχομεν δὲ ἓν προκειμένων :

$$k_0 = 80000, \quad \tau_1 = 0,0295, \quad v = 9 \times 2 = 18.$$

Ὅθεν ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$k_{18} = 80000 (1,0295)^{18}.$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 1, εὐρίσκομεν :

$$k = 135140,6 \text{ δραχμὰς.}$$

Παράδειγμα 4ον : Μετὰ πόσον χρόνον 12589 δραχμαὶ ἀνατοκίζονται κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 45818 δρχ.;

Λύσις: Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς v δίδει :

$$v = \frac{\log k_v - \log k_0}{\log (1 + \tau)} \quad (1)$$

Ἐχομεν: $k_v = 45818$, $k_0 = 12589$, $\tau = 0,05$, $1 + \tau = 1,05$.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν :

$$\log k_v = \log 45818 = 4,66104$$

$$\log k_0 = \log 12589 = 4,09999$$

$$\text{Διαφορά} = 0,56105$$

$$\log (1 + \tau) = \log (1,05) = 0,02119.$$

καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$v = \frac{\log 45818 - \log 12589}{\log 1,05} = \frac{0,56105}{0,02119} = \frac{56105}{2119} \quad (2)$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὐρίσκομεν πηλίκον 26 καὶ ὑπόλοιπον 0,01011. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον πρέπει τὸ δάνειον νὰ διαρκέσῃ 26 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω η .

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὰς ἡμέρας αὐτὰς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ὅταν ὁ χρόνος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔτη καὶ ἡμέρας

$$\text{εἶναι : } k = k_0 (1 + \tau)^v \cdot \left(1 + \frac{\eta \cdot \tau}{360} \right).$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν :

$$k = 45818, k_0 = 12589, \tau = 0,05, v = 26$$

εὐρίσκομεν :

$$45818 = 12589 \cdot (1,05)^{26} \cdot \left(1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right).$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν ἰσῶν τούτων ἔχομεν :

$$\log 45818 = \log 12589 + 26 \cdot \log (1,05) + \log \left(1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right)$$

$$\eta \quad \log 45818 - \log 12589 - 26 \cdot \log (1,05) = \log \left(1 + \frac{0,05 \cdot \eta}{360} \right). \quad (3)$$

Ἐχομεν ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς (2) ὅτι :

$$\log 45818 - \log 12589 - 26 \cdot \log (1,05) = 0,01011.$$

Παραβάλλοντες ταύτην πρὸς τὴν (3) συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\log \left(1 + \frac{0,05 \eta}{360} \right) = 0,01011$$

$$\eta \quad \log \left(1 + \frac{\eta}{7200} \right) = 0,01011.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὐρίσκομεν διαδοχικῶς ὅτι :

$$1 + \frac{\eta}{7200} = 1,02355 \quad \eta \quad \frac{\eta}{7200} = 0,02355.$$

Ἐξ οὗ : $\eta = 169,56 \quad \eta \approx 170$ ἡμέραι.

Ὡστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 26 ἔτη καὶ 170 ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Γενικῶς εἶναι :

$$v = \frac{\log k_v - \log k_0}{\log (1 + \tau)}$$

Ἄν δὲ v εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, θὰ εἶναι :

$$v = \log \left(1 + \frac{\tau \eta}{360} \right)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὐρίσκομεν τὸ $1 + \frac{\tau \eta}{360}$ καὶ συνεπῶς τὸ η .

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καὶ προβλήματα τινὰ σχέσιν ἔχοντα πρὸς τὴν αὐξήσιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ πληθυσμοῦ πόλεως ἢ χώρας, οἷον τὸ κάτωθι:

Παράδειγμα 5ον : 'Ο πληθυσμός μιᾶς πόλεως είναι Π κάτοικοι· παρατηρήθη δὲ ὅτι οὗτος αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ $\frac{1}{\mu}$ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμός της μετὰ n ἔτη ;

Λύσις : Μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi + \Pi \cdot \frac{1}{\mu} \quad \eta \quad \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Μετὰ ἓν ἀκόμη ἔτος, δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \Pi \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \quad \eta \quad \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi_n = \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^n$$

Σημ. Ἐὰν ὁ πληθυσμός Π ἐλαττωταῖ κατὰ τὸ $1/\mu$ τοῦ προηγούμενου ἔτους, τότε ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται :

$$\Pi_n = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)^n$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

499. Καταθέτει τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον 7200 δραχμὰς αἱ ὁποῖαι ἀνατοκίζονται κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4,5 % ἑτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὄλῳ μετὰ 15 ἔτη ;

500. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμόν κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 %, ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 200.000 δρχ.;

501. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 24850 δρχ. ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 12 ἔτη 50000 δραχμαί;

502. Μετὰ πόσον χρόνον 40000 δρχ. ἀνατοκίζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 68524 δρχ.;

503. Κατέθεσέ τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἀνατοκίζεται κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6% ἑτησίως. Μετὰ 5 ἔτη ἔλαβε 26000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει;

504. Κεφάλαιόν τι ἀνατοκίζόμενον κατ' ἔτος γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δρχ., μετ' ἄλλα δὲ δύο ἀκόμη γίνεται 6084 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

505. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τριπλασιάζεται ἀνατοκίζόμενον κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6% ἑτησίως;

506. Δύο κεφάλαια τὸ ἐν ἐκ 5000 δρχ. καὶ τὸ ἕτερον ἐξ 8000 δραχμῶν ἀνατοκίζονται ἀντιστοίχως μὲ ἐπιτόκια 5 % καὶ 3 % ἑτησίως. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο κεφάλαια θὰ καταστοῦν ἴσα;

507. Νὰ ἐξετασθῇ τί εἶναι συμφερότερον νὰ ἀνατοκίσῃ τις 60.000 δρχ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 5 % ἑτησίως ἢ νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν μὲ ἀπλοῦν τόκον πρὸς 7 % καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

508. Ποσὸν τι α δραχμῶν ἀνατοκίζεται ἐπὶ t χρονικὸν διάστημα. Ἐὰν ἀνετοκίζετο τοῦτο ρ ἔτη ὀλιγώτερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ β δραχμὰς ὀλιγώτερον, ἐὰν δμως ἀνετοκίζετο ρ ἔτη περισσότερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ γ δραχμὰς περισσότερον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ διάρκεια τοῦ ἀνατοκισμού.

509. 'Ο πληθυσμός ενός κράτους αύξάνεται κατ' έτος κατά τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγούμενου έτους. Μετὰ πόσα έτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

510. Μία πόλις ἔχει 8.000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτησίως κατὰ 160 κατοίκους. 'Εάν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα έτη ἡ πόλις αὕτη θὰ ἔχῃ 5.000 κατοίκους;

511. Εἰς μίαν πόλιν ἡ θνησιμότης εἶναι τὸ $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ της, αἱ δὲ γεννήσεις τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ. 'Επὶ τῇ παραδοχῇ ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς τὰ ἐπόμενα έτη, νὰ εὐρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς της.

2. Ἴσαι καταθέσεις

§ 225.— Συχνὰ οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τὰς οἰκονομίας των καταθέτουν ἓνα σταθερὸν χρηματικὸν ποσὸν εἴτε εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου έτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς σχηματισμὸν ἐνὸς κεφαλαίου, εἴτε εἰς τὸ τέλος ἐκάστου έτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς ἐξόφλησιν ἐνὸς χρέους.

Τὸ σταθερὸν αὐτὸ χρηματικὸν ποσὸν καλεῖται **κατάθεσις**.

Εἰς ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνομεν ἐκάστοτε δύο περιπτώσεις :

α'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὴν **ἀρχὴν** ἐκάστου έτους, καὶ

β'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὸ **τέλος** ἐκάστου έτους.

Αἱ ἴσαι καταθέσεις δύνανται νὰ γίνωνται καθ' ἐξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν καὶ ἐπὶ ἓνα ὠρισμένον χρόνον.

Τὰ προβλήματα τῶν ἴσων καταθέσεων λύομεν διὰ δύο τύπων, τοὺς ὁποίους εὐρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τῶν ἀκολουθῶν δύο προβλημάτων.

§ 226. **Πρόβλημα I.**— Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου έτους α δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μῖα δραχμῆς εἰς ἓν έτος. Ζητεῖται τί ποσὸν θὰ σχηματίσῃ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων μετὰ n έτη ;

Λύσις : Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν n έτη καὶ συνεπῶς ἀνατοκίζομένη θὰ γίνῃ : $\alpha (1 + \tau)^n$.

Ἡ δευτέρα κατάθεσις, ὡς ἀνατοκίζομένη ἐπὶ ἓν έτος ὀλιγώτερον, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς $\alpha (1 + \tau)^{n-1}$, ἡ τρίτη θὰ γίνῃ : $\alpha (1 + \tau)^{n-2}$ κ.ο.κ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προχωροῦντες εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ τελευταία κατάθεσις α δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ἓν έτος καὶ συνεπῶς θὰ γίνῃ ἴση πρὸς :

$$\alpha (1 + \tau)^1 = \alpha (1 + \tau).$$

'Εὰν συνεπῶς παραστήσωμεν διὰ Σ τὸ ποσόν, ὅπερ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ έτους, θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma = \alpha (1 + \tau)^n + \alpha (1 + \tau)^{n-1} + \dots + \alpha (1 + \tau)$$

$$\text{ἢ } \Sigma = \alpha (1 + \tau) + \alpha (1 + \tau)^2 + \dots + \alpha (1 + \tau)^{n-1} + \alpha (1 + \tau)^n.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος εἶναι ἄθροισμα ὄρων γεωμετρι-

κῆς προόδου, με λόγον $(1 + \tau)$, ἄρα κατὰ τὸν τύπον (1), § 169 θὰ ἰσοῦται μέ:

$$\frac{\alpha (1 + \tau)^v (1 + \tau) - \alpha (1 + \tau)}{1 + \tau - 1}$$

Ὄστε:

$$\Sigma = \alpha \cdot (1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^v - 1}{\tau} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τῶν ἰσῶν καταθέσεων**, ἐκάστης καταβαλλομένης εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκάστοτε χρονικῆς περιόδου.

Σημ. Αἱ δυνάμεις $(1 + \tau)^v$ διὰ $\tau = 0.03, 0.04, \dots, 0.06$ καὶ διὰ $v = 1, 2, \dots, 50$ παρέχονται ἀπὸ εἰδικούς πίνακας καὶ οὕτω διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ Σ .

Παράδειγμα: Καταθέτει τις εἰς τὴν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος 5 % ποσὸν 2.500 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη;

Λύσις: Ἐχομεν $\alpha = 2500$, $\tau = 0.05$, $v = 10$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05}$$

Ἡ παράστασις $(1,05)^{10}$ ὑπολογιζομένη χωριστὰ εἶναι ἴση πρὸς: 1,628.

Ἄρα $(1,05)^{10} - 1 = 0,628$ καὶ ἐπομένως:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{0,628}{0,05}$$

Ἐκ ταύτης, διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ δι' ἀπ' εὐθείας ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, εὐρίσκομεν:

$$\Sigma = 33016,97 \text{ δρχ.}$$

§ 227. Πρόβλημα II.— Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους α δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, ἥτοι ἅμα τῇ νιοστῇ καταθέσει;

Λύσις: Αἱ α δραχμαί, αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ $(v - 1)$ ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν: $\alpha(1 + \tau)^{v-1}$. Αἱ α δραχμαί αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ $(v - 2)$ ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν: $\alpha(1 + \tau)^{v-2}$.

Δι' ὅμοιον λόγον αἱ α δραχμαί τῆς τρίτης καταθέσεως θὰ γίνουν: $\alpha(1 + \tau)^{v-3}$.

Προχωροῦντες ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι αἱ α δραχμαί τῆς προτελευταίας καταθέσεως, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν ἐπ' ἀνατοκισμῷ μόνον ἓν ἔτος, θὰ γίνουν: $\alpha(1 + \tau)$. Τέλος ἡ τελευταία κατάθεσις δὲν τοκίζεται, καθ' ὅσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἔτους καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι α . Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν κατατεθέντων ποσῶν (μετὰ τῶν τόκων των) θὰ εἶναι:

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau)^{v-1} + \alpha(1 + \tau)^{v-2} + \dots + \alpha(1 + \tau) + \alpha$$

ἢ (§ 170, τύπος 1):

$$\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1 + \tau)^v - 1}{\tau} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (2) καλεῖται **τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ Σ , α , τ , v .

Παράδειγμα. Εἰς καπνιστῆς ἐξοδεύει διὰ τὸ κάπνισμά του 12 δρχ. ἡμερησίως κατὰ μέσον ὄρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τί ποσὸν θὰ εἰσέπραττεν εἰς τὸ 60ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, ἐὰν κατέθετε εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους τὰ χρήματα ποὺ διέθετε διὰ τὴν ἀγορὰν σιγαρέττων εἰς μίαν Τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οὗτος ἤρχισε καπνίζων ἀπὸ τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας του ;

Λύσις : Τὰ ἐτήσια ἔξοδα τοῦ καπνιστοῦ ἀνέρχονται εἰς $12 \cdot 365 = 4.380$ δρχ.

Ἔχομεν τότε : $\alpha = 4380$, $\tau = 0,06$, $\nu = 40$.

Ὅθεν ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{(1,06)^{40} - 1}{0,06} \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $(1,06)^{40}$. Πρὸς τοῦτο θέτομεν : $y = (1,06)^{40}$ καὶ ἔχομεν :

$$\log y = 40 \cdot \log (1,06) = 1,0124.$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν : $y = 10,2895$.

Ἄρα $(1,06)^{40} - 1 = 9,2895$ καὶ συνεπῶς

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{9,2895}{0,06}.$$

Ἐκ ταύτης λογαριθμίζοντες εὐρίσκομεν :

$$\log \Sigma = \log 4380 + \log 9,2895 - \log 0,06.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη, ἐπεὶ δὲ εἶναι : $\log 4380 = 3,64147$, $\log 9,2895 = 0,96800$ καὶ $\log 0,06 = \bar{2},77815$ γίνεται :

$$\log \Sigma = 5,83132.$$

Ἐκ ταύτης εὐρίσκομεν : $\Sigma = 678142,86$.

Ὡστε θὰ εἰσέπραττεν 678142,86 δραχμὰς (!).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

512. Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 8050 δραχμῶν πρὸς 4,5 % εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ πάροdon 18 ἐτῶν;

513. Πατὴρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσὸν τι ὠρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα τοῦτο ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνῃ μετὰ 21 ἔτη 250.000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτήσια κατάθεσις;

514. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους 10.000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 150.000 δραχμὰς;

515. Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 2050 δραχμῶν πρὸς 4,5 % εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους. Μετὰ πάροdon δεκαπενταετίας ἔπαυσε νὰ καταθέτῃ, ἀλλ' ἀφῆκε τὸ σχηματισθὲν κεφάλαιον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 24 ἐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως;

516. Καταθέτει τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἑθνικῆς Τραπεζῆς 5000 δρχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5 %. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ ἔχῃ σχηματισθῇ κατὰ τὴν εἰκοστὴν πρώτην ἐπέτειον τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του;

3. Χρεωλυσία

§ 228. Ὅρισμοί.— Χρεωλυσία καλεῖται ἡ ἐντὸς ὠρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι καταβάλλονται εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου, π.χ. εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἢ τοῦ ἑξαμήνου κλπ.

Τὸ ποσὸν ἐκάστης τῶν ἴσων δόσεων, τὸ ὁποῖον καταβάλλεται εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονικῆς περιόδου διὰ τὴν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους, καλεῖται **χρεωλύσιον**.

Είναι φανερόν ὅτι μέρος μὲν τοῦ χρεωλυσίου χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν δεδουλευμένων τόκων τοῦ χρέους, τὸ ὑπόλοιπον δὲ συντελεῖ εἰς τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Ἀποσβέννυνται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελεῖ ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκίζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

Τὰ συνηθέστερα προβλήματα τῆς χρεωλυσίας λύομεν διὰ τοῦ τύπου, τὸν ὁποῖον εὕρισκομεν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολουθοῦτος γενικοῦ προβλήματος.

§ 229. Πρόβλημα.—'Εδανείσθη τις a δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ ν ἴσων ἐτησίων δόσεων καταβαλλομένων εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν ἐκάστης δόσεως (χρεωλύσιον), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκάστη δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον τ δραχμὰς.

Λύσις : Τὸ δανεισθὲν ποσὸν a , ἀνατοκίζομενον, μετὰ ν ἔτη θὰ ἔχη ἀνέλθῃ εἰς: $a(1+\tau)^n$, ὅπερ καὶ ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ὁ δανειστής.

Οὗτος ὅμως πληρῶνει εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους ἓνα χρεωλύσιον, ἔστω δὲ τοῦτο x δρχ. Δικαιοῦται λοιπὸν νὰ ζητήσῃ καὶ αὐτὸς τοὺς τόκους τῶν ἐτησίων δόσεων, τοὺς ὁποίους ἄλλως τε θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἀνετόκίζε ἐκάστην δόσιν. Αἱ δόσεις αὗται (μὲ τοὺς τόκους των) θ' ἀποτελέσουν, κατὰ τὸν τύπον (2) τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων (§ 227), ποσὸν ἴσον πρὸς :

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

'Αλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον: $a(1+\tau)^n$.

'Εντεῦθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς χρεωλυσίας :

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = a(1+\tau)^n \quad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως ταύτης προσδιορίζομεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον x . Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς x ἡ a δίδει τοὺς τύπους :

$$x = \frac{a\tau(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} \quad (1') \quad \text{καὶ} \quad a = \frac{x \cdot [(1+\tau)^n - 1]}{\tau(1+\tau)^n} \quad (1'')$$

'Ενίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου, λ.χ. μετὰ μ ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις τῆς χρεωλυσίας εἶναι :

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^{n-\mu+1} - 1}{\tau} = a(1+\tau)^n \quad (\text{διατί;})$$

Παραδείγματα ἐπὶ τῆς χρεωλυσίως

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ χρεωλύσιον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνη μία κοινότης, ἣ ὁποία ἐδανείσθη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 300.000 δραχμῶν πρὸς 5% μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐντὸς 50 ἐτῶν.

Λύσις : Κατὰ τὸν τύπον (1') εἶναι

$$x = \frac{300.000 \cdot (1,05)^{50} \cdot 0,05}{(1,05)^{50} - 1}$$

Ἐπειδὴ $(1,05)^{50} = 11,4674$ (διατί;), ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται

$$x = \frac{300.000 \times 11,4674 \times 0,05}{10,4674}$$

ἢ $\log x = (\log 300.000 + \log 11,4674 + \log 0,05) - \log 10,4674$.

Ἡ ἰσότης αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι : $\log 300.000 = 5,47712$, $\log 11,4674 = 1,05946$, $\log 0,05 = \bar{2},69897$ καὶ $\log 10,4674 = 1,01984$, γίνεται :

$$\log x = 4,21571.$$

Ἐξ οὗ :

$$x = 16432,69.$$

Παράδειγμα 2ον : Ποῖον ποσὸν δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 20 ἔτη δι' ἐτησίων χρεωλυσίου 5000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%;

Λύσις : Ἐχομεν ἐνταῦθα $x = 5000$, $\tau = 0,04$, $\nu = 20$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1'') γίνεται :

$$\alpha = \frac{5000 [(1,04)^{20} - 1]}{0,04 \cdot (1,04)^{20}}$$

Ἐπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $(1,04)^{20}$ καὶ ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων :

$$\alpha = 67953 \text{ δραχμάς.}$$

Παράδειγμα 3ον : Δανεῖζεται τις ποσὸν 120000 δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 8%. Πόσας ἐτησίας χρεωλυτικὰς δόσεις τῶν 15000 δραχμῶν πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειον;

Λύσις : Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (1) λαμβάνομεν :

$$x(1 + \tau)^{\nu} - x = \alpha\tau(1 + \tau)^{\nu},$$

ὅθεν

$$(1 + \tau)^{\nu} = \frac{x}{x - \alpha\tau}, \quad (2)$$

ἐξ οὗ :

$$\nu \cdot \log(1 + \tau) = \log x - \log(x - \alpha\tau)$$

καὶ

$$\nu = \frac{\log x - \log(x - \alpha\tau)}{\log(1 + \tau)}. \quad (3)$$

Ἐπειδὴ εἶναι $x = 15000$, $\alpha = 120000$, $\tau = 0,08$ καὶ συνεπῶς $x - \alpha\tau = 5400$, ὁ τύπος (3) δίδει :

$$\nu = \frac{\log 15000 - \log 5400}{\log 1,08}.$$

Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ $\log 15000 = 4,17609$, $\log 5400 = 3,73239$ καὶ $\log 1,08 = 0,03342$, λαμβάνομεν :

$$\nu = \frac{0,44370}{0,0342} = 13 \text{ ἔτη...}, \text{ ἥτοι } 13 < \nu < 14.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι πρέπει νὰ πληρώσῃ 13 δόσεις τῶν 15000 δρχ. καὶ μίαν ἀκόμη, ἣ ὁποία θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 15000 δρχ., ἥτις ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἐπολογίζομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 120000 εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἥτοι ὑπολογίζομεν τό :

$$K = 120000 \cdot (1,08)^{14}.$$

Μετὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον

έχει πληρώσει με τās 13 δόσεις τών 15000 εκάστη εις τὸ τέλος τών αὐτῶν ἐτῶν, ἤτοι τό :

$$\Sigma = \frac{15000 [(1,08)^{14} - 1]}{0,08},$$

ὅτε ἡ διαφορά $K - \Sigma$ δίδει τὴν τελευταίαν δόσιν. Οὕτως εὐρίσκουμεν ὅτι ἡ δόσις αὕτη ἀνέρχεται εἰς 4252 δραχμάς.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς παρδ. 3, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν, πρέπει νὰ εἶναι $x > \alpha\tau$, δηλαδὴ τὸ χρεωλύσιον πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ὅπερ καὶ προφανές, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐγίνετο ποτὲ ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους. Ἄν $x = \alpha\tau$, τότε ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει λύσιν, διότι ὁ παρονομαστής τοῦ β' μέλους μηδενίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δάνειον λέγεται **πάγιον**, διότι οὐδέποτε ἐξοφλεῖται, τὸ δὲ καταβαλλόμενον ποσὸν x χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν ἐτησίων τόκων τοῦ κεφαλαίου.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

517. Κοινότης ἐδανείσθη δι' ἀνέγερσιν σχολικοῦ κτηρίου 120.000 δραχμάς πρὸς 6 % ἐτησίως ἐξοφλητέας χρεωλυτικῶς εἰς 25 ἐτησίας δόσεις. Πόσον χρεωλύσιον θὰ πληρώνη ἐτησίως ;

518. Ἐμπορος ὑπολογίζει ὅτι δύναται νὰ διαθέτῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 8.650 δραχμῶν ἐπὶ 20 ἔτη. Πόσον δάνειον δύναται νὰ συνάψῃ διὰ τὴν προαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν του ἐπιχειρήσεων πρὸς 6 % ἐτησίως ;

519. Δανείζεται τις χρεωλυτικῶς ποσὸν α δραχμῶν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κατ' ἔτος χρεωλύσιον, ἵνα μετὰ ν ἔτη τὸ χρέος του ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ. (Ἐφαρμογὴ : $\alpha = 40000$, $\tau = 0,05$, $\nu = 12$).

520. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Ἐκάστη δόσις (ἐτήσια) θὰ εἶναι 46130 δρχ., θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθέν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5 % ;

521. Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 250.000 δρχ. πρὸς 7 % ἐξοφλητέον ἐντὸς 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὀλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ;

522. Διὰ πόσων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 25.000 δρχ. ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 %, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 3000 δραχμῶν.

523. Συμφωνεῖ τις νὰ πληρώσῃ εἰς ἓνα ἀσφαλιστικὸν ὄργανισμὸν ν ἐτησίας δόσεις πρὸς α δρχ. ἐκάστην ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ὁ ὀργανισμὸς θὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ διὰ τὰ ἐπόμενα 2ν ἔτη ἐτήσιον εἰσόδημα ἐκ β δραχμῶν. Τὸ πρῶτον εἰσόδημα τῶν β δραχμῶν θὰ καταβληθῇ μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν αὐτοῦ. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι τ διὰ μίαν δραχμὴν εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται :

1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ

2ον : Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ν , ἐὰν εἶναι $\beta = 2\alpha$ καὶ $\tau = 0,05$.

524. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20.000 δραχμῶν διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,30 δρχ. ἐκάστην ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 230. Εισαγωγή.— Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν (βλ. Μαθηματικά Δ' Γυμνασίου, τόμος Α, κεφ. ΙΧ) εἶδομεν πῶς ἐπιλύονται προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, ἀκριβέστερον ἡσυχολήθημεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ Z , ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in Z.$$

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν μελέτην εἰδικῶν τινων περιπτώσεων τοῦ κάτωθι γενικοῦ προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως β' βαθμοῦ, τῆς γενικῆς περιπτώσεως μὴ ὑπαγομένης ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

§ 231. Πρόβλημα.— Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z , ἡ ἐξίσωσις :

$$f(x, y, \dots) = 0, \quad (1)$$

ὅπου $f(x, y, \dots)$ ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς $x, y, \dots$, δευτέρου βαθμοῦ, ἔχον πάντας τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀκεραίου.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐπιλύεται πάντοτε. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν εἰδικὰς τινας περιπτώσεις καθ' ὧς ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος, ἀσχολούμενοι κυρίως μὲ ἐπίλυσιν εἰδικῶν τινων ἐξισώσεων, δευτέρου βαθμοῦ, μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἡ γενικὴ (πλήρης) μορφή μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y εἶναι ἡ κάτωθι :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0. \quad (2)$$

Δεχόμεθα, χωρὶς τοῦτο νὰ περιορίζῃ τὴν γενικότητα, ὅτι οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ καὶ η εἶναι ἀκέραιοι καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει τοὺς καθιστῶμεν τοιοῦτους (πῶς;).

Ἡδη θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν τῶν κάτωθι μερικῶν περιπτώσεων τῆς (2) :

Περίπτωσις Ι. Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0, \beta \neq 0$. (Δηλ. ἐλλείπει τὸ y^2). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \delta x + \epsilon y + \eta = 0. \quad (3)$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν :

$$(\beta x + \epsilon) y = -\alpha x^2 - \delta x - \eta. \quad (4)$$

Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις :

Ια. 'Εάν $\beta x + \varepsilon / -\alpha x^2 - \delta x - \eta$, τότε : $-\alpha x^2 - \delta x - \eta \equiv (\beta x + \varepsilon) \cdot (kx + \lambda)$ και ή (4) γίνεται :

$$(\beta x + \varepsilon) y - (\beta x + \varepsilon) (kx + \lambda) = 0 \quad \eta \quad (\beta x + \varepsilon) \cdot (y - kx - \lambda) = 0.$$

Αύτη είναι ισοδύναμος πρὸς τὸ ζεύγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\{\beta x + \varepsilon = 0 \text{ (i)}, \quad y - kx - \lambda = 0 \text{ (ii)}\}.$$

'Η (i) ἔχει ἀκεραίαν λύσιν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\beta | \varepsilon$, δηλ. ἂν $\frac{\varepsilon}{\beta} \in \mathbb{Z}$. Τότε ὁμως ή (3) ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις τὰς :

$$x = -\frac{\varepsilon}{\beta}, \quad y = h, \quad (\text{ἐνθα } h \text{ τυχὼν ἀκέραιος}).$$

'Η (ii), πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ y , λυομένη κατὰ τὰ γνωστὰ (ἀπρὸςδ. ἀνάλυσις πρῶτου βαθμοῦ) δίδει ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων :

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + kh,$$

ἐνθα $h \in \mathbb{Z}$ καὶ (x_0, y_0) μία ἀκεραία λύσις τῆς (ii).

Ιβ. 'Εάν $\beta x + \varepsilon / -\alpha x^2 - \delta x - \eta$, τότε, ἂν $kx + \lambda$ εἶναι τὸ πηλίκον καὶ u τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(-\alpha x^2 - \delta x - \eta) : (\beta x + \varepsilon)$, ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ισοδύναμος πρὸς τὴν :

$$y = (kx + \lambda) + \frac{u}{\beta x + \varepsilon} \quad (5)$$

καὶ ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ k, λ καὶ u δὲν εἶναι πάντες ἀκέραιοι, ἀλλὰ κλασματικοί, ἔστω μὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν τὸν ρ , πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5) ἐπὶ ρ καὶ ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὴν :

$$\rho y = (k_1 x + \lambda_1) + \frac{u_1}{\beta x + \varepsilon}, \quad (5')$$

ἐνθα οἱ $\rho, k_1 = \rho k, \lambda_1 = \rho \lambda, u_1 = \rho u$ εἶναι πάντες ἀκέραιοι.

"Ἡδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς : Διὰ νὰ ἔχη ἀκεραίαν λύσιν ἡ (5') πρέπει καὶ ἄρκει νὰ ὑπάρχη ἀκέραιος x τοιοῦτος, ὥστε ὁ $\beta x + \varepsilon$ νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ u_1 . 'Εξισοῦμεν λοιπὸν τὸν $\beta x + \varepsilon$ μὲ ὅλους τοὺς διαιρέτας $\delta_1, \delta_2, \dots$ τοῦ u_1 καὶ ἐκ τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων $\beta x + \varepsilon = \delta_1, \beta x + \varepsilon = \delta_2, \dots$ εὐρίσκομεν (ἂν ὑπάρχουν) τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x . 'Ακολουθῶς, τὰς εὐρεθείσας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5') καὶ ἐξετάζομεν διὰ ποίας ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ y . Κατὰ ταῦτα διατηροῦμεν τελικῶς μόνον ἐκεῖνας (ἂν ὑπάρχουν), αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ β' μέλος τῆς (5') πολλαπλάσιον τοῦ ρ .

Παρατήρησις. 'Ομοίως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσης $\alpha = 0, \beta \neq 0$.

Ἐφαρμογαί : 1η : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{Z}$, ἡ ἐξίσωσις :

$$2x^2 - 7xy - 3x + 14y - 2 = 0.$$

Λύσις : Αὕτη εἶναι ισοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$(7x - 14)y = 2x^2 - 3x - 2.$$

Τὸ $7x - 14 / 2x^2 - 3x - 2$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(2x^2 - 3x - 2) : (7x - 14)$ εἶναι τὸ $\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$, ὅθεν : $2x^2 - 3x - 2 \equiv (7x - 14) \cdot \left(\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}\right) \equiv (x - 2) \cdot (2x + 1).$

Τότε ή δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

$$(x-2)(2x+1)-7y(x-2)=0 \text{ ἢ } (x-2)(2x-7y+1)=0.$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\{ x-2=0 \text{ (i)}, \quad 2x-7y+1=0 \text{ (ii)} \}.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (i) εἶναι αἱ $x=2$, $y=h$, ἐνθα h τυχὼν ἀκέραιος.

Ἡ (ii), λυομένη κατὰ τὰ γνωστά, δίδει τὰς λύσεις :

$$x=3+7h, \quad y=1+2h, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

2α : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{Z}$, ἡ ἐξίσωσις :

$$3x^2+2xy+x+y+1=0.$$

Λύσεις : Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$(2x+1)y=-3x^2-x-1. \quad (\alpha')$$

Τὸ $2x+1 \nmid -3x^2-x-1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $(-3x^2-x-1):(2x+1)$

εὐρίσκομεν πηλίκον $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ καὶ ὑπόλοιπον $u = -\frac{5}{4}$, καὶ ἡ (α') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{5/4}{2x+1}. \quad (\beta')$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (β') ἐπὶ 4 (δηλ. ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων $3/2$, $1/4$, $5/4$) λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$$4y = -6x + 1 - \frac{5}{2x+1}. \quad (\gamma')$$

Οἱ διαίρεται τοῦ 5 εἶναι οἱ $\pm 1, \pm 5$.

Ἐξισοῦντες τὸ $2x+1$ πρὸς τοὺς διαιρέτας αὐτοὺς λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$2x+1=1, \quad 2x+1=-1, \quad 2x+1=5, \quad 2x+1=-5.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως : $x=0$, $x=-1$, $x=2$, $x=-3$.

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ x τίθενται διαδοχικῶς εἰς τὴν (γ') δίδουν ἀντιστοίχως :

$$y=-1, \quad y=3, \quad y=-3, \quad y=5.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει 4 ἀκεραίας λύσεις τὰς :

$$(x=0, y=-1), \quad (x=-1, y=3), \quad (x=2, y=-3), \quad (x=-3, y=5).$$

Περίπτωσις II. Ἐὰν εἶναι $\beta=\gamma=0$. (Δηλ. ἐλλείπει τὸ y^2 καὶ τὸ xy). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha x^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0. \quad (6)$$

Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς y δίδει :

$$y = -\frac{\alpha x^2 + \delta x + \eta}{\epsilon}. \quad (7)$$

Ἦδη ἀποδεικνύομεν τὰς κάτωθι προτάσεις :

1η : Ἐὰν ἡ (6) δέχεται ἀκεραῖαν τινα λύσιν (x_0, y_0) , θὰ δέχεται ὡς ἀκεραίας λύσεις καὶ τὰς :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon h \\ y &= y_0 - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha \epsilon h^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ἐνθα $h \in \mathbb{Z}$.

Πράγματι, αν εις τήν (7) θέσωμεν όπου $x = x_0 + \epsilon h$, $h \in \mathbb{Z}$, ἔχομεν :

$$y = -\frac{\alpha (x_0 + \epsilon h)^2 + \delta (x_0 + \epsilon h) + \eta}{\epsilon} = -\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + \eta}{\epsilon} - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha \epsilon h^2.$$

Ἀλλά :

$$-\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + \eta}{\epsilon} = y_0.$$

Ὅθεν : $y = y_0 - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha \epsilon h^2$, δηλ. ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν τώρα τὸ ἐξῆς : ἂν ἡ ἐξίσωσις (6) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν μίαν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν καὶ ἀκολουθῶς ἐκ τῶν τύπων (8) θὰ ἔχωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀκεραίας λύσεις. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς ἀνάγεται εἰς τὴν ἀναζήτησιν μιᾶς ἀκεραίας λύσεως τῆς (6). Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν κάτωθι πρότασιν :

2α: Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (6) δέχεται ἀκεραίας λύσεις, τότε ὑπάρχει ἀκεραία λύσις αὐτῆς (x'_0, y'_0) τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$0 \leq x'_0 < |\epsilon|. \quad (9)$$

Πράγματι, ἔστω (x_0, y_0) μία ἀκεραία λύσις τῆς (6). Τότε, ἂν ὁ x_0 πληροῖ τὴν (9) ἡ πρότασις ἐδείχθη, ἂν ὄχι, ἔπειδὴ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν, ὁ $x_0 + \epsilon h$, $h \in \mathbb{Z}$, τιθέμενος εἰς τὴν (6) ἀντὶ τοῦ x δίδει διὰ τὸ y ἀκεραίαν τιμὴν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος h , ὥστε νὰ εἶναι :

$$0 \leq x_0 + \epsilon h < |\epsilon|$$

ἥτοι :

$$-\frac{x_0}{\epsilon} \leq h < 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad -\frac{x_0}{\epsilon} \geq h > -1 - \frac{x_0}{\epsilon},$$

καθ' ὅσον εἶναι $\epsilon > 0$ ἀντιστοίχως $\epsilon < 0$.

Ὡστε, ἀρκεῖ νὰ δεიχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος h τοιοῦτος, ὥστε :

$$h \in \left[-\frac{x_0}{\epsilon}, 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad h \in \left(-1 - \frac{x_0}{\epsilon}, -\frac{x_0}{\epsilon} \right].$$

Τοῦτο ὁμῶς συμβαίνει, διότι τὸ μήκος τοῦ διαστήματος (§ 114, δ')

$$\left[-\frac{x_0}{\epsilon}, 1 - \frac{x_0}{\epsilon} \right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad \left(-1 - \frac{x_0}{\epsilon}, -\frac{x_0}{\epsilon} \right]$$

εἶναι 1. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι ὑπάρχει ἀκεραία τιμὴ τοῦ x , θετικὴ ἢ μηδὲν καὶ μικρότερα τοῦ $|\epsilon|$, δίδουσα, ἐκ τῆς (7), διὰ τὸ y ἀκεραίαν τιμὴν.

Κατόπιν τούτου διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκεραίας λύσεως τῆς (6) ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς : Δίδομεν εἰς τὸ x διαδοχικῶς τὰς ἀκεραίας τιμὰς : 0, 1, 2, 3, ..., $(|\epsilon| - 1)$, ὅτε, ἐὰν ἡ (6) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, ὁ τύπος (7) θὰ δώσῃ, διὰ μίαν τοῦλάχιστον τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ x , ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ y . Ἐὰν δι' οὐδεμίαν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ x ὁ τύπος (7) δὲν δώσῃ ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ y , τοῦτο θὰ σημαίνει ὅτι ἡ (6) δὲν ἐπιδέχεται ἀκεραίας λύσεις.

Σημείωσις : Ἐὰν εὗρωμεν διὰ τὸ x τιμὰς τοῦ διαστήματος $[0, |\epsilon|]$ π.χ. τὰς : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_p$ ὥστε δι' αὐτὰς ἐκ τῆς (7) νὰ λαμβάνωμεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ y , τὰς $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$ ἀντι-

στοίχως, τότε θα έχωμεν διὰ τὴν (6) τὰς ἀκεραίας λύσεις : $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$. Ἐφαρμόζοντες δι' ἑκάστην τῶν λύσεων τούτων τοὺς τύπους (8) εὐρίσκομεν ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξίσωσης (6), αἱ ὁποῖαι ὁμως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην πᾶσαι αἱ λύσεις αὐτῆς.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσις $\alpha = \beta = 0$.

Ἐφαρμογή : Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκεραῖαι λύσεις τῆς ἐξίσωσης :

$$3x^2 + 2x - 5y - 1 = 0. \quad (\alpha')$$

Λύσις : Λύοντες τὴν (α') ὡς πρὸς y λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5} \quad (\beta')$$

Ἐνταῦθα εἶναι $\epsilon = -5$. Διὰ τὴν εὐρωμεν ἀκεραῖαν λύσιν τῆς (α') , δίδομεν εἰς τὸ x τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ διαστήματος $[0, |\epsilon|] \equiv [0, 5]$, ἥτοι τὰς τιμὰς : 0, 1, 2, 3, 4 καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (β') ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς :

$$y_0 = -\frac{1}{5}, \quad y_1 = \frac{4}{5}, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = \frac{32}{5}, \quad y_4 = 11.$$

Οὕτως ἔχομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις :

$$(x = 2, y = 3) \quad \text{καὶ} \quad (x = 4, y = 11).$$

Τότε ὁμως ἡ (α') θὰ δέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους (8). Οὕτω διὰ τὴν λύσιν $(x = 2, y = 3)$ οἱ τύποι (8) δίδουν :

$$x = 2 - 5h, \quad y = 3 - 14h + 15h^2, \quad h \in \mathbb{Z}$$

καὶ διὰ τὴν λύσιν $(x = 4, y = 11)$ οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουν :

$$x = 4 - 5h, \quad y = 11 - 26h + 15h^2, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Περίπτωσις III. Ἐὰν εἶναι $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ καὶ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2, k \in \mathbb{Z}$. (Δηλ. ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ).

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{Z}$, τὴν ἐξίσωσιν (1) : $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0$, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς κάτωθι δύο προτάσεις :

Ιη : Ἐὰν $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ καὶ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον ἀκεραίου ἐντὸς $k \neq 0$, τότε ἡ (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(px + qy + r) \cdot (p'x + q'y + r') = d, \quad (10)$$

ὅπου p, q, r, p', q', r' καὶ d ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Πράγματι, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν προσθέτοντες εἰς τὰ μέλη τῆς (1) κατάλληλον ἀριθμὸν λ νὰ φέρωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν (10).

Ἐστω λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta + \lambda = \lambda. \quad (11)$$

Ἡ (11) γράφεται ὡς τριώνυμον τοῦ x οὕτως :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta) x + (\gamma y^2 + \epsilon y + \eta + \lambda) = \lambda. \quad (12)$$

Διὰ νὰ φέρωμεν τώρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (12) εἰς τὴν μορφήν τοῦ πρώτου μέλους τῆς (10), ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ ὥστε ἡ διακρίνουσα $\Delta(y)$ τοῦ τριωνύμου :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta) x + (\gamma y^2 + \epsilon y + \eta + \lambda) \quad (13)$$

νά είναι τετράγωνον πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ως πρὸς y μὲ συντελεστὰς συμμετρους ἀριθμούς. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν — καὶ μάλιστα τὸ πρωτοβάθμιον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $ky + \sigma$, ὅπου σ σύμμετρος ἀριθμὸς — διότι ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\Delta(y) &\equiv (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \eta + \lambda) \\ &= (\beta^2 - 4\alpha\gamma) y^2 - 2(2\alpha\varepsilon - \beta\delta) y + (\delta^2 - 4\alpha\eta - 4\alpha\lambda)\end{aligned}\quad (14)$$

καὶ τὸ τριώνυμον (14), ἐφ' ὅσον εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2$ (k ἀκέραιος $\neq 0$), δύνανται νὰ τεθῇ, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τὴν μορφήν $(ky + \sigma)^2$, ἐνθα σ σύμμετρος ἀριθμὸς.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ $\Delta(y)$ τέλειον τετράγωνον ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ ὥστε ἡ διακρίνουσα Δ τοῦ $\Delta(y)$ νὰ εἶναι μηδὲν (διατί;), δηλ. νὰ εἶναι :

$$(2\alpha\varepsilon - \beta\delta)^2 - k^2(\delta^2 - 4\alpha\eta - 4\alpha\lambda) = 0. \quad (15)$$

Ἐκ τῆς (15) ὅμως προσδιορίζεται τὸ λ , διότι ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{k^2(\delta^2 - 4\alpha\eta) - (2\alpha\varepsilon - \beta\delta)^2}{4\alpha k^2}. \quad (16)$$

Οὕτως, ὀριζομένου τοῦ λ , ἡ (12) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha \left[x - \frac{-(\beta y + \delta) + (ky + \sigma)}{2\alpha} \right] \cdot \left[x - \frac{-(\beta y + \delta) - (ky + \sigma)}{2\alpha} \right] = \lambda$$

$$\eta \quad [2\alpha x + (\beta - k)y + (\delta - \sigma)] \cdot [2\alpha x + (\beta + k)y + (\delta + \sigma)] = 4\alpha\lambda. \quad (17)$$

Ὡστε, πράγματι ἡ (1) τίθεται, ὑπὸ τὰς τεθείσας ὑποθέσεις, ὑπὸ τὴν μορφήν (10). Ἀποδεικνύομεν τῶρα καὶ τὴν ἐξῆς πρότασιν :

2α: Ἐὰν ὁ ἀκέραιος $d \neq 0$ ἔχῃ ν θετικὸν διαιρέτα : $1 = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v = |d|$, τότε ἡ ἐξίσωσις : $(px + qy + r) \cdot (p'x + q'y + r') = d$ (10') καὶ τὰ 2ν συστήματα :

$$\left\{ px + qy + r = \varepsilon\delta_i, \quad p'x + q'y + r' = \varepsilon \frac{d}{\delta_i} \right\} \quad (18)$$

ὅπου $\varepsilon = 1$ ἢ -1 καὶ $i = 1, 2, \dots, v$, ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις.

Πράγματι, ἂν (x_0, y_0) εἶναι ἀκεραία λύσις τῆς (10'), τότε: $px_0 + qy_0 + r = k$ καὶ $p'x_0 + q'y_0 + r' = \lambda$, ὅπου $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ καὶ $k \cdot \lambda = d$. Ἀρα $k | d$ καὶ $\lambda | d$, ἐπομένως $k = \varepsilon\delta_i$, ὅπου $\varepsilon = \pm 1$ καὶ $\delta_i, i = 1, 2, \dots, v$ εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι διαιροῦν τὸν d καὶ $\lambda = \frac{d}{k} = \frac{d}{\varepsilon\delta_i} = \frac{\varepsilon d}{\varepsilon^2\delta_i} = \varepsilon \frac{d}{\delta_i}$, διότι $\varepsilon^2 = 1$, ἥτοι ἡ τυχούσα ἀκεραία λύσις (x_0, y_0) τῆς (10') εἶναι καὶ λύσις ἐνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18).

Ἀντιστρόφως, ἂν (x_0, y_0) εἶναι ἀκεραία λύσις ἐνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18) ἔχομεν :

$$px_0 + qy_0 + r = \varepsilon\delta_i \quad \text{καὶ} \quad p'x_0 + q'y_0 + r' = \varepsilon \frac{d}{\delta_i}.$$

Τότε όμως εξ αὐτῶν προκύπτει :

$$(px_0 + qy_0 + r) \cdot (p'x_0 + q'y_0 + r') = (\varepsilon \delta_i) \cdot \left(\varepsilon \frac{d}{\delta_i} \right) = \varepsilon^2 \delta_i \frac{d}{\delta_i} = d,$$

ἤτοι ἡ (x_0, y_0) εἶναι λύσις καὶ τῆς (10'). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἡδὴ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω προτάσεις 1 καὶ 2, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν ἐντὸς τοῦ Z τὴν (1) εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι : $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0, \beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2 \neq 0, k \in Z$ ἐργαζόμενοι ὡς ἐξῆς : Φέρομεν ἐν πρώτοις τὴν (1) ὑπὸ τὴν μορφήν (10) καὶ ἀκολουθῶς ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν 2.

Ἐφαρμογὰί : 1η : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξίσωσως : $y^2 = 9x^2 - 11$.

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται : $9x^2 - y^2 = 11$. (α')

Ἐνταῦθα ἔχομεν : $\alpha = 9, \beta = 0, \gamma = -1, \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 = 6^2$.

Ἡ (α') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν : $(3x + y) \cdot (3x - y) = 11$. (β')

Οἱ διαιρέται τοῦ 11 εἶναι : $\pm 1, \pm 11$. Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ τὰ τέσσαρα συστήματα :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x - y = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x - y = -11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -11 \\ 3x - y = -1, \end{cases}$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις. Ἡ ἐπίλυσις τούτων εἶναι πολὺ ἀπλῆ.

2α : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z , ἡ ἐξίσωσις :

$$2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 = 0. \quad (\gamma')$$

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 4 = 2^2$ προσδιορίζομεν κατάλληλον ἀριθμὸν λ ὥστε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξίσωσως : $2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 + \lambda = \lambda$ νὰ τίθεται ὑπὸ μορφήν γινομένου δύο πρωτοβαθμίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x καὶ y .

Ἐκ τοῦ τύπου (16) ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{4(25 - 4 \cdot 2 \cdot 2) - (2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 5)^2}{4 \cdot 2 \cdot 4} = -20.$$

Ὁ -20 εἶναι λοιπὸν ὁ κατάλληλος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὰ μέλη τῆς (γ') ὥστε τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν (10). Πράγματι, ἐκ τῆς (γ') ἔχομεν :

$$2x^2 + (6y + 5)x + 4y^2 + y - 18 = -20, \quad (\delta')$$

ὁπότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (δ') θεωρούμενον τριώνυμον ὡς πρὸς x ἔχει ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς :

$$\rho_{1,2} = \frac{-(6y + 5) \pm \sqrt{(6y + 5)^2 - 8(4y^2 + y - 18)}}{4} = \frac{-(6y + 5) \pm (2y + 13)}{4},$$

$$\text{ἤτοι :} \quad \rho_1 = -y + 2, \quad \rho_2 = -2y - \frac{9}{2}.$$

Τότε ὁμως ἡ ἐξίσωσις (δ') λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) \equiv 2(x + y - 2) \cdot \left(x + 2y + \frac{9}{2}\right) = -20$$

$$\text{ἢ} \quad (x + y - 2) \cdot (2x + 4y + 9) = -20. \quad (\varepsilon')$$

Οἱ θετικοὶ διαιρέται τοῦ -20 εἶναι οἱ : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Τότε ἡ (ε') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰ $2 \cdot 6 = 12$ συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2 = \varepsilon \delta_i, \quad 2x + 4y + 9 = \varepsilon \frac{-20}{\delta_i} \end{array} \right\}$$

ὅπου $\varepsilon = +1$ ἢ -1 καὶ $\delta_i \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Οὕτω, π.χ., διὰ $\varepsilon = 1, \delta_i = 4$ ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2 = 4 \\ 2x + 4y + 9 = -5, \end{array} \right\}, \quad \text{ἤτοι :} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + 2y = -7 \end{array} \right\}$$

τὸ ὁποῖον δέχεται τὴν λύσιν $(x = 19, y = -13)$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τῆς δοθείσης.

Περίπτωσης IV. 'Εάν είναι $\alpha = \gamma = 0$ και $\beta\delta\epsilon\eta \neq 0$. Τότε η (2) ανάγεται εις τήν εξίσωσιν : $\beta xy + \delta x + \epsilon y + \eta = 0$.

Αὕτη γράφεται διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} & \beta^2 xy + \beta \delta x + \beta \epsilon y + \beta \eta = 0 \\ \eta & \quad \beta^2 xy + \beta \delta x + \beta \epsilon y + \delta \epsilon = \delta \epsilon - \beta \eta \\ \eta & \quad (\beta y + \delta) (\beta x + \epsilon) = \delta \epsilon - \beta \eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (19) εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν συστημάτων :

$$\left\{ \beta x + \epsilon = k, \quad \beta y + \delta = \frac{\delta \epsilon - \beta \eta}{k} \right\},$$

ὅπου $k \mid \delta \epsilon - \beta \eta$.

Ἐφαρμογή : Νά ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$, ἡ εξίσωσις :

$$2xy - 3x + y + 1 = 0. \quad (\zeta')$$

Ἐπίλυσις : Ἐχομεν $\alpha = \gamma = 0$, $\beta\delta\epsilon\eta = -6 \neq 0$.

Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν εξίσωσιν : $4xy - 6x + 2y + 2 = 0$ καὶ αὕτη πρὸς τήν : $(2x + 1)(2y - 3) = -5$.

Οἱ θετικὸι διαιρέται τοῦ -5 εἶναι οἱ : 1 καὶ 5. Ἡ ἐπίλυσις συνεπῶς τῆς (ζ') ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν τῶν τεσσάρων συστημάτων :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = 1 \\ 2y - 3 = -5, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = -5 \\ 2y - 3 = +1, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = -1 \\ 2y - 3 = 5, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = 5 \\ 2y - 3 = -1. \end{array} \right\}$$

Αἱ λύσεις τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$(x = 0, y = -1), \quad (x = -3, y = 2), \quad (x = -1, y = 4), \quad (x = 2, y = 1).$$

Αὗται εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης εξισώσεως.

Περίπτωσης V. (Γενικὴ περίπτωσις). 'Εάν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ καὶ $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq k^2$, $k \in \mathbf{Z}$ (δηλ. τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου). Τότε ἡ εξίσωσις (2) (σελίς 285) λυομένη ὡς πρὸς x δίδει :

$$x = \frac{-(\beta y + \delta) \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma) y^2 - 2(2\alpha\epsilon - \beta\delta) y + (\delta^2 - 4\alpha\eta)}}{2\alpha}. \quad (20)$$

Ἡνα ἡ (1) ἐπιλύεται ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$ θὰ πρέπει νὰ συμβαίνουν τὰ ἑξῆς : πρῶτον νὰ εἶναι : $\Delta \equiv (\beta^2 - 4\alpha\gamma) y^2 - 2(2\alpha\epsilon - \beta\delta) y + (\delta^2 - 4\alpha\eta) = k^2$, ἔνθα y, k ἐν $\mathbf{Z}$ καὶ δευτέρον πρέπει : $2\alpha \mid -(\beta y + \delta) \pm k$. Ζητοῦμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον ποῖαι τιμαὶ τοῦ y καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον **θετικόν**. Ἐὰν εἰς τὸ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς y τριώνυμον Δ , ὁ συντελεστὴς $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ τοῦ y^2 εἶναι ἀρνητικὸς καὶ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 πραγματικαί, τότε πρέπει ὁ y νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, διὰ νὰ καθίσταται τοῦτο θετικόν. Ἐπομένως εἰς τήν περίπτωσιν αὐτὴν *περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἀκεραίας τιμὰς y τὰς πληρούσας τήν :*

$$\rho_1 \leq y \leq \rho_2.$$

Ἐκ τῶν ἀκεραίων τούτων τιμῶν τοῦ y ἐκλέγομεν μόνον ἐκεῖνας, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον Δ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ τέλος, ἐξ αὐτῶν ἐκεῖνας αἱ ὁποῖαι τιθέμεναι εἰς τήν (20) καθιστοῦν τὸ x ἀκεραίου.

