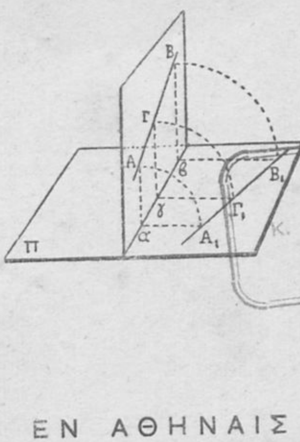
ΑΝΔΡΕΟΥ Ι. ΑΡΒΑΝΙΤΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩι ΠΡΟΤΥΠΩι ΒΑΡΒΑΚΕΙΩι ΛΥΚΕΙΩι

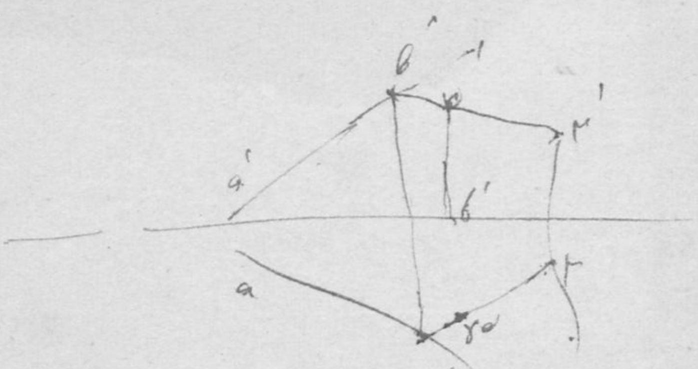
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ.



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1926

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.



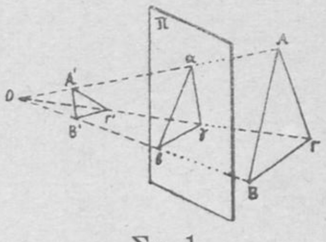
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ***Κεντρικὴ προβολὴ*** ἢ ***προοπτικὴ*** σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π, ὡς πρὸς σημεῖον Ο (σχ. 1), λέγεται τὸ σημεῖον *α* καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π ἡ εὐθεῖα ΟΑ.

Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται ***προβολικὸν ἐπίπεδον ἢ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος***, τὸ σημεῖον Ο ***κέντρον*** ἢ ***σημεῖον ὁράσεως*** καὶ ἡ ἐπ' ἄπειρον ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐκτεινομένη εὐθεῖα ΟΑ, ***προβάλλουσα*** τοῦ σημείου Α.



Σχ. 1

Ἐὰν ἡ ΟΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον ἡ προοπτικὴ τοῦ Α ἀφανίζεται εἰς ἄπειρον.

Τοῦ σημείου Ο ἡ προοπτικὴ εἶναι ἀπροσδιόριστος.

2. ***Κεντρικὴ προβολὴ*** ἢ ***προοπτικὴ*** σχήματος οἱουδήποτε ἐπὶ ἐπίπεδον Π, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, λέγεται τὸ σύνολον τῶν προοπτικῶν πάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

Ἡ φωτογραφικὴ εἰκὼν ἑνὸς ἀντικειμένου, εἶναι προοπτικὴ αὐτοῦ ὡς πρὸς σημεῖον ὁράσεως, τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ καὶ προβολ. ἐπίπεδον τὴν φωτογραφικὴν πλάκα. Καὶ πᾶσαι αἱ συνήθεις εἰκόνες εἶναι προοπτικαὶ τῶν ἀπεικονιζομένων ἀντικειμένων ὡς πρὸς σημεῖον ὁράσεως τὸν ὀφθαλμὸν καὶ προβολικὸν ἐπίπεδον τὸν πίνακα, ὄπισθεν τοῦ ὁποίου ὑποτίθεται τὸ ἀπεικονιζόμενον ἀντικείμενον.

3. Ἡ προοπτικὴ εἰκὼν ἑνὸς ἀντικειμένου προξενεῖ μὲν ἐπὶ

τῆς ὁράσεως ἡμῶν τὴν αὐτὴν ἐντύπωσιν ἣν καὶ τὸ ἀπεικονιζόμενον ἀντικείμενον, δὲν εἶναι ὅμως ἀρκετὴ ἵνα προσδιορίσῃ τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν, οὔτε τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος αὐτοῦ.

Διότι, δεδομένης τῆς προοπτικῆς *α* σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π ὡς πρὸς σημεῖον ὁράσεως Ο, δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τοῦ Α, καθ' ὅσον πάντα τὰ σημεῖα τὰ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς προβαλλούσης ΟΑ ἔχουσι τὴν αὐτὴν προοπτικήν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου οὗ ἔχομεν τὴν προοπτικὴν εἰκόνα δὲν δύναται προφανῶς νὰ καθορισθῇ, ἐὰν δὲν εἶναι γνωστὴ ἡ θέσις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον καὶ τὸ σημεῖον τῆς ὁράσεως, ἕπεται ὅτι ἐκ τῆς προοπτικῆς εἰκόνος τοῦ ἀντικειμένου δὲν δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὸ ἀληθὲς σχῆμα οὔτε τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτοῦ.

Οὕτω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (σχ. 1) ἔχουσι τὴν αὐτὴν προοπτικὴν ***αβγ***, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὸ σημεῖον Ο, ἐν τούτοις ἡ θέσις, τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν εἶναι διάφορα·

Ἀλλ' εἰς τὴν Ἀρχιτεκτονικήν, τὴν Μηχανολογίαν, τὴν Τοπογραφίαν καὶ λοιπὰς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ὑπάρχῃ τρόπος παραστάσεως, τῶν ἐν τῷ χώρῳ σχημάτων ἐκ τῆς ὁποίας δι' ἁπλῶν γεωμ. κατασκευῶν νὰ προσδιορίζεται ἡ ἀληθὴς θέσις τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ χώρῳ μόνον θεωρητικῶς εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις γεωμ. προβλημάτων, διότι γεωμ. κατασκευὰς μόνον ἐπὶ ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν, προέκυψεν ἡ ἀνάγκη εὑρέσεως μεθόδου διὰ τῆς ὁποίας νὰ ἀνάγωνται αἱ ἐν τῷ χώρῳ κατασκευαὶ εἰς κατασκευὰς ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Οὕτω ἐδημιουργήθη ἡ ***Παραστατικὴ Γεωμετρία.***

4. ***Σκοπὸς ὅθεν τῆς παραστατικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου παράστασις τῶν ἐν τῷ χώρῳ σχημάτων οὕτως ὥστε δι' ἁπλῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν νὰ προσδιορίζεται ἡ ἀληθὴς θέσις, τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν.***

Ὁ σκοπὸς οὗτος ἐπιτυγχάνεται, ὡς θέλομεν ἴδει ἐν τοῖς ἑπομένοις, διὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν.

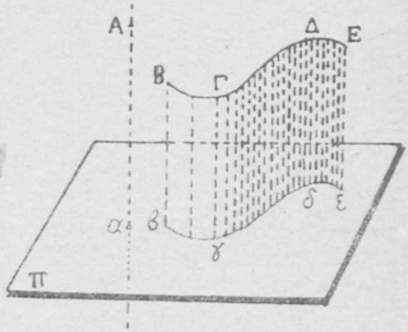
5. ***Ὀρθὴ προβολὴ*** σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π (σχ. 2) λέγεται ὁ ποὺς ***α*** τῆς καθέτου ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π

Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται **προβολικὸν ἐπίπεδον** ἡ δὲ ἀπεριόριστος εὐθεῖα Αα **προβάλλουσα** τοῦ σημείου Α.

Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου παριστῶμεν διὰ μεγάλων γραμμάτων τὰς δὲ προβολὰς αὐτῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν.

6. **Ὀρθὴ προβολὴ γραμμῆς** ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων αὐτῆς.

Ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ προβάλλουσαι πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς λέγεται **προβάλλουσα ἐπιφάνεια**(σχ. 2).



Σχ. 2

7. **Ὀρθὴ προβολὴ σχήματος** ἐν γένει καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

8. Τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ὑποτίθεται ἐν γένει ὁριζόντιον ἐκ δὲ τῶν δύο μερῶν εἰς ἃ χωρίζει τὸν χῶρον, τὸ μὲν πρὸς τὰ ἄνω λέγεται **θετικὸν** τὸ δὲ πρὸς τὰ κάτω **ἀρνητικόν**.

9. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὀρθῆς προβολῆς σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον συνάγεται, ὅτι δοθέντος σημείου Α ἡ προβολὴ ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη· δεδομένης ὅμως τῆς ὀρθῆς προβολῆς *α* δὲν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τοῦ σημείου, ἀλλὰ μόνον ἡ τοῦτο προβάλλουσα εὐθεῖα, διότι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι προφανῶς τὴν αὐτὴν προβολήν.

Διὰ νὰ προσδιορισθῇ ὅθεν ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις σημείου τινός, πρέπει ἐκτὸς τῆς προβολῆς αὐτοῦ νὰ δοθῇ καὶ ἄλλο τι στοιχεῖον.

Τὸ δεύτερον τοῦτο στοιχεῖον δύναται νὰ εἶναι ἢ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου μετὰ σημείου + ἢ — δεικνύοντος τὸ μέρος τοῦ χώρου ἐν τῷ ὁποίῳ εὑρίσκεται, ἢ ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ ἓν ἀκόμη ἐπίπεδον μὴ παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον.

Οὕτω προκύπτουν δύο μέθοδοι παραστάσεως τῶν σημείων τοῦ χώρου, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τῶν σχημάτων.

1ον. ***Ἡ μέθοδος τῶν ἠριθμημένων προβολῶν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.***

2ον. ***Ἡ μέθοδος τῶν προβολῶν ἐπὶ δύο ἐπίπεδα.***

10. ***Ἐπίπεδον σχεδιάσεως*** λέγεται ὁ πίναξ ἢ τὸ φύλλον τοῦ χάρτου ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀπεικονίζομεν τὰς προβολὰς τῶν πρὸς σπουδὴν σχημάτων τοῦ χώρου.

11. ***Σχεδίασμα*** λέγεται ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως παράστασις ἑνὸς σχήματος τοῦ χώρου κατὰ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν ἀνωτέρω μεθόδων, ἡ δὲ ἐκ τοῦ σχεδιάσματος νοερὰ ἀναπαράστασις τοῦ σχήματος καλεῖται ***ἀνάγνωσις τοῦ σχεδιάσματος.***

12. ***Κλῖμαξ.*** Ὅταν αἱ διαστάσεις ἐπιπέδου σχήματος εἶναι μεγάλαι, ἀπεικονίζομεν αὐτὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως διὰ σχήματος ὁμοίου, ἐκλέγοντες κατὰ τὰς περιστάσεις τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος, τουτέστι τὸν λόγον μιᾶς γραμμῆς τοῦ σχεδιάσματος πρὸς τὴν ὁμόλογον γραμμὴν τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος.

Ὁ λόγος οὗτος καλεῖται ***ἀριθμητικὴ κλῖμαξ*** καὶ σημειοῦται πάντοτε ἔν τινι γωνίᾳ τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως.

Οὕτω λέγοντες ὅτι τὸ σχεδίασμα εἶναι ὑπὸ κλίμακα 1:100, ἐννοοῦμεν ὅτι ἑκάστη γραμμὴ αὐτοῦ εἶναι ἑκατοντάκις μικροτέρα τῆς ὁμολόγου γραμμῆς τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος.

Κατὰ ταῦτα γραμμὴ τοιούτου σχεδιάσματος μήκους 0,152 μ. ἔχει μῆκος πραγματικὸν $0{,}152 \times 100 = 15{,}2$ μ.

Ἀντιστρόφως, γραμμὴ τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος μήκους 86,2 μ. θὰ παρασταθῇ ἐν τῷ σχεδιάσματι δι' ὁμοίας γραμμῆς μήκους $86{,}2 : 100 = 0{,}862$ μ.

13. ***Γραφικὴ κλῖμαξ.*** Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν λογαριασμῶν τοὺς ὁποίους ἀπαιτεῖ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος πρὸς ἀναγωγὴν τῶν πραγματικῶν μηκῶν εἰς γραφικὰ καὶ τἀνάπαλιν, μεταχειριζόμεθα συνήθως καὶ τὴν ***γραφικὴν κλίμακα***, ἥτις εἶναι ἁπλῆ ἢ σύνθετος καὶ κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς :

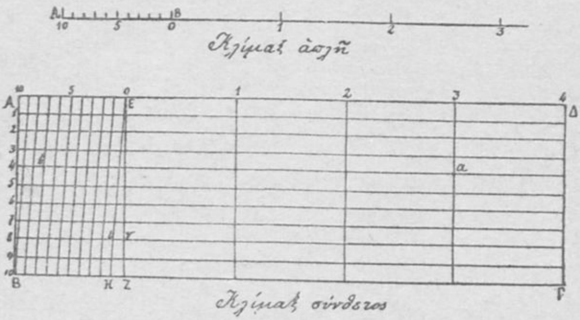
α΄) ***Κατασκευὴ ἁπλῆς κλίμακος.*** Χαράσσομεν εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως τμῆμα εὐθείας ΑΒ (σχ. 3) καὶ τὸ χωρίζομεν εἰς δέκα ἴσα μέρη· ἔπειτα προεκτείνομεν αὐτὸ πέραν τοῦ Β καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τρία. τέσσαρα ἢ καὶ περισσότερα ἐν ἀνάγκῃ τμήματα ἴσα πρὸς τὸ

ΑΒ. Εἰς τὸ Β σημειοῦμεν ***μηδέν***, εἰς δὲ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ Β, σημειοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2,3...... ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

Οὕτως, ἐὰν τὰ μεγάλα τμήματα παριστῶσιν μονάδας μήκους, τὰ μικρὰ θὰ παριστῶσι δέκατα τῆς μονάδος. Ἐὰν τὰ πρῶτα παριστῶσι δεκάδας, τὰ δεύτερα θὰ παριστῶσιν ἁπλᾶς μονάδας κ.ὅ.κ.

Τὸ τμῆμα ΑΒ λέγεται ***βάσις*** τῆς κλίμακος καὶ λαμβάνεται αὐθαιρέτως· ἐν τούτοις καλὸν εἶναι νὰ ἔχῃ ἁπλῆν τινα σχέσιν πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Οὕτως ἐὰν θέλωμεν τὸ σχεδίασμα νὰ εἶναι ὑπὸ κλίμακα 1:50, ἡ βάσις ΑΒ τῆς γρ. κλίμακος πρέπει νὰ εἶναι 0,02 τοῦ μέτρου.



Σχ. 3

Χρῆσις. Ἵνα μετρήσωμεν εὐθεῖάν τινα, μεταφέρομεν αὐτὴν διὰ τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς γραφικῆς κλίμακος οὕτως, ὥστε τὸ ἓν ἄκρον τοῦ διαβήτου νὰ πέσῃ ἐπί τινος τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 0 διαιρέσεων, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ. Οὕτως, ἐὰν τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου τεθέντος ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 2, τὸ ἄλλο εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποδιαιρέσεως 4, τὸ μῆκος τῆς εὐθείας θὰ εἶναι 2,4 μ. ἐὰν τὸ ΑΒ παριστᾷ τὴν μονάδα τσῦ μήκους, ἢ 24 μ. ἐὰν τὸ ΑΒ παριστᾷ δεκάμετρον κ. ὅ. κ.

Ἐν ἐλλείψει διαβήτου μεταφέρομεν τὴν πρὸς μέτρησιν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς κλίμακσς διὰ ταινίας χάρτου ἢ τοῦ συνήθους ὑποδιῃρημένου κανόνος.

β') ***Κατασκευὴ συνθέτου κλίμακος***. Ἡ ἀνωτέρω περίγραφεῖσα κλῖμαξ δίδει τὸ μῆκος εἰς μονάδας καὶ δέκατα, τῶν ἑκατοστῶν ἐκτιμωμένων κατὰ προσέγγισιν.

Ὅταν θέλωμεν μεγαλειτέραν ἀκρίβειαν κάμνομεν χρῆσιν τοῦ ὀργάνου ὅπερ καλεῖται ***σύνθετος κλῖμαξ***. Εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 3), τὸ ὁποῖον διὰ παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς μήκους ΑΔ καὶ ΒΓ χωρίζεται εἰς δέκα ἴσου πλάτους ταινίας. Ἡ πλευρὰ μήκους ΑΔ εἶναι ἐπίσης διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως εἶναι ἠγμέναι παράλληλοι τῇ πλευρᾷ ΑΒ χωρίζουσαι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς τρία, τέσσαρα ἢ καὶ περισσότερα μέρη. Τοῦ πρώτου τούτων ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΕ καὶ ΒΖ εἶναι διῃρημένη εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ δὲ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἔχουσιν ἐπιζευχθῇ δι' εὐθειῶν, τὸ πρῶτον τῆς κάτω πλευρᾶς μὲ τὸ δεύτερον τῆς ἄνω, τὸ δεύτερον τῆς κάτω μὲ τὸ τρίτον τῆς ἄνω καὶ τέλος τὸ ἔνατον τῆς κάτω μὲ τὸ δέκατον τῆς ἄνω. Οὕτω τὰ τμήματα τῶν παραλλήλων τῷ ΑΔ εὐθειῶν τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΕΗ εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$...... τῆς ΗΖ καὶ ἑπομένως $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}$...... τῆς ΑΒ.

Π.χ. τὸ τμῆμα *ιν* τῆς ὀγδόης παραλλήλου εἶναι $\frac{8}{10}$ τῆςΗΖ, ἑπομένως $\frac{8}{100}$ τῆς ΑΕ. Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Ε*ιν* καὶ ΕΗΖ ἔχομεν $\frac{\iota\nu}{HZ} = \frac{E\nu}{EZ} = \frac{8}{10}$

Ἑπομένως $\iota\nu = \frac{8}{10}.HZ$, καὶ ἐπειδὴ $HZ = \frac{1}{10}.AE$, ἕπεται $\iota\nu = \frac{8}{100}.AE$, δηλαδὴ $\frac{8}{100}$ τῆς μονάδος τοῦ μήκους.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἵνα μετρήσωμεν εὐθεῖάν τινα τοῦ σχεδιάσματος, ἀφ' οὗ λάβωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ διαβήτου, θέτομεν τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΔ καὶ μιᾶς τῶν ἐπ' αὐτὴν καθέτων οὕτως δέ, ὥστε τὸ ἄλλο ἄκρον νὰ πέσῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ἰδίας παραλλήλου ὑπό τινος τῶν ἐν τῷ πρώτῳ ὀρθογωνίῳ πλαγίων εὐθειῶν. Τότε ὁ ἀριθμὸς τῆς καθέτου παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, ὁ τῆς πλαγίας δέκατα τῆς μονάδος καὶ ὁ τῆς παραλλήλου ἑκατοστά.

Π.χ.ἐάν,τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου τεθέντος εἰς τὸ σημεῖον *α*,τὸἄλλο πέσῃ εἰςτὸ *β*,τὸ μῆκος τῆς μετρουμένης εὐθείας θὰ εἶναι 3,74 μ. 'Αντιστρόφως,διὰ νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν μήκους 2,83μ. θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ διαβήτου εἰς τὸ σημεῖον καθ'ὃ ἡ φέρουσα τὸν ἀριθμὸν 2 κάθετος τέμνει τὴν φέρουσαν τὸν ἀριθμὸν 8 παράλληλον τῇ ΑΔ,τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὸ σημεῖον καθ'ὃ ἡ φέρουσα τὸν ἀριθμὸν 3 πλαγία συναντᾷ τὴν αὐτὴν παράλληλον.

Σημείωσις. 'Επειδὴ ἐν τοῖς ἑπομένοις γίνεται λόγος μόνον περὶ ὀρθῶν προβολῶν, θὰ λέγωμεν ἁπλῶς «προβολὴν» ἐννοοῦντες τὴν «ὀρθὴν προβολήν».

ΜΕΡΟΣ Α'

ΗΡΙΘΜΗΜΕΝΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

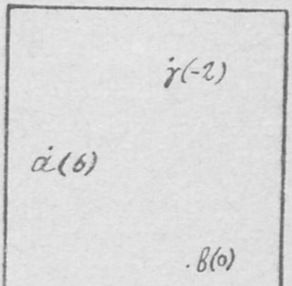
α') *Περὶ τοῦ σημείου*

14. ***Κατηγμένη*** σημείου λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου καὶ θεωρεῖται θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐν τῷ θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ χώρῳ.

Ἡ κατηγμένη λέγεται πολλάκις ***ὑψοδείκτης*** ἢ καὶ ***ὑψόμετρον*** τοῦ σημείου.

15. ***Παράστασις τοῦ σημείου.*** Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως τὸ σημεῖον παρίσταται διὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ καὶ τῆς κατηγμένης του γραφομένης πλησίον τῆς προβολῆς.

Ἡ τοιαύτη παράστασις τοῦ σημείου λέγεται ***ἠριθμημένη προβολὴ*** αὐτοῦ (σχ. 4). Κατὰ ταῦτα α (6) παριστᾷ τὸ σημεῖον Α τοῦ χώρου τὸ ἔχον προβολὴν *α*, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ προβ. ἐπιπέδου 6 μονάδας μήκους καὶ εὑρισκόμενον ὑπεράνω αὐτοῦ· *β* (ο) παριστᾷ σημεῖον Β κείμενον ἐπὶ τοῦ προβ. ἐπιπέδου καὶ *γ* (-2) τὸ σημεῖον Γ τοῦ χώρου τὸ ἔχον προβολὴν *γ*, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου 2 μονάδας μήκους καὶ εὑρισκόμενον ὑποκάτω αὐτοῦ.

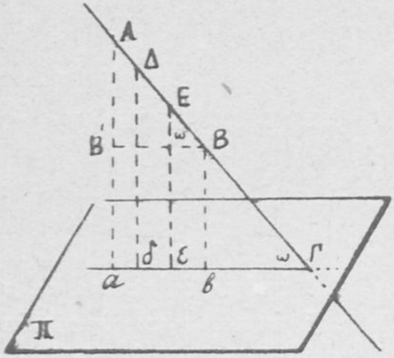


Σχ. 4

β') *Περὶ τῆς εὐθείας*

16. ***Προβολὴ εὐθείας*** ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων αὐτῆς.

17. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, μὴ κάθετον ἐπ' αὐτήν, εἶναι εὐθεῖα.***



Σχ. 5

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον Π (σχ. 5). Αἱ δύο τυχόντα σημεῖα αὐτῆς, οἷον τὰ Α καὶ Β, προβάλλουσαι εὐθεῖαι *Αα* καὶ *Ββ*, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ Π, εἶναι παράλληλοι καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον, τὸ *ΑαβΒ*, τέμνον τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν *αβ*. Πᾶν δὲ ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, οἷον τὸ Δ, προβάλλεται ἐπὶ τῆς *αβ*. Διότι ἡ τοῦτο προβάλλουσα, ὡς παράλληλος τῇ *Αα* ἠγμένη ἐκ σημείου τοῦ ἐπιπέδου *ΑαβΒ* κεῖται ὅλη ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ὁ ποὺς αὐτῆς *δ* κεῖται ἐπὶ τῆς *αβ*.

Ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς *αβ* οἷον τὸ *ε* εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ.

Διότι ἡ ἐκ τοῦ *ε* ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ προβολ. ἐπίπεδον εἶναι παράλληλος τῇ *Αα* καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου *ΑαβΒ*. Ἑπομένως τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Ε. Τὸ σημεῖον ἄρα *ε* εἶναι προβολὴ τοῦ σημείου Ε.

Ἀφ' οὗ λοιπὸν πᾶν σημεῖον τῆς ΑΒ προβάλλεται ἐπὶ τῆς *αβ* καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς *αβ* εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ, ἡ *αβ* κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Τὸ ἐπίπεδον *ΑαβΒ* ἐφ' οὗ κεῖνται πᾶσαι αἱ προβάλλουσαι λέγεται ***προβάλλον ἐπίπεδον***.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολ. ἐπίπεδον ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶναι ἓν μόνον σημεῖον, ὁ ποὺς αὐτῆς.

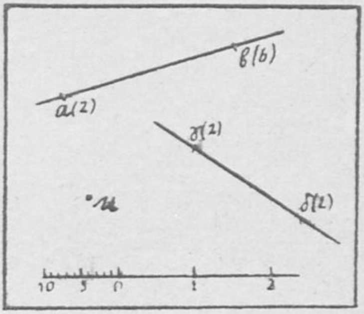
18. ***Ἴχνος εὐθείας*** λέγεται τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα διαπερᾷ τὸ προβ. ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον τοῦτο ταὐτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς του. Ὅταν δὲ ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον, τὸ ἴχνος αὐτῆς ἀφανίζεται εἰς ἄπειρον.

19. ***Γωνία κλίσεως εὐθείας*** λέγεται ἡ ὀξεῖα γωνία ω (σχ. 5) τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς

ἑπομένως καί μετὰ πάσης εὐθείας τοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς αὐτήν.

Ἡ γωνία αὕτη, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῶν εὐθειῶν τοῦ προβολ. ἐπιπέδου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ἴχνους αὐτῆς.

20. *Παράστασις τῆς εὐθείας.* Ἡ προβολὴ εὐθείας δὲν ἐπαρκεῖ ὅπως ὁρίσῃ τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτῆς, διότι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ προβάλλοντος ταύτην ἐπιπέδου ἔχουσι προφανῶς τὴν αὐτὴν προβολήν. Ἀνάγκη ὅθεν νὰ δοθῶσιν αἱ ἠριθμημέναι προβολαὶ δύο σημείων της.



Σχ. 6

Οὕτω τὰ σημεῖα *α* (2) καὶ *β* (6) (σχ. 6) προσδιορίζουσι τὴν εὐθεῖαν τὴν ἔχουσαν προβολὴν *αβ* καὶ διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β τοῦ χώρου τῶν ἐχόντων ἀντιστοίχως κατηγμένας 2 καὶ 6.

Ἡ τοιαύτη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως παράστασις τῆς εὐθείας λέγεται ***ἠριθμημένη προβολὴ*** αὐτῆς.

21. Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον λέγεται ***ὁριζόντιος*** καὶ παρίσταται διὰ τῶν ἠριθμημένων προβολῶν δύο σημείων ἐχόντων τὴν αὐτὴν κατηγμένην. Οὕτω τὸ σχεδίασμα ***γ***(2)*δ* (2) παριστᾷ εὐθεῖαν ὁριζόντιον.

Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον λέγεται ***κατακόρυφος*** καὶ παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως, τοῦ ἴχνους αὐτῆς. Οὕτω τὸ σημεῖον *κ* τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως παριστᾷ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ προβολ. ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον *κ*.

22. ***Ὁριζόντιος ἀπόστασις*** δύο σημείων λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν προβολῶν των. Π.χ. τῶν σημείων *α* (2) καὶ *β* (6) ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις εἶναι (σχ. 6) τὸ μῆκος 2,4 τοῦ τμήματος ***αβ***, εὑρισκόμενον διὰ τῆς κλίμακος τοῦ σχεδιάσματος.

23. ***Κατακόρυφος ἀπόστασις*** δύο σημείων λέγεται ἡ δια-

φορὰ τῶν κατηγμένων αὐτῶν. Π.χ. ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν σημείων $\alpha(2)$ καὶ $\beta(6)$ εἶναι $(\beta \mathrm{B})-(\alpha \mathrm{A})=6-2=4$ μ.

24. ***Συντελεστὴς κλίσεως εὐθείας*** ἢ ἁπλούστερον ***κλίσις εὐθείας*** λέγεται ὁ λόγος τῆς κατακορύφου ἀποστάσεως δύο ***τυχόντων*** σημείων της πρὸς τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν αὐτῶν Π.χ. συντελεστὴς κλίσεως τῆς εὐθείας $\alpha(2)\beta(6)$ εἶναι ὁ λόγος $\frac{6-2}{(\alpha\beta)}=\frac{4}{2{,}4}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$.

Γενικῶς, καλοῦντες υ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν δύο σημείων, δ τὴν ὁριζόντιον καὶ σ τὸν συντελεστὴν κλίσεωςτῆς διὰ τούτων διερχομένης εὐθείας ἔχομεν $\sigma=\frac{\upsilon}{\delta}$

25. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Ὁ συντελεστὴς κλίσεως εὐθείας ἰσοῦται τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς γωνίας κλίσεως αὐτῆς.***

Τῷ ὄντι· ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 5) καὶ προβολὴ αὐτῆς ἡ $\alpha\beta$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐὰν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΒ′ παράλληλος τῇ $\beta\alpha$, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΒ′ ἔχομεν

$$(\mathrm{B'A})=(\mathrm{BB'}).\ \varepsilon\varphi\omega \quad \text{ἢ} \quad \upsilon=\delta.\ \varepsilon\varphi\omega$$

ἑπομένως $\frac{\upsilon}{\delta}=\varepsilon\varphi\omega$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{\upsilon}{\delta}=\sigma$, ἕπεται $\sigma=\varepsilon\varphi\omega$ ὅ. ἔ. δ.

26. ***Βῆμα εὐθείας*** λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν δύο σημείων αὐτῆς, τῶν ὁποίων αἱ κατηγμέναι διαφέρουσι κατὰ μονάδα ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τῶν ὁποίων ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις ἰσοῦται τῇ μονάδι. Οὕτως, ἐὰν $(\gamma\Gamma)-(\alpha\mathrm{A})=1$ (σχ. 7) ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὴν $\alpha\gamma$ εἶναι τὸ βῆμα β τῆς εὐθείας ΑΒ.

27. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Τὸ βῆμα εὐθείας εἶναι ἀριθμὸς ἀντίστροφος τοῦ συντελεστοῦ κλίσεως.***

Τῷ ὄντι, ἔχομεν $\sigma=\frac{(\text{κατακορ. ἀπόστασις})}{(\text{ὁριζοντ. ἀπόστασιν})}$

Ἐπειδὴ δὲ ὅταν ***(κατακορ. ἀπόστασις)*** $=1$, θὰ εἶναι ***ὁριζόντιος ἀπόστασις*** $=\beta$, ἕπεται ὅτι $\sigma=\frac{1}{\beta}$.

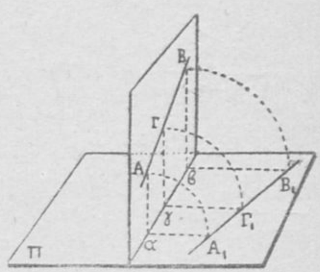
28. ***ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.*** α′) ***Τὸ βῆμα εὐθείας ἰσοῦται τῇ συνεφαπτομένῃ τῆς γωνίας κλίσεως αὐτῆς.***

β') Τὸ βῆμα εὐθείας ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ὁριζοντίας ἀποστάσεως δύο τυχόντων σημείων αὐτῆς, πρὸς τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν αὐτῶν.

Οὕτω τῆς εὐθείας $a(2)b(6)$ (σχ. 6) τὸ βῆμα εἶναι

$$\beta = \frac{(ab)}{6-2} = \frac{2{,}4}{4} = \frac{3}{5}.$$

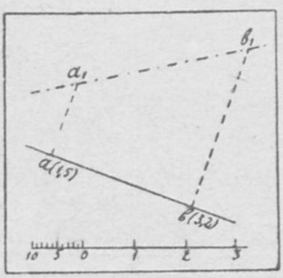
29. **Κατάκλισις εὐθείας ἐπὶ τοῦ προβ. ἐπιπέδου.** Ἐὰν τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν AB (σχ. 7) ἐπίπεδον $AabB$ στρέψωμεν περὶ τὴν προβολὴν αὐτῆς ab, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, ἡ εὐθεῖα AB θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ A_1B_1, ἥτις καλεῖται **κατάκλισις** τῆς εὐθείας AB ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου.



Σχ. 7

Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου $AabB$ πᾶν σημεῖον αὐτοῦ, οἷον τὸ B, γράφει τόξον κύκλου μὲ κέντρον τὸ b καὶ ἀκτῖνα τὴν bB. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ bB μένει κάθετος ἐπὶ τὴν ab, θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ ὅταν κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι, δεδομένης τῆς ἠριθμημένης προβολῆς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν αὐτῆς ὡς ἑξῆς.



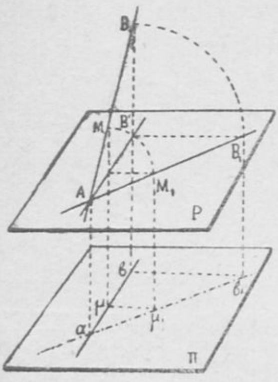
Σχ. 8

Ἔστω $a\,(1{,}5)b(3{,}2)$ ἡ εὐθεῖα ἧς ζητεῖται ἡ κατάκλισις ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου (σχ. 8).

Φέρομεν ἐκ τῶν σημείων a καὶ b καθέτους ἐπὶ τὴν ab καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τούτων τὰ τμήματα $aa_1 = 1{,}5$ μ. τῆς γρ. κλίμακος καὶ $bb_1 = 3{,}2$ μ. Ἡ εὐθεῖα a_1b_1 εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας $a(1{,}5)b(3{,}2)$.

Σημείωσις. Τὴν κατάκλισιν εὐθείας παριστῶμεν διὰ γραμμικῶν τμημάτων καὶ στιγμῶν διαδεχομένων ἄλληλα.

30. ***Κατάκλισις εὐθείας ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.*** Ἐὰν τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐπίπεδον Α$\alpha\beta$Β περιστραφῇ περί τὴν τομὴν αὐτοῦ ΑΒ′ (σχ. 9) ὑπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Ρ τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α, μέχρις οὗ ταυτισθῇ μετ' αὐτοῦ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ λάβῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου θέσιν τινὰ AB_1 ἔχουσαν προβολὴν $\alpha\beta_1$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα $\alpha\beta\beta_1$ καὶ $AB'B_1$ εἶναι προφανῶς ἴσα, συνάγομεν ὅτι, ἵνα κατασκευάσωμεν τὴν προβολὴν εὐθείας ΑΒ μετὰ τὴν κατάκλισίν της ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Ρ τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου β κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς $\beta\beta_1 = B'B_1 = B'B = \beta B - \alpha A$, τουτέστι τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν σημείων Β καὶ Α, εἶτα δὲ ἑνώσωμεν δι' εὐθείας τὰ σημεῖα α καὶ β_1.

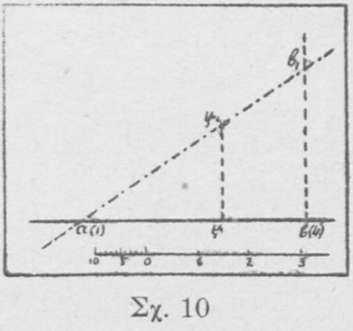


Σχ. 9

Σημείωσις. Τὴν μετὰ τὴν κατάκλισιν ἐπὶ ὁριζοντίου τινὸς ἐπιπέδου προβολὴν εὐθείας, θὰ λέγωμεν, χάριν συντομίας, κατάκλισιν τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τούτου ἐπιπέδου.

31. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Δοθείσης τῆς προβολῆς σημείου κειμένου ἐπὶ δεδομένης εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ ἡ κατηγμένη αὐτοῦ.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα $\alpha(1)\beta(4)$ καὶ μ ἡ προβολὴ σημείου αὐτῆς Μ (σχ. 10). Ζητεῖται ἡ κατηγμένη τοῦ Μ.



Σχ. 10

α′) ***Λύσις γραφική.*** Κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου α (1).

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ β κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης (§ 30) $\beta\beta_1 = 4 - 1 = 3$ μ. τῆς γρ. κλίμ.

Ἡ $\alpha\beta_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας $\alpha(1)\beta(4)$ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ α (1).

Ἄγομεν εἶτα ἐκ τοῦ μ κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$. Αὕτη τέμνει τὴν $\alpha\beta_1$ εἰς σημεῖον μ_1 ὅπερ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου Μ. Ἡ $\mu\mu_1$ ἄρα εἶναι ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν σημείων Μ καὶ Α. Μετροῦντες ταύτην διὰ τῆς γρ. κλίμακος εὑρίσκομεν $\mu\mu_1=1,9$. Ἡ κατηγμένη ἄρα τοῦ Μ εἶναι

$$(\mu\mathrm{M})=(\alpha\mathrm{A})+(\mu\mu_1)=1+1,9=2,9 \ \mu.$$

β´) ***Λύσις ἀλγεβρική.*** Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ διὰ λογισμοῦ χωρὶς νὰ κατακλιθῇ ἡ εὐθεῖα.

Τῷ ὄντι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ψ τὴν ζητουμένην κατηγμένην $(\mu\mathrm{M})$, ἑκάτερος τῶν λόγων $\dfrac{\psi-1}{(\alpha\mu)}$ καὶ $\dfrac{4-1}{(\alpha\beta)}$ παριστᾷ (24) τὸν συντελεστὴν κλίσεως τῆς εὐθείας $\alpha(1)\beta(4)$. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν.

$$\frac{\psi-1}{(\alpha\mu)}=\frac{3}{(\alpha\beta)}$$

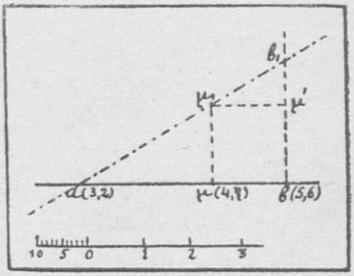
ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\qquad \psi=1+\dfrac{3(\alpha\mu)}{(\alpha\beta)}.$

Μετροῦντες διὰ τῆς κλίμακος εὑρίσκομεν

$(\alpha\mu)=2,75$ καὶ $(\alpha\beta)=4,4$. Ὅθεν, $\qquad \psi=1+\dfrac{3.2,75}{4,4}=2,9.$

32. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Δοθείσης εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου της τὸ ὁποῖον ἔχει δοθεῖσαν κατηγμένην.***

Ἔστω $\alpha(3,2)\beta(5,6)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 11). Ζητεῖται ἡ προβολὴ τοῦ σημείου της Μ, ὅπερ ἔχει κατηγμένην 4,7.



Σχ. 11

α´) ***Λύσις γραφική.*** Κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου α(3,2). Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ β κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης τὸ τμῆμα $\alpha\beta_1 = \beta B - \alpha A = 5{,}6 - 3{,}2 = 2{,}4$ μ. τῆς γραφ. κλίμακος Ἡ $\alpha\beta_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς δοθείσης εὐθείας.

Εἶτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $\beta\beta_1$ τμῆμα $(\beta\mu') = 4{,}7 - 3{,}2 = 1{,}5$ μ, τουτέστιν ἴσον πρὸς τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν σημείων Μ καὶ Α. Ἐκ τοῦ μ' ἄγομεν παράλληλον τῇ $\alpha\beta$ καὶ ἐκ τοῦ σημείου μ_1 καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν $\alpha\beta_1$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$. Ὁ ποῦς μ τῆς καθέτου ταύτης εἶναι ἡ ζητουμένη προβολὴ τοῦ σημείου Μ τοῦ ἔχοντος κατηγμένην 4,7 καὶ κειμένου ἐπὶ τῆς ΑΒ.

β') ***Λύσις ἀλγεβρική***. Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν τῶν σημείων Α καὶ Μ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{4{,}7-3{,}2} = \frac{(\alpha\beta)}{5{,}6-3{,}2}$$

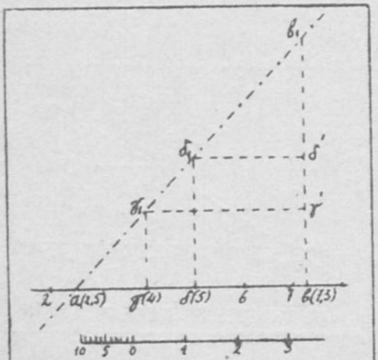
διότι ἑκάτερος τῶν λόγων τούτων παριστᾷ (§ 28 β') τὸ βῆμα τῆς δοθείσης εὐθείας.

Μετροῦντες τὴν $\alpha\beta$ διὰ τῆς κλίμακος εὑρίσκομεν $(\alpha\beta) = 4$.

Ὅθεν $$x = \frac{4.1{,}5}{2{,}4} = 2{,}5.$$

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τῆς $\alpha\beta$ τὸ τμῆμα $(\alpha\mu) = 2{,}5$ μ. τὸ μ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη προβολὴ τοῦ σημείου Μ τοῦ κειμένου ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἔχοντος κατηγμένην 4,7 μ.

33. *Βαθμολογία εὐθείας*. ***Βαθμολογία εὐθείας*** λέγεται ἡ ἐπὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς σημείωσις τῶν προβολῶν σημείων αὐτῆς ἐχόντων κατηγμένας διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.



Σχ. 12

34. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ***Νὰ βαθμολογηθῇ ἡ εὐθεῖα*** α (2,5) β(7,3) (σχ. 12).

Προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς γ καὶ δ δύο σημείων αὐτῆς ἐχόντων κατηγμένας δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους, οἷον 4 καὶ 5.

Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν α(2,5)

$\beta(7,3)$ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου α (2,5) (§ 30) καὶ ἐπὶ τῆς $\beta\beta_1$ λαμβάνομεν $\beta\gamma'$ $=4-2,5=1,5$ μ. καὶ $\beta\delta'=5-2,5=2,5$μ. Ἐκ τῶν σημείων γ' καὶ δ' φέρομεν παραλλήλους τῇ $\alpha\beta$ καὶ ἐκ τῶν σημείων γ_1 καὶ δ_1, καθ' ἃ αἱ παράλληλοι αὗται συναντῶσι τὴν $\alpha\beta_1$, φέρομεν καθέτους $\gamma_1\gamma$ καὶ $\delta_1\delta$ ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$. Τὰ σημεῖα γ καὶ δ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Γ καὶ Δ τῆς δοθείσης εὐθείας τὰ ὁποῖα ἔχουσι κατηγμένας

$$(\gamma\Gamma)=2,5+1,5=4 \text{ καὶ } (\delta\Delta)=2,5+2,5=5 \text{ μ.}$$

Τὸ τμῆμα ἄρα $\gamma\delta$ εἶναι τὸ βῆμα τῆς δοθείσης εὐθείας.

Εὑρεθέντος τοῦ βήματος, λαμβάνομεν δεξιὰ τοῦ δ καὶ ἀριστερὰ τοῦ γ διαδοχικὰ τμήματα ἴσα πρὸς αὐτὸ καὶ οὕτω προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς ὅσων θέλομεν σημείων μὲ ἀκεραίας κατηγμένας.

Σημείωσις α') Ἐὰν εἶναι γνωστὸν ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας μὲ ἀκεραίαν κατηγμένην, δυνάμεθα νὰ βαθμολογήσωμεν τὴν εὐθεῖαν, εὑρίσκοντες τὸ βῆμα αὐτῆς (§ 28 β') καὶ ἐπαναλαμβάνοντες αὐτὸ διὰ τοῦ διαβήτου ἑκατέρωθεν τῆς προβολῆς τοῦ σημείου τούτου.

Σημείωσις β'.) Ἐὰν αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων δι' ὧν δίδεται ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀκέραιαι, δυνάμεθα νὰ βαθμολογήσωμεν αὐτήν, μερίζοντες τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν τῶν σημείων τούτων, εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κατηγμένων αὐτῶν. Π.χ. ἵνα βαθμολογήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γ(3)δ(8), μερίζομεν τὸ τμῆμα γδ εἰς 8-3=5 μέρη ἴσα καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4,5,6,7....

35. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο δοθέντων σημείων.***

Ἔστωσαν $\alpha(2,5)$ καὶ $\beta(7,3)$ τὰ δοθέντα σημεῖα ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόστασις (σχ. 12).

Λύσις. Κατακλίνομεν τὸ προβάλλον ἐπίπεδον τὴν διὰ τῶν σημείων τούτων διερχομένην εὐθεῖαν ΑΒ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α. Τὸ τμῆμα $\alpha\beta_1$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως. Μετροῦντες δὲ αὐτὸ διὰ τῆς κλίμακος εὑρίσκομεν $\alpha\beta_1 = 6,6$ μ.

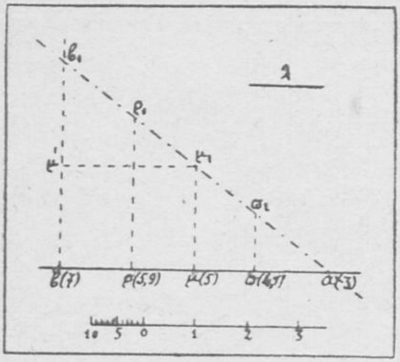
Σημείωσις. Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εὑρίσκεται καὶ ἀριθμητικῶς. Ἡ ΑΒ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ ὁριζόντιος καὶ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β (σχ. 5). Ἑπομένως εἶναι $(AB) = \sqrt{\delta^2 + \upsilon^2}$

καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι $\delta=4{,}5$ καὶ $\upsilon=4{,}8$ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$(AB)=\sqrt{(4{,}5)^2+(4{,}8)^2}=6{,}58\ldots.$$

36. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον ἀπέχον ἀπὸ δοθέντος σημείου αὐτῆς δοθεῖσαν ἀπόστασιν.***

Ἔστω $\alpha(3)\beta(7)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 13.) Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ἀπέχον τοῦ σημείου αὐτῆς μ (5) ἀπόστασιν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ λ.



Σχ. 13

Λύσις. Κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\alpha(3)$ καὶ ἀφ' οὗ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον $\mu(5)$ (§ 32), λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $\alpha\beta_1$ τὸ τμῆμα $\mu_1\rho_1$ ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ λ. Τὸ ρ_1 εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ ζητουμένου σημείου. Ἑπομένως ἡ προβολή του εἶναι ὁ ποῦς ρ τῆς ἐκ τοῦ ρ_1 ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$. Ἡ κατηγμένη του εἶναι (§ 31)

$$(\rho P)=3+(\rho\rho_1)=3+2{,}9=5{,}9\ \mu.$$

Τὸ ζητούμενον ἄρα σημεῖον εἶναι τὸ ρ (5,9). Ἐκτὸς τοῦ σημείου τούτου ὑπάρχει καὶ ἄλλο, τὸ $\varpi\,(4{,}1)$, ἀπέχον τοῦ $\mu(5,)$ ἀπόστασιν λ. Ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι συμμετρικὴ τοῦ ρ ὡς πρὸς τὸ μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

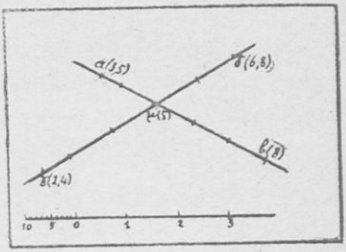
ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

α΄) *Εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσαι*

37. Φαντασθῶμεν δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου καὶ ἀλληλοτομούσας εἰς τὸ Μ.

Ἡ προβολὴ τοῦ Μ κεῖται ἀναγκαίως καὶ ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς ΓΔ. Αἱ προβολαὶ ἄρα τῶν εὐθειῶν τούτων ἀλληλοτομοῦσιν εἰς σημεῖον μ ὅπερ, ὡς προβολὴ τοῦ Μ, θὰ φέρῃ τὴν κατηγμένην αὐτοῦ, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς $\alpha\beta$ θεωρηθῇ, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς $\gamma\delta$.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ προβολαὶ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ (σχ. 14) δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομῶσιν εἰς σημεῖον μ φέρον τὴν αὐτὴν κατηγμένην, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς $\alpha\beta$ θεωρηθῇ, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς $\gamma\delta$, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἀλληλοτομοῦσιν ἐπίσης εἰς σημεῖον Μ. Διότι, ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ κατακορύφου ἓν μόνον σημεῖον ὑπάρχει ἔχον τὴν κατηγμένην τὴν ὁποίαν φέρει τὸ μ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ.



Σχ. 14

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Διὰ νὰ τέμνωσιν ἀλλήλας δύο εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου, πρέπει αἱ προβολαὶ αὐτῶν νὰ τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ δὲ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν νὰ φέρῃ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Ἐν τῷ σχεδιάσματι 14, ὑπολογίζοντες τὴν κατηγμένην τοῦ σημείου Μ τῆς εὐθείας ΑΒ τοῦ προβαλλομένου εἰς τὸ μ, ἔχομεν

(§ 31) $$\frac{(\mu\text{M}) - 3{,}5}{(\alpha\mu)} = \frac{8 - 3{,}5}{(\alpha\beta)}$$

ἐξ ἧς $$(\mu\text{M}) = 3{,}5 + \frac{4{,}5 . 1{,}2}{3{,}6} = 5\ \mu.$$

Ὑπολογίζοντες εἶτα καὶ τὴν κατηγμένην τοῦ σημείου Μ′ τῆς ΓΔ τοῦ προβαλλομένου εἰς τὸ μ, ἔχομεν

$$\frac{(\mu M')-2,4}{(\gamma\mu)}=\frac{6,8-2,4}{(\gamma\delta)}$$

ἐξ ἧς $$(\mu M')=2,4+\frac{4,4.2,6}{4,4}=5\ \mu.$$

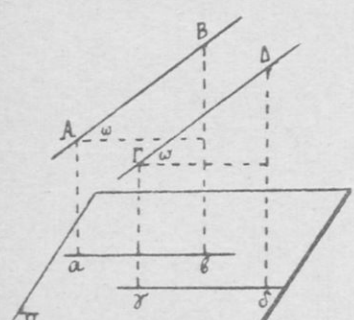
Τὰ σημεῖα ἄρα Μ καὶ Μ′ συμπίπτουν· ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον μ (5).

β′) *Εὐθεῖαι παράλληλοι*

38. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Τῶν παραλλήλων εὐθειῶν αἱ προβολαὶ εἶναι παράλληλοι, τὰ βήματα ἴσα καὶ αἱ βαθμολογίαι ὁμόρροποι· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 15) καὶ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π αἱ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$.

α′) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αΑΒ καὶ γΓΔ, ἃς σχηματίζουσιν δύο τυχοῦσαι προβάλλουσαι μετὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἔχουσι τὰς πλευράς των παραλλήλους, τὰ προβάλλοντα ταύτας ἐπίπεδα Α$\alpha\beta$Β καὶ Γ$\gamma\delta$Δ εἶναι παράλληλα. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων τούτων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου Π, εἶναι παράλληλοι.



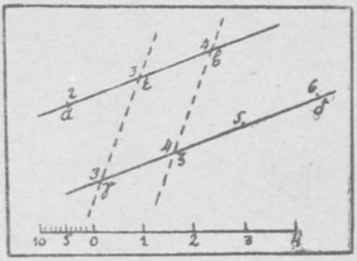
Σχ. 15

β′) Αἱ γωνίαι κλίσεως ω καὶ ω′, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους και ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι· ἑπομένως καὶ τὰ βήματα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα (§ 28).

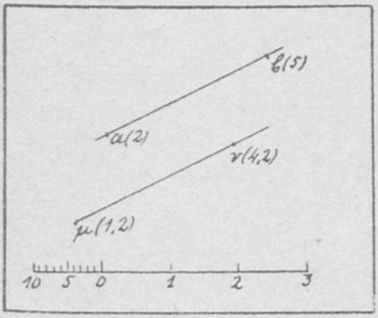
γ′) Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων αὐτῶν βαίνουσιν αὐξανόμεναι κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· αἱ βαθμολογίαι ἄρα τῶν εὐθειῶν εἶναι ὁμόρροποι.

Ἀντιστρόφως· ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι α(2)β(4) καὶ γ(3)δ(6) ἔχουσαι τὰς προβολάς των παραλλήλους (σχ. 16), τὰ βήματα ἴσα καὶ τὰς βαθμολογίας ὁμορρόπους. Λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Διότι, ἂν βαθμολογήσωμεν τὰς εὐθείας καὶ ἐπιζεύξωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα ε(3) καὶ β(4) τῆς πρώτης, ἀντιστοίχως μετὰ τῶν σημείων γ(3) καὶ ζ(4) τῆς δευτέρας, σχηματίζεται τετράπλευρον ἐν τῷ χώρῳ ΕΓΒΖ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΕΓ καὶ ΒΖ εἶναι ὁριζόντιοι, ἑπομένως παράλληλοι καὶ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς προβολὰς αὐτῶν εγ καὶ βζ. 'Αλλ' αἱ εὐθεῖαι εγ καὶ βζ εἶναι παράλληλοι, διότι τὸ τετράπλευρον εγβζ, ὡς ἔχον τὰς πλευρὰς εβ καὶ γζ ἴσας καὶ παραλλήλους ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως καὶ αἱ πρὸς ταύτας παράλληλοι καὶ ἴσαι ΕΓ καὶ ΒΖ, εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι. Καὶ τὸ ἐν τῷ χώρῳ ἄρα τετράπλευρον ΕΓΒΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα **α**(2)**δ**(4) καὶ **γ**(3)**δ**(6) εἶναι παράλληλοι, ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 16



Σχ. 17

39. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***'Από δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.***

Ἔστω μ(1,2) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ α(2)β(5) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 17).

Λύσις. Φέρομεν ἐκ τοῦ μ παράλληλον τῇ **αβ** καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα μν ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν **αβ** τῶν σημείων **α**(2) καὶ **β**(5), παρὰ δὲ τὸ σημεῖον **ν** γράφομεν κατηγμένην 1,2+(5—2)=4,2 μ.

Ἡ εὐθεῖα μ(1,2)**ν**(4,2) εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν τῆς $\alpha(2)$ $\beta(5)$ καὶ ἡ βαθμολογία της ὁμόρροπος ἐκ κατασκευῆς. Πρὸς τούτοις τὰ βήματα τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι ἴσα. Διότι διὰ μὲν τὴν ΑΒ ἔχομεν (§ 28 β΄)

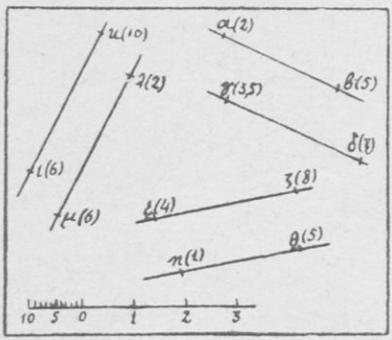
$$\beta = \frac{(\alpha\beta)}{5-2} = \frac{(\alpha\beta)}{3}$$

διὰ δὲ τὴν ΜΝ, $\beta' = \dfrac{(\mu\nu)}{4,2-1,2} = \dfrac{(\mu\nu)}{3}$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta = \mu\nu$ ἐκ κατασκευῆς, ἕπεται $\beta = \beta'$.

γ΄) Εὕρεσις τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως δύο εὐθειῶν

40. α΄) Ἐὰν αἱ προβολαὶ δύο εὐθειῶν, ὧν ζητεῖται ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις, εἶναι παράλληλοι, εὑρίσκομεν τὰ βήματα αὐτῶνκαὶ ἂν ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ αἱ βαθμολογίαι τῶν εὐθειῶν ὁμόρροποι,αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι,ἂν δὲ δὲν συμβαίνωσιν ἀμφότερα, αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι, ἀλλ' οὔτε τέμνουσιν ἀλλήλας, ὡς κείμεναι εἰς δύο παράλληλα προβάλλοντα ἐπίπεδα.



Σχ. 18

Οὕτω τῶνεὐθειῶνΑΒ καὶΓΔ(σχ.18)αἱ προβολαὶεἶναι παράλληλοι, καὶ αἱ βαθμολογίαι ὁμόρροποι.Ὑπολογίζοντες δὲ τὰ βήματα αὐτῶν

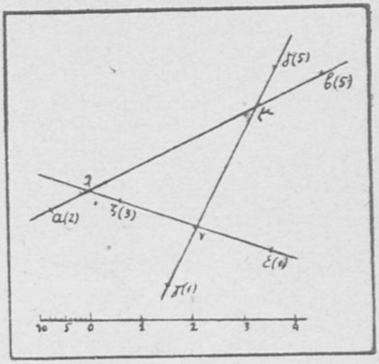
εὑρίσκομεν, $\beta = \dfrac{(\alpha\beta)}{5-2} = \dfrac{2,4}{3} = 0,8$ μ.

καὶ $\beta' = \dfrac{(\gamma\delta)}{7-3,5} = \dfrac{2,8}{3,5} = 0,8$ μ.

ἤτοι $\beta = \beta'$. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Αἱ δὲ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ καθὼς καὶ αἱ ΙΚ καὶ ΛΜ δὲν εἶναι παράλληλοι, οὐδ' ἀλληλοτομοῦσι. Διότι τῶν μὲν δύο πρώτων, εἶναι μὲν αἱ προβολαὶ παράλληλοι καὶ αἱ βαθμολογίαι ὁμόρροποι, τὰ βήματα ὅμως (λογιζόμενα ὡς ἀνωτέρω) εἶναι ἄνισα, τῶν δὲ ΙΚ καὶ ΛΜ, εἶναι μὲν αἱ προβολαὶ παράλληλοι καὶ τὰ βήματα ἴσα, ἀλλ' αἱ βαθμολογίαι εἶναι ἀντίρροποι.

β') Ἐὰν αἱ προβολαὶ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ δύο εὐθειῶν τέμνωσιν ἀλλήλας εἰς σημεῖον μ (σχ.19), ζητοῦμεν τὴν κατηγμένην τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς αὐτό, θεωροῦντες αὐτὸ πρῶτον, ὡς προβολὴν σημείου Μ τῆς ΑΒ καὶ δεύτερον, ὡς προβολὴν σημείου Μ′ τῆς ΓΔ. Ἐὰν αἱ εὑρεθεῖσαι κατηγμέναι εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἀλληλοτομοῦσιν· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.



Σχ. 19

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι ἔχομεν (§ 31).

$$(\mu \mathrm{M}) = 2 + \frac{3(\alpha\mu)}{(\alpha\beta)} = 2 + \frac{3.4,5}{6} = 4,25 \ \mu. \ \text{καὶ}$$

$$(\mu \mathrm{M}') = 1 + \frac{4(\gamma\mu)}{(\gamma\delta)} = 1 + \frac{4.3,9}{4,8} = 4,25$$

Τὰ σημεῖα ἄρα Μ καὶ Μ′ συμπίπτουν καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας.

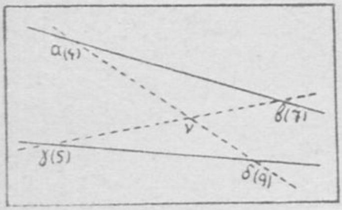
Ὑπολογίζοντες ὁμοίως τὰς κατηγμένας τῶν σημείων Ν καὶ Ν′ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ τῶν προβαλλομένων εἰς τὸ ν, εὑρίσκομεν $(\nu \mathrm{N}) = 2$ καὶ $(\nu \mathrm{N}') = 1,5$ μ.

Αἱ εὐθεῖαι ἄρα αὗται δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διότι ἡ μὲν κατηγμένη τοῦ σημείου Λ τῆς ΑΒ τοῦ προβαλλομένου εἰς τὸ λ περιλαμβάνεται προφανῶς μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, ἡ δὲ τοῦ Λ′ τῆς ΕΖ τοῦ προβαλλομένου ἐπίσης εἰς τὸ λ, εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 3

γ') Ἐὰν αἱ προβολαὶ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομῶσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν εὐθειῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς (σχ. 20).

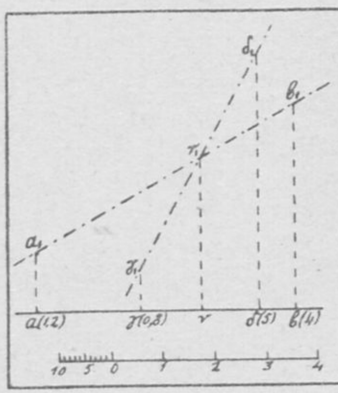
Ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν δύο σημεῖα τῆς μιᾶς, μετὰ δύο σημείων τῆς ἄλλης,οἷον τὸ α(4) μετὰ τοῦ δ(9) καὶ τὸ β(7) μετὰ τοῦ γ(5).



Σχ. 20

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α(4)δ(9) καὶ γ(5)β(7) τέμνωσιν ἀλλήλας, θὰ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δὲ τούτου θὰ κεῖνται ἀναγκαίως καὶ αἱ δοθεῖσαι, αἵτινες, ὡς ἐκ τούτου, ἢ θὰ τέμνωσιν ἀλλήλας, ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ, διότι αἱ προβολαί των δὲν εἶναι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι α(4)β(7) καὶ γ(5)δ(9) τέμνουσιν ἀλλήλας.

δ') Ἐὰν αἱ προβολαὶ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ συμπίπτουν (σχ. 21), αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου καὶ ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας ἢ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 21

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως αὐτῶν, συνάμα δὲ καὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν, ἂν τέμνωνται, κατακλίνομεν τὸ προβάλλον ταύτας ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου καί, ἂν αἱ κατακλίσεις τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι, τότε καὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, αἱ εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσιν εἰς σημεῖον Ν τοῦ ὁποίου τὴν μὲν προβολὴν ν προσδιορίζομενἄγοντες ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου ν_1 τῶν κατακλίσεων κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν προβολὴν τῶν εὐθειῶν, τὴν δὲ κατηγμένην εὑρίσκομεν μετροῦντες διὰ τῆς γρ. κλίμακος τὴν $\nu\nu_1$.

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι αἱ εὐθεῖαι α(1,2)β(4) καὶ γ(0,8)δ(5) ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ σημεῖον ν(2,9).

Ἀσκήσεις

1) Δοθέντων δύο σημείων α(3) καὶ β(5) ὧν ἡ ὁριζοντία ἀπό-

στασις εἶναι $(\alpha\beta)=6$ μ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐπιπέδου, τοιοῦτον ὥστε (ΜΑ)=4 καὶ (ΜΒ)=3,8 μ.

2). Νὰ βαθμολογηθῇ εὐθεῖα ἧς δίδονται ἡ προβολή, ἓν σημεῖον καὶ ἡ γωνία κλίσεως.

3). Δίδεται ἡ εὐθεῖα $\alpha(4)\beta(4)$ καὶ τὸ σημεῖον $\gamma(7)$, οὗ ἡ προβολὴ ἀπέχει τῆς $\alpha\beta$ ἀπόστασιν 3 μ. Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ τοῦτο ἑνοῦσα εὐθεῖα μετὰ τοῦ δοθέντος, νὰ ἔχῃ συντελεστὴν κλίσεως $\frac{5}{6}$.

4). Νὰ προσδιορισθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν, γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς αὐτῆς καὶ ἑνὸς σημείου της.

5) Ἐπιπέδου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ κατηγμέναι τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ, εἶναι κατὰ σειρὰν $(\alpha A)=3{,}2$μ. $(\beta B)=2{,}5$ καὶ $(\gamma\Gamma)=7{,}3$μ. συνάμα δὲ εἶναι $(\alpha\beta)=4{,}5$, $(\beta\gamma)=3{,}2$ $(\alpha\gamma)=6$, $(\alpha\delta)=4$ καὶ $(\gamma\delta)=5$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατηγμένη τῆς κορυφῆς Δ.

6). Ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι μὲ δοθέντας συντελεστὰς κλίσεως καὶ τέμνουσαι ἀλλήλας εἰς σημεῖον ἔχον δοθεῖσαν κατηγμένην. Διερεύνησις.

7). Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι μὲ δοθέντας συντελεστὰς κλίσεως καὶ οὕτως, ὥστε ἡ τὰ ἴχνη αὐτῶν ἑνοῦσα εὐθεῖα νὰ μερίζηται δίχα ὑπὸ δοθέντος σημείου τοῦ προβολ. ἐπιπέδου.

8). Ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ὁριζόντιοι εὐθεῖαι αἱ τέμνουσαι ταύτας νὰ ἔχωσι δοθεῖσαν κατεύθυνσιν.

9). Ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἐχόντων τὴν αὐτὴν κατηγμένην νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ τοιαῦται, ὥστε τὰ ἴχνη των νὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τοῦ προβ. ἐπιπέδου.

10). Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μὲ δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἴχνος νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ προβ. ἐπιπέδου δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

11). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τέμνουσα δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ἑτέρα εἶναι ὁριζόντιος.

12). Ἐπιπέδου πενταγώνου δίδεται ἡ προβολὴ καὶ αἱ κατηγμέναι τριῶν διαδοχικῶν κορυφῶν. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ κατηγμέναι τῶν λοιπῶν κορυφῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

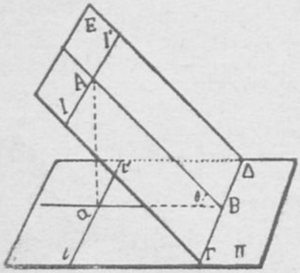
ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

41. ***Παράστασις τοῦ ἐπιπέδου.*** Τὸ ἐπίπεδον παρίσταται,ἐν γένει, διὰ τῶν ἠριθμημένων προβολῶν ἢ τριῶν σημείων αὐτοῦ μὴ κειμένων ἐπ'εὐθείας. ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς σημείου του μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἢ δύο εὐθειῶν παραλλήλων ἢ ἀλληλοτομουσῶν.

Ἐκ πάντων τῶν τρόπων τούτων συνηθέστερος εἶναι ὁ τελευταῖος· ἄλλως τε καὶ οἱ λοιποὶ ἀνάγονται εἰς αὐτόν.

Ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ προβολικὸν λέγεται ***ὁριζόντιον*** καὶ πάντα τὰ σημεῖα αὐτοῦ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κατηγμένην,ὅταν δὲ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προβ.ἐπίπεδον λέγεται ***κατακόρυφον*** ἢ καὶ ***προβάλλον ἐπίπεδον***. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παρίσταται ὑπὸ τῆς εὐθείας καθ' ἣν τέμνει τὸ προβολ. ἐπίπεδον.

42. ***Ἴχνος ἐπιπέδου καὶ χαρακτηριστικαὶ εὐθεῖαι αὐτοῦ.*** Ἐὰν ἐπίπεδον Ε (σχ. 22) τέμνῃ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Τ, ἡ τομὴ ΓΔ λέγεται ***ἴχνος*** τοῦ ἐπιπέδου Ε.



Σχ. 22

Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον, οἷον ἡ ΙΙ΄, λέγεται ***ἰχνοπαράλληλος,*** πᾶσα δὲ εὐθεῖα αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὰς ἰχνοπαραλλήλους, οἷον ἡ ΑΒ, λέγεται ***ἰχνοκάθετος*** ἢ ***γραμμὴ τῆς μεγίστης κλίσεως*** τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ προβολὴ *ιι΄* τῆς ἰχνοπαραλλήλου ΙΙ΄ οὖσα παράλληλ πρὸς ταύτην, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἴχνος ΓΔ. Ἐπει δὲ ἡ Α*α* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐ τὴν ΓΔ, ἡ προβολὴ *α*Β τῆς ἰχνοκαθέτου ΑΒ εἶναι ἐπίσης κάι τος ἐπὶ τὴν ΓΔ (κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων), ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν προβολὴν ιι′ τῆς ἰχνοπαραλλήλου.

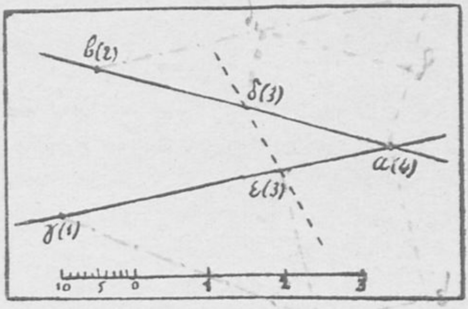
Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι

αἱ προβολαὶ τῶν ἰχνοκαθέτων ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς προβολὰς τῶν ἰχνοπαραλλήλων αὐτοῦ.

43. ***Γωνία κλίσεως ἐπιπέδου.*** Ἡ ὀξεῖα γωνία θ τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τυχοῦσα ἰχνοκάθετος τοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς λέγεται ***γωνία κλίσεως*** τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου καὶ χρησιμεύει ὡς μέτρον αὐτῆς.

44. ***Συντελεστὴς κλίσεως ἐπιπέδου*** λέγεται ὁ συντελεστὴς κλίσεως μιᾶς τῶν ἰχνοκαθέτων αὐτοῦ, ***βῆμα*** δέ, τὸ βῆμα αὐτῆς.

45. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Νὰ ἀχθῇ ἰχνοπαράλληλος δοθέντος ἐπιπέδου ἔχουσα δοθεῖσαν κατηγμένην.***



Σχ. 23

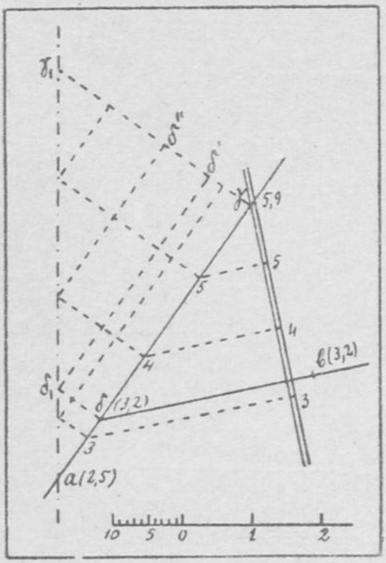
Ἔστω $\alpha(4)\beta(2)\gamma(1)$ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 23). Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ ἡ ἔχουσα κατηγμένην 3.

Λύσις. Προσδιορίζομεν (§ 32) τὰ σημεῖα $\delta(3)$ καὶ $\varepsilon(3)$ τῶν εὐθειῶν $\alpha(4)\beta(2)$ καὶ $\alpha(4)\gamma(1)$. Ἡ ταῦτα ἑνοῦσα εὐθεῖα $\delta(3)\varepsilon(3)$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἰχνοπαράλληλος.

46. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Ἐκ δοθέντος σημείου δεδομένου ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ ἡ ἰχνοκάθετος αὐτοῦ.***

Ἔστω $\alpha(2{,}5)\beta(3{,}2)\gamma(5{,}9)$ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 24) καὶ ὅτι ζητεῖται ἡ ἐκ τοῦ σημείου $\gamma(5{,}9)$ διερχομένη ἰχνοκάθετος αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τῶν ἰχνοκαθέτων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς προβολὰς τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ἐπιπέδου, κατασκευάζομεν πρῶτον μίαν τῶν ἰχνοπαραλλήλων αὐτοῦ, οἷον τὴν $\beta(3\ 2)\ \delta(3,2)$ καὶ ἐκ τοῦ γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\beta\delta$. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ζητουμένης ἰχνοκαθέτου, τὴν ὁποίαν βαθμολογοῦμεν ἄγοντες τὰς ὑπὸ ἀκεραίας κατηγμένας 3,4,5 ἰχνοπαραλλήλους τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

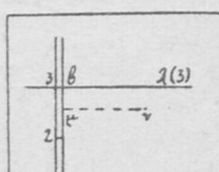


Σχ. 24

47. ***Βαθμολογία ἐπιπέδου*** λέγεται ἡ βαθμολογία μιᾶς τῶν ἰχνοκαθέτων αὐτοῦ.

Ἡ βαθμολογηθεῖσα ἰχνοκάθετος λέγεται ***κλῖμαξ κλίσεως*** ἢ ἁπλῶς ***κλῖμαξ*** τοῦ ἐπιπέδου καὶ πρὸς διάκρισιν ἡ προβολὴ αὐτῆς παρίσταται ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν πλησιέστατα ἀλλήλων κειμένων (σχ. 24).

48. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον ὅταν δοθῇ μία τῶν ἰχνοκαθέτων αὐτοῦ.***



Σχ. 25

Διότι δοθείσης μιᾶς τῶν ἰχνοκαθέτων ἐπιπέδου Ε, οἷον τῆς $\alpha(1)\ \beta(3)$, (σχ. 25) δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τυχοῦσαν ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ. Οὕτως ἂν θέλωμεν τὴν ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαράλληλον, φέρομεν ἐκ τῆς προβολῆς β τοῦ σημείου $\beta(3)$ τῆς ἰχνοκαθέτου, τὴν $\beta\gamma$ κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν αὐτῆς $\alpha\beta$. Ἡ εὐθεῖα $\beta(3)\gamma(3)$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἰχνοκάθετος $\alpha(1)\ \beta(3)$, κοινὸν ἔχουσαι τὸ σημεῖον $\beta(3)$, ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον Ε.

49. ΠΡΟΒΛΗΜΑ, ***Εὑρεῖν τὴν κατηγμένην σημείου κει-***

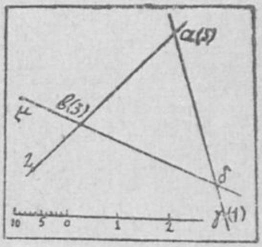
μένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς αὐτοῦ.

Περίπτωσις α΄). Ἔστω ν ἡ προβολὴ σημείου Ν κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου Ε (σχ. 25) δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως. Ζητεῖται ἡ κατηγμένη τοῦ Ν.

Λύσις. Ἡ ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Ν προβάλλεται ἐπὶ τῆς $\nu\mu$, καθέτου ἐπὶ τὴν προβολὴν $\alpha\beta$ τῆς κλίμακος κλίσεως αὐτοῦ, τέμνει δὲ αὐτὴν εἰς σημεῖον Μ προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ μ καὶ ἔχον τὴν αὐτὴν κατηγμένην μετὰ τοῦ Ν. Πρὸς εὕρεσιν ὅθεν τῆς κατηγμένης τοῦ Ν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν κατηγμένην τοῦ Μ (§ 31).

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι $(\nu N)=(\mu M)=2{,}5$μ.

Περίπτωσις β'). Ἔστω μ ἡ προβολὴ σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\alpha(5)\beta(3)\gamma(1)$ (σχ. 26). Ζητεῖται ἡ κατηγμένη τοῦ Μ.



Σχ. 26

Λύσις. Ἡ εὐθεῖα ΒΜ, ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον Β τῆς εὐθείας $\alpha(5)\beta(3)$ μετὰ τοῦ Μ, προβάλλεται ἐπὶ τῆς $\beta\mu$, τέμνει δὲ τὴν ΑΓ εἰς σημεῖον Δ προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ δ καὶ ἔχον κατηγμένην (§ 31)

$$(\delta\Delta)=1+\frac{(\gamma\delta).4}{(\gamma\alpha)}=1+\frac{6.4}{36}=1{,}67.$$

Ἔχοντες τὴν κατηγμένην τοῦ Δ εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὴν κατηγμένην τοῦ σημείου Μ,

$$(\mu M)=1{,}67+\frac{1{,}33(\mu\delta)}{(\beta\delta)}=1.67+\frac{1{,}33.4{,}1}{2{,}8}=3{,}6.$$

Παρατήρησις. Ἡ δευτέρα περίπτωσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν πρώτην ἂν κατασκευασθῇ μία κλῖμαξ κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου.

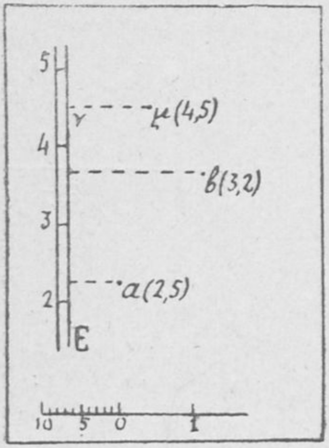
50. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Εὑρεῖν τὴν θέσιν δοθέντος σημείου ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἔστω ἐπίπεδον Ε δεδομένον διὰ κλίμακος κλίσεως (σχ. 27) καὶ σημεῖον $\mu(4{,}5)$. Ζητεῖται ἡ θέσις τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Λύσις. Ἡ ἐκ τοῦ μ κατακόρυφος συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Ε εἰς σημεῖον Μ΄, προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ μ. Ἐὰν ἡ κατηγμένη τοῦ

Μ′, ἥτις δύναται νὰ εὑρεθῇ (§ 31), εἶναι ἴση τῇ κατηγμένῃ 4,5 τοῦ σημείου Μ, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ε· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει κεῖται ὑπεράνω ἢ ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου καθ᾽ ὅσον ἡ (μΜ′) εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς (μΜ). Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι

$$(\mu M')=(\nu N)= 4{,}5=(\mu M).$$



Σχ. 27

Ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

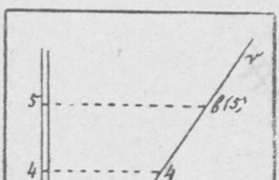
Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον β(3,2) κεῖται ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ α(2,5) ὑπεράνω αὐτοῦ.

51. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Νὰ προσδιορισθῇ ἡ εὐθεῖα δοθέντος ἐπιπέδου, ἧς ἔχει δοθῇ ἡ προβολή.***

Ἡ εὐθεῖα προσδιορίζεται ὅταν προσδιορισθῶσιν δύο σημεῖα αὐτῆς.

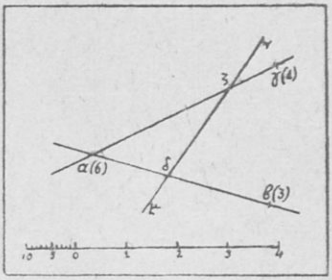
Περίπτωσις α′). Ἔστω $\mu\nu$ ἡ προβολὴ εὐθείας ΜΝ κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου Ε δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως (σχ. 28).

Λύσις. Ἐὰν ἀχθῶσι δύο τυχοῦσαι ἰχνοπαράλληλοι τοῦ ἐπιπέδου, οἵ οναί ἔχουσαι κατηγμένας 3 καὶ 5, θὰ συναντήσουν τὴν ΜΝ εἰς σημεῖα Α καὶ Β προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν α καὶ β καὶ ἔχοντα ἀντιστοίχως κατηγμένας 3 καὶ 5. Τὰ σημεῖα α(3) καὶ β(5) προσδιορίζουσι τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.



Σχ. 28

Ἐὰν θέλωμεν νὰ βαθμολογήσωμεν αὐτήν, φέρομεν τὰς προβολὰς τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐχουσῶν ἀκεραίας κατηγμένας. Τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς $\mu\nu$ καὶ τῶν προβολῶν τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τῆς ΜΝ τῶν ἐχόντων κατηγμένας, τὰς κατηγμένας τῶν ἀντιστοίχων ἰχνοπαραλλήλων.



Σχ. 29

Περίπτωσις β'). Ἔστω *μν* ἡ προβολὴ εὐθείας ΜΝ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\beta(3)\alpha(6)\gamma(1)$ (σχ. 29).

Λύσις. Προσδιορίζομεν τὰς κατηγμένας τῶν σημείων Δ καὶ Ζ καθ' ἃ ἡ ΜΝ τέμνει ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὰ ὁποῖα προβάλλονται ἐπὶ τῶν σημείων δ καὶ ζ. Προσδιορισθέντων τῶν σημείων Δ κα Ζ προσδιορίζεται καὶ ἡ δι' αὐτῶν διερχομένη εὐθεῖα ΜΝ. Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι ἔχομεν

$$(\delta\Delta)=3+\frac{(\beta\delta)3.}{(\alpha\beta)}=3+\frac{2,1.3}{3,6}=4,75\ \mu.$$

$$(\zeta Z)=1+\frac{(\zeta\gamma).5}{(\alpha\gamma)}=1+\frac{1.5}{4}=2,25\ \mu.$$

Ἡ ζητουμένη ἄρα εὐθεῖα εἶναι ἡ $\delta(4,75)\zeta(2,25)$.

52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου νὰ γραφῇ τυχοῦσα εὐθεῖα.***

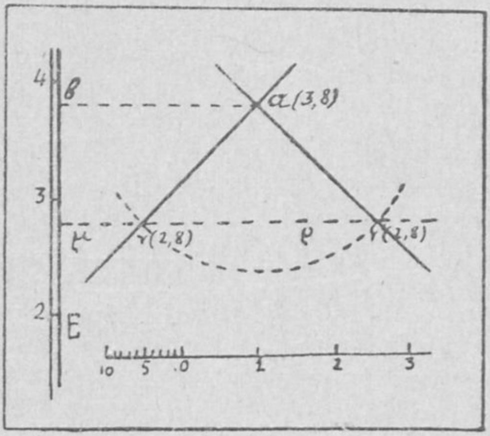
Ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν δι' εὐθείας δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

53. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Διὰ σημείου κειμένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχουσα δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως.***

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 30), $\alpha(3,8)$ τὸ δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ καὶ **σ** ὁ συντελεστὴς κλίσεως τῆς ζητουμένης εὐθείας.

Λύσις. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς, π.χ. ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς κατηγμένης τοῦ Α κατὰ 1, τουτέστι τὸ ἔχον κατηγμένην 3,8—1=2,8. Ἔστω λοιπὸν Ν τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς κλίσεως τῆς ζητουμένης εὐθείας εἶναι **σ**, τὸ βῆμα αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{\sigma}$ καὶ ἑπομένως ἡ προβολὴ **ν** τοῦ σημείου Ν ἀπέχει τῆς προβολῆς *α* τοῦ δοθέντος σημείου ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $\frac{1}{\sigma}$, ἀφ' οὗ αἱ κατηγμέναι των διαφέρουν κατὰ 1. Τὸ **ν** ἄρα κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ *α* καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{\sigma}$.



Σχ. 30

Οὕτως ἔχομεν ἕνα γεωμετρικὸν τόπον τοῦ σημείου **ν**.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ν εἶναι σημεῖον τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου μὲ κατηγμένην 2,8 ἡ προβολή του κεῖται ἐπὶ τῆς προβολῆς ***μρ*** τῆς ἰχνοπαραλλήλου, ἡ ὁποία ἔχει τὴν αὐτὴν κατηγμένην 2,8. Οὕτως ἔχομεν καὶ δεύτερον γεωμετρικὸν τόπον τοῦ **ν**.

Τὸ σημεῖον Ν ἄρα δύναται νὰ προσδιορισθῇ, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ κατηγμένη του, προσδιορίζεται δὲ καὶ ἡ προβολή του, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν δύο γεωμ. τόπων. Κατ' ἀκολουθίαν ὁρίζεται καὶ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ εὐθεῖα ***μρ*** νὰ τέμνῃ ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἐφάπτηται τῆς μὲ κέντρον a καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{\sigma}$ γραφομένης περιφερείας, τουτέστιν νὰ εἶναι

$$\beta\mu \leqq a\nu$$

Ἀλλὰ $\beta\mu$ εἶναι τὸ βῆμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ $a\nu$ τὸ βῆμα τῆς ζητουμένης εὐθείας. Παριστῶντες ὅθεν τὸ βῆμα τοῦ ἐπιπέδου διὰ Β καὶ τὸν συντελεστὴν κλίσεως αὐτοῦ διὰ Σ, θὰ ἔχωμεν.

$$B \leqq \beta \text{ ἢ } \frac{1}{\Sigma} \leqq \frac{1}{\sigma} \text{ καὶ ἑπομένως } \sigma \leqq \Sigma.$$

τουτέστιν, ***διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ὁ συντελεστὴς κλίσεως τῆς εὐθείας νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν συντελεστὴν κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου.***

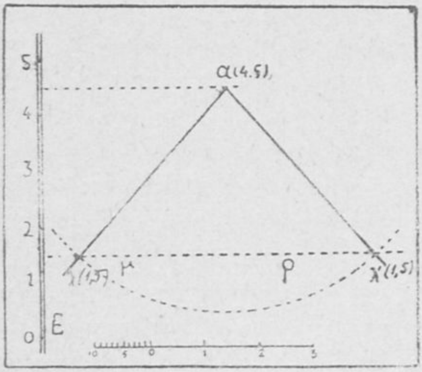
Ἂν εἶναι $\sigma < \Sigma$, οἱ δύο τόποι τέμνουσιν ἀλλήλους καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἂν δὲ εἶναι $\sigma = \Sigma$, οἱ δύο τόποι ἐφάπτονται καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου διερχομένη ἰχνοκάθετος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν εἶναι $\sigma = \frac{5}{11}$, μὲ κέντρον a καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{\sigma} = \frac{11}{5} = 2{,}2$ μ. γράφομεν περιφέρειαν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ποδὸς β τῆς ἐκ τοῦ a καθέτου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου, λαμβάνομεν τμῆμα $\beta\mu$ ἴσον πρὸς τὸ βῆμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐκ τοῦ μ ἄγομεν τὴν $\mu\rho$ παράλληλον τῇ βa. Ἡ $\mu\rho$, ἥτις εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ὑπὸ κατηγμένην 2,8 ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου, τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα ν καὶ ν'. Αἱ εὐθεῖαι ὅθεν $a(3{,}8)\nu(2{,}8)$ καὶ $a(3{,}8)\nu'(2{,}8)$ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

54. ***Παρατήρησις.*** Ὅταν τὸ βῆμα τῆς εὐθείας δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ἀκριβῶς ἐκ τῆς γραφικῆς κλίμακος ἢ ὅταν εἶναι ἀρκετὰ μικρὸν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου $a(4{,}5)$ τοῦ ἐπιπέδου Ε (σχ. 31) εὐθεῖα ἔχουσα συντελεστὴν κλίσεως $\frac{3}{4}$ καὶ ἑπομένως βῆμα $\frac{4}{3}$.

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{4}{3}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ λάβωμεν ἀκριβῶς ἐκ τῆς γρ. κλίμακος. Ἕνεκα τούτου καὶ ἵνα ἀποφύγωμεν τὴν γεωμ. κατασκευὴν αὐτοῦ, ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον Ν τῆς ζητουμένης εὐθείας τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς τοῦ Α κατὰ 1, ζητοῦμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς Λ τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς τοῦ Α κατὰ 3 μονάδας (ὅσας δηλαδὴ ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ βήματος) καὶ τοῦ ὁποίου ἑπομένως ἡ προβολὴ λ θ' ἀπέχῃ τοῦ *α* τρία βήματα.



Σχ. 31

Πρῶτος ὅθεν τόπος τῆς προβολῆς λ τοῦ σημείου Λ εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ *α* καὶ ἀκτῖνα τρία βήματα, ἤτοι $\frac{4}{3} \times 3 = 4$ μ.

Δεύτερος τόπος εἶναι ἡ προβολὴ *μρ* τῆς ἰχνοπαραλλήλου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Λ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐχούσης κατηγμένην 4,5—3=1,5 μ.

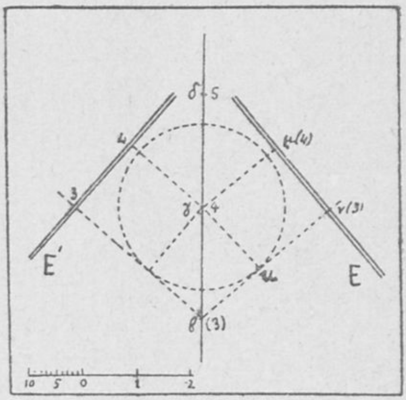
Ἡ προβολὴ ἄρα λ τοῦ σημείου Λ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων τόπων καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφ' ὅσον οἱ τόποι τέμνουσιν ἀλλήλους ἢ ἐφάπτονται ἢ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι λύουσαι τὸ πρόβλημα, ἡ *α*(4,5)λ(1,5) καὶ ἡ *α*(4,5)λ′(1,5).

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν τὸ βῆμα τῆς ζητουμένης εὐθείας εἶναι πολὺ μικρόν. Ἐὰν π.χ. τὸ βῆμα τῆς εὐθείας εἶνε $\frac{2}{5} =$ 0,4 μ. καὶ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς Ν τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς τοῦ Α κατὰ 1, ἡ μὲ κέντρον *α* καὶ ἀκτῖνα 0,4 γραφομένη περιφέρεια θὰ εἶναι πολὺ μικρά. Ἐπειδὴ δὲ ὅσον τὰ σχήματα εἶνε μικρότερα, τόσον τὰ λάθη εἶναι μεγαλύτερα, δυνατὸν εἶναι νὰ συμβῶσι λάθη γραφικὰ λίαν αἰσθητά.

Τούτου ἕνεκα, ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον Ν, ζητοῦμεν τὸ σημεῖον Λ π.χ. τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς κατηγμένης τοῦ Α κατὰ 5 ἢ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 5 (ἐπὶ πλέον ἢ ἔλαττον), ὅτε ἡ γραφομένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα $0{,}4 \times 5 = 2$μ. ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 2.

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον μὲ δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως.***



Σχ. 32

Ἔστω ϐ(3)δ(5) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 32) καὶ Σ ὁ συντελεστὴς κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω Ε ἡ κλῖμαξ κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ἐὰν φέρωμεν δύο διαδοχικὰς ἰχνοπαραλλήλους μὲ ἀκεραίας κατηγμένας, οἷον τὰς Μ(4) καὶ Ν(3), αὗται θὰ διέλθωσι διὰ τῶν σημείων γ(4) καὶ ϐ(3) τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν προβολῶν αὐτῶν *γκ* θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ βῆμα $\frac{1}{\Sigma}$ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ *ϐν* ἄρα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ κέντρον τὸ γ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{\Sigma}$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

Μὲ κέντρον τὴν προβολὴν τυχόντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας, οἷον τοῦ γ(4), καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{\Sigma}$ γράφομεν περιφέρειαν, ἐκ δὲ τῆς προβολῆς ϐ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας, τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει τῆς κατηγμένης τοῦ Γ κατὰ 1 (ἐπὶ ἢ πλέον ἐπὶ ἔλαττον) φέρομεν ἐφαπτομένην 6ν καὶ ἐκ τοῦ γ παράλληλον πρὸς αὐτήν, τὴν $\gamma\mu$.

Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι προβολαὶ δύο διαδοχικῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου μὲ κατηγμένας 3 καὶ 4 καὶ εἶναι ἀρκεταὶ πρὸς παράστασιν αὐτοῦ. Ἄγοντες κάθετον ἐπὶ τὰς προβολὰς αὐτῶν κατασκευάζομεν, ἂν θέλωμεν, καὶ κλίμακα κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει τὸ 6 νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας, τουτέστιν νὰ εἶναι $6\gamma \geqq \frac{1}{\Sigma}$.

Ἐπειδὴ δὲ 6γ εἶναι τὸ βῆμα τῆς δοθείσης εὐθείας, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ σ τὸν συντελεστὴν κλίσεως αὐτῆς, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται $\frac{1}{\sigma} \geqq \frac{1}{\Sigma}$, ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει $\Sigma \geqq \sigma$, τουτέστι, ***διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ὁ συντελεστὴς κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ συντελεστοῦ κλίσεως τῆς δοθείσης εὐθείας.***

Καὶ ἂν μὲν $\Sigma > \sigma$, ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα Ε καὶ Ε′ διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας διερχόμενα καὶ ἔχοντα συντελεστὴν κλίσεως Σ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ προβάλλον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπίπεδον.

Ἐὰν $\Sigma = \sigma$, ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει λύον τὸ πρόβλημα. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ ἔχῃ ἰχνοκάθετον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

56.***Παρατήρησις α′).*** Ὅταν τὸ βῆμα τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ἐκ τῆς γρ. κλίμακος ἀκριβῶς, ἢ ὅταν εἶναι πολὺ μικρόν, ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν ἐδαφίῳ (§ 54) ἐκτεθέντα.

Ἐὰν π.χ. ὁ συντελεστὴς κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου εἶναι $\frac{3}{5}$, τὸ βῆμα αὐτοῦ, ἑπομένως καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς γραφησομένης περιφερείας, θὰ εἶναι $\frac{5}{3}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, λαμβάνομεν ὡς ἀκτῖνα τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{5}{3} \times 3 = 5$ μ. καὶ ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς γραφείσης περιφερείας ἐκ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει κατὰ 3 μονάδας τῆς κατηγμένης τοῦ σημείου οὗ ἡ προβολὴ ἐλήφθη ὡς κέντρον.

Ὁμοίως, ἐὰν ὁ συντελεστὴς κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου εἶναι $\frac{5}{2}$, τὸ βῆμα αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{2}{5}=0{,}4$ καὶ ἡ μὲ ἀκτῖνα τόσην γραφομένη περιφέρεια εἶναι πολὺ μικρά.

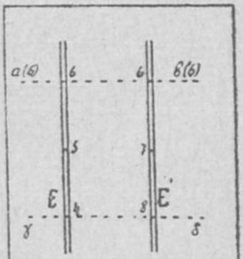
Πρὸς ἀποφυγὴν λαθῶν, λαμβάνομεν ὡς ἀκτῖνα $\frac{2}{5}\times 5=2$ μ. καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην ἐκ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου τῆς δεδομένης εὐθείας, τοῦ ὁποίου ἡ κατηγμένη διαφέρει κατὰ 5 μονάδας τῆς κατηγμένης τοῦ σημείου οὗ ἡ προβολὴ ἐλήφθη ὡς κέντρον.

57. ***Παρατήρησις β').*** Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ὁριζόντιος, τὸ πρόβλημα λύεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας $\alpha(6)\beta(6)$ (σχ.33) ἐπίπεδον μὲ συντελεστὴν κλίσεως $\frac{4}{5}$ καὶ ἑπομένως βῆμα $\frac{5}{4}$.

Ἡ εὐθεῖα $\alpha(6)\beta(6)$ εἶναι προφανῶς ἰχνοπαράλληλος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ $\gamma\delta$ παράλληλος τῇ $\alpha\beta$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ βῆμα τοῦ ἐπιπέδου ἢ πρὸς πολλαπλάσιόν τι αὐτοῦ, οἷον $\frac{5}{4}\times 2=2{,}5$ μ., ἡ παράλληλος αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προβολὴ ἄλλης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου μὲ κατηγμένην διαφέρουσαν τῆς κατηγμένης τῆς εὐθείας $\alpha(6)\beta(6)$ κατὰ 2 μονάδας, ἐπὶ πλέον ἢ ἐπὶ ἔλαττον, τουτέστιν ἴσην πρὸς $6+2=8$ ἢ $6-2=4$ μ.



Σχ. 33

Ἡ ἰχνοπαράλληλος αὕτη καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου, ἂν θέλωμεν, κατασκευάζομεν καὶ κλίμακα κλίσεως.

Ἐπειδὴ δὲ ὡς κατηγμένη τῆς νέας ἰχνοπαραλλήλου δύναται νὰ ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 ἢ 4, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τουτέστιν ὑπάρχουσι δύο ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας $\alpha(6)\beta(6)$ καὶ ἔχοντα συντελεστὴν κλίσεως $\frac{4}{5}$. Τούτων τὸ μὲν ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $\alpha(6)\beta(6)$ καὶ $\gamma(4)\delta(4)$ ἔχει ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι κλίμακα τὴν Ε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $\alpha(6)\beta(6)$ καὶ $\gamma(8)\delta(8)$, τὴν Ε΄. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐπίπεδον.

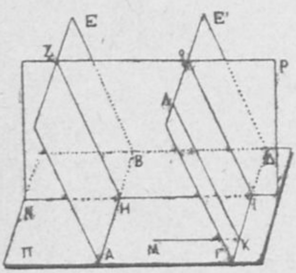
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.΄

ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

α΄). Ἐπίπεδα παράλληλα

58. ΘΕΩΡΗΜΑ. ***Τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων αἱ ἰχνοκάκάθετοι εἶναι παράλληλοι· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄ (σχ. 34) παράλληλα καὶ δύο τυχοῦσαι ἰχνοκάθετοι αὐτῶν αἱ ΖΗ καὶ ΛΚ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.



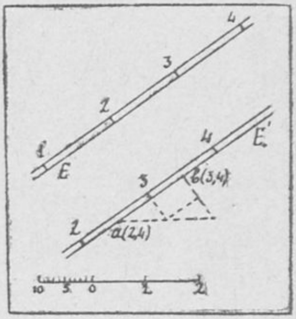
Σχ. 34

Ὄντως· ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄ εἶναι παράλληλα, τὰ ἴχνη αὐτῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου, εἶναι παράλληλα.

Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ διὰ τῆς ΖΗ τὸ ἐπίπεδον Ρ, κάθετον ἐπὶ τὸ ἴχνος ΑΒ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὸ ΓΔ, θὰ τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον Ε΄ κατὰ εὐθεῖαν ΟΙ παράλληλον τῇ ΖΗ. Ἡ ΟΙ, ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ΓΔ, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τουτέστιν εἶναι ἰχνοκάθετος τοῦ ἐπιπέδου Ε΄ καὶ ἑπομένως παράλληλος τῇ ΛΚ. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΖΗ καὶ ΛΚ, ὡς παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΟΙ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι, ὅ· ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν δύο τυχοῦσαι ἰχνοκάθετοι ΖΗ καὶ ΛΚ δύο ἐπιπέδων Ε καὶ Ε′ εἶναι παράλληλοι, τότε καὶ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα. Διότι αἱ προβολαὶ ΝΗ καὶ ΜΚ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι (§ 38) καὶ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε′ (§ 42). Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους ΝΗ καὶ ΜΚ, εἶναι παράλληλοι. Ὥστε αἱ γωνίαι ΑΗΖ καὶ ΓΚΛ ἔχουσι τὰς πλευράς των παραλλήλους· ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν Ε καὶ Ε′ εἶναι παράλληλα, ὅ. ἔ. δ.

59. ΠΟΡΙΣΜΑ. ***Τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων αἱ κλίμακες κλίσεως εἶναι παράλληλοι· καὶ ἀντιστρόφως.***



Σχ. 35

60. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 35) καὶ $a(2,4)$ τὸ δοθὲν σημεῖον.

Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου $a(2,4)$ τὴν εὐθεῖαν $a(2,4)\beta(3,4)$ παράλληλον (§ 39) πρὸς τὴν κλίμακα κλίσεως τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος εἶναι ἰχνοκάθετος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, βαθμολογοῦντες δὲ αὐτὴν ἔχομεν κλίμακα κλίσεως αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐάν τὸ ἐπίπεδον εἶναι δεδομένον διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν, ἄγομεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου παραλλήλους πρὸς αὐτάς. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

β′). Ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦντα

61. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς δύο δοθέντων ἐπιπέδων.***

Διακρίνομεν τὰς ἑπομένας περιπτώσεις.

α′). ***Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων εἶναι ὁριζόντιον.*** ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τῆς τομῆς εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου, ἡ ἔχουσα κατηγμένην ἴσην τῇ κατηγμένῃ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Τὸ πρόβλημα ὅθεν ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς.

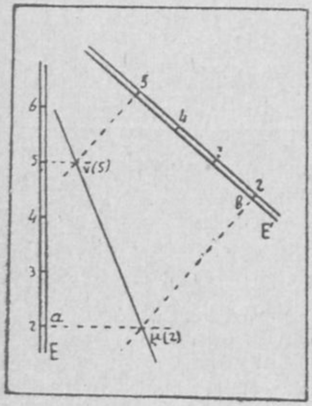
«Νὰ γραφῇ ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου ἰχνοπαράλληλος ἔχουσα δοθεῖσαν κατηγμένην» (§ 45).

β'). ***Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων εἶναι κατακόρυφον,*** τὸ δὲ ἄλλο τυχὸν ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς συμπίπτει μὲ τὸ ἴχνος τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου· πρὸς προσδιορισμὸν ὅθεν αὐτῆς, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν δύο σημεῖα της (§ 51).

γ'). ***Ὅταν τὰ ἐπίπεδα δίδωνται διὰ κλιμάκων κλίσεως τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ κλίνουσιν πρὸς ἀλλήλας.***

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε' τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 36). Ζητεῖται ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν.

Λύσις. Φέρομεν τυχὸν ὁριζόντιον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ἔχον κατηγμένην 2.



Σχ. 36

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰ δοθέντα κατὰ ἰχνοπαραλλήλους (περίπτωσις α') μὲ κατηγμένην 2, προβαλλομένας ἐπὶ τῶν *αμ* καὶ *βμ* καὶ συναντωμένας εἰς τὸ σημεῖον *μ*(2). Τὸ σημεῖον τοῦτο, κοινὸν ὂν τῶν δύο ἐπιπέδων, εἶναι σημεῖον καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.

Φέροντες καὶ δεύτερον ὁριζόντιον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ἔχον κατηγμένην 5, προσδιορίζομεν καὶ ἕτερον σημεῖον, τὸ *ν*(5), τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

Ἡ ζητουμένη ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε' εἶναι ἡ εὐθεῖα *μ*(2)*ν*(5).

Σημείωσις. Ἐὰν εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων ἓν κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων, ἢ εἶναι γνωστὴ ἡ κατεύθυνσις τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς ἓν μόνον βοηθητικὸν ἐπίπεδον ὁριζόντιον.

δ'). ***Ὅταν αἱ προβολαὶ τῶν κλιμάκων κλίσεως τῶν δοθέντων ἐπιπέδων εἶναι παράλληλοι.***

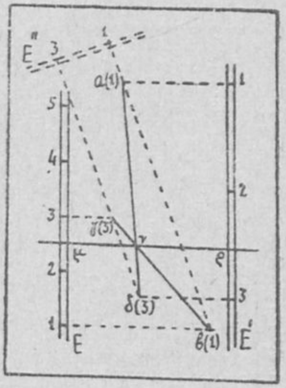
Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων, καθὼς καὶ αἱ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ἰχνοπαράλληλοι αὐτῶν, εἶναι παράλληλοι· ἑπομένως δὲν εἶναι ἱκαναὶ νὰ προσδιορίσωσι κοινὰ σημεῖα τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα διέρχονται δι' εὐθειῶν παραλλήλων (τῶν ἰχνῶν των), ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν (ἂν τέμνωνται) θὰ εἶναι κοινὴ ἰχνοπαράλληλος αὐτῶν.

Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν ἓν μόνον σημεῖον αὐτῆς. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ σημείου τούτου γίνεται κατὰ τοὺς ἑπομένους δύο τρόπους.

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ. Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄ (σχ. 37), ὧν αἱ προβολαὶ τῶν κλιμάκων κλίσεως εἶναι παράλληλοι.

Ἄγομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως δύο τυχούσας εὐθείας παραλλήλους *αϐ* καὶ *γδ* καὶ θεωροῦμεν αὐτὰς ὡς προβολὰς ἰχνοπαραλλήλων, μὲ κατηγμένας κατὰ βούλησιν, οἷον 1 καὶ 3, βοηθητικοῦ τινος ἐπιπέδου Ε΄΄

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ Ε (περίπ. γ΄) κατὰ τὴν εὐθεῖαν *ϐ*(1)*γ*(3), τὸ δὲ Ε΄ κατὰ τὴν *α*(1)*δ*(3).



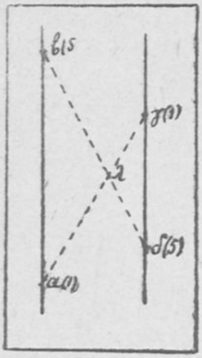
Σχ. 37

Αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε΄΄, ἀλληλοτομοῦσιν εἰς σημεῖον Ν, προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ *ν* καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε΄. Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ Ν, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ κοινὴ αὐτῶν ἰχνοπαράλληλος, κατασκευάζομεν τὴν προβολήν της ἄγοντες ἐκ τοῦ *ν* τὴν *μρ* κάθετον ἐπὶ τὰς προβολὰς τῶν κλιμάκων κλίσεως τῶν ἐπιπέδων.

Τὴν κατηγμένην αὐτῆς εὑρίσκομεν θεωροῦντες αὐτὴν εἴτε ὡς εὐθεῖαν τοῦ Ε, εἴτε τοῦ Ε΄ (§ 49). Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι (*ν*Ν)=2,55.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ. Ὁ τρόπος οὗτος, ὅστις δίδει ταχύτερον καὶ ἁπλούστερον τὸ ζητούμενον σημεῖον, στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑπομένης προτάσεως.

Αἱ προβολαὶ τῶν ὁριζοντίων εὐθειῶν αἵτινες τέμνουσι δύο εὐθείας ἐχούσας τὰς προβολάς των παραλλήλους, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 38

Ἔστωσαν (σχ.38) αἱ εὐθεῖαι $\alpha(1)\beta(5)$ καὶ $\gamma(1)\delta(5)$, ὧν αἱ προβολαὶ εἶναι παράλληλοι, β δέ καὶ β ΄ τὰ βήματα αὐτῶν.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ὁριζόντιος εὐθεῖα $\alpha(1)\gamma(1)$, ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον $\alpha(1)$ τῆς πρώτης μετὰ τοῦ σημείου $\gamma(1)$ τῆς δευτέρας, ἡ προβολὴ πάσης ἄλλης ὁριζοντίου εὐθείας τεμνούσης τὰς δοθείσας, οἷον ἡ $\beta\delta$, θὰ τέμνῃ ἐν γένει τὴν $\alpha\gamma$ εἰς σημεῖον λ. Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\alpha\beta\lambda$ καὶ $\gamma\delta\lambda$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\lambda\alpha}{\lambda\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \text{ καὶ ἐπειδὴ } \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{4\beta}{4\beta'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

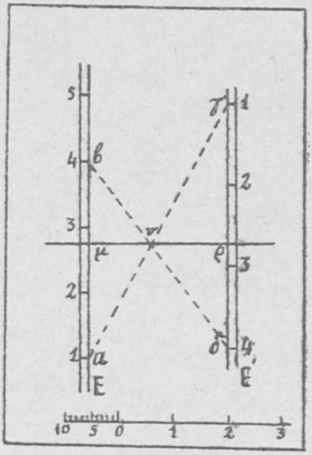
θὰ εἶναι
$$\frac{\lambda\alpha}{\lambda\gamma} = \frac{\beta}{\beta'}$$

τουτέστιν ὁ λόγος τῶν τμημάτων $\lambda\alpha$ καὶ $\lambda\gamma$ εἰς ἃ μερίζεται ἡ $\alpha\gamma$ ὑπὸ τῆς προβολῆς τυχούσης ἄλλης ὁριζοντίου εὐθείας τεμνούσης τὰς δοθείσας, εἶναι σταθερός. Πᾶσαι ἄρα αἱ προβολαὶ τῶν ὁριζοντίων τούτων εὐθειῶν διέρχονται διὰ τοῦ σημείου λ τῆς $\alpha\gamma$.

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν Ε καὶ Ε΄ (σχ. 39) δύο ἐπίπεδα ἔχοντα τὰς προβολὰς τῶν κλιμάκων αὐτῶν παραλλήλους.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν φέρομεν δύο ὁριζοντίους εὐθείας τεμνούσας τὰς κλίμακας κλίσεως ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν ἐπιπέδων, οἷον τὰς $\alpha(1)\gamma(1)$ καὶ $\beta(4)\delta(4)$. Διὰ τοῦ σημείου ν τῆς τομῆς τῶν προβολῶν αὐτῶν διέρχεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἡ προβολὴ καὶ πάσης ἄλλης ὁριζοντίου εὐθείας τεμνούσηςτὰς ἰχνοκαθέτους ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ὁριζόντιος, ὡς κοινὴ ἰχνοπαράλληλος αὐτῶν, ἕπεται ὅτι καὶ ταύτης ἡ προβολὴ διέρχεται διὰ τοῦ ν.

Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν διά τοῦ *ν* τὴν *μρ* κάθετον ἐπὶ τὰς προβολὰς τῶν κλιμάκων τῶν δοθέντων ἐπιπέδων, θὰ ἔχωμεν τὴν προβολὴν τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς αὐτῶν. Τὴν κατηγμένην αὐτῆς προσδιορίζομεν κατὰ τὰ γνωστά. Ἐν προκειμένῳ εἶναι (υΝ)= 2,75 μ.

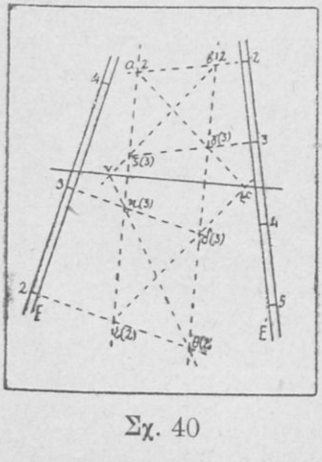


Σχ. 39

ε΄). ***Ὅταν αἱ προβολαὶ τῶν κλιμάκων κλίσεως τῶν δοθέντων ἐπιπέδων τέμνωσιν ἀλλήλας ὑπὸ μικρὰν γωνίαν.***

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ἰχνοπαράλληλοι τῶν ἐπιπέδων τέμνουσιν ἀλλήλας ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως· τούτου ἕνεκα προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν Ε καὶ Ε΄ δύο ἐπίπεδα (σχ. 40), ὧν αἱ προβολαὶ τῶν κλιμάκων κλίσεως σχηματίζουσι μικρὰν γωνίαν.

Φέρομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως δύο παραλλήλους *αε* καὶ *βδ* καὶ θεωροῦμεν αὐτὰς ὡς προβολὰς ἰχνοπαραλλήλων βοηθητικοῦ τινος ἐπιπέδου Ε΄΄, μὲ κατηγμένας κατὰ βούλησιν, οἷον 2 καὶ 3. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ μὲν Ε κατὰ τὴν εὐθεῖαν *ε*(2)*δ*(3), τὸ δὲ Ε΄ κατὰ τὴν *α*(2)*γ*(3), αἵτινες, ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε΄΄, ἀλληλοτομοῦσιν εἴς τι σημεῖον Μ, προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ *μ*.



Σχ. 40

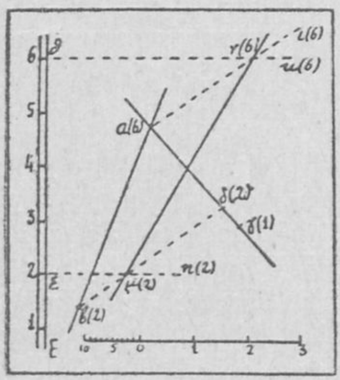
Ἐὰν νῦν ἀνταλλάξωμεν τὰς κατηγμένας τῶν εὐθειῶν αἵτινες προβάλλονται ἐπὶ τῶν *αε* καὶ *βδ*, τουτέστιν ἂν θεωρήσωμεν τὴν μὲν προβαλλομένην ἐπὶ τῆς ***αε***, ὡς ἔχουσαν κατηγμένην 3, τὴν δὲ ἐπὶ τῆς $\beta\delta$, ὡς ἔχουσαν κατηγμένην 2, αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι $\alpha(3)\varepsilon(3)$ καὶ $\beta(2)\delta(2)$, ὁρίζουσιν ἄλλο βοηθητικὸν ἐπίπεδον Ε''', τέμνον τὸ μὲν Ε κατὰ τὴν $\delta(2)\eta(3)$, τὸ δὲ Ε' κατὰ τὴν $\beta(2)\zeta(3)$. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς Ν σημεῖον προβαλλόμενον ἐπί τοῦ ν.

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι κοινὰ τῶν δύο ἐπιπέδων Ε καὶ Ε'. Ἡ ζητουμένη ἄρα κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι ἡ ΜΝ, προβαλλομένη ἐπὶ τῆς $\mu\nu$ καὶ βαθμολογουμένη εὐκόλως, εἴτε ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπὲδου Ε θεωρηθῇ, εἴτε ὡς εὐθεῖα τοῦ Ε' (§ 51).

στ'). ***Ὅταν τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων δίδεται διὰ κλίμακος κλίσεως τὸ δὲ ἄλλο διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.***

Ἔστωσαν Ε καὶ $\beta(2)\alpha(6)\gamma(1)$ τὰ ἐπίπεδα ὧν ζητεῖται ἡ κοινὴ τομὴ (σχ. 41).

Φέρομεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ἔχον κατηγμένην 2. Τοῦτο τέμνει τὰ δοθέντα ἀντιστοίχως κατὰ τὰς ἰχνοπαραλλήλους $\varepsilon(2)\eta(2)$ καὶ $\beta(2)\delta(2)$, αἵτινες συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον $\mu(2)$, ὅπερ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων.



Σχ. 41

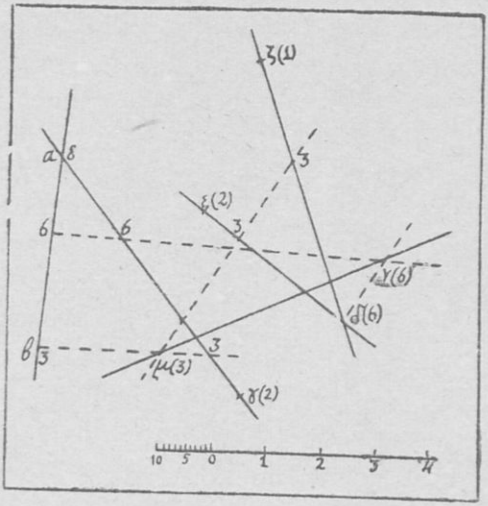
Φέρομεν καὶ δεύτερον ὁριζόντιον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ἔχον κατηγμένην 6. Τοῦτο τέμνει τὰ δοθέντα ἐπίπεδα κατὰ τὰς ἰχνοπαραλλήλους $\delta(6)\kappa(6)$ καὶ $\alpha(6)\iota(6)$, αἵτινες συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον $\nu(6)$, ὅπερ εἶναι ἐπίσης κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

Ἡ ζητουμένη ἄρα εὐθεῖα τῆς τομῆς εἶναι ἡ $\mu(2)\nu(6)$.

ζ'). ***Ὅταν ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα δίδωνται δι' εὐθειῶν τεμνομένων.***

Ἔστωσαν $\alpha(8)\beta(3)\gamma(2)$ καὶ $\delta(6)\varepsilon(2)\zeta(1)$ τὰ ἐπίπεδα, ὧν ζητεῖται ἡ κοινὴ τομὴ (σχ. 42).

Φέρομεν δύο ὁριζόντια ἐπίπεδα. οἷον τὰ ἔχοντα κατηγμένας 3 καὶ 6 καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα $\mu(3)$ καὶ $\nu(6)$, καθ' ἃ συναντῶνται αἱ ὑπὸ τὰς αὐτὰς κατηγμένας ἰχνοπαράλληλοι τῶν



Σχ. 42

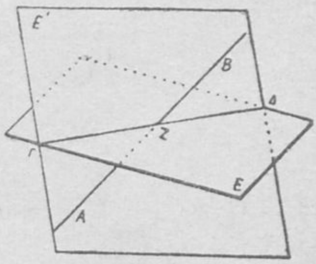
δοθέντων ἐπιπέδων.

Ἡ ζητουμένη κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων εἶναι ἡ $\mu(3)\nu(6)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

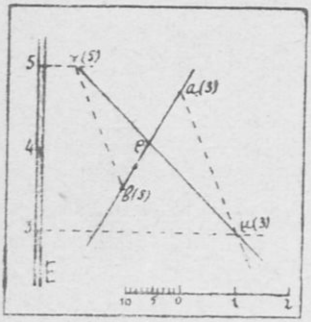
62. Ἡ θέσις εὐθείας ΑΒ πρὸς ἐπίπεδον Ε εὑρίσκεται ἐν γένει ὡς ἑξῆς. Φέρομεν διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 43) τυχὸν ἐπίπεδον Ε′ καὶ προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν ΓΔ αὐτοῦ καὶ τοῦ δοθέντος. Ἐὰν ἡ ΑΒ τέμνῃ τὴν ΓΔ, τέμνει προφανῶς καὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, ἐὰν εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐὰν δὲ συμπίπτῃ μετ' αὐτῆς, κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 43

63. *'Εφαρμογὴ α')*.—***Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς εὐθείας α(3)β(5) καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως (σχ. 44).***

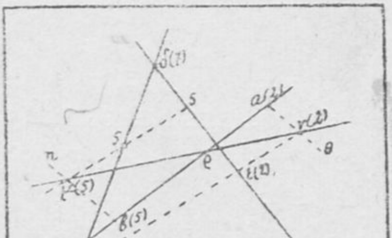
Φέρομεν ἐκ τῶν σημείων *α* καὶ *β* δύο τυχούσας παραλλήλους καὶ θεωροῦμεν αὐτὰς ὡς προβολὰς ἰχνοπαραλλήλων μὲ κατηγμένας 3 καὶ 5 βοηθητικοῦ τινος ἐπιπέδου Ε′ διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας *α*(3)*β*(5).



Σχ. 44

Αἱ ἰχνοπαράλληλοι αὗται τέμνουσι τὰς ἀντιστοίχους ἰχνοπαραλλήλους τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα *μ*(3) καὶ *ν*(5), ἡ δὲ διὰ τούτων διερχομένη εὐθεῖα *μ*(3)*ν*(5) εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε′. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα αὕτη καὶ ἡ δοθεῖσα κεῖνται ἐπὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου Ε′, αἱ δὲ προβολαί των ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ *ρ*, συνάγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα *α* (3)*β*(5) τέμνει τὴν *μ*(3)*ν*(5), κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, εἰς σημεῖον Ρ προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ *ρ* καὶ τοῦ ὁποίου τὴν κατηγμένην προσδιορίζομεν θεωροῦντες αὐτό, εἴτε ὡς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ε, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας *α*(3)*β*(5).

Ἐν προκειμένῳ εἶναι (*ρ*Ρ)=4,1 μ.



Σχ. 45

64. *'Εφαρμογὴ β')* —***Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς εὐθείας α(2)β 5 καὶ τοῦ ἐπιπέδου γ(1)δ(7) ε(2) (σχ. 45).***

Φέρομεν ἐκ τῶν σημείων *α*(2) καὶ *β*(5) δύο εὐθείας παραλλήλους *αθ* καὶ *βπ* καὶ θεωροῦμεν αὐτὰς ὡς προβολὰς ἰχνοπαραλλήλων μὲ κατηγμένας 2 καὶ 5 βοηθητικοῦ τινος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας. Αἱ ἰχνοπαράλληλοι αὗται τέμνουν τὰς ἀντιστοίχους ἰχνοπαραλλήλους τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα $\nu(2)$ καὶ $\mu(5)$.

Ἡ εὐθεῖα $\nu(2)\mu(5)$ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ βοηθητικοῦ, τέμνει δέ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς σημεῖον Ρ, ἔχον προβολὴν ρ καὶ κατηγμένην $(\rho P)=3{,}2$ μ ἣν εὑρίσκομεν θεωροῦντες τὸ Ρ, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας $\nu(2)\mu(5)$ εἴτε τῆς $\alpha(2)\beta(5)$.

Τὸ ζητούμενον ὅθεν σημεῖον τῆς τομῆς τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἶναι τὸ ρ (3,2).

65. *Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις προσδιορισμοῦ τοῦ σημείου τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.*

α΄). ***Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι κατακόρυφος.***

Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι κατακόρυφος, ὅτε παρίσταται ὑπὸ ἑνὸς σημείου τοῦ προβολ. ἐπιπέδου, τοῦ ἴχνους αὐτῆς, τότε τὸ σημεῖον καθ' ὃ τέμνει τὸ δοθὲν ἐπίπεδον θὰ ἔχῃ προβολὴν τὸ ἴχνος αὐτῆς. Ἄγνωστος λοιπὸν εἶναι ἡ κατηγμένη του. Οὕτως ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἑξῆς.

«Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατηγμένη σημείου κειμένου ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς αὐτοῦ» (§ 49).

β΄). ***Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ὁριζόντιος.***

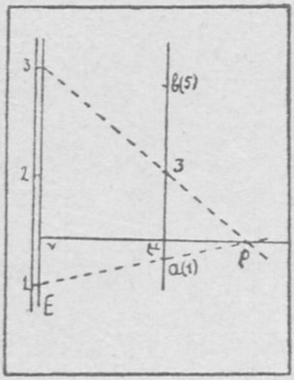
Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λαμβάνομεν ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ δι' αὐτῆς διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Τοῦτο τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ τὴν ἰχνοπαράλληλον ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν κατηγμένην μὲ τὴν δοθεῖσαν ὁριζόντιον εὐθεῖαν. Τὸ ζητούμενον ἄρα σημεῖον εἶνε ἐκεῖνο καθ' ὃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνει τὴν ἰχνοπαράλληλον τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν κατηγμένην.

γ΄). ***Ὅταν ἡ προβολὴ τῆς δοθείσης εὐθείας εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου.***

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 46) καὶ $\alpha(1)\beta(5)$ εὐθεῖα ἔχουσα τὴν προβολὴν αὐτῆς $\alpha\beta$ παράλληλον πρὸς τὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἀντί νὰ λάβωμεν ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας, λαμβάνομεν διὰ τὸ ἁπλούστερον τῆς κατασκευῆς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει κλίμακα κλίσεως αὐτὴν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ ἰχνοπαράλληλον τῆς ὁποίας τὴν προβολὴν *μν* κατασκευάζομεν καθ' ὃν τρόπον ἐμάθομεν (§ 61 περίπτ. δ').



Σχ. 46

Ἡ ἰχνοπαράλληλος αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς σημεῖον Μ. προβαλλόμενον ἐπὶ τῆς τομῆς *μ* τῶν προβολῶν αὐτῶν *αβ* καὶ *μν* καὶ τοῦ ὁποίου τὴν κατηγμένην εὑρίσκομεν θεωροῦντες αὐτό, εἴτε ὡς σημεῖον τῆς ΑΒ, εἴτε ὡς σημεῖον τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἐν προκειμένῳ εἶναι (μΜ)=1,42.

δ'). ***Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον.***

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ζητούμενον σημεῖον ἔχει κατηγμένην τὴν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Τὸ πρόβλημα ὅθεν ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς. «***Νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ σημείου δοθείσης εὐθείας, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ κατηγμένη***». (§ 32).

ε'). ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι κατακόρυφον.***

Ἡ προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἴχνους τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἑπομένως εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ προβολὴ τῆς δοθείσης εὐθείας τέμνει τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ κατηγμένη του εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 31).

Προβλήματα σχετικὰ πρὸς εὐθεῖαν καὶ ἐπίπεδον

66. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς πρώτης φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δευτέραν (§ 39). Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῆς δοθείσης εἶναι τὸ ζητούμενον τοῦ ὁποίου, ἂν θέλωμεν, κατασκευάζομεν καὶ κλίμακα κλίσεως.

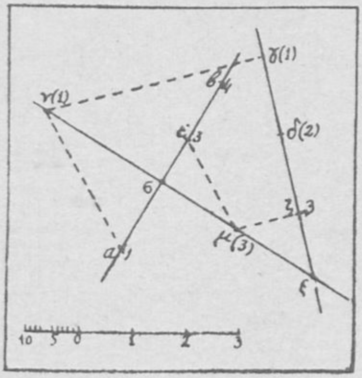
67. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.***

Ἀρκεῖ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας.

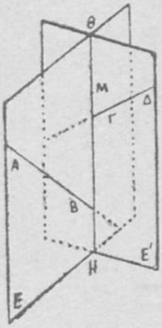
68. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα.***

Ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου ταύτης παράλληλον πρὸς τὴν πρώτην.

Τὰ οὕτως ὁριζόμενα ἐπίπεδα εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 47



Σχ. 48

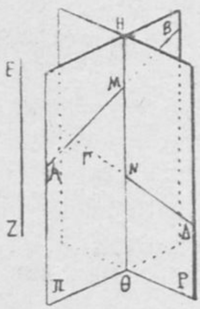
69. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.***

Ἔστω $\mu(3)$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ $\alpha(1)\beta(4)$, $\gamma(1)\delta(2)$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι (σχ. 47).

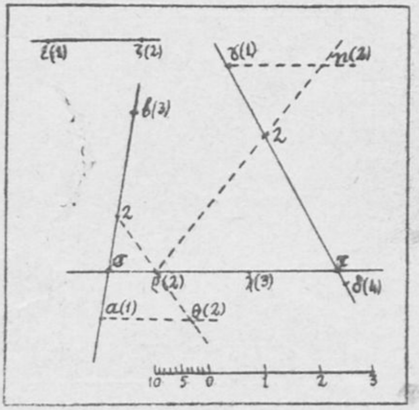
Λύσις θεωρητική.—Τὸ σημεῖον Μ καὶ ἡ ἑτέρα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἔστω ἡ ΑΒ (σχ. 48), ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Ε. Ἐπίσης τὸ Μ καὶ ἡ ΓΔ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἄλλου ἐπιπέδου Ε′. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, Ε καὶ Ε′, ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Μ, τέμνονται, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ΗΘ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Διότι αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ Μ, ὡς κειμένη δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, τέμνει, ἐν γένει, τὴν ΑΒ καὶ ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ Ε΄, τέμνει, ἐν γένει, τὴν ΓΔ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

Λύσις γραφική.—Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον $\mu(3)$ μετὰ τοῦ σημείου $\varepsilon(3)$ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ σημείου $\zeta(3)$ τῆς ΓΔ καὶ ἔχομεν οὕτως τὰς ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαραλλήλους τῶν ἐπιπέδων ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ. Φέρομεν ἔπειτα δύο ἄλλας ἰχνοπαραλλήλους, οἷον τὰς ὑπὸ κατηγμένην 1 καὶ προσδιορίζομεν διὰ τούτων τὸ σημεῖον $\nu(1)$, ὅπερ εἶναι κοινὸν τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ εἶναι ἡ $\nu(1)\mu(3)$, αὕτη δὲ εἶναι ἡ



Σχ. 49



Σχ. 50

ζητουμένη εὐθεῖα, τέμνουσα τὴν μὲν $\alpha(1)\beta(4)$ εἰς τὸ σημεῖον $\sigma(2{,}25)$, τὴν δὲ $\gamma(1)\delta(2)$ εἰς τὸ $\rho(3{,}87)$.

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τέμνουσα δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $\alpha(1)\beta(3)$, $\gamma(1)\delta(4)$ καὶ $\varepsilon(1)\zeta(2)$. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ $\varepsilon(1)\zeta(2)$ τέμνουσα τὰς δύο ἄλλας (σχ. 50).

Λύσις θεωρητική.—Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΗΘ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, τέμνουσα τὴν μὲν ΑΒ εἰς τὸ Μ, τὴν δὲ ΓΔ εἰς τὸ Ν, παράλληλος δὲ τῇ ΕΖ (σχ. 49).

Ἡ ΗΘ οὖσα ἐξ ὑποθέσεως παράλληλος τῇ ΕΖ, ὁρίζει μετὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον Π παράλληλον τῇ ΕΖ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁρίζει καὶ μετὰ τῆς ΓΔ τὸ ἐπίπεδον Ρ παράλληλον τῇ ΕΖ. Ἡ ζητουμένη ἄρα εὐθεῖα εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων τῇ ΕΖ καὶ διερχομένων τοῦ μὲν ἑνὸς διὰ τῆς ΑΒ, τοῦ δὲ ἄλλου διὰ τῆς ΓΔ. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

Λύσις γραφική.—Ἐκ τῶν σημείων a καὶ γ φέρομεν παραλλήλους τῇ ΕΖ (σχ.50) καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν τὰ τμήματα $a\delta$ καὶ $\gamma\eta$ ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ βῆμα τῆς εὐθείας $\varepsilon(1)\zeta(2)$.

Αἱ οὕτως ὁριζόμεναι εὐθεῖαι $a(1)\delta(2)$ καὶ $\gamma(1)\eta(2)$ εἶναι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ $\varepsilon(1)\zeta(2)$ καὶ ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα $\beta(3)a(1)\delta(2)$ καὶ $\eta(2)\gamma(1)\delta(4)$ εἶναι παράλληλα πρὸς αὐτήν. Τῶν ἐπιπέδων τούτων αἱ ὑπὸ κατηγμένην 2 ἰχνοπαράλληλοι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον $\rho(2)$, κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων, ἑπομένως καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ $\rho(2)$, ἡ εὐθεῖα $\rho(2)\lambda(3)$ παράλληλος τῇ $\varepsilon(1)\zeta(2)$, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Διότι ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $\beta(3)a(1)\delta(2)$ τέμνει ἐν γένει τὴν $a(1)\beta(3)$ εἰς σημεῖον Σ, προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ σ, ὡς εὐθεῖα δὲ τοῦ ἐπιπέδου $\eta(2)\gamma(1)\delta(4)$ τέμνει καὶ τὴν $\gamma(1)\delta(4)$ εἰς σημεῖον Τ, προβαλλόμενον ἐπὶ. τοῦ τ.

Αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων τούτων εἶναι

$$(\sigma\Sigma) = 1 + \frac{2(a\sigma)}{(a\beta)} = 1 + \frac{2.0,9}{3,8} = 1,47, \quad \text{καὶ}$$

$$(\rho\mathrm{P}) = 1 + \frac{3(\gamma\zeta)}{(\nu\delta)} = 1 + \frac{3.4,3}{4,6} = 3,8.$$

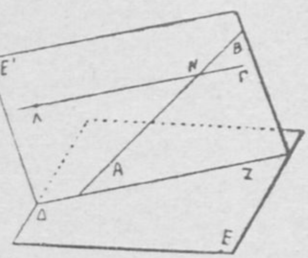
71. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω $\lambda(3)$ τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 52), $a(1)\beta(5)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

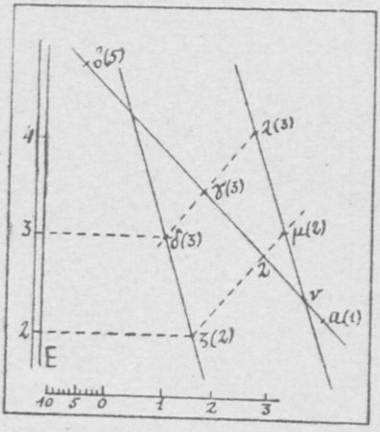
Λύσις θεωρητική.—Τὸ δοθὲν σημεῖον Λ (σχ. 51) καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ ὁρίζουσιν ἐπίπεδον Ε', τέμνον ἐν γένει τὸ δοθὲν κατὰ εὐθεῖαν ΔΖ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Λ ἀχθῇ ἡ ΛΓ παράλληλος τῇ ΔΖ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διότι, παράλληλος οὖσα τῇ ΔΖ, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε, ὡς κειμένη δὲ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ε′, συναντᾷ ἐν γένει τὴν ΑΒ.᾿Εντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

Λύσις γραφική.—Φέρομεν τὴν ἰχνοραράλληλον $\lambda(3)\gamma(3)$ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας $\alpha(1)\beta(5)$ καὶ τοῦ σημείου $\lambda(3)$. Αὕτη τέμνει τὴν ὑπὸ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ἰχνοπαράλληλον τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου Ε εἰς τὸ σημεῖον $\delta(3)$, ὅπερ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ $\alpha(1)\beta(5)\lambda(3)$.Φέρομεν ἔπειτα καὶ ἄλλην ἰχνοπαράλληλον τοῦ ἐπιπέδου $\alpha(1)\beta(5)$



Σχ. 51



Σχ. 52

$\lambda(3)$, οἷον τὴν ἔχουσαν κατηγμένην 2. Αὕτη τέμνει τὴν ἀντίστοιχον τοῦ ἐπιπέδου Ε εἰς τὸ $\zeta(2)$, κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων.

᾿Η $\delta(3)\zeta(2)$ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων *Ε* καὶ $\alpha(1)\beta(5)$ $\lambda(3)$, ἡ δὲ πρὸς αὐτὴν ἐκ τοῦ $\lambda(3)$ ἠγμένη παράλληλος $\lambda(3)\mu(2)$ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ $\lambda(3)\mu(2)$ τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἔχει προβολὴν ν καὶ κατηγμένην $(\nu N)=1{,}2$ εὑρισκομένην κατὰ τὸν ἤδη γνωστὸν τρόπον.

᾿Ασκήσεις

1). Δεδομένων τῶν προβολῶν τῶν πέντε κορυφῶν ἐπιπέδου πενταγώνου καὶ τῶν κατηγμένων τριῶν ἐξ αὐτῶν διαδοχικῶν, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ κατηγμέναι τῶν λοιπῶν.

2). Νὰ ἀχθῇ διὰ δοθέντος σημείου εὐθεῖα μὲ δοθέντα συντελεσοὴν κλίσεως καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

3). Νὰ ἀχθῇ ἐκ δοθέντος σημείου εὐθεῖα μὲ δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως καὶ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.

4). Νὰ ἀχθῇ διὰ δοθέντος σημείοι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς αὐτῆς.

5). Νὰ ἀχθῇ διὰ δοθέντος σημείου ἐπίπεδον μὲ δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως καὶ παράλληλον δοθείσῃ εὐθείᾳ.

6). Νὰ προσδιορισθῇ τὸ τρίγωνον οὗ δίδονται αἱ ἠριθμημέναι προβολαὶ τῶν μέσων τῶν τριῶν πλευρῶν του.

7). Πῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν ἐὰν δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον δεδομένον διὰ κλίμακος.

8). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι κατακόρυφος.

9). Νὰ ἀχθῇ ὁριζόντιος εὐθεῖα δεδομένου μήκους, ἔχουσα τὰ ἄκρα της ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι ὁριζόντιος.

10). Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι κατακόρυφος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

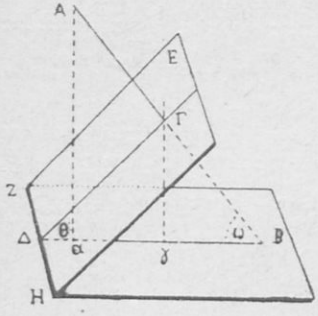
ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΘΕΤΑ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑ

72. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον πρέπει, ἡ προβολὴ αὐτῆς νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου τὸ βῆμα αὐτῆς ἀντίστροφον τοῦ βήματος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ βαθμολογία αὐτῆς ἀντίρροπος· ταῦτα δὲ καὶ ἀρκοῦσιν.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 53) κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε καὶ ΔΒ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

1ον. Τὸ προβάλλον τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ΑΒΔ, ὡς κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Π, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΗΖ, τουτέστιν ἐπὶ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ἑπομένως καὶ ἡ προβολὴ ΔΒ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος ΗΖ τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ἀλλὰ καί ἡ προβολὴ πάσης ἰχνοκαθέτου τοῦ ἐπιπέδου Ε, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τῆς κλίμακος κλίσεως αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος του. Ἡ προβολὴ ἄρα τῆς ΑΒ καὶ ἡ προβολὴ τῆς κλίμακος κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ε, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΗΖ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 53

2ον. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἡ ἑνοῦσα τὸν πόδα Γ τῆς καθέτου ΑΒ μετὰ τοῦ σημείου Δ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΖ, δηλαδὴ ἰχνοκάθετος τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ἑπομένως ἡ ὑπὸ ταύτης καὶ τῆς προβολῆς της ΓΔ περιεχομένη γωνία εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΓΔΒ εἶναι ὀρθογώνιον θὰ εἶναι $\omega = 90^0 - \vartheta$ καὶ κατ'ἀκολουθίαν

$$\sigma\varphi\omega = \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1}{\sigma\varphi\vartheta}.$$

ἀλλὰ ἡ σφω ἰσοῦται μὲ τὸ βῆμα β τῆς εὐθείας ΑΒ (§ 28) καὶ ἡ σφθ μὲ τὸ βῆμα Β τοῦ ἐπιπέδου. Ὅθεν $\beta = \frac{1}{B}$.

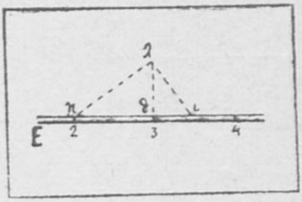
Τὸ βῆμα ἄρα τῆς καθέτου εἶναι ἀντίστροφον τοῦ βήματος τοῦ ἐπιπέδου.

3ον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΔΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Β. Ἐπειδὴ δὲ τῶν σημείων τούτων αἱ κατηγμέναι εἶναι 0, αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων τῆς ΔΓ βαίνουσιν αὐξανόμεναι ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Γ, αἱ δὲ κατηγμέναι τῶν σημείων τῆς ΑΒ, ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ. Ἡ βαθμολογία ἄρα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὴν βαθμολογίαν τῆς ΓΔ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς τὴν βαθμολογίαν τοῦ ἐπιπέδου Ε τοῦ ὁποίου ἡ ΓΔ εἶναι ἰχνοκάθετος (§ 47).

Τὰ ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

73. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ κατασκευασθῇ τὸ βῆμα εὐθείας καθέτου ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἔστω Β τὸ βῆμα $\pi\theta$ τοῦ ἐπιπέδου Ε (σχ. 54) καὶ β τὸ ζητούμενον βῆμα εὐθείας καθέτου ἐπ' αὐτό.



