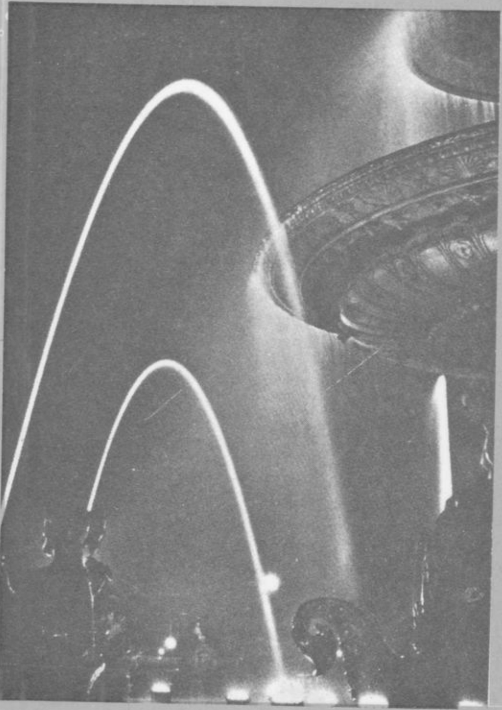
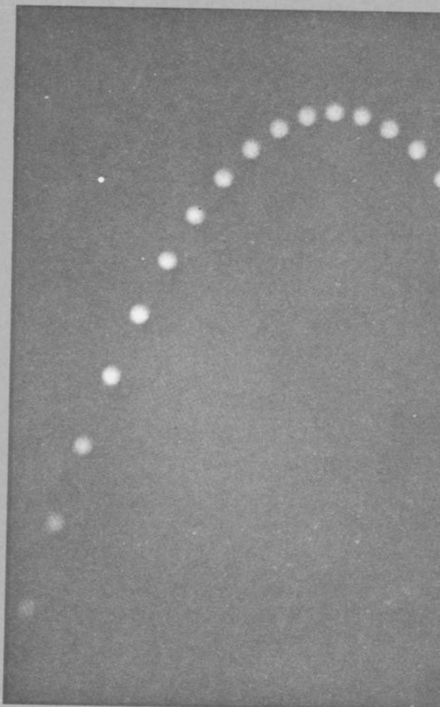
ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ





ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1982

ΦΥΣΙΚΗ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1982

Τό βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπό τό συγγραφέα σέ συνεργασία μέ τόν κ. Κ. Μικρούδη, Γεν. Ἐπιθεωρητή Μ. Ε.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θέμα καί μέθοδος τῆς Φυσικῆς

1. Θέμα τῆς Φυσικῆς

Μέ τίς αἰσθήσεις μας διαπιστώνουμε ὅτι στή Φύση ὑπάρχουν *ὑλικά σώματα*, πού ἔχουν διαστάσεις. Ἐπίσης διαπιστώνουμε ὅτι στή Φύση συμβαίνουν διάφορες *μεταβολές*, πού τίς ὀνομάζουμε *φαινόμενα* (π.χ. πτώση σωμάτων, σεισμοί, γέννηση ὀργανισμῶν κ.ἄ.). Ἡ ἔρευνα τοῦ ὑλικοῦ κόσμου εἶναι θέμα τῶν **Φυσικῶν Ἐπιστημῶν**, πού ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο πολλῶν κλάδων. Κάθε κλάδος ἀποτελεῖ σήμερα ἰδιαίτερη ἐπιστήμη, ὅπως εἶναι ἡ Ἀστρονομία, ἡ Γεωλογία, ἡ Ὀρυκτολογία, ἡ Βιολογία κ.ἄ. Βασικός κλάδος τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν εἶναι ἡ *Φυσική*, ἡ ὁποία ἐξετάζει ὁρισμένα γενικά φαινόμενα, πού δέν προκαλοῦν ἀλλαγή στήν οὐσία τῶν σωμάτων. Παράλληλα μέ τή Φυσική ἐργάζεται καί ἡ *Χημεία*, ἡ ὁποία ἐξετάζει ὁρισμένα φαινόμενα, πού ὀφείλονται στούς διαφορετικούς χαρακτῆρες τῶν ὑλικῶν σωμάτων. Μεταξύ τῆς Φυσικῆς καί τῆς Χημείας δέν ὑπάρχει σαφής διαχωρισμός. Ἡ *Φυσικοχημεία* ἀποτελεῖ τό σύνδεσμο μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο κλάδων. Τά τελευταῖα χρόνια ἀναπτύχθηκε ἡ *Ἀτομική* καί ἡ *Πυρηνική Φυσική*, πού ἔκαναν ἀκόμη πιό ἀσαφῆ τά ὅρια μεταξύ τῆς Φυσικῆς καί τῆς Χημείας.

2. Μέθοδος τῆς Φυσικῆς

Ἡ Φυσική καί ἡ Χημεία διακρίνονται ἀπό τίς ἄλλες Φυσικές Ἐπιστῆμες κυρίως γιά τή μέθοδο πού ἐφαρμόζουν, ὅταν κάνουν μιά ἔρευνα. Σήμερα τήν ἴδια μέθοδο προσπαθοῦν νά ἐφαρμόσουν καί ὅλες οἱ ἄλλες Φυσικές Ἐπιστῆμες, γιατί ἀποδείχτηκε ὅτι εἶναι ἡ πιό ἀσφαλής μέθοδος γιά τήν ἔρευνα τοῦ ὑλικοῦ κόσμου.

α. Παρατήρηση καί πείραμα. Ἡ Φυσική προσπαθεῖ νά βρεῖ ποιά αἰτία προκαλεῖ τό κάθε φυσικό φαινόμενο. Γιά τό σκοπό αὐτό στηρίζεται πρωταρχικά *στήν παρατήρηση* καί *στό πείραμα*. Ὅταν κάνουμε παρατήρηση, παρακολουθοῦμε ἕνα φαινόμενο, ἀκριβῶς, ὅπως αὐτό συμβαίνει στή Φύση. Ἀπό αὐτή ὅμως τήν ἁπλή παρακολούθηση τοῦ φαινομένου δέν μποροῦμε νά

Τά ὑγρά σώματα ἔχουν ὁρισμένο *ὄγκο* (ὅπως καί τά στερεά), ἀλλά δέν ἔχουν ὁρισμένο σχῆμα καί παίρνουν τό σχῆμα τοῦ δοχείου, στό ὁποῖο περιέχονται. Τά ὑγρά δέν παρουσιάζουν αἰσθητή ἀντίσταση στή μεταβολή τοῦ σχήματός τους ἤ στήν ἀπόσπαση ἑνός μέρους ἀπό τή μάζα τους. Ὅπως τά στερεά, ἔτσι καί τά ὑγρά εἶναι πρακτικῶς *ἀσυμπίεστα*.

Τά ἀέρια σώματα δέν ἔχουν οὔτε ὁρισμένο ὄγκο, οὔτε ὁρισμένο σχῆμα καί παίρνουν τό σχῆμα τοῦ δοχείου, στό ὁποῖο περιέχονται.

Τά ὑγρά καί τά ἀέρια, ἐπειδή ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ρέουν, ὀνομάζονται *ρευστά*. Ἀλλά ἐνῶ ἕνα ὑγρό καταλαμβάνει μέσα στό δοχεῖο ὁρισμένο ὄγκο, ἕνα ἀέριο καταλαμβάνει ὁλόκληρο τόν ὄγκο τοῦ δοχείου. Ἄρα τά ἀέρια ἔχουν τήν ἰδιότητα ὅτι μποροῦν *νά αὐξήσουν ἀπεριόριστα τόν ὄγκο τους*. Καί ἀντίθετα μέ τά ὑγρά, πού εἶναι πρακτικῶς ἀσυμπίεστα, τά ἀέρια εἶναι *πολύ συμπιεστά*, δηλαδή ὅταν συμπιέζονται, ὁ ὄγκος τους γίνεται πολύ μικρότερος.

α. Ἡ διάκριση τῶν σωμάτων σέ στερεά, ὑγρά καί ἀέρια εἶναι σχετική. Ἕνα στερεό σῶμα (π.χ. ὁ πάγος), ὅταν θερμανθεῖ, μεταβάλλεται σέ ὑγρό· ἄν ἐξακολουθήσει ἡ θέρμανση τοῦ ὑγροῦ, αὐτό μεταβάλλεται σέ ἀτμό, δηλαδή σέ ἀέριο. Ἀντίστροφα ἕνα ἀέριο (π.χ. ὁ ὑδρατμός), ὅταν ψυχθεῖ, μεταβάλλεται σέ ὑγρό· ἄν ἐξακολουθήσει ἡ ψύξη τοῦ ὑγροῦ, αὐτό μεταβάλλεται σέ στερεό. Σέ μερικές περιπτώσεις, γιά *νά μεταβληθεῖ ἡ κατάσταση* ἑνός σώματος, ἀπαιτεῖται πολύ ἰσχυρή θέρμανση ἤ πολύ ἰσχυρή ψύξη τοῦ σώματος (π.χ. τό βολφράμιο τήκεται σέ θερμοκρασία 3380^0 C, τό ἥλιο ὑγροποιεῖται σέ θερμοκρασία -269^0 C).

Γενικά ὅλα τά σώματα *μποροῦν νά μεταβοῦν* ἀπό τή μιά κατάσταση στήν ἄλλη, ἐφόσον δέν ἀλλάζει ἡ χημική σύστασή τους (π.χ. τό ξύλο δέν τήκεται, γιατί, ὅταν θερμανθεῖ ἀρκετά, ἀναφλέγεται καί καίγεται). Ἡ πειραματική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι ἕνα σῶμα μπορεῖ νά μεταβεῖ ἀπό τή μιά κατάσταση στήν ἄλλη (π.χ. ἀπό τήν ὑγρή στήν ἀέρια) περνώντας διαδοχικά ἀπό *ἐνδιάμεσες ὁμογενεῖς* καταστάσεις, πού δέν μποροῦμε νά τίς χαρακτηρίσουμε ὡς τή μιά ἤ τήν ἄλλη κατάσταση.

Ἡ διάκριση τῶν σωμάτων σέ στερεά, ὑγρά καί ἀέρια *εἶναι σχετική*, γιατί στήν πραγματικότητα καμιά ἀπό τίς ἰδιότητες, πού θεωροῦμε ὅτι ἔχουν τά στερεά, τά ὑγρά καί τά ἀέρια, δέν χαρακτηρίζει ὁρισμένη μόνο κατάσταση. Ἔτσι π.χ. κανένα στερεό σῶμα δέν ἔχει ἀπόλυτα ἀμετάβλητο σχῆμα, γιατί, ἄν καταβάλουμε σημαντική προσπάθεια, προκαλοῦμε μόνιμη *παραμόρφωση* τοῦ σώματος. Ἐπίσης, ἄν ἕνα μέταλλο συμπιεστεῖ πάρα πολύ, τότε *ρέει* μέσα ἀπό μιά μικρή τρύπα, σάν νά ἦταν ὑγρό. Ἐξάλλου καί τά ὑγρά παρουσιάζουν πάντοτε κάποια ἀντίσταση στή μεταβολή τοῦ σχήματός τους, ἀλλά ὁ βαθμός αὐτῆς τῆς ἀντιστάσεως εἶναι διαφορετικός στά διάφορα ὑγρά. Ἔτσι π.χ. ἕνα πυκνόρρευστο ὑγρό παραμορφώνεται δυσκολότερα ἀπό τό νερό, πολύ ὅμως εὐκολότερα ἀπό τό σίδηρο.

Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

I. Ἡ στερεή, ἡ ὑγρή καί ἡ ἀέρια κατάσταση εἶναι τρεῖς διαφορετικές καταστάσεις, πού μποροῦν νά λάβουν ὅλα τά σώματα (ἐφόσον δέν συμβαίνει ἀλλαγή στή χημική τους σύσταση).

II. Καθεμιά ἀπό τίς τρεῖς καταστάσεις δέν ἔχει σαφή ὅρια, γιατί οἱ χαρακτηριστικές ἰδιότητες κάθε καταστάσεως μεταβάλλονται κατά τρόπο συνεχή ἀπό τή μιά κατάσταση στήν ἄλλη.

Σημείωση. Σήμερα ἡ Φυσική, γιά νά κατατάξει τίς διάφορες μορφές, μέ τίς ὁποῖες μᾶς παρουσιάζεται ἡ ὕλη, στηρίζεται στήν ἐσωτερική δομή τῶν σωμάτων (§ 14).

5. Διαιρετότητα τῆς ὕλης

α. Τά μόρια. Ὅλα τά σώματα μποροῦμε μέ μηχανικά καί φυσικά μέσα (θραύση, κοπή, διάλυση, ἐξαέρωση κ.ἄ.) νά τά χωρίσουμε σέ πολύ μικρά μέρη, *χωρίς νά χάσουν* καμιά ἀπό τίς χαρακτηριστικές τους ἰδιότητες. Ὅταν π.χ. μέσα σέ μιά ποσότητα νεροῦ διαλύσουμε λίγη ζάχαρη, τό διάλυμα ἀποκτᾶ τή χαρακτηριστική γλυκιά γεύση τῆς ζάχαρης. Αὐτό φανερώνει ὅτι ἡ ζάχαρη χωρίστηκε σέ πολύ μικρά μέρη, πού διασκορπίστηκαν ὁμοιόμορφα μέσα στό νερό. Ἐπίσης ἐλάχιστες ποσότητες ὁρισμένων οὐσιῶν (ἰωδοφόρμιο, αἰθέρας, ἀρώματα) γίνονται αἰσθητές ἀπό τή χαρακτηριστική ὀσμή τους. Αὐτό φανερώνει ὅτι οἱ οὐσίες αὐτές παθαίνουν ἕνα πολύ λεπτό *διαμερισμό* καί διασκορπίζονται ὁμοιόμορφα μέσα στόν ἀέρα.

Ἡ διαίρεση ὅμως τῆς ὕλης σέ διαρκῶς μικρότερα μέρη δέν εἶναι *ἀπεριόριστη*. Διάφορα φυσικά καί χημικά φαινόμενα δείχνουν ὅτι κάθε σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό μικρά ξεχωριστά σωματίδια, πού ὀνομάζονται **μόρια**. Κάθε μόριο διατηρεῖ τίς χαρακτηριστικές ἰδιότητες τοῦ σώματος. Ὅλα τά μόρια ἑνός σώματος εἶναι *ὅμοια* μεταξύ τους. Ὑπάρχουν τόσα εἴδη μορίων, ὅσα εἶναι τά χημικῶς καθαρά σώματα. Ὥστε γιά τό μόριο ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός*:

Τό μόριο εἶναι ἡ μικρότερη ποσότητα ἑνός χημικῶς καθαροῦ σώματος, ἡ ὁποία μπορεῖ νά ὑπάρχει σέ ἐλεύθερη κατάσταση.

β. Τά ἄτομα. Ἡ χημική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι στά περισσότερα σώματα τά μόρια ἀποτελοῦνται ἀπό μικρότερα σωματίδια, πού ὀνομάζονται **ἄτομα**. Ὅταν τά μόρια ἑνός σώματος ἀποτελοῦνται μόνο ἀπό ἕνα εἶδος ἀτόμων, τότε τό σῶμα αὐτό ὀνομάζεται *χημικό στοιχεῖο* (π.χ. τό ὑδρογόνο, ὁ σίδηρος, ὁ χρυσός). Ὅταν ὅμως τά μόρια ἑνός σώματος ἀποτελοῦνται ἀπό περισσότερα εἴδη ἀτόμων, τότε τό σῶμα αὐτό ὀνομάζεται *χημική ἕνωση* (π.χ. τό νερό, τό χλωριοῦχο νάτριο, ἡ ζάχαρη).

Σήμερα εἶναι γνωστά 105 χημικά στοιχεῖα. Ἀπό αὐτά 92 βρίσκονται στή Φύση *(φυσικά στοιχεῖα)*, ἐνῶ τά ὑπόλοιπα 13 παρασκευάστηκαν στά ἐπιστημονικά ἐργαστήρια *(ὑπερουράνια στοιχεῖα)*. Ὑπάρχουν τόσα εἴδη ἀτόμων, ὅσα εἶναι τά χημικά στοιχεῖα. Ὥστε γιά τό ἄτομο ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός*:

Τό ἄτομο εἶναι ἡ μικρότερη ποσότητα ἑνός χημικοῦ στοιχείου, ἡ ὁποία μπαίνει μέσα στίς χημικές ἑνώσεις πού σχηματίζει αὐτό τό στοιχεῖο μέ ἄλλα στοιχεῖα.

Ἡ ὕλη, ἄν καί ἐμφανίζεται ὡς συνεχής, στήν πραγματικότητα ἀποτελεῖται ἀπό πάρα πολλά μικρά ξεχωριστά σωματίδια. Ἡ ὑπόθεση αὐτή διατυπώθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τόν *Δημόκριτο* (πρίν ἀπό 2500 χρόνια). Τά ξεχωριστά σωματίδια πού ἀποτελοῦν τήν ὕλη ὁ Δημόκριτος τά ὀνόμασε *ἀτόμους* (δηλ. σωματίδια πού δέν τέμνονται, ἄτμητα). Οἱ πειραματικές καί θεωρητικές ἔρευνες θεμελίωσαν τή θεωρία γιά τήν *ἀσυνεχή δομή τῆς ὕλης*.

γ. Τά ἄτομα μέσα στό μόριο. Σήμερα γνωρίζουμε ὅτι μέσα στό κάθε ἄτομο ὑπάρχουν ἄλλα πιό μικρά σωματίδια, *ὁ πυρήνας*, πού ἔχει θετικό ἠλεκτρικό φορτίο, καί *τά ἠλεκτρόνια*, πού ἔχουν ἀρνητικό ἠλεκτρικό φορτίο. Οἱ δυνάμεις, πού συγκρατοῦν τά ἄτομα μέσα στό μόριο, ὀφείλονται *στά ἠλεκτρικά φορτία* τῶν ἀτόμων. Ὥστε :

Μέσα στό μόριο τά ἄτομα συγκρατιοῦνται ἀπό δυνάμεις πού ὀφείλονται στά ἠλεκτρικά φορτία τῶν ἀτόμων.

6. Τό πλῆθος, τό μέγεθος καί ἡ ἀδιάκοπη κίνηση τῶν μορίων

Πολλά φυσικά φαινόμενα ὀφείλονται *στή μοριακή δομή* τῶν σωμάτων. Ἑπομένως εἶναι ἀπαραίτητο νά ξέρουμε μερικά γενικά γνωρίσματα τῶν μορίων.

α. Τό πλῆθος καί τό μέγεθος τῶν μορίων. Εἶναι γνωστό ὅτι σέ ἕνα γραμμομόριο νεροῦ, δηλαδή σέ 18 γραμμάρια νεροῦ, περιέχονται $6 \cdot 10^{23}$ μόρια νεροῦ. Ἑπομένως *σέ ἕνα γραμμάριο* νεροῦ ὑπάρχουν περίπου $33 \cdot 10^{21}$ μόρια νεροῦ, δηλαδή :

33 000 000 000 000 000 000 000 μόρια νεροῦ

Ὅλο αὐτό *τό τεράστιο πλῆθος* μορίων ὑπάρχει μέσα σέ μιά μάζα νεροῦ, πού ἔχει ὄγκο *ἕνα κυβικό ἑκατοστόμετρο*. Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό διαπιστώνουμε *πόσο μικρά* εἶναι τά μόρια.

β. Ἡ ἀδιάκοπη κίνηση τῶν μορίων. Ἄν μέσα στήν αἴθουσα ἀνοίξουμε ἕνα φιαλίδιο, πού περιέχει αἰθέρα, σχεδόν ἀμέσως σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς αἴθουσας ἀντιλαμβανόμαστε τή χαρακτηριστική ὀσμή τοῦ αἰθέρα. Αὐτό δείχνει ὅτι τά μόρια τοῦ αἰθέρα πολύ γρήγορα διασκορπίζονται σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς αἴθουσας. Γενικά ἀποδείχτηκε ὅτι τά μόρια ὅλων τῶν σωμάτων βρίσκονται σέ *ἀδιάκοπη κίνηση*, πού εἶναι τελείως *ἄτακτη*, δηλαδή γίνεται πρός ὅλες τίς διευθύνσεις. Τά μόρια κινοῦνται μέ *μεγάλη ταχύτητα*, πού αὐξάνει *μέ τή θερμοκρασία*. Ὅταν αὐξάνει ἡ ταχύτητα τῶν μορίων ἑνός σώματος, τότε τό φαινόμενο αὐτό τό ἀντιλαμβανόμαστε ὡς ὕψωση τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος. Ἡ ἀδιάκοπη κίνηση τῶν μορίων ἑνός σώματος ὀνομάζεται γενικά *θερμική κίνηση τῶν μορίων*. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἑξῆς συμπέρασμα :

I. Τά μόρια ἑνός σώματος ἀποτελοῦν τεράστιο πλῆθος καί ἔχουν πολύ μικρές διαστάσεις.

II. Τά μόρια ὅλων τῶν σωμάτων (στερεῶν, ὑγρῶν, ἀερίων) βρίσκονται σέ ἀδιάκοπη καί ἄτακτη κίνηση. Ἡ ταχύτητα τῶν μορίων εἶναι μεγάλη καί αὐξάνει μέ τή θερμοκρασία.

7. Βάρος τῶν σωμάτων

Γιά νά ἀνυψώσουμε ἕνα σῶμα ἤ γιά νά κρατήσουμε ἕνα σῶμα στά χέρια μας, πρέπει νά καταβάλουμε μιά προσπάθεια. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι τό σῶμα *ἕλκεται ἀπό τή Γῆ*. Ἄν ἀφήσουμε τό σῶμα ἐλεύθερο, τότε τό σῶμα *πέφτει κατακόρυφα* πρός τό ἔδαφος. Ὥστε ἀπό τήν καθημερινή παρατήρηση εὔκολα ἀναγνωρίζουμε ὅτι ὅλα τά σώματα *ἕλκονται* ἀπό τή Γῆ. Αὐτή ἡ δράση τῆς μάζας τῆς Γῆς πάνω στή μάζα τῶν σωμάτων ὀνομάζεται γενικά **βαρύτητα.** Ἡ κατακόρυφη δύναμη, μέ τήν ὁποία ἡ μάζα τῆς Γῆς ἕλκει τή μάζα ἑνός σώματος, ὀνομάζεται **βάρος** τοῦ σώματος.

Μετρήσεις

8. Οἱ μετρήσεις στή Φυσική

Ὅταν ἐξετάζουμε τά φυσικά φαινόμενα, διαπιστώνουμε, ὅτι ὑπάρχουν πολλά *φυσικά μεγέθη*. Ἡ ἔρευνα τῶν φυσικῶν φαινομένων τότε μόνο ἔχει ἀξία, ὅταν εἴμαστε σέ θέση νά μετρήσουμε τά φυσικά μεγέθη, πού ἐμφανίζονται στά διάφορα φυσικά φαινόμενα.

Εἶναι γνωστό ὅτι *μέτρηση* ἑνός φυσικοῦ μεγέθους ὀνομάζεται ἡ σύγκρισή του μέ ἄλλο ὁμοειδές μέγεθος, πού τό παίρνουμε ὡς *μονάδα*. Ἀπό τή μέτρηση βρίσκουμε ἕναν ἀριθμό, πού φανερώνει πόσες φορές ἡ μονάδα περιέχεται στό μέγεθος πού μετρᾶμε. Αὐτός ὁ ἀριθμός εἶναι *ἡ ἀριθμητική τιμή* τοῦ μεγέθους πού ἐξετάζουμε. *Ἡ ἀριθμητική τιμή* καί *ἡ μονάδα*, πού χρησιμοποιήσαμε γιά τή μέτρηση, ἀποτελοῦν *τό μέτρο* τοῦ φυσικοῦ μεγέθους.

9. Μονάδες μήκους

Ὡς *μονάδα μήκους* χρησιμοποιοῦμε διεθνῶς *τό μέτρο* (1 m), πού τό ὁρίζουμε ὡς ἑξῆς :

Μέτρο (1 m) εἶναι τό μῆκος τοῦ πρότυπου μέτρου, πού φυλάγεται στό Διεθνές Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν (Σέβρες).

Τό *πρότυπο μέτρο* εἶναι μιά ράβδος ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο, πού πάνω της εἶναι χαραγμένες δύο γραμμές. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο γραμμῶν στή θερμοκρασία 0 °C εἶναι ἡ διεθνής μονάδα μήκους, πού ὀνομάζεται *μέτρο* (1 m). Ἀντίγραφα τοῦ πρότυπου μέτρου ἔχουν ὅλες οἱ χῶρες.

Νεώτερος ὁρισμός τοῦ μέτρου. Ἀπό τό 1960 τό μέτρο ὁρίζεται μέ βάση *τό μῆκος κύματος* ὁρισμένης ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπουν τά ἄτομα *τοῦ κρυπτοῦ 86*. Ἔτσι γιά τό μέτρο ἰσχύει σήμερα ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός :

Μέτρο (1 m) εἶναι τό μῆκος, πού εἶναι ἴσο μέ ὁρισμένο ἀριθμό (1 650 763,73) μηκῶν κύματος στό κενό τῆς ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπει τό κρυπτό 86.

$$\boxed{1\ \text{m} = 1\,650\,763{,}73\ \text{μήκη κύματος}\ (\text{Kr}^{86})}$$

* α. Ἄλλες μονάδες μήκους. Πολλές φορές ὡς *μονάδες μήκους* χρησιμοποιοῦμε τά ὑποπολλαπλάσια ἤ ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ μέτρου, (βλ. πίνακα).

Στή *ναυτιλία* ὡς μονάδα μήκους χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τό *ναυτικό μίλι*, πού εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τόξου 1 λεπτοῦ (1΄) τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς καί εἶναι :

1 ναυτικό μίλι (1 mi) = 1852 m

Μονάδες μήκους		
μονάδα X	1 X	$= 10^{-13}$ m
Ångström	1 Å	$= 10^{-10}$ m
μικρόμετρο	1 μm	$= 10^{-6}$ m
χιλιοστόμετρο	1 mm	$= 10^{-3}$ m
ἑκατοστόμετρο	1 cm	$= 10^{-2}$ m
δεκατόμετρο	1 dm	$= 10^{-1}$ m
μέτρο	1 m	
χιλιόμετρο	1 km	$= 10^{3}$ m

Στίς *ἀγγλοσαξονικές χῶρες* ὡς μονάδα μήκους χρησιμοποιεῖται ἡ *γυάρδα* (1 yd), πού ὑποδιαιρεῖται σέ 3 *πόδια* καί κάθε πόδι ὑποδιαιρεῖται σέ 12 *ἴντσες*.

1 γυάρδα	(1 yd)	=	91,44 cm
1 πόδι	(1 ft)	=	30,48 cm
1 ἴντσα	(1 in)	=	2,54 cm

Στήν *Ἀστρονομία* ὡς μονάδα μήκους χρησιμοποιεῖται *τό 1 ἔτος φωτός*, δηλαδή τό διάστημα πού διατρέχει στό κενό τό φῶς σέ 1 ἔτος καί εἶναι :

* Ἡ διδασκαλία τῶν παραγράφων πού σημειώνονται μέ ἀστερίσκο δέν εἶναι ὑποχρεωτική.

$$1 \text{ έτος φωτός} \simeq 10^{13} \text{ km}$$

* **β. Μονάδες ἐπιφάνειας καί ὄγκου.** Ἡ μονάδα *ἐπιφάνειας* καί ἡ μονάδα *ὄγκου* προκύπτουν εὔκολα ἀπό τή μονάδα μήκους τό *μέτρο*. Ἔτσι ἔχουμε τίς ἑξῆς βασικές μονάδες:

Μονάδα ἐπιφάνειας εἶναι τό *τετραγωνικό μέτρο* (1 m^2), δηλ. τό ἐμβαδό ἑνός τετραγώνου, πού ἡ πλευρά του εἶναι ἴση μέ ἕνα μέτρο (1 m).

Μονάδα ὄγκου εἶναι τό *κυβικό μέτρο* (1 m^3), δηλ. ὁ ὄγκος ἑνός κύβου, πού ἡ ἀκμή του εἶναι ἴση μέ ἕνα μέτρο (1 m).

Στήν πράξη χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές καί τά ὑποπολλαπλάσια τῶν παραπάνω δύο μονάδων.

Μονάδες ἐπιφάνειας		
τετραγωνικό μέτρο	1 m^2	
τετραγωνικό δεκατόμετρο	1 dm^2	$= 10^{-2}$ m^2
τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο	1 cm^2	$= 10^{-4}$ m^2
τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	1 mm^2	$= 10^{-6}$ m^2

Μονάδες ὄγκου		
κυβικό μέτρο	1 m^3	
κυβικό δεκατόμετρο ἤ λίτρο 1 lt	1 dm^3	$= 10^{-3}$ m^3
κυβικό ἑκατοστόμετρο	1 cm^3	$= 10^{-6}$ m^3
κυβικό χιλιοστόμετρο	1 mm^3	$= 10^{-9}$ m^3

10. Μονάδα γωνίας

Ξέρουμε ὅτι μιά γωνία τή μετρᾶμε μέ τό τόξο πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή τή γωνία, ὅταν εἶναι ἐπίκεντρη. Στήν πράξη ὡς *μονάδα γωνίας* παίρνουμε *τή μοίρα* (1^0), πού ἀντιστοιχεῖ σέ τόξο ἴσο μέ τό 1/360 τοῦ κύκλου. Ἡ μοίρα ὑποδιαιρεῖται σέ 60 *πρῶτα λεπτά* ($1^0 = 60'$) καί κάθε πρῶτο λεπτό ὑποδιαιρεῖται σέ 60 *δευτερόλεπτα* ($1' = 60''$).

Στή Φυσική μιά γωνία (φ) τη μετρᾶμε μέ τό λόγο τοῦ μήκους τοῦ τόξου (s) πρός τήν ἀκτίνα (r) τοῦ κύκλου, δηλ. εἶναι

$$\boxed{\text{γωνία} = \frac{\text{μῆκος τόξου}}{\text{ἀκτίνα κύκλου}} \quad \text{ἤ} \quad \varphi = \frac{s}{r}}$$

Ἄν στήν παραπάνω ἐξίσωση εἶναι $s = r$, τότε βρίσκουμε $\varphi = 1$, δηλ. ἡ γωνία εἶναι ἴση μέ *μιά μονάδα γωνίας*, πού ὀνομάζεται *ἀκτίνιο* (1 rad).

Ὥστε ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό :

Μονάδα γωνίας εἶναι τό ἀκτίνιο (1 rad), δηλαδή ἡ ἐπίκεντρη γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σέ τόξο πού ἔχει μῆκος ἴσο μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος ἔχει μῆκος 2πr. Ἑπομένως σέ ὁλόκληρο τόν κύκλο ἀντιστοιχεῖ γωνία :

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} \quad \text{ἄρα} \quad \varphi = 2\pi \text{ ἀκτίνια}$$

Ἐπειδή λοιπόν γωνία 360^0 εἶναι ἴση μέ 2π rad, βρίσκουμε ὅτι

$$1 \text{ rad εἶναι ἴσο μέ γωνία } \frac{180^0}{\pi} = 57^0\ 18'$$

$$1^0 \text{ εἶναι ἴση μέ γωνία } \frac{\pi}{180^0} = 0{,}0175 \text{ rad}$$

11. Μονάδα χρόνου

Στήν καθημερινή ζωή ἡ μέτρηση τοῦ χρόνου βασίζεται στήν ἡμερήσια περιστροφή τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της. Ὁ χρόνος πού μεσολαβεῖ μεταξύ δύο διαδοχικῶν διαβάσεων τοῦ Ἡλίου ἀπό τό μεσημβρινό ἑνός τόπου ὀνομάζεται *ἀληθινή ἡλιακή ἡμέρα*. Αὐτός ὅμως ὁ χρόνος δέν εἶναι σταθερός καί γι' αὐτό ὡς μονάδα χρόνου παίρνουμε ἕνα σταθερό χρόνο, πού ὀνομάζεται *μέση ἡλιακή ἡμέρα* (1 d). Αὐτή ὑποδιαιρεῖται σέ 24 *ὧρες* καί ἡ ὥρα (1 h) ὑποδιαιρεῖται σέ 60 *λεπτά*. Τό λεπτό (1 min) ὑποδιαιρεῖται σέ 60 *δευτερόλεπτα*. Ἔτσι ἡ μέση ἡλιακή ἡμέρα ὑποδιαιρεῖται σέ 86 400 δευτερόλεπτα. Ὥστε *τό 1 δευτερόλεπτο* (1 sec) εἶναι ἴσο μέ τό 1/86 400 τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας.

Στή Φυσική ὡς μονάδα χρόνου χρησιμοποιοῦμε *τό δευτερόλεπτο* (1 sec).

Νεώτερος ὁρισμός τοῦ δευτερολέπτου. Ἀπό τό 1967 τό δευτερόλεπτο ὁρίζεται μέ βάση *τήν περίοδο* ὁρισμένης ἀκτινοβολίας, πού ἐκπέμπουν τά ἄτομα *τοῦ καισίου 133*. Ἔτσι γιά τό δευτερόλεπτο ἰσχύει σήμερα ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός :

Δευτερόλεπτο (1 sec) εἶναι ὁ χρόνος πού ἀντιστοιχεῖ σέ ὁρισμένο ἀριθμό (9 192 631 770) περιόδων τῆς ἀκτινοβολίας, πού ἐκπέμπει τό καίσιο 133.

$$\boxed{1 \text{ sec} = 9\ 192\ 631\ 770 \text{ περίοδοι } (Cs^{133}).}$$

Παρατήρηση. *Ἀστρική ἡμέρα* ὀνομάζεται ὁ χρόνος πού μεσολαβεῖ μεταξύ δύο διαδοχικῶν διαβάσεων ἑνός ἀπλανοῦς ἀστέρα ἀπό τό μεσημβρινό μας. Ὁ χρόνος αὐτός εἶναι σταθερός καί βρέθηκε ὅτι εἶναι :

1 ἀστρική ἡμέρα = 86 164 δευτερόλεπτα

12. Μονάδες μάζας

Ὡς *μονάδα μάζας* χρησιμοποιοῦμε διεθνῶς *τή μάζα* ἑνός ὁρισμένου σώματος, πού ὀνομάζεται **πρότυπο χιλιόγραμμο** καί φυλάγεται στό Διεθνές Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν (Σέβρες). Ἡ μονάδα μάζας ὀνομάζεται **χιλιόγραμμο μάζας** ἤ ἁπλούστερα **χιλιόγραμμο** (1 kgr). Τό πρότυπο χιλιόγραμμο εἶναι ἕνας μικρός κύλινδρος ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο, πού ἔχει διάμετρο καί ὕψος 39 mm. Ἀντίγραφα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου ἔχουν ὅλες οἱ χῶρες. Ὥστε :

Μονάδα μάζας εἶναι τό χιλιόγραμμο (1 kgr), δηλαδή ἡ μάζα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου.

μονάδα μάζας 1 χιλιόγραμμο (1 kgr)

Ὑποπολλαπλάσιο τοῦ χιλιόγραμμου εἶναι *τό γραμμάριο* (1 gr), πού εἶναι ἴσο μέ τό ἕνα χιλιοστό τοῦ χιλιόγραμμου. Πολλαπλάσιο τοῦ χιλιόγραμμου εἶναι *ὁ τόνος* (1 tn), πού εἶναι ἴσος μέ 1000 χιλιόγραμμα.

$$1 \text{ γραμμάριο } (1 \text{ gr}) = 10^{-3} \text{ kgr}, \quad 1 \text{ τόνος } (1 \text{ tn}) = 10^{3} \text{ kgr}$$

Σημείωση. Ἡ μάζα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου κατά μεγάλη προσέγγιση εἶναι ἴση μέ τή μάζα ἑνός λίτρου νεροῦ, πού εἶναι χημικῶς καθαρό καί ἔχει θερμοκρασία 4 °C.

13. Μονάδες βάρους

Ὡς *μονάδα βάρους* χρησιμοποιοῦμε *τό κιλοπόντ* (kilopont, 1 kp), πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἕνα κιλοπόντ (1 kp) εἶναι τό βάρος, πού ἔχει ἡ μάζα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου σέ γεωγραφικό πλάτος 45⁰ καί στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

μονάδα βάρους 1 κιλοπόντ (1 kp)

Τό βάρος πού ἔχει ἡ μάζα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου ἐξαρτᾶται ἀπό τό γεωγραφικό πλάτος καί ἀπό τό ὕψος πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί γι' αὐτό ὁ παραπάνω ὁρισμός περιέχει τόν περιορισμό τοῦ τόπου.

Ὑποπολλαπλάσιο τοῦ κιλοπόντ εἶναι *τό πόντ* (pond, 1 p), πού εἶναι ἴσο μέ τό ἕνα χιλιοστό τοῦ κιλοπόντ. Πολλαπλάσιο τοῦ κιλοπόντ εἶναι *τό μεγαπόντ* (Megapond, 1 Mp), πού εἶναι ἴσο μέ 1000 κιλοπόντ.

$$1 \text{ πόντ } (1 \text{ p}) = 10^{-3} \text{ kp}, \quad 1 \text{ μεγαπόντ } (1 \text{ Mp}) = 10^{3} \text{ kp} = 10^{6} \text{ p}$$

Παρατήρηση. Ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα 6 kgr, συμπεραίνουμε ὅτι ἔχει βάρος 6 kp, γιατί τό σῶμα αὐτό ἔχει μάζα 6 φορές μεγαλύτερη ἀπό τή μάζα τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου καί ἑπομένως τό βάρος τοῦ σώματος εἶναι 6 φορές μεγαλύτερο ἀπό τό βάρος τοῦ πρότυπου χιλιόγραμμου. Ὥστε *ἡ μάζα* (m) καί *τό βάρος* (B) ἑνός σώματος *ἐκφράζονται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό*, ὅταν ἡ μάζα εἶναι μετρημένη σέ γραμμάρια (gr), χιλιόγραμμα ἤ τόνους (tn) καί τό βάρος εἶναι ἀντίστοιχα μετρημένο σέ πόντ (p), κιλοπόντ (kp) καί μεγαπόντ (Mp).

Παρατήρηση. Γιά τήν ὀνομασία *τῆς μονάδας βάρους* δέν ὑπάρχει ἀπόλυτη συμφωνία.

Στή *Γαλλία* ὀνομάζεται kilogramme poids = *χιλιόγραμμο βάρους* καί συμβολίζεται μέ kgp. Ὑποπολλαπλάσιο εἶναι τό γραμμάριο βάρους (gp).

Στίς Ἀγγλοσαξονικές χῶρες ὀνομάζεται kilogram force = *χιλιόγραμμο δυνάμεως* καί συμβολίζεται μέ kgf. Ὑποπολλαπλάσιο εἶναι τό γραμμάριο δυνάμεως (gf).

Στή *Γερμανία* ὀνομάζεται kilopond (kp, κιλοπόντ) καί ὑποπολλαπλάσιο εἶναι τό pond (p).

* 14. Τά πολλαπλάσια καί τά ὑποπολλαπλάσια τῶν μονάδων

Γιά νά σχηματίζουμε τά δεκαδικά πολλαπλάσια καί ὑποπολλαπλάσια τῶν μονάδων, χρησιμοποιοῦμε ὁρισμένα *προθέματα*, πού ἔχουν ὁρισμένο συμβολισμό. Τά προθέματα αὐτά εἶναι τά ἑξῆς :

Πολλαπλάσια			Ὑποπολλαπλάσια		
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	d	10^{-18}	atto	a

Παρατήρηση. Στόν προφορικό λόγο οἱ μονάδες ἐκφράζονται μέ τό ὄνομα πού ἔχουν στήν ἑλληνική γλώσσα. Π.χ. λέμε πέντε ἑκατοστόμετρα, ἀλλά γράφουμε 5 cm. Οἱ μονάδες πού ἔχουν ξένα ὀνόματα προφέρονται ὅπως στή γλώσσα ἀπό τήν ὁποία προέρχονται, π.χ. λέμε Νιοῦτον (Newton), Ἀμπέρ (Ampère) κ.λ.

Συστήματα μονάδων

15. Σύστημα μονάδων

Γιά νά μετρᾶμε τά διάφορα φυσικά μεγέθη, χρησιμοποιοῦμε γιά τό κάθε φυσικό μέγεθος μιά ὁρισμένη *μονάδα*. Ἔτσι προκύπτουν τόσες μονάδες, ὅσα εἶναι καί τά διάφορα φυσικά μεγέθη. Δέν μποροῦμε ὅμως νά ὁρίσουμε *αὐθαίρετα* μιά μονάδα γιά κάθε φυσικό μέγεθος, γιατί τότε θά ὑπῆρχε

ἕνα μεγάλο πλῆθος μονάδων, πού θά ἦταν *ἀσύνδετες* μεταξύ τους.
Ἡ μελέτη τῶν φυσικῶν φαινομένων μᾶς ἀπέδειξε ὅτι τά φυσικά μεγέθη, πού ἐμφανίζονται σέ ἕνα φαινόμενο, *συνδέονται* μεταξύ τους μέ ὁρισμένες σχέσεις. Ἄν λοιπόν *ἐκλέξουμε* ὁρισμένα φυσικά μεγέθη καί ὁρίσουμε μέ ἀκρίβεια τίς μονάδες τους, τότε ὅλα τά ἄλλα φυσικά μεγέθη καί οἱ μονάδες τους *προκύπτουν εὔκολα* ἀπό τίς ἐξισώσεις τῆς Φυσικῆς. Ἔτσι διαμορφώνουμε ἕνα **σύστημα μονάδων.**

α. Θεμελιώδεις καί παράγωγες μονάδες. Ἕνα σύστημα μονάδων ἀποτελεῖται ἀπό λίγα **θεμελιώδη μεγέθη.** Οἱ μονάδες μέ τίς ὁποῖες μετρᾶμε τά θεμελιώδη μεγέθη ὀνομάζονται **θεμελιώδεις μονάδες.** Τά φυσικά μεγέθη, πού ἐκλέγουμε ὡς θεμελιώδη, ἔχουν τά ἑξῆς χαρακτηριστικά : α) εἶναι *ἀνεξάρτητα* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο· β) μποροῦν νά μᾶς δώσουν *ἀμετάβλητα πρότυπα* τῶν μονάδων τους· γ) εἶναι κατάλληλα γιά *πολύ ἀκριβεῖς μετρήσεις.*
Ὅλα τά ἄλλα φυσικά μεγέθη, ἐκτός ἀπό τά θεμελιώδη μεγέθη, λέγονται **παράγωγα μεγέθη** καί οἱ μονάδες τους **παράγωγες μονάδες.** Κάθε παράγωγο μέγεθος συνδέεται μέ τά θεμελιώδη μεγέθη μέ μιά ἁπλή σχέση, πού ἀποτελεῖ τήν *ἐξίσωση ὁρισμοῦ* γιά τό παράγωγο μέγεθος. Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή ὁρίζεται εὔκολα *ἡ μονάδα* τοῦ φυσικοῦ μεγέθους.
Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα :

Ἕνα σύστημα μονάδων περιλαμβάνει λίγες θεμελιώδεις μονάδες καί πάρα πολλές παράγωγες μονάδες, πού καθορίζονται εὔκολα ἀπό τήν ἀντίστοιχη ἐξίσωση ὁρισμοῦ τοῦ φυσικοῦ μεγέθους.

Διεθνές σύστημα μονάδων (SI)

Ἡ Διεθνής Ἐπιτροπή Μέτρων καί Σταθμῶν ἀποφάσισε ὅτι πρέπει νά χρησιμοποιοῦμε ἕνα γενικότερο σύστημα μονάδων γιά ὅλα τά μηχανικά, ἠλεκτρικά, θερμομετρικά καί φωτομετρικά μεγέθη. Ἔτσι διαμορφώθηκε τό **διεθνές σύστημα μονάδων** ἤ **σύστημα μονάδων SI**(*), πού ἀποτελεῖται ἀπό *ἕξι θεμελιώδεις μονάδες.*

Στό διεθνές σύστημα μονάδων θεμελιώδη μεγέθη εἶναι : τό μῆκος, ἡ μάζα, ὁ χρόνος, ἡ ἔνταση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ἡ θερμοκρασία καί ἡ ἔνταση φωτεινῆς πηγῆς.
Οἱ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες εἶναι : τό μέτρο (1 m), τό χιλιόγραμμο (1 kgr), τό δευτερόλεπτο (1 sec), τό Ἀμπέρ (1 A), ὁ βαθμός Κέλβιν (^{0}K) καί ἡ candela (1 cd).

* Τό σύμβολο SI προέρχεται ἀπό τό διεθνές ὄνομα τοῦ συστήματος «Systéme International d' Unitès».

β. Τό σύστημα μονάδων MKS. Γιά τή μελέτη τῶν φαινομένων τῆς Μηχανικῆς μᾶς ἀρκοῦν τά τρία μηχανικά θεμελιώδη μεγέθη τοῦ διεθνοῦς συστήματος (SI) καί οἱ ἀντίστοιχες τρεῖς θεμελιώδεις μονάδες (1 m, 1 kgr, 1 sec). Ἔτσι στή Μηχανική χρησιμοποιοῦμε *τό σύστημα μονάδων MKS*, πού εἶναι τμῆμα τοῦ συστήματος SI.

Στό σύστημα MKS *ἡ δύναμη* εἶναι παράγωγο μέγεθος καί *ἡ μονάδα δυνάμεως*, πού ὀνομάζεται *Newton* (Νιοῦτον, 1 N), ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$.

γ. Τό σύστημα μονάδων C.G.S. Στή Φυσική γιά πολλά χρόνια χρησιμοποιήσαμε τό **σύστημα μονάδων CGS.**

Στό σύστημα μονάδων CGS θεμελιώδη μεγέθη εἶναι :
τό μῆκος, ἡ μάζα καί ὁ χρόνος.
Οἱ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες εἶναι :
τό ἑκατοστόμετρο (1 cm), τό γραμμάριο (1 gr) καί τό δευτερόλεπτο (1 sec).
Τό 1 Newton ἰσοῦται μέ 10⁵ δύνες.

$$\boxed{1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}}$$

δ. Τό τεχνικό σύστημα μονάδων (Τ.Σ.) Σέ μερικές ἐφαρμογές ἐξακολουθοῦμε νά χρησιμοποιοῦμε τό **τεχνικό σύστημα μονάδων.**

Στό τεχνικό σύστημα μονάδων θεμελιώδη μεγέθη εἶναι :
τό μῆκος, ἡ δύναμη καί ὁ χρόνος.
Οἱ ἀντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες εἶναι :
τό μέτρο (1 m), τό κιλοπόντ (1 kp) καί τό δευτερόλεπτο (1 sec).
Τό 1 κιλοπόντ (1 kp) ἰσοῦται μέ 9,81 Newton ἤ μέ $9{,}81 \cdot 10^5$ δύνες.

$$\boxed{1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \mathrm{kp} = 9{,}81 \cdot 10^5\ \mathrm{dyn}}$$

Πολλές φορές, γιά εὐκολία στούς ὑπολογισμούς, θεωροῦμε ὅτι κατά προσέγγιση εἶναι:

$$\boxed{1\ \mathrm{kp} \simeq 10\ \mathrm{N}}$$

16. Ἐξισώσεις διαστάσεων

Στό σύστημα SI τά παράγωγα *μηχανικά* μεγέθη σχετίζονται μόνο μέ τρία θεμελιώδη μεγέθη, τό μῆκος, τή μάζα καί τό χρόνο.

Στή Μηχανική ἔχουμε τίς ἑπόμενες γνωστές ἐξισώσεις ὁρισμοῦ:

$$\text{ταχύτητα} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{χρόνος}} \qquad \upsilon = \frac{s}{t}$$

$$\text{ἐπιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή ταχύτητας}}{\text{χρόνος}} \qquad \gamma = \frac{\Delta\upsilon}{t}$$

$$\text{δύναμη} = \text{μάζα} \times \text{ἐπιτάχυνση} \qquad F = m \cdot \gamma$$

Οἱ παραπάνω ἐξισώσεις φανερώνουν ὅτι κάθε φυσικό μέγεθος μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς *συνάρτηση* τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν. Ἄν παραστήσουμε μέ τά σύμβολα L, M καί T τά θεμελιώδη μεγέθη *μῆκος* (Longeur), *μάζα* (Masse) καί *χρόνος* (Temps), τότε οἱ παραπάνω ἐξισώσεις γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$[\upsilon] = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}]$$

$$[\gamma] = \frac{[L \cdot T^{-1}]}{[T]} = [L \cdot T^{-2}]$$

$$[F] = [M] \cdot [L \cdot T^{-2}] = [L \cdot M \cdot T^{-2}]$$

Καθεμιά ἀπό τίς παραπάνω ἐξισώσεις ὀνομάζεται **ἐξίσωση διαστάσεων** τοῦ ἀντίστοιχου φυσικοῦ μεγέθους καί φανερώνει τή σχέση πού ὑπάρχει μεταξύ τοῦ φυσικοῦ μεγέθους καί τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν. Οἱ ἐκθέτες τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν L, M καί T ὀνομάζονται **διαστάσεις** τοῦ φυσικοῦ μεγέθους. Οἱ ἀγκύλες φανερώνουν ὅτι ἡ σχέση πού ἐκφράζει ἡ ἐξίσωση διαστάσεων εἶναι μόνο *ποιοτική* σχέση. Γιά νά φαίνεται καθαρά ἡ σχέση τοῦ φυσικοῦ μεγέθους *μέ τά τρία θεμελιώδη μεγέθη*, οἱ παραπάνω ἐξισώσεις διαστάσεων γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$[\upsilon] = [L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}]$$
$$[\gamma] = [L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-2}]$$
$$[F] = [L^1 \cdot M^1 \cdot T^{-2}]$$

Ἑπομένως ἡ ταχύτητα ἔχει διαστάσεις 1, 0, —1 καί ἡ δύναμη ἔχει διαστάσεις 1, 1, —2.

Γενικά στό σύστημα SI ἕνα μηχανικό μέγεθος Γ ἔχει μιά ἐξίσωση διαστάσεων πού ἔχει τή μορφή:

$$[\Gamma] = [L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma}] \qquad (1)$$

Οἱ διαστάσεις α,β,γ τοῦ φυσικοῦ μεγέθους εἶναι ἀριθμοί ἀκέραιοι ἤ κλασματικοί, θετικοί ἤ ἀρνητικοί ἤ καί μηδέν.

Παρατήρηση. Ἡ ἐξίσωση διαστάσεων ἑνός φυσικοῦ μεγέθους ἐξαρτᾶται ἀπό *τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ* τοῦ φυσικοῦ μεγέθους καί ἀπό *τό σύστημα μονάδων* πού ἐφαρμόζουμε.

α. Ἀδιάστατο φυσικό μέγεθος. Ἄν στήν ἐξίσωση διαστάσεων (1) οἱ διαστάσεις α, β, γ εἶναι ἴσες μέ μηδέν ($\alpha=\beta=\gamma=0$), τότε ἡ ἐξίσωση διαστάσεων παίρνει τή μορφή $[\Gamma]=1$. Αὐτό τό φυσικό μέγεθος Γ *δέν ἔχει διαστάσεις* καί ὀνομάζεται *ἀδιάστατο μέγεθος* ἤ *καθαρός ἀριθμός*. Π.χ. μιά γωνία ἐκφράζεται ἀπό τή σχέση $\varphi = s/r$, ὅπου s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐπίκεντρη γωνία, καί r εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Ὥστε ἡ ἐξίσωση διαστάσεων τῆς γωνίας φ εἶναι:

$$[\varphi]=\frac{[s]}{[r]}=\frac{[L]}{[L]}=L^0=1$$

Ἄρα ἡ γωνία εἶναι *ἀδιάστατο μέγεθος*.

β. Εὕρεση τῶν μονάδων ἀπό τίς ἐξισώσεις διαστάσεων. Ἔστω ὅτι στό σύστημα SI ἡ ἐξίσωση διαστάσεων ἑνός φυσικοῦ μεγέθους Γ εἶναι:

$$[\Gamma]=[L^{\alpha}\cdot M^{\beta}\cdot T^{\gamma}]$$

Ἄν στήν ἐξίσωση διαστάσεων ἀντικαταστήσουμε τά σύμβολα L,M,T τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν μέ τά σύμβολα τῶν ἀντίστοιχων θεμελιωδῶν μονάδων, βρίσκουμε ὅτι *ἡ μονάδα* τοῦ φυσικοῦ μεγέθους Γ εἶναι:

$$\text{μονάδα τοῦ μεγέθους } \Gamma \quad 1\ m^{\alpha}\cdot kgr^{\beta}\cdot sec^{\gamma}$$

Ὥστε ἀπό τήν ἐξίσωση διαστάσεων ἑνός φυσικοῦ μεγέθους εὔκολα *προσδιορίζουμε τή μονάδα* αὐτοῦ τοῦ μεγέθους.

γ. Ὁμογένεια τῶν ἐξισώσεων. Οἱ νόμοι τῆς Φυσικῆς εἶναι *ἀνεξάρτητοι* ἀπό τίς χρησιμοποιούμενες μονάδες. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση πού ἐκφράζει ἕνα νόμο πρέπει νά εἶναι *ὁμογενής*. Π.χ. ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως ἐκφράζει χρόνο καί ἔχει ἐξίσωση διαστάσεων T^1. Τό δεύτερο μέλος τῆς ἐξισώσεως ἔχει ἐξίσωση διαστάσεων:

$$\sqrt{\frac{\text{μῆκος}}{\text{ἐπιτάχυνση}}}=\sqrt{\frac{L^1}{L^1\cdot T^{-2}}}=\sqrt{T^2}=T^1$$

Καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις, ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ὁμογενής.