Ἐφαρμογή : Νά ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$, ἡ εξίσωσις :

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 7y - 9 = 0 \quad (\alpha')$$

Ἐπίλυσις. Αὕτη γράφεται : $2x^2 + 2(y-1)x + (2y^2 - 7y - 9) = 0$.

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς x ἔχομεν :

$$x = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2(2y^2 - 7y - 9)}}{2} = \frac{-y+1 \pm \sqrt{-3y^2 + 12y + 19}}{2} \quad (\beta')$$

Ἐν πρώτοις πρέπει :

$-3y^2 + 12y + 19 \geq 0$, δηλ. $-1 \leq y \leq 5$ καὶ ἐπειδὴ $y \in \mathbb{Z}$, ἔχομεν :

$y = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν λαμβάνομεν μόνον ἐκείνας αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον τέλειον τετράγωνον. Αὗται εἶναι αἱ $y = -1$ καὶ $y = 5$.

Διὰ τὴν τιμὴν $y = -1$ ἡ (β') δίδει : $x = 2, x = 0$.

Διὰ τὴν τιμὴν $y = 5$ ἡ (β') δίδει : $x = -1, x = -3$.

*Αρα ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας ἀκεραίας λύσεις τὰς :

$(x = 2, y = -1), (x = 0, y = -1), (x = -1, y = 5), (x = -3, y = 5)$.

§ 232. Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξίσωσως :

$$x^2 + ky^2 = z^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

*Ανευ βλάβης τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὸν ἀκέραιον k πάντοτε θετικόν, διότι ἄλλως ἢ (1) θὰ ἡδύνατο νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $z^2 + (-k)y^2 = x^2$, εἰς ἣν ὁ $(-k)$ θὰ ἦτο πάλιν θετικὸς.

Ἡ (1) ἐπιδέχεται προφανῶς τὴν λύσιν : $x = y = z = 0$. Ἐπίσης διὰ $y = 0$ ἔχομεν : $x = \pm z$, ὅτε ἡ (1) ἐπιδέχεται τὰς ἀκεραίας λύσεις : $x = z, y = 0$ καὶ $x = -z, y = 0$. Θὰ ζητήσωμεν τώρα ἀκεραίας λύσεις τῆς (1) μὲ $y \neq 0$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ y^2 , λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{x^2}{y^2} + k = \frac{z^2}{y^2}. \quad (2)$$

Θέτομεν $\frac{z}{y} = \frac{x}{y} + \frac{n}{m}$ (3), ἔνθα οἱ m, n ἀκέραιοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν :

$$\frac{z^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my}. \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) ἔχομεν :

$$k = \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my} \quad (5)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\frac{x}{y} = \frac{km^2 - n^2}{2mn}. \quad (6)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ (6) ἀληθεύει, ἐὰν εἶναι $x = (km^2 - n^2)h$ καὶ $y = 2mnh$, ἔνθα $h \in \mathbb{Z}$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ y : $z = (km^2 + n^2)h$. Ἀρα αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων :

$x = (km^2 - n^2)h$	$y = 2mnh$	$z = (km^2 + n^2)h$
---------------------	------------	---------------------

(7)

ἔνθα οἱ m, n, h εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ὅμοίως ἐπιλύεται ἡ ἐξίσωσις $kx^2 + y^2 = z^2$.

Σημειώσεις. 'Η (1) διὰ $k = 1$ ανάγεται εις τὴν ἐξίσωσιν : $x^2 + y^2 = z^2$, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **πυθαγόρειος ἐξίσωσις**, διότι δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συνδέει τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις αὐτῆς θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν τύπων (7), ἂν θέσωμεν $k = 1$, ἤτοι :

$$x = (m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (m^2 + n^2)h, \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι οἱ ὅποιοι ἐπαληθεύουν τὴν $x^2 + y^2 = z^2$ καλοῦνται **πυθαγόρειοι ἀριθμοί**. 'Η ἀπλουστερά τριάς πυθαγορείων ἀριθμῶν εἶναι : 3, 4, 5.

Διὰ $n = h = 1$ οἱ τύποι (8) γίνονται :

$$x = m^2 - 1, \quad y = 2m, \quad z = m^2 + 1 \quad (m \in \mathbb{N}, \quad m \neq 1)$$

καὶ καλοῦνται **πυθαγόρειοι τύποι**, ἂν καὶ ὡς πυθαγόρειοι τύποι φέρονται οἱ γνωστοὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους :

$$x = \frac{m^2 - 1}{2}, \quad y = m, \quad z = \frac{m^2 + 1}{2},$$

ἐνθα m τυχὼν περιττὸς φυσικὸς ἀριθμὸς $\neq 1$.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 + 4y^2 = z^2.$$

Λύσις : Αὕτη προφανῶς ἐπιδέχεται τὴν λύσιν : $x = y = z = 0$, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰς λύσεις : $x = z, y = 0$ καὶ $x = -z, y = 0$. Αἱ λοιπαὶ ἀκέραιαι λύσεις εὐρίσκονται ἐκ τῶν τύπων (7) διὰ $k = 4$ καὶ εἶναι αἱ κάτωθι :

$$x = (4m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (4m^2 + n^2)h, \quad \text{ἐνθα } m, n, h \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

525. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

$$1. \quad 2x^2 - 2xy - 5x - y - 3 = 0, \quad 2. \quad 3xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0,$$

$$3. \quad 3y^2 - 2y - 5x - 1 = 0, \quad 4. \quad 5xy - 2x - 3y - 18 = 0.$$

526. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ $\mathbb{Z}$, αἱ ἐξισώσεις :

$$1. \quad 2x^2 - xy - 3y^2 - 13x + 17y + 6 = 0, \quad 2. \quad (x + 7)(y + 8) = 5xy,$$

$$3. \quad 2x^2 + 5xy - 12y^2 - 28 = 0, \quad 4. \quad 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5y - 2 = 0.$$

527. 'Ομοίως αἱ ἐξισώσεις :

$$1. \quad 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 4y + 2 = 0, \quad 2. \quad x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 3y - 4 = 0,$$

$$3. \quad 3x^2 - 6xy + 4x - 5y - 31 = 0, \quad 4. \quad x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0,$$

$$5. \quad x^2 - 3y^2 = z^2, \quad 6. \quad 5x^2 + y^2 = z^2, \quad 7. \quad z^2 - y^2 = 2x^2.$$

528. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$x(3 - |y|) + y(3 - |x|) + |xy| = 6.$$

529. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς, ὁ ὅποιος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ψηφίων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

§ 233. Εισαγωγικά ἔννοιαι — συμβολισμοί.—Ἡ Συνδυαστικὴ Ἀνάλυσις ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα εἰς ἐργασίας τῶν Fermat καὶ Pascal διὰ τὴν συστηματικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τὰ ὅποια παρουσιάζονται εἰς τὰ «*τυχηρὰ παιγνίδια*». Ἐκτοτε ἡ ἀνάλυσις αὕτη εὔρε πλείστας ἐφαρμογὰς. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον, εἶναι ὄχι μόνον ἡ ἀρχαιότερα, ἀλλὰ καὶ μία ἀπὸ τὰς πλέον σημαντικὰς.

Διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ αὐστηροτέραν διατύπωσιν τῶν ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ διαπραγματευομένων θεμάτων, ὀρίζομεν τὰ κάτωθι :

α'). Καλοῦμεν **τμῆμα** T_v τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ v τὸ ὑποσύνολον :

$$T_v \equiv \{k \in \mathbb{N} : \text{μέ } k \leq v\} \text{ τοῦ } \mathbb{N}.$$

Τὸ T_v συμβολίζεται, συνήθως, καὶ μέ : $T_v \equiv \{1, 2, 3, \dots, v\}$.

Παράδειγμα : $T_5 \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

β'). Τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ἀκεραίων (φυσικῶν) ἀπὸ 1 ἕως v θὰ τὸ παριστῶμεν συντόμως μέ $v!$ (Τὸ σύμβολον $v!$ ἀναγινώσκεται «*v παραγοντικόν*»). Τὸ σύμβολον $v!$ ὀρίζεται ὡς κάτωθι :

$$1! = 1, \quad 2! = (1!) 2 = 1 \cdot 2, \quad 3! = (2!) 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ καὶ ἐπαγωγικῶς}$$

$v! = (v-1)! v = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (v-2) \cdot (v-1) \cdot v$

(1)

Διὰ τὴν πληρότητα τοῦ συμβόλου $v!$ δεχόμεθα ὅτι : $0! = 1$.

Διὰ τὸ σύμβολον $v!$ ἰσχύει ἡ ιδιότης :

$$v! = (v-k)! (v-k+1) (v-k+2) \cdots (v-1) v, \quad k \leq v.$$

Οὕτως : $10! = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ θαυμαστικοῦ (!) εἰς τὸν συμβολισμόν τῶν παραγοντικῶν σχετίζεται μέ τὴν καταπληκτικὴν αὐξησιν αὐτῶν. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα :

$1! = 1$	$4! = 24$	$7! = 5040$	$10! = 3628800$
$2! = 2$	$5! = 120$	$8! = 40320$	$11! = 39916800$
$3! = 6$	$6! = 720$	$9! = 362880$	$12! = 479001600$

§ 234. Ἀπλαῖ μεταθέσεις.— Ἐστω τὸ πεπερασμένον σύνολον :

$$E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

Καλοῦμεν **μετάθεσιν** τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου E κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἥτοι :

$$M: E \longleftrightarrow E.$$

Καλοῦμεν **ἀπαρίθμησην** τοῦ συνόλου E κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $T_n \equiv \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ἐπὶ τοῦ E , ἥτοι :

$$T_n \ni k \longleftrightarrow \alpha_i \in E, \quad i \in T_n.$$

Ἐκάστη ἀπαρίθμησης, ὡς καὶ ἡ μετάθεσις, παρίσταται συμβολικῶς (§ 87) δι' ἐνὸς ὀρθογωνίου σχήματος (πίνακος) ἐκ δύο γραμμῶν, π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ πίνακος γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἐκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ. Συνήθως ὅμως ἡ πρώτη γραμμὴ παραλείπεται καὶ γράφονται (παρατάσσονται) μόνον αἱ εἰκόνες κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας, π.χ. ὡς κάτωθι :

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \alpha_3 & & \alpha_5 & & & & \alpha_n \end{array}$$

εἰς τρόπον ὥστε τὸ πρῶτον στοιχεῖον τῆς παρατάξεως νὰ εἶναι εἰκὼν τοῦ 1, τὸ δεύτερον εἰκὼν τοῦ 2, τὸ τρίτον εἰκὼν τοῦ 3, κ.ο.κ. Ἐνεκα τούτου καὶ διὰ παιδαγωγικούς κυρίως σκοποὺς πολλοὶ συγγραφεῖς ὀρίζουν ὡς μετάθεσιν n πραγμάτων (στοιχείων) κάθε κατάταξιν αὐτῶν εἰς μίαν σειράν. Εἶναι φανερόν ὅτι δύο μεταθέσεις n πραγμάτων εἶναι διάφοροι μεταξύ των, ἂν καὶ μόνον, ἂν ἔν (ἐπομένως τοῦλάχιστον δύο) ἐκ τῶν n πραγμάτων εὐρίσκεται τοποθετημένον εἰς διαφορετικὴν θέσιν ἐντὸς αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὸ T_n καὶ τὸ E ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ E ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀπαριθμήσεων αὐτοῦ. Εἶναι ἐπίσης φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν στοιχείων τοῦ E , ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτοῦ. Ἄρα τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ T_n . Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πολλάκις n διακεκριμένα πράγματα, διὰ τὰ ὁποῖα δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ φύσις, τὰ σημειώνομεν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, ..., n . Κατόπιν τούτου αἱ ἔννοιαι ἀπαρίθμησης καὶ μετάθεσις θὰ χρησιμοποιῶνται κατωτέρω ἀδιακρίτως.

Ἄς υπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος ὅλων τῶν μεταθέσεων τῶν n διαφόρων μεταξύ των στοιχείων. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων τῶν n στοιχείων (πραγμάτων) εἰς μίαν σειράν. Τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μεταθέσεων τῶν n στοιχείων θὰ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον M_n .

Εἶναι φανερόν ὅτι δι' ἓν πρᾶγμα ὑπάρχει μία μόνον μετάθεσις, ἥτοι :

$$M_1 = 1 = 1!$$

Αί δυνατά μεταθέσεις δύο πραγμάτων, π.χ. τῶν α_1, α_2 εἶναι δύο, αἱ :

$$\alpha_1\alpha_2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2\alpha_1,$$

διότι τὸ α_1 ἢ θὰ εἶναι πρῶτον ἢ θὰ εἶναι δεύτερον. Συνεπῶς ἔχομεν :

$$M_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

Αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ εἶναι αἱ ἀκόλουθοι ἑξ :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_1\alpha_3\alpha_2, \quad \alpha_3\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_1\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1.$$

Δηλαδή :

$$M_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

Γενικῶς ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

Π ρ ό τ α σ ι ς.—Τὸ πλῆθος M_v τῶν μεταθέσεων v στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v$, ἥτοι :

$$M_v = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v = v! = \prod_{k=1}^v k$$

 (1)

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $v = 1$ (ἐπίσης, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἰσχύει καὶ διὰ $v = 2, 3$).

Ἐστω ὅτι αὕτη ἰσχύει διὰ $v = k$, ἥτοι :

$$M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k! \quad (k \geq 1) \quad (2)$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ $v = k + 1$, ἥτοι :

$$M_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdots k(k+1) = (k+1)! \quad (3)$$

Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν $(k+1)$ στοιχείων καὶ χωρίσωμεν αὐτὰς εἰς ομάδας θέτοντες εἰς τὴν πρώτην ομάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν π.χ. ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_1 , εἰς μίαν δευτέραν ομάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_2 , κ.ο.κ. καὶ τέλος εἰς μίαν $k+1$ τάξεως ομάδα τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_{k+1} .

Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ διάφοροι ἀλλήλων μεταθέσεις ἐκάστης ομάδος εἶναι $k!$, διότι αὐταὶ λαμβάνονται ἂν μετὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον, μὲ τὸ ὅποιον ἀρχίζουν, γράψωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν λοιπῶν k στοιχείων, αἱ ὁποῖαι λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως (2) τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἶναι : $M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k!$ Ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν $(k+1)$ στοιχείων εἶναι :

$$M_{k+1} = (k+1) M_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k(k+1) = (k+1)!$$

δηλ. ἡ πρότασις (1) ἰσχύει καὶ διὰ $v = k+1$, ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν v .

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί : 1η : Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἐνὸς ζυγοῦ 10 μαθηταί ;

Λ ύ σ ι ς : Τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων θὰ εἶναι ἀκριβῶς ὅσαι αἱ ἀπλᾶι μεταθέσεις τῶν 10 πραγμάτων, ἥτοι :

$$M_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

2α : Νά εὑρεθῇ τὸ πλῆθος ὧλων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 1000, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ ὅλα τὰ ψηφία 5, 3, 0, 9 μὴ ἐπιτρεπομένης τῆς ἐπαναλήψεως ψηφίου τινός.

Λύσις : Κάθε ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1000 ἀντιστοιχεῖ εἰς κάποιαν μετάθεσιν τῶν ψηφίων 5, 3, 0, 9 ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι τὸ ψηφίον 0 δὲν κατέχει τὴν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως εἰς τοὺς ὁποίους προηγείται τὸ μηδὲν (π.χ. 0395, 0539, ...) εἶναι τόσοι τὸ πλῆθος, ὅσαι καὶ αἱ μεταθέσεις τῶν τριῶν ψηφίων 5, 3, 9, ἥτοι $M_3 = 3! = 6$. Οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι $M_4 = 4! = 24$. Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι :

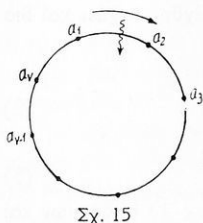
$$M_4 - M_3 = 4! - 3! = 18.$$

§ 235. Κυκλικαὶ μεταθέσεις.— Μία εἰδικὴ περίπτωσις μεταθέσεως εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου E ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπόμενόν του τὸ δὲ «τελευταῖον» στοιχεῖον α_n εἰς τὸ «πρῶτον» α_1 . Δηλαδή ἡ μετάθεσις :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Μία τοιαύτη μετάθεσις καλεῖται **κυκλική** (§ 87).

Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως, ἂν τὰ n διάφορα στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ ἑνὸς κύκλου, ὡς δεικνύει καὶ τὸ κάτωθι σχῆμα (Σχ. 15). Κατὰ ταῦτα μία κυκλικὴ μετάθεσις εἶναι ἡ παράταξις τῶν n στοι-



Σχ. 15

χείων κατὰ μῆκος ἑνὸς κύκλου. Οὕτω θεωρουμένη μία κυκλικὴ μετάθεσις n στοιχείων δὲν ἔχει οὔτε ἀρχὴν οὔτε πέρας, δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρῶμεν οἷονδήποτε ἐκ τῶν n στοιχείων ὡς πρῶτον κατὰ τὴν ἐν λόγῳ μετάθεσιν. Εἶναι τῶρα φανερόν ὅτι : τὸ πλῆθος ὧλων τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων n στοιχείων, τὸ ὁποῖον συμβολίζεται μὲ k_n , εἶναι ἴσον πρὸς : $(n - 1)!$, ἥτοι :

$$k_n = (n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) = \prod_{k=1}^{n-1} k.$$

Πράγματι, ἂς φαντασθῶμεν ὅλας τὰς κυκλικὰς μεταθέσεις τῶν n στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ἀναγεγραμμένας εἰς ἕνα πίνακα. Εἶναι φανερόν ὅτι ἐξ ἐκάστης κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν n στοιχείων, π.χ. τὴν $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ προκύπτουν n ἄπλαϊ μεταθέσεις, αἱ κάτωθι :

$$\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1, \quad \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n.$$

Κατόπιν τούτου, ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε κυκλικῆς μετάθεσιν τῶν n στοιχείων προκύπτουν n ἄπλαϊ μεταθέσεις τῶν n στοιχείων, ἔπεται ὅτι ἐξ ὧλων τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι k_n τὸ πλῆθος, θὰ προκύψουν $n \cdot k_n$ ἄπλαϊ μεταθέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ ἰσοῦνται μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ἄπλων μεταθέσεων n στοιχείων δηλ. $n!$ Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$n \cdot k_n = M_n = n!$$

Ἐξ οὗ :

$$k_n = \frac{M_n}{n} = (n - 1)!$$

(1)

Ἐφαρμογή. Κατὰ πόσους τρόπους τὰ μέλη μιᾶς ἐπταμελοῦς οἰκογενείας δύνανται νὰ καθήσουν περὶ μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης;

Λύσις: Κάθε ἓνας ἀπὸ τοὺς τρόπους αὐτοὺς εἶναι μία κυκλικὴ μετὰθεσις τῶν 7 ἀτόμων.

Ἄρα: $k_7 = 6! = 720$.

§ 236. Ἐπαναληπτικαὶ μετὰθεσεις.— Ἐστω ἐν πλῆθος v πραγμάτων

$$\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k_1}, \quad \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{k_2}, \quad \dots, \quad \underbrace{\theta, \theta, \dots, \theta}_{k_p}$$

ὅπου τὰ k_1 συμπίπτουν μὲ α , τὰ k_2 μὲ $\beta, \dots$, τὰ k_p μὲ θ , ὅποτε φυσικὰ θὰ εἶναι

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = v.$$

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὴν μετὰθεσιν** τῶν v αὐτῶν πραγμάτων μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος $T_v \equiv \{1, 2, \dots, v\}$ ἐπὶ τοῦ συνόλου $E \equiv \{\alpha, \beta, \dots, \theta\}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ διάφορα ἀλλήλων πράγματα $\alpha, \beta, \dots, \theta$, τοιαύτη ὥστε αἱ k_1 εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ α , αἱ k_2 εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ $\beta, \dots$, αἱ k_p εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ θ .

Ἐὰν ρ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ E , τότε: $\rho \leq v$.

Οὕτω π.χ. αἱ ἐπαναληπτικαὶ μετὰθεσεις τῶν τριῶν πραγμάτων α, α, β εἶναι αἱ:

$$\alpha\alpha\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\alpha.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον M_v^E τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἐπαναληπτικῶν μετὰθεσεων v πραγμάτων, ἐξ ὧν k_1 τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ α , k_2 τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ $\beta, \dots$, k_p τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ θ , τότε ἰσχύει:

$$M_v^E = \frac{v!}{k_1! k_2! \dots k_p!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_p)!}{k_1! k_2! \dots k_p!} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι τὰ v πράγματα εἶναι διάφορα μετὰξὺ των καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰς $v!$ μετὰθεσεις των. Θεωροῦμεν τὰς ἐν λόγῳ μετὰθεσεις χωρισμένας εἰς ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Θέτομεν εἰς τὴν αὐτὴν ὁμάδα μίαν μετὰθεσιν μαζί μὲ ὅσας ὅσας προκύπτουν ἀπὸ αὐτὴν, ὅταν διατηρήσωμεν τὴν τάξιν ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὅποια ἀρχικῶς διέφερον τοῦ α κατατάξωμεν δὲ τὰ λοιπὰ (δηλ. τὰ ταυτιζόμενα ἀρχικῶς μὲ τὸ α) καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Εἶναι φανερόν ὅτι μετὰ τὸ πέρας τῆς τοιαύτης διαδικασίας θὰ προκύψουν $k_1!$ μετὰθεσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ παριστοῦν (ἐὰν ἐπαναθέσωμεν $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k_1} = \alpha$) τὴν αὐτὴν ἐπαναληπτικὴν μετὰθεσιν. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν μετὰθεσεων v πραγμάτων, ὅπου μεταξὺ των ὑπάρχουν μόνον k_1 τὸ πλῆθος ταυτιζόμενα μὲ τὸ α , τὰ δὲ ἄλλα διαφέρουν μεταξὺ των καὶ ἀπὸ τὸ α , εἶναι $\frac{v!}{k_1!}$.

Ἄν τώρα εἰς τὰ μέχρι τοῦδε ὡς διάφορα θεωρηθέντα $v - k_1$ λοιπὰ πράγματα ταυτοποιήσωμεν k_2 τὸ πλῆθος μὲ τὸ β , τότε, κατὰ τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, $k_2!$ τὸ πλῆθος διαφέρουσαι πρὶν μετὰθεσεις θὰ παριστοῦν τὴν αὐτὴν ἐπαναληπτικὴν μετὰθεσιν καὶ ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν μετὰθεσεων v πραγμάτων ὅταν μεταξὺ των ὑπάρχουν k_1 τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ α καὶ k_2 τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ β ($\alpha \neq \beta$), τὰ δὲ λοιπὰ διαφέρουν μεταξὺ των καθὼς ἐπίσης καὶ ἀπὸ

τὰ α καὶ β εἶναι:

$$\frac{v!}{k_1! k_2!}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι, μετὰ ρ βήματα, φθάνομεν εἰς τὴν (1).

Εφαρμογαι: 1η: Πόσας λέξεις * (άναγραμματισμούς) σχηματίζομεν μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Έλ λ ά ς»;

Λύσις: Εἰς τὴν λέξιν «Έλλάς» τὸ γράμμα λ ἑπαναλαμβάνεται 2 φορές. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$M_5^5 = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ λέξεις.}$$

2α: Πόσας λέξεις δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Πανεπιστήμιον».

Λύσις: Ἡ λέξις «Πανεπιστήμιον» περιέχει 13 γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων 2 εἶναι π, 2 εἶναι ν καὶ 2 εἶναι ι, ἄρα πρόκειται περὶ μεταθέσεων 13 γραμμάτων μετ' ἑπαναλήψεως ὠρισμένων ἐξ αὐτῶν. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον πλῆθος ἰσοῦται πρὸς :

$$M_{13}^5 = \frac{13!}{2! 2! 2!} = 778\,377\,600 \text{ λέξεις.}$$

Σημείωσις: Διὰ τὰ ἴδωμεν πόσα γράμματα θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ γραφοῦν αἱ λέξεις αὗται θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὐρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 13, ἥτοι :

$$778\,377\,600 \times 13 = 10\,118\,908\,800 \text{ γράμματα.}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν μίαν ἰδεάν περὶ τοῦ μεγέθους τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς: Μία σελὶς ἐνὸς κανονικοῦ βιβλίου χρειάζεται περίπου 2000 γράμματα. Μὲ τὰ ἀνωτέρω γράμματα θὰ τυπωθοῦν :

$$10\,118\,908\,800 : 2\,000 = 5.059.454 \text{ σελίδες.}$$

Ἄν λάβωμεν τόμους τῶν 300 σελίδων, θὰ γίνουν : $5059454 : 300 = 16865$ τόμοι.

Τέλος, ἂν εἰς μίαν κανονικὴν βιβλιοθήκην δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν 100 τόμοι, θὰ ἀπαιτηθοῦν $16865 : 100 \simeq 169$ βιβλιοθήκαι διὰ νὰ τοποθετηθοῦν οἱ ἐν λόγω τόμοι.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

530. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

$$\alpha) \frac{7! 5!}{6! 4!}, \quad \beta) \frac{v!}{(v-1)!}, \quad \gamma) \frac{(v+2)!}{v!}, \quad \delta) \frac{(v+1)!}{(v-1)!}, \quad \epsilon) \frac{(v-1)!}{(v+2)!}.$$

531. Νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{(v+1)!}{(v+1)^{v+1}} : \frac{v!}{v^v}.$$

532. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες :

$$\alpha) (v+2)! + (v+1)! + v! = v! (v+2)^2$$

$$\beta) v! + 2(v-1)! = (v-1)! (v+2).$$

$$\gamma) (v-1)! - (v-2)! = (v-2)! (v-2).$$

$$\delta) 2M_v - (v-1) M_{v-1} = M_v + M_{v-1}.$$

533. Ἄν ὑπάρχουν 3 δρόμοι ἀπὸ τὴν πόλιν Α πρὸς τὴν πόλιν Β καὶ 4 δρόμοι ἀπὸ τὴν Β πρὸς τὴν Γ, κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ διὰ μέσου τῆς Β; Πόσαι εἶναι αἱ δυναταὶ διαδρομαὶ διὰ ταξείδιον μετ' ἐπιστροφῆς ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ;

534. Κατὰ πόσους τρόπους 6 μαθηταὶ δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἐνὸς ζυγοῦ; Ἐὰν ἐκάστη παράταξις ἀπαιτῇ χρόνον 15 sec, πόσος εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος δι' ὅλας τὰς δυνατὰς παρατάξεις.

535. Πόσοι ἀναγραμματισμοὶ τῆς λέξεως « γ ρ α φ ε ῖ ο ν » ὑπάρχουν; Πόσοι ἐξ αὐτῶν ἀρχίζουν μὲ φ; Πόσοι ἀρχίζουν μὲ α καὶ τελειώνουν μὲ ο;

* Αἱ λέξεις δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχουν νόημα.

536. Πόσοι διαφορετικοί λέξεις δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ὅλα τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Mississippi».

537. Πόσοι ἀριθμοὶ μεγαλύτερο τοῦ 10 000 γράφονται μὲ τὰ ψηφία 8, 5, 8, 0, 8.

538. Κατὰ πόσους τρόπους 15 βιβλία δύνανται νὰ διανεμηθοῦν εἰς 3 μαθητάς, ὥστε ὁ πρῶτος (α) νὰ λάβῃ 4 βιβλία, ὁ δεῦτερος (β) νὰ λάβῃ 5 βιβλία καὶ ὁ τρίτος (γ) νὰ λάβῃ 6 βιβλία;

II. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

§ 237. Ἀπλάϊ διατάξεις.— Ἐστῶσαν n τὸ πλῆθος διάφορα μεταξύ των στοιχεῖα (πράγματα) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \dots, \alpha_n$ τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου E .

Καλεῖται **διάταξις** τῶν n αὐτῶν στοιχείων ἀνὰ μ , ὅπου $1 \leq \mu \leq n$, κάθε ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ τμήματος $T_\mu \equiv \{1, 2, \dots, \mu\}$ ἐν τῷ συνόλῳ $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Οὕτω μία διάταξις τῶν n πραγμάτων ἀνὰ μ εἶναι μία παράταξις εἰς σειρὰν μ πραγμάτων ἀπὸ τὰ δοθέντα n . Ἐπομένως δύο διατάξεις τῶν n στοιχείων ἀνὰ μ θεωροῦνται διάφοροι ὅταν ἢ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα ἢ ἀποτελοῦνται μὲν ἀπὸ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἀλλὰ διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν σειρὰν τῶν στοιχείων. Κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ἀπλῆς διατάξεως ἕκαστον πρᾶγμα περιέχεται εἰς αὐτὴν ἅπασι. Ἐπὶ πλέον εἰς ἑκάστην διάταξιν, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, παίζει ρόλον ὄχι μόνον ποῖα μ πράγματα θὰ λάβωμεν ἐκ τῶν n , ἀλλὰ καὶ πῶς θὰ τὰ τοποθετήσωμεν εἰς σειρὰν ἐπὶ ἀνοικτῆς γραμμῆς (π.χ. εὐθείας). Οὕτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ 5 στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ἢ μετάθεσις $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$ εἶναι μία διάταξις τῶν 5 τούτων πραγμάτων ἀνὰ 3, ἢ δὲ μετάθεσις $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$ εἶναι μία $\alpha \lambda \lambda \eta$ διάταξις τῶν αὐτῶν 5 πραγμάτων ἀνὰ 3. Εἶναι φανερόν τὴν αἰ διατάξεις εἶναι καὶ αὐταὶ μεταθέσεις, ἀλλὰ ὄχι συγχρόνως ὅλων τῶν πραγμάτων.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων μεταξύ των διατάξεων τῶν n πραγμάτων ἀνὰ μ . Τὸ πλῆθος τοῦτο θὰ τὸ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον Δ_μ^n , τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται «*διατάξεις τῶν n ἀνὰ μ* ». Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Π ρ ὅ τ α σ ι ς.— Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν n πραγμάτων ἀνὰ μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Delta_\mu^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-\mu+1). \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν n πραγμάτων: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ἀνὰ $(\mu-1)$, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι: $\Delta_{\mu-1}^n$. Ἄν θεωρήσωμεν τυχούσαν ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὴν $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}$, αὕτη θὰ περιέχῃ $(\mu-1)$ ἐκ τῶν πραγμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν $n-(\mu-1) = (n-\mu+1)$ ἀκόμη στοιχεῖα (πράγματα) μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐν λόγω διάταξιν. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς ἐν λόγω διατάξεως ἐπισυνάψωμεν ἕν οἷονδήποτε ἀπὸ τὰ $(n-\mu+1)$ ὑπόλοιπα στοιχεῖα θὰ προκύψῃ μία διάταξις τῶν n ἀνὰ μ . Οὕτως ἀπὸ τὴν διάταξιν $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}$ θὰ προκύψουν αἱ $(n-\mu+1)$ διατάξεις τῶν n ἀνὰ μ :

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_{\mu+1}, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\mu-1}\alpha_n.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἐκάστην διατάξιν τῶν ν πραγμαμάτων ἀνὰ $(\mu - 1)$ προκύπτουν $(\nu - \mu + 1)$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ , ἔπεται ὅτι ἀπὸ τὰς $\Delta_{\mu-1}^{\nu}$ διατάξεις θὰ προκύψουν $(\nu - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^{\nu}$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ . Αὐταὶ δὲ εἶναι π ᾱ σ α ι αὶ διατάξεις τῶν ν πραγμαμάτων ἀνὰ μ καὶ δ ι ᾱ φ ο ρ ο ι μεταξύ των (διατί;).

Κατὰ ταῦτα ἰσχύει ὁ ἀναγωγικὸς τύπος :

$$\Delta_{\mu}^{\nu} = (\nu - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^{\nu} \quad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν (2) διὰ $\mu = 2, 3, \dots, \mu$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμαμάτων ἀνὰ $\epsilon\upsilon$ εἶναι, προφανῶς, ν λαμβάνομεν τὰς μ ἰσότητας :

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\nu} &= \nu \\ \Delta_2^{\nu} &= (\nu - 1) \cdot \Delta_1^{\nu} \\ \Delta_3^{\nu} &= (\nu - 2) \cdot \Delta_2^{\nu} \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{\mu}^{\nu} &= (\nu - \mu + 1) \cdot \Delta_{\mu-1}^{\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παραλείποντες τοὺς κοινούς παράγοντας εὐρίσκομεν :

$$\Delta_{\mu}^{\nu} = \nu (\nu - 1) (\nu - 2) \dots (\nu - \mu + 1).$$

Ἦτοι : τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν πραγμαμάτων ἀνὰ μ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον μ διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἡλαττωμένων κατὰ μονάδα με πρῶτον παράγοντα τὸ ν.

Κατὰ ταῦτα εἶναι : $\Delta_3^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Εὐκόλως τώρα διαπιστοῦμεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \nu (\nu - 1) (\nu - 2) \dots (\nu - \mu + 1) &= \frac{\nu (\nu - 1) (\nu - 2) \dots (\nu - \mu + 1) (\nu - \mu)!}{(\nu - \mu)!} = \\ &= \frac{\nu!}{(\nu - \mu)!} \end{aligned}$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

Π ὁ ρ ι σ μ α I.— Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμαμάτων ἀνὰ μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Delta_{\mu}^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu - \mu)!} \quad (4)$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\mu = \nu$, ἔχομεν :

$$\Delta_{\nu}^{\nu} = \nu (\nu - 1) (\nu - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \nu!$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

Π ὁ ρ ι σ μ α II.— Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμαμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων, ἥτοι :

$$\Delta_{\nu}^{\nu} = \nu! = M_{\nu} \quad (5)$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί : 1η : Ἐὰν εἰς μαθητὴς ἔχη 9 βιβλία καὶ θέλῃ νὰ τοποθετήσῃ 5 τυχόντα ἐξ αὐτῶν εἰς ἓνα ράφι, κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ πράξῃ τοῦτο;

Λύσις : Οί διάφοροι τρόποι είναι τόσοι, όσαι και αί διατάξεις τών 9 ανά 5, ήτοι :

$$\Delta_1^* = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

2α : Πόσοι πενταψήφιοι άριθμοί υπάρχουν, έχοντες πάντα τά ψηφία διάφορα μεταξύ των ;

Λύσις : Έκαστος πενταψήφιος άριθμός (π.χ. ό 38906, 72925, ...) είναι μία διάταξις τών 10 ψηφίων : 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 ανά 5, με μόνην τήν διαφοράν τό ψηφίον 0 δέν πρέπει νά κατέχη τήν πρώτην πρός τά άριστερά θέσιν (π.χ. 05382, 03948, ...). Άλλά αί διατάξεις αί έχουσαι ώς πρώτον στοιχείον τό 0 είναι όσαι και αί διατάξεις τών 9 ψηφίων 1, 2, 3, ..., 9 ανά 4. Άρα τό ζητούμενον πλήθος x είναι :

$$x = \Delta_5^{10} - \Delta_4^* = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (10 - 1) = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

§ 238. Έπαναληπτικά διατάξεις.— Έστωσαν n τó πλήθος διάφορα μεταξύ των πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ τά όποία θεωρούνται στοιχεία ενός συνόλου E .

Καλούμεν **επαναληπτικήν διάταξιν** τών n αύτών πραγμάτων ανά μ , μίαν τυχοῦσαν άπεικόνισιν τοῦ τμήματος $T_\mu \equiv \{1, 2, \dots, \mu\}$ εις τó σύνολον E . Οὔτω μία επαναληπτική διάταξις τών n πραγμάτων ανά μ είναι μία παράταξις κατά μήκος μιᾶς εὐθείας μ πραγμάτων ληφθέντων έκ τών n , αλλά εις τά όποία έκαστον πρᾶγμα δυνατόν νά επαναλαμβάνεται τó πολὺ μ φορές. Εἶναι φανερόν ότι έν προκειμένῳ δυνάμεθα νά έχωμεν $\eta \mu \leq n$ ἢ $\mu > n$.

Θά ύπολογίσωμεν τώρα τó πλήθος τών επαναληπτικῶν διατάξεων τών n πραγμάτων ανά μ . Διά τó πλήθος τοῦτο, όπερ παριστῶμεν διά τοῦ συμβόλου δ_μ^n , ισχύει ἡ ακόλουθος :

Πρότασις.— Τό πλήθος τών επαναληπτικῶν διατάξεων τών n πραγμάτων ανά μ δίδεται ύπό τοῦ τύπου :

$\delta_\mu^n = n^\mu$

(1)

Άπόδειξις. Διά $\mu = 1$ ισχύει, διότι αί επαναληπτικά διατάξεις τών n πραγμάτων ανά έν είναι όσαι και τά πράγματα, ήτοι $\delta_1^n = n = n^1$.

Έστω ότι ισχύει διά $\mu = k$, ήτοι έστω ότι $\delta_k^n = n^k$ και έστω μια τυχοῦσα επαναληπτική διάταξις τών n πραγμάτων ανά k , π.χ. ἡ $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$. Έάν εις τó τέλος τῆς έν λόγω επαναληπτικῆς διατάξεως έπισυνάψωμεν έν οἰονδήποτε έκ τών n πραγμάτων θά προκύψῃ μία επαναληπτική διάταξις τών n πραγμάτων ανά $(k + 1)$. Οὔτως άπό τήν διάταξιν $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ θά προκύψουν n επαναληπτικά διατάξεις τών n ανά $k + 1$ αἱ εξῆς :

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_2, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_k, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_n.$$

Έπειδή δέ άπό έκάστην διάταξιν (επαναληπτικήν) τών n πραγμάτων ανά k προκύπτουν n επαναληπτικά διατάξεις τών n ανά $k + 1$, έπεται ότι άπό τὰς δ_k^n επαναληπτικάς διατάξεις θά προκύψουν $n \cdot \delta_k^n$ επαναληπτικά διατάξεις τών n ανά $k + 1$.

Κατά ταῦτα θά έχωμεν : $\delta_{k+1}^n = n \cdot \delta_k^n$ και λόγω τῆς ύποθέσεως τῆς τελείας έπαγωγῆς, καθ' ἣν $\delta_k^n = n^k$, έχομεν : $\delta_{k+1}^n = n \cdot n^k = n^{k+1}$, ήτοι ἡ πρότασις ισχύει και διά $n = k + 1$, άρα ισχύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν n .

Έφαρμογή 1η : Πόσοι πενταψήφιοι άριθμοί υπάρχουν έχοντες ώς ψηφία τοὺς άριθμούς 2, 5, 7;

Λύσις : Έκαστος τών άριθμῶν αύτῶν (π.χ. 52752, 77522, 55555, ...) είναι μία επαναληπτική διάταξις τών 3 ψηφίων 2, 5, 7 ανά 5.

Άρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι ἴσον πρὸς :

$$\delta_3^3 = 3^3 = 243.$$

Ἐφαρμογή 2α : (Τὸ πρόβλημα τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ). Νὰ εὑρεθῇ πόσα δελτία τῶν δύο στηλῶν τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει νὰ συμπληρώσῃ εἰς παίκτης διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ἓνα 13—άρι :

Λύσις : Ἐάν ὁ ἀγὼν ἦτο μοναδικός, θὰ ὑπῆρχον τρία προγνωστικά, τὰ ὁποῖα σημειοῦνται μὲ τὰ στοιχεῖα : 1, 2, x καὶ ἐπομένως θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 3 στήλας. Ἐάν οἱ ἀγῶνες ἦσαν δύο θὰ ἔπρεπεν νὰ συμπληρώσῃ 9 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράφῃ τὰ ἐξῆς στοιχεῖα :

I	1	1	1	2	2	2	x	x	x
II	1	2	x	1	2	x	1	2	x

(1)

Αἱ ὡς ἄνω 9 στήλαι εἶναι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ δύο, δηλ. εἶναι : $\delta_2^3 = 3^2 = 9$.

Ἐάν οἱ ἀγῶνες ἦσαν τρεῖς θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 27 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράφῃ τὰ ἐξῆς στοιχεῖα :

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, x), (1, 2, 1), \dots, (x, x, x).$$

Αἱ 27 στήλαι προκύπτουν ἀπὸ τὰ 9 στοιχεῖα τοῦ πίνακος (1), ἐὰν παραπλεύρως ἐκάστης δυάδος τοῦ πίνακος θέσωμεν τὰς ἐνδείξεις : 1, 2, x. Εἶναι δὲ ἐπίσης αἱ 27 στήλαι, αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων (ἐνδείξεων) 1, 2, x ἀνὰ 3, ἥτοι εἶναι : $\delta_3^3 = 3^3 = 27$. Ἐπομένως διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ὁ παίκτης ἓνα 13—άρι πρέπει νὰ συμπληρώσῃ τόσας στήλας, ὅσαι καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ 13, ἥτοι :

$$\delta_{13}^3 = 3^{13} = 1\,594\,323 \text{ στήλας.}$$

Άρα : $1\,594\,323 : 2 = 797\,162$ δελτία ΠΡΟ-ΠΟ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

539. Ὑπολογίσατε τὰς : Δ_3^6 , Δ_4^8 , Δ_5^{10} καὶ δείξατε ὅτι : $\Delta_4^{10} = M_7$.

540. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \Delta_3^v &= 12 \cdot \Delta_2^v, & \beta) \quad \Delta_2^{2v} &= 2 \cdot \Delta_1^v \\ \gamma) \quad \Delta_4^v &= 18 \cdot \Delta_3^{v-1}, & \delta) \quad 3\Delta_1^v &= \Delta_2^{v-1}. \end{aligned}$$

541. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\Delta_\mu^{v+1} = \Delta_\mu^v + \mu \cdot \Delta_{\mu-1}^v$.

542. Νὰ ἀπλοποιηθῇ ἡ παράσταση :

$$\Delta_v^v - 2 \cdot \Delta_{v-1}^{v-1} - (v-1)! (v-2).$$

543. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ : $\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \Delta_4^4 + \Delta_5^4$.

544. Πόσοι τετραψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ἔχοντες διαφορετικὰ ψηφία καὶ μὴ περιέχοντες τὸ 0 καὶ τὸ 9;

545. Δύο πόλεις Α καὶ Β συνδέονται μὲ 6 ἀμαξοστοιχίας. Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ ταξιδεύσωμεν ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β καὶ ἀντιστρόφως, χρησιμοποιοῦντες κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν :

α) διαφορετικὴν ἀμαξοστοιχίαν, β) ἔστω καὶ τὴν αὐτὴν ἀμαξοστοιχίαν.

III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

§ 239. Ἀπλοὶ συνδυασμοί.—Ἐστω E ἓν σύνολον μὲν n στοιχεῖα: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Προτιθέμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διαφορῶν μεταξύ των ὑποσυνόλων τοῦ E , εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν k στοιχεῖα, ἔνθα $k \leq n$. Ἀς ἐξετάσωμεν κατ' ἄρχήν μερικά παραδείγματα. Ἐάν $n = 1$, τότε τὸ σύνολον E ἔχει δύο ὑποσύνολα: $\emptyset$ καὶ E . Ἐάν $n = 2$, τότε τὸ σύνολον $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ἔχει τέσσαρα ὑποσύνολα:

$$\begin{array}{ccc} k=0 & k=1 & k=2 \\ \emptyset & \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_2\} \equiv E. \end{array}$$

Ἐάν $n = 3$, τότε τὸ σύνολον $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ἔχει ὀκτῶ ὑποσύνολα:

$$\begin{array}{cccc} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \\ \emptyset & \{\alpha_1\} & \{\alpha_1, \alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \equiv E \\ & \{\alpha_2\} & \{\alpha_1, \alpha_3\} & \\ & \{\alpha_3\} & \{\alpha_2, \alpha_3\} & \end{array}$$

Οὕτω π.χ. ἀπὸ τὸ σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τρία ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα. Ἐκαστον δὲ τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν καλεῖται καὶ «εἷς συνδυασμὸς τῶν τριῶν στοιχείων (πραγμάτων) ἀνὰ δύο».

Γενικῶς: Καλοῦμεν **συνδυασμὸν** τῶν n πραγμάτων ἀνὰ k , ἔνθα $k \leq n$, κάθε ὑποσύνολον τοῦ E μὲ k στοιχεῖα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερόν ὅτι εἰς ἓνα συνδυασμὸν τῶν n πραγμάτων ἀνὰ k , ἐνδιαφερόμεθα μὴ n οὐδὲν διὰ τὴν φύσιν τῶν ληφθέντων πραγμάτων, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν μεταξύ των, ὅπως εἰς τὰς διατάξεις. Συνεπῶς δύο συνδυασμοὶ τῶν n πραγμάτων ἀνὰ k εἶναι διαφορετικοὶ μόνον ὅταν δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ πράγματα.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν συνδυασμῶν τῶν n πραγμάτων ἀνὰ k . Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\binom{n}{k}$ ἢ Σ_k^n ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος:

Πρότασις.—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν n πραγμάτων ἀνὰ k δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἀς καλέσωμεν x τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν n ἀνὰ k . Ἐάν εἰς ἓνα τυχόντα συνδυασμὸν τῶν n ἀνὰ k , δηλ. ἐάν εἰς ἓν τυχὸν ὑποσύνολον μὲ k στοιχεῖα τοῦ E ἐκτελέσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν στοιχείων του, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι $k!$, θὰ προκύβουν $k!$ διατάξεις τῶν n ἀνὰ k (διότι ἐκάστη ἐκ τῶν μεταθέσεων αὐτῶν περιέχει k στοιχεῖα ἐκ τῶν n). Ἐάν τοῦτο γίνη εἰς ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν n ἀνὰ k , ὧν τὸ πλῆθος ἐκαλέσαμεν x , θὰ προκύβουν: $x \cdot k!$ διατάξεις τῶν n ἀνὰ k .

Είναι δε αὗται πᾶσαι αἱ διατάξεις τῶν v ἀνὰ k , διότι ἡ τυχούσα ἐξ αὐτῶν προέκυψεν ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν τὸν ἔχοντα τὰ ἴδια πράγματα. Αἱ διατάξεις αὗται ἐξ ἄλλου εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διότι ὅσαι μὲν προέκυψαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων αὐτοῦ, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν διαφέρουν κατὰ ἓν τοῦλάχιστον πρᾶγμα.

Συντεπῶς ἔχομεν :

$$x \cdot k! = \Delta_k^v$$

Ἀλλὰ (§ 237) :

$$\Delta_k^v = v(v-1) \cdots (v-k+1).$$

Ἀρα :

$$x = \frac{\Delta_k^v}{k!} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{k!} \quad (2)$$

ἢ ἂν τεθῇ $x = \binom{v}{k}$ προκύπτει ὁ τύπος (1).

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \quad \binom{7}{4} = \Sigma_4^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ δεχόμεθα ὅτι :

$$\boxed{\binom{v}{0} = \binom{v}{v} = 1} \quad (3)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τῆς (2) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν : $(v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, ὅστις γράφεται καί : $(v-k)!$ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$x = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{k!} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)(v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k! (v-k)(v-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{v!}{k! (v-k)!}.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

Πόρισμα.— Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν v πραγμάτων ἀνὰ k δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\binom{v}{k} = \frac{v!}{k! (v-k)!}} \quad (4)$$

Ἐφαρμογαί : 1η : Δίδονται ἐπτά σημεία μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ εὐθείας. Πόσα τρίγωνα εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθοῦν, ἂν ἐνώσωμεν ταῦτα δι' εὐθειῶν.

Λύσις : Προφανῶς κατασκευάζονται τόσα τρίγωνα, ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν 7 πραγμάτων ἀνὰ 3. Οὕτως ἔχομεν :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \text{ τρίγωνα.}$$

2α : Μία ἐκπαιδευτικὴ περιφέρεια πρόκειται νὰ συμμετάσχη εἰς μίαν ἐορταστικὴν ἐκδήλωσιν διὰ πενταμελοῦς ἀντιπροσωπείας. Ἐπελέγησαν ἀρχικῶς 4 μαθητρίαι καὶ 7 μαθηταί. Ἐκ τῶν 11 αὐτῶν ἀτόμων πόσας διαφορετικὰς πενταμελεῖς ὁμάδος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὥστε νὰ περιέχωνται : α) 2 μαθητρίαι, β) τοῦλάχιστον δύο μαθητρίαι, γ) τὸ πολὺ δύο μαθητρίαι;

Λύσεις : α). Αί δύο μαθήτριαι δύνανται νά ληφθοῦν ἀπὸ τὰς 4 ἐκλεγείσας κατὰ $\binom{4}{2}$ τρόπους, ἐνῶ οἱ 3 μαθηταί, οἱ ὅποιοι θὰ συμπληρώσουν τὴν ὁμάδα, δύνανται νά ληφθοῦν ἀπὸ τοὺς 7 ἐκλεγέντας κατὰ $\binom{7}{3}$ τρόπους. Ἐὰν ἕκαστος τῶν πρώτων συνδυασμῶν συνδυασθῇ μὲ ἕκαστον τῶν δευτέρων θὰ ἔχωμεν :

$$x = \binom{4}{2} \binom{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210.$$

β). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ὁμάς θὰ περιέχῃ ἢ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητὰς (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} = 210$), ἢ 3 μαθητρίας καὶ 2 μαθητὰς (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} = 4$), ἢ 4 μαθητρίας καὶ 1 μαθητὴν (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1} = 7$).

Ἄρα :

$$x = \binom{4}{2} \binom{7}{3} + \binom{4}{3} \binom{7}{2} + \binom{4}{4} \binom{7}{1} = 210 + 4 + 7 = 221.$$

γ). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐκάστη ὁμάς θὰ περιέχῃ ἢ 0 μαθητρίας καὶ 5 μαθητὰς, ἢ 1 μαθητρίαν καὶ 4 μαθητὰς ἢ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητὰς. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν β) ἔχομεν :

$$x = \binom{4}{0} \binom{7}{5} + \binom{4}{1} \binom{7}{4} + \binom{4}{2} \binom{7}{3} = 1 \cdot 21 + 4 \cdot 35 + 210 = 371.$$

§ 240. Ἀξιοσημεῖωτοι ιδιότητες τῶν ἀπλῶν συνδυασμῶν.—Ἐὰν εἰς ἔν ὑποσύνολον Α τοῦ Ε ἀνήκουν k στοιχεῖα, εἰς τὸ συμπληρωματικόν του Α' θὰ ἀνήκουν $v - k$ στοιχεῖα. Ἐπομένως εἰς ἐκάστην ἐκλογὴν ἑνὸς ὑποσυνόλου μὲ k στοιχεῖα ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐκλογὴ τοῦ συμπληρωματικοῦ του συνόλου μὲ $(v - k)$ στοιχεῖα καὶ ἀντιστρόφως. Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑποσυνόλων μὲ k στοιχεῖα ἐντὸς τοῦ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑποσυνόλων μὲ $v - k$ στοιχεῖα. Τοῦτο δὲ διατυπῶνται καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἰδιότης Ι.—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν v πραγμάτων ἀνὰ k εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν v ἀνὰ $v - k$.

Ἦτοι :

$$\boxed{\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}} \quad (1)$$

Ἡ ἀλγεβρική ἀπόδειξις εἶναι ἐπίσης εὐκόλος.

Πράγματι :

$$\binom{v}{v-k} = \frac{v!}{(v-k)! [v-(v-k)]!} = \frac{v!}{(v-k)! k!} = \binom{v}{k}.$$

Παρατηρήσεις : α'). Ἐκ τοῦ τύπου $\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, v$, $v-k = v, \dots, 1, 0$ ἔχομεν προφανῶς : $(v-k) + k = v$ διὰ κάθε v καὶ διὰ κάθε k . Μὲ ἄλλας λέξεις ἐὰν $\alpha + \beta = v$, τότε $\binom{v}{\alpha} = \binom{v}{\beta}$.

Οὕτως ἐκ τῆς $\binom{20}{k} = \binom{20}{k+2}$, ἔπεται $k = 9$.