Σχ. 54

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ ἔχωμεν

$$\beta = \frac{1}{B} \quad \text{ἢ} \quad \beta . B = 1$$

Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ θ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\pi\theta$ καὶ λάβωμεν $\theta\lambda$ ἴσον πρὸς μίαν μονάδα τῆς γραφ. κλίμακος, ἐκ δὲ τοῦ λ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\pi\lambda$, ἡ κάθετος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν $\pi\theta$ εἰς σημεῖον ι, τὸ δὲ τμῆμα $\theta\iota$ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον βῆμα πάσης εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε.

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\pi\iota\lambda$ ἔχομεν

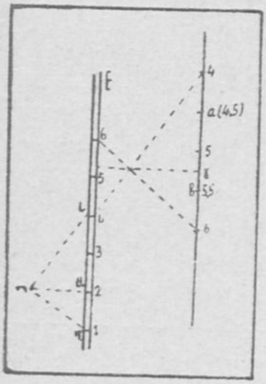
$$(\theta\lambda)^2 = (\pi\theta)(\theta\iota) \text{ ἢ } 1 = B.(\theta\iota) \text{ ἐξ ἧς } (\theta\iota) = \frac{1}{B} = \beta.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς κλίσεως ἐπιπέδου εἶναι γνωστὸς Σ, τὸ βῆμα πάσης εὐθείας καθέτου ἐπ' αὐτὸ εἶναι Σ.

74. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 55) καὶ a (4,5) τὸ δοθὲν σημεῖον.

Ἡ προβολὴ τῆς ζητουμένης καθέτου ὀφείλει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου, τὸ βῆμα αὐτῆς ἀντίστροφον τοῦ βήματος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ βαθμολογία της ἀντίρροπος.



Σχ. 55

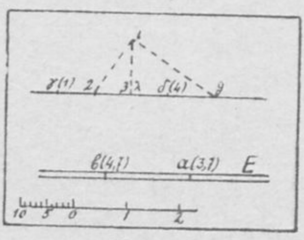
Πρὸς λύσιν ὅθεν τοῦ προβλήματος φέρομεν ἐκ τοῦ a παράλληλον πρὸς τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀφ' οὗ κατασκευάσωμεν τὸ βῆμα $\vartheta\iota$ τῆς ζητουμένης καθέτου, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου, καὶ κατὰ τὴν φορὰν καθ' ἣν ἐλαττοῦνται αἱ κατηγμέναι τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου $a\beta = \vartheta\iota$, οὕτω δὲ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον β(5,5).

Τὰ σημεῖα a(4,5) καὶ β(5,5) προσδιορίζουσι τὴν ζητουμένην κάθετον, τὴν ὁποίαν, ἂν θέλωμεν, βαθμολογοῦμεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 34).

Ἐὰν ζητηθῇ καὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἀχθεῖσα κάθετος τέμνει τὸ ἐπίπεδον Ε, εὑρίσκομεν αὐτὸ κατὰ τὸν ἐν § 61 (δ',Β'ΤΡ.) ἐκτεθέντα τρόπον. Ἐν προκειμένῳ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τούτου εἶναι τὸ γ, ἡ δὲ κατηγμένη του 5,25.

75. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω γ(1)δ(4) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 56) καὶ a(3,7) τὸ δοθὲν σημεῖον.



Σχ. 56

Φέρομεν ἐκ τοῦ a παράλληλον τῇ $\gamma\delta$ καὶ ἀφ' οὗ κατασκευάσωμεν τὸ βῆμα $\lambda\vartheta$ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου καὶ κατὰ τὴν φορὰν καθ' ἣν ἐλαττοῦνται αἱ κατηγμέναι τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ τμῆμα $αβ$ ἴσον τῷ $γδ$. Οὕτω προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον $β(4,7)$ τῆς διὰ τοῦ σημείου $α(3,7)$ διερχομένης ἰχνοκαθέτου τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, ἥτις εἶναι ἀρκετὴ πρὸς καθορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ (§ 48), βαθμολογουμένη δὲ ἀποτελεῖ κλίμακα κλίσεως.

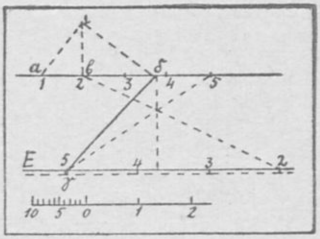
76. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἡ κάθετος αὕτη μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ὁρίζουσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

77. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν·***

Ἔστω $γ(5)$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ $α(1)β(2)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 57).



Σχ. 57

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου $γ(5)$ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $α(1)β(2)$, καὶ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Δ καθ' ὃ θὰ τμήσῃ τὴν εὐθεῖαν $α(1)β(2)$ τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τοῦτο Δ μετὰ τοῦ δοθέντος $γ(5)$ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι τὸ σημεῖον Δ ἔχει προβολὴν $δ$ καὶ κατηγμένην 3,75. Ἡ ζητουμένη ἄρα κάθετος εἶναι ἡ εὐθεῖα $γ(5)δ(3,75)$.

Ἀσκήσεις

1). Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ κάθετον ἐπ' ἄλλο δοθὲν ἐπίπεδον.

2). Διὰ δύο δοθέντων σημείων νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.

3). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας.

4). Νὰ βαθμολογηθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς αὐτῆς.

5). Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δύο δοθέντα ἐπίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΚΛΙΣΕΩΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

78. ***Κατάκλισις ἐπιπέδου σχήματος*** ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου λέγεται ἡ θέσις τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ σχῆμα, ὅταν τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ, στρεφόμενον περὶ μίαν τῶν ἰχνοπαραλλήλων του, γίνῃ παράλληλον πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον.

Ἡ ἰχνοπαράλληλος περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή λέγεται ***ἄξων τῆς κατακλίσεως***.

Εἶναι προφανὲς ὅτι κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ σχῆμα μένει ἀμετάβλητον. Ἐπειδὴ δὲ πᾶν σχῆμα κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθές του σχῆμα καὶ μέγεθος, συνάγεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἐπίπεδον σχῆμα τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν κατακλίνωμεν αὐτὸ ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἔπειτα προβάλωμεν αὐτὸ ἐκ τῆς νέας θέσεως.

Ἡ ἐπαναφορὰ κατακλιθέντος σχήματος εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν λέγεται ***ἀνάκλισις***.

79. Ἡ σπουδαιότης τοῦ προβλήματος τῶν κατακλίσεων τῶν ἐπιπέδων σχημάτων εἶναι προφανής. Διότι οὐ μόνον δυνάμεθα δι' αὐτοῦ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος δεδομένου ἐπιπέδου σχήματος τοῦ χώρου, ἀλλὰ καὶ νὰ λύσωμεν ἐπ' αὐτοῦ οἱονδήποτε γεωμετρικὸν πρόβλημα. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ μεταφέρωμεν τὸ ἐν τῷ χώρῳ σχῆμα ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου καὶ ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὴν ζητουμένην γεωμ. κατασκευὴν νὰ ἐπαναφέρωμεν αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν·

Προκύπτουν ὅθεν τὰ ἑπόμενα γενικὰ προβλήματα.

α΄). Ἐκ τῆς ἠριθμημένης προβολῆς ἐπιπέδου σχήματος εὑρεῖν τὴν κατάκλισιν (1) αὐτοῦ ἐπὶ δεδομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

β΄). Ἐκ τῆς κατακλίσεως σχήματος κειμένου ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου, εὑρεῖν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν αὐτοῦ.

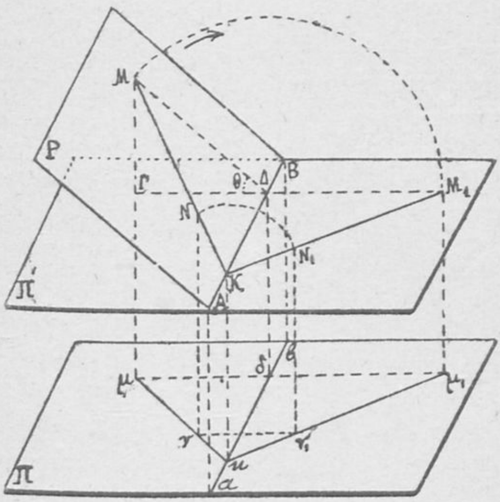
---

(1) Τὴν προβολὴν ἐπιπέδου σχήματος μετὰ τὴν κατάκλισιν αὐτοῦ ἐπὶ ὁριζοντίου τινὸς ἐπιπέδου καλοῦμεν **κατάκλισιν** τοῦ σχήματος ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τούτου ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν σχῆμα εἶναι σύνολον σημείων, ἂς ἴδωμεν πῶς δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου ἐπιπέδου σχήματος μετὰ τὴν κατάκλισιν αὐτοῦ ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

80. Ἔστω σημεῖον Μ σχήματος κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου Ρ τέμνοντος τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον Π′ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ μ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ προβολ. ἐπίπεδον Π (σχ. 58).

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΜΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπιζευχθῇ τὸ Δ μετὰ



Σχ. 58

τοῦ Γ, καθ' ὃ ἡ προβάλλουσα Μμ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π′, ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἡ γωνία ΓΔΜ=θ, θὰ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ρ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π′, ἑπομένως καὶ πρὸς τὸ Π.

Ἐὰν λοιπὸν περιστραφῇ τὸ ἐπίπεδον Ρ περὶ τὴν ΑΒ, κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους δεικνυομένην φοράν, μέχρις οὗ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Π′, ἐπειδὴ κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ ΜΔ θὰ διατελῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀμετάβλητος κατὰ μέγεθος, τὸ σημεῖον Μ θὰ γράψῃ τόξον κύκλου μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΔ καὶ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ M_1, ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ.

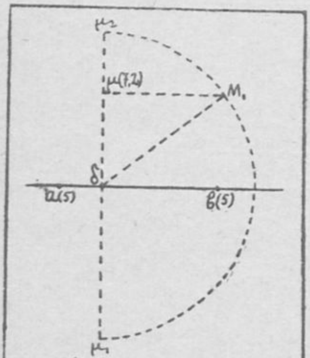
Ἡ νέα ἄρα προβολὴ μ_1 τοῦ σημείου Μ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προβολῆς $\mu\delta$ τῆς εὐθείας ΓΔ, καθέτου ἐπὶ τὴν προβολὴν $\alpha\beta$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ θὰ εἶναι

$$\mu_1\delta = M_1\Delta = M\Delta.$$

Ἀλλ' ἡ ΜΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΔΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραί, ἡ μὲν ΓΔ, ὡς ἴση τῇ ἀποστάσει $\mu\delta$ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῆς προβολῆς τοῦ ἄξονος, ἡ δέ ΜΓ ὡς διαφορὰ τῶν κατηγμένων $M\mu$ καὶ $\mu\Gamma$ τοῦ σημείου Μ καὶ τοῦ ἐπεπέδου Π΄.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως κατασκευή.

Ἔστω $\mu(7,2)$ σημεῖον κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου τέμνοντος τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον Π΄(5) κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\alpha(5)\beta(5)$ (σχ. 59).



Σχ. 59

Ἄξων κατακλίσεως εἶναι ἡ $\alpha(5)\beta(5)$.

Φέρομεν ἐκ τοῦ μ τὴν $\mu\delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ τὴν μM_1 παράλληλον πρὸς αὐτήν, λαμβάνομεν δὲ $\mu M_1 = 7,2-5 = 2,2$ μ.

Εἶτα μὲ κέντρον δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν δM_1 τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\mu\delta M_1$ γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν $\mu\delta$ προεκτεινομένην εἰς τὸ μ_1. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου $\mu(7,2)$ μετὰ τὴν κατάκλισίν του ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Π΄(5).

81. ***Κανὼν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.***—Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ περιέχεται εἰς τὸν ἑπόμενον κανόνα.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς νέας προβολῆς σημείου τινὸς κατακλιθέντος ἐπιπέδου σχήματος, φέρομεν ἐκ τῆς προβολῆς αὐτοῦ δύο εὐθείας τὴν μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ τὴν ἄλλην παράλληλον πρὸς αὐτὴν καὶ ἴ-

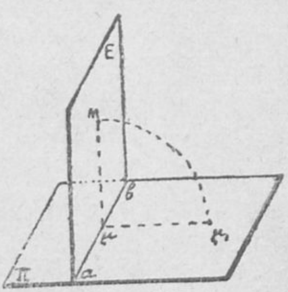
σην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κατηγμένων τοῦ σημείου καὶ τοῦ ἄξονος. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς παραλλήλου γράφομεν περιφέρειαν. Τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς καθέτου εἶναι ἡ ζητουμένη νέα προβολὴ τοῦ σημείου.

Σημείωσις α').—Τὸ τρίγωνον ΜΓΔ (σχ.58) καλεῖται **τρίγωνον τῆς κατακλίσεως** τοῦ σημείου Μ ἢ καὶ κλισιγώνιον τρίγωνον. Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν τοιοῦτον, πάντα δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα, ὡς ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην τῇ γωνίᾳ κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ρ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐφ' οὗ ἐγένετο ἡ κατάκλισις, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον.

Σημείωσις β').— Τὸ τρίγωνον $\delta\mu M_1$ (σχ. 59) εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ τῆς κατακλίσεως τοῦ σημείου Μ ἐκ κατασκευῆς· ἑπομένως προσδιορίζοντες τὴν κατάκλισιν ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου Ρ, εὑρίσκομεν συγχρόνως καὶ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει τοῦτο μετὰ παντὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον.

82. *Παρατήρησις α').*— Ὡς κατάκλισις τοῦ Μ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ τὸ σημεῖον μ_2 (σχ. 59) συμμετρικὸν τοῦ μ_1 ὡς πρὸς τὴν *αβ*, ἐὰν θεωρηθῇ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ σημεῖον, περιστραφὲν κατ' ἀντίθετον φοράν. Συνήθως ὅμως ἡ περιστροφὴ γίνεται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας διέδρου, ἵνα ἡ προβολὴ καὶ ἡ κατάκλισις εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τῆς προβολῆς τοῦ ἄξονος.

83. *Παρατήρησις β').*—Ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου (σχ. 60), ἡ προβολὴ αὐτοῦ πίπτει ἐπὶ τῆς προβολῆς *αβ* τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ ὡς ἐκ τούτου τρίγωνον κατακλίσεως δὲν σχηματίζεται. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν τοῦ Μ, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν *αβ* τὸ τμῆμα $\mu\mu_1$ ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κατηγμένων τοῦ σημείου Μ καὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ (§ 30).



Σχ. 60

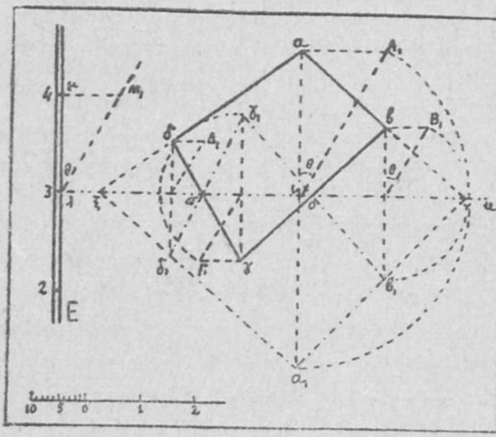
84. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατακλιθῇ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπι-***

πέδου σχῆμα κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως.

Ἔστω $\alpha\beta\gamma\delta$ ἡ προβολὴ τετραπλεύρου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε (σχ. 61). Ζητεῖται ἡ κατάκλισις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3.

Ἄξων κατακλίσεως εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου Ε ἡ ἔχουσα κατηγμένην 3.

Ἡ κατάκλισις ἑκάστης τῶν κορυφῶν δύναται νὰ κατασκευασθῇ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, ἀφ' οὗ προηγουμένως εὑρεθῶσιν αἱ κατηγμέναι αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ εὕρεσις τῶν



Σχ. 61

κατηγμένων ἀπαιτεῖ πολλὰς ὁπωσδήποτε κατασκευὰς ἢ ἀριθμητικοὺς λογισμούς, ἐργαζόμεθα ὡς ἕπεται.

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον κατακλίσεως ἑνὸς σημείου τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τοῦ $\mu(4)$. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ μ παράλληλον πρὸς τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης $\mu M_1 = 4-3 = 1$ μ. Τὸ τρίγωνον $\vartheta\mu M_1$ εἶναι τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου $\mu(4)$· ἐπειδὴ δὲ πάντα τὰ τρίγωνα κατακλίσεως τῶν διαφόρων σημείων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὅμοια, πρὸς κατασκευὴν τοῦ τριγώνου κατακλίσεως τοῦ σημείου Α, φέρομεν ἐκ τοῦ α κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ι παράλληλον πρὸς τὴν ϑM_1.

Ἡ παράλληλος αὕτη συναντᾷ τὴν ἐκ τοῦ *α* παράλληλον πρὸς τὴν *γκ* εἰς σημεῖον A_1, οὕτω δὲ προκύπτει τὸ τρίγωνον κατακλίσεως $\alpha\iota A_1$ τοῦ σημείου Α. Τούτου κατασκευασθέντος προσδιορίζομεν τὴν κατάκλισιν α_1 τοῦ σημείου Α λαμβάνοντες τὸ τμῆμα $\iota\alpha_1$ ἴσον τῇ ὑποτεινούσῃ ιA_1 τοῦ τριγώνου τῆς κατακλίσεως.

Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὰς κατακλίσεις καὶ τῶν λοιπῶν κορυφῶν, ἑνοῦντες δὲ ταύτας δι' εὐθειῶν ἔχομεν τὴν κατάκλισιν, ἄρα καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος τοῦ ἐν τῷ χώρῳ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Σημείωσις.—Ἡ ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαράλληλος χωρίζει τὸ ἐπίπεδον Ε εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων τὸ μὲν περιέχει τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα κατηγμένην μεγαλυτέραν τοῦ 3, τὸ δέ, τὰ ἔχοντα κατηγμένην μικροτέραν τοῦ 3. Ἐὰν τὰ πρῶτα κατακλιθῶσιν πρὸς τὰ κάτω τῆς *λκ* τὰ δεύτερα θὰ κατακλιθῶσιν πρὸς τὰ ἄνω.

85. *Παρατήρησις.*— Τὸ σημεῖον *κ* καθ' ὃ ἡ προβολὴ εὐθείας ΜΝ τοῦ ἐπιπέδου Ρ (σχ. 58) τέμνει τὴν προβολὴν *αβ* τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, εἶναι προβολὴ τοῦ σημείου Κ καθ' ὃ ἡ ΜΝ τέμνει τὸν ἄξονα ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ Ρ μένει ἀμετάστατον, ἡ ΜΝ θὰ διέρχηται δι' αὐτοῦ καὶ ὅταν κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Καὶ ἡ νέα ἄρα προβολὴ αὐτῆς $\mu_1\nu_1$ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ *κ*.

Ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ταύτης στηριζόμενοι, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς κατακλίσεως ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τοῦ Α, εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν τοῦ Β, ἢ οἱουδήποτε ἄλλου σημείου ὡς ἑξῆς (σχ. 61).

Ἡ *αβ* τέμνει τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως εἰς τὸ *ν*, ἐκ τούτου δὲ διέρχεται καὶ ἡ κατάκλισις τῆς ΑΒ, ὡς εἴδομεν. Ἡ $\alpha_1\nu$ ἄρα εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ΑΝ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τῆς ΑΒ. Ἡ κατάκλισις ἄρα τοῦ Β εἶναι τὸ σημεῖον β_1 καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ *β* κάθετος ἐπὶ τὴν *γκ* τέμνει τὴν $\alpha_1\nu$.

Ὁμοίως ἑνοῦντες δι' εὐθείας τὸ σημεῖον ξ, καθ' ὃ ἡ *αδ* τέμνει τὴν *γκ*, μετὰ τοῦ α_1 καὶ ἄγοντες ἐκ τοῦ *δ* κάθετον ἐπὶ τὴν *γκ*, προσδιορίζομεν τὴν κατάκλισιν δ_1 τοῦ σημείου Δ κ.ὅ.κ.

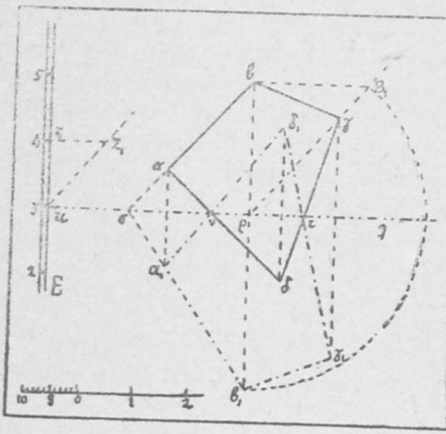
86. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ ἀνακλιθῇ ἐπίπεδον σχῆμα κατακεκλιμένον ἐπὶ δεδομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου.***

Ἔστω $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ ἡ κατάκλισις ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3 (σχ. 62), τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ζητεῖται ἡ ἠριθμημένη προβολὴ αὐτοῦ.

Ἄξων κατακλίσεως εἶναι ἡ ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαράλληλος.

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $\kappa\zeta Z_1$ τυχόντος σημείου Ζ τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ἔχοντες τὸ τρίγωνον τοῦτο δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν



Σχ. 62

τὸ τρίγωνον κατακλίσεως οἱουδήποτε ἄλλου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, διότι πάντα τὰ τρίγωνα κατακλίσεως εἶναι ὅμοια τῷ τριγώνῳ $\kappa\zeta Z_1$, ἑκάστου δὲ ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει τῆς κατακλίσεως τοῦ ἀντιστοίχου σημείου ἀπὸ τῆς προβολῆς τοῦ ἄξονος.

Οὕτως, ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς ρ τῆς ἐκ τοῦ β_1 καθέτου ἐπὶ τὴν $\kappa\lambda$ ἀχθῇ παράλληλος τῇ κZ_1 καὶ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς $\rho B_1 = \rho\beta_1$, ἡ ἐκ τοῦ B_1 ἀγομένη παράλληλος τῇ $\kappa\lambda$ θὰ συναντήσῃ τὴν $\beta_1\rho$ εἰς σημεῖον β καὶ τὸ τρίγωνον $\rho\beta B_1$ θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου Β. Ἑπομένως τὸ σημεῖον β εἶναι ἡ προβολὴ αὐτοῦ.

Τὴν κατηγμένην τοῦ Β εὑρίσκομεν ἢ ἐκ τοῦ ἐπιπέδου Ε ἐφ' οὗ κεῖται, ἢ μετροῦντες διὰ τῆς κλίμακος τὴν βB_1, (ἥτις παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3 ἐφ' οὗ ἐγένετο ἡ κατάκλισις) καὶ προσθέτοντες εἰς τὸν ἐκ τῆς μετρήσεως εὑρεθέντα ἀριθμὸν τὴν κατηγμένην 3 τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι $(\beta B_1) = 2{,}1$. Ὥστε ἡ κατηγμένη τοῦ Β εἶναι $3 + 2{,}1 = 5{,}1$ μ.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν τὰς ἠριθμημένας προβολὰς τῶν λοιπῶν κορυφῶν.

Σημείωσις.—Ὅταν προσδιορισθῇ μία τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος, ὡς ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς λοιπὰς στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἐδαφίου 85. Οὕτω μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς προβολῆς τοῦ Β, ἑνοῦμεν αὐτὴν δι' εὐθείας μὲ τὸ σημεῖον **σ** καθ' ὃ ἡ $\mathbf{6_1 a_1}$ τέμνει τὴν **κλ**. Ἡ εὐθεῖα **6σ** εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΒΣ τοῦ ἐπιπέδου Ε, ἑπομένως ἡ προβολὴ τοῦ ἐπ' αὐτῆς κειμένου σημείου Α εἶναι τὸ σημεῖον **α** εἰς ὃ τέμνει τὴν **6σ** ἡ ἐκ τοῦ $\mathbf{a_1}$ ἠγμένη κάθετος ἐπὶ τὴν **κλ**.

Ὁμοίως ἑνοῦντες τὸ **α** μὲ τὸ σημεῖον **υ**, καθ' ὃ ἡ $\mathbf{a_1 \delta_1}$ τέμνει τὴν **κλ**, ἔχομεν τὴν προβολὴν τῆς **ΑΥ**, ἐφ' ἧς κεῖται τὸ Δ· ἑπομένως ἡ προβολὴ τοῦ Δ εἶναι τὸ σημεῖον **δ** καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ $\mathbf{\delta_1}$ κάθετος ἐπὶ τὴν **κλ** συναντᾷ τὴν **αυ** κ.ὅ.κ.

Τὰς κατηγμένας εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΚΛΙΣΕΩΝ

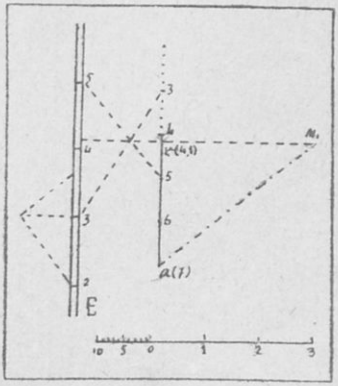
α΄) Ἀποστάσεις.

87. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο δοθέντων σημείων.***

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύσαμεν ἤδη (§ 35) διὰ κατακλίσεως τοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ δοθέντα σημεῖα.

88. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου.***

Ἔστω $a(7)$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον(σχ. 63).



Σχ. 63

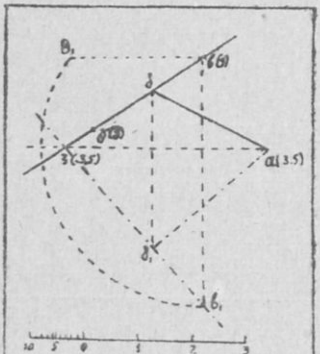
Φέρομεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (§ 74) καὶ προσδιορίζομεν τὸν πόδα $\mu(4,1)$ αὐτῆς.

Ἡ προβολὴ τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως εἶναι τὸ τμῆμα $\alpha(7)\mu(4,1)$. Κατακλίνοντες δὲ τὸ προβάλλον τοῦτο ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\mu(4,1)$, εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν αὐτοῦ αM_1, τουτέστι τὸ ἀληθὲς μέγεθός του, ὅπερ μετροῦντες διὰ τῆς γρ. κλίμακος εὑρίσκομεν $(\alpha M_1)=3,8$ μ.

89. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθείσης εὐθείας.***

Ἔστω $\alpha(3,5)$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ $\beta(1)\gamma(3)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 64).

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου Α καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\alpha(3,5)$, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ κατηγμένην 3,5 ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ $\alpha(3,5)\zeta(3,5)$, τὴν ὁποίαν κατασκευάζομεν ἑνοῦντες τὸ σημεῖον $\alpha(3,5)$ μετὰ τοῦ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ἔχοντος σημείου Ζ τῆς εὐθείας ΒΓ.



Σχ. 64

Τὸ σημεῖον Ζ κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ μένει ἀμετάστατον ὡς κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ Β κατακλίνεται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τοῦ β_1. Κατάκλισις ἄρα τῆς εὐθείας ΖΒ εἶναι ἡ $\zeta\beta_1$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις $\alpha\delta_1$ τοῦ σημείου α ἀπὸ τῆς $\zeta\beta_1$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς ΒΓ. Τὸ μῆκος αὐτῆς εὑρίσκομεν μετροῦντες διὰ τῆς κλίμακος τοῦ σχεδιάσματος.

Σημείωσις.—Τὴν εὑρεθεῖσαν ἀπόστασιν ἀνακλίνομεν προσδιορίζοντες τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τοῦ σημείου **Δ**. Ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τούτου κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς προβολῆς **βγ** τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ **δ**$_1$ καθέτου ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως. Ἡ κατηγμένη τοῦ Δ εἶναι 1,9. Ἡ ἠριθμημένη ἄρα προβολὴ τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶναι **α**(3)**δ**(1,9).

β') *Γωνία δύο εὐθειῶν.*

90.—***Γωνία δύο εὐθειῶν*** μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ **λέγεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἑτέρα τούτων μετὰ τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ἄλλην.**

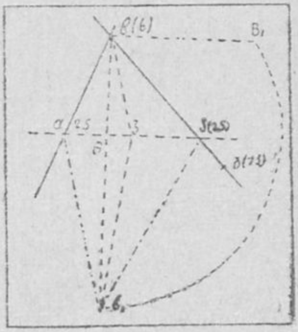
Ὅταν ἡ γωνία δύο τοιούτων εὐθειῶν εἶναι ὀρθή, αἱ εὐθεῖαι λέγονται ***ὀρθογώνιοι***.

Δύο εὐθεῖαι σχηματίζουσιν ἐν γένει δύο διαφόρους γωνίας· εὑρεθείσης δὲ τῆς μιᾶς τούτων εὑρίσκεται συγχρόνως καὶ ἡ ἄλλη ὡς παραπληρωματικὴ ἐκείνης.

91. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ τὴν διχοτόμον αὐτῆς.***

Ἔστωσαν $\alpha(2{,}5)\beta(6)$ καὶ $\gamma(1{,}5)\beta(6)$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι (σχ. 65)

Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου, οἷον τοῦ ὑπὸ κατηγμένην 2,5, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος $\alpha(2{,}5)\delta(2{,}5)$, τὰ μὲν σημεῖα $\alpha(2{,}5)$ καὶ $\delta(2{,}5)$, ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ $\beta(6)$ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ β_1. Ἡ γωνία ἄρα $\alpha\beta_1\delta$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἐν τῷ χώρῳ γωνίας ΑΒΔ.



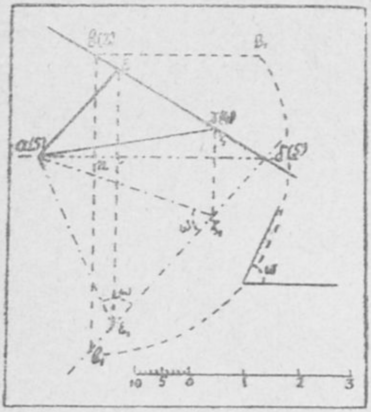
Σχ. 65

Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\alpha\beta_1\delta$ τέμνει τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος εἰς σημεῖον ζ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι προβολὴ τοῦ σημείου Ζ, καθ' ὃ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΔ τέμνει τὸν ἄξονα καὶ τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν κατάκλισιν καὶ ἀνάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου μένει ἀμετάστατον. Ἀνακλινομένου ὅθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας, ἡ διχοτόμος αὐτῆς λαμβάνει τὴν θέσιν $\beta(6)\zeta(2{,}5)$.

92. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστω $\alpha(5)$ τὸ δοθὲν σημεῖον, $\beta(2)\gamma(4)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία (σχ. 66).

Τὸ σημεῖον $\alpha(5)$ καὶ ἡ εὐθεῖα $\beta(2)\gamma(4)$ ὁρίζουσιν ἐπίπεδον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\alpha(5)$, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος $\alpha(5)\delta(5)$, δηλαδὴ ἡ ἑνοῦσα τὸ δοθὲν σημεῖον μετὰ τοῦ τὴν αὐτὴν κατηγμένην ἔχοντος σημείου τῆς εὐθείας $\beta(2)\gamma(4)$.



Σχ. 66

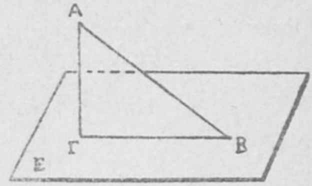
Τὰ σημεῖα $\alpha(5)$ καὶ $\delta(5)$, ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ $\beta(2)$, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ β_1. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $\beta(2)\delta(5)$ θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\beta_1\delta$. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ $\alpha\varepsilon_1$ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς $\beta_1\delta$ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ω, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ζητουμένης εὐθείας. Τὴν προβολὴν αὐτῆς εὑρίσκομεν προσδιορίζοντες τὴν προβολὴν τοῦ σημείου Ε καθ' ὃ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνει τὴν ΒΓ καὶ τὸ ὁποῖον κατεκλίθη εἰς τὸ ε_1. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ ε_1 κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν $\alpha\delta$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως. Ἡ κάθετος αὕτη τέμνει τὴν $\beta\gamma$ εἰς σημεῖον ε τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Ε. Ἡ κατηγμένη αὐτοῦ εἶναι 2,6. Ἡ ζητουμένη ἄρα εὐθεῖα εἶναι ἡ $\alpha(5)\varepsilon(2,6)$.

Σημείωσις.—Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ **α** ἄγονται ἐν γένει δύο εὐθεῖαι σχηματίζουσαι μετὰ τῆς $\beta_1\delta$ γωνίαν ω, τὸ πρόβλημα ἔχει καὶ ἄλλην λύσιν τὴν $\alpha(5)\zeta(4,6)$.

γ') *Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.*

93. ***Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου*** λέγεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Π.χ. γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 67) καὶ τοῦ ἐπι-

πέδου Ε, εἶναι ἡ γωνία ΑΒΓ τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ΓΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΒΑΓ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μετὰ τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

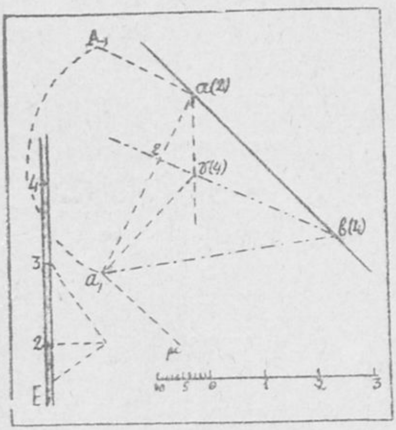


Σχ. 67

94. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος ἐπιπέδου.***

Ἔστω $\alpha(2)\beta(4)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 68).

Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου $\alpha(2)$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (§ 74) καὶ προσδιορίζομεν ἓν σημεῖον αὐτῆς, οἷον τὸ $\gamma(4)$.



Σχ. 68

Μετὰ τοῦτο κατακλίνομεν τὴν γωνίαν $\gamma(4)\alpha(2)\beta(4)$ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 4 (§ 91) καὶ ἔχομεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτῆς $\gamma\alpha_1\beta$. Ἡ γωνία αὕτη εἶναι, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, συμπληρωματικὴ τῆς ζητουμένης. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ α_1 ἡ $\alpha_1\mu$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha_1\gamma$, ἡ γωνία $\beta\alpha_1\mu$ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία τῆς εὐθείας $\alpha(2)\beta(4)$ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

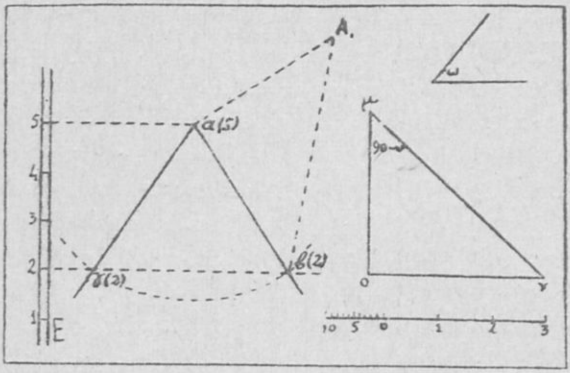
95. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου σχηματίζουσα μετὰ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ $\alpha(5)$ ἓν σημεῖον αὐτοῦ (σχ. 69). Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου σχηματίζουσα μετὰ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ω.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα σχηματίζῃ μετὰ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου γωνίαν *ω*, τὴν αὐτὴν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ καὶ μετὰ παντὸς ἄλλου ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

Τούτου τεθέντος ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω *α*(5)*β*(2) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ προβάλλον αὐτὴν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁ-



Σχ. 69

ριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος κατηγμένην 2, ἡ γωνία *αβ*A_1 θὰ εἶναι ἴση τῇ *ω* καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον *αβ*A_1 δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρά του *α*A_1=3 μον. τῆς γρ. κλίμακος καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία *αβ*A_1.

Ἡ *αβ* ἄρα δύναται νὰ κατασκευασθῇ· ταύτης δὲ κατασκευασθείσης, προσδιορίζεται καὶ τὸ σημεῖον *β*(2) καθ' ὃ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνει τὴν ὑπὸ κατηγμένην 2 ἰχνοπαράλληλον τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑπομένην κατασκευήν.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον *μον* ἔχον τὴν κάθετον πλευρὰν *ομ* ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς κατηγμένης τοῦ σημείου *α*(5) καὶ τῆς κατηγμένης τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου E, οἷον τῆς ὑπὸ κατηγμένην 2, τὴν δὲ ὀξεῖαν γωνίαν μ συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης *ω*. Εἶτα μὲ κέντρον *α* καὶ ἀκτῖνα *ον* γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν προβολὴν τῆς ἰχνοπαραλλήλου 2 εἰς τὰ σημεῖα *β* καὶ *γ*, ἑκατέρα δὲ τῶν εὐθειῶν $\alpha(5)\beta(2)$ καὶ $\alpha(5)\gamma(2)$ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μόνον μίαν λύσιν, ὅταν ἡ γραφομένη περιφέρεια ἐφάπτηται τῆς προβολῆς τῆς ἰχνοπαραλλήλου, εἶναι δὲ ἀδύνατον, ὅταν δὲν συναντᾷ αὐτήν. Τὸ τελευταῖον συμβαίνει ὅταν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ τοῦ ἐδαφίου (53), ἐὰν διὰ λογισμοῦ ἢ γεωμ. κατασκευῆς εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς κλίσεως, ἢ τὸ βῆμα, τῆς ζητουμένης εὐθείας.

δ´) Γωνία δύο εὐθειῶν.

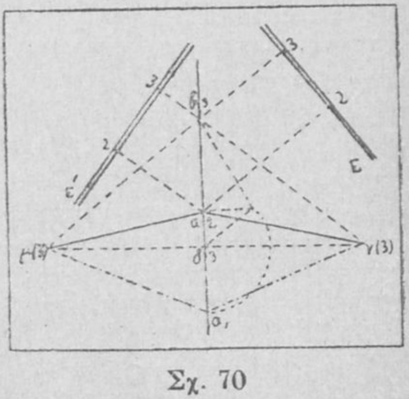
96. Δύο ἀλληλοτομοῦντα ἐπίπεδα σχηματίζουσιν, ἐν γένει, δύο διαφόρους διέδρους γωνίας παραπληρωματικάς.

Μέτρα τῶν διέδρων τούτων εἶναι αἱ εἰς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωρίζομεν, σχηματίζονται ὅταν αἱ δίεδροι τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι, ἂν ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐντὸς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς διέδρου.

97. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία δύο δοθέντων ἐπιπέδων.***

Α´ ΤΡΟΠΟΣ. -Ἔστωσαν Ε καὶ Ε´ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 70).



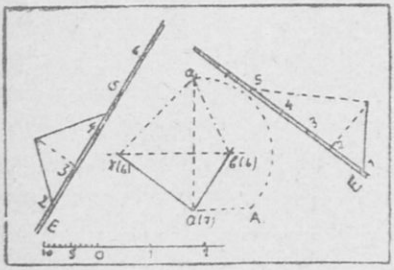
Σχ. 70

Κατασκευάζομεν τὴν κοινὴν τομὴν $\alpha(2)\beta(3)$ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἔκ τινος σημείου αὐτῆς, οἷον τοῦ $\alpha(2)$, φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἡ προβολὴ τῆς ἰχνοκαθέτου τοῦ ἐπιπέδου τούτου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $\alpha(2)$ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς $\alpha\beta$ (§ 78). Ἐπειδὴ δὲ τὸ βῆμα τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου εἶναι ἀντίστροφον τοῦ βήματος τῆς εὐθείας $\alpha(2)\beta(3)$ καὶ ἡ βαθμολογία ἀντίρροπος, προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον $\delta(3)$ τῆς ἰχνοκαθέτου ταύτης, κατασκευάζοντες τὸ βῆμα τοῦ ἐπιπέδου της, ὡς δεικνύεται ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι.

Ἡ ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαράλληλος τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου τέμνει τὴν ὁμώνυμον ἰχνοπαράλληλον τοῦ Ε εἰς τὸ $\mu(3)$, τὴν δὲ τοῦ Ε΄, εἰς τὸ $\nu(3)$. Τὸ βοηθητικὸν ὅθεν ἐπίπεδον τέμνει τὸ μὲν Ε κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\alpha(2)\mu(3)$, τὸ δὲ Ε΄ κατὰ τὴν $\alpha(2)\nu(3)$ Ἡ γωνία ἄρα $\mu\alpha\nu$ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν ἑτέραν τῶν διέδρων τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα.

Κατακλίνοντες τὴν γωνίαν ταύτην ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3, εὑρίσκομεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτῆς $\mu\alpha_1\nu$.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ.—Ἔστωσαν Ε καὶ Ε΄ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 71).



Σχ. 71

Ἔκ τινος σημείου τοῦ χώρου, οἷον τοῦ $\alpha(7)$, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\alpha(7)\beta(6)$ κάθετον ἐπὶ τὸ Ε καὶ τὴν $\alpha(7)\gamma(6)$ κάθετον ἐπὶ τὸ Ε΄. Ἡ γωνία τῶν δύο τούτων καθέτων εἶναι μία τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα.

Κατακλίνοντες αὐτὴν ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου, οἷον τοῦ ὑπὸ κατηγμένην 6, εὑρίσκομεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτῆς $\beta\alpha_1\gamma$.

Σημείωσις.—Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ κλίσεως τοῦ ἄλλου καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται διὰ κατακλίσεως τοῦ προβάλλοντος τὴν κλίμακα κλίσεως αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἢ ἄλλου τινὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

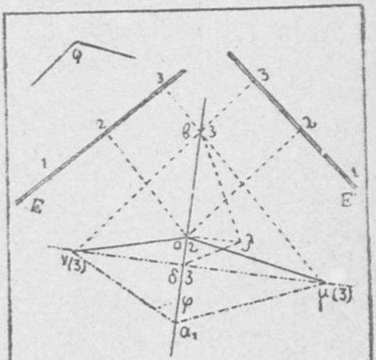
98. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν δοθεῖσαν δίεδρον.***

Τὸ διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν ἐπίπεδον, διχοτομεῖ καὶ τὴν εἰς ταύτην ἀντίστοιχον ἐπίπεδον. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\mu\alpha_1\nu$, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον (σχ. 70), ἀνακλίνοντες θὰ ἔχωμεν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς διχοτόμου, αὕτη δὲ μετὰ τῆς ἀκμῆς $\alpha(2)\beta(3)$ τῆς διέδρου ὁρίζουσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

99. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθείσης εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ δοθέντος δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστω $\alpha(2)\beta(3)$ ἡ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Ε (σχ. 72) διὰ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ Ε γωνίαν φ.

Φέρομεν διὰ τοῦ σημείου $\alpha(2)$ ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $\alpha(2)\beta(3)$. Ἡ προβολὴ τῆς ἰχνοκαθέτου τοῦ ἐπιπέδου τούτου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ $\alpha(2)$ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς $\alpha\beta$· ἐπειδὴ δὲ τὸ βῆμα αὐτοῦ εἶναι ἀντίστροφον τοῦ βήματος τῆς εὐθείας $\alpha(2)\beta(3)$ καὶ ἡ βαθμολογία ἀντίρροπος, προσδιορίζομεν εὐκόλως τὸ σημεῖον $\delta(3)$ τῆς ἰχνοκαθέτου ταύτης κατασκευάζοντες τὸ βῆμα $\alpha\delta$ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ὡς δεικνύεται ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι.



Σχ. 72

Προσδιορισθέντος τοῦ σημείου $\delta(3)$, προσδιορίζεται καὶ ἡ ἰχνοπαράλληλος $\delta(3)\mu(3)$ τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Αὕτη τέμνει τὴν ὑπὸ κατηγμένην 3 ἰχνοπαράλληλον τοῦ ἐπιπέδου Ε εἰς τὸ $\mu(3)$· ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $\alpha(2)\mu(3)$ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ρ, εἶναι δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha(2)\beta(3)$, ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἐπιπέδου Ρ.

Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ $\alpha(2)$ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῆς $\alpha(2)\mu(3)$ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ, ἡ εὐθεῖα αὕτη μετὰ τῆς $\alpha(2)\beta(3)$ θὰ ὁρίσωσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

Τούτου τεθέντος, κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον Ρ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ $\mu(3)\delta(3)$, καὶ κατασκευάζομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τὴν κατάκλισιν α_1 τοῦ σημείου $\alpha(2)$. Ἡ $\alpha_1\mu$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας $\alpha(2)\mu(3)$. Ἐὰν δὲ μὲ πλευρὰν τὴν $\alpha_1\mu$ καὶ κορυφὴν τὸ α_1 κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν $\mu\alpha_1\nu$ ἴσην τῇ φ, ἡ $\alpha_1\nu$ θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας $\alpha(2)\nu(3)$ τοῦ ἐπιπέδου P, ἥτις μετὰ τῆς $\alpha(2)\mu(3)$ περιέχουσι τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν $\alpha(2)\nu(3)$ μετὰ τῆς $\alpha(2)\beta(3)$, ὁρίζουσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου εὐκόλως κατασκευάζομεν καὶ κλίμακα κλίσεως Ε΄.

Τῷ ὄντι, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας $\alpha(2)\beta(3)$ ἐπειδὴ δὲ τὸ P εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτήν, κοινὴν οὖσαν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε΄, τέμνει δὲ τὸ μὲν Ε κατὰ τὴν $\alpha(2)\mu(3)$, τὸ δὲ Ε΄ κατὰ τὴν $\alpha(2)\nu(3)$, ἡ γωνία $\mu(3)\alpha(2)\nu(3)$ εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε΄, εἶναι δὲ ἴση τῇ δοθείσῃ φ, ὡς ἔχουσα κατάκλισιν $\mu\alpha_1\nu$ ἐκ κατασκευῆς ἴσην τῷ γωνίᾳ ταύτῃ.

Ἀσκήσεις

1). Δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς προβολῆς μ σημείου Μ ἀπέχοντος ἀπ' αὐτῆς δεδομένην ἀπόστασιν, εὑρεῖν τὴν κατηγμένην τοῦ Μ,α) ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι ὁριζόντιος, β΄) ὅταν εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα.

2). Εὑρεῖν ἐπὶ δοθείσης εὐθείας σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

3). Εὑρεῖν ἐπὶ δοθείσης κατακορύφου εὐθείας σημεῖον ἀπέχον ἀπὸ δοθέντος σημείου δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

4). Νὰ ἀχθῇ ἡ κοινὴ κάθετος δύο ὁριζοντίων εὐθειῶν.

5). Νὰ ἀχθῇ ἡ κοινὴ κάθετος δύο εὐθειῶν, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι κατακόρυφος.

6). Νὰ ἀχθῇ ἡ κοινὴ κάθετος δύο οἱωνδήποτε εὐθειῶν.

7). Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δύο ἐπιπέδων ὧν αἱ προβολαὶ τῶν κλιμάκων κλίσεως εἶναι παράλληλοι.

8). Δοθέντων σημείου καὶ εὐθείας, εὑρεῖν τὴν γωνίαν τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὁριζομένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν.

9). Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β καὶ ὁριζοντίου εὐθείας ΓΔ, εὑρεῖν τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ.

10). Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δοθείσης εὐθείας μετὰ δοθέντος κατακορύφου ἐπιπέδου.

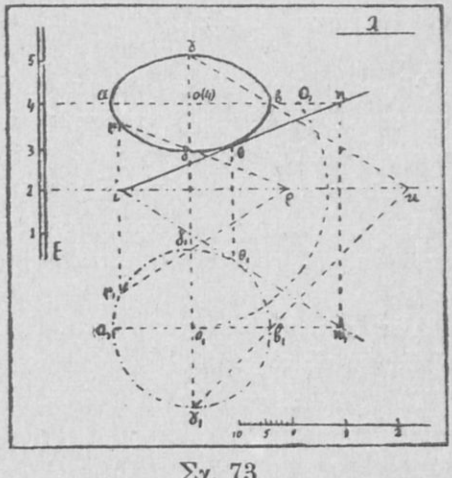
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΚΥΚΛΟΥ

100. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κύκλου κειμένου ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου, γνωστῶν ὄντων τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.***

Ἔστω Ε τὸ ἐπίπεδον κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα δοθεῖσαν εὐθεῖαν λ καὶ κέντρον τὸ σημεῖον $o(4)$ (σχ. 73).

Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου ἡ παράλληλος πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον, προβάλλεται ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος 2λ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου Ε, ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 73

Ἄγοντες ὅθεν ἐκ τοῦ *ο* κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου καὶ λαμβάνοντες ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ τμήματα *οα* καὶ *οϐ* ἴσα τῇ δοθείσῃ ἀκτῖνι λ ἔχομεν τὰς προβολὰς *α* καὶ *ϐ* δύο σημείων τῆς περιφερείας.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν προβολῶν καὶ ἄλλων σημείων, κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον Ε ἐπὶ ὁριζοντίου τινὸς ἐπιπέδου, π.χ. τοῦ ἔχοντος κατηγμένην 2. Τὸ κέντρον τότε κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ o_1, γράφοντες δὲ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα λ περιφέρειαν ἔχομεν τὴν κατάκλισιν τοῦ κύκλου.

Μετὰ τοῦτο φέρομεν τὴν διάμετρον $\alpha_1 \beta_1$ τὴν παράλληλον τῷ ἄξονι καὶ τὴν ἐπ' αὐτὴν καθετον $\gamma_1 \delta_1$, διὰ δὲ τῆς εὐθείας $\gamma_1 \beta_1 \kappa$ ἀνακλινομένης ἐπὶ τῆς $\beta\kappa$ ἀνακλίνεται καὶ τὸ γ_1 εἰς τὸ γ, λαμβάνοντες δὲ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς γo τὸ τμῆμα $o\delta = o\gamma$, ἔχομεν τὰς προβολὰς τεσσάρων σημείων τῆς περιφερείας.

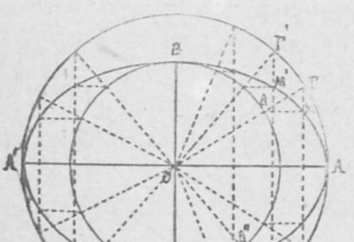
Ὁμοίως ἀνακλίνομεν οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον. Π. χ. ἵνα ἀνακλίνομεν τὸ εἰς τὸ μ_1 κατακλιθὲν σημεῖον, ἐπιζευγνύομεν τὸ μ_1 μετά τινος ἄλλου, ἀνακλιθέντος ἤδη, οἷον τοῦ δ_1. Ἡ $\mu_1 \delta_1$ τέμνει τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως εἰς τὸ ρ· ἑπομένως ἀνακλίνεται ἐπὶ τῆς $\delta\rho$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ μ_1 ἐπὶ τοῦ μ.

Οὕτως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς προβολὰς ὅσων θέλομεν σημείων, ἑνοῦντες δὲ ταύτας διὰ συνεχοῦς καμπύλης, ἔχομεν τὴν προβολὴν τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου, ἥτις εἶναι ***ἔλλειψις***, [1] ὡς διδάσκει ἡ γεωμετρία.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς σημεῖον Θ κατακεκλιμένον εἰς ϑ_1, φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας o_1 εἰς τὸ σημεῖον ϑ_1.

Αὕτη τέμνει τὴν διάμετρον $o_1 \beta_1$ εἰς τὸ n_1 καὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος εἰς τὸ $\imath$.

Τὸ n_1 ἀνακλίνεται εἰς τὸ n, τὸ δὲ $\imath$ μένει ἀμετάστατον. Ἡ



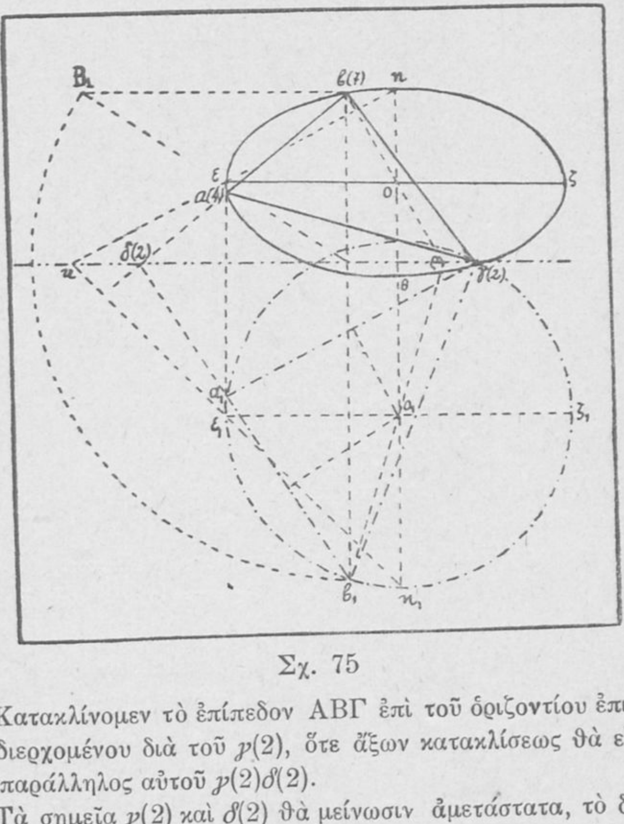
Σχ. 74

[1] Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως προσδιορίζομεν ὅσα θέλομεν σημεῖα αὐτῆς διὰ τῆς ἑξῆς κατασκευῆς (σχ. 74).

Ἐπὶ τῶν ἀξόνων Α΄Α καὶ ΒΒ΄ ὡς διαμέτρων γράφομεν περιφερείας καὶ φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΓ τῆς μείζονος, ἥτις τέμνει τὴν ἐλάσσονα εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον τῇ Α΄Α ἥτις τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπ' αὐτὴν εἰς σημεῖον Μ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως.

ἐφαπτομένη ὅθεν ἀνακλίνεται ἐπὶ τῆς $ιη$, ἡ δὲ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ ϑ_1 καθέτου ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος εἶναι ἡ προβολὴ ϑ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.

101. ***Ἐφαρμογή.***—Νὰ περιγραφῇ κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον $\alpha(4)\beta(7)\gamma(2)$ (σχ. 75).



Σχ. 75

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ $\gamma(2)$, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ $\gamma(2)\delta(2)$.

Τὰ σημεῖα $\gamma(2)$ καὶ $\delta(2)$ θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ $\beta(7)$ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ β_1. Ἐπομένως ἡ ΒΓ θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\beta_1\gamma$, ἡ ΔΒ ἐπὶ τῆς $\beta_1\delta$ καὶ τὸ ἐπὶ ταύτης σημεῖον Α, εἰς τὸ α_1. Τὸ τρίγωνον ἄρα $\alpha_1\beta_1\gamma$ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Περὶ τὸ τρίγωνον $\alpha_1\beta_1\gamma$ περιγράφομεν κύκλον καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς εὐθείας $\beta_1 o_1$, τεμνούσης τὸν ἄξονα εἰς τὸ ρ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀνακλινομένης εἰς τὴν θέσιν $\beta(7)\rho(2)$, προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν o τοῦ κέντρου.

Ἡ ὁριζοντία διάμετρος προβάλλεται ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος. Ἄγοντες ὅθεν διὰ τοῦ o παράλληλον τῇ προβολῇ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ λαμβάνοντες ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ τμήματα $o\varepsilon = o\zeta = o_1\varepsilon_1$, ἔχομεν τὸν μέγαν ἄξονα τῆς ἐλλείψεως. Τὸν μικρὸν ἄξονα αὐτῆς προσδιορίζομεν ἀνακλίνοντες τὸ εἰς τὸ π_1 κατακεκλιμένον ἄκρον τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ὁριζοντίαν, τῇ βοηθείᾳ τῆς εὐθείας $\pi_1\varepsilon_1$ τεμνούσης τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον $\kappa(2)$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀνακλινομένης ἐπὶ τῆς $\kappa\varepsilon$, καὶ λαμβάνοντες $o\delta = o\pi$.

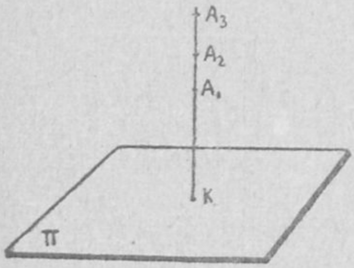
Ἔχοντες τοὺς δύο ἄξονας τῆς προβολῆς τῆς ζητουμένης περιφερείας προσδιορίζομεν ἀρκετὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ εἶτα καταγράφομεν αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

102. Τὸ πολύεδρον παρίσταται διὰ τῶν ἠριθμημένων προβολῶν πασῶν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν φαντασθῶμεν παρατηρητὴν ὑπεράνω τοῦ προβολ. ἐπιπέδου, εἰς ἄπειρον ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν, θεώμενον τὸ προβολ. ἐπίπεδον, αἱ ὀπτικαί του ἀκτῖνες θὰ πίπτωσι κατακορύφως ἐπὶ τοῦ προβ. ἐπιπέδου καὶ σημεῖόν τι τοῦ πολυέδρου, θεωρουμένου ἀδιαφανοῦς, θὰ εἶναι ὁρατὸν ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον τοῦ πολυέδρου ὑπεράνω αὐτοῦ.

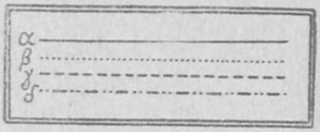


Σχ. 76

Οὕτως, ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Κ κατακόρυφος (σχ.76) συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν ἀδιαφανοῦς σώματος εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 ὁρατὸν εἶναι μόνον τὸ A_3 τὸ ἔχον τὴν μεγαλυτέραν κατηγμένην.

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην αἱ γραμμαὶ τοῦ πολυέδρου διακρίνονται εἰς *ὁρατὰς* καὶ *μὴ ὁρατάς*.

103. ***Γραμμογραφία.***— Πρὸς εὔκολον ἀνάγνωσιν τοῦ σχεδιάσματος πολυέδρου καὶ ἵνα ἐκ τούτου μόνου σχηματίζωμεν σαφῆ ἰδέαν τοῦ σχήματος αὐτοῦ, μεταχειριζόμεθα κατὰ τὴν διὰ μελάνης σχεδίασιν διάφορα εἴδη γραμμογραφίας.



Σχ. 77

Αἱ ὁραταὶ γραμμαί, ἢ τὰ ὁρατὰ μέρη αὐτῶν, παρίστανται διὰ μαύρων συνεχῶν γραμμῶν πάχους 1)4 τοῦ χιλιοστομέτρου περίπου κατὰ τὸ ὑπόδειγμα α (σχ. 77).

Αἱ μὴ ὁραταὶ γραμμαί, ἢ τὰ μὴ ὁρατὰ μέρη αὐτῶν παρίστανται διὰ σειρᾶς στιγμῶν ἰσοπαχῶν καὶ εἰς ἴσας ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις κατὰ τὸ ὑπόδειγμα β.

Αἱ βοηθητικαὶ γραμμαὶ χαράσσονται ἢ συνεχεῖς δι' ἐρυθρᾶς μελάνης, ἢ διακεκομμέναι διὰ μαύρης μελάνης κατὰ τὸ ὑπόδειγμα γ.

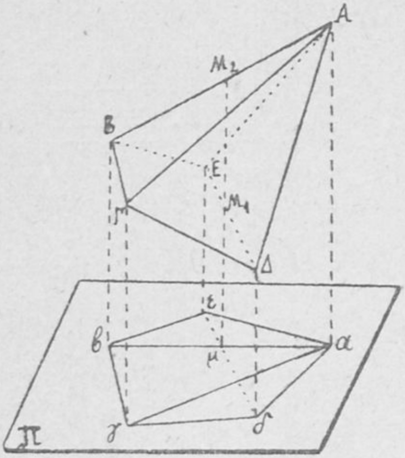
Ὅταν τέλος πρόκειται νὰ παραστήσωμεν μέρος μόνον τοῦ πολυέδρου, ἢ παραλείπομεν ὁλοσχερῶς τὰς γραμμὰς τὰς ἀνηκούσας εἰς τὸ ὑπόλοιπον μέρος, ἢ παριστῶμεν αὐτὰς διὰ γραμμῶν τοῦ εἴδους δ.

Σημείωσις.—Ὅταν ἐν τῷ σχεδιάσματι συμπίπτουν δύο γραμμαὶ προτιμᾶται ἡ γραμμογραφία τῆς ὁρατῆς ἀπὸ τῆς μὴ ὁρατῆς καὶ ταύτης ἀπὸ τῆς βοηθητικῆς καὶ ταύτης ἀπὸ τῆς τοῦ εἴδους **δ**.

104. ***Φαινόμενον περίγραμμα πολυέδρου.***— Ὑποθέσωμεν παρατηρητὴν εἰς ἄπειρον ἀπὸ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου ἀπόστασιν παρατηροῦντα τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕ (σχ. 78).

Ὡς πρὸς τὸν παρατηρητὴν τοῦτον αἱ ἕδραι ΑΒΕ, ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἶναι ὁραταί, οὐχὶ ὅμως καὶ αἱ ΑΔΕ καὶ ΒΓΔΕ, ἡ δὲ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΕΒΓΔ, ἡ χωρίζουσα τὸ ὁρατὸν μέρος τοῦ πολυέδρου ἀπὸ τὸ μὴ ὁρατόν, λέγεται ***φαινόμενον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου*** ὡς ***πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον Π,*** καὶ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ***αεβγδ, φαινόμενον περίγραμμα ἐν προβολῇ*** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Τὸ φαινόμενον λοιπὸν περίγραμμα τοῦ πολυέδρου, ὡς περιβάλλον τὸ ὁρατὸν μέρος αὐτοῦ, εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ὁρατὸν καὶ διὰ τοῦτο ἡ προβολή του σχεδιάζεται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς.



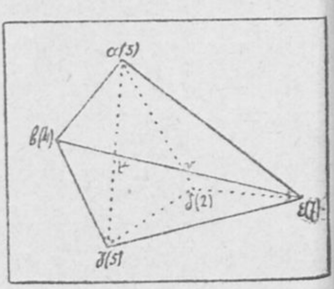
Σχ. 78

Ὡς πρὸς τὰς λοιπὰς γραμμὰς αἵτινες προβάλλονται ἐντὸς τῆς προβολῆς τοῦ φαινομένου περιγράμματος πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὰς ὁρατὰς ἀπὸ τὰς μὴ ὁρατάς.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ ***κυρτοῦ*** πολυέδρου ὅτι,

α'). Ἐὰν αἱ προβολαὶ δύο ἀκμῶν ἀλλητομῶσιν ἐντὸς τῆς προβολῆς τοῦ περιγράμματος, ἡ ἑτέρα τῶν ἀκμῶν τούτων εἶναι ὁρατή. Διότι τὸ σημεῖον μ τῆς τομῆς τῶν προβολῶν ***αβ*** καὶ ***δε*** εἶναι κοινὴ προβολὴ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου, ἀνηκόντων εἰς τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΔΕ καὶ μόνον τούτων, ἀφ' οὗ τὸ πολύεδρον εἶναι κυρτόν. Ἀλλ' ἐκ τῶν σημείων τούτων μόνον τὸ M_2, τὸ ἔχον τὴν μείζονα κατηγμένην εἶναι ὁρατόν· ἐπομένως ἡ ἀκμὴ ΑΒ εἶναι ὁρατή, ἡ δὲ ΔΕ ἀφανής.

β'). Αἱ ἀκμαὶ αἱ καταλήγουσαι εἰς κορυφὴν μὴ ἀνήκουσαν εἰς τὸ φαινόμενον περίγραμμα εἶναι ὁραταὶ ἐφ' ὅσον καὶ ἡ κορυφὴ αὕτη εἶναι ὁρατή. Τοῦτο εἶναι προφανές.



Σχ. 79

105. ***Ἐφαρμογή.*** — Ἔστω πρὸς σχεδίασιν τὸ πολύεδρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα ***α***(3), ***β***(4), ***γ***(5), ***δ***(2), ***ε***(7) (σχ. 79).

Φαινόμενον περίγραμμα ἐν προβολῇ εἶναι τὸ τετράπλευρον ***αβγε***.

Ἐκ τῶν ἀκμῶν ΑΓ καὶ ΒΕ, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου τούτου, ὁρατὴ εἶναι μόνον ἡ ΒΕ, διότι ἡ κατηγμένη τοῦ σημείου της, ὅπερ προβάλλεται εἰς τὸ μ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κατηγμένης τοῦ σημείου τῆς ΑΓ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν προβολὴν μ. Ἡ $\beta\nu$ ἄρα θὰ παρασταθῇ διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, ἡ δὲ $\alpha\gamma$ διὰ γραμμῆς ἐκ στιγμῶν ἀποτελουμένης.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἀκμῶν ΒΕ καὶ ΑΔ, ὧν αἱ προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν ἐντὸς τοῦ ἐν προβολῇ περιγράμματος εἰς τὸ σημεῖον ν, ἡ ΑΔ δὲν εἶναι ὁρατή, διότι ἡ κατηγμένη τοῦ σημείου της τοῦ προβαλλομένου εἰς τὸ ν, ὡς περιλαμβανομένη μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 3, εἶναι μικροτέρα τῆς κατηγμένης τοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ν προβαλλομένου σημείου τῆς ΒΕ, ὡς περιλαμβανομένης μεταξὺ 4 καὶ 7.

Τῆς ΑΔ μὴ οὔσης ὁρατῆς καὶ ἡ κορυφὴ $\delta(2)$ εἶναι ἀφανής, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ αἱ εἰς αὐτὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ ΓΔ καὶ ΕΔ.

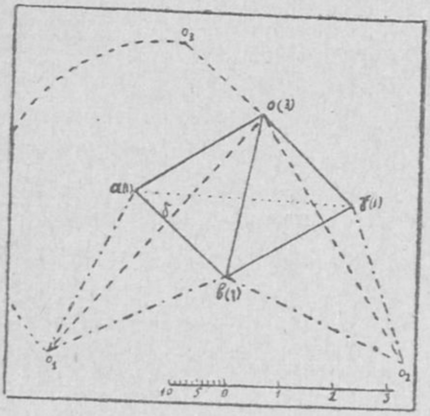
Κατασκευὴ πυραμίδων.

106. Πρὸς κατασκευὴν πυραμίδος, κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς βάσεως, ἔπειτα δὲ καὶ τὴν τῆς κορυφῆς, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα. Ἀκολούθως ἐπιζευγνύομεν δι' εὐθειῶν τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς μὲ τὴν προβολὴν ἑκάστης τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως.

107. ***Ἐφαρμογὴ α'). — Νὰ κατασκευασθῇ ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ ἧς ἡ βάσις ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 1, αἱ δὲ ἀκμαί της εἶναι (ΑΒ)=2,2μ.(ΒΓ) = 2,6μ. (ΓΑ)=4, (ΟΑ)= 3, 3, (ΟΒ)=3,5 καὶ (ΟΓ)=3.***

Ἡ βάσις ὡς κειμένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβάλλεται ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ (σχ. 80) ἔχον$(\alpha\beta)$=(ΑΒ)=2,3,$(\beta\gamma)$=(ΒΓ)=2,6 καὶ $(\gamma\alpha)$=(ΓΑ)=4, ἔχομεν τὴν προβολὴν τῆς βάσεως.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς προβολῆς τῆς κορυφῆς Ο, κατακλίνομεν τὴν ἕδραν ΟΑΒ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 1· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον $o_1\alpha\beta$ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι γνωσταὶ (αo_1)=(ΑΟ)=3,3 καὶ (βo_1)=(ΒΟ)=3,5·καὶοὔτως ἔχομεν τὴν κατάκλισιν o_1 τῆς κορυφῆς ὡς πρὸς ἄξον κατακλίσεως $\alpha(1)\beta(1)$. Κατακλίνοντες ὁμοίως τὴν ἕδραν ΟΒΓ ἔχομεν καὶ τὴν κατάκλισιν o_2 τῆς κορυφῆς Ο, ὡς πρὸς ἄξονα $\beta_1\gamma_1$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ὀφείλει νὰ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o_1 καθέτου ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ (§ 80), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o_2 καθέτου ἐπὶ τὴν $\beta\gamma$, φέρομεν τὰς καθέτους ταύτας καὶ ἔχομεν εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν τὴν προβολὴν o τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος.