Τά φυσικά μεγέθη

17. Ὁρισμός τοῦ ἀνύσματος

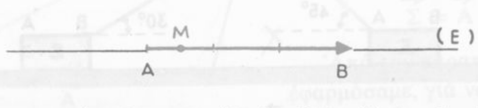
Πάνω σέ μιά εὐθεία (Ε) τά δύο σημεῖα Α καί Β ὁρίζουν τό εὐθύγραμμο τῆμα ΑΒ (σχ. 1). Ἕνα κινητό σημεῖο Μ, κινούμενο ἀπό τό Α πρός τό Β, διατρέχει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Τότε λέμε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι *προσανατολισμένο*, δηλαδή ἔχει *φορά* ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά. Αὐτή τήν ὁρισμένη φορά ὑποδηλώνει ἡ αἰχμή τοῦ βέλους, πού σημειώνεται στό σημεῖο Β. Τό προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ὀνομάζεται **ἄνυσμα** ἤ καί **διάνυσμα** ($\overrightarrow{AB}$). Τά σημεῖα Α καί Β τοῦ ἀνύσματος εἶναι ἀντίστοιχα *ἡ ἀρχή* καί *τό τέλος* τοῦ ἀνύσματος. Ἡ εὐθεία (Ε), πού πάνω της εἶναι τό ἄνυσμα ΑΒ, ὀνομάζεται *φορέας* τοῦ ἀνύσματος. Ἄν τό ἄνυσμα ΑΒ τό μετρήσουμε μέ ὁρισμένη μονάδα μήκους, τότε βρίσκουμε *τό μέτρο* τοῦ ἀνύσματος, πού ἐκφράζει τήν ἀριθμητική τιμή του καί τή μονάδα μέ τήν ὁποία τό μετρήσαμε. Ἔτσι π.χ. βρίσκουμε ὅτι τό ἄνυσμα ΑΒ ἔχει μέτρο 3 cm. Ὁ φορέας τοῦ ἀνύσματος ΑΒ, δηλ. ἡ εὐθεία (Ε), ἔχει ὁρισμένη *διεύθυνση*, μέ ἄλλα λόγια ἔχει ὁρισμένη τοποθέτηση στό χῶρο. Ὥστε τό ἄνυσμα ΑΒ ἔχει *διεύθυνση*, τή διεύθυνση τοῦ φορέα του. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στά ἑξῆς :

I. Ἄνυσμα ἤ διάνυσμα ὀνομάζεται ἕνα προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα.

II. Σέ κάθε ἄνυσμα διακρίνουμε τά ἑξῆς στοιχεῖα : α) τήν ἀρχή καί τό τέλος τοῦ ἀνύσματος· β) τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος, πού εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ φορέα του· γ) τή φορά τοῦ ἀνύσματος, πού εἶναι ἡ φορά ἀπό τήν ἀρχή πρός τό τέλος του· δ) τό μέτρο τοῦ ἀνύσματος, πού ἐκφράζει τήν ἀριθμητική τιμή του καί τή μονάδα μέ τήν ὁποία μετρήθηκε.

18. Μονόμετρα φυσικά μεγέθη

Ὑπάρχουν φυσικά μεγέθη πού καθορίζονται τελείως, ὅταν δοθεῖ *μόνο τό μέτρο τους*, δηλαδή ἡ ἀριθμητική τιμή τους καί ἡ μονάδα μέ τήν ὁποία



Σχ. 1. Τό προσανατολισμένο τμῆμα ΑΒ τῆς εὐθείας (Ε) εἶναι ἕνα ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

μετρήθηκαν. Εἶναι π.χ. ἀρκετό νά ποῦμε ὅτι τό σῶμα ἔχει μάζα 7 kgr. Αὐτά τά φυσικά μεγέθη ὀνομάζονται **μονόμετρα** μεγέθη. Τέτοια μεγέθη εἶναι ὁ χρόνος, ἡ μάζα, ἡ θερμοκρασία κ.ἄ. Ὥστε:

Μονόμετρο ὀνομάζεται τό φυσικό μέγεθος, πού καθορίζεται τελείως, ὅταν δοθεῖ τό μέτρο του (δηλαδή ἡ ἀριθμητική τιμή του καί ἡ μονάδα μέ τήν ὁποία μετρήθηκε).

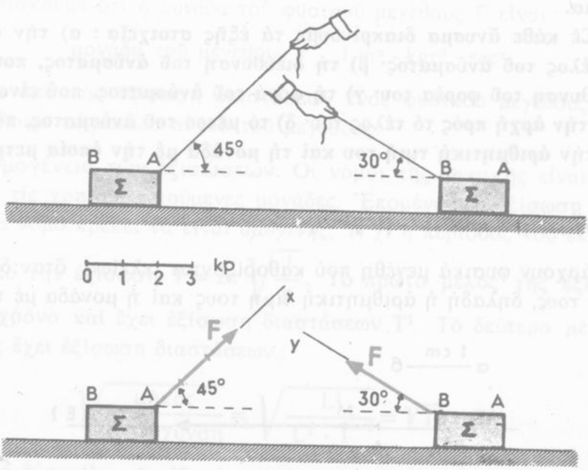
Γιά τά μονόμετρα μεγέθη ἰσχύει *ὁ ἀλγεβρικός λογισμός*. Ἄν π.χ. ἕνα σῶμα κινηθεῖ ἐπί χρόνο $t_1 = 3$ sec καί ἔπειτα κινηθεῖ ἐπί χρόνο $t_2 = 6$ sec, τότε ὁ ὁλικός χρόνος ($t_{ολ}$) τῆς κινήσεως εἶναι :

$$t_{ολ} = t_1 + t_2 = 3 \text{ sec} + 6 \text{ sec} = 9 \text{ sec}$$

19. Ἀνυσματικά φυσικά μεγέθη

Σέ ἕνα σῶμα ἐφαρμόζεται μιά δύναμη πού ἔχει *μέτρο* F = 3 kp (σχ. 2). Ἀλλά γιά νά εἶναι τελείως ὁρισμένη αὐτή ἡ δύναμη, πρέπει, ἐκτός ἀπό τό μέτρο της, νά εἶναι γνωστά καί ἄλλα τρία στοιχεῖα της, πού εἶναι τά ἑξῆς :

- *τό σημεῖο ἐφαρμογῆς* τῆς δυνάμεως, δηλαδή σέ ποιό σημεῖο τοῦ σώματος ἐφαρμόζεται ἡ δύναμη·
- *ἡ διεύθυνση* τῆς δυνάμεως, δηλαδή ἡ εὐθεία πάνω στήν ὁποία εἶναι ἡ δύναμη ἤ ἀλλιῶς *ὁ φορέας* της·



Σχ. 2. Ἡ δύναμη ($\vec{F}$) εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος.

● *ἡ φορά* τῆς δυνάμεως, δηλαδή ἡ φορά κατά τήν ὁποία ἡ δύναμη τείνει νά κινήσει τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της πάνω στό φορέα της.

Παρατηροῦμε ὅτι τά παραπάνω στοιχεῖα τῆς δυνάμεως εἶναι τά στοιχεῖα ἑνός ἀνύσματος καί γι' αὐτό λέμε ὅτι ἡ δύναμη εἶναι *ἀνυσματικό* φυσικό μέγεθος καί παριστάνεται πάντοτε μέ ἄνυσμα, πού τό μῆκος του μέ κατάλληλη κλίμακα φανερώνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως. Ἀνυσματικά μεγέθη εἶναι ἡ δύναμη, ἡ ταχύτητα, ἡ ἐπιτάχυνση κ.ἄ. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

Ἀνυσματικό ὀνομάζεται τό φυσικό μέγεθος, πού καθορίζεται τελείως, ὅταν δοθεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς, ὁ φορέας, ἡ φορά καί τό μέτρο του.

Ὥστε τά διάφορα φυσικά μεγέθη διακρίνονται σέ **μονόμετρα** καί **ἀνυσματικά.**

20. Ὁρισμοί γιά τά ἀνύσματα

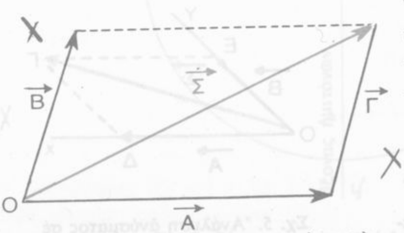
Παράλληλα ἀνύσματα, πού ἔχουν τήν ἴδια φορά, ὀνομάζονται *ὁμόρροπα*, ἐνῶ, ὅταν ἔχουν ἀντίθετη φορά, ὀνομάζονται *ἀντίρροπα*. Ἀνύσματα, πού ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, ὀνομάζονται *συγγραμμικά*.

Δύο παράλληλα ἀνύσματα, πού ἔχουν *τό ἴδιο μέτρο* ὀνομάζονται *ἴσα*, ἄν ἔχουν τήν ἴδια φορά, καί ὀνομάζονται *ἀντίθετα*, ἄν ἔχουν ἀντίθετη φορά.

* 21. Πρόσθεση ἀνυσμάτων

Γιά νά προσθέσουμε δύο ἀνύσματα $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ (σχ. 3) ἐφαρμόζουμε τόν ἑξῆς κανόνα: Ἀπό τήν ἄκρη τοῦ ἀνύσματος $\vec{A}$ φέρνουμε δεύτερο ἄνυσμα $\vec{\Gamma}$, ἴσο μέ τό ἄνυσμα $\vec{B}$. Τότε λέμε ὅτι τά δύο ἀνύσματα $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ ἔγιναν *διαδοχικά*. Ἄν ἑνώσουμε τήν ἀρχή τοῦ ἀνύσματος $\vec{A}$ μέ τό τέλος τοῦ ἀνύσματος $\vec{\Gamma}$, βρίσκουμε τό ἄνυσμα $\vec{\Sigma}$, πού ὀνομάζεται **γεωμετρικὸ ἄθροισμα** ἤ **συνισταμένη** τῶν δύο ἀνυσμάτων. Τά ἀνύσματα $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ ὀνομάζονται **συνιστῶσες**. Ἡ πρόσθεση τῶν δύο ἀνυσμάτων γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\Sigma} = \vec{A} + \vec{B}$$



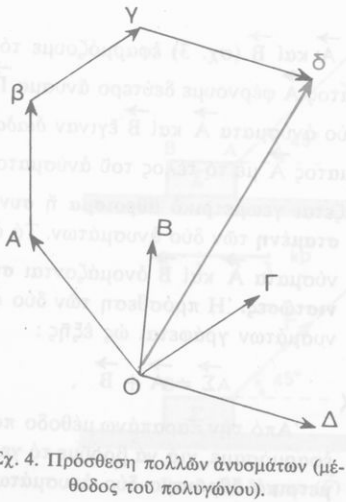
Σχ. 3. Πρόσθεση δύο ἀνυσμάτων $\vec{A}$ καί $\vec{B}$.

Ἀπό τήν παραπάνω μέθοδο πού ἐφαρμόσαμε, γιά νά βροῦμε τό γεωμετρικό ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων, προκύπτει ὁ ἀκόλουθος *κανόνας τοῦ παραλληλογράμμου*: Σχηματίζουμε ἕνα παραλληλόγραμμο (σχ. 3), πού ἔχει ὡς πλευρές τά δοσμένα ἀνύσματα. Τότε ἡ *διαγώνιος* τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι τό *γεωμετρικό ἄθροισμα* τῶν δύο ἀνυσμάτων.

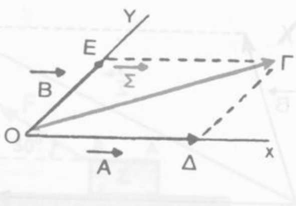
* **α. Πρόσθεση πολλῶν ἀνυσμάτων.** Γιά νά προσθέσουμε πολλά ὁμοεπίπεδα ἀνύσματα, ἐφαρμόζουμε τή μέθοδο τοῦ *πολυγώνου* (σχ. 4). Κάνουμε τά δοσμένα ἀνύσματα διαδοχικά. Ἔτσι σχηματίζεται μιά πολυγωνική γραμμή, πού ἔχει ὡς πλευρές της τά δοσμένα ἀνύσματα. Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{(O\delta)}$, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου ἀνύσματος καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου ἀπό τά διαδοχικά ἀνύσματα, εἶναι τό *γεωμετρικό ἄθροισμα* (ἤ ἡ *συνισταμένη*) τῶν δοσμένων ἀνυσμάτων.

Παρατήρηση. Γιά νά *ἀφαιρέσουμε* ἕνα ἄνυσμα $\vec{B}$ ἀπό ἄλλο ἄνυσμα $\vec{A}$, ἀρκεῖ νά βροῦμε ἕνα ἄνυσμα $\vec{\Gamma}$ τέτοιο, ὥστε τά ἀνύσματα $\vec{B}$ καί $\vec{\Gamma}$ νά ἔχουν γεωμετρικό ἄθροισμα τό ἄνυσμα $\vec{A}$.

* **β. Ἀνάλυση ἀνύσματος σέ δύο συνιστῶσες.** Ὀνομάζεται *ἀνάλυση* ἀνύσματος ἡ εὕρεση ἄλλων ἀνυσμάτων, πού ἔχουν ὡς γεωμετρικό ἄθροισμα τό δοσμένο ἄνυσμα. Ἔχουμε τό ἄνυσμα $\vec{\Sigma}$ (σχ. 5) καί δύο διευθύνσεις Ox καί Oy, πού περνοῦν ἀπό τήν ἀρχή O τοῦ ἀνύσματος. Σχηματίζουμε τό παραλληλόγραμμο, πού ἔχει διαγώνιο τό δοσμένο ἄνυσμα, καί οἱ δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στίς διευθύνσεις Ox καί Oy. Εἶναι φανερό ὅτι τά ἀνύσματα $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ ἔχουν γεωμετρικό ἄθροισμα τό δοσμένο ἄνυσμα $\vec{\Sigma}$, δηλαδή εἶναι οἱ *συνιστῶσες* τοῦ ἀνύσματος $\vec{\Sigma}$.



Σχ. 4. Πρόσθεση πολλῶν ἀνυσμάτων (μέθοδος τοῦ πολυγώνου).



Σχ. 5. Ἀνάλυση ἀνύσματος σέ δύο συνιστῶσες.

* 22. Στοιχεῖα ἀπό τήν Τριγωνομετρία

Γράφουμε κύκλο, πού ἔχει κέντρο Ο καί ἀκτίνα ἴση μέ τή μονάδα (σχ. 6). Αὐτός ὁ κύκλος ὀνομάζεται *τριγωνομετρικός κύκλος*. Δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες x΄x καί y΄y περνοῦν ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου. Μιά ἐπίκεντρη γωνία φ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο τό ΑΒ. Ὡς *ἀρχή τῶν τόξων* θεωροῦμε τό σημεῖο Α καί τά μετρᾶμε κατά φορά ἀντίθετη μέ ἐκείνη πού κινοῦνται οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ.

* α. Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

Ἔχουμε τούς ἑξῆς ὁρισμούς:

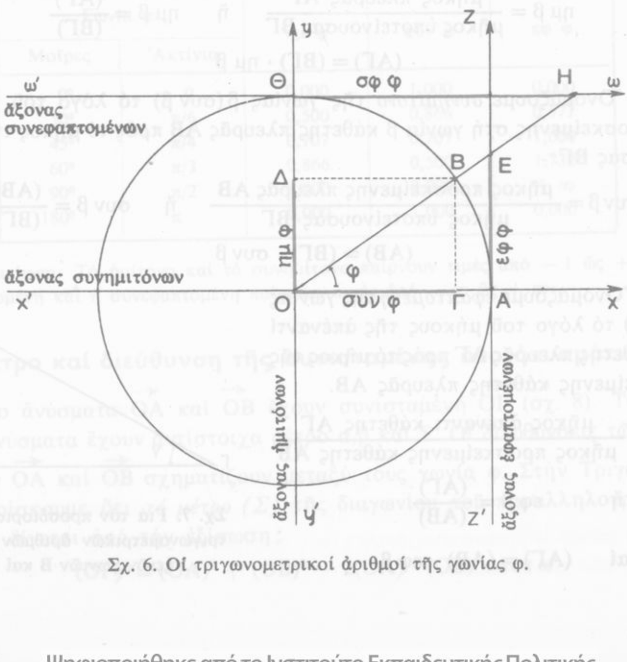
1. Ὀνομάζουμε *ἡμίτονο* τῆς γωνίας φ (ημ φ) τό λόγο τῆς τεταγμένης ΟΔ τοῦ σημείου Β πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

$$\text{ημ}\,\varphi = (\text{ΟΔ})$$

2. Ὀνομάζουμε *συνημίτονο* τῆς γωνίας φ (συν φ) τό λόγο τῆς τετμημένης ΟΓ τοῦ σημείου Β πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

$$\text{συν}\,\varphi = (\text{ΟΓ})$$

3. Θεωροῦμε ἄξονα z΄z, πού ἐφάπτεται στό σημεῖο Α τοῦ κύκλου, εἶναι παράλληλος μέ τόν ἄξονα y΄y καί ἔχει τήν ἴδια φορά μέ αὐτόν. Ἡ εὐθεία ΟΒ, πού περνᾶ ἀπό τό τέλος τοῦ τόξου Β, τέμνει τόν ἄξονα z΄z στό σημεῖο Ε.



Σχ. 6. Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας φ.

Ὀνομάζουμε *ἐφαπτομένη* τῆς γωνίας φ (εφ φ) τό λόγο τῆς τεταγμένης νης ΑΕ τοῦ σημείου Ε πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

$$\text{εφ } φ = (ΑΕ)$$

4. Θεωροῦμε ἄξονα ω΄ω, πού ἐφάπτεται στό σημεῖο Θ τοῦ κύκλου, εἶναι παράλληλος μέ τόν ἄξονα x΄x καί ἔχει τήν ἴδια φορά μέ αὐτόν. Ἡ εὐθεία ΟΒ τέμνει τόν ἄξονα ω΄ω στό σημεῖο Η.

Ὀνομάζουμε *συνεφαπτομένη* τῆς γωνίας φ (σφ φ) τό λόγο τῆς τετμημένης ΘΗ τοῦ σημείου Η πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

$$\text{σφ } φ = (ΘΗ)$$

Τό ἡμίτονο, τό συνημίτονο, ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς γωνίας ὀνομάζονται *τριγωνομετρικοί ἀριθμοί* τῆς γωνίας, εἶναι καθαροί ἀριθμοί καί δίνονται ἀπό εἰδικούς πίνακες.

* β. Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο. Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 7) οἱ γωνίες β καί γ εἶναι *ὀξεῖες*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση μποροῦμε νά δώσουμε στούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς ὀξείας γωνίας πιό ἁπλούς ὁρισμούς.

1. Ὀνομάζουμε *ἡμίτονο* τῆς γωνίας β (ημ β) τό λόγο τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντί της κάθετης πλευρᾶς ΑΓ πρός τό μῆκος τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

$$\text{ημ } β = \frac{\text{μῆκος πλευρᾶς ΑΓ}}{\text{μῆκος ὑποτείνουσας ΒΓ}} \quad \text{ἤ} \quad \text{ημ } β = \frac{(ΑΓ)}{(ΒΓ)}$$

ἄρα

$$(ΑΓ) = (ΒΓ) \cdot \text{ημ } β$$

2. Ὀνομάζουμε *συνημίτονο* τῆς γωνίας β (συν β) τό λόγο τοῦ μήκους τῆς προσκείμενης στή γωνία β κάθετης πλευρᾶς ΑΒ πρός τό μῆκος τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

$$\text{συν } β = \frac{\text{μῆκος προσκείμενης πλευρᾶς ΑΒ}}{\text{μῆκος ὑποτείνουσας ΒΓ}} \quad \text{ἤ} \quad \text{συν } β = \frac{(ΑΒ)}{(ΒΓ)}$$

ἄρα

$$(ΑΒ) = (ΒΓ) \cdot \text{συν } β$$

3. Ὀνομάζουμε *ἐφαπτομένη* τῆς γωνίας β (εφ β) τό λόγο τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντί της κάθετης πλευρᾶς ΑΓ πρός τό μῆκος τῆς προσκείμενης κάθετης πλευρᾶς ΑΒ.

$$\text{εφ } β = \frac{\text{μῆκος ἀπέναντι κάθετης ΑΓ}}{\text{μῆκος προσκείμενης κάθετης ΑΒ}}$$

$$\text{ἤ} \qquad \text{εφ } β = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΒ)}$$

$$\text{καί} \qquad (ΑΓ) = (ΑΒ) \cdot \text{εφ } β$$

Σχ. 7. Γιά τόν προσδιορισμό τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β καί Γ.

4. Ὀνομάζουμε *συνεφαπτομένη* τῆς γωνίας β (σφ β) τό λόγο τοῦ μήκους τῆς προσκείμενης κάθετης πλευρᾶς ΑΒ πρός τό μῆκος τῆς ἀπέναντι κάθετης πλευρᾶς ΑΓ.

$$\text{σφ}\,\beta = \frac{\text{μῆκος προσκείμενης κάθετης ΑΒ}}{\text{μῆκος ἀπέναντι κάθετης ΑΓ}} \quad \text{ἤ} \quad \text{σφ}\,\beta = \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΓ})}$$

$$\text{ἄρα} \quad (\text{ΑΒ}) = (\text{ΑΓ}) \cdot \text{σφ}\,\beta$$

* **γ. Σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.** Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς γωνίας φ συνδέονται μεταξύ τους μέ τίς ἑξῆς σχέσεις:

$$\text{ημ}^2\,\varphi + \text{συν}^2\,\varphi = 1 \qquad \text{εφ}\,\varphi = \frac{\text{ημ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi} \qquad \text{σφ}\,\varphi = \frac{1}{\text{εφ}\,\varphi}$$

* **δ. Συμπληρωματικές καί παραπληρωματικές γωνίες.** Ἄν δύο γωνίες α καί β εἶναι *συμπληρωματικές* ($\alpha + \beta = 90^0$), τότε εἶναι:

$$\text{ημ}\,\alpha = \text{συν}\,\beta \quad \text{καί} \quad \text{συν}\,\alpha = \text{ημ}\,\beta$$

Ἄν οἱ δύο γωνίες α καί β εἶναι *παραπληρωματικές* ($\alpha + \beta = 180^0$), τότε εἶναι:

$$\text{ημ}\,\alpha = \text{ημ}\,\beta \quad \text{καί} \quad \text{συν}\,\alpha = -\,\text{συν}\,\beta$$

Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μερικῶν γωνιῶν

Γωνία φ: Μοῖρες	Γωνία φ: Ἀκτίνια	ημ φ	συν φ	εφ φ
0^0	0	0,000	1,000	0,000
30^0	π/6	0,500	0,866	0,577
45^0	π/4	0,707	0,707	1,000
60^0	π/3	0,866	0,500	1,732
90^0	π/2	1,000	0,000	$+\infty$
180^0	π	0,000	—1,000	0,000

Σημείωση. Τό ἡμίτονο καί τό συνημίτονο παίρνουν τιμές ἀπό —1 ὥς +1, ἐνῶ ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη παίρνουν τιμές ἀπό $-\infty$ ὥς $+\infty$.

23. Μέτρο καί διεύθυνση τῆς συνισταμένης δύο ἀνυσμάτων

Δύο ἀνύσματα $\vec{\text{ΟΑ}}$ καί $\vec{\text{ΟΒ}}$ ἔχουν συνισταμένη $\vec{\text{ΟΓ}}$ (σχ. 8). Τά τρία αὐτά ἀνύσματα ἔχουν ἀντίστοιχα μέτρο α, β καί Σ. Οἱ διευθύνσεις τῶν ἀνυσμάτων $\vec{\text{ΟΑ}}$ καί $\vec{\text{ΟΒ}}$ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ. Στήν Τριγωνομετρία βρίσκουμε ὅτι *τό μέτρο (Σ)* τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$(\text{ΟΓ})^2 = (\text{ΟΑ})^2 + (\text{ΟΒ})^2 - 2(\text{ΟΑ}) \cdot (\text{ΟΒ}) \cdot \text{συν}\,\omega \qquad (1)$$

Πυκνότητα (ρ) τοῦ ὑλικοῦ, ἀπό τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἕνα σῶμα, ὀνομάζεται τό πηλίκο τῆς μάζας (m) τοῦ σώματος διά τοῦ ὄγκου (V) τοῦ σώματος καί ἐκφράζει τή μάζα πού περιέχεται στή μονάδα ὄγκου αὐτοῦ τοῦ ὑλικοῦ.

$$\text{πυκνότητα} = \frac{\text{μάζα}}{\text{ὄγκος}} \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

Μονάδες πυκνότητας. Ἄν στήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητας $\rho = m/V$, βάλουμε $m = 1$ καί $V = 1$, βρίσκουμε $\rho = 1$. Ἔτσι ὁρίζουμε *τή μονάδα πυκνότητας* σέ ἕνα σύστημα μονάδων.

Στό σύστημα SI μονάδα πυκνότητας εἶναι τό ἕνα χιλιόγραμμο κατά κυβικό μέτρο.

μονάδα πυκνότητας SI	$1\ kgr/m^3$

Στό σύστημα CGS μονάδα πυκνότητας εἶναι τό ἕνα γραμμάριο κατά κυβικό ἑκατοστόμετρο.

μονάδα πυκνότητας CGS	$1\ gr/cm^3$

Ἐπειδή εἶναι $1\ kgr = 10^3\ gr$ καί $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$, ἕπεται ὅτι εἶναι :

$$1\ \frac{kgr}{m^3} = \frac{10^3\ gr}{10^6\ cm^3} \qquad \text{καί} \qquad 1\ kgr/m^3 = 10^{-3}\ gr/cm^3$$

Στήν πράξη πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε ὡς μονάδα πυκνότητας τό $1\ gr/cm^3$, γιατί ἡ μονάδα πυκνότητας SI εἶναι πολύ μικρή.

25. Εἰδικό βάρος

Ἕνα *ὁμογενές σῶμα* ἔχει βάρος B καί ὄγκο V. Τότε τό βάρος πού ἀντιστοιχεῖ στή μονάδα ὄγκου ἔχει σταθερή τιμή καί σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός* :

Εἰδικό βάρος (ε) τοῦ ὑλικοῦ, ἀπό τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἕνα σῶμα, ὀνομάζεται τό πηλίκο τοῦ βάρους (B) τοῦ σώματος διά τοῦ ὄγκου (V) τοῦ σώματος καί ἐκφράζει τό βάρος πού ἀντιστοιχεῖ στή μονάδα ὄγκου αὐτοῦ τοῦ ὑλικοῦ.

$$\text{εἰδικό βάρος} = \frac{\text{βάρος}}{\text{ὄγκος}} \qquad \varepsilon = \frac{B}{V}$$

Μονάδες εἰδικοῦ βάρους. Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση ὁρισμοῦ βρίσκουμε *τή μονάδα εἰδικοῦ βάρους* σέ ἕνα σύστημα μονάδων.

Στό σύστημα SI μονάδα είδικοῦ βάρους εἶναι τό ἕνα Newton κατά κυβικό μέτρο.

μονάδα εἰδικοῦ βάρους SI $\quad 1\ N/m^3$

Στό σύστημα CGS μονάδα εἰδικοῦ βάρους εἶναι ἡ μιά δύνη κατά κυβικό ἑκατοστόμετρο.

μονάδα εἰδικοῦ βάρους CGS $\quad 1\ dyn/cm^3$

Ἐπειδή εἶναι $1\ N = 10^5$ dyn καί $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$, ἔπεται ὅτι εἶναι:

$$1\ \frac{N}{m^3} = \frac{10^5\ dyn}{10^6\ cm^3} \qquad \text{καί} \qquad 1\ N/m^3 = 0{,}1\ dyn/cm^3$$

Οἱ παραπάνω δύο μονάδες εἰδικοῦ βάρους εἶναι *πολύ μικρές* γιά τίς πρακτικές ἐφαρμογές. Γι' αὐτό συνήθως ὡς μονάδα εἰδικοῦ βάρους χρησιμοποιοῦμε τό ἕνα πόντ κατά κυβικό ἑκατοστόμετρο, $1\ p/cm^3$. Ἡ μονάδα αὐτή εἶναι ἔξω ἀπό τά γνωστά συστήματα μονάδων, ἀλλά μᾶς διευκολύνει, γιατί τότε ἡ πυκνότητα ἑνός ὑλικοῦ σέ gr/cm^3 καί τό εἰδικό βάρος σέ p/cm^3 ἐκφράζονται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό (π.χ. ὁ σίδηρος ἔχει πυκνότητα $\rho = 7{,}8\ gr/cm^3$ καί εἰδικό βάρος $\varepsilon = 7{,}8\ p/cm^3$).

26. Σχέση μεταξύ τῆς μάζας καί τοῦ βάρους ἑνός σώματος

Ἡ πειραματική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι σέ ἕναν τόπο ἡ *μονάδα μάζας* ($m = 1$) ἀπό ὁποιοδήποτε σῶμα ἔχει *σταθερό βάρος*.

Ὀνομάζουμε ἔνταση τῆς βαρύτητας (g) σέ ἕναν τόπο τή δύναμη, μέ τήν ὁποία ἡ Γῆ ἕλκει σ' αὐτό τόν τόπο τή μονάδα μάζας ὁποιουδήποτε σώματος.

Μέ πολύ ἀκριβεῖς μετρήσεις βρήκαμε ὅτι:

Σέ γεωγραφικό πλάτος 45° καί κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ ἔνταση τῆς βαρύτητας (g) εἶναι ἴση μέ 9,81 Newton κατά χιλιόγραμμο.

ἔνταση τῆς βαρύτητας $\quad g = 9{,}81\ N/kgr$

Ἑπομένως ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m, ὅταν βρίσκεται κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, τότε τό βάρος του ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

βάρος σώματος = μάζα · ἔνταση τῆς βαρύτητας $B = m \cdot g$

(1)

Ὥστε ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m = 8 kgr ἔχει βάρος :

$$B = m \cdot g = 8\ \text{kgr} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{N}}{\text{kgr}} \quad \text{καί} \quad B = 78{,}48\ \text{N}$$

Ὅταν στή Φυσική ἐφορμόζουμε τήν ἐξίσωση $B = m \cdot g$, παίρνουμε :

στό σύστημα SI $g = 9{,}81$ N/kgr ἤ κατά προσέγγιση $g = 10$ N/kgr

στό σύστημα CGS $g = 981$ dyn/gr ἤ κατά προσέγγιση $g = 10^3$ dyn/gr

Σχέση μεταξύ πυκνότητας καί εἰδικοῦ βάρους. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m, ὄγκο V καί βάρος $B = m \cdot g$. Τό σῶμα ἔχει εἰδικό βάρος :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \frac{m}{V} \cdot g \quad \text{καί} \quad \varepsilon = \rho \cdot g} \qquad (2)$$

Παρατήρηση. Ὅταν ἡ πυκνότητα ρ μετριέται σέ gr/cm^3, δηλαδή στό σύστημα CGS, τότε εἶναι $g = 981$ dyn/gr καί τό εἰδικό βάρος ε μετριέται σέ dyn/cm^3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σέ ἕνα σῶμα ἐνεργεῖ δύναμη, πού τό μέτρο της εἶναι ἴσο μέ $F = 39{,}24$ N. Πόση εἶναι αὐτή ἡ δύναμη σέ κιλοπόντ καί σέ δύνες ;

2. Τό φυσικό μέγεθος, πού ὀνομάζουμε ἔργο (W) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $W = F \cdot s$, ὅπου F εἶναι δύναμη καί s εἶναι μῆκος. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση διαστάσεων τοῦ ἔργου στό σύστημα SI καί στό σύστημα CGS ;

3. Τό φυσικό μέγεθος, πού ὀνομάζουμε κινητική ἐνέργεια ($E_{κιν}$), δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $E_{κιν} = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$, ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος καί υ ἡ ταχύτητά του. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση διαστάσεων αὐτοῦ τοῦ μεγέθους στό σύστημα SI.

4. Δύο ἴσα ἀνύσματα ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή Ο καί μέτρο $A = B = 8$ cm. Νά βρεθεῖ τό μέτρο (Σ) τῆς συνισταμένης τους καί ἡ διεύθυνσή της, ὅταν τά ἀνύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi = 90^0$.

5. Δύο ἴσα ἀνύσματα ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή Ο, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi = 120^0$ καί ἔχουν μέτρο $A = B = 12$ cm. Τί σχῆμα ἔχει τό τετράπλευρο, πού σχηματίζουν τά δοσμένα ἀνύσματα ; Ἀπό τίς γεωμετρικές ἰδιότητες αὐτοῦ τοῦ σχήματος νά βρεθεῖ τό μέτρο (Σ) καί ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἀνυσμάτων.

6. Δύο ἀνύσματα, ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή Ο, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi = 90^0$ καί ἔχουν μέτρο $A = 6$ cm καί $B = 8$ cm. Νά βρεθεῖ τό μέτρο (Σ) τῆς συνισταμένης τους.

7. Ἕνα ἄνυσμα ἔχει μέτρο $\Sigma = 5$ cm. Νά ἀναλυθεῖ σέ δύο ἀνύσματα Α καί Β, πού εἶναι κάθετα μεταξύ τους καί τό ἕνα ἀπό αὐτά νά ἔχει μέτρο $A = 4$ cm. Πόσο εἶναι τό μέτρο τοῦ ἄλλου ἀνύσματος Β ;

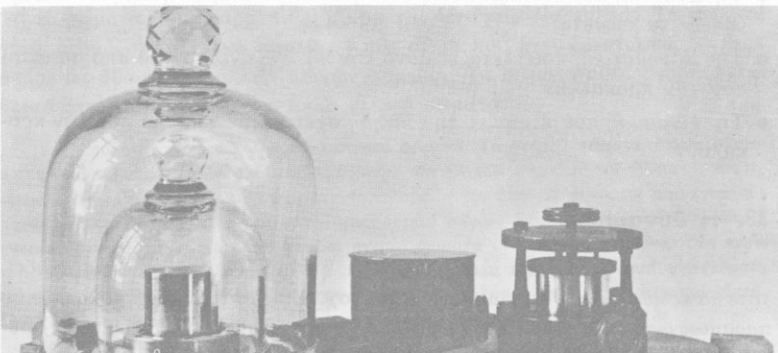
8. Δύο ἀνύσματα ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή Ο, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi = 60^0$ καί ἔχουν μέτρο Α = 3 cm καί Β = 5 cm. Νά βρεθεῖ τό μέτρο (Σ) τῆς συνισταμένης τους. συν $60^0 = 0{,}5$.

9. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m = 5 kgr καί ὄγκο V = 1000 cm^3. Πόση εἶναι ἡ πυκνότητα (ρ) τοῦ σώματος στό σύστημα SI καί στό σύστημα CGS ;

10. Ὁ σίδηρος στό σύστημα CGS ἔχει πυκνότητα ρ = 8 gr/cm^3. Πόση μάζα ἔχει τό 1 m^3 σιδήρου ; Πόση εἶναι ἡ πυκνότητα (ρ) τοῦ σιδήρου στό σύστημα MKS ;

11. Ἕνα κομμάτι μολύβδου ἔχει βάρος Β = 1,130 kp καί ὄγκο V = 100 cm^3. Πόσο εἶναι τό εἰδικό βάρος (ε) τοῦ σώματος σέ p/cm^3 ; Πόση εἶναι ἡ πυκνότητα (ρ) τοῦ μολύβδου σέ gr/cm^3 ;

12. Ὁ χαλκός ἔχει πυκνότητα ρ = 8,9 gr/cm^3. Πόση μάζα (m) ἔχει ἕνας ὄγκος χαλκοῦ ἴσος μέ V = 250 cm^3 ; Πόσο βάρος (Β) σέ κιλοπόντ (kp) ἔχει αὐτός ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ ;



Τό διεθνές πρότυπο χιλιόγραμμο (Σέβρες) μέ τίς προφυλάξεις του καί τήν εἰδική λαβίδα γιά τούς χειρισμούς του.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Ἡ δύναμη

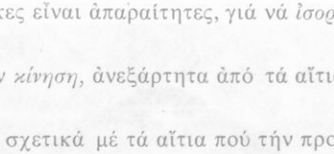
27. Θέμα τῆς Μηχανικῆς

Ἕνα σῶμα (στερεό, ὑγρό, ἀέριο) μπορεῖ νά κινεῖται ἤ νά ἠρεμεῖ. Ἡ δεύτερη αὐτή κατάσταση λέγεται καί κατάσταση *ἰσορροπίας*. Ὅλα τά σώματα μέ τήν ἐπίδραση ὁρισμένων αἰτίων μποροῦν νά μεταπέσουν ἀπό τήν ἠρεμία στήν κίνηση ἤ καί ἀντίστροφα. Τό μέρος τῆς Φυσικῆς, πού ἐξετάζει τήν *ἰσορροπία* καί τήν *κίνηση* τῶν σωμάτων, ὀνομάζεται *Μηχανική*. Συνήθως ἡ Μηχανική διαιρεῖται στούς ἑξῆς κλάδους :

- Τή *Στατική*, πού ἐξετάζει ποιές συνθῆκες εἶναι ἀπαραίτητες, γιά νά *ἰσορροποῦν* τά σώματα.
- Τήν *Κινηματική*, πού ἐξετάζει μόνο τήν *κίνηση*, ἀνεξάρτητα ἀπό τά αἴτια πού τήν προκαλοῦν.
- Τή *Δυναμική*, πού ἐξετάζει τήν *κίνηση* σχετικά μέ τά αἴτια πού τήν προκαλοῦν.

28. Ἡ δύναμη

Ὅταν ἕνα μεταλλικό ἔλασμα λυγίζει ἤ ἕνας ξύλινος χάρακας σπάζει, τότε τά σώματα αὐτά παραμορφώνονται (σχ. 9). Τό αἴτιο πού προκαλεῖ τήν *παραμόρφωση* ἑνός σώματος ὀνομάζεται *δύναμη*. Ὅταν ἕνα σῶμα, πού ἠρεμεῖ, ἀρχίζει νά κινεῖται ἤ ἕνα κινούμενο σῶμα σταματᾶ ἤ καί ἀλλάζει διεύθυνση, τότε λέμε ὅτι μεταβάλλεται ἡ κινητική κατάσταση τοῦ σώματος. Τό αἴτιο, πού προκαλεῖ τή *μεταβολή τῆς κινητικῆς καταστάσεως* τοῦ σώματος, ὀνομάζεται *δύναμη*. Ὥστε ἡ δύναμη ἐπιφέρει δύο ἀποτελέσματα : τήν παραμόρφωση ἑνός σώματος ἤ τή μεταβολή τῆς κινητικῆς καταστάσεώς του.



Σχ. 9. Τό βάρος τοῦ σώματος προκαλεῖ παραμόρφωση τοῦ ἐλάσματος.

Σχ. 10. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐφαρμόζεται στό σημεῖο Α τοῦ σώματος.

Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος καί παριστάνεται γραφικά μέ ἄνυσμα (σχ. 10). Ἡ ἀρχή τοῦ ἀνύσματος δείχνει τό *σημεῖο ἐφαρμογῆς* τῆς δυνάμεως, ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος δείχνουν τή *διεύθυνση* καί τή *φορά* τῆς δυνάμεως καί τέλος τό μῆκος τοῦ ἀνύσματος εἶναι ἀνάλογο μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως ἤ καί ἀλλιῶς μέ τήν ἔνταση τῆς δυνάμεως. Ὥστε :

I. Δύναμη ὀνομάζεται τό αἴτιο πού προκαλεῖ τήν παραμόρφωση τῶν σωμάτων ἤ τή μεταβολή τῆς κινητικῆς καταστάσεώς τους.

II. Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος καί προσδιορίζεται ἀπό τό σημεῖο ἐφαρμογῆς, τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο της (ἤ τήν ἔντασή της).

29. Ὑλικά σημεῖα καί ὑλικά σώματα

Τά στερεά σώματα ἔχουν πάντοτε διαστάσεις. Σέ πολλές ὅμως περιπτώσεις, γιά νά ἁπλοποιήσουμε τή μελέτη τῶν φαινομένων, ὑποθέτουμε ὅτι τά σώματα εἶναι πάρα πολύ μικρά καί *δέν ἔχουν διαστάσεις*. Τά σώματα αὐτά ὀνομάζονται **ὑλικά σημεῖα.** Κάθε σῶμα πού ἔχει διαστάσεις τό θεωροῦμε ὡς ἄθροισμα πολλῶν ὑλικῶν σημείων. Τά σώματα αὐτά ὀνομάζονται **ὑλικά στερεά σώματα** ἤ πιό ἁπλά **στερεά σώματα.**

Ἀπολύτως στερεά καί φυσικά στερεά σώματα. Τά στερεά σώματα ἀποτελοῦνται ἀπό ὑλικά σημεῖα. Ἄν οἱ ἀποστάσεις μεταξύ τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος διατηροῦνται *ἀμετάβλητες* τότε τό σῶμα δέν παραμορφώνεται ἀπό τίς δυνάμεις πού ἐνεργοῦν πάνω του καί τό σῶμα λέγεται *ἀπολύτως στερεό σῶμα*. Στήν πραγματικότητα τέτοια στερεά δέν ὑπάρχουν, γιατί στά *φυσικά στερεά σώματα* οἱ δυνάμεις πού ἐνεργοῦν πάνω τους προκαλοῦν πάντοτε *παραμορφώσεις*. Σέ πολλές ὅμως περιπτώσεις ὁρισμένα σώματα (μέταλλα, ξύλο κ.ἄ.) τά θεωροῦμε στήν πράξη ὡς ἀπολύτως στερεά σώματα καί ἐξετάζουμε μόνο τό κινητικό ἀποτέλεσμα, πού ἐπιφέρουν οἱ δυνάμεις.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

I. Δυνάμεις ἐφαρμοσμένες στό ἴδιο σημεῖο

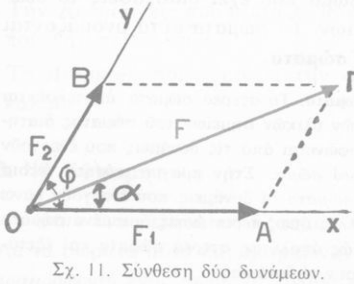
30. Σύνθεση δυνάμεων

Ὀνομάζεται *σύνθεση* δυνάμεων ἡ ἀντικατάσταση δύο ἤ περισσότερων δυνάμεων μέ μιά μόνο δύναμη, πού προκαλεῖ τά ἴδια μηχανικά ἀποτελέσματα, μέ ἐκεῖνα πού προκαλοῦν καί οἱ δοσμένες δυνάμεις. Ἡ δύναμη πού ἀντικαθιστᾶ τίς δύο ἤ περισσότερες δυνάμεις, ὀνομάζεται *συνισταμένη* τῶν δοσμένων δυνάμεων καί οἱ δυνάμεις πού ἀντικαθίστανται ὀνομάζονται *συνιστῶσες*.

Ἡ δύναμη εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος, καί, ἑπομένως, γιά νά συνθέσουμε δυνάμεις, ἐφαρμόζουμε ὅσα ἰσχύουν γιά *τήν πρόσθεση ἀνυσμάτων*.

31. Σύνθεση δύο δυνάμεων ἐφαρμοσμένων στό ἴδιο σημεῖο

Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο Ο ἐφαρμόζονται οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, πού οἱ διευθύνσεις τους σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ (σχ. 11). Σύμφωνα μέ τόν ἀνυσματικό λογισμό *ἡ συνισταμένη* $\vec{F}$ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι τό γεωμετρικό ἄθροισμά τους, δηλαδή ἐκφράζεται κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο ἀπό *τή διαγώνιο τοῦ παραλληλογράμμου*, πού σχηματίζουν οἱ δύο δυνάμεις. Ἑπομένως *τό μέτρο* καί ἡ *διεύθυνση* τῆς συνισταμένης (F) δίνονται ἀπό τίς γνωστές (§ 23) ἐξισώσεις:



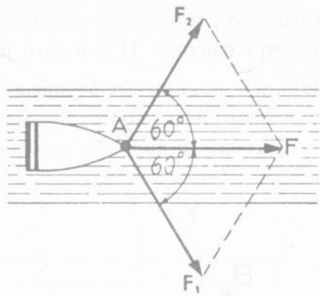
Σχ. 11. Σύνθεση δύο δυνάμεων.

μέτρο τῆς συνισταμένης	$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\,\varphi}$	(1)
διεύθυνση τῆς συνισταμένης	$\text{ημ}\,\alpha = \dfrac{F_2}{F} \cdot \text{ημ}\,\varphi$	(2)

Ἀνυσματικά ἡ σύνθεση τῶν δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$$

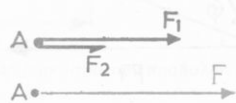
Παράδειγμα. Στό σχῆμα 12 εἶναι $F_1 = F_2$ καί $\varphi = 120^0$. Νά βρεθεῖ τό μέτρο τῆς συνισταμένης.



Σχ. 12. Παράδειγμα συνθέσεως δύο δυνάμεων

Μερικές περιπτώσεις. 1) Ἄν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ ἔχουν τόν *ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά* (σχ. 13), τότε εἶναι $\varphi = 0^0$ καί ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά μέ τίς συνιστῶσες καί μέτρο, ἴσο μέ τό *ἀλγεβρικό ἄθροισμα* τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν, δηλαδή εἶναι :

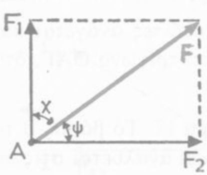
$$F = F_1 + F_2$$



Σχ. 13. Ἡ συνισταμένη ἔχει μέτρο $F = F_1 + F_2$.

2) Ἄν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ εἶναι *κάθετες* μεταξύ τους (σχ. 14), τότε εἶναι $\varphi = 90^0$ καί ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ εἶναι διαγώνιος ἑνός ὀρθογώνιου τετραπλεύρου καί ἔχει μέτρο :

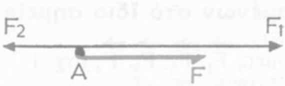
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$



Σχ. 14. Ἡ συνισταμένη ἔχει μέτρο $\sqrt{F = F_1^2 + F_2^2}$

3) Ἄν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$ ἔχουν τόν *ἴδιο φορέα*, ἀλλά *ἀντίθετη φορά* (σχ. 15), τότε εἶναι $\varphi = 180^0$ καί ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει τόν ἴδιο φορέα μέ τίς συνιστῶσες, φορά τή φορά τῆς μεγαλύτερης ἀπό αὐτές καί μέτρο ἴσο μέ τό *ἀλγεβρικό ἄθροισμα* τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν δηλαδή, εἶναι :

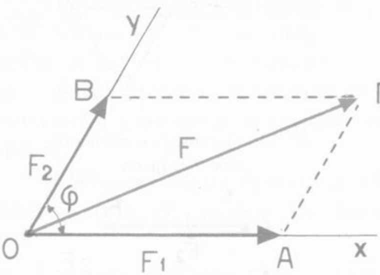
$$F = F_1 - F_2$$



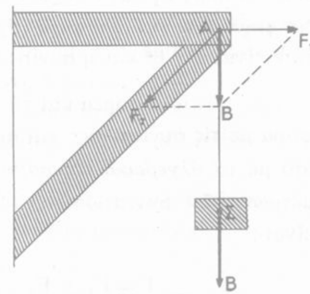
Σχ. 15. Ἡ συνισταμένη ἔχει μέτρο $F = F_1 - F_2$.

32. Ἀνάλυση δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες

Μιά δύναμη $\vec{F}$, πού ἐνεργεῖ σ' ἕνα ὑλικό σημεῖο, *μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ* ἀπό δύο ἄλλες δυνάμεις $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, πού ἔχουν ὡς συνισταμένη τή δοσμένη δύναμη $\vec{F}$. Αὐτή ἡ ἀντικατάσταση δέν μεταβάλλει τήν κινητική κατάσταση τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ὀνομάζεται *ἀνάλυση* τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ σέ δύο συνιστῶσες. Ἡ ἀνάλυση μιᾶς δυνάμεως στηρίζεται στό νόμο τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων. Γιά νά ἀναλύσουμε τή δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 16) σέ δύο συνιστῶσες, πού ἔχουν τίς διευθύνσεις τῶν εὐθειῶν Ox καί Oy, κατασκευάζουμε τό παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ, πού ἔχει ὡς διαγώνιο τή δύναμη



Σχ. 16. Ἀνάλυση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ σέ δύο συνιστῶσες.



Σχ. 17. Τό βάρος $\vec{B}$ ἀναλύεται στίς συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$.

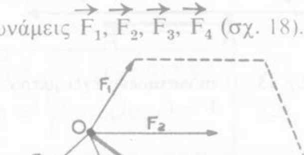
$\vec{F}$. Ἄρα τά δύο ἀνύσματα $\vec{OA}$ καί $\vec{OB}$ παριστάνουν τίς δύο συνιστῶσες τῆς δυνάμεως $\vec{F}$. Ἡ ἀνάλυση μιᾶς δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες ἀνάγεται πάντοτε στό ἑξῆς γεωμετρικό πρόβλημα: νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΟΑΓ, ὅταν δίνονται ὁρισμένα στοιχεῖα του.

Παράδειγμα ἀναλύσεως δυνάμεως δείχνει τό σχῆμα 17. Τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ στό σημεῖο Α τῆς ὁριζόντιας δοκοῦ καί ἀναλύεται στίς δύο συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$, πού ἔχουν τίς διευθύνσεις τῶν δύο δοκῶν.

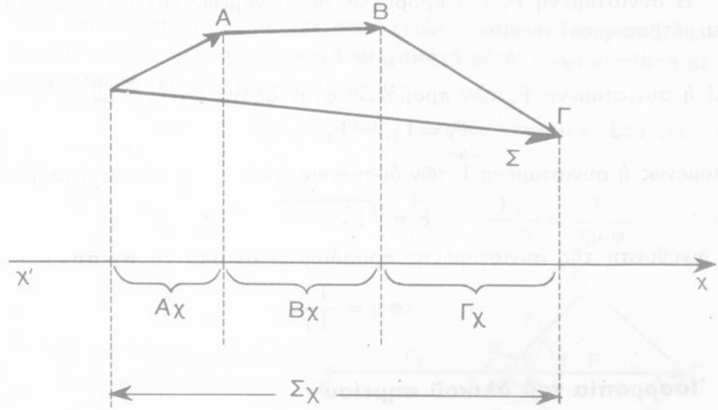
33. Σύνθεση πολλῶν δυνάμεων ἐφαρμοσμένων στό ἴδιο σημεῖο

Σέ ἕνα σημεῖο Ο ἐφαρμόζονται πολλές δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ (σχ. 18). Ἐφαρμόζοντας τό γνωστό κανόνα τοῦ πολυγώνου σχηματίζουμε ὑπό κλίμακα τό *δυναμοπολύγωνο* καί προσδιορίζου με γραφικά τή συνισταμένη $\vec{F}$.

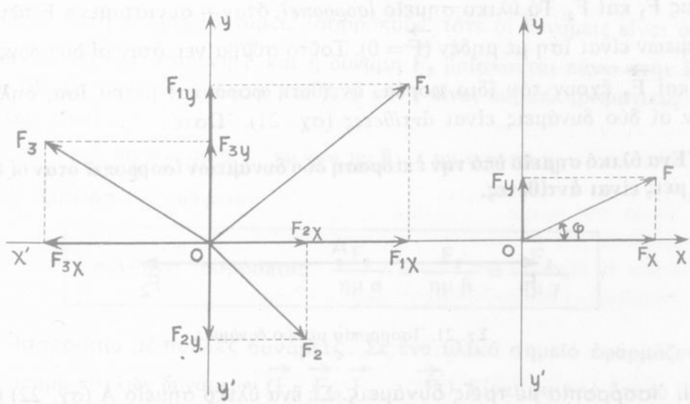
Ἀναλυτική μέθοδος. Ἔχουμε τρία διαδοχικά ἀνύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{Γ}$ καί ἄξονα x (σχ. 19). Οἱ προβολές τῶν τριῶν ἀνυσμάτων στόν ἄξονα x εἶναι ἀντίστοιχα A_x, B_x, $Γ_x$ καί ἡ



Σχ. 18. Σύνθεση πολλῶν δυνάμεων (δυναμοπολύγωνο).



Σχ. 19. Ἡ προβολή τῆς συνισταμένης εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν.



Σχ. 20. Ἀναλυτική σύνθεση τριῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

προβολή τῆς συνισταμένης Σ τῶν τριῶν ἀνυσμάτων εἶναι Σ_x. Παρατηροῦμε ὅτι *ἡ προβολή τῆς συνισταμένης* εἶναι ἴση μέ τό *ἀλγεβρικό ἄθροισμα* τῶν προβολῶν τῶν ἀνυσμάτων, δηλαδή εἶναι :

$$\Sigma_x = A_x + B_x + \Gamma_x$$

Στό σημεῖο Ο (σχ. 20) ἐφαρμόζονται οἱ δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Θεωροῦμε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες x΄x καί y΄y. Οἱ προβολές τῶν δυνάμεων πάνω στούς δύο ἄξονες εἶναι ἀντίστοιχα F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} καί F_{1y}, F_{2y}, F_{3y}.

Ἡ συνισταμένη F_x τῶν προβολῶν τῶν δυνάμεων πάνω στόν ἄξονα x΄x ἔχει μέτρο:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x}$$

Καί ἡ συνισταμένη F_y τῶν προβολῶν στόν ἄξονα y΄y ἔχει μέτρο:

$$F_y = F_{1y} - F_{2y} + F_{3y}$$

Ἑπομένως ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δοσμένων τριῶν δυνάμεων ἔχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

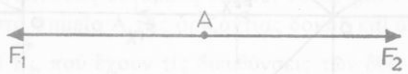
Ἡ διεύθυνση τῆς συνισταμένης προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{F_y}{F_x}$$

34. Ἰσορροπία τοῦ ὑλικοῦ σημείου

I. Ἰσορροπία μέ δύο δυνάμεις. Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο Α ἐνεργοῦν *δύο* δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Τό ὑλικό σημεῖο *ἰσορροπεῖ*, ὅταν ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{F} = 0$). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, ἀντίθετη φορά καί μέτρα ἴσα, δηλαδή, ὅταν οἱ δύο δυνάμεις εἶναι *ἀντίθετες* (σχ. 21). Ὥστε:

Ἕνα ὑλικό σημεῖο ὑπό τήν ἐπίδραση δύο δυνάμεων ἰσορροπεῖ ὅταν οἱ δυνάμεις εἶναι ἀντίθετες.