β'). Εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ ἰδιότης I μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμόν τοῦ $\binom{v}{k}$ μόνον διὰ $k \leq \frac{v}{2}$, διότι, ἂν $k > \frac{v}{2}$, τότε ὑπολογίζομεν τὸ $\binom{v}{v-k}$ ἀντὶ τοῦ $\binom{v}{k}$, καθόσον εἶναι τότε: $v - k < \frac{v}{2}$.

$$\text{Οὕτω π.χ.} \quad \binom{50}{46} = \binom{50}{4} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 230\,300.$$

Ἰδιότης II.—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν v πραγμάτων ἀνὰ k ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν $v-1$ πραγμάτων ἀνὰ k , ἡϋξημένον κατὰ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν $v-1$ πραγμάτων ἀνὰ $k-1$.

Ἦτοι:

$$\binom{v}{k} = \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} \quad (2)$$

Ἀπόδειξις. Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ δεῦτερον μέλος τῆς (2) ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} &= \frac{(v-1)!}{k! (v-1-k)!} + \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-1-k+1)!} = \\ &= \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{v-k} \right) = \\ &= \frac{(v-1)!}{(k-1)! (v-k-1)!} \cdot \frac{v}{k(v-k)} = \frac{v!}{k! (v-k)!} = \binom{v}{k}. \quad \text{ὁ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

Ἰδιότης III.—Ἰσχύει:

$$\binom{v}{k+1} = \binom{v}{k} \cdot \frac{v-k}{k+1} \quad (3)$$

Πράγματι:

$$\binom{v}{k+1} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)(v-k)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)} = \binom{v}{k} \cdot \frac{(v-k)}{k+1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

546. Ὑπολογίσατε τοὺς: $\binom{12}{7}$, $\binom{15}{5}$, $\binom{11}{8}$, $\binom{13}{9}$, $\binom{9}{7}$.

547. Δείξατε ὅτι: $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$.

548. Ἐὰν $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ $\binom{k}{5}$.

549. Ἐὰν $\binom{2v}{3} : \binom{v}{2} = 44 : 3$, νὰ εὑρεθῇ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς v .

550. Ἐὰν $\Delta_k^v = 3024$ καὶ $\binom{v}{k} = 126$, νὰ εὑρεθῇ ὁ k .

551. Πόσα ὑποσύνολα μὲ k στοιχεῖα, ἐξ ὧν 2 στοιχεῖα εἶναι ὠρισμένα, ὑπάρχουν εἰς ἓνα σύνολον μὲ v στοιχεῖα ($v \geq 5$); Ὁμοίως μὲ 3 ὠρισμένα στοιχεῖα; Ὁμοίως μὲ 4;

552. Πόσαι 5-αδες χαρτιῶν ἀπὸ μίαν δέσμην 52 παιγνιοχαρτῶν δύνανται νὰ περιέχουν 4 ἄσους;

(Ὑπόδειξις: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν).

§ 241. Έπαναληπτικοί συνδυασμοί.— Έστωσαν ν διαφορετικά πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ τὰ ὅποια θεωροῦνται στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου E .

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὸν συνδυασμὸν** τῶν ν αὐτῶν πραγμάτων ἀνὰ k κάθε συνδυασμὸν εἰς τὸν ὅποιον ἕκαστον στοιχεῖον (πρᾶγμα) δύναται νὰ ἐπαναλαμβάνεται τὸ πολὺ k φορές.

Εἶναι φανερόν ὅτι τώρα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἢ $k \leq \nu$ ἢ $k > \nu$.

Ὅπως εἰς τοὺς ἀπλοὺς συνδυασμοὺς οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἐπαναληπτικοὺς ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν φύσιν τῶν ληφθέντων στοιχείων εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν, οὐχὶ δὲ διὰ τὰς θέσεις, ἃς ἔχουν ταῦτα μεταξύ των. Ἐπομένως δύο ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ θὰ θεωροῦνται διαφορετικοὶ ἐφ' ὅσον διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν ἑνὸς τοῦλάχιστον στοιχείου πολὺ περιέχουν. Οὕτως οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἀνὰ δύο εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_1, & \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1\alpha_3 \\ & \alpha_2\alpha_2, & \alpha_2\alpha_3 \\ & & \alpha_3\alpha_3. \end{array}$$

Ὅμοίως, οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν α_1, α_2 ἀνὰ τρία εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1, \quad \alpha_1\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_2\alpha_2,$$

δηλ. κάθε συνδυασμὸς (ἐπαναληπτικός) ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 στοιχεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο ἢ καὶ τὰ τρία δύναται νὰ εἶναι τὰ αὐτά.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k . Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\mathcal{E}_k^\nu$, ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

Πρότασις.— Τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν ν διαφόρων μεταξύ των πραγμάτων ἀνὰ k , ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συνδυασμῶν τῶν $\nu + k - 1$ πραγμάτων ἀνὰ k .

Ἦτοι :

$$\mathcal{E}_k^\nu = \Sigma_{k+k-1}^\nu = \binom{\nu+k-1}{k} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. Εἶναι φανερόν ὅτι οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν ν ἀνὰ ἓν εἶναι ὅσα καὶ τὰ πράγματα, ἦτοι: $\mathcal{E}_1^\nu = \nu$.

Ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς ἐπαναληπτικοὺς συνδυασμοὺς τῶν ν ἀνὰ k , γεγραμμένους εἰς ἓνα πῖνακα. Εἰς αὐτὸν θὰ εὕρωμεν, κατὰ δύο τρόπους, πόσας φορές ἐμφανίζεται τὸ ἓν ἐκ τῶν δοθέντων πραγμάτων, π.χ. τὸ α_1 .

α'). Ἐκαστὸς ἐπαναληπτικὸς συνδυασμὸς περιέχει k πράγματα, ὅλοι οἱ ὑπ' ὧν συνδυασμοὶ θὰ περιέχουν $k \cdot \mathcal{E}_k^\nu$ πράγματα. Δοθέντος δὲ ὅτι τὰ ν διαφορετικὰ πράγματα ἐμφανίζονται ἰσάκεις εἰς τὸν πῖνακα, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἄρα καὶ τὸ α_1 , ἐμφανίζεται :

$$\frac{k \cdot \mathcal{E}_k^\nu}{\nu} = \frac{k}{\nu} \mathcal{E}_k^\nu \text{ φορές.} \quad (2)$$

β'). Τοὺς συνδυασμοὺς τοῦ πίνακος διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας: εἰς τοὺς περιέχοντας τὸ στοιχεῖον α_1 καὶ εἰς τοὺς μὴ περιέχοντας αὐτό. Θὰ εὕρωμεν τώρα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον πόσας φορές τὸ α_1 περιέχεται εἰς τὸν πῖνακα τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν. Θεωροῦμεν τοὺς ἐπα-

ναληπτικούς συνδυασμούς οι οποίοι περιέχουν το α_1 . 'Εάν αφαιρέσωμεν από αυτούς ένα μόνον από τα α_1 , τα όποια περιέχουν, τότε αυτοί θα περιέχουν $k-1$ πράγματα και θα είναι όλοι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των n πραγμάτων ανά $k-1$, ήτοι θα είναι πλήθους $\mathcal{E}_{k-1}^v$ και συνεπώς κατά την α') το στοιχείον α_1 θα εμφανίζεται : $\frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v$ φορές. 'Εάν τώρα εις το πλήθος $\frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v$ των α_1 προσθέσωμεν τὸν πλήθος τῶν ἀφαιρεθέντων α_1 , τὸ ὁποῖον εἶναι $\mathcal{E}_{k-1}^v$ (διότι ἐκαστὴ ἀφαίρεσις τοῦ α_1 ἔδωκε ἕνα ἐπαναληπτικὸν συνδυασμὸν τῶν n ἀνὰ $k-1$), εὐρίσκομεν πόσας φορές εμφανίζεται τὸ α_1 εἰς τὸν πίνακα, ἥτοι ἐπανευρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις παρέρχεται ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως (2).

'Εξισοῦντες τὰς δύο ἐκφράσεις ἔχομεν :

$$\frac{k}{v} \mathcal{E}_k^v = \frac{k-1}{v} \mathcal{E}_{k-1}^v + \mathcal{E}_{k-1}^v.$$

'Εκ τοῦ ὁποῖου προκύπτει ὁ ἀναγωγικὸς τύπος :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{v+k-1}{k} \cdot \mathcal{E}_{k-1}^v. \quad (3)$$

'Εφαρμόζοντες αὐτὸν διὰ $k=2, 3, \dots, k$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς προκυπτούσας ἰσότητας κατὰ μέλη, μετὰ τὰς ἀπλοποιήσεις εὐρίσκομεν :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{v(v+1)(v+2)\cdots(v+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}. \quad (4)$$

'Εάν εἰς τὴν (4) θέσωμεν : $v+k-1 = \mu$, ὅτε εἶναι $v = \mu - k + 1$, εὐρίσκομεν :

$$\mathcal{E}_k^v = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \Sigma_k^\mu.$$

$$\eta \quad \mathcal{E}_k^v = \Sigma_k^{v+k-1} = \binom{v+k-1}{k}.$$

'Η πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\mathcal{E}_3^6 = \Sigma_3^{6+3-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ῆ : Πόσους ὅρους ἔχει ἓν πλήρες ὁμογενὲς πολυώνυμον πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z ;

Λύσις : Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου θα εἶναι τῆς μορφῆς : $x^k y^\lambda z^\mu$, ἔνθα $k+\lambda+\mu=5$. 'Αλλὰ ἕκαστος ὅρος εἶναι εἰς ἐπαναληπτικὸς συνδυασμὸς τῶν τριῶν γραμμάτων x, y, z ἀνὰ 5 (π.χ. $xy^3z = xyxyz, x^3y^2 = xxxyy, \dots$)

"Αρα τὸ ζητούμενον πλήθος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλήθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν 3 πραγμάτων ἀνὰ 5, ἥτοι :

$$\mathcal{E}_3^5 = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

553. Πόσα ἀκέραια μονώνυμα τῆς μορφῆς $\alpha^k \beta^\lambda \gamma^\mu$ τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ὅλα ὁμοῦ τὰ γράμματα α, β, γ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν;

554. 'Εάν $\Delta_4^v = 840$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς : $\mathcal{E}_4^v$.

555. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$, νὰ εὐρεθῶν οἱ Σ_5^v καὶ $\mathcal{E}_5^v$.

556. Νὰ ἀποδειχθῇ, διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν, ὅτι τὸ γινόμενον n διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

557. Να εύρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος v κορυφάς.

558. Να ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \binom{v}{k} + 2 \binom{v}{k-1} + \binom{v}{k-2} = \binom{v+2}{k}, \quad \beta) \left(\frac{v+1}{k} - 1 \right) \binom{v}{k-1} = \binom{v}{k}.$$

559. Δείξατε ὅτι :

$$1 + \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} = 2^5.$$

560. Να ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha) \binom{v}{\rho+1} - \binom{v}{\rho-1} = \frac{(v+1)! (v-2\rho)}{(\rho+1)! (v-\rho+1)!},$$

$$\beta) \binom{v}{\rho} + 2 \binom{v}{\rho-1} \binom{v}{\rho-2} = \binom{v+2}{\rho}.$$

§ 242. Τὸ διωνυμικὸν θεώρημα.—Ἡ ἐπομένη πρότασις φέρουσα τὸ ὄνομα τοῦ Newton (*) ἀποτελεῖ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα, τὸ ὁποῖον δίδει τὴν γενικὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀναπτύγματος $(x+a)^v$.

Πρότασις.—Διὰ κάθε ζευγὸς πραγματικῶν ἀριθμῶν x, a καὶ διὰ κάθε $v \in \mathbb{N}$, ἰσχύει ὁ τύπος (τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος) :

$$(x+a)^v = \binom{v}{0} x^v + \binom{v}{1} x^{v-1} a + \binom{v}{2} x^{v-2} a^2 + \dots + \binom{v}{k} x^{v-k} a^k + \dots + \binom{v}{v-1} x a^{v-1} + \binom{v}{v} a^v \quad (1)$$

*Απόδειξις. Ἡ πρότασις προφανῶς ἀληθεύει διὰ $v = 1$.

*Ἐστω ὅτι ἰσχύει διὰ $v = k$, τότε :

$$\begin{aligned} (x+a)^k &= \binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} a + \binom{k}{2} x^{k-2} a^2 + \dots + \binom{k}{k-1} x a^{k-1} + \binom{k}{k} a^k \\ \text{καὶ } (x+a)^{k+1} &= (x+a)^k \cdot (x+a) = \left[\binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} a + \dots + \binom{k}{k-1} x a^{k-1} + \binom{k}{k} a^k \right] \cdot (x+a) \\ &= \binom{k}{0} x^{k+1} + \binom{k}{1} x^k a + \dots + \binom{k}{k-1} x^2 a^{k-1} + \binom{k}{k} x a^k + \\ &\quad + \binom{k}{0} x^k a + \dots + \binom{k}{k-2} x^2 a^{k-1} + \binom{k}{k-1} x a^k + \binom{k}{k} a^{k+1} = \\ &= \binom{k}{0} x^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] x^k a + \dots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] x a^k + \binom{k}{k} a^{k+1}. \end{aligned}$$

*Ἐπειδὴ ὁμοίως (§ 240, β) :

$$\binom{v-1}{k} + \binom{v-1}{k-1} = \binom{v}{k}, \quad \text{διὰ κάθε } k \text{ μὲ } 0 \leq k \leq v$$

καὶ (§ 239) :

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}, \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1},$$

ἔχομεν τελικῶς :

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k a + \binom{k+1}{2} x^{k-1} a^2 + \dots + \binom{k+1}{k} x a^k + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1}.$$

* Isaac Newton (1642-1727) διάσημος Ἀγγλος μαθηματικός, φυσικός καὶ φιλόσοφος.

ήτοι ή πρότασις άληθεύει και διά τόν φυσικόν άριθμόν $k + 1$, έπομένως, δυνάμει τής άρχής τής τελείας έπαγωγής, αύτη ίσχύει διά κάθε φυσικόν άριθμόν v .

Ο τύπος (1) του διωνύμου γράφεται συντόμως ώς εξής :

$$(x + a)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} x^{v-k} a^k \quad (2)$$

Έπειδή δέ (§ 239) είναι : $\binom{v}{1} = v$, $\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2}, \dots$,

$$\binom{v}{k} = \frac{v(v-1) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k},$$

ό τύπος (1) δύναται νά γραφῇ και ούτω :

$$(x + a)^v = x^v + vx^{v-1}a + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} x^{v-2} a^2 + \frac{v(v-1)(v-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{v-3} a^3 + \cdots + a^v \quad (3)$$

Κατά ταύτα είναι :

$$\begin{aligned} (x + a)^6 &= x^6 + 6x^5a + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^4 a^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 a^3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^2 a^4 + 6x a^5 + a^6 = \\ &= x^6 + 6x^5a + 15x^4 a^2 + 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4 + 6x a^5 + a^6. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις επί του άναπτύγματος του διωνύμου : α'). Το άνάπτυγμα του $(x + a)^v$ είναι έν πλήρες όμογενές πολώνυμον, v βαθμού, διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις του x και τάς ανιούσας του a . Είς έκαστον όρον τούτου το άθροισμα των έκθετών του x και a είναι σταθερόν και ίσον προς v .

β'). Το πλήθος των όρων του άναπτύγματος είναι $v + 1$, διότι υπάρχουν πάσαι αί δυνάμεις του x άπό τής μηδενικής μέχρι τής v -οστής.

γ'). Οί όροι του άναπτύγματος του $(x + a)^v$, οί ισάκις απέχοντες των άκρων, έχουν ίσους συντελεστές. Τούτο προκύπτει άμέσως άπό τόν τύπον (1) τής § 240, δεδομένου ότι οί συντελεστές των όρων του άναπτύγματος είναι κατά σειράν :

$$\binom{v}{0} \binom{v}{1} \binom{v}{2} \cdots \binom{v}{k} \cdots \binom{v}{v-k} \cdots \binom{v}{v-2} \binom{v}{v-1} \binom{v}{v}.$$

δ'). Ο όρος τάξεως λ του άναπτύγματος του $(x + a)^v$ είναι ό :

$$\binom{v}{\lambda-1} x^{v-\lambda+1} a^{\lambda-1}.$$

Τούτο προκύπτει άπό τήν διάταξιν των συντελεστών του άναπτύγματος, καθ' ήν βλέπομεν ότι ό 1ος όρος έχει συντελεστήν $\binom{v}{0}$, ό 2ος : $\binom{v}{1}$, ό 3ος : $\binom{v}{2}$ και ό λ ος έχει συντελεστήν $\binom{v}{\lambda-1}$.

ε'). 'Εάν n ἄρτιος, ἴσος πρὸς 2μ , τότε τὸ πλῆθος $n+1$ τῶν ὄρων εἶναι περιττὸν καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ὅρος μὲ μέγιστον συντελεστήν. Ὁ ὅρος οὗτος καλεῖται μεσαῖος ὅρος καὶ εἶναι τάξεως $\frac{n}{2} + 1 = \mu + 1$, εἶναι δὲ ὁ: $\binom{n}{\mu} x^\mu \cdot a^\mu$.

στ'). 'Εάν n περιττὸς καὶ ἴσος πρὸς $2\mu + 1$, τότε τὸ πλῆθος $n+1$ τῶν ὄρων τοῦ ἀναπτύγματος $(x+a)^n$ εἶναι ἄρτιον καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὄροι (οἱ ἔχοντες μεγίστους συντελεστές). Οὗτοι εἶναι οἱ:

$$\binom{n}{\mu} x^{\mu+1} a^\mu \quad \text{καὶ} \quad \binom{n}{\mu+1} x^\mu a^{\mu+1}$$

καὶ ἔχουν ἴσους συντελεστές.

Ἐφαρμογ αἱ: 1η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(2x - x^2)^{12}$.

Λύσις: Τὸ πλῆθος τῶν ὄρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι: $12 + 1 = 13$, ἐπομένως ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι ὁ $\frac{13}{2} + 1 = 7$ ος, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι:

$$\binom{12}{6} (2x)^6 \cdot (-x^2)^6 = 59136 x^{18}.$$

2α: Νὰ εὑρεθῇ, ἐάν ὑπάρχῃ, ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος εἰς τὸ ἀνάπτυγμα:

$$\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^{16}.$$

Λύσις: Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ὡς ἄνω ἀναπτύγματος εἶναι:

$$\binom{16}{k} (2x^3)^{16-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{16}{k} 2^{16-k} \cdot 3^k \cdot x^{48-4k}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x θὰ πρέπει: $48 - 4k = 0$, ἐξ οὗ: $k = 12$.

*Αρα ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι ὁ 13ος, ὅστις εἶναι:

$$\binom{16}{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \binom{16}{4} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^6 \cdot 3^{12}.$$

3η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστής τοῦ x^{12} εἰς τὸ ἀνάπτυγμα: $(2x^3 + a)^{17}$.

Λύσις: Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:

$$\binom{17}{k} (2x^3)^{17-k} \cdot a^k = \binom{17}{k} 2^{17-k} \cdot x^{3(17-k)} \cdot a^k.$$

*Ἴνα ὁ x εὐρίσκεται ὑψωμένος εἰς τὴν 12ην πρέπει: $3(17 - k) = 12$ ἢ $k = 13$.

*Αρα ὁ συντελεστής τοῦ x^{12} εἶναι:

$$\binom{17}{13} \cdot 2^4 = \binom{17}{4} \cdot 2^4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 38080.$$

§ 243. Ἰδιότητες τῶν διωνυμικῶν συντελεστῶν.— α'). 'Εάν εἰς τὸν τύπον (1) τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου § 242 θέσωμεν $x = 1$, $a = 1$, λαμβάνομεν:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{ἢ} \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1. \quad (2)$$

Πόρισμα.—'Από κάθε σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει v στοιχεῖα, σχηματίζονται 2^v ἀκριβῶς ὑποσύνολα.

Πράγματι, ὑπάρχουν $\binom{v}{0}$ ὑποσύνολα μὲ 0 στοιχεῖα, $\binom{v}{1}$ ὑποσύνολα μὲ ἓν στοιχεῖον, $\binom{v}{2}$ ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα, κ.ο.κ. Τὸ ὅλικόν πλήθος τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν εἶναι, λόγῳ καὶ τῆς 1 :

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \cdots + \binom{v}{v} = 2^v.$$

β'). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν $x = 1$, $\alpha = -1$, λαμβάνομεν :

$$\binom{v}{1} + \binom{v}{3} + \binom{v}{5} + \cdots = \binom{v}{0} + \binom{v}{2} + \binom{v}{4} + \cdots = 2^{v-1} \quad (3)$$

γ'). Ἐὰν τὴν ταυτότητα : $(1+x)^{2v} \equiv (1+x)^v \cdot (x+1)^v$ γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\begin{aligned} & \binom{2v}{0} + \binom{2v}{1}x + \binom{2v}{2}x^2 + \cdots + \binom{2v}{v}x^v + \cdots + \binom{2v}{2v}x^{2v} \equiv \\ & \equiv \left\{ \binom{v}{0} + \binom{v}{1}x + \binom{v}{2}x^2 + \cdots + \binom{v}{v}x^v \right\} \cdot \left\{ \binom{v}{0}x^v + \binom{v}{1}x^{v-1} + \right. \\ & \quad \left. + \binom{v}{2}x^{v-2} + \cdots + \binom{v}{v} \right\} \end{aligned}$$

καὶ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x^v εἰς τὰ δύο μέλη, λαμβάνομεν :

$$\binom{v}{0}^2 + \binom{v}{1}^2 + \binom{v}{2}^2 + \cdots + \binom{v}{v}^2 = \binom{2v}{v} \quad (4)$$

Ἡ (4) γράφεται συντόμως ὡς ἐξῆς :

$$\sum_{k=0}^v \binom{v}{k}^2 = \binom{2v}{v}.$$

* § 244. Μία ἀξιολόγος ἐφαρμογὴ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου.

Ἐστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$, $v = 1, 2, \dots$

Αὕτη, ὡς θὰ δείξωμεν, εἶναι γνησίως αὐξουσα καὶ φραγμένη, ὁπότε κατὰ τὸ ἀξίωμα (§ 150) συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

Πράγματι, ἔαν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν $x = 1$, $\alpha = \frac{1}{v}$, τότε ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v &= 1 + \frac{v}{1} \cdot \frac{1}{v} + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{v^2} + \cdots + \frac{v(v-1)(v-2) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{1}{v^k} + \\ &+ \cdots + \frac{1}{v^v}. \end{aligned}$$

Ο γενικός όρος του ανωτέρω ανάπτυγματος γράφεται :

$$\frac{v(v-1) \cdot (v-2) \cdots (v-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{1}{v^k} = \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right)$$

Όθεν :

$$\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right) + \cdots + \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{v-1}{v}\right)$$

και

$$\alpha_{v+1} = \left(1 + \frac{1}{v+1}\right)^{v+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \left(1 - \frac{2}{v+1}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(v+1)!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \left(1 - \frac{2}{v+1}\right) \cdots \\ \left(1 - \frac{v}{v+1}\right),$$

όπου οι όροι εις τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ α_{v+1} εἶναι κατὰ μονάδα περισσότεροι ἐκείνων τοῦ α_v .
 Ἐὰν συγκρίνωμεν εἰς τὰ ἀνάπτυγματα τῶν α_v : α_{v+1} ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἔπειτα τοὺς δύο δευτέρους κ.ο.κ. βλέπομεν, ὅτι διὰ $2 \leq k \leq v$ οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλύτεροι, διότι :

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v}\right) < \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{v+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{v+1}\right).$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ α_{v+1} , ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἀντίστοιχον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ α_v , δηλ. ὁ $\frac{1}{(v+1)^{v+1}}$ εἶναι > 0 .

Ὡστε εἶναι :

$$\alpha_v < \alpha_{v+1} \quad \text{διὰ } v = 1, 2, 3, \dots$$

ἤτοι : ἡ ἀκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξουσα.

Αὕτη εἶναι καὶ φραγμένη. Ἐν ἄνω φράγμα διὰ τὴν ἀκολουθίαν α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, διότι :

$$\alpha_v = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \cdots + \frac{1}{v!} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdots \left(1 - \frac{v-1}{v}\right) \leq 1 + \\ + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{v!}.$$

Ἰσχύει ὁμοίως :

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{διὰ } k = 3, 4, \dots$$

ὅθεν :

$$\alpha_v \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{v!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{v-1}}\right) = \\ = 1 + \frac{1 - 2^{-v}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli ἔχομεν :

$$\alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \geq 1 + v \cdot \frac{1}{v} = 1 + 1 = 2 \quad \forall \quad v = 1, 2, \dots$$

Ἦτοι τελικῶς :

$$2 < \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v < 3$$

(διότι τὸ 2 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς αὐξοῦσης ἀκολουθίας α_v , ἥτοι $\alpha_1 = 2$).

Ἡ α_v , $v = 1, 2, \dots$ εἶναι ὁδὸν γνησίως αὐξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία, συνεπῶς συγκλίνει. Καλοῦμεν :

$$e = \lim_{\text{ορσ}} \alpha_v \equiv \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v.$$

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισθεὶς ἀριθμὸς e παίξει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν Ἀνάλυσιν καὶ γενικῶς τὰ Μαθηματικά, σπουδαιότερον ἀκόμη καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ π (σταθεροῦ λόγου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ), συνδέονται δὲ μεταξύ των διὰ σχέσεως, ὥστε, ἂν ὁρισθῇ ὁ εἰς νὰ ὀρίζεται καὶ ὁ ἄλλος· ὁ συμβολισμὸς μὲ τὸ λατινικὸν γράμμα « e » εἰσήχθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Euler (1707 – 1783) τὸ 1736.

Δίδομεν κατωτέρω τὰ 20 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ e κατὰ τὴν παράστασιν τούτου ὡς δεκαδικῆς σειρᾶς :

$$e = 2, 71828\ 1828\ 4590\ 4523\ 536\ \dots$$

Ὁ ἀριθμὸς e δὲν εἶναι ρητός· εἶναι δὲ εἰς ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς (§ 55).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Ἀναπτύξτε τὴν παράστασιν $(x + 3y)^6$ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀναπτύγματος ὑπολογίσατε τὸ $(1,03)^6$ μὲ ἀκρίβειαν 5 δεκαδικῶν ψηφίων.

562. Δείξατε ὅτι :

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4.$$

563. Εὑρετε τὸν ὅρον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\left(2x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^8$, ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ x^8 .

564. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τῶν κάτωθι ἀναπτυγμάτων :

$$\alpha) \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}, \quad \beta) \left(\frac{9x^3 - 2}{6x}\right)^9.$$

565. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου x^{18} εἰς τὸ ἀνάπτυγμα : $(x + 2x^2)^{10}$.

566. Ὑπάρχει εἰς τὸ ἀνάπτυγμα $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$ ὅρος ἀνεξάρτητος τοῦ x καὶ ποῖος;

567. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες :

$$\alpha). \binom{v}{0} + 2\binom{v}{1} + 2^2\binom{v}{2} + \dots + 2^v\binom{v}{v} = 3^v$$

$$\beta). \binom{v}{1} + 2\binom{v}{2} + 3\binom{v}{3} + \dots + v\binom{v}{v} = v \cdot 2^{v-1}$$

$$\gamma). 1 + 2\binom{v}{1} + 3\binom{v}{2} + \dots + (v+1)\binom{v}{v} = 2^v + v \cdot 2^{v-1}$$

$$\delta). 1 + \frac{1}{2} \cdot \binom{v}{1} + \frac{1}{3} \cdot \binom{v}{2} + \dots + \frac{1}{v+1} \binom{v}{v} = \frac{1}{v+1} \cdot (2^{v+1} - 1).$$

568. Ἐὰν $v \in \mathbb{N}$ καὶ $v > 1$, δείξατε ὅτι :

$$\binom{2v}{v} > \frac{4^v}{2\sqrt{v}}.$$

(Υπόδειξις : Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

569. Ἐὰν $v \in \mathbb{N}$, $v \neq 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left(\frac{v+1}{2}\right)^v > v! > (v+1) \frac{v-1}{2}.$$

IV. ΠΙΝΑΚΕΣ

§ 245. Εισαγωγικά Έννοιαι — Όρισμοί.— Θεωρούμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2, \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α_{ij} τῶν ἀγνώστων x_j , ὡς καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι β_i , εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ($i, j = 1, 2$). Ἐὰς φαντασθῶμεν τώρα τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων ἀναγεγραμμένους εἰς ὀρθογώνιον παράταξιν τῆς μορφῆς :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad \eta \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Τὴν ὀρθογώνιον ταύτην παράταξιν καλοῦμεν **πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων**. Ἐὰν εἰς τὴν ὀρθογώνιον παράταξιν (1) συμπεριλάβωμεν καὶ τοὺς σταθεροὺς ὅρους, τότε θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \eta \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

τὸν ὁποῖον καλοῦμεν **πίνακα ὅλων τῶν συντελεστῶν ἢ ἐπηξηγμένον πίνακα**.

Ὁ πίναξ (2) ἔχει δύο γραμμὰς καὶ 3 στήλας, εἶναι, ὡς λέγομεν, εἰς 2×3 πίναξ.

Κατόπιν τῆς ἐνορατικῆς ταύτης εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ πίνακος δίδομεν τὸν ἐξῆς γενικὸν ὅρισμόν :

Καλοῦμεν **πίνακα ἢ μήτρα (matrix)** μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας, καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ $A_{\mu \times \nu}$ ἢ ἀπλῶς μὲ A , μίαν ὀρθογώνιον (εἴτε τετραγωνικὴν) παράταξιν ἀριθμῶν a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, \mu, j = 1, 2, \dots, \nu$), $a_{ij} \in \mathbf{R}$ ἢ γενικώτερον $a_{ij} \in \mathbf{C}$, ἥτοι :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ὁ ἄνωτέρω πίναξ συμβολίζεται ἐπίσης καὶ ὡς $[\alpha_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, \mu, j = 1, 2, \dots, \nu$ ἢ $[\alpha_{ij}]_{\mu, \nu}$ ἢ ἀπλῶς $[\alpha_{ij}]$.

Αἱ μ ὀριζόντιαι ν -ᾶδες :

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1\nu}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2\nu}), \dots, (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \dots, \alpha_{\mu\nu})$$

εἶναι αἱ **γραμμὰι** τοῦ πίνακος, καὶ αἱ ν κατακόρυφοι μ -ᾶδες :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

εἶναι αἱ **στήλαι** αὐτοῦ.

Οί αριθμοί μ και ν καλούνται *διαστάσεις του πίνακος* και ειδικώτερον ὁ μὲν ἀριθμὸς μ , ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὄλων τῶν γραμμῶν, καλεῖται «*ὕψος*» τοῦ πίνακος, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν , ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὄλων τῶν στηλῶν, καλεῖται «*μῆκος*» αὐτοῦ. Εἰς πίναξ μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας καλεῖται εἰς μ ἐπὶ ν πίναξ ἢ πίναξ διαστάσεων $\mu \times \nu$. Οὕτως, ὁ πίναξ (1) εἶναι διαστάσεων 2×2 , ἐνῶ ὁ πίναξ (2) εἶναι διαστάσεων 2×3 . Οἱ ἀριθμοὶ α_{ij} καλοῦνται *στοιχεῖα* τοῦ πίνακος. Τὸ στοιχεῖον α_{ij} καλεῖται ἡ «*ij-συντεταγμένη*» καὶ ἐμφανίζεται εἰς τὴν i -γραμμὴν καὶ j -στήλην. Ὁ πρῶτος δείκτης i τοῦ στοιχείου α_{ij} , ἐπειδὴ φανερώνει τὴν γραμμὴν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον καλεῖται *δείκτης γραμμῆς*, ὁ δὲ δεῦτερος δείκτης j , ἐπειδὴ φανερώνει τὴν στήλην καλεῖται *δείκτης στήλης*. Ἐὰν εἶναι $\mu = 1$, δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ (3) ἔχῃ μίαν μόνον γραμμὴν, τότε λέγεται «*πίναξ-γραμμὴ*», ἐνῶ ἂν εἶναι $\nu = 1$, δηλ. ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ μίαν μόνον στήλην, τότε λέγεται «*πίναξ-στήλη*». Εἰς τοιοῦτους πίνακας γράφομεν τὰ στοιχεῖα τῶν συνήθως μὲ ἓνα δείκτην, ὅστις δηλοῖ ἀντιστοίχως τὴν στήλην ἢ τὴν γραμμὴν, ἥτοι γράφομεν :

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu) \quad \eta \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ἐὰν εἶναι $\mu = \nu$, δηλαδὴ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν συμπίπτῃ μὲ τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν ἐνὸς πίνακος, τότε οὗτος καλεῖται **τετραγωνικὸς πίναξ διαστάσεως ν** .

Τὰ στοιχεῖα : $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακος

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad (5)$$

λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν *πρωτεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ, καὶ τὰ στοιχεῖα : $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2,\nu-1}, \dots, \alpha_{\nu 1}$, τὴν *δευτερεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ.

Ἐὰν $\mu = \nu = 1$, δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ ἓν μόνον στοιχεῖον, τότε γράφεται (α_{11}) ἢ ἀπλούστερον α_{11} , ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει φόβος συγχύσεως.

Εἰς τετραγωνικὸς πίναξ τοῦ ὁποῦ ὅλα τὰ στοιχεῖα τὰ κείμενα ἐκτὸς τῆς πρωτευούσης διαγωνίου εἶναι μηδὲν καλεῖται **διαγώνιος**.

Ὅταν εἰς ἓνα διαγώνιον πίνακα ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς πρωτευούσης διαγωνίου ἴσούνται μὲ 1, τότε οὗτος καλεῖται **μοναδιαῖος ἢ πίναξ μονάς** καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὰ γράμματα E ἢ I . Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι διαγώνιος καὶ ὁ δεῦτερος μοναδιαῖος.

Εἰς πίναξ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα εἶναι μηδέν, καλεῖται **μηδενικός** πίναξ, καὶ παρίσταται μὲ **O**, ἥτοι :

$$O \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ἐὰν εἰς τετραγωνικὸς πίναξ ἔχη τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον στοιχεῖα ἴσα, δηλ. ἂν $a_{ij} = a_{ji}$, καλεῖται **συμμετρικός**.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἐνὸς τετραγωνικοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον εἶναι ἀντίθετα, ἥτοι ἂν $a_{ij} = -a_{ji}$, ὁπότε $a_{ii} = 0$, τότε καλεῖται **ἀντισυμμετρικός**.

Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι συμμετρικός καὶ ὁ δεύτερος ἀντισυμμετρικός.

Οἱ πίνακες δὲν σημαίνουν πρᾶξιν τινὰ μεταξύ τῶν στοιχείων αὐτῶν, τοῦτο ὅμως δὲν ἐμποδίζει νὰ ἔχουν οὗτοι μίαν μαθηματικὴν ἔννοιαν. Οὕτως, π.χ. ὁ πίναξ (α, β) , ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, εἶναι ἐν διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν καὶ παριστᾷ, ὡς γνωρίζομεν, ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμὸν. Οἱ πίνακες δὲν ἀποτελοῦν μόνον νέα μαθηματικὰ σύμβολα, εἰσάγονται καὶ ὡς νέα στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὁποίων δίδεται ὁ ὅρισμός τῆς ἰσότητος καὶ ὀρίζονται πράξεις, ὡς ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πινάκων μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας, θὰ παρίσταται μὲ $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ ὀρίζομεν τὰ ἑξῆς :

§ 246. Ἰσότης πινάκων.— Δύο πίνακες $A \equiv [a_{ij}]$ καὶ $B \equiv [\beta_{ij}]$ τῶν αὐτῶν διαστάσεων θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἴσοι, καὶ θὰ γράφωμεν : $A = B$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἥτοι :

$$A_{\mu \times \nu} = B_{\mu \times \nu} \iff a_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \mu \\ j = 1, 2, \dots, \nu \end{matrix} \quad (1)$$

Ἡ σχέσηις αὕτη εἶναι προφανῶς *αὐτοπαθής*, *συμμετρικὴ* καὶ *μεταβατικὴ* (διατί ;). Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι ἡ ἰσότης δύο $\mu \times \nu$ πινάκων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ἕν σύστημα $\mu \cdot \nu$ ἰσοτήτων μίαν δ' ἕκαστον ζεῦγος στοιχείων. Ὁ ὅρισμός τῆς ἰσότητος πινάκων, μεταξύ ἄλλων πλεονεκτημάτων, μᾶς παρέχει καὶ μίαν διευκόλυνσιν εἰς τὴν σύντομον γραφὴν διαφόρων σχέσεων, ὡς π.χ. διὰ τὴν σύντομον ἔκφρασιν συστημάτων. Κατὰ ταῦτα ἡ ἔκφρασις :

Να λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\begin{pmatrix} x+y & 2z+\omega \\ x-y & z-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ εἶναι ἰσοδύναμος,

συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν (1), μὲ τὸ κάτωθι σύστημα :

$$x+y=3, \quad x-y=1, \quad 2z+\omega=5, \quad z-\omega=4.$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι : $x=2, \quad y=1, \quad z=3, \quad \omega=-1.$

§ 247. Πρόσθεσις πινάκων καὶ ἀριθμητικὸς πολλαπλασιασμός.—

Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο πινάκων, θεωροῦμεν ἀναγκαῖον, ὅπως οἱ δύο πίνακες ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γραμμῶν καὶ στηλῶν. Κατόπιν τούτου, ἂν οἱ πίνακες $A \equiv [\alpha_{ij}]$ καὶ $B \equiv [\beta_{ij}]$ εἶναι τῶν αὐτῶν διαστάσεων $\mu \times \nu$, τότε ὡς **ἄθροισμα** αὐτῶν ὀρίζεται ὁ $\mu \times \nu$ πίναξ $\Gamma \equiv [\gamma_{ij}]$, τοῦ ὁποῖου τυχὸν στοιχείον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν πινάκων A καὶ B , ἥτοι :

$$\Gamma = A + B \iff \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \mu \\ j = 1, 2, \dots, \nu \end{matrix} \quad (1)$$

Ἀναλυτικώτερον, ἔάν :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \dots & \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix},$$

τότε ὡς ἄθροισμα αὐτῶν ὀρίζεται ὁ πίναξ :

$$A + B \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} + \beta_{1\nu} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} + \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} + \beta_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} + \beta_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu} + \beta_{\mu \nu} \end{bmatrix}.$$

Ὡς **γινόμενον ἐνὸς ἀριθμοῦ** $\lambda \in \mathbb{R}$ ἐπὶ **πίνακα** A ὀρίζεται εἰς πίναξ, ὅστις σημειοῦται μὲ $\lambda \cdot A$ ἢ ἀπλῶς λA , καὶ προκύπτει ἐκ τοῦ A ἂν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ λ , ἥτοι :

$$\lambda A \equiv \begin{bmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} & \dots & \lambda \alpha_{1\nu} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} & \dots & \lambda \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \alpha_{\mu 1} & \lambda \alpha_{\mu 2} & \dots & \lambda \alpha_{\mu \nu} \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λA εἶναι ἐπίσης εἰς $\mu \times \nu$ πίναξ.

Ἐπίσης ὀρίζομεν :

$$-A = (-1) \cdot A \quad \text{καὶ} \quad A - B = A + (-B).$$

Ὁ πίναξ $-A$ τοῦ ὁποῖου στοιχεῖα εἶναι τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ A καλεῖται **ἀντίθετος** τοῦ A .

Εφαρμογή. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Τότε :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}.$$

*** § 248. Έννοια του διανυσματικού χώρου.**—Το σύνολον $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ των πινάκων με μ γραμμές και ν στήλας έχει έφωδιασθή με δύο πράξεις : την πρόσθεσιν πινάκων και τον πολλαπλασιασμόν ενός πίνακος επί πραγματικών αριθμών. Αί πράξεις αὗται έχουν τὰς ακόλουθους βασικάς ιδιότητες, ὡς δύναται τις νὰ ἀποδείξῃ εὐκόλως :

Διὰ τυχόντας πίνακας $A, B, \Gamma \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ και τυχόντας πραγματικούς αριθμούς k, λ ισχύουν :

<i>Πρόσθεσις</i>	<i>Πολλαπλασιασμός επί αριθμόν</i>
(i) $A + B = B + A$	$k(A + B) = kA + kB$
(ii) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$	$(k + \lambda)A = kA + \lambda A$
(iii) $A + O = O + A = A$	$k(\lambda A) = (k\lambda)A$
(iv) $A + (-A) = (-A) + A = O$	$1A = A$

Σύνολα, ὡς τὸ σύνολον τῶν πινάκων $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ με μ γραμμές και ν στήλας, έφωδιασμένα με δύο πράξεις την πρόσθεσιν και τον πολλαπλασιασμόν επί αριθμόν (συντελεστήν) και διὰ τὰς ὁποίας ισχύουν αἱ ἄνωτέρω ιδιότητες, καλοῦνται **διανυσματικοὶ χώροι**.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ καλοῦνται *διανύσματα*, τὰ δὲ στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R}$ καλοῦνται *βαθμωτά* (ἢ *έκτελεσταί*). Οἱ πίνακες λοιπὸν εἶναι τὰ διανύσματα ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου. Περὶ τῆς θεμελιώδους ἑννοίας τοῦ διανυσματικοῦ χώρου θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἑκτὴν τάξιν.

§ 249. Πολλαπλασιασμός πινάκων.—Έστω $\mathcal{M}$ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πινάκων· τότε μεταξὺ ὠρισμένων ζευγῶν ἐξ αὐτῶν ὀρίζεται μία πρᾶξις καλουμένη **πολλαπλασιασμός** ὡς ἑξῆς :

α'). Πολλαπλασιασμός «γραμμὴ ἐπὶ στήλην» : Έστωσαν $A \equiv (a_i)$ και $B \equiv [b_j]$ δύο πίνακες, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι εἰς πίναξ—γραμμὴ με ν στήλας και ὁ δεῦτερος πίναξ—στήλη με ν γραμμές· τότε ὀρίζομεν ὡς γινόμενον αὐτῶν $A \cdot B$ ἓνα πίνακα με ἓνα στοιχείον οὕτω :

$$A \cdot B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu) \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_\nu\beta_\nu) \quad (1)$$

β'). Πολλαπλασιασμός πινάκων : Έστωσαν τώρα δύο πίνακες $A_{\mu \times \nu} \equiv [a_{ij}] \in \mathcal{M}$ και $B_{\nu \times \rho} \equiv [b_{jk}] \in \mathcal{M}$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν συνθήκην : Τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ (πρώτου) A ἰσοῦται με τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ (δευτέρου) B . Τότε ὀρί-

ζομεν ὡς γινόμενον $A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho}$ τῶν πινάκων τούτων, ἓνα πίνακα $\Gamma_{\mu\rho} \equiv [\gamma_{ik}]$, τοῦ ὁποίου τὸ τυχὸν στοιχεῖον γ_{ik} προέρχεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς i γραμμῆς τοῦ πίνακος A ἐπὶ τὴν k στήλην τοῦ B , εἶναι δηλαδὴ :

$$A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots & \beta_{\nu\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1\rho} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \dots & \gamma_{\mu\rho} \end{bmatrix} = \Gamma,$$

$$\text{ὅπου } \gamma_{ik} = \alpha_{i1} \beta_{1k} + \alpha_{i2} \beta_{2k} + \dots + \alpha_{i\nu} \beta_{\nu k} = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \beta_{jk}.$$

Προφανῶς ὁ πίναξ Γ ἔχει μ γραμμὰς (ὅσας ὁ A) καὶ ρ στήλας (ὅσας ὁ B), δηλ. θὰ ἔχωμεν :

$$A_{\mu\nu} \cdot B_{\nu\rho} = \Gamma_{\mu\rho}.$$

Τονίζομεν ὅτι : τὸ γινόμενον AB δὲν ὀρίζεται, ἂν ὁ A εἶναι εἰς $\mu \times k$ πίναξ καὶ ὁ B εἶναι εἰς $\lambda \times \rho$ πίναξ, ὅπου $k \neq \lambda$.

Παράδειγμα 1ον :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) \\ -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -8 \\ 5 & 9 & -22 \end{pmatrix}$$

2ον :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου παραδείγματος συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ιδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ δὲν ἰσχύει γενικῶς ἐπὶ τῶν πινάκων.

Ὅπως δὴποτε ὁμως ὁ πολλαπλασιασμός πινάκων ἱκανοποιεῖ τὰς ἀκολουθοῦσας ιδιότητες, ἐφ' ὅσον βεβαίως αἱ σημειοῦμεναι κάτωθεν πράξεις εἶναι ἐκτελεσταί, ἥτοι ἐφ' ὅσον κατὰ τὸν πολλαπλασιασμόν δύο πινάκων AB τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ A συμφωνεῖ μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ B :

- 1) $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ (προσεταιριστικὴ ιδιότης)
- 2) $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ (ἐπιμεριστικὴ ιδιότης ἐξ ἀριστερῶν)
- 3) $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$ (ἐπιμεριστικὴ ιδιότης ἐκ δεξιῶν)
- 4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, ὅπου $k \in \mathbf{R}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $OA = AO = O$, ὅπου O εἶναι ὁ μηδενικὸς πίναξ.

§ 250. Ὁ ἀνάστροφος ἐνὸς πίνακος.— Δοθέντος ἐνὸς πίνακος $A_{\mu\nu} \equiv [\alpha_{ij}]$ καλοῦμεν **ἀνάστροφον** αὐτοῦ καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ A^t , τὸν πίνακα, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ $A_{\mu\nu}$, ἂν αἱ γραμμαὶ του γραφοῦν, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς στήλαι (καὶ αἱ στήλαι του ὡς γραμμαί), ἥτοι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{\mu 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{\mu 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀνάστροφος τοῦ $A_{\mu\nu}$ εἶναι εἰς $\nu \times \mu$ πίναξ.

Παράδειγμα :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Διὰ τοὺς ἀναστροφους πίνακας ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες :

- 1) $(A^t)^t = A$, 2) $O^t = O$, 3) $(-A)^t = -A^t$, 4) $(A+B)^t = A^t + B^t$,
5) $(A-B)^t = A^t - B^t$, 6) $(kA)^t = kA^t$, $\forall k \in \mathbb{R}$, 7) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

§ 251. Ὁ ἀντίστροφος τετραγωνικοῦ πίνακος.— Ἐστώσαν δύο τετραγωνικοὶ πίνακες $A_n \equiv A$ καὶ $B_n \equiv B$. Τότε, ὡς γνωστόν, ὀρίζεται ὁ πίναξ $A \cdot B$ ὡς καὶ ὁ πίναξ $B \cdot A$. Ἐν συμβῇ : $A \cdot B = B \cdot A = E$, ἔνθα E εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίναξ, τότε λέγομεν ὅτι ὁ πίναξ B εἶναι **ἀντίστροφος** τοῦ πίνακος A καὶ γράφομεν : $B = A^{-1}$. Λόγω τῆς συμμετρίας καὶ ὁ πίναξ A εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος B , ἥτοι : $A = B^{-1}$.

Παράδειγμα. Ἐστω :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ἐχομεν :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ὅθεν οἱ A καὶ B εἶναι ἀντίστροφοι.

§ 252. Πίνακες καὶ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων.— Τὸ κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned} \quad (1)$$

εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν «ἐξίσωσιν πίνακος» :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ἢ συντόμως } AX = B, \quad (2)$$

ὅπου $A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ καὶ $B \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ἦτοι πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (1) εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀντίστοιχον ὁμογενὲς σύστημα τοῦ (1) εἶναι τότε ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἐξίσωσιν πίνακος : $AX = O$. Ὁ πίναξ A τῶν συντελεστῶν καλεῖται *πίναξ τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος*, ἐνῶ ὁ πίναξ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

καλεῖται *ἐπληξημένος πίναξ* τοῦ (1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα (1) ὀρίζεται πλῆρως ἐκ τοῦ ἐπληξημένου πίνακος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

570. Υπολογίσατε τὰ κάτωθι :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad 3) -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

571. Δίδονται :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Εύρετε : 1) $3A + 4B - 2\Gamma$, 2) $A + 2B - 4\Gamma$, 3) $A^t + B^t - \Gamma^t$, 4) AA^t , 5) A^tA .

572. Εύρετε τὰ x, y, z, ω εάν :

$$3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+\omega & x/3 \end{pmatrix}.$$

573. Δίδεται : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Εύρετε : 1) A^2 , 2) A^3 , 3) $f(A)$, όπου $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

574. Δείξτε ότι ο πίναξ A της ανωτέρω άσκησης είναι ρίζα του πολυνύμου :

$$g(x) = x^2 + 2x - 11.$$

575. Νά αποδειχθῇ ότι :

$$\begin{bmatrix} \text{συνα} & \text{ημα} \\ -\text{ημα} & \text{συνα} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{συνα} & \text{ημα} \\ -\text{ημα} & \text{συνα} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}2\alpha & \text{ημ}2\alpha \\ -\text{ημ}2\alpha & \text{συν}2\alpha \end{bmatrix}.$$

576. Νά αποδειχθῇ ότι :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^v = \begin{pmatrix} \alpha^v & v\alpha^{v-1} \\ 0 & \alpha^v \end{pmatrix}.$$

577. Προσδιορίσατε τούς πίνακες $X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, γνωστού όντος ότι :

$$3 \cdot X + 4 \cdot Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-2 \cdot X + 3 \cdot Y = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

578. Εάν $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, νά όρισθουν οί k και λ εις την εξίσωσιν :

$$X^2 - kX + \lambda E = O, \quad (E = \text{μοναδιαίος πίναξ}, O = \text{μηδενικός πίναξ}).$$

579. Δίδεται ό τετραγωνικός πίναξ :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Νά εύρεθουν αι συνθηκαι ύπαρξεως του αντίστροφου πίνακος και νά υπολογισθῇ ούτος.

580. Νά εύρεθῇ ό αντίστροφος του πίνακος.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

581. Νά λυθῇ ή «εξίσωσις» :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

582. Δείξτε ότι : ό ανάστροφος του αντίστροφου ενός πίνακος A ίσούται με τον αντίστροφο του άναστροφου του A , ήτοι : $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ι. ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

§ 253. Ἱστορική εἰσαγωγή.—Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ὀφείλει τὴν γένεσιν τῆς εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια καὶ συγκεκριμένως εἰς τὰ παιγνίδια τῶν κύβων (ζάρια). Πρὸ τριακοσίων περίπου ἐτῶν ὁ Γάλλος ἱππότης Chevalier de Méré (1654), διάσημος παίκτης, ἐνδιεφέρετο διὰ τὰς περιπτώσεις ἐπιτυχίας εἰς ἓνα τυχερὸν παιγνίδιον πολὺ διαδεδομένον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα. Ἐπειδὴ εἶχε τὴν ἐντύπωσιν ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ ἦσαν λανθασμένοι, συνεβουλεύθη τὸν Blaise Pascal (1623 - 1662), τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα κατεγίνετο μὲ τὴν θεολογίαν, τὰ μαθηματικά καὶ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας. Ἐνῷ εἰργάζετο ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ de Méré, ὁ Pascal ἀντιμετώπισε καὶ ἄλλα ἐνδιαφέροντα ἐρωτήματα ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων. Τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἔδωσαν ἀφορμὴν διὰ μίαν καρποφόρον ἀλληλογραφίαν μεταξὺ Pascal καὶ Fermat (1608 - 1665), ἐνὸς ἄλλου ἐπίσης μεγάλου μαθηματικοῦ. Ὁ Fermat ἐμελέτησεν τόσον τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα, ὅσον καὶ τὰς λύσεις τὰς δοθείσας ὑπὸ τοῦ Pascal, πολλὰς τῶν ὁποίων καὶ ἐγενίκευσεν. Τοιοῦτοτρόπως, εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τῶν δύο αὐτῶν σοφῶν ἐτέθησαν οὐσιαστικῶς αἱ πρῶται βάσεις τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ Pascal ἐπρότεινεν τὸ ὄνομα «Γεωμετρία τῆς τύχης».

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀπασχόλησεν ἐν συνεχείᾳ πλείστους μεγάλους μαθηματικούς, ὥς τὸν J. Bernoulli, τὸν Leibnitz, τὸν De Moivre, τὸν Euler, τὸν Lagrange, τὸν Gauss. Ἐπεφυλάσσετο ὁμως εἰς τὸν Laplace (1749 - 1827) ἡ τιμὴ νὰ συστηματοποιήσῃ ὅλας τὰς μέχρι αὐτοῦ γνώσεις, νὰ ἐπεκτείνῃ αὐτάς, χρησιμοποιοῦν τὰς πλέον προηγμένας μεθόδους τῆς Ἀναλύσεως καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν τὴν κλασσικὴν τῆς μαθηματικῆς μορφήν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν μᾶς εἶναι γνωστὴ σήμερον.