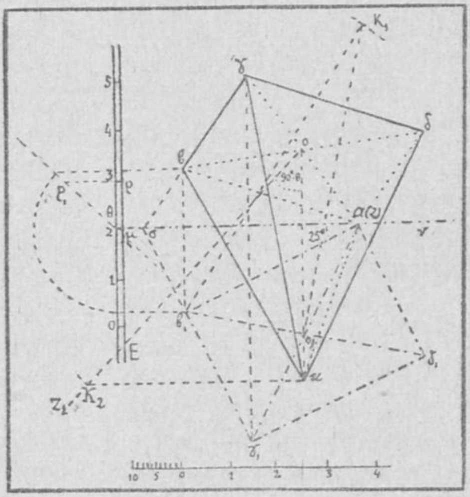
Σχ 80

Μένει ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὴν κατηγμένην τῆς κορυφῆς. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ o παράλληλον τῇ $\alpha\beta$ καὶ μὲ κέντρον τὸν πόδα δ τῆς ἐκ τοῦ o_1 καθέτου ἐπ' αὐτὴν καὶ ἀκτῖνα τὴν δo_1 γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ἐκ τοῦ o ἀχθεῖσαν παράλληλον εἰς τὸ o_3 τὸ δὲ τρίγωνον $o\delta o_3$ εἶναι προφανῶς τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου Ο, θεωρουμένου ὡς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΒ. Ἡ πλευρὰ ὅθεν oo_3 τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κατηγμένων τοῦ σημείου Ο καὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 1, ἐφ' οὗ ἐγένετο ἡ κατάκλισις. Μετροῦντες ταύτην διὰ τῆς κλίμακος εὑρίσκομεν $(oo_3)=2$ μ. Ἡ κατηγμένη ὅθεν τοῦ Ο εἶναι 3 μ. Ἄγοντες τέλος τὰς $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$ ἔχομεν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς πυραμίδος $o(3)\alpha(1)\beta(1)\gamma(1)$.

108. **Ἐφαρμογὴ β').— *Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου Ε ἔχοντος βῆμα 1, δίδεται ἡ κορυφὴ α(2) καὶ αἱ διαστάσεις (ΑΒ)=4 μ καὶ (ΑΔ)=3. Ἡ πλευρὰ ΑΒ σχηματίζει μετὰ τῆς ἐκ τοῦ Α διερχομένης ἰχνοπαραλλήλου γωνίαν 25°, αἱ δὲ κατηγμέναι τῶν κορυφῶν Β,Γ,Δ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς κατηγμένης τοῦ Α· Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι βάσις πυραμίδος ὑπερκειμένης τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ τῆς ὁποίας ἑκάστη τῶν πλευρῶν εἶναι 7 μ.***

Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ αὐτῆς (σχ. 81)·

1ον. Κατασκευάζομεν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς βάσεως. Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον Ε ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 2, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος $\mu(2)\nu(2)$. Τὸ σημεῖον Α θὰ μείνῃ ἀμετάστατον καὶ ἡ γωνία ΒΑΜ ἀμετάβλητος· ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ α εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῆς $\mu\nu$ γωνίαν 25^0 καὶ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς $(\alpha\beta_1)$=4μ. ἡ $\alpha\beta_1$ θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐξ ἧς



Σχ. 81

εὐκόλως πορίζόμεθα τὴν κατάκλισιν $\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1$ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἀνακλίνοντες τὸ β_1 εἰς τὸ β τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου τῆς κατακλίσεως τοῦ τυχόντος σημείου Ρ (§ 86) τοῦ κατακλιθέντος ἐπιπέδου, ἀνακλίνομεν ἔπειτα καὶ τὸ γ_1 εἰς τὸ γ διὰ τῆς εὐθείας $\gamma_1\beta_1$ τεμνούσης τὴν $\mu\nu$ εἰς τὸ σ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀνακλινομένης ἐπὶ τῆς $\sigma\beta$, μεθ' ὃ ἄγοντες ἐκ τῶν σημείων α καὶ β παραλλήλους ταῖς πλευραῖς $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ συμπληροῦμεν τὴν προβολὴν $\alpha\beta\gamma\delta$ τῆς βάσεως. Αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων Β,Γ,Δ, ὡς σημείων τοῦ ἐπιπέδου Ε, εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ εἶναι $(\beta\text{Β})$=3,2 μ, $(\gamma\Gamma)$=5,1μ, $(\delta\Delta)$=3,9μ. τῆς γραφικῆς κλίμακος.

2ον. Προσδιορίζομεν τὴν κορυφὴν Κ τῆς πυραμίδος.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ εἶναι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ =ΚΔ, ἡ κορυφὴ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε ἐκ τοῦ σημείου Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῆς βάσεως, ἀπέχει δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

Τὸ σημεῖον Ο ἔχει προβολὴν *ο* καὶ κατηγμένην 3,55, ἡμιάθροισμα τῶν κατηγμένων τῶν σημείων Α καὶ Γ. Ἡ ἐκ τοῦ Ο ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε ἔχει προβολὴν τὴν ἐκ τοῦ *ο* παράλληλον τῇ προβολῇ τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ βῆμα αὐτῆς εἶναι ἀντίστροφον τοῦ βήματος τοῦ ἐπιπέδου (ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει εἶναι β=1) καὶ ἡ βαθμολογία ἀντίρροπος, κατασκευάζεται εὐκόλως.

Ἐξ ἄλλου τὸ ὕψος ΚΟ τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην τῇ ΟΒ=$o_1 b_1$ καὶ ὑποτείνουσαν ΒΚ=7 μ. Ἂν λοιπὸν φέρωμεν ἐκ τοῦ o_1 κάθετον ἐπὶ τὴν $o_1 b_1$, ἡ μὲ κέντρον b_1 καὶ ἀκτῖνα 7 μ. γραφομένη περιφέρεια θὰ τμήσῃ τὴν κάθετον ταύτην εἰς σημεῖον K_1 καὶ ἡ $K_1 o_1$ θὰ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος.

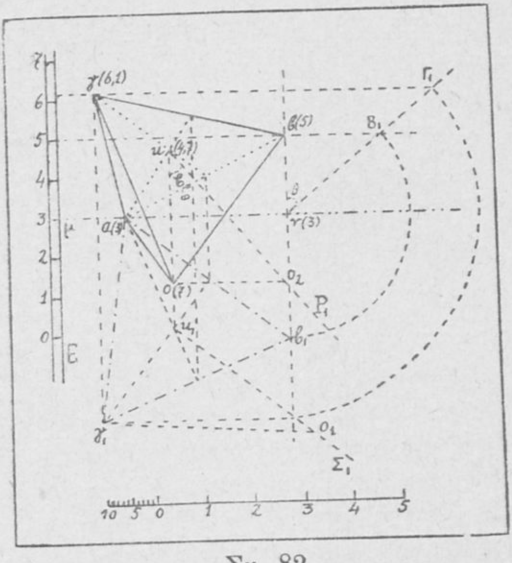
Ἔχοντες νῦν τὴν ἐκ τοῦ Ο κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ὕψος. Πρὸς τοῦτο (§ 36) κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Ο· ἡ κάθετος τότε θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ εὐθείας oZ_1 σχηματιζούσης μετὰ τῆς προβολῆς της γωνίαν συμπληρωματικὴν τῆς γωνίας κλίσεως θ τοῦ ἐπιπέδου Ε (§ 72), καὶ ὡς ἐκ τούτου κατασκευαζομένης εὐκόλως ἐὰν ἐκ τοῦ *ο* ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν μP_1.

Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς oZ_1 τὸ τμῆμα $oK_2 = {}_1oK_1$ καὶ φέροντες ἐκ τοῦ K_2 κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἐκ τοῦ Ο καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν *κ* τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, εἶτα δὲ καὶ τὴν κατηγμένην αὐτῆς $(\kappa K)=(oO)+(\kappa K_2)=3,55+4,45=8$ μ. Ἄγοντες τέλος τὰς ***κα***, ***κб***, ***κγ***, ***κδ***, ἔχομεν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς πυραμίδος.

109. ***Ἐφαρμογὴ γ΄).— Κανονικοῦ τετραέδρου ΟΑ***

***ΒΓ** ἔχοντος τὴν ἕδραν **ΑΒΓ** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **Ε**, οὗ τὸ βῆμα εἶναι 0.8, δίδονται αἱ κορυφαὶ α(3) καὶ β(5). Τὸ τετράεδρον κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου **Ε**, ἡ δὲ κορυφὴ **Γ** ἔχει κατηγμένην μεγαλυτέραν τῆς τοῦ **Α**. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ τετραέδρου τούτου* (σχ. 82).

1ον. Κατασκευάζομεν τὴν ἠριθμημένην προβολὴν τῆς βάσεως ΑΒΓ. Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον Ε ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου 3, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος $\mu(3)\nu(3)$.



Σχ. 82

Τὸ σημεῖον α(3) θὰ μείνῃ ἀμετάστατον, τὸ δὲ β(5) κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ β_1, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἐπὶ τῆς $\alpha\beta_1$.

Κατασκευάζοντες ἐπὶ ταύτης τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον $\alpha\beta_1\gamma_1$ ἔχομεν τὴν κατάκλισιν τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Ἀνακλίνοντες δὲ τὸ γ_1 εἰς τὸ γ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχομεν τὴν προβολὴν $\alpha\beta\gamma$ τῆς βάσεως τοῦ τετραέδρου.

Ἡ κατηγμένη τοῦ Γ, ὡς σημείου τοῦ ἐπιπέδου Ε, εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἤδη γνωστὰ καὶ εἶναι 6,1.

2ον. Προσδιορίζομεν τὴν κορυφὴν Ο τοῦ τετραέδρου. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ, ἡ κορυφὴ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, τῆς ἠγμένης ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου.

Τὸ Κ προβάλλεται εἰς τὸ σημεῖον κ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ καὶ ἔχει κατηγμένην 4,7 μ. εὑρισκομένην, εἴτε θεωρουμένου τοῦ Κ ὡς σημείου τοῦ ἐπιπέδου Ε, εἴτε ὡς μέσος ὅρος τῶν κατηγμένων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ ἐκ τοῦ Κ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε ἔχει προβολὴν τὴν ἐκ τοῦ κ παράλληλον τῇ προβολῇ τῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ ὕψος ἐξ ἄλλου ΚΟ τοῦ τετραέδρου εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραέδρου.

Ἂν λοιπὸν φέρωμεν ἐκ τοῦ κ_1 κάθετον ἐπὶ τὴν $\kappa_1\gamma_1$ καὶ μὲ κέντρον τὸ γ_1 καὶ ἀκτῖνα $\gamma_1\beta_1$ γράψωμεν περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν κάθετον ταύτην εἰς σημεῖον o_1 καὶ ἡ $\kappa_1 o_1$ θὰ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ ὕψους ΚΟ τοῦ τετραέδρου.

Ἔχοντες οὕτω τὴν ἐκ τοῦ Κ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\kappa(4,7)$. Ἡ κάθετος τότε θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ εὐθείας κP_1 σχηματιζούσης μετὰ τῆς προβολῆς της $\kappa\kappa_1$ γωνίαν συμπληρωματικὴν τῆς γωνίας κλίσεως ϑ τοῦ ἐπιπέδου Ε (§ 72) καὶ ὡς ἐκ τούτου κατασκευαζομένης εὐκόλως ἂν ἐκ τοῦ κ ἀχθῇ ἡ κP_1 κάθετος ἐπὶ τὴν νB_1.

Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς κP_1, τὸ τμῆμα κo_2 ἴσον πρὸς τὸ ὕψος $\kappa_1 o_1$ τοῦ τετραέδρου ἔχομεν τὴν κατάκλισιν o_2 τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ $\kappa(4,7)$· ἄγοντες ὅθεν ἐκ τοῦ o_2 κάθετον ἐπὶ τὴν $\kappa\kappa_1$ προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν αὐτῆς o.

Τὴν κατηγμένην τοῦ Ο εὑρίσκομεν προσθέτοντες εἰς τὴν κατηγμένην τοῦ Κ τὴν oo_2, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κατηγμένων τῶν δύο τούτων σημείων.

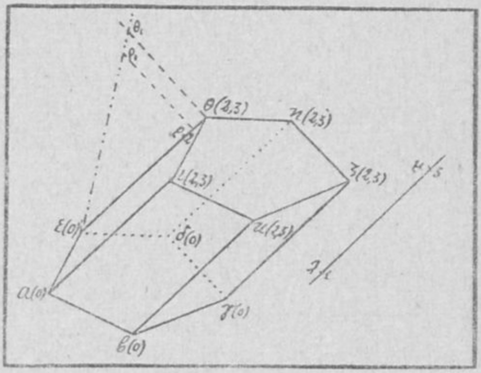
Ἐν προκειμένῳ εἶναι $(o\mathrm{O})=4,7+oo_2=4,7+2,3=7$.

Ἡ ζητουμένη ὅθεν ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ τετραέδρου εἶναι ἡ $\sigma(7)\alpha(3)\beta(5)\gamma(6,1)$.

Κατασκευὴ πρίσματος.

110. Πρὸς κατασκευὴν πρίσματος πρέπει, ἐν γένει, νὰ γνωρίζωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ θέσει καὶ μεγέθει, τὴν διεύθυνσιν τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν.

111. **Ἐφαρμογὴ α΄).**—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸ πεντάγωνον αβγδε (0) καὶ πλευρὰς παραλλήλους τῇ εὐθείᾳ λ(1) μ(3), ἑκάστην δὲ ἴσην πρὸς 4 μ.*** (σχ. 38).



Σχ. 83

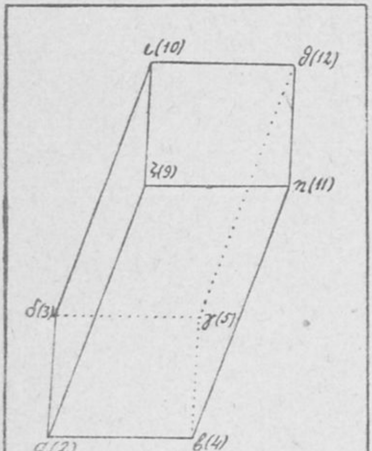
Φέρομεν ἔκ τινος τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως, οἷον τῆς $\varepsilon(0)$ παράλληλον $\varepsilon(0)\rho(2)$ τῇ εὐθείᾳ $\lambda(1)\mu(3)$ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ $\varepsilon(0)$ τμῆμα ἴσον πρὸς 4 μ.

Πρὸς τοῦτο (§ 36) κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν $\varepsilon(0)\rho(2)$ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, ὅτε ἡ εὐθεῖα θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\varepsilon\rho_1$, καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν $\varepsilon\vartheta_1$=4μ. Ἄγοντες ἐκ τοῦ ϑ_1 κάθετον ἐπὶ τὴν $\varepsilon\rho$ προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν ϑ τῆς κορυφῆς Θ τοῦ πρίσματος εἶτα δὲ καὶ τὴν κατηγμένην αὐτῆς $(\vartheta\Theta)=(\vartheta\vartheta_1)$=2,3μ.

Προσδιορισθείσης τῆς κορυφῆς Θ, προσδιορίζομεν καὶ τὰς λοιπὰς κορυφάς, ἄγοντες ἐκ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως εὐθείας παραλλήλους ἴσας καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὴν ΕΘ. Ἄγοντες τέλος τὰς $\vartheta\iota$, $\iota\kappa$, $\kappa\zeta$, $\zeta\eta$, $\eta\vartheta$ συμπληροῦμεν τὴν προβολὴν τοῦ τετραέδρου.

Αἱ κατηγμέναι τῶν κορυφῶν τῆς ἄνω βάσεως εἶναι προφανῶς ἴσαι τῇ κατηγμένῃ τοῦ Θ.

112. ***Ἐφαρμογὴ β').*** — ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου, οὗ δίδονται αἱ ἠριθμημέναι προβολαὶ*** $α(2)$, $β(4)$, $δ(3)$, $ζ(9)$, ***τῶν τεσσάρων κορυφῶν τῶν ἀνηκουσῶν εἰς τὰς τρεῖς ἀκμὰς τὰς συνερχομένας εἰς τὴν κορυφὴν*** $α(2)$ (σχ. 84).



Σχ. 84

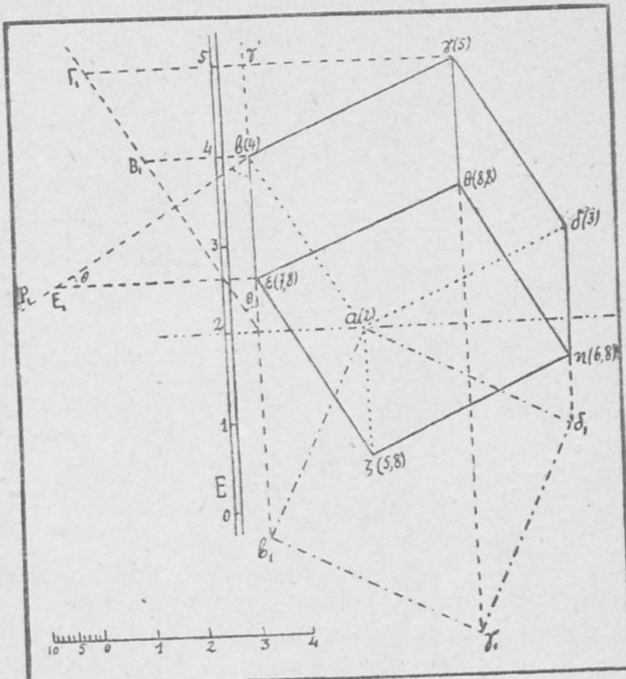
Ἐπειδὴ αἱ ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα, αἱ προβολαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμα. Ἡ προβολὴ ὅθεν τοῦ παραλληλεπιπέδου κατασκευάζεται εὐκόλως, ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰ παραλληλόγραμμα $αβγδ$, $ζαβη$, $ζαδι$, $ηδγθ$ καὶ $δγθι$.

Τὴν κατηγμένην τοῦ Γ προσδιορίζομεν παρατηροῦντες ὅτι, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΔ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν, ἡ κατηγμένη τοῦ Γ θὰ διαφέρῃ τῆς κατηγμένης τοῦ Β ὅσον διαφέρουσιν αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων Δ καὶ Α, τουτέστι κατὰ 1. Εἶναι ἄρα $(γΓ)=5$ μ. Δι' ὅμοιον λόγον αἱ κατηγμέναι τῶν κορυφῶν Η, Θ, Ι διαφέρουσι τῶν κατηγμένων τῶν σημείων Β, Γ, Δ, ὅσον διαφέρουσιν αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων Ζ καὶ Α, τουτέστι κατὰ 7 μ. Ἑπομένως εἶναι $(ηΗ)=4+7=11$, $(δΘ)=12$, $(ιΙ)=10$ μ.

113. ***Ἐφαρμογὴ γ').*** — ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ κύβου κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου Ε, δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α καὶ Β τοῦ κύβου τούτου κεῖνται εἰς τὰ σημεῖα*** $α(2)$ ***καὶ*** $β(4)$ ***τοῦ ἐπιπέδου Ε*** (σχ. 85).

1ον. Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον Ε ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $\alpha(2)$, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ κατηγμένην 2 ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ.

Τὸ σημεῖον $\alpha(2)$ θὰ μείνῃ ἀμετάστατον, τὸ δὲ $\beta(4)$ θὰ κατακλιθῇ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου εἰς τὸ β_1. Ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΑΒ θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\alpha\beta_1$, τὸ δὲ ἐπὶ ταύτης



Σχ. 85

κατασκευαζόμενον τετράγωνον $\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ τῆς κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ἀνακλίνοντες προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς γ καὶ δ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν προβολὴν $\alpha\beta\gamma\delta$ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ.

Ἡ κατηγμένη τοῦ Γ εἶναι $(\gamma\Gamma)=5$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ κατηγμένη τοῦ Δ εἶναι $(\delta\Delta)=3$.

2ον. Κατασκευάζομεν τὰς λοιπὰς κορυφὰς τοῦ κύβου. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ταύτας μετὰ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως συνδέουσαι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε καὶ ἴσαι. Μιᾶς ἄρα τούτων εὑρεθείσης κατασκευάζονται καὶ αἱ λοιπαί. Τούτου τεθέντος, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς $\mathit{б}(4)$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε καὶ κατακλίνομεν τὸ προβάλλον ταύτην ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ $\mathit{б}(4)$. Ἡ κάθετος τότε θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $бP_1$, σχηματιζούσης μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς γωνίαν συμπληρωματικὴν τῆς γωνίας κλίσεως θ τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ ὡς ἐκ τούτου κατασκευαζομένης ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ б ἡ $бP_1$ κάθετος ἐπὶ τὴν $Γ_1Β_1$.

Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς $бP_1$ τὸ τμῆμα $бE_1$ ἴσον τῇ πλευρᾷ $аб_1$ τοῦ κύβου καὶ ἄγοντες ἐκ τοῦ E_1 κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν $бб_1$ τῆς ἐκ τοῦ Β ἀχθείσης καθέτου, προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν ε τῆς κορυφῆς Ε τοῦ κύβου, εἶτα δὲ καὶ τὴν κατηγμένην αὐτῆς

$$(\varepsilon E)=4+(\varepsilon E_1)=4+3{,}8=7{,}8 \text{ μ.}$$

Ἄγοντες τέλος ἐκ τῶν σημείων α,δ γ παραλλήλους ἴσας καὶ ὁμορρόπους τῇ бε, προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς τῶν λοιπῶν κορυφῶν, τὰς δὲ κατηγμένας αὐτῶν εὑρίσκομεν αὐξάνοντες τὰς κατηγμένας τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως κατὰ τὴν διαφορὰν 3,8 τῶν κατηγμένων τῶν κορυφῶν Β καὶ Ε.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ κατασκευασθῇ τετράεδρον ἔχον τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τρισορθογώνιον.

2). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ οὗ δίδονται ἡ βάσις ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδοι καὶ α′) αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι αἱ ἔχουσαι ἀκμὰς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, β′) ἡ δίεδρος ΒΓ καὶ αἱ γωνίαι ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ, γ′) αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΑΓ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ ὕψος.

3). Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν τετράεδρον ἔχον μίαν τῶν κορυφῶν του εἰς δοθὲν σημεῖον τοῦ προβολ. ἐπιπέδου, τὴν δὲ ἀπέναντι ἕδραν ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου καὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὁριζόντιον.

4). Πυραμίδος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς δίδεται μία τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλ. ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ αὐτῆς.

5). Πὰ κατασκευασθῇ ὁ κύβος οὗ δίδονται αἱ κορυφαὶ *α*(1), *β*(5) τῆς αὐτῆς ἀκμῆς καὶ ἡ προβολὴ *βρ* ἄλλης ἀκμῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου *β*(5).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΟΜΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

114.—Ἡ τομὴ πολυέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι πολυγωνικὴ γραμμὴ ἔχουσα πλευρὰς τὰς τομὰς τῶν ἑδρῶν καὶ κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἀκμῶν ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου.

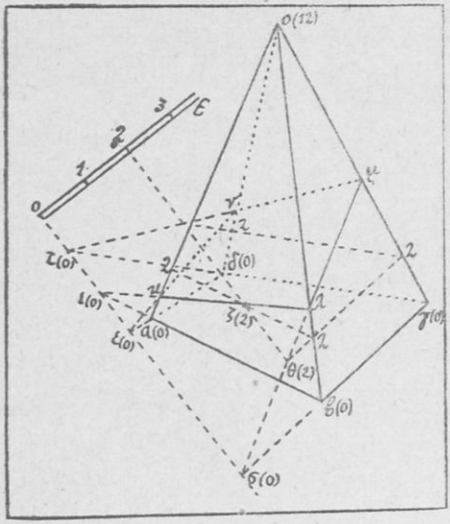
Πρὸς κατασκευὴν ὅθεν τῆς τομῆς πολυέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου ἀρκεῖ ἢ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ νὰ κρατήσωμεν ἐκ τούτων τὰ μέρη τὰ εὑρισκόμενα ἐντὸς ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, ἢ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου καὶ νὰ συνδέσωμεν ταῦτα καταλλήλως δι' εὐθειῶν.

115. ***Ἐφαρμογὴ α΄).— Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος*** *ο*(12)*αβγδ*(0) ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε δεδομένου διὰ κλίμακος κλίσεως*** (σχ. 86).

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΟΑΒ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἴχνος *α*(0)*β*(0) τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΒ τέμνει τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου Ε εἰς τὸ σημεῖον *ι*(0) αἱ δὲ ὑπὸ κατηγμένην 2 ἰχνοπαράλληλοι αὐτῶν ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ *λ*(2). Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΟΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα *ι*(0)*λ*(2).

Τῆς εὐθείας ταύτης ἡ προβολὴ τέμνει τὰς *οα* καὶ *οβ* εἰς τὰ σημεῖα *κ* καὶ *λ*. Ἡ *κλ* ἄρα εἶναι ἡ προβολὴ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ζητουμένης τομῆς.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΟΒΓ παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν ταύτης ἓν σημεῖον, τὸ Λ, προβαλλόμενον εἰς τὸ λ, ἡ δὲ ὑπὸ κατηγμένην 2 ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΟΒΓ τέμνει τὴν ὁμώνυμον τοῦ Ε εἰς τὸ $\vartheta(2)$· ἑπομένως προβολὴ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ἡ $\vartheta\lambda$ ἧς κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος $\mu\lambda$ τὸ ἐντὸς τοῦ τριγώνου $o\beta\gamma$ περιεχόμενον.



Σχ. 86

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν $\mu\nu$, ἑνοῦντες δὲ τὸ ν μετὰ τοῦ μ ἔχομεν καὶ τὴν πλευρὰν $\mu\nu$.

Αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων Κ,Λ,Μ,Ν, εἶναι (κΚ)=0,5, (λΛ)=3, (μΜ)=5,2 καὶ (νΝ)=3.

116. ***Παρατήρησις.***—Ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μιᾶς τῶν ἀκμῶν ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν τομὴν τῆς πυραμίδος καὶ ὡς ἑξῆς.

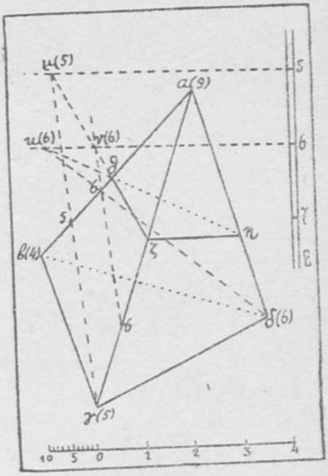
Ἔστω ὅτι ἡ ἀκμὴ ΟΒ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε εἰς τὸ σημεῖον Λ, ὅπερ προβάλλεται εἰς τὸ λ.
Τὸ ἴχνος $\beta(0)\gamma(0)$ τοῦ ἐπιπέδου ΟΒΓ τέμνει τὸ ἴχνος τοῦ Ε εἰς τὸ $\sigma(0)$. Τὸ σημεῖον τοῦτο, κοινὸν ὂν τῶν δύο ἐπιπέδων, εἶναι σημεῖον καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.

Κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ἡ ΣΛ, προβολὴν ἔχουσα τὴν $\sigma\lambda$ καὶ τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος $\lambda\mu$ τὸ ἐντὸς τοῦ τριγώνου $o\beta\gamma$ περιεχόμενον.

Ὁμοίως προεκτείνοντες τὴν $\gamma\delta$ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ ἑνοῦντες τὸ σημεῖον τ τῆς τομῆς μετὰ τοῦ μ, ἔχομεν τὴν προβολὴν $\tau\mu$ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΟΔΓ, τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος *μν* τὸ ἐντὸς τοῦ τριγώνου *ογδ* περιεχόμενον.

Προχωροῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συμπληροῦμεν τὴν προβολὴν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος.

117. ***Ἐφαρμογὴ β').—Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος*** *α*(9)*β*(4)*γ*(5)*δ*(6) ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου*** Ε (σχ. 87).



Σχ. 87

Εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΒΓ. Πρὸς τοῦτο προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα *μ*(5) καὶ *ν*(6) καθ' ἃ ἀλληλοτομοῦσιν ἀντιστοίχως αἱ ἰχνοπαράλληλοι τῶν ἐπιπέδων αἱ ἔχουσαι κατηγμένας 5 καὶ 6.

Τῆς τομῆς ταύτης προβολὴ εἶναι ἡ *μν*, τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος *θζ* τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ τριγώνου *αβγ*.

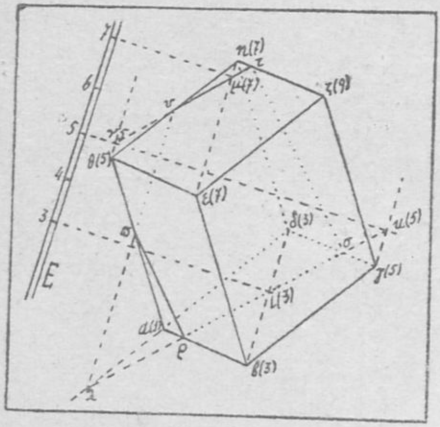
Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΒΔ. Τῆς τομῆς ταύτης ἔχομεν ἤδη ἓν σημεῖον, τὸ Θ, προβαλλόμενον εἰς τὸ *θ*· προσδιορίζοντες δὲ καὶ τὸ σημεῖον *κ*(6) τῆς τομῆς τῶν ὑπὸ κατηγμένην 6 ἰχνοπαραλλήλων τῶν δύο ἐπιπέδων, ἔχομεν τὴν προβολὴν *κθ* τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν, τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος *θη* τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ τριγώνου *αβδ*.

Ἑνοῦντες τέλος δι' εὐθείας τὰ σημεῖα *η* καὶ *ζ* ἔχομεν τὴν προβολὴν τῆς τομῆς τῆς ἕδρας ΑΓΔ.

Τὰς κατηγμένας τῶν σημείων Θ,Ζ,Η προσδιορίζομεν θεωροῦντες αὐτὰ εἴτε ὡς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου Ε, εἴτε ὡς σημεῖα τῶν ἀκμῶν τῆς πυραμίδος. Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι (*θ*Θ)=6,4, (*ζ*Ζ)=6,12 καὶ (*η*Η)=7,09.

118. ***Ἐφαρμογὴ γ').—Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου*** *α*(1)*β*(3)*γ*(5)*δ*(3)*ε*(7).... ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε*** (σχ. 88).

Προσδιορίζομεν τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΘΕΖΗ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ὑπὸ κατηγμένην 7 ἰχνοπαράλληλοι αὐτῶν ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ σημεῖον μ(7), αἱ δὲ ὑπὸ κατηγμένην 5, εἰς τὸ σημεῖον ν(5). Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων εἶναι ἡ εὐθεῖα μ(7)ν(5), τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τῆς ἕδρας ΘΕΖΗ καὶ προβαλλόμενον ἐπὶ τῆς υτ.



Σχ. 88.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν προβολὴν ρσ τῆς τομῆς τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε, ἑνοῦντες δὲ τὸ τ μετὰ τοῦ σ, λαμβάνομεν καὶ τὴν προβολὴν τῆς τομῆς τῆς ἕδρας ΔΓΖΗ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν λοιπῶν πλευρῶν τῆς τομῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα Υ καὶ Λ τὰ προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν υ καὶ λ εἶναι κοινὰ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΔΗΘ. Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΥΛ, τῆς ὁποίας κρατοῦμεν μόνον τὸ μέρος τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ ἕδρᾳ ΑΔΗΘ καὶ προβαλλόμενον ἐπὶ τῆς ωυ. Ἑνοῦντες τέλος τὰ σημεῖα ω καὶ ρ ἔχομεν καὶ τὴν προβολὴν τῆς τομῆς τῆς ἕδρας ΑΒΕΘ.

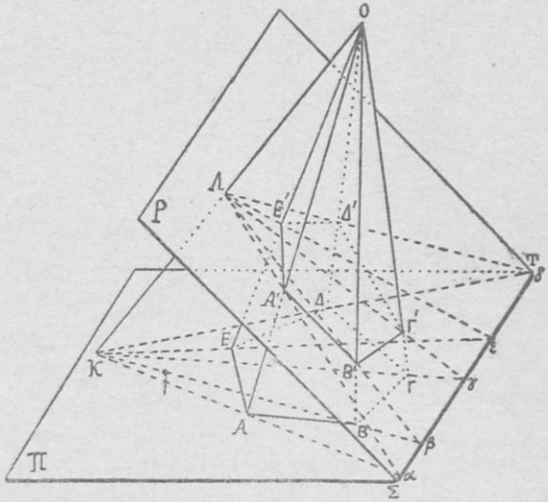
Οὕτως ἡ ζητουμένη τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ πολύγωνον ΠΡΣΤΥ ἔχον προβολὴν ωρστυ καὶ κατηγμένας τῶν κορυφῶν (ωΠ)=3,2μ, (ρΡ)=0,35, (σΣ)=4,2, (τΤ)=7,3 καὶ (υΥ)=6μ.

Εἰδικὴ μέθοδος κατασκευῆς ἐπιπέδου τομῆς πυραμίδος.

119. Πρὸς εὕρεσιν τῶν σημείων τομῆς τῶν ἀκμῶν πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου ἐφαρμόζομεν πολλάκις τὴν ἑπομένην μέθοδον.

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ (σχ. 89), ἔχουσα τὴν βάσιν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ Ρ ἐπίπεδον τέμνον αὐτήν.

Ἂν φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς Ο εὐθεῖαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου Π τῆς βάσεως, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ διαπεράσῃ τὸ ἐπίπεδον Ρ εἴς τι σημεῖον Λ καὶ θὰ ὁρίσῃ μεθ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῆς πυραμίδος ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ τέμνῃ τὸ μὲν Π κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Κ, τὸ δὲ Ρ κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Λ.



Σχ. 89

Τούτου τεθέντος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΑ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ τῆς βοηθητικῆς εὐθείας ΟΚ, τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΑ, ἥτις συναντᾷ τὴν κοινὴν τομὴν ΣΤ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ εἰς τὸ α. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ ΟΚΑ, ἐπομένως εἶναι σημεῖον καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν· ἀλλὰ καὶ τὸ Λ εἶναι κοινὸν τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων. Κοινὴ ἄρα τομὴ αὐτῶν εἶναι ἡ Λα ἥτις, ὡς κειμένη μετὰ τῆς ΟΑ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΟΚΑ, τέμνει αὐτὴν εἰς σημεῖον Α', ὅπερ προφανῶς εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΟΑ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

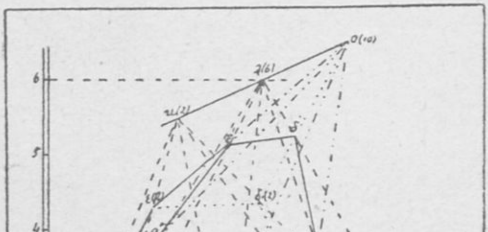
Ἐπίσης τὸ ἐπίπεδον ΟΚΒ τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΒ, ἥτις συναντᾷ τὴν ΣΤ εἰς τὸ β. Κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΟΚΒ εἶναι ἡ Λβ, ἥτις τέμνει τὴν ΟΒ εἰς σημεῖον Β′, ὅπερ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΟΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τὰς λοιπὰς κορυφὰς τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος. Ἐν τέλει δὲ καταλήγομεν εἰς τὴν ἑπομένην πρακτικὴν κατασκευήν.

Πρὸς εὕρεσιν π.χ. τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΓ, φέρομεν τὴν ΚΓ, ἥτις συναντᾷ τὴν ΣΤ εἰς τὸ γ. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ Λ διὰ τῆς εὐθείας Λγ. Αὕτη τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον Γ′, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ ΣΤ τέμνῃ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, μία τῶν πλευρῶν τῆς τομῆς θὰ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τῆς βάσεως, θὰ εἶναι δὲ αὕτη τὸ μέρος τῆς ΣΤ τὸ ἐντὸς τῆς βάσεως περιεχόμενον.

120. ***Ἐφαρμογὴ α′).—Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος*** $o(10)\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(2)$ ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε*** (σχ. 90) ***καὶ νὰ παρασταθῇ τὸ μέρος τῆς πυραμίδος τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς.***



Σχ. 90

Προσδιορίζομεν πρῶτον τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΒΓΔΕ, ἥτις ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει εἶναι ἡ ἴχνοπαράλληλος $\mu(2)\nu(2)$ τοῦ ἐπιπέδου Ε, διότι τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι ὁριζόντιον (§ 61 α′).

Προσδιορισθείσης τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΒΓΔΕ, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς $o(10)$ εὐθεῖαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $\lambda(6$

τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον $\varkappa(2)$ καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως (§ 65 δ').

Μετὰ τοῦτο ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ λεχθέντα προσδιορίζομεν τὰς κορυφὰς τῆς τομῆς ὡς ἑξῆς.

Φέρομεν τὴν $\varkappa\alpha$· αὕτη τέμνει τὴν $\mu\nu$ εἰς τὸ σημεῖον α''. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ λ διὰ τῆς εὐθείας $\lambda\alpha''$. Αὕτη τέμνει τὴν $o\alpha$ εἰς τὸ σημεῖον α', ὅπερ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΑ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ὁμοίως ἡ $\varkappa\beta$ τέμνει τὴν $\mu\nu$ εἰς τὸ β'', ἡ δὲ $\lambda\beta''$ τέμνει τὴν $o\beta$ εἰς τὸ β', ὅπερ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Προχωροῦντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς καὶ τῶν λοιπῶν κορυφῶν, εἶτα δὲ καὶ τὰς κατηγμένας αὐτῶν.

Σημείωσις.—Ἡ βοηθητικὴ εὐθεῖα ΟΚ ἐκλέγεται μὲν αὐθαιρέτως ἀλλ' οὕτως ὥστε αἱ τὸ Κ μετὰ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως ἑνοῦσαι εὐθεῖαι νὰ συναντῶσι τὴν ΣΤ ἐντὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως.

Ὡς βοηθητικὴ εὐθεῖα δύναται νὰ ληφθῇ καὶ μία τῶν πλευρῶν τῆς πυραμίδος· ἐὰν δὲ προϊούσης τῆς κατασκευῆς, σημεῖά τινα πίπτωσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, δυνάμεθα νὰ ἀλλάσωμεν τὴν βοηθητικὴν εὐθεῖαν χρησιμοποιοῦντες καὶ ἄλλας πλευρὰς τῆς πυραμίδος ὡς τοιαύτας, ἐφ' ὅσον ἔχουσιν ἤδη εὑρεθῇ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῶν.

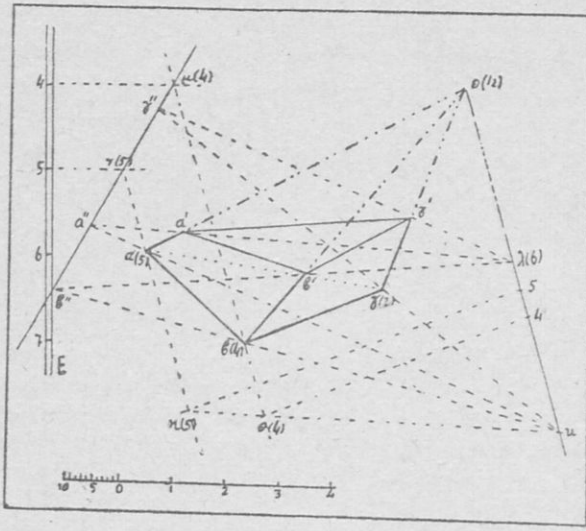
121. ***Ἐφαρμογὴ β').— Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ τετραέδρου $o(12)\alpha(5)\beta(4)\gamma(2)$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.***

Προσδιορίζομεν πρῶτον τὴν κοινὴν τομὴν $\mu(4)\nu(5)$ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΑΒΓ, προσδιορίζοντες τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἀλληλοτομοῦσιν ἀντιστοίχως αἱ ὑπὸ κατηγμένας 4 καὶ 5 ἰχνοπαράλληλοι αὐτῶν (σχ. 91).

Ἔπειτα φέρομεν ἐκ τοῦ $o(12)$ εὐθεῖαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $\lambda(6)$ τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ προσδιορίζομεν τὴν προβολὴν $\varkappa$ τοῦ σημείου καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως (§ 63).

Μετὰ τοῦτο φέρομεν τὴν $\varkappa\alpha$, ἥτις τέμνει τὴν $\mu\nu$ εἰς τὸ α''. Ἑνοῦμεν τοῦτο μετὰ τοῦ λ διὰ τῆς εὐθείας $\lambda\alpha''$, ἥτις τέμνει τὴν $o\alpha$ εἰς τὸ α'. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Α' καθ' ὃ ἡ ΟΑ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ὁμοίως ἄγοντες τὴν $\varkappa\beta$ καὶ ἑνοῦντες τὸ σημεῖον β'', καθ' ὃ συναντᾷ τὴν $\mu\nu$, μετὰ τοῦ λ, εὑρίσκομεν τὴν προβολὴν β' τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΒ, καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον καὶ τὸ γ'. Τὰς κατηγμένας τῶν σημείων Α΄,Β΄,Γ΄ προσδιορίζομεν θεωροῦντες αὐτὰ εἴτε ὡς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου Ε, εἴτε ὡς ση-



Σχ. 91

μεῖα τῶν πλευρῶν τῆς πυραμίδος.'Εν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι εἶναι (α'Α΄)=5,75μ, (β'Β΄)=6,2 μ, (γ'Γ΄)=5,55.

῾Η ζητουμένη ἄρα τομὴ εἶναι ἡ $\alpha'(5{,}75)\beta\,(6{,}2)\gamma'(5{,}55)$.

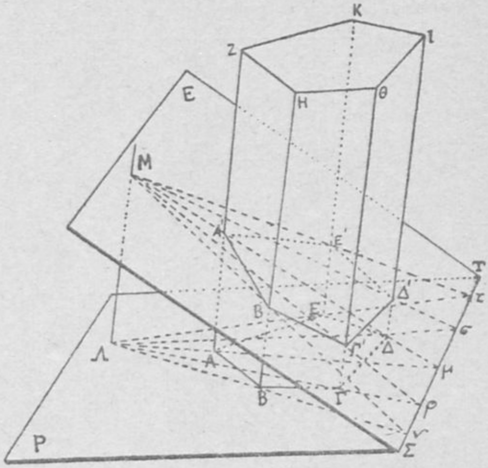
Εἰδικὴ μέθοδος κατασκευῆς ἐπιπέδου τομῆς πρίσματος.

122. Ὅπως εἰς τὰς πυραμίδας οὕτω καὶ εἰς τὰ πρίσματα, πρὸς εὕρεσιν τῶν σημείων τομῆς τῶν πλευρῶν ὑπὸ ἐπιπέδου, ἐφαρμόζομεν πολλάκις τὴν ἑπομένην μέθοδον.

Ἔστω πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ (σχ. 92), ἔχον τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ Ε τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

'Εὰν ἔκ τινος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου Ε ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος θὰ συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον Ρ εἰς σημεῖον Λ καὶ θὰ ὁρίσῃ μεθ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν τοῦ πρίσματος ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ τέμνῃ τὸ μὲν Ρ κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Λ, τὸ δὲ Ε κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Μ.

Τούτου τεθέντος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΑΖ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ ὑπὸ ταύτης καὶ τῆς ΜΛ ὁριζόμενον, τέμνει τὸ μὲν Ρ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛΑ, ἥτις συναντᾷ τὴν τομὴν ΣΤ τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Ε εἰς τὸ μ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΜΛΑΖ, ὅπως εἶναι καὶ τὸ Μ. Ἑπομένως ἡ Μμ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων. Ἐπειδὴ δὲ κεῖται μετὰ τῆς ΑΖ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΜΛΑΖ, τέμνει αὐτὴν εἰς σημεῖον Α′, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΑΖ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.



Σχ. 92

Ἐπίσης, τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ΒΗ καὶ τῆς ΜΛ τέμνει τὸ Ρ κατὰ τὴν ΛΒ, ἥτις συναντᾷ τὴν ΣΤ εἰς τὸ σημεῖον ν ὅπερ εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ ΜΛΒΗ, ὅπως εἶναι καὶ τὸ Μ. Ἡ Μν ἄρα εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων, τὸ δὲ σημεῖον Β′ καθ' ὃ τέμνει τὴν ΒΗ, εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ αὕτη τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

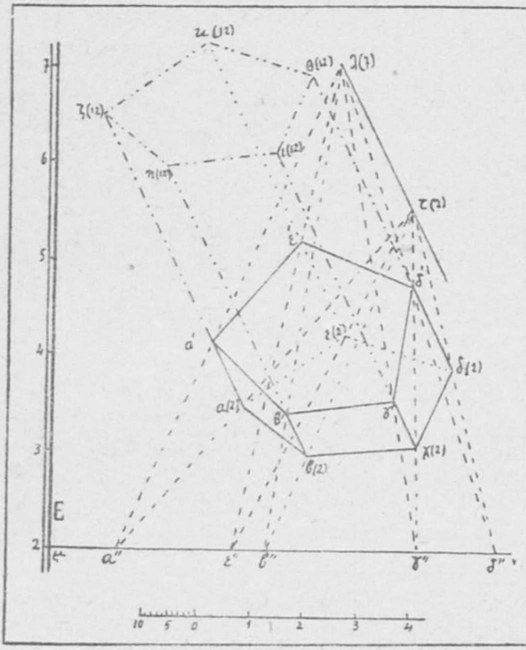
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τὰς λοιπὰς κορυφάς, ἐν τέλει δὲ καταλήγομεν εἰς τὴν ἑπομένην πρακτικὴν κατασκευήν.

Πρὸς εὕρεσιν π.χ. τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΔΙ, φέρομεν τὴν ΛΔ, ἥτις συναντᾷ τὴν ΣΤ εἰς τὸ σ. Ἑνοῦμεν τοῦτο μετὰ τοῦ Μ διὰ τῆς εὐθείας Μσ, ἥτις τέμνει τὴν ΔΙ εἰς τὸ Δ′. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

123. **'Εφαρμογή.— *Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(2)\zeta\eta\theta\iota\kappa(12)$ *ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.*** (σχ. 93).

Κατασκευάζομεν τὴν κοινὴν τομὴν $\mu(2)\nu(2)$ τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως.

Εἶτα φέρομεν, ἐκ τυχόντος σημείου $\lambda(7)$ τοῦ ἐπιπέδου Ε, εὐ-



Σχ. 93

θεῖαν παράλληλον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον αὐτῆς $\tau(2)$, καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς $\boldsymbol{\alpha}(2)\zeta(12)$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, φέρομεν τὴν $\boldsymbol{\tau\alpha}$ καὶ τὸ σημεῖον α'', καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὴν $\boldsymbol{\mu\nu}$, ἑνοῦμεν δι' εὐθείας μετὰ τοῦ λ. Ἡ εὐθεῖα $\lambda\alpha''$ τέμνει τὴν $\boldsymbol{\alpha\zeta}$ εἰς τὸ $\boldsymbol{\alpha'}$, ὅπερ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ πλευρὰ $\boldsymbol{\alpha}(2)\zeta(12)$ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς καὶ τῶν λοιπῶν κορυφῶν τῆς τομῆς.

Τὰς κατηγμένας αὐτῶν εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστά.

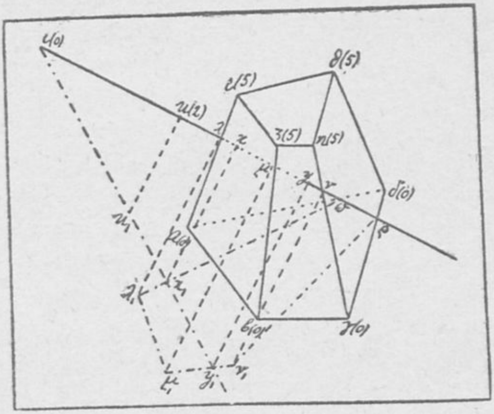
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄.

ΤΟΜΗ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΥΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

124. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ εὐθεῖα τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν πολυέδρου, φέρομεν δι' αὐτῆς τυχὸν ἐπίπεδον καὶ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, εἶτα δὲ τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν περίμετρον τῆς τομῆς. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι προφανῶς τὰ ζητούμενα.

Τὸ βοηθητικὸν ἐπίπεδον δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε, ἐν γένει ὅμως λαμβάνεται ὡς τοιοῦτον τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν.

125. ***Ἐφαρμογή.— Νὰ προσδιορισθῶσι τὰ σημεῖα***



Σχ. 94

τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου $\alpha\beta\gamma\delta(0)\varepsilon\zeta\eta\theta(5)$ ***ὑπὸ τῆς εὐθείας*** $\iota(0)\kappa(2)$ (σχ. 94).

Τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ΙΚ ἐπίπεδον τέμνει τὰς ἀκμὰς ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΓΔ, ΔΑ, ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Λ,Μ,Ν,Ρ,Π προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν $\lambda,\mu,\nu,\rho,\varpi$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ κατηγμέναι εἶναι (§ 31) $(\lambda\Lambda)=3,4$, $(\mu M)=4,4$, $(\nu N)=3,3$, $(\rho P)=0$ καὶ $(\varpi\Pi)=0$.

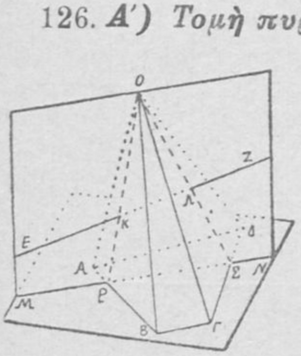
Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ προβάλλον τὴν ΙΚ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ***ικ***, τὰ σημεῖα $\iota(0), \varpi(0), \rho(0)$, ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὰ δὲ $\kappa(2), \lambda(3,4), \mu(4,4), \nu(3,3)$ θὰ κατακλιθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα $\kappa_1 \lambda_1 \mu_1 \nu_1$, ἅτινα εὑρίσκομεν (§ 29) λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν ἐκ τῶν σημείων $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ ἠγμένων καθέτων ἐπὶ τὴν $\iota\kappa$, τὰ τμήματα $\kappa\kappa_1$, $\lambda\lambda_1$, $\mu\mu_1$, $\nu\nu_1$ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς κατηγμένας.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΙΚ θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\iota\kappa_1$, ἡ δὲ τομὴ τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ προβάλλοντος τὴν ΙΚ ἐπιπέδου θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ πολυγώνου $\lambda_1\mu_1\nu_1\rho\varpi$ καὶ τὰ σημεῖα χ_1 καὶ ψ_1 καθ' ἃ ἡ $\iota\kappa_1$ τέμνει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου τούτου εἶναι αἱ κατακλίσεις τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ ΙΚ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου.

Ἄγοντες ἐκ τῶν χ_1 καὶ ψ_1 καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα $\iota\kappa$ τῆς κατακλίσεως, προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς αὐτῶν χ καὶ ψ. Αἱ κατηγμέναι αὐτῶν εἶναι $(\chi X)=(\chi\chi_1)=2{,}9$ καὶ $(\psi\Psi)=(\psi\psi_1)=4$ μ.

Εἰδικαὶ περιπτώσεις

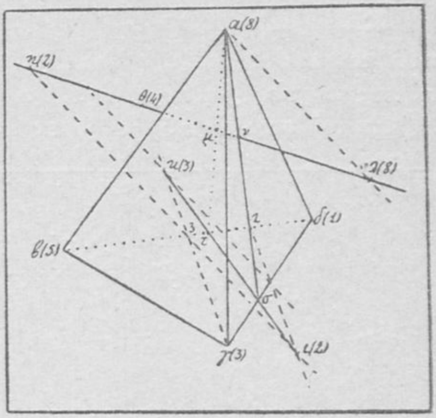
126. *Α') Τομὴ πυραμίδος ὑπὸ εὐθείας.*—Πρὸς εὕρεσιν τῶν σημείων καθ' ἃ δοθεῖσα εὐθεῖα ΕΖ (σχ.95) διαπερᾷ τὴν ἐπιφάνειαν πυραμίδος ΟΑΒΓ...., λαμβάνομεν ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος καὶ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν ΜΝ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ε, καθ' ἃ ἡ ΜΝ τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, μὲ τὴν κορυφὴν Ο τῆς πυραμίδος. Αἱ εὐθεῖαι ΟΡ καὶ ΟΕ, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΟΜΝ μετὰ τῆς ΕΖ, τέμνονται ὑπ' αὐτῆς εἰς σημεῖα Κ καὶ Λ. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 95

127. *Ἐφαρμογή.*—*Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα $\eta(2)\delta(4)$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος $\alpha(8)\beta(5)\gamma(3)\delta(1)$ (σχ. 96).*

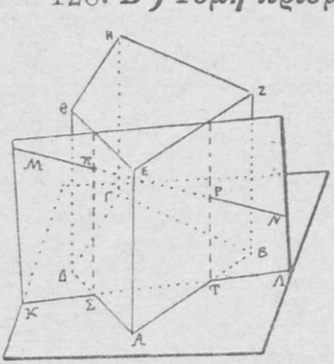
Ἑνοῦμεν δι' εὐθείας τὴν κορυφὴν $\alpha(8)$ τῆς πυραμίδος μὲ σημεῖον $\jmath(8)$ τῆς εὐθείας $\varkappa(2)\vartheta(4)$ καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἰχνοπαράλληλον $\alpha(8)\jmath(8)$ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας.



Σχ. 96

Μετὰ τοῦτο προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΗΛ καὶ ΒΓΔ. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὰς ὑπὸ κατηγμένας 3 καὶ 2 ἰχνοπαραλλήλους αὐτῶν. Ἡ εὐθεῖα $\iota(2)\varkappa(3)$ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων (§ 61). Αὕτη τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Τ, προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν σ καὶ τ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΣ καὶ ΑΤ, αἱ προβαλλόμεναι ἐπὶ τῶν $\alpha\sigma$ καὶ $\alpha\tau$ τέμνωνται ὑπὸ τῆς ΗΘ εἰς σημεῖα Ν καὶ Μ προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν ν καὶ μ καὶ τῶν ὁποίων τὰς κατηγμένας προσδιορίζομεν θεωροῦντες αὐτὰ ὡς σημεῖα τῆς ΗΘ. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι τὰ ζητούμενα.

128. ***Β') Τομὴ πρίσματος ὑπὸ εὐθείας.***— Πρὸς εὕρεσιν τῶν σημείων καθ' ἃ δοθεῖσα εὐθεῖα ΜΝ (σχ. 97) διαπερᾷ τὴν ἐπιφάνειαν πρίσματος ΑΒΓΔΕ..., λαμβάνομεν ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ΜΝ καὶ παράλληλον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος.

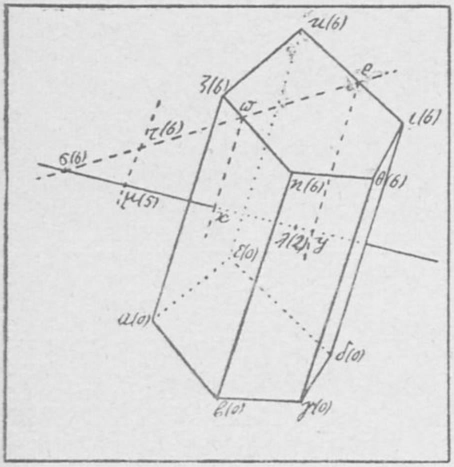


Σχ. 97

Προσδιορίζομεν τὴν τομὴν ΚΛ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῆς ἑτέρας τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος καὶ ἐκ τῶν σημείων Σ καὶ Τ καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς. Αἱ παράλληλοι αὗται, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς ΜΝ, τέμνονται ὑπ' αὐτῆς εἰς σημεῖα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα.

129. ***Ἐφαρμογή.***— ***Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα $\lambda(2)\mu(5)$ διαπερᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος*** $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(0)\zeta\eta\theta\iota\kappa(6)$ (σχ. 98).

Ἐκ τοῦ σημείου $\mu(5)$ φέρομεν παράλληλον $\mu(5)\tau(6)$ πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος. Ἡ εὐθεῖα αὕτη μετὰ τῆς δοθείσης ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος καὶ τέμνον τὴν ἄνω βάσιν, ἤτοι τὸ ὑπὸ κατηγμένην 6 ὁριζόντιον ἐπίπεδον, κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\tau(6)\sigma(6)$. Αὕτη τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως ΖΗΘΙΚ εἰς σημεῖα Π καὶ Ρ προβαλλόμενα ἐπὶ τῶν ϖ καὶ ρ, αἱ δὲ ἐκ τῶν σημείων τούτων ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τέμνονται ὑπὸ τῆς $\lambda(2)\mu(5)$ εἰς σημεῖα Χ καὶ Ψ, προβαλλόμεναἐπὶ τῶν χ καὶ ψ καὶ τῶν ὁποίων τὰς κατηγμένας προσδιορίζομεν θεωροῦντες αὐτὰ ὡς σημεῖα τῆς ΛΜ. Τὰσημεῖα ταῦτα εἶναι τὰ ζητούμενα, αἱ δὲ κατηγμέναι αὐτῶν εἶναι (χΧ)=3,5 καὶ (ψΨ)=1,75.



Σχ. 98

Ἀσκήσεις

1). Δοθείσης τῆς βάσεως τετραέδρου ΟΑΒΓ ἐπὶ δεδομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου,νὰ προσδιορισθῇ ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Ο, ὅταν δίδωνται α΄) οἱ συντελεσταὶ κλίσεως δύο ἑδρῶν καὶ ἡ κατηγμένη τῆς κορυφῆς Ο.β΄)Ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς καὶ ἡ δίεδρος ΟΑ.γ΄) Αἱ γωνίαι ΟΑΒ,ΟΒΑ καὶ τὸ μῆκος τῆς ΟΓ.δ΄) Ὅταν ἡ στερεὰ γωνία Ο εἶναι τρισορθογώνιος.

2). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἅτινα εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ἔχει δοθέντα συντελεστὴν κλίσεως. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ τὸ κανονικὸν τετράεδρον τὸ ἔχον βάσιν αὐτό.

3). Νὰ κατασκευασθῇ τετράεδρον ΟΑΒΓ οὗ δίδονται ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τῆς βάσεως καὶ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

4). Τετράεδρον ΟΑΒΓ ἔχει τὴν ἕδραν ΑΒΓ ἐπὶ ἐπιπέδου Ε ἔχοντος συντελεστὴν κλίσεως $\frac{4}{7}$. Ἡ κορυφή του Ο ἔχει κατηγμένην 18 μ. καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ὁριζόντιος οὖσα, ἔχει κατηγμένην 6 καὶ μῆκος 8 μ· εἶναι δὲ ΑΓ = ΒΓ = 11μ. καὶ ΟΑ = ΟΒ= ΟΓ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράεδρον τοῦτο καὶ ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΟΑ.

5). Τετράεδρον ΟΑΒΓ ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐπὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 8 μ. Ἡ κορυφή του προβάλλεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οἱ δὲ συντελεσταὶ κλίσεως τῶν ἑδρῶν ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ εἶναι ἀντιστοίχως 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$.

α΄) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ τετραέδρου.

β΄) Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ ὕψους ὅπερ ἔχει κατηγμένην 3, νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΑΒ καὶ διὰ τῆς παραλλήλου ταύτης νὰ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα μὲ συντελεστὴν κλίσεως 0,4 νὰ παρασταθῇ δὲ τὸ μέρος τοῦ τετραέδρου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων καὶ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου.

6). Τετράεδρον ΟΑΒΓ στηρίζεται διὰ τῆς βάσεώς του ΑΒΓ ἐπὶ ἐπιπέδου ἔχοντος συντελεστὴν κλίσεως 1. Ἡ πλευρὰ ΑΒ ὁριζοντία οὖσα ἔχει κατηγμένην 12. Ἡ κορυφὴ Ο ἔχει κατηγμένην 19, καὶ εἶναι ΑΒ=6 μ. ΑΓ=7,5 καὶ ΟΑ=ΟΒ=ΒΓ=8 μ.

α΄) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἠριθμημένη προβολὴ τοῦ τετραέδρου οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Γ νὰ ἔχῃ κατηγμένην μικροτέραν τῆς ΑΒ καὶ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο νὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου *αβγ*.

β΄) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ τετραέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους καὶ νὰ παρασταθῇ ἡ προκύπτουσα κόλουρος πυραμίς.

$2x+7=2$
$x+2=2$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β′

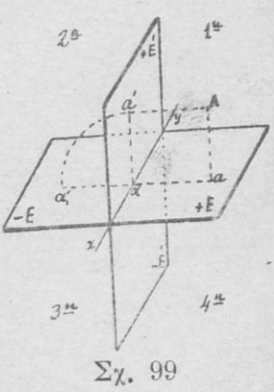
ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α′.

Περὶ τοῦ σημείου.

130. Θεωρήσωμεν δύο προβολικὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Ε′ κάθετα ἐπ' ἄλληλα, τὸ πρῶτον ***ὁριζόντιον,*** τὸ δὲ ἄλλο ***κατακόρυφον*** καὶ παρατηρητὴν ἱστάμενον ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ θεώμενον τὸ δεύτερον (σχ. 99).

Ὡς πρὸς τὸν παρατηρητὴν τοῦτον, ***θετικὸν*** μέρος τοῦ ἐπιπέδου Ε λέγεται τὸ κείμενον ἔμπροσθεν τοῦ κατακορύφου προβ. ἐπιπέδου, τουτέστι τὸ μέρος ἐφ' οὗ ἵσταται ὁ παρατηρητής, ***ἀρνητικὸν*** δὲ τὸ ὄπισθεν. Τοῦ δὲ ἐπιπέδου Ε′ ***θετικὸν*** μὲν τὸ πρὸς τὰ ἄνω τοῦ ὁριζοντίου, ***ἀρνητικὸν*** δὲ τὸ πρὸς τὰ κάτω.



Σχ. 99

Ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα, ***πρώτη δίεδρος*** καλεῖται ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν δύο θετικῶν ἡμιεπιπέδων + Ε καὶ + Ε′, ***δευτέρα δίεδρος*** ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἡμιεπιπέδων + Ε′ καὶ — Ε, ***τρίτη δίεδρος*** ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς πρώτης καὶ ***τετάρτη δίεδρος*** ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς δευτέρας.

Ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο προβολικῶν ἐπιπέδων καλεῖται ***γραμμὴ τοῦ ἐδάφους*** καὶ παρίσταται διὰ τῶν γραμμάτων χ, ψ τοῦ χ γραφομένου πάντοτε πρὸς τὰ ἀριστερά.

Τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν πρώτην καὶ τρίτην δίεδρον λέγεται ***πρῶτον διχοτομοῦν ἐπίπεδον***, τὸ δὲ διχοτομοῦν τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην δίεδρον, ***δεύτερον διχοτομοῦν ἐπίπεδον***.

Τὸ ὁριζόντιον προβολ. ἐπίπεδον λέγεται συνήθως καὶ ***πρῶτον*** τὸ δὲ κατακόρυφον, ***δεύτερον*** προβολ. ἐπίπεδον.

Τὰ δύο ὁμοῦ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦσιν ἓν ***προβολικὸν σύστημα***.

131. ***Πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ σημείου.***— Ἡ προβολὴ σημείου Α (σχ. 99) ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον λέγεται ***πρώτη*** ἢ ***ὁριζόντιος προβολὴ*** αὐτοῦ καὶ παρίσταται διὰ α, ἡ δὲ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον λέγεται ***δευτέρα*** ἢ ***κατακόρυφος προβολὴ*** καὶ παρίσταται διὰ α'.

132. ***Κατηγμένη καὶ τεταγμένη σημείου.***—***Κατηγμένη*** σημείου λέγεται ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου καὶ θεωρεῖται θετικὴ μέν, ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου, ἀρνητικὴ δέ, ἐὰν ὑποκάτω.

Τεταγμένη σημείου λέγεται ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου καὶ θεωρεῖται θετικὴ μέν, ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἔμπροσθεν, ἀρνητικὴ δέ, ἐὰν ὄπισθεν τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου.

133. ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων σημείου ἀπὸ τῶν προβολ. ἐπιπέδων καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν προβολῶν του ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.***

Τὸ ἐπίπεδον $\alpha A \alpha'$, ὅπερ ὁρίζουσιν αἱ προβάλλουσαι αA καὶ $\alpha' A$, ὡς κάθετον ἐπὶ τὰ προβολ. ἐπίπεδα, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ, τέμνει δὲ αὐτὴν εἰς σημεῖον α. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον $A\alpha\alpha\alpha'$ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι

$$\alpha\alpha = \alpha' A \quad \text{καὶ} \quad \alpha\alpha' = \alpha A$$

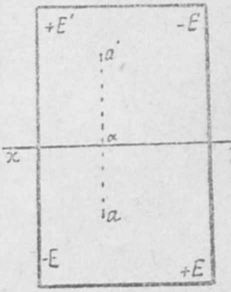
τουτέστιν, ***ἡ ἀπόστασις τῆς πρώτης προβολῆς σημείου ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἰσοῦται τῇ τεταγμένῃ αὐτοῦ, ἡ δὲ***

ἀπόστασις τῆς δευτέρας προβολῆς ἀπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους ἰσοῦται τῇ κατηγμένῃ αὐτοῦ.

134. ***Ἐπίπεδον σχεδιάσεως, παράστασις τοῦ σημείου.*** — Ἵνα ἔχωμεν τὰς δύο προβολὰς σχήματός τινος ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον σχεδιάσεως καὶ κατακλίνομεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ δεύτερον περιστρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους οὕτως, ὥστε τὸ θετικὸν μέρος αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους τοῦ πρώτου, ὅτε καὶ τὸ ἀρνητικὸν μέρος αὐτοῦ—Ε′ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ θετικοῦ μέρους+Ε τοῦ πρώτου.

Κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ α (σχ. 99) μένει ἀμετάστατον καὶ ἡ *αα′* ἀμετάβλητος κατὰ μέγεθος καὶ πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν χψ· ἑπομένως καὶ ὅταν κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χψ. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη θεμελιώδης πρότασις.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως αἱ δύο προβολαὶ σημείου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους (σχ. 100) ***καὶ ἡ μὲν ἀπόστασις τῆς δευτέρας προβολῆς ἀπὸ ταύτης ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς πρώτης προβολῆς ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου.***



Σχ. 100

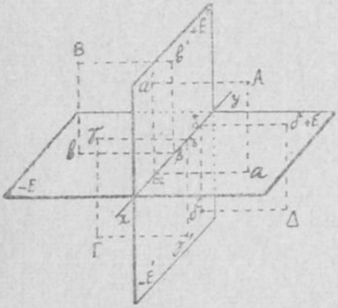
Τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους, τῶν δύο προβολῶν *α* καὶ *α′* σημείου Α καὶ τῆς ταύτας συνδεούσης εὐθείας *αα′* λέγεται ***παράστασις*** ἢ ***σχεδίασμα*** τοῦ σημείου (*α,α′*), ἢ ἁπλούστερον τοῦ Α.

135. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Ἡ θέσις σημείου ἐν τῷ χώρῳ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη ὅταν εἶναι δεδομέναι ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ.***

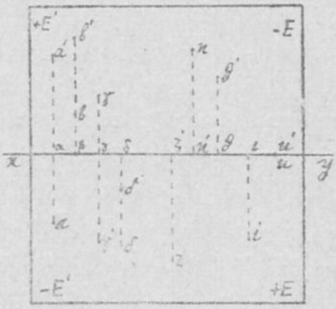
Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς ***α*** ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ ληφθῇ ἐπὶ ταύτης τὸ τμῆμα ***α***Α ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὸ $αα'$, τὸ πέρας Α τοῦ τμήματος τούτου εἶναι προφανῶς τὸ σημεῖον τοῦ χώρου τὸ ἔχον προβολὰς $α$ καὶ $α'$.