Σχ. 21. Ἰσορροπία μέ δύο δυνάμεις.

II. Ἰσορροπία μέ τρεῖς δυνάμεις. Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο Α (σχ. 22) ἐνεργοῦν οἱ τρεῖς δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Τό ὑλικό σημεῖο *ἰσορροπεῖ*, ὅταν ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν τριῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{F} = 0$). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἰσχύουν οἱ ἑξῆς συνθῆκες:

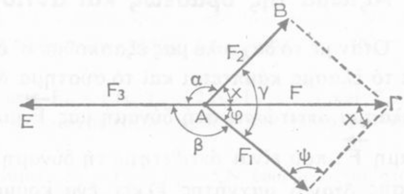
α) Οἱ τρεῖς δυνάμεις πρέπει νά εἶναι *ὁμοεπίπεδες*, γιατί, ἄν οἱ τρεῖς δυνάμεις σχηματίζουν τρίεδρο, τότε ἔχουν συνισταμένη πού δέν εἶναι ἴση μέ μηδέν.

β) Οἱ τρεῖς ὁμοεπίπεδες δυνάμεις ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, ὅταν καθεμιά ἀπό αὐτές εἶναι *ἀντίθετη* μέ τή συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων. Ὥστε:

Ἕνα ὑλικό σημεῖο ὑπό τήν ἐπίδραση τριῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ, ὅταν οἱ δυνάμεις εἶναι ὁμοεπίπεδες καί καθεμιά ἀπό αὐτές εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ὑπό τήν ἐπίδραση τριῶν δυνάμεων. Στό τρίγωνο ΑΔΓ (σχ. 22) ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{(\mathrm{A\Delta})}{\eta\mu\,\chi} = \frac{(\Delta\Gamma)}{\eta\mu\,\varphi} = \frac{(\mathrm{A}\Gamma)}{\eta\mu\,\psi} \quad \text{ἤ} \quad \frac{F_1}{\eta\mu\,\chi} = \frac{F_2}{\eta\mu\,\varphi} = \frac{F}{\eta\mu\,\psi} \qquad (1)$$



Σχ. 22. Ἰσορροπία τριῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων.

Ὅταν ὅμως οἱ τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν, τότε οἱ δυνάμεις εἶναι ὁμοεπίπεδες καί ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ καί ἡ δύναμη $\vec{F}_3$ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία ΓΕ. Οἱ γωνίες χ καί α, φ καί β, ψ καί γ εἶναι παραπληρωματικές καί ἑπομένως εἶναι:

$$\eta\mu\,\chi = \eta\mu\,\alpha, \quad \eta\mu\,\varphi = \eta\mu\,\beta, \quad \eta\mu\,\psi = \eta\mu\,\gamma$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$\boxed{\text{συνθήκη ἰσορροπίας} \quad \frac{F_1}{\eta\mu\,\alpha} = \frac{F_2}{\eta\mu\,\beta} = \frac{F_3}{\eta\mu\,\gamma}}$$

III. Ἰσορροπία μέ πολλές δυνάμεις. Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐφαρμόζεται ἕνα σύστημα πολλῶν δυνάμεων ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_\nu$). Εἶναι φανερό ὅτι τό ὑλικό σημεῖο *ἰσορροπεῖ*, ὅταν ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ὅλων τῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{F} = 0$). Ὥστε γιά τό ὑλικό σημεῖο ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη γενική *συνθήκη ἰσορροπίας*:

Ἕνα ὑλικό σημεῖο, στό ὁποῖο ἐφαρμόζονται πολλές δυνάμεις, ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ συνισταμένη ($\vec{F}$) ὅλων τῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{F} = 0$).

Ἀναλυτική ἔκφραση τῆς συνθήκης ἰσορροπίας πολλῶν δυνάμεων. Οἱ προβολές τῶν δυνάμεων πάνω σέ τρεῖς ὀρθογώνιους ἄξονες x, y, z εἶναι:

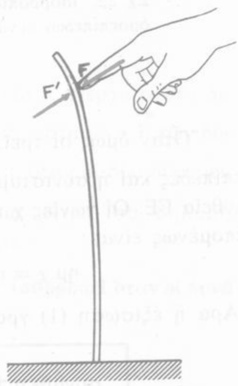
$$F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} \ldots \qquad F_{1y}, F_{2y}, F_{3y} \ldots \qquad F_{1z}, F_{2z}, F_{3z} \ldots$$

Ἐπειδή ἡ συνισταμένη F εἶναι ἴση μέ μηδέν (F = 0), καί οἱ προβολές της F_x, F_y, F_z πάνω στούς τρεῖς ἄξονες εἶναι ἴσες μέ μηδέν. Ἑπομένως ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐκφράζεται μέ τίς ἐξισώσεις :

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots = 0$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots = 0$$
$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots = 0$$

35. Ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως

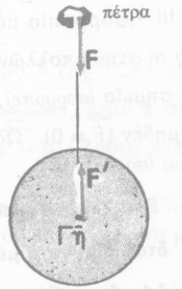
Ὅταν μέ τό δάχτυλό μας ἐξασκοῦμε σ' ἕνα ἔλασμα μιά δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 23), τότε τό ἔλασμα κάμπτεται καί τό σύστημα δάχτυλο-ἔλασμα ἰσορροπεῖ. Ἄρα τό ἔλασμα *ἀντιτάσσει* στή δύναμή μας $\vec{F}$ μιά δύναμη $\vec{F'}$, πού εἶναι *ἀντίθετη* μέ τή δύναμη $\vec{F}$. Ἐπίσης ὅταν ὁ μαγνήτης ἕλκει ἕνα κομμάτι σιδήρου, τότε καί ὁ σίδηρος *ἕλκει τό μαγνήτη* μέ δύναμη ἀντίθετη. Τά παραπάνω δύο παραδείγματα εἶναι ἐφαρμογές ἑνός γενικοῦ ἀξιώματος, πού γιά πρώτη φορά τό διατύπωσε ὁ Νεύτωνας καί ὀνομάζεται **ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως :**



Σχ. 23. Τό ἔλασμα ἀντιδρᾶ μέ ἀντίθετη δύναμη.

Ὅταν ἕνα σῶμα Α ἐξασκεῖ σέ ἕνα ἄλλο σῶμα Β μιά δύναμη (δράση), τότε καί τό σῶμα Β ἐξασκεῖ στό σῶμα Α μιά δύναμη (ἀντίδραση) ἀντίθετη μέ τήν πρώτη.*

Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως οἱ δυνάμεις ἐμφανίζονται στή Φύση *κατά ζεύγη*. Τά δύο σώματα, πού ἀλληλεπιδροῦν, μπορεῖ νά βρίσκονται *σ' ἐπαφή* (π.χ. δάχτυλο-ἔλασμα) ἤ νά βρίσκονται *σέ ἀπόσταση* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο (π.χ. μαγνήτης-σίδηρος).



Σχ. 24. Ἡ πέτρα ἐξασκεῖ στή Γῆ ἕλξη $\vec{F'}$ ἀντίθετη μέ τή δύναμη $\vec{F}$.

Πάνω σέ μιά πέτρα ἡ Γῆ ἐξασκεῖ μιά δύναμη $\vec{F}$, πού τήν ὀνομάζουμε βάρος τῆς πέτρας (σχ. 28)· ἀλλά ταυτόχρονα καί ἡ πέτρα ἐξασκεῖ πάνω στή Γῆ μιά δύναμη $\vec{F'}$, πού εἶναι ἀντίθετη μέ τή δύναμη $\vec{F}$.

Ἡ ἀντίδραση $\vec{F'}$ τῆς πέτρας, πού ἐνεργεῖ στή Γῆ, εἶναι πολύ μικρή καί ἑπομένως εἶναι ἀνίκανη νά κινή-

* Οἱ δυνάμεις βρίσκονται πάνω στόν ἴδιο φορέα.

σει τή Γῆ πρός τήν πέτρα· γι' αὐτό ἡ ἀντίδραση $\vec{F'}$ τῆς πέτρας δέν γίνεται ἀντιληπτή. Ὅταν ὅμως ἕνας ἄνθρωπος, πού βρίσκεται μέσα σέ μιά βάρκα, ἕλκει μέ μιά δύναμη $\vec{F}$ τή δέστρα πού εἶναι στήν προκυμαία, τότε ἡ βάρκα *κινεῖται* πρός τήν προκυμαία ἀπό *τήν ἀντίδραση* $\vec{F'}$, πού ἀναπτύσσει ἡ προκυμαία πάνω στόν ἄνθρωπο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἀντίδραση γίνεται ἀντιληπτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

13. Δύο ἴσες δυνάμεις $F_1 = F_2 = 8$ N ἐφαρμόζονται στό ἴδιο σημεῖο. Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τους, ὅταν οἱ δυνάμεις σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες : $\varphi = 0^0$, $\varphi = 60^0$, $\varphi = 90^0$, $\varphi = 120^0$ καί $\varphi = 180^0$.

14. Τέσσερις ὁμοεπίπεδες δυνάμεις $F_1 = 1$ N, $F_2 = 2$ N, $F_3 = 3$ N καί $F_4 = 4$ N ἐφαρμόζονται στό ἴδιο σημεῖο καί ἀνά δύο σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi = 90^0$. Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τους.

15. Τρεῖς ὁμοεπίπεδες ἴσες δυνάμεις $F_1 = F_2 = F_3 = 5$ N ἐφαρμόζονται στό ἴδιο σημεῖο. Ἡ F_2 βρίσκεται ἀνάμεσα στίς F_1 καί F_3 καί σχηματίζει μέ καθεμιά ἀπό αὐτές γωνίες $\varphi = 60^0$. Νά βρεθεῖ ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων.

16. Νά ἀναλυθεῖ δύναμη $F = 13$ N σέ δύο συνιστῶσες F_1 καί F_2, πού εἶναι κάθετες μεταξύ τους καί εἶναι $F_1 = 5$ N.

17. Νά ἀναλυθεῖ δύναμη $F = 6$ N σέ δύο ἴσες συνιστῶσες, πού οἱ φορεῖς τους σχηματίζουν γωνίες $\varphi = 30^0$ μέ τό φορέα τῆς F.

18. Στήν μιά ἄκρη νήματος ΟΑ εἶναι δεμένο ἕνα ὑλικό σημεῖο Α, πού ἔχει βάρος $B = 4$ N. Πόση εἶναι ἡ ὁριζόντια δύναμη $\vec{F}$, πού θά ἐφαρμόσουμε στό ὑλικό σημεῖο Α, ὥστε, ὅταν τό σύστημα ἰσορροπεῖ, τό νῆμα νά σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^0$ μέ τήν κατακόρυφο πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Ο ; Πόση εἶναι ἡ τάση τοῦ νήματος ; Τό βάρος τοῦ νήματος θεωρεῖται ἀσήμαντο.

19. Ἕνα σῶμα, πού τό θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο Α, ἔχει βάρος 1000 N καί κρέμεται ἀπό τήν ὀροφή μέ δύο σχοινιά, πού τό καθένα σχηματίζει μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τῆς ὀροφῆς γωνίες 30^0 καί 45^0. Πόση εἶναι ἡ τάση τοῦ κάθε σχοινιοῦ ;

20. Μιά τετράγωνη μεταλλική πλάκα ἔχει βάρος $B = 60$ N καί εἶναι κρεμασμένη στόν τοῖχο ἀπό ἕνα καρφί μέ σπάγγο. Οἱ δύο ἄκρες τοῦ σπάγγου εἶναι στερεωμένες στίς δύο ἀνώτερες κορυφές τῆς πλάκας. Τά δύο τμήματα τοῦ σπάγγου σχηματίζουν γωνίες $\varphi = 45^0$ μέ τήν ἀνώτερη ὁριζόντια πλευρά τῆς πλάκας. Πόση εἶναι ἡ τάση τοῦ κάθε τμήματος τοῦ σπάγγου ;

II. Δυνάμεις ἐφαρμοσμένες σέ διαφορετικά σημεῖα στερεοῦ σώματος

36. Ροπή δυνάμεως

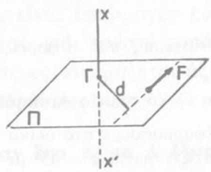
Σέ πολλά μηχανικά φαινόμενα, καί κυρίως κατά τήν περιστροφή στερεοῦ σώματος, ἐμφανίζεται ἕνα φυσικό μέγεθος, πού ὀνομάζεται *ροπή τῆς δυνάμεως*.

α. Ροπή δυνάμεως ὡς πρός σημεῖο. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται στό ἐπίπεδο Π (σχ. 25). Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Γ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Γ ἀπό τό φορέα τῆς δυνάμεως εἶναι d (βραχίονας τῆς δυνάμεως)· Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός* :

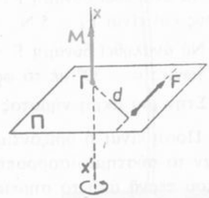
Ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τό σημεῖο Γ ὀνομάζεται τό ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M}$, πού ἔχει φορέα τήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο Π καί περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Γ, καί μέτρο (M) ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου (F) τῆς δυνάμεως ἐπί τήν ἀπόσταση (d) τοῦ σημείου Γ ἀπό τό φορέα τῆς δυνάμεως.

$$\boxed{\text{ροπή δυνάμεως (ὡς πρός σημεῖο)} \quad M = F \cdot d}$$

Ἡ *φορά* τοῦ ἀνύσματος τῆς ροπῆς καθορίζεται ἀπό τή φορά κατά τήν ὁποία προχωρεῖ πάνω στή διεύθυνση τῆς ροπῆς δεξιόστροφος κοχλίας, ὁ



Σχ. 25. Γιά τόν ὁρισμό τῆς ροπῆς δυνάμεως ὡς πρός σημεῖο ἤ ἄξονα.



Σχ 26. Ἡ ροπή δυνάμεως ($\vec{M}$) εἶναι μέγεθος ἀνυσματικό.

ὁποῖος περιστρέφεται κατά τή φορά, πού τείνει νά περιστρέψει ἡ δύναμη τό ἐπίπεδο Π γύρω ἀπό τό σημεῖο Γ. Κατά σύμβαση ἡ ροπή τῆς δυνάμεως θεωρεῖται *θετική*, ὅταν ἡ δύναμη $\vec{F}$ τείνει νά περιστρέψει τό ἐπίπεδο Π κατά φορά ἀντίθετη μέ τήν κίνηση τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ, καί *ἀρνητική* στήν ἀντίθετη περίπτωση (σχ. 26).

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ροπῆς προκύπτουν τά ἑξῆς : α) Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως δέν μεταβάλλεται, ἄν ἡ δύναμη F μετακινηθεῖ κατά μῆκος τοῦ φορέα της, γιατί ἡ ἀπόσταση d εἶναι σταθερή. β) Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως F εἶναι ἴση μέ μηδέν, ὅταν ὁ φορέας της περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Γ, (γιατί τότε εἶναι $d = 0$).

β. Ροπή δυνάμεως ὡς πρός ἄξονα. Θεωροῦμε ἕναν ἄξονα x'x (σχ. 26) κάθετο στό ἐπίπεδο Π, στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ δύναμη $\vec{F}$. Ὁ ἄξονας συναντᾶ τό ἐπίπεδο Π στό σημεῖο Γ. Ἡ ἀπόσταση τοῦ ἄξονα ἀπό τό φορέα τῆς δυνάμεως εἶναι d. Τότε ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός:*

Ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ ὡς πρός τόν ἄξονα (x΄x) ὀνομάζεται τό ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M}$, πού ἔχει φορέα τόν ἄξονα καί μέτρο (M) ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως (F) ἐπί τήν ἀπόσταση (d) τοῦ ἄξονα ἀπό τό φορέα τῆς δυνάμεως.

ροπή δυνάμεως (ὡς πρός ἄξονα) $M = F \cdot d$

Ἡ *φορά* τοῦ ἀνύσματος τῆς ροπῆς καθορίζεται ἀπό τό γνωστό κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία. Γιά τό σημεῖο τῆς ροπῆς ἰσχύει ἡ γνωστή σύμβαση.

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως δέν μεταβάλλεται, ἄν ἡ δύναμη μετακινηθεῖ κατά μῆκος τοῦ φορέα της. Ἄν ὁ φορέας τῆς δυνάμεως περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Γ (τομή τοῦ ἄξονα μέ τό ἐπίπεδο Π), τότε ἡ ροπή τῆς δυνάμεως ὡς πρός τόν ἄξονα εἶναι ἴση μέ μηδέν.

γ. Μονάδες ροπῆς. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ροπῆς $M = F \cdot d$ βρίσκουμε ὅτι *μονάδα ροπῆς* εἶναι :

στό σύστημα SI	1 N · 1 m	ἤ	1 N · m
στό σύστημα CGS	1 dyn · 1 cm	ἤ	1 dyn · cm
στό Τεχνικό σύστημα (Τ.Σ.)	1 kp · 1 m	ἤ	1 kp · m

37. Θεώρημα τῶν ροπῶν

Σέ ἕνα ἐπίπεδο Π βρίσκονται πολλές δυνάμεις, πχ. οἱ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, πού ἔχουν συνισταμένη $\vec{F}$. Θεωροῦμε ἄξονα (Δ) κάθετο στό ἐπίπεδο Π. Οἱ ροπές τῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα ἔχουν ἀντίστοιχα μέτρα M_1, M_2, M_3, M_4 καί τά ἀνύσματα τῶν ροπῶν $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$, $\vec{M}_4$ ἔχουν φορέα τόν ἄξονα (Δ). Ἡ ροπή τῆς συνισταμένης ἔχει μέτρο M καί τό ἄνυσμά της $\vec{M}$ ἔχει κι αὐτό φορέα τόν ἄξονα (Δ). Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει τό ἀκόλουθο **θεώρημα τῶν ροπῶν :**

Ἡ ροπή (M) τῆς συνισταμένης (F) πολλῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων ὡς πρός ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα.

θεώρημα τῶν ροπῶν $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_\nu$

Τό παραπάνω θεώρημα τῶν ροπῶν ἰσχύει καί γιά τίς ροπές τῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων *ὡς πρός ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τους*. Ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν θά δοῦμε στή σύνθεση δυνάμεων πού ἐφαρμόζονται σέ στερεό σῶμα.

38. Σύνθεση δύο παράλληλων δυνάμεων

α. Δυνάμεις ὁμόρροπες. Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τοῦ δυναμοπολύγωνου (σχ. 27) βρίσκουμε ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν F_1 καί F_2, δηλαδή εἶναι:

$$F = F_1 + F_2 \qquad (1)$$

Μέ τή μέθοδο αὐτή βρίσκουμε ἀκόμη ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει τήν *ἴδια διεύθυνση* καί τήν *ἴδια φορά* μέ τίς συνιστῶσες. Ὁ *φορέας* τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τέμνει τήν εὐθεία ΑΒ σέ κάποιο σημεῖο, πού ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι τό σημεῖο Γ. Θεωροῦμε ἄξονα, πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Γ καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων. Τότε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῶν ροπῶν ἔχουμε τή σχέση:

$$\text{ροπή τῆς } F_1 + \text{ροπή τῆς } F_2 = \text{ροπή τῆς } F$$

ἄρα $\quad F_1 \cdot \alpha_1 - F_2 \cdot \alpha_2 = 0 \quad$ καί $\quad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Ἀπό τή Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι εἶναι:

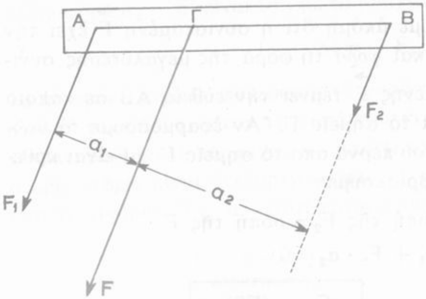
$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)} \qquad \text{ὥστε εἶναι} \qquad \boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)}} \qquad (2)$$

Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό συμπέρασμα:

Ἡ συνισταμένη ($\vec{F}$) δύο παράλληλων καί ὁμόρροπων δυνάμεων ($\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$) ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τίς συνιστῶσες, ἔχει μέτρο ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους καί ὁ φορέας της χωρίζει τήν εὐθεία πού ἑνώνει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν σέ τμήματα ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέ τίς δυνάμεις.

Τά παραπάνω εὔκολα ἐπαληθεύονται καί πειραματικῶς.

Ἀνάλυση δυνάμεως σέ δύο συνιστῶσες παράλληλες τῆς ἴδιας φορᾶς. Μιά δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 27) μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ δύο συνιστῶσες $\vec{F_1}$ καί $\vec{F_2}$, πού εἶναι παράλληλες, ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τή δύναμη $\vec{F}$ καί ἐφαρμόζονται στίς ἄκρες Α καί Β μιᾶς εὐθείας. Τότε ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:



Σχ. 27. Σύνθεση δύο παράλληλων δυνάμεων μέ τήν ἴδια φορά.

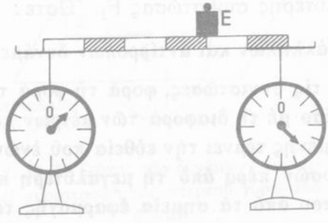
$$F = F_1 + F_2 \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{(ΓB)}{(AΓ)}$$

$$ἤ \quad \frac{F_1}{F_1 + F_2} = \frac{(ΓB)}{(AΓ) + (ΓB)}$$

$$καί \quad \frac{F_1}{F} = \frac{(ΓB)}{(AB)}$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε τή συνιστώσα F_1. Ἡ ἄλλη συνιστώσα εἶναι $F_2 = F - F_1$.

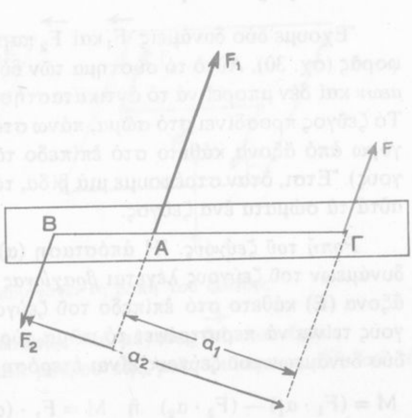
Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 28 ἐπαληθεύουμε πειραματικῶς τήν ἀνάλυση μιᾶς δυνάμεως σέ δύο παράλληλες συνιστῶσες τῆς ἴδιας φορᾶς.



Σχ. 28. Ἀνάλυση δυνάμεως σέ δύο παράλληλες συνιστῶσες μέ τήν ἴδια φορά.

β. Δυνάμεις ἄνισες καί ἀντίρροπες. Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τοῦ δυναμοπολυγώνου (σχ. 29) βρίσκουμε ὅτι ἡ συνισταμένη ἔχει *μέτρο* F ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν F_1 καί F_2, δηλαδή εἶναι :

$$F = F_1 - F_2$$



Σχ. 29. Σύνθεση δύο παράλληλων δυνάμεων μέ ἀντίθετη φορά.

Μέ τή μέθοδο αὐτή βρίσκουμε ἀκόμη ὅτι ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει τήν *ἴδια διεύθυνση* μέ τίς συνιστῶσες καί *φορά* τή φορά τῆς μεγαλύτερης συνιστώσας. Ὁ *φορέας* τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τέμνει τήν εὐθεία ΑΒ σέ κάποιο σημεῖο, πού ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι τό σημεῖο Γ. Ἄν ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρός ἄξονα πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Γ καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων, βρίσκουμε :

$$\text{ροπή τῆς } F_1 + \text{ροπή τῆς } F_2 = \text{ροπή τῆς } F$$

ἄρα

$$-F_1 \cdot \alpha_1 + F_2 \cdot \alpha_2 = 0$$

καί

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{(\Gamma B)}{(\Gamma A)}}$$

Ἐπειδή εἶναι $F_1 > F_2$ συμπεραίνουμε ὅτι πρέπει νά εἶναι καί $(\Gamma B) > (\Gamma A)$. Ἄρα τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης F πρέπει νά βρίσκεται *πέρα* ἀπό τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Α τῆς μεγαλύτερης συνιστώσας F_1. Ὥστε :

Ἡ συνισταμένη ($\vec{F}$) δύο ἄνισων παράλληλων καί ἀντίρροπων δυνάμεων ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$), ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τίς συνιστῶσες, φορά τή φορά τῆς μεγαλύτερης ἀπό αὐτές καί μέτρο ἴσο μέ τή διαφορά τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν. Ὁ φορέας τῆς συνισταμένης τέμνει τήν εὐθεία πού ἑνώνει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν πέρα ἀπό τή μεγαλύτερη καί σέ ἕνα σημεῖο, πού οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες μέ τίς δυνάμεις.

39. Ζεῦγος δυνάμεων

Ἔχουμε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ παράλληλες ἴσου μέτρου καί ἀντίθετης φορᾶς (σχ. 30). Αὐτό τό σύστημα τῶν δύο δυνάμεων ὀνομάζεται *ζεῦγος δυνάμεων* καί δέν μπορεῖ νά τό ἀντικαταστήσει ἤ νά τό ἰσορροπήσει μιά δύναμη. Τό ζεῦγος προσδίνει στό σῶμα, πάνω στό ὁποῖο ἐνεργεῖ, *κίνηση περιστροφική* γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδο τῶν δύο δυνάμεων (ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους). Ἔτσι, ὅταν στρέφουμε μιά βίδα, τό κλειδί κ.λ. ἀναπτύσσουμε πάνω σέ αὐτά τά σώματα ἕνα ζεῦγος.

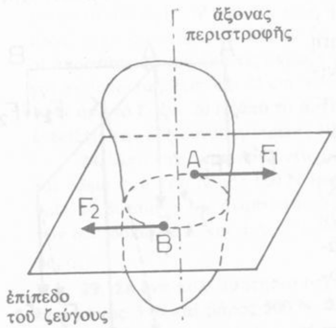
Ροπή τοῦ ζεύγους. Ἡ ἀπόσταση (α) τῶν δύο παράλληλων φορέων τῶν δυνάμεων τοῦ ζεύγους λέγεται *βραχίονας* τοῦ ζεύγους. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν ἄξονα (Ε) κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους (σχ. 31). Κάθε δύναμη τοῦ ζεύγους τείνει νά περιστρέψει τό σῶμα γύρω ἀπό τόν ἄξονα (Ε). Οἱ ροπές τῶν δύο δυνάμεων τοῦ ζεύγους εἶναι ἑτερόσημες καί *τό ἄθροισμά τους* (Μ) εἶναι :

$$M = (F_1 \cdot \alpha_1) - (F_2 \cdot \alpha_2) \quad \text{ἤ} \quad M = F_1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \quad \text{καί} \quad M = -F_1 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$$

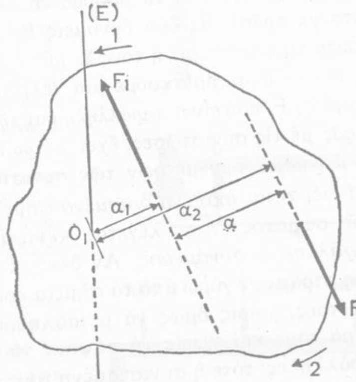
Ἡ διαφορά $\alpha_2 - \alpha_1$ εἶναι ἴση μέ τό βραχίονα α τοῦ ζεύγους. Ὥστε εἶναι :

$$M = -F_1 \cdot \alpha$$

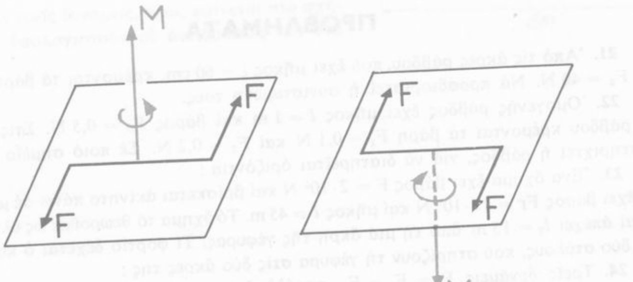
Τό ἀρνητικό σημεῖο φανερώνει τή φορά τῆς περιστροφῆς τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα (κατά τή φορά πού κινοῦνται οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ). Παρατηροῦμε ὅτι τό μηχανικό ἀποτέλεσμα, πού προκαλεῖ τό ζεῦγος στό στερεό σῶμα, εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τή θέση τοῦ ἄξονα καί προσδιορίζεται ἀπό τό γινόμενο $F_1 \cdot \alpha$. Ἔτσι καταλήγουμε στόν ἀκόλουθο *ὁρισμό* :



Σχ. 30. Τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων προκαλεῖ περιστροφή τοῦ στερεοῦ γύρω ἀπό ἄξονα.



Σχ. 31. Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους εἶναι $M = F_1 \cdot \alpha$.



Σχ. 32. Τό ἄνυσμα $\vec{M}$ παριστάνει τή ροπή τοῦ ζεύγους.

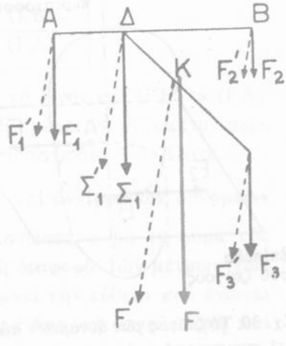
● **Ροπή ζεύγους ὀνομάζεται τό ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M}$, πού ἔχει : μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου τῆς μιᾶς δυνάμεως (F) ἐπί τό βραχίονα (α) τοῦ ζεύγους·**

- **φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ σώματος·**
- **φορά θετική ἤ ἀρνητική, ἀνάλογα μέ τή φορά τῆς περιστροφῆς πού τείνει τό ζεῦγος νά προσδώσει στό σῶμα πάνω στό ὁποῖο ἐνεργεῖ (σχ. 32).**

Ἡ ροπή ζεύγους μετριέται μέ τίς γνωστές μονάδες ροπῆς (§ **36**,γ).

40. Σύνθεση πολλῶν παράλληλων δυνάμεων

Σέ ἕνα στερεό σῶμα ἐνεργοῦν *πολλές παράλληλες δυνάμεις τῆς ἴδιας φορᾶς* (σχ. 33). Γιά νά βροῦμε τή συνισταμένη αὐτῶν τῶν δυνάμεων, συνθέτουμε πρῶτα τίς δύο δυνάμεις F_1 καί F_2· ἔπειτα τή συνισταμένη τους Σ_1 μέ τή δύναμη F_3 κ.ο.κ. Ἔτσι βρίσκουμε μιά τελική συνισταμένη F, πού εἶναι *παράλληλη* καί *τῆς ἴδιας φορᾶς* μέ τίς συνιστῶσες, ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ τό *ἄθροισμα* τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν, καί διέρχεται ἀπό ἕνα *ὁρισμένο* σημεῖο (Κ) τοῦ σώματος, πού λέγεται *κέντρο τῶν παράλληλων δυνάμεων*. Ἄν ὅλες οἱ δυνάμεις στραφοῦν γύρω ἀπό τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τους, χωρίς ὅμως νά μεταβληθοῦν τά μέτρα τους καί χωρίς νά πάψουν νά εἶναι παράλληλες, τότε ἡ συνισταμένη τους παίρνει νέα διεύθυνση, ἀλλά *τό μέτρο καί τό ὁρισμένο σημεῖο (Κ) δέ μεταβάλλονται.*



Σχ. 33. Σύνθεση πολλῶν παράλληλων δυνάμεων μέ τήν ἴδια φορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

21. Ἀπό τίς ἄκρες ράβδου, πού ἔχει μῆκος $l = 60$ cm, κρέμονται τά βάρη $F_1 = 10$ N καί $F_2 = 40$ N. Νά προσδιοριστεῖ ἡ συνισταμένη τους.

22. Ὁμογενής ράβδος ἔχει μῆκος $l = 1$ m καί βάρος $F_\rho = 0{,}5$ N. Στίς δύο ἄκρες τῆς ράβδου κρέμονται τά βάρη $F_1 = 0{,}1$ N καί $F_2 = 0{,}2$ N. Σέ ποιό σημεῖο της πρέπει νά στηριχτεῖ ἡ ράβδος, γιά νά διατηρεῖται ὁριζόντια ;

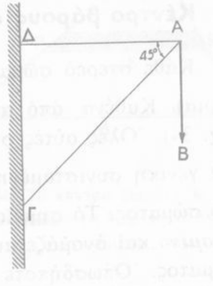
23. Ἕνα ὄχημα ἔχει βάρος $F = 2 \cdot 10^5$ N καί βρίσκεται ἀκίνητο πάνω σέ μιά γέφυρα, πού ἔχει βάρος $F_\Gamma = 15 \cdot 10^5$ N καί μῆκος $l = 45$ m. Τό ὄχημα τό θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο Μ καί ἀπέχει $l_1 = 15$ m ἀπό τή μιά ἄκρη τῆς γέφυρας. Τί φορτίο δέχεται ὁ καθένας ἀπό τούς δύο στύλους, πού στηρίζουν τή γέφυρα στίς δύο ἄκρες της ;

24. Τρεῖς δυνάμεις $F_1 = F_2 = F_3$ παράλληλες καί ὁμόρροπες ἐφαρμόζονται στίς τρεῖς κορυφές ἑνός τριγώνου. Νά προσδιοριστεῖ ἡ συνισταμένη τους.

25. Τρεῖς παράλληλες δυνάμεις ἐφαρμόζονται στά σημεῖα Α,Β,Γ μιᾶς ράβδου· Εἶναι ΑΒ = 40 cm καί ΒΓ = 80 cm. Στό Α ἐφαρμόζεται ἡ δύναμη $F_1 = 20$ N καί στό Γ ἡ δύναμη $F_3 = 10$ N, πού ἔχει τήν ἴδια φορά μέ τήν F_1. Στό Β ἐφαρμόζεται ἡ δύναμη $F_2 = 30$ N, πού ἡ φορά της εἶναι ἀντίθετη μέ τή φορά τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων. Νά προσδιοριστεῖ ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων.

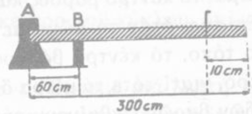
26. Μιά ράβδος ἔχει μῆκος $l = 80$ cm καί σέ ἕνα σημεῖο της, πού ἀπέχει $l_1 = 30$ cm ἀπό τή μιά ἄκρη τῆς ράβδου ἐφαρμόζεται, ἡ δύναμη F = 60 N. Νά ἀναλυθεῖ αὐτή ἡ δύναμη σέ δύο δυνάμεις F_1, F_2, παράλληλες καί ὁμόρροπες με τήν F, οἱ ὁποῖες νά ἐφαρμόζονται στίς δύο ἄκρες τῆς ράβδου.

I



27. Μία ὁμογενής ράβδος ἔχει μῆκος 1 m καί βάρος $F_\rho = 5$ N. Ἡ ράβδος κρέμεται ἀπό τά ἄγκιστρα δύο κατακόρυφων δυναμομέτρων καί διατηρεῖται ὁριζόντια. Ἡ ράβδος στηρίζεται στά δυναμόμετρα μέ δύο σημεῖα της A καί B, πού ἀντίστοιχα ἀπέχουν 10 cm ἀπό κάθε ἄκρη τῆς ράβδου. Ἀπό δύο σημεῖα Γ καί Δ τῆς ράβδου, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό τίς ἄκρες τῆς ράβδου εἶναι ἀντίστοιχα 20 cm καί 25 cm, κρέμονται βάρη 10 N ἀπό τό Γ καί 20 N ἀπό τό Δ. Ποιές εἶναι οἱ ἐνδείξεις τῶν δύο δυναμομέτρων;

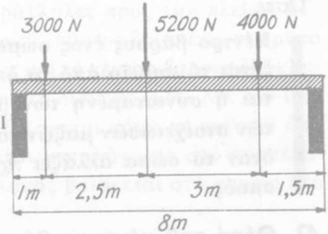
II



28. Ἀπό τήν ἄκρη ὁριζόντιας δοκοῦ κρέμεται σῶμα πού ἔχει βάρος 120 N (σχ. I). Νά βρεθοῦν οἱ δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται στίς ἄκρες τῶν δύο δοκῶν ΔA καί ΓA. (οἱ δοκοί δέν ἔχουν βάρος)

29. Σέ ἕνα κολυμβητήριο (σχ. II) ἡ ἐξέδρα ἔχει μῆκος 3 m καί βάρος 500 N. Στό σημεῖο Γ στέκεται ἄνθρωπος, πού ἔχει βάρος 700 N. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις πού ἐνεργοῦν στά σημεῖα A καί B, στά ὁποῖα στηρίζεται ἡ ἐξέδρα.

III



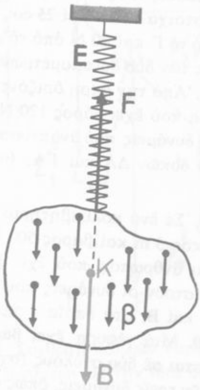
30. Μιά γέφυρα ἔχει βάρος 20 000 N καί στηρίζεται σέ δύο στύλους (σχ. III). Στή γέφυρα ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀντιδράσεις τῶν δύο στύλων.

Κέντρο βάρους

41. Κέντρο βάρους ἑνός σώματος

Κάθε στερεό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό μικρά στοιχειώδη τμήματα (π.χ. μόρια). Καθένα ἀπό αὐτά ἔχει βάρος $\vec{\beta}$, πού εἶναι δύναμη *κατακόρυφη* (σχ. 34). Ὅλες αὐτές οἱ παράλληλες καί τῆς ἴδιας φορᾶς δυνάμεις ἔχουν μιά γενική συνισταμένη $\vec{B}$, πού εἶναι *κατακόρυφη* καί ὀνομάζεται *βάρος* τοῦ σώματος. Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς Κ τῆς συνισταμένης $\vec{B}$ εἶναι *ἀπόλυτα ὁρισμένο* καί ὀνομάζεται *κέντρο βάρους* τοῦ σώματος. Ὁπωσδήποτε καί ἄν στραφεῖ τό σῶμα, τό κέντρο βάρους παραμένει σταθερό. Ἐπίσης, ὅταν τό σῶμα μεταφέρεται σέ ἄλλο τόπο, τό κέντρο βάρους παραμένει σταθερό, γιατί τότε τά μέτρα ὅλων τῶν στοιχειωδῶν βαρῶν παθαίνουν τήν ἴδια μεταβολή. Ὥστε :

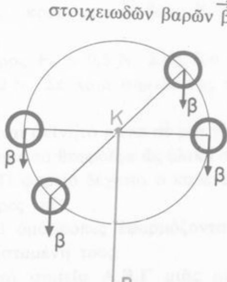
Κέντρο βάρους ἑνός σώματος ὀνομάζεται τό σημεῖο ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται ἡ συνισταμένη τῶν βαρῶν ὅλων τῶν στοιχειωδῶν μαζῶν τοῦ σώματος, ὅταν τό σῶμα ἀλλάζει προσανατολισμούς.



Σχ. 34. Στό κέντρο βάρους Κ ἐφαρμόζεται ἡ συνισταμένη $\vec{B}$ τῶν στοιχειωδῶν βαρῶν $\vec{\beta}$.

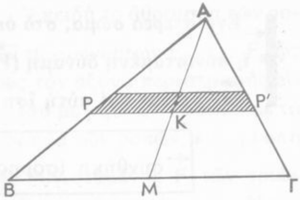
42. Θέση τοῦ κέντρου βάρους

Σ' ἕνα ὁμογενές σῶμα ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος. Ἄν τό σῶμα ἔχει γεωμετρικό σχῆμα, τότε ἡ εὕρεση τοῦ κέντρου βάρους ἀνάγεται σέ πρόβλημα τῆς Γεωμετρίας. Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα ἕνα ὁμογενές στερεό σῶμα, πού ἔχει *κέντρο συμμετρίας* Κ (σχ. 35). Μποροῦμε νά χωρίσουμε τό σῶμα σέ μικρά τμήματα πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό σημεῖο Κ καί ἔχουν ἴσες μάζες. Ἑπομένως αὐτά τά μικρά τμήματα ἔχουν ἴσα βάρη. Ὅλα τά στοιχειώδη βάρη ἔχουν συνισταμένη πού ἐφαρμόζεται στό σημεῖο Κ. Γενικά βρίσκουμε ὅτι :



Σχ. 35. Τό κέντρο βάρους Κ βρίσκεται στό κέντρο συμμετρίας.

Στά ὁμογενῆ σώματα, πού ἔχουν κέντρο ἤ ἄξονα συμμετρίας, τό κέντρο βάρους βρίσκεται στό κέντρο συμμετρίας ἤ πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας.



Σχ. 36. Τό κέντρο βάρους K βρίσκεται πάνω στή διάμεσο AM τοῦ τριγώνου.

Ἔτσι τό κέντρο βάρους ὁμογενοῦς σφαίρας εἶναι τό κέντρο τῆς σφαίρας. Τό κέντρο βάρους ὁμογενοῦς κυλίνδρου εἶναι τό μέσο τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά κέντρα τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του. Τό κέντρο βάρους παραλληλεπίπεδου εἶναι τό σημεῖο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του. Τό κέντρο βάρους κύκλου ἤ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τό κέντρο τους. Στήν περίπτωση κυκλικοῦ δακτυλίου τό κέντρο βάρους βρίσκεται στό κέντρο τοῦ κύκλου, δηλαδή ἔξω ἀπό τήν ὕλη τοῦ δακτυλίου.

Παράδειγμα προσδιορισμοῦ τοῦ κέντρου βάρους. Ἔχουμε μιά λεπτή τριγωνική πλάκα ΑΒΓ (σχ. 36). Χωρίζουμε τήν πλάκα σέ μικρά στοιχειώδη τμήματα, πού περιορίζονται ἀπό δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν πλευρά ΒΓ. Τό κέντρο βάρους Κ κάθε τέτοιου στοιχειώδους τμήματος βρίσκεται στό μέσο του, δηλαδή πάνω στή διάμεσο ΑΜ. Ἑπομένως καί τό κέντρο βάρους ὁλόκληρης τῆς τριγωνικῆς πλάκας βρίσκεται πάνω στή διάμεσο ΑΜ. Μέ τόν ἴδιο τρόπο διαπιστώνουμε ὅτι τό κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω σέ καθεμιά ἀπό τίς ἄλλες διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔτσι καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι τό κέντρο βάρους τῆς τριγωνικῆς πλάκας βρίσκεται στό σημεῖο πού *τέμνονται οἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ τριγώνου.*

Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος

43. Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος

Ὅταν *σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο* ἐνεργοῦν πολλές δυνάμεις, τό ὑλικό σημεῖο ἰσορροπεῖ (ἤ οἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν), ὅταν ἡ συνισταμένη ($\vec{F}_{ολ}$) τῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ὅταν εἶναι $\vec{F}_{ολ} = 0$. Ὅταν ὅμως *σέ ἕνα στερεό σῶμα* ἐνεργοῦν πολλές δυνάμεις, ἡ παραπάνω συνθήκη ἰσορροπίας δέν εἶναι ἀρκετή, γιατί τό σύστημα τῶν δυνάμεων μπορεῖ νά ἀνάγεται τελικά σέ ἕνα ζεῦγος, σέ μιά δύναμη ἤ καί στά δύο. Ἔτσι στό στερεό σῶμα δημιουργοῦνται *ροπές*. Ἄρα σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη γε**νική συνθήκη ἰσορροπίας :**

Ἕνα στερεό σῶμα, στό ὁποῖο ἐνεργοῦν πολλές δυνάμεις, ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ συνισταμένη δύναμη ($\vec{F}_{ολ}$) εἶναι ἴση μέ μηδέν καί ἡ συνισταμένη ροπή ($\vec{M}_{ολ}$) εἶναι καί αὐτή ἴση μέ μηδέν.

συνθήκη ἰσορροπίας $\vec{F}_{ολ} = 0$ καί $\vec{M}_{ολ} = 0$

Παρακάτω θά ἐξετάσουμε μερικές συνηθισμένες περιπτώσεις ἰσορροπίας στερεοῦ σώματος.

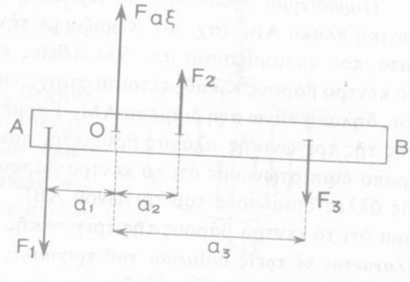
44. Ἰσορροπία στερεοῦ στρεπτοῦ γύρω ἀπό ἄξονα

Ἔχουμε μιά ράβδο ΑΒ (σχ. 37) πού θεωροῦμε ὅτι δέν ἔχει βάρος καί μπορεῖ νά περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω ἀπό ἄξονα Ο, *κάθετο* στή ράβδο. Σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς ράβδου ἐφαρμόζονται τρεῖς παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, πού εἶναι κάθετες στή ράβδο καί ὁμοεπίπεδες. Τότε ὁ ἄξονας περιστροφῆς εἶναι *κάθετος* στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων. Στή ράβδο ἐνεργοῦν οἱ ἑξῆς ἐξωτερικές δυνάμεις :

- οἱ παράλληλες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, πού ἔχουν συνισταμένη ($\vec{F}$) ἴση μέ

$$F = F_1 + F_3 - F_2$$

- ἡ ἀντίδραση τοῦ ἄξονα $\vec{F}_{αξ}$.



Σχ. 37. Ἰσορροπία στερεοῦ στρεπτοῦ γύρω ἀπό ἄξονα.

Ἡ ράβδος *ἰσορροπεῖ*, ὅταν τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι *ἴσο μέ μηδέν*, δηλαδή ὅταν ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

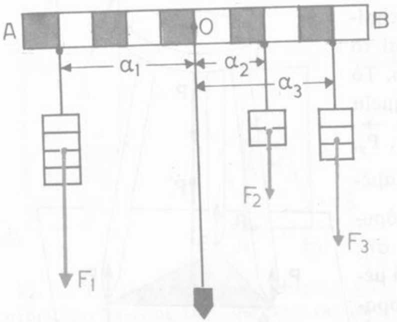
$$F_1 \cdot α_1 + F_{αξ} \cdot 0 + F_2 \cdot α_2 - F_3 \cdot α_3 = 0$$

ἤ

$$F_1 \cdot α_1 + F_2 \cdot α_2 - F_3 \cdot α_3 = 0 \qquad (1)$$

Ὅταν σέ στερεό σῶμα ἐνεργοῦν πολλές ὁμοεπίπεδες δυνάμεις καί τό σῶμα εἶναι στρεπτό γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδο τῶν δυνάμεων, τό σῶμα ἰσορροπεῖ, ἄν τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

συνθήκη ἰσορροπίας $M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_ν = 0$ ἤ $M_{ολ} = 0$



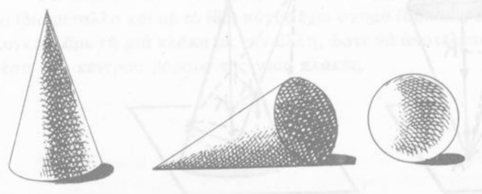
Σχ. 38. Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος στρεπτοῦ γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα.

Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσο μέ μηδέν, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῶν ροπῶν, καί ἡ ροπή τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τῶν τριῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα πρέπει νά εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ἄρα ὁ φορέας τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ περνᾶ ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς καί ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἰσορροπεῖται ἀπό τήν ἀντίδραση τοῦ ἄξονα $\vec{F}_{\alpha\xi}$. Ὥστε ἡ συνισταμένη $\vec{F}_{o\lambda}$ ὅλων τῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν στό σῶμα εἶναι ἴση μέ μηδέν, $\vec{F}_{o\lambda} = 0$.

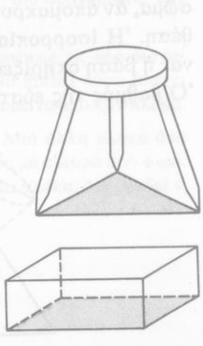
Μέ τή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 38 ἐπαληθεύουμε καί πειραματικῶς τήν ἐξίσωση (1).

45. Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο

Ἕνα στερεό σῶμα μπορεῖ νά στηρίζεται πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ ἕνα μόνο σημεῖο ἤ μέ περισσότερα σημεῖα (σχ. 39). Ἄν τά σημεῖα πού στηρίζεται τό σῶμα δέ βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία, τότε τά σημεῖα αὐτά καθορίζουν μιά κλειστή πολυγωνική γραμμή (σχ. 40). Ὀνομάζουμε *βάση στηρίξεως* τό πολύγωνο, πού ἔχει ὡς κορυφές ὁρισμένα ἀπό τά σημεῖα πού στηρίζεται τό σῶμα, ἐκλεγμένα ἔτσι, ὥστε κανένα ἀπό τά σημεῖα στηρίξεως νά μή βρίσκεται ἔξω ἀπό αὐτό τό πολύγωνο.

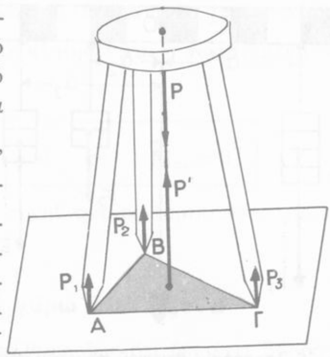


Σχ. 39. Στήριξη στερεοῦ πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.



Σχ. 40. Ἡ βάση στηρίξεως εἶναι τρίγωνο ἤ τετράπλευρο.

Ἂς θεωρήσουμε ὅτι ἡ βάση στηρίξεως εἶναι τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 41) καί τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι *ἀπόλυτα λεῖο*. Τό ἐπίπεδο αὐτό ἐξασκεῖ στά τρία σημεῖα τοῦ σώματος Α, Β, Γ ἀντιδράσεις $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, πού εἶναι *κατακόρυφες*. Ἡ συνισταμένη $\vec{P}'$ τῶν ἀντιδράσεων εἶναι κατακόρυφη, ἔχει φορά πρός τά πάνω καί τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της βρίσκεται φυσικά μέσα στή βάση στηρίξεως. Γιά νά ἰσορροπεῖ τό στερεό σῶμα, πρέπει τό βάρος $\vec{P}$ τοῦ σώματος καί ἡ ἀντίδραση τοῦ ἐπιπέδου νά εἶναι ἀντίθετες. Ὥστε:

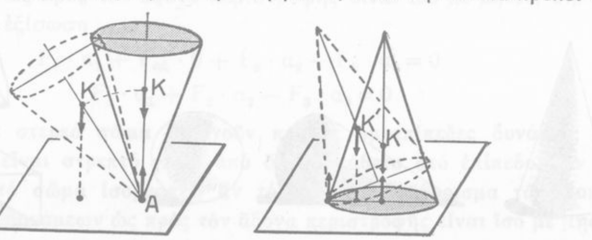


Σχ. 41. Τό βάρος $\vec{P}$ καί ἡ ἀντίδραση $\vec{P}'$ τοῦ ἐπιπέδου ἰσορροποῦν.

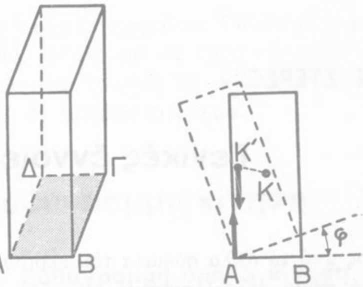
Ἕνα στερεό σῶμα, πού στηρίζεται σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος περνᾶ καί ἀπό τή βάση στηρίξεως.

Ἂν ἡ κατακόρυφος πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος περνᾶ ἔξω ἀπό τή βάση στηρίξεως, τότε τό σῶμα ἀνατρέπεται (σχ. 42).

Εἴδη ἰσορροπίας. Ὅταν τό στερεό σῶμα στηρίζεται στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο μόνο μέ ἕνα ἤ μέ δύο σημεῖα, τότε ἡ ἰσορροπία εἶναι *ἀσταθής*, γιατί τό σῶμα, ἄν ἀπομακρυνθεῖ λίγο ἀπό τή θέση ἰσορροπίας, δέν ξαναγυρίζει στήν ἴδια θέση. Ἂν ὅμως τό σῶμα στηρίζεται μέ τρία ἤ περισσότερα σημεῖα, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, τότε ἡ ἰσορροπία εἶναι *εὐσταθής*, γιατί τό σῶμα, ἄν ἀπομακρυνθεῖ λίγο ἀπό τή θέση ἰσορροπίας, ξαναγυρίζει στήν ἴδια θέση. Ἡ ἰσορροπία εἶναι τόσο περισσότερο εὐσταθής, ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ βάση στηρίξεως καί ὅσο πιό χαμηλά εἶναι τό κέντρο βάρους (σχ. 43). Ὁ βαθμός τῆς εὐστάθειας μετριέται μέ τή γωνία, κατά τήν ὁποία πρέπει νά



Σχ. 42. Ἀσταθής καί εὐσταθής ἰσορροπία κώνου πού στηρίζεται πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.



Σχ. 43. Εὐσταθής ἰσορροπία στερεοῦ πού στηρίζεται πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Σχ. 44. Ἰσορροπία σφαίρας.

στραφεῖ τό σῶμα, γιά νά συμβεῖ ἀνατροπή τοῦ σώματος. Ἡ γωνία αὐτή εἶναι τόσο μεγαλύτερη (δηλ. ἡ ἀνάτροπή τοῦ σώματος εἶναι τόσο δυσκολότερη), ὅσο χαμηλότερα εἶναι τό κέντρο βάρους, ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό βάρος τοῦ σώματος καί ὅσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ βάση στηρίξεως. Ἄν τό σῶμα ἀπομακρυνθεῖ λίγο ἀπό τήν ἀρχική θέση του, καί μπορεῖ νά ἠρεμεῖ στή νέα θέση, τότε ἡ ἰσορροπία εἶναι *ἀδιάφορη*. Στό σχῆμα 44 φαίνονται τά τρία εἴδη ἰσορροπίας μιᾶς σφαίρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

31. Ἕνα τετράγωνο πλαίσιο ἔχει πλευρά $\alpha = 10$ cm καί ἀποτελεῖται ἀπό τέσσερις ὁμογενεῖς ράβδους, πού ζυγίζουν 0,2 N κατά ἑκατοστόμετρο μήκους. Ἄν ἀφαιρέσουμε τή μιά πλευρά τοῦ πλαισίου, νά βρεθεῖ τό βάρος καί ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους.