Ἐπὶ ἑβδομήκοντα καὶ πλέον ἔτη αἱ ἰδέαι τοῦ Laplace ἐκυριάρχησαν καὶ ἐδέσμευσαν τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων. Περὶ τὰ τέλη τοῦ παρελθόντος αἰῶνος δύο μεγάλοι μαθηματικοὶ ὁ J. Bertrand καὶ ὁ H. Poincaré ἐσημείωσαν νέαν ἐποχὴν. Οὗτοι μὲ τὴν αὐστηρὰν κριτικὴν των κατὰ τοῦ ὀρισμοῦ τῆς πιθανότητος τοῦ υἰοθετηθέντος ὑπὸ τοῦ Laplace ἐδημιούργησαν περίοδον κρίσεως διὰ τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περίοδον ἣτις κατὰ τὴν διαρρέυσασαν πεντηκοναετίαν ὑπῆρξεν ἐξαιρετικὰ γόνιμος ἀπὸ πάσης ἀπόψεως.

Ἡ νεωτέρα ἀνάπτυξις τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τόσον ἀπὸ ἐνδιαφέρον πρὸς αὐτὴν ταύτην τὴν θεωρίαν ὅσον καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν διευρύνσεως τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς. Σημαντικὴ εἶναι ἡ συμβολὴ τῆς Μαθηματικῶν τοῦ τρέχοντος αἰῶνος Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, P. Lévy καὶ Emile Borel.

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, δημιουργηθεῖσα ἀρχικῶς, ὥς ἐλέχθη ἀνωτέρω, διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ ἀπορίας, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὰ τυχερὰ παιγνίδια, κατέστη σήμερον τόσον σημαντικὴ, ὥστε νὰ ἀποτελῇ βασικὴν συμβολὴν εἰς τὸ ἔργον τῶν κοινωνικῶν καὶ φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν πρακτικῶν προβλημάτων τῆς διοικήσεως καὶ τῆς βιομηχανίας. Τοιοῦτοτρόπως, εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων προστρέχουν οἱ Φυσικοὶ διὰ νὰ ἐπεκτείνουν τὰ ὅρια τῆς κλασσικῆς Φυσικῆς. Δι' αὐτῆς οἱ Βιολόγοι κατορθώνουν νὰ ἀντιμετωπίζουν τοὺς ποσοτικὸς νόμους τῆς κληρονομικότητος. Οἱ Μετεωρολόγοι, οἱ Ἀστρονόμοι δι' αὐτῆς ἐπεξεργά-

ζονται τὰς παρητηρήσεις των καὶ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν βασιζοῦν μέγαν ἀριθμὸν τῶν προβλέψεων των. Οἱ Οἰκονομολογοὶ δι' αὐτῆς προσπαθοῦν νὰ ἀνακαλύψουν τοὺς νόμους τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Εἰς τὴν Βιομηχανίαν ἡ ἐν σειρᾷ παραγωγῇ ὑπόκειται εἰς τοὺς νόμους τῶν Πιθανοτήτων. "Ὅλαι ἄλλως τε αἱ παρατηρήσεις, ὅλαι αἱ μετρήσεις τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν ὀφείλουν τελικῶς νὰ ὑποστοῦν ἐπεξεργασίαν διὰ τῶν μεθόδων τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων. Τέλος ἡ Στατιστικὴ, τῆς ὁποίας ἡ σημασία ἀποδεικνύεται διαρκῶς μεγαλυτέρα εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως, ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιότεραν ἐφαρμογὴν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἐφαρμογῶν δεικνύουν τὴν εὐρύτητα τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, καὶ συνεπῶς τὴν χρησιμότητά ταύτης, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐνδιαφέροντος καὶ τῆς ὥριμότητος τὴν ὁποίαν παρουσιάζει αὕτη ὡς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης με ἰδίας μεθόδους καὶ προβλήματα.

§ 254. Ἀρχικαὶ ἔννοιαι τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.— Ὡς γνωστόν, κάθε κλάδος τῶν Μαθηματικῶν θεμελιούται ἐπὶ ἐλαχίστων ἀπλῶν ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἔμφυτοι εἰς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν καὶ αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὀρισθοῦν τῇ βοήθειᾳ ἄλλων ἐννοιῶν, δι' ὃ καὶ καλοῦνται **ἀρχικαὶ ἔννοιαι**. Οὕτω, π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τοῦ παρόντος βιβλίου ἐγνωρίσαμεν τοιαύτας ἐννοίας, ὡς τὴν ἐννοιαν τῆς «λογικῆς προτάσεως», τὴν ἐννοιαν τοῦ «συνόλου» κ.ἄ. Ἐπίσης εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἔχομεν τὴν ἐννοιαν τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας, τοῦ χώρου κλπ. ὡς ἀρχικὰς ἐννοίας.

Εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων ὡς ἀρχικαὶ ἔννοιαι εἶναι αἱ ἑξῆς δύο :

α') Ἡ ἐννοια τοῦ «**πειράματος τύχης**», καὶ

β') Ἡ ἐννοια τοῦ «**ἀπλοῦ συμβάντος ἢ ἐνδεχόμενου**», ἢ ἄλλως τοῦ «**στοιχειῶδους γεγονότος**»

Θὰ κάμωμεν μίαν πρῶτην γνωριμίαν με τὰς ἐννοίας αὐτὰς μερικὰ παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον : "Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι κάθε μεταλλικὸν νόμισμα (κέρμα) ἔχει δύο ὄψεις, ἐκ τῶν ὁποίων τὴν μίαν καλοῦμεν συνήθως «**κορώνα**» καὶ τὴν ἄλλην «**γράμματα**». "Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα ἓν κέρμα καὶ ἀκολουθῶν ὡς κατευθύνωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν ἐνδείξιν, ἥτις φέρεται ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὀψεως τοῦ κέρματος, ὅταν τοῦτο καταπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἡρεμήσῃ (Ἡ ρίψις δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἂν τὸ κέρμα σταθῇ ὀρθιον). Ἡ ρίψις τοῦ κέρματος εἰς τὸν ἀέρα ἀποτελεῖ ἓνα «**πείραμα**». Λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἐκτελούμεν ἓνα «**πείραμα τύχης**» ἀκριβέστερον ἔν «**ἀπλοῦν πείραμα τύχης**». Τὸ νόμισμα πίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ ἐμφανίσῃ (ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὀψεως) τὴν ἐνδείξιν «**κορώνα**» ἢ τὴν ἐνδείξιν «**γράμματα**». Τὸ ἀποτέλεσμα δηλαδὴ τοῦ ἀνωτέρω πειράματος εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἅνω ὀψεως τοῦ νομίσματος ἀκριβῶς μὴδ τῶν δύο ἐνδείξεων : «**κορώνα**», «**γράμματα**». Κάθε δὲ τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται ἓνα «**ἀπλοῦν συμβάν**», ἢ ἄλλως ἓνα «**στοιχειῶδες γεγονός**».

"Ὡστε, εἰς τὸ πείραμα «**κορώνα—γράμματα**» ἔχομεν δύο ἀπλᾶ συμβάντα :

1ον). Τὸ ἀπλοῦν συμβάν : «**Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν κορώνα**» (συμβολ. «**K**»).

2ον). Τὸ ἀπλοῦν συμβάν : «**Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν γράμματα**» (συμβολ. «**Γ**»).

Ἐχομεν λοιπὸν ἐν προκειμένῳ ἓνα πείραμα τύχης καὶ δύο ἀπλᾶ συμβάντα συνηρημένα μὲ τὸ πείραμα.

Παράδειγμα 2ον : (Πείραμα μὲ κύβον).

Ὅλοι γνωρίζομεν ἐπίσης τὸν κύβον (ζάρι), ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια. Οὗτος εἶναι μικρὸς κύβος, κατὰ τὸ δυνατὸν συμμετρικός, ἐπὶ τῶν 6 ὀψεων (ἑδρῶν) τοῦ ὁποῖου εἶναι ἀναγεγραμμένοι (συνήθως μὲ κοκκίδας) ἀνὰ εἰς τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Αἱ ἐνδείξεις αὗται εἶναι διατεταγμέναι οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων δύο παραλλήλων ὀψεων εἶναι πάντοτε 7.

Ρίπτομεν τώρα ἓνα τοιοῦτον κύβον εἰς τὸν ἀέρα καὶ κατευθύνομεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις φέρεται ἐπὶ τῆς ἄνω ἑδρας, ὅταν ὁ κύβος ἡρεμήσῃ. Καὶ αὐτὸ εἶναι ἓνα πείραμα τύχης. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἄνω ἑδρας τοῦ κύβου, ἐνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Κάθε τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, ἐν ἀπλοῦν συμβάν. Φανερόν εἶναι ὅτι εἰς τὸ πείραμα μὲ κύβον ἔχομεν τὰ ἐξῆς 6 ἀπλᾶ συμβάντα :

1ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 1».

2ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 2».

.....

6ον) «Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἑδραν τὸ 6».

Ἐχομεν λοιπὸν εἰς τὸ δευτέρον παράδειγμα ἓνα πείραμα τύχης καὶ 6 ἀπλᾶ συμβάντα.

Ἐὰν ρίψωμεν διὰ δευτέραν φορὰν τὸν κύβον εἰς τὸν ἀέρα ἐκτελοῦντες τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, τότε λέγομεν ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα τύχης. Κατὰ τὴν ἐπανειλημμένην ἐκτέλεσιν τοῦ ἰδίου πειράματος θὰ προκύψῃ μία «ἀκολουθία» ἀπλῶν συμβάντων. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ ἀπὸ μίαν ἀκολουθίαν ψηφίων εἰλημμένων ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἐνδείξεων τοῦ κύβου, δηλ. ἐκ τοῦ συνόλου {1, 2, 3, 4, 5, 6} καὶ διαδεχομένων ἀτάκτως ἄλληλα. Οὕτως, ἐπαναλαμβάνοντες τὸ πείραμα μὲ κύβον εἴκοσι φορὰς δὲν ἀποκλείεται νὰ ἔχωμεν τὴν «πεπερασμένην ἀκολουθίαν» :

3, 5, 2, 2, 6, 1, 6, 3, 4, 4, 4, 2, 1, 5, 3, 5, 6, 4, 2, 5.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τὰ **χαρακτηριστικὰ ἐνὸς πειράματος τύχης** εἶναι :

α). Τὸ ἀποτέλεσμά του δὲν δύναται μὲ κανέναν τρόπον νὰ προβλεφθῇ.

β). Τὸ πείραμα δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθίκας (δηλ. τηρουμένης τῆς αὐτῆς διαδικασίας).

§ 255. Δειγματικὸς χῶρος — Δεῖγμα.— Εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως ἐνὸς νομίσματος ὑπάρχουν δύο δυνατὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα συμβολίζομεν ὡς

K, Γ, (1)

ὅπου K σημαίνει «κορώννα» καὶ Γ «γράμματα».

Ἐὰν ρίψωμεν ἓνα ζάρι ὑπάρχουν 6 δυνατὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἑδρῶν :

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ἀναγράφοντες ὅλα τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα ἑνὸς πειράματος, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν ἓνα **δειγματικὸν χῶρον**. Κατὰ ταῦτα :

Δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀπλῶν συμβάντων, ἥτοι τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἓνα πείραμα τύχης.

Ἐκαστον δὲ ἀπλοῦν συμβάν, ἥτοι ἀτομικὸν (ἀδιαίρετον) ἀποτέλεσμα, καλεῖται **δεῖγμα**.

Οὕτω, π.χ. εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον $\Omega \equiv \{K, \Gamma\}$, ἐνῶ εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον : $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τοῦ δειγματικοῦ χῶρου ἀναφέρομεν καὶ τὰ ἐξῆς παραδείγματα :

α'). *Λήψις σφαιριδίου (βόλου) ἐξ ἑνὸς σάκκου*. Ἐντὸς σάκκου ὑπάρχει ἀριθμὸς σφαιριδίων ὁμοίων ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Ἐστω ὅτι μερικὰ εἶναι κυανᾶ (κ), ἄλλα λευκὰ (λ) καὶ ἄλλα ἐρυθρὰ (ε). Λαμβάνομεν «*τυχαίως*» (δηλ. μὲ τὴν γνωστὴν διαδικασίαν ἀνακατεύματος τῶν σφαιριδίων κ.τ.λ.) ἓνα σφαιρίδιον καὶ χωρὶς νὰ τὸ ἐπανατοποθετήσωμεν ἐντὸς τοῦ σάκκου ἀνασύρομεν καὶ δεύτερον, προσέχοντες τοῦ χρώματος σφαιρίδιον ἐξήχθη πρῶτον καὶ τοῦ δεύτερον. Λέγομεν τότε ὅτι ἐκτελοῦμεν ἓνα πείραμα τύχης, ἀκριβέστερον ἓνα **σύνθετον πείραμα τύχης**, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ἐνδείξεων π.χ. (λ, ε).

Ἄς ἴδωμεν τώρα ποῖος εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος αὐτοῦ τοῦ «συνθέτου πειράματος». Ἐπειδὴ αἱ μόναι δυναταὶ ἐκβάσεις (ἀποτελέσματα), τὰς ὁποίας δύναται νὰ παρουσιάσῃ ἡ λήψις ἑνὸς σφαιριδίου ἐκ τοῦ σάκκου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν γραμμάτων κ, λ, ε ἡ τυχαία ἐξαγωγή ἐκάστου σφαιριδίου κεχωρισμένως ἔχει ὡς δειγματικὸν χῶρον τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{κ, λ, ε\}$. Ἐπομένως αἱ διάφοροι ἐκβάσεις τῆς λήψεως τῶν δύο σφαιριδίων ἀντιστοιχοῦν ἀμφοιμοноσημάντως εἰς τὰ διάφορα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in \Sigma$ καὶ $y \in \Sigma$. Ὅθεν κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος τοῦ ἀνωτέρω συνθέτου πειράματος τύχης εἶναι τὸ σύνολον :

$$\Omega \equiv \Sigma \times \Sigma = \{ (x, y) : x \in \Sigma, y \in \Sigma \} = \left\{ \begin{array}{l} (κ, κ), (κ, λ), (κ, ε) \\ (λ, κ), (λ, λ), (λ, ε) \\ (ε, κ), (ε, λ), (ε, ε) \end{array} \right\}.$$

Κάθε στοιχεῖον τοῦ Ω , δηλ. κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἐνδείξεων εἶναι ἓν **ἀπλοῦν συμβάν**.

β'). *Ρίψις δύο κύβων*. Ἐστω ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους (ζάρια), ἓνα λευκὸν καὶ ἓνα ἐρυθρόν καὶ ὅτι σημειώνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄνω ἐδρῶν. Ὁ λευκὸς κύβος ἔχει ἐξ (6) δυνατὰ ἀποτελέσματα : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ὁμοίως καὶ ὁ ἐρυθρός. Ἄς συμβολίσωμεν μὲ λ τὴν ἐνδειξιν τῆς ἄνω ἐδρας, τὴν ὁποίαν θὰ παρουσιάσῃ ὁ λευκὸς κύβος καὶ μὲ ε τὴν ἀντίστοιχον διὰ τὸν ἐρυθρόν, τότε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνδυασμένης ρίψεως τῶν δύο κύβων παρίσταται διὰ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (λ, ε). Πόσα τοιαῦτα διατεταγμένα ζεύγη ὑπάρχουν;

Δηλαδή πόσα είναι τα ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος : *Ρίψις δύο κύβων* ; Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη :

(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), ..., (5,6), (6,5), (6,6).

(ὅσα δηλ. καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 στοιχείων 1, 2, 3, ..., 6 ἀνὰ δύο, § 238).

Εἶναι πολλάκις χρήσιμον νὰ γράψωμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν εἰς ἓνα πῖνακα διπλῆς εἰσόδου ὡς κάτωθι :

		Ἀποτέλεσμα ἐρυθροῦ κύβου					
Ἀποτέλεσμα λευκοῦ κύβου	$\lambda \backslash \epsilon$	1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ὁ πῖναξ οὗτος παρέχει τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων (ἀπλῶν συμβάντων) τοῦ πειράματος τῆς ρίψεως δύο κύβων. Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος Ω τοῦ πειράματος. Γράφομεν δὲ συντόμως ἐν προκειμένῳ :

$$\Omega = \Sigma \times \Sigma = \{ (\lambda, \epsilon) : \lambda \in \Sigma, \epsilon \in \Sigma \},$$

ὅπου Σ τὸ σύνολον $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη (λ, ϵ) εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου, δηλ. τὰ ἀπλᾶ συμβάντα.

Γενικεύοντες τώρα ὅσα ἐξετέθησαν εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν κάτωθι ὀρισμὸν τοῦ δειγματικοῦ χώρου :

Δειγματικὸς χῶρος Ω ἐνὸς πειράματος τύχης εἶναι ἐν σύνολον, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εὐρίσκονται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἐκβάσεων (ἀποτελεσμάτων) τοῦ πειράματος.

Ἐπειδὴ κάθε στοιχεῖον ἐνὸς συνόλου καλεῖται καὶ σημεῖον τοῦ συνόλου, διὰ τοῦτο τὰ ἀπλᾶ συμβάντα καλοῦνται καὶ **δειγματικὰ σημεῖα** ἢ ἀπλῶς **σημεῖα** (σημεῖα — δείγματα). Ὁ δειγματικὸς χῶρος καλεῖται καὶ **βασικὸν σύνολον** (ἢ **σύνολον ἀναφορᾶς**) δι' ἐν πείραμα.

Σημειώσεις. Τὸ βασικὸν σύνολον, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον, διὰ καθαρῶς ἐποπτικοῦς λόγους, παρίσταται μὲ ἐν ὀρθογώνιον, οὕτω καὶ ὁ δειγματικὸς χῶρος παρίσταται ὁμοίως, δηλ. μὲ ὀρθογώνιον ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὰ ἀπλᾶ συμβάντα σημειοῦνται μὲ στιγμάς.

Γενική παρατήρησης. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ πεπερασμένους δειγματικούς χώρους, δηλ. τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων θὰ εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός.

Παντοῦ κατωτέρω μὲ τὸ γράμμα Ω συμβολίζομεν τὸν δειγματικὸν χῶρον τοῦ ἐκάστοτε πειράματος τύχης.

§ 256. Συμβάν.— Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τῆς ρίψεως δύο κύβων. Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι τὰ 36 διατεταγμένα ζεύγη τοῦ πίνακος τῆς προηγουμένης σελίδος. Ἐὰν τώρα ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, καθ' ἃς π.χ. τὸ **ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων ἰσοῦται μὲ 7** θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὑποσύνολον :

$$A \equiv \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

τοῦ δειγματικοῦ χῶρου Ω . Τὸ ὑποσύνολον A καλεῖται **συμβάν** ἢ **γεγονός**.

Γενικῶς: **Συμβάν ἢ γεγονός καλεῖται κάθε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χῶρου.**

Ἐὰν τὸ A εἶναι μονομελὲς σύνολον, δηλ. ἔχει ἓν μόνον στοιχεῖον, τὸ συμβάν καλεῖται **ἀπλοῦν**.

Ὅταν ἐν συμβάν ἔχη δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα, δηλ. σύγκειται ἐκ δύο ἢ περισσότερων ἀπλῶν συμβάντων, τότε καλεῖται **πολλάκις**, πρὸς διάκρισιν, **ὀλικὸν συμβάν**.

Κατωτέρω διὰ τοῦ ὅρου συμβάν θὰ ἐννοῶμεν τὸ ὀλικὸν συμβάν.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἐν συμβάν A πραγματοποιοῦνται (ἢ ἄλλως ἐμφανίζεται) εἰς ἓνα πείραμα τύχης τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πειράματος δίδει ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἓν στοιχεῖον τοῦ ὑποσυνόλου A .

Συγκεκριμένως: Ἐὰν $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ εἶναι ὅλα τὰ ἀπλᾶ συμβάντα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἓνα πείραμα τύχης καὶ ἀπὸ τὰ n αὐτὰ ἀπλᾶ συμβάντα θεωρήσωμεν k ὠρισμένα, ἔστω τὰ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ($k \leq n$), τότε τὸ ὑποσύνολον $A \equiv \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \}$ τοῦ δειγματικοῦ χῶρου $\Omega \equiv \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \}$ ἀντιπροσωπεύει ἐν συμβάν, τὸ ὁποῖον ἔγκειται εἰς τὴν ἐμφάνισιν εἴτε τοῦ θ_1 , εἴτε τοῦ $\theta_2, \dots$, εἴτε τοῦ θ_k καὶ **μόνον** αὐτῶν.

Ἐπειδὴ $\{ \theta_1 \} \cup \{ \theta_2 \} \cup \dots \cup \{ \theta_k \} \equiv \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \}$ λέγομεν ὅτι τὸ συμβάν A εἶναι **ἔνωσις ἀπλῶν συμβάντων** ἢ ἄλλως τὸ A «*ἀναλύεται*» εἰς k ἀπλᾶ συμβάντα. Τὸ A πραγματοποιεῖται κάθε φοράν ποῦ παρουσιάζεται ἐν τῶν ἀπλῶν συμβάντων $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ καὶ ἀντιστρόφως, πραγματοποιοῦμένου τοῦ A πραγματοποιοῦνται ἀναγκαστικῶς ἐν τῶν ἀπλῶν συμβάντων $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Τὰ ἀπλᾶ συμβάντα $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ($k \leq n$) λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς «**ἐννοικὰς περιπτώσεις**» τοῦ συμβάντος A , ἐνῶ τὰ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, δηλ. τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χῶρου Ω λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς «**δυνατὰς περιπτώσεις**» τοῦ πειράματος τύχης.

Τέλος, ἐπειδὴ ἐξ ὀρισμοῦ εἶναι: $\Omega \subseteq \Omega$ καὶ $\emptyset \subseteq \Omega$ ἔπεται ὅτι ὁ δειγματικὸς χῶρος Ω καὶ τὸ κενὸν σύνολον εἶναι συμβάντα.

Τὸ συμβάν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν δειγματικὸν χῶρον λέγομεν ὅτι εἶναι «**βέβαιον συμβάν**» ἢ «**βέβαιον γεγονός**», ἐνῶ τὸ συμβάν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ

κενόν σύνολον, λέγομεν ὅτι εἶναι «ἀδύνατον ἐνδεχόμενον» ἢ «κενόν συμβάν» καὶ συμβολίζεται μὲ $\emptyset$.

Παραδείγματα :

1). Ἐκτελούμεν τὸ πείραμα διπλῆς ρίψεως ἑνὸς κέρματος καὶ ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὰς ἐνδείξεις του. Ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χώρος θὰ εἶναι τὸ σύνολον :

$\Omega = \{ (K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma) \}$ ἢ ἀπλούστερον $\Omega = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \}$, ὅπου K (= κορῶνα) καὶ Γ (= γράμματα).

Τὸ ὑποσύνολον $A = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K \}$ ὀρίζει τὸ συμβάν :

A : «Τὸ νόμισμα εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τοῦλάχιστον μίαν φορὰν κορῶνα».

Ἐξ ἄλλου τὸ ὑποσύνολον $B = \{ KK, \Gamma\Gamma \}$ ὀρίζει τὸ συμβάν.

B : «Τὸ νόμισμα καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τὴν αὐτὴν ἐνδειξιν».

2ον. Ἐστω ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 1 ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐμφανισθέντων K (καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις). Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι 0, 1, 2.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τώρα νέον δειγματικὸν χώρον : $\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$.

Τὸ ὑποσύνολον $A = \{ 1, 2 \}$ ὀρίζει τὸ συμβάν :

A : «Ἐμφάνισις τοῦλάχιστον μιᾶς K ».

Ἀξιόλογος παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων γίνεται καταφανὲς ὅτι : εἰς ἕνα πείραμα τύχης δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ τῆς μελέτης μας, πλείονας τοῦ ἐνὸς δειγματικοῦ χώρου, ὀρίζοντες ἐκάστοτε διαφορετικὰ ἀπλᾶ συμβάντα. Χαρακτηριστικὸν εἶναι ὁμως ὅτι : τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι τὰ μονοσύνολα τοῦ δειγματικοῦ χώρου.

3ον. Εἰς ἕν κυτίον ἔχομεν τέσσαρα σφαιρίδια : Κυανοῦν, λευκόν, ἐρυθρόν καὶ πράσινον. Ἐχομεν κατὰ συνέπειαν τὰ ἐξῆς 4 ἀπλᾶ συμβάντα :

θ_k : «Κυανοῦν σφαιρίδιον»

θ_λ : «Λευκόν σφαιρίδιον»

θ_ϵ : «Ἐρυθρόν σφαιρίδιον»

θ_π : «Πράσινον σφαιρίδιον».

Ἐν προκειμένῳ ὁ δειγματικὸς χώρος εἶναι : $\Omega \equiv \{ \theta_k, \theta_\lambda, \theta_\epsilon, \theta_\pi \}$.

Τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ $E \equiv \{ \theta_k, \theta_\epsilon, \theta_\pi \}$ ὀρίζει τὸ συμβάν :

E : «Ἐξάγεται ἐγχρωμον σφαιρίδιον».

Τὸ E πραγματοποιεῖται, μόνον ὅταν ἐν οἷονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων τοῦ $\theta_k, \theta_\epsilon, \theta_\pi$ πραγματοποιηθῇ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τις ἀναγγεῖλῃ ὅτι ἐξήχθη ἐγχρωμον σφαιρίδιον, συνάγομεν ὅτι κάποιον ἐκ τῶν τριῶν ἀπλῶν συμβάντων $\theta_k, \theta_\epsilon, \theta_\pi$ ἔχει πραγματοποιηθῇ.

§ 257. Θεμελιώδεις ὁρισμοὶ καὶ πράξεις μεταξὺ συμβάντων.

α'). Δύο συμβάντα θὰ λέγωνται ξένα πρὸς ἄλληλα ἢ ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα, ἄλλως ἀσυμβίβαστα τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς ἀποκλείῃ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Κατόπιν τούτου τὰ ξένα συμβάντα ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑποσύνολα τοῦ Ω μὴ ἔχοντα κοινὰ ἀπλᾶ συμβάντα.

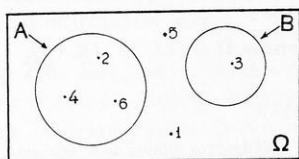
Προφανῶς δύο ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι πάντοτε ξένα μεταξὺ των.

Παράδειγμα. Τὰ συμβάντα :

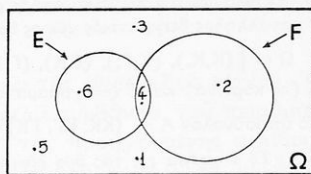
A : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμόν»

B : «Ο κύβος δεικνύει 3»

εἶναι ξένα πρὸς ἀλλήλα, διότι τὸ ἓν ἀποκλείει τὸ ἄλλο.



Σχ. 16



Σχ. 17

Τούναντιόν τὰ συμβάντα :

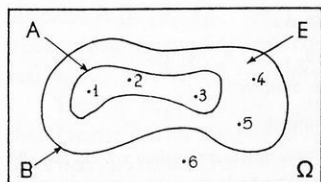
E : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον > 2 ».

F : «Ο κύβος δεικνύει ἄρτιον < 5 ».

δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των.

Παρατήρησις : Εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ξένων συμβάντων ἢ μὴ πραγματοποιήσις τοῦ ἑνὸς δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Οὕτως, εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἐὰν ὁ κύβος δὲν φέρῃ ἄρτιον ἀριθμόν, δὲν ἔπεται ἀναγκαίως ὅτι οὗτος θὰ φέρῃ 3, καθόσον δύναται νὰ φέρῃ τὸν ἀριθμὸν 5 ἢ τὸν 1.

β'). Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο μὴ ξένα συμβάντα ἑνὸς πειράματος τύχης, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ A περιέχεται εἰς τὸ B (ἢ ὅτι τὸ B περιέχει τὸ A) ἄλλως τὸ A συνεπάγεται τὸ B καὶ θὰ γράφωμεν $A \subseteq B$ (ἢ $B \supseteq A$) τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιηθῇ τοῦ A πραγματοποίησις καὶ τὸ B. Ἐὰν $A \subset B$, τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ B δὲν συνεπάγεται ὑποχρεωτικῶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A. Ἡ πραγματοποίησις τοῦ B χωρὶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A ἀποτελεῖ τὸ συμβάν $B - A$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **διαφορὰ** τῶν συμβάντων B καὶ A.



Σχ. 18

Παράδειγμα. Θεωρήσωμεν τὰ συμβάντα :

A : «Ο κύβος δεικνύει ἀριθμὸν ≤ 3 ».

B : «Ο κύβος δεικνύει ἀριθμὸν ≤ 5 ».

Προφανῶς $A \subset B$. Ἡ διαφορὰ $B - A$ παριστᾷ τὸ συμβάν :

E : «Ο κύβος δεικνύει 4 ἢ 5».

γ'). **Ἐνωσις συμβάντων.** Καλεῖται ἔνωσις συμβάντων $A_1, A_2, \dots, A_k$, ὑπαγομένων εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἓν νέον συμβάν A, τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιηθῇ **τοῦλάχιστον** ἓν τῶν $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Γράφομεν τότε :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \equiv \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Ἐὰν τὰ θεωρηθέντα συμβάντα $A_1, A_2, \dots, A_k$ εἶναι ξένα μεταξύ των ἀνά

δύο, τότε το A λέγεται «**ἄθροισμα**» αὐτῶν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ γράφωμεν :

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \sum_{i=1}^k A_i .$$

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ ἐμφάνισις (πραγματοποιήσις) τοῦ A συνεπάγεται τὴν ἐμφάνισιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐκ τῶν $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Παράδειγματα :

1ον. Τὸ συμβάν A : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν*» εἶναι ἑνωσις τῶν συμβάντων :

A_1 : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν < 5*».

A_2 : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν > 3*».

2ον. Τὸ συμβάν : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 3*» εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀπλῶν συμβάντων : «*Ὁ κύβος δεικνύει 4*», «*Ὁ κύβος δεικνύει 5*», «*Ὁ κύβος δεικνύει 6*».

δ'). Τομὴ ἢ γινόμενον συμβάντων. Καλεῖται τομὴ συμβάντων $A_1, A_2, \dots, A_k$ ὑπαγομένων εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἔν νεον συμβάν A , τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιοῦνται ὅλα συγχρόνως τὰ συμβάντα $A_1, A_2, \dots, A_k$. Γράφομεν δὲ τότε :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^k A_i .$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἔάν δύο συμβάντα A_1, A_2 εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Παράδειγμα. Τὸ συμβάν :

A : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει 4 ἢ 5*»

εἶναι τομὴ τῶν συμβάντων :

A_1 : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν ≤ 5* »

A_2 : «*Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν > 3*».

ε'). Συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος. Δύο συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα, ἔχοντα ἄθροισμα τὸ «*βέβαιον γεγονός*» καλοῦνται συμπληρωματικά ἢ ἀντίθετα συμβάντα.

Τὸ συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος A παρίσταται μὲ A' (ἢ A^c).

Ὡς συμπληρωματικὸν τοῦ «*βεβαίου συμβάντος*» λαμβάνεται τὸ «*κενὸν συμβάν*» καὶ ἀντιστρόφως. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἔάν δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά, τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς ἀποκλείει τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου καὶ ἡ μὴ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς συνεπάγεται ἀναγκαίως τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Συνεπῶς πᾶσα εὐνοϊκὴ περίπτωσις διὰ τὸ ἓν εἶναι «*δυσμενῆς*» (μὴ εὐνοϊκὴ) διὰ τὸ ἕτερον καὶ πᾶσα δυσμενῆς περίπτωσις διὰ τὸ ἓν εἶναι εὐνοϊκὴ διὰ τὸ ἕτερον.

Κατὰ ταῦτα τὸ A' σημαίνει ὅτι τὸ συμβάν A δὲν συμβαίνει (δὲν πραγματοποιεῖται).

Παράδειγματα :

1ον. Τὰ συμβάντα :

A : «*Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμὸν*»

A' : «*Ὁ κύβος δεικνύει περιττὸν ἀριθμὸν*»

εἶναι συμπληρωματικά.

2ον. Εἰς τὸ γνωστὸν πείραμα τῆς ρίψεως δύο νομισμάτων, τὸ συμβάν $A = \{KK\}$, ἴτοι $A: \text{«Τὰ δύο νομίσματα δείκνουν κορώνα»}$ εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ συμβάντος $A' \equiv \{KG, GK, GG\}$, ἴτοι τοῦ συμβάντος:

$A': \text{«Παρουσιάζονται τοὐλάχιστον μία φορὰ γράμματα»}$, ἢ ἄλλως

$A': \text{«Δὲν παρουσιάζεται κορώνα καὶ τὰς δύο ρίψεις»}$.

§ 258. Στοιχειώδης ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος.— Ὁ ὁρισμὸς αὐτός, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ εὐρίσκεται εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια, εἶναι ὁ εἰσαχθεὶς ὑπὸ τῶν θεμελιωτῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καὶ διατυπωθεὶς σαφῶς ὑπὸ τοῦ Laplace ὡς ἑξῆς:

Πιθανότης ἐνὸς συμβάντος καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν δι' αὐτὸ περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί.

*Ἡτοι, ἐὰν A εἶναι ἐν συμβάν ὑπαγόμενον εἰς ἐν πείραμα τύχης καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ $P(A)$ *) τὴν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ A , θὰ ἔχωμεν:

$$P(A) = \frac{\text{Ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ } A}{\text{Ἀριθμὸς ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος}} \quad (1)$$

Εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὑπονοεῖται ἡ **ὑπόθεσις τοῦ ἰσαπιθάνου** τῶν περιπτώσεων ἢ ἀπλῶν συμβάντων.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ ἔπονται ἀμέσως αἱ προτάσεις:

α'). Ἡ πιθανότης συμβάντος A εἶναι ἀριθμὸς μὴ ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς τὴν μονάδα, ἴτοι:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

β'). Ἡ πιθανότης τοῦ βεβαίου συμβάντος ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἴτοι:

$$P(\Omega) = 1$$

γ'). Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων ἐνὸς πειράματος τύχης εἶναι n , τότε ἡ πιθανότης ἐκάστου ἀπλοῦ συμβάντος εἶναι $\frac{1}{n}$.

Πράγματι, ἐὰν $\Omega \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ πειράματος, τότε εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις διὰ τὸ ἀπλοῦν συμβάν $\{\theta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ εἶναι μόνον μία, ἐπεὶδὴ τὸ $\{\theta_i\}$ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ. Ἐξ ἄλλου τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ (βλ. § 256), ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀπλῶν συμβάντων, δηλ. n . Ἀρα ὁ τύπος (1) δίδει:

$$P(\{\theta_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

* Τὸ P εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Probability (ἀγγλ.) — Probabilité (γαλ.) = Πιθανότης.

δ'). Τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικῶν συμβάντων ἰσοῦται μὲ 1.

Πράγματι, ἐὰν k εἶναι τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ A καὶ v τῶν δυνατῶν, τότε τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ A' θὰ εἶναι $v - k$, διότι (§ 257) πᾶσα εὐνοϊκὴ περίπτωσις διὰ τὸ A εἶναι δυσμενὴς διὰ τὸ A' καὶ πᾶσα δυσμενὴς διὰ τὸ A εἶναι εὐνοϊκὴ διὰ τὸ A' . Ἐὰν συνεπῶς $P(A)$ καὶ $P(A')$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ πιθανότητες τῶν συμβάντων A καὶ A' θὰ ἔχωμεν :

$$P(A) = \frac{k}{v} \quad \text{καὶ} \quad P(A') = \frac{v-k}{v}.$$

Ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν :

$$P(A) + P(A') = 1$$

Ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ συμπληρωματικοῦ συμβάντος εἶναι :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

§ 259. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων.

1η : Εἰς τὸ παιγνίδιον «**κορώνα — γράμματα**», τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι δύο, αἱ δύο ὀψεις : «**κορώνα**», «**γράμματα**», τὰς ὁποίας ἂς συμβολίσωμεν, ὡς καὶ πρότερον K , Γ ἀντιστοίχως. Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (γ') αἱ πιθανότητες αὐτῶν εἶναι : $P(K) = \frac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Αὐτὸ δὲν σημαίνει βεβαίως ὅτι, ἐὰν ρίψωμεν δύο φορές κατ' ἐπανάληψιν τὸ νόμισμα, τὴν μίαν φοράν θὰ ἐμφανίσῃ «**κορώνα**» καὶ τὴν ἄλλην «**γράμματα**». Οὔτε ὅτι εἰς 10 ρίψεις θὰ ἔχωμεν 5 «**κορώνας**» καὶ 5 «**γράμματα**». Ἡ στοιχειώδης πιθανότης τὴν ὁποίαν ὑπέλογίσασμεν ἰσχύει δι' ἐν πλῆθος ρίψεων, δηλαδὴ δι' ἓνα πολὺν μεγάλον ἀριθμὸν ρίψεων.

$$\text{Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :} \quad P(K) + P(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Τοῦτο προφανῶς τὸ ἀνεμείναμεν, διότι τὰ δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά.

2α : Εἰς τὸ παιγνίδιον **τῆς ρίψεως ἑνὸς κύβου**, τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι ἐν ὄλῳ 6, αἱ ἐξ ὀψεως (ἑδραι) τοῦ κύβου. Ἐὰν στοιχηματίσωμεν διὰ τὴν ἐμφάνισιν μιᾶς συγκεκριμένης ἐνδείξεως, ἡ στοιχειώδης πιθανότης εἶναι $\frac{1}{6}$, ἀφοῦ τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 6, ἡ δὲ εὐνοϊκὴ περίπτωσις εἶναι μόνον μία. Ὡστε :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6},$$

ὅπου $P(x)$ = πιθανότης τοῦ ἀπλοῦ συμβάντος : «Ὁ κύβος παρουσιάζει τὸν ἀριθμὸν x ».

Ἐὰν ἀντὶ ἐνὸς χρησιμοποιοῦμεν n ὁμοίους κύβους, τὰ συμβάντα θὰ εἶναι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 ἐνδείξεων ἀνά v . Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων αὐτῶν εἶναι :

$$6^v$$

Ἡ στοιχειώδης πιθανότης μιᾶς συγκεκριμένης διατάξεως, δηλ. ἐνὸς ὠρισμένου συμβάντος, θὰ εἶναι :

$$\frac{1}{6^v}$$

Ούτως, εις τὴν περίπτωσιν ρίψεως δύο κύβων (§ 255), ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «ὁ λευκὸς κύβος νὰ φέρῃ 2 καὶ ὁ ἐρυθρὸς 3» εἶναι $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, ἥτοι :

$$P((2,3)) = \frac{1}{36}, \text{ ἢ ἀπλούστερον } P(2,3) = \frac{1}{36}.$$

3η : Εἰς τὰ παιγνίδια τῶν **παιγνιοχάρτων** χρησιμοποιοῦνται ἄλλοτε $4 \times 13 = 52$ παιγνιοχάρτα καὶ ἄλλοτε $4 \times 8 = 32$ (πρέφα). Εἰς τὰ παιγνίδια τῶν 52 παιγνιοχάρτων, ὑπάρχουν δι' ἑκάστον τῶν τεσσάρων «*χρωμάτων*» («*σπαθί*», «*χαρρό*», «*κούπα*», «*μπαστούνι*»), ἀνὰ 10 ἀριθμοὶ (1–10) καὶ 3 φιγοῦραι.

Ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ τις ἐκ μιᾶς δέσμης, καλῶς ἀναμεμιγμένης ἐν ὠρισμένον παιγνιόχαρτον εἶναι κατὰ ταῦτα $\frac{1}{52}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἐν ὠρισμένον χρῶμα εἶναι $\frac{1}{4}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ φιγοῦραν (γενικῶς) εἶναι $\frac{12}{52}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἓνα ὠρισμένον ἀριθμόν, π.χ. ἄσπον, ἀνεξαρτήτου χρώματος εἶναι $\frac{4}{52}$ (ὑπάρχουν 4 ἄσσοι, ἥτοι 4 εὐνοϊκαί περιπτώσεις καὶ 52 παιγνιόχарта, ἥτοι 52 δυνατὰ περιπτώσεις).

4η : Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγονται συγχρόνως δύο παιγνιόχарта. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ τὰ δύο ἄσσοι ;

Λύσις : Ἐστω A τὸ συμβάν : «*Ἀμφότερα νὰ εἶναι ἄσσοι*».

Αἱ δυνατὰ περιπτώσεις εἶναι $\left(\frac{52}{2} \right)$. Αἱ εὐνοϊκαί εἶναι τόσαι, ὅσοι καὶ οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοὺς 4 ἄσσους τοὺς 2, δηλ. $\left(\frac{4}{2} \right)$.

$$\text{Ἄρα : } P(A) = \frac{\left(\frac{4}{2} \right)}{\left(\frac{52}{2} \right)} = \left(\frac{4}{2} \right) : \left(\frac{52}{2} \right) = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} : \frac{52 \cdot 51}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{1}{221} \simeq 45\text{‰}.$$

5η : Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ παρουσιασθῇ τὸ 3, ὅταν ρίψωμεν ἓνα κύβον εἰς τὸν ἀέρα;

Λύσις : Τὸ συμβάν «*νὰ φέρῃ ὁ κύβος 3*» εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ συμβάντος «*νὰ μὴ φέρῃ ὁ κύβος 3*». Ἡ πιθανότης τοῦ πρώτου συμβάντος εἶναι $\frac{1}{6}$, ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ δευτέρου εἶναι :

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

583. Ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ συμβάν A : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι ≤ 7 » καὶ τὸ συμβάν B : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Ζητοῦνται :

α) Νὰ σχηματισθῇ ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος καὶ νὰ καθορισθοῦν ἐν αὐτῷ τὰ A καὶ B.

β) Νὰ ὀρισθοῦν τὰ $A', B', A \cup B, A \cap B, A' \cup B', A' \cap B', (A \cup B') \cap A'$.

γ) Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἐδρῶν εἶναι ἀκριβῶς 7;».

584. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστου τῶν κάτωθι συμβάντων :

α) Νὰ φέρωμεν 6,6.

β) Ὁ εἰς κύβος νὰ φέρῃ 3 καὶ ὁ ἄλλος 5.

γ) Οἱ δύο κύβοι νὰ φέρουν διαδοχικοὺς ἀριθμούς.

δ) Οἱ κύβοι νὰ φέρουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 9.

585. Ρίπτει τις δύο κύβους και φέρει άθροισμα 9. Ποία ή πιθανότης ίνα ό συμπαίκτης του φέρη μεγαλύτερον άθροισμα ;

586. Είς έν δοχείον υπάρχουν 5 σφαίραι λευκαί, 7 κυαναι και 4 έρυθραι. Τό πείραμα συνίσταται εις την τυχαίαν λήψιν 3 σφαιρών. Ποία ή πιθανότης να είναι και αι τρεις σφαίραι λευκαί :

587. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων έξάγομεν τυχαίως 5 χαρτιά. Ζητούνται :

α) Ποία ή πιθανότης να έξαχθούν μόνον κόκκινα; (Τά 26 έχουν χρώμα κόκκινον και τα λοιπά 26 μαύρο).

β) Ποία ή πιθανότης να έξαχθούν 3 μαύρα και 2 κόκκινα;

588. Είς μίαν τάξιν 43 μαθητών είναι 24 αγόρια και 19 κορίτσια. Άν λάβωμεν τυχαίως πέντε κλήρους τής τάξεως : α) Ποία ή πιθανότης να κληθούν μόνον αγόρια. β) Ποία ή πιθανότης να κληθούν 3 αγόρια και 2 κορίτσια;

589. Ρίπτομεν τρεις κύβους, ποία ή πιθανότης να έμφανισθί εις τουλάχιστον άσσος;

590. Ρίπτομεν δύο κύβους εις τόν άέρα. Ποία ή πιθανότης έκάστου των κάτωθι συμβάντων :

α) Τό άθροισμα των ένδείξεων είναι μικρότερον του 5.

β) Τό άθροισμα των ένδείξεων είναι ίσον με 8.

γ) » » » » είναι μεγαλύτερον του 9.

δ) » » » » είναι διάφορον του 4.

591. Υποθέσωμεν ότι σκοπεύομεν να κάμωμεν μίαν μελέτην επί των οικογενειών, αι όποιαι έχουν τρία παιδιά και ότι θέλομεν να καταγράψωμεν τό φύλον έκάστου παιδιού κατά σειράν γεννήσεως. Γράψατε τόν κατάλληλον δειγματικόν χώρον. Υποθέτοντες ακόλουθως ότι κάθε στοιχείον του δειγματικού χώρου έχει την αύτην πιθανότητα, να εύρεθί :

α) 'Η πιθανότης ίνα μία οικογένεια με τρία παιδιά τα δύο πρώτα είναι αγόρια και τό τρίτο κορίτσι.

β) 'Η πιθανότης ίνα έχη ένα τουλάχιστον αγόρι.

γ) 'Η πιθανότης ίνα έχη μόνον ένα κορίτσι.

δ) 'Η πιθανότης ίνα έχη δύο κορίτσια και ένα αγόρι.

592. Έχομεν μίαν δέσμη παιγνιοχάρτων των 52 φύλλων. Ζητείται ή πιθανότης των εξής συμβάντων :

α) Λαμβάνοντες τυχαίως ένα χαρτί, τουτό να είναι άσσος μπαστούνι.

β) Λαμβάνοντες τυχαίως ένα χαρτί, τουτό να είναι άσσος.

γ) Λαμβάνοντες 6 χαρτιά συγχρόνως, να περιέχωνται εις αυτά οι 4 άσσοι.

593. Ποία ή πιθανότης ρίπτοντες τρεις κύβους, να φέρωμεν άθροισμα μεγαλύτερον του 15;

594. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν κατά σειράν έκ των άνω τα παιγνιόχαρτα, έως ότου εύρωμεν διά πρώτην φοράν άσσον. Ποία ή πιθανότης ίνα τό τέταρτον χαρτί είναι άσσος;

II. ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΠΕΛΑΣΙΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

§ 260. Ό όρισμός τής πιθανότητος, τόν όποιον διετυπώσαμεν εις την § 258 παρουσιάζει δύο βασικά μειονεκτήματα :

1ον) Δέν είναι εύχερης, άν μη δυνατός, ό άκριβής καθορισμός άφ' ενός των δυνατών και άφ' έτέρου των εύνοϊκων περιπτώσεων, ιδίως όταν ό δειγματικός χώρος δέν είναι πεπερασμένος.

2ον) 'Η περικοπή αύτου «... έφ' όσον όλαι αι περιπτώσεις είναι εξ ίσου δυναται» είναι ταυτόσημος με την «έφ' όσον όλαι αι περιπτώσεις είναι εξ ίσου πιθαναι», τοιουτοτρόπως όμως ή πιθανότης όρίζεται έκ νέου διά τής πιθανότητος, διαπράττεται δηλαδή φαύλος κύκλος.

Ἡ τοιαύτη θεώρησις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, μολονότι χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἐφαρμογὴν, παρουσιάζει δυσχερείας ἀπὸ λογικῆς πλευρᾶς, δι' ὃ καὶ ἡ νεωτέρα Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀναπτύσσεται κατὰ τρόπον τυπικῶς ἀξιωματικόν, διὰ τοῦ καθορισμοῦ ἐνὸς πλήρους συστήματος προτάσεων (ἀξιωμάτων) τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐξάγονται, διὰ τῆς παραγωγικῆς πλέον ὁδοῦ ὅλαι αἱ ἐννοιαὶ καὶ προτάσεις τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Κατόπιν τούτων, θὰ ἀρχίσωμεν τὴν συστηματικωτέραν ἐξέτασιν τῶν πιθανοτήτων μὲ τὴν ἤδη γνωστὴν ἐννοίαν τοῦ δειγματικοῦ χώρου ἐνὸς πειράματος.

§ 261. Πιθανότης ἀπλῶν συμβάντων.— Ἐστω ὁ δειγματικὸς χώρος $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$. Εἰς ἕκαστον ἀπλοῦν συμβάν (θ_k) , $k = 1, 2, \dots, n$ ἐκχωροῦμεν ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν $P(\{\theta_k\})$, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **πιθανότητα** τοῦ συμβάντος $\{\theta_k\}$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία ἐκχώρησις πιθανοτήτων πρὸς τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω , δηλαδὴ πρὸς τὰ $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \dots, \{\theta_n\}$ εἶναι δεκτὴ, ἐὰν ἱκανοποιῇ τὰς δύο συνθήκας :

P_1 : Ἡ πιθανότης ἐκάστου ἀπλοῦ συμβάντος εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, ἥτοι :

$$P(\{\theta_k\}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

P_2 : Τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐκχωρουμένων εἰς ὅλα τὰ ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἥτοι :

$$P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_n\}) = 1,$$

συντόμως :

$$\sum_{k=1}^n P(\{\theta_k\}) = 1.$$

Ἐνα σύστημα τοιούτων ἀριθμῶν $P(\{\theta_k\})$ πληροῦντων τὰς P_1 καὶ P_2 εἶναι τό :

$$P(\{\theta_1\}) = P(\{\theta_2\}) = P(\{\theta_3\}) = \dots = P(\{\theta_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ ἀπλᾶ συμβάντα εἶναι **ἰσοπίθανα**.

§ 262. Πιθανότης συμβάντος (ὁλικοῦ).— Κάθε συμβάν $A \neq \emptyset$ εἶναι, ὡς ἐλέχθη, ἔνωσις, ἀκριβέστερον ἄθροισμα ἀπλῶν συμβάντων, ἥτοι :

$$A = \{\theta_1\} + \{\theta_2\} + \dots + \{\theta_k\}, \quad (k \leq n).$$

Ὅρίζομεν ὡς **πιθανότητα** τοῦ A , $A \neq \emptyset$, τὸν ἀριθμὸν $P(A)$, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \dots, \{\theta_k\}$, ἥτοι :

$$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\})$$

Ἐὰν A εἶναι τὸ κενὸν συμβάν, ἥτοι ἂν $A = \emptyset$, τότε δεχόμεθα ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι :

$$P(\emptyset) = 0$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπονται τώρα αἱ κάτωθι προτάσεις :

α'). Ἡ πιθανότης τοῦ «βεβαίου συμβάντος» εἶναι μονάς, ἤτοι $P(\Omega) = 1$.

Πράγματι, ἔχομεν :

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^v P(\{\theta_i\}) = (\text{λόγω τῆς συνθήκης } P_2, \S 261) = 1.$$

β'). Ἐὰν A καὶ B εἶναι συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε :

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Πράγματι, ἐὰν $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$, $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$ καὶ $A \cap B = \emptyset$, τότε :

$$A+B = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}.$$

Ἐχομεν ὁμῶς :

$$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\})$$

$$P(B) = P(\{\varepsilon_1\}) + P(\{\varepsilon_2\}) + \dots + P(\{\varepsilon_p\}) = \sum_{j=1}^p P(\{\varepsilon_j\})$$

$$P(A+B) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \dots + P(\{\theta_k\}) + P(\{\varepsilon_1\}) + P(\{\varepsilon_2\}) + \dots + P(\{\varepsilon_p\}) = \sum_{i=1}^k P(\{\theta_i\}) + \sum_{j=1}^p P(\{\varepsilon_j\}) = P(A) + P(B).$$

Γενικώτερον ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις :

γ'). Ἐὰν $A_1, A_2, \dots, A_v$ εἶναι συμβάντα ἀνὰ δύο ξένα πρὸς ἄλληλα καὶ εἶναι :

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_v,$$

$$\text{τότε : } P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_v).$$

Ὑπόθεσις : Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $v = 2$. Ὑποθέσατε ὅτι ἰσχύει διὰ $v = k$ καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ $v = k + 1$.

Σημείωσις : Ἡ ἀνωτέρω πρότασις καλεῖται : Ἀθροιστικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων, διατυπῶνται δὲ συντόμως, οὕτως :

$$P\left(\sum_{i=1}^v A_i\right) = \sum_{i=1}^v P(A_i)$$

δ'). Δι' οἰονδήποτε συμβάν A , ἰσχύει : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Πράγματι, ἐπειδὴ $P(A) \geq 0$ διὰ κάθε συμβάν A , ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $P(A) \leq 1$. Τοῦτο ὁμῶς ἰσχύει, διότι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὸ συμπληρωματικὸν A' τοῦ A , ὅτε $A \cup A' = \Omega$ καὶ $A \cap A' = \emptyset$, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῶν προτάσεων β' καὶ α', ὅτι :

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1.$$

Ὅθεν : $P(A) = 1 - P(A') \leq 1$, διότι, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, $P(A') \geq 0$.