136. ***Θέσεις τῶν προβολῶν σημείου ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα.***— Σημεῖόν τι δύναται νὰ ἔχῃ ὡς πρὸς τὰ προβολ. ἐπίπεδα ἐννέα διαφόρους θέσεις. Δηλαδὴ δύναται νὰ κεῖται ἢ ἐν μιᾷ τῶν τεσσάρων διέδρων γωνιῶν, ἢ ἐν ἑνὶ τῶν τεσσάρων προβολ. ἡμιεπιπέδων, ἢ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν τοῦ τρόπου καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάκλισις τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, συνάγομεν, ὅτι :

α') Σημείου Α κειμένου ἐν τῇ πρώτῃ διέδρῳ γωνίᾳ (σχ. 101),



Σχ. 101



Σχ. 102

αἱ δύο προβολαὶ $α$ καὶ $α'$ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως (σχ. 102), ἑκατέρωθεν τῆς χψ, ἡ πρώτη πρὸς τὰ κάτω, ἡ δὲ δευτέρα πρὸς τὰ ἄνω.

β') Σημείου Β κειμένου ἐν τῇ δευτέρᾳ διέδρῳ γωνίᾳ ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ $β$ καὶ $β'$ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως πρὸς τὰ ἄνω τῆς χψ.

γ') Σημείου Γ κειμένου ἐν τῇ τρίτῃ διέδρῳ γωνίᾳ αἱ προβολαὶ $γ$ καὶ $γ'$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς χψ, ἡ μὲν πρώτη πρὸς τὰ ἄνω, ἡ δὲ δευτέρα πρὸς τὰ κάτω.

δ') Σημείου Δ κειμένου ἐν τῇ τετάρτῃ διέδρῳ, ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ $δ$ καὶ $δ'$ κεῖνται πρὸς τὰ κάτω τῆς χψ.

Μέσον ... γεωμ. ... 1944

ε΄) Σημείου Ζ κειμένου ἐπὶ τοῦ + Ε, ἡ πρώτη προβολὴ ζ συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου καὶ κεῖται πρὸς τὰ κάτω τῆς χψ, ἡ δὲ δευτέρα ζ′ ἐπὶ τῆς χψ.

στ΄) Σημείου Η κειμένου ἐπὶ τοῦ —Ε, ἡ μὲν πρώτη προβολὴ η συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου καὶ κεῖται πρὸς τὰ ἄνω τῆς χψ, ἡ δευτέρα η′ ἐπὶ τῆς χψ.

ζ΄) Σημείου Θ κειμένου ἐπὶ τοῦ +Ε′, ἡ πρώτη προβολὴ θ κεῖται ἐπὶ τῆς χψ, ἡ δὲ δευτέρα θ′ πρὸς τὰ ἄνω αὐτῆς συμπίπτουσα μετὰ τοῦ σημείου.

η΄) Σημείου Ι κειμένου ἐπὶ τοῦ —Ε′, ἡ πρώτη προβολὴ ι κεῖται ἐπὶ τῆς χψ, ἡ δὲ δευτέρα ι′, συμπίπτουσα μετὰ τοῦ σημείου, πρὸς τὰ κάτω αὐτῆς.

θ΄) Σημείου Κ κειμένου ἐπὶ τῆς χψ αἱ προβολαὶ κ καὶ κ′ συμπίπτουσι.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ διάταξις τῶν προβολῶν σημείου τινὸς ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως εἶναι διάφορος ἐν ἑκάστῃ τῶν θέσεων αὐτοῦ ὡς πρὸς τὰ προβολ. ἐπίπεδα. Ἑπομένως ἐκ τοῦ σχεδιάσματος δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν περὶ τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως τοῦ σημείου.

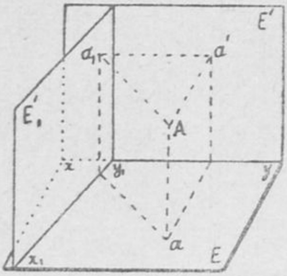
137. ***Ἰδιαίτεραι θέσεις τοῦ σημείου.***—Ἐὰν σημεῖόν τι κεῖται ἐπί τινος τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τὰς διέδρους γωνίας, αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν προβολ. ἐπιπέδων εἶναι ἀπολύτως ἴσαι. Ἑπομένως ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου, αἱ δύο προβολαί του, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως, εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν χψ, ἐὰν δὲ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου, αἱ δύο προβολαί του συμπίπτουσιν.

138. ***Μετάθεσις τοῦ δευτέρου προβολικοῦ ἐπιπέδου,***—Εἴς τινας περιπτώσεις ἀνάγκη παρίσταται μεταθέσεως τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου εἰς ἄλλην θέσιν E'_1 (σχ. 103). Κατὰ τὴν μετάθεσιν ταύτην, ἡ πρώτη προβολὴ σημείου Α μένει ἀμετάστατος καὶ ἡ κατηγμένη αΑ ἀμετάβλητος· ἡ δευτέρα ὅμως προβολὴ αὐτοῦ μετατίθεται. Προκύπτει ὅθεν τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

139. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ προσδιορισθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ δοθέντος σημείου εἰς σύστημα προβολικὸν προκύ-***

πτον ἐκ τῆς μεταθέσεως τοῦ δευτέρου προβολικοῦ ἐπιπέδου.

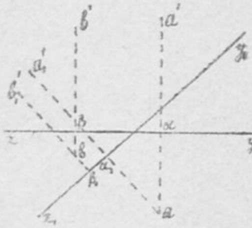
Ἔστωσαν *α* καὶ *α΄* αἱ προβολαὶ σημείου Α, ἐν τῷ προβολ. συστήματι τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους $\chi\psi$ (σχ. 104) καὶ $\chi_1\psi_1$ ἡ νέα γραμμμὴ τοῦ ἐδάφους.



Σχ. 103

Πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου Α καὶ ἐν τῷ νέῳ συστήματι εἶναι τὸ *α*, ἡ δὲ δευτέρα προβολή του ὀφείλει (§ 134) νὰ κεῖται μετὰ τῆς *α* ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην, κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον, πρὸς τὴν κατηγμένην τοῦ Α, ἥτις δὲν μετεβλήθη κατὰ τὴν μετάθεσιν καὶ ἰσοῦται τῇ $\alpha\alpha'$.

Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ *α* ἡ $\alpha\alpha_1$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ καὶ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα $\alpha_1\alpha_1'$, ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὸ $\alpha\alpha'$, τὸ σημεῖον α_1' θὰ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ Α ἐν τῷ προβολ. συστήματι $\chi_1\psi_1$.



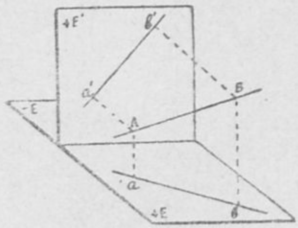
Σχ. 104

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου (β,β') εἶναι τὸ β_1'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

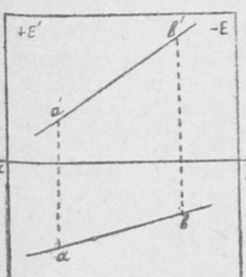
140. ***Προβολαὶ εὐθείας.***—Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον λέγεται ***πρώτη*** ἢ ***ὁριζόντιος προβολὴ*** αὐτῆς, ἡ δὲ ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, ***δευτέρα*** ἢ ***κατακόρυφος προβολή***. Ἐπειδὴ δὲ ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι, ἐν γένει, εὐθεῖα (§ 17), πρὸς κατασκευὴν τῶν προβολῶν εὐθείας ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς προβολὰς δύο σημείων αὐτῆς. Οὕτω προβάλλοντες τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 105) ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς *αϐ* καὶ *α΄ϐ΄* τῆς εὐθείας ΑΒ.



Σχ. 105

Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν πρώτων προβαλλουσῶν ***α***Α καὶ *ϐ*Β λέγεται ***πρῶτον προβάλλον***, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν δευτέρων προβαλλουσῶν *α΄*Α καὶ *ϐ΄*Β ***δεύτερον προβάλλον ἐπίπεδον***.

Κατακλίνοντες τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ τὰ γνωστά, ἔχομεν τὰς προβολὰς τῆς εὐθείας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ (σχ. 106).



Σχ. 106

Τὴν εὐθεῖαν τὴν ἔχουσαν προβολὰς *αϐ* καὶ *α΄ϐ΄* καλοῦμεν εὐθεῖαν (*αϐ*, *α΄ϐ΄*) ἢ καὶ εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ δὲ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους καὶ τῶν δύο προβολῶν τῆς εὐθείας καλοῦμεν σχεδίασμα αὐτῆς.

141. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως, ὧν οὐδεμία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, δύνανται πάντοτε νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ μιᾶς εὐθείας τοῦ χώρου.***

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως *αβ* καὶ *α΄β΄* (σχ. 106). Ἐὰν θεωρηθῇ ἡ πρώτη ὡς εὐθεῖα τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου καὶ ἡ δευτέρα ὡς εὐθεῖα τοῦ κατακλιθέντος δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶναι προβολαὶ μιᾶς εὐθείας τοῦ χώρου.

Διότι, ἐὰν νοηθῇ τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, καὶ ἀχθῶσι διὰ τῶν εὐθειῶν *αβ* καὶ *α΄β΄* (σχ. 105) δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰ προβολικά, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θὰ τέμνωσιν ἄλληλα κατὰ εὐθεῖαν ΑΒ, ἥτις θὰ ἔχῃ προφανῶς προβολὰς τὰς εὐθείας *αβ* καὶ *α΄β΄*.

142. ***Παρατήρησις.***—Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν χψ εἰς διάφορα σημεῖα, οὐδεμίαν εὐθεῖαν τοῦ χώρου παριστῶσιν, διότι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰ προβολικὰ δὲν τέμνουσιν ἄλληλα. Ἐὰν δὲ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν χψ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὰ ἐν λόγῳ ἐπίπεδα συμπίπτουσιν εἰς ἓν ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν παριστῶσι προβολὰς ὡρισμένης εὐθείας τοῦ χώρου, ἀλλὰ πασῶν τῶν γραμμῶν τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Ἐὰν τέλος ἐκ δύο εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως ἡ ἑτέρα μόνον εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χψ, τὰ διὰ τῶν εὐθειῶν τούτων διερχόμενα προβάλλοντα ἐπίπεδα, τέμνουσιν ἄλληλα κατὰ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων. Ἀλλ᾽ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ παριστῶσι τὰς προβολὰς τῆς τομῆς, διότι ἡ ἑτέρα τῶν προβολῶν αὐτῆς θὰ εἶναι ἓν σημεῖον.

143. ***Διάφοροι θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα.***—Μία εὐθεῖα δύναται νὰ ἔχῃ ὡς πρὸς τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα τὰς ἑπομένας θέσεις :

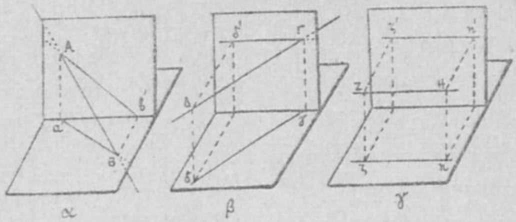
α΄) ***νὰ τέμνῃ ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα.***

β΄) ***νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἓν καὶ νὰ κλίνῃ πρὸς τὸ ἕτερον,***

γ΄) ***νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφότερα,***

δ΄) ***νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.***

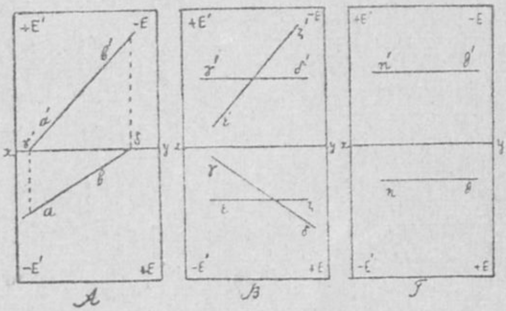
1ον. Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 107 α) τέμνουσα ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ *α* κεῖται ἐπὶ τῆς χψ· ἐπειδὴ δὲ ὀφείλει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας, ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας τέμνει τὴν χψ εἰς τὸ *α*. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ.ἐπιπέδου, ἡ δευτέρα προβολή του *β′* κεῖται ἐπὶ τῆς χψ·



Σχ. 107

ἐπειδὴ δὲ ὀφείλει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς εὐθείας, ἕπεται ὅτι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας τέμνει τὴν χψ εἰς τὸ *β′*.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ *αβ*, *α′β′* (σχ. 108) εὐθείας ΑΒ τέμνωσι τὴν χψ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει ἀμφότερα



Σχ. 108

τὰ προβολ. ἐπίπεδα. Διότι, τὸ σημεῖον *γ′*, καθ᾽ ὃ ἡ δευτέρα λὴ
βολὴ τέμνει, τὴν χψ εἶναι δευτέρα προβολὴ σημείου τινὸς Γ ῆς
εὐθείας ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἔχον τὴν δευτέραν πρ(
λήν του ἐπὶ τῆς χψ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέ(
Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΒ τέμνει τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον εἰς
Γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τέμνει καὶ τὸ δεύτερον.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τοῦ ἑπομένου θεωρήματ(

Διὰ νὰ τέμνῃ μία εὐθεῖα ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφότεραι αἱ προβολαί της νὰ τέμνωσι τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Κατὰ ταῦτα τὸ σχεδίασμα 𝒜 (σχ. 108) παριστᾷ εὐθεῖαν ΑΒ τέμνουσαν ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα.

2ον. Ἔστω εὐθεῖα ΓΔ (σχ. 107 β) παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ κλίνουσα πρὸς τὸ δεύτερον. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον αἱ κατηγμέναι πάντων τῶν σημείων αὐτῆς εἶναι ἴσαι· ἑπομένως αἱ δεύτεραι προβολαί των ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῆς χψ (133) καὶ κατ' ἀκολουθίαν κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς αὐτήν. Ἐξ ἄλλου ἡ πρώτη προβολὴ τῆς ΓΔ, παράλληλος οὖσα τῇ ΓΔ, τέμνει τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, κατ' ἀνάγκην ἄρα καὶ τὴν χψ.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἡ δευτέρα προβολὴ *γ'δ'* (σχ. 108 ℬ) εὐθείας ΓΔ εἶναι παράλληλος τῇ χψ, ἡ δὲ πρώτη τέμνει αὐτήν, τότε ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ τέμνει τὸ δεύτερον. Διότι τῆς *γ'δ'* οὔσης παραλλήλου τῇ χψ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ΓΔ ἔχουσιν ἴσας κατηγμένας· ἑπομένως ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον. Ἐξ ἄλλου ἡ πρώτη προβολὴ *γδ*, ὡς τέμνουσα τὴν χψ, τέμνει καὶ τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον. Ἑπομένως τέμνει αὐτὸ καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν παράλληλος ΓΔ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ νὰ τέμνῃ τὸ δεύτερον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μὲν δευτέρα προβολή της νὰ εἶναι παράλληλος ...ς τὴν χψ, ἡ δὲ πρώτη νὰ τέμνῃ αὐτήν.

...μοίως δεικνύεται ὅτι, ***διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖά τις παράλλη... πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ νὰ τέμνῃ τὸ ...τον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μὲν πρώτη προβολή της νὰ εἶ... παράλληλος τῇ χψ, ἡ δὲ δευτέρα νὰ τέμνῃ αὐτήν.***

Κατὰ ταῦτα τὸ σχεδίασμα ℬ (σχ. 108) παριστᾷ εὐθεῖαν ...*γ'δ'*) παράλληλον πρὸς τὸ **πρῶτον** προβ. ἐπίπεδον καὶ εὐ...αν (*εζ*, *ε'ζ'*) παράλληλον πρὸς τὸ **δεύτερον**.

3ον. Ἔστω εὐθεῖα ΖΗ (σχ. 107 γ) παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς τὴν χψ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, αἱ κατηγμέναι πάντων τῶν σημείων αὐτῆς εἶναι ἴσαι· ἑπομένως αἱ δεύτεραι προβολαὶ αὐτῶν ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῆς χψ καὶ ὡς ἐκ τούτου κεῖνται ἐπ' εὐθείας $f'n'$ παραλλήλου πρὸς αὐτήν. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον αἱ τεταγμέναι πάντων τῶν σημείων αὐτῆς εἶναι ἴσαι· ἑπομένως αἱ πρῶται προβολαὶ αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς χψ καὶ ὡς ἐκ τούτου κεῖνται ἐπ' εὐθείας fn παραλλήλου πρὸς αὐτήν.

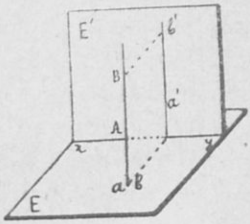
Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καί ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Ὥστε:

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαί της νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Κατὰ ταῦτα τὸ σχεδίασμα $\mathcal{T}$ (σχ. 108) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν χψ.

4ον. Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον (σχ. 109).

Ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι προφανῶς ἓν σημεῖον, ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χψ, ὡς κοινὴ τομὴ τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου, καὶ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου, ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας θὰ διατελῇ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, συνάγεται ἀκόμη, ὅτι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως, ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας συμπίπτει μετὰ τῆς ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς αὐτῆς ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.



Σχ. 109

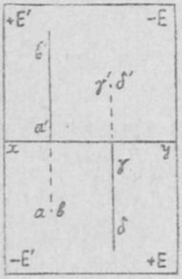
Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. Ὥστε:

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μὲν πρώτη προβολή της νὰ εἶναι

ἓν σημεῖον, ἡ δὲ δευτέρα κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους διερχομένη (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως) διὰ τῆς πρώτης προβολῆς.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι :

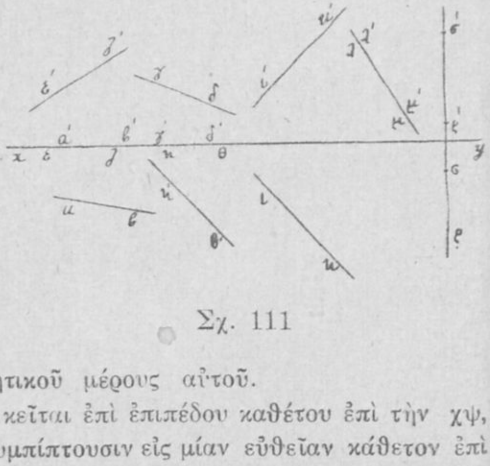
Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ δευτέρα προβολή της νὰ εἶναι ἓν σημεῖον, ἡ δὲ πρώτη κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους διερχομένη διὰ τῆς δευτέρας προβολῆς.



Σχ. 110

Κατὰ ταῦτα τὸ ἐν τῷ (σχ. 110) σχεδίασμα παριστᾷ δύο εὐθείας τὴν μὲν $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον, τὴν δὲ $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

144. ***Ἰδιαίτεραι θέσεις τῆς εὐθείας.*** — Ἐὰν εὐθεῖά τις κεῖται ἐπί τινος τῶν προβολ. ἐπιπέδων, ταὐτίζεται μετὰ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς αὐτῆς, ἡ δὲ ἄλλη προβολή της κεῖται ἐπὶ τῆς χψ. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ (σχ. 111) κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, ἡ μὲν πρώτη ἐπὶ τοῦ θετικοῦ, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους αὐτοῦ. Αἱ δὲ εὐθεῖαι $(\varepsilon\zeta, \varepsilon'\zeta')$ καὶ $(\eta\vartheta, \eta'\vartheta')$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, ἡ μὲν πρώτη ἐπὶ τοῦ θετικοῦ, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους αὐτοῦ.



Σχ. 111

β') Ἐὰν εὐθεῖά τις κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, αἱ δύο προβολαί της συμπίπτουσιν εἰς μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν χψ καὶ δὲν εἶναι ἀρκεταὶ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως τῆς εὐθείας.

Τούτου ἕνεκα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ εὐθεῖα προσδιορίζεται διὰ δύο σημείων αὐτῆς. Οὕτως ἡ εὐθεῖα ($\rho\sigma, \rho'\sigma'$) (σχ.111) κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ εἶναι δὲ ἐντελῶς ὡρισμένη, ἐπειδὴ ἔχουσι δοθῇ δύο σημεῖα αὐτῆς (ρ, ρ') καὶ (σ, σ').

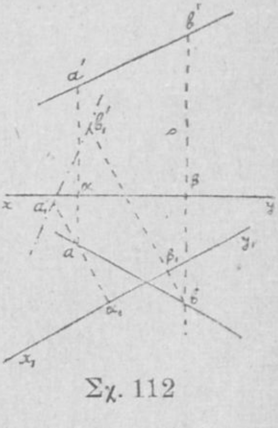
γ') Εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ πρώτου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου αἱ δύο προβολαὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν χψ (§ 137) εὐθείας δὲ κειμένης ἐπὶ τοῦ δευτέρου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου αἱ δύο προβολαὶ συμπίπτουσιν.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα ($\iota\kappa$, $\iota'\kappa'$) (σχ. 111) κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου, ἡ δὲ ($\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$) ἐπὶ τοῦ δευτέρου.

§ 145. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—**Δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν εὐθείας, νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ προβολαὶ αὐτῆς εἰς ἄλλο προβολ. σύστημα προκύπτον ἐκ τῆς μεταθέσεως τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου.**

Ἔστωσαν $\alpha\beta$ καὶ $\alpha'\beta'$ (σχ. 112) αἱ προβολαὶ εὐθείας ΑΒ ἐν τῷ προβολικῷ συστήματι χψ.

Ἐὰν μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ εἶναι ἡ $\chi_1\psi_1$, ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας θὰ μείνῃ ἀμετάστατος. Ἑπομένως καὶ ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι, πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ $\alpha\beta$. Πρὸς κατασκευὴν τῆς νέας δευτέρας προβολῆς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς νέας δευτέρας προβολὰς δύο σημείων αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο φέρομεν (§ 139) ἐκ τῶν πρώτων προβολῶν α καὶ β τῶν σημείων (α,α') καὶ (β,β') καθέτους ἐπὶ τὴν νέαν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων τούτων λαμβάνομεν τὰ τμήματα $\alpha_1\alpha_1'$ καὶ $\beta_1\beta_1'$ ἀντιστοίχως ἴσα, κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον, πρὸς τὰς κατηγμένας αὐτῶν $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$.

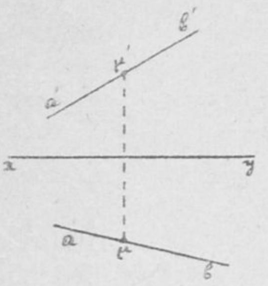


Σχ. 112

Τὰ σημεῖα α_1' καὶ β_1' εἶναι αἱ νέαι δεύτεραι προβολαὶ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἑπομένως ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ $\alpha_1'\beta_1'$.

146. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Δοθείσης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν σημείου κειμένου ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.***

Ἔστω μ (σχ. 113) ἡ πρώτη προβολὴ σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$). Ζητεῖται ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ.



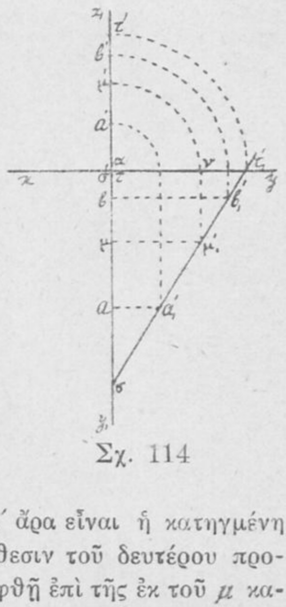
Σχ. 113

Αὕτη ὀφείλει νὰ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ. Εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον μ' καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ μ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ τέμνει τὴν $\alpha'\beta'$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται ἡ πρώτη προβολὴ ὅταν δοθῇ ἡ δευτέρα.

147. ***Παρατήρησις***.—Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, ὅπως ἡ ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$) (σχ.114), ἡ λύσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος εἶναι ἀδύνατος διὰ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ συμπέσῃ, διὰ τὸ ἁπλούστερον τῆς κατασκευῆς, μετὰ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ δύο προβολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ προσδιορίζομεν τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν $\alpha_1'\beta_1'$ τῆς δοθείσης εὐθείας.



Σχ. 114

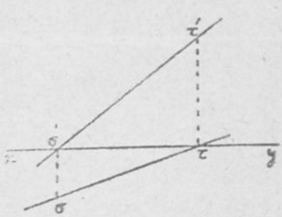
Ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου Μ θὰ κεῖται εἰς τὸ σημεῖον μ_1' καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ μ κάθετος ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ τέμνει τὴν $\alpha_1'\beta_1'$. Ἡ $\mu\mu_1'$ ἄρα εἶναι ἡ κατηγμένη τοῦ Μ. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη κατὰ τὴν μετάθεσιν τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ τὸ τμῆμα $\alpha\mu'$ ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὸ $\mu\mu_1'$, τὸ πέρας μ' τοῦ τμήματος τούτου εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου Μ ἐν τῷ προβολ. συστήματι χψ.

Σημείωσις.—Ἐὰν δοθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ **μ**΄ καὶ ζητεῖται ἡ πρώτη, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς χψ τὸ τμῆμα αν ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὴν κατηγμένην α**μ**΄ καὶ ἐκ τοῦ **ν** ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὴν $\chi_1\psi_1$. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν $\alpha'_1\beta'_1$ εἰς τὸ σημεῖον μ'_1, ὅπερ εἶναι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τοῦ Μ. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν καὶ τὴν πρώτην **μ** ἄγοντες ἐξ αὐτῆς κάθετον ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$.

148. ***Ἴχνη εὐθείας.***— ***Ἴχνη*** εὐθείας λέγονται τὰ σημεῖα καθ' ἃ διαπερᾷ τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα. Ἐκ τούτων τὸ κείμενον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου λέγεται ***πρῶτον ἴχνος***, τὸ ***δὲ*** κείμενον ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, ***δεύτερον ἴχνος.***

149. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν εὐθείας νὰ προσδιορισθῶσι τὰ ἴχνη αὐτῆς.***

Τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας, ὡς κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου ἔχει τὴν δευτέραν προβολήν του ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς εὐθείας καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς χψ, τουτέστιν εἰς τὸ σημεῖον σ' (σχ.115) καθ' ὃ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας τέμνει τὴν χψ. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ σ' κάθετος ἐπὶ τὴν χψ, τὸ σημεῖον σ, καθ' ὃ ἡ κάθετος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας, εἶναι ἡ πρώτη προβολή, τουτέστιν αὐτὸ τοῦτο τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτῆς.



Σχ. 115

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας εἶναι τὸ σημεῖον τ' καθ' ὃ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας τέμνεται ὑπὸ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν χψ τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τ τῆς χψ καὶ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας.

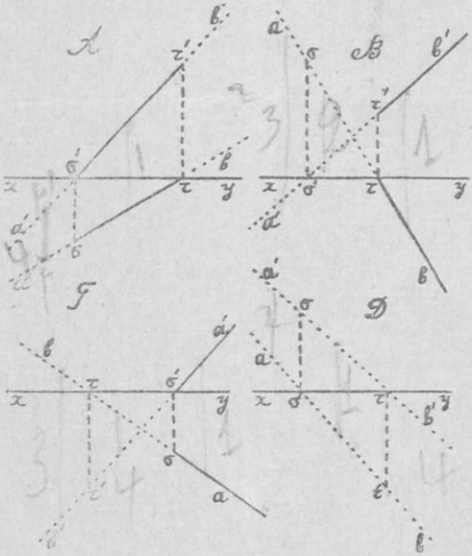
Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, ὅπως ἡ (αα΄, ββ΄) (σχ. 114) τὰ ἴχνη αὐτῆς προσδιορίζονται ὡς ἕπεται.

Μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ προβολαὶ αβ καὶ α΄β΄ τῆς δοθείσης εὐθείας, καὶ κατασκευάζομεν τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν αὐτῆς $\alpha_1'\beta_1'$.

Τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας ἐν τῷ νέῳ προβολικῷ συστήματι εἶναι προφανῶς τὸ σημεῖον σ τῆς τομῆς τῆς $\chi_1\psi_1$ καὶ τῆς $\alpha_1'\beta_1'$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας, καθὼς καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, μένει ἀμετάστατον κατὰ τὴν μετάθεσιν τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι τὸ σ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας (αα΄, ββ΄) καὶ ἐν τῷ συστήματι χψ.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ δεύτερον ἴχνος, ἡ πρώτη προβολή του κεῖται εἰς τὸ σημεῖον τ τῆς χψ, ἡ δὲ νέα δευτέρα προβολή του κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ τ ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ καὶ ἐπὶ τῆς $\alpha_1'\beta_1'$, εἶναι ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον τ_1' τῶν δύο τούτων εὐθειῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ κατηγμένη κατὰ τὴν μετάθεσιν δὲν μετεβλήθη, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς $\chi_1\psi_1$ τὸ τμῆμα ττ΄ ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὸ $\tau\tau_1'$, τὸ σημεῖον τ΄ θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας ἐν τῷ προβ. συστήματι χψ.

150. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—*Δοθέντων τῶν ἰχνῶν εὐθείας,* νὰ *κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς.*



Σχ. 116

Ἔστωσαν σ καὶ τ΄ τὰ δύο ἴχνη εὐθείας (σχ. 116). Ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ σ, ὡς σημείου τοῦ πρώτου προβ. ἐπιπέδου, εἶναι ὁ ποῦς σ΄ τῆς ἐκ τοῦ σ ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν χψ. Δι' ὅμοιον λόγον, πρώτη προβολὴ τοῦ δευτέρου ἴχνους τ΄, εἶναι τὸ σημεῖον τ. Αἱ προβολαὶ ἄρα τῆς εὐθείας εἶναι αἱ στ καὶ σ΄τ΄.

Σημείωσις.—Τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας καθορίζουσι τὰ μέρη αὐτῆς τὰ περιεχόμενα εἰς τὰς διαφόρους διέδρους γωνίας. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο προβολ. ἐπίπεδα θεωροῦνται ἀδιαφανῆ, ὁρατὸν μέρος τῆς εὐθείας, ὑπὸ τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ θετικῷ ἡμιεπιπέδῳ ἱσταμένου παρατηρητοῦ εἶναι μόνον τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ πρώτῃ διέδρῳ. Διὰ τοῦτο μόνον τοῦ μέρους τούτου τὰς προβολὰς παριστῶμεν διὰ συνεχῶν γραμμῶν, τὰς δὲ τῶν ἄλλων, διὰ γραμμῶν ἀποτελουμένων ἐκ σειρᾶς σημείων.

Διακρίνομεν δὲ εἰς ποίαν ἐκ τῶν διέδρων γωνιῶν εὑρίσκεται ἕκαστον τῶν μερῶν τῆς εὐθείας ἐκ τῆς θέσεως τῶν προβολῶν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν χψ, ὅπως καὶ ὅταν πρόκειται περὶ τῆς θέσεως σημείου (§ 136)

Τῆς ἐν τῷ σχεδιάσματι Α (σχ. 116) παριστωμένης εὐθείας τὸ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν μέρος (δτ, δ΄τ΄), εὑρίσκεται ἐν τῇ πρώτῃ διέδρῳ, διότι ἡ πρώτη προβολή του δτ εὑρίσκεται ὑποκάτω τῆς χψ, ἡ δὲ δευτέρα ὑπεράνω. Τὸ μέρος τβ, τ΄β΄), οὗτινος ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ κεῖνται ὑπεράνω τῆς χψ, εὑρίσκεται ἐν τῇ δευτέρᾳ διέδρῳ καὶ τὸ μέρος (αδ α΄δ΄), τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ κεῖνται ἀμφότεραι ὑποκάτω τῆς χψ, εὑρίσκεται ἐν τῇ τετάρτῃ διέδρῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

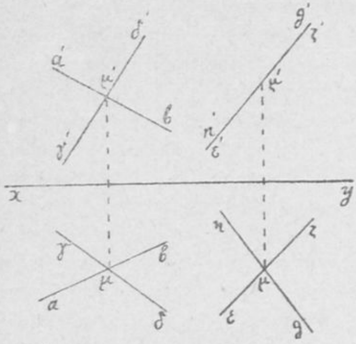
α΄) Εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσαι.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Διὰ νὰ τέμνωσιν ἀλλήλας δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου πρέπει αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ αὐτῶν νὰ τέμνωσι ἀλλήλας καὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς νὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.***

1ον. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσαι ἀλλήλας εἰς σημεῖον Μ.

Αἱ προβολαὶ μ καὶ μ΄ τοῦ Μ, ὡς κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ὀφείλουν νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν. Ἑπομένως αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα μ καὶ μ' τῆς τομῆς εἶναι προβολαὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ, ὀφείλουν νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

2ον. Ἔστωσαν $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, αἱ πρῶται καὶ $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ (σχ. 117) αἱ δεύτεραι προβολαὶ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τέμνουσαι ἀλλήλας εἰς τὰ σημεῖα μ καὶ μ' κείμενα ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν χψ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας.



Σχ. 117

Διότι τὰ σημεῖα μ καὶ μ', ὡς κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, εἶναι προβολαὶ ἑνὸς σημείου Μ τοῦ χώρου· ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει τὰς προβολάς του ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, εἶναι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ Μ.

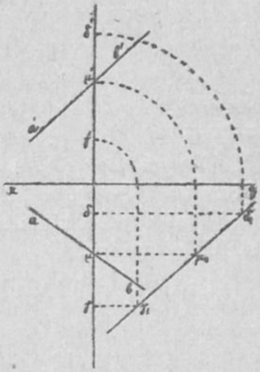
Τὸ θεώρημα προφανῶς ἀληθεύει καὶ ὅταν αἱ δύο ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ δὲ ἄλλαι δύο συμπίπτωσι, ὅπερ συμβαίνει ὅταν αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου (σχ. 117).

152. ***Παρατήρησις.***—Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν ἢ καὶ ἀμφότεραι κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως αὐτῶν, ἐκ τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν προβολῶν των.

α'). Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) καὶ ($\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$) ὧν ἡ δευτέρα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ καὶ διὰ τοῦτο προσδιορίζεται διὰ τῶν σημείων (γ,γ') καὶ (δ,δ') (σχ. 118).

Τὸ σημεῖον (μ,μ') εἶναι προφανῶς σημεῖον τῆς εὐθείας ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ($\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$)

Ἵνα λοιπὸν κρίνωμεν περὶ τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν εὐθειῶν πρέπει νὰ ζητήσωμεν τίνα θέσιν ἔχει τὸ σημεῖον (μ, μ') ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ($\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$). Πρὸς τοῦτο μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ προσδιορίζομεν τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν $\gamma_1'\delta_1'$ τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν μ_1' τοῦ Μ. Ἐὰν ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τοῦ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς νέας δευτέρας προβολῆς τῆς εὐθείας ΓΔ, ὅπως συμβαίνει ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι, αἱ εὐθεῖαι $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\gamma\gamma', \delta\delta')$ τέμνουσιν ἀλλήλας. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, αἱ εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

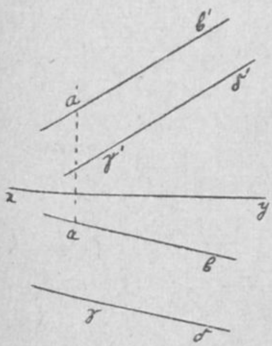


Σχ. 118

β′) Ὅταν αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ καθέτῳ ἐπὶ τὴν χψ ἐπιπέδῳ, εὑρίσκομεν τὴν πρὸς ἀλλήλας θέσιν αὐτῶν, μεταθέτοντες τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ κατασκευάζοντες τὰς νέας δευτέρας προβολὰς αὐτῶν. Ἐὰν αὗται ἀλληλοτομῶσιν, αἱ εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, αἱ εὐθεῖαι ὡς κείμεναι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ μὴ ἔχουσαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον, εἶναι παράλληλοι.

β′) *Εὐθεῖαι παράλληλοι*

153. ΘΕΩΡΗΜΑ.— ***Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρέπει αἱ ὁμώνυμοι προβολαί των νὰ εἶναι παράλληλοι· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.***



Σχ. 119

1ον. Ὅτι τῶν παραλλήλων εὐθειῶν αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι, ἐδείξαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις (Μερ. Α′ § 38 α′).

2ον. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$, τῶν ὁποίων αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ εἶναι παράλληλοι (σχ. 119)· λέγω ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Διότι, ἐὰν ἔκ τινος σημείου τῆς εὐθείας $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, οἷον τοῦ

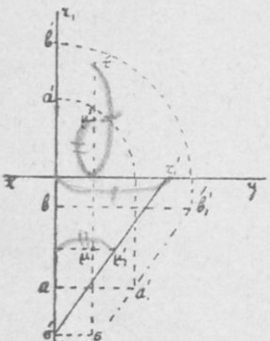
(α,α'), ἀχθῇ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$, πρώτη προβολὴ αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ α παράλληλος τῇ $\gamma\delta$, ἤτοι ἡ $\alpha\beta$, δευτέρα δὲ προβολή, ἡ ἐκ τοῦ α' παράλληλος τῇ $\gamma'\delta'$, ἤτοι ἡ $\alpha'\beta'$. Ἡ εὐθεῖα ἄρα $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ συμπίπτει μετὰ τῆς ἐκ τοῦ σημείου (α,α') ἀγομένης παραλλήλου τῇ εὐθείᾳ $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$.

Σημείωσις α').—Τὸ θεώρημα προφανῶς ἀληθεύει καὶ ὅταν δύο ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι συμπίπτουσι.

Σημείωσις β').—Ὅταν αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ δύο ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν χψ, τὸ θεώρημα ἐν γένει δὲν ἀληθεύει. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὅταν αἱ δεύτεραι προβολαί των καὶ εἰς ἄλλο προβολ. σύστημα εἶναι παράλληλοι.

154.—ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀρκεῖ ἐκ τῶν προβολῶν τοῦ δοθέντος σημείου νὰ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς δοθείσης εὐθείας.



Σχ. 120

Ἀλλ' ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ, ὅπως ἡ $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ (σχ. 120), αἱ ἐκ τῶν προβολῶν μ καὶ μ' τοῦ δοθέντος σημείου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ὁμωνύμους προβολὰς αὐτῆς, συμπίπτουσιν εἰς μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν χψ καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν δύνανται νὰ ὁρίσωσιν ἐντελῶς τὴν ζητουμένην παράλληλον.

Τούτου ἕνεκα μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ μάλιστα διὰ τὸ ἁπλούστερον τῆς κατασκευῆς οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς εὐθείας, ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ προβολαὶ τῆς δοθείσης καὶ κατασκευάζομεν τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν τοῦ σημείου (μ, μ'). Φέρομεν εἶτα ἐκ τοῦ μ_1' παράλληλον τῇ $\alpha_1'\beta_1'$.

Ἡ παράλληλος αὕτη εἶναι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἥτις μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς *μσ* ὁρίζουσιν ἐντελῶς αὐτήν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις δύο εὐθειῶν ὧν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως.

2) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα ἀμφοτέρας καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβ. ἐπιπέδων.

3) Ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ τὰ πρῶτα (ἢ δεύτερα) ἴχνη αὐτῶν ἑνοῦσα εὐθεῖα ἔχει δοθεῖσαν κατεύθυνσιν.

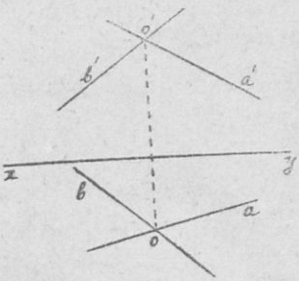
4). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον καθ' ὃ δοθεῖσα εὐθεῖα διαπερᾷ τὸ πρῶτον διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον καθ' ὃ δοθεῖσα εὐθεῖα διαπερᾷ τὸ δεύτερον διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

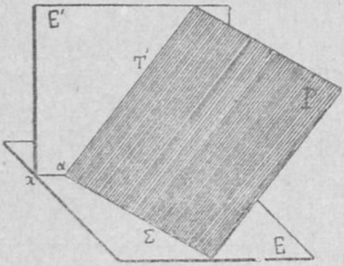
155.—***Παράστασις τοῦ ἐπιπέδου.***—Ἡ θέσις ἐπιπέδου ὁρίζεται ἢ διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας ἢ δι' ἑνὸς σημείου καὶ μιᾶς εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, ἢ διὰ δύο εὐθειῶν παραλλήλων ἢ ἀλληλοτομουσῶν. Ἐπειδὴ ὅμως πάντες οἱ τρόποι οὗτοι δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν τελευταῖον, τὸ ἐπίπεδον παρίσταται, ἐν γένει, ἐν τῇ Παραστατικῇ Γεωμετρίᾳ, διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν.



Σχ. 121

Οὕτως αἱ εὐθεῖαι $(oa, o'a')$ καὶ $(ob, o'b')$ (σχ. 121) παριστῶσι τὸ ἐν τῷ χώρῳ ἐπίπεδον ΟΑΒ.

156. ***Ἴχνη ἐπιπέδου.***—*Ἴχνη* ἐπιπέδου λέγονται αἱ εὐθεῖαι καθ' ἃς τέμνει τὰ δύο προβολ. ἐπίπεδα (σχ. 122). Ἐκ τούτων ἡ μὲν κειμένη ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου λέγεται ***πρῶτον ἴχνος***, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ δευτέρου, ***δεύτερον ἴχνος***.



Σχ. 122

Ἕκαστον τῶν ἰχνῶν συμπίπτει μετὰ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς του, ἡ δὲ ἄλλη συμπίπτει μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.

157. ***Ἰχνοπαράλληλοι ἐπιπέδου.***— ***Ἰχνοπαράλληλοι*** ἐπιπέδου λέγονται αἱ εὐθεῖαι αὐτοῦ αἱ παράλληλοι πρὸς τὰ ἴχνη του καὶ διακρίνονται εἰς ***πρώτας*** καὶ ***δευτέρας***, καθ' ὅσον εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ.

158. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Πάσης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου ἡ μὲν πρώτη προβολὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου της, ἡ δὲ δευτέρα παράλληλος πρὸς τὴν χψ.***

Διότι τῶν παραλλήλων εὐθειῶν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου ἡ μὲν πρώτη προβολὴ ταὐτίζεται μετ' αὐτοῦ, ἡ δὲ δευτέρα συμπίπτει μετὰ τῆς χψ, ἕπεται ὅτι ἡ μὲν πρώτη προβολὴ πάσης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου της, ἡ δὲ δευτέρα, παράλληλος πρὸς τὴν χψ.

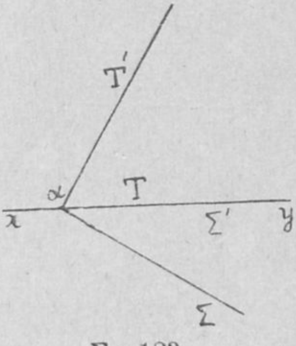
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

Πάσης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου ἡ μὲν δευτέρα προβολὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου της, ἡ δὲ πρώτη, παράλληλος πρὸς τὴν χψ.

159. ***Παράστασις τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν δύο ἰχνῶν του.***—Ἡ διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν παράστασις τοῦ ἐπιπέδου ἀπαιτεῖ, ἐκτὸς τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους, τὰς προβολὰς τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν χψ, τὴν ἑ-

νοῦσαν τὰς προβολὰς τοῦ κοινοῦ σημείου· δηλαδὴ ἓξ ἐν συνόλῳ εὐθείας (σχ. 121).

Ἐὰν ὅμως ἐκλέξωμεν πρὸς παράστασιν τοῦ ἐπιπέδου, ἀντὶ δύο οἱωνδήποτε εὐθειῶν αὐτοῦ, τὰ δύο ἴχνη του, τότε ἀρκοῦσι τρεῖς μόνον εὐθεῖαι, ἤτοι ἡ γραμμὴ τοῦ ἐδάφους καὶ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν ἰχνῶν του, καθ' ὅσον αἱ ἄλλαι προβολαὶ αὐτῶν συμπίπτουσι μὲ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους. Τούτου ἕνεκα προτιμᾶται ἡ παράστασις τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν ἰχνῶν του. Οὕτω τὸ σχεδίασμα 123 παριστᾷ ἐπίπεδον ἔχον πρῶτον ἴχνος Σ καὶ δεύτερον Τ'.



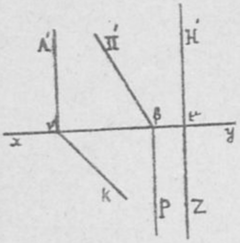
Σχ. 123

160. ***Θέσεις ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.***— Ἕν ἐπίπεδον δύναται α') νὰ τέμνῃ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, β') νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτήν, γ') νὰ διέρχηται δι' αὐτῆς.

α') Ἐὰν ἐπίπεδον Ρ (σχ. 122) τέμνῃ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους εἰς σημεῖον α, τὰ ἴχνη αὐτοῦ Σ καὶ Τ' διέρχονται προφανῶς διὰ τοῦ σημείου α Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον α κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου μένει ἀμετάστατον, τὸ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου θὰ διέρχωνται δι'αὐτοῦ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως.

Ἀντιστρόφως· δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως ἀλληλοτομοῦσαι ἐπὶ τῆς χψ, ὡς αἱ αΣ καὶ αΤ' (σχ. 123), δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρῶτον καὶ δεύτερον ἴχνος ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου δία τοῦ α. Διότι ἐὰν νοήσωμεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, αἱ εὐθεῖαι αΣ καὶ αΤ', ὡς τεμνόμεναι εἰς τὸ α, ὁρίζουσιν ἐπίπεδον τέμνον τὴν χψ εἰς τὸ α καὶ ἔχον ἴχνη τὰς δύο ταύτας εὐθείας.

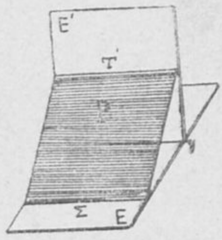
Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἐπίπεδον δύναται νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων (προβάλλον ἐπίπεδον) ἢ καὶ ἐπ' ἀμφότερα, καὶ ἂν μὲν εἶναι ***πρῶτον*** προβάλλον, τὸ **δεύτερον** ἴχνος του εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ, ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον, ἂν δὲ εἶναι **δεύτερον** προβάλλον, τότε τὸ **πρῶτον** ἴχνος του εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ· ἂν τέλος εἶναι κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα, τὰ δύο ἴχνη του συμπίπτουσιν εἰς μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν χψ.



Σχ. 124

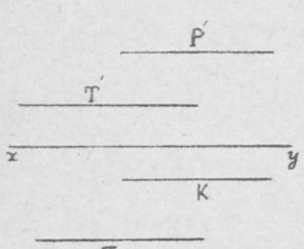
Κατὰ ταῦτα τὸ ἐπίπεδον ΚνΛ′ (σχ. 124) εἶναι πρῶτον προβάλλον ἐπίπεδον, τὸ δὲ ΡβΠ′ δεύτερον προβάλλον καὶ τὸ ΖμΗ′ κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ προβ. ἐπίπεδα.

β′) Ἐὰν ἐπίπεδον Ρ (σχ. 125) εἶναι παράλληλον τῇ χψ, ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ εἶναι παράλληλα πρὸς αὐτήν. Διότι, τῆς χψ οὔσης παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα προβολ. ἐπίπεδα, τέμνουσιν αὐτὸ κατὰ εὐθείας Σ καὶ Τ′ παραλλήλους πρὸς αὐτήν.



Σχ. 125

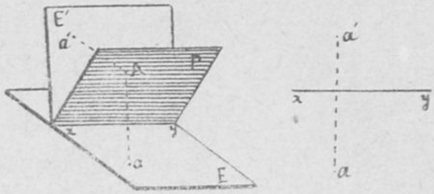
Ἀντιστρόφως· δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως παράλληλοι τῇ χψ, ὡς αἱ Σ καὶ Τ′ (σχ. 126) δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρῶτον καὶ δεύτερον ἴχνος ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ χψ. Διότι, ἂν νοηθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, αἱ εὐθεῖαι Σ καὶ Τ′, ὡς παράλληλοι τῇ χψ, ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτήν.



Σχ. 126

Δυνατὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἐπίπεδον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων· τότε τὸ ἕτερον τῶν ἰχνῶν του, τὸ ὁμώνυμον πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον πρὸς ὃ εἶναι παράλληλον, ἀφανίζεται εἰς ἄπειρον καὶ τὸ ἐπίπεδον **παρίσταται** ὑπὸ μόνου τοῦ ἄλλου ἴχνους. Οὕτως ἡ εὐθεῖα

Κ τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως (σχ. 126) παριστᾷ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, ἡ δὲ εὐθεῖα P′, ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον.

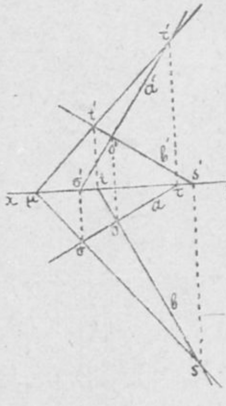


Σχ. 127

γ′) Ἐὰν ἐπίπεδον P (σχ. 127) διέρχεται διὰ τῆς χψ, τὰ δύο ἴχνη του συμπίπτουσι μετ' αὐτῆς καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ ὁρίσωσι τὴν θέσιν τοῦἐπιπέδου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἐπίπεδον παρίσταται ὑπὸ τῆς χψ καὶ ἑνὸς σημείου του (a, a').

161. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῶσι τὰ δύο ἴχνη ἐπιπέδου δεδομένου διὰ δύο εὐθειῶν.***

Πάσης εὐθείας κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου τὰ δύο ἴχνη εὑρίσκονται προφανῶς ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν αὐτοῦ. Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ἴχνη (§ 149) ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν τῶν ὁριζουσῶν τὸ ἐπίπεδον καὶ νὰ ἐπιζεύξωμεν τὰ ὁμώνυμα τούτων δι' εὐθειῶν. Π.χ. ἔστω ὅτι ζητοῦνται τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $(oa, o'a')$ καὶ $(ob, o'b')$ (σχ. 128).



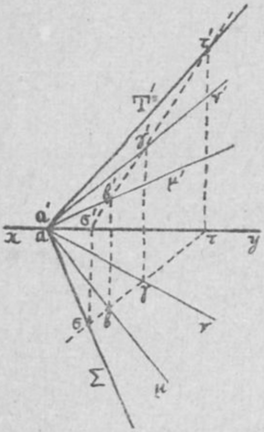
Σχ. 128

Εὑρίσκομεν τὰ πρῶτα ἴχνη σ καὶ ς, καὶ τὰ δεύτερα τ′ καὶ t' τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Ἡ εὐθεῖα σς εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦἐπιπέδου, ἡ δὲ $\tau' t'$ τὸ δεύτερον.

Τὰ οὕτω κατασκευαζόμενα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου ὀφείλουν νὰ συναντῶσι τὴν χψ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς αὐτήν. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἢ ἡ κατασκευὴ δὲν ἔγινεν ὀρθῶς ἢ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

162. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.—***1ον. Ὅταν αἱ τὸ ἐπίπεδον ὁρίζουσαι εὐθεῖαι ἀλληλοτομῶσιν ἐπὶ τῆς χψ.***

Ἔστωσαν $(aμ, a'μ')$ καὶ $(aν, a'ν')$ αἱ τὸ ἐπίπεδον ὁρίζουσαι εὐθεῖαι (σχ. 129). Πάντα τὰ ἴχνη αὐτῶν πρῶτα καὶ δεύτερα, συμπίπτουσιν προφανῶς εἰς τὸ σημεῖον (α,α′) καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ κατασκευὴ τῶν ἰχνῶν δὲν δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον (α,α′) εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ζητουμένων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον ἑκατέρου.

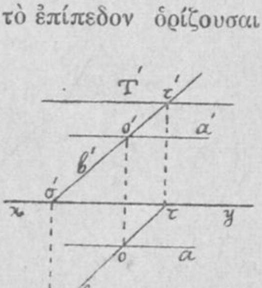


Σχ. 129

Πρὸς τοῦτο ἑνοῦμεν τὸ τυχὸν σημεῖον (β,β′) τῆς εὐθείας (α μ, α′μ′) μετὰ τοῦ τυχόντος σημείου (γ, γ′) τῆς εὐθείας (αν,α′ν′) διὰ τῆς εὐθείας (βγ, β′γ′). Ἡ εὐθεῖα αὕτη κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ ἑπομένως τὰ ἴχνη αὐτῆς σ καὶ τ′ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν αὐτοῦ. Πρῶτον ἄρα ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ ***ασ*** καὶ δεύτερον ἡ *α′τ′*.

2ον. ***Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν τῶν ὁριζουσῶν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλος τῇ χψ.***

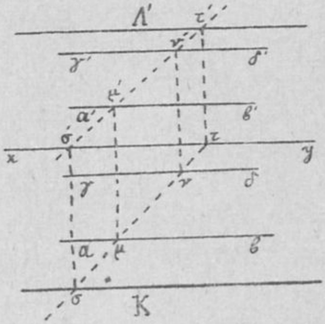
Ἔστωσαν (οα, ο′α′) καὶ (οβ, ο′β′) αἱ τὸ ἐπίπεδον ὁρίζουσαι εὐθεῖαι (σχ. 130). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν χψ εὐθείας (οα, ο′α′), εἶναι παράλληλον τῇ χψ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὰ ἴχνη του. Πρὸς κατασκευὴν ὅθεν αὐτῶν ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ ἴχνη **σ** καὶ **τ′** τῆς εὐθείας (οβ, ο′β′) καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ φέρωμεν παραλλήλους τῇ χψ.



Σχ. 130

3ον. ***Ὅταν ἀμφότεραι αἱ τὸ ἐπίπεδον ὁρίζουσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι τῇ χψ.***

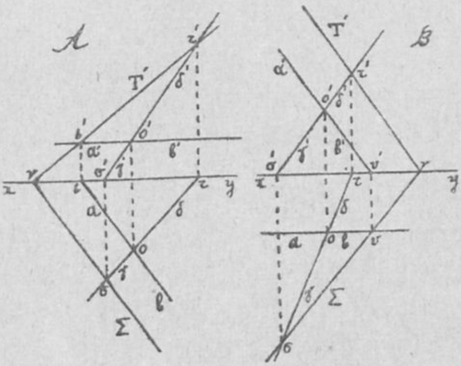
Ἔστωσαν (αβ, α′β′) καὶ (γδ, γ′δ′) δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ χψ (σχ. 131). Τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῇ χψ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὰ ἴχνη του. Ἀρκεῖ ἄρα νὰ εὕρωμεν ἓν σημεῖον ἑκατέρου. Πρὸς τοῦτο φέρομεν εὐθεῖαν ($μν, μ'ν'$) τέμνουσαν τὰς δοθείσας καὶ προσδιορίζομεν τὰ ἴχνη αὐτῆς $σ$ καὶ $τ'$. Αἱ ἐκ τῶν σημείων τούτων ἀγόμεναι παράλληλοι Σ καὶ Τ΄ τῇ χψ εἶναι τὰ ζητούμενα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 131

4ον. ***Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν τῶν ὁριζουσῶν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.***

Ἔστωσαν ($αβ, α'β'$) καὶ ($γδ, γ'δ'$) αἱ τὸ ἐπίπεδον ὁρίζουσαι εὐθεῖαι (σχ.132 𝒜). Ἡ ($αβ, α'β'$), ὡς παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον, εἶναι πρώτη ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπομένως τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ εἶναι παράλληλον



Σχ. 132

πρὸς τὴν πρώτην προβολήν της $αβ$. Ἐξ ἄλλου διέρχεται διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς ($γδ, γ'δ'$). Ἄγοντες ὅθεν ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους $σ$ τῆς ΓΔ παράλληλον τῇ $αβ$, ἔχομεν τὸ πρῶτον ἴχνος Σ τοῦ ἐπιπέδου.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου ἴχνους ἑνοῦμεν τὸ δεύτερον ἴχνος $τ'$ τῆς εὐθείας ($αβ, α'β'$) μετὰ τοῦ σημείου ν, καθ' ὃ τέμνει τὴν χψ τὸ πρῶτον ἴχνος Σ, ἐκτὸς ἂν τὸ ν πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, ὅτε ἐπιζευγνύομεν τὸ ι′ μετὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους τ′ τῆς εὐθείας (γδ, γ′δ′).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον (σχ. 132 *B*).

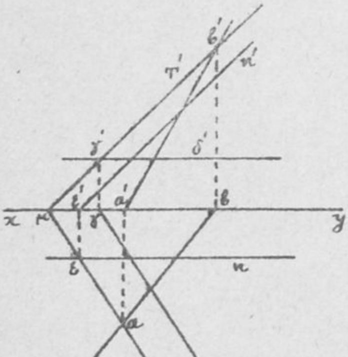
163. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῶσι τὰ ἴχνη ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου δίδονται ἢ μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον ἢ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.***

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

164. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ γραφῇ τυχοῦσα εὐθεῖα.***

1ον. Ἔστω ἐπίπεδον ΣμΤ′ δεδομένον διὰ τῶν ἴχνῶν αὐτοῦ (σχ. 133).

Ἐπειδὴ πάσης εὐθείας κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου τὰ ἴχνη κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ σημεῖον *α* καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους Τ′ σημεῖον *β′*, τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρῶτον καὶ δεύτερον ἴχνος μιᾶς εὐθείας τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Προσδιορίζοντες τὴν δευτέραν προβολὴν *α′* τοῦ *α* καὶ τὴν πρώτην *β* τοῦ *β′* καὶ ἐπιζευγνύοντες ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν τὰς δύο προβολὰς *αβ* καὶ *α′β′* τῆς ζητουμένης εὐθείας.



Σχ. 133

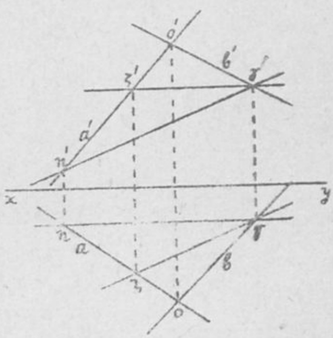
2ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον (*αοβ*, *α′ο′β′*) δεδομένον διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων (σχ. 134).

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας (*οβ*, *ο′β′*) τὸ σημεῖον (*γ*, *γ′*) καὶ ἐπὶ τῆς (*οα ο′α′*) τὸ σημεῖον (*π*, *π′*) καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς δμωνύμους προβολὰς αὐτῶν, αἱ ἑνοῦσαι εὐθεῖαι $\gamma\eta$ καὶ $\gamma'\eta'$ εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς ζητουμένης εὐθείας.

165. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Δοθείσης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη προβολὴ αὐτῆς.***

1ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ Σ καὶ Τ′ καὶ $\alpha\beta$ ἡ πρώτη προβολὴ εὐθείας ΑΒ ἐπ' αὐτοῦ κειμένης (σχ. 133).

Τὸ σημεῖον α, ὅπου ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς ΑΒ καὶ ἔχει δευτέραν προβολὴν τὸ σημεῖον α' τῆς χψ· ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον β, καθ' ὃ ἡ $\alpha\beta$ τέμνει τὴν χψ, εἶναι (§ 149) ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ δευτέρου ἴχνους τῆς ΑΒ· ἑπομένως τὸ ἴχνος τοῦτο θὰ κεῖται εἰς τὸ σημεῖον β' τῆς τομῆς τοῦ δευτέρου ἴχνους Τ′ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐκ τοῦ β καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.



Σχ. 134

Ἡ $\alpha'\beta'$ ἄρα εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐχούσης πρώτην προβολὴν τὴν $\alpha\beta$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, δεδομένης τῆς δευτέρας προβολῆς εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου κατασκευάζεται ἡ πρώτη προβολή.

2ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ δύο εὐθειῶν $(o\alpha, o'\alpha')$ καὶ $(o\beta, o'\beta')$ καὶ $\gamma'\zeta'$ ἡ δευτέρα προβολὴ εὐθείας ΓΖ ἐπ' αὐτοῦ κειμένης (σχ. 134).

Τὰ σημεῖα γ' καὶ ζ', καθ' ἃ ἡ $\gamma'\zeta'$ τέμνει ἀντιστοίχως τὰς $o'\beta'$ καὶ $o'\alpha'$, εἶναι αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν σημείων Γ καὶ Ζ, καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα ΓΖ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου τέμνει τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΑ. Πρῶται προβολαὶ τῶν σημείων τούτων εἶναι τὰ σημεῖα γ καὶ ζ, καθ' ἃ αἱ ἐκ τῶν γ' καὶ ζ' ἠγμέναι κάθετοι ἐπὶ τὴν χψ τέμνουσιν ἀντιστοίχως τὰς $o\beta$ καὶ $o\alpha$. Ἡ $\gamma\zeta$ ἄρα εἶνα ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας ΓΖ τῆς κειμένης ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ ἐχούσης δευτέραν προβολὴν τὴν $γ'ʒ'$.

Ὁμοίως κατασκευάζεται ἡ δευτέρα προβολὴ εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, ὅταν δοθῇ ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς.

166. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου νὰ γραφῇ πρώτη ἰχνοπαράλληλος.***

1ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου $γ$ τῆς χψ (σχ.133)ἀχθῇ παράλληλος $γδ$ πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου, ἡ παράλληλος αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρώτη προβολὴ πρώτης τινὸς ἰχνοπαραλλήλου τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (§ 158). Τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης δεύτερον ἴχνος εἶναι τὸ $γ'$, καθ' ὅ ἡ ἐκ τοῦ $γ$ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ τέμνει τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου· ἑπομένως δευτέρα προβολὴ αὐτῆς εἶναι ἡ ἐκ τοῦ $γ'$ παράλληλος τῇ χψ εὐθεῖα $γ'δ'$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφομεν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον ($επ$, $ε'π'$).

2ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων (σχ. 134).

Ἐὰν ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως παράλληλος τῇ χψ, οἷον ἡ $γ'ʒ'$, δύναται νὰ θεωρηθῇ αὕτη ὡς δευτέρα προβολὴ πρώτης τινὸς ἰχνοπαραλλήλου τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἐξ αὐτῆς εὐκόλως ποριζόμεθα (§ 165, περίπτ. β') τὴν πρώτην προβολήν.

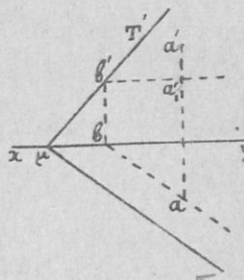
167.— ΠΡΟΒΛΗΜΑ.***Ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ ληφθῇ τυχὸν σημεῖον.***

Φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον.

168. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν θέσιν δοθέντος σημείου ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

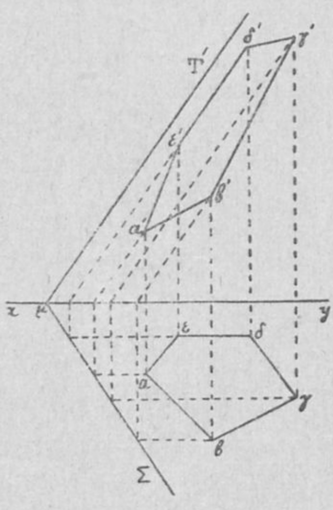
Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Σ μ Τ' καὶ τὸ σημεῖον ($α$,$α'$) (σχ. 135).

Ἐὰν ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς $α$ τοῦ δοθέντος σημείου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, ἡ κάθετος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἰς σημεῖον $Α_1$ τοῦ ὁποίου πρώτη προβολὴ εἶναι προφανῶς τὸ $α$, ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς δι' αὐτοῦ διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου ἢ καὶ (τυχούσης εὐθείας) τοῦ ἐπιπέδου. Τούτου τεθέντος, ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς πρώτης προβολῆς *α* τοῦ δοθέντος σημείου ἡ πρώτη προβολὴ *αβ* τῆς διὰ τοῦ A_1 διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου (ἢ καὶ τυχούσης εὐθείας) καὶ ἂς κατασκευασθῇ (§ 166) ἡ δευτέρα αὐτῆς προβολή. Ἐὰν αὕτη διέλθῃ διὰ τοῦ *α΄*, τὸ δοθὲν σημεῖον A θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἰχνοπαραλλήλου κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, τὸ δοθὲν σημεῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτοῦ, θὰ κεῖται δὲ ὑποκάτω ἢ ὑπεράνω αὐτοῦ, καθ' ὅσον ἡ κατηγμένη του εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς κατηγμένης *ββ΄* τῆς ἀχθείσης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου.



Σχ. 135 Σ

169. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Δοθείσης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν σχήματος κειμένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη προβολὴ αὐτοῦ.***



Σχ. 136

Ἔστω *αβγδε* (σχ. 136) ἡ πρώτη προβολὴ πενταγώνου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ μT΄. Ζητεῖται ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ.

Ἡ δευτέρα προβολὴ *α΄* τῆς κορυφῆς A θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης διερχομένης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου (ἢ καὶ τυχούσης εὐθείας) τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ *α* καθέτου ἐπὶ τὴν χψ. Ἡ δευτέρα προβολὴ *β΄* τῆς κορυφῆς B θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης διερχομένης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ *β* καθέτου ἐπὶ τὴν χψ. Ὁμοίως καὶ αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν λοιπῶν κορυφῶν.

Κατασκευάζοντες αὐτὰς καὶ ἐπιζευγύοντες καθ' ὃν τρόπον εἶναι καὶ αἱ πρῶται, ἔχομεν τὴν ζητουμένην δευτέραν προβολὴν *α′β′γ′δ′ε′* τοῦ πενταγώνου, τοῦ κειμένου ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ ἔχοντος πρώτην προβολὴν *αβγδε*.

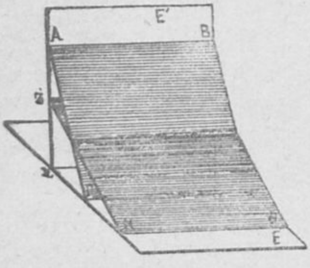
Ὁμοίως κατασκευάζεται ἡ πρώτη προβολή, ὅταν δοθῇ ἡ δευτέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ.

α΄) Ἐπίπεδα παράλληλα.

170. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, τὰ ὁμώνυμα ἴχνη αὐτῶν εἶναι παράλληλα, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.



Σχ. 137

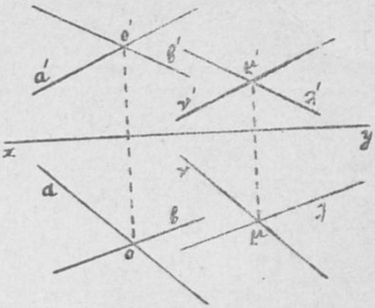
Ἀντιστρόφως· ἐὰν τὰ ὁμώνυμα ἴχνη δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα, καὶ τὰ ἐπίπεδα εἶναι, ἐν γένει, παρήλληλα· διότι αἱ γωνίαι, ἃς ἐν τῷ χώρῳ σχηματίζουσιν τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων, ἔχουσι τὰς πλευράς των παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρα.

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, ὅταν τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους. Οὕτω τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ (σχ. 137) τέμνουσιν ἄλληλα καίτοι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη των εἶναι παράλληλα.

171. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

1ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν $(o\alpha, o'\alpha')$ καὶ $(o\beta, o'\beta')$, καὶ (μ, μ') τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 138).

Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου $(\mu\ \mu')$ τὴν εὐθεῖαν $(\mu\nu, \mu'\nu')$ παράλληλον τῇ $(o\alpha, o'\alpha')$ καὶ τὴν $(\mu\lambda, \mu'\lambda')$ παράλληλον τῇ $(o\beta, o'\beta')$.

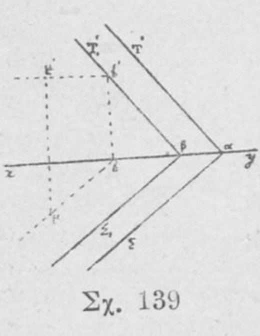


Σχ. 138

Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου, ἄν θέλωμεν, κατασκευάζομεν καὶ τὰ ἴχνη (§ 161).

2ον. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον δεδομένον διὰ τῶν ἴχνῶν αὐτοῦ αΣ, αΤ′, καὶ (μ, μ') τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 139).

Τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου δέον νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ δοθέντος· ἑπομένως καὶ αἱ ἰχνοπαράλληλοι αὐτοῦ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰ ὁμώνυμα ἴχνη αὐτοῦ. Τούτου τεθέντος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου (μ, μ'), οἷον τὴν πρώτην. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ φέρωμεν ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς μ τοῦ δοθέντος σημείου παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος Σ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς μ' παράλληλον τῇ χψ.

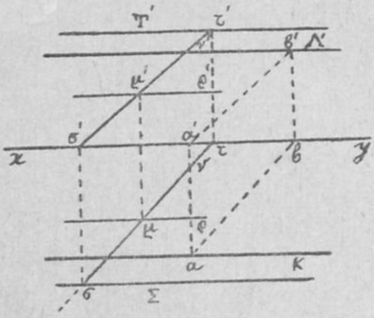


Σχ. 139

Προσδιορίζοντες τὸ δεύτερον ἴχνος (β, β') τῆς ἀχθείσης ἰχνοπαραλλήλου καὶ ἄγοντες ἐκ τοῦ β' παράλληλον πρὸς τὸ ἴχνος Τ′ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἔχομεν τὸ δεύτερον ἴχνος T_1', τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Ἄγοντες δὲ καὶ ἐκ τοῦ σημείου β, καθ' ὃ τὸ T_1' τέμνει τὴν χψ, παράλληλον πρὸς τὸ Σ, ἔχομεν καὶ τὸ πρῶτον ἴχνος Σ_1 τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Ἐὰν τὸ β πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, φέρομεν καὶ δευτέραν ἰχνοπαράλληλον τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, προσδιορίζομεν τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτῆς καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

3ον. Ἔστω τὸ δοθὲν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ χψ, Κ καὶ Λ′ τὰ δύο ἴχνη αὐτοῦ (σχ. 140) καὶ ($\mu\mu'$) τὸ δοθὲν σημεῖον.



Σχ. 140

Ἐὰν γράψωμεν ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου τυχοῦσαν εὐθεῖαν ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ὡς ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἰχνῶν του, ἔστω τοῦ Λ′, τοῦ ὁποίου καθὼς γνωρίζομεν ἡ πρώτη προβολὴ συμπίπτει μετὰ τῆς χψ. Οὕτως ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴνπρώτην. Φέρομεν δηλαδὴ τὴν εὐθεῖαν ($\mu\nu, \mu'\nu'$) παράλληλον τῇ ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) καὶ τὴν ($\mu\rho$, $\mu'\rho$) παράλληλον τῇ εὐθείᾳ (χψ, Λ′). Τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν θέλωμεν τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, προσδιορίζομεν τὰ ἴχνη σ καὶ τ' τῆς εὐθείας ($\mu\nu, \mu'\nu'$) καὶ ἐξ αὐτῶν φέρομεν παραλλήλους τῇ χψ. Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Ἡ κατασκευὴ ἁπλουστεύεται, ἂν ἡ βοηθητικὴ εὐθεῖα (αβ, α′β′) κατασκευασθῇ οὕτως, ὥστε ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς νὰ διέρχηται διὰ τῆς πρώτης προβολῆς τοῦ δοθέντος σημείου. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὴν (μρ, μ′ρ′), ὅταν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ.

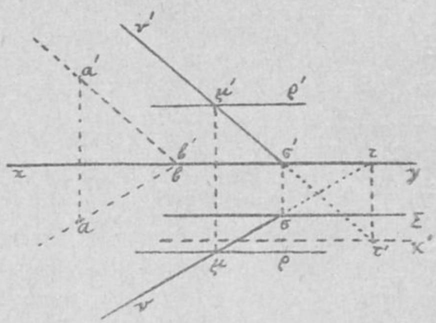
4ον. Ἔστω τὸ δοθὲν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς χψ καὶ τοῦ σημείου (α,α') καὶ (μ, μ') τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 141).

Ἑνοῦντες τὸ σημεῖον (α,α') τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου μετὰ τοῦ τυχόντος σημείου (β,β') τῆς χψ, ἔχομεν δύο εὐθείας τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τὰς ($\alpha\beta,\alpha'\beta'$) καὶ τὴν χψ.

Ἄγοντες ὅθεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου (μ, μ') τὴν εὐθεῖαν

$(\mu\rho, \mu'\rho')$ παράλληλον τῇ χψ καὶ τὴν $(\mu\nu, \mu'\nu')$ παράλληλον τῇ $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, ὁρίζομεν δι' αὐτῶν τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ἂν θέλωμεν, κατασκευάζομεν καὶ τὰ ἴχνη αὐτοῦ Σ καὶ Κ' προσδιορίζοντες τὰ ἴχνη σ καὶ τ' τῆς εὐθείας $(\mu\nu, \mu'\nu')$ καὶ ἄγοντες ἐξ αὐτῶν παραλλήλους τῇ χψ.



Σχ. 141

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι τὸ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν μέρος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου εὑρίσκεται ἐν τῇ τετάρτῃ διέδρῳ.

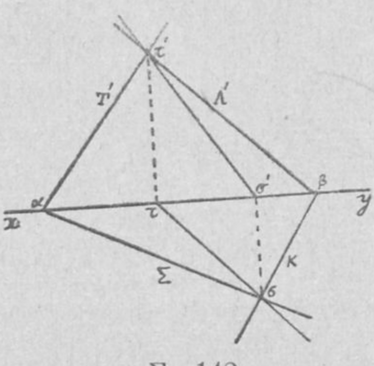
Σημείωσις.—Ὅταν πρόκειται νὰ παρασταθῇ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον διὰ τῶν ἰχνῶν του, ἡ $(\mu\rho, \mu'\rho')$ συνήθως παραλείπεται.

β') Ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦντα

172. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων.***

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται, ἐν γένει, διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ δύο σημείων τῆς ζητουμένης τομῆς. Διακρίνομεν δὲ διαφόρους περιπτώσεις.

1ον. ***Ὅταν τὰ ἐπίπεδα δίδωνται διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτῶν, τὰ δὲ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν κεῖνται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως.***



Σχ. 142

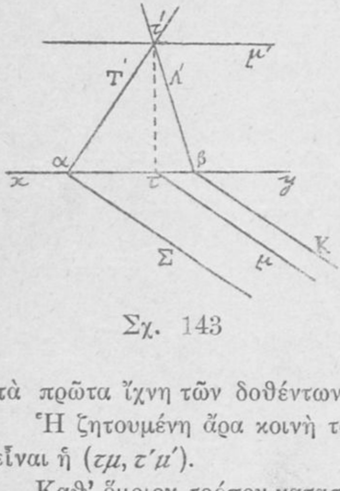
Ἔστωσαν ΣαΤ' καὶ ΚβΛ' τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ.142).

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι κοινὴ ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων, τὰ ἴχνη αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν αὐτῶν. Τὰ σημεῖα ἄρα σ καὶ τ', καθ' ἃ ἀλληλοτομοῦσι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τῶν ἐπιπέδων, εἶναι ἀντιστοίχως τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον ἴχνος τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς αὐτῶν. Προσδιορίζοντες τὴν δευτέραν προβολὴν σ' τοῦ πρώτου ἴχνους σ καὶ τὴν πρώτην προβολὴν τ τοῦ δευτέρου ἴχνους τ', ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς $\sigma\tau$ καὶ $\sigma'\tau'$ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

2ον. ***Ὅταν δύο ὁμώνυμα ἴχνη τῶν δοθέντων ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα.***

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΣαΤ′ καὶ ΚβΛ′, ὧν τὰ πρῶτα ἴχνη Σ καὶ Κ εἶναι παράλληλα (σχ. 143).

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα, τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν ἔχει ἀφανισθῇ εἰς ἄπειρον. τουτέστιν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον. Ἑπομένως ἡ μὲν δευτέρα προβολὴ αὐτῆς, διερχομένη διὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους της τ', εἶναι παράλληλος τῇ χψ, ἡ δὲ πρώτη προβολή, διερχομένη διὰ τῆς πρώτης προβολῆς τ τοῦ δευτέρου ἴχνους τ', εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.



Σχ. 143

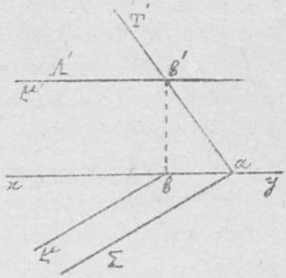
Ἡ ζητουμένη ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΣαΤ′ καὶ ΚβΛ′ εἶναι ἡ $(\tau\mu, \tau'\mu')$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζεται ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων, ὧν τὰ δεύτερα ἴχνη εἶναι παράλληλα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς εἶναι παράλληλος τῇ χψ, ἡ δὲ δευτέρα, παράλληλος πρὸς τὰ δεύτερα ἴχνη τῶν ἐπιπέδων.

Σημείωσις.—Ἐὰν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ἑπομένως ἡ ἐπ' αὐτὸ προβολή της εἶναι ἓν σημεῖον, τὸ ἴχνος αὐτῆς.

3ον. ***Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.***

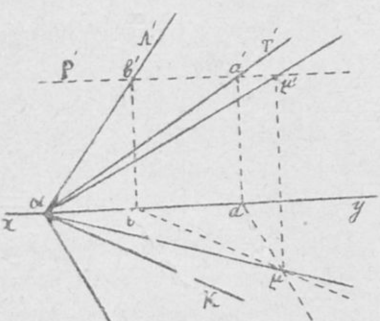
῎Εστω ΣαΤ′ τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων καὶ Λ′ τὸ ἄλλο, παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁριζόμενον ὑπὸ μόνου τοῦ δευτέρου ἴχνους του Λ′ (σχ. 144).



Σχ. 144

᾽Επειδὴ τὸ ἐπίπεδον Λ′εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΣαΤ′ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ Σ, τουτέστιν κατὰ πρώτην ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ. Τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης δεύτερον ἴχνος εἶναι τὸ σημεῖον β′ τῆς τομῆς τῶν δευτέρων ἰχνῶν τῶν ἐπιπέδων. ῾Επομένως δευτέρα προβολὴ αὐτῆς εἶναι ἡ ἐκ τοῦ β′ παράλληλος β′μ′ τῇ χψ, συμπίπτουσα μετὰ τῆς Λ′, πρώτη δὲ προβολή, ἡ ἐκ τοῦ β παράλληλος βμ πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος Σ τοῦ ἐπιπέδου ΣαΤ′.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, ὅταν τὸ ἕτερον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.



Σχ. 145

4ον. ***Οταν τὰ ἐπίπεδα δίδωνται διὰ τῶν ἰχνῶν, ἀλλὰ τέμνωσι τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

῎Εστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΣαΤ′ καὶ ΚαΛ′ τέμνοντα ἀμφότερα τὴν χψ εἰς τὸ σημεῖον α (σχ. 145).

Τὸ σημεῖον α, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων, εἶναι σημεῖον καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν, συμπίπτον μετὰ τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ· ἀρκεῖ ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς.

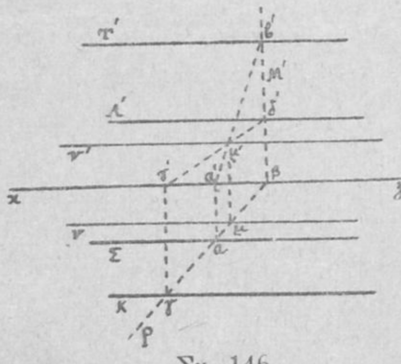
Πρὸς τοῦτο φέρομεν βοηθητικὸν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, ἔστω πρὸς τὸ πρῶτον, οἷον τὸ Ρ', καὶ προσδιορίζομεν τὰς τομὰς αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω, μεθ' ἑκατέρου τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

Τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Ρ' ὑπὸ μὲν τοῦ ἐπιπέδου ΣαΤ' εἶναι ἡ ἐκ τοῦ σημείου $(α,α')$ πρώτη ἰχνοπαράλληλος τούτου $(αμ, α'μ')$, ὑπὸ δὲ τοῦ ἐπιπέδου ΚαΛ', ἡ ἐκ τοῦ σημείου $(β,β')$ ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ $(βμ, β'μ')$.

Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον $(μ,μ')$, ὅπερ εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἐπιζευγνύοντες τοῦτο μετὰ τοῦ σημείου α λαμβάνομεν τὰς προβολὰς $αμ$ καί $αμ'$ τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

5ον. ***Ὅταν τὰ ἴχνη ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.***

Ἔστωσαν (Σ,Τ') καὶ (Κ,Λ') τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 146). Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα τῇ χψ, καὶ ὡς ἐκ τούτου, ἂν τέμνωσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι παράλληλος τῇ χψ· ἀρκεῖ ἄρα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν μόνον σημεῖον αὐτῆς.



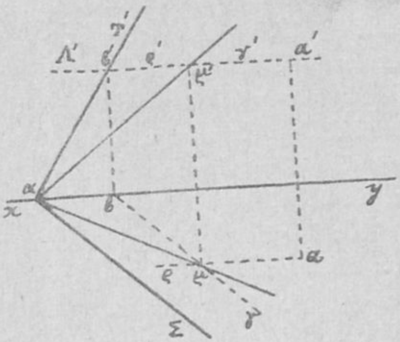
Σχ. 146

Πρὸς τοῦτο φέρομεν βοηθητικὸν ἐπίπεδον ΡβΜ' πρῶτον προβάλλον καὶ προσδιορίζομεν τὰς τομὰς αὐτοῦ $(αβ, α'β')$ καὶ $(γβ, γ'δ')$ μεθ' ἑκατέρου τῶν δοθέντων. Τὸ σημεῖον $(μ,μ')$ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων· ἑπομένως αἱ ἐκ τῶν προβολῶν αὐτοῦ $μ$ καὶ $μ'$ παράλληλοι $μν$ καὶ $μ'ν'$ τῇ χψ εἶναι ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

6ον. ***Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων διέρχηται διὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.***

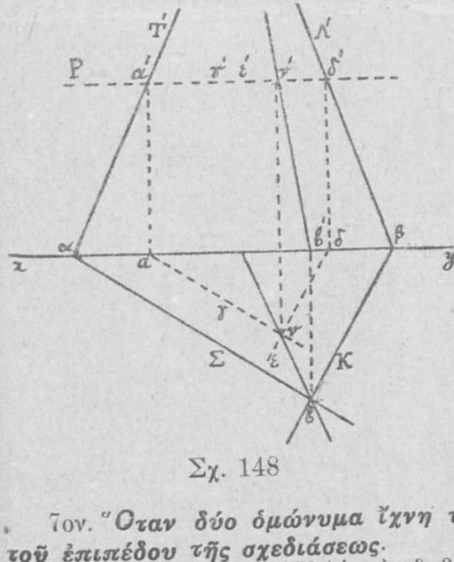
Ἔστωσαν (χψ, αα′) καὶ ΣαΤ′ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 147).

Τὸ σημεῖον α εἶναι κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων τούτων· ἀρκεῖ ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.



Σχ. 147

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου (α,α′) βοηθητικὸν ἐπίπεδον Λ′ παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ μὲν ἐπίπεδον (χψ, αα′) κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ χψ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου (α,α′) καὶ ἔχουσαν ἑπομένως προβολὰς τὰς ἐκ τῶν σημείων α καὶ α′ παραλλήλους τῇ χψ εὐθείας αρ καὶ α′ρ′, τὸ δὲ ΣαΤ′ κατὰ τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ (βγ, β′γ′). Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ σημεῖον (μ,μ′), ὅπερ εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἐπιζευγνύοντες τὰς προβολὰς μ καὶ μ′ τοῦ σημείου τούτου μετὰ τοῦ α λαμβάνομεν τὰς προβολὰς αμ καὶ αμ′ τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.



Σχ. 148

7ον. ***Ὅταν δύο ὁμώνυμα ἴχνη τέμνωσιν ἄλληλα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως.***

Ἔστωσαν ΣαΤ′ καὶ ΚβΛ′ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 148), ὧν τὰ δεύτερα ἴχνη τέμνουσιν ἄλληλα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως.

Τὸ σημεῖον (β,β') τῆς τομῆς τῶν πρώτων ἴχνῶν εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων. Ἵνα δὲ προσδιορίσωμεν καὶ ἄλλο σημεῖον αὐτῆς, φέρομεν βοηθητικὸν ἐπίπεδον P, παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ κατασκευάζομεν τὰς τομὰς αὐτοῦ $(\alpha\gamma,\ \alpha'\gamma')$ καὶ $(\delta\varepsilon,\ \delta'\varepsilon')$ μεθ' ἑκατέρου τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον (ν,ν'), ὅπερ προφανῶς εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἡ ζητουμένη ἄρα κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα $(\beta\nu,\beta'\nu')$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζεται ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, ὅταν τὰ πρῶτα ~~δεύτερα~~ ἴχνη αὐτῶν τέμνωσιν ἄλληλα ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως.

8ον. ***Ὅταν καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα ἴχνη τῶν δοθέντων ἐπιπέδων τέμνωσιν ἄλληλα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως.***

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ φέρομεν δύο βοηθητικὰ ἐπίπεδα, ὡς ἀνωτέρω, καὶ προσδιορίζομεν δύο σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

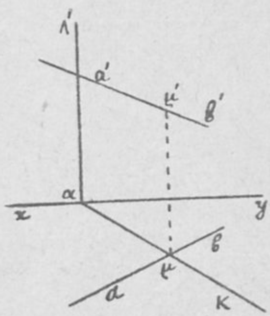
173. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις δοθείσης εὐθείας πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος φέρομεν διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας βοηθητικὸν ἐπίπεδον καὶ κατασκευάζομεν τὴν κοινὴν τομὴν αὐτοῦ καὶ τοῦ δοθέντος. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων, θὰ τέμνῃ ἀναγκαίως καὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ἂν εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἂν δὲ συμπίπτῃ μετ' αὐτῆς, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον λαμβάνεται συνήθως τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον προβάλλον τὴν εὐθεῖαν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα δύνανται νὰ ἔχωσι διαφόρους θέσεις ὡς πρὸς τὰ προβολ. ἐπίπεδα καὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, διακρίνομεν τὰς ἑπομένας περιπτώσεις.

1ον. ***Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι προβάλλον.***

Ἔστω ΚαΛ΄ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καὶ ($αϐ, α'ϐ'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 149).



Σχ. 149

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ θέσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον κρίνεται ἐκ τῆς θέσεως τῆς πρώτης προβολῆς αὐτῆς πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου. Τῷ ὄντι, ἄν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ ὀφείλει νὰ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ εἶναι προβάλλον. Ἡ πρώτη ἄρα προβολὴ τῆς εὐθείας πρέπει νὰ τέμνῃ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι ἡ εὐθεῖα ($αϐ, α'ϐ'$) τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΚαΛ΄ εἰς σημεῖον Μ ἔχον πρώτην προβολὴν τὸ σημεῖον $μ$, καθ' ὃ ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς $αϐ$ τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος Κ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ δευτέρα προβολὴ $μ'$ τοῦ κοινοῦ σημείου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς $α'ϐ'$ καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ $μ$ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.

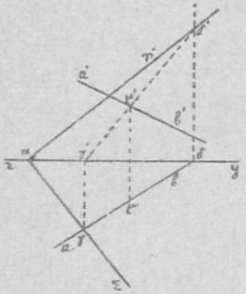
Ὁμοίως, ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι δεύτερον προβάλλον, ἡ θέσις εὐθείας πρὸς αὐτὸ εὑρίσκεται ἐκ τῆς θέσεως τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς εὐθείας πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου.

2ον. ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του καὶ κλίνῃ πρὸς ἀμφότερα τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα.***

Ἔστω ΣαΤ΄ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ($αϐ, α'ϐ'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 150).

Φέρομεν τὸ πρῶτον προβάλλον αὐτὴν ἐπίπεδον. Τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὸ πρῶτον ἴχνος συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην προβολὴν $αϐ$ τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ δὲ δεύτερον ἴχνος εἶναι ἡ ἐκ τοῦ $δ$

κάθετος ἐπὶ τὴν χψ. Κοινή ἄρα τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ δοθέντος (§ 172, περίπτ.α') εἶναι ἡ (γδ, γ'δ'). Τῶν εὐθειῶν (αβ,α'β') καὶ (γδ, γ'δ') αἱ μὲν δεύτεραι προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ μ', αἱ δὲ πρῶται συμπίπτουσιν. Ἑπομένως (§ 151,σημ.) ἡ (αβ,α'β') τέμνει τὴν (γδ, γ'δ') κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΣαΤ' εἰς τὸ σημεῖον (μ,μ').

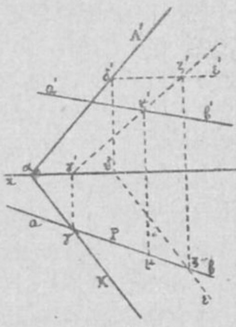


Σχ. 150

Σημείωσις.— Ὅταν αἱ προβολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας κλίνωσι πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους τόσον, ὥστε τὸ ἐπὶ ταύτην κάθετον ἴχνος ἀμφοτέρων τῶν προβαλλόντων ταύτην ἐπιπέδων νὰ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ΚαΛ' τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (αβ, α'β') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 151).

Τὸ πρῶτον ἴχνος Ρ τοῦ πρώτου προβάλλοντος αὐτὴν ἐπιπέδου τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος Κ τοῦ δοθέντος εἰς τὸ σημεῖον γ, ὅπερ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν. Τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτῆς δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ, διότι τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου πίπτειἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως. Ἀνάγκη ὅθεν νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἄλλο σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἢ διὰ τὸ ἁπλούστερον, πρώτην τινὰ ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ (δε, δ'ε') καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸ βοηθητικὸν ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει(α' περίπτ.) πρώτην προβολὴν τὸ σημεῖον ζ, καθ' ὃ ἡ πρώτη προβολὴ δε τῆς ἀχθείσης ἰχνοπαραλλήλου τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος Ρ τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου, δευτέραν δὲ προβολὴν τὸ σημεῖον ζ', καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ ζ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ τέμνει τὴν δευτέραν προβολὴν δ' ε' τῆς ἰχνοπραλλήλου.

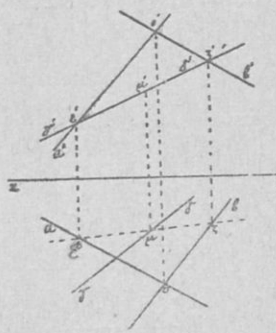


Σχ. 151

Τὸ σημεῖον (ζ, ζ') εἶναι κοινὸν προφανῶς τῶν δύο ἐπιπέδων, ὅπως καὶ τὸ (γ, γ'). Ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΚαΛ' καὶ τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν εἶναι ἡ (γζ, γ'ζ'). Ἡ εὐθεῖα (αβ, α'β') τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον (μ, μ')· τέμνει ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ΚαΛ' εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

3ον. ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον δίδεται διὰ δύο εὐθειῶν.***

Ἔστω (οαβ,ο'α'β') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (γδ, γ'δ') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 152).

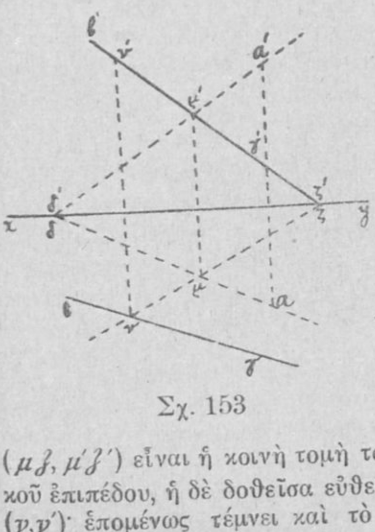


Σχ. 152

Τὸ δεύτερον προβάλλον τὴν εὐθεῖαν (γδ, γ'δ') ἐπίπεδον τέμνει τὴν (οα,ο'α') εἰς τὸ σημεῖον (ε,ε') (α' περίπτ.), τὴν δὲ (οβ,ο'β') εἰς τὸ (ζ,ζ'). Ἡ εὐθεῖα ἄρα (εζ, ε'ζ') εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ βοηθητικοῦ· ἐπειδὴ δὲ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (γδ, γ'δ') τέμνει τὴν (εζ,ε'ζ') εἰς τὸ σημεῖον (μμ'), ἕπεται ὅτι τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον (οαβ, ο'α'β') εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

4ον. ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους.***

Ἔστω (χψ, αα') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (βγ,β'γ') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 153).



Σχ. 153

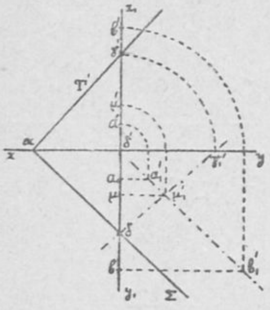
Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον (α,α') δι' εὐθείας μετὰ τοῦ τυχόντος σημείου (δ,δ') τῆς χψ, τὸ δοθὲν ἐπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν χψ καὶ (αδ,α'δ').

Τὸ δεύτερον προβάλλον τὴν (βγ, β'γ') ἐπίπεδον τέμνει τὴν (αδ, α'δ') εἰς τὸ σημεῖον (μ, μ'), τὴν δὲ χψ εἰς τὸ (ζ, ζ'). Ἡ εὐθεῖα ἄρα (μζ, μ'ζ') εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον (ν,ν')· ἑπομένως τέμνει καὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

5ον. ***Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.***

Ἔστω ΣαΤ′ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ($αα'$, $ββ'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 154) κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.

Τὸ πρῶτον προβάλλον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπίπεδον τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ εὐθεῖαν, ἧς αἱ προβολαὶ συμπίπτουσι μετὰ τῶν προβολῶν τῆς δοθείσης εὐθείας, ἴχνη δὲ εἶναι τὰ σημεῖα $δ$ καὶ $γ'$. Πρὸς εὕρεσιν ὅθεν τῆς πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν εὐθειῶν τούτων ἀνάγκη παρίσταται (§ 152) νὰ μεταθέσωμεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς νέας δευτέρας προβολὰς $α_1'β_1'$ καὶ $γ_1'δ$ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων. Ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι μετετέθη τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον διὰ τὸ ἁπλούστερον, οὕτως, ὥστε νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ εἶναι ἡ $χ_1ψ_1$. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ $α_1'β_1'$ τέμνει τὴν $γ_1'δ$ εἰς τὸ σημεῖον $μ_1'$. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐν τῷ προβολ. συστήματι $χ_1ψ_1$. Ἄγοντες ἐκ τοῦ $μ_1'$ κάθετον ἐπὶ τὴν $χ_1ψ_1$ προσδιορίζομεν τὴν πρώτην προβολὴν $μ$, λαμβάνοντες δὲ καὶ τὸ τμῆμα $δ'μ'$ ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὸ τμῆμα $μμ_1'$ προσδιορίζομεν καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν $μ'$ τοῦ κοινοῦ σημείου ἐν τῷ προβολ. συστήματι χψ.



Σχ. 154

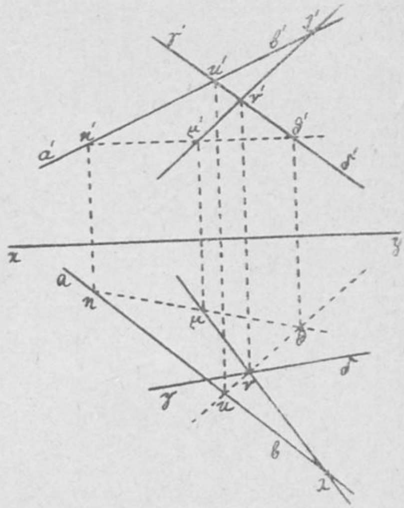
Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ($αβ'$, $α'β'$), ὡς τέμνουσα τὴν ($γδ$, $γ'δ'$), τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον ΣαΤ′ εἰς τὸ σημεῖον ($μ$, $μ'$).

Ἐφαρμογαί

174. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.***

Ἔστωσαν ($αβ$,$α'β'$) καὶ ($γδ$, $γ'δ'$) αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι καὶ ($μ$, $μ'$) τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 155).

Θεωρητικὴ λύσις. Ἡ ἑτέρα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Μ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἡ ἄλλη εὐθεῖα ΓΔ τέμνει, ἐν γένει, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς σημεῖον Ν, ἡ δὲ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ δοθέντος, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Διότι τέμνει προφανῶς τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ν, διέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Μ, τέμνει δὲ ἐν γένει καὶ τὴν ΑΒ, ὡς κειμένη μετ' αὐτῆς ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.



Σχ. 155

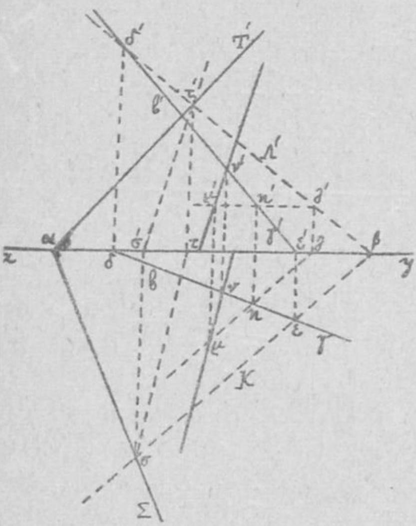
Γραφικὴ λύσις. Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου (μ, μ') τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον $(\mu n, \mu' n')$ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ τοῦ σημείου (μ, μ'), οὕτω δὲ ἔχομεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν. Προσδιορίζομεν (§ 173,3ον) τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ ἐπιπέδου τὸ σημεῖον (ν, ν'), καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον καὶ ἑνοῦντες τοῦτο μετὰ τοῦ (μ, μ') ἔχομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν $(\mu\nu, \mu'\nu')$.

Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀκριβής, τὰ σημεῖα λ καὶ λ', καθ' ἃ ἀλληλοτομοῦσιν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\mu\nu, \mu'\nu')$, θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν $\chi\psi$, ὡς προβολαὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

175. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον***.

Ἔστω (μ, μ') τὸ δοθὲν σημεῖον, $(\beta\gamma, \beta'\gamma')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ΣαΤ' τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 156).

Θεωρητικὴ λύσις. Τὸ σημεῖον Μ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΓ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει, ἐν γένει, τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 156

Διότι, ὡς παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, κεῖται δὲ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΒΓ· ἑπομένως τέμνει, ἐν γένει, τὴν ΒΓ.

Γραφικὴ λύσις. Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ σημείου (μ, μ') διερχομένην πρώτην ἰχνοπαράλληλον ($\mu\pi$, $\mu'\pi'$) τοῦ ἐπιπέδου ΜΒΓ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων. Προσδιορίζομεν τὰ ἴχνη αὐτοῦ βΚ καὶ βΛ', εἶτα δὲ καὶ τὴν κοινὴν τομὴν(στ, σ'τ') αὐτοῦ καὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΣαΤ'. Ἄγοντες τέλος ἐκ τῶν προβολῶν μ καὶ μ' τοῦ δοθέντος σημείου παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς $\sigma\tau$ καὶ $\sigma'\tau'$, ἔχομεν τὰς προβολὰς $\mu\nu$, καὶ $\mu'\nu'$ τῆς ζητουμένης εὐθείας.

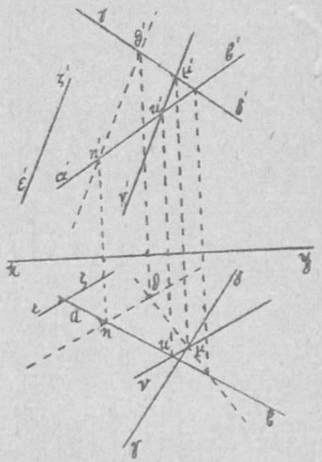
Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀκριβής, τὰ σημεῖα ν καὶ ν', καθ' ἃ ἀλληλοτομοῦσιν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν (βγ, β'γ') καὶ (μν, μ'ν'), θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, ὡς προβολαὶ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν.

176. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τέμνουσα δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.***

Ἔστωσαν ($\alpha\beta$,$\alpha'\beta'$), ($\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$) καὶ ($\varepsilon\zeta$, $\varepsilon'\zeta'$) αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι (σχ. 157). Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ($\varepsilon\zeta$, $\varepsilon'\zeta'$) καὶ τέμνουσα τὰς δύο ἄλλας.

Θεωρητικὴ λύσις. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Η τῆς ΑΒ ἀχθῇ παράλληλος ΗΘ τῇ ΕΖ, ὁρίζεται ἐπίπεδον ΑΒΘ παράλληλον τῇ ΕΖ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ τέμνει, ἐν γένει, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς σημεῖον Μ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀγομένη παράλληλος τῇ ΗΘ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διότι, παράλληλος οὖσα τῇ ΗΘ, εἶναι παράλληλος καὶ τῇ ΕΖ, ὡς ἠγμένη δὲ ἐκ τοῦ σημείου Μ τέμνει προφανῶς τὴν ΓΔ κεῖται δὲ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΘ ἐφ᾽ οὗ κεῖται καὶ ἡ ΗΘ· κατ᾽ ἀκολουθίαν τέμνει καὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 157

Γραφικὴ λύσις. Ἐκ τυχόντος σημείου (η, η') τῆς εὐθείας $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ φέρομεν παράλληλον $(\eta\vartheta, \eta'\vartheta')$ τῇ εὐθείᾳ $(\varepsilon\zeta, \varepsilon'\zeta')$. Αἱ εὐθεῖαι $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\eta\vartheta, \eta'\vartheta')$ ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $(\varepsilon\zeta, \varepsilon'\zeta')$. Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς (μ, μ') τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑπὸ τῆς εὐθείας $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἐπιπέδου. Ἄγομεν τέλος ἐκ τῶν προβολῶν μ καὶ μ' τοῦ σημείου τούτου τὰς εὐθείας $\mu\nu$ καὶ $\mu'\nu'$ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς προβολὰς τῆς εὐθείας $(\eta\vartheta, \eta'\vartheta')$ καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν $(\mu\nu, \mu'\nu')$.

Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀκριβὴς τὰ σημεῖα κ καὶ κ', καθ᾽ ἃ ἀλληλομοῦσιν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ καὶ $(\mu\nu, \mu'\nu')$, θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν $\chi\psi$, ὡς προβολαὶ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

1). Σημείου κειμένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου δίδονται ἡ κατηγμένη καὶ ἡ τεταγμένη. Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ αὐτοῦ.

2). Δοθεισῶν τῶν πρώτων προβολῶν τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραπλεύρου καὶ τῶν δευτέρων προβολῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς τετάρτης κορυφῆς.

3). Δοθείσης τῆς δευτέρας προβολῆς ἐπιπέδου ἑξαγώνου καὶ τῶν πρώτων προβολῶν τριῶν διαδοχικῶν κορυφῶν του, νὰ κατασκευασθῇ ὅλη ἡ πρώτη προβολή του.

4). Νὰ κατασκευασθῶσι τὰ ἴχνη ἐπιπέδου ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν, ὧν αἱ ἑτερώνυμοι προβολαὶ συμπίπτουσι.

5). Δοθείσης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἑνὸς σημείου τῆς εὐθείας, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη προβολὴ αὐτῆς.

6). Δοθείσης τῆς πρώτης προβολῆς τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ του, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ τρεῖς κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

7). Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.

8). Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους καὶ ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς αὐτήν.

9). Νὰ ἀχθῇ ὁριζόντιος εὐθεῖα δεδομένου μήκους ἔχουσα τὰ ἄκρα της ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.

10). Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, ὧν αἱ ἑτερώνυμοι προβολαὶ συμπίπτουσι, νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ γραμμῇ τοῦ ἐδάφους τέμνουσα αὐτάς.

11). Εὑρεῖν τὴν κοινὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, ὧν τὸ ἓν δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του, τὸ δὲ ἄλλο διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

12). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων δεδομένων ἀμφοτέρων διὰ εὐθειῶν τεμνομένων.

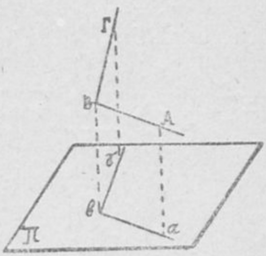
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΠΕΡΙ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΠ ΑΛΛΗΛΑ

177. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Ἐὰν ὀρθῆς γωνίας ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ὀρθή.***

Ἔστω ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΒΓ ἔχουσα τὴν πλευρὰν ΒΑ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (σχ.158)· λέγω ὅτι ἡ προβολὴ αὐτῆς *αϐγ* ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὀρθή.

Διότι ἡ ΒΑ, παράλληλος οὖσα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολήν της *αϐ* καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν προβάλλουσαν Β*ϐ*· ἐπειδὴ δὲ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ*γϐ*. Καὶ ἡ παράλληλος ἄρα πρὸς αὐτὴν *αϐ* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ*γϐ*, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὴν *ϐγ*. Ἡ γωνία ἄρα *αϐγ* εἶναι ὀρθή.



Σχ. 158

178. ΘΕΩΡΗΜΑ (ἀντίστροφον).—***Ἐὰν γωνίας ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ὀρθή, ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή.***

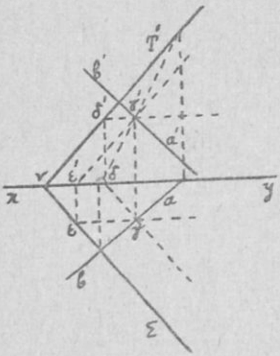
Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ δὲ προβολή της *αϐγ* ὀρθή· λέγω ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ὀρθή.

Διότι ἡ ΑΒ, παράλληλος οὖσα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν προβολήν της *αϐ*. Ἀλλ' ἡ *αϐ* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν προβάλλουσαν Β*ϐ* καὶ ἐπὶ τὴν *ϐγ* ἐξ ὑποθέσεως· ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ*ϐγ*. Καὶ ἡ παράλληλος ἄρα πρὸς αὐτὴν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ*ϐγ*, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ὀρθή.

179. ΘΕΩΡΗΜΑ.—***Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον πρέπει αἱ προβολαί της νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ, ἐφ' ὅσον τὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι παράλληλον τῇ γραμμῇ τοῦ ἐδάφους.***

1ον. Ἔστω ἡ εὐθεῖα $(a\beta, a'\beta')$ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣνΤ′ (σχ. 159)· λέγω ὅτι αἱ προβολαὶ αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη Σ καὶ Τ′ τοῦ ἐπιπέδου.

Διότι, ἄν εὑρεθῇ τὸ σημεῖον (γ, γ') καθ' ὃ ἡ κάθετος αὕτη τέμνει τὸ ἐπίπεδον καὶ ἀχθῇ ἡ διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένη πρώτη ἰχνοπαράλληλος $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὑπὸ τῆς καθέτου $(a\beta, a'\beta')$ καὶ τῆς ἀχθείσης ἰχνοπαραλλήλου σχηματιζομένη γωνία ΑΓΔ θὰ εἶναι ὀρθή, θὰ ἔχῃ δὲ τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν, τὴν $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$, παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον· ἑπομένως ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς $a\gamma\delta$ θὰ εἶναι ὀρθή, τουτέστιν ἡ $a\beta$ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\gamma\delta$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος Σ τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 159

Ὁμοίως, ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ (γ, γ') ἡ δευτέρα ἰχνοπαράλληλος $(\gamma\varepsilon, \gamma'\varepsilon')$ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς $(a\beta, a'\beta')$ ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΕ, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον· ἑπομένως ἡ δευτέρα προβολὴ $a'\gamma'\varepsilon'$ τῆς γωνίας ταύτης θὰ εἶναι ὀρθή, τουτέστιν ἡ $a'\beta'$ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\gamma'\varepsilon'$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος Τ′ τοῦ ἐπιπέδου.

2ον. Ἔστω ἡ εὐθεῖα $(a\beta, a'\beta')$, τῆς ὁποίας αἱ προβολαὶ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ′ (σχ. 159)· λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

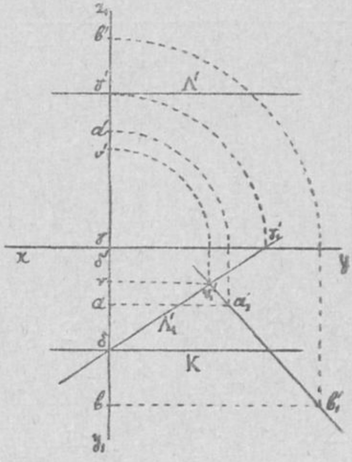
Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου (γ, γ') καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς $(a\beta, a'\beta')$ γωνίαν ΑΓΔ ἔχουσαν τὴν μίαν τῶν πλευρῶν παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον. Τῆς γωνίας ταύτης ἡ πρώτη προβολὴ $αγδ$ εἶναι ὀρθή· διότι ἡ $αβ$, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὸ Σ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $γδ$, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό. Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΔ, ὡς ἔχουσα τὴν πρώτην προβολήν της $αγδ$ ὀρθὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν της παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, εἶναι ὀρθή· ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον ΓΕ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἑπομένως ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ′, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Σημείωσις.—Ἐν τῷ ἀντιστρόφῳ θεωρήματι ἐξῃρέθη ἡ περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῇ χψ.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ($αβ, α'β'$) (σχ. 160) ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ παράλληλον τῇ χψ ἐπίπεδον (Κ,Λ′) διὰ τὸν λόγον ὅτι αἱ προβολαὶ αὐτῆς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη αὐτοῦ, τότε θὰ ἦτο, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον τῇ χψ, ὅπερ ἀδύνατον.



Σχ. 160

Ἵνα λοιπὸν διακρίνωμεν, ἂν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ εὐθεῖα ($αβ, α'β'$) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ προσδιορίζομεν, ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι, τὸ δεύτερον ἴχνος $Λ_1'$ τοῦ ἐπιπέδου (Κ,Λ′) καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν $α_1'β_1'$ τῆς εὐθείας. Ἂν δὲ ἡ $α_1'β_1'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ $Λ_1'$, ὡς συμβαίνει ἐν τῷ προκειμένῳ σχεδιάσματι, ἡ εὐθεῖα ($αβ, α'β'$) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Κ,Λ′).

180. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.***

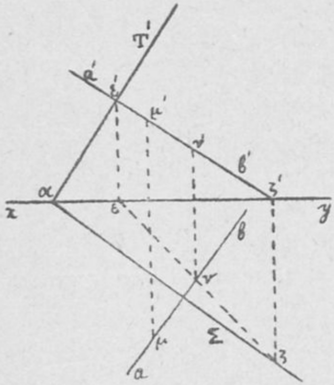
Διακρίνομεν τὰς ἑπομένας περιπτώσεις.

α′) ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του, μὴ παραλλήλων τῇ χψ.***

Ἔστω ΣαΤ΄ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (μ,μ΄) τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 161).

Φέρομεν ἐκ τῶν προβολῶν *μ* καὶ *μ΄* τοῦ δοθέντος σημείου τὰς εὐθείας *μβ* καὶ *μ΄β΄* καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα (*μβ*, *μ΄β΄*) εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (§ 179).

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ποδὸς αὐτῆς κατασκευάζομεν τὴν κοινὴν τομὴν (*εζ*, *ε΄ζ΄*) τοῦ ἐπιπέδου ΣαΤ΄ καὶ ἑνὸς τῶν προβαλλόντων τὴν κάθετον ἐπιπέδων, π.χ. τοῦ δευτέρου. Τὸ σημεῖον (*ν*,*ν΄*), καθ' ὃ ἡ (*μβ*, *μ΄β΄*) τέμνει τὴν (*εζ*, *ε΄ζ΄*), εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 161

β΄) ***Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῇ χψ.***

Ἔστω (Κ,Λ΄) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (*β*,*β΄*) τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 160).

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ἐκ τῶν σημείων *β* καὶ *β΄* κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου δὲν εἶναι ἱκαναί, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω (§ 179 Σημ.), ἵνα προσδιορίσωσι τὴν ζητουμένην κάθετον.

Τούτου ἕνεκα μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ προσδιορίζομεν, ἐν τῷ νέῳ προβ. συστήματι $χ_1ψ_1$, τὸ νέον δεύτερον ἴχνος $Λ_1'$ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν $β_1'$ τοῦ δοθέντος σημείου, ἐκ δὲ τοῦ σημείου $β_1'$ φέρομεν τὴν $β_1'α_1'$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἴχνος $Λ_1'$ τοῦ ἐπιπέδου.

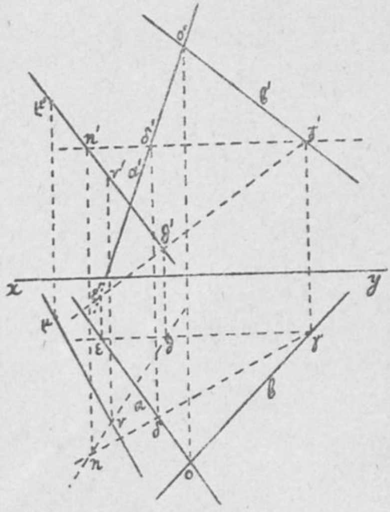
Ἡ εὐθεῖα ($βα$, $β_1'α_1'$) εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐν τῷ προβ. συστήματι $χ_1ψ_1$, ποῦς δὲ αὐτῆς εἶναι τὸ σημεῖον ($ν$,$ν_1'$), ὅπερ προσδιορίζεται εὐκόλως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, διότι τὸ ἐπίπεδον $ΚδΛ_1'$ εἶναι, ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι, κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον $ν_1'$ καθ' ὃ ἡ δευτέρα προβολὴ $β_1'α_1'$ τῆς καθέτου τέμνει τὸ δεύτερον ἴχνος $Λ_1'$ τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι (§ 173 περίπτ. α΄) ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ἐν τῷ προβ. συστήματι $χ_1ψ_1$ ἐξ ἧς προσδιορίζεται καὶ ἡ πρώτη προβολὴ *ν*, ἐὰν ἐξ αὐτῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν *αϐ*.

Ἐπαναφερομένου δὲ τοῦ μετατεθέντος ἐπιπέδου εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, ἡ πρώτη προβολὴ *ν* μένει ἀμετάστατος, ἡ δὲ δευτέρα θὰ λάβῃ τὴν θέσιν *ν'* (§ 119). Οὕτω τὰ σημεῖα (*ϐ,ϐ'*) καὶ (*ν,ν'*) προσδιορίζουσι τὴν ζητουμένην κάθετον ἐν τῷ προβολ. συστήματι χψ.

γ΄) ***Ὅταν τὸ ἐπίπεδον δίδεται διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν.***

Ἔστω (*αοϐ, α'ο'ϐ'*) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (*μ, μ'*) τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 162).

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου (*γ, γ'*) τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου φέρομεν τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ (*γδ, γ'δ'*) καὶ τὴν δευτέραν (*γε, γ'ε'*), ἐκ δὲ τῶν προβολῶν *μ* καὶ *μ'* τοῦ δοθέντος σημείου φέρομεν καθέτους *μν* καὶ *μ'ν'* ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς *γδ* καὶ *γ'ε'* τῶν ἰχνοπαραλλήλων.



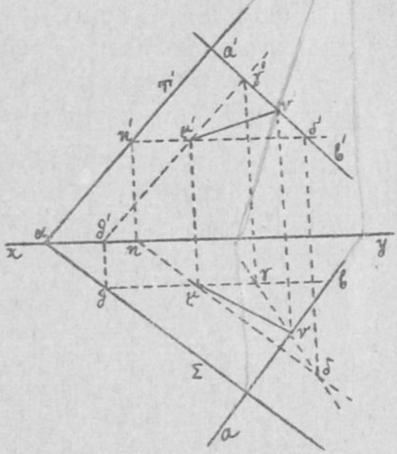
Σχ. 162

Ἐκ τῶν καθέτων τούτων ἡ *μν*, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν *γδ* τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ *μ'ν'* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα (*μν, μ'ν'*) εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (§ 179).

181. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω (μ, μ') τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 163).

Τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς δοθείσης εὐθείας· ἐπομένως ἡ πρώτη προβολὴ πάσης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου αὐτοῦ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν $\alpha\beta$ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ πάσης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴνδευτέραν προβολὴν αὐτῆς $\alpha'\beta'$.



Σχ. 163

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἂν ἀχθῇ ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς μ τοῦ δοθέντος σημείου, ἡ $\mu\delta$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ ἐκ τοῦ μ' ἡ $\mu'\delta'$ παράλληλος τῇ χψ, ἡ εὐθεῖα ($\mu\delta$, $\mu'\delta'$) θὰ εἶναι πρώτη ἰχνοπαράλληλος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ μ' ἀχθῇ ἡ $\mu'\gamma'$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha'\beta'$ καὶ ἐκ τοῦ μ ἡ $\mu\gamma$ παράλληλος τῇ χψ, ἡ εὐθεῖα ($\mu\gamma$, $\mu'\gamma'$) θὰ εἶναι δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

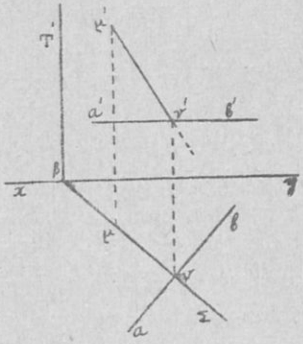
Αἱ δύο αὗται ἰχνοπαράλληλοι ὁρίζουσι τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Ἂν δὲ θέλωμεν καὶ τὰ ἴχνη αὐτοῦ, προσδιορίζομεν τὸ δεύτερον ἴχνος π' τῆς πρώτης καὶ τὸ πρῶτον ἴχνος ϑ τῆς δευτέρας καὶ φέρομεν ἐξ αὐτῶν καθέτους ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς δοθείσης εὐθείας. Οὕτως ἡ ἐκ τοῦ ϑ κάθετος Σ ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος καὶ ἡ ἐκ τοῦ π' κάθετος Τ' ἐπὶ τὴν $\alpha'\beta'$ εἶναι τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Τὸ σημεῖον (ν,ν') καθ' ὃ τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν προσδιορίζεται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 173, περίπτ. γ').

Σημείωσις.—Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, ἔστω πρὸς τὸ πρῶτον (σχ. 164), τὸ ἐπ' αὐτὴν κάθετον ἐπίπεδον εἶναι πρῶτον προβάλλον καὶ ἐπομένως τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ ὀφείλει νὰ διέρχηται διὰ τῆς πρώτης προβολῆς παντὸς σημείου του, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐκ τοῦ **μ**.

Πρὸς κατασκευὴν ὅθεν τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ **μ** κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν **αϐ** τῆς δοθείσης εὐθείας. Κατασκευασθέντος τοῦ πρώτου ἴχνους κατασκευάζεται καὶ τὸ δεύτερον Τ΄, ἂν ἐκ τοῦ σημείου β, καθ' ὃ τέμνει τὴν χψ τὸ πρῶτον ἴχνος, ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζονται τὰ ἴχνη ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.



Σχ. 164

182. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω (μ, μ') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 163).

Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου (μ, μ') ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον (ν,ν') τῆς τομῆς αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα ($\mu\nu$, $\mu'\nu'$) ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ δοθέντος εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη κάθετος.

Σημείωσις.—Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, ἔστω πρὸς τὸ πρῶτον, ἡ ζητουμένη κάθετος σχηματίζει μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον. Ἡ πρώτη ἄρα προβολὴ τῆς γωνίας ταύτης εἶναι ὀρθὴ (§ 177) καὶ ὡς ἐκ τούτου πρώτη προβολὴ τῆς ζητουμένης καθέτου εἶναι ἡ ἐκ τοῦ **μ** κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν **αϐ** τῆς δοθείσης εὐθείας (σχ. 164). Τὸ σημεῖον **ν** ἔνθα ἡ πρώτη προβολὴ τῆς καθέτου τέμνει τὴν **αϐ** εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἐκ ταύτης δὲ προσδιορίζεται ἀμέσως καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ **ν΄**, ἑπομένως καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ **μ΄ν΄** τῆς καθέτου.

183. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἀρκεῖ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἡ κάθετος αὕτη μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ὁρίζουσι τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Ἀσκήσεις

1) Ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν τέμνουσα ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2) Ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

3) Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δύο ἐπίπεδα δεδομένα διὰ τῶν ἴχνῶν αὐτῶν.

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πᾶν ἐπίπεδον τοῦ ὁποίου τὰ ἴχνη εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

5) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πᾶν ἐπίπεδον οὗ τὰ ἴχνη κεῖνται ἐπ' εὐθείας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

184. Ἡ εὐκολία τῆς γραφικῆς λύσεως προβλήματός τινος τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν ἔχουσι τὰ δεδομένα ὡς πρὸς τὰ προβολικὰ ἐπίπεδα.

Ὁ προσδιορισμὸς π.χ. τοῦ σημείου τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου εἶναι πολὺ εὐκολώτερος, ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι προβάλλον (§ 173 περίπτ.α΄). Ἐπίσης ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀπὸ δοθέντος σημείου καθέτου ἐπιπέδου ἢ καθέτου εὐθείας ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἶναι ἁπλουστέρα, ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων (Σημ. § 181, 182).

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι εἰς πολλὰς περιστάσεις ὠφελεῖ, ἐνίοτε δὲ καὶ ἐπιβάλλεται, νὰ θέτωμεν τὰ δεδομένα ὡς πρὸς τὰ προβολ. ἐπίπεδα οὕτως, ὥστε αἱ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀπαιτούμεναι γεωμ.κατασκευαὶ νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι καὶ ἁπλούστεραι.

Αἱ μέθοδοι διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνομεν τοῦτο εἶναι

α΄) ***ἡ μετάθεσις τῶν προβολ. ἐπιπέδων,***
β΄) ***ἡ στροφὴ τῶν σχημάτων περὶ ἄξονα,***
γ) ***ἡ κατάκλισις τῶν ἐπιπέδων.***

Α') Μετάθεσις τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων

185. Ἡ μέθοδος αὕτη σκοπὸν ἔχει τὴν μετάβασιν ἀπὸ δοθέντος προβολ. συστήματος εἰς ἄλλο προκύπτον ἐκ τῆς μεταθέσεως τοῦ ἑτέρου ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν προβολ. ἐπιπέδων, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τοῦ ἑπομένου γενικοῦ προβλήματος.

Δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν σχήματος ἔν τινι προβολ. συστήματι, εὑρεῖν τὰς προβολὰς αὐτοῦ εἰς ἄλλο προκύπτον ἐκ τῆς μεταθέσεως τοῦ ἑτέρου τῶν προβολ. ἐπιπέδων·

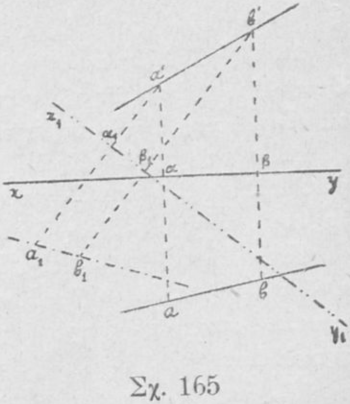
Ἐπειδὴ πᾶν σχῆμα εἶναι σύνολον σημείων, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν αὐτὸ δι' ἓν μόνον σημεῖον· καὶ ἐπειδὴ τὸ μετατιθέμενον ἐπίπεδον δύναται νὰ εἶναι ἢ τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον προβολικόν, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

186. ***Περίπτωσις α').*** — ***Νὰ μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον ὡς πρὸς δοθὲν σημεῖον·***

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐδόθη ἤδη ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 139) καὶ ἐγένετο ἐπανειλημμένως ἐφαρμογὴ αὐτοῦ.

187. ***Περίπτωσις β').*** — ***Νὰ μετατεθῇ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον ὡς πρὸς δοθὲν σημεῖον.***

Ἔστω (α,α') τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ προβ. συστήματι χψ (σχ. 165). Ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τὸ δεύτερον κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\chi_1\psi_1$, προκύπτει νέον προβολ. σύστημα ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου καὶ ἐκ τοῦ μετατεθέντος πρώτου μὲ γραμμὴν ἐδάφους τὴν $\chi_1\psi_1$.



Σχ. 165

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον μένει τὸ αὐτὸ ἐν τῷ νέῳ συστήματι, ἡ δευτέρα προβολὴ α' τοῦ δοθέντος σημείου μένει ἀμετάστατος καὶ ἡ τεταγμένη αὐτοῦ αa ἀμετάβλητος κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον.

Ἐν τῷ νέῳ ἄρα συστήματι δευτέρα προβολὴ τοῦ δοθέντος σημείου θὰ εἶναι πάλιν ἡ α', ἡ δὲ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ α' ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ ἠγμένης καθέτου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὴν τεταγμένην αὐτοῦ $\alpha\alpha$. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ α' καθέτου ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ τὸ τμῆμα $\alpha_1\alpha_1=\alpha\alpha$, τὸ σημεῖον α_1 θὰ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ δοθέντος σημείου, ἐν τῷ προβολ. συστήματι $\chi_1\psi_1$.

Ἐφαρμογαί

188. α') ***Νὰ μετατεθῇ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον ὡς πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ $\chi_1\psi_1$ ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους (σχ. 165).

Προσδιορίζομεν τὰς νέας πρώτας προβολὰς δύο σημείων της, οἷον τῶν (α,α') καὶ (β,β'). Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τῶν δευτέρων προβολῶν α' καὶ β' καθέτους ἐπὶ τὴν $\chi_1\psi_1$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ τμήματα $\alpha_1\alpha_1=\alpha\alpha$ καὶ $\beta_1\beta_1=\beta\beta$, τουτέστιν ἴσα πρὸς τὰς τεταγμένας τῶν σημείων. Τὰ σημεῖα α_1 καὶ β_1 εἶναι αἱ νέαι πρῶται προβολαὶ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $\alpha_1\beta_1$ εἶναι ἡ νέα πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας $(\alpha'\beta')$.

189. β') ***Νὰ μετατεθῇ τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.***

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, πρέπει ἡ δευτέρα προβολή της νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.

Πρὸς λύσιν ὅθεν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ μετατεθῇ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς δοθείσης εὐθείας.

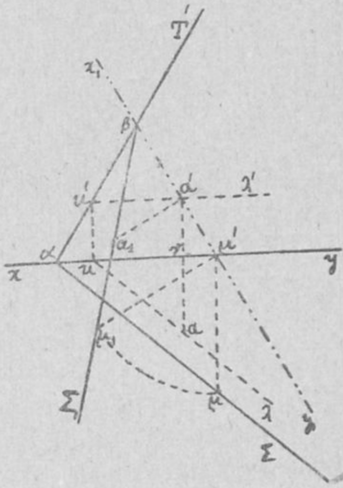
Ὁμοίως ἂν ζητηθῇ νὰ εἶναι ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἡ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον, μεταθέτομεν τοῦτο οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας.

190. γ') ***Νὰ μετατεθῇ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ἔστω ΣαΤ' τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ $\chi_1\psi_1$ ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους (σχ. 166).

Δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου ἐν τῷ νέῳ συστήματι μένει τὸ αὐτὸ Τ'.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ νέου πρώτου ἴχνους παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο ὀφείλει νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου β ἔνθα τέμνει τὴν $\chi_1\psi_1$ τὸ δεύτερον ἴχνος Τ', ἐπίσης δὲ καὶ διὰ τοῦ νέου πρώτου ἴχνους τῆς τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου ἤ, διὰ τὸ ἁπλούστερον, τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου, ἔστω τῆς πρώτης $(\kappa\lambda, \kappa'\lambda')$.



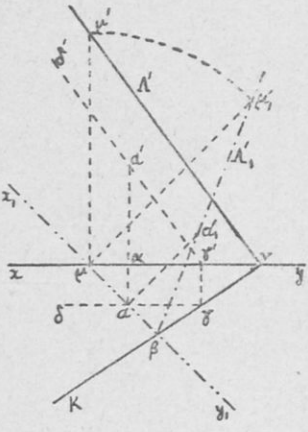
Σχ. 166

Νέον πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸ μετατεθὲν πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐν τῇ νέᾳ θέσει, εἶναι δεύτερον προβάλλον ἐπίπεδον ἐν τῷ συστήματι χψ, δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ τῆς ΚΛ εἶναι τὸ σημεῖον α', καθ' ὃ τέμνει τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ $\chi_1\psi_1$ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ΚΛ (§ 173, περίπτ. α'). Ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς α' προσδιορίζεται καὶ ἡ πρώτη **α** ἐν τῷ συστήματι χψ, εἶτα δὲ καὶ ἡ νέα πρώτη προβολὴ $\boldsymbol{\alpha_1}$ ἥτις κατὰ τὰ προειρημένα εἶναι τὸ νέον πρῶτον ἴχνος τῆς ἰχνοπαραλλήλου ΚΛ. Ἐπιζευγνύοντες ὅθεν τὸ $\boldsymbol{\alpha_1}$ μετὰ τοῦ β ἔχομεν τὸ νέον πρῶτον ἴχνος Σ_1 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Ὅταν ἡ $\chi_1\psi_1$ τέμνῃ τὴν χψ ἐντὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ μετατεθέντος πρώτου προβολ. ἐπιπέδου ὑπὸ τῆς τυχούσης εὐθείας ἢ τῆς τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου, ζητοῦμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑπὸ

τοῦ ἴχνους Σ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει δευτέραν προβολὴν τὸ σημεῖον μ', καθ' ὃ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ Σ, τουτέστιν ἡ χψ, τέμνει τὸ δεύτερον ἴχνος $\chi_1\psi_1$ τοῦ μετατεθέντος πρώτου προβολ. ἐπιπέδου. Ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς προσδιορίζεται ἀμέσως καὶ ἡ πρώτη μ ἐν τῷ συστήματι χψ, εἶτα δὲ καὶ ἡ νέα πρώτη προβολὴ μ_1. Ἑνοῦντες ταύτην μετὰ τοῦ β λαμβάνομεν τὸ νέον πρῶτον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

191. δ′) ***Νὰ μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.***



Σχ. 167

Ἔστω ΚνΛ′ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ $\chi_1\psi_1$ ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους (σχ. 167).

Πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου ἐν τῷ νέῳ συστήματι εἶναι πάλιν τὸ Κ.

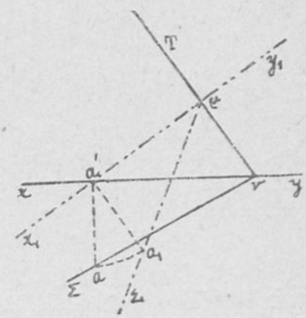
Πρὸς κατασκευὴν τοῦ νέου δευτέρου ἴχνους παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ὀφείλει νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου β, ὅπου τὸ πρῶτον ἴχνος τέμνει τὴν νέαν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$, ἐπίσης δὲ διὰ τοῦ νέου δευτέρου ἴχνους τυχούσης εὐθείας τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἤ, διὰ τὸ ἁπλούστερον, δευτέρας τινὸς ἰχνοπαραλλήλου, οἷον τῆς ($\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$).

Νέον δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸ μετατεθὲν δεύτερον προβ. ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐν τῇ νέᾳ θέσει, εἶναι πρῶτον προβάλλον ἐν τῷ συστήματι χψ, πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ τῆς ΓΔ εἶναι τὸ σημεῖον a, καθ' ὃ τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ $\chi_1\psi_1$ ἡ πρώτη προβολὴ τῆς ΓΔ. Ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς a προσδιορίζεται καὶ ἡ δευτέρα a' ἐν τῷ συστήματι χψ, εἶτα δὲ καὶ ἡ νέα δευτέρα a_1'. Αὕτη θὰ εἶναι τὸ νέον δεύτερον ἴχνος τῆς ἰχνοπαραλλήλου ΓΔ. Ἐπιζευγνύοντες ὅθεν αὐτὸ μετὰ τοῦ β ἔχομεν τὸ νέον δεύτερον ἴχνος Λ_1' τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Ὅταν ἡ $\chi_1\psi_1$ τέμνῃ τὴν χψ ἐντὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ μετατεθέντος δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου ὑπὸ τῆς τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου, ζητοῦμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἴχνους Λ΄ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει πρώτην προβολὴν τὸ σημεῖον **μ**, καθ' ὃ ἡ χψ (ἥτις εἶναι καὶ πρώτη προβολὴ τοῦ Λ΄) τέμνει τὴν $\chi_1\psi_1$, τουτέστιν τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ μετατεθέντος δευτέρου προβολ. ἐπιπεδου. Ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς **μ** προσδιορίζεται ἡ δευτέρα **μ**΄, εἶτα δὲ καὶ ἡ νέα δευτέρα προβολὴ μ_1' τοῦ σημείου τῆς τομῆς. Ἑνοῦντες ταύτην μετὰ τοῦ β λαμβάνομεν τὸ νέον δεύτερον ἴχνος Λ_1' τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

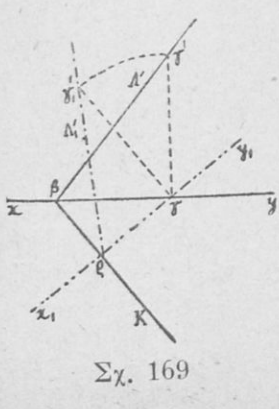
192. ε΄) ***Νὰ μετατεθῇ τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον νὰ εἶναι πρῶτον ἢ δεύτερον προβάλλον.***



Σχ. 168

Ἓν ἐπίπεδον δια νὰ εἶναι ***πρῶτον*** προβάλλον πρέπει τὸ ***δεύτερον*** ἴχνος αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ. Ὁμοίως διὰ νὰ εἶναι ***δεύτερον*** προβάλλον πρέπει τὸ ***πρῶτον*** ἴχνος αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν θέλωμεν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον νὰ εἶναι ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι πρῶτον προβάλλον, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος Τ΄ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 168).



Σχ. 169

Ὁμοίως, ἄν θέλωμεν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον νὰ εἶναι ἐν τῷ νέῳ προβ. συστήματι δεύτερον προβάλλον, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος Κ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 169).

Ἀσκήσεις

1) Νὰ μετατεθῶσι τὰ προβολ. ἐπίπεδα οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι, δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ εἶναι

α΄) κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον,

β΄) κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον,

γ΄) νὰ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς τῶν προβολ. ἐπιπέδων.

2) Νὰ μετατεθῶσι τὰ προβολ. ἐπίπεδα οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι δοθὲν ἐπίπεδον νὰ εἶναι α΄) παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, β΄) παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον.

3) Δοθέντος σημείου καὶ εὐθείας νὰ μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς εὐθείας.

4) Δοθέντων δύο σημείων, νὰ μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι τὰ δοθέντα σημεῖα νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρώτου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου.

5) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, νὰ μετατεθῇ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν εὐθειῶν νὰ εἶναι παράλληλοι.

6) Δοθέντων δύο ἐπιπέδων νὰ μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων νὰ εἶναι παράλληλα. β΄

Β΄) Στροφὴ σχήματος περὶ ἄξονα

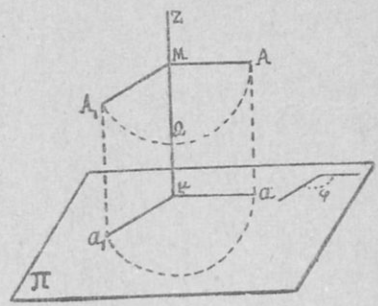
193. Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑπομένου γενικοῦ προβλήματος

Δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν σχήματος, εὑρεῖν τὰς προβολὰς αὐτοῦ μετὰ τὴν στροφήν του καθ' ὡρισμένην γωνίαν καὶ φοράν, περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν σχῆμα εἶναι σύνολον σημείων, λύομεν αὐτὸ πρῶτον δι' ἓν σημεῖον.

194. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ περιστραφῇ δοθὲν σημεῖον κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φορὰν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον.***

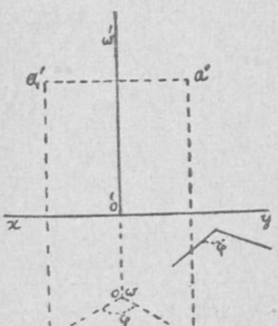
Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν σημεῖον Α (σχ. 170) περιστραφῇ κατὰ γωνίαν φ περὶ ἄξονα ΩΖ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ γράψῃ τόξον $ΑΑ_1$ κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸν πόδα Μ τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ἄξονα ἠγμένης καθέτου καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΑ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ Π, ὁ τομεὺς $ΑΜΑ_1$ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ὡς σχῆμα ἴσον. Ἑπομένως ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π προβολὴ $α_1$ τοῦ σημείου Α μετὰ τὴν στροφὴν αὐτοῦ, δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐὰν μὲ κορυφὴν τὸ $μ$ καὶ πλευρὰν τὴν $μα$ κατασκευασθῇ ἡ γωνία $αμα_1=φ$ κατὰ τὴν δοθεῖσαν φορὰν καὶ ληφθῇ $μα_1=μα$.



Σχ. 170

Παρατηρητέον ἐπίσης, ὅτι κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ προβολ. ἐπιπέδου Π δὲν μεταβάλλεται.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἔστω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς σχεδιάσεως τὸ σημεῖον $(α,α')$, ὅπερ ζητεῖται νὰ περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα $(οω,\ ο'ω')$ κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, κατὰ γωνίαν φ καὶ φορὰν τὴν δεικνυομένην ὑπὸ τοῦ βέλους (σχ. 171).



Σχ. 171

Μὲ κορυφὴν $ο$ καὶ πλευρὰν τὴν $οα$ κατασκευάζομεν, κατὰ τὴν δοθεῖσαν φοράν, γωνίαν ἴσην τῇ φ, ἐπὶ δὲ τῆς τελικῆς πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν $οα_1=οα$.

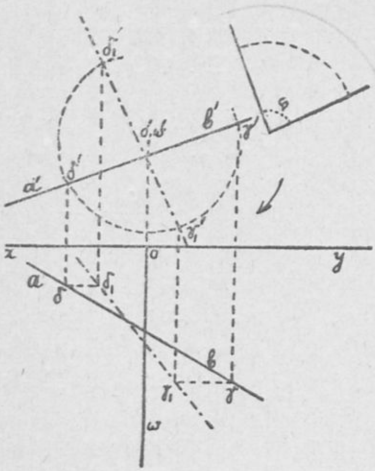
Τὸ σημεῖον $α_1$ εἶναι ἡ νέα πρώτη προβολὴ τοῦ περιστραφέντος σημείου.

Η νέα δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ α_1' θὰ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ α_1 καθέτου ἐπὶ τὴν χψ καὶ ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ δὲν μετεβλήθη ἡ κατηγμένη του κατὰ τὴν περιστροφήν, ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ α' παραλλήλου τῇ χψ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἡ κατασκευή, ὅταν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον. Παρατηρητέον μόνον, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μένει ἀμετάβλητος ἡ ***τεταγμένη*** τοῦ περιστρεφομένου σημείου.

Ἐφαρμογαὶ

195. α') ***Νὰ περιστραφῇ δεδομένη εὐθεῖα κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φοράν, περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.***



Σχ. 172

Ἔστω ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 172), ($o\omega$, $o'\omega'$) ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, φ ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ φορὰ ἡ δεικνυομένη ὑπὸ τοῦ βέλους.

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ περιστρέψωμεν δύο τυχόντα σημεῖα τῆς εὐθείας.

Ἡ κατασκευὴ ἐν τούτοις ἁπλουστεύεται ὡς ἑξῆς.

Μὲ κέντρον τὸ o' γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς εὐθείας εἰς σημεῖα γ' καὶ δ', εἶτα δὲ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας φ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Τὸ σημεῖα γ' καὶ δ' εἶναι αἱ δεύτεραι προβολαὶ δύο σημείων τῆς δοθείσης εὐθείας, ὧν τὰς πρώτας προβολὰς γ καὶ δ προσδιορίζομεν διὰ καθέτων ἐπὶ τὴν χψ ἠγμένων ἐκ τῶν γ' καὶ δ'.

Μετὰ τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μὲ κέντρον τὸ o' γραφείσης περιφερείας καὶ κατὰ τὴν δεδομένην φορὰν τὰ τόξα $\gamma'\gamma_1'$ καὶ

$\delta'\delta_1'$ ἴσα πρὸς τὸ τόξον τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τῆς γωνίας φ. Τὰ σημεῖα γ_1' καὶ δ_1' εἶναι αἱ νέαι δεύτεραι προβολαὶ τῶν σημείων (γ, γ') καὶ (δ, δ'), διότι

$$\gamma'o'\gamma_1'=\delta'o'\delta_1'=\varphi,$$

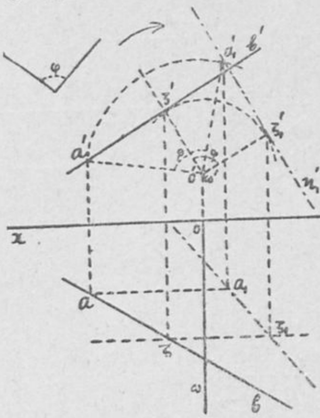
αἱ δὲ νέαι πρῶται προβολαί των γ_1 καὶ δ_1 κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐκ τῶν γ καὶ δ παραλλήλων τῇ χψ καὶ κατασκευάζονται εὐκόλως.

Αἱ προβολαὶ ἄρα τῆς δοθείσης εὐθείας μετὰ τὴν περιστροφὴν εἶναι αἱ $\gamma_1\delta_1$ καὶ $\gamma_1'\delta_1'$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἡ κατασκευή, ὅταν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.

Σημείωσις α').— Ὅταν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μένει προφανῶς ἀμετάστατον κατὰ τὴν στροφήν· ἀρκεῖ ὅθεν νὰ περιστραφῇ ἓν μόνον σημεῖον τῆς εὐθείας.

Σημείωσις β').—Ἡ κοινὴ κάθετος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς εἶναι προφανῶς παράλληλος πρὸς τὸ προβολ. ἐπίπεδον, ἐφ' ὃ εἶναι κάθετος ὁ ἄξων, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ὀρθὴ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὡς ὀρθὴ (§ 177). Δυνάμεθα ὅθεν νὰ κατασκευάσωμεν εὐκόλως τὰς προβολὰς τῆς κοινῆς ταύτης καθέτου. Π.χ. ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, δευτέρα προβολὴ τῆς κοινῆς καθέτου εἶναι ἡ ἐκ τοῦ σημείου o' (σχ. 173) κάθετος $o'\zeta'$ ἐπὶ τὴν $a'b'$ καὶ τὸ ζ' εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ἐπὶ τὴν $(ab, a'b')$. Ἐκ ταύτης προσδιορίζεται καὶ ἡ πρώτη προβολὴ ζ, ἡ δὲ ἐκ ταύτης ἀγομένη παράλληλος τῇ χψ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κοινῆς καθέτου.



Σχ. 173

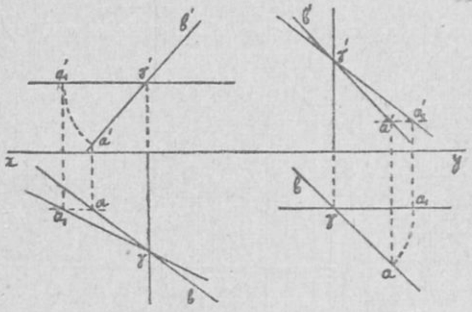
Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $o'\zeta'a'$ μένει ὀρθὴ κατὰ τὴν περιστροφήν, εὐνόητον εἶναι ὅτι, ἐὰν περιστραφῇ τὸ σημεῖον (ζ,ζ') κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φορὰν καὶ ἀχθῇ ἐκ τῆς νέας δευτέρας προβολῆς του ζ_1' ἡ $\zeta_1'n_1'$ κάθετος ἐπὶ τὴν $o'\zeta_1'$, ἡ $\zeta_1'n_1'$ θὰ εἶναι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τῆς δοθείσης εὐθείας.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς νέας πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν νέαν πρώτην προβολὴν ἑνὸς ἀκόμη σημείου αὐτῆς, οἷον τοῦ (α,α'). Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ o' καὶ ἀκτῖνα $o'\alpha'$ γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη τέμνει τὴν $\zeta_1'n_1'$ εἰς σημεῖον α_1' ὅπερ εἶναι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τοῦ (α,α'). Διότι τὰ τρίγωνα $o'\alpha'\zeta'$ καὶ $o'\zeta_1'\alpha_1'$ εἶναι ἴσα· ἑπομένως γων. $\alpha'o'\zeta'$=γων. $\alpha_1'o'\zeta_1'$ κατ ἀκολουθίαν δὲ καὶ γων. $\alpha'o'\alpha_1'$=γων. $\zeta'o'\zeta_1' = \varphi$.

Ἐκ τῆς νέας δευτέρας προβολῆς α' πορίζόμεθα καὶ τὴν νέαν πρώτην προβολὴν α_1 τοῦ σημείου (α,α'), ἑνοῦντες δὲ ταύτην μετὰ τοῦ ζ_1 ἔχομεν καὶ τὴν νέαν πρώτην προβολὴν τῆς δοθείσης εὐθείας.

196. β′) ***Νὰ περιστραφῇ δοθεῖσα εὐθεῖα περὶ ἄξονα οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα $(ab,a'b')$, ἥτις ζητεῖται νὰ γίνῃ, διὰ στροφῆς περὶ ἄξονα, παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον (δεύτερον) προβολ. ἐπίπεδον (σχ. 174). Περιστρέφομεν αὐτὴν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον (πρῶτον) προβολικὸν ἐπίπεδον μέχρις οὗ ἡ δευτέρα (πρώτη) προβολὴ αὐτῆς γίνῃ παράλληλος πρὸς τὴν χψ.



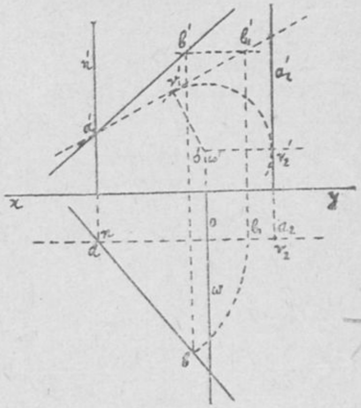
Σχ. 174

Διὰ τὸ ἁπλούστερον ἐκλέγομεν ὡς ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς (y, y') κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον (πρῶτον) προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ περιστρέφομεν μόνον τὸ σημεῖον (a,a').

197. γ′) ***Δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων διὰ στροφῆς περὶ ἄξονα*** (κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων).

Ἔστω $(ab, a'b')$ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ζητεῖται νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον (σχ. 175).

Κάμνομεν αὐτὴν πρῶτον παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον (§ 196) περιστρέφοντες αὐτὴν περὶ τὸν ἄξονα $(an,a'n')$ κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, ὅτε λαμβάνει τὴν θέσιν $(ab_1, a'b_1')$. Ἔπειτα περιστρέφομεν αὐτὴν περὶ ἄξονα ($o\omega$, $o'\omega'$) κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ ἡ δευτέρα προβολή της γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ. Πρὸς τοῦτο (§ 195 Σημ. β') μὲ κέντρον τὸ o' καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ $o'\nu_1'$ ἀπὸ τῆς $\alpha'\beta_1'$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος $o'\nu_2'$ τῆς παραλλήλου τῇ χψ. Ἡ ἀχθεῖσα ἐφαπτομένη εἶναι ἡ νέα δευτέρα προβολὴ τῆς δοθείσης εὐθείας. Πρώτη προβολὴ αὐτῆς εἶναι ἓν μόνον σημεῖον, τὸ ν_2, κείμενον ἐπὶ τῆς $\alpha\beta_1$· διότι κατὰ τὴν νέαν περιστροφὴν ἡ τεταγμένη τῆς εὐθείας ($\alpha\beta_1$, $\alpha'\beta_1'$) δὲν μετεβλήθη. Ἐν τῇ θέσει ($\alpha_2\nu_2$, $\alpha_2'\nu_2'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.



Σχ. 175

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα, ὅταν θέλωμεν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

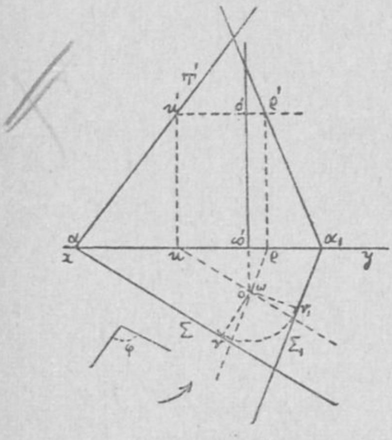
198. δ') ***Νὰ περιστραφῇ δοθὲν ἐπίπεδον περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων, κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φοράν.***

Ἀρκεῖ νὰ περιστρέψωμεν δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔπειτα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ νέα ἴχνη αὐτοῦ. Συνηθέστερον περιστρέφομεν τὸ ἕτερον τῶν ἰχνῶν καὶ μίαν τῶν ὁμωνύμων ἰχνοπαραλλήλων. Π.χ. ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, περιστρέφομεν τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου καὶ μίαν τῶν πρώτων ἰχνοπαραλλήλων, προτιμῶντες ἐκείνην, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

Ἔστω ΣαΤ' τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ($o\omega$, $o'\omega'$) ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, φ ἡ γωνία καὶ φορὰ ἡ δεικνυομένη ὑπὸ τοῦ βέλους (σχ. 176).

Περιστρέφομεν πρῶτον τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ Σ. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ ω τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὸ $\omega\nu$ καὶ περιστρέφομεν τὸ σημεῖον ν κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φοράν. Οὕτω λαμβάνει τὴν θέσιν ν_1· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ ν_1 ἡ $\nu_1\alpha_1$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\omega\nu_1$, ἡ κάθετος αὕτη εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος Σ_1 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου μετὰ τὴν περιστροφήν.

Μετὰ τοῦτο φέρομεν τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον $(o\kappa, o'\kappa')$ τὴν τέμνουσαν τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον (o,o') καὶ περιστρέφομεν αὐτὴν κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ φοράν.



Σχ. 176

Ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς θὰ μείνῃ ἀμετάστατος, ἐπειδὴ ἡ κατηγμένη αὐτῆς κατὰ τὴν περιστροφὴν δὲν μεταβάλλεται. Ἡ δὲ πρώτη προβολὴ αὐτῆς θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $o\rho$ παράλληλον πρὸς τὸ Σ_1, καθ' ὅσον ἡ εὐθεῖα $(o\kappa, o'\kappa')$ θὰ διατελῇ κατὰ τὴν περιστροφὴν παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν θὰ παύσῃ νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου (o,o').

Ἐὰν λοιπὸν προσδιορίσωμεν τὸ νέον δεύτερον ἴχνος αὐτῆς ρ' καὶ ἐπιζεύξωμεν αὐτὸ μετὰ τοῦ σημείου α_1, καθ' ὃ τέμνει τὴν χψ τὸ νέον πρῶτον ἴχνος Σ_1, ἡ εὐθεῖα $\alpha_1\rho'$ θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ἴχνος T_1' τοῦ περιστραφέντος ἐπιπέδου ΣαΤ'.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἡ περιστροφὴ τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

199. ε') ***Δοθὲν ἐπίπεδον νὰ γίνῃ προβάλλον διὰ περιστροφῆς περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.***

Ἂν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ζητῆται νὰ γίνῃ ***πρῶτον*** προβάλλον, περιστρέφομεν αὐτὸ περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ***δεύτερον*** προβ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ γίνῃ κάθετον ἐπὶ τὴν χψ. Ἂν δὲ ζητῆται τὸ δοθὲν ἐπίπεδον νὰ ***γίνῃ δεύτερον*** προβάλλον, περιστρέφομεν αὐτὸ περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ***πρῶτον*** προβολ.ἐπίπεδον, μέχρις οὗ τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ γίνῃ κάθετον ἐπὶ τὴν χψ.

Ἀσκήσεις

1) Δοθὲν ἐπίπεδον νὰ γίνῃ παράλληλον πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.

2) Νὰ περιστραφῇ δοθὲν σημεῖον περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ α΄ προβ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου.

3) Νὰ περιστραφοῦν, κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ φοράν, δύο ἀλληλοτομοῦσαι εὐθεῖαι, περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ β΄ προβ. ἐπίπεδον καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς των διερχόμενον, μέχρις οὗ αἱ πρῶται προβολαί των συμπέσωσι.

4) Νὰ περιστραφῶσι δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ α΄ προβ. ἐπίπεδον, κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ φοράν, μέχρις οὗ αἱ δεύτεραι προβολαί των γίνωσι παράλληλοι.

5) Νὰ περιστραφῇ δοθὲν ἐπίπεδον περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ τὰ δύο ἴχνη του συμπέσωσι.

6) Νὰ περιστραφῇ δοθεῖσα εὐθεῖα περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ α΄ προβ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ ἡ πρώτη προβολή της διέλθῃ διὰ δοθέντος σημείου τοῦ α΄ προβ. ἐπιπέδου, ἢ γίνῃ παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ κειμένῃ ἐπὶ τοῦ α΄ προβ. ἐπιπέδου.

7) Νὰ περιστραφῇ δοθεῖσα εὐθεῖα περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ β΄ προβ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ παράλληλος δοθέντι ἐπιπέδῳ ἢ αἱ δύο προβολαί της νὰ γίνωσι παράλληλοι.

8) Νὰ περιστραφῇ δοθὲν ἐπίπεδον περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ β΄ προβ. ἐπίπεδον, μέχρις οὗ διέλθῃ διὰ δοθέντος σημείου ἢ γίνῃ παράλληλον δοθείσῃ εὐθείᾳ ἢ κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.

Γ΄) Κατάκλισις τῶν ἐπιπέδων

200.—Περὶ τῆς κατακλίσεως τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ Α΄ μέρει (σελ. 62). Ἐνταῦθα προσθέτομεν, ὅτι ἡ κατάκλισις ἐπιπέδου σχήματος δύναται νὰ γίνῃ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου εἴτε πρὸς τὸ πρῶτον, εἴτε πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ δύο γενικὰ προβλήματα τὰ συνιστῶντα τὴν μέθοδον ταύτην τροποποιοῦνται ὡς ἑξῆς:

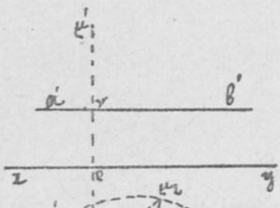
α΄) Δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν ἐπιπέδου σχήματος, εὑρεῖν τὴν κατάκλισιν αὐτοῦ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων.

β'). Δοθείσης τῆς κατακλίσεως ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, εὑρεῖν τὰς δύο προβολὰς αὐτοῦ.

Τούτου ἕνεκα καὶ ὁ ***κανὼν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου***, δι' οὗ λύονται τὰ δύο ταῦτα προβλήματα, τροποποιεῖται οὕτως:

Κατὰ τὴν κατάκλισιν ἐπιπέδου, ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον (δεύτερον) ***προβ. ἐπίπεδον, ἡ νέα πρώτη*** (δευτέρα) ***προβολὴ τοῦ τυχόντος σημείου του εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς πρώτης*** (δευτέρας) ***προβολῆς τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν πρώτην*** (δευτέραν) ***προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἔχοντος τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην τῇ ἀποστάσει τῆς εἰρημένης προβολῆς τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς τοῦ ἄξονος, τὴν δὲ ἄλλην ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν κατηγμένων*** (τεταγμένων) ***τοῦ σημείου καὶ τοῦ ἄξονος.***

201. ***Ἐφαρμογή.*** —Ἔστω σημεῖον (μ, μ') (σχ. 177) κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου Ρ καὶ ἄξων κατακλίσεως ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$).

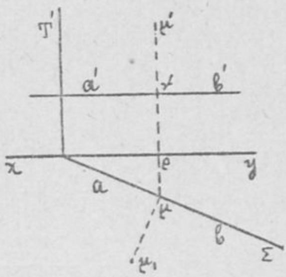


Σχ. 177

Φέρομεν ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς μ τοῦ δοθέντος σημείου τὴν $\mu\delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν $\alpha\beta$ τοῦ ἄξονος καὶ τὴν $\mu\xi$ παράλληλον πρὸς αὐτήν. Ἐπὶ τῆς $\mu\xi$ λαμβάνομεν τμῆμα $\mu\mu_2$ ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κατηγμένων τοῦ δοθέντος σημείου καὶ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, ἤτοι $\mu\mu_2 = \rho\mu' - \rho\nu = \nu\mu'$ καὶ μὲ κέντρον τὸ δ καὶ ἀκτῖνα τὴν $\delta\mu_2$ γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν $\mu\delta$ προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον μ_1. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ νέα πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου (μ, μ') μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου Ρ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.

Σημ.— Ὡς κατάκλισις τοῦ **(μ, μ')** δύναται νὰ ληφθῇ καὶ τὸ σημεῖον μ_1', ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Ρ νοηθῇ στρεφόμενον κατ' ἀντίθετον φοράν.

202. ***Παρατήρησις.***— Ὅταν τὸ κατακλινόμενον ἐπίπεδον εἶναι πρῶτον προβάλλον (σχ.178),ἡ πρώτη προβολὴ σημείου ἐπ' αὐτοῦ κειμένου κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς τοῦ ἄξονος καὶ τρίγωνον κατακλίσεως δὲν ὑπάρχει. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν τοῦ τυχόντος σημείου του Μ, ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν $\alpha\beta$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, τὸ τμῆμα $\mu\mu_1$ ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κατηγμένων τοῦ σημείου (μ, μ') καὶ τοῦ ἄξονος ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), τουτέστιν $\mu\mu_1 = \rho\mu' - \rho\nu' = \nu'\mu'$.



Σχ. 178

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα, ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι δεύτερον προβάλλον καὶ ζητεῖται ἡ κατάκλισις ἑνὸς σημείου του ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

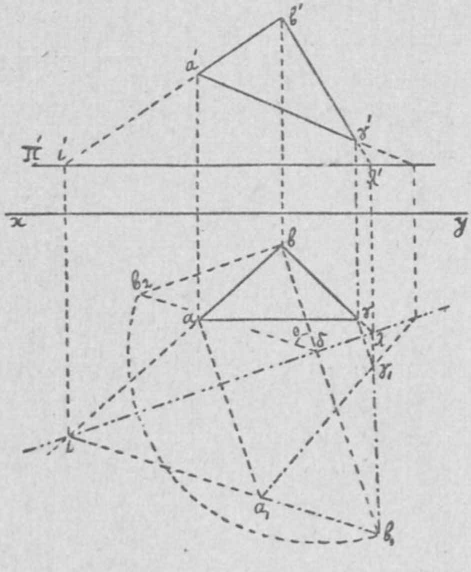
203. ***Κατασκευὴ τῆς κατακλίσεως ἐπιπέδου σχήματος.***— Τὴν κατάκλισιν ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου κατασκευάζομεν προσδιορίζοντες τὰς κατακλίσεις τῶν σημείων τῶν ὁριζόντων αὐτό, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Δύναται ὅμως ἡ κατασκευὴ νὰ γίνῃ καὶ ἁπλούστερον δυνάμει τῆς ἑπομένης παρατηρήσεως.

Τὸ σημεῖον κ (σχ. 58, σελ. 63), καθ' ὃ ἡ πρώτη προβολὴ εὐθείας ΜΝ τοῦ κατακλινομένου ἐπιπέδου Ρ τέμνει τὴν προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Κ, καθ' ὃ ἡ ΜΝ τέμνει τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου Ρ μένει ἀμετάστατον, ἡ ΜΝ διέρχεται δι' αὐτοῦ καὶ ὅταν κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π'. Ἑπομένως καὶ ἡ νέα προβολὴ αὐτῆς $\mu_1\nu_1$ διέρχεται διὰ τοῦ κ.

Τούτου τεθέντος, ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ κατάκλισις τοῦ τριγώνου ($\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Π', παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον καί, ὡς ἐκ τούτου, ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἴχνους του (σχ. 179).

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως, ὅστις εἶναι ἡ τομὴ ($\iota\lambda$, $\iota'\lambda$) τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π', εἶτα δέ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν κατάκλισιν β_1 τῆς κορυφῆς (β,β').

Τὰ σημεῖα (ι,ι') καὶ (λ, λ') ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος μένουσιν ἀμετάστατα· ἑπομένως ἡ ($\iota\beta$, $\iota'\beta'$) θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $\iota\beta_1$ καὶ ἡ ($\beta\lambda$, $\beta'\lambda'$) ἐπὶ τῆς $\lambda\beta_1$. Κατάκλισις ἄρα τοῦ μὲν ση-



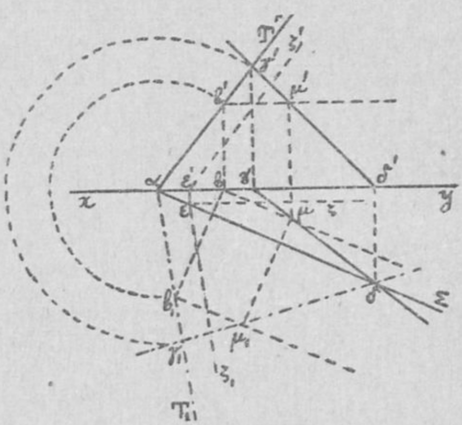
Σχ. 179

μείου (α,α_1') εἶναι τὸ σημεῖον α_1, καθ' ὃ τέμνει τὴν $\iota\beta_1$ ἡ ἐκ τοῦ α κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν $\iota\lambda$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, τοῦ δὲ (γ. γ') τὸ σημεῖον γ_1, καθ' ὃ τέμνει τὴν $\beta_1\lambda$ ἡ ἐκ τοῦ γ κάθετος ἐπὶ τὴν $\iota\lambda$.

Κατάκλισις ἄρα τοῦ τριγώνου ($\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π' εἶναι τὸ τρίγωνον $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

204. ***Κατάκλισις ἐπιπέδου δεδομένου διὰ τῶν ἰχνῶν του ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου.***— Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΣαΤ' (σχ. 180) ὅπερ ζητεῖται νὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου.

Ἄξων κατακλίσεως εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος Σ· ἑπομένως τὸ σημεῖον α μένει ἀμετάστατον κατὰ τὴν κατάκλισιν. Πρὸς κατασκευὴν ὅθεν τῆς κατακλίσεως τοῦ δευτέρου ἴχνους Τ′ ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν ἑνὸς μόνον σημείου του, οἷον τοῦ (β, β'). Αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ β καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως, θ' ἀπέχῃ δὲ ἀπὸ τοῦ α ἀπόστασιν ἴσην τῆς $\alpha\beta'$, διότι ἡ $\alpha\beta'$ εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀπόστασις τοῦ σημείου (β, β') ἀπὸ τοῦ σημείου α καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ κατακλιθῇ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος. Ἐὰν λοιπὸν γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν $\alpha\beta'$ τὸ σημεῖον β_1, καθ' ὃ ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ἐκ τοῦ β ἠγμένην κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα αΣ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου (β, β') (*). Κατάκλισις ἄρα τοῦ δευτέρου ἴχνους Τ′ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἶναι ἡ τὸ σημεῖον α μετὰ τοῦ β_1 ἑνοῦσα εὐθεῖα T_1'.



Σχ. 180

Ἔχοντες τὴν κατάκλισιν τοῦ δευτέρου ἴχνους εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τῆς $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ προσδιορίζοντες τὴν κατάκλισιν γ_1 τοῦ δευτέρου ἴχνους αὐτῆς (γ, γ') καὶ ἑνοῦντες ταύτην δι' εὐθείας μετὰ τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτῆς δ, τὸ ὁποῖον μένει κατὰ τὴν κατάκλισιν ἀμετάστατον, ὡς κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Ἡ κατάκλισις τυχούσης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου, οἷον τῆς $(\beta\mu, \beta'\mu')$ κατασκευάζεται, ἐὰν ἐκ τῆς κατακλίσεως β_1 τοῦ δευτέρου ἴχνους της ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος Σ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ δὲ κατάκλισις τυχούσης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου, οἷον τῆς $(\varepsilon\zeta, \varepsilon'\zeta')$ κατασκευάζεται, ἂν ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτῆς ε,

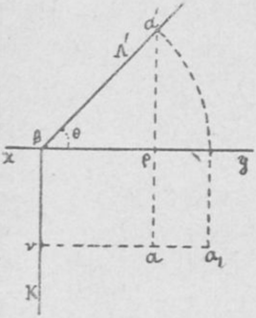
(*) Ἡ κατάκλισις τοῦ (β, β') δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ κανόνος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

ὅπερ μένει ἀμετάστατον, ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὸ κατακεκλιμένον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ κατάκλισις τέλος σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τοῦ (μ, μ'), εὑρίσκεται, ἂν κατασκευασθῇ ἡ κατάκλισις τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου διερχομένης διὰ τοῦ σημείου καὶ ἀχθῇ ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς μ τοῦ σημείου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως. Ἡ τομὴ μ_1 τῆς καθέτου ταύτης καὶ τῆς κατακλίσεως τῆς διὰ τοῦ σημείου (μ, μ') ἀχθείσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου (μ, μ').

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἡ κατάκλισις ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου.

Σημείωσις.—Ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι δεύτερον προβάλλον, ὅπως τὸ ΚβΛ′ (σχ. 181), τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ, κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ, κατακλίνεται προφανῶς ἐπὶ τῆς χψ, ἡ δὲ κατάκλισις τοῦ τυχόντος σημείου (α,α′) τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκεται, ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ α κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Κ τῆς κατακλίσεως καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης τὸ τμῆμα $\nu\alpha_1 = \beta\alpha'$.



Σχ. 181

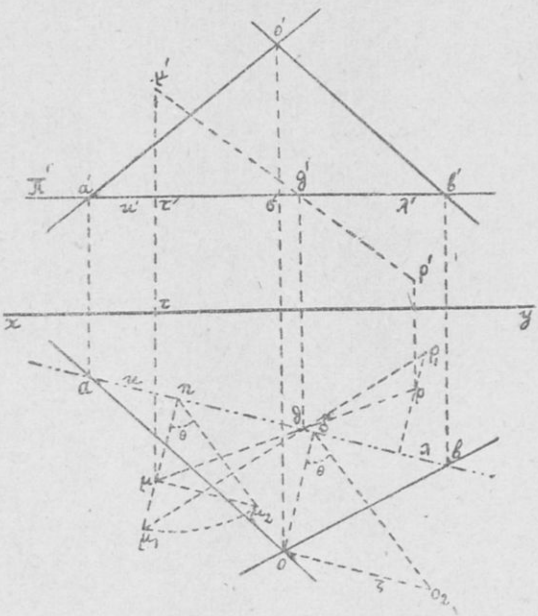
Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΚβΛ′ εἶναι δεύτερον προβάλλον, ἡ γωνία Λ′βψ, εἶναι ἡ γωνία κλίσεως αὐτοῦ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ τρίγωνον **ρβα′** εἶναι τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου **(α,α′)**. Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τῆς **να** τὸ τμῆμα $\nu\alpha_1$ ἴσον τῇ ὑποτεινούσῃ **βα′** τοῦ τριγώνου τούτου ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

205. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.*(τῆς ἀνακλίσεως)*.— ***Δοθείσης τῆς κατακλίσεως ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον, εὑρεῖν τὰς δύο προβολὰς αὐτοῦ.***

Ἔστω μ_1 ἡ κατάκλισις σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $(o\alpha\beta, o'\alpha'\beta')$ κατακεκλιμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π′ παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον (σχ. 182).

Ἄξων κατακλίσεως εἶναι ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος $(\kappa\lambda, \kappa'\lambda')$ καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον Π′ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ.

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον κατακλίσεως σημείου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τοῦ (o,o'). Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν $o\delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\kappa\lambda$ καὶ τὴν $o\zeta$ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἐπὶ ταύτης δὲ λαμβάνομεν $oo_2 = \sigma' o'$, δηλαδὴ τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κατηγμένων τοῦ σημείου (ο,ο') καὶ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως. Τὸ τρίγωνον $o\delta o_2$ εἶναι τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου (o, o'), ἐκ δὲ τούτου κατασκευάζεται εὐκόλως



Σχ. 182

τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου Μ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ μ_1 ἡ $\mu_1 n$ κάθετος ἐπὶ τὴν προβολὴν $\kappa\lambda$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς n παράλληλος τῇ δo_2, ληφθῇ δὲ ἐπὶ ταύτης τὸ τμῆμα $n\mu_2 = n\mu_1$ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ μ_2 παράλληλος τῇ $\kappa\lambda$. Ἡ παράλληλος αὕτη συναντᾷ τὴν $\mu_1 n$ εἰς σημεῖον μ καὶ τὸ προκύπτον τρίγωνον $n\mu\mu_2$ εἶναι τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τοῦ σημείου Μ, ὡς ὅμοιον πρὸς τὸ $\delta o o_2$ καὶ ἔχον τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ κατασκευῆς ἴσην τῇ ἀποστάσει $n\mu_1$ τῆς κατακλίσεως τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῆς πρώτης προβολῆς τοῦ ἄξονος.

Τὸ σημεῖον ἄρα μ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου Μ.

Ἔχοντες οὕτω τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ Μ προσδιορίζομεν καὶ τὴν δευτέραν. Αὕτη, ὡς εἶναι γνωστόν, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κατηγμένη τοῦ Μ ὑπερέχει τῆς κατηγμένης $\tau\tau'$ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως κατὰ τὴν πλευρὰν $\mu\mu_2$ τοῦ τριγώνου τῆς κατακλίσεως, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ καὶ ἀπὸ τοῦ τ' τὸ τμῆμα $\tau'\mu'=\mu\mu_2$, τὸ σημεῖον μ' θὰ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ Μ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀνακλίνωμεν ὅσα θέλομεν σημεῖα τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἐν τούτοις, μετὰ τὴν ἀνάκλισιν τοῦ σημείου Μ, δυνάμεθα διὰ τὸ ἁπλούστερον νὰ ἀνακλίνωμεν ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἐδαφίου 203.

Π.χ. ἵνα ἀνακλίνωμεν τὸ εἰς τὸ σημεῖον ρ_1 κατακεκλιμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΡ τέμνει τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως εἰς σημεῖον Θ ἔχον πρώτην προβολὴν ϑ καὶ δευτέραν ϑ'. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ κατὰ τὴν κατάκλισιν καὶ ἀνάκλισιν μένει ἀμετάστατον, προβολαὶ τῆς εὐθείας ΜΡ εἶναι αἱ $\mu\vartheta$ καὶ $\mu'\vartheta'$. Πρώτη ἄρα προβολὴ τοῦ Ρ εἶναι τὸ σημεῖον ρ τῆς τομῆς τῆς $\mu\vartheta$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ ρ_1 καθέτου ἐπὶ τὴν $\kappa\lambda$, δευτέρα δὲ προβολή του εἶναι τὸ σημεῖον ρ' τῆς τομῆς τῆς $\mu'\vartheta'$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ ρ καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.

Σημείωσις.— Ὅταν τὸ ἐπίπεδον ἔχῃ δοθῇ διὰ τῶν ἰχνῶν του, ἡ ἀνάκλισις τυχόντος σημείου του γίνεται τῇ βοηθείᾳ τυχούσης εὐθείας ἢ ἰχνοπαραλλήλου του διερχομένης διὰ τοῦ σημείου. Π.χ. ἔστω ὅτι ζητοῦνται αἱ προβολαὶ τοῦ εἰς τὸ μ_1 κατακεκλιμένου σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ΣαΤ' (σχ.180). Φέρομεν ἐκ τοῦ μ_1 παράλληλον τῷ ἴχνει Σ. Αὕτη εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς διὰ τοῦ Μ διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου, τέμνει δὲ τὸ κατακεκλιμένον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ β_1, ὅπερ ἀνακλίνεται εἰς τὸ (β,β'). Πρώτη ἄρα προβολὴ τῆς διὰ τοῦ Μ διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου εἶναι ἡ ἐκ τοῦ β παράλληλος τῷ ἴχνει Σ δευτέρα δὲ ἡ ἐκ τοῦ β' παράλληλος τῇ χψ. Ἄγοντες ἐκ τοῦ μ_1 κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως, προσδιορίζομεν τὴν πρώτην προβολὴν μ τοῦ σημείου Μ. ἐκ ταύτης δὲ καὶ τὴν δευτέραν μ'.

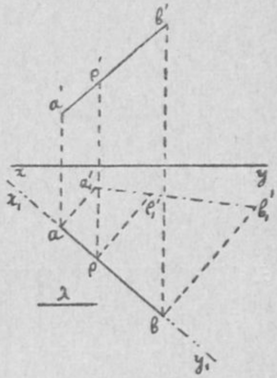
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Α΄) Προσδιορισμὸς ἀποστάσεων

206. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο δοθέντων σημείων.***

Ἔστωσαν (α, α') καὶ (β, β') τὰ δοθέντα σημεῖα (σχ. 183). Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ΑΒ προβάλλεται ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς αὐτήν. Ἐὰν λοιπὸν μεταθέσωμεν τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ ἢ προτιμώτερον νὰ ταὐτισθῇ μετ' αὐτῆς, ἡ νέα δευτέρα προβολὴ $\alpha_1'\beta_1'$ τοῦ τμήματος ΑΒ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτοῦ.



Σχ. 183

Ἄσκησις.— Νὰ λυθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα α΄) διὰ τῆς μεθόδου τῶν κατακλίσεων καὶ β΄) διὰ στροφῆς περὶ ἄξονα.

207. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ ληφθῇ σημεῖον ἀπέχον ἀπὸ δοθέντος σημείου αὐτῆς δοθεῖσαν ἀπόστασιν.***

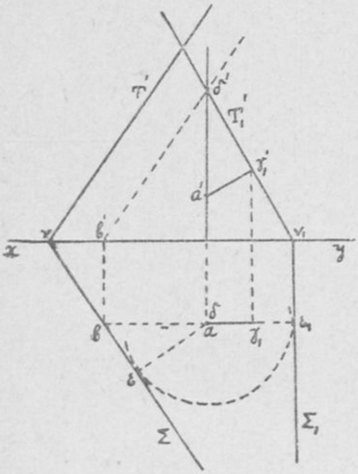
Ἔστω $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 183). Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ σημεῖον αὐτῆς ἀπέχον τοῦ (α, α') ἀπόστασιν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ λ.

Μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας καὶ κατασκευάζομεν τὴν νέαν δευτέραν προβολὴν αὐτῆς $\alpha_1'\beta_1'$. Τὸ τμῆμα $\alpha_1'\beta_1'$ παριστᾷ τὸ ἐν τῷ χώρῳ τμῆμα ΑΒ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τούτου τὸ τμῆμα $\alpha_1'\rho_1' = \lambda$, τὸ ρ_1 θὰ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου ἐν τῷ προβολ. συστήματι $\chi_1\psi_1$.

Ἄγοντες ἐκ τοῦ ρ_1 κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ προσδιορίζομεν τὴν πρώτην προβολὴν αὐτοῦ ρ, ἐκ ταύτης δὲ καὶ τὴν δευτέραν, ἐν τῷ προβολ. συστήματι χψ.

208. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου.***

Ἔστω ΣνΤ′ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ (α,α') τὸ δοθὲν σημεῖον Ἐὰν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἦτο κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν προβολ. ἐπιπέδων, π.χ. ἐπὶ τὸ δεύτερον, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου (α,α') ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως θὰ προεβάλλετο ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος.



Σχ. 184

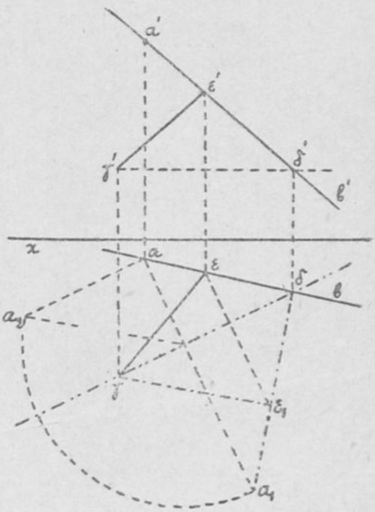
Τούτου τεθέντος, ὅς περιστραφῇ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον καὶ διὰ τοῦ σημείου (α,α') διερχόμενον, μέχρις οὗ γίνῃ κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον (§ 199). Θὰ λάβῃ τότε τὴν θέσιν $\Sigma_1\nu T_1'$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ(α,α') κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν τῇ νέᾳ του θέσει καὶ προσδιορισθῇ ὁ ποῦς (γ_1, γ_1') ταύτης (§ 173 περ. α′), θὰ ἔχωμεν τὰς δύο προβολὰς $\alpha\,\gamma_1$ καὶ $\alpha'\gamma_1'$ τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι ἐν τῇ νέᾳ θέσει παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον, ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς $\alpha'\gamma_1'$ εἶναι τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος.

Ἄσκησις. —Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ μεταθέσεως τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου.

209. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθείσης εὐθείας.***

Ἔστω $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ (γ, γ') τὸ δοθὲν σημεῖον (σχ. 185).

Ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$. Τὰ σημεῖα (γ, γ') καὶ (δ, δ'), ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ (α, α') θὰ κατακλιθῇ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, εἰς τὸ α_1 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὐθεῖα $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ ἐπὶ τῆς $\alpha_1\delta$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ γ ἡ $\gamma\varepsilon_1$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha_1\delta$, τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ταύτης ἀπὸ τοῦ γ μέχρι τοῦ ποδὸς αὐτῆς ε_1 εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις.



Σχ. 185

Ἀνακλίνοντες προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς ε καὶ ε' τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἑπομένως καὶ τὰς προβολὰς αὐτῆς $\gamma\varepsilon$ καὶ $\gamma'\varepsilon'$.

Β') Προσδιορισμὸς γωνιῶν

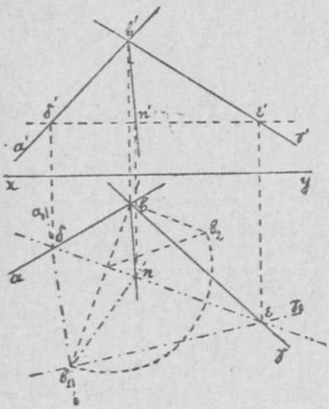
α') Γωνία δύο εὐθειῶν.

210. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ τὴν διχοτόμον αὐτῆς.***

Ἔστωσαν $(\varepsilon\beta, \varepsilon'\beta')$ καὶ $(\zeta\beta, \zeta'\beta')$ δύο εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσαι. Ζητεῖται ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία (σχ. 186).

Κατακλίνομεν τὸ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἰχνοπαραλλήλου του $(\delta\varepsilon, \delta'\varepsilon')$. Τὰ σημεῖα (δ, δ') καὶ $(\varepsilon, \varepsilon')$ θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ (β, β') θὰ κατακλιθῇ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, εἰς τὸ β_1. Ἡ ζητουμένη ἄρα γωνία εἶναι ἡ $\delta\,\beta_1\,\varepsilon$.

Ἡ διχοτόμος $b_1 n$ τῆς γωνίας ταύτης εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς διχοτόμου τῆς ἐν τῷ χώρῳ γωνίας ΔΒΕ. Ἑπομένως τὸ σημεῖον n, καθ' ὃ τέμνει τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου Η, καθ' ὃ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΒΕ τέμνει τὸν ἄξονα $(\delta\varepsilon,\ \delta'\varepsilon')$. Ἐκ ταύτης προσδιορίζεται καὶ ἡ δευτέρα προβολή του n', οὕτω δὲ ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς bn καὶ $b'n'$ τῆς ζητουμένης διχοτόμου.

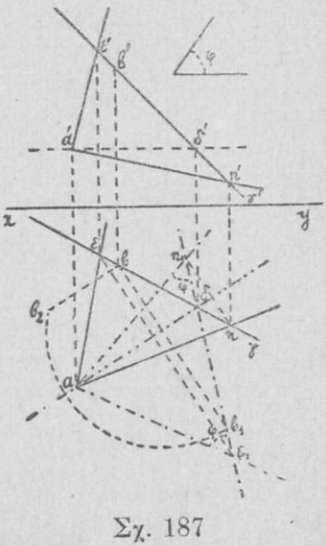


Σχ. 186

211. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Ἀπὸ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστω (a,a') τὸ δοθὲν σημεῖον, $(b\gamma,\ b'\gamma')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ φ ἡ δοθεῖσα γωνία (σχ. 187).

Κατακλίνομεν τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὁριζόμενον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἰχνοπαραλλήλου του $(a\delta,\ a'\delta')$. Τὰ σημεῖα (a,a') καὶ $(\delta,\ \delta')$ θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ (b,b'), κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ b_1 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὐθεῖα $(b\gamma,\ b'\gamma')$ ἐπὶ τῆς $b_1\delta$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ a ἡ $a\varepsilon_1$ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς $b_1\delta$ γωνίαν φ, ἡ $a\varepsilon_1$ θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ζητουμένης εὐθείας.



Σχ. 187

Ἀνακλίνοντες προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς τοῦ εἰς τὸ ε_1 κατακεκλιμένου σημείου. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη ε θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας ($\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$) καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ ε_1 καθέτου ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως, ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκεται καὶ ἡ δευτέρα ε'.

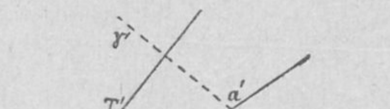
Προβολαὶ ἄρα τῆς ζητουμένης εὐθείας εἶναι αἱ $\alpha\varepsilon$ καὶ $\alpha'\varepsilon'$. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν γένει δύο λύσεις.

β') Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—**Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος ἐπιπέδου.**

Ἔστω ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ΣνΤ' τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (σχ. 188).

Ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι δὲ συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (§ 93).



Σχ. 188

Τούτου τεθέντος, φέρομεν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου(α,α')τῆς δοθείσης εὐθείας τὴν κάθετον($\alpha\gamma$,$\alpha'\gamma'$) ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (§180) καὶ διὰ κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου ($\beta\alpha\gamma$, $\beta'\alpha'\gamma'$) ἐπὶ ὁριζοντίου τινος ἐπιπέδου, οἷον τοῦ Η', ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος ($\delta\varepsilon$,$\delta'\varepsilon'$), προσδιορίζομεν (§ 210) τὸ ἀληθὲς μέγεθος $\delta\alpha_1\gamma_1$ τῆς γωνίας ΒΑΓ.

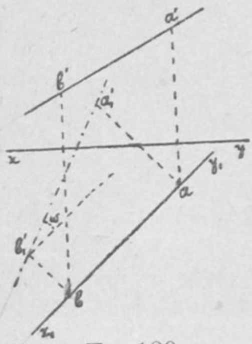
Ἡ γωνία αὕτη εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ζητουμένης. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ $\alpha_1 n_1$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha_1\delta$, ἡ γωνία $\gamma_1\alpha_1 n_1$ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία τῆς εὐθείας ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ'.

213. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δοθείσης εὐθείας μετὰ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου.***

Ἔστω $(a\beta, a'\beta')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 189).

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἔκειτο ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου, ἡ ζητουμένη γωνία αὐτῆς μετὰ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου θὰ ἦτο προφανῶς ἡ αὐτὴ μὲ τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της παραλλήλου πρὸς τὴν χψ.

Τούτου τεθέντος, ἂς μετατεθῇ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐπιπέδου. Τότε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς εὐθείας, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μετὰ τῆς νέας δευτέρας προβολῆς αὐτῆς $a_1'\beta_1'$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς $a_1'\beta_1'$ παράλληλος τῇ $\chi_1\psi_1$, ἡ ὑπὸ τῆς παραλλήλου ταύτης καὶ τῆς $a_1'\beta_1'$ σχηματιζομένη γωνία ω εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 189

Σημείωσις.—Ἡ ζητουμένη γωνία δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ κατακλίσεως τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἢ τυχόντος ἄλλου ὁριζοντίου ἐπιπέδου (§ 202).

Δύναται ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ στροφῆς τῆς εὐθείας περὶ ἄξονα κατακόρυφον διερχόμενον διὰ τυχόντος σημείου της, μέχρις οὗ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον. Διότι κατὰ τὴν στροφὴν ἡ γωνία προφανῶς δὲν μεταβάλλεται, ὅταν δὲ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς γίνῃ παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον, θὰ προβληθῇ ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς μέγεθός της.

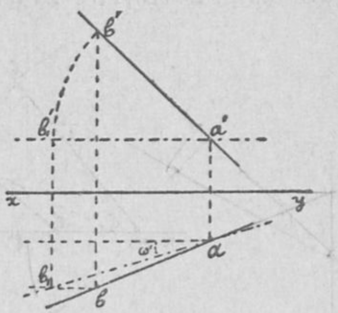
Τὰς κατασκευὰς ταύτας ἀφίνομεν εἰς τὸν μαθητὴν πρὸς ἄσκησιν.

214. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δοθείσης εὐθείας μετὰ τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου.***

Ἔστω $(a\beta, a'\beta')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 190).

Ἐὰν περιστρέψωμεν αὐτὴν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου της (a,a') διερχόμενον, μέχρις οὗ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβολ.

ἐπίπεδον, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ὑπὸ ταύτης καὶ τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου σχηματιζομένη γωνία θὰ μένῃ ἀμετάβλητος κατὰ τὴν στροφήν. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς νέας θέσεώς της ἡ γωνία προβάλλεται ἐπὶ τοῦ πρώτου προβ. ἐπιπέδου ὑπὸ τὸ ἀληθὲς μέγεθός της, ἕπεται ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς νέας πρώτης προβολῆς $\alpha\beta_1$ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της α ἠγμένης παραλλήλου τῇ χψ σχηματιζομένη γωνία ω' εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 190

Σημείωσις.—Ἡ ζητουμένη γωνία δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ μεταθέσεως τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου, ἢ καὶ διὰ κατακλίσεως τοῦ δευτέρου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβολικοῦ ἢ ἄλλου παραλλήλου πρὸς τοῦτο ἐπιπέδου.

γ') Γωνία δύο ἐπιπέδων.

215. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.- ***Εὑρεῖν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζουσι δύο δοθέντα ἐπίπεδα.***

Ἔστωσαν ΣμΤ' καὶ ΚνΛ' τὰ δοθέντα ἐπίπεδα (σχ. 191).

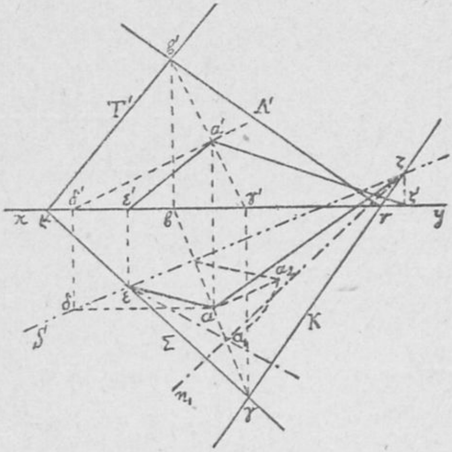
Μέτρον διέδρου γωνίας εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου, ἥτις, ὡς γνωστόν, σχηματίζεται ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς.

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐντὸς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς διέδρου.

Ἐκ τούτων προκύπτουσι δύο τρόποι λύσεως τοῦ προβλήματος.

1ος **τρόπος**. Κατασκευάζομεν τὴν κοινὴν τομὴν $(\beta\gamma, \beta'\gamma')$ τῶν δοθέντων ἐπιπέδων καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου της (α, α') φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν.

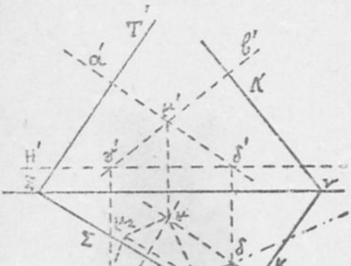
Τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὰ ἴχνη θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (§ 181). Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ α' ἡ $\alpha'\delta'$ κάθετος ἐπὶ τὴν $\beta'\gamma'$ καὶ ἐκ τοῦ α ἡ $\alpha\delta$ παράλληλος τῇ χψ, ἡ εὐθεῖα $(\alpha\delta, \alpha'\delta')$ θὰ εἶναι δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ καθέτου τούτου ἐπιπέδου, ἡ δὲ ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτῆς δ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν $\beta\gamma$ θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ. Τοῦτο τέμνει τὰ πρῶτα ἴχνη Σ καὶ Κ τῶν δοθέντων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα $(\varepsilon, \varepsilon')$ καὶ (ζ, ζ'). Κοινὴ ἄρα τομὴ τοῦ ἀχθέντος καθέτου ἐπιπέδου μετὰ μὲν τοῦ ἐπιπέδου



Σχ. 191

ΣμΤ′ εἶναι ἡ $(\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon')$, μετὰ δὲ τοῦ ΚνΛ′ ἡ $(\alpha\zeta, \alpha'\zeta')$. Κατ'ἀκολουθίαν αἱ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι αἱ ἐπίπεδοι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων, ἃς σχηματίζουσι τὰ δοθέντα ἐπίπεδα.

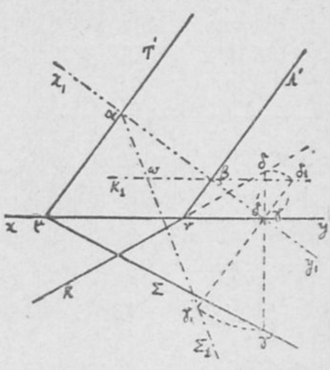
Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους αὐτῶν, κατακλίνομεν τὸ ἀχθὲν καθέτως ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ S. Τὰ σημεῖα ε καὶ ζ θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ (α, α'), κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ α_1· ἑπομένως καὶ αἱ εὐθεῖαι $(\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon')$ καὶ $(\alpha\zeta, \alpha'\zeta')$ θὰ κατακλιθῶσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν $\varepsilon\alpha_1$ καὶ $\zeta\alpha_1$, ἡ δὲ γωνία $\varepsilon\alpha_1\zeta$ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ της $\varepsilon\alpha_1 n_1$ εἶναι τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες μετροῦσι τὰς διέδρους.



Σχ. 192

2ος *τρόπος*. Ἐκ τυχόντος σημείου (μ, μ') φέρομεν καθέτους ($\mu\alpha$, $\mu'\alpha'$) καὶ ($\mu\beta$, $\mu'\beta'$) ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα ΣξΤ′ καὶ ΚνΛ′(σχ. 192). Κατακλίνοντες τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο τούτων καθέτων ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου Η′, εὑρίσκομεν τὰς ὑπὸ τούτων σχηματιζομένας γωνίας, αἵτινες μετροῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων σχηματιζομένας διέδρους.

Σημείωσις α′).—Ὅταν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολικὸν ἐπίπεδον, μέτρα τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων διέδρων εἶναι αἱ γωνίαι, ἃς σχηματίζουσι τὰ πρῶτα ἴχνη αὐτῶν. Ὁμοίως, ὅταν τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον, μέτρα τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων διέδρων εἶναι αἱ ὑπὸ τῶν δευτέρων ἰχνῶν των σχηματιζόμεναι γωνίαι.



Σχ. 193

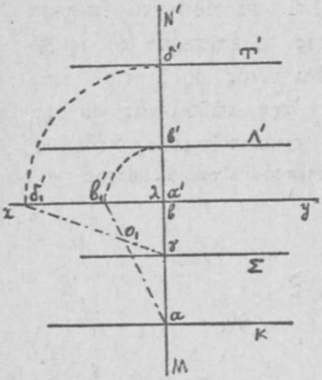
Σημείωσις β′).—Ὅταν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα ἔχωσι δύο ὁμώνυμα ἴχνη παράλληλα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας καὶ διὰ μεταθέσεως τοῦ ἑτέρου τῶν προβολ. ἐπιπέδων οὕτως, ὥστε ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι τὰ ἐπίπεδα νὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶνπροβολ.ἐπιπέδων. Π.χ. ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΣμΤ′ καὶ ΚνΛ′ ἔχοντα τὰ δεύτερα ἴχνη αὐτῶν παράλληλα (σχ. 193).

Μεταθέτομεν τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $\chi_1\psi_1$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰ δεύτερα ἴχνη τῶν ἐπιπέδων ΣμΤ′ καὶ ΚνΛ′ καὶ προσδιορίζομεν τὰ νέα πρῶτα ἴχνη αὐτῶν Σ_1 καὶ K_1 (§ 190 Σημ.).

Ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον. Ἐπομένως ἡ ὑπὸ τῶν πρώτων ἰχνῶν αὐτῶν Σ_1 καὶ K_1 σχηματιζομένη γωνία ω καὶ ἡ ταύτης παραληρωματικὴ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διέδρων γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσι τὰ δοθέντα ἐπίπεδα.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ὅταν τὰ ἐπίπεδα ἔχωσι τὰ πρῶτα ἴχνη αὐτῶν παράλληλα.

Σημείωσις γ′).—Ὅταν τὰ δοθέντα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα τῇ χψ, ὅπως τὰ (Σ,Τ′) καὶ (Κ,Λ′) (σχ 194), ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι παράλληλος τῇ χψ· ἐπομένως καὶ πᾶν ἐπ' αὐτὴν κάθετον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ΜλΝ′, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν χψ καὶ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Κ,Λ′) κατὰ εὐθεῖαν ἔχουσαν πρῶτον ἴχνος τὸ **α** μὲ δευτέραν προβολὴν **α**′ καὶ δεύτερον ἴχνος τὸ 6′ μὲ πρώτην προβολὴν 6, τὸ δὲ (Σ,Τ′) κατὰ εὐθεῖαν ἔχουσαν πρῶτον ἴχνος τὸ **γ** καὶ δεύτερον τὸ **δ**′. Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου τὰ μὲν πρῶτα ἴχνη α καὶ γ ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ β′ θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ $β_1'$ ἐπὶ τῆς χψ καὶ εἰς ἀπόστασιν $λβ_1'=λβ'$, ἀπὸ τῆς ΜΝ′, τὸ δὲ δ′ εἰς τὸ $δ_1'$ καὶ εἰς ἀπόστασιν $λδ_1'=λδ'$. Ἑπομένως αἱ τομαὶ τῶν δοθέντων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜλΝ′ θὰ κατακλιθῶσιν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $αβ_1'$ καὶ $γδ_1'$, ἡ δὲ γωνία $αο_1γ$ καὶ ἡ ταύτης παραπληρωματικὴ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διέδρων, ἃς σχηματίζουσι τὰ δοθέντα ἐπίπεδα.

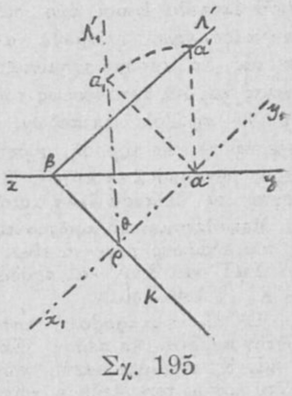


Σχ. 194

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει δοθὲν ἐπίπεδον μετὰ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου.***

Ἡ ζητουμένη γωνία ἔχει, ὡς γνωστόν, μέτρον τὴν γωνίαν θ τοῦ τριγώνου κατακλίσεως τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου, ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἀρκεῖ ὅθεν πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον κατακλίσεως τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ πρόβλημα ὅμως δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον στηριζόμενον ἐπὶ τῆς ἑπομένης παρατηρήσεως.



Σχ. 195

Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι δεύτερον προβάλλον, ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου ἔχει προφανῶς μέτρον τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ δεύτερον ἴχνος του μετὰ τῆς χψ.

Τούτου τεθέντος, ἔστω ἐπίπεδον ΚβΛ′ κλῖνον πρὸς ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα (σχ. 195)

Πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, μεταθέτομεν τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφους $χ_1ψ_1$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος του Κ. Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι εἶναι δεύτερον προβάλλον, ἤτοι κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευασθῇ τὸ νέον δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ $\rho\Lambda_1'$ (§ 191 Σημ), ἡ γωνία $\psi_1\rho\Lambda_1'$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ δοθὲν ἐπίπεδον μετὰ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου.

Ἄσκησις. Νὰ λυθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ διὰ στροφῆς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου περὶ ἄξονα κατακόρυφον, μέχρις οὗ γίνῃ κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

217. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει δοθὲν ἐπίπεδον μετὰ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου.***

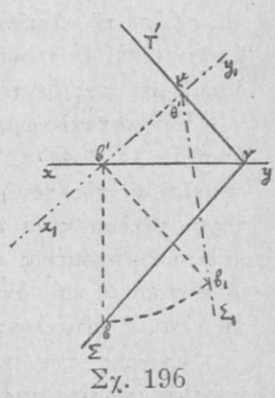
Ἡ ζητουμένη γωνία ἔχει μέτρον τὴν γωνίαν θ′ τοῦ τριγώνου τῆς κατακλίσεως τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον.

Ἀρκεῖ ὅθεν πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς νὰ κατασκευασθῇ ἓν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων.

Τὸ πρόβλημα ὅμως λύεται ἐπίσης ἁπλῶς καὶ διὰ τῆς ἑπομένης παρατηρήσεως.

Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι πρῶτον προβάλλον, ἡ ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου σχηματιζομένη γωνία, ἔχει μέτρον τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ πρῶτον ἴχνος του μετὰ τῆς χψ.

Τούτου τεθέντος, ἔστω ΣνΤ′ ἐπίπεδον κλῖνον πρὸς ἀμφότερα τὰ προβολ. ἐπίπεδα (σχ. 196). Πρὸς εὕρεσιν τῆς ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου περιεχομένης γωνίας, μεταθέτομεν τὸ πρῶτον προβόλ. ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ νέα γραμμὴ τοῦ ἐδάφος νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.



Σχ. 196

Τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἐν τῷ νέῳ προβολ. συστήματι εἶναι πρῶτον προβάλλον. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευασθῇ τὸ νέον πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ $\mu\Sigma_1$, ἡ γωνία $\Sigma_1\mu\chi_1$

θὰ εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου, ἣν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον σχηματίζει μετὰ τοῦ δευτέρου προβολ. ἐπιπέδου.

Ἄσκησις. Νὰ λυθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα διὰ στροφῆς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον.

+

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

+ 218. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ κύκλου κειμένου ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, γνωστῶν ὄντων τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.***

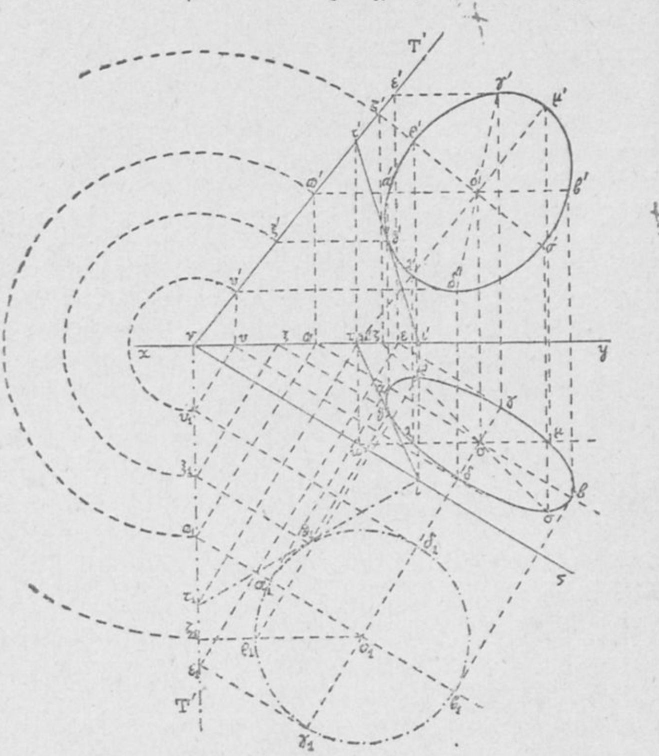
Ἔστω ΣνΤ΄τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ρ ἡ ἀκτὶς καὶ o ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ κέντρου του (σχ. 197).

Ἡ διάμετρος ΑΒ, ἡ παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον, κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου διερχομένης ἰχνοπαραλλήλου. Ταύτης πρώτη προβολὴ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ o παράλληλος τῷ ἴχνει Σ, δευτέρα δέ, ἡ ἐκ τοῦ δευτέρου ἴχνους της ϖ' παράλληλος τῇ χψ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ προβάλλεται ὁριζοντίως ὑπὸ τὸ ἀληθὲς μέγεθός της, ἐὰν λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ o τὰ τμήματα $o\alpha$ καὶ καὶ $o\beta$ ἴσα τῇ ἀκτῖνι, ἔχομεν τὴν πρώτην προβολὴν αὐτῆς $\alpha\beta$. Ἄγοντες δὲ ἐκ τῶν σημείων o, α, β καθέτους ἐπὶ τὴν χψ προσδιορίζομεν τὰς δευτέρας προβολὰς τοῦ κέντρου καὶ τῆς ΑΒ.

Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ ἐπίπεδον ΣνΤ΄ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβ. ἐπιπέδου (§ 204), τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ σημεῖον o_1 τῆς τομῆς τῆς ἐκ τοῦ o καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως καὶ τῆς κατακλίσεως τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου ($o\varpi$, $o'\varpi'$), ἡ δὲ μὲ κέντρον o_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν γραφομένη περιφέρεια θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου.

Ἔχοντες τὴν κατάκλισιν τῆς περιφερείας δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς προβολὰς ὅσων θέλομεν σημείων αὐτῆς τῇ βοηθείᾳ εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου διερχομένων διὰ τῶν σημείων τούτων (§ 205 Σημ.). Οὕτως, ἵνα ἀνακλίνωμεν τὸ εἰς τὸ σημεῖον

γ_1 κατακεκλιμένον σημεῖον τῆς περιφερείας, ἄγομεν ἐξ αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως. Ἡ παράλληλος αὕτη εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς διὰ τοῦ σημείου Γ τῆς περιφερείας διερχομένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ', τέμνει δὲ τὸ κατακεκλιμένον δεύτερον ἴχνος T_1' εἰς τὸ σημεῖον ε_1,



Σχ. 197

ὅπερ ἀνακλίνεται εἰς τὸ $(\varepsilon,\varepsilon')$· ἑπομένως πρώτη προβολὴ τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης εἶναι ἡ ἐκ τοῦ ε παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος Σ τοῦ ἐπιπέδου, δευτέρα δὲ ἡ ἐκ τοῦ ε' παράλληλος τῇ χψ. Τὸ σημεῖον ἄρα γ_1 ἀνακλίνεται εἰς τὸ (γ,γ').

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀνακλίνεται τὸ ϑ_1 εἰς τὸ (ϑ,ϑ') καὶ τὸ δ_1 εἰς τὸ (δ,δ') καὶ οὕτω καθεξῆς.

'Αφ' οὗ προσδιορίσωμεν οὕτως ἀρκετὰ σημεῖα ἑκατέρας τῶν προβολῶν τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἑνοῦμεν αὐτὰ διὰ συνεχοῦς καμπύλης καὶ ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς αὐτῆς.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐφαπτομένης εἴς τι σημεῖον τῆς περιφερείας, οἷον τὸ (∂, ∂'), φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας o_1 εἰς τὸ σημεῖον ∂_1. Αὕτη τέμνει τὸ μὲν κατακεκλιμένον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ τ_1, ὅπερ ἀνακλίνεται εἰς τὸ (τ, τ'), τὸν δὲ ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως εἰς τὸ ι τοῦ ὁποίου δευτέρα προβολὴ εἶναι τὸ ι'. Ἀνακλίνεται ἄρα ἐπὶ τῆς $(\tau\iota, \tau'\iota')$.

Σημείωσις α').— Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ κύκλου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι **ἔλλειψις**, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς προβολὰς δοθέντος κύκλου, κατασκευάζοντες τοὺς ἄξονας αὐτῶν καὶ προσδιορίζοντες, διὰ τῆς γνωστῆς γεωμ. κατασκευῆς (ὑποσημ. σελ. 80), ὅσα θέλομεν σημεῖα ἑκατέρας.

Τῆς πρώτης προβολῆς ἄξονες εἶναι οἱ **αβ** καὶ **γδ**.