32. Δύο μεταλλικές ράβδοι εἶναι ἑνωμένες ἔτσι, ὥστε νά εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Οἱ ράβδοι ἔχουν μήκη ΑΓ = 8 m καί ΑΔ = 6 m, καί ἀντίστοιχα βάρη $F_1 = 160$ N καί $F_2 = 120$ N. Νά βρεθεῖ τό βάρος καί ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος τῶν δύο ράβδων.

33. Σέ μιά τετράγωνη πλάκα, πού ἔχει πλευρά $\alpha = 10$ cm, φέρνουμε τίς δύο διαγωνίους της καί ἀφαιροῦμε ἕνα ἀπό τά τρίγωνα πού σχηματίζονται. Νά βρεθεῖ πόσο ἀπέχει ἀπό τήν τομή τῶν διαγωνίων τό κέντρο βάρους τοῦ τμήματος πού ἀπόμεινε ἀπό τήν πλάκα.

34. Μιά μεταλλική τετράγωνη πλάκα ἔχει πλευρά $\alpha = 6$ cm. Μιά ἄλλη πλάκα ἀπό τό ἴδιο μέταλλο καί μέ τό ἴδιο πάχος ἔχει σχῆμα ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά $\alpha = 6$ cm. Συγκολλᾶμε τή μιά πλάκα μέ τήν ἄλλη, ὥστε νά ἀποτελέσουν μιά νέα πλάκα. Νά βρεθεῖ ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς νέας πλάκας.

ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Γενικές ἔννοιες

46. Σχετική ἠρεμία καί κίνηση

Ὅταν οἱ ἀποστάσεις ἑνός σώματος ἀπό τά ἄλλα σώματα τοῦ περιβάλλοντος δέ μεταβάλλονται, λέμε ὅτι τό σῶμα *ἠρεμεῖ* σχετικά μέ αὐτά τά σώματα. Ἄν ὅμως οἱ ἀποστάσεις ἑνός σώματος ἀπό τά ἄλλα σώματα τοῦ περιβάλλοντος μεταβάλλονται, τότε λέμε ὅτι τό σῶμα *κινεῖται* σχετικά μέ τά σώματα αὐτά. Ὥστε *ἡ ἠρεμία* ἤ *ἡ κίνηση* ἑνός σώματος εἶναι *σχετική*, δηλαδή τό σῶμα ἠρεμεῖ ἤ κινεῖται σχετικά μέ ὁρισμένο *σύστημα ἀναφορᾶς*. Ἔτσι ἕνας ἐπιβάτης πού κάθεται μέσα σέ κινούμενο λεωφορεῖο ἠρεμεῖ σχετικά μέ τό ὄχημα, ἀλλά κινεῖται σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ὥστε τό ἴδιο σῶμα μπορεῖ νά ἠρεμεῖ σχετικά μέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς καί ταυτόχρονα νά κινεῖται σχετικά μέ ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς. Ὅταν τό λεωφορεῖο εἶναι ἀκίνητο, τότε ὄχημα καί ἐπιβάτης ἠρεμοῦν σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, ἀλλά κινοῦνται σχετικά μέ τόν Ἥλιο, γιατί ἡ Γῆ περιφέρεται γύρω ἀπό τόν Ἥλιο. Ὅλα τά οὐράνια σώματα βρίσκονται σέ κίνηση καί ἑπομένως σέ ὅλο τό Σύμπαν δέν ὑπάρχει σύστημα ἀναφορᾶς *ἀπόλυτα ἀκίνητο*. Ὥστε :

I. Ἡ ἠρεμία ἤ ἡ κίνηση ἑνός σώματος εἶναι σχετική καί συνδέεται πάντοτε μέ ὁρισμένο σύστημα ἀναφορᾶς, πού αὐθαίρετα τό θεωροῦμε ἀκίνητο.

II. Γιά νά μελετήσουμε τίς συνηθισμένες κινήσεις, παίρνουμε γενικά ὡς ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς τή Γῆ.

47. Ὁρισμοί

Κάθε κινούμενο σῶμα τό λέμε γενικά *κινητό*. Τό σύνολο τῶν θέσεων, ἀπό τίς ὁποῖες διαδοχικά περνᾶ τό κινητό, λέγεται *τροχιά*. Ὅταν τό κινητό εἶναι *ὑλικό σημεῖο*, τότε ἡ τροχιά του εἶναι μιά γραμμή, πού μπορεῖ νά εἶναι εὐθεία ἤ καμπύλη, καί ἡ κίνηση χαρακτηρίζεται ἀντίστοιχα ὡς *εὐθύγραμμη* ἤ *καμπυλόγραμμη*.

Στά παρακάτω γιά εὐκολία θά θεωροῦμε ὅτι τό κινητό εἶναι ὑλικό σημεῖο. Γιά νά μελετήσουμε τήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἐκλέγουμε ὡς *σύστημα ἀναφορᾶς* τήν τροχιά του, καί γιά νά καθορίζουμε κάθε φορά τή θέση τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του, ἐκλέγουμε ἕνα σημεῖο της ὡς *ἀρχή τῶν διαστημάτων*. Γιά νά μετρήσουμε τό χρόνο πού κινήθηκε τό κινητό, ἐκλέγουμε ὡς *ἀρχή τῶν χρόνων* μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή. Τό τμῆμα τῆς τροχιᾶς του, πού διανύει τό κινητό στή διάρκεια ὁρισμένου χρόνου, ὀνομάζεται *διάστημα*.

Εὐθύγραμμη κίνηση

48. Εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση

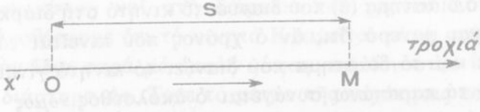
α. Ὁρισμός. Ἀπό ὅλες τίς κινήσεις ἡ ἁπλούστερη εἶναι ἡ *εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση*, πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση εἶναι ἡ κίνηση ἑνός κινητοῦ, πού κινεῖται πάνω σέ εὐθεία γραμμή κατά τήν ἴδια πάντοτε φορά καί σέ ἴσους χρόνους διανύει ἴσα διαστήματα.

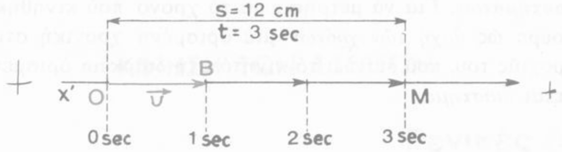
β. Ταχύτητα. Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω στήν εὐθεία x΄x (σχ. 45) μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση. Στήν ἀρχή τῶν χρόνων ($t = 0$) τό κινητό βρίσκεται στό σημεῖο O καί τή χρονική στιγμή t ἔχει φτάσει στή θέση M, δηλαδή σέ ἀπόσταση $OM = s$ ἀπό τήν ἀρχή O τῶν διαστημάτων. Ὥστε στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό κινητό διάνυσε τό διάστημα s. Ἐπειδή ἡ κίνηση εἶναι εὐθύγραμμη ὁμαλή, συνάγεται ὅτι τό πηλίκο s/t ἔχει *σταθερή τιμή*. Αὐτή ἀποτελεῖ μιά *σταθερή*, πού χαρακτηρίζει τήν κίνηση καί ὀνομάζεται **ταχύτητα** (υ) τοῦ κινητοῦ. Ἡ ταχύτητα εἶναι *ἀνυσματικό* μέγεθος καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) κινητοῦ στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ὀνομάζεται τό σταθερό φυσικό μέγεθος, τό ὁποῖο ἐκφράζεται μέ ἄνυσμα πού ἔχει ἀρχή τό κινητό, φορέα τήν τροχιά τοῦ κινητοῦ, φορά τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ καί μέτρο (υ) ἴσο μέ τό πηλίκο τοῦ διανυόμενου διαστήματος (s) διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου (t).

$$\boxed{\text{ταχύτητα} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{χρόνος}} \qquad \upsilon = \frac{s}{t}}$$



Σχ. 45. Τό κινητό διανύει διάστημα OM = s.



Σχ. 46. Τό ἄνυσμα $\vec{OB}$ παριστάνει τήν ταχύτητα $\vec{υ}$ τοῦ κινητοῦ.

Ἄν π.χ. εἶναι $s = 12$ cm καί $t = 3$ sec (σχ. 46), τότε ἡ ταχύτητα ἐκφράζεται μέ τό ἄνυσμα $\vec{OB}$, πού τό μέτρο του ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό διάστημα πού διανύει τό κινητό στή διάρκεια κάθε χρονικῆς μονάδας.

γ. Μονάδες ταχύτητας. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητας $υ = s/t$ ὁρίζουμε τή *μονάδα ταχύτητας*, ἀνάλογα μέ τό σύστημα μονάδων πού ἐκλέγουμε. Ἔτσι ὡς *μονάδα ταχύτητας* ($υ = 1$) παίρνουμε τήν ταχύτητα κινητοῦ, πού ἔχει εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση καί διανύει τή *μονάδα τοῦ διαστήματος* ($s = 1$) στή *μονάδα τοῦ χρόνου* ($t = 1$).

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε τίς ἀκόλουθες μονάδες ταχύτητας:

σύστημα SI καί ΤΣ   1 μέτρο τό δευτερόλεπτο $1\ \frac{m}{sec}$

σύστημα CGS   1 ἑκατοστόμετρο τό δευτερόλεπτο $1\ \frac{cm}{sec}$

Στήν πράξη χρησιμοποιοῦμε καί τίς ἑξῆς μονάδες:

1 m/min   1 km/sec   1 km/h

Γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας τῶν πλοίων χρησιμοποιεῖται ἡ μονάδα ταχύτητας πού λέγεται *κόμβος*:

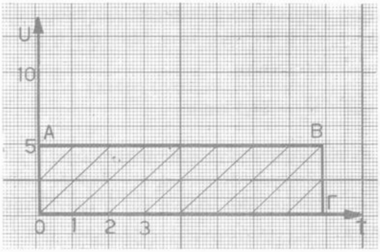
1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι τήν ὥρα   1 mi/h = 1853 m/h

δ. Ἐξίσωση καί νόμος τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητας $υ = s/t$ βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $s = υ \cdot t$. Αὐτή ἡ ἐξίσωση λέγεται *ἐξίσωση τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως* καί μᾶς δίνει σέ κάθε χρονική στιγμή τή θέση τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του, δηλαδή τήν ἀπόστασή του ἀπό τήν ἀρχή τῶν διαστημάτων καί ἑπομένως μᾶς δίνει τό διάστημα (s) πού διανύει τό κινητό στή διάρκεια ὁρισμένου χρόνου (t). Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν ὁ χρόνος πού κινεῖται τό κινητό γίνει 2t, 3t . . ., τότε καί τό διάστημα πού διανύει τό κινητό γίνεται ἀντίστοιχα 2s, 3s . . . Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλῆς κινήσεως*:

Στήν εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ἡ ταχύτητα ($\vec{υ}$) τοῦ κινητοῦ εἶναι σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο (υ), ἐνῶ τό διάστημα (s) πού διανύει τό κινητό εἶναι ἀνάλογο μέ τό χρόνο (t) πού διαρκεῖ ἡ κίνηση.

ταχύτητα $\vec{υ}$ = σταθ.	διάστημα $s = υ \cdot t$

ε. Γραφική παράσταση. Παίρνουμε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες (σχ. 47) ὡς ἄξονες τῶν χρόνων (Οt) καί τῶν ταχυτήτων (Oυ). Στίς διάφορες χρονικές στιγμές 0, 1, 2, 3 . . . ἡ ταχύτητα διατηρεῖται σταθερή (π.χ. εἶναι υ = 5 cm/sec). Ἑπομένως τά ἀντίστοιχα σημεῖα βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία γραμμή AB, πού εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα τῶν χρόνων (Ot). Αὐτή ἡ γραφική παράσταση ἀποτελεῖ *τό διάγραμμα τῆς ταχύτητας*. Παρατηροῦμε ὅτι στό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ εἶναι ΟΑ = υ καί ΟΓ = t. Ἄρα *τό ἐμβαδό* αὐτοῦ τοῦ παραλληλόγραμμου εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο υ · t, δηλαδή *ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό διάστημα s πού διανύει τό κινητό στή διάρκεια τοῦ χρόνου t.*



Σχ. 47. Τό διάστημα s ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ΟΑΒΓ.

49. Εὐθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση

Ὅταν ἕνα κινητό κινεῖται εὐθύγραμμα, ἀλλά ἡ ταχύτητά του δέ διατηρεῖται σταθερή, τότε τό κινητό *σέ ἴσους χρόνους διανύει ἄνισα διαστήματα* καί ἡ κίνηση τοῦ κινητοῦ ὀνομάζεται *εὐθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση* (ἤ καί *εὐθύγραμμη ἀνισοταχής κίνηση*). Ὅταν ἕνα αὐτοκίνητο ἀρχίζει νά κινεῖται, ἡ ταχύτητά του διαρκῶς αὐξάνει, ἔπειτα ἡ ταχύτητά του διατηρεῖται περίπου σταθερή, καί ὅταν θέλει νά σταματήσει, ἡ ταχύτητά του διαρκῶς ἐλαττώνεται, ὥσπου νά γίνει ἴση μέ μηδέν. Ἡ κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου ἦταν μιά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ἕνα κινητό Κ κινεῖται πάνω σέ μιά εὐθεία γραμμή κατά τήν ἴδια φορά *μέ μεταβαλλόμενη κίνηση* καί στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt διανύει διάστημα Δs. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό κινητό Κ κινεῖται πάνω στήν ἴδια εὐθεία γραμμή κατά τήν ἴδια φορά *μέ ὁμαλή κίνηση* καί ὅτι στόν ἴδιο χρόνο Δt διανύει τό ἴδιο διάστημα Δs. Τότε τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ Κ ἰσοῦται μέ τό πηλίκο Δs/Δt. Αὐτή ἡ ταχύτητα λέγεται *μέση ταχύτητα* ($υ_μ$)

τοῦ κινητοῦ Κ, ὅταν αὐτό κινεῖται μέ μεταβαλλόμενη κίνηση στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt. Ὥστε :

Μέση ταχύτητα (υ_μ) ἑνός κινητοῦ ὀνομάζεται ἡ σταθερή ταχύτητα, πού πρέπει νά ἔχει αὐτό τό κινητό, ὥστε, ὅταν κινεῖται μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση, νά διανύσει στόν ἴδιο χρόνο (Δt) τό ἴδιο διάστημα (Δs), πού διανύει καί ὅταν κινεῖται μέ τή μεταβαλλόμενη κίνηση.

$$\boxed{\text{μέση ταχύτητα } \upsilon_\mu = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Παρατήρηση. Ἡ μέση ταχύτητα εἶναι πολύ συνηθισμένη ἔννοια, πού τή χρησιμοποιοῦμε στήν καθημερινή ζωή. Ὅταν π.χ. ἕνα αὐτοκίνητο διατρέξει μιά ἀπόσταση $s = 86$ km (Ἀθήνα - Κόρινθος) μέσα σέ χρόνο $t = 1$ h 20 min, τότε λέμε ὅτι ἡ μέση ταχύτητα (υ_μ) τοῦ αὐτοκινήτου ἦταν:

$$\upsilon_\mu = \frac{s}{t} = \frac{86\ \text{km}}{(4/3)\ \text{h}} \quad \text{καί} \quad \upsilon_\mu = 64{,}5\ \text{km/h}$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὑποθέτουμε ὅτι τό αὐτοκίνητο εἶχε εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση καί στή διάρκεια τοῦ χρόνου $t = 1$ h 20 min διάνυσε διάστημα $s = 86$ km. Στήν πραγματικότητα ὅμως ἡ κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου ἦταν μεταβαλλόμενη καί ἡ τροχιά του δέν ἦταν εὐθύγραμμη.

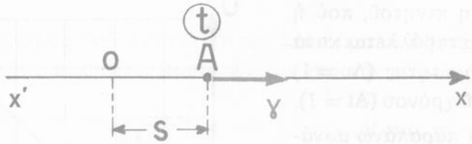
50. Εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

α. Ὁρισμός. Ἀπό ὅλες τίς εὐθύγραμμες μεταβαλλόμενες κινήσεις ἡ ἁπλούστερη εἶναι *ἡ εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση*, πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση εἶναι ἡ κίνηση, στήν ὁποία ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ σέ κάθε μονάδα χρόνου εἶναι σταθερή.

Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, συνεχῶς αὐξάνει, ἡ κίνηση λέγεται *ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη*, ἐνῶ, ἀντίθετα, ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ συνεχῶς ἐλαττώνεται, ἡ κίνηση λέγεται *ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη*.

β. Ἐπιτάχυνση. Ἕνα κινητό κατά τή χρονική στιγμή t_0 ἔχει *ἀρχική ταχύτητα* υ_0 καί κινεῖται πάνω σέ εὐθεία γραμμή κατά τήν ἴδια πάντοτε φορά μέ κίνηση ὁμαλά μεταβαλλόμενη. Τή χρονική στιγμή t τό κινητό ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα υ. Ὥστε στή διάρκεια τοῦ χρόνου $\Delta t = t - t_0$ συμβαίνει *μεταβολή τῆς ταχύτητας* $\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0$. Ἡ σταθερή μεταβολή τῆς ταχύτητας στή μονάδα χρόνου ὀνομάζεται *ἐπιτάχυνση* (γ). Ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι *ἀνυσματικό* μέγεθος (σχ. 48) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:



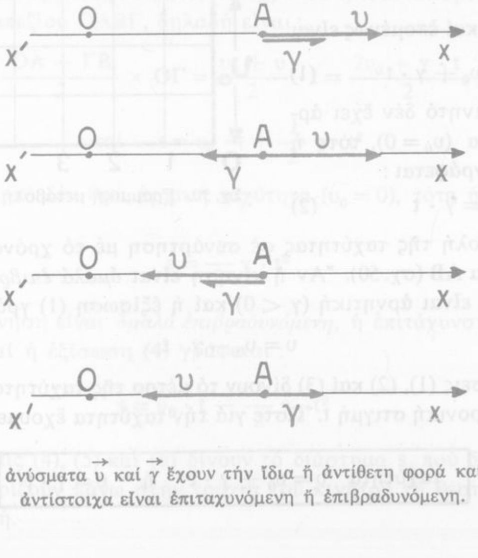
Σχ. 48. Τό ἄνυσμα $\vec{\gamma}$ παριστάνει τήν ἐπιτάχυνση.

Ἐπιτάχυνση στήν εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ὀνομάζεται τό σταθερό φυσικό μέγεθος, πού ἐκφράζεται μέ ἄνυσμα ($\vec{\gamma}$) πού ἔχει ἀρχή τό κινητό, φορέα τήν τροχιά τοῦ κινητοῦ, φορά θετική ἤ ἀρνητική καί μέτρο (γ) ἴσο μέ τό πηλίκο τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητας (Δυ) διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου (Δt).

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή ταχύτητας}}{\text{χρόνος}} \qquad \gamma = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \qquad \gamma = \text{σταθ.}}$$

Ἡ κίνηση εἶναι *ἐπιταχυνόμενη* ἤ *ἐπιβραδυνόμενη*, ὅταν τά ἀνύσματα $\vec{\upsilon}$ καί $\vec{\gamma}$ ἔχουν ἀντίστοιχα τήν ἴδια ἤ ἀντίθετη φορά (σχ. 49).

γ. Μονάδα ἐπιταχύνσεως. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ἐπιταχύνσεως $\gamma = \Delta\upsilon/\Delta t$ ὁρίζουμε τή *μονάδα ἐπιταχύνσεως*, ἀνάλογα μέ τό σύστημα μονάδων πού ἐκλέγουμε. Ἔτσι ὡς *μονάδα ἐπιταχύνσεως* ($\gamma = 1$) παίρνουμε



Σχ. 49. Τά ἀνύσματα $\vec{\upsilon}$ καί $\vec{\gamma}$ ἔχουν τήν ἴδια ἤ ἀντίθετη φορά καί ἡ κίνηση ἀντίστοιχα εἶναι ἐπιταχυνόμενη ἤ ἐπιβραδυνόμενη.

τήν ἐπιτάχυνση κινητοῦ, πού ἡ ταχύτητά του μεταβάλλεται κατά μιά *μονάδα ταχύτητας* ($\Delta\upsilon = 1$) στή μονάδα τοῦ χρόνου ($\Delta t = 1$). Σύμφωνα μέ τά παραπάνω μονάδα ἐπιταχύνσεως εἶναι:

στό σύστημα SI καί ΤΣ:

$$\frac{1\ \mathrm{m/sec}}{1\ \mathrm{sec}} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$$

στό σύστημα CGS:

$$\frac{1\ \mathrm{cm/sec}}{1\ \mathrm{sec}} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$$

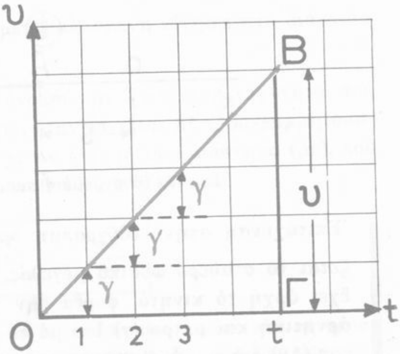
δ. Ὑπολογισμός τῆς ταχύτητας. Ἕνα κινητό ἔχει εὐθύγραμμη *ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη* κίνηση καί στήν ἀρχή τῶν χρόνων ($t = 0$) ἔχει ἀρχική ταχύτητα υ_0. Τό κινητό ἔχει ἐπιτάχυνση γ καί τή χρονική στιγμή t ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα υ. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

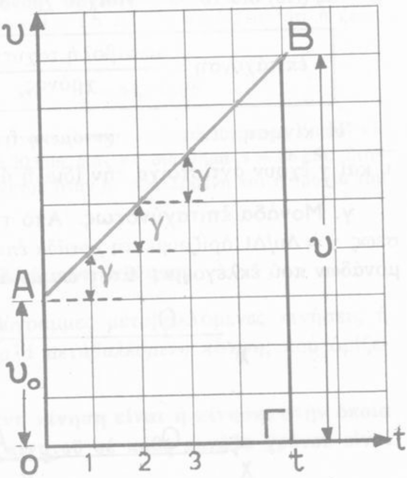
$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \quad \text{καί ἑπομένως εἶναι}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t \qquad (1)$$

Ἄν τό κινητό δέν ἔχει ἀρχική ταχύτητα ($\upsilon_0 = 0$), τότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \qquad (2)$$





Σχ. 50. Γραμμική μεταβολή τῆς ταχύτητας.

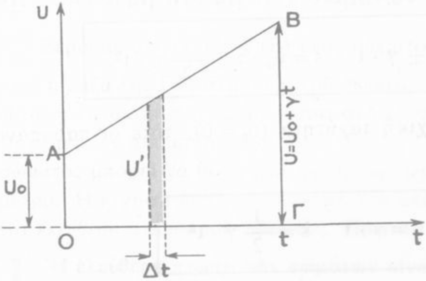
Ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 50). Ἄν ἡ κίνηση εἶναι *ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη* τότε ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι ἀρνητική ($\gamma < 0$) καί ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (3)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1), (2) καί (3) δίνουν τό μέτρο τῆς ταχύτητας (υ) τοῦ κινητοῦ κατά τή χρονική στιγμή t. Ὥστε γιά τήν ταχύτητα ἔχουμε τίς ἐξισώσεις:

$$\boxed{\text{ταχύτητα} \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm \gamma \cdot t \quad \text{ἤ} \quad \upsilon = \gamma \cdot t}$$

ε. Ὑπολογισμός τοῦ διαστήματος. Στήν ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ (σχ.51). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ χωρίζεται σέ πολύ μικρά εὐθύγραμμα τμήματα, πού καθένα ἀπό αὐτά ἀντιστοιχεῖ σέ ἐλάχιστο χρόνο Δt. Τότε μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ ταχύτητα υ΄ διατηρεῖται σταθερή, δηλαδή ὅτι στή διάρκεια αὐτοῦ τοῦ χρόνου ἡ κίνηση μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὁμαλή. Ἐπομένως τό διάστημα Δs, πού διανύει τό κινητό στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, εἶναι



Σχ. 51. Τό διάστημα s ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ΟΑΒΓ.

$\Delta s = \upsilon' \cdot \Delta t$ καί ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ἐμβαδό ἑνός στοιχειώδους ὀρθογώνιου παραλληλόγραμμου. Τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν στοιχειωδῶν παραλληλογράμμων δίνει κατά προσέγγιση τήν τιμή τοῦ διαστήματος s, πού διανύθηκε. Ὅταν ὁ χρόνος Δt, πού ἀντιστοιχεῖ στό κάθε στοιχειῶδες παραλληλόγραμμο, τείνει πρός τό μηδέν ($\Delta t \to 0$), τότε τό διάστημα s πού πραγματικά διανύθηκε στή διάρκεια τοῦ χρόνου t, ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου ΟΑΒΓ, δηλαδή εἶναι:

$$s = \frac{OA + \Gamma B}{2} \times O\Gamma = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \cdot t = \frac{2\upsilon_0 + \gamma \cdot t}{2} \cdot t$$

$$\text{καί} \quad s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \tag{4}$$

Ἄν τό κινητό δέν ἔχει ἀρχική ταχύτητα ($\upsilon_0 = 0$), τότε ἡ ἐξίσωση (4) γράφεται:

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \tag{5}$$

Ὅταν ἡ κίνηση εἶναι *ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη*, ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι ἀρνητική ($\gamma < 0$) καί ἡ ἐξίσωση (4) γράφεται:

$$s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \tag{6}$$

Οἱ ἐξισώσεις (4), (5) καί (6) δίνουν τό διάστημα s, πού διάνυσε τό κινητό, καί καθορίζουν πάνω στήν τροχιά τοῦ κινητοῦ τή θέση του σέ κάθε χρονική στιγμή.

στ. Ἐξισώσεις καί νόμοι τῆς εὐθύγραμμης ὁμαλά μεταβαλλόμενης κινήσεως. Ἀπό τά παραπάνω συνάγουμε ὅτι στήν ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες *γενικές ἐξισώσεις*:

$$\boxed{\gamma = \text{σταθ.} \qquad \upsilon = \upsilon_0 \pm \gamma \cdot t \qquad s = \upsilon_0 \cdot t \pm \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2}$$

Ἄν τό κινητό δέν ἔχει ἀρχική ταχύτητα ($\upsilon_0 = 0$), τότε οἱ παραπάνω ἐξισώσεις γράφονται:

$$\boxed{\gamma = \text{σταθ.} \qquad \upsilon = \gamma \cdot t \qquad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2}$$

Ὥστε στήν περίπτωση πού δέν ὑπάρχει ἀρχική ταχύτητα, ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος*:

Στήν εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση: 1) ἡ ἐπιτάχυνση (γ) εἶναι σταθερή· 2) ἡ ταχύτητα (υ) εἶναι ἀνάλογη μέ τό χρόνο (t) πού κινήθηκε τό κινητό· 3) τό διανυόμενο διάστημα (s), εἶναι ἀνάλογο μέ τό τετράγωνο τοῦ χρόνου (t) πού διαρκεῖ ἡ κίνηση.

ζ. Διάρκεια τῆς κινήσεως καί ὁλικό διάστημα στήν ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση. Ἕνα κινητό ἔχει ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0 καί ἐπιτάχυνση γ (ὅπου $\gamma < 0$). Τότε ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\gamma = \text{σταθ.} \qquad \upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

Τό κινητό θά σταματήσει μετά χρόνο t, δηλαδή ὅταν ἡ ταχύτητά του θά γίνει ἴση μέ μηδέν ($\upsilon = 0$). Τότε εἶναι:

$$0 = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad \text{ἄρα} \qquad \textit{διάρκεια τῆς κινήσεως} \qquad \boxed{t = \frac{\upsilon_0}{\gamma}}$$

Ἄν βάλουμε αὐτή τήν τιμή τοῦ χρόνου t στήν ἐξίσωση τοῦ διαστήματος, βρίσκουμε ὅτι *τό ὁλικό διάστημα* πού διανύει τό κινητό εἶναι:

$$s_{ολ} = \upsilon_0 \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\gamma \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{\gamma}\right)^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad \textit{ὁλικό διάστημα} \qquad \boxed{s_{ολ} = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}}$$

Πτώση τῶν σωμάτων

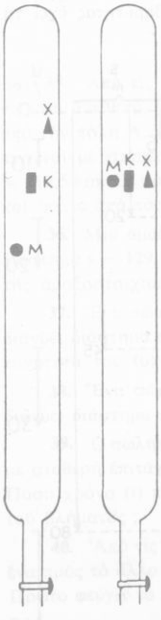
51. Ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων

Ξέρουμε ὅτι *τό βάρος* ($\vec{B}$) ἑνός σώματος ὀφείλεται στήν ἕλξη, πού ἐξασκεῖ ἡ μάζα τῆς Γῆς στή μάζα τοῦ σώματος. Τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος εἶναι δύναμη κατακόρυφη, ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τοῦ σώματος καί ὅταν τό σῶμα δέν ἀπομακρύνεται πολύ ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, τό βάρος τοῦ σώματος μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς *δύναμη σταθερή* κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο. Ἡ κίνηση ἑνός σώματος μέ τήν ἐπίδραση *μόνο τοῦ βάρους του* λέγεται *ἐλεύθερη πτώση* τοῦ σώματος. Πρῶτος ὁ Γαλιλαῖος ἀπέδειξε ὅτι :

Ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων εἶναι κίνηση κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη.

52. Πτώση τῶν σωμάτων στό κενό

Ἡ πτώση ἑνός σώματος μέσα στόν ἀέρα δέν εἶναι ἐλεύθερη πτώση, γιατί ἡ κίνηση τοῦ σώματος ἐπηρεάζεται καί ἀπό ἄλλες δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν στό σῶμα (ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ρεύματα ἀέρα). Ἡ πτώση ὅμως τῶν σωμάτων στό κενό ὀφείλεται ἀποκλειστικά στό βάρος τους, δηλαδή εἶναι ἐλεύθερη πτώση. Πειραματικῶς παρατηροῦμε τήν πτώση τῶν σωμάτων στό κενό μέ *τό σωλήνα τοῦ Νεύτωνα* (σχ. 52). Αὐτός εἶναι γυάλινος σωλήνας, μήκους 2 m περίπου κλειστός στή μιά ἄκρη, ἐνῶ ἡ ἄλλη ἄκρη του κλείνεται μέ στρόφιγγα. Μέσα στό σωλήνα ὑπάρχουν μικρά σώματα μέ διαφορετικά βάρη, π.χ. μόλυβδος (Μ), κιμωλία (Κ) καί χαρτί (Χ). Ὅταν ὁ σωλήνας περιέχει ἀέρα, ἀναποδογυρίζουμε ἀπότομα τό σωλήνα. Παρατηροῦμε ὅτι πρῶτος πέφτει ὁ μόλυβδος καί τελευταῖο τό χαρτί. Ἀφαιροῦμε τόν ἀέρα καί ἐκτελοῦμε τό ἴδιο πείραμα. Παρατηροῦμε ὅτι καί τά τρία σώματα φτάνουν ταυτόχρονα στήν κάτω ἄκρη τοῦ σωλήνα. Τό πείραμα αὐτό φανερώνει ὅτι στό κενό σώματα πού ξεκινοῦν ἀπό τό ἴδιο ὕψος *ἔχουν σέ κάθε στιγμή τήν ἴδια ταχύτητα*. Ἐπειδή ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων εἶναι κίνηση ὁμαλά



Σχ. 52. Σωλήνας τοῦ Νεύτωνα.

ἐπιταχυνόμενη, συμπεραίνουμε ὅτι :

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων εἶναι σταθερή γιά ὅλα τά σώματα.

53. Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων ὀνομάζεται *ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας* καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα g. Ἀπό τίς μετρήσεις βρέθηκε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας σέ ἕναν τόπο ἐξαρτᾶται ἀπό *τό γεωγραφικό πλάτος* τοῦ τόπου καί ἀπό τό *ὕψος* τοῦ τόπου πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι *στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας* εἶναι :

ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας	
σέ γεωγραφικό πλάτος 45°	$g_{45} = 9{,}81$ m/sec²
στόν πόλο	$g_{90} = 9{,}83$ m/sec²
στόν ἰσημερινό	$g_{0} = 9{,}78$ m/sec²

Παρατήρηση. Στίς συνηθισμένες ἐφαρμογές καί ὅταν δέν ἀπομακρυνόμαστε πολύ ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει τή σταθερή τιμή :

$$g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2$$

Σέ μερικές περιπτώσεις γιά εὐκολία στούς ὑπολογισμούς παίρνουμε κατά προσέγγιση :

$$g = 10 \text{ m/sec}^2$$

54. Νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων

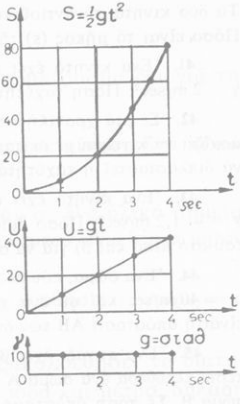
Ἀπό τήν πειραματική ἔρευνα (*) βρήκαμε τούς ἑπόμενους **νόμους τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων :**

(*) Ἐπειδή ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι περίπου 10 m/sec², τά σώματα πέφτουν πολύ γρήγορα καί γι' αὐτό ἡ πειραματική μελέτη τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων γίνεται μέ εἰδικές ἀκριβεῖς διατάξεις.

Σχ. 53. Τά διαστήματα (s) καί ἡ ταχύτητα (υ) κατά τήν ἐλεύθερη πτώση (g = 10 m/sec²).

I. Ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων εἶναι κίνηση κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη.
II. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας (g) στόν ἴδιο τόπο εἶναι σταθερή γιά ὅλα τά σώματα.

νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως		
ἐπιτάχυνση	$g = \text{σταθ.}$	
ταχύτητα	$\upsilon = g \cdot t$	ἤ $\upsilon = \sqrt{2g \cdot s}$
διάστημα	$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$	



Σχ. 54. Γραφική παράσταση τῶν νόμων τῆς ἐλεύθερης πτώσεως ($g = 10$ m/sec²).

Στό σχῆμα 53 δείχνονται οἱ τιμές τοῦ διαστήματος καί τῆς ταχύτητας, ὅταν τό σῶμα πέφτει ἐπί 4 δευτερόλεπτα. Γιά εὐκολία θεωροῦμε ὅτι εἶναι $g = 10\ \text{m/sec}^2$. Στό σχῆμα 54 δείχνεται ἡ γραφική παράσταση τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐλεύθερης πτώσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

35. Ἀπό τίς δύο πόλεις A καί B φεύγουν ταυτόχρονα δύο ἁμαξοστοιχίες, πού κινοῦνται ἀντίθετα, γιά νά πᾶνε ἀπό τή μιά πόλη στήν ἄλλη. Ἡ ἁμαξοστοιχία, πού φεύγει ἀπό τήν πόλη A, κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon_1 = 92$ km/h, ἐνῶ ἡ ἄλλη ἁμαξοστοιχία κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon_2 = 78$ km/h. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο πόλεων εἶναι $s = 212{,}5$ km. Σέ πόση ἀπόσταση ἀπό τήν πόλη A θά συναντηθοῦν οἱ δύο ἁμαξοστοιχίες καί ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο μετά τήν ἀναχώρησή τους;

36. Μιά ἁμαξοστοιχία φεύγει ἀπό τήν πόλη A στίς 7 h 05 min καί ἀφοῦ διατρέξει διάστημα $s = 129{,}5$ km φτάνει στήν πόλη B στίς 8 h 43 min. Πόση εἶναι ἡ μέση ταχύτητα τῆς ἁμαξοστοιχίας;

37. Ἕνα σῶμα ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία καί κινούμενο μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 4$ cm/sec² διανύει διάστημα $s = 50$ m. Πόσο χρόνο (**t**) κινήθηκε τό σῶμα καί πόση εἶναι ἡ τελική ταχύτητά του (υ);

38. Ἕνα σῶμα ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία καί κινούμενο μέ σταθερή ἐπιτάχυνση γ διανύει διάστημα $s = 0{,}8$ km σέ χρόνο $t = 20$ sec. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση γ;

39. Ὁ σωλήνας πυροβόλου ἔχει μῆκος $s = 2$ m. Μέσα στό σωλήνα τό βλῆμα κινεῖται μέ σταθερή ἐπιτάχυνση γ καί ὅταν βγαίνει ἀπό τό σωλήνα ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 400$ m/sec. Πόσο χρόνο (t) κινεῖται τό βλῆμα μέσα στό σωλήνα καί πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση (γ) τοῦ βλήματος;

40. Ἀπό τίς ἄκρες A καί B μιᾶς εὐθείας AB φεύγουν δύο κινητά, πού πλησιάζουν τό ἕνα πρός τό ἄλλο μέ ἀντίστοιχες σταθερές ἐπιταχύνσεις $\gamma_A = 1$ m/sec² καί $\gamma_B = 2$ m/sec². Πρῶτο φεύγει τό κινητό ἀπό τό B καί ἔπειτα ἀπό 2 sec φεύγει τό ἄλλο κινητό ἀπό τό A.

Τά δύο κινητά συναντιοῦνται σέ ἕνα σημεῖο Γ, πού ἀπέχει $s_B = 25$ m ἀπό τήν ἄκρη Β. Πόσο εἶναι τό μῆκος (s) τῆς εὐθείας ΑΒ ;

41. Ἕνα κινητό ἔχει ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 10$ m/sec καί κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $γ = 2$ m/sec². Πόση ταχύτητα (υ) ἔχει, ὅταν διατρέξει διάστημα s = 8 m ;

42. Σέ μιά χρονική στιγμή t_0 ἕνα κινητό ἔχει ταχύτητα $υ_0 = 10$ m/sec καί ἀμέσως ἀρχίζει νά κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $γ = 3$ m/sec². Πόσο διάστημα πρέπει νά διατρέξει, γιά νά διπλασιαστεῖ ἡ ταχύτητά του ;

43. Ἕνα κινητό ἔχει ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/sec καί κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $γ = -1{,}2$ m/sec². Πόσο διάστημα πρέπει νά διατρέξει : α) γιά νά ἐλαττωθεῖ ἡ ταχύτητά του στό μισό καί β) γιά νά σταματήσει ;

44. Ἕνα σῶμα, πού πέφτει ἐλεύθερα, ἔχει σέ ἕνα σημεῖο Α τῆς τροχιᾶς του ταχύτητα $υ_1 = 40$ m/sec καί σέ ἕνα χαμηλότερο σημεῖο Β ἔχει ταχύτητα $υ_2 = 150$ m/sec. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΒ τῶν δύο σημείων ; g = 10 m/sec².

45. Ἕνα πηγάδι ἔχει βάθος s = 180 m. Ἀπό τήν ἀρχή τοῦ πηγαδιοῦ ἀφήνουμε νά πέσει ἐλεύθερα ἕνα σῶμα Α καί ἔπειτα ἀπό 1 sec ἀφήνουμε νά πέσει ἐλεύθερα ἕνα ἄλλο σῶμα Β. Σέ πόση ἀπόσταση ἀπό τόν πυθμένα τοῦ πηγαδιοῦ βρίσκεται τό σῶμα Β, ὅταν τό σῶμα Α φτάνει στόν πυθμένα ; g = 10 m/sec².

46. Δύο σώματα Α καί Β βρίσκονται πάνω στήν ἴδια κατακόρυφο καί τό Α βρίσκεται 300 m ψηλότερα ἀπό τό Β. Ἀφήνουμε τό Α νά πέσει ἐλεύθερα καί ἔπειτα ἀπό 6 sec ἀφήνουμε ἐλεύθερο καί τό Β. Μετά πόσο χρόνο (t) ἀπό τήν ἀναχώρηση τοῦ Β θά συναντηθοῦν τά δύο σώματα καί σέ πόση ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο πού ξεκίνησε τό Α ; Μετά πόσο χρόνο (t_1) ἀπό τή συνάντηση τῶν δύο σωμάτων ἡ ἀπόστασή τους θά εἶναι πάλι 300 m ; g = 10 m/sec².

47. Ἀπό τήν κορυφή τοῦ πύργου τοῦ Eiffel, πού ἔχει ὕψος s = 300 m ρίχνουμε κατακόρυφα πρός τά κάτω μιά πέτρα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 35$ m/sec. Πόσο χρόνο (t) χρειάζεται ἡ πέτρα, γιά νά φτάσει στό ἔδαφος καί μέ πόση ταχύτητα φτάνει στό ἔδαφος ; g = 10 m/sec².

48. Μέ πόση ἀρχική ταχύτητα ($υ_0$) πρέπει νά ἐκσφενδονίσουμε ἀπό ὕψος s = 10 m κατακόρυφα πρός τά κάτω ἕνα σῶμα, ὥστε τό σῶμα νά φτάσει στό ἔδαφος μέσα σέ χρόνο t = 1 sec ; Μέ πόση ταχύτητα (υ) φτάνει τό σῶμα στό ἔδαφος ; g = 10 m/sec².

Κίνηση καί δύναμη

55. Κίνηση καί δύναμη

Στά προηγούμενα ἐξετάσαμε τήν εὐθύγραμμη κίνηση (ὁμαλή καί ὁμαλά μεταβαλλόμενη), χωρίς νά λάβουμε ὑπόψη *τήν αἰτία* πού προκαλεῖ τήν κίνηση. Αὐτός ὁ τρόπος μελέτης τῆς κινήσεως εἶναι θέμα *τῆς Κινηματικῆς*. Ξέρουμε ὅμως ὅτι ἡ αἰτία, πού μεταβάλλει τήν κινητική κατάσταση τῶν σωμάτων, εἶναι *ἡ δύναμη*. Ὥστε, γιά νά ἑρμηνεύσουμε τήν κίνηση ἑνός σώματος, πρέπει νά λάβουμε ὑπόψη τή δύναμη πού ἐνεργεῖ σ' αὐτό τό σῶμα. *Ἡ Δυναμική* ἐξετάζει τήν κίνηση τῶν σωμάτων ὡς *ἀποτέλεσμα τῶν δυνάμεων* πού ἐνεργοῦν στά σώματα.

56. Ἀρχή τῆς ἀδράνειας

Ἀπό τήν καθημερινή πείρα καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι γιά τή δύναμη πρέπει νά δώσουμε τόν ἑξῆς *ὁρισμό :*

Δύναμη ὀνομάζεται τό αἴτιο, πού μπορεῖ νά θέσει σέ κίνηση ἕνα σῶμα ἤ νά τροποποιήσει τήν κίνηση ἑνός σώματος.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως προκύπτει ὅτι, ἄν σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο *δέν ἐνεργεῖ καμιά δύναμη* ($F = 0$), ἤ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\Sigma F = 0$) τότε:

- ἄν τό ὑλικό σημεῖο *βρίσκεται σέ ἠρεμία*, θά ἐξακολουθήσει *νά παραμένει σέ ἠρεμία*·
- ἄν τό ὑλικό σημεῖο *κινεῖται* μέ ταχύτητα υ, θά ἐξακολουθήσει νά διατηρεῖ αὐτή τήν ταχύτητα σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο, δηλαδή θά ἐξακολουθήσει *νά κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά.*

Τό παραπάνω συμπέρασμα ἀποτελεῖ **τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας** καί διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

Ἕνα ὑλικό σημεῖο, στό ὁποῖο δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική δύναμη ($F = 0$) ἤ ἠρεμεῖ ($υ = 0$) ἤ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ($υ =$ σταθ.).

Ἡ ἀρχή τῆς ἀδράνειας διατυπώθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τόν Νεύτωνα καί ἀποτελεῖ βασικό νόμο τῆς Μηχανικῆς, δηλαδή ἀποτελεῖ μιά *ἀρχή τῆς Μηχανικῆς*, πού ἐπιβεβαιώνεται ἀπό τό ὅτι ὅλα τά φαινόμενα πού ἀναφέρονται στήν κίνηση φαίνονται ὡς ἀποτελέσματα τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδράνειας.

57. Ἀδράνεια τῆς ὕλης

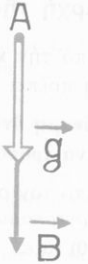
Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἤ ἕνα σῶμα δέν μπορεῖ ἀπό μόνο του νά ἀλλάξει τήν κινητική του κατάσταση, δηλαδή δέν μπορεῖ νά μεταβάλλει τήν ταχύτητά του. Γιά νά ἀλλάξει ἡ κινητική του κατάσταση, πρέπει νά ἐνεργήσει στό σῶμα μιά ἐξωτερική δύναμη. Αὐτό τό γεγονός μᾶς ἀναγκάζει νά δεχτοῦμε ὅτι τά σώματα *ἀνθίστανται* σέ κάθε μεταβολή τῆς κινητικῆς καταστάσεώς τους ἤ, μέ ἄλλα λόγια, ὅτι τά σώματα *προσπαθοῦν νά διατηρήσουν σταθερή τήν ταχύτητά τους.* Αὐτή ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς ὕλης ὀνομάζεται **ἀδράνεια.**

Ἡ ἀντίσταση πού παρουσιάζουν τά σώματα στή μεταβολή τῆς κινητικῆς καταστάσεώς τους, δηλαδή ἡ ἀδράνειά τους, ἐκδηλώνεται τόσο πιό ἔντονα, ὅσο πιό γρήγορα προσπαθοῦμε νά ἀλλάξουμε τήν κινητική κατάσταση τοῦ σώματος. Ἔτσι π.χ. ὅταν τό λεωφορεῖο ξεκινάει ἀπότομα, οἱ ἐπιβάτες γέρνουν ἀπότομα πίσω· ἀντίθετα, ὅταν τό λεωφορεῖο τρέχει καί σταματήσει ἀπότομα, οἱ ἐπιβάτες γέρνουν ἀπότομα ἐμπρός. Ὅταν ἡ κινητική κατάσταση τοῦ σώματος μεταβάλλεται σιγά-σιγά, τότε τό σῶμα παρουσιάζει ἀσήμαντη ἀντίσταση στή μεταβολή τῆς κινητικῆς του καταστάσεως.

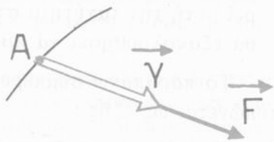
58. Σχέση τῆς δυνάμεως μέ τήν κίνηση τοῦ σώματος

Ὅταν δέν ἀπομακρυνόμαστε πολύ ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους, μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός σώματος, π.χ. μιᾶς μεταλλικῆς σφαίρας, εἶναι *δύναμη σταθερή* κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο. Ἀπό τή μελέτη τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων βρήκαμε ὅτι μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους της $\vec{B}$ ἡ σφαίρα *κινεῖται κατακόρυφα μέ ἐπιτάχυνση* $\vec{g}$ (σχ. 55). Αὐτή ἐκφράζεται μέ ἄνυσμα, πού ἔχει:

- τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά, πού ἔχει καί τό βάρος $\vec{B}$,
- μέτρο g σταθερό ($g = 9{,}81\ m/sec^2$).



Σχ. 55. Τό βάρος $\vec{B}$ προσδίνει στή μάζα m ἐπιτάχυνση $\vec{g}$.



Σχ. 56. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ προσδίνει στή μάζα m ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$.

Ὥστε ἡ κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση τῆς σφαίρας εἶναι *τό κινητικό ἀποτέλεσμα* πού προκαλεῖ στό σῶμα *ἡ συνεχής δράση μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως*, πού τήν ὀνομάσαμε βάρος τοῦ σώματος. Γενικεύοντας τά παραπάνω καταλήγουμε στόν ἀκόλουθο *νόμο*:

Ὅταν σέ ἕνα σῶμα, πού ἀρχικά βρίσκεται σέ ἠρεμία, ἐνεργήσει συνεχῶς μιά δύναμη $\vec{F}$ σταθερή κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο, τότε τό σῶμα ἀποκτᾶ σταθερή ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς δυνάμεως (σχ. 56).

59. Σχέση τῆς δυνάμεως μέ τήν ἐπιτάχυνση

Σέ ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα m καί ἀρχικά ἠρεμεῖ, ἀρχίζει νά ἐνεργεῖ μιά *σταθερή δύναμη* $\vec{F}$, πού προσδίνει στό σῶμα *σταθερή ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ κατά τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς δυνάμεως. Μέ τό πείραμα βρίσκουμε ὅτι, ἄν στό σῶμα αὐτό ἐνεργήσει δύναμη διπλάσια (2F), τριπλάσια (3F), τότε καί ἡ ἐπιτάχυνση ἀντίστοιχα γίνεται διπλάσια 2γ, τριπλάσια 3γ. Ὥστε:

Ἡ ἐπιτάχυνση (γ), πού ἀποκτᾶ τό σῶμα μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως (F), εἶναι ἀνάλογη μέ τή δύναμη.

Πειραματική ἀπόδειξη. Χρησιμοποιοῦμε τή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 57. Τό μικρό εὐκίνητο ὄχημα Α, ἔχει ὁρισμένη μάζα m καί ἕλκεται ἀπό τή σταθερή δύναμη F. Τό ὄχημα ἀποκτᾶ κίνηση ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη. Βρίσκουμε τό διάστημα s, πού διανύει τό ὄχημα στή διάρκεια ὁρισμένου χρόνου t, καί ἀπό τήν ἐξίσωση $\gamma = \frac{2s}{t^2}$ προσδιορίζουμε τήν ἐπιτάχυνση γ. Ἄν στό ὄχημα ἐνεργήσει δύναμη 2F, 3F, βρίσκουμε ὅτι ἀντίστοιχα ἡ ἐπιτάχυνση γίνεται 2γ, 3γ.

60. Σχέση τῆς μάζας μέ τήν ἐπιτάχυνση

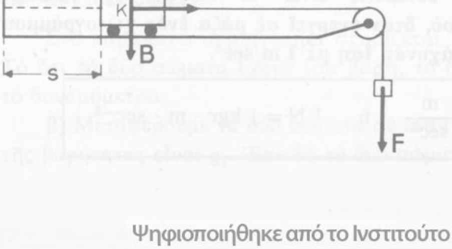
Σέ ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα m καί ἀρχικά ἠρεμεῖ, ἀρχίζει νά ἐνεργεῖ σταθερή δύναμη F, πού τοῦ προσδίνει ἐπιτάχυνση γ κατά τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς δυνάμεως. Πειραματικῶς βρίσκουμε ὅτι, ἄν ἡ μάζα τοῦ σώματος γίνει δύο, τρεῖς φορές *μεγαλύτερη*, δηλαδή γίνει 2m, 3m, τότε ἡ δύναμη F προσδίνει στό σῶμα ἐπιτάχυνση δύο, τρεῖς φορές *μικρότερη*, δηλαδή ἡ ἐπιτάχυνση γίνεται γ/2, γ/3. Ὥστε :

Ἡ ἐπιτάχυνση (γ), πού ἀποκτᾶ τό σῶμα μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως (F), εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τή μάζα (m) τοῦ σώματος.

Πειραματική ἀπόδειξη. Χρησιμοποιοῦμε πάλι τή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 57. Ὅταν ἡ μάζα τοῦ ὀχήματος εἶναι m, τότε ἡ δύναμη F προσδίνει στό ὄχημα ἐπιτάχυνση γ. Ἄν ἡ μάζα τοῦ ὀχήματος γίνει 2m, 3m, τότε ἡ ἴδια δύναμη F προσδίνει στό ὄχημα ἀντίστοιχες ἐπιταχύνσεις γ/2, γ/3.

61. Θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς. Ὁρισμός τῆς μάζας

Ἀπό τήν πειραματική ἔρευνα βρίσκουμε τόν ἀκόλουθο γενικότατο νόμο, πού ὀνομάζεται **θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς :**



Σχ. 57. Τό ὄχημα (Α) ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση γ.

Ἡ δύναμη (F) πού ἐνεργεῖ σέ ἕνα σῶμα εἶναι ἀνάλογη μέ τή μάζα (m) τοῦ σώματος καί ἀνάλογη μέ τήν ἐπιτάχυνση (γ) πού ἀποκτᾶ τό σῶμα ἀπό τή δύναμη (F).

θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς	$F = m \cdot \gamma$	(1)

Ὁ θεμελιώδης νόμος συνδέει *τό αἴτιο* (δύναμη) μέ *τό κινητικό ἀποτέλεσμα* (ἐπιτάχυνση), καί φανερώνει ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$, πού ἐνεργεῖ στό σῶμα, ἀναγκαστικά *μεταβάλλει* τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ σώματος. Αὐτή ἡ μεταβολή μπορεῖ νά ἀναφέρεται στό μέτρο ἤ τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας.

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε $F = 0$, τότε εἶναι $m \cdot \gamma = 0$. Ἐπειδή ὅμως ἡ μάζα m δέν εἶναι μηδέν, πρέπει νά εἶναι $\gamma = 0$, δηλαδή ἡ ταχύτητα υ τοῦ σώματος *δέ μεταβάλλεται*. Ἄρα θά εἶναι ἤ $\upsilon = 0$ (τό σῶμα ἠρεμεῖ) ἤ $\upsilon =$ σταθ. (τό σῶμα κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά). Τό συμπέρασμα στό ὁποῖο καταλήξαμε εἶναι ἡ ἀρχή τῆς ἀδράνειας, πού μάθαμε παραπάνω.