ε'). Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο οἰαδήποτε συμβάντα, τότε :

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ἡ ὁπερ τὸ αὐτό :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Πράγματι, επειδή $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ και $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ θα έχωμεν, δυνάμει της ανωτέρω προτάσεως β', ότι :

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B),$$

έξ ού :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ἐφαρμογὰι

1η : Ἐάν τὰ ν ἀπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου $\Omega = \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \}$ εἶναι ἰσοπίθανα, τότε :

$$P\left(\sum_{i=1}^n \{ \theta_i \} \right) = \sum_{i=1}^n P(\{ \theta_i \}) = n \cdot P(\{ \theta_i \}). \quad (1)$$

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^n \{ \theta_i \} \right) = 1. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι : $P(\{ \theta_i \}) = \frac{1}{n}, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Δηλαδή ἐπιανευρίσκομεν τὴν πρότασιν (γ') τῆς § 258.

2α : Ἐάν τὰ k ἀπλᾶ συμβάντα ἐνὸς γεγενοῦτος $A = \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \}$ εἶναι ἰσοπίθανα πιθανότητος $\frac{1}{n}$, τότε :

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^k \{ \theta_i \} \right) = \sum_{i=1}^k P(\{ \theta_i \}) = k \cdot P(\{ \theta_i \}) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{ἀριθμὸς εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{ἀριθμὸς δυνατῶν περιπτώσεων}}.$$

Δηλαδή τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ ὁρισμῶν εὐρίσκομεν ὡς συνέπειαν τὸν στοιχειώδη ὁρισμὸν τῆς πιθανότητος κατὰ Laplace (βλ. § 258).

3η : Ἐάν E καὶ E' εἶναι δύο συμπληρωματικὰ συμβάντα ἐνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω καὶ εἶναι $P(E) = p$, τότε $P(E') = 1 - p$.

Ἀπόδειξις. Ἀφ' οὗ $E + E' = \Omega$, τότε, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν β', θα έχωμεν :

$$P(E + E') = P(E) + P(E') = P(\Omega), \quad \text{ἀλλὰ} \quad P(\Omega) = 1,$$

$$\text{ἄρα} \quad p + P(E') = 1,$$

$$\text{έξ οὗ} : \quad P(E') = 1 - p.$$

4η : Ἐάν A καὶ B συμβάντα καὶ $A \subset B$, τότε $P(A) < P(B)$.

Ἀπόδειξις : Ἐστω Δ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς B , ἥτοι $\Delta = C_B A \equiv B - A$.

Προφανῶς ἔχομεν :

$$A \cup \Delta = B \quad \text{καὶ} \quad A \cap \Delta = \emptyset.$$

Ὅποτε :

$$P(A \cup \Delta) = P(A + \Delta) = P(A) + P(\Delta) = P(B).$$

$$\text{Ἀρα} : \quad P(A) < P(B), \quad \text{καθόσον} \quad P(\Delta) > 0.$$

5η : Ποία ἡ πιθανότης ἵνα εἰς κύβος ριπτόμενος εἰς τὸν ἀέρα φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν;

Λύσις : Τὸ συμβάν A : «Ὁ κύβος νὰ φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν» εἶναι ἀθροισμα τῶν ἐξῆς τριῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων συμβάντων :

$$A_1 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 2»}.$$

$$A_2 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 4»}.$$

$$A_3 : \quad \text{«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 6»}.$$

$$\text{ἥτοι} : \quad A = A_1 + A_2 + A_3.$$

$$\text{Ἀρα} : \quad P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

6η: Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ή πιθανότης ώστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων νὰ εἶναι 3 ἢ 7;

Λύσις: Ὡς γνωστὸν (§ 255) τὰ ἀπλὰ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη: (1,1), (1,2), (2,1), ..., (6,6) εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκχωροῦμεν πιθανότητα $\frac{1}{36}$.

Τὸ συμβάν A : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3 ἢ 7», εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐξῆς δύο ξένων ἀλλήλων συμβάντων:

A_1 : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδ. ἱξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3».

A_2 : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 7».

Τὸ συμβάν A_1 εἶναι τὸ σύνολον $\{(1,2), (2,1)\}$, με $P(A_1) = \frac{2}{36}$.

Τὸ συμβάν A_2 εἶναι $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, με $P(A_2) = \frac{6}{36}$.

Ἄρα: $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

7η: Ἐστῶσαν A καὶ B δύο συμβάντα με $P(B) = \frac{1}{2}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $P(B \cap A')$.

Λύσις: Ἐχομεν, δυνάμει τῆς προτάσεως ε':

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

595. Ἐν δοχείον περιέχει 3 λευκά σφαιρίδια, 4 κινὰ καὶ 6 μαύρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν τυχαίαν λήψιν 2 σφαιριδίων ἐκ τῶν 13. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφοτέρω τοῦ ἰδίου χρώματος;

596. Ἐν κυτίον περιέχει λευκά καὶ μαύρα σφαιρίδια, ὃ δὲ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαύρων. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ληφθῇ ἐν λευκὸν σφαιρίδιον;

597. Ἐὰν ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ ἐν συμβάν εἶναι τριπλασία τῆς πιθανότητος νὰ μὴ ἐμφανισθῇ, ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ τοῦτο;

598. Ρίπτει τις δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης νὰ δείξουν ἀμφοτέροι τὴν ἰδίαν ὄψιν;

599. Εἰς μίαν γραπτὴν ἐξέτασιν εἰς τὸ μάθημα τῆς ἱστορίας δίδονται τρία ἱστορικὰ γεγονότα ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) καὶ τρεῖς χρονολογίαι (x_1, x_2, x_3), ζητεῖται δὲ ὅπως ἕκαστος μαθητῆς συσχετίσῃ τὰ τρία γεγονότα πρὸς τὰς τρεῖς χρονολογίας. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς μαθητῆς δὲν κατέχει τὸ θέμα καὶ κάμνει τυχαίαν συσχέτισιν, εἰς τρόπον ὥστε ὅλαι αἱ δυναταὶ συσχετίσεις νὰ εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί.

α) Σχηματίσατε τὸν δειγματικὸν ὥρον διὰ τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα.

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ ὑπάρχουν τρεῖς ὀρθαὶ συσχετίσεις εἰς τὴν ἀπάντησιν τοῦ μαθητοῦ.

γ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο ὀρθαὶ συσχετίσεις;

δ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ὅλαι αἱ συσχετίσεις ὀρθαί;

ε) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν περισσότεραι τῆς μῆς ὀρθαὶ συσχετίσεις;

στ) Ἡ πιθανότης νὰ περιέχῃ ἡ ἀπάντησις τρεῖς ὀρθὰς συσχετίσεις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πιθανότητος νὰ περιέχῃ μόνον δύο;

600. Ρίπτομεν τρεῖς κύβους συγχρόνως. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος: «Αἱ ἐνδείξεις τῶν τριῶν κύβων εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοί».

601. Δοχείον περιέχει 6 λευκάς, 8 ἐρυθράς καὶ 10 μαύρας σφαίρας, ὁμοίας ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Τὸ πείραμα ἔγκειται εἰς τὴν τυχαίαν ἐξαγωγήν δύο ἐκ τῶν 24 σφαιρῶν. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφοτέροι αἱ ἐξαγόμεναι σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ χρώματος;

602. Έκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως οκτώ χαρτιά.

α) Ποία ή πιθανότης νά είναι τοῦ αὐτοῦ χρώματος; (Υπάρχουν 26 «κόκκινα» καί 26 «μαῦρα»).

β) Ποία ή πιθανότης νά μήν εὑρίσκεται «ἄσσος» μεταξύ αὐτῶν;

γ) Ποία ή πιθανότης νά υπάρχουν δύο τουλάχιστον ἄσσοι;

§ 263. Πιθανόνητες ὑπὸ συνθήκην.— Ἐστῶσαν Α καὶ Β δύο συμβάντα τοῦ αὐτοῦ πειράματος τύχης καὶ ὅτι $P(A) > 0$. Τότε : Ἡ πιθανότης τοῦ Β ὑπὸ συνθήκην Α, ἢ ἄλλως ἡ ὑπὸ συνθήκην πιθανότης τοῦ Β δοθέντος ὅτι τὸ Α συνέβη ἢ ὅτι θά συμβῇ, συμβολιζομένη διὰ τοῦ $P(B|A)$, ὀρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

Ἡτοι : Πιθανότης τοῦ Β ὑπὸ συνθήκην Α καλεῖται ὁ λόγος τῆς πιθανότητος τοῦ Α καὶ Β πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ Α.

Παράδειγμα : Δοθέντος ὅτι εἰς μίαν οἰκογένειαν με δύο τέκνα τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι, ποία ή πιθανότης ἵνα ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια ;

Λύσεις : Ἐχομεν ἓν πρῶτοις τὸν δειγματικὸν χῶρον :

$$\Omega = \{ \alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha, \kappa\kappa \},$$

ὅπου «α» σημαίνει ἀγόρι καὶ «κ» κορίτσι.

Θεωροῦμεν τὰ συμβάντα :

Α : «Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἓν τουλάχιστον ἀγόρι», ἡτοι $A = \{ \alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha \}$.

Β : «Ἡ οἰκογένεια ἔχει καὶ τὰ δύο τέκνα ἀγόρια», ἡτοι $B = \{ \alpha\alpha \}$.

Τότε τὸ συμβάν $B|A$: «Ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια δοθέντος ὅτι τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι» ἔχει πιθανότητα :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P[\text{ἀκριβῶς δύο ἀγόρια}]}{P[\text{ἓν τουλάχιστον ἀγόρι}]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Σημειώσεις. Ἡ $P(B|A)$ ὀνομάζεται καὶ δεσμευμένη πιθανότης ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν $P(B)$, ἥτις καλεῖται καὶ ἀδέσμευτος ἢ ἄνευ συνθήκης πιθανότης.

Οὕτως, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ ἀδέσμευτος πιθανότης εἶναι : $P(B) = 1/4$.

§ 264. Πιθανότης τομῆς δύο συμβάντων (νόμος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων).— Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πιθανότητος τῆς τομῆς δύο συμβάντων Α καὶ Β δύναται νά γίνη διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τοῦ τύπου τῆς ὑπὸ συνθήκην πιθανότητος.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, (ὅπου $P(A) > 0$)

προκύπτει : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Ἐὰν δὲ καὶ $P(B) > 0$, τότε δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν γραμμάτων Α καὶ Β ἔχομεν :

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

*Αλλά $A \cap B = B \cap A$ και έπομένως :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (1)$$

*Ητοι: 'Η πιθανότητα πραγματοποίησεως συγχρόνως δύο συμβάντων ισούται με την πιθανότητα πραγματοποίησεως του ενός, επί την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου υπό την συνθήκη όμως ότι συνέβη το πρώτον.

Παράδειγμα: "Εν κυτίον περιέχει 15 λευκά και 10 πράσινα σφαιρίδια. Το πείραμα συνίσταται εις την εξαγωγήν δύο σφαιριδίων αλληλοδιαδόχως, χωρίς το εξαγόμενον σφαιρίδιον να επανατίθεται. Ποία ή πιθανότης να εξαχθῇ πρώτα λευκόν και κατόπιν πράσινον σφαιρίδιον;

Λύσις: 'Εάν Λ σημαίνη λευκόν σφαιρίδιον και Π πράσινον, θά έχωμεν :

$$P(\Lambda \cap \Pi) = P(\Lambda) \cdot P(\Pi|\Lambda).$$

$$\text{*Αλλά } P(\Lambda) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \text{ και } P(\Pi|\Lambda) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \text{ (διότι το εξαχθέν δεν επανατίθεται).}$$

$$\text{*Αρα: } P(\Lambda \cap \Pi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}.$$

§ 265. Συμβάντα ανεξάρτητα αλληλων.— "Εστωσαν δύο συμβάντα A και B , μη κενά, αναφερόμενα εις ένα πείραμα τύχης. Θά λέγωμεν ότι το συμβάν B είναι **στατιστικῶς ή στοχαστικῶς ανεξάρτητον**, συντόμως **ανεξάρτητον** του A τότε, και μόνον τότε, αν ισχύη ή σχέσις :

$$P(B|A) = P(B)$$

'Η σχέσις αὕτη έχει ὡς ἄμεσον συνέπειαν ἕνα σημαντικόν κανόνα πολλαπλασιασμοῦ πιθανοτήτων ανεξαρτήτων συμβάντων. 'Ο κανὼν οὗτος δίδεται διὰ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος :

§ 266. Θεώρημα.— "Εάν το συμβάν B είναι ανεξάρτητον του A , τότε ή πιθανότης τῆς τομῆς των ισούται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πιθανοτήτων των.

*Ητοι :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

***Απόδειξις:** Πράγματι, δυνάμει του ὁρισμοῦ τῶν ανεξαρτήτων συμβάντων και τῆς σχέσεως (1) τῆς § 264, ἔχομεν :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

Παρατήρησις. 'Εάν ἐναλλάξωμεν τοὺς ρόλους τῶν A και B τόσοις εις τὴν ὑπόθεσιν ὅσον και εις τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἔχομεν πάλιν τὴν (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι, αν ἕν ἐκ τῶν συμβάντων εἶναι ανεξάρτητον τοῦ ἄλλου, τότε ισχύει :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

"Οταν ισχύη ή σχέσις αὕτη λέγομεν ὅτι τὰ δύο συμβάντα εἶναι **ανεξάρτητα αλληλων**.

'Εάν δύο συμβάντα δὲν εἶναι ανεξάρτητα, θά λέγωμεν ὅτι εἶναι **ἐξηρημένα**.

Παράδειγμα: Ρίπτομεν εις τὸν ἀέρα ἓνα κύβον καὶ ἓν νόμισμα. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συνθέτου συμβάντος: «ὁ κύβος νὰ φέρῃ 5 ἢ 6 καὶ τὸ νόμισμα κορώνα»;

Λύσις: Ἐστω A τὸ συμβάν: «Ὁ κύβος φέρει 5 ἢ 6» καὶ B τὸ συμβάν: «Τὸ νόμισμα φέρει κορώνα (K)»

Ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ συνθέτου πειράματος εἶναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{K, \Gamma\} = \\ = \{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K), (1, \Gamma), (2, \Gamma), (3, \Gamma), (4, \Gamma), (5, \Gamma), (6, \Gamma)\}.$$

Εἶναι: $A = \{(5, K), (6, K), (5, \Gamma), (6, \Gamma)\}$

$$B = \{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K)\}$$

$$A \cap B = \{(5, K), (6, K)\}.$$

Ἐπίσης $P(A) = \frac{4}{12}, \quad P(B) = \frac{6}{12}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$

Ἀρα: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}.$

Τοῦτο τὸ ἀνεμείναμεν, διότι τὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ ὁ κύβος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἀποτελέσματος τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ τὸ νόμισμα.

§ 267. Ἰδιότητες ἀνεξαρτήτων συμβάντων.

1η: Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ A καὶ B' .

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 262, ε') $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$, καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, θὰ ἔχωμεν:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B'),$$

διότι $P(B) + P(B') = 1.$

2α: Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ τὰ A' καὶ B .

Ἦτοι: $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B).$

Υπόδειξις. Παρατηρήσατε ὅτι $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$ καὶ ἐργασθῆτε ὡς καὶ προηγουμένως.

3η: Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ A' καὶ B' .

Ἦτοι: $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B').$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(A' \cap B) \cup (A' \cap B') = A'$ καὶ $(A' \cap B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$, ἔχομεν:

$$P(A' \cap B) + P(A' \cap B') = P(A')$$

$$\eta \quad P(A' \cap B') = P(A') - P(A' \cap B) = \quad (\text{λόγω τῆς 2ας}) \\ = P(A') - P(A') \cdot P(B) = \\ = P(A') \cdot [1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B').$$

Έφ α ρ μ ο γ ή : 'Η πιθανότητας να λυθῇ ἐν πρόβλημα ἀπὸ ἑνα μαθητὴν x εἶναι $\frac{3}{5}$ καὶ ἡ πιθανότητας να λυθῇ ἀπὸ ἑνα ἄλλον μαθητὴν y εἶναι $\frac{2}{3}$. Ποία ἡ πιθανότητας να λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὸν ἑνα καὶ να μὴ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον;

Λ ὀ σ ι ς : 'Εὰν καλέσωμεν A τὸ συμβάν : «'Ο μαθητὴς x λύει τὸ πρόβλημα» καὶ B τὸ συμβάν : «'Ο μαθητὴς y λύει τὸ πρόβλημα», τότε :

$A \cap B$ σημαίνει : 'Ο x θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλ' ὄχι ὁ y .

$A' \cap B$ σημαίνει : 'Ο x δὲν θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ ὁ y θὰ τὸ λύσῃ.

$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ σημαίνει : Νὰ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἑνα καὶ να μὴν λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον.

* Ἀρα, ἡ ζητούμενη πιθανότητας εἶναι, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $A \cap B'$ καὶ $A' \cap B$ εἶναι ξένα συμβάντα

$$\begin{aligned} P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] &= P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \\ &= \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

603. 'Η πιθανότητας λύσεως ἑνὸς προβλήματος ἀπὸ τὸν μαθητὴν α εἶναι $\frac{2}{3}$ καὶ ἀπὸ τὸν συμμαθητὴν του β εἶναι $\frac{4}{5}$. Ποία ἡ πιθανότητας να λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ ἀμφοτέρους ;

604. Δείξατε ὅτι :

$$\alpha) P(A|B) + P(A'|B) = 1$$

$$\beta) P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}, \text{ γνωστοῦ ὄντος ὅτι } A \subset B \text{ καὶ } P(B) > 0.$$

605. Κατὰ τὴν ρίψιν ἑνὸς κύβου, ποία εἶναι ἡ πιθανότητας να παρουσιασθῇ τὸ «6» διὰ πρῶτην φορὰν κατὰ τὴν τετάρτην ρίψιν;

606. 'Εκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχοῦσης 30 κλήρους, ἡριθμημένους ἀπὸ 1 ἕως 30 ἀνασύρουμεν «τυχαίως» ἑνα κληρὸν. Ποία εἶναι ἡ πιθανότητας ὁ ἀνασυσρθεὶς κληρὸς να φέρῃ ἀριθμὸν περιττὸν καὶ διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑννέα ;

607. 'Εὰν A καὶ B συμβάντα ξένα πρὸς ἀλλήλα μὲ $P(A \cup B) > 0$, να δευχθῇ ὅτι :

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

608. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ 1ος κύβος ἔφερε τὸν ἀριθμὸν 5, ποία ἡ πιθανότητας τοῦ συμβάντος : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι ≥ 10 » ;

609. 'Εκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνουμεν τρία παιγνιοχάρτα. Ποία ἡ πιθανότητας τοῦ συμβάντος : «Οὐδὲν ἐκ τῶν τριῶν παιγνιοχάρτων εἶναι φιγούρα».

610. 'Εκλέγομεν τυχαίως δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τοῦ τμήματος $T_{10} \equiv \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$. Ποία ἡ πιθανότητας να εἶναι ὁ εἰς ἄρτιος καὶ ὁ ἕτερος περιττός ;

611. Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότητας να φέρωμεν διπλοῦν ἑξ ; Ποία δὲ ἡ πιθανότητας να φέρωμεν τοῦλάχιστον ἑνα ἑξ ;

612. Πόσας φορὰς πρέπει να ρίψωμεν ἑνα κύβον, ὥστε ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς τοῦλάχιστον ἑξ να ἔχῃ πιθανότητα 0,5 ;

§ 268. Πιθανότης τομῆς τριῶν συμβάντων.—'Εὰν A, B, Γ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω , τότε ἰσχύει :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(\Gamma|A \cap B), \quad (P(A \cap B) > 0)$$

Ἀποδείξις : Ἐάν $A \cap B = E$, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap \Gamma) &= P(E \cap \Gamma) = P(E) P(\Gamma | E) = P(A \cap B) \cdot P(\Gamma | A \cap B) = \\ &= P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(\Gamma | A \cap B), \text{ ὁ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι :

$$P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(\Gamma | A \cap B) \cdot P(\Delta | A \cap B \cap \Gamma).$$

Γενικῶς :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Π α ρ ά ε ι γ μ α : Ἐν δοχείῳ περιέχει 3 λευκά σφαιρίδια, 4 κυανὰ καὶ 6 μαῦρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν ἐξαγωγήν τριῶν σφαιριδίων, τὸ ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον νὰ ἐπανατίθεται. Ποία ἡ πιθανότης τὰ ἐξαγόμενα σφαιρίδια νὰ εἶναι κατὰ σειρὰν : 1) λευκόν, 2) κυανόν, 3) μαῦρον.

Λ ύ σ ι ς : Ἐάν Λ σημαίνῃ λευκὸν σφαιρίδιον, K κυανοῦν καὶ M μαῦρον, θὰ ἔχομεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = P(\Lambda) \cdot P(K | \Lambda) \cdot P(M | \Lambda \cap K).$$

Ἀλλὰ $P(\Lambda) = \frac{3}{13}$, $P(K | \Lambda) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (διότι τὸ ἐξαχθὲν δὲν ἐπανατίθεται) καὶ

$$P(M | \Lambda \cap K) = \frac{6}{11} \quad (\text{διότι τὰ ἐξαχθέντα δὲν ἐπανατίθενται}).$$

Ὅθεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{143}.$$

§ 269. Ἀνεξαρτησία ν συμβάντων. — Τρία ἢ περισσότερα συμβάντα $A_1, A_2, \dots, A_n$ καλοῦνται **ἀμοιβαίως ἢ τελείως ἀνεξάρτητα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ὑπὸ συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότης οἰουδήποτε τούτων, δοθέντων οἰωνδήποτε τῶν λοιπῶν, ἰσοῦται πρὸς τὴν συνήθη (ἀδέσμευτον) πιθανότητα.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς ἑξῆς σχέσεις :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ἀνεξάρτητα ἀνὰ ζεύγη}).$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k), \quad (\text{ἀνεξάρτητα ἀνὰ τρία}), \text{ κ.ο.κ.}$$

.....

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Οὕτω, π.χ., τρία συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω , ἔστω τὰ A, B, Γ θὰ λέγωνται τελείως ἀνεξάρτητα ἂν, καὶ μόνον ἂν, ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad &P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ 2. \quad &P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma) \\ 3. \quad &P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$4. \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \quad (II)$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δὲν ἐξασφαλίζει τὴν τελείαν ἀνεξαρτησίαν αὐτῶν. Ἐπομένως διὰ νὰ εἶναι τρία συμβάντα τελείως ἀνεξάρτητα πρέπει νὰ ἰσχύουν συγχρόνως αἱ (I) καὶ (II).

Παρατήρησης. Όταν έχουμε ν ανεξάρτητα συμβάντα, τότε :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (1)$$

Η σχέση (1) δεν είναι ικανή συνθήκη διὰ τὴν τελείαν ανεξαρτησίαν τῶν $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Παράδειγμα τ α : 1ον. Κατὰ τρόπους ανεξαρτήτους, ρίπτομεν ἓνα νόμισμα, λαμβάνομεν ἓνα παιγνίχαρτον ἀπὸ μίαν δέσμην καὶ ρίπτομεν ἓνα κύβον. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανίσουν τὸ νόμισμα «κορώνα», τὸ παιγνίχαρτον «ἄσπον» καὶ ὁ κύβος «6»;

Λύσις : Ἐὰν A σημαίνη : «Τὸ νόμισμα δεικνύει κορώνα», B : «Τὸ παιγνίχαρτον εἶναι ἄσπον» καὶ Γ : «Ὁ κύβος φέρει 6», θὰ ἔχωμεν :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma),$$

διότι τὰ συμβάντα εἶναι ανεξάρτητα.

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(\Gamma) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ἄρα :} \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{156}.$$

Θὰ δώσωμεν τώρα καὶ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα, δι' οὗ ἐμφαίνεται ὅτι ἡ ανεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δὲν ἐξασφαλίζει τὴν πλήρη ανεξαρτησίαν αὐτῶν.

2ον : Αἱ ἑδραὶ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι χρωματισμέναι ὡς ἐξῆς : Μαύρη, λευκή, ἐρυθρά καὶ ἡ τετάρτη ἑδρα ἔχει καὶ τὰ τρία χρώματα. Ρίπτομεν τὸ τετράεδρον καὶ παρατηροῦμεν τὸ χρῶμα τῆς ἑδρας ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται. Καλοῦμεν :

A τὸ συμβάν : «Ὁ κύβος στηρίζεται ἐπὶ ἑδρας, ἡ ὁποία εἶναι χρωματισμένη μαύρη»
 B τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » » λευκή»
 Γ τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » » ἐρυθρά».

$$\text{Τότε :} \quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(\Gamma).$$

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(\Gamma).$$

Ἐπομένως τὰ A, B, Γ εἶναι ανεξάρτητα ἀνὰ δύο.

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{8}.$$

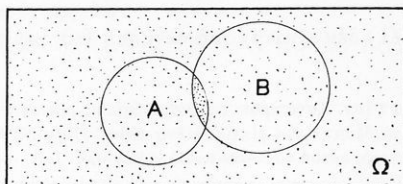
§ 270. Προσθετικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων.— Ἐὰν A καὶ B δύο συμβάντα ἐνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω , τότε ἰσχύει :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ἦτοι : ἡ πιθανότης ὅτι συμβαίνει ἓν τοῦλάχιστον ἐκ τῶν A καὶ B εὑρίσκεται διὰ τῆς προσθέσεως τῆς πιθανότητος ὅτι συμβαίνει τὸ A μὲ τὴν πιθανότητα ὅτι συμβαί-

νει το B και άκολούθως δια της αφαιρέσεως της πιθανότητας ότι συμβαίνουν άμφότερα.

Άπόδειξις. Άς παρατηρήσωμεν το κατωτέρω διάγραμμα του Venn (Σχ. 19).



Σχ. 19

$A \cup B$ είναι το σύνολον τών στοιχείων τὰ όποία άνήκουν είτε είς το A, είτε είς το B, είτε είς άμφότερα. Πιθανότης αύτου είναι το άθροισμα τών πιθανοτήτων τών στοιχείων του (δηλ. τών άπλών συμβάντων). Έπειδή $P(A) + P(B)$ είναι το άθροισμα τών πιθανοτήτων τών στοιχείων του A και τών στοιχείων του B, έπεται ότι αί πιθανότητες τών στοιχείων της τομής $A \cap B$ έχουν ληφθή δύο φορές. Έάν λοιπόν αφαιρέσωμεν την $P(A \cap B)$, θα έχωμεν το άθροισμα τών πιθανοτήτων όλων τών στοιχείων του $A \cap B$, όπου έκαστον έχει ληφθή μία φοράν. Ωστε :

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B). \quad \text{ό.έ.δ.}$$

Θά δώσωμεν όμως μίαν άυστηροτέραν άπόδειξιν του άνωτέρω θεωρήματος : Εύκόλως διαπιστούμεν ότι το συμβάν $A \cup B$ δύναται νά παρασταθῇ ως ένωσις (άθροισμα) τών άμοιβαίως άποκλειομένων συμβάντων $A - B$ και B, ήτοι :

$$A \cup B = (A - B) \cup B, \quad \text{ένθα } (A - B) \cap B = \emptyset.$$

Τότε όμως, δυνάμει τών προτάσεων β' και ε' της § 262, έχομεν :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Πόρισμα I. — Έάν A και B είναι άμοιβαίως άποκλειόμενα (ξένα μεταξύ των) συμβάντα, θα είναι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (βλ. και § 262, β)

Πόρισμα II. — Έάν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά συμβάντα ενός δειγματού χώρου Ω θα είναι : $P(A) + P(A') = 1$. (βλ. και § 258, δ)

Πόρισμα III. — $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (ύποπροσθετική ιδιότης της P).

Έφ α ρ μ ο γ ή 1η : Έκ δέσης 32 παιγνιοχάρτων (πρέφα) λαμβάνομεν τυχαίως δύο εξ αυτών συγχρόνως. Ποία ή πιθανότης νά είναι το έν τουλάχιστον εξ αυτών άσσος;

Λύσις : Όνομάζομεν A το συμβάν : «Τό έν νά είναι άσσος» και B το συμβάν : «Τό έτερον νά είναι άσσος». Τότε $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ και ή πιθανότης νά είναι άμφότερα άσσος είναι : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

Τότε ή πιθανότης του συμβάντος $A \cup B$: «Τό έν τουλάχιστον εξ αυτών νά είναι άσσος» είναι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$.

Ἐφαρμογή 2α: Ἐστώσαν δύο συμβάντα A καὶ B μὲ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$
καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ: (i) $P(A)$, (ii) $P(B)$.

Λύσις: (i). Ὡς γνωστὸν (§ 258, δ') ἔχομεν:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(ii). Ἐκ τῆς σχέσεως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ λαμβάνομεν:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}, \quad \text{ἐξ ἧς: } P(B) = \frac{2}{3}.$$

§ 271. Ἐὰν A, B, Γ συμβάντα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, θὰ εἶναι:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

Ἀπόδειξις. Ἐστώ $\Delta = B \cup \Gamma$. Τότε ἔχομεν $A \cap \Delta = A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ καὶ $P(A \cap \Delta) = P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)$,
καθ' ὅσον $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = (A \cap B \cap \Gamma)$.

Ὅθεν:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A \cup \Delta) = P(A) + P(\Delta) - P(A \cap \Delta) = \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - [P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma). \end{aligned}$$

Πόρισμα. — Ἐὰν A, B, Γ εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα (ξένα μεταξὺ των) ἀνὰ δύο, τότε ἰσχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).$$

Ἐφαρμογαὶ

1η: Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{4}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{9}{10}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ τοὺλάχιστον εἰς τούτων μετὰ 20 ἔτη;

Λύσις: Ἐστώ A τὸ συμβάν: «Ὁ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη» καὶ B τὸ συμβάν: «Ἡ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη». Τότε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= \frac{3}{4} + \frac{9}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{39}{40}. \end{aligned}$$

2α: Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 40 ἔτη εἶναι $\frac{8}{10}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 40 ἔτη εἶναι $\frac{7}{10}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ μόνον ὁ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη;

Λύσις: Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ συμβάν: «Ὁ σύζυγος νὰ ζῇ μετὰ 40 ἔτη» καὶ B τὸ συμβάν: «Νὰ ζῇ ἡ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη», τότε ἀρκεῖ νὰ εὐρωμεν τὴν $P(A \cap B')$.

$$\text{Ἀλλὰ} \quad P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = P(A) \cdot [1 - P(B)],$$

$$\text{ὁθεν:} \quad P(A \cap B') = P(A) \cdot [1 - P(B)] = \frac{8}{10} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{100}.$$

613. 'Εάν $A \subset B$, τότε δείξτε ότι: $P(B|A) = 1$.

614. Δείξτε χρησιμοποιώντας τον νόμον του De Morgan $A' \cap B' = (A \cup B)'$, ότι εάν τὰ A και B είναι ανεξάρτητα συμβάντα, θὰ είναι ανεξάρτητα και τὰ A' και B' .

615. Εἰς ἀκέραιος περιλαμβάνεται κατὰ τύχην μεταξὺ τῶν πρώτων 200 θετικῶν ἀκεραίων. Ποία ἡ πιθανότης ὅτι ὁ λαμβανόμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς εἴτε διὰ 6 εἴτε διὰ 8;

616. 'Η πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{4}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{5}$. Ποία ἡ πιθανότης:

- α) Νὰ ζοῦν ἀμφότεροι, β) Νὰ ζῇ μόνον ὁ σύζυγος,
 γ) Νὰ ζῇ μόνον ἡ σύζυγος, δ) Νὰ ζῇ τοῦλάχιστον εἰς τούτων.

617. 'Εάν A καὶ B εἶναι συμβάντα μὲ $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ καὶ $P(B') = \frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ: $P(A \cap B)$, $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$ καὶ $P(B \cap A')$.

618. 'Εάν A καὶ B εἶναι συμβάντα μὲ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ: $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A \cup B)$, $P(A'|B')$, $P(B'|A')$.

619. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$P[(A \cup A')|B] = P(A|B) + P(A'|B).$$

620. Δοθέντος ὅτι $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ καὶ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες: $P(A|B)$ καὶ $P(B|A)$.

621. 'Εάν E καὶ F ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι:

$$P(E'|F) = 1 - P(E|F), \quad (P(F) > 0).$$

622. 'Εάν E καὶ F εἶναι συμβάντα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω , τότε:

- 1) $0 \leq P(E/F) \leq 1$
 2) $P(\Omega|F) = 1$
 3) $P(E) = P(F) \cdot P(E|F) + P(F') \cdot P(E|F')$.

623. 'Εάν A καὶ B εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα, τότε:

$$P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E), \quad (P(E) > 0).$$

624. Δείξτε ὅτι: 'Εάν $A \subset B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, ἔνθα $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε ἰσχύει:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n).$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

1ον : 'Εφαρμοστὸν διάνυσμα.— Καλοῦμεν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἓν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων, Α καὶ Β.

Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς : $\vec{AB}$.

2ον : Μηδενικὸν διάνυσμα.— Μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι τὸ διάνυσμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχή, Α, καὶ τὸ τέλος, Β, συμπίπτουν.

Τοῦτο τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς : $\vec{0}$.

Ὁ φορεὺς τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι ἀκαθόριστος.

3ον : 'Ισοδύναμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα.— Δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα, $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$, εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ (σχ. 1) ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.

Ἄρα : $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff \text{ΑΔ καὶ ΒΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.}$

Συνέπεια : Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff \vec{ΑΓ} = \vec{ΒΔ}$$

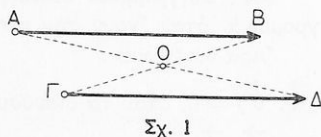
$$\vec{AB} = \vec{ΑΓ} \iff \text{Β καὶ Γ συμπίπτουν.}$$

Παρατήρησις : Εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων (ἐφαρμοστών) θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἀνωτέρω διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καλοῦνται ἐλεύθερα διανύσματα.

4ον : 'Ελεύθερον διάνυσμα.— Ἐλεύθερον διάνυσμα καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐφαρμοστών διανυσμάτων, ἰσοδυνάμων πρὸς δοθὲν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

Ἐν τοιοῦτον διάνυσμα τὸ συμβολίζομεν εἴτε δι' ἐνὸς γράμματος ($\vec{u}$, π.χ.), εἴτε

* Ὑπὸ Ἰωάννου Πανάκη



δι' ενός τυχόντος εκ των εφαρμοστών διανυσμάτων, τὸ ὁποῖον παριστᾷ αὐτὸ (ἀντιπρόσωπος). Π.χ. $\vec{AB}$:

5ον : ἴσα ἐλεύθερα διανύσματα.— Δύο ἐλεύθερα διανύσματα, $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$, λέγονται ἴσα, ὅταν ἐπιδέχωνται ὡς ἀντιπροσώπους τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἢ δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἰσοδύναμα, δηλ. ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ φοράν. Συμβολίζομεν δὲ ταῦτα ὡς ἑξῆς :

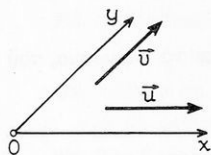
$$\vec{u} = \vec{v}.$$

6ον : Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος.— Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος καλεῖται τὸ μῆκος, AB , ἐνὸς ἀντιπροσώπου $\vec{AB}$ τοῦ διανύσματος τούτου.

Τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$|\vec{u}| = u \quad \eta \quad |\vec{AB}| = AB$$

7ον : Γωνία δύο διανυσμάτων, $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$, προσανατολισμένου ἐπιπέδου.— Καλοῦμεν γωνίαν δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$, κειμένων ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, τὴν **προσανατολισμένην γωνίαν** τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ δύο ἡμιευθειῶν, Ox καὶ Oy , τῆς αὐτῆς ἀρχῆς, ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰ διανύσματα $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ (σχ. 2) καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.



Σχ. 2

Μία τοιαύτη γωνία παρίσταται ὡς ἑξῆς : $(\vec{u}, \vec{v})$. Ἡ δὲ ἀλγεβρική τιμὴ αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \vartheta + 2k\pi, \text{ με } 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ (}\vartheta \text{ κυρτὴ γωνία), } k \in \mathbb{Z}.$$

8ον : Συγγραμμικὰ διανύσματα.— Δύο διανύσματα, $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ λέγονται **συγγραμμικά**, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \text{ ὅταν τὰ διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἢ } (\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{καὶ } (\vec{u}, \vec{v}) = \pi, \text{ ὅταν ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα ἢ } (\vec{u}, \vec{v}) = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9ον : Συνεπίπεδα διανύσματα.— Δύο διανύσματα λέγονται **συνεπίπεδα**, ὅταν αἱ διευθύνσεις των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Παρατήρησις : Δύο διανύσματα εἶναι πάντοτε συνεπίπεδα ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

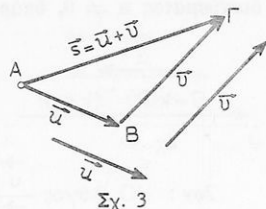
1ον : Πρόσθεσις διανυσμάτων.— Ἐστώσαν $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα με ἀντιπροσώπους ἀντιστοίχως τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{BG}$ (σχ. 3).

Καλούμεν άθροισμα τών δύο τούτων διανυσμάτων τó διάνυσμα $\vec{s}$, τοῦ ὁποίου αντίπρόσωπος εἶναι τó ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{AG}$. Τó συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος γενικεύεται καὶ διὰ πλείονα τών δύο διανυσμάτων.

2ον : Ἀντίθετα διανύσματα. — Δύο διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν τó ἄθροισμά των εἶναι τó μηδενικὸν διάνυσμα.



Ἐάν $\vec{AB}$ εἶναι ἓνας ἀντιπρόσωπος τοῦ διανύσματος $\vec{u}$, τότε ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι ὁ $\vec{BA}$. Τó ἀντίθετον τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ εἶναι τó $-\vec{u}$.

3ον : Τριγωνικὴ ἀνισότης δύο διανυσμάτων. — Μεταξύ τών ἀπολύτων τιμῶν τών τριῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ καὶ $\vec{u} + \vec{v}$ ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀνισοτικήν σχέσιν :

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

προκύπτουσιν ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τοῦ (σχ. 3), ὅπου τó $=$ λαμβάνει χώραν, ὅταν τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ εἶναι παράλληλα καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Γενικώτερον, διὰ τὰ διανύσματα : $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ἰσχύει :

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n| \leq |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + \dots + |\vec{u}_n|$$

4ον : Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. — Αὗται συνοψίζονται εἰς τὰς :

α) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (ἀντιμεταθετική),

β) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (προσεταιριστική),

γ) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ = οὐδέτερον στοιχείον),

δ) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ = ἀντίθετον τοῦ $\vec{u}$).

5ον : Ἀφαίρεσις δύο διανυσμάτων. — Οἷωνδήποτε ὄντων τών διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$, ἡ ἐξίσωσις :

$$\vec{u} + \vec{x} = \vec{v},$$

ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν, καὶ μίαν μόνον, λύσιν, τὴν :

$$\vec{x} = \vec{v} + (-\vec{u}), \text{ τὴν ὁποίαν γράφομεν : } \vec{x} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Τό διάνυσμα $\vec{x}$ καλεῖται **διαφορὰ** τών διανυσμάτων $\vec{v}$ καὶ $\vec{u}$.

δον : Γινόμενον διανύσματος $\vec{u}$ ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν k .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δεχόμεθα ὅτι: «Δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$ καὶ διανύσματος $\vec{u} \neq \vec{0}$, ὑπάρχει διάνυσμα $\vec{v}$ τοιοῦτον ὥστε :

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} = k\vec{u} \quad (k < 0) \\ \text{Σχ. 4} \end{array}$$

1ον : Τὸ $\vec{v}$ νὰ ἔχη τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\vec{u}$.

2ον : Τὸ $\vec{v}$ νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς μετὰ τὸ $\vec{u}$, ἐὰν $k > 0$, ἀντιθέτου δὲ φορᾶς μετὰ τὸ $\vec{u}$, ὅταν $k < 0$.

3ον : Ὁ λόγος $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$, δηλαδή τὸ μήκος τοῦ $\vec{v}$ πρὸς τὸ μήκος τοῦ $\vec{u}$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ k · ἥτοι :

$$\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = |k| \iff |\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|.$$

Παρατηρήσεις : α') Ἐὰν $k = 0$, τότε $\vec{v} = \vec{0}$, οἰουδήποτε ὄντος τοῦ $\vec{u}$.

β') Ἐὰν $\vec{u} = \vec{0}$, τότε $\vec{v} = \vec{0}$, οἰουδήποτε ὄντος τοῦ k .

γ') Ἐὰν $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$, τότε ἢ $k = 0$, ἢ $\vec{u} = \vec{0}$ ἢ $k = 0$ καὶ $\vec{u} = \vec{0}$.

δ') Ὅτι εἶναι : $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ καὶ $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.

Σημείωσις : Διὰ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἀπεικονίζεται τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας κατὰ τὸν μέχρι τοῦδε γνωστὸν τρόπον. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἶναι θεμελιώδες διὰ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν καὶ συνδέει τὴν Ἀλγεβρὰν μετὰ τὴν Γεωμετρίαν. Θεμελιωτῆς εἶναι ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Καρτέσιος.

Ἀπὸ τοῦδε καὶ εἰς τὸ ἐξῆς τὰ διανύσματα θεωροῦνται ὡς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν : τῶν συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν (13). Ἡ τοιαύτη θεώρησις ἀποτελεῖ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν.

7ον : Ἰδιότητες τοῦ γινομένου διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν $k \in \mathbb{R}$.— Αὗται συνοψίζονται ὡς ἀκολούθως

α') $\vec{u} = \vec{v} \implies k\vec{u} = k\vec{v}$, καὶ ἂν $k \neq 0$, $k\vec{u} = k\vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v}$.

β') Ἐὰν $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε $k\vec{u} = k_1\vec{u} \implies k = k_1$.

γ') Εἶναι : $k(k_1\vec{u}) = k_1(k\vec{u}) = k_1 k_2 \vec{u}$.

δ') Εἶναι $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Γενικώτερα : $k \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n k \vec{u}_i \quad (i=1,2,3,\dots,n)$

ε') Εἶναι : $(k + k_1) \vec{u} = k\vec{u} + k_1\vec{u}$.

Γενικώτερα :

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u} + \dots + k_n\vec{u} \quad \eta \quad \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n k_i \vec{u} \\ \mu\epsilon \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΒΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.—

*Εστω ευθεία xy και διάνυσμα $\vec{i} \neq \vec{0}$, παράλληλον πρὸς τὴν ευθείαν ταύτην (σχ. 5). Πάν ἄλλο διάνυσμα, $\vec{u}$, παράλληλον πρὸς τὴν xy εἶναι τῆς μορφῆς: $\vec{u} = X \vec{i}$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, πᾶς ἀντιπρόσωπος

τοῦ $\vec{i}$ φερόμενος ὑπὸ τῆς xy καλεῖται **διανυσματικὴ βάση τῆς ευθείας ταύτης**.

Ὁ ἀριθμὸς X καλεῖται **τετμημένη** τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ εἰς τὴν βάση $\vec{i}$.

*Αποκαθίσταται οὕτω μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ Συνόλου τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν xy καὶ τοῦ συνόλου, R , τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

4. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΙΣ (ἢ ΦΥΣΙΚΗ).—

Ἡ βάση $\vec{i}$ καλεῖται **κανονικὴ**, ὅταν τὸ διάνυσμα $\vec{i}$ ἐκλεγῇ ὡς τὸ **μοναδιαῖον διάνυσμα**. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς X καλεῖται **ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{u}$** .

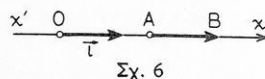
Ὁ ἀριθμὸς $|X|$ εἶναι τὸ μήκος τοῦ διανύσματος τούτου.

5. ΑΞΩΝ.—

*Ἄξων εἶναι ἡ ευθεία ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορά, ἡ ἀρχὴ τοῦ ἄξονος καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα, $\vec{i}$, τοῦ ὁποίου φορά εἶναι ἡ τοῦ ἄξονος.

Εἰς τὸ (σχ. 6) εἰκονίζεται ὁ ἄξων $x'Ox$, με ἀρχὴν τὸ σημεῖον O , θετικὴν φοράν τὴν Ox καὶ με μονάδα μήκους: $|\vec{i}| = 1$.

Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{u}$, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξωνα $x'Ox$, παρίσταται πολλάκις καὶ διὰ τοῦ $\overline{u}$.



Σχ. 6

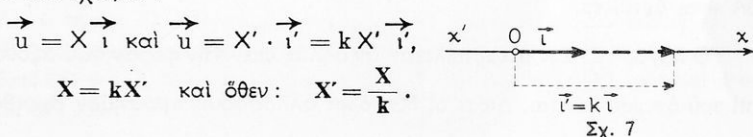
Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 6), ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'Ox$, ὁ λόγος

$\frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} = \overline{AB}$ εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$. *Αρα:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i} \quad \eta \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| \cdot |\vec{i}| = \overline{AB} \cdot 1 = \overline{AB}.$$

6. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ.—

*Εστω $\vec{i}$ μία βάση (κανονικὴ ἢ οὐ) ευθείας $x'Ox$ καὶ $\vec{i}'$ δευτέρα βάση, ὀριζομένη, ὡς πρὸς τὴν πρώτην, ὑπὸ τῆς σχέσεως $\vec{i}' = k \vec{i}$. *Εστω τέλος τὸ διάνυσμα $\vec{u}$ παράλληλον πρὸς τὴν $x'Ox$, ἔχον τετμημένην X εἰς τὴν πρώτην βάση καὶ X' εἰς τὴν δευτέραν. Θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 7

$$\vec{u} = X \vec{i} \quad \text{καὶ} \quad \vec{u} = X' \cdot \vec{i}' = k X' \vec{i},$$

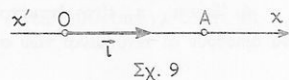
ἐξ οὗ: $X = k X'$ καὶ ὁθεν: $X' = \frac{X}{k}$.

8. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.—'Επί άξονος $x'Ox$ (σχ. 9) θεωρούμεν σημείον A .

'Ο λόγος : $\frac{\overrightarrow{OA}}{1} = \overline{OA} = X_A$ είναι, ως γνωστόν, ή άλγεβρική τιμή του δια-

νύσματος $\overrightarrow{OA}$ και καλείται **τετμημένη** του σημείου A . Συμβολίζεται δέ με X_A . Το O καλείται **άρχη** των τετμημένων. Το O έχει τετμημένην **μηδέν**.

Είς πᾶν σημείον του άξονος $x'Ox$ αντιστοιχεί μία, και μόνον μία, τετμημένη.



9. ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.—'Επί άξονος $x'Ox$ (σχ. 10) θεωρούμεν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Θά είναι :

$$\overline{OA} = X_A \quad \text{και} \quad \overline{OB} = X_B.$$

Κατά το θεώρημα του Chasles θά είναι :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{AO} \quad \text{ή} \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\text{ή} \quad \overline{AB} = X_B - X_A. \quad (1)$$

Δηλαδή: 'Η άλγεβρική τιμή διανύσματος κειμένου επί άξονος **ισούται** πρὸς τὴν τετμημένην του πέρατος μείον τὴν τῆς ἀρχῆς.

*Αρα :

$$\overline{AB} = |X_B - X_A| \quad (2)$$

Παράδειγμα: 'Εάν $x_A = +3$ και $x_B = -5$, τότε :

$$\overline{AB} = (-5) - (+3) = -5-3 = -8 \quad \text{και} \quad AB = |-8| = 8.$$

10. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.—'Εάν Γ είναι το μέσον του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 10), θά έχωμεν :

$$\overline{GA} + \overline{GB} = 0 \quad \text{ή} \quad (\overline{OA} - \overline{OG}) + (\overline{OB} - \overline{OG}) = 0 \quad \text{ή} \quad 2\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \text{ή}$$

$$2x_\Gamma = x_A + x_B, \quad \text{έξ ού:} \quad x_\Gamma = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Δηλαδή: 'Η **τετμημένη** του μέσου διανύσματος κειμένου επί άξονος, **ισούται** πρὸς τὸ **ἡμίαθροισμα** των τετμημένων των ἄκρων του.

Παράδειγμα: 'Εάν $x_A = +6$ και $x_B = -10$, τότε ή τετμημένη x_Γ του μέσου Γ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ θά είναι :

$$x_\Gamma = \frac{1}{2} (+6 - 10) = -2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. 'Επί του άξονος $x'Ox$ θεωρούμεν τὰ σημεία A, B, Γ με αντίστοιχους τετμημένας $+6, -2 + 8$. 1ον) Νά υπολογισθοῦν οί αριθμοί $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{GA}$. 2ον) Λαμβάνομεν ως ἀρχήν τὸ σημείον O' , τοιοῦτον ὥστε $\overline{OO'} = -3$. Ποίαι εἶναι αἱ νέαι τετμημέναι τῶν σημείων A, B, Γ και ποίαι αἱ τιμαὶ τῶν $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{GA}$;

2. Ἐστῶσαν A, B δύο σημεία ἑνὸς ἄξονος $x'Ox$ με τετμημένας -2 καὶ 4 ἀντιστοίχως. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον M τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} = 2 \cdot \overline{MB}$.

3. Ἐὰν A, B εἶναι δύο σημεία τοῦ ἄξονος $x'Ox$ με τετμημένας ἀντιστοίχως -1 καὶ $2,5$, νὰ ὁρισθῇ σημεῖον M τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} + 3\overline{MB} = \overline{AB}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος $\overline{MA} : \overline{MB}$.

4. Ἐὰν x_A, x_B εἶναι ἀντιστοίχως αἱ τετμημέναι τῶν σημείων A, B ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος $x'Ox$, νὰ ὁρισθῶν αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Γ καὶ Δ τοῦ ἄξονος, οὕτως ὥστε:

$$\overline{AG} = \overline{GD} = \overline{DB}.$$

5. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων A, B, Γ , ἑνὸς ἄξονος $x'Ox$ εἶναι ἀντιστοίχως $-2, +8, +3$. Ὑπάρχει σημεῖον M τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MG} = 0$;

6. Τῶν σημείων A, B, Γ, Δ ὅπωςδῆποτε κειμένων ἐπὶ ἄξονος $x'Ox$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$1ον: \overline{DA} \cdot \overline{BG} + \overline{DB} \cdot \overline{GA} + \overline{DG} \cdot \overline{AB} = 0.$$

$$2ον: \overline{DA}^2 \cdot \overline{BG} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{GA} + \overline{DG}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BG} \cdot \overline{GA} \cdot \overline{AB} = 0.$$

$$3ον: \overline{BG} \cdot \overline{GD} \cdot \overline{DB} - \overline{GD} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AG} + \overline{DA} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} - \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = 0.$$

7. Ἐπὶ ἄξονος $x'Ox$ διδονται τὰ σημεία A, B, Γ . Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦτον ἓν μοναδικὸν σημεῖον I , τοιοῦτον ὥστε: $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{IG}^3 - 3 \cdot \overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IG} = 0$.

Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἄξονος, τότε:

$$\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{MG}^3 - 3 \overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MG} = \frac{3}{2} \overline{MI} (\overline{AB}^3 + \overline{BG}^3 + \overline{GA}^3)$$

$$\text{καὶ} \quad \overline{MA}^3 \cdot \overline{BG} + \overline{MB}^3 \cdot \overline{GA} + \overline{MG}^3 \cdot \overline{AB} + 3 \overline{MI} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{GA} = 0 \quad (\text{Euler})$$

11. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Καλοῦμεν γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν n διανυσμάτων, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, πᾶν διάνυσμα $\vec{u}$ τῆς μορφῆς:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \quad \text{ἢ} \quad \left(\vec{u} = \sum_1^n \lambda_i \vec{u}_i \right)$$

ἐνθα $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

A) **Γραμμικὴ ἐξάρτησις δύο διανυσμάτων:** Δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ λέγονται γραμμικῶς ἐξηρημένα (ἢ ὅτι ἀποτελοῦν ἐφαρμοστὸν σύστημα), ὅταν ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ_1 καὶ λ_2 , ὄχι μηδέν καὶ οἱ δύο, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}. \quad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι: $\lambda_1 \vec{u}_1 = -\lambda_2 \vec{u}_2$. Ἐὰν δὲ $\lambda_1 \neq 0$, τότε $\vec{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{u}_2$,

ἡ ὁποία σχέσηις ἐκφράζει ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ εἶναι συγγραμμικά.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὡστε:

Δύο διανύσματα, ὄχι ἀμφοτέρωτα μηδενικά, εἶναι γραμμικῶς ἐξηρημένα ὅταν εἶναι συγγραμμικά.