Τῆς δευτέρας προβολῆς μέγας ἄξων εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον καὶ ὡς ἐκ τούτου κειμένης ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου διερχομένης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου. Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ ο′ τὰ τμήματα ο′λ′ καί ο′μ′ ἴσα τῇ ἀκτῖνι ἔχομεν τὸν μέγαν ἄξονα λ′μ′ τῆς δευτέρας προβολῆς.

Σχ. 198

Μικρὸς ἄξων τῆς δευτέρας προβολῆς εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΛΜ. Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς καθέτου ταύτης εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν λ′μ′(§ 177), ἡ δὲ πρώτη προβολὴ κατασκευάζεται, ἂν ἐπιζευχθῇ ἡ πρώτη προβολὴ ζ τοῦ δευτέρου ἴχνους της μετὰ τοῦ ο.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ(ζ,ζ′) κατακλίνεται εἰς τὸ ζ_1, ἡ εὐθεῖα (οζ,ο′ζ′) κατακλίνεται ἐπὶ τῆς $\alpha_1\zeta_1$. Αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν o_1 εἰς τὸ ϱ_1 ὅπερ ἀνακλίνεται εἰς τὸ (ϱ,ϱ′). Ἑπομένως ἡ (οϱ, ο′ϱ′) εἶναι ὁ μικρὸς ἡμιάξων τῆς δευτέρας προβολῆς.

Σημείωσις β').—Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου εἶναι πρῶτον προβάλλον (σχ.198), ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου. Λαμβάνοντες ὅθεν ἑκατέρωθεν τῆς πρώτης προβολῆς **ο** τοῦ κέντρου τὰ τμήματα **οα** καὶ **οβ** ἴσα τῇ ἀκτῖνι ἔχομεν τὴν πρώτην προβολὴν

$\alpha\beta$ τοῦ κύκλου, ἥτις εἶναι καὶ πρώτη προβολὴ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς παραλλήλου πρὸ τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον.

Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ χψ διερχομένη διὰ τοῦ ο', τὰ δὲ ἄκρα αὐτῆς α' καὶ β' κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐκ τῶν α καὶ β ἠγμένων καθέτων ἐπὶ τὴν χψ.

Ἡ διάμετρος ΓΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον καὶ κατ' ἀκολουθίαν προβάλλεται ἐπὶ τοῦ δευτέρου προβ. ἐπιπέδου ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν ἐκ τοῦ ο' κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha'\beta'$ καὶ λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ ο' τὰ τμήματα ο'γ' καὶ ο'δ' ἴσα τῇ ἀκτῖνι, ἔχομεν τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς ΓΔ.

Ἔχοντες οὕτω τοὺς ἄξονας $\alpha'\beta'$ καὶ $\gamma'\delta'$ τῆς ἐλλείψεως προσδιορίζομεν ὅσα θέλομεν σημεῖα αὐτῆς.

229. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.***

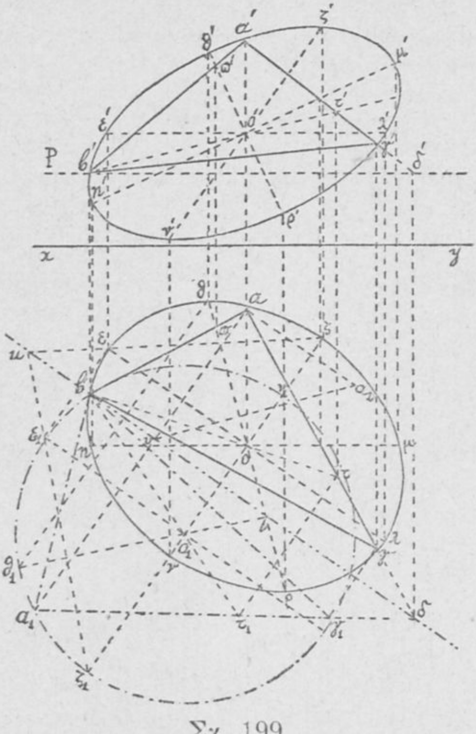
Ἔστω ($\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$) τὸ δοθὲν τρίγωνον (σχ. 199).

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἐπί τινος ἐπιπέδου Ρ παραλλήλου πρὸς τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον, οἷον τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Β, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος ($\beta\delta$, $\beta'\delta'$). Τὰ σημεῖα Β καὶ Δ, ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ μείνωσιν ἀμετάστατα, τὸ δὲ Α, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ α_1, ἡ ΑΒ ἐπὶ τῆς $\alpha_1\beta$ καὶ ἡ ΑΔ ἐπὶ τῆς $\alpha_1\delta$ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ Γ θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ σημεῖον γ_1, καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ γ κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ἄξονος τέμνει τὴν $\alpha_1\delta$.. Τὸ τρίγωνον ὅθεν $\alpha_1\beta\gamma_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον $\alpha_1\beta\gamma_1$ περιφέρειαν καὶ ἀνακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Τὸ σημεῖον τ_1, καθ' ὃ ἡ βo_1 τέμνει τὴν $\alpha_1\delta$, θὰ ἀνακλιθῇ εἰς τὸ (τ,τ')· ἑπομένως ἡ $\beta\tau_1$ ἐπὶ τῆς ($\beta\tau$, $\beta'\tau'$) καὶ τὸ ἐπὶ ταύτης κείμενον σημεῖον o_1, εἰς τὸ (o,o').

Ἡ διάμετρος ἡ παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον προβ. ἐπίπεδον προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος, ἔχει δὲ τὴν πρώτην προβολήν της παράλληλον τῇ πρώτῃ προβολῇ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως καὶ τὴν δευτέραν παράλληλον τῇ χψ. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ o παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ἄξονος καὶ ληφθῶσιν ἑκατέρωθεν τοῦ o τὰ τμήματα $o\varepsilon$ καὶ $o\lambda$ ἴσα τῇ ἀκτῖνι $o_1\beta$, ἡ $\varepsilon\lambda$ θὰ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εἰρημένης διαμέτρου, ἐξ ἧς κατασκευάζεται καὶ ἡ δευτέρα $\varepsilon'\lambda'$.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΕΛ φέρομεν τὴν κατάκλισιν αὐτῆς $f_1 \nu_1$ καὶ ἀνακλίνομεν τὸ σημεῖον f_1, εἰς τὸ (f, f') τῇ βοηθείᾳ τῆς εὐθείας $f_1 \varepsilon_1$, ἥτις ὡς τέμνουσα τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ἄξονος εἰς τὸ κ ἀνακλίνεται ἐπὶ τῆς $(\kappa\varepsilon, \kappa'\varepsilon')$, λαμβάνοντες δὲ $o\nu = of$ προσδιορίζομεν καὶ τὴν πρώτην προβολὴν ν τοῦ σημείου Ν ἐκ ταύτης δὲ καὶ τὴν δευτέραν ν'.



Σχ. 199

Ἔχοντες οὕτω τοὺς δύο ἄξονας $\varepsilon\lambda$ καὶ $f\nu$ τῆς πρώτης προβολῆς τῆς ζητουμένης περιφερείας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὅσα θέλομεν σημεῖα αὐτῆς.

Ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς κατασκευάζομεν καὶ τὴν δευτέραν προσδιορίζοντες ἀρκετὰ σημεῖα αὐτῆς τῇ βοηθείᾳ ἰχνοπαραλλήλων. Προτιμώτερον ὅμως νὰ κατασκευασθῶσιν καὶ ταύτης οἱ ἄξονες.

Μέγας ἄξων τῆς δευτέρας προβολῆς εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὸ δεύτερον προβ. ἐπίπεδον καί, ὡς ἐκ τούτου, κειμένης ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ (o, o') διερχομένης δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου $(o\pi, o'\pi')$. Κατασκευάζοντες τὴν ἰχνοπαράλληλον ταύτην καὶ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ o' τὰ τμήματα $o'\pi'$ καὶ $o'\mu'$ ἴσα τῇ ἀκτῖνι $o_1 \beta$, ἔχομεν τὴν δευτέραν προβολὴν $\pi'\mu'$ τῆς εἰρημένης διαμέτρου, τουτέστι τὸν μέγαν ἄξονα τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Μικρὸς ἄξων αὐτῆς εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΗΜ. Ταύτης ἡ δευτέρα προβολὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\pi'\mu'$ (§ 177), ἡ δὲ πρώτη κατασκευάζεται, ἐὰν προσδιορισθῇ ἡ πρώτη προβολὴ ϖ τοῦ σημείου της τοῦ προβαλλομένου κατακορύφως εἰς τὸ ϖ' καὶ ἀχθῇ ἡ $o\varpi$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ $o\varpi$ τέμνει τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως εἰς τὸ ι, ἡ ΟΠ κατακλίνεται ἐπὶ τῆς ιo_1, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν $\alpha_1 \beta \gamma_1$ εἰς τὸ ϑ_1. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀνακλίνεται εἰς τὸ (ϑ, ϑ')· ἑπομένως τὸ τμῆμα $o'\vartheta'$ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ μικροῦ ἡμιάξονος.

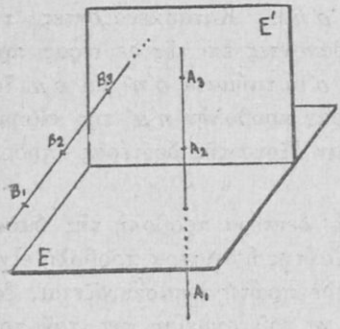
Ἄσκησις. — Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

220. Πᾶν πολύεδρον παρίσταται διὰ τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ, αἵτινες ἀποτελοῦνται ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ὁμωνύμων προβολῶν πασῶν τῶν κορυφῶν καὶ πασῶν τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.

Πρὸς εὔκολον ἀνάγνωσιν τοῦ σχεδιάσματος διακρίνομεν ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τῇ δευτέρᾳ προβολῇ τὰ ὁρατὰ μέρη τοῦ πολυέδρου ἀπὸ τὰ μὴ ὁρατά. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψιν, ὅτι ἐκ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς προβαλλούσης κειμένων σημείων τοῦ πολυέδρου ὁρατὸν εἶναι τὸ ἀπέχον περισσότερον τοῦ προβολ. ἐπιπέδου, ἐφ᾿ ὅσον, ἐννοεῖται, δὲν καλύπτεται ὑπ᾿ αὐτοῦ. Οὕτως ἐκ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πρώτης προβαλλούσης κειμένων σημείων A_1, A_2, A_3.... (σχ. 200) ὁρατὸν εἶναι μόνον τὸ A_3, τὸ ἔχον τὴν μεγαλυτέραν κατηγμένην, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς δευτέρας προβαλλούσης κειμένων B_1, B_2 B_3... ὁρατὸν εἶναι μόνον τὸ B_1, τὸ ἔχον τὴν μεγαλυτέραν τεταγμένην.

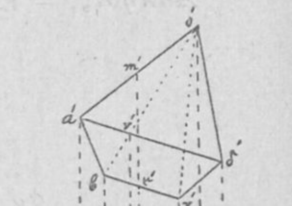


Σχ. 200

221. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ παρασταθῇ ἡ πυραμὶς ἡ ἔχουσα κορυφὰς τὰ σημεῖα*** (o,o'), (a,a') (β,β'), (γ,γ'), (δ,δ') (σχ. 201).

1ον. Φαινόμενον περίγραμμα ἐν πρώτῃ προβολῇ εἶναι τὸ τετράπλευρον $o\beta a\delta$ ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχονται αἱ πρῶται προβολαὶ πάντων τῶν ἄλλων μερῶν τοῦ πολυέδρου.

Ἐκ τῶν ἀκμῶν ΟΑ καὶ ΒΓ, ὧν αἱ πρῶται προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν ἐντὸς τοῦ περιγράμματος, ὁρατὴ εἶναι ἡ ΟΑ. Διότι ἡ ἐκ τοῦ μ κατακόρυφος συναντᾷ τὴν μὲν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον (μ,μ'), τὴν δὲ ΟΑ εἰς τὸ (μ,m'), ἐκ τῶν σημείων δὲ τούτων ὁρατὸν εἶναι τὸ (μ,m'), ὡς ἔχον τὴν μεγαλυτέραν κατηγμένην· ἑπομένως ἐκ τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΒΓ εἶναι ὁρατὴ μόνον ἡ ΟΑ καὶ διὰ τοῦτο ἡ μὲν πρώτη προβολὴ τῆς ΟΑ παρίσταται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, τῆς δὲ ΒΓ διὰ γραμμῆς ἀποτελουμένης ἐκ σειρᾶς στιγμῶν.



Σχ. 201

Τῆς κορυφῆς Γ μὴ οὔσης ὁρατῆς ἐν πρώτῃ προβολῇ, ὡς κειμένης ἐπὶ τῆς μὴ ὁρατῆς ἀκμῆς ΒΓ, αἱ εἰς αὐτὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ ΟΓ καὶ ΔΓ δὲν εἶναι ὁραταί.

2ον. Φαινόμενον περίγραμμα ἐν δευτέρᾳ προβολῇ εἶναι τὸ πεντάγωνον $o'\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Ἐκ τῶν ἀκμῶν ΟΒ καὶ ΑΔ, ὧν αἱ δεύτεραι προβολαὶ ἀλληλοτομοῦσιν ἐντὸς αὐτοῦ, ὁρατὴ εἶναι ἡ ΑΔ.

Διότι ἡ ἐκ τοῦ ν' κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνει τὴν μὲν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον (ν,ν'), τὴν δὲ ΑΔ εἰς τὸ (π,ν'), ἐκ τούτων δὲ ὁρατὸν εἶναι τὸ (π,ν'), ὡς ἔχον τὴν μείζονα τεταγμένην. Ἑπομένως καὶ ἡ ΑΔ εἶναι ὁρατὴ ἐν δευτέρᾳ προβολῇ καὶ διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς $\alpha'\delta'$ παρίσταται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, τῆς δὲ ΟΒ διὰ σειρᾶς στιγμῶν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἡ ΟΓ ἐν δευτέρᾳ προβολῇ δὲν εἶναι ὁρατή.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

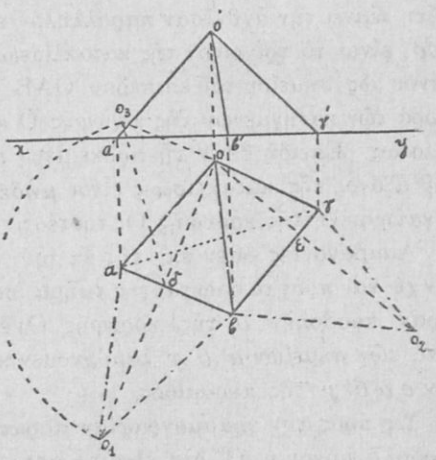
222. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ ἧς δίδονται αἱ ἀκμαί, ἔχουσα τὴν ἕδραν ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου.***

Ἔστωσαν (ΑΒ)=2,3 μ. (ΒΓ)=2,6μ,(ΓΑ)=4,(ΟΑ)=3,3, (ΟΒ)=3,5 καὶ (ΟΓ)=3 μ, τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν (σχ. 202).

Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ ἔχον $(\alpha\beta)$=2,3 μον τῆς κλίμακος $(\beta\gamma)$=2,6 καὶ $(\gamma\alpha)$=4.

Τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς ἕδρας ΑΒΓ.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς πρώτης προβολῆς τῆς κορυφῆς Ο, κατακλίνομεν τὴν ἕδραν ΟΑΒ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, κατασκευάζοντες τὸ τρίγωνον $\alpha\beta o_1$ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ πλευραὶ ΟΑ=3,3μ. καὶ ΟΒ=3,5 μ. Οὕτως ἔχομεν τὴν κατάκλισιν o_1 τῆς κορυφῆς Ο, ὡς πρὸς ἄξονα κατακλίσεως τὴν $\alpha\beta$.



Σχ. 202

Ὁμοίως κατακλίνομεν καὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ καὶ ἔχομεν τὴν κατάκλισιν o_2 τῆς κορυφῆς Ο, ὡς πρὸς ἄξονα $\beta\gamma$.

'Επειδὴ δὲ ἡ προβολὴ καὶ ἡ κατάκλισις παντὸς σημείου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως, ἡ πρώτη προβολὴ o τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o_1 καθέτου ἐπὶ τὴν $a\beta$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o_2 καθέτου ἐπὶ τὴν $\beta\gamma$· εἶναι ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον o τῶν δύο τούτων καθέτων $o_1\delta$ καὶ $o_2\varepsilon$.

'Επιζευγνύοντες τὸ o μετὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου $a\beta\gamma$ ἔχομεν τὴν πρώτην προβολὴν $oa\beta\gamma$ τῆς πυραμίδος.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς πυραμίδος παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν σημείων Α,Β,Γ, ὡς κειμένων ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, κεῖνται ἐπὶ τῆς χψ καὶ προσδιορίζονται εὐκόλως διὰ τῶν ἐκ τῶν πρώτων προβολῶν ἠγμένων καθέτων ἐπ' αὐτήν, ἡ δὲ δευτέρα προβολή τῆς κορυφῆς Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν χψ καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν ἴσην τῇ κατηγμένῃ αὐτῆς, τουτέστιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. 'Ανάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ o παράλληλον τῇ $a\beta$ καὶ μὲ κέντρον δ καὶ ἀκτῖνα δo_1 γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ἀχθεῖσαν παράλληλον εἰς τὸ o_3, τὸ δὲ τρίγωνον $o\delta o_3$ εἶναι τὸ τρίγωνον τῆς κατακλίσεως τοῦ σημείου Ο, θεωρουμένου ὡς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΒ. Ἡ oo_3 ἄρα εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κατηγμένων τῆς κορυφῆς Ο καὶ τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως. 'Επειδὴ δὲ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ἡ κατηγμένη τοῦ ἄξονος τῆς κατακλίσεως εἶναι ***μηδέν***, ἕπεται ὅτι ἡ oo_3 εἶναι ἡ κατηγμένη τῆς κορυφῆς Ο, τουτέστι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ o ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν χψ καὶ πρὸς τὰ ἄνω ταύτης τμῆμα ἴσον τῷ oo_3 ἔχομεν τὴν δευτέραν προβολὴν o' τῆς κορυφῆς Ο, ἐπιζευγνύοντες δὲ αὐτὴν μετὰ τῶν σημείων a',β',γ' λαμβάνομεν καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν $o'a'\beta'\gamma'$ τῆς πυραμίδος.

Ὡς πρὸς τὴν γραμμογραφίαν παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν πρώτῃ προβολῇ μόνον ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ὁρατή, ἐν δευτέρᾳ δὲ προβολῇ πᾶσαι αἱ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ εἶναι ὁραταί.

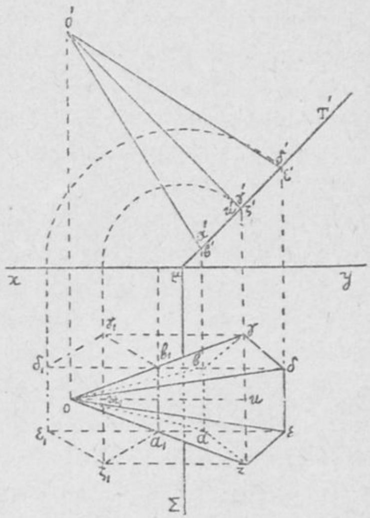
223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***'Επὶ ἐπιπέδου ΣμΤ'*** (σχ. 203) ***καθέτου ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ· ἐπίπεδον καὶ κλίνοντος πρὸς τὸ πρῶτον κατὰ γωνίαν*** 45^0 ***εὑρίσκεται κανονικὸν ἑξά-***

γωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς 0,9 μ. Ἡ πλευρὰ ΑΒ παράλληλος οὖσα τῷ ἴχνει Σ τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχει ἀπ᾽ αὐτοῦ 0,4 μ ἔχει δὲ μικροτέραν κατηγμένην παντὸς ἄλλου σημείου τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ μέσου αὐτῆς εἶναι 1,8 μ.

Τὸ ἑξάγωνον τοῦτο εἶναι βάσις πυραμίδος ἧς αἱ πλευραὶ εἶναι 3,5 μ. ἑκάστη.

Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ τῆς πυραμίδος.

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΣμΤ′ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, ὅτε ἄξων κατακλίσεως θὰ εἶναι τὸ ἴχνος αὐτοῦ Σ, καὶ κατασκευάζομεν, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα, τὴν κατάκλισιν $α_1 β_1 γ_1 δ_1 ε_1 ζ_1$ τοῦ ἐπ᾽ αὐτοῦ κειμένου ἑξαγώνου, ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν (§ 205 Σημ.) τὴν δευτέραν προβολὴν αὐτοῦ, ἥτις θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου ΣμΤ′, ἀφοῦ εἶναι δεύτερον προβάλλον, εἶτα δὲ καὶ τὴν πρώτην.



Σχ. 203

Τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος θὰ ἔχῃ τὴν μὲν δευτέραν προβολὴν κάθετον ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος Τ′ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον *κ′*, τὴν δὲ πρώτην προβολὴν κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος Σ ἐκ τοῦ *κ* (§ 180), ὡς παράλληλον δὲ πρὸς τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον προβάλλεται ἐπ᾽ αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος, ὅπερ δύναται νὰ εὑρεθῇ, διότι εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογ. τριγώνου ΟΚΑ ἔχοντος τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην τῇ ἀκτῖνι ΚΑ τῆς βάσεως καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος. Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ *κ′* καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνου Τ′ τὸ τμῆμα *κ′ο′* ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἔχομεν τὴν δευτέραν προβολὴν *ο′* τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, ἐξ ἧς εὑρίσκεται καὶ ἡ πρώτη *ο*.

Ἐπιζευγνύοντες δὲ τὰς προβολὰς τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος μετὰ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῆς βάσεως, ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς πυραμίδος.

Ὡς πρὸς τὴν γραμμογραφίαν παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν πρώτῃ προβολῇ ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ὁρατή, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ αἱ εἰς τὰς κορυφὰς Α καὶ Β καταλήγουσαι ἀκμαὶ δὲν εἶναι ὁραταί· ἐν δευτέρᾳ δὲ προβολῇ ἐκ τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι ὁραταὶ αἱ ΟΓ, ΟΒ, ΟΔ, ἀλλ' αἱ δεύτεραι προβολαὶ αὐτῶν συμπίπτουσι μετὰ τῶν προβολῶν τῶν ὁρατῶν ΟΑ, ΟΖ καὶ ΟΕ.

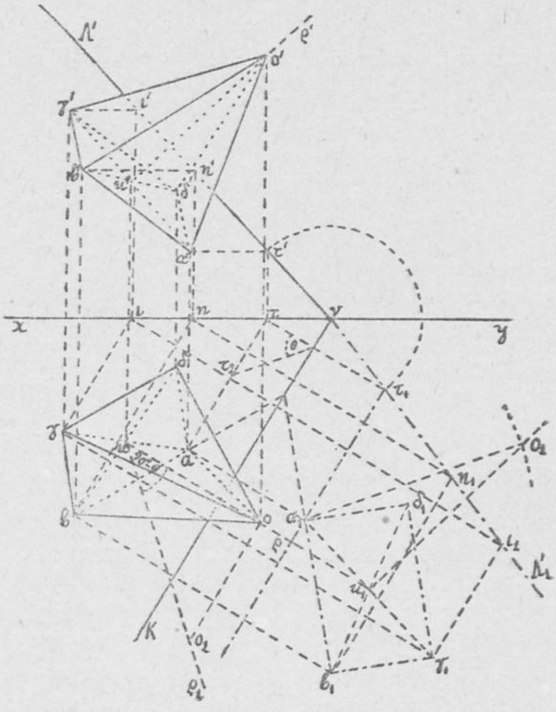
224. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΚνΛ΄(σχ.204) δίδεται ἡ κορυφὴ (α, α΄) ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχοντος διαστάσεις, (ΑΒ)=2 μ. καὶ (ΑΔ)=1,4μ. Ἡ πλευρὰ ΑΒ σχηματίζει μετὰ τῆς ἐκ τοῦ Α διερχομένης ἰχνοπαραλλήλου γωνίαν $\vartheta=40^0$, ὁλόκληρον δὲ τὸ ὀρθογώνιον κεῖται πρὸς τὰ ἄνω τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης καὶ ἡ κορυφὴ Β ἀριστερὰ τῆς Α.***

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι βάσις πυραμίδος ὑπερκειμένης τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι 3 μ. ἑκάστη. Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ τῆς πυραμίδος ταύτης.

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΚνΛ΄ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου (§ 204) καὶ προσδιορίζομεν τὴν κατάκλισιν α_1 τῆς δοθείσης κορυφῆς (α,α'). Ἐκ τοῦ α_1 ἄγομεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς κατακεκλιμένης πρώτης ἰχνοπαραλλήλου $\tau_1\alpha_1$ γωνίαν 40^0 καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης τὸ τμῆμα $\alpha_1\beta_1$=2μ. Ἡ $\alpha_1\beta_1$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἐκ ταύτης δὲ εὐκόλως κατασκευάζομεν τὴν κατάκλισιν $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Ἀνακλίνοντες τὰ σημεῖα β_1 καὶ γ_1 τῇ βοηθείᾳ τῶν πρώτων ἰχνοπαραλλήλων $\beta_1\pi_1$, καὶ $\gamma_1\iota_1$ ἢ ὁπωσδήποτε ἄλλως (§ 205 Σημ.), εὑρίσκομεν τὰς προβολὰς $\alpha\beta,\alpha'\beta'$ καὶ $\alpha\gamma,\alpha'\gamma'$ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εἶτα δὲ κατασκευάζομεν καὶ τὰς τῶν ἄλλων πλευρῶν φέροντες ἐκ τῶν σημείων (α,α') καὶ (γ,γ') παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς $(\beta\gamma,\beta'\gamma')$ καὶ $(\beta\alpha,\beta'\alpha')$. Οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἡ κορυφὴ Ο τῆς πυραμίδος κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς βάσεως ἀγομένης καθέτου ἐπ' αὐτήν, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι. Πρὸς προσδιορισμὸν ὅθεν αὐτῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου $(\varkappa,\varkappa')$ τὴν κάθετον $(\varkappa\rho,\varkappa'\rho')$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚνΛ΄ τῆς βάσεως καὶ νὰ λάβωμεν ἐπ᾽ αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ σημείου $(\varkappa,\varkappa')$ ἀρχόμενοι, τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος τὴν ἄλλην



Σχ. 204

κάθετον πλευρὰν ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς διαγωνίου τῆς βάσεως καὶ ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἂν λοιπὸν φέρωμεν ἐκ τοῦ $\varkappa_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\varkappa_1 a_1$, ἥτις εἶναι ἡ ἡμιδιαγώνιος τῆς βάσεως ὑπὸ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος, καὶ μὲ κέντρον a_1 καὶ ἀκτῖνα 3μ, τουτέστιν ἴσην τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, γράψωμεν περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν κάθετον εἰς σημεῖον o_1 καὶ τὸ τμῆμα $\varkappa_1 o_1$ θὰ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος.

Ἔχοντες οὕτω τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος, ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτὸ ἐν πρώτῃ καὶ δευτέρᾳ προβολῇ, κατακλίνομεν τὸ πρῶτον προβάλλον τὴν κάθετον ($\kappa\rho$, $\kappa'\rho'$) ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου (κ,κ'). Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον σχηματίζει μετὰ τοῦ πρώτου προβολικοῦ ἐπιπέδου, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ μετὰ παντὸς παραλλήλου πρὸς αὐτό, γωνίαν συμπληρωματικὴν τῆς γωνίας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου (§ 72), ἡ ($\kappa\rho$, $\kappa'\rho'$) θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\kappa\rho_1$ σχηματιζούσης μετὰ τῆς $\kappa\rho$ γωνίαν ($90^0-\vartheta$). Λαμβάνοντες λοιπὸν ἐπὶ τῆς $\kappa\rho_1$ τὸ τμῆμα $\kappa o_2 = \kappa_1 o_1$ ἔχομεν τὴν κατάκλισιν τοῦ ὕψους, ἑπομένως καὶ τῆς κορυφῆς Ο τῆς πυραμίδος, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου (κ,κ'). Ἄγοντες δὲ ἐκ τοῦ o_2 κάθετον ἐπὶ τὴν $\kappa\rho$ προσδιορίζομεν τὴν πρώτην βολὴν o τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, ἐκ ταύτης δὲ καὶ τὴν δευτέραν o'.

Ἐπιζευγνύοντες τέλος τὰ σημεῖα o καὶ o' ἀντιστοίχως μετὰ τῶν κορυφῶν τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῆς βάσεως λαμβάνομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς πυραμίδος.

Γραμμογραφία. Ἐκ τῶν ἀκμῶν ἐν πρώτῃ μὲν προβολῇ δὲν εἶναι ὁραταὶ αἱ ΑΒ, ΑΔ, ΟΑ, ἐν δευτέρᾳ δὲ προβολῇ αἱ ΑΔ, ΓΔ, ΟΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

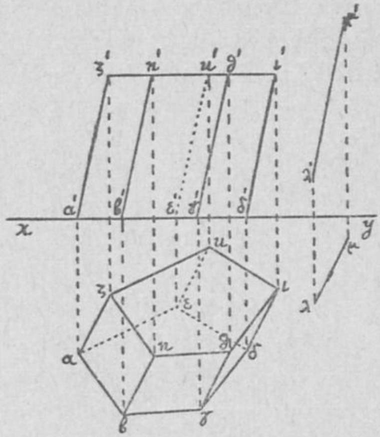
225. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ πρίσματος ἔχοντος βάσιν δοθὲν πεντάγωνον $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ κείμενον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου καὶ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἴσας τῷ τμήματι*** ($\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$) (σχ.205).

Φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως, ἥτις ἐν προκειμένῳ συμπίπτει μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς της, τὰ τμήματα $\alpha\zeta$, $\beta\eta$, $\gamma\vartheta$, $\delta\iota$, $\varepsilon\kappa$ παράλληλα καὶ ἴσα πρὸς τὸ $\lambda\mu$ καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰ πέρατα αὐτῶν διαδοχικῶς. Οὕτως ἔχομεν τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ πρίσματος.

Φέροντες εἶτα ἐκ τῶν δευτέρων προβολῶν τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως τὰ τμήματα $\alpha'\zeta'$, $\beta'\eta'$, $\gamma'\vartheta'$, $\delta'\iota'$, $\varepsilon'\kappa'$ παράλληλα καὶ ἴσα πρὸς τὸ $\lambda'\mu'$ καὶ ἐπιζευγνύοντες τὰ πέρατα αὐτῶν λαμβάνομεν καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν αὐτοῦ.

Γραμμογραφία. Ἐν πρώτῃ προβολῇ ἡ κορυφὴ Ε δὲν εἶναι ὁρατή· ἑπομένως δὲν εἶναι ὁραταὶ καὶ αἱ εἰς αὐτὴν καταλήγουσαι ἀκμαὶ ΑΕ, ΔΕ, ΚΕ. Πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἀκμαὶ εἶναι ὁραταί.

Ἐν δευτέρᾳ προβολῇ δὲν εἶναι ὁρατὴ ἡ πλευρὰ ΕΚ. Δὲν εἶναι ὁραταὶ ἐπίσης αἱ ἀκμαὶ ΑΕ, ΕΔ, ΖΚ καὶ ΚΙ, τούτων ὅμως αἱ προβολαὶ συμπίπτουσι μετὰ τῶν προβολῶν τῶν ὁρατῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τῶν ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ.



Σχ. 205

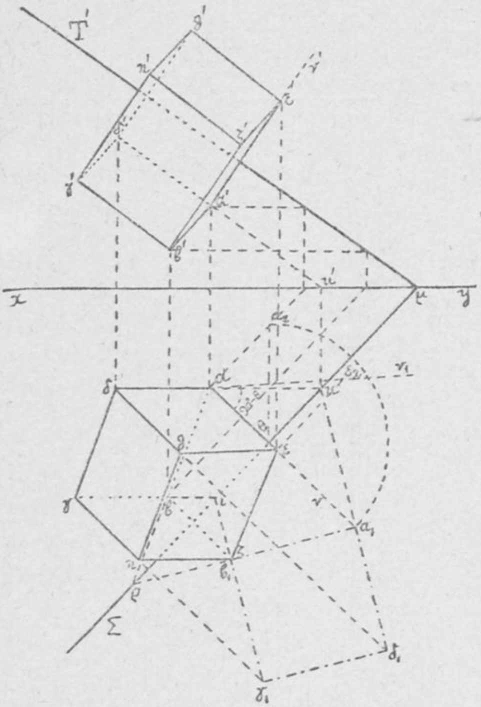
226. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ κύβου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣμΤ′*** (σχ. 206), ***γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α καὶ Β τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης ἕδρας ΑΒΓΔ κεῖνται ἐπὶ τῶν σημείων*** (*α*, *α′*) ***καὶ*** (*β*, *β′*) ***τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.***

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον ΣμΤ′ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου. Τὸ σημεῖον (*α*, *α′*) κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ $α_1$, ἡ δὲ ΑΒ, ὡς τέμνουσα τὸν ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως εἰς τὸ σημεῖον *ρ*, θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς $α_1 ρ$ καὶ ἑπομένως τὸ Β θὰ κατακλιθῇ εἰς τὸ σημεῖον $β_1$, ἔνθα τέμνει τὴν $α_1 ρ$ ἡ ἐκ τοῦ *β* κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Σ τῆς κατακλίσεως.

Ἔχοντες οὕτω τὴν κατάκλισιν $α_1 β_1$, τουτέστι τὸ ἀληθὲς μέγεθος, τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, κατασκευάζομεν τὴν κατάκλισιν $α_1 β_1 γ_1 δ_1$ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣμΤ′ κειμένης ἕδρας αὐτοῦ. Ἀνακλίνοντες εἶτα τὸ ἐπίπεδον, προσδιορίζομεν, τῇ βοηθείᾳ τῆς $δ_1 α_1$ τεμνούσης τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον *κ* καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀνακλινομένης ἐπὶ τῆς εὐθείας (*κα*, *κ′α′*), τὰς προβολὰς *αδ* καὶ *α′δ′* τῆς ἀκμῆς ΑΔ, ἄγοντες δὲ ἐκ τῶν σημείων *β* καὶ *δ* παραλλήλους πρὸς τὰς *αδ* καὶ *αβ* καὶ ἐκ τῶν *β′* καὶ *δ′* παραλλήλους πρὸς τὰς *α′δ′* καὶ *α′β′* ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ.

Ἵνα νῦν κατασκευάσωμεν καὶ τὰς λοιπὰς κορυφὰς τοῦ κύβου, φέρομεν ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ, οἷον τῆς (a,a') τὴν κάθετον $(av,a'v')$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣμΤ′ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι, τμῆμα ἴσον τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου.

Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ προβάλλον τὴν κάθετον ταύτην ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου (a,a'). Ἡ κάθετος τότε ΑΝ, ὡς σχηματίζουσα μετὰ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου γωνίαν συμπληρωματικὴν τῆς γωνίας κλίσεως θ τοῦ ἐπιπέδου ΣμΤ′, θὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τῆς av_1 σχηματιζούσης μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς αὐτῆς av γωνίαν$(90^0-\theta)$. Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τῆς av_1 τὸ τμῆμα $a\varepsilon_2$ ἴσον τῇ πλευρᾷ $a_1\beta_1$ τοῦ κύβου ἔχομεν τὴν κατάκλισιν ε_2 τῆς κορυφῆς Ε ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α.



Σχ. 206

Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἐκ τοῦ ε_2 ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν av, ὁ ποῦς ε τῆς καθέτου ταύτης θὰ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κορυφῆς Ε, ἐξ ἧς προσδιορίζεται καὶ ἡ δευτέρα ε' διὰ τῆς ἐκ τοῦ ε καθέτου ἐπὶ τὴν χψ.

Προσδιορισθείσης τῆς κορυφῆς $(\varepsilon, \varepsilon')$ προσδιορίζονται καὶ αἱ λοιπαί, ἐὰν ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων (β,β'), (γ, γ'), (δ,δ') τμήματα ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς τὴν ἀκμὴν $(a\varepsilon, a'\varepsilon')$.

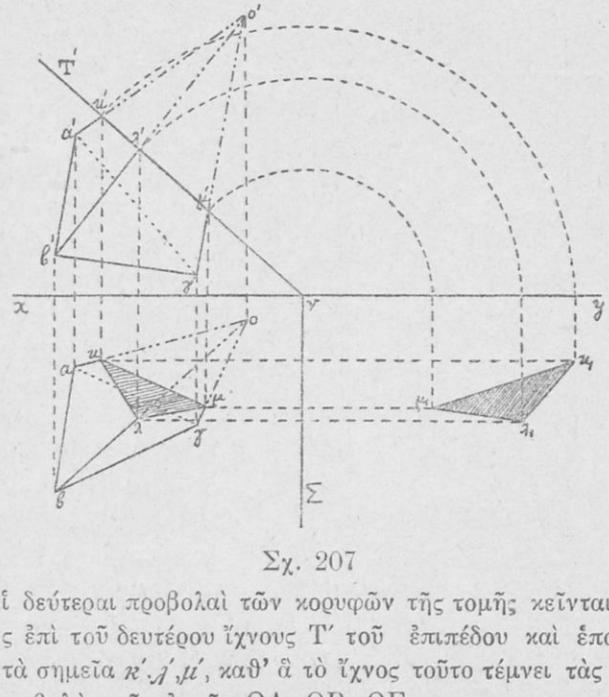
Οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ κύβου.

Γραμμογραφία. Ἐν πρώτῃ προβολῇ ἡ κορυφὴ Β δὲν εἶναι ὁρατή, ἑπομένως καὶ αἱ εἰς αὐτὴν καταλήγουσαι ἀκμαὶ ΒΑ, ΒΓ, ΒΖ δὲν εἶναι ὁραταί. Ἐν δευτέρᾳ δὲ προβολῇ δὲν εἶναι ὁρατὴ ἡ κορυφὴ Δ, ἑπομένως καὶ αἱ εἰς αὐτὴν καταλήγουσαι ἀκμαὶ ΑΔ, ΓΔ. ΘΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΟΜΑΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος*** (*σαβγ, σ′α′β′γ′*) ***ὑπὸ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος ἐπιπέδου ΣνΤ′*** (σχ. 207).



Σχ. 207

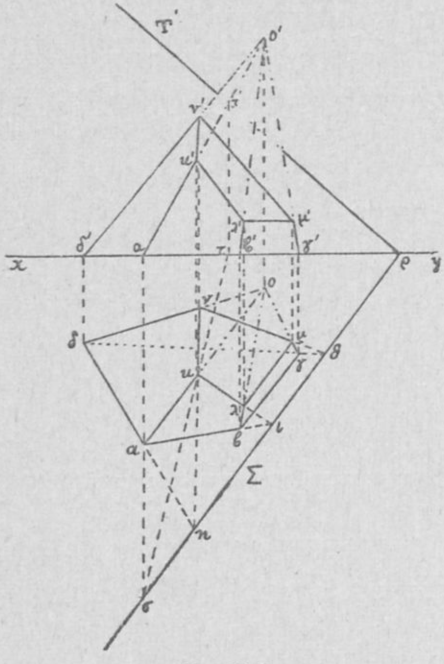
Αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν κορυφῶν τῆς τομῆς κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους Τ′ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἑπομένως εἶναι τὰ σημεῖα *κ′, λ′, μ′*, καθ' ἃ τὸ ἴχνος τοῦτο τέμνει τὰς δευτέρας προβολὰς τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ ,ΟΓ.

Ἐκ τῶν δευτέρων προβολῶν πορίζόμεθα καὶ τὰς πρώτας προβολὰς *κ, λ, μ* τῶν κορυφῶν τῆς τομῆς.

Ἡ ζητουμένη ἄρα τομὴ εἶναι ἡ ($κλμ$, $κ'λ'μ'$). Τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτῆς $κ_1 λ_1 μ_1$ εὑρίσκομεν κατακλίνοντες τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου (§ 204 Σημ.).

228.ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος ($οαβγδ, ο'α'β'γ'δ'$) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣρΤ' (σχ. 208).***

Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον ($κ,κ'$) τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ($οα,ο'α'$) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣρΤ' λαμβάνοντες ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ δεύτερον προβάλλον αὐτήν.



Σχ. 208

Θὰ ἠδυνάμεθα ὁμοίως νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς. Διὰ τὸ ἁπλούστερον ὅμως ἐφαρμόζομεν τὴν εἰδικὴν διὰ τὰς πυραμίδας μέθοδον (§119).

Οὕτω, πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΒ παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη καὶ ἡ ΟΑ ὁρίζουσιν τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ, ὅπερ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, τουτέστι τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, κατὰ τὴν $αβ$, τέμνουσαν τὸ ἴχνος Σ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $ι$. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ καὶ ΣρΤ', ὅπως εἶναι καὶ τὸ ($κ,κ'$)· Ἡ $ικ$ ἄρα εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν, τὸ δὲ σημεῖον $λ$, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν $οβ$ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου, ἐξ ἧς προσδιορίζεται καὶ ἡ δευτέρα $λ'$ διὰ τῆς ἐκ τοῦ $λ$ ἐπὶ τὴν $χψ$ ἠγμένης καθέτου.

῾Ομοίως σκεπτόμενοι προσδιορίζομεν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΔ. Πρακτικῶς, προεκτείνομεν τὴν *αδ* μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸ Σ καὶ ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον *π* τῆς τομῆς μετὰ τοῦ *κ*. ῾Η *πκ* τέμνει τὴν *οδ* εἰς τὸ *ν*. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς ΟΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣϱΤ′, ἐξ ἧς εὑρίσκεται καὶ ἡ δευτέρα *ν′*.

Προσδιορίζοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὸ σημεῖον (*μ,μ′*) τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΟΓ, ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς *κλμν* καὶ *κ′λ′μ′ν′* τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος.

229.ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος*** (*οαβγδ, ο′α′β′γ′δ′*) ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚξΛ′*** (*σχ.209*).

1ος τρόπος. Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν τομὴν τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚξΛ′.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα καθ᾿ ἃ τέμνουσι τὸ ἐπίπεδον ΚξΛ′ δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, οἷον ἡ (*αβ, α′β′*) καὶ ἡ ἐκ τοῦ (*β,β′*) διερχομένη πρώτη ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ *βι,β′ι′*).

῾Η πρώτη τούτων εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος ταύτην ἐπιπέδου *σσ′τ′*, ὅτι τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΚξΛ′ εἰς τὸ σημεῖον (*ϖ,ϖ′*), ἡ δὲ δευτέρα, ἐπίσης διὰ τοῦ δευτέρου προβάλλοντος αὐτὴν ἐπιπέδου *ι′υ′*, εἰς τὸ (*ρ,ρ′*). ῾Η κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΚξΛ′ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ἡ (*ϖρ, ϖ′ρ′*).

Μετὰ τοῦτο προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον (*ε,ε′*) τῆς τομῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν, οἷον τῆς ΟΑ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚξΛ′ λαμβάνοντες ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ δεύτερον προβάλλον αὐτὴν *λλ′ο′*. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν σημείων τομῆς τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἐφαρμόζομεν τὴν εἰδικὴν μέθοδον ἣν καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς ΟΔ προεκτείνομεν τὴν *δα* μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς (*ϖρ,ϖ′ρ′*) καὶ τὸ σημεῖον *μ* τῆς τομῆς ἑνοῦμεν μὲ τὸ *ε* διὰ τῆς εὐθείας *με*. Αὕτη τέμνει τὴν *οδ* εἰς τὸ σημεῖον *ϑ*, ὅπερ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου.

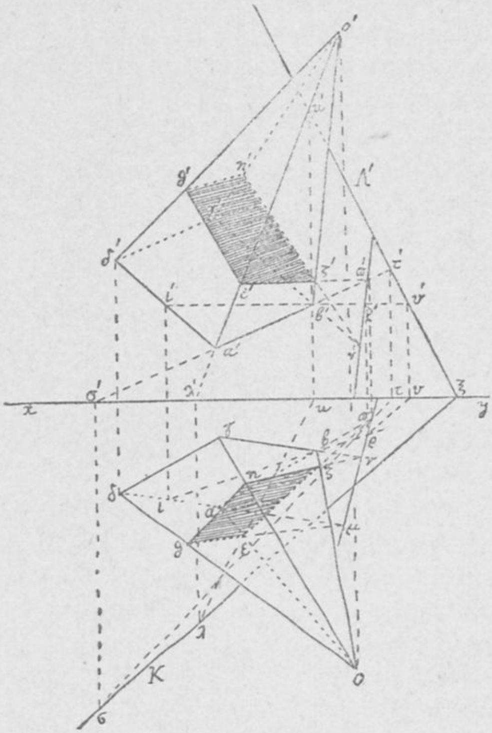
Καθ᾿ ὅμοιον τρόπον προσδιορίζομεν τὰς πρώτας προβολὰς *ζ* καὶ *η* τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν ΟΒ καὶ ΟΓ.

᾿Εκ τῶν πρώτων προβολῶν προσδιορίζομεν τὰς δευτέρας προβολὰς τῶν σημείων τῆς τομῆς κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς *εζηϑ* καὶ *ε′ζ′η′ϑ′* τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος.

2ος τρόπος. Τὴν τομὴν πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

Ἔστω ($οαβγδ$, $ο'α'β'γ'δ'$) ἡ πυραμὶς τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τομὴ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣξΤ′ (σχ. 210).

Φέρομεν ἐκ πασῶν τῶν κορυφῶν τῆς πυραμίδος εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος Τ′ τοῦ ἐπιπέδου. Αἱ εὐ-

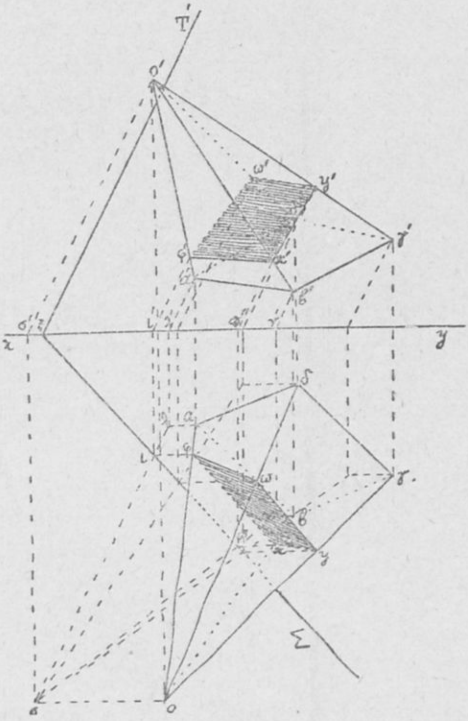


Σχ. 209

θεῖαι αὗται θὰ ἔχωσι τὰς δευτέρας προβολάς των παραλλήλους πρὸς τὸ ἴχνος Τ′ τὰς δὲ πρώτας παραλλήλους τῇ χψ.

Ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων ἡ ($οσ$, $ο'σ'$) καὶ ἡ ($αλ$, $α'λ'$) ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἴχνει Τ′ διερχόμενον διὰ τῆς ΟΑ καὶ ἔχον πρῶτον ἴχνος τὴν εὐθεῖαν $σλ$ τὴν ἑνοῦσαν τὰ πρῶτα ἴχνη αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ δευτέραν ἰχνοπαράλληλον ἔχουσαν πρῶτον ἴχνος τὸ ($ι$, $ι'$).

Ἡ ἰχνοπαράλληλος αὕτη καὶ ἡ πλευρὰ ΟΑ, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΛΣ, τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς σημεῖον Φ, ἔχον δευτέραν προβολὴν τὸ φ′ καὶ πρώτην προβολὴν τὸ φ, καθ' ὅ τέμνει τὴν ΟΑ ἡ ἐκ τοῦ φ′ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν χψ ἢ ἡ ἐκ τοῦ ι παράλληλος τῇ χψ.



Σχ. 210

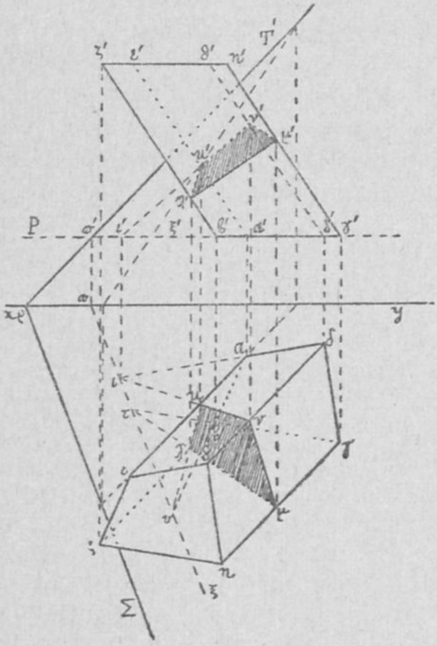
Ἐπίσης ἡ (οσ, ο′σ′) καὶ ἡ (βν, β′ν′) ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἴχνει Τ′, διερχόμενον διὰ τῆς ΟΒ καὶ ἔχον πρῶτον ἴχνος την εὐθεῖαν σν, τὴν ἑνοῦσαν τὰ πρῶτα ἴχνη αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ δευτέραν ἰχνοπαράλληλον ἔχουσαν πρῶτον ἴχνος τὸ (ω,ω′). Ἡ ἰχνοπαράλληλος αὕτη καὶ ἡ πλευρὰ ΟΒ, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΟΒΝΣ, τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς σημεῖον Χ, ἔχον δευτέραν προβολὴν τὸ χ′ καὶ πρώτην τὸ χ.

Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὰς τομὰς (ψ, ψ') καὶ (ω, ω') τῶν πλευρῶν ΟΓ καὶ ΟΔ.

Ἡ ζητουμένη ἄρα τομὴ τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ $(\varphi\chi\psi\omega, \varphi'\chi'\psi'\omega')$.

230. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος*** $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\theta, \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\theta')$ ***ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣρΤ'*** (σχ. 211).

Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ὅπερ τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ $(\omega\zeta, \omega'\zeta')$.



Σχ. 211

Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον (κ, κ') τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς $(\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon')$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣρΤ', τῇ βοηθείᾳ τοῦ πρώτου προβάλλοντος αὐτὴν ἐπιπέδου.

Μετὰ τοῦτο ἐφαρμόζοντες τὴν εἰδικὴν διὰ τὰ πρίσματα μέθοδον (§ 122), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΕΘΔ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ τὴν εὐθεῖαν $(\delta\alpha, \delta'\alpha')$ ἥτις τέμνει τὴν κοινὴν τομὴν $(\omega\zeta, \omega'\zeta')$ τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ ΣρΤ' εἰς τὸ σημεῖον (ι, ι').

Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν τῶν ἐπιπέδων ΣρΤ' καὶ ΑΕΘΔ, ὅπως εἶναι καὶ τὸ (κ, κ')· ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $(\kappa\iota, \kappa'\iota')$ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν. Αὕτη συναντᾷ τὴν πλευρὰν $(\delta\theta, \delta'\theta')$ εἰς τὸ σημεῖον (ν, ν'). Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΔΘ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣρΤ'.

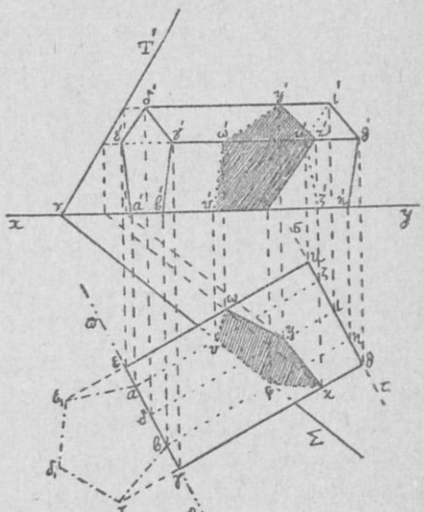
Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΒΖ. Πρακτικῶς, προεκτείνομεν τὴν $\alpha\beta$ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν $\omega\zeta$. Τὸ σημεῖον υ τῆς τομῆς ἑνοῦμεν μὲ τὸ κ διὰ τῆς εὐθείας $\upsilon\kappa$, ἥτις τέμνει τὴν $\beta\zeta$ εἰς τὸ λ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου, ἐκ ταύτης δὲ ποριζόμεθα καὶ τὴν δευτέραν λ κατὰ τὰ γνωστά.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τὸ σημεῖον (μ, μ') τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΓΗ.

Ἡ ζητουμένη ἄρα τομὴ εἶναι ἡ ($\kappa\lambda\mu\nu$, $\kappa'\lambda'\mu'\nu'$)

231.ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ κανονικοῦ πενταγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ, ἔχοντος τὴν ἕδραν ΑΒΗΖ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ' (σχ. 212).***

Ἐν πρώτοις προσδιορίζομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ πρίσματος, οὗ δίδεται ἡ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου κειμένη ἕδρα ($\alpha\beta\eta\zeta$, $\alpha'\beta'\eta'\zeta'$). Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ πρῶτον προβάλλον ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖται ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβολ. ἐπιπέδου καὶ κατασκευάζομεν τὴν κατάκλισιν αὐτῆς $\alpha\beta\gamma_1\delta_1\varepsilon_1$, ἥτις εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον πλευρᾶς $\alpha\beta$. Αἱ ἐκ τῶν σημείων γ_1, δ_1, ε_1, ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς κατακλίσεως $\omega\rho$ προσδιορίζουσι τὰς πρώτας προβολὰς τῶν κορυφῶν Γ,Δ,Ε, αἱ ἴδιαι δὲ προεκτεινόμεναι, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὸ ἴχνος $\sigma\tau$ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ πρίσματος, προσδιορίζουσι τὰς πρώτας προβολὰς τῶν κορυφῶν Θ,Ι,Κ.



Σχ. 212

Ἔχοντες τὰς πρώτας προβολὰς τῶν σημείων Γ,Δ,Ε, προσδιορίζομεν καὶ τὰς δευτέρας προβολάς των ἄγοντες ἐκ τῶν πρώτων προβολῶν καθέτους ἐπὶ τὴν χψ καὶ λαμβάνοντες ἐπὶ τούτων καὶ ἀπὸ τῆς χψ ἀρχόμενοι, τμήματα ἴσα πρὸς τὰς κατηγμένας $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ $\varepsilon\varepsilon_1$· Ὁμοίως προσδιορίζομεν καὶ τὰς δευτέρας προβολὰς τῶν σημείων Θ,Ι,Κ, οὕτω δὲ ἔχομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ πρίσματος

Καὶ ἤδη προβαίνομεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς τομῆς τοῦ πρίσματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣνΤ′· Τὰ σημεῖα (υ,υ') καὶ (φ,φ'), καθ' ἃ τὸ πρῶτον ἴχνος τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΖ καὶ ΒΗ, εἶναι προφανῶς δύο κορυφαὶ τῆς τομῆς.

Αἱ πλευραὶ ΓΘ καὶ ΕΚ, ὡς ἔχουσαι ἴσας κατηγμένας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΒΓΘΚ, ὅπερ τέμνει τὸ δοθὲν κατὰ πρώτην ἰχνοπαράλληλον τῆς ὁποίας ἡ πρώτη προβολὴ συναντᾷ τὰς πρώτας προβολὰς αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα χ καὶ ω. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν σημείων Χ καὶ Ω, καθ' ἃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τέμνει τὰς πλευρὰς ΓΘ καὶ ΕΚ, ἄγοντες δὲ ἐξ αὐτῶν καθέτους ἐπὶ τὴν χψ προσδιορίζομεν καὶ τὰς δευτέρας προβολάς των χ' καὶ ω'.

Προσδιορίζοντες ὁμοίως τὸ σημεῖον (ψ,ψ') τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΔΙ λαμβάνομεν τὰς δύο προβολὰς $\upsilon\varphi\chi\psi\omega$ καὶ $\upsilon'\varphi'\chi'\psi'\omega'$ τῆς τομῆς τοῦ πρίσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ′.

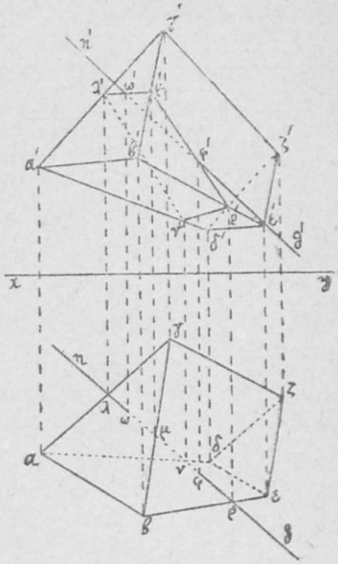
ΤΟΜΗ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΥΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

232. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— ***Νὰ προσδιορισθῶσι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ πολυέδρου*** $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')$ ***ὑπὸ τῆς εὐθείας*** $(\eta\vartheta,\ \eta'\vartheta')$ ***(σχ. 213)***.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου φέρομεν (§ 124) διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ἐπίπεδον καὶ κατασκευάζομεν τὴν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου σχηματιζομένην τομὴν τοῦ πολυέδρου, εἶτα δὲ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνει τὴν περίμετρον τῆς τομῆς.

Τὸ βοηθητικὸν ἐπίπεδον δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε. Ἐν γένει ὅμως λαμβάνεται τὸ ἕτερον τῶν προβαλλόντων τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδων.

Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν τὸ πρῶτον προβάλλον τὴν ΗΘ ἐπίπεδον καὶ ἃς προσδιορισθῶσι τὰ σημεῖα καθ' ἃ τέμνει τὰς ἀκμὰς ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΕ τοῦ πολυέδρου. Πρῶται προβολαὶ τῶν σημείων τούτων εἶναι ἀντιστοίχως αἱ λ, μ, ν, ρ (§ 173 α'), ἐξ ὧν προσδιορίζονται καὶ αἱ δεύτεραι λ', μ', ν', ρ'. Προβολαὶ ἄρα τῆς τομῆς τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν ΗΘ ἐπιπέδου εἶναι αἱ $\lambda\mu\nu\rho$ καὶ $\lambda'\mu'\nu'\rho'$.



Σχ. 213

Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ΗΘ τέμνει τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς τομῆς εἰς τὰ σημεῖα ω' καὶ φ'. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν σημείων, καθ' ἃ ἡ ΗΘ συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου. Αἱ πρῶται προβολαί των εὑρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα ω καὶ φ, καθ' ἃ καὶ ἐκ σημείων ω' καὶ φ' κάθετοι ἐπὶ τὴν χψ τέμνουσι τὴν $\eta\vartheta$.

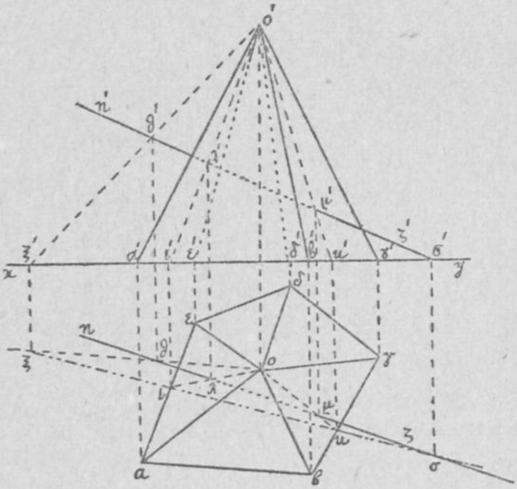
Τὰ ζητούμενα λοιπὸν σημεῖα εἶναι τὰ (ω, ω') καὶ (φ, φ').

233. *Εἰδικαὶ περιπτώσεις.* — Ὅταν τὸ πολύεδρον οὗ ζητεῖται ἡ τομὴ ὑπὸ εὐθείας εἶναι πυραμίς, λαμβάνομεν συνήθως ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος (§126). Προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ τὰ σημεῖα καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν μὲ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος. Αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς δοθείσης τέμνουσιν αὐτήν, τὰ δὲ σημεῖα τῆς τομῆς εἶναι τὰ ζητούμενα.

Ὅταν δὲ τὸ πολύεδρον εἶναι πρίσμα, λαμβάνομεν ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας διερχόμενον καὶ παράλληλον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος(§128). Προσδιορίζομεν τὴν κοινὴν τομὴν αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ ἐκ τῶν σημείων καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος. Αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς δοθείσης, τέμνουσιν αὐτήν, τὰ δὲ σημεῖα τῆς τομῆς εἶναι τὰ ζητούμενα.

234. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—***Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος*** $(o\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon, o'\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon')$ ***ὑπὸ τῆς εὐθείας*** $(\pi\zeta, \pi'\zeta')$ ***(σχ. 214).***

Ἑνοῦμεν τὴν κορυφὴν (o,o') μὲ τὸ τυχὸν σημεῖον (ϑ,ϑ') τῆς εὐθείας $(\pi\zeta, \pi'\zeta')$.



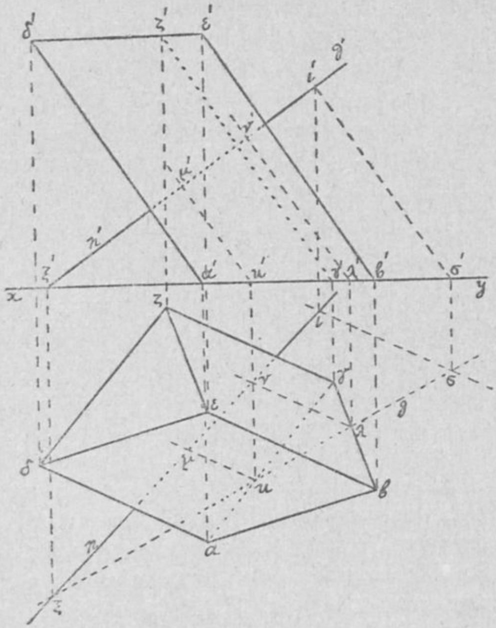
Σχ. 214

Ἡ εὐθεῖα $(o\vartheta, o'\vartheta')$ καὶ ἡ δοθεῖσα ὁρίζουσιν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, ὅπερ τέμνει τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖται ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, κατὰ τὴν εὐθεῖαν $(\zeta\sigma, \zeta'\sigma')$, ἥτις ἴχνος οὖσα τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζεται εὐκόλως, ἂν ἐπιζευχθῶσι δι' εὐθείας τὰ πρῶτα ἴχνη (σ,σ') καὶ $(\zeta.\zeta')$ τῶν ὁριζουσῶν τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον εὐθειῶν.

Ἡ εὐθεῖα $(\sigma\zeta, \sigma'\zeta')$ τέμνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἰς τὰ σημεῖα (ι,ι') καὶ (κ,κ'), αἱ δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα ἑνοῦσαι εὐθεῖαι μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος τέμνουν τὴν $(\pi\vartheta, \pi'\vartheta')$ εἰς τὰ σημεῖα (λ,λ') καὶ (μ,μ'), ἅτινα εἶναι τὰ ζητούμενα. Ἐκ τούτων τὸ μὲν πρῶτον κεῖται ἐν τῇ ἕδρᾳ ΟΑΕ, τὸ δὲ δεύτερον ἐν τῇ ΟΒΓ.

235. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—*Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα (πϑ,π'ϑ') τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ δεδομένου διὰ τῶν προβολῶν του (σχ. 215.)*

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου (ι,ι') τῆς δοθείσης εὐθείας φέρο-



Σχ. 215

μεν παράλληλον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος. Ἡ εὐθεῖα αὕτη (ισ, ι'σ') καὶ ἡ δοθεῖσα ὁρίζουσιν ἐπίπεδον παράλληλον ταῖς πλευραῖς τοῦ πρίσματος καὶ τέμνον τὸ πρῶτον προβολ. ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, κατὰ τὴν εὐθεῖαν (σξ,σ'ξ'), ἥτις ὡς πρῶτον ἴχνος τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζεται, ἐὰν ἐπιζευχθῶσι τὰ ἴχνη (σ,σ') καὶ (ξ,ξ') τῶν ὁριζουσῶν τὸ ἐπίπεδον εὐθειῶν. Ἡ εὐθεῖα (σξ, σ'ξ') συναντᾷ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως εἰς τὰ σημεῖα (λ,λ') καὶ (κ,κ'), αἱ δὲ ἐκ τῶν σημείων τούτων ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρίσματος τέμνουσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (πϑ, π'ϑ') εἰς τὰ σημεῖα (μ,μ') καὶ (ν,ν'), ἅτινα εἶναι τὰ ζητούμενα. Τὸ πρῶτον κεῖται ἐν τῇ ἕδρᾳ ΑΓΒΔ, τὸ δὲ δεύτερον ἐν τῇ ΒΓΖΕ.

'Ασκήσεις

1) Κανονικῆς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι ἑξάγωνον κείμενον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβ. ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν πλευρῶν παράλληλος οὖσα τῇ χψ ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν 2 μ.
Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς χψ καὶ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους καὶ νὰ παρασταθῇ τὸ μέρος τῆς παραμίδος, ὅπερ μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆςτομῆς περιεχομένου μέρουςαὐτῆς.

2)'Επὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ δεύτερον προβολ. ἐπίπεδον καὶ κλίνοντος πρὸς τὸ πρῶτον ὑπὸ γωνίαν 45° κατασκευάζομεντρίγωνον ΑΒΓ,οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ,ὁριζόντος οὖσα,ἔχει μῆκος 12 μ ἀπέχει δὲ 2 μ.ἀπὸ τοῦ πρώτουἴχνους τοῦ ἐπιπέδου.Αἱ πλευραὶΑΒ καὶΑΓ ἔχουσι μῆκος 15μ.ἑκάστη καὶ ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ὑπεράνωτῆςΑΒ.

Τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι βάσις πυραμίδος ἧς ἡ κορυφὴ Ο ἔχει κατηγμένην 25 μ.καὶ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΟΓ καὶ ΑΒ, καὶ νὰ παρασταθῇ μόνον τὸ μέρος τῆς πυραμίδος τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς.

3) 'Επὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ χψ, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν πρῶτον ἴχνος ἀπέχει ταύτης 8 μ. τὸ δὲ δεύτερον 5, νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ. οὗ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β ἔχουσιν ἀντιστοίχως κατηγμένας 4 μ καὶ 3 μ ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ μῆκος 5 μ.

Τὸ τετράγωνον τοῦτο εἶναι μία τῶν ἑδρῶν κύβου ὑπερκειμένου τοῦ ἐπιπέδου.

Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τοῦ κύβου τούτου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν ΑΕ,ΒΓ,ΘΗ,νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς τομῆς καὶ νὰ παρασταθῇ τὸ μέρος τοῦ κύβουτὸπεριεχόμενον μεταξὺ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδουκαὶ τῆς τομῆς·

4) Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετραγωνικὴ πυραμὶς οὕτως,ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

5) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὰς πλευρὰς δοθείσης τριγωνικῆς πυραμίδος ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

6) Νὰ κατασκευασθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχουσα βάσιν δοθεῖσαν ἐπὶ τοῦ πρώτου προβ. ἐπιπέδου καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τρισορθογώνιον.

7) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν κλίνουσαν πρὸς ἀμφότερα τὰ προβ. ἐπίπεδα, ἔχων κέντρον δοθὲν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ ἀκτῖνα δοθεῖσαν.

8) Πρίσμα ὀρθὸν τριγωνικὸν ΑΒΓΔΕΖ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ α΄. προβ. ἐπιπέδου μὲ τὴν ἕδραν του ΑΒΕΔ, ἧς ἡ πλευρὰ ΑΔ μήκους 4 μ. σχηματίζει μετὰ τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους γωνίαν 60^o, ἡ δὲ κορυφὴ Α ἀπέχει ταύτης 5 μ.

Ἡ βάσις ΑΒΓ τοῦ πρίσματος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον (ΑΒ)=3 μ. καὶ (ΑΓ)=(ΒΓ)=2 μ.

Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΑΔΒΓ καὶ ΒΕΖΓ εὑρίσκονται δύο ὀρθογ. παραλληλεπίπεδα ἔχοντα βάσεις τὰς ἕδρας ταύτας καὶ ὕψος 2,5 μ.

Τέλος ἡ κορυφὴ Β ἀπέχει τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους περισσότερον ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς τῆς ἕδρας ΑΒΕΔ.

Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ σχήματος τούτου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΗΡΙΘΜΗΜΕΝΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