Δυναμικός ὁρισμός τῆς μάζας. Ἀπό τό θεμελιώδη νόμο τῆς Δυναμικῆς συνάγεται ὁ ἀκόλουθος *δυναμικός ὁρισμός τῆς μάζας*:

Μάζα (m) ἑνός σώματος ὀνομάζεται τό σταθερό πηλίκο τῆς δυνάμεως (F), πού ἐνεργεῖ στό σῶμα, διά τῆς ἐπιταχύνσεως (γ), πού ἡ δύναμη αὐτή προσδίνει στό σῶμα.

$$\text{μάζα} = \frac{\text{δύναμη}}{\text{ἐπιτάχυνση}} \qquad m = \frac{F}{\gamma}$$

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς ἀνυσματικά ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση:

θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς	$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

62. Μονάδες δυνάμεως

Στά συστήματα μονάδων SI καί CGS ἡ δύναμη εἶναι παράγωγο μέγεθος καί *ἡ μονάδα δυνάμεως* ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση $F = m \cdot \gamma$. Ἄν στήν ἐξίσωση αὐτή βάλουμε $m = 1$ καί $\gamma = 1$, βρίσκουμε $F = 1$. Ἔτσι ἔχουμε:

Στό σύστημα SI **μονάδα δυνάμεως εἶναι τό** Newton **(1 Νιοῦτον, 1 N), δηλαδή ἡ δύναμη πού, ὅταν ἐνεργεῖ σέ μάζα ἑνός χιλιογράμμου (1 kgr), τῆς προσδίνει ἐπιτάχυνση ἴση μέ 1** m/sec^2.

$$1\ \text{Newton} = 1\ \text{kgr} \cdot 1 \frac{m}{sec^2} \quad \text{ἤ} \quad 1\ N = 1\ \text{kgr} \cdot m \cdot sec^{-2}$$

Στό σύστημα CGS μονάδα δυνάμεως εἶναι ἡ δύνη (1 dyn), δηλαδή ἡ δύναμη πού, ὅταν ἐνεργεῖ σέ μάζα ἑνός γραμμαρίου (1 gr), τῆς προσδίνει ἐπιτάχυνση ἴση μέ 1 cm/sec².

$$\boxed{1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{gr} \cdot 1\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{gr} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}}$$

Σχέσεις μεταξύ τῶν μονάδων δυνάμεως. Ἐπειδή εἶναι $1\ \mathrm{kgr} = 10^3\ \mathrm{gr}$ καί $1\ \mathrm{m/sec^2} = 10^2\ \mathrm{cm/sec^2}$ βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

$$1\ \mathrm{N} = 10^3\ \mathrm{gr} \cdot 10^2\ \mathrm{cm/sec^2} = 10^5\ \mathrm{gr} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}}$$

Ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα $m = 1\ \mathrm{kgr}$, ὁρίσαμε ὅτι ἔχει βάρος $B = 1\ \mathrm{kp}$. Ὅταν τό σῶμα αὐτό πέφτει μέ τήν ἐπίδραση μόνο τοῦ βάρους του, τότε τό σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση $g = 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2}$ καί σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Δυναμικῆς ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$B = m \cdot \gamma$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση βρίσκουμε :

$$1\ \mathrm{kp} = 1\ \mathrm{kgr} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2} = 9{,}81\ \mathrm{kgr} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-2} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N}}$$

Ἐπειδή εἶναι $1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}$ βρίσκουμε $\boxed{1\ \mathrm{kp} = 9{,}81 \cdot 10^5\ \mathrm{dyn}}$

Ἄρα εἶναι $1\ \mathrm{p} = 981\ \mathrm{dyn}$

Σέ πολλές περιπτώσεις μποροῦμε *κατά προσέγγιση* νά θεωρήσουμε ὅτι εἶναι :

$$1\ \mathrm{kp} = 10\ \mathrm{N} \quad \text{ἄρα} \quad 1\ \mathrm{kp} = 10^6\ \mathrm{dyn} \quad \text{καί} \quad 1\ \mathrm{p} = 10^3\ \mathrm{dyn}$$

63. Συνέπειες ἀπό τήν ἐξίσωση $B = m \cdot g$

α) Δύο σώματα ἔχουν μάζες m_1 καί m_2. Στόν τόπο μας ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g εἶναι ἡ ἴδια γιά ὅλα τά σώματα. Ἄν μέ ἕνα δυναμόμετρο βροῦμε ὅτι αὐτά τά δύο σώματα ἔχουν τό ἴδιο βάρος B, τότε ἔχουμε τή σχέση :

$$B = m_1 \cdot g = m_2 \cdot g \quad \text{ἄρα} \quad m_1 = m_2$$

Ἄν στόν ἴδιο τόπο δύο σώματα ἔχουν ἴσα βάρη, τότε τά σώματα ἔχουν καί ἴσες μάζες.

Στό παραπάνω συμπέρασμα στηρίζεται ἡ στατική μέτρηση τῆς μάζας. Τό ὅτι τά δύο σώματα ἔχουν ἴσα βάρη, τό διαπιστώνουμε μέ τό ζυγό ἤ μέ τό δυναμόμετρο.

β) Μεταφέρουμε τά δύο σώματα σέ ἕναν ἄλλο τόπο, ὅπου ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι g_1. Ἐπειδή τά δύο σώματα ἔχουν ἴσες μάζες, τά σώματα θά ἔχουν πάλι τό ἴδιο βάρος B_1 καί θά ἰσχύει ἡ σχέση :

$$B_1 = m_1 \cdot g_1 = m_2 \cdot g_1 \quad \text{ἄρα} \quad m_1 = m_2$$

Ἄν σέ ἕναν τόπο τά βάρη δύο σωμάτων εἶναι ἴσα, τότε καί σέ ὁποιοδήποτε ἄλλο τόπο τά βάρη τῶν δύο σωμάτων εἶναι ἴσα.

γ) Στόν τόπο μας ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m καί βάρος $B = m \cdot g$. Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε :

$$g = \frac{B}{m} \qquad (1)$$

Στό σύστημα SI τό βάρος B μετριέται σέ Newton (N) καί ἡ μάζα m μετριέται σέ χιλιόγραμμα (kgr). Ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε m = 1 kgr, βρίσκουμε :

$$g = \frac{B \text{ Newton}}{1 \text{ kgr}} \quad \text{καί} \quad g = B \frac{N}{kgr} \qquad (2)$$

Ὅπως ξέρουμε (§ 26), τό μέγεθος B N/kgr ἐκφράζει *τήν ἔνταση τῆς βαρύτητας*, δηλαδή τό βάρος πού ἔχει σ' αὐτό τόν τόπο ἡ μάζα ἑνός χιλιογράμμου. Ὥστε ἡ σχέση (2) φανερώνει ὅτι :

Στόν ἴδιο τόπο ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἰσοῦται μέ τήν ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας.

ἐπιτάχυνση βαρύτητας	$g = 9{,}81 \dfrac{m}{sec^2}$	ἔνταση βαρύτητας	$g = 9{,}81 \dfrac{N}{kgr}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

49. Ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα m = 19,62 kgr, κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 1{,}5$ m/sec². Πόση εἶναι ἡ δύναμη (F) πού κινεῖ τό σῶμα ;

50. Σέ σῶμα, πού ἔχει μάζα m = 2 kgr, ἐνεργεῖ δύναμη F = 15 N. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση ;

51. Ἕνα σῶμα μέ μάζα m = 2 gr ἀρχικά ἠρεμεῖ. Στό σῶμα αὐτό ἐφαρμόζεται δύναμη F = 1000 dyn, πού ἐνεργεῖ ἐπί χρόνο t = 4 sec. Πόσο διάστημα διανύει τό σῶμα, ἄν κινηθεῖ ἐπί 6 sec ;

52. Ὁ σωλήνας πυροβόλου ἔχει μῆκος s = 3 m. Τό βλῆμα ἔχει μάζα m = 1 kgr καί βγαίνει ἀπό τό σωλήνα μέ ταχύτητα υ = 850 m/sec. Μέσα στό σωλήνα τό βλῆμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση γ μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως F, πού ἀναπτύσσουν τά ἀέρια τῆς ἐκρήξεως. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ δύναμη F εἶναι σταθερή, νά βρεθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση γ καί ἡ δύναμη F.

53. Ἕνα βλῆμα ἔχει μάζα m = 200 gr καί ὁ σωλήνας τοῦ ὅπλου ἔχει μῆκος s = 50 cm. Τά ἀέρια τῆς ἐκρήξεως ἐξασκοῦν στό βλῆμα μιά σταθερή δύναμη $F = 25 \cdot 10^4$ N. Μέ πόση ταχύτητα βγαίνει τό βλῆμα ἀπό τό σωλήνα τοῦ ὅπλου ; Οἱ τριβές μέσα στό σωλήνα παραλείπονται.

54. Σέ ἕνα σῶμα ἐνεργεῖ δύναμη F = 45 N. Σέ μιά χρονική στιγμή t_1 τό σῶμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 6$ m/sec καί τή χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 8$ sec ἔχει ταχύτητα $\upsilon_2 = 46$ m/sec. Πόση εἶναι ἡ μάζα (m) τοῦ σώματος ;

Τριβή

64. Τριβή ὀλισθήσεως

Ἕνα σῶμα, πού ἔχει βάρος $\vec{B}$, ἠρεμεῖ πάνω σέ ὁριζόντιο τραπέζι. Στό σῶμα ἐφαρμόζουμε μιά ὁριζόντια δύναμη $\vec{F}$, πού μποροῦμε νά τή μετρᾶμε μέ δυναμόμετρο (σχ. 58). Παρατηροῦμε ὅτι τό σῶμα *ὀλισθαίνει μέ σταθερή ταχύτητα*, μόνο ὅταν ἡ δύναμη $\vec{F}$ λάβει μιά ὁρισμένη τιμή. Ἡ δύναμη αὐτή $\vec{F}$, ἄν καί ἐνεργεῖ συνεχῶς στό σῶμα, δέν τοῦ προσδίνει ἐπιτάχυνση. Ἄρα σέ κάθε στιγμή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἰσορροπεῖ μιά ἄλλη *ἀντίθετη δύναμη* $\vec{T}$, πού ἀντιδρᾶ στή μετακίνηση τοῦ σώματος σχετικά μέ τό τραπέζι καί ὀνομάζεται *τριβή ὀλισθήσεως*. Τό μέτρο τῆς δυνάμεως T εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως F, πού μετρᾶμε μέ τό δυναμόμετρο. Ὥστε :

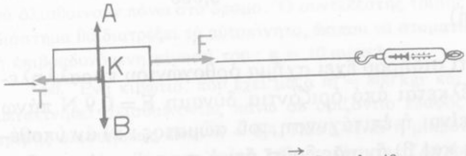
I. Ἡ τριβή ὀλισθήσεως ($\vec{T}$) ἔχει πάντοτε φορά ἀντίθετη μέ τή φορά πού κινεῖται τό σῶμα.
II. Ἡ τριβή ὀλισθήσεως (T) ἔχει μέτρο ἴσο μέ τό μέτρο τῆς δυνάμεως (F), πού διατηρεῖ τήν κίνηση τοῦ σώματος, χωρίς νά τοῦ προσδίνει ἐπιτάχυνση.

Ἡ τριβή ὀλισθήσεως ὀφείλεται στίς μικρές ἀνωμαλίες, πού πάντοτε ἔχουν οἱ ἐπιφάνειες ὅλων τῶν σωμάτων (σχ. 59).

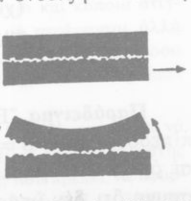
65. Νόμος τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως

Ὅταν τό σῶμα κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα πάνω στό τραπέζι (σχ. 60), παρατηροῦμε ὅτι τό δυναμόμετρο δείχνει τήν ἴδια πάντοτε ἔνδειξη, εἴτε ἀργά εἴτε γρήγορα κινεῖται τό σῶμα. Ἀπό αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι ἡ τριβή ὀλισθήσεως (T) εἶναι *ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα.*

Ἄν τό ἴδιο σῶμα τό στηρίξουμε στό τραπέζι μέ μικρότερη ἕδρα του, παρατηροῦμε ὅτι τό δυναμόμετρο δείχνει πάλι τήν ἴδια ἔνδειξη. Ὥστε ἡ



Σχ. 58. Ἡ τριβή ὀλισθήσεως $\vec{T}$ εἶναι ἀντίθετη μέ τή δύναμη $\vec{F}$.

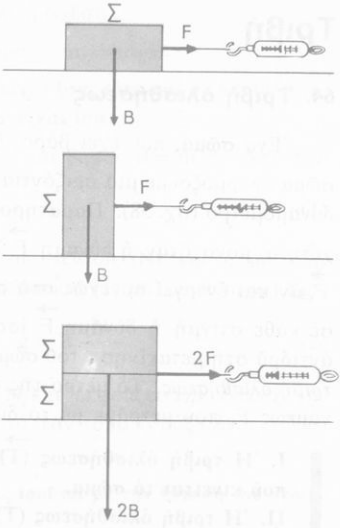


Σχ. 59. Γιά τήν ἐξήγηση τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

τριβή ὀλισθήσεως (Τ) εἶναι *ἀνεξάρτητη ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ἐπαφῆς* τῶν δύο σωμάτων.

Ἄν διπλασιάσουμε τό βάρος τοῦ σώματος, παρατηροῦμε ὅτι καί ἡ τριβή ὀλισθήσεως γίνεται διπλάσια. Ἄρα ἡ τριβή ὀλισθήσεως εἶναι ἀνάλογη μέ τή δύναμη, τήν ὁποία τό σῶμα ἐξασκεῖ κάθετα στό ἐπίπεδο πού στηρίζεται τό σῶμα *(κάθετη δύναμη)*. Ὥστε ἀπό τό πείραμα συνάγεται ὁ ἀκόλουθος **νόμος τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως :**

Ἡ τριβή ὀλισθήσεως (Τ) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα καί τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ἐπαφῆς, καί εἶναι ἀνάλογη μέ τή δύναμη ($F_{καθ}$), πού ἐνεργεῖ κάθετα στό ἐπίπεδο ὀλισθήσεως.



Σχ. 60. Πειραματική ἀπόδειξη τοῦ νόμου τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

τριβή ὀλισθήσεως $\quad T = \eta \cdot F_{καθ}$

ὅπου η εἶναι *ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως* καί ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν ἐπιφανειῶν πού βρίσκονται σέ ἐπαφή. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως ἐλαττώνεται, ἄν ἀνάμεσα στίς τριβόμενες ἐπιφάνειες παρεμβάλουμε ἕνα στρῶμα λιπαντικοῦ ὑγροῦ.

Συντελεστές τριβῆς ὀλισθήσεως	$\eta = T/F_{καθ}$
Σίδηρος πάνω σέ πάγο	0,014
Ξύλο πάνω σέ ξύλο	0,400
Σίδηρος πάνω σέ σίδηρο (χωρίς λίπανση)	0,150
Σίδηρος πάνω σέ σίδηρο (μέ λίπανση)	0,060

Παράδειγμα. Ἕνα κομμάτι σιδήρου ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπίπεδου, βάρος $B = 6$ N καί ἕλκεται ἀπό ὁριζόντια δύναμη $F = 0{,}9$ N πάνω σέ ὁριζόντιο τραπέζι. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ σώματος : α) ἄν ὑποθέσουμε ὅτι δέν ὑπάρχει τριβή καί β) ἄν μᾶς δοθεῖ ὅτι ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}04$; $g = 10$ m/sec^2.

α) Ἀπό τήν ἐξίσωση $B = m \cdot g$ βρίσκουμε ὅτι τό σῶμα ἔχει μάζα:

$$m = \frac{B}{g} = \frac{6\ N}{10\ m/sec^2} \quad καί \quad m = 0{,}6\ kgr$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση $F = m \cdot \gamma$ βρίσκουμε ὅτι τό σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{0{,}9\ N}{0{,}6\ kgr} \quad καί \quad \gamma = 1{,}5\ m/sec^2$$

β) Ἡ κάθετη δύναμη εἶναι $F_{καθ} = B = 6\ N$. Ἑπομένως ἡ τριβή ὀλισθήσεως (T) εἶναι:

$$T = \eta \cdot F_{καθ} = 0{,}04 \cdot 6\ N \quad καί \quad T = 0{,}24\ N$$

Ἡ συνισταμένη δύναμη $F_{ολ} = F - T = (0{,}90 - 0{,}24)\ N = 0{,}66\ N$ προσδίνει στό σῶμα ἐπιτάχυνση:

$$\gamma = \frac{F_{ολ}}{m} = \frac{0{,}66\ N}{0{,}6\ kgr} \quad καί \quad \gamma = 1{,}1\ m/sec^2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

55. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 100$ kgr καί βάρος $B = 1000$ N (δηλαδή 100 kp). Στό σῶμα ἐνεργεῖ ἡ ὁριζόντια δύναμη $F = 100$ N, ἡ ὁποία κινεῖ τό σῶμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}04$. Τί κίνηση ἔχει τό σῶμα; Ἄν ἔχει ἐπιτάχυνση, πόση εἶναι αὐτή;

56. Μέ πόση ἀρχική ταχύτητα (υ_0) πρέπει νά ἐκσφενδονιστεῖ ἕνα σῶμα, ὥστε αὐτό νά διατρέξει πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο διάστημα $s = 100$ m ὥσπου νά σταματήσει; Συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως $\eta = 0{,}01$. $g = 10$ m/sec².

57. Ἕνα σῶμα πού ἠρεμεῖ ἔχει μάζα $m = 2$ kgr καί βάρος $B = 20$ N. Στό σῶμα ἀρχίζει νά ἐνεργεῖ ὁριζόντια δύναμη $F = 1{,}3$ N, πού κινεῖ τό σῶμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἄν σέ χρόνο $t = 4$ sec τό σῶμα διανύσει διάστημα $s = 2$ m, νά βρεθοῦν ἡ δύναμη τριβῆς ὀλισθήσεως (T) καί ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως.

58. Ἕνα ἔλκηθρο ἔχει μάζα $m = 600$ kgr βάρος $B = 6000$ N καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα πάνω σέ ὁριζόντιο ἔδαφος μέ τήν ἐπίδραση δυνάμεως F. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}06$. Πόση εἶναι ἡ δύναμη F;

59. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 108$ km/h καί κάποια στιγμή ὁ ὁδηγός χρησιμοποιώντας τά φρένα ἀναγκάζει τούς τροχούς νά μή στρέφονται, ἀλλά νά ὀλισθαίνουν πάνω στό δρόμο. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}3$. Πόσο διάστημα θά διατρέξει τό αὐτοκίνητο, ὥσπου νά σταματήσει καί πόσο χρόνο θά διαρκέσει ἡ ἐπιβραδυνόμενη κίνησή του; $g = 10$ m/sec².

60. Ἕνα κιβώτιο, πού ἔχει μάζα $m = 800$ kgr καί βάρος $B = 8000$ N, πρόκειται νά μετακινηθεῖ ὀλισθαίνοντας πάνω σέ ὁριζόντιο ἔδαφος κατά $s = 10$ m. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}4$. Πόση εἶναι ἡ μικρότερη δύναμη, πού πρέπει νά ἐφαρμόσουμε στό κιβώτιο γι' αὐτή τή μετακίνηση; Ἄν ἐφαρμόσουμε δύναμη $F_1 = 3600$ N, πόσο χρόνο θά διαρκέσει αὐτή ἡ μετακίνηση;

Ἔργο καί ἐνέργεια

66. Ἔργο σταθερῆς δυνάμεως

Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο Α ἐνεργεῖ ἡ σταθερή δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 61). Γενικά λέμε ὅτι *μιά δύναμη παράγει ἔργο, ὅταν μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά τή διεύθυνσή της.*

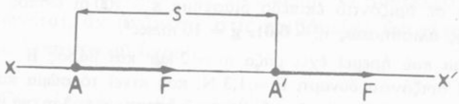
Γιά τή μέτρηση τοῦ ἔργου ἰσχύει ὁ ἑξῆς ὁρισμός:

Τό ἔργο (W) μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς δυνάμεως (F) ἐπί τό διάστημα (s), πού μετακινήθηκε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως κατά τή διεύθυνσή της (*).

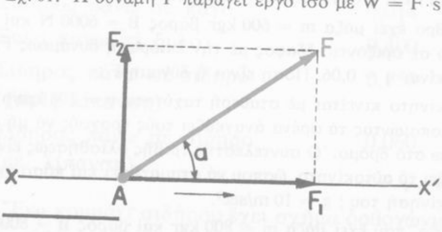
$$\boxed{\text{ἔργο} = \text{δύναμη} \cdot \text{μετατόπιση} \qquad W = F \cdot s} \tag{1}$$

Τό ἔργο εἶναι *μονόμετρο* φυσικό μέγεθος.

Γενικότερος ὁρισμός τοῦ ἔργου. Σέ πολλές περιπτώσεις ἡ τροχιά τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως σχηματίζει γωνία α μέ τή διεύθυνση τῆς δυνάμεως (σχ. 62). Τότε ἀναλύουμε τή δύναμη $\vec{F}$ σέ δύο κάθετες συνιστῶσες, τήν $\vec{F_1}$ κατά τή διεύθυνση τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς καί τήν $\vec{F_2}$ κάθετη στήν τροχιά. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἔργου ἡ συνιστῶσα $\vec{F_2}$ *δέν παράγει ἔργο*, γιατί δέ μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά τή



Σχ. 61. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ παράγει ἔργο ἴσο μέ $W = F \cdot s$.



Σχ. 62. Ἔργο παράγει ἡ συνιστῶσα $F_1 = F \cdot συν\,α$.

* Τό σύμβολο W προέρχεται ἀπό τήν ἀγγλική λέξη work = ἔργο.

διεύθυνσή της. Ἑπομένως σ' αὐτή τήν περίπτωση *ἔργο παράγει* μόνο ἡ συνιστώσα $F_1 = F \cdot συν\, α$, πού εἶναι *ἡ προβολή* τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πάνω στήν τροχιά τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς Α. Τότε τό ἔργο πού παράγει ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι $W = F_1 \cdot s$, δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{\text{ἔργο σταθερῆς δυνάμεως} \quad W = F \cdot s \cdot συν\, α} \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωση (2) ἀποτελεῖ τόν ἀκόλουθο *γενικότερο ὁρισμό τοῦ ἔργου*:

Τό ἔργο (W) μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως (F) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς προβολῆς τῆς δυνάμεως (F · συν α) πάνω στή διεύθυνση τῆς μετακινήσεως ἐπί τό διάστημα (s), πού μετακινήθηκε τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως.

Ἄν ἡ δύναμη F εἶναι *κάθετη* στήν τροχιά τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως, τότε εἶναι $α = 90^0$, ἑπομένως $συν\, α = 0$ καί σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) τό ἔργο εἶναι ἴσο μέ μηδέν ($W = 0$), δηλαδή ἡ δύναμη F *δέν παράγει ἔργο*.

Μονάδες ἔργου. Ἄν στήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τοῦ ἔργου $W = F \cdot s$ βάλουμε $F = 1$ καί $s = 1$, βρίσκουμε $W = 1$. Ὥστε ὡς *μονάδα ἔργου* παίρνουμε τό ἔργο, πού παράγει δύναμη ἴση μέ *μιά μονάδα δυνάμεως*, ὅταν ἡ δύναμη αὐτή μετακινεῖ *κατά τή διεύθυνσή της* τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά *μιά μονάδα μήκους*.

Στό σύστημα SI ἡ μονάδα ἔργου ὀνομάζεται *Joule* (Τζάουλ) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$1\ \text{Joule} = 1\ \text{Newton} \cdot 1\ \text{m} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{1\ \text{Joule} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

Στό σύστημα CGS ἡ μονάδα ἔργου ὀνομάζεται *ἔργιο* (erg) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$1\ \text{erg} = 1\ \text{dyn} \cdot 1\ \text{cm} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \text{erg} = 1\ \text{dyn} \cdot \text{cm}$$

Στό Τεχνικό σύστημα (ΤΣ) ἡ μονάδα ἔργου ὀνομάζεται *κιλοποντόμετρο* (1 kp · m) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$1\ \text{κιλοποντόμετρο} = 1\ \text{κιλοπόντ} \cdot 1\ \text{m} = 1\ \text{kp} \cdot \text{m}$$

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι μεταξύ τῶν παραπάνω μονάδων ἔργου ὑπάρχουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις:

$$1\ \text{Joule} = 10^5\ \text{dyn} \cdot 10^2\ \text{cm} \quad \text{καί} \quad 1\ \text{Joule} = 10^7\ \text{erg}$$

$$1\ \text{kp} \cdot \text{m} = 9{,}81\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} \quad \text{καί} \quad 1\ \text{kp} \cdot \text{m} = 9{,}81\ \text{Joule}$$

Γιά εὐκολία μποροῦμε κατά προσέγγιση νά πάρουμε:

$$1\ \text{kp} \cdot \text{m} \simeq 10\ \text{Joule}$$

67. Ἰσχύς

Σήμερα χρησιμοποιοῦμε πολλές πηγές παραγωγῆς ἔργου (κινητῆρες, ὑδατοπτώσεις κ.ἄ.). Γιά νά ἐκτιμήσουμε τήν ἱκανότητα μιᾶς πηγῆς ἔργου, πρέπει νά λάβουμε ὑπόψη καί μέσα σέ πόσο χρόνο αὐτή ἡ πηγή παράγει ὁρισμένο ἔργο. Αὐτή ἡ ἐκτίμηση εἶναι εὔκολη, ἄν ξέρουμε τό ἔργο πού παράγεται σέ κάθε μονάδα χρόνου. Ἔτσι καταλήγουμε στόν ὁρισμό ἑνός νέου φυσικοῦ μεγέθους, πού χαρακτηρίζει κάθε πηγή παραγωγῆς ἔργου.

Ἰσχύς (P) ὀνομάζεται τό πηλίκο τοῦ ἔργου (W), πού παράγεται στή διάρκεια τοῦ χρόνου (t), διά τοῦ χρόνου τούτου (*).

$$\boxed{\text{ἰσχύς} = \frac{\text{ἔργο}}{\text{χρόνος}} \qquad P = \frac{W}{t}}$$

Ἡ ἰσχύς εἶναι *μονόμετρο* φυσικό μέγεθος.

α. Μονάδες ἰσχύος. Γενικά γιά τή μέτρηση τῆς ἰσχύος ὡς μονάδα χρόνου παίρνουμε *τό δευτερόλεπτο* (1 sec). Ἄν στήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ἰσχύος βάλουμε W = 1 καί t = 1 sec, βρίσκουμε P = 1. Ὥστε ὡς *μονάδα ἰσχύος* παίρνουμε τήν ἰσχύ μιᾶς πηγῆς ἔργου, πού σέ *κάθε δευτερόλεπτο* παράγει ἔργο ἴσο μέ *μιά μονάδα ἔργου*.

Στό σύστημα SI ἡ μονάδα ἰσχύος ὀνομάζεται *Watt* (Βάτ, 1 W) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$1\ \text{Watt}\ (1\ \text{W}) = \frac{1\ \text{Joule}}{1\ \text{sec}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{1\ \text{Watt}\ (1\ \text{W}) = 1\ \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}}$$

Στήν πράξη χρησιμοποιοῦμε καί τά ἑξῆς πολλαπλάσια τῆς μονάδας Watt:

1 κιλοβάτ (1 kilowatt, $1\ \text{kW}) = 10^3\ \text{W}$

1 μεγαβάτ (1 Megawatt, $1\ \text{MW}) = 10^6\ \text{W}$

Στό σύστημα CGS μονάδα ἰσχύος εἶναι:

$$1\ \text{μονάδα ἰσχύος} = \frac{1\ \text{erg}}{1\ \text{sec}} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \text{μονάδα ἰσχύος} = 1\ \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

Στό Τεχνικό σύστημα (ΤΣ) μονάδα ἰσχύος εἶναι:

$$1\ \text{μοναδα ἰσχύος} = \frac{1\ \text{kp} \cdot \text{m}}{1\ \text{sec}} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \text{μονάδα ἰσχύος} = 1\ \frac{\text{kp} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

---

* Τό σύμβολο P προέρχεται ἀπό τήν ἀγγλική λέξη power = ἰσχύς.

Σέ πολλές περιπτώσεις τήν ἰσχύ τῶν μηχανῶν τή μετρᾶμε μέ τή μονάδα ἰσχύος, πού λέγεται *ἀτμόιππος* ἤ πιό σύντομα *ἵππος* καί εἶναι :

$$1 \text{ ἵππος } (1 \text{ CV ἤ } 1 \text{ PS}) = \frac{75 \text{ kp} \cdot \text{m}}{1 \text{ sec}} = 75 \frac{\text{kp} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

Στίς ἀγγλοσαξονικές χῶρες χρησιμοποιεῖται *ὁ ἀγγλικός ἵππος* (1 HP), πού εἶναι λίγο μεγαλύτερος ἀπό τόν προηγούμενο :

$$1 \text{ ἀγγλικός ἵππος } (1 \text{ HP}) = \frac{76 \text{ kp} \cdot \text{m}}{1 \text{ sec}} = 76 \frac{\text{kp} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$$

Σημείωση. Τά σύμβολα τῆς μονάδας ἰσχύος ἵππος προέρχονται ἀπό τούς ἀντίστοιχους ξένους ὅρους :

CV, cheval vapeur PS, Pferdestärke, HP, horse power

Σχέσεις μεταξύ τῶν μονάδων ἰσχύος

1 Watt (1 W)	= 1 Joule/sec	= 10^7 erg/sec
1 kp · m/sec	= 9,81 Joule/sec	= 9,81 W
1 CV (ἤ PS)	= 75 kp · m/sec	= 736 W
1 HP	= 76 kp · m/sec	= 746 W
1 kilowatt (1 kW)		= 1,36 CV

β. Μεγάλες μονάδες ἔργου. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ἰσχύος $P = W/t$ βρίσκουμε :

$$\boxed{W = P \cdot t}$$

Ἄν σ' αὐτή τήν ἐξίσωση βάλουμε $P = 1$ καί $t = 1$, ἔχουμε $W = 1$. Ἔτσι ὁρίζουμε δύο καινούριες *μεγάλες μονάδες ἔργου*, ἄν ὡς μονάδα ἰσχύος πάρουμε τό 1 Watt (1 W) ἤ τό 1 kilowatt (1 kW) καί ὡς μονάδα χρόνου πάρουμε τή μιά ὥρα (1 h). Οἱ μονάδες αὐτές ὀνομάζονται ἀντίστοιχα *βατώριο* (1 Wh) καί *κιλοβατώριο* (1 kWh) καί ὁρίζονται ὡς ἑξῆς :

Ἕνα βατώριο (1 Wh) εἶναι τό ἔργο, πού παράγει μηχανή ἰσχύος 1 Watt (1 W), ὅταν λειτουργήσει κανονικά 1 ὥρα (1 h).

$$1 \text{ βατώριο } 1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \cdot 1 \text{ h}$$

Ἕνα κιλοβατώριο (1 kWh) εἶναι τό ἔργο, πού παράγει μηχανή ἰσχύος 1 kilowatt (1 kW), ὅταν λειτουργήσει κανονικά 1 ὥρα (1 h).

$$1 \text{ κιλοβατώριο } 1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h}$$

Ἐπειδή εἶναι 1 W = 1 Joule/sec καί 1 h = 3600 sec, βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

$$1 \text{ Wh} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \cdot 3\,600 \text{ sec} \quad \text{ἤ} \quad 1 \text{ Wh} = 3\,600 \text{ Joule}$$

ἄρα εἶναι $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = 3\,600\,000 \text{ Joule} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Joule}$

Παράδειγμα. Μιά μηχανή ἔχει ἰσχύ $P = 600$ W. Πόσο ἔργο σέ κιλοβατώρια (kWh) παράγει αὐτή ἡ μηχανή, ὅταν λειτουργήσει 4 ὧρες ἤ μόνο 20 min ;

Ἡ μηχανή ἔχει ἰσχύ $P = 0{,}600$ kW καί σέ χρόνο $t = 4$ h παράγει ἔργο :

$$W = P \cdot t = 0{,}600 \text{ kW} \cdot 4 \text{ h} = 2{,}4 \text{ kWh}$$

Σέ χρόνο $t = 20$ min ἡ μηχανή παράγει ἔργο :

$$W = P \cdot t = 0{,}600 \text{ kW} \cdot \frac{1}{3} \text{ h} = 0{,}2 \text{ kWh}$$

68. Ἔργο τοῦ βάρους

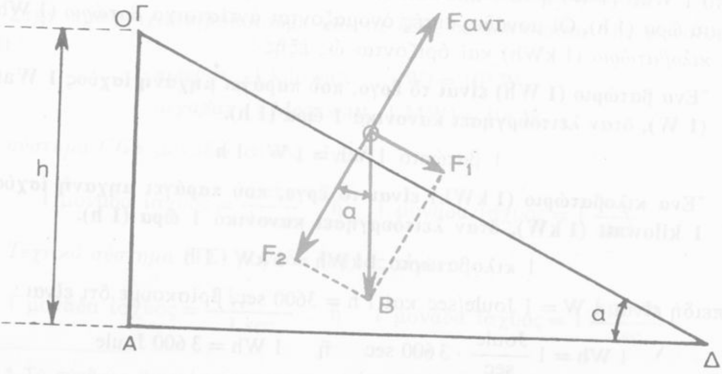
Ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα m, βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ἔδαφος (σχ. 63). Ἄν ἀφήσουμε τό σῶμα ἐλεύθερο, τό σῶμα πέφτει κατακόρυφα ἀκολουθῶντας τήν κατακόρυφο ΓΑ καί παράγει ἔργο :

$$W = B \cdot h \quad \text{ἤ} \quad W = m \cdot g \cdot h$$

Ἀφήνουμε τό σῶμα νά ὀλισθήσει χωρίς τριβή πάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο ΓΔ. Τότε τό σῶμα κατεβαίνει μέ τήν ἐπίδραση τῆς συνιστώσας F_1 τοῦ βάρους του B, ἡ ὁποία εἶναι $F_1 = B \cdot \text{ημ}\,\alpha$. Ἡ δύναμη αὐτή παράγει ἔργο :

$$W_1 = F_1 \cdot (\Gamma\Delta) \quad \text{ἤ} \quad W_1 = B \cdot (\Gamma\Delta) \cdot \text{ημ}\,\alpha$$

Ἀλλά στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ εἶναι : $(\text{Α}\Gamma) = (\Gamma\Delta) \cdot \text{ημ}\,\alpha$
καί ἑπομένως ἔχουμε : $W_1 = B \cdot (\text{Α}\Gamma)$ δηλαδή $W_1 = B \cdot h = W$



Σχ. 63. Τό ἔργο τοῦ βάρους B εἶναι $W = B \cdot h$.

Ἔτσι καταλήγουμε στό συμπέρασμα :

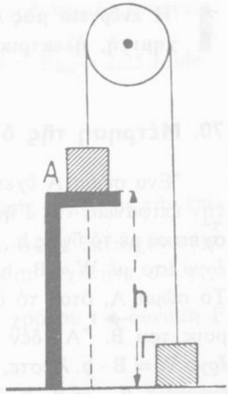
Τό ἔργο πού παράγει τό βάρος (B) ἑνός σώματος εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν τροχιά καί πάντοτε εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ βάρους (B) τοῦ σώματος ἐπί τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τῶν δύο ἀκραίων σημείων τῆς τροχιᾶς.

ἔργο τοῦ βάρους σώματος $W = B \cdot h$ ἤ $W = m \cdot g \cdot h$

69. Ἐνέργεια

Ὅταν ἕνα σῶμα *ἔχει τήν ἱκανότητα νά παράγει ἔργο*, λέμε ὅτι τό σῶμα αὐτό περικλείει **ἐνέργεια.** Τή μιά ἄκρη ἑνός ἐλάσματος ἀπό χάλυβα τή στερεώνουμε ἔτσι, ὥστε τό ἔλασμα νά εἶναι ὁριζόντιο. Πιέζοντας ἐλαφρά πρός τά κάτω τήν ἐλεύθερη ἄκρη τοῦ ἐλάσματος τοῦ προκαλοῦμε μιά ἐλαστική παρομόρφωση καί στήν ἐλεύθερη ἄκρη του στηρίζουμε ἕνα μικρό σῶμα (π.χ. ἕνα κέρμα). Ἄν ἀφήσουμε ἐλεύθερο τό ἔλασμα, τό σῶμα ἐκσφενδονίζεται πρός τά πάνω καί φτάνει σέ ὁρισμένο ὕψος. Ὥστε τό παραμορφωμένο ἐλατήριο ἔχει τήν ἱκανότητα νά παράγει ἔργο, δηλαδή περικλείει *ἐνέργεια*. Αὐτή προέρχεται ἀπό *τήν ἐλαστική παραμόρφωση* τοῦ ἐλατηρίου καί ὀνομάζεται **δυναμική ἐνέργεια ἐλαστικότητας.** Τό συσπειρωμένο ἐλατήριο τοῦ ρολογιοῦ περικλείει δυναμική ἐνέργεια ἐλαστικότητας, πού σιγά-σιγά μετατρέπεται σέ ἔργο, ἀπαραίτητο γιά τήν κίνηση τοῦ μηχανισμοῦ.

Ἕνα σῶμα A βρίσκεται *σέ ὕψος* h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους (σχ. 64). Τότε τό σῶμα αὐτό μπορεῖ νά ἀποδώσει ἔργο, γιατί, ἄν τό ἀφήσουμε ἐλεύθερο νά πέσει, μπορεῖ νά ἀνεβάσει ἕνα ἄλλο σῶμα. Ὅταν ὅμως τό σῶμα A βρίσκεται στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, δέν μπορεῖ νά ἀποδώσει ἔργο. *Ἡ ἐνέργεια*, πού περικλείει τό σῶμα A, ὅταν βρίσκεται ψηλότερα ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, ὀφείλεται *στή βαρύτητα* καί ὀνομάζεται **δυναμική ἐνέργεια βαρύτητας.** Ὥστε γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι :



Σχ. 64. Στή θέση A τό σῶμα ἔχει δυναμική ἐνέργεια.

Δυναμική ἐνέργεια ($E_{δυν}$) ὀνομάζεται ἡ ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα σῶμα ἐξαιτίας τῆς θέσεώς του ἤ τῆς καταστάσεως πού βρίσκεται.

Ἕνα *κινούμενο σῶμα* ἔχει τήν ἱκανότητα νά παράγει ἔργο, δηλαδή κλείνει μέσα του *ἐνέργεια*. Ἔτσι ὁ ἄνεμος (κινούμενος ἀέρας) κινεῖ ἀνεμόμυλο ἤ ἱστιοφόρο σκάφος, τό βλῆμα ὅπλου μπορεῖ νά τρυπήσει μιά σανίδα κ.λ. Ἡ ἐνέργεια πού περικλείει κάθε κινούμενο σῶμα ὀνομάζεται **κινητική ἐνέργεια.** Ὥστε :

Κινητική ἐνέργεια ($E_{κιν}$) ὀνομάζεται ἡ ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα σῶμα ἐξαιτίας τῆς κινήσεώς του.

Οἱ παραπάνω δύο μορφές ἐνέργειας, δηλαδή ἡ δυναμική καί ἡ κινητική ἐνέργεια, ὀνομάζονται **μηχανική ἐνέργεια.** Γενικά ἡ ἐνέργεια ἑνός σώματος μετριέται μέ τό ἔργο, πού παράγει αὐτό τό σῶμα. Ὥστε :

Ἐνέργεια (Ε) ἑνός σώματος ὀνομάζεται τό ἔργο πού αὐτό τό σῶμα μπορεῖ νά ἀποδώσει.
Ἡ μηχανική ἐνέργεια ($E_{μηχ}$) ἐμφανίζεται μέ δύο μορφές, ὡς δυναμική καί ὡς κινητική ἐνέργεια.

Μορφές ἐνέργειας. Ἐκτός ἀπό *τή μηχανική ἐνέργεια* ὑπάρχουν καί ἄλλες μορφές ἐνέργειας. Τά θερμά ἀέρια, πού παράγονται ἀπό τήν καύση τῆς βενζίνης μέσα στόν κινητήρα τοῦ αὐτοκινήτου, ἔχουν τήν ἱκανότητα νά παράγουν ἔργο, ἐξαιτίας τῆς θερμότητας πού περικλείουν, καί γι' αὐτό λέμε ὅτι αὐτά τά ἀέρια περικλείουν *θερμική ἐνέργεια*. Οἱ ἐκρηκτικές καί οἱ καύσιμες ὕλες περικλείουν *χημική ἐνέργεια*. Ὁ φορτισμένος πυκνωτής καί τό ἠλεκτρικό ρεῦμα περικλείουν *ἠλεκτρική ἐνέργεια*. Τό φῶς καί ἄλλες ἀόρατες ἀκτινοβολίες μεταφέρουν *ἠλεκτρομαγνητική ἐνέργεια*. Οἱ πυρῆνες ὁρισμένων ἀτόμων περικλείουν *πυρηνική ἐνέργεια*. Ὥστε :

Ἡ ἐνέργεια μᾶς ἐμφανίζεται μέ διάφορες μορφές (μηχανική, θερμική, χημική, ἠλεκτρική, ἠλεκτρομαγνητική, πυρηνική).

70. Μέτρηση τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας

Ἕνα σῶμα Α ἔχει βάρος $B = m \cdot g$ καί βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Οἱ διαστάσεις τοῦ σώματος θεωροῦνται ἀσήμαντες σχετικά μέ τό ὕψος h. Γιά νά μεταφερθεῖ τό σῶμα Α στό ὕψος h, *δαπανήθηκε ἔργο* ἴσο μέ $W = B \cdot h$. Σ' αὐτή τή θέση τό σῶμα Α ἔχει *δυναμική ἐνέργεια*. Τό σῶμα Α, ὅταν τό ἀφήσουμε ἐλεύθερο, πέφτει μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του $\vec{B}$. Ἄν δέν ὑπάρχουν τριβές, τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σώματος *παράγει ἔργο* $W = B \cdot h$. Ὥστε, ὅταν τό σῶμα Α βρίσκεται στό ὕψος h, ἔχει δυναμική ἐνέργεια $E_{δυν} = B \cdot h$, δηλαδή ὅσο εἶναι τό ἔργο, πού *δαπανήθηκε*, γιά νά μεταφερθεῖ τό σῶμα Α στό ὕψος h. Τό ἔργο αὐτό *ἀποταμιεύτηκε* μέσα στό σῶμα Α μέ τή μορφή δυναμικῆς ἐνέργειας. Ὥστε :

Ἕνα σῶμα, πού βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἔχει ἐξαιτίας τῆς βαρύτητας δυναμική ἐνέργεια ($E_{δυν}$) ἴση μέ τό ἔργο, πού παράγει τό βάρος ($\vec{B}$) τοῦ σώματος κατά τήν ἐλεύθερη πτώση του ἀπό τήν ἀρχική θέση του ὥς τό θεωρούμενο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

δυναμική ἐνέργεια (βαρύτητας) $E_{δυν} = B \cdot h$ ἤ $E_{δυν} = m \cdot g \cdot h$

Γιά νά ἐπιμηκυνθεῖ (ἤ νά συμπιεστεῖ) ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο κατά Δl, πρέπει *νά δαπανηθεῖ ἔργο*. Αὐτό τό ἔργο *ἀποταμιεύεται* μέσα στό παραμορφωμένο ἐλατήριο μέ τή μορφή *δυναμικῆς ἐνέργειας*. Ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο, ἐξαιτίας τῆς ἐλαστικῆς παραμορφώσεώς του, ἔχει δυναμική ἐνέργεια :

δυναμική ἐνέργεια (ἐλαστικότητας) $E_{δυν} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l)^2$

ὅπου k εἶναι μιά σταθερή τοῦ ἐλατηρίου.

Παραδείγματα. 1) Σῶμα ἔχει μάζα m = 4 kgr καί βρίσκεται σέ ὕψος h = 2,5 m. Ἄν λάβουμε $g = 10\ m/sec^2$, τότε τό σῶμα ἔχει δυναμική ἐνέργεια:

$$E_{δυν} = m \cdot g \cdot h = 4\ kgr \cdot 10 \frac{m}{sec^2} \cdot 2{,}5\ m \quad \text{καί} \quad E_{δυν} = 100\ \text{Joule}$$

2) Σπειροειδές ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατά $\Delta l = 3$ cm. Ἄν ἡ σταθερή τοῦ ἐλατηρίου εἶναι $k = 5 \cdot 10^3$ N/m, τότε τό ἐλατήριο ἔχει δυναμική ἐνέργεια:

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^3 \frac{N}{m} \cdot (0{,}03\ m)^2 \quad \text{καί} \quad E_{δυν} = 2{,}25\ \text{Joule}$$

71. Μέτρηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας

Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m καί ἀρχίζει νά κινεῖται χωρίς τριβές μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως $\vec{F}$, πού προσδίνει στό σῶμα ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Ἄν τό σῶμα κινηθεῖ ἐπί χρόνο t, τότε τό σῶμα ἀποκτᾶ ταχύτητα $υ = γ \cdot t$ καί διανύει διάστημα $s = \frac{1}{2} γ \cdot t^2$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἡ δύναμη F *παράγει ἔργο*:

$$W = F \cdot s = (m \cdot γ) \cdot \left(\frac{1}{2} γ \cdot t^2\right) = \frac{1}{2} m \cdot (γ \cdot t)^2 \quad \text{ἤ} \quad W = \frac{1}{2} m \cdot υ^2$$

Αὐτό τό ἔργο *ἀποταμιεύεται* μέσα στό κινούμενο σῶμα μέ τή μορφή *κινητικῆς ἐνέργειας*. Ὥστε :

Ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_{κιν}$) ἑνός σώματος, πού μεταφέρεται, ἰσοῦται μέ τό ἡμιγινόμενο τῆς μάζας (m) τοῦ σώματος ἐπί τό τετράγωνο τῆς ταχύτητας (υ).

$$\boxed{\text{κινητική ἐνέργεια} \quad E_{κιν} = \frac{1}{2}\, m \cdot υ^2}$$

Παράδειγμα. Βλῆμα ὅπλου ἔχει μάζα m = 20 gr καί ξεφεύγει ἀπό τήν κάνη τοῦ ὅπλου μέ ταχύτητα υ = 600 m/sec. Τό βλῆμα ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}\, m \cdot υ^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}020\ \text{kgr} \cdot \left(600\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2 \quad \text{καί} \quad E_{κιν} = 3\,600\ \text{Joule}$$

72. Μετατροπές τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας

Μιά ἐλαστική σφαίρα ἀπό χάλυβα τήν ἀφήνουμε ἀπό ὕψος H νά πέσει πάνω σέ μιά πλάκα ἀπό χάλυβα, πού εἶναι καί αὐτή ἐλαστική. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σφαίρα ἀναπηδᾶ καί ἀνεβαίνει περίπου στό ἴδιο ὕψος (σχ. 65). Στή θέση A ἡ σφαίρα ἔχει μόνο *δυναμική ἐνέργεια* $E_{δυν} = m \cdot g \cdot H$. Ἡ σφαίρα, ὅταν φτάσει στή θέση Γ, ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα $υ = \sqrt{2g \cdot H}$. Σ' αὐτή τή θέση ἡ σφαίρα ἔχει μόνο *κινητική ἐνέργεια*, πού εἶναι ἴση μέ :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}\, m \cdot υ^2 \quad \text{ἤ} \quad E_{κιν} = m \cdot g \cdot H$$

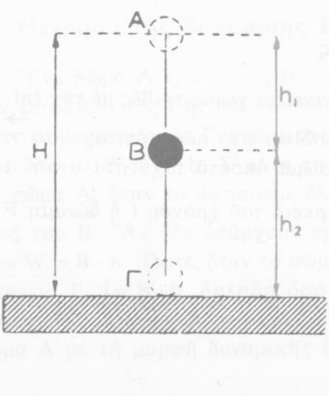
Ὥστε ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας *εἶναι ἴση* μέ τήν ἀρχική δυναμική ἐνέργειά της, δηλαδή κατά τήν πτώση τῆς σφαίρας ὅλη ἡ δυναμική ἐνέργειά της *μετατράπηκε* σέ κινητική ἐνέργεια. Σέ μιά ἐνδιάμεση θέση B ἡ σφαίρα ἔχει δυναμική ἐνέργεια :

$$E_{δυν} = m \cdot g \cdot h_2$$

ἔχει ὅμως καί κινητική ἐνέργεια :

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}\, m \cdot υ_1^2 = \frac{1}{2}\, m \cdot (2g \cdot h_1)$$

$$\text{ἤ} \quad E_{κιν} = m \cdot g \cdot h_1$$



Σχ. 65. Μετατροπές τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας.

Ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια ($E_{ολ}$), πού ἔχει ἡ σφαίρα, εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας, δηλαδή εἶναι:

$$E_{ολ} = E_{δυν} + E_{κιν} = m \cdot g \cdot (h_1 + h_2) \quad \text{καί} \quad E_{ολ} = m \cdot g \cdot H$$

Ὥστε ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μέ τήν *ἀρχική* δυναμική ἐνέργεια, πού εἶχε ἡ σφαίρα στή θέση Α.

Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι ἡ δυναμική ἐνέργεια *μετατρέπεται* σέ κινητική ἐνέργεια. Ἀντίστροφα, ὅταν ἡ σφαίρα ἐκσφενδονίζεται κατακόρυφα πρός τά πάνω, ἡ κινητική ἐνέργεια *μετατρέπεται* σέ δυναμική ἐνέργεια. Γενικά βρίσκουμε ὅτι:

Ἡ δυναμική καί ἡ κινητική ἐνέργεια ἑνός σώματος μποροῦν νά μετατρέπονται ἡ μιά στήν ἄλλη, ἡ ὁλική ὅμως μηχανική ἐνέργεια τοῦ σώματος (δηλαδή τό ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας) διατηρεῖται σταθερή.

Τό παραπάνω συμπέρασμα ἰσχύει, ὅταν δέν συμβαίνει μετατροπή μηχανικῆς ἐνέργειας σέ ἄλλη μορφή ἐνέργειας.

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται γιά παράδειγμα οἱ τιμές τῆς δυναμικῆς καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας ἑνός σώματος, πού ἔχει μάζα $m = 10$ gr καί πέφτει ἀπό ὕψος $h = 80$ m ἐπί χρόνο $t = 4$ sec. Πήραμε $g = 10$ m/sec^2.

t sec	s m	h m	$E_{δυν}$ Joule	υ m/sec	$E_{κιν}$ Joule	$E_{μηχ}$ Joule
0	0	80	8	0	0	8
1	5	75	7,5	10	0,5	8
2	20	60	6	20	2	8
3	45	35	3,5	30	4,5	8
4	80	0	0	40	8	8

73. Ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας

Ὅταν ἐξετάζουμε τά διάφορα μηχανικά φαινόμενα, διαπιστώνουμε γενικά ὅτι, ἄν δέν ὑπάρχουν τριβές, *ἡ μηχανική ἐνέργεια* τοῦ σώματος (δηλαδή τό ἄθροισμα $E_{δυν} + E_{κιν}$) *διατηρεῖται σταθερή*. Ἄν λοιπόν ἐμφανίζεται κινητική ἐνέργεια, αὐτό γίνεται σέ βάρος τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας καί ἀντίστροφα. Αὐτό τό γενικό συμπέρασμα ἀποτελεῖ **τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας**, πού διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Σέ ἕνα μονωμένο σύστημα, στό ὁποῖο συμβαίνουν μόνο μετατροπές τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας σέ κινητική ἐνέργεια καί ἀντίστροφα, ἡ μηχανική ἐνέργεια τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή.

Τό μονωμένο σύστημα, στό όποιο δέν παρατηροῦνται ἀπώλειες μηχανικῆς ἐνέργειας, εἶναι ἰδανική περίπτωση. Σχεδόν πάντοτε ἕνα μέρος τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας τό ἀπορροφοῦν οἱ τριβές. Αὐτή ὅμως ἡ ἐνέργεια *δέ χάνεται*, ἀλλά μετατρέπεται κυρίως σέ *θερμότητα*, πού εἶναι κι' αὐτή μιά μορφή ἐνέργειας. Σέ ἄλλες πάλι περιπτώσεις στή θέση τῆς ἐνέργειας, πού φαινομενικά χάνεται, ἐμφανίζονται ἄλλες μορφές ἐνέργειας, π.χ. ἠλεκτρική, χημική, φωτεινή ἐνέργεια κ.λ. Σέ ὅλα τά φαινόμενα πού συμβαίνουν στή Φύση διαπιστώνουμε τήν ἴδια νομοτέλεια, πού ἰσχύει γιά ὅλα τά φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς. Ἔτσι καταλήγουμε στό ἀκόλουθο γενικότατο συμπέρασμα, πού ἀποτελεῖ **τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας :**

Οἱ διάφορες μεταβολές πού συμβαίνουν στή Φύση ὀφείλονται σέ μετατροπές τῆς ἐνέργειας ἀπό μιά σέ ἄλλη μορφή, χωρίς ὅμως νά μεταβάλλεται ἡ ὁλική ἐνέργεια.

Ἡ διατήρηση *τῆς ἐνέργειας* ἀποτελεῖ τή βάση τῆς Φυσικῆς, ὅπως ἡ διατήρηση *τῆς μάζας* ἀποτελεῖ τή βάση τῆς Χημείας. Ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας μᾶς ἐπιβάλλει νά δεχτοῦμε ὅτι ἡ ἐνέργεια εἶναι ἕνα φυσικό μέγεθος ἄφθαρτο, ὅπως εἶναι καί ἡ ὕλη. Ἐπομένως μποροῦμε νά διατυπώσουμε τό συμπέρασμα ὅτι *τά ἄφθαρτα συστατικά* τοῦ Σύμπαντος εἶναι *ἡ ὕλη* καί *ἡ ἐνέργεια*.