Παρατηρήσεις: $\vec{u}_2 = \vec{0}$ καὶ $\lambda_2 \neq 0 \implies \vec{u}_1 = \vec{0}$ (ἢ $\lambda_1 = 0$),

$\vec{u}_2 \neq \vec{0}$ καὶ $\lambda_2 = 0 \implies \vec{u}_1 = \vec{0}$ (διότι $\lambda_1 \neq 0$).

Β) Δύο διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα : Δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (συνιστούν ελεύθερον σύστημα), εάν :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (1)$$

1ον : Παρατηρούμεν : α) $\vec{u}_2 = \vec{0}$ και $\vec{u}_1 = \vec{0}$ είναι αδύνατον, διότι οί λ_1 και λ_2 δύνανται νά έκλεγοῦν διάφοροι τοῦ μηδένος.

β) $\vec{u}_2 = \vec{0}$ είναι αδύνατον, διότι ή (1) δύναται νά έπαληθευθῇ διά $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 1$, ὅπερ αδύνατον. *Αρα.

*Εάν δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οὐδέν ἐξ αὐτῶν είναι μηδέν.

2ον : Τά δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ δέν είναι παράλληλα (διότι ἄλλως θά ἦσαν γραμμικῶς ἐξηρητημένα). Αἱ διευθύνσεις των ὀρίζουν μίαν διεύθυνσιν ἐπιπέδων.

Γ) Τρία διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρητημένα : Τρία διανύσματα, μή μηδενικά, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, θά λέγωμεν ὅτι είναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα (σχηματίζουν σύστημα ἐφαρμοστών), εάν ὑπάρχουν τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ὄχι ὅλοι μηδέν, εἰς τρόπον ὥστε νά ἔχωμεν :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

*Υποθέτομεν τὰ $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ γραμμικῶς ανεξάρτητα, ὁπότε δέν θά είναι $\lambda_3 = 0$ (διότι, ἄλλως, θά εἶχομεν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). *Αρα δυνάμεθα νά γράψωμεν :

$$\lambda_3 \vec{u}_3 = -\lambda_1 \vec{u}_1 - \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \eta \quad \vec{u}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{u}_2.$$

$$\text{*Εάν δέ τεθῇ} \quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = x_1 \text{ και } -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = x_2, \quad \text{τότε :}$$

$$\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 \quad (1)$$

*Ὡστε : *Εάν δύο διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (οὔτε παράλληλα, οὔτε μηδενικά) είναι γραμμικῶς ανεξάρτητα, και εάν μετὰ τρίτου είναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα, κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ είναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. *Υπάρχουν δέ δύο πραγματικοί ἀριθμοί x_1 και x_2 , τοιοῦτοι ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ (1).

*Αντιστρόφως : *Εάν τρία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τῶν $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ ὄντων γραμμικῶς ανεξαρτήτων, τὰ διανύσματα $\vec{AB}_1 = \vec{u}_1, \vec{AB}_2 = \vec{u}_2, \vec{AB}_3 = \vec{u}_3$ κείνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διά τοῦ Α και παραλλήλου πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$.

Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $AP_1B_3P_2$ (σχ. 11), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ φέρονται ὑπὸ τῶν $\vec{AB}_1$ και $\vec{AB}_2$. Θά ἔχωμεν : $\vec{AB}_3 = \vec{AP}_1 + \vec{AP}_2$.

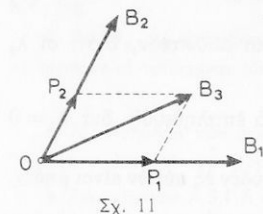
Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\vec{AP}_1 = x_1 \cdot \vec{AB}_1 = x_1 \vec{u}_1$ καὶ $\vec{AP}_2 = x_2 \vec{AB}_2 = x_2 \vec{u}_2$.

*Αρα: $\vec{AB}_3 = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$ ἢ $\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$ (1)

Οἱ x_1 , καὶ x_2 εἶναι μοναδικοί. Πράγματι· ἐὰν ὑπῆρχον δύο ἄλλοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, x'_1 καὶ x'_2 , τοιοῦτοι ὥστε $\vec{u}_3 = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2$ (2), τότε ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{0} = (x_1 - x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{u}_2.$$

*Αρα (§ 11, Β) θὰ εἶναι $x_1 - x'_1 = 0$, ἐξ οὗ $x_1 = x'_1$ καὶ $x_2 - x'_2 = 0$, ἐξοῦ $x_2 = x'_2$.



Ὡστε: Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τρία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, ὧν δύο $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἀποτελοῦν σύστημα ἐφαρμοστόν, εἶναι νὰ ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x_1 καὶ x_2 , τοιοῦτοι ὥστε

$$\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

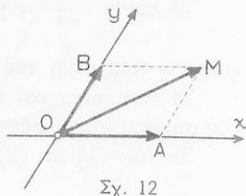
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

12. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ.— Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν τὸ

διάνυσμα $\vec{OM}$ καὶ δύο διακεκριμένας διευθύνσεις Ox καὶ Oy (σχ. 12). Αἱ ἐκ τοῦ M ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς Oy καὶ Ox τέμνουσιν τὴν Ox εἰς τὸ A καὶ τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον B . Σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον $BOAM$. Θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \iff \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$ ἀνελύθη κατὰ τὰς διευθύνσεις Ox καὶ Oy εἰς τὰ διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$.



Τὰ δύο διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$ καλοῦνται διανυσματικαὶ συνιστώσαι τοῦ διανύσματος $\vec{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy .

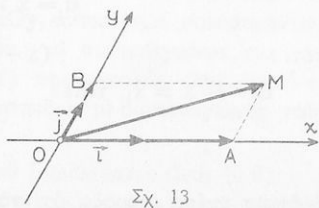
Τὰ διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$ λέγονται καὶ προβολαὶ τοῦ διανύσματος $\vec{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως παραλλήλως πρὸς τὸν ἀξόνα Oy καὶ Ox .

Ἀντιστρόφως, εἰς δύο διανυσματικὰς συνιστώσας $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$, δοθείσας, ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$, καὶ μόνον τοῦτο.

13. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ.— Ἐστώσαν δύο ἀξόνες Ox καὶ Oy (σχ. 13), τῶν ὁποίων τὰ μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ ἀντιστοίχως, κοινῆς ἀρχῆς O .

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(\vec{i}, \vec{j})$ θὰ λέγωμεν ὅτι ἀποτελεῖ μετὰ τοῦ O ἐπί-πεδον βάσεως καὶ θὰ συμβολίζεται οὕτως : $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ὁ ἀξὼν Ox καλεῖται ἀξὼν τῶν τετμημένων καὶ ὁ ἀξὼν Oy καλεῖται ἀξὼν τῶν τεταγμένων. Τὸ σημεῖον O καλεῖται ἀρχὴ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy , οἱ ὅποιοι καλοῦνται καὶ ἀξόνες τῶν συντεταγμένων.



Τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων θὰ λέγεται **κανονικόν**, ὅταν τὰ $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Θὰ λέγεται δὲ **ὀρθογώνιον**, ἐὰν τὰ $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι κάθετα, καὶ **ὀρθοκανονικόν**, ὅταν τὰ $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι κάθετα καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους.

Ἦδη, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ παράλληλοι MA καὶ MB πρὸς τοὺς ἄξονας Oy καὶ Ox ἀντιστοίχως, προκύπτουν τὰ διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ συνιστώσαι τοῦ $\vec{OM}$.

Ὁ λόγος $\frac{\vec{OA}}{\vec{i}} = x$ (1) εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$ καὶ καλεῖται **τετμημένη** τοῦ σημείου M .

Ὁ λόγος $\frac{\vec{OB}}{\vec{j}} = y$ (2) εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{OB}$ καὶ καλεῖται **τεταγμένη** τοῦ σημείου M .

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου M καλοῦνται **συντεταγμέναι** τοῦ σημείου M καὶ σημειώνομεν $M(x,y)$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\vec{OA} = x \vec{i} \quad \text{καὶ} \quad \vec{OB} = y \vec{j}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$, ἔπεται ὅτι : $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$, καὶ ἂν $\vec{OM} = \vec{u}$, τότε :

$$\boxed{\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}} \quad (3)$$

καὶ θὰ λέγωμεν ὅτι ἀνελύσαμεν τὸ διάνυσμα $\vec{u}$ εἰς δύο διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι αἱ τῶν $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις (3) εἶναι **μοναδική**. Διότι, ἐὰν εἴχομεν συγχρόνως :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

τότε :

$$(x - x_1) \vec{i} = (y_1 - y) \vec{j}$$

Ἐὰν δὲ $x \neq x_1$, τότε :

$$\vec{i} = \frac{y_1 - y}{x - x_1} \cdot \vec{j} \quad (4)$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι συγγραμμικά, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα : $x = x_1$ καὶ $y = y_1$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι : πᾶν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{u}$ τοῦ ἐπιπέδου

τῶν ἀξόνων **χαρακτηρίζεται** ὑπὸ τῶν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y (τῶν **συντεταγμένων** του).

14. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.—

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων $x'Ox$ καὶ $y'Oy$ θεωροῦμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{V}$, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy εἶναι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δὲ καὶ τὸν ἀντιπρόσωπον τοῦ $\vec{V}$, τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$. Ἐὰν $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ $\vec{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως, τότε, ὥς γνωστόν, θὰ εἶναι :

$$\vec{V}_1 = \vec{OA} \text{ καὶ } \vec{V}_2 = \vec{OB} \text{ καὶ } \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (1)$$

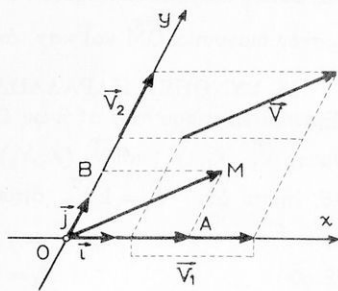
Ἐὰν δὲ X καὶ Y εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ M , τότε :

$$\vec{OA} = X\vec{i} \text{ καὶ } \vec{OB} = Y\vec{j},$$

ὁπότε : $\vec{V}_1 = X\vec{i}$ καὶ $\vec{V}_2 = Y\vec{j}$ καὶ κατ' ἀ-

κολουθίαν :

$$\boxed{\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}} \quad (2)$$



Σχ. 14

Οἱ ἀριθμοὶ X καὶ Y καλοῦνται **συντεταγμέναι προβολαὶ** τοῦ διανύσματος $\vec{V}$ καὶ σημειώνομεν : $\vec{V}(X,Y)$.

Τὰ διανύσματα $X\vec{i}$ καὶ $Y\vec{j}$ ὀνομάζονται **συνιστώσαι** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{V}$ κατὰ τοὺς ἀξονας Ox καὶ Oy .

Ἀντιστρόφως, δοθεῖσιν τῶν συντεταγμένων προβολῶν X καὶ Y ἐνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{V}$, ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἀξονος Ox διάνυσμα $\vec{V}_1$, τοιοῦτον ὥστε $\vec{V}_1 = X$, καὶ ἐπὶ τοῦ ἀξονος Oy διάνυσμα $\vec{V}_2$, τοιοῦτον ὥστε $\vec{V}_2 = Y$. Πᾶν δὲ διάνυσμα $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ ἔχει συνιστώσας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων ἴσας πρὸς X, Y .

Ὅστε : Εἰς πᾶν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου xOy ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν : αἱ συντεταγμέναι του, καὶ ἀντιστρόφως : Πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος (X,Y) πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντίστοιχον ἐνὸς καὶ μόνον διανύσματος εἰς τὸ ἐπίπεδον μὲ συντεταγμένας τοὺς ἐν λόγῳ ἀριθμούς.

Σημείωσις : Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι $(0,0)$.

Ἄρα : Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (X, Y) ὀρίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἓν, καὶ μόνον ἓν, ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{V}$.

Παρατηρήσεις : Ἐὰν $\vec{V} = \vec{0}$, τότε $X = Y = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐάν τὸ $\vec{V}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα $x'Ox$, τότε $Y = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐάν τὸ $\vec{V}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα $y'Oy$, τότε $X = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι ἐνὸς σημείου M εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος $\vec{OM}$ (O ἡ ἀρχὴ τῶν ἰσόνων).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι: Ἐάν δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἰσόνων (Ox, Oy) κείμενα, ἔχουν τὰς διανυσματικὰς συνιστώσας αὐτῶν ἴσας ἐπὶ τῶν ἰσόνων $x'Ox$ καὶ $y'Oy$, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἴσα μεταξὺ τῶν.

15. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἰσόνων Ox καὶ Oy θεωροῦμεν δύο παράλληλα διανύσματα $\vec{V}_1 (X_1, Y_1)$ καὶ $\vec{V}_2 (X_2, Y_2)$ ἐλεύθερα. Ἀφοῦ τὰ $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα, ἔπεται ὅτι: $\vec{V}_1 = k \vec{V}_2$, ὅπου $k \in \mathbb{R}$ ἢ

$$X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} = k (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j})$$

ἔξ οὗ

$$X_1 = kX_2 \text{ καὶ } Y_1 = kY_2$$

ἢ

$$X_1 Y_2 = k X_2 Y_2 \text{ καὶ } X_2 Y_1 = k X_2 Y_2$$

Ἀρα:

$$X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}. \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ καὶ τεθῇ $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = \lambda X_2 \\ Y_1 = \lambda Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_1 \vec{i} = \lambda X_2 \vec{i} \\ Y_1 \vec{j} = \lambda Y_2 \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} = \lambda (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j}) \quad \text{ἢ} \\ \vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα. Ὡστε:

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι παράλληλα, εἶναι ἡ:

$$X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \quad \text{ἢ} \quad \left| \begin{array}{cc} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{array} \right| = 0 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}}$$

Ἐάν $X_1 Y_2 \neq X_2 Y_1$ τὰ διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Ἐάν $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, τότε $k = 1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Leftrightarrow X_1 = X_2$

καὶ $Y_1 = Y_2$, ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$ (σχ. 14).

Ὡστε: Ἴνα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαί τῶν νὰ εἶναι ἴσαι.

16. ΘΕΩΡΗΜΑ I.— Αί συντεταγμένοι προβολαί τοῦ ἁθροίσματος ἐλευθέρων διανυσμάτων ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἐστω $\vec{\Sigma}(X, Y)$ τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων :

$$\vec{V}_1(X_1, Y_1), \vec{V}_2(X_2, Y_2), \dots, \vec{V}_v(X_v, Y_v)$$

Θὰ εἶναι ἄφ' ἑνὸς μὲν $\vec{\Sigma} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_v$, ἄφ' ἑτέρου δέ : $\vec{\Sigma} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

καὶ $\vec{V}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$, $\vec{V}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$, ..., $\vec{V}_v = X_v\vec{i} + Y_v\vec{j}$

$$\begin{aligned} \eta \quad X\vec{i} + Y\vec{j} &= (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) + (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) + \dots + (X_v\vec{i} + Y_v\vec{j}) \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_v)\vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_v)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ἐξ οὗ :} \quad & \left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_v \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_v \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

17. ΘΕΩΡΗΜΑ II.— Αί συντεταγμένοι προβολαί τῆς διαφορᾶς δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἐστώσαν $\vec{V}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$ καὶ $\vec{V}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$ τὰ δύο ἐλεύθερα διανύσματα καὶ $\vec{W} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ ἡ διαφορὰ αὐτῶν. Θὰ εἶναι :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$\begin{aligned} \eta \quad X\vec{i} + Y\vec{j} &= (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) - (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) \\ &= (X_1 - X_2)\vec{i} + (Y_1 - Y_2)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ἐξ οὗ :} \quad & \left. \begin{aligned} X &= X_1 - X_2 \\ Y &= Y_1 - Y_2 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Παρατήρησις : Ἐάν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} \implies \lambda \vec{V} = \lambda X\vec{i} + \lambda Y\vec{j}$$

18. ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΑΚΡΩΝ ΤΟΥ.— Ἐστω $\vec{AB}$ διάνυσμα ἀρχῆς Α (x_1, y_1) καὶ πέρατος Β (x_2, y_2).

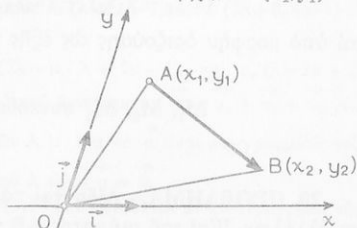
Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ εἶναι :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \quad (1)$$

Ἀλλὰ : $\vec{OB} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$ καὶ

$\vec{OA} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$ καὶ ἡ (1) γίνεταί :

$$\vec{AB} = (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) - (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j})$$



Σχ. 15

ἐξ οὗ :

$$\boxed{\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}} \quad (2)$$

Ἐὰν δὲ X καὶ Y εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ $\vec{AB}$, τότε :

$$\vec{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j},$$

καὶ ἡ (2) γίνεται : $X\vec{i} + Y\vec{j} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

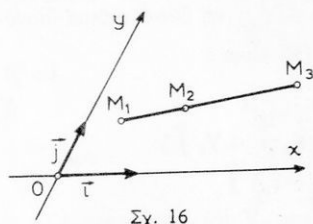
ἐξ οὗ :

$$\begin{cases} X = x_2 - x_1 \\ Y = y_2 - y_1 \end{cases} \quad (3)$$

Δηλαδή : Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ (τοῦ πέρατος μείον τῆς ἀρχῆς).

19. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΕΙΝΤΑΙ ΕΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ.— Ἐστωσαν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ τρία σημεῖα (σχ. 16).

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐ-



Σχ. 16

θείας, εἶναι τὰ διανύσματα $\vec{V} = \vec{M_1M_2}$ καὶ $\vec{V}' = \vec{M_1M_3}$, μὴ μηδενικὰ ἐξ ὑποθέσεως, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἀλλὰ :

$$\begin{aligned} \vec{M_1M_2} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}, \\ \text{καὶ } \vec{M_1M_3} &= (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}. \end{aligned}$$

*Αρὰ κατὰ τὴν (§ 15) εἶναι :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Ἡ συνθήκη αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἐξῆς :

$$(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) = 0$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης ὡς ἐξῆς :

$$M_1, M_2, M_3 \text{ συνευθειακὰ} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Δίδονται τὰ σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$ διακεκριμένα ἀλλήλων. Ἐπὶ τοῦ τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M , τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -k \neq -1, \text{ ὅπου } k \in \mathbb{R}$$

Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔπεται ὅτι: $\vec{MA} = -k \cdot \vec{MB}$ (σχ. 17).

$$\eta \quad \vec{OA} - \vec{OM} = -k (\vec{OB} - \vec{OM})$$

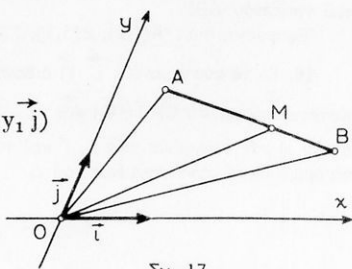
$$\eta \quad \vec{OM} (k+1) = k \cdot \vec{OB} + \vec{OA}$$

$$\eta \quad (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) (k+1) = k(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) + (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$= (kx_2 + x_1) \vec{i} + (ky_2 + y_1) \vec{j}$$

ἐξ οὗ :

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \quad (2)$$



Σχ. 17

21. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ. — Αὐτὰι συνάγονται ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς (§ 20) διὰ $k=1$. Ἄρα :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Δηλαδή: Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἑνὸς διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1(2, -1)$ καὶ $\vec{V}_2(6, -3)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα.

9. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1(2, 1)$ καὶ $\vec{V}_2(3, 1)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

10. Δίδονται τὰ διανύσματα: $\vec{u}_1(-1, 2)$, $\vec{u}_2(2, 3)$, $\vec{u}_3(-5, -4)$.

Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ διανύσματα :

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{y} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{z} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

11. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α , ὥστε τὰ διανύσματα $\vec{u}_1(\alpha, 4)$ καὶ $\vec{u}_2(3, \alpha-1)$ νὰ εἶναι παράλληλα.

12. Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ τὰ διανύσματα $\vec{u}_1(\lambda+3, \lambda+1)$ καὶ $\vec{u}_2(-3, \lambda-1)$ συνιστοῦν ἐπίπεδον βάσεων ;

13. α) Διὰ ποίας τιμᾶς τῶν λ καὶ μ τὰ διανύσματα $\vec{u}(\lambda-4, \mu-4)$ καὶ $\vec{v}(3\lambda+8, 4\mu-1)$ εἶναι ἴσα ;

β) Δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}_1(3, -2)$, $\vec{u}_2(2\lambda-\mu, \lambda+2\mu-4)$ καὶ $\vec{u}_3(\lambda-3\mu+2, -3\lambda+3\mu-2)$ καὶ ζητοῦνται αἱ συνιστώσαι (X, Y) τοῦ διανύσματος $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, ὡς καὶ ἡ σχέσηis, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ, μ ἵνα τὸ $\vec{u}$ εἶναι συγγραμμικὸν τοῦ $\vec{v}(-3, 4)$. Ἀκολούθως νὰ εὑρητῇ διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ εἶναι $\vec{u} = \vec{0}$.

γ) Δίδονται τὰ σημεῖα $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ καὶ $\Gamma(5, 1)$ καὶ ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

14. Δίδονται $A(3, 2)$ καὶ $\vec{AB}(5, -3)$ εἰς τὸ σύστημα βάσεως $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ B καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ AB .

15. Δίδονται τὰ διακεκριμένα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ καὶ $\Gamma(x_3, y_3)$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου M τοῦ $B\Gamma$ καὶ ἀκολουθῶς αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους Z τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἐφαρμογή διὰ: $A(1,2)$, $B(5,3)$, $\Gamma(3,5)$.

16. Εἰς τὸ σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$ δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{V}_1(1,1)$, $\vec{V}_2(-3,2)$ καὶ $\vec{V}_3(2,1)$. Κατασκευάζομεν τὸ $\vec{OA} = \vec{V}_1$, $\vec{AB} = -\vec{V}_2$, $\vec{B\Gamma} = \vec{V}_3$. 1ον) Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα, 2ον) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν B , Γ καὶ τοῦ μέσου M τοῦ $B\Gamma$, 3ον) Κατασκευάζομεν τὸ $\vec{AD} = \vec{B\Gamma}$, νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ D .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

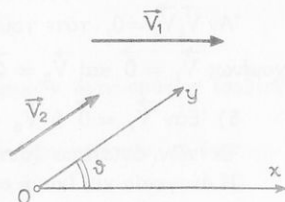
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

22. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Έστωσαν $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$ δύο ελεύθερα διανύσματα (σχ. 18).

Έκ τοῦ τυχόντος σημείου O τοῦ χώρου ἄγομεν δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$. Ἡ προκύπτουσα γωνία xOy εἶναι :

α) Ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου O , καθόσον αἱ γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι.

β) Εἶναι μηδέν, ἂν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα καὶ ὁμόρροπα· ἴση δὲ πρὸς 2 ὀρθάς, ἂν τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα καὶ ἀντίρροπα.



Σχ. 18

γ) Ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$.

Ὡστε : Δοθέντων δύο διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$, ἀντιστοιχίζομεν εἰς αὐτὰ τὴν γωνίαν θ ($0 \leq \theta \leq 2$ ὀρθῶν), ἥ ὁποία καλεῖται γωνία τῶν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$.

Παρατήρησις : Μία τοιαύτη γωνία θ δὲν εἶναι προσανατολισμένη.

23. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ἢ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Καλοῦμεν ἐσωτερικὸν ἢ ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

Έστωσαν δύο διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ (σχ. 18) καὶ θ ἡ γωνία αὐτῶν. Ἐὰν $|\vec{V}_1|$ καὶ $|\vec{V}_2|$ εἶναι τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τούτων, τότε τὸ γινόμενον :

$$|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta \in \mathbb{R}$$

εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ καὶ σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\vec{V}_1 \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Συνέπεται : 1ον. Έστω $0 \leq \theta \leq \pi$, ή γωνία τών $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, όποτε :

α) Έάν $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \implies \text{συνθ} > 0$, και άρα $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ θετικόν

Άντιστρόφως : Έάν $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 > 0$, τότε $|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συνθ} > 0$ ή $\text{συνθ} > 0$, έξ ου έπεται ότι $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

β) Έάν $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \implies \text{συνθ} < 0$ και $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ άρνητικόν.

Άντιστρόφως : Έάν $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 < 0$, τότε $|\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συνθ} < 0$ ή $\text{συνθ} < 0$, έξ ου $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

γ) Έάν $\theta = \frac{\pi}{2} \implies \text{συνθ} = 0$ και άρα $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$.

Αν $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$, τότε τούτο σημαίνει ότι τὰ $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$ είναι κάθετα (ή ένδεχομένως $\vec{V}_1 = \vec{0}$ και $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ ή $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ και $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ή $\vec{V}_1 = \vec{0}$ και $\vec{V}_2 = \vec{0}$).

δ) Έάν $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ή $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ή $\vec{V}_1 = \vec{0}$ και $\vec{V}_2 = \vec{0}$, τότε $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$.

Έκ τών άνωτέρω έπεται ότι :

Η άναγκαία και ίκανή συνθήκη ίνα δύο διανύσματα είναι κάθετα έπ' άλληλα, εκφράζεται διά τού μηδενισμού τού έσωτερικού γινομένου αútων.

Δύο τοιαύτα διανύσματα θα καλούνται όρθογώνια.

Τό μηδενικόν διάνυσμα είναι κάθετον πρὸς πᾶν διάνυσμα (μη εξααιρουμένου τού έαυτού του).

2ον : Έπειδή $|\vec{i}| = 1$ και $|\vec{j}| = 1 \implies \vec{i} \cdot \vec{j} = \text{συνθ}$

3ον : Έπειδή ή γωνία θ είναι άνεξάρτητος τής τάξεως τών διανυσμάτων $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$, έπεται ότι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \text{συνθ} = |\vec{V}_2| |\vec{V}_1| \text{συνθ} = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

ήτοι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1.$$

Όστε : Είς τὸ έσωτερικόν γινόμενον δύο διανυσμάτων ισχύει ὁ νόμος τής άντιμεταθέσεως.

4ον : Έστω τυχόν διάνυσμα $\vec{V}$. Τούτο με τὸν έαυτόν του σχηματίζει γωνίαν $\theta = 0$. Άρα $\text{συνθ} = 1$ και κατ' άκολουθίαν :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}| \text{συνθ} = |\vec{V}|^2 \cdot 1 = |\vec{V}|^2$$

ήτοι :

$$\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2.$$

5ον : Θεωρούμεν δύο διανύσματα $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$ γραμμικῶς έξηρητημένα. Θέτομεν $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

Ἐάν $k > 0$, δύο ἀντιπρόσωποι $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A_1B_1}$ τῶν διανυσμάτων τούτων εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἀρα :

$$\overline{\gamma\omega\nu}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ καὶ } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

Ἐάν θεωρήσωμεν ἄξονα **παράλληλον** πρὸς τὸ $\vec{u}$ ἢ πρὸς τὸ $\vec{v}$, εἶναι προφανές ὅτι : $|\vec{u}| = \vec{u} \cdot \vec{u}$ ἢ $|\vec{u}| = -\vec{u} \cdot \vec{u}$. Ὀμοίως καὶ διὰ τὸ $\vec{v}$. Ἀρα :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ἐάν $k < 0$, τότε $\overline{\gamma\omega\nu}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ καὶ $\text{syn}(\vec{u}, \vec{v}) = -1$.

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| |\vec{v}|.$$

Ἐργαζόμενοι δὲ ὅπως προηγουμένως, εὐρίσκομεν ὅτι :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ὡστε : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν αὐτῶν.

Σημείωσις : Ἐάν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν ἑνὸς τῶν διανυσμάτων, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἀλλάσσει πρόσημον.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ I.—Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὀρθογώνιον προβολὴν τοῦ ἄλλου διανύσματος ἐπὶ ἄξονα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ φορᾶς μὲ τὸ πρῶτον.

Ἐστώσαν $\vec{OA} = \vec{u}$ καὶ $\vec{OB} = \vec{v}$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ (σχ.19).

Ἐστω B' ἡ ὀρθή προβολὴ τοῦ B ἐπὶ τὴν εὐθείαν OA . Ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τοῦ ὁποῦ φορεὺς εἶναι ἡ εὐθεῖα OA καὶ φορὰ εἶναι ἡ τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$, ἔχομεν :

$$\vec{OB'} = OB \text{ συν} \theta = v \text{ συν} \theta$$

ἐνθα θ ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων. Ἀρα :

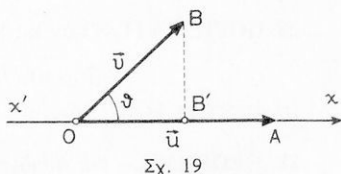
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB'} = u \cdot v \cdot \text{συν} \theta = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ὡστε :

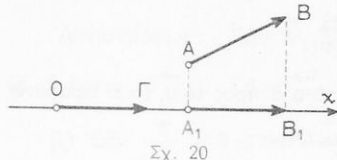
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}.$$

Ἐάν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος $x'Ox$, τὸ γινόμενον $\vec{OA} \cdot \vec{OB'}$ μένει ἀμετάβλητον. Ἀρα, οἰαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ φορὰ τοῦ ἄξονος $x'Ox$, θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'} = \vec{OB} \cdot \vec{OA'}.$$



25. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.—Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἐν τῶν διανυσμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς ὀρθῆς προβολῆς του ἐπὶ τὸν φορέα τοῦ ἄλλου.



Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 20) ἔχομεν :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Ἐὰν τὸ A (ἢ B) μετατίθεται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OG}$, τὸ ἐσω-

τερικὸν γινόμενον $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG}$ μένει ἀμετάβλητον, διότι τὰ A_1 καὶ B_1 μένουν σταθερά.

26. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.—Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος τούτου καὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος τοῦ ἄξονος τούτου.

Οὕτως, ἐὰν εἰς τὸ (σχ. 20) εἶναι $|\overrightarrow{OG}| = 1$, τότε :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{A_1B_1}$$

27. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.—Ἐὰν τὸ ἐν τῶν διανυσμάτων ἐσωτερικοῦ γινομένου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν k , τότε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν δύο διανυσμάτων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k .

Δηλαδή : $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (Προσεταιριστική ὡς πρὸς τὸν k).

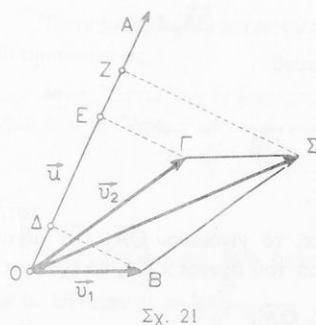
Ἡ ἀπόδειξις ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ.

28. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙV.—Ἐὰν $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(k_1 \cdot \vec{u}) \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) = k_1 \cdot k_2 (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Ἡ ἀπόδειξις ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ.

29. ΘΕΩΡΗΜΑ.—Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$



Ἀπόδειξις : Ἐστωσαν $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_1$ καὶ $\overrightarrow{OG} = \vec{v}_2$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ καὶ $\vec{v}_2$ ἀντιστοίχως. Ἐστω ὅτι :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}$$

Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν Β, Γ καὶ Σ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, τῆς ὁποίας φορὰ εἶναι ἡ φορὰ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ} \quad (1)$$

Επειδή δὲ εἶναι $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$, ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

ἤτοι :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

Ἡ ιδιότης αὕτη καλεῖται **ἐπιμεριστική**.

Γενίκευσις : Εἶναι : $\vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{v}_i = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \vec{u} \cdot \vec{v}_n$

Γενικώτερον ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἐὰν $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_\mu$ καὶ $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\nu$

τότε : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum \vec{u}_i \cdot \vec{v}_j$, ἔνθα $i = 1, 2, 3, \dots, \mu$ καὶ $j = 1, 2, 3, \dots, \nu$.

1ον : Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὐρίσκουμεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \vec{u} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) &= \vec{u} \cdot [\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)] = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \vec{u} \cdot \vec{v}_3 \end{aligned}$$

2ον : Διὰ τὴν εὐρωμεν τὸ γινόμενον :

$$P = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

θέτομεν $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} P &= \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \vec{u} \cdot \vec{v}_3 = \\ &= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_1 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_2 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_3 = \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3 \end{aligned}$$

3ον : Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἰσότητες :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

I. — Τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ.

Πράγματι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 22). Θὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} \implies \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$$

Ἄρα :

$$(\overrightarrow{BG})^2 = (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AG})^2 + (\overrightarrow{AB})^2 - 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$$

ἢ

$$BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

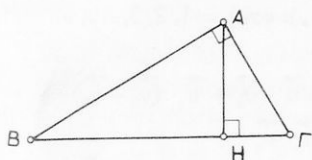
α) 'Εάν τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , τότε : $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$
καὶ ἡ (1) γίνεται : $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$.

β) 'Εάν τὸ $AB\Gamma$ εἶναι τοιοῦτον ὥστε $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$, ἡ (1) γράφεται :

$$2 \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \eta \quad \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \implies A\Gamma \perp AB.$$

II.- 'Η σχέσις $AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{H\Gamma}$ (εἰς τὴν ὁποίαν H εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους AH τριγώνου $AB\Gamma$) χαρακτηρίζει τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ A .

Πράγματι, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐπειδὴ $AH \perp H\Gamma$ εἶναι :



Σχ. 22

$$\vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{καὶ} \quad \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} &= (\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} + \vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot (\vec{HA} + \vec{A\Gamma}) = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} \\ \eta \text{τοι: } \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} &= \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

α) 'Εάν $A = 90^\circ$, τότε $\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2$$

'Αλλὰ $\vec{BH} \perp \vec{HA}$, ἄρα $\vec{BH} \cdot \vec{HA} = 0$, ὁπότε

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ $\vec{BH}$ καὶ $\vec{H\Gamma}$ εἶναι συγγραμμικά, ἔπεται :

$$HA^2 = \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} \quad \eta \quad HA^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{H\Gamma}.$$

β) Θεωροῦμεν τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $HA^2 = \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma}$. 'Η ἰσότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν :

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2 = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2 = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \implies AB \perp A\Gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Εἰς τυχὸν σύστημα ἀξόνων εἶναι :

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{u} (4,3) & \vec{u} (-3,5) & \vec{u} (3,7) & \text{Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἁθροί-} \\ \vec{v} (1,-4) & \vec{v} (-4,-2) & \vec{v} (-2,-7) & \text{σματος } \vec{W} = \vec{u} + \vec{v}. \end{array}$$

18. Εις τυχόν σύστημα άξόνων δίδονται :

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{u} (5, -2) & \vec{u} (2, 6) & \vec{u} (-7, 4) & \text{και ζητείται να υπολογισθούν αι συντεταγμένα.} \\ \hline \vec{v} (-1, 4) & \vec{v} (1, 8) & \vec{v} (-5, 4) & \text{της διαφορής } \vec{W} = \vec{u} - \vec{v}. \end{array}$$

19. Εις τετράεδρον ΑΒΓΔ να άποδειχθῇ ότι :

$$1ον : \vec{BG} \cdot \vec{AD} + \vec{GA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{GD} = 0 \quad (\text{θέσατε } \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB})$$

2ον : 'Εάν αι άκμαί ΒΓ, ΑΔ είναι όρθογώνιοι και ΓΑ όρθογώνιος πρὸς τήν ΒΔ, τότε και ἡ ΑΒ θα είναι όρθογώνιος πρὸς τήν ΓΔ.

20. Τρίγωνον είναι όρθογώνιον, όταν, και μόνον όταν, μία διάμέσός του είναι τὸ ἡμισυ τῆς αντίστοιχου πλευρᾶς.

21. 'Εάν ΑΗ είναι τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ, αι σχέσεις :

$$\overline{BG} \cdot \overline{BH} = BA^2 \quad \eta \quad \overline{GB} \cdot \overline{GH} = GA^2$$

χαρκτηρίζουν τὸ τρίγωνον όρθογώνιον εις τὸ Α.

22. Εις πᾶν όρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (ἐνθα ΑΗ ὕψος) να άποδειχθῇ ότι :

$$1ον : AB \cdot AG = BG \cdot AH, \quad 2ον : \frac{\overline{HB}}{\overline{HG}} = -\frac{AB^2}{AG^2}, \quad 3ον : \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AH^2} \quad (\text{αι άπο-}$$

δείξεις να γίνουν διανυσματικῶς).

23. 'Εάν ΑΜ είναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

$$1ον : AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + \frac{BG^2}{2} \quad (\text{διανυσματικῶς}).$$

$$2ον : AB^2 - AG^2 = 2\overline{BG} \cdot \overline{MH} \quad (\text{ΑΗ ὕψος}).$$

24. Εις πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ να άποδειχθῇ διανυσματικῶς ότι :

$$\alpha') \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A, \quad \beta') \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cos B \quad \text{και} \\ \gamma') \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos \Gamma.$$

25. 'Εάν Η είναι τὸ όρθόκεντρον ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ και ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ ὕψη αὐτοῦ :

$$1ον) \text{ Ποία ἡ τιμὴ τοῦ } \overline{BH} \cdot \overline{AG}; \quad 2ον) \text{ Να δειχθῇ ότι : } \overline{AA'} \cdot \overline{AH} = -\overline{AB} \cdot \overline{AG},$$

$$3ον) \overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AG'} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'} \quad \text{και} \quad \overline{AB'} \cdot \overline{AG} = \overline{AB} \cdot \overline{AG'}, \quad 4ον) \text{ Να δειχθῇ ότι :}$$

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HA} \cdot \overline{AA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} \quad \text{και} \quad \overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HG} \cdot \overline{HG'}.$$

26. 'Επὶ μιᾷς εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ και Μ ἄλλο τυχόν σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἔστω Η ἡ προβολὴ ἐπὶ τήν εὐθείαν ΑΒ. Να άποδειχθῇ ότι :

$$MA^2 \cdot \overline{BG} + MB^2 \cdot \overline{GA} + MG^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BG} \cdot \overline{GA} \cdot \overline{AB} = 0 \quad (\text{Stewart}).$$

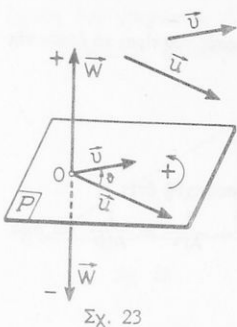
27. 'Εάν $|\vec{u}| = u$, $|\vec{v}| = v$ και $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$, να υπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\vec{u} \cdot \vec{v}$ εις τὰς ἄ-
κολούθους περιπτώσεις :

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1ον : & & & \\ \hline u = 5 & u = 12 & u = \sqrt{5} & u = \sqrt{17} \\ v = 7 & v = 18 & v = \frac{2}{3} & v = 7\sqrt{2} \\ \theta = 30^\circ & \theta = 60^\circ & \theta = 150^\circ & \theta = 135^\circ \end{array}$$

28. Εις κανονικόν σύστημα (Ο, $\vec{i}$, $\vec{j}$) να κατασκευασθοῦν τὰ διανύσματα $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

Ακολουθῶς να εὔρεθῇ τὸ γινόμενον $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Ποίαν ιδιότητα τῶν διχοτόμων γωνίας ἐπαληθεύ-
ομεν ἐνταῦθα ;

ξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ (προσανατολισμένων) τὸ ὀρθογώνιον διάνυσμα $\vec{w}$ πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν δοθέντων, τοιοῦτον ὥστε ἡ τριέδρος $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ νὰ ἔχη τὸν θετικὸν προσανατολισμόν, ἐφ' ὅσον $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{θετική}$, τὸν ἀρνητικὸν δέ, ἂν $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{ἀρνητική}$ καὶ μέτρον $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \eta\mu\theta$ (1), ἔνθα θ ἡ γωνία τῶν $\vec{u}, \vec{v}$ καὶ $0 \leq \theta \leq \pi$.



Ἐάν $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$, τότε $\eta\mu\theta = 0$ καὶ ὁ τύπος (1)

δίδει $\vec{w} = \vec{0}$.

α) Σύμφωνα με τὸν ὅρισμόν εἶναι : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{u}$. Δηλαδή εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

β) Ἐάν $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$, τότε $\eta\mu\theta = 0$ καὶ ἄρα $\vec{w} = \vec{0}$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἄν $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ καὶ $\vec{w} = \vec{0}$, τότε $\eta\mu\theta = 0$ καὶ ἄρα $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$. Ὡστε :

Ἵνα δύο μὴ μηδενικά διανύσματα εἶναι συγγραμικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ μὴ μηδενικὸν διάνυσμα.

γ) Ἐάν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε $\eta\mu\theta = 1$ καὶ ἄρα $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$.

Δηλαδή: Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου δύο καθέτων διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων διανυσμάτων.

δ) Ἐάν $\vec{u} = \vec{0}$ ἢ $\vec{v} = \vec{0}$ ἢ $\eta\mu\theta = 0$, τότε $\vec{w} = \vec{0}$ καὶ ἄρα $|\vec{w}| = 0$.

Ἄρα: Τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι μηδέν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἐν τοῦλάχιστον τῶν διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἢ ὅταν τὰ δύο διανύσματα εἶναι συγγραμμικά.

ε) Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον διανυσμάτων ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικός νόμος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων. Ἀποδεικνύομεν τὸν νόμον τοῦτον διὰ τρία τυχόντα διανύσματα $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$.

Χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ γενικότης, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν O, καὶ ὅτι τὸ διάνυσμα $\vec{V}_1$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον.

Θέτομεν $\vec{S} = \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ καὶ $\vec{W} = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$, (σχ. 24).

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (P) κάθετον ἐπὶ τὸ $\vec{V}_1$ εἰς τὸ O καὶ ἔστωσαν $\vec{u}_2, \vec{u}_3$, αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ τὸ (P) τῶν $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{S}$ ἀντιστοίχως.

1ον : Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W}_2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$. Τοῦτο ἔχει, ὡς γνωστόν, διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὰ $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$. Ἄρα τὸ $\vec{W}_2$ θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰ $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{u}_2$. Κατ' ἀκολουθίαν :

$$|\vec{W}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \eta\mu(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Ἀλλὰ $|\vec{V}_1| = 1$ καὶ $\vec{u}_2$ εἶναι ἡ ὀρθογώνιος προβολὴ τοῦ $\vec{V}_2$ ἐπὶ τὸ (P). Συνεπῶς : $|\vec{W}_2| = |\vec{u}_2|$ καὶ τὸ $\vec{W}_2$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{u}_2$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

2ον : Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W}_3 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$ καὶ τὸ $\vec{W}_3$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{u}_3$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O καὶ κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

3ον : Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W} = \vec{V}_1 \cdot \vec{s}$ κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον. Τὸ $\vec{W}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{s}$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Ἀλλὰ τὸ } \vec{s} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3. \text{ Ἄρα } \vec{W} = \vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$$

$$\eta \quad \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3.$$

Ἡ ἀνωτέρω ιδιότης γενικεύεται : Οὕτω, θὰ εἶναι :

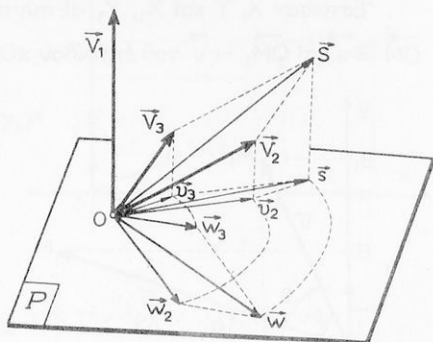
$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) (\vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_4 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_5 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_4 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_5$$

Χρήσις τοῦ ἔξωτερικοῦ γινομένου γίνεται εἰς τὴν Φυσικὴν, καὶ δὴ εἰς τὸ Κεφάλαιον « περὶ ροπῆς δυνάμεων ».

Σημείωσις : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς. Ἐνῶ τὸ ἔξωτερικὸν εἶναι διάνυσμα.

Ἐπειδὴ $|\vec{u}| |\vec{v}| \eta\mu\theta$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει πλευρὰς $\vec{u}$, $\vec{v}$ καὶ περιεχομένην γωνίαν θ , ἔπεται ὅτι τὸ $|\vec{W}|$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

31. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—Ἐστω xOy (σχ. 25) ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος 1 καὶ εἶναι κάθετα.

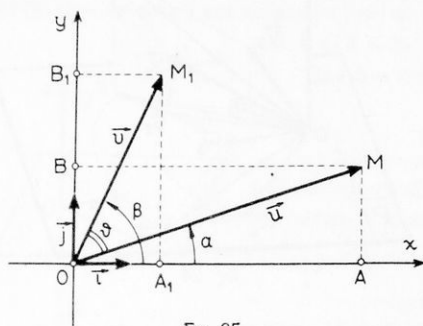


Σχ. 24

Κατὰ τὰ γνωστά :

$$\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1 \text{ καὶ } \vec{j} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ἐστωσαν X, Y καὶ X_1, Y_1 αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν διανυσμάτων $\vec{OM} = \vec{u}$ καὶ $\vec{OM}_1 = \vec{v}$ τοῦ ἐπιπέδου xOy εἰς τὸ θεωρηθὲν σύστημα.



Σχ. 25

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} \text{ καὶ } \vec{v} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}.$$

Ἀρα :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (X\vec{i} + Y\vec{j}) \cdot (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) = \\ &= XX_1\vec{i}^2 + (XY_1 + YX_1)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + YY_1\vec{j}^2 \\ &\text{ἐξ οὗ :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = XX_1 + YY_1} \quad (1)$$

Δηλαδή : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ

ἄθροισμα τῶν γινόμενων τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Συνέπεται : Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

$$1ον : |\vec{u}|^2 = XX + YY = X^2 + Y^2, \text{ ἐξ οὗ : } |\vec{u}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2)$$

$$2ον : \text{Ἐπειδὴ } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta, \text{ ἔπεται ὅτι :}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{XX_1 + YY_1}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \quad (3)$$

32. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Ἐὰν τὰ διανύσματα εἶναι κάθετα, τότε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ καὶ ἡ (1) τῆς (§ 31) γίνεται :

$$XX_1 + YY_1 = 0.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν $XX_1 + YY_1 = 0$, τότε, ἂν $\vec{u} \neq 0$ καὶ $\vec{v} \neq 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ ἢ } |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = 0 \text{ ἢ } \cos \theta = 0, \text{ ἐξ οὗ : } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ὡστε : Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων, ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα δύο μὴ μηδενικά διανύσματα $\vec{u}(X, Y)$ καὶ $\vec{v}(X_1, Y_1)$ εἶναι κάθετα εἶ-

ναι ἡ :

$$\boxed{XX_1 + YY_1 = 0}$$

33. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ.— Εἰς ἓνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy (σχ. 26) θεωροῦμεν δύο σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$. Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος

τὸς $\vec{AB}$ εἶναι

$$X = x_2 - x_1 \quad \text{καὶ} \quad Y = y_2 - y_1.$$

Ἐπειδὴ δέ :

$$\vec{AB}^2 = \overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ἔπεται ὅτι :

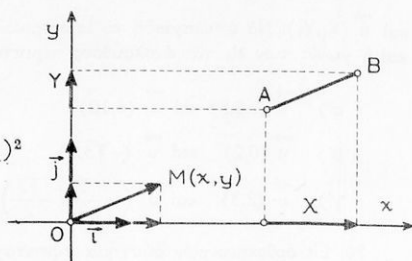
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ἐὰν τεθῇ $|\vec{AB}| = AB = d$, τότε :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ἡ ἀπόστασις ἐνὸς σημείου $M(x, y)$ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν $O(0, 0)$ εἶναι :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Σχ. 26

34. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (προσανατολισμένης) **ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**— Ὑποθέτομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων ὀρθοκανονικὸν καὶ τοῦ προσανατολισμοῦ : $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$. Ἐστῶσαν α, β, θ αἱ ἀλγεβρικοὶ τιμαὶ τῶν γωνιῶν

$(\vec{Ox}, \vec{u}), (\vec{Ox}, \vec{v})$ καὶ $(\vec{u}, \vec{v})$. Θὰ εἶναι (σχ. 25)

$$\theta = \beta - \alpha \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\theta = \eta\mu\beta \sin\alpha - \eta\mu\alpha \sin\beta \quad (1)$$

Ἀλλὰ :

$$\begin{array}{l|l} X = OM \sin \alpha & X_1 = OM_1 \sin \beta \\ Y = OM \eta\mu \alpha & Y_1 = OM_1 \eta\mu \beta \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ὁπότε ἡ (1) γίνεται :} \\ \end{array} \right.$$

$$\eta\mu\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{OM \cdot OM_1} \quad \eta\mu\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \quad (2)$$

Εὐκόλως τώρα ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = \frac{(XX_1 + YY_1)^2 + (XY_1 - X_1Y)^2}{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)} = \frac{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)}{(X^2 + Y^2)(X_1^2 + Y_1^2)} = 1$$

$$\text{καὶ} \quad \epsilon\phi\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{XX_1 + YY_1} \quad (3)$$

ἵνα δὲ τὰ διανύσματα $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ εἶναι παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $\eta\mu\theta$ νὰ εἶναι μηδέν. Δηλαδή

$$XY_1 - X_1Y = 0 \iff \frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y}$$

τοῦτο ὅμως ἀπεδείχθη καὶ εἰς τὴν (§ 15).

29. Εις ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}$ (X, Y) καὶ $\vec{v}$ (X_1, Y_1). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἑσωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν, τὸ συνημίτονον, τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ γωνία των εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

$$\alpha') \quad \vec{u} (-5,3) \text{ καὶ } \vec{v} (6,10)$$

$$\beta') \quad \vec{u} (0,2) \text{ καὶ } \vec{v} (-\sqrt{3},1)$$

$$\gamma') \quad \vec{u} (2,3) \text{ καὶ } \vec{v} \left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\delta') \quad \vec{u} (2,4) \text{ καὶ } \vec{v} (-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\epsilon') \quad \vec{u} (\alpha, \beta) \text{ καὶ } \vec{v} (-\kappa\beta, \kappa\alpha)$$

$$\sigma\tau) \quad \vec{u} (3,4) \text{ καὶ } \vec{v} (5,13).$$

30. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα $A(0,-2)$, $B(-2,-1)$, $\Gamma(2,2)$. Εἶναι ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$;

31. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ σημεῖα $A(4,0)$, $B(-1,0)$, $\Gamma(0,2)$.

32. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $A(4,0)$, $B(7,8)$, $\Gamma(0,10)$ καὶ $\Delta(-3,2)$ εἶναι κορυφαὶ παραλλ/μου (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

33. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $A(8,0)$, $B(6,6)$, $\Gamma(-3,3)$ καὶ $\Delta(-1,-3)$ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ; (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

34. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $A(10,8)$, $B(-3,9)$, $\Gamma(-4,-4)$. καὶ $\Delta(9,-5)$ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, τῶν διαγωνίων του, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ νὰ δεიχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν τὰς γωνίας του (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

35. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $A(-3,-7)$, $B(0,-2)$, $\Gamma(6,8)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

36. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $A(-1,-3)$, $B(8,3)$, $\Gamma(3,4)$, $\Delta(0,2)$ εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπέζιου (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

37. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ x , ὥστε τὰ σημεῖα $A(x,-3)$, $B(1,1)$, $\Gamma(-4,3)$ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

38. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy δίδονται τὰ σημεῖα $A(3,8)$ καὶ $B(2,-3)$.

Ἵνα σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου διαμέτρου AB , πρέπει καὶ ἀρκεῖ : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

39. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα $A(0,3)$, $B(5,2)$ καὶ $\Gamma(-3,7)$. Ἵνα σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους AH_1 , πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$.

40. Δίδονται τὰ σημεῖα $A(-2,-2)$, $B(2,1)$, $\Gamma(0,2)$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς ὑποτείνουσας, καθὼς καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

ΑΛΛΑΓΗ ΑΞΟΝΩΝ

35. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.—Θεωροῦμεν δύο συστήματα παραλλήλων ἀξόνων xOy καὶ $x_1O_1y_1$ καὶ ὑποθέτομεν ὅτι τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῶν ἀξόνων Ox καὶ O_1x_1 εἶναι ἰσοδύναμα, καθὼς καὶ τὰ τῶν ἀξόνων Oy καὶ O_1y_1 .