Στήν καθημερινή πράξη, πολλές φορές, ἐπιδιώκουμε νά μετατρέψουμε μιά μορφή ἐνέργειας σέ ἄλλη μορφή γιά νά ἐξυπηρετήσουμε διάφορες πρακτικές μας ἀνάγκες. Ἡ μετατροπή αὐτή γίνεται συνήθως μέ διάφορες σύνθετες μηχανές. Αὐτές ἀποτελοῦνται ἀπό ἁπλές μηχανές, ὅπως εἶναι οἱ μοχλοί, οἱ τροχαλίες, τά βαροῦλκα κτλ.

Σέ κάθε ἁπλή μηχανή δαπανοῦμε μηχανικό ἔργο γιά νά πάρουμε πάλι μηχανικό πού στήν πράξη πάντα εἶναι μικρότερο ἀπό τό δαπανόμενο. Ἀλλά καί στίς σύνθετες μηχανές ἡ ἐνέργεια πού πέρνουμε εἶναι πάντα μικρότερη ἀπό ἐκείνη πού καταναλώσαμε.

Ἐφαρμογή. Μιά συνηθισμένη ἐφαρμογή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας ἔχουμε στά ὑδροηλεκτρικά ἐργοστάσια. Ἡ δυναμική ἐνέργεια πού ἔχει τό νερό, κατά τήν πτώση του μετατρέπεται σέ κινητική ἐνέργεια τοῦ νεροῦ. Αὐτή μεταδίδεται στόν ὑδροστρόβιλο (τουρμπίνα), πού ἀποκτᾶ κι αὐτός κινητική ἐνέργεια. Τέλος αὐτή ἡ ἐνέργεια μέσα στή γεννήτρια μετατρέπεται σέ ἠλεκτρική ἐνέργεια. Στή διάρκεια ὅμως αὐτῶν τῶν διαδοχικῶν μετατροπῶν τῆς ἐνέργειας ἕνα μέρος ἀπό τήν ἀρχική δυναμική ἐνέργεια τοῦ νεροῦ μετατρέπεται κυρίως σέ θερμότητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

61. Ἕνα κιβώτιο ἔχει μάζα m = 80 kgr καί μεταφέρεται ἀπό ἕναν ἐργάτη σέ ἀποθήκη, πού βρίσκεται $h = 12$ m ψηλότερα ἀπό τό δρόμο. Πόσο ἔργο καταβάλλει ὁ ἐργάτης γι' αὐτή τή μεταφορά ; $g = 10\ m/sec^2$.

62. Ἐφαρμόζοντας σ' ἕνα σῶμα σταθερή ὁριζόντια δύναμη $F = 50$ N μετακινοῦμε το σῶμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο κατά $s = 4$ m. Πόσο ἔργο παράγει ἡ δύναμη ; Οἱ τριβές παραλείπονται. Ἄν ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως σχηματίζει γωνία $\alpha = 30^0$, πόσο εἶναι τότε τό ἔργο τῆς δυνάμεως ;

63. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 4$ kgr καί μέ τήν ἐπίδραση ὁριζόντιας δυνάμεως F διανύει πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο διάστημα . $s = 15$ m μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}05\ m/sec^2$. Πόσο ἔργο παράγει ἡ δύναμη F ;

64. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται σέ ὁριζόντια ὁδό μέ ταχύτητα $\upsilon = 72$ km/h. Ὅταν διακοπεῖ ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς του, σταματᾶ ἔπειτα ἀπό χρόνο $t = 20$ sec. Ἄν τό αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 1500$ kgr, νά βρεθεῖ τό ἔργο τῆς τριβῆς. $g = 10\ m/sec^2$.

65. Ἕνα βλῆμα ἔχει μάζα $m = 10$ gr καί ἐκσφενδονίζεται μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 800$ m/sec. Πόση εἶναι ἡ κινητική ἐνέργειά του ; Σέ πόσο ὕψος (h) πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους ἡ ἴδια μάζα θά εἶχε δυναμική ἐνέργεια ἴση μέ τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ βλήματος ; $g = 10\ m/sec^2$.

66. Ἕνας ὀρειβάτης ἔχει μάζα $m = 70$ kgr καί στή διάρκεια χρόνου $t = 8$ h ἀνεβαίνει σέ ὕψος $h = 2000$ m. Πόσο ἔργο παράγει κατά δευτερόλεπτο ; $g = 10\ m/sec^2$.

67. Ἕνα σῶμα, πού ἔχει μάζα $m = 1$ kgr, βάλλεται κατακόρυφα πρός τό ἔδαφος ἀπό ὕψος $h = 347$ m μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 7$ m/sec. Τό σῶμα, ὅταν φτάσει στό ἔδαφος, εἰσχωρεῖ μέσα σ' αὐτό κατά $s = 65$ cm. Πόση εἶναι κατά μέσο ὅρο ἡ ἀντίσταση F τοῦ ἐδάφους ;

68. Ὁ σωλήνας πυροβόλου ἔχει μῆκος $s = 0{,}80$ m καί ἐκσφενδονίζει μέ ταχύτητα $\upsilon_0 = 420$ m/sec βλῆμα, πού ἔχει μάζα $m = 4$ kgr. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ δύναμη F, πού κινεῖ τό βλῆμα μέσα στό σωλήνα, εἶναι σταθερή, νά ὑπολογιστεῖ ἡ δύναμη F καί ὁ χρόνος t τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος μέσα στό σωλήνα.

69. Ἕνα σιδηροδρομικό ὄχημα ἔχει μάζα $m = 27 \cdot 10^3$ kgr καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 7$ m/sec. Πόση εἶναι ἡ κινητική ἐνέργειά του ; Πόση γίνεται αὐτή, ἄν διπλασιαστεῖ ἡ ταχύτητά του καί πόση δύναμη F πρέπει νά ἐνεργήσει στό ὄχημα, γιά νά διπλασιαστεῖ ἡ ταχύτητά του σέ χρόνο $t = 4$ min.

70. Μιά μηχανή ἔχει ἰσχύ $P = 5$ CV καί ἐργάζεται ἐπί χρόνο $t = 1$ h 40 min. Πόσο ἔργο παράγει σέ Joule καί κιλοβατώρια (kWh) ;

71. Ὁ κινητήρας ἀεροπλάνου ἀναπτύσσει ἰσχύ $P = 1000$ CV. Ὅταν τό ἀεροπλάνο πετᾶ ὁριζόντια μέ σταθερή ταχύτητα υ, ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα εἶναι $F_{\alpha\nu\tau} = 5000$ N. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου ; Σέ πόσο χρόνο τό ἀεροπλάνο θά διατρέξει ὁριζόντια ἀπόσταση $s = 100$ km ;

72. Ἕνας ὀρειβάτης ἔχει μάζα $m = 80$ kgr καί σέ χρόνο $t = 1{,}5$ h ἀνεβαίνει κατά $h = 800$ m ψηλότερα ἀπό τό σημεῖο πού ξεκίνησε. Πόση εἶναι κατά μέσο ὅρο ἡ ἰσχύς πού ἀναπτύσσει ὁ ὀρειβάτης σέ κιλοβάτ (kW) καί σέ ἵππους (CV) ; $g = 10\ m/sec^2$.

73. Σέ μιά ὑδατόπτωση τό νερό πέφτει ἀπό ὕψος $h = 80$ m καί ἀναγκάζει ἕναν ὑδροστρόβιλο (τουρμπίνα) νά στρέφεται. Ἡ ὠφέλιμη ἰσχύς πού μᾶς δίνει ὁ στρόβιλος εἶναι $P_{\omega\varphi\varepsilon\lambda} = 10\,000$ CV καί ὑποθέτουμε ὅτι δέν ὑπάρχουν ἀπώλειες ἐνέργειας. Πόση μάζα νε ροῦ πέφτει στό στρόβιλο κατά λεπτό ; $g = 10\ m/sec^2$.

74. Ἕνα αὐτοκίνητο μέ μάζα m = 1000 kgr κινεῖται σέ ὁριζόντια ὁδό μέ ταχύτητα υ = 72 km/h. Ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι η = 0,02 καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα εἶναι $F_{αντ}$ = 100 N. Πόση ἰσχύ σέ κιλοβάτ (kW) καί σέ ἵππους (CV) ἀναπτύσσει ὁ κινητήρας; g = 10 m/sec².

75. Ἕνα αὐτοκίνητο ἀναπτύσσει ἰσχύ P = 6 CV καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα υ = 18 km/h σέ ὁριζόντια ὁδό. Ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι η = 0,2. Πόσο βάρος ἔχει τό αὐτοκίνητο; g = 10 m/sec².

74. Συντελεστής ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς

Σέ ὅλες γενικά τίς μηχανές *δαπανᾶται* μιά μορφή ἐνέργειας, γιά νά πάρουμε μιά ἄλλη *ὠφέλιμη* μορφή ἐνέργειας (π.χ. στόν ἠλεκτροκινητήρα δαπανᾶται ἠλεκτρική ἐνέργεια, γιά νά πάρουμε ὠφέλιμη μηχανική ἐνέργεια). Ἀλλά, ὅταν λειτουργεῖ μιά μηχανή, πάντοτε ἀναπτύσσονται *ἀντιστάσεις, πού ἀπορροφοῦν ἐνέργεια,* καί γι' αὐτό ἡ ὠφέλιμη ἐνέργεια πάντοτε εἶναι *μικρότερη* ἀπό τή δαπανώμενη ἐνέργεια. Ὅλες λοιπόν οἱ μηχανές κατορθώνουν νά μετατρέπουν σέ ὠφέλιμη ἐνέργεια *μόνο ἕνα μέρος* ἀπό τή δαπανώμενη ἐνέργεια.

Ὀνομάζεται συντελεστής ἀποδόσεως (η) τῆς μηχανῆς ὁ λόγος τῆς ὠφέλιμης ἰσχύος ($P_{ωφελ}$) πού παίρνουμε πρός τή δαπανώμενη ἰσχύ ($P_{δαπ}$).

$$\text{συντελεστής ἀποδόσεως} = \frac{\text{ὠφέλιμη ἰσχύς}}{\text{δαπανώμενη ἰσχύς}} \qquad η = \frac{P_{ωφελ}}{P_{δαπ}}$$

Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως πάντοτε εἶναι *μικρότερος* ἀπό τή μονάδα ($η < 1$), γιατί δέν ὑπάρχει μηχανή, πού νά λειτουργεῖ χωρίς ἀντιστάσεις. Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ἐκφράζεται συνήθως ἐπί τοῖς ἑκατό (%). Ἄν π.χ. σέ ἕναν ἀνεμιστήρα εἶναι $P_{ωφελ}$ = 170 W καί $P_{δαπ}$ = 200 W, τότε ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τοῦ ἀνεμιστήρα εἶναι:

$$η = \frac{P_{ωφελ}}{P_{δαπ}} = \frac{170\ \text{W}}{200\ \text{W}} = 0{,}85 \quad \text{ἤ} \quad η = 85\%$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι μόνο τά 85% τῆς δαπανώμενης ἰσχύος μετατρέπονται σέ ὠφέλιμη ἰσχύ, ἐνῶ τά ἄλλα 15% εἶναι ἀπώλειες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

76. Σέ μιά ὑδροηλεκτρική ἐγκατάσταση τό νερό πέφτει ἀπό ὕψος h = 50 m. Ἡ ὠφέλιμη μηχανική ἰσχύς τοῦ στροβίλου εἶναι $P_{στροβ}$ = 10 000 CV καί ὁ συντελεστής ἀποδόσεως εἶναι η = 0,8. α) Πόση εἶναι ἡ ἰσχύς ($P_{υδατ}$) τῆς ὑδατοπτώσεως; β) Πόσος ὄγκος νεροῦ πέφτει στό στρόβιλο κατά δευτερόλεπτο; (1 m³ νερό ἔχει μάζα 10³ kgr).

γ) Ἂν ἡ γεννήτρια μετατρέπει σέ ἠλεκτρική ἰσχύ τά 0,9 τῆς ἰσχύος τοῦ στροβίλου, πόση εἶναι ἡ ὠφέλιμη ἠλεκτρική ἰσχύς ($P_{ηλ}$) ; δ) Πόσος εἶναι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ($η_{ολ}$) γιά ὅλη τήν ὑδροηλεκτρική ἐγκατάσταση ; $g = 10\ m/sec^2$.

Σύνθεση τῶν κινήσεων

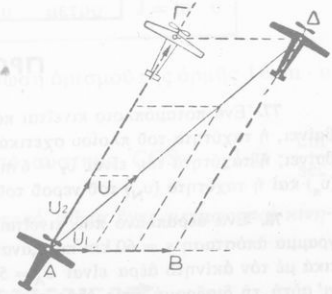
75. Ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων

Ὅταν σέ ἕνα σῶμα ἐνεργοῦν ταυτόχρονα δύο ἤ περισσότερα κινητικά αἴτια, τότε τό σῶμα ἐκτελεῖ μιά κίνηση, πού εἶναι *συνισταμένη* κίνηση καί προκύπτει ἀπό τίς ἰδιαίτερες κινήσεις, πού ἔπρεπε νά ἐκτελέσει τό σῶμα. Τά πειράματα δείχνουν ὅτι ἡ μιά συνιστῶσα κίνηση *δέν ἐπηρεάζει* τίς ἄλλες συνιστῶσες κινήσεις. Ἂν βρισκόμαστε μέσα σέ βαγόνι σιδηροδρόμου καί ἀφήσουμε ἕνα σῶμα (π.χ. ἕνα κέρμα) νά πέσει ἐλεύθερα κοντά σέ νῆμα τῆς στάθμης, παρατηροῦμε ὅτι τό σῶμα πέφτει κατακόρυφα, εἴτε τό βαγόνι ἠρεμεῖ, εἴτε ἔχει εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση. Ὥστε ἡ κίνηση τοῦ βαγονιοῦ δέν ἐπηρεάζει τήν ἰδιαίτερη κίνηση, πού ἐκτελεῖ τό σῶμα ἐξαιτίας τοῦ βάρους του. Τό φαινόμενο αὐτό εἶναι συνέπεια **τῆς ἀρχῆς τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων,** πού διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

Τό ἀποτέλεσμα πού ἐπιφέρει σέ ἕνα σῶμα ἡ δράση μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν κινητική κατάσταση τοῦ σώματος.

76. Σύνθεση δύο εὐθύγραμμων κινήσεων

Ἕνα ἀεροπλάνο ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση μέ ταχύτητα $υ_2$ καί μέ διεύθυνση τήν ΑΓ (σχ. 66). Ἀλλά *ταυτόχρονα* ὁ ἄνεμος παρασύρει τό ἀεροπλάνο μέ σταθερή ταχύτητα $υ_1$ κατά τή διεύθυνση ΑΒ. Ἔτσι τό ἀεροπλάνο ἀναγκάζεται νά ἐκτελέσει *ταυτόχρονα* δύο εὐθύγραμμες ὁμαλές κινήσεις. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων τό ἀεροπλάνο μέσα σέ ὁρισμένο χρόνο t (π.χ. μέσα σέ 3 sec) θά φτάσει σέ ἐκείνη τήν θέση, πού θά ἔφτανε, ἄν ἐκτελοῦσε αὐτές τίς δύο κινήσεις διαδοχικά. Ἔτσι ἔπειτα ἀπό χρόνο t τό ἀεροπλάνο φτάνει στό σημεῖο Δ, πού εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλόγραμμου, πού ὁρίζουν οἱ δύο δόμοι ΑΓ καί ΑΒ.



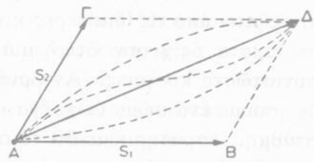
Σχ. 66. Σύνθεση δύο εὐθύγραμμων ὁμαλῶν κινήσεων.

Τά παραπάνω ἰσχύουν καί ὅταν οἱ

δύο συνιστῶσες κινήσεις δέν εἶναι εὐθύγραμμες ὁμαλές κινήσεις. Ἔτσι καταλήγουμε στό ἀκόλουθο γενικό συμπέρασμα :

Ἄν ἕνα σῶμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο εὐθύγραμμες κινήσεις, τότε ἡ θέση του σέ κάθε στιγμή εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλόγραμμου, πού ὁρίζουν οἱ δύο δρόμοι τῶν συνιστωσῶν κινήσεων.

Στό παραπάνω παράδειγμα τοῦ ἀεροπλάνου οἱ δύο συνιστῶσες κινήσεις εἶναι εὐθύγραμμες *ὁμαλές* καί τά διαστήματα, πού διανύονται στή διάρκεια τοῦ χρόνου t, εἶναι $AB = \upsilon_1 \cdot t$ καί $A\Gamma = \upsilon_2 \cdot t$. Τά διαστήματα αὐτά ἔχουν πάντοτε λόγο σταθερό, πού εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ταχυτήτων. Μόνο σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ τροχιά τῆς συνισταμένης κινήσεως εἶναι *εὐθεία γραμμή*, (ἡ διαγώνιος ΑΔ τοῦ παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ). Ἄν οἱ δύο συνιστῶσες εὐθύγραμμες κινήσεις *δέν εἶναι ὁμαλές*, τότε ἡ τροχιά τῆς συνισταμένης κινήσεως εἶναι *καμπύλη γραμμή*, πού ἡ μορφή της ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τῶν δύο συνιστωσῶν κινήσεων (σχ. 7). Γιά τήν ταχύτητα καί τήν ἐπιτάχυνση τῆς συνισταμένης κινήσεως ἰσχύει γενικά ὁ ἀκόλουθος *νόμος:*



Σχ. 67. Ἡ συνισταμένη κίνηση εἶναι εὐθύγραμμη ἤ καμπυλόγραμμη.

Ἡ ταχύτητα $(\vec{\upsilon})$ ἤ ἡ ἐπιτάχυνση $(\vec{\gamma})$ τῆς συνισταμένης κινήσεως εἶναι σέ κάθε στιγμή ἴση μέ τή συνισταμένη τῶν ταχυτήτων $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ ἤ τῶν ἐπιταχύνσεων $(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ τῶν συνιστωσῶν κινήσεων.

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 \qquad \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ*

77. Ἕνα ποταμόπλοιο κινεῖται πάνω στό ἄξονα ἑνός ποταμοῦ. Ὅταν τό πλοῖο ἀνεβαίνει, ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου σχετικά μέ τήν ὄχθη εἶναι $\upsilon_1 = 2$ m/sec, ἐνῶ, ὅταν κατεβαίνει, ἡ ταχύτητά του εἶναι $\upsilon_2 = 6$ m/sec. Νά βρεθεῖ ἡ δική του ταχύτητα τοῦ πλοίου (υ_π) καί ἡ ταχύτητα (υ_N) τοῦ νεροῦ τοῦ ποταμοῦ.

78. Ἕνα ἀεροπλάνο πού κινεῖται ἀπό τά ἀνατολικά πρός τά δυτικά διανύει εὐθύγραμμα ἀπόσταση s = 60 km καί ξαναγυρίζει στήν ἀφετηρία του. Ἡ ταχύτητά του σχετικά μέ τόν ἀκίνητο ἀέρα εἶναι $\upsilon_A = 50$ m/sec. Πόσο χρόνο χρειάζεται τό ἀεροπλάνο γι' αὐτή τή διαδρομή στίς ἑξῆς περιπτώσεις : α) ὅταν δέν ὑπάρχει ἄνεμος καί β) ὅταν πνέει σταθερός δυτικός ἄνεμος πού ἔχει ταχύτητα $\upsilon_{\alpha\nu} = 20$ m/sec.

79. Μέ ἕνα περίστροφο ρίχνουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα βλῆμα πού ἔχει

* Τά προβλήματα αὐτά θά λυθοῦν μέ βάση τήν ἀρχή τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων.

ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 500$ m/sec. 1) Πόσο χρόνο διαρκεῖ ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος ; 2) Σέ πόσο ὕψος θά φτάσει τό βλῆμα ; $g = 10$ m/sec^2.

80. Μέ πόση ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ πρέπει νά ριχτεῖ κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα βλῆμα, γιά νά φτάσει σέ ὕψος $h = 4500$ m ; Σέ πόσο χρόνο τό βλῆμα πέφτοντας ἐλεύθερα θά διατρέξει τό ὕψος h ; $g = 10$ m/sec^2.

81. Ἀπό τήν ταράτσα μιᾶς οἰκοδομῆς, πού ἔχει ὕψος $h = 45$ m, ρίχνουμε μιά μικρή πέτρα μέ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/sec. 1) Πόσο χρόνο διαρκεῖ ἡ κατακόρυφη πτώση τῆς πέτρας ; 2) Πόσο χρόνο θά κινεῖται ὁριζόντια ἡ πέτρα ; 3) Πόσο διάστημα διατρέχει ὁριζόντια ἡ πέτρα ; $g = 10$ m/sec^2.

82. Ἕνα ἀεροπλάνο κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $υ_0 = 40$ m/sec καί σέ σταθερό ὕψος $h = 4500$ m. Κάποια στιγμή τό ἀεροπλάνο βρίσκεται σέ ἕνα σημεῖο Α τῆς κατακορύφου πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Γ τοῦ ἐδάφους. Ἐκείνη τή στιγμή τό ἀεροπλάνο ἀφήνει ἐλεύθερη νά πέσει μιά βόμβα, ἡ ὁποία φτάνει σέ ἕνα σημεῖο Δ τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Δ ἀπό τήν κατακόρυφο ΑΓ. $g = 10$ m/sec^2.

Ὁρμή

77. Ὁρισμός τῆς ὁρμῆς

Σέ πολλά φαινόμενα ἐμφανίζεται ἕνα καινούριο φυσικό μέγεθος, πού ὀνομάζεται *ὁρμή* $\vec{J}$ (σχ. 68) καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

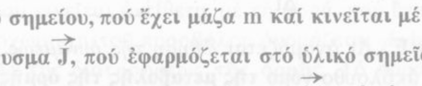
Ὁρμή ὑλικοῦ σημείου, πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{υ}$, ὀνομάζεται τό ἄνυσμα $\vec{J}$, πού ἐφαρμόζεται στό ὑλικό σημεῖο, ἔχει φορέα καί φορά τό φορέα καί τή φορά τῆς ταχύτητας ($\vec{υ}$) καί μέτρο (J) ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς μάζας (m) ἐπί τό μέτρο τῆς ταχύτητας (υ).

ὁρμή ὑλικοῦ σημείου $\vec{J} = m \cdot \vec{υ}$ μέτρο $J = m \cdot υ$

Μονάδα ὁρμῆς. Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς ὁρμῆς $J = m \cdot υ$ βρίσκουμε ὅτι *μονάδα ὁρμῆς* εἶναι :

στό σύστημα SI $1\ \text{kgr} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$ στό σύστημα CGS $1\ \text{gr} \cdot \dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$

Ὁρμή στερεοῦ σώματος. Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα ἔχει *μεταφορική κίνη-*



Σχ. 68. Τό ἄνυσμα τῆς ὁρμῆς $\vec{J}$ ἔχει τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά μέ τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\vec{υ}$.

σῃ, τότε ὅλα τά ὑλικά σημεῖα του ἔχουν σέ κάθε στιγμή τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί ἑπομένως ἡ ὁρμή τοῦ στερεοῦ σώματος εἶναι:

$$J = m_1\upsilon + m_2\upsilon + \ldots + m_\nu\upsilon = (m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu)\cdot\upsilon \quad ἤ \quad \boxed{J = m\cdot\upsilon}$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ σώματος.

78. Νόμος μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς

Ἕνα στερεό σῶμα ἔχει μάζα m καί ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς σταθερῆς δυνάμεως $\vec{F}$. Στίς χρονικές στιγμές t_1 καί t_2 τό σῶμα ἔχει ἀντίστοιχα ταχύτητα υ_1 καί υ_2 καί ὁρμή $m\upsilon_1$ καί $m\upsilon_2$. Ὥστε στή διάρκεια τοῦ χρόνου $\Delta t = t_2 - t_1$ συμβαίνει *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* (ΔJ) ἴση μέ:

$$\Delta J = J_2 - J_1 = m\upsilon_2 - m\upsilon_1 \quad καί \quad \Delta J = m\cdot(\upsilon_2 - \upsilon_1) = m\cdot\Delta\upsilon$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό σῶμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad καί\ ἰσχύει\ ἡ\ ἐξίσωση$$

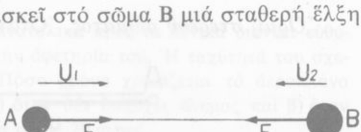
$$F = m\cdot\gamma = m\cdot\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad ἄρα \quad \boxed{m\cdot\Delta\upsilon = F\cdot\Delta t} \tag{1}$$

Τό γινόμενο $F\cdot\Delta t$ ὀνομάζεται *ὤθηση τῆς δυνάμεως*. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο **νόμο τῆς μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς**:

Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση, ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς τοῦ σώματος ἰσοῦται μέ τήν ὤθηση τῆς δυνάμεως.

79. Ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

Δύο σώματα Α καί Β (σχ. 69) ἔχουν ἀντίστοιχες μάζες m_1 καί m_2 καί ἀρχικά ἠρεμοῦν ($\upsilon = 0$). Ἑπομένως ἡ ὁρμή τοῦ κάθε σώματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Στά δύο σώματα δέν ἐνεργεῖ καμιά *ἐξωτερική δύναμη*, δηλαδή τό σύστημα τῶν δύο σωμάτων εἶναι *μονωμένο σύστημα*. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι κάποια στιγμή τό σῶμα Α ἀρχίζει νά ἐξασκεῖ στό σῶμα Β μιά σταθερή ἕλξη F. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως καί τό σῶμα Β ἐξασκεῖ στό σῶμα Α μιά ἀντίθετη ἕλξη F. Αὐτές οἱ δύο δυνάμεις εἶναι *ἐσωτερικές δυνάμεις* τοῦ συστήματος τῶν δύο σωμάτων. Ἡ ἀμοιβαία ἕλξη



Σχ. 69. Οἱ δυνάμεις F εἶναι ἀντίθετες.

τῶν δύο σωμάτων ἀναγκάζει τά δύο σώματα νά ἀρχίσουν νά κινοῦνται μέ ἀντίθετη φορά καί ἔπειτα ἀπό χρόνο t τά σώματα A καί B ἔχουν ἀποκτήσει ἀντίστοιχα ταχύτητα υ_1 καί $-\upsilon_2$ (τό ἀρνητικό σημεῖο ὀφείλεται στήν ἀντίθετη φορά τῆς ταχύτητας υ_2). Στό τέλος τοῦ χρόνου t τό καθένα ἀπό αὐτά τά σώματα ἔχει ὁρμή :

τό σῶμα A : $F \cdot t = m_1 \cdot \upsilon_1$ τό σῶμα B : $F \cdot t = -m_2 \cdot \upsilon_2$

Ἄρα $m_1 \cdot \upsilon_1 = -m_2 \cdot \upsilon_2$ καί $\boxed{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = 0}$ (1)

Παρατηροῦμε ὅτι στό τέλος τοῦ χρόνου t τό ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν δύο σωμάτων εἶναι *ἴσο μέ μηδέν*, ὅσο ἀκριβῶς ἦταν καί στήν ἀρχή τοῦ χρόνου t. Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι συνέπεια τῆς ἀκόλουθης **ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς :**

Ἡ ὁλική ὁρμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο), ὅταν στό σύστημα αὐτό δέν ἐπιδροῦν ἐξωτερικές δυνάμεις.

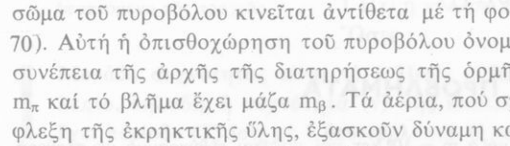
80. Ἐφαρμογές τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

1. Ὅταν ἕνα πυροβόλο ἐκσφενδονίζει τό βλῆμα, παρατηροῦμε ὅτι τό σῶμα τοῦ πυροβόλου κινεῖται ἀντίθετα μέ τή φορά, πού ἔχει τό βλῆμα (σχ. 70). Αὐτή ἡ ὀπισθοχώρηση τοῦ πυροβόλου ὀνομάζεται *ἀνάκρουση* καί εἶναι συνέπεια τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς. Τό πυροβόλο ἔχει μάζα m_π καί τό βλῆμα ἔχει μάζα m_β. Τά ἀέρια, πού σχηματίζονται ἀπό τήν ἀνάφλεξη τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης, ἐξασκοῦν δύναμη καί στό βλῆμα καί στό κλεῖστρο τοῦ πυροβόλου. Οἱ δύο αὐτές δυνάμεις εἶναι ἀντίθετες. Τό βλῆμα, ὅταν ἐκσφενδονίζεται μέ ταχύτητα υ_β, ἔχει ὁρμή $m_\beta \cdot \upsilon_\beta$. Ἑπομένως καί τό πυροβόλο ἀποκτᾶ ἀντίθετη ὁρμή $-m_\pi \cdot \upsilon_\pi$, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$m_\beta \cdot \upsilon_\beta + m_\pi \cdot \upsilon_\pi = 0$$

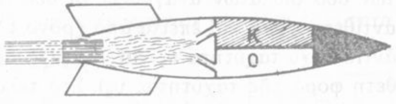
Ἄρα ἡ ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου εἶναι :

$$\boxed{\upsilon_\pi = -\frac{m_\beta}{m_\pi} \cdot \upsilon_\beta}$$



Σχ. 70. Τό ὄχημα προχωρεῖ ἀντίθετα μέ τή φορά τῶν βλημάτων.

Σχ. 71. Ὁ πύραυλος ἐκσφενδονίζει θερμά ἀέρια (Κ καύσιμο, Ο ὀξυγόνο).



2. Ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχει σημαντική ἐφαρμογή στούς κινητῆρες, πού λέγονται *κινητῆρες ἀναδράσεως*. Ἡ λειτουργία τους στηρίζεται στήν ἑξῆς ἀρχή : Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μπορεῖ νά κινεῖται ὄχημα, πού πάνω του ὑπάρχει πυροβόλο (σχ. 70). Τό πυροβόλο ἐκσφενδονίζει τό πρῶτο βλῆμα, πού ἔχει μάζα $m_β$ καί ταχύτητα $υ_β$. Τότε ὁλόκληρο τό ὄχημα, πού ἔχει μάζα $m_{οχ}$, ἀρχίζει νά κινεῖται κατά τήν ἀντίθετη φορά μέ ταχύτητα :

$$υ_{οχ} = -\frac{m_β}{m_{οχ}} \cdot υ_β$$

Ἄν λοιπόν τό πυροβόλο ἐκσφενδονίζει συνεχῶς βλήματα, τότε τό ὄχημα θά κινεῖται ἀντίθετα μέ τή φορά πού ἔχει ἡ κίνηση τῶν βλημάτων. Στήν πράξη πετυχαίνουμε νά ἐκσφενδονίζεται συνεχῶς μάζα μέ μεγάλη ταχύτητα, χρησιμοποιώντας ἀντί γιά βλήματα τή μάζα τῶν πολύ θερμῶν ἀερίων, πού προέρχονται ἀπό τήν καύση κατάλληλων καύσιμων ὑλικῶν. Οἱ κινητῆρες ἀναδράσεως χρησιμοποιοῦνται στούς πυραύλους καί στά ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα (σχ. 71).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

83. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 10^3$ kgr καί κινεῖται εὐθύγραμμα μέ σταθερή ταχύτητα $υ_1 = 8$ m/sec. Μέσα σέ χρόνο $t = 2$ sec μεταβάλλει τήν ταχύτητά του ἀπό $υ_1$ σέ $υ_2 = 18$ m/sec. Πόση δύναμη (F) ἐνεργεῖ στό αὐτοκίνητο στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ;

84. Ἕνα ὅπλο ἔχει μάζα $m_{οπλ} = 10$ kgr καί ἐκσφενδονίζει μέ ταχύτητα $υ_{βλ} = 800$ m/sec βλῆμα, πού ἔχει μάζα $m_{βλ} = 30$ gr. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ ὅπλου;

85. Μιά μάζα $m = 3$ kgr κινεῖται μέ ταχύτητα $υ_1 = 6{,}5$ m/sec. Σέ μιά στιγμή ἐνεργεῖ πάνω σ' αὐτή τή μάζα μιά δύναμη $F = 7{,}5$ N πού ἐλαττώνει τήν ταχύτητα σέ $υ_2 = 1{,}5$ m/sec. Πόσο χρόνο t ἐνέργησε ἡ δύναμη F πάνω στή μάζα m ;

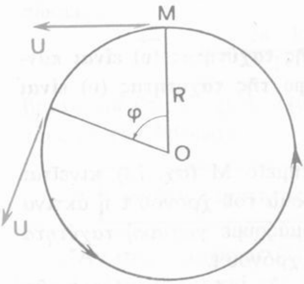
86. Ἕνα πυροβόλο ἔχει μάζα $m_1 = 200$ kgr καί ρίχνει βλῆμα πού ἔχει μάζα $m_2 = 1$ kgr καί ταχύτητα $υ_2 = 600$ m/sec. 1) Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $υ_1$, ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου. 2) Ἄν στήν κίνηση ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου ἀντιδρᾶ μιά σταθερή δύναμη $F = 1800$ N, νά βρεθεῖ πόσο χρόνο διαρκεῖ ἡ κίνηση τῆς ἀνακρούσεως.

87. Ἕνα πυροβόλο ἔχει μάζα $m_1 = 200$ kgr καί ρίχνει βλῆμα πού ἔχει μάζα $m_2 = 1{,}5$ kgr καί ἀρχική ταχύτητα $υ_2 = 800$ m/sec. 1) Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $υ_1$ ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου καί ἡ κινητική ἐνέργεια E_1 τοῦ πυροβόλου ἐξαιτίας τῆς ἀνακρούσεως. 2) Νά βρεθεῖ ἡ κινητική ἐνέργεια E_2 τοῦ βλήματος καί ὁ λόγος E_2/E_1.

Κυκλική κίνηση

81. Ὁρισμοί

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ **κυκλική ὁμαλή κίνηση,** ὅταν διαγράφει κυκλική τροχιά καί *σέ ἴσους χρόνους* διανύει *ἴσα τόξα* (σχ. 72). Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ὁ χρόνος Τ μιᾶς περιφορᾶς τοῦ κινητοῦ εἶναι σταθερός καί ὀνομάζεται *περίοδος*. Ὁ ἀριθμός ν τῶν στροφῶν πού ἐκτελεῖ τό κινητό στή μονάδα χρόνου ὀνομάζεται *συχνότητα*. Ἡ περίοδος Τ καί ἡ συχνότητα ν συνδέονται μεταξύ τους μέ τή σχέση :



Σχ. 72. Κυκλική ὁμαλή κίνηση. Τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ εἶναι ἐφαπτόμενο τῆς τροχιᾶς.

$$\boxed{\text{συχνότητα} \quad \nu = \frac{1}{T}}$$

Ἄν εἶναι Τ = 1 sec, τότε εἶναι ν = 1, δηλαδή ἡ συχνότητα εἶναι ἴση μέ *τή μονάδα συχνότητας*, πού ὀνομάζεται *Hertz* (χέρτζ, 1 Hz) ἤ *κύκλος κατά δευτερόλεπτο* (1 c/sec). Ὥστε :

Μονάδα συχνότητας εἶναι τό 1 Hertz (1 Hz) ἤ κύκλος κατά δευτερόλεπτο, δηλαδή ἡ συχνότητα (ν) τῆς κυκλικῆς ὁμαλῆς κινήσεως, πού ἔχει περίοδο (Τ) ἴση μέ 1 δευτερόλεπτο (1 sec).

$$\boxed{\text{μονάδα συχνότητας } 1\text{ Hz ἤ } 1\text{ c/sec} = \frac{1}{1\text{ sec}} \quad \text{καί} \quad 1\text{ Hz} = 1\text{ sec}^{-1}}$$

Πολλαπλάσια τῆς μονάδας Hertz εἶναι :

τό 1 kilohertz (1 kHz) ἤ 1 χιλιόκυκλος κατά δευτερόλεπτο (1 kc/sec)

$$1\text{ kHz ἤ } 1\text{ kc/sec} = 10^3\text{ Hz ἤ c/sec}$$

τό 1 Megahertz (1 MHz) ἤ 1 μεγάκυκλος κατά δευτερόλεπτο (1 Mc/sec)

$$1\text{ MHz ἤ } 1\text{ Mc/sec} = 10^6\text{ Hz ἤ c/sec}$$

82. Ταχύτητα στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ *ὁμαλή κίνηση* σέ κυκλική τροχιά, πού ἔχει ἀκτίνα R (σχ. 72). Στή διάρκεια μιᾶς περιόδου Τ τό κινητό διανύει διάστημα s = 2π · R. Ἄρα *τό μέτρο* τῆς ταχύτητας (υ) εἶναι ἴσο μέ:

ταχύτητα (ἤ γραμμική ταχύτητα)	$\upsilon = \frac{s}{T}$ ἤ $\upsilon = \frac{2\pi \cdot R}{T} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Τό μέτρο τῆς ταχύτητας (υ) εἶναι *σταθερό*. Τό ἄνυσμα $\vec{\upsilon}$ τῆς ταχύτητας εἶναι πάντοτε *ἐφαπτόμενο* τῆς τροχιᾶς καί ἑπομένως *ἡ διεύθυνσή του συνεχῶς μεταβάλλεται*. Ὥστε:

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας ($\vec{\upsilon}$) εἶναι πάντοτε ἐφαπτόμενο τῆς τροχιᾶς, ἐνῶ τό μέτρο τῆς ταχύτητας (υ) εἶναι σταθερό καί ἴσο μέ τό πηλίκο 2πR/T.

α. Γωνιακή ταχύτητα. Ὅταν τό ὑλικό σημεῖο Μ (σχ. 73) κινεῖται πάνω στήν κυκλική τροχιά του, τότε στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἡ ἀκτίνα ΟΜ τοῦ κύκλου διαγράφει μιά γωνία φ. Ὀνομάζουμε *γωνιακή ταχύτητα* (ω) τοῦ κινητοῦ τό πηλίκο τῆς γωνίας φ διά τοῦ χρόνου t.

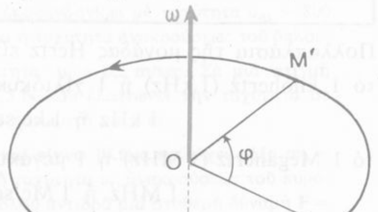
$$\boxed{\text{γωνιακή ταχύτητα} \quad \omega = \frac{\varphi}{t}} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή δίνει *τό μέτρο* τῆς γωνιακῆς ταχύτητας, γιατί ἡ γωνιακή ταχύτητα εἶναι *ἀνυσματικό* μέγεθος. Τό ἄνυσμα $\vec{\omega}$ ἐφαρμόζεται στό κέντρο Ο τοῦ κύκλου, ὁ φορέας του εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς καί ἡ φορά του εἶναι θετική ἤ ἀρνητική ἀνάλογα μέ τή φορά πού ἔχει ἡ κίνηση τοῦ κινητοῦ (σχ. 73).

Ἡ γωνία φ μετριέται σέ *ἀκτίνια* (rad) καί ὁ χρόνος t σέ δευτερόλεπτα (sec). Ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε φ = 1 rad καί t = 1 sec, βρίσκουμε ω = 1. Ἄρα *μονάδα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας* εἶναι τό *1 ἀκτίνιο κατά δευτερόλεπτο*:

μονάδα γωνιακῆς ταχύτητας	1 rad/sec

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση μέσα σέ μιά περίοδο T ἡ ἀκτίνα ΟΜ διαγράφει γωνία φ = 2π ἀκτί-



Σχ. 73. Ἡ γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

νια (rad). Ἄρα *τό μέτρο* τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω) εἶναι:

$$\boxed{\text{γωνιακή ταχύτητα} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \text{σταθ.}}$$

Ὥστε στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση *ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) εἶναι σταθερή.*

β. Σχέση τῆς ταχύτητας (υ) μέ τή γωνιακή ταχύτητα (ω). Ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot R}{T} \quad (2) \qquad \text{καί} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

βρίσκουμε ὅτι ἡ ταχύτητα (υ) καί ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν ἐξίσωση:

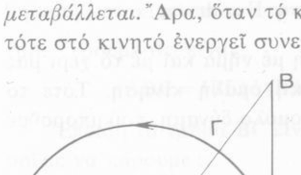
$$\boxed{\text{σχέση ταχύτητας καί γωνιακῆς ταχύτητας} \quad \upsilon = \omega \cdot R}$$

Ἄν στίς ἐξισώσεις (2) καί (3) βάλουμε $T = 1/\nu$, βρίσκουμε τή σχέση τῆς ταχύτητας (υ) καί τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω) μέ τή συχνότητα (ν):

$$\boxed{\upsilon = 2\pi \cdot \nu \cdot R \qquad \text{καί} \qquad \omega = 2\pi \cdot \nu}$$

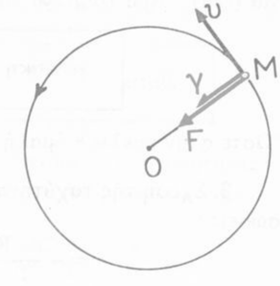
83. Κεντρομόλος δύναμη

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $(\vec{\upsilon})$ *συνεχῶς μεταβάλλεται.* Ἄρα, ὅταν τό κινητό κινεῖται πάνω στήν κυκλική τροχιά του, τότε στό κινητό ἐνεργεῖ συνεχῶς *μιά δύναμη.* Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ (σχ. 74), πού ἔχει μάζα m καί κινούμενο μέ σταθερή ταχύτητα υ διαγράφει κυκλική τροχιά, πού ἔχει ἀκτίνα R. Ἄν στό ὑλικό σημεῖο δέν ἐνεργεῖ καμιά δύναμη, τότε τό κινητό πρέπει νά κινηθεῖ εὐθύγραμμα καί ὁμαλά κατά τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, δηλαδή κατά τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης, καί μέσα σέ ἕνα ἐλάχιστο χρόνο Δt θά φτάσει ἀπό τή θέση Α στή θέση Β. Ἀλλά στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό κινητό πηγαίνει ἀπό τή θέση Α στή θέση Γ. Ἄρα στό κινητό ἐνεργεῖ μιά *δύναμη* $\vec{F}$, πού στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀναγκάζει τό κινητό νά



Σχ. 74. Τό ὑλικό σημεῖο Μ διαγράφει τό τόξο ΑΓ.

μή φτάσει στή θέση Β, ἀλλά νά ἔρθει στή θέση Γ. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει φορέα τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, φορά πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου καί γι' αὐτό ὀνομάζεται **κεντρομόλος δύναμη** (σχ. 75). Αὐτή προσδίνει στό κινητό ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, πού ὀνομάζεται **κεντρομόλος ἐπιτάχυνση,** ἔχει τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά μέ τήν κεντρομόλο δύναμη καί σταθερό μέτρο ἴσο μέ τό πηλίκο υ^2/R.



Σχ. 75. Κεντρομόλος δύναμη, $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\gamma = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \text{σταθ.}$

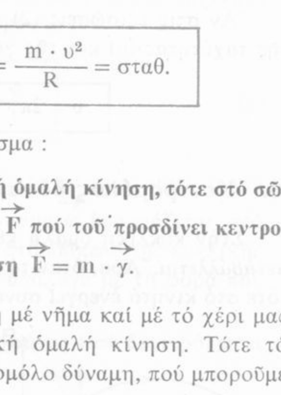
Ἑπομένως καί ἡ κεντρομόλος δύναμη $F = m \cdot \gamma$ ἔχει σταθερό μέτρο, πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

κεντρομόλος δύναμη	$F = m \cdot \gamma = \dfrac{m \cdot \upsilon^2}{R} = \text{σταθ.}$

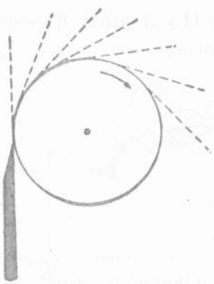
Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό συμπέρασμα:

Ὅταν ἕνα σῶμα μέ μάζα m ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση, τότε στό σῶμα ἐνεργεῖ συνεχῶς ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$ πού τοῦ προσδίνει κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, δηλαδή ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Μιά μικρή μεταλλική σφαίρα εἶναι δεμένη μέ νῆμα καί μέ τό χέρι μας ἀναγκάζουμε τή σφαίρα νά ἐκτελέσει κυκλική ὁμαλή κίνηση. Τότε τό τεντωμένο νῆμα ἐξασκεῖ στή σφαίρα τήν κεντρομόλο δύναμη, πού μποροῦμε κατά προσέγγιση νά τή μετρήσουμε, ἄν στό νῆμα παρεμβάλλουμε δυναμόμετρο (σχ. 76). Ἄν κόψουμε τό νῆμα, τότε *καταργεῖται ἡ κεντρομόλος δύναμη* καί τό σῶμα, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας, θά κινηθεῖ *εὐθύγραμμα καί ὁμαλά* κατά τή διεύθυνση πού ἔχει ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τή στιγμή πού κόπηκε τό νῆμα, δηλαδή θά κινηθεῖ κατά τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου σέ ἐκεῖνο τό σημεῖο πού ἦταν ἡ σφαίρα, ὅταν κόπηκε τό νῆμα. Αὐτό τό παρατηροῦμε στούς σπινθή-



Σχ. 76. Μέτρηση τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.



Σχ. 77. Οἱ σπινθῆρες ἀκολουθοῦν τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς.

ρες πού ξεπετιοῦνται ἀπό τόν περιστρεφόμενο σμυριδοτροχό (σχ. 77).

α. Ἄλλη ἔκφραση τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως (γ) καί τῆς κεντρομόλου δυνάμεως (F). Ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι εἶναι :

$$\upsilon = \omega \cdot R \quad \text{καί} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

τότε ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση γ δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις :

$$\boxed{\gamma = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2\nu^2 R}$$

Ἐπομένως καί ἡ κεντρομόλος δύναμη F δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις :

$$\boxed{F = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = m \cdot \omega^2 R = m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2} = m \cdot 4\pi^2\nu^2 R}$$

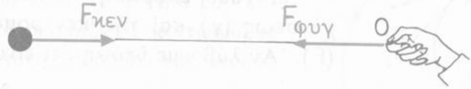
β. Ὑπολογισμός τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως. Ἄν τό κινητό κινηθεῖ ὁμαλά κατά τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης (σχ. 77), τότε σέ ἕναν ἐλάχιστο χρόνο t θά διανύσει διάστημα $AB = \upsilon \cdot t$. Στόν ἴδιο χρόνο t ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρει τό κινητό ἀπό τό σημεῖο Β στό σημεῖο Γ, δηλαδή μετακινεῖ τό κινητό κατά διάστημα $B\Gamma = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$. Ἀπό τή Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι εἶναι :

$$(AB)^2 = (B\Gamma) \cdot (B\Delta) \quad \text{ἤ} \quad (AB)^2 = (B\Gamma) \cdot [(B\Gamma) + 2R]$$

Ἐπειδή τό τμῆμα ΒΓ εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τή διάμετρο 2R, μποροῦμε νά πάρουμε :

$$(AB)^2 = (B\Gamma) \cdot 2R \quad \text{ἤ} \quad (\upsilon \cdot t)^2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \cdot 2R \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\gamma = \frac{\upsilon^2}{R}}$$

γ. Φυγόκεντρη δύναμη. Μιά μικρή μεταλλική σφαίρα, πού εἶναι δεμένη μέ νῆμα, τήν περιστρέφουμε μέ τό χέρι μας μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. 78). Τότε στή σφαίρα ἐνεργεῖ συνεχῶς ἡ κεντρομόλος δύναμη $F_{\kappa\varepsilon\nu} = m \cdot \omega^2 \cdot R$. Αὐτή τή δύναμη τήν ἐξασκεῖ στό σῶμα τό χέρι μας διά μέσου τοῦ τεντωμένου νήματος. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως τό σῶμα διά μέσου τοῦ νήματος ἐξασκεῖ στό χέρι μας μιά ἀντίθετη δύναμη, πού τήν ὀνομάζουμε *φυγόκεντρη δύναμη* ($F_{φυγ}$), γιατί ἡ φορά της εἶναι ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.



Σχ. 78. Οἱ δύο δυνάμεις εἶναι ἀντίθετες.

Παρατήρηση. Γενικά σέ ἕνα σῶμα, πού ἐκτελεῖ *καμπυλόγραμμη κίνηση*, ἐνεργεῖ μιά δύναμη πού ἔχει φορά πρός τήν κοιλότητα τῆς τροχιᾶς καί ὁ φορέας της περνᾶ ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο (κέντρο). Ὥστε κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση παράγεται ἀπό μιά *κεντρομόλο δύναμη*.

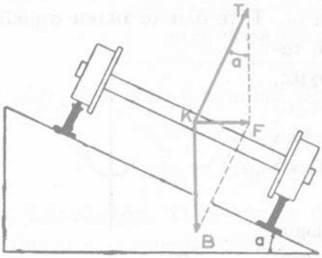
* 84. Ἐφαρμογές τῆς κεντρομόλου δυνάμεως

Ἀναφέρουμε μόνο μερικές συνηθισμένες ἐφαρμογές τῆς κεντρομόλου δυνάμεως.

* α. Ρυθμιστής τοῦ Watt. Σέ κατακόρυφο στέλεχος, πού στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του, ἀρθρώνονται δύο βραχίονες, πού στίς ἄκρες τους ἔχουν δύο ἴσες μεταλλικές σφαῖρες (σχ. 79). Σέ κάθε σφαίρα ἐνεργεῖ τό βάρος της $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίδραση $\vec{T}$ τοῦ βραχίονα. Ὅταν τό σύστημα περιστρέφεται, ἡ σφαίρα διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα R καί τότε στή σφαίρα ἐνεργεῖ ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$ πού ἔχει μέτρο $F = m \cdot \omega^2 \cdot R$, καί εἶναι κάθετη στόν ἄξονα περιστροφῆς (δηλαδή ὁριζόντια). Σέ κάθε στιγμή ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$. Ὅταν αὐξάνει ἡ γωνιακή ταχύτητα, οἱ δύο σφαῖρες ἀνυψώνονται καί ὁ δρομέας Δ ἀνεβαίνει πιό ψηλά. Ἡ διάταξη αὐτή χρησιμοποιεῖται ὡς αὐτόματος ρυθμιστής σέ πολλές περιπτώσεις (π.χ. στίς ἀτμομηχανές, σέ κινητῆρες κ.ἄ.).

Σχ. 79. Ρυθμιστής τοῦ Watt.

β. Στροφή τῆς ὁδοῦ. Ὅταν ἕνα ὄχημα (αὐτοκίνητο, βαγόνι σιδηροδρόμου κ.λ.) διατρέχει μιά στροφή τῆς ὁδοῦ, τότε πρέπει νά ἐνεργήσει στό



Σχ. 80. Ἐξαιτίας τῆς κλίσεως α ἀναπτύσσεται ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$.

Σχ. 81. Ἡ κλίση τοῦ σώματος δημιουργεῖ τήν κε τρομόλο δύναμη $\vec{F}$.

ὄχημα ἡ κεντρομόλος δύναμη. Γι' αὐτό τό σκοπό δίνουν στό ἐπίπεδο τῆς ὁδοῦ μιά μικρή κλίση α (σχ. 80). Στό ὄχημα ἐνεργοῦν τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ ὀχήματος καί ἡ ἀντίδραση τῆς ὁδοῦ $\vec{T}$, πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς ὁδοῦ. Ἡ κλίση α εἶναι τόση, ὥστε ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$ νά εἶναι ὁριζόντια καί νά ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμη. Στό σχῆμα παρατηροῦμε ὅτι εἶναι:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{F}{B} = \frac{m\upsilon^2/R}{m \cdot g} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\text{εφ}\,\alpha = \frac{\upsilon^2}{g \cdot R}}$$

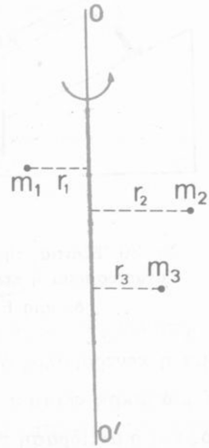
Ὥστε σέ ὁρισμένη ταχύτητα υ τοῦ ὀχήματος ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη κλίση α τῆς ὁδοῦ. Ὅταν δρομέας ἤ ποδηλάτης (σχ. 81) διατρέχει μιά στροφή, τότε δίνει στό σῶμα του μικρή κλίση, ὥστε νά δημιουργηθεῖ ἡ ἀπαραίτητη ὁριζόντια κεντρομόλος δύναμη:

$$\boxed{F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}}$$

85. Στροφική κίνηση στερεοῦ σώματος

Ἕνα στερεό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό ὑλικά σημεῖα, πού ἔχουν μάζες

$m_1, m_2, m_3 \ldots m_\nu$. Τό σῶμα περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα ΟΟ΄ (σχ. 82) μέ *σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω*. Τότε ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος κινοῦνται μέ τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα καί διαγράφουν κυκλικές τροχιές, πού τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό σῶμα ἐκτελεῖ **ὁμαλή στροφική κίνηση.** Κάθε ὑλικό σημεῖο ἔχει κινητική ἐνέργεια.



Σχ. 82. Περιστροφική κίνηση στερεοῦ.

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι *ἴση μέ τό ἄθροισμα* τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν, πού ἔχουν ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος.

Ὑπολογισμός τῆς ὁλικῆς κινητικῆς ἐνέργειας. Ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m_1 καί βρίσκεται σέ ἀπόσταση r_1 ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς, κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$ καί ἔχει κινητική ἐνέργεια :

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2$$

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια ($E_{\kappa\iota\nu}$), πού ἔχει τό στρεφόμενο σῶμα, εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνέργειας, πού ἔχουν ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος. Ἄρα εἶναι :

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2\omega^2 r_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_\nu\omega^2 r_\nu^2$$

$$\text{ἤ} \qquad E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2) \cdot \omega^2$$

Τό ἄθροισμα, πού εἶναι μέσα στήν παρένθεση, εἶναι μέγεθος χαρακτηριστικό γιά τό θεωρούμενο σῶμα καί ὀνομάζεται *ροπή ἀδράνειας* (Θ) τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἑπομένως *ἡ κινητική ἐνέργεια* τοῦ σώματος εἶναι :

κινητική ἐνέργεια στρεφομένου σώματος	$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$

Ἡ ροπή ἀδράνειας εἶναι μονόμετρο μέγεθος καί σύντομα γράφεται:

$$\boxed{\text{ροπή ἀδράνειας} \quad \Theta = \sum (m \cdot r^2)}$$

Ἀπό αὐτή τή σχέση βρίσκουμε ὅτι *μονάδα ροπῆς ἀδράνειας* εἶναι:

στό σύστημα SI $\quad 1\ \mathrm{kgr \cdot m^2}$

στό σύστημα CGS $\quad 1\ \mathrm{gr \cdot cm^2}$

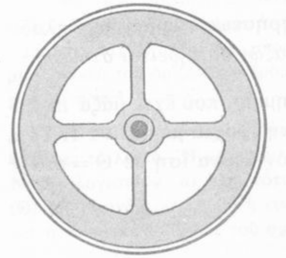
α. Σφόνδυλος. Ὁ *σφόνδυλος* εἶναι τροχός, πού σχεδόν ὅλη ἡ μεγάλη μάζα του m εἶναι συγκεντρωμένη στήν περιφέρειά του. Ἡ ἀπόσταση τῶν ὑλικῶν σημείων του ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι σταθερή καί ἴση μέ r. Ἄρα ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σφονδύλου εἶναι:

$$\Theta = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \ldots + m_\nu r^2 = (m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu) \cdot r^2$$

ἤ

$$\Theta = m \cdot r^2$$

Ἑπομένως ὁ σφόνδυλος, ὅταν στρέφεται μέ γωνιακή ταχύτητα ω, ἔχει *κινητική ἐνέργεια*:



Σχ. 83. Σφόνδυλος.

$$\boxed{\text{κινητική ἐνέργεια σφονδύλου} \quad E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 \quad \text{ἤ} \quad E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2}$$

Διάφορες μηχανές εἶναι ἐφοδιασμένες μέ σφόνδυλο (σχ. 83), γιατί στό σφόνδυλο ἀποταμιεύεται μεγάλη κινητική ἐνέργεια, πού χρησιμοποιεῖται ἀπό τή μηχανή, γιά νά ἐξασφαλιστεῖ ἡ ὁμαλή λειτουργία της. Ἄν π.χ. ὁ σφόνδυλος ἔχει μάζα $m = 2000\ \mathrm{kgr}$, ἀκτίνα $r = 1\ \mathrm{m}$ καί στρέφεται μέ συχνότητα $\nu = 10\ \mathrm{Hz}$, τότε ὁ σφόνδυλος ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot (2\pi\nu)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000\ \mathrm{kgr} \cdot 1\ \mathrm{m^2} \cdot 4\pi^2 \cdot 100\ \mathrm{sec^{-2}}$$

$$\text{καί} \quad E_{\text{κιν}} = 3{,}94 \cdot 10^6\ \mathrm{Joule}$$

86. Στροφορμή

Ἕνα στερεό σῶμα περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 82) μέ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἔχει ροπή ἀδράνειας Θ. Κατ' ἀναλογία μέ τή μεταφορική κίνηση ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Στροφορμή στερεοῦ σώματος, πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὀνομάζεται τό ἄνυσμα $\vec{G}$, πού ἔχει φορέα καί φορά τό φορέα καί τή φορά τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$ καί μέτρο (G) ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ροπῆς ἀδράνειας (Θ) ἐπί τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ταχύτητας (ω).

$$\boxed{\text{στροφορμή} \quad G = \Theta \cdot \omega} \qquad (1)$$

Ὁ παραπάνω ὁρισμός τῆς στροφορμῆς ἐκφράζεται μέ τήν ἀνυσματική ἐξίσωση :

$$\boxed{\text{στροφορμή} \quad \vec{G} = \Theta \cdot \vec{\omega}}$$

Μονάδα στροφορμῆς. Ἀπό τήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς στροφορμῆς (1) βρίσκουμε ὅτι *μονάδα στροφορμῆς* εἶναι :

στό σύστημα SI $\quad 1\ \text{kgr} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/sec}$

στό σύστημα CGS $\quad 1\ \text{gr} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{rad/sec}$

Καί γιά τή στροφορμή ἰσχύει ἡ ἀρχή διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, δηλαδή *ἡ ὁλική στροφορμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή.*

Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου. Ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m, περιφέρεται γύρω ἀπό ἄξονα διαγράφοντας κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα r. Τότε τό ὑλικό σημεῖο ἔχει ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα ἴση μέ $\Theta = m \cdot r^2$ καί *ἡ στροφορμή τοῦ ὑλικοῦ σημείου* ἔχει μέτρο :

$$G = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

88. Ὁ τροχός μιᾶς μηχανῆς ἔχει ἀκτίνα r = 50 cm καί ἐκτελεῖ 1800 στροφές τό λεπτό. Νά βρεθοῦν : α) ἡ συχνότητα (ν) καί ἡ περίοδος (Τ)· β) ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) καί γ) ἡ ταχύτητα (υ) ἑνός σημείου τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ.

89. Ἕνα αὐτοκίνητο, πού οἱ τροχοί του ἔχουν διάμετρο 2r = 60 cm, θέλει νά διατρέξει μιά ὁριζόντια ἀπόσταση s = 7536 m σέ χρόνο t = 20 min. Νά βρεθεῖ ἡ συχνότητα (ν) τῆς κινήσεως τῶν τροχῶν, ἡ ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου ($\upsilon_{αυτ}$) καί ἡ ταχύτητα (υ) τῶν σημείων τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ.

90. Ἕνας τροχός ἔχει ἀκτίνα 1,2 m καί ἐκτελεῖ 1200 στοφές τό λεπτό. Νά ὑπολογιστοῦν ἡ γωνιακή ταχύτητά του (ω), ἡ ταχύτητα (υ) καί ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση (γ_κ) πού ἔχουν τά σημεῖα τῆς περιφέρειάς του.

91. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα (υ) μέ τήν ὁποία κινεῖται ἕνα σημεῖο τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς

Γῆς ἐξαιτίας τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της. Ἡ ἀκτίνα τοῦ ἰσημερινοῦ εἶναι $r = 6370$ km καί ἡ διάρκεια μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς εἶναι ἴση μέ 24 h.

92. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 400$ gr καί ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec πάνω σέ κύκλο πού ἔχει ἀκτίνα $r = 50$ cm. Πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση (γ_κ), ἡ κεντρομόλος δύναμη (F_κ) καί ἡ περίοδος (T); Πόση γίνεται ἡ κεντρομόλος δύναμη, ἄν ἡ περίοδος γίνει 2T ἤ T/2;

93. Μία σφαίρα πού ἔχει μάζα $m = 1$ kgr εἶναι δεμένη μέ νῆμα καί διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα $r = 1$ m. Ἄν ἡ κεντρομόλος δύναμη εἶναι $F_\kappa = 100$ N, νά βρεθοῦν ἡ συχνότητα (ν), ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) καί ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση (γ_κ).

94. Νά βρεθεῖ μέ πόση ἀρχική ταχύτητα (υ_0) πρέπει νά ἐκσφενδονιστεῖ σέ ὁριζόντια διεύθυνση ἕνα βλῆμα, ὥστε αὐτό νά μή πέσει ποτέ στό ἔδαφος, ἀλλά νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ ἐκτελώντας ὁμαλή κυκλική κίνηση. Ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα παραλείπεται. Τήν τροχιά τοῦ βλήματος θά τή θεωρήσουμε ἴση μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς $R \simeq 6400$ km. $g = 10$ m/sec^2.

95. Ἕνα σῶμα μέ μάζα $m = 200$ gr εἶναι δεμένο στήν ἄκρη νήματος, καί διαγράφει κατακόρυφο κύκλο ἀκτίνας $r = 40$ cm καί μέ ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec. Πόση δύναμη (F) ἐξασκεῖται στό χέρι μας, ὅταν τό σῶμα βρίσκεται στό κατώτατο σημεῖο τῆς τροχιᾶς του;

96. Ἕνα φορτηγό αὐτοκίνητο ἔχει τό κέντρο βάρους του σέ ὕψος 1 m, πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἔδαφος. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο τροχῶν του εἶναι 1,20 m. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι ἡ μέγιστη ταχύτητα (υ), πού μπορεῖ νά ἔχει τό αὐτοκίνητο, γιά νά κινηθεῖ μέ ἀσφάλεια σέ μιά στροφή τοῦ ὁριζόντιου δρόμου, ἄν ἡ ἀκτίνα καμπυλότητάς του εἶναι $r = 40$ m. $g = 10$ m/sec^2.

97. Ἕνας σφόνδυλος ἔχει ἀκτίνα $r = 1$ m, μάζα $m = 2000$ kgr καί ἐκτελεῖ 1800 στροφές τό λεπτό. Ἡ μάζα του θεωρεῖται ὁμοιόμορφα συγκεντρωμένη στήν περιφέρεια. Νά ὑπολογιστοῦν: α) ἡ συχνότητα (ν) καί ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω)· β) ἡ ροπή ἀδράνειας (Θ) τοῦ σφονδύλου· καί γ) ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_{\kappa\iota\nu}$) τοῦ σφονδύλου. Πόσο μεταβάλλεται ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σφονδύλου, ἄν ἡ συχνότητά του αὐξηθεῖ μόνο κατά 2 Hz;

Βαρύτητα

87. Νόμος τοῦ Νεύτωνα

Ὁ Νεύτωνας, γιά νά ἐξηγήσει τούς νόμους πού ἰσχύουν γιά τήν κίνηση τῶν πλανητῶν γύρω ἀπό τόν Ἥλιο, δέχτηκε ὅτι οἱ μάζες m_1 καί m_2 δύο σωμάτων *ἕλκουν ἡ μιά τήν ἄλλη*. Ἔτσι ἡ μάζα τοῦ Ἡλίου ἕλκει τή μάζα τῆς Γῆς, ἀλλά καί ἡ μάζα τῆς Γῆς ἕλκει τή μάζα τοῦ Ἡλίου μέ δύναμη ἀντίθετη (δράση καί ἀντίδραση). Τό αἴτιο, πού δημιουργεῖ τήν ἀμοιβαία ἕλξη μεταξύ δύο μαζῶν, ὀνομάζεται *βαρύτητα*.

Γιά τίς ἑλκτικές δυνάμεις, πού ὀφείλονται στή βαρύτητα, ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος τοῦ Νεύτωνα* ἤ καί *νόμος τῆς παγκόσμιας ἕλξεως* :

Δύο σώματα ἕλκονται μεταξύ τους μέ δύναμη (F), πού εἶναι ἀνάλογη μέ τό γινόμενο τῶν μαζῶν τους (m_1 καί m_2) καί ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεώς τους (r).

$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Νεύτωνα} \qquad F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

ὅπου k εἶναι μιά σταθερή, ἀνεξάρτητη ἀπό τή φύση τῶν σωμάτων, ὀνομάζεται *σταθερή τῆς παγκόσμιας ἕλξεως* καί εἶναι ἴση μέ :

$$\boxed{k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kgr^{-2}}$$

* 88. Βάρος τῶν σωμάτων

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι ὁμογενής σφαίρα, πού ἔχει ἀκτίνα R καί μάζα $m_Γ$. Ἕνα σῶμα Σ, πού βρίσκεται στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί ἔχει μάζα $m_Σ$, ἕλκεται ἀπό τή Γῆ μέ μιά κατακόρυφη δύναμη, πού τήν ὀνομάζουμε *βάρος* ($\vec{B}$) τοῦ σώματος. Ἐξετάζοντας τήν πτώση τῶν σωμάτων μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους τους, βρήκαμε ὅτι τό μέτρο τοῦ βάρους τοῦ σώματος Σ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $B = m_Σ \cdot g$. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Νεύτωνα εἶναι:

$$m_Σ \cdot g = k \cdot \frac{m_Γ \cdot m_Σ}{R^2} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{g = k \cdot \frac{m_Γ}{R^2}} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι *στόν ἴδιο τόπο* (R = σταθ.) ἡ ἐπιτάχυνση (g) τῆς βαρύτητας εἶναι *σταθερή* (δηλαδή εἶναι ἡ ἴδια γιά ὅλα τά σώματα).

α. Μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ g. Ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση (g) τῆς βαρύτητας μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέ τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως (r) τοῦ σώματος ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἔτσι, ἄν στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας εἶναι :

$$g_0 = k \cdot \frac{m_Γ}{R^2} \qquad (2)$$

σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, δηλαδή σέ ἀπόσταση $r = R + h$ ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, εἶναι :

$$g_h = k \cdot \frac{m_Γ}{(R+h)^2} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (2) καί (3) βρίσκουμε:

$$\boxed{g_h = g_0 \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2}$$

Ὥστε, ὅταν ἀνεβαίνουμε πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, *ἡ τιμή τοῦ g συνεχῶς ἐλαττώνεται*, ἑπομένως καί *τό βάρος ἑνός σώματος συνεχῶς ἐλαττώνεται*.

Στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς *ἡ τιμή τοῦ g συνεχῶς αὐξάνει*, ὅσο προχωροῦμε ἀπό τόν ἰσημερινό πρός τόν πόλο. Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ g μέ τό γεωγραφικό πλάτος ὀφείλεται στά ἑξῆς δύο αἴτια:

α) Ἡ Γῆ ἔχει ἐλλειψοειδές σχῆμα καί γι' αὐτό ἡ ἰσημερινή ἀκτίνα εἶναι *μεγαλύτερη* ἀπό τήν πολική ἀκτίνα.

β) Ἐπειδή ἡ Γῆ περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά της, ἀναπτύσσεται σέ κάθε σῶμα *κεντρομόλος δύναμη*. Στήν περίπτωση τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς, γύρω ἀπό τόν ἄξονά της δεχόμαστε ὅτι πάνω στό σῶμα ἐνεργεῖ μιά *δύναμη ἀδράνειας*, γιατί καί ἐμεῖς *μετέχουμε* στήν περιστροφική κίνηση τῆς Γῆς. Στή Μηχανική ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ὁ παρατηρητής μετέχει στήν περιστροφική κίνηση, τότε αὐτός ὁ παρατηρητής, γιά νά ἑρμηνεύσει τά φαινόμενα πού παρατηρεῖ, πρέπει νά δεχτεῖ ὅτι σέ κάθε σῶμα, πού βρίσκεται μέσα στό στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς του, ἀναπτύσσεται *φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας* ἀντίθετη μέ τήν κεντρομόλο δύναμη.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Τό βάρος ἑνός σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀπόσταση τοῦ σώματος ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί ἀπό τό γεωγραφικό πλάτος τοῦ τόπου πού βρίσκεται τό σῶμα.

* 89. Πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς

Γενικά ὀνομάζεται **πεδίο βαρύτητας** ὁ χῶρος στόν ὁποῖο ἀναπτύσσονται νευτώνειες ἕλξεις. Ἰδιαίτερα **πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς** ὀνομάζεται ὁ χῶρος μέσα στόν ὁποῖο πρέπει νά βρίσκεται ἕνα σῶμα, γιά νά ἕλκεται ἀπό τή Γῆ. Μέσα στό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς κινεῖται ἡ Σελήνη, πού διαγράφει σχεδόν κυκλική τροχιά. Ὡς κεντρομόλος δύναμη ἐνεργεῖ στή Σελήνη ἡ ἕλξη πού ἡ Γῆ ἐξασκεῖ στή Σελήνη.

Γιά νά βγεῖ ἕνα σῶμα (π.χ. διαστημόπλοιο) ἔξω ἀπό τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς, πρέπει νά δώσουμε σ' αὐτό τό σῶμα κατακόρυφη ἀρχική ταχύτητα ἴση μέ $\upsilon_0 \geqslant 11{,}2$ km/sec *(ταχύτητα διαφυγῆς)*. Ὅταν τό σῶμα ἀποκτήσει αὐτή τήν ταχύτητα, τότε ἀπελευθερώνεται ἀπό τήν ἕλξη τῆς Γῆς καί μπορεῖ νά κινηθεῖ ἐλεύθερα μέσα στό ἀστρικό διάστημα. Ἐπειδή δέν μποροῦμε νά δώσουμε στό σῶμα αὐτή τήν ἀρχική ταχύτητα, γι' αὐτό χρησιμοποιοῦμε πύραυλο, πού δίνει στό σῶμα κατακόρυφη ἐπιτάχυνση γ, μεγαλύτερη ἀπό τήν ἐπιτάχυνση g τῆς βαρύτητας. Ἔτσι ἡ κατακόρυφη ταχύτητα τοῦ σώματος συνεχῶς αὐξάνει, ὥσπου νά ἀποκτήσει τήν ταχύτητα διαφυγῆς. Τότε καταργεῖται ἡ προωστική δύναμη τοῦ πυραύλου καί τό σῶμα κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα μέσα στό ἀστρικό διάστημα.

Σήμερα μέσα στό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς κινοῦνται πολλοί *τεχνητοί δορυφόροι*, πού διαγράφουν γύρω ἀπό τή Γῆ κυκλικές ἤ ἐλλειπτικές τροχιές. Ὡς κεντρομόλος δύναμη ἐνεργεῖ ἡ ἕλξη, πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ στό δορυφόρο, ἤ μέ ἄλλα λόγια τό βάρος πού ἔχει ὁ δορυφόρος στό ὕψος πού βρίσκεται. Οἱ τεχνητοί δορυφόροι χρησιμοποιοῦνται γιά ἐπιστημονική ἐξερεύνηση τοῦ ἀστρικοῦ διαστήματος, γιά τή μελέτη τῆς ἀτμόσφαιρας καί στίς τηλεπικοινωνίες.

Παρατήρηση. Γύρω ἀπό κάθε οὐράνιο σῶμα ὑπάρχει ἕνα *πεδίο βαρύτητας* π.χ. μέσα στό πεδίο βαρύτητας τοῦ Ἡλίου κινοῦνται οἱ πλανῆτες. Κεντρομόλος δύναμη εἶναι ἡ ἕλξη πού ἐξασκεῖ ὁ Ἥλιος πάνω σέ κάθε πλανήτη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

98. Δύο σφαῖρες ἀπό μόλυβδο ἔχουν ἀκτίνα r, μάζα m καί βρίσκονται σέ ἐπαφή. Νά βρεθεῖ ἡ ἀμοιβαία ἕλξη τῶν μαζῶν τους.
Ἐφαρμογή : $r = 50\ \text{cm}$ καί $m = 5 \cdot 10^3$ kgr

99. Δύο μάζες m_1 καί m_2 βρίσκονται στίς δύο ἄκρες εὐθείας $A_1A_2 = \alpha$. Πάνω σέ αὐτή τήν εὐθεία μπορεῖ νά κινεῖται ἐλεύθερα μιά μάζα m. Σέ ποιά θέση πάνω στήν εὐθεία A_1A_2 μπορεῖ νά ἰσορροπεῖ ἡ μάζα m ;

100. Ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων τῆς Γῆς καί τῆς Σελήνης εἶναι 60 R, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς. Ὁ λόγος τῶν μαζῶν τῆς Γῆς καί τῆς Σελήνης εἶναι $m_\Gamma/m_\Sigma = 81/1$. Σέ πόση ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς πρέπει νά βρεθεῖ ἕνα σῶμα, ὥστε οἱ δύο ἕλξεις πού ἐξασκοῦνται στό σῶμα νά εἶναι ἀντίθετες ;

101. Ἡ μάζα (m_Σ) τῆς Σελήνης εἶναι ἴση μέ τά 0,0123 τῆς μάζας (m_Γ) τῆς Γῆς, δηλαδή εἶναι $m_\Sigma = 0{,}0123\ m_\Gamma$. Ἡ ἀκτίνα τῆς Σελήνης εἶναι $R_\Sigma = 1738$ km. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς πτώσεως (g_Σ) τῶν σωμάτων στήν ἐπιφάνεια τῆς Σελήνης ; Μάζα τῆς Γῆς $m_\Gamma = 6 \cdot 10^{24}$ kgr. Ἕνας ἀστροναύτης, πού ἔχει μάζα $m = 70$ kgr, πόσο βάρος ἔχει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί στήν ἐπιφάνεια τῆς Σελήνης ; $g_\Gamma \simeq 10\ \text{m/sec}^2$.

102. Ἕνα σῶμα ἀφήνεται στή Γῆ νά πέσει ἐλεύθερα ἀπό ὕψος $h_\Gamma = 100$ m. Ἀπό πόσο ὕψος h_Σ πρέπει τό σῶμα νά πέσει ἐλεύθερα στή Σελήνη, ὥστε ἡ ταχύτητα (υ), πού ἔχει τό σῶμα ὅταν φτάνει στήν ἐπιφάνεια τῆς Σελήνης, νά εἶναι ἴση μέ ἐκείνη πού ἔχει, ὅταν φτάνει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ; $g_\Gamma = 10\ \text{m/sec}^2$. $g_\Sigma = 1{,}63\ \text{m/sec}^2$.

103. Ἕνα πλοῖο ἔχει μάζα $m = 100 \cdot 10^6$ kgr (100 χιλιάδες τόνους). Νά ὑπολογιστεῖ ἡ φυγόκεντρη δύναμη ($F_{\varphi\upsilon\gamma}$), πού ἀναπτύσσεται στό πλοῖο ἐξαιτίας τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της, ὅταν τό πλοῖο βρίσκεται στόν ἰσημερινό. Ἀκτίνα τοῦ ἰσημερινοῦ $R = 6\,370$ km. $g = 10\ \text{m/sec}^2$.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Γενικές ἔννοιες

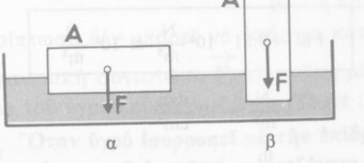
90. Πίεση

Πάνω σέ ἕνα στρῶμα ἄμμου, πού ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι *ὁριζόντια*, τοποθετοῦμε μέ προσοχή ἕνα σῶμα Α, π.χ. ἕνα κομμάτι σιδήρου πού τό σχῆμα του εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο (σχ. 84). Τό βάρος $\vec{F}$ τοῦ σώματος εἶναι δύναμη *κατακόρυφη*, πού κατανέμεται *ὁμοιόμορφα* σέ ὁλόκληρη τήν ἐπιφάνεια στήν ὁποία στηρίζεται τό σῶμα. Παρατηροῦμε ὅτι τό σῶμα Α εἰσχωρεῖ περισσότερο μέσα στήν ἄμμο, ὅταν στηρίζεται μέ τή μικρότερη ἐπιφάνειά του. Ἄρα ἡ παραμόρφωση, πού προκαλεῖ στήν ἄμμο τό σῶμα Α ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $\vec{F}$, αὐξάνει, ὅταν αὐξάνει καί τό πηλίκο τῆς δυνάμεως F διά τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς πιεζόμενης ἐπιφάνειας. Λέμε ὅτι τό σῶμα μέ τό βάρος του ἐξασκεῖ *πίεση* (p) πάνω στήν ἄμμο.

Πίεση (p) ὀνομάζεται τό πηλίκο τῆς δυνάμεως (F) διά τοῦ ἐμβαδοῦ (S) τῆς ἐπιφάνειας, στήν ὁποία ἐνεργεῖ κάθετα ἡ δύναμη.

$$\boxed{\text{πίεση} = \frac{\text{δύναμη}}{\text{ἐμβαδό ἐπιφάνειας}} \qquad p = \frac{F}{S}}$$

Σέ πολλές περιπτώσεις ἐνδιαφερόμαστε νά ἐλαττώσουμε ἤ νά αὐξήσουμε τήν ἐπιφερόμενη πίεση. Ἔτσι π.χ. γιά νά βαδίσουμε πάνω στό χιόνι, χρησιμοποιοῦμε χιονοπέδιλα, πού ἔχουν μεγάλη ἐπιφάνεια. Ἐπίσης ἐφοδιάζουμε τούς τροχούς τῶν τρακτέρ μέ προεξοχές, γιά νά αὐξήσουμε τὴν ἐπιφάνεια ἐπαφῆς τους μέ τό ἔδαφος, ὥστε νά χώνονται λιγότερο μέσα στό μαλακό ἔδαφος. Ἀντίθετα, γιά νά εἰσχωρήσει εὔκολα ἕνα στερεό σῶμα μέσα σέ ἄλλο, περιορίζουμε σημαντικά τήν ἐπιφάνεια ἐπαφῆς, π.χ. στίς βελόνες καί στά ὄργανα πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά κόβουμε (ψαλίδι, μαχαίρι).*



Σχ. 84. Στή θέση β τό σῶμα ἐξασκεῖ μεγαλύτερη πίεση.

* Στά ὑγρά καί στά ἀέρια (ὅταν βρίσκονται ἔξω ἀπό τό πεδίο βαρύτητας) ἡ πίεση εἶναι καταστατικό μέγεθος, δηλαδή χαρακτηρίζει μιά κατάσταση πού ἰσχύει σέ ὅλη τή μάζα τοῦ ρευστοῦ καί εἶναι σαφῶς μονόμετρο μέγεθος.

Μονάδες πιέσεως. Ἂν στήν ἐξίσωση ὁρισμοῦ τῆς πιέσεως $p = F/S$, βάλουμε $F = 1$ καί $S = 1$, βρίσκουμε $p = 1$. Ὥστε *μονάδα πιέσεως* εἶναι ἡ πίεση, πού ἐξασκεῖ δύναμη ἴση μέ τή μονάδα, ὅταν ἐνεργεῖ κάθετα πάνω στή μονάδα ἐπιφάνειας. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι *μονάδα πιέσεως* εἶναι :

$$\boxed{\text{στό σύστημα SI} \qquad \frac{1\ \mathrm{N}}{1\ \mathrm{m^2}} \quad \text{ἤ} \quad 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}}$$

στό σύστημα CGS $1\,\dfrac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm^2}}$ στό τεχνικό σύστημα (ΤΣ) $1\,\dfrac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m^2}}$

Στίς πρακτικές ἐφαρμογές ὡς *μονάδα πιέσεως* χρησιμοποιοῦμε *τήν τεχνική ἀτμόσφαιρα* (1 at) πού εἶναι ἴση μέ *1 κιλοπόντ* (1 kp) *κατά τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο* ($1\ \mathrm{cm^2}$) :

$$\boxed{\text{τεχνική ἀτμόσφαιρα (1 at)} = \frac{1\ \mathrm{kp}}{1\ \mathrm{cm^2}} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \mathrm{at} = 1\,\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm^2}}}$$

Σέ πολλές περιπτώσεις ὡς *μονάδα πιέσεως* χρησιμοποιοῦμε *τό 1 πόντ* (1 p) *κατά τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο* ($1\ \mathrm{cm^2}$) :

$$\text{μονάδα πιέσεως} \qquad \frac{1\ \mathrm{p}}{1\ \mathrm{cm^2}} \quad \text{ἤ} \quad 1\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm^2}}$$

Οἱ δύο τελευταῖες μονάδες εἶναι ἔξω ἀπό τά τρία γνωστά συστήματα μονάδων, εἶναι ὅμως χρήσιμες στίς ἐφαρμογές.

Παρατήρηση. Στίς Ἀγγλοσαξονικές χῶρες μονάδα πιέσεως εἶναι ἡ μιά λίμπρα (1 lb) κατά τετραγωνική ἴντσα ($\mathrm{in^2}$), δηλαδή :

$$\text{ἀγγλοσαξονική μονάδα πιέσεως } 1\ \mathrm{lb/in^2}$$

Μέ αὐτή τή μονάδα πιέσεως μετρᾶμε στήν Ἑλλάδα *τήν ὑπερπίεση* τοῦ ἀέρα μέσα στούς ἀεροθαλάμους τῶν τροχῶν τοῦ αὐτοκινήτου.

Ἐπειδή εἶναι :

$1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}$, $1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N}$, $1\ \mathrm{m^2} = 10^4\ \mathrm{cm^2}$, $1\ \mathrm{lb} = 0{,}453\ \mathrm{kp}$ καί $1\ \mathrm{in} = 2{,}54\ \mathrm{cm}$

εὔκολα βρίσκουμε ὅτι μεταξύ τῶν παραπάνω μονάδων πιέσεως ὑπάρχουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις :

$$1\ \mathrm{at} = \frac{1\ \mathrm{kp}}{1\ \mathrm{cm^2}} = \frac{9{,}81\ \mathrm{N}}{10^{-4}\ \mathrm{m^2}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{1\ \mathrm{at} = 9{,}81\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} \simeq 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}}$$

$$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \frac{10^5\ \mathrm{dyn}}{10^4\ \mathrm{cm^2}} \quad \text{ἤ} \quad 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 10\,\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm^2}}$$

$$1\,\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in^2}} = \frac{0{,}453\ \mathrm{kp}}{(2{,}54\ \mathrm{cm})^2} \quad \text{ἤ} \quad 1\,\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in^2}} \simeq 0{,}0703\ \mathrm{at}$$

91. Τά ρευστά

Ὀνομάζονται *ρευστά* τά σώματα πού ρέουν, δηλαδή ἐκεῖνα πού μποροῦν εὔκολα νά μεταβάλλουν τό σχῆμα τους. Τά μόρια τῶν ρευστῶν εἶναι εὐκίνητα καί μποροῦν νά μετακινοῦνται εὔκολα σχετικά μέ τά γειτονικά τους μόρια, καί γι' αὐτό τά ρευστά, ὅταν ἠρεμοῦν, παίρνουν τό σχῆμα τοῦ δοχείου μέσα στό ὁποῖο βρίσκονται.

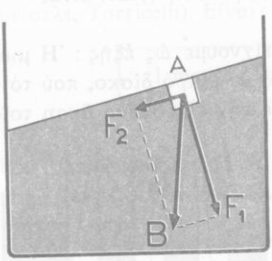
Ρευστά εἶναι *τά ὑγρά* καί *τά ἀέρια*. Τά ὑγρά πρακτικῶς θεωροῦνται *ἀσυμπίεστα*, γιατί μέ τήν ἐπίδραση πιέσεων ὁ ὄγκος τους παθαίνει ἀσήμαντη μεταβολή. Γι' αὐτό τά ὑγρά ἔχουν ὁρισμένο ὄγκο καί παρουσιάζουν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια. Ἀντίθετα τά ἀέρια εἶναι πολύ *συμπιεστά* καί τείνουν νά ἀποκτήσουν διαρκῶς μεγαλύτερο ὄγκο.

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

Υδροστατική πίεση

92. Ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν

Μέσα σέ ἕνα δοχεῖο ἰσορροπεῖ ὑγρό μέ τήν ἐπίδραση μόνο τοῦ βάρους του. Τά μόρια τοῦ ὑγροῦ εἶναι εὐκίνητα καί μποροῦν νά μετατοπίζονται εὔκολα. Ὥστε ἡ ἰσορροπία τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἰσορροπίας τοῦ κάθε μορίου του. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ δέν εἶναι ὁριζόντια, τότε τό βάρος $\vec{B}$ ἑνός ἐπιφανειακοῦ ὄγκου Α (σχ. 85) μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ στίς δύο συνιστῶσες $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$. Ἡ συνιστῶσα $\vec{F}_1$ εἶναι κάθετη στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια καί ἐξουδετερώνεται ἀπό τήν ἀντίδραση τῶν μορίων πού βρίσκονται κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια, γιατί τό ὑγρό εἶναι ἀσυμπίεστο. Ἡ συνιστῶσα $\vec{F}_2$ εἶναι παράλληλη μέ τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καί θά κινήσει τόν ὄγκο Α κατά τή διεύθυνση καί τή φορά της. Ἑπομένως σ' αὐτή τήν περίπτωση δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει κατάσταση ἰσορροπίας τοῦ ὑγροῦ. Ἡ ἐπιφανειακή συνιστῶσα $\vec{F}_2$ εἶναι ἴση μέ μηδέν, μόνο ὅταν ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εἶναι *ὁριζόντια*. Ὥστε :



Σχ. 85. Ἡ συνιστῶσα $\vec{F}_2$ θά κινοῦσε τό στοιχειώδη ὄγκο Α.

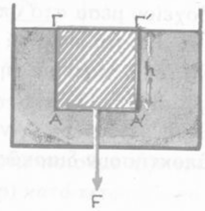
Ὅταν ὑγρό ἰσορροπεῖ μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εἶναι ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

93. Ὑδροστατική πίεση

Ἕνα ὑγρό ἰσορροπεῖ μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του (σχ. 86). Φανταζόμαστε ὅτι μιά ὁμάδα μορίων τοῦ ὑγροῦ ἀποτελεῖ ὁριζόντια ἐπιφάνεια ΑΑ΄ μέ ἐμβαδό S. Ἡ κατακόρυφη στήλη τοῦ ὑγροῦ, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια ΑΑ΄ ἔχει ὕψος h καί ὄγκο $V = h \cdot S$.

Ἄν τό ὑγρό ἔχει εἰδικό βάρος ε, τότε τό βάρος τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ εἶναι $F = V \cdot \varepsilon$ ἤ $F = h \cdot S \cdot \varepsilon$. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐνεργεῖ κάθετα στήν ἐπιφάνεια ΑΑ΄ καί ἑπομένως σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας ΑΑ΄ ἐξασκεῖται πίεση:

$$p = \frac{F}{S} \quad \text{ἤ} \quad p = h \cdot \varepsilon$$

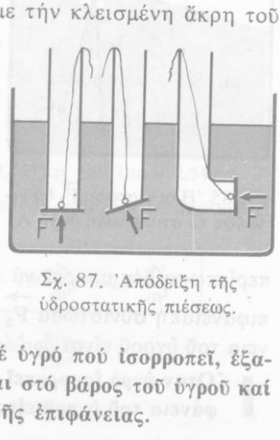


Σχ. 86. Μέτρηση τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως.

Ἡ πίεση αὐτή ὀνομάζεται **ὑδροστατική πίεση** καί ὀφείλεται στό βάρος τῶν ὑπερκείμενων μορίων τοῦ ὑγροῦ. Ἡ στήλη τοῦ ὑγροῦ ἰσορροπεῖ, γιατί τό ἀσυμπίεστο ὑγρό, πού βρίσκεται κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια ΑΑ΄, δημιουργεῖ ἀντίδραση $\vec{F'}$, πού εἶναι ἀντίθετη μέ τή δύναμη $\vec{F}$. Ὥστε καί οἱ δύο ὄψεις τῆς ἐπιφάνειας ΑΑ΄ δέχονται πίεση $p = h \cdot \varepsilon$.

Ἄν θεωρήσουμε μέσα στό ὑγρό πού ἠρεμεῖ, ἕνα *ὁριζόντιο ἐπίπεδο* σέ βάθος h κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, τότε ὅλα τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου δέχονται τήν ἴδια ὑδροστατική πίεση (γιατί εἶναι $p = h \cdot \varepsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$).

Τήν ὑδροστατική πίεση πειραματικά τήν δείχνουμε ὡς ἑξῆς: Ἡ μιά βάση γυάλινου κυλίνδρου κλείνεται ὑδατοστεγῶς μέ μικρό δίσκο, πού τόν συγκρατοῦμε μέ λεπτό νῆμα (σχ. 87). Βυθίζουμε τήν κλεισμένη ἄκρη τοῦ κυλίνδρου μέσα στό νερό. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ δίσκος μένει κολλημένος στόν κύλινδρο, *ὁποιαδήποτε κλίση* καί ἄν ἔχει ὁ σωλήνας. Αὐτό συμβαίνει, γιατί στό δίσκο ἐνεργεῖ κάθετα μιά δύναμη $\vec{F}$, πού ὀφείλεται στήν ὑδροστατική πίεση. Ὁ δίσκος ἀποχωρίζεται ἀπό τόν κύλινδρο, ὅταν μέσα στόν κύλινδρο βάλουμε νερό πού φτάνει ὥς τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ στό ἐξωτερικό δοχεῖο. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό συμπέρασμα:



Σχ. 87. Ἀπόδειξη τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως.

I. Σέ κάθε ἐπιφάνεια, πού βρίσκεται μέσα σέ ὑγρό πού ἰσορροπεῖ, ἐξασκεῖται ὑδροστατική πίεση, ἡ ὁποία ὀφείλεται στό βάρος τοῦ ὑγροῦ καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τόν προσανατολισμό τῆς ἐπιφάνειας.

ΙΙ. Ἡ ὑδροστατική πίεση (p) σέ ἕνα σημεῖο μέσα στό ὑγρό εἶναι ἀνάλογη μέ τό εἰδικό βάρος (ε) τοῦ ὑγροῦ καί μέ τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τοῦ θεωρούμενου σημείου ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

ὑδροστατική πίεση $p = h \cdot \varepsilon$ ἤ $p = h \cdot \rho \cdot g$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ ($\varepsilon = \rho \cdot g$).

94. Μέτρηση πιέσεων μέ τό ὕψος στήλης ὑδραργύρου

Σέ πολλές περιπτώσεις ὡς μονάδα πιέσεως χρησιμοποιεῖται *τό ἕνα ἑκατοστόμετρο στήλης ὑδραργύρου* (1 cm Hg), δηλαδή ἡ πίεση, τήν ὁποία ἐξασκεῖ στή βάση της μιά στήλη ὑδραργύρου, πού ἔχει ὕψος ἕνα ἑκατοστόμετρο (1 cm). Ἐπειδή τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\varepsilon = 13{,}6$ p/cm³, ἀπό τήν ἐξίσωση $p = h \cdot \varepsilon$ βρίσκουμε:

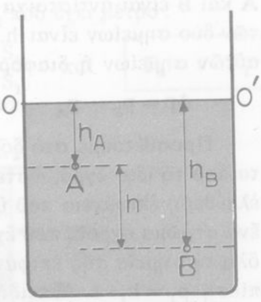
$$p = 1\ \text{cm} \cdot 13{,}6\ \text{p/cm}^3 \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{1\ \text{cm Hg} = 13{,}6\ \text{p/cm}^2}$$

Ἐπίσης ὡς μονάδα πιέσεως χρησιμοποιεῖται καί *τό ἕνα χιλιοστόμετρο στήλης ὑδραργύρου* (1 mm Hg), δηλαδή ἡ πίεση, τήν ὁποία ἐξασκεῖ στή βάση της μιά στήλη ὑδραργύρου, πού ἔχει ὕψος ἕνα χιλιοστόμετρο (1 mm). Ἡ μονάδα αὐτή ὀνομάζεται καί *Torr* (ἀπό τό ὄνομα τοῦ Ἰταλοῦ φυσικοῦ Τορριτσέλι, Torricelli). Εἶναι:

$$\boxed{1\ \text{mm Hg ἤ } 1\ \text{Torr} = 0{,}1\ \text{cm Hg} = 1{,}36\ \text{p/cm}^2}$$

95. Διαφορά πιέσεως μεταξύ δύο σημείων

Μέσα σέ ὑγρό πού ἠρεμεῖ καί ἔχει εἰδικό βάρος ε, θεωροῦμε δύο σημεῖα Α καί Β πού ἀντίστοιχα βρίσκονται σέ βάθος h_A καί h_B (σχ. 88). Σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου, πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Α, ἐπικρατεῖ σταθερή ὑδροστατική πίεση, πού εἶναι ἴση μέ $p_A = h_A \cdot \varepsilon$. Ἐπίσης σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὁριζόντιου ἐπιπέδου, πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Β, ἐπικρατεῖ σταθερή ὑδροστατική πίεση ἴση μέ $p_B = h_B \cdot \varepsilon$. Ἡ διαφορά πιέσεως μεταξύ τῶν ση-



Σχ. 88. Διαφορά πιέσεως μεταξύ δύο σημείων μέσα στό ὑγρό.

μείων Α καί Β ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν πιέσεων, πού ἀντιστοιχοῦν στ
δύο ὁριζόντια ἐπίπεδα, δηλαδή εἶναι:

$$\Delta p = p_B - p_A = (h_B \cdot \varepsilon) - (h_A \cdot \varepsilon) \quad \text{καί} \quad \Delta p = (h_B - h_A) \cdot \varepsilon$$

ὅπου $h_B - h_A = h$ εἶναι ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο σημείων Α καί Β.
Ὥστε:

Ἡ διαφορά πιέσεως (Δp) μεταξύ δύο σημείων ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ εἶνα ἀνάλογη μέ τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τῶν δύο σημείων καί μέ το εἰδικό βάρος (ε) τοῦ ὑγροῦ.

$$\boxed{\text{διαφορά πιέσεως} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon}$$

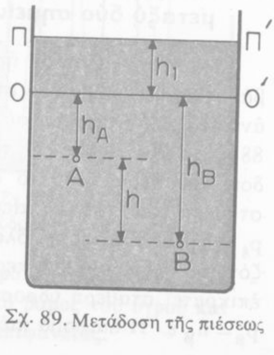
96. Αἴτια πού δημιουργοῦν πίεση σέ ἕνα ὑγρό

Ὅταν ἕνα ὑγρό ἰσορροπεῖ μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, τότε σε κάθε σημεῖο τοῦ ὑγροῦ καί σέ κάθε ἐπιφάνεια, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή με τό ὑγρό, ἐξασκεῖται *ὑδροστατική πίεση*, πού ὀφείλεται στό βάρος τοῦ ὑγροῦ. Σέ ἕνα ὅμως ὑγρό, πού ἠρεμεῖ, μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ πίεση καί *μέ ἔμβολο*, στό ὁποῖο ἐνεργεῖ μιά δύναμη $\vec{F}$. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου ἔχει ἐμβαδό S, τότε ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ τό ἔμβολο στό ὑγρό, εἶναι $p = F/S$. Ὥστε σέ ἕνα ὑγρό πού ἠρεμεῖ, ἀναπτύσσεται πίεση, πού ὀφείλεται *στό βάρος τοῦ ὑγροῦ, σέ ἔμβολο* ἤ καί στά δύο αὐτά μαζί αἴτια.

97. Μετάδοση τῶν πιέσεων. Ἀρχή τοῦ Pascal

Μέσα σέ ὑγρό, πού ἰσορροπεῖ, ἡ ὑδροστατική πίεση σέ δύο σημεῖα Α καί Β εἶναι ἀντίστοιχα p_A καί p_B (σχ. 89). Ἄν ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο σημείων εἶναι h, τότε μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν σημείων ἡ διαφορά πιέσεως εἶναι:

$$\Delta p = p_B - p_A \quad \text{καί} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon$$



Σχ. 89. Μετάδοση τῆς πιέσεως

Προσθέτουμε στό δοχεῖο μιά νέα ποσότητα ἀπό τό ἴδιο ὑγρό, ὥστε πάνω ἀπό τήν παλιά ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ νά σχηματιστεῖ ἕνα στρῶμα ὑγροῦ, πού ἔχει πάχος h_1. Τότε σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας ΟΟ′ ἐξασκεῖται πίεση $p_1 = h_1 \cdot \varepsilon$. Ἐπειδή τό ὑγρό εἶναι *ἀσυμπίεστο*, ἡ πίεση στά σημεῖα Α καί Β γίνεται ἀντίστοιχα $(p_1 + p_A)$ καί $(p_1 + p_B)$. Μεταξύ τῶν δύο σημείων Α καί Β ὑπάρχει πάλι *ἡ ἴδια διαφορά πιέσεως* :

$$\Delta p = (p_1 + p_B) - (p_1 + p_A) = p_B - p_A \quad \text{καί} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon$$

Τό ἐξαγόμενο αὐτό φανερώνει ὅτι *ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως*, πού προκαλεῖται σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ὑγροῦ, *μεταδίδεται ὁλόκληρη* σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Αὔξηση τῆς πιέσεως μποροῦμε νά προκαλέσουμε καί μέ ἔμβολο. Γενικά ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη **ἀρχή τοῦ Pascal** :

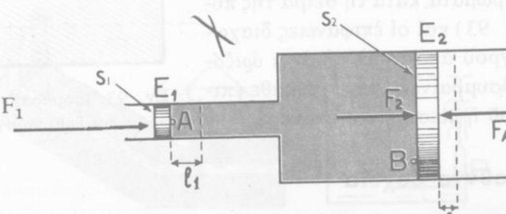
Ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως, ἡ ὁποία προκαλεῖται σέ ἕνα σημεῖο ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ, μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ.

α. Ἰσορροπία ὑγροῦ μέσα στήν ἀτμόσφαιρα. Σέ ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται σέ βάθος h μέσα σέ ὑγρό πού ἰσορροπεῖ, ὑπάρχει *ὑδροστατική πίεση* $p_{\upsilon\delta\rho} = h \cdot \varepsilon$. Πάνω ὅμως ἀπό τό ὑγρό εἶναι ἡ ἀτμόσφαιρα, καί γι' αὐτό σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ ἐξασκεῖται *ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση* ($p_{\alpha\tau\mu}$). Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ Pascal ἡ πίεση αὐτή μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Ἑπομένως ἡ πίεση (p_A), πού ὑπάρχει στό σημεῖο Α, εἶναι ἴση μέ *τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα* τῆς ὑδροστατικῆς καί τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, δηλαδή εἶναι :

$$p_A = p_{\alpha\tau\mu} + h \cdot \varepsilon$$

* β. Ἐφαρμογές τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal. Ἕνα δοχεῖο εἶναι γεμάτο μέ ὑγρό καί κλείνεται ἑρμητικά μέ δύο ἔμβολα (σχ. 90). Τό ἐμβαδό S_2 τοῦ ἐμβόλου E_2 εἶναι ν φορές μεγαλύτερο ἀπό τό ἐμβαδό S_1 τοῦ ἐμβόλου E_1, δηλαδή εἶναι $S_2 = \nu \cdot S_1$. Ἐφαρμόζοντας στό μικρότερο ἔμβολο E_1 μιά κάθετη δύναμη $\vec{F_1}$ προκαλοῦμε αὔξηση τῆς πιέσεως κατά $p = F_1/S_1$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ Pascal αὐτή ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως (p) μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Ἄρα αὐτή ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως δημιουργεῖ στό ἔμβολο E_2 μιά κάθετη δύναμη $\vec{F_2}$ πού ἔχει μέτρο :

$$F_2 = p \cdot S_2 \quad \text{ἤ} \quad F_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 \quad \text{ἤ} \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \quad \text{καί} \quad \boxed{F_2 = \nu \cdot F_1}$$



Σχ. 90. Ἐφαρμογή τῆς μεταδόσεως τῆς πιέσεως.

μείων Α καί Β ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν πιέσεων, πού ἀντιστοιχοῦν στά δύο ὁριζόντια ἐπίπεδα, δηλαδή εἶναι:

$$\Delta p = p_B - p_A = (h_B \cdot \varepsilon) - (h_A \cdot \varepsilon) \quad \text{καί} \quad \Delta p = (h_B - h_A) \cdot \varepsilon$$

ὅπου $h_B - h_A = h$ εἶναι ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο σημείων Α καί Β. Ὥστε:

Ἡ διαφορά πιέσεως (Δp) μεταξύ δύο σημείων ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ εἶναι ἀνάλογη μέ τήν κατακόρυφη ἀπόσταση (h) τῶν δύο σημείων καί μέ τό εἰδικό βάρος (ε) τοῦ ὑγροῦ.

$$\boxed{\text{διαφορά πιέσεως} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon}$$

96. Αἴτια πού δημιουργοῦν πίεση σέ ἕνα ὑγρό

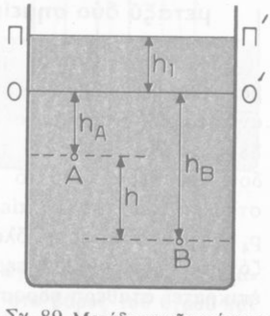
Ὅταν ἕνα ὑγρό ἰσορροπεῖ μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, τότε σέ κάθε σημεῖο τοῦ ὑγροῦ καί σέ κάθε ἐπιφάνεια, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τό ὑγρό, ἐξασκεῖται *ὑδροστατική πίεση*, πού ὀφείλεται στό βάρος τοῦ ὑγροῦ. Σέ ἕνα ὅμως ὑγρό, πού ἠρεμεῖ, μπορεῖ νά δημιουργηθεῖ πίεση καί *μέ ἔμβολο*, στό ὁποῖο ἐνεργεῖ μιά δύναμη $\vec{F}$. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου ἔχει ἐμβαδό S, τότε ἡ πίεση πού ἐξασκεῖ τό ἔμβολο στό ὑγρό, εἶναι $p = F/S$. Ὥστε σέ ἕνα ὑγρό πού ἠρεμεῖ, ἀναπτύσσεται πίεση, πού ὀφείλεται *στό βάρος τοῦ ὑγροῦ, σέ ἔμβολο* ἤ καί στά δύο αὐτά μαζί αἴτια.

97. Μετάδοση τῶν πιέσεων. Ἀρχή τοῦ Pascal

Μέσα σέ ὑγρό, πού ἰσορροπεῖ, ἡ ὑδροστατική πίεση σέ δύο σημεῖα Α καί Β εἶναι ἀντίστοιχα p_A καί p_B (σχ. 89). Ἄν ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο σημείων εἶναι h, τότε μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν σημείων ἡ διαφορά πιέσεως εἶναι:

$$\Delta p = p_B - p_A \quad \text{καί} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon$$

Προσθέτουμε στό δοχεῖο μιά νέα ποσότητα ἀπό τό ἴδιο ὑγρό, ὥστε πάνω ἀπό τήν παλιά ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ νά σχηματιστεῖ ἕνα στρῶμα ὑγροῦ, πού ἔχει πάχος h_1. Τότε σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας ΟΟ΄ ἐξασκεῖται πίεση $p_1 = h_1 \cdot \varepsilon$. Ἐπειδή τό ὑγρό εἶναι *ἀσυμπίεστο*, ἡ πίεση στά σημεῖα Α καί Β γίνεται ἀντίστοιχα $(p_1 + p_A)$ καί $(p_1 + p_B)$. Μεταξύ



Σχ. 89. Μετάδοση τῆς πιέσεως

τῶν δύο σημείων Α καί Β ὑπάρχει πάλι *ἡ ἴδια διαφορά πιέσεως*:

$$\Delta p = (p_1 + p_B) - (p_1 + p_A) = p_B - p_A \quad \text{καί} \quad \Delta p = h \cdot \varepsilon$$

Τό ἐξαγόμενο αὐτό φανερώνει ὅτι *ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως*, πού προκαλεῖται σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ὑγροῦ, *μεταδίδεται ὁλόκληρη* σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Αὔξηση τῆς πιέσεως μποροῦμε νά προκαλέσουμε καί μέ ἔμβολο. Γενικά ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη **ἀρχή τοῦ Pascal**:

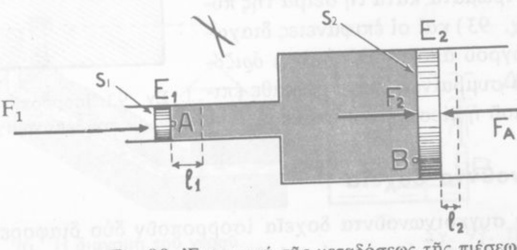
Ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως, ἡ ὁποία προκαλεῖται σέ ἕνα σημεῖο ὑγροῦ πού ἰσορροπεῖ, μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ.

α. Ἰσορροπία ὑγροῦ μέσα στήν ἀτμόσφαιρα. Σέ ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται σέ βάθος h μέσα σέ ὑγρό πού ἰσορροπεῖ, ὑπάρχει *ὑδροστατική πίεση* $p_{υδρ} = h \cdot \varepsilon$. Πάνω ὅμως ἀπό τό ὑγρό εἶναι ἡ ἀτμόσφαιρα, καί γι' αὐτό σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ ἐξασκεῖται *ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση* ($p_{ατμ}$). Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ Pascal ἡ πίεση αὐτή μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Ἑπομένως ἡ πίεση (p_A), πού ὑπάρχει στό σημεῖο Α, εἶναι ἴση μέ *τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα* τῆς ὑδροστατικῆς καί τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, δηλαδή εἶναι:

$$p_A = p_{ατμ} + h \cdot \varepsilon$$

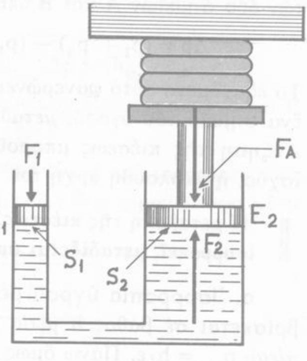
* β. Ἐφαρμογές τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal. Ἕνα δοχεῖο εἶναι γεμάτο μέ ὑγρό καί κλείνεται ἑρμητικά μέ δύο ἔμβολα (σχ. 90). Τό ἐμβαδό S_2 τοῦ ἐμβόλου E_2 εἶναι ν φορές μεγαλύτερο ἀπό τό ἐμβαδό S_1 τοῦ ἐμβόλου E_1, δηλαδή εἶναι $S_2 = \nu \cdot S_1$. Ἐφαρμόζοντας στό μικρότερο ἔμβολο E_1 μιά κάθετη δύναμη $\vec{F_1}$ προκαλοῦμε αὔξηση τῆς πιέσεως κατά $p = F_1/S_1$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ Pascal αὐτή ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως (p) μεταδίδεται ἀμετάβλητη σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ὑγροῦ. Ἄρα αὐτή ἡ αὔξηση τῆς πιέσεως δημιουργεῖ στό ἔμβολο E_2 μιά κάθετη δύναμη $\vec{F_2}$ πού ἔχει μέτρο:

$$F_2 = p \cdot S_2 \quad \text{ἤ} \quad F_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 \quad \text{ἤ} \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \quad \text{καί} \quad \boxed{F_2 = \nu \cdot F_1}$$

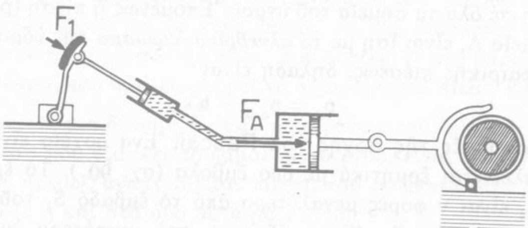


Σχ. 90. Ἐφαρμογή τῆς μεταδόσεως τῆς πιέσεως.