Ὑποθέτομεν ἐπίσης γνωστὰς τὰς συντεταγμένας (x_0, y_0) τοῦ O_1 .

Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\vec{OO_1} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \quad (1)$$

Ἐστωσαν (x, y) αἱ συντεταγμέναι ἐνὸς σημείου M τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἄξονας Ox, Oy καὶ (X, Y) αἱ συντεταγμέναι τοῦ M ὡς πρὸς ἄξονας Ox_1 καὶ Oy_1 .
Θὰ εἶναι :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2), \quad \vec{O_1M} = X\vec{i}_1 + Y\vec{j}_1 \quad (3).$$

Ἀλλὰ $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$ (4)

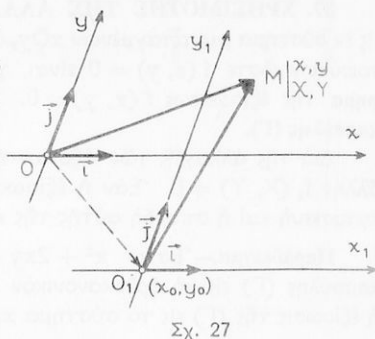
Ἡ (4), βάσει τῶν (1), (2) καὶ (3), γίνεται:

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i}_1 + Y\vec{j}_1 = \\ &= (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j} \end{aligned}$$

ἐξ οὗ : $x = x_0 + X$ καὶ $y = y_0 + Y$,

ἐξ οὗ πάλιν :

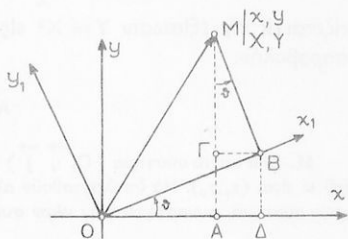
$\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \end{aligned}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}$
--	-----------------------	--



36. ΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ Ο.—Ἐστω xOy ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων (σχ. 28) καὶ $M(x, y)$ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύστημα xOy στρέφεται περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν θ καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν x_1Oy_1 . Ἐστωσαν (X, Y) αἱ συντεταγμέναι τοῦ M ὡς πρὸς τὸ σύστημα x_1Oy_1 .

Ἀγομεν τὴν BD κάθετον πρὸς τὴν Ox καὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετον πρὸς τὴν MA . Θὰ εἶναι $\widehat{M\Gamma B} = \theta$ καὶ



$$x = \overline{OA} = \overline{OD} - \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{B\Gamma} =$$

$$= \overline{OB} \sin \theta - \overline{BM} \cos \theta = X \sin \theta - Y \cos \theta$$

καὶ $y = \overline{AM} = \overline{A\Gamma} + \overline{B\Gamma} = \overline{DB} + \overline{B\Gamma} = \overline{OB} \cos \theta + \overline{BM} \sin \theta = X \cos \theta + Y \sin \theta$

Ἀρα :

$$\left. \begin{aligned} x &= X \sin \theta - Y \cos \theta \\ y &= X \cos \theta + Y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς X καὶ Y εὐρίσκομεν :

$$\left. \begin{aligned} X &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ Y &= -x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Παράδειγμα : Διὰ $\theta = \frac{\pi}{4}$, οἱ τύποι (1) δίδουν

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y)$$

και οι (2) δίδουν : $X = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$ και $Y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + y)$.

37. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.— Γνωρίζομεν ότι, εις έν σύστημα συντεταγμένων xOy , ό γεωμετρικός τόπος τών σημείων $M(x, y)$, τοιούτων ώστε $f(x, y) = 0$ είναι, γενικώς, μία καμπύλη (Γ), καλουμένη **γράφημα** τής εξίσωσεως $f(x, y) = 0$. Η εξίσωσις αύτη ονομάζεται **εξίσωσις τής καμπύλης** (Γ).

Διά τής αλλαγής τών άξόνων ή εξίσωσις αύτη μετασχηματίζεται εις μίαν άλλην $f_1(X, Y) = 0$. Έάν ή εξίσωσις αύτη είναι άπλουστέρα τής πρώτης, ή κατασκευή και ή σπουδή αύτής τής καμπύλης (Γ) θά είναι εύκολωτέρα.

Παράδειγμα.— Έστω $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$ ή εξίσωσις μιās καμπύλης (Γ) εις τó όρθοκανονικόν σύστημα συντεταγμένων. Νά σχηματισθῇ ή εξίσωσις τής (Γ) εις τó σύστημα x_1Oy_1 , όμολόγου του πρώτου, διά στροφῆς περι τó O , κατά γωνίαν $\frac{\pi}{4}$.

Η δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται : $(x + y)^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$.

Αύτη, βάσει τών $X = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$ και $Y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + y)$, μετασχηματίζεται εις τήν εξίσωσιν $Y = X^2$ εις τó νέον σύστημα, και παριστᾶ, ως γνωστόν, παραβολήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Δίδεται τó σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$ και τó $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$, του όποιου αι συντεταγμένοι του ω είναι (x_0, y_0) . Νά υπολογισθοῦν αι συντεταγμένοι (x, y) ενός σημείου M , ως προς τó άρχικόν σύστημα, συναρτήσει τών νέων συντεταγμένων (X, Y) , εις τās άκολουθους περιπτώσεις :

$$1. \quad \begin{array}{l} x_0 = y_0 = 0 \\ \vec{I} = 2\vec{i}, \quad \vec{J} = 3\vec{j} \end{array} \quad \left| \quad 2. \quad \begin{array}{l} x_0 = y_0 = 0 \\ \vec{I} = -4\vec{i}, \quad \vec{J} = \frac{1}{2}\vec{j} \end{array} \quad \left| \quad 3. \quad \begin{array}{l} x_0 = 2, y_0 = 0 \\ \vec{I} = \vec{i}, \quad \vec{J} = \vec{j} \end{array} \right.$$

$$4. \quad \begin{array}{l} x_0 = y_0 = 0 \\ \vec{I} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{J} = \vec{i} - \vec{j} \end{array} \quad \left| \quad 5. \quad \begin{array}{l} x_0 = 0, y_0 = 3 \\ \vec{I} = \vec{i} \\ \vec{J} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \end{array} \quad \left| \quad 6. \quad \begin{array}{l} x_0 = 1, y_0 = -2 \\ \vec{I} = \vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{J} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \end{array} \right.$$

42. Όρθοκανονικόν σύστημα συντεταγμένων xOy στρέφεται κατά τήν όρθήν φοράν και κατά γωνίαν θ περι τó O . Νά υπολογισθοῦν αι συντεταγμένοι (x, y) ενός σημείου εις τó παλαιόν σύστημα συναρτήσει τών νέων (X, Y) , εις τās άκολουθους περιπτώσεις :

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \quad 2. \quad \left. \begin{array}{l} \theta = -\frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \quad 3. \quad \begin{array}{l} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \theta = -\frac{2\pi}{3} \\ \theta = \frac{5\pi}{6} \end{array}$$

43. Μία καμπύλη $f(x,y) = 0$ δίδεται εις τὸ σύστημα xOy . Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εις τὸ νέον σύστημα x_1Oy_1 , εις τὰς ἀκολουθούσας περιπτώσεις :

$$1. \quad 2x + 3y - 6 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ἢ} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{ἢ} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$2. \quad x^2 - y^2 - 6xy + 4y + 5 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ἢ} \quad \theta = \frac{\pi}{8} \quad \text{ἢ} \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Η ΕΥΘΕΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

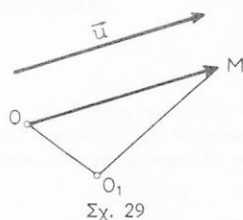
38. Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἰκανὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν αἱ συντεταγμέναι μεταβλητοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου $\chi\Omega\psi$, ἵνα τὸ Σύνολον τῶν σημείων τούτων εἶναι εὐθεΐα.

Ἡ συνθήκη αὕτη ὀνομάζεται **ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἰς τὸ Καρτεσιανὸν τοῦτο ἐπίπεδον**.

Μία εὐθεΐα εἶναι ὠρισμένη δι' ἑνὸς τῶν σημείων τῆς καὶ ἑνὸς διανύσματος **παραλλήλου** πρὸς τὴν εὐθεΐαν (**διευθύνον διάνυσμα**) ἢ καὶ διὰ **δύο διακεκρίμενων** σημείων τῆς.

39. **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.** — Δοθέντος σταθεροῦ σημείου, O , τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχή**, εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν :

1ον : Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}$, τοῦ ὁποίου εἰς ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$ ($\vec{OM} = \vec{u}$) (σχ. 29).



2ον : Τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$ πρὸς τὸν ἑαυτὸν του.

Ἀντιστρόφως : Εἰς πᾶν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}$, ἢ εἰς πᾶν σημεῖον M , ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, $\vec{OM}$, καὶ ἓν μόνον. Οὕτως, ὀρίζομεν :

1ον : Μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων του.

2ον : Μίαν ἀπεικόνισιν ἀμφιμονοσήμαντον τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐφαρμοστών διανυσμάτων, ἀρχῆς O .

Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$ καλεῖται **διανυσματικὴ ἀκτίς** τοῦ σημείου M .

Ἀλλαγὴ τῆς ἀρχῆς : Ἐστω O_1 μία νέα ἀρχή (σχ. 29), ὀριζομένη, ὡς πρὸς τὸ O , ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς τῆς ἀκτίνος $\vec{OO_1}$. Ἡ νέα διανυσματικὴ ἀκτίς $\vec{O_1M}$ τοῦ σημείου M συνδέεται μετὰ τῆς παλαιᾶς διανυσματικῆς ἀκτίνος $\vec{OM}$ διὰ τῆς σχέσεως :

$$\boxed{\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{O_1M} = \vec{OM} - \vec{OO_1}}$$

Διανυσματική εξίσωση εὐθείας (δ).— Παριστῶμεν διὰ τοῦ O τὴν ἀρχὴν τῶν διανυσμάτων καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Πρώτη περίπτωση : Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὠρισμένη δι' ἐνὸς σημείου A καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}$.

Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι τὸ Σύνολον τῶν σημείων M , τοιούτων ὥστε τὰ διανύσματα $\vec{AM}$ καὶ $\vec{u}$ νὰ εἶναι συγγραμμικά. Δηλαδή τοιαῦτα ὥστε :

$$\vec{AM} = \lambda \vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\text{ἢ} \quad \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} \quad \text{ἢ}$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} \quad (1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **διανυσματικὴ παραμετρικὴ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ)**.

Ἐὰν τὸ σημεῖον A συμπίπτῃ μὲ τὸ O , ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{OM} = \lambda \vec{u} \quad (1')$$

Δευτέρα περίπτωση.— Εὐθεῖα ὀριζομένη ὑπὸ δύο σημείων : Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὠρισμένη διὰ δύο σημείων, A καὶ B (σχ. 30).

Τὸ διάνυσμα $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ εἶναι τὸ διευθύνον διάνυσμα τῆς (δ). Ἄρα ἔχει διανυσματικὴν ἐξίσωσιν :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OA}) \quad \text{ἢ} \quad \vec{OM} = (1 - \lambda) \vec{OA} + \lambda \vec{OB} \quad (2) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ συμμετρικωτέραν μορφήν :

$$(2') \quad \vec{OM} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}, \quad \text{μὲ} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2), ἐπειδὴ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ λ προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὸ Σύνολον τῶν σημείων M τοῦ τμήματος AB ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὰς τοῦ λ , τοιαύτας ὥστε : $0 \leq \lambda \leq 1$. Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$M \in AB \iff \lambda \in [0, +1].$$

40. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. — Α')

Ἡ εὐθεῖα (δ) ὀρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$ καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

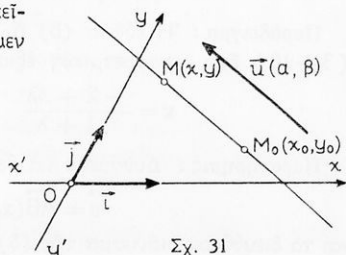
Ἐν σημεῖον $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου θὰ κείται ἐπὶ τῆς (δ), ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχωμεν

$$\vec{M_0M} = \lambda \vec{u}, \quad \text{δηλαδή :}$$

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = \lambda (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}),$$

ἐξ οὗ :

$$(I) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \lambda \\ y = y_0 + \beta \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$



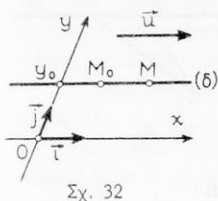
Σχ. 31

Αι εξισώσεις (I) καλούνται **παραμετρικαί εξισώσεις της ευθείας (δ)**.

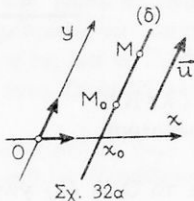
Μερικαί περιπτώσεις : 'Εάν $\alpha = 0$, τότε $x = x_0$, και ή ευθεία (δ) είναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy (σχ. 32α).

'Εάν $\beta = 0$, τότε $y = y_0$ και ή ευθεία (δ) είναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 32).

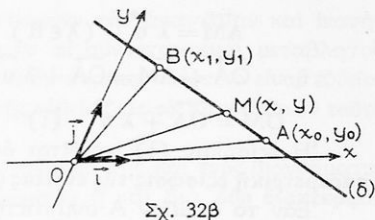
Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β καθορίζουν τὴν διεύθυνσιν τῆς ευθείας καὶ τὸ $\vec{u}(\alpha, \beta)$ εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.



Σχ. 32



Σχ. 32α



Σχ. 32β

Παράδειγμα : 'Η ευθεία (δ) ή διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_0(-4, +7)$ καὶ ὀριζομένη ὑπὸ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}(-2, 3)$ ἔχει παραμετρικὰς εξισώσεις :

$$x = -4 - 2\lambda \quad \text{καὶ} \quad y = 7 + 3\lambda.$$

B') 'Η ευθεία (δ) ὀρίζεται ἀπὸ δύο σημεία A (x_0, y_0) καὶ B (x_1, y_1).

Τὸ σημεῖον M (x, y), (σχ. 32β) θὰ κείται ἐπὶ τῆς ευθείας (δ) τῶν A, B ὅταν, καὶ μόνον ὅταν :

$$\vec{MA} + \lambda \vec{MB} = 0, \quad \eta \quad \vec{OA} - \vec{OM} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OM}) = 0,$$

ἐξ οὗ :

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}$$

'Η σχέσηis αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ Σύνολον τῶν δύο εξισώσεων :

$$(II) \quad \begin{cases} x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \end{cases} \quad \text{μὲ} \quad (\lambda \neq -1).$$

Παράδειγμα : 'Η ευθεία (δ) ή διερχομένη διὰ τῶν σημείων A ($-2, 5$) καὶ B ($3, -10$) ἔχει παραμετρικὰς εξισώσεις :

$$x = \frac{-2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{5 - 10\lambda}{1 + \lambda}$$

Παρατήρησις : Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα :

$$\vec{u} = \vec{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

εἶναι τὸ διευθύνον διάνυσμα τῆς (δ) καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν παραμετρι-

κὴν παράστασιν τῆς εὐθείας (δ), διερχομένης διὰ τοῦ $A(x_0, y_0)$ καὶ διευθύνσεως $\vec{u}$. Λαμβάνομεν τότε :

$$(III) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline x = x_0 + \mu(x_1 - x_0) & y = y_0 + \mu(y_1 - y_0) \\ \hline \end{array}$$

ἐνθα μ μεταβλητὴ παράμετρος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\lambda, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \mu.$$

Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (III) τὸ μ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὸ σημεῖον $M(x, y)$ διαγράφει ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν AB .

Ἄλλ' ὅταν τὸ μ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1, τότε τὸ M γράφει μόνον τὸ τμήμα AB .

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

41. ΘΕΩΡΗΜΑ.—Σύνολον σημείων ἀποτελεῖ εὐθεῖαν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, αἱ συντεταγμέναι (x, y) τῶν σημείων τούτων ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν : $Ax + By + \Gamma = 0$, ἐνθα οἱ συντελεσταὶ A καὶ B δὲν εἶναι συγχρόνως μηδὲν $(A, B, \Gamma$ ἀνεξάρτητοι τῶν $x, y)$.

Πράγματι, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (I) τῆς (§ 40, A).

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{ἀπαλείψωμεν τὸν } \lambda, \text{ εὐρίσκομεν :} \\ \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \end{array} \quad (1)$$

$$\eta \quad \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0.$$

Ἄν δὲ τεθῇ : $A = \beta, B = -\alpha, \Gamma = \alpha y_0 - \beta x_0$, λαμβάνομεν :

$$Ax + By + \Gamma = 0. \quad (2)$$

Ἀντιστρόφως : Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $A \neq 0$, τὸ ὅποιον εἶναι δυνατόν, ἀφοῦ οἱ A καὶ B δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἐὰν τεθῇ $y = k$, τότε ἐκ τῆς

$$(2) \text{ λαμβάνομεν } x = -\frac{Bk + \Gamma}{A}.$$

Ἄρα, τὸ σημεῖον $\left(-\frac{Bk + \Gamma}{A}, k\right)$ ἀνήκει εἰς τὸ Σύνολον.

Ἐστω λοιπὸν $P(x_0, y_0)$ ἐν σημείον τοῦ Συνόλου : Ἄρα :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0. \quad (3)$$

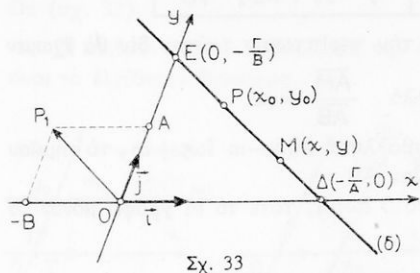
Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4)$$

Ἡ (4), συγκρινομένη μετὰ τὴν (1), ἐκφράζει ὅτι τὰ σημεία $M(x, y)$ κείνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ P , καὶ τῆς ὁποίας ἐν διευθύνον διάνυσμα εἶναι τὸ $\vec{u}(-B, A)$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) καλεῖται **γραμμικὴ** καὶ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y .

Παρατηρήσεις*: Ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, δέχεται ὡς διευθύνον διάνυσμα $\vec{OP}_1$, τὸ ἔχον συντεταγμένες προβολὰς $-B$ (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων) καὶ A (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων), (σχ. 33), ἔπεται ὅτι:

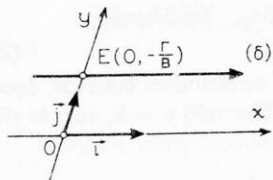


Σχ. 33

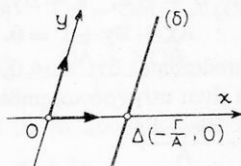
α') Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\boxed{A=0}$ (σχ. 33α), ὁπότε κατ' ἀνάγκην $B \neq 0$, διότι τὰ A, B δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα Oy εἰς τὸ σημεῖον $E\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

β) Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\boxed{B=0}$ (σχ. 34), καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα Ox εἰς τὸ σημεῖον $\Delta\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

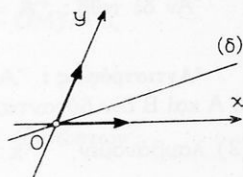
γ') Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\boxed{\Gamma=0}$, (σχ. 35), διότι αἱ συντεταγμέναι $(0,0)$ τοῦ O ἱκανοποιοῦν τὴν $Ax + By + \Gamma = 0$, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\Gamma = 0$.



Σχ. 33α



Σχ. 34



Σχ. 35

Εἰς τὸ (σχ. 33) ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν (δ) ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, ἡ ὁποία τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεία $\Delta\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ καὶ $E\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$, τὰ ὁποία προκύπτουν, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Ax + By + \Gamma = 0$ θέσωμεν $y=0$, $x=0$ ἀντιστοίχως καὶ ἐξ ἀρχῆς ὑποτεθῇ $A \cdot B \neq 0$.

Ἡ τετμημένη $\left(-\frac{\Gamma}{A}\right)$ τοῦ Δ καλεῖται **τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ), καὶ ἡ τεταγμένη $\left(-\frac{\Gamma}{B}\right)$ τοῦ E καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ). Ἀμφότεραι δὲ **συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας ταύτης.

Παράδειγμα 1ον: 'Η εξίσωσις $2x + 10 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Oy μὲ τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $x = -\frac{10}{2} = -5$.

Παράδειγμα 2ον: 'Η εξίσωσις $4y - 24 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Ox μὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $y = \frac{24}{4} = 6$.

Παράδειγμα 3ον: 'Η εξίσωσις $2x + 3y = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἁξόνων, καθόσον $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ ἢ $0 = 0$.

Παράδειγμα 4ον: 'Η εξίσωσις $4x + 3y - 12 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-3, 4)$ καὶ ἔχουσαν συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν

$$x = -\frac{\Gamma}{A} = -\frac{12}{4} = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = -\frac{\Gamma}{B} = -\frac{12}{3} = 4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων προκύπτει ὅτι: Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν εὐθεῖαν (δ) , ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῆς $x = -\frac{\Gamma}{A}$ καὶ $y = -\frac{\Gamma}{B}$ καὶ νὰ χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων τούτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44. Νὰ σχηματισθῇ ἡ εξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον M καὶ παραλ-
λήλου πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{V}$, ἂν:

$$1) \quad M(-2, 2) \quad \vec{V}(2, 3)$$

$$2) \quad M(-2, 3) \quad \vec{V}(0, 1)$$

$$3) \quad M(4, 0) \quad \vec{V}(2, 0)$$

$$4) \quad M(0, 0) \quad \vec{V}(2, 5)$$

$$5) \quad M(0, -5) \quad \vec{V}(0, 1)$$

$$6) \quad M(-3, 0) \quad \vec{V}(0, 2)$$

$$7) \quad M(4, -5) \quad \vec{V}(-1, 1)$$

$$8) \quad M(1, 2) \quad \vec{V}(2, -3)$$

καὶ ἀκολούθως νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι εἰς ἐκάστην περίπτωσιν.

45. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διευθύνοντα διανύσματα τῶν εὐθειῶν:

$$1) \quad x + 2y = 1$$

$$2) \quad 2x - y = 3$$

$$3) \quad 4x - 3y + 8 = 0$$

$$4) \quad 2x + 7y - 5 = 0$$

$$5) \quad 5x + 10y = 0$$

$$6) \quad 2x - 8y = 0.$$

46. Νὰ εὕρεθοῦν αἱ συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῶν εὐθειῶν:

$$1) \quad 3x - 4y - 12 = 0$$

$$2) \quad 3x - y + 5 = 0$$

$$3) \quad 2x - 6y = -3$$

$$4) \quad 4x + 6y + 3 = 0.$$

42. **ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.**—Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (δ) , ἐξι-
σώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Oy ($B \neq 0$).

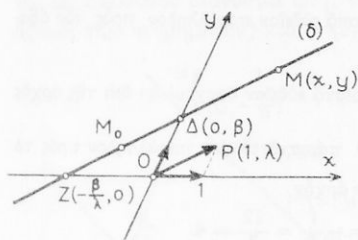
'Η δοθεῖσα εξίσωσις γράφεται:

$$\psi = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

$$\text{καὶ ἂν τεθῇ } \lambda = -\frac{A}{B}, \quad \beta = -\frac{\Gamma}{B}, \quad \text{τότε: } \boxed{y = \lambda x + \beta} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **ἀνηγμένη μορφή τῆς ἐξίσωσεως τῆς εὐθείας (δ)**.

Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα Oy εἰς τὸ σημεῖον $\Delta(0, \beta)$ καὶ εἶναι παράλληλος



Σχ. 36

πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{OP}(1, \lambda)$, καθόσον ἡ (1) γράφεται

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \beta}{\lambda}.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ συντελεστής β καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** καὶ ὁ συντελεστής λ εἶναι ὁ **συντελεστής * διευθύνσεως τῆς (δ)**.

Νέα ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ διευθύνσεως εὐθείας (δ).— Ἐστώσαν δύο σημεῖα $A_1(x_1, y_1)$ καὶ $A_2(x_2, y_2)$, μέ $(x_2 \neq x_1)$, τῆς εὐθείας (δ), ἐξίσωσεως $y = \lambda x + \beta$. Θὰ εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + \beta \\ y_2 &= \lambda x_2 + \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως δοθέντα ἀριθμὸν ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Ἐὰν $M(x, y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε τὸ διάνυσμα $\vec{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ θὰ ἔχη συντελεστὴν διευθύνσεως

$$\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad \text{ἐξ οὗ:}$$

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

(1)

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἐὰν τὸ M_1 κείται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy , τότε $x_1 = 0$ καὶ $y_1 = \beta$, καὶ ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν: $y = \lambda x + \beta$.

Μεταβαλλομένου τοῦ λ , ἡ (1) ὁρίζει τὴν **οἰκογένειαν** τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ $M_1(x_1, y_1)$, **ἐξαιρουμένης τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy .**

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $M(3, 5)$ καὶ ἐχοῦσης συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = -\frac{3}{4}$ εἶναι :

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 3) \iff 3x + 4y - 29 = 0.$$

* Καλούμεν συντελεστὴν διευθύνσεως εὐθείας τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως διανύσματος (μὴ μηδενικοῦ), παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Συντελεστής διευθύνσεως ἡ κλίσις ἐνὸς μὴ μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{u}(a, b)$ καλεῖται τὸ πηλίκον $\frac{b}{a} = \lambda$, ὅπου $a \neq 0$.

44. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ $A_1(x_1, y_1)$ ΚΑΙ $A_2(x_2, y_2)$.— Εἰς τὴν (§ 40, Β) εὗρομεν ὅτι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας A_1A_2 , ἂν $(x_2 \neq x_1)$, εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y) \end{aligned} \Rightarrow \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y}$$

ἡ ὁποία, βάσει τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν, γράφεται :

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y_1} \quad (1)$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Παράδειγμα : Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (8), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A_1(3, -2)$ καὶ $A_2(0, -1)$ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y + 3 = 0.$$

45. Η ΕΥΘΕΙΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $A_1(\alpha, 0)$, $A_2(0, \beta)$ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ Ο_x ΚΑΙ Ο_y ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ.— Ἀν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγούμενης παραγράφου θέσωμεν $x_1 = \alpha$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = \beta$, λαμβάνομεν :

$$\frac{x - \alpha}{y - 0} = \frac{0 - \alpha}{\beta - 0} \Leftrightarrow \beta x + \alpha y = \alpha \beta. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ εἶναι δυνατόν νὰ ὑποθέσωμεν $\alpha\beta \neq 0$ (διότι ἄλλως τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς A_1A_2 θὰ ἦτο ἢ $x = 0$ ἢ $y = 0$), ἡ (1) γράφεται :

$$\boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1} \quad (1')$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων $A_1(5, 0)$ καὶ $A_2(0, 3)$ ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 5y - 15 = 0.$$

46. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ (δ_1) ΚΑΙ (δ_2).

Ἐστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο εὐθεῖαι, ὧν αἱ Καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις, εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἄξόνων, εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases} & \begin{aligned} \mu\epsilon \quad & |A_1| + |B_1| > 0 \\ \mu\epsilon \quad & |A_2| + |B_2| > 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-B_1, A_1)$

καί ή (2) παριστᾷ εὐθεΐαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-B_2, A_2)$. Ἵνα αἱ εὐθεΐαι (1) καί (2) εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημένα. Ἀρα (§ 15), πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$(-B_1) \cdot A_2 - (A_1) \cdot (-B_2) = 0 \iff \boxed{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0} \quad (3)$$

Ὡστε : Ἵνα δύο εὐθεΐαι, ἐξισώσεων $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ καὶ $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ εἶναι παράλληλοι (ὑπὸ τὴν εὐρεΐαν σημασίαν), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης (3).

Ἡ (3) γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. (3')

Παρατήρησις : Ἡ συνθήκη παραλληλίας δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων αἱ Καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων εἶναι :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| > 0$$

καὶ $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0,$

δύναται νὰ γραφῇ :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ἀλλὰ μία τουλάχιστον τῶν } \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$$

νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Μερικὴ περίπτωσις : Ἐὰν αἱ εὐθεΐαι (δ_1) καὶ (δ_2) ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda_1 x + \beta_1 \\ y &= \lambda_2 x + \beta_2 \end{aligned} \right\} \text{ ἡ συνθήκη (3) γίνεται : } \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \implies \boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι :

Ἵνα δύο εὐθεΐαι, μὴ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα Oy , εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα 1ον : Αἱ εὐθεΐαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων $3x - 4y + 1 = 0$ καὶ $9x - 12y + 7 = 0$ ἀντιστοίχως, εἶναι παράλληλοι, διότι :

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 3(-12) - (-4) \cdot 9 = -36 + 36 = 0.$$

Παράδειγμα 2ον : Αἱ ἐξισώσεις $y = 5x - 3$ καὶ $y = 5x + 7$ παριστάνουν εὐθείας παράλληλους καὶ πρὸς τὴν εὐθεΐαν, ἐξισώσεως $y = 5x$, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$.

47. ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΠΡΟΣ ΔΟΘΕΙΑΝ ΕΥΘΕΙΑΝ.— Ἐστω (δ) εὐθεΐα, ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$ καὶ (δ_1) εὐθεΐα διερχομένη διὰ τοῦ $M_0(x_0, y_0)$ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν (δ) .

Ἐπειδὴ ἡ (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-B, A)$, ἐὰν $M(x, y)$

είναι τυχόν σημείον τῆς (δ_1) , τὸ διάνυσμα $\vec{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $\vec{u}$. Ἀρα

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0}$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα (δ) ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_0(3,-2)$ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ_1) , ἐξισώσεως $2x-3y-4=0$, ἔχει ἐξίσωσιν :

$$2(x-3) + (-3)(y+2) = 0 \iff 2x-3y-12=0.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

47. Νὰ μορφωθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(3,-4)$ καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως :

$$\begin{array}{l|l|l} 1) & \lambda = -2 & 3) & \lambda = -\frac{3}{4} & 5) & \lambda = 4,25 \\ 2) & \lambda = 5 & 4) & \lambda = \frac{5}{8} & 6) & \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

48. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων A_1, A_2 , εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις :

$$\begin{array}{l|l|l} 1) & A_1(1,2), & A_2(-2,3), & 5) & A_1(-3,2), & A_2(5,2), \\ 2) & A_1(-1,-2), & A_2(-3,-6), & 6) & A_1(0,0), & A_2(0,1), \\ 3) & A_1(3,0), & A_2(0,4), & 7) & A_1(-4,5), & A_2(2,1), \\ 4) & A_1(4,5), & A_2(4,7), & 8) & A_1(-1,2), & A_2(3,2). \end{array}$$

49. Νὰ εὑρεθῶν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα $(-3,2)$, $(3,-2)$ καὶ $(0,1)$.

50. Τοῦ προηγούμενου τριγώνου νὰ εὑρεθῶν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του.

51. Νὰ εὑρεθῶν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὁπὲρ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $(10,8)$, $(-3,9)$, $(-4,-4)$, $(9,-5)$.

52. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $(-3,-7)$, $(0,-2)$, $(6,8)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

53. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ x , εἰς τρόπον ὥστε τὰ σημεῖα $(x,-3)$, $(1,1)$ καὶ $(-4,3)$ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

54. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς ὁποίας αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι :

$$\begin{array}{l|l} 1) & 4 \text{ καὶ } 5 \\ 2) & -6 \text{ καὶ } 8 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3) & -5 \text{ καὶ } -3 \\ 4) & 7 \text{ καὶ } -2. \end{array}$$

55. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἐκάστης τῶν εὐθειῶν :

$$\begin{array}{l|l} 1) & 2x+5y-10=0 \\ 2) & 3x-4y+24=0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3) & 5x-4y-20=0 \\ 4) & x-3y+9=0. \end{array}$$

48. ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΜΠΗΠΤΟΥΣΑΙ. — Ἐστῶσαν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0,$$

μὴ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα Oy .

Οί συντελεστές διευθύνσεως αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $\lambda_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ καὶ $\lambda_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Αἱ δὲ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\beta_1 = -\frac{\Gamma_1}{B_1} \quad \text{καὶ} \quad \beta_2 = -\frac{\Gamma_2}{B_2}.$$

Ἀφοῦ αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) συμπίπτουν, ἔπεται ὅτι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{καὶ} \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \eta \quad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \text{καὶ} \quad -\frac{\Gamma_1}{B_1} = -\frac{\Gamma_2}{B_2},$$

$$\text{ἐξ ὧν λαμβάνομεν:} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (1)$$

Παρατήρησις: Ἡ συνθήκη (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Ὡστε:

Ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ὁμόνυμοι συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Παράδειγμα 1ον: Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $3x + 5y - 12 = 0$ καὶ $6x + 10y - 24 = 0$ συμπίπτουν, καθόσον εἶναι:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-12}{-24}.$$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β , ἵνα αἱ ἐξισώσεις $2\alpha x + 2y - 5 = 0$ καὶ $4x - 3y + 7\beta = 0$ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{2}{-3} = \frac{-5}{7\beta} \implies \frac{2\alpha}{4} = -\frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{-2}{3} = \frac{-5}{7\beta}$$

$$\text{ἐξ ὧν προκύπτει:} \quad \alpha = -\frac{4}{3} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{15}{14}.$$

49. ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΑΙ.—Ἐστώσαν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ἐὰν αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχουν διαφόρους συντελεστάς διευθύνσεως. Δηλαδή:

$$-\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2} \iff \boxed{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}$$

καὶ θὰ τέμνονται εἰς σημεῖον $M(x, y)$, τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι θὰ ἱκανοποιῦν ἐκάστην τῶν ἐξισώσεων (1), (2).

Ἄρα τὸ διατεταγμένον ζεύγος (x, y) θὰ εἶναι ἡ κοινὴ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τούτων.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὡστε:

“Ινα δύο ευθείαι τέμνονται, πρέπει και αρκεί οι συντελεσται διευθύνσεως αυτών να είναι διάφοροι (να πληροῦται ἡ συνθήκη $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$).

Παράδειγμα: Αἱ ευθείαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x + 4y - 26 = 0$ καὶ $4x - 3y + 3 = 0$, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι (x, y) εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος

$$\left. \begin{aligned} 2x + 4y - 26 &= 0 \\ 4x - 3y + 3 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies x = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = 5$$

καὶ καθόσον εἶναι $A_1B_2 - A_2B_1 = 2(-3) - 4 \cdot 4 = -6 - 16 = -22 \neq 0$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

56. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς Μ(x, y) ἐκάστης τῶν ευθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

- 1) $x - y = 1$, $x + y = 1$.
- 2) $6x - 2y - 8 = 0$, $3x + y = 14$.
- 3) $4x - 5y + 20 = 0$, $12x - 15y + 6 = 0$.
- 4) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 9 = 0$.
- 5) $2 - 3x = y$, $6x + 2y = 4$.

57. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του εἶναι: $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$.

58. Τοῦ προηγουμένου τριγώνου νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ.

59. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ευθειῶν, τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

60. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ευθείαι (δ_1) , (δ_2) , (δ_3) , (δ_4) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x - 3y + 5 = 0$, $6x + 10y + 15 = 0$, $6x - 9y - 20 = 0$, $3x + 5y - 20 = 0$, σχηματίζουν παραλληλόγραμμον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του.

61. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ευθεῖα (δ_1) , ἐξισώσεως $3x + 4y - 2 = 0$, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ευθεῖαν (δ_2) ἐξισώσεως $9x + 12y + 7 = 0$, καὶ συμπίπτει μετὰ τῆς ευθείας (δ_3) , ἐξισώσεως $15x + 20y - 10 = 0$.

50. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ.—

“Εστώσαν αἱ ευθείαι (δ_1) , (δ_2) , (δ_3) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1), \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0 \quad (3).$$

“Ινα αὗται ἔχουν κοινὸν σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$, πρέπει αἱ συντεταγμέναι:

$$x_0 = \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad \text{καὶ} \quad y_0 = \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad (k)$$

τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) νὰ ἐπαληθεύουν τὴν (3). “Ητοι:

$$A_3 \cdot \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + B_3 \cdot \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} + \Gamma_3 = 0$$

$$\eta \quad A_3(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) + B_3(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2) + \Gamma_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \quad (k_1)$$

καὶ ὑπὸ μορφήν ὀριζούσης:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν χάριν συντομίας.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_2 & \Gamma_2 \\ B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Gamma_2 & A_2 \\ \Gamma_3 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

τὰς ἐλάσσονας ὀρίζουσας τῆς Δ , τότε ἡ Δ γράφεται :

$$\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 \quad (5)$$

καὶ διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α) Αἱ τρεῖς ἐλάσσονες εἶναι μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ A_2, B_2, Γ_2 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς A_3, B_3, Γ_3 καὶ αἱ εὐθεῖαι (2) καὶ (3) ταυτίζονται. Οἱ A_1, B_1, Γ_1 δύνανται νὰ εἶναι ἢ οὐ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς A_2, B_2, Γ_2 . Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ταυτίζονται, εἰς τὴν δευτέραν, ἡ πρώτη ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τῶν δύο τελευταίων, αἱ ὅποιαι ταυτίζονται.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν : $\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 = 0$.

β) Ἐκ τῶν τριῶν ὀριζουσῶν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ἡ μία, ἔστω ἡ $\Delta_3 \neq 0$. Τότε αἱ (2) καὶ (3) ἔχουν μίαν κοινὴν λύσιν x_0, y_0 , πεπερασμένην, τὴν (κ). Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν (k_1) .

γ) Ἐκ τῶν τριῶν ὀριζουσῶν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ αἱ δύο, ἔστω $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$.

Τότε $\Delta_3 = 0$ ἢ $\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$ καὶ αἱ (2), (3) εἶναι παράλληλοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, διὰ νὰ ἔχουν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κοινὸν σημεῖον (τὸ ∞), θὰ πρέπει νὰ εἶναι παράλληλοι.

Ἄρα :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Ὅταν ὁμως συμβαίνει τοῦτο, ἡ Δ εἶναι πάλιν μηδέν.

Ἡ συνθήκη $\Delta = 0$ εἶναι, ἐπομένως : ἀναγκαῖα, ἵνα εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις αἱ εὐθεῖαι $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκής.

Παράδειγμα : Αἱ εὐθεῖαι $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$, ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$3x - 5y - 10 = 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad 21x - 11y - 31 = 0,$$

ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἡ ὀρίζουσα :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & -11 & -31 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -31 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & -31 \end{vmatrix} + (-10) \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 21 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

51. ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Θεωροῦμεν δύο εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \quad (2)$$

τεμνομένας εἰς τι σημεῖον $M(x_1, y_1)$. Πᾶσα εὐθεῖα (δ_3) διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$(\delta_3) : A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \quad (3)$$

διότι, ἀφοῦ τὸ $M(x_1, y_1)$ εἶναι τομὴ τῶν (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι :

$$(4) \quad A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{Ἐὰν} \quad k \neq 0, \quad \text{τότε} \quad k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0 \quad (6)$$

ὁπότε διὰ προσθέσεως τῶν (4) καὶ (6), λαμβάνομεν :

$$A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0 \quad (7)$$

Ἡ (7) ἐκφράζει ὅτι τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \quad (8)$$

Παρατήρησης : 'Εάν αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι παράλληλοι, τότε ἡ (8) παριστᾷ σύστημα παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) . Διότι τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \implies \frac{A_1}{kA_2} = \frac{B_1}{kB_2} \implies \frac{A_1 + kA_2}{A_1} = \frac{B_1 + kB_2}{B_1},$$

ἢ ὅποια σχέσις ἐκφράζει ὅτι αἱ (δ_1) καὶ (δ_3) εἶναι παράλληλοι.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_1(2,1)$ καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως: $3x - 5y - 10 = 0$ καὶ $x + y + 1 = 0$.

Λύσις : 'Η ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$3x - 5y - 10 + k(x + y + 1) = 0 \quad (9)$$

'Επειδὴ τὸ $M_1(2, 1)$ κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἔπεται :

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 10 + k(2 + 1 + 1) = 0 \implies k = \frac{9}{4}, \text{ ὅτε ἡ (9) γίνεται :}$$

$$21x - 11y - 31 = 0.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , ἐξισώσεων :

$$2x + y + 1 = 0 \text{ καὶ } x - 2y + 1 = 0$$

καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθείαν (δ_3) , ἐξισώσεως $4x - 3y - 7 = 0$.

Λύσις : 'Η ζητουμένη θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$2x + y + 1 + k(x - 2y + 1) = 0$$

$$\text{ἢ} \quad (2 + k)x + (1 - 2k)y + (1 + k) = 0 \quad (10)$$

'Εὰν αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (δ_3) , θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{2 + k}{4} = \frac{1 - 2k}{-3} \implies k = 2$$

καὶ ἡ (10) γίνεται :

$$4x - 3y + 3 = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὅποια διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x - 3y + 2 = 0$, $3x - 4y - 2 = 0$ καὶ τοῦ σημείου $O(0, 0)$.

63. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , (δ_3) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x - 3y + 1 = 0$, $x - y = 0$, $3x + 4y - 2 = 0$ καὶ παραλλήλων πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του.

64. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὅποια διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $2x + 5y - 3 = 0$, $3x - 2y - 1 = 0$ καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $x - y = 0$, $x + 3y - 6 = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

52. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ. — Θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma & (1) \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 & (2) \end{cases}$$

'Εστῶσαν (δ) καὶ (δ_1) αἱ εὐθεῖαι, ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εἰς τυχὸν σύστημα συντεταγμένων. Τὸ σημεῖον $M(x, y)$, ἐὰν ὑπάρχη, κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν, ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι εἶναι λύσις τοῦ συστήματος (I). Ἀντιστρόφως, πᾶσα

λύσεις (x, y) τοῦ συστήματος (1), δίδει σημείον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐ-
θειῶν (δ) καὶ (δ_1) .

1ον : Ἐὰν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύ-
θυνσιν. Θὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημείον, M , καὶ ἓν μόνον. Τὸ σύστημα (1) ἐπιδέχε-
ται μίαν μοναδικὴν λύσιν, ἡ ὁποία παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ **Gramer** :

$$x = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

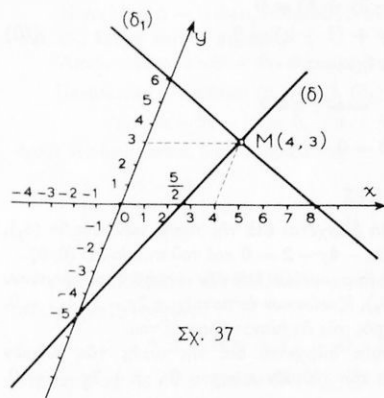
2ον : Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} \neq \frac{\gamma}{\gamma_1}$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) εἶναι παράλληλοι ὑπὸ
τὴν στενὴν σημασίαν, δηλαδή δὲν ἔχουν κοινὸν σημείον. Τὸ σύστημα εἶναι
ἀδύνατον.

3ον : Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) συμπίπτουν. Τὸ σύ-
στημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Εἶναι **ἀόριστον**.

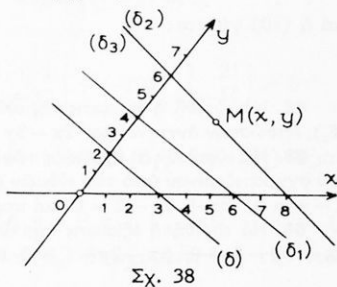
Παράδειγμα 1ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως: $2x - y = 5$ καὶ
 $3x + 4y = 24$, τέμνονται εἰς τὸ σημείον M , τοῦ ὁποῖου αἱ συντεταγμέναι εἶναι λύσεις τοῦ συστή-
ματος :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \implies x = 4, y = 3.$$

Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς μέν (δ)
εἶναι $\frac{5}{2}$ καὶ -5 , τῆς δὲ (δ_1) εἶναι αἱ 8 καὶ 6,
ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 37).



Σχ. 37



Σχ. 38

Παράδειγμα 2ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) , ἐξισώσεων $2x + 3y - 6 = 0$ καὶ $4x + 6y - 24 = 0$
εἶναι παράλληλοι, διότι $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-6}{-24}$, αἱ δὲ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν παρέχονται ὑπὸ τοῦ
ἀνωτέρω (σχ. 38).

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 24 \end{array} \right\} \text{ εἶναι ἀδύνατον.}$$

Παράδειγμα 3ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ_2) καὶ (δ_3) ἐξισώσεων $3x + 4y - 24 = 0$ καὶ $6x + 8y = 48$
ἀντιστοίχως, συμπίπτουν, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 38).

Ἄρα, πᾶν σημείον $M(x, y)$ τῆς μίᾱς ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας
τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 & (1) \\ 6x + 8y - 48 = 0 & (2) \end{cases}$$

Διότι, διὰ τυχούσας τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (1), ἔστω $y = 0$, εὐρίσκομεν $x = 8$. Τὸ ζεύγος $(x = 8, y = 0)$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2). Ἦτοι $6 \cdot 8 + 8 \cdot 0 - 48 = 0$ ἢ $48 - 48 = 0$.

Ὁμοίως, διὰ $y = 3$, ἡ (1) δίδει $x = 4$. Τὸ ζεύγος τοῦτο $(x = 4, y = 3)$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2), ἦτοι: $6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 - 48 = 24 + 24 - 48 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα τῶν ἀκολουθῶν ἐξισώσεων :

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} 4x - 10y = -27 \\ 2x - 14y = -36 \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} 6x - 3y = -26 \\ 15x + 2y = -27 \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 6y = -17 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = -31 \end{cases}$ |

66. Νὰ ὀρίσθῃ ὁ k , ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ παριστῶμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων: $3x - 4y + 15 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$, $kx - (2k - 1)y + 9k - 13 = 0$ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

67. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ , αἱ εὐθεῖαι αἱ ὀριζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκολουθῶν ἐξισώσεων διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου, τοῦ ὁποῖου νὰ ὀρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι :

- $3x - 2y + 5 + \mu(x - 2y + 4) = 0$,
- $(2\mu - 3)x + (7 - 2\mu)y + 4 = 0$,
- $\mu x + (5\mu - 3)y + 9 - 3\mu = 0$,
- $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu + 1)y - 5\mu^2 + 4\mu - 3 = 0$.

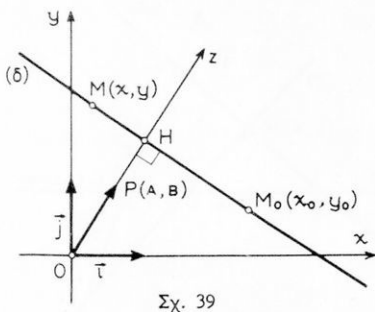
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΣΠΟΥΔΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΙΣ ΤΟ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

53. Η ΕΥΘΕΙΑ ΕΙΣ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥΣ ΑΞΟΝΑΣ.— Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐξητάσαμεν τὴν εὐθείαν καὶ τὰς ιδιότητας αὐτῆς, ἀναφερομένην εἰς τυχόντας ἄξονας συντεταγμένων.

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὴν εὐθείαν εἰς ὀρθοκανονικοὺς ἄξονας συντεταγμένων. Ἄπαντα τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Πέραν δὲ τούτων καὶ τὰ ἀκόλουθα.

54. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων, ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\vec{OP}$ (A, B).



Σχ. 39

Ἀπόδειξις : Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἄξόνων xOy (σχ. 39) θεωροῦμεν τὴν εὐθείαν (δ), ἐξισώσεως :

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad (1)$$

Ἐστώσαν $M_0(x_0, y_0)$ σταθερὸν σημεῖον τῆς (δ), καὶ $M(x, y)$ μεταβλητὸν σημεῖον αὐτῆς. Θὰ εἶναι :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3)$$

Θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\vec{OP}(A, B)$. Ἐπειδὴ $x - x_0$, καὶ $y - y_0$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος $\vec{M_0M}$, καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου $\vec{OP} \cdot \vec{M_0M}$, ἔπεται ὅτι :

$$\vec{OP} \cdot \vec{M_0M} = 0.$$

Ἄρα τὸ διάνυσμα $\vec{M_0M}$ καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι κάθετα πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{OP}$.

Παράδειγμα 1ον : Ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $5x + 8y - 10 = 0$ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{OP}(5, 8)$.

Παράδειγμα 2ον : Ἐὰν ἡ (δ) ἔχῃ ἐξίσωσιν $y = \lambda x + \beta$, τότε :

$$(δ) \perp \vec{OP}(\lambda, -1).$$

55. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.— Πάσα εὐθεΐα κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\vec{OP}(A, B)$ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς : $Ax + By + \Gamma = 0$.

Ἀπόδειξις : Ἐστω $M_0(x_0, y_0)$ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (δ) . Ἴνα σημεῖον τι $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐπὶ τῆς (δ) , πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\vec{OP} \cdot \vec{M_0M} = 0$, ἥτοι

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

ἢ

$$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0 \quad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $\Gamma = -(Ax_0 + By_0)$, ἡ (1) γίνεται : $Ax + By + \Gamma = 0$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι : πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $Ax + By + k = 0$, ($k \in \mathbb{R}$) εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{OP}(A, B)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεΐαν (δ) , ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$.

Παρατήρησις : Ἡ παράστασις $E = Ax + By$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\vec{OP}(A, B)$ καὶ $\vec{OM}(x, y)$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) γράφεται :

$$Ax + By = -\Gamma \iff \vec{OP} \cdot \vec{OM} = -\Gamma.$$

Ἐὰν H εἶναι ἡ τομὴ τῶν (δ) καὶ OP , τότε :

$$\vec{OP} \cdot \vec{OM} = \vec{OP} \cdot \vec{OH} \implies \boxed{\Gamma = -\vec{OP} \cdot \vec{OH}}$$

Παράδειγμα : Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκάθετου εὐθυγράμμου τμήματος.

Λύσις : Ἐστωσαν $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος A_1A_2 . Ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\vec{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου $M_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ τοῦ τμήματος A_1A_2 .

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκάθετου τοῦ τμήματος A_1A_2 εἶναι :

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

56. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Γνωρίζομεν ὅτι αἱ εὐθεΐαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ καὶ $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι πρὸς τὰ διανύσματα $\vec{OP}_1(A_1, B_1)$ καὶ $\vec{OP}_2(A_2, B_2)$. Ἴνα αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ διανύσματα $\vec{OP}_1$ καὶ $\vec{OP}_2$ νὰ εἶναι κάθετα. Ἄρα (§ 32).

$$\vec{OP}_1 \cdot \vec{OP}_2 = 0 \iff \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad (1)$$

Παράδειγμα : Αἱ εὐθεΐαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $4x + 8y - 7 = 0$ καὶ $6x - 3y + 11 = 0$ εἶναι κάθετοι, διότι :

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 4 \cdot 6 + 8(-3) = 24 - 24 = 0.$$

Ἡ συνθήκη: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ γράφεται: $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$, ἂν $B_1 B_2 \neq 0$.

Ἐπειδὴ δὲ $-\frac{A_1}{B_1} = \lambda_1$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (δ_1) , καὶ $-\frac{A_2}{B_2} = \lambda_2$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (δ_2) , ἔπεται:

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1} \quad (2)$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:

Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα) τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς -1 .

Παράδειγμα: Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως: $y = 7x + 4$ καὶ $y = -\frac{1}{7}x + 15$ εἶναι κάθετοι, διότι:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1.$$

57. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{u}(A, B)$.—Ἐὰν $M(x, y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε:

$$\vec{u} \cdot \vec{M_0 M} = 0 \iff \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} \quad (1)$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις.

58. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ (δ) ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ: $Ax + By + \Gamma = 0$.

Ἄν $M(x, y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας (δ_1) , τότε τὸ διάνυσμα $\vec{M_0 M}(x - x_0, y - y_0)$ θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(A, B)$. Ἀρα τὰ διανύσματα $\vec{M_0 M}$ καὶ $\vec{u}$ θὰ εἶναι παράλληλα. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} \iff \boxed{B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0} \quad (1)$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις.

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ_1) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $M_0(3, 5)$ καὶ κάθετου πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) , ἐξισώσεως $4x - 9y + 7 = 0$, εἶναι:

$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y - 5}{-9} \iff 9x + 4y - 47 = 0.$$

68. Νά αποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $3x + 4y - 2 = 0$ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $8x - 6y + 5 = 0$.

69. Νά αποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$x - 3y + 2 = 0$, $12x + 4y + 31 = 0$, $2x - 6y - 7 = 0$, $9x + 3y - 40 = 0$
εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ἐνὸς ὀρθογωνίου. Νά κατασκευασθῇ τοῦτο.

70. Νά εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον :

1) $(-1, 2)$ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $3x - 4y + 1 = 0$

2) $(-7, 2)$ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $x - 3y + 4 = 0$.

71. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α $(-3, 2)$, Β $(3, -2)$ καὶ Γ $(0, -1)$. Νά εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑψῶν αὐτοῦ καὶ νά αποδειχθῇ ὅτι τὰ ὑψη ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

72. Νά εὐρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ νά αποδειχθῇ ὅτι αὐτὰ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

59. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων xOy (σχ. 40) θεωροῦμεν δύο εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

Ἄν αὗται τέμνωνται, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν ἐπ' αὐτῶν καθέτων διανυσμάτων $\vec{N}_1(A_1, B_1)$ καὶ $\vec{N}_2(A_2, B_2)$ ἢ παραπληρωματικαὶ τούτων.

Ἐστω θ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων τούτων, τοιαύτη ὥστε $0 \leq \theta \leq \pi$.

Κατὰ τὴν (§ 31) θὰ εἶναι :

$$\cos \theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

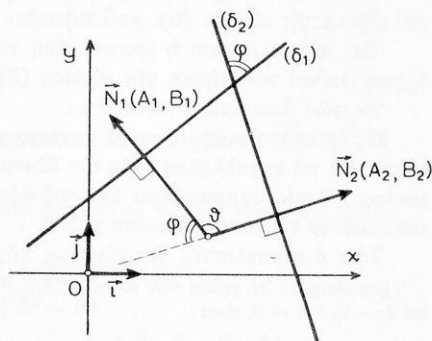
Ἐὰν φ εἶναι ἡ ὀξεία γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) , τότε $\theta + \varphi = \pi$ καὶ ἄρα $\sin \varphi = \pm \cos \theta$. Ἐπειδὴ ὑπετέθη $\varphi < \frac{\pi}{2}$, ἔπεται $\sin \varphi > 0$. Καὶ ἄρα :

$$\sin \varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (4)$$

Παρατηρήσεις : Α) Ἐὰν $(\delta_1) \perp (\delta_2)$, τότε $\sin \varphi = 0$, καὶ ὁ τύπος (4) δίδει :

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

σχέσις εὐρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 56).



Σχ. 40

Β) Γνωρίζομεν ὅτι :

$$1 + \varepsilon \varphi^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \iff \varepsilon \varphi^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = \frac{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) - (A_1 A_2 + B_1 B_2)^2}{(A_1 A_2 + B_1 B_2)^2}$$

ἐξ οὗ :

$$\varepsilon \varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{|1 + \lambda_1 \lambda_2|} \quad (5)$$

καθόσον $\varepsilon \varphi > 0$, διότι $\varphi < 90^\circ$ καὶ λ_1, λ_2 αἱ συντελεσται διευθύνσεως τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) .

Ἄν αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι παράλληλοι, τότε :

$$\varphi = 0 \iff A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0 \quad (6)$$

σχέσις εὐρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 46).

Γ) Ἐὰν ὁ τύπος (5) ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν (Ox) , ἐξισώσεως $(y = 0)$, καὶ τῆς εὐθείας (δ) , ἐξισώσεως $y = \lambda x + \beta$, τότε :

$$\varepsilon \varphi = |\lambda|$$

Ἐὰν $\lambda > 0$, ἡ ὁξεία γωνία φ εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς (δ) , τοῦ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐὰν $\lambda < 0$, ἡ ὁξεία γωνία φ εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ) , τοῦ κάτωθεν τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐπὶ πλέον λ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ) , τοῦ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων ὁ συντελεστής διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας (δ) , μὴ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy , ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ) τοῦ κειμένου εἰς τὸ ἡμιπέδον $y \geq 0$.

Τότε ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (δ) καλεῖται **κλίσις** αὐτῆς.

Παράδειγμα : Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $7x - 3y + 6 = 0$ καὶ $2x - 5y - 4 = 0$, εἶναι :

$$\varepsilon \varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = |-1| = 1 \implies \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \eta \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία (ὁξεία) τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $7x + 3y + 6 = 0$ καὶ $2x + 5y - 4 = 0$.
74. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $A(10,8)$, $B(-3,9)$, $\Gamma(-4,-4)$, $\Delta(9,-5)$ καὶ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου τούτου.
75. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν, ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :
 - 1) $2x - 5y + 1 = 0$ καὶ $x - 2y + 3 = 0$
 - 2) $x + y + 1 = 0$ καὶ $x - y + 1 = 0$
 - 3) $6x - 3y + 3 = 0$ καὶ $x = 6$.
76. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ_1) , τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $A(3,5)$ καὶ σχηματίζουσης γωνίαν $\frac{\pi}{3}$ μετὰ τῆς εὐθείας (δ_2) , ἐξισώσεως $x - y + 6 = 0$.

77. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν εὐθείαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ $A(1, -3)$ καὶ τέμνουσαν τὴν (δ) , ἐξίσωσας $x + 2y + 4 = 0$ ὑπὸ γωνίαν 135° .

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ὅπερ ἔχει κορυφὰς $A(0,0)$, $B(-4,4)$ καὶ $\Gamma(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

60. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ (δ) , ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ: $Ax + By + \Gamma = 0$, ἂν $|A| + |B| > 0$.

Ἐστω $\vec{OZ}$ ὁ ἄξων ὁ ἀγόμενος ἐκ τοῦ O καθέτως πρὸς τὴν εὐθείαν (δ) καὶ προσανατολισμένος κατὰ τὴν φοράν τοῦ διανύσματος $\vec{u}(A, B)$ καὶ ἔστω $H(x_1, y_1)$ ἡ προβολὴ τοῦ M_0 ἐπὶ τὴν (δ) .

Θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{u} \cdot \vec{HM}_0 = u \cdot \overline{HM}_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0,$$

δηλαδή :

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0$$

ἐξ οὗ :

$$\overline{HM}_0 = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ H κεῖται ἐπὶ τῆς (δ) , θὰ εἶναι $Ax_1 + By_1 = -\Gamma$ καὶ ἡ (1) γίνεταί :

$$\overline{HM}_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (\overline{HM}_0 \text{ μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος } \vec{OZ}).$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ M_0 (κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν) ἀπὸ τὴν εὐθείαν (δ) δίδεταί ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$d = |M_0H| = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2)$$

Ἡ ἀπόστασις OK τῆς ἀρχῆς O τῶν ἄξόνων ἀπὸ τὴν (δ) εἶναι :

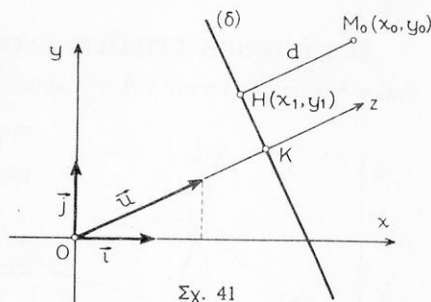
$$OK = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3)$$

Παράδειγμα 1ον : Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_0(2,5)$ ἀπὸ τὴν εὐθείαν (δ) , ἐξίσωσας $3x + 4y - 10 = 0$ εἶναι :

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 20 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

Παράδειγμα 2ον : Ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ τῶν ἄξόνων ἀπὸ τὴν εὐθείαν (δ) , ἐξίσωσας $6x + 8y - 9 = 0$ εἶναι :

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{10} = \frac{9}{10} = 0,9.$$



Σχ. 41

79. Δίδονται τὰ σημεία $A(1,5)$, $B(-3,3)$ καὶ $\Gamma(6,2)$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

80. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεία 1) $A(2,3)$, $B(-4,0)$, $\Gamma(-1,-4)$ καὶ 2) $A(3,5)$, $B(1,-2)$, $\Gamma(6,-5)$.

81. Δίδεται τὸ σημείον $A(4,6)$ καὶ αἱ εὐθεῖαι (δ) , ἐξισώσεων :
 $(\mu-1)x - (2\mu-3)y - 4\mu + 1 = 0$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ὁ μ , εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ A ἀπὸ τὴν (δ) νὰ εἶναι 3.

82. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) , ἡ ὁποία ἀπέχει ἰσάκεις τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐξισώσεων ἀντιστοίχως : $3x + 4y - 5 = 0$ καὶ $3x + 4y + 7 = 0$.

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν (δ) καὶ (δ_1) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $x + 2y - 1 = 0$, $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 1 = 0$. Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν ;

61. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— Ἐστω $\vec{OI}$ (συνω, ημω) μοναδιαῖον διάνυσμα κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) , $\vec{OZ}$ ὁ ἄξων τοῦ μοναδιαίου τοῦ-του διανύσματος $\vec{OI}$ καὶ H τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (δ) καὶ τοῦ $\vec{OZ}$.

Θέτομεν $\overline{OH} = p$. Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι τὸ Σύνολον τῶν σημείων $M(x,y)$, διὰ τὰ ὁποῖα :

$$\vec{OI} \cdot \vec{HM} = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\S 55 \text{ παρατήρησις})$$

$$\vec{OI} \cdot \vec{OM} = \vec{OI} \cdot \vec{OH} = p \quad \text{ἢ}$$

$$x \text{ συνω} + y \text{ ημω} = p \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ **κανονικὴ ἐξίσωσις** τῆς (δ) καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν **Hesse**.

Προφανῶς, ἡ θέσις τῆς εὐθείας (δ) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως $\overline{OH} = p$, θεωρουμένης πάντοτε θετικῆς, καὶ τῆς γωνίας ω , θεωρουμένης καὶ ταύτης θετικῆς, εἰς τρόπον ὥστε : $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Παράδειγμα : Ἐὰν $\omega = \frac{\pi}{3}$ καὶ $OH = \frac{5}{2}$, ἡ ἐξίσωσις τῆς (δ) εἶναι :

$$x \cdot \text{συν} \frac{\pi}{3} + y \cdot \text{ημ} \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} \iff \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} = 0 \iff x + \sqrt{3} \cdot y - 5 = 0.$$

62. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ $Ax + By + \Gamma = 0$ ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ ΑΥΤΗΣ.— Ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὴν γωνίαν ω καὶ τὸ p , εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις :

$$(1) \quad x \text{ συν} \omega + y \text{ ημ} \omega - p = 0 \quad \text{καὶ} \quad Ax + By + \Gamma = 0 \quad (2)$$

νὰ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\frac{\text{συν} \omega}{A} = \frac{\text{ημ} \omega}{B} = \frac{-p}{\Gamma} = \rho \implies \text{συν} \omega = \rho A, \quad \text{ημ} \omega = \rho B, \quad -p = \rho \Gamma$$

$$\text{"Οθεν: } \rho^2(A^2 + B^2) = \sin^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1 \implies \rho = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

και κατ' ακολουθίαν :

$$(4) \quad \sin \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{και} \quad \eta\mu \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

"Αρα ή (1) γράφεται :

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{\Gamma}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (6)$$

Σημείωσις : 'Εάν $p > 0$, εκ τής σχέσεως $-p = \rho\Gamma$ έπεται ότι οί ρ και Γ θά είναι **ετερόσημοι** αριθμοί, εκτός εάν $\Gamma = 0$.

'Εάν $\Gamma = 0$, τότε $p = 0$ και κατ' ακολουθίαν $\omega < \pi$. "Αρα $\eta\mu\omega > 0$, όποτε εκ τής σχέσεως $\eta\mu\omega = \rho B$, έπεται ότι οί ρ και B είναι **όμόσημοι** αριθμοί.

'Εκ τών άνωτέρω έπεται ό **χρήσιμος κανών**.

ΚΑΝΩΝ : Διά νά αναγάγωμεν την $Ax + By + \Gamma = 0$ εις την καν. μορφήν :

1ον : Εύρίσκομεν την τιμήν : $\sqrt{A^2 + B^2}$,

2ον : Δίδομεν εις την τιμήν $\sqrt{A^2 + B^2}$ αντίθετον πρόσσημον του Γ , ή αν $\Gamma = 0$, το αυτό πρόσσημον με το του B , και :

3ον : Διαιρούμεν άμφοτέρα τά μέλη τής $Ax + By + \Gamma = 0$ διά του αποτελέσματος του 2ον :

Προκύπτει ούτως ή ζητουμένη εξίσωσις :

Παράδειγμα : "Εστω ή εξίσωσις $4x - 3y + 15 = 0$. Είναι :

$$\rho = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{16 + 9} = -5, \text{ διότι πρέπει } \rho\Gamma < 0. \text{ Διαιρούντες διά } -5, \text{ λαμβάνομεν}$$

$$\text{την εξίσωσιν : } -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0, \text{ ήτις είναι ή ζητουμένη, με } \sin\omega = -\frac{4}{5}, \eta\mu\omega =$$

$$= \frac{3}{5} \text{ και } \rho = 3.$$

A Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

84. Νά μορφωθούν αι εξισώσεις και νά κατασκευασθούν αι ευθείαι, διά τας όποιās είναι :

1. $\omega = 0,$	$\rho = 5$	5. $\omega = \frac{\pi}{2},$	$\rho = 10$
2. $\omega = \frac{3\pi}{2},$	$\rho = 3$	6. $\omega = \frac{2\pi}{3},$	$\rho = 2$
3. $\omega = \frac{\pi}{4},$	$\rho = 3$	7. $\omega = \pi,$	$\rho = 5$
4. $\omega = \frac{7\pi}{4},$	$\rho = 4$	8. $\omega = \frac{5\pi}{4},$	$\rho = 1.$

85. Νά αναχθούν υπό την κανονικήν μορφήν αι εξισώσεις :

1. $3x + 4y - 10 = 0$	3. $x + y + 8 = 0$
2. $5x - 12y + 39 = 0$	4. $\sqrt{3} - y = 0.$

63. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ (δ) ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ
 $x \text{ συν } \omega + y \text{ ημ } \omega - p = 0.$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (σχ. 41) εἶναι $u = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\text{συν}^2 \omega + \eta\mu^2 \omega} = 1$
 καὶ ὁ τύπος (2) τῆς (§ 60) γίνεταί :

$$d = |x_0 \text{ συν } \omega + y_0 \text{ ημ } \omega - p| \quad (1)$$

Ἐὰν τὸ M_0 ἔχη τὴν θέσιν $O(0, 0)$ τῶν ἀξόνων, τότε ἡ (1) γίνεταί :

$$d = |p|. \quad (2)$$

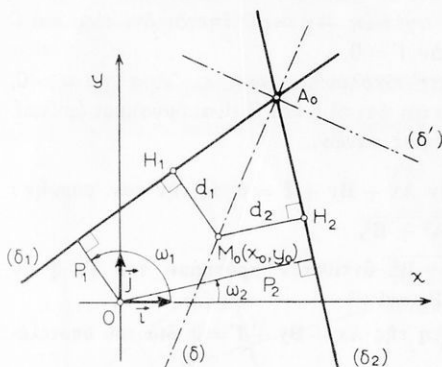
64. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.—

Ἐστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο εὐ-
 θεῖαι ἐξισώσεις :

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

Θὰ ζητήσωμεν νὰ ἐκφράσω-
 μεν ὅτι τὸ σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$
 κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης
 τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας A_0 τῶν
 εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) . Ἀναγκαίᾳ
 καὶ ἰκανῇ συνθήκῃ εἶναι : αἱ ἀπο-
 στάσεις τοῦ $M_0(x_0, y_0)$ ἀπὸ τὰς
 (δ_1) καὶ (δ_2) νὰ εἶναι ἴσαι : Δηλα-
 δὴ : $MH_1 = MH_2$



Σχ. 43

$$\eta \quad \frac{|A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ μία τῶν διχοτόμων ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \quad (3)$$

καὶ ἡ ἄλλη διχοτόμος θὰ ἔχη ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \quad (4)$$

Σημείωσις : Διὰ νὰ εὐρωμεν ποία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) παριστᾷ τὴν ἐσωτερικὴν
 καὶ ποία τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A_0 , ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Θεωροῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν αὐτῶν :

$$(\delta_1) : x \text{ συν } \omega_1 + y \text{ ημ } \omega_1 - p_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad (\delta_2) : x \text{ συν } \omega_2 + y \text{ ημ } \omega_2 - p_2 = 0.$$

Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ σημείου τῆς εὐθείας :

$$(\delta) : x \text{ συν } \omega_1 + y \text{ ημ } \omega_1 - p_1 + k(x \text{ συν } \omega_2 + y \text{ ημ } \omega_2 - p_2) = 0$$

εἶναι $-k$, ($k \in \mathbb{R}$).

Πράγματι, έστω $M_0(x_0, y_0)$ τυχόν σημείον της (δ) . Θα έχωμεν :

$$x_0 \sigma \nu \omega_1 + y_0 \eta \mu \omega_1 - p_1 + k (x_0 \sigma \nu \omega_2 + y_0 \eta \mu \omega_2 - p_2) = 0,$$

ΕΞ ΟΥ :

$$-k = \frac{x_0 \sigma \nu \omega_1 + y_0 \eta \mu \omega_1 - p_1}{x_0 \sigma \nu \omega_2 + y_0 \eta \mu \omega_2 - p_2} \quad (5)$$

Ο αριθμητής της (5) είναι η απόσταση της (δ_1) από το M_0 , και ο παρονομαστής η απόσταση της (δ_2) από το M_0 . Κατ' ακολουθίαν, $-k$ είναι ο λόγος των αποστάσεων των (δ_1) και (δ_2) από το M_0 της ευθείας (δ).

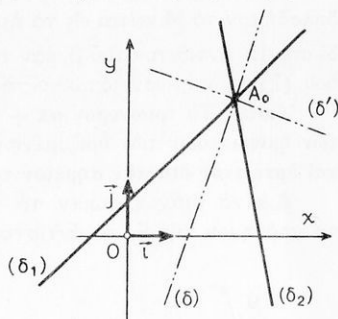


Ἐὰν $k = \pm 1$, ἡ (δ) εἶναι μία ἢ ἡ ἄλλη τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) .

Ἡ γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2), ἐντὸς τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ ἀρχὴ O τῶν ἀξόνων, ἢ ἡ κατακορυφήν της, εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2). Αἱ ἄλλαι εἶναι ἐξωτερικαὶ τῶν εὐθειῶν τούτων.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς (§ 64) ἔπεται ὅτι ἡ (δ) κείται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας τῶν (δ₁) καὶ (δ₂), ὅταν $k < 0$ καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν, ὅταν $k > 0$.

Ἐάν ἡ ἀρχὴ O κείται ἐπὶ τῆς (δ_1) ἢ τῆς (δ_2) , θὰ
πρέπει νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) καὶ
αἱ γωνίαι εἰς τὰς ὁποίας $k > 0$ ἀντιστοιχοῦν αἱ διχοτόμοι (ἐσωτερικῇ-ἐξωτερικῇ) κατὰ
τὸ σχῆμα. Σχ. 44



Σχ. 44

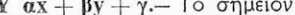
ΑΣΚΗΣΙΣ

86. Να μορφωθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποῖου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι :

$$4x - 3y - 12 = 0, \quad 5x - 12y - 4 = 0, \quad 12x - 5y - 13 = 0$$

καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

65. ΣΗΜΕΙΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax + by + \gamma$.—Τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως $E = ax + by + \gamma$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y , δηλαδὴ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου $M(x, y)$ τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου xOy (σχ. 45).



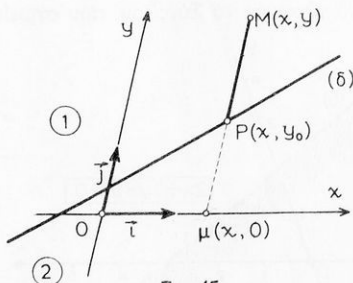
ἵνα ἡ παράστασις Ε εἶναι μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $M(x, y)$ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

$${}^{\omega}\Omega_{\sigma\tau\epsilon} : E = 0 \iff M \in (\delta).$$

Ἐάν $M \in (\delta)$, παριστῶμεν διὰ τοῦ P Σχ. 45
τὴν τομὴν τῆς (δ) μετὰ τῆς ἐκ τοῦ M πα-
ραλλήλου $M\mu$ πρὸς τὸν ἄξονα $O\gamma$. Τὸ p ἔχει συντεταγμένας, προφανῶς, (x, y_0) .

$$^{\text{A}}\rho\alpha: \quad \alpha x + \beta y_0 + \gamma = 0 \quad (1)$$



Σχ. 45

Διὰ τὸ σημεῖον $M(x, y)$ θὰ ἔχωμεν :

$$E = ax + by + \gamma = (ax + by + \gamma) - (ax + by_0 + \gamma) = by - by_0$$

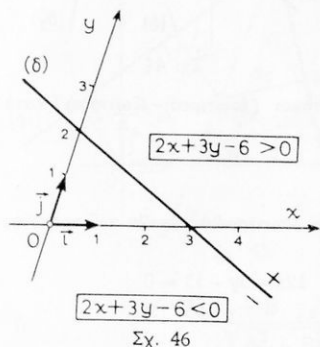
$$\eta \quad E = \beta(y - y_0) = \beta \cdot \overline{PM}. \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) φαίνεται ὅτι ἡ παράστασις E ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ β , ἐὰν τὸ $\overline{PM} > 0$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (1), κειμένου ἄνωθεν τῆς (δ). Θὰ ἔχη δὲ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ β , ἐὰν τὸ $\overline{PM} < 0$, δηλαδὴ τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (2), τὸ κείμενον κάτωθεν τῆς εὐθείας (δ).

Ὡστε : Τὸ τριώνυμον $ax + by + \gamma$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων τῶν ὀριζομένων ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἐξισώσεως $ax + by + \gamma = 0$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου.

Διὰ νὰ διαχωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα, ἀναζητοῦμεν τὸ πρόσημον τῆς E , τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἀρχὴν $O(0,0)$ τῶν ἀξόνων, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\gamma \neq 0$. Εἰς τοῦτο εἶναι $E = \gamma$. Ἄρα :

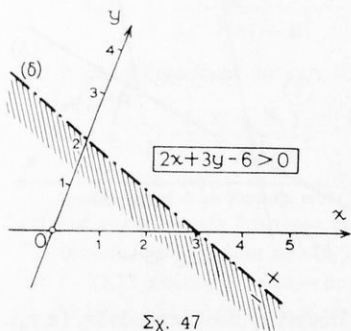
Τὸ σημεῖον τῆς $E = ax + by + \gamma$ εἶναι τὸ τοῦ γ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ κεῖται ἡ ἀρχὴ $O(0,0)$ τῶν συντεταγμένων.



Σχ. 46

Παράδειγμα : Τὸ τριώνυμον $2x + 3y - 6$ εἶναι ἀρνητικὸν εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον, τὸ περιέχον τὴν ἀρχὴν $O(0,0)$, εἰς τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως $2x + 3y - 6 = 0$ (σχ. 46) καὶ θετικὸν εἰς τὸ ἄλλο ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον. Πρὸς διάκρισιν τοποθετοῦμεν τὸ σημεῖον + καὶ τὸ σημεῖον - ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας (δ) διὰ νὰ δείξωμεν τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν πρόσημον τοῦ τριωνύμου $ax + by + \gamma$.

66. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ : $ax + by + \gamma > 0$. — Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι x καὶ y ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν $ax + by + \gamma > 0$.



Σχ. 47

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $ax + by + \gamma = 0$ καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως $ax + by + \gamma$ εἰς ἕκαστον τῶν ἀνοικτῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον xOy ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ). Καλύπτομεν ἀκολουθῶς διὰ παραλλήλων γραμμῶν (γραμμοσκίασμα) τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δὲν ἀρμόζει εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, διὰ νὰ λάβωμεν τὰ σημεία τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 47), τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν

$2x + 3y - 6 > 0$, γραμμοσκιάζουμεν τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἀρχὴν $O(0,0)$ τῶν συντεταγμένων.

Ἡ εὐθεῖα (δ) παρίσταται δι' ἐστιγμένης γραμμῆς, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς μηδενίζουν τὸ τριώνυμον $2x + 3y - 6$, ἐκτὸς ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν $2x + 3y - 6 \geq 0$, ὁπότε ἡ (δ) θὰ πρέπη νὰ γραφῇ συνεχὴς γραμμὴ.

67. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.— Βάσει τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν σύστημα ἀνισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἢ νὰ εὕρωμεν τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου (ἐπίλυσις ἀνισώσεως) πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x, y .

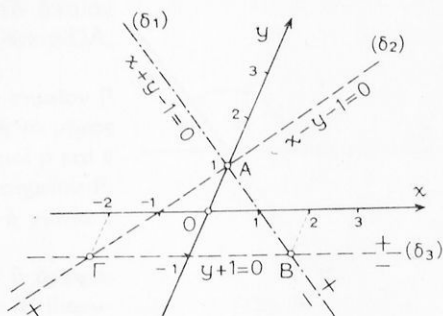
Παράδειγμα 1ον : Διὰ ποίας τιμᾶς τῶν x, y συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις :

$$x + y - 1 < 0 \quad (1), \quad x - y + 1 > 0 \quad (2), \\ y + 1 > 0 \quad (3).$$

Κατασκευάζομεν (σχ. 48) τὰς εὐθείας $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$, ἐξισώσεων :

$$x + y - 1 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \\ y + 1 = 0.$$

Ἐὰν γραμμοσκιάσωμεν ἕκαστον ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων του δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀντίστοιχον ἀνίσωσιν, καταλήγωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι μόνον τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθεύουσας συγχρόνως καὶ τὰς τρεῖς ἀνισώσεις.



Σχ. 48

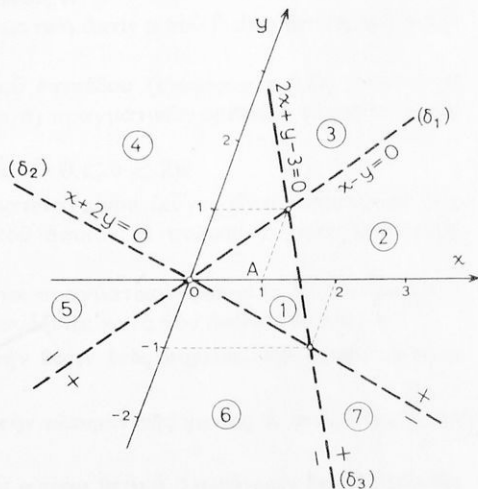
Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις :

$$(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0, \quad (1)$$

Κατασκευάζομεν (σχ. 49) τὰς εὐθείας $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$, ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$x - y = 0, \quad x + 2y = 0, \\ 2x + y - 3 = 0.$$

Αἱ εὐθεῖαι αὗται χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων xOy εἰς ἑπτὰ ἐπίπεδα χωρία. Εἰς ἕκαστον τῶν χωρίων τούτων, τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) λαμβάνει ἓνα ὠρισμένον πρόσημον. Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ παραλείπομεν τὸ χωρίον ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον τοῦτο γίνεται θετικόν. Παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῶν κειμένων εἰς τὰ ἐπίπεδα χωρία 1, 3, 5 καὶ 7, ἐξαιρουμένων τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $(\delta_1), (\delta_2)$ καὶ (δ_3) .



Σχ. 49

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

87. Νά γίνει γραφική επίλυση τῶν συστημάτων :

- | | | | |
|----|---------------------|---------------------|--------------------|
| 1) | $x + y - 3 > 0,$ | $x - y + 4 < 0,$ | $x - 4 > 0$ |
| 2) | $2x - 3y + 6 > 0,$ | $4x - y - 4 < 0,$ | $4x + 3y + 12 > 0$ |
| 3) | $2x - y + 5 < 0,$ | $2x + y + 7 < 0,$ | $3 - y > 0$ |
| 4) | $5x - 2y + 10 < 0,$ | $7x - 2y + 14 > 0,$ | $2x + y - 5 < 0.$ |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

68. ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.—

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ θεωρήσωμεν νέαν μέθοδον προσδιορισμοῦ τῆς θέσεως τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῇ βοηθεῖα δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὑποθέτομεν δεδομένα τὸ σημεῖον O , τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **πόλον**, καὶ μίαν σταθεράν εὐθείαν OA , καλουμένην **πολικὸν ἄξονα** (σχ. 50).

Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας, τυχόν σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὠρισμένον, ἂν δοθῇ τὸ μήκος $OP = \rho$ καὶ ἡ γωνία $AOP = \theta$. Οἱ ἀριθμοὶ ρ καὶ θ καλοῦνται **πολικαὶ συντεταγμέναι** τοῦ σημείου P . Τὸ ρ καλεῖται **διανυσματικὴ ἀκτίς** καὶ ἡ γωνία θ καλεῖται **πολικὴ γωνία**.

Ἡ πολικὴ γωνία θ εἶναι **θετικὴ** ἢ **ἀρνητικὴ**, ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν. Ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς ρ εἶναι θετικὴ, ἔαν τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ , καὶ ἀρνητικὴ, ὅταν τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ .

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 50) ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς ρ τοῦ P εἶναι θετικὴ, ἐνῶ ἡ τοῦ P_1 εἶναι ἀρνητικὴ.

Σημειώσεις : Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (διάφορον τοῦ O) ἀντιστοιχεῖ ἓν ὠρισμένον διατεταγμένον ζεῦγος (ρ, θ) πραγματικῶν ἀριθμῶν, πληρούντων τὰς σχέσεις :

$$0 < \rho \quad \text{καὶ} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

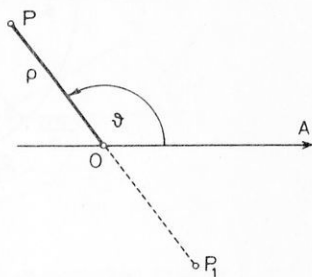
καὶ ἀντιστρόφως : Πᾶν τοιοῦτον διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς καὶ μόνου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι εἶναι τὸ δοθὲν ζεῦγος.

Εἶναι προφανὲς ὅτι : δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (ρ, θ) προσδιορίζουν ἓν μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ ὀρίσωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ **πολικαὶ συντεταγμέναι** (ρ, θ) :

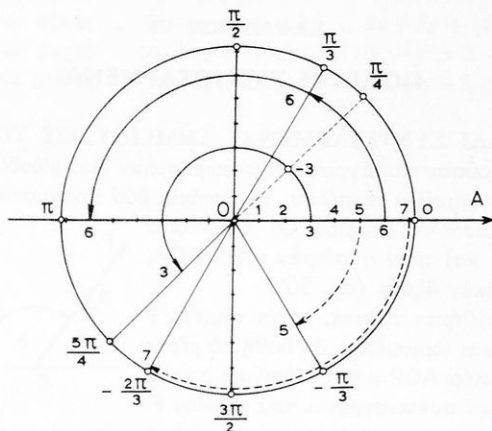
1ον : Κατασκευάζομεν τὴν τελικὴν πλευράν τῆς γωνίας θ , ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

2ον : Ὑὰν ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς ρ εἶναι θετικὴ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ τὸ τμήμα $OP = \rho$. Ὑὰν δὲ ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς εἶναι ἀρ-



Σχ. 50

νητική, προεκτείνομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας θ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως, ἐκ τοῦ πόλου, τμήμα OP ἴσον πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν (ἢ ἀπόλυτον) τοῦ ρ . Τὸ σημεῖον P θὰ εἶναι τότε τὸ ζητούμενον.



Σχ. 51

Εἰς τὸ (σχ. 51) ἔχομεν προσδιορίσει τὴν θέσιν τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(6, \frac{\pi}{3}\right), \left(3, \frac{5\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{5\pi}{4}\right), (6, \pi), \left(7, -\frac{2\pi}{3}\right) \text{ καὶ } \left(5, -\frac{\pi}{3}\right).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἔπεται ὅτι :

Πάν σημεῖον P ὀρίζει ἀπειρίαν διατεταγμένων ζευγῶν (ρ, θ) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

88. Νὰ ὀρισθοῦν τὰ σημεία, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(4, \frac{\pi}{4}\right), \left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), \left(4, \frac{\pi}{3}\right), \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right), (5, \pi).$$

89. Ὁμοίως τὰ σημεία :

$$\left(6, \pm \frac{\pi}{4}\right), \left(-2, \pm \frac{\pi}{2}\right), (3, \pi), (-4, \pi), (6, 0), (-6, 0).$$

90. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία (ρ, θ) καὶ $(\rho, -\theta)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

91. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία (ρ, θ) καὶ $(-\rho, \theta)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πόλον.

92. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία $(-\rho, \pi - \theta)$ καὶ (ρ, θ) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

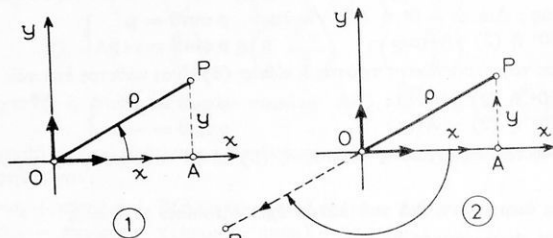
69. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ.— Έστωσαν Ox και Oy οί άξονες τών ὀρθοκανονικῶν συντεταγμένων, O ὁ πόλος, καὶ Ox ὁ πολικὸς ἄξων ἐνὸς συστήματος πολικῶν συντεταγμένων (σχ. 52).

Έστωσαν (x, y) αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι καὶ (ρ, θ) αἱ πολικαὶ τοιαῦται ἐνὸς σημείου P . Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον εἶναι $\rho > 0$ καὶ $\rho < 0$.

1ον : Έάν $\rho > 0$ (σχ. 52-1), ἐκ τοῦ τριγώνου OAP θὰ ἔχωμεν :

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{καὶ} \quad y = \rho \sin \theta \quad (1)$$

εἰς οἷονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν εὑρίσκηται τὸ σημεῖον P .



Σχ. 52

2ον : Έάν $\rho < 0$ (σχ. 52-2), θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον P_1 τοῦ P ὡς πρὸς τὸν πόλον O , τοῦ ὁποῖου αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι θὰ εἶναι $(-x, -y)$ καὶ αἱ πολικαὶ $(-\rho, \theta)$. Ἡ διανυσματικὴ ἀκτίς τοῦ $P_1, (-\rho)$ εἶναι θετική, διότι $\rho < 0$ ἐξ ὑποθέσεως. Δυνάμεθα, κατὰ συνέπειαν, νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἐξισώσεις (1). Διὰ τὸ P_1 θὰ ἔχωμεν λοιπὸν :

$$\left. \begin{aligned} -x &= -\rho \cos \theta \\ -y &= -\rho \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad \text{ὁπότε διὰ τὸ } P \text{ θὰ εἶναι : } \left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\}.$$

Έντεῦθεν προκύπτει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα :

70. ΘΕΩΡΗΜΑ : Έάν ὁ πόλος συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων καὶ ὁ πολικὸς ἄξων μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα Ox , θὰ ἔχωμεν :

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

ἐνθα (x, y) αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου P τοῦ ἐπιπέδου καὶ (ρ, θ) αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις (I) φέρουν τὸ ὄνομα ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς πολικὰς τοιαύτας.

Έκ τῶν ἐξισώσεων (I) λαμβάνομεν εὐκόλως τὰς :

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{τοξ} \varepsilon \varphi \left(\frac{y}{x} \right), \quad x \neq 0 \\ \sin \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{καὶ} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Σημείωσις : Ἡ γωνία θ ὑπολογίζεται ἀπὸ τοὺς δύο τελευταίους τύπους μαζί.

71.* ΠΟΛΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— 1ον: Ἐάν ἡ εὐθεΐα (δ) ἔχη ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $Ax + By + \Gamma = 0$, τότε διὰ τῶν τύπων (1) αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τήν :

$$\rho (A \text{ συν}\theta + B \text{ ημ}\theta) + \Gamma = 0 \quad (1)$$

2ον: Ἐάν ἡ εὐθεΐα (δ) ἔχη ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$x \text{ συν}\omega + y \text{ ημ}\omega = p,$$

τότε αὕτη διὰ τῶν (1) γίνεται :

$$\rho \text{ συν}\theta \text{ συν}\omega + \rho \text{ ημ}\theta \text{ ημ}\omega = p, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \rho \text{ συν}(\theta - \omega) = p \quad (2)$$

Παρατηρήσεις : Διὰ $\omega = 0^\circ$ ἡ (2) γίνεται : $\left. \begin{array}{l} \rho \text{ συν}\theta = p \\ \rho \text{ συν}\theta = -p \end{array} \right\}$

Διὰ $\omega = 180^\circ$ ἡ (2) γίνεται :

$$\rho \text{ συν}\theta = -p$$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ εὐθεΐα (δ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν πολικὸν ἄξονα Ox .

Διὰ $\omega = 90^\circ$ ἡ (2) γίνεται :

$$\rho \text{ ημ}\theta = p$$

καὶ διὰ $\omega = 270^\circ$ ἡ (2) γίνεται :

$$\rho \text{ ημ}\theta = -p$$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα Ox .

Πᾶσα εὐθεΐα διερχομένη διὰ τοῦ πόλου ἔχει ἐξίσωσιν : $\theta = k$

ὅπου k ὠρισμένος πραγματικὸς ἀριθμὸς.

72. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.— Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $A_1(\rho_1, \theta_1)$ καὶ $A_2(\rho_2, \theta_2)$.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων A_1, A_2 εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας εἶναι :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (1)$$

Ἀλλὰ $\left. \begin{array}{l} x_1 = \rho_1 \text{ συν}\theta_1 \\ y_1 = \rho_1 \text{ ημ}\theta_1 \end{array} \right\}$ καὶ $\left. \begin{array}{l} x_2 = \rho_2 \text{ συν}\theta_2 \\ y_2 = \rho_2 \text{ ημ}\theta_2 \end{array} \right\}$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$d^2 = (\rho_2 \text{ συν}\theta_2 - \rho_1 \text{ συν}\theta_1)^2 + (\rho_2 \text{ ημ}\theta_2 - \rho_1 \text{ ημ}\theta_1)^2$$

καὶ μετὰ τὰς καταλλήλους πράξεις λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \text{ συν}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2)$$

Διὰ $\theta_1 = \theta_2$ ἔχομεν τὴν ἐπέκτασιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93. Αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς πολικάς :

1) $x - 3y = 0$	4) $x^2 + y^2 - \alpha x = 0$	ἄξονες ὀρθοκανονικοὶ
2) $y + 5 = 0$	5) $x^2 - y^2 = \alpha^2$	
3) $x^2 + y^2 = 16$	6) $2xy = 7$	

94. Αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς Καρτεσιανὰς καὶ ὀρθογωνίους συντεταγμένας καὶ κανονικάς.

1) $\rho = 10$	5) $\rho^2 \text{ συν}^2 2\theta = \alpha^2$	9) $\rho = \alpha(1 - \text{συν}\theta)$
2) $\rho = 16 \text{ συν}\theta$	6) $\rho = \alpha \text{ ημ} 2\theta$	10) $\rho^2 \text{ ημ} 2\theta = 16$
3) $\rho \text{ ημ}\theta = 4$	7) $\rho = \alpha \text{ συν} 2\theta$	11) $\rho^2 = 16 \text{ ημ} 2\theta$
4) $\rho = \alpha \text{ ημ}\theta$	8) $\rho \text{ συν}\theta = \alpha \text{ ημ}^2 \theta$	12) $\rho = \alpha \text{ ημ} 3\theta$

95. Νά εὑρεθοῦν αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμένοι τῶν σημείων :

$$\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(-2, \frac{3\pi}{4}\right), (3, \pi).$$

96. Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσῃ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν του εἰς ὀρθοκανονικοὺς ἀξονας, πρῶτον εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας καὶ δεῦτερον εἰς πολικάς.

97. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(12 - 4\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(12, \frac{\pi}{3}\right)$ κείνται ἐπ' εὐθείας.

98. Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποῖου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεία :

$$1) \quad A\left(4, \frac{\pi}{3}\right), \quad B\left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \Gamma\left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$2) \quad A\left(12, \frac{\pi}{6}\right), \quad B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \Gamma\left(5, \frac{5\pi}{6}\right).$$

99. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$.

100. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων γωνίας δύο τεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν εἶναι :

$$\text{καὶ} \quad \left. \begin{aligned} x(\sin\omega_1 + \sin\omega_2) + \beta(\eta\mu\omega_1 + \eta\mu\omega_2) - (p_1 + p_2) &= 0 \\ x(\sin\omega_1 - \sin\omega_2) + y(\eta\mu\omega_1 - \eta\mu\omega_2) + (p_2 - p_1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

101. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων θεωροῦμεν τὰ σημεία $A(1,6)$, $B(-4,2)$, $\Gamma(3,-1)$. Νά ὑπολογισθῇ :

1) Τὸ μήκος ΒΓ.

2) Τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3) Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

4) Αἱ ἐξισώσεις καὶ τὰ μήκη τῶν διαμέσων του καὶ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων του.

5) Αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του.

6) Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ.

102. Νά εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμένοι τοῦ σημείου τῆς εὐθείας (δ) ἐξισώσεως $3x - 5y + 6 = 0$, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων $(3,-4)$, $(2,1)$.

103. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(2,5)$ καὶ τοιαύτης ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν ἀξόνων τμήμα αὐτῆς νὰ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου εἰς δύο ἴσα μέρη.

104. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $y = \lambda x + \beta$, ὅπου $\lambda = \beta$, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ποῖαι αἱ συντεταγμένοι τοῦ σημείου τούτου ;

105. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $E = ax + by$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\vec{OB}(\alpha, \beta)$ καὶ $\vec{OM}(x, y)$.

106. Πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι $Ax + By + \Gamma = 0$, διὰ τὰς ὁποίας $A + B + \Gamma = 0$, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποῖου ζητοῦνται αἱ συντεταγμένοι.

107. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ εὐθεῖα $x + 3y - 6 = 0$ διαιρεῖ τὸ τμήμα, τὸ ἔχον συντεταγμένας τῶν ἄκρων $(-3,2)$, $(6,1)$.

108. Νά ὀρίσθῃ ὁ μ , οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα $y = \mu x - 7$ νὰ διαιρῇ τὸ τμήμα $A_1(3,2)$, $A_2(1,4)$ εἰς λόγον $\frac{3}{2}$.

109. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν $4x - 3y - 1 = 0$ καὶ $3x - 4y + 2 = 0$ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι.

110. Να εύρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐξισώσεων: $4x - 3y + 4 = 0$ καὶ $5x + 12y - 8 = 0$ εἶναι $\frac{13}{5}$.

111. Αἱ πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου ABΓ ἔχουν ἐξισώσεις:

$$3x + 4y - 12 = 0, \quad 3x - 4y = 0, \quad 4x + 3y + 24 = 0.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς Α καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β, Γ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι.

112. Νὰ εύρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ), συντελεστοῦ διευθύνσεως $\lambda = \frac{3}{4}$, καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ σημεῖον (2,4) εἶναι 2.

113. Νὰ εύρεθῶν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ABΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν ἐξισώσεις $3x + 2y - 4 = 0$, $x - 3y + 6 = 0$, $4x - 3y - 10 = 0$, καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi \hat{A} + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma, \quad \text{καὶ} \quad A + B + \Gamma = 180^\circ.$$

114. Δίδεται ἐπίπεδον (P), μία εὐθεῖα (δ) ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου καὶ ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπίπεδου. Ἐστὼ Η ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (P) καὶ Κ ἡ προβολὴ τοῦ Η ἐπὶ τὴν (δ). Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ Κ εἶναι προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν (δ).

115. Ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου τῶν ἀξόνων (Οx, Οy) δίδονται τὰ σημεῖα Α(-2, 1), Β(4, -1), Γ(7, 2). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παραλληλογράμμου ABΓΔ.

116. Ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου τῶν ἀξόνων (Οx, Οy) θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ καὶ τὰ σημεῖα $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς (δ). Ἐὰν l εἶναι ἡ τομὴ τῆς (δ) καὶ τοῦ τμήματος M_1M_2 , νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος $\overrightarrow{IM_1} : \overrightarrow{IM_2}$.

117. Δίδεται τρίγωνον ABΓ καὶ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ θὰ κείνται ἐπ' εὐθείας ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχωμεν:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MG}} \cdot \frac{\overline{NG}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

118. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(2,1) καὶ Β(6,4). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν Γ, Δ τοῦ τετραγώνου ABΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΑΒ.

119. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(1,0) καὶ Β(3,6). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ τοῦ ρόμβου ABΓΔ, οὕτως ὥστε $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{2\pi}{3}$.

120. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $(\vec{u}, \vec{v})$ τῶν διανυσμάτων:

$$\vec{u}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}) \quad \text{καὶ} \quad \vec{v}(3 - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

121. Δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}(4\sqrt{3}-3, 3\sqrt{3}+4)$, $\vec{v}(4,3)$ καὶ ζητοῦνται τὰ:

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{καὶ} \quad (\vec{u}, \vec{v}).$$

122. Θεωροῦμεν τὰ διανύσματα: $\vec{u}(-0,5, 6)$, $\vec{v}(2,5, -1)$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\left\{ \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \right\}$.

123. Ἐπιλύσατε γραφικῶς τὰς ἀνισώσεις:

$$0 \leq \frac{(x-1)(y-1)}{x+y-3} \leq 1.$$

124. Δίδεται ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $x \sin \omega + y \eta \omega = p$.

Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1)$ ἀπὸ τὴν (δ) εἶναι:

$$d = x_1 \sin \omega + y_1 \eta \omega - p.$$

Ἐφαρμογὴ (δ): $7x + y - 10 = 0$ καὶ $M_1(3,4)$.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Πρότασις—Προτασιακός τύπος—Ποσοδεΐκται—Σύνθετοι προτάσεις—'Αλγεβρα (λογισμός) τῶν προτάσεων—Πράξεις μεταξύ τῶν λογικῶν προτάσεων—Ταυτολογίαι καὶ αὐτοαντιφάσεις—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις Σελὶς
5 - 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

2. 'Εννοια τοῦ συνόλου—Παράστασις συνόλου—Τὸ κενὸν σύνολον—'Υποσύνολον ἄλλου συνόλου, ὑπερσύνολον, ἰσότης δύο συνόλων—Βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς—Πράξεις μεταξύ συνόλων—Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων—'Ασκήσεις—Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις 19 - 37

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

3. 'Ορισμός—'Ιδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Εξισώσεις με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπιλυόμενας ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$ —'Ανισώσεις με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων—Συστήματα με ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπιλυόμενα ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}$ —'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις 38 - 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

4. 'Ακέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς—'Εννοια τοῦ πολυωνύμου—'Αλγεβρα (λογισμός) τῶν πολυωνύμων—'Εφαρμογαί—Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων—'Ιδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Ακέραια πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν—'Ομογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—'Ανάλυσις ρητοῦ κλάσματος εἰς ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις—Διωνύμοι ἐξισώσεις—Τριγωνομετρικὴ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ—Τύπος τοῦ De Moivre—Ρίζαι μιγαδικῶν ἀριθμῶν—'Εφαρμογαί—'Ασκήσεις. 70 - 140

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σελίς

5. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας—Μηδενικαὶ ἀκολουθίαι—Ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν—Συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι, ἔννοια τοῦ ὁρίου—Ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν—Ἐφαρμογαὶ—Μονότονοι ἀκολουθίαι—Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν μονοτόνων ἀκολουθιῶν—Ἀσκήσεις 141 - 176

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

6. Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι—Ἀρμονικαὶ πρόοδοι—Γεωμετρικαὶ πρόοδοι—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις 177 - 198

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

7. Συμβολισμός ἀθροισμάτων—Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς—Σύγκλισις σειρᾶς—Μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν n πρώτων ὄρων σειρᾶς—Ἰδιότητες συγκλίσεως σειρῶν—Σειραὶ μὲ θετικούς ὅρους—Παράστασις πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ δεκαδικὰς σειρὰς—Γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πεπερασμένους τὸ πλῆθος παράγοντας—Ἀπειρογινόμενα—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις 199 - 229

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

8. Λογάριθμοι. Ὅρισμοι—Ἰδιότητες—Δεκαδικοὶ λογάριθμοι—Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων—Χρῆσις λογαριθμικῶν πινάκων—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις—Ἐκθετικά καὶ λογαριθμικά ἐξισώσεις καὶ συστήματα—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις 230 - 272

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

9. Ἀνατοκισμός—Προβλήματα ἐπ' αὐτοῦ—Ἰσαὶ καταθέσεις—Προβλήματα ἐπ' αὐτῆς—Χρεωλυσία—Προβλήματα ἐπ' αὐτῆς—Ἀσκήσεις 273 - 284

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

10. Εἰσαγωγή—Ἐπίλυσις εἰδικῶν τινῶν περιπτώσεων—Ἐφαρμογαὶ—Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $x^2 + ky^2 = z^2$, $k \in \mathbb{Z}$ —Ἀσκήσεις 285 - 294

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

11. Μεταθέσεις—Κυκλικαὶ μεταθέσεις—Ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις—Διατάξεις—Ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις—Συνδυασμοί—Ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοί—Τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις—Στοιχεῖα ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πινάκων—Ἐφαρμογαὶ—Ἀσκήσεις 295 - 324

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σελίς

12. Ένορατική εισαγωγή εἰς τὰς πιθανότητες—Περὶ τοῦ δειγματικοῦ χώρου—Θεμελιώδεις ὁρίσμοι καὶ πράξεις μεταξύ συμβάντων—Στοιχειώδης ὁρίσμος τῆς πιθανότητος—Έφαρμογαί—Διαμορφωμένη προσπέλασις εἰς τὰς πιθανότητας—Όρισμός τῆς πιθανότητος μετὰ τὴν βοήθειαν τῶν ὑποσυνόλων τοῦ δειγματικοῦ χώρου—Πιθανότης ὑπὸ συνθήκην—Πιθανότης τομῆς συμβάντων—Συμβάντα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων—Προσθετικὸν θεώρημα τῶν πιθανότητων—Έφαρμογαί—Άσκήσεις 325 - 350

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

1. Έπαναλήψεις ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ — Πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων — Λόγος συγγραμμικῶν διανυσμάτων — Τετμημένη σημείου — Γραμμικὸς συνδυασμός — Άσκήσεις 351 - 360

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

2. Συντεταγμέναι διανύσματα — Συντεταγμέναι ἐλευθέρου διανύματος — Συνθήκη παραλληλίας — Συνιστῶσαι διανύσματα διὰ τῶν συντεταγμένων — Άσκήσεις 361 - 368

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

3. Έσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων — Γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαὶ αὐτοῦ — Έξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων — Συνθήκη καθετότητος — Άλλαγή ἀξόνων — Άσκήσεις 369 - 383

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

4. Έ εὐθεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδον — Έξίσωσις εὐθείας — Διάφοροι μορφαὶ αὐτῆς — Παραλληλία — Καθετότης — Διάφοροι συνθῆκαι εὐθειῶν — Δέσμη εὐθειῶν — Έφαρμογαί — Άσκήσεις 384 - 399

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

5. Σπουδὴ τῆς εὐθείας εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων — Γωνία δύο εὐθειῶν — Άπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείαν — Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma$ — Γραφικὴ ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma > 0$ — Άσκήσεις 400 - 412

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

6. Πολικαὶ συντεταγμέναι — Μετασχηματισμός τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων σημείου εἰς πολικὰς — Άσκήσεις 413 - 418

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελίς 67 ή άσκησης 111 νά γραφή ούτω: Δίδονται τά τριώνυμα $f(x) \equiv ax^2 + bx + \gamma$, $\varphi(x) \equiv \alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$ με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς και ρίζας πραγματικές και άνίσους. Έάν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) αί ρίζαι του $f(x)$ και ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) αί ρίζαι του $\varphi(x)$, νά αποδειχθή ή ίσοδυναμία:

$$(|f(x)| \geq |\varphi(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x_1 = \rho_1, x_2 = \rho_2 \text{ και } |\alpha| \geq |\alpha'|).$$

- » 68 » 1, κάτωθεν: » 'Επιλύσατε τās εξισώσεις... » 'Επιλύονται εν $\mathbb{R}$ αί εξισώσεις (1) και (2);
- » 100 » 4 κάτωθεν νά γίνη ή εξής προσθήκη: Ποιον τὸ υπόλοιπον ἂν $\alpha = \beta$;
- » 140 » 6 νά γίνη ή εξής προσθήκη: Ποίαι αί λοιπαί ρίζαι αὐτῆς;
- » 184 » 14 ἄνωθεν » » » Εἶναι ἁρμονική πρόοδος τότε, καί μόνον τότε, ἂν ἰσχύη: $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$ καί ή ἀκολουθία...





024000029807

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ'. 1972 (VI) - ΑΝΤ. 131.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2256/18 - 4 - 72

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ : ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΤΣΗΣ - ΒΙΒΛΙΟΔ. Ι. ΚΑΜΠΑΝΑΣ Α.Ε.
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