Ὥστε μέ τήν παραπάνω διάταξη πετυχαίνουμε *νά πολλαπλασιάσουμε* τή δύναμη $\vec{F_1}$ ἐπί τό λόγο $ν = S_2/S_1$ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἐμβόλων. Γιά νά ἰσορροπήσει τό μεγαλύτερο ἔμβολο E_2, πρέπει νά ἐνεργήσει σ' αὐτό τό ἔμβολο μιά δύναμη $\vec{F_A}$ ἀντίθετη μέ τή δύναμη $\vec{F_2}$. Ἔτσι ἡ μικρή δύναμη $\vec{F_1}$ ἰσορροπεῖ τή ν φορές μεγαλύτερη *ἀντίσταση* $\vec{F_A}$, πού ἐνεργεῖ στό μεγάλο ἔμβολο. Στήν παραπάνω ἀρχή στηρίζεται ἡ λειτουργία *τοῦ ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου* (σχ. 91) καί *τοῦ ὑδραυλικοῦ φρένου* (σχ. 92).



Σχ. 91. Ὑδραυλικό πιεστήριο.



Σχ. 92. Σχηματική παράσταση ὑδραυλικοῦ φρένου.

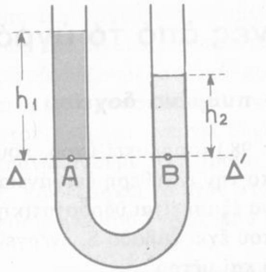
* 98. Ἰσορροπία ὑγρῶν πού δέν ἀναμιγνύονται

Μέσα στό ἴδιο δοχεῖο ὑπάρχουν ὑγρά πού δέν ἀναμιγνύονται (π.χ. ὑδράργυρος, νερό, πετρέλαιο). Ὅταν τά ὑγρά ἰσορροποῦν, σχηματίζουν διαδοχικά στρώματα κατά τή σειρά τῆς πυκνότητάς τους (σχ. 93) καί οἱ ἐπιφάνειες διαχωρισμοῦ τοῦ ἑνός ὑγροῦ ἀπό τό ἄλλο εἶναι *ὁριζόντιο ἐπίπεδο*. Αὐτό συμβαίνει, γιατί σέ κάθε ἐπιφάνεια διαχωρισμοῦ ἡ πίεση εἶναι σταθερή.

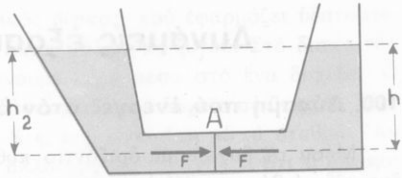

Σχ. 93. Ἰσορροπία τριῶν ὑγρῶν, πού δέν ἀναμιγνύονται.

99. Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα

Μέσα σέ δύο συγκοινωνοῦντα δοχεῖα ἰσορροποῦν δύο διαφορετικά ὑγρά, πού δέν ἀναμιγνύονται (π.χ. νερό καί ἐλαιόλαδο) καί ἔχουν εἰδικά βάρη



Σχ. 94. Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα, πού περιέχουν δύο διαφορετικά ὑγρά.



Σχ. 95. Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα μέ τό ἴδιο ὑγρό.

ε_1 καί ε_2. Τότε οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειες τῶν δύο ὑγρῶν δέ βρίσκονται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 94). Στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο ΔΔ′, πού εἶναι προέκταση τῆς ἐπιφάνειας διαχωρισμοῦ τῶν δύο ὑγρῶν, τά δύο ὑγρά ἐξασκοῦν τήν ἴδια ὑδροστατική πίεση καί ἑπομένως εἶναι :

$$p_A = p_B \quad \text{ἤ} \quad h_1 \cdot \varepsilon_1 = h_2 \cdot \varepsilon_2 \quad \text{καί} \quad \boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (1)$$

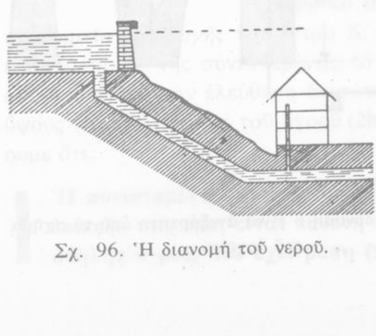
Ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι :

Ὅταν μέσα σέ συγκοινωνοῦντα δοχεῖα ἰσορροποῦν δύο ὑγρά πού δέν ἀναμιγνύονται, τότε τά ὕψη τῶν ὑγρῶν πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια διαχωρισμοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέ τά εἰδικά βάρη τους.

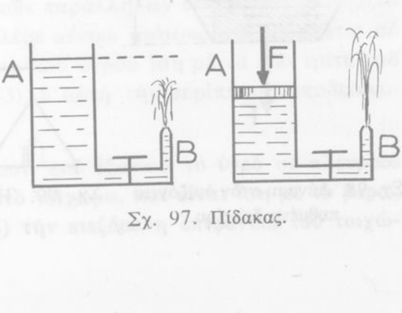
Ἄν μέσα στά συγκοινωνοῦντα δοχεῖα ὑπάρχει μόνο τό ἴδιο ὑγρό, τότε εἶναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ καί ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε $h_1 = h_2 = h$ (σχ. 95). Δηλαδή:

Ὅταν μέσα σέ συγκοινωνοῦντα δοχεῖα ἰσορροπεῖ ἕνα ὑγρό, τότε ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ μέσα σέ ὅλα τά δοχεῖα βρίσκεται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

Ἐφαρμογή τῶν συγκοινωνούντων δοχείων ἔχουμε στό δίκτυο διανομῆς τοῦ νεροῦ στίς πόλεις (σχ. 96), στούς πίδακες, (σχ. 97), στά ἀρτεσιανά πηγάδια, στόν ὑγροδείκτη κ.ἄ.



Σχ. 96. Ἡ διανομή τοῦ νεροῦ.



Σχ. 97. Πίδακας.

Δυνάμεις ἐξασκούμενες ἀπό τό ὑγρό

100. Δύναμη πού ἐνεργεῖ στόν ὁριζόντιο πυθμένα δοχείου

Μέσα σέ δοχεῖο μέ ὁριζόντιο πυθμένα (σχ. 98) ἰσορροπεῖ ὑγρό, πού ἔχει εἰδικό βάρος ε. Ἡ ἀπόσταση τοῦ πυθμένα ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εἶναι h. Τότε σέ κάθε σημεῖο τοῦ πυθμένα ἐξασκεῖται ὑδροστατική πίεση $p = h \cdot \varepsilon$. Ἄρα σέ ὁλόκληρο τόν πυθμένα, πού ἔχει ἐμβαδό S, ἐνεργεῖ κατακόρυφη δύναμη, πού ἔχει φορά πρός τά κάτω καί μέτρο:

$$F = p \cdot S \quad \text{ἤ} \quad F = h \cdot S \cdot \varepsilon \tag{1}$$

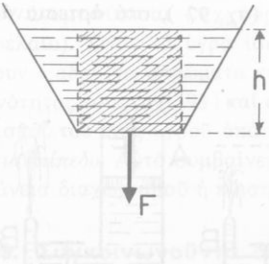
Ἀλλά $h \cdot S$ εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς στήλης ὑγροῦ, πού ἔχει βάση τόν πυθμένα καί ὕψος h. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι:

Ἡ δύναμη (F) πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στόν ὁριζόντιο πυθμένα τοῦ δοχείου εἶναι ἴση μέ τό βάρος μιᾶς κατακόρυφης στήλης ὑγροῦ, πού ἔχει βάση (S) τόν πυθμένα καί ὕψος (h) τήν ἀπόσταση τοῦ πυθμένα ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

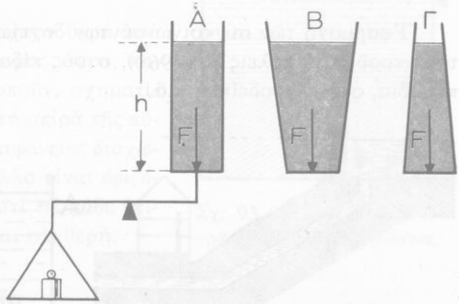
Ἀπό τόν παραπάνω νόμο συνάγεται ὅτι:

Ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στόν ὁριζόντιο πυθμένα τοῦ δοχείου εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό σχῆμα τοῦ δοχείου, δηλαδή εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό βάρος τοῦ ὑγροῦ πού περιέχεται στό δοχεῖο.

Τό συμπέρασμα αὐτό ἐπαληθεύεται πειραματικά μέ τή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 99. Σέ κατάλληλο στήριγμα στερεώνουμε γυάλινα δοχεῖα, πού εἶναι χωρίς πυθμένα καί ἔχουν διαφορετικά σχήματα. Ὡς πυθμέ-



Σχ. 98. Δύναμη στόν ὁριζόντιο πυθμένα δοχείου.



Σχ. 99. Ἡ δύναμη F εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό σχῆμα τοῦ δοχείου.

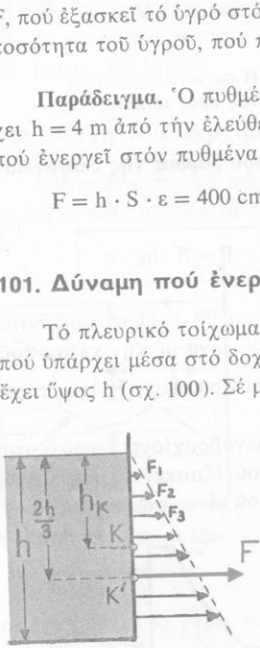
νας τῶν δοχείων χρησιμεύει μεταλλικός δίσκος, πού ἐφαρμόζει ὑδατοστεγῶς καί εἶναι στερεωμένος στή μιά ἄκρη φάλαγγας ζυγοῦ. Στό δίσκο τοῦ ζυγοῦ βάζουμε σταθμά καί ἀργά χύνουμε νερό μέσα στό ἕνα δοχεῖο. Ὁ πυθμένας ἀποσπᾶται, ὅταν τό νερό φτάσει μέσα στό δοχεῖο σέ ὕψος h. Τότε στόν πυθμένα ἐνεργεῖ δύναμη $F = h \cdot S \cdot \varepsilon$, πού εἶναι ἴση μέ τά σταθμά. Ἄν ἐπαναλάβουμε τό πείραμα καί μέ τά ἄλλα δοχεῖα, βρίσκουμε ὅτι ἡ δύναμη F, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στόν πυθμένα, εἶναι πάντοτε ἡ ἴδια, ἄσχετα ἀπό τήν ποσότητα τοῦ ὑγροῦ, πού περιέχεται στό δοχεῖο.

Παράδειγμα. Ὁ πυθμένας μιᾶς δεξαμενῆς ἔχει ἐμβαδό $S = 2\ m^2$ καί ἀπέχει $h = 4$ m ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ. Ἡ κατακόρυφη δύναμη, πού ἐνεργεῖ στόν πυθμένα, ἔχει μέτρο:

$$F = h \cdot S \cdot \varepsilon = 400\ cm \cdot 2 \cdot 10^4\ cm^2 \cdot 1\ p/cm^3 = 8 \cdot 10^6\ p = 8\,000\ kp$$

101. Δύναμη πού ἐνεργεῖ στό πλευρικό τοίχωμα δοχείου

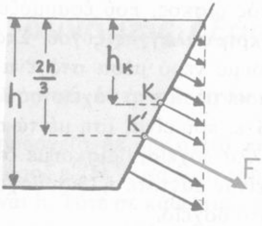
Τό πλευρικό τοίχωμα τοῦ δοχείου θεωροῦμε ὅτι εἶναι ἐπίπεδο. Τό ὑγρό πού ὑπάρχει μέσα στό δοχεῖο ἔχει εἰδικό βάρος ε καί σχηματίζει στήλη πού ἔχει ὕψος h (σχ. 100). Σέ μιά στοιχειώδη ἐπιφάνεια τοῦ τοιχώματος, πού ἔχει ἐμβαδό ΔS, ἐνεργεῖ *ἡ κάθετη δύναμη* $F_1 = p_1 \cdot \Delta S$, ὅπου p_1 εἶναι ἡ ὑδροστατική πίεση στό κέντρο τῆς στοιχειώδους ἐπιφάνειας. Ἐπίσης σέ ὅλες τίς στοιχειώδεις ἐπιφάνειες τοῦ τοιχώματος ἐνεργοῦν *κάθετα* οἱ δυνάμεις $\vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots \vec{F_\nu}$, πού εἶναι *παράλληλες μέ τήν ἴδια φορά* καί τό μέτρο τους διαρκῶς αὐξάνει, ὅσο κατεβαίνουμε μέσα στό ὑγρό. Οἱ παράλληλες δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν σέ ὁλόκληρο τό τοίχωμα, ἔχουν *συνισταμένη* $\vec{F}$, πού εἶναι *κάθετη* στό τοίχωμα, ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν



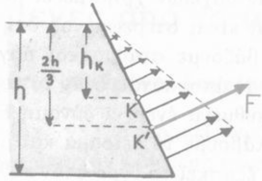
Σχ. 100. Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ εἶναι ὁριζόντια.

καί *σημεῖο ἐφαρμογῆς* τό κέντρο K′ τῶν παράλληλων δυνάμεων. Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς K′ τῆς συνισταμένης τό λέμε *κέντρο πιέσεως* καί βρίσκεται σέ ἀπόσταση ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἴση μέ τά δύο τρίτα τοῦ ὕψους (h) τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ (2h/3). Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀποδεικνύουμε ὅτι:

Ἡ συνισταμένη (F) τῶν δυνάμεων, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό σέ πλευρικό ἐπίπεδο τοίχωμα, εἶναι κάθετη στό τοίχωμα, καί εἶναι ἴση μέ τό βάρος στήλης ὑγροῦ, πού ἔχει βάση (S) τήν πιεζόμενη ἐπιφάνεια τοῦ τοιχώ-



Σχ. 101. Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει διεύθυνση πρός τά κάτω.



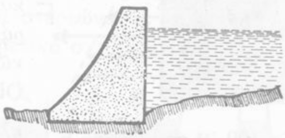
Σχ. 102. Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει διεύθυνση πρός τά πάνω.

ματος καί ὕψος τήν ἀπόσταση (h_K) τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφάνειας ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

δύναμη σέ πλευρικό ἐπίπεδο τοίχωμα :	$F = S \cdot h_K \cdot \varepsilon$

Ἄν τό τοίχωμα εἶναι κατακόρυφο, ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ εἶναι ὁριζόντια (σχ. 100). Ὅταν τό τοίχωμα εἶναι πλάγιο, τότε, ἀνάλογα μέ τήν κλίση τοῦ τοιχώματος σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ ἔχει φορά πρός τά κάτω (σχ. 101) ἤ πρός τά πάνω (σχ. 102).

Στά διάφορα τεχνικά ἔργα (δεξαμενές, λιμενοβραχίονες, φράγματα κ.ἄ.) πάντοτε λαβαίνουμε ὑπόψη τίς δυνάμεις, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στά πλευρικά τοιχώματα. Γιατί, ὅταν τό ὕψος τοῦ ὑγροῦ εἶναι σημαντικό, τότε στά τοιχώματα ἀναπτύσσονται πολύ μεγάλες δυνάμεις. Σέ ἕνα φράγμα τό πάχος του αὐξάνει, ὅσο προχωροῦμε ἀπό πάνω πρός τά κάτω (σχ. 103), γιατί ἔτσι ἀποφεύγεται νά σπάσει ἤ νά ὀλισθήσει τό φράγμα μέ τήν ἐπίδραση τῶν μεγάλων δυνάμεων, πού ἀναπτύσσονται κοντά στή βάση του.



Σχ. 103. Τομή φράγματος.

102. Συνισταμένη τῶν δυνάμεων πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στό σύνολο τῶν τοιχωμάτων δοχείου

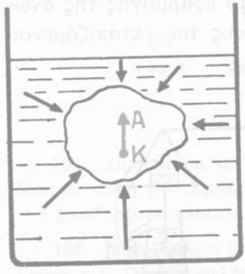
Παίρνουμε τρία δοχεῖα Α,Β,Γ, πού ἔχουν διαφορετικό σχῆμα, καί βρίσκουμε τό βάρος κάθε δοχείου, ὅταν εἶναι ἄδειανό. Στά τρία αὐτά δοχεῖα βάζουμε διαδοχικά *τόν ἴδιο ὄγκο* νεροῦ (π.χ. ἕνα λίτρο νεροῦ) καί ζυγίζουμε τά δοχεῖα, ὅταν περιέχουν τό νερό. Βρίσκουμε ὅτι τό βάρος τοῦ περιεχόμενου νεροῦ εἶναι *πάντοτε τό ἴδιο*, ἀνεξάρτητα ἀπό τό σχῆμα τοῦ δοχείου.

Στό δίσκο τοῦ ζυγοῦ, πού πάνω του βρίσκεται τό δοχεῖο, ἐνεργοῦν δύο *κατακόρυφες* δυνάμεις : α) *τό βάρος* $\vec{B}_{\Delta}$ τοῦ δοχείου καί β) *ἡ συνισταμένη* $\vec{F}_{ολ}$ τῶν δυνάμεων, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στό σύνολο τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου. Τό πείραμα αὐτό δείχνει ὅτι :

Ἡ συνισταμένη ($\vec{F}_{ολ}$) τῶν δυνάμεων, πού ἐξασκεῖ τό ὑγρό στό σύνολο τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου, εἶναι δύναμη κατακόρυφη μέ φορά πρός τά κάτω, ἀνεξάρτητη ἀπό τό σχῆμα τοῦ δοχείου καί πάντοτε ἴση μέ τό βάρος τοῦ ὑγροῦ.

103. Ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη

Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα εἶναι ὁλόκληρο ἤ μέρος του βυθισμένο μέσα σέ ὑγρό, τότε σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σώματος, πού εἶναι σέ ἐπαφή μέ τό ὑγρό, ἐνεργοῦν *δυνάμεις*, κάθετες στήν ἐπιφάνεια τοῦ σώματος, πού ὀφείλονται στήν ὑδροστατική πίεση. Αὐτή εἶναι μεγαλύτερη στά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σώματος πού εἶναι πιό βαθιά μέσα στό ὑγρό (σχ. 104). Ὅλες οἱ δυνάμεις, πού ὀφείλονται στήν ὑδροστατική πίεση, ἔχουν μιά *συνισταμένη*, πού εἶναι *κατακόρυφη* μέ φορά πρός τά πάνω καί γι' αὐτό ὀνομάζεται **ἄνωση**. Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς ἀνώσεως λέγεται *κέντρο ἀνώσεως*.



Σχ. 104. Στό στερεό ἐξασκεῖται ἡ ἄνωση $\vec{A}$.

Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης ἀνακάλυψε ὅτι ἕνα ὑγρό πού ἰσορροπεῖ *ἐξασκεῖ ἄνωση* σέ κάθε σῶμα πού εἶναι βυθισμένο μέσα στό ὑγρό καί διατύπωσε τόν ἀκόλουθο νόμο, πού εἶναι γνωστός ὡς **ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη :**

Ἡ ἄνωση ($\vec{A}$), πού ἐνεργεῖ σέ κάθε σῶμα βυθισμένο μέσα σέ ὑγρό, εἶναι δύναμη κατακόρυφη, ἴση μέ τό βάρος τοῦ ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ καί ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τοῦ ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ.

$$\boxed{\text{ἄνωση} \quad A = V \cdot \varepsilon}$$

ὅπου ε εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ καί V ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ.

Ὑπολογισμός τῆς ἀνώσεως. Ἡ ἄνωση ὑπολογίζεται εὔκολα, ὅταν τό σῶμα, πού εἶναι βυθισμένο στό ὑγρό, ἔχει σχῆμα πρίσματος (σχ. 105). Ἐξαιτίας τῶν πιέσεων ἐξασκοῦνται στό πρίσμα οἱ ἑξῆς δυνάμεις : α) οἱ δυνάμεις πού ἐνεργοῦν στίς κατακόρυφες ἕδρες καί οἱ ὁποῖες ἀλληλοαναιροῦνται· β) οἱ κατακόρυφες δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν στίς δύο ὁριζόντιες βάσεις τοῦ πρίσματος καί πού ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο:

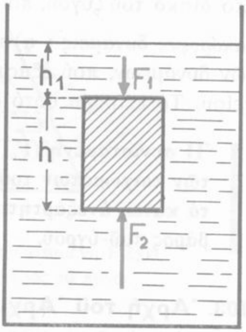
$$F_1 = h_1 \cdot \varepsilon \cdot S \quad \text{καί} \quad F_2 = (h_1 + h) \cdot \varepsilon \cdot S$$

Ἡ συνισταμένη αὐτῶν τῶν δύο δυνάμεων, δηλαδή *ἡ ἄνωση* (A) εἶναι ἴση μέ:

$$A = F_2 - F_1 = h \cdot S \cdot \varepsilon$$

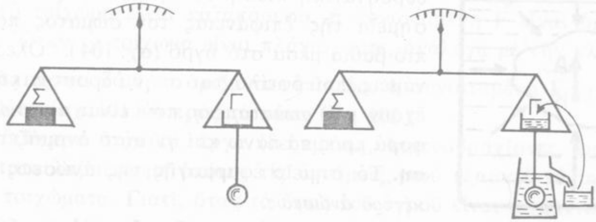
Ἀλλά $h \cdot S$ εἶναι ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος, καί ἑπομένως τόσος εἶναι καί *ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ*. Ὥστε ἡ ἄνωση εἶναι:

$$A = V \cdot \varepsilon$$



Σχ. 105. Ὑπολογισμός τῆς ἀνώσεως.

(ὅπου ε εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ὑγροῦ). Τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς ἀνώσεως *(κέντρο ἀνώσεως)* βρίσκεται στό κέντρο βάρους τοῦ ἐκτοπιζόμενου ὑγροῦ.



Σχ. 106. Πειραματική ἀπόδειξη τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδη.

104. Μέτρηση τῆς πυκνότητας

Γιά νά βροῦμε τήν πυκνότητα ἑνός στερεοῦ σώματος, βρίσκουμε *τή μάζα* m_Σ τοῦ σώματος, ζυγίζοντας τό σῶμα. *Ὁ ὄγκος* V τοῦ σώματος ὑπολογίζεται ἀπό τίς γεωμετρικές διαστάσεις τοῦ σώματος, ὅταν αὐτό ἔχει γεωμετρικό σχῆμα (κύβος, σφαίρα κ.λ.). Τότε *ἡ πυκνότητα* τοῦ σώματος εἶναι $\rho_\Sigma = m_\Sigma / V$. Ὅταν τό σῶμα ἔχει ἀκανόνιστο σχῆμα, τότε βρίσκουμε τόν ὄγκο τοῦ σώματος βυθίζοντάς το μέσα σέ ὀγκομετρικό σωλήνα, πού περιέχει νερό. Ὁ ὄγκος V τοῦ σώματος εἶναι ἴσος μέ τόν ὄγκο V τοῦ νεροῦ, πού ἐκτοπίζει τό σῶμα. Αὐτό τό ἐκτοπιζόμενο νερό ἀνεβαίνει πάνω ἀπό τήν ἀρχική ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ. Ἡ μέθοδος αὐτή δέν εἶναι πολύ ἀκριβής.

Ἐξίσωση τῆς πυκνομετρίας. Ἕνα σῶμα, πού ἔχει ὄγκο V καί πυκνότητα ρ_Σ, ἔχει βάρος B_Σ ἴσο μέ:

$$B_\Sigma = V \cdot \rho_\Sigma \cdot g \qquad (1)$$

Στόν ἴδιο τόπο *ἴσος ὄγκος νεροῦ* μέ τήν ἴδια θερμοκρασία ἔχει βάρος B_N ἴσο μέ:

$$B_N = V \cdot \rho_N \cdot g \qquad (2)$$

ὅπου ρ_N εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ νεροῦ. Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2), ἔχουμε:

$$\frac{\rho_\Sigma}{\rho_N} = \frac{B_\Sigma}{B_N} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\rho_\Sigma = \rho_N \cdot \frac{B_\Sigma}{B_N}} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωση (3) λέγεται *ἐξίσωση τῆς πυκνομετρίας* καί φανερώνει ὅτι:

Ἡ πυκνότητα (ρ_Σ) ἑνός σώματος σέ θερμοκρασία θ^0 C εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῆς πυκνότητας (ρ_N) τοῦ νεροῦ στή θερμοκρασία θ^0 C ἐπί τό λόγο τοῦ βάρους (B_Σ) τοῦ σώματος πρός τό βάρος (B_N) ἴσου ὄγκου νεροῦ μέ τήν ἴδια θερμοκρασία.

Παρατήρηση. Στίς συνηθισμένες θερμοκρασίες ἡ πυκνότητα τοῦ νεροῦ εἶναι κατά μεγάλη προσέγγιση ἴση μέ $\rho_N = 1$ gr/cm³.

Πυκνότητα τοῦ νεροῦ (σέ gr/cm³)

0°C	3°C	4°C	5°C	10°C	50°C
0,9998	0,9999	1,0000	0,9999	0,9997	0,9880

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

104. Πόσο εἶναι τό ὕψος στήλης ὑδραργύρου ἤ νεροῦ ἤ οἰνοπνεύματος, ἡ ὁποία ἐξασκεῖ πίεση $p = 5$ p/cm²; Εἰδικά βάρη: ὑδραργύρου $\varepsilon_{υδρ} = 13{,}6$ p/cm³, νεροῦ $\varepsilon_{νερ} = 1$ p/cm³, οἰνοπνεύματος $\varepsilon_{οιν} = 0{,}8$ p/cm³.

105. Ἕνα γυάλινο δοχεῖο ἔχει σχῆμα U καί περιέχει νερό ὥς τή μέση τῶν δύο σωλήνων του. Οἱ δύο σωλῆνες τοῦ δοχείου ἔχουν τήν ἴδια διάμετρο. Χύνουμε στόν ἕνα σωλήνα παραφινέλαιο, πού ἔχει εἰδικό βάρος $\varepsilon_{παρ} = 0{,}8$ p/cm³. Τό παραφινέλαιο σχηματίζει στήλη, πού ἔχει ὕψος 5 cm. Πόσο θά ἀνέβει στόν ἄλλο σωλήνα ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ; $\varepsilon_{νερ} = 1$ p/cm³.

106. Μέσα σέ δοχεῖο, πού ἔχει σχῆμα U, χύνουμε λίγο ὑδράργυρο. Ἔπειτα χύνουμε μέσα στόν ἕνα βραχίονά του ἕνα ὑγρό A, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_A = 1{,}84$ p/cm³, πού σχηματίζει στήλη ὕψους 20 cm. Μέσα στόν ἄλλο βραχίονα χύνουμε νερό, ὥσπου οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειες τοῦ ὑγροῦ A καί τοῦ νεροῦ νά βρεθοῦν στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Νά βρεθεῖ τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ νεροῦ.

107. Σέ ἕνα ὑδραυλικό πιεστήριο οἱ ἐπιφάνειες τῶν δύο ἐμβόλων ἔχουν ἐμβαδά $S_1 = 3$ cm² καί $S_2 = 180$ cm². Στό μικρό ἔμβολο ἐνεργεῖ κάθετα δύναμη $F_1 = 4$ kp. Πόση δύναμη (F_2) ἐνεργεῖ στό μεγάλο ἔμβολο;

108. Ἕνα κυλινδρικό δοχεῖο, πού ἡ βάση του ἔχει ἐμβαδό $S = 100$ cm², περιέχει ἕνα λίτρο ὑδραργύρου καί ἕνα λίτρο νεροῦ. Νά βρεθεῖ ἡ πίεση (p), πού ἐξασκεῖται στόν πυθμένα τοῦ δοχείου καί ἡ δύναμη (F), πού ἐνεργεῖ στόν πυθμένα.

$\varepsilon_{υδρ} = 13{,}6$ p/cm³, $\varepsilon_{νερ} = 1$ p/cm³

109. Μιά δεξαμενή ἔχει σχῆμα κύβου, πού ἡ ἀκμή του ἔχει μῆκος 10 m. Ἡ δεξαμενή εἶναι γεμάτη μέ νερό. Νά βρεθεῖ ἡ δύναμη, πού ἐνεργεῖ: α) στόν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς καί β) σέ κάθε κατακόρυφη πλευρά της.

110. Μεταλλικό κυλινδρικό δοχεῖο ἔχει ὕψος 1,20 m καί ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 1 m. Τό δοχεῖο εἶναι γεμάτο μέ ἐλαιόλαδο, πού ἔχει εἰδικό βάρος $\varepsilon = 0{,}9$ p/cm³. Νά βρεθεῖ ἡ δύναμη, πού ἐνεργεῖ στήν κυκλική βάση τοῦ δοχείου, ὅταν αὐτό στηρίζεται στό ἔδαφος ἔτσι, ὥστε : α) ὁ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου νά εἶναι κατακόρυφος καί β) ὁ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου νά εἶναι ὁριζόντιος.

111. Ἕνας ὑδροφράχτης ἔχει πλάτος 6 m καί ἡ στάθμη τοῦ νεροῦ ἀπό τή μιά καί ἀπό τήν ἄλλη μεριά τοῦ ὑδροφράχτη φτάνει σέ ὕψος 3 m καί 2,8 m. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν στίς δύο ἐπιφάνειες τοῦ ὑδροφράχτη.

112. Ἕνα φορτωμένο πλοῖο ἔχει βάρος $10 \cdot 10^6$ kp. Ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ θαλασσινοῦ νεροῦ εἶναι $\varepsilon_{\theta\alpha\lambda} = 1028$ kp/m³, νά βρεθεῖ πόσος ὄγκος τοῦ πλοίου εἶναι βυθισμένος μέσα στή θάλασσα. Πόσος γίνεται αὐτός ὁ ὄγκος, ὅταν τό πλοῖο βρεθεῖ σέ ποταμό, πού τό νερό του ἔχει εἰδικό βάρος $\varepsilon_{\pi o\tau} = 1000$ kp/m³ ;

113. Ἕνα κομμάτι μετάλλου στόν ἀέρα ἔχει βάρος 40,47 p καί μέσα στό νερό ἔχει βάρος 34,77 p. Πόσο βάρος ἔχει, ὅταν βυθιστεῖ μέσα σέ οἰνόπνευμα, πού τό εἰδικό βάρος του εἶναι $\varepsilon_{o\iota\nu} = 0{,}79$ p/cm³ ;

114. Μιά μεταλλική σφαίρα στόν ἀέρα ἔχει βάρος 160 p καί μέσα στό νερό ἔχει βάρος 100 p. Τό εἰδικό βάρος τοῦ μετάλλου εἶναι $\varepsilon_{\mu} = 8$ p/cm³. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ σφαίρα εἶναι κοίλη καί νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητας.

115. Μιά συμπαγής καί ὁμογενής σφαίρα ἀπό σίδηρο ($\varepsilon_{\sigma\iota\delta} = 7{,}8$ p/cm³) βυθίζεται μέσα σέ δοχεῖο, πού περιέχει νερό καί ὑδράργυρο ($\varepsilon_{\upsilon\delta\rho} = 13{,}6$ p/cm³). Ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ ἔτσι, ὥστε ἕνα μέρος της νά εἶναι βυθισμένο στόν ὑδράργυρο. Πόσο μέρος ἀπό ὅλο τόν ὄγκο τῆς σφαίρας εἶναι βυθισμένο στόν ὑδράργυρο ;

116. Ἕνα κυβικό κομμάτι ξύλου πού ἔχει ἀκμή 10 cm, βυθίζεται πρῶτα σέ νερό καί ἔπειτα σέ λάδι. Νά βρεθεῖ πόσο μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ὑγρό σέ καθεμιά ἀπό τίς δύο παραπάνω περιπτώσεις. Εἰδικά βάρη : νεροῦ $\varepsilon_N = 1$ p/cm³, λαδιοῦ $\varepsilon_\Lambda = 0{,}8$ p/cm³, ξύλου $\varepsilon_\Xi = 0{,}6$ p/cm³.

117. Ἀπό τό δίσκο Δ_1 ἑνός ζυγοῦ κρέμεται σῶμα Α καί ἀπό τό δίσκο Δ_2 κρέμεται σῶμα Β, πού ἔχει βάρος $F_B = 10$ p καί εἰδικό βάρος $\varepsilon_B = 8$ p/cm³. Τότε ὁ ζυγός ἰσορροπεῖ. Βυθίζουμε τό σῶμα Α σέ νερό καί τό σῶμα Β σέ ὑγρό, πού ἔχει εἰδικό βάρος $\varepsilon_Y = 0{,}88$ p/cm³. Ὁ ζυγός καί πάλι ἰσορροπεῖ. Νά βρεθεῖ τό εἰδικό βάρος τοῦ σώματος Α.

118. Ἕνα κομμάτι μετάλλου στόν ἀέρα ζυγίζει 40,05 p καί στό νερό 35,55 p. Στό μέταλλο αὐτό δένεται ἕνα κομμάτι παραφίνης. Τά δύο σώματα ζυγίζουν στόν ἀέρα 47,88 p καί στό νερό 34,38 p. Νά βρεθεῖ τό εἰδικό βάρος τῆς παραφίνης.

119. Ἕνα ὁμογενές κομμάτι ἀλουμινίου στόν ἀέρα ζυγίζει 270 p, ἐνῶ, ὅταν βυθίζεται σέ νερό, πού ἔχει θερμοκρασία 18° C, ζυγίζει 170,14 p. Τό εἰδικό βάρος τοῦ νεροῦ σέ 18° C εἶναι $\varepsilon_N = 0{,}9986$ p/cm³. Πόσο εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ἀλουμινίου ;

120. Ἕνα κυβικό κομμάτι πάγου ἔχει ἀκμή 3 cm καί ἐπιπλέει σέ ἕνα διάλυμα. Γιά νά βυθιστεῖ ὅλος ὁ πάγος μέσα στό διάλυμα καί νά ἰσορροπεῖ, προσθέτουμε στήν ἀνώτερη ἐπιφάνειά του 7,56 p. Ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ πάγου εἶναι $\varepsilon_\Pi = 0{,}92$ p/cm³, νά βρεθεῖ τό εἰδικό βάρος (ε_Δ) τοῦ διαλύματος. Πόσο μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου θά εἶναι βυθισμένο στό διάλυμα, ἄν ἀφαιρέσουμε τό βάρος πού βάλαμε στήν ἀνώτερη ἐπιφάνεια τοῦ πάγου ;

121. Μιά κοίλη μεταλλική σφαίρα πού ἔχει εἰδικό βάρος ε, θέλουμε νά ἐπιπλέει στό νερό, ἔχοντας βυθισμένο τό μισό ὄγκο της στό νερό. Ἄν τό βάρος τῆς σφαίρας εἶναι Β, πόσο πρέπει νά εἶναι τό πάχος τῶν τοιχωμάτων της ; Ἐφαρμογή : $\varepsilon = 9$ p/cm³, B = 30 kp.

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Ἀτμοσφαιρική πίεση

105. Χαρακτηριστικά τῶν ἀερίων

Τά ὑγρά καί τά ἀέρια ἀποτελοῦν *τά ρευστά σώματα*, πού δέν ἔχουν ὁρισμένο σχῆμα, ἐπειδή τά μόριά τους εἶναι ἐξαιρετικά εὐκίνητα. Ἐκτός ἀπό τή ρευστότητα τά ὑγρά καί τά ἀέρια ἔχουν καί ὁρισμένες ἄλλες κοινές ἰδιότητες, π.χ. ἔχουν βάρος, ἐξασκοῦν πίεση σέ κάθε ἐπιφάνεια πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ αὐτά, ἀναπτύσσουν ἄνωση πάνω στά σώματα πού εἶναι βυθισμένα μέσα σ' αὐτά κ.ἄ. Ἀντίθετα ὅμως μέ τά ὑγρά, πού εἶναι (σχεδόν) ἀσυμπίεστα καί ἔχουν ὁρισμένο ὄγκο, τά ἀέρια εἶναι πολύ συμπιεστά, δέν ἔχουν ὁρισμένο ὄγκο, καί διασκορπίζονται σέ ὅλο τό χῶρο, πού τούς προσφέρεται. Ἔτσι ἕνα ἀέριο, πού βρίσκεται μέσα σέ δοχεῖο, δέν παρουσιάζει ἐλεύθερη ἐπιφάνεια. Ἡ τάση γιά διαστολή, πού χαρακτηρίζει τά ἀέρια, φανερώνει ὅτι μεταξύ τῶν μορίων τῶν ἀερίων δέν ἀναπτύσσονται δυνάμεις, πού νά ἐξασφαλίζουν τή συνοχή τῆς μάζας τοῦ ἀερίου (σχ.107). Ἄν συμπιέσουμε ἐλαφρά τό ἀέριο, πού βρίσκεται μέσα σέ ἕνα μπαλόνι, παρατηροῦμε ὅτι, μόλις καταργηθεῖ ἡ πίεση πού ἐξασκοῦμε στό ἀέριο, αὐτό ἀμέσως ξαναπαίρνει τόν ἀρχικό ὄγκο του. Τό πείραμα αὐτό φανερώνει ὅτι τά ἀέρια ἔχουν τέλεια ἐλαστικότητα ὄγκου. Ὥστε :

Σχ. 107.

Τά ἀέρια εἶναι συμπιεστά καί χαρακτηρίζονται ἀπό πολύ μεγάλη τάση γιά διαστολή καί τέλεια ἐλαστικότητα ὄγκου.

106. Βάρος τῶν ἀερίων

Ὅπως τά στερεά καί τά ὑγρά, ἔτσι καί τά ἀέρια ἔχουν *βάρος*. Αὐτό τό δείχνουμε μέ τό ἑξῆς πείραμα : Μέ τήν ἀεραντλία ἀφαιροῦμε τόν ἀέρα ἀπό μιά φιάλη καί τή ζυγίζουμε. Ἔπειτα ἀφήνουμε νά μπεῖ μέσα στή φιάλη ἀέρας καί τή ζυγίζουμε. Παρατηροῦμε ὅτι τώρα ἡ φιάλη ἔχει μεγαλύτερο βάρος. Ὅλα τά ἀέρια ἔχουν βάρος, ἀλλά στίς συνηθισμένες συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως τά ἀέρια ἔχουν μικρό εἰδικό βάρος συγκριτικά μέ τά στερεά καί τά ὑγρά. Γιά τόν ἀέρα βρήκαμε ὅτι :

Ἕνα λίτρο (1 dm^3) ἀέρα, σέ κανονικές συνθῆκες (θερμοκρασία 0 °C καί πίεση 760 mm Hg), ἔχει βάρος 1,293 p.

107. Πίεση ἐξαιτίας τοῦ βάρους τοῦ ἀερίου

Ἐπειδή τά ἀέρια ἔχουν βάρος, γι' αὐτό κάθε στρῶμα ἑνός ἀερίου, ἐξαιτίας τοῦ βάρους του, *πιέζει* τό πιό κάτω στρῶμα τοῦ ἀερίου. Αὐτό τό στρῶμα *μεταδίδει* τήν πίεση στά κατώτερα στρώματα καί προσθέτει σ' αὐτή καί τήν πίεση πού ὀφείλεται στό δικό του βάρος. Ἔτσι μέσα σέ μιά μεγάλη μάζα ἀερίου ἀναπτύσσεται *πίεση* ἀνάλογη μέ τήν ὑδροστατική πίεση. Ἡ πυκνότητα ἑνός ὑγροῦ, πού ἠρεμεῖ, εἶναι σταθερή σέ ὅλη τήν ἔκταση τοῦ ὑγροῦ, γιατί τά ὑγρά εἶναι ἀσυμπίεστα. Ἀντίθετα ἡ πυκνότητα ἑνός ἀερίου, πού ἠρεμεῖ, *δέν εἶναι ἡ ἴδια* σέ ὅλα τά στρώματα τοῦ ἀερίου, γιατί τά ἀέρια εἶναι *συμπιεστά*.

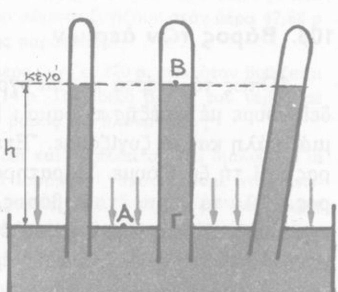
Οἱ διαφορές στήν πίεση καί τήν πυκνότητα τοῦ ἀερίου, πού ὀφείλονται στό βάρος του, γίνονται αἰσθητές, μόνο ὅταν τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀερίου εἶναι πολύ μεγάλο. Γιά ἕνα ἀέριο, πού βρίσκεται μέσα σέ δοχεῖο μέ μικρές διαστάσεις, δεχόμαστε ὅτι ἡ πυκνότητά του εἶναι *σταθερή* καί ὅτι σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς μάζας τοῦ ἀερίου ἐπικρατεῖ *ἡ ἴδια πίεση*.

108. Ἀτμοσφαιρική πίεση

Ἡ ἀτμόσφαιρα εἶναι τό στρῶμα τοῦ ἀέρα πού περιβάλλει τόν πλανήτη μας καί συγκρατιέται ἐξαιτίας τῆς βαρύτητας. Ἐπειδή ὁ ἀέρας ἔχει βάρος, ἀναπτύσσεται μέσα στήν ἀτμόσφαιρα πίεση, πού ὀνομάζεται *ἀτμοσφαιρική πίεση*. Αὐτή ἐξασκεῖται σέ κάθε ἐπιφάνεια, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν ἀτμόσφαιρα. Ἄν μιά μικρή ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδό ΔS καί πάνω της ἐξασκεῖται ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση **p**, τότε σ' αὐτή τήν ἐπιφάνεια ἐνεργεῖ *δύναμη* $F = p \cdot \Delta S$, πού εἶναι *κάθετη* στήν ἐπιφάνεια.

Μέτρηση τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Δέν μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε πόση εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, γιατί μᾶς εἶναι ἄγνωστο *τό ὕψος* τῆς ἀτμόσφαιρας καί γιατί *ἡ πυκνότητα* τοῦ ἀέρα συνεχῶς ἐλαττώνεται, ὅσο ἀπομακρυνόμαστε ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Τήν ἀτμοσφαιρική πίεση μποροῦμε νά τή μετρήσουμε μέ τό γνωστό *πείραμα τοῦ Torricelli*.

Παίρνουμε γυάλινο σωλήνα μέ μῆκος περίπου ἕνα μέτρο, πού ἡ μιά ἄκρη του εἶναι κλειστή. Γεμίζουμε τό σωλήνα τελείως μέ ὑδράργυρο,



Σχ. 108. Μέτρηση τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως.

κλείνουμε μέ τό δάχτυλό μας τό σωλήνα καί τόν ἀναποδογυρίζουμε (τό σωλήνα) βυθίζοντας τήν ἀνοιχτή ἄκρη του μέσα σέ λεκάνη μέ ὑδράργυρο (σχ. 108). Ὁ ὑδράργυρος κατεβαίνει μέσα στό σωλήνα καί ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνειά του σταματᾶ σέ ἕνα ὕψος h = 76 cm πάνω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης, ὅταν ἐκτελοῦμε τό πείραμα κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας. Ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση h τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου μέσα στό σωλήνα καί μέσα στή λεκάνη εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό ἐμβαδό τῆς τομῆς, τό σχῆμα καί τήν κλίση τοῦ σωλήνα. Στό σημεῖο Α τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης ἐξασκεῖται ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση $p_{ατμ}$. Στό σημεῖο Γ, πού βρίσκεται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ τό σημεῖο Α, ἐξασκεῖται ἡ ἴδια πίεση $p_{ατμ}$. Στό σημεῖο Β τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὑδραργύρου μέσα στό σωλήνα ἡ πίεση εἶναι μηδέν, γιατί πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο ὑπάρχει κενό (βαρομετρικό κενό). Ὥστε ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση $p_{ατμ}$, πού ἐξασκεῖται στό σημεῖο Α, εἶναι *ἴση μέ τήν πίεση πού προκαλεῖ ἡ στήλη ὑδραργύρου*, ὕψους h = 76 cm. Ἄρα εἶναι:

$$p_{ατμ} = h \cdot \varepsilon = 76\ \text{cm} \cdot 13{,}6\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3} \quad \text{καί} \quad p_{ατμ} = 1033\ \text{p/cm}^2$$

$$\text{ἤ} \qquad \boxed{p_{ατμ} = 1{,}033\ \text{kp/cm}^2}$$

Ἡ πίεση αὐτή ὀνομάζεται **κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση** ἤ καί **μιά φυσική ἀτμόσφαιρα** (1 Atm).

Συνήθως τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου μετριέται σέ χιλιοστόμετρα καί ἑπομένως εἶναι:

$$\boxed{1\ \text{Atm} = 76\ \text{cm Hg} = 760\ \text{mm Hg} \quad \text{ἤ} \quad 1\ \text{Atm} = 760\ \text{Torr}}$$

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι:

Ἡ κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση (1 Atm) εἶναι ἴση μέ τήν πίεση πού ἐπιφέρει στήλη ὑδραργύρου ὕψους 76 cm σέ θερμοκρασία 0 °C.

Σημείωση. Στή *Μετεωρολογία* ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση μετριέται μέ τή μονάδα πιέσεως Bar καί τά ὑποπολλαπλάσιά της:

1 Bar = 10^6 dyn/cm² 1 millibar (1 mbar) = 10^3 dyn/cm²
1 microbar (1 μBar) = 1 dyn/cm²

109. Ἐλάττωση τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως μέ τό ὕψος

Πειραματικά βρήκαμε ὅτι, ὅταν ἀνεβαίνουμε κατά 10,5 m πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, *ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση ἐλαττώνεται* περίπου κατά 1 mm Hg. Τό ἐξαγόμενο αὐτό τό βρίσκουμε καί μέ ὑπολογισμό, ἄν δεχτοῦμε ὅτι τό κατώτερο στρῶμα τοῦ ἀέρα ἔχει *σταθερό εἰδικό βάρος* $\varepsilon_{\text{ἀέρα}} = 0{,}001\,293\ \text{p/cm}^3$. Ξέρουμε ὅτι εἶναι $1\ \text{mm Hg} = 1{,}36\ \text{p/cm}^2$. Γιά νά ἐλαττωθεῖ λοιπόν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση κατά 1 mm Hg, πρέπει νά ἀνεβοῦμε σέ ὕψος h, πού ἀπό τήν ἐξίσωση $p = h \cdot \varepsilon_{\text{ἀέρα}}$ βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$h = \frac{p}{\varepsilon_{\text{ἀέρα}}} = \frac{1{,}36\ \text{p/cm}^2}{0{,}001\,293\ \text{p/cm}^3} = 1050\ \text{cm}$$

$$\text{καί} \quad h = 10{,}5\ \text{m}$$

Σχ. 109. Μεταλλικό βαρόμετρο γιά τή μέτρηση ὕψους ἀπό 0 ὥς 4 km.

Τό παραπάνω ἐξαγόμενο ἰσχύει μόνο γιά *πολύ μικρές μεταβολές* τοῦ ὕψους πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, γιά τίς ὁποῖες θεωροῦμε κατά προσέγγιση ὅτι ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα διατηρεῖται σταθερή. Ἀλλά γιά τίς μεγάλες μεταβολές τοῦ ὕψους, πρέπει νά λάβουμε ὑπόψη ὅτι ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα *ἐλαττώνεται*, ὅσο αὐξάνει τό ὕψος. Ἔτσι βρίσκουμε ἕναν πιό πολύπλοκο νόμο γιά τή μεταβολή τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως μέ τό ὕψος (βλ. πίνακα). Στίς πρακτικές ἐφαρμογές, π.χ. στήν ἀεροπορία, χρησιμοποιοῦμε εἰδικά μεταλλικά βαρόμετρα *(ὑψομετρικά βαρόμετρα)* πού δείχνουν τήν ἀτμοσφαιρική πίεση καί τό ἀντίστοιχο ὕψος σέ μέτρα ἤ χιλιόμετρα (σχ. 109).

Ὕψος km	Ἀντίστοιχη πίεση mm Hg (θερμοκρασία 0° C)
0	760
1	671
2	593
3	523
4	462
5	407
6	359
7	317
8	280

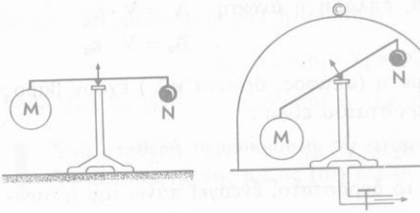
110. Ἡ ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη στά ἀέρια

Ὅπως σέ κάθε σῶμα, πού βρίσκεται μέσα σέ ὑγρό ἐνεργεῖ ἡ ἄνωση, ἔτσι καί σέ κάθε σῶμα πού βρίσκεται μέσα σέ ἀέριο ἐνεργεῖ *ἡ ἄνωση*. Αὐτή προέρχεται ἀπό τίς πιέσεις, πού ἐξασκεῖ τό ἀέριο σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σώματος. Ὥστε καί γιά τά ἀέρια ἰσχύει **ἡ ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη:**

Ἡ ἄνωση ($\vec{A}$), πού ἐνεργεῖ σέ κάθε σῶμα βυθισμένο μέσα σέ ἀέριο, εἶναι δύναμη κατακόρυφη, ἴση μέ τό βάρος τοῦ ἐκτοπιζόμενου ἀερίου καί ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τοῦ ἐκτοπιζόμενου ἀερίου.

$$\boxed{\text{ἄνωση} \quad A = V \cdot \varepsilon}$$

ὅπου ε εἶναι τό εἰδικό βάρος τοῦ ἀερίου καί V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζόμενου ἀερίου.



Σχ. 110. Στή μεγαλύτερη σφαίρα ἐξασκεῖται μεγαλύτερη ἄνωση.

Πειραματική ἀπόδειξη. Στίς δύο ἄκρες τῆς φάλαγγας ζυγοῦ κρεμᾶμε μιά μεγάλη κοίλη σφαίρα Μ καί μιά μικρή μεταλλική συμπαγή σφαίρα Ν, ἡ ὁποία στόν ἀέρα ἰσορροπεῖ τή σφαίρα Μ (σχ. 110). Ἄν μέ τήν ἀεραντλία ἀφαιρέσουμε τόν ἀέρα, παρατηροῦμε ὅτι στό κενό ἡ μεγάλη σφαίρα Μ γίνεται βαρύτερη. Αὐτό δείχνει ὅτι στόν ἀέρα ἡ μεγαλύτερη σφαίρα δέχεται μεγαλύτερη ἄνωση, γιατί ἐκτοπίζει μεγαλύτερο ὄγκο ἀέρα.

Φαινομενικό βάρος. Ὅταν ζυγίζουμε ἕνα σῶμα στόν ἀέρα, βρίσκουμε *τό φαινομενικό βάρος* τοῦ σώματος. Τό βάρος αὐτό εἶναι *τό ἀπόλυτο βάρος* τοῦ σώματος ἐλαττωμένο κατά *τήν ἄνωση* πού ἐνεργεῖ στό σῶμα. Στίς ἐργαστηριακές μετρήσεις, πού γίνονται μέ μεγάλη ἀκρίβεια, πάντοτε λαβαίνουμε ὑπόψη τήν ἄνωση πού δημιουργεῖ ὁ ἀέρας.

Ἀερόστατα. Τό *ἀερόστατο* εἶναι ἡ πρώτη πτητική συσκευή, πού ἐπινόησε ὁ ἄνθρωπος γιά νά ἀνεβεῖ μέσα στήν ἀτμόσφαιρα. Τό ἀερόστατο ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν ἐλαφρό σάκο, πού εἶναι κατασκευασμένος ἀπό ἀεροστεγές ὕφασμα ἤ ἀπό ἐλαστικό. Ὁ σάκος εἶναι γεμάτος μέ ἕνα ἀέριο, πού ἔχει μικρότερο εἰδικό βάρος ἀπό τόν ἀέρα (π.χ. φωταέριο, ὑδρογόνο, ἥλιο). Ἀπό τό σάκο κρέμεται κατάλληλο σκάφος, γιά τούς παρατηρητές ἤ γιά διάφορα αὐτογραφικά ὄργανα. Ἄν ἀφήσουμε τό ἀερόστατο ἐλεύθερο, αὐτό ἀνεβαίνει μέσα στήν ἀτμόσφαιρα, γιατί ἡ ἄνωση εἶναι *μεγαλύτερη* ἀπό τό βάρος του. Καθώς ὅμως τό ἀερόστατο ἀνεβαίνει, ἡ ἐξωτερική πίεση ἐλαττώνεται καί γι' αὐτό τό ἀέριο, πού εἶναι μέσα στό σάκο, διαστέλλεται καί μπορεῖ νά σπάσει τό σάκο. Τέτοια ἀερόστατα χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐξερεύνηση τῶν ἀνώτερων στρωμάτων τῆς ἀτμόσφαιρας μέ αὐτογραφικά ὄργανα, πού βρίσκονται στό σκάφος. Ὁ σάκος σπάζει σέ ὕψος 20 ὥς 25 χιλιόμετρα καί τότε τό σκάφος πέφτει μέ τή βοήθεια ἀλεξιπτώτου.

Ἄν ὁ σάκος δέν εἶναι ἐλαστικός, τότε σπάζει σέ μικρό ὕψος. Αὐτό τό μειονέκτημα ἀποφεύγεται, ὅταν στό κάτω μέρος τοῦ σάκου ὑπάρχει ἀνοιχτός σωλήνας, γιά νά φεύγει ἐλεύθερα ἀέριο ἀπό τό σάκο.

Ἀνυψωτική δύναμη. Ἄν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου, ε_A καί ε_α εἶναι ἀντίστοιχα τά εἰδικά βάρη τοῦ ἀέρα καί τοῦ ἀερίου, τότε εἶναι :